



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN



Diplomarbeit

**FE- Studien zum
Beul- und Nachbeulverhalten von
Scheiben und Bändern unter Zug-und Torsion**

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung
des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs
eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaft,
von

Saeideh Faghfouri, Bsc

Matr.Nr. 01229267

unter der Leitung von

Em.O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.Franz G. Rammerstorfer

Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik

Wien, Oktober 2020

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen, sind als solche kenntlich gemacht.

Das Thema dieser Arbeit wurde von mir bisher weder im In- noch Ausland einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Arbeit stimmt mit der von den Begutachtern beurteilten Arbeit überein:

Vorwort/Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei der Technischen Universität Wien für die Studienmöglichkeit mit vielfältigen Einrichtungen bedanken, insbesondere beim Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik und beim Institut für Hochbau, Baudynamik und Gebäudetechnik, Forschungsbereiche Strukturmechanik und Risikobewertung von Tragwerken, für die großartige Unterstützungen und Förderungen jeglicher Art und bei all denjenigen, die mir während des Studiums etwas beigebracht, mich unterstützt und motiviert haben.

Zuerst gebührt mein Dank Herrn Em.O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Franz G.Rammerstorfer, der meine Diplomarbeit betreut und begutachtet hat. Für die zahlreichen interessanten Gespräche, die hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken.

Einen wichtigen Beitrag während meines Studium leistete Herr Ao.Univ.Prof.i.R. Dipl.-Ing. Dr.techn. Helmut Böhm, der mir mit seinem umfassenden fachlichen Wissen in den Bereichen FEM und Mechanik einen Einblick in das wissenschaftliche Arbeiten und die beruflichen Ziele vermittelt hat. Hiermit möchte ich mich bei ihm herzlich bedanken.

Ein besonderer Dank gilt Frau Maria Steininger für ihre Bemühungen und sehr gute Koordination am Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik.

Zu guter Letzt, einen herzlichen Dank an meine Familie, insbesondere meine wunderbare Tochter, für die entgegengebrachte Liebe und für die Hoffnung, die sie immer in mir erwecken.

Abstract

For centuries, buckling of thin wall plates has been a major concern in engineering. There are some literature and classical studies on buckling problems in the area of circular plates and strips under various loads and boundary conditions. In this master thesis the linear and nonlinear buckling behavior of disks and strips is investigated by means of finite element simulations using the commercial software ABAQUS (eigenvalue buckling analysis). Linear elastic material was assumed.

The first goal was to investigate the buckling behavior of elastic thin circular disks under non-uniform tensile and pressure loads. Two sets of boundary condition are considered, in one case the entire edge of circular disks is simply supported and in the other case it is free. The thickness and radius are varied to determine the buckling factor "k" depending on the boundary conditions. Additionally, buckling modes for each set of boundary conditions are presented.

The next goal was to investigate the nonlinear pre- and post-buckling behavior of stretched-twisted strips. Because of large rotations, not just the post-buckling process but also the simulation of the pre-buckling behavior required the consideration of nonlinearities. Studying the load dependent characteristics of the stress distribution gave evidence and explanation of the transition of the buckling behavior from buckling with longitudinal waviness to such with transversal waviness. The post-buckling analysis was done up to the deep post-buckling region.

Finally, by means of an analytical solution critical loads and stress distributions were calculated and compared to the simulation results. Using the analytically derived expressions in combination with the results of numerical simulations, it was possible to determine a closed form expression for determining the critical twist angle for the transition from longitudinal to transverse wave buckling modes.

Kurzfassung

Bei dünnwandigen Strukturen spielt der Stabilitätsnachweis hinsichtlich des Trag- und Verformungsverhaltens eine zentrale Rolle. Dünnwandige Strukturen unter Zugbelastung und Torsion können, wie bei der Druckbelastung, zum Beulen neigen. Während Beulen unter globalem Druck meistens in Erwägung gezogen wird, wird dem gegenüber das Auftreten von Beulen unter Zugbelastung und Torsion kaum in Betracht gezogen.

Das erste Ziel in dieser Arbeit besteht darin, einen formalen Zusammenhang des Beulbeginns mit den Geometrieparametern für eine Kreisscheibe mit freiem und gelenkig gelagertem Rand unter Zug- und Druckbeanspruchung mittels Finite Elemente Simulationen (Eigenwert- Beulanalysen) zu finden, um die kritische Kraft F^* zu berechnen. Als kritische Last wird die Kraft bezeichnet, bei welcher Beulen auftritt. Es wurde die Geometrie (Radius und Dicke) variiert und für die unterschiedlichen Rand- und Belastungsbedingungen wurden geometrie-unabhängige Beulfaktoren ermittelt.

Das nächste Ziel dieser Arbeit ist, das Beulverhalten dünner Plattenstreifen unter Zugkraft und Torsionsmoment numerisch zu untersuchen. Da hier für die Wirkung der Torsion die für das Beulen maßgeblichen Spannungen erst durch die Verdrehung des Streifens, also aus einem geometrisch nichtlinearen Effekt entstehen, mussten geometrische Nichtlinearitäten nicht nur bei Analyse des Nachbeulverhaltens berücksichtigt werden, sondern auch zur Berechnung des Vorbeulverhaltens. Es wurden die kritischen Belastungszustände sowie Spannungszustände an der Stabilitätsgrenze und ihr Zusammenhang mit dem Verdrehwinkel bei gegebener Längskraft sowie die Veränderungen der Beulmoden ermittelt.

Schließlich wurden anhand der Simulationsergebnisse und bereits vorhandener Erkenntnisse eine Analogie zu den kritischen Belastungen aus den Green und Chopin Gleichungen gefunden. Mittels dieser Analogie konnte eine Beziehung für jenen kritischen Verdrehwinkel gewonnen werden, bei welchem der Übergang von längswelligen zu querwelligen Beulmoden eintritt.

Abschließend wurde das Nachbeulverhalten von kurzen und langen Streifen untersucht, um das Verhalten des Bands beim Überschreiten des kritischen Torsionsmoments M^* bis in den tiefen Nachbeulbereich zu betrachten. Die Untersuchungen wurden unter Annahme von linear elastischem Material durchgeführt.

Die Finite Elemente Simulationen wurden mit der Software ABAQUS durchgeführt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung.....	1
1.1 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit.....	2
1.2 Simulation des Beulens.....	3
1.2.1 Simulation der Gleichgewichtsverzweigung.....	4
1.2.2 Geometrische Nichtlinearitäten	4
1.3 FEM Theorie zur linearen und geometrisch nichtlinearitäten Beulanalyse.....	5
1.4 Lineare und geometrisch nichtlineare Beulanalyse,implementiert im FE-Programm ABAQUS	6
1.5 Ablauf der Berechnung, Bildung der Steifigkeitsmatrizen.....	10
1.6 Numerische Lösung des Eigenwertproblem.....	11
1.7 Diskretisierung und Genauigkeit	12
1.7.1 Ermittlung geeigneter Diskretisierungsvarianten für das Beulen von dünnen Rechteckplatten unter Zug- Druck- und Schubbelastungen	13
1.7.2 Konvergenzstudie der Vernetzung der Platten bei der Beulanalyse unter Zugbelastung.....	14
1.7.3 Konvergenzstudie der Vernetzung bei der Beulanalyse der Platten unter Druckbelastung:.....	19
1.7.4 Konvergenzstudie der Vernetzung bei der Beulanalyse der Platten unter Schubbelastung:.....	24

2 Lineare Beulanalyse für Kreisscheiben unter Zug- und Druckbeanspruchung.....	27
2.1 Zielsetzung und Gliederung.....	28
2.2 Anforderungen und Voraussetzungen.....	29
2.3 Modellbeschreibung.....	30
2.3.1 Vernetzung.....	31
3.3.2 Materialdaten	31
2.3.3 Randbedingungen	32
2.4 Beulfaktoren.....	33
2.5 Kreisscheiben mit freiem Rand unter lokaler Zug-Gleichlast, Zug-Einzellast und Druck-Einzellast.....	34
2.5.1 Variation der Dicke.....	35
2.5.2 Variation des Radius	37
2.6 Kreisscheiben mit gelenkig gelagertem Rand unter Druck- und Zug-Einzellast/ Dickenvariation.....	39
2.7 Beulformen Mode "I" bis "V"	41
2.8 Diskussion der Ergebnisse der linearen Beulanalyse von Kreisscheiben.....	46

3 Nichtlineare Beulanalysen für dünne Bänder unter Zug und Torsion.....	47
3.1 Vorhandene Arbeiten zum Beulverhalten von Plattenstreifen unter Zugbelastung und Torsion	48
3.2 Wesentliche Voraussetzungen	49
3.3 Modellbeschreibung.....	50
3.3.1 Anforderungen	51
3.3.2 Vernetzung.....	51
3.3.3 Materialdaten	52
3.3.4 Randbedingungen	52
3.3.5 Lastaufbringung	53
3.4 Last-Verschiebung-Diagramme.....	60
3.5 Nähere Erläuterungen zu den Ergebnissen der Stabilitätsanalysen	62
3.5.1 Kritische Belastungszustände	62
3.5.2 Spannungszustände und Modusübergänge	66
3.5.3 Beulformen	73
3.6 Analytische Studien	89
3-6-1 Spannungen in Längs- und Querrichtung nach ssFvK und cFvK Gleichungen	90
3-6-2 λ - Punkt : Modusübergang	95
3-6-3 Überprüfung des kritischen Winkels im Bereich "A" : $T < T_\lambda$ nach ss-FvK	96
3-6-4 Vorfaktoren zur Berechnung des kritischen Winkels im Bereich "B" : $T > T_\lambda$	98

4 Nichtlineare Nachbeulanalysen für die elastischen Streifen unter Zug und Torsion.....	102
4.1 Nachbeulverhalten - Ziel und Vorgehensweise	103
4.2 Modellbeschreibungen: Randbedingungen, Lastaufbringung , Vernetzung und Materialdaten	104
4.3 Berechnungen des Nachbeulverhaltens	106
4.3.1 Vorgehensweise bei der nichtlinearen Nachbeulanalyse	106
4.3.2 Verhalten von Gleichgewichtspfade	106
4.3.3 Festlegung der Imperfektionen	107
4.3.4 Aufbringen der Imperfektionen beim 200- und 1000-Streifen	107
4.4 Ergebnisse der nichtlinearen Nachbeulanalyse - 200-Streifen	110
4.4.1 Nachbeulverhalten vom 200-Streifen im Bereich $T < T_\lambda$ unter Zugkraft $F=200$ [N]	110
4.4.2 Nachbeulverhalten des 200-Streifens im Bereich $T=T_\lambda$ unter Zugkraft $F=600$ [N]	115
4.4.3 Nachbeulverhalten des 200-Streifens im Bereich $(T>T_\lambda)$ unter Zugkraft $F=3000$ [N]	120
4.5 Ergebnisse der nichtlinearen Nachbeulanalyse - 1000-Streifen	122
4.5.1 Nachbeulverhalten des 1000-Streifens im Bereich $T < T_\lambda$ unter Zugkraft $F=220$ [N].....	122
4.5.2 Nachbeulverhalten des 1000-Streifens im Bereich $T=T_\lambda$ unter Zugkraft $F=350$ [N]	125
4.5.3 Nachbeulverhalten des 1000-Streifens im Bereich $(T>T_\lambda)$ unter Zugkraft $F=8000$ [N]	127
5 Fazit	128
Literaturverzeichnis	130
Appendix A: Aufbringen der Imperfektion in ABAQUS	132

Kapitel 1

Einleitung

Im Leichtbau ist es üblich Stabilitätsgrenzen bei Druckbeanspruchung zu ermitteln. Das Auftreten von Beulen unter Torsion oder Zugbeanspruchung wird kaum in Betracht gezogen. Bei Zugbelastung und Torsion können lokale Druckspannungszustände auftreten, welche zum Beulen führen können. Zugkräfte können auch hinsichtlich der Stabilitätsgrenze bei dünnwandigen Streifen unter Torsion eine wesentliche Rolle spielen. Zum Beulverhalten unter Zug und Torsion sind allerdings kaum numerischen Untersuchungen durchgeführt worden. Aus diesem Grund erweckte dieses Thema mein Interesse und ich habe mich dieser Arbeit gewidmet. In dieser Diplomarbeit werden in linearen und nichtlinearen FE-Studien diese Effekte untersucht und entsprechende Beziehungen zum Beulen tordierter Streifen und radial gezogener Kreisscheiben entwickelt.

Mit den geometrisch nichtlinearen Deformationsanalysen begleitenden linearen Eigenwertanalysen können die Stabilitätsgrenzen bzw. Verzweigungslasten und Beuleigenformen (Moden) ermittelt werden. Dabei wird die Last schrittweise erhöht und es werden die Verformungen beobachtet. In der Umgebung jenes Lastniveaus, in welchem durch das Verhalten der Gleichgewichtssiterationen und der Definitheit der Tangentensteifigkeitsmatrix Stabilitätsverlust angezeigt wird, wird ein lineares Eigenwertproblem aufgestellt und gelöst.

1.1 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

Ziel dieser Diplomarbeit ist die Berechnung von kritischen Belastungszuständen, einschließlich der zugehörigen Bauformen mithilfe von Eigenwertanalysen. Die Berechnung der kritischen Zustände wird mit ABAQUS durchgeführt. Im Folgenden wird darauf eingegangen, wie die Algorithmen für Beulanalysen bei geometrischen Nichtlinearitäten im FE- Programm ABAQUS implementiert sind.

1.2 Simulation des Beulens

Beulanalysen sind eine strukturmechanische Untersuchungen von Bauteilen hinsichtlich Stabilitätsversagen. Unter Stabilitätsgrenze versteht man jenen Zustand, bei dem die Lastverformungskurve entweder eine Verzweigung oder eine horizontale Tangente aufweist [1].

Eine Simulation des Beulens kann erfolgen durch :

- 1- Eigenwertanalysen
- 2- geometrisch nichtlineare inkrementell-iterative Analyse, (Stabilitätsverlust durch Durchschlagen) – kann auch zur näherungsweisen Berechnung des Nachbeulverhaltens nach dem Verzweigen verwendet werden, wenn leicht imperfekteten Strukturen untersucht werden.

1.2.1 Simulation der Gleichgewichtsverzweigung

Bei der Berechnung der Stabilitätsgrenze durch Verzweigung (Eigenvalue buckling Analysis) wird die theoretische Beulfestigkeit (Verzweigungspunkt) einer elastischen Struktur durch Lösung eines Eigenwertproblems bestimmt. Diese Methode wird in der Literatur auch als elastische Beulanalyse bezeichnet. Tritt Stabilitätsverlust durch Verzweigung mit instabilem Nachbeulverhalten auf, so bewirken Imperfektionen, dass die „realen Strukturen“ ihre theoretische Beulfestigkeit nicht erreichen. Aus diesem Grund führt die Eigenwertbeulanalyse oft zu nichtkonservativen Ergebnissen [1][2].

Zur Berechnung der kritischen Last über ein Eigenwertproblem wird der Gleichgewichtszustand des Bauteils mit einer Last (oder einer Kombination von Lasten) in einer statischen Simulation berechnet. Mit den Spannungen, die sich dabei ergeben, wird die Spannungssteifigkeitsmatrix (oder Geometrie-Steifigkeits-Matrix) erzeugt.

1.2.2 Geometrische Nichtlinearitäten

Bei einer Berechnung unter Berücksichtigung von geometrische Nichtlinearitäten wird in einer statischen Simulation die Last schrittweise erhöht, und es werden die Verformungen beobachtet. Dabei können weitere nichtlineare Effekte wie Kontakt oder Plastizität berücksichtigt werden. Damit kann die Realität genauer abgebildet werden. Es ist auch durchaus möglich, das Nachbeulverhalten zu simulieren. Im technischen Alltag kann so auch das allfällig gegebene Tragvermögen nach einem ersten Beulfall ausgenutzt werden [2].

1.3 FEM Theorie zur linearen und geometrisch nichtlinearitäten Beulanalyse

Mit linearen Anfangs-Stabilitätsanalysen (Eigenwertbeulen) werden Verzweigungslasten und Beuleigenformen von linear-elastischer Bauteilen ermittelt, bei denen vor der Verzweigung keine großen Deformationen vorliegen [2]. Geometrische Nichtlinearitäten können in Form von großen Verschiebungen oder großen Verdrehungen auftreten. Bei nichtlinearen Problemstellungen sind die Gleichgewichtsbedingungen am deformierten System zu erstellen, d.h. dass die unbekanntes Verschiebungen bzw. Verdrehungen (nichtlinear) eingehen. Das Verhalten des untersuchten Systems kann so stark nichtlinear sein, dass keine Lösung gefunden werden kann, wenn alle Lasten in einem einzigen Schritt aufgebracht werden. Deshalb wird die Last üblicherweise in mehreren Inkrementen aufgebracht, die klein genug dafür gewählt werden, sodass für jeden Belastungsschritt ein Gleichgewichtszustand gefunden werden kann [1].

Die Gleichungen müssen mit geeigneten Lösungsalgorithmen behandelt werden. Dabei berechnet man in jedem Lastinkrement zunächst eine Näherungslösung auf Basis des linearisierten Ersatzproblems, wobei die Fehler, die durch die Linearisierung entstehen, iterativ zum Verschwinden gebracht werden [1].

In jedem Fall werden also auch bei der Lösung von nichtlinearen Finite-Elemente- Problemen in letzter Hinsicht lineare Gleichungssysteme gelöst, allerdings nicht nur einmal für jeden Lastfall, sondern oftmals im Rahmen der iterativen Suche nach Gleichgewichtszuständen, die den (gegebenenfalls inkrementell aufgebrachten) Belastungen entsprechen [1].

1.4 Lineare und geometrisch nichtlineare Beulanalyse, implementiert im FE-Programm ABAQUS

Wir gehen vom statischen Stabilitätskriterium (Euler'sches Stabilitätskriterium) für konservative Systeme aus, welches besagt, dass in Verzweigungspunkten zumindest zwei unterschiedliche Gleichgewichtszustände bei konstanter Last infinitesimal nahe beieinander liegen [1]. Das heißt, dass die inkrementelle Gleichgewichtsbedingung:

$$\mathbf{K}^* \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

eine nichttriviale Lösung

$$\delta \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad (1.2)$$

besitzt. Demgemäß sucht man nach jenen Lastzustände, bei welchen die tangentielle Steifigkeitsmatrix singular wird, wo also das Problem in Gleichung 1.1 eine nichttriviale Lösung besitzt.

Hierbei sind :

- \mathbf{K}^* Die tangentielle Steifigkeitsmatrix an der Stabilitätsgrenze
- $\delta \mathbf{u}$ ein nichttriviales, infinitesimal kleines Verschiebungsinkrement
- $\delta \mathbf{F}$ Das zu Null vorgegebene Lastinkrement

Die Beullasten werden bezüglich eines zu definierenden Anfangszustandes der Struktur berechnet. Aus Gleichung 1.1 lässt sich ein Eigenwertproblem bilden, Siehe Gleichungen 1.3, 1.5 und 1.7. Ist die Eigenwertberechnung der erste Step der Simulation, dann ist der Ausgangszustand des Modells zugleich der Anfangszustand für die Beulanalyse. Liegen geometrische Nichtlinearität vor, dann ist es sinnvoll, den Anfangszustand des Modells mit dem Zustand zum Ende des vorhergegangenen Steps festzulegen.

Dementsprechend kann der Anfangszustand die Auswirkungen von Vorlasten \mathbf{P} berücksichtigen. Für den Eigenwertberechnungsstep definiert man ein Lastinkrement " \mathbf{Q} ", das mit dem noch unbekanntem Laststeigerungsfaktor λ_i skaliert und zur Vorlast " \mathbf{P} " addiert wird. Dieser Vektor kann frei gewählt werden. Wenn λ_i eine Lösung des Eigenwertproblems :

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda_i \mathbf{K}_\Delta) \Phi_i = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

darstellt, dann kann die kritischen Last ermittelt werden.

Eine Näherung für Beullast \mathbf{F}_1^* lässt sich mit λ_1 entsprechend der Gleichung 1.4 berechnen. Im Sinne einer linearen Stabilitätsanalyse ist diese Näherung exakt. Im nichtlinearen Fall wird die Näherung für jenes \mathbf{P} exakt, wenn λ_1 gegen Null geht. Sie setzt sich aus der Vorlast \mathbf{P} und dem mit dem Eigenwert λ_i des jeweiligen Modes multiplizierten, Lastinkrement \mathbf{Q} zusammen.

$$\mathbf{F}_i^* = \mathbf{P} + \lambda_i \mathbf{Q} \quad (1.4)$$

Darin sind:

\mathbf{K}_0 Die tangentielle Steifigkeitsmatrix entsprechend dem Anfangszustand.

Falls vorhanden, werden die Auswirkungen der Vorlast \mathbf{P} darin berücksichtigt.

\mathbf{K}_Δ Die Veränderung der tangentiellen Steifigkeitsmatrix zufolge der inkrementellen Last \mathbf{Q} , bezogen auf den Anfangszustand

λ_i Die Eigenwerte zum jeweiligen Mode i

Φ_i Die Eigenvektoren, welche die Beulformen des jeweiligen Modes i qualitativ beschreiben.

Das Ergebnis sind die Eigenwerte λ_i . Sie sind zu verstehen als diejenigen Faktoren, mit denen die Last \mathbf{Q} multipliziert werden muss, um –addiert zur Vorlast \mathbf{P} - die Stabilitätsgrenze \mathbf{F}^* zu erreichen. Der zu dem Eigenwert λ_i gehörige Eigenvektor Φ_i beschreibt in Verbindung mit den Interpolationsfunktionen der finiten elemente die i-te Beulform . Diese Beulmoden sind nur qualitativ zu verwenden, nicht aber quantitativ (das bedeutet: sie stellen jeweils ein typisches Beulmuster dar, nicht aber praktisch auswertbare Zahlenwerte). und stellen die Anfangsabweichungen der Verschiebungen im Nachbeulbereich dar. Eine spezielle Normierung erfolgt derart, dass die maximale translatorische Komponente von Φ_i den Wert 1.0 annimmt [1][2][3][5].

Anmerkung 1.1 : Im Kapitel 2 (Kreisscheibe unter Zugbeanspruchung) wird Gleichung 1.4 verwendet, um Beullasten zu berechnen. Da es sich im Kapitel 2 um ein Problem handelt, bei dem eine lineare Anfangsstabilitätsanalyse ausreicht, ist hier keine Vorlast \mathbf{P} zu berücksichtigen.

Anmerkung 1.2 : Im Kapitel 3 (gezogener und tordierter Streifen) wird bei der Reihenfolge "B" das Eigenwertproblem nach Gleichung 1.5 gelöst, um kritische Beullasten $F^*(M)$ zu berechnen (F ist hier der Betrag Längszugkraft und M ist der Betrag des Torsionsmoments, beides am Ende eines dünnen Strifens als äußere Last wirkend.) :

$$(\mathbf{K}_0^F + \lambda_i^F \mathbf{K}_\Delta^F) \phi_i^F = 0 \quad (1.5)$$

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{M}) = \mathbf{F}_i^* = \mathbf{P} + \lambda_i^F \Delta \mathbf{F} \quad (1.6)$$

Darin sind :

$$Q = \Delta F$$

$$P = F_{gesamt} = (F_{Zug} - F_{Druck})$$

Anmerkung 1.3 : Im Kapitel 3 wird bei der Reihenfolge "A" das Eigenwertproblem nach Gleichung 1.7 gelöst, um kritische Beullasten $M^*(F)$ zu berechnen :

$$(\mathbf{K}_0^M + \lambda_i^M \mathbf{K}_\Delta^M) \phi_i^M = 0 \quad (1.7)$$

$$\mathbf{M}^*(F) = \mathbf{M}_i^* = \mathbf{M} + \lambda_i^F \Delta \mathbf{M} \quad (1.8)$$

Hier wird ΔM als Q und M als "P" Vorlast definiert : $Q = \Delta M = \tilde{M}^* - M$

Näheres zu den hier verwendeten Bezeichnungen findet man im Kapitel 3.

Anmerkung 1.4: In den Gleichungen 1.6 und 1.8 wird der Vorlastvektor "P" bzw. "M" aus der Zugkraft und jenem Torsionsmoment "M" gestellt, welches ein wenig kleiner als ein Schätzwert \tilde{M}^* für das kritische Torsionsmoment M^* ist. Das Schätzwert \tilde{M}^* , wird unter Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten in einem Pre-step durch Full-Newton Methode iterativ-inkrementell als jener Wert ermittelt, bei dem gerade keine Konvergenz mehr erreicht wird.

1.5 Ablauf der Berechnung, Bildung der Steifigkeitsmatrizen [3][5]

Bei einer linearen Anfangsstabilitätsanalyse (ohne Berücksichtigung von Vorbeuldeformation) führt ABAQUS zuerst eine statische Analyse bei Belastung durch den Lastvektor "Q" durch, um die inkrementellen Spannungen $\Delta\sigma$ zufolge des Lastvektors "Q" zu bestimmen. Wenn der Anfangszustand der unbelastete Bauteil ist, wird als Steifigkeitsmatrix zur Bestimmung der inkrementellen Spannungen $\Delta\sigma$ die elastische Anfangs-Steifigkeitsmatrix verwendet. Wenn Vorbeuldeformationen zu berücksichtigen sind, müssen für den Anfangszustand die Verschiebungen und Spannungen zufolge des Vorlastvektors "P" bei der Bildung der Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_0 berücksichtigt werden. Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_0 wird also bezüglich des Ausgangszustandes gebildet.

Anmerkung 1.5 : Bei der durchgeführte Analyse in Kapitel 2 für die Kreisscheibe unter Zugkraft, die eine lineare Anfangsstabilitätsanalyse darstellt, wird die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_Δ zufolge $\Delta\sigma$, verursacht vom Lastvektor Q, aufgestellt.

Anmerkung 1.6 : Bei der durchgeführte Analyse in Kapitel 3 für den Streifen unter Torsionsmoment und Zugkraft , die eine geometrisch nichtlinearität Beulanalyse darstellt, wird die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_Δ^M zufolge $\Delta\sigma$, verursacht vom Lastinkrement $Q = \Delta M = \tilde{M}^* - M$ bei der Reihenfolge "A" und die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_Δ^F , verursacht vom Lastinkrement $Q = \Delta F = \tilde{F}^* - F$ bei der Reihenfolge "B" aufgestellt.

1.6 Numerische Lösung des Eigenwertproblem [3][5]

Zur Lösung des Eigenwertproblem Gleichung 1.3 bietet ABAQUS/Standard die Subspace Iteration beziehungsweise die Lanczos Methode an. Für beide Methoden legt man die benötigte Anzahl "i" an Eigenwerten λ_i und in Folge dessen die Anzahl der Eigenmodes ϕ_i fest.

Die Subspace Iteration Implementierung in ABAQUS ermöglicht dem Benutzer zudem ein Maximum λ_{\max} für den Bereich zu definieren, in dem nach Eigenwerten gesucht wird. Die Berechnung wird also beim Erreichen der geforderten Anzahl an Eigenwerten, beziehungsweise beim Überschreiten der Schranke λ_{\max} , beendet. Die Eigenwerte werden vom kleinsten Eigenwert λ_1 aufsteigend berechnet.

Die Lanczos Implementierung in ABAQUS ermöglicht es, zusätzlich zum Maximum λ_{\max} auch eine untere Schranke für die gesuchten Eigenwerte zu definieren.

Anmerkung 1.7 : Mit der Lanczosmethode lassen sich negative Eigenwerte durch Festlegung einer passenden unteren Schranke ausschließen und somit die relevanten, d.h die positiven Eigenwerte für das Beulverhalten unter Zugbeanspruchungen finden. Darum wurde in dieser Arbeit für die Eigenwertberechnung von Scheiben unter Zug die Lanczos Methode verwendet.

Anmerkung 1.8: Für die Eigenwertberechnung von Streifen unter Torsionsmoment und Zug (Kapitel 3) könnten grundsätzlich beide Methoden, die Subspace Iteration beziehungsweise die Lanczos Methode, verwendet werden. In dieser Arbeit wird die Lanczos Methode ausgewählt.

1.7 Diskretisierung und Genauigkeit

Die Genauigkeit der Lösung hängt i.A. von der Güte der finiten Elemente (Interpolationsfunktionen, Integrationsordnung,...) und von der Feinheit des FE-Netzes (vom Diskretisierungsgrad) ab. Eine Verbesserung der Diskretisierung in einem bestehenden FE-Modell kann also auch durch eine "Netzverfeinerung" erreicht werden, ohne die Elementtypen zu ändern. So können große Gradienten der berechneten mechanischen Größen z.B. Spannungsgradienten oder Gradienten in den Deformationsfeldern ausreichend aufgelöst zu werden.[8].

Deshalb werden in den folgenden Abschnitten unterschiedliche Element-Typen mit unterschiedlichen Größen unter Zug, Druck und Schubbeanspruchungen überprüft.

1.7.1 Ermittlung geeigneter Diskretisierungsvarianten für das Beulen von dünnen Rechteckplatten unter Zug- Druck- und Schubbelastungen

Für Rechteckplatten lässt sich die kritische Membranspannung σ^* analytisch in einfacher Form ausdrücken durch [6]:

$$\sigma^* = kE \left(\frac{t}{B}\right)^2 \quad (1.9)$$

$$\sigma_{ij}^* = \frac{N_{ij}^*}{t} \quad (1.10)$$

Darin sind:

k= Beulfaktor

k=50000 bei Zugbelastung, $L/B = 2$ und $\nu = 0,3$ – siehe Abbildung 1.2

k=170000 bei Zugbelastung, $L/B = 10$ und $\nu = 0,3$ – siehe Abbildung 1.2

und der Beulfaktor für allererste gelenkig gelagerte Rechteckplatten lautet :

k= 3.83 bei Druckbelastung, $\frac{B}{L} = 0.5$ und $\nu = 0,3$ – siehe Abbildung 1.4

k=5.45 bei Schubbelastung, $\frac{B}{L} = 0.4$ und $\nu = 0,3$ – siehe Abbildung 1.9

E = Elastizitätsmodul

t= Plattendicke

B= Plattenbreite

L= Plattenlänge

σ^* = kritische Membranspannung

N_{ij}^* = kritische Membrankraft je Längeneinheit (Schub, Zug oder Druckbelastung)

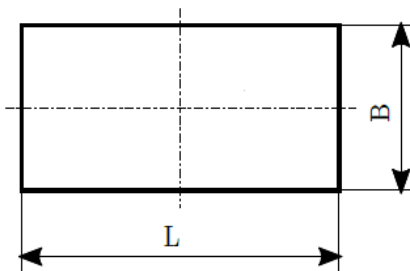


Abbildung 1.1 Bezeichnung der Geometrieparameter

1.7.2 Konvergenzstudie der Vernetzung der Platten bei der Beulanalyse unter Zugbelastung

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Beulanalyse einer gezogenen Rechteckplatte durch ABAQUS im Vergleich zum Friedl-Rammerstorfer-Fischer Diagramm [7] überprüft.

Die gewählten Geometriewerte der Platte sind aus Tabelle 1.1 ersichtlich. Der E-Modul wird mit $E=70000$ [MPa] und der Poisson 'sche Konstante mit $\nu = 0,3$ festgelegt.

L [mm]	B [mm]	$\frac{L}{B}$	t [mm]
1000	100	10	0.05
			0.005
			0.0005
200		2	0.05
			0.005
			0.0005

Tabelle 1.1 Modellparameter bei der Beulanalyse unter Zugbelastung

In die Tabelle 1.2 sind nun die Werte jener kritischen Spannung eingetragen, welche sich unter Anwendung des Diagramms in Abbildung 1.2 [7] und der Gleichung 1.9 ergeben.

L / B	k	t [mm]	σ^* [MPa]
2	~ 52900	0.05	925.75
		0.005	9.26
		0.0005	0.0926
10	~ 160000	0.05	2800
		0.005	28
		0.0005	0.28

Tabelle 1.2 Beulfaktoren und kritische Spannungen gemäß Gleichung 1.9 und Friedl-Rammerstorfer-Fischer Diagramm[7]

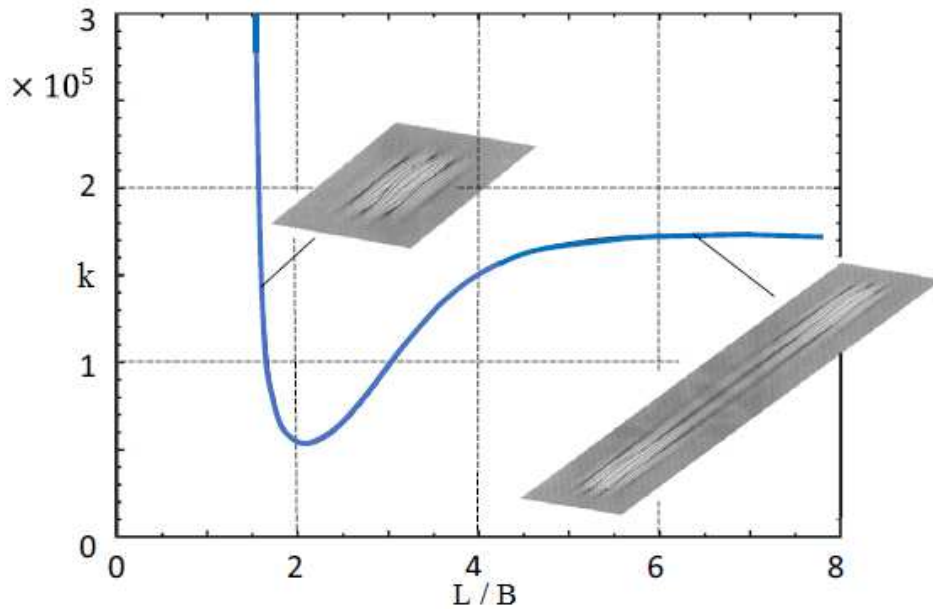


Abbildung 1.2 Friedl-Rammerstorfer-Fischer Diagramm, entnommen aus [7]

Randbedingungen :

Zu dieser Analyse werden die Platten an den kurzen Enden so gelagert, dass in die Richtung y und z keine Verschiebungen auftreten können. Auf der linken Seite werden die translatorische und rotatorische Freiheitsgraden (FG1-FG5) gesperrt, siehe Abbildung 1.3.

Auf der rechten Seite sollen Verschiebungen in x -Richtung (FG1), d.h in Wirkrichtung der Last, so zugelassen werden, sodass dieses Plattenende sich nur als gerade Kante im Längsrichtung der Platte verschieben kann . Um diese Einspannung in ABAQUS zu modellieren, wurde ein Referenzpunkt RP, siehe Abbildung 1.3, erzeugt. An diesen Referenzpunkt RP wurden die angrenzende Randpunkte an die translatorische und rotatorische Freiheitsgraden (FG1-FG5) kinematisch gekoppelt. Auf diese Weise wird erreicht, dass sich die rechte Kante parallel und in x -Richtung verschiebt.

Am Referenzpunkt RP wird die konzentrierte Vorlast P beziehungsweise das Lastinkrement Q in x -Richtung (FG1), aufgebracht. Wegen der kinematischen Kopplung an dieser Kante kommt es zu keinen Spannungskonzentrationen zufolge der Lasteinleitung.

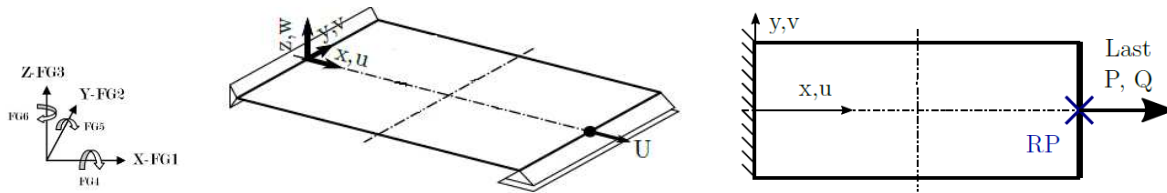


Abbildung 1.3 Koordinatenachsen und Randbedingungen für die Platte unter Zugbelastung, entnommen aus [5]

Deskretisierung :

Eine FE-Deskretisierung mit 4-knotigen Schalelementen vom Typ S4R (als 1.Testfall) und S4R5 (als 2.Testfall) in ABAQUS liefert in einer Konvergenzstudie an einer Platte $L=200$ und 1000 [mm], $B = 100$ [mm], $t=0.05$ [mm] folgende Ergebnisse, siehe Tabellen 1.3 bis 1.6.

Ergebnisse :

Die Ergebnisse zeigen, dass bei der Lanczos-Methode das Element S4R mit der Größe 2×2 [mm] eine gute Konvergenz liefert, die mit dem Friedl-Rammerstorfer-Fischer Diagramm bzw. kritischen Spannungen dargestellt in Tabelle.1.2 übereinstimmen, siehe Tabellen 1.3 und 1.5. Mit dem Element S4R5 konnte in vielen Fällen keine bzw. keine zufriedenstellende Konvergenz erreicht werden, siehe Tabelle 1.4 und 1.6.

Elementgröße[mm] [4-Knoten]	Element Anzahl	Knoten Anzahl	t [mm]	N_{xx} [N]	σ_{krit} [MPa]
6x6	561	612	0.05	5052	1010.4
6x5	660	714		5405	1081
4x4	1250	1326		4921.6	984.32
2x2	5000	5151		4633.4	926.68

Tabelle.1.3 Ergebnisse der Konvergenzstudie der Streifen $L200 \times 100 \times 0.05$ unter Zugbelastung, 1.Testfall.Lanczos Eigenwertlöser $\nu=0.3$ - Element Type: Membrane strain: Finite, **S4R**: A 4-node doubly curved thin or thick shell, reduced integration, hourglass control, finite membrane strains.

Elementgröße[mm] [4-Knoten]	Element Anzahl	Knoten Anzahl	t [mm]	N _{xx} [N]	σ _{krit} [MPa]
6x6	561	612	0.05	5404.5	1080.9
6x5	660	714		5051.6	1010.32
4x4	1250	1326		Lanczos-error1	---
2x2	5000	5151		Lanczos-error1	---
6x6	561	612	0.005	5.4055	10.811
6x5	660	714		5.0525	10.105
4x4	1250	1326		4.9223	9.8446
2x2	5000	5151		Lanczos-error1	---
6x6	561	612	0.0005	0.00540551	0.1081102
6x5	660	714		0.00505249	0.1010498
4x4	1250	1326		0.00492227	0.0984454
2x2	5000	5151		0.00463421	0.0926842

Tabelle.1.4 Ergebnisse der Konvergenzstudie der Streifen L200x100 unter Zugbelastung, 2.Testfall.Lanczos Eigenwertlöser /ν=0.3- Element Type: Membrane strain :Small, S4R5: A 4-node doubly curved thin shell, reduced integration, hourglass control, using five degrees of freedom per node.

Elementgröße[mm] [4-Knoten]	Element Anzahl	Knoten Anzahl	t [mm]	N _{xx} [N]	σ _{krit} [MPa]
8x8	1625	1764	0.05	18056	3611.2
8x7	1750	1890		17256	3451.2
6x6	2839	3024		16338	3267.6
6x5	3340	3528		15318	3063.6
4x4	6250	6526		14922	2984.4
2x2	25000	25551		14110	2822

Tabelle.1.5 Ergebnisse der Konvergenzstudie der Streifen L1000x100x0.05 unter Zugbelastung, 1.Testfall.Lanczos Eigenwertlöser /ν=0.3- Element Type: Membrane strain: Finite, S4R: A 4-node doubly curved thin or thick shell, reduced integration, hourglass control, finite membrane strains

Elementgröße[mm] [4-Knoten]	Element Anzahl	Knoten Anzahl	t [mm]	N_{xx} [N]	σ_{krit} [MPa]
8x8	1625	1764	0.05	Lanczos-error1	---
8x7	1750	1890		Lanczos-error1	---
6x6	2839	3024		Lanczos-error1	---
6x5	3340	3528		Lanczos-error1	---
4x4	6250	6526		Lanczos-error1	---
2x2	25000	25551		Lanczos-error1	---
8x8	1625	1764	0.005	18.059	36.118
8x7	1750	1890		17.260	34.52
6x6	2839	3024		16.342	32.684
6x5	3340	3528		15.321	30.642
4x4	6250	6526		Lanczos-error1	---
2x2	25000	25551		Lanczos-error1	---
8x8	1625	1764	0.0005	0.0180591	0.361182
8x7	1750	1890		0.0172596	0.345192
6x6	2839	3024		0.0163418	0.326836
6x5	3340	3528		0.0153209	0.306418
4x4	6250	6526		Lanczos-error2	---
2x2	25000	25551		Lanczos-error2	---

Tabelle.1.6 Ergebnisse der Konvergenzstudie der Streifen L1000x100 unter Zugbelastung, 2.Testfall.Lanczos Eigenwertlöser $\nu=0.3$ - Element Type: Membrane strain :Small, S4R5: A 4-node doubly curved thin shell, reduced integration, hourglass control, using five degrees of freedom per node.

Hinweise, entnommen aus der Fehlermeldung der Software ABAQUS während der Analyse :

- Lanczos-error1: The lanczos solver has failed to find all the eigenvalues within the specified range
- Lanczos-error2: The lanczos solver cannot be used for buckling analysis in which a model: (1) is preloaded above the bifurcation (buckling) load, or; (2) has rigid body modes, or (3) is overconstrained or (4) contains hybrid elements or connector elements.
- Element Typ S4R5: 4-node thin shell, reduced integration with hourglass control, using five degrees of freedom per node/ reduced integration with hourglass control, finite membrane strains
- Element Typ S4R: General-purpose shell elements are valid for use with both thick and thin shell problems

1.7.3 Konvergenzstudie der Vernetzung bei der Beulanalyse der Platten unter Druckbelastung:

In diesem Abschnitt wurde eine lineare Beulanalyse (Lanczos und allgemeiner Eigenwertlöser) für eine Platte unter Druckbelastung in drei Testfällen, jeweils mit unterschiedlichem Element-Typ ("S4R5", "S4" und "S4R") und verschiedenen Netzteilungen durchgeführt.

Das Ziel dieser Untersuchung ist die Qualität der S4R5-Schalelemente und des Einflusses der Netzteilung zu ermitteln. Deshalb ist es erforderlich, dass die gedrückte Rechteckplatte zusätzlich zu einem für diesen Fall ausreichend groben Netz - auch mit einem sehr feinen Netz getestet wird.

Zur Überprüfung der Ergebnisse aus den Analysen in ABAQUS wird zuerst der Wert der kritischen Spannung für die Platte unter Druck durch Anwendung des Diagramms in Abbildung 1.4 [6] und entsprechend der Gleichung 1.9 berechnet :

$$\sigma^* = kE \left(\frac{t}{b}\right)^2 = 3,83 \times 70000 \times \left(\frac{0,05}{100}\right)^2 = 0,067 [MPa]$$

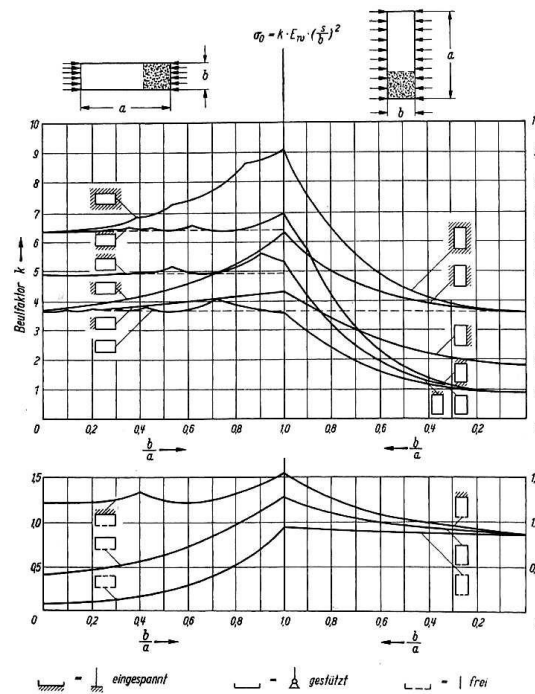


Abbildung 1.4 Beulfaktoren der ebenen, isotropen Platte unter Druck, entnommen aus [6]

Randbedingungen :

Zur Analyse wird eine rechteckige Platte mit den Abmessungen $L=200[\text{mm}]$, $B=100[\text{mm}]$, $t=0.05[\text{mm}]$, an allen vier Rändern gelenkig gelagert, berechnet. An den freien Rändern werden die Z-Verschiebungen (FG3) und auf der linken Seite werden die Freiheitsgrade FG1 bis FG5 außer FG2 gesperrt. Der FG2 Freiheitsgrad muss nicht gesperrt werden, weil sonst die Querdehnung verhindert wird, siehe Abbildung 1.5. Auf der rechten Seite sollen Verschiebungen in x -Richtung (FG1), in Wirkrichtung der Streckenlast als Druck, zugelassen werden.

