



Technische Universität Wien

Vienna University of Technology

**E302 Institut für Energietechnik und Thermodynamik**

E302 Institute for Energy Systems and Thermodynamics



**PRIMETALS**  
TECHNOLOGIES

Primetals Technologies Austria GmbH

Turmstraße 44, 4031 Linz, Austria

# Diplomarbeit

## Modellierung des instationären Wärmeverlusts von Schlackenpartikel im Freeboardbereich einer Trockenschlackengranulationstechnologie

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines

Diplom-Ingenieurs (Dipl.-Ing. oder DI)

eingereicht an der Technischen Universität Wien,  
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

unter Anleitung von

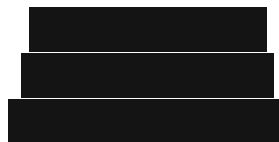
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Heimo Walter

und

Dipl.-Ing. Michael Hameter

von

Dominik Staltner



Wien, Oktober 2018

---

## Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre eidesstattlich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und alle aus ungedruckten Quellen, gedruckter Literatur oder aus dem Internet im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt übernommenen Formulierungen und Konzepte gemäß den Richtlinien wissenschaftlicher Arbeiten zitiert bzw. mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Weiters erkläre ich, dass ich dieses Diplomarbeitsthema bisher weder im In- noch Ausland (einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung) in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt habe und dass diese Arbeit mit der vom Begutachter beurteilten Arbeit übereinstimmt.

Wien, am 31.10.2018

  
\_\_\_\_\_

---

# Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mich in meinem akademischen Werdegang stets unterstützt haben.

Ganz besonders möchte ich meinem Diplomarbeitsbetreuer Herrn Dipl.-Ing. Michael Hameter danken, der meine Arbeit durch seine fachliche und persönliche Unterstützung begleitet hat. Auch an meinem Hauptbetreuer Herrn Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Heimo Walter möchte ich meinen Dank aussprechen. Er ließ mir bei der Erstellung des Berechnungsmodells weitgehend freie Hand und stand mir stets mit seinem Wissen und seiner Erfahrung zur Verfügung.

Weiters möchte ich mich bei der Fa. Primetals Technologies Austria GmbH bedanken, die mir diese praxisnahe Diplomarbeit ermöglicht hat. Besonders bei meinem Firmenbetreuer Herrn Dipl.-Ing. Thomas Fenzl, auf dessen Hilfe konnte ich jederzeit zurückgreifen.

## Kurzfassung

Das derzeit gängigste Verfahren zur Weiterbehandlung von flüssiger, bis zu 1500 °C heißer, Hochofenschlacke (HOS) ist die sogenannte Nassgranulation (NG). Hier wird durch abschrecken, der anfangs flüssigen HOS mit Wasser, ein glasiger Hüttensand erzeugt, der einen hohen Anteil an amorphen Strukturen aufweist und sich aufgrund seiner Reaktivität als Substitut von Zementklinker eignet. Nachteilig bei diesem Verfahren ist, dass dabei die großen Mengen an Energie in der HOS ungenutzt an die Umgebung verloren gehen.

Ein alternatives Verfahren zur Rückgewinnung dieser Energie aus der flüssigen HOS, bei gleichbleibenden Produkteigenschaften des aus der Schlacke erzeugten Hüttensands, ist die Trockenschlackengranulation (TSG). Derzeit ertestet die Fa. Primetals Technologies Austria GmbH eine Pilotanlage zur TSG in der Voest Alpine Stahl Linz (VASL).

Um unter veränderbaren Eingangsparametern (Anlagengeometrie, Schlackenmassenstrom, Luftvolumenstrom usw.) der Trockenschlackengranulationsanlage (TSGA) die Qualität des Hüttensands gewährleisten bzw. die aus der HOS rückgewinnbare Energie bestimmen zu können, muss das Abkühlverhalten der trocken granulierten Schlackenpartikel genauestens analysiert werden.

In dieser Arbeit sollen für den sogenannten Freeboard (FB) dieser Anlage mit dem Tabellenkalkulationsprogramm Microsoft (MS) Excel noch detailliertere wärmetechnische Rechenmodelle von einzelnen Schlackenpartikeln erstellt werden, als die bereits Vorhandenen der Fa. Primetals. Bei der Untersuchung der instationären Wärmeleitung der Schlackenpartikel sind sämtliche Wärmetransportvorgänge (Wärmeleitung, Wärmekonvektion und Wärmestrahlung) zu berücksichtigen.

---

# Abstract

The most common way to handle liquid blast furnace slag (BFS) up to 1500 °C is the so-called wet granulation (WG). By quenching the initially liquid BFS with water, a glassy slag sand is produced, which has a high proportion of amorphous structures and is due to its reactivity suitable as a substitute for cement clinker. The disadvantage of this method is that the large amounts of energy in the BFS were lost unused to the environment.

An alternative method for recovering this energy from the liquid BFS, while maintaining the product properties of the slag sand, is the dry slag granulation (DSG). Currently the company Primetals Technologies Austria GmbH is testing a pilot plant for the DSG in the Voest Alpine Stahl Linz (VASL).

In order to be able to guarantee the quality of the slag sand and to determine the recoverable energy from the BFS under changeable input parameters (plant geometry, slag mass flow, air volume flow etc.), the cooling behavior of the dry granulated slag particles must be precisely analyzed.

In this thesis, for the so-called Freeboard (FB) of this plant more detailed thermo-technical calculation models of individual slag particles have to be created under the usage of the spreadsheet software Microsoft (MS) Excel, as those which were already made by the company Primetals. When investigating the transient heat conduction of the slag particles, all heat transport processes (heat conduction, heat convection and heat radiation) must be taken into account.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstellung und Zielsetzung . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Stand der Technik</b>	<b>5</b>
2.1	Nassgranulation . . . . .	6
2.2	Trockenschlackengranulation . . . . .	8
2.3	Weitere Granulationsverfahren . . . . .	11
2.3.1	Liquid Droplet Heat Exchanger . . . . .	11
2.3.2	Muldenband nach Hulek . . . . .	12
2.3.3	Schlacke-Stahlkugel-Konzept von Paul Wurth . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>15</b>
3.1	Wärmeleitung . . . . .	15
3.1.1	Stationäre Wärmeleitung . . . . .	16
3.1.2	Instationäre Wärmeleitung - Wärmeleitungsgleichung . . . . .	16
3.2	Konvektion . . . . .	20
3.2.1	Dimensionslose Kennzahlen . . . . .	22
3.2.2	Empirische Gleichungen für den Wärme- und Stoffübergang . . . . .	26
3.3	Wärmestrahlung . . . . .	28
3.3.1	Sichtfaktoren . . . . .	29
3.3.2	Methode des umschlossenen Raumes . . . . .	33
3.4	Differenzenverfahren . . . . .	35
3.4.1	Differenzgleichung . . . . .	35
3.4.2	Diskretisierung der Anfangs- und Randbedingungen . . . . .	38
3.4.3	Stabilitätsbedingung . . . . .	43
<b>4</b>	<b>An- und Vorgaben</b>	<b>45</b>
4.1	Geometrie- und Eingabeparameter . . . . .	45
4.2	Hochofenschlacke . . . . .	47
4.2.1	Stoffwerte der Schlacke . . . . .	47
4.2.2	Korngrößenverteilung der Schlackenpartikel . . . . .	50
4.3	Stoffwerte der trockenen Luft . . . . .	52
4.4	Wassergekühlte Wand . . . . .	53

<b>5</b>	<b>Anwendung des Differenzenverfahrens</b>	<b>55</b>
5.1	Herleitung der expliziten Differenzgleichung . . . . .	55
5.2	Bedingungen für die „Phase 1“ . . . . .	59
5.3	Bedingungen für die „Phase 2“ . . . . .	63
5.4	Bedingungen für die „Phase 3“ . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Ermittlung der Sichtfaktoren</b>	<b>67</b>
6.1	Einzelnes Schlackenpartikel zu den Flächen des Granulators . . . . .	67
6.1.1	Sichtfaktor - Schlackenpartikel zur Fläche 2 . . . . .	68
6.1.2	Sichtfaktor - Schlackenpartikel zur Fläche 3 . . . . .	72
6.1.3	Sichtfaktor - Schlackenpartikel zur Fläche 4 . . . . .	75
6.1.4	Sichtfaktor - Schlackenpartikel zur Fläche 5 . . . . .	82
6.2	Lineare Interpolation der Sichtfaktoren . . . . .	82
6.2.1	Lineare Interpolation der Sichtfaktoren für die Abmessungen des Bereichs A . . . . .	84
6.2.2	Lineare Interpolation der Sichtfaktoren für die Abmessungen des Bereichs B . . . . .	87
6.3	Einzelne Flächen des Granulators zueinander . . . . .	88
6.4	Bestimmung der fiktiven Sichtfaktoren . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Aufstellung der Energiebilanzen</b>	<b>93</b>
7.1	Energiebilanzen einzelner Kontrollvolumen . . . . .	93
7.1.1	Energiebilanz über die WS der TSGA . . . . .	94
7.1.2	Energiebilanz über den FBZ der TSGA . . . . .	96
7.1.3	Energiebilanz über den FBK der TSGA . . . . .	97
7.2	Gesamtenergiebilanz der TSGA . . . . .	98
<b>8</b>	<b>Prozesstechnologische Analyse</b>	<b>100</b>
8.1	Lastfall - Basisfall . . . . .	101
8.2	Lastfall - Fall 1 . . . . .	105
8.3	Lastfall - Fall 2 . . . . .	109
8.4	Lastfall - Fall 3 . . . . .	113
8.5	Lastfall - Fall 4 . . . . .	117
8.6	Lastfall - Fall 5 . . . . .	121
<b>9</b>	<b>Diskussion und Ausblick</b>	<b>125</b>

<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>127</b>
<b>Anhang</b>	<b>129</b>
<b>A Stabilitätsbedingungen</b>	<b>129</b>
A.1 Bedingungen für „Phase 1“ und „Phase 3“	129
A.2 Bedingungen für „Phase 2“	132
<b>B Sichtfaktoren</b>	<b>134</b>
B.1 Faktoren Fläche 2 zu Flächen 2, 3, 4 und 5	134
B.1.1 Fläche 2 zur Fläche 2	134
B.1.2 Fläche 2 zur Fläche 3	134
B.1.3 Fläche 2 zur Fläche 4	134
B.1.4 Fläche 2 zur Fläche 5	135
B.2 Faktoren Fläche 3 zu Flächen 2, 3, 4 und 5	136
B.2.1 Fläche 3 zur Fläche 2	136
B.2.2 Fläche 3 zur Fläche 3	136
B.2.3 Fläche 3 zur Fläche 4	136
B.2.4 Fläche 3 zur Fläche 5	137
B.3 Faktoren Fläche 4 zu Flächen 2, 3, 4 und 5	137
B.3.1 Fläche 4 zur Fläche 2	137
B.3.2 Fläche 4 zur Fläche 3	138
B.3.3 Fläche 4 zur Fläche 4	138
B.3.4 Fläche 4 zur Fläche 5	139
B.4 Faktoren Fläche 5 zu Flächen 2, 3, 4 und 5	140
B.4.1 Fläche 5 zur Fläche 2	140
B.4.2 Fläche 5 zur Fläche 3	140
B.4.3 Fläche 5 zur Fläche 4	141
B.4.4 Fläche 5 zur Fläche 5	141

# Abbildungsverzeichnis

<b>Abb. 1.1:</b>	Allgemeine Abmessungen und Beschriftungen der TSGA . . . . .	4
<b>Abb. 2.1:</b>	Verwertung von HOS in Europa 2014 [7] . . . . .	5
<b>Abb. 2.2:</b>	Verwendung von HOS in Europa 2014 [7] . . . . .	6
<b>Abb. 2.3:</b>	Nassgranulation [11], [18], [16] . . . . .	7
<b>Abb. 2.4:</b>	Prinzipschema der TSG von HOS mittels Scheibenzerstäuber [5]	9
<b>Abb. 2.5:</b>	Rotationszerstäubung auf einer Drehscheibe [13] . . . . .	10
<b>Abb. 2.6:</b>	Trocken granulierte Schlacke . . . . .	10
<b>Abb. 2.7:</b>	Nass granulierte Schlacke [16] . . . . .	10
<b>Abb. 2.8:</b>	Schematischer Aufbau der Düse beim Liquid Droplet Heat Exchanger (LDHX) [17] . . . . .	12
<b>Abb. 2.9:</b>	Schematischer Aufbau des Muldenbandes [17] . . . . .	13
<b>Abb. 2.10:</b>	Technisches Konzept der Paul Wurth Anlage [17] . . . . .	14
<b>Abb. 3.1:</b>	Temperaturverlauf in zwei halbunendlichen Körpern mit den Anfangstemperaturen $\vartheta_{01}$ und $\vartheta_{02}$ bei Kontakt in $x = 0$ [1] . . . . .	19
<b>Abb. 3.2:</b>	Strömungsgrenzschicht an einer Wand [19] . . . . .	21
<b>Abb. 3.3:</b>	Temperaturgrenzschicht an einer Wand [19] . . . . .	21
<b>Abb. 3.4:</b>	Stromlinien laminarer Rohrströmung . . . . .	25
<b>Abb. 3.5:</b>	Stromlinien turbulenter Rohrströmung . . . . .	25
<b>Abb. 3.6:</b>	Überströmte Kugel [1] . . . . .	27
<b>Abb. 3.7:</b>	Querangeströmter Profilylinder [1] . . . . .	27
<b>Abb. 3.8:</b>	Geometrische Größen zur Berechnung des Sichtfaktors [1] . . . . .	30
<b>Abb. 3.9:</b>	Grafische Bestimmung des Sichtfaktors für ein Flächenelement [19]	32
<b>Abb. 3.10:</b>	Grafische Bestimmung des Sichtfaktors für eine Kugel . . . . .	32
<b>Abb. 3.11:</b>	Von isothermen Flächen (Zonen) begrenzter Hohlraum [1] . . . . .	34
<b>Abb. 3.12:</b>	Schematische Darstellung der Energiebilanz für die Zone $i$ mit der Fläche $A_i$ [1] . . . . .	34
<b>Abb. 3.13:</b>	Gitternetz zur Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung [1] . . . . .	36
<b>Abb. 3.14:</b>	Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am linken Rand in der Mitte zwischen zwei Gitterlinien . . . . .	38
<b>Abb. 3.15:</b>	Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am rechten Rand in der Mitte zwischen zwei Gitterlinien . . . . .	39
<b>Abb. 3.16:</b>	Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am linken Rand auf einer Gitterlinie . . . . .	40

<b>Abb. 3.17:</b> Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am rechten Rand auf einer Gitterlinie . . . . .	41
<b>Abb. 3.18:</b> Außerhalb des Körpers liegende Gitterlinien . . . . .	42
<b>Abb. 4.1:</b> Dichte von HOS . . . . .	48
<b>Abb. 4.2:</b> Spezifische Wärmekapazität von HOS . . . . .	49
<b>Abb. 4.3:</b> Wärmeleitfähigkeit von HOS . . . . .	49
<b>Abb. 4.4:</b> Emissionsgrad von HOS . . . . .	50
<b>Abb. 4.5:</b> Korngrößenverteilung der Schlackenpartikel . . . . .	51
<b>Abb. 5.1:</b> Modell zur Berechnung der Wärmeleitung des kugelförmigen Schlackenpartikels in „Phase 2“ . . . . .	56
<b>Abb. 5.2:</b> Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung des selbstadjungierten Differentialoperators für das kugelförmige Schlackenpartikel . . . . .	57
<b>Abb. 5.3:</b> Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am linken Rand für das kugelförmige Schlackenpartikel . . . . .	60
<b>Abb. 5.4:</b> Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am rechten Rand für das kugelförmige Schlackenpartikel . . . . .	62
<b>Abb. 5.5:</b> Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am rechten Rand für das kugelförmige Schlackenpartikel in „Phase 2“ . . . . .	64
<b>Abb. 5.6:</b> Temperaturverlauf beim Kontakt des kugelförmigen Schlackenpartikels mit der wassergekühlten Wand . . . . .	65
<b>Abb. 6.1:</b> Differentielles Flächenelement eines kugelförmigen Schlackenpartikels . . . . .	68
<b>Abb. 6.2:</b> Skizze zur Bestimmung der Sichtfaktoren . . . . .	69
<b>Abb. 6.3:</b> Skizze zur Ermittlung der geometrischen Größen für die Berechnung der Sichtfaktoren $\varphi_{12}$ und $\varphi_{13}$ . . . . .	71
<b>Abb. 6.4:</b> Kugeloberflächenelemente des Schlackenpartikels zur Fläche 2 . . . . .	72
<b>Abb. 6.5:</b> Skizze zur Ermittlung der geometrischen Größen für die Berechnung des Sichtfaktors $\varphi_{13}$ . . . . .	75
<b>Abb. 6.6:</b> Skizze zur Ermittlung der geometrischen Größen für die Berechnung der Sichtfaktoren $\varphi_{13}$ und $\varphi_{14}$ . . . . .	76
<b>Abb. 6.7:</b> Kugeloberflächenelemente des Schlackenpartikels zur Fläche 3 . . . . .	77
<b>Abb. 6.8:</b> Skizze zur Ermittlung der geometrischen Größen für die Berechnung des Sichtfaktors $\varphi_{14}$ . . . . .	79
<b>Abb. 6.9:</b> Skizze zur Ermittlung der geometrischen Größen für die Berechnung der Sichtfaktoren $\varphi_{14}$ und $\varphi_{15}$ . . . . .	80
<b>Abb. 6.10:</b> Kugeloberflächenelemente des Schlackenpartikels zur Fläche 4 . . . . .	81

<b>Abb. 6.11:</b>	Kugeloberflächenelemente des Schlackenpartikels zur Fläche 5 . . .	83
<b>Abb. 7.1:</b>	Kontrollvolumen der TSGA . . . . .	94
<b>Abb. 7.2:</b>	Energiebilanz über die WS der TSGA . . . . .	95
<b>Abb. 7.3:</b>	Energiebilanz über den FBZ der TSGA . . . . .	97
<b>Abb. 7.4:</b>	Energiebilanz über den FBK der TSGA . . . . .	98
<b>Abb. 7.5:</b>	Gesamtenergiebilanz der TSGA . . . . .	99
<b>Abb. 8.1:</b>	Pilotanlage zur TSG der Fa. Primetals . . . . .	101
<b>Abb. 8.2:</b>	Abkühlkurven Basisfall SPD 0,5 mm . . . . .	102
<b>Abb. 8.3:</b>	Abkühlkurven Basisfall SPD 1 mm . . . . .	103
<b>Abb. 8.4:</b>	Abkühlkurven Basisfall SPD 2 mm . . . . .	103
<b>Abb. 8.5:</b>	Abkühlkurven Basisfall SPD 4 mm . . . . .	104
<b>Abb. 8.6:</b>	Abkühlkurven Fall 1 SPD 0,5 mm . . . . .	106
<b>Abb. 8.7:</b>	Abkühlkurven Fall 1 SPD 1 mm . . . . .	106
<b>Abb. 8.8:</b>	Abkühlkurven Fall 1 SPD 2 mm . . . . .	107
<b>Abb. 8.9:</b>	Abkühlkurven Fall 1 SPD 4 mm . . . . .	107
<b>Abb. 8.10:</b>	Abkühlkurven Fall 2 SPD 0,5 mm . . . . .	109
<b>Abb. 8.11:</b>	Abkühlkurven Fall 2 SPD 1 mm . . . . .	110
<b>Abb. 8.12:</b>	Abkühlkurven Fall 2 SPD 2 mm . . . . .	110
<b>Abb. 8.13:</b>	Abkühlkurven Fall 2 SPD 4 mm . . . . .	111
<b>Abb. 8.14:</b>	Abkühlkurven Fall 3 SPD 0,5 mm . . . . .	113
<b>Abb. 8.15:</b>	Abkühlkurven Fall 3 SPD 1 mm . . . . .	114
<b>Abb. 8.16:</b>	Abkühlkurven Fall 3 SPD 2 mm . . . . .	114
<b>Abb. 8.17:</b>	Abkühlkurven Fall 3 SPD 4 mm . . . . .	115
<b>Abb. 8.18:</b>	Abkühlkurven Fall 4 SPD 0,5 mm . . . . .	117
<b>Abb. 8.19:</b>	Abkühlkurven Fall 4 SPD 1 mm . . . . .	118
<b>Abb. 8.20:</b>	Abkühlkurven Fall 4 SPD 2 mm . . . . .	118
<b>Abb. 8.21:</b>	Abkühlkurven Fall 4 SPD 4 mm . . . . .	119
<b>Abb. 8.22:</b>	Abkühlkurven Fall 5 SPD 0,5 mm . . . . .	121
<b>Abb. 8.23:</b>	Abkühlkurven Fall 5 SPD 1 mm . . . . .	122
<b>Abb. 8.24:</b>	Abkühlkurven Fall 5 SPD 2 mm . . . . .	122
<b>Abb. 8.25:</b>	Abkühlkurven Fall 5 SPD 4 mm . . . . .	123

## Tabellenverzeichnis

<b>Tab. 4.1:</b>	Abmessungen der Anlagengeometrie für den Bereich A . . . . .	45
<b>Tab. 4.2:</b>	Abmessungen der Anlagengeometrie für den Bereich B . . . . .	45
<b>Tab. 4.3:</b>	Allgemeine Abmessungen der Anlagengeometrie . . . . .	46
<b>Tab. 4.4:</b>	Eingabeparameter der Prozessgrößen . . . . .	46
<b>Tab. 4.5:</b>	Partikelgrößen . . . . .	51
<b>Tab. 4.6:</b>	Koeffizienten der Regressionspolynome für die Stoffwerte von trockener Luft . . . . .	53
<b>Tab. 4.7:</b>	Stoffwerte der Wand . . . . .	54
<b>Tab. 8.1:</b>	Lastfälle . . . . .	101
<b>Tab. 8.2:</b>	Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der Partikel - Basisfall . . . . .	102
<b>Tab. 8.3:</b>	Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel - Basisfall . . . . .	104
<b>Tab. 8.4:</b>	Temperaturen der Flächen - Basisfall . . . . .	104
<b>Tab. 8.5:</b>	Wärmebilanz - Basisfall . . . . .	105
<b>Tab. 8.6:</b>	Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der Partikel - Fall 1 . . . . .	105
<b>Tab. 8.7:</b>	Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel - Fall 1 . . . . .	108
<b>Tab. 8.8:</b>	Temperaturen der Flächen - Fall 1 . . . . .	108
<b>Tab. 8.9:</b>	Wärmebilanz - Fall 1 . . . . .	108
<b>Tab. 8.10:</b>	Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der Partikel - Fall 2 . . . . .	111
<b>Tab. 8.11:</b>	Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel - Fall 2 . . . . .	111
<b>Tab. 8.12:</b>	Temperaturen der Flächen - Fall 2 . . . . .	112
<b>Tab. 8.13:</b>	Wärmebilanz - Fall 2 . . . . .	112
<b>Tab. 8.14:</b>	Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der Partikel - Fall 3 . . . . .	113
<b>Tab. 8.15:</b>	Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel - Fall 3 . . . . .	115
<b>Tab. 8.16:</b>	Temperaturen der Flächen - Fall 3 . . . . .	115
<b>Tab. 8.17:</b>	Wärmebilanz - Fall 3 . . . . .	116
<b>Tab. 8.18:</b>	Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der Partikel - Fall 4 . . . . .	117
<b>Tab. 8.19:</b>	Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel - Fall 4 . . . . .	119
<b>Tab. 8.20:</b>	Temperaturen der Flächen - Fall 4 . . . . .	119
<b>Tab. 8.21:</b>	Wärmebilanz - Fall 4 . . . . .	120
<b>Tab. 8.22:</b>	Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der Partikel - Fall 5 . . . . .	121
<b>Tab. 8.23:</b>	Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel - Fall 5 . . . . .	123
<b>Tab. 8.24:</b>	Temperaturen der Flächen - Fall 5 . . . . .	123
<b>Tab. 8.25:</b>	Wärmebilanz - Fall 5 . . . . .	124

# Abkürzungsverzeichnis

<b>BFS</b>	blast furnace slag
<b>CFD</b>	Computational Fluid Dynamics
<b>CSIRO</b>	Commonwealth Scientific and Industrial Research Organisation
<b>DSG</b>	dry slag granulation
<b>FB</b>	Freeboard
<b>FBK</b>	konischer Freeboard
<b>FBZ</b>	zylindrischer Freeboard
<b>FEhS</b>	Institut für Baustoff-Forschung
<b>FTCS</b>	Forward in Time and Centered in Space
<b>HOS</b>	Hochofenschlacke
<b>KV</b>	Kontrollvolumen
<b>LDHX</b>	Liquid Droplet Heat Exchanger
<b>MS</b>	Microsoft
<b>NGA</b>	Nassgranulationsanlage
<b>NG</b>	Nassgranulation
<b>SA</b>	Société Anonyme
<b>SB</b>	Schlitzbleche
<b>SPD</b>	Schlackenpartikeldurchmesser
<b>TSG</b>	Trockenschlackengranulation
<b>TSGA</b>	Trockenschlackengranulationsanlage
<b>VASL</b>	Voest Alpine Stahl Linz
<b>WG</b>	wet granulation

**WRG** Wärmerückgewinnung

**WS** Wirbelschicht

# Symbolverzeichnis

## Lateinische Symbole

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$A_1$	Fläche 1	$\text{m}^2$
$A_2$	Fläche 2	$\text{m}^2$
$A_3$	Fläche 3	$\text{m}^2$
$A_4$	Fläche 4	$\text{m}^2$
$A_5$	Fläche 5	$\text{m}^2$
$A$	Fläche	$\text{m}^2$
$D$	Selbstadjungierter Differentialoperator	$\frac{\text{N}}{\text{s}}$
$E_B$	Bestrahlungsstärke	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
$E_M$	Energie der Masse M	J
$H$	Helligkeit	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
$K_\alpha$	Interpolationsfaktor für den Winkel der wassergekühlten Wand	-
$K_{h,A}$	Interpolationsfaktor der Höhe der wassergekühlten Wand für den Bereich A	-
$K_{h,B}$	Interpolationsfaktor der Höhe der wassergekühlten Wand für den Bereich B	-
$K_{r,A}$	Interpolationsfaktor des Anlagenradius für den Bereich A	-
$K_{r,B}$	Interpolationsfaktor des Anlagenradius für den Bereich B	-
$L$	Charakteristische Länge	m
$M_A$	Spezifische Ausstrahlung	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
$M$	Modul	-
$N$	Anzahl zusammenhängender Zonen eines Hohlraums	-

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$Q$	Wärme	J
$S$	Dimensionsloser Weg	-
$T_1$	Temperatur der Fläche 1	K
$T_2$	Temperatur der Fläche 2	K
$T_3$	Temperatur der Fläche 3	K
$T_4$	Temperatur der Fläche 4	K
$T_5$	Temperatur der Fläche 5	K
$T_B$	Bezugstemperatur	K
$T_0$	Anfangstemperatur	K
$T_{FB}$	Temperatur im Freeboard	K
$T_F$	Fluidtemperatur	K
$T_{L,aus}$	Temperatur der Luft beim Austritt	K
$T_{L,ein}$	Temperatur der Luft beim Eintritt	K
$T_{Ref}$	Referenztemperatur	K
$T_R$	Randtemperatur	K
$T_{S,0}$	Schlackenanfangstemperatur	K
$T_U$	Umgebungstemperatur	K
$T_{WS}$	Temperatur der Wirbelschicht	K
$T_W$	Wandtemperatur	K
$T_{i+1}^k$	Temperatur an der Stelle $x_{i+1}$ zur Zeit $t_k$	K
$T_{i-1}^k$	Temperatur an der Stelle $x_{i-1}$ zur Zeit $t_k$	K
$T_i^k$	Temperatur an der Stelle $x_i$ zur Zeit $t_k$	K
$T_i^{k+1}$	Temperatur an der Stelle $x_i$ zur Zeit $t_{k+1}$	K
$T_m$	Mittlere Kontakttemperatur	K
$T$	Temperatur	K
$V$	Volumen	m <sup>3</sup>
$W$	Arbeit	J
$\dot{Q}_{Str,1}$	Wärmestrahlung der Phase 1	W

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$\dot{Q}_{Str,2}$	Wärmestrahlung der Phase 2	W
$\dot{Q}_{Str,3}$	Wärmestrahlung der Phase 3	W
$\dot{Q}_{Str,FBK}$	Wärmestrahlung im kegeligen Teil des Freeboard	W
$\dot{Q}_{Str,FBZ}$	Wärmestrahlung im zylindrischen Teil des Freeboard	W
$\dot{Q}_{Str}$	Gesamte Wärmestrahlung	W
$\dot{Q}_W$	Wärmestrom an der Wand	W
$\dot{Q}$	Wärmestrom	W
$\dot{V}_{L,SB,N}$	Luftvolumenstrom durch Schlitzbleche bei Normbedingungen	$\frac{Nm^3}{s}$
$\dot{V}_{L,WS,N}$	Luftvolumenstrom durch die Wirbelschicht bei Normbedingungen	$\frac{Nm^3}{s}$
$\dot{V}_{L,ges,N}$	Gesamtluftvolumenstrom bei Normbedingungen	$\frac{Nm^3}{s}$
$\dot{V}_{L,ges}$	Gesamtluftvolumenstrom	$\frac{m^3}{s}$
$\dot{m}_{L,SB}$	Luftmassenstrom durch die Schlitzbleche	$\frac{kg}{s}$
$\dot{m}_{L,WS}$	Luftmassenstrom durch die Wirbelschicht	$\frac{kg}{s}$
$\dot{m}_{L,ges}$	Gesamtluftmassenstrom	$\frac{kg}{s}$
$\dot{m}_S$	Schlackenmassenstrom	$\frac{kg}{s}$
$\dot{q}_{Kon}$	Wärmestromdichte der Konvektion	$\frac{W}{m^2}$
$\dot{q}_{Lei}$	Wärmestromdichte der Leitung	$\frac{W}{m^2}$
$\dot{q}_R$	Wärmestromdichte am Rand	$\frac{W}{m^2}$
$\dot{q}_{SK}$	Wärmestromdichte eines schwarzen Körpers	$\frac{W}{m^2}$
$\dot{q}_{Str}$	Wärmestromdichte der Strahlung	$\frac{W}{m^2}$
$\dot{q}$	Wärmestromdichte	$\frac{W}{m^2}$
$\bar{h}_{S,3^*}$	Mittlere spezifische Enthalpie der Schlacke nach der Phase 3*	$\frac{J}{kg}$
$\bar{h}_{S,3}$	Mittlere spezifische Enthalpie der Schlacke nach der Phase 3	$\frac{J}{kg}$
$\bar{h}_S$	Durchschnittsenthalpie eines Schlackenpartikels	$\frac{J}{kg}$

Zeichen	Beschreibung	Einheit
<b>E</b>	Ergebnismatrix	$\frac{W}{m^2}$
<b>H</b>	Helligkeitsmatrix	$\frac{W}{m^2}$
<b>K</b>	Koeffizientenmatrix	-
$\tilde{M}$	Fiktiver Modul	$\frac{s \cdot K}{m \cdot J}$
$\vec{q}$	Wärmestromdichte-Vektor	$\frac{W}{m^2}$
$\vec{n}$	Normalenvektor	-
$a_P$	Länge des querangeströmten Profilzylinders	m
$a$	Temperaturleitfähigkeit	$\frac{m^2}{s}$
$b_P$	Breite des querangeströmten Profilzylinders	m
$b_S$	Wärmeeindringkoeffizient von Schlacke	$\frac{W \cdot s^{0,5}}{m^2 \cdot K}$
$b_W$	Wärmeeindringkoeffizient der Wand	$\frac{W \cdot s^{0,5}}{m^2 \cdot K}$
$b$	Wärmeeindringkoeffizient	$\frac{W \cdot s^{0,5}}{m^2 \cdot K}$
$c_W$	Spezifische Wärmekapazität der Wand	$\frac{J}{kg \cdot K}$
$c_{pL}$	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck von Luft	$\frac{J}{kg \cdot K}$
$c_{pS}$	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck von Schlacke	$\frac{J}{kg \cdot K}$
$c_p$	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck	$\frac{J}{kg \cdot K}$
$c$	Polynomkoeffizient des Regressionspolynoms	-
$d_1$	Schlackenpartikeldurchmesser	m
$d_{Dt,max}$	Maximaler Drehtellerdurchmesser	m
$d_{Dt,min}$	Minimaler Drehtellerdurchmesser	m
$d_{Dt}$	Drehtellerdurchmesser	m
$f$	Funktion	$\frac{m \cdot W}{K}$
$g$	Erdbeschleunigung	$\frac{m}{s^2}$
$h_3$	Höhe der Schlitzbleche	m
$h_{4,A,max}$	Maximale Höhe der wassergekühlten Wand für den Bereich A	m

<b>Zeichen</b>	<b>Beschreibung</b>	<b>Einheit</b>
$h_{4,A,min}$	Minimale Höhe der wassergekühlten Wand für den Bereich A	m
$h_{4,B,max}$	Maximale Höhe der wassergekühlten Wand für den Bereich B	m
$h_{4,B,min}$	Minimale Höhe der wassergekühlten Wand für den Bereich B	m
$h_4$	Höhe der wassergekühlten Wand	m
$h_{KRH}$	Kumulierte relative Häufigkeit	%
$h_{L,FB}$	Spezifische Enthalpie der Luft im Freeboard	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$
$h_{L,WS}$	Spezifische Enthalpie der Luft nach der Wirbelschicht	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$
$h_{L,aus}$	Spezifische Enthalpie der Luft am Austritt	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$
$h_{L,ein}$	Spezifische Enthalpie der Luft am Eintritt	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$
$h_{RH}$	Relative Häufigkeit	%
$h_{S,0}$	Spezifische Schlackenanfangsenthalpie	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$
$h_{S,WS}$	Spezifische Enthalpie der Schlacke nach der Wirbelschicht	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$
$h$	Spezifische Enthalpie	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$
$n_K$	Überlagerungskoeffizient für die gemischte Konvektion	-
$n_{Dt}$	Drehzahl des Drehtellers	$\frac{1}{\text{s}}$
$n$	Ortskoordinate in normaler-Richtung	m
$n$	Schalenanzahl	-
$p_{L,ges,WS}$	Prozentsatz des Gesamtluftvolumenstroms durch die Wirbelschicht	%
$p_U$	Umgebungsdruck	bar
$p$	Prozentsatz	%
$r_1$	Schlackenpartikelradius	m
$r_R$	Radius am Rand	m

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$r_{2,A,max}$	Maximaler Anlagenradius für den Bereich A	m
$r_{2,A,min}$	Minimaler Anlagenradius für den Bereich A	m
$r_{2,B,max}$	Maximaler Anlagenradius für den Bereich B	m
$r_{2,B,min}$	Minimaler Anlagenradius für den Bereich B	m
$r_2$	Anlagenradius	m
$r$	Ortskoordinate in radialer-Richtung	m
$r$	Radius	m
$s_A$	Abstand	m
$s_{ges}$	Gesamter zurückgelegter Weg	m
$s$	Zurückgelegter Weg	m
$t_1$	Zeit der Phase 1	s
$t_2$	Zeit der Phase 2 oder Kontaktzeit	s
$t_3$	Zeit der Phase 3	s
$t_k$	Zeitebene $t_k$	s
$t$	Zeit	s
$v_S$	Geschwindigkeit eines Schlackenpartikels	$\frac{m}{s}$
$w$	Charakteristische Strömungsgeschwindigkeit	$\frac{m}{s}$
$x_R$	Ortskoordinate des Randes in x-Richtung	m
$x_i$	Ortskoordinate in x-Richtung an der Stelle $x_i$	m
$x$	Ortskoordinate in x-Richtung	m
$y_R$	Ortskoordinate des Randes in y-Richtung	m
$y$	Ortskoordinate in y-Richtung	m
$z_R$	Ortskoordinate des Randes in z-Richtung	m
$z$	Ortskoordinate in z-Richtung	m

## Griechische Symbole

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$\Delta E$	Energieänderung	J
$\Delta r$	Maschenweite in r-Richtung	m
$\Delta t$	Maschenweite in t-Richtung	s
$\Delta x$	Maschenweite in x-Richtung	m
$\alpha_{4,max}$	Maximaler Winkel der wassergekühlten Wand	m
$\alpha_{4,min}$	Minimaler Winkel der wassergekühlten Wand	m
$\alpha_4$	Winkel der wassergekühlten Wand	m
$\alpha_{EK}$	Wärmeübergangskoeffizient der erzwungenen Konvektion	$\frac{W}{m^2 \cdot K}$
$\alpha_{FK}$	Wärmeübergangskoeffizient der freien Konvektion	$\frac{W}{m^2 \cdot K}$
$\alpha$	Wärmeübergangskoeffizient	$\frac{W}{m^2 \cdot K}$
$\beta_T$	Thermische Ausdehnungskoeffizient	$\frac{1}{K}$
$\beta$	Polarwinkel	°
$\delta_T$	Temperaturgrenzschicht	m
$\delta_w$	Strömungsgrenzschicht	m
$\delta$	Kronecker-Delta	-
$\epsilon_1$	Emissionsgrad der Fläche 1	-
$\epsilon_2$	Emissionsgrad der Fläche 2	-
$\epsilon_3$	Emissionsgrad der Fläche 3	-
$\epsilon_4$	Emissionsgrad der Fläche 4	-
$\epsilon_5$	Emissionsgrad der Fläche 5	-
$\epsilon_S$	Emissionsgrad von Schlacke	-
$\epsilon$	Emissionsgrad	-
$\eta_L$	Dynamische Viskosität von Luft	Pa · s
$\lambda_L$	Wärmeleitfähigkeit von Luft	$\frac{W}{m \cdot K}$
$\lambda_S$	Wärmeleitfähigkeit von Schlacke	$\frac{W}{m \cdot K}$
$\lambda_W$	Wärmeleitfähigkeit der Wand	$\frac{W}{m \cdot K}$

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	$\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$
$\nu$	Kinematische Viskosität	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
$\bar{\vartheta}_S$	Durchschnittstemperatur eines Schlackenpartikels	$^{\circ}\text{C}$
$\phi$	Azimutwinkel	$^{\circ}$
$\rho_{Ref}$	Reflexionsgrad	-
$\sigma$	Stefan-Boltzmann-Konstante	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}^4}$
$\theta$	Poldistanzwinkel	$^{\circ}$
$\tilde{\varphi}_1$	Fiktiver Sichtfaktor der Fläche 1	-
$\tilde{\varphi}_2$	Fiktiver Sichtfaktor der Fläche 2	-
$\tilde{\varphi}_3$	Fiktiver Sichtfaktor der Fläche 3	-
$\tilde{\varphi}_4$	Fiktiver Sichtfaktor der Fläche 4	-
$\tilde{\varphi}_5$	Fiktiver Sichtfaktor der Fläche 5	-
$\varphi_{12}$	Sichtfaktor der Fläche 1 auf die Fläche 2	-
$\varphi_{13}$	Sichtfaktor der Fläche 1 auf die Fläche 3	-
$\varphi_{14}$	Sichtfaktor der Fläche 1 auf die Fläche 4	-
$\varphi_{15}$	Sichtfaktor der Fläche 1 auf die Fläche 5	-
$\varphi_{21}$	Sichtfaktor der Fläche 2 auf die Fläche 1	-
$\varphi_{ij}$	Sichtfaktor der Zone i auf die Zone j	-
$\varphi_{ji}$	Sichtfaktor der Zone j auf die Zone i	-
$\varrho_L$	Dichte von Luft	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\varrho_S$	Dichte von Schlacke	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\varrho_W$	Dichte der Wand	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\varrho$	Dichte	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\vartheta_E$	Erweichungstemperatur	$^{\circ}\text{C}$
$\vartheta_F$	Fließtemperatur	$^{\circ}\text{C}$
$\vartheta_{L, \text{ein}}$	Luft Eintrittstemperatur	$^{\circ}\text{C}$
$\vartheta_{S,0}$	Schlacken anfangstemperatur	$^{\circ}\text{C}$
$\vartheta_S$	Schlackentemperatur	$^{\circ}\text{C}$

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$\vartheta$	Temperatur	$^{\circ}\text{C}$

## Mathematische Symbole

Zeichen	Beschreibung
$\vec{\nabla}^2$	Laplace-Operator
$\vec{\nabla}$	Nabla-Operator

## Tiefgestellte Indizes

Zeichen	Beschreibung
$i$	Zählindex
$j$	Zählindex

## Hochgestellte Indizes

Zeichen	Beschreibung
$k$	Zählindex

## Dimensionslose Kennzahlen

Zeichen	Beschreibung
$Ar$	Archimedes-Zahl
$Gr$	Grashof-Zahl
$Nu_m$	Mittlere Nusselt-Zahl
$Nu_{m,lam}$	Mittlere laminare Nusselt-Zahl
$Nu_{m,turb}$	Mittlere turbulente Nusselt-Zahl

<b>Zeichen</b>	<b>Beschreibung</b>
<i>Nu</i>	Nusselt-Zahl
<i>Pr</i>	Prandtl-Zahl
<i>Re</i>	Reynolds-Zahl

# 1 Einleitung

Flüssige bis zu 1500 °C heiße Hochofenschlacke (HOS) ist bis heute eines der größten ungenutzten Hochtemperatur-Energiepotentiale der Eisen- und Stahlindustrie. Das derzeit gängigste Verfahren zur Weiterbehandlung von flüssiger HOS ist die Nassgranulation (NG). Bei diesem Verfahren wird durch Abschrecken, der anfangs flüssigen HOS mit Wasser, ein glasiger Hüttensand erzeugt. Dieser besitzt einen hohen Anteil an amorphen Strukturen und ist aufgrund seiner Reaktivität als Substitut von Zementklinker geeignet. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist die ungenutzte Abgabe des hohen Energiepotentials von rund 1,8 Gigajoule pro Tonne HOS an die Umgebung, weil damit bloß Wasser auf niedrigem Temperaturniveau erwärmt bzw. verdampft wird [21].

Die NG hat folgende weitere Nachteile [21]:

- Offene Nassgranulationsanlagen (NGAs) belasten die Umwelt zusätzlich durch Abgabe von schwefelhaltigem Wasserdampf an die Umgebung.
- Sowohl bei offenen als auch geschlossenen NGAs weist die Förderung und Rückkühlung der großen Wassermengen einen hohen Energiebedarf auf.
- Damit Hüttensand für die Zementherstellung geeignet ist, muss dieser trotz vorheriger mechanischer Entwässerung noch zusätzlich mit hohem Energieaufwand auf einen Restfeuchtegehalt von 4 – 8 % getrocknet werden. Dieser Gehalt sollte nicht unterschritten werden, da Restfeuchte im Hüttensand für den späteren Mahlvorgang erwünscht ist.

Ein effizienterer Weg zur Granulation von flüssiger HOS wäre eine trockene Zerteilung in einzelne Partikel bei gleichzeitig schnellstmöglicher Abkühlung. Dadurch könnten der Wasser- und Energieeinsatz um ein vielfaches reduziert werden und zusätzlich bestünde die Möglichkeit die Abwärme aus dem Abkühlungsprozess durch eine nachgeschaltete Wärmerückgewinnung (WRG) zu nutzen. Die obligatorische Bedingung für die Einführung eines derartig neuen Verfahrens ist, dass die trocken granulierten HOS mindestens die gleiche Qualität aufweist wie die nass granulierten. Damit die Reaktivität und somit die Qualität des Hüttensands gewährleistet sind, muss dieser eine Reihe von Eigenschaften aufweisen. Als den wichtigsten Parameter kann der Mindestglasgehalt genannt werden [21].

Eine Methode zur trockenen Zerteilung von flüssiger HOS in einzelne Partikel ist das sogenannte „Rotating Cup“-Verfahren. Hier wird die flüssige Schlacke über eine Schlackenrinne direkt vom Hochofen auf einen schnell rotierenden Drehteller aufgebracht. Aufgrund der hohen Drehzahl des Drehtellers werden die flüssigen Schlackentropfen mit einem hohen tangentialen und einem geringen radialen Geschwindigkeitsanteil vom Tellerrand weggeschleudert. Die so erzeugten Tropfen müssen schnellstmöglich abkühlen, damit das so entstandene Granulat hüttensandähnliche Eigenschaften aufweist und als Zement-Substitut geeignet ist. Zur Abkühlung der Schlackenpartikel wird Luft verwendet, die sich wegen des Wärmeübergangs von Schlacke an Luft erwärmt. Die heiße Abluft ist für ein System zur WRG nutzbar und kann direkt für Vorwärm- oder Heizzwecke, aber auch zur Produktion von Prozessdampf und in späterer Folge von Strom verwendet werden [21].

Zusammenfassend hat das Verfahren der Trockenschlackengranulation (TSG) folgende wesentliche Vorteile [21]:

- Mittels TSG lassen sich ungenutzte Abwärmequellen von rund 1,8 Gigajoule pro Tonne HOS nutzbar machen.
- Bei gleichbleibender Produktqualität des trocken granulierten Hüttensands können die Schwefelwasserstoffemissionen vollständig eliminiert und der Kühlwasserbedarf auf ein Minimum reduziert werden.
- Die TSG stellt eines der größten Einsparungspotentiale an Kohlendioxidemissionen in der Eisen- und Stahlindustrie dar. Mit diesem Verfahren ist es möglich bis zu ca. 17 Millionen Tonnen an Kohlendioxidemissionen pro Jahr weltweit einzusparen.

## 1.1 Problemstellung und Zielsetzung

Die Fa. Primetals Technologies Austria GmbH ist derzeit in der Ertestung einer Pilotanlage zur TSG. Für den in Abb. 1.1 dargestellten Bereich des FB dieser Anlage sollen mit dem Tabellenkalkulationsprogramm MS Excel noch detailliertere wärmetechnische Rechenmodelle von einzelnen Schlackenpartikeln erstellt werden. Die

Untersuchung der instationären Wärmeleitung der Schlackenpartikel hat unter Berücksichtigung sämtlicher Wärmetransportvorgänge (Wärmeleitung, Wärmekonvektion und Wärmestrahlung) zu erfolgen.

Die Pilotanlage der Fa. Primetals arbeitet mit dem bereits erwähnten „Rotating Cup“-Verfahren. Dabei wird anfangs der Schlackenmassenstrom  $\dot{m}_S$  auf einen Drehteller mit Durchmesser  $d_{Dt}$  und Drehzahl  $n_{Dt}$  aufgebracht. Aufgrund der, durch die Rotation, entstehenden Kräfte zerteilt sich der Schlackenmassenstrom in kleine kugelförmige Tropfen, die vom Tellerrand in Richtung der wassergekühlten Granulatorwand geschleudert werden. Der Vorgang nach dem Verlassen des Tellerrands bis vor dem Aufprall der einzelnen Schlackenpartikel an der Wand wird als die „Phase 1“ des Granulationsprozesses bezeichnet und dauert die Zeit  $t_1$ . Wenn ein Partikel mit der Wand in Kontakt tritt verharret es dort und verlässt sie erst wieder nach der Zeit  $t_2$ . Dieser Kontakt mit der wassergekühlten Wand charakterisiert die „Phase 2“ der TSG. Nach dem das Schlackenpartikel die Wand wieder verlassen hat, fliegt es nach unten in Richtung der Wirbelschicht (WS). Der Flug nach dem Verlassen der Wand bis vor dem Eintritt in die WS dauert die Zeit  $t_3$  und wird als die „Phase 3“ der Granulation bezeichnet. Nach dem Abwärtsflug der Partikel treten diese in die Wirbelschicht ein und werden selbst ein Teil davon.

Zur Kühlung der einzelnen Schlackenpartikel werden gleichzeitig kontinuierlich Luftvolumenströme mit Umgebungsluft in den Freeboardbereich eingeblasen. Die Einblasung des Volumenstroms  $\dot{V}_{L,WS,N}$  erfolgt von unten durch die Wirbelschicht und die des Volumenstroms  $\dot{V}_{L,SB,N}$  seitlich durch die Schlitzbleche (SB). Im Freeboardbereich können sich die beiden Luftvolumenströme homogen vermischen. Diese Luft erwärmt sich aufgrund des Wärmeübergangs von Schlackenpartikel an Luft und tritt als heiße Abluft mit dem Gesamtluftvolumenstrom  $\dot{V}_{L,ges}$  oben aus dem Freeboardbereich aus. Eine weitere Kühlung der einzelnen Schlackenpartikel erfolgt beim Aufprall der Partikel an der wassergekühlten Wand. Hier wird ihnen zusätzlich Wärme entzogen bzw. der Wärmestrom  $\dot{Q}_W$  und an der Wand abgeführt. Das vollständige Verfahrensprinzip der TSG ist in Kap. 2.2 ausführlich erklärt.



## 2 Stand der Technik

Die HOS fällt als Nebenprodukt bei der Roheisengewinnung im Hochofenprozess an. Für die Gewinnung des Roheisens werden Erze mit einem Eisengehalt von mindestens 20% verwendet. Neben dem Eisenoxid bestehen Erze noch aus anderen Mineralien, z. B. tonigem Gestein, die als Gangart bezeichnet werden. Damit sich die Gangart vom Eisen trennen lässt, müssen im Hochofenprozess mehrere Zuschlagstoffe hinzugefügt werden. Einer der Hauptzuschlagstoffe ist Kalkstein ( $\text{CaCO}_3$ ), dieser gibt bei den hohen Temperaturen im Hochofen  $\text{CO}_2$  ab und wird zu Kalk ( $\text{CaO}$ ) gebrannt. Dieser Kalk reagiert mit den Tonbestandteilen Kieselsäure ( $\text{SiO}_2$ ) und Aluminiumoxid ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) unter Bildung von Calciumsilikat und Calciumaluminat in ähnlicher Weise wie es bei der Zementherstellung der Fall ist [10]. Die Schlacken sammeln sich aufgrund einer geringeren Dichte als die des Eisens über dem geschmolzenen Eisen an, und werden von dort abgestochen [4]. Die Abstichtemperatur der HOS beträgt in etwa  $1500^\circ\text{C}$  bei einem Wärmehalt von ungefähr 1,8 Gigajoule pro Tonne Schlacke [21].

In Abb. 2.1 sind die beiden gängigsten Verwertungswege in der EU von HOS ersichtlich. Ungefähr dreiviertel der entstandenen HOS wird zu Hüttensand und der Rest zu Hochofenstückschlacke weiterverarbeitet [7].

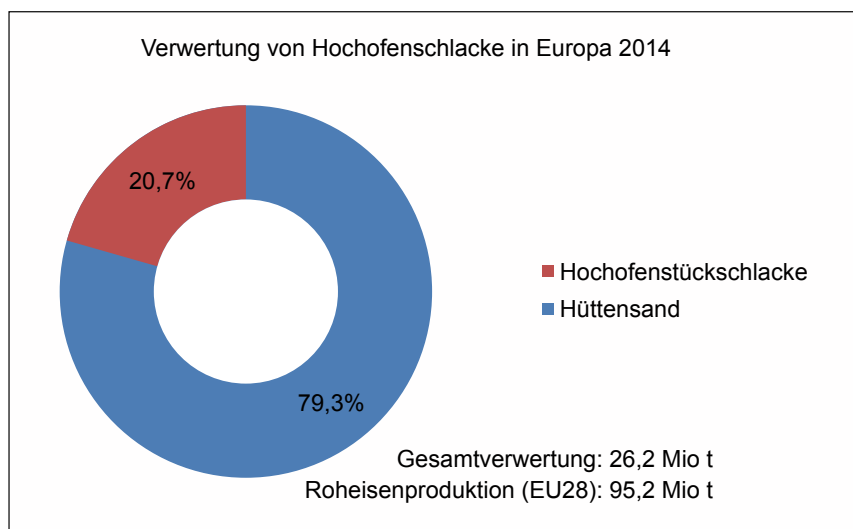


Abb. 2.1: Verwertung von HOS in Europa 2014 [7]

Die Abb. 2.2 zeigt die derzeit gängigsten Verwendungswege in der EU dieses Nebenprodukts. Herkömmlicherweise wird HOS als Konstruktionsmaterial für den Straßenbau,

als künstliche Gesteinskörnung für die Betonindustrie und als Zementklinkersubstitut in der Zementindustrie verwendet [7].

