



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology



Diplomarbeit

Regelung eines aktiven Magnetlagers für einen unterkritisch laufenden Rotor

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs (Dipl.-Ing.)

unter der Leitung von

O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Schrödl
Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. Matthias Hofer

eingereicht an der Technischen Universität Wien
bei der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik

Verfasst von
Markus Hutterer, BSc

Wien, im November 2014

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die zum Gelingen meiner Diplomarbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Schrödl und Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. Matthias Hofer, die mir das Erstellen dieser Arbeit ermöglichten und mich bei Schwierigkeiten stets unterstützt haben.

Mein ganz persönlicher Dank gilt meiner gesamten Familie für den langjährigen Rückhalt während der Studienzzeit. Dabei bedanke ich mich insbesondere bei meiner Mutter Margit, meinem Vater Ernst und meiner Lebensgefährtin Nicole für die Geduld und das Verständnis, welches für die Durchführung des Studiums vonnöten waren.

Kurzzusammenfassung

Magnetlager stellen eine Alternative zu mechanischen Lagern und Fluidlagern dar. Einer der Hauptvorteile bei dieser Art der Lagerung, ist dass bei Magnetlagern die mechanischen Eigenschaften (z.B. Steifigkeit und Dämpfung) gezielt beeinflusst werden können. Allerdings sind aktive Magnetlager instabile Systeme, weshalb eine stabilisierende Regelstruktur notwendig ist. Diese Art der Lagerung findet daher Anwendung in Bereichen wo die klassischen Lagerungsmethoden nicht mehr einsetzbar sind. Wie es zum Beispiel für spezielle Anwendungen, wo keine Flüssigkeiten austreten dürfen, der Fall ist. Der rasante Fortschritt der Halbleitertechnologien ermöglicht die Implementierung immer optimalerer und komplexerer Regelstrukturen zur Stabilisierung mittels aktiver Magnetlager.

Diese Arbeit beschäftigt sich daher mit der Regelung eines aktiven Magnetlagers für einen unterkritisch laufenden Rotor. Um für das vorhandene Magnetlagersystem eine stabilisierende Regelstruktur zu entwickeln, wird am Anfang der Arbeit über die Grundlagen der Starrkörperkinetik und deren Anwendung an einem starren Rotor diskutiert. Basierend auf diesen Grundlagen werden die System-Differentialgleichungen hergeleitet und deren physikalische Effekte beschrieben. Sind die System-Differentialgleichungen in ausreichender Modellierungstiefe vorhanden, wird im nächsten Abschnitt eine Reglerstruktur für das Starrkörpersystem, welche als Grundlage für das flexible System dient, entwickelt. Im nächsten Abschnitt der Arbeit wird über die Dynamik flexibler Rotoren diskutiert, da die Betrachtung des Starrkörpers alleine, für praktische Anwendungen nicht ausreicht. Da es nicht immer möglich ist, die Gleichungen eines solchen Rotors geschlossen zu lösen, wird auch die Methode der Finiten Elemente eingesetzt. Mit dem vorhandenen Wissen kann die Regelstruktur des Starrkörpers für flexible Rotoren erweitert werden. Die Reglerentwicklung gliedert sich hierbei in drei Abschnitte. Beim ersten Teil werden die mechanischen Eigenschaften des Rotors identifiziert. Im Anschluss kann basierend auf den mechanischen Parametern die eigentliche Regelstruktur entwickelt werden. Der letzte Teil ist die Implementierung einer Unwuchtkompensation. Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden die Simulationsergebnisse durch Messergebnisse verifiziert.

Abstract

Magnetic bearings provide an alternative to mechanical and fluid film bearings. One of the main advantages is that the mechanical properties (for example the spring and the damping coefficients) can be influenced. But active magnetic bearings are unstable systems and therefore a control structure is needed to stabilize them. This type of bearings are usually applied to systems where the classical bearings cannot be used because of their limitations. For example, this is the case for applications, where no fluids are allowed to be used. New investigations in semiconductor technologies allows to implement more and more complex and optimal control structures for stabilization of the active magnetic bearings.

Therefore this work deals with the control of active magnetic bearings which stabilizes an under critical rotor. In order to develop a stabilizing control structure for the existing magnetic bearing system, the basics of rigid bodies and of rigid rotors are explained first. Based on this knowledge the differential equations of the active magnetic bearings are established, and their physical effects explained. In the next section a control structure to stabilize the rigid rotor is developed. Because only the consideration of the rigid rotor is not enough for practical applications, the next section deals with the fundamentals of flexible rotors. Usually it is not possible to model the flexible rotor analytically and therefore the Finite Element Method is used. With this basics a control structure from the rigid body is extended to a flexible rotor. The control design process is structured into three steps. First the identification of the mechanical properties is required. With this knowledge a position controller is developed and the last part deals with the cancelation of the unbalance caused from the rotor. In the last section of this work the simulation results are verified with experiments.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Starrkörperkinetik	3
2.1	Grundlegende Gleichungen und Definitionen	3
2.2	Die Kreiselbewegung	7
2.2.1	Euler'sche Winkel	7
2.2.2	Bewegungsgleichungen des Kreisels	9
3	Dynamik eines starren Rotors	11
3.1	Herleitung der Systemdifferentialgleichungen	11
3.2	Verhalten eines elastisch gelagerten Rotors	14
3.3	Kritische Geschwindigkeiten	18
4	Regelung der Magnetlagerung mit starrem Rotor	20
4.1	Modellierung des elektrischen Systems	20
4.1.1	Aufstellen der Gleichungen	20
4.1.2	Linearisierung um einen Arbeitspunkt	21
4.2	MIMO-Regelstrukturen für lineare Strecken	23
4.2.1	Regelstrukturen mit Zustandsrückführung	23
4.2.2	Regelstrukturen mit Ausgangsrückführung	25
4.3	Reglerentwurf	26
4.3.1	Dezentrale Regelung	26
4.3.2	Entkoppelte Regelung der parallelen und konischen Moden	34
5	Dynamik des elastischen Rotors	38
5.1	Laval-Rotor	38
5.1.1	Natürliche Frequenzen und natürliche Schwingungen	40

5.1.2	Erzwungene Schwingung	40
5.1.3	Einfluss der Lagersteifigkeit	41
5.2	Flexibler Rotor mit kontinuierlicher Massenverteilung	42
5.3	Modellierung mittels FEM	43
5.3.1	Das Prinzip der virtuellen Arbeit	44
5.3.2	Zusammenbau zu einem globalen System	45
5.3.3	Eigenfrequenzen und -Moden	46
6	Regelung eines magnetgelagerten elastischen Rotors	48
6.1	Erweiterung der FEM-Modellierung um Magnetlager	48
6.2	Analyse der mechanischen Eigenschaften des Rotors	50
6.3	Entwicklung einer stabilisierenden Regelstruktur	52
6.3.1	Regelstrukturen für konische und parallele Moden	53
6.3.2	Unwuchtkompensation	59
6.4	Implementierung der Regelstruktur	61
7	Messergebnisse	64
7.1	Regelverhalten nach einem Kraftsprung	65
7.2	Compliance-Funktionen der Regelzweige	65
7.3	Sensitivitätsfunktionen der Regelzweige	69
8	Zusammenfassung und Ausblick	71
8.1	Zusammenfassung	71
8.2	Ausblick	72

1 Einleitung

Die Lagerung von rotierenden Wellen tritt in den verschiedensten Anwendungen auf und ist eigentlich Thema des Maschinenbaus. Für spezielle Anwendungen kann es jedoch vorkommen, dass beispielsweise der Reibverlust minimiert werden muss und daher der Einsatz von Wälzlagern nicht ausreicht. Eine andere spezielle Anwendung ist die Lagerung in einer Umgebung, in der keine Flüssigkeiten austreten dürfen. Hierfür wäre beispielsweise ein Fluidfilmlager ungeeignet. Für solche Fälle scheinen Magnetlager die beste Wahl zu sein. Bei aktiven Magnetlagern werden mit Hilfe von Elektromagneten, Kräfte erzeugt, bei denen im Gegensatz zu klassischen Lagern die mechanischen Eigenschaften (z.B. Steifigkeit und Dämpfung) gezielt beeinflusst werden können. Allerdings sind aktive Magnetlager instabile Systeme, weshalb eine stabilisierende Regelstruktur notwendig ist. Durch den rasanten Fortschritt der Halbleitertechnologie werden Mikroprozessoren und programmierbare-Logiken immer leistungsfähiger und kostengünstiger. Dies ermöglicht immer effizientere und komplexere Regelstrukturen für aktive Magnetlager zu realisieren. Um den Regelkreis zu schließen bedarf es der Positionsinformation des schwebenden Rotors. Diese Information wird in dieser Arbeit durch Sensoren bereitgestellt. Es sei jedoch angemerkt, dass in den letzten Jahren einige Methoden zur sensorlosen Regelung solcher Systeme entwickelt wurden (z.B. die INFORM-Methode welche in [1] und [2] beschrieben wird). Das vorhandene Magnetlagersystem ist ein System mit 5 Freiheitsgraden (5-DOF), das aus zwei radialen und einem axialen Lager besteht (Abbildung 1). Ziel dieser Arbeit ist der Entwurf einer

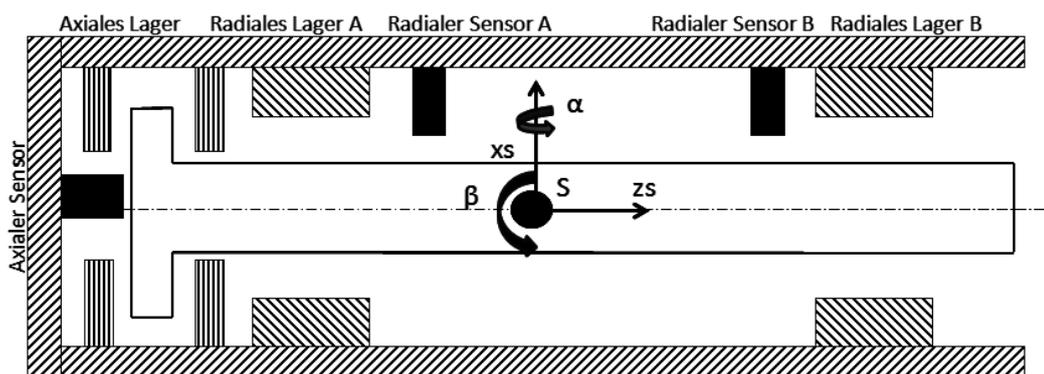


Abbildung 1: 5-DOF aktives Magnetlager

stabilisierenden Mehrgößen (MIMO) Regelstrategie für einen unterkritisch¹ laufenden Rotor im Drehzahlbereich von 0 bis 15000 min^{-1} .

¹Unterkritisch bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Drehfrequenz des Rotors unter der Resonanzfrequenz der ersten Biegemode liegt.

Zu Beginn der Arbeit werden die notwendigen mechanischen und mathematischen Grundlagen erläutert, welche von essenzieller Bedeutung für den Reglerentwurf sind. Aufbauend auf diesen Grundlagen wird die Dynamik eines starren Rotors, welcher mit einem Feder-Dämpfer-System gelagert ist beschrieben. Die mechanische Lagerung wird im nächsten Kapitel durch eine Magnetische ersetzt. Für die Herleitung der Systemgleichungen wird das Modell in einen mechanischen und einen elektrischen Anteil aufgespalten. Der mechanische Anteil kann, bis auf kleine Ergänzungen, aus dem mechanisch gelagertem System übernommen werden. Sind die Systemdifferentialgleichungen in ausreichender Modellierungstiefe vorhanden, wird im nächsten Abschnitt eine Reglerstruktur für das Starrkörpersystem, welche als Grundlage für das flexible System dient, entwickelt. Um diesen Regler für einen flexiblen Rotor zu erweitern, wird im nächsten Kapitel über rotordynamische und strukturdynamische Grundlagen diskutiert. Anhand diesem Wissen wird eine Reglerstruktur für die Stabilisierung des flexiblen Rotors entwickelt. Als letztes Kapitel dieser Arbeit sind die Messergebnisse dargestellt, welche die Robustheit und die Genauigkeit des Systems beweisen sollen.

2 Starrkörperkinetik

In diesem Kapitel werden die mechanischen Grundlagen beschrieben, mit denen die Systemgleichungen nicht nur hergeleitet, sondern auch die einzelnen Bestandteile näher erläutert werden können. Dies ist für ein tieferes Verständnis über die systemtheoretischen Grenzen hinaus nötig.

2.1 Grundlegende Gleichungen und Definitionen

Ein Körper kann als starr modelliert werden, wenn seine Verformung keine oder nur geringfügige Auswirkung auf seine Dynamik hat [4]. Um die kinetischen Eigenschaften eines Starrkörpers zu erklären, kann man sich einen solchen Körper als Grenzfall eines Punktmassensystems vorstellen. Ein Punktmassensystem bestehend aus n Massepunkten, besitzt im allgemeinen $3n$ Freiheitsgrade. Um aber der Einschränkung eines starren Körpers zu genügen, muss diese Anzahl auf 6 reduziert werden. Diese Freiheitsgrade werden als Abstände und Winkeln bezüglich eines ruhenden Inertialsystems definiert. Der Gesamtimpuls lässt sich als Grenzfall der Summe der Einzelimpulse der Punktmassen bilden.

$$\mathbf{p} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta m_i \rightarrow 0}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{v}_i \Delta m_i = \int \mathbf{v} dm \quad (1)$$

Wobei \mathbf{v} den Geschwindigkeitsvektor und m die Masse darstellt. Durch Anwenden des Impulserhaltungssatzes und unter Annahme einer zeitlich konstanten Masse folgt der Schwerpunktsatz eines Starrkörpersystems.

$$m \mathbf{a}_S = \mathbf{F} \quad (2)$$

wobei \mathbf{a}_S der Beschleunigungsvektor des Schwerpunktes ist, also die Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit und \mathbf{F} bezeichnet den resultierenden Kraftvektor, der auf den Schwerpunkt wirkt. Der Schwerpunkt eines Körpers bewegt sich, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und die resultierende Kraft in ihm angreifen würde. Der Schwerpunktsatz hat eigentlich dieselbe Form wie die Kräftegleichung einer Punktmasse. Beim Starrkörper reicht jedoch der Schwerpunktsatz alleine nicht zur Beschreibung der Bewegung aus. Denn wenn die äußeren Kräfte in den Schwerpunkt reduziert werden, wird der Körper im Allgemeinen noch zusätzlich durch ein Moment belastet, welches durch den Drallsatz berücksichtigt werden muss. Daher wird zunächst über den Drall im dreidimensionalen euklidischen Raum eines Starrkörpers diskutiert. Der Drehimpuls eines Starrkörpers ist laut [6] folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{L}^{(A)} = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm \quad (3)$$

Die Geschwindigkeit \mathbf{v} in allgemeiner Lage berechnet sich für einen Körper bezüglich des Bezugspunktes (A) laut der Grundformel der Kinematik [5]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(A)} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (4)$$

mit dem Abstand zum Bezugspunkt \mathbf{r} und der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Mit diesem Zusammenhang kann der Drall bezüglich des Bezugspunktes (A) als

$$\mathbf{L}^{(A)} = m\mathbf{r}^{(S/A)} \times \mathbf{v}^{(A)} + \mathbf{L}^{*(A)} \quad (5)$$

mit

$$\mathbf{L}^{*(A)} = \int_m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm. \quad (6)$$

angegeben werden. $\mathbf{L}^{*(A)}$ komponentenweise ausgewertet ergibt:

$$\mathbf{L}^{*(A)} = \begin{bmatrix} (y^{*2} + z^{*2}) \omega_x^* - x^* y^* \omega_y^* - z^* x^* \omega_z^* \\ (z^{*2} + x^{*2}) \omega_y^* - y^* z^* \omega_z^* - x^* y^* \omega_x^* \\ (x^{*2} + y^{*2}) \omega_z^* - z^* x^* \omega_x^* - y^* z^* \omega_y^* \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dabei ist $\mathbf{L}^{*(A)}$ der Drehimpuls um (A) für ein mit (A) translatorisch bewegten Beobachter im körperfesten (x^*, y^*, z^*) Koordinatensystem. In dieser Arbeit werden die Gleichungen der Starrkörperbewegungen im körperfesten Koordinatensystem hergeleitet, daher ist die Berechnung von $\mathbf{L}^{*(A)}$ ausreichend zur Beschreibung des Dralls. Die einzelnen Terme bei den Winkelgeschwindigkeiten sind laut [6] jeweils Massenträgheitsmomente oder Deviationsmomente. Durch Einführung des Trägheitstensors

$$\boldsymbol{\Theta}_A = \begin{bmatrix} \Theta_x & -\Theta_{xy} & -\Theta_{xz} \\ -\Theta_{yx} & \Theta_y & -\Theta_{yz} \\ -\Theta_{zx} & -\Theta_{zy} & \Theta_z \end{bmatrix}$$

kann Gleichung (6) auf

$$\mathbf{L}^{*(A)} = \boldsymbol{\Theta}_A \boldsymbol{\omega}. \quad (8)$$

gebracht werden. Der Trägheitstensor ist im Allgemeinen nur für körperfeste Koordinatensysteme konstant, daher werden diese für Starrkörperproblemstellungen bevorzugt verwendet.

Aus Gleichung (5) ist ersichtlich, dass es zwei Fälle gibt wo $\mathbf{L}^{(A)} = \mathbf{L}^{*(A)}$ gilt. In denen

also für die Berechnung des Dralls, nicht zwischen körperfest und raumfest unterschieden werden muss.

1. A fällt mit dem Schwerpunkt zusammen, $\mathbf{r}^{(S/A)} = 0$.
2. A ist nicht nur körperfest, sondern auch raumfest, $\mathbf{v}^{(A)} = 0$.

Eine Drehung des Koordinatensystems, kann wie von der Tensorrechnung bekannt, beschrieben werden. Da es sich um einen symmetrischen Tensor handelt können sogenannte Hauptachsenrichtungen gefunden werden, für die zumindest zwei Hauptdiagonalglieder Extremwerte annehmen. Die Berechnung der Hauptdiagonalen endet in einem kubischen Extremwertproblem.

Trifft eine der beiden oben genannten Bedingungen zur Berechnung des Dralls zu, dann lautet der Drallsatz²:

$$\dot{\mathbf{L}}^{(A)} = \mathbf{M}^{(A)} \quad (9)$$

Durch Ableiten des Drehimpulses und Gleichsetzen mit den angreifenden Momenten kann der Drallsatz für räumliche Bewegungen aufgestellt werden. Es ist jedoch zu beachten, dass der Drehimpulsvektor in einem rotierenden Koordinatensystem definiert ist. Die Zeitableitung eines in einem rotierenden Bezugssystem dargestellten Vektors \mathbf{b} kann aus der Starrkörperkinematik laut [5] beschrieben werden.

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{b} \quad (10)$$

wobei $\boldsymbol{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit des gewählten Koordinatensystems beschreibt. Im körperfesten Fall gilt $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$. Nach der durchgeführten Differentiation laut Gl.(10) erhält man für den Drallsatz.

$$\Theta_A \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\Theta_A \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}^{(A)} \quad (11)$$

Der zweite Term auf der linken Seite ist die mathematische Beschreibung des gyroskopischen Effektes. Diese Matrizen-Gleichung kann für Hauptachsenträgheitsmomente vereinfacht werden, da hier die Deviationsmomente Null werden. Diese Gleichungen ausgewertet, werden als Eule'sche Gleichungen für körperfeste Hauptachsen bezeichnet.

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 - (\Theta_2 - \Theta_3) \omega_2 \omega_3 &= M_1^{(A)} \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 - (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_1 \omega_3 &= M_2^{(A)} \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 - (\Theta_1 - \Theta_2) \omega_1 \omega_2 &= M_3^{(A)} \end{aligned} \quad (12)$$

²Wenn keine der beiden Bedingungen zutrifft, kommt noch ein zusätzlicher Term zum Momentengleichgewicht hinzu. Diese Tatsache sollte bei der Wahl des Bezugssystems berücksichtigt werden.

Für spezielle Fälle können die Euler'schen Gleichungen sogar für nicht körperfeste Bezugsachsen angegeben werden, obwohl die Trägheitsmomente konstant bleiben. Dies ist immer möglich, wenn ein Körper um eine Hauptachse rotiert und die Trägheitsmomente um die beiden anderen Achsen konstant bleiben. Dazu zählen:

- Drehung rotationssymmetrischer Körper um die Symmetrieachse
- Drehung zylindrischer Körper mit doppelt symmetrischem Querschnitt

Bei einem solchen nicht körperfesten Koordinatensystem (x', y', z') muss jedoch zwischen den Winkelgeschwindigkeit ω und Ω unterschieden werden. In diesem Fall lautet der Drallsatz:

$$\Theta_A \dot{\omega} + \Omega \times (\Theta_A \omega) = M^{(A)} \quad (13)$$

Durch komponentenweiser Auswertung von Gl.(13) können die Euler'schen Gleichungen in einem nicht körperfesten Koordinatensystem für Hauptträgheitsmomente angegeben werden³.

$$\begin{aligned} \Theta_{x'} \dot{\omega}_{x'} - \Theta_{y'} \omega_{y'} \Omega_{z'} + \Theta_{z'} \omega_z \Omega_{y'} &= M_{x'}^{(A)} \\ \Theta_{y'} \dot{\omega}_{y'} - \Theta_{z'} \omega_{z'} \Omega_{x'} + \Theta_{x'} \omega_x \Omega_{z'} &= M_{y'}^{(A)} \\ \Theta_{z'} \dot{\omega}_{z'} - \Theta_{x'} \omega_{x'} \Omega_{y'} + \Theta_{y'} \omega_y \Omega_{x'} &= M_{z'}^{(A)} \end{aligned} \quad (14)$$

Die allgemeine Bewegung eines starren Körpers im drei dimensional euklidischen Raum im kartesischem Koordinatensystem kann durch die Kombination des Schwerpunktsatzes Gl. (2) und der Eulergleichungen Gl.(12) beschrieben werden. Zur vollständigen Berechnung der mechanischen Eigenschaften des Starrkörpers müssen die Bewegungsgleichungen noch an Randbedingungen angepasst werden. Man unterscheidet zwischen 2 Arten der Randbedingungen:

- **Kinematische Randbedingungen:** Bei dieser Art der Randbedingung werden Verschiebungen an den Rändern des Körpers vorgegeben. Zu dieser Form der Zwängung zählen Gelenke, starre Verbindungselemente, aber auch translatorische Bindungen wie die Bewegung auf einer Fläche oder Kurve. Nicht dazu zählen elastische Verbindungselemente wie Federn.
- **Dynamische Randbedingungen:** Bei dieser Art der Randbedingung werden Kräfte an den Rändern des Körpers vorgegeben.

³Der in der Antriebstechnik oft verwendete Drallsatz $\Theta \omega = M$ ist lediglich ein Spezialfall der Euler Gleichungen für eine Rotation um eine feste Achse.

Es ist zu beachten, dass die kinematischen Randbedingungen die Anzahl der Freiheitsgrade verringern.

Der letzte Teil dieses Kapitels behandelt die Wirkung von Auswuchtungen auf rotierende Systeme. Ein unwuchter Rotor ruft verschiedene Arten von Lagerkräften hervor. Man kann hierbei zwischen zwei Mechanismen unterscheiden:

1. **Statische Auswuchtung:** Dieser Mechanismus tritt auf, wenn der Schwerpunkt der Welle nicht auf der Rotationsachse liegt. Der Rotor belastet hierbei die Achse durch transversale Kräfte. Dieses Phänomen ist aus dem Schwerpunktsatz ersichtlich.
2. **Dynamische Auswuchtung:** Wie im Drallsatz ersichtlich, kommen bei einem nicht rotationssymmetrischen Körper noch Deviationsmomente hinzu, die die Welle mit Biegemomenten um die x- und y-Achse belasten.

Es ist an diesem Punkt anzumerken, dass bei einem starren Körper zwei Ausgleichsmassen in zwei verschiedenen Ebenen zur Auswuchtung ausreichen. Im elastischen Fall gilt dies nicht mehr und man muss den Massenausgleich aufwendiger gestalten.

2.2 Die Kreiselbewegung

Um die Starrkörperbewegungen, die in dem vorherigen Kapitel definiert und hergeleitet wurden, zu verstehen, wird in diesem Kapitel über den vereinfachten Fall eines Kreisels diskutiert. *„Ein Kreisel ist ein achssymmetrischer Körper, der eine räumliche Drehbewegung um einen raumfesten Punkt seiner Symmetrieachse ausführt“* [4]. Zur Beschreibung einer Kreiselbewegung genügen drei Freiheitsgrade, die die Rotation um einen festen Punkt beschreiben. Um sich eine komplizierte Elimination durch Zwangsbedingungen zu ersparen, wird daher eine allgemeine Rotationsbewegung mit nur drei unabhängigen Freiheitsgraden beschrieben, die durch Winkelkoordinaten definiert sind. Für die Wahl dieser Winkel werden in dieser Arbeit die Euler Winkel herangezogen.

2.2.1 Euler'sche Winkel

Ein Gedanke wäre die Drehwinkel auf die feststehenden (x, y, z) Achsen zu beziehen. Das ist jedoch nicht vorteilhaft, da diese Winkel nicht voneinander unabhängig sind. Wird eine Linie, die in der x-z Ebene liegt, 90° um die z-Achse gedreht, so erfährt die Linie im Allgemeinen nicht nur eine Rotation um die z-Achse, sondern auch um die x-Achse (Abbildung 2).

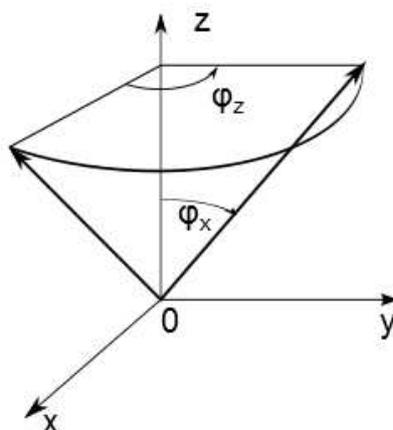


Abbildung 2: Drehung um die z-Achse

Als Lösung dieses Problems müssen die Drehachsen offensichtlich dem Kreisel folgen, um eine Unabhängigkeit der Drehwinkel zu erreichen. Das Koordinatensystem (x, y, z) wird durch drei aneinandergefügte Rotation in ein (x^*, y^*, z^*) transformiert (Abbildung(3)).

