

Diplomarbeit

# Modellierung, Simulation und Analyse von verschiedenen Rohrsonden-Typen zur Nutzung geothermischer Energie

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Karl PONWEISER

und

Dipl.-Ing.<sup>in</sup> Viktoria ILLYÉS

an der Technischen Universität Wien,  
am Institut für Energietechnik und Thermodynamik

von

David Huber, BSc - 01425892

Kempelengasse 2/25, AT-1100 Wien

20. Oktober 2020

# Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig angefertigt wurde. Sämtliche verwendeten Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet. Weiter erkläre ich, dass ich dieses Diplomarbeitsthema bisher weder im In- noch im Ausland in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt habe und dass diese Arbeit mit der vom Begutachter beurteilten Arbeit übereinstimmt.

Wien, Oktober 2020

---

David Huber

# Danksagung

Wie in Abschlussarbeiten üblich, möchte ich diese Zeilen nutzen, um Danke zu sagen. Nachfolgend werde ich bewusst auf alle akademischen Grade verzichten. Meiner Meinung ist es wichtig den Menschen zu danken und sie nicht an ihre akademischen Erfolge zu erinnern.

Als erstes möchte ich Dir danken Karl. Du hast bereits sehr früh mein Talent erkannt und mich stets gefordert, aber nur sehr selten überfordert. In den letzten zwei Jahren am IET habe ich unheimlich viel von Dir lernen können. Unsere fachlichen wie auch privaten Diskussionen werden mir lange in Erinnerung bleiben. Hoffentlich habe ich noch einige Jahre das Vergnügen mit Dir zusammen zu arbeiten. An dieser Stelle möchte ich mich auch bei all meinen Arbeitskollegen bedanken. Danke Viktoria, Verena, Julian, Dominik, Christoph, Paul, David und Michi für all die interessanten Diskussionen auf fachlicher und privater Ebene. Unsere Gespräche, sowie all die Abende mit viel zu viel Erdbeer Daiquiris werde ich nie vergessen.

Weiter möchte ich die Gelegenheit nutzen, um mich bei meinen Eltern Birgit und Josef zu bedanken. Ihr seid immer mein Fels in der Brandung gewesen, habt mich motiviert und nie aufgeben lassen. Dank Euch bin ich zu dem geworden, der ich heute bin. Danke, dass Ihr die besten Eltern der Welt seid und mir all das überhaupt ermöglicht habt.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei der wichtigsten Person in meinem Leben bedanken. Danke Stefanie, dass Du mein Leben überhaupt lebenswert machst und immer für mich da bist. Deine grenzenlose Liebe zu mir hat mich all die Jahre immer motiviert nach mehr zu streben.

*Du bist die Liebe meines Lebens. Ich werde Dich für immer lieben.*

# Abstract

The constantly increasing worldwide energy demand requires new and innovative solutions in terms of energy technology. Especially renewable energy resources such as geothermal power are gaining in popularity. Geothermal probes can be combined to probe fields and used as sensitive long-term thermal energy storage. A high energy saving potential exists, since the difference between heating and cooling demand of buildings or several building complexes can be balanced seasonally. The design of geothermal energy storage systems is strongly influenced by the present conditions such as the thermophysical parameters of the underground as well as the distance and size of the probes. The design process can be effectively supported by computer-aided models. A variety of methods already exist to model the thermal behaviour of both, probes and the surrounding underground. Some of these methods are very CPU intensive or do not provide all relevant parameters as results.

In the context of this work multidimensional fully transient resistance-capacity-models (RCM) for CX, 1U and 2U probes are investigated and implemented in *MATLAB*. The RCMs allow to determine all essential temperatures in the underground, filling material and in the pipes within short computation times. Furthermore, the systematic deviation for spatial and temporal discretization is determined and an optimum between the number of discretized elements and relative deviation is defined. In further analyses, typical parameters such as transmission power, depth of the probe and pressure losses are examined and compared under identical boundary conditions for three different probe types.

# Kurzfassung

Der stetig steigende weltweite Energiebedarf fordert neue und innovative Lösungen im Bereich der Energietechnik. Vor allem regenerative Energiequellen, wie zum Beispiel Erdwärme, erfreuen sich immer größerer Beliebtheit. Erdwärmesonden können im Zusammenschluss zu Sondenfeldern als sensibler thermischer Speicher nachhaltig eingesetzt werden. Es besteht ein hohes Energiesparpotential, da der Unterschied zwischen Heiz- und Kühllast von Gebäuden oder mehreren Gebäudekomplexen saisonal ausgeglichen werden kann. Die Dimensionierung von Erdwärmespeichern wird stark von den vorliegenden Bedingungen, wie den thermophysikalischen Parametern des Untergrunds sowie Abstand und Größe der verwendeten Rohrsonden geprägt. Durch computergestützte Modelle kann der Planungsprozess effektiv unterstützt werden. Es existieren bereits eine Vielzahl an Methoden, um das thermische Verhalten von Rohrsonden und das des umgebenden Untergrunds abzubilden. Einige dieser Methoden sind sehr rechenintensiv oder liefern nicht alle relevanten Parameter als Ergebnis.

Im Rahmen dieser Arbeit werden mehrdimensionale, vollständig transiente Widerstands-Kapazitäts-Modelle (WKM) für CX-, 1U- und 2U-Rohrsonden untersucht und in *MATLAB* implementiert. Die WKM erlauben es, bei kurzen Rechenzeiten alle wesentlichen Temperaturen im Untergrund, Füllmaterial und in den Rohren zu ermitteln. Weiters wird die systematische Abweichung für die räumliche und zeitliche Diskretisierung bestimmt und ein Optimum zwischen der Anzahl der diskretisierten Elementen und relativer Abweichung definiert. In weiteren Analysen werden typische Parameter, wie Übertragungsleistung, Sondentiefe und Druckverlust, unter identen Randbedingungen für drei unterschiedliche Sondentypen untersucht und gegenübergestellt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklatur</b>	<b>viii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Zielsetzung . . . . .	4
<b>2 Zweidimensionale Widerstands-Kapazitäts-Modelle</b>	<b>6</b>
2.1 Modellgeometrien . . . . .	9
2.1.1 CX-Rohrsonde . . . . .	10
2.1.2 1U-Rohrsonde . . . . .	13
2.1.3 2U-Rohrsonde . . . . .	15
2.2 Thermischer Widerstand des Füllmaterials . . . . .	18
2.3 Interner thermischer Widerstand des Bohrlochs . . . . .	22
2.4 Thermischer Widerstand des Bohrlochs . . . . .	24
2.5 Modellgültigkeit . . . . .	27
<b>3 Dreidimensionale Modellierung</b>	<b>28</b>
3.1 Untergrund . . . . .	31
3.2 CX-Rohrsonde . . . . .	33
3.3 1U-Rohrsonde . . . . .	37
3.4 2U-Rohrsonde . . . . .	41
3.5 Gleichungssysteme . . . . .	47
3.5.1 Kein konduktiver Wärmetransport unterhalb der Sonde . . . . .	48
3.5.2 Konduktiver Wärmetransport unterhalb der Sonde . . . . .	49
3.6 Randbedingungen . . . . .	52
3.7 Zellgröße . . . . .	56
<b>4 Numerische Analyse</b>	<b>59</b>
4.1 Thermische Widerstände . . . . .	59
4.1.1 Thermischer Widerstand des Füllmaterials . . . . .	59
4.1.2 Thermischer Widerstand des Bohrlochs . . . . .	61

4.2	Diskretisierung . . . . .	63
4.2.1	Zeitschrittweite . . . . .	65
4.2.2	Axiale und radiale Diskretisierung der Sonde . . . . .	68
4.2.3	Systematische Abweichung . . . . .	70
4.3	Druckverlust . . . . .	70
4.4	Temperaturverlauf & Übertragungsleistung . . . . .	72
4.5	Konduktiver Wärmetransport unterhalb der Sonde . . . . .	79
4.5.1	Kurzfristiger Einfluss . . . . .	79
4.5.2	Langfristiger Einfluss . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Diskussion &amp; Ausblick</b>	<b>84</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>89</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>90</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Nusselt-Korrelationen</b>	<b>96</b>
A.1	CX-Rohrsonde . . . . .	97
A.2	1U-Rohrsonde . . . . .	100
A.3	2U-Rohrsonde . . . . .	101
<b>B</b>	<b>Koeffizienten der Gleichungssysteme</b>	<b>102</b>
B.1	CX-Rohrsonde . . . . .	102
B.2	1U-Rohrsonde . . . . .	106
B.3	2U-Rohrsonde . . . . .	109
B.4	Untergrund unter der Sonde . . . . .	115

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Nomenklatur

## Lateinische Symbole

Symbol	Einheit	Beschreibung
$c$	$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$	spezifische Wärmekapazität
$c_p$	$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$	isobare spezifische Wärmekapazität
$C$	$\text{Jm}^{-1}\text{K}^{-1}$	längenspezifische thermische Kapazität
$d$	m	Durchmesser
$E$	Wh	Energie
$f$	-	Streckungsfaktor
$f_{rel}$	%	relative Abweichung
$h$	$\text{Jkg}^{-1}$	spezifische Enthalpie
$I$	A	elektrischer Strom
$k$	-	Parameter zur Charakterisierung der Beschaltung bzw. Konfiguration der U-Rohre
$K$	m	absolute Rauigkeit
$L$	m	(charakteristische) Länge, Länge der Sondenrohre
$L_u$	m	Höhe des Untergrunds unterhalb der Sonde
$m$	-	Anzahl der vertikalen Schichten
$\dot{m}$	$\text{kgs}^{-1}$	Massenstrom
$n$	-	Anzahl der horizontalen Schichten des Untergrunds
$Nu$	-	Nusselt-Zahl
$o$	-	Anzahl der vertikalen Schichten unter der Sonde
$Pr$	-	Prandtl-Zahl
$\dot{q}$	$\text{Wm}^{-1}$	längenspezifischer Wärmestrom
$\dot{q}_u$	$\text{Wm}^{-1}$	spezifische Übertragungsleistung

wird fortgesetzt

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\dot{Q}$	W	Wärmestrom
$\dot{Q}_u$	W	Übertragungsleistung
$r$	m	Radius
$R$	mKW <sup>-1</sup>	längenspezifischer thermischer Widerstand
$Re$	-	Reynolds-Zahl
$R_{el}$	Ω	elektrischer Widerstand
$s$	m	Schenkelabstand eines U-Rohres
$S$	Wm <sup>-3</sup>	Quelle, Senke
$t$	s	Zeit
$T$	K	thermodynamische Temperatur
$u$	ms <sup>-1</sup>	Geschwindigkeit
$u$	Jkg <sup>-1</sup>	spezifische innere Energie
$U$	V	elektrische Spannung
$w$	ms <sup>-1</sup>	Strömungsgeschwindigkeit
$x$	m	Koordinate
$y$	m	Koordinate
$z$	m	Koordinate

## Griechische Symbole

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\alpha$	WK <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup>	Wärmeübergangskoeffizient
$\gamma$	-	Intermittenzfaktor
$\Gamma_\Phi$	-	Diffusionskoeffizient
$\Delta e$	m	Zelldicke
$\Delta p$	bar	Druckverlust
$\Delta t$	s	Zeitschrittweite
$\zeta$	-	Widerstandsbeiwert
$\mu$	kgm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup>	dynamische Viskosität
$\nu$	m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	kinematische Viskosität
$\lambda$	WK <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>	Wärmeleitfähigkeit
$\xi$	-	Druckverlustbeiwert
$\rho$	kgm <sup>-3</sup>	Dichte
$\phi$	-	beliebige spezifische Zustandsgröße

## Indizes tiefgestellt

Symbol	Beschreibung
1	Innenrohr der CX-Rohrsonde
2	Ringspalt der CX-Rohrsonde
a	Außen(-durchmesser), axial
ab	abwärts (strömend)
auf	aufwärts (strömend)
b	Bohrloch(-wand)
e	Osten (eng.: east)
f	Fluid
ff	Fluid zu Fluid
fg	Fluid zu Füllmaterial
g	Füllmaterial (eng.: grout)
gb	Füllmaterial zu Bohrlochwand
gg	Füllmaterial zu Füllmaterial
h	hydraulischer (Durchmesser)
i	Laufindex, Innen
in	Eintritt
j	Innen(-durchmesser), Laufindex
krit	kritisch
kum	kumuliert
out	Austritt
p	Rohr (eng.: pipe)
r	radial
s	Untergrund (eng.: soil)
w	Westen (eng.: west)

## Indizes hochgestellt

Symbol	Beschreibung
1U	Einfach-U-Rohrsonde
2U	Doppel-U-Rohrsonde
bg	benachbarte, gekreuzte U-Rohre
wird fortgesetzt	

Symbol	Beschreibung
bn	benachbarte, nicht gekreuzte U-Rohre
CX	Koaxial-Rohrsonde
p	parallel
s	seriell

---

## Abkürzungen

Symbol	Beschreibung
EED	Earth Energy Designer
RCM	Resistance-Capacity-Model
TRT	Thermal Response Test
TRY	Testreferenzjahr (eng.: Test Reference Year)
UHF	einheitlicher Wärmefluss entlang des Bohrlochs (englisch: Uniform Heat Flux)
UWT	einheitliche Bohrloch Wandtemperatur (eng.: Uniform Wall Temperature)
WKM	Widerstands-Kapazitäts-Modell

---

# 1 Einleitung

Mit der stetig steigenden Weltbevölkerung steigt auch der weltweite Energiebedarf scheinbar unaufhaltsam an. Von 1995 bis 2018 hat sich der weltweite Energiebedarf von 361 EJ<sup>1</sup> auf 576 EJ um ca. 60 % erhöht. Prognosen deuten an, dass sich der weltweite Energiebedarf von 1995 mit 725 EJ bis 2050 mehr als verdoppeln wird [1]. Im Jahr 2019 ist der weltweite Energiebedarf noch zu mehr als 84 % durch fossile Energieträger wie Kohle, Öl und Gas sowie Kernkraft gedeckt worden [2]. Der Druck zum Ausstieg aus fossilen Energieträgern wird mit fortschreitendem Klimawandel von Jahr zu Jahr stärker. Mit der Endlichkeit von fossilen Energieträgern öffnen sich neue Türen für regenerative Energiequellen, wie Geothermie, Photovoltaik oder Wasserkraft. Im Gegensatz zu Photovoltaik oder Windkraft sind geothermische Ressourcen nahezu unabhängig von Witterung, Tageszeit oder geografischer Lage nutzbar [3].

Die thermische Nutzung des Untergrunds als Energiespeicher, Wärmequelle oder Wärmesenke bietet sich aufgrund des hohen nutzbaren Volumens und dem niedrigen Temperaturniveau an. Grundsätzlich ist in oberflächennahe und tiefe Geothermie zu unterscheiden. Tiefe geothermische Anlagen reichen bis in eine Tiefe von ca. 5000 m. Durch die hohen Temperaturen in dieser Tiefe, kann zum Beispiel Wasser als Wärmeträgermedium eingesetzt und direkt verdampft werden. Der erzeugte Dampf kann zum Beispiel in einer Dampfturbine zur Stromproduktion oder für Heizzwecke eingesetzt werden. Bekannte Vertreter sind das Hot-Dry-Rock Verfahren und die hydrothermale Doublette. Beide Verfahren arbeiten mit einem offenen Arbeitsmittelkreis. Das Wärmeträgermedium wird durch räumlich getrennte Injektions- und Entnahmebohrungen gefördert. Vereinzelt gibt es auch geschlossene tiefe geothermische Systeme wie CX-Rohrsonden.

Oberflächennahe Nutzungssysteme können die geothermische Energie nicht direkt nutzen und sind meistens auf die Kopplung mit Wärmepumpen angewiesen. Diese Systeme werden

---

<sup>1</sup>Der Einheitenvorsatz E steht für Exa und entspricht einer Trillion. Ein EJ entspricht also  $10^{18}$  J = 1 000 000 000 000 000 J.

bis in eine Tiefe von 400 m installiert. Mit der Ausnahme von Zweibrunnen-Systemen sind die meisten oberflächennahen Systeme geschlossene Kreisläufe [3]. In dieser Arbeit werden nur geschlossene oberflächennahe Nutzungssysteme untersucht. Einzelne Erdwärmesonden können die geforderte Übertragungsleistung meist nicht liefern. Durch den Zusammenschluss von mehreren Erdwärmesonden kann die Übertragungsleistung erhöht werden. Der Untergrund wird durch eine Vielzahl von Erdwärmesonden gezielt abgekühlt oder erwärmt. Dadurch ist es möglich, verhältnismäßig kostengünstig hohe Speicherkapazitäten zu erschließen. Die einzelnen Erdwärmesonden befinden sich in einem Abstand von 2 bis 5 m. Derartige Speicher werden vorwiegend als Langzeitspeicher zur Speicherung von thermischer Energie über mehrere Monate hinweg eingesetzt [4]. In [5] wird beispielsweise ein solcher Speicher angedacht, um eine Vielzahl von Verbrauchern im Zusammenschluss durch ein Niedertemperatur-Verteilnetz effizient mit thermischer Energie zu versorgen. Ein ähnliches Projekt wurde in [6] untersucht.

Zur Dimensionierung der Erdwärmesonden bzw. Erdwärmespeicher wird, abgesehen von Erfahrungswerten, auf analytische oder numerische Methoden gesetzt. Die transienten Wärme- und Stofftransportvorgänge in und um Erdwärmesonden können mit einer Vielzahl von Simulationsprogrammen untersucht werden. Dreidimensionale numerische Modelle auf Basis von Finiten-Volumen oder Finiten-Elementen Programmen sind zum Beispiel in der Lage, nahezu jede beliebige Bohrlochgeometrie zu erfassen. Die Modelle umfassen oft stark unterschiedliche Elementgrößen. Um den Bohrlochquerschnitt hinreichend aufzulösen, ist eine sehr hohe Anzahl an kleinen Elementen erforderlich. Wohingegen der Untergrund mit nur sehr wenigen und um einige Größenordnungen größere Elemente aufgelöst werden kann. Vollständig aufgelöste dreidimensionale numerische Modelle verursachen einen erheblichen Aufwand bei der Modellerstellung. Ein weiterer Nachteil solcher Modelle sind die langen Rechenzeiten. Selbst moderne Computer benötigen einige Stunden bis hin zu mehreren Tagen, um einen gewöhnlichen Thermal Response Test (TRT<sup>2</sup>) nachzurechnen. Simulationen über mehrere Jahre, wie es energetische Betrachtungen des Langzeitverhaltens erfordern, sind problematisch in der Umsetzung und können inakzeptabel lange Rechenzeiten verursachen [4]. Ein anderer Ansatz sieht den Einsatz von *g-functions* vor. Dieses Konzept wurde erstmals 1987 von Eskilson in [9] vorgestellt. Dabei wird ein dimensionsloser Umrechnungsfaktor<sup>3</sup>, welcher die Bohrlochwandtemperatur mit dem entnommenen oder eingespeisten Wärmestrom des Untergrunds über dessen Wärmeleitfähigkeit in Verbindung setzt, eingeführt [10]. Im Simu-

---

<sup>2</sup>Test zur Bestimmung von thermodynamischen Untergrundparametern wie z.B. Wärmeleitfähigkeit des Untergrunds, Wärmeübergangswiderstand des Bohrlochs und volumetrische Wärmekapazität. Der herkömmliche TRT dauert oft mehrere Tage an und liefert nur Durchschnittswerte für das Bohrloch. Eine Verbesserung stellt der Enhanced TRT (eTRT) dar. Dabei wird die Temperatur tiefenaufgelöst gemessen. Weitere Informationen zu TRT sind in [7] und [8] zu finden.

<sup>3</sup>Im englischen spricht man vom sogenannten *Temperature Response Factor*.

lationsprogramm *Earth Energy Designer (EED)* ist dieses Verfahren umgesetzt. Ein großer Vorteil ergibt sich durch die extrem kurzen Rechenzeiten. Die Austrittstemperatur des Fluids aus dem Sondenfeld kann stündlich aufgelöst für einen Zeitraum von 100 Jahren in wenigen Sekunden berechnet werden [11]. Problematisch ist allerdings, dass die *g-functions* immer nur eine spezifische Konfiguration von Rohrsonden repräsentieren. Ändert man zum Beispiel geometrische Faktoren, müssen jeweils andere *g-functions* eingesetzt werden.

Die von Bauer in [12] entwickelten mehrdimensionalen Widerstands-Kapazitäts-Modelle bilden die Grundlage der vorliegenden Arbeit. Diese bilden einen Kompromiss zwischen vollständig dreidimensionaler Diskretisierung und vereinfachter Betrachtung mittels *g-functions*. In Abbildung 1.1 sind schematisch die Querschnittsflächen der von Bauer untersuchten CX-, 1U- und 2U-Rohrsonde dargestellt. Der äußere Kreis stellt jeweils das Bohrloch dar. Üblicherweise werden die Rohrsonden senkrecht zur Erdoberfläche in den Untergrund angeordnet. Nach dem Setzen des Bohrlochs werden die Sondenrohre im Bohrloch versenkt und mit thermisch optimiertem Füllmaterial vergossen. Ein späteres Entfernen der Rohrsonden ist in den meisten Fällen nicht möglich. Das Füllmaterial hat die Aufgabe, den Kontakt zwischen den Sondenrohren und dem umgebenden Untergrund herzustellen. Die grauen Bereiche in Abbildung 1.1 sollen die Rohrwände darstellen. Die gängigen Rohrsonden bestehen in der Regel aus Kunststoffen, wie Polybutylen (PB), Polyethylen (PE) oder Polypropylen (PP) [4]. CX-Rohrsonden werden unter anderem auch aus Stahl oder Verbundwerkstoffen hergestellt.

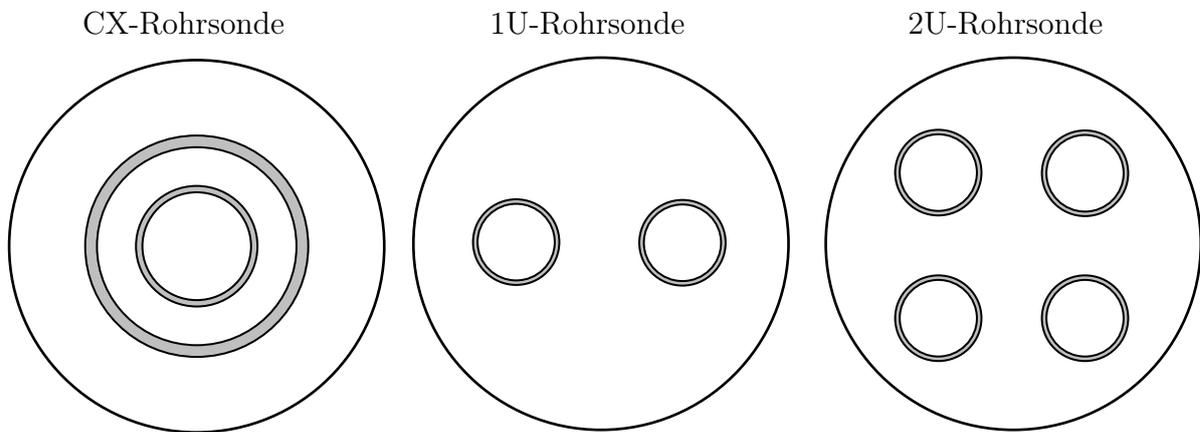


Abbildung 1.1: Horizontaler Querschnitt durch die drei Sondentypen. Links: CX-Rohrsonde. Mitte: 1U-Rohrsonde. Rechts: 2U-Rohrsonde

## 1.1 Zielsetzung

Die im Rahmen dieser Arbeit zu erreichenden Ziele lassen sich in folgende drei Bereiche gliedern:

### 1. Modellbildung

Im Rahmen dieser Arbeit werden zweidimensionale bzw. dreidimensionale Modelle der gängigen Rohrsonden-Typen und der umgebende Untergrund untersucht. Die in dieser Arbeit verwendeten WKM wurden von Bauer in [4] vorgestellt. Bauer hat den Untergrund zweidimensional und die unterschiedlichen Sonden im Inneren des Bohrlochs dreidimensional modelliert. Die Temperatursausbreitung im Untergrund ist demnach rotationssymmetrisch zu betrachten. Durch die Kombination von unterschiedlichen Modelldimensionen gelingt es, eine hohe Ergebnisgüte bei gleichzeitig niedrigen Rechenzeiten zu realisieren. Folgende Rohrsonden-Typen werden untersucht:

- CX-Rohrsonde
- 1U-Rohrsonde
- 2U-Rohrsonde

In Kapitel 2 werden unterschiedliche Methoden zur Bestimmung der thermischen Widerstände anhand von empirischen Ansätzen oder der *Multipole Methode* untersucht und gegenübergestellt. In Kapitel 3 werden die zweidimensionalen WKM zu dreidimensionalen WKM verknüpft und die notwendigen Transportgleichungen für ein vollständig transientes und ein semi-transientes Modell aufgestellt und dokumentiert. Im Rahmen dieser Arbeit werden verschiedene Methoden zur Berechnung der thermischen Widerstände, sowie das vollständig transiente Modell in *MATLAB* umgesetzt. Am Anfang der Kapitel 2 und 3 befindet sich eine theoretische Einführung in die Thematik. In Kapitel 3.6 sind zudem unterschiedliche laterale Randbedingungen definiert worden. Die Temperatur der lateralen Randschicht kann konstant gesetzt oder mit Hilfe des geothermischen Temperaturgradienten, mit und ohne Berücksichtigung von Messdaten, aus einem Testreferenzjahr-Datensatz berücksichtigt werden.

### 2. Programmieren der Modelle in *MATLAB*

Kern dieser Arbeit ist die Programmierung der verschiedenen Modelle der Rohrsonden-Typen in *MATLAB* (Version R2019b). Weiters wurden alle vorgestellten Methoden zur

Bestimmung der thermischen Widerstände und verschiedene laterale Randbedingungen implementiert. Die Transportgleichungen werden implizit in Form von Vektoren und Matrizen angeschrieben. Durch die implizite Formulierung können die gesuchten Größen für den nächsten Zeitschritt immer simultan berechnet werden. Des Weiteren bietet dieses Verfahren den Vorteil, unabhängig von der Zeitschrittweite stabile Lösungen<sup>4</sup> zu liefern. Der Quellcode kann bei Bedarf am Institut für Energietechnik und Thermodynamik der TU Wien angefragt werden.

### 3. Numerische Analyse

Im Rahmen der numerischen Analysen in Kapitel 4 werden ausgewählte Gesichtspunkte der erstellten Modelle näher betrachtet. In den Kapiteln 4.1.1 und 4.1.2 werden die unterschiedlichen Methoden zur Bestimmung der thermischen Widerstände in Abhängigkeit des Volumenstroms und der Bohrlochtiefe verglichen. Des Weiteren werden in Kapitel 4.2 durch Variation der axialen, radialen und zeitlichen Diskretisierung die systematischen Abweichungen aufgezeigt und diskutiert. In weiterer Folge wird eine vom Sondentyp abhängige optimale zeitliche und räumliche Diskretisierung festgelegt. In Kapitel 4.3 und 4.4 wird der Druckverlust in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit des Fluids in den Rohren und der Sondentiefe untersucht. In Kapitel 4.4 werden Temperaturverläufe und Übertragungsleistungen der unterschiedlichen Sonden analysiert.

---

<sup>4</sup>Eine stabile numerische Lösung muss nicht zwingendermaßen physikalisch sinnvoll sein.

## 2 Zweidimensionale Widerstands-Kapazitäts-Modelle

Bereits 1988 wurde von Eskilson und Claesson in [13] ein vereinfachter stationärer Ansatz zur Beschreibung des horizontalen Wärmetransports in Bohrlöchern vorgestellt. Mit dem sogenannten  $\Delta$ -Modell lässt sich der auf Konvektion und Konduktion beruhende horizontale Wärmetransport durch eine Dreiecksschaltung von thermischen Widerständen beschreiben.

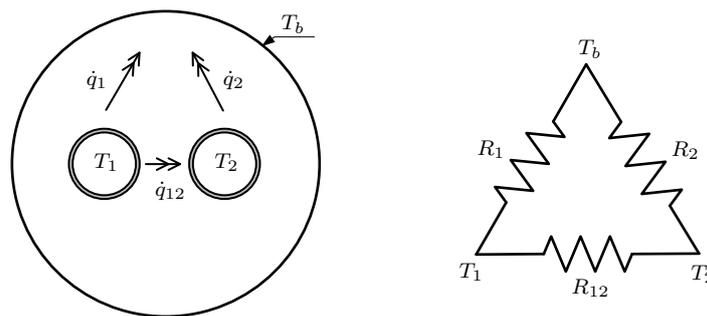


Abbildung 2.1: Horizontaler Querschnitt (links) und das  $\Delta$ -Modell mit thermischen Widerständen (rechts) einer 1U-Rohrsonde, nach [12].

Wie in Abbildung 2.1 ersichtlich, werden die spezifischen Wärmeströme pro Längeneinheit  $\dot{q}_1$  und  $\dot{q}_2$  von den Rohren zur Bohrwand durch die thermischen Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  beeinflusst. Der spezifische Kurzschlusswärmestrom pro Längeneinheit  $\dot{q}_{12}$  zwischen auf- und absteigendem Fluid im U-Rohr wird durch den thermischen Widerstand  $R_{12}$  bestimmt. Die Wandtemperatur des Bohrlochs  $T_b$  wird dabei über den gesamten Umfang als konstant angenommen. Mit  $T_1$  und  $T_2$  wird die mittlere Fluidtemperatur im betrachteten Querschnitt bezeichnet. Das  $\Delta$ -Modell basiert auf den folgenden Zusammenhängen zwischen den spezifischen Wärmeströmen  $\dot{q}_1$ ,  $\dot{q}_2$  und den Temperaturen  $T_1$ ,  $T_2$  sowie  $T_b$ :

$$\dot{q}_1 = \frac{T_1 - T_b}{R_1} + \frac{T_1 - T_2}{R_{12}}, \quad (2.1)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{T_2 - T_b}{R_2} + \frac{T_2 - T_1}{R_{12}}. \quad (2.2)$$

Setzt man die beiden mittleren Fluidtemperaturen gleich, ergibt sich die lokale mittlere Fluidtemperatur  $T_f = T_1 = T_2$ . Dadurch wird der thermische Kurzschluss zwischen den Rohren ausgeschaltet und  $R_{12} = 0$ . Kombiniert man die zwei parallelen thermischen Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  zu einem Ersatzwiderstand, kann der zwischen Fluid und Bohrlochwand liegende Bohrlochwiderstand  $R_b$  definiert werden:

$$R_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.3)$$

Der thermische Widerstand  $R_b$  kann als Verhältnis der Temperaturdifferenz zwischen Wärmeträgermedium und Bohrlochwand zu spezifischer Wärmeübertragungsrate pro Längeneinheit definiert werden:

$$R_b = \frac{T_f - T_b}{\dot{q}_b}. \quad (2.4)$$

Für die spezifische Wärmeübertragungsrate zwischen der Bohrlochwand und den U-Rohren gilt  $\dot{q}_b = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$ . Wenn kein Wärmetransport zwischen Bohrlochwand und U-Rohren stattfindet gilt  $\dot{q}_1 = -\dot{q}_2$ . Unter dieser Voraussetzung ergibt sich der thermische Widerstand  $R_a$  zwischen aufwärts und abwärts strömenden Fluid in den Schenkeln der U-Rohre nach Gleichung (2.5), zu

$$R_a = \frac{R_{12} (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_{12}}. \quad (2.5)$$

Der thermische Widerstand  $R_{12}$  wird auch als direkter Kopplungswiderstand bezeichnet und ist keine physikalisch messbare Größe [14]. Mit Hilfe der *Multipole Method* können die thermischen Widerstände des  $\Delta$ -Modells mit hoher Genauigkeit bestimmt werden [15]. Bemerkenswert ist, dass Modelle, welche von dieser Schaltung abweichen, trotzdem die selben Werte für  $R_a$  und  $R_b$  liefern, siehe Kapitel 1.2.1 in [4].

Der Wärmeaustausch zwischen dem Fluid in den U-Rohren und dem umgebenden Untergrund variiert mit der Zeit. Dem jahreszeitlichen Verlauf überlagern sich kurzfristige Schwankungen. Beispielsweise bewirkt die Einspeicherung von thermischer Energie aus Solarkollektoren schnelle Änderungen der Wärmeeinbringung während des Tages. Der thermische Einfluss zwischen benachbarten Erdwärmesonden aufgrund der überlagerten Schwankungen ist auf dieser Zeitskala vernachlässigbar gering. Grundannahme ist, dass die kurzfristigen Schwankungen der Wärmeeinbringung durch eine Folge von stückweise konstanten Werten der Wärmeeinbringung dargestellt werden können. Das Problem eines Stufenwechsels der Wärmeeinbringung kann mit Hilfe von Laplace-Transformationen gelöst werden. Die Lösung beinhaltet oszillierende Bessel Funktion 1. und 2. Art welche nur schwierig und zeitaufwendig

zu ermitteln sind. Hellström verwendet daher in [16] eine Approximation mit Hilfe der Kelvin'schen Linienquellentheorie. Die Temperatur des Untergrunds  $T = T(r, t)$  ist eine Funktion des radialen Abstands zur Linienquelle  $r$  und der Zeit  $t$ . Für einen sprunghaften Anstieg der Wärmeeinbringung auf  $q_b$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  kann die Temperatur des Untergrunds  $T$  mit Gleichung (2.6) folgendermaßen bestimmt werden:

$$T(r, t) = \frac{\dot{q}_b}{4\pi\lambda} \int_{r^2/4at}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \frac{\dot{q}_b}{4\pi\lambda} Ei(r^2/4at). \quad (2.6)$$

Wobei  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit und  $a$  die Temperaturleitfähigkeit des Untergrunds sind. Das halbunendliche Integral aus Gleichung (2.6) kann mit der Integraleponentialfunktion  $Ei(x)$ , welche auch als Reihendarstellung<sup>1</sup> verfügbar ist, gelöst werden. Von besonderem Interesse ist die Temperatur an der Bohrlochwand. Die exakte Lösung führt zu einer prompten Erhöhung der Temperatur der Bohrlochwand, während das Ansprechen der Linienquelle am Außenradius des Bohrlochs bei  $r = \frac{d_b}{2}$  verzögert stattfindet. Der relative Fehler der Linienquellenlösung aus Gleichung (2.6) an der Bohrlochwand ist im Vergleich zur exakten Lösung aus [16] in Tabelle 2.1 für einige Werte der dimensionslosen Zeit  $4at/d_b^2$  dargestellt.

Tabelle 2.1: Relativer Fehler der Linienquellenlösung im Vergleich zur exakten Lösung bei  $r = d_b/2$ , nach [16].

$4at/d_b^2$ / -	relativer Fehler / %
5	10,5
10	5,3
20	2,5
50	1,0
100	0,5

So ergibt sich unter Zuhilfenahme von Tabelle 2.1 die minimale Zeitschrittweite, welche zu einem relativen Fehler von unter 10,5 % führt nach Gleichung (2.7), zu

$$t > t_{min} = \frac{5 d_b^2}{4 a}. \quad (2.7)$$

Möchte man nun transiente Vorgänge quasistationär annähern ergeben sich bei typischen Werten für  $a = 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  und  $d_b = 0,1 - 0,15 \text{ m}$  minimale Zeitschrittweiten von einigen Stunden. Soll der relative Fehler unter 1 % liegen ergeben sich minimale Zeitschrittweiten von

<sup>1</sup>Unter Berücksichtigung der Euler-Mascheroni-Konstante  $\gamma \approx 0,57721$  kann  $Ei(x)$  als Reihe dargestellt werden:

$$Ei(x) = \gamma + \ln|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!k}.$$

einigen Tagen. Um diesen Nachteil auszugleichen, werden den Bohrlochkomponenten thermische Kapazitäten zugewiesen. Die dadurch entstehenden Widerstands-Kapazitäts-Modelle (WKM) erlauben eine transiente Beschreibung des Bohrlochs. Ein von Al-Khory R. et al. in [17] und [18] eingeführtes WKM berücksichtigt lediglich einen Knoten und eine thermische Kapazität für das Füllmaterial. Bauer et al. stellte in [12] WKM vor, welche das Füllmaterial mit einem Knoten pro Rohr berücksichtigen. Des Weiteren konnte Bauer nachweisen, dass die von ihm entwickelten WKM bei transienten Vorgängen sehr gute Ergebnisse im Vergleich zu einem vollständig diskretisierten Finiten-Elemente Modell liefern. Grundlage für den Vergleich ist eine sprunghafte Temperaturänderung von 10 °C auf 80 °C am Eintritt bzw. 40 °C am Austritt der Rohrsonde. Um der Referenzlösung hinreichend genau folgen zu können, benötigen die WKM nur wenige Minuten. Das  $\Delta$ -Modell benötigt hingegen mehrere Stunden. Weitere Informationen bezüglich des Verhaltens von  $\Delta$ -Modell, WKM und Referenzlösung sind in [4], [12] und [19] verfügbar.

## 2.1 Modellgeometrien

Die von Bauer in [12] entwickelten WKM für die wesentlichen Sondentypen CX-, 1U- und 2U-Rohrsonde sind insofern ein neuartiger Ansatz, als dass sie die Wärmekapazität des Füllmaterials auf einen Knoten pro Rohr aufteilen. Bezogen auf den Bohrlochquerschnitt weist das Füllmaterial keine einheitliche Temperatur auf, sondern wird überwiegend von der Temperatur des Fluids im nächst gelegenen Rohr beeinflusst. Die Bohrlochwand wiederum weist per Definition eine einheitliche Temperatur auf, wodurch eine Beschreibung mit nur einem Knoten hinreichend ist. Dadurch lassen sich die WKM als eindimensionale Linienelemente in eine dreidimensionale, jedoch rotationssymmetrische Beschreibung des Untergrundes einbringen.

In Abbildung 2.2 sind die Querschnitte und die WKM für CX-, 1U- und 2U-Rohrsonden dargestellt. Der thermische Kurzschluss bei CX-Rohrsonden zwischen Fluid im Ringspalt und Fluid im Kernrohr findet auf direktem Wege statt. Bei 1U- und 2U-Rohrsonden wird der thermische Kurzschluss durch das die Rohre umgebende Füllmaterial abgedämpft. Der Wärmetransport zwischen Bohrlochwand und Fluid findet bei allen Modellen durch das Füllmaterial statt. Alle in diesem Kapitel beschriebenen Modelle bewahren nur unter symmetrischem Aufbau der U-Rohrsonden ihre Gültigkeit. Das bedeutet weiter, dass die Rohrmittelpunkte der CX-Rohrsonde im Zentrum des Bohrlochs und jene der U-Rohrsonden auf einem konzentrischen Kreis zur Bohrlochwand liegen müssen. Des Weiteren müssen die Massenströme

in beiden U-Rohren der 2U-Rohrsonde ident sein.

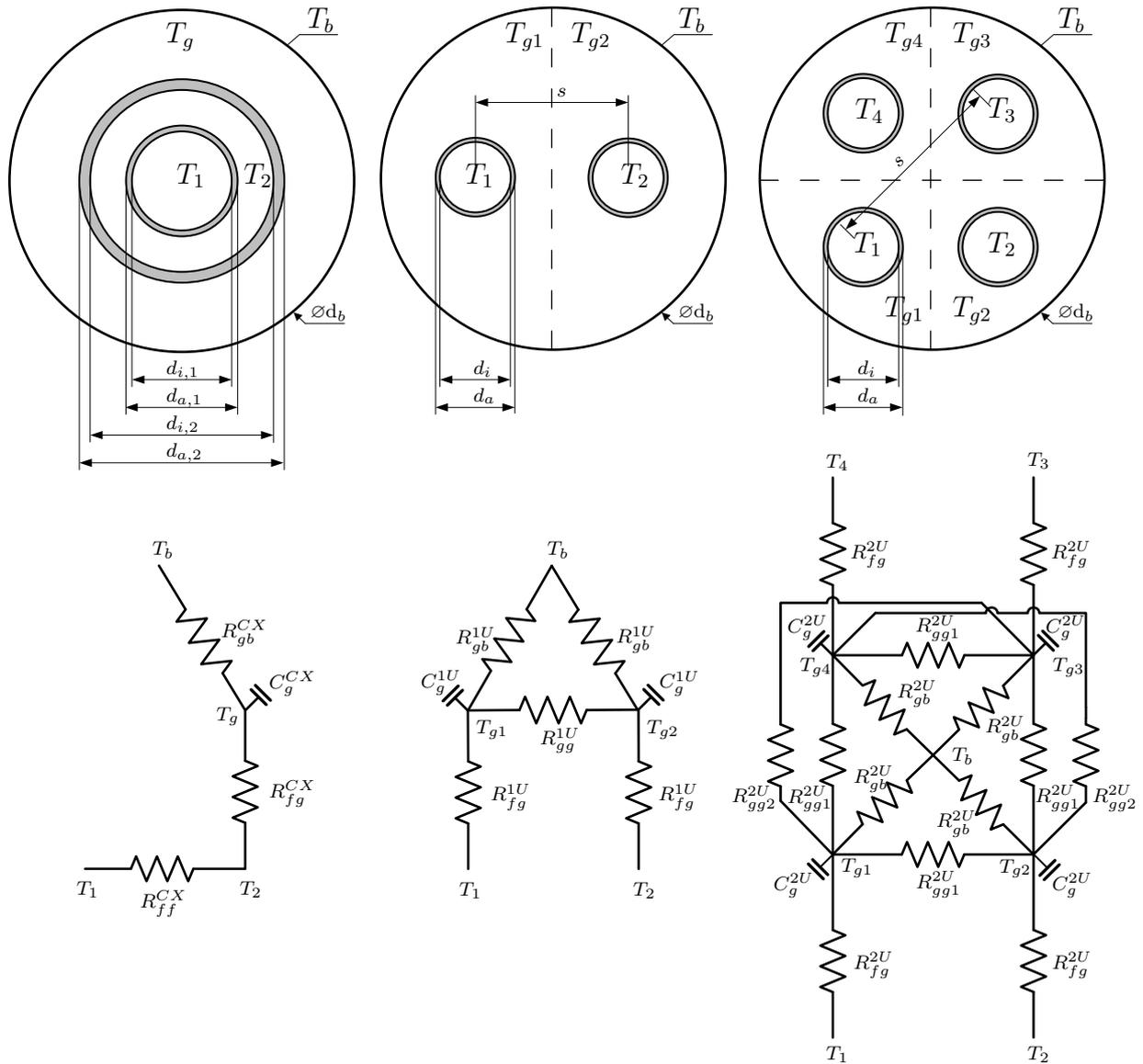


Abbildung 2.2: Horizontaler Querschnitt (oben) und WKM für CX-, 1U und 2U-Rohrsonden (unten), nach [12].