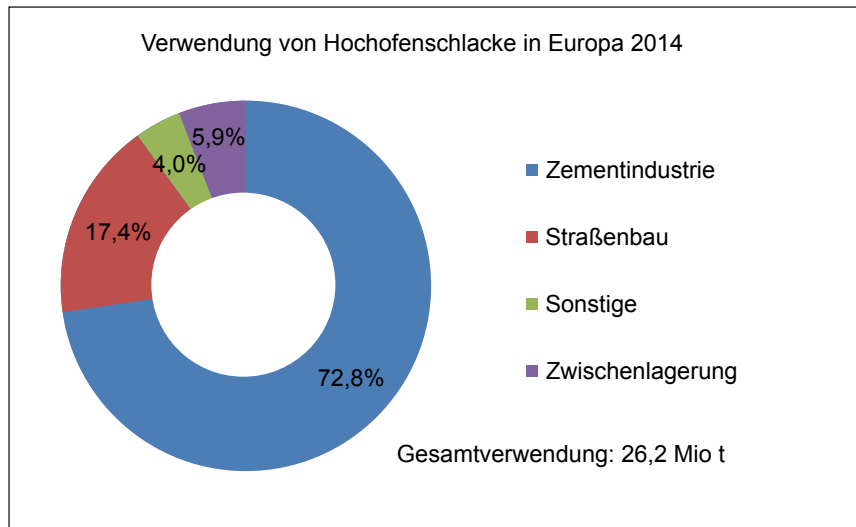


Abb. 2.2: Verwendung von HOS in Europa 2014 [7]

Nach dem Abstich der flüssigen HOS gibt es mehrere Möglichkeiten diesen Rohstoff weiterzubehandeln. Die zwei gängigsten Wege der Weiterverarbeitung von Schlacke sind zu Hochofenstückschlacke oder Hüttensand. Wenn die Schlacke in offene Beete geleitet wird und dort langsam in Kontakt mit der Umgebungsluft abkühlt, bildet sich kristalline Hochofenstückschlacke. Nach der vollständigen Abkühlung wird durch brechen aus der Stückschlacke eine Gesteinskörnung erzeugt, die als Substitut von natürlichem Gestein für Straßenbauarbeiten verwendet werden kann. Für den Fall, dass die flüssige HOS in NGAs mit großen Mengen an Wasser schnell abgekühlt wird, entsteht der sogenannte Hüttensand. Dieser ist ein glasiges, amorphes Granulat, das latent-hydraulische Eigenschaften besitzt und als Sekundärrohstoff in der Zementindustrie zum Einsatz kommt. Zu diesem Zweck wird der glasige Hüttensand einzeln oder zusammen mit Portlandzementklinker und Calciumsulfat aufgemahlen [6].

## 2.1 Nassgranulation

Wie bereits in Abb. 2.1 beschrieben, erfolgt die Behandlung der flüssigen HOS großteils in NGAs mit Wasser. In der folgenden Abb. 2.3 ist eine schematische Darstellung des Verfahrens der NG ersichtlich. Der direkt vom Hochofen kommende Schlackenfluss an

flüssiger HOS wird unmittelbar mit mehreren Wasserstrahlen gekühlt. Dabei entstehen aus dem einheitlichen Schlackenfluss mehrere Lamellen, die sich bei weiterer Wasserkühlung erst zu Fäden bilden und sich dann hin zu Tropfen entwickeln. Anschließend werden diese nassen Tropfen aus HOS entwässert und das gesammelte Wasser wird wieder dem Kreislaufwasser für die Kühlung des Schlackenflusses zugeführt. Die nun trockenen Schlackentropfen werden entweder gelagert oder gleich für den Transport als Hüttensand an die Zementindustrie freigegeben.

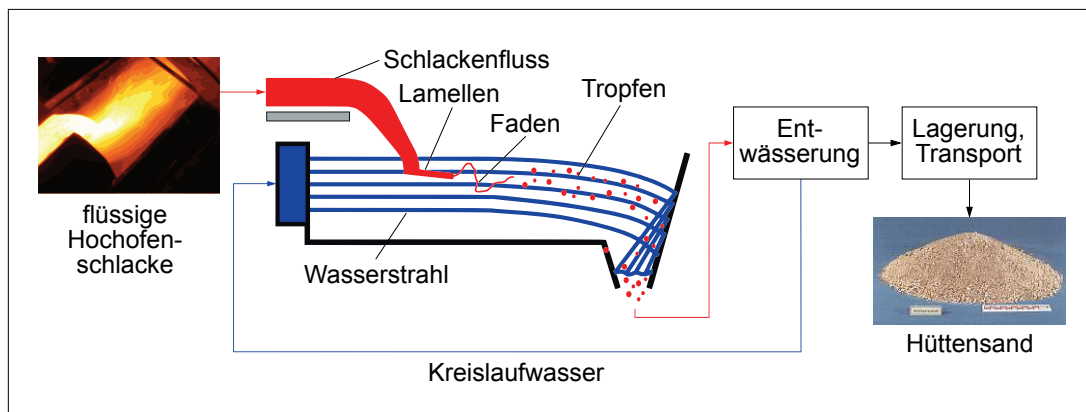


Abb. 2.3: Nassgranulation [11], [18], [16]

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass Wasser den Schlackenmassenstrom sehr schnell abkühlt und aus der zuvor noch flüssigen HOS ein glasiges Produkt entsteht. Dieses abgeschreckte Material wird als Hüttensand bezeichnet, besitzt latent-hydraulische Eigenschaften und wird als Zementklinkersubstitut eingesetzt. Der Nassgranulationsprozess ist robust gegenüber schwankenden Prozessbedingungen und variierenden Schlackeneigenschaften. Für die Granulation wird eine Wassermenge von ungefähr 5 Kubikmeter pro Tonne Schlacke verbraucht [17].

Leider besitzt dieses Verfahren ein paar gravierende Nachteile, die im Folgenden aufgelistet werden [13]:

- Trotz mechanischer Entwässerung verbleibt im Hüttensand eine Restfeuchte von etwa 10 – 12 %. Zur Weiterverwendung in der Zementindustrie ist dieses Produkt zu nass und somit ungeeignet. Damit der Hüttensand als Zementklinkersubstitut nutzbar ist, muss dieser noch mit hohem Energieaufwand auf einen Restfeuchtegehalt von ca. 4 – 8 % getrocknet werden.

- Bei der Granulation von flüssiger HOS in offenen Wasserkreisläufen, kann umweltbelastender schwefelhaltiger Wasserdampf aus dem System entweichen. Zusätzlich haben diese Anlagen den Nachteil, dass permanent eine große Menge an Frischwasser (ca. 1 Kubikmeter pro Tonne Schlacke) zugeführt werden muss. Hingegen bei Granulieranlagen mit geschlossenen Wasserkreisläufen können die Emissionen von schwefelhaltigem Wasserdampf vermieden werden und das zur Granulation benötigte Wasser verbleibt im System.
- Wenn flüssige HOS mit Wasser abgeschreckt wird, geht das hohe Energiepotential der Schlacke für die Erhitzung und Verdampfung des Wassers an die Umgebung verloren.
- Das zur Granulierung verwendete Kreislaufwasser muss in Kühltürmen oder mit anderen Methoden wieder abgekühlt werden. Dafür sind hohe Energieaufwände für die Pump- bzw. Gebläseleistung nötig.

## 2.2 Trockenschlackengranulation

Aufgrund der zuvor erwähnten Nachteile der NG von flüssiger HOS gilt es ein neues Verfahren zur Schlackenbehandlung zu entwickeln. Damit soll der hohe Wasser- und Energieaufwand reduziert, die Qualität des Hüttensands als Sekundärrohstoff für die Zementindustrie beibehalten und zusätzlich die Rückgewinnung der thermischen Schlackenenergie ermöglicht werden [5].

Erste Versuche in Redcar (GB) und Vitkovice (CZ) haben gezeigt, dass mittels einer trockenen Zerteilung, flüssige HOS schnell genug abgekühlt werden kann, um als Substitut für die Zementindustrie geeignet zu sein. Jedoch wurde bei diesen Versuchen kein System zur WRG mitberücksichtigt [5].

Die trockene Granulation und Abkühlung mit Luft basiert auf dem in Abb. 2.4 ersichtlichen Verfahrensprinzip der Rotationszerstäubung von Flüssigkeiten mit einer Drehscheibe. Über eine Rinne wird die Schlacke direkt vom Hochofen in die TSGA gefördert. Dort trifft die flüssige HOS mittig auf eine drehzahlgeregelte Scheibe und wird aufgrund der radialen und tangentialen Beschleunigung am Drehteller in kleine Tropfen zerteilt. Die so erzeugten Schlackenpartikel werden in Richtung Granulatorwand geschleudert, wo sie an einer wassergekühlten Wand abprallen und

am Granulatorboden ein bewegtes Granulatbett ausbilden. Zeitgleich wird von unten Luft durch das Granulatbett in die Anlage eingeblasen, damit die Wärmeübertragung von den Partikeln an die Luft erfolgen kann. Dabei sollen die Partikel schnellstmöglich unter die Transformationstemperatur gebracht werden. Danach erfolgt die Austragung des abgekühlten Granulats durch einen Trichter nach unten und die heiße Prozessluft wird durch die Granulatorhaube zu einem System für eine WRG weitergeleitet [5].

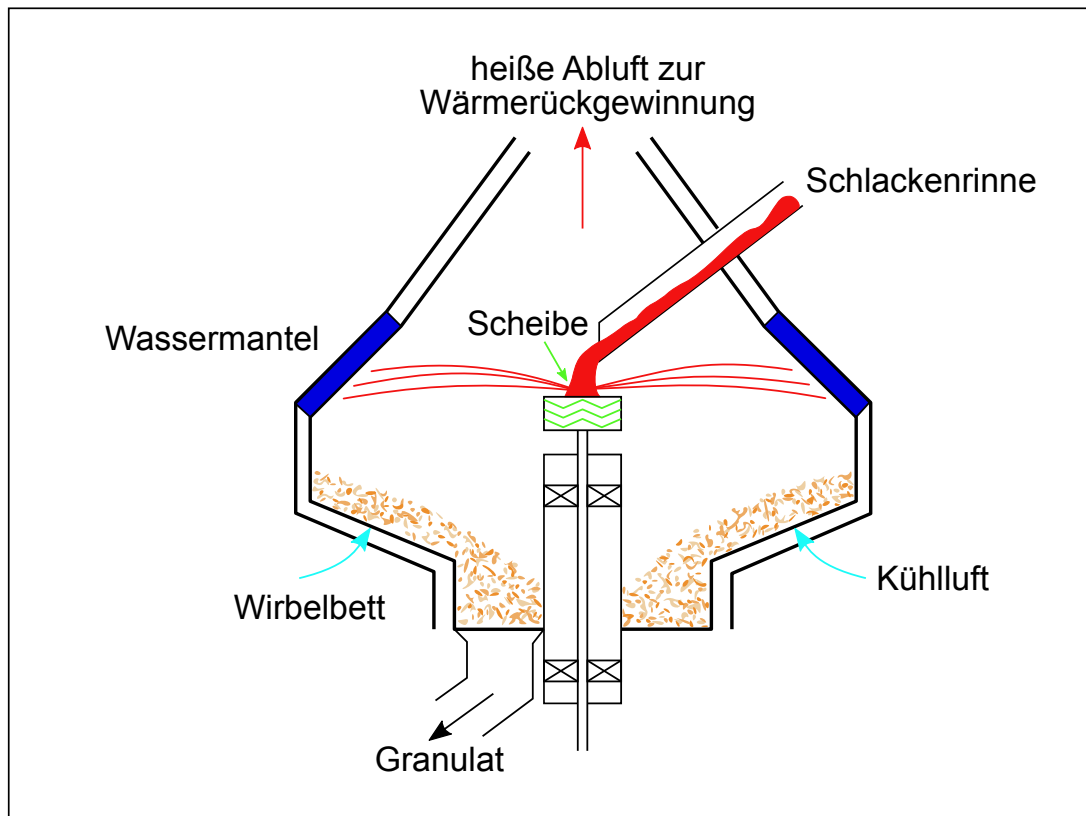


Abb. 2.4: Prinzipschema der TSG von HOS mittels Scheibenzerstäuber [5]

Abb. 2.5 zeigt den Prozess der Rotationszerstäubung auf einer Drehscheibe. Zu Beginn des Vorgangs trifft der flüssige Schlackenmassenstrom von oben mittig auf eine rotierende Scheibe. Aufgrund der dort wirkenden Kräfte wird der Massenstrom in kleine Schlackenpartikel zerteilt, die vom Rand der Scheibe in Richtung der wassergekühlten Wand geschleudert werden. Die Drehzahl der Scheibe hat u. a. Einfluss auf die Geschwindigkeit und das Abkühlverhalten der Schlackenpartikel. Die in Abb. 2.6 dargestellte trocken granulierten HOS von der Pilotanlage der Fa. Primetals ist kugelförmig, hat eine glatte Oberfläche und eine helle, sandähnliche Farbe. Die nass

granulierte HOS aus Abb. 2.7 ist hingegen scharfkantig, hat aber genauso eine helle, sandähnliche Farbe.



Abb. 2.5: Rotationszerstäubung auf einer Drehscheibe [13]



Abb. 2.6: Trocken granulierte Schlacke

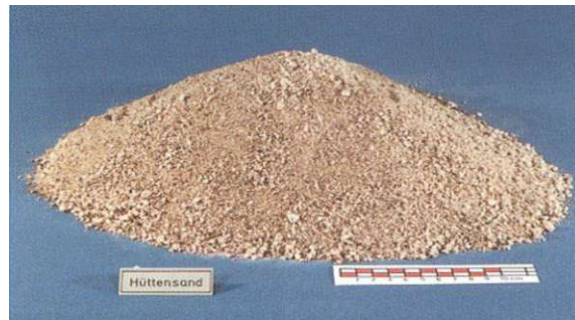


Abb. 2.7: Nass granulierte Schlacke [16]

Wird eine Produktionsrate von ungefähr 400 Millionen Tonnen HOS pro Jahr herangezogen, lassen sich durch TSG mit WRG folgende Potentiale im Vergleich zur herkömmlichen NG ableiten [22]:

- WRG von bis zu 284 Petajoule an thermischer Energie pro Jahr.
- Jährliche Einsparung von etwa 100 Petajoule an Trocknungsenergie.
- Reduzierung des Wasserverbrauchs um bis zu 95 %.
- Reduktion des Kohlendioxid-Ausstoßes von ca. 17 Millionen Tonnen pro Jahr.

## 2.3 Weitere Granulationsverfahren

Die beiden wichtigsten Verfahren zur Verarbeitung von HOS wurden bereits ausführlich erläutert. Im Folgenden werden noch weitere vielversprechende und einfallsreiche Möglichkeiten zur Wiederverwertung von HOS vorgestellt, die aber für eine großtechnische Umsetzung noch nicht relevant sind.

### 2.3.1 Liquid Droplet Heat Exchanger

Der Liquid Droplet Heat Exchanger (LDHX) (deutsch: Wärmetauscher für flüssige Tropfen) ist ein Forschungsprojekt der Commonwealth Scientific and Industrial Research Organisation (CSIRO). Beim LDHX werden oxidische Schlackenschmelzen zu Tropfen verdüst und die Wärmeenergie der Tropfen durch ein Wärmeträgermedium entzogen. An einem ausgereiften System zur WRG wird derzeit noch geforscht [17].

In der Schmelzkammer der Versuchsanlage werden Kalziumoxide und Aluminiumoxide zu gleichen Teilen und der Gesamtmasse von 500 Gramm zu einer synthetischen Schlacke vermischt. Diese wird auf 1700 °C erhitzt und unter Inertgasatmosphäre erschmolzen [17].

In Abb. 2.8 ist der schematische Aufbau einer Graphitdüse für den LDHX dargestellt. Ein Teil der Einheit besteht aus dem Graphittiegel mit dem Tiegelboden und der Düse. Hier befindet sich die so erzeugte Schlackenschmelze, welche nach oben hin vom Inertgas Argon abgegrenzt wird. Den anderen Teil der Einheit stellt ein Graphitstopfen mit einem Thermolement dar, welcher die flüssige Schlacke mit einem Druck von etwa 2 bar durch die Düse drückt. Es entsteht ein flüssiger, laminarer Schlackenstrahl, dessen Tropfen im Anschluss glasig erstarren und ihre Wärme an ein Trägermedium abgeben können. Durch das Verdüsen der schmelzflüssigen Schlacke zerfällt der noch etwa 1660 °C heiße Schlackenstrahl durch Kapillarkräfte zu feinen Tropfen mit möglichst homogenem Kornband. Pneumatisches Klopfen mit Frequenzen bis zu 200 Hertz kann hinsichtlich des Kornbands der Tropfen und den Abständen des Lösens der Tropfen eine Reduzierung der Schlackenstrahllänge um bis zu 40 % bewirken. Die Korngrößenverteilung der erzeugten Tropfen ist mit einer durchschnittlichen Größe von 2,3 Millimeter und einer Streuung von 1 Millimeter äußerst gering. Der realisierbare Schlackenmassenstrom beim Demonstrator liegt bei etwa 10 Gramm pro Sekunde bzw. 36 Kilogramm pro Stunde [17].

Durch den Ansatz der präzisen Einstellung eines amorphen Kornbandes der produzierten amorphen Schlacke ist der LDHX ein vielversprechendes Verfahren. Aufgrund der frühen Entwicklungsphase ist eine WRG noch nicht realisiert bzw. eine zeitnahe Umsetzung im Industriemaßstab noch nicht absehbar [17].

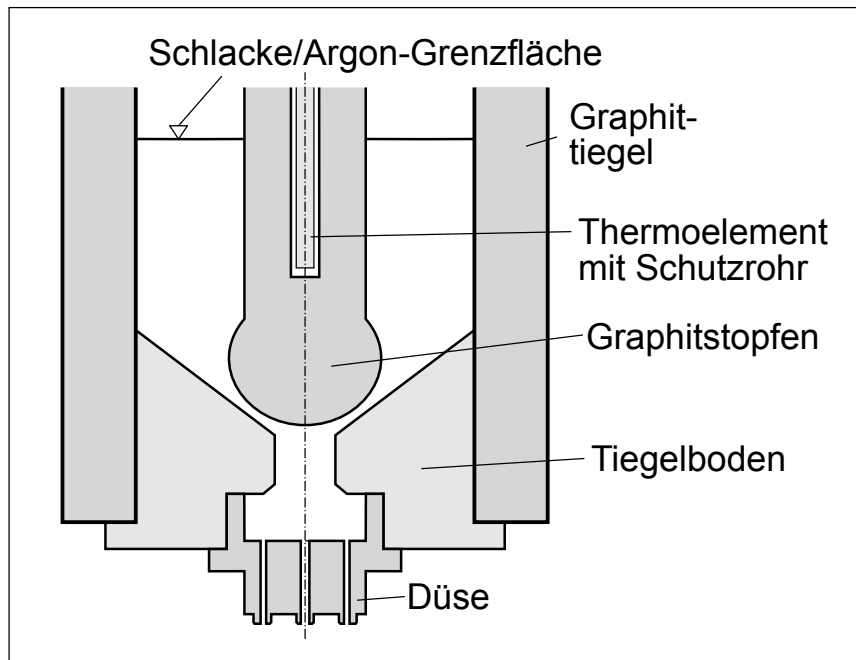


Abb. 2.8: Schematischer Aufbau der Düse beim LDHX [17]

### 2.3.2 Muldenband nach Hulek

Das Muldenband ist eine Erfindung von Anton Hulek. Die flüssige HOS kann ohne Verwendung von Wasser trocken erstarren und bildet aufgrund der geringen Abkühlrate eine kristalline Struktur aus. Mittels Kühlluft wird die thermische Energie der Schlacke entzogen und zur WRG abgeführt. Der Aufbau des Muldenbandes ist in Abb. 2.9 ersichtlich. Es gliedert sich in die drei Anlagenbereiche Verteilerrinne, Muldenband und Kühlturm. In der Verteilerrinne wird die flüssige HOS gesammelt und gepuffert. Sie garantiert eine homogene Beaufschlagung des nachgeschalteten Muldenbandes. Auf diesem Endlosband befinden sich gusseiserne oder stählerne Mulden, die zu Beginn von der Verteilerrinne mit flüssiger Schlacke befüllt werden. Ein Teil der thermischen Energie der HOS wird aufgrund von Strahlung in einer Haube über dem Muldenband aufgenommen. Der andere Teil wird durch Konvektion eines Wärmeträgermediums in

Kühlkanälen unterhalb des Muldenbandes gesammelt. Am Ende des Bandes ist die Schlacke in den Mulden zu Blöcken erstarrt, da sie zuvor genug thermische Energie verloren hat [17].

Die Zieltemperatur der Schlackenplatten liegt bei ungefähr 1000 °C. Bei einer Fördergeschwindigkeit von 2 bis 8 Meter pro Minute und einer Förderdauer von 5 bis 15 Minuten ergeben sich somit Abkühlraten von 0,5 bis 1,7 Kelvin pro Sekunde. Im Anschluss an die Behandlung im Muldenband werden die Schlackenplatten der Stärke 20 bis 50 Millimeter auf einen Stachelbrecher befördert, welcher sie zu Körnern weiterverarbeitet. Dieses Material wird in einem Kühlturm auf angestrebte 200 °C abgekühlt. Die Temperaturdifferenz von 800 Kelvin wird in einem Abhitzekeessel zur Dampferzeugung genutzt, um bspw. über nachgeschaltete Entspannungsturbinen Strom zu erzeugen [17].

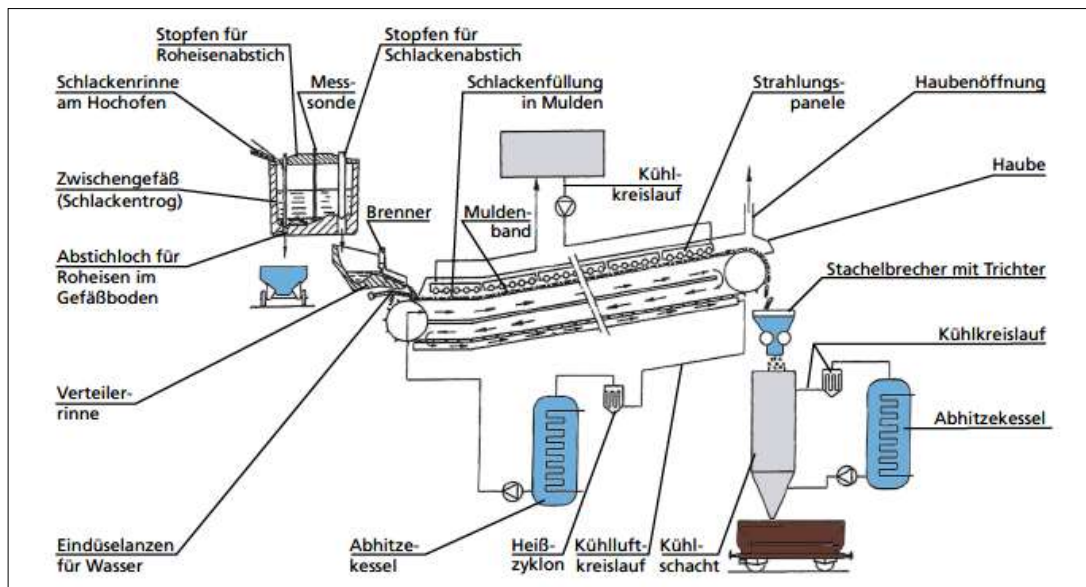


Abb. 2.9: Schematischer Aufbau des Muldenbandes [17]

### 2.3.3 Schlacke-Stahlkugel-Konzept von Paul Wurth

Mit dem von der Firma Paul Wurth Société Anonyme (SA) (deutsch: Aktiengesellschaft) entwickelten Schlacke-Stahlkugel-Konzept lässt sich ein Verfahren zur TSG realisieren. Auf Basis dieses Konzepts kann die verwendete HOS amorph erstarren und ihre abgegebene thermische Energie kann gleichzeitig für eine WRG genutzt werden [17].

In Abb. 2.10 ist das technische Konzept dieses Verfahrens dargestellt. Ungefähr 1450 °C heiße, flüssige HOS mit einem Massenstrom von bis zu 8 Tonnen pro Minute wird mit ca. 20 °C kalten Stahlkugeln vermischt. Das so gewonnene heiße Gemisch aus flüssiger HOS und Stahlkugeln hat eine mittlere Temperatur von etwa 650 °C. Durch den Mischvorgang verlor die Schlacke rapide 800 °C an Temperatur und die an den Stahlkugeln haftende Schlacke konnte amorph erstarren [17].

Das Gemisch wird zur WRG durch einen Gegenstrom-Festbett-Wärmetauscher gefördert. In diesem gibt es seine thermische Energie an Luft ab und in Abhängigkeit vom Luftvolumenstrom kann dieser auf eine Temperatur von bis zu 600 °C erhitzt werden. Nachdem das Gemisch auf unter 50 °C abgekühlt wurde, wird es durch Backenbrecher zerkleinert. Im Anschluss erfolgt die Trennung der Stahlkugeln mittels Magnetabscheider von der Schlacke. Die Kugeln werden konzeptionell wiederverwendet und die Schlacke liegt nun zerkleinert als Hüttensand vor. Bei Industrierversuchen hat sich dieses Verfahren als äußerst robust und zuverlässig erwiesen. Es gelang HOS mit hohen amorphen Anteilen zu erzeugen und die thermische Energie darin zurückzugewinnen. Nachteilig ist der hohe Verschleiß der Stahlkugeln aufgrund der Zerkleinerung des Schlacke-Stahlkugel-Gemisches im Backenbrecher [17].

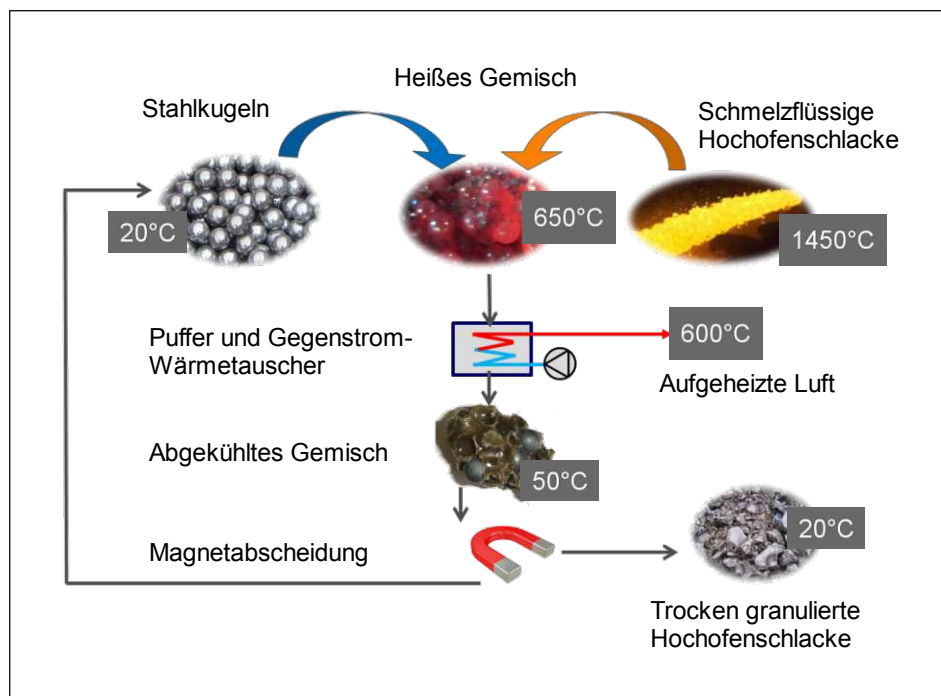


Abb. 2.10: Technisches Konzept der Paul Wurth Anlage [17]

## 3 Theoretische Grundlagen

Der Begriff Wärme ist definiert durch den ersten Hauptsatz der Thermodynamik, welcher mit der Gleichung

$$\Delta E = W + Q + E_M. \quad (3.1)$$

beschrieben wird. Dieser bezieht sich auf ein System, das durch eine Systemgrenze von seiner Umgebung abgegrenzt wird. Da Energie eine Erhaltungsgröße ist, kann eine Energieänderung  $\Delta E$  des Systems ausschließlich durch den Transport von Energie über die Systemgrenze hinweg hervorgerufen werden. Ein solcher Energietransport kann nur über drei Formen der Energie erfolgen. Diese sind die Arbeit  $W$ , die Wärme  $Q$  und die Energie  $E_M$ , die mit einer Masse über die Systemgrenze transportiert wird. Die Wärme  $Q$  ist die Energie, die ursächlich und ausschließlich aufgrund einer Temperaturdifferenz übertragen wird, die zwischen einem System und seiner Umgebung herrscht. Der entsprechende Vorgang wird als Wärmeübertragung oder Wärmetransport bezeichnet [19].

Generell gibt es die folgenden drei Arten der Wärmeübertragung [19]:

- Wärmeleitung
- Konvektion
- Wärmestrahlung

### 3.1 Wärmeleitung

Die Wärmeleitung ist der Energietransport zwischen benachbarten Molekülen in einem Material, in dem ein Temperaturgradient herrscht. Moleküle bewegen sich chaotisch um ihre Ruhelage herum, wobei diese kinetische Energie mit steigender Temperatur größer wird. Der Energietransport erfolgt aufgrund molekularer Wechselwirkungen zwischen den Molekülen. Diese Wechselwirkungen treten in Form von Stößen auf bei denen die Moleküle höherer kinetischer Energie einen Teil ihrer Energie an die Moleküle niedriger Energie übertragen. Folglich kann Wärmeleitung in allen Festkörpern, Flüssigkeiten oder Gasen stattfinden. Sie setzt keine makroskopische

Bewegung der Substanz voraus und ist von einer solchen unabhängig. Auch wird für die Berechnung des Wärmetransports durch Wärmeleitung keine Kenntnis über die molekularen Wechselwirkungen und deren statistische Zusammenhänge benötigt [19].

### 3.1.1 Stationäre Wärmeleitung

Im Fall der stationären Wärmeleitung ist die Temperatur  $T$  nur eine Funktion des Ortes. Wenn ein lokaler Temperaturgradient  $\partial T/\partial x$  in Richtung der Ortskoordinate  $x$  vorliegt, so hängt die Wärmestromdichte bei reiner Wärmeleitung nur von einem einzigen Stoffwert ab, der sogenannten Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ . Die Beziehung

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.2)$$

ist als Fouriersches Wärmeleitungsgesetz bekannt. Das negative Vorzeichen auf der rechten Seite der Gleichung resultiert daraus, dass ein positiver Wärmestrom stets in Richtung eines negativen Temperaturgradienten zeigt. Bei isentropen Materialien ist die Wärmeleitfähigkeit in alle Raumrichtungen gleich groß. Die Gleichung

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T \quad (3.3)$$

beschreibt das Fouriersche Gesetz in vektorieller Form [19].

### 3.1.2 Instationäre Wärmeleitung - Wärmeleitungsgleichung

Bei der instationären Wärmeleitung ist die Temperatur  $T$  im Inneren eines Körpers nicht nur eine Funktion des Ortes sondern auch eine Funktion der Zeit  $t$  [19]. Grundlage der Lösung solch komplizierter Wärmeleitprobleme ist die Differentialgleichung für das Temperaturfeld  $T(x, y, z, t)$  in einem ruhenden Medium. Diese Differentialgleichung wird als Wärmeleitungsgleichung bezeichnet [1]. In vielen technischen Anwendungsfällen ist die Berechnung zeitlich veränderlicher Temperaturfelder von großer Bedeutung, z. B. bei der Berechnung der Dauer eines Aufheiz- oder Abkühlvorganges, für die Bestimmung der abgegebenen oder aufgenommenen Wärmemenge oder bei der Ermittlung der maximalen Temperatur nach einer bestimmten Zeit an einem Ort im Inneren eines Körpers.

### 3.1.2.1 Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung zur Berechnung eines Temperaturfeldes lässt sich aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik und dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz herleiten. Für ein Volumenelement  $\Delta V$  eines ruhenden, inkompressiblen Mediums lautet der erste Hauptsatz

$$\varrho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{\nabla} \dot{q}. \quad (3.4)$$

Aus diesem Zusammenhang lässt sich ableiten, dass die innere Energie des Volumenelements größer wird, wenn der austretende Wärmestrom kleiner ist als der Eintretende. Wenn die innere Energie durch Zufuhr von Leistung (z. B. elektrischer Leistung) oder mittels direkter Erzeugung von thermischer Energie im Innern des Volumenelements erhöht wird, muss ggf. ein additiver Term auf der rechten Seite der Gleichung ergänzt werden [19].

Der Term  $\vec{\nabla} \dot{q}$  beschreibt den Energietransport durch Wärmeleitung (Diffusion) aufgrund atomarer und molekularer Wechselwirkungen unter dem Einfluss eines Temperaturgradienten. Dieser Transport wird durch den Fourierschen Wärmeleitungsansatz, oder einfach kinetischen Ansatz

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T \quad (3.5)$$

beschrieben. Er verknüpft die Wärmestromdichte mit dem Gradienten des Temperaturfeldes [14], [1].

Unter der Annahme konstanter und richtungsunabhängiger Stoffwerte wird aus der Wärmeleitungsgleichung eine von der Ortskoordinate  $r$  und der Zeit  $t$  abhängige lineare partielle Differentialgleichung. Die darin vorkommenden Stoffwerte  $\lambda$ ,  $\varrho$  und  $c_p$  können mit der Beziehung  $a = \lambda/(\varrho \cdot c_p)$  zur Temperaturleitfähigkeit  $a$  zusammengefasst werden. Damit ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \vec{\nabla}^2 T \quad (3.6)$$

für die Wärmeleitungsgleichung [19].

### 3.1.2.2 Anfangs- und Randbedingungen

Die Wärmeleitungsgleichung bestimmt die Temperaturen nur im Inneren eines Körpers. Um das Temperaturfeld vollständig bestimmen zu können müssen noch eine zeitliche Anfangs- und örtliche Randbedingungen erfüllt werden [1].

Die Anfangsbedingung gibt an jeder Stelle des Körpers zu einem bestimmten Zeitpunkt eine Temperatur vor. Mit der Bedingung

$$T(x, y, z, t = 0) = T_0(x, y, z) \quad (3.7)$$

beginnt im Normalfall die Zeitählung. Diese durch die Problemstellung gegebene Anfangstemperaturverteilung  $T_0(x, y, z)$  verändert sich im Laufe des nichtstationären Wärmeleitvorganges [1].

Die örtlichen Randbedingungen lassen sich in drei verschiedene Gruppen unterteilen. Es können folgende Zustände an den Körperoberflächen gegeben sein [1]:

- Die Temperatur als Funktion der Zeit und des Ortes. Diese Randbedingung ist eine Randbedingung 1. Art und wird in der Literatur auch als Dirichlet-Randbedingung bezeichnet [20].

$$T(x_R, y_R, z_R) = T_R \quad (3.8)$$

- Die Wärmestromdichte normal zur Oberfläche als Funktion der Zeit und des Ortes. Diese Randbedingung ist eine Randbedingung 2. Art und wird in der Literatur auch als Neumann-Randbedingung bezeichnet [20].

$$-\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = \dot{q}_R \quad (3.9)$$

- Die Berührung mit einem anderen Medium. Abhängig vom angrenzenden Medium (fester Körper oder Fluid) sind mehrere unterschiedliche Randbedingungen möglich. Für den in Abb. 3.1 dargestellten Fall von zwei sich berührenden halbunendlichen festen Körpern ist die Wärmestromdichte, die an der Grenzfläche des Körpers 1 in den Körper 2 übergeht, für beide Körper gleich.

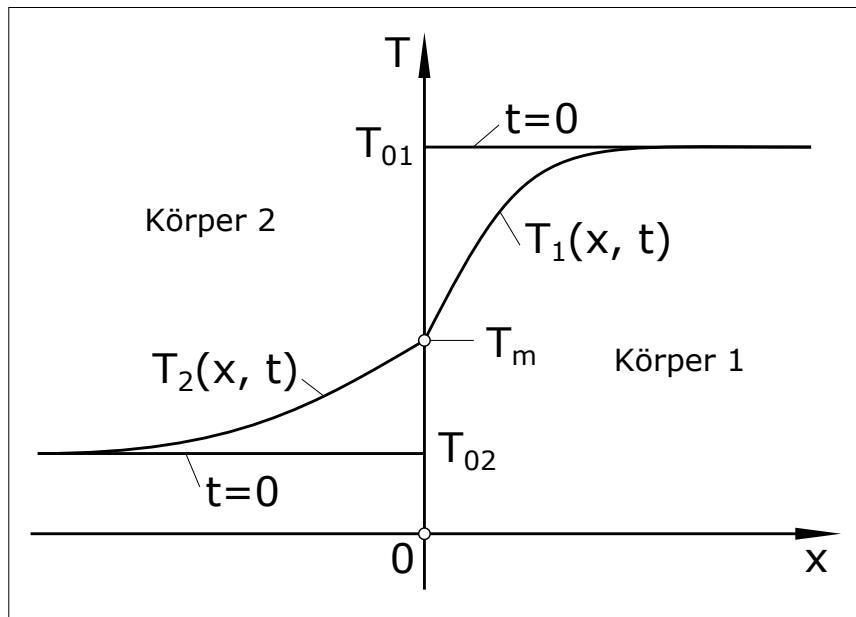


Abb. 3.1: Temperaturverlauf in zwei halbindefiniten Körpern mit den Anfangstemperaturen  $\vartheta_{01}$  und  $\vartheta_{02}$  bei Kontakt in  $x = 0$  [1]

Um die Kontakttemperatur  $T_m$  der sich berührenden Körpern bestimmen zu können, müssen zuerst die Wärmeindringkoeffizienten  $b_1$  und  $b_2$  der beiden Körper ermittelt werden. Für diese gelten die folgenden Beziehungen

$$b_1 = \sqrt{\lambda_1 \cdot c_{p1} \cdot \rho_1} \quad \text{und} \quad b_2 = \sqrt{\lambda_2 \cdot c_{p2} \cdot \rho_2}. \quad (3.10)$$

Zur Berechnung der konstanten Kontakttemperatur  $T_m$  gilt der Zusammenhang

$$T_m = T_{02} + \frac{b_1}{b_1 + b_2} \cdot (T_{01} - T_{02}). \quad (3.11)$$

Aus diesem Ausdruck geht hervor, dass die von der Zeit unabhängige Kontakttemperatur näher an der Anfangstemperatur des Körpers mit dem größeren Wärmeindringkoeffizienten liegt [1]. Für die zu übertragenden Wärmestromdichten durch Wärmeleitung der sich berührenden Körper gelten nach [1] folgende Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_{Lei,1} &= \dot{q}_{Lei,2} \\
 \lambda_1 \cdot \left( \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) &= \lambda_2 \cdot \left( \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) \\
 \frac{T_{01} - T_m}{\sqrt{\pi \cdot a_1 \cdot t}} &= \frac{T_m - T_{02}}{\sqrt{\pi \cdot a_2 \cdot t}}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Wenn der wärmeleitende Körper an ein Fluid grenzt, bildet sich an der Grenzfläche im Fluid eine Strömungsgrenzschicht wie in Abb. 3.2 und eine Temperaturgrenzschicht wie in Abb. 3.3 ersichtlich aus. Mit dem an der Grenzfläche vorhandenen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  gilt für die Wärmestromdichte  $\dot{q}$ , die an das Fluid übergeht oder auch vom Fluid übergeben wird, die folgende Beziehung

$$\dot{q} = \alpha \cdot (T_W - T_F). \tag{3.13}$$

Die Wärmestromdichte muss in Form von Wärmeleitung von der Oberfläche des Körpers heraus bzw. hinein transportiert werden. Dieser Vorgang lässt sich mit der Randbedingung

$$-\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right) = \alpha \cdot (T_W - T_F). \tag{3.14}$$

beschreiben, wobei die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  jene des Festkörpers und nicht des Fluids ist [1]. Die Glg. (3.14) ist eine Randbedingung 3. Art und wird in der Literatur auch als Robin-Randbedingung bezeichnet [12]. Wenn zusätzlich ein Wärmeübergang durch Strahlung vorhanden ist, kann diese Bedingung mit der dadurch hervorgerufenen Wärmestromdichte erweitert werden [1].

## 3.2 Konvektion

Die Konvektion ist der Transport von Energie in einem strömenden Medium. Zum Energietransport durch Wärmeleitung kommt zusätzlich ein Energietransport von Enthalpie und kinetischer Energie durch die makroskopische Bewegung des Mediums hinzu. Konvektive Wärmeübertragung hängt somit nicht nur von den Stoffwerten des

Fluids, sondern auch von Prozessparametern, wie z. B. der Strömungsgeschwindigkeit oder dem Turbulenzgrad, ab [19].

Beim konvektiven Wärmeübergang ist vorallem der Bereich zwischen einem strömenden Fluid und der Strömungsberandung, z. B. einer Wand, von Bedeutung. In Abb. 3.2 ist das Strömungs- und in Abb. 3.3 das Temperaturprofil, das sich in einer wandnahen, wandparallelen Strömung einstellt, dargestellt. Normal zur Wandoberfläche ist die Ortskoordinate in  $y$ -Richtung aufgetragen, welche den Wandabstand im Fluid darstellt. Der wandnahe Bereich, in dem große Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten auftreten, wird als Geschwindigkeitsgrenzschicht oder Strömungsgrenzschicht bzw. Temperaturgrenzschicht oder thermische Grenzschicht bezeichnet. Die Abstände  $\delta_w$  und  $\delta_T$  stellen die Dicke der Strömungsgrenzschicht bzw. der Temperaturgrenzschicht dar [19].

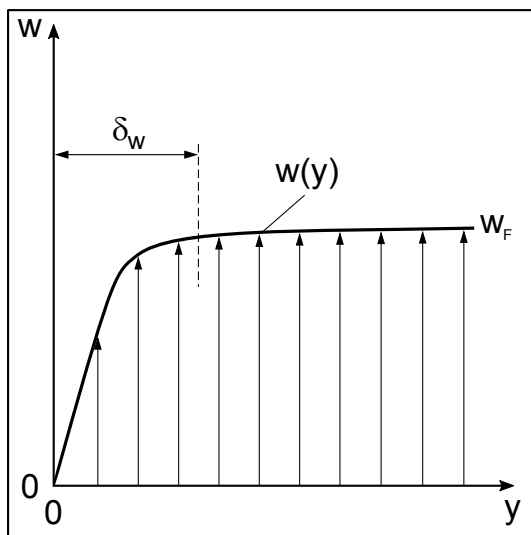


Abb. 3.2: Strömungsgrenzschicht an einer Wand [19]

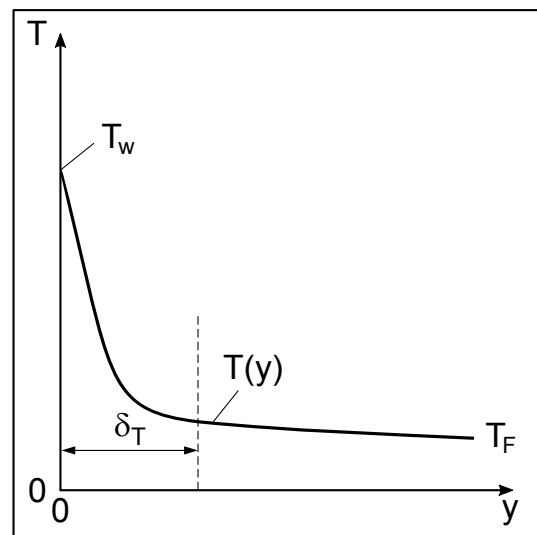


Abb. 3.3: Temperaturgrenzschicht an einer Wand [19]

Der konvektive Wärmeübergang zwischen Wand und Fluid führt im Falle von  $T_F < T_W$  dazu, dass Energie von der Wand ins Fluid transportiert wird. Wenn aber  $T_F > T_W$  ist, wird dem Fluid Energie entzogen. Die sich ergebende Wärmestromdichte ist im Wesentlichen von zwei Faktoren abhängig. Der erste Faktor ist der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$ . In diesem sind die äußerst komplexe Gestalt des Geschwindigkeits- und Temperaturprofils zusammengefasst. Der zweite Faktor bildet die Temperaturdifferenz  $T_W - T_F$ . Die Wärmestromdichte  $\dot{q}$  ist definiert durch

$$\dot{q} = \alpha \cdot (T_W - T_F) \quad (3.15)$$

und wird orthogonal zur Wand transportiert.

Im Allgemeinen hängt der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  von den temperaturabhängigen Stoffwerten des Fluids, den Prozessparametern der Strömung (z. B. der Geschwindigkeit, dem Turbulenzgrad, der Temperatur und der Ausrichtung der Strömung relativ zur Wand), der Geometrie und der Oberflächenrauigkeit der Wand ab. Unter Berücksichtigung dieser Abhängigkeiten erfolgt die Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten meist aus empirisch ermittelten Korrelationen [19].

### 3.2.1 Dimensionslose Kennzahlen

Für zahlreiche, technisch relevante Konfigurationen wurden Wärmeübergangskoeffizienten aus Messungen von  $\dot{q}$  und  $T_W - T_F$  bestimmt. Die Auswertung dieser Ergebnisse führte zu Korrelationen, die in dimensionsloser Form unter Berücksichtigung von Ähnlichkeitsgesetzen aufgestellt wurden. Die dimensionslose Nusselt-Zahl beinhaltet den Wärmeübergangskoeffizienten und wird durch den Zusammenhang

$$Nu = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} \quad (3.16)$$

beschrieben. Die Länge  $L$  stellt die charakteristische Länge des betrachteten Wärmeübergangsproblems dar und  $\lambda$  ist die Wärmeleitfähigkeit des vorhandenen Fluids. Aus den Ähnlichkeitsgesetzen geht hervor, dass sich die Korrelationen der Nusselt-Zahl bei erzwungener Konvektion und freier Konvektion grundlegend voneinander unterscheiden. Bei erzwungener Konvektion wird die Strömung durch äußere Kräfte, wie z. B. durch den Einsatz einer Pumpe oder eines Ventilators, hervorgerufen. Hingegen bei freier Konvektion wird die Strömung durch Kräfte im Fluid selbst erzeugt. Lokale Temperaturunterschiede im Fluid bewirken örtliche Dichteunterschiede, die wiederum im Schwerfeld der Erde Auftriebskräfte hervorrufen. In Fluidgemischen können Dichteunterschiede auch durch Konzentrationsgradienten verursacht werden [19].

Im Falle von gemischter Konvektion ist die Berechnung des Wärmeübergangs zusätzlich von der Archimedes-Zahl  $Ar$  abhängig. Diese beschreibt das Verhältnis von Auftriebs-

zu Trägheitskraft und charakterisiert die vorherrschende Konvektionsart. Sie ist definiert durch die Beziehung

$$Ar = \frac{L \cdot g \cdot \beta_T \cdot \Delta T}{w^2}, \quad (3.17)$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung,  $\beta_T = 1/T_{Ref}$  der thermische Ausdehnungskoeffizient mit der Referenztemperatur  $T_{Ref} = (T_W + T_F)/2$  (arithmetisches Mittel aus der Wand- und Fluidtemperatur),  $\Delta T = T_W - T_F$  die Differenz zwischen Wand- und Fluidtemperatur und  $w$  die charakteristische Strömungsgeschwindigkeit sind [3].

Wenn der Anteil der erzwungenen Konvektion dominiert, wird für die Berechnung erzwungene Konvektion angenommen. Überwiegt hingegen der Anteil der freien Konvektion, ist für die Berechnung freie Konvektion anzunehmen. Sind der Einfluss von freier und erzwungener Konvektion auf den Wärmeübergang von gleicher Größenordnung, wird der Wärmeübergangskoeffizient für beide Konvektionsarten berechnet und in geeigneter Weise überlagert [3].

Bei einer beheizten Platte kann durch die nachfolgenden Bedingungen für die Archimedes-Zahl  $Ar$  die vorliegende Konvektionsart bestimmt werden [3]:

- Wenn  $Ar < 0,25$  ist, dominiert die erzwungene Konvektion.
- Gilt  $0,25 < Ar < 16$ , prägen sowohl die freie als auch die erzwungene Konvektion den Wärmeübergang.
- Falls  $Ar > 16$  ist, überwiegt die freie Konvektion.

Sind die freie und erzwungene Konvektion von gleichem Einfluss, werden die Wärmeübergangskoeffizienten der erzwungenen Konvektion  $\alpha_{EK}$  und der freien Konvektion  $\alpha_{FK}$  mithilfe des Zusammenhangs

$$\alpha = (|\alpha_{EK}^{n_K} \pm \alpha_{FK}^{n_K}|)^{\frac{1}{n_K}} \quad (3.18)$$

überlagert. In dieser Beziehung wird das Plus verwendet, wenn die Strömungsrichtungen der beiden Konvektionsarten gleich sind. Falls die Fluide in entgegengesetzter Richtung strömen, ist das Minus in Glg. (3.18) zu wählen. Für den Überlagerungsexponenten der gemischten Konvektion  $n_K$  wird abhängig vom vorhandenen Strömungsfall der entsprechende Wert gewählt [3]:

- Bei senkrechter Umströmung von Einzelkörpern, Strömung an senkrechten Wänden oder Strömung im Rohr (konstante Wandtemperatur) gilt  $n_K = 3$ .
- Für Strömung an einer waagrechten Platte ist  $n_K = 3,5$ . Weiters ist zu beachten, dass in Glg. (3.18) das Plus zu wählen ist, wenn die Oberseite der Platte beheizt und die Unterseite gekühlt wird. Liegt der umgekehrte Fall vor, ist das Minus zu verwenden.
- Bei querangeströmten Kugeln und Zylindern gilt  $n_K = 4$ .
- Für Strömung im Rohr (konstanter Wärmestrom an der Wand) ist  $n_K = 6$ .

Eine wichtige Größe zur Beschreibung der Strömungscharakteristik bei erzwungener Konvektion ist die Reynolds-Zahl. Für diese gilt

$$Re = \frac{w \cdot L}{\nu}, \quad (3.19)$$

mit  $\nu$  der kinematischen Viskosität des Fluids. Die Reynolds-Zahl gibt das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Reibungskräften in der Strömung an [19].

Weiters wird sie auch zur Beschreibung der Form einer Strömung verwendet. Grundsätzlich treten zwei verschiedene Formen von Strömungen auf. Eine Form sind die laminaren Strömungen, welche dadurch gekennzeichnet sind, dass die einzelnen Fluidelemente ungestörten, glatten Strömungsbahnen folgen. Abb. 3.4 zeigt die Stromlinien (glatte Bahnen) einer laminaren Rohrströmung. Die Impulsübertragung zwischen benachbarten Fluidbereichen erfolgt durch molekulare Wechselwirkungen. Die andere Form sind die turbulenten Strömungen, die durch stark schwankende Strömungsgeschwindigkeiten gekennzeichnet werden und deren Schwankungskomponenten in alle drei Raumrichtungen weisen. In Abb. 3.5 stellen die Stromlinien die stochastischen Verwirbelungen einer turbulenten Rohrströmung dar. Die Impulsübertragung durch molekulare Wechselwirkungen wird durch diese Schwankungsbewegungen stark erhöht, weil lokal große Geschwindigkeitsunterschiede auftreten [8].

Bei freier Konvektion wird die Strömungscharakteristik mithilfe der Grashof-Zahl beschrieben. Diese ist durch den Zusammenhang

$$Gr = \frac{L^3 \cdot g \cdot \beta_T \cdot \Delta T}{\nu^2} \quad (3.20)$$

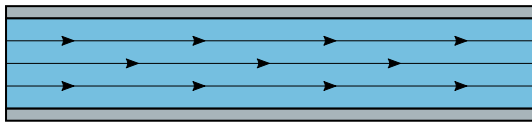


Abb. 3.4: Stromlinien laminarer Rohrströmung

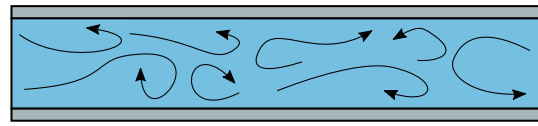


Abb. 3.5: Stromlinien turbulenter Rohrströmung

definiert. Die Grashof-Zahl stellt einen Vergleich der Auftriebskräfte zu den Trägheits- und Reibungskräften einer Strömung dar [19].

Aus Ähnlichkeitsbetrachtungen geht hervor, dass das Verhältnis der kinematischen Viskosität  $\nu$  des Fluids zu seiner Temperaturleitfähigkeit  $a$  Einfluss auf den konvektiven Wärmeübergang hat. Dieses dimensionslose Verhältnis wird Prandtl-Zahl genannt und ist ein charakteristischer Stoffwert für den gilt

$$Pr = \frac{\nu}{a}. \quad (3.21)$$

Die Temperaturleitfähigkeit  $a$  des Fluids wird mit der Beziehung

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (3.22)$$

beschrieben, wobei  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit,  $\rho$  die Dichte und  $c_p$  die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck sind [19].