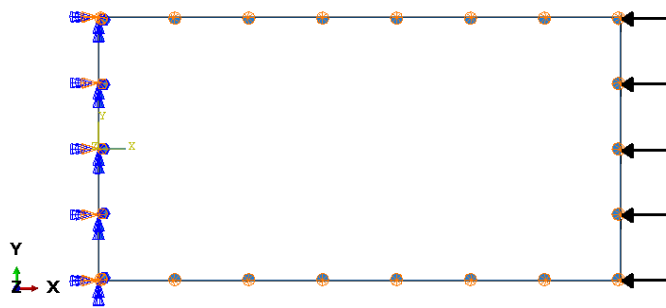


Abbildung 1.5 Koordinatenachsen und Randbedingungen für die Platte unter Druckbelastung

Ergebnisse :

Die Ergebnisse der Konvergenzstudie für die Platte unter Druck sind aus Tabellen 1.7 bis 1.9 und Abbildungen 1.6 bis 1.8 ersichtlich.

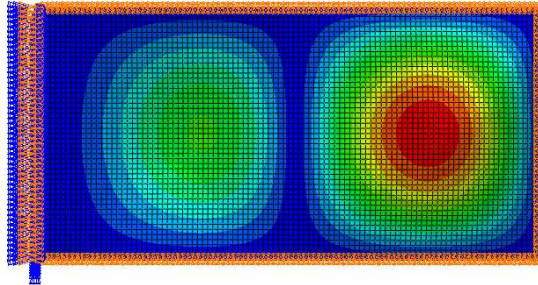


Abbildung 1.6 Beulfigur der Streifen L200x100x0.05 unter Zugbelastung, Testfall.1: EL.Typ: S4R5, allgemeiner Eigenwertlöser, Elementgröße : 2x2[mm] Eigenwert=0.00335 bei $Q=1$ bzw. $N_{xx}^* = 0.00335$ [N]

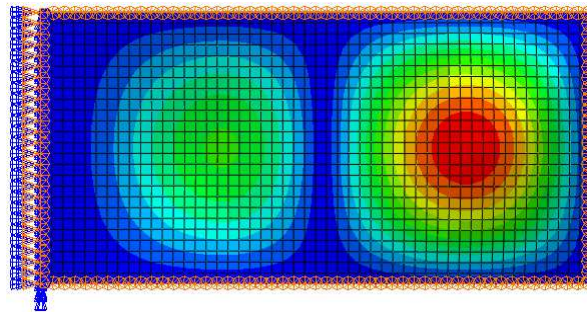


Abbildung 1.7 Beulfigur des Streifens L200x100x0.05 unter Zugbelastung, Testfall.1: EL.Typ: S4R5 allgemeiner Eigenwertlöser- Elementgröße : 4x4[mm], Eigenwert=0.00336 bei $Q=1$ bzw. $N_{xx}^* = 0.00336$ [N]

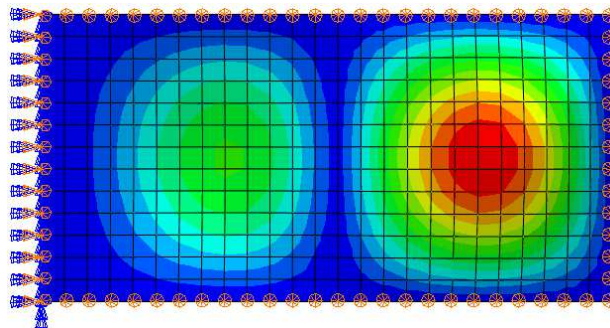


Abbildung 1.8 Beulfigur des Streifens L200x100x0.05 unter Zugbelastung, Testfall.1: EL.Typ: S4R5 allgemeiner Eigenwertlöser- Elementgröße : 8x8[mm], Eigenwert=0.00338 bei $Q=1$ bzw. $N_{xx}^* = 0.00338$ [N]

Elementgröße[mm] [4-Knoten]	Element Anzahl	Knoten Anzahl	allgemeiner Eigenwertlöser		Lanczos	
			N_{xx} [N]	σ^* [MPa]	N_{xx} [N]	σ^* [MPa]
1x1	---	---	0.00335	0,067	0.00334	0.066
2x2	5000	5151	0.00335	0.067	0.00334	0.066
4x4	1250	1326	0.00336	0.067	0.00335	0.067
6x6	561	612	0.00337	0.067	0.00336	0.067
8x8	325	364	0.00338	0.067	0.00338	0.067

Tabelle 1.7 Ergebnisse der Konvergenzstudie der Streifen L200x100x0.05 unter Zugbelastung, Testfall.1.Element Type: Membrane strain :Small, S4R5: A 4-node doubly curved thin shell, reduced integration, hourglass control, using five degrees of freedom per node.

Elementgröße[mm] [4-Knoten]	Element Anzahl	Knoten Anzahl	allgemeiner Eigenwertlöser		Lanczos	
			N_{xx} [N]	σ^* [MPa]	N_{xx} [N]	σ^* [MPa]
2x2	5000	5151	0.00335	0.067	0.00334	0.066
4x4	1250	1326	0.00335	0.067	0.00335	0.067
6x6	561	612	0.00337	0.067	0.00336	0.067
8x8	325	364	0.00338	0.067	0.00337	0.067

Tabelle 1.8 Ergebnisse der Konvergenzstudie der Streifen L200x100x0.05 unter Zugbelastung, Testfall.2. Element Type: Membrane strain: Finite,S4: A 4-node doubly curved general-purpose shell, finite membrane strains, keine Hourglass control

Elementgröße[mm] [4-Knoten]	Element Anzahl	Knoten Anzahl	allgemeiner Eigenwertlöser		Lanczos	
			N_{xx} [N]	σ^* [MPa]	N_{xx} [N]	σ^* [MPa]
2x2	5000	5151	0.00335	0.067	0.00334	0.066
4x4	1250	1326	0.00336	0.067	0.00335	0.067
6x6	561	612	0.00337	0.067	0.00336	0.067
8x8	325	364	0.00338	0.067	0.00338	0.067

Tabelle 1.9 Ergebnisse der Konvergenzstudie der Streifen L200x100x0.05 unter Zugbelastung, Testfall.3. Element Type: Membrane strain: Finite, S4R: A 4-node doubly curved thin or thick shell, reduced integration, hourglass control, finite membrane strains.

Anmerkung 1.9 : Bei Hourglass-Control wird der ABAQUS Default-Wert der Hourglass-Control-Stiffness angenommen.

Anmerkung 1.10 : Die Hourglas-Stiffness ist keine physikalisch begründete Steifigkeit sondern eine "künstlich eingebrachte" zusätzliche Steifigkeit, die verhindern soll, dass die reduziert integrierten Elemente Hourglas-Modes zeigen.

Die Ergebnisse bei den Netzteilungen, S4R , S4R5 und allen gewählten Elementgrößen zeigen, dass ein feineres Netz etwas kleinere Beullasten liefert als ein grobes Netz. Das liegt in der Natur der deformationsbasierten FE-Methode.

Es wurden bei den gröberen Netzen die gleichen Ergebnisse mit dem Lanczos-Eigenwertlöser wie mit dem allg. Eigenwertlöser, und auch mit dem Netz mit 2x2 [mm] erhalten. Die Ergebnisse sind sogar mit 1x1 mm Elementen sehr gut. Es wurde jene Netzfeinheit (Netz mit Größe 2x2 [mm]) für die folgende Studie (in Kapitel 3) ausgewählt, bei der sich bei darauffolgender Verfeinerung der kleinste Eigenwert nicht mehr verändert, also verringert hat.

Anmerkung 1.11 : Wie in Abbildung 1.6 bis 1.8 sichtbar ist, erstreckt sich bei den Analysen unter Druckbelastung die Beulfigur über den gesamten Rechteckbereich, während beim gezogenen Plattenstreifen die Beulfigur hochwellig und lokal ist, also eine wesentlich feinere Diskretisierung (ein feineres Netz) benötigt, damit die Beulfigur ausreichend aufgelöst wird.

Anmerkung 1.12: Reduzierte Integration, also geringere Integrationsordnung, als es der Integrand für exakte Integration fördern würde, kann in vielen Fällen das Locking hintanhaltend und das Ergebnis verbessern [8].

1.7.4 Konvergenzstudie der Vernetzung bei der Beulanalyse der Platten unter Schubbelastung:

Es wurden auch Analysen für den Streifen mit den Abmessungen $L=1000[\text{mm}]$, $B=400[\text{mm}]$, $t=0.05[\text{mm}]$, $\nu=0.3$, $\frac{b}{a} = 0.4$ unter Schubbelastung mit S4R und S4R5 Elementen mittels Lanczos Methode und allgemeiner Eigenwertlöser für zwei unterschiedliche Netzteilungen durchgeführt. Zur Überprüfung der Ergebnisse aus den Analysen mit ABAQUS werden die Werte der kritischen Spannung für die Platte unter Druck durch Anwendung des Diagramms in Abbildung 1.9 [6] und entsprechend der Gleichung 1.9 berechnet :

$$\sigma^* = kE \left(\frac{t}{b}\right)^2 = 5.45 \times 70000 \times \left(\frac{0,05}{400}\right)^2 = 0.00596 [\text{MPa}]$$

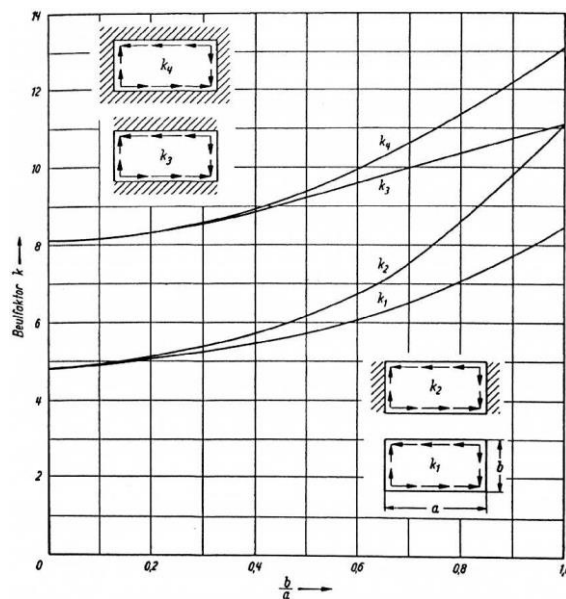


Abbildung 1.9 Beulfaktoren der ebenen, isotropen Platte unter Schub, entnommen aus [6]

Randbedingungen:

Die rechteckigen Platten wurden an alle vier Rändern - abgesehen vom einen Eckpunkt- gelenkig gelagert bzw. nur die U_3 -Verschiebungen (FG3) gesperrt. Ein Eckpunkt mit der Nebenbedingung $FG_1 = FG_2 = 0$ ist unverschieblich und in anderem Eckpunkt wurden jegliche Freiheitsgrade (FG_1 - FG_5) gesperrt. Siehe Abbildung 1.10a.

Denn als tangentielle Streckenlast konstanten Schub wurde an den vier Kanten aufgebracht. Siehe Tabellen 1.10 und 1.11 Und Abbildung 1.10b.

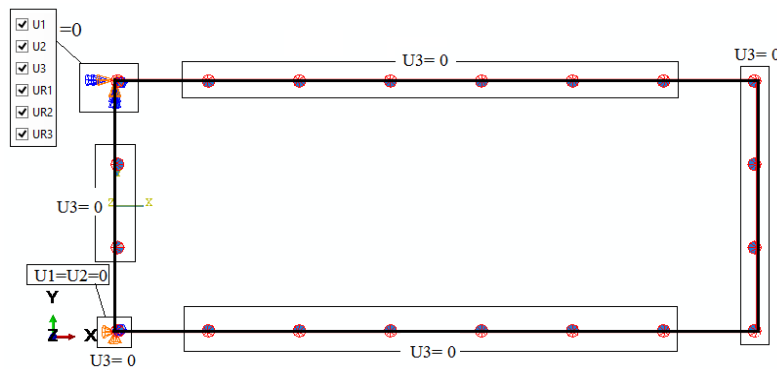


Abbildung 1.10a Koordinatenachsen und Randbedingungen für die Platte unter Schub

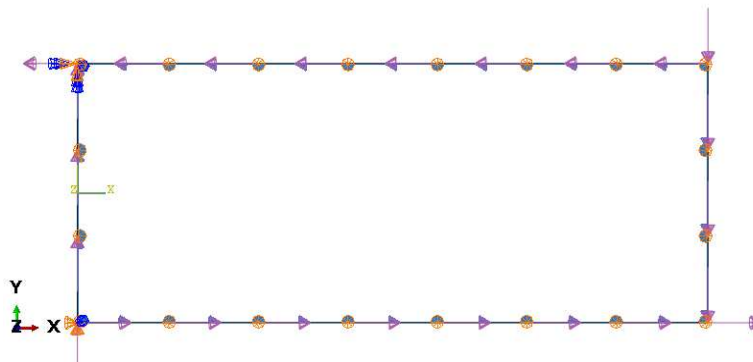


Abbildung 1.10b Koordinatenachsen und Belastung für die Platte unter Schub

Ergebnisse :

Die Ergebnisse aus den beiden Testfällen mit den Elementtypen S4R und S4R5 (sie lieferten die gleichen Ergebnisse) wurden mit dem errechneten Beulfaktor aus Abbildung 1.9 verglichen, sie stimmen gut überein. Deshalb wurde der Elementtyp S4R für die Diskretisierung und Vernetzung in den nächsten Kapiteln gewählt.

Elementgröße[mm] [4-Knoten]	allgemeiner Eigenwertlöser			Lanczos		
	N_{xy}^* [N]	σ^* [MPa]	k	N_{xy}^* [N]	σ^* [MPa]	k
2x2	-0.000298	-0.00596	5,45	0.000298	0.00596	5,45
5x2	-0.000298	-0.00596	5,45	0.000298	0.00596	5,45

Tabelle 1.10 Ergebnisse der Konvergenzstudie der Streifen L1000x400x0.05 unter Schubbelastung, 1.Testfall. El- Typ: Membrane strain :Small, S4R5: A 4-node doubly curved thin shell, reduced integration, hourglass control, using five degrees of freedom per node.

Elementgröße[mm] [4-Knoten]	allgemeiner Eigenwertlöser			Lanczos		
	N_{xy}^* [N]	σ^* [MPa]	k	N_{xy}^* [N]	σ^* [MPa]	k
2x2	-0.000298	-0.00596	5,45	0.000298	0.00596	5,45
5x2	-0.000298	-0.00596	5,45	0.000298	0.00596	5,45

Tabelle 1.11 Ergebnisse der Konvergenzstudie der Streifen L1000x400x0.05 unter Schubbelastung, 2.Testfall. El- Typ: Membrane strain: Finite, S4R: A 4-node doubly curved thin or thick shell, reduced integration, hourglass control, finite membrane strains

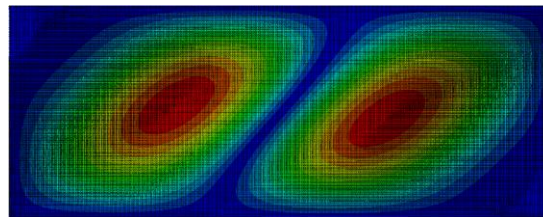


Abbildung 1.11 Beulfigur des Streifens der Streifen L1000x400x0.05 unter Schubbelastung, 1.Testfall: El- Typ: S4R5- allgemeiner Eigenwertlöser- Elementgröße : 2x2[mm]
Eigenwert=0.000298 bei Q=1 bzw. $N_{xy}^* = 0.000298$ [N]

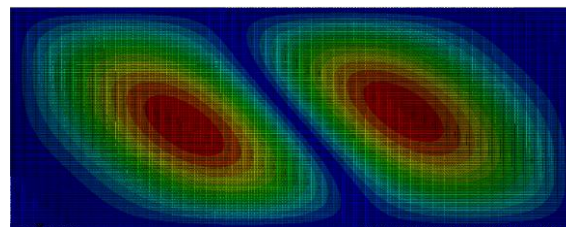


Abbildung 1.12 Beulfigur des Streifens L1000x400x0.05 unter Schubbelastung, 1.Testfall: El- Typ: S4R5- Lanczos- Elementgröße : 5x2[mm]
Eigenwert=0.000298 bei Q=1 bzw. $N_{xy}^* = 0.000298$ [N]

Kapitel 2

Lineare Beulanalyse für Kreisscheiben unter Zug- und Druckbeanspruchung

In diesem Abschnitt wird das Beulverhalten von dünnen Kreisscheiben mit freiem und mit gelenkig gelagertem Rand unter Zug- und Druckbeanspruchung mittels Finite Elemente Simulationen (Eigenwert- Beulanalysen) analysiert.

2.1 Zielsetzung und Gliederung

Das Ziel ist, das lineare Beulverhalten von dünnen Kreisscheiben mit freiem Rand und gelenkig gelagertem Rand unter Zug- und Druckbeanspruchung mittels Finite Elemente Simulationen (Eigenwert- Beulanalysen) zu analysieren . Dabei wird die Geometrie (Radius und Dicke) variiert , und der Beulfaktor "k" wird ermittelt. Das erste Ziel besteht darin, einen formalen Zusammenhang zwischen dem Beulbeginn und den Geometrieparametern für eine Kreisscheibe mit freiem Rand und gelenkig gelagertem Rand zu finden. Untersucht wird der Einfluss dieser Parameter auf die kritische Last F^* bei linear elastischem Material. Als kritische Last wird die Kraft bezeichnet, bei welcher Beulen auftritt.

2.2 Anforderungen und Voraussetzungen

Für die Beulanalyse ist es notwendig, die Steifigkeit unter Einschluss der Wirkung von Deformationen und Spannungszuständen ausreichend genau zu ermitteln. Eigenwert-Beulanalysen werden generell dazu benutzt, die kritische Beullast für steife Strukturen zu berechnen. Eine steife Struktur ergibt sich mitunter dann, wenn die Lasten primär von Membranspannungen und kaum von Biegespannungen getragen werden [5]. Ein derartiger Beanspruchungszustand liegt bei Platten unter Zug- und Druckbelastung, wie sie in diesem Kapitel untersucht werden, vor.

Das Problem wird als symmetrisches Probleme betrachtet, um der Rechenaufwand zu reduzieren.

2.3 Modellbeschreibung

Bei der hier behandelten Aufgabestellung wird davon ausgegangen, dass die Kreisscheibe beidseitig, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, belastet wird. Da in diesem Fall zur Y-Achse symmetrische Beulmoden auftreten, wird dieses Problem wie das Bild in Abbildung 2.2 modelliert. Die Scheiben liegen in dem gewählten kartesischen Koordinatensystem in der x-y-Ebene, siehe Abbildung 2.3, die x-Achse liegt in Richtung der Zug- bzw. Drucklast.

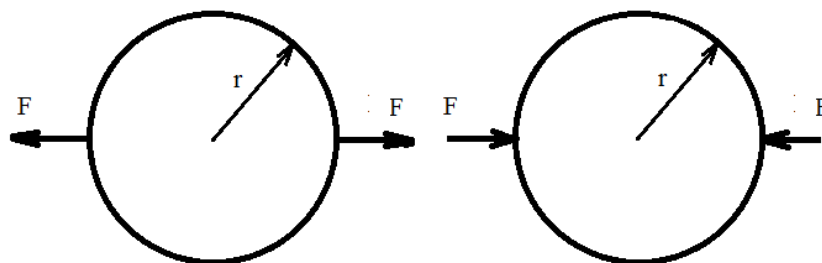


Abbildung 2.1 Bezeichnung der Geometrieparameter und Belastung, links: Zug, rechts: Druck

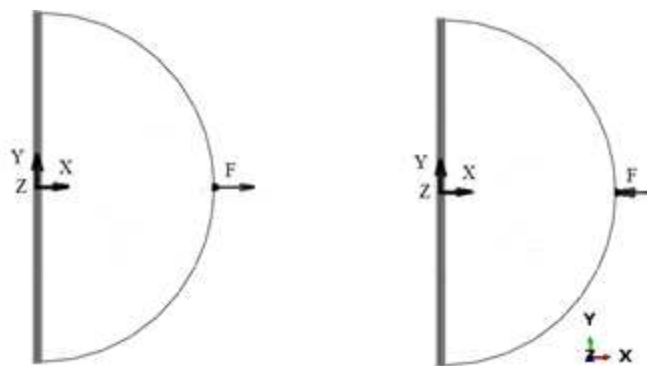


Abbildung 2.2 Modell, links: Zug, rechts: Druck

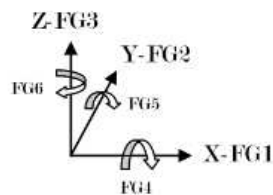


Abbildung 2.3 Bezeichnung der Freiheitsgrade

2.3.1 Vernetzung

Die Vernetzung des Modells ist in Abbildung 2.4 zu sehen. Hier musste lediglich das Netz in der Mitte feiner modelliert werden, damit die Spannungsgradienten in diesem Bereich erfasst werden. Das Modell wurde mit S4R Schalenelementen mit der Elementgröße 1x1 [mm] (bei R=200 mm) in der Mitte und mit 4x4[mm] am Rand der Scheibe vernetzt.

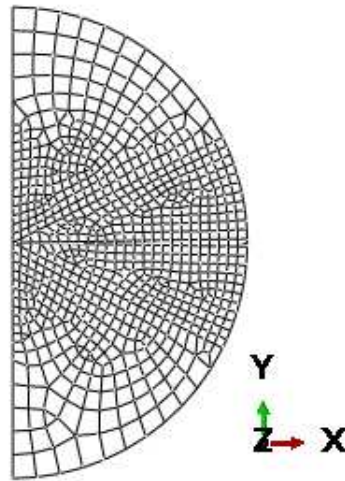


Abbildung 2.4 Vernetzung der Kreisscheibe, R=200[mm], total number of nodes: 801,
total number of elements: 768 linear quadrilateral elements of type S4R

3.3.2 Materialdaten

Als Material wird linear-elastisches, isotropes Material mit den Materialdaten entsprechend der Tabelle 2.1 gewählt.

E Elastizitätsmodul 210000 N/mm ²
ν Poisson-Zahl 0.33

Tabelle 2.1 Materialdaten der Kreisscheiben

2.3.3 Randbedingungen

Für alle Scheiben wurde die Verschiebung für alle Kanten entlang der vertikalen Symmetrieachse auf der linken Seite - abgesehen von einem Punkt in der Mitte dieser Symmetrieachse – also in Y-Richtung verschieblich angenommen und die Verschiebung in X-Richtung sowie die Rotation um Y-Achse (FG1&FG5) gesperrt; siehe Abbildung 2.5.

Auf der rechten Seite im Kraftangriffspunkt sollen Verschiebungen in Y- und Z-Richtung (FG2&FG3) und Rotation um X-Achse (FG4) gesperrt, und jegliche Freiheitsgrade in x-Richtung und Rotation um Y-Achse (FG1&FG5) zugelassen werden und dann wird die Kraft (Zug oder Druck) an diesem Punkt aufgebracht.

Bei den Kreisscheiben, die über den gesamten Rand gelenkig gelagert sind, wird zusätzlich der Kreisscheiberand in Z-Richtung (FG3) gesperrt, siehe Abbildung 2.10.

2.4 Beulfaktoren

Die linearen Beulanalysen werden mit ABAQUS durchgeführt. Es wird die Geometrie (Durchmesser und Dicke) der Kreisscheibe variiert. Untersucht wird der Einfluss dieser Parameter auf die kritische Kraft F^* bei linear-elastischem Material. Als kritische Kraft wird die Kraft bezeichnet, bei welcher Beulen auftreten. Ziel ist es, einen formalen Zusammenhang zwischen den Geometrieparametern und der kritischen Beullast F^* zu ermitteln. Die kritische Kraft lässt sich in folgender Form darstellen:

$$F^* \sim \frac{Et^3}{R}$$

$$F^* = k \frac{Et^3}{R}$$

bezeichnet man k als Beulfaktor und lässt sich in einfacher Form ausdrücken durch:

$$k = F^* \frac{R}{Et^3}$$

Darin sind:

k = Beulfaktor [dimensionslos]

E = Elastizitätsmodul [N/mm²]

R = Radius der Kreisscheibe [mm]

t = Dicke der Kreisscheibe [mm]

F^* = Kritische Last [N] resultiert aus Eigenwert-Analyse in ABAQUS.

Die kritische Last wurde entsprechend der Gleichung 1.3 berechnet. Siehe Kapitel 1, Anmerkung 1. Auf eine Vorlast P wurde verzichtet, daher $P=0$ [N]. Das Lastinkrement Q wurde als 1N gewählt. Demzufolge ist das Ergebnis der Eigenwertanalyse, die kritische Beullast, $F_i^* = \lambda_i * 1$.

2.5 Kreisscheiben mit freiem Rand unter lokaler Zug-Gleichlast, Zug-Einzellast und Druck-Einzellast

In diesem Abschnitt werden die Beulfaktoren für die Kreisscheibe mit freiem Rand durch Radius- und Dickenvariation, unter Druck- und Zugkraft ermittelt. Zur Vermeidung der Spannungskonzentrationen zufolge Einzelkraft im Lastangriffsbereich auf der rechten Seite der Kreisscheibe wird auch die Aufbringung der Kraft durch Gleichlast untersucht. Auf diese Weise wird auf der rechten Seite der Kreisscheibe in der Mitte eine kleine Länge der Kreisscheibe zum Aufbringen der Gleichlast gewählt, siehe Abbildung 2.5.

Die Beulanalyse unter Zug-Einzellast führte auf die gleiche kritische Last wie jene die sich aus der kritischen Gleichlast, multipliziert mit der Bogenlänge der Lastaufbringung ergab, wenn die Bogenlänge als relativ klein festgelegt wurde (Prinzip von St. Venant).

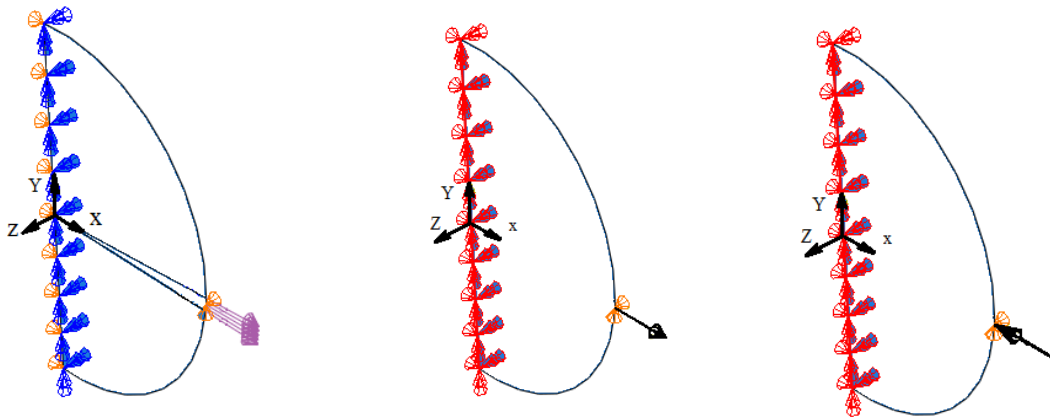


Abbildung 2.5 Randbedingung und Lastaufbringung. Kreisscheiben mit freiem Rand unter Zug- und Druckkraft, links: Zug-Gleichlast. Mitte: Zug-Einzellast, rechts : Druckkraft

2.5.1 Variation der Dicke

Die gewählten Geometriewerte der Kreisscheibe mit konstantem Durchmesser und freiem Rand, $R=200[\text{mm}]$ und der Betrag der Last und die berechnete Beulfaktoren sind in Tabelle 2.2 bis 2.4 ersichtlich. Nachfolgend werden die in den Tabellen 2.2 und 2.4 enthaltenen Ergebnisse in Diagrammform in Abbildung 2.6 bzw. 2.7 dargestellt.

Eigenwert = λ_i	Bogenlän	t [mm]	F* [N]	A=E*t ³ /	k=F*/A
1.8148	6.644	0.1	12.057	1.05	11.4833
14.518	6.644	0.2	96.457	8.4	11.4830
48.998	6.644	0.3	325.54	28.35	11.4829
116.14	6.644	0.4	771.63	67.2	11.4826
226.84	6.644	0.5	1507.1	131.25	11.4828
391.97	6.644	0.6	2604.2	226.8	11.4825
622.43	6.644	0.7	4135.4	360.15	11.4825
929.09	6.644	0.8	6172.8	537.6	11.4822
1322.8	6.644	0.9	8788.6	765.45	11.4817
1814.5	6.644	1	12055.	1050	11.4814
2415	6.644	1.1	16045.	1397.55	11.4809
3135.3	6.644	1.2	20830.	1814.4	11.4808
3986.1	6.644	1.3	26483.	2306.85	11.4804
4978.3	6.644	1.4	33075.	2881.2	11.4798
6122.8	6.644	1.5	40679.	3543.75	11.4793
7430.4	6.644	1.6	49367.	4300.8	11.4786
8912.1	6.644	1.7	59211.	5158.65	11.4781
10579	6.644	1.8	70286.	6123.6	11.4780
12441	6.644	1.9	82658.	7201.95	11.4771
14509	6.644	2	96397.	8400	11.4759
16795	6.644	2.1	111585	9724.05	11.4752
19309	6.644	2.2	128288	11180.4	11.4744
22062	6.644	2.3	146579	12775.35	11.4736
25065	6.644	2.4	166531	14515.2	11.4729
28329	6.644	2.5	188217	16406.25	11.4723

Tabelle 2.2 Eigenwerte und Bulfaktoren für die Kreisscheibe mit freiem Rand $R=200[\text{mm}]$, unter Zug-Gleichlast , variierte Dicke

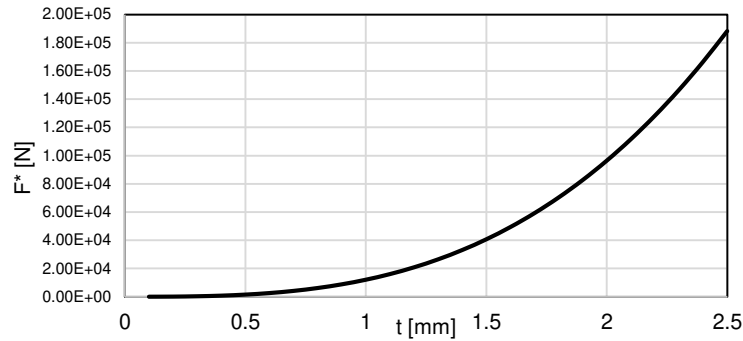


Abbildung 2.6 Kritische Last-Wanddicke Diagramm für die Kreisscheibe mit freiem Rand $R=200$ [mm], unter Zug-Gleichlast , variierte Dicke

Eigenwert= λ_i	t [mm]	F* [N]	$A=E*t^3/R$ [N]	$k=F*/A$
12.058	0.1	12.058	1.05	11.48
96.465	0.2	96.465	8.4	11.48
325.57	0.3	325.57	28.35	11.48
771.71	0.4	771.71	67.2	11.48
1507.2	0.5	1507.2	131.25	11.48

Tabelle 2.3 Eigenwerte und Bulfaktoren für die Kreisscheibe mit freiem Rand $R=200$ [mm], unter Zug-Einzellast , variierte Dicke

Eigenwert = λ_i	t [mm]	F* [N]	$A=E*t^3/R$ [N]	$k=F*/A$
0.30343	0.1	0.30343	1.05	0.29
2.4274	0.2	2.4274	8.4	0.29
8.1923	0.3	8.1923	28.35	0.29
19.418	0.4	19.418	67.2	0.29
37.925	0.5	37.925	131.25	0.29

Tabelle 2.4 Eigenwerte und Bulfaktoren für die Kreisscheibe mit freiem Rand $R=200$ [mm], unter Druck-Einzellast , variierte Dicke

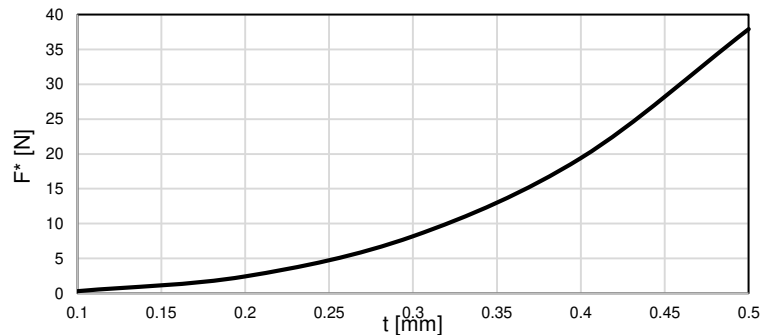


Abbildung 2.7 Kritische Last-Wanddicke Diagramm für die Kreisscheibe mit freiem Rand $R=200$ [mm], unter Druck-Einzellast , variierte Dicke

2.5.2 Variation des Radius

Es wurde eine Variation des Radius "R" für die Kreisscheibe mit freiem Rand und konstanter Wanddicke $t = 0.5$ [mm] durchgeführt. In Tabellen 2.5 und 2.6 sind die gewählten Geometriewerte, der Betrag der Last, die berechneten Beulfaktoren für die Kreisscheibe unter Zug-Gleichlast bzw. Zug-Einzellast sowie die Ergebnisse in Diagrammform in Abbildung 2.8 dargestellt. In Tabelle 2.7 und Abbildung 2.9 sind die Geometriewerte, die berechneten Ergebnisse erwähnter Kreisscheibe unter Drucklast sichtbar.

R[mm]	Eigenwert = λ_i	Bogenlänge	F* [N]	A=E*t ³ /R	k=F*/A
50	1679.4	3.59	6029.05	525	11.48
100	793.69	3.79	3008.09	262.5	11.46
150	520.02	3.86	2007.27	175	11.47
200	226.84	6.64	1506.22	131.25	11.476
250	154.03	7.82	1204.51	105	11.47
300	132.16	7.6	1004.41	87.5	11.48
350	74.099	11.63	861.77	75	11.49

Tabelle 2.5 Eigenwerte und Bulffaktoren für die Kreisscheibe mit freiem Rand $t = 0.5$ [mm], unter Zug-Gleichlast, variierter Radius

R[mm]	Eigenwert = λ_i	F* [N]	A=E*t ³ /R	k=F*/A
50	6032	6032	525	11.49
100	3011.1	3011.1	262.5	11.47
150	2008.6	2008.6	175	11.47
200	1507.2	1507.2	131.25	11.48
250	1204.4	1204.4	105	11.47
300	1005.3	1005.3	87.5	11.49
350	861.95	861.95	75	11.49

Tabelle 2.6 Eigenwerte und Bulffaktoren für die Kreisscheibe mit freiem Rand $t = 0.5$ [mm], unter Zug-Einzellast, variierter Radius

Lineare Beulanalyse für Kreisscheiben

Kreisscheiben mit freiem Rand unter lokaler Zug-Gleichlast, Zug-Einzellast und Druck-Einzellast

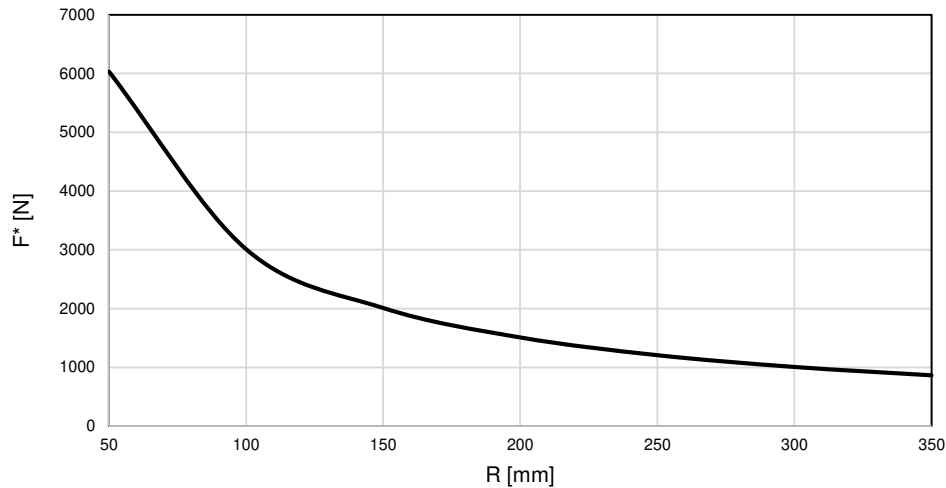


Abbildung 2.8 Kritische Last-Radius Diagramm für die Kreisscheibe mit freiem Rand $t=0.5[mm]$, unter Zug-Einzellast und Zug-Gleichlast , variiertes Radius

R	Eigenwert = λ_i	F* [N]	$A=E*t^3/R$	$k=F*/A$
50	151.64	151.64	525	0.29
100	75.883	75.883	262.5	0.29
150	50.593	50.593	175	0.29
200	37.925	37.925	131.25	0.29
250	30.351	30.351	105	0.29
300	25.287	25.287	87.5	0.29
350	21.691	21.691	75	0.29

Tabelle 2.7 Eigenwerte und Bulfaktoren für die Kreisscheibe mit freiem Rand $t=0.5[mm]$, unter Druck-Einzellast, variiertes Radius

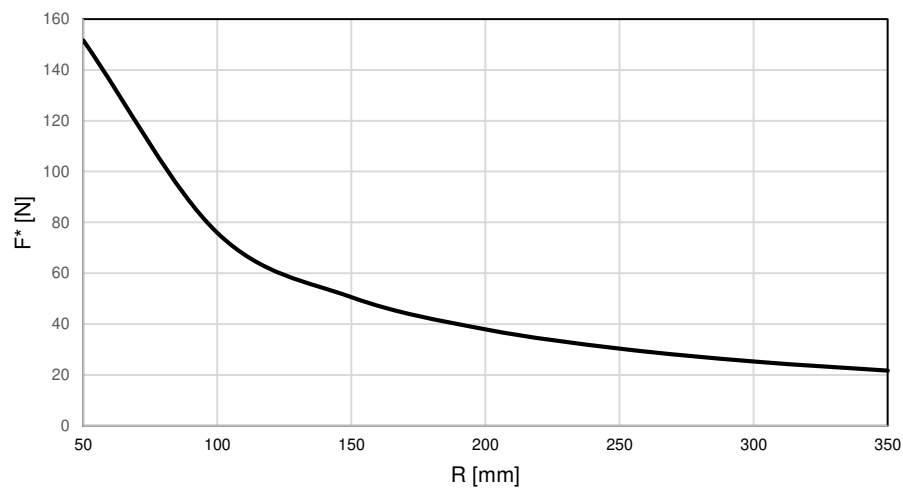


Abbildung 2.9 Kritische Last-Radius Diagramm für die Kreisscheibe mit freiem Rand $t=0.5[mm]$, unter Druck-Einzellast , variiertes Radius

2.6 Kreisscheiben mit gelenkig gelagertem Rand unter Druck- und Zug-Einzellast/ Dickenvariation

In diesem Abschnitt wird die Beulfaktor für die Kreisscheibe mit gelenkig gelagertem Rand bei konstantem Radius $R=200$ [mm] und variierter Dicke, unter Druck- und Zugkraft ermittelt. In Tabelle 2.8 und 2.9 sind die gewählten Geometriewerte, der Betrag der Last, die berechneten Beulfaktoren für die Kreisscheibe unter Zug- Einzellast bzw. Druck-Einzellast und die Ergebnisse in Diagrammform in Abbildung 2.11 bzw. 2.12 dargestellt.

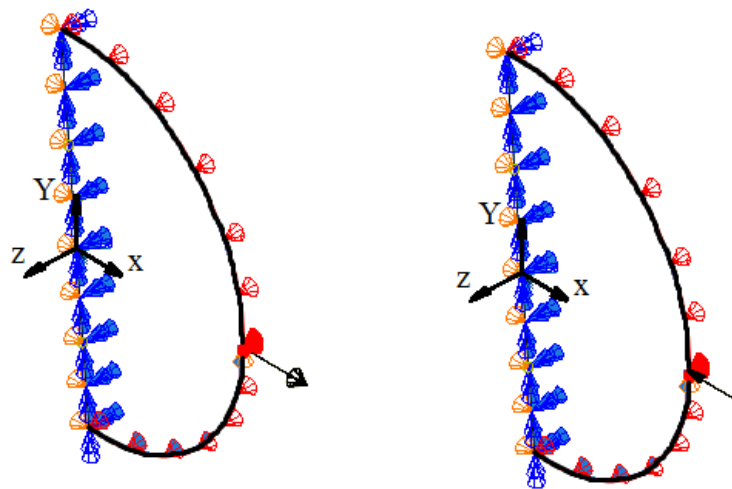


Abbildung 2.10 Randbedingung und Lastaufbringung. Kreisscheiben mit gelenkig gelagertem Rand, links : unter Zugkraft, rechts : unter Drucklast

Eigenwert = λ_i	t [mm]	F^* [N]	$A=E*t^3/R$ [N]	$k=F^*/A$
27.167	0.1	27.167	1.05	25.87333333
217.34	0.2	217.34	8.4	25.87380952
733.49	0.3	733.49	28.35	25.87266314
1738.6	0.4	1738.6	67.2	25.87202381
3395.6	0.5	3395.6	131.25	25.8712381

Tabelle 2.8 Eigenwerte und Bulfaktoren für die Kreisscheiben mit gelenkig gelagertem Rand , $R=200$ [mm], unter Zug-Einzellast, variierte Dicke

Lineare Beulanalyse für Kreisscheiben

Kreisscheiben mit gelenkig gelagertem Rand unter Druck- und Zug-Einzellast/ Dickenvariation

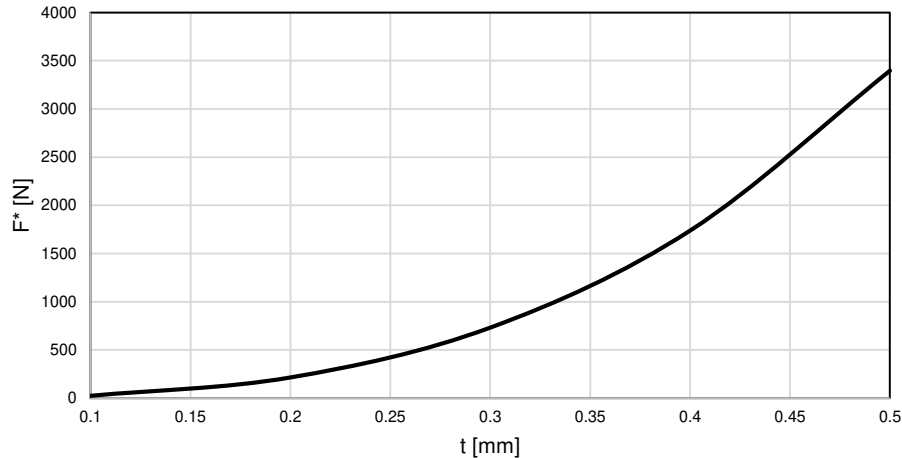


Abbildung 2.11 Kritische Last-Radius Diagramm für die Kreisscheiben mit gelenkig gelagertem Rand, $R=200$ [mm], unter Zug-Einzellast, variierte Dicke

Eigenwert = λ_i	t [mm]	F^* [N]	$A=E*t^3/R$ [N]	$k=F^*/A$
1.3130	0.1	1.3130	1.05	1.25047619
10.504	0.2	10.504	8.4	1.25047619
35.451	0.3	35.451	28.35	1.25047619
84.032	0.4	84.032	67.2	1.25047619
164.12	0.5	164.12	131.25	1.250438095

Tabelle 2.9 Eigenwerte und Bulfaktoren für die Kreisscheiben mit gelenkig gelagertem Rand, $R=200$ [mm], unter Druck-Einzellast, variierte Dicke

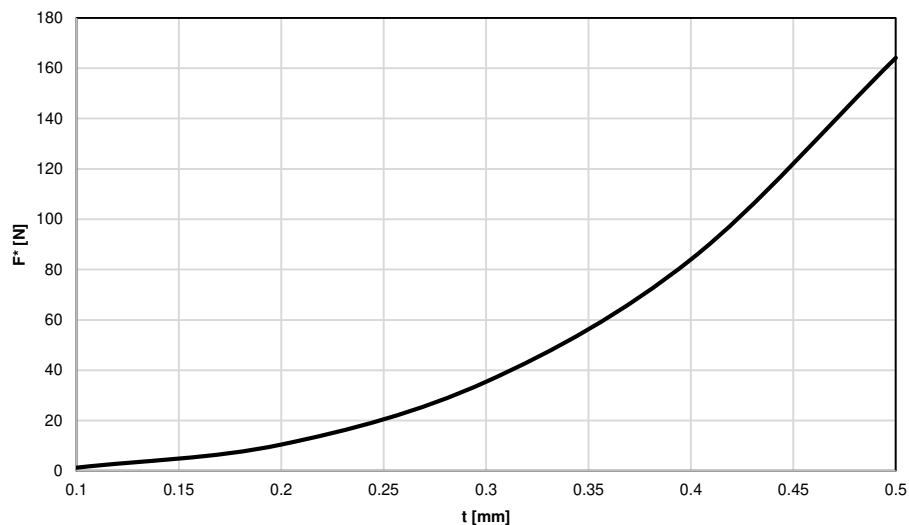


Abbildung 2.12 Kritische Last-Radius Diagramm für die Kreisscheiben mit gelenkig gelagertem Rand, $R=200$ [mm], unter Druck-Einzellast, variierte Dicke

2.7 Beulformen Mode "I" bis "V"

Die Abbildungen 2.13a bis 2.13d zeigen die Beulformen des Modells $R=200$ [mm] und $t=0.5$ [mm] unter Druck und Zuglast, mit freiem und gelenkig gelagertem Rand.