1. Es erfolgt eine Drehung um die z-Achse mit dem Drehwinkel φ . Es entsteht ein Koordinatensystem (x', y', z') .
2. Eine Drehung um die x' -Achse mit dem Drehwinkel ϑ . Es entsteht ein Koordinatensystem (x'', y'', z'') . Die Rotationsachse $x' = x''$ wird Knotenachse genannt.
3. Eine Drehung um die z'' -Achse mit dem Drehwinkel ψ . Es entsteht das System (x^*, y^*, z^*) . Die Rotationsachse wird Figurenachse genannt.

Die Winkel φ , ϑ und ψ bezeichnet man als Euler'sche Winkel. Die Koordinatentransformation für einen Vektor lässt sich mit Hilfe der Drehmatrix \mathbf{A} anschreiben.

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (15)$$

Wobei sich die Matrix \mathbf{A} aus den Matrizen \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 und \mathbf{A}_3 , die die Transformation der 3 Drehungen darstellen wie folgt berechnen lässt.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi & \sin\vartheta\sin\psi \\ -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi & \sin\vartheta\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\vartheta & -\cos\varphi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \quad (16)$$

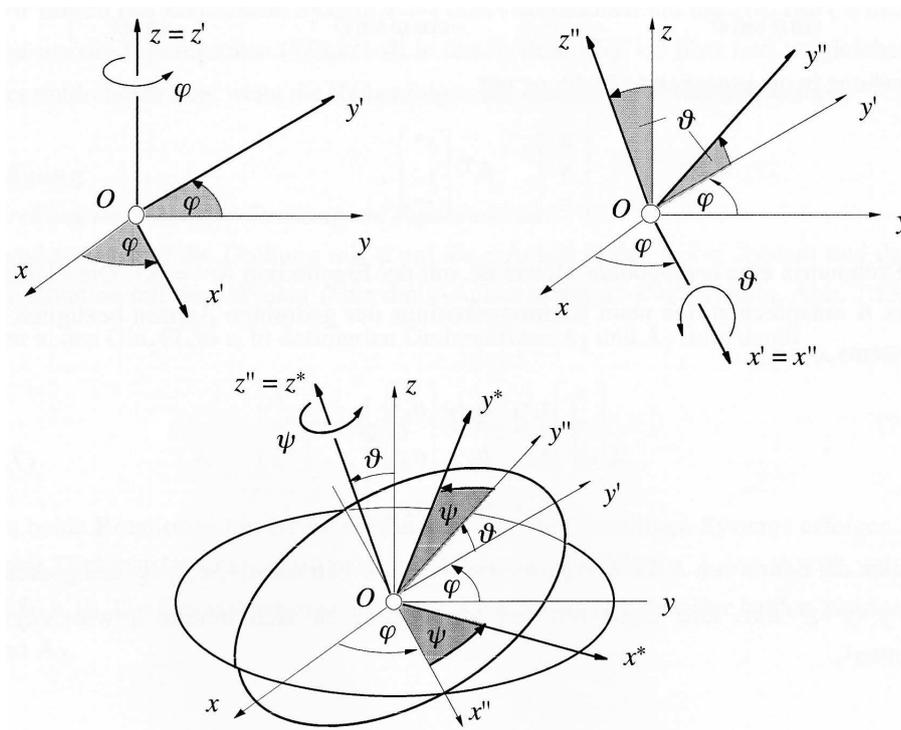


Abbildung 3: Koordinatentransformation [4]

2.2.2 Bewegungsgleichungen des Kreisels

Mit den Euler'schen Winkeln lassen sich die Bewegungsmöglichkeiten (Abbildung (4)) eines Kreisels eindeutig beschreiben.

- Präzession: Rotation um die feste z -Achse mit der Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$
- Nutation: Rotation um die Knotenachse mit der Geschwindigkeit $\dot{\vartheta}$
- Spin: Rotation um die Figurenachse mit der Geschwindigkeit $\dot{\psi}$

Die Winkelgeschwindigkeit ω kann nun als Summe der Geschwindigkeiten der oben definierten Bewegungen berechnet werden.

$$\omega = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_{x''} + \dot{\psi} \mathbf{e}_{z''} \quad (17)$$

Es ist ersichtlich, dass die einzelnen Summanden in verschiedenen Koordinatensystemen dargestellt sind. Die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels soll in einem Koordinatensystem x'', y'', z'' dargestellt werden, welches identisch mit dem Körperfesten ist, sich aber nicht um die Figurenachse mitdreht. Nach anschließender Transformation durch die davor hergeleiteten Drehmatrizen in das definierte Koordinatensystem ist

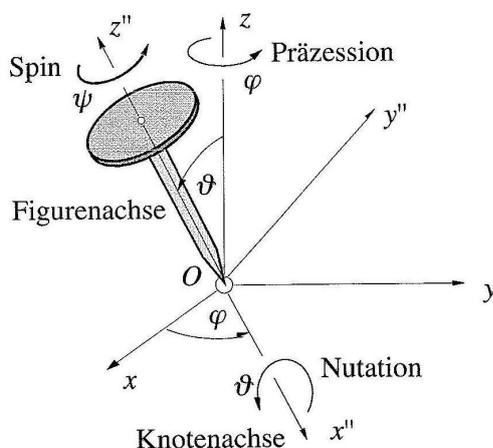


Abbildung 4: Bewegungsmöglichkeiten des Kreisels [4]

die Winkelgeschwindigkeit gleich

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta} \mathbf{e}_{x''} + \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_{y''} + (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \mathbf{e}_{z''} \quad (18)$$

und das Koordinatensystem $(x'' - y'' - z'')$ rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\vartheta} \mathbf{e}_{x''} + \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{e}_{y''} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \mathbf{e}_{z''} \quad (19)$$

Aus der Definition des Koordinatensystems ist ersichtlich, dass sich $\boldsymbol{\Omega}$ von $\boldsymbol{\omega}$ um den Spinn $\dot{\psi} \mathbf{e}_{z''}$ unterscheidet. Die Massenträgheitsmomente im $x'' - y'' - z''$ Koordinatensystem sind auch Hauptträgheitsmomente und aufgrund der Symmetrie gilt $\Theta_{x''} = \Theta_{y''} = \Theta$ und $\Theta_{z''} = \Theta_3$. Mit den Euler'schen Gleichungen für ein nicht körperfestes Bezugssystem Gl.(14) können die Kreiselbewegungen folgendermaßen beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \Theta(\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) + \Theta_3 \dot{\varphi} \sin \vartheta (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) &= M_{x''}^{(0)} \\ \Theta(\dot{\varphi} \sin \vartheta + 2\dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta) + \Theta_3 \dot{\vartheta} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) &= M_{y''}^{(0)} \\ \Theta_3(\ddot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta - \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta) &= M_{z''}^{(0)} \end{aligned} \quad (20)$$

Es handelt sich hier um drei gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen, die im Allgemeinen nicht analytisch gelöst werden können. Für einige wenige Spezialfälle können jedoch analytische Lösungen gewonnen werden.

3 Dynamik eines starren Rotors

Das vorige Kapitel beschäftigte sich mit den mechanischen Grundlagen die zur Beschreibung und zum Verständnis der Rotordynamik von großer Bedeutung sind. In diesem Kapitel wird über die Dynamik eines starren Rotors, welcher mit flexiblen Lagern stabilisiert ist, diskutiert. Der Testaufbau des Systems besteht aus zwei radialen und einem axialen Magnetlager. Das axiale und die radialen Magnetlager können in dieser Arbeit unabhängig voneinander beschrieben werden [7]. Im radialen Fall besitzt man pro Lager zwei Kräfte um den Rotor in Schwebelage zu halten. Um die zur Beschreibung des Systems notwendigen Differentialgleichung nicht unnötig zu verkomplizieren werden folgende Vereinfachungen getroffen.

- Der Rotor ist rotationssymmetrisch und starr.
- Die Auslenkungen des Rotors aus der Referenzposition sind klein gegenüber den Abmessungen des Rotors.
- Die Kräfte werden als konservativ angenommen.
- Befindet sich der Rotor in der Referenzlage, ist das raum- und körperfeste Koordinatensystem gleich und befindet sich im Schwerpunkt.
- Die Winkelgeschwindigkeit wird als konstant oder langsam veränderlich im Vergleich zur Systemdynamik angenommen.

Werden diese Vereinfachungen für den Rotor angenommen, so kann der mechanische Teil des Gesamtsystems als linear modelliert werden. Eine schematische Darstellung der Lagerung ist in Abbildung 5 ersichtlich.

3.1 Herleitung der Systemdifferentialgleichungen

Die Aufgabe dieses Kapitels besteht in der Herleitung eines Differential-Gleichungssystems, das die physikalischen Effekte mit ausreichender Modellierungstiefe mathematisch abbildet. Um die Modellierung nicht unnötig zu verkomplizieren wird das Gesamtsystem in ein elektrisches und ein mechanisches Teilsystem zerlegt. Diese Teilsysteme sind über eine Impulsproduktionsrate, also global gesehen über einen Kraftvektor \mathbf{F} verbunden. Zuerst wird das mechanische Teilsystem, das auf den Grundlagen aus Kapitel 2 beruht, beschrieben. Der mechanische Teil wird wiederum in einen axialen und einen radialen Teil aufgespalten. Die axiale Bewegung kann einfach durch den Schwerpunktsatz aus Gl.(2) beschrieben werden, da in dieser Richtung nur translatorische

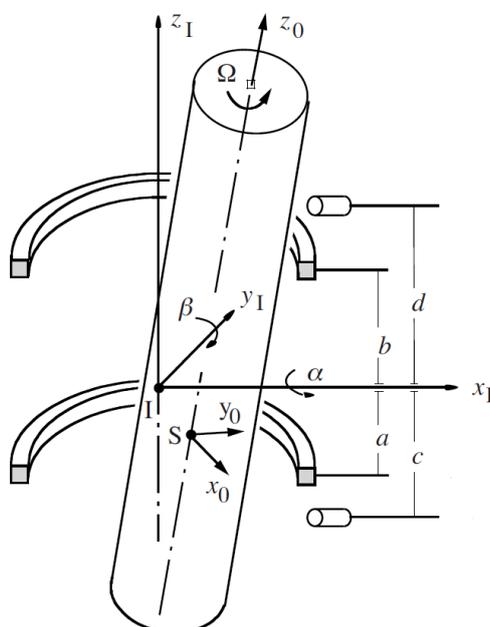


Abbildung 5: Modellbildung Magnetlager [7]

Bewegungen von Bedeutung sind:

$$m \frac{d^2 z_s}{dt^2} = F_z - mg \quad (21)$$

Bei der radialen Bewegung ist das nicht mehr der Fall, denn hier sind die translatorischen Bewegung von rotatorischen überlagert. Die translatorischen Bewegungen folgen wieder aus dem Schwerpunktsatz.

$$m \frac{d^2 x_s}{dt^2} = F_x \quad (22)$$

$$m \frac{d^2 y_s}{dt^2} = F_y \quad (23)$$

Für allgemeine magnetgelagerte Rotoren können die rotatorischen Bewegungsgleichungen aus den Euler'schen Gleichungen Gl.(12) angegeben werden. Beim vorhandenen Magnetlager kann jedoch die Rotationssymmetrie des Rotors ausgenutzt und die Euler'schen Gleichungen für ein spezielles Koordinatensystem Gl.(14) verwendet werden. Das gewählte Koordinatensystem ist gleich dem körperfesten Schwerpunktsystem jedoch ohne sich mit ω um die z -Achse mit zudrehen. Da die Winkelgeschwindigkeit $\omega_z = \Omega$ als eingepreßt und nahezu konstant angenommen wird, degenerieren die nicht-linearen Euler'schen Gleichungen zu linearen, aber aufgrund der langsam veränderli-

chen Winkelgeschwindigkeit, zeitvarianten Systemgleichungen.

$$\begin{aligned}\Theta_{x'}\dot{\omega}_{x'} + \Theta_{z'}\omega_{y'}\Omega &= M_{x'}^{(A)} \\ \Theta_{y'}\dot{\omega}_{y'} - \Theta_{z'}\omega_{x'}\Omega &= M_{y'}^{(A)} \\ \omega_{z'} &= \Omega\end{aligned}\quad (24)$$

Das mechanische Teilsystem eines starren Rotors für eine radiale Bewegung ist somit identifiziert und lautet für $\omega_y = \dot{\beta}$ und $\omega_x = \dot{\alpha}$:

$$\begin{pmatrix} \Theta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{x}_s \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{y}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Theta_z \omega \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{x}_s \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ F_x \\ M_y \\ F_y \end{pmatrix}\quad (25)$$

oder in kompakter Matrizenform:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\quad (26)$$

Durch die Magnetlager werden nicht direkt Momente und Schwerpunktkräfte aufgebracht, daher müssen die Kräfte der Magnetlager in den Schwerpunkt reduziert werden. Für die $x - z$ Ebene ist das zu reduzierende System freigemacht in Abbildung 6 dargestellt.

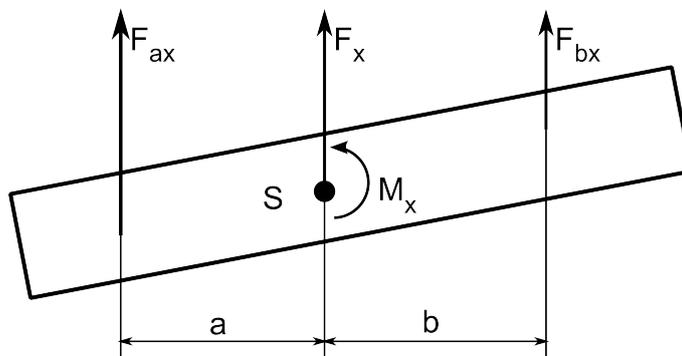


Abbildung 6: Reduzierung in den Schwerpunkt

Das in den Schwerpunkt reduzierte System lautet:

$$F_x = F_{ax} + F_{bx}\quad (27)$$

$$M_x = -aF_{ax} + bF_{bx}\quad (28)$$

Für die $y - z$ Ebene folgt die Reduzierung auf analoge Weise. Das radiale mechanische System

hat nach der Reduzierung folgende Form:

$$\begin{pmatrix} \Theta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{x}_s \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{y}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Theta_z \omega \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{x}_s \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -aF_{ax} + bF_{bx} \\ F_{ax} + F_{bx} \\ -aF_{ay} + bF_{by} \\ F_{ay} + F_{by} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Für die Reduktion aus den Lagerkräften in den Schwerpunkt kann aus den vorangegangenen Überlegungen die Transformationsmatrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

eingeführt werden. Die Transformation lautet:

$$\mathbf{F} = \mathbf{B} \mathbf{F}_L \quad (31)$$

wobei die Komponenten von \mathbf{F} die Kräfte und Momente im Schwerpunkt und die Komponenten von \mathbf{F}_L die Lagerkräfte beschreiben.

3.2 Verhalten eines elastisch gelagerten Rotors

Um die physikalischen Zusammenhänge eines elastisch gelagerten Rotors zu verstehen werden die Lagerkräfte aus Gleichung (29) als Federn modelliert (Abbildung 7), welche in einer Steifigkeitsmatrix dargestellt werden können. Wie beim Kraftvektor muss auch die Steifigkeitsmatrix im Schwerpunktskoordinatensystem beschrieben werden. Der erste Schritt besteht in der Berechnung der resultierenden Lagerkräfte. Aus der

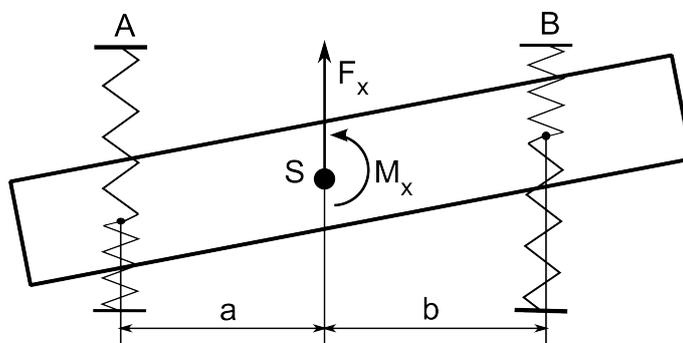


Abbildung 7: Veranschaulichung der Steifigkeitsmatrix

Materialgleichung der Feder

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x} \quad (32)$$

lässt sich beispielsweise die Kraft im Lager A mit

$$F_A = -k(a\beta + x_S) \quad (33)$$

berechnen. Die anderen Lagerkräfte können analog dazu berechnet werden. Der Lagerkraftvektor kann also mittels folgender Gleichung dargestellt werden:

$$\mathbf{F}_L = -k \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ x_S \\ \alpha \\ y_S \end{bmatrix} \quad (34)$$

Mittels **B** können die Kräfte von den Lagern in den Schwerpunkt reduziert und auf die linke Seite gebracht werden, und man erhält

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{z}} + \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{B}^T}_{\mathbf{K}_T}\mathbf{z} = 0 \quad (35)$$

mit

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{xB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{yA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{yB} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Mit dem vereinfachten Federmodell werden zwei Simulation mittels Matlab durchgeführt, anhand welcher das Verhalten magnetgelagerter Systeme studiert werden kann.

1. Bei der ersten Simulation gelten folgende Bedingungen

$$\begin{aligned} \Omega &= 0 \\ a &= b \\ \dot{x}_{S0} = \dot{y}_{S0} = \dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 &= 0 \\ x_{S0} = y_{S0} &= 0.01\text{m} \\ \alpha_0 = \beta_0 &= 0.1\text{rad} \end{aligned}$$

Unter diesen Bedingungen spaltet sich das System in 2 entkoppelte, aber gleiche Schwingungen in der x-z und der y-z Ebene auf. In jeder der beiden Ebenen kann die Schwingung in einen translatorischen und einen rotatorischen Anteil mit den

Kreisfrequenzen ω_T und ω_R aufgespalten werden.

$$\omega_T = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (37)$$

$$\omega_R = \sqrt{\frac{2ka^2}{I_{x0}}} \quad (38)$$

Die Ergebnisse der Simulation sind in Abbildung 8 ersichtlich. Für COG (Center

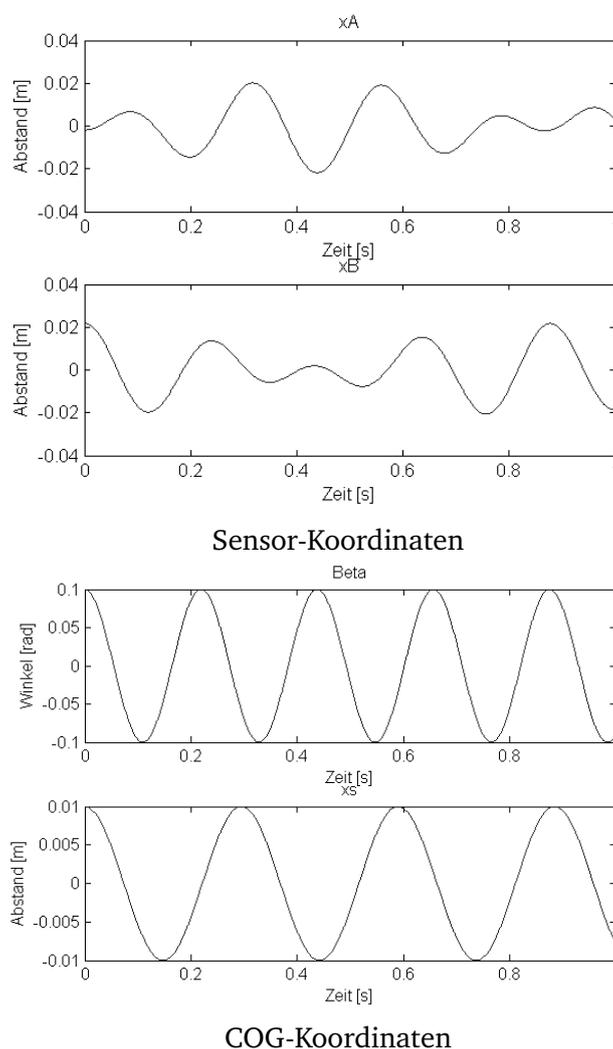


Abbildung 8: Elastische Simulation ohne Winkelgeschwindigkeit

of Gravity) Koordinaten sind die beiden Schwingungen, wie oben beschrieben, entkoppelt und daher reine Sinusgrößen. Würde man im Gegensatz dazu aber die Auslenkungen an den Sensoren betrachten, so sind die Schwingungen nicht mehr entkoppelt und es kann nur mehr die Superposition beider Amplituden betrachtet werden.

2. Die zweite Simulation hat folgende Bedingungen

$$\begin{aligned}\Omega &= 300\text{rad/s} \\ a &\neq b \\ \dot{x}_{S0} = \dot{y}_{S0} &= 0 \\ x_{S0} = y_{S0} &= 0.01\text{m} \\ \dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 &= 0 \\ \alpha_0 = \beta_0 &= 0.1\text{rad}\end{aligned}$$

Abbildung 9 zeigt die allgemeine Bewegung eines elastisch gelagerten Rotors. Der gyroskopische Effekt verkoppelt die Bewegung der beiden oben beschriebenen Ebenen. Bei einer solchen Bewegung existieren 4 Resonanzfrequenzen, welche Schwingungen in einem solchem dämpfungsreifen System hervorrufen. Die

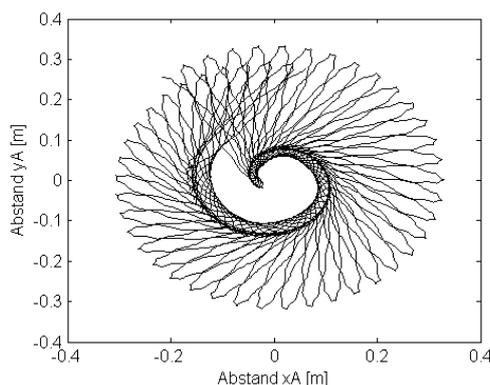


Abbildung 9: Elastische Simulation mit Winkelgeschwindigkeit

Schwingungen lassen sich wie folgt klassifizieren:

- Translatorische Schwingung bei der die Eigenfrequenz mit der Drehzahl steigt.
- Translatorische Schwingung bei der die Eigenfrequenz mit der Drehzahl fällt.
- Rotatorische Schwingung bei der die Eigenfrequenz mit der Drehzahl steigt, welche die Nutation des Rotors beschreibt.
- Rotatorische Schwingung bei der die Eigenfrequenz mit der Drehzahl fällt, welche die Präzession des Rotors beschreibt.

Hierbei ist zu beachten, dass sich die Schwingung welche mit der Drehzahl ansteigen die gleiche Drehrichtung wie Ω besitzen und die beiden anderen Moden in entgegengesetzter Richtung rotieren.

Um in späterer Folge die Stabilität des Systems für einen weiten Drehzahlbereich bestimmen zu können wird das sogenannte Campbell-Diagramm eingeführt. Das Campbell-Diagramm besteht aus zwei Graphen. Der erste Graph zeigt die verschiedenen Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Drehzahl und der Zweite die Dämpfung in Abhängigkeit der Drehzahl. Zeigt die Dämpfung einen Wert kleiner Null, dann ist das System für diese Drehzahl instabil. Der Regler sollte so eingestellt sein, dass das System für alle möglichen Resonanzfrequenzen die beim System in einem definierten Arbeitsbereich auftreten können eine ausreichende Dämpfung besitzt. Die strichlierte Linie ist die mit der Drehzahl synchrone Frequenz und wird Geschwindigkeitslinie genannt. Das Campbell-Diagramm eines elastisch gelagerten Rotors ist in Abbildung 10 ersichtlich. Der Dämpfungsgraph wurde nicht dargestellt, da dieser bei einer solchen Anordnung immer Null ist.

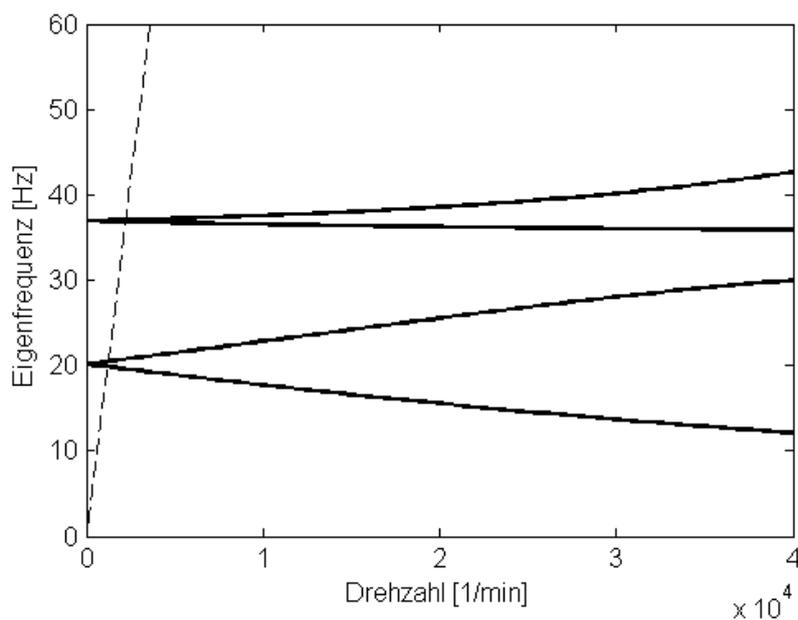


Abbildung 10: Campbell-Diagramm vom starren Rotor

3.3 Kritische Geschwindigkeiten

Im vorigen Abschnitt wurde über die Resonanzfrequenzen und deren Verhalten beim drehenden Rotor diskutiert. In diesem Abschnitt soll ein Problem, welches trotz stabiler Regelung, mit diesen Frequenzen einhergeht, erläutert werden. Dieses Problem wird als Resonanzphänomen oder auch als kritische Geschwindigkeiten bezeichnet. Verschiedene Arten von Anregungen können zu Resonanzphänomenen führen. Diese tritt auf wenn eine Eigenfrequenz mit der Anregungsfrequenz zusammenfällt, oder in bestimmter Relation zu einander stehen. Anregungen können durch Auswuchtungen des Rotors,

durch das ganze Lagerungssystem oder auch durch Arbeitsprozesse entstehen. Dieses Kapitel beschreibt Resonanzphänomene aufgrund von statischen und dynamischen Auswuchtungen des Rotors. Die statische Auswuchtung belastet das System durch eine Kraft. Gibt man Sie im körperfesten Koordinatensystem an lautet sie:

$$F_x = m \cdot e_x \cdot \omega^2 \quad (39)$$

$$F_y = m \cdot e_y \cdot \omega^2 \quad (40)$$

Wobei e jeweils der Abstand vom Drehpunkt zum Schwerpunkt ist.