Die Nusselt-Zahl, welche auch als dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient bezeichnet wird, kann abhängig von der Konvektionsart auch mit den zuvor definierten dimensionslosen Größen dargestellt werden [19].

- Bei vorhandener erzwungener Konvektion gilt

$$Nu = f_1(Re, Pr) \quad (3.23)$$

- und im Falle von freie Konvektion gilt

$$Nu = f_2(Gr, Pr). \quad (3.24)$$

### 3.2.2 Empirische Gleichungen für den Wärme- und Stoffübergang

Neben den bereits in Kap. 3.2.1 erläuterten dimensionslosen Kennzahlen (Nusselt-Zahl  $Nu$ , Reynolds-Zahl  $Re$  und Prandtl-Zahl  $Pr$ ) sind zur Berechnung der Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  weitere empirische Korrelationen nötig. Im Folgenden werden die Gleichungen von zwei häufig vorkommenden Fällen überströmter Körper erläutert.

#### 3.2.2.1 Überströmte Kugel

Für die in Abb. 3.6 dargestellte überströmte Kugel gelten die nachfolgenden empirischen Gleichungen zur Berechnung des Wärmeübergangs [1].

Die charakteristische Länge  $L$  wird mit dem Zusammenhang

$$L = r \cdot \pi \quad (3.25)$$

ermittelt, wobei  $r$  der Kugelradius ist. Damit die mittlere Nusselt-Zahl  $Nu_m$  berechnet werden kann, müssen zuerst die mittlere laminare Nusselt-Zahl  $Nu_{m,lam}$  und die mittlere turbulente Nusselt-Zahl  $Nu_{m,turb}$  bestimmt werden. Die Beziehung für die mittlere laminare Nusselt-Zahl lautet

$$Nu_{m,lam} = 0,664 \cdot Re^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}. \quad (3.26)$$

Für die Ermittlung der mittleren turbulenten Nusselt-Zahl wird der Ausdruck

$$Nu_{m,turb} = \frac{0,037 \cdot Re^{\frac{4}{5}} Pr}{1 + 2,443 \cdot Re^{-\frac{1}{10}} \cdot (Pr^{\frac{2}{3}} - 1)}. \quad (3.27)$$

verwendet. Dadurch ergibt sich für die mittlere Nusselt-Zahl die Gleichung

$$Nu_m = 2 + (Nu_{m,lam}^2 + Nu_{m,turb}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.28)$$

Dieser Zusammenhang gilt nur dann, wenn die Bedingungen  $0,7 < Pr < 600$  und  $1 \leq Re \leq 10^6$  erfüllt sind [1].

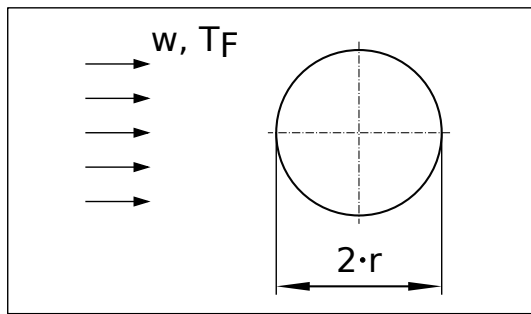


Abb. 3.6: Überströmte Kugel [1]

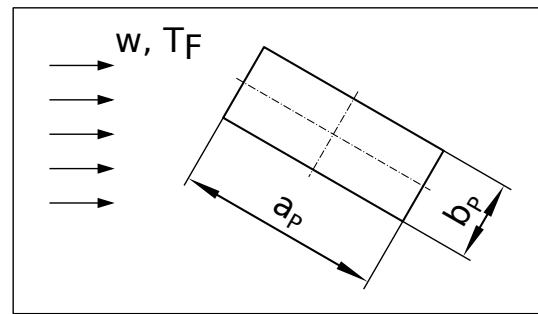


Abb. 3.7: Querangeströmter Profilzylinder [1]

### 3.2.2.2 Querangeströmter Profilzylinder

Bei dem in Abb. 3.7 ersichtlichen querangeströmten Profilzylinder gelten die nachstehenden empirischen Gleichungen für die Berechnung des Wärmeübergangs [1].

Die charakteristische Länge  $L$  wird mit dem Ausdruck

$$L = a_P + b_P \quad (3.29)$$

bestimmt, wobei  $a_P$  die Länge und  $b_P$  die Breite des querangeströmten Profilzylinders sind. Auch in diesem Fall kann die mittlere Nusselt-Zahl  $Nu_m$  erst nach der Ermittlung der mittleren laminaren Nusselt-Zahl  $Nu_{m,lam}$  und der mittleren turbulenten Nusselt-Zahl  $Nu_{m,turb}$  erfolgen. Für die mittlere laminare Nusselt-Zahl gilt der Zusammenhang

$$Nu_{m,lam} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot Re^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{Pr^{\frac{1}{2}}}{(1 + 1,973 \cdot Pr^{0,272} + 21,29 \cdot Pr)^{\frac{1}{6}}} \quad (3.30)$$

Die Beziehung der mittleren turbulenten Nusselt-Zahl lautet

$$Nu_{m,turb} = \frac{0,037 \cdot Re^{\frac{4}{5}} Pr}{1 + 2,443 \cdot Re^{-\frac{1}{10}} \cdot (Pr^{\frac{2}{3}} - 1)} \quad (3.31)$$

Zur Berechnung der mittleren Nusselt-Zahl wird der Ausdruck

$$Nu_m = 0,3 + (Nu_{m,lam}^2 + Nu_{m,turb}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

verwendet. Damit diese Gleichung gültig ist, müssen die Bedingungen  $0,6 < Pr < 1000$  und  $1 \leq Re \leq 10^7$  erfüllt sein [1].

### 3.3 Wärmestrahlung

Die Wärmestrahlung ist jene Energie, die ein Körper in Form von elektromagnetischen Wellen an seine Umgebung emittiert. Im Gegensatz zu Wärmeleitung oder Konvektion ist der Energietransport durch Wärmestrahlung von einem Ort A zu einem Ort B nicht an ein Medium (Festkörper oder Fluid) gebunden, da sich elektromagnetische Wellen auch im Vakuum ausbreiten können. Ausgehend von seiner Oberfläche emittiert ein schwarzer Körper mit der Temperatur  $T$  eine Wärmestromdichte von

$$\dot{q}_{SK} = \sigma \cdot T^4 \quad (3.33)$$

an seine Umgebung, wobei  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$  die sogenannte Stefan-Boltzmann-Konstante ist. Die Glg. (3.33) wird in der Literatur auch als Stefan-Boltzmann-Gesetz bezeichnet. Ein schwarzer Körper ist ein idealisierter thermischer Strahler, der ein Maximum an Strahlung emittiert. Näherungsweise kann ein schwarzer Körper durch eine Schwärzung der Oberfläche, bspw. mit Ruß, realisiert werden [19].

Bei gleicher Temperatur emittiert ein realer Körper weniger Wärmestrahlung als ein Schwarzer. Für die ausgehende Wärmestromdichte durch Emission von Strahlung eines realen Körpers gilt

$$\dot{q} = \epsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (3.34)$$

mit dem Emissionsgrad  $\epsilon$ . Dieser hängt im Allgemeinen vom Material des Körpers und von dessen Oberflächenbeschaffenheit ab. Zusätzlich kann er eine Funktion der Temperatur, der Strahlungsrichtung und des Wellenlängenspektrums der Strahlung sein. Für den Emissionsgrad gilt bei realen Körper  $0 \leq \epsilon \leq 1$ . Jene Körper für die der Emissionsgrad  $\epsilon$  näherungsweise konstant ist, werden als graue Körper bezeichnet [19].

### 3.3.1 Sichtfaktoren

Beim Wärmeübergang durch Strahlung findet im Gegensatz zur Wärmeleitung oder Konvektion ein Energieaustausch statt. D. h. Energie wird nicht nur vom wärmeren zum kälteren Körper übertragen, sondern auch umgekehrt. Dieser Strahlungsaustausch ist von der Orientierung der jeweiligen strahlenden Oberflächen zueinander, ihren Temperaturen und ihren Strahlungseigenschaften abhängig. Die strahlenden Flächen sind meist durch ein Medium getrennt, welches den Strahlungsaustausch nur unwesentlich beeinflusst. Bspw. lassen die Hauptbestandteile der Luft, Stickstoff und Sauerstoff, die Wärmestrahlung beinahe ungeschwächt hindurch. Genau genommen gilt diese Bedingung jedoch nur für das Vakuum. Zur Berechnung der Richtungsabhängigkeiten der emittierten, absorbierten und reflektierten Strahlung wird unter Annahme von diffuser bzw. unregelmäßig zerstreuter Reflexion das Modell des grauen Lambert-Strahlers verwendet. Die geometrischen Verhältnisse beim Strahlungsaustausch werden für graue Lambert-Strahler unter Zuhilfenahme der Sichtfaktoren miteinbezogen. Dieser wird zur Berechnung des Strahlungsaustausches zwischen zwei Flächen benötigt, um deren Lage und Orientierung zueinander zu berücksichtigen. Er gibt an, in welchem Ausmaß eine Fläche von einer anderen aus „gesehen“ werden kann. D. h. welcher Teil des von einer Fläche 1 insgesamt ausgehenden Strahlungsflusses auf eine andere Fläche 2 fällt [1].

Für graue, diffus strahlende Oberflächen ist der Sichtfaktor  $\varphi_{12}$  eine rein geometrische Größe, die mit dem Zusammenhang

$$\varphi_{12} = \frac{1}{\pi \cdot A_1} \cdot \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{s_A^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 \quad (3.35)$$

berechnet wird. Abb. 3.8 zeigt die geometrischen Größen zur Berechnung des Sichtfaktors. Die Verbindungsstrecke zwischen dem differentiellen Flächenelement  $dA_1$  der Fläche  $A_1$  (Strahlungsquelle) und dem differentiellen Flächenelement  $dA_2$  der Fläche  $A_2$  (Strahlungsempfänger) ist der Abstand  $s_A$ . Bei den Größen  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  handelt es sich um die Normalvektoren der jeweiligen differentiellen Flächenelemente. Die Verbindungsstrecke und der Normalvektor  $\vec{n}_1$  spannen eine Ebene auf in welcher der Polarwinkel  $\beta_1$  gemessen werden kann. Das Selbe gilt für den Polarwinkel  $\beta_2$ , nur dass in diesem Fall die Verbindungsstrecke und der Normalvektor  $\vec{n}_2$  herangezogen werden [1].

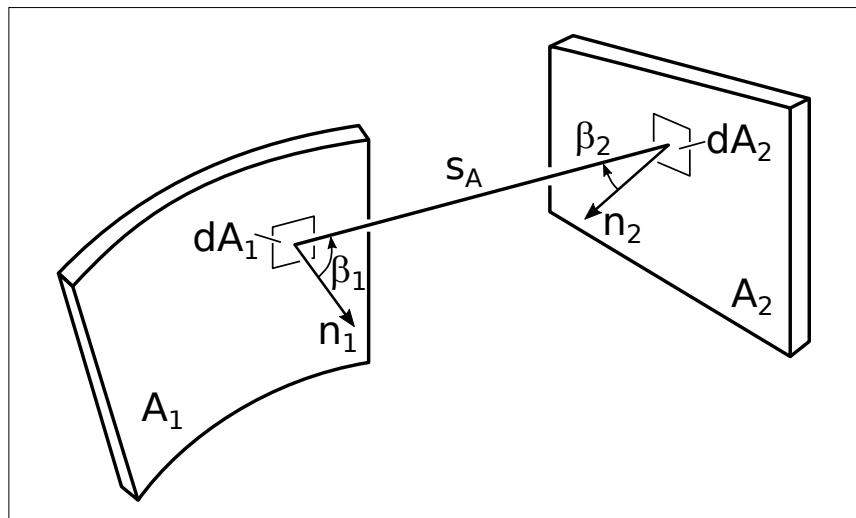


Abb. 3.8: Geometrische Größen zur Berechnung des Sichtfaktors [1]

Der Sichtfaktor kann auch als jener Strahlungsanteil, der von der Oberfläche des Körpers 1 ausgeht und auf die Oberfläche eines anderen Körpers 2 auftrifft, bezogen auf die gesamte vom Körper 1 ausgehende Strahlung, aufgefasst werden. Dies ergibt folgenden Zusammenhang

$$\varphi_{12} = \frac{\text{Strahlung, die von Oberfläche 1 auf Oberfläche 2 trifft}}{\text{gesamte von Oberfläche 1 ausgehende Strahlung}} \quad (3.36)$$

für den Sichtfaktor [19].

Wenn ein oder mehrere Sichtfaktoren bekannt sind, kann der entsprechend gesuchte Sichtfaktor mithilfe folgender einfacher Beziehungen ermittelt werden [1], [19]:

- Reziprozitätsbeziehung

Der Zusammenhang

$$A_1 \cdot \varphi_{12} = A_2 \cdot \varphi_{21} \quad (3.37)$$

beschreibt die wichtige Reziprozitätsbeziehung der Sichtfaktoren. Bei Anwendung dieser Gleichung braucht nur einer der beiden Sichtfaktoren durch die meist aufwändige und komplizierte Integration bestimmt werden.

- Summationsbeziehung

Für einen umschlossenen Hohlraum, bestehend aus  $N$  zusammenhängenden Zonen gilt die Summationsbeziehung

$$\sum_{k=1}^N \varphi_{ik} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.38)$$

Bei kleinen diffus strahlenden Flächenelementen lässt sich der Sichtfaktor auch mittels eines zeichnerischen Verfahrens ermitteln. In Abb. 3.9 ist das Vorgehen zur Bestimmung des Sichtfaktors  $\varphi_{12}$  für den Strahlungsaustausch eines Flächenelements  $\Delta A_1$  mit einer Fläche endlicher Größe  $A_2$  dargestellt. Durch das Flächenelement  $\Delta A_1$  wird die  $x, y$  – Ebene gelegt bzw. um den Mittelpunkt  $0$  des strahlenden Flächenelements eine Halbkugel. Als Nächstes werden die Strahlen  $0a_2$ ,  $0b_2$ ,  $0c_2$  und  $0d_2$  zu der Umfangslinie der bestrahlten Fläche  $A_2$  (Viereck  $a_2b_2c_2d_2$ ) gezogen. Die Strahlen schneiden die Oberfläche der Halbkugel in den Punkten  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$  und  $d_0$ , die in weiterer Folge senkrecht auf die  $x, y$  – Ebene projiziert werden. Durch die Projektion entstehen auf der  $x, y$  – Ebene die Punkte  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  und  $d_1$ , welche die schraffierte Vierecksfläche  $a_1b_1c_1d_1$  bilden. Die Bildung des Sichtfaktors  $\varphi_{12}$  erfolgt über das Verhältnis dieser schraffierten Fläche mit der Fläche des Kreises, die durch den Schnitt der Kugel mit der  $x, y$  – Ebene entsteht.

Auch im Falle einer diffus strahlenden Kugeloberfläche, die ausgehend vom Kugelmittelpunkt  $0$  in alle Richtung gleich strahlt, lässt sich der Sichtfaktor zeichnerisch bestimmen. Der in Abb. 3.10 dargestellte Vorgang zur Ermittlung des Sichtfaktors  $\varphi_{12}$  für den Strahlungsaustausch eines Kugeloberflächenelements  $A_1$  mit einer endlichen Fläche  $A_2$  ist sehr ähnlich dem bereits beschriebenen Vorgehen zur Bestimmung des Sichtfaktors  $\varphi_{12}$  des Flächenelements  $\Delta A_1$  mit der Fläche  $A_2$ . Zu Beginn werden die Strahlen  $0a_2$ ,  $0b_2$ ,  $0c_2$  und  $0d_2$  zu der Umfangslinie der bestrahlten Fläche  $A_2$  (Viereck  $a_2b_2c_2d_2$ ) gezogen. Die entstandenen Schnittpunkte  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  und  $d_1$  mit der Kugeloberfläche bilden das Kugeloberflächensegment  $a_1b_1c_1d_1$ . Das Verhältnis dieser Fläche  $A_1$  (Viereck  $a_1b_1c_1d_1$ ) zur gesamten Kugeloberfläche ergibt den Sichtfaktor  $\varphi_{12}$ .

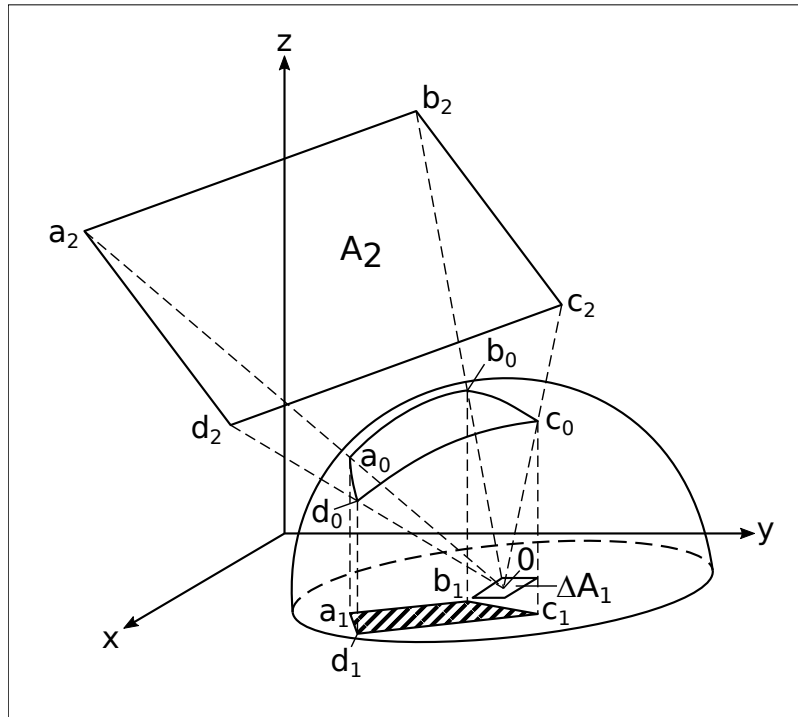


Abb. 3.9: Grafische Bestimmung des Sichtfaktors für ein Flächenelement [19]

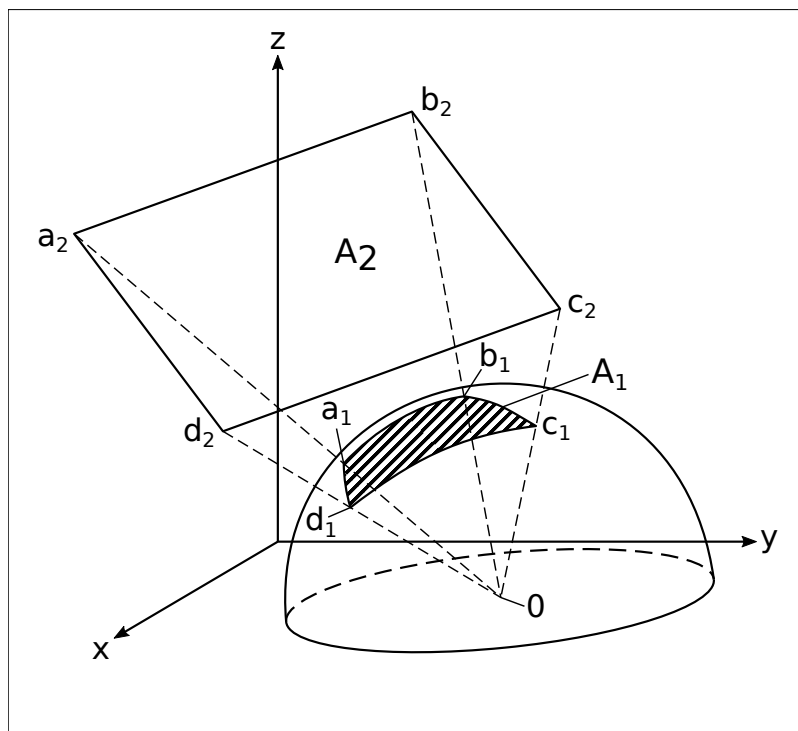


Abb. 3.10: Grafische Bestimmung des Sichtfaktors für eine Kugel

### 3.3.2 Methode des umschlossenen Raumes

Bei der Strahlungsaustauschrechnung liegt immer eine Wechselwirkung einer Oberfläche mit der gesamten von ihr gesehenen Umgebung vor. Da jeder Körper mit  $T > 0$  Strahlung emittiert, muss auch auf jeden Körper Strahlung einfallen. Diese ständige Wechselwirkung von Strahlungsaustausch macht die Erstellung von Berechnungsgleichungen sehr schwierig. Erst wenn der von der Bezugsfläche aus gesehene Halbraum in endlich viele Flächen mit jeweils einheitlicher Temperatur und konstanten Strahlungseigenschaften unterteilt werden kann, lassen sich relativ leicht handhabbare Berechnungsgleichungen für den Strahlungsaustausch aufstellen. Die auf dieser Vereinfachung basierende Methode des umschlossenen Raumes ermöglicht die Berechnung des Strahlungsaustausches zwischen mehreren Oberflächen. In Abb. 3.11 ist ersichtlich, wie die einzelnen im Strahlungsaustausch stehenden Oberflächen  $A_i$  mit dem Emissionsgrad  $\epsilon_i$ , dem Wärmestrom  $\dot{Q}_i$  und der einheitlichen Temperatur  $T_i$  zu einem Hohlraum zusammengefasst bzw. ergänzt werden. Jede dieser Oberflächen wird als ein nicht transparenter grauer Lambert-Strahler approximiert. Voraussetzung für die Anwendung der Methode des umschlossenen Raumes ist die vorherige Ermittlung der Sichtfaktoren aller binärer Flächenkombinationen [19].

Zur Aufstellung der Energiebilanz in Abb. 3.12 wird als neue Größe die Helligkeit  $H_i$  einer isothermen Fläche  $i$  eingeführt. Diese setzt sich additiv aus der spezifischen Ausstrahlung  $M_{A,i}$  und dem reflektierten Teil der einfallenden Bestrahlungsstärke  $E_{B,i}$  der Fläche  $i$  zusammen. Die Beziehung

$$H_i = M_{A,i} + \rho_{Ref,i} \cdot E_{B,i} = M_{A,i} + (1 - \epsilon_i) \cdot E_{B,i} \quad (3.39)$$

beschreibt den formelmäßigen Zusammenhang für die Helligkeit [1].

Im Folgenden wird mithilfe der Abb. 3.12 die Energiebilanz für eine Zone  $i$  aufgestellt. Die Summe aus dem von außen zugeführten Wärmestrom  $\dot{Q}_i$ , dem emittierten und reflektierten Strahlungsfluss und dem auftreffenden Strahlungsfluss auf die Zone  $i$  muss null sein. Somit entsteht nach mathematischer Umformung der Bilanzgleichung der Ausdruck

$$\dot{Q}_i = A_i \cdot (H_i - E_{B,i}) \quad (3.40)$$

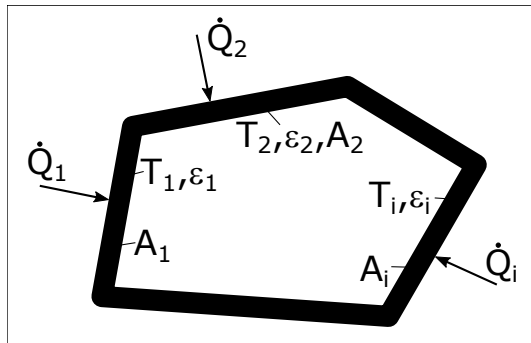


Abb. 3.11: Von isothermen Flächen (Zonen) begrenzter Hohlraum [1]

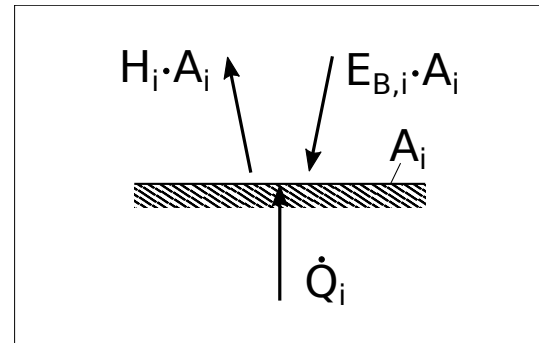


Abb. 3.12: Schematische Darstellung der Energiebilanz für die Zone i mit der Fläche  $A_i$  [1]

für den von außen zugeführten Wärmestrom. Diese Beziehung bedeutet, dass der Wärmestrom mit dem Netto-Strahlungsfluss übereinstimmt. Durch berechnen der Bestrahlungsstärke  $E_{B,i}$  aus Glg. (3.39) und einsetzen dieser Größe in Glg. (3.40) entsteht der neue Zusammenhang

$$\dot{Q}_i = \frac{A_i}{1 - \epsilon_i} \cdot (M_{A,i} - \epsilon_i \cdot H_i) = \frac{A_i \cdot \epsilon_i}{1 - \epsilon_i} \cdot (\sigma \cdot T_i^4 - H_i) \quad (3.41)$$

für den Wärmestrom. Eine zweite Beziehung zwischen  $\dot{Q}$  und  $H$  ergibt sich durch verknüpfen des auf die Zone i auftreffenden Strahlungsflusses  $A_i \cdot E_{B,i}$  mit den ausgesandten Strahlungsflüssen der anderen Zonen. Der von der Zone j ausgehende Strahlungsfluss  $A_j \cdot H_j$  trifft multipliziert mit dem Sichtfaktor  $\varphi_{ji}$  auf die Zone i. Unter Anwendung der Reziprozitätsbeziehung entsteht der Ausdruck

$$A_i \cdot E_{B,i} = \sum_{j=1}^N A_j \cdot \varphi_{ji} \cdot H_j = A_i \cdot \sum_{j=1}^N \varphi_{ij} \cdot H_j \quad (3.42)$$

für den auf die Zone i insgesamt auftreffenden Strahlungsfluss. Wird diese Beziehung in Glg. (3.40) eingesetzt und die Summationsbeziehung angewendet, ergibt sich folgender Zusammenhang

$$\dot{Q}_i = A_i \cdot \left( H_i - \sum_{j=1}^N \varphi_{ij} \cdot H_j \right) = A_i \cdot \sum_{j=1}^N \varphi_{ij} \cdot (H_i - H_j) \quad (3.43)$$

zur Berechnung des Wärmestroms. Mit den beiden Bilanzgleichungen (3.41) und (3.43) können die Wärmeströme  $\dot{Q}_i$  für jede Zone ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) ermittelt werden. Somit ist es möglich ein lineares Gleichungssystem mit  $2 \cdot N$  Gleichungen zur Bestimmung der  $N$  unbekannt Helligkeiten  $H_i$  und der  $N$  gesuchten Werte von  $\dot{Q}_i$  bzw.  $T_i$  aufzustellen [1].

## 3.4 Differenzenverfahren

Für komplizierte Wärmeleitprobleme sind kaum geschlossene Lösungen vorhanden oder nur unter großem Aufwand zu erhalten. Dies sind bspw. Problemstellungen mit temperaturabhängigen Stoffwerten, komplizierter geometrischer Gestalt oder besonderen Randbedingungen, wie etwa temperaturabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten [1].

Eine Lösung solcher Wärmeleitprobleme ist oft nur mit numerischen Methoden möglich. Bei denen wird zwischen den Differenzenverfahren, dem finiten Volumenverfahren und den Methoden der finiten Elemente unterschieden. Die Differenzenverfahren sind einfach zu handhaben und erfordern einen geringen mathematischen Aufwand. Sie können relativ einfach in Tabellen-Kalkulationsprogrammen, wie z. B. in MS Excel, implementiert werden [19]. Bei komplizierten geometrischen Verhältnissen sind die Differenzenverfahren weniger gut geeignet. In solchen Fällen ist die Methode der finiten Volumen oder der finiten Elemente passender. Diese sind sehr flexibel anwendbar, benötigen aber höhere mathematische Fähigkeiten [1].

Im Folgenden wird das in dieser Arbeit verwendete explizite Differenzenverfahren näher erläutert.

### 3.4.1 Differenzengleichung

Im Allgemeinen werden bei den Differenzenverfahren die Ableitungen  $\partial T / \partial t$ ,  $\partial T / \partial x$  und  $\partial^2 T / \partial x^2$  der Wärmeleitungsgleichung und der Randbedingungen durch Differenzenquotienten ersetzt. Aufgrund dieser Diskretisierung entsteht ein Gitternetz in Raum und Zeit wie in Abb. 3.13 ersichtlich. Die Differentialgleichung geht in eine Differenzgleichung über mit der es möglich ist die exakte Lösung der Differentialgleichung an den diskreten Stellen (Gitterpunkten) zu approximieren [1].

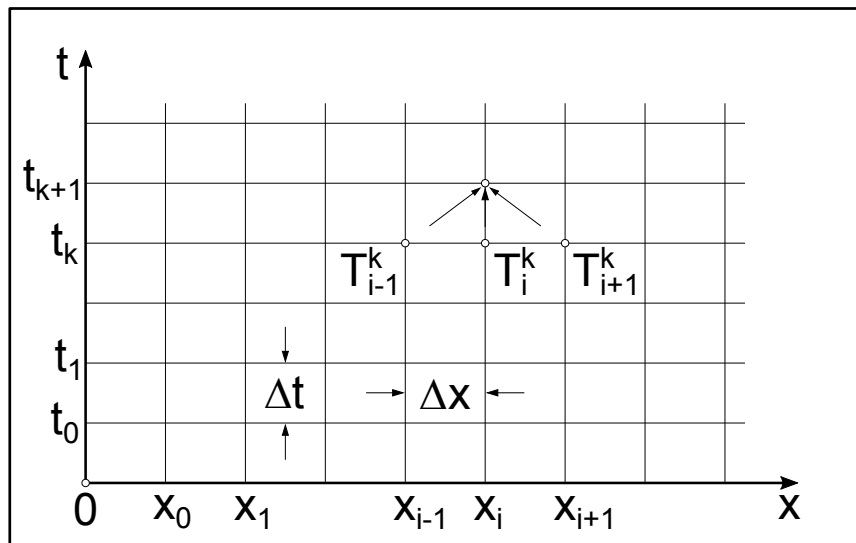


Abb. 3.13: Gitternetz zur Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung [1]

Für die instationäre, geometrisch eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit konstanten Stoffwerten gilt

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3.44)$$

Hier kann die erste Ableitung nach der Zeit durch den relativ ungenauen Vorwärts-Differenzenquotienten

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k = \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \quad (3.45)$$

und die zweite Ableitung in x-Richtung an der Stelle  $x_i$  zur Zeit  $t_k$  durch den zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k = \frac{T_{i-1}^k - 2 \cdot T_i^k + T_{i+1}^k}{\Delta x^2} \quad (3.46)$$

ersetzt werden. Zu beachten ist, dass durch die Diskretisierung immer ein Diskretisierungsfehler entsteht[1]:

$$\text{Ableitung} = \text{Differenzenquotient} + \text{Diskretisierungsfehler}. \quad (3.47)$$

Werden die erste Ableitung nach der Zeit und die zweite Ableitung in x-Richtung der Glg. (3.44) durch die zeitlich einseitige Vorwärtsdifferenz und die räumliche zentrale Differenz zweiter Ordnung ersetzt, entsteht der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k = a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k. \quad (3.48)$$

Nach einsetzen des Zusammenhangs für den vorderen und den zweiten zentralen Differenzenquotienten ergibt sich die Gleichung

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = a \cdot \frac{T_{i-1}^k - 2 \cdot T_i^k + T_{i+1}^k}{\Delta x^2}. \quad (3.49)$$

Dieser Zusammenhang wird zu folgender Differenzgleichung umgeformt

$$T_i^{k+1} = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \cdot T_{i-1}^k + \left(1 - 2 \cdot \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2}\right) \cdot T_i^k + \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \cdot T_{i+1}^k. \quad (3.50)$$

Nun erfolgt die Einführung des Moduls  $M$  mit der Beziehung

$$M = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2}. \quad (3.51)$$

Beim Einsetzen des Moduls in die Glg. (3.50) entsteht folgende neue explizite Differenzgleichung

$$T_i^{k+1} = M \cdot T_{i-1}^k + (1 - 2 \cdot M) \cdot T_i^k + M \cdot T_{i+1}^k \quad (3.52)$$

zur Berechnung eines Temperaturfeldes. Wenn die Herleitung der expliziten Differenzgleichung mit dem vorderen Differenzenquotienten für die Zeitableitung und dem zweiten zentralen Differenzenquotienten für die Richtungsableitung geschieht, wird dieses Verfahren in der Fachliteratur als sogenannter Forward in Time and Centered in Space (FTCS)-Algorithmus bezeichnet.

### 3.4.2 Diskretisierung der Anfangs- und Randbedingungen

Die Anfangs- und Randbedingungen können abhängig von der Problemstellung sehr unterschiedlich sein. Als Anfangsbedingung kann bspw. eine einheitliche Temperatur oder eine Temperaturverteilung  $T(t=0, x)$  für den zu untersuchenden Körper vorgegeben werden. Bei den örtlichen Randbedingungen sind mehrere verschiedene Fälle möglich.

Diese können folgendermaßen eingeteilt werden [1]:

- Bei Vorgabe der Temperatur auf dem Rand  $x = x_R$ , ist es vorteilhaft das Gitter so zu wählen, dass der Rand mit der Gitterlinie  $x_0$  bzw.  $x_{n+1}$  zusammenfällt. In diesem Fall kann der Temperaturwert von  $T_0^k$  bzw.  $T_{n+1}^k$  direkt in die Glg. (3.52) eingesetzt werden.
- Ist die Wärmestromdichte  $\dot{q}(t)$  am Rand  $x = x_R$  gegeben, gilt dort die Bedingung

$$-\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{x=x_R} = \dot{q}(t). \quad (3.53)$$

In diesem Fall ist die Ableitung in Richtung der äußeren Flächennormalen zu bilden, wobei die Wärmestromdichte  $\dot{q}$  nur dann positiv ist, wenn sie auch in diese Richtung fließt. Die Gittereinteilung ist so vorzunehmen, dass der Rand in der Mitte zwischen zwei Gitterlinien liegt. Wenn die Wärmestromdichte am linken Rand gegeben ist, sollte ein Gitter wie in Abb. 3.14 verwendet werden.

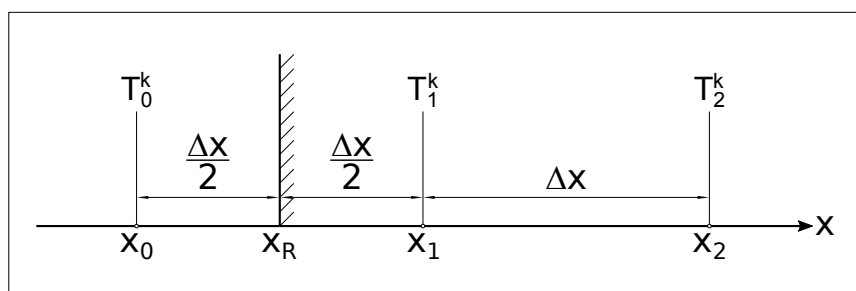


Abb. 3.14: Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am linken Rand in der Mitte zwischen zwei Gitterlinien

Am linken Rand gilt somit  $x_R = x_0 + \frac{\Delta x}{2}$ , wobei der Gitterpunkt  $(0, k)$  außerhalb des wärmeleitenden Körpers liegt. Die hier ermittelten Rechenwerte für die

Temperaturen  $T_0^k$  werden lediglich zur Erfüllung der Randbedingung benötigt. In diesem Fall ist die in Glg. (3.52) auftretende Ortsableitung durch den folgenden genaueren zentralen Differenzenquotienten

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{x_0+\frac{\Delta x}{2}} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\frac{1}{2}}^k = \frac{T_1^k - T_0^k}{\Delta x} \quad (3.54)$$

zu substituieren. Bei Vorgabe der Wärmestromdichte am rechten Rand, ist die Bedingung

$$\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{x=x_R} = \dot{q}(t) \quad (3.55)$$

zu erfüllen und das in Abb. 3.15 dargestellte Gitter zur Diskretisierung dieser Randbedingung zu verwenden.

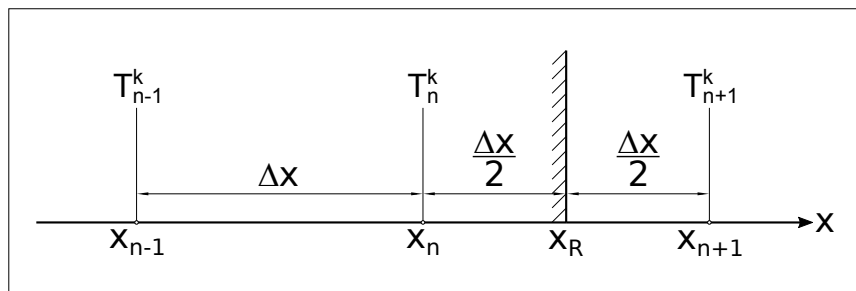


Abb. 3.15: Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am rechten Rand in der Mitte zwischen zwei Gitterlinien

Für den rechten Rand gilt  $x_R = x_n + \frac{\Delta x}{2}$ , auch hier liegt der Gitterpunkt  $(n+1, k)$  außerhalb des wärmeleitenden Körpers. Ebenso beim rechten Rand dienen die ermittelten Rechenwerte für die Temperaturen  $T_{n+1}^k$  allein zur Erfüllung der Randbedingung. In gleicher Weise ersetzt der genauere zentrale Differenzenquotient

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{x_n+\frac{\Delta x}{2}} = -\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{n+\frac{1}{2}}^k = -\frac{T_{n+1}^k - T_n^k}{\Delta x} = \frac{T_n^k - T_{n+1}^k}{\Delta x}. \quad (3.56)$$

die in Glg. (3.52) auftretende Ortsableitung.

Für adiabate Ränder, zu denen auch Symmetrieebenen im Körperinneren gehören, gilt  $\dot{q} = 0$ . Die Diskretisierung dieser Ränder erfolgt genauso wie bereits erläutert, nur dass in Glg. (3.53) bzw. Glg. (3.55) die Wärmestromdichte  $\dot{q}(t) = 0$  gesetzt wird.

- Wenn ein Körper am Rand seine Wärme an ein umgebendes Fluid mit der Temperatur  $T_U$  abgibt bzw. zwischen dem Körper und dem umgebenden Fluid der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  gegeben ist, muss auf dem Rand  $x = x_R$  die Wärmeübergangsbedingung

$$-\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{x=x_R} = \alpha \cdot (T - T_U) \quad (3.57)$$

gelten. Auch in diesem Fall ist die Ableitung in Richtung der äußeren Flächennormalen zu bilden. Bei der Diskretisierung der Wärmeübergangsbedingung wird das Gitter so gewählt, dass der Rand mit einer Gitterlinie zusammenfällt. Wenn am linken Rand ein Wärmeübergang vorliegt, wird ein Gitter wie in Abb. 3.16 dargestellt benötigt.

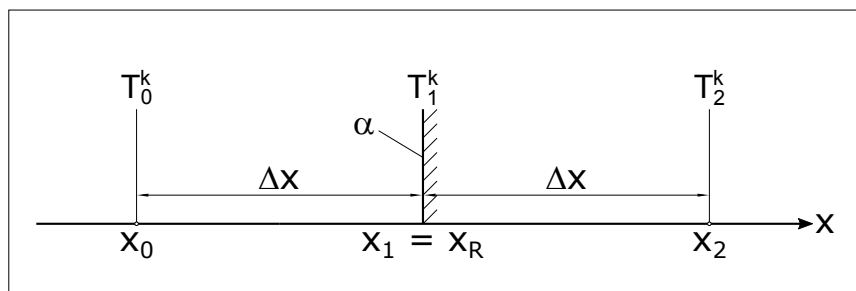


Abb. 3.16: Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am linken Rand auf einer Gitterlinie

Es ermöglicht die direkte Nutzung der auftretenden Randtemperatur  $T_0^k$  im Differenzenverfahren. Um die Ableitung  $\frac{\partial T}{\partial n}$  substituieren zu können, bedarf es dem Gitterpunkt  $(0, k)$  außerhalb des Körpers. Die in diesem Punkt ermittelte Temperatur  $T_0^k$  wird mithilfe der Randbedingung aus der Differenzgleichung eliminiert.

Da am linken Rand  $x_R = x_1$  die äußere Flächennormale in die negative  $x$ -Richtung zeigt, lautet die Wärmeübergangsbedingung

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (T - T_U). \quad (3.58)$$

Die Ableitung in der Bedingung wird durch den zentralen Differenzenquotienten

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1^k = \frac{T_2^k - T_0^k}{2 \cdot \Delta x} \quad (3.59)$$

ersetzt. Wenn nun am rechten Rand Konvektion vorliegt, ist das Gitter aus Abb. 3.17 zu verwenden.

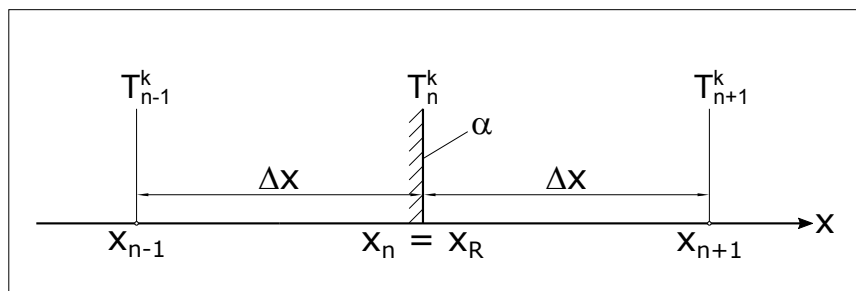


Abb. 3.17: Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am rechten Rand auf einer Gitterlinie

Auch in diesem Fall kann die vorhandene Randtemperatur  $T_n^k$  unmittelbar im Differenzenverfahren benutzt werden. Hier wird zum Ersatz der Ableitung  $\frac{\partial T}{\partial x}$  der Gitterpunkt  $(n+1, k)$  benötigt. Genauso wie vorher ist die Temperatur  $T_{n+1}^k$  mittels der Randbedingung aus der Differenzgleichung zu beseitigen.

Am rechten Rand  $x_R = x_n$  zeigt die äußere Flächennormale in die positive  $x$ -Richtung. Somit gilt für die benötigte Wärmeübergangsbedingung die Beziehung

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (T - T_U). \quad (3.60)$$

In gleicher Weise wie zuvor wird die Ableitung der Wärmeübergangsbedingung durch den zentralen Differenzenquotienten

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_n^k = \frac{T_{n+1}^k - T_{n-1}^k}{2 \cdot \Delta x} \quad (3.61)$$

substituiert.

- Wenn zusätzlich zur Konvektion noch Wärmestrahlung mitzuberechnen ist, erfolgt die Ermittlung der Randbedingung ähnlich der Konvektion. Der Unterschied besteht nur in der additiven Ergänzung der Wärmestromdichte der Strahlung  $\dot{q}_{Str}$  zu jener der Konvektion. Die Gleichung dieser Randbedingung lautet

$$-\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{x=x_R} = \alpha \cdot (T - T_U) + \dot{q}_{Str}. \quad (3.62)$$

Bei der Wahl eines Gitters mit Gitterlinien außerhalb des zu untersuchenden Körpers können die berechneten Temperaturen an diesen Gitterlinien zu physikalisch nicht sinnvollen Werten führen. Da diese Temperaturwerte nicht direkt für weitere Berechnungen verwendet werden, haben sie keinen unmittelbaren Einfluss auf das Differenzenverfahren. In Abb. 3.18 ist der Grund für die Entstehung der physikalisch falschen Werte graphisch dargestellt. Wenn die gewählte Maschenweite  $\Delta x$  des Gitters größer ist als die thermische Grenzschichtdicke  $\delta_T$  können für die außerhalb liegenden Gitterlinien Temperaturwerte unterhalb der Umgebungstemperatur  $T_U$  des vom Körper umgebenen Fluids entstehen.

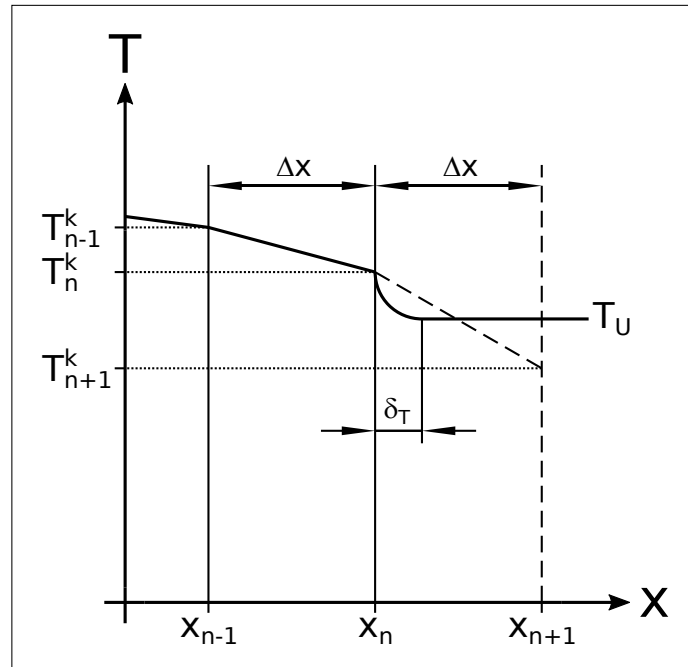


Abb. 3.18: Außerhalb des Körpers liegende Gitterlinien

### 3.4.3 Stabilitätsbedingung

Die meisten Differenzgleichungen werden bereits bei sehr kleinen Anfangs- und Rundungsfehlern beim Fortschreiten der Rechnung mit wachsendem Betrag numerisch instabil und die entstehenden Ergebnisse sind gänzlich unbrauchbar. Generell ist ein Differenzenverfahren nur dann stabil, wenn Fehler im Verlauf der Rechnung kleiner werden und ihr Einfluss abklingt. Großteils sind explizite Differenzenverfahren nur für bestimmte Schritt- bzw. Maschenweiten stabil. Allgemein gilt für die Stabilität von expliziten Differenzgleichungen die Bedingung, dass alle Koeffizienten der Gleichung größer oder gleich null sein müssen. Da meistens die Maschenweite in x-Richtung  $\Delta x$  bedingt durch die Wahl der Schalenanzahl  $n$  gegeben ist, darf die Maschenweite in t-Richtung  $\Delta t$  nicht beliebig groß gewählt werden [1].

Für die Koeffizienten der Glg. (3.52) müssen folgende Bedingungen gelten:

- Koeffizienten von  $T_{i-1}^k$

$$\begin{aligned} M &\geq 0 \\ \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} &\geq 0 \\ \Delta t &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.63}$$

- Koeffizienten von  $T_i^k$

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cdot M &\geq 0 \\ \frac{1}{2} &\geq M \\ \frac{1}{2} &\geq \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \\ \frac{\Delta x^2}{2 \cdot a} &\geq \Delta t \end{aligned} \tag{3.64}$$

- Koeffizienten von  $T_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} M &\geq 0 \\ \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} &\geq 0 \\ \Delta t &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Somit gilt für die Zeit-Schrittweite die Bedingung

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2 \cdot a}. \quad (3.66)$$

## 4 An- und Vorgaben

Im nachfolgenden Kapitel werden alle für die Berechnung des entwickelten Modells notwendigen Geometrie- und Materialparameter erläutert.

### 4.1 Geometrie- und Eingabeparameter

Mit dem zu erstellenden Berechnungsmodell in MS Excel sollen die Eingabeparameter in einem möglichst großen Bereich flexibel variiert werden können. Dabei darf die Stabilität des im Berechnungsmodell angewandten expliziten Differenzenverfahrens nicht verloren gehen. Daher wurden, für die in Abb. 1.1 dargestellte Skizze der Anlage bzw. des FB, zwei sinnvolle Bereiche (Bereich A und Bereich B) zur Variation der Abmessungen der Anlagengeometrie festgelegt, wobei der Hauptparameter der Anlagenradius  $r_2$  ist. Den Bereich A stellen die in Tab. 4.1 aufgelisteten Zahlenwerte dar.

Abmessungen	Wertebereiche
Anlagenradius $r_2$	$r_{2,A,min} = 2 \text{ m}$ bis $r_{2,A,max} = 3,25 \text{ m}$
Höhe der wassergekühlten Wand $h_4$	$h_{4,A,min} = 0,75 \text{ m}$ bis $h_{4,A,max} = 1,75 \text{ m}$

Tab. 4.1: Abmessungen der Anlagengeometrie für den Bereich A

Für den Bereich B wurden die Zahlenwerte von Tab. 4.2 gewählt.

Abmessungen	Wertebereiche
Anlagenradius $r_2$	$r_{2,B,min} = 3,25 \text{ m}$ bis $r_{2,B,max} = 5 \text{ m}$
Höhe der wassergekühlten Wand $h_4$	$h_{4,B,min} = 1 \text{ m}$ bis $h_{4,B,max} = 3 \text{ m}$

Tab. 4.2: Abmessungen der Anlagengeometrie für den Bereich B

Der Tab. 4.3 können die Zahlenwerte der allgemeinen Abmessungen der Anlagengeometrie entnommen werden. Diese gelten sowohl für den Bereich A als auch für den Bereich B der Anlagengeometrie.

Abmessungen	Wertebereiche
Drehtellerdurchmesser $d_{Dt}$	$d_{Dt,min} = 0,5 \text{ m}$ bis $d_{Dt,max} = 1 \text{ m}$
Höhe der Schlitzbleche $h_3$	1 m
Winkel der wassergekühlten Wand $\alpha_4$	$\alpha_{4,min} = 45^\circ$ bis $\alpha_{4,max} = 60^\circ$

Tab. 4.3: Allgemeine Abmessungen der Anlagengeometrie

Bis auf die Drehzahl des Drehtellers  $n_{Dt}$  können die Bereiche der Eingabeparameter der Prozessgrößen beliebige sinnvolle Werte annehmen. Diese Größen beeinflussen die Stabilität des expliziten Differenzenverfahrens nicht unmittelbar (vgl. Stabilitätsbedingungen in Anhang A). Hingegen die Drehzahl des Drehtellers hat sehr wohl Einfluss auf die Maschenweite in t-Richtung  $\Delta t$ . Diese kann in dem Wertebereich von  $700 - 1500 \frac{1}{\text{min}}$  willkürlich variiert werden.

In der prozesstechnologische Analyse in Kap. 8 werden die Zahlenwerte aus Tab. 4.4 für die Wertebereiche der Prozessgrößen verwendet.

Prozessgröße	Wertebereich
Luft Eintrittstemperatur $\vartheta_{L, \text{ein}}$	$20^\circ\text{C}$
Gesamtluftvolumenstrom bei Normbedingungen $\dot{V}_{L, \text{ges}, N}$	$120\,000 - 170\,000 \frac{\text{Nm}^3}{\text{h}}$
Schlacken anfangstemperatur $\vartheta_{S, 0}$	$1350 - 1450^\circ\text{C}$
Schlackenmassenstrom $\dot{m}_S$	$750 - 1000 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$
Drehzahl des Drehtellers $n_{Dt}$	$900 - 1200 \frac{1}{\text{min}}$
Prozentsatz des Gesamtluftvolumenstroms durch die Wirbelschicht $p_{L, \text{ges}, WS}$	$50 - 70\%$

Tab. 4.4: Eingabeparameter der Prozessgrößen

Die Fa. Primetals hat darauf hingewiesen, dass die vom Drehteller aufgeteilten Schlackenpartikel eine geringere Geschwindigkeit  $v_S$  als die Umfangsgeschwindigkeit des Drehtellers besitzen. Die Beziehung

$$v_S = 0,8 \cdot d_{Dt} \cdot \pi \cdot n_{Dt} \quad (4.1)$$

spiegelt laut Primetals die Fluggeschwindigkeit der einzelnen Partikel sehr gut wider.

## 4.2 Hochofenschlacke

Für Schüttgüter wie erstarrte Hochofenschlacke ist neben den Materialparametern des einzelnen Schlackenpartikels auch die Korngrößenverteilung für die Modellbildung unerlässlich.