### 2.1.1 CX-Rohrsonde

Das klassische Wärmedurchgangsproblem zwischen Fluid im Innenrohr und Fluid im Ringspalt setzt sich aus zwei Wärmeübergängen an den Rohrwänden und der Wärmeleitung durch die Rohrwand zusammen. Der Wärmedurchgang lässt sich mit dem thermischen Widerstand  $R_{ff}^{CX}$  charakterisieren und setzt sich nach Gleichung (2.8) additiv aus drei Teilen zusammen:

$$R_{ff}^{CX} = R_{conv,1}^{CX} + R_{cond,1}^{CX} + R_{conv,2}^{CX}. \quad (2.8)$$

Die thermischen Widerstände  $R_{conv,1}^{CX}$  und  $R_{conv,2}^{CX}$  charakterisieren die konvektiven Anteile des Wärmedurchgangs an der Innen- und Außenseite des Kernrohres. Sie können zusammen mit der Nusselt-Korrelation aus Anhang A.1 mit Gleichung (2.9) bestimmt werden:

$$R_{conv,1}^{CX} = \frac{1}{Nu_1 \lambda_f \pi}, \quad R_{conv,2}^{CX} = \frac{1}{Nu_2 \lambda_f \pi} \frac{d_{i,2} - d_{a,1}}{d_{a,1}}. \quad (2.9)$$

Der thermische Widerstand  $R_{cond,1}^{CX}$  charakterisiert den konduktiven Anteil aufgrund von Wärmeleitung durch die Kernrohrwand:

$$R_{cond,1}^{CX} = \frac{\ln\left(\frac{d_{a,1}}{d_{i,1}}\right)}{2 \pi \lambda_p}. \quad (2.10)$$

Der thermische Widerstand  $R_{fg}^{CX}$  zwischen Fluid im Ringspalt und Schwerpunkt des Füllmaterials setzt sich nach Gleichung (2.11) additiv aus drei Teilen zusammen:

$$R_{fg}^{CX} = R_{conv,3}^{CX} + R_{cond,2}^{CX} + R_{cond,3}^{CX}. \quad (2.11)$$

Der thermische Widerstand des konvektiven Anteils an der Innenseite des Außenrohres  $R_{conv,3}^{CX}$  lässt sich mit der bereits verwendeten Nusselt-Korrelation aus Anhang A.1 berechnen:

$$R_{conv,3}^{CX} = \frac{1}{Nu_2 \lambda_f \pi} \frac{d_{i,2} - d_{a,1}}{d_{i,2}}. \quad (2.12)$$

Die thermischen Widerstände  $R_{cond,2}^{CX}$  und  $R_{cond,3}^{CX}$  beschreiben die Wärmeleitung im äußeren Rohr und einem Teil des Füllmaterials bis zu dessen Schwerpunkt:

$$R_{cond,2}^{CX} = \frac{\ln\left(\frac{d_{a,2}}{d_{i,2}}\right)}{2 \pi \lambda_p}, \quad R_{cond,3}^{CX} = x_{sg}^{CX} R_g^{CX}. \quad (2.13)$$

Der thermische Widerstand  $R_{gb}^{CX}$  zwischen Schwerpunkt des Füllmaterials und Bohrlochwand ergibt sich nach Gleichung (2.14), zu

$$R_{gb}^{CX} = (1 - x_{sg}^{CX}) R_g^{CX}. \quad (2.14)$$

Der thermische Widerstand  $R_g^{CX}$  charakterisiert den konduktiven Wärmetransport zwischen Außenseite des äußeren Rohrs und der Bohrlochwand:

$$R_g^{CX} = \frac{\ln\left(\frac{d_b}{d_{a,2}}\right)}{2\pi\lambda_g}. \quad (2.15)$$

Da die thermische Kapazität des Füllmaterials mit nur einem Knoten pro Rohr berücksichtigt wird, muss der thermische Widerstand  $R_g^{CX}$  in geeigneter Weise auf  $R_{gb}^{CX}$  und  $R_{cond,3}^{CX}$  aufgeteilt werden. Letzterer ist wiederum Bestandteil des thermischen Widerstands  $R_{fg}^{CX}$  zwischen Fluid im Ringspalt und Füllmaterial. Das Füllmaterial bildet bei der CX-Rohrsonde einen Ring um das Außenrohr. Der konzentrische Kreis mit Durchmesser  $d_z$ , auf welchem der Schwerpunkt liegt, teilt das Füllmaterial in zwei gleich große Flächen (siehe Abbildung 2.3). Der Durchmesser des Schwerpunktes lässt sich durch Gleichsetzen der zwei Ringflächen des Füllmaterials wie folgt berechnen:

$$d_z = \sqrt{\frac{d_b^2 + d_{eq}^2}{2}}. \quad (2.16)$$

Der äquivalente Durchmesser  $d_{eq}$  resultiert, wenn die Summe aller Querschnittsflächen der fluidführenden Rohre inklusive der Querschnittsflächen der Rohrwände im Bohrlochzentrum konzentriert werden. Die dadurch entstehende Kreisfläche weist den Durchmesser  $d_{eq}$  auf. Im Fall der CX-Rohrsonde entspricht der äquivalente Durchmesser dem Außendurchmesser des Außenrohres,  $d_{eq} \equiv d_{a,2}$ .

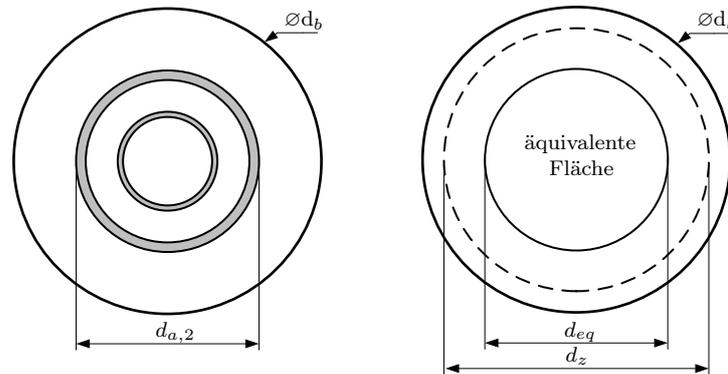


Abbildung 2.3: Illustration der Schwerpunktlage des Füllmaterials für CX-Rohrsonden.

Der Parameter  $x_{sg}^{CX}$  ergibt sich aus dem Quotienten des Wärmeleitwiderstands zwischen  $d_{eq}$

und  $d_z$ , sowie zwischen  $d_{eq}$  und  $d_b$  nach Gleichung (2.17), zu

$$x_{sg}^{CX} = \frac{\ln\left(\frac{d_z}{d_{eq}}\right) \frac{1}{2\pi\lambda_g}}{\ln\left(\frac{d_b}{d_{eq}}\right) \frac{1}{2\pi\lambda_g}} = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{d_b^2 + d_{a,2}^2}}{\sqrt{2}d_{a,2}}\right)}{\ln\left(\frac{d_b}{d_{a,2}}\right)}. \quad (2.17)$$

Die thermische Kapazität  $C_g^{CX}$  des Füllmaterials lässt sich mit Gleichung (2.18) nach [4], zu

$$C_g^{CX} = \rho_g \frac{\pi}{4} (d_b^2 - d_{a,2}^2) c_g \quad (2.18)$$

berechnen. Die thermischen Kapazitäten  $C_{f,1}^{CX}$  und  $C_{f,2}^{CX}$  des Fluids können analog zu Gleichung (2.18) wie folgt berechnet werden:

$$C_{f,1}^{CX} = \rho_f \frac{\pi}{4} d_{i,1}^2 c_{p,f}, \quad C_{f,2}^{CX} = \rho_f \frac{\pi}{4} (d_{i,2}^2 - d_{a,1}^2) c_{p,f}. \quad (2.19)$$

### 2.1.2 1U-Rohrsonde

Der Wärmedurchgang zwischen Fluid und Schwerpunkt des Füllmaterials setzt sich einerseits aus dem Wärmeübergang an der Rohrrinnenseite und andererseits aus der Wärmeleitung durch die Rohrwand bis zum Schwerpunkt des Füllmaterials zusammen. So lässt sich der thermische Widerstand  $R_{fg}^{1U}$  nach Gleichung (2.20) additiv aus drei Teilen zusammen setzen:

$$R_{fg}^{1U} = R_{conv}^{1U} + R_{cond,1}^{1U} + R_{cond,2}^{1U}. \quad (2.20)$$

Der konvektive Anteil an den Rohrrinnenwänden ergibt sich zusammen mit der Nusselt-Korrelation aus Anhang A.2 nach Gleichung (2.21), zu

$$R_{conv}^{1U} = \frac{1}{Nu \lambda_f \pi}. \quad (2.21)$$

Die thermischen Widerstände  $R_{cond,1}^{1U}$  und  $R_{cond,2}^{1U}$  charakterisieren die Wärmeleitung und werden nach Gleichung (2.22) berechnet:

$$R_{cond,1}^{1U} = \frac{\ln\left(\frac{d_a}{d_i}\right)}{2\pi\lambda_p}, \quad R_{cond,2}^{1U} = x_{sg}^{1U} R_g^{1U}. \quad (2.22)$$

Der thermische Widerstand  $R_{gb}^{1U}$  zwischen Bohrlochwand und Schwerpunkt des Füllmaterials ergibt sich nach Gleichung (2.23), zu

$$R_{gb}^{1U} = (1 - x_{sg}^{1U}) R_g^{1U}. \quad (2.23)$$

In Abschnitt 2.2 sind verschiedene Verfahren zur Bestimmung des thermischen Widerstands  $R_g^{1U}$  angeführt. Analog zur CX-Rohrsonde muss der thermische Widerstand  $R_g^{1U}$  in geeigneter Weise auf  $R_{gb}^{1U}$  und  $R_{cond,2}^{1U}$  aufgeteilt werden. Letzterer ist wiederum Bestandteil des thermischen Widerstands  $R_{fg}^{1U}$  zwischen Fluid und Füllmaterial. Zur Bestimmung des Schwerpunktes des Füllmaterials wird die Summe der Querschnittsflächen der U-Rohre inklusive Rohrwand auf eine äquivalente Fläche im Bohrlochzentrum mit Durchmesser  $d_{eq}$  reduziert. Das Füllmaterial kann dadurch wie in Abbildung 2.4 als Kreisring um die äquivalente Fläche dargestellt werden. Der Durchmesser des Schwerpunktes kann durch Gleichsetzen der zwei Kreisringflächen des Füllmaterials bestimmt werden:

$$d_z = \sqrt{\frac{d_b^2 + d_{eq}^2}{2}}. \quad (2.24)$$

Im Fall der 1U-Rohrsonde entspricht der äquivalente Durchmesser des Schwerpunktes

$$d_{eq} = \sqrt{2} d_a. \quad (2.25)$$

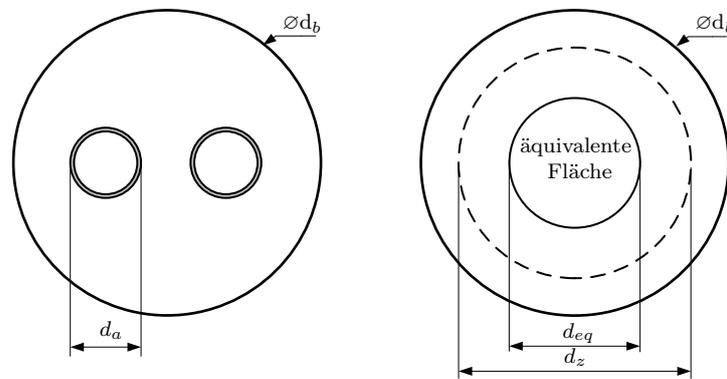


Abbildung 2.4: Illustration der Schwerpunktlage des Füllmaterials für 1U-Rohrsonden.

Der Parameters  $x_{sg}^{1U}$  ergibt sich aus dem Quotienten des Wärmeleitwiderstand zwischen  $d_{eq}$  und  $d_z$ , sowie zwischen  $d_{eq}$  und  $d_b$  nach Gleichung (2.26), zu

$$x_{sg}^{1U} = \frac{\ln\left(\frac{d_z}{d_{eq}}\right) \frac{1}{2\pi\lambda_g}}{\ln\left(\frac{d_b}{d_{eq}}\right) \frac{1}{2\pi\lambda_g}} = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{d_b^2 + 2d_a^2}}{2d_a}\right)}{\ln\left(\frac{d_b}{\sqrt{2}d_a}\right)}. \quad (2.26)$$

Der Wert von  $x_{sg}^{1U}$  ist unabhängig von der Lage der U-Rohre und wird nur durch den Bohrloch- und Sondendurchmesser beeinflusst. Der thermische Widerstand  $R_{gg}^{1U}$  zwischen den zwei Schwerpunkten der Füllmaterialhälften ergibt sich nach Gleichung (2.27), zu

$$R_{gg}^{1U} = \frac{2 R_{gb}^{1U} (R_{ar}^{1U} - 2 x_{sg}^{1U} R_g^{1U})}{2 R_{gb}^{1U} - R_{ar}^{1U} + 2 x_{sg}^{1U} R_g^{1U}}. \quad (2.27)$$

Der Wert von  $R_{ar}^{1U}$  wird von den geometrischen Abmessungen und größtenteils von der Wärmeleitfähigkeit des Füllmaterials und in geringerem Maß von der des umgebenden Untergrunds beeinflusst. Dadurch kann als Näherung der Formkoeffizient für zwei lange, parallele Zylinder im unendlich ausgedehnten Medium aus [20] für 1U-Rohrsonden verwendet werden [4]:

$$R_{ar}^{1U} \approx \operatorname{arcosh} \left( \frac{2 s^2 - d_a^2}{d_a^2} \right) \frac{1}{2 \pi \lambda_g}. \quad (2.28)$$

Mit Kenntnis des thermischen Widerstands des Bohrlochs  $R_a^{1U}$  (siehe Abschnitt 2.3) kann der thermische Widerstand  $R_{ar}^{1U}$  auf Basis der *Multipole Method* mit Gleichung (2.65) bestimmt werden.

Die thermischen Kapazitäten  $C_g^{1U}$  des in zwei gleich große Teile aufgeteilten Füllmaterials ergibt sich jeweils nach Gleichung (2.29), zu

$$C_g^{1U} = \rho_g \frac{\pi}{4} \left( \frac{d_b^2}{2} - d_a^2 \right) c_g. \quad (2.29)$$

Die thermische Kapazität  $C_f^{1U}$  des Fluids kann mit Gleichung (2.30) berechnet werden:

$$C_f^{1U} = \rho_f \frac{\pi}{4} d_i^2 c_{p,f}. \quad (2.30)$$

### 2.1.3 2U-Rohrsonde

Das hier vorgestellte Modell der U-Rohrsonde erlaubt eine hohe Flexibilität in der Konfiguration und Verschaltung der U-Rohre. Wie in Abbildung 2.5 dargestellt, können die U-Rohre diagonal, benachbart mit nicht gekreuzten U-Rohren und benachbart mit gekreuzten U-Rohren verschaltet werden. Des Weiteren können die Rohre auch parallel oder seriell durchströmt werden.

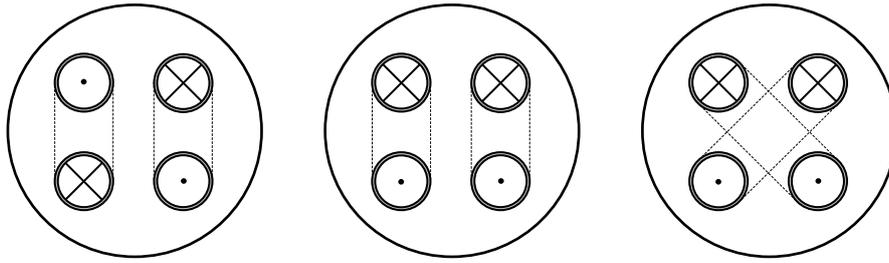


Abbildung 2.5: Drei mögliche Konfigurationen für die Durchströmung der U-Rohre. Links: diagonal, Mitte: benachbart mit nicht gekreuzten U-Rohren, Rechts: benachbart mit gekreuzten U-Rohren, nach [21].

Analog zur 1U-Rohrsonde setzt sich der thermische Widerstand  $R_{fg}^{2U}$  zwischen Fluid und Schwerpunkt des Füllmaterials nach Gleichung (2.31) additiv aus drei Teilen zusammen:

$$R_{fg}^{2U} = R_{conv}^{2U} + R_{cond,1}^{2U} + R_{cond,2}^{2U}. \quad (2.31)$$

Der konvektive Anteil an den Rohrwänden ergibt sich zusammen mit der Nusselt-Korrelation aus Anhang A.3 nach Gleichung (2.32), zu

$$R_{conv}^{2U} = \frac{1}{Nu \lambda_f \pi}. \quad (2.32)$$

Die thermischen Widerstände  $R_{cond,1}^{2U}$  und  $R_{cond,2}^{2U}$  charakterisieren den konduktiven Anteil des Wärmeübergangs an der Rohrwand und einen Teil des Füllmaterials bis zu dessen Schwerpunkt:

$$R_{cond,1}^{2U} = \frac{\ln\left(\frac{d_a}{d_i}\right)}{2\pi\lambda_p}, \quad R_{cond,2}^{2U} = x_{sg}^{2U} R_g^{2U}. \quad (2.33)$$

Der thermische Widerstand  $R_{gb}^{2U}$  zwischen Bohrlochwand und Schwerpunkt des Füllmaterials ergibt sich nach Gleichung (2.34), zu

$$R_{gb}^{2U} = (1 - x_{sg}^{2U}) R_g^{2U}. \quad (2.34)$$

In Abschnitt 2.2 sind analog zur 1U-Rohrsonde verschiedene Verfahren zur Bestimmung des thermischen Widerstands  $R_g^{1U}$  aufgelistet. Zur Bestimmung des Schwerpunktes des Füllmaterials werden, wie bei der 1U-Rohrsonde, die Querschnittsflächen der zwei U-Rohre auf eine äquivalente Fläche im Bohrlochzentrum mit Durchmesser  $d_{eq}$  reduziert. Das Füllmaterial kann dadurch wie in Abbildung 2.6 als Kreisring um die äquivalente Fläche dargestellt werden. Der Durchmesser des Schwerpunktes ergibt sich wieder durch Gleichsetzen der Kreis-

ringflächen des Füllmaterials zu

$$d_z = \sqrt{\frac{d_b^2 + d_{eq}^2}{2}}. \quad (2.35)$$

Im Fall der 2U-Rohrsonde entspricht der äquivalente Durchmesser des Schwerpunktes

$$d_{eq} = 2 d_a. \quad (2.36)$$

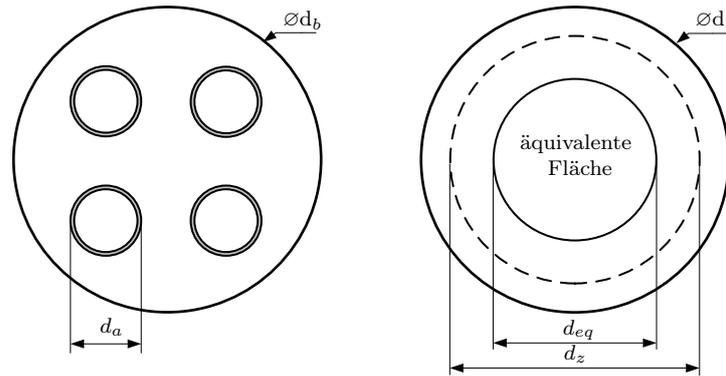


Abbildung 2.6: Illustration der Schwerpunktlage des Füllmaterials für 2U-Rohrsonden.

Der Parameter  $x_{sg}^{2U}$  kann aus dem Quotienten des Wärmeleitwiderstands zwischen  $d_{eq}$  und  $d_z$ , sowie zwischen  $d_{eq}$  und  $d_b$  nach Gleichung (2.37) bestimmt werden. Der Wert von  $x_{sg}^{2U}$  ist analog zur 1U-Rohrsonde unabhängig von der Lage der U-Rohre und wird nur durch den Bohrloch- und Sondendurchmesser beeinflusst:

$$x_{sg}^{2U} = \frac{\ln\left(\frac{d_z}{d_{eq}}\right) \frac{1}{2\pi\lambda_g}}{\ln\left(\frac{d_b}{d_{eq}}\right) \frac{1}{2\pi\lambda_g}} = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{d_b^2 + 4d_a^2}}{2\sqrt{2}d_a}\right)}{\ln\left(\frac{d_b}{2d_a}\right)}. \quad (2.37)$$

Bei der Berechnung der thermischen Widerstände zwischen den zwei Schwerpunkten der Füllmaterialhälften muss in nebeneinander liegende ( $R_{gg1}^{2U}$ ) und diagonal liegende ( $R_{gg2}^{2U}$ ) Rohre unterschieden werden:

$$R_{gg1}^{2U} = \frac{2 R_{gb}^{2U} (R_{ar,1}^{2U} - 2 x_{sg}^{2U} R_g^{2U})}{2 R_{gb}^{2U} - R_{ar,1}^{2U} + 2 x_{sg}^{2U} R_g^{2U}}, \quad (2.38)$$

$$R_{gg2}^{2U} = \frac{2 R_{gb}^{2U} (R_{ar,2}^{2U} - 2 x_{sg}^{2U} R_g^{2U})}{2 R_{gb}^{2U} - R_{ar,2}^{2U} + 2 x_{sg}^{2U} R_g^{2U}}. \quad (2.39)$$

Die Werte von  $R_{ar,1}^{2U}$  und  $R_{ar,2}^{2U}$  werden analog zur 1U-Rohrsonde von den geometrischen Abmessung und großteils von der Wärmeleitfähigkeit des Füllmaterials und in geringerem Maß von der des umgebenden Untergrunds beeinflusst. Diersch schlägt daher in [22] vor als Näherung den Formkoeffizienten für zwei lange, parallele Zylinder im unendlich ausge-

dehnten Medium aus [20] zu verwenden. Problematisch ist, dass diese Beziehung nur für zwei isotherme Zylinder angewendet werden kann. Eine gegenseitige Beeinflussung der zwei U-Rohre wird dadurch ausgeschlossen. In der Literatur sind zum Zeitpunkt der Abfassung dieser Arbeit noch keine Formkoeffizienten für vier Zylinder im unendlich ausgedehnten Medium vorhanden. Trotz der nicht erwiesenen Gültigkeit sei der Vollständigkeit halber der Vorschlag von Diersch angeführt:

$$R_{ar,1}^{2U} \approx \operatorname{arcosh} \left( \frac{s^2 - d_a^2}{d_a^2} \right) \frac{1}{2 \pi \lambda_g}, \quad (2.40)$$

$$R_{ar,2}^{2U} \approx \operatorname{arcosh} \left( \frac{2s^2 - d_a^2}{d_a^2} \right) \frac{1}{2 \pi \lambda_g}. \quad (2.41)$$

Mit Kenntnis des thermischen Widerstands des Bohrlochs  $R_a^{2U}$  (siehe Abschnitt 2.3) und des thermischen Widerstands des Füllmaterials  $R_g^{2U}$  (siehe Abschnitt 2.2) kann der thermische Widerstand  $R_{ar,1}^{2U}$  und  $R_{ar,2}^{2U}$  auf Basis der *Multipole Method* mit Gleichung (2.66) und (2.67) bestimmt werden.

Die thermische Kapazität  $C_g^{2U}$  des in vier gleich große Teile aufgeteilten Füllmaterials ergeben sich jeweils nach Gleichung (2.42), zu

$$C_g^{2U} = \rho_g \frac{\pi}{4} \left( \frac{d_b^2}{4} - d_a^2 \right) c_g, \quad (2.42)$$

Die thermische Kapazität  $C_f^{2U}$  des Fluids ergibt sich nach Gleichung (2.43), zu

$$C_f^{2U} = \rho_f \frac{\pi}{4} d_i^2 c_{p,f}. \quad (2.43)$$

## 2.2 Thermischer Widerstand des Füllmaterials

Zur Bestimmung des thermischen Widerstandes des Füllmaterials  $R_g$  stehen in der Literatur eine Vielzahl von Methoden zur Auswahl. Raymond et al. hat in [23] und Rees in [24] mehrere Ansätze für 1U-Rohrsonden zusammengefasst. Grundsätzlich gibt es aber die folgenden drei Herangehensweisen

- Methode des äquivalenten Durchmessers
- Empirische Ansätze

- Ansätze, basierend auf der *Multipole Method*

### Methode des äquivalenten Durchmessers

Nach der Methode des äquivalenten Durchmessers werden zur Bestimmung des thermischen Widerstands des Füllmaterials die Querschnittsflächen der U-Rohre auf eine äquivalente Fläche im Bohrlochzentrum mit Durchmesser  $d_{eq}$  reduziert, siehe Abbildung 2.4 und 2.6. Daraus resultiert analog zur CX-Rohrsonde der thermische Widerstand  $R_g^{1U}$  bzw.  $R_g^{2U}$  nach Gleichung (2.44), zu

$$R_g^{1,2U} = \frac{\ln\left(\frac{d_b}{d_{eq}}\right)}{2\pi\lambda_g}. \quad (2.44)$$

Der Ansatz von Shonder et al. in [25] berücksichtigt den Schenkelabstand  $s$  (siehe Abbildung 2.2) der U-Rohre nicht. Die äquivalenten Durchmesser können für 1U-Rohrsonden mit Gleichung (2.25) und für 2U-Rohrsonden mit Gleichung (2.36) bestimmt werden.

Bose et al. und Gu et al. gewichten den Schenkelabstand unterschiedlich und können somit den Nachteil der von Shonder et al. vorgestellten Methode ausgleichen. Jedoch liefern beide nur Ansätze für 1U-Rohrsonden. Bose et al. definiert in [26] den äquivalenten Durchmesser für 1U-Rohrsonden unter Berücksichtigung des Schenkelabstandes  $s$  nach Gleichung (2.45), zu

$$d_{eq} = \sqrt{\frac{d_a}{2}} s. \quad (2.45)$$

Gu et al. definiert in [27] den äquivalenten Durchmesser für 1U-Rohrsonden nach Gleichung (2.46), zu

$$d_{eq} = 0,414 \frac{d_a}{2} + 0,5 s. \quad (2.46)$$

### Empirische Ansätze

Paul entwickelte in [28] einen empirische Ansatz auf Basis von zweidimensionalen Formfaktoren. Der thermische Widerstand des Füllmaterials  $R_g^{1U}$  für 1U-Rohrsonden ergibt sich damit in Abhängigkeit der Rohrkonfiguration nach Gleichung (2.47), zu

$$R_g^{1U} = \frac{1}{\lambda_g B_0 \left(\frac{d_b}{d_a}\right)^{B_1}}. \quad (2.47)$$

Untersucht wurden drei spezifische Rohrkonfigurationen, siehe Abbildung 2.7. Die aus expe-

rimentellen Daten gewonnenen Koeffizienten  $B_0$  und  $B_1$  sind in Tabelle 2.2 aufgelistet.

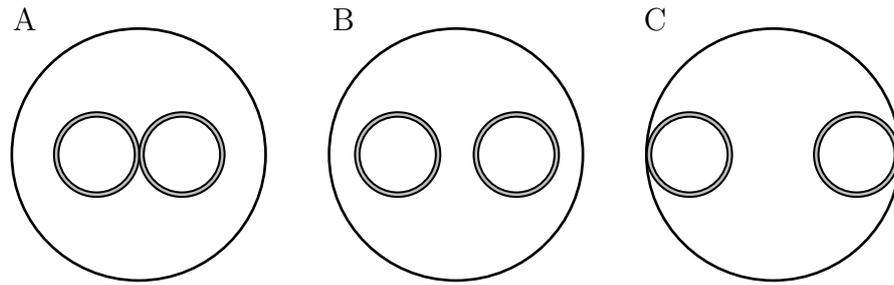


Abbildung 2.7: Unterschiedliche Rohrkonfigurationen: A - Rohre berühren sich im Bohrlochzentrum, B - Rohre sind gleichmäßig im Bohrloch verteilt, C - Rohre berühren die Bohrlochwand, nach [28].

Tabelle 2.2: Koeffizienten  $B_0$  und  $B_1$  für unterschiedliche Rohrkonfigurationen, nach [28].

Konfiguration	$B_0$	$B_1$
A	20,10	-0,9447
B	17,44	-0,6052
C	21,91	-0,3796

Bauer konnte in [12] mit Formfaktoren unter Einbindung von numerisch gewonnenen Daten Koeffizienten für exzentrische gelegene Zylinder gleicher Länge bestimmen. Der thermische Widerstand des Bohrlochs für 1U-Rohrsonden lässt sich demnach näherungsweise mit Gleichung (2.48) und für 2U-Rohrsonden nach Gleichung (2.49) bestimmen:

$$R_g^{1U} = \frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{d_b^2 + d_a^2 - s^2}{2 d_b d_a}\right)}{2 \pi \lambda_g} \left(1,601 - 0,888 \frac{s}{d_b}\right), \quad (2.48)$$

$$R_g^{2U} = \frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{d_b^2 + d_a^2 - s^2}{2 d_b d_a}\right)}{2 \pi \lambda_g} \left(3,098 - 4,432 \frac{s}{d_b} + 2,364 \frac{s^2}{d_b^2}\right). \quad (2.49)$$

Bauer berücksichtigt dabei den Abstand der Sondenrohre und kann somit präzisere Ergebnisse als die Methode des äquivalenten Durchmessers nach Shonder et al. liefern.

Sharqawy et al. entwickelte in [29] wieder unter Berücksichtigung von numerisch gewonnenen Daten Gleichung (2.50) zur Bestimmung des thermischen Widerstand des Bohrloches für 1U-Rohrsonden:

$$R_g^{1U} = \frac{1}{2 \pi \lambda_g} \left[0,436 - 1,49 \frac{s}{d_b} + 0,656 \ln\left(\frac{d_b}{d_a}\right)\right]. \quad (2.50)$$

Dabei wurde eine einheitliche Temperatur an der Bohrlochwand vorausgesetzt. Somit wird,

wie bei Bauer [4] und Paul [28], die Wärmeleitfähigkeit des Untergrunds  $\lambda_b$  nicht berücksichtigt.

Liao et al. hingegen konnte in [30] eine Gleichung entwickeln, welche die Wärmeleitfähigkeit des Untergrunds  $\lambda_b$  durch den dimensionslosen Faktor

$$\sigma = \frac{\lambda_g - \lambda_b}{\lambda_g + \lambda_b} \quad (2.51)$$

berücksichtigt. Des weiteren wurde angenommen, dass im Gegensatz zu Sharqawy et al. [29] keine einheitliche Temperatur der Bohrlochwand vorliegt. Die Randbedingung: einheitliche Wandtemperatur, ist vier Meter von der Bohrlochwand entfernt angesetzt worden. Der thermische Widerstand des Füllmaterials  $R_g^{1U}$  ergibt sich zu:

$$R_g^{1U} = \frac{1}{2\pi\lambda_g} \left[ -0,36952 - 0,50125 \ln\left(\frac{s}{d_b}\right) + 0,51248 \ln\left(\frac{d_b}{d_a}\right) + 0,51057 \sigma \ln\left(\frac{d_b^4}{d_b^4 - s^4}\right) \right]. \quad (2.52)$$

### Ansätze, basierend auf der *Multipole Method*

Eine weitere Methode zur Berechnung des thermischen Widerstands des Füllmaterials ist die *Multipole Method*. Diese, von Bennet, Claesson und Hellström in [15] vorgestellte Methode, ist ein komplexer Algorithmus zur Berechnung von thermischen Widerständen für eine beliebige Anzahl von beliebig angeordneten Rohren in einem Bohrloch. Der Algorithmus kommt unter anderem im Simulationsprogramm Earth Energy Designer (EED) zum Einsatz [31]. Die *Multipole Method* gilt als eine der exaktesten Methoden zur Berechnung der thermischen Widerstände in einem Bohrloch [24]. Mit Kenntnis des thermischen Widerstands des Bohrlochs  $R_b$  zwischen Fluid im Rohr und der Bohrlochwand (siehe Abschnitt 2.4), kann der thermische Widerstand des Füllmaterials nach Gleichung (2.53) für 1U-Rohrsonden und nach Gleichung (2.54) für 2U-Rohrsonden berechnet werden:

$$R_g^{1U} = 2 R_b^{1U} - R_{conv}^{1U} - R_{cond,1}^{1U}, \quad (2.53)$$

$$R_g^{2U} = 4 R_b^{2U} - R_{conv}^{2U} - R_{cond,1}^{2U}. \quad (2.54)$$

## 2.3 Interner thermischer Widerstand des Bohrlochs

Der interne thermische Widerstand des Bohrlochs  $R_a$ , sowie der lokale thermische Widerstand des Bohrlochs  $R_b$  kann auf Basis der *Multipole Method* nach Bennet, Claesson und Hellström [15] mit Hilfe des EED oder mit Hilfe von in der Literatur zur Verfügung stehenden Lösungsansätzen bestimmt werden. Alternativ können  $R_a$  und der effektive thermische Widerstand des Bohrlochs  $R_b^*$  durch einen Thermal Response Test (TRT) bestimmt werden. Da für die vorliegende Arbeit ein möglichst vollständig numerischer Ansatz zur transienten Simulation von Erdwärmesonden gefunden werden soll, wird auf die Bestimmung der thermischen Widerständen mittels EED und TRT nicht weiter eingegangen. Nachfolgend werden Gleichungen zur Bestimmung der thermischen Widerstände nach der *Multipole Method* 0. ( $J = 0$ ) und 1. Ordnung ( $J = 1$ ) vorgestellt. Die Gleichungen wurden von Claesson und Javed für 1U-Rohrsonden in [14] und für 2U-Rohrsonden in [21] vorgestellt.

Unter Berücksichtigung des dimensionslosen Parameters  $\sigma$  aus Gleichung (2.51), welcher das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten von Füllmaterial und Untergrund beschreibt, ergibt sich der thermische Widerstand des Bohrlochs 0. Ordnung für 1U-Rohrsonden nach Gleichung (2.55), zu

$$R_a^{1U}(0) = 2 R_p + \frac{1}{\pi \lambda_g} \left[ \ln \left( \frac{2s}{d_a} \right) + \sigma \ln \left( \frac{d_b^2 + s^2}{d_b^2 - s^2} \right) \right]. \quad (2.55)$$

Der thermische Widerstand  $R_a^{2U}(0)$  für 2U-Rohrsonden ist von der Konfiguration der Rohrsonde abhängig, siehe Abbildung 2.5. Die beiden Fälle mit benachbarten U-Rohren weisen idente thermische Netzwerke auf. Daher reduzieren sich die zu betrachtenden Fälle auf diagonal liegende Einlassrohre

$$R_{a,d}^{2U}(0) = 2 R_p + \frac{1}{\pi \lambda_g} \left[ \ln \left( \frac{s}{d_a} \right) + \sigma \ln \left( \frac{d_b^4 + s^4}{d_b^4 - s^4} \right) \right] \quad (2.56)$$

und benachbart liegende Einlassrohre

$$R_{a,a}^{2U}(0) = 2 R_p + \frac{1}{\pi \lambda_g} \left[ \ln \left( \frac{2s}{d_a} \right) + \sigma \ln \left( \frac{d_b^2 + s^2}{d_b^2 - s^2} \right) \right]. \quad (2.57)$$

Der totale thermische Fluid-zu-Rohr Widerstand  $R_p$  ergibt sich nach [24] mit Gleichung (2.58) für 1U- und 2U-Rohrsonden zu

$$R_p^{1U/2U} = R_{conv}^{1U/2U} + R_{cond,1}^{1U/2U}. \quad (2.58)$$

Um die ohnehin schon aufwändige Berechnung zu vereinfachen wird, wie in [21], [14] und

[24], auch im Rahmen dieser Arbeit der Wert des thermischen Fluid-zu-Rohr Widerstands als konstant mit  $R_p = 0,05 \text{ mKW}^{-1}$  angenommen.

Der thermische Widerstand  $R_a^{1U}(1)$  für 1U-Rohrsonden kann nach der *Multipole Method* 1. Ordnung ( $J = 1$ ) unter Berücksichtigung der dimensionslosen Koeffizienten

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{d_a}{2s}, & p_1 &= \frac{d_a s}{d_b^2 - s^2}, & p_2 &= \frac{d_a s}{d_b^2 + s^2}, \\ b_1 &= \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad \text{und} \quad \beta &= 2\pi \lambda_b R_p \end{aligned} \quad (2.59)$$

nach Gleichung (2.60) berechnet werden:

$$R_a^{1U}(1) = R_a^{1U}(0) - \frac{1}{\pi \lambda_g} \frac{b_1 [\sigma (p_1 + p_2) + p_0]^2}{1 + b_1 \{-p_0^2 + \sigma [p_1 (p_1 + 2p_0) - p_2 (p_2 - 2p_0)]\}}. \quad (2.60)$$

Der thermische Widerstand  $R_{a,d}^{2U}(1)$  für 2U-Rohrsonden mit diagonal liegenden Einlassrohren kann nach der *Multipole Method* 1. Ordnung ( $J = 1$ ) unter Berücksichtigung der dimensionslosen Koeffizienten

$$p_3 = \frac{d_a^2}{4s^2}, \quad p_4 = \frac{s^2}{\sqrt[4]{d_b^8 - s^8}} \quad \text{und} \quad p_5 = \frac{d_b^2}{\sqrt[4]{d_b^8 - s^8}} \quad (2.61)$$

nach Gleichung (2.62) berechnet werden:

$$R_{a,d}^{2U}(1) = R_{a,d}^{2U}(0) - \frac{1}{\pi \lambda_g} \frac{b_1 p_3 (1 + 8\sigma p_4^2 p_5^2)^2}{1 - b_1 p_3 [3 - 32\sigma (p_4^2 p_5^6 + p_4^6 p_5^2)]}. \quad (2.62)$$

Der thermische Widerstand  $R_{a,a}^{2U}(1)$  für 2U-Rohrsonden mit benachbart liegenden Einlassrohren kann nach der *Multipole Method* 1. Ordnung ( $J = 1$ ) unter Berücksichtigung der dimensionslosen Koeffizienten aus  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{V}$  nach Gleichung (2.64) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 16 b_1 \sigma p_3 (3 p_4^3 p_5^5 + p_4^7 p_5) & -b_1 p_3 \\ b_1 p_3 & -1 - 16 b_1 \sigma p_3 (p_4 p_5^7 + 3 p_4^5 p_5^3) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 8\sigma p_4^3 p_5 \\ 3 + 8\sigma p_4 p_5^3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$R_{a,a}^{2U}(1) = R_{a,a}^{2U}(0) + \frac{1}{\pi \lambda_g} \frac{b_1 p_3}{2} \frac{V_2^2 M_{11} - 2 V_1 V_2 M_{21} - V_1^2 M_{22}}{M_{11} M_{22} + M_{21}^2}. \quad (2.64)$$

Mit Kenntnis des thermischen Widerstands des Bohrlochs  $R_a$  kann nun der thermische Widerstand zwischen den Außenseiten zweier Rohre  $R_{ar}^{1U}$  für 1U-Rohrsonden nach Gleichung (2.65) anstelle von Gleichung (2.28) aus Abschnitt 2.1.2 berechnet werden:

$$R_{ar}^{1U} = R_a^{1U} - 2 (R_{conv}^{1U} + R_{cond,1}^{1U}). \quad (2.65)$$

Die thermischen Widerstände zwischen den Außenseiten der Rohre:  $R_{ar,1}^{2U}$  und  $R_{ar,2}^{2U}$  für 2U-Rohrsonden, ergeben sich mit Kenntnis des thermischen Widerstands des Füllmaterials  $R_g^{2U}$  nach Gleichung (2.66) und (2.67), anstelle von (2.40) und (2.41) aus Abschnitt 2.1.3, zu

$$R_{ar,1}^{2U} = \frac{(2 + \sqrt{2}) R_g^{2U} (R_a^{2U} - R_{conv}^{2U} - R_{cond,1}^{2U})}{R_g^{2U} + R_a^{2U} - R_{conv}^{2U} - R_{cond,1}^{2U}} \quad (2.66)$$

und

$$R_{ar,2}^{2U} = \sqrt{2} R_{ar,1}^{2U}. \quad (2.67)$$

## 2.4 Thermischer Widerstand des Bohrlochs

Der lokale thermische Widerstand kann nach Gleichung (2.68) als Verhältnis der Temperaturdifferenz zwischen Fluid und Bohrlochwand zu spezifischer Wärmeübertragungsrate pro Längeneinheit  $\dot{q}_b$  folgendermaßen definiert werden:

$$R_b = \frac{T_{f,l} - T_b}{\dot{q}_b}. \quad (2.68)$$

Dabei ist  $T_{f,l}$  die lokale mittlere Fluidtemperatur und  $T_b$  die Temperatur der Bohrlochwand. Der lokale thermische Widerstand  $R_b(0)$  zwischen Flüssigkeit im Rohr und Bohrlochwand kann unter der Annahme gleicher Wärmeströme

$$\dot{q}_1^{1U} = \dot{q}_2^{1U} = \frac{1}{2} \dot{q}_b, \quad \dot{q}_1^{2U} = \dot{q}_2^{2U} = \dot{q}_3^{2U} = \dot{q}_4^{2U} = \frac{1}{4} \dot{q}_b \quad (2.69)$$

und dadurch gleichen Fluidtemperaturen für 1U- und 2U-Rohrsonden

$$T_{f1}^{1U} = T_{f2}^{1U} = T_{f,l}, \quad T_{f1}^{2U} = T_{f2}^{2U} = T_{f3}^{2U} = T_{f4}^{2U} = T_{f,l} \quad (2.70)$$

mit Gleichung (2.71) und (2.72) bestimmt werden [14, 21]:

$$R_b^{1U}(0) = \frac{1}{2} \left\{ R_p + \frac{1}{2\pi\lambda_g} \left[ \ln \left( \frac{d_b^2}{2d_a s} \right) + \sigma \ln \left( \frac{d_b^4}{d_b^4 - s^4} \right) \right] \right\}, \quad (2.71)$$

$$R_b^{2U}(0) = \frac{1}{4} \left\{ R_p + \frac{1}{2\pi\lambda_g} \left[ \ln \left( \frac{d_b^4}{4d_a s^3} \right) + \sigma \ln \left( \frac{d_b^8}{d_b^8 - s^8} \right) \right] \right\}. \quad (2.72)$$

Der thermische Widerstand  $R_b^{1U}(1)$  für 1U-Rohrsonden kann nach der *Multipole Method* 1. Ordnung ( $J = 1$ ) nach Gleichung (2.73) berechnet werden [14]:

$$R_b^{1U}(1) = R_b^{1U}(0) - \frac{1}{8\pi\lambda_g} \frac{b_1 [\sigma(p_1 - p_2) - p_0]^2}{1 + b_1 \{p_0^2 + \sigma[p_1(p_1 + 2p_0) + p_2(p_2 - 2p_0)]\}}. \quad (2.73)$$

Der thermische Widerstand  $R_b^{2U}(1)$  für 2U-Rohrsonden kann nach der *Multipole Method* 1. Ordnung ( $J = 1$ ) nach Gleichung (2.74) berechnet werden [21]:

$$R_b^{2U}(1) = R_b^{2U}(0) - \frac{1}{8\pi\lambda_g} \frac{b_1 p_3 (3 - 8\sigma p_4^4)^2}{1 + b_1 p_3 (5 + 64\sigma p_4^4 p_3^4)}. \quad (2.74)$$

Die Fluidtemperatur variiert im Allgemeinen entlang der Bohrlochtiefe. Es findet nicht nur ein kontinuierlicher Wärmeaustausch mit dem Untergrund, sondern auch ein Wärmeaustausch zwischen ab- und aufwärtsströmendem Fluid statt. Dieses Phänomen, das oft als thermischer Kurzschluss bezeichnet wird, kann entweder durch die Verwendung einer effektiven mittleren Fluidtemperatur oder durch die Verwendung eines effektiven thermischen Bohrlochwiderstands  $R_b^*$  berücksichtigt werden [24]. Ein herkömmlicher TRT liefert keine Auskunft über den Temperaturverlauf über die Bohrlochtiefe. Daher wird der effektive thermische Bohrlochwiderstand  $R_b^*$  aus der mittleren Temperaturdifferenz des Fluids zwischen Eintritt und Austritt der Rohrsonde  $T_f$  und der Temperatur der Bohrlochwand  $T_b$  folgendermaßen bestimmt:

$$R_b^* = \frac{T_f - T_b}{\dot{q}_b}. \quad (2.75)$$

Der Unterschied zwischen dem lokalen thermischen Widerstand des Bohrlochs  $R_b$  und dem effektiven thermischen Widerstand des Bohrlochs  $R_b^*$  besteht also darin, dass der lokale thermische Widerstand aufgrund gleicher Fluidtemperaturen in den Rohren in einer bestimmten Bohrlochtiefe gilt. Der effektive thermische Widerstand gilt hingegen für die gesamte Bohrlochtiefe [14]. So berücksichtigt der effektive thermische Widerstand des Bohrlochs den thermischen Kurzschluss zwischen auf- und absteigendem Fluid und liefert im Allgemeinen höhere Werte als der lokale thermische Widerstand [32]. Hellström et al. hat in [16] eine Methode entwickelt, mit der es möglich ist den experimentell bestimmten Widerstand  $R_b^*$  auf den lokalen thermischen Widerstand des Bohrlochs  $R_b$  umzurechnen. Der effektive Bohrlochwiderstand kann für die folgenden zwei Randbedingungen bestimmt werden:

- einheitliche Bohrloch Wandtemperatur (eng.: Uniform Wall Temperature - UWT)
- einheitlicher Wärmefluss entlang des Bohrlochs (eng.: Uniform Heat Flux - UHF)

Das wahre Verhalten liegt zwischen diesen beiden Randbedingungen. Daher wird zur Berechnung des effektiven thermischen Widerstands der arithmetische Mittelwert nach Gleichung (2.76) bestimmt [14]:

$$R_b^*(J) = \frac{R_{b,UWT}^*(J) + R_{b,UHF}^*(J)}{2}. \quad (2.76)$$

Unter Berücksichtigung des Faktors

$$\eta^{1U} = \frac{L}{\rho_f c_{p,f} V_f} \frac{1}{\sqrt{R_b^{1U}(J) R_a^{1U}(J)}} \quad (2.77)$$

kann der effektive thermische Widerstand des Bohrlochs nach Gleichung (2.78) und (2.79) für 1U-Rohrsonden berechnet werden:

$$R_{b,UWT}^{1U*}(J) = R_b^{1U}(J) \eta^{1U} \coth(\eta^{1U}), \quad (2.78)$$

$$R_{b,UHF}^{1U*}(J) = R_b^{1U}(J) + \frac{1}{3 R_a^{1U}(J)} \left( \frac{L}{\rho_f c_{p,f} V_f} \right)^2. \quad (2.79)$$

Analog dazu folgt unter Berücksichtigung des Faktors

$$\eta^{2U} = \frac{L}{\rho_f c_{p,f} V_f} \frac{1}{\sqrt{2 R_b^{2U}(J) R_{a,a/d}^{2U}(J)}} \quad (2.80)$$

der effektive thermische Widerstand des Bohrlochs nach Gleichung (2.81) und (2.82) für 2U-Rohrsonden mit diagonal und benachbart angeordneten Rohren zu

$$R_{b,UWT}^{2U*}(J) = R_b^{2U}(J) \eta^{2U} \coth(\eta^{2U}) \quad (2.81)$$

und

$$R_{b,UHF}^{2U*}(J) = R_b^{2U}(J) + \frac{1}{6 R_{a,a/d}^{2U}(J)} \left( \frac{L}{\rho_f c_{p,f} V_f} \right)^2. \quad (2.82)$$

Der effektive thermische Widerstand des Bohrlochs für 1U- und 2U-Rohrsonden ist unabhängig von der Strömungsrichtung. Einerseits geht der Volumenstrom in Gleichung (2.79) und (2.82) quadratisch ein. Andererseits ist die Funktion  $\eta \coth \eta$  eine gerade Funktion in  $\eta = \eta(V_f)$ .