Eine dynamische Auswuchtung belastet ein System immer durch Momente. Die Belastung im körperfesten Koordinatensystem kann aus Gleichung (11) hergeleitet werden. Es werden hier aber nur die Anteile mit einem quadratischen ω Anteil herangezogen.

$$M_x = -\Theta_{yz}\omega^2 \quad (41)$$

$$M_y = \Theta_{zx}\omega^2 \quad (42)$$

Nun kann die Bewegungsgleichung (26) um die oben beschriebenen Belastungen erweitert werden.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F} + \mathbf{U}_s \quad (43)$$

mit

$$\mathbf{U} = \omega^2 \begin{bmatrix} -\Theta_{yz} & \Theta_{zx} \\ -me_y & me_x \\ \Theta_{zx} & -\Theta_{yz} \\ me_x & me_y \end{bmatrix} \quad \text{und } \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

Für die Frequenzen der kritischen Geschwindigkeiten muss der Regler eine ausreichend hohe Dämpfung bereitstellen, welche die Resonanzschwingung nicht über eine vorgegebene Grenze hinaus ansteigen lässt. Die kritischen Geschwindigkeiten treten im Campbell-Diagramm immer als Schnittpunkte zwischen der Geschwindigkeitslinie und einer Eigenfrequenz auf.

4 Regelung der Magnetlagerung mit starrem Rotor

Im vorhergehenden Kapitel wurden die notwendigen Gleichungen hergeleitet und vereinfacht. Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Regelung des vereinfachten Rotormodells. Bevor das Gesamtmodell des Magnetlagers angegeben werden kann, muss noch über das elektrische Teilsystem diskutiert werden.

4.1 Modellierung des elektrischen Systems

Dieser Abschnitt soll die Modellierung des vereinfachten elektrischen Systems zeigen. Das Eisen wird als ideal permeabel angenommen ($\mu_r = \infty$) angenommen. Der Rotor besteht nur aus Eisen und hat keine Wicklungen oder Permanentmagnete.

4.1.1 Aufstellen der Gleichungen

Eine mögliche Anordnung ist in Abbildung 11 ersichtlich.

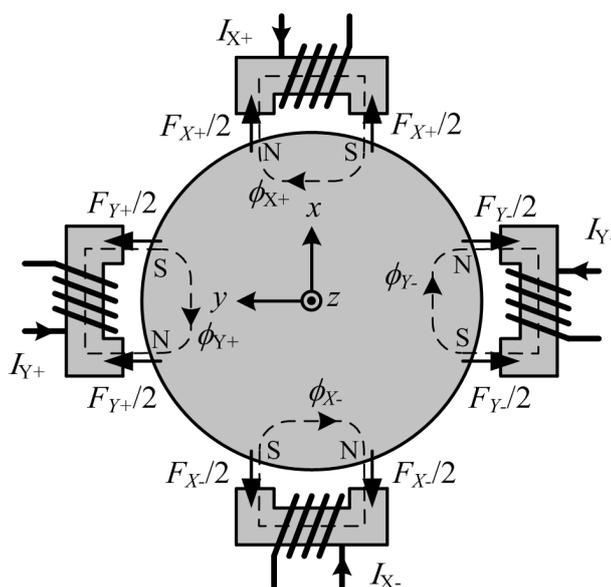


Abbildung 11: Typische Magnetlageranordnung eines radialen Magnetlagers [1]

Die resultierende Kraft elektromagnetischen Ursprungs für ein dominant magnetisches Feldsystem berechnet sich laut [9] wie folgt:

$$\mathbf{F}_M = 2 \int_{\partial V} \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2 \mathbf{n} \right) dA \quad (44)$$

In dem vorhandenen Magnetlagersystem wird der Flußdichtevektor \mathbf{B} und der Normalvektor \mathbf{n} als kollinear und weiters \mathbf{B} im Luftspalt als konstant angenommen. Daher lässt sich Gl.(44) in der vereinfachten Form, als

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 A \mathbf{n} \quad (45)$$

angeben. Zur Berechnung der Flussdichte \mathbf{B} wird der Durchflutungssatz für ein Magnetlager angewendet:

$$2 \frac{|\mathbf{B}|}{\mu_0} s = NI \quad (46)$$

mit dem Luftspalt s und der Windungszahl N . Die resultierende Kraft die ein Magnetlager auf den Rotor ausübt lautet daher:

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4} \mu_0 N^2 A \frac{I^2}{s^2} \mathbf{n} \quad (47)$$

Die Gesamtkraft kann durch einfache Summation angegeben werden

$$F_{Resx} = F_{x+} - F_{x-} \quad (48)$$

$$F_{Resy} = F_{y+} - F_{y-} \quad (49)$$

Aus Gl.(47) ist ersichtlich, dass die resultierende Kraft nichtlinear vom Weg und vom Strom abhängt. Um die elegante Theorie der linearen Systeme dennoch nutzen zu können, wird die resultierende Kraft linearisiert.

4.1.2 Linearisierung um einen Arbeitspunkt

Da es laut Abbildung 11 zwei Magnetlager pro Freiheitsgrad gibt, werden sie im sogenannten "differential driving mode" betrieben. Dabei werden beide Magnetlager mit einer gewissen Vormagnetisierung, die durch einen konstanten Strom i_0 hervorgerufen wird, betrieben. Will man eine resultierende Kraft aufbringen, wird an ein Magnetlager ein Strom von $i_0 + i_x$ und am anderen ein Strom von $i_0 - i_x$ eingepreßt. Wenn man den Luftspalt in der Mittellage des Rotors mit s_0 bezeichnet, berechnet sich die resultierende Kraft in x -Richtung wie folgt

$$F_{Resx} = F_{x+} - F_{x-} = \frac{1}{4} \mu_0 N^2 A \left(\frac{(i_0 + i_x)^2}{(s_0 - x)^2} - \frac{(i_0 - i_x)^2}{(s_0 + x)^2} \right) \quad (50)$$

Durch Linearisierung und unter der Annahme von kleinen Auslenkungen, für die gilt $s_0 \gg x$ folgt:

$$F_{Resx} = \frac{\mu_0 N^2 A i_0}{s_0^2} i_x + \frac{\mu_0 N^2 A i_0^2}{s_0^3} x \quad (51)$$

Durch Einführung der zwei Proportionalitätsfaktoren k_x und k_i lässt sich die resultierende Kraft in vereinfachter linearer Form angeben.

$$F_{Resx} = k_i i_x + k_x x \quad (52)$$

In diesem Zusammenhang hat k_x die Eigenschaften einer Steifigkeit. Im Gegensatz zur Steifigkeit einer mechanischen Feder hat k_x eine entgegengesetzte Orientierung, daher wird k_x auch gerne als negative Steifigkeit bezeichnet. Der Kraftvektor aus Gl.(29) lässt sich schließlich in kompakter Matrixform aus dem eben gewonnenen Erkenntnissen angeben.

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_x \mathbf{x} + \mathbf{K}_i \mathbf{i} \quad (53)$$

mit

$$\mathbf{K}_x = \text{diag}(k_x) \quad \mathbf{K}_i = \text{diag}(k_i)$$

Durch die Transformationsmatrix \mathbf{B} , die im vorigen Kapitel eingeführt wurde, kann eine Gleichung des Gesamtsystems in COG-Koordinaten angegeben werden.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{BK}_x\mathbf{B}^T\mathbf{x} = \mathbf{BK}_i\mathbf{i} \quad (54)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (55)$$

mit

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_{xA} \\ i_{xB} \\ i_{yA} \\ i_{yB} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -c & 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & -d & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_{seA} \\ x_{seB} \\ y_{seA} \\ y_{seB} \end{bmatrix}$$

Die Einträge von \mathbf{B} und von \mathbf{C} sind jeweils die Abstände von den Magnetlagern bzw. der Sensoren, die Einträge von \mathbf{i} sind die Ströme in den Lagern und die Einträge von \mathbf{y} sind die Auslenkungen bei den Sensoren. Mit dieser Matrix Differentialgleichung werden die physikalischen Eigenschaften in linearisierter Form abgebildet. Eine solche Differentialgleichung kann als verkoppeltes MIMO System klassifiziert werden. Da das Auffinden einer stabilisierenden Rückkopplung eines solchen Systems im Allgemeinen um einiges schwieriger als bei einem Eingrößensystem ist, wird im Folgenden über mögliche Regelstrukturen diskutiert.

4.2 MIMO-Regelstrukturen für lineare Strecken

In diesem Abschnitt der Arbeit sollen die geläufigeren Mehrgrößen Regelstrukturen behandelt werden. Diese Strukturen werden in zwei Klassen aufgeteilt. Die erste Klasse sind die Regler mit Zustandsrückführung und die zweite Klasse mit Ausgangsrückführung. Eine nicht sprungfähige lineare zeitinvariante Regelstrecke lautet in Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{z} = \mathbf{A}z + \mathbf{B}u \quad (57)$$

$$y = \mathbf{C}z \quad (58)$$

4.2.1 Regelstrukturen mit Zustandsrückführung

Eine Zustandsrückführung führt die Systemzustände $\mathbf{z}(t)$ mit konstanten Faktoren auf die Stellgröße $u(t)$ zurück [10]. Diese Art der Regelung hat proportionales Verhalten da $u(t)$ nur von $\mathbf{z}(t)$ abhängt. Die Zustandsrückführung wird im Allgemeinen um einen Vorfilter \mathbf{V} erweitert, um auf einen Sollwert zu reagieren.

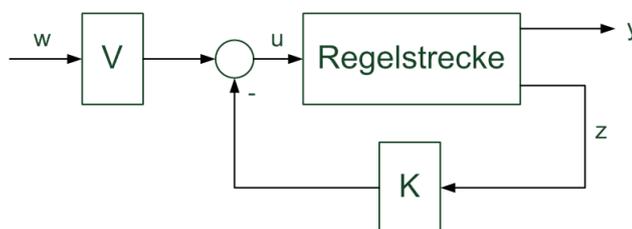


Abbildung 12: Zustandsregler[10]

Das Zustandsraummodell ergibt sich als:

$$\dot{z} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})z + \mathbf{BV}w \quad (59)$$

$$y = \mathbf{C}z \quad (60)$$

Die Dynamikmatrix des geregeltem Systems ist also:

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \mathbf{BK} \quad (61)$$

Mit dieser Art der Rückführung können für jedes vollständig erreichbare System die Eigenwerte durch einen Regler beliebig platziert werden. Sollen mit diesem System der Rückführung auch Störungen ausgeregelt werden, so benötigt man einen PI-Zustandsregler

der Form

$$\dot{\mathbf{z}}_I = \mathbf{z}_I + (\mathbf{w} - \mathbf{C}\mathbf{x}) \quad (62)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x & \mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}_I \end{bmatrix} + \mathbf{K}_p [\mathbf{w} - \mathbf{C}\mathbf{x}] \quad (63)$$

Da im Allgemeinen nicht alle Zustände gemessen werden können, muss eine Methode herangezogen werden, die uns trotzdem auf die Zustände schließen lässt. Dies geschieht indem über den bekannten Ausgang auf die Zustände zurückgeschlossen wird. Ein solches System nennt man Beobachter. Die einfachste Form eines solchen Systems ist der triviale Beobachter, der einfach eine Kopie der Strecke ist.

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\mathbf{w} \quad (64)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}} \quad (65)$$

Der sogenannte Beobachtungsfehler $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$ lautet:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{e}(t) \quad (66)$$

Durch diese Form der Fehlerdynamik hat dieser Beobachter folgende Nachteile:

- Der Beobachtungsfehler ist nur stabil, wenn die Strecke stabil ist.
- Das Abklingen des Beobachtungsfehlers ist nicht beeinflussbar.

Diese Art der Realisierung macht keinen Gebrauch von der Kenntnis der Ausgangsgröße. Der sogenannte vollständiger Luenberger Beobachter bezieht jedoch die Messung des Ausgangs in seine Abschätzung mit ein. Seine Zustandsraumrealisierung lautet:

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}\mathbf{w} + \mathbf{K}(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) \quad (67)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}} \quad (68)$$

mit der Fehlerdynamik

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{e} \quad (69)$$

Nun können Zustandsbeobachter und Zustandsregler nach dem Separationsprinzip getrennt voneinander entworfen und anschließend verbunden werden. Alle Überlegungen die in diesem Kapitel getroffen wurden setzen die vollständige Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems voraus. Um einen Zustandsregler oder Zustandsbeobachter zu entwerfen, wird bei SISO-Systemen meistens eine Polvorgabe mittels der wohlbekannte Formel von Ackermann herangezogen [10]. Handelt es sich um MIMO Systeme

ist bei einer Polvorgabe die Wirkung auf die Stell- und Regelgrößen nur mehr schwer abzuschätzen, daher werden hierbei oftmals optimale Regler, wie beispielsweise LQR oder LQG, verwendet [3].

4.2.2 Regelstrukturen mit Ausgangsrückführung

Bei dieser Struktur wird der Ausgang y auf die Stellgröße u zurückgeführt.

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_y \mathbf{y} + \mathbf{V} \mathbf{w} \quad (70)$$

Da der Regelkreis zwei Freiheitsgrade hat, können dadurch Störverhalten und das Führungsverhalten getrennt voneinander beeinflusst werden können. Der geschlossene Regelkreis eines nicht sprungfähigen Systems hat das Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_y \mathbf{C}) \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{V} \mathbf{w} \quad (71)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{z} \quad (72)$$

Obwohl beide Methoden von proportionalen Rückkopplungen ausgehen, ist dies keine Einschränkung, da dynamische Regler wie z.B. der PI-Regler auf Zustands bzw. Ausgangsrückführung reduziert werden können, indem der dynamische Regelanteil zur Strecke hinzugerechnet wird.

Ein Spezial-Fall der Mehrgrößen-Regelung ist die dezentrale Regelung. Eine solche Struktur wurde aus der Tatsache heraus entwickelt, dass es nicht immer einfach möglich ist alle Eingangsgrößen auf alle Ausgangsgrößen zu beziehen. Stattdessen wird ein dezentraler Regler entworfen, der annimmt, dass immer nur ein Eingang auf einem Ausgang bezieht. So mit handelt es sich um n Systeme die vollständig entkoppelt sind. Aufgrund der Vereinfachung der Regelstruktur entsteht ein gewisser Fehler. Um dennoch Abschätzen zu können ob eine dezentrale Regelung verwendet werden kann oder nicht, sollte eine Kopplungsanalyse durchgeführt werden. Der sogenannte Kopplungsfaktor für ein Systems zweiter Ordnung lautet

$$\kappa(s) = \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{11}(s)G_{22}(s)}$$

Ist der Kopplungsfaktor in dem für die Anwendung verwendeten Frequenzbereich sehr viel kleiner als eins, so kann eine dezentrale Regelung verwendet werden [10].

4.3 Reglerentwurf

In diesem Kapitel werden 2 verschieden Regler entworfen und auf Stabilität überprüft. Der erste verwendete Regler ist ein dezentraler Regler der die Verkopplungen vernachlässigt. Die Daten des zu regelten Systems sind in Tabelle 1 angeführt. Der zu stabilisierende Rotor ist in Abbildung 13 ersichtlich. Die schwarzen Flächen sind entweder die Messflächen der Sensoren oder die Angriffsfläche der Lager.

Symbol	physikalische Größe	Wert
ω	Winkelgeschwindigkeit	15.000 U/min
i_0	Arbeitspunktstrom	0,64 A
i_{max}	Maximalstrom	4.5 A
I_p	polares Trägheitsmoment	8.750kg/mm ²
I_r	axiales Trägheitsmoment	23.700kg/mm ²
$k_{i,B}$	Strom-Kraft-Konstante Lager B	55N/A
$k_{i,A}$	Strom-Kraft-Konstante Lager A	26N/A
$k_{i,z}$	Strom-Kraft-Konstante axiales Lager	129N/A
$k_{s,B}$	Verschiebungs-Kraft-Konstante Lager B	68.000N/m
$k_{s,A}$	Verschiebungs-Kraft-Konstante Lager A	28.500N/m
$k_{s,z}$	Verschiebungs-Kraft-Konstante axiales Lager	110.000N/m
a	Abstand Schwerpunkt-Lager A	98,9mm
b	Abstand Schwerpunkt-Lager B	19,9mm
c	Abstand Schwerpunkt-Sensor A	118,6mm
d	Abstand Schwerpunkt-Sensor B	2,4mm
m	Masse Rotor	4,4kg

Tabelle 1: Daten des zu regelnden Systems

4.3.1 Dezentrale Regelung

Bei dieser Art der Regelung wird für jeden Freiheitsgrad jeder zugehörige Sensor über einen PID Regler auf das zugehörige Lager geschaltet (Abbildung 14). Die Verkopplungen werden vernachlässigt und als Störgröße beschrieben. Ein andere Motivation für eine dezentralisierte Regelung lautet: Wenn jedes Magnetlager für sich als Feder-Dämpfer Element betrachtet wird, so werden die Koeffizienten dieser Elemente über die dezentrale Regelung eingestellt [12]. Für diesen Reglerentwurf wird das System Gl.(54) zuerst in den Zustandsraum transformiert:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mathbf{A}z + \mathbf{B}i \\ y &= \mathbf{C}z \end{aligned} \tag{73}$$

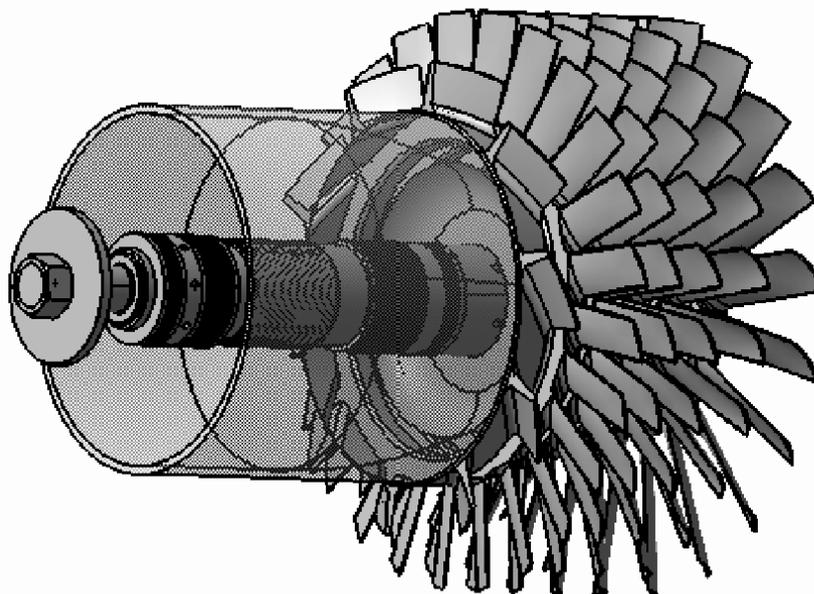


Abbildung 13: Darstellung des Rotors

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4,4} & \mathbf{E}_{4,4} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{BK}_x\mathbf{B}^T & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{BK}_i \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (75)$$

Um das Verhalten eines dezentralen Reglers zu untersuchen wird ein PD-Regler, welcher das einfachste System zur Stabilisierung beschreibt, angewendet.

$$\mathbf{i} = (\mathbf{P}\mathbf{y} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}})$$

eingesetzt in die Systemgleichung ergibt

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{BK}_x\mathbf{B}^T\mathbf{z} = -\mathbf{BK}_i(\mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{C}\dot{\mathbf{z}}).$$

Die neue Dynamikmatrix lautet daher:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4,4} & \mathbf{E}_{4,4} \\ -\mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{BK}_x\mathbf{B}^T + \mathbf{BK}_i\mathbf{P}\mathbf{C}) & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{G} + \mathbf{BK}_i\mathbf{D}\mathbf{C}) \end{bmatrix}$$

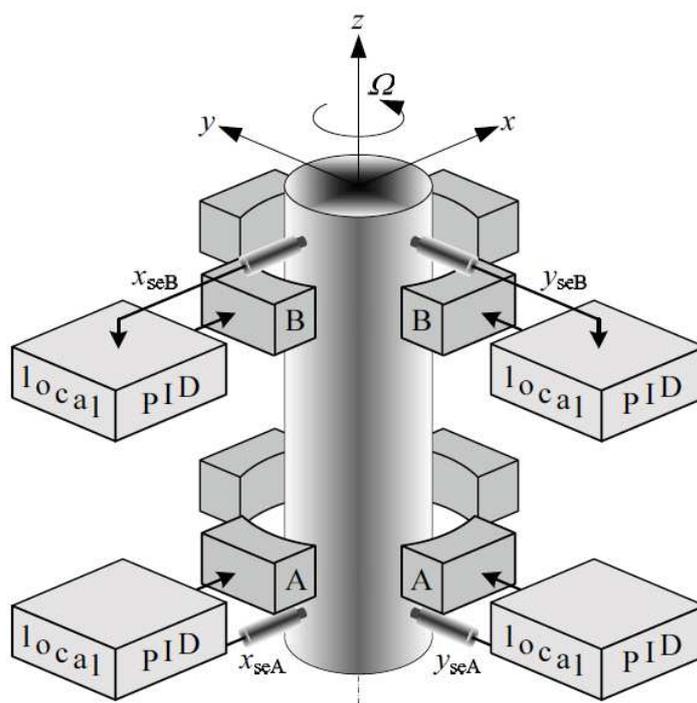


Abbildung 14: Dezentrale Regelstruktur [7]

Um das System zu stabilisieren muss der PD-Regler so ausgelegt werden, dass alle Eigenwerte der Dynamikmatrix im Drehzahlbereich bis zur Nenndrehzahl in der linken offenen Halb-Ebene liegen und eine ausreichende Dämpfung besitzen. Für den starren Rotor sollte die Dämpfung im Arbeitsbereich mindestens 20% betragen. Da das Pol-Nullstellen-Diagramm für verschiedenen Drehzahlen unübersichtlich wird, wird stattdessen das Campbell-Diagramm verwendet.

Der erste Schritt beim Entwurf ist das Einstellen des P-Reglers, der mechanisch gesehen eine virtuelle Federsteifigkeit repräsentiert. Um die negative Steifigkeit aufzuheben muss die virtuelle Steifigkeit größer als diese sein. Da es aber jetzt Polstellen auf der Imaginär-Achse liegen ist das System laut der Definition der BIBO (Bounded Input Bounded Output)-Stabilität aus [8] instabil. Um Stabilität zu erzeugen muss noch eine virtuelle Dämpfung, die einem D-Regelanteil entspricht, hinzugefügt werden. Das erwähnte Vorgehen ist anschaulich in Abbildung 15 dargestellt.

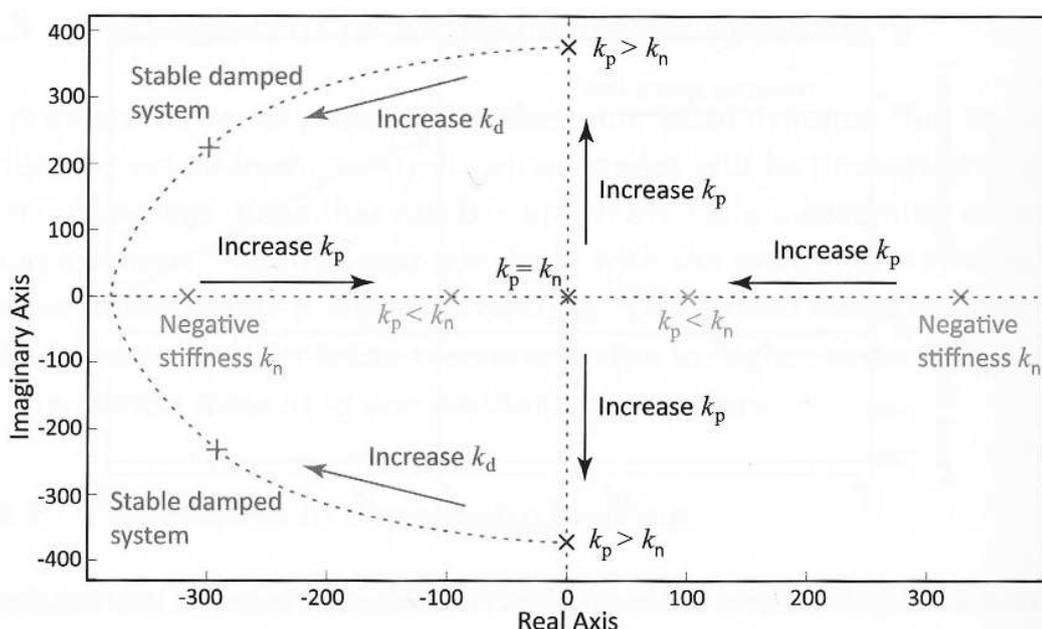


Abbildung 15: PD-Reglerentwurf einer dezentralen Regelung [13]

Es sei noch erwähnt, dass durch Erhöhen der virtuellen Steifigkeit die Durchtrittsfrequenz des Reglers höher wird. Das System ist also nur stabilisierbar, wenn die Leistungselektronik in Kombination mit dem digitalen Controller eine ausreichende Bandbreite liefert.