Diese Ergebnisse zeigen, dass Mode I beim Modell mit freiem Rand unter Zuglast, im Gegensatz zum Modell mit gelenkig gelagertem Rand symmetrisch und Mode II antimetrisch ist.

In Tabelle 2.10 sind die Beträge der kritischen Lasten F^* zusammengefasst. Man erkennt daraus, wie die Randbedingungen die kritischen Lasten beeinflussen.

Mode	kritische Last F^* [N]			
	unter Zugkraft		unter der Druckkraft	
	Freier Rand	Gelenkig gelagerter Rand	Freier Rand	Gelenkig gelagerter Rand
Mode I	1507.2	3395.6	37.93	164.12
Mode II	3122.8	3927.2	228.16	368.43
Mode III	5330.5	8652.3	427.4	695.69
Mode IV	8203.2	9806.2	548.84	1139.2
Mode V	11741	16640	957.71	1425

Tabelle 2.10 Kritische Lasten F^* bei der Kreisscheibe $R=200$ [mm], $t= 0.5$ [mm], mit freiem bzw. gelenkig-gelagertem Rand unter Druck- bzw. Zugkraft

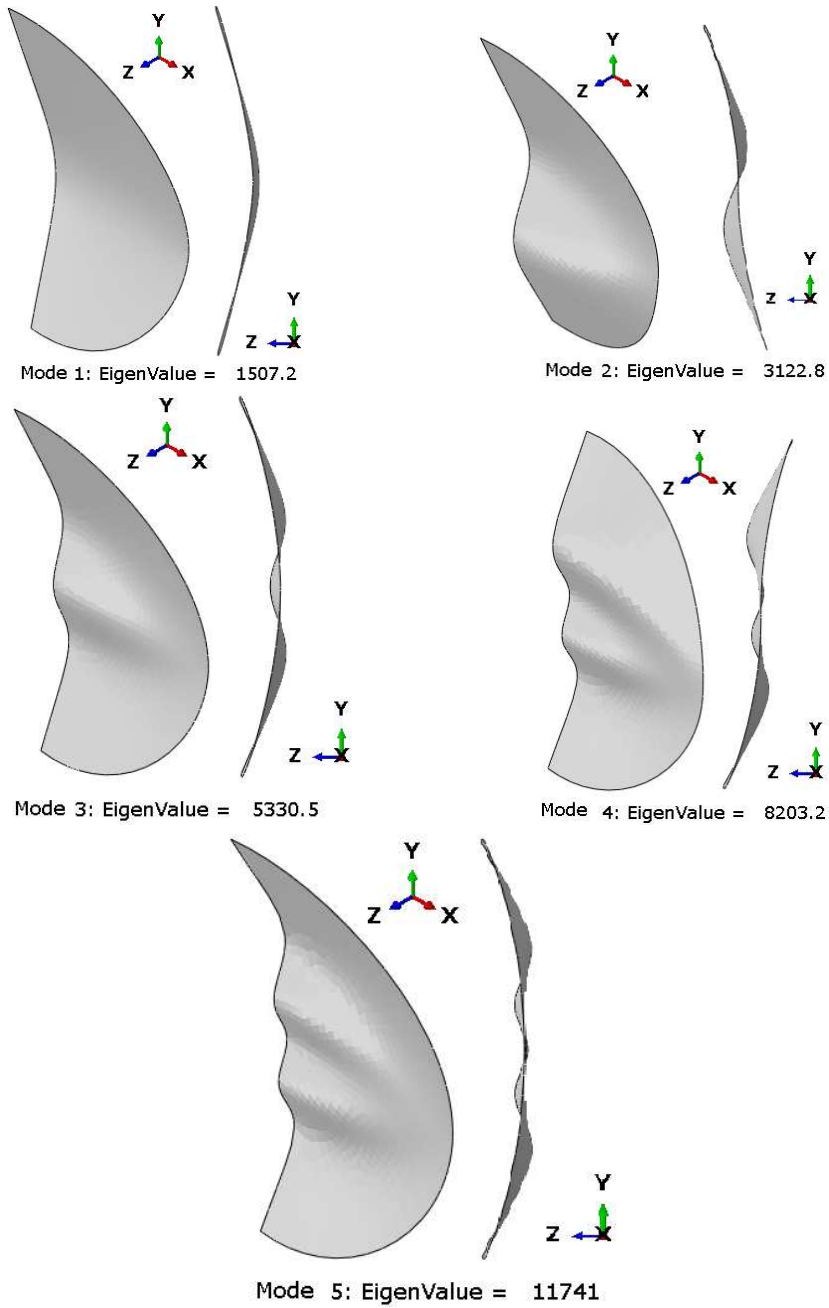


Abbildung 2.13a Die Beulformen des Modells mit freiem Rand unter Zuglast
 $R=200$ [mm], $t=0.5$ [mm], Deformations- Skalierungsfaktor=40

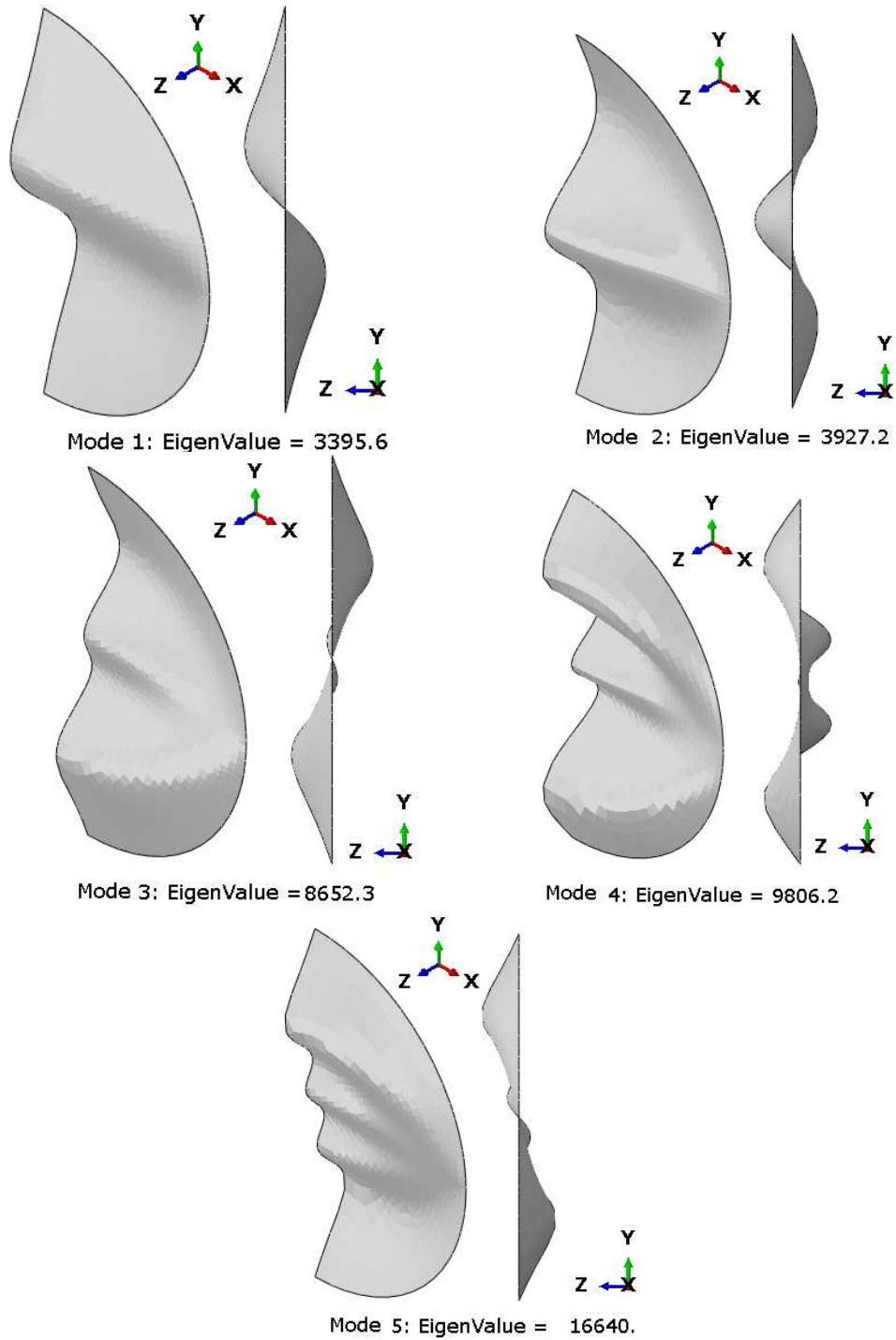


Abbildung 2.13b Die Beulformen des Modells mit gelenkig gelagertem Rand unter Zuglast $R=200$ [mm], $t=0.5$ [mm], Deformations- Skalierungsfaktor=40

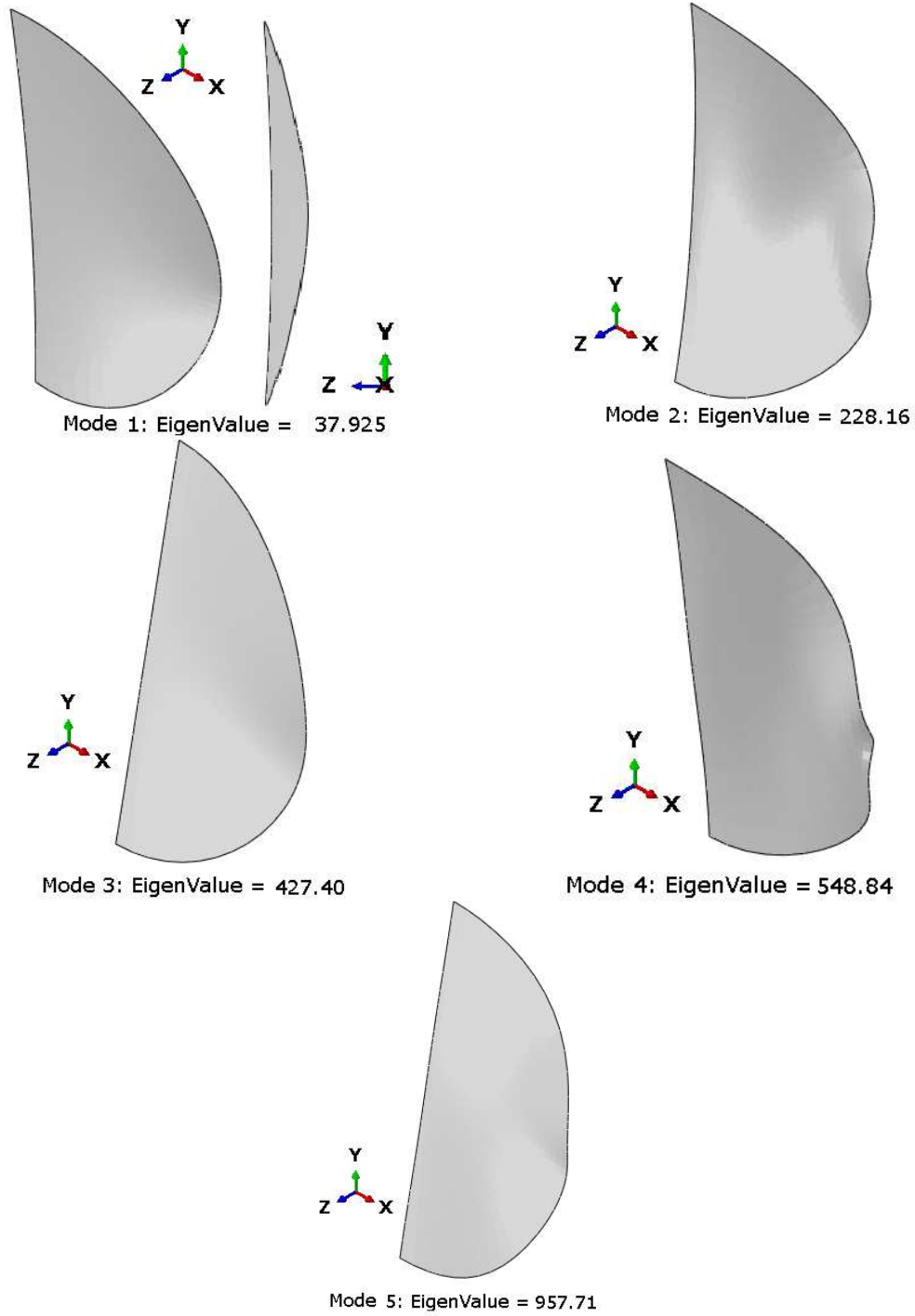


Abbildung 2.13c Die Beulformen des Modells mit freiem Rand unter Drucklast
 $R=200$ [mm], $t=0.5$ [mm] , Deformations- Skalierungsfaktor=40

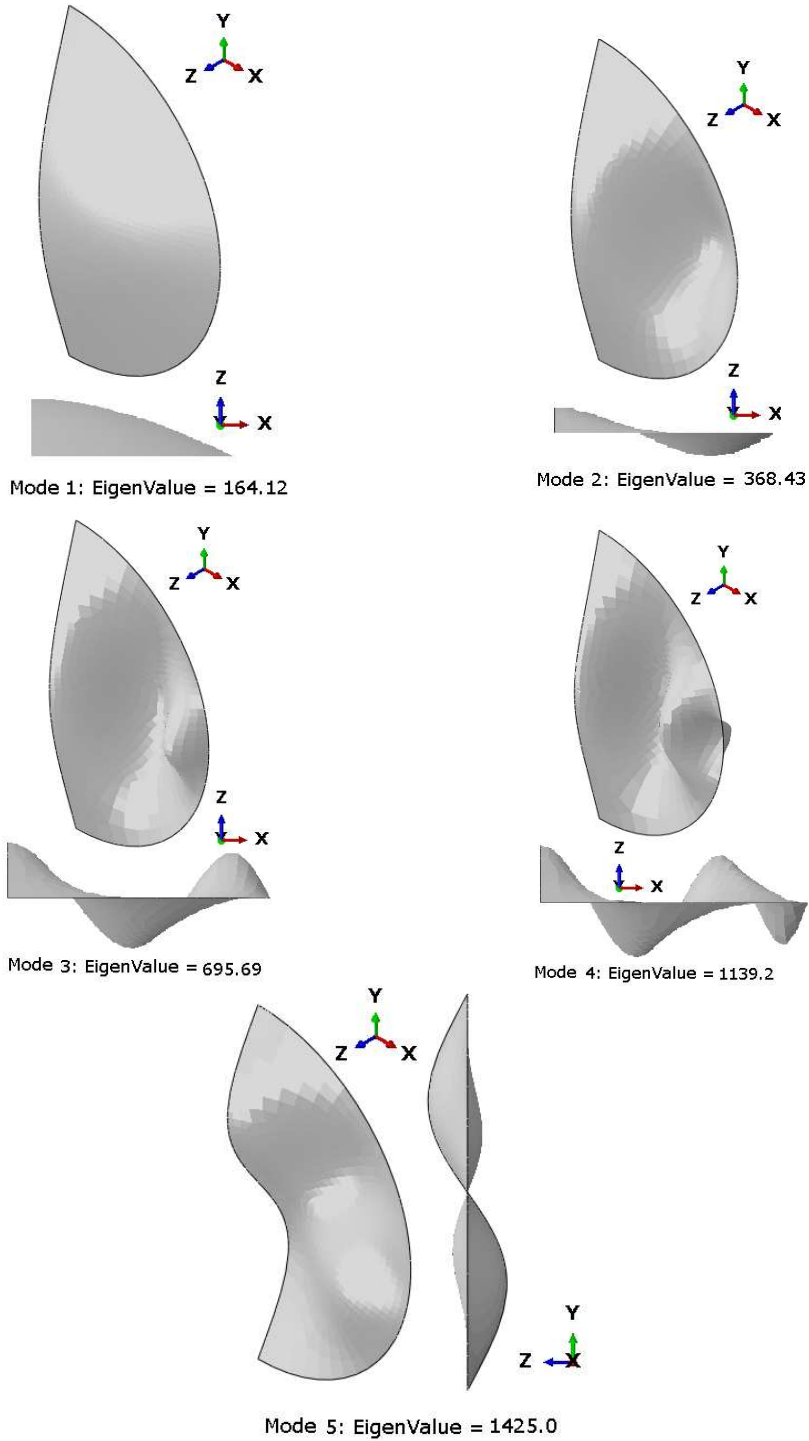


Abbildung 2.13d Die Beulformen des Modells mit gelenkig gelagertem Rand unter Drucklast $R=200$ [mm], $t=0.5$ [mm], Deformations- Skalierungsfaktor=40

2.8 Diskussion der Ergebnisse der linearen Beulanalyse von Kreisscheiben

Es wurden Dicken- und Radiusvariationen jeweils für ein konkretes Verhältnis durchgeführt. Aus Abbildungen 2.6 bis 2.12 erkennt man, dass die kritische Last sich mit zunehmender Dicke exponentiell zunimmt und mit zunehmendem Radius entsprechend abnimmt.

Die Ergebnisse zeigen, dass der Beulfaktor k bei gleichen Arten der Lastaufbringung und bei gleichen Randbedingung unabhängig von einer Dicken- oder Radiusvariation sind.

In Tabelle 2.11 sind die berechneten Beulfaktoren aus den Ergebnissen der Beulanalysen zusammengefasst :

Beulfaktor	Kreisscheibe unter Zugkraft		Kreisscheibe unter Druckkraft	
	Freier Rand	Gelenkig gelagerter Rand	Freier Rand	Gelenkig gelagerter Rand
k	11.48	25.87	0.29	1.25

Tabelle 2.11 : Beulfaktoren für die Kreisscheibe mit unterschiedlichen Randbedingungen und Belastungen

aus dieser Zusammenfassung kann man entnehmen, dass

$$k_{\text{Druck_frei}} < k_{\text{Druck_glk}} < k_{\text{Zug_frei}} < k_{\text{Zug_glk}}$$

der Beulfaktor " k " bei der Zugkraft deutlich größer als " k " bei der Drucklast ist.

Die Kreisscheiben mit gelenkig gelagertem Rand weisen deutlich höhere kritische Lasten auf, als jene mit freiem Rand.

Kapitel 3

Nichtlineare Beulanalysen für dünne Bänder unter Zug und Torsion

In diesem Abschnitt wird das Beulverhalten dünner Plattenstreifen unter Zugkraft und Torsionsmoment numerisch mittels ABAQUS untersucht. Da hier für das Beulen maßgebliche Spannungen auch erst durch die Verdrehung des Streifens, also aus einem geometrisch nichtlinearitäten Effekt, entstehen, müssen geometrische Nichtlinearitäten nicht nur bei der Analyse des Nachbeulverhaltens berücksichtigt werden, sondern auch schon zur Berechnung des Vorbeulverhaltens. Es werden zwei Streifentypen betrachtet: ein eher kurzer und ein längerer Streifen. Beim längeren Streifen (1000x100-Band) werden in zwei unterschiedlichen Reihenfolgen (A und B) der inkrementellen Lastaufbringung die kritischen Zustände (ϕ , M, F)* ermittelt, und die zugehörigen Ergebnisse werden miteinander verglichen. Beim kürzeren Streifen (200x100-Band) wird nur die Methode A durchgeführt. Des weiteren werden die kritischen Belastungszustände sowie die Spannungszustände an der Stabilitätsgrenze und ihr Zusammenhang mit dem Verdrehwinkel und den Modusübergänge ermittelt.

Abschließend werden die Spannungen in Längs- und Querrichtung nach ss-FvK und cFvK Gleichungen analytisch berechnet, der Übergang von Beulmoden mit Längswellen auf solche mit Querwellen, Modusübergang d.h. "λ" Punkt, und zugehörige Vorfaktoren für die beiden Streifentypen ermittelt sowie kritische Winkel im Bereich $T < T_\lambda$ nach ss-FvK und die notwendige Vorfaktoren zur Berechnung der kritischen Winkel aus Zugkraft im Bereich $T > T_\lambda$ überprüft.

$T = \frac{F}{EtB}$ ist die dimensionslose Zugkraft. Betreffend Bezeichnungen, siehe Abschnitt 3.6.

3.1 Vorhandene Arbeiten zum Beulverhalten von Plattenstreifen unter Zugbelastung und Torsion

Einige relevante Veröffentlichungen zu dieser Thematik sind:

Die Lösung nach Theorie 1.Ordnung, die "St. Venant" Lösung für das Problem der Torsion (reine Torsion) eines Prismas mit rechteckigem Querschnitt ist gut bekannt. 1935 hat Green [9][10] einen dünnen Streifen unter Verdrehung betrachtet und festgestellt, dass bei einer Verdrehung eines dünnen Streifens, die so groß ist, dass eine Lösung nach Theorie ersten nicht mehr zulässig ist, die Beziehung zwischen dem Moment und der Verdrehung nichtlinear wird (nichtlineare Plattentheorie wegen großer Verdrehung). Im Weiteren stellte Green fest, dass der Streifen bei einem bestimmten Wert der Verdrehung instabil wird. Er hat in seine theoretischen Untersuchungen festgestellt, dass die berechnete elastische Stabilitätsgrenze des dünnen Streifens unter Verdrehung etwas größer ist als der experimentell beobachtete Wert. Damals vermutete Green, dass der Grund dafür wahrscheinlich geometrische Imperfektionen des Streifens ist.

J. Crispino und C. Benson [11] haben 1986 theoretische Untersuchung auf Basis der linearisierten Plattentheorie nach von Karman sowie Experimente zu diesem Thema durchgeführt und die kritische Verdrehung pro Längeneinheit, die zum Beulen führt, für verschiedene orthotrope Materialeigenschaften im Vergleich zum isotropen Fall ermittelt. Darüber hinaus haben sie gezeigt, dass die kritische Verdrehung durch eine Zugkraft erhöht werden kann.

E.M.Mockenstrum [12] hat 2001 gezeigt, dass die nichtlineare Plattentheorie Druckmembranspannungen auch in Streifen-Querrichtung nachweist, welche Green nicht vorausgesagt hat. Diese Spannungen, die auch zum Beulen führen können, haben einen Einfluss auf den kritischen Verdrehwinkel und auf die Beulfiguren.

C.D. Coman und A.P. Bassom [13] haben 2008 mittels einer erweiterten v. Kármán - Plattentheorie nach von Kármán die Stabilität für ein dünnes Band aus isotropem, linear elastische Material unter konstanter Zuglast bei kleiner Verdrehung am Ende des Bands untersucht.

J. Chopin und A. Kudrolli [14] haben 2013 von der Zugkraft abhängige Veränderungen der Beulformen beim tordierten Band festgestellt.

J. Chopin und A. Kudrolli [15] haben 2018 Experimente zu diesem Thema durchgeführt und verschiedene Instabilitätsregime dargestellt.

3.2 Wesentliche Voraussetzungen

Eigenwert-Beulanalysen werden generell dazu benutzt, die kritische Beullast für steife Strukturen zu berechnen. Eine steife Struktur ergibt sich mitunter dann, wenn die Lasten primär von Membranspannungen und kaum von Biegespannungen getragen werden [3]. Ein derartiger Beanspruchungszustand liegt bei Platten unter Zugbelastung und Torsion, wie sie in diesem Kapitel untersucht werden, vor.

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Kombination von Zug- und Torsionsbeanspruchungen auf das Beulverhalten von Bändern unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearitäten in den lastgesteuerten Analysen untersucht.

3.3 Modellbeschreibung

Es werden zwei Streifentypen mit unterschiedlichen Längen, gleichen Breiten und konstanter Dicke untersucht. Die gewählten Geometriewerte der Streifen sind in Tabelle 3.1 ersichtlich.

$L=1000$ & 200	[mm]
$B=100$	[mm]
$t=0.05$	[mm]

Tabelle 3.1 Modellparameter der Streifen

Die Streifen liegen in dem gewählten kartesischen Koordinatensystem in der x-y-Ebene. Die x-Achse liegt in Richtung der Zuglast, siehe Abbildung 3.2.

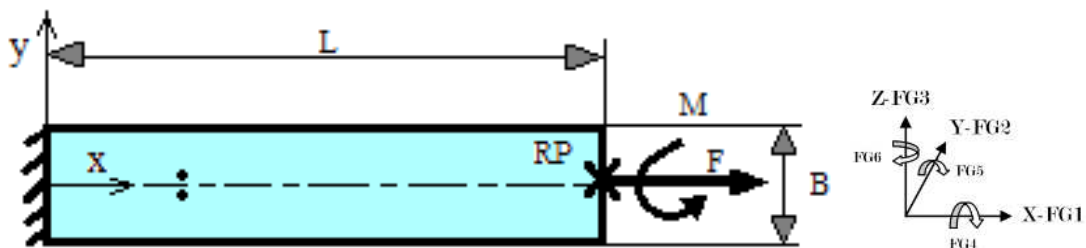


Abbildung 3.1: Bezeichnung der Geometrie Parameter, Randbedingung und Lastaufbringung

Entsprechend Abbildung 3.1 werden die folgende Bezeichnungen für die Abmessungen des Streifens verwendet:

L = Länge des Streifens

B = Breite des Streifens

t = Dicke des Streifens

3.3.1 Anforderungen

Für die Beulanalyse ist es notwendig, die Steifigkeit unter Einschluss der Wirkung von Deformationen und die Spannungszustände ausreichend genau zu ermitteln.

Die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearitäten aufgrund großer Rotationen ist unbedingt erforderlich.

3.3.2 Vernetzung

Die Streifen werden mit S4R Schalenelementen (bi-linear shell Element) mit der Elementgröße 2x2 [mm] vernetzt. Das sind 4 knotige Elemente mit reduzierter Integration. Hierbei handelt es sich um den Typ dünne Schalenelemente. Die Vernetzung der Modelle ist in Abbildung 3.3 bzw. 3.4 dargestellt.

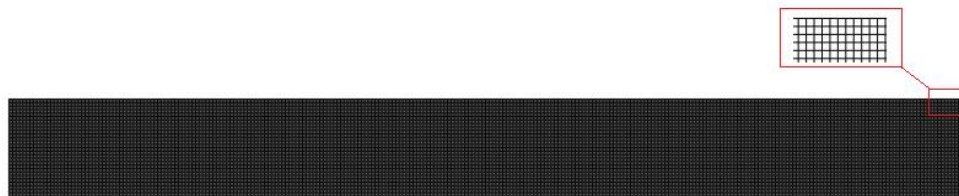


Abbildung 3.2 Vernetzung des Streifens 1000 x 100 x 0.05
[total number of nodes: 25552, total number of elements: 25000
linear quadrilateral elements of type S4R]

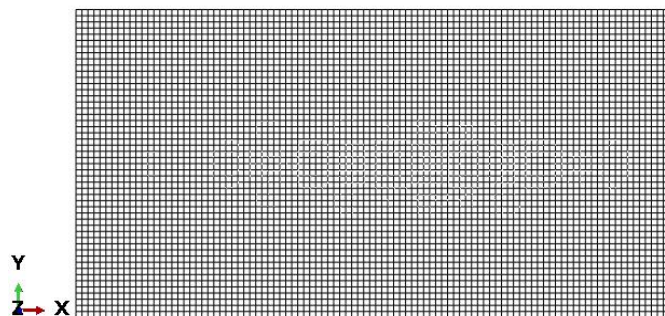


Abbildung 3.3 Vernetzung des Streifens 200 x 100 x 0.05
[total number of nodes: 5152, total number of elements: 5000
linear quadrilateral elements of type S4R]

3.3.3 Materialdaten

Als Material wird linear-elastisches isotropes, Material vorausgesetzt, mit den Materialdaten entsprechend der Tabelle 3.2.

E Elastizitätsmodul 70000 N/mm ²
ν Poisson-Zahl 0.33

Tabelle 3.2 Materialdaten

3.3.4 Randbedingungen

Die Streifen werden an den kurzen Enden eingespannt. Auf der linken Seite werden jegliche Freiheitsgrade (FG1-FG5) gesperrt, siehe Abbildung 3.2. Auf der rechten Seite werden Verschiebungen in x, y und z-Richtung (FG1-FG3), in der Weise zugelassen, dass sich diese Streifenkante wie ein starrer Stab verhält, der sich in der Streifenebene in X-Richtung parallel verschieben und zufolge Torsion zusätzlich verdrehen kann.

Um diese Randbedingungen (Constraints) in ABAQUS zu modellieren, wurde ein Referenzpunkt RP, siehe Abbildung 3.2, definiert und an diesen Referenzpunkt RP wurden die angrenzenden Knotenpunkte der rechten Streifenkante kinematisch gekoppelt.

3.3.5 Lastaufbringung

In dieser Arbeit wurde ein Laststeuerung-Verfahren durchgeführt. Bei nichtlinearem Systemverhalten kann die Lösung der nichtlinearen Analyse abhängig vom Belastungspfad und Lastverlauf sein. Deshalb wurde die Lastaufbringung in zwei Varianten in unterschiedlicher Reihenfolge- A und B – untersucht.

Aus mathematischer Sicht, zu jeder eindeutigen Funktion $f(x)=y$ besteht eine Umkehrfunktion $g(y)=x$. Wenn nun die berechneten kritischen Zustände bei einem festgehaltenen Wert der Zugkraft $F = \hat{F}$ bei Steigerung des Torsionsmoments M bis zum Erreichen des kritischen Zustandes $M^*(\hat{F})$ bei Reihenfolge A mit dem berechneten kritischen Zustand bei festgehaltenem $\hat{M} = M^*(\hat{F})$ und Reduktion der Zugkraft, ausgehend von einem hohen Wert $F > \hat{F}$, bis zum Erreichen des Beulens, also bis $F^*(\hat{M})$ (Reihenfolge B), im Sinne einer Umkehrfunktion übereinstimmen, dann liegt keine Abhängigkeit des kritischen Zustandes von der Reihenfolge der Lastaufbringung - also ob M bei festgehaltenem F gesteigert oder F bei festgehaltenem M verringert wird - vor.

Anmerkung 3.1: Damit für sehr dünne Bänder unter Torsionsbeanspruchung eine stabile Gleichgewichtslage in einer nichtlinearen FE-Analyse ermittelt werden kann, ist eine Zugkraft erforderlich. Es wurde bei dem längeren Streifen (1000x100x0,05) versucht, den kritischen Winkel (das kritische Moment) bei der Zugkraft $F = 0$ N zu bestimmen, und es zeigte sich, dass sich das Band ohne Zugkraft nur bis zu einem sehr kleinen Winkel (bzw. einem sehr kleinen Moment) stabil verdrehen kann.

Anmerkung 3.2 : Beim Streifen $L=1000$ [mm] wurden in Reihenfolgen A und B der inkrementellen Lastaufbringung die kritischen Zustände $(\phi, M, F)^*$ ermittelt, und beim kürzeren Streifen (200x100-Band) wurde nur die Methode A durchgeführt.

Reihenfolge A : Bestimmung des kritischen Moments bei vorgegebener Zugkraft, $M^*(\hat{F})$

Bei der Reihenfolge A wird zuerst die Lastinkrementierung für Zug definiert, dann für Torsion. Am Referenzpunkt RP wird im ersten Schritt die konzentrierte Last P in x-Richtung aufgebracht und konstant gehalten. Im zweiten Schritt wird das Torsionsmoment M beziehungsweise Q (ΔM) um die x-Achse (iterativ Full Newton, Nachbeulen mit Riks siehe Kapitel 1) aufgebracht. Siehe Abbildung 3.5.

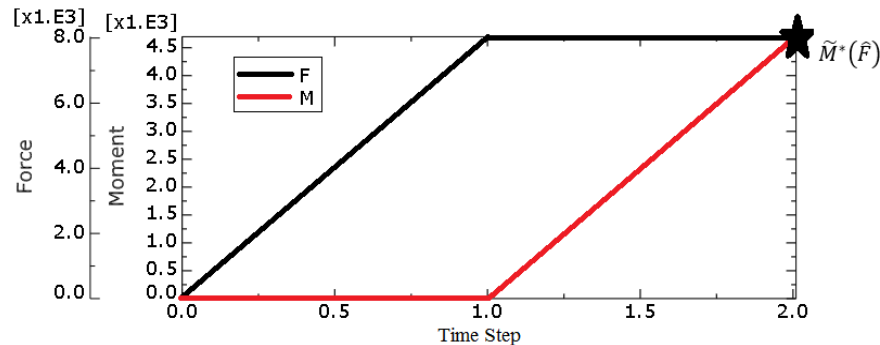


Abbildung 3.4 Load Historie "A", beim Streifen $L=1000[\text{mm}]$, $F=8000[\text{N}]$ $M=4683.9[\text{N}\cdot\text{mm}]$

Wegen der kinematischen Kopplung an der Kante der rechten Seite kommt es zu keinen Spannungskonzentrationen zufolge der Einzelkraft, und das Ende des Streifens verschiebt und verdreht sich gleichmäßig.

Eine anfängliche Zugkraft stabilisiert den Prozess des Aufbringens der Verdrehung. Daher wurde bei allen Analysen vor dem Verdrehen eine Zugkraft aufgebracht, die ausreicht, um bis zum Erreichen eines vorgegebenen Winkels stabile Zustände (keine negative Eigenwerte) vorzufinden. Dann wurde das Moment bis zum ersten Auffinden von negativen Eigenwerten der Tangentensteifigkeitsmatrix gesteigert. Dabei wurde die Zugkraft konstant gehalten.

Zum Analyseverfahren für die Bestimmung des kritischen Moments und der Tangentensteifigkeitsmatrix siehe Kapitel 1.

Es wurden Analysen unter verschiedenen Zugkräften durchgeführt. Die berechneten kritischen Momente bei vorgegebenen Zugkräften (Reihenfolge A) sind für das lange Band (1000 mm) in Tabelle 3.3 enthalten, jene für das kurze Band (200 mm) in Tabelle 3.4

Nr	F [N]	M [N.mm]	Q	λ_1	M_1^*	φ^* [Radiant]	φ^* [Grad]
-1	0	0.005	---	---	---	---	---
0	2	0.65	0.001	89.827	0.7398	0.161166	9.24
1	8.75	4.6	0.08	0.7434	4.6595	0.293813	16.84
2	20	14	0.09	1.8131	14.163	0.41828	23.98
3	70	80	0.09	23.900	82.151	0.737743	42.29
4	150	245	0.09	13.205	246.19	1.05593	60.53
5	190	350	0.09	17.369	351.56	1.1899	68.21
6	220	430	0.09	62.062	435.58	1.27699	73.20
7	300	680	0.09	72.969	686.57	1.48422	85.08
7A	350	810	0.09	9.8968	810.89	1.55	88.85
8	400	845	0.09	26.463	847.38	1.52291	87.30
9	500	920	0.09	8.0542	920.72	1.4737	84.48
10	600	990	0.09	31.718	992.85	1.42901	81.92
11	700	1065	0.09	9.9183	1065.8	1.39015	79.69
12	1000	1280	0.09	4.7695	1280.4	1.29464	74.22
13	1200	1415	0.09	67.267	1421.0	1.24513	71.38
14	1500	1620	0.09	50.888	1624.5	1.18333	67.83
15	1700	1755	0.09	27.758	1757.4	1.14947	65.89
16	2000	1950	0.09	0.7771	1950.1	1.10534	63.36
17	3000	2550	1	6.2980	2556.3	1.001	57.38
18	4000	3034	1	4.6285	3038.6	0.9079	52.05
19	6000	4000	1	4.7323	4004.7	0.8154	46.74
20	8000	4673	1	10.851	4683.9	0.7259	41.61
21	10000	5036	1	1.6364	5037.6	0.6326	36.26
22	11000	4928	1	0.9692	4928.9	0.5661	32.45
23	11300	4861	1	0.6764	4861.7	0.5446	31.22
24	11450	4822	1	0.6013	4822.6	0.5336	30.59
25	11600	4780	1	0.3066	4780.3	0.5225	29.95

Tabelle 3.3 Kritische Torsionsmomente bei vorgegebenen Zugkräften
beim Streifen 1000 / Reihenfolge A

Nr	F [N]	M [N.mm]	Q	λ_1	M_1^*	φ^* [Radian]	φ^* [Grad]
1	3	1.2	1	0.032	1.232	0.039	2.24
2	10	5.5	1	0.099	5.599	0.063	3.61
3	20	14.1	1	0.129	14.229	0.085	4.87
4	50	51	1	0.220	51.220	0.128	7.34
5	70	82.5	1	0.288	85.032	0.152	8.71
6	150	249	1	0.033	249.033	0.214	12.27
7	200	378.5	1	0.344	378.844	0.246	14.10
8	400	1047	1	0.804	1047.804	0.342	19.61
9	600	1854	1	3.203	1857.203	0.410	23.50
10	800	2108	1	0.779	2108.779	0.401	22.99
11	1000	2300	1	0.937	2300.937	0.387	22.2
12	1200	2448.5	1	26.666	2475.166	0.373	21.38
13	1400	2555	1	1.8182	2556.818	0.352	20.18
14	1600	2635	1	1.8711	2636.871	0.333	19.09
15	1800	2690	1	0.918	2690.918	0.314	18
16	2000	2720	1	0.341	2720.341	0.294	16.85
17	2200	2722	1	4.181	2726.181	0.275	15.76
18	2400	2706	1	1.153	2707.153	0.255	14.62
19	2600	2662	1	0.617	2662.617	0.235	13.47
20	2800	2588	1	1.907	2589.907	0.216	12.38
21	3000	2485	1	0.651	2485.651	0.195	11.18
22	3200	2344	1	0.495	2344.495	0.175	10.03
23	3400	2158	1	0.242	2158.242	0.153	8.77
24	3600	1912	1	0.707	1912.707	0.129	7.39
25	3800	1579	1	0.419	1579.419	0.101	5.79

Tabelle 3.4 Kritische Torsionsmomente bei vorgegebenen Zugkräften
beim Streifen 200 / Reihenfolge A

Anmerkung 3.3: Die kritische Zugkraft für die Streifen 1000 und 200 ohne Torsionsmoment also $M=0$, also beziehungsweise unter reinem Zug, sind jeweils $F_{k1000}=11721$ [N] bzw. $F_{k200}=3854.2$ [N].

Reihenfolge B : Bestimmung der kritischen Zugkraft – Reduktion bei vorgegebenem Moment, $F^*(\hat{M})$

Bei der Reihenfolge B wird zuerst eine hohe Zugkraft, dann das Moment, danach die Zugkraft-Reduktion definiert. Nach dem Aufbringen der hohen Zugkraft wird das Torsionsmoment bis zu einem definierter Wert gesteigert, welcher etwas kleiner ist als jenes, das bei der aufgebrachten Zugkraft bereits zum Beulen führen würde. Dieses Moment wird bei dieser Methode konstant gehalten und die Zugkraft wird durch das Aufbringen einer zusätzlichen Druckkraft in kleinen Schritten reduziert. Dabei wird jener Multiplikator (Eigenwert) bestimmt, mit dem dieser kleine Reduktionsschritt der Zugkraft multipliziert werden muss, um (zunächst näherungsweise) zur kritischen Zugkraft zu kommen. Je näher die Zugkraftreduktion dem kritischen Zustand kommt, umso kleiner wird der Multiplikator (Eigenwert), bis er schließlich Null wird. Somit wird nicht das kritische Moment sondern die kritische Zugkraft berechnet, auf welche zu reduzieren ist, um bei festgehaltenem Moment Beulen zu erhalten. Siehe Abbildung 3.5.

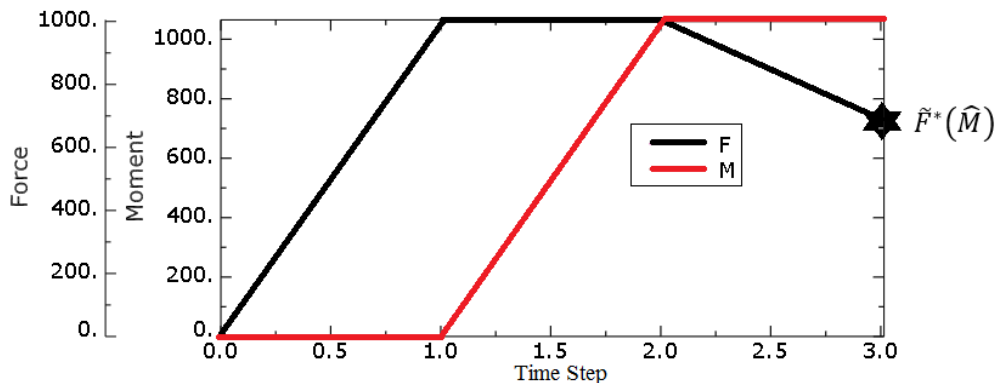


Abbildung 3.5 Load Historie "B", beim Streifen $L=1000[\text{mm}]$,

$F_{\text{zug}[2\text{KM}]}=1000[\text{N}]$ $M=1060[\text{N.mm}]$ $F_{\text{gesamt}}=690[\text{N}]$

Zum Analyseverfahren siehe Kapitel 1.

Anmerkung 3.4 : Die Ergebnisse, die in Analysen mit der Reihenfolge B ermittelt wurden, sind mit der Abkürzung "KM" (konstantes Moment) gekennzeichnet.

In Tabelle 3.5 sind die Ergebnisse aus der Auffindung von Stabilitätsgrenzen bei Vorgabe des konstanten Moments und Reduktion der Zugkraft (Reihenfolge B) für der Streifen 1000 [mm] eingetragen.

Nr	F_{zug}	M	F_{Druck}	F_{gesamt}	Q	λ_I	F^*	ϕ^*_1	ϕ^*_2
1KM	150	200	-20	130	-1	0.98	129,02	0.988	56.64
2KM	1000	1060	-310	690	-1	5.761	684.24	1.399	80.20
3KM	3000	2000	-920	2080	-1	0.513	2079.2	1.095	62.77
4KM	4000	3000	-75	3925	-1	3.918	3921.1	0.914	52.39
5KM	5000	3400	-240	4760	-1	1.676	4758.3	0.863	49.47
6KM	6000	3600	-810	5190	-1	4.018	5185.9	0.842	48.27
7KM	7000	4200	-340	6660	-1	4.180	6655.8	0.775	44.43
8KM	8000	4550	-370	7630	-1	1.512	7628.4	0.738	42.31
9KM	9000	4700	-918	8082	-1	36.95	8045.1	0.721	41.33
10KM	10000	4880	-1257	8743	-1	1.755	8741.2	0.697	39.96
11KM	11000	4900	-2176	8824	-1	3.647	8820.3	0.692	39.67
12KM	11500	4880	-2760	8740	-1	6.218	8733.7	0.696	39.89
13KM	11700	4850	-3075	8625	-1	3.945	8621.0	0.7	40.13
15	11721	0	---	---	---	---	---	---	---

Tabelle 3.5 Kritische Zugkräfte bei vorgegebenen Torsionsmomenten
beim Streifen 1000 / Reihenfolge B

Die Ergebnisse aus den Reihenfolgen A und B für den Streifen 1000 [mm] sind in der Tabelle 3.6 zusammengefasst. Wie aus dem Vergleich der Ergebnisse erkennbar ist, stimmen die Ergebnisse aus der Analyse Methode B mit jenen aus der Methode A im Sinne einer Umkehrfunktion überein. Es liegt also keine Abhängigkeit von der Reihenfolge der Lastaufbringung vor.