Der Unterschied des lokalen und effektiven thermischen Widerstands des Bohrlochs reicht von vernachlässigbar bis zu signifikant. In den Gleichungen (2.77) bis (2.82) befindet sich die Bohrlochtiefe  $L$  immer im Zähler und der Volumenstrom  $V_f$  immer im Nenner. Daraus lässt sich schließen, dass der thermische Widerstand  $R_b^*$  mit steigender Bohrlochtiefe und sinkendem Volumenstrom ansteigt.

## 2.5 Modellgültigkeit

Die von Bauer in [12] vorgestellte Methode fordert, um den 2. Hauptsatz der Thermodynamik nicht zu verletzen, stets positive Werte der thermischen Widerstände für CX-Rohrsonden. Folgende Ungleichungen gilt für die thermischen Widerstände der CX-Rohrsonden:

$$R_i^{CX} > 0. \quad (2.83)$$

Bei 1U- und 2U-Rohrsonden können, bedingt durch die geometrischen Abmessungen, negative Werte des thermischen Widerstands  $R_{gg}$  auftreten. Das ist zum Beispiel bei 1U-Rohrsonden der Fall, wenn der effektive thermische Widerstand  $R_a^{1U}$  größer ist als der thermische Ersatzwiderstand der Kette von  $T_1^{1U}$  über  $T_{g1}^{1U}$ ,  $T_b^{1U}$ ,  $T_{g2}^{1U}$  bis  $T_2^{1U}$ . Für 1U-Rohrsonden ist die nachfolgende Ungleichung zu erfüllen:

$$2 (R_{fg}^{1U} + R_{gb}^{1U}) < R_a^{1U}. \quad (2.84)$$

Für 1U- und 2U-Rohrsonden muss daher lediglich der Gesamtwiderstand zwischen zwei beliebigen Knoten positiv sein. Konkret ergeben sich Gültigkeitskriterien nach Gleichung (2.85) und (2.86), zu

$$\left( \frac{1}{R_{gg}^{1U}} + \frac{1}{2 R_{gb}^{1U}} \right)^{-1} > 0 \quad (2.85)$$

und

$$\left( \frac{1}{R_{gg,1}^{2U}} + \frac{1}{2 R_{gb}^{2U}} \right)^{-1} > 0 \quad \left( \frac{1}{R_{gg,2}^{2U}} + \frac{1}{2 R_{gb}^{2U}} \right)^{-1} > 0. \quad (2.86)$$

Des Weiteren muss für den Parameter  $x_{sg}$  bei allen Rohrsonden stets Gleichung (2.87) erfüllt sein:

$$0 < x_{sg} < 1. \quad (2.87)$$

## 3 Dreidimensionale Modellierung

Dreidimensionale Modelle von Rohrsonden lassen sich durch das Verknüpfen von mehreren zweidimensionalen WKM erstellen. Genau genommen resultiert nicht ein dreidimensionales WKM, sondern ein  $2^{1/2}$  dimensionales WKM. Grund dafür ist, dass im zweidimensionalen WKM einer Schicht der Untergrund nicht in zwei Raumrichtungen aufgelöst, sondern rotationssymmetrisch angenommen wird. Es werden lediglich die Komponenten im Inneren des Bohrlochs zweidimensional aufgelöst. So ist das zweidimensionale WKM einer Schicht viel mehr ein  $1^{1/2}$  dimensionales Modell. In weiterer Folge werden die  $1^{1/2}$  und  $2^{1/2}$  dimensionale Modelle als 2 bzw. 3 dimensionale Modelle bezeichnet. Die in Kapitel 2 gezeigten WKM werden in geeigneter Weise miteinander verbunden.

Die vertikale Verbindung der Knoten des Füllmaterials berücksichtigt die über die Querschnittsfläche der Zonen stattfindende Wärmeleitung. Die vertikale Verbindung der Knoten des Fluids berücksichtigt den Wärme- und Stofftransport durch Konvektion und Konduktion innerhalb der Rohre. Ausgehend von der allgemeinen Transportgleichung in differentieller Form (3.1)<sup>1</sup> lassen sich in Anlehnung an [33], [34] und [35] die notwendigen Modellgleichungen entwickeln. Die allgemeine Transportgleichung beschreibt die zeit- und ortsabhängige Veränderung der beliebigen spezifischen Zustandsgröße<sup>2</sup>  $\phi$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho w_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S_\phi. \quad (3.1)$$

Der erste Term auf der linken Seite beschreibt den instationären Anteil, der zweite den konvektiven Anteil der Transportgleichung. Auf der rechten Seite beschreibt der erste Term den diffusiven Anteil und der zweite Term mögliche Quellen oder Senken. Je nachdem welche Größe für die allgemeine Transportgröße  $\phi$  eingesetzt wird, ergeben sich unterschiedliche Bedeutungen des Diffusionskoeffizienten  $\Gamma_\phi$  und des Quell- und Senkterms  $S_\phi$ . Um die Ener-

<sup>1</sup>Dabei gilt für die *Einstein'sche Summationskonvention* im dreidimensionalen kartesisches Koordinatensystem:  $\frac{\partial}{\partial x_i} (\cdot) = \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) + \frac{\partial}{\partial y} (\cdot) + \frac{\partial}{\partial z} (\cdot)$

<sup>2</sup>Spezifische Zustandsgrößen beziehen sich im Allgemeinen auf die Masse oder die Raumdimensionen eines Körpers bzw. Stoffes in einem System.

gieerhaltungsgleichung (3.2) zu erhalten, wird für  $\phi$  die spezifische Enthalpie  $h$  bzw. die spezifische innere Energie  $u$  eingesetzt:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho w_i h) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_i) + S. \quad (3.2)$$

Der erste Term beschreibt die zeitliche Änderung der thermischen Energie. Diese wird mit dem Produkt aus der Dichte  $\rho$  und der spezifischen inneren Energie  $u$  gebildet. Der zweite Term enthält die Energie, die mit der Masse konvektiv transportiert wird. Diese umfasst neben der thermischen inneren Energie noch einen Anteil an Verschiebearbeit. Sie wird mit dem Produkt aus der Dichte  $\rho$  und der spezifischen Enthalpie  $h$  gebildet, wobei gilt:  $h = u + p v$ . In dieser Arbeit wird die Strömung nur inkompressibel betrachtet. Daher gilt in weiterer Folge  $c_{p,f} = c_{v,f}$ . Um die Temperatur als gesuchte Größe in Gleichung (3.2) einzubringen, kann aufgrund der nur mäßig auftretenden Temperaturänderungen die spezifische Enthalpie durch  $h = T c_{p,f}$  mit konstantem  $c_{p,f}$  ersetzt und aus dem Integral herausgezogen werden. Entlang der  $x$ -Richtung resultiert aus Gleichung (3.2):

$$c_{p,f} \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + c_{p,f} \frac{\partial}{\partial x} (\rho w T) = -\frac{\partial}{\partial x} (\dot{q}_x) + S. \quad (3.3)$$

Integration über das in Abbildung 3.1 dargestellt Kontrollvolumen für ein Rohr mit  $dV = A dx$  liefert Gleichung (3.4):

$$\int_{\Delta x} c_{p,f} \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) A dx + \int_{\Delta x} c_{p,f} \frac{\partial}{\partial x} (\rho w T) A dx = -\int_{\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} (\dot{q}_x) A dx + \int_{\Delta x} S A dx. \quad (3.4)$$

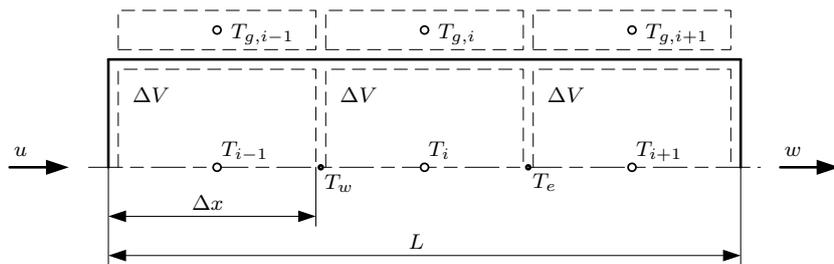


Abbildung 3.1: Eindimensionale und rotationssymmetrische Diskretisierung eines Rohrs und dessen Füllmaterial in *Finite Volumen*, nach [36].

Die Auswertung des Integrals aus (3.4) für das mittlere Kontrollvolumen von  $w$  (West) bis  $e$  (Ost) führt zusammen mit der Transformation der resultierenden Wärmeströme  $\dot{q}_e$  und  $\dot{q}_w$  nach dem *Fourierschen Gesetz* zu Gleichung (3.5):

$$\left( c_{p,f} \rho \frac{\partial T}{\partial t} \right)_i \Delta x + c_{p,f} \rho w (T_e - T_w) = \frac{\lambda_f}{\Delta x} (T_{i-1} + T_{i+1} - 2T_i) + S \Delta x. \quad (3.5)$$

Für die Bestimmung der Temperatur  $T_i$  im Zellmittelpunkt des Kontrollvolumens aus Gleichung (3.5) ist die Kenntnis der Temperaturen an den Zellwänden östlich  $T_e$  und westlich  $T_w$  des Volumens notwendig. Dazu muss eine geeignete Annahme eines Profils des Temperaturverlaufs zwischen den Zellmittelpunkten getroffen werden. In den vorliegenden Rohrströmungen dominiert der Konvektionsterm gegenüber dem Diffusionsterm in der allgemeinen Transportgleichung. Daher ist es sinnvoll, die Bestimmung der Temperaturen an den Zellwänden anstatt mit linearer Interpolation (*Zentrale Differenzen-Schema*) mit dem 1<sup>st</sup> Order *Upwind-Schema* durchzuführen, siehe Abbildung 3.2. Demnach kann die Temperatur der westlichen Zellwand  $T_w$  mit der Temperatur des Volumenelements entgegen der Strömungsrichtung  $T_{i-1}$  ersetzt werden. Analog gilt für die Temperatur der östlichen Zellwand  $T_e = T_i$ . Diese Modellannahme wird auch Rührkesselmodell genannt.

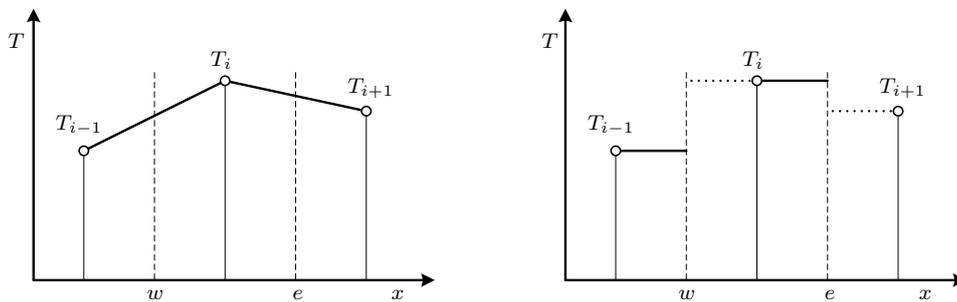


Abbildung 3.2: Ermittlung der Temperatur an den Zellwänden mit linearer Interpolation (links) und 1<sup>st</sup> Order *Upwind-Schema* (rechts), nach [33].

Die radialen Wärmeverluste an die Umgebung treten normal zur Strömungsrichtung auf und können nicht in den Diffusionsterm der eindimensionalen Energieerhaltungsgleichung eingebracht werden. Die radialen Wärmeverluste können aber durch den Quell- bzw. Senkterm wie folgt berücksichtigt werden:

$$S = \frac{1}{A_f} \frac{T_{g,i} - T_i}{R_p}. \quad (3.6)$$

Dabei sind  $T_i$  und die  $T_{g,i}$  jeweils die Temperaturen im Zellmittelpunkt der Kontrollvolumina des Fluids im Rohr bzw. des Füllmaterials. Als  $A_f$  wird dabei die Querschnittsfläche des Kontrollvolumens des Fluids in axialer Richtung bezeichnet. Der thermische Widerstand  $R_p$  beschreibt den Wärmeübergang zwischen Fluid im Rohr und Rohrwand, sowie die Wärmeleitung in der Rohrwand bis zum Knoten des Füllmaterials. Somit lässt sich die Energieerhaltungsgleichung (3.5) in Abhängigkeit der zeitlichen Ableitung der Temperatur

zu Gleichung (3.7) umformen:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i = \frac{1}{C_f} \left[ \frac{c_{p,f} \dot{m}}{\Delta x} (T_{i-1} - T_i) + \frac{T_{g,i} - T_i}{R_p} + \frac{A_f \lambda_f}{\Delta x^2} (T_{i-1} + T_{i+1} - 2T_i) \right]. \quad (3.7)$$

Integration über  $\Delta t$  liefert schlussendlich die Bestimmungsgleichung der Zelltemperatur  $T_i$ :

$$\frac{T_i^{t+1} - T_i^t}{\Delta t} = \frac{1}{C_f} \left[ \frac{c_{p,f} \dot{m}}{\Delta x} (T_{i-1} - T_i) + \frac{T_{g,i} - T_i}{R_p} + \frac{A_f \lambda_f}{\Delta x^2} (T_{i-1} + T_{i+1} - 2T_i) \right]. \quad (3.8)$$

Analog zu der gerade beschriebenen Vorgehensweise werden in Kapitel 3.2 bis 3.4 die Transportgleichungen für alle Knoten einer Schicht aufgestellt.

### 3.1 Untergrund

Rohrsonden speichern thermische Energie in sensibler Weise in den umgebenden Untergrund ein und entnehmen diese bei Bedarf wieder. In diesem Modell wird vorausgesetzt, dass keine Konvektion durch zum Beispiel Grundwasser im Erdreich stattfindet. Beim Beladen des Erdwärmespeichers ist die Temperatur an der Bohrlochwand höher als die Erdreichtemperatur. Es stellt sich ein Temperaturgradient entgegen des Wärmefflusses in Richtung Bohrlochwand ein. Beim Entladen verhalten sich Wärmestrom und Temperaturgradient umgekehrt. Um den Temperaturgradienten und in weiterer Folge das Wärmespeicherungsvermögen des Untergrunds abbilden zu können, ist es also zweckmäßig, den umliegenden Untergrund des Bohrlochs nicht mit nur einer radialen Schicht abzubilden. Die unmittelbare Umgebung des Bohrlochs kann, wie in Abbildung 3.3 dargestellt, in  $n$  Hohlzylinder unterteilt werden. Die horizontalen kreisringförmigen Flächen  $A_{sj}$  bilden die an der vertikalen Wärmeleitung beteiligten Flächen des Untergrunds. Die Temperatur der jeweiligen Hohlzylindervolumina wird ähnlich der Finiten Volumen des Fluids im Rohr als einheitlich angenommen und in einen einzelnen Punkt konzentriert. Dadurch ist es möglich, beliebig viele radiale Schichten  $n$  an das WKM der Rohrsonden zu koppeln. Die Temperatur  $T_{sn}$  der äußersten radialen Schicht wird der ungestörten Erdreichtemperatur zugeordnet und liefert so eine elementare Randbedingung, siehe Kapitel 3.6.

Jeder radialen Schicht wird eine thermische Kapazität und ein thermischer Widerstand zugeordnet. Die thermischen Kapazitäten des Untergrunds  $C_{s1}$  bis  $C_{sj}$  können analog zu Glei-

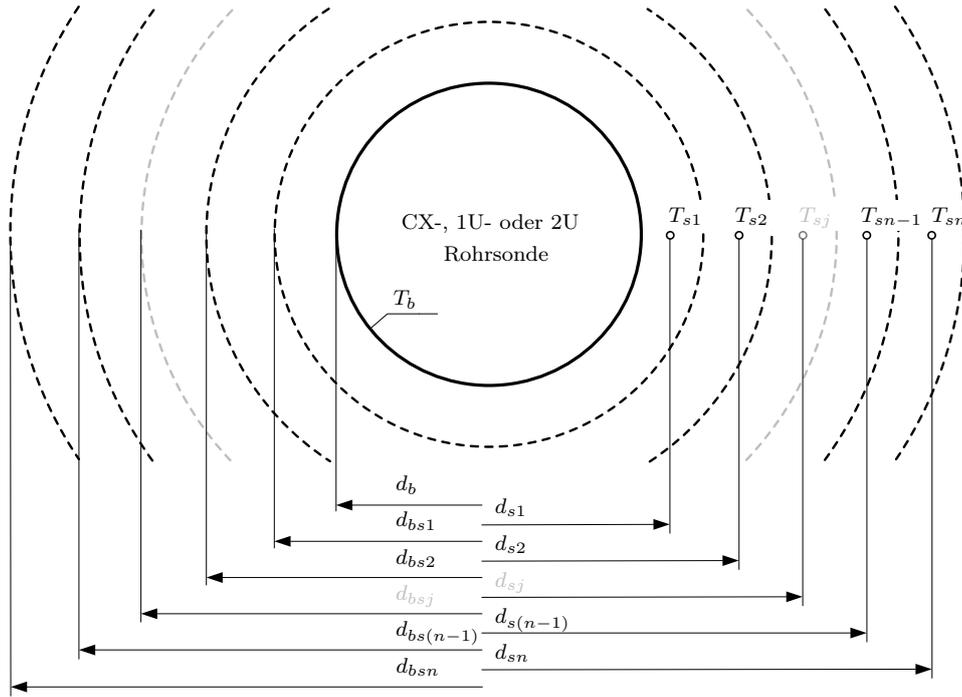


Abbildung 3.3: Horizontaler Schnitt durch eine Rohrsonde und die umliegenden Schichten des Untergrunds sowie die dazugehörigen Temperaturen in Bezug auf die WKM der Rohrsonden, nach [36].

chung (2.18) mit den korrespondierenden horizontalen Querschnittsflächen

$$A_{s1} = \frac{\pi}{4} (d_{bs1}^2 - d_b^2) \quad \text{und} \quad A_{sj} = \frac{\pi}{4} (d_{bsj}^2 - d_{bs(j-1)}^2), \quad (3.9)$$

welche an der Wärmeübertragung beteiligt sind, und der spezifischen Wärmekapazität des Untergrunds  $c_s$ , folgendermaßen berechnet werden:

$$C_{sj} = \rho_s A_{sj} c_s. \quad (3.10)$$

Die thermischen Widerstände des Untergrunds  $R_{b,s1}$  bis  $R_{sj,s(j+1)}$  können analog zu Gleichung (2.10) mit den mittleren Durchmessern der kreisringförmigen Flächen  $d_{sj}$  und der Wärmeleitfähigkeit des Untergrunds  $\lambda_s$  bestimmt werden:

$$R_{b,s1} = \frac{\ln\left(\frac{d_{s1}}{d_b}\right)}{2\pi\lambda_s} \quad R_{b,sj,s(j+1)} = \frac{\ln\left(\frac{d_{s(j+1)}}{d_{sj}}\right)}{2\pi\lambda_s}. \quad (3.11)$$

Die Rohrsonde wird über die Tiefe  $L$  in  $m$  äquidistante Elemente unterteilt. Der Abstand zweier Schichten beträgt  $\Delta z = \frac{L}{m}$ .

## 3.2 CX-Rohrsonde

In Abbildung 3.4 ist das dreidimensionale WKM der 2U-Rohrsonde für die drei Schichten  $i - 1$  bis  $i + 1$  dargestellt. Nachfolgend werden in Anlehnung an Gleichung (3.8) die Transportgleichungen für jeden Knoten der Schicht  $i$  aufgestellt. Die thermischen Widerstände und Kapazitäten können aus Kapitel 2.1.1, 2.2 bzw. 3.1 entnommen werden.

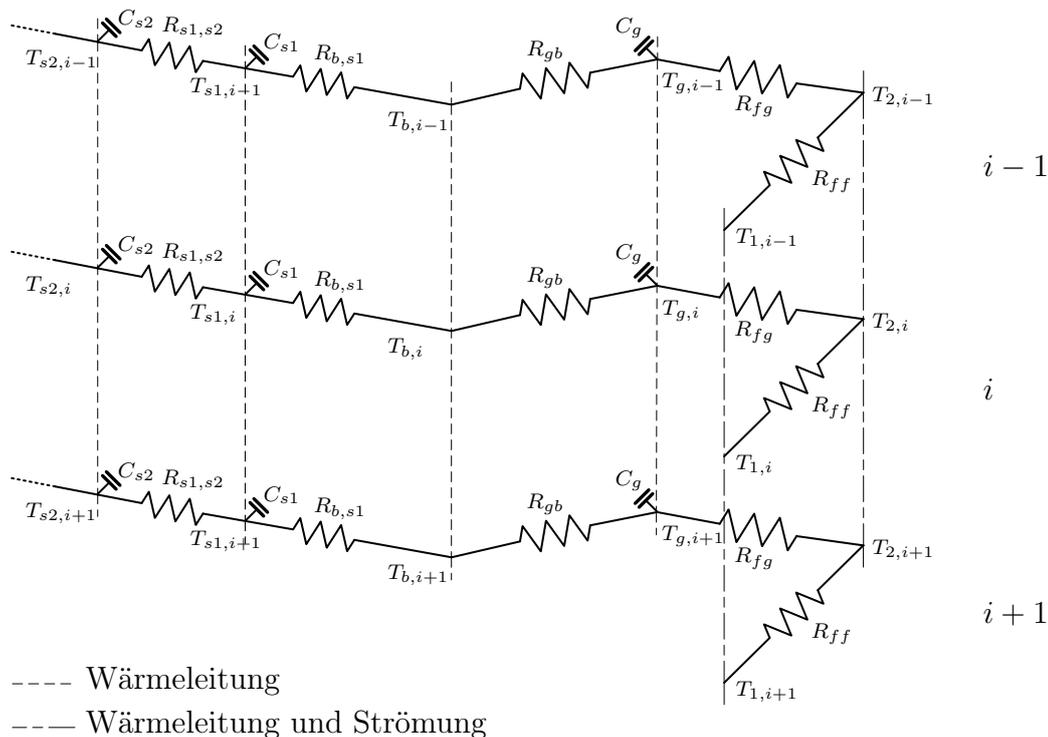


Abbildung 3.4: Vertikale Verbindung mehrerer zweidimensionaler WKM zu einem dreidimensionalen WKM einer CX-Rohrsonde.

Der transiente Wärmetransport im Untergrund kann für die Schicht  $i$  durch Gleichung (3.12) und (3.13) folgendermaßen beschrieben werden:

$$\frac{T_{s1,i}^{t+1} - T_{s1,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_{s1}} \left[ \frac{T_{s1,i}^{t+1} - T_{s2,i}^{t+1}}{R_{s1,s2}} + \frac{T_{s1,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{b,s1}} + \frac{2T_{s1,i}^{t+1} - T_{s1,i-1}^{t+1} - T_{s1,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_s A_{s1} \right] = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{T_{sj,i}^{t+1} - T_{sj,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_{sj}} \left[ \frac{T_{sj,i}^{t+1} - T_{s(j+1),i}^{t+1}}{R_{sj,s(j+1)}} + \frac{T_{sj,i}^{t+1} - T_{s(j-1),i}^{t+1}}{R_{s(j-1),sj}} + \frac{2T_{sj,i}^{t+1} - T_{sj,i-1}^{t+1} - T_{sj,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_s A_{sj} \right] = 0. \quad (3.13)$$

Gleichung (3.13) gilt für  $2 \leq j < n$  Knoten.

Die Bohrlochwand besitzt kein Volumen und damit auch keine thermische Kapazität. Dadurch lässt sich der Energietransport zwischen den Knoten des Füllmaterials und den Knoten des Untergrunds stationär betrachten:

$$\frac{T_{b,i}^{t+1} - T_{s1,i}^{t+1}}{R_{b,s1}} + \frac{T_{b,i}^{t+1} - T_{g,i}^{t+1}}{R_{gb}} = 0. \quad (3.14)$$

Der Energietransport in den Knoten des Füllmaterials erfolgt ausschließlich durch Wärmeleitung zwischen dem Knoten der Bohrlochwand und dem Fluid im Außenrohr. Die horizontale Wärmeübertragungsfläche des Füllmaterials ergibt sich zu

$$A_g = \frac{\pi}{4} (d_b^2 - d_{a,2}^2). \quad (3.15)$$

Damit kann die Transportgleichung des Knotens des Füllmaterials mit Gleichung (3.16) zu

$$\frac{T_{g,i}^{t+1} - T_{g,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_g} \left[ \frac{T_{g,i}^{t+1} - T_{2,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{2T_{g,i}^{t+1} - T_{g,i-1}^{t+1} - T_{g,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g \right] = 0 \quad (3.16)$$

bestimmt werden.

Der Energietransport im Innenrohr erfolgt durch Strömung des Fluids im Rohr und durch Wärmeleitung zwischen Fluid im Innen- und Außenrohr. Der Energietransport im Ringspalt erfolgt durch Strömung des Fluids im Ringspalt und durch Wärmeleitung zwischen Fluid im Innenrohr und dem Füllmaterial. Durch die unterschiedliche Größe der Koaxialrohre ergibt sich für das Fluid im Innenrohr eine andere Querschnittsfläche als für jenes im Ringspalt:

$$A_{f1} = \frac{d_{i,1}^2 \pi}{4}, \quad A_{f2} = \frac{\pi}{4} (d_{i,2}^2 - d_{a,1}^2). \quad (3.17)$$

Die Transportgleichungen des Fluids in den Rohren ist für CX-Rohrsonden von der Be-

schaltung der Rohre abhängig. Je nachdem, ob der Eintritt des Fluids im Innenrohr oder im Ringspalt statt findet, muss im Konvektionsterm die Temperatur des Fluids entgegen der Strömungsrichtung eingesetzt werden. Diese Abhängigkeit wird durch den Parameter  $k$  wiedergegeben. Für  $k$  gilt:

$$k = \begin{cases} 1, & \text{Einlass im Innenrohr} \\ -1, & \text{Einlass im Ringspalt} \end{cases} \quad (3.18)$$

Damit können die Transportgleichungen des Fluids in den zwei coaxialen Rohren wie folgt angeschrieben werden:

$$\frac{T_{1,i}^{t+1} - T_{1,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_{f,1}} \left[ \frac{T_{1,i}^{t+1} - T_{2,i}^{t+1}}{R_{ff}} + \frac{2T_{1,i}^{t+1} - T_{1,i-1}^{t+1} - T_{1,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_f A_{f1} + \frac{T_{1,i}^{t+1} - T_{1,i-k}^{t+1}}{\Delta z} \dot{m}_f c_{p,f} \right] = 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{T_{2,i}^{t+1} - T_{2,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_{f,2}} \left[ \frac{T_{2,i}^{t+1} - T_{1,i}^{t+1}}{R_{ff}} + \frac{T_{2,i}^{t+1} - T_{g,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{2T_{2,i}^{t+1} - T_{2,i-1}^{t+1} - T_{2,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_f A_{f2} + \frac{T_{2,i}^{t+1} - T_{2,i+k}^{t+1}}{\Delta z} \dot{m}_f c_{p,f} \right] = 0. \quad (3.20)$$

Die transiente Beschreibung des Wärmetransports macht die Berechnung oft sehr zeitintensiv. So kann es für bestimmte Anwendungen hinreichend sein, den Wärmetransport im Füllmaterial stationär zu beschreiben. Die Gleichung (3.16) vereinfacht sich dementsprechend nach Gleichung (3.21) zu

$$\frac{T_{g,i}^{t+1} - T_{2,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{2T_{g,i}^{t+1} - T_{g,i-1}^{t+1} - T_{g,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g = 0. \quad (3.21)$$

In Abhängigkeit der verwendeten Transportgleichungen lassen sich somit zwei unterschiedliche numerische Modelle definieren:

- vollständig transientes Modell

Unter Verwendung von Gleichung (3.12) bis (3.14), (3.16), (3.19) und (3.20) ergibt sich zu Lasten hohen Rechenzeiten, das Modell mit der höchsten Ergebnisgüte.

- semi-transientes Modell

Unter Verwendung von Gleichung (3.12) bis (3.14) und (3.19) bis (3.21) ergibt sich ein Modell, welches alle Komponenten, außer dem Füllmaterial, transient beschreibt.

Die vorgestellten Modellgleichungen werden, um sie einfacher darstellen zu können, vereinfacht und mit  $\sum \alpha_i T_i = T_k$  angeschrieben. Das resultierende Gleichungssystem einer horizontalen Schicht für das vollständig transiente Modell ergibt sich nach Gleichung (3.22) zu

$$EQS^{CX} : \begin{cases} \alpha_{2-k}^{(1)} T_{1,i-1} + \alpha_2^{(1)} T_{1,i} + \alpha_{2+k}^{(1)} T_{1,i+1} + \alpha_4^{(1)} T_{2,i} = T_{1,i} \\ \alpha_1^{(2)} T_{1,i} + \alpha_{3-k}^{(2)} T_{2,i-1} + \alpha_3^{(2)} T_{2,i} + \alpha_{3+k}^{(2)} T_{2,i+1} + \alpha_5^{(2)} T_{g,i} = T_{2,i} \\ \alpha_1^{(3)} T_{2,i} + \alpha_2^{(3)} T_{g,i-1} + \alpha_3^{(3)} T_{g,i} + \alpha_2^{(3)} T_{g,i+1} + \alpha_4^{(3)} T_{b,i} = T_{g,i} \\ \alpha_1^{(4)} T_{g,i} + \alpha_2^{(4)} T_{b,i} + \alpha_3^{(4)} T_{s1,i} = 0 \\ \alpha_1^{(5)} T_{b,i} + \alpha_2^{(5)} T_{s1,i-1} + \alpha_3^{(5)} T_{s1,i} + \alpha_2^{(5)} T_{s1,i+1} + \alpha_4^{(5)} T_{s2,i} = T_{s1,i} \\ \alpha_1^{(j+4)} T_{s(j-1),i} + \alpha_2^{(j+4)} T_{sj,i-1} + \alpha_3^{(j+4)} T_{sj,i} + \alpha_2^{(j+4)} T_{sj,i+1} + \\ \alpha_4^{(j+4)} T_{s(j+1),i} = T_{sj,i} \quad 2 \leq j < n \end{cases} \quad (3.22)$$

Die Koeffizienten  $\alpha_i$  sind in Anhang B.1 zusammen gefasst. Zusammen mit dem Lösungsvektor für eine horizontale Schicht

$$\mathbf{T}_{1S} = \left[ T_1 \quad T_2 \quad T_g \quad T_b \quad T_{s1} \quad \cdots \quad T_{sn} \right]^T \quad (3.23)$$

und den Matrizen  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  aus Anhang B.1 lässt sich das lineare Gleichungssystem  $EQS^{CX}$  (3.22) für eine horizontale Schicht aufstellen:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1S,i-1} \\ \mathbf{T}_{1S,i} \\ \mathbf{T}_{1S,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_g & 0 & T_{s1} & \cdots & T_{s(n-1)} \end{bmatrix}^T \quad (3.24)$$

Durch Kombination mehrerer Gleichungssysteme (3.24) für eine Schicht kann die Rohrsonde in beliebig viele horizontale Schichten diskretisiert werden. In Kapitel 3.5 ist der Aufbau des gesamten Gleichungssystems näher beschrieben.



$$\frac{T_{sj,i}^{t+1} - T_{sj,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_{sj}} \left[ \frac{T_{sj,i}^{t+1} - T_{s(j+1),i}^{t+1}}{R_{sj,s(j+1)}} + \frac{T_{sj,i}^{t+1} - T_{s(j-1),i}^{t+1}}{R_{s(j-1),sj}} + \frac{2T_{sj,i}^{t+1} - T_{sj,i-1}^{t+1} - T_{sj,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_s A_{sj} \right] = 0. \quad (3.26)$$

Gleichung (3.26) gilt für  $2 \leq j < n$  Knoten.

Die Bohrlochwand besitzt kein Volumen und damit auch keine thermische Kapazität. Dadurch lässt sich der Energietransport zwischen der Knoten des Füllmaterials und den Knoten des Untergrunds stationär betrachten:

$$\frac{T_{b,i}^{t+1} - T_{s1,i}^{t+1}}{R_{b,s1}} + \frac{T_{b,i}^{t+1} - T_{g1,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{T_{b,i}^{t+1} - T_{g2,i}^{t+1}}{R_{gb}} = 0. \quad (3.27)$$

Der Energietransport in den Knoten des Füllmaterials erfolgt ausschließlich durch Wärmeleitung zwischen den Knoten des Füllmaterials untereinander, der Bohrlochwand und dem Fluid. Durch die symmetrische Aufteilung des Füllmaterials ergibt sich die horizontale Wärmeübertragungsfläche zu

$$A_g = A_{g1} = A_{g2} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{d_b^2}{2} - d_a^2 \right). \quad (3.28)$$

Damit ergibt sich die Transportgleichungen der Knoten des Füllmaterials nach Gleichung (3.29) bis (3.30), zu

$$\frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{g1,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_g} \left[ \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{1,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{g2,i}^{t+1}}{R_{gg}} + \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{2T_{g1,i}^{t+1} - T_{g1,i-1}^{t+1} - T_{g1,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g \right] = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{g2,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_g} \left[ \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{2,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{g1,i}^{t+1}}{R_{gg}} + \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{2T_{g2,i}^{t+1} - T_{g2,i-1}^{t+1} - T_{g2,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g \right] = 0, \quad (3.30)$$

Der Energietransport in den Rohren erfolgt durch Strömung des Fluids in den Rohren und durch Wärmeleitung zwischen Fluid und Füllmaterial. Durch die Symmetrie der U-Rohre ergeben sich idente Querschnittsflächen für das Fluid:

$$A_f = A_{f1} = A_{f2} = \frac{d_i^2 \pi}{4}. \quad (3.31)$$

Die Transportgleichungen der zwei Knoten des Fluids in den Rohren können wie folgt angeschrieben werden:

$$\frac{T_{1,i}^{t+1} - T_{1,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_f} \left[ \frac{T_{1,i}^{t+1} - T_{g1,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{2T_{1,i}^{t+1} - T_{1,i-1}^{t+1} - T_{1,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_f A_f + \frac{T_{1,i}^{t+1} - T_{1,i-1}^{t+1}}{\Delta z} \dot{m}_f c_{p,f} \right] = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{T_{2,i}^{t+1} - T_{2,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_f} \left[ \frac{T_{2,i}^{t+1} - T_{g2,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{2T_{2,i}^{t+1} - T_{2,i-1}^{t+1} - T_{2,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_f A_f + \frac{T_{2,i}^{t+1} - T_{2,i+1}^{t+1}}{\Delta z} \dot{m}_f c_{p,f} \right] = 0. \quad (3.33)$$

Die transiente Beschreibung des Wärmetransports macht die Berechnung oft sehr zeitintensiv. So kann es für bestimmte Anwendungen hinreichend sein, den Wärmetransport im Füllmaterial stationär zu beschreiben. Die Gleichung (3.29) und (3.30) vereinfachen sich dementsprechend nach Gleichung (3.34) und (3.35) zu:

$$\frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{1,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{g2,i}^{t+1}}{R_{gg}} + \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{2T_{g1,i}^{t+1} - T_{g1,i-1}^{t+1} - T_{g1,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g = 0, \quad (3.34)$$

$$\frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{2,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{g1,i}^{t+1}}{R_{gg}} + \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{2T_{g2,i}^{t+1} - T_{g2,i-1}^{t+1} - T_{g2,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g = 0. \quad (3.35)$$

In Abhängigkeit der verwendeten Transportgleichungen lassen sich somit zwei unterschiedliche numerische Modelle definieren:

- vollständig transientes Modell

Unter Verwendung von Gleichung (3.25) bis (3.27), (3.29), (3.30), (3.32) und (3.33)

ergibt sich, zu Lasten hohen Rechenzeiten, das Modell mit der höchsten Ergebnisgüte.

- semi-transientes Modell

Unter Verwendung von Gleichung (3.25) bis (3.27) und (3.32) bis (3.35) ergibt sich ein Modell, welches alle Komponenten, außer dem Füllmaterial, transient beschreibt.

Die vorgestellten Modellgleichungen werden, um sie einfacher darstellen zu können, vereinfacht und mit  $\sum \alpha_i T_i = T_k$  angeschrieben. In Gleichung (3.36) ist das resultierende Gleichungssystem einer horizontalen Schicht für das vollständig transiente Modell dargestellt:

$$EQS^{1U} : \begin{cases} \alpha_1^{(1)} T_{1,i-1} + \alpha_2^{(1)} T_{1,i} + \alpha_3^{(1)} T_{1,i+1} + \alpha_4^{(1)} T_{g1,i} = T_{1,i} \\ \alpha_3^{(1)} T_{2,i-1} + \alpha_2^{(1)} T_{2,i} + \alpha_1^{(1)} T_{2,i+1} + \alpha_4^{(1)} T_{g2,i} = T_{2,i} \\ \alpha_1^{(2)} T_{1,i} + \alpha_2^{(2)} T_{g1,i-1} + \alpha_3^{(2)} T_{g1,i} + \alpha_2^{(2)} T_{g1,i+1} + \alpha_4^{(2)} T_{g2,i} + \alpha_5^{(2)} T_{b,i} = T_{g1,i} \\ \alpha_1^{(2)} T_{2,i} + \alpha_2^{(2)} T_{g2,i-1} + \alpha_3^{(2)} T_{g2,i} + \alpha_2^{(2)} T_{g2,i+1} + \alpha_4^{(2)} T_{g1,i} + \alpha_5^{(2)} T_{b,i} = T_{g2,i} \\ \alpha_1^{(3)} T_{g1,i} + \alpha_1^{(3)} T_{g2,i} + \alpha_2^{(3)} T_{b,i} + \alpha_3^{(3)} T_{s1,i} = 0 \\ \alpha_1^{(4)} T_{b,i} + \alpha_2^{(4)} T_{s1,i-1} + \alpha_3^{(4)} T_{s1,i} + \alpha_2^{(4)} T_{s1,i+1} + \alpha_4^{(4)} T_{s2,i} = T_{s1,i} \\ \alpha_1^{(j+3)} T_{s(j-1),i} + \alpha_2^{(j+3)} T_{sj,i-1} + \alpha_3^{(j+3)} T_{sj,i} + \alpha_2^{(j+3)} T_{sj,i+1} + \\ \alpha_4^{(j+3)} T_{s(j+1),i} = T_{sj,i} \quad 2 \leq j < n \end{cases} \quad (3.36)$$

Die Koeffizienten  $\alpha_i$  sind in Anhang B.2 zusammen gefasst. Zusammen mit dem Lösungsvektor für eine horizontale Schicht

$$\mathbf{T}_{1S} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_{g1} & T_{g2} & T_b & T_{s1} & \cdots & T_{sn} \end{bmatrix}^T \quad (3.37)$$

und den Matrizen  $\boldsymbol{\alpha}_1$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_2$  und  $\boldsymbol{\alpha}_3$  aus Anhang B.2 lässt sich das lineare Gleichungssystem  $EQS^{1U}$  nach Gleichung (3.36) für eine horizontale Schicht folgendermaßen aufstellen:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1S,i-1} \\ \mathbf{T}_{1S,i} \\ \mathbf{T}_{1S,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_{g1} & T_{g2} & 0 & T_{s1} & \cdots & T_{s(n-1)} \end{bmatrix}^T. \quad (3.38)$$

Durch Kombination mehrerer Gleichungssysteme (3.38) für eine Schicht kann die Rohrsonde in beliebig viele horizontale Schichten diskretisiert werden. In Kapitel 3.5 ist der Aufbau des gesamten Gleichungssystems näher beschrieben.