Nun wird die oben genannte Methodik angewandt und für eine einzelne Rückführung ohne Gyroskopischen Effekt ein Regler entworfen. Dieser kann anschließend nach der Simulation des Gesamtsystems optimiert werden. Die Differentialgleichung lautet:

$$m\ddot{x} - k_s x = k_i i$$

nach Einsetzen des Regelgesetzes

$$i = -(Px + D\dot{x})$$

erhält man

$$m\ddot{x} + k_i D + (k_i P - k_s) x = 0$$

Wird die Steifigkeit zu groß gewählt, benötigt man einen zu schnellen Regler und zu viel Stellgröße. Wählt man hingegen die Steifigkeit zu klein, wird das System empfindlich gegen Parameterschwankungen. Als Kompromiss wird die sogenannte natürliche Steifigkeit als Parameter gewählt. Diese erhält man, wenn der Betrag der positiven Steifigkeit des geschlossenen Regelkreises mit dem Betrag der negativen Steifigkeit des

Magnetlagersystems übereinstimmt. Es muss also gelten:

$$k_s = k_i P - k_s$$

und daraus folgt

$$P = \frac{2k_s}{k_i}.$$

Dieser Wert bestimmt den Anfangswert für die Optimierung der Reglerparameter. Als ersten Schritt wird ein Bode Diagramm des offenen Systems mit P-Regler gezeichnet (Abbildung 16).

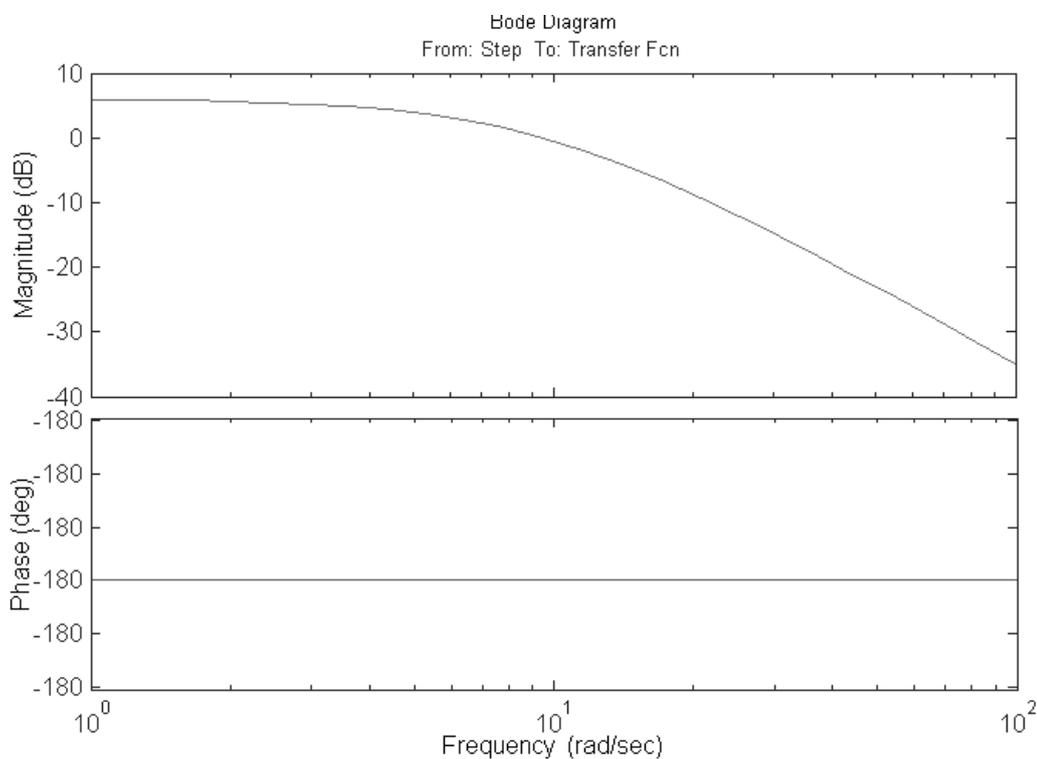


Abbildung 16: Bode-Diagramm mit P-Regler

Um das System zu stabilisieren erweitert man den Regler um einen D-Anteil mit der Faustregel, dass die Grenzfrequenz ein Drittel der Durchtrittsfrequenz beträgt, um eine ausreichende Phasenreserve zu gewährleisten. Die Übertragungsfunktion eines PD-Reglers lautet:

$$R(s) = k_p + k_d s = k_p \left(1 + \frac{k_d}{k_p} s \right).$$

Es muss also gelten

$$\frac{k_d}{k_p} = \frac{3}{\omega_c} \Rightarrow k_d = \frac{3k_p}{\omega_c}.$$

Abbildung 17 zeigt das Bode-Diagramm des offenen Regelkreises mit dem PD-Regler. Um den Effekt von Biegeschwingungen und Messrauschen zu unterdrücken wurde eine Dekade nach der Durchtrittsfrequenz der D-Anteil abgeschaltet.

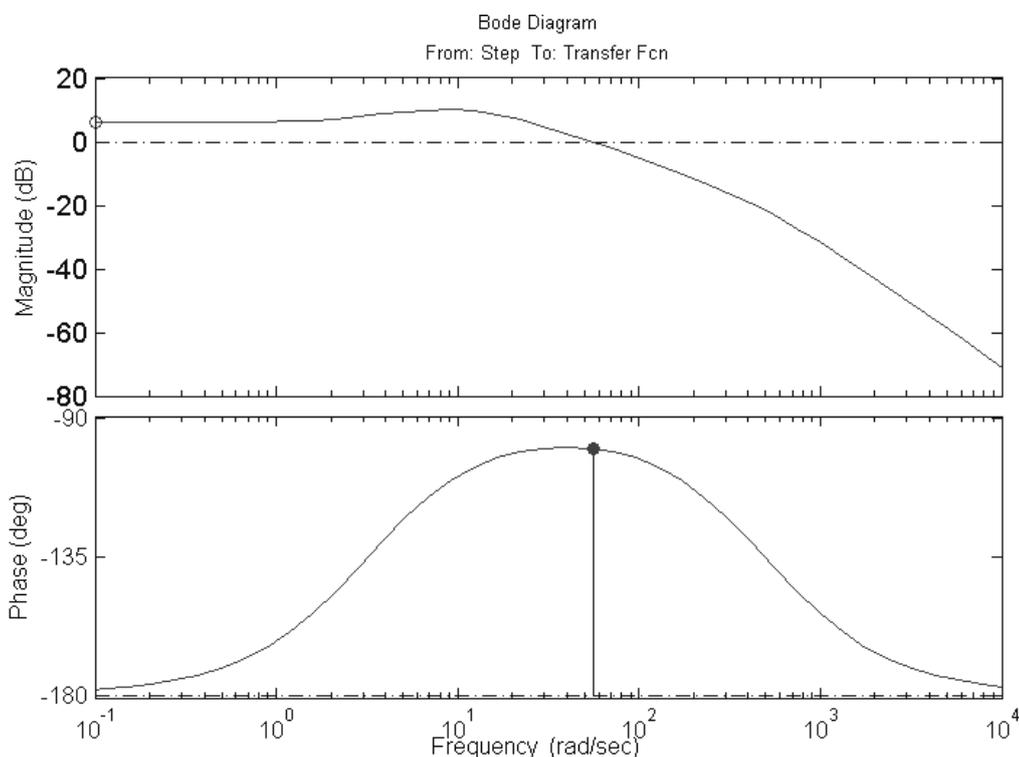


Abbildung 17: Bode-Diagramm mit PD-Regler

Im Bode-Diagramm ist zu erkennen das ein solcher Regler nicht gut gewählt ist, da die Kennlinie vor dem Durchtrittspunkt ansteigt und erst kurz davor wieder abfällt. Eine Faustregel besagt das der Regler eine Dekade vor und nach der Durchtrittsfrequenz mit 20dB/Dekade abfallen sollte, um einen kriechenden Einlauf zu verhindern. Um den Regler zu verbessern, könnte nun der P-Anteil erhöht werden und für diesen P-Anteil wieder eine Phasenhebung durch einen D-Anteil erfolgen. Der Regler darf jedoch keine zu hohe Durchtrittsfrequenz haben, da sonst eine zu hohe Dynamik des Aktoren erforderlich wäre. Abbildung 18 zeigt einen Ablauf für das sukzessive Einstellen eines dezentralen PD-Reglers für ein Magnetlager und das Bode-Diagramm eines optimierten eindimensionalen Reglers.

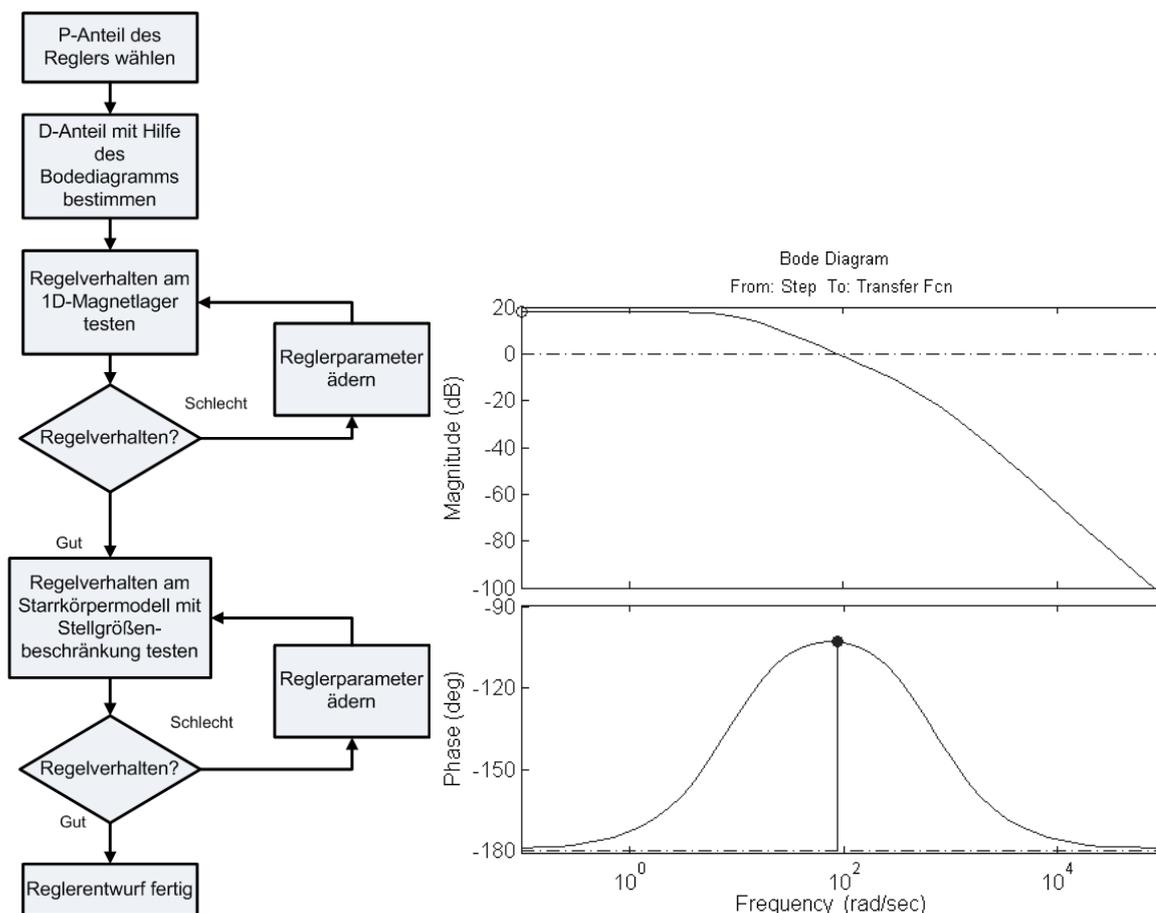


Abbildung 18: Sukzessives Einstellen eines dezentralen PD-Reglers für ein Magnetlagersystem

Ob dieser Regler für das Starrkörpersystem ausreichend ist, muss in weiteren Schritten, die in folgender Auflistung enthalten sind, geprüft werden:

- Die Dämpfung der Resonanzen muss mindestens 20% betragen
- Um eine nötige Steifigkeit bei niedrigen Frequenzen zu haben, sollte die Frequenz der am langsamsten oszillierenden Mode mindestens 20 Hz besitzen.

Diese Tatsachen sind alle aus dem Campbell-Diagramm zu sehen. Die Performance des Reglers ändert sich im Allgemeinen mit steigender Drehzahl, daher muss die Analyse des Starrkörpersystems für den gesamten Drehzahlbereich durchgeführt werden.

Bei einem rein symmetrischen Rotor würden zwei Eigenwertpaare von der Drehzahl abhängen und die anderen zwei völlig unabhängig sein. Daraus lässt sich folgern, dass ein symmetrisches System mit einem geschlossenen stabilen Regelkreis immer eine Entkopplung der parallelen und der konischen Moden besitzt. Da der gyroskopische Effekt

nur die konischen Moden jedoch nicht die parallelen Moden beeinflusst, sind die Eigenwerte der parallelen Bewegung, drehzahlunabhängig. Zum Schluss lässt sich sagen, dass die dezentrale Regelung für eine Vielzahl von Magnetlagersystemen Anwendung findet [12]. In speziellen Fällen kann diese Art der Rückführung jedoch schwerwiegende Probleme verursachen.

Destabilisierung aufgrund örtlich verschiedener Sensor- und Aktorplatzierung

Für spezielle Magnetlagersysteme kann die lokale Rückführung aufgrund der örtlich verschiedenen Sensor- und Aktorplatzierung zu Instabilität in manchen Drehzahlbereichen des geschlossenen Regelkreises führen. In diesem Zusammenhang könnte man denken, dass der gyroskopische Effekt der einzige drehzahlabhängige Term ist und dieser zu Instabilität führt. Das ist so nicht ganz richtig da laut [14] der gyroskopische Effekt alleine keine Instabilität hervorrufen kann. Der wahre Grund ist die drehzahlabhängige Änderung der Eigenmoden in Abhängigkeit des gyroskopischen Effekts in Verbindung mit der örtlich verschiedenen Sensor- und Aktorplatzierung. Durch diese Änderung entstehen unterschiedliche Phasenverschiebung zwischen dem Aktor und Sensor die den Realteil in die rechte Halb-Ebene ziehen. Eine Instabilität aufgrund der örtlich verschiedenen Sensor- und Aktorplatzierung kann auch aus der Matrix-Differentialgleichung herausgefunden werden. Es muss gelten, dass die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix positiv definit sind. Ist der symmetrische Anteil der Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix positiv definit so kann eine Destabilisierung nur mehr durch den schiefsymmetrischen Anteil der Steifigkeitsmatrix erfolgen. Der schiefsymmetrische Anteil der Dämpfungsmatrix kann als erweiterter gyroskopischer Term angesehen werden. Die schiefsymmetrische Steifigkeitsmatrix lautet:

$$\mathbf{K}_{schief} = \frac{1}{2} (\mathbf{K} - \mathbf{K}^T) \quad (76)$$

$$\mathbf{K}_{schief} = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & n_{12} & 0 & 0 \\ -n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{12} \\ 0 & 0 & -n_{12} & 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$n_{12} = \frac{k_{iA}P_A(a - c) + k_{iB}P_B(b - d)}{2} \quad (78)$$

Diese Matrix wird auch als Matrix der nicht-konservativen Kräfte bezeichnet und erhält daher die Bezeichnung \mathbf{N} . Wie man sieht wäre diese Matrix für eine örtlich gleiche Anordnung von Sensor und Aktuator Null.

Es gibt noch eine Vielzahl anderer Instabilitätsgründe in Magnetlagersystem. Man muss

sich jedoch bewusst sein, dass diese Probleme durch einen dezentralen PD-Regler nicht gelöst, sondern nur aus dem Einsatzbereich geschoben werden.

Große Unterschiede zwischen den Eigenfrequenzen

Ein weiteres Stabilitätsproblem, das in dieser Arbeit betrachtet wird, ist der oft große Unterschied der Eigenfrequenzen des geschlossenen Regelkreises. Im Gegensatz zu dem oben genannten Problem der Sensor und Aktorplatzierung tritt dieses Problem auch bei sensorlosen Magnetlagern auf. Des Weiteren muss man sich bewusst sein, dass eine der konischen Moden durch den gyroskopischen Effekt mit steigender Drehzahl immer größer wird. Der Grund für dieses Problem ist der große Abstand der Eigenwerte des offenen Regelkreises. Dieser entsteht durch die unterschiedlichen Größen der Massenträgheitsmomente. Der Unterschied wird mit fallendem axialen Massenträgheitsmoment und mit steigender Masse und steigendem Abstand der beiden radialen Magnetlager größer. Je hochfrequenter diese Starrkörpermode ist, desto höher muss die Bandbreite des Reglers sein. Dies führt zu Problemen, wie beispielsweise eine Verstärkung des Messrauschens oder es treibt den Verstärker in die Sättigung. Ein weiterer unangenehmer Effekt der hohen Bandbreite kann eine Destabilisierung der Biegemoden sein. Ein Tiefpassfilter zweiter Ordnung kann hierbei Abhilfe verschaffen. Jedoch ist zu beachten, dass sich eine untere Limitierung der Grenzfrequenz aufgrund der Starrkörpermoden ergibt. Da für zwei stark unterschiedliche Eigenfrequenzen der gleiche Regler wirkt, passiert es, dass für ein Eigenwertpaar zu wenig und für ein anderes zu stark gedämpft wird. Durch einfaches Einstellen des D-Anteils kann dieses Problem nicht gelöst werden, da die konischen Moden mehr als die parallelen Moden von dem D-Anteil profitieren. Die Lösung dieses Problems ist eine MIMO-Regelung die die parallelen und konischen Moden entkoppelt.

4.3.2 Entkoppelte Regelung der parallelen und konischen Moden

Um die im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Probleme in den Griff zu bekommen, ist es notwendig die beiden Modentypen durch zwei verschiedene Regler rückzukoppeln. Bei einer dezentralen Rückführung werden im Gegensatz zum MIMO-Regler nur die Diagonaleinträge der Regelmatrizen mit einem P- oder einem D-Anteil aufgefüllt, und die wichtigen Vorkopplungsterme nicht berücksichtigt. Es sei angemerkt, dass die Rückkoppelkoeffizienten bei einer MIMO-Regelung nicht einfach als Steifigkeit und Dämpfung interpretieren lassen und einen abstrakteren Zugang verlangen. Bei der in diesem Kapitel vorgestellten Art der Rückführung werden die Vorteile beider Regelstrukturen vereint. Im COG-Koordinatensystem sind die konischen und die parallelen Moden entkoppelt, da der gyroskopische Effekt lediglich eine Kopplung zwischen der x-

und y-Bewegung ist. Durch eine Transformation des Eingangs- und Ausgangssignals in das COG-Koordinatensystem können beide Moden einzeln von einem SISO-Regler zurückgeführt werden. Abbildung 19 veranschaulicht diese Struktur grafisch. Um dieses

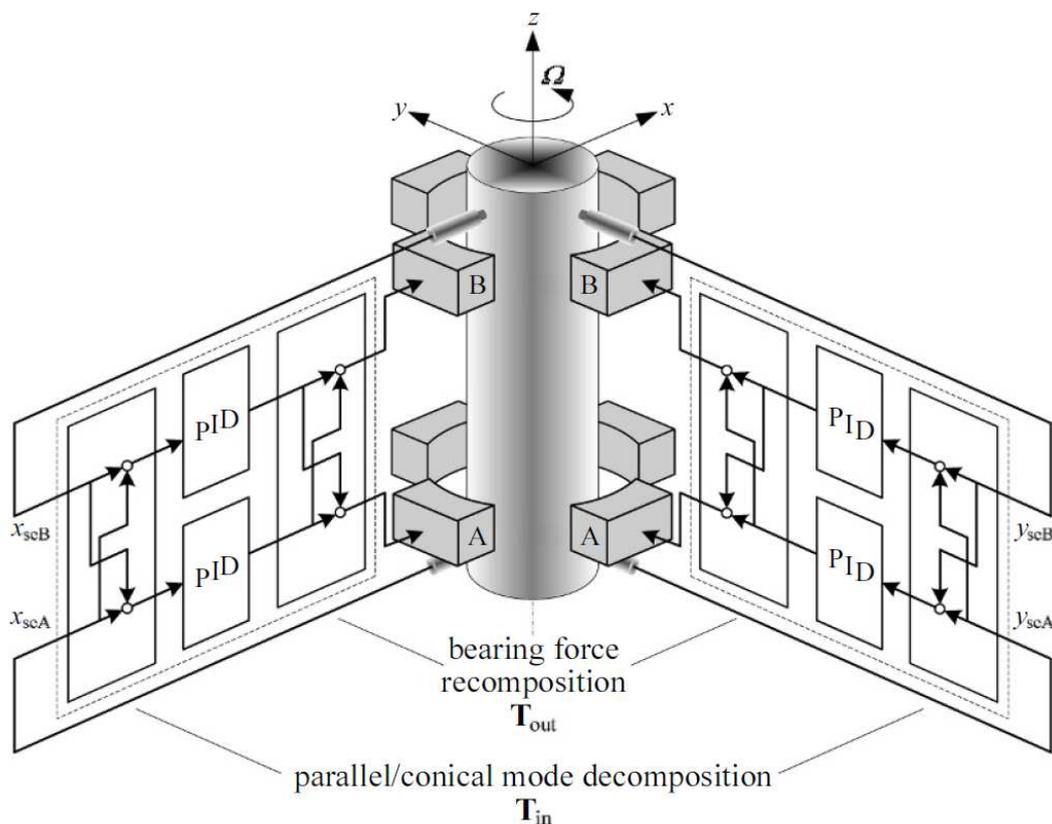


Abbildung 19: Entkoppelte Regelung der Parallelen und konischen Moden [7]

Regelsystem mathematisch zu beschreiben, wird von Formel (54) ausgegangen.

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + G\dot{x} - BK_x B^T x &= BK_i i \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (79)$$

Nun wird i durch das Regelgesetz

$$i = -T_{out} P T_{in} y - T_{out} D T_{in} \dot{y} \quad (80)$$

mit

$$y = [x_{seA}, x_{seB}, y_{seA}, y_{seB}] \quad (81)$$

$$P = [P_{kon}, P_{par}, P_{kon}, P_{par}] \quad (82)$$

$$D = [D_{kon}, D_{par}, D_{kon}, D_{par}] \quad (83)$$

Um diese Regelstruktur zu implementieren, müssen noch die Transformationsmatrizen berechnet werden. Da \mathbf{C} eine positiv definite quadratische Matrix ist, können die COG-Koordinaten einfach über \mathbf{C}^{-1} aus den Ausgangsgrößen berechnet werden. Daher gilt

$$\mathbf{T}_{in} = \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{c+d} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & d & c \end{bmatrix} \quad (84)$$

Die gesamte Reglerstruktur ist nun im COG-Koordinatensystem beschrieben. Das bedeutet, dass die Ausgangsgrößen aber auch im COG-Koordinatensystem berechnet werden. Da der Stromregler jedoch die Stromsollwerte für die Magnetlager benötigen, müssen die Ausgangsgrößen wieder rücktransformiert werden. Wenn \mathbf{T}_{out} als die Inverse der Eingangsmatrix gebildet wird, wäre die oben genannte Bedingung erfüllt. In dieser Arbeit wird jedoch

$$\mathbf{T}_{out} = \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{k_{iA}(b-a)} \begin{bmatrix} -1 & b & 0 & 0 \\ \frac{k_{ia}}{k_{ib}} & \frac{k_{ia}}{k_{ib}} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -\frac{k_{ia}}{k_{ib}} & \frac{k_{ia}}{k_{ib}} a \end{bmatrix} \quad (85)$$

gewählt, da jetzt die Regelparameter ohne Proportionalitätsfaktor in die Differentialgleichung eingehen. Wird Gleichung (54) unter Anbetracht von (84) und (85) rückgekoppelt, bekommt die Gleichung folgende Form:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{BK}_x \mathbf{B}^T \mathbf{x} = -\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} \quad (86)$$

Aus dieser Gleichung ist erkennbar, dass die Einträge von \mathbf{P} und \mathbf{D} die Moden unabhängig voneinander beeinflussen. Der aber noch größere Vorteil liegt in der Tatsache, dass die schiefsymmetrische Matrix \mathbf{G} , die den gyroskopischen Effekt darstellt, nur die konischen Moden beeinflusst und daher die parallelen Moden bei einer idealen Entkopplung unabhängig von der Drehzahl sind. Jedoch sind die Moden im Magnetlagersystem im Allgemeinen nicht vollständig entkoppelt, da die Matrix $\mathbf{BK}_x \mathbf{B}^T$ die die negative Steifigkeit in COG-Koordinaten darstellt, nur dann diagonal ist, wenn das System symmetrisch in den mechanischen und elektrischen Eigenschaften ist. Will man diesen Effekt auch noch kompensieren so kann der Rückführterm (80) um $-\mathbf{K}_{xkomp} \mathbf{y}$ erweitert werden. Mit

$$\mathbf{K}_{xkomp} = \mathbf{T}_{out} \mathbf{BK}_x \mathbf{B}^T \mathbf{T}_{in} \quad (87)$$

Das Regelgesetz für einen völlig entkoppelten Betrieb der beiden Modentypen lautet:

$$\mathbf{i} = -(\mathbf{T}_{out}\mathbf{P}\mathbf{T}_{in} + \mathbf{T}_{out}\mathbf{B}\mathbf{K}_x\mathbf{B}^T\mathbf{T}_{in})\mathbf{y} - \mathbf{T}_{out}\mathbf{P}\mathbf{T}_{in}\dot{\mathbf{y}} \quad (88)$$

Zum Abschluss dieses Kapitels sei noch erwähnt, dass eine reine Betrachtung des starren Rotors für Anwendungsfälle nicht ausreicht, da Biegemoden bei höheren Frequenz immer instabil werden können. Handelt es sich jedoch um ein System in dem die Starrkörpermoden und die Biegemoden einen ausreichend großen Abstand im Frequenzbereich besitzen und der Rotor unterkritisch läuft, so können die Biegemoden durch einen einfachen Tiefpassfilter zweiter Ordnung stabilisiert werden.