Nr	F [N]	M^* [N.mm]	ϕ_1^* [Radian]	ϕ_2^* [Grad]
-1	0	0.005	---	---
0	2	0.7	0.161166	9.24
1	8.75	4.6595	0.293813	16.84
2	20	14.163	0.41828	23.98
3	70	82.151	0.737743	42.29
1KM	129.02	200	0.988	56.54
4	150	246.19	1.05593	60.53
5	190	351.56	1.1899	68.21
6	220	435.58	1.27699	73.20
7	300	686.57	1.48422	85.08
7A	350	810.89	1.55	88.85
8	400	847.38	1.52291	87.30
9	500	920.72	1.4737	84.48
10	600	992.85	1.42901	81.92
2KM	684.24	1060	1.399	79.98
11	700	1065.8	1.39015	79.69
12	1000	1280.4	1.29464	74.22
13	1200	1421.0	1.24513	71.38
14	1500	1624.5	1.18333	67.83
15	1700	1757.4	1.14947	65.89
16	2000	1950.1	1.10534	63.36
3KM	2079.29	2000	1.095	62.77
17	3000	2556.3	1.001	57.38
4KM	3921.10	3000	0.914	52.39
18	4000	3038.6	0.9079	52.05
5KM	4758.32	3400	0.863	49.47
6KM	5185.98	3600	0.842	48.24
19	6000	4004.7	0.8154	46.74
7KM	6655.82	4200	0.775	44.43
8KM	7628.49	4550	0.738	42.28
20	8000	4683.9	0.7259	41.61
9KM	8045.10	4700	0.721	41.33
13KM	8621.06	4850	0.7	40.13
12KM	8733.78	4880	0.696	39.89
10KM	8741.25	4880	0.697	39.86
11KM	8820.35	4900	0.692	39.67
21	10000	5037.6	0.6326	36.26
22	11000	4928.9	0.5661	32.45
23	11300	4861.7	0.5446	31.22
24	11450	4822.6	0.5336	30.59
25	11600	4780.3	0.5225	29.95

Tabelle 3.6 Kritische Zustände $M^*(F)$ bzw.- bei mit KM gekennzeichneten Fällen- $F^*(M)$ bei Streifen 1000 / Reihenfolgen A und B

3.4 Last-Verschiebung-Diagramme

In den Abbildungen 3.7 und 3.8 sind die inkrementellen Torsionsmoment vs. Verdrehwinkel-Diagramme ab dem ersten Schritt des Verfahrens bis zur Auffindung von Stabilitätsgrenzen (als Last-Verschiebung-Diagramme) dargestellt. Dabei ist φ der Verdrehwinkel des rechten Streifenendes. Diese Diagramme zeigen, dass je mehr sich die Zugkraft der kritischen Zugkraft des rein gezogenen Streifens F_k , d.h. $F_{k1000}=11721$ [N] beim langen bzw. $F_{k200}=3854.2$ [N] beim kurzen Streifen nähert, umso mehr wird das Vorbeulverhalten linear.

Diese Bilder zeigen, dass die ohne Stabilitätsverlust höchste mögliche Verdrehung bei einer bestimmten Zugkraft auftritt. Diese Last-Verschiebung Linie ist in den Diagrammen als gepunktete Linie dargestellt. Dass bei diesen Fällen ein grundsätzlicher Wechsel des Charakters der Beulmoden auftritt, wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

Für den Streifen $L=200$ [mm] lang ist der maximale stabile Verdrehwinkel 23.5° bei einer Zugkraft $F=600$ [N], und für den Streifen $L=1000$ [mm] ist der maximale stabile Verdrehwinkel 88.6° bei einer Zugkraft $F=350$ [N] .

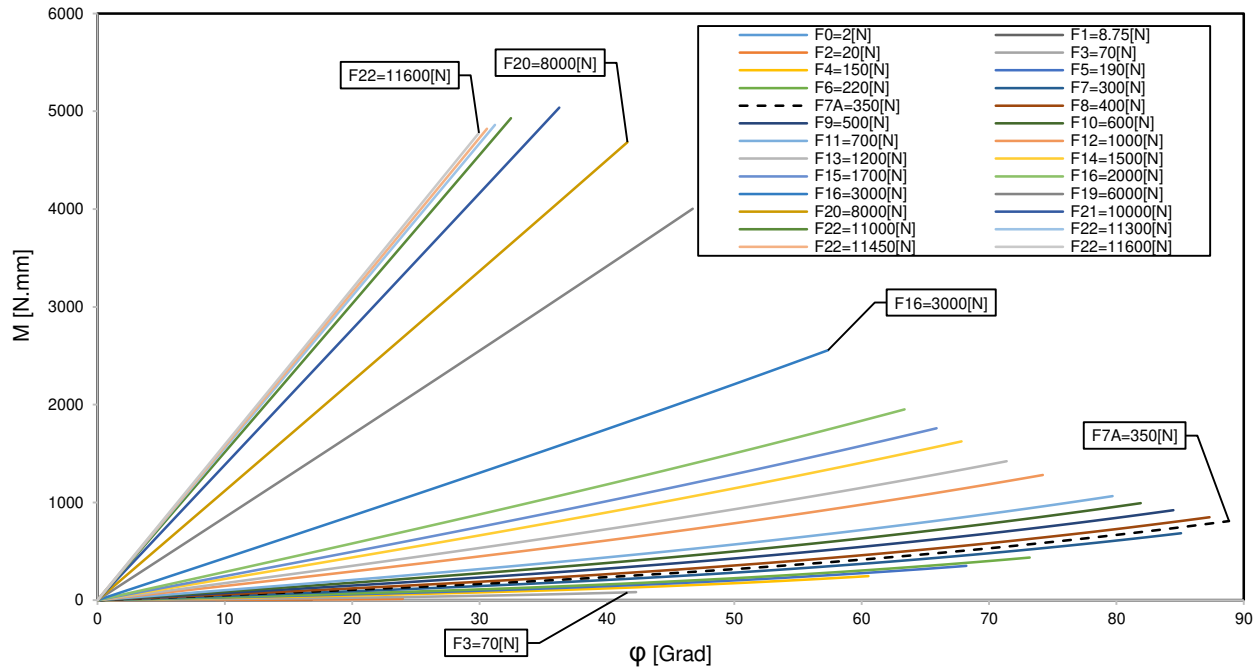


Abbildung 3.6 Entwicklung des Verdrehungswinkels mit zunehmendem Torsionsmoment für den Streifen $L=1000$ [mm]. $F_{k1000}=11721$ [N]

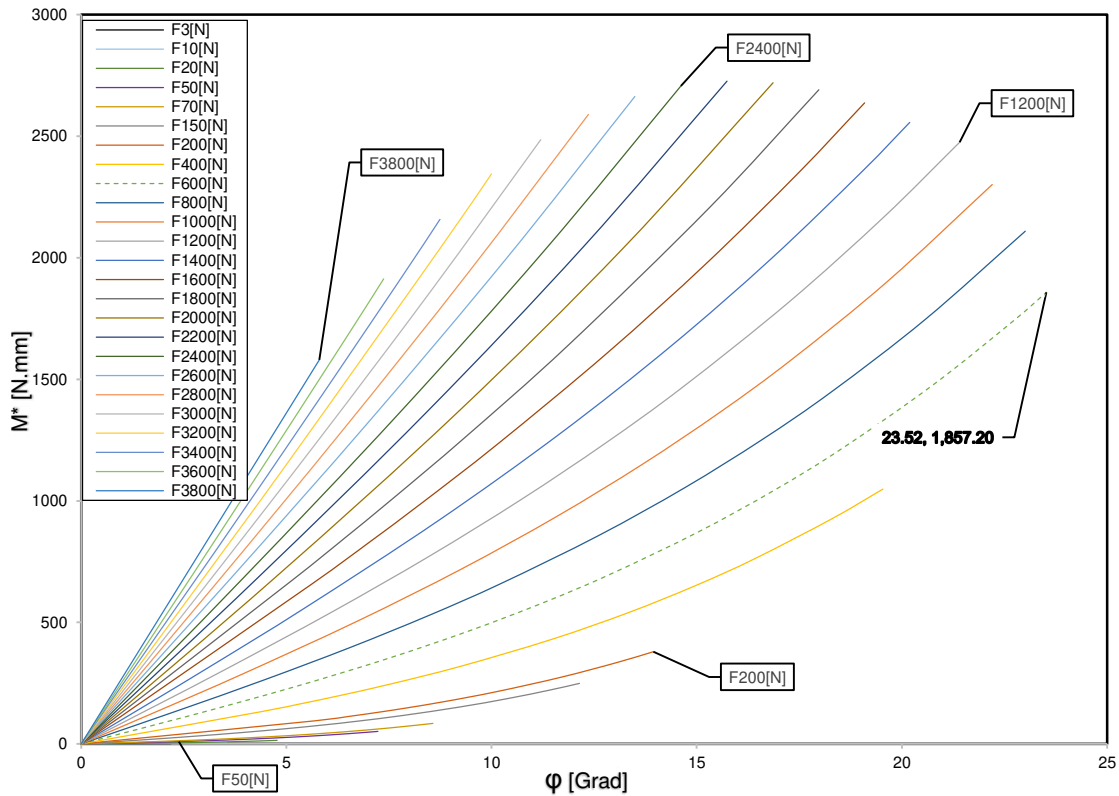


Abbildung 3.7 Entwicklung des Verdrehungswinkels mit zunehmendem Torsionsmoment für den Streifen $L=200$ [mm] lang. $F_{k200}=3854.2$ [N]

3.5 Nähere Erläuterungen zu den Ergebnissen der Stabilitätsanalysen

3.5.1 Kritische Belastungszustände

Nachfolgend werden die in den Tabellen 3.4 und 3.6 enthaltenen Ergebnisse aus der Auffindung von Stabilitätsgrenzen in Diagrammform in Abbildungen 3.9 bis 3.14 dargestellt. Aus den Darstellungen in diesen Abbildungen erkennt man, dass im Bereich $T < T_\lambda$ (T ist die dimensionslose Zugkraft, siehe Abschnitt 3.6) der erste Beulmode zunächst bei kleinen Zugkräften eine geringere Wellenzahl in Längsrichtung aufweist und die Wellen sich über einen großen Bereich der Bandbreite erstrecken. Die Anzahl der Wellen nimmt mit der Größe der Zugkraft F zu und lokalisiert sich in der Mitte des Streifens. Dies steht in voller Übereinstimmung mit der Verteilung der axialen Membranspannung, die in Abbildungen 3.15 und 3.20 gezeigt ist. Die Berechnung dieser Spannungsverteilung wird im nächsten Abschnitt beschrieben. Solange die Beulwellen in Längsrichtung auftreten, wird das kritische Torsionsmoment bei zunehmender Zugkraft erhöht, der Grund dafür liegt darin, dass die aus dem Torsionsmoment und der Zugkraft resultierenden Längsspannungen einen zum Beulen erforderlichen Druckspannungsbereich aufweisen müssen. Der Bereich der Druckspannungen in Richtung der Längsachse des Streifens ist in Abbildungen 3.15 und 3.20 mit "b" gekennzeichnet.

Die Tatsache, dass das zum Beulen erforderliche Torsionsmoment mit zunehmender Zugkraft (und damit abnehmendem "b") wächst, hängt offensichtlich mit der klassischen Gleichung für die kritische Druckspannung einer Rechteckplatte zusammen, in der Plattenbreite über $\sigma^* \propto \frac{1}{b^2}$ [6] auftritt, siehe Kapitel 1, Gleichung 1.9. Wie in diesen Diagrammen weiterhin sichtbar ist, zeigen ab einem bestimmten Wert der Zugkraft bzw. ab dem λ -Punkt die Beulmoden Wellen in Querrichtung auf. Auch hier nimmt die Welligkeit (allerdings sehr langsam) mit der Zugkraft zu und der kritische Verdrehwinkel erreicht seinen Maximalwert. Der λ -Punkt ist als Modusübergang-Punkt festgelegt und wird in Abschnitt 3.6 ermittelt. In diesem Bereich sind keine für die Ausbildung von Wellen in Längsrichtung ausreichende Längsdruckspannungen mehr verfügbar und die Querdruckspannungen werden für das Beulen dominant. Schließlich nimmt das kritische Torsionsmoment immer mehr ab, bis Beulen unter reiner Zugkraft auftritt. Die Annäherung an diesen Zustand ist durch gepunktete Linien in Abbildungen 3.9 bis 3.14 gezeichnet.

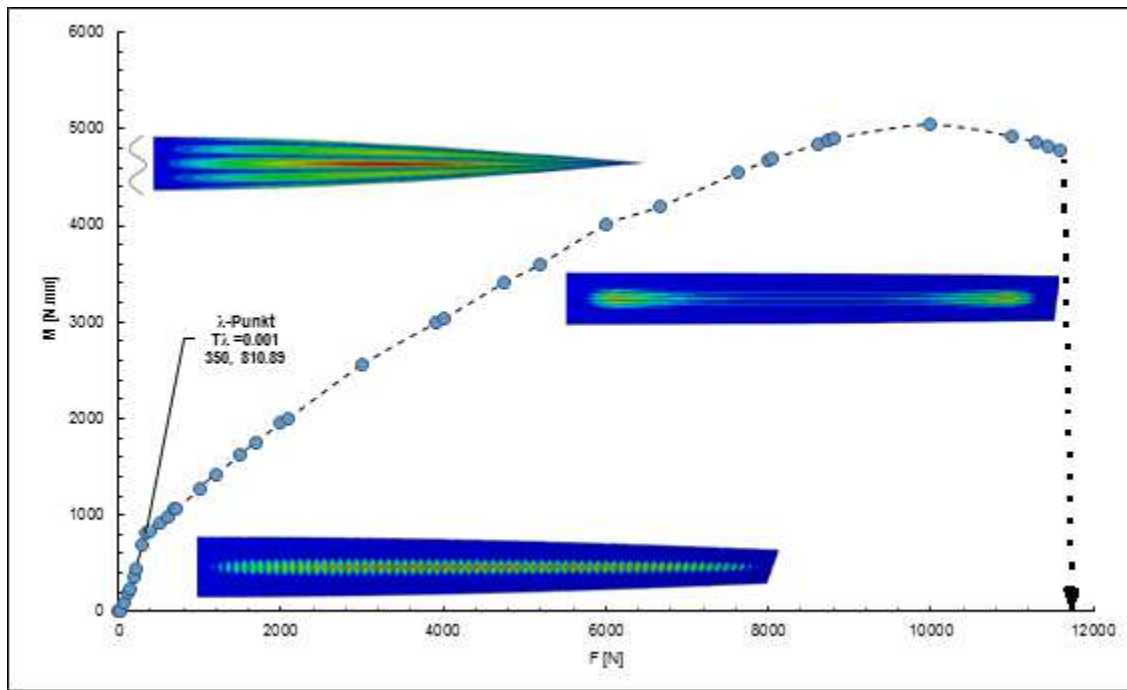


Abbildung 3.8 Moment-Zugkraft-Lanczos-L1000 x 100 x 0.05 -EL.2x2

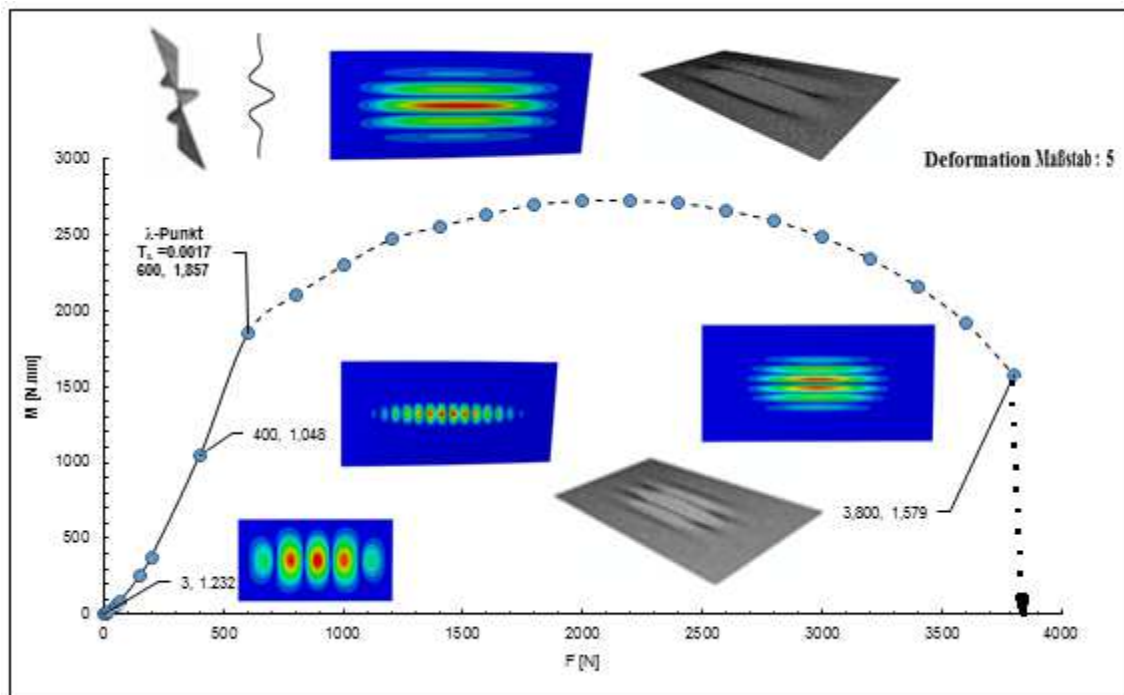


Abbildung 3.9 Moment-Zugkraft-Lanczos-L200 x 100 x 0.05 -EL.2x2

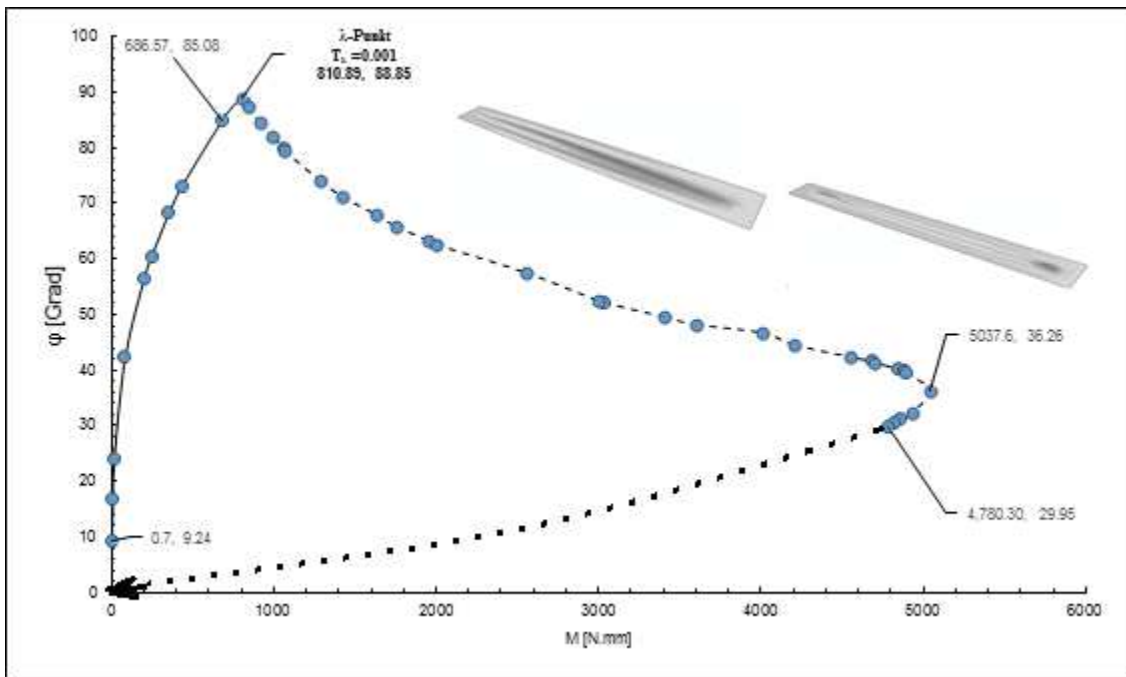


Abbildung 3.10 Winkel-Moment-Lanczos- L1000 x 100 x 0.05 -El.2x2

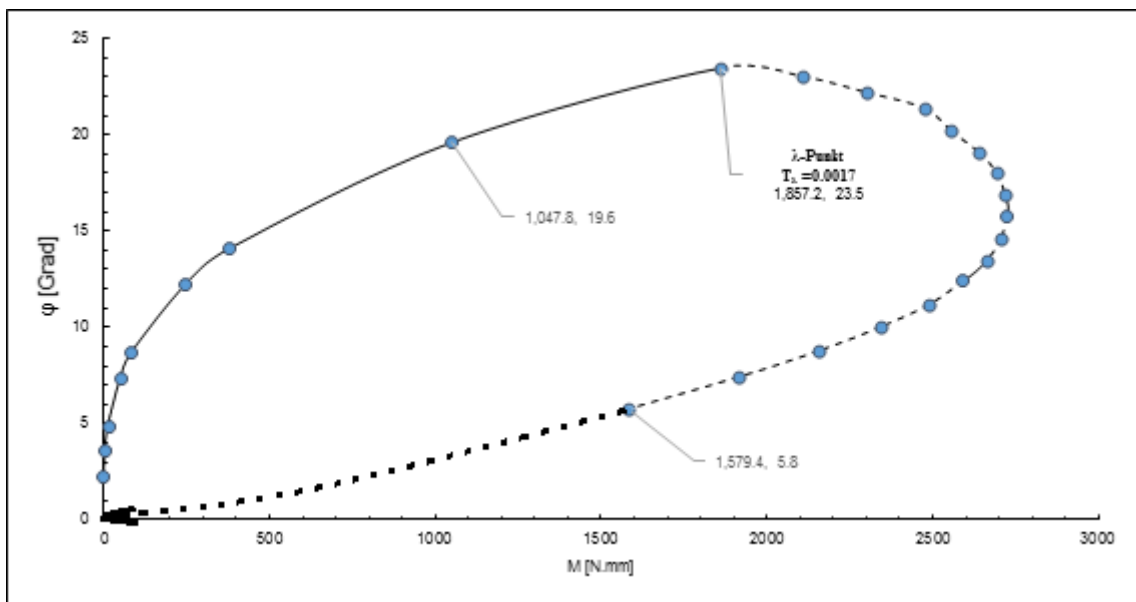


Abbildung 3.11 : Winkel-Moment-Lanczos- L200 x 100 x 0.05 -El.2x2

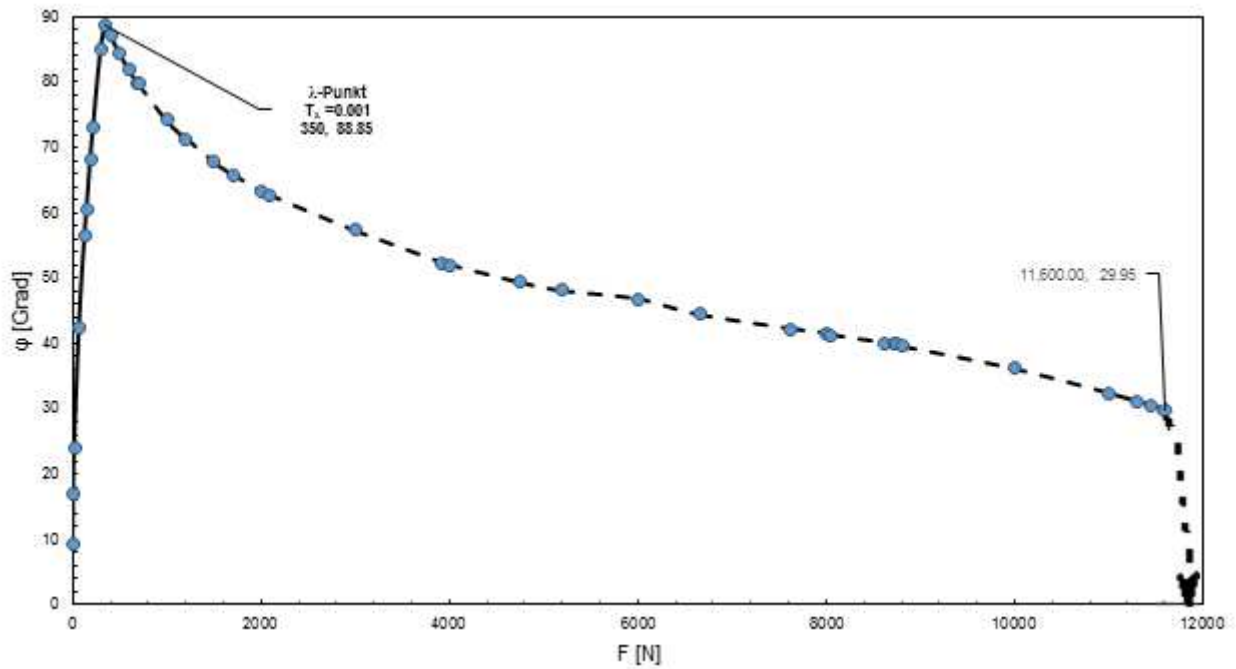


Abbildung 3.12 Winkel-Zugkraft-Lanczos- L1000 x 100 x 0.05 -EL.2x2

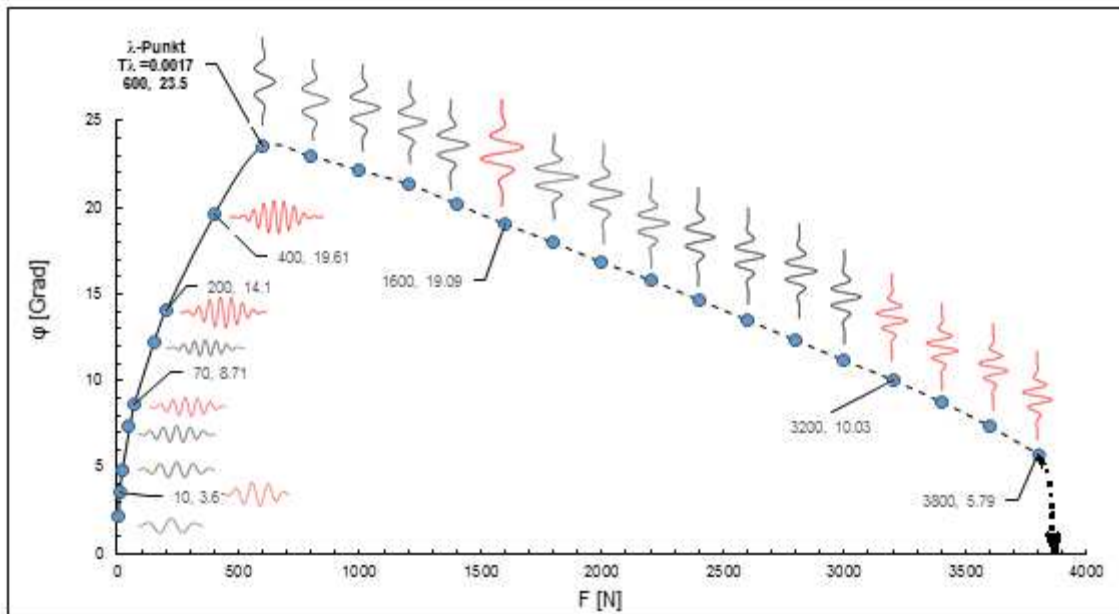


Abbildung 3.13 Winkel-Zugkraft-Lanczos- L200 x 100 x 0.05 -EL.2x2

3.5.2 Spannungszustände und Modusübergänge

Beulen vom Platten kann nur auftreten, wenn zumindest eine der Hauptnormalspannungskomponenten im Membranspannungszustand negativ ist. Folglich ist es sinnvoll die Druckspannungszustände zu betrachten, um Zusammenhänge und Analogien daraus ableiten zu können.

Das Verdrehen eines dünnen Streifens führt zusätzlich zu den Längsspannungen zu transversalen Druckspannungen [9][10][12]. In den Abbildungen 3.15 bis 3.26 sind die Spannungsverteilungen σ_{xx} und σ_{yy} über einen Pfad entlang der Bandbreite quer zur Längsachse des Bandes in Bandmitte (siehe Abbildung 3.14) für Belastungszustände an der Stabilitätsgrenze (d.h. bei jenem Moment, das als letztes Inkrement noch einem stabilen Zustand ergab) dargestellt.

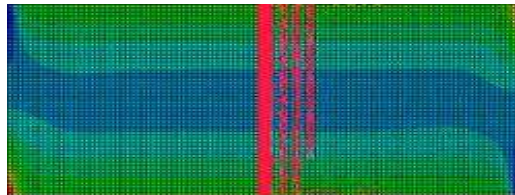


Abbildung 3.14 Vorgegebener Pfad über die von ABAQUS bereitgestellten Graphik-Routinen

Wie in diesen Diagrammen deutlich erkennbar ist, treten aufgrund der Torsion bei geringen Zugkräften Druckspannungen in Bandmitte auf, die zum lokalen Beulen führen. Diese Druckspannungen in Band-Längsrichtung ergeben sich durch Überlagerung der über die Bandbreite konstanten Zugspannungen aus der Zugkraft und den aus der Torsion zufolge Wölbbehinderung resultierenden Spannungen, welche in Bandmitte Druck- und den Bandkanten Zugspannungen sind. Mit zunehmender Zugkraft, wechselt nach einem gewissen Wert der Beulmode von Beulwellen in Längs zu Beulwellen in Querrichtung aufgrund der Entwicklung der transversalen Druckmembranspannungen in Kombination mit der Reduktion der longitudinalen Druckspannungen.

Beim Streifen $L=1000[\text{mm}]$ ist diese deutliche Änderung des Charakters bei der Zugkraft $F=350[\text{N}]$. Bei dieser Kraft $F=350 [\text{N}]$ gibt es keine Drucklängsspannung mehr, und die Beulform ändert sich, siehe nachfolgende Darstellungen. Beim Streifen $L=200[\text{mm}]$ tritt dieser Wechsel bei der Zugkraft $F= 600[\text{N}]$ auf .

Anmerkung 3.5: Für das Beulen sind die Spannungszustände in der Mittelfläche der Platte relevant.

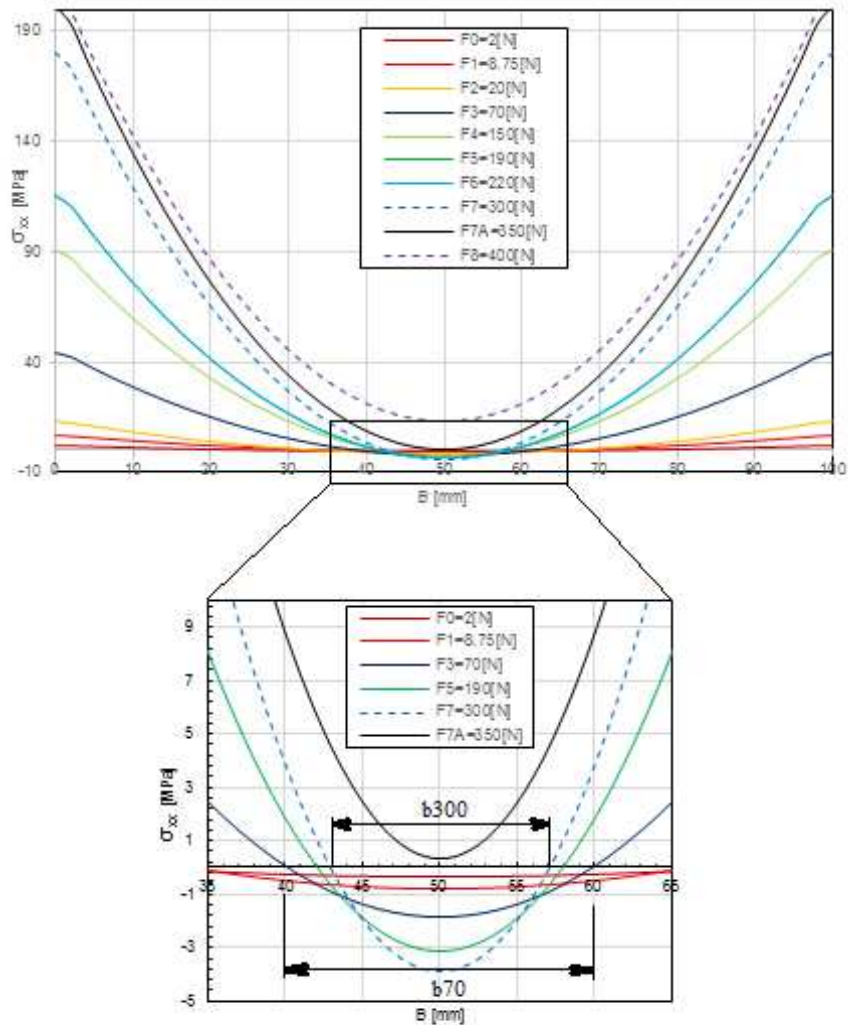


Abbildung 3.15 Normalspannungsverläufe (σ_{xx}) über Streifenbreite entlang des Pfades in der Mitte des Streifens $L=1000 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=2$ [N] bis 400 [N]

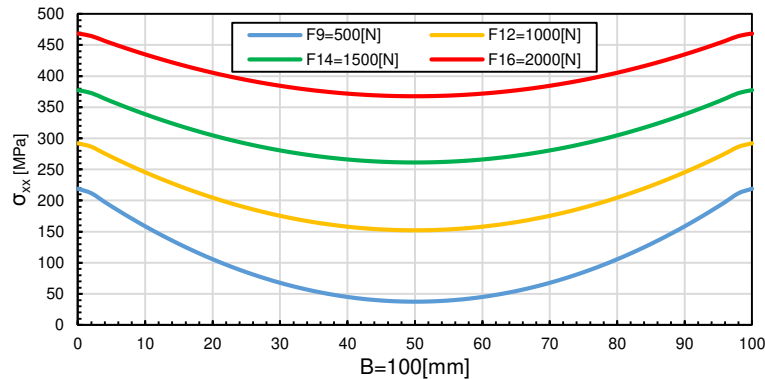


Abbildung 3.16 Normalspannungsverläufe (σ_{xx}) über Streifenbreite entlang des Pfades in der Mitte des Streifens $L=1000 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=500$ [N] bis 2000 [N]

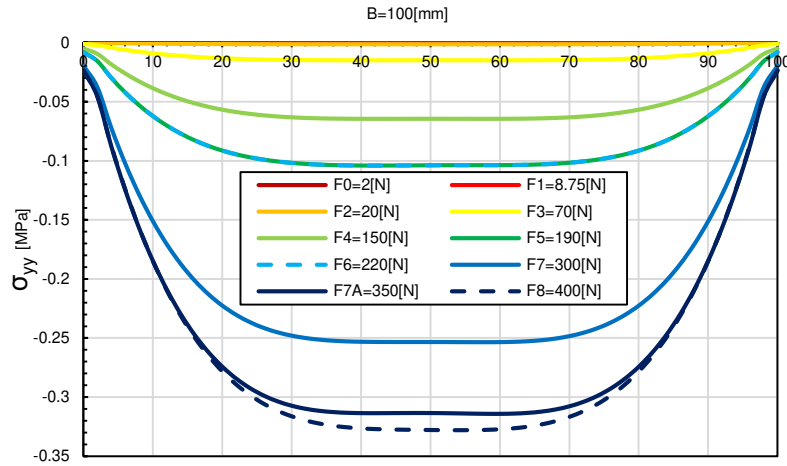


Abbildung 3.17 Normalspannungsverläufe (σ_{yy}) über Streifenbreite entlang des Pfades in der Mitte des Streifens $L=1000 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=2$ [N] bis 400 [N]

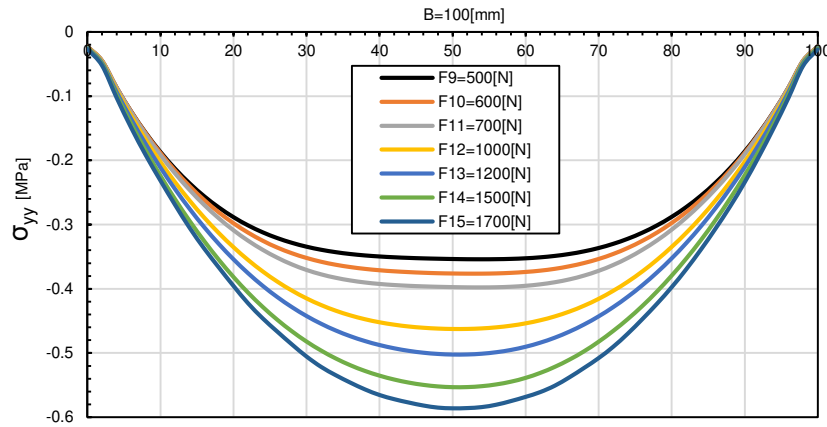


Abbildung 3.18 Normalspannungsverläufe (σ_{yy}) über Streifenbreite entlang des Pfades in der Mitte des Streifens $L=1000 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=500$ [N] bis 1700 [N]

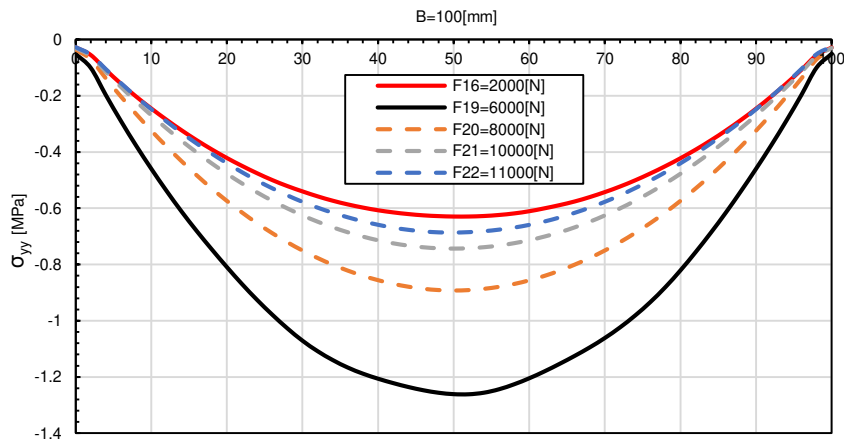


Abbildung 3.19 Normalspannungsverläufe (σ_{yy}) über Streifenbreite entlang des Pfades in der Mitte des Streifens $L=1000 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=2000$ [N] bis 11000 [N]

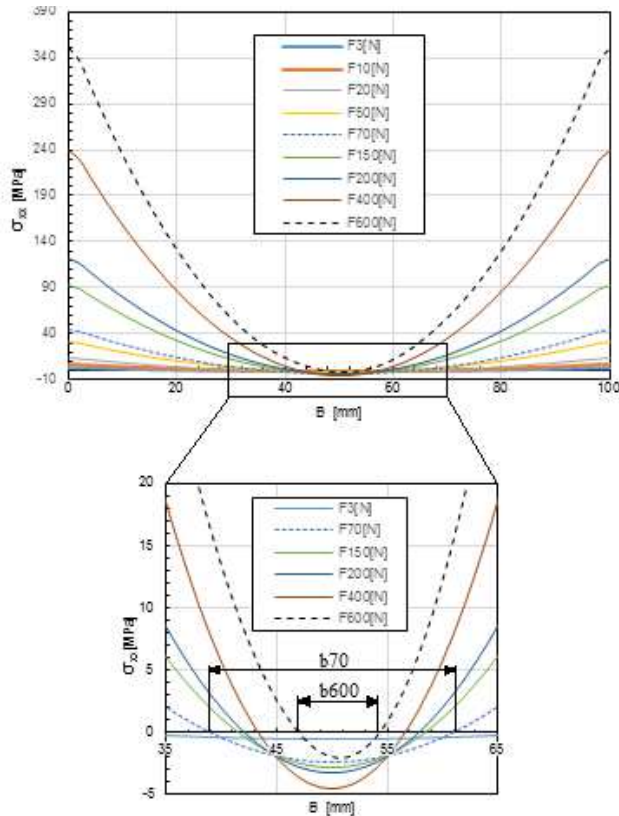


Abbildung 3.20 Normalspannungsverläufe (σ_{xx}) über Streifenbreite entlang des Pfades in der Mitte des Streifens $L=200 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=3$ [N] bis 600 [N]

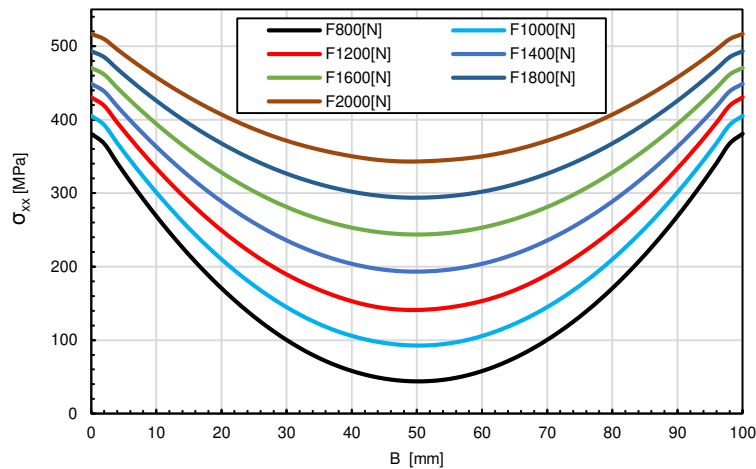


Abbildung 3.21 Normalspannungsverläufe (σ_{xx}) über Streifenbreite entlang des Pfades in der Mitte des Streifens $L=200 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=800$ [N] bis 1800 [N]

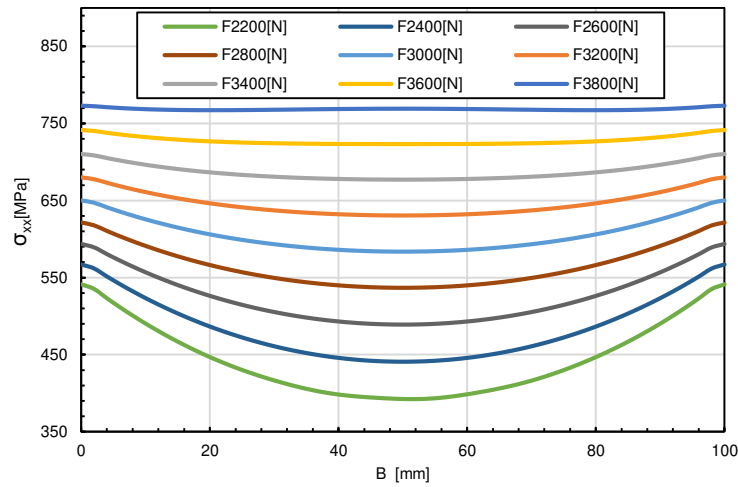


Abbildung 3.22 Normalspannungsverläufe (σ_{xx}) über Streifenbreite entlang des Pfades in der Mitte des Streifens $L=200 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=2200$ [N] bis 3800 [N]

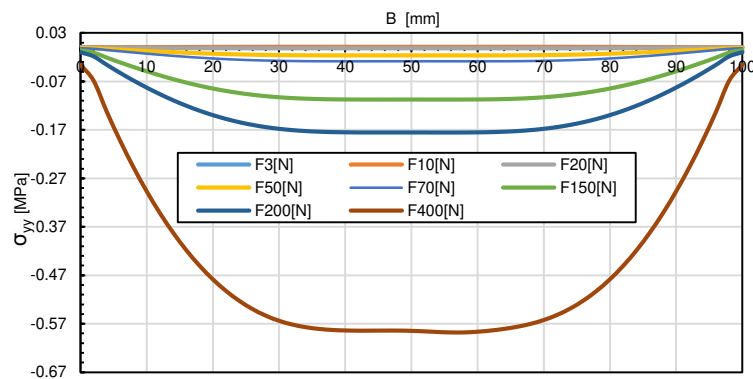


Abbildung 3.23 Normalspannungsverläufe (σ_{yy}) über Streifenbreite entlang des Pfades in der Mitte des Streifens $L=200 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=3$ [N] bis 400 [N]