### 3.4 2U-Rohrsonde

In Abbildung 3.6 ist das dreidimensionale WKM der 2U-Rohrsonde für die drei Schichten  $i - 1$  bis  $i + 1$  dargestellt. Nachfolgend werden in Anlehnung an Gleichung (3.8) die Transportgleichungen für jeden Knoten der Schicht  $i$  aufgestellt. Die thermischen Widerstände können aus Kapitel 2.1.3 bzw. 2.2 entnommen werden.

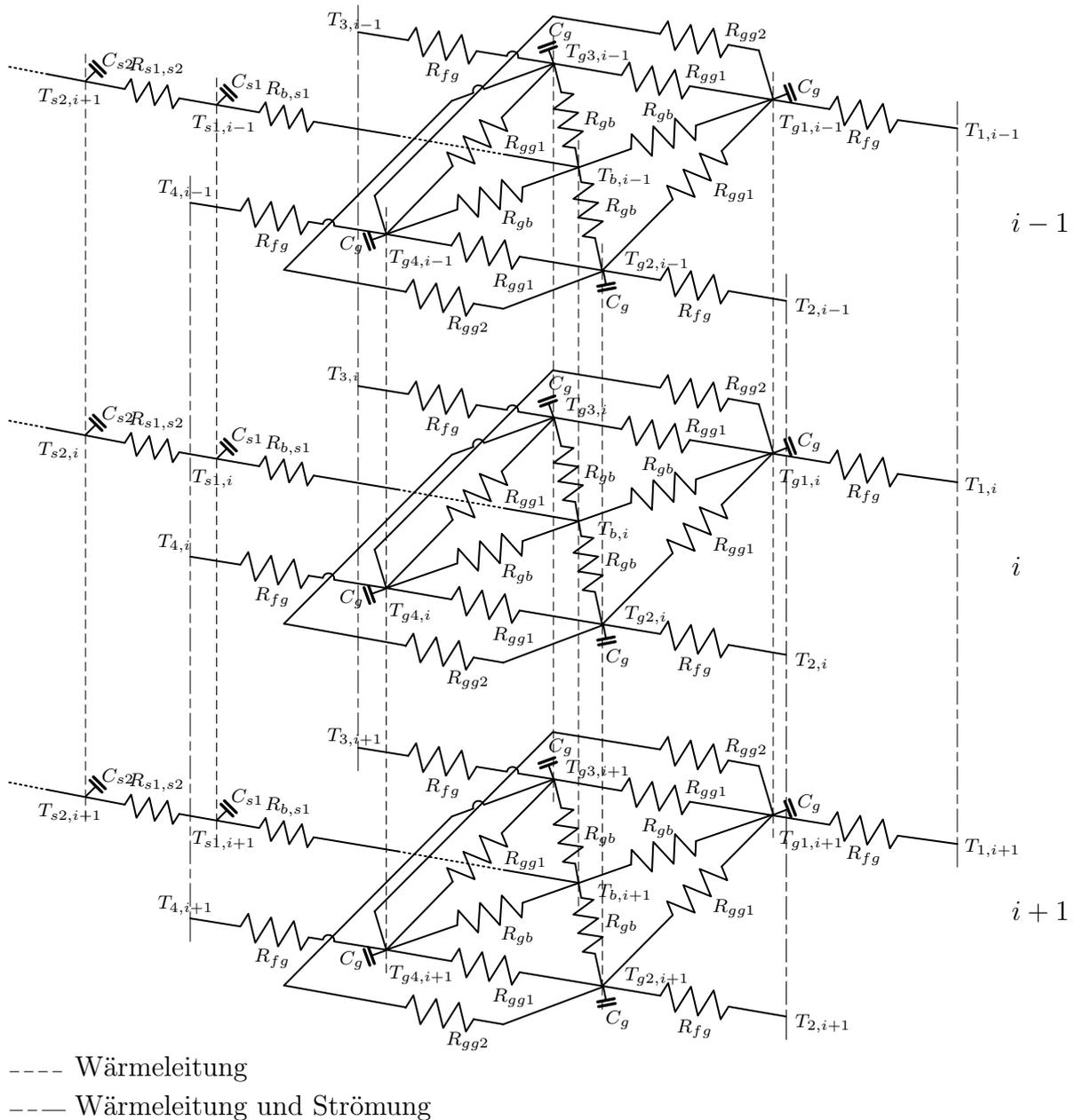


Abbildung 3.6: Vertikale Verbindung mehrerer zweidimensionaler WKM zu einem dreidimensionalen WKM einer 2U-Rohrsonde.

Der transiente Wärmetransport im Untergrund kann für die Schicht  $i$  mit Gleichung (3.39) und (3.40) folgendermaßen beschrieben werden:

$$\frac{T_{s1,i}^{t+1} - T_{s1,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_{s1}} \left[ \frac{T_{s1,i}^{t+1} - T_{s2,i}^{t+1}}{R_{s1,s2}} + \frac{T_{s1,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{b,s1}} + \frac{2T_{s1,i}^{t+1} - T_{s1,i-1}^{t+1} - T_{s1,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_s A_{s1} \right] = 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{T_{sj,i}^{t+1} - T_{sj,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_s} \left[ \frac{T_{sj,i}^{t+1} - T_{s(j+1),i}^{t+1}}{R_{sj,s(j+1)}} + \frac{T_{sj,i}^{t+1} - T_{s(j-1),i}^{t+1}}{R_{s(j-1),sj}} + \frac{2T_{sj,i}^{t+1} - T_{sj,i-1}^{t+1} - T_{sj,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_s A_{sj} \right] = 0. \quad (3.40)$$

Gleichung (3.40) gilt für  $2 \leq j < n$  Knoten.

Die Bohrlochwand besitzt kein Volumen und damit auch keine thermische Kapazität. Dadurch lässt sich der Energietransport zwischen den Knoten des Füllmaterials und den Knoten des Untergrunds stationär betrachten:

$$\frac{T_{b,i}^{t+1} - T_{s1,i}^{t+1}}{R_{b,s1}} + \frac{T_{b,i}^{t+1} - T_{g1,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{T_{b,i}^{t+1} - T_{g2,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{T_{b,i}^{t+1} - T_{g3,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{T_{b,i}^{t+1} - T_{g4,i}^{t+1}}{R_{gb}} = 0. \quad (3.41)$$

Der Energietransport in den Knoten des Füllmaterials erfolgt ausschließlich durch Wärmeleitung zwischen den Knoten des Füllmaterials untereinander, der Bohrlochwand und dem Fluid. Durch die symmetrische Aufteilung des Füllmaterials ergibt sich die horizontale Wärmeübertragungsfläche zu

$$A_g = A_{g1} = A_{g2} = A_{g3} = A_{g4} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{d_b^2}{4} - d_a^2 \right). \quad (3.42)$$

Damit können die Transportgleichungen der Knoten des Füllmaterials mit Gleichung (3.43) bis (3.46) folgendermaßen bestimmt werden:

$$\frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{g1,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_g} \left[ \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{1,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{g2,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{g4,i}^{t+1}}{R_{gg2}} + \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{g3,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{2T_{g1,i}^{t+1} - T_{g1,i-1}^{t+1} - T_{g1,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g \right] = 0, \quad (3.43)$$

$$\frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{g2,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_g} \left[ \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{2,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{g1,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{g3,i}^{t+1}}{R_{gg2}} + \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{g4,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{2T_{g2,i}^{t+1} - T_{g2,i-1}^{t+1} - T_{g2,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g \right] = 0, \quad (3.44)$$

$$\frac{T_{g3,i}^{t+1} - T_{g3,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_g} \left[ \frac{T_{g3,i}^{t+1} - T_{3,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g3,i}^{t+1} - T_{g2,i}^{t+1}}{R_{gg2}} + \frac{T_{g3,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{T_{g3,i}^{t+1} - T_{g4,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{T_{g3,i}^{t+1} - T_{g1,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{2T_{g3,i}^{t+1} - T_{g3,i-1}^{t+1} - T_{g3,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g \right] = 0, \quad (3.45)$$

$$\frac{T_{g4,i}^{t+1} - T_{g4,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_g} \left[ \frac{T_{g4,i}^{t+1} - T_{4,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g4,i}^{t+1} - T_{g1,i}^{t+1}}{R_{gg2}} + \frac{T_{g4,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{T_{g4,i}^{t+1} - T_{g3,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{T_{g4,i}^{t+1} - T_{g2,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{2T_{g4,i}^{t+1} - T_{g4,i-1}^{t+1} - T_{g4,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g \right] = 0. \quad (3.46)$$

Der Energietransport in den Rohren erfolgt durch Strömung des Fluids in den Rohren und durch Wärmeleitung zwischen Fluid und Füllmaterial. Durch die Symmetrie der U-Rohre ergeben sich idente Querschnittsflächen für das Fluid:

$$A_f = A_{f1} = A_{f2} = A_{f3} = A_{f4} = \frac{d_i^2 \pi}{4}. \quad (3.47)$$

Die Transportgleichungen des Fluids in den Rohren ist für 2U-Rohrsonden von der Beschaltung der Rohre abhängig, siehe Abbildung 2.5. Je nach Konfiguration der Rohre muss im Konvektionsterm die Temperatur des Fluids entgegen der Strömungsrichtung eingesetzt werden. Diese Abhängigkeit wird durch den Parameter  $k$  wiedergegeben:

$$k = \begin{cases} 1, & \text{für diagonal liegende Rohre} \\ -1, & \text{für benachbart liegende Rohre} \end{cases} \quad (3.48)$$

Damit können die Transportgleichungen des Fluids in den vier Rohren wie folgt angeschrie-

ben werden:

$$\frac{T_{1,i}^{t+1} - T_{1,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_f} \left[ \frac{T_{1,i}^{t+1} - T_{g1,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{2T_{1,i}^{t+1} - T_{1,i-1}^{t+1} - T_{1,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_f A_f + \frac{T_{1,i}^{t+1} - T_{1,i-k}^{t+1}}{\Delta z} \dot{m}_f c_{p,f} \right] = 0, \quad (3.49)$$

$$\frac{T_{2,i}^{t+1} - T_{2,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_f} \left[ \frac{T_{2,i}^{t+1} - T_{g2,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{2T_{2,i}^{t+1} - T_{2,i-1}^{t+1} - T_{2,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_f A_f + \frac{T_{2,i}^{t+1} - T_{2,i+k}^{t+1}}{\Delta z} \dot{m}_f c_{p,f} \right] = 0, \quad (3.50)$$

$$\frac{T_{3,i}^{t+1} - T_{3,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_f} \left[ \frac{T_{3,i}^{t+1} - T_{g3,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{2T_{3,i}^{t+1} - T_{3,i-1}^{t+1} - T_{3,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_f A_f + \frac{T_{3,i}^{t+1} - T_{3,i-1}^{t+1}}{\Delta z} \dot{m}_f c_{p,f} \right] = 0, \quad (3.51)$$

$$\frac{T_{4,i}^{t+1} - T_{4,i}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_f} \left[ \frac{T_{4,i}^{t+1} - T_{g4,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{2T_{4,i}^{t+1} - T_{4,i-1}^{t+1} - T_{4,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_f A_f + \frac{T_{4,i}^{t+1} - T_{4,i+1}^{t+1}}{\Delta z} \dot{m}_f c_{p,f} \right] = 0. \quad (3.52)$$

Die transiente Beschreibung des Wärmetransports macht die Berechnung oft sehr zeitintensiv. So kann es für bestimmte Anwendungen hinreichend sein, den Wärmetransport im Füllmaterial stationär zu beschreiben. Die Gleichung (3.43) bis (3.46) vereinfachen sich dementsprechend nach Gleichung (3.53) bis (3.56) zu:

$$\frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{1,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{g2,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{g4,i}^{t+1}}{R_{gg2}} + \frac{T_{g1,i}^{t+1} - T_{g3,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{2T_{g1,i}^{t+1} - T_{g1,i-1}^{t+1} - T_{g1,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g = 0, \quad (3.53)$$

$$\frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{2,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{g1,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{g3,i}^{t+1}}{R_{gg2}} + \frac{T_{g2,i}^{t+1} - T_{g4,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{2T_{g2,i}^{t+1} - T_{g2,i-1}^{t+1} - T_{g2,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g = 0, \quad (3.54)$$

$$\frac{T_{g3,i}^{t+1} - T_{3,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g3,i}^{t+1} - T_{g2,i}^{t+1}}{R_{gg2}} + \frac{T_{g3,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{T_{g3,i}^{t+1} - T_{g4,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{T_{g3,i}^{t+1} - T_{g1,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{2T_{g3,i}^{t+1} - T_{g3,i-1}^{t+1} - T_{g3,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g = 0, \quad (3.55)$$

$$\frac{T_{g4,i}^{t+1} - T_{4,i}^{t+1}}{R_{fg}} + \frac{T_{g4,i}^{t+1} - T_{g1,i}^{t+1}}{R_{gg2}} + \frac{T_{g4,i}^{t+1} - T_{b,i}^{t+1}}{R_{gb}} + \frac{T_{g4,i}^{t+1} - T_{g3,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{T_{g4,i}^{t+1} - T_{g2,i}^{t+1}}{R_{gg1}} + \frac{2T_{g4,i}^{t+1} - T_{g4,i-1}^{t+1} - T_{g4,i+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_g A_g = 0. \quad (3.56)$$

In Abhängigkeit der verwendeten Transportgleichungen lassen sich somit zwei unterschiedliche numerische Modelle definieren:

- vollständig transientes Modell  
Unter Verwendung von Gleichung (3.39) bis (3.64), (3.43) bis (3.46) und (3.49) bis (3.52) ergibt sich, zu Lasten hohen Rechenzeiten, das Modell mit der höchsten Ergebnisgüte.
- semi-transientes Modell  
Unter Verwendung von Gleichung (3.39) bis (3.64) und (3.49) bis (3.56) ergibt sich ein Modell, welches alle Komponenten, außer dem Füllmaterial, transient beschreibt.

Die vorgestellten Modellgleichungen werden vereinfacht und mit  $\sum \alpha_i T_i = T_k$  angeschrieben. In Gleichung (3.57) ist das resultierende Gleichungssystem einer horizontalen Schicht für das

vollständig transiente Modell dargestellt:

$$EQS^{2U} : \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{2-k}^{(1)} T_{1,i-1} + \alpha_2^{(1)} T_{1,i} + \alpha_{2+k}^{(1)} T_{1,i+1} + \alpha_4^{(1)} T_{g1,i} = T_{1,i} \\ \alpha_3^{(1)} T_{2,i-1} + \alpha_2^{(1)} T_{2,i} + \alpha_1^{(1)} T_{2,i+1} + \alpha_4^{(1)} T_{g2,i} = T_{2,i} \\ \alpha_1^{(1)} T_{3,i-1} + \alpha_2^{(1)} T_{3,i} + \alpha_3^{(1)} T_{3,i+1} + \alpha_4^{(1)} T_{g3,i} = T_{3,i} \\ \alpha_{2+k}^{(1)} T_{4,i-1} + \alpha_2^{(1)} T_{4,i} + \alpha_{2-k}^{(1)} T_{4,i+1} + \alpha_4^{(1)} T_{g4,i} = T_{4,i} \\ \alpha_1^{(2)} T_{1,i} + \alpha_2^{(2)} T_{g1,i-1} + \alpha_3^{(2)} T_{g1,i} + \alpha_2^{(2)} T_{g1,i+1} + \alpha_4^{(2)} T_{g2,i} + \\ \alpha_4^{(2)} T_{g3,i} + \alpha_5^{(2)} T_{g4,i} + \alpha_6^{(2)} T_{b,i} = T_{g1,i} \\ \alpha_1^{(2)} T_{2,i} + \alpha_4^{(2)} T_{g1,i} + \alpha_2^{(2)} T_{g2,i-1} + \alpha_3^{(2)} T_{g2,i} + \alpha_2^{(2)} T_{g2,i+1} + \\ \alpha_5^{(2)} T_{g3,i} + \alpha_4^{(2)} T_{g4,i} + \alpha_6^{(2)} T_{b,i} = T_{g2,i} \\ \alpha_1^{(2)} T_{3,i} + \alpha_5^{(2)} T_{g1,i} + \alpha_4^{(2)} T_{g2,i} + \alpha_2^{(2)} T_{g3,i-1} + \alpha_3^{(2)} T_{g3,i} + \\ \alpha_2^{(2)} T_{g3,i+1} + \alpha_4^{(2)} T_{g4,i} + \alpha_6^{(2)} T_{b,i} = T_{g3,i} \\ \alpha_1^{(2)} T_{4,i} + \alpha_4^{(2)} T_{g1,i} + \alpha_5^{(2)} T_{g2,i} + \alpha_4^{(2)} T_{g3,i} + \alpha_2^{(2)} T_{g4,i-1} + \\ \alpha_3^{(2)} T_{g4,i} + \alpha_2^{(2)} T_{g4,i+1} + \alpha_6^{(2)} T_{b,i} = T_{g4,i} \\ \alpha_1^{(3)} T_{g1,i} + \alpha_1^{(3)} T_{g2,i} + \alpha_1^{(3)} T_{g3,i} + \alpha_1^{(3)} T_{g4,i} + \alpha_2^{(3)} T_{b,i} + \alpha_3^{(3)} T_{s1,i} = 0 \\ \alpha_1^{(4)} T_{b,i} + \alpha_2^{(4)} T_{s1,i-1} + \alpha_3^{(4)} T_{s1,i} + \alpha_2^{(4)} T_{s1,i+1} + \alpha_4^{(4)} T_{s2,i} = T_{s1,i} \\ \alpha_1^{(j+3)} T_{s(j-1),i} + \alpha_2^{(j+3)} T_{sj,i-1} + \alpha_3^{(j+3)} T_{sj,i} + \alpha_2^{(j+3)} T_{sj,i+1} + \\ \alpha_4^{(j+3)} T_{s(j+1),i} = T_{sj,i} \quad 2 \leq j < n \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Dieses Gleichungssystem ist von der Rohrkonfiguration aus Abbildung 2.5 abhängig. Die Koeffizienten können durch Einsetzen des Parameters  $k$  aus Gleichung (3.48) bestimmt werden. Die Koeffizienten  $\alpha_i$  sind in Anhang B.3 zusammen gefasst. Zusammen mit dem Lösungsvektor für eine horizontale Schicht

$$\mathbf{T}_{1S} = \left[ T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \quad T_{g1} \quad T_{g2} \quad T_{g3} \quad T_{g4} \quad T_b \quad T_{s1} \quad \cdots \quad T_{sn} \right]^T \quad (3.58)$$

und den Matrizen  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  aus Anhang B.3 lässt sich das lineare Gleichungssystem  $EQS^{2U}$  (3.57) für eine horizontale Schicht folgendermaßen aufstellen:

$$\left[ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \right] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1S,i-1} \\ \mathbf{T}_{1S,i} \\ \mathbf{T}_{1S,i+1} \end{bmatrix} = \left[ T_1 \quad \cdots \quad T_4 \quad T_{g1} \quad \cdots \quad T_{g4} \quad 0 \quad T_{s1} \quad \cdots \quad T_{s(n-1)} \right]^T. \quad (3.59)$$

Durch Kombination mehrerer Gleichungssysteme (3.59) für eine Schicht kann die Rohrsonde in beliebig viele horizontale Schichten diskretisiert werden. In Kapitel 3.5 ist der Aufbau des gesamten Gleichungssystems näher beschrieben.

## 3.5 Gleichungssysteme

Das resultierende Gleichungssystem für beliebig viele horizontale Schichten  $n$  und vertikale Schichten  $m$  ist unter Berücksichtigung der Koeffizienten aus Anhang B.1 bis B.3 für jeden Sonden-Typ identisch. Nachfolgend ist in zwei grundlegende Betrachtungsweisen zu unterscheiden. Einerseits wird der Untergrund nur bis zum Fuß der Sonde betrachtet. In Abbildung 3.7, links sind schematisch die Isothermen für diese Betrachtungsweise dargestellt. Es lässt sich leicht erkennen, dass der Untergrund unterhalb der Sonde thermisch nicht beeinflusst wird. Wohingegen ein anderer Ansatz darin besteht, den Untergrund und den darin auftretenden konduktiven Wärmetransport unterhalb der Sonde ebenfalls zu modellieren. In Abbildung 3.7, rechts sind schematisch die Isothermen für diese Betrachtungsweise dargestellt, wobei als Randbedingung jeweils konstante Temperaturen an allen Rändern angesetzt wurden. Es lässt sich leicht erkennen, dass der thermische Einflussbereich nicht am Fuß der Sonde endet. Wird zum Beispiel Wärme in den Untergrund eingespeist, wird ein Teil der Energie durch den Fuß der Sonde in Richtung Erdmittelpunkt fließen. Je nach Lade- bzw. Beladezyklus kann der konduktive Wärmetransport unterhalb der Sonde die Entzugsleistung beeinflussen. Allgemein ist davon auszugehen dass dieser Effekt mit sinkender Sondentiefe stärker ins Gewicht fällt, siehe Kapitel 4.5.

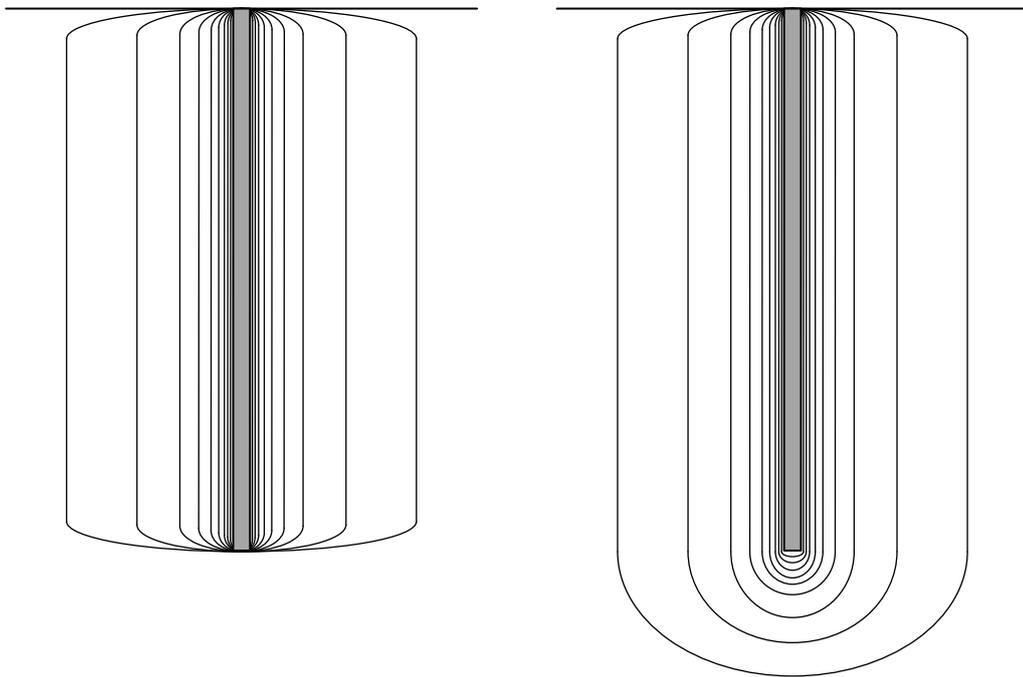


Abbildung 3.7: Schematische Darstellung der Isothermen des Untergrunds um eine Rohrsonde, wobei als Randbedingung jeweils konstante Temperaturen an allen Rändern angesetzt wurden. Links: Modellierung des Untergrunds nur bis zum Fuß der Sonde. Rechts: Modellierung des Untergrunds unterhalb der Sonde.



### 3.5.2 Konduktiver Wärmetransport unterhalb der Sonde

Die Wärmeleitung im Untergrund unterhalb der Sonde wird durch ein eigenes, vom Sonden-Typ unabhängiges WKM, berücksichtigt. Dieses muss in geeigneter Weise an das WKM der Rohrsonde angebunden werden. In erster Linie wird das Bohrloch, jedoch nicht die Rohre im Inneren, nach unten verlängert. Das Füllmaterial, sowie die Bohrlochwand weisen unterhalb der Sonden-Rohre in jeder Schicht eine einheitliche Temperatur auf. Eine genauere Auflösung des Bohrlochs ist aufgrund des kleinen Durchmessers in Bezug auf den Durchmesser des ungestörten Erdreichs nicht notwendig. Durch diese Annahmen ist das WKM des Untergrunds unterhalb der Sonde unabhängig vom jeweiligen Sonden-Typ einsetzbar. In Abbildung 3.8 ist exemplarisch das resultierende WKM für die CX-Rohrsonde dargestellt. Analog dazu sind die WKM der 1U- und 2U-Rohrsonde aufgebaut. Der Untergrund unterhalb der Sonde wird bis in eine Tiefe  $L + L_u$  in  $o$  Elemente aufgeteilt, wobei  $1 \leq k \leq o$  ist.

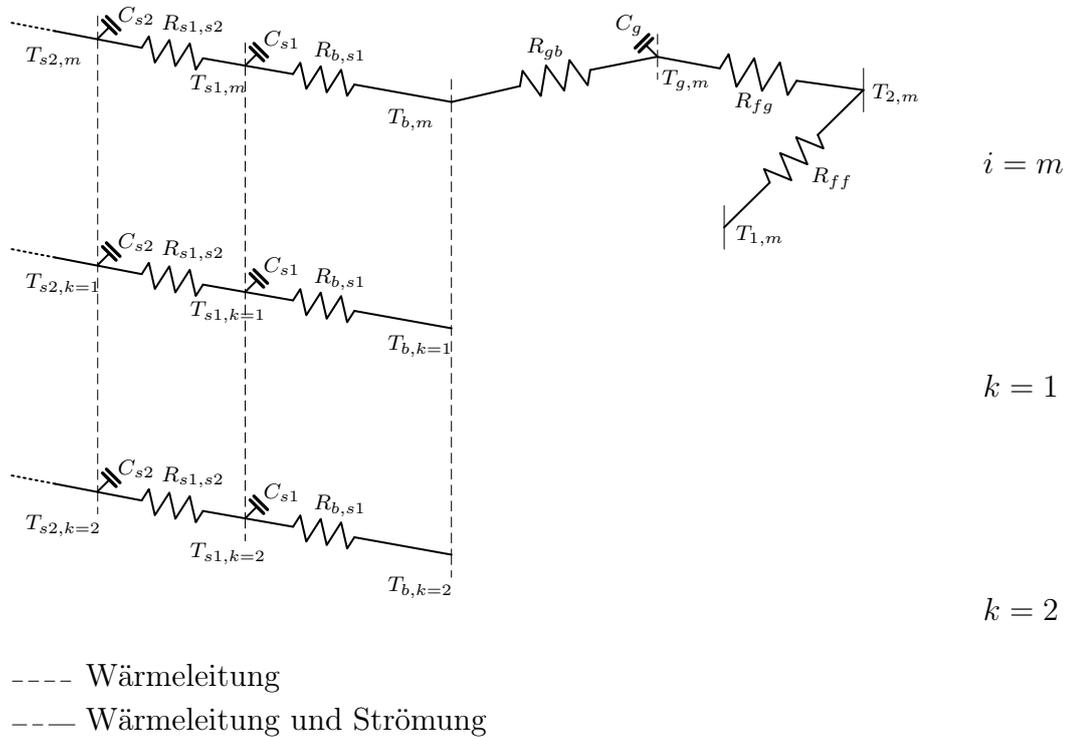


Abbildung 3.8: WKM der CX-Rohrsonde in Verbindung mit dem WKM des Untergrunds unterhalb der Sonde.

Der transiente Wärmetransport im Untergrund unterhalb der Sonde kann für die Schicht  $k$

mit Gleichung (3.62) und (3.63) folgendermaßen beschrieben werden:

$$\frac{T_{s1,k}^{t+1} - T_{s1,k}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_{s1}} \left[ \frac{T_{s1,k}^{t+1} - T_{s2,k}^{t+1}}{R_{s1,s2}} + \frac{T_{s1,k}^{t+1} - T_{b,k}^{t+1}}{R_{b,s1}} + \frac{2T_{s1,k}^{t+1} - T_{s1,k-1}^{t+1} - T_{s1,k+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_s A_{s1} \right] = 0, \quad (3.62)$$

$$\frac{T_{sj,k}^{t+1} - T_{sj,k}^t}{\Delta t} + \frac{1}{C_s} \left[ \frac{T_{sj,k}^{t+1} - T_{s(j+1),k}^{t+1}}{R_{sj,s(j+1)}} + \frac{T_{sj,k}^{t+1} - T_{s(j-1),k}^{t+1}}{R_{s(j-1),sj}} + \frac{2T_{sj,k}^{t+1} - T_{sj,k-1}^{t+1} - T_{sj,k+1}^{t+1}}{\Delta z^2} \lambda_s A_{sj} \right] = 0. \quad (3.63)$$

Gleichung (3.63) gilt für  $2 \leq j < n$  horizontale Knoten.

Die Bohrlochwand besitzt kein Volumen und damit auch keine thermische Kapazität. Dadurch lässt sich der Energietransport zwischen den Knoten des Füllmaterials und den Knoten des Untergrunds stationär betrachten:

$$\frac{T_{b,k}^{t+1} - T_{s1,k}^{t+1}}{R_{b,s1}} = 0. \quad (3.64)$$

Die vorgestellten Modellgleichungen werden vereinfacht und mit  $\sum \alpha_i T_i = T_k$  angeschrieben. In Gleichung (3.65) ist das resultierende Gleichungssystem einer horizontalen Schicht für das vollständig transiente Modell des Untergrunds unterhalb der Sonde dargestellt:

$$EQS : \begin{cases} \alpha_1^{(k)} T_{b,k} + \alpha_2^{(k)} T_{s1,k} = 0 \\ \alpha_1^{(4)} T_{b,k} + \alpha_2^{(4)} T_{s1,k-1} + \alpha_3^{(4)} T_{s1,k} + \alpha_2^{(4)} T_{s1,k+1} + \alpha_4^{(4)} T_{s2,k} = T_{s1,k} \\ \alpha_1^{(j+3)} T_{s(j-1),k} + \alpha_2^{(j+3)} T_{sj,k-1} + \alpha_3^{(j+3)} T_{sj,k} + \alpha_2^{(j+3)} T_{sj,k+1} + \\ \alpha_4^{(j+3)} T_{s(j+1),k} = T_{sj,k} \quad 2 \leq j < n \end{cases} \quad (3.65)$$

Dieses Gleichungssystem ist vom Sonden-Typ unabhängig. Die Koeffizienten  $\alpha_i$  sind in Anhang B.4 zusammen gefasst. Der Lösungsvektor für eine horizontale Schicht ist aufgrund der unterschiedlichen Anzahl an Füllmaterialelementen für die drei Sonden-Typen folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{T}_{1U}^{CX} = \left[ T_g \quad T_b \quad T_{s1} \quad \cdots \quad T_{sn} \right]^T, \quad (3.66)$$

$$\mathbf{T}_{1U}^{1U} = \left[ T_{g1} \quad T_{g2} \quad T_b \quad T_{s1} \quad \cdots \quad T_{sn} \right]^T, \quad (3.67)$$



## 3.6 Randbedingungen

In Abbildung 3.9 ist das Rechengebiet schematisch mit  $n$  radialen Schichten,  $m$  vertikalen Schichten und  $o$  Schichten unterhalb der Sonde dargestellt. Im Zentrum des rotationssymmetrischen Rechengebiets befindet sich die CX-, 1U- oder 2U-Rohrsonde. An den Rändern des

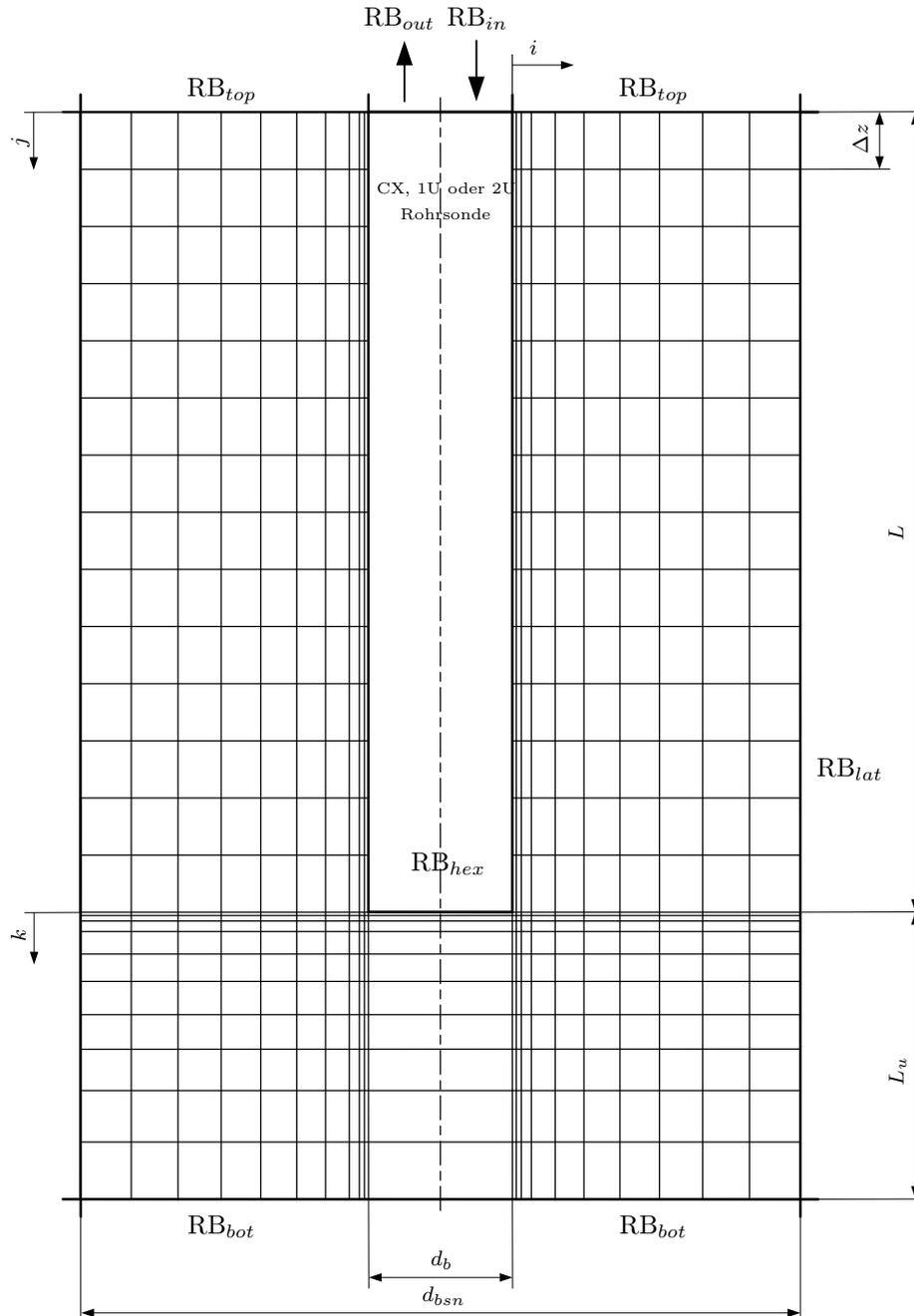


Abbildung 3.9: Vertikaler Schnitt durch das Rechengebiet einer Erdwärmesonde einschließlich dem rotationssymmetrischen umgebenden Untergrund (nicht maßstäblich).

Rechengebiets werden Dirichlet-Randbedingung aufgeprägt. Von Dirichlet-Randbedingung bzw. Randbedingung 1. Art spricht man, wenn die abhängige Variable am Rand direkt vorgegeben wird. In diesem Fall handelt es sich um eine Temperaturrandbedingung an den Rändern des Rechengebiets. Die zu den Randbedingungen korrespondierenden Matrizen sind in Kapitel B.1 bis B.4 zu finden.

### **Randbedingung Einlass - $RB_{in}$**

Am Eintritt der Sonde wird die Temperatur des eintretenden Fluids  $T_{in}$  vorgegeben. Bei der CX-Rohrsonde kann das Fluid je nach Betriebszustand in das Kernrohr oder in den Ringspalt eingebracht werden. Bei der 2U-Rohrsonde müssen bei paralleler Durchströmung zwei Eintrittstemperaturen  $T_{in,1}$  und  $T_{in,2}$  angegeben werden. Wird die 2U-Rohrsonde seriell durchströmt ist nur eine Eintrittstemperatur  $T_{in,1}$  anzugeben. Die Austrittstemperatur des 1. durchflossenen U-Rohres ist die Eintrittstemperatur in das 2. U-Rohr.

### **Randbedingung Auslass - $RB_{out}$**

Am Auslass der Rohrsonden wird die Temperatur der letzten Zelle ( $m = 1$ ) mit der Temperatur der vorletzten Zelle ( $m = 2$ ) gleichgesetzt. Diese Randbedingung ist nötig, um das Gleichungssystem vollständig zu definieren. Dadurch können in den letzten beiden Zellen vor dem Austritt Fluid und Untergrund keine Wärme miteinander austauschen. Die Austrittstemperatur kann sich ungestört entwickeln. Da aus der 2U-Rohrsonde zwei Fluideströme austreten, werden zwei anstatt der einen Gleichung bei CX- und 1U-Rohrsonden benötigt.

### **Randbedingung Richtungsumkehrung der Strömung - $RB_{hex}$**

Die Randbedingungen am Grund der Rohrsonden ist von der Konfiguration der Rohre abhängig. Im Wesentlichen handelt es sich dabei um die stationären Transportgleichung des Fluids in den Rohren. CX- und 1U-Rohrsonde benötigen im Vergleich zur 2U-Rohrsonde nur zwei statt vier Gleichungen.

### **Randbedingung Lateral - $RB_{lat}$**

In radialer Richtung kann durch konvektiven Transport von Grundwasser Wärme über die Systemgrenzen eingebracht werden. Das hat zur Folge, dass die Erdwärmesonden über ein Jahr nicht mehr bilanziert betrieben werden können. Das mag zunächst einen Vorteil bieten, ist aber in Bezug auf die nur schwer zu beschreibenden und möglicherweise alternieren-

den Grundwasserströmungen ein Nachteil, da sich die Betriebsweise zeitlich ändert. In dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell werden keine Grundwasserströmungen berücksichtigt. Am lateralen Rand der Rohrsonden wird für jeden Berechnungsschritt eine konstante Temperatur aufgeprägt. Will man die gegenseitige Beeinflussung von nebeneinander liegenden Rohrsonden berücksichtigen, ist die Temperatur an der lateralen Grenzschicht nach jedem Berechnungsschritt anzupassen. Die Temperatur kann mit der Annahme einer zylindrischen Wärmequelle, siehe [37] oder der Kelvin'schen Linienquellen-Methode, siehe [38] berücksichtigt werden. In erster Näherung wird davon ausgegangen, dass sich mehrere nebeneinander liegende Sonden thermisch nicht beeinflussen. Da die ein- und ausgespeicherte Energie stark von den Temperaturen der lateralen Schicht abhängt, ist es zweckmäßig einen möglichst realitätsnahen Temperaturverlauf heranzuziehen.

Im Allgemeinen steigt die Temperatur je näher man dem Erdinneren kommt. Der Temperaturunterschied zwischen zwei Punkten in unterschiedlicher Tiefe sorgt dafür, dass die Wärme in Richtung Erdoberfläche strömt. Dieser Temperaturunterschied kann als geothermischer Temperaturgradient oder geothermische Tiefenstufe<sup>3</sup> bezeichnet werden. In Mitteleuropa liegt der geothermische Temperaturgradient bei etwa 2,8 – 3,0 K/100 m. In den meisten Fällen ist die Wärmestromdichte Richtung Erdoberfläche von ca.  $65 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$  zu vernachlässigen [3]. Im Bereich der Erdoberfläche werden, lediglich die ersten 15 m von der vorherrschenden Witterung beeinflusst.<sup>4</sup> In Abbildung 3.10 ist der schematische Tem-

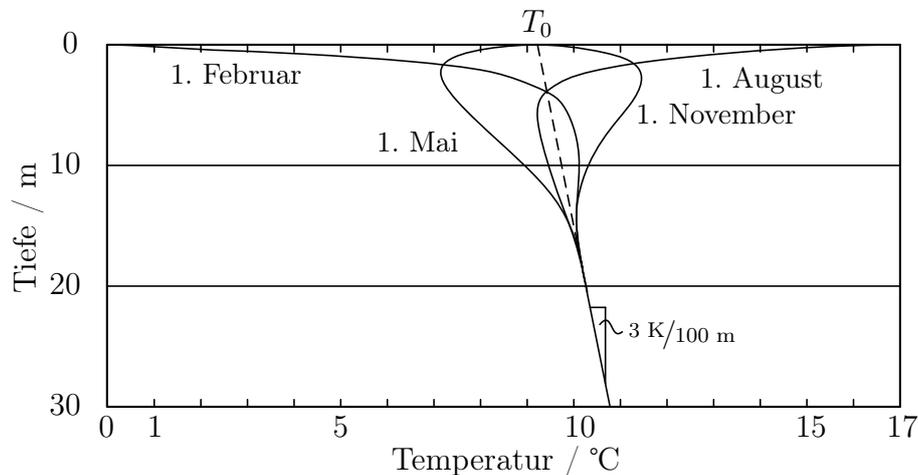


Abbildung 3.10: Schematischer Verlauf der Untergrundtemperatur für verschiedene Tage in den gemäßigten Breiten, nach [3].

peraturverlauf bis in eine Tiefe von 30 m dargestellt. Es lässt sich gut erkennen, dass der

<sup>3</sup>Genauer ist die geothermische Tiefenstufe der Kehrwert des geothermischen Temperaturgradienten. Die geothermische Tiefenstufe ist also jene Tiefendifferenz in der sich der Untergrund um 1 K erwärmt.