5 Dynamik des elastischen Rotors

Da die Betrachtung des starren Rotors für Industrieanwendungen praktisch nie ausreicht, wird in diesem Kapitel die Modellierung des elastischen Systems beschrieben. Um einen Zugang für den elastischen Rotor mit allgemeiner Massen- und Steifigkeitsverteilung zu schaffen, werden die physikalischen Grundlagen zuerst am Laval-Rotor beschrieben.

5.1 Laval-Rotor

Der Laval-Rotor wird meist verwendet um die Grundlagen der dynamische Eigenschaften von flexiblen Rotoren zu beschreiben. Der Rotor besteht aus zwei flexiblen Wellen mit der Steifigkeit k und einer starren Scheibe mit der Masse m und dem polaren Trägheitsmoment Θ_p (Abbildung 20).

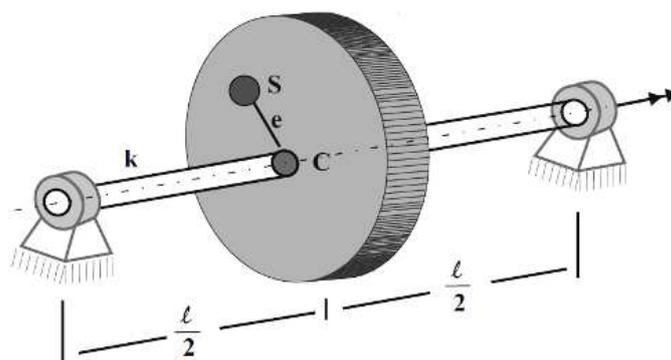


Abbildung 20: Laval-Rotor [7]

Durch Fertigungstoleranzen fällt der Schwerpunkt und der Rotationsmittelpunkt nicht zusammen. Der Abstand dieser beiden Punkte wird als Massenexzentrizität e bezeichnet. Die Neigungsbewegung der Scheibe wird vernachlässigt. Die Lager werden als starr angenommen. Die Verschiebungen des Schwerpunktes lauten:

$$x_S = x + e \cos \gamma \quad (89)$$

$$y_S = y + e \sin \gamma \quad (90)$$

Dieses mechanische System hat drei Freiheitsgrade, die beiden Auslenkungen x, y und den Rotationswinkel der Exzentrizität γ . Erlaubt man nur radiale Bewegungen lauten

die Beschleunigungen:

$$\ddot{x}_S = \ddot{x} - e\dot{\gamma}^2 \cos \gamma - e\ddot{\gamma} \sin \gamma \quad (91)$$

$$\ddot{y}_S = \ddot{y} - e\dot{\gamma}^2 \sin \gamma + e\ddot{\gamma} \cos \gamma \quad (92)$$

Die Terme $-e\dot{\gamma}^2 \cos \gamma$, $-e\dot{\gamma}^2 \sin \gamma$ sind zentrifugale Beschleunigungen und die Terme $-e\ddot{\gamma} \sin \gamma$, $e\ddot{\gamma} \cos \gamma$ sind tangentielle Beschleunigungen.

Die Bewegungsgleichungen des Systems lassen sich aus dem Schwerpunktsatz und dem Drallsatz ableiten:

$$m\ddot{x}_S = -kx \quad (93)$$

$$m\ddot{y}_S = -ky - f_g \quad (94)$$

$$\Theta_p \ddot{\gamma} = M + ke(y \cos \gamma - x \sin \gamma) \quad (95)$$

Durch einsetzen von Gleichung (91) und (92) in die Bewegungsgleichungen (93), (94) und (95), erhält man die Bewegungsgleichungen im kartesischem Koordinatensystem.

$$m\ddot{x} + kx = me\dot{\gamma}^2 \cos \gamma + me\ddot{\gamma} \sin \gamma \quad (96)$$

$$m\ddot{y} + ky = me\dot{\gamma}^2 \sin \gamma + me\ddot{\gamma} \cos \gamma - f_g$$

$$\Theta_p \ddot{\gamma} = M + ke(y \cos \gamma - x \sin \gamma)$$

Durch die Annahme einer konstanten Drehzahl

$$\ddot{\gamma} = 0 \quad (97)$$

$$\dot{\gamma} = \Omega = \text{const} \quad (98)$$

$$\gamma = \Omega t + \gamma_0 \quad (99)$$

vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu:

$$m\ddot{x} + kx = me\Omega^2 \cos(\Omega t + \gamma_0) \quad (100)$$

$$m\ddot{y} + ky = me\Omega^2 \sin(\Omega t + \gamma_0) - f_g$$

Diese Gleichungen beschreiben zwei entkoppelte Schwingungen, die Abhängig von der Exzentrizität und dem Quadrat der Drehzahl sind.

5.1.1 Natürliche Frequenzen und natürliche Schwingungen

Die Bewegungsgleichung des Laval-Rotors kann in 2 Lösungen aufgeteilt werden. Die homogene und inhomogene Lösung. Die homogene Differentialgleichung hat folgende Form:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (101)$$

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

Die Lösungen dieser entkoppelten Gleichungen nennt man die natürliche Schwingungen des Systems

$$x(t) = A_x \cos \omega t + B_x \sin \omega t \quad (102)$$

$$y(t) = A_y \cos \omega t + B_y \sin \omega t$$

wobei

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (103)$$

gilt. Die Koeffizienten der Lösung müssen in Abhängigkeit der Randbedingungen berechnet werden.

5.1.2 Erzwungene Schwingung

Die erzwungenen Schwingung ist die Lösung der inhomogenen Schwingungsgleichung Gl.(100). Die Lösung kann in verschiedene Teile mit jeweils unterschiedlicher Bedeutung zerlegt werden.

$$x(t) = A_x \cos(\omega t) + B_x \sin(\omega t) + e \frac{(\Omega/\omega)^2}{1 - (\Omega/\omega)^2} \cos(\Omega t + \gamma_0) \quad (104)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega t) + B_y \sin(\omega t) + e \frac{(\Omega/\omega)^2}{1 - (\Omega/\omega)^2} \sin(\Omega t + \gamma_0) - \frac{f_g}{k} \quad (105)$$

Die ersten beiden Summanden geben die natürliche Schwingungen an, der Dritte die Schwingung aufgrund der Exzentrizität und der vierte Summand die statische Belastung. In praktischen Anwendung verliert jedes System Energie, was zu einer Dämpfung der natürlichen Schwingungen führt. Aus dieser Tatsache heraus, bleibt nur mehr der erzwungen Anteil übrig, der um den statischen Anteil schwingt.

$$x(t) = \hat{x}_e \cos(\Omega t + \gamma_0) \quad (106)$$

$$y(t) = \hat{y}_e \sin(\Omega t + \gamma_0)$$

mit

$$\hat{x}_e = \hat{y}_e = e^{\frac{(\Omega/\omega)^2}{1 - (\Omega/\omega)^2}} = e^{\frac{\bar{\omega}^2}{1 - \bar{\omega}^2}} \quad (107)$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Amplitude von der Größe der Exzentrizität und dem Verhältnis von Drehzahl zu der natürlichen Frequenz. Die sogenannte Resonanz tritt auf, wenn $\Omega = \omega$ gilt. Theoretisch gesehen wäre die Amplitude der Schwingung in diesem Fall unendlich hoch. In praktischen Systemen tritt jedoch immer eine gewisse Strukturdämpfung auf, die die Amplitude begrenzt. Daher wird die Bewegungsgleichung um einen Dämpfungsanteil erweitert:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t + \gamma_0) \quad (108)$$

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + ky = m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t + \gamma_0) - fg \quad (109)$$

Diese Dämpfung zieht zwei Effekte mit sich.

- Der erste Effekt ist das Abfallen der Schwingungsamplitude mit der Zeit von natürlichen Schwingungen
- Der zweite Effekt ist die Veränderung der Resonanz Frequenz in Abhängigkeit des Dämpfung-Koeffizienten mit:

$$\omega_d = \omega\sqrt{1 - D^2} \quad (110)$$

D wird als Dämpfungsfaktor bezeichnet und errechnet sich aus

$$D = \frac{d}{2\sqrt{km}} \quad (111)$$

5.1.3 Einfluss der Lagersteifigkeit

Die Forderung eines starren Lagers ist in vielen praktischen Anwendungen nicht zulässig. In diesen Fällen ist es notwendig die Lagersteifigkeit durch eine finite Größe zu beschreiben. Dies muss aufgrund der niedrigen Steifigkeit von Magnetlagern immer geschehen. Für den Fall finiter Steifigkeit muss die Lagersteifigkeit in dem Gesamtsystem berücksichtigt werden. Daher werden sich in Abhängigkeit der Lager auch die Resonanzfrequenzen ändern. Daraus lässt sich folgern, dass mit jeder Änderung der Regelparameter sich auch die Resonanzfrequenzen der Biegeschwingungen ändern. Zur Abschätzung der Stabilität eines magnetgelagerten flexiblen Rotors reicht eine rein mechanische Simulation des Rotors zur Berechnung der Biegemoden nicht aus. Vielmehr muss zu jeder Stabilitätsberechnung der gesamte Regelkreis in die Berechnung der Biegemoden einfließen.

5.2 Flexibler Rotor mit kontinuierlicher Massenverteilung

Die Theorie des Laval-Rotors reicht nur in seltenen Fällen aus, deshalb wird diese auf eine kontinuierlicher Massenverteilung erweitert. Es wird vorausgesetzt, dass der Rotor mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Die Lager des Systems haben lineare Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten. Zu Beginn der Modellbildung werden nur die Kräfte einer statischen Auswuchtung, die Biegekräfte des Rotors und die Lagerkräfte berücksichtigt. Weiter Kräfte werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit hinzugefügt. Ein Beispiel eines solchen Rotors und das konventionelle Koordinatensystem zur mathematischen Beschreibung sind in Abbildung 21 zu sehen.

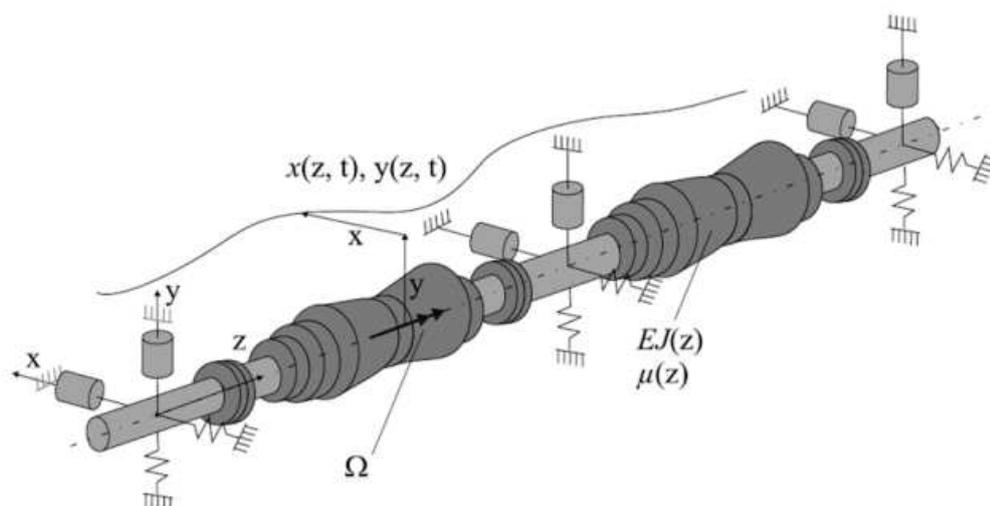


Abbildung 21: Rotor mit kontinuierlicher Massenverteilung mit drei radialen Lagern [7]

Kräfte einer statischen Auswuchtung

Wenn der Schwerpunkt nicht der Rotationsmittelpunkt ist, so wird das System durch transversale Kräfte belastet. Diese Kräfte können aus dem Prinzip von d'Alambert beschrieben werden. Nimmt man ein infinitesimal kurzes Massenelement aus dem Rotor heraus, so wirken die d'Alambert-Kräfte $dm\ddot{x}$ und $dm\ddot{y}$ entgegen den Beschleunigungen. Dreht sich der Rotor mit der Winkelgeschwindigkeit Ω und besitzt die Exzentrizität e , so berechnen sich die Unwuchtkräfte wie folgt:

$$df_x = (e\Omega^2 \cos(\Omega t + \gamma) - \ddot{x})dm \quad (112)$$

$$df_y = (e\Omega^2 \sin(\Omega t + \gamma) - \ddot{y})dm \quad (113)$$

Biegemomente des Rotors

Es gibt zwei bekannte Balkentheorien zur Berechnung der Biegemomente und der Biegekräfte. Die Bernoulli Theorie oder auch schubstarre Balkentheorie vernachlässigt die Schubverzerrung. Spielen dem entgegen die Schubverzerrungen eine tragende Rolle, so muss man die sogenannte Timoschenko (schubweiche-) Balkentheorie heranziehen. Die Biegemomente M_x und M_y werden mit der Bernoulli Theorie wie folgt berechnet:

$$M_x = EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad (114)$$

$$M_y = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \quad (115)$$

wobei E den Elastizitätsmodul und J das Flächenträgheitsmoment beschreibt.

Lagerkräfte

Ungeachtet dessen welches System zur Lagerung benutzt wird, nähert man in den meisten Fällen das System zu einem linearen Feder-Dämpfer-System an. Die linearisierten Lagerkräfte werden dann mit den Auslenkungen (x_b, y_b) , den Auslenkungsgeschwindigkeiten (\dot{x}_b, \dot{y}_b) , den Steifigkeits-Koeffizienten (c_x, c_y) und den Dämpfungs-Koeffizienten (d_x, d_y) beschrieben:

$$f_{bx} = -c_x x_b - d_x \dot{x}_b \quad (116)$$

$$f_{by} = -c_y y_b - d_y \dot{y}_b \quad (117)$$

5.3 Modellierung mittels FEM

Da die analytische Berechnung eines Rotors mit kontinuierlicher Massenverteilung in den meisten Fällen nicht möglich oder zu aufwendig wäre, wird in dieser Arbeit auf numerische Methoden zurückgegriffen, wie beispielsweise die Finite-Elemente-Methode (FEM). Die FEM zerlegt den Rotor in Teilsysteme. Diese Teilsysteme werden im Allgemeinen auf eine Einheitsform in ein lokales Koordinatensystem transformiert. In diesem Koordinatensystem werden die Ansatzfunktionen für die gewählte Einheitsform zum numerischen Lösen des Anfangswertproblems aufgestellt. Anschließend werden die Teilsysteme wieder in ein globales System, unter der Einhaltung der Randbedingungen zurück transformiert. Die Konvergenzgeschwindigkeit kann sowohl durch die Wahl der Anzahl der Elemente, als auch durch die Wahl der Ansatzfunktion verbessert werden. Jedes Element besitzt eine gewisse Biegesteifigkeit EJ , Länge l , Dichte ρ und Exzentrizität e .

5.3.1 Das Prinzip der virtuellen Arbeit

Um das dynamische Verhalten in der Finiten Elemente Methode abzubilden, ist es nötig diese Eigenschaften mittels Energiemethoden zu modellieren. Hierfür wird die Methode der virtuellen Arbeit eingeführt. Um die virtuelle Arbeit zu berechnen, werden die sogenannten virtuellen Verschiebungen definiert, die folgende Bedingungen erfüllen:

- Virtuelle Verschiebungen sind gedacht. Daher müssen sie nicht tatsächlich auftreten
- Virtuelle Verschiebungen sind differenziell klein
- Virtuelle Verschiebungen müssen die kinematischen Randbedingungen erfüllen

Bei einem Biegebalken beinhalten die Verschiebungen die translatorischen Freiheitsgrade und den Biegewinkel. Das Prinzip der virtuellen Arbeit besagt, dass die Arbeit der inneren Kräfte gleich der Arbeit der Äußeren Kräfte sein muss. Wobei δ das Variationsymbol kennzeichnet.

$$\delta W_i = \delta W_a \quad (118)$$

Bevor die Gleichungen zur Berechnung der virtuellen Arbeit aufgestellt werden, müssen zuerst die Ansatzfunktionen für die Elemente definiert werden. Im Fall des Bernoulli-Balkens sind das die sogenannten Hermite'schen Interpolationpolynome 3. Grades, die wie folgt lauten [15]:

$$N_{B1}(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \quad (119)$$

$$N_{B2}(\xi) = -(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) l \quad (120)$$

$$N_{B3}(\xi) = \xi^2 (3 - 2\xi) \quad (121)$$

$$N_{B4}(\xi) = \xi^2 (1 - \xi) l \quad (122)$$

Es gilt also

$$w(\xi) = H^T U_B^e$$

wobei w die Verschiebungen in Abhängigkeit von ξ , H die Matrix der Ansatzfunktionen und U_B die Freiheitsgrade an den Knoten beschreiben. Nach einigen Rechenschritten können daraus die Elementssteifigkeitsmatrix K , die Elementmassenmatrix M und die Anregung aufgrund von einer Statischen Auswuchtung f hergeleitet werden. Diese

lauten für einen Bernoulli-Balken:

$$\mathbf{K}_{Bn} = EJ_n \int_0^{ln} \frac{\partial^2 H}{\partial^2 \xi} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial^2 \xi} \right)^T d\xi \quad (123)$$

$$\mathbf{K}_{Bz} = \frac{EJ_n}{l_n^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (124)$$

$$\mathbf{K}_{By} = \frac{EJ_n}{l_n^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (125)$$

$$\mathbf{M}_{Bz} = \rho \int_0^{ln} HH^T d\xi \quad (126)$$

$$= \frac{\rho l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (127)$$

$$\mathbf{M}_{By} = \frac{\rho l}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (128)$$

und

$$\mathbf{f} = \rho \Omega^2 \int_0^l H^T e_n \sin(\Omega t + \gamma_n) d\xi \quad (129)$$

5.3.2 Zusammenbau zu einem globalen System

Sind die Systemmatrizen für die Einzelsysteme berechnet, kann das System im globalen Koordinatensystem unter Einhaltung der Randbedingung vereint werden. Es gibt verschiedene Verfahren um dies zu bewerkstelligen. Das einfachste Verfahren besteht darin die lokalen Verschiebungen auf die globalen Koordinaten zu transformieren und anschließend die Systemmatrizen zu addieren. Der Index i deuten auf eine Knotenverschiebung hin und b auf einen Knoten an dem ein Lager ist.

$$\mathbf{u}_i^e = \mathbf{A}_i \mathbf{u}^G \quad (130)$$

$$\mathbf{u}_b^e = \mathbf{A}_b \mathbf{u}^G \quad (131)$$

Die globalen Systemmatrizen können wie folgt berechnet werden.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^G &= \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{A}_i + \sum_{b=1}^B \mathbf{A}_b^T \mathbf{A}_b \mathbf{k}_b \\ \mathbf{D}^G &= \sum_{b=1}^B \mathbf{A}_b^T \mathbf{A}_b \mathbf{d}_b \\ \mathbf{M}^G &= \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{A}_i \\ \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i^T \mathbf{f}_i\end{aligned}$$

Dieses Verfahren ist jedoch wegen der zu hohen Rechenzeit und der Speicherbelastung nur begrenzt einsetzbar. In der Literatur gibt es noch eine Vielzahl anderer Globalisierungsverfahren auf die nicht weiter eingegangen wird. Nach erfolgreicher Globalisierung, erhält man eine Matrixdifferentialgleichung deren Rang gleich der Freiheitsgrade des Systems (also der doppelten Anzahl der gewählten Diskretisierungspunkte) ist.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (132)$$

5.3.3 Eigenfrequenzen und -Moden

Aus dem homogenen Anteil der Differentialgleichung, die mit der Methode der finiten Elemente aufgestellt wurde, können die Eigenfrequenzen und die Eigenformen bestimmt werden [16]. Durch einen Exponentialansatz

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}e^{j\lambda t} \quad (133)$$

wird das Differentialgleichungssystem in ein algebraisches Eigenwertproblem überführt.

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{x}} = 0$$

Zum Lösen dieses Eigenwertproblems wird im Allgemeinen auf numerische Hilfsmittel zurückgegriffen. Aus den Eigenwerten λ und den Eigenvektoren \mathbf{x} können direkt die Eigenfrequenzen und die Eigenformen angegeben werden.

$$\tilde{\mathbf{x}}_n(t) = \mathbf{x}_n e^{\lambda_n t} \quad (134)$$

Die Anzahl der Eigenwerte ist doppelt so hoch wie die Anzahl der Diskretisierungspunkte. Da die Eigenwerte im Allgemeinen komplexe Größen sind, beschreibt die Lösung für Eigenwerte mit einem Realteil kleiner Null eine gedämpfte Schwingung. Die Amplitude

dieser Lösung müsste noch an die Anfangsbedingung angepasst werden. Für den Reglerentwurf ist großteils nur die Form der Schwingungen ausschlaggebend, da diese die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit des Systems definiert. Daher wird die Eigenform nicht an die Anfangsbedingung angepasst, sondern stattdessen auf Eins normiert. Mit diesen Grundlagen kann nun die Stabilität eines flexiblen Rotors untersucht werden. Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung wäre das Ergebnis einer erzwungenen Schwingung. Auf diese wird in der vorliegenden Arbeit nicht näher eingegangen, da die Maxima durch die jeweiligen Dämpfungen der einzelnen Resonanzfrequenzen gut abschätzbar sind.

6 Regelung eines magnetgelagerten elastischen Rotors

Wie bei der Regelung des starren Rotors angedeutet, müssen für praktische Anwendungen auch die flexiblen Eigenschaften des Rotors berücksichtigt werden. Ziel dieses Kapitels ist die Entwicklung eines stabilisierenden Reglers für einen flexiblen Rotors, aufgrund der in den vorhergehenden Kapiteln diskutierten Grundlagen. Es gibt zwei Hauptprobleme warum sich die Entwicklung einer stabilisierenden Regelungsstrategie für einen flexiblen Rotor als schwieriger wie bei einem starren Rotor darstellt.

- Der erste Grund ist die Tatsache, dass es bei einem flexiblen Rotor theoretisch unendlich viele Eigenmoden gibt, die das System destabilisieren können. Als Konsequenz müssen bei dem flexiblen Rotor, Methoden entwickelt werden, die das System auch für hohe Frequenzen stabilisieren. Beim starren Rotor gibt es im Gegensatz dazu endlich viele Moden, welche sich normalerweise über einen niedrigen Frequenzbereich erstrecken.
- Der zweite Grund basiert auf der örtlich verschiedenen Sensor- und Aktorplatzierung. Da es aber, wie im vorigem Punkt beschrieben, unendlich viele Moden gibt, wird es im Gegensatz zum starren Fall immer einen Durchtrittspunkt einer Mode geben welcher zwischen Sensor und Aktor ist. Falls diese Mode in einem Bereich großer Verstärkung liegt, so kann das zur Instabilität des Systems führen.

6.1 Erweiterung der FEM-Modellierung um Magnetlager

Die in den vorhergehenden Unterkapiteln beschriebenen Grundlagen beschreiben ausschließlich einen Rotor der durch mechanische Lager stabilisiert wird, welche durch eine Steifigkeit und einer Dämpfung modelliert werden. Das Ziel dieses Unterkapitels ist die Beschreibung eines flexiblen Rotors der mittels Magnetlager stabilisiert wird. Die Kraft der zwei radialen Magnetlager und die Auslenkung an den Positionssensoren wird mittels der Vektoren

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Bx} \\ F_{By} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ x_B \\ y_B \end{bmatrix}$$

beschrieben. Die einzelnen Komponenten des Kraftvektors \mathbf{F}_a lassen sich wie in den vorhergehenden Kapiteln aus der Linearisierung des elektrischen Systems bestimmen. Die Matrixdifferentialgleichung Gl. (132) ändert sich für den magnetgelagerten Rotor wie folgt:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_{AMB} \quad (135)$$

Wobei \mathbf{F}_u die Kraft aufgrund einer Unwucht beschreibt und \mathbf{F}_{AMB} die Kraft des Magnetlager welche in die Systemkoordinaten transformiert wurde. Diese Transformation erfolgt mit einer $2n \times 4$ Transformationsmatrix \mathbf{T}_A , wobei n die Anzahl der Diskretisierungspunkte beschreibt.

$$\mathbf{F}_{AMB} = \mathbf{T}_A^T \mathbf{F}_a \quad (136)$$

Alle Elemente dieser Matrix sind 0, bis auf die, welche auf einen Diskretisierungspunkt abbilden, an welchem eine Kraft des Magnetlagers angreift. Dasselbe Verfahren kann auch für die Sensoren angewendet werden, wobei eine $2n \times 4$ Transformationsmatrix \mathbf{T}_S benötigt wird⁴.

$$\mathbf{y}_S = \mathbf{T}_S \mathbf{x} \quad (137)$$

Wird die linearisierte Kraft Gl. (53) zur Modellierung benutzt, lautet die Systemgleichung:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_u + \mathbf{T}_A^T (k_{sA}\mathbf{x}_A + k_{iA}\mathbf{i}_A) + \mathbf{T}_B^T (k_{sB}\mathbf{x}_B + k_{iB}\mathbf{i}_B) \quad (138)$$

Da das verwendete Magnetlagersystem zwei unterschiedliche Lager an den Stellen A und B besitzt, benötigt man einen zweiten Transformationsterm. Die Terme der negativen Steifigkeit werden in die Systemkoordinaten transformiert und auf die linke Seite gebracht.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} - \underbrace{(k_{sA}\mathbf{T}_A^T\mathbf{T}_A + k_{sB}\mathbf{T}_B^T\mathbf{T}_B)}_{\mathbf{K}_x} \mathbf{x} = \mathbf{F}_u + \underbrace{(k_{iA}\mathbf{T}_A^T + k_{iB}\mathbf{T}_B^T)}_{\mathbf{K}_i} \mathbf{i} \quad (139)$$

Die Systemdifferentialgleichung des flexiblen Rotors hat nun die selbe Form wie im starren Fall. Da die meisten Regelungsstrategien auf dem Zustandsraum angewendet werden, transformiert man Gl. (139) in diesen.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_x & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{K}_i \mathbf{i} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{y}_S &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_S & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (140)$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}_f \mathbf{z} + \mathbf{B}_{if} \mathbf{i} + \mathbf{B}_{uf} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{y}_S &= \mathbf{C}_f \mathbf{z} \end{aligned} \quad (141)$$

Da die notwendigen Grundlagen zur Analyse des Gesamtsystems in ausreichender Mo-

⁴Bei sensorlosen Magnetlagern gilt $\mathbf{T}_S = \mathbf{T}_A$, da hier Sensor und Aktuator in einem Bauteil vereint sind.

dellierungstiefe beschrieben wurden, kann nun mit der Auslegung des Regelkreises begonnen werden.