### 4.2.1 Stoffwerte der Schlacke

Bei der Erstellung des Berechnungsmodells in MS Excel werden die vom Institut für Baustoff-Forschung (FEhS) ermittelten Stoffwerte für die in der VASL erzeugten HOS verwendet. Diese Stoffwerte sind temperaturabhängig und gelten streng genommen nur bei einem Umgebungsdruck  $p_U$  von rund 1 bar. Für bestimmte physikalische Größen der HOS wurden vom FEhS nur sehr wenige Werte ermittelt. Um dennoch vernünftige temperaturabhängige Funktionen für die jeweiligen physikalischen Größen zu erhalten, wurden in Rücksprache mit der Fa. Primetals einige Annahmen getroffen. Diese werden sich in den nachfolgenden Funktionen für die Dichte  $\rho_S(\vartheta)$ , die spezifische Wärmekapazität  $c_{pS}(\vartheta)$ , die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_S(\vartheta)$  und den Emissionsgrad  $\epsilon_S(\vartheta)$  widerspiegeln.

Unter der Erweichungstemperatur  $\vartheta_E$  von 991 °C liegt die HOS in fester Form vor. Darüber beginnt sie zu schmelzen und ist ab der Fließtemperatur  $\vartheta_F$  von 1262 °C vollkommen flüssig. Weiters gilt für die HOS, dass die Erstarrungs- oder Schmelzenthalpie vernachlässigt werden kann [2].

In Abb. 4.1 ist die Dichte  $\rho_S$  als Funktion von der Temperatur  $\vartheta$  abgebildet. Bis zur Erweichungstemperatur, im festen Bereich, ist die Dichte konstant und ihr Wert beträgt  $2670 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Im Temperaturintervall zwischen Erweichungs- und Fließtemperatur, im Schmelzbereich, steigt die Dichte linear auf einen Wert von  $2716 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  an. Auch nach der Fließtemperatur, im flüssigen Bereich, nimmt die Dichte linear zu, sodass ihr Wert bei einer Temperatur von 1600 °C auf  $2750 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  ansteigt. Die sich ergebende Funktion für die Dichte der HOS zeigt eine Anomalie, d.h. die Dichte erhöht sich mit steigender Temperatur, was bspw. auch bei Wasser im Temperaturbereich von 0 – 4 °C der Fall ist.

Da die Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur eher gering ist, wurde zur Vereinfachung für die weiteren Berechnungen in Rücksprache mit der Fa. Primetals ein

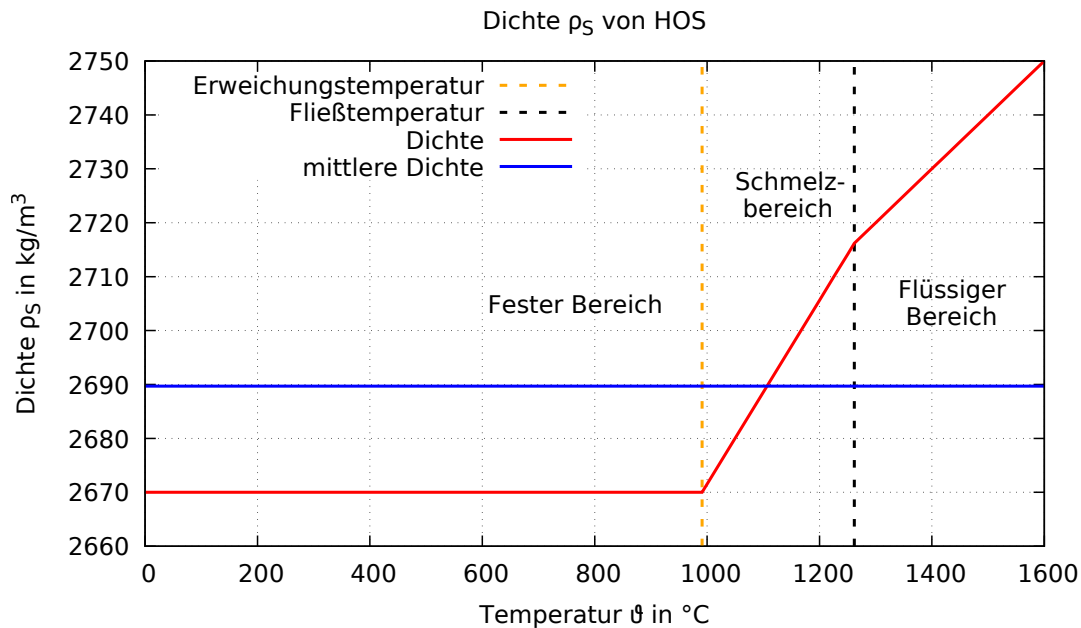


Abb. 4.1: Dichte von HOS

konstanter Wert von  $2690 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  festgelegt. Dieser Wert ist das arithmetische Mittel aus den temperaturabhängigen Dichtewerten in  $50^\circ\text{C}$  – Schritten im Temperaturintervall von  $0 - 1600^\circ\text{C}$  ( $\rho_S(0^\circ\text{C}), \rho_S(50^\circ\text{C}), \dots, \rho_S(1600^\circ\text{C})$ ).

Die Abb. 4.2 zeigt die spezifische Wärmekapazität der Schlacke in Abhängigkeit von der Temperatur. Auch hier ist die spezifische Wärmekapazität bis zur Erweichungstemperatur mit dem Wert  $1132 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$  konstant. Im Temperaturintervall zwischen Erweichungs- und Fließtemperatur steigt die spezifische Wärmekapazität linear auf den Wert  $1194 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$  an. Ebenso nimmt sie nach der Fließtemperatur linear zu und bei einer Temperatur von  $1600^\circ\text{C}$  stellt sich der Wert  $1235 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$  ein.

Die Wärmeleitfähigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur ist in Abb. 4.3 für die HOS dargestellt. Bis zu einer Temperatur von  $800^\circ\text{C}$  ist der Verlauf mit dem Wert  $1,58 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$  konstant. Dann steigt die Funktion mäßig an und hat bei  $1100^\circ\text{C}$  ihr Maximum von  $2,15 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$  erreicht. Danach fällt sie leicht und bei einer Temperatur von  $1200^\circ\text{C}$  hat die Wärmeleitfähigkeit den Wert  $2,11 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$ . Der weitere Verlauf der Funktion ist stark fallend, sodass sich bei  $1400^\circ\text{C}$  ein Wert von  $0,23 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$  ergibt. Steigt die Temperatur weiter an, stellt sich ein konstanter Wert von  $0,20 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$  für die Wärmeleitfähigkeit ein.

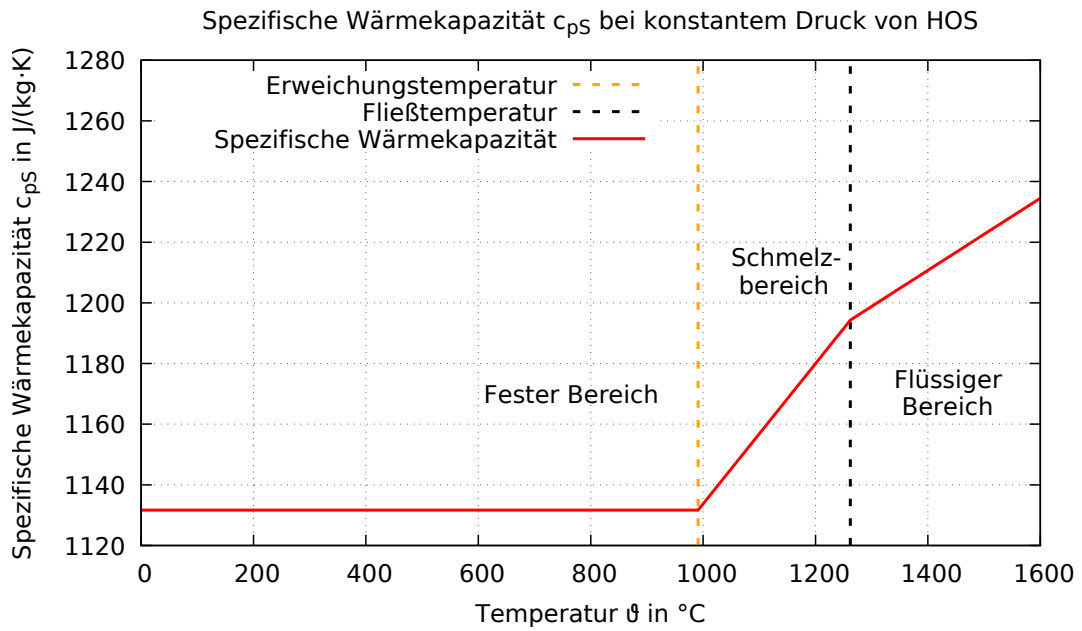


Abb. 4.2: Spezifische Wärmekapazität von HOS

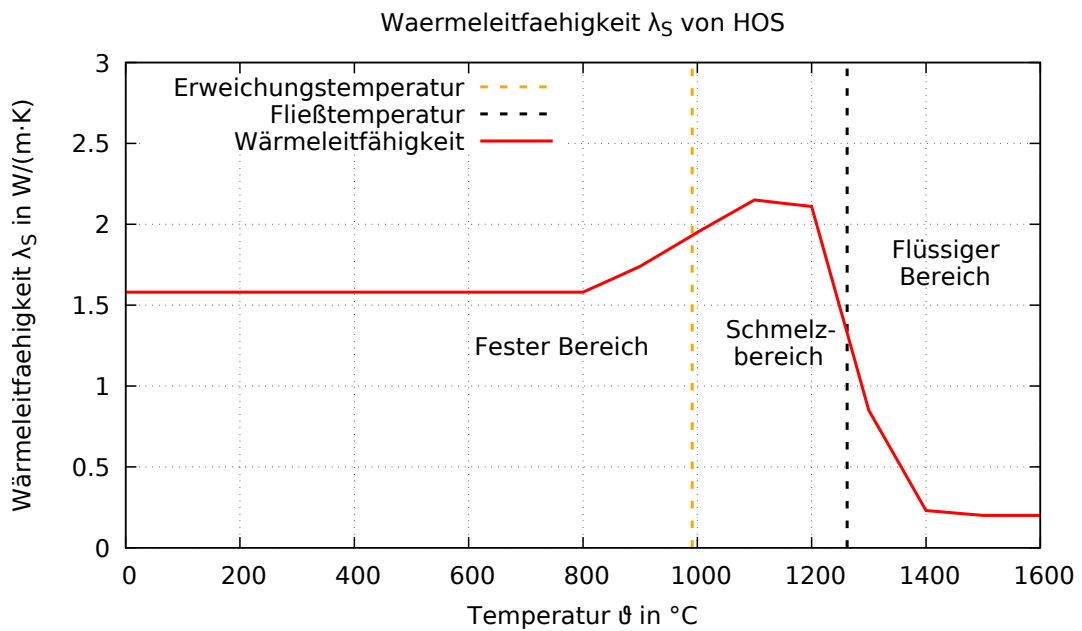


Abb. 4.3: Wärmeleitfähigkeit von HOS

In der Realität ist der Emissionsgrad von Schlacke stark temperaturabhängig. Jedoch sind noch keine genaueren temperaturabhängigen Funktionen für den Emissionsgrad von HOS vorhanden bzw. in der Literatur findbar. Deshalb wurde für den in Abb. 4.4 dargestellten Emissionsgrad von HOS, in Absprache mit der Fa. Primetals, ein konstanter Wert von 0,85 festgelegt.

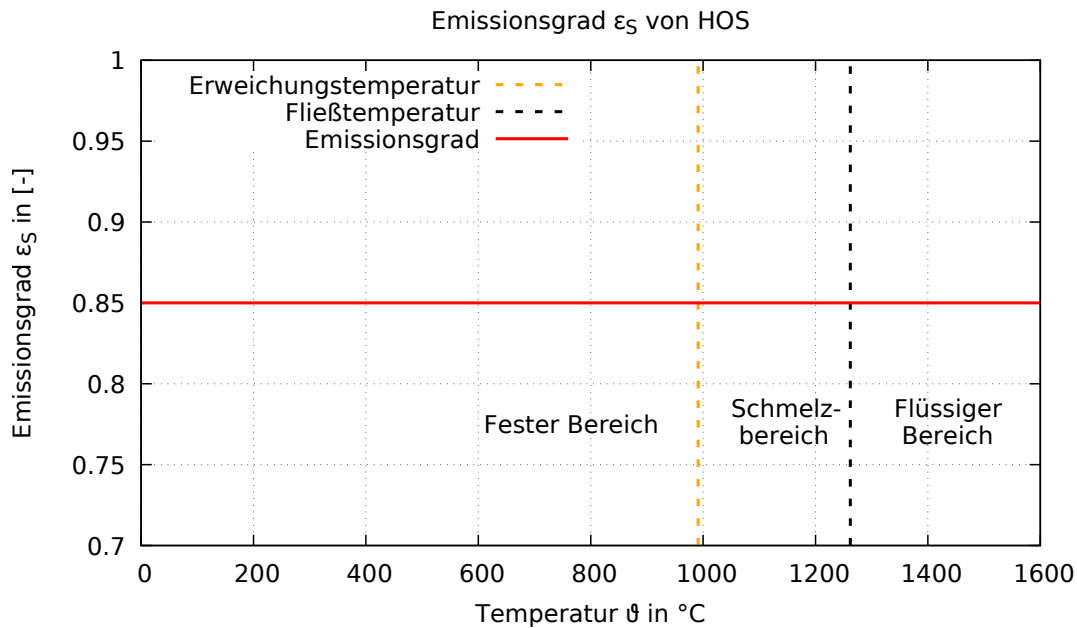


Abb. 4.4: Emissionsgrad von HOS

Für die Berechnung des Wärmeeindringkoeffizienten von HOS  $b_S$  gilt der Ausdruck

$$b_S = \sqrt{\lambda_S \cdot c_{pS} \cdot \varrho_S}. \quad (4.2)$$

#### 4.2.2 Korngrößenverteilung der Schlackenpartikel

Nach Rücksprache mit der Fa. Primetals wird zur Aufstellung der in Kap. 8 benötigten Gesamtenergiebilanz die in Abb. 4.5 dargestellte Korngrößenverteilung verwendet. In der Graphik sind die kumulierten relativen Häufigkeiten  $h_{KRH}$  der Schlackenpartikel über den unterschiedlichen Partikeldurchmessern  $d_1$  aufgetragen.

In Absprache mit der Fa. Primetals wird die Analyse in Kap. 8 mit insgesamt 4

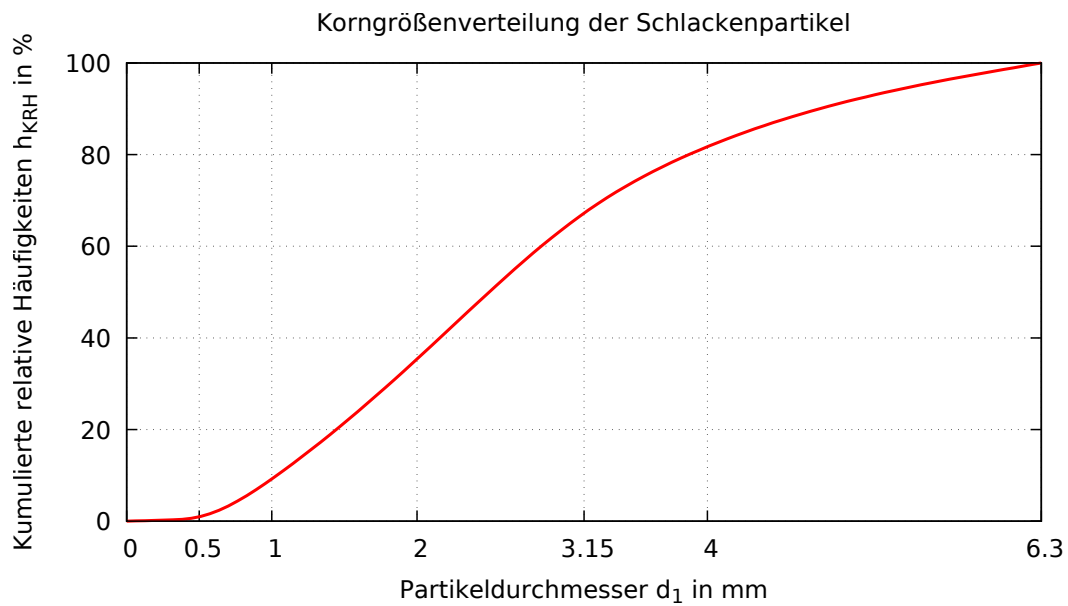


Abb. 4.5: Korngrößenverteilung der Schlackenpartikel

verschiedenen Partikeldurchmessern durchgeführt. Diese sind der Tab. 4.5 zu entnehmen.

Partikel	1	2	3	4
$d_{1,i}$ in mm	0,5	1	2	4

Tab. 4.5: Partikelgrößen

Um die Gesamtenergiebilanz aufstellen zu können, werden die dafür nötigen Prozentsätze  $p(d_{1,i})$  der 4 verschiedenen Partikeldurchmesser folgendermaßen ermittelt:

$$\begin{aligned}
 p(d_{1,1}) &= h_{RH}(0,75 \text{ mm}) - h_{RH}(0 \text{ mm}) = 5,1 \% \\
 p(d_{1,2}) &= h_{RH}(1,5 \text{ mm}) - h_{RH}(0,75 \text{ mm}) = 17,2 \% \\
 p(d_{1,3}) &= h_{RH}(3 \text{ mm}) - h_{RH}(1,5 \text{ mm}) = 40,8 \% \\
 p(d_{1,4}) &= h_{RH}(6,3 \text{ mm}) - h_{RH}(3 \text{ mm}) = 36,9 \%
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

### 4.3 Stoffwerte der trockenen Luft

Für das in den FB einströmende Medium wird trockene Luft angenommen. Die benötigten Stoffwerte zur Erstellung des Berechnungsmodells in MS Excel wurden aus [19] entnommen. Diese sind temperaturabhängig und gelten nur bei einem Umgebungsdruck  $p_U$  von rund 1 bar. Mit den Daten wurde in Excel eine Regressionsanalyse für den Temperaturbereich von 273,15 – 1273,15 K durchgeführt, um Trendlinien für die jeweiligen physikalischen Größen zu erhalten. Diese Trendlinien werden als Polynomfunktionen 6. Grades in Excel implementiert.

Die Werte der Dichte von Luft  $\varrho_L(T)$  können mittels der Funktionsgleichung

$$\varrho_L(T) = \sum_{i=0}^6 c_{\varrho_L,i} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot \text{K}^i} \cdot T^i \quad (4.4)$$

berechnet werden. Jene der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck  $c_{pL}(T)$  mit der Beziehung

$$c_{pL}(T) = \sum_{i=0}^6 c_{c_{pL},i} \cdot \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}^{i+1}} \cdot T^i. \quad (4.5)$$

Anhand der Polynomfunktion

$$\lambda_L(T) = \sum_{i=0}^6 c_{\lambda_L,i} \cdot \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}^i} \cdot T^i \quad (4.6)$$

lassen sich die Werte der Wärmeleitfähigkeit von Luft  $\lambda_L(T)$  ermitteln. Die Bestimmung der dynamischen Viskosität von Luft  $\eta_L(T)$  erfolgt mit der Gleichung

$$\eta_L(T) = \sum_{i=0}^6 c_{\eta_L,i} \cdot \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{K}^i} \cdot T^i. \quad (4.7)$$

Die Koeffizienten der einzelnen Regressionspolynome für die Stoffwerte von trockener Luft sind der Tab. 4.6 zu entnehmen.

Koeffizienten	$\varrho_L (T)$	$c_{pL} (T)$	$\lambda_L (T)$	$\eta_L (T)$
$c_0$	4,298	1010,685	$-1,058 \cdot 10^{-3}$	$-2,663 \cdot 10^{-7}$
$c_1$	$-2,157 \cdot 10^{-2}$	$8,783 \cdot 10^{-2}$	$1,155 \cdot 10^{-4}$	$8,308 \cdot 10^{-8}$
$c_2$	$5,712 \cdot 10^{-5}$	$-1,158 \cdot 10^{-3}$	$-1,086 \cdot 10^{-7}$	$-9,271 \cdot 10^{-11}$
$c_3$	$-8,638 \cdot 10^{-8}$	$3,999 \cdot 10^{-6}$	$1,177 \cdot 10^{-10}$	$1,022 \cdot 10^{-13}$
$c_4$	$7,486 \cdot 10^{-11}$	$-5,019 \cdot 10^{-9}$	$-8,478 \cdot 10^{-14}$	$-7,498 \cdot 10^{-17}$
$c_5$	$-3,456 \cdot 10^{-14}$	$2,826 \cdot 10^{-12}$	$3,526 \cdot 10^{-17}$	$3,172 \cdot 10^{-20}$
$c_6$	$6,581 \cdot 10^{-18}$	$-6,061 \cdot 10^{-16}$	$-6,323 \cdot 10^{-21}$	$-5,795 \cdot 10^{-24}$

Tab. 4.6: Koeffizienten der Regressionspolynome für die Stoffwerte von trockener Luft

## 4.4 Wassergekühlte Wand

Die Fa. Primetals hat auf Basis von Messergebnissen aus Anlagentests eine Funktion zur Berechnung des abzuführenden Wärmestroms an der wassergekühlten Wand  $\dot{Q}_W$  in Abhängigkeit vom zugeführten Schlackenmassenstrom  $\dot{m}_S$  aufgestellt. Diese lautet wie folgt

$$\dot{Q}_W (\dot{m}_S) = 0,0036207 \frac{\text{MW} \cdot \text{min}}{\text{kg}} \cdot \dot{m}_S - 0,1139 \text{ MW}. \quad (4.8)$$

Unter Verwendung der Funktionsgleichung für  $\dot{Q}_W$  und der Durchschnittsenthalpie eines Schlackenpartikels nach der „Phase 1“  $\bar{h}_{S,1}$  ist es möglich die Durchschnittsenthalpie eines Schlackenpartikels nach der „Phase 2“  $\bar{h}_{S,2}$  mit der Beziehung

$$\bar{h}_{S,2} = \bar{h}_{S,1} - \frac{\dot{Q}_W (\dot{m}_S)}{\dot{m}_S} \quad (4.9)$$

zu berechnen. Die prinzipielle Vorhergehensweise zur Ermittlung der Durchschnittsenthalpien eines Schlackenpartikels  $\bar{h}_S$  ist bei der Berechnung von  $\bar{h}_{S,3}$  in Kap. 7.1.1 erläutert. Mit dem in Kap. 4.2.1 beschriebenen Zusammenhang für die spezifische Wärmekapazität von HOS und der Glg. (7.1) kann die Durchschnittstemperatur eines Schlackenpartikels nach der „Phase 2“  $\bar{\vartheta}_{S,2}$  bestimmt werden. Da diese Temperatur den Endwert aus den Berechnungen für die „Phase 2“ darstellt, ist es möglich in MS Excel iterativ die Zeit der „Phase 2“ oder Kontaktzeit  $t_2$  eines Schlackenpartikels mit

der wassergekühlten Wand bzw. die jeweiligen Temperaturen der einzelnen Schalen eines Partikels zu bestimmen.

Bei der aus Stahl bestehenden wassergekühlten Wand werden für die Berechnungen in MS Excel die in Tab. 4.7 aufgelisteten Stoffwerte angenommen.

Stoffeigenschaften	Werte
Dichte der Wand $\rho_W$	$7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Spezifische Wärmekapazität der Wand $c_W$	$500 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$
Wärmeleitfähigkeit der Wand $\lambda_W$	$50 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$

Tab. 4.7: Stoffwerte der Wand

Die Berechnung des Wärmeeindringkoeffizienten der Wand  $b_W$  erfolgt mit der Beziehung

$$b_W = \sqrt{\lambda_W \cdot c_W \cdot \rho_W}. \quad (4.10)$$

## 5 Anwendung des Differenzenverfahrens

Im folgenden Kapitel wird das explizite Differenzenverfahren auf den Abkühlvorgang eines kugelförmigen Schlackenpartikeles angewendet. In den nachstehenden Berechnungen der Schlackenpartikel wird stets eine perfekte Kugelform der einzelnen Partikel angenommen. Eine Erläuterung der jeweiligen „Phasen“ des Abkühlvorgangs eines Partikels ist bereits in Kap. 1.1 durchgeführt worden.

Für die Berechnungen werden die nachfolgend angeführten Vereinfachungen getroffen:

- In „Phase 1“ fliegt das Partikel bereits vom Mittelpunkt des Drehtellers weg und nicht erst vom Tellerrand.
- Die Berechnungen der „Phase 2“ erfolgen unter Verwendung des Modells aus Abb. 5.1. Im Modell wird für den Aufprall an der Wand die Vereinfachung getroffen, dass die Partikel ihre Kugelform beibehalten und sich nicht verformen. Des Weiteren wird der Einfachheit halber angenommen, dass ein einzelnes Partikel von der Wand umschlossen wird. D. h. der durch Wärmeleitung abgehende Wärmestrom wirkt auf die ganze Oberfläche eines einzelnen Partikels und Konvektion bzw. Strahlung werden vernachlässigt.

### 5.1 Herleitung der expliziten Differenzengleichung

Da die zu untersuchenden Partikel kugelförmig sind, genügt die Annahme von geometrisch eindimensionalem Wärmefluss in radialer Richtung  $r$ . Die Differentialgleichung in Kugelkoordinaten

$$c_{pS}(T) \cdot \rho_S \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \lambda_S(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (5.1)$$

beschreibt das Temperaturfeld unter Berücksichtigung temperaturabhängiger Stoffwerte [1]. Aus den bereits in Kap. 4.2.1 erläuterten Gründen ist die Dichte der Schlacke eine Konstante.

Um die explizite Differenzengleichung zu bestimmen wird zunächst die rechte Seite der Differentialgleichung für die Wärmeleitung diskretisiert. Zur Vereinfachung der

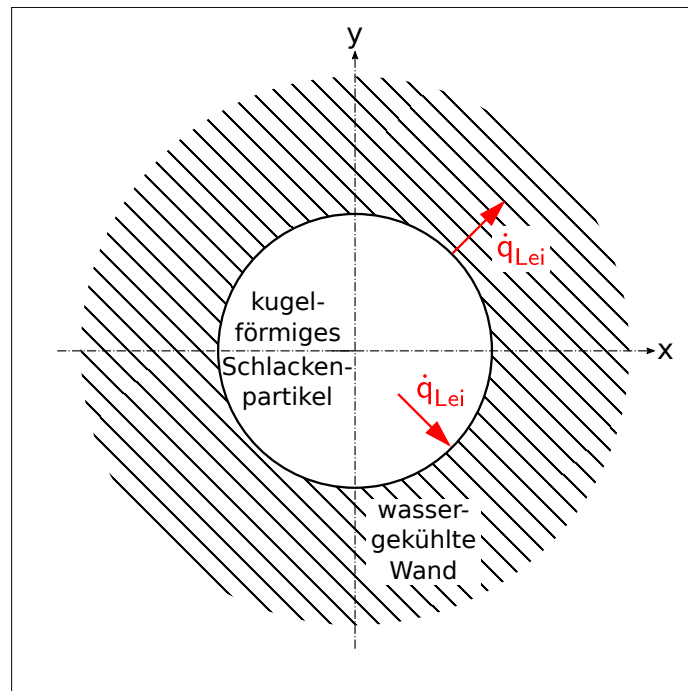


Abb. 5.1: Modell zur Berechnung der Wärmeleitung des kugelförmigen Schlackenpartikels in „Phase 2“

nachfolgenden mathematischen Operationen ist die Einführung der Funktion  $f(T)$  mit der Beziehung

$$f(T) = r^2 \cdot \lambda_S(T) \quad (5.2)$$

vorteilhaft [1]. Unter Benutzung des selbstadjungierten Differentialoperators  $D$  erfolgt die Bildung der Differenzgleichung. Dieser lässt sich durch die Beziehung

$$D = \frac{\partial}{\partial r} \left( f \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (5.3)$$

beschreiben [1]. Zur Diskretisierung des selbstadjungierten Differentialoperators wird das in Abb. 5.2 dargestellte äquidistante Gitter verwendet. Mit Hilfe der zentralen Differenzenquotienten entsteht aus dem selbstadjungierten Differentialoperator zunächst der Zusammenhang

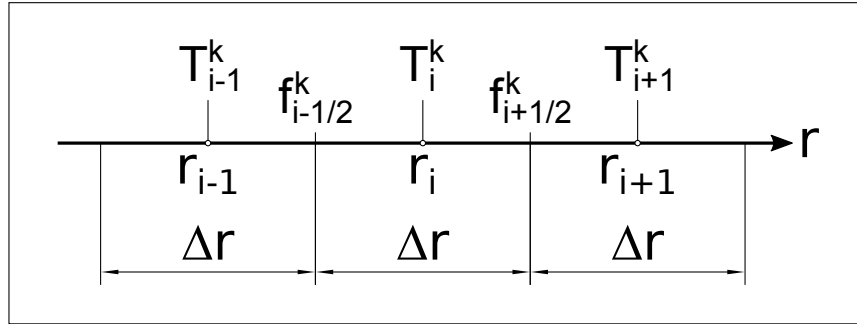


Abb. 5.2: Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung des selbstadjungierten Differentialoperators für das kugelförmige Schlackenpartikel

$$D_i^k = \frac{1}{\Delta r} \cdot \left[ \left( f \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^k - \left( f \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^k \right]. \quad (5.4)$$

Wenn die ersten Ableitungen durch zentrale Differenzenquotienten ersetzt werden ergibt sich der Ausdruck

$$D_i^k = \frac{1}{\Delta r^2} \cdot \left[ f_{i+\frac{1}{2}}^k \cdot (T_{i+1}^k - T_i^k) - f_{i-\frac{1}{2}}^k \cdot (T_i^k - T_{i-1}^k) \right]. \quad (5.5)$$

Für die diskretisierte Funktion gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} f_{i\pm\frac{1}{2}}^k &= \lambda_S(T_{i\pm\frac{1}{2}}^k) \cdot \left( r_i \pm \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \\ &= \lambda_{S_{i\pm\frac{1}{2}}^k} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot r_i \pm \Delta r)^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_{S_{i\pm\frac{1}{2}}^k}$  bei den Temperaturen  $T_{i\pm\frac{1}{2}}^k$  werden unter Zuhilfenahme des arithmetischen Mittels der Wärmeleitfähigkeiten bei den bekannten Temperaturen  $T_i^k$  und  $T_{i+1}^k$  bzw.  $T_i^k$  und  $T_{i-1}^k$  mit dem Zusammenhang

$$\lambda_{S_{i\pm\frac{1}{2}}^k} = \frac{\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i\pm\frac{1}{2}}^k}}{2} \quad (5.7)$$

gebildet. Durch einsetzen der Gleichung für das arithmetische Mittel der Wärmeleitfähigkeiten in die Beziehung für die diskretisierte Funktion entsteht folgender Ausdruck

$$f_{i\pm\frac{1}{2}}^k = \frac{\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i\pm 1}^k}}{8} \cdot (2 \cdot r_i \pm \Delta r)^2. \quad (5.8)$$

Wird dieser in den diskretisierten selbstadjungierten Differentialoperator eingesetzt ergibt sich der Zusammenhang

$$D_i^k = \frac{1}{8 \cdot \Delta r^2} \cdot \left[ (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i + \Delta r)^2 \cdot (T_{i+1}^k - T_i^k) - (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i-1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i - \Delta r)^2 \cdot (T_i^k - T_{i-1}^k) \right]. \quad (5.9)$$

Damit die explizite Differenzgleichung vollständig bestimmt werden kann, gilt es nun die linke Seite der Differentialgleichung für die Wärmeleitung zu diskretisieren. Die Zeitableitung der Temperatur lässt sich durch den vorderen Differenzenquotienten

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^k = \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \quad (5.10)$$

ersetzen. Die ursprünglich diskretisierte explizite Differenzgleichung zur Berechnung der Wärmeleitung lautet

$$c_p S_i^k \cdot \varrho S_i^k \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i^k = \frac{1}{r_i^2} \cdot D_i^k. \quad (5.11)$$

Nun entsteht durch einsetzen des diskretisierten selbstadjungierten Differentialoperators und des vorderen Differenzenquotienten folgender Ausdruck

$$c_p S_i^k \cdot \varrho S_i^k \cdot \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{1}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_i)^2} \cdot \left[ (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i + \Delta r)^2 \cdot T_{i+1}^k - (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i + \Delta r)^2 \cdot T_i^k - (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i-1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i - \Delta r)^2 \cdot T_i^k + (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i-1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i - \Delta r)^2 \cdot T_{i-1}^k \right]. \quad (5.12)$$

Durch mathematisches umformen nach  $T_i^{k+1}$  ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}
T_i^{k+1} &= \frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_i)^2 \cdot c_{pS_i^k} \cdot \varrho_{S_i^k}} \\
&\cdot \left[ (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i + \Delta r)^2 \cdot T_{i+1}^k \right. \\
&- (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i + \Delta r)^2 \cdot T_i^k \\
&- (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i-1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i - \Delta r)^2 \cdot T_i^k \\
&\left. + (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i-1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i - \Delta r)^2 \cdot T_{i-1}^k \right] + T_i^k.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Zur Vereinfachung dieser Beziehung wird der fiktive Modul  $\tilde{M}$  eingeführt. Für diesen gilt der Zusammenhang

$$\tilde{M}_i^k = \frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_i)^2 \cdot c_{pS_i^k} \cdot \varrho_{S_i^k}}. \tag{5.14}$$

Durch einsetzen des fiktiven Moduls entsteht folgende explizite Differenzgleichung

$$\begin{aligned}
T_i^{k+1} &= \tilde{M}_i^k \cdot (\lambda_{S_{i-1}^k} + \lambda_{S_i^k}) \cdot (2 \cdot r_i - \Delta r)^2 \cdot T_{i-1}^k \\
&+ \left\{ 1 - \tilde{M}_i^k \cdot [(\lambda_{S_{i-1}^k} + \lambda_{S_i^k}) \cdot (2 \cdot r_i - \Delta r)^2 \right. \\
&+ (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i + \Delta r)^2] \left. \right\} \cdot T_i^k \\
&+ \tilde{M}_i^k \cdot (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i + \Delta r)^2 \cdot T_{i+1}^k.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Mit dieser kann die Wärmeleitung im Körperinneren des Schlackenpartikels berechnet werden.

## 5.2 Bedingungen für die „Phase 1“

Zu Beginn des Abkühlvorgangs ist an jeder Stelle des Partikels die Temperatur gleich groß. Bestimmt durch die Schlackenanstangstemperatur  $T_{S,0}$  gilt für die **Anfangsbedingung** der Ausdruck

$$T(r, t = 0) = T_{S,0}. \tag{5.16}$$

Obwohl eine Kugel nur durch eine Oberfläche begrenzt ist liegen zwei örtliche **Randbedingungen** vor. Zusätzlich bildet die in Abb. 5.3 dargestellte Symmetrieebene im Körperinneren des kugelförmigen Schlackenpartikels den linken Rand. Ähnlich

einem adiabaten Rand gilt für diese Neumann-Randbedingung, dass  $\dot{q}_{Lei} = 0$  sein muss [1].

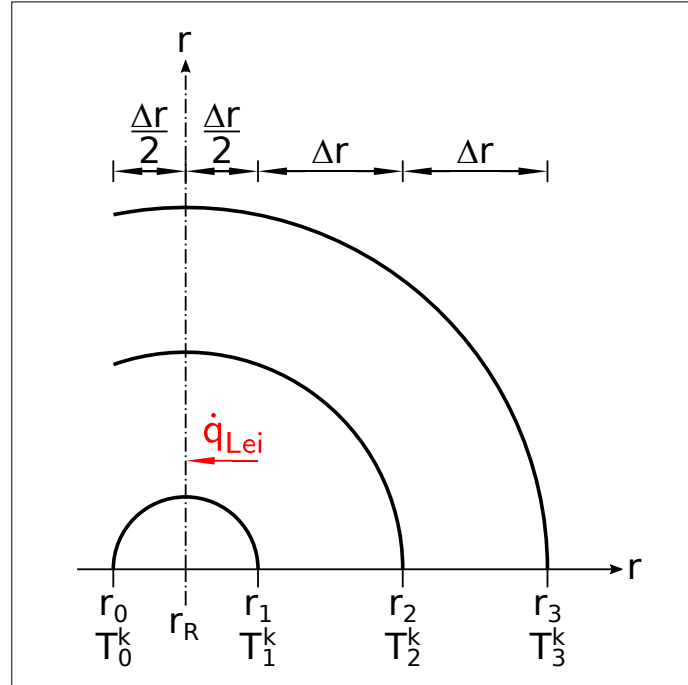


Abb. 5.3: Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am linken Rand für das kugelförmige Schlackenpartikel

Im Allgemeinen gilt bei gegebener Wärmestromdichte  $\dot{q}(t)$  am linken Rand die Bedingung

$$-\lambda_S \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{r=r_R} = \dot{q}(t). \quad (5.17)$$

Die auftretende Ortsableitung wird durch die Beziehung für den zentralen Differenzenquotienten

$$-\left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{r_0 + \frac{\Delta r}{2}} = \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{\frac{1}{2}}^k = \frac{T_1^k - T_0^k}{\Delta r}. \quad (5.18)$$

ersetzt. Durch einsetzen des Differenzenquotienten in die ursprüngliche Bedingung für den linken Rand und Diskretisierung der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_S$  bzw. der Wärmestromdichte  $\dot{q}$  entsteht folgender Zusammenhang

$$\lambda_{S\frac{1}{2}}^k \cdot \frac{T_1^k - T_0^k}{\Delta r} = \dot{q}_{\frac{1}{2}}^k. \quad (5.19)$$

Wie bereits vorher erwähnt muss für Symmetrieebenen im Körperinneren  $\dot{q}_{\frac{1}{2}}^k = \dot{q}_{Lei}(t_k) = 0$  gelten. Daraus ergibt sich für den linken Rand die Bedingung

$$T_0^k = T_1^k. \quad (5.20)$$

Nun wird diese Bedingung für  $i = 1$  in die Glg. (5.15) eingesetzt und es entsteht für  $r = r_1$  die Beziehung

$$\begin{aligned} T_1^{k+1} &= \tilde{M}_1^k \cdot (\lambda_{S_0}^k + \lambda_{S_1}^k) \cdot (2 \cdot r_1 - \Delta r)^2 \cdot T_1^k \\ &+ \left\{ 1 - \tilde{M}_1^k \cdot [(\lambda_{S_0}^k + \lambda_{S_1}^k) \cdot (2 \cdot r_1 - \Delta r)^2 \right. \\ &+ (\lambda_{S_1}^k + \lambda_{S_2}^k) \cdot (2 \cdot r_i + \Delta r)^2] \left. \right\} \cdot T_1^k \\ &+ \tilde{M}_1^k \cdot (\lambda_{S_1}^k + \lambda_{S_2}^k) \cdot (2 \cdot r_1 + \Delta r)^2 \cdot T_2^k. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Durch mathematisches Umformen wird aus der vorherigen Gleichung folgender Ausdruck

$$\begin{aligned} T_1^{k+1} &= \left[ 1 - \tilde{M}_1^k \cdot (\lambda_{S_1}^k + \lambda_{S_2}^k) \cdot (2 \cdot r_1 + \Delta r)^2 \right] \cdot T_1^k \\ &+ \tilde{M}_1^k \cdot (\lambda_{S_1}^k + \lambda_{S_2}^k) \cdot (2 \cdot r_1 + \Delta r)^2 \cdot T_2^k. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die in Abb. 5.4 ersichtliche zweite örtliche Randbedingung an der Kugeloberfläche des Schlackenpartikels ist eine um die Wärmestromdichte der Strahlung erweiterte Robin-Randbedingung. Für diese muss am rechten Rand die Bedingung  $\dot{q}_{Lei} = \dot{q}_{Kon} + \dot{q}_{Str}$  gelten. Damit lässt sich für den rechten Rand der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \lambda_S \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{r=r_R} &= \alpha \cdot (T_1 - T_{FB}) + \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_1 \cdot T_1^4 \\ &+ \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_2 \cdot T_2^4 + \epsilon_3 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_3 \cdot T_3^4 \\ &+ \epsilon_4 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_4 \cdot T_4^4 + \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_5 \cdot T_5^4 \end{aligned} \quad (5.23)$$

anschreiben. Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  für das überströmte kugelförmige Partikel wird mit den bereits in Kap. 3.2 angeführten Gleichungen bestimmt. Die Herleitung der fiktiven Sichtfaktoren  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_5$  erfolgt erst in Kap. 6.4. Mithilfe des

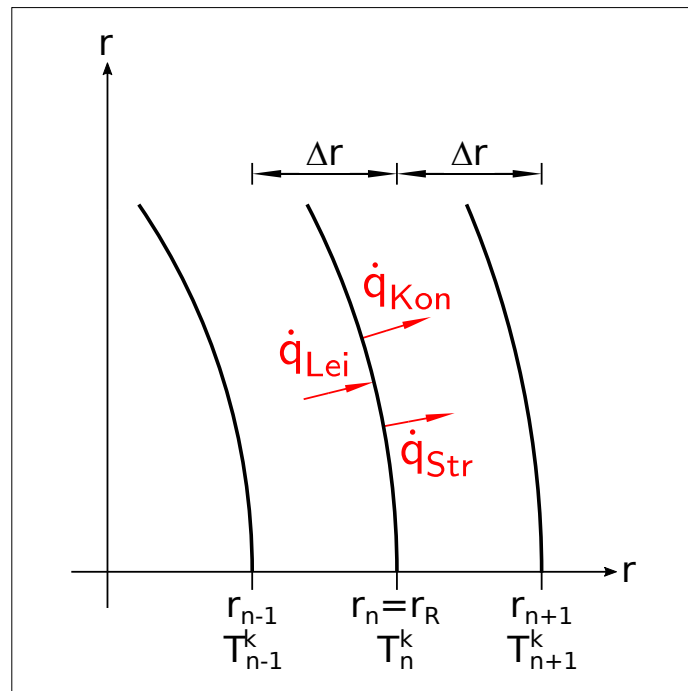


Abb. 5.4: Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am rechten Rand für das kugelförmige Schlackenpartikel

zentralen Differenzenquotienten ergibt sich für die Diskretisierung der Ortsableitung der rechten Randbedingung der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_n} = - \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_n^k = - \frac{T_{n+1}^k - T_{n-1}^k}{2 \cdot \Delta r}. \quad (5.24)$$

Dieser wird in die Glg. (5.23) eingesetzt und es entsteht folgender Zusammenhang

$$\begin{aligned} -\lambda_{S_n}^k \cdot \frac{T_{n+1}^k - T_{n-1}^k}{2 \cdot \Delta r} &= \alpha \cdot (T_n^k - T_{FB}) + \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_1^k \cdot (T_n^k)^4 \\ &+ \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_2^k \cdot T_2^4 + \epsilon_3 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_3^k \cdot T_3^4 \\ &+ \epsilon_4 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_4^k \cdot T_4^4 + \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_5^k \cdot T_5^4. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Durch mathematisches Umformen des vorherigen Zusammenhangs ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}
T_{n+1}^k = & T_{n-1}^k - \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \alpha}{\lambda_{S_n}^k} \cdot (T_n^k - T_{FB}) - \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_1^k}{\lambda_{S_n}^k} \cdot (T_n^k)^4 \\
& - \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_2^k}{\lambda_{S_n}^k} \cdot T_2^4 - \dots - \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_5^k}{\lambda_{S_n}^k} \cdot T_5^4.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Nun wird diese Bedingung in die Glg. (5.15) eingesetzt und es entsteht für  $r = r_n$  die Beziehung

$$\begin{aligned}
T_n^{k+1} = & \tilde{M}_n^k \cdot \left[ (\lambda_{S_{n-1}}^k + \lambda_{S_n}^k) \cdot (2 \cdot r_n - \Delta r)^2 \right. \\
& + (\lambda_{S_n}^k + \lambda_{S_{n+1}}^k) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \left. \right] \cdot T_{n-1}^k \\
& + \left\{ 1 - \tilde{M}_n^k \cdot \left[ (\lambda_{S_{n-1}}^k + \lambda_{S_n}^k) \cdot (2 \cdot r_n - \Delta r)^2 \right. \right. \\
& + (\lambda_{S_n}^k + \lambda_{S_{n+1}}^k) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \cdot \left. \left. \left( 1 + \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \alpha}{\lambda_{S_n}^k} \right) \right] \right\} \cdot T_n^k \\
& - \tilde{M}_n^k \cdot (\lambda_{S_n}^k + \lambda_{S_{n+1}}^k) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \cdot \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_1^k}{\lambda_{S_n}^k} \cdot (T_n^k)^4 \\
& + \tilde{M}_n^k \cdot (\lambda_{S_n}^k + \lambda_{S_{n+1}}^k) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \cdot \frac{2 \cdot \Delta r}{\lambda_{S_n}^k} \\
& \cdot (\alpha \cdot T_{FB} - \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_2^k \cdot T_2^4 - \epsilon_3 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_3^k \cdot T_3^4 \\
& - \epsilon_4 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_4^k \cdot T_4^4 - \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_5^k \cdot T_5^4).
\end{aligned} \tag{5.27}$$

In Kap. 3.4.3 wurde bereits erwähnt, dass für ein stabiles explizites Differenzenverfahren alle Koeffizienten einer expliziten Differenzgleichung größer oder gleich null sein müssen. Die Stabilitätsbedingungen für die Gleichungen (5.15), (5.22) und (5.27) sind in Anhang A angeführt.

### 5.3 Bedingungen für die „Phase 2“

Für die **Anfangsbedingung** des kugelförmigen Schlackenpartikels in „Phase 2“ wird die Temperaturverteilung über den einzelnen Schalen des Partikels nach der „Phase 1“ bzw. der Zeit  $t_1$  verwendet. Damit gilt für die Bedingung der Zusammenhang

$$T(r, t = 0) = T(r, t = t_1). \tag{5.28}$$

Genauso in „Phase 2“ existieren zwei örtliche **Randbedingungen** für das kugelförmige Schlackenpartikel. Am linken Rand in „Phase 2“ gilt die selbe örtliche Randbedingung wie für den linken Rand in „Phase 1“. Die Herleitung dieser Randbedingung wurde bereits in Kap. 5.2 ausführlich erläutert.

Bei der in Abb. 5.5 dargestellten zweiten örtlichen Randbedingung am rechten Rand des kugelförmigen Schlackenpartikels wird der Fall von zwei sich berührenden halbumendlichen Körpern angenommen.

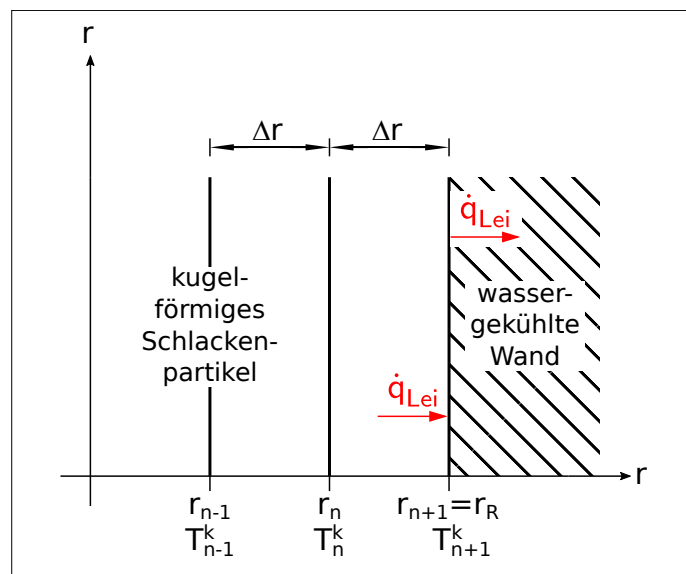


Abb. 5.5: Äquidistantes Gitter zur Diskretisierung der Randbedingung am rechten Rand für das kugelförmige Schlackenpartikel in „Phase 2“

Der sich einstellende Temperaturverlauf in unmittelbarer Nähe der Grenzfläche zwischen dem kugelförmigen Schlackenpartikel und der wassergekühlten Wand ist in Abb. 5.6 dargestellt. In Kap. 3.1.2.2 sind die theoretischen Grundlagen zu dieser Problematik bereits erläutert worden.

Die folgenden Gleichungen beschreiben die gültigen mathematischen Zusammenhänge für diese Randbedingung. Im Allgemeinen muss für die Randtemperatur  $T_R$  am rechten Rand des Schlackenpartikels

$$T_R = T_m \quad (5.29)$$

gelten. Nach der Diskretisierung dieser Randbedingung entsteht die Beziehung

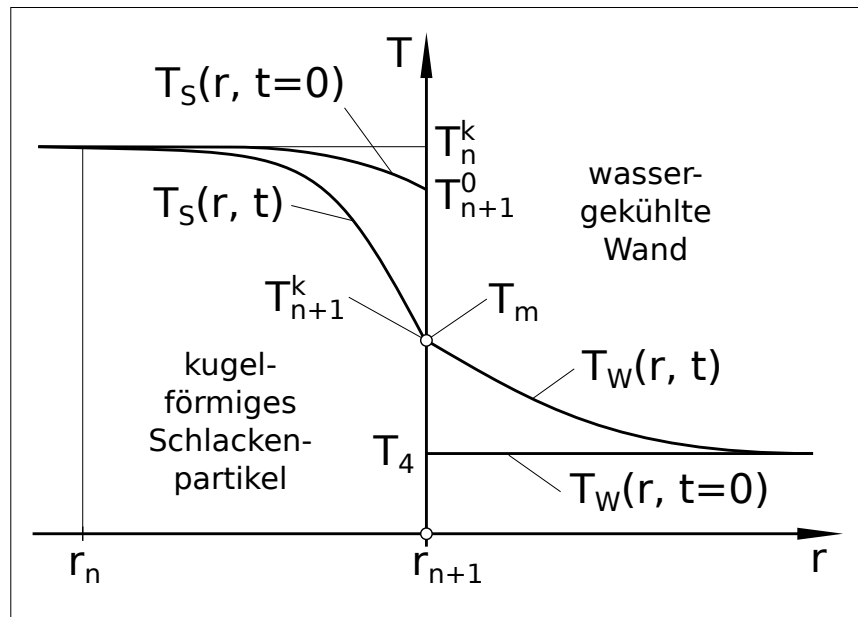


Abb. 5.6: Temperaturverlauf beim Kontakt des kugelförmigen Schlackenpartikels mit der wassergekühlten Wand

$$T_{n+1}^k = T_m. \quad (5.30)$$

Bei dieser ist im Unterschied zu den bisherigen Randbedingungen die (n+1)-Schale die äußerste Schale des kugelförmigen Schlackenpartikels. Unter Zuhilfenahme des Wärmeeindringkoeffizienten der Schlacke  $b_S$ , des Wärmeeindringkoeffizienten der wassergekühlten Wand  $b_W$ , der konstanten Temperatur der wassergekühlten Wand  $T_4$  und der Gleichung zur Berechnung der mittleren Kontakttemperatur  $T_m$  aus [1], kann für  $T_m$  bzw.  $T_{n+1}^k$  folgende Bedingung

$$T_m = T_{n+1}^k = T_4 + \frac{b_S}{b_S + b_W} \cdot (T_{n+1}^0 - T_4) \quad (5.31)$$

erstellt werden. Wenn diese Bedingung in die Glg. (5.15) eingesetzt wird, entsteht für  $r = r_{n+1}$  der Ausdruck

$$\begin{aligned}
T_n^{k+1} = & \tilde{M}_n^k \cdot (\lambda_{S_{n-1}}^k + \lambda_{S_n}^k) \cdot (2 \cdot r_n - \Delta r)^2 \cdot T_{n-1}^k \\
& + \left\{ 1 - \tilde{M}_n^k \cdot \left[ (\lambda_{S_{n-1}}^k + \lambda_{S_n}^k) \cdot (2 \cdot r_n - \Delta r)^2 \right. \right. \\
& + \left. \left. (\lambda_{S_n}^k + \lambda_{S_{n+1}}^k) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \right] \right\} \cdot T_n^k \\
& + \tilde{M}_n^k \cdot (\lambda_{S_n}^k + \lambda_{S_{n+1}}^k) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \\
& \cdot \left[ \frac{b_S}{b_S + b_W} \cdot T_{n+1}^0 + \left( 1 - \frac{b_S}{b_S + b_W} \right) \cdot T_4 \right].
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Die Stabilitätsbedingungen für Glg. (5.32) können Anhang A entnommen werden.

## 5.4 Bedingungen für die „Phase 3“

Genauso in der „Phase 3“ wird als **Anfangsbedingung** des kugelförmigen Schlackenpartikels die Temperaturverteilung über den einzelnen Schalen des Partikels nach der „Phase 2“ bzw. der Zeit  $t_2$  verwendet. Für die Bedingung gilt der Ausdruck

$$T(r, t = 0) = T(r, t = t_2). \tag{5.33}$$

Für die „Phase 3“ gelten die selben örtlichen **Randbedingungen** wie in der „Phase 1“. Eine detaillierte Herleitung dieser Bedingungen wurde bereits in Kap. 5.2 durchgeführt.