<sup>4</sup>Das ist auch der Grund, warum flache Erdwärmekollektoren bis in eine Tiefe von etwa 15 m streng genommen solare Energie und keine geothermische Energie ernten.

oberflächennahe Bereich stark von der aktuellen Jahreszeit beeinflusst wird. Ab einer Tiefe von etwa 15 m herrschen ganzjährig konstante Temperaturen um die 10 °C. Für das hier vorgestellte Modell ist, unter Vernachlässigung der gegenseitigen Beeinflussung mehrerer Sonden, einerseits der Datensatz eines Testreferenzjahres (TRY)<sup>5</sup> zur Modulation der Untergrundtemperatur zum Einsatz gekommen. Der Datensatz beinhaltet für die Marktgemeinde Gumpoldskirchen in Niederösterreich Bodentemperaturen in einer Tiefe von 0,1 m, 0,2 m und 0,5 m. Die Temperatur in einer Tiefe zwischen 0,5 m und bis zum Beginn der ungestörten Erdreichtemperatur in einer Tiefe von 15 m wurde mit Hilfe der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung gelöst. Ab einer Tiefe von 15 m nimmt die Temperatur konstant mit 3,0 K/100 m zu. Andererseits ist ein synthetischer Datensatz, welcher nur den geothermischen Temperaturgradient ab einer Tiefe von 0,5 m berücksichtigt, zum Einsatz gekommen. Die jahreszeitliche Schwankung der Temperatur in den ersten 15 m wurde also vernachlässigt, siehe strichlierte Linie in Abbildung 3.10.

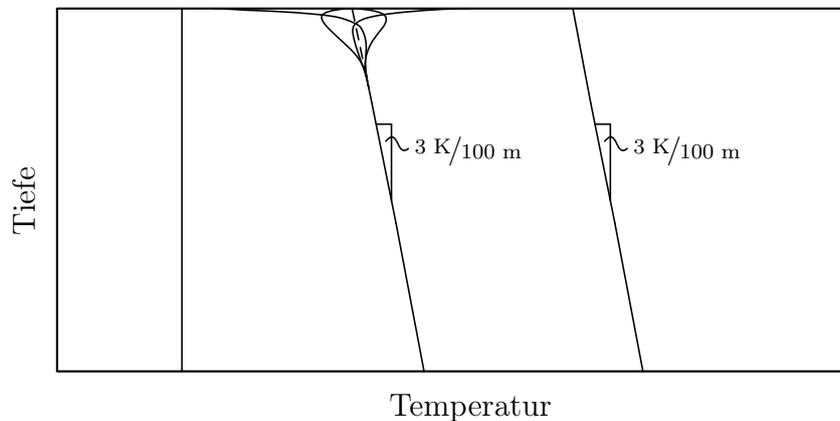


Abbildung 3.11: Schematischer Temperaturverlauf am lateralen Rand des Rechengebiets. Links: konstante Temperatur. Mitte: TRY Datensatz und geothermischer Temperaturgradient. Rechts: geothermischer Temperaturgradient.

In Abbildung 3.11 sind die drei Ansätze zur Bestimmung der Temperatur am lateralen Rand dargestellt. Die erste, am nächsten zur Erdoberfläche liegende Zelle befindet sich in einer Tiefe von 0,5 m. Wird der Untergrund unterhalb der Rohrsonde nicht modelliert, ergeben sich unabhängig vom Typ der Rohrsonde  $m$  Gleichungen mit den lateralen Temperaturen des umliegenden Erdreichs  $T_{soil,n,i}^{lat}$ , wobei  $1 \leq i \leq m$  gilt. Wird der Untergrund unterhalb der Rohrsonde berücksichtigt, ergeben sich  $m + o$  Gleichungen mit den lateralen Temperaturen

<sup>5</sup>Testreferenzjahre sind speziell zusammengestellte Datensätze, die für jede Stunde eines Jahres verschiedene meteorologische Daten wie: einfallende Solarstrahlung, Windstärke, Windrichtung, Luftfeuchtigkeit, Luft- und Bodentemperaturen enthalten. Die Daten werden üblicherweise abschnittsweise aus mehreren Datensätzen aus den vergangenen Jahren zusammengesetzt. Dadurch soll ein typischer jährlicher Witterungsverlauf repräsentiert werden. Zum Einsatz kommen solche Datensätze vor allem in Ingenieur Anwendungen wie Heizungs- und Lüftungssimulationen.

des umliegenden Erdreichs  $T_{soil,n,i/k}^{lat}$ , wobei  $1 \leq i \leq m$  und  $1 \leq k \leq o$  gilt.

### Randbedingung Oben - $RB_{top}$

Am oberen Rand des Rechengebiets, wo  $i=1$  ist, wird für die Knotentemperatur des Untergrunds und des Füllmaterials die Temperatur des Untergrunds in 0,5 m Tiefe aus dem TRY Datensatz oder dem synthetischen Datensatz angegeben. Unabhängig von der gewählten Rohrsonde ergeben sich  $n - 1$  Gleichungen für die Temperaturen des Untergrunds in der ersten Reihe und 1, 2 oder 4 Gleichungen für die Knoten des Füllmaterials in Abhängigkeit der gewählten Rohrsonde. Alternativ kann den obersten zwei Schichten auch die Randbedingung: Wärmestrom ist gleich Null, aufgeprägt werden. Dazu wird in den ersten beiden Reihen eine idente Temperatur in den übereinander liegenden Zellen angesetzt. Die homogene Neumann Randbedingung entspricht im Wesentlichen einer idealen Wärmedämmung zur Umgebung. Die Anzahl der Gleichungen verdoppelt sich zu  $2(n - 1)$  Gleichungen für den Untergrund und 2, 4 oder 8 Gleichungen für die Knoten des Füllmaterials in Abhängigkeit der gewählten Rohrsonde.

### Randbedingung Unten - $RB_{bot}$

In der letzten Reihe des Rechengebiets, wo  $k=0$  ist, wird die aus dem geothermischen Temperaturgradienten errechnete Temperatur in der Tiefe  $L + L_u + 0,5$  m aufgeprägt. Unabhängig von der gewählten Rohrsonde ergeben sich  $n - 1$  Gleichungen für die Temperaturen des Untergrunds. Der vom Erdinneren aufsteigende Wärmestrom ist mit lediglich  $65 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$  vernachlässigbar gering<sup>6</sup>.

## 3.7 Zellgröße

Bei numerischen Simulationen drängt sich unweigerlich die Frage nach der Anzahl bzw. der Größe der Zellen auf. Im Bereich der Bohrlochwand treten in radialer Richtung hohe Temperaturgradienten auf. Diese erfordern eine geringe Zellgröße. Die geringen Temperaturgradienten, in der Nähe des ungestörten Erdreichs, können hingegen mit größeren Zellen

<sup>6</sup>Gehen wir zunächst davon aus, dass die aus dem Erdreich aufsteigende Energie unter der Standfläche einer Badewanne mit ca.  $2 \text{ m}^2$  ideal, vollständig und ohne Berücksichtigung des vorliegenden Temperaturniveaus in sensible Wärme umgewandelt werden kann. Mit der vom Erdinneren aufsteigenden Energie wäre es im Laufe eines Jahres möglich, die Temperatur von 200 l Badewasser um etwas weniger als 5 K zu erhöhen.

diskretisiert werden. Um diese Problematik besser abbilden zu können, sei an dieser Stelle der Streckungsfaktor  $f$  eingeführt. Der Streckungsfaktor vergrößert die nächstgelegene Zelle, in Bezug auf die Zelle davor, um einen konstanten Faktor. In Abbildung 3.12 sind die Radien für jeweils 20 Zellen in radialer Richtung dargestellt. Die Bohrlochwand befindet sich bei  $d_b/2 = 0,075$  m und die letzte radiale Zelle endet bei  $d_{bsn}/2 = 2$  m. Es lässt sich gut erkennen, dass mit steigendem Streckungsfaktor die Größe der ersten Zelle an der Bohrlochwand abnimmt.

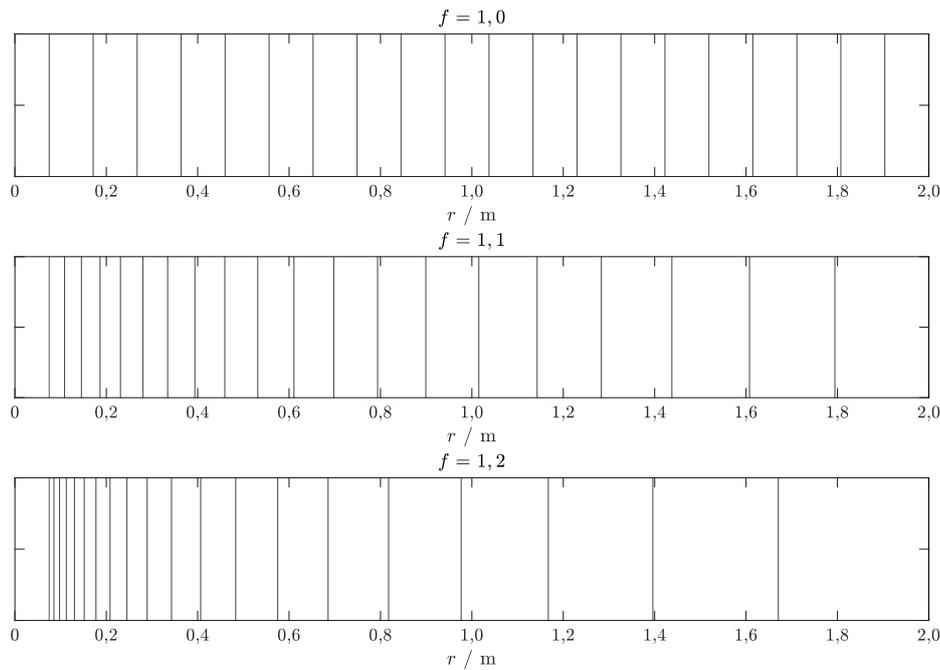


Abbildung 3.12: Begrenzende Radien für 20 Zellen mit unterschiedlichen Streckungsfaktoren. Oben:  $f = 1,0$ . Mitte:  $f = 1,1$ . Unten:  $f = 1,2$ .

Ein großer Vorteil durch den Einsatz von Streckungsfaktoren ergibt sich durch die deutlich verbesserte Auflösung in der Nähe großer Temperaturgradienten. Dadurch ist es möglich, bei identer Anzahl an Elementen, präzisere Ergebnisse zu erzielen. Andererseits kann durch Reduktion der Elemente die Rechenzeit verkürzt werden. Wie in Abbildung 3.9 angedeutet, ist es sinnvoll, die Zellen in radialer Richtung, sowie die Zellen unterhalb der Rohrsonde zu strecken. In axialer Richtung sind im Bereich der Sonde keine großen Temperaturgradienten zu erwarten, eine Streckung der Zellen ist daher nicht sinnvoll. In Abbildung 3.13 ist die kleinste Elementgröße am Rand des Bohrlochs über der Anzahl der Elemente für unterschiedliche Streckungsfaktoren aufgetragen. Will man die erste Zelle an der Bohrlochwand mit einer Dicke von  $\Delta e_{r,min} = 4,8125$  mm ausführen, sind 400 äquidistante Zellen notwendig. Bei einem Streckungsfaktor von  $f = 1,1$  werden nur mehr 39 Zellen benötigt. Bei einem Streckungsfaktor von  $f = 1,2$  reduzieren sich die benötigten Zellen auf 24 Elemente. Ein

anderer Ansatz bestehen darin, die Anzahl der Zellen zu bestimmen und das Randgebiet an der Bohrlochwand sehr genau aufzulösen. Der Rechenaufwand ist nur von der Anzahl der Zellen und nicht von der Zellgröße abhängig. Für  $n = 400$  Zellen in radialer Richtung ergibt sich, bei einem Streckungsfaktor von  $f = 1$ , eine konstante Zellgröße von  $\Delta e_r = 4,8125$  mm. Bei einem Streckungsfaktor von  $f = 1,1$  bzw.  $f = 1,2$  ergibt sich eine minimale Zellgröße von  $\Delta e_{r,min} = 5,3377 \cdot 10^{-15}$  mm bzw.  $\Delta e_{r,min} = 8,1839 \cdot 10^{-30}$  mm. Derartig kleine Zellen kommen in der Praxis nicht zum Einsatz. Es soll an dieser Stelle lediglich der Einfluss des Streckungsfaktors verdeutlicht werden.<sup>7</sup>

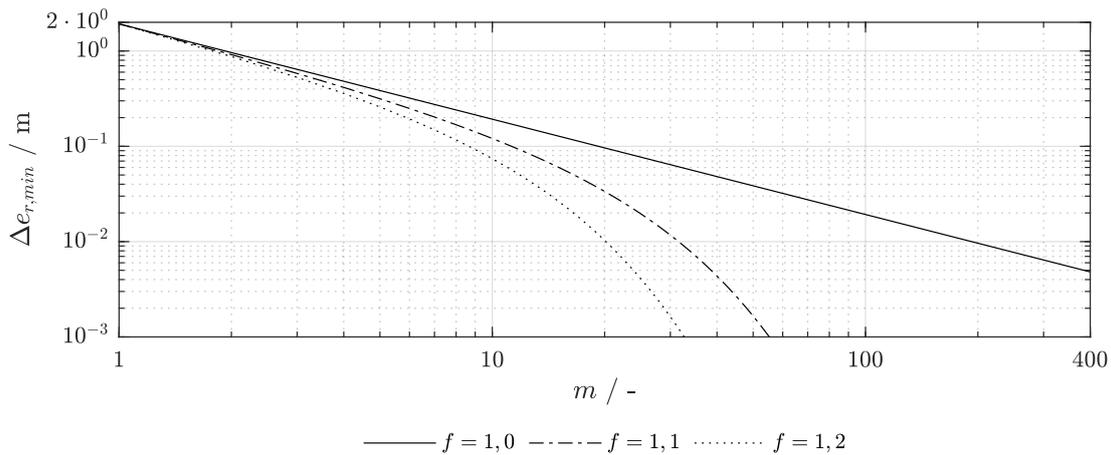


Abbildung 3.13: Minimale Zellgröße an der Bohrlochwand in radialer Richtung über der Anzahl an radialen Elementen für verschiedene Streckungsfaktoren, bei einem Sondendurchmesser von  $d_b = 0,15$  m und einer radialen Ausdehnung des Rechengebiets auf  $d_{bsn}/2 = 2$  m.

<sup>7</sup>Das ist mit der Grund dafür, dass  $\Delta e_{r,min}$  in Abbildung 3.13 nur bis  $10^{-3}$  m aufgetragen ist.

## 4 Numerische Analyse

In diesem Abschnitt werden Analysen mit den erstellten Modellen durchgeführt. Als erstes werden unterschiedliche Methoden zur Bestimmung der thermischen Widerstände des Füllmaterials und des Bohrlochs miteinander verglichen. Weiters ist es notwendig zu belegen, dass die Modelle in sich konsistent sind. Dazu wird die systematische Abweichung<sup>1</sup> bei unterschiedlichen zeitlichen und räumlichen Diskretisierungen näher untersucht. Ziel ist es, eine Diskretisierung zu finden, welche bei vertretbarer Rechenzeit eine minimale systematische Abweichung liefert. In weiterer Folge wird der Druckverlust aufgrund von Rohrreibung, sowie die sich einstellenden Temperaturverläufe über der Sondentiefe näher untersucht. Eine wesentliche Kenngröße von Rohrsonden ist die Übertragungsleistung. So werden in weiterer Folge Zusammenhänge zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Sondentiefe auf die Übertragungsleistung eingehender diskutiert.

### 4.1 Thermische Widerstände

#### 4.1.1 Thermischer Widerstand des Füllmaterials

Nicht alle in Kapitel 2.2 vorgestellten Methoden können den thermischen Widerstand des Bohrlochs für 1U- und 2U-Rohrsonden bestimmen. Daher werden nachfolgend nur die Methode des äquivalenten Durchmessers nach Shonder et al. [25], die von Bauer et al. [4] vorgestellte empirische Methode und die *Multipole Method* nach [21] und [32] miteinander verglichen. In Abbildung 4.1 sind die berechneten thermischen Widerstände für 1U- (links) und 2U-Rohrsonden (rechts) über der Wärmeleitfähigkeit des Füllmaterials  $\lambda_g$  dargestellt.

---

<sup>1</sup>Gerne wird in diesem Zusammenhang auch von einem systematischen Fehler gesprochen. Diese Bezeichnung ist noch im Sprachgebrauch verankert aber nicht mehr normgerecht, siehe [39]

Weiter ist  $R_g$  für drei unterschiedliche Schenkelabstände

$$s = 0,060 \text{ m}, \quad s = 0,083 \text{ m} \quad \text{und} \quad s = 0,105 \text{ m} \quad (4.1)$$

nach Abbildung 2.2 aufgetragen. Die Re-Zahl beträgt für beide Rohrsonden  $Re = 1,9454 \cdot 10^4$ . Damit ist die Strömung voll turbulent ausgebildet. Bei dem kleinsten Schenkelabstand berühren sich die U-Rohre annähernd. Analog dazu berühren die U-Rohre mit dem größten Schenkelabstand annähernd die Außenwand des Bohrlochs. Die weiteren den Diagrammen in Abbildung 4.1 zugrunde liegenden Parameter sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Tabelle 4.1: Parameter zur Berechnung der thermischen Widerstände des Füllmaterials.

Geometrische Parameter			Thermophysikalische Parameter		
$d_i$	0,0326	m	$c_{p,f}$	4184,0	$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$
$d_a$	0,04	m	$\rho_f$	998,2	$\text{kgm}^{-3}$
$d_b$	0,15	m	$\lambda_b$	2,0	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
			$\lambda_g$	0,6 – 3,6	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
			$\lambda_f$	0,5893	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

Für jeden Schenkelabstand und Rohrsondentyp findet sich eine Kurvenschar mit zwei Linien für die *Multipole Method* (0. und 1. Ordnung) und einer Linie für die von Bauer entwickelte Methode. Lediglich die Methode des äquivalenten Durchmessers liefert, unabhängig vom Schenkelabstand, nur eine Linie. Für die 1U-Rohrsonde und den mittleren Schenkelabstand liegt der Widerstand nach der Methode des äquivalenten Durchmessers annähernd im Bereich der berechneten Werte nach der *Multipole Method* 1. Ordnung. Mit Ausnahme des Widerstands nach der Methode des äquivalenten Durchmessers, liefern alle anderen Berechnungsmethoden für die 2U-Rohrsonde in etwa doppelt so hohe Werte. Dieses Verhalten ist damit zu begründen, dass der äquivalente Durchmesser  $d_{eq}$  für 2U-Rohrsonden größer ist als für 1U-Rohrsonden und in Gleichung (2.44) im Nenner des Logarithmus eingeht.

Wie in Abbildung 4.1 ersichtlich, ist die relative Abweichung nur für mittlere Schenkelabstände bei 1U-Rohrsonden und große Schenkelabstände bei 2U-Rohrsonden bezogen auf die *Multipole Method* 1. Ordnung zu vernachlässigen. Die von Bauer entwickelte Methode liefert im Allgemeinen zu geringe Werte für die thermischen Widerstände und hat ihre Schwächen eindeutig bei großen Schenkelabständen. Für 1U-Rohrsonden mit großem Schenkelabstand liegt die maximale Abweichung bei  $\lambda_g = 0,6 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  bezogen auf die *Multipole Method* 1. Ordnung bei über 66 %. Für den kleinen und mittleren Schenkelabstand liegt die Abweichung bei  $\lambda_g = 0,6 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  unter 5 % und erhöht sich mit steigendem  $\lambda_g$  auf knapp

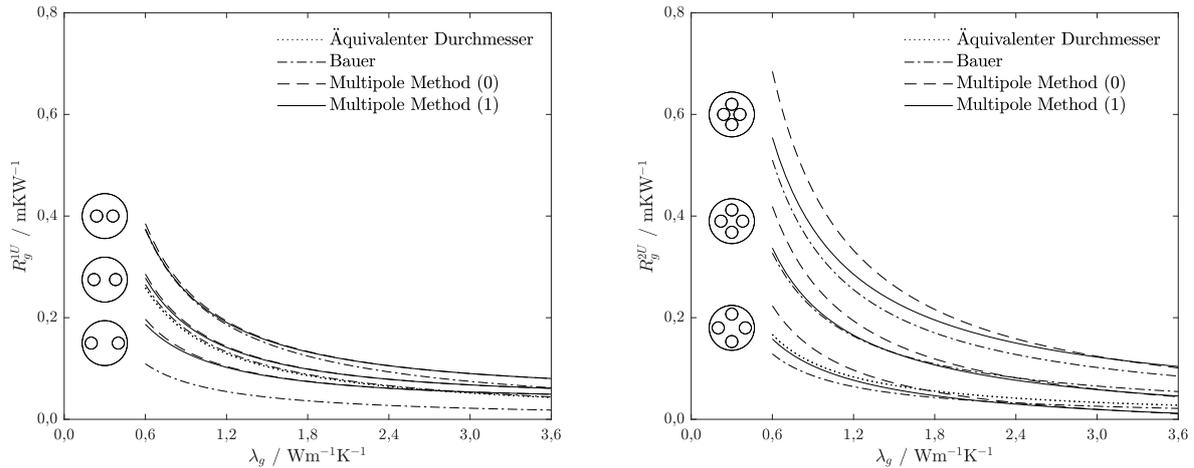


Abbildung 4.1: Thermischer Widerstand des Bohrlochs  $R_g$  für 1U-Rohrsonden (links) und 2U-Rohrsonden (rechts) in Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit des Füllmaterials  $\lambda_g$  bei einer voll ausgebildeten turbulenten Strömung mit  $Re > 10^4$ .

23 %. Die relative Abweichung zwischen *Multipole Method 0.* und 1. Ordnung beträgt für 1U-Rohrsonden maximal 3 % und für 2U-Rohrsonden maximal 22 % und sinkt mit steigender Wärmeleitfähigkeit. Für die nachfolgende Berechnung wird aufgrund der hohen Genauigkeit bei vertretbarem Rechenaufwand auf die *Multipole Method 1.* Ordnung gesetzt.

Für die Analyse des thermischen Widerstands des Bohrlochs wird die Wärmeleitfähigkeit des Füllmaterials  $\lambda_g$  zwischen  $0,6 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  und  $3,6 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  variiert. Im Allgemeinen sollte die Wärmeleitfähigkeit des Füllmaterials so groß wie möglich sein. Dadurch lässt sich mit geringem Aufwand die Effizienz von Rohrsonden steigern. In der Praxis liegt die Wärmeleitfähigkeit von Füllmaterialien zwischen  $0,8 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  und  $2,4 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Häufig werden kostengünstige Betonit/Zement/Sand-Mischung mit einer relativ geringen Wärmeleitfähigkeit von  $0,8 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  eingesetzt. [40]

#### 4.1.2 Thermischer Widerstand des Bohrlochs

Der thermische Widerstand  $R_b^*$  steigt mit zunehmender Bohrlochtiefe und sinkendem Volumenstrom an, siehe 2.4. Um dieses Verhalten besser untersuchen zu können, sind die lokalen und effektiven thermischen Widerstände in Abbildung 4.2 für Bohrlochtiefen von 50 m bis 400 m und einen Volumenstrom von  $V_f = 1,8 \text{ m}^3\text{h}^{-1}$  dargestellt. Der Schenkellabstand beträgt  $s = 0,074 \text{ m}$ . Die den Diagrammen in Abbildung 4.2 und 4.3 zugrunde liegenden Parameter sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Es lässt sich in Abbildung 4.2 unschwer erkennen, dass die thermischen Widerstände für 1U-Rohrsonden um etwa ein Drittel größer sind als für 2U-Rohrsonden. Im Gegensatz zu den konstanten lokalen thermischen Widerständen des Bohrlochs steigen die effektiven thermischen Widerstände des Bohrlochs exponentiell mit der Tiefe an. In einer Tiefe von 100 m beträgt der relative Unterschied zwischen den lokalen und effektiven Widerständen etwa 2 – 3 % und kann durchaus vernachlässigt werden. In einer Tiefe von 300 m beträgt der relative Unterschied bereits 17 – 28 %. Des Weiteren vergrößert sich mit steigender Tiefe die Abweichung zwischen den beiden Randbedingungen UWT (Uniform Wall Temperatur) und UHF (Uniform Heat Flux), siehe strich punktierte Linie (UWT) und punktierte Linie (UHF).

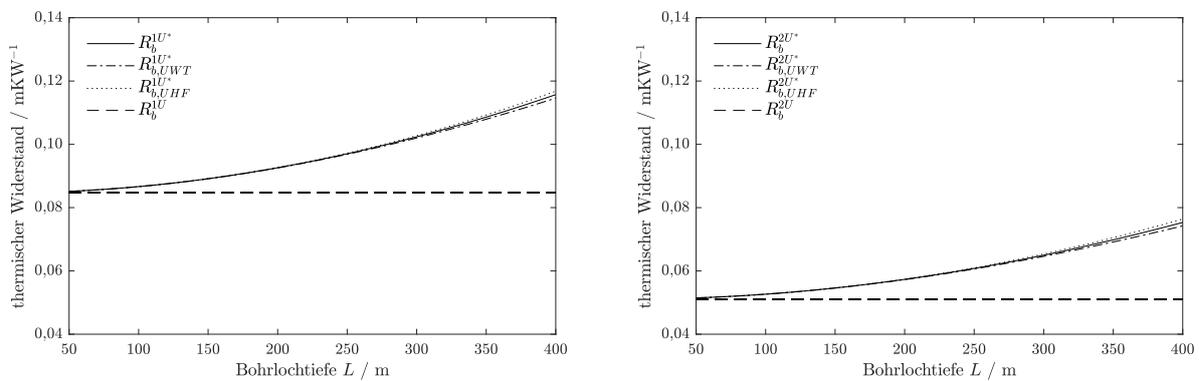


Abbildung 4.2: Effektiver thermischer Widerstand des Bohrlochs  $R_b^*$  für 1U-Rohrsonden (links) und 2U-Rohrsonden (rechts) in Abhängigkeit der Bohrlöchtiefe bei einem Volumenstrom von  $V = 1,8 \text{ m}^3\text{h}^{-1}$ .

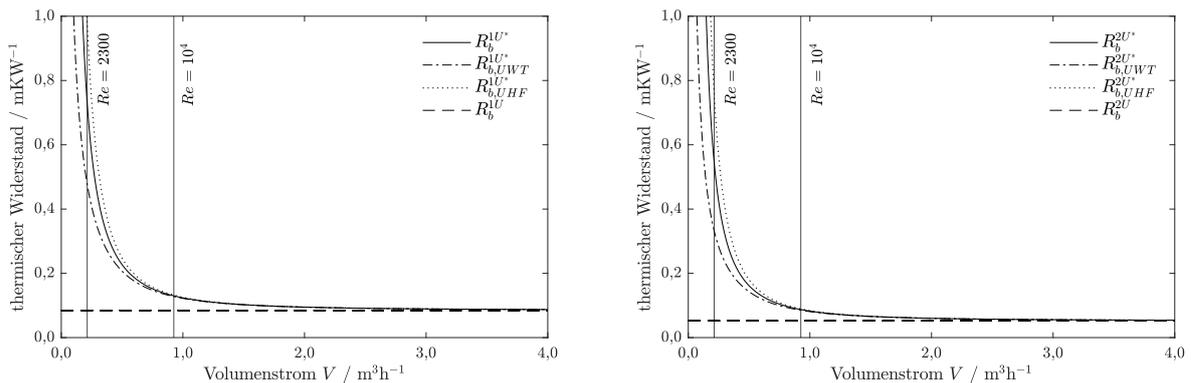


Abbildung 4.3: Effektiver thermischer Widerstand des Bohrlochs  $R_b^*$  für 1U-Rohrsonden (links) und 2U-Rohrsonden (rechtes) in Abhängigkeit des Volumenstroms bei einer Tiefe von  $L = 250 \text{ m}$ .

In Abbildung 4.3 sind die lokalen und effektiven thermischen Widerstände des Bohrlochs

für 1U-Rohrsonden (links) und 2U-Rohrsonden (rechts) über dem Volumenstrom dargestellt. Zusätzlich sind die drei Strömungsregime durch vertikale Linien mit den korrespondierenden  $Re$ -Zahlen eingezeichnet. Für beide Sondentypen lässt sich feststellen, dass die thermischen Widerstände mit sinkendem Volumenstrom, ab Erreichen des Übergangsbereiches mit  $Re = 10^4$ , exponentiell anwachsen. Tendenziell liefert die Randbedingung UWT bei kleineren Volumenströmen kleinere Werte und die Randbedingung UHF größere Werte für den thermischen Widerstand. Ab Erreichen des turbulenten Strömungsregimes mit  $Re > 10^4$  konvergieren alle effektiven Widerstände zu den berechneten Werten des lokalen thermischen Widerstands  $R_b$ . Dieser liefert unabhängig von Volumenstrom und Bohrlochtiefe konstante Werte.

Wird der thermische Kurzschluss zwischen auf- und absteigendem Fluid vernachlässigt, folgt näherungsweise  $R_b^* = R_b$  [12]. Das ist gleichbedeutend mit  $R_a \rightarrow \infty$ . Allgemein lässt sich feststellen, dass für große Volumenströme und kleine Bohrloch Tiefen keine Berücksichtigung des effektiven thermischen Widerstands notwendig ist.

## 4.2 Diskretisierung

Mit der nachfolgenden Analyse der Diskretisierung werden die numerischen Modelle ähnlich dem Vorgehen von Nagler in [36] hinsichtlich ihrer Ergebnisgüte untersucht. Ziel ist es, die systematischen Abweichungen der numerischen Modelle zu untersuchen. Dazu werden mehrere Simulationen mit unterschiedlichen Zeitschrittweiten  $\Delta t$  durchgeführt. Die Wärmeleitung unterhalb der Rohrsonden wird in diesem Fall vernachlässigt. In weiterer Folge wird die Anzahl der axialen Schichten  $m$  und die Anzahl der radialen Schichten  $n$  variiert. Um die Auswirkungen unterschiedlicher Zeitschrittweiten und unterschiedlicher Anzahl von radialen bzw. axialen Elementen zu untersuchen, werden mehrere Simulationen mit derselben Testfunktion durchgeführt.

Die Testfunktion definiert den zeitlichen Verlauf der Eintrittstemperatur  $T_{in}$  und des Massenstroms  $\dot{m}$ , siehe Abbildung 4.4. Ausgehend von einer über die Tiefe konstanten und einheitlichen Temperatur des ungestörten Erdreichs von  $T_{soil} = 15 \text{ °C}$  wird der Erdsondenspeicher mit einer Temperatur von  $T_{soil} + 5 \text{ K}$  und  $T_{soil} + 10 \text{ K}$  beladen. Entladen wird der Erdsondenspeicher mit einer Temperatur von  $T_{soil} - 5 \text{ K}$  und  $T_{soil} - 10 \text{ K}$ . Ein Be- und Entladezyklus benötigt sechs Stunden. Der Betrag des Massenstroms ist zeitlich konstant und beträgt  $\dot{m} = 0,5 \text{ kgs}^{-1}$ . Nach dem Beladezyklus ändert der Massenstrom das Vorzeichen. Die

Variation der Eintrittstemperatur findet alle 60 Minuten rampenförmig statt. Der Temperaturwechsel dauert jeweils zwei Minuten. Um die Ergebnisse der unterschiedlichen Rohr-

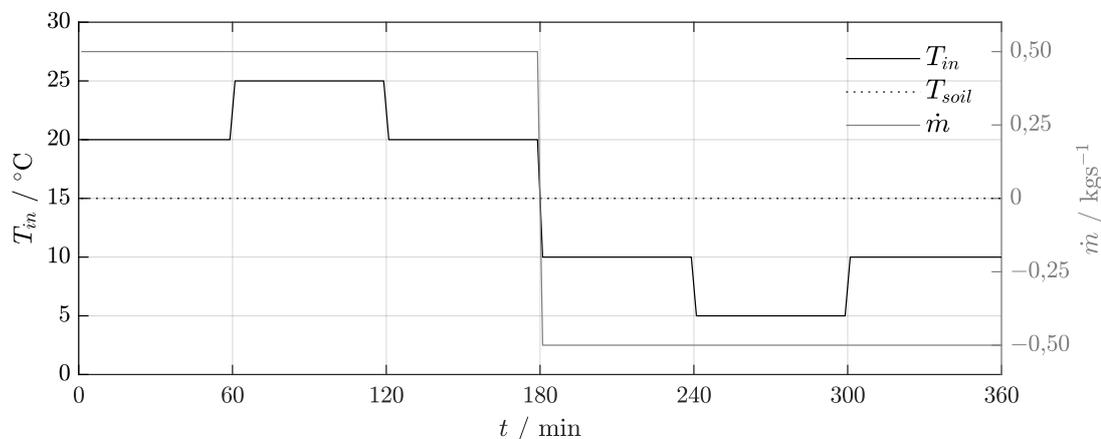


Abbildung 4.4: Testfunktion zur Analyse der Zeitschrittweite  $\Delta t$  sowie der Anzahl an radialen und axialen Elementen.

sonden vergleichen zu können, ist die Geometrie der Rohre derart angepasst worden, dass in den Rohren das gleiche Strömungsregime herrscht. Das bedeutet, die Reynolds-Zahlen der Strömung in der 1U-, 2U- und dem Kernrohr der CX-Rohrsonde sind identisch. Die benachbart liegenden und gekreuzten U-Rohre der 2U-Rohrsonde werden seriell durchströmt. Es ist nicht möglich, die Rohrgeometrie derart anzupassen, dass sich im Kernrohr und im Ringspalt der CX-Rohrsonde dieselbe Reynolds-Zahl einstellt. So ist der Innendurchmesser des äußeren Rohres so gewählt, dass sich zumindest idente Strömungsgeschwindigkeiten für das abwärts und aufwärts strömende Fluid ergeben. Die Strömung im Ringspalt weist eine niedrigere  $Re$ -Zahl auf und befindet sich im Übergangsbereich nahe des voll turbulenten Strömungsregimes. Die gewählten Rohrgeometrien, sowie die berechneten  $Re$ -Zahlen sind in

Tabelle 4.2: Geometrieparameter und Strömungsgrößen der unterschiedlichen Rohrsonden. Der tiefgestellte Index 1 bezieht sich auf das Innenrohr und der Index 2 auf den Ringspalt CX-Rohrsonde.

CX-Rohrsonde		1U-Rohrsonde		2U-Rohrsonde	
$d_{i,1}$	0,0326 m	$s$	0,06 m	$s$	0,06 m
$d_{a,1}$	0,4 m	$d_i$	0,0326 m	$d_i$	0,0326 m
$d_{i,2}$	0,0516 m	$w_1$	0,59957 $\text{ms}^{-1}$	$w_1$	0,59957 $\text{ms}^{-1}$
$w_1$	0,59957 $\text{ms}^{-1}$	$Re$	$1,87 \cdot 10^4$	$Re$	$1,78 \cdot 10^4$
$w_2$	0,59957 $\text{ms}^{-1}$				
$Re_1$	$1,78 \cdot 10^4$				
$Re_2$	$6,32 \cdot 10^3$				

Tabelle 4.2 zusammen gefasst.

Die für die Simulation verwendeten thermophysikalischen Parameter der 180 m tiefen Rohrsonden sind in Tabelle 4.3 zu finden. Die Zustandsgrößen<sup>2</sup> werden während der gesamten Simulation konstant gesetzt. Es werden Änderungen der spezifischen Wärmekapazität, Dichte, Wärmeleitfähigkeit und kinematische Viskosität aufgrund von Druck- und Temperaturänderungen vernachlässigt. Die thermischen Widerstände werden nach der von Bauer in [4] vorgestellten Methode berechnet.

Tabelle 4.3: Thermophysikalische Parameter der unterschiedlichen Rohrsonden.

Rohrmaterial			Untergrund		
$c_p$	1990,00	$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$	$c_s$	1200,00	$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\rho_p$	970,00	$\text{kgm}^{-3}$	$\rho_s$	1800,00	$\text{kgm}^{-3}$
$\lambda_p$	0,40	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$	$\lambda_s$	1,75	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
Füllmaterial			Fluid		
$c_g$	2000,00	$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$	$c_{p,f}$	4189,10	$\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\rho_g$	1460,00	$\text{kgm}^{-3}$	$\rho_f$	999,10	$\text{kgm}^{-3}$
$\lambda_g$	2,05	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$	$\lambda_f$	0,59	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
			$\nu_f$	$1,1386 \cdot 10^{-6}$	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$

### 4.2.1 Zeitschrittweite

Für die Analyse der Zeitschrittweite wird die höchste Diskretisierung mit dem Streckungsfaktor  $f = 1$  gewählt. Bei einer konstanten Zelldicke von  $\Delta e_r = 4,8125$  mm in radialer Richtung ergeben sich  $m = 400$  äquidistante Zellen. In axialer Richtung befinden sich  $n = 400$  äquidistante Zellen mit einer Dicke von  $\Delta e_a = 0,45$  m. Grund für diese Diskretisierung ist hauptsächlich die Einschränkung durch den zur Verfügung stehenden Speicher. In Abbildung 4.5 ist die Summe der Wärmeströme über die Sondenlänge zwischen Fluid in den Rohren und der Rohraußenwände für die unterschiedlichen Sondentypen dargestellt. Der Wärmestrom  $\dot{Q}$  ist über der Zeit  $t$  für unterschiedliche Zeitschrittweiten  $\Delta t$  aufgetragen. Die minimale Zeit-

<sup>2</sup>Streng genommen ist zwischen intensiven und extensiven Zustandsgrößen zu unterscheiden. Intensive Zustandsgrößen wie Druck, Temperatur sowie alle spezifischen Größen sind unabhängig von der Größe des betrachteten Systems. Extensive Zustandsgrößen wie Masse, Volumen, Entropie sowie die inneren Potentiale sind von der Größe des betrachteten Systems abhängig.

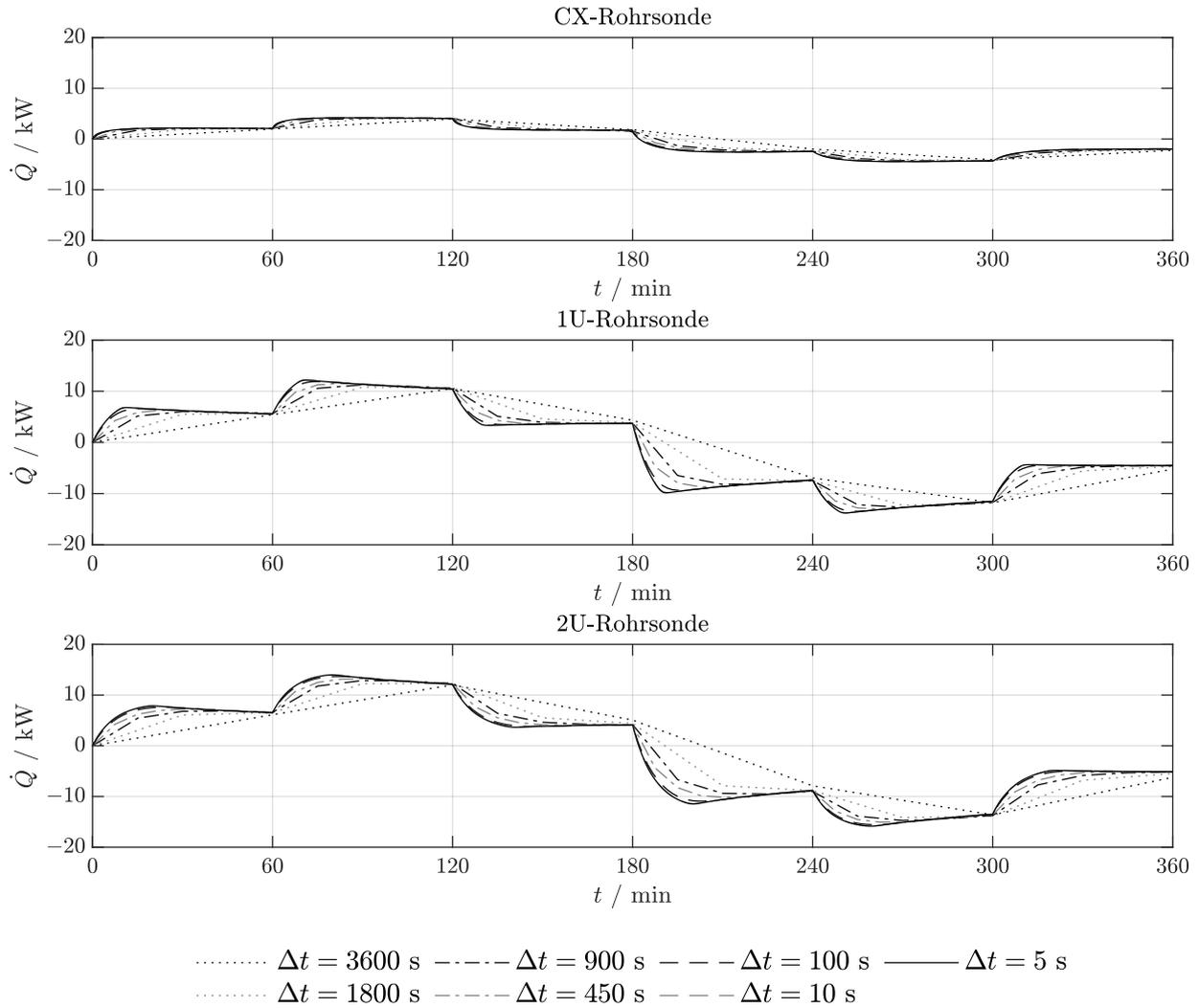


Abbildung 4.5: Wärmestrom zwischen Fluid im Rohr und Rohrwand für CX-, 1U-, und 2U-Rohrsonde in Abhängigkeit der Zeitschrittweite  $\Delta t$ .

schrittweite von  $\Delta t = 5 \text{ s}$  ist der Rechenleistung geschuldet. Auf kleinere Zeitschrittweiten wurde aufgrund der langen Simulationszeiten von jeweils einigen Tagen verzichtet. Zudem können die produzierten Daten aufgrund ihrer Dateigröße von *MATLAB* (Version R2019b) nicht mehr verarbeitet werden. Die maximale Zeitschrittweite darf den zeitlichen Abstand der stufenförmigen Änderungen der Testfunktion nicht überschreiten. Die maximale Zeitschrittweite beträgt demnach  $\Delta t = 3600 \text{ s} = 60 \text{ min}$ . Es lässt sich unmittelbar erkennen, dass sich der Verlauf der Wärmeströme unabhängig vom Sondentyp proportional zum Temperaturprofil der Testfunktion verhält. Allerdings kann die CX-Rohrsonde im Vergleich zur 1U- und 2U-Rohrsonde nur in etwa die Hälfte des Wärmestroms mit dem Füllmaterial austauschen. Grund dafür ist der hohe Kurzschlusswärmestrom zwischen auf- und absteigendem Fluid in den konzentrischen Rohren. Bei U-Rohrsonden wird der thermische Kurzschluss zwischen den Rohren durch das Füllmaterial gedämpft. Je größer der Abstand zwischen den

Rohrschenkeln ist, umso geringer fällt der thermische Kurzschluss aus. Die 2U-Rohrsonde kann im Vergleich zur 1U-Rohrsonde im Mittel einen um ca. 16 % größeren Wärmestrom liefern. Des Weiteren lässt sich sehr gut erkennen, dass sich der Verlauf des Wärmestroms mit sinkender Zeitschrittweite  $\Delta t$  immer besser an den Verlauf des Wärmestroms mit der kleinsten Zeitschrittweite anschmiegt. Die Abweichungen der Wärmeströme mit der größten Zeitschrittweite in Bezug auf die kleinste Zeitschrittweite betragen je nach Sondentyp am Ende des Simulationszeitraums zwischen 15 und 20 %.