6.2 Analyse der mechanischen Eigenschaften des Rotors

Um eine stabile Regelstruktur für ein Magnetlagersystem auslegen zu können, ist es notwendig zu wissen in welchen Bereichen es zu Resonanzphänomenen kommen kann. Da eine schnelle Berechnung des Rotorsystems erwünscht ist, wird nur der Rotor ohne Turbine mit Strukturelementen modelliert. Die Turbine wird als Ersatzmasse, welche gleiches Massenträgheitsmoment und gleiche Masse besitzt, modelliert. Diese Ersatzmasse ist mit einer flexiblen Kopplung an den Rotor fixiert. Abbildung 22 zeigt, die mittels der Software Madyn, modellierte Struktur. Es ist jedoch zu beachten, dass bei

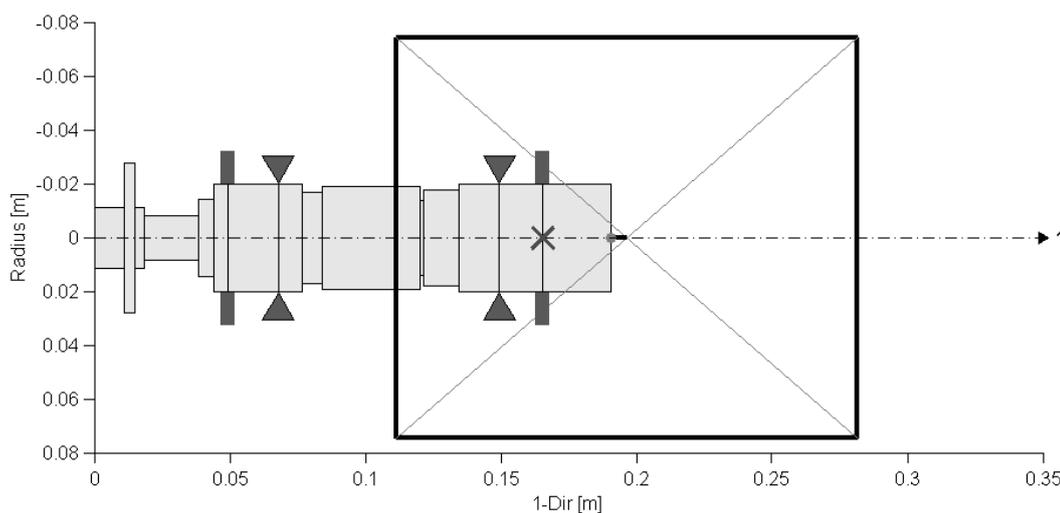


Abbildung 22: Modellierung des Rotors

dieser vereinfachten Simulation die Eigenschwingungen der Turbine nicht berücksichtigt werden. Die niedrigste Eigenfrequenz der Turbinenschaufeln wurde jedoch vorab identifiziert und beträgt etwa 1200Hz.

Um Abschätzen zu können, wann es zu Resonanzphänomenen kommen kann, wird ein Campbell-Diagramm des freien Rotors mittel FEM berechnet und visualisiert. Es ist jedoch zu beachten, dass die Eigenfrequenzen in späterer Folge abhängig von der Dynamik der Regelstruktur sind. Da aber in den meisten Fällen die virtuelle Steifigkeit nicht sehr groß gewählt wird, ändert sich die Eigenfrequenzen der Biegemoden nur geringfügig. Die Starrkörpermoden lassen jedoch noch keine Abschätzung mittels des freien Rotors zu, da diese stark von den Regelparametern abhängen. Will man den Einfluss der Steifigkeitsänderung dennoch vor Auslegung der Regelung berücksichtigen, wird in vielen Fällen eine so genannte "stiffness variation" Analyse durchgeführt. Zur

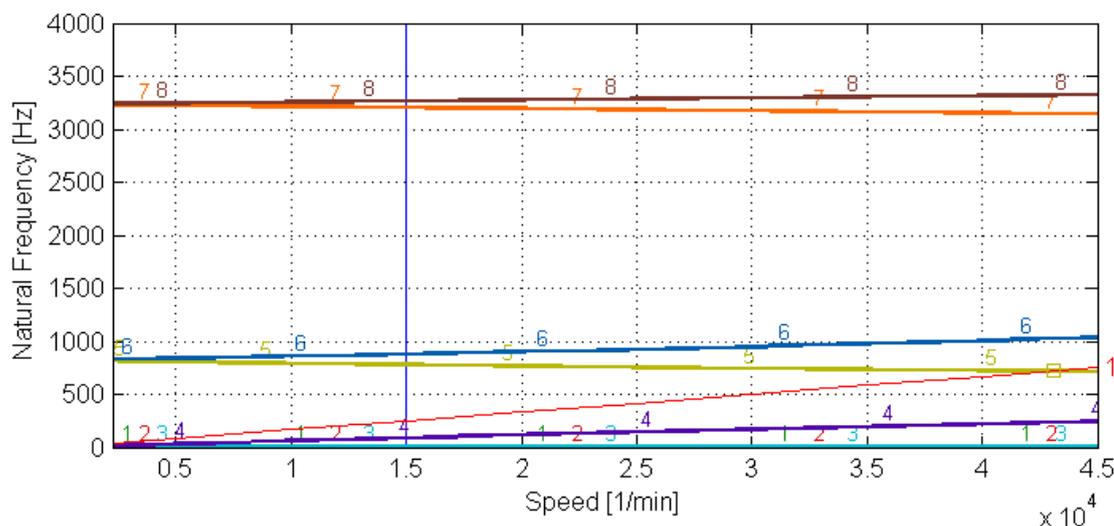


Abbildung 23: Campbell Diagramm des freien flexiblen Rotors

Analyse des flexiblen Rotors wird in dieser Arbeit die Software Madyn verwendet. Madyn ist ein Programm zur Berechnung der Rotordynamik von verschiedenen Lagerungssystemen. Unter anderem werden auch aktive Magnetlager unterstützt. Das ermittelte Campbell Diagramm ist in Abbildung 23 ersichtlich. Die Moden 1 – 4 (Starrkörpermoden) haben, wie beschrieben, bei dem freien Rotor noch keine Aussagekraft, da diese stark von den Regelparametern abhängen. Die Moden 5 und 6 sind die ersten Biegemoden, welche im oder nahe des Dynamikbereiches des Reglers sein werden. Daher wird man diesen Moden eine spezielle Aufmerksamkeit schenken. Wie man an den Eigenfrequenzen sehen kann, besitzen auch die Biegemoden einen gyroskopischen Effekt. Die zweiten Biegemoden sind schon weit außerhalb des benötigten Dynamikbereiches des Reglers und können durch eine einfache Methode, welche im Laufe des Kapitels noch beschrieben wird, stabilisiert werden. Das Dämpfungsdiagramm wird beim freien Rotor noch nicht benötigt, da es aufgrund des fehlenden Reglers noch keine Aussage zulässt.

Die nächste Abbildung zeigt ein “stiffness variation”-Diagramm bei Nenndrehzahl (Abbildung 24). Bei dieser Darstellung sind die Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Lagersteifigkeit, welche durch einen Faktor verändert wird, aufgetragen. Die Referenzsteifigkeit beträgt 10000N/m. Die obere Abbildung zeigt die Starrkörpermoden. Diese besitzen eine starke Abhängigkeit der Lagersteifigkeit, was aus dem Anstieg im Diagramm ersichtlich ist. Eine Konsequenz daraus ist, dass die Starrkörper-Eigenfrequenzen (1-4) stark von den Regelparameter abhängen. Im Gegensatz zu den Starrkörpermoden werden die Eigenfrequenzen der Biegemoden (5,6) von der Lagersteifigkeit in dem definierten Bereich nur wenig beeinflusst. Eine starke Beeinflussung der Eigenfrequenzen

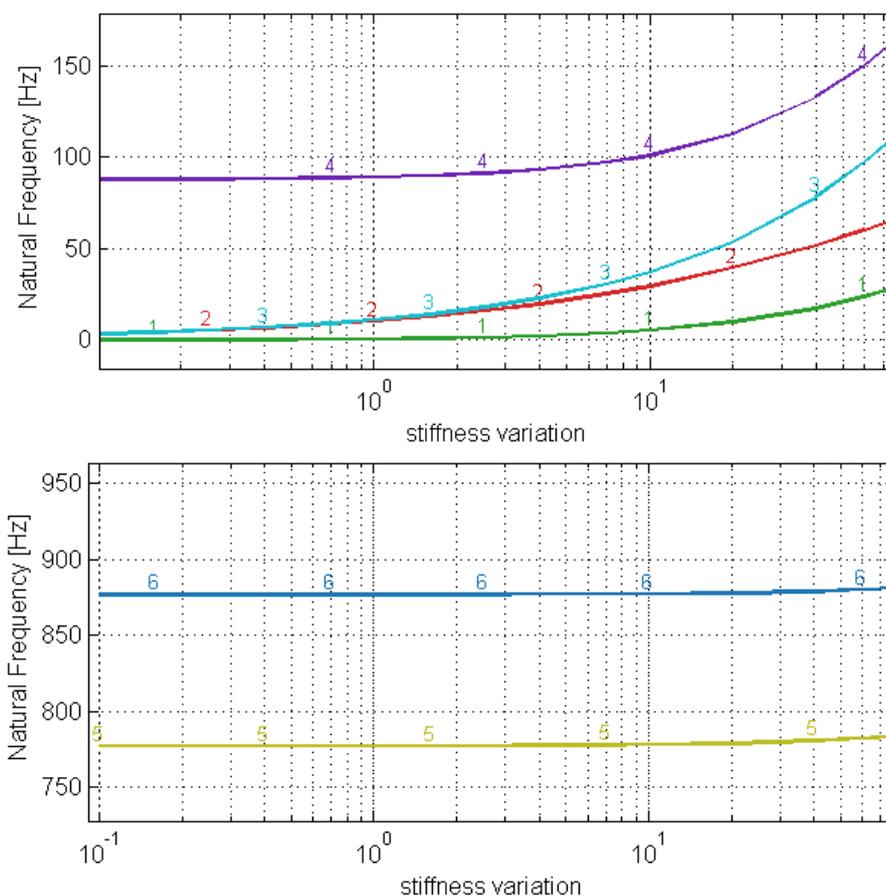


Abbildung 24: Stiffness variation des freien Rotors bei 15.000U/min

der Biegemoden lässt sich nur für höhere Steifigkeiten beobachten, wie es zum Beispiel bei mechanischen Lagern der Fall ist. An den Starrkörpermoden kann man noch erkennen, dass die einzelnen Moden sehr unterschiedliche Werte annehmen. Diese Tatsache lässt auf einen großen gyroskopischen Effekt des vorhandenen Rotors schließen. Würde man das System mit noch höheren Drehzahlen betreiben, müsste man geeignete Strategien zur Behandlung der immer größer werdenden Aufspaltung der Moden entwickeln.

6.3 Entwicklung einer stabilisierenden Regelstruktur

Da die Eigenschaften des Rotors identifiziert sind, kann mit der Entwicklung der Regelstruktur begonnen werden. Abbildung 25 zeigt die vereinfachte Struktur der implementierten Regelung.

Die Regelstruktur des flexiblen Rotors basiert auf der entkoppelte Regelung der parallelen und konischen Moden des starren Rotors. Der Stromregler ist hardwaremäßig als

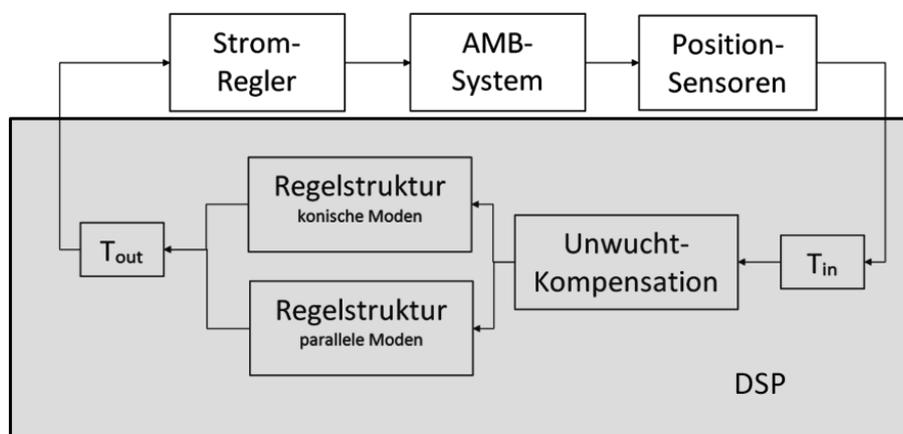


Abbildung 25: Struktur der Regelung

Toleranzbandregler realisiert. Die gesamte Regelstruktur einschließlich der Transformationsmatrizen ist softwaremäßig in einem DSP implementiert. T_{in} und T_{out} sind die gleichen Transformationsmatrizen wie die des Starrkörpermodells. Für die Entwicklung der Regelstrukturen der konischen und parallelen Moden wurden jene des Starrkörpersystems als Ausgangspunkt verwendet und weiterentwickelt. Da der Einfluss der Unwucht quadratisch mit der Drehzahl steigt, musste eine spezielle Strategie zur Handhabung dieses Phänomens implementiert werden. Die Regelstrukturen und die Unwuchtkompensation werden im Speziellen noch erläutert. Der Stromregler wird zur Auslegung der Positionsregelung nicht weiter berücksichtigt, da dieser im Vergleich zu der Positionsregelung eine sehr hohe Dynamik besitzt.

6.3.1 Regelstrukturen für konische und parallele Moden

Um den Vorteil der Entkopplung der parallelen und konischen Moden auszunutzen, ist es vorteilhaft zwei verschiedene Regelstrukturen zu entwickeln, welche an die jeweiligen Anforderungen angepasst sind. Man kann in manchen Fällen den Reglerentwurf in zwei Teile aufspalten. Der erste Teil ist die Regelung der Starrkörpermoden. Erlaubt nun das System und die Anforderungen an das Lager, dass die Starrkörpermoden einen ausreichenden Frequenzabstand zu den ersten Biegemoden besitzen und der Rotor unterkritisch rotiert, dann kann der zweite Teil der Regelungsentwicklung (die Stabilisierung der ersten Biegemoden) fast unabhängig von den Starrkörpermoden erfolgen. Die Stabilisierung der Starrkörpermoden erfolgt wie in Kapitel 4.3.2 beschrieben, nur mit der Randbedingung dass die Eigenfrequenzen der Starrkörpermoden und das Begrenzen des D-Anteils in einem ausreichend großen Frequenzabstand zu den Biegemoden erfolgt. Die Entwicklung des Reglers der parallelen Moden gestalten sich als relativ

einfach, da hier, aufgrund der Entkopplung, kein gyroskopischer Effekt existiert. Diese Tatsache hat eine Zeitinvarianz des Systems zur Folge. Das bedeutet, dass ein paralleler Regler der das stillstehende System stabilisiert, auch stabil für das drehende System ist. Für das konische Teilsystem gestaltet sich die Regelung schon als etwas komplizierter, denn hier kommt der gyroskopische Effekt vollständig zu tragen und das System ist abhängig von der Drehzahl. Daher muss ein solcher Regler sehr robust ausgelegt werden und kann im Gegenteil zum parallelen Regler nicht für einen Bereich optimiert werden. Jedoch besteht die Möglichkeit der Verwendung einer zeitvarianten Regelstruktur um diesen Nachteil zu umgehen. Dies ist jedoch für den Drehzahlbereich, der in dieser Arbeit verwendet wird noch nicht nötig.

Bevor mit der Stabilisierung der Biegemoden begonnen wird, ist eine Tatsache noch von großer Bedeutung. Für hohe Frequenzen können Biegemoden nicht nur mit einer positiven Phase, sondern auch mit einem negativen Phasenbereich stabilisiert werden [11]. Abbildung 26 zeigt, bei welcher Phasenverschiebung die Reglerübertragungsfunktion $G_r(j\omega)$ stabilisierend und destabilisierend auf Moden wirkt.

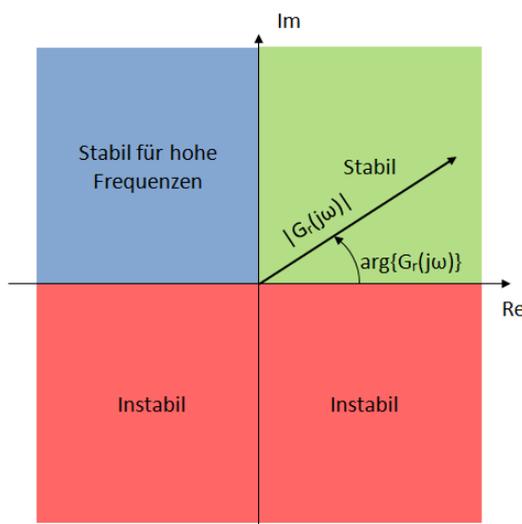


Abbildung 26: Stabilisierende Wirkung des Reglers

Ist der Abstand der Eigenfrequenzen der Starrkörper und Biegemoden ausreichen groß, so kann eine einfache Regelstrategie angewendet werden, welche aus folgenden Aufgaben besteht:

1. Stabilisierung der Starrkörpermoden (wie oben beschrieben).
2. Im resonanzfreien Bereich wird ein Filter benötigt der die Phase vom stabilen Bereich in den stabilen für hohe Frequenzen Bereich dreht. Dies kann mit einem Tiefpassfilter 2. Ordnung erfolgen.

3. Ist die Phasendrehung bei der ersten Biegemode noch nicht abgeschlossen, muss ein geeigneter Filter verwendet werden, welcher die Phase lokal in negative Richtung dreht.

Bei einem rein symmetrischen Rotor kann die erste Biegemode nur von den parallelen Regelpfad beobachtet werden, da diese durch eine gerade Funktion beschrieben wird. Ist der Rotor jedoch unsymmetrisch, kann nicht mehr so einfach festgestellt werden in welchem Regelpfad die erste Biegemoden beobachtbar oder steuerbar ist. Um dies bei dem vorhandenen Rotor festzustellen, wurde aus dem FEM-Model des freien Rotors bei Nenndrehzahl die Form der ersten Biegemoden berechnet und dargestellt (Abbildung 27).

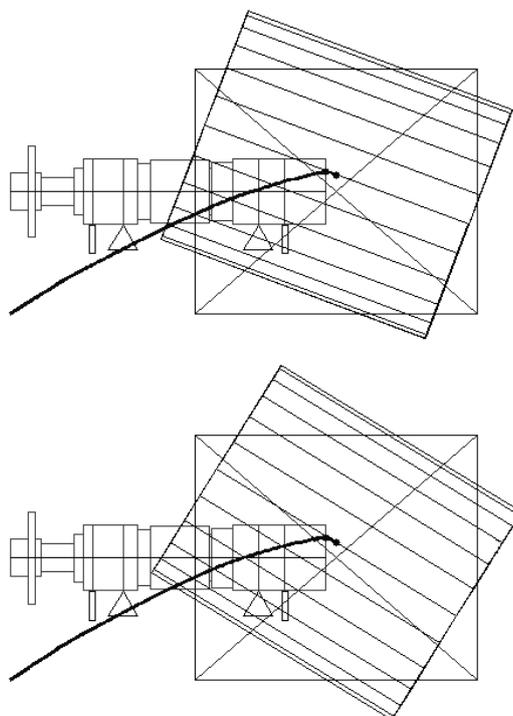


Abbildung 27: Form der ersten Beigemoden des freien Rotors bei Nenndrehzahl

Zur Feststellung der Beobachtbarkeit sind nur die zwei Punkte bei den Sensoren von Bedeutung. Würde man diese zwei Punkte durch eine Linie verbinden, wäre die Form der Mode eher eine Konische als eine Parallele. Dies wurde in späterer Folge auch durch Positionsmessungen im geregeltem Betrieb und einer anschließenden Fourier Transformation nachgewiesen.

Da nun auch das rotordynamische Werkzeug für die Reglerentwicklung zur Verfügung steht, können stabilisierende Systeme angegeben werden. Abbildung 28 zeigt eine identische Grundstruktur für den konischen und den parallelen Regler.



Abbildung 28: Grundlegende Regelstruktur für konischen und parallelen Regler

Die Übertragungsfunktion lautet:

$$G_r(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{2D}{2\pi f_f} s + \frac{s^2}{(2\pi f_f)^2}}}_{\text{Tiefpassfilter}} \cdot \underbrace{\frac{\frac{P}{2\pi f_{n1}} s}{1 + \frac{s}{2\pi f_{d1}}} + I + P}_{\text{PIDT1-Regler}} \cdot \underbrace{\frac{1 + \frac{2D_n}{2\pi f_n} s + \frac{s^2}{(2\pi f_n)^2}}{1 + \frac{2D_d}{2\pi f_d} s + \frac{s^2}{(2\pi f_d)^2}}}_{\text{Lead-Lag Filter}} \quad (142)$$

Diese Struktur wird anhand der folgenden Unterpunkte erklärt.

- **PIDT1 Regler:** Dieser übernimmt die Aufgabe der Stabilisierung der Starkkörpermoden und wurde schon ausführlich in den vorherigen Kapiteln erläutert. Dieser Teil der Regelung besitzt für den konischen und den parallelen Fall unterschiedliche Parameter.
- **Tiefpassfilter 2. Ordnung:** Die Aufgabe dieses Filters ist die Stabilisierung des Systems für hochfrequente Moden. Die stabilisierende Wirkung kann aus Abbildung 26 abgelesen werden. Wird das System mit einem DSP geregelt, so besitzt das System eine gewisse Totzeit. Das bedeutet, dass das System oberhalb von f_{d1} eine negative Phasenverschiebung besitzt, was destabilisierend wirkt. Um das System schnell wieder in einen stabilisierenden Bereich zu drehen, stellt der Tiefpassfilter die nötige zusätzliche 180° Phasenverschiebung bereit. Wie schnell diese Drehung der Phasenverschiebung stattfindet hängt vom Dämpfungsparameter D des Filters ab. Es muss also ein Kompromiss zwischen schneller Phasendrehung und der nötigen Dämpfung gefunden werden.
- **Lead-Lag Filter:** Wenn die Anforderung an die Geschwindigkeit der Phasendrehung des Tiefpasses zu stark sind, oder die erste Biegemode eine gewisse Phasenreserve benötigt, so ist die Regelung durch einen zusätzlichen Teil zu ergänzen. Dieser zusätzliche Term ist in dem vorliegenden Fall ein sogenannter Lead-Lag Filter welcher die Eigenschaft besitzt, dass er lokal eine Phasenhebung oder Phasenabsenkung bewirkt. Die Frequenz des Maximums bzw. Minimums der lokalen Phasendrehung sollte im Stillstand ungefähr bei der Eigenfrequenz der zu stabilisierenden Mode sein. Die Bandbreite des Filter muss groß genug sein, um für die höchstmögliche Drehzahl des Systems noch genügend Phasenreserve bei den aufgespaltenen Eigenfrequenzen der zu stabilisierenden Biegemode zu haben.

Mit den identifizierten mechanischen Eigenschaften und der Regelstruktur aus Abbildung 28, werden basierend auf dem Regler des Starrkörper-Rotors die Regelparameter bestimmt. Diese Bestimmung wird mittels Simulation in Matlab/Simulink durchgeführt. Die Übertragungsfunktionen des parallelen und des konischen Reglers sind jeweils in Abbildung 29 und 30 ersichtlich.

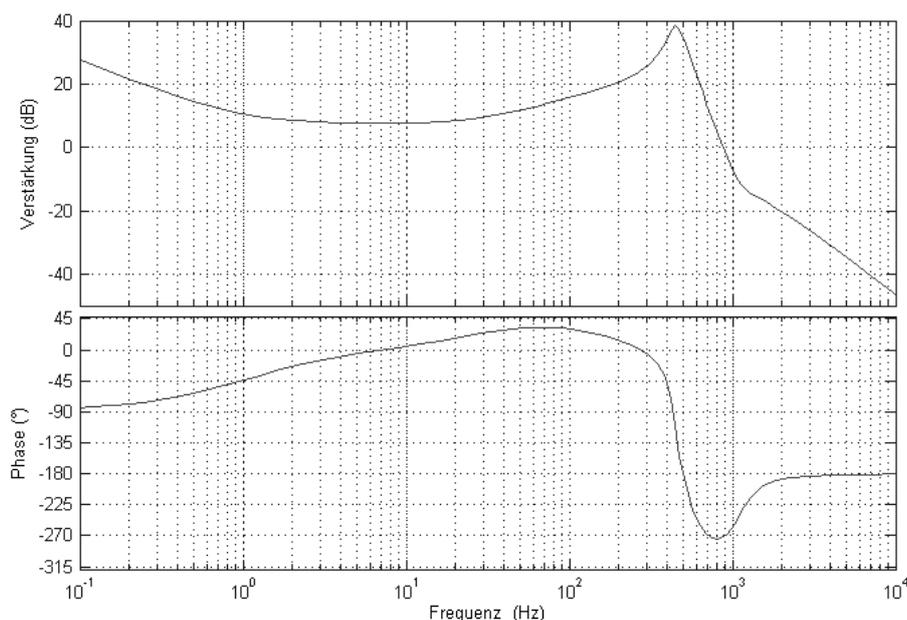


Abbildung 29: Übertragungsfunktionen des konischen Reglers

Aus den beiden Transferfunktionen ist zu sehen, dass der einzige Unterschied in den Parametern des PIDT1 Reglers bestehen. Bei der Verstärkung kann in diesem Fall nicht direkt auf die Steifigkeit des Systems geschlossen werden, denn es werden im DSP normierte Größen verwendet. Um die Verstärkung des Reglers in SI-Einheiten darzustellen, müsste der simulierte Wert mit dem Faktor 10000 multipliziert werden.