Da für die „Phase 1“ und die „Phase 3“ die expliziten Differenzgleichungen identisch sind, müssen auch die selben Stabilitätsbedingungen gelten.

## 6 Ermittlung der Sichtfaktoren

Zur Berechnung des Strahlungsaustausches aller im Modell dargestellten Flächen müssen die Sichtfaktoren bestimmt werden. Die angewendete Vorgehensweise bei der Ermittlung soll in diesem Kapitel geklärt werden.

### 6.1 Einzelnes Schlackenpartikel zu den Flächen des Granulators

In Kap. 3.3.1 wurde bereits die grafische Bestimmung des Sichtfaktors einer Kugel zu einer Fläche erläutert. Dieses Prinzip kann auch für eine näherungsweise Bestimmung der Sichtfaktoren des einzelnen Schlackenpartikels zu den jeweiligen umschließenden Flächen des Hohlraums der TSGA verwendet werden. Vereinfachend wird für die nachfolgende Bestimmung der Sichtfaktoren angenommen, dass die Schlackenpartikel von der Mitte des Drehtellers weg- und bis zur Hälfte des Partikels in die wassergekühlte Wand hinein fliegen. Weiters wird der Einfachheit halber angenommen, dass die Flugbahn der Partikel aufgrund ihrer hohen Geschwindigkeit eine Gerade ist.

Die Bestimmung dieser approximierten Sichtfaktoren erfolgt unter Zuhilfenahme der frei erhältlichen Software „GeoGebra“. Dieses Programm ist eine Dynamische-Geometrie-Software mit der es möglich ist eine Animation der Flugbahn eines einzelnen Schlackenpartikels in der TSGA zu erstellen. In der Animation fliegt das Schlackenpartikel vom Drehteller bis zur wassergekühlten Wand, prallt dort nach dem Prinzip des Reflexionsgesetzes (Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel) ab und fliegt weiter bis zur WS. Diese Flugbahn wird in insgesamt 200 gleichmäßige Schritte unterteilt, wobei für jeden einzelnen Schritt „GeoGebra“ die entsprechenden Winkel zur Berechnung eines Flächenelements einer Kugel aufzeichnet. Mit diesen Winkeln und der im Anschluss angeführten Glg. (6.2) ist es möglich einzelne Flächenelemente einer Kugel relativ genau zu berechnen.

Der Zusammenhang für das in Abb. 6.1 dargestellte differentielle Flächenelement eines kugelförmigen Schlackenpartikels lautet wie folgt

$$dA = r_1^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi. \quad (6.1)$$

Es sind  $r_1$  der Schlackenpartikelradius,  $\phi$  der Azimutwinkel und  $\theta$  der Poldistanzwinkel des Flächenelements. Durch Integration vom Punkt 1 bis zum Punkt 2 entsteht folgende Formel zur Berechnung der Flächenelemente des kugelförmigen Partikels

$$A = r_1^2 \cdot (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \cdot (\phi_2 - \phi_1). \quad (6.2)$$

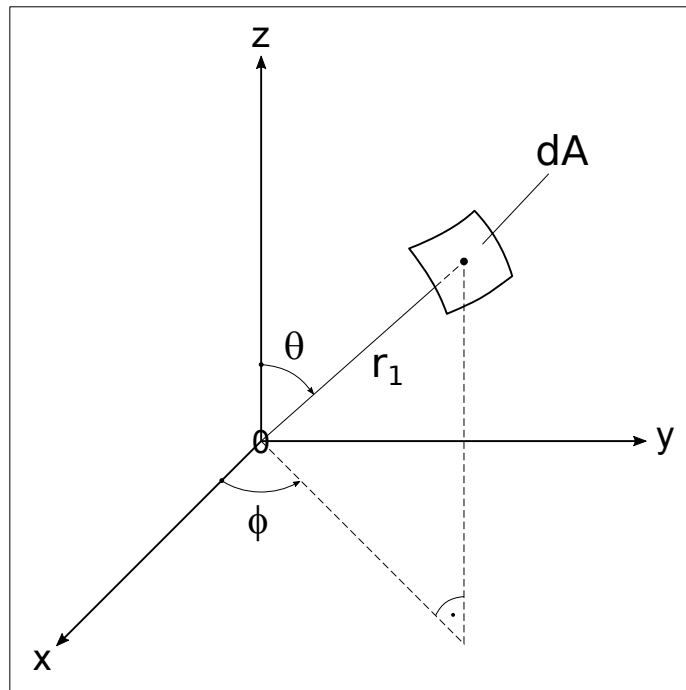


Abb. 6.1: Differentielles Flächenelement eines kugelförmigen Schlackenpartikels

Die notwendigen Abmessungen und Flächen zur Bestimmung der Sichtfaktoren sind in Abb. 6.2 gekennzeichnet.

### 6.1.1 Sichtfaktor - Schlackenpartikel zur Fläche 2

Für die Bestimmung des Sichtfaktors  $\varphi_{12}$  von der Kugeloberfläche des Schlackenpartikels zur Fläche  $A_2$  der TSGA wurde eine Animation mit „Geogebra“ erstellt. In dieser wandert der Mittelpunkt K des Schlackenpartikels auf einer horizontalen Geraden von der Mitte des Drehtellers nach außen bis zur wassergekühlten Wand. Dort wird das Partikel dem Reflexionsgesetz folgend abgelenkt und wandert weiter bis in die WS.

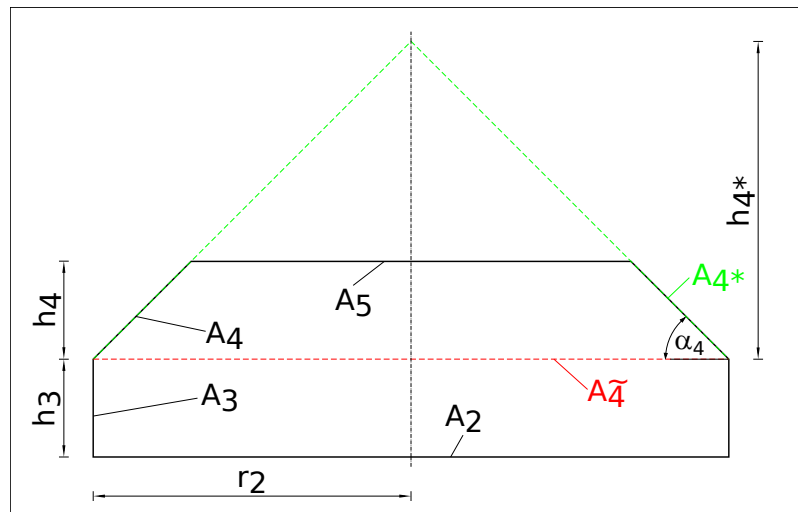


Abb. 6.2: Skizze zur Bestimmung der Sichtfaktoren

Mithilfe der Skizze in Abb. 6.3 lässt sich das Prinzip zur Ermittlung des Sichtfaktors erläutern. Zuerst wird die Fläche  $A_2$  in ein regelmäßiges Sechzehneck zerteilt, dessen Eckpunkte  $EA_{I-01}$ ,  $EA_{I-02}$ ,  $\dots$ ,  $EA_{IV-04}$  für die weiterführende Konstruktion notwendig sind. Ausgehend von diesen Eckpunkten wird jeweils eine Strecke zum Mittelpunkt  $K$  des kugelförmigen Schlackenpartikels gezogen und es entstehen die Strecken  $\overline{EA_{I-01}K}$ ,  $\overline{EA_{I-02}K}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{EA_{IV-04}K}$ . Mit den Strecken  $\overline{EA_{I-01}K}$  und  $\overline{EA_{III-01}K}$  kann eine Winkelsymmetrale gebildet werden, welche die neue  $z_A$ -Achse darstellt. Diese schneidet die Oberfläche des Schlackenpartikels in den Punkten  $O_A$  und  $U_A$ . Parallel zur  $x$ -Achse und durch den Punkt  $K$  wird die neue  $x_A$ -Achse gelegt. Die Normale auf die  $x_A$ - $z_A$ -Ebene durch den Punkt  $K$  wird als neue  $y_A$ -Achse bezeichnet. Durch die Projektion der Eckpunkte  $EA_{I-01}$ ,  $EA_{I-02}$ ,  $\dots$ ,  $EA_{IV-04}$  normal auf die  $x_A$ - $y_A$ -Ebene entstehen die Punkte  $PA_{I-01}$ ,  $PA_{I-02}$ ,  $\dots$ ,  $PA_{IV-04}$ .

Um den Sichtfaktor  $\varphi_{12}$  ermitteln zu können, muss die ungefähre Größe der einzelnen Flächenelemente ermittelt werden. Die Berechnung dieser Flächenelemente erfolgt mit der Glg. (6.2), wobei passende Poldistanzwinkel  $\theta$  und Azimutwinkel  $\phi$  nötig sind. Die entsprechenden Poldistanzwinkel  $\theta_{EA01}$ ,  $\theta_{EA02}$ ,  $\dots$ ,  $\theta_{EA16}$  werden wie folgt berechnet

$$\begin{aligned}
\theta_{EA01} &= \frac{\angle EA_{I-01}KO_A + \angle EA_{I-02}KO_A}{2} \\
\theta_{EA02} &= \frac{\angle EA_{I-02}KO_A + \angle EA_{I-03}KO_A}{2} \\
&\vdots \\
\theta_{EA016} &= \frac{\angle EA_{VI-04}KO_A + \angle EA_{I-01}KO_A}{2}.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Für die Azimutwinkel  $\phi_{EA01}, \phi_{EA02}, \dots, \phi_{EA16}$  werden folgende Winkel verwendet

$$\begin{aligned}
\phi_{EA01} &= \angle PA_{I-01}KPA_{I-02} \\
\phi_{EA02} &= \angle PA_{I-02}KPA_{I-03} \\
&\vdots \\
\phi_{EA016} &= \angle PA_{VI-04}KPA_{I-01}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Durch einsetzen dieser Winkel in die Glg. (6.2) entstehen die Zusammenhänge für die angenäherten einzelnen Flächenelemente des Schlackenpartikels

$$\begin{aligned}
A_{EA01} &= r_1^2 \cdot [1 + \cos(\theta_{EA01})] \cdot \phi_{EA01} \\
A_{EA02} &= r_1^2 \cdot [1 + \cos(\theta_{EA02})] \cdot \phi_{EA02} \\
&\vdots \\
A_{EA16} &= r_1^2 \cdot [1 + \cos(\theta_{EA16})] \cdot \phi_{EA16}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

In Abb. 6.4 sind die exakten Flächenelemente (grün markiert)  $E01_{S01}U_A E02_{S01}$ ,  $E02_{S01}U_A E03_{S01}$ ,  $\dots$ ,  $E16_{S01}U_A E01_{S01}$  für die Ermittlung des Sichtfaktors des Schlackenpartikels zur Fläche  $A_2$  ersichtlich. Die Punkte  $E01_{S01}, E02_{S01}, \dots, E16_{S01}$  entstehen beim Schneiden der Strecken  $\overline{EA_{I-01}K}$ ,  $\overline{EA_{I-02}K}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{EA_{IV-04}K}$  mit der Oberfläche des Schlackenpartikels.

Die Berechnung des angenäherten Sichtfaktors  $\varphi_{12}$  erfolgt mit der Beziehung

$$\varphi_{12} = \frac{\sum_{k=1}^{16} A_{EAk}}{4 \cdot r_1^2 \cdot \pi} \tag{6.6}$$

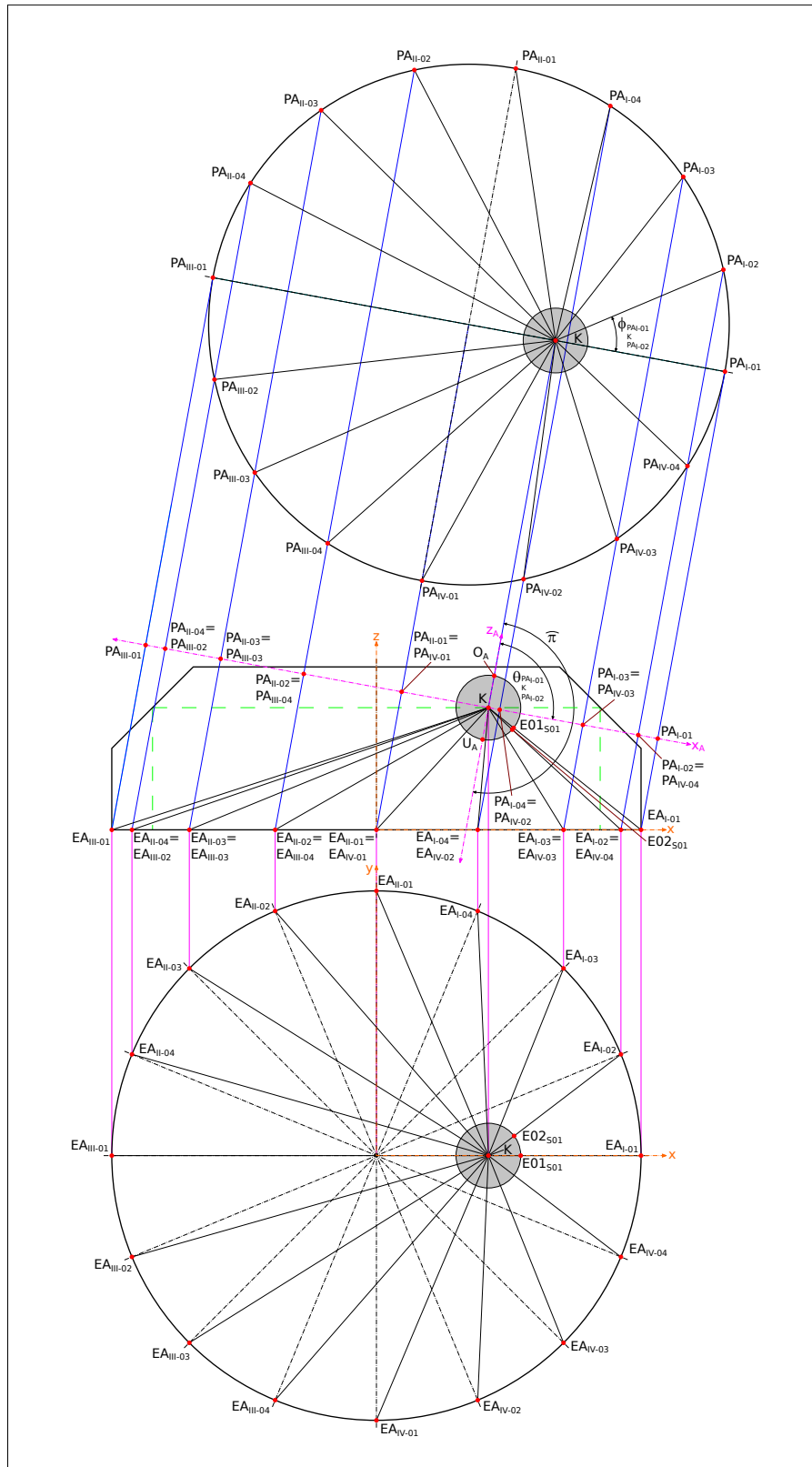


Abb. 6.3: Skizze zur Ermittlung der geometrischen Größen für die Berechnung der Sichtfaktoren  $\varphi_{12}$  und  $\varphi_{13}$

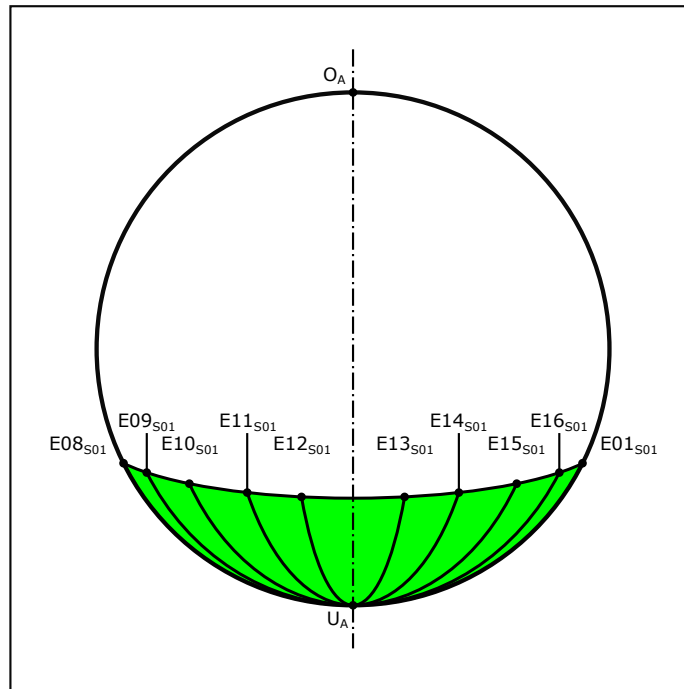


Abb. 6.4: Kugeloberflächenelemente des Schlackenpartikels zur Fläche 2

Mit diesem Zusammenhang werden die einzelnen approximierten Flächenelemente  $A_{EA01}, A_{EA02}, \dots, A_{EA16}$  aufsummiert und anschließend durch die gesamte Oberfläche des Schlackenpartikels dividiert. Dieser Vorgang wird für jeden der insgesamt 200 Schritte der Flugbahn ausgeführt.

### 6.1.2 Sichtfaktor - Schlackenpartikel zur Fläche 3

Bei der Bestimmung des Sichtfaktors  $\varphi_{13}$  von der Kugeloberfläche des Schlackenpartikels zur Fläche  $A_3$  der Anlage wurde die selbe Animation wie bereits bei der Ermittlung des Sichtfaktors  $\varphi_{12}$  verwendet.

Mithilfe der Skizzen aus Abb. 6.3, Abb. 6.5 und Abb. 6.6 kann das Prinzip zur Ermittlung der Sichtfaktoren  $\varphi_{13}$  verständlich gemacht werden. In Abb. 6.6 entstehen parallel zu den Eckpunkten  $EA_{I-01}, EA_{I-02}, \dots, EA_{IV-04}$  in der Höhe  $h_4$  der TSGA die Eckpunkte  $EB_{I-01}, EB_{I-02}, \dots, EB_{IV-04}$ . Auch bei der Ermittlung des Sichtfaktors  $\varphi_{13}$  wird von diesen Eckpunkten jeweils eine Strecke zum Mittelpunkt  $K$  des Partikels gezogen und es entstehen die Strecken  $\overline{EB_{I-01}K}, \overline{EB_{I-02}K}, \dots, \overline{EB_{IV-04}K}$ .

Mit den Strecken  $\overline{EB_{I-01}K}$  und  $\overline{EB_{III-01}K}$  wird wieder eine Winkelsymmetrale gebildet, welche in diesem Fall die neue  $z_B$ -Achse abbildet. Diesmal schneidet die  $z_B$ -Achse die Oberfläche des Schlackenpartikels in den Punkten  $O_B$  und  $U_B$ . Die Parallele zur  $x$ -Achse durch den Punkt  $K$  ist die neue  $x_B$ -Achse und die Normale auf die  $x_B$ - $z_B$ -Ebene durch den Punkt  $K$  die neue  $y_B$ -Achse. Wenn die Eckpunkte  $EB_{I-01}$ ,  $EB_{I-02}$ ,  $\dots$ ,  $EB_{IV-04}$  normal auf die  $x_B$ - $y_B$ -Ebene projiziert werden ergeben sich die Punkte  $PB_{I-01}$ ,  $PB_{I-02}$ ,  $\dots$ ,  $PB_{IV-04}$ .

Genauso wie bei der Bestimmung des Sichtfaktors  $\varphi_{12}$  muss beim Sichtfaktor  $\varphi_{13}$  die Größe der einzelnen Flächenelemente annähernd ermittelt werden. Dafür wird auch hier die Glg. (6.2) mit geeigneten Poldistanzwinkeln  $\theta$  und Azimutwinkeln  $\phi$  verwendet. Unter Zuhilfenahme der Abb. 6.5 können die passenden Poldistanzwinkel ermittelt werden. In der Skizze wird mit der  $z_A$ - und  $z_B$ -Achse eine Winkelsymmetrale erzeugt, welche die neue  $z_{AB}$ -Achse darstellt. Diese schneidet die Oberfläche des kugelförmigen Schlackenpartikels in den Punkten  $O_{AB}$  und  $U_{AB}$ . Damit ist es möglich alle nötigen Poldistanzwinkel von der selben Achse aus zu messen.

Für die Berechnung der einzelnen Flächenelemente werden die Poldistanzwinkel  $\tilde{\theta}_{EA01}$ ,  $\tilde{\theta}_{EA02}$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{\theta}_{EA16}$  mit den Zusammenhängen

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{EA01} &= \frac{\angle EA_{I-01}KO_{AB} + \angle EA_{I-02}KO_{AB}}{2} \\ \tilde{\theta}_{EA02} &= \frac{\angle EA_{I-02}KO_{AB} + \angle EA_{I-03}KO_{AB}}{2} \\ &\vdots \\ \tilde{\theta}_{EA16} &= \frac{\angle EA_{VI-04}KO_{AB} + \angle EA_{I-01}KO_{AB}}{2}\end{aligned}\tag{6.7}$$

verwendet. Zusätzlich sind noch die Winkel  $\tilde{\theta}_{EB01}$ ,  $\tilde{\theta}_{EB02}$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{\theta}_{EB16}$  mit den Beziehungen

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{EB01} &= \frac{\angle EB_{I-01}KO_{AB} + \angle EB_{I-02}KO_{AB}}{2} \\ \tilde{\theta}_{EB02} &= \frac{\angle EB_{I-02}KO_{AB} + \angle EB_{I-03}KO_{AB}}{2} \\ &\vdots \\ \tilde{\theta}_{EB16} &= \frac{\angle EB_{VI-04}KO_{AB} + \angle EB_{I-01}KO_{AB}}{2}\end{aligned}\tag{6.8}$$

für den weiteren Ablauf nötig. Die Azimutwinkel werden aus den bereits verwendeten Winkeln  $\phi_{EA01}, \phi_{EA02}, \dots, \phi_{EA16}$  und den Winkeln  $\phi_{EB01}, \phi_{EB02}, \dots, \phi_{EB16}$  berechnet. Letztere sind folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned}\phi_{EB01} &= \angle \text{PB}_{I-01} \text{KPB}_{I-02} \\ \phi_{EB02} &= \angle \text{PB}_{I-02} \text{KPB}_{I-03} \\ &\vdots \\ \phi_{EB016} &= \angle \text{PB}_{VI-04} \text{KPB}_{I-01}.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Die Berechnung der Azimutwinkel der einzelnen Flächenelemente zur Bestimmung des Sichtfaktors  $\varphi_{13}$  erfolgt mit den Zusammenhängen

$$\begin{aligned}\phi_{EA01-EB01} &= \frac{\phi_{EA01} + \phi_{EB01}}{2} \\ \phi_{EA02-EB02} &= \frac{\phi_{EA02} + \phi_{EB02}}{2} \\ &\vdots \\ \phi_{EA16-EB16} &= \frac{\phi_{EA16} + \phi_{EB16}}{2}.\end{aligned}\tag{6.10}$$

Durch einsetzen der Poldistanzwinkel  $\tilde{\theta}_{EA01}, \tilde{\theta}_{EA02}, \dots, \tilde{\theta}_{EA16}, \tilde{\theta}_{EB01}, \tilde{\theta}_{EB02}, \dots, \tilde{\theta}_{EB16}$  und der Azimutwinkel  $\phi_{EA01-EB01}, \phi_{EA02-EB02}, \dots, \phi_{EA16-EB16}$  in die Glg. (6.2) entstehen die Ausdrücke

$$\begin{aligned}A_{EA01-EB01} &= r_1^2 \cdot [\cos(\theta_{EB01}) - \cos(\theta_{EA01})] \cdot \phi_{EA01-EB01} \\ A_{EA02-EB02} &= r_1^2 \cdot [\cos(\theta_{EB02}) - \cos(\theta_{EA02})] \cdot \phi_{EA02-EB02} \\ &\vdots \\ A_{EA16-EB16} &= r_1^2 \cdot [\cos(\theta_{EB16}) - \cos(\theta_{EA16})] \cdot \phi_{EA16-EB16}\end{aligned}\tag{6.11}$$

zur Bestimmung der angenäherten einzelnen Flächenelemente des Schlackenpartikels.

Die Abb. 6.7 zeigt die exakten Flächenelemente (rot markiert)  $E01_{S01}E02_{S01}E02_{S02} - E01_{S02}, E02_{S01}E03_{S01}E03_{S02}E02_{S02}, \dots, E16_{S01}E01_{S01}E01_{S02}E16_{S02}$  für die Ermittlung der Sichtfaktoren des Schlackenpartikels zur Fläche  $A_3$ . Die Punkte  $E01_{S02}, E02_{S02},$



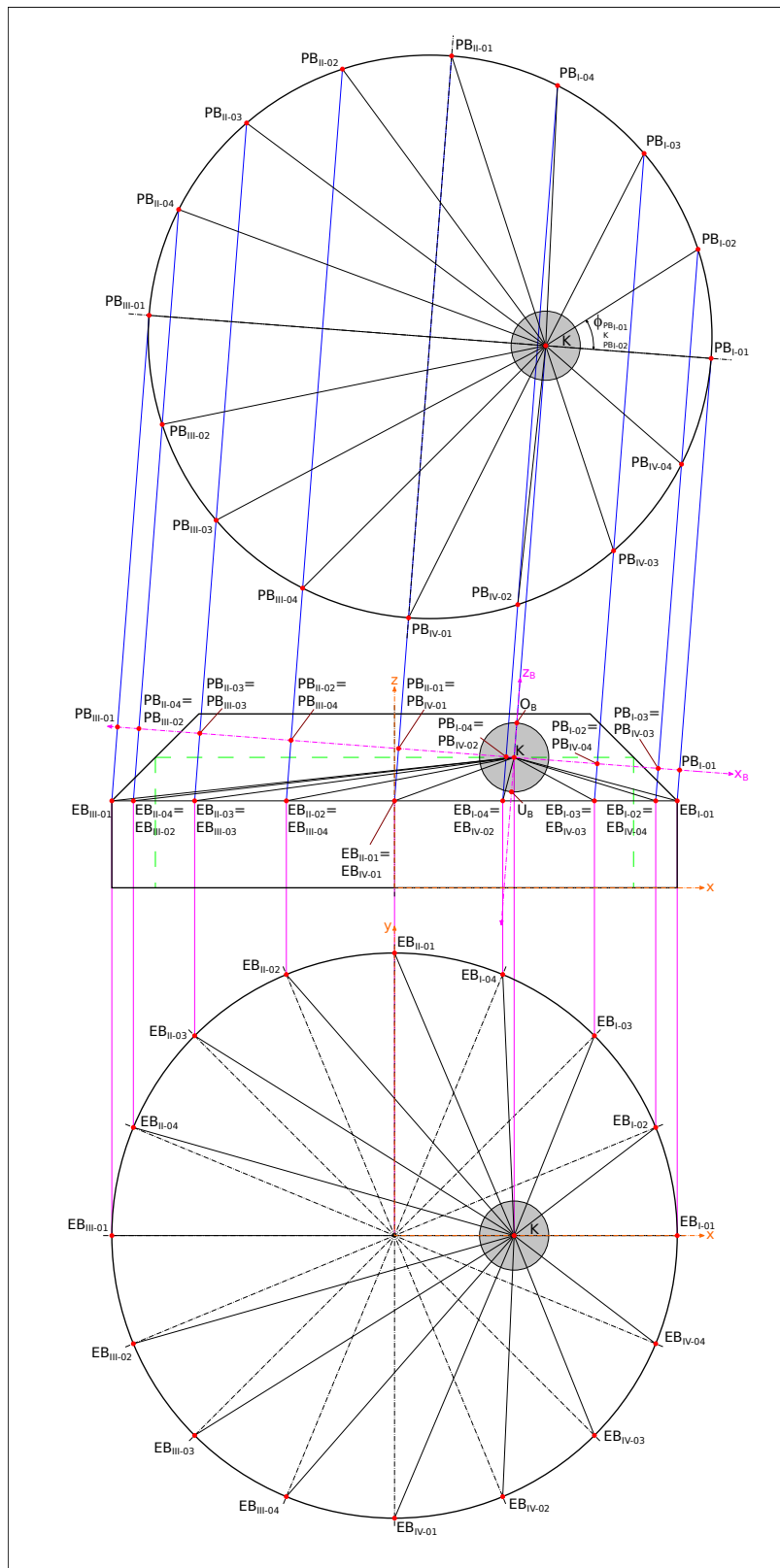


Abb. 6.6: Skizze zur Ermittlung der geometrischen Größen für die Berechnung der Sichtfaktoren  $\varphi_{13}$  und  $\varphi_{14}$

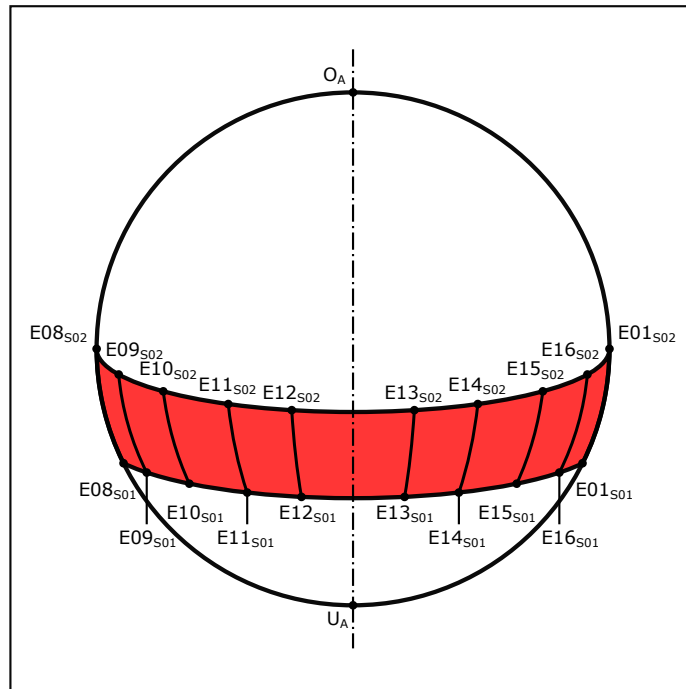


Abb. 6.7: Kugeloberflächenelemente des Schlackenpartikels zur Fläche 3

Eckpunkten  $EC_{I-01}$ ,  $EC_{I-02}$ ,  $\dots$ ,  $EC_{IV-04}$  wird je eine Strecke zum Mittelpunkt  $K$  des kugelförmigen Schlackenpartikels eingezeichnet und es entstehen die Strecken  $\overline{EC_{I-01}K}$ ,  $\overline{EC_{I-02}K}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{EC_{IV-04}K}$ . Mithilfe der Strecken  $\overline{EC_{I-01}K}$  und  $\overline{EC_{III-01}K}$  kann wieder eine Winkelsymmetrale erzeugt werden, welche gleichzeitig die neue  $z_C$ -Achse darstellt. Die Punkte  $O_A$  und  $U_A$  entstehen als Schnittpunkte der  $z_C$ -Achse mit der Oberfläche des Schlackenpartikels. Die neue  $x_C$ -Achse ist die Parallele zur  $x$ -Achse durch den Punkt  $K$ . Die Normale auf die  $x_C$ - $z_C$ -Ebene durch den Punkt  $K$  wird als die neue  $y_C$ -Achse bezeichnet. Bei der Projektion der Eckpunkte  $EC_{I-01}$ ,  $EC_{I-02}$ ,  $\dots$ ,  $EC_{IV-04}$  normal auf die  $x_C$ - $y_C$ -Ebene entstehen die Punkte  $PC_{I-01}$ ,  $PC_{I-02}$ ,  $\dots$ ,  $PC_{IV-04}$ .

Wie auch bei der Bestimmung der vorherigen Sichtfaktoren besteht für die Ermittlung des Sichtfaktors  $\varphi_{14}$  die Notwendigkeit die Größe der einzelnen Flächenelemente zu approximieren. Diese müssen wieder mit der Glg. (6.2) und den entsprechenden Poldistanzwinkeln  $\theta$  bzw. Azimutwinkeln  $\phi$  bestimmt werden.

Mittels der Abb. 6.8 ist es möglich die geeigneten Poldistanzwinkel zu eruiieren. Anhand der  $z_B$ - und  $z_C$ -Achse wird erneut eine Winkelsymmetrale gebildet, welche gleichzeitig die neue  $z_{BC}$ -Achse abbildet. Die Punkte  $O_{BC}$  und  $U_{BC}$  ergeben sich wieder als

Schnittpunkte der  $z_{BC}$ -Achse mit der Oberfläche des kugelförmigen Schlackenpartikels. Unter Zuhilfenahme der  $z_{BC}$ -Achse bzw. den Schnittpunkten  $O_{BC}$  und  $U_{BC}$  können nun die benötigten Poldistanzwinkel ermessend werden.

Zur Berechnung der einzelnen Flächenelemente werden die Poldistanzwinkel  $\tilde{\theta}_{EB01}$ ,  $\tilde{\theta}_{EB02}$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{\theta}_{EB16}$  verwendet. Diese lassen sich mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{EB01} &= \frac{\angle EB_{I-01}KO_{BC} + \angle EB_{I-02}KO_{BC}}{2} \\ \tilde{\theta}_{EB02} &= \frac{\angle EB_{I-02}KO_{BC} + \angle EB_{I-03}KO_{BC}}{2} \\ &\vdots \\ \tilde{\theta}_{EB16} &= \frac{\angle EB_{VI-04}KO_{BC} + \angle EB_{I-01}KO_{BC}}{2}\end{aligned}\quad (6.13)$$

beschreiben. Zusätzlich sind noch die Poldistanzwinkel  $\tilde{\theta}_{EC01}$ ,  $\tilde{\theta}_{EC02}$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{\theta}_{EC16}$  mit den Beziehungen

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{EC01} &= \frac{\angle EC_{I-01}KO_{BC} + \angle EC_{I-02}KO_{BC}}{2} \\ \tilde{\theta}_{EC02} &= \frac{\angle EC_{I-02}KO_{BC} + \angle EC_{I-03}KO_{BC}}{2} \\ &\vdots \\ \tilde{\theta}_{EC16} &= \frac{\angle EC_{VI-04}KO_{BC} + \angle EC_{I-01}KO_{BC}}{2}\end{aligned}\quad (6.14)$$

zu ermitteln. Die Azimutwinkel werden aus den bereits vorhandenen Winkeln  $\phi_{EB01}$ ,  $\phi_{EB02}$ ,  $\dots$ ,  $\phi_{EB16}$  und den Winkeln  $\phi_{EC01}$ ,  $\phi_{EC02}$ ,  $\dots$ ,  $\phi_{EC16}$  berechnet. Die zuletzt genannten Winkel sind wie folgt definiert

$$\begin{aligned}\phi_{EC01} &= \angle PC_{I-01}KPC_{I-02} \\ \phi_{EC02} &= \angle PC_{I-02}KPC_{I-03} \\ &\vdots \\ \phi_{EC016} &= \angle PC_{VI-04}KPC_{I-01}.\end{aligned}\quad (6.15)$$

Die Azimutwinkel der einzelnen Flächenelemente zur Bestimmung des Sichtfaktors  $\varphi_{14}$  werden mit den Ausdrücken

$$\begin{aligned}
\phi_{EB01-EC01} &= \frac{\phi_{EB01} + \phi_{EC01}}{2} \\
\phi_{EB02-EC02} &= \frac{\phi_{EB02} + \phi_{EC02}}{2} \\
&\vdots \\
\phi_{EB16-EC16} &= \frac{\phi_{EB16} + \phi_{EC16}}{2}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

ermittelt. Unter Verwendung der Poldistanzwinkeln  $\tilde{\theta}_{EB01}, \tilde{\theta}_{EB02}, \dots, \tilde{\theta}_{EB16}, \tilde{\theta}_{EC01}, \tilde{\theta}_{EC02}, \dots, \tilde{\theta}_{EC16}$  und der Azimutwinkeln  $\phi_{EB01-EC01}, \phi_{EB02-EC02}, \dots, \phi_{EB16-EC16}$  lassen sich mithilfe der Glg. (6.2) die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
A_{EB01-EC01} &= r_1^2 \cdot [\cos(\theta_{EC01}) - \cos(\theta_{EB01})] \cdot \phi_{EB01-EC01} \\
A_{EB02-EC02} &= r_1^2 \cdot [\cos(\theta_{EC02}) - \cos(\theta_{EB02})] \cdot \phi_{EB02-EC02} \\
&\vdots \\
A_{EB16-EC16} &= r_1^2 \cdot [\cos(\theta_{EC16}) - \cos(\theta_{EB16})] \cdot \phi_{EB16-EC16}
\end{aligned} \tag{6.17}$$

für die Bestimmung der approximierten einzelnen Flächenelemente des Schlackenpartikels aufstellen.

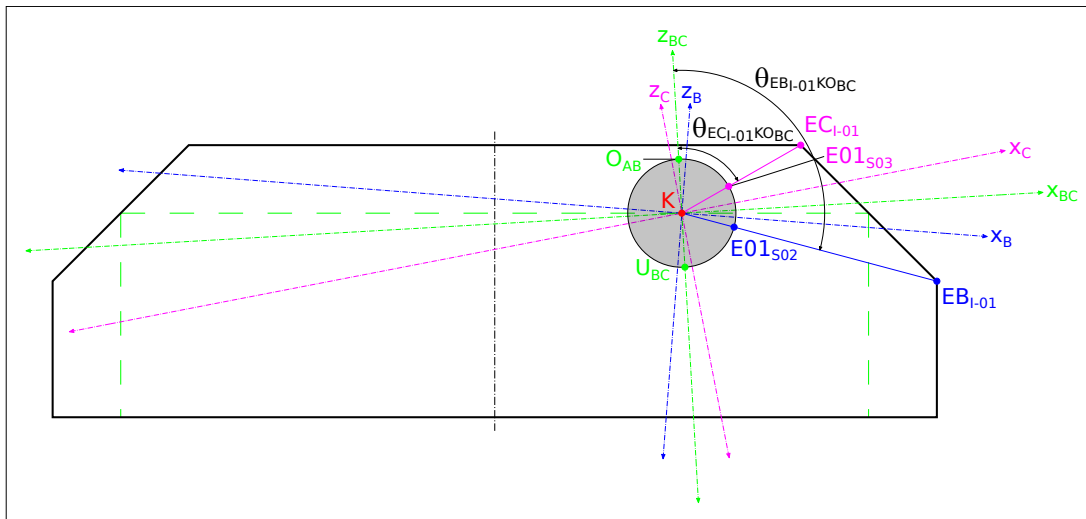


Abb. 6.8: Skizze zur Ermittlung der geometrischen Größen für die Berechnung des Sichtfaktors  $\varphi_{14}$

In Abb. 6.10 sind die exakten Flächenelemente (blau markiert) E01<sub>s02</sub>E02<sub>s02</sub>E02<sub>s03</sub> –

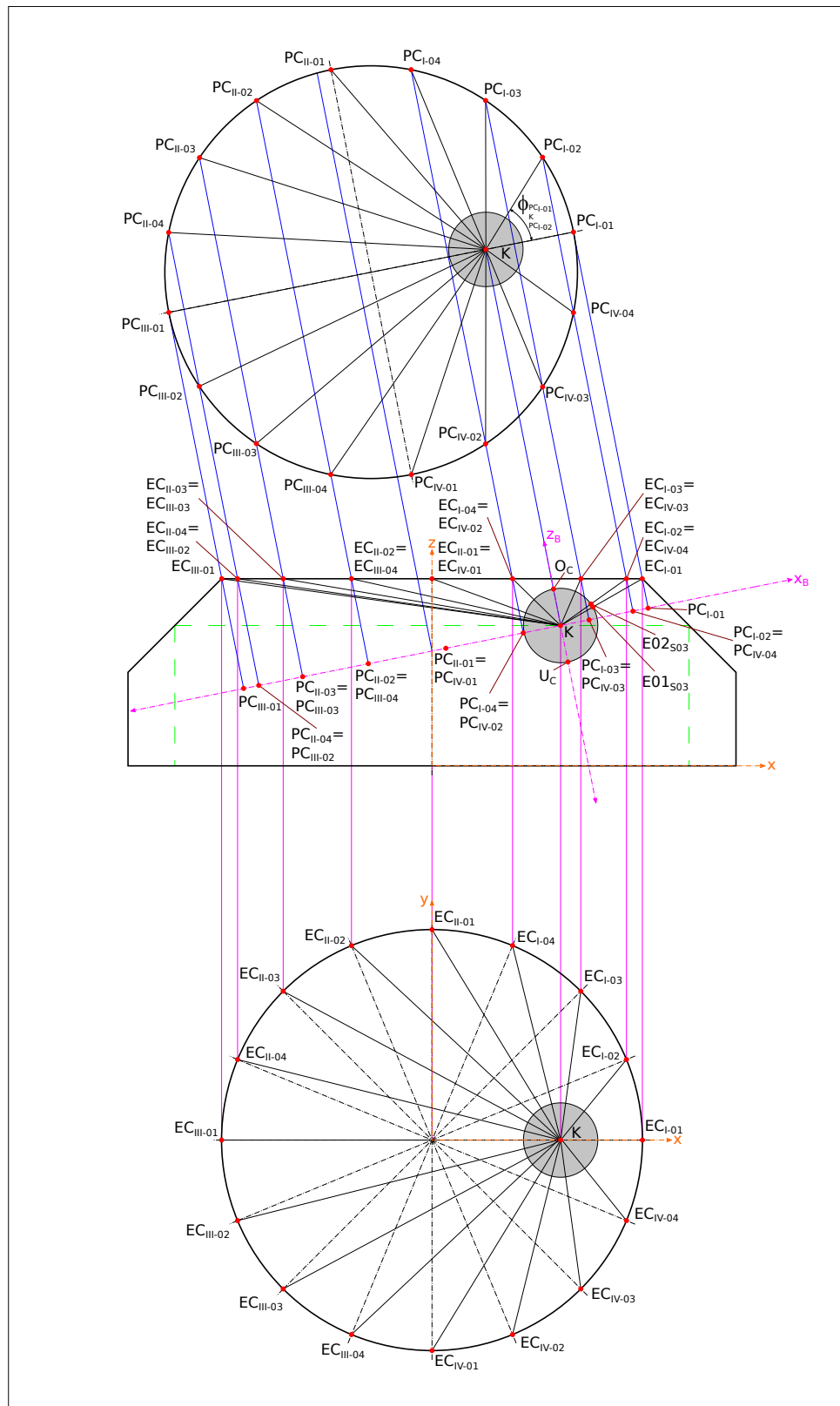


Abb. 6.9: Skizze zur Ermittlung der geometrischen Größen für die Berechnung der Sichtfaktoren  $\varphi_{14}$  und  $\varphi_{15}$

$E_{01_{S03}}, E_{02_{S02}}E_{03_{S02}}E_{03_{S03}}E_{02_{S03}}, \dots, E_{16_{S02}}E_{01_{S02}}E_{01_{S03}}E_{16_{S03}}$  für die Bestimmung der Sichtfaktoren des Schlackenpartikels zur Fläche  $A_4$  ersichtlich. Um die Punkte  $E_{01_{S03}}, E_{02_{S03}}, \dots, E_{16_{S03}}$  zu erhalten, müssen die Strecken  $\overline{EC_{I-01}K}, \overline{EC_{I-02}K}, \dots, \overline{EC_{IV-04}K}$  mit der Oberfläche des Schlackenpartikels geschnitten werden.

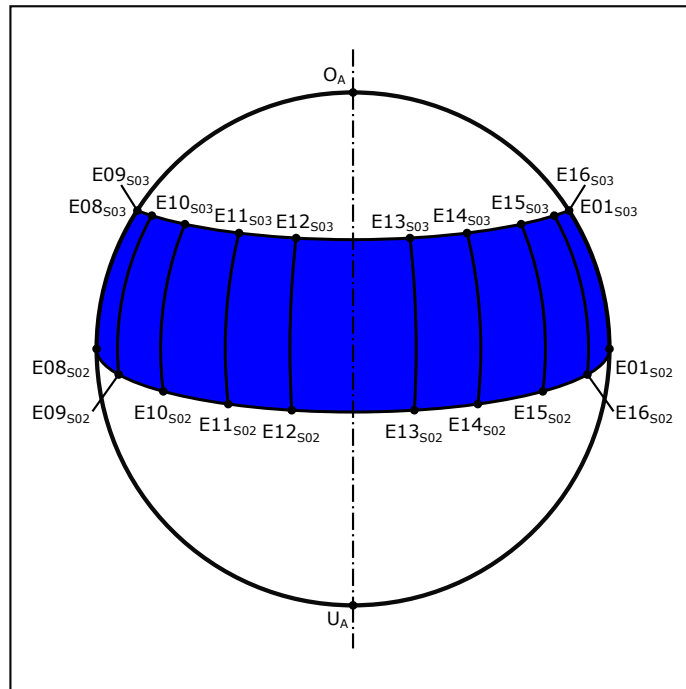


Abb. 6.10: Kugeloberflächenelemente des Schlackenpartikels zur Fläche 4

Die näherungsweise Bestimmung des Sichtfaktors  $\varphi_{14}$  erfolgt mit der Beziehung

$$\varphi_{14} = \frac{\sum_{k=1}^{16} A_{EBi-ECi}}{4 \cdot r_1^2 \cdot \pi}. \quad (6.18)$$

Dieser Ausdruck summiert die einzelnen approximierten Flächenelemente  $A_{EB01-EC01}, A_{EB02-EC02}, \dots, A_{EB16-EC16}$  auf und dividiert diese im Anschluss durch die gesamte Oberfläche des Schlackenpartikels. Auch in diesem Fall wird dieser Ablauf für jeden der insgesamt 200 Schritte der Flugbahn ausgeführt.

### 6.1.4 Sichtfaktor - Schlackenpartikel zur Fläche 5

Ebenso für die Bestimmung des Sichtfaktors  $\varphi_{15}$  von der Kugeloberfläche des Schlackenpartikels zur Fläche  $A_5$  der Anlage lässt sich die bisherige Animation verwenden. Auch wird die bereits erläuterte Skizze in Abb. 6.9 zur Ermittlung des Sichtfaktors  $\varphi_{15}$  benötigt. Bei der Ermittlung der ungefähren Größe der einzelnen Flächenelemente werden die schon bekannten Poldistanzwinkel  $\theta_{EC01}, \theta_{EC02}, \dots, \theta_{EC16}$  und Azimutwinkel  $\phi_{EC01}, \phi_{EC02}, \dots, \phi_{EC16}$  benutzt. Wenn diese Winkel wieder in die Glg. (6.2) eingesetzt werden ergeben sich die nachstehenden Zusammenhänge für die approximierten einzelnen Flächenelemente des Schlackenpartikels

$$\begin{aligned}
 A_{EC01} &= r_1^2 \cdot [1 - \cos(\theta_{EC01})] \cdot \phi_{EC01} \\
 A_{EC02} &= r_1^2 \cdot [1 - \cos(\theta_{EC02})] \cdot \phi_{EC02} \\
 &\vdots \\
 A_{EC16} &= r_1^2 \cdot [1 - \cos(\theta_{EC16})] \cdot \phi_{EC16}.
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Die Abb. 6.11 veranschaulicht die exakten Flächenelemente (gelb markiert)  $E01_{S03}O_C - E02_{S03}, E02_{S03}O_C E03_{S03}, \dots, E16_{S03}O_C E01_{S03}$  zur Bildung des Sichtfaktors vom Schlackenpartikel zur Fläche  $A_5$ .

Der approximierte Sichtfaktor  $\varphi_{15}$  lässt sich mit der Beziehung

$$\varphi_{15} = \frac{\sum_{k=1}^{16} A_{ECi}}{4 \cdot r_1^2 \cdot \pi} \tag{6.20}$$

berechnen. Wie auch schon bei den vorherigen Sichtfaktoren werden mit diesem Ausdruck die einzelnen approximierten Flächenelemente  $A_{EC01}, A_{EC02}, \dots, A_{EC16}$  aufsummiert und danach durch die gesamte Oberfläche des Schlackenpartikels dividiert. Genauso wie bei den bisherigen Sichtfaktoren wird dieser Ablauf für jeden der insgesamt 200 Schritte der Flugbahn durchgeführt.

## 6.2 Lineare Interpolation der Sichtfaktoren

Die Geometrie soll in den Bereichen A und B sinnvoll variiert werden können. Damit die Sichtfaktoren  $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{14}$  und  $\varphi_{15}$  möglichst realitätsgetreu bleiben, erfolgt die

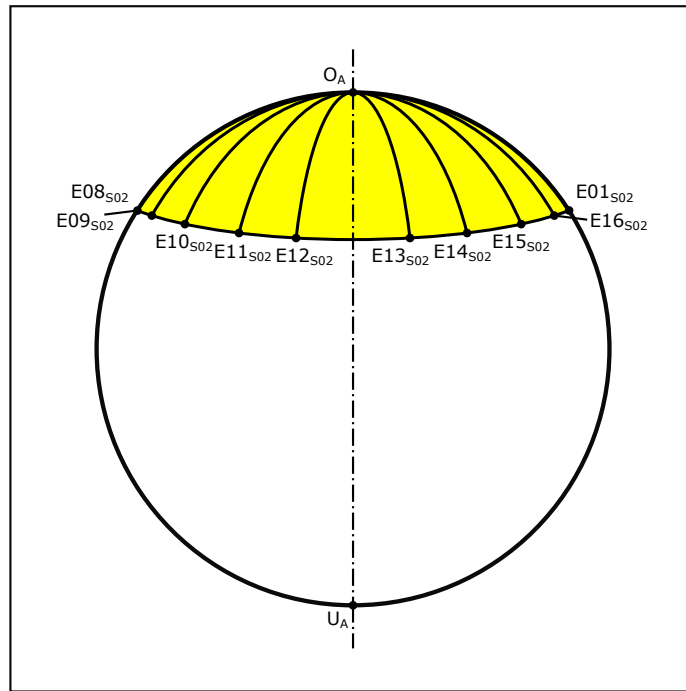


Abb. 6.11: Kugeloberflächenelemente des Schlackenpartikels zur Fläche 5

Implementierung der in Kap. 6.2.1 und Kap. 6.2.2 geschilderten linearen Interpolationssysteme.

In der mittels GeoGebra erstellten Animation zur Bestimmung der Sichtfaktoren wurde der zurückgelegte Weg  $s$  des Schlackenpartikels von der Mitte der TSGA bis zur wassergekühlten Wand und der von der wassergekühlten Wand bis zur Wirbelschicht jeweils in 100 Schritte zerteilt. Für jeden Schritt wurden alle Poldistanzwinkel  $\theta$  und Azimutwinkel  $\phi$  aufgezeichnet bzw. die gerade gültigen Sichtfaktoren ermittelt. Um für diesen quasi diskreten Sichtfaktor eine vom zurückgelegten Weg  $s$  abhängige stetige Funktion für den Sichtfaktor zu erhalten, wird mit MS Excel eine Trendlinie (Regressionspolynom sechsten Grades) erzeugt. Diese Trendlinie geht abhängig von der aktuellen Position bzw. vom gerade befindlichen Schritt des Schlackenpartikels durch möglichst jeden Sichtfaktor. Um die in dem Bereich A oder B liegende gewählte Geometrie linear interpolieren zu können, wird zusätzlich der zurückgelegte Weg mit der Beziehung

$$S = \frac{s}{s_{ges}} \quad (6.21)$$

dimensionslos gemacht. Die Größe  $s_{ges}$  in der Gleichung ist der gesamte Weg, den das Schlackenpartikel entweder im Bereich A oder im Bereich B zurücklegt.