In Abbildung 4.6 ist die mittlere relative Abweichung  $f_{rel}$  in Bezug auf die kleinste Zeitschrittweite für die drei vorgestellten Sondentypen dargestellt. Da die gewählten Zeitschrittweiten einige Größenordnungen umfassen ist die x-Achse logarithmisch dargestellt. Bis zu einer Zeitschrittweite von  $\Delta t = 450$  s liegen die relativen Abweichung alle im Bereich zwischen  $\pm 1$  %. Für die 1U- und 2U-Rohrsonde bleibt  $f_{rel}$  in diesem Bereich. Die maximale relative Abweichung tritt bei der CX-Rohrsonde bei  $\Delta t = 3600$  s auf. Allen Anschein nach tendiert die relative Abweichung für noch größere Zeitschrittweiten zu größeren negativen Werten. Weitere Simulation könnten diese Vermutung bestärken. Für die meisten technischen Anwendungen sind Zeitschrittweiten größer  $\Delta t = 3600$  s nicht sinnvoll. Grund dafür ist, dass die Rechenzeiteinsparung nicht mehr signifikant ist. Für alle weiteren Simulationen kann nun eine optimale Zeitschrittweite von  $\Delta t = 450$  s festgelegt werden. Dadurch kann eine akzeptable Ergebnishüte bei gleichzeitig kurzen Rechenzeiten gewährleistet werden. Die mittlere relative Abweichung beträgt für  $\Delta t = 450$  s unabhängig des Sondentyps maximal  $\pm 1$  %.

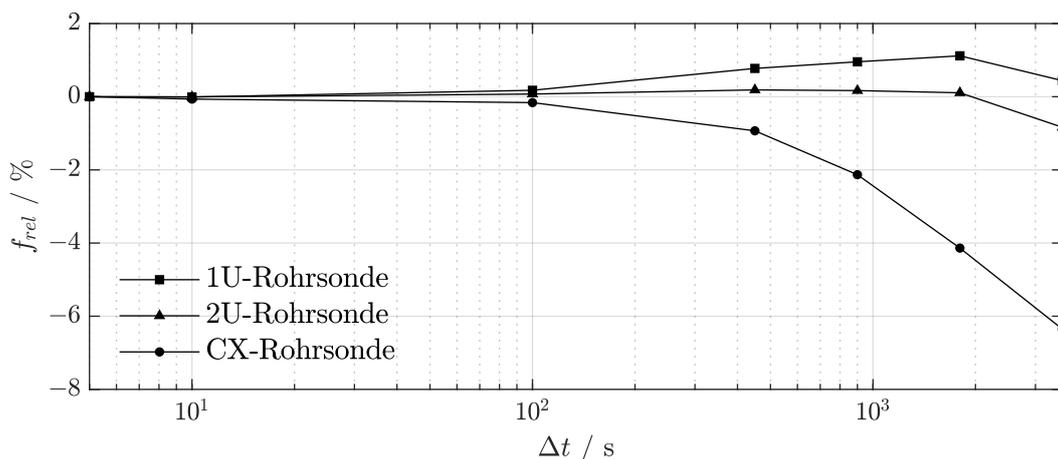


Abbildung 4.6: Mittlere relative Abweichung  $f_{rel}$  des Wärmestroms zwischen Fluid im Rohr und Rohrwand für CX-, 1U-, und 2U-Rohrsonde bezogen auf die Simulation mit der kleinsten Zeitschrittweite  $\Delta t = 5$  s.

## 4.2.2 Axiale und radiale Diskretisierung der Sonde

Die axiale und radiale Diskretisierung der Sonde wird in weiterer Folge noch genauer untersucht. Zu diesem Zweck bleibt die Zeitschrittweite mit  $\Delta t = 450$  s konstant. Die Wärmeleitung im Untergrund vernachlässigt und in weiterer Folge getrennt untersucht. Lediglich die Anzahl der äquidistanten axialen und radialen Elemente der Sonde wird zwischen 30 und 400 Elementen in 10er Schritten variiert. Der Streckungsfaktor beträgt  $f = 1$ . Dadurch ergeben sich für jeden Sondentyp  $37 \cdot 37 = 1369$  Simulationen mit der Testfunktion. Diskretisierungen mit geringerer Anzahl an Elementen wurden nicht durchgeführt, da die relative Abweichung rasch Werte größer 100 % annimmt.

In Abbildung 4.7 ist die relative Abweichung des über die Rohrwand übertragenen Wärmestroms in Abhängigkeit der Diskretisierung aufgetragen. Links befinden sich dreidimensionale und rechts zweidimensionale Darstellung der relativen Abweichungen. Die Abweichungen sind auf den sich bei der höchsten Diskretisierung mit  $m = n = 400$  äquidistanten Elementen resultierenden Wärmestrom bezogen. Alle Sondentypen zeigen eine ausgeprägtere Abhängigkeit von der axialen Diskretisierung als von der radialen Diskretisierung. Die Anzahl der axialen Elemente  $m$  nimmt also einen viel stärkeren Einfluss auf die Ergebnisgüte als die Anzahl der radialen Elemente  $n$ . Das bedeutet in weiterer Folge, dass es hinreichend ist, den umgebenden Untergrund mit deutlich weniger Elementen abzubilden als in axialer Richtung. Erwähnenswert ist an dieser Stelle, dass die relative Abweichung bei der CX-Rohrsonde fast ausschließlich positiv ist. Bei den anderen Sondentypen gibt es durchgehend negative Abweichungen. Damit der Betrag der relativen Abweichung der CX-Rohrsonde stets weniger als 1 % beträgt, sind  $n = 30$  radiale und  $m = 200$  axiale Elemente notwendig. Für die 1U- und 2U-Rohrsonde werden dagegen mindestens  $n = 90$  radiale und  $m = 200$  axiale Elemente benötigt. Anhand der hier durchgeführten Abschätzung der systematischen Abweichung wird die Diskretisierung für alle Sondentypen mit  $n = 100$  äquidistanten radialen und  $m = 200$  äquidistanten axialen Elemente festgelegt.

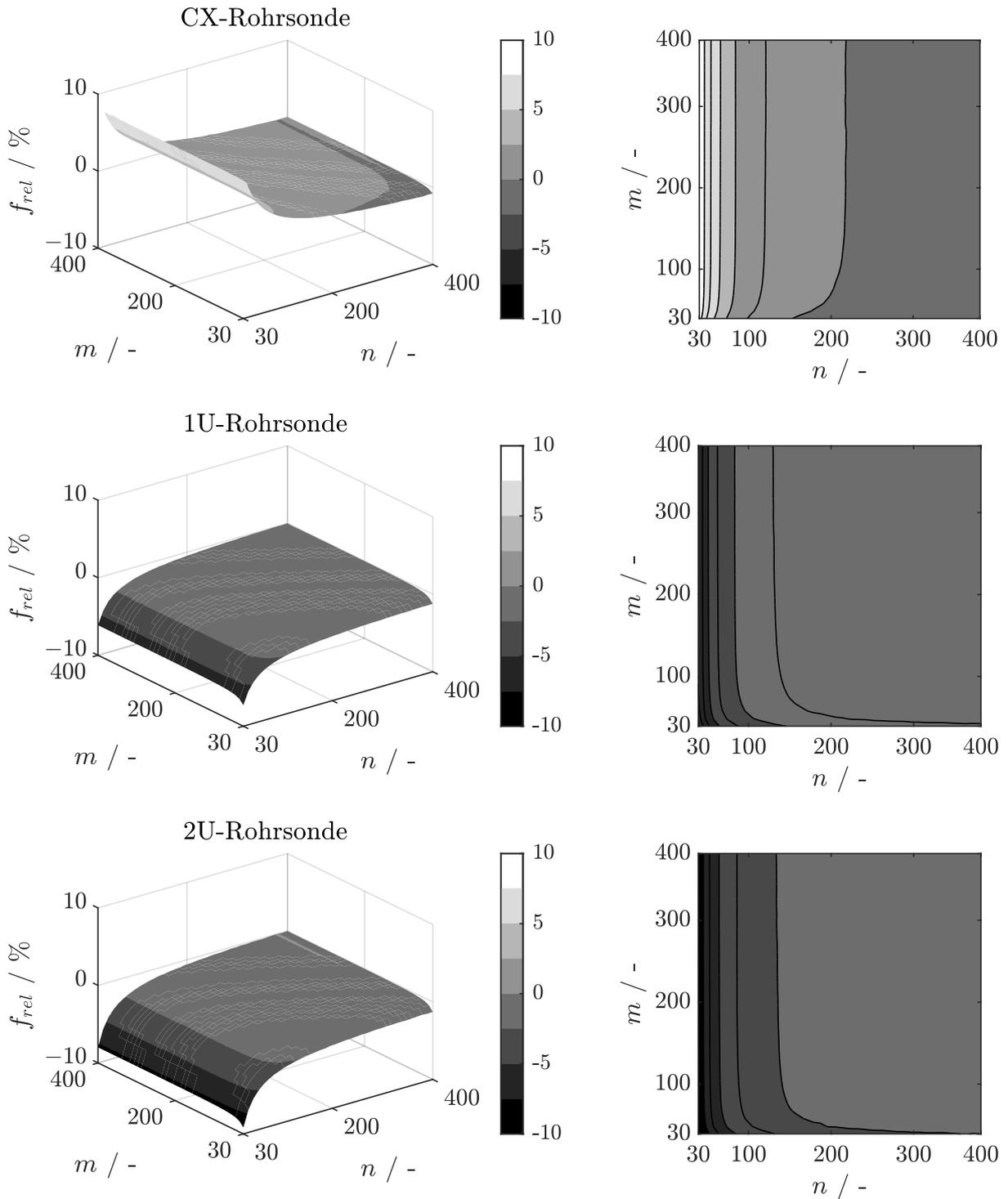


Abbildung 4.7: Mittlere relative Abweichung  $f_{rel}$  des Wärmestroms zwischen Fluid im Rohr und Rohrwand für CX-, 1U-, und 2U-Rohrsonde bezogen auf die Simulation mit der höchsten Diskretisierung  $m = n = 400$ .

### 4.2.3 Systematische Abweichung

Die systematische Abweichung setzt sich aus der relativen Abweichung der zeitlichen Diskretisierung und der axialen bzw. radialen Diskretisierung zusammen. Die Zelldicke des äquidistanten radialen Gitters beträgt  $\Delta e_r = 9,625$  mm. Die Höhe der axialen Zellen beträgt  $\Delta e_a = 1,8$  m. Die in Abhängigkeit der Diskretisierung entstehende Abweichung kann aufsummiert werden. Dadurch reduziert sich die Gesamtabweichung zu den in Tabelle 4.4 angeführten Werten. Die Abweichung zwischen räumlicher und zeitlicher Diskretisierung hebt sich für die CX-Rohrsonde nahezu vollständig auf. Die systematische Abweichung der unterschiedlichen Sondentypen liegt für die gewählten Parameter stets unter 1 %.

Tabelle 4.4: Relative Gesamtabweichungen der unterschiedlichen Sondentypen für äquidistante Elemente

CX-Rohrsonde				1U-Rohrsonde				2U-Rohrsonde						
Parameter		$f_{rel}$		Parameter		$f_{rel}$		Parameter		$f_{rel}$				
$\Delta t$	450	s	-0,93162	%	$\Delta t$	450	s	0,77391	%	$\Delta t$	450	s	0,18671	%
n	100	-	0,88697	%	n	100	-	-0,58158	%	n	100	-	-0,69014	%
m	200	-			m	200	-			m	200	-		
			-0,04465	%				0,19233	%				-0,50343	%

Es hat sich herausgestellt, dass der systematische Fehler der erstellten Modelle, auch bei einer geringeren Anzahl an Elementen, akzeptabel ist. Die hier durchgeführten Analysen mit einem Streckungsfaktor von  $f = 1$  sollen lediglich die Robustheit der Modelle bestätigen. Durch den Einsatz von anderen Streckungsfaktoren kann die Anzahl der Elemente und in weiterer Folge auch die Rechenzeit verkürzt werden. Zuerst sollten allerdings die systematischen Abweichungen in Abhängigkeit des Streckungsfaktors genauer untersucht werden.

## 4.3 Druckverlust

Ein Erhöhen der Strömungsgeschwindigkeit geht mit einem quadratisch ansteigenden Druckverlust einher. Der Druckverlust lässt sich in Abhängigkeit des Widerstandsbeiwerts  $\zeta$  und der Strömungsgeschwindigkeit  $w$  nach Gleichung (4.2) berechnen, siehe [20]:

$$\Delta p = \zeta \frac{L \rho_f w^2}{2 d_h}. \quad (4.2)$$

Etwaige Änderungen der thermophysikalischen Parameter werden dabei nicht berücksichtigt.<sup>3</sup> Mit  $d_h$  wird der hydraulische Durchmesser bezeichnet. Für 1U- und 2U-Rohrsonden, sowie für das Kernrohr der CX-Rohrsonde gilt  $d_h = d_i = d_{i,1}$ . Für den Ringspalt gilt  $d_h = d_{i,2} - d_{a,1}$ . Der Widerstandsbeiwert ist wiederum von der  $Re$ -Zahl und der relativen Wandraugigkeit  $d_h/K$  abhängig. Die absolute Rauigkeit  $K$  beträgt laut [20] für gezogene Kunststoffrohre in etwa 0,0015 mm. Zur Bestimmung des Widerstandsbeiwerts ist in drei Bereiche zu unterteilen. Bis  $Re < 2300$  besteht ein laminarer Zusammenhang zwischen  $Re$ -Zahl und  $\zeta$ -Wert nach Gleichung (4.3):

$$\zeta = \frac{64}{Re}. \quad (4.3)$$

Für größere  $Re$ -Zahlen muss, in Abhängigkeit der kritischen  $Re$ -Zahl nach Gleichung (4.4), in einen Übergangsbereich zwischen rau und glatt, sowie in den rein rauen Bereich unterschieden werden:

$$Re_{krit} = \frac{2000 d_h}{\sqrt{\zeta} K}. \quad (4.4)$$

Die Widerstandsbeiwerte sind für  $2300 < Re < 10^6$  nach Prandtl und Colebrook bzw. nach Nikuradse mit Gleichung (4.5) zu bestimmen [20]:

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta}} = \begin{cases} -2 \ln \left( \frac{2,51}{Re \sqrt{\zeta}} + \frac{k}{3,71 d_h} \right) & , \text{ für } 2300 < Re < Re_{krit} \\ -2 \ln \left( \frac{k}{3,71 d_h} \right) & , \text{ für } Re_{krit} < Re < 10^6 \end{cases}. \quad (4.5)$$

In Abbildung 4.8 ist der Druckverlust  $\Delta p$  über der Strömungsgeschwindigkeit  $w$  dargestellt. Der Druckverlust der 2U-Rohrsonde ist aufgrund der seriellen Durchströmung der U-Rohre in etwa doppelt so groß wie jener der 1U-Rohrsonde. Interessant ist vor allem der Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Strömung. Es lässt sich gut erkennen, dass der Druckverlust ab Erreichen des Übergangsbereichs sprunghaft ansteigt. Bei der CX-Rohrsonde steigt der Druckverlust zwei Mal sprunghaft an. Der zweite Sprung bei  $w = 0,220 \text{ ms}^{-1}$  markiert das Erreichen des Übergangsbereichs im Ringspalt. Ab dieser Strömungsgeschwindigkeit ist der Druckverlust der CX-Rohrsonde immer größer als für die U-Rohrsonden. Die Strömungsgeschwindigkeit des Fluids in einer Erdwärmesonde hängt vorwiegend von der benötigten Übertragungsleistung ab. Im Rahmen dieser Arbeit kann keine Empfehlung für eine optimale Strömungsgeschwindigkeit gegeben werden. Grundsätzlich sollte jedoch ein Optimum zwischen Übertragungsleistung und geforderter Pumpleistung gefunden werden.

<sup>3</sup>Im Allgemeinen gilt, je tiefer die Rohrsonde, ist umso größer ist der Temperaturunterschied des Fluids zwischen Sondenfuß und Sondenkopf. Die dadurch implizierte Änderung der Dichte führt in weiterer Folge zu nicht mehr zu vernachlässigende Auftriebseffekte in den Rohren. Der Auftriebseffekt wirkt der Rohrreibung entgegen und führt somit zu einem geringeren Gesamtdruckverlust.

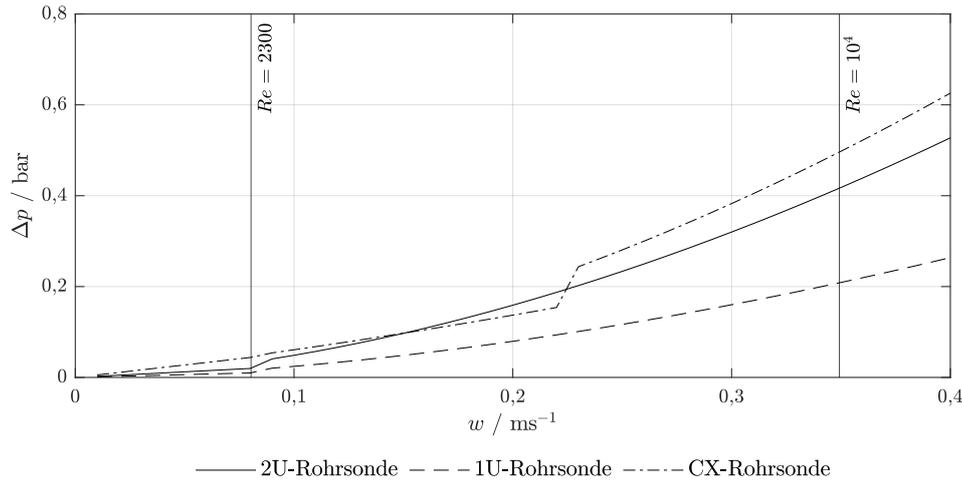


Abbildung 4.8: Druckverlust  $\Delta p$  aufgrund von Rohrreibung über der Strömungsgeschwindigkeit in den U-Rohren bzw. im Kernrohr der CX-Rohrsonde.

## 4.4 Temperaturverlauf & Übertragungsleistung

Die Simulationen zur Analyse des Temperaturverlaufs entlang der Sondentiefe sind unter Verwendung der gleichen Parameter, wie in Kapitel 4.2 verwendet, durchgeführt worden. Die gewählten Parameter sind in den Tabellen 4.2, 4.3 und 4.4 zu finden. Die Wärmeleitung unterhalb der Sonde ist hier nicht berücksichtigt worden. In Kapitel 4.5 wird der Einfluss des konduktiven Wärmetransports unterhalb der Sonde näher betrachtet. In Abbildung 4.9 ist der sich einstellende Temperaturverlauf des Fluids über der Tiefe aufgetragen. Die sich einstellenden Temperaturkurven sind als Momentaufnahmen zu zwei unterschiedlichen Zeiten zu verstehen. Einerseits wurde anhand der Testfunktion aus Abbildung 4.4 ein Beladevorgang zum Zeitpunkt  $t = 30$  min herangezogen, siehe schwarze Linien in Abbildung 4.9. Andererseits ist ein Entladevorgang zum Zeitpunkt  $t = 330$  min dargestellt.

Interessant ist an dieser Stelle die sich einstellende Temperaturdifferenz am Kopf der Sonde. Es lässt sich unschwer erkennen, dass für die CX-Rohrsonde die geringste Temperaturänderung zu erwarten ist. Grund dafür ist der hohe Kurzschlusswärmestrom zwischen auf- und absteigendem Fluid in den konzentrischen Rohren. Die Fluide können also direkt über die Rohrwand des Kernrohrs Wärme miteinander austauschen. Im Gegensatz dazu befindet sich zwischen den Rohrschenkeln der 1U- und 2U-Rohrsonde Füllmaterial, welches den Kurzschlusswiderstand deutlich erhöht. Dies ist auch der Grund, warum die maximale Temperatur des Fluids im Rohr für die CX-Rohrsonde am tiefsten Punkt der Bohrung liegt. Bei U-Rohrsonden kann das Fluid in den Rohren während des aufwärts Strömens mehr Wärme mit dem Untergrund als mit den benachbarten Rohren austauschen. Auf den ersten Blick ist

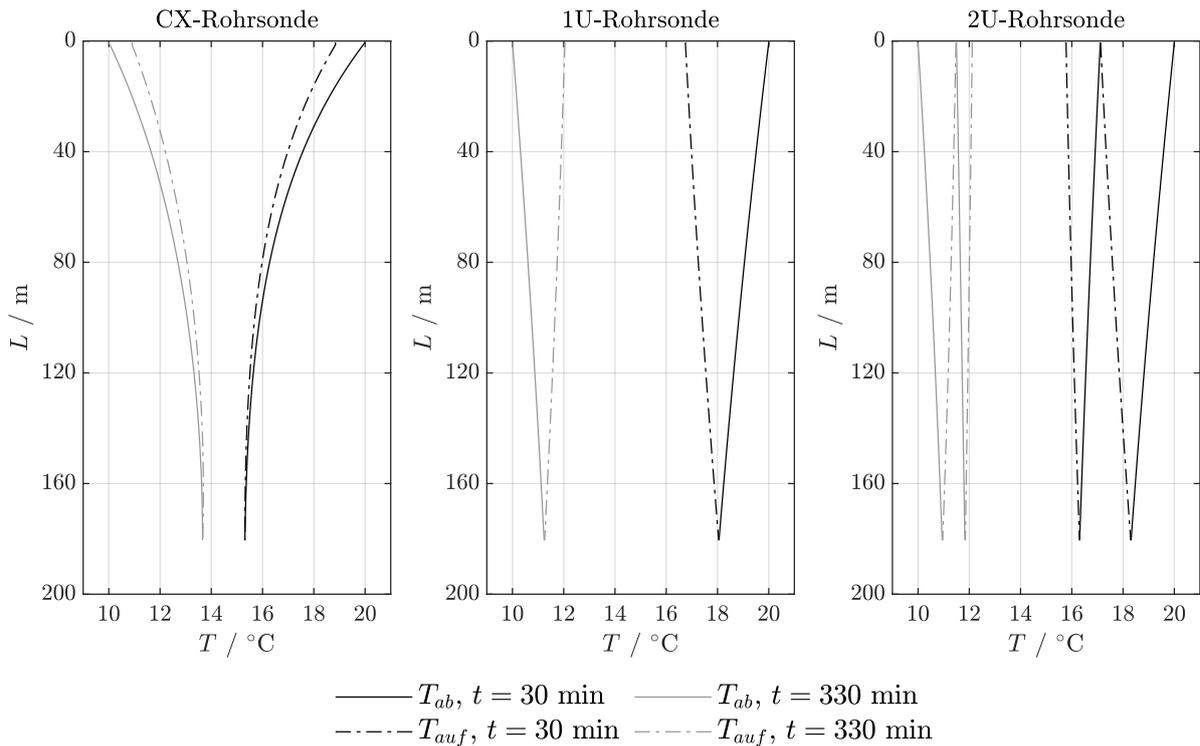


Abbildung 4.9: Temperaturverlauf des Fluids in den Rohrsonden zu unterschiedlichen Zeiten über der Tiefe. Schwarze Linien: Beladevorgang  $t = 30 \text{ min}$ . Graue Linien: Entladevorgang  $t = 330 \text{ min}$ .

die Performance der U-Rohrsonden ähnlich. Betrachtet man aber den Temperaturunterschied zwischen Vor- und Rücklauf, wird deutlich, dass die 2U-Rohrsonde mehr Energie entnehmen bzw. einspeisen kann als die 1U-Rohrsonde. Um dieses Verhalten besser quantifizieren zu können, ist es sinnvoll, die auf die Sondenlänge  $L$  bezogene spezifische Übertragungsleistung  $\dot{q}_u$  nach Gleichung (4.6) einzuführen:

$$\dot{q}_u = \frac{\dot{m} c_{p,f} \Delta T}{L}. \quad (4.6)$$

In Tabelle 4.5 sind die relevanten Temperaturen und Temperaturdifferenzen am Sondenkopf sowie die Übertragungsleistungen zusammen gefasst. An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass sich die hier gezeigten Temperaturverläufe nur unter stark idealisierten Umständen ergeben. In weiterer Folge nehmen die thermophysikalischen und geometrischen Parameter, sowie vorangegangene Be- bzw. Entladezyklen Einfluss auf den tatsächlichen Temperaturverlauf.

Tabelle 4.5: Charakteristische Temperaturen des Fluids und Übertragungsleistungen während des Be- bzw. Entladevorgangs.

		CX-Rohrsonde	1U-Rohrsonde	2U-Rohrsonde
Beladen	$T_{in}$	20 °C	20 °C	20 °C
	$T_{out}$	18,84 °C	16,75 °C	15,78 °C
	$\Delta T$	1,16 K	3,25 K	4,22 K
	$\dot{q}_u$	14,46 Wm <sup>-1</sup>	40,53 Wm <sup>-1</sup>	52,62 Wm <sup>-1</sup>
Entladen	$T_{in}$	10 °C	10 °C	10 °C
	$T_{out}$	10,91 °C	12,04 °C	12,11 °C
	$\Delta T$	0,91 K	2,04 K	2,11 K
	$\dot{q}_u$	11,35 Wm <sup>-1</sup>	25,44 Wm <sup>-1</sup>	26,31 Wm <sup>-1</sup>

Eines der wesentlichen Kriterien von Erdwärmesonden stellt die Übertragungsleistung  $\dot{q}_u$  dar. Diese ist unter anderem von den thermophysikalischen Parametern des Untergrunds, des Füllmaterials, den Wärmeübergangskoeffizienten zwischen Fluid im Rohr und Rohrwand und der Sondentiefe abhängig. Im Rahmen dieser Arbeit werden keine Parameterstudien des Untergrunds und des Füllmaterials durchgeführt. Der Vollständigkeit halber sind in Tabelle 4.6 einige typische Werte für die Übertragungsleistung von Erdwärmesonden in verschiedenen Untergründen nach [41] aufgelistet. Diese Werte sollen lediglich einen Überblick über die Größenordnung von Übertragungsleistungen geben. Ein weiterer nicht zu vernachlässigender Parameter ist die Anzahl der jährlichen Volllaststunden. Im Allgemeinen sinkt die Übertragungsleistung mit steigender Anzahl an jährlichen Volllaststunden. Für nähere Informationen zu den Berechnungsgrundlagen der in Tabelle 4.6 angegebenen Werte sei auf [41] verwiesen.

Tabelle 4.6: Spezifische Übertragungsleistungen von unterschiedlichen Bodenarten bei 1800 jährlichen Volllaststunden, nach [41].

Boden	Wärmeleitfähigkeit	gesättigter Boden		trockener Boden	
		1800 h/a		1800 h/a	
Kies	0,4 – 0,5 Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	80	Wm <sup>-1</sup>	25	Wm <sup>-1</sup>
Steine	0,4 – 0,5 Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	75	Wm <sup>-1</sup>	25	Wm <sup>-1</sup>
Sand	0,3 – 0,8 Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	70	Wm <sup>-1</sup>	25	Wm <sup>-1</sup>
Sandstein	1,3 – 5,1 Wm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	80	Wm <sup>-1</sup>	40	Wm <sup>-1</sup>

Unabhängig von den thermophysikalischen Parametern des Untergrunds nimmt der Wärmeübergang zwischen Fluid im Rohr und Rohrwand großen Einfluss auf die Übertragungsleistung der Erdwärmesonden. Der Wärmeübergangskoeffizient an den Rohrwänden steigt im Allgemeinen mit steigender Strömungsgeschwindigkeit. In Abbildung 4.10 ist der Wärmeübergangskoeffizienten an der Innenseite eines U-Rohres über der Strömungsgeschwindigkeit dargestellt. Die Berechnung von  $\alpha_i$  erfolgte nach der von Gnielinski in [20] vorgestellten Methode, siehe Anhang A. Die thermophysikalischen Parameter, sowie die geometrischen Abmessungen sind Tabelle 4.2 und 4.3 zu entnehmen. Es lassen sich leicht drei

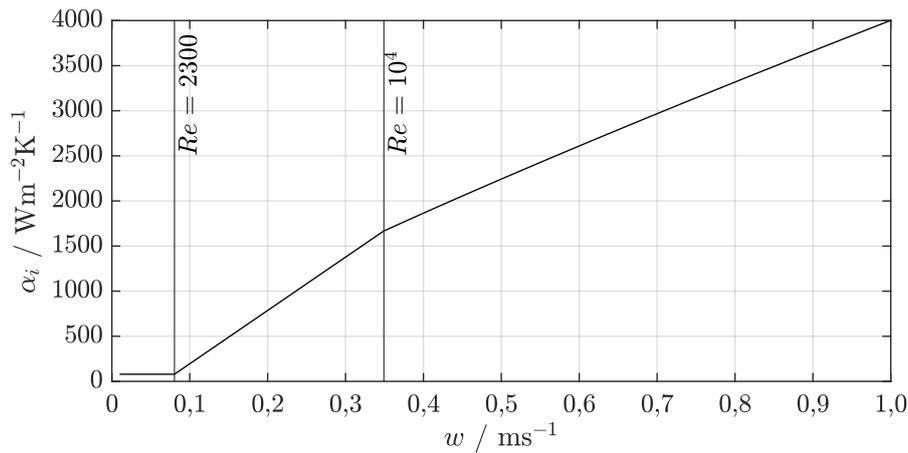


Abbildung 4.10: Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_i$  zwischen Fluid im Rohr und Rohrwand.

unterschiedliche Bereiche erkennen. Im laminaren Bereich, bis  $Re > 2300$  ist der Wärmeübergangskoeffizient konstant. Mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit steigt  $\alpha_i$  linear an. Im Übergangsbereich zwischen laminarer und voll ausgebildeter turbulenter Strömung ( $2300 < Re < 10^4$ ) steigt der Wärmeübergangskoeffizient schneller an als im voll turbulenten Bereich ( $Re > 10^4$ ). Grundsätzlich ist ein hoher Wert für  $\alpha_i$  und in weiterer Folge eine hohe Strömungsgeschwindigkeit in den Rohren erstrebenswert. Mit steigender Strömungsgeschwindigkeit steigt aber auch der Druckverlust durch Rohreibung quadratisch an. Hier gilt es unter Berücksichtigung der Übertragungsleistung und der benötigten Pumparbeit ein Optimum zu finden.

Zur Beurteilung der zu erwartenden Übertragungsleistung wird wieder die Testfunktion herangezogen und nach  $t = 30$  min ausgewertet. Der einzige Unterschied zu den bereits durchgeführten Simulationen besteht darin, dass die Untergrundtemperatur über die Tiefe nicht mehr konstant ist. An der äußeren lateralen Schicht ist der Temperaturverlauf des geothermischen Temperaturgradienten aufgeprägt. In Abbildung 4.11 ist im oberen Plot die Übertragungsleistung in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit aufgetragen. Darunter ist der Druckverlust in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit aufgetragen. Auf den

Druckverlust in der Rohrsonde wird in Kapitel 4.3 näher eingegangen. An dieser Stelle soll lediglich das Verhältnis zwischen Übertragungsleistung und Druckverlust aufgezeigt werden. Es lässt sich leicht erkennen, dass die 2U-Rohrsonde, dicht gefolgt von der 1U-Rohrsonde, die höchste spezifische Übertragungsleistung liefert. Die spezifische Übertragungsleistung der CX-Rohrsonde ist im laminaren Strömungsbereich ähnlich wie die der U-Rohrsonden. Im Übergangsbereich fällt  $\dot{q}_u$  aber um ca. ein Drittel geringer aus. Des Weiteren lässt sich ein Knick in der Linie der CX-Rohrsonde bei  $Re = 2300$  erkennen. Grund dafür ist der Kurzschlusswärmestrom zwischen den Fluiden im ab- und aufsteigendem Rohr. Mit Erreichen des Übergangsbereichs nimmt der Kurzschlusswärmestrom überproportional stark zu. Tendenziell lässt sich eine leichte Sättigung der Übertragungsleistung bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten erkennen.

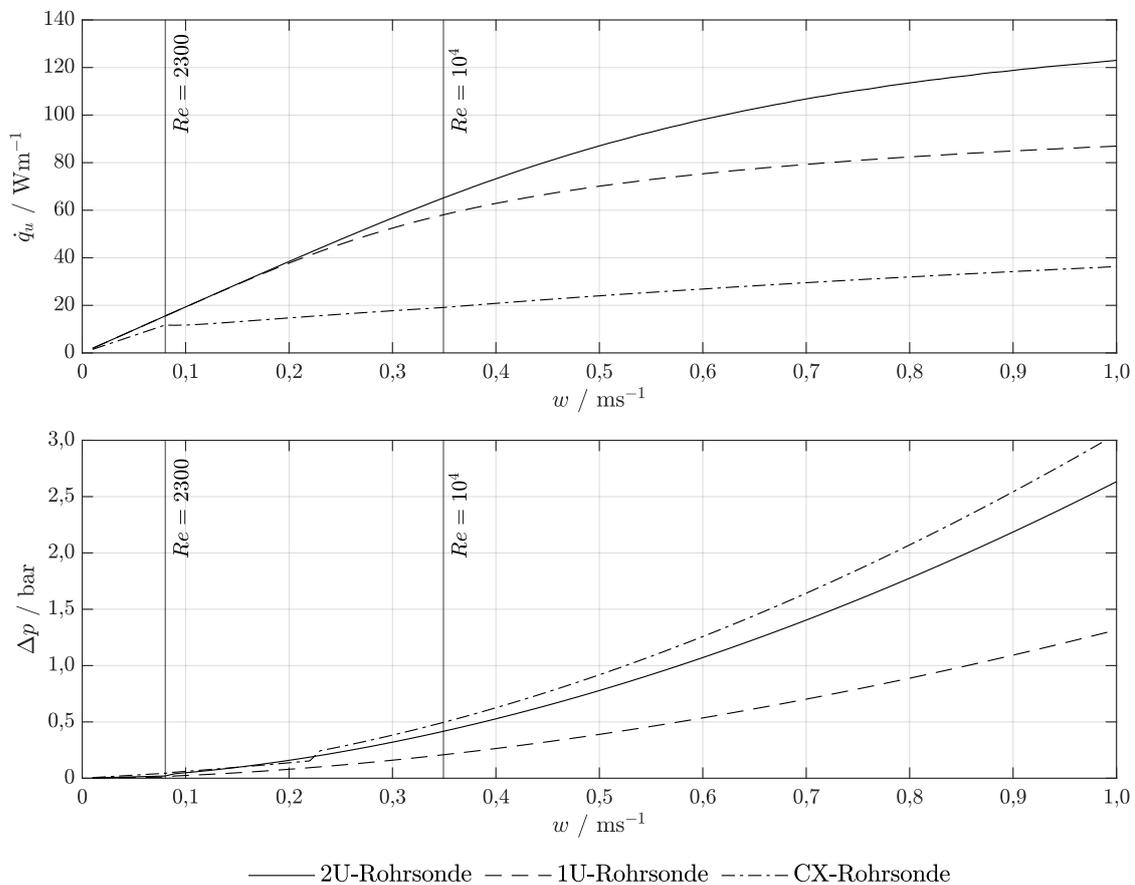


Abbildung 4.11: Oben: Spezifische Übertragungsleistung  $\dot{q}_u$  in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit in den U-Rohren bzw. im Kernrohr der CX-Rohrsonde. Unten: Druckverlust  $\Delta p$  aufgrund von Rohrreibung über der Strömungsgeschwindigkeit in den U-Rohren bzw. im Kernrohr der CX-Rohrsonde.

In Abbildung 4.12 ist die spezifische Übertragungsleistung und der Druckverlust über der Sondentiefe aufgetragen. Alle Parameter sind in Bezug zu den vorherigen Simulation aus Ab-

bildung 4.11 unverändert beibehalten worden. Lediglich die Strömungsgeschwindigkeit in den U-Rohren bzw. im Kernrohr der CX-Rohrsonde ist mit  $w = 0,2 \text{ ms}^{-1}$  konstant gesetzt worden. Damit befindet sich die Strömung in den U-Rohren und im Kernrohr der CX-Rohrsonde im Übergangsbereich zwischen laminar und turbulent. Die Strömung im Ringspalt ist noch im laminaren Bereich. Die spezifischen Übertragungsleistungen fallen für die U-Rohrsonden um ca. 50 % größer aus als für die CX-Rohrsonde. Ab einer Tiefe von in etwa 200 m gleicht sich die spezifische Übertragungsleistung der 1U-Rohrsonde jener der 2U-Rohrsonde an. Das gilt jedoch nur für die serielle Durchströmung der U-Rohre. Zu Beurteilung des Verhaltens der Übertragungsleistung für parallel durchströmte U-Rohre sind im Rahmen dieser Arbeit keine Analysen durchgeführt worden. Anhand der durchgeführten Simulation ist die Sättigung der spezifischen Entzugsleistungen zu erkennen. Der Druckverlust ist in Abbildung 4.12 unten dargestellt. Wie Gleichung (4.2) bereits vermuten lässt, steigt der Druckverlust  $\Delta p$  linear mit zunehmender Sondentiefe  $L$  an.

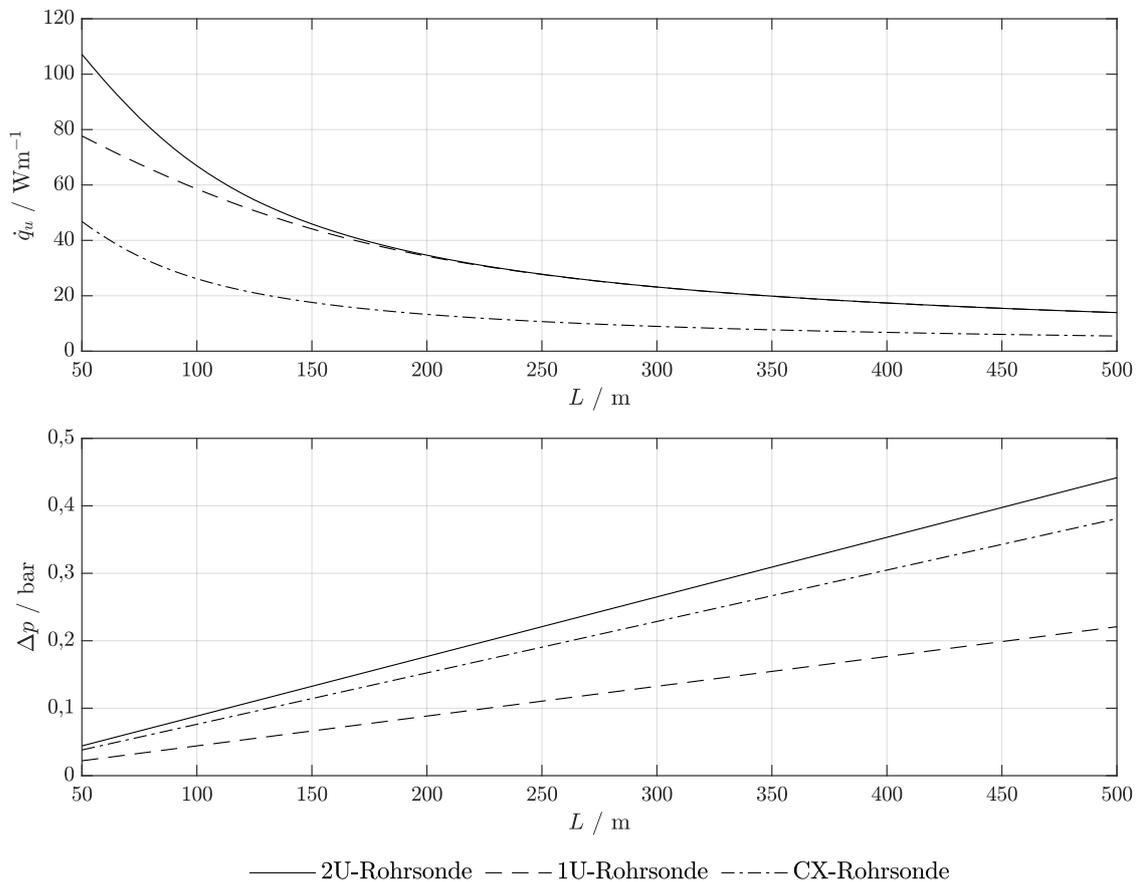


Abbildung 4.12: Oben: Spezifische Übertragungsleistung  $\dot{q}_u$  in Abhängigkeit der Sondentiefe  $L$ . Unten: Druckverlust  $\Delta p$  aufgrund der Rohrreibung über der Sondentiefe

Intuitiv würde man mit zunehmender Sondentiefe eine Erhöhung der spezifischen Übertragungsleistung erwarten. Hier ist es aber wichtig, nicht die spezifische Übertragungsleistung

zu betrachten, sondern die Übertragungsleistung der gesamten Sonde zu bewerten. Daher wurde in Abbildung 4.13 die zu erwartende Übertragungsleistung in Abhängigkeit der Sondentiefe aufgetragen. Ab einer Sondentiefe von ca. 200 m kann die Übertragungsleistung als gesättigt betrachtet werden. Die U-Rohrsonden stagnieren bei etwa 7000 W. Die Übertragungsleistung der CX-Rohrsonde beträgt nahezu unabhängig von der Sondentiefe in etwa 2700 W. Dieses Verhalten wird durch die geringe Temperaturdifferenz zwischen Untergrund und Wärmeträgermedium weiter begünstigt. Diese Ergebnisse legen also nahe, dass eine Sondentiefe größer als 200 m unabhängig vom Sondentyp zu keiner Steigerung der Übertragungsleistung mehr führt. An dieser Stelle ist es wichtig, zwischen oberflächennaher und tiefer Geothermie zu unterscheiden. Natürlich steigt die Übertragungsleistung aufgrund des höheren Temperaturniveaus in größeren Tiefen wieder an. Im Rahmen der tiefen Geothermie kommen großteils keine der hier vorgestellten Sondentypen zum Einsatz. Vielmehr werden offene Systeme, ohne zirkulierendem Wärmeträgermedium, eingesetzt.<sup>4</sup>

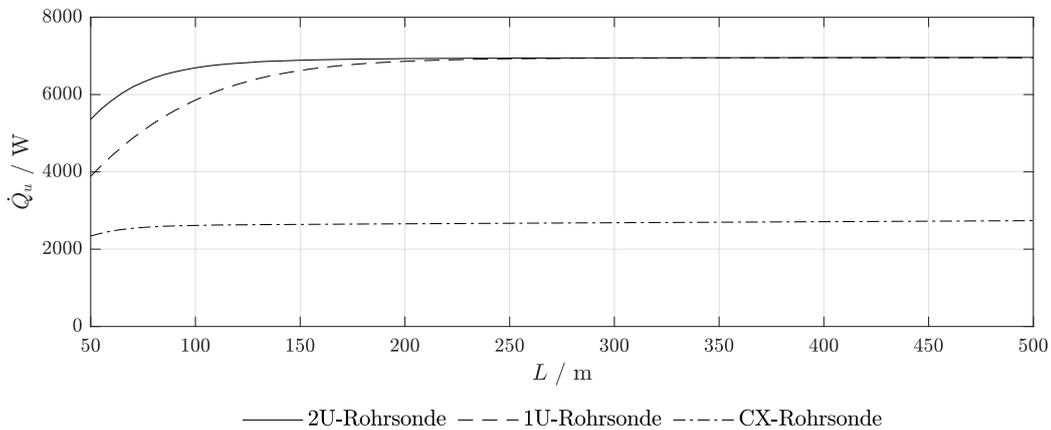


Abbildung 4.13: Übertragungsleistung  $\dot{Q}_u$  in Abhängigkeit der Sondentiefe  $L$

Allgemeingültige Aussagen über den Zusammenhang zwischen Übertragungsleistung und Sondentiefe sollten nicht ohne Weiteres getroffen werden. Die Übertragungsleistung von Rohrsonden ist stark von der Vorlauftemperatur, dem Ladezustand des Erdwärmespeichers und von den thermophysikalischen Parametern des Untergrunds abhängig. Jede Rohrsonde erfordert daher eine individuelle Betrachtung. Die hier vorgestellten Modelle sind aber durchaus in der Lage, bei genauer Kenntnis der Randbedingungen präzise das Betriebsverhalten abzubilden.