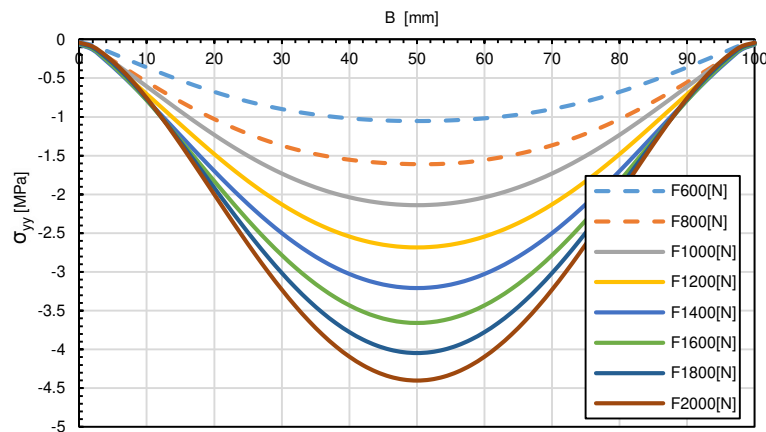


Abbildung 3.24 Normalspannungsverläufe (σ_{yy}) über Streifenbreite entlang des Pfades in der Mitte des Streifens $L=200 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=600$ [N] bis 2000 [N]

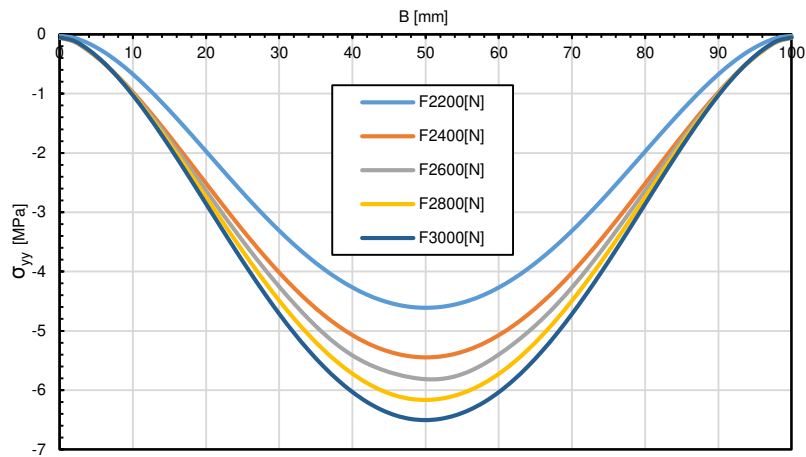


Abbildung 3.25 Normalspannungsverläufe (σ_{yy}) über Streifenbreite entlang des Pfades in der Mitte des Streifens $L=200 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=2200$ [N] bis 3000 [N]

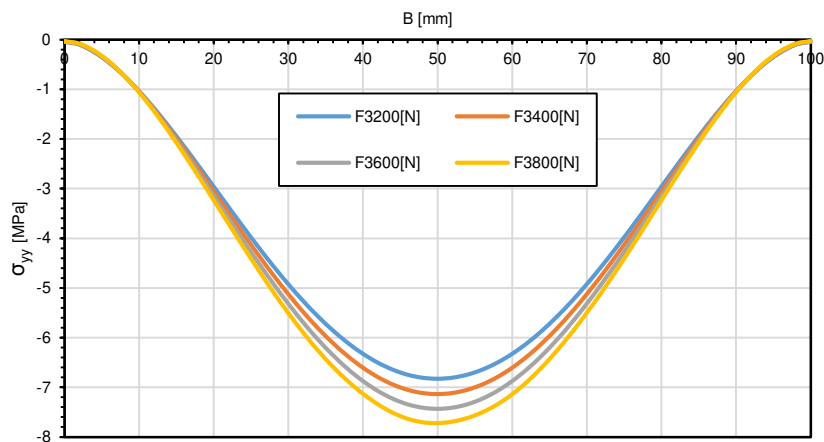


Abbildung 3.26 Normalspannungsverläufe (σ_{yy}) über Streifenbreite entlang des Pfades in der Mitte des Streifens $L=200 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=3200$ [N] bis 3800 [N]

3.5.3 Beulformen

In den Abbildungen 3.27 bis 3.65 sind jeweils die ersten drei Beulmoden zu den Streifenanalysen entsprechend der Tabellen 3.6 und 3.4 dargestellt. Zusätzlich zu den Färberrinde-Plots wurden die Diagramme erarbeitet, in denen die gegenüber dem verdrehten Band Verschiebungen "U3" normal zur Bandfläche über die Bandbreite in Bandmitte bzw. über die Längsachse des Bands dargestellt sind. Aus den Ergebnissen kann man zusammenfassen, dass

- 1- die Beulen manchmal symmetrisch und manchmal antimetrisch (rot skizzierte Linien in Abbildung 3.13 für das Streifen 200) zur Mittellinie (in x-Richtung und y Richtung) sind.
- 2- beim Streifen 1000, im Bereich $T < T_\lambda$ (Beulen in Längsrichtung) , die Halbwellenzahl mit zunehmender Zugkraft steigt und die Breite der Beulwellen (in Bandbreitenrichtung gemessen) kleiner werden. Je näher die kritischen Zustände zum Modusübergang kommen, umso mehr verschwinden die Beulwellen im Bereich des freien Bandendes bis schließlich Beulen in Querrichtung auftritt . Dieser Vorgang hängt mit der Spannungsverteilung über die Bandbreite (σ_{xx} und σ_{yy}) im kritische Zustand zusammen. Im Bereich $T > T_\lambda$ reduziert sich das zum Beulen erforderliche Torsionsmoment mit zunehmender Zugkraft und geht schließlich gegen Null, wenn die Zugkraft gegen die kritische Kraft bei reiner Zugbelastung geht. Auch die Beulformen nähern sich jenen des Beulens unter reinem Zug an. Die Beulamplituden werden in die Bandmitte im Vergleich zu jenen in der Umgebung der Bandenden kleiner.
- 3- beim Streifen 200, im Bereich $T < T_\lambda$ (Band-Längsrichtung Beulfigur), steigt die Halbwellenzahl mit zunehmender Zugkraft. Im Bereich $T > T_\lambda$ treten Beulen in Querrichtung auf und mit zunehmender Zugkraft steigt die Halbwellenzahl.

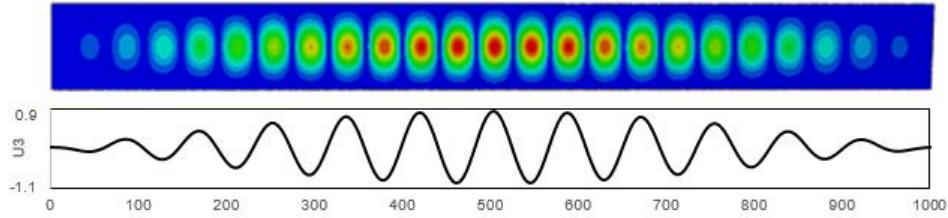


Abbildung 3.27 Beulform des Streifens L=1000[mm] – Zugkraft : F=2 [N] – Mode: 1

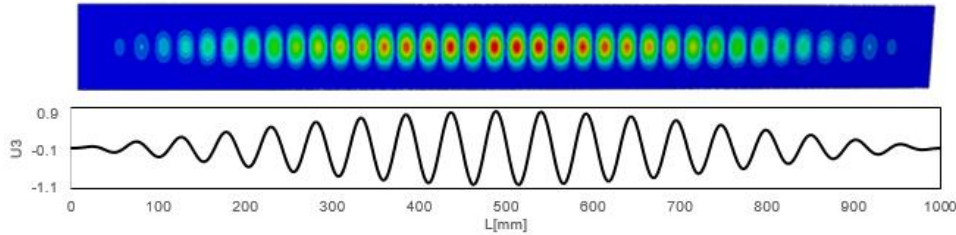


Abbildung 3.28 Beulform des Streifens L=1000[mm] – Zugkraft : F=8.75 [N] – Mode: 1

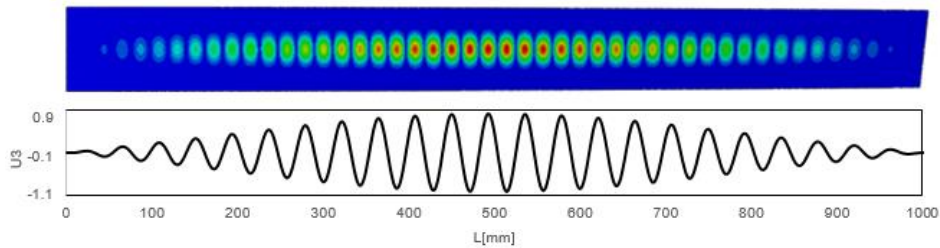


Abbildung 3.29 Beulform des Streifens L=1000[mm] – Zugkraft : F= 20 [N] – Mode: 1

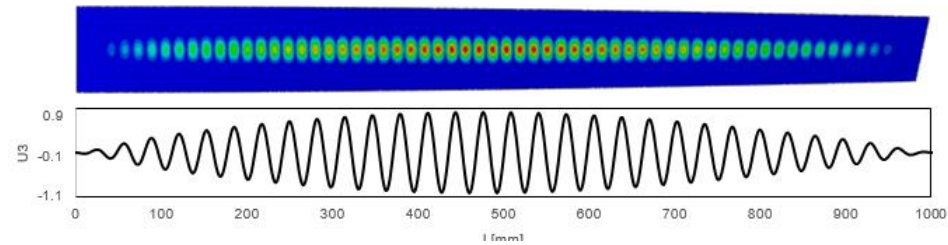


Abbildung 3.30 Beulform des Streifens L=1000[mm] – Zugkraft : F= 70 [N] – Mode: 1

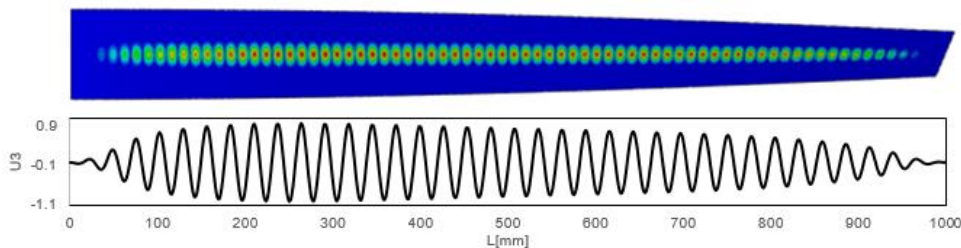


Abbildung 3.31 Beulform des Streifens L=1000[mm] – Zugkraft : F= 150 [N] – Mode: 1

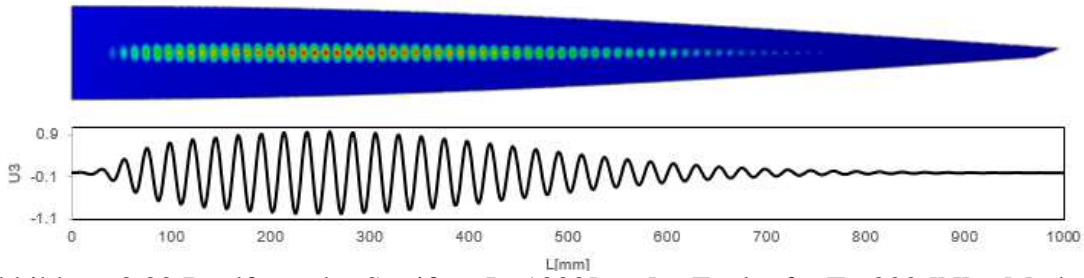


Abbildung 3.32 Beulform des Streifens $L=1000[\text{mm}]$ – Zugkraft : $F= 300 [\text{N}]$ – Mode: 1

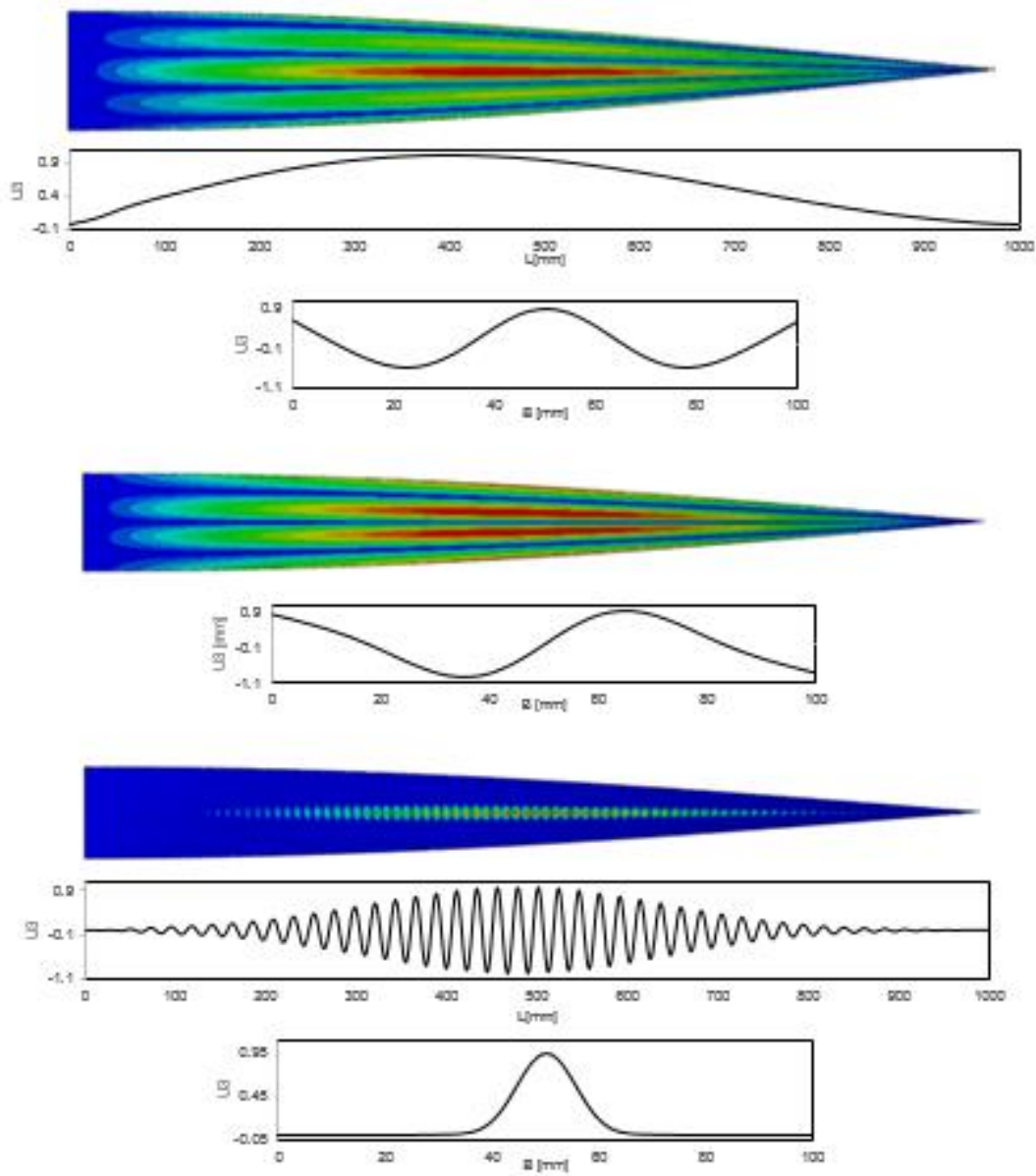


Abbildung 3.33 Beulformen des Streifens $L=1000[\text{mm}]$ – Zugkraft : $F= 350 [\text{N}]$
 Mode: 1,2,3– Eigenwert = 9.8968, 367.83, 559.71

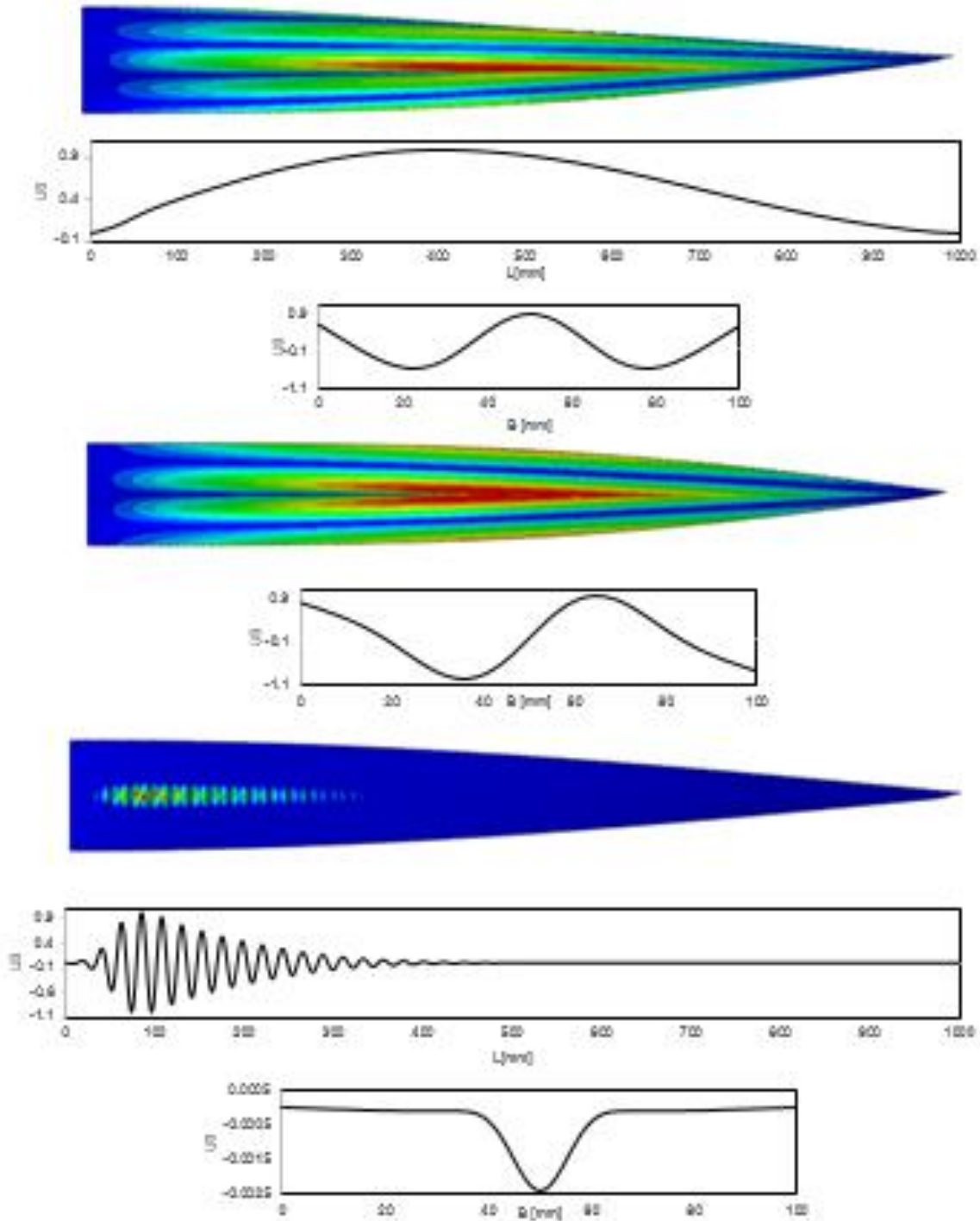


Abbildung 3.34 Beulformen des Streifens $L=1000$ [mm] – Zugkraft : $F= 400$ [N]
 Mode: 1,2,3– Eigenwert = 26.463, 410.91, 2178.9

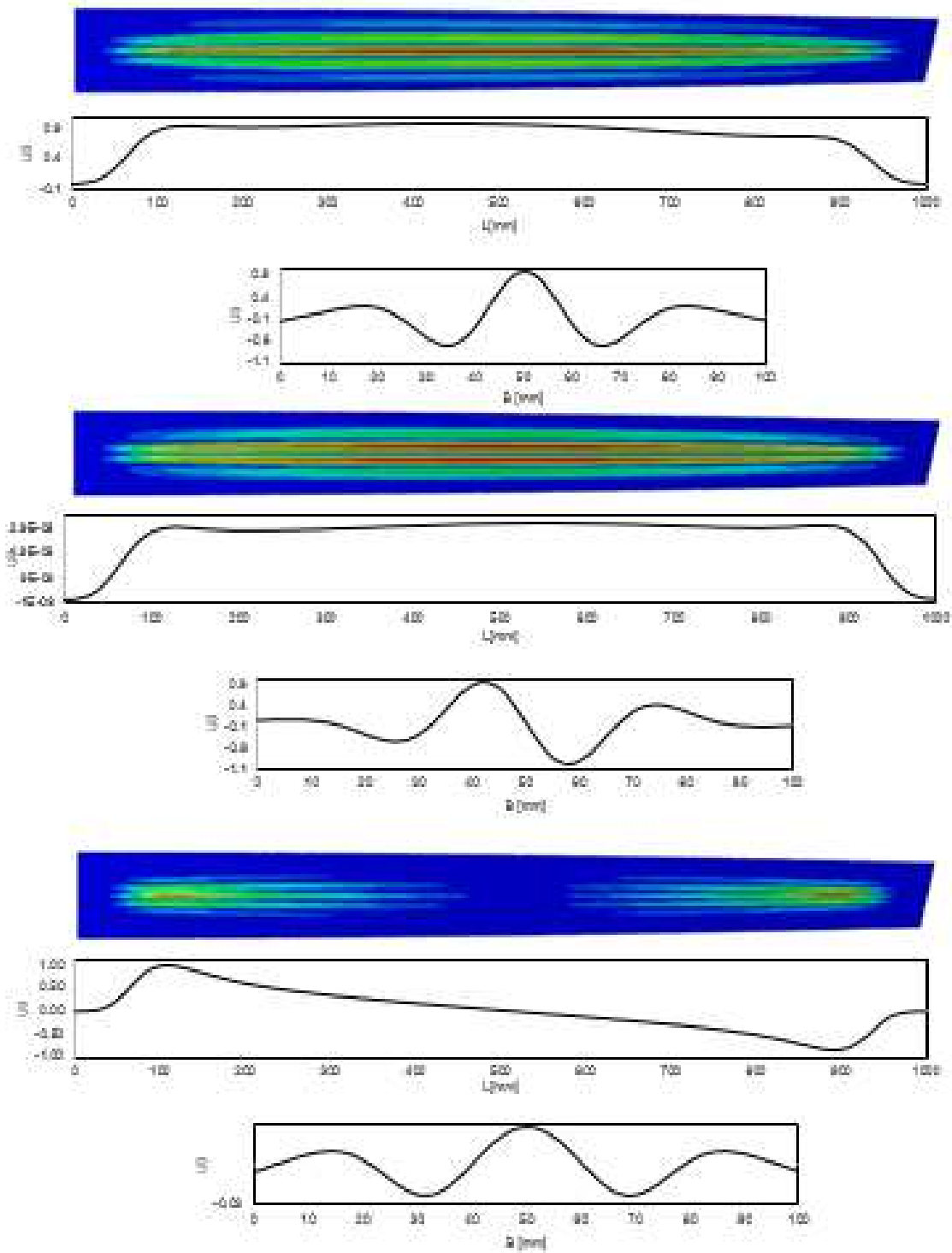


Abbildung 3.35 Beulformen des Streifens $L=1000$ [mm] – Zugkraft : $F= 8000$ [N]
 Mode: 1,2,3– Eigenwert = 10.851, 38.669, 658.32

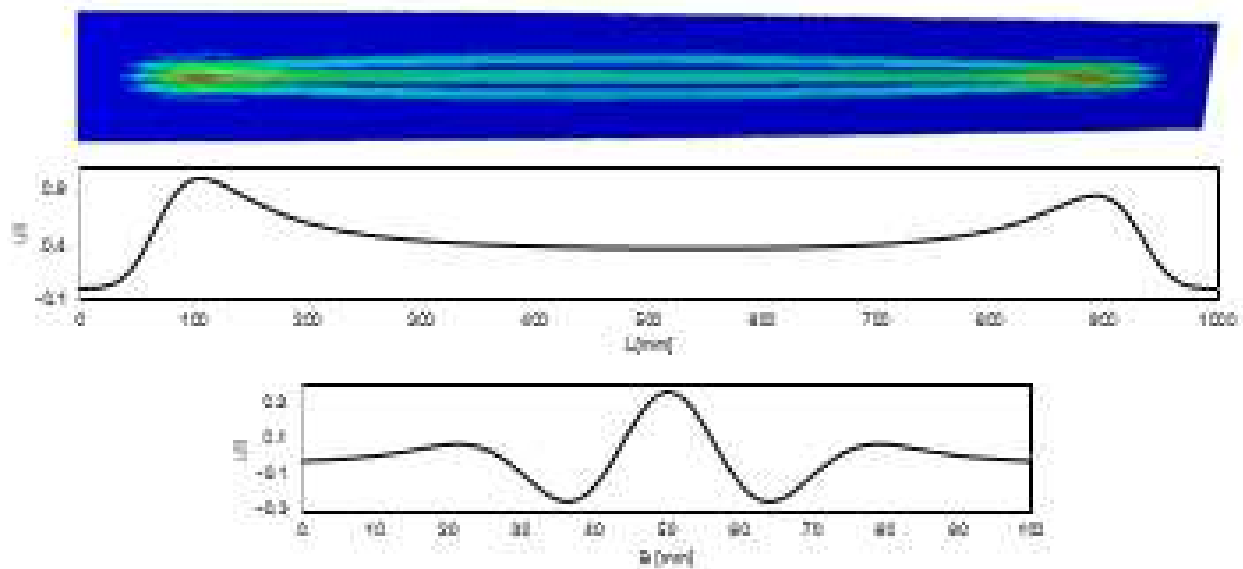


Abbildung 3.36 : Beulform des Streifens $L=1000[\text{mm}]$ – Zugkraft : $F= 10000 [\text{N}]$ – Mode: 1

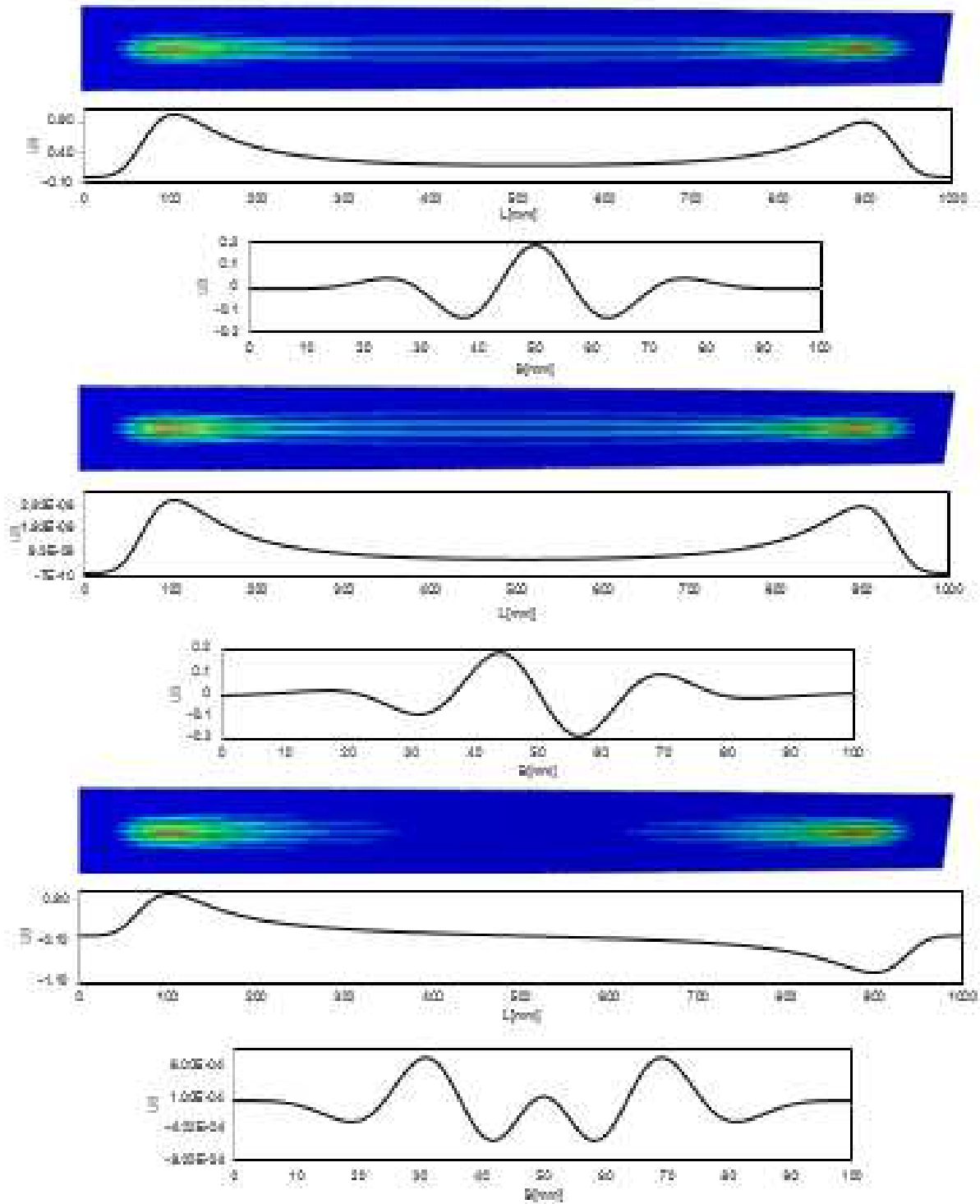


Abbildung 3.37 Beulformen des Streifens $L=1000$ [mm] – Zugkraft : $F= 11000$ [N]
Mode: 1,2,3– Eigenwert = 0.9692, 2.7166, 99.103

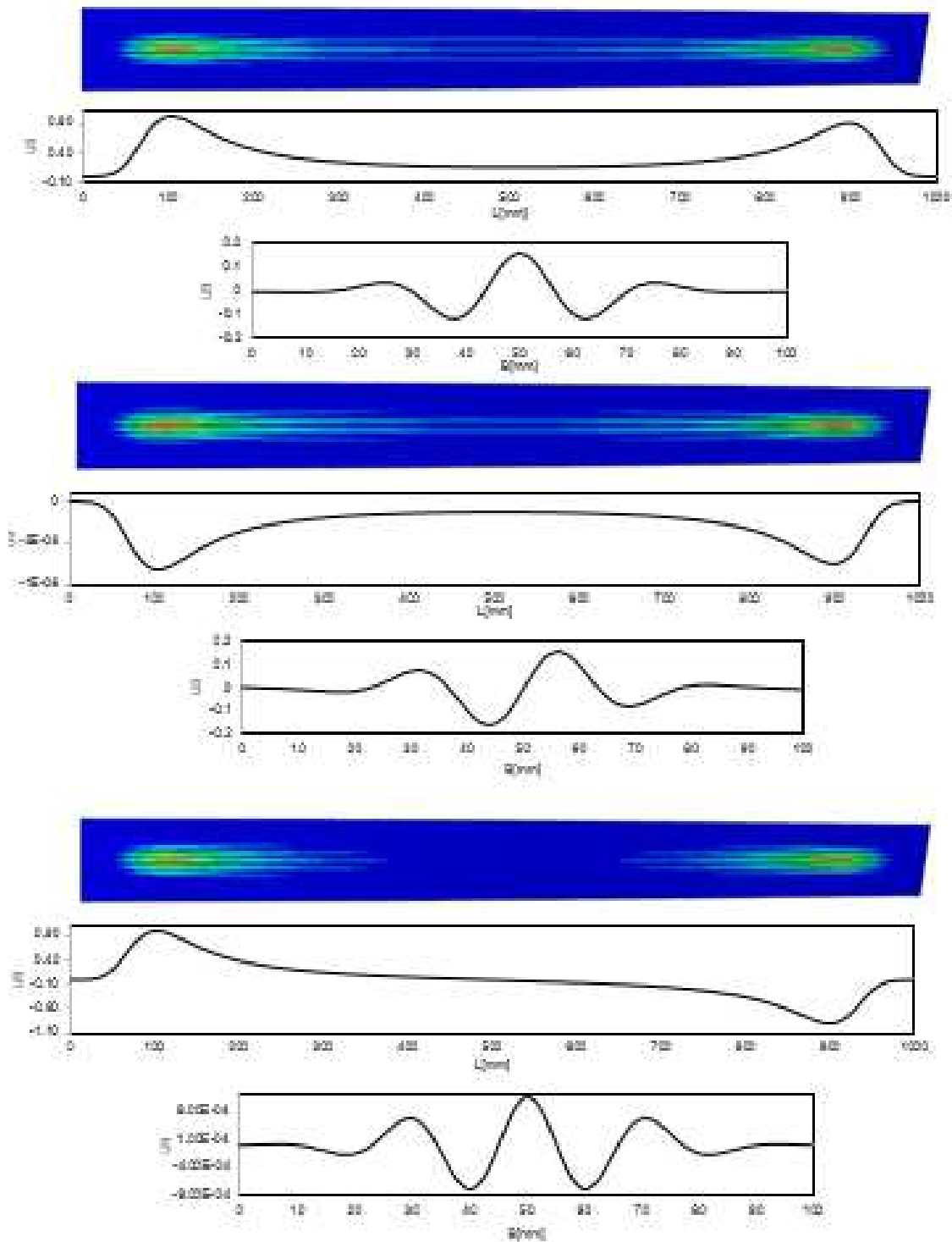


Abbildung 3.38 Beulformen des Streifens $L=1000$ [mm] – Zugkraft : $F= 11300$ [N]
 Mode: 1,2,3– Eigenwert = 0.67642, 1.2778, 60.656

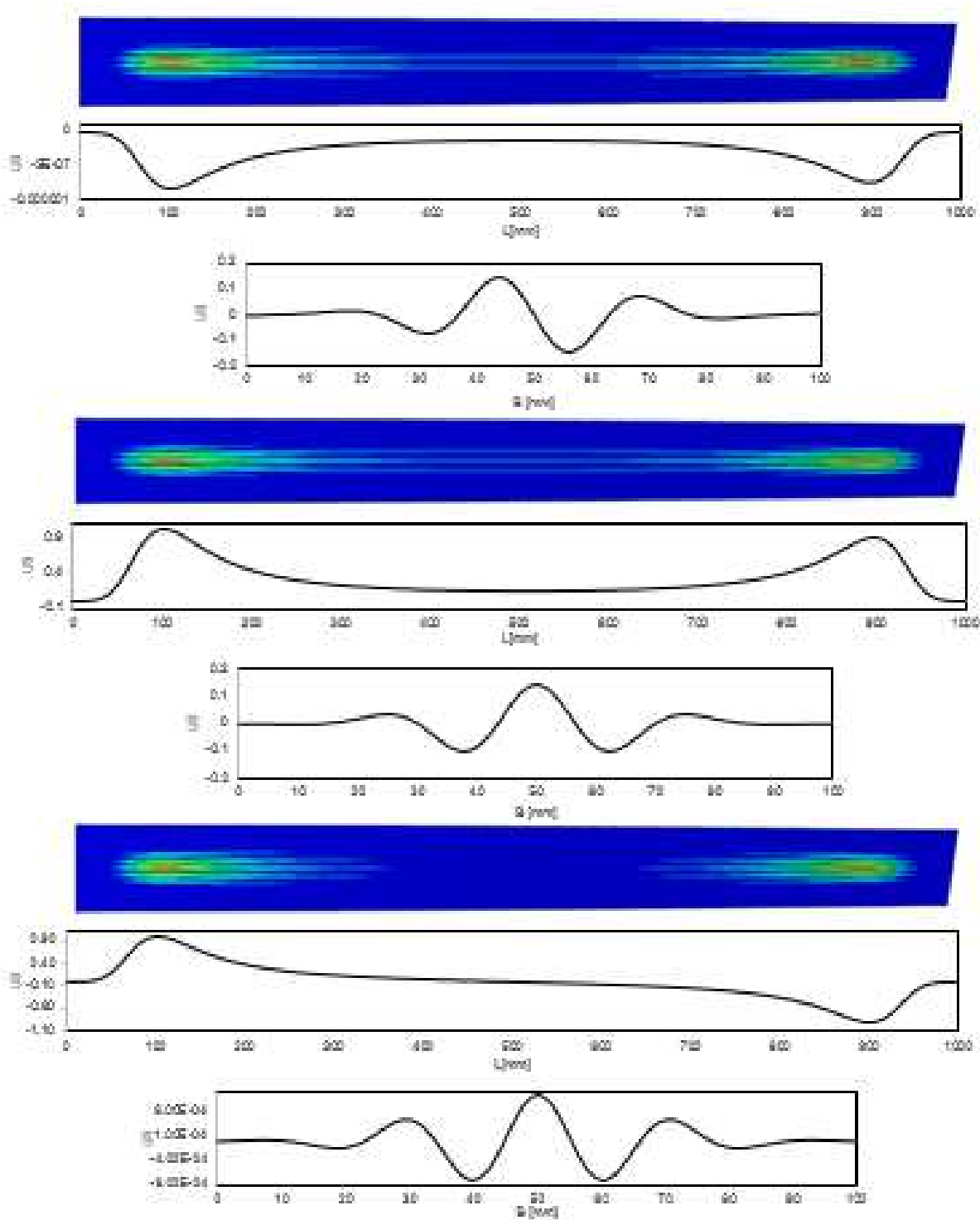


Abbildung 3.39 : Beulformen des Streifens $L=1000$ [mm] – Zugkraft $-F= 11450$ [N]
 Mode: 1,2,3– Eigenwert = 0.60132, 0.6111, 50.631

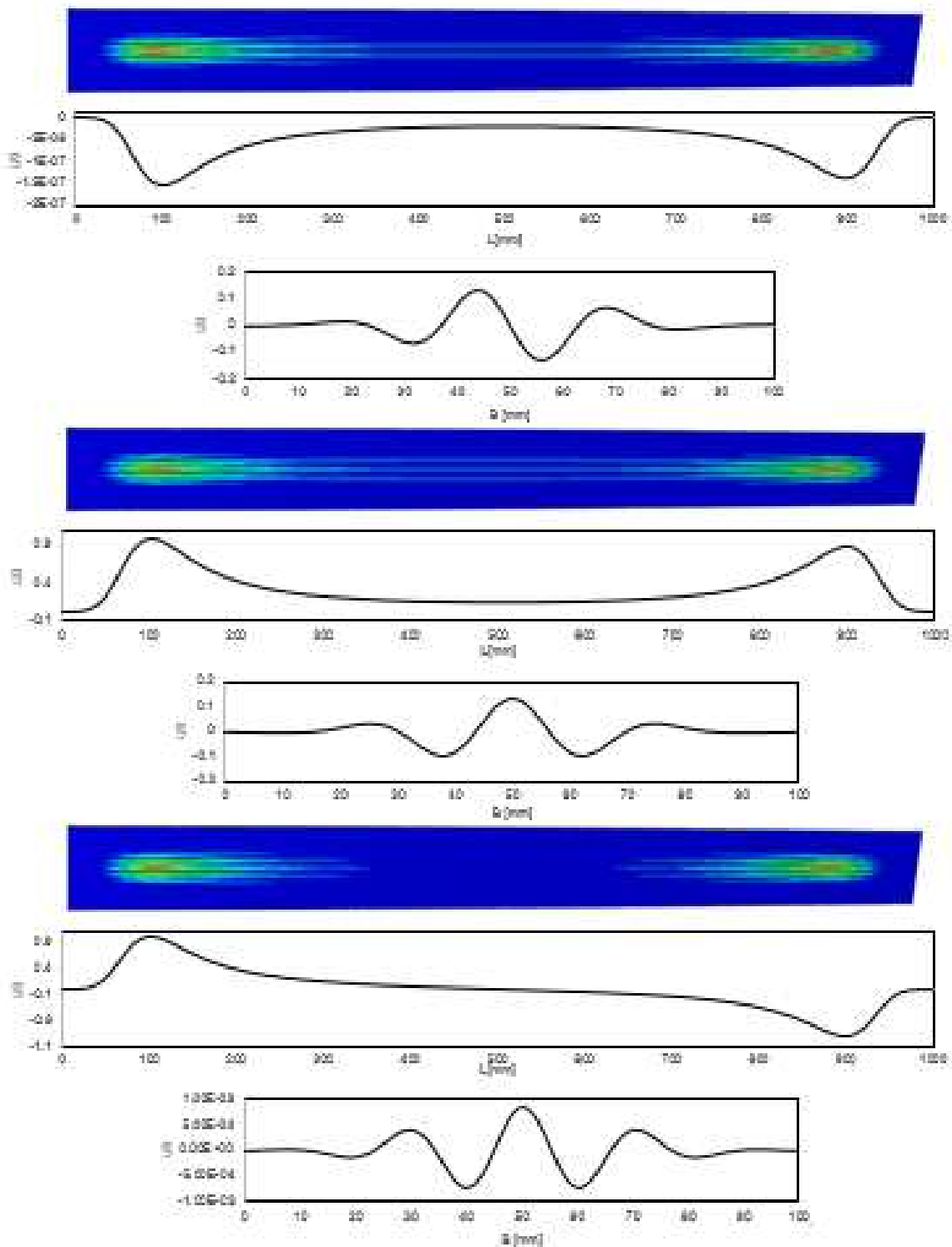


Abbildung 3.40 Beulformen des Streifens $L=1000$ [mm] – Zugkraft : $F= 11600$ [N]
 Mode: 1,2,3– Eigenwert = 0.3066, 0.31485, 46.380

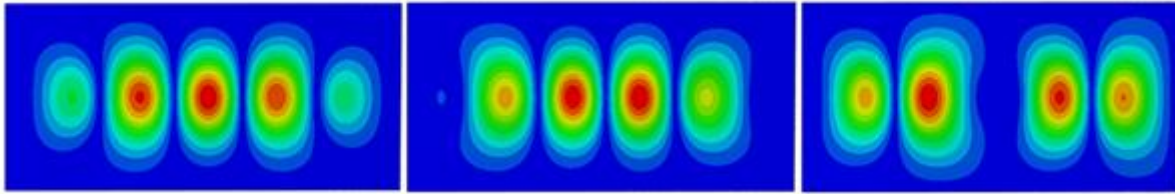


Abbildung 3.41 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ - Zugkraft $-F=3 [\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.0324, 0.0329, 0.077

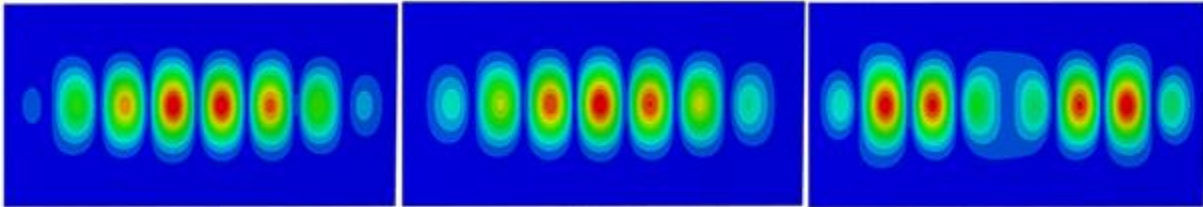


Abbildung 3.42 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ - $F=10[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.0987, 0.0995, 0.206

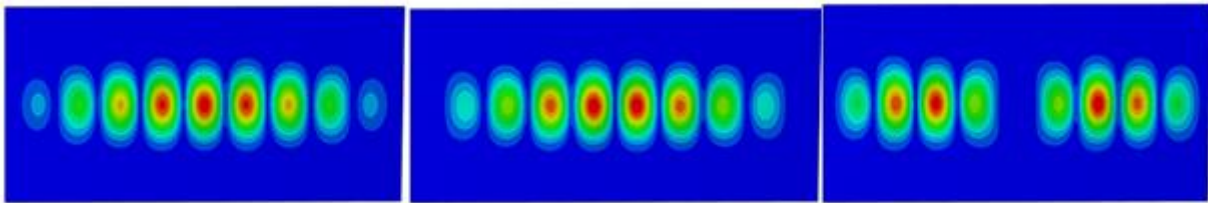


Abbildung 3.43 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ - $F=20[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.1299, 0.1333, 0.2915