### 6.2.1 Lineare Interpolation der Sichtfaktoren für die Abmessungen des Bereichs A

Wenn bei sinnvoller Geometrie-Wahl der TSGA die Maße in die für den Bereich A festgelegten Abmessungen hineinfallen, werden die Sichtfaktoren  $\varphi_{12,A}$ ,  $\varphi_{13,A}$ ,  $\varphi_{14,A}$  und  $\varphi_{15,A}$  linear interpoliert. Dabei sind für alle möglichen Geometriekombinationen der Randwerte  $r_{2,A,min}$ ,  $r_{2,A,max}$ ,  $h_{4,A,min}$ ,  $h_{4,A,max}$ ,  $\alpha_{4,min}$  und  $\alpha_{4,max}$  des Bereichs A die stetigen dimensionslosen Funktionen, welche Regressionspolynome sechsten Grades sind, für den jeweiligen Sichtfaktor zu bilden. Beim Sichtfaktor  $\varphi_{12}$  lauten die Regressionspolynome sechsten Grades mit den Polynomkoeffizienten  $c_{0,A,V1,f}$ ,  $c_{1,A,V1,f}$ ,  $\dots$ ,  $c_{6,A,V8,f}$  folgendermaßen

$$\begin{aligned}
\varphi_{12,A}(S, r_{2,A,min}, h_{4,A,min}, \alpha_{4,min}) &= \varphi_{12,A,V1,f} = c_{0,A,V1,f} + c_{1,A,V1,f} \cdot S \\
&\quad + c_{2,A,V1,f} \cdot S^2 + \dots + c_{6,A,V1,f} \cdot S^6, \\
\varphi_{12,A}(S, r_{2,A,min}, h_{4,A,min}, \alpha_{4,max}) &= \varphi_{12,A,V2,f} = c_{0,A,V2,f} + c_{1,A,V2,f} \cdot S \\
&\quad + c_{2,A,V2,f} \cdot S^2 + \dots + c_{6,A,V2,f} \cdot S^6, \\
\varphi_{12,A}(S, r_{2,A,min}, h_{4,A,max}, \alpha_{4,min}) &= \varphi_{12,A,V3,f} = c_{0,A,V3,f} + c_{1,A,V3,f} \cdot S \\
&\quad + c_{2,A,V3,f} \cdot S^2 + \dots + c_{6,A,V3,f} \cdot S^6, \\
\varphi_{12,A}(S, r_{2,A,min}, h_{4,A,max}, \alpha_{4,max}) &= \varphi_{12,A,V4,f} = c_{0,A,V4,f} + c_{1,A,V4,f} \cdot S \\
&\quad + c_{2,A,V4,f} \cdot S^2 + \dots + c_{6,A,V4,f} \cdot S^6, \\
\varphi_{12,A}(S, r_{2,A,max}, h_{4,A,min}, \alpha_{4,min}) &= \varphi_{12,A,V5,f} = c_{0,A,V5,f} + c_{1,A,V5,f} \cdot S \\
&\quad + c_{2,A,V5,f} \cdot S^2 + \dots + c_{6,A,V5,f} \cdot S^6, \\
\varphi_{12,A}(S, r_{2,A,max}, h_{4,A,min}, \alpha_{4,max}) &= \varphi_{12,A,V6,f} = c_{0,A,V6,f} + c_{1,A,V6,f} \cdot S \\
&\quad + c_{2,A,V6,f} \cdot S^2 + \dots + c_{6,A,V6,f} \cdot S^6, \\
\varphi_{12,A}(S, r_{2,A,max}, h_{4,A,max}, \alpha_{4,min}) &= \varphi_{12,A,V7,f} = c_{0,A,V7,f} + c_{1,A,V7,f} \cdot S \\
&\quad + c_{2,A,V7,f} \cdot S^2 + \dots + c_{6,A,V7,f} \cdot S^6, \\
\varphi_{12,A}(S, r_{2,A,max}, h_{4,A,max}, \alpha_{4,max}) &= \varphi_{12,A,V8,f} = c_{0,A,V8,f} + c_{1,A,V8,f} \cdot S \\
&\quad + c_{2,A,V8,f} \cdot S^2 + \dots + c_{6,A,V8,f} \cdot S^6.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Um nun die Sichtfaktoren für einen beliebigen Winkel der wassergekühlten Wand  $\alpha_4$  zwischen  $\alpha_{4,min}$  und  $\alpha_{4,max}$  interpolieren zu können, wird der Interpolationsfaktor für den Winkel der wassergekühlten Wand  $K_\alpha$  eingeführt. Für diesen gilt die Beziehung

$$K_\alpha = \frac{\alpha_4 - \alpha_{4,min}}{\alpha_{4,max} - \alpha_{4,min}}. \quad (6.23)$$

Mithilfe von  $K_\alpha$  bzw. den Randwerten  $r_{2,A,min}$ ,  $r_{2,A,max}$ ,  $h_{4,A,min}$  und  $h_{4,A,max}$  können mit einem beliebigen Winkel  $\alpha_4$ , für den die Bedingung  $\alpha_{4,min} \leq \alpha_4 \leq \alpha_{4,max}$  gilt, die folgenden dimensionslosen Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_{12,A}(S, r_{2,A,min}, h_{4,A,min}, \alpha_4) &= \varphi_{12,A,V1,g} = (1 - K_\alpha) \cdot \varphi_{12,A,V1,f} \\ &\quad + K_\alpha \cdot \varphi_{12,A,V2,f}, \\ \varphi_{12,A}(S, r_{2,A,min}, h_{4,A,max}, \alpha_4) &= \varphi_{12,A,V2,g} = (1 - K_\alpha) \cdot \varphi_{12,A,V3,f} \\ &\quad + K_\alpha \cdot \varphi_{12,A,V4,f}, \\ \varphi_{12,A}(S, r_{2,A,max}, h_{4,A,min}, \alpha_4) &= \varphi_{12,A,V3,g} = (1 - K_\alpha) \cdot \varphi_{12,A,V5,f} \\ &\quad + K_\alpha \cdot \varphi_{12,A,V6,f}, \\ \varphi_{12,A}(S, r_{2,A,max}, h_{4,A,max}, \alpha_4) &= \varphi_{12,A,V4,g} = (1 - K_\alpha) \cdot \varphi_{12,A,V7,f} \\ &\quad + K_\alpha \cdot \varphi_{12,A,V8,f} \end{aligned} \quad (6.24)$$

aufgestellt werden. Damit zusätzlich die Höhe der wassergekühlten Wand  $h_4$  zwischen  $h_{4,A,min}$  und  $h_{4,A,max}$  beliebig verändert werden kann, wird der Interpolationsfaktor für die Höhe der wassergekühlten Wand des Bereichs A  $K_{h,A}$  benötigt. Dieser Faktor lässt sich mit der Beziehung

$$K_{h,A} = \frac{h_4 - h_{4,A,min}}{h_{4,A,max} - h_{4,A,min}} \quad (6.25)$$

beschreiben. Unter Zuhilfenahme von  $K_\alpha$ ,  $K_{h,A}$  und den Randwerten  $r_{2,A,min}$  bzw.  $r_{2,A,max}$  ist es möglich bei einem beliebigen Winkel  $\alpha_4$ , für welchen die Bedingung  $\alpha_{4,min} \leq \alpha_4 \leq \alpha_{4,max}$  gilt und mit einer willkürlichen Höhe  $h_4$ , für welche die Bedingung  $h_{4,A,min} \leq h_4 \leq h_{4,A,max}$  gilt, die folgenden dimensionslosen Funktionen

$$\begin{aligned}
\varphi_{12,A}(S, r_{2,A,min}, h_4, \alpha_4) &= \varphi_{12,A,V1,h} \\
&= (1 - K_{h,A}) \cdot \varphi_{12,A,V1,g} + K_{h,A} \cdot \varphi_{12,A,V2,g} \\
&= (1 - K_{h,A}) \cdot (1 - K_\alpha) \cdot \varphi_{12,A,V1,f} \\
&\quad + (1 - K_{h,A}) \cdot K_\alpha \cdot \varphi_{12,A,V2,f} \\
&\quad + K_{h,A} \cdot (1 - K_\alpha) \cdot \varphi_{12,A,V3,f} \\
&\quad + K_{h,A} \cdot K_\alpha \cdot \varphi_{12,A,V4,f}, \\
\varphi_{12,A}(S, r_{2,A,max}, h_4, \alpha_4) &= \varphi_{12,A,V2,h} \\
&= (1 - K_{h,A}) \cdot \varphi_{12,A,V3,g} + K_{h,A} \cdot \varphi_{12,A,V4,g} \\
&= (1 - K_{h,A}) \cdot (1 - K_\alpha) \cdot \varphi_{12,A,V5,f} \\
&\quad + (1 - K_{h,A}) \cdot K_\alpha \cdot \varphi_{12,A,V6,f} \\
&\quad + K_{h,A} \cdot (1 - K_\alpha) \cdot \varphi_{12,A,V7,f} \\
&\quad + K_{h,A} \cdot K_\alpha \cdot \varphi_{12,A,V8,f}.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

herzuleiten. Um auch noch den Anlagenradius  $r_2$  variieren zu können, wird der Interpolationsfaktor des Anlagenradius für den Bereich A  $K_{r,A}$  eingeführt. Dieser ist durch den Ausdruck

$$K_{r,A} = \frac{r_2 - r_{2,A,min}}{r_{2,A,max} - r_{2,A,min}} \tag{6.27}$$

definiert. Anhand von  $K_\alpha$ ,  $K_{h,A}$  und  $K_{r,A}$  können mit einem beliebigen Winkel  $\alpha_4$ , für den die Bedingung  $\alpha_{4,min} \leq \alpha_4 \leq \alpha_{4,max}$  gilt, mit einer willkürlichen Höhe  $h_4$ , für welche die Bedingung  $h_{4,A,min} \leq h_4 \leq h_{4,A,max}$  gilt und mit einem frei wählbaren Anlagenradius  $r_2$ , für den die Bedingung  $r_{2,A,min} \leq r_2 \leq r_{2,A,max}$  gilt, die nachstehenden dimensionslosen Funktionen

$$\begin{aligned}
\varphi_{12,A}(S, r_2, h_4, \alpha_4) &= \varphi_{12,A} = (1 - K_{r,A}) \cdot \varphi_{12,A,V1,h} + K_{r,A} \cdot \varphi_{12,A,V2,h} \\
&= (1 - K_{r,A}) \cdot (1 - K_{h,A}) \cdot (1 - K_\alpha) \cdot \varphi_{12,A,V1,f} \\
&\quad + (1 - K_{r,A}) \cdot (1 - K_{h,A}) \cdot K_\alpha \cdot \varphi_{12,A,V2,f} \\
&\quad + (1 - K_{r,A}) \cdot K_{h,A} \cdot (1 - K_\alpha) \cdot \varphi_{12,A,V3,f} \\
&\quad + (1 - K_{r,A}) \cdot K_{h,A} \cdot K_\alpha \cdot \varphi_{12,A,V4,f} \\
&\quad + K_{r,A} \cdot (1 - K_{h,A}) \cdot (1 - K_\alpha) \cdot \varphi_{12,A,V5,f} \\
&\quad + K_{r,A} \cdot (1 - K_{h,A}) \cdot K_\alpha \cdot \varphi_{12,A,V6,f} \\
&\quad + K_{r,A} \cdot K_{h,A} \cdot (1 - K_\alpha) \cdot \varphi_{12,A,V7,f} \\
&\quad + K_{r,A} \cdot K_{h,A} \cdot K_\alpha \cdot \varphi_{12,A,V8,f}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

ermittelt werden. Die Bestimmung der restlichen dimensionslosen Funktionen der Sichtfaktoren für den Bereich A  $\varphi_{13,A}(S, r_2, h_4, \alpha_4)$ ,  $\varphi_{14,A}(S, r_2, h_4, \alpha_4)$  und  $\varphi_{15,A}(S, r_2, h_4, \alpha_4)$  erfolgt in gleicher Weise wie für den Sichtfaktor  $\varphi_{12,A}(S, r_2, h_4, \alpha_4)$ .

### 6.2.2 Lineare Interpolation der Sichtfaktoren für die Abmessungen des Bereichs B

Falls bei sinnvoller Geometrie-Wahl der TSGA die Maße in jene für den Bereich B vorgesehenen Abmessungen hineinfallen, werden die Sichtfaktoren  $\varphi_{12,B}(S, r_2, h_4, \alpha_4)$ ,  $\varphi_{13,B}(S, r_2, h_4, \alpha_4)$ ,  $\varphi_{14,B}(S, r_2, h_4, \alpha_4)$  und  $\varphi_{15,B}(S, r_2, h_4, \alpha_4)$  auf dieselbe Art wie in Kap. 6.2.1 ermittelt.

Auch hier werden zuerst für alle möglichen Geometriekombinationen der Randwerte  $r_{2,B,min}$ ,  $r_{2,B,max}$ ,  $h_{4,B,min}$ ,  $h_{4,B,max}$ ,  $\alpha_{4,min}$  und  $\alpha_{4,max}$  des Bereichs B die stetigen dimensionslosen Funktionen, welche Regressionspolynome sechsten Grades sind, für den jeweiligen Sichtfaktor gebildet.

Um alle dimensionslosen Funktionen der Sichtfaktoren für den Bereich B  $\varphi_{13,B}(S, r_2, h_4, \alpha_4)$ ,  $\varphi_{14,B}(S, r_2, h_4, \alpha_4)$  und  $\varphi_{15,B}(S, r_2, h_4, \alpha_4)$  zu erhalten, wird genauso wie in Kap. 6.2.1 mit den Interpolationsfaktoren  $K_\alpha$ ,  $K_{h,B}$  und  $K_{r,B}$  interpoliert.

### 6.3 Einzelne Flächen des Granulators zueinander

Für die vollständige Berechnung der Wärmestrahlung des Schlackenpartikels ist es notwendig auch den Strahlungsaustausch zwischen den in Abb. 6.2 dargestellten Flächen der TSGA untereinander zu berücksichtigen. Die dafür nötigen Sichtfaktoren werden auf Basis der in [9] angeführten Zusammenhänge für spezielle Sichtfaktoren und unter der Anwendung der bereits in Kap. 3.3 erläuterten Reziprozitäts- und Summationsbeziehungen ermittelt. In Anhang B ist die Herleitung aller Sichtfaktoren der einzelnen Flächen des Granulators zueinander ausführlich beschrieben.

Auf Wunsch der Fa. Primetals sollen alle diese Sichtfaktoren in Abhängigkeit von dem Anlagenradius  $r_2$ , der Höhe der wassergekühlten Wand  $h_4$ , dem Winkel der wassergekühlten Wand  $\alpha_4$  und der Höhe der Schlitzbleche  $h_3$  bestimmt werden.

### 6.4 Bestimmung der fiktiven Sichtfaktoren

Mithilfe der in Kap. 3.3.2 erläuterten Grundlagen zur Berechnung der Wärmestrahlung in einem umschlossenen Raum, werden im Folgenden die bereits in Kap. 5 verwendeten fiktiven Sichtfaktoren zur Aufstellung der Differenzgleichungen bestimmt. Zuerst muss das Gleichungssystem für den Strahlungsaustausch zwischen den fünf vorhandenen Zonen der TSGA aufgestellt werden. Dafür ist folgende, auf den konkreten Anwendungsfall angepasste, Beziehung aus [1]

$$\sum_{j=1}^5 [\delta_{ij} - (1 - \epsilon_i) \cdot \varphi_{ij}] \cdot H_j = \epsilon_i \cdot \sigma \cdot T_i^4, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (6.29)$$

zu verwenden. Die Oberfläche eines einzelnen Schlackenpartikels  $A_1$  ist im Vergleich zu den Flächen  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  oder  $A_5$  verschwindend klein, weshalb für die Sichtfaktoren  $\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{21}$ ,  $\dots$ ,  $\varphi_{51}$  in den nachstehenden Gleichungen jeweils der Wert null angenommen werden kann. Die Anwendung der vorherigen Gleichung auf den konkreten Fall der TSGA ergibt die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned}
& [\delta_{11} - (1 - \epsilon_1) \cdot \varphi_{11}] \cdot H_1 + [\delta_{12} - (1 - \epsilon_1) \cdot \varphi_{12}] \cdot H_2 + \dots \\
& \quad + [\delta_{15} - (1 - \epsilon_1) \cdot \varphi_{15}] \cdot H_5 = \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot T_1^4, \\
& [\delta_{21} - (1 - \epsilon_2) \cdot \varphi_{21}] \cdot H_1 + [\delta_{22} - (1 - \epsilon_2) \cdot \varphi_{22}] \cdot H_2 + \dots \\
& \quad + [\delta_{25} - (1 - \epsilon_2) \cdot \varphi_{25}] \cdot H_5 = \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot T_2^4, \\
& [\delta_{31} - (1 - \epsilon_3) \cdot \varphi_{31}] \cdot H_3 + [\delta_{32} - (1 - \epsilon_3) \cdot \varphi_{32}] \cdot H_3 + \dots \\
& \quad + [\delta_{35} - (1 - \epsilon_3) \cdot \varphi_{35}] \cdot H_5 = \epsilon_3 \cdot \sigma \cdot T_3^4 \\
& [\delta_{41} - (1 - \epsilon_4) \cdot \varphi_{41}] \cdot H_4 + [\delta_{42} - (1 - \epsilon_4) \cdot \varphi_{42}] \cdot H_4 + \dots \\
& \quad + [\delta_{45} - (1 - \epsilon_4) \cdot \varphi_{45}] \cdot H_5 = \epsilon_4 \cdot \sigma \cdot T_4^4, \\
& [\delta_{51} - (1 - \epsilon_5) \cdot \varphi_{51}] \cdot H_5 + [\delta_{52} - (1 - \epsilon_5) \cdot \varphi_{52}] \cdot H_5 + \dots \\
& \quad + [\delta_{55} - (1 - \epsilon_5) \cdot \varphi_{55}] \cdot H_5 = \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot T_5^4.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Diese Beziehungen können auch in Matrixschreibweise mit der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{K}$ , der Helligkeitsmatrix  $\mathbf{H}$  und der Ergebnismatrix  $\mathbf{E}$  dargestellt werden. Die Koeffizientenmatrix wird wie folgt angeschrieben

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \delta_{11} - (1 - \epsilon_1) \cdot \varphi_{11} & \delta_{12} - (1 - \epsilon_1) \cdot \varphi_{12} & \dots & \delta_{15} - (1 - \epsilon_1) \cdot \varphi_{15} \\ \delta_{21} - (1 - \epsilon_2) \cdot \varphi_{21} & \delta_{22} - (1 - \epsilon_2) \cdot \varphi_{22} & \dots & \delta_{25} - (1 - \epsilon_2) \cdot \varphi_{25} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{51} - (1 - \epsilon_5) \cdot \varphi_{51} & \delta_{52} - (1 - \epsilon_5) \cdot \varphi_{52} & \dots & \delta_{55} - (1 - \epsilon_5) \cdot \varphi_{55} \end{pmatrix}. \tag{6.31}$$

Die Helligkeitsmatrix beinhaltet die Elemente

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_5 \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

und für die Ergebnismatrix gilt

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot T_1^4 \\ \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot T_2^4 \\ \vdots \\ \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot T_5^4 \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Mit den soeben definierten Matrizen  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{E}$  kann Glg. (6.30) durch die Matrixgleichung

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{E} \quad (6.34)$$

dargestellt werden. Mithilfe der inversen Koeffizientenmatrix  $\mathbf{K}^{-1}$  ist es möglich diese Matrixgleichung wie folgt umzuformen

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{E} & \quad | \cdot \mathbf{K}^{-1} \\ \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{K}^{-1} & \\ \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{K}^{-1}. & \end{aligned} \quad (6.35)$$

Damit können die Helligkeitsmatrix bzw. die einzelnen Elemente  $H_1, H_2, \dots, H_5$  bestimmt werden. Für diese gelten die nachfolgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} H_1 &= (K_{11})^{-1} \cdot \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot T_1^4 + (K_{12})^{-1} \cdot \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot T_2^4 + (K_{13})^{-1} \cdot \epsilon_3 \cdot \sigma \cdot T_3^4 \\ &\quad + (K_{14})^{-1} \cdot \epsilon_4 \cdot \sigma \cdot T_4^4 + (K_{15})^{-1} \cdot \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot T_5^4, \\ H_2 &= (K_{21})^{-1} \cdot \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot T_1^4 + (K_{22})^{-1} \cdot \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot T_2^4 + (K_{23})^{-1} \cdot \epsilon_3 \cdot \sigma \cdot T_3^4 \\ &\quad + (K_{24})^{-1} \cdot \epsilon_4 \cdot \sigma \cdot T_4^4 + (K_{25})^{-1} \cdot \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot T_5^4, \\ H_3 &= (K_{31})^{-1} \cdot \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot T_1^4 + (K_{32})^{-1} \cdot \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot T_2^4 + (K_{33})^{-1} \cdot \epsilon_3 \cdot \sigma \cdot T_3^4 \\ &\quad + (K_{34})^{-1} \cdot \epsilon_4 \cdot \sigma \cdot T_4^4 + (K_{35})^{-1} \cdot \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot T_5^4, \\ H_4 &= (K_{41})^{-1} \cdot \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot T_1^4 + (K_{42})^{-1} \cdot \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot T_2^4 + (K_{43})^{-1} \cdot \epsilon_3 \cdot \sigma \cdot T_3^4 \\ &\quad + (K_{44})^{-1} \cdot \epsilon_4 \cdot \sigma \cdot T_4^4 + (K_{45})^{-1} \cdot \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot T_5^4, \\ H_5 &= (K_{51})^{-1} \cdot \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot T_1^4 + (K_{52})^{-1} \cdot \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot T_2^4 + (K_{53})^{-1} \cdot \epsilon_3 \cdot \sigma \cdot T_3^4 \\ &\quad + (K_{54})^{-1} \cdot \epsilon_4 \cdot \sigma \cdot T_4^4 + (K_{55})^{-1} \cdot \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot T_5^4. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Auf Basis des in [1] hergeleiteten Zusammenhangs

$$\sum_{j=1}^5 (\delta_{ij} - \varphi_{ij}) \cdot H_j = \dot{q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (6.37)$$

können die einzelnen Wärmestromdichten  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_5$ , welche von den Flächen  $A_1, A_2, \dots, A_5$  ausgehen ermittelt werden. Nach Anwendung der obigen Beziehung wird die nachstehende Gleichung für die ausgehende Wärmestromdichte eines einzelnen Schlackenpartikels ( $\dot{q}_1 = \dot{q}_{Str}$ ) aufgestellt

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = & \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{11})^{-1} \cdot T_1^4 + \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{12})^{-1} \cdot T_2^4 + \\ & \dots + \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{15})^{-1} \cdot T_5^4 \\ & + \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{21})^{-1} \cdot T_1^4 + \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{22})^{-1} \cdot T_2^4 + \\ & \dots + \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{25})^{-1} \cdot T_5^4 \\ & + \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot (\delta_{13} - \varphi_{13}) \cdot (K_{31})^{-1} \cdot T_1^4 + \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot (\delta_{13} - \varphi_{13}) \cdot (K_{32})^{-1} \cdot T_2^4 + \\ & \dots + \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot (\delta_{13} - \varphi_{13}) \cdot (K_{35})^{-1} \cdot T_5^4 \\ & + \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot (\delta_{14} - \varphi_{14}) \cdot (K_{41})^{-1} \cdot T_1^4 + \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot (\delta_{14} - \varphi_{14}) \cdot (K_{42})^{-1} \cdot T_2^4 + \\ & \dots + \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot (\delta_{14} - \varphi_{14}) \cdot (K_{45})^{-1} \cdot T_5^4 \\ & + \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{51})^{-1} \cdot T_1^4 + \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{52})^{-1} \cdot T_2^4 + \\ & \dots + \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{55})^{-1} \cdot T_5^4. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Die Beziehung für  $\dot{q}_1$  kann zu folgendem Ausdruck

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = & \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot \left[ (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{11})^{-1} + (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{21})^{-1} + \right. \\ & \left. \dots + (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{51})^{-1} \right] \cdot T_1^4 \\ & + \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot \left[ (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{12})^{-1} + (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{22})^{-1} + \right. \\ & \left. \dots + (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{52})^{-1} \right] \cdot T_2^4 \\ & + \epsilon_3 \cdot \sigma \cdot \left[ (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{13})^{-1} + (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{23})^{-1} + \right. \\ & \left. \dots + (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{53})^{-1} \right] \cdot T_3^4 \\ & + \epsilon_4 \cdot \sigma \cdot \left[ (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{14})^{-1} + (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{24})^{-1} + \right. \\ & \left. \dots + (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{54})^{-1} \right] \cdot T_4^4 \\ & + \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot \left[ (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{15})^{-1} + (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{25})^{-1} + \right. \\ & \left. \dots + (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{55})^{-1} \right] \cdot T_5^4 \end{aligned} \quad (6.39)$$

umgeformt werden. Der Einfachheit halber werden die Ausdrücke in den eckigen Klammern der vorherigen Gleichung zu den fiktiven Sichtfaktoren  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_5$  zusammengefasst. Für diese gelten die nachstehenden Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}_1 &= (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{11})^{-1} + (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{21})^{-1} + \\
 &\quad \dots + (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{51})^{-1}, \\
 \tilde{\varphi}_2 &= (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{12})^{-1} + (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{22})^{-1} + \\
 &\quad \dots + (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{52})^{-1}, \\
 \tilde{\varphi}_3 &= (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{13})^{-1} + (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{23})^{-1} + \\
 &\quad \dots + (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{53})^{-1}, \\
 \tilde{\varphi}_4 &= (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{14})^{-1} + (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{24})^{-1} + \\
 &\quad \dots + (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{54})^{-1}, \\
 \tilde{\varphi}_5 &= (\delta_{11} - \varphi_{11}) \cdot (K_{15})^{-1} + (\delta_{12} - \varphi_{12}) \cdot (K_{25})^{-1} + \\
 &\quad \dots + (\delta_{15} - \varphi_{15}) \cdot (K_{55})^{-1}.
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Die Wärmestromdichten  $\dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4$  und  $\dot{q}_5$ , welche aus der Wärmestrahlung der Schlackenpartikel auf die Flächen  $A_2, A_3, A_4$  und  $A_5$  resultieren werden nicht bestimmt, da diese bei den Energiebilanzen in Kap. 7 nicht berücksichtigt werden.

## 7 Aufstellung der Energiebilanzen

Für die Bestimmung der Temperaturen in der WS  $T_{WS}$ , im FB  $T_{FB}$  und der Luft am Austritt aus der Anlage  $T_{L,aus}$ , müssen Energiebilanzen über einzelne Kontrollvolumen (KV) der TSGA und eine Gesamtenergiebilanz über die komplette TSGA aufgestellt werden.

Um diese Bilanzen anschreiben zu können, werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Temperatur der Fläche 2  $T_2$  ist gleich der Temperatur in der WS  $T_{WS}$  (die Luft besitzt beim Austritt aus der WS die Temperatur der WS  $T_{WS}$ ).
- Die Temperaturen der Fläche 2  $T_2$  und der Fläche 3  $T_3$  sind gleich groß.
- Die Temperatur der Fläche 4  $T_4$  ist konstant und hat einen Wert von 373,15 K.
- Die Temperatur der Fläche 5  $T_5$  ist gleich der Temperatur der Luft am Austritt aus der Anlage  $T_{L,aus}$  (d. h. die Luft besitzt beim Austritt aus der Anlage die Temperatur der Fläche 5  $T_5$ ).
- Die Schlackenpartikel besitzen beim Austritt aus der WS die Temperatur der WS  $T_{WS}$ .
- Zwischen der Luft und den Flächen der TSGA tritt keine Konvektion auf (d. h. die Luft speichert die ganze Konvektionswärme der Schlacke).

Diese Bilanzen werden mithilfe des bereits in Kap. 3 erläuterten ersten Hauptsatzes der Thermodynamik und der Differentialgleichung

$$dh = c_p(T) \cdot dT \quad (7.1)$$

zur Berechnung der vorkommenden Enthalpien angeschrieben [15].

### 7.1 Energiebilanzen einzelner Kontrollvolumen

Die Unterteilung der TSGA in die einzelnen KV ist in Abb. 7.1 ersichtlich. Das obere rötliche KV wird als konischer Freeboard (FBK), das mittlere bräunliche KV als zylindrischer Freeboard (FBZ) und das untere schwärzliche KV als die WS bezeichnet.

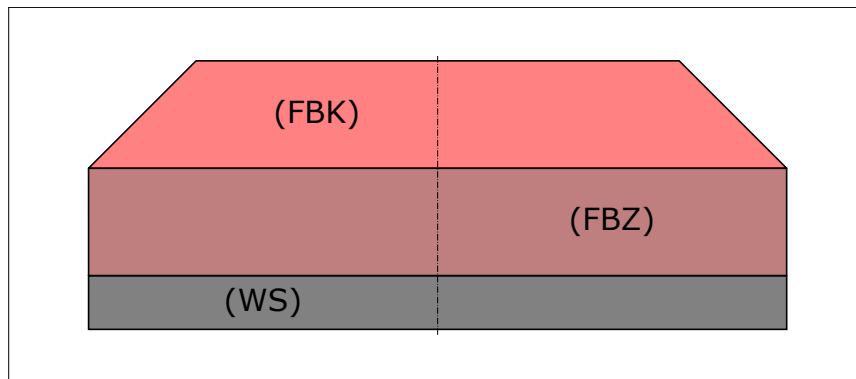


Abb. 7.1: Kontrollvolumen der TSGA

### 7.1.1 Energiebilanz über die WS der TSGA

Unter Zuhilfenahme der in Abb. 7.2 dargestellten Skizze kann die Energiebilanz über das KV der WS aufgestellt werden. Dabei wird angenommen, dass der Luftmassenstrom  $\dot{m}_{L,WS}$  und der Schlackenmassenstrom  $\dot{m}_S$  beim Austritt aus der WS die vorherrschende Temperatur in der WS  $T_{WS}$  besitzen. Um die Energiebilanz anschreiben zu können, müssen zuvor noch die nachstehenden spezifischen Enthalpien ermittelt werden.

Zur Bestimmung der Durchschnittsenthalpie eines Schlackenpartikels nach der „Phase 3“  $\bar{h}_{S,3}$  ist zuerst die spezifische Enthalpie einer einzelnen Kugelschale des Partikels nach der „Phase 3“  $h_{S,3,i}$  mit der Beziehung

$$h_{S,3,i} = \int_{T_B}^{T_i} c_{pS}(T) \cdot dT \quad (7.2)$$

zu bestimmen. Die beiden Integrationsgrenzen  $T_i$  und  $T_B$  stellen die Temperatur einer einzelnen Schale bzw. die Bezugstemperatur dar, wobei für Letztere ein Wert von 273,15 K gewählt wird.

Aufgrund der angenommenen konstanten Dichte von Schlacke  $\rho_S$  ist es möglich die durchschnittliche Enthalpie eines ganzen Schlackenpartikels direkt über die Volumensanteile  $V_i$  und die spezifischen Enthalpien  $h_{S,3,i}$  der einzelnen Schalen zu berechnen. Für die Durchschnittsenthalpie des ganzen Partikels nach der „Phase 3“ ergibt sich folgender Zusammenhang

$$\bar{h}_{S,3} = \frac{\sum_{i=1}^n h_{S,3,i} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n V_i} \quad i = 1, 2 \dots n. \quad (7.3)$$

Die spezifische Enthalpie der Luft am Eintritt  $h_{L, \text{ein}}$  mit der Temperatur  $T_{L, \text{ein}}$  errechnet sich mit dem Ausdruck

$$h_{L, \text{ein}} = \int_{T_B}^{T_{L, \text{ein}}} c_{pL}(T) \cdot dT. \quad (7.4)$$

Zur Bestimmung der spezifischen Enthalpie der Schlacke nach der Wirbelschicht  $h_{S, WS}$  wird die Gleichung

$$h_{S, WS} = \int_{T_B}^{T_{WS}} c_{pS}(T) \cdot dT \quad (7.5)$$

verwendet und für die spezifische Enthalpie der Luft nach der Wirbelschicht  $h_{L, WS}$  gilt die Beziehung

$$h_{L, WS} = \int_{T_B}^{T_{WS}} c_{pL}(T) \cdot dT. \quad (7.6)$$

Mit diesen spezifischen Enthalpien und unter Zuhilfenahme der Abb. 7.2 gilt für die Energiebilanz der Zusammenhang

$$\dot{m}_S \cdot \bar{h}_{S,3} + \dot{m}_{L, WS} \cdot h_{L, \text{ein}} = \dot{m}_S \cdot h_{S, WS} + \dot{m}_{L, WS} \cdot h_{L, WS}. \quad (7.7)$$

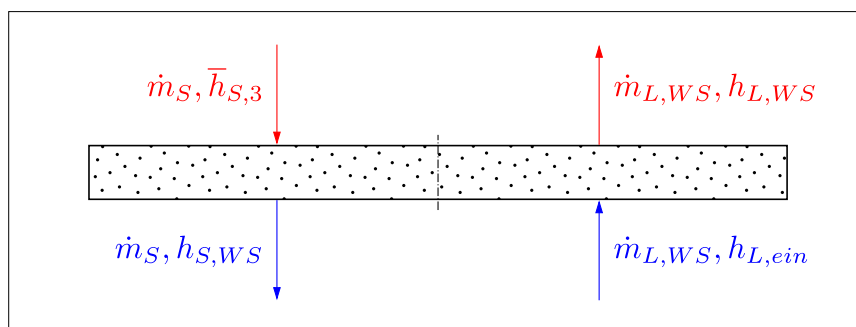


Abb. 7.2: Energiebilanz über die WS der TSGA

### 7.1.2 Energiebilanz über den FBZ der TSGA

Die Energiebilanz über das KV des FBZ wird mithilfe der Skizze in Abb. 7.3 aufgestellt. Dafür müssen zuerst noch die nachfolgenden spezifischen Enthalpien und die Wärmestrahlung im FBZ bestimmt werden.

Die „Phase 3\*“ geht vom Verlassen des Schlackenpartikels von der wassergekühlten Wand bis unmittelbar vor den Eintritt in den FBZ. Um die Durchschnittsenthalpie eines Schlackenpartikels nach der „Phase 3\*“  $\bar{h}_{S,3^*}$  ermitteln zu können, müssen genauso für diesen Fall zuerst die spezifischen Enthalpien nach der „Phase 3\*“ der einzelnen Kugelschalen des Partikels  $h_{S,3^*,i}$  mit der Beziehung

$$h_{S,3^*,i} = \int_{T_B}^{T_i} c_{pS}(T) \cdot dT \quad (7.8)$$

bestimmt werden. Auch hier wird die spezifische Durchschnittsenthalpie des ganzen Schlackenpartikels direkt über die Volumensanteile  $V_i$  der einzelnen Schalen berechnet. Dadurch entsteht für die Durchschnittsenthalpie des ganzen Partikels nach der „Phase 3\*“ der folgende Zusammenhang

$$\bar{h}_{S,3^*} = \frac{\sum_{i=1}^n h_{S,3^*,i} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^n V_i} \quad i = 1, 2 \dots n. \quad (7.9)$$

Die spezifische Enthalpie der Luft nach dem FBZ  $h_{L,FB}$  wird mit dem Ausdruck

$$h_{L,FB} = \int_{T_B}^{T_{FB}} c_{pL}(T) \cdot dT \quad (7.10)$$

berechnet. Hier wird angenommen, dass die Temperatur im FB  $T_{FB}$  gleich der Temperatur der Luft am Austritt aus dem FBZ bzw. gleich der Temperatur am Eintritt in den FBK ist. Für die Wärmestrahlung im FBZ gilt die Gleichung

$$\dot{Q}_{Str,FBZ} = \frac{2 \cdot h_3}{2 \cdot h_3 + h_4} \cdot \dot{Q}_{Str,3}, \quad (7.11)$$

wobei der Faktor  $\frac{2 \cdot h_3}{2 \cdot h_3 + h_4}$  das Verhältnis vom zurückgelegten Weg im FBZ zum gesamten zurückgelegten Weg des Schlackenpartikels in der „Phase 3“, und  $\dot{Q}_{Str,3}$  die

abgegebene Wärmestrahlung der Schlacke in der „Phase 3“ sind. Mit diesen und den bereits in Kap. 7.1.1 berechneten spezifischen Enthalpien bzw. der Skizze in Abb. 7.3 kann die Energiebilanz mit dem Zusammenhang

$$\dot{m}_{L,SB} \cdot h_{L,ein} + \dot{m}_{L,WS} \cdot h_{L,WS} + \dot{m}_S \cdot \bar{h}_{S,3^*} = \dot{m}_{L,ges} \cdot h_{L,FB} + \dot{m}_S \cdot \bar{h}_{S,3} + \dot{Q}_{Str,FBZ} \quad (7.12)$$

aufgestellt werden.

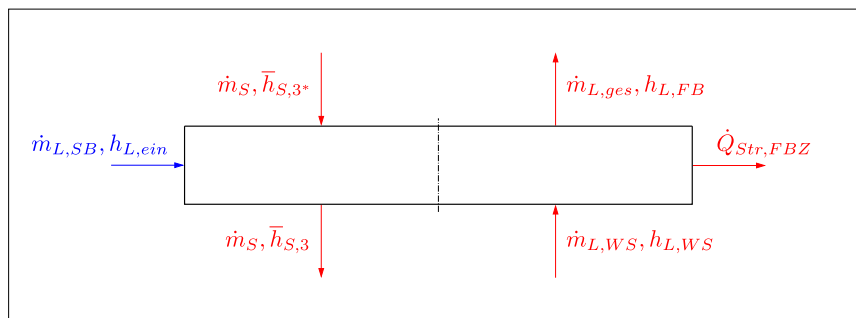


Abb. 7.3: Energiebilanz über den FBZ der TSGA

### 7.1.3 Energiebilanz über den FBK der TSGA

Die Energiebilanz über das KV des FBK lässt sich mit der Skizze aus Abb. 7.4 ermitteln. Dafür müssen noch die nachstehenden spezifischen Enthalpien, der abzuführende Wärmestrom an der wassergekühlten Wand und die Wärmestrahlung im FBK ermittelt werden.

Für die spezifische Schlackenanstangsenthalpie  $h_{S,0}$  mit der Temperatur  $T_{S,0}$ , welche der TSGA vom Hochofen über die Schlackenrinne zugeführt wird, ergibt sich die Beziehung

$$h_{S,0} = \int_{T_B}^{T_{S,0}} c_{pS}(T) \cdot dT. \quad (7.13)$$

Die spezifische Enthalpie der Luft am Austritt aus der TSGA  $h_{L,aus}$  wird mit dem Ausdruck

$$h_{L,aus} = \int_{T_B}^{T_{L,aus}} c_{pL}(T) \cdot dT \quad (7.14)$$

ermittelt. Die Berechnung des an der wassergekühlten Wand abzuführenden Wärmestroms  $\dot{Q}_W$  erfolgt mit der bereits in Kap. 4.4 erläuterten Gleichung. Zur Bestimmung der Wärmestrahlung im FBK  $\dot{Q}_{Str,FBK}$  wird die Gleichung

$$\dot{Q}_{Str,FBK} = \dot{Q}_{Str,1} + \dot{Q}_{Str,2} + \frac{h_4}{2 \cdot h_3 + h_4} \cdot \dot{Q}_{Str,3} \quad (7.15)$$

verwendet, wobei der Faktor  $\frac{h_4}{2 \cdot h_3 + h_4}$  das Verhältnis vom zurückgelegten Weg im FBK zum gesamten zurückgelegten Weg des Schlackenpartikels in der „Phase 3“, bzw.  $\dot{Q}_{Str,1}$ ,  $\dot{Q}_{Str,2}$  und  $\dot{Q}_{Str,3}$  die abgegebenen Wärmestrahlungen der Schlacke in der „Phase 1“, „Phase 2“ und „Phase 3“ sind. Aufgrund der Verwendung des Modells aus Abb. 5.1 gilt für die abgegebene Wärmestrahlung in „Phase 2“ die Beziehung  $\dot{Q}_{Str,2} = 0$ . Mit diesen und den zuvor in Kap. 7.1.1 und Kap. 7.1.2 ermittelten Beziehungen für die spezifischen Enthalpien und Wärmeströme entsteht der Zusammenhang

$$\dot{m}_{L,ges} \cdot h_{L,FB} + \dot{m}_S \cdot h_{S,0} = \dot{m}_{L,ges} \cdot h_{L,aus} + \dot{m}_S \cdot \bar{h}_{S,3^*} + \dot{Q}_{Str,FBK} + \dot{Q}_W \quad (7.16)$$

für die Energiebilanz über den FBK.

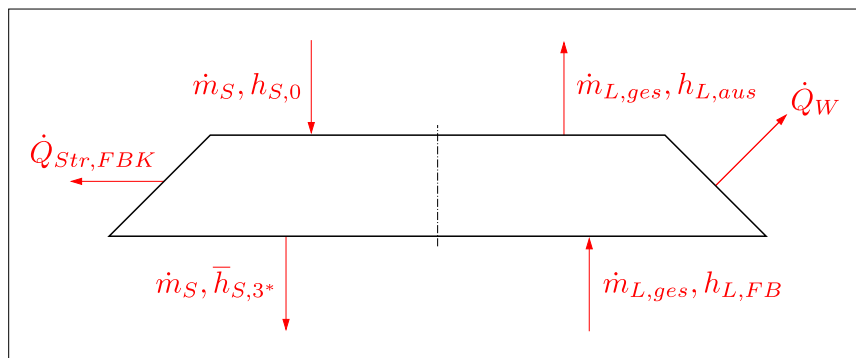


Abb. 7.4: Energiebilanz über den FBK der TSGA

## 7.2 Gesamtenergiebilanz der TSGA

Die Aufstellung der Gesamtenergiebilanz über das KV der ganzen TSGA erfolgt mit der in Abb. 7.5 dargestellten Skizze. Zuvor wird noch für die Berechnung der gesamten abgehenden Wärmestrahlung der Schlacke  $\dot{Q}_{Str}$  der Ausdruck

$$\dot{Q}_{Str} = \dot{Q}_{Str,1} + \dot{Q}_{Str,2} + \dot{Q}_{Str,3} \quad (7.17)$$

angegeben. Mittels der bereits in Kap. 7.1 berechneten spezifischen Enthalpien, Wärmeströme bzw. der gesamten abgebenden Wärmestrahlung der Schlacke, kann die Energiebilanz wie folgt

$$\dot{m}_{L,ges} \cdot h_{L,ein} + \dot{m}_S \cdot h_{S,0} = \dot{m}_{L,ges} \cdot h_{L,aus} + \dot{m}_S \cdot h_{S,WS} + \dot{Q}_W + \dot{Q}_{Str} \quad (7.18)$$

angeschrieben werden.

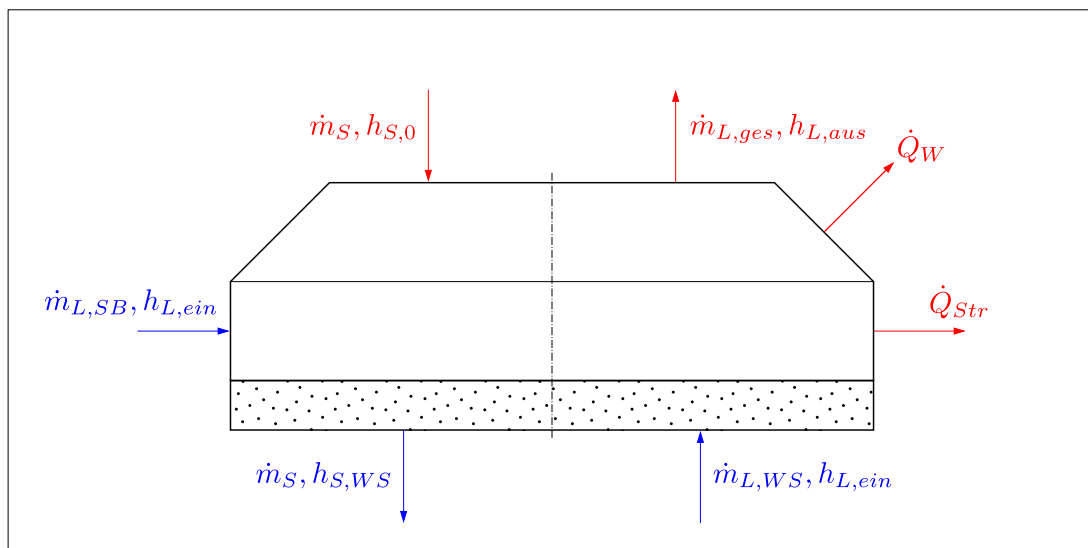


Abb. 7.5: Gesamtenergiebilanz der TSGA

## 8 Prozesstechnologische Analyse

Die Fa. Primetals verlangt eine prozesstechnologische Untersuchung des Trockenschlackengranulationsprozesses für insgesamt 6 verschiedene Lastfälle. Ausgehend von einem Basisfall werden 5 weitere Fälle untersucht, die sich jeweils durch Änderung eines einzigen Inputparameters vom Basisfall unterscheiden. Durch die Variation der Werte einzelner Inputparameter wird versucht deren Einfluss auf das Abkühlungsverhalten eines einzelnen Schlackenpartikels bzw. auf den gesamten Prozess der TSG festzustellen. Die Inputparameter der unterschiedlichen Lastfälle können Tab. 8.1 entnommen werden. Diese sind großteils in Abb. 1.1 ersichtlich bzw. werden im Folgenden kurz erläutert:

- Der Gesamtluftvolumenstrom bei Normbedingungen  $\dot{V}_{L,ges,N}$ , welcher in die TSGA eingeblasen wird, setzt sich aus dem Luftvolumenstrom durch die WS bei Normbedingungen  $\dot{V}_{L,WS,N}$  und dem Luftvolumenstrom durch die SB bei Normbedingungen  $\dot{V}_{L,SB,N}$  zusammen. Für beide Volumenströme wird jeweils eine Lufteintrittstemperatur  $\vartheta_{L,ein}$  von 20 °C angenommen.
- Die Schlackenanstangstemperatur  $\vartheta_{S,0}$  ist die Temperatur der HOS beim Eintritt in die TSGA.
- Die Größe  $\dot{m}_S$  ist der Schlackenmassenstrom, welcher vom Hochofen über eine Schlackenrinne auf den Drehteller der TSGA aufgebracht wird.
- Die Drehzahl  $n_{Dt}$  gibt die Rotationsgeschwindigkeit des Drehtellers an.
- Als Prozentsatz des Gesamtluftvolumenstroms durch die WS  $p_{L,ges,WS}$  wird das Verhältnis vom Luftvolumenstrom durch die WS bei Normbedingungen  $\dot{V}_{L,WS,N}$  zum Gesamtluftvolumenstrom bei Normbedingungen  $\dot{V}_{L,ges,N}$  bezeichnet.

In Kap. 4.2.2 wurden bereits die zu analysierenden Schlackenpartikeldurchmesser (SPD) angeführt und sind der Tab. 4.5 zu entnehmen. In Abb. 8.1 ist die konkrete Geometrie der zu untersuchenden Pilotanlage in der VASL ersichtlich. Als Erwärmung des Gesamtluftvolumenstroms wird die Differenz zwischen der Temperatur der Fläche 5  $\vartheta_5$  und der Lufteintrittstemperatur  $\vartheta_{L,ein}$  betrachtet.

Im Anschluss erfolgt noch ein Abgleich der Endergebnisse jedes einzelnen Lastfalls mit einem Berechnungstool der Fa. Primetals. Mit diesem Tool können lediglich die

Lastfall	$\dot{V}_{L,ges,N}$ in $\frac{\text{Nm}^3}{\text{h}}$	$\vartheta_{S,0}$ in $^{\circ}\text{C}$	$\dot{m}_S$ in $\frac{\text{kg}}{\text{min}}$	$n_{Dt}$ in $\frac{1}{\text{min}}$	$p_{L,ges,WS}$ in %
Basisfall	170 000	1350	750	900	70
Fall 1	120 000	1350	750	900	70
Fall 2	170 000	1450	750	900	70
Fall 3	170 000	1350	1000	900	70
Fall 4	170 000	1350	750	1200	70
Fall 5	170 000	1350	750	900	50

Tab. 8.1: Lastfälle

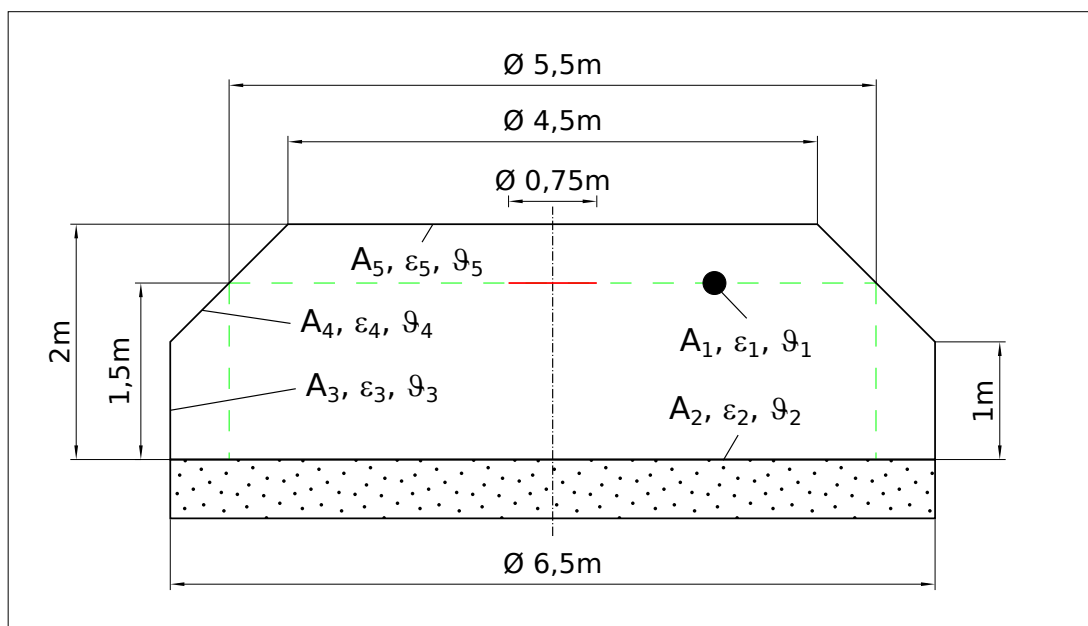


Abb. 8.1: Pilotanlage zur TSG der Fa. Primetals

globalen Prozessgrößen, wie z. B. die Temperatur der Wirbelschicht  $T_{WS}$  oder die Temperatur der Luft am Austritt aus der Anlage  $T_{L,aus}$  bestimmt werden.

## 8.1 Lastfall - Basisfall

Wie bereits am Anfang des Kapitels erwähnt, werden basierend auf diesem Lastfall Vergleiche mit den weiteren 5 Lastfällen durchgeführt. In den nachfolgenden Abb. 8.2, 8.3, 8.4 und 8.5 sind für die 4 gewählten SPD jeweils die Temperaturverläufe  $\vartheta(n)$  über den Schalen  $n$  eines Schlackenpartikels dargestellt. Diese Verläufe gelten immer

für das Ende der „Phase 1“, „Phase 2“ oder „Phase 3“ bzw. nach den Zeiten  $t_1$ ,  $t_2$  und  $t_3$ . Eine genaue Definition der Phasen und Zeiten ist bereits in Kap. 1.1 durchgeführt worden. Um den Aggregatzustand einer einzelnen Schale feststellen zu können, sind zusätzlich in allen Abbildungen die Erweichungs- und Fließtemperatur bzw. der feste Bereich, Schmelzbereich und flüssige Bereich eingezeichnet.

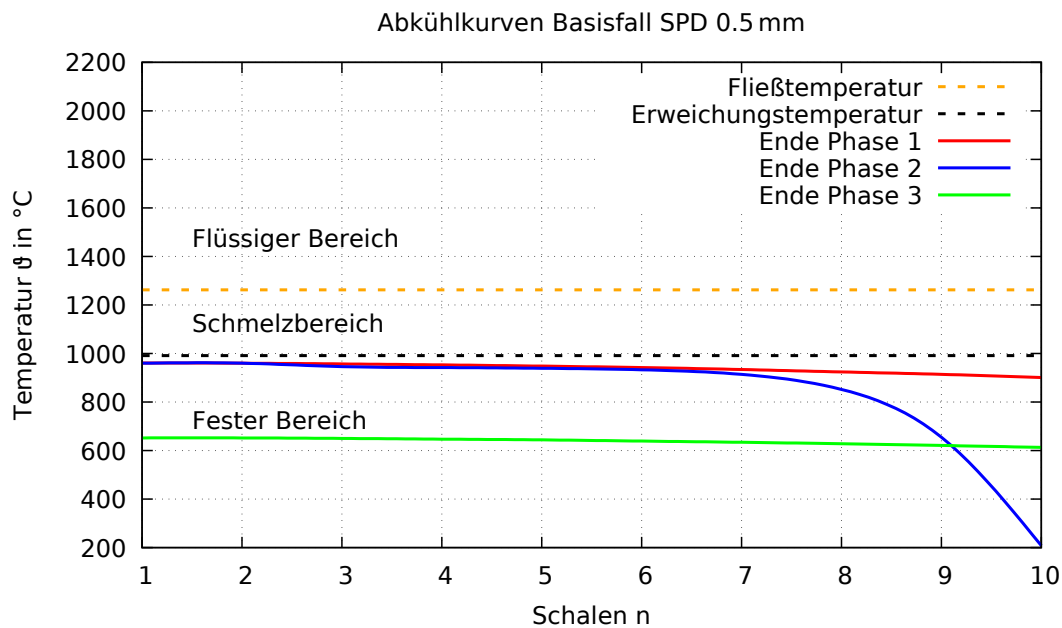


Abb. 8.2: Abkühlkurven Basisfall SPD 0,5 mm

In der Tab. 8.2 sind die Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der einzelnen Partikel aufgelistet. Die Flugzeiten sind für alle 4 Partikelgrößen in „Phase 1“ und „Phase 3“ konstant. Nur die Kontaktzeit der Schlackenpartikel mit der wassergekühlten Wand in „Phase 2“ steigt mit größer werdendem Partikeldurchmesser.