<sup>4</sup>Bei der tiefen Geothermie kann das Eigengewicht der Sonden zu mechanischen Problemen führen. Mit steigender Sondenlänge erhöht sich das von der Querschnittsfläche am Sondenkopf zu tragende Eigengewicht der Sonde. Herkömmliche U-Rohre aus Kunststoff werden daher kaum eingesetzt. Viel mehr kommen abgestufte CX-Rohrsonden aus Stahl oder Stahl kombiniert mit Verbundwerkstoffen zum Einsatz.

## 4.5 Konduktiver Wärmetransport unterhalb der Sonde

In diesem Kapitel wird der Einfluss des konduktiven Wärmetransports unterhalb der Rohrsonden diskutiert. Hierbei ist in kurzfristige und langfristige Auswirkungen zu unterscheiden. Die gewählten Parameter sind in den Tabelle 4.2 und 4.3 zu finden. Die Zeitschrittweite zur Beurteilung kurzfristiger Auswirkungen beträgt  $\Delta t = 450$  s und  $\Delta t = 3600$  s zur Beurteilung langfristiger Auswirkungen. In radialer Richtung werden  $n = 100$  und in axialer Richtung  $m = 200$  äquidistante Elemente eingesetzt. Die minimale Zellgröße in radialer Richtung beträgt demnach  $\Delta e_r = 19,25$  mm. Die minimale Zellgröße in axialer Richtung  $\Delta e_a$  ist von der Sondentiefe abhängig. Unterhalb der Sonde werden  $o = 208$  äquidistante Zellen mit einer Zellgröße von  $\Delta e_u = 19,25$  mm eingesetzt. Dadurch wird der konduktive Wärmetransport in den ersten vier Metern unterhalb der Sonde berücksichtigt, wobei  $L_u = 4$  m ist.

### 4.5.1 Kurzfristiger Einfluss

Zur Ermittlung der kurzfristigen Auswirkungen wird wieder die Testfunktion aus Abbildung 4.4 herangezogen und nach  $t = 30$  min ausgewertet. In Abbildung 4.14 oben, ist die spezifische Übertragungsleistung in Abhängigkeit der Sondentiefe für die drei Sondentypen aufgetragen. In grau sind die Ergebnisse mit konduktivem Wärmetransport im Untergrund unter der Sonde dargestellt. In schwarz sind die Ergebnisse ohne konduktivem Wärmetransport im Untergrund unter der Sonde dargestellt. Die resultierenden spezifischen Übertragungsleistungen sind nahezu deckungsgleich. Daher sind in Abbildung 4.14 unten, die relativen Abweichungen, in Bezug auf die Ergebnisse mit konduktivem Wärmetransport im Untergrund unter der Sonde, dargestellt. Wie zu erwarten, sinken die relativen Abweichungen mit zunehmender Sondentiefe. Die relativen Abweichungen betragen bei der kleinsten Sondentiefe von  $L = 50$  m maximal 0,8 %. Für kurzfristige Betrachtungen, im Bereich von einigen Stunden, kann der Einfluss des konduktiven Wärmetransports unterhalb der Sonden durchaus als vernachlässigbar angesehen werden.

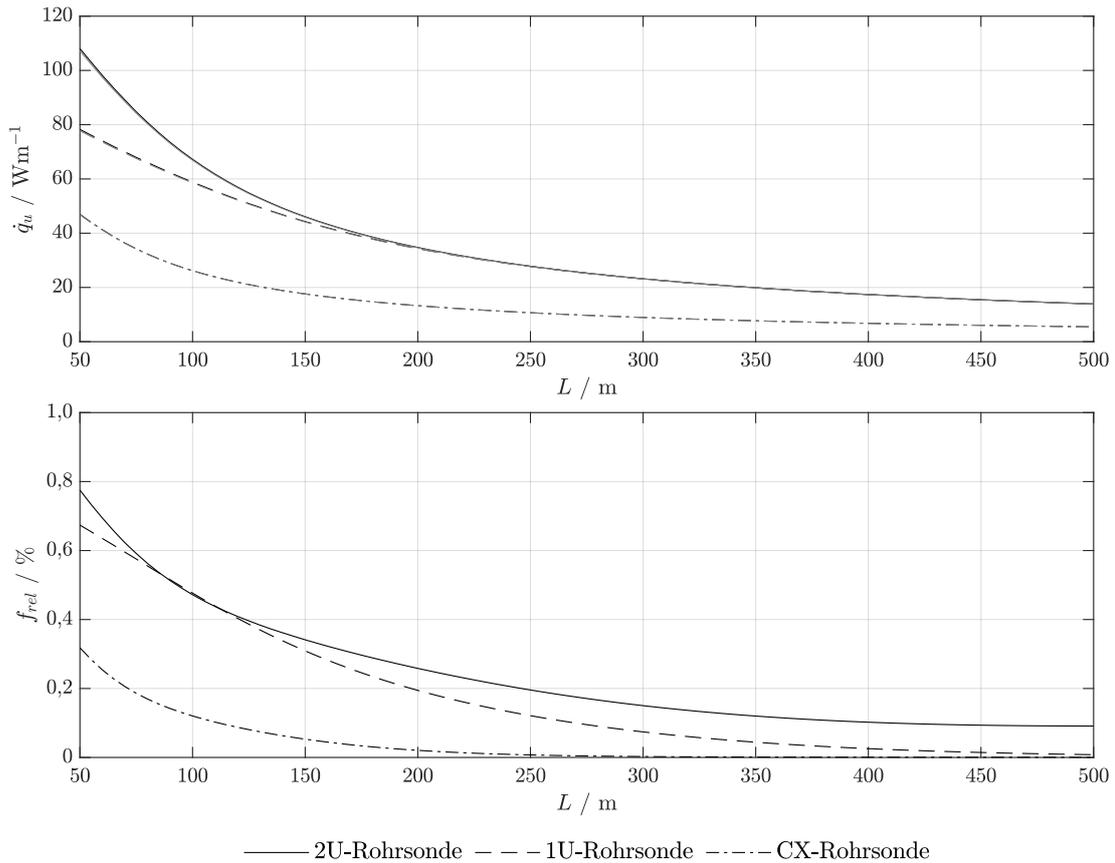


Abbildung 4.14: Oben: Spezifische Übertragungsleistung  $\dot{q}_u$  in Abhängigkeit der Sondentiefe  $L$ . Unten: Relative Abweichung in Bezug auf die Ergebnisse mit konduktivem Wärmetransport im Untergrund.

## 4.5.2 Langfristiger Einfluss

Der langfristige Einfluss wird in weiterer Folge anhand der Testfunktion in Abbildung 4.15 untersucht. Die Temperaturniveaus und der Massenstrom sind ident, zu jenen der vorherigen Testfunktion, siehe Abbildung 4.4. Die lateralen Temperatur-Randbedingungen werden durch den geothermischen Temperaturgradienten ohne TRJ Daten beschrieben. Die Testfunktion soll eine idealisierte jährliche Lastkurve repräsentieren. Zwischen Stunde 2190 und 6570 wird mit der Erdwärmesonde Energie in den Untergrund eingebracht. Das Wärmeträgermedium wird zum Beispiel durch Free Cooling<sup>5</sup> aufgewärmt und regeneriert somit den Untergrund. Im Winter, zwischen Stunde 6570 und 2190, wird dem Untergrund Energie ent-

<sup>5</sup>Free Cooling bedeutet, dass Kühlenergie nicht durch Kältemaschinen bereitgestellt wird. Viel mehr ist das Temperaturniveau der Wärmesenke so niedrig, dass direkt gekühlt werden kann. Üblicherweise kommt kaltes Wasser, aus einem Fluss oder geothermisch abgekühltes Wasser, zum Einsatz.

zogen. Das Wärmeträgermedium wird für Heizzwecke abgekühlt und in die Sonde zurück geführt.

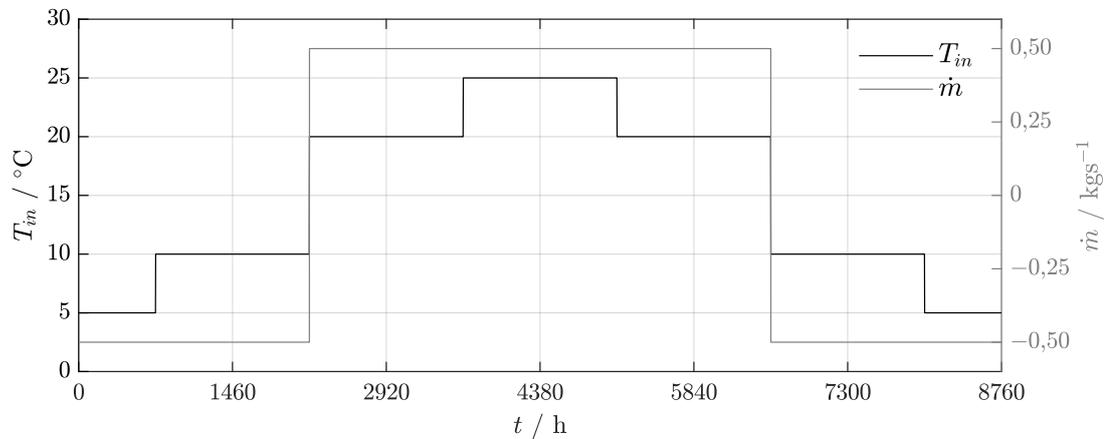


Abbildung 4.15: Testfunktion zur Analyse des Einflusses von konduktivem Wärmetransport im Untergrund unterhalb der Sonde.

In Abbildung 4.16 oben, ist die spezifische Übertragungsleistung über ein Jahr, für die drei unterschiedlichen Sonden, aufgetragen. Die Sondentiefe beträgt jeweils 200 m. In schwarz ist die resultierende spezifische Übertragungsleistung mit Berücksichtigung der Wärmeleitung im Untergrund dargestellt. Die Übertragungsleistungen ohne Berücksichtigung der Wärmeleitung unterhalb der Sonden sind nahezu deckungsgleich und hier nicht dargestellt. Die Spitzen in der Übertragungsleistung entstehen durch die sprunghaften Wechsel in der Eintrittstemperatur. Es lässt sich gut erkennen, dass sich binnen weniger Stunden nach einem Temperaturwechsel, wieder ein stationärer Zustand einstellt. Die spezifische Übertragungsleistung ist, analog zu den Analysen in Kapitel 4.4, für die CX-Rohrsonde am niedrigsten. 1U- und 2U-Rohrsonde liefern ähnliche Übertragungsleistungen. In Abbildung 4.16 unten, ist die absolute Abweichung, bezogen auf den Wärmestrom mit Berücksichtigung des Untergrunds unterhalb der Sonde, dargestellt. Anscheinend wird speziell die CX-Rohrsonde im Winter besonders stark durch die Wärmeleitung unterhalb der Sonde beeinflusst. Für eine Tiefe von 200 m ist die Abweichung, welche durch Wärmetransportvorgänge im Untergrund unterhalb der Sonden verursacht werden, für alle Sonden-Typen immer kleiner  $\pm 0,025 \text{ Wm}^{-1}$ . Der fast doppelt so hohe Rechenaufwand steht in keinem Verhältnis zur Ergebnisgüte.

Intuitiv würde man davon ausgehen, dass die Wärmetransportvorgänge unter dem Sondenfuß mit steigender Tiefe weniger stark ins Gewicht fallen. Um diese These zu untersuchen, ist in Abbildung 4.17 der Betrag der maximalen absoluten Abweichung für unterschiedliche Sondentiefen dargestellt. Die Abweichungen beziehen sich auf die Berechnungen mit Berück-

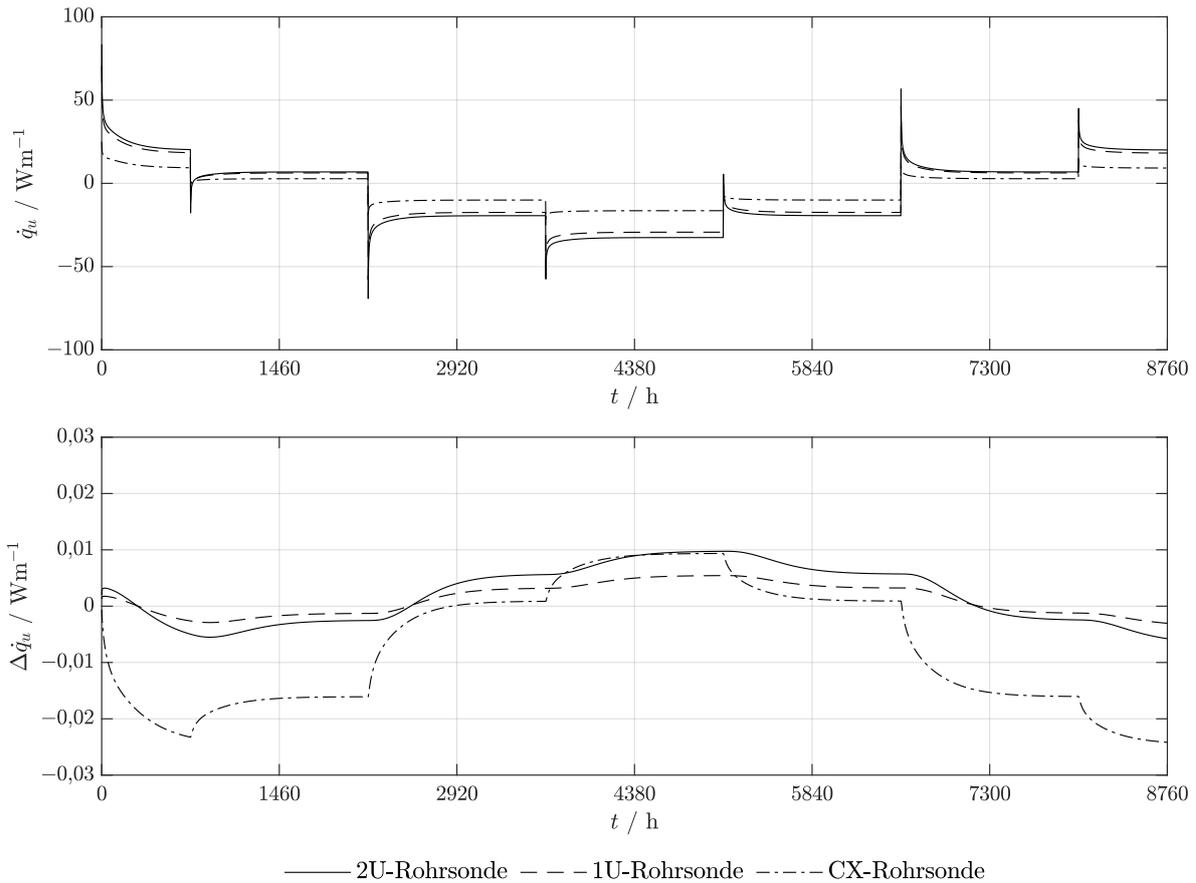


Abbildung 4.16: Oben: Spezifische Übertragungsleistung mit Berücksichtigung des Untergrunds unterhalb der Sonde. Unten: Relative Abweichung, bezogen auf die mittlere spezifische Übertragungsleistung mit Berücksichtigung des Untergrunds unterhalb der Sonde.

sichtigung der Wärmeleitung im Untergrund unterhalb der Sonde. Anscheinend sinkt die maximale Abweichung, unabhängig vom Typ der Sonde mit steigender Tiefe. Es zeigt sich also, dass die Effekte der Wärmeleitung im Untergrund unterhalb der Sonden mit steigender Tiefe kleiner werden. Aber auch bei einer Sondentiefe von nur 50 m bleiben die Abweichungen stets unter  $0,25 \text{ Wm}^{-1}$ . Für 1U- und 2U-Rohrsonden liegen diese sogar immer unter  $0,2 \text{ Wm}^{-1}$ .

Ob die Wärmeleitung im Untergrund unter der Sonde nun berücksichtigt werden soll oder nicht, hängt stark von den vorliegenden Rahmenbedingungen ab. Es konnte jedenfalls gezeigt werden, dass der langfristige Einfluss gegenüber dem kurzfristigen Einfluss dominiert. Für kurze Simulationszeiten, im Bereich von Stunden bis Tagen, kann die Wärmeleitung im Untergrund unterhalb der Sonde vernachlässigt werden. An dieser Stelle sei noch die allgemeine Problematik von kurzen Simulationszeiten erwähnt. Speziell die langsamen Wär-

metransportvorgänge im Untergrund erfordern eine sinnvolle Wahl der Starttemperaturen. Ungünstig gewählte Anfangswerte können das Ergebnis stark beeinflussen und verfälschen. Selbst bei längeren Simulationen, im Bereich von Wochen bis hin zu Jahren, sollte der Einschwingvorgang berücksichtigt werden. Die Wärmetransportvorgänge unterhalb der Sonde sollten dabei zumindest für geringe Bohrlochtiefen berücksichtigt werden.

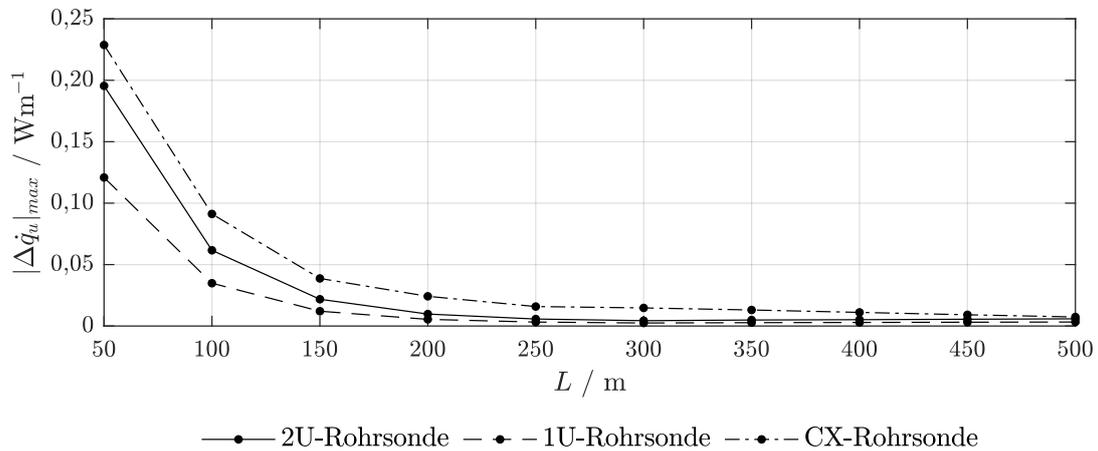


Abbildung 4.17: Maximale relative Abweichung der spezifischen Übertragungsleistung für unterschiedliche Tiefen.

## 5 Diskussion & Ausblick

Auf bestimmte Aspekte dieser Arbeit sollte noch weiter eingegangen werden. Nachfolgend sind Vorschläge zur Verbesserung der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Rohrsondenmodelle aufgelistet.

- Validierungssimulation mit kommerzieller Software wie *FEFLOW* oder *ANSYS* können wichtige Erkenntnisse über die Güte der erstellten Modelle liefern. Bauer konnte in [4] bereits Validierungssimulation für 1U- und 2U-Rohrsonden durchführen und gute Ergebnisse erzielen. Die Validierung der Modelle, speziell für die noch nicht validierte CX-Rohrsonde, kann in zukünftigen Arbeiten noch angedacht werden.
- Ein Vergleich mit Messdaten von real existierenden Sonden kann wichtige Parameter zur Feinjustierung der Modelle liefern. Speziell bei den U-Rohrsonden ist die Validierung mit Messwerten problematisch. Mit ein Grund dafür ist die Positionierung der U-Rohre. Häufig werden die Rohre, ohne oder mit einer unzureichenden Anzahl an Abstandshaltern, nur mit Klebeband zusammengebunden, in das Bohrloch eingeführt. Problematisch ist dann vor allem die nicht zentrische Ausrichtung und der zu geringe Abstand der Rohre zueinander. Gegebenenfalls können Imperfektion im Einbau durch Feinjustierung der thermischen Widerstände kompensiert werden.
- Die thermophysikalischen Parameter, speziell die Wärmeleitfähigkeit des Füllmaterials, nehmen großen Einfluss auf die Übertragungsleistung der Rohrsonden. Weitere wichtige Parameter sind der Schenkelabstand der U-Rohre sowie die allgemeinen geometrischen Parameter der Rohrsonden. Im Rahmen weiterer Arbeiten kann die Durchführung von vertiefenden Parameterstudien wichtige Erkenntnisse liefern und Optimierungspotentiale aufzeigen.
- Meistens ist die Übertragungsleistung einer einzelnen Sonde nicht ausreichend, um die geothermische Energieversorgung sicher zu stellen. Der Zusammenschluss von mehre-

ren Sonden zu Sondenfeldern kann die Übertragungsleistung in Summe stark erhöhen. Üblicherweise werden die einzelnen Sonden rasterförmig mit einigen Metern Abstand zueinander angeordnet. Durch den geringen Sondenabstand ist die gegenseitige Beeinflussung nicht zu vernachlässigen. Die in dieser Arbeit vorgestellten Modelle sind momentan nicht in der Lage, die gegenseitige Beeinflussung der Rohrsonden in Sondenfeldern zu berücksichtigen. Nagler hat in [36] ein einfaches Konzept basierend auf der *Linienquellentheorie* erarbeitet. Analog zu der Vorgehensweise von [4] können die erstellten Modelle in ein dreidimensionales Finite Volumen Modell des Untergrunds eingearbeitet werden. Dadurch ist es möglich, die Temperatursausbreitung im Untergrund, Grundwasserströmungen und die gegenseitige Beeinflussung der Rohrsonden abzubilden.

- Momentan können die WKM in den lateralen Schichten des Erdreichs nur konduktiven Wärmetransport berücksichtigen. Befinden sich die Rohrsonden aber in Gebieten mit unterirdischen Grundwasserleitern ist die Annahme des rein konduktiven Wärmetransports nicht mehr zulässig. Um die Größe und Richtung des Grundwasserstroms in die Modelle einzupflegen, ist eine anderes Modellierungskonzept der lateralen Schichten erforderlich. Das Umgebende Erdreich kann beispielsweise vollständig dreidimensional diskretisiert werden. Ob diese Problematik ohne Verwendung von kommerzielle FE-Software überhaupt zu beherrschen ist, kann im Rahmen weiterer Arbeiten untersucht werden. Der Einsatzbereich der Modelle könnte somit aber stark vergrößert werden.
- Erdwärmespeicher ohne Grundwasserströmungen müssen zwingend bilanziert betrieben werden. Das bedeutet, es muss während der Heizsaison genau so viel Energie entnommen werden, wie in der Kühltisaison wieder zugeführt wird. Für die meisten Gebäude überwiegt allerdings der Heizbedarf. Die unzureichende Regeneration des Erdwärmespeichers in der Kühltisaison kann das Langzeitverhalten des Speichers verschlechtern. Ein möglicher Lösungsansatz bietet die Regeneration mittels solarthermischer Anlagen. Dabei wird ein U-Rohr der 2U-Rohrsonde mit heißem Wärmeträgerfluid aus einer thermischen Solaranlage beaufschlagt. Das entwickelte Modell der 2U-Rohrsonden kann mit unterschiedlichen Eintrittstemperaturen umgehen. Problematisch wird es, wenn sich unterschiedliche Massenströme in den U-Rohren einstellen. Um dieses Problem zu lösen, können im Rahmen weiterer Arbeiten die Gleichungen zur Bestimmung der thermischen Widerstände angepasst werden.
- Die CX-Rohrsonde findet vereinzelt Einsatz in der tiefen Geothermie. Diese Sonden können bis in Tiefen von über 3000 m reichen. Die Rohrdurchmesser verjüngen sich

mit steigender Tiefe. Dadurch ist es möglich, die mechanische Belastung durch das Eigengewicht der Rohre zu reduzieren. Das Modell der CX-Rohrsonde kann also dahingehend angepasst werden, dass uneinheitliche Rohrdurchmesser abgebildet werden können. Gegebenenfalls sind in weiterer Folge auch die thermischen Widerstände anzupassen.

- Eine Analyse der Rechenzeit ist im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt worden. Gegebenenfalls kann durch Optimierungen des *MATLAB*-Codes die Rechenzeit weiter verkürzt werden.

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Horizontaler Querschnitt durch die drei Sondentypen. Links: CX-Rohrsonde. Mitte: 1U-Rohrsonde. Rechts: 2U-Rohrsonde . . . . .	3
2.1	Horizontaler Querschnitt (links) und das $\Delta$ -Modell mit thermischen Widerständen (rechts) einer 1U-Rohrsonde, nach [12]. . . . .	6
2.2	Horizontaler Querschnitt (oben) und WKM für CX-, 1U und 2U-Rohrsonden (unten), nach [12]. . . . .	10
2.3	Illustration der Schwerpunktlage des Füllmaterials für CX-Rohrsonden. . . .	12
2.4	Illustration der Schwerpunktlage des Füllmaterials für 1U-Rohrsonden. . . .	14
2.5	Drei mögliche Konfigurationen für die Durchströmung der U-Rohre. Links: diagonal, Mitte: benachbart mit nicht gekreuzten U-Rohren, Rechts: benachbart mit gekreuzten U-Rohren, nach [21]. . . . .	16
2.6	Illustration der Schwerpunktlage des Füllmaterials für 2U-Rohrsonden. . . .	17
2.7	Unterschiedliche Rohrkonfigurationen: A - Rohre berühren sich im Bohrlochzentrum, B - Rohre sind gleichmäßig im Bohrloch verteilt, C - Rohre berühren die Bohrlochwand, nach [28]. . . . .	20
3.1	Eindimensionale und rotationssymmetrische Diskretisierung eines Rohrs und dessen Füllmaterial in <i>Finite Volumen</i> , nach [36]. . . . .	29
3.2	Ermittlung der Temperatur an den Zellwänden mit linearer Interpolation (links) und <i>1<sup>st</sup> Order Upwind-Schema</i> (rechts), nach [33]. . . . .	30
3.3	Horizontaler Schnitt durch eine Rohrsonde und die umliegenden Schichten des Untergrunds sowie die dazugehörigen Temperaturen in Bezug auf die WKM der Rohrsonden, nach [36]. . . . .	32
3.4	Vertikale Verbindung mehrerer zweidimensionaler WKM zu einem dreidimensionalen WKM einer CX-Rohrsonde. . . . .	33
3.5	Vertikale Verbindung mehrerer zweidimensionaler WKM zu einem dreidimensionalen WKM einer 1U-Rohrsonde. . . . .	37

3.6	Vertikale Verbindung mehrerer zweidimensionaler WKM zu einem dreidimensionalen WKM einer 2U-Rohrsonde. . . . .	41
3.7	Schematische Darstellung der Isothermen des Untergrunds um eine Rohrsonde, wobei als Randbedingung jeweils konstante Temperaturen an allen Rändern angesetzt wurden. Links: Modellierung des Untergrunds nur bis zum Fuß der Sonde. Rechts: Modellierung des Untergrunds unterhalb der Sonde. . . . .	47
3.8	WKM der CX-Rohrsonde in Verbindung mit dem WKM des Untergrunds unterhalb der Sonde. . . . .	49
3.9	Vertikaler Schnitt durch das Rechengebiet einer Erdwärmesonde einschließlich dem rotationssymmetrischen umgebenden Untergrund (nicht maßstäblich). . . . .	52
3.10	Schematischer Verlauf der Untergrundtemperatur für verschiedene Tage in den gemäßigten Breiten, nach [3]. . . . .	54
3.11	Schematischer Temperaturverlauf am lateralen Rand des Rechengebiets. Links: konstante Temperatur. Mitte: TRY Datensatz und geothermischer Temperaturgradient. Rechts: geothermischer Temperaturgradient. . . . .	55
3.12	Begrenzende Radien für 20 Zellen mit unterschiedlichen Streckungsfaktoren. Oben: $f = 1,0$ . Mitte: $f = 1,1$ . Unten: $f = 1,2$ . . . . .	57
3.13	Minimale Zellgröße an der Bohrlochwand in radialer Richtung über der Anzahl an radialen Elementen für verschiedene Streckungsfaktoren, bei einem Sondendurchmesser von $d_b = 0,15$ m und einer radialen Ausdehnung des Rechengebiets auf $d_{bsn}/2 = 2$ m. . . . .	58
4.1	Thermischer Widerstand des Bohrlochs $R_g$ für 1U-Rohrsonden (links) und 2U-Rohrsonden (rechts) in Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit des Füllmaterials $\lambda_g$ bei einer voll ausgebildeten turbulenten Strömung mit $Re > 10^4$ . . . . .	61
4.2	Effektiver thermischer Widerstand des Bohrlochs $R_g^*$ für 1U-Rohrsonden (links) und 2U-Rohrsonden (rechts) in Abhängigkeit der Bohrlochtiefe bei einem Volumenstrom von $V = 1,8 \text{ m}^3\text{h}^{-1}$ . . . . .	62
4.3	Effektiver thermischer Widerstand des Bohrlochs $R_g^*$ für 1U-Rohrsonden (links) und 2U-Rohrsonden (rechtes) in Abhängigkeit des Volumenstroms bei einer Tiefe von $L = 250$ m. . . . .	62
4.4	Testfunktion zur Analyse der Zeitschrittweite $\Delta t$ sowie der Anzahl an radialen und axialen Elementen. . . . .	64
4.5	Wärmestrom zwischen Fluid im Rohr und Rohrwand für CX-, 1U-, und 2U-Rohrsonde in Abhängigkeit der Zeitschrittweite $\Delta t$ . . . . .	66
4.6	Mittlere relative Abweichung $f_{rel}$ des Wärmestroms zwischen Fluid im Rohr und Rohrwand für CX-, 1U-, und 2U-Rohrsonde bezogen auf die Simulation mit der kleinsten Zeitschrittweite $\Delta t = 5$ s. . . . .	67

4.7	Mittlere relative Abweichung $f_{rel}$ des Wärmestroms zwischen Fluid im Rohr und Rohrwand für CX-, 1U-, und 2U-Rohrsonde bezogen auf die Simulation mit der höchsten Diskretisierung $m = n = 400$ . . . . .	69
4.8	Druckverlust $\Delta p$ aufgrund von Rohrreibung über der Strömungsgeschwindigkeit in den U-Rohren bzw. im Kernrohr der CX-Rohrsonde. . . . .	72
4.9	Temperaturverlauf des Fluids in den Rohrsonden zu unterschiedlichen Zeiten über der Tiefe. Schwarze Linien: Beladevorgang $t = 30$ min. Graue Linien: Entladevorgang $t = 330$ min. . . . .	73
4.10	Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_i$ zwischen Fluid im Rohr und Rohrwand. . . . .	75
4.11	Oben: Spezifische Übertragungsleistung $\dot{q}_u$ in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit in den U-Rohren bzw. im Kernrohr der CX-Rohrsonde. Unten: Druckverlust $\Delta p$ aufgrund von Rohrreibung über der Strömungsgeschwindigkeit in den U-Rohren bzw. im Kernrohr der CX-Rohrsonde. . . . .	76
4.12	Oben: Spezifische Übertragungsleistung $\dot{q}_u$ in Abhängigkeit der Sondentiefe $L$ . Unten: Druckverlust $\Delta p$ aufgrund der Rohrreibung über der Sondentiefe . . . . .	77
4.13	Übertragungsleistung $\dot{Q}_u$ in Abhängigkeit der Sondentiefe $L$ . . . . .	78
4.14	Oben: Spezifische Übertragungsleistung $\dot{q}_u$ in Abhängigkeit der Sondentiefe $L$ . Unten: Relative Abweichung in Bezug auf die Ergebnisse mit konduktivem Wärmetransport im Untergrund. . . . .	80
4.15	Testfunktion zur Analyse des Einflusses von konduktivem Wärmetransport im Untergrund unterhalb den Sonde. . . . .	81
4.16	Oben: Spezifische Übertragungsleistung mit Berücksichtigung des Untergrunds unterhalb der Sonde. Unten: Relative Abweichung, bezogen auf die mittlere spezifische Übertragungsleistung mit Berücksichtigung des Untergrunds unterhalb der Sonde. . . . .	82
4.17	Maximale relative Abweichung der spezifischen Übertragungsleistung für unterschiedliche Tiefen. . . . .	83

# Tabellenverzeichnis

2.1	Relativer Fehler der Linienquellenlösung im Vergleich zur exakten Lösung bei $r = d_b/2$ , nach [16]. . . . .	8
2.2	Koeffizienten $B_0$ und $B_1$ für unterschiedliche Rohrkonfigurationen, nach [28].	20
4.1	Parameter zur Berechnung der thermischen Widerstände des Füllmaterials. .	60
4.2	Geometrieparameter und Strömungsgrößen der unterschiedlichen Rohrsonden. Der tiefgestellte Index 1 bezieht sich auf das Innenrohr und der Index 2 auf den Ringspalt CX-Rohrsonde. . . . .	64
4.3	Thermophysikalische Parameter der unterschiedlichen Rohrsonden. . . . .	65
4.4	Relative Gesamtabweichungen der unterschiedlichen Sondentypen für äquidi- stante Elemente . . . . .	70
4.5	Charakteristische Temperaturen des Fluids und Übertragungsleistungen wäh- rend des Be- bzw. Entladevorgangs. . . . .	74
4.6	Spezifische Übertragungsleistungen von unterschiedlichen Bodenarten bei 1800 jährlichen Volllaststunden, nach [41]. . . . .	74
B.1	Hochgestellte Indizes in Abhängigkeit der Durchströmungsrichtung und Kon- figuration der U-Rohre, siehe Abbildung 2.5. . . . .	111

# Literaturverzeichnis

- [1] BP. *BP - Energy Outlook 2020 edition*. <https://www.bp.com/en/global/corporate/energy-economics/energy-outlook.html>, 09.2020.
- [2] BP. *Statistical Review of World Energy*. <https://www.bp.com/content/dam/bp/business-sites/en/global/corporate/pdfs/energy-economics/statistical-review/bp-stats-review-2020-full-report.pdf>, 09.2020.
- [3] S. Ingrid und B. Kurt. *Geothermie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 2014.
- [4] Bauer, D. *Zur thermischen Modellierung von Erdwärmesonden und Erdsonden-Wärmespeichern*. Dissertation, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2011.
- [5] Haslinger, E., Götzl, G., Ponweiser, K., Biermayr, P., Hammer, A., Illyés, V., Turewicz, V., Huber, D., Friedrich, R., Stuckey, D., Bartak, G., Vogl, F., Niederbrucker, R., Koch, G., Bauernfeind, D., Kinner, P., Holzer, P. und Kienberger T. *Low-temperature Heating and Cooling Grids Based on Shallow Geothermal Methods for Urban Areas*. 2020.
- [6] Götzl, G., Fuchsluger, M., Steiner, C., Weilbold, J., Rupprecht, D., Höfer-Öllinger, G., Kessler, T., Heimlich, K., Ponweiser, K., Nagler, J., Bothe, D., Biermayr, P., Haslinger, E., Plank, O. und Strauß, A. *Dezentrale geothermale Niedertemperatur-Wärmenetze in urbanen Gebieten - Endbericht Projekt DEGENT-NET*. 2017.
- [7] Gehlin, S. *Thermal Response Test - Method Development and Evaluation*. Dissertation, Luleå University of Technology, Luleå, 2002.
- [8] Vieira, A., Alberdi-Pagola, M., Christodoulides, P., Javed, S., Loveridge, F., Nguyen, F., Cecinato, F., Maranha, J., Florides, G., Prodan, I., Van Lysebetten, G., Ramalho, E.,

- Salciarini, D., Georgiev, A., Rosin-Paumier, S., Popov, R., Lenart, S., Søren, E., Poulsen, S. und Radioti, G. Characterisation of Ground Thermal and Thermo-Mechanical Behaviour for Shallow Geothermal Energy Applications. *Energies* (10), 2017.
- [9] Eskilson, P. *Thermal Analysis of Heat Extraction Boreholes*. Dissertation, University of Lund, Lund, 1987.
- [10] Pérez, A. J. *Understanding numerically generated g-functions: A study case for a 6x6 borehole field*. Diplomarbeit, KTH School of Industrial Engineering and Management, Stockholm, 1996.
- [11] Hellström, G. und Sanner, B. *Earth Energy Designer*. User Manual EED Version 4, Dept. of Mathematical Physics, University of Lund, Sweden and Lahnau, Germany, 2000.
- [12] Bauer, D., Heidemann, W., Müller-Steinhagen, H. und Diersch H.-J. G. Thermal resistance and capacity models for borehole heat exchangers. *International Journal of Energy Research* 35:312-320, 2011.
- [13] Eskilson, P., Claesson, J. Simulation Model for thermally interacting heat extraction boreholes. *Numerical Heat Transfer* 13(2):149-165, 1988.
- [14] Claesson, J. und Javed, S. Explicit Multipole Formulas for Calculating Thermal Resistance of Single U-Tube Ground Heat Exchangers. *Energies* 11(1):214, 2018.
- [15] Bennet, J., Claesson, J. und Hellström, G. Multipole Method to Compute the Conductive Heat Flows to and between Pipes in a Composite Cylinder. *Notes on Heat Transfer* 3-1987, Dep. of Building Technology and Mathematical Physics, University of Lund, Lund, 1987.
- [16] Hellström, G. *Ground Heat Storage - Thermal Analyses of Duct Storage Systems*. Dissertation, University of Lund, Lund, 1991.
- [17] Al-Khoury, R., Bonnier, P.G. und Brinkgreve R.B.J. Efficient finite element formulation for geothermal heating systems. Part I: Steady state. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63:988-1013, 2005.

- [18] Al-Khoury, R. und Bonnier, P.G. Efficient finite element formulation for geothermal heating systems. Part II: Transient. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 67:725-745, 2006.
- [19] Bauer, D., Heidemann, W. und Diersch H.-J.G. Transient 3D analysis of borehole heat exchanger modeling. *Geothermics* 40:250-260, 2011.
- [20] VDI e. V. *VDI - Wärmeatlas*. Springer, Berlin, Heidelberg, 11. Auflage, 2013.
- [21] Claesson, J. und Javed, S. Explicit Multipole Formulas and Thermal Network Models for Calculating Thermal Resistances of Double U-pipe Borehole Heat Exchangers. *Science and Technology for the Built Environment* 25(8):980-992, 2019.
- [22] Diersch, H.-J. G. *FEFLOW - Finite Element Modeling of Flow, Mass and Heat Transport in Porous and Fractured Media*. Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2014.
- [23] Raymond, J., Therrien, R. und Gosselin, L. Borehole temperature evolution during thermal response tests. *Geothermics* 40:69-78, 2011.
- [24] Rees, S. J. *Advances in ground-source heat pump systems*. Woodhead Publishing, Amsterdam, 2016.
- [25] Shonder, J.A., Beck, J.V. Field test of a new method for determining soil formation thermal conductivity and borehole resistance. *ASHRAE Transactions* 106(1):843-850, 2000.
- [26] Bose, J.E., Parker, J.D., McQuiston, F.C. Design/data Manual for Closed-loop Ground-coupled Heat Pump Systems. *American Society of Heating, Refrigerating, and Air-Conditioning Engineers*, 1985.
- [27] Gu, Y., O'Neal, D.L. Development of an equivalent diameter expression for vertical U-tubes used in ground-coupled heat pumps. *ASHRAE Transactions* 104(2):347-355, 1998.
- [28] Paul, N.D. *The Effect of Grout Thermal Conductivity on Vertical Geothermal Heat*

- Exchanger Design and Performance*. Diplomarbeit, South Dakota University, South Dakota, 1996.
- [29] Sharqawy, M., Mokheimer, E. und Badr, H. Effective pipe-to-borehole thermal resistance for vertical ground heat exchangers. *Geothermics* 38:271-277, 2009.
- [30] Liao, Q., Zhou, C., Cui, W. und Jen, T.C. New correlations for thermal resistances of vertical single U-tube ground heat exchanger. *Journal of Thermal Science and Engineering Applications* 4(3):031010, 2012.
- [31] Hellström, G., Sanner, B. *Earth Energy Designer*. User Manual Version 2.0, Dept. of Mathematical Physics, University of Lund, Lund, 2000.
- [32] Javed, S. Explicit Multipole Formulas for Calculating Thermal Resistance of Single U-Tube Ground Heat Exchangers. *Energies* 11(1):214, 2018.
- [33] Bothe, D. *Modellierung und Simulation von weit verzweigten, vermaschten Netzen für thermische Energie und Gas*. Dissertation, Technische Universität Wien, Wien, 2016.
- [34] Almbauer, R. *Numerische Methoden in der angewandten Thermodynamik*. Skriptum, Technische Universität Graz, 2015.
- [35] Baumann, W. W., Bunge, U., Frederich, O., Schatz, M. und Thiele, F. *Finite-Volumen-Methode in der Numerischen Thermofluidmechanik*. Skriptum, Technische Universität Berlin, 2006.
- [36] Nagler, J. *Design Criteria for GCHP-Systems with Seasonal Storage (Anergienetze)*. Dissertation, Technische Universität Wien, Wien, 2018.
- [37] Carslaw, H.S., Jaeger, J.C., Ingersoll, L.R., Zobel, O.J., Ingersoll A.C. und Van Vleck, J.H. Conduction of Heat in Solids and Heat Conduction. *Physics Today* 1(7):24, 1948.
- [38] Koochi-Fayegh, S. und Rosen, M.A. Examination of thermal interaction of multiple vertical ground heat exchangers. *Applied Energy* 97:962-969, 2012.
- [39] DIN-Normenausschuss Technische Grundlagen (NATG). *DIN 1319 Blatt 1:1995-01 Grundlagen der Messtechnik - Teil 1: Grundbegriffe*. Deutschen Instituts für Normung.