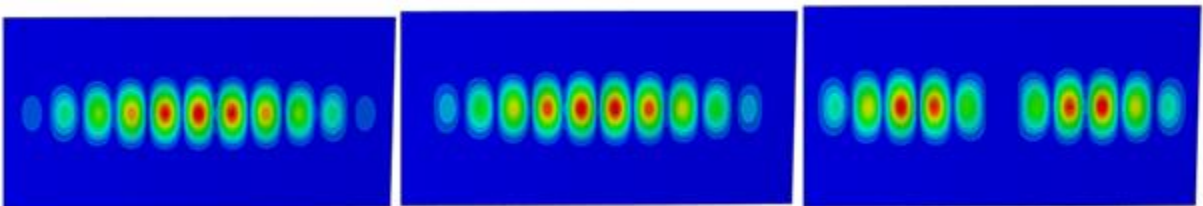


Abbildung 3.44 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ - $F=50[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.2202, 0.2228, 0.5097

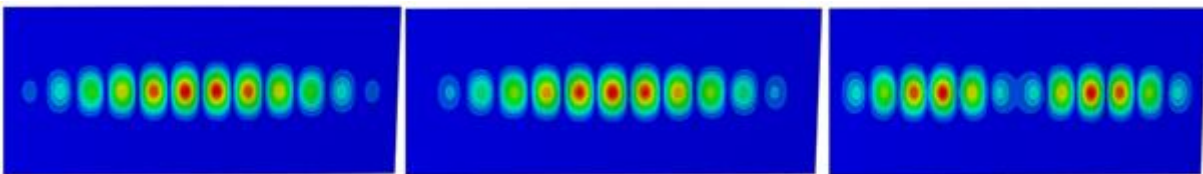


Abbildung 3.45 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ - $F=70[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.2875, 0.2902, 0.6512

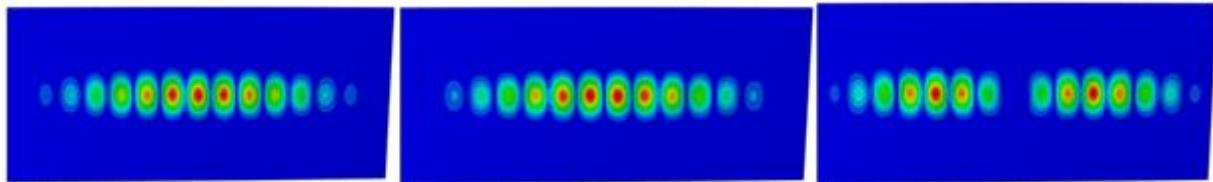


Abbildung 3.46 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=150[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.03349, 0.03402, 0.6877

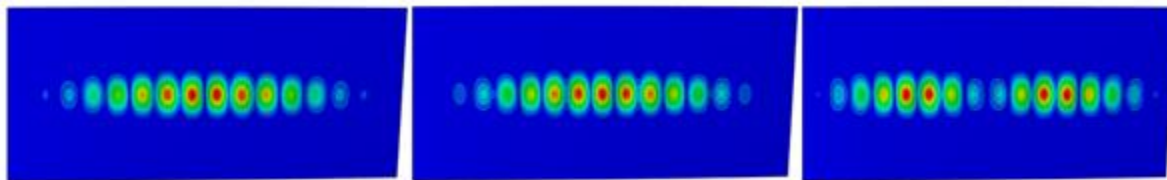


Abbildung 3.47 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=200[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.3435, 0.3439, 1.1740

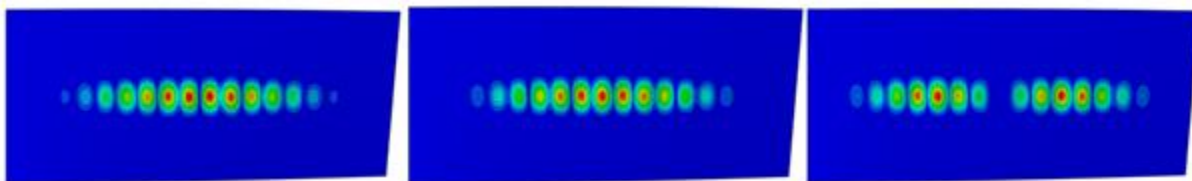


Abbildung 3.48 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=400[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.80381, 0.80387, 2.2824

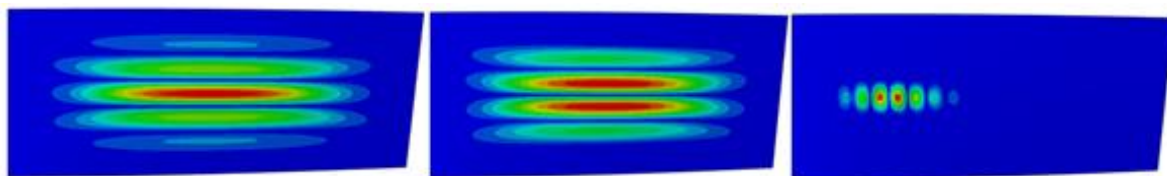


Abbildung 3.49 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=600[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 3.2034, 13.906, 36.509

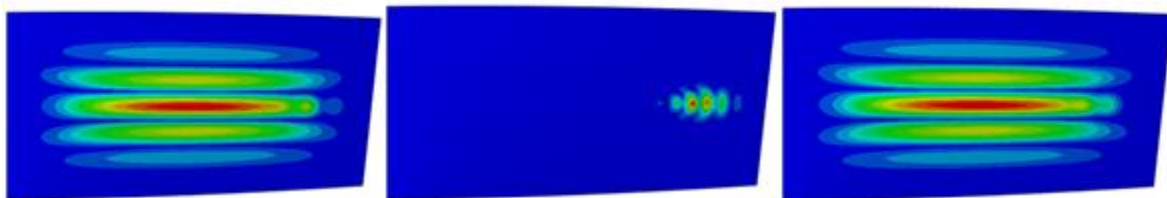


Abbildung 3.50 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=800[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 1.9041, 4.0453, 7.8548

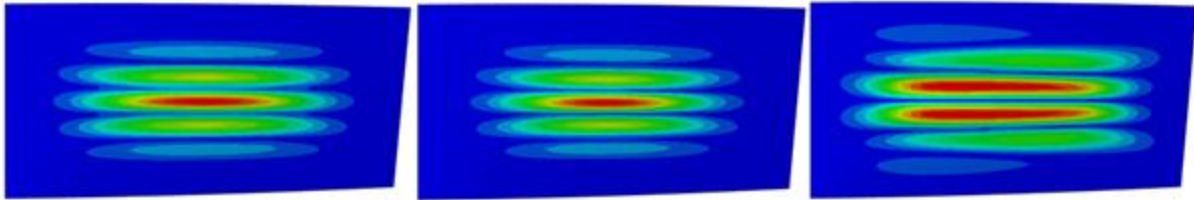


Abbildung 3.51 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=1000[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 6.9742, -454.44, 587.04

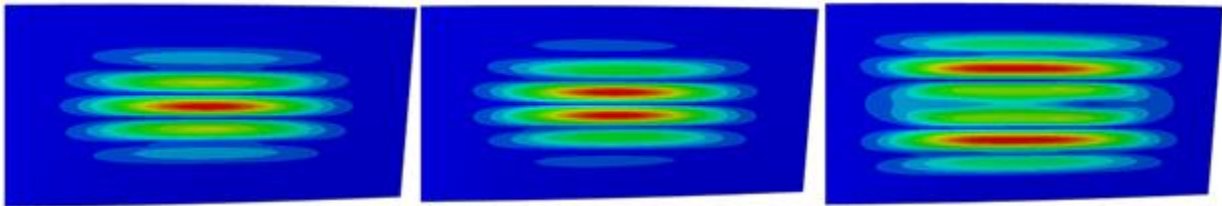


Abbildung 3.52 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=1200[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 26.666, 27.665, 1100.7

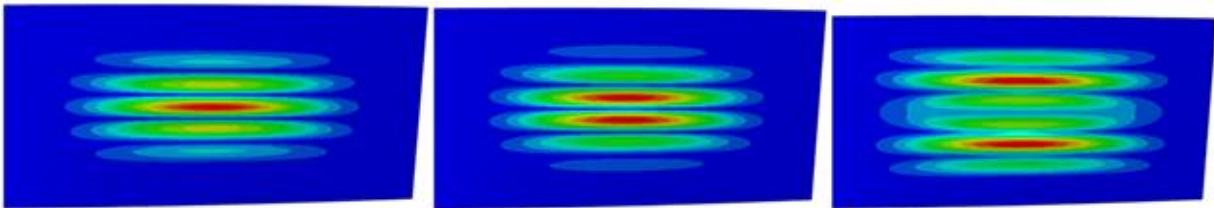


Abbildung 3.53 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=1400[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 1.8182, 1.8854, 840.87

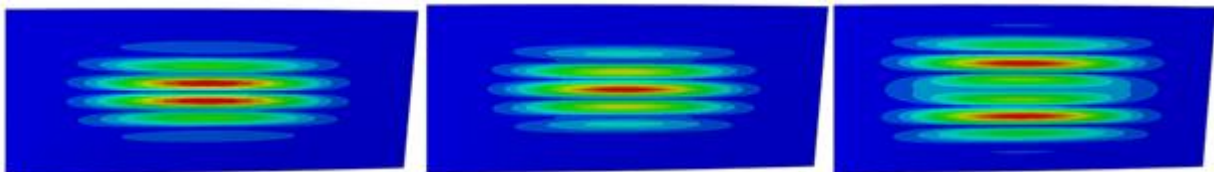


Abbildung 3.54 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=1600[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 1.8712, 1.9025, 900.73

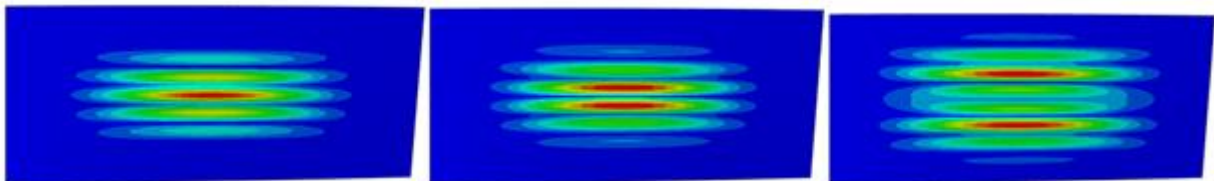


Abbildung 3.55 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=1800[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.91761, 1.1395, 971.26

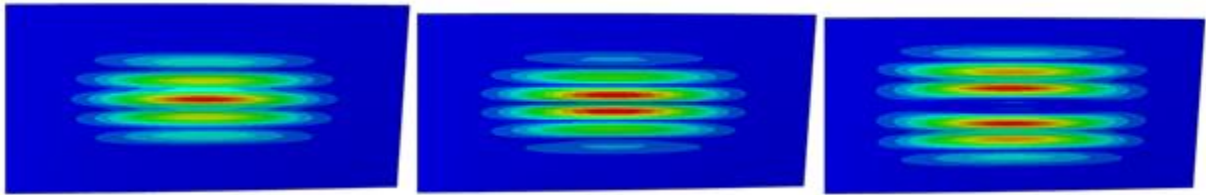


Abbildung 3.56 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=2000[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.34078, 0.35681, 1094.9

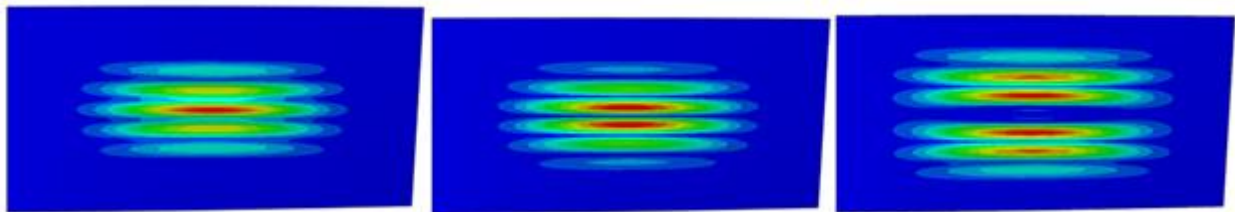


Abbildung 3.57 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=2200[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 4,1808, 4.6040, 1191.2

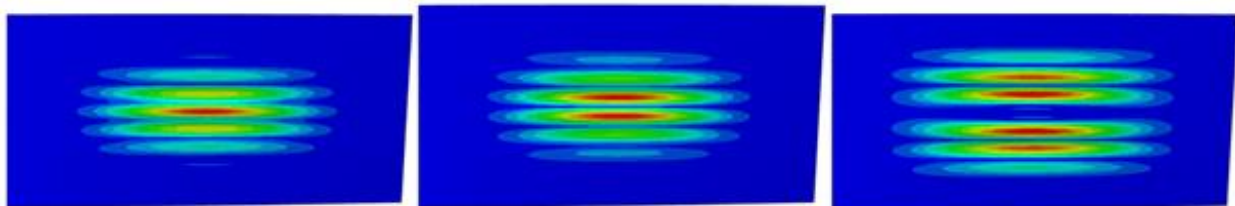


Abbildung 3.58 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=2400[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 1.1525, 1.1649, 1258.1

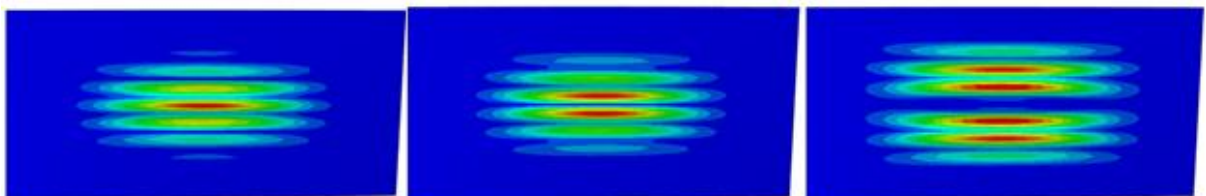


Abbildung 3.59 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=2600[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.6174, 0.6415, 1386.8

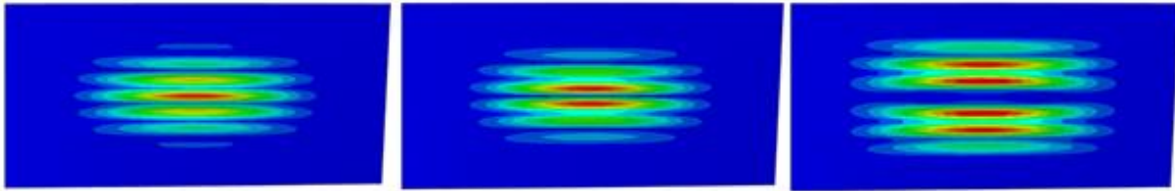


Abbildung 3.60 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=2800[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 1.9065, 1.9141, 1543.9

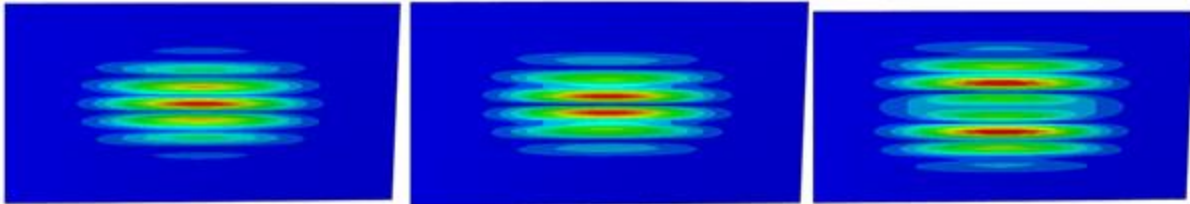


Abbildung 3.61 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=3000[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.65092, 0.65325, 1733.5

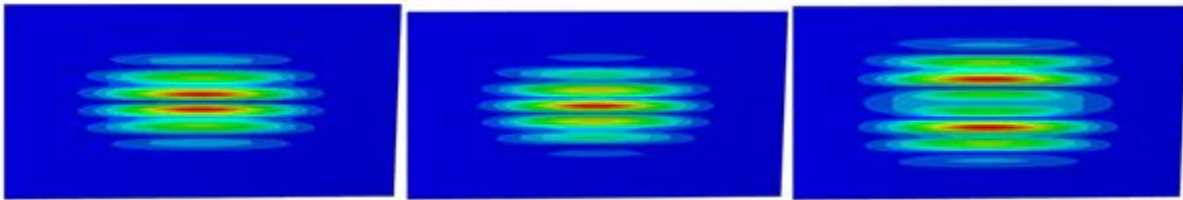


Abbildung 3.62 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=3200[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.49543, 0.49694, 1977.7

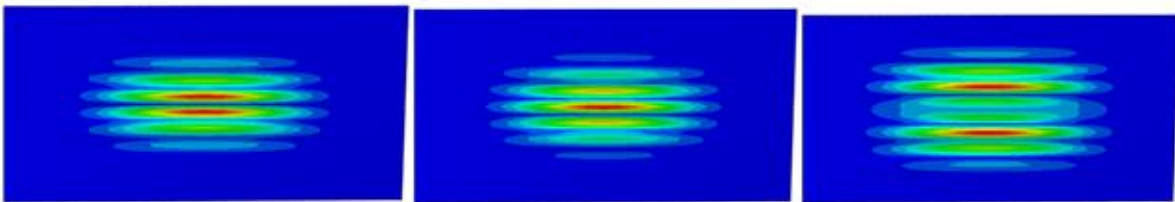


Abbildung 3.63 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ $-F=3400[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.24180, 0.24566, 2306.6

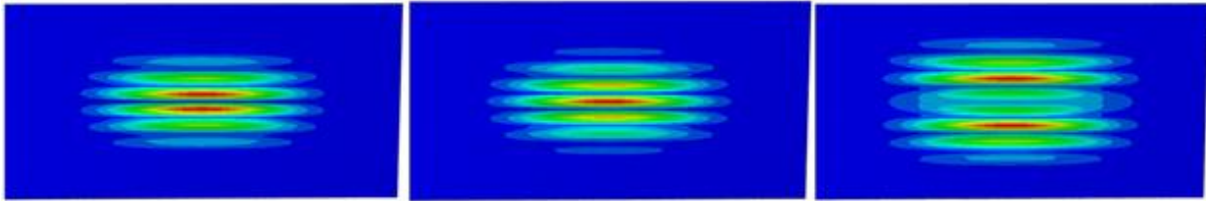


Abbildung 3.64 Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ - $F=3600[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.70656, 0.71142, 2789.9

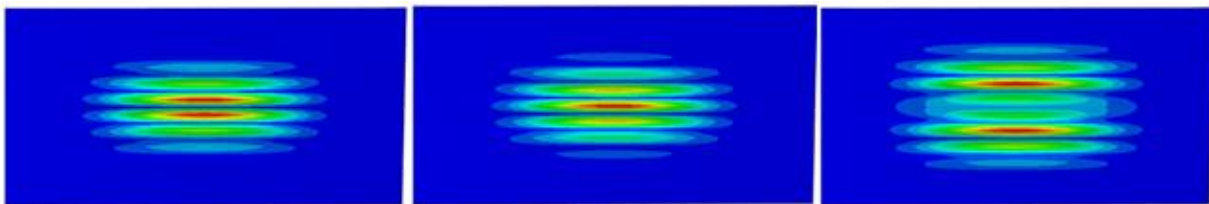


Abbildung 3.65: Beulformen des Streifens $L=200[\text{mm}]$ L_{200} - $F=3800[\text{N}]$
Mode: 1,2,3 – Eigenwert = 0.41915, 0.42403, 3612

3.6 Analytische Studien

Anhand der Arbeiten von Green [10] und Chopin [14][15][16] und in der Literatur bereits vorhandener Ergebnisse wird hier mittels der in den vorigen Kapiteln beschriebenen Ergebnisse der Parameterstudien eine Verbindung zu den ssFvK und cFvK Gleichungen hergestellt.

In der Arbeit von Chopin wurden zwei Annahmen getroffen:

- 1- Falls $\hat{t} \leq \hat{L}^{-2} \leq 1$, wird der Streifen als ein Streifen mit endlicher Länge betrachtet.
- 2- Falls $\hat{L}^{-2} \leq \hat{t} \leq 1$, wird der Streifen als ein Streifen mit unendlicher Länge betrachtet.

In diesen Berechnungen sind Wanddicke und Länge des Streifens über die hier definierten dimensionslosen Größen \hat{t} und \hat{L} in Rechnung gestellt :

$$\hat{t} = \frac{t}{B} = \frac{0.05}{100} = 0.0005$$

$$\hat{L} = \frac{L}{B} = \begin{cases} \frac{1000}{100} = 10 \\ \frac{200}{100} = 2 \end{cases} \quad \hat{L}^{-2} = \begin{cases} 0.01 > t = 0.0005 \\ 0.25 > t = 0.0005 \end{cases}$$

In den hier untersuchten Fällen ist $\hat{t} \leq \hat{L}^{-2} \leq 1$ und es wird die erste Annahme im folgenden Abschnitt für weitere Berechnungen berücksichtigt. Mittels der oben genannten Grundlagen werden nachfolgend Zusammenhänge zwischen kritischen Verdrehwinkeln und Torsionsmomenten gefunden.

3-6-1 Spannungen in Längs- und Querrichtung nach ssFvK und cFvK

Gleichungen

1937 hat Green [10] die Gleichung 3.1 für die Spannungen in Längsrichtung mittels der allgemeinen Form der Föppl-von Kàrmàn (FvK) die Gleichung (ss-FvK) herleitet. Damals hat er das Auftreten von Spannungen in Querrichtungen nicht bedacht. In Chopin [14] 2014 wurde die Lösung von Green weiter entwickelt, womit die Gleichungen 3.1 und 3.2 für die Spannungen in Längs- und Querrichtung dargestellt wurden. Diese Theorie basierend auf der kovarianten Form von Föppl-von Kàrmàn Gleichungen (cfvk).

$$\sigma^{ss}(r) = T + \frac{\eta^2}{2} \left(\hat{r}^2 - \frac{1}{12} \right) \quad (3.1)$$

$$\sigma^{rr}(r) = \frac{\eta^2}{2} \left(\hat{r}^2 - \frac{1}{4} \right) \left[T + \frac{\eta^2}{4} \left(\hat{r}^2 + \frac{1}{12} \right) \right] \quad (3.2)$$

$$T = \frac{F}{EtB} \quad (3.3)$$

$$\eta = \varphi \frac{B}{L} \quad (3.4)$$

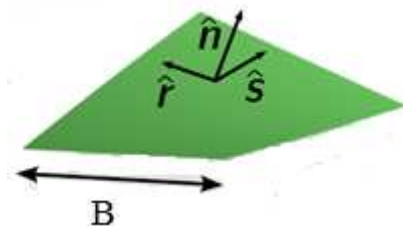


Abbildung 3.66 Die Längs- und Querkordinaten r und s nach der Arbeit von Chopin, entnommen aus [14]

Darin sind :

$$Y = Et$$

$$F = \text{Zugkraft [N]}, E = 70000 \text{ [N/mm}^2\text{]}, t = 0.05 \text{ [mm]}$$

φ = Winkel [Radian], ermittelt aus numerischen Untersuchung

$$B = 100 \text{ [mm]}, L = 200 \text{ [mm]}, 1000 \text{ [mm]}$$

$$\hat{r} = \frac{r}{B}, \quad \frac{-50}{100} < \hat{r} < \frac{+50}{100}, \quad -50 < r < +50$$

In den folgenden Abbildungen wurden die Diagramme für die ermittelten Spannungen in Längs- und Querrichtungen, mittels Gleichung 3.1 und 3.2 ermittelt, dargestellt. Diese Ergebnisse stimmen mit den numerisch ermittelten Ergebnissen – siehe Abbildungen 3.15 bis 3.26 - überein.

Anmerkung 3.6 : die mittels Gleichungen 3.1 und 3.2 berechneten Spannungen sind dimensionslos. Die real vorliegenden Spannungen ergeben sich aus den mit dem E-Modul multiplizierten Werten aus Gleichungen 3.1 und 3.2 mit [14].

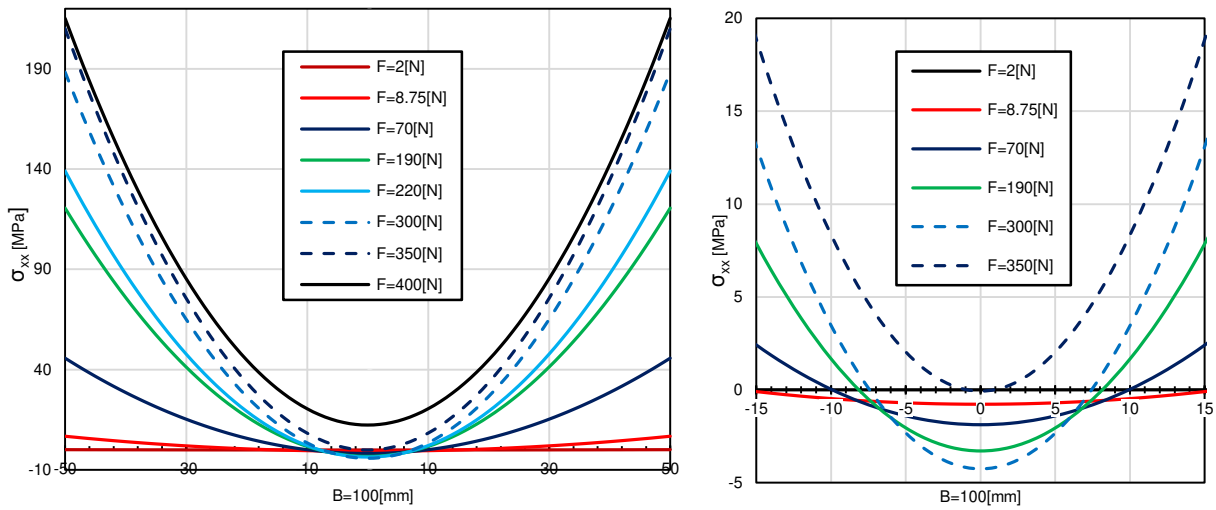


Abbildung 3.67 Normalspannungsverläufe (σ_{xx}) über Streifenbreite nach Green- Gleichung 3.1 , $L=1000 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=2$ [N] bis 400 [N]

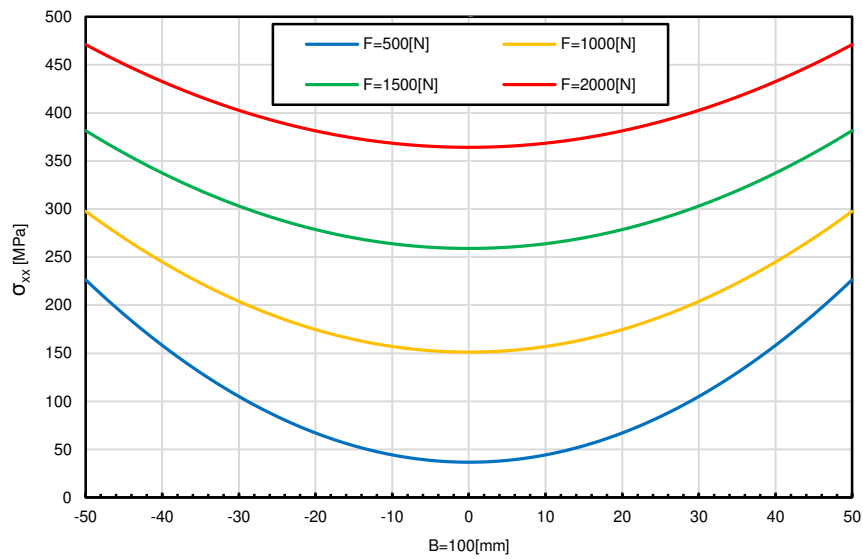


Abbildung 3.68 Normalspannungsverläufe (σ_{xx}) über Streifenbreite nach Green- Gleichung 3.1 , $L=1000 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=500$ [N] bis 2000 [N]

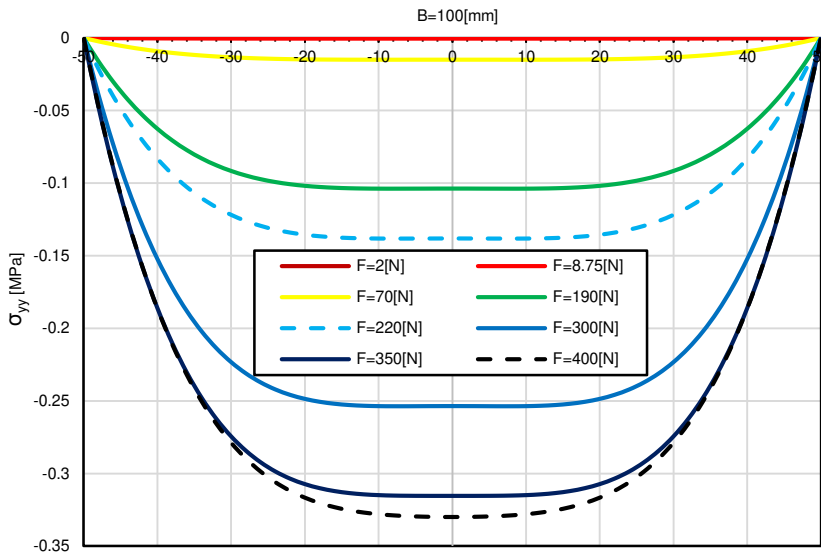


Abbildung 3.69 Normalspannungsverläufe (σ_{yy}) über Streifenbreite nach Chopin- Gleichung 3.2 , $L=1000 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=2$ [N] bis 400 [N]

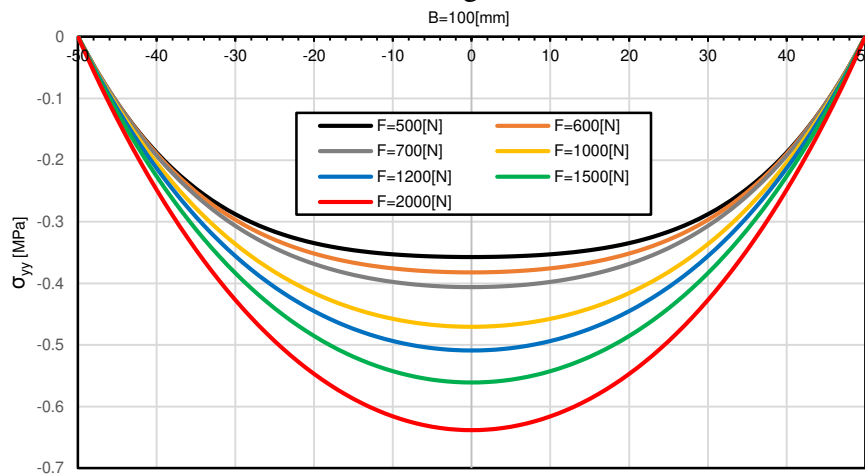


Abbildung 3.70 Normalspannungsverläufe (σ_{yy}) über Streifenbreite nach Chopin- Gleichung 3.2 , $L=1000 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=500$ [N] bis 2000 [N]

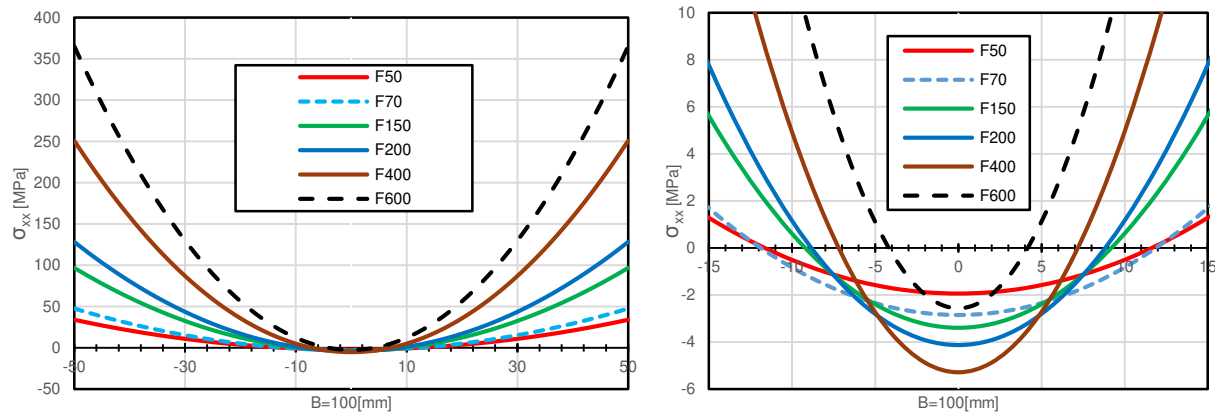


Abbildung 3.71 Normalspannungsverläufe (σ_{xx}) über Streifenbreite nach Green- Gleichung 3.1 , $L=200 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=50$ [N] bis 600 [N]

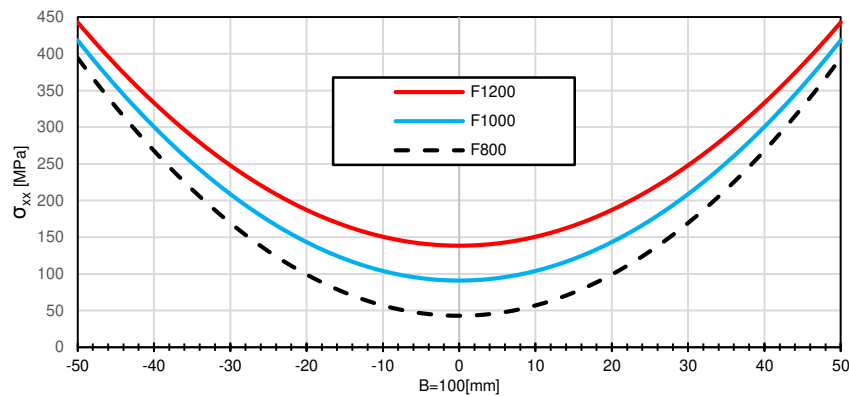


Abbildung 3.72 Normalspannungsverläufe (σ_{xx}) über Streifenbreite nach Green- Gleichung 3.1 , $L=200 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=800$ [N] bis 1200 [N]

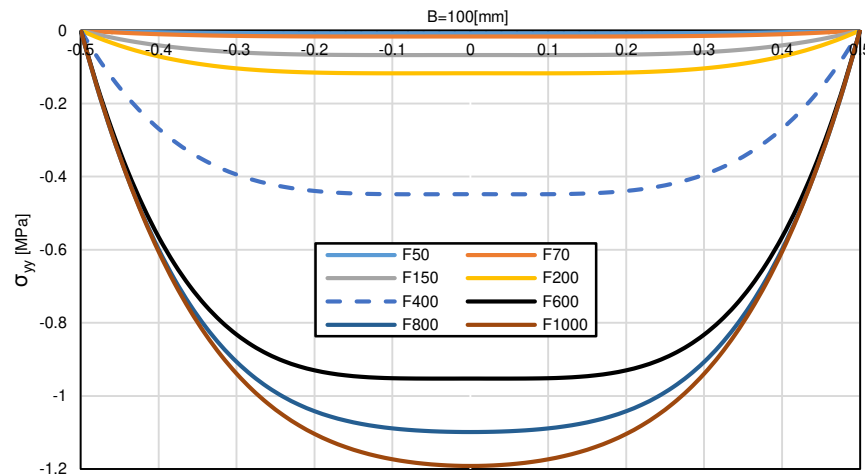


Abbildung 3.73 Normalspannungsverläufe (σ_{yy}) über Streifenbreite nach Chopin- Gleichung 3.2 , $L=200 \times 100 \times 0.05$ [mm], Zugkraft $F=50$ [N] bis 1000 [N]

3-6-2 λ - Punkt : Modusübergang

Unter der Annahme, ein endlicher Streifen ($\hat{t} \leq \hat{L}^{-2} \leq 1$), und Berücksichtigung der Skalierungsanalyse von Chopin aus den cFvK Gleichungen [14], ergibt sich das folgende Verhältnis zwischen der Zugkraft T_λ , bei welcher der grundsätzliche Modewechsel erfolgt, und der Wanddicke sowie der Länge des Streifens :

$$T_\lambda \sim \left(\frac{t}{L}\right)^{2/3} \quad (3.5)$$

T_λ = die dimensionslose Zugkraft im λ -Punkt

Wenn die Zugkraft T_λ überschritten wird, wechselt der erste Beulmodus von Welligkeit in Längs- zu Welligkeit in Querrichtung. Mit dem Vorfaktor k_L ergibt Gleichung 3.5 die Gleichung 3.6:

$$T_\lambda = k_L \left(\frac{t}{L}\right)^{2/3} \quad (3.6)$$

Der Vorfaktor k_L hängt vom Längen-Breiten- Verhältnis des Streifens ab. In dieser Arbeit wurde für den kurzen Streifen $L=200[\text{mm}]$, wird der Modusübergang bei der Zugkraft $F=600[\text{N}]$ bzw. bei $T_\lambda = 0.0017$ und für den langen Streifen $L=1000[\text{mm}]$ bei der Zugkraft $F=350[\text{N}]$ bzw. $T_\lambda = 0.001$ in den FE-Analysen gefunden. Mit diesen Werten ergibt sich $k_{200} = 0.43$ bzw. $k_{1000} = 0.74$ e aus der Gleichung 3.7:

$$k_L = \left(\frac{T_\lambda^3 L^2}{t^2}\right)^{1/3} \quad (3.7)$$

Eine Zusammenfassung von obigen Größen ist in Tabelle 3.7 dargestellt:

L	F_λ	T_λ	k_L
200	600	0.0017	0.43
1000	350	0.001	0.74

Tabelle 3.7 Faktor k_L beim Modusübergang für die Streifen $L=200[\text{mm}]$ und $L=1000[\text{mm}]$

In den nächsten Abschnitten werden die folgenden Bereiche nach ss-FvK und cFvK Gleichungen überprüft :

Bereich "A" : $T < T_\lambda$ nach ss-FvK

Bereich "B" : $T > T_\lambda$ nach cFvK

3-6-3 Überprüfung des kritischen Winkels im Bereich "A" : $T < T_\lambda$ nach ss-FvK

Unter Anwendung der Spannungsgleichung in Längsrichtung nach Green (ss-FvK) ergibt sich für die Stabilitätsgrenze im Bereich "A" folgender Zusammenhang zwischen dem kritischen Verdrehwinkel und der Zugkraft [9],[10],[14]:

$$\eta_{lon} = \sqrt{24T} \quad (3.8)$$

(Der Index "lon" steht für "Beulen in longitudinale, d.h. , in Längsrichtung".)

In dieser Gleichung ist T dimensionslos und der kritische Verdrehwinkel φ_{lon}^* wird aus η_{lon} nach Gleichung 3.9 bestimmt :

$$\eta_{lon} = \varphi_{lon}^* \frac{B}{L} \quad (3.9)$$

φ_{lon}^* = Winkel [radian]

Wenn man die Gleichung 3.9 in 3.8 einsetzt, folgt :

$$\varphi_{lon}^* = \frac{L}{B} \sqrt{24T} \quad (3.10)$$

Für die beiden Streifen, $L = 200$ [mm] und $L = 1000$ [mm], wurden die dimensionslosen Zugkräfte F entsprechend Gleichung 3.3 in die dimensionslose Form, T , umgerechnet und in Gleichung 3.10 eingesetzt. So können die kritischen Winkel abgeschätzt werden. Diese Werte nähern sich mit steigenden Werten der Zugkraft mehr und mehr den kritischen Winkeln, die mittels numerische Berechnung von Eigenwerten ermittelt wurden, an. Die Ergebnisse sind in Tabellen 3.8 und 3.9 zusammengefasst :

F[N]	T[dimensionslos]	φ_{lon}^* [nach GL.3]	φ^* [ABAQUS]
3	8.57143E-06	0.028685487	0.039
10	2.85714E-05	0.052372294	0.063
20	5.71429E-05	0.074065608	0.085
50	0.000142857	0.117108009	0.128
70	0.0002	0.138564065	0.152
150	0.000428571	0.202837021	0.214
200	0.000571429	0.234216018	0.246
400	0.001142857	0.331231468	0.342
600	$T_\lambda = 0.001714286$	0.405674042	0.410

Tabelle 3.8 Zugkraft-Winkel nach Green Gleichung ss-fvk und ABAQUS für den Streifen L200 im Bereich A

F[N]	T[dimensionslos]	φ_{lon}^* [nach GL.3]	φ^* [ABAQUS]
2	5.71429E-06	0.117108009	0.161166
8.75	0.000025	0.244948974	0.293813
20	5.71429E-05	0.37032804	0.41828
70	0.0002	0.692820323	0.737743
150	0.000428571	1.014185106	1.05593
190	0.000542857	1.141427677	1.1899
220	0.000628571	1.228239158	1.27699
300	0.000857143	1.434274331	1.48422
350	$T_\lambda = 0.001$	1.549193338	1.55

Tabelle 3.9 Zugkraft-Winkel nach Green Gleichung ss-fvk und ABAQUS für den Streifen L1000 im Bereich A

3-6-4 Vorfaktoren zur Berechnung des kritischen Winkels im Bereich "B" : $T > T_\lambda$

In diesem Bereich tritt das Beulen in Querrichtung bei einer Zugkraft auf, für welche $T > T_\lambda$ ist. Gemäß Skalierungsanalyse der Spannungsgleichung in Querrichtung von Chopin (cFvK) für einen endlich langen Streifen ($\hat{t} \leq \hat{L}^{-2} \leq 1$) [14], gilt bei der Stabilitätsgrenze im Bereich "B" folgender Zusammenhang zwischen dem kritischen Verdrehwinkel und der Zugkraft:

$$\eta_{tr} \sim \sqrt{\frac{t}{L}} T^{-1/4} \quad (3.11)$$

(Der Index "tr" steht für "Beulen in transversaler Richtung".)

Die Größe η_{tr} ist vom Längen-Breiten-Verhältnis des Streifens abhängig. Nach Einführung eines Vorfaktors gilt:

$$\eta_{tr} = k \sqrt{\frac{t}{L}} T^{-1/4} \quad (3.12)$$

$$\eta_{tr} = \frac{B}{L} \varphi_{tr}^* \quad (3.13)$$

Setzt man Gleichung 3.13 in 3.12 ein, so ergibt sich die Gleichung 3.14 zur Berechnung des Vorfaktors k:

$$k = \frac{B}{L} \varphi_{tr}^* \left(\frac{t}{L}\right)^{-1/2} T^{1/4}. \quad (3.14)$$

Da der kritische Verdrehwinkel φ_{tr}^* im Bereich "B" bereits durch die numerische Parameterstudie in Abhängigkeit von der Zugkraft, also auch von der Größe T, ermittelt wurde, kann k aus Gleichung 3.14 für beide Streifen bestimmt werden. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 3.10 und 3.11

dargestellt. Die zugehörigen k-Winkel und k-Zugkraft Diagramme wurden für den kurzen und langen Streifen erstellt. Sie sind in den Abbildungen 3.74 bis 3.77 dargestellt.