Zeiten in ms	$t(d_{1,1})$	$t(d_{1,2})$	$t(d_{1,3})$	$t(d_{1,4})$
Phase 1	97,3			
Phase 2	0,2	0,4	3,9	16,3
Phase 3	53,1			
Gesamtzeit	150,6	150,7	154,2	166,6

Tab. 8.2: Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der Partikel - Basisfall

Die Tab. 8.3 zeigt für die 4 gewählten Partikeldurchmesser die Durchschnittstem-

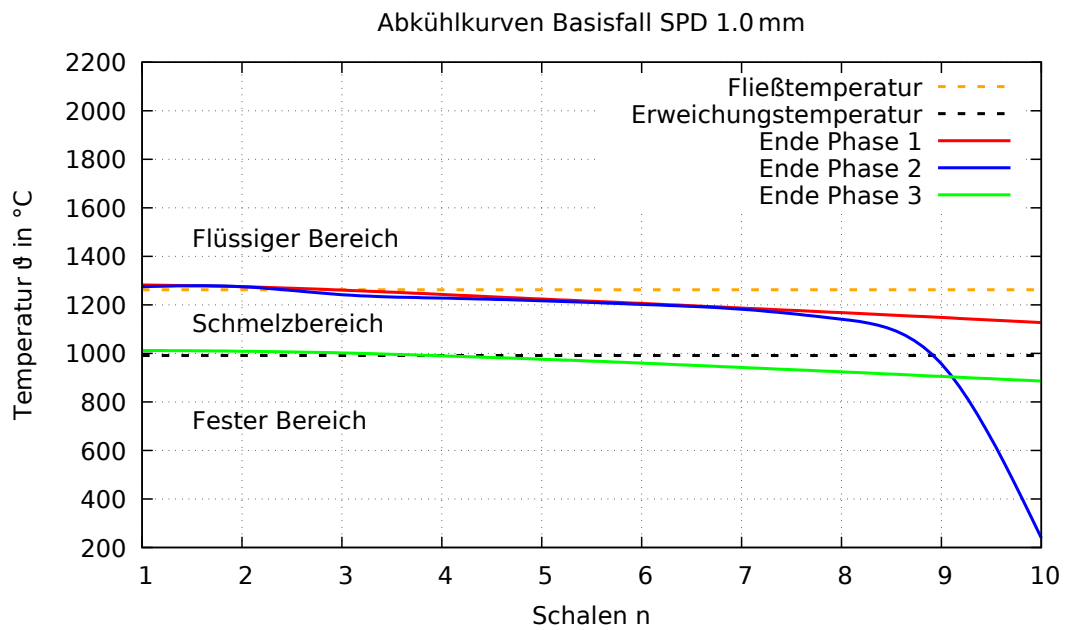


Abb. 8.3: Abkühlkurven Basisfall SPD 1 mm

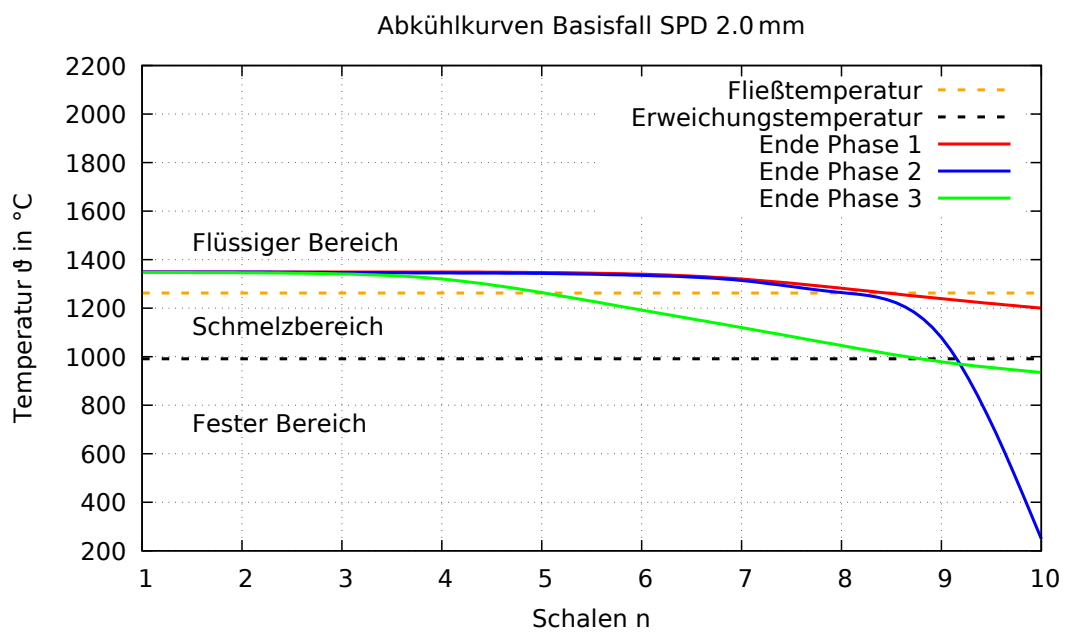


Abb. 8.4: Abkühlkurven Basisfall SPD 2 mm

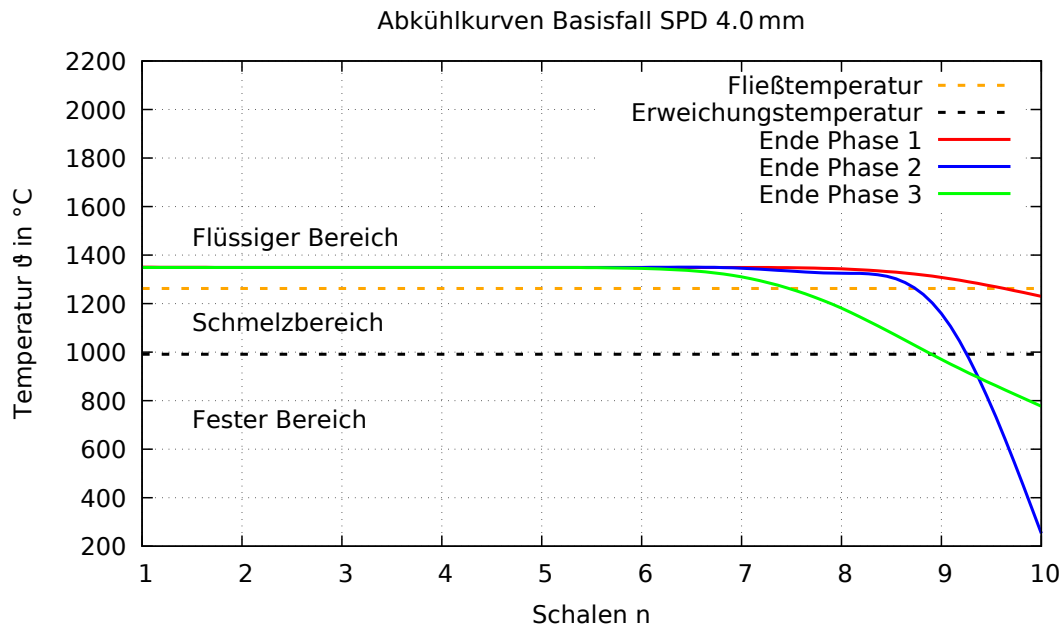


Abb. 8.5: Abkühlkurven Basisfall SPD 4 mm

peraturen der Schlackenpartikel  $\bar{\vartheta}_S$  über den Schalen  $n$  jeweils für das Ende der entsprechenden Phase.

Temperaturen in °C	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,1})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,2})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,3})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,4})$
Phase 1	926	1175	1282	1321
Phase 2	742	995	1105	1146
Phase 3	630	930	1080	1136

Tab. 8.3: Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel - Basisfall

Für die Flächen  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  und  $A_5$  der Pilotanlage aus Abb. 8.1 ergeben sich bei den vorhandenen Inputparametern die in Tab. 8.4 aufgelisteten Temperaturen  $\vartheta_i$ . Die Differenz zwischen der Temperatur der Fläche 5  $\vartheta_5$  und der konstanten Lufteintrittstemperatur  $\vartheta_{L, \text{ein}} = 20^\circ\text{C}$  stellt die Erwärmung der Luft beim Durchströmen der Anlage dar und beträgt  $199^\circ\text{C}$ .

i	2	3	4	5
Temperaturen $\vartheta_i$ in °C	292	292	100	219

Tab. 8.4: Temperaturen der Flächen - Basisfall

Die Tab. 8.5 gibt Aufschluss über die Wärmebilanz des Basisfalls. Abhängig von der Wärmeübertragungsart sind die gesamten Wärmeströme  $\dot{Q}_i$  und deren Prozentsätze  $p_i$  tabelliert.

Wärmeübertragungsart	$\dot{Q}_i$ in MW	$p_i$ in %
Konvektion	0,464	14,1
Wärmestrahlung	0,234	7,1
Wärmeleitung	2,602	78,8
Summe	3,300	100,0

Tab. 8.5: Wärmebilanz - Basisfall

## 8.2 Lastfall - Fall 1

Der Fall 1 unterscheidet sich vom Basisfall durch eine geringere Zufuhr des Gesamtluftvolumenstroms bei Normbedingungen  $\dot{V}_{L,ges,N}$  in die TSGA. Es strömen nur  $120\,000 \frac{\text{Nm}^3}{\text{h}}$  Luft in die Anlage statt  $170\,000 \frac{\text{Nm}^3}{\text{h}}$ . Die folgenden Abb. 8.6, 8.7, 8.8 und 8.9 zeigen jeweils für jeden der 4 SPD die Temperaturverläufe  $\vartheta(n)$  über den Schalen  $n$  am Ende der „Phase 1“, „Phase 2“ und „Phase 3“ eines Partikels.

In Tab. 8.6 sind die Werte der Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten für die 4 gewählten Partikeldurchmesser zusammengefasst.

Zeiten in ms	$t(d_{1,1})$	$t(d_{1,2})$	$t(d_{1,3})$	$t(d_{1,4})$
Phase 1	97,3			
Phase 2	0,2	0,4	3,8	16,1
Phase 3	53,1			
Gesamtzeit	150,5	150,7	154,2	166,4

Tab. 8.6: Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der Partikel - Fall 1

Aus der Tab. 8.7 können die Durchschnittstemperaturen der einzelnen Schlackenpartikel  $\bar{\vartheta}_S$  über den Schalen  $n$  immer für das Ende einer Phase abgelesen werden.

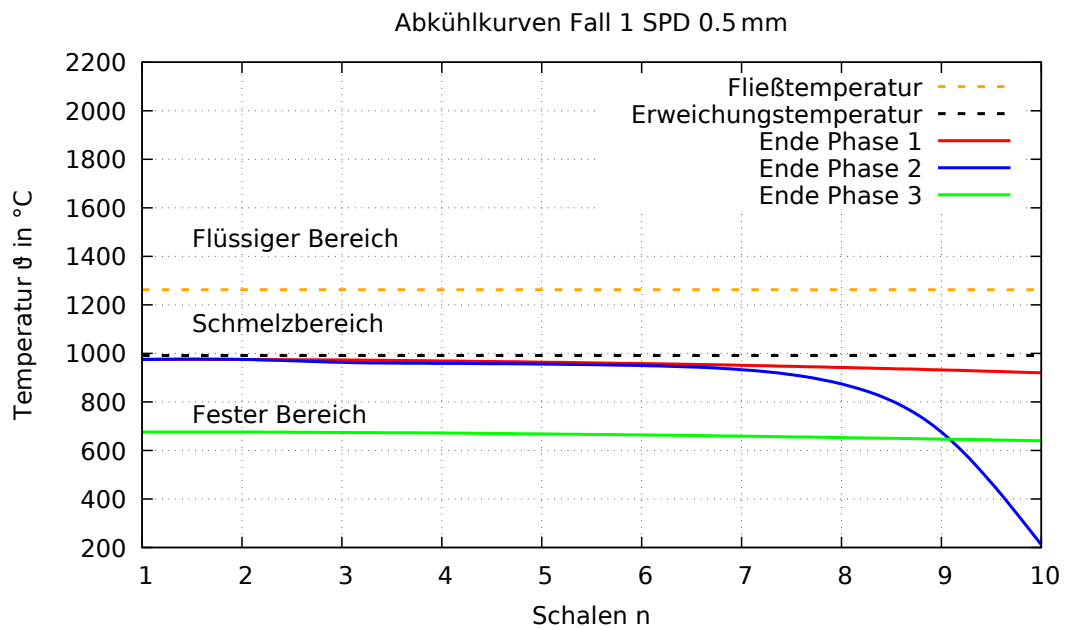


Abb. 8.6: Abkühlkurven Fall 1 SPD 0,5 mm

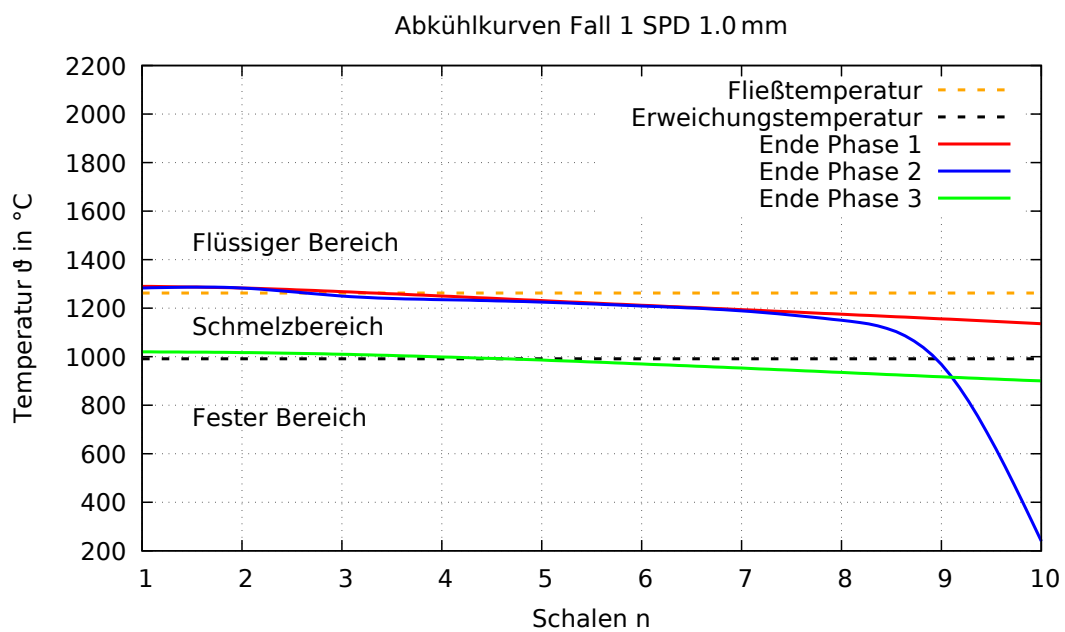


Abb. 8.7: Abkühlkurven Fall 1 SPD 1 mm

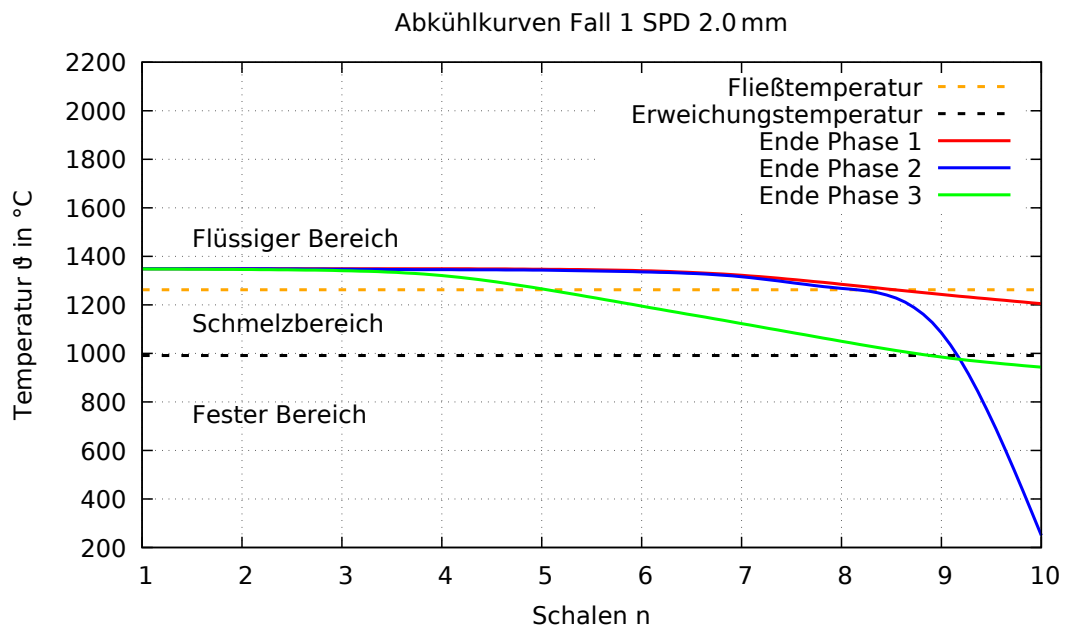


Abb. 8.8: Abkühlkurven Fall 1 SPD 2 mm

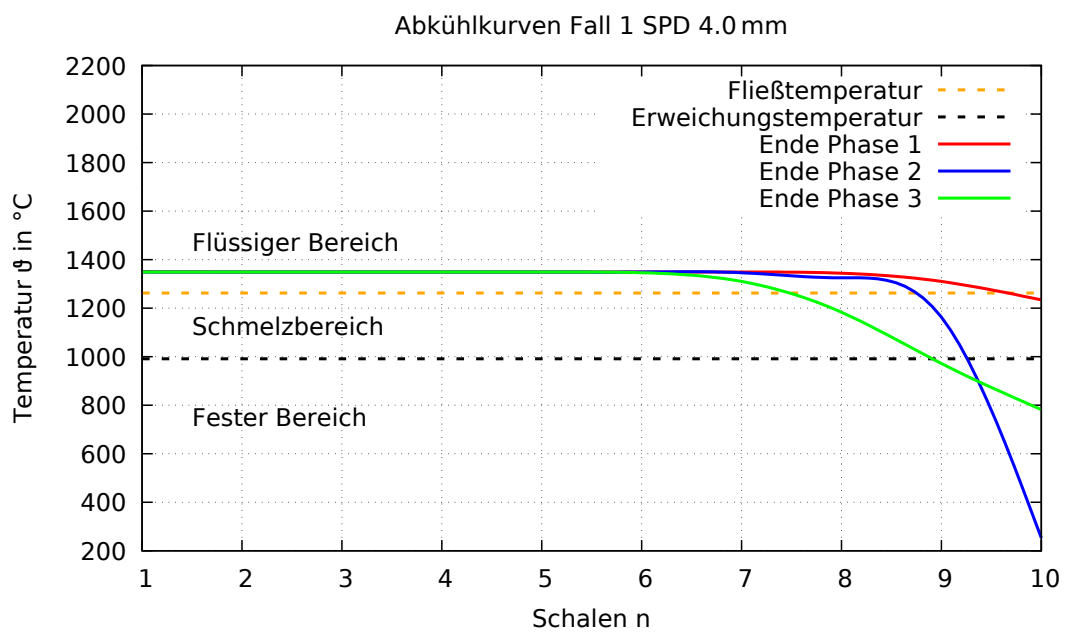


Abb. 8.9: Abkühlkurven Fall 1 SPD 4 mm

Temperaturen in °C	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,1})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,2})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,3})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,4})$
Phase 1	944	1183	1285	1322
Phase 2	760	1003	1108	1147
Phase 3	655	942	1084	1137

Tab. 8.7: Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel - Fall 1

In nachstehender Tab. 8.8 sind die sich bei den gegebenen Bedingungen einstellenden Temperaturen der Flächen  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  und  $A_5$  der Pilotanlage angeführt. Die Lufterwärmung bis kurz vor dem Austritt aus der Anlage beträgt im Fall 1 256 °C.

i	2	3	4	5
Temperaturen $\vartheta_i$ in °C	369	369	100	276

Tab. 8.8: Temperaturen der Flächen - Fall 1

Abhängig von der Wärmeübertragungsart können der Tab. 8.9 die abfließenden Wärmeströme  $\dot{Q}_i$  aller Schlackenpartikel und deren Prozentsätze  $p_i$  in Form einer Wärmebilanz entnommen werden.

Wärmeübertragungsart	$\dot{Q}_i$ in MW	$p_i$ in %
Konvektion	0,432	13,2
Wärmestrahlung	0,235	7,2
Wärmeleitung	2,602	79,6
Summe	3,269	100,0

Tab. 8.9: Wärmebilanz - Fall 1

Im Folgenden werden die Erkenntnisse aus dem Vergleich des Falls 1 mit dem Basisfall angeführt:

- Die Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der entsprechenden Schlackenpartikel sind für den Basisfall und den Fall 1 sehr ähnlich.
- Das Abkühlverhalten der einzelnen Partikel ist in beiden Fällen fast identisch.

- Die Durchschnittstemperaturen sind daher ebenfalls für den Fall 1 beinahe gleich groß.
- Im Fall 1 sind die Temperaturen der Flächen 2 und 3 um fast 80 °C und jene der Fläche 5 um rund 60 °C höher als beim Basisfall. Dies ist auf die geringere Gesamtluftzufuhr im Fall 1 zurückzuführen.
- Bei der Gegenüberstellung der Wärmebilanz des Falls 1 gemäß Tab. 8.9 mit jener des Basisfalls gemäß Tab. 8.5 sind kaum Unterschiede erkennbar.

### 8.3 Lastfall - Fall 2

Im Unterschied zum Basisfall beträgt für den Fall 2 die Schlackeneintrittstemperatur der flüssigen HOS 1450 °C anstatt 1350 °C. Die Diagramme in Abb. 8.10, 8.11, 8.12 und 8.13 veranschaulichen für jeden der 4 unterschiedlichen Partikelgrößen die Temperaturverläufe  $\vartheta(n)$  über den Schalen  $n$  am Ende der „Phase 1“, „Phase 2“ oder „Phase 3“ des Abkühlungsvorganges.

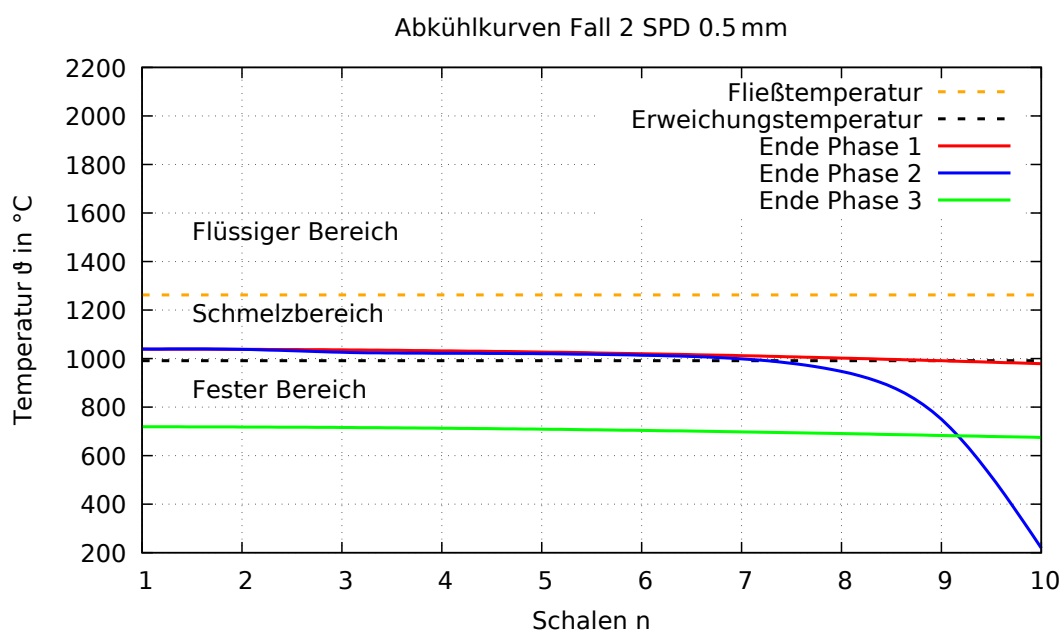


Abb. 8.10: Abkühlkurven Fall 2 SPD 0,5 mm

Die Tab. 8.10 enthält die Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der einzelnen Schlackepartikel.

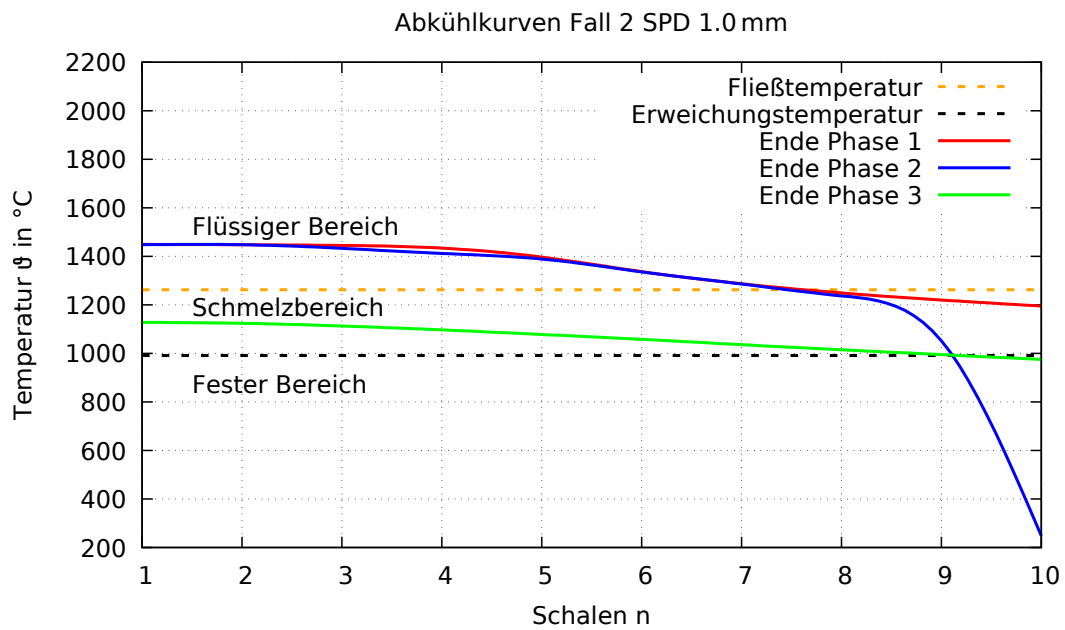


Abb. 8.11: Abkühlkurven Fall 2 SPD 1 mm

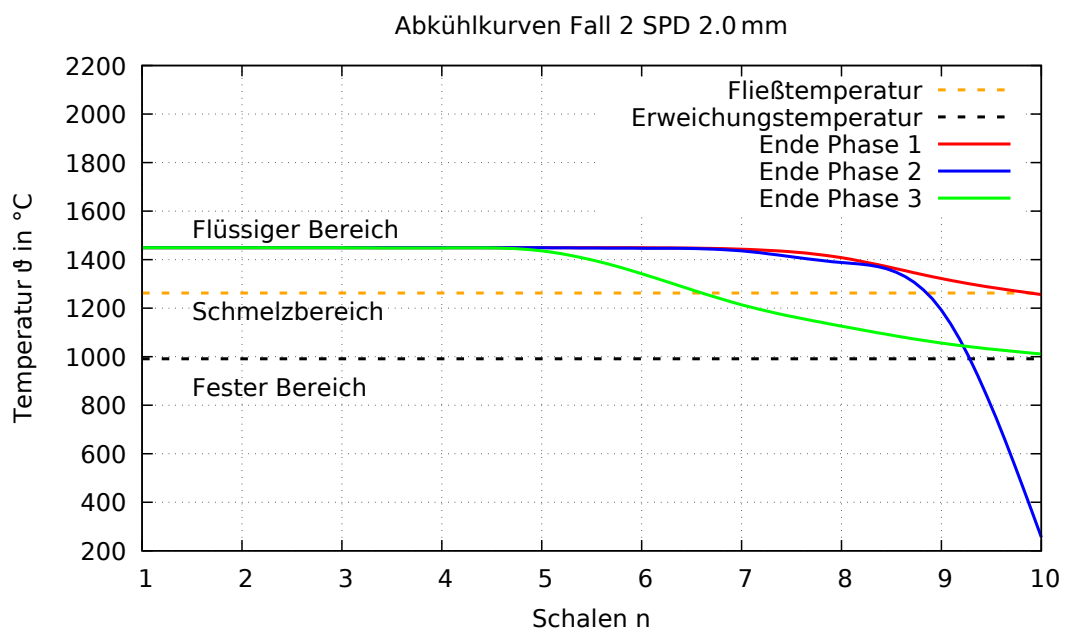


Abb. 8.12: Abkühlkurven Fall 2 SPD 2 mm

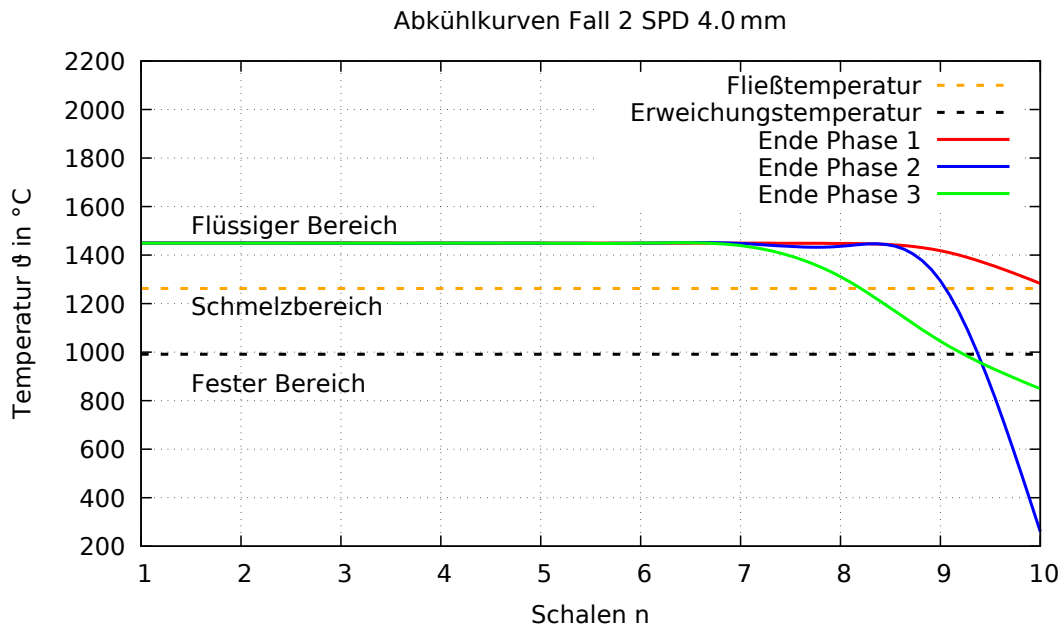


Abb. 8.13: Abkühlkurven Fall 2 SPD 4 mm

Zeiten in ms	$t(d_{1,1})$	$t(d_{1,2})$	$t(d_{1,3})$	$t(d_{1,4})$
Phase 1	97,3			
Phase 2	0,2	0,8	9,2	30,5
Phase 3	53,1			
Gesamtzeit	150,5	151,1	159,5	180,8

Tab. 8.10: Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der Partikel - Fall 2

Die Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel  $\bar{\vartheta}_S$  über den Schalen  $n$  am Ende der entsprechenden Phase können für die 4 gewählten Partikeldurchmesser der nächsten Tab. 8.11 entnommen werden.

Temperaturen in °C	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,1})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,2})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,3})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,4})$
Phase 1	1004	1275	1381	1418
Phase 2	820	1098	1207	1245
Phase 3	693	1024	1178	1236

Tab. 8.11: Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel - Fall 2

In folgender Tab. 8.12 sind die sich einstellenden Temperaturen der Flächen  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  und  $A_5$  der Pilotanlage angegeben. Damit kann auf eine Lufterwärmung von  $213^\circ\text{C}$  rückgeschlossen werden.

i	2	3	4	5
Temperaturen $\vartheta_i$ in $^\circ\text{C}$	317	317	100	233

Tab. 8.12: Temperaturen der Flächen - Fall 2

Aus Tab. 8.13 können die abfließenden Wärmeströme  $\dot{Q}_i$  bzw. deren Prozentsätze  $p_i$  vom gesamten Wärmeverlust aller Schlackenpartikel in Form einer Wärmebilanz abgelesen werden.

Wärmeübertragungsart	$\dot{Q}_i$ in MW	$p_i$ in %
Konvektion	0,467	14,0
Wärmestrahlung	0,271	8,1
Wärmeleitung	2,602	77,9
Summe	3,340	100,0

Tab. 8.13: Wärmebilanz - Fall 2

Als Nächstes erfolgt ein der Vergleich des Falls 2 mit dem Basisfall:

- In der „Phase 1“ und „Phase 3“ sind die Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der entsprechenden Schlackenpartikel für beide Fälle ident. Nur in „Phase 2“ ist für den Fall 2 die Kontaktzeit mit der wassergekühlten Wand in etwa doppelt so groß wie im Basisfall.
- Die Abkühlkurven der jeweiligen Partikel besitzen aufgrund der um  $100^\circ\text{C}$  höheren Schlackenanstangstemperatur im Fall 2 auch ein um ca.  $100^\circ\text{C}$  höheres Temperaturniveau als beim Basisfall. Dieses Verhalten ist natürlich auch in den Durchschnittstemperaturen erkennbar.
- Die Temperaturen der Flächen 2, 3 und 5 des Falls 2 sind im Vergleich zum Basisfall um etwa  $20^\circ\text{C}$  höher.
- Die Wärmebilanzen des Falls 2 und des Basisfalls weisen kaum Unterschiede auf.

## 8.4 Lastfall - Fall 3

Für den Fall 3 beträgt der Schlackenmassenstrom  $1000 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$  anstelle der  $750 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$  beim Basisfall. In den Diagrammen aus Abb. 8.14, 8.15, 8.16 und 8.17 sind für die 4 gewählten SPD jeweils die Temperaturverläufe  $\vartheta(n)$  über den Schalen  $n$  am Ende der „Phase 1“, „Phase 2“ oder „Phase 3“ eines Partikels ersichtlich.

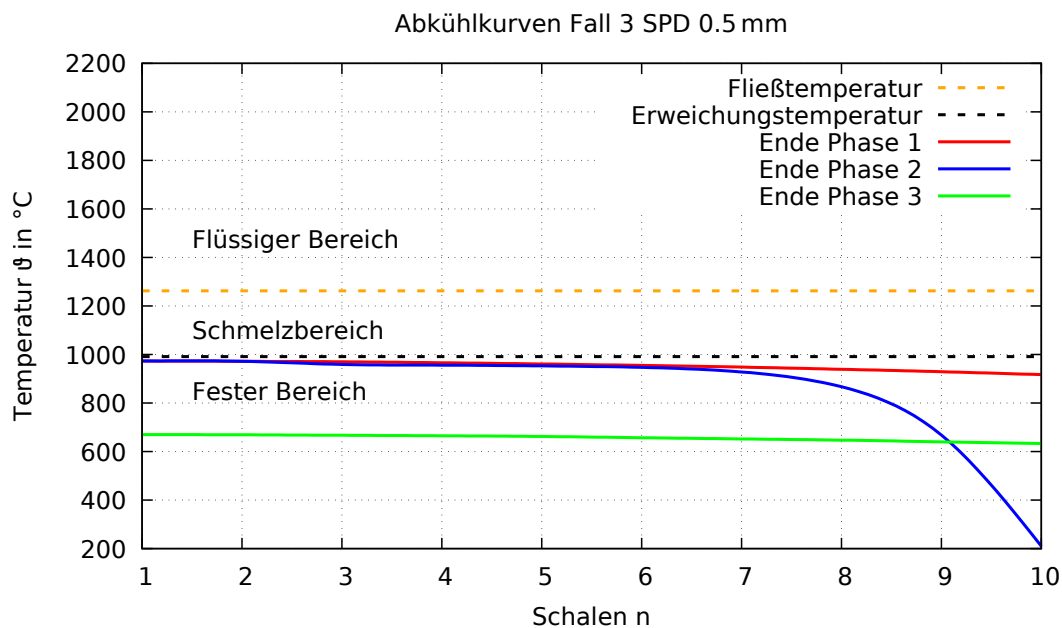


Abb. 8.14: Abkühlkurven Fall 3 SPD 0,5 mm

Tab. 8.14 zeigt die Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der einzelnen Schlackenpartikel.

Zeiten in ms	$t(d_{1,1})$	$t(d_{1,2})$	$t(d_{1,3})$	$t(d_{1,4})$
Phase 1	97,3			
Phase 2	0,2	0,4	4,0	16,9
Phase 3	53,1			
Gesamtzeit	150,6	150,7	154,3	167,3

Tab. 8.14: Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der Partikel - Fall 3

In Tab. 8.15 sind die Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel  $\bar{\vartheta}_S$  über den

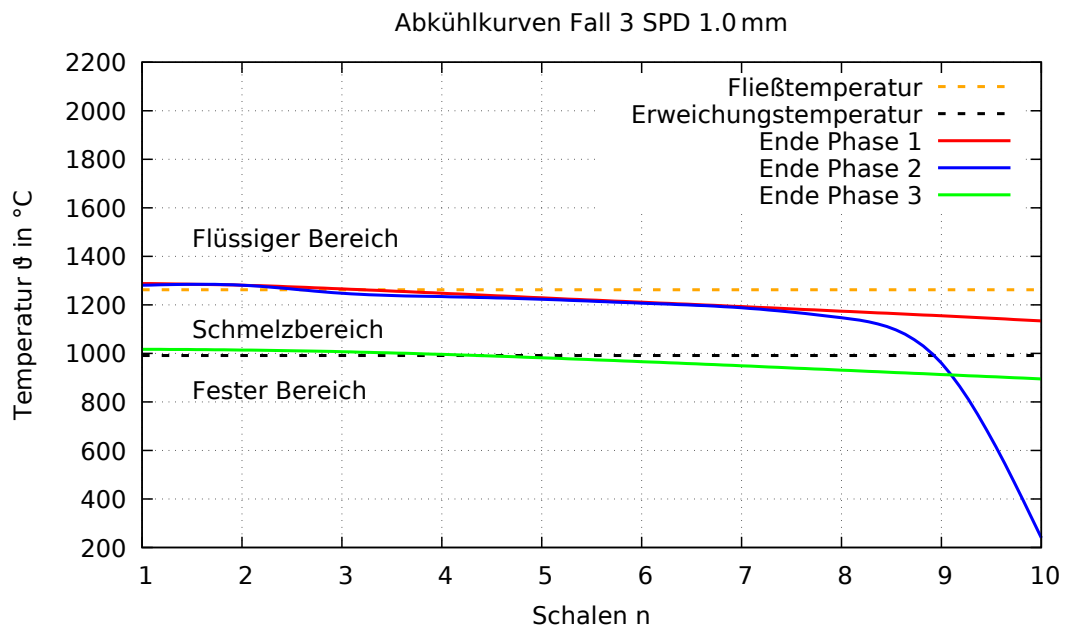


Abb. 8.15: Abkühlkurven Fall 3 SPD 1 mm

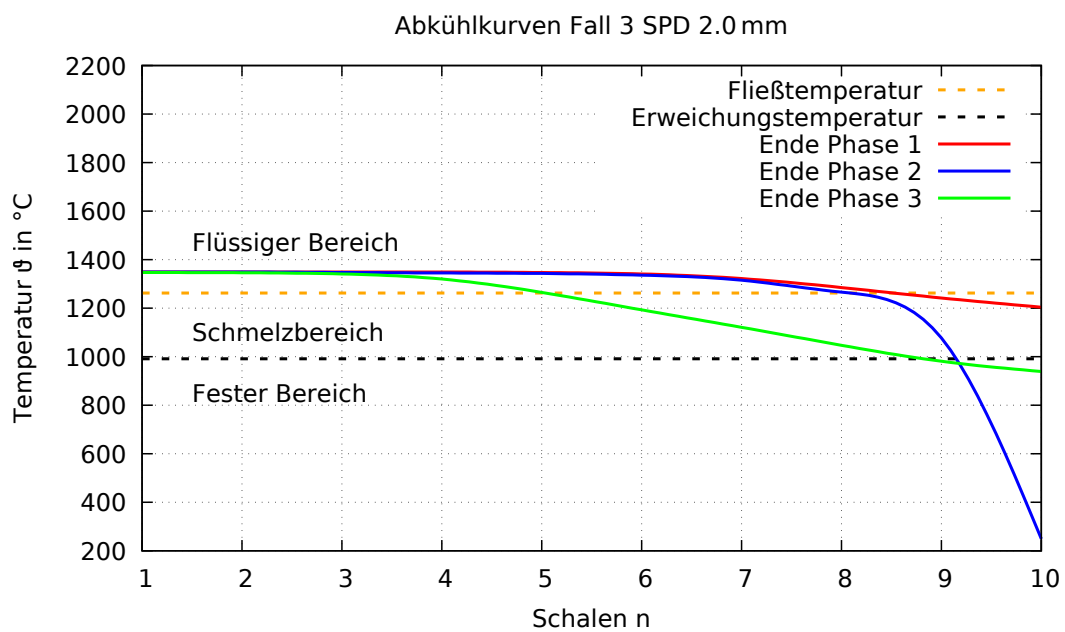


Abb. 8.16: Abkühlkurven Fall 3 SPD 2 mm

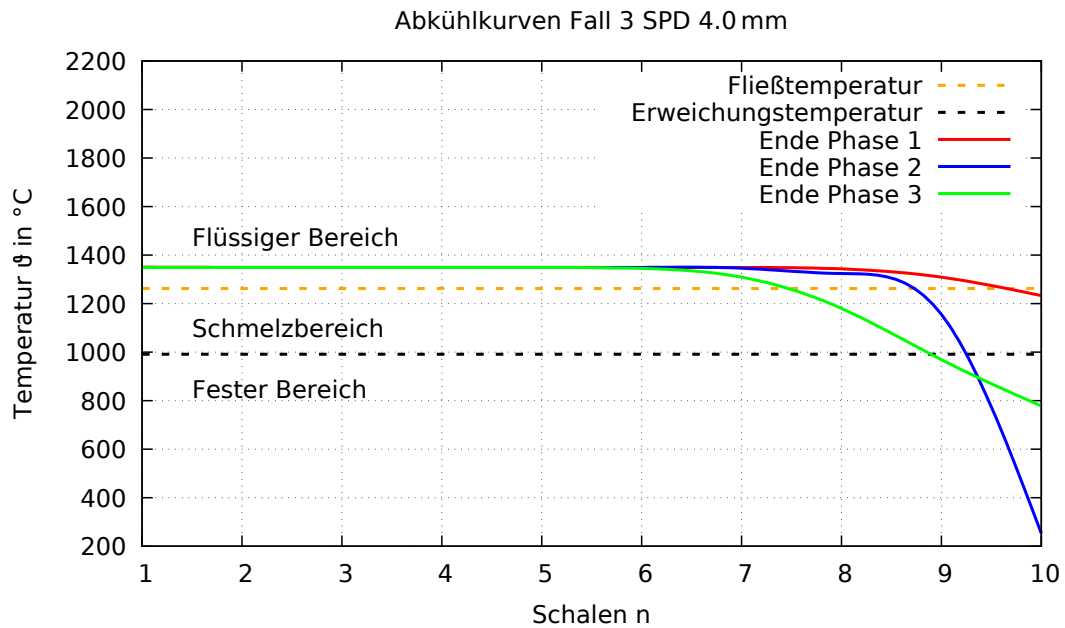


Abb. 8.17: Abkühlkurven Fall 3 SPD 4 mm

Schalen  $n$  am Ende der entsprechenden Phase für alle 4 gewählten Partikeldurchmesser tabelliert.

Temperaturen in °C	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,1})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,2})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,3})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,4})$
Phase 1	941	1181	1284	1322
Phase 2	755	999	1106	1145
Phase 3	648	937	1081	1135

Tab. 8.15: Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel - Fall 3

Die sich ergebenden Temperaturen der Flächen  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  und  $A_5$  der Pilotanlage sind der Tab. 8.16 zu entnehmen. Für diesen Betriebsfall kann eine Lufterwärmung von 261 °C erzielt werden.

i	2	3	4	5
Temperaturen $\vartheta_i$ in °C	354	354	100	281

Tab. 8.16: Temperaturen der Flächen - Fall 3

In nachstehender Tab. 8.17 sind abhängig von der Wärmeübertragungsart die abfließenden Wärmeströme  $\dot{Q}_i$  und deren Prozentsätze  $p_i$  der HOS bzw. aller Schlackenpartikel in Form einer Wärmebilanz angeführt.

Wärmeübertragungsart	$\dot{Q}_i$ in MW	$p_i$ in %
Konvektion	0,583	13,3
Wärmestrahlung	0,313	7,1
Wärmeleitung	3,507	79,6
Summe	4,403	100,0

Tab. 8.17: Wärmebilanz - Fall 3

Die Ergebnisse aus dem Vergleich des Falls 3 mit dem Basisfall werden nachstehend aufgelistet:

- Die Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der jeweiligen Schlackenpartikel sind für beide Fälle beinahe gleich groß.
- Beim Vergleich des Abkühlverhaltens der entsprechenden einzelnen Partikel können kaum Unterschiede zwischen dem Fall 3 und dem Basisfall festgestellt werden.
- In beiden Fällen sind die Durchschnittstemperaturen der entsprechenden Schlackenpartikel fast identisch.
- Die Temperaturen der Flächen 2, 3 und 5 des Falls 3 sind um etwa 60 °C höher als beim Basisfall. Dies lässt sich auf den höheren Schlackenmassenstrom zurückführen.
- In der Wärmebilanz des Falls 3 sind die abzuführenden Wärmeströme etwas größer als beim Basisfall. Am meisten erhöht sich der durch Wärmeleitung abgebende Wärmestrom (um ca. 1 MW), was auch an dem höheren Schlackenmassenstrom liegt.

## 8.5 Lastfall - Fall 4

Der Fall 4 unterscheidet sich vom Basisfall durch eine Erhöhung der Drehzahl des Drehtellers von  $900 \frac{1}{\text{min}}$  auf  $1200 \frac{1}{\text{min}}$ . In den nachfolgenden Abb. 8.18, 8.19, 8.20 und 8.21 sind für die 4 gewählten SPD jeweils die Temperaturverläufe  $\vartheta(n)$  über den Schalen  $n$  am Ende der „Phase 1“, „Phase 2“ oder „Phase 3“ eines Partikels dargestellt.

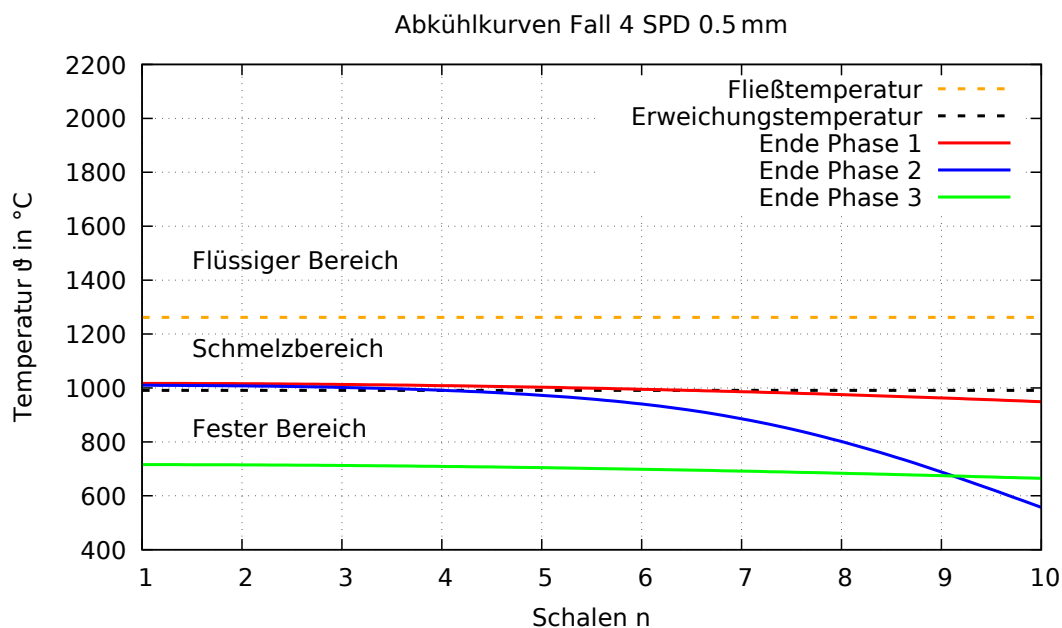


Abb. 8.18: Abkühlkurven Fall 4 SPD 0,5 mm

In der Tab. 8.18 sind die Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der einzelnen Schlackenpartikel aufgelistet.