- [40] Javadi, H., Soheil Mousavi Ajarostaghi, S., Rosen, M. A. und Pourfallah M. A Comprehensive Review of Backfill Materials and Their Effects on Ground Heat Exchanger Performance. *Sustainability* 10:4486, 2018.
- [41] VDI-Gesellschaft Energie und Umwelt. *VDI 4640 Blatt 2:2019-06 Thermische Nutzung des Untergrunds - Erdgekoppelte Wärmepumpenanlagen*. Verein Deutscher Ingenieure.

# A Nusselt-Korrelationen

Zur Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten zwischen einer festen Oberfläche und einem strömenden Fluid kann die Nusselt-Zahl als dimensionslose Form des Wärmeübergangskoeffizienten verwendet werden. Sie bildet das Verhältnis von konvektiv zu konduktiv übertragener Wärme und ist folgendermaßen definiert:

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} \quad (\text{A.1})$$

Die charakteristische Länge  $L$  und die praktisch druckunabhängige Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  sind in den meisten Fällen bekannt. Gelingt es, die Nusselt-Zahl zu berechnen, kann daraus der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  bestimmt werden. In Abschnitt [A.1](#) bis [A.3](#) sind die Nusselt-Korrelationen für unterschiedliche Rohrsonden aufgelistet. Unter Berücksichtigung der Randbedingung der *konstanten Wärmestromdichte* und mit einem kleinen Verhältnis von hydraulischem Durchmesser zu Rohrlänge kann für die Berechnung der mittleren Nusselt-Zahl die Korrelation nach Gnielinski aus [\[20\]](#) verwendet werden.

## A.1 CX-Rohrsonde

Bei der CX-Rohrsonde müssen zwei unterschiedliche Nusselt-Zahlen berechnet werden. Einerseits für den Wärmeübergang im Innenrohr und andererseits für den Wärmeübergang im Ringspalt. In Abhängigkeit der Reynolds-Zahl können für das Innenrohr drei Bereiche unterschieden werden. [20]

Laminare Strömung:  $Re_1 < 2300$

$$Nu_1 = 4,364 \quad (\text{A.2})$$

Strömung im Übergangsbereich:  $2300 < Re_1 < 10^4$

$$Nu_1 = 4,364 (1 - \gamma_1) + \gamma_1 \left\{ \frac{(0,0308/8) 10^4 Pr}{1 + 12,7 \sqrt{0,0308/8} (Pr^{2/3} - 1)} \left[ 1 + \left( \frac{d_{i,1}}{L} \right)^{2/3} \right] \right\} \quad (\text{A.3})$$

Strömung im turbulenten Bereich:  $10^4 < Re_1 < 10^6$

$$Nu_1 = \frac{(\xi_1/8) Re_1 Pr}{1 + 12,7 \sqrt{\xi_1/8} (Pr^{2/3} - 1)} \left[ 1 + \left( \frac{d_{i,1}}{L} \right)^{2/3} \right] \quad (\text{A.4})$$

mit den dimensionslosen Kennzahlen

$$Re_1 = \frac{w_1^{CX} d_{i,1}}{\nu_f}, \quad Pr = \frac{\mu_f c_{p,f}}{\lambda_f} \quad (0,1 \leq Pr \leq 1000), \quad (\text{A.5})$$

den Faktoren

$$\xi_1 = (1,8 \log_{10} Re_1 - 1,5)^{-2}, \quad \gamma_1 = \frac{Re_1 - 2300}{10^4 - 2300} \quad (0 \leq \gamma \leq 1), \quad (\text{A.6})$$

und der Strömungsgeschwindigkeit im Innenrohr

$$w_1^{CX} = \frac{\dot{m}}{\rho_f \frac{\pi}{4} d_{i,1}^2} \quad (\text{A.7})$$

Die Wärmeübertragung an das Fluid im Ringspalt kann sowohl von der Innen-, als auch von der Außenseite erfolgen. Bei der Herleitung dieser Korrelationen wird vorausgesetzt, dass die Wandtemperatur der Innenseite näherungsweise ident mit der Temperatur der Außenseite

des Rohres ist. Die Berechnung der Nusselt-Zahl kann wieder in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl in drei Bereiche eingeteilt werden. [20]

Laminare Strömung:  $Re_2 < 2300$

$$Nu_2 = 3,66 + \left[ 4 - \frac{0,102}{\left(\frac{d_{a,1}}{d_{i,2}}\right) + 0,02} \right] \left(\frac{d_{a,1}}{d_{i,2}}\right)^{0,04} \quad (\text{A.8})$$

Strömung im Übergangsbereich:  $2300 < Re_2 < 10^4$

$$Nu_2 = (1 - \gamma_2) \left\{ 3,66 + \left[ 4 - \frac{0,102}{\frac{d_{a,1}}{d_{i,2}} + 0,02} \right] \left(\frac{d_{a,1}}{d_{i,2}}\right)^{0,04} \right\} + \dots$$

$$\gamma_2 \left\{ \frac{(0,0308/8) 10^4 Pr}{1 + 12,7 \sqrt{0,0308/8} (Pr^{2/3} - 1)} \left[ 1 + \left(\frac{d_h}{L}\right)^{2/3} \right] \frac{0,86 \left(\frac{d_{a,1}}{d_{i,2}}\right)^{0,84} + \left[ 1 - 0,14 \left(\frac{d_{a,1}}{d_{i,2}}\right)^{0,6} \right]}{1 + \left(\frac{d_{a,1}}{d_{i,2}}\right)} \right\} \quad (\text{A.9})$$

Strömung im turbulenten Bereich:  $10^4 < Re_2 < 10^6$

$$Nu_2 = \frac{(\xi_2/8) Re_2 Pr}{1 + 12,7 \sqrt{\xi_2/8} (Pr^{2/3} - 1)} \left[ 1 + \left(\frac{d_h}{L}\right)^{2/3} \right] \frac{0,86 \left(\frac{d_{a,1}}{d_{i,2}}\right)^{0,84} + \left[ 1 - 0,14 \left(\frac{d_{a,1}}{d_{i,2}}\right)^{0,6} \right]}{1 + \left(\frac{d_{a,1}}{d_{i,2}}\right)} \quad (\text{A.10})$$

mit den dimensionslosen Kennzahlen

$$Re_2 = \frac{w_2^{CX} d_h}{\nu_f}, \quad Pr = \frac{\mu_f c_{p,f}}{\lambda_f} \quad (0,6 \leq Pr \leq 1000), \quad (\text{A.11})$$

dem hydraulischen Durchmesser des Ringspaltes

$$d_h = d_{i,2} - d_{a,1}, \quad (\text{A.12})$$

den Faktoren

$$\xi_2 = (1,8 \log_{10} Re_2 - 1,5)^{-2}, \quad \gamma_2 = \frac{Re_2 - 2300}{10^4 - 2300} \quad (0 \leq \gamma \leq 1), \quad (\text{A.13})$$

und der Strömungsgeschwindigkeit im Ringspalt

$$w_2^{CX} = \frac{\dot{m}}{\rho_f \frac{\pi}{4} (d_{i,2}^2 - d_{a,1}^2)} \quad (\text{A.14})$$

## A.2 1U-Rohrsonde

Bei der 1U-Rohrsonde muss zur Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten an der Rohrinnenseite in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl nach [20] in drei Bereiche unterschieden werden.

Laminare Strömung:  $Re < 2300$

$$Nu = 4,364 \quad (\text{A.15})$$

Strömung im Übergangsbereich:  $2300 < Re < 10^4$

$$Nu = 4,364(1 - \gamma) + \gamma \left\{ \frac{(0,0308/8) 10^4 Pr}{1 + 12,7\sqrt{0,0308/8} (Pr^{2/3} - 1)} \left[ 1 + \left( \frac{d_i}{L} \right)^{2/3} \right] \right\} \quad (\text{A.16})$$

Strömung im turbulenten Bereich:  $10^4 < Re < 10^6$

$$Nu = \frac{(\xi/8) Re Pr}{1 + 12,7\sqrt{\xi/8} (Pr^{2/3} - 1)} \left[ 1 + \left( \frac{d_i}{L} \right)^{2/3} \right] \quad (\text{A.17})$$

mit den dimensionslosen Kennzahlen

$$Re = \frac{w^{1U} d_i}{\nu_f}, \quad Pr = \frac{\mu_f c_{p,f}}{\lambda_f} \quad (0,1 \leq Pr \leq 1000), \quad (\text{A.18})$$

den Faktoren

$$\xi = (1,8 \log_{10} Re - 1,5)^{-2}, \quad \gamma = \frac{Re - 2300}{10^4 - 2300} \quad (0 \leq \gamma \leq 1), \quad (\text{A.19})$$

und der Strömungsgeschwindigkeit im Rohr

$$w^{1U} = \frac{\dot{m}}{\rho_f \frac{\pi}{4} d_i^2} \quad (\text{A.20})$$

## A.3 2U-Rohrsonde

Bei der 2U-Rohrsonde muss zur Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten an der Rohrinnenseite in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl nach [20] in drei Bereiche unterschieden werden.

Laminare Strömung:  $Re < 2300$

$$Nu = 4,364 \quad (\text{A.21})$$

Strömung im Übergangsbereich:  $2300 < Re < 10^4$

$$Nu = 4,364(1 - \gamma) + \gamma \left\{ \frac{(0,0308/8) 10^4 Pr}{1 + 12,7\sqrt{0,0308/8} (Pr^{2/3} - 1)} \left[ 1 + \left( \frac{d_i}{L} \right)^{2/3} \right] \right\} \quad (\text{A.22})$$

Strömung im turbulenten Bereich:  $10^4 < Re < 10^6$

$$Nu = \frac{(\xi/8) Re Pr}{1 + 12,7\sqrt{\xi/8} (Pr^{2/3} - 1)} \left[ 1 + \left( \frac{d_i}{L} \right)^{2/3} \right] \quad (\text{A.23})$$

mit den dimensionslosen Kennzahlen

$$Re = \frac{w^{2U} d_i}{\nu_f}, \quad Pr = \frac{\mu_f c_{p,f}}{\lambda_f} \quad (0,1 \leq Pr \leq 1000), \quad (\text{A.24})$$

den Faktoren

$$\xi = (1,8 \log_{10} Re - 1,5)^{-2}, \quad \gamma = \frac{Re - 2300}{10^4 - 2300} \quad (0 \leq \gamma \leq 1), \quad (\text{A.25})$$

und der Strömungsgeschwindigkeit im Rohr

$$w^{2U} = \begin{cases} \frac{\dot{m}}{2 \rho_f \frac{\pi}{4} d_i^2} & \text{für parallele Durchströmung} \\ \frac{\dot{m}}{\rho_f \frac{\pi}{4} d_i^2} & \text{für serielle Durchströmung} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

# B Koeffizienten der Gleichungssysteme

## B.1 CX-Rohrsonde

Nachfolgend sind die in Gleichungssystem (3.22) verwendeten Koeffizienten aufgelistet.

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \alpha_3^{(1)} \\ \alpha_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t \lambda_f A_{f1}}{C_{f,1} \Delta z^2} - \frac{\Delta t \dot{m}_f c_{p,f}}{C_{f,1} \Delta z} \\ 1 - \alpha_1^{(1)} - \alpha_3^{(1)} - \alpha_4^{(1)} \\ -\frac{\Delta t \lambda_f A_{f1}}{C_{f,1} \Delta z^2} \\ -\frac{\Delta t}{C_{f,1} R_{ff}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(2)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ \alpha_3^{(2)} \\ \alpha_4^{(2)} \\ \alpha_5^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{C_{f,2} R_{ff}} \\ -\frac{\Delta t \lambda_f A_{f2}}{C_{f,2} \Delta z^2} \\ 1 - \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} - \alpha_4^{(2)} - \alpha_5^{(2)} \\ -\frac{\Delta t \lambda_f A_{f2}}{C_{f,2} \Delta z^2} - \frac{\Delta t \dot{m}_f c_{p,f}}{C_{f,2} \Delta z} \\ -\frac{\Delta t}{C_{f,2} R_{fg}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(3)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(3)} \\ \alpha_2^{(3)} \\ \alpha_3^{(3)} \\ \alpha_4^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{C_g R_{fg}} \\ -\frac{\Delta t \lambda_g A_g}{C_g \Delta z^2} \\ 1 - \alpha_1^{(3)} - 2\alpha_2^{(3)} - \alpha_4^{(3)} \\ -\frac{\Delta t}{C_g R_{gb}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(4)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(4)} \\ \alpha_2^{(4)} \\ \alpha_3^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_{gb}} \\ -\alpha_1^{(4)} - \alpha_3^{(4)} \\ -\frac{1}{R_{b,s1}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(5)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(5)} \\ \alpha_2^{(5)} \\ \alpha_3^{(5)} \\ \alpha_4^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{C_{s1} R_{b,s1}} \\ -\frac{\Delta t \lambda_s A_{s1}}{C_{s1} \Delta z^2} \\ 1 - \alpha_1^{(5)} - 2\alpha_2^{(5)} - \alpha_4^{(5)} \\ -\frac{\Delta t}{C_{s1} R_{s1,s2}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(j+4)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(j+4)} \\ \alpha_2^{(j+4)} \\ \alpha_3^{(j+4)} \\ \alpha_4^{(j+4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{C_{sj} R_{s(j-1),sj}} \\ -\frac{\Delta t \lambda_s A_{sj}}{C_{sj} \Delta z^2} \\ 1 - \alpha_1^{(j+4)} - 2\alpha_2^{(j+4)} - \alpha_4^{(j+4)} \\ -\frac{\Delta t}{C_{sj} R_{sj,s(j+1)}} \end{bmatrix} \quad 2 \leq j < n \quad (\text{B.6})$$

Nachfolgend sind die in den Gleichungssystemen (3.24) und (3.60) verwendeten Matrizen mit der Dimension  $(n+3) \times (n+4)$  aufgelistet.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{2-k}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{3-k}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j+4)} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2^{(1)} & \alpha_4^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \alpha_5^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^{(3)} & \alpha_3^{(3)} & \alpha_4^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^{(4)} & \alpha_2^{(4)} & \alpha_3^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(5)} & \alpha_3^{(5)} & \alpha_4^{(5)} & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(j+4)} & \alpha_3^{(j+4)} & \alpha_4^{(j+4)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_{2+k}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{3+k}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(5)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j+4)} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Die in (3.60) einzusetzenden Matrizen  $\alpha_{top}$ ,  $\alpha_{bot}$  mit der Dimension  $(n + 1) \times (n + 4)$  sowie  $\alpha_{lat}$  mit der Dimension  $1 \times (n + 4)$  beschreiben die Randbedingungen an der Ober- bzw. Unterseite und dem lateralen Rand der CX-Rohrsonde.

$$\alpha_{top} = \alpha_{bot} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\alpha_{lat,1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Die Matrizen  $\alpha_{in/out,1}$  und  $\alpha_{in/out,2}$  sind von der Beschaltung der Koaxialrohre abhängig. In Gleichung (B.12) sind die Matrizen mit den Randbedingungen für CX-Rohrsonden mit Einlass im Innenrohr bzw. im Ringspalt dargestellt. Die Matrizen sind von der Dimension  $2 \times (n + 4)$ .

$$\alpha_{in/out,1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, & k = 1 \text{ Einlass im Innenrohr} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, & k = -1 \text{ Einlass im Ringspalt} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

$$\alpha_{in/out,2} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, & k = 1 \text{ Einlass im Innenrohr} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, & k = -1 \text{ Einlass im Ringspalt} \end{cases}$$

Die Matrizen  $\alpha_{hex,1}$  und  $\alpha_{hex,2}$  mit der Dimension  $2 \times (n + 4)$  sind wieder von der Beschaltung der CX-Rohrsonden abhängig.

$$\alpha^{(BC)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(BC)} \\ \alpha_2^{(BC)} \\ \alpha_3^{(BC)} \\ \alpha_4^{(BC)} \\ \alpha_5^{(BC)} \\ \alpha_6^{(BC)} \\ \alpha_7^{(BC)} \\ \alpha_8^{(BC)} \\ \alpha_9^{(BC)} \\ \alpha_{10}^{(BC)} \\ \alpha_{11}^{(BC)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{ff}} + \frac{2\lambda_f A_{f1}}{\Delta_z^2} + \frac{\dot{m}_f c_{p,f}}{\Delta z} \\ -\frac{1}{R_{ff}} - \frac{\lambda_f A_{f1}}{\Delta_z^2} \\ -\frac{\lambda_f A_{f1}}{\Delta_z^2} - \frac{\dot{m}_f c_{p,f}}{\Delta z} \\ -\frac{1}{R_{ff}} - \frac{\lambda_f A_{f2}}{\Delta_z^2} - \frac{\dot{m}_f c_{p,f}}{\Delta z} \\ -\frac{1}{R_{fg}} \\ \frac{1}{R_{fg}} + \frac{1}{R_{ff}} + \frac{2\lambda_f A_{f1}}{\Delta_z^2} + \frac{\dot{m}_f c_{p,f}}{\Delta z} \\ -\frac{\lambda_f A_{f2}}{\Delta_z^2} \\ -\frac{1}{R_{ff}} - \frac{\lambda_f A_{f1}}{\Delta_z^2} - \frac{\dot{m}_f c_{p,f}}{\Delta z} \\ -\frac{\lambda_f A_{f1}}{\Delta_z^2} \\ -\frac{1}{R_{ff}} - \frac{\lambda_f A_{f2}}{\Delta_z^2} - \frac{\dot{m}_f c_{p,f}}{\Delta z} \\ -\frac{\lambda_f A_{f2}}{\Delta_z^2} - \frac{\dot{m}_f c_{p,f}}{\Delta z} \end{bmatrix} \quad (B.13)$$

$$\alpha_{hex,1}^i = \begin{bmatrix} \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_7^{(BC)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (B.14)$$

$$\alpha_{hex,2}^i = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(BC)} & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_4^{(BC)} & \alpha_6^{(BC)} & \alpha_5^{(BC)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{hex,1}^r = \begin{bmatrix} \alpha_9^{(BC)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{11}^{(BC)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (B.15)$$

$$\alpha_{hex,2}^r = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(BC)} & \alpha_8^{(BC)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{10}^{(BC)} & \alpha_6^{(BC)} & \alpha_5^{(BC)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Die in Gleichung (3.60) verwendeten Vektoren der rechten Seite mit der Dimension  $(n + 4) \times 1$  können transponiert wie folgt angeschrieben werden.

$$\beta_{top} = \left[ T_{in} \quad 0 \quad T_{soil}^{top} \quad 0 \quad T_{soil,1}^{top} \quad \cdots \quad T_{soil,n-1}^{top} \quad T_{soil,n,1}^{lat} \right]^T$$

$$\beta_{bot} = \left[ 0 \quad 0 \quad T_{soil}^{bot} \quad 0 \quad T_{soil,1}^{bot} \quad \cdots \quad T_{soil,n-1}^{bot} \quad T_{soil,n,m}^{lat} \right]^T \quad (B.16)$$

$$\beta_i = \left[ T_1 \quad T_2 \quad T_g \quad 0 \quad T_{s1,i} \quad \cdots \quad T_{s(n-1),i} \quad T_{soil,n,i}^{lat} \right]^T \quad 2 \leq i < m$$

## B.2 1U-Rohrsonde

Nachfolgend sind die in Gleichungssystem (3.36) verwendeten Koeffizienten aufgelistet.

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \alpha_3^{(1)} \\ \alpha_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t \lambda_f A_f}{C_f \Delta z^2} - \frac{\Delta t \dot{m}_f c_{p,f}}{C_f \Delta z} \\ 1 - \alpha_1^{(1)} - \alpha_3^{(1)} - \alpha_4^{(1)} \\ -\frac{\Delta t \lambda_f A_f}{C_f \Delta z^2} \\ -\frac{\Delta t}{C_f R_{fg}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(2)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ \alpha_3^{(2)} \\ \alpha_4^{(2)} \\ \alpha_5^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{C_g R_{fg}} \\ -\frac{\Delta t \lambda_g A_g}{C_g \Delta z^2} \\ 1 - \alpha_1^{(2)} - 2\alpha_2^{(2)} - \alpha_4^{(2)} - \alpha_5^{(2)} \\ -\frac{\Delta t}{C_g R_{gg}} \\ -\frac{\Delta t}{C_g R_{gb}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(3)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(3)} \\ \alpha_2^{(3)} \\ \alpha_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_{gb}} \\ -2\alpha_1^{(3)} - \alpha_3^{(3)} \\ -\frac{1}{R_{b,s1}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(4)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(4)} \\ \alpha_2^{(4)} \\ \alpha_3^{(4)} \\ \alpha_4^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{C_{s1} R_{b,s1}} \\ -\frac{\Delta t \lambda_s A_{s1}}{C_{s1} \Delta z^2} \\ 1 - \alpha_1^{(4)} - 2\alpha_2^{(4)} - \alpha_4^{(4)} \\ -\frac{\Delta t}{C_{s1} R_{s1,s2}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(j+3)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(j+3)} \\ \alpha_2^{(j+3)} \\ \alpha_3^{(j+3)} \\ \alpha_4^{(j+3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{C_{sj} R_{s(j-1),sj}} \\ -\frac{\Delta t \lambda_s A_{sj}}{C_{sj} \Delta z^2} \\ 1 - \alpha_1^{(j+3)} - 2\alpha_2^{(j+3)} - \alpha_4^{(j+3)} \\ -\frac{\Delta t}{C_{sj} R_{sj,s(j+1)}} \end{bmatrix} \quad 2 \leq j < n \quad (\text{B.21})$$

Nachfolgend sind die in den Gleichungssystemen (3.38) und (3.60) verwendeten Matrizen mit der Dimension  $(n + 4) \times (n + 5)$  aufgelistet.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j+3)} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2^{(1)} & 0 & \alpha_4^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^{(1)} & 0 & \alpha_4^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^{(2)} & 0 & \alpha_3^{(2)} & \alpha_4^{(2)} & \alpha_5^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^{(2)} & \alpha_4^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \alpha_5^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^{(3)} & \alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(4)} & \alpha_3^{(4)} & \alpha_4^{(4)} & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(j+3)} & \alpha_3^{(j+3)} & \alpha_4^{(j+3)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j+3)} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Die in (3.60) einzusetzenden Matrizen  $\boldsymbol{\alpha}_{top}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_{bot}$  mit der Dimension  $(n + 2) \times (n + 5)$  und  $\boldsymbol{\alpha}_{lat}$  mit der Dimension  $1 \times (n + 5)$  beschreiben die Randbedingungen an der Ober- bzw. Unterseite und dem lateralen Rand der Rohrsonde.

$$\boldsymbol{\alpha}_{top} = \boldsymbol{\alpha}_{bot} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{lat,1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

Die Matrizen  $\boldsymbol{\alpha}_{in/out,1}$  und  $\boldsymbol{\alpha}_{in/out,2}$  mit der Dimension  $2 \times (n + 5)$  sind in Gleichung (B.41) zusammengefasst.

$$\boldsymbol{\alpha}_{in/out,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha}_{in/out,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

Mit den Koeffizienten aus Gleichung (B.28) lassen sich die Matrizen nach Gleichung (B.29) darstellen.

$$\boldsymbol{\alpha}^{(BC)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(BC)} \\ \alpha_2^{(BC)} \\ \alpha_3^{(BC)} \\ \alpha_4^{(BC)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2^{(BC)} - \alpha_3^{(BC)} - \alpha_4^{(BC)} \\ -\frac{1}{R_{fg}} \\ -\frac{\lambda_f A_f}{\Delta z^2} - \frac{\dot{m}_f c_{p,f}}{\Delta z} \\ -\frac{\lambda_f A_f}{\Delta z^2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

In Gleichung (B.29) sind die in Gleichung (3.60) einzusetzenden Matrizen mit der Dimension  $2 \times (n + 5)$  für die letzte Schicht des U-Rohres zusammen gefasst.

$$\boldsymbol{\alpha}_{hex,1} = \begin{bmatrix} \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_4^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.29})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{hex,2} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(BC)} & \alpha_4^{(BC)} & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_3^{(BC)} & \alpha_1^{(BC)} & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Die in Gleichung (3.60) verwendeten Vektoren der rechten Seite mit der Dimension  $(n + 5) \times 1$  können transponiert wie folgt angeschrieben werden.

$$\boldsymbol{\beta}_{top} = \left[ T_{in,1} \quad 0 \quad T_{soil}^{top} \quad T_{soil}^{top} \quad 0 \quad T_{soil,1}^{top} \quad \cdots \quad T_{soil,n-1}^{top} \quad T_{soil,n,1}^{lat} \right]^T$$

$$\boldsymbol{\beta}_{bot} = \left[ 0 \quad 0 \quad T_{soil}^{bot} \quad T_{soil}^{bot} \quad 0 \quad T_{soil,1}^{bot} \quad \cdots \quad T_{soil,n-1}^{bot} \quad T_{soil,n,m}^{lat} \right]^T \quad (\text{B.30})$$

$$\boldsymbol{\beta}_i = \left[ T_1 \quad T_2 \quad T_{g1} \quad T_{g2} \quad 0 \quad T_{s1,i} \quad \cdots \quad T_{s(n-1),i} \quad T_{soil,n,i}^{lat} \right]^T \quad 2 \leq i < m$$

## B.3 2U-Rohrsonde

Nachfolgend sind die in Gleichungssystem (3.57) verwendeten Koeffizienten aufgelistet.

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \alpha_3^{(1)} \\ \alpha_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t \lambda_f A_f}{C_f \Delta z^2} - \frac{\Delta t \dot{m}_f c_{p,f}}{C_f \Delta z} \\ 1 - \alpha_1^{(1)} - \alpha_3^{(1)} - \alpha_4^{(1)} \\ -\frac{\Delta t \lambda_f A_f}{C_f \Delta z^2} \\ -\frac{\Delta t}{C_f R_{fg}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.31})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(2)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ \alpha_3^{(2)} \\ \alpha_4^{(2)} \\ \alpha_5^{(2)} \\ \alpha_6^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{C_g R_{fg}} \\ -\frac{\Delta t \lambda_g A_g}{C_g \Delta z^2} \\ 1 - \alpha_1^{(2)} - 2\alpha_2^{(2)} - 2\alpha_4^{(2)} - \alpha_5^{(2)} - \alpha_6^{(2)} \\ -\frac{\Delta t}{C_g R_{gg1}} \\ -\frac{\Delta t}{C_g R_{gg2}} \\ -\frac{\Delta t}{C_g R_{gb}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.32})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(3)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(3)} \\ \alpha_2^{(3)} \\ \alpha_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_{gb}} \\ -4\alpha_1^{(3)} - \alpha_3^{(3)} \\ -\frac{1}{R_{b,s1}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.33})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(4)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(4)} \\ \alpha_2^{(4)} \\ \alpha_3^{(4)} \\ \alpha_4^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{C_{s1} R_{b,s1}} \\ -\frac{\Delta t \lambda_s A_{s1}}{C_{s1} \Delta z^2} \\ 1 - \alpha_1^{(4)} - 2\alpha_2^{(4)} - \alpha_4^{(4)} \\ -\frac{\Delta t}{C_{s1} R_{s1,s2}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(j+3)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(j+3)} \\ \alpha_2^{(j+3)} \\ \alpha_3^{(j+3)} \\ \alpha_4^{(j+3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{C_{sj} R_{s(j-1),sj}} \\ -\frac{\Delta t \lambda_s A_{sj}}{C_{sj} \Delta z^2} \\ 1 - \alpha_1^{(j+3)} - 2\alpha_2^{(j+3)} - \alpha_4^{(j+3)} \\ -\frac{\Delta t}{C_{sj} R_{sj,s(j+1)}} \end{bmatrix} \quad 2 \leq j < n \quad (\text{B.35})$$

Nachfolgend sind die in den Gleichungssystemen (3.59) und (3.60) verwendeten Matrizen mit der Dimension  $(n + 8) \times (n + 9)$  aufgelistet.

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{2-k}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{2+k}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j+3)} & 0 \end{bmatrix} \tag{B.36}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_4^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_4^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_4^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_4^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_3^{(2)} & \alpha_4^{(2)} & \alpha_4^{(2)} & \alpha_5^{(2)} & \alpha_6^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^{(2)} & 0 & 0 & \alpha_4^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \alpha_5^{(2)} & \alpha_4^{(2)} & \alpha_6^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^{(2)} & 0 & \alpha_4^{(2)} & \alpha_5^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \alpha_4^{(2)} & \alpha_6^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(2)} & \alpha_5^{(2)} & \alpha_4^{(2)} & \alpha_4^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \alpha_6^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(3)} & \alpha_1^{(3)} & \alpha_1^{(3)} & \alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(4)} & \alpha_3^{(4)} & \alpha_4^{(4)} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(j+3)} & \alpha_3^{(j+3)} & \alpha_4^{(j+3)} \end{bmatrix} \tag{B.37}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} \alpha_{2+k}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{2-k}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j+3)} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.38})$$

Die in (3.60) einzusetzenden Matrizen auf der linken Seite  $\alpha_{top}$ ,  $\alpha_{bot}$  mit der Dimension  $(n + 4) \times (n + 9)$  und  $\alpha_{lat}$  mit der Dimension  $1 \times (n + 9)$  beschreiben die Randbedingungen an der Ober- bzw. Unterseite und dem lateralen Rand der Rohrsonde. Diese Matrizen sind unabhängig von der Konfiguration und der Beschaltung der U-Rohre.

$$\alpha_{top} = \alpha_{bot} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.39})$$

$$\alpha_{lat,1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.40})$$

Die Matrizen der linken Seite in Gleichung (3.60) sind teilweise von der Durchströmungsrichtung und der Konfiguration der U-Rohre abhängig. In Tabelle B.1 sind die verschiedenen Fälle zusammengefasst.

Tabelle B.1: Hochgestellte Indizes in Abhängigkeit der Durchströmungsrichtung und Konfiguration der U-Rohre, siehe Abbildung 2.5.

		Durchströmungsrichtung	
		parallel	seriell
Konfiguration	diagonal	$p/d$	$s/d$
	benachbart nicht gekreuzt	$p/bn$	$s/bg$
	benachbart gekreuzt	$p/bg$	$s/bn$

Die Matrizen  $\alpha_{in/out,1}$  und  $\alpha_{in/out,2}$  mit der Dimension  $4 \times (n+9)$  sind von der Konfiguration und der Durchströmung der U-Rohre abhängig. In Gleichung (B.41) sind die Matrizen mit den Randbedingungen für parallel durchströmte und diagonal liegende U-Rohre  $p/d$  dargestellt. In Gleichung (B.42) die Matrizen für parallel durchströmte und benachbart liegende U-Rohre  $p/bg,bn$ .

$$\alpha_{in/out,1}^{p/d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_{in/out,2}^{p/d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (B.41)$$

$$\alpha_{in/out,1}^{p/bg,bn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_{in/out,2}^{p/bg,bn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (B.42)$$

Mit den Koeffizienten aus Gleichung (B.43) lassen sich die Matrizen für seriell durchströmte U-Rohre mit der Dimension  $4 \times (n+9)$  nach Gleichung (B.44) bis (B.46) darstellen.

$$\alpha^{(BC)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(BC)} \\ \alpha_2^{(BC)} \\ \alpha_3^{(BC)} \\ \alpha_4^{(BC)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2^{(BC)} - \alpha_3^{(BC)} - \alpha_4^{(BC)} \\ -\frac{1}{R_{fg}} \\ -\frac{\lambda_f A_f}{\Delta z^2} - \frac{\dot{m}_f c_{p,f}}{\Delta z} \\ -\frac{\lambda_f A_f}{\Delta z^2} \end{bmatrix} \quad (B.43)$$

$$\alpha_{in/out,1}^{s/d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_4^{(BC)} & \alpha_1^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1^{(BC)} & \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (B.44)$$

$$\alpha_{in/out,2}^{s/d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_4^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{in/out,1}^{s/bn} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1^{(BC)} & 0 & \alpha_4^{(BC)} & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3^{(BC)} & 0 & \alpha_1^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \alpha_{in/out,2}^{s/bn} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4^{(BC)} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (B.45)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{in/out,1}^{s/bg} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1^{(BC)} & 0 & 0 & \alpha_4^{(BC)} & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & \alpha_1^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \alpha_{in/out,2}^{s/bg} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4^{(BC)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (B.46)$$

Die Matrizen  $\alpha_{hex,1}$  und  $\alpha_{hex,2}$  sind von der Konfiguration und der Durchströmung der U-Rohre abhängig. Des weiteren ist der Massenstrom in Gleichung (B.41) für seriell durchströmte U-Rohre anzupassen. In Gleichung (B.47) bis (B.49) sind die in Gleichung (3.60) einzusetzenden Matrizen mit der Dimension  $4 \times (n + 9)$  zusammen gefasst.

$$\begin{aligned} \alpha_{hex,1}^{p,s/d} &= \begin{bmatrix} \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_4^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4^{(BC)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \alpha_{hex,2}^{p,s/d} &= \begin{bmatrix} \alpha_1^{(BC)} & 0 & 0 & \alpha_4^{(BC)} & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1^{(BC)} & \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_4^{(BC)} & \alpha_1^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & \alpha_1^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (B.47)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{hex,1}^{p,s/bn} &= \begin{bmatrix} \alpha_4^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_4^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3^{(BC)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
 \alpha_{hex,2}^{p,s/bn} &= \begin{bmatrix} \alpha_1^{(BC)} & 0 & 0 & \alpha_3^{(BC)} & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1^{(BC)} & \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_4^{(BC)} & \alpha_1^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_4^{(BC)} & 0 & 0 & \alpha_1^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.48}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{hex,1}^{p,s/bg} &= \begin{bmatrix} \alpha_4^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_4^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^{(BC)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3^{(BC)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
 \alpha_{hex,2}^{p,s/bg} &= \begin{bmatrix} \alpha_1^{(BC)} & 0 & \alpha_3^{(BC)} & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1^{(BC)} & 0 & \alpha_3^{(BC)} & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_4^{(BC)} & 0 & \alpha_1^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_4^{(BC)} & 0 & \alpha_1^{(BC)} & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(BC)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.49}$$

Die nachfolgenden Vektoren der rechten Seite  $\beta_{top}$ ,  $\beta_{bot}$  und  $\beta_i$  mit der Dimension  $(n + 9) \times 1$  sind für parallele  $p$  und serielle  $s$  Durchströmung der U-Rohre aufgelistet. Diese Vektoren sind unabhängig von der Konfiguration der U-Rohre.

$$\begin{aligned}
 \beta_{top}^p &= \left[ T_{in,1} \quad T_{in,2} \quad 0 \quad 0 \quad T_{soil}^{top} \quad T_{soil}^{top} \quad T_{soil}^{top} \quad T_{soil}^{top} \quad 0 \quad T_{soil,1}^{top} \quad \cdots \quad T_{soil,n-1}^{top} \quad T_{soil,n,1}^{lat} \right]^T \\
 \beta_{top}^s &= \left[ T_{in} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad T_{soil}^{top} \quad T_{soil}^{top} \quad T_{soil}^{top} \quad T_{soil}^{top} \quad 0 \quad T_{soil,1}^{top} \quad \cdots \quad T_{soil,n-1}^{top} \quad T_{soil,n,1}^{lat} \right]^T \\
 \beta_{bot} &= \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad T_{soil}^{bot} \quad T_{soil}^{bot} \quad T_{soil}^{bot} \quad T_{soil}^{bot} \quad 0 \quad T_{soil,1}^{bot} \quad \cdots \quad T_{soil,n-1}^{bot} \quad T_{soil,n,m}^{lat} \right]^T \\
 \beta_i &= \left[ T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \quad T_{g1} \quad T_{g2} \quad T_{g3} \quad T_{g4} \quad 0 \quad T_{s1,i} \quad \cdots \quad T_{s(n-1),i} \quad T_{soil,n,i}^{lat} \right]^T \quad 2 \leq i < m
 \end{aligned} \tag{B.50}$$

## B.4 Untergrund unter der Sonde

Nachfolgend sind die in Gleichungssystem (3.65) verwendeten Koeffizienten aufgelistet.

$$\boldsymbol{\alpha}^{(k)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(k)} \\ \alpha_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_2^{(k)} \\ -\frac{1}{R_{b,s1}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.51})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(5)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(5)} \\ \alpha_2^{(5)} \\ \alpha_3^{(5)} \\ \alpha_4^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{C_{s1} R_{b,s1}} \\ -\frac{\Delta t \lambda_s A_{s1}}{C_{s1} \Delta z^2} \\ 1 - \alpha_1^{(5)} - 2\alpha_2^{(5)} - \alpha_4^{(5)} \\ -\frac{\Delta t}{C_{s1} R_{s1,s2}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.52})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(j+4)} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(j+4)} \\ \alpha_2^{(j+4)} \\ \alpha_3^{(j+4)} \\ \alpha_4^{(j+4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{C_{sj} R_{s(j-1),sj}} \\ -\frac{\Delta t \lambda_s A_{sj}}{C_{sj} \Delta z^2} \\ 1 - \alpha_1^{(j+4)} - 2\alpha_2^{(j+4)} - \alpha_4^{(j+4)} \\ -\frac{\Delta t}{C_{sj} R_{sj,s(j+1)}} \end{bmatrix} \quad 2 \leq j < n \quad (\text{B.53})$$

Nachfolgend sind die in den Gleichungssystemen (3.69) und (3.70) verwendeten Matrizen für CX-Rohrsonden mit der Dimension  $(n+2) \times (n+2)$  aufgelistet.

$$\boldsymbol{\alpha}_4^{CX} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j+3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.54})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_5^{CX} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^{(k)} & \alpha_2^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^{(4)} & \alpha_3^{(4)} & \alpha_4^{(4)} & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(j+3)} & \alpha_3^{(j+3)} & \alpha_4^{(j+3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.55})$$

$$\alpha_6^{CX} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j+3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.56})$$

Nachfolgend sind die in den Gleichungssystemen (3.69) und (3.70) verwendeten Matrizen für 1U-Rohrsonden mit der Dimension  $(n + 3) \times (n + 3)$  aufgelistet.

$$\alpha_4^{1U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j+3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.57})$$

$$\alpha_5^{1U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^{(k)} & \alpha_2^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^{(4)} & \alpha_3^{(4)} & \alpha_4^{(4)} & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(j+3)} & \alpha_3^{(j+3)} & \alpha_4^{(j+3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.58})$$

$$\alpha_6^{1U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j+3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.59})$$

Nachfolgend sind die in den Gleichungssystemen (3.69) und (3.70) verwendeten Matrizen für

2U-Rohrsonden mit der Dimension  $(n + 5) \times (n + 5)$  aufgelistet.

$$\alpha_4^{2U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j+3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.60})$$

$$\alpha_5^{2U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(k)} & \alpha_2^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(4)} & \alpha_3^{(4)} & \alpha_4^{(4)} & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1^{(j+3)} & \alpha_3^{(j+3)} & \alpha_4^{(j+3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.61})$$

$$\alpha_6^{2U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^{(j+3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.62})$$

Die in (3.70) einzusetzende Matrix  $\alpha_{bot,2}$  unterscheidet sich hinsichtlich ihrer Dimension für die drei Sonden-Typen. Für die CX-Rohrsonde ergibt sich eine Matrix mit der Dimension  $(n + 2) \times (n + 2)$ . Die 1U- bzw. 2U-Rohrsonde erfordert eine Dimension von  $(n + 3) \times (n + 3)$  bzw.  $(n + 5) \times (n + 5)$ . Die Matrix  $\alpha_{lat,2}$  beschreibt die Randbedingungen am lateralen Rand

des Untergrunds unterhalb der Rohrsonde.

$$\boldsymbol{\alpha}_{bot,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha}_{lat,2} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.63})$$

Nachfolgenden sind die Vektoren der rechten Seite  $\boldsymbol{\beta}_{bot,1}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{bot,2}$  aufgelistet. Der Vektor  $\boldsymbol{\beta}_{bot,2}$  hat die Dimension  $(n+2) \times 1$ ,  $(n+3) \times 1$  bzw.  $(n+5) \times 1$ .

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{bot,1}^{CX,1U} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{\beta}_{bot,1}^{2U} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{\beta}_{bot,2} &= \begin{bmatrix} 0 & T_{soil,1}^{bot} & \cdots & T_{soil,n-1}^{bot} & T_{soil,n,m+o}^{lat} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

Die nachfolgend aufgelisteten Vektoren  $\boldsymbol{\beta}_k$  haben die Dimensionen  $(n+2) \times 1$ ,  $(n+3) \times 1$  bzw.  $(n+5) \times 1$ .

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_k^{CX} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & T_{s1,k} & \cdots & T_{s(n-1),k} & T_{soil,n,k}^{lat} \end{bmatrix}^T & 1 \leq k \leq o \\ \boldsymbol{\beta}_k^{1U} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & T_{s1,k} & \cdots & T_{s(n-1),k} & T_{soil,n,k}^{lat} \end{bmatrix}^T & 1 \leq k \leq o \\ \boldsymbol{\beta}_k^{2U} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{s1,k} & \cdots & T_{s(n-1),k} & T_{soil,n,k}^{lat} \end{bmatrix}^T & 1 \leq k \leq o \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$