F[N]	T[dimensionslos]	φ_{tr}^* [radian]	k[dimensionslos]
1000	0.002857143	0.387	1.239980502
1200	0.003428571	0.373	1.265344995
1400	0.004	0.352	1.276445069
1600	0.004571429	0.333	1.251908705
1800	0.005142857	0.314	1.224537857
2000	0.005714286	0.294	1.189174974
2200	0.006285714	0.275	1.143148935
2400	0.006857143	0.255	1.037745784
2600	0.007428571	0.235	0.975684006
2800	0.008	0.216	0.913568772
3000	0.008571429	0.195	0.839098436
3200	0.009142857	0.175	0.76528558
3400	0.009714286	0.153	0.67929614
3600	0.010285714	0.129	0.580982863
3800	0.010857143	0.101	0.461068295

Tabelle 3.10 Zugkraft-winkel- k. Nach cfvk für den Streifen L200 im Bereich "B"

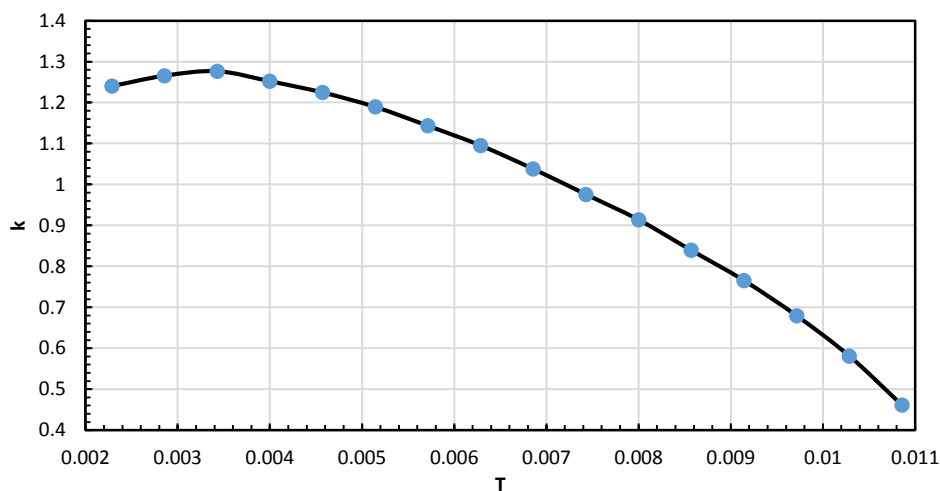


Abbildung 3.74 Zugkraft- k Diagramm nach cfvk für den Streifen L=200[mm] im Bereich "B"

F[N]	T[dimensionslos]	φ_{tr}^* [radian]	k[dimensionslos]
400	0.153832113	1.52291	2.800091512
500	0.145485431	1.4737	2.865065622
600	0.139003006	1.42901	2.907743338
684.24	0.134511647	1.399	2.941730059
700	0.133748061	1.39015	2.939809324
1000	0.122338177	1.29464	2.993174317
1200	0.116887129	1.24513	3.012957443
1500	0.110545022	1.18333	3.027691898
1700	0.107139539	1.14947	3.034539957
2000	0.102873734	1.10534	3.039039706
2079.29	0.101878663	1.095	3.04001603
3000	0.092956913	1.001	3.04577193
3921.1	0.086938076	0.914	2.97359052
4000	0.086506155	0.9079	2.96849282
4758.32	0.082832085	0.863	2.94684434
5185.98	0.081068903	0.842	2.93766852
6000	0.078167135	0.8154	2.95047208
6655.82	0.076166081	0.775	2.87796219
7628.49	0.073612634	0.738	2.8356263
8000	0.072742715	0.7259	2.82248916
8045.1	0.072640553	0.721	2.80737944
8621.06	0.071395664	0.7	2.77313617
8733.78	0.071164179	0.696	2.76625869
8741.25	0.07114897	0.697	2.77082535
8820.35	0.070988917	0.692	2.75715091
10000	0.068795813	0.6326	2.60083126
11000	0.067175953	0.5661	2.38355027
11300	0.066725586	0.5446	2.3085019
11450	0.06650597	0.5336	2.2693432
11600	0.053031938	0.5225	2.22937836

Tabelle 3.11 Zugkraft-winkel- k. Nach cfvk für den Streifen L=1000 [mm] im Bereich "B"

Es wäre zu erwarten, dass "k" als Proportionalitätsfaktor unabhängig von T ist. Die ermittelten k-Werte in den Tabellen 3.10 und 3.11 sind allerdings nicht konstant. Für den kurzen Streifen (L = 200 mm) ist k für Zugkräfte bis etwa 2000 N als näherungsweise konstant zu betrachten ($1,19 < k < 1,24$); für größere Werte von F fällt "k" stark ab. Beim langen Streifen (L = 1000 mm) ist der Bereich von F, in welchem "k" näherungsweise konstant ist, deutlich größer.

Der Grund für diesen Abfall der k-Werte könnte darin liegen, dass in den hier verwendeten Gleichungen aus [15] die sich bei den in vorliegender Arbeit getroffenen Randbedingungen bildenden zusätzlichen Querdruckspannungen nicht berücksichtigt sind. Diese zusätzlichen Querdruckspannungen führen dazu, dass Beulen - insbesondere beim kurzen Band und bei großen Zugkräften - schon bei kleineren kritischen Verdrehwinkeln auftritt, was zu einer Abnahme des Wertes von k mit zunehmenden Zugkräften führt.

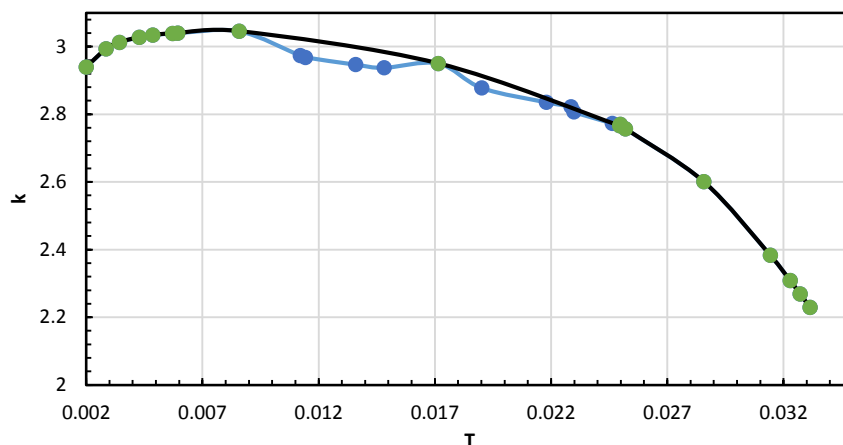


Abbildung 3.75 Zugkraft- k Diagramm nach cfvk für den Streifen L=1000[mm] im Bereich "B"

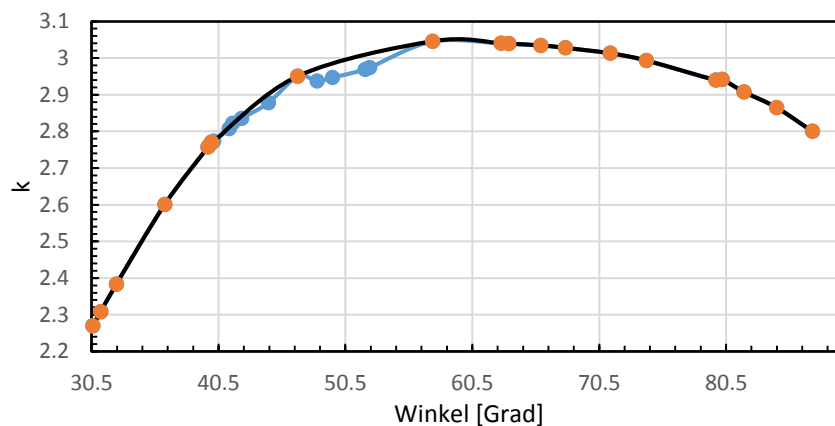


Abbildung 3.76 Winkel- k Diagramm nach cfvk für den Streifen L=1000[mm] im Bereich "B"

Kapitel 4

Nichtlineare Nachbeulanalysen für die elastischen Streifen unter Zug und Torsion

Die Beurteilung der Stabilität von Gleichgewichtszuständen ist in vielen technisch relevanten Fragen nicht mit der Bestimmung der kritischen Last des perfekten Systems abgeschlossen. Es interessiert im Allgemeinen auch das Nachbeulverhalten. [1][2].

Im Kapitel 3 wurden die Beulanalysen unter Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten durchgeführt, um das kritische Torsionsmoment sowie den kritischen Verdrehwinkel im Abhängigkeit von der Zugkraft zu ermitteln. Das Ziel dieses Abschnittes ist es, Stabilität- oder Instabilitätszustände im Nachbeulverhalten der 200 [mm] bzw. 1000 [mm] langen Streifen im Bereich $T < T_\lambda$, $T = T_\lambda$ und $T > T_\lambda$ zu ermitteln. Zusätzlich zu den Last-Verschiebung Diagrammen werden auch Deformationsmuster sowie deren Amplituden dargestellt.

4.1 Nachbeulverhalten - Ziel und Vorgehensweise

Die Untersuchung des Nachbeulverhaltens, d.h. des Verlaufens des nichttrivialen Gleichgewichtspfad, gibt Auskunft darüber, ob sich das System nach der Verzweigung stabil oder instabil verhält und wie sich die Nachbeuldeformationen entwickeln.

Trifft man keine besonderen Vorkehrungen, so wird bei der inkrementell-iterativen-Analyse möglicherweise der triviale Gleichgewichtspfad über den Verzweigungspunkt hinaus weiterverfolgt, obgleich diese Zustände nicht mehr stabil sind.

Der Wechsel auf einen sekundären bzw. den nichttrivialen, daher abzweigenden (stabilen oder instabilen) Gleichgewichtspfad erfordert eine zielgerichtete Störung des Gleichgewichtszustandes in der Umgebung des Verzweigungspunktes. Eine Möglichkeit, die in [1] beschrieben ist, besteht darin, den Verschiebungszustand affin zum ersten Eigenvektor des Eigenwertproblems zu stören. Das sollte möglichst nahe beim kritischen Zustand sein. Diese Störung muss vor der Berechnung der Tangentensteifigkeitsmatrix für das Inkrement, welches zur kritischen Last hinführt, aufgebracht werden. Die Richtung des als sehr klein anzusetzenden Lastinkrementes (Vergrößerung bzw. Reduzierung des Laststeigerungsfaktors) richtet sich nach der Stabilität des Nachbeulpfades: Ist dieser stabil, dann ist die Last zu erhöhen. Bei instabilem Nachbeulpfad ist die Last zu reduzieren. Die Stabilität des Nachbeulpfades ist an der Definiiertheit der Tangentensteifigkeitsmatrix beurteilbar.

Wesentlich praktikabler ist es, die Tatsache auszunutzen, dass der Gleichgewichtspfad eines schwach imperfekten Bauteils jenem des perfekten Bauteils sehr nahekommt, allerdings anstelle der Verzweigung (anstelle des "Knicks") ein stetig differenzierbares Verhalten aufweist: Aus dem Verzweigungsproblem wird ein Spannungsproblem (bei stabilem Nachbeulverhalten) oder ein Durchschlagsproblem (bei instabilem Nachbeulverhalten) [1].

4.2 Modellbeschreibungen: Randbedingungen, Lastaufbringung, Vernetzung und Materialdaten

Die Bezeichnungen der Geometrie, sowie die Art und die Modellierung der Randbedingungen, Vernetzung und Materialdaten bleiben gegenüber der Vorbeulanalyse unverändert.

Für die weiteren Betrachtungen wird die relative Verschiebung "w" aus der verdrehten Streifenfläche heraus am Punkt "P" [80, ±8, 0] beim 200- Streifen, und am Punkt "P" [178, ±8, 0] beim 1000- Streifen betrachtet (siehe Abbildung 4.1). Diese Relativverschiebung wurde gemäß Abbildung 4.2 nach Gleichung 4.3 berechnet. Die Punkte P liegen in der oberen und unteren Hälfte des Streifens (y-Werte sind positiv und negativ), damit man aufgrund der Informationen der Last-Verschiebungs-Kurve im Punkt +8 und -8 erkennen kann, ob das Nachbeulmuster symmetrisch oder antimetrisch ist. Bei den Last-Verschiebungs-Diagrammen wird das Torsionsmoment über die relative Verschiebung "w", aufgetragen.

Die Analysen wurden für einige ausgewählte Fälle in dem Bereich $T < T_\lambda$, $T = T_\lambda$ und $T > T_\lambda$ mit unterschiedlich imperfekter Geometrie durchgeführt, und zwar beim 1000- Streifen, unter den Zugkräfte $F=220[\text{N}]$, $F=350[\text{N}]$, $F=8000[\text{N}]$ und beim 200- Streifen mit den Zugkräfte $F=200[\text{N}]$, $F=600[\text{N}]$, $F=3000[\text{N}]$. Siehe Tabelle 4.1 und 4.2.

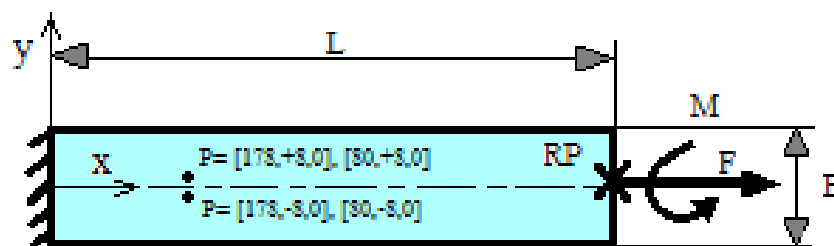


Abbildung 4.1 Koordinatenachsen und Randbedingung sowie relevante Punkte zur Ermittlung den Verschiebungen

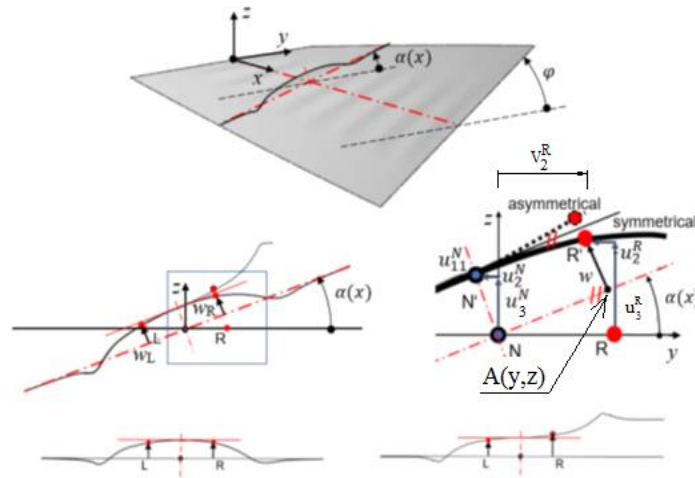


Abbildung 4.2 Koordinatenachsen und relevante Punkte für die Darstellung der Verschiebungen in den Last-Verschiebung-Diagrammen, entnommen aus[17]

$$z^A = \tan(\alpha(x))y^A = m_1 y^A \quad (4.1)$$

$$y^A = \frac{V_3^R - m_2 V_2^R}{m_1 - m_2} \quad (4.2)$$

$$w = \sqrt{(V_2^R - y^A)^2 - (V_3^R - z^A)^2} \quad (4.3)$$

Darin sind:

$\alpha(x)$ = der Winkel in der Mittelachse

$V_3^R = U_3^R$

V_3^R = Koordinate im Punkt R' in Z-Richtung (Ergebniss der Analyse in ABAQUS)

V_2^R = Koordinate im Punkt R' in y – Richtung (Ergebniss der Analyse in ABAQUS)

U_3^R = Verschiebung im Punkt R' in Z-Richtung (Ergebniss der Analyse in ABAQUS)

U_2^R = Verschiebung im Punkt R' in y – Richtung (Ergebniss der Analyse in ABAQUS)

y^A = Koordinate im Punkt A in y – Richtung

z^A = Koordinate im Punkt A in z – Richtung

m_1 = Steigung der roten Gerade

$m_2 = -\frac{1}{m_1}$ = Steigung der Gerade senkrecht auf der roten Geraden (gerechnet in Excel)

W = relative Verschiebung aus der Ebene heraus senkrecht zur roten Linie (gerechnet in Excel)

4.3 Berechnungen des Nachbeulverhaltens

Für die Nachbeulanalyse bei dieser Arbeit wurde für das inkrementell-iterative Vorgehen das in ABAQUS implementierte Verfahren nach Riks verwendet [1][3][4].

4.3.1 Vorgehensweise bei der nichtlinearen Nachbeulanalyse

In dieser Arbeit wurde das Verzweigungsproblem durch das Einbringen von ausreichend kleinen geometrischen Imperfektionen in ein Problem mit kontinuierlichem Gleichgewichtspfad umgewandelt. Werden diese Imperfektionen betragsmäßig (gegenüber den anderen Geometrieparametern) sehr klein gewählt, dann kann man aus der Last-Verschiebungs-Kurve per Extrapolation die kritische Belastung M^* gut abschätzen.

4.3.2 Verhalten von Gleichgewichtspfaden

In der Praxis macht man sich den Umstand zunutze, dass der Gleichgewichtspfad eines Bauteils mit sehr kleinen geometrischen Imperfektionen jenem des ungestörten Bauteils sehr ähnlich ist. Abbildung 4.3 und 4.4 zeigen dieses Verhalten.

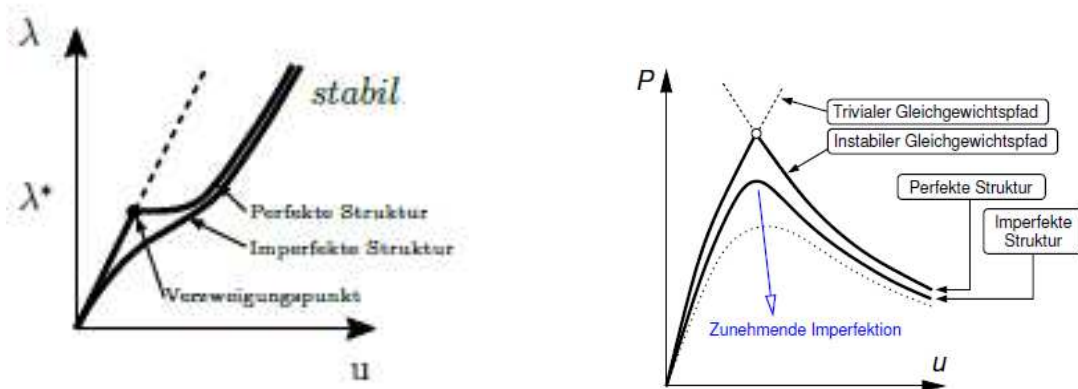


Abbildung 4.3 Umwandlung eines Verzweigungsproblems, links: mit stabilem Nachbeulverhalten, rechts: mit instabilem Nachbeulverhalten in ein Durchschlagsproblem durch Aufbringen einer geometrischen Imperfektion, entnommen aus [1]

4.3.3 Festlegung der Imperfektionen

Bei dieser Arbeit wird eine geometrische Imperfektion berücksichtigt, um das Nachbeulverhalten bei diesem Verzweigungsproblem zu ermitteln.

Die Geometrie des Bauteiles wird mit beulformaffinen Imperfektionen versehen. Aus der linearen Beulanalyse erhält man die kritischen Laststeigerungsfaktoren λ_i sowie die Eigenvektoren ϕ_i , welche die Beulform des jeweiligen Modes i qualitativ beschreiben. Deren Ermittlung wurde bereits in Kapitel.1 erläutert.

Wie in der Gleichung 4.4 dargestellt ist, erhält man die Knotenpunktkoordinaten der imperfekten Struktur $\hat{\mathbf{X}}$, indem man auf die Knotenpunktkoordinaten \mathbf{X} der perfekten Struktur die translatorischen Komponenten der normierten Eigenvektoren ϕ_i aufträgt. Diese werden skaliert mit dem Produkt aus Imperfektionsparameter κ_i des jeweiligen Modes und der Plattendicke t aufgetragen [1].

$$\hat{\mathbf{X}}_{imp} = \mathbf{X}_{perf} + \sum_{i=1}^3 \kappa_i t \phi_i \quad (4.4)$$

Anschließend wird das modifizierte Finite Elemente Modell einer inkrementell iterativen Analyse unterworfen und damit der Last-Verschiebung-Pfad berechnet.

4.3.4 Aufbringen der Imperfektionen beim 200- und 1000-Streifen

Es wurde eine inkrementell-iterative Simulation – mittels der Riks Methode- mit dem Ziel durchgeführt, ein Last-Verschiebungs-Diagramm zu erhalten. Um die Last-Verschiebungs-Kurven mit Imperfektionen affin zu Mode I bzw. zu einer Linearkombination aus den ersten drei Beulmoden I, II und III besser vergleichen zu können, wurden Simulationen mit Imperfektionsparametern in der jeweils gleichen Größenordnung durchgeführt.

Die Tabelle 4.1 zeigt die Imperfektionsparameter des 1000-Streifens mit den Zugkräften $F=220$ [N], $F=350$ [N], $F=8000$ [N], und die Tabellen 4.2.1 bis 4.2.3 zeigen die Imperfektionsparameter des

200-Streifens mit den Zugkräften $F=200$ [N], $F=600$ [N], $F=3000$ [N], zu denen inkrementell-iterativen Simulationen durchgeführt wurden.

Wie in Tabellen 4.1 und 4.2 dargestellt ist, war es notwendig, beim 1000-Streifen im Bereich $T < T_\lambda$ und $T = T_\lambda$, und beim 200-Streifen im Bereich $T < T_\lambda$, den Imperfektionsparameter für die Mode I affine Nachbeuldeformation größer zu wählen als die Imperfektionsparameter κ_2 und κ_3 , damit das kritische Moment aus dem Last-Verschiebungs-Diagramm besser abzuschätzen war. Beim 200-Streifen wurden im Bereich $T = T_\lambda$ mit dem Imperfektionsparameter κ_3 größer als der Imperfektionsparameter κ_1 und κ_2 und im Bereich $T > T_\lambda$ mit dem Imperfektionsparameter $\kappa_1 = +0.002$ für die Mode I wird bessere Ergebnisse erzielt.

L= 1000[mm]	F[N]	Imperfektionsparameter	$\hat{X}_{Z,imp}$ im Punkt [178, +8, 0]	M^* [N.mm] Stabilitätsgrenze
1.Fall	220 ($T < T_\lambda$)	Mode I $\kappa_1 = +0.002$	+0.00081	543.04
	350 ($T = T_\lambda$)	bzw.	-0.000368	815.57
	8000 ($T > T_\lambda$)	$\hat{X} = X + \kappa_1 t \phi_1 = X + (0.002 \times 0.05 \times \phi_1)$	-0.000497	5024.88
2.Fall	220 ($T < T_\lambda$)	Mode I $\kappa_1 = +0.002$	+0.00031	548.33
	350 ($T = T_\lambda$)	Mode II $\kappa_2 = +0.001$	-0.000329	842.06
	8000 ($T > T_\lambda$)	Mode III $\kappa_3 = +0.001$ bzw. $\hat{X} = X + [t (\kappa_1 \phi_1 + \kappa_2 \phi_2 + \kappa_3 \phi_3)]$ $= X + [0.05(0.002 \times \phi_1 + 0.001 \times \phi_2 + 0.001 \times \phi_3)]$	-0.000305	4834

Tabelle 4.1 Modellparameter für 1000- Streifen
mit den Zugkräften $F=220$ [N], $F=350$ [N], $F=8000$ [N]

L=200[mm] / F=200[N], (T < T _λ)	Imperfektionsparameter	\hat{X}_{z_imp} im Punkt [80, +8, 0]	M* [N.mm] Stabilitätsgrenze
1.Fall	Perfektes Modell	----	347.43
2.Fall	Mode I $\kappa_1 = + 0.002$	0.000791	622
3.Fall	Mode I $\kappa_1 = + 0.002$ Mode II $\kappa_2 = - 0.001$ Mode III $\kappa_3 = + 0.001$	0.000587	522
4.Fall	Mode I $\kappa_1 = + 0.001$ Mode II $\kappa_2 = + 0.001$ Mode III $\kappa_3 = + 0.002$	0.000694	396
5.Fall	Mode I $\kappa_1 = + 0.002$ Mode II $\kappa_2 = + 0.001$ Mode III $\kappa_3 = + 0.001$	0.000394	682

Tabelle 4.2.1 Modellparameter für 200- Streifen mit der Zugkraft F=200[N]

L=200[mm] / F=600[N], T = T _λ	Imperfektionsparameter	\hat{X}_{z_imp} im Punkt [80, +8, 0]	M [N.mm] Stabilitätsgrenze
1.Fall	Perfektes Modell	----	1887
2.Fall	Mode I $\kappa_1 = + 0.002$ Mode II $\kappa_2 = + 0.001$ Mode III $\kappa_3 = + 0.001$	----	1956
3.Fall	Mode I $\kappa_1 = + 0.002$ Mode II $\kappa_2 = - 0.001$ Mode III $\kappa_3 = + 0.001$	-0.0004649	1900.48
4.Fall	Mode I $\kappa_1 = + 0.001$ Mode II $\kappa_2 = + 0.001$ Mode III $\kappa_3 = + 0.002$	-0.000089	2011.41

Tabelle 4.2.2 Modellparameter für 200- Streifen mit der Zugkraft F=600[N]

L=200[mm] / F=3000[N], (T > T _λ)	Imperfektionsparameter	\hat{X}_{z_imp} im Punkt [80, +8, 0]	M [N.mm] Stabilitätsgrenze
1.Fall	Mode I $\kappa_1 = + 0.002$	0.00137	20000
2.Fall	Mode I $\kappa_1 = + 0.002$ Mode II $\kappa_2 = + 0.001$ Mode III $\kappa_3 = + 0.001$	-0.0097	20000

Tabelle 4.2.3 Modellparameter für 200- Streifen mit der Zugkraft F=3000[N]

Im nächsten Abschnitt wird diskutiert, worin der Unterschied im Nachbeulverhalten bei unterschiedlichen Imperfektionen begründet ist.

4.4 Ergebnisse der nichtlinearen Nachbeulanalyse - 200-Streifen

Es wurde zuerst die Nachbeulanalyse ohne Imperfektionen für den 200-Streifen mit den Zugkräften $F=200\text{[N]}$ und $F=600\text{[N]}$ durchgeführt. Wie die Ergebnisse in den Abbildungen 4.5(a) 4.9(a) zeigen, wird beim Überschreiten des kritischen Moments der triviale Gleichgewichtspfad in instabilen Bereich weiter berechnet. Es war also eine Imperfektion notwendig.

4.4.1 Nachbeulverhalten vom 200-Streifen im Bereich $T < T_\lambda$ unter Zugkraft $F=200\text{ [N]}$

Bei $T < T_\lambda$ sind die Beulmoden 1 und 2 nahezu gleich (auch die Eigenwerte sind ziemlich gleich groß, siehe Kapitel.3). Allerdings hat der zweite Mode eine um 1 geringere Wellenzahl als der erste; der dritte hat wieder eine größere Wellenzahl als der erste. Daher bringt eine Linearkombination der ersten beiden Beulmoden für eine geometrische Imperfektion (abgesehen von der Größe der Imperfektionsamplitude) eine passende Wirkung, weil er die Möglichkeit einer Nachbeulverzweigung zu einer Deformationsfigur mit einer um 1 geringeren Wellenzahl eröffnet. Dies ist wichtig, weil zu erwarten ist, dass bei $T < T_\lambda$ im Nachbeulbereich mit zunehmendem Moment nicht nur die Längsdruckspannungen zunehmen, sondern auch die Bereiche des Bereiches $\sigma_{xx}(y) < 0$. Mit der Zunahme der Breite des Druckspannungsbereiches ist eine Reduktion der Anzahl der Wellen in der Deformationsfigur zu erwarten. Daher ist es wichtig, Anteile aus Beulmoden mit kleinerer Wellenzahl in den Imperfektionen enthalten zu haben.

Die Abbildungen 4.5 (b) bis (e) zeigen die Last-Verschiebungs-Kurven des 200-Streifens mit einer kleinen Zugkraft, $F=200\text{[N]}$, im Bereich $T < T_\lambda$ und unterschiedlichen Imperfektionen.

In Abbildung 4.5(e) sieht man, dass die Linearkombination von Imperfektionen mit den Parametern $\kappa_1=+0.002$, $\kappa_2=+0.001$ und $\kappa_3=+0.001$ bei einer niedrigeren Abweichung vom perfekten Modell zu einer höheren Stabilität der Last-Verschiebungs-Kurve führt. Deshalb ist das Nachbeulverhalten mit derartigen Imperfektionsparametern in Abbildung 4.5(e) dargestellt.

Aus diesen Diagrammen, sieht man, dass die Last-Verschiebungs-Kurven zu zwei Punkten $P [80, \pm 8,0]$ identisch sind. Dies bedeutet, dass das Nachbeulverhalten innerhalb des betrachteten Bereichs symmetrisch ist.

Zu Beginn zeigt die Last- Verschiebungs-Kurve in Abbildung 4.5(e) ein stabiles Nachbeulverhalten. Nach dem Erreichen des Maximums von "w" erhält die Kurve eine horizontale Tangente (die strichlierte rote Linie) und folgt dann mit abnehmender Last einem instabilen Pfad. Es liegt aber eine Snap-Through-Instabilität vor. Das heißt, dass unter Laststeuerungsbedingungen die Gleichgewichtszustände nicht diesem Pfad folgen, sondern bei gleicher Belastung zum anderen stabilen Gleichgewichtspfad springen, siehe Abbildung 4.6 (c). Dies Verhalten ist allerdings nur eine lokale Snap-Through-Instabilität und ist auf globaler Ebene nicht wahrnehmbar. Das gesamte Nachbeulverhalten, einschließlich instabiler Bereiche, ist in Abbildung 4.6 dargestellt.

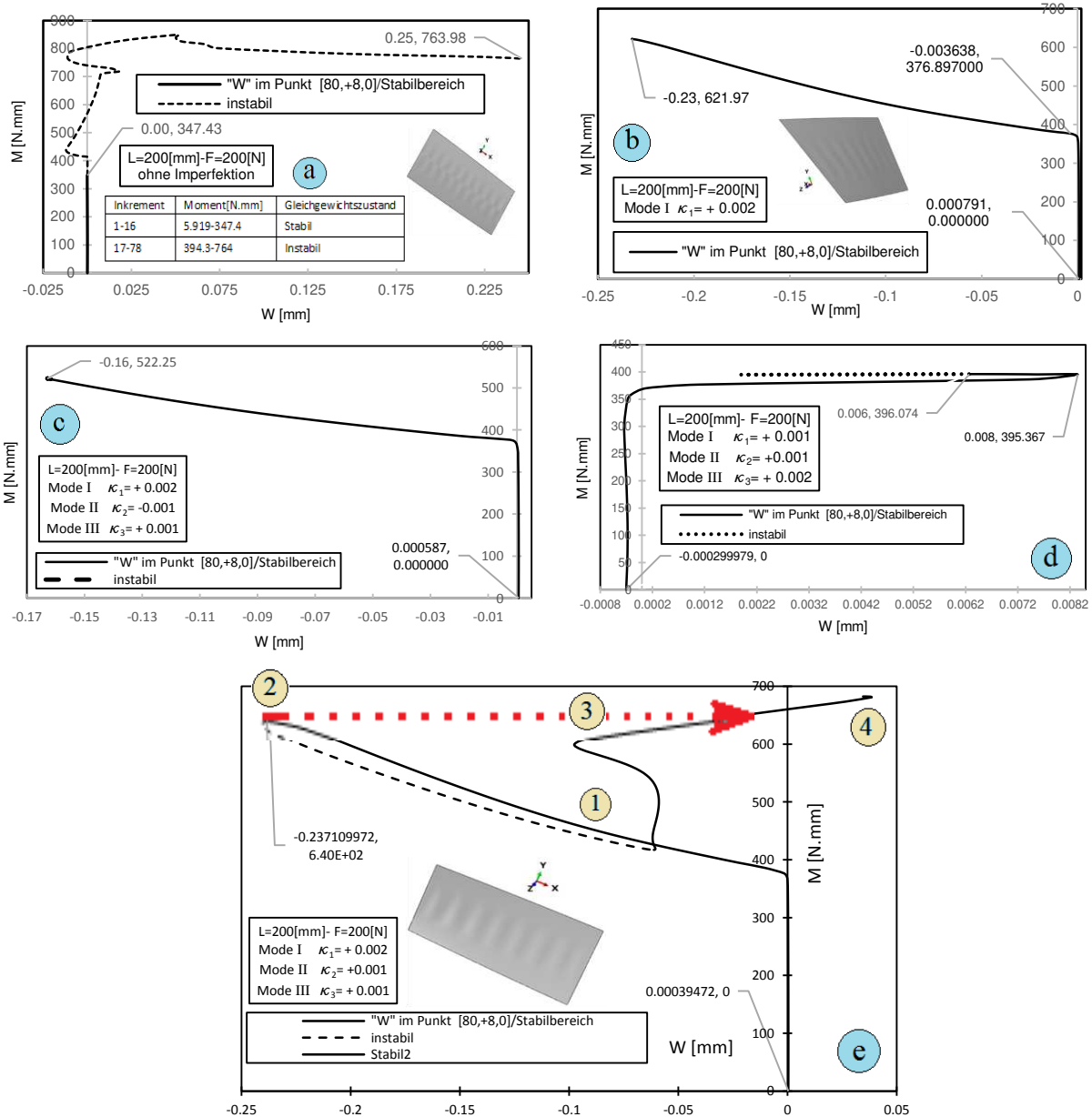


Abbildung 4.5 Last-Verschiebungs-Kurve im Punkt $[80, \pm 8, 0]$ vom 200-Streifen unter Zugkraft $F=200$ [N] ohne Imperfektion (antisymmetrisch) und mit Imperfektion (Symmetrisch), kritischer Moment= 377.844 [N.mm]

Die Abbildungen 4.6 (a) bis (c) zeigen das gesamte Nachbeulverhalten für den 200-Streifen unter Zugkraft $F=200$ [N] mit unterschiedlicher Kombination von Imperfektionsparametern.

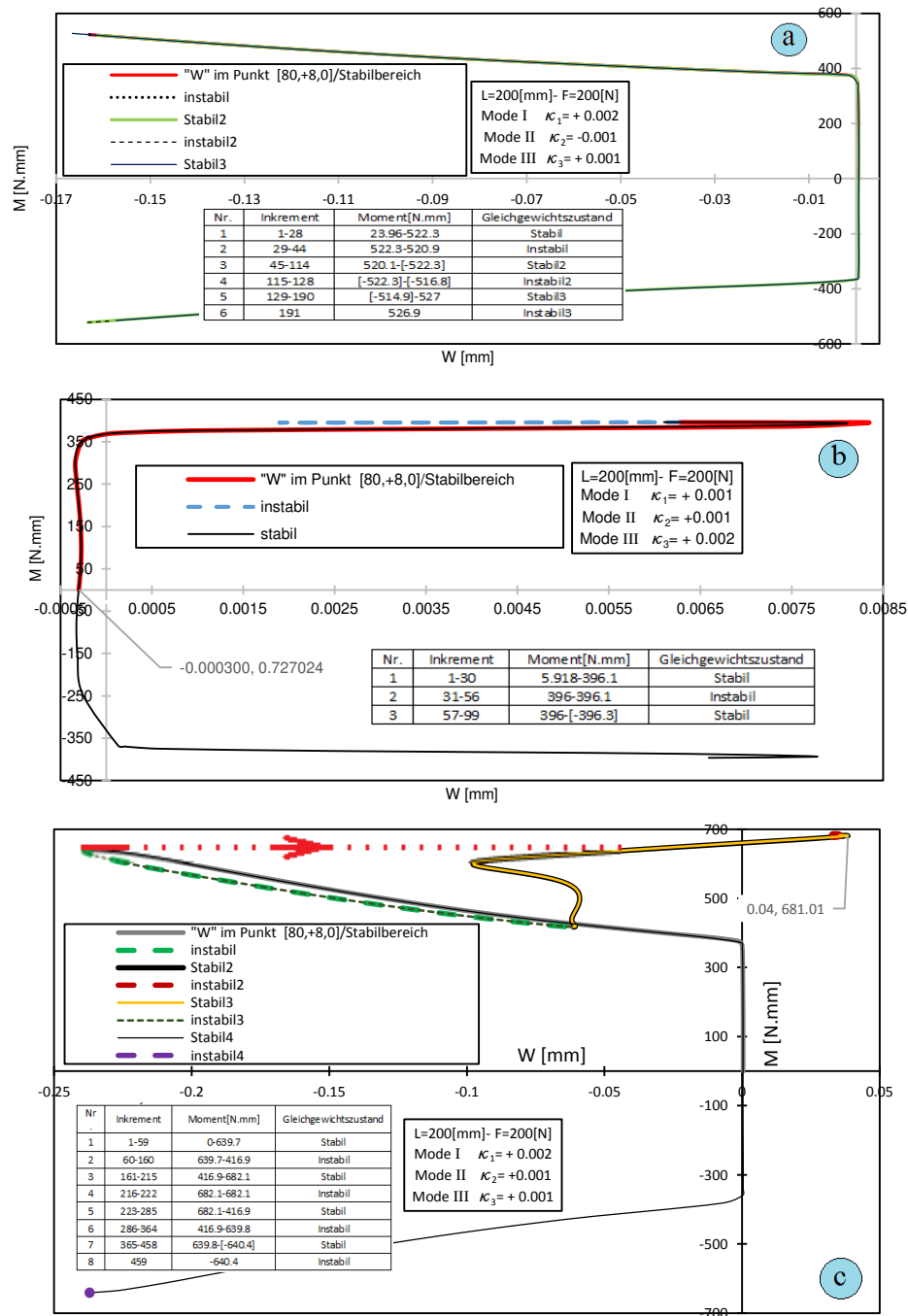


Abbildung 4.6 Last-Verschiebungs-Kurve im Punkt [80,±8,0] (Symmetrisch) vom 200-Streifen unter Zugkraft $F=200$ [N] Stabil und Instabilbereich bei der gesamten Analyse, kritischer Moment= 377.844 [N.mm]

In diesem Last-Verschiebungs-Diagramm sind die folgenden Abschnitte zu erkennen: bis zur 1. Verzweigung, und dann bis zur 2. Verzweigung; weiters zu einem Lastzustand in der Nähe der 2. Verzweigung und im Bereich zwischen 3. Verzweigung, 4. Verzweigung. Die zu den erwähnten

Bereichen zugeordnete Nachbeuldeformationen sind in Abbildung 4.7 dargestellt. Diese Abbildung zeigt, dass das Nachbeulverhalten bei der Snap-Through-Instabilität mit einem Wechsel des Verformungsmusters verbunden ist und dass die Halbwellenzahl vom Zustand 2 zum Zustand 3 von 16 auf 15 wechselt.

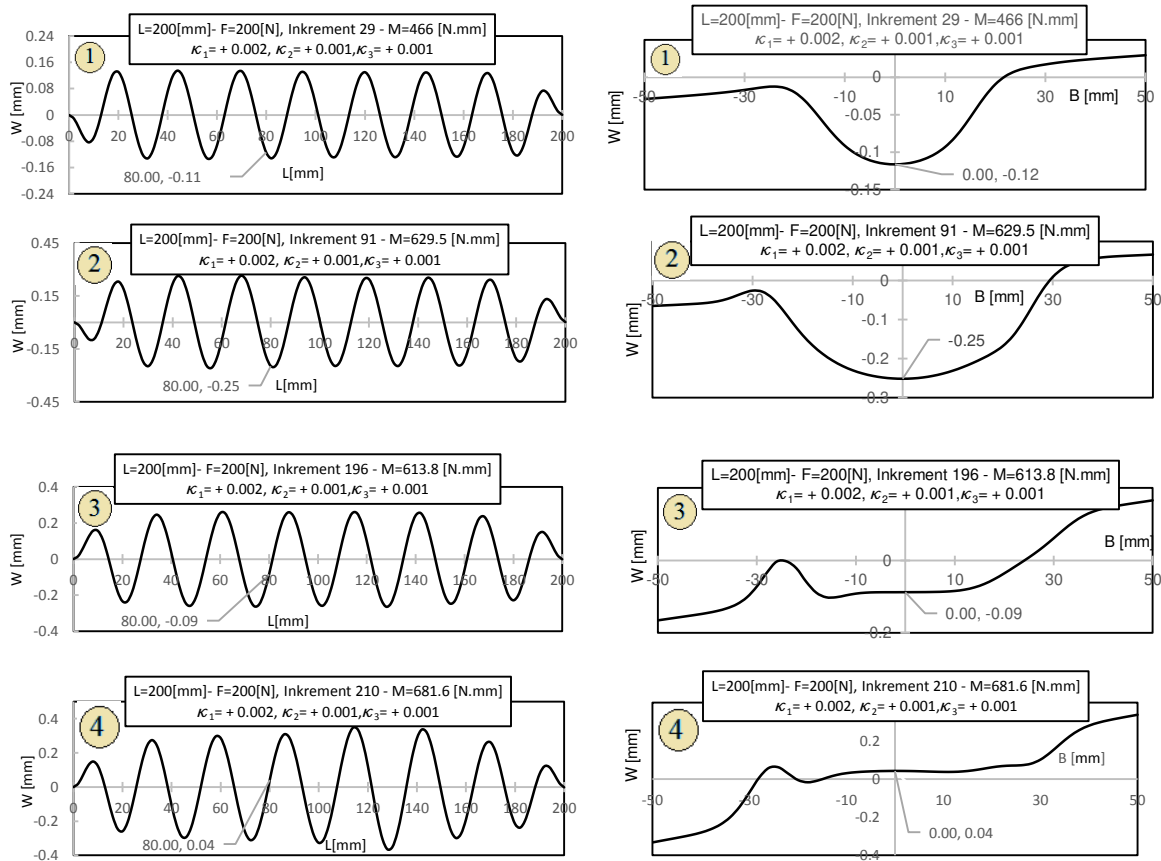


Abbildung 4.7 Nachbeul-Deformationen des 200-Streifens unter Zugkraft $F=200$ [N]
 Links: in Längsrichtung entlang des Pfads $Y=0$, rechts: in Querrichtung entlang des Pfads $X=80$,
 kritisches Moment= 377.844 [N.mm]

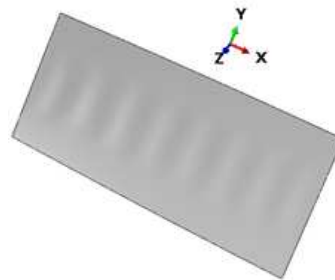


Abbildung 4.8 Nachbeulfigur des 200-Streifens unter der Zugkraft $F=200$ [N] mit
 der Imperfektion ($\kappa_1=+0.002$, $\kappa_2=+0.001$, $\kappa_3=+0.001$).

Inkrement 459, $M=-640.4$ [N.mm], kritisches Moment= 377.844 [N.mm]

4.4.2 Nachbeulverhalten des 200-Streifens im Bereich $T=T_\lambda$ unter Zugkraft

F=600 [N]

In diesem Fall, im Bereich $T=T_\lambda$, bei der Zugkraft $F = 600$ [N], liefert die Linearkombination von Imperfektionen mit den Parametern $\kappa_1=+0.001$, $\kappa_2=+0.001$ und $\kappa_3=+0.002$, mit einer niedrigeren Abweichung vom perfekten Modell ein gut interpretierbares Ergebnis für das Nachbeulverhalten. Siehe Abbildung 4.9(a) bis (c).

In Abbildung 4.9 (c) sieht man, dass die relative Verschiebung "w" nach der 2. Verzweigung mit der Zunahme des Torsionsmomentes abnimmt und nach dem 3. Verzweigungspunkt zeigt das Nachbeulverhalten einen instabilen Gleichgewichtspfad. Es ist zu vermuten, dass am Beginn dieses instabilen Pfades eine Gleichgewichtsverzweigung vorliegt und die Art und Größe der Imperfektionen nicht ausreichend geeignet waren, die inkrementell-iterative Analyse zum abzweigenden Pfad zu führen.

Es könnte aus dem Verlauf der vollen und der gepunkteten Linien in Abbildung 4.9 (c) der Eindruck entstehen, dass das Nachbeulverhalten in diesem Bereich ($T=T_\lambda$) symmetrisch ist, wenn jedoch die relative Verschiebungsverteilung entlang der Schnitte in y-Richtung für die Laststufe 1 in Abbildung 4.9.c betrachtet wird, erkennt man, dass die Welligkeit in Querrichtung, die sich entlang der Längsachse des Streifens erstreckt, weder eine reine Symmetrie noch eine reine Antisymmetrie zeigt. Siehe Abbildung 4.10 bis 4.13. Ein Rückgang der Verschiebungen zufolge steigender Inkrementzahl ist ebenso sichtbar. Die Reduktion der relativen Verformung "w" ist in Abbildung 4.10 bis 4.13 im 2. Zustand sehr gut sichtbar. In Abbildung 4.13 zeigen die Darstellungen zum Nachbeulverhalten eine antimetrische Welligkeit.