Zeiten in ms	$t(d_{1,1})$	$t(d_{1,2})$	$t(d_{1,3})$	$t(d_{1,4})$
Phase 1	72,9			
Phase 2	0,2	0,5	4,1	15,9
Phase 3	39,8			
Gesamtzeit	112,9	113,2	116,8	128,7

Tab. 8.18: Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der Partikel - Fall 4

Aus Tab. 8.19 können die Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel  $\bar{\vartheta}_S$  über

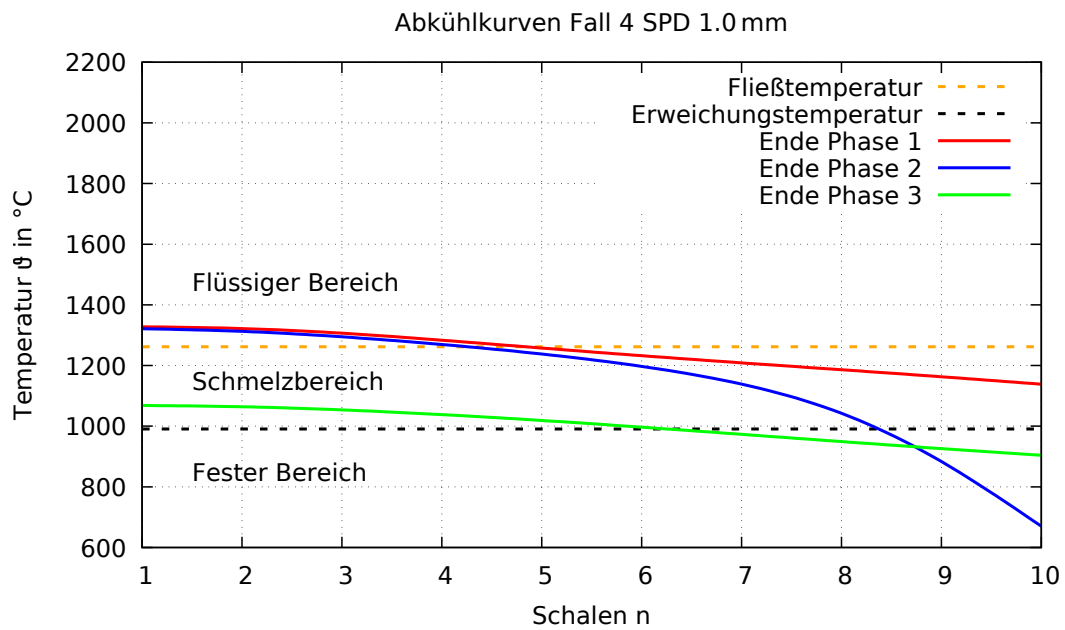


Abb. 8.19: Abkühlkurven Fall 4 SPD 1 mm

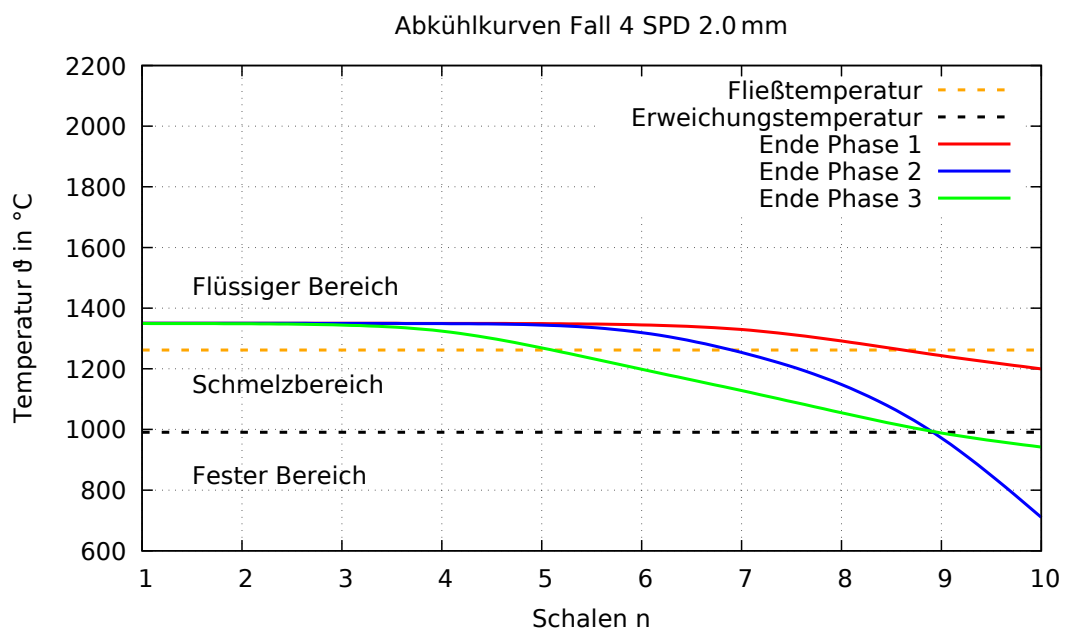


Abb. 8.20: Abkühlkurven Fall 4 SPD 2 mm

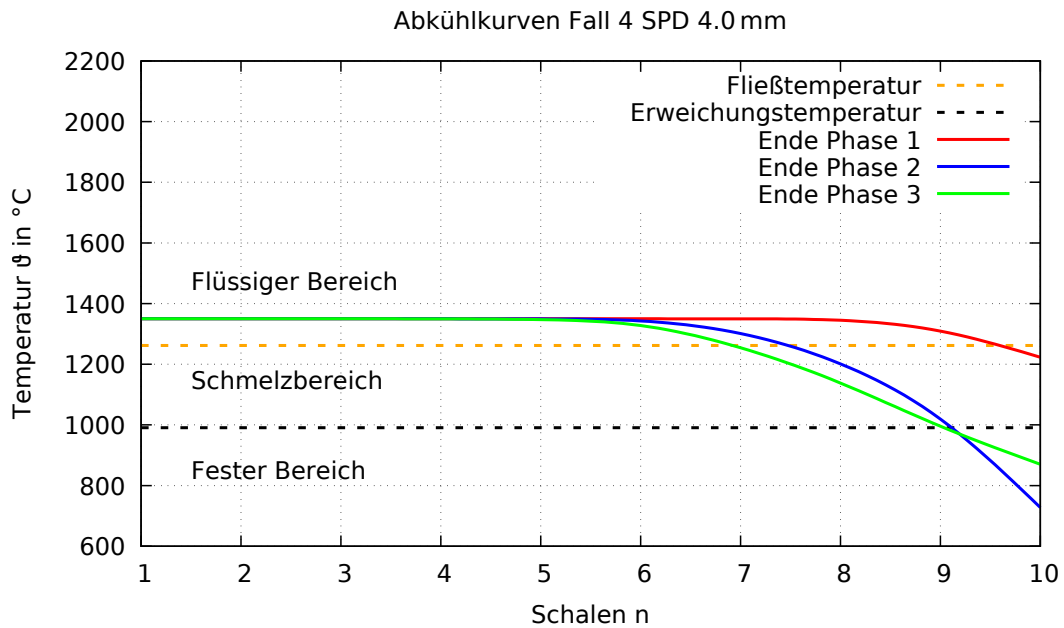


Abb. 8.21: Abkühlkurven Fall 4 SPD 4 mm

den Schalen  $n$  am Ende der entsprechenden Phase für alle 4 gewählten Partikeldurchmesser entnommen werden.

Temperaturen in °C	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,1})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,2})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,3})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,4})$
Phase 1	983	1204	1293	1326
Phase 2	799	1024	1117	1150
Phase 3	693	968	1095	1142

Tab. 8.19: Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel - Fall 4

Die sich einstellenden Temperaturen der Flächen  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  und  $A_5$  der Pilotanlage sind in Tab. 8.20 angeführt. Die Temperatur der Luft erhöht sich um 199 °C bis kurz vor dem Austritt aus der Anlage.

i	2	3	4	5
Temperaturen $\vartheta_i$ in °C	294	294	100	219

Tab. 8.20: Temperaturen der Flächen - Fall 4

Der Wärmebilanz aus Tab. 8.21 können abhängig von der Wärmeübertragungsart die abfließenden Wärmeströme  $\dot{Q}_i$  und deren Prozentsätze  $p_i$  der HOS bzw. aller Schlackenpartikel entnommen werden.

Wärmeübertragungsart	$\dot{Q}_i$ in MW	$p_i$ in %
Konvektion	0,409	12,8
Wärmestrahlung	0,180	5,6
Wärmeleitung	2,602	81,5
Summe	3,191	100,0

Tab. 8.21: Wärmebilanz - Fall 4

Im Folgenden wird ein Vergleich des Falls 4 mit dem Basisfall durchgeführt:

- Die Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der entsprechenden Schlackenpartikel sind in „Phase 1“ und „Phase 3“ für den Fall 4 um ungefähr 25 % kleiner als beim Basisfall, was an der höheren Fluggeschwindigkeit der Partikel bzw. der größeren Drehzahl des Drehtellers liegt. Nur die Kontaktzeit in der „Phase 2“ ist für beide Fälle ca. gleich groß.
- Im Fall 4 besitzen die Abkühlkurven der jeweiligen Partikel ein höheres Temperaturniveau als im Basisfall. Aufgrund der geringeren Flugzeiten der einzelnen Schlackenpartikel bleibt ihnen weniger Zeit zum Abkühlen. Für den Fall 4 sind abhängig vom Partikeldurchmesser die Niveaus um etwa 5 – 50 °C höher, wobei bei kleineren Durchmessern ein höherer Temperaturanstieg vorliegt als bei größeren Durchmessern.
- Die Durchschnittstemperaturen der entsprechenden Partikel verhalten sich im Fall 4 ähnlich wie die Abkühlkurven.
- Bei der Gegenüberstellung der Temperaturen der Flächen 2, 3 und 5 des Falls 4 mit dem Basisfall können kaum Unterschiede in den jeweiligen Werten festgestellt werden.
- Die Wärmebilanzen des Falls 4 und des Basisfalls weisen kaum Abweichungen auf.

## 8.6 Lastfall - Fall 5

Für den Fall 5 wird das Verhältnis vom Luftvolumenstrom durch die WS zum gesamten Luftvolumenstrom von 0,7 beim Basisfall auf 0,5 gesenkt. Die Abb. 8.22, 8.23, 8.24 und 8.25 zeigen für die 4 gewählten SPD jeweils die Temperaturverläufe  $\vartheta(n)$  über den Schalen  $n$  am Ende der „Phase 1“, „Phase 2“ oder „Phase 3“ eines Partikels.

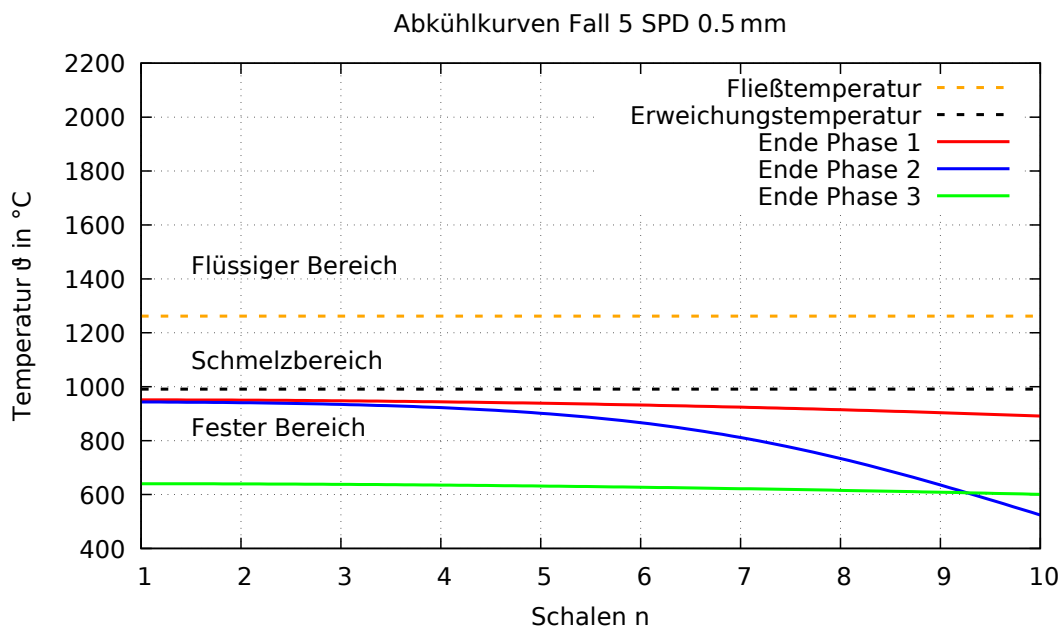


Abb. 8.22: Abkühlkurven Fall 5 SPD 0,5 mm

Aus der Tab. 8.22 können die Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der einzelnen Schlackenpartikel abgelesen werden.

Zeiten in ms	$t(d_{1,1})$	$t(d_{1,2})$	$t(d_{1,3})$	$t(d_{1,4})$
Phase 1	97,3			
Phase 2	0,3	0,4	3,9	16,4
Phase 3	53,1			
Gesamtzeit	150,6	150,7	154,2	166,7

Tab. 8.22: Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der Partikel - Fall 5

In der nachstehenden Tab. 8.23 sind die Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel  $\bar{\vartheta}_S$  über den Schalen  $n$  am Ende der entsprechenden Phase für alle 4 gewählten

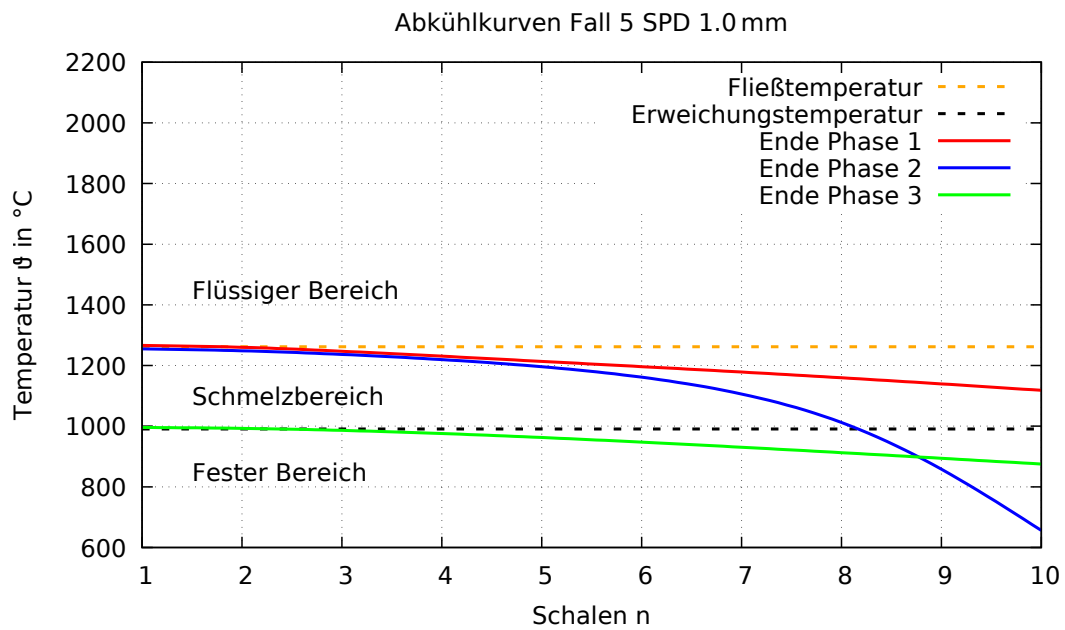


Abb. 8.23: Abkühlkurven Fall 5 SPD 1 mm

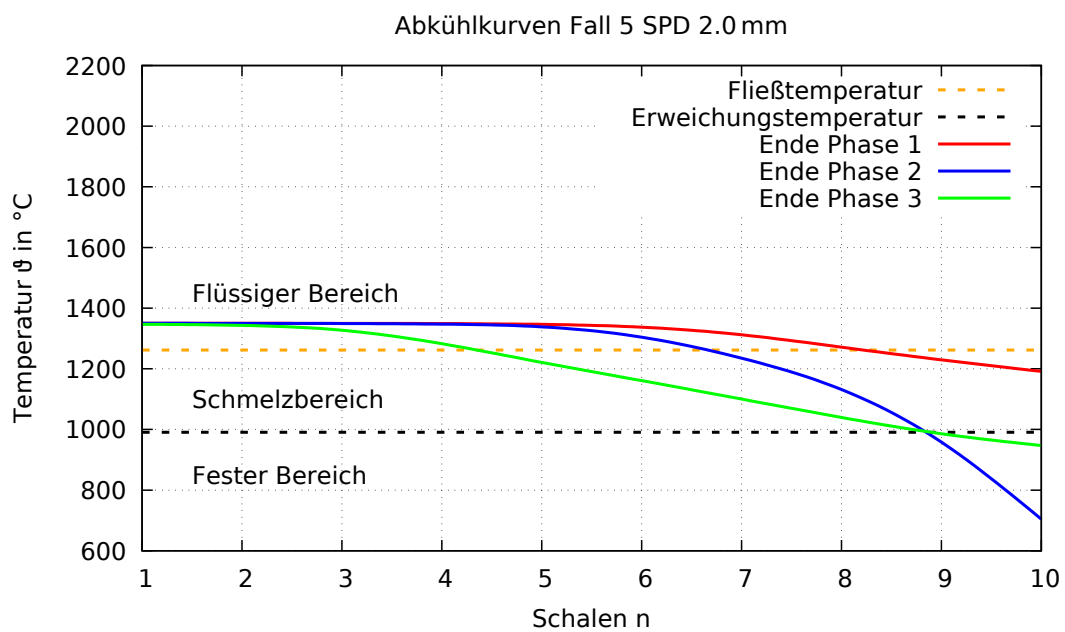


Abb. 8.24: Abkühlkurven Fall 5 SPD 2 mm

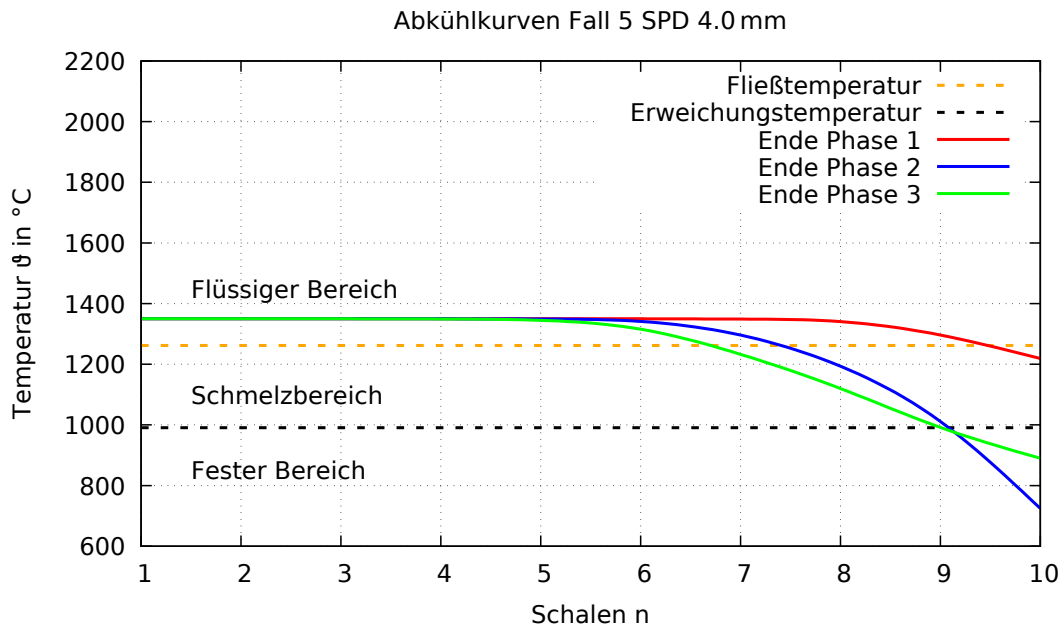


Abb. 8.25: Abkühlkurven Fall 5 SPD 4 mm

Partikeldurchmesser tabelliert.

Temperaturen in °C	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,1})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,2})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,3})$	$\bar{\vartheta}_S(d_{1,4})$
Phase 1	922	1173	1281	1321
Phase 2	738	993	1105	1145
Phase 3	623	928	1079	1135

Tab. 8.23: Durchschnittstemperaturen der Schlackenpartikel - Fall 5

Die sich ergebenden Temperaturen der Flächen  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  und  $A_5$  der Pilotanlage sind in Tab. 8.24 aufgelistet. Im Fall 5 erwärmt sich die Luft beim Durchströmen der Anlage um 183 °C.

i	2	3	4	5
Temperaturen $\vartheta_i$ in °C	365	365	100	203

Tab. 8.24: Temperaturen der Flächen - Fall 5

Die Wärmebilanz aus Tab. 8.21 zeigt abhängig von der Wärmeübertragungsart

die abfließenden Wärmeströme  $\dot{Q}_i$  und deren Prozentsätze  $p_i$  der HOS bzw. aller Schlackenpartikel.

Wärmeübertragungsart	$\dot{Q}_i$ in MW	$p_i$ in %
Konvektion	0,473	14,3
Wärmestrahlung	0,232	7,0
Wärmeleitung	2,602	78,7
Summe	3,307	100,0

Tab. 8.25: Wärmebilanz - Fall 5

Des Weiteren werden die Ergebnisse aus dem Vergleich des Falls 5 mit dem Basisfall zusammengefasst:

- In beiden Fällen sind die Flug-, Kontakt- und Gesamtzeiten der jeweiligen Schlackenpartikel beinahe gleich groß.
- Das Abkühlverhalten der entsprechenden einzelnen Partikel weist beim Vergleich des Falls 5 mit dem Basisfall kaum Unterschiede auf.
- Die Durchschnittstemperaturen der entsprechenden Schlackenpartikel sind in beiden Fällen fast identisch.
- Im Fall 5 sind die Temperaturen der Flächen 2 und 3 um etwa 70 °C höher als beim Basisfall, was sich auf die geringere Luftzufuhr durch die WS zurückführen lässt. Die Temperatur der Fläche 5 ist in beiden Fällen etwa gleich groß.
- Die Wärmebilanzen des Falls 5 und des Basisfalls fallen sehr ähnlich aus.

Für jeden der 6 Lastfälle wurden die globalen Prozessgrößen mit dem Berechnungstool der Fa. Primetals validiert. Dabei zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung der jeweiligen Ergebnisse.

## 9 Diskussion und Ausblick

Generell birgt die Weiterverarbeitung von flüssiger HOS mittels TSG ein hohes Potential für die großtechnische Anwendung in der Eisen- und Stahlindustrie. Bei gleichbleibenden Produkteigenschaften des Granulats kann ein wesentlicher Teil der thermischen Energie von flüssiger HOS rückgewonnen werden. Besonders in Zeiten wie diesen stellt Energieeinsparung verbunden mit Kostenreduktion ein zentrales Thema für Betriebe dar, um am Markt wettbewerbsfähig zu bleiben.

Die in dieser Arbeit erstellten Berechnungsmodelle zur Analyse des Abkühlverhaltens einzelner Schlackenpartikel sind sehr realitätsnah und detailgetreu durchgeführt worden. Dennoch gibt es verbesserungsfähige Ansätze, welche die Genauigkeit der Berechnungen erhöhen würden.

Besonders die „Phase 2“ des Granulationsprozesses birgt noch großes Verbesserungspotential. Für eine direkte Bestimmung der Kontaktzeiten  $t_2$  der Schlackenpartikel mit der wassergekühlten Wand bzw. einer Analyse des Verformungsverhaltens einzelner Partikel beim Aufprall an der Wand, müssten höchstwahrscheinlich eigene Versuche angestellt werden.

Auch die vom FEhS ermittelten Daten für die Stoffwerte der VASL-HOS sind relativ wenige. Dadurch mussten einige Annahmen getroffen werden um stetige temperaturabhängige Funktionen für die Dichte  $\rho_S(T)$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_S(T)$ , spezifische Wärmekapazität  $c_{pS}(T)$  und den Emissionsgrad  $\epsilon_S(T)$  der Schlacke zu erhalten. Im Falle des Emissionsgrades konnte lediglich ein konstanter Wert angenommen werden.

Eine weitere nicht unwesentliche Vereinfachung, die bei der Modellbildung getroffen wurde, ist die Vernachlässigung der gegenseitigen wärmetechnischen Beeinflussung der Schlackenpartikel untereinander. Bei den Berechnungen in dieser Arbeit wurde stets von einer Einzelpartikelbetrachtung ausgegangen.

Weiters stellt sich die Frage, ob MS Excel wirklich ein geeignetes Programm für die Implementierung eines derartig komplexen instationären Wärmeleitproblems ist, da es bei solchen Problemstellungen sehr schnell an seine Leistungsgrenzen kommt. Vor allem bei der Erhöhung der Schalenanzahl  $n$  eines Schlackenpartikels gingen die Berechnungszeiten enorm in die Höhe, da gleichzeitig mehr Zeitschritte zur Beibehaltung der Stabilität des Verfahrens nötig waren, und sich dadurch die

Rechendaten vervielfachten. Daraus lässt sich schließen, dass trotz der weltweiten Nutzung von MS Excel eine andere Software, z. B. das Programm Matlab, für solche Anwendungen besser geeignet wären.

Auch ist abzuwägen, ob das explizite Differenzenverfahren das ideale numerische Näherungsverfahren für diese Problemstellung ist, da extrem viele Werte berechnet werden müssen, um zu sinnvollen Ergebnissen zu gelangen. Anfängliche Versuche mit dem impliziten Differenzenverfahren führten ebenso nur zu geringem Erfolg betreffend die Komplexität des gesamten Berechnungsverfahrens zu verringern. Unter Umständen eignet sich die Methode der finiten Volumen oder die Methode der finiten Elemente besser zur Analyse derartiger komplexer Probleme. Für diese Verfahren gibt es auch sehr mächtige Softwarepakete, wie bspw. das Computational Fluid Dynamics (CFD)-Programm „Ansys Fluent“, die aber eine sehr hohe Einarbeitungszeit benötigen.

## Literaturverzeichnis

- [1] BAEHR, H. D., STEPHAN, K.: *Wärme- und Stoffübertragung*, 9. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.
- [2] BARATI, M., ESFAHANI, S., UTIGRAD, T. A.: *Energy recovery from high temperature slags*, Technischer Bericht, University of Toronto, Department of Material Science und Engineering, 2011.
- [3] DITTMANN, A. et al.: *Repetitorium der technischen Thermodynamik*, Springer Fachmedien Wiesbaden, 1995.
- [4] DORSCH, K. E.: *Chemie der Zemente*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1932.
- [5] DOSCHEK, K., RAUPENSTRAUCH, H.: „FORWÄRTS – Wärmerückgewinnung mittels Trockenschlackegranulation“, in: *BHM Berg- und Hüttenmännische Monatshefte* 160.7 (2015), Seiten 328–332.
- [6] EUROSLAG: *ABS/GBS*, 2018, URL: <http://www.euroslag.com/products/absgbs/>.
- [7] EUROSLAG: *Statistics 2014*, 2014, URL: <http://www.euroslag.com/products/statistics/2014/>.
- [8] HERWIG, H.: *Strömungsmechanik: Einführung in die Physik von technischen Strömungen*, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016.
- [9] HOWELL, J. R.: *A catalog of radiation heat transfer configuration factors*, 2018, URL: <http://www.thermalradiation.net/tablecon.html>.
- [10] KRENKLER, K.: *Chemie des Bauwesens Band 1: Anorganische Chemie*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980.
- [11] LEYSER, P., CORTINA, C.: „INBA slag granulation system with environmental control of water and emissions“, in: *MILLENIUM STEEL 2006* (2006), URL: <http://www.millennium-steel.com/wp-content/uploads/articles/pdf/2006/pp67-72%20MS06.pdf>.
- [12] MAREK, R., NITSCHKE, K.: *Praxis der Wärmeübertragung*, 4. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2015.
- [13] MCDONALD, I. J., WERNER, A.: „Dry Slag Granulation with Heat Recovery“, in: *Steel Institute VDEh* (2015).

- [14] MERKER, G. P.: *Konvektive Wärmeübertragung*, 1. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
- [15] STEPHAN, P. et al.: *Thermodynamik - Grundlagen und technische Anwendungen Band 1: Einstoffsysteme*, 19. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [16] THIENEL, K. C.: *Eisenhüttenschlacken und Hüttensand*, Technischer Bericht, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Institut für Werkstoffe des Bauwesens, 2017.
- [17] THOMÉ-KOZMIENSKY, K. J.: *Mineralische Nebenprodukte und Abfälle 3: Aschen, Schlacken, Stäube und Baurestmassen*, TK Verlag Karl ThoméKozmien-sky Neuruppin, 2016, URL: [http://www.vivis.de/phocadownload/Download/2016\\_mna/2016\\_MNA\\_279-292\\_Senk-Firsbach.pdf](http://www.vivis.de/phocadownload/Download/2016_mna/2016_MNA_279-292_Senk-Firsbach.pdf).
- [18] VAN LAAR, R. et al.: „Blast furnace slag granulation plant technology“, in: *MILLENIUM STEEL 2014* (2014), URL: [http://millennium-steel.com/wp-content/uploads/2014/05/pp28-31\\_ms14.pdf](http://millennium-steel.com/wp-content/uploads/2014/05/pp28-31_ms14.pdf).
- [19] VDI, VEREIN DEUTSCHER INGENIEURE: *VDI-Wärmeatlas*, 11. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [20] WALZ, G.: *Lexikon der Mathematik*, 2. Auflage, Springer-Verlag GmbH Deutschland, 2017.
- [21] WERNER, A.: *Leistungsstarke und energieeffiziente Industrie*, 2014, URL: [https://www.klimafonds.gv.at/assets/Uploads/Broschren/Science-Brunch-Broschren/2014/KLIEN\\_2014\\_ScienceBrunch\\_Leistungsstarke\\_und\\_energieeffiziente\\_Industrie.pdf](https://www.klimafonds.gv.at/assets/Uploads/Broschren/Science-Brunch-Broschren/2014/KLIEN_2014_ScienceBrunch_Leistungsstarke_und_energieeffiziente_Industrie.pdf).
- [22] WERNER, A. et al.: *Endbericht - Forschungsvorhaben zur Wärmerückgewinnung mittels Trockenschlackengranulation*, Technischer Bericht, Österreichische Forschungsförderungsgesellschaft mbH (FFG), 2016.

# Anhang A: Stabilitätsbedingungen

## A.1: Bedingungen für „Phase 1“ und „Phase 3“

Damit das explizite Differenzenverfahren stabil ist, müssen die Koeffizienten der Gleichungen (5.15), (5.22) und (5.27) folgende Bedingungen erfüllen:

- Koeffizient von  $T_{i-1}^k$

$$\underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_i)^2 \cdot c_{pS_i^k} \cdot \varrho_{S_i^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_{i-1}^k} + \lambda_{S_i^k}) \cdot (2 \cdot r_i - \Delta r)^2 \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\Delta t \geq 0$$

- Koeffizient von  $T_i^k$

$$1 - \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_i)^2 \cdot c_{pS_i^k} \cdot \varrho_{S_i^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot [(\lambda_{S_{i-1}^k} + \lambda_{S_i^k}) \cdot (2 \cdot r_i - \Delta r)^2 + (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i + \Delta r)^2] \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{8 \cdot (\Delta r \cdot r_i)^2 \cdot c_{pS_i^k} \cdot \varrho_{S_i^k}}{(\lambda_{S_{i-1}^k} + \lambda_{S_i^k}) \cdot (2 \cdot r_i - \Delta r)^2 + (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i + \Delta r)^2} \geq \Delta t$$

- Koeffizient von  $T_{i+1}^k$

$$\underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_i)^2 \cdot c_{pS_i^k} \cdot \varrho_{S_i^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_i^k} + \lambda_{S_{i+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_i + \Delta r)^2 \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\Delta t \geq 0$$

Für die Koeffizienten der Glg. (5.22) müssen folgende Bedingungen gelten:

- Koeffizient von  $T_1^k$

$$1 - \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_1)^2 \cdot c_{pS_1^k} \cdot \varrho_{S_1^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_1^k} + \lambda_{S_2^k}) \cdot (2 \cdot r_1 + \Delta r)^2 \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{8 \cdot (\Delta r \cdot r_1)^2 \cdot c_{pS_1^k} \cdot \varrho_{S_1^k}}{(\lambda_{S_1^k} + \lambda_{S_2^k}) \cdot (2 \cdot r_1 + \Delta r)^2} \geq \Delta t$$

- Koeffizient von  $T_2^k$

$$\underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_1)^2 \cdot c_{pS_1^k} \cdot \varrho_{S_1^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_1^k} + \lambda_{S_2^k}) \cdot (2 \cdot r_1 + \Delta r)^2 \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\Delta t \geq 0$$

Die Koeffizienten der Glg. (5.27) haben nachstehende Bedingungen zu erfüllen:

- Koeffizient von  $T_{n-1}^k$

$$\underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot [(\lambda_{S_{n-1}^k} + \lambda_{S_n^k}) \cdot (2 \cdot r_n - \Delta r)^2 + (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2] \geq 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\Delta t \geq 0$$

- Koeffizient von  $T_n^k$

$$1 - \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot [(\lambda_{S_{n-1}^k} + \lambda_{S_n^k}) \cdot (2 \cdot r_n - \Delta r)^2 + (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \alpha}{\lambda_{S_n^k}}\right)] \geq 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{8 \cdot (\Delta r \cdot r)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k} \cdot \lambda_{S_n^k}}{(\lambda_{S_{n-1}^k} + \lambda_{S_n^k}) \cdot (2 \cdot r_n - \Delta r)^2 \cdot \lambda_{S_n^k} + (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \cdot (\lambda_{S_n^k} + 2 \cdot \Delta r \cdot \alpha)} \geq \Delta t$$

- Koeffizient von  $(T_n^k)^4$

$$\begin{aligned}
 & - \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \\
 & \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \cdot \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \epsilon_1 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_1^k}{\lambda_{S_n^k}} \geq 0 \\
 & \Delta t \geq 0
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

- Koeffizient von  $T_{FB}$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \\
 & \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \cdot \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \alpha}{\lambda_{S_n^k}} \geq 0 \\
 & \Delta t \geq 0
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

- Koeffizient von  $T_2^4$

$$\begin{aligned}
 & - \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \\
 & \cdot \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \alpha}{\lambda_{S_n^k}} \cdot \epsilon_2 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_2^k \geq 0 \\
 & \Delta t \geq 0
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

- Koeffizient von  $T_3^4$

$$\begin{aligned}
 & - \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \\
 & \cdot \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \alpha}{\lambda_{S_n^k}} \cdot \epsilon_3 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_3^k \geq 0 \\
 & \Delta t \geq 0
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

- Koeffizient von  $T_4^4$

$$\begin{aligned}
 & - \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \\
 & \cdot \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \alpha}{\lambda_{S_n^k}} \cdot \epsilon_4 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_4^k \geq 0 \\
 & \Delta t \geq 0
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

- Koeffizient von  $T_5^4$

$$\begin{aligned}
 & - \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \\
 & \cdot \frac{2 \cdot \Delta r \cdot \alpha}{\lambda_{S_n^k}} \cdot \epsilon_5 \cdot \sigma \cdot \tilde{\varphi}_5^k \geq 0 \\
 & \Delta t \geq 0
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

## A.2: Bedingungen für „Phase 2“

Damit die Stabilität des Differenzenverfahrens in der „Phase 2“ gewährleistet ist, müssen für die Koeffizienten der Glg. (5.32) folgende Bedingungen gelten:

- Koeffizient von  $T_{n-1}^k$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_{n-1}^k} + \lambda_{S_n^k}) \cdot (2 \cdot r_n - \Delta r)^2 \geq 0 \\
 & \Delta t \geq 0
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

- Koeffizient von  $T_n^k$

$$\begin{aligned}
 & 1 - \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot \left[ (\lambda_{S_{n-1}^k} + \lambda_{S_n^k}) \cdot (2 \cdot r_n - \Delta r)^2 \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \right] \geq 0 \quad (\text{A.15}) \\
 & \frac{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}{(\lambda_{S_{n-1}^k} + \lambda_{S_n^k}) \cdot (2 \cdot r_n - \Delta r)^2 (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2} \geq \Delta t
 \end{aligned}$$

- Koeffizient von  $T_{n+1}^0$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \\
 & \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \cdot \frac{b_S}{b_S + b_W} \cdot T_{n+1}^0 \geq 0 \quad (\text{A.16}) \\
 & \Delta t \geq 0
 \end{aligned}$$

- Koeffizient von  $T_4$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\Delta t}{8 \cdot (\Delta r \cdot r_n)^2 \cdot c_{pS_n^k} \cdot \varrho_{S_n^k}}}_{\tilde{M}_i^k} \cdot (\lambda_{S_n^k} + \lambda_{S_{n+1}^k}) \\
 & \cdot (2 \cdot r_n + \Delta r)^2 \cdot \left( 1 - \frac{b_S}{b_S + b_W} \right) \cdot T_4 \geq 0 \quad (\text{A.17}) \\
 & \Delta t \geq 0
 \end{aligned}$$

## Anhang B: Sichtfaktoren

### B.1: Faktoren Fläche 2 zu Flächen 2, 3, 4 und 5

#### B.1.1: Fläche 2 zur Fläche 2

Der Sichtfaktor  $\varphi_{22}$  ist gleich null, da die Fläche  $A_2$  eben ist.

$$\varphi_{22} = 0 \quad (\text{B.1})$$

#### B.1.2: Fläche 2 zur Fläche 3

Der Sichtfaktor  $\varphi_{23}$  wird mit der Glg. (B.9) bzw. der Reziprozitätsbeziehung

$$\begin{aligned} A_2 \cdot \varphi_{23} &= A_3 \cdot \varphi_{32} \\ r_2^2 \cdot \pi \cdot \varphi_{23} &= 2 \cdot r_2 \cdot \pi \cdot h_3 \cdot \varphi_{32} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

gebildet. Nach Einsetzen und Umformen der entsprechenden Größen ergibt sich für  $\varphi_{23}$  der Ausdruck

$$\varphi_{23} = \frac{h_3 \cdot (\sqrt{4 \cdot r_2^2 + h_3^2} - h_3)}{2 \cdot r_2^2}. \quad (\text{B.3})$$

#### B.1.3: Fläche 2 zur Fläche 4

In [9] ist keine direkte Gleichung zur Berechnung des Sichtfaktors der Fläche 2 zur Fläche 4 vorhanden. Daher wird zuerst der Sichtfaktor der Fläche 4\* zur Fläche 2 mit der Beziehung

$$\varphi_{4*2} = \frac{(\sqrt{4 \cdot r_2^2 + h_3^2} - h_3)^2}{4 \cdot r_2^2 \cdot \sqrt{1 + \tan \alpha_4}} \quad (\text{B.4})$$

aus [9] „Abschnitt C-117“ ermittelt. Im Anschluss lässt sich die Reziprozitätsbeziehung wie folgt anwenden

$$\begin{aligned}
 A_2 \cdot \varphi_{24^*} &= A_{4^*} \cdot \varphi_{4^*2} \\
 r_2^2 \cdot \pi \cdot \varphi_{24^*} &= \frac{r_2^2 \cdot \pi}{\cos \alpha_4} \cdot \varphi_{4^*2}.
 \end{aligned}
 \tag{B.5}$$

Wenn die passenden Größen in Glg. (B.5) eingesetzt werden und dieser Zusammenhang richtig umgeformt wird, entsteht für  $\varphi_{24^*}$  folgender Ausdruck

$$\varphi_{24^*} = \frac{(\sqrt{4 \cdot r_2^2 + h_3^2} - h_3)^2}{4 \cdot r_2^2 \cdot \sqrt{1 + \tan \alpha_4} \cdot \cos \alpha_4}.
 \tag{B.6}$$

Für den Sichtfaktor  $\varphi_{24^*}$  muss gelten, dass  $\varphi_{24^*} = \varphi_{24} + \varphi_{25}$  ist. Nach Einsetzen der Gleichungen (B.5) und (B.8) sowie mathematischer Umformarbeit entsteht für den Sichtfaktor  $\varphi_{24}$  die Beziehung

$$\begin{aligned}
 & \left[ (\sqrt{4 \cdot r_2^2 + h_3^2} - h_3) \cdot \tan \alpha_4 \right]^2 - 2 \cdot \sqrt{1 + \tan(\alpha_4)^2} \cdot \cos \alpha_4 \\
 & \quad \cdot \left\{ [(h_3 + h_4)^2 + r_2^2] \cdot \tan(\alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right\} \\
 & \quad - \sqrt{\left\{ [(h_3 + h_4)^2 + r_2^2] \cdot \tan(\alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right\}^2} \\
 & \quad - 4 \cdot [r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)]^2 \Big\} \\
 \varphi_{24} &= \frac{\quad}{4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 \cdot \cos \alpha_4 \cdot \sqrt{1 + \tan(\alpha_4)^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{B.7}$$

#### B.1.4: Fläche 2 zur Fläche 5

Der Zusammenhang für die Berechnung des Sichtfaktors  $\varphi_{25}$  stammt aus [9] „Abschnitt C-41“. Nach Einsetzen der entsprechenden Größen und Umformen entsteht für  $\varphi_{25}$  die Beziehung

$$\begin{aligned}
 & \left[ (h_3 + h_4)^2 + r_2^2 \right] \cdot \tan(\alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \\
 & \quad - \sqrt{\left\{ [(h_3 + h_4)^2 + r_2^2] \cdot \tan(\alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right\}^2} \\
 \varphi_{25} &= \frac{\quad}{2 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{B.8}$$

## B.2: Faktoren Fläche 3 zu Flächen 2, 3, 4 und 5

### B.2.1: Fläche 3 zur Fläche 2

Die Beziehung zur Berechnung des Sichtfaktors  $\varphi_{32}$  wird aus [9] „Abschnitt C-79“ entnommen. Nach Einsetzen der entsprechenden Größen und mathematischem Umformen entsteht für  $\varphi_{32}$  der Zusammenhang

$$\varphi_{32} = \frac{\sqrt{4 \cdot r_2^2 + h_3^2} - h_3}{4 \cdot r_2}. \quad (\text{B.9})$$

### B.2.2: Fläche 3 zur Fläche 3

Der Ausdruck zur Ermittlung des Sichtfaktors  $\varphi_{33}$  stammt aus [9] „Abschnitt C-78“. Die Beziehung

$$\varphi_{33} = \frac{2 \cdot r_2 + h_3 - \sqrt{4 \cdot r_2^2 + h_3^2}}{2 \cdot r_2} \quad (\text{B.10})$$

ergibt sich nach Einsetzen und Umformen für den Sichtfaktor.

### B.2.3: Fläche 3 zur Fläche 4

Auch für die Kalkulation des Sichtfaktors der Fläche 3 zur Fläche 4 ist in [9] keine konkrete Gleichung angegeben. Folglich wird zuerst der Sichtfaktor der Fläche 3 zur Fläche 4\* mit der Beziehung

$$\varphi_{34^*} = \frac{4 \cdot r_2^2 - \left(h_3 - \sqrt{h_3^2 + 4 \cdot r_2^2}\right)^2}{8 \cdot r_2 \cdot h_3} \quad (\text{B.11})$$

aus [9] „Abschnitt C-116“ bestimmt. Für den Sichtfaktor  $\varphi_{34^*}$  muss der Zusammenhang  $\varphi_{34^*} = \varphi_{34} + \varphi_{35}$  gelten. Nach Einsetzen der Gleichungen (B.11) bzw. (B.13) und Umformen entsteht für den Sichtfaktor  $\varphi_{34}$  der Ausdruck

$$\varphi_{34} = \frac{4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 - \left[ (h_3 - \sqrt{h_3^2 + 4 \cdot r_2^2}) \cdot \tan \alpha_4 \right]^2 - 2 \cdot \left\{ \sqrt{\left\{ (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + [(h_3 + h_4) \cdot \tan \alpha_4]^2 \right\}} - 4 \cdot [r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)]^2 - \sqrt{[(r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2]}^2 - 4 \cdot [r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)]^2 - (h_3^2 + 2 \cdot h_3 \cdot h_4) \cdot \tan(\alpha_4)^2 \right\}}{8 \cdot r_2 \cdot h_3 \cdot \tan(\alpha_4)^2}. \quad (\text{B.12})$$

### B.2.4: Fläche 3 zur Fläche 5

Die Gleichung zur Ermittlung des Sichtfaktors  $\varphi_{35}$  wird aus [9] „Abschnitt C-82“ entnommen. Nach Einsetzen der entsprechenden Größen und Umformen ergibt sich für  $\varphi_{25}$  der Zusammenhang

$$\varphi_{35} = \frac{\sqrt{\left\{ (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + [(h_3 + h_4) \cdot \tan \alpha_4]^2 \right\}} - 4 \cdot [r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)]^2 - \sqrt{[(r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2]}^2 - 4 \cdot [r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)]^2 - (h_3^2 + 2 \cdot h_3 \cdot h_4) \cdot \tan(\alpha_4)^2}{4 \cdot r_2 \cdot h_3 \cdot \tan(\alpha_4)^2}. \quad (\text{B.13})$$

## B.3: Faktoren Fläche 4 zu Flächen 2, 3, 4 und 5

### B.3.1: Fläche 4 zur Fläche 2

Zur Bestimmung des Sichtfaktors  $\varphi_{42}$  wird mit dem bereits ermittelten Sichtfaktor  $\varphi_{24}$  sowie den Flächen  $A_2$  und  $A_4$  die Reziprozitätsbeziehung aufgestellt. Damit entsteht der Zusammenhang

$$A_2 \cdot \varphi_{24} = A_4 \cdot \varphi_{42}$$

$$r_2^2 \cdot \pi \cdot \varphi_{24} = \frac{\left[ (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 - (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right] \cdot \pi}{\cos \alpha_4 \cdot \tan(\alpha_4)^2} \cdot \varphi_{42}. \quad (\text{B.14})$$

Nach dem Einsetzen der passenden Größen und mathematischem Umformen gilt für  $\varphi_{42}$  folgender Ausdruck

$$\varphi_{42} = \frac{\left[ \left( \sqrt{4 \cdot r_2^2 + h_3^2} - h_3 \right) \cdot \tan \alpha_4 \right]^2 - 2 \cdot \cos \alpha_4 \cdot \sqrt{1 + \tan(\alpha_4)^2} \cdot \left\{ \left[ (h_3 + h_4)^2 + r_2^2 \right] \cdot \tan(\alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right\} - \sqrt{\left\{ \left[ (h_3 + h_4)^2 + r_2^2 \right] \cdot \tan(\alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right\}^2} - 4 \cdot \left[ r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \right]^2}{4 \cdot \sqrt{1 + \tan(\alpha_4)^2} \cdot \left[ (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 - (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right]}. \quad (\text{B.15})$$

### B.3.2: Fläche 4 zur Fläche 3

Auch für die Ermittlung des Sichtfaktors  $\varphi_{43}$  wird die Reziprozitätsbeziehung mit den schon bekannten Größen  $\varphi_{34}$ ,  $A_3$  und  $A_4$  wie folgt formuliert

$$\begin{aligned} A_3 \cdot \varphi_{34} &= A_4 \cdot \varphi_{43} \\ 2 \cdot r_2 \cdot \pi \cdot h_3 \cdot \varphi_{34} &= \frac{\left[ (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 - (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right] \cdot \pi}{\cos \alpha_4 \cdot \tan(\alpha_4)^2} \cdot \varphi_{43}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Wenn alle nötigen Größen zur expliziten Berechnung von  $\varphi_{43}$  eingesetzt werden ergibt sich für diesen Sichtfaktor der folgende Zusammenhang

$$\varphi_{43} = \frac{\cos \alpha_4 \cdot \left\{ 4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 - \left[ h_3 - \sqrt{4 \cdot r_2^2 + h_3^2} \cdot \tan \alpha_4 \right]^2 - 2 \cdot \left\{ \sqrt{\left[ (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + [(h_3 + h_4) \cdot \tan \alpha_4]^2} \right]^2 - 4 \cdot \left[ r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \right]^2 - \sqrt{\left[ (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2 \right]^2} - 4 \cdot \left[ r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \right]^2 - (h_3^2 + 2 \cdot h_3 \cdot h_4) \cdot \tan(\alpha_4)^2 \right\} \right\}}{4 \cdot \left[ (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 - (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right]}. \quad (\text{B.17})$$

### B.3.3: Fläche 4 zur Fläche 4

Der Sichtfaktor  $\varphi_{44}$  wird mit Hilfe von [9] „Abschnitt C-111a“ bestimmt. Nach Einsetzen und Umformen entsteht für diesen Sichtfaktor folgender Zusammenhang

$$\varphi_{44} = \frac{(2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \cdot \cos \alpha_4 + h_4 \cdot \sin(\alpha_4)^2 - \sqrt{(2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 - 4 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot \sin(\alpha_4)^2 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)}}{(2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \cdot \cos \alpha_4}. \quad (\text{B.18})$$

### B.3.4: Fläche 4 zur Fläche 5

Für die Berechnung des Sichtfaktors der Fläche 4 zur Fläche 5 ist in [9] keine explizite Gleichung angegeben. Daher wird zuerst der Sichtfaktor der Fläche 4 zur Fläche  $\tilde{4}$  mit der Beziehung

$$\varphi_{4\tilde{4}} = \frac{(r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 - (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 - (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2 + \sqrt{[(r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2]^2 - 4 \cdot [r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)]^2}}{2 \cdot (2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \cdot \sqrt{(r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2} - 2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)}. \quad (\text{B.19})$$

aus [9] „Abschnitt C-111“ bestimmt. Des Weiteren muss für den Sichtfaktor  $\varphi_{45}$  der Zusammenhang  $\varphi_{45} = 1 - \varphi_{44} + \varphi_{4\tilde{4}}$  gelten. Nach Einsetzen der Gleichungen (B.18) bzw. (B.19) und Umformen entsteht für den Sichtfaktor  $\varphi_{45}$  der Ausdruck

$$\varphi_{45} = \frac{2 \cdot \sqrt{(r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2} - 2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \cdot \left\{ \cos \alpha_4 \cdot (2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) - \left[ \cos \alpha_4 \cdot (2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) + h_4 \cdot (\sin \alpha_4)^2 - \sqrt{(2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 - 4 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot \sin(\alpha_4)^2 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)} \right] \right\} - \cos \alpha_4 \cdot \left\{ (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 - (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 - (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2 + \sqrt{[(r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2]^2} - 4 \cdot [r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)]^2 \right\}}{2 \cdot \cos \alpha_4 \cdot (2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \cdot \sqrt{(r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2} - 2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)}. \quad (\text{B.20})$$

## B.4: Faktoren Fläche 5 zu Flächen 2, 3, 4 und 5

### B.4.1: Fläche 5 zur Fläche 2

Der Sichtfaktor  $\varphi_{52}$  wird mit Hilfe der in [9] „Abschnitt C-41“ angegebenen Beziehung ermittelt. Nach Einsetzen und Umformen ergibt sich folgender Zusammenhang für diesen Sichtfaktor

$$\varphi_{52} = \frac{\left[ r_2^2 + (h_3 + h_4)^2 \right] \cdot \tan(\alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 - \sqrt{\left\{ \left[ r_2^2 + (h_3 + h_4)^2 \right] \cdot \tan(\alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right\}^2 - 4 \cdot \left[ r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \right]^2}}{2 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2}. \quad (\text{B.21})$$

### B.4.2: Fläche 5 zur Fläche 3

Für die Bestimmung des Sichtfaktors  $\varphi_{53}$  wird die Reziprozitätsbeziehung mit den bereits ermittelten Größen  $\varphi_{35}$ ,  $A_3$  und  $A_5$  folgendermaßen formuliert

$$\begin{aligned} A_3 \cdot \varphi_{35} &= A_5 \cdot \varphi_{53} \\ 2 \cdot r_2 \cdot \pi \cdot h_3 \cdot \varphi_{35} &= \left( \frac{r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4}{\tan \alpha_4} \right)^2 \cdot \pi \cdot \varphi_{53}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Nach Einsetzen aller nötigen Größen und anschließendem Umformen entsteht folgender Zusammenhang für den Sichtfaktor der Fläche  $A_5$  zur Fläche  $A_3$

$$\varphi_{53} = \frac{\sqrt{\left\{ \left[ r_2^2 + (h_3 + h_4)^2 \right] \cdot \tan(\alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right\}^2 - 4 \cdot \left[ r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \right]^2} - \sqrt{\left[ (r_2^2 + h_4^2) \cdot \tan(\alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right]^2 - 4 \cdot \left[ r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \right]^2} - (h_3^2 + 2 \cdot h_3 \cdot h_4) \cdot \tan(\alpha_4)^2}{2 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2}. \quad (\text{B.23})$$

### B.4.3: Fläche 5 zur Fläche 4

Um den Sichtfaktor  $\varphi_{54}$  bestimmen zu können wird die Reziprozitätsbeziehung mit den bereits ermittelten Größen  $\varphi_{45}$ ,  $A_4$  und  $A_5$  in folgender Weise aufgestellt

$$A_4 \cdot \varphi_{45} = A_5 \cdot \varphi_{54}$$

$$\frac{\left[ (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 - (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right] \pi}{\cos \alpha_4 \cdot \tan (\alpha_4)^2} \cdot \varphi_{45} = \left( \frac{r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4}{\tan \alpha_4} \right)^2 \cdot \pi \cdot \varphi_{54}. \quad (\text{B.24})$$

Für den Sichtfaktor der Fläche  $A_5$  zu der Fläche  $A_4$  ergibt sich nach dem Einsetzen aller notwendigen Größen und entsprechender Umformarbeit der Ausdruck

$$\varphi_{54} = \frac{\left\{ 2 \cdot \sqrt{(r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2} - 2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \cdot \left\{ \cos \alpha_4 \cdot (2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) - \left[ \cos \alpha_4 \cdot (2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) + h_4 \cdot (\sin \alpha_4)^2 - \sqrt{(2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 - 4 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot \sin (\alpha_4)^2 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)} \right] \right\} - \cos \alpha_4 \cdot \left\{ (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 - (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 - (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2 + \sqrt{[(r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2]^2} - 4 \cdot [r_2 \cdot \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)]^2 \right\} \right\} \cdot \left[ (r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 - (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \right]}{2 \cdot \cos (\alpha_4)^2 \cdot (2 \cdot r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4) \cdot \sqrt{(r_2 \cdot \tan \alpha_4)^2 + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2} + (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 + (h_4 \cdot \tan \alpha_4)^2 - 2 \cdot r_2 \tan \alpha_4 \cdot (r_2 \tan \alpha_4 - h_4) \cdot (r_2 \cdot \tan \alpha_4 - h_4)^2 \cdot \cos \alpha_4}. \quad (\text{B.25})$$

### B.4.4: Fläche 5 zur Fläche 5

Der Sichtfaktor  $\varphi_{55}$  ist gleich null, weil die Fläche  $A_5$  eben ist.

$$\varphi_{55} = 0 \quad (\text{B.26})$$