Zur Entwicklung und Abschätzung der Stabilität des Reglers ist jedoch die Phase von größerer Bedeutung. Ganz Links im Frequenzgang ist der Integralanteil mit ausreichend großem Frequenzabstand zum PDT1-Anteil zu erkennen. Im Bereich von 30 – 200Hz ist der PDT1-Anteil, welcher ein positive Phase und damit eine stabilisierende Wirkung im Bereich von 10 – 300Hz besitzt, ersichtlich. Die Eigenfrequenz der Starrkörpermoden müssen durch den P-Anteil im Bereich der stabilisierenden Wirkung sein. Der Bereich über 350Hz wird vom Tiefpassfilter bestimmt wobei dieser bei 800Hz von einer lokalen Phasensenkung aufgrund des Lead-Lag Reglers überlagert ist. Aus der Phasenabsenkung ist zu erkennen, dass die ersten Biegemoden im stabilen Bereich sind. Der einzig destabilisierende Bereich erstreckt sich von 300 – 500Hz. Daher ist es notwendig,

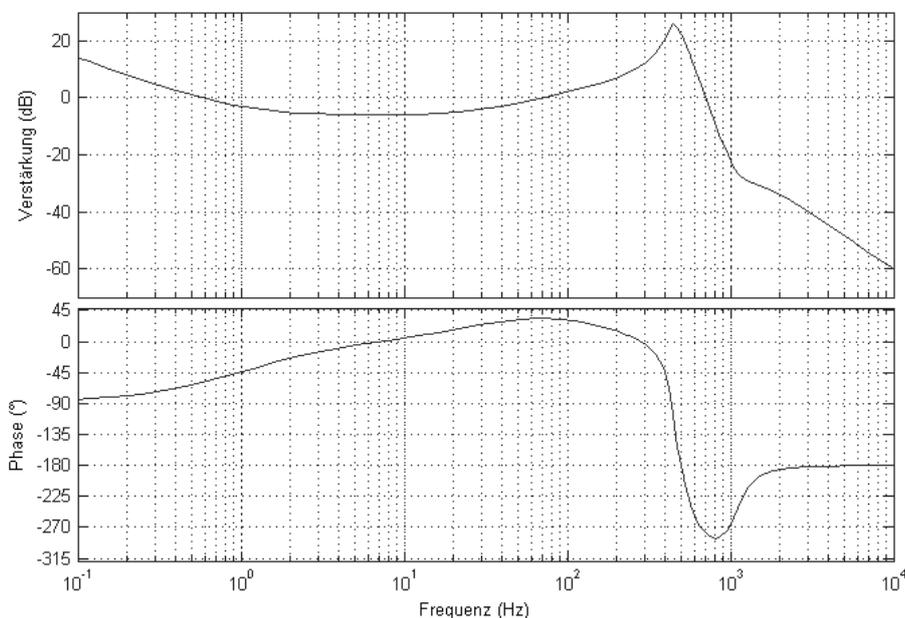


Abbildung 30: Übertragungsfunktionen des parallelen Reglers

dass in diesem Bereich keine Resonanzerscheinungen liegen. Dies wurde in der vorliegenden Arbeit durch Messung des geregelten Systems für den Einsatzdrehzahlbereich ausgeschlossen.

Da in Kapitel 6.2 die Abhängigkeit der Biegemoden von der Drehzahl durch die begrenzte Steifigkeit des Magnetlagers als vernachlässigbar identifiziert wurden, sind diese mit dem vorhandenen Regler sicher stabil. Die Stabilität der Starrkörpermoden muss jedoch nachgewiesen werden. Der Nachweis der Stabilität im gesamten Drehzahlbereich wird mit dem Campbell-Diagramm laut Abbildung 31 erbracht.

Es ist zu sehen, dass die Dämpfung der Starrkörpermoden für den gesamten Drehzahlbereich positiv ist. Die Funktion der Entkopplung der konischen und parallelen Moden kann mit diesem Diagramm bestätigt werden, da die Moden bei 80 Hz nahezu von der Drehzahl unabhängig sind, die Moden bei 52 Hz Startfrequenz aber eine starke Drehzahlabhängigkeit aufweisen. Da die konischen Moden mit steigender Drehzahl immer weiter auseinander laufen, wird die Dämpfung von mindestens einer dieser Moden immer weiter absinken. Für den in der Arbeit beschriebenen Drehzahlbereich besitzt jede Mode aber einen akzeptablen Dämpfungswert. Abbildung 32 zeigt zusätzlich zum Campbell-Diagramm noch die Stabilität aller Eigenfrequenzen für Nenndrehzahl.

Der Grund warum so viele Eigenfrequenzen in der Abbildung zu sehen sind, liegt in der Berücksichtigung der entwickelten Regelstruktur mittels der Software Madyn. Madyn ist eigentlich nur für dezentrale Regelstrukturen konzipiert. Um das Simulations-

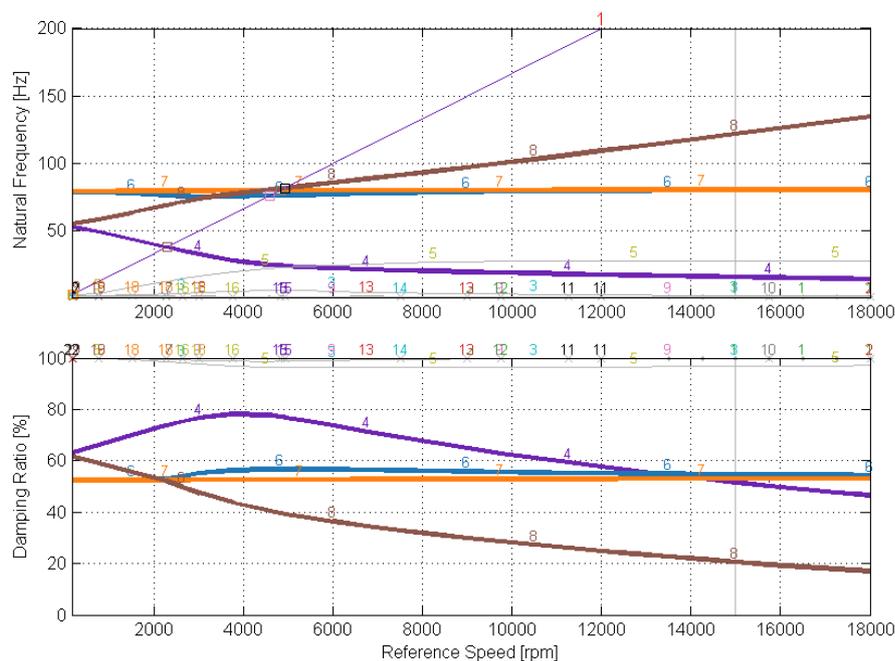


Abbildung 31: Campbell-Diagramm des geregelten Systems

werkzeug dennoch verwenden zu können, wurde mit Matlab auf numerischen Weg der entkoppelte Regler in eine rein dezentrale Struktur und einer rein kreuz gekoppelten Struktur, zerlegt. Das Ergebnis dieses Verfahrens sind Übertragungsfunktion hoher Ordnung und genau aus diesen Grund besitzt die Simulation so viele Eigenfrequenzen. Die Unterscheidung zwischen “real” mechanischen und virtuellen Eigenfrequenzen benötigt hierbei einen gewissen Erfahrungsschatz.

6.3.2 Unwuchtkompensation

Bei der bisherigen Regelungsauslegung wurde immer ein ideal symmetrischer Rotor verwendet. In der Realität ist das natürlich nicht der Fall und es wird am Realsystem immer Effekte aufgrund der Unwucht geben. Es muss daher immer abgeschätzt werden, ob die Kräfte der Magnetlager ausreichen, um den nicht ideal symmetrischen Rotor für die vorgegebene Maximaldrehzahl zu stabilisieren. Reichen diese Kräfte nicht aus, so kann durch spezielle Methoden diese Unwuchtkraft teilweise kompensiert werden. Es kann jedoch auch vorkommen, dass die Kräfte des Magnetlagers ausreichen, aber die Vibration aufgrund der Unwucht zu groß sind. In diesen Fall benötigt man eine andere Form der Unwuchtregelung. Die Unwuchtregelungen können nach [7] in drei Kategorien eingeteilt werden:

- Kompensation der synchronen Magnetlagerkräfte: Ziel dieser Art der Unwuchtregelung ist die Minimierung der Kraft die durch den Regler aufgrund der Unwucht

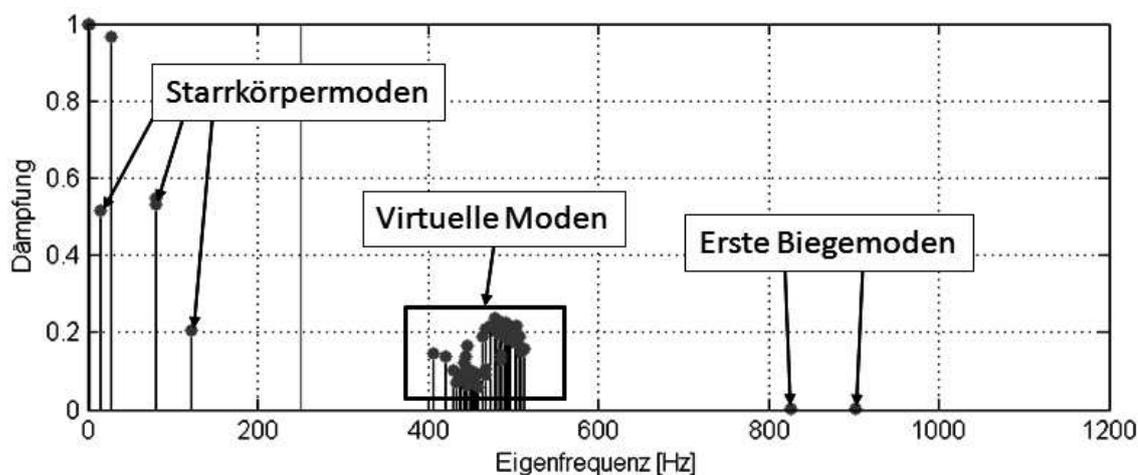


Abbildung 32: Stabilität bei Nenndrehzahl

vorgegeben würde. Alle Methoden dieses Unterpunktes besitzen die Aufgabe den Unwuchtanteil aus dem Rückkoppelzweig zu eliminieren.

- Reduktion der Unwuchtvibrationen: Die Aufgabe bei dieser Art der Regelung besteht in der Minimierung der Vibrationen die aufgrund der Unwucht hervorgerufen werden.
- Unwuchtregler für die Resonanzfrequenzen: Ist die Vibration bei den Resonanzfrequenzen zu hoch, wird hierbei durch eine spezielle Regelung eine synchrone Dämpfungskraft im kritischen Frequenzbereich aufgeschaltet.

Bei den letzten beiden Punkten wird der synchrone Anteil nicht aus dem Rückkoppelzweig eliminiert, sondern mit einer synchronen Dämpfungskraft überlagert. Aus diesem Grund führen diese Punkte zu hohen Magnetlagerkräften, was eigentlich der gegenteilige Effekt vom ersten Punkt ist. Beim vorhandenen System liegt das Hauptaugenmerk auf der Kompensation der synchronen Magnetlagerkräfte. Als Methode zur Kompensation wurde ein sogenannter Notch-Filter gewählt, welcher das Unwucht-Signal im Frequenzbereich der Drehzahl kompensiert. Der Notch-Filter hat folgende Form im s-Bereich:

$$N(s) = \frac{\frac{1}{\omega^2} s^2 + 1}{\frac{1}{\omega^2} s^2 + \frac{2(BW/\omega)}{\omega} s + 1} \quad (143)$$

wobei ω die Drehzahlinformation und BW die Bandbreite des Filters beschreibt. Die Rückkopplungsmatrix des Notch-Filters hat eine dezentrale Struktur und besitzt daher Diagonalform:

$$\mathbf{N}(s) = \text{diag}(N(s) \dots N_4(s)) \quad (144)$$

Der Notch-Filter ist jedoch zeitvariant, da sich die Drehzahl ω ändert. Dies ist für die Stabilitätsuntersuchung nicht von großer Bedeutung, da die Änderungsgeschwindigkeit sehr gering ist. In [17] wurde die Stabilität und die Reduktion der Unwuchtvibrationen eines solchen Systems bewiesen.

6.4 Implementierung der Regelstruktur

Die Entwicklung der Regelstruktur ist zwar abgeschlossen, da aber die Regler im s -Bereich entwickelt wurden, kann keine direkte Implementierung in einem digitalen Regler erfolgen. Die Aufgabe dieses Kapitels besteht daher in der Diskretisierung der Regler und in der Beschreibung der Funktionen die zur Implementierung in der Software benutzt werden. Zur Diskretisierung der Regler wird die Tustin-Transformation

$$q = \frac{2}{T_a} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (145)$$

für die Abbildung in den z -Bereich verwendet, wobei T_a die Abtastzeit und q die Laufvariable des Tustinbereiches darstellt. Bei einer Diskretisierung wird die stabile linke Halbebene des s -Bereiches in das Innere des Einheitskreises des z -Bereiches abgebildet. Die sogenannte Tustin-Transformation bildet das Innere des Einheitskreises des z -Bereiches wieder, mit der Bilineartransformation nach Gl.(145), auf die linke Halbebene des zeitdiskreten q -Bereiches ab. Abbildung 33 veranschaulicht diesen Sachverhalt. Für eine unendlich hohe Abtastfrequenz würde der q -Bereich mit dem s -Bereich übereinstimmen. Ist die Abtastfrequenz groß gegenüber der Dynamik des Systems, kann daher die Tustin-Näherung

$$s \approx \frac{2}{T_a} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (146)$$

verwendet werden, um eine einfache numerische Transformation vom s -Bereich in den z -Bereich zu implementieren. Nach erfolgreicher Transformation wird die Funktion im z -Bereich algebraisch auf folgende Form umgestellt:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = g \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (147)$$

Um diese z -Übertragungsfunktion in den diskreteten Zeitbereich zu transformieren wird die Korrespondenz

$$f_{k-n} = z^{-n} f_z(z) \quad (148)$$

verwendet und auf die Form

$$a_0 y_k = -a_1 y_{k-1} - \dots - a_n y_{k-n} + g (b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_n u_{k-n}) \quad (149)$$

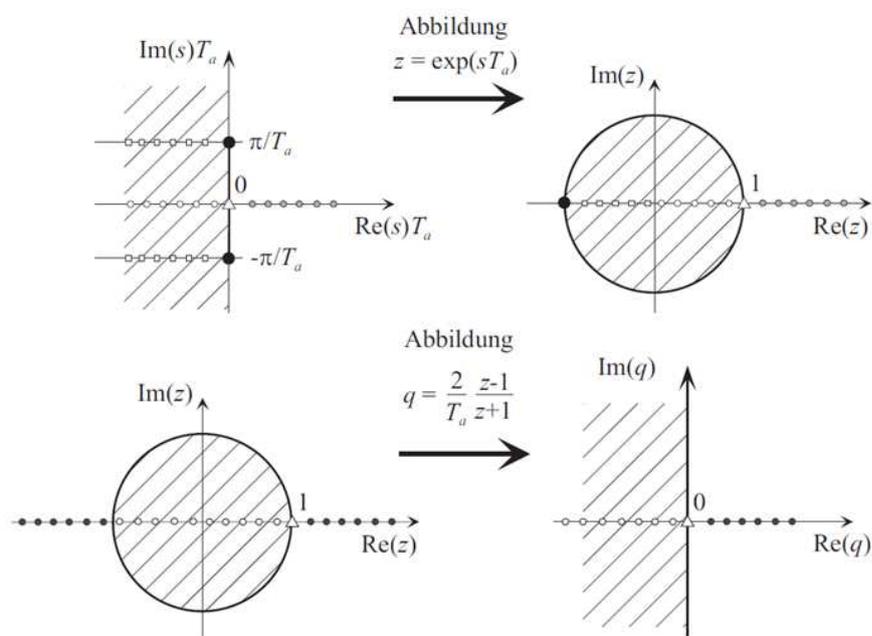


Abbildung 33: Grafische Interpretation der Tustintransformation [8]

gebracht. Im DSP werden Funktionen jeweils für ein System von maximal zweiter Ordnung implementiert. Die entwickelten Filter sind daher immer eine Serienschaltung von Filtern zweiter Ordnung. Abbildung 34 zeigt das Ablaufdiagramm des Programmes, welches mittels der Software Maple zur Parameter-Berechnung implementiert wurde.

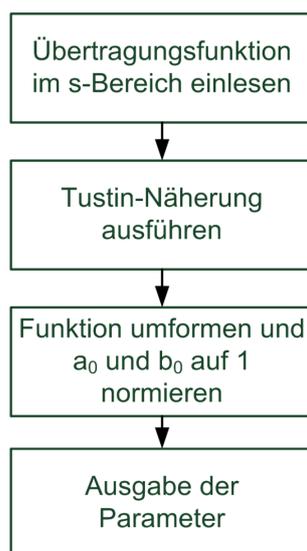


Abbildung 34: Programmablauf zur Berechnung der Filter- und Regler-Parameter

Da schon bei der Entwicklung der Regelstruktur darauf geachtet wurde, dass die verwendeten Regler und Filter nicht eine höhere Ordnung als zwei besitzen, kann die gesamte Regelstruktur mit dem entwickelten Maple-Programm implementiert werden. Die Implementierung des zeitvarianten Notch-Filters kann nicht in dieser Art durchgeführt werden. Dieser muss in allgemeiner Form berechnet werden, da der DSP die Koeffizienten in Abhängigkeit der Drehzahl online berechnen muss.

7 Messergebnisse

Nach der erfolgreichen Entwicklung und Implementierung der Regelstruktur, wird in diesem Kapitel mit den Messungen, die zum Nachweis der Funktion des Magnetlagersystems dienen, der experimentelle Teil beschrieben. Dieses Kapitel beschäftigt sich daher mit Messergebnissen, welche die Genauigkeit und die Robustheit des Systems beschreiben. Es wurden drei verschiedene Experimente durchgeführt:

- Messung des Regelverhaltens nach einem Kraftsprung am Magnetlager bei Stillstand
- Messung der Compliance-Funktion des parallelen, konischen und des axialen Regelzweiges bei Stillstand und Nenndrehzahl
- Messung der Sensitivitäts-Funktion des parallelen und konischen Regelzweiges bei Stillstand und Nenndrehzahl

Um den Rotor anzutreiben, wird eine permanenterregte Synchronmaschine (PSM) verwendet, welche im Brushless DC Betrieb betrieben wird. Für die Ansteuerung der PSM wurde unabhängig vom Magnetlager-System ein eigener Umrichter verwendet. Der Umrichter des Magnetlager-Systems kommuniziert jedoch mit dem Antriebs-Umrichter über einen CAN-Bus und stellt die Drehzahlinformation ω für den Notch-Filter bereit. Abbildung 35 zeigt ein Ersatzschaltbild eines Freiheitsgrades des gesamten Regelsystems indem alle Größen im COG-Koordinatensystem dargestellt sind. Anhand dieses Blockschaltbildes werden die Anrege- und Mess-Signale der zu messenden Transferfunktionen definiert.

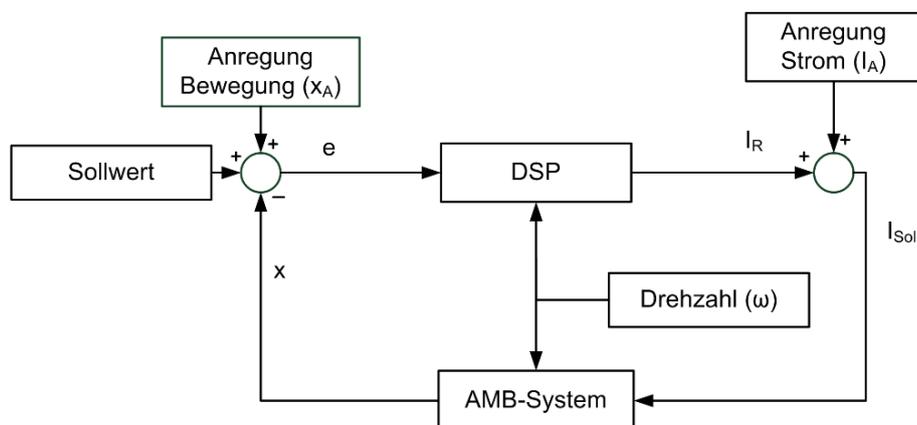


Abbildung 35: Reduziertes Blockdiagramm der Regelungsstruktur

7.1 Regelverhalten nach einem Kraftsprung

In diesem Unterabschnitt wird mit dem DSP ein Stromsollwert als Anregung an dem Eingang des Stromreglers überlagert. Da das obere und untere Magnetlager unterschiedlich stark sind, werden auch unterschiedliche Kräfte vorgegeben. Beim Lager A wird eine Kraft von 6N, beim Lager B von 13,75N und beim axialen Lager von 32,25N verwendet. Der Grund warum statt einer Stoßanregung ein Sprung verwendet wird, liegt in der Analyse des I-Reglers. Abbildung 36 zeigt das Ergebnis des ersten Experimentes.

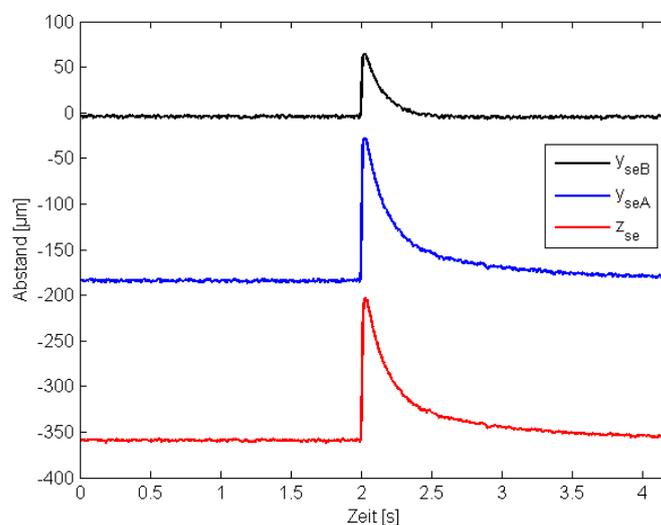


Abbildung 36: Verhalten des Reglers nach einem Kraftsprung

Für die radialen Koordinaten zeigt das Lager B eine kleinere Auslenkung. Der Grund liegt in dem kleineren Abstand zum Schwerpunkt vom Lager B. In allen Freiheitsgraden kann nur eine langsame Ausregelung der konstanten Störgröße beobachtet werden, was an der langsam gewählten Integrationskonstante liegt. Mit der schnellen Stabilisierung und einem nicht vorhandenen Schwingen, kann die Funktionsfähigkeit des PDT1-Reglers nachgewiesen werden. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der entwickelte Regler konstante Störungen unterdrückt und für Kraftsprünge ausreichend stabilisierend wirkt.

7.2 Compliance-Funktionen der Regelzweige

Um das dynamische Verhalten des Systems beurteilen zu können, wurden für diesen Abschnitt die Compliance-Funktionen aller Freiheitsgrade gemessen. Die Compliance-

Funktion ist definiert als

$$T_C = \frac{x}{I_A}. \quad (150)$$

Um diese Übertragungsfunktion des Magnetlagersystems aufzeichnen zu können, wurde ein Matlab-Programm entwickelt, das folgende Aufgaben löst:

1. Berechnung eines Anregesignals: Für die Anregung wird ein modifiziertes Chirp-Signal verwendet, welches in Abbildung 37 ersichtlich ist. Das Chirp Signal ist ein Sinus mit veränderlicher Frequenz. Zum Anfangszeitpunkt besitzt der Sinus eine vorgegebene Frequenz f_0 . Die Frequenz des Sinus steigt linear bzw. logarithmisch mit der Zeit, bis zu einer vorgegebenen Endfrequenz f_1 . Da die Übertragungsfunktionen der Magnetlager ab einer gewissen Knickfrequenz mit -40dB/dec abfallen, wird beim modifizierten Chirp-Signal die Amplitude ab einer vordefinierten Frequenz erhöht, um auch für hohe Frequenzen eine messbare Ausgangsgröße zu erhalten.

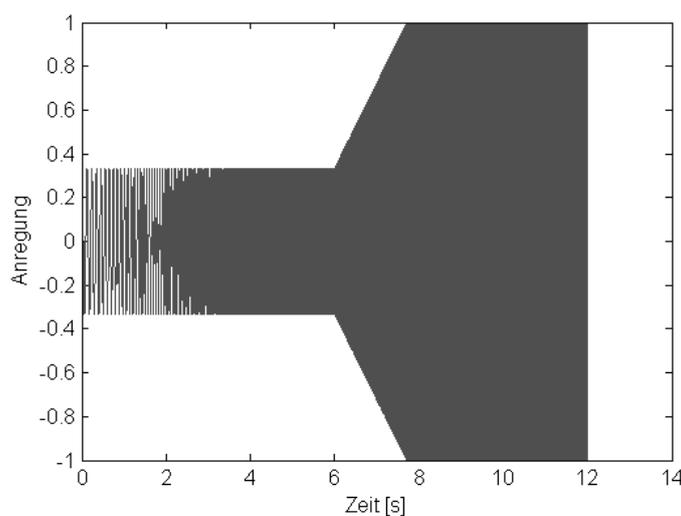


Abbildung 37: Modifiziertes Chirp-Signal

2. Ausgabe des Anregesignales und Einlesen der Messgröße: Ist das Anregesignal berechnet, wird im nächsten Schritt das modifizierte Chirp-Signal über einen D/A Wandler an das Magnetlagersystem übertragen. Das resultierende Ausgangssignal wird anschließend über einen A/D Wandler eingelesen.
3. Berechnung der Übertragungsfunktion: Die Eingangs und Ausgangsgröße des Systems sind beide im Zeitbereich dargestellt. Um die Übertragungsfunktion aus den gemessenen Daten zu berechnen, wird die Fast Fourier Transformation (FFT)

angewendet.

$$T_C = \frac{\text{FFT}(x)}{\text{FFT}(J_A)} \quad (151)$$

Um die Übertragungsfunktion darzustellen muss T_C in Betrag und Phase aufgeteilt werden. Falls die Übertragungsfunktion zu verrauscht ist kann mittels Matlab das Signal gefiltert werden.