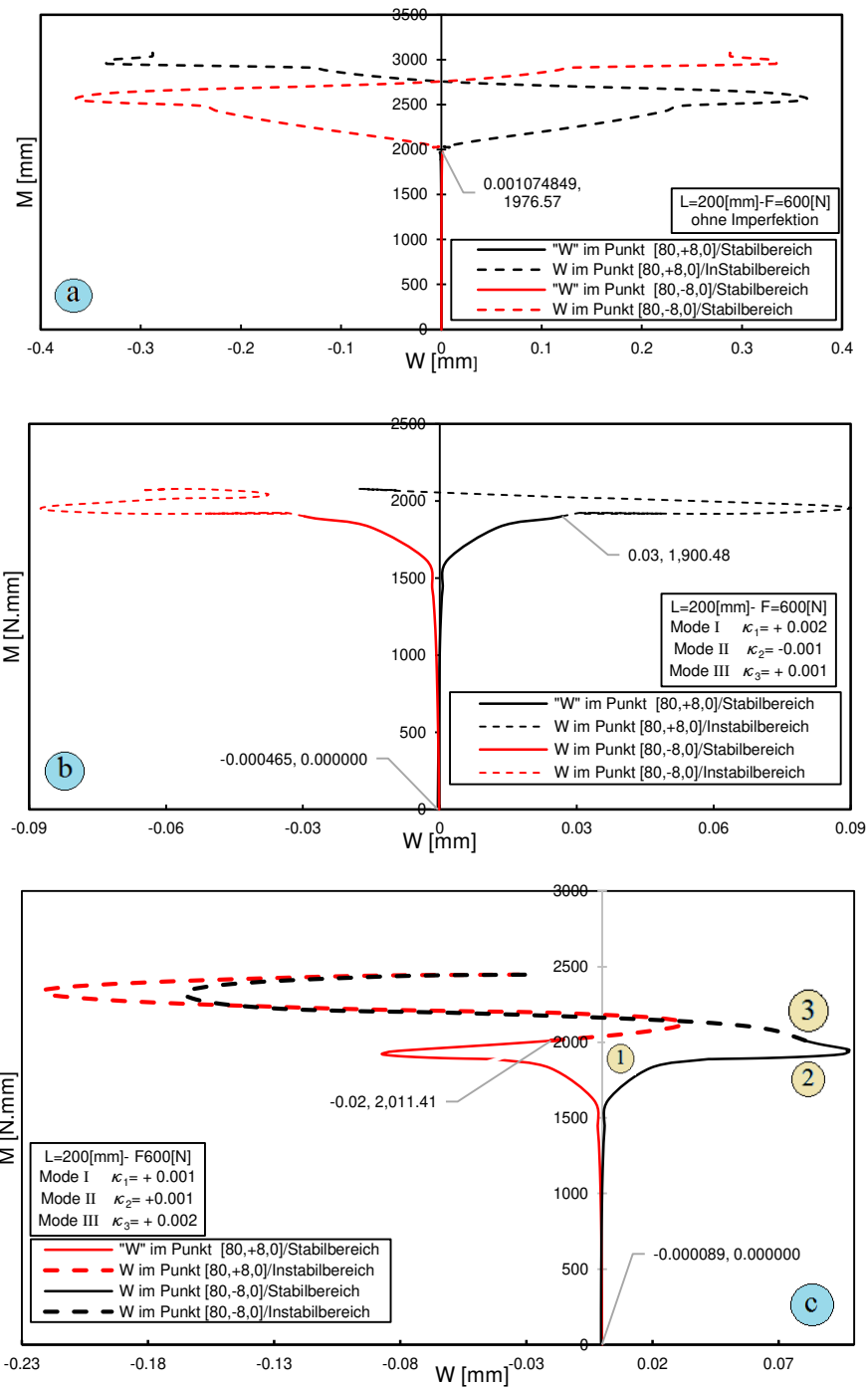


Abbildung 4.9 Last-Verschiebungs-Kurve im Punkt $[80, \pm 8, 0]$ (antimetrisch und symmetrisch) des 200-Streifens unter der Zugkraft $F=600$ [N], kritisches Moment = 1857.203 [N.mm]

Im Bereich $T=T\lambda$ sieht man, dass die Belastung sehr stark die Verformung des Streifen bzw. die Welligkeit in Längsrichtung beeinflusst und dieses Verhalten tritt für den Bereich $T>T\lambda$ nicht auf. Bei steigender Belastung ist eine höhere Welligkeit der Nachbeuldeformation erkennbar. Wie in Abbildung 4.10 sichtbar ist, wechselt die Welligkeit in Querrichtung mit zunehmendem Torsionsmoment in eine Welligkeit in Längsrichtung.

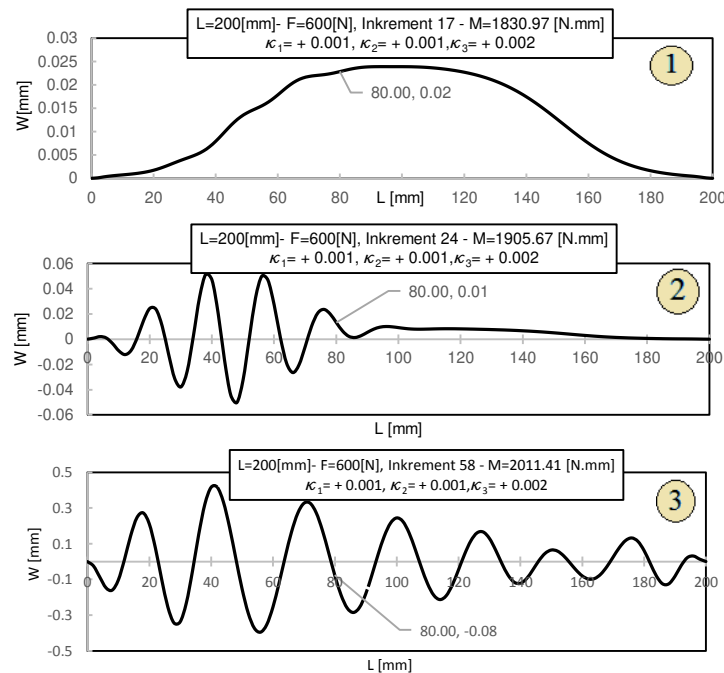


Abbildung 4.10 Nachbeul-Deformationen des 200-Streifens entlang des Pfads $Y=0$ unter Zugkraft $F=600$ [N], kritisches Moment $= 1857.203$ [N.mm]

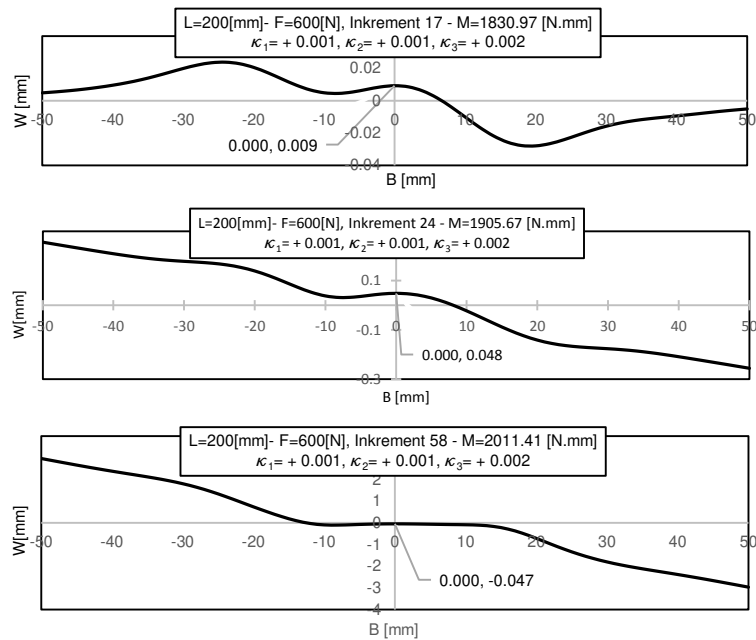


Abbildung 4.11 Nachbeul-Deformationen des 200-Streifens entlang des Pfads X=40 unter Zugkraft $F=600$ [N], kritisches Moment= 1857.203 [N.mm]

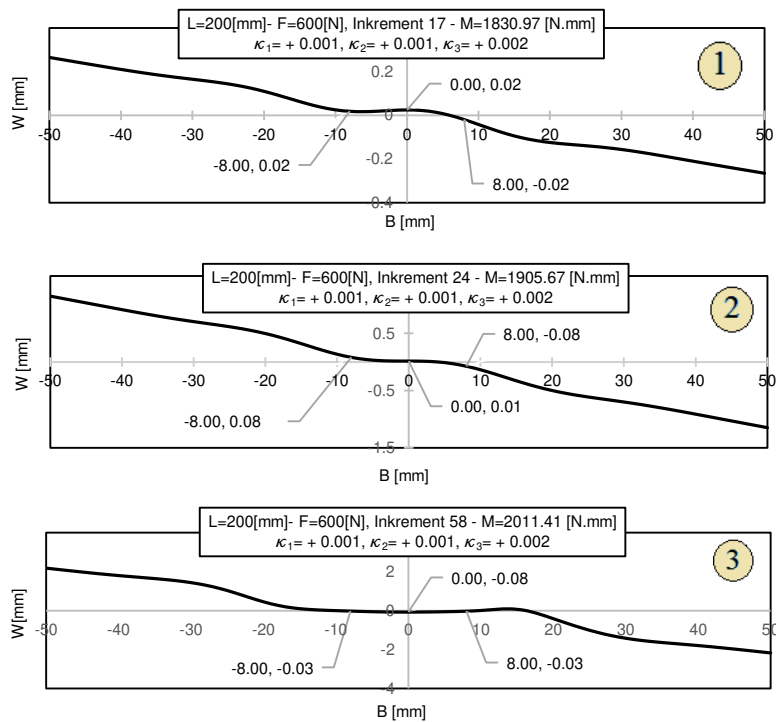


Abbildung 4.12 Nachbeul-Deformationen des 200-Streifens entlang des Pfads X=80 unter Zugkraft $F=600$ [N], kritisches Moment= 1857.203 [N.mm]

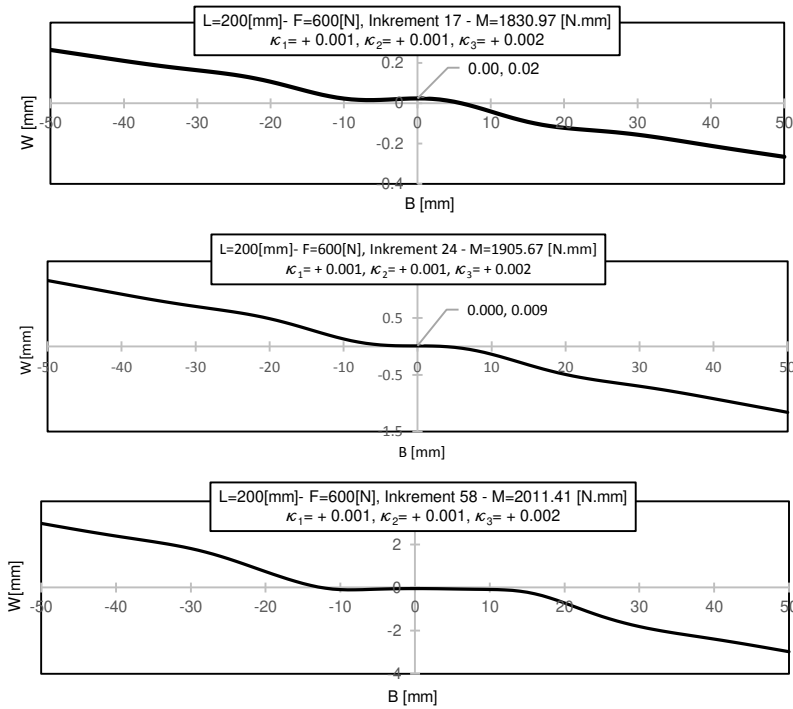


Abbildung 4.13 Nachbeul-Deformationen des 200-Streifens entlang des Pfads $X=120$ unter Zugkraft $F=600$ [N], kritisches Moment $= 1857.203$ [N.mm]

4.4.3 Nachbeulverhalten des 200-Streifens im Bereich $T > T_\lambda$ unter Zugkraft $F=3000$ [N]

Im Bereich $T > T_\lambda$ zeigt das Nachbeulverhalten bei sehr starker Zugkraft, wie z. B. $F = 3000$ [N], innerhalb des gesamten betrachteten Bereichs eine Verformung mit Welligkeit in Querrichtung. Deshalb wurden mit dem Imperfektionsparameter $k_1=+0.002$ (alle anderen $k_i=0$) für die Mode I gut interpretierbare Ergebnisse für das Nachbeulverhalten erzielt. Dies ist in Abbildung 4.14(a) und (b) sehr gut erkennbar.

In Abbildung 4.15 ist erkennbar, dass die Wellen in Querrichtung, die zum Beginn des Nachbeulverhaltens und mit einem Maximum im mittleren Bereich auftreten, mit zunehmendem Torsionsmoment in den Bereichen nahe der langen Kanten anwachsen.

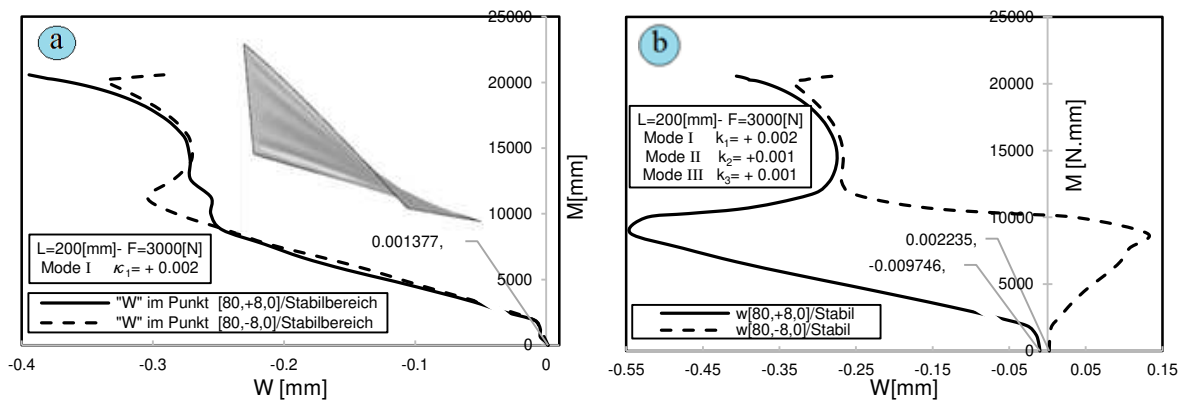


Abbildung 4.14 Last-Verschiebungs-Kurve im Punkt $[80, \pm 8, 0]$ vom 200-Streifen unter Zugkraft $F=3000$ [N], kritischer Moment = 2485.681 [N.mm]

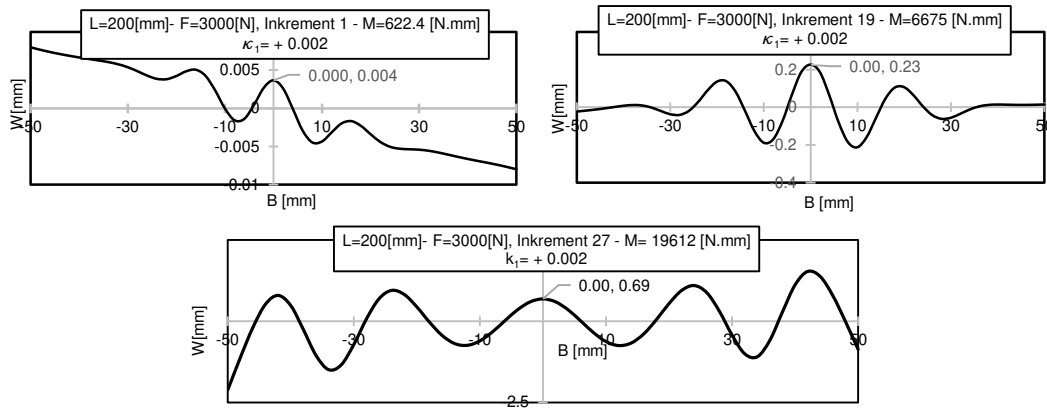


Abbildung 4.15 Nachbeul-Deformationen des 200-Streifens entlang des Pfads X=80 unter Zugkraft $F=3000$ [N], kritisches Moment= 2485.681 [N.mm]

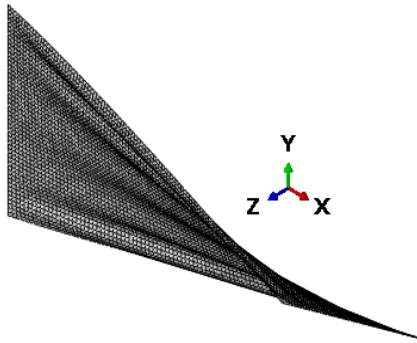


Abbildung 4.16 Nachbeulfigur des 200-Streifens unter Zugkraft $F=3000$ [N] mit der Imperfektion affin zur ersten Eigenform $\kappa_1=0.002$, $M=20583$ [N.mm] / Kritisches Moment= 2485.681 [N.mm]

4.5 Ergebnisse der nichtlinearen Nachbeulanalyse - 1000-Streifen

Nachbeulanalysen wurden für den 1000-Streifen für 3 Lastfälle durchgeführt. Für den langen Streifen kann ein ähnliches Verhalten wie für kurze Streifen beobachtet werden.

Abbildungen 4.17 bis 4.26 zeigen die unterschiedlichen Last-Verschiebungs-Kurven für die drei Lastfälle zu den jeweiligen Imperfektionsparametern sowie die Nachbeuldeformationen des 1000-Streifens. Diese Abbildungen zeigen, dass sich die Stabilitätsgrenzen in Nachbeulverhalten bei Aufbringen von unterschiedlichen Modellparameter für die Imperfektion durch eine Linearkombination der Moden I, II und III ändern könnten.

4.5.1 Nachbeulverhalten des 1000-Streifens im Bereich $T < T_\lambda$ unter Zugkraft $F=220$ [N]

Im Bereich $T < T_\lambda$ wurden beim 1000-Streifen mit einem Imperfektionsparameter für den Mode I, der größer ist als die Imperfektionsparameter κ_2 und κ_3 , gut interpretierbare Ergebnisse erzielt. Dies ist in Abbildung 4.17 (a) und (b) zu sehen. Die Abbildung 4.18 zeigt das gesamte Nachbeulverhalten.

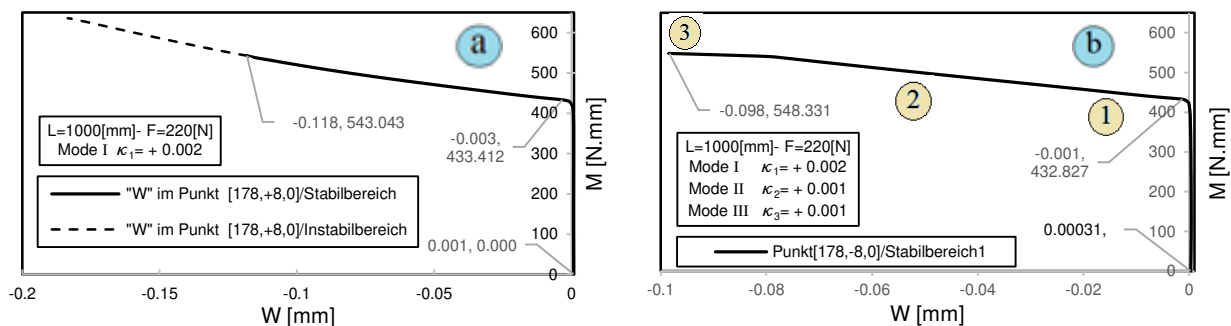


Abbildung 4.17 Last-Verschiebungs-Kurve des 1000-Streifens im Punkt $[178, \pm 8, 0]$ (Symmetrisch) unter Zugkraft $F=220$ [N],
 kritisches Moment = 435.58 [N.mm]

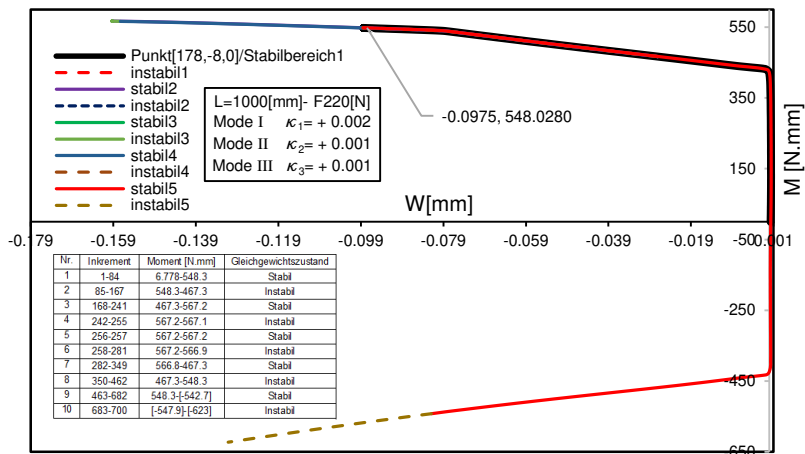


Abbildung 4.18 Last-Verschiebungs-Kurve des 1000-Streifens im Punkt [178,±8,0] (Symmetrisch) unter Zugkraft $F=220$ [N], gesamte Analyse, Inkrement 1 bis 700, kritisches Moment= 435.58 [N.mm]

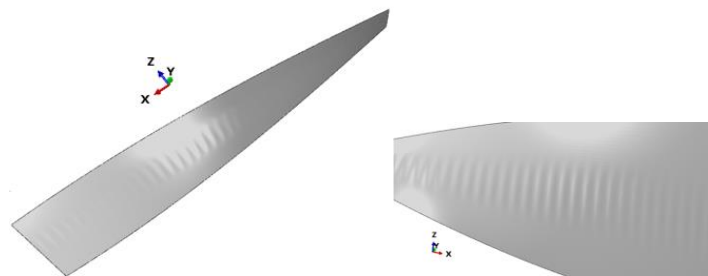


Abbildung 4.19 Nachbeulfigur des 1000-Streifens unter Zugkraft $F=220$ [N] mit der Imperfektion durch Linearkombination von drei Eigenformen ($\kappa_1=+0.002$, $\kappa_2=+0.001$, $\kappa_3=+0.001$) links : Inkrement 223, $M=550.9$ [N.mm], rechts: Inkrement 450, $M=546.9$ [N.mm], kritisches Moment= 435.58 [N.mm]

Die Abbildung 4.20 zeigt, dass das Nachbeulverhalten sich im untersuchten Bereich des Torsionsmoments "M" (Wellen in Längsrichtung) nicht drastisch verändert. Die Verteilung der relativen Verschiebungen im Querschnitt zeigt mit zunehmendem M, zusätzlich zu einer Zunahme der Amplitude in Breite und Höhe, eine wachsende Asymmetrie, siehe Abbildungen 4.20 und 4.21.

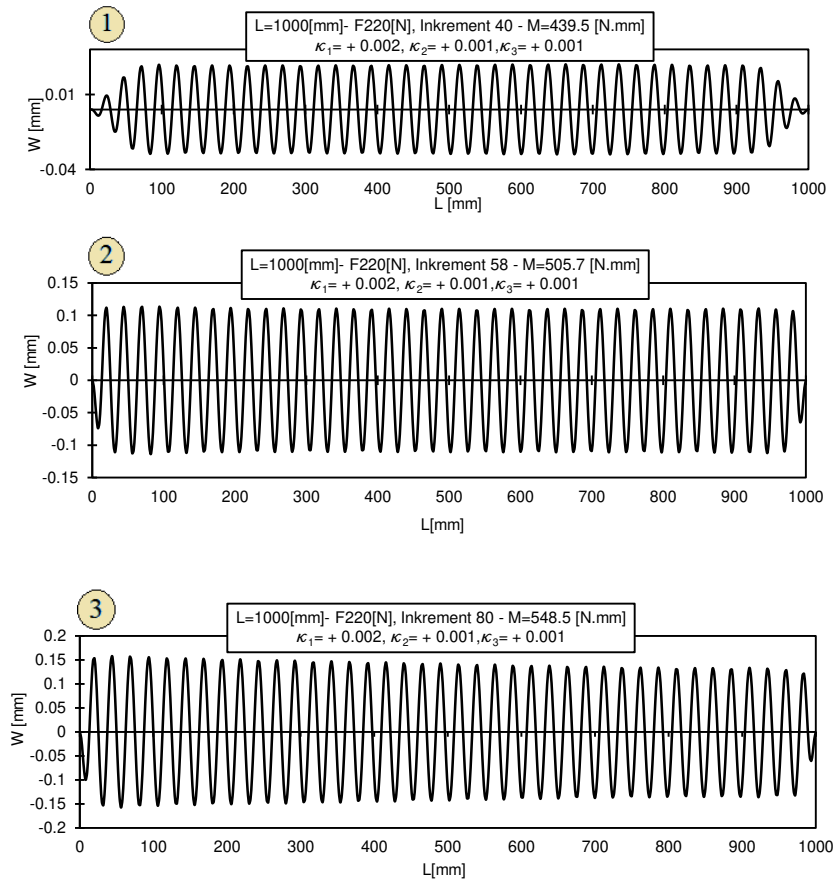


Abbildung 4.20 Nachbeul- Deformationen des 1000-Streifens entlang des Pfads Y=0 unter Zugkraft $F=220$ [N] , kritisches Moment= 435.58 [N.mm]

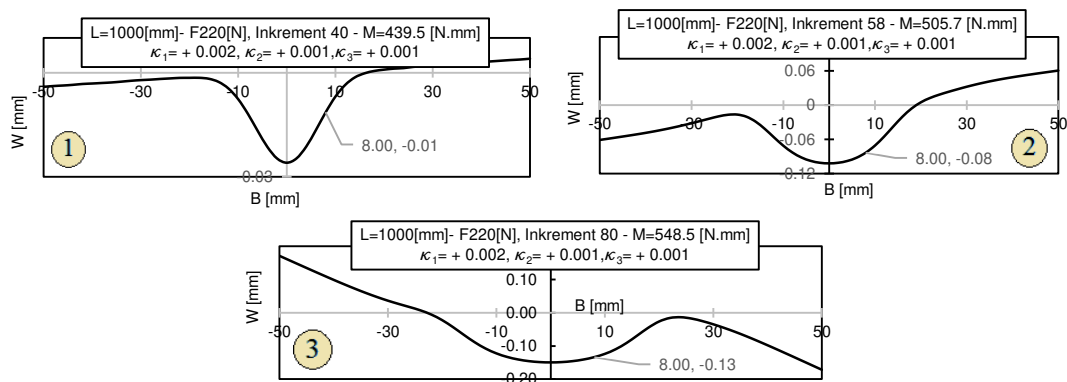


Abbildung 4.21 Nachbeul-Deformationen des 1000-Streifens entlang des Pfads X=178 [mm] unter Zugkraft $F=220$ [N] , kritisches Moment= 435.58 [N.mm]

4.5.2 Nachbeulverhalten des 1000-Streifens im Bereich $T=T_\lambda$ unter Zugkraft $F=350$ [N]

Wie bei $T < T_\lambda$, war es auch im Bereich $T=T_\lambda$ notwendig, den Imperfektionsparameter κ_1 größer zu wählen als κ_2 und κ_3 , um die kritischen Momente für die Nachbeulverzweigungen besser ermitteln zu können, siehe Abbildung 4.22 (a) und (b).

Der Streifen unter Zugkraft $F=350$ [N] zeigt eine Welligkeit in Querrichtung und mit der Zunahme des Torsionsmoments nimmt die Amplitude zu, siehe Abbildung 4.25, Allerdings verändert sich die Eigenschaft der Verschiebungskurve im untersuchten Bereich nicht wesentlich.

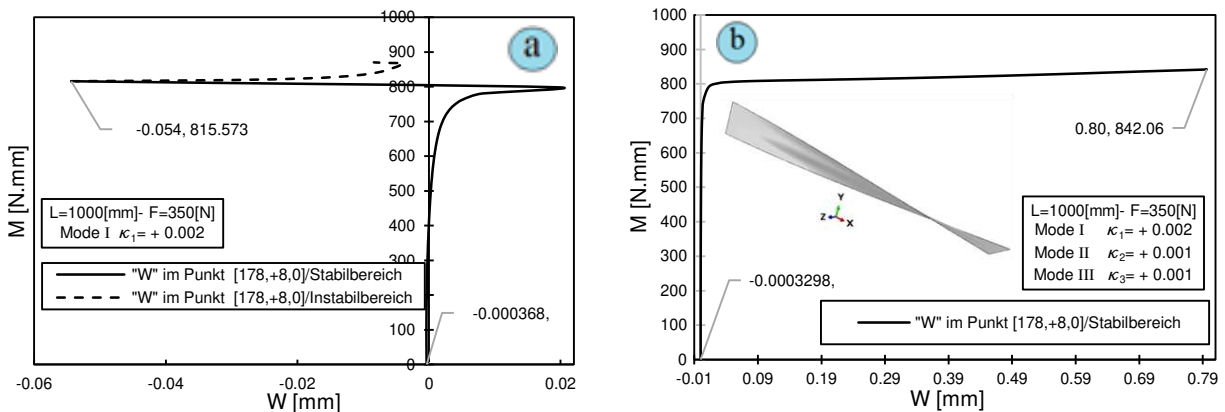


Abbildung 4.22 Last-Verschiebungs-Kurve des 1000-Streifens im Punkt $[178, \pm 8, 0]$ (Symmetrisch) unter Zugkraft $F=350$ [N], kritisches Moment= 810 [N.mm]

Die Abbildung 4.23 zeigt das gesamte Nachbeulverhalten. Das Iterationsverfahren führt hier im 2. Verzweigungspunkt zu einer Lastumkehr. Das Nachbeulverhalten zeigt in diesem Bereich symmetrische Figuren.

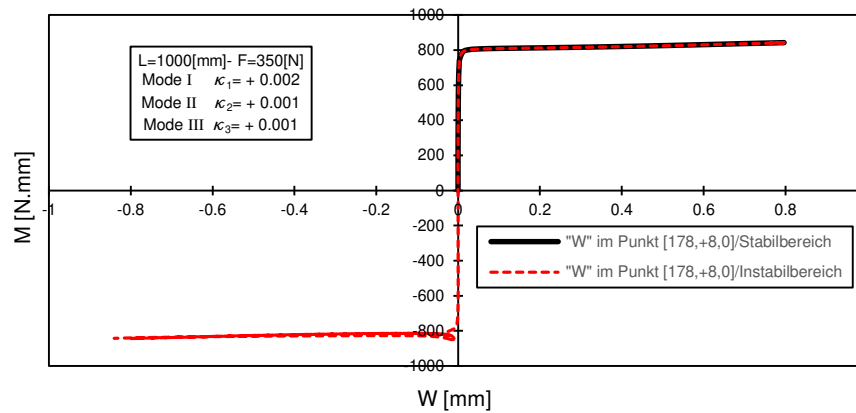


Abbildung 4.23 Last-Verschiebungs-Kurve des 1000-Streifens im Punkt [178,±8,0] (symmetrisch) unter Zugkraft $F=350$ [N], stabiler und instabiler Bereich, gesamte Analyse, kritisches Moment= 810 [N.mm]

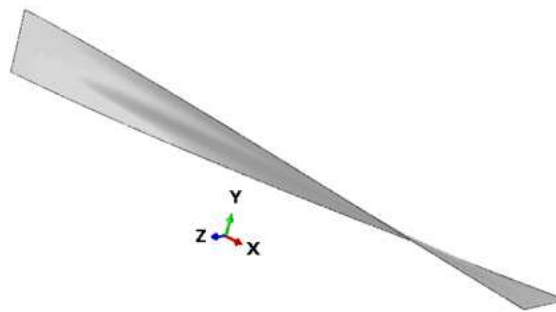


Abbildung 4.24 Nachbeulfigur des 1000-Streifens unter Zugkraft $F=350$ [N] mit der Imperfektion ($\kappa_1 = + 0.002$, $\kappa_2 = + 0.001$, $\kappa_3 = + 0.001$), Inkrement 71, $M = 842.2$ [N.mm], kritisches Moment= 810 [N.mm]

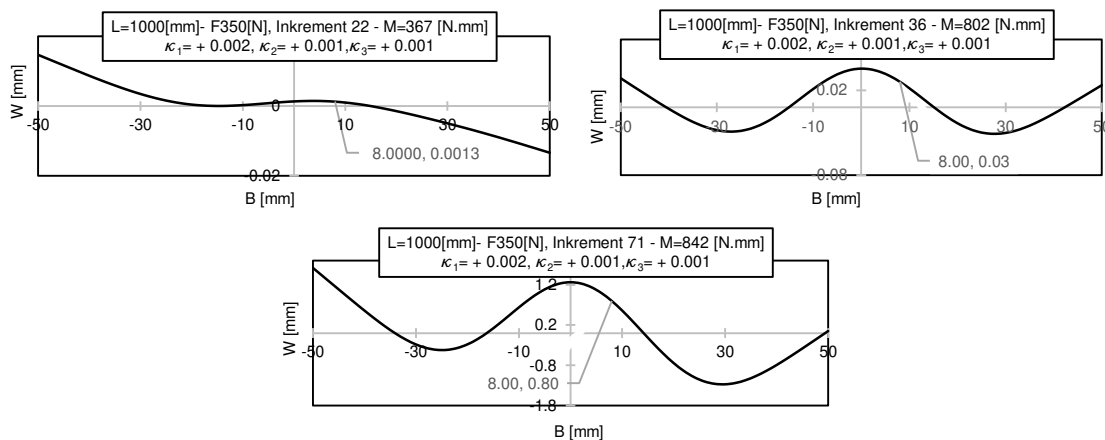


Abbildung 4.25 Vor und Nachbeul-Deformationen des 1000-Streifens entlang des Pfads $X=178$ unter Zugkraft $F=350$ [N], kritisches Moment= 810 [N.mm]

4.5.3 Nachbeulverhalten des 1000-Streifens im Bereich $T > T_\lambda$ unter Zugkraft $F=8000$ [N]

Für $T > T_\lambda$ wurde für den 1000-Streifen kein weitreichendes stabiles Nachbeulverhalten bei den Imperfektionsparametern gemäß Tabelle 4.1 festgestellt, siehe Abbildungen 4.26 (a) und (b).

In Abbildung 4.26 (a) ist sehr gut erkennbar, dass die Nachbeuldeformationen tatsächlich antimetrisch aber instabil sind.

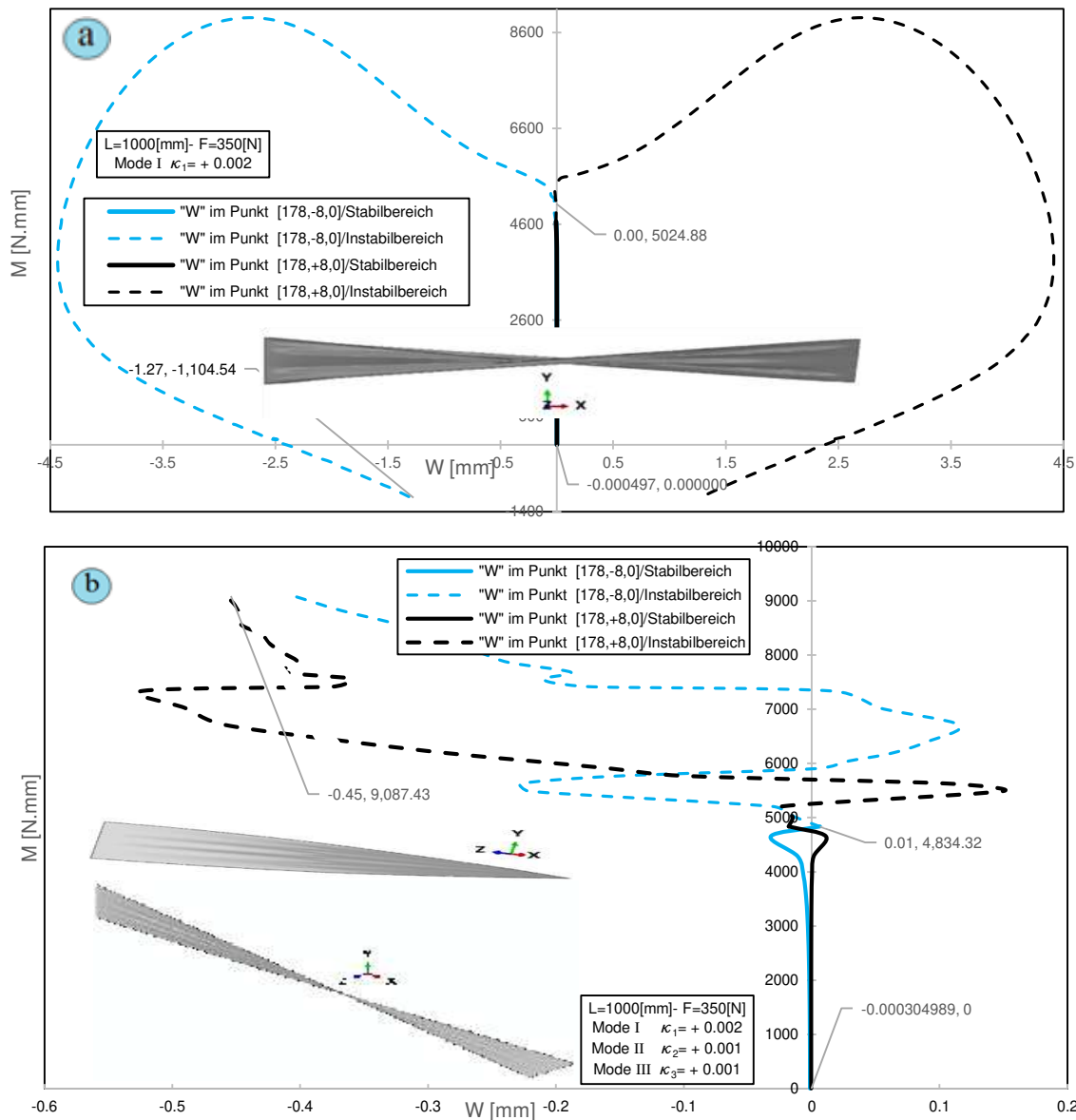


Abbildung 4.26 Last-Verschiebungs-Kurve des 1000-Streifens im Punkt $[178, \pm 8, 0]$ unter Zugkraft $F=8000$ [N], kritisches Moment=4683.9 [N.mm]

Kapitel 5

Fazit

1. Für das lineare Beulverhalten von Kreisscheiben unter Zug- und Druckbeanspruchungen wurden die kritischen Belastungen und die zugehörigen Beulfaktoren berechnet. Es wurden Dicken und Radiusvariationen durchgeführt. In Abbildungen 2.6 bis 2.12 sieht man, dass die kritische Last mit zunehmender Dicke überproportional zunimmt und mit zunehmendem Radius abnimmt. In Tabelle 2.11 wurden die berechneten Beulfaktoren aus den Ergebnissen der Beulanalyse zusammengefasst. Aus dieser Zusammenfassung kann man entnehmen, dass

$$k_{\text{Druck_frei}} < k_{\text{Druck_fix}} < k_{\text{Zug_frei}} < k_{\text{Zug_fix}},$$

dass also der Beulfaktor "k" bei der Zugkraft deutlich größer ist als "k" bei der Drucklast.

Die Randbedingungen beeinflussen die kritischen Lasten stark. Die Kreisscheiben mit gelenkig-gelagertem Rand weisen deutlich höhere kritische Lasten auf als Kreisscheiben mit freiem Rand.

2. Für das Beulverhalten dünner Plattenstreifen unter Zugkraft und Torsionsmoment wurden die kritischen Belastungszustände bzw. Spannungszustände und der " λ " Punkt, an dem ein grundsätzlicher Modewechsel stattfindet, ermittelt.

Für den kurzen Streifen $L=200[\text{mm}]$, tritt dieser Modusübergang bei einer Zugkraft von $F=600[\text{N}]$ bzw. $T_\lambda = 0.0017$ ein, und für den langen Streifen $L=200[\text{mm}]$ bei der Zugkraft $F=350[\text{N}]$ bzw. $T_\lambda = 0.001$. Für beide Streifen wurden die Werte der charakteristischen Parameter mit $k_1=0.43$ und $k_2=0.74$ aus der Gleichung 3.7 herausgerechnet:

$$k_n = \left(\frac{T_\lambda^3 L^2}{t^2} \right)^{1/3} \quad (3.7)$$

T_λ = die dimensionslose Zugkraft im λ -Punkt

3. Es wurde überprüft, dass sich bei den Plattenstreifen unter Zugkraft und Torsionsmoment im Bereich "A" $T < T_\lambda$ nach ss-FvK, bei der Stabilitätsgrenze folgender Zusammenhang zwischen dem Verdrehwinkel und der Zugkraft ergibt :

$$\varphi_{lon}^* = \frac{L}{W} \sqrt{24T} \quad (3.10)$$

$$T = \frac{F}{Etw} \quad (3.3)$$

4. Weiterhin wurden bei den Plattenstreifen unter Zugkraft und Torsionsmoment die Vorfaktoren zur Berechnung der kritischen Winkel in Abhängigkeit von der Zugkraft im Bereich "B" $T > T_\lambda$ berechnet:

$$k_3 = \frac{W}{L} \varphi_{tr}^* \left(\frac{t}{L}\right)^{-1/2} T^{1/4} \quad (3.14)$$

5. Bei der Betrachtung des Nachbeulverhaltens wurde festgestellt, dass es im tiefen Nachbeulbereich zu einer höheren Welligkeit der Nachbeuldeformationen kommt. Die transversalen Verschiebungen gehen zurück, wenn die Membranspannungszustände ausreichend gesteigert werden.

Literaturverzeichnis

- [1] T.Daxner and F.G.Rammerstorfer. Nichtlineare Finite Elemente Methoden. TU Wien, Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik, 2012.
- [2] <http://www.cae-wiki.info/>
- [3] Abaqus Theory Guide, Version 6.14.
- [4] Abaqus Analysis User's Guide Version 6.14.
- [5] G.Firmberger, Diplomarbeit, Wien, 2015, Beul- und Nachbeulverhalten von zugbeanspruchten dünnen Platten mit Rissen und Löchern-Nichtlineare Finite Elemente Analysen
- [6] F.G. Rammerstorfer. Repititorium Leichtbau. R. Oldenburg Verlag, Wien, 1992.
- [7] N. Friedl, F.G. Rammerstorfer, and F.D. Fischer. Buckling of streteched strips. Computers and Structures, 78:185-190, 2000.
- [8] F.G. Rammerstorfer Einführung in die Finite Elemente Methoden. TU Wien, Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik, 2014.
- [9] A.E. Green, 1936, The equilibrium and elastic stability of a thin twisted strip, Proc. R. Soc. London A125 (1936) 430-455.
- [10] A.E. Green, The elastic stability of a thin twisted strip { II, Proc.R. Soc. London A161 (1937) 197-220.
- [11] D.Crispino and R.Benson, Stability of twisted orthotropic plates, Int. J.Mech. Sci. 28,371-379 (1986).

- [12] E.M. Mockensturm, The elastic stability of twisted plates, ASME. J. Appl. Mech. 68 (2001) 561-567. doi:10.1115/1.1357517.
- [13] C.D Coman and A.P.Bassom, An asymptotic description of the elastic instability of twisted thin elastic plates, Acta Mech. 200, 59-68 (2008).
- [14] J. Chopin, A. Kudrolli, Helicoids, wrinkles, and loops in twisted ribbons, Phys. Rev. Lett. 111, 174302 (2013). doi:10.1103/PhysRevLett.111.174302.
- [15] J. Chopin, V. Demery, B. Davidovitch, Roadmap to the morphological instabilities of a stretched twisted ribbon. J. Elast. 119 (2015) 137-189. doi:10.1007/s10659-014-9498-x
- [16] Kudrolli A, Chopin J. 2018 Tension-dependent transverse buckles and wrinkles in twisted elastic sheets. Proc. R.Soc. A 474: 20180062
- [17] S.Faghfouri, F.G. Rammerstorfer, Mode Transitions in Buckling and Post-buckling of Stretched-twisted Strips, Int. J. Nonlin. Mech., in print (2020)

Appendix A:

Aufbringen der Imperfektion in ABAQUS