4. Darstellung der Übertragungsfunktion: Bei der Darstellung wird die Übertragungsfunktion, wie üblich in Betrag und Phase über der Frequenz aufgetragen. Wobei der Betragsgang doppelt logarithmisch und der Phasengang einfach logarithmisch dargestellt wird.

Abbildung 38 zeigt die Compliance-Funktion für einen konischen Freiheitsgrad. Da das System für die x- und die y-Achse gleich ist, wird immer nur ein konischer und ein paralleler Freiheitsgrad dargestellt.

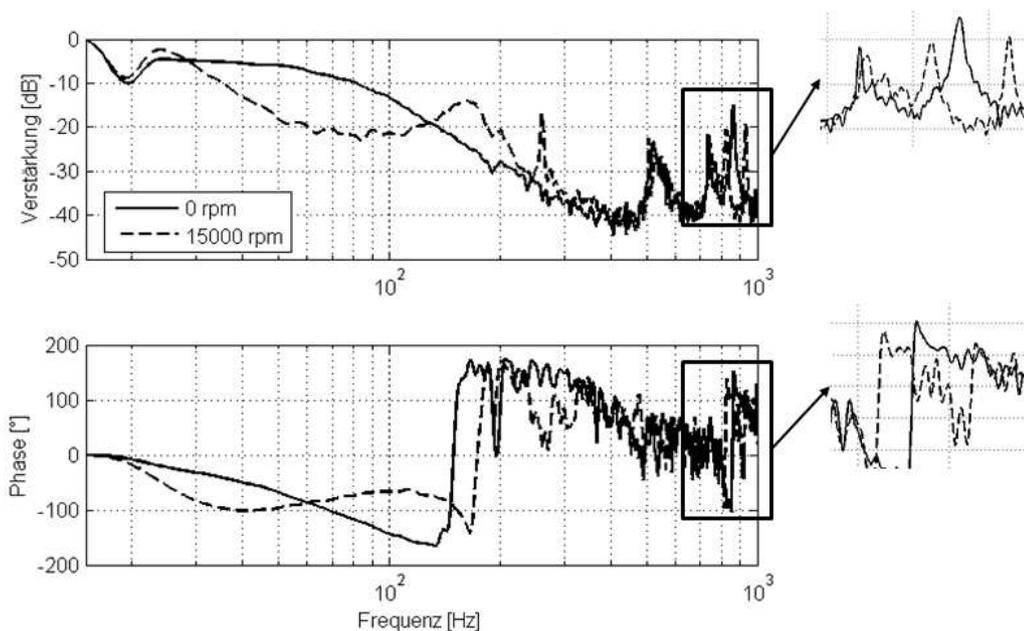


Abbildung 38: Compliance-Funktion für einen konischen Freiheitsgrad

Die Eigenfrequenzen der Moden treten im Phasengang der Compliance-Funktion immer bei einer Phasendrehung von -90° auf. Bei Stillstand ist zu sehen, dass das System nur eine konische Starrkörpermode bei ca. 60Hz besitzt. Bei Nenndrehzahl teilt sich diese Starrkörpermode in zwei Starrkörpermoden auf. Die Starrkörpermode mit der kleineren Frequenz liegt bei ca. 26Hz und rotiert gegen die Drehrichtung des Rotors. Die andere Starrkörpermode liegt bei ca. 140Hz und ist mit der Drehrichtung des Rotors äquivalent. Aus der Höhe der Resonanzüberhöhung kann auf eine kleiner Dämpfung als

beim Stillstand geschlossen werden. Bei noch höherer Drehzahl kann dieses Aufteilen der Starrkörpermoden aufgrund des gyroskopischen Effekts zu Stabilitätsproblemen führen. Der Grund für die Spitze bei 250Hz ist der Einfluss der Unwucht auf die Bewegung. Da im oberen Frequenzbereich des Bode-Diagramms aufgrund der Sensoren und der Messschaltung mehrere Spitzen zu sehen sind, ist es von Vorteil die Biegemoden im Phasengang zu suchen. Der Frequenzbereich in dem die Biegemoden zu sehen sind, ist vergrößert dargestellt. Die Biegemode bei Stillstand beträgt ca. 840Hz und teilt sich für Nenndrehzahl auf, in eine Biegemode bei ca. 810Hz, welche sich entgegen der Richtung des Rotors dreht, und Eine bei ca. 910Hz, welche sich in Drehrichtung bewegt. Es lässt sich zeigen, dass die Moden, bei denen die Eigenfrequenz mit der Drehzahl steigt, sich immer in Drehrichtung drehen. Für fallende Eigenfrequenzen ist der Gegenteil der Fall.

Abbildung 39 zeigt die Compliance-Funktion für einen parallelen Freiheitsgrad. Im Un-

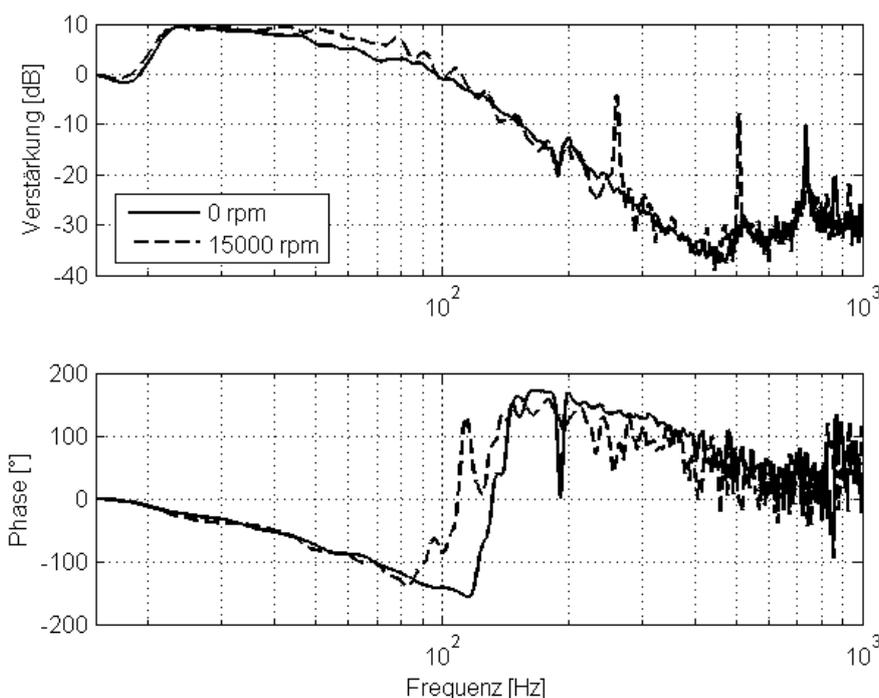


Abbildung 39: Compliance-Funktion für einen parallelen Freiheitsgrad

terschied zu der konischen Transferfunktion, gibt es beim parallelen Fall auch für das drehende System nur eine Starrkörpermode bei ca. 60Hz. Diese Tatsache ist ein Beweis für die Funktionstüchtigkeit der Transformation in das COG-Koordinatensystem. Im oberen Frequenzbereich kann aufgrund des Phasensprunges zwar eine Biegemode nachgewiesen werden. Die Resonanzüberhöhung ist im Betragsgang im Gegensatz zum konischen Fall kaum zu sehen. Diese Erkenntnis bestätigt was in dem Unterkapitel 6.3.1 erwähnt wurde, dass für einen allgemeinen Rotor die erste Biegemode nicht immer im

parallelm Pfad besser beobachtbar ist.

Abbildung 40 zeigt die Compliance-Funktion für den axialen Freiheitsgrad. Die Starr-

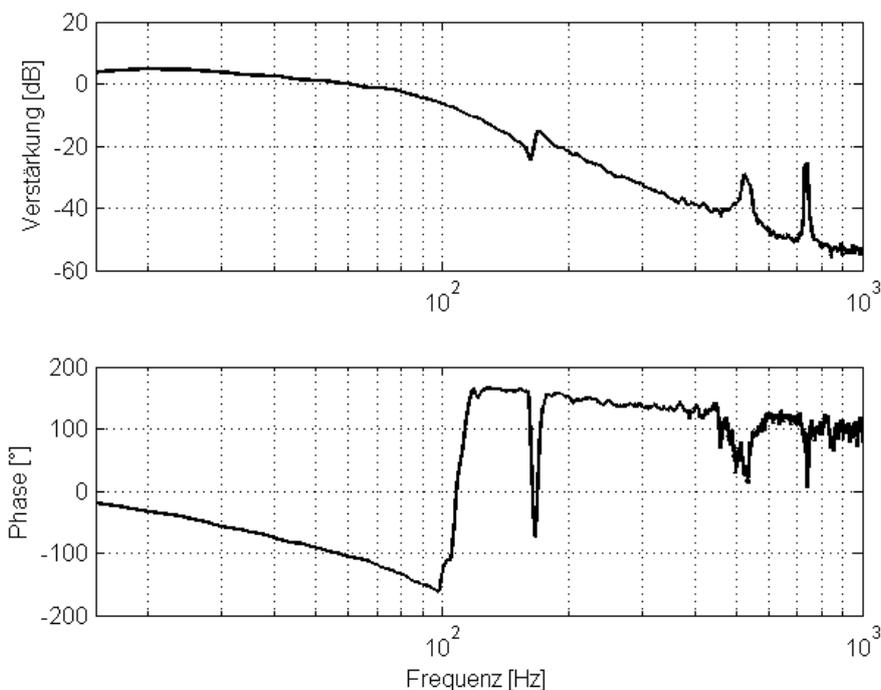


Abbildung 40: Compliance-Funktion für den axialen Freiheitsgrad

körpermode liegt in etwa bei 50Hz. Da die axiale Richtung unabhängig von der Drehzahl ist, wurde nur die Compliance-Funktion im Stillstand gemessen. Da keine Resonanzüberhöhung bei der Starrkörpermode nachgewiesen werden kann, ist das System in axialer Richtung ausreichend gedämpft.

7.3 Sensitivitätsfunktionen der Regelzweige

Die Parameter des Magnetlagersystems sind nie exakt bekannt und es kann aufgrund von Störeinflüssen das dynamische Verhalten des Systems beeinflusst werden. Um trotz all dieser Fälle, das System zu stabilisieren ist eine hohe Robustheit gefordert. Die Robustheit eines Systems kann mit den sogenannten Sensitivitätsfunktionen abgeschätzt werden, wobei das Maximum dieser Funktion den kleinsten Abstand zum Nyquistpunkt beschreibt. Laut der Norm ISO 14839-3 sollte dieses Maximum einen Wert kleiner 3 besitzen, um ein robustes System zu garantieren. Die Sensitivitätsfunktion ist definiert als:

$$T_S = \frac{I_{Soll}}{I_A} \quad (152)$$

Die Transferfunktionen wurden wie im vorigen Kapitel aufgezeichnet. Jedoch ist bei der Sensitivitätsfunktion nur der Betragsgang von Bedeutung, welcher in dieser Arbeit mit linearer Skalierung aufgetragen wird. Abbildung 41 zeigt die Sensitivitätsfunktion für einen konischen Freiheitsgrad.

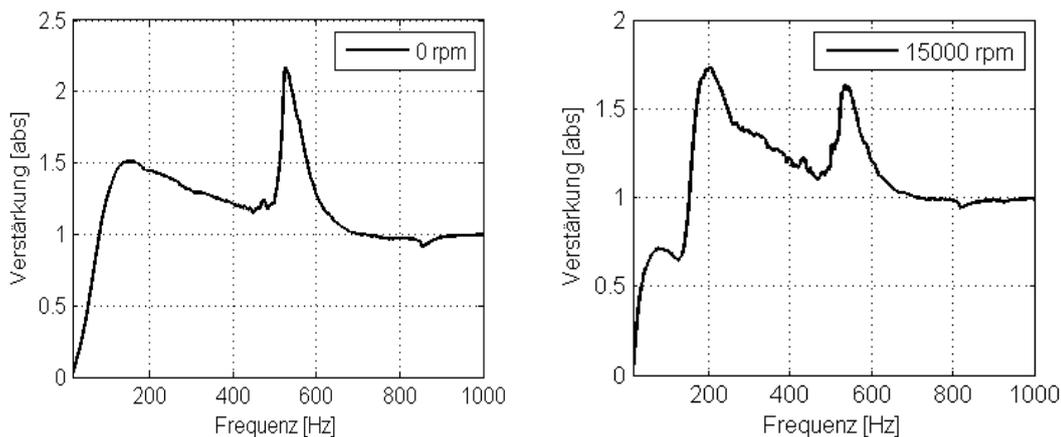


Abbildung 41: Sensitivitätsfunktionen für einen konischen Freiheitsgrad

Der größte Wert der Verstärkung ist für beide Betriebspunkte unter drei. Die Form der beiden Sensitivitätsfunktionen unterscheiden sich erheblich. Der Grund hierfür liegt wieder im gyroskopischen Effekt, welcher das Systemverhalten beeinflusst.

Abbildung 42 zeigt sie Sensitivitätsfunktionen des Translationsfreiheitsgrades.

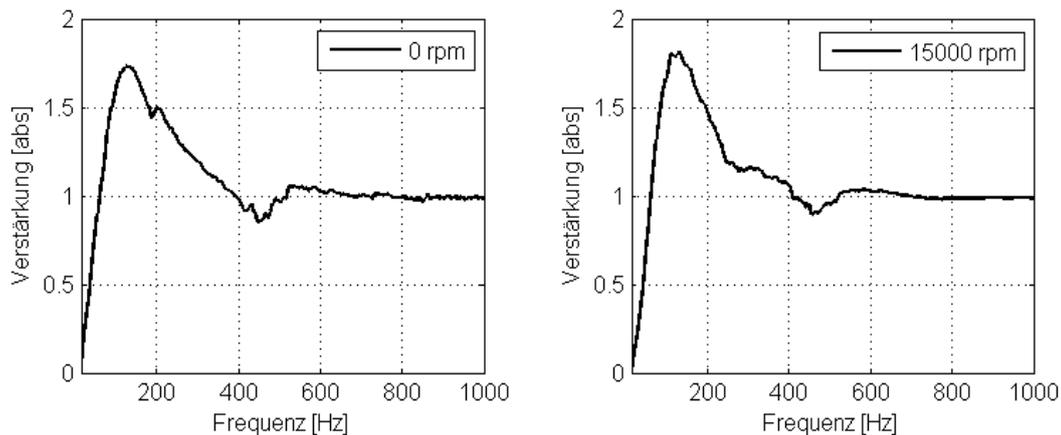


Abbildung 42: Sensitivitätsfunktionen für einen parallelen Freiheitsgrad

Im Gegensatz zum konischen Freiheitgrad, haben die Sensitivitätsfunktionen für den parallelen Fall für beide Drehzahlen ungefähr die selbe Form. Der Spitzenwert liegt auch für diesen Fall unter drei. Zusammenfassen lässt sich aus den abgebildeten Sensitivitätsfunktionen die Robustheit des Gesamtsystems beweisen.

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigte sich mit dem Entwurf, Implementierung und Validierung einer Regelstruktur für einen flexiblen unterkritisch laufendem Rotor, welcher mit einem aktiven Magnetlager stabilisiert wurde. Ziel war es für ein Magnetlagersystem mit einem hoch gyroskopischen Rotor für den Drehzahlbereich von 0-15.000U/min, eine Regelstruktur zu entwickeln, welche eine ausreichende Robustheit bereitstellt. Dafür wurden im ersten Schritt der Arbeit die nötigen mechanischen Grundlagen beschrieben, um ein tiefgreifenden Verständnis über die systemtheoretischen Grenzen hinaus zu erlangen. Diese Grundlagen beinhalten im Wesentlichen die Kinematik und Kinetik von starren Körpern und werden anschließend an die Kreiselbewegung angewendet. Im nächsten Kapitel wurde über die Dynamik eines starren Rotors, welcher mit flexiblen Lagern stabilisiert ist, diskutiert. Dieser Teil der Arbeit basierte auf den zuvor beschriebenen Grundlagen und wurde durch kleine Adaptierungen für das magnetgelagerte System verwendet. Die Modellierung des Magnetlagersystems wurde in ein mechanisches und ein elektrisches Teilsystem aufgespalten. Die Gleichungen für diese Systeme wurden getrennt voneinander beschrieben und hergeleitet und anschließend wieder zusammengeführt. Wobei bei diesem Teil der Arbeit ein starrer Rotor vorausgesetzt wurde. Nach erfolgreicher Modellierung wurde im nächsten Teil mit dem Reglerentwurf begonnen. Das erste Rückkoppelkonzept war eine dezentrale Regelstruktur, bei welcher die Verkopplungen vernachlässigt und die grundlegenden Einstellregeln beschrieben wurden. Aufbauend auf dieser Art der Rückführung wurde eine Struktur entwickelt welche die konischen und die parallelen Bewegungen des Systems entkoppelt. Da ein Regler der ausschließlich die Starrkörpermoden stabilisiert für praktische Systeme nicht ausreichend ist, wurde im nächsten Abschnitt über die Dynamik eines flexiblen Rotors diskutiert. Um die physikalischen Grundlagen zu beschreiben, wurde ein Laval-Rotor verwendet. Basierend auf diesem Wissen konnten die wichtigsten Zusammenhänge eines Rotors mit kontinuierlicher Masseverteilung beschrieben werden. Da es nicht immer möglich ist, die Gleichungen eines solchen Rotors geschlossen zu lösen, wurde auch noch über die Methode der Finiten Elemente diskutiert. Mit dem Wissen der vorhergehenden Kapiteln konnte nun mit der Erweiterung der Regelstruktur für einen elastischen Rotor begonnen werden. Der erste Schritt war hierbei die Analyse der elasto-mechanischen Eigenschaften. Wobei zu Beginn über das Verhalten des freien Rotors, welcher Aufschluß über die kritischen Systemzustände gibt, diskutiert wurde. Um die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen der Moden von der Regelstruktur zu analysieren, wurde noch eine "stiffnes variation"-Analyse durchgeführt. Durch die Identifikation dieser Parameter, konnte ein Regler entwickelt werden, welcher das Sys-

tem stabilisierte und eine ausreichende Robustheit aufwies. Die Positionsregelung besteht aus einer Kombination eines Tiefpassfilters zweiter Ordnung, einem PIDT1-Regler und einem Lead-Lag Filter. Um die Lager nicht durch die auftretenden Unwuchtkräfte zu belasten, wurde noch zusätzlich eine geeignete Unwucht-Kompensation implementiert. Da die gesamte Regelstruktur in einem DSP implementiert werden sollte, mussten die Regler noch mit einer geeigneten Methode digitalisiert werden. Im letzten Kapitel wurden die Simulationsergebnisse der vorhergehenden Kapiteln noch durch Messergebnisse verifiziert.

8.2 Ausblick

Der letzte Teil der Arbeit behandelt die Verbesserungsmöglichkeiten der vorhandenen Regelstruktur und der Simulationssoftware zur Auslegung und Analyse der Regelung des gesamten Magnetlagersystems. Verbesserungsmöglichkeiten wären:

- Behandlung des gyroskopischen Effektes: Um mit dem vorhanden Rotor höhere Drehzahlen zu erreichen, müssen Methoden entwickelt werden welche das Stabilitätsproblem aufgrund des gyroskopischen Effekts behandeln.
- Verbesserung der Unwuchtkompensation: Die Verwendung eines Notch-Filters hat den großen Nachteil, dass dieser erst nach den Starrkörpermoden eingeschaltet werden kann. Ein weiterer Nachteil ist, dass man mit einem Notch-Filter keine Biegemoden passieren kann. Um Geschwindigkeiten im Bereich der ersten Biegemode zu erreichen, ist es daher notwendig eine verbesserte Unwuchtkompensation zu entwickeln.
- Entwicklung einer Identifikationssoftware: Da die Entwicklung der Regelung in dieser Arbeit auf Simulationsergebnissen basierte, wäre für zukünftige Arbeiten eine Software von Vorteil, mit der sich die Parameter des Systems direkt durch Messungen identifizieren lassen.
- Optimierungsbasierte Methoden: Wenn die Systemgleichungen in ausreichender Genauigkeit vorhanden sind, kann für die Feinabstimmung der Regler-Koeffizienten in Zukunft auf Optimierungs-Verfahren zurückgegriffen werden.

Literatur

- [1] M. Hofer, Design and Sensorless Position Control of a Permanent Magnet Biased Radial Active Magnetic Bearing, Doktorarbeit 2013, TU Wien.
- [2] M. Hofer, E. Schmidt, and M. Schrödl, Design of a Three Phase Permanent Magnet Biased Radial Active Magnetic Bearing Regarding a Position Sensorless Control, IEEE, 2009.
- [3] M. Hutterer, M. Hofer, T. Nenning and M. Schrödl, LQG Control of an AMB System with an Special Method to consider the Gyroscopic Effect, ISMB14, 2014.
- [4] Fotiu P.: Theoretische Starkkörperkinetik WS 2011/2012, FH Wiener Neustadt, Wiener Neustadt 2010.
- [5] Fotiu P.: Mechanik 3 WS 2011/2012, FH Wiener Neustadt, Wiener Neustadt 2010.
- [6] Dankert J.: Technische Mechanik, Veiweg+Teubner, Wiesbaden 2011, ISBN 978-3-8348-1375-6.
- [7] Schweitzer G.: Magnetic Bearings, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2009, ISBN 978-3-642-00496-4.
- [8] Kugi A.: Vorlesungsskriptum Automatisierung WS 2012/2013, TU Wien.
- [9] Prechtl A.: Vorlesungen über Elektrodynamik, TU Wien 2010.
- [10] Lunze J.: Regelungstechnik 2, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008, ISBN 978-3-540-78462-3.
- [11] Schmied J Kosenkov A.: Practical Controller Design for Rotors on Magnetic Bearings by Means of an Efficient Simulation Tool, Berlin 2013.
- [12] Bleuler H.: Decentralized Control of Magnetic Rotor Bearing Systems, Dissertation 1984 ,ETH Zürich .
- [13] Schmidt M. R., Schitter G., Eijk J.: The Design of High Performance Mechatronics, Delft University Press Amsterdam 2011, ISBN 978-1-60750-825-0.
- [14] R. Gasch . R., Nordmann H., Pfützner.: Rotordynamik, Springer-Verlag Berlin 2002, ISBN 3-540-41240-9.
- [15] Fotiu P.: Finite Elemente SS 2011, FH Wiener Neustadt, Wiener Neustadt 2010.
- [16] R. Gasch R., Knothe K., Liebich R.: Strukturdynamik, Springer-Verlag Berlin 2012, ISBN 978-3-540-88976-2.

- [17] R. Herzog, P. Philipp, C.Gähler, R. Larsonneur, Unbalance Compensation Using Generalized Notch Filters in the Multivariable Feedback of Magnetic Bearings, IEEE Transactions on Control Systems Technology, September 1996.
- [18] Mechanical vibrations - Vibration of rotating machinery equipped with active magnetic bearings - part 3: Evaluation of stability margin, International Organization for Standardization ISO, 2006, ISO 14839-3

Abbildungsverzeichnis

1	5-DOF aktives Magnetlager	1
2	Drehung um die z-Achse	8
3	Koordinatentransformation [4]	9
4	Bewegungsmöglichkeiten des Kreisels [4]	10
5	Modellbildung Magnetlager [7]	12
6	Reduzierung in den Schwerpunkt	13
7	Veranschaulichung der Steifigkeitsmatrix	14
8	Elastische Simulation ohne Winkelgeschwindigkeit	16
9	Elastische Simulation mit Winkelgeschwindigkeit	17
10	Campbell-Diagramm vom starren Rotor	18
11	Typische Magnetlageranordnung eines radialen Magnetlagers [1]	20
12	Zustandsregler[10]	23
13	Darstellung des Rotors	27
14	Dezentrale Regelstruktur [7]	28
15	PD-Reglerentwurf einer dezentralen Regelung [13]	29
16	Bode-Diagramm mit P-Regler	30
17	Bode-Diagramm mit PD-Regler	31
18	Sukzessives Einstellen eines dezentralen PD-Reglers für ein Magnetlagersystem	32
19	Entkoppelte Regelung der Parallelen und konischen Moden [7]	35
20	Laval-Rotor [7]	38
21	Rotor mit kontinuierlicher Massenverteilung mit drei radialen Lagern [7]	42
22	Modellierung des Rotors	50
23	Campbell Diagramm des freien flexiblen Rotors	51
24	Stiffness variation des freien Rotors bei 15.000U/min	52
25	Struktur der Regelung	53
26	Stabilisierende Wirkung des Reglers	54
27	Form der ersten Beigemoden des freien Rotors bei Nenndrehzahl	55

28	Grundlegende Regelstruktur für konischen und parallelen Regler	56
29	Übertragungsfunktionen des konischen Reglers	57
30	Übertragungsfunktionen des parallelen Reglers	58
31	Campbell-Diagramm des geregelten Systems	59
32	Stabilität bei Nenndrehzahl	60
33	Grafische Interpretation der Tustintransformation [8]	62
34	Programmablauf zur Berechnung der Filter- und Regler-Parameter	62
35	Reduziertes Blockdiagramm der Regelungsstruktur	64
36	Verhalten des Reglers nach einem Kraftsprung	65
37	Modifiziertes Chirp-Signal	66
38	Compliance-Funktion für einen konischen Freiheitsgrad	67
39	Compliance-Funktion für einen parallelen Freiheitsgrad	68
40	Compliance-Funktion für den axialen Freiheitsgrad	69
41	Sensitivitätsfunktionen für einen konischen Freiheitsgrad	70
42	Sensitivitätsfunktionen für einen parallelen Freiheitsgrad	70

Tabellenverzeichnis

1	Daten des zu regelnden Systems	26
---	--	----

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.