DIPLOMARBEIT

Flächenhafte Deformationsanalyse unter Verwendung von approximierenden B-Spline-Flächen

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

im Rahmen des Studiums

Geodäsie und Geoinformation

eingereicht von

Christoph Hobmaier
Matrikelnummer 01327134

an der Technischen Universität Wien
Department für Geodäsie und Geoinformation
Forschungsgruppe Ingenieurgeodäsie

unter Leitung von

Univ.Prof. Dr.-Ing. Hans-Berndt Neuner
und
Univ.Ass. Dr.techn. MSc Corinna Harmening

Wien, September 2020

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit von mir selbstständig erstellt wurde. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.

Wien, September 2020

Christoph Hobmaier

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Kurzfassung

Klassische Deformationsanalysen sind in der Lage, statistisch gesicherte Aussagen über Verformungen eines Objekts sowohl gegenüber seiner Umgebung als auch innerhalb des Objekts abzuleiten. Voraussetzung für die Analysen sind wohl geplante geodätische Netze, innerhalb derer sich die durch einzelne diskretisierte Punkte repräsentierten Objekte erfassen lassen.

Den durch hohen Planungs- und Signalisierungsaufwand gekennzeichneten klassischen Ansätzen stehen seit einiger Zeit zunehmend solche gegenüber, die mit der Verarbeitung von flächenhaft erfassten Objektoberflächen arbeiten. Flächenhafte Erfassungsmethoden, wie beispielsweise die Messtechnik des terrestrischen Laserscannings, erlauben die lückenlose Aufnahme der zu untersuchenden Oberflächen innerhalb kurzer Zeit und mit wenig Planungsaufwand. Die Eigenschaften der entstehenden Punktwolken bringen dabei einige Herausforderungen mit sich, welche unter Anderem die Komplexität des stochastischen Modells oder die korrekte Identifizierung identer Bereich innerhalb der Aufnahmen betreffen. Auf Letzteren liegt ein Schwerpunkt in den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit.

Im Zuge dessen wird ein Verfahren zur Ableitung von Deformationsaussagen zwischen zu verschiedenen Zeitpunkten aufgenommenen Punktwolken derselben Objektoberfläche entwickelt. Die Implementierung des Ansatzes erfolgt in MATLAB und basiert auf der B-Spline-Approximation der anhand einer Sollfläche simulierten Messdaten. Anhand der approximierten Flächen werden Identpunkte in einem regelmäßigen Raster diskretisiert, welche im Anschluss zur Ermittlung der Elemente der Starrkörperbewegung und der Detektion von überlagerten Verformungen innerhalb der Objektoberfläche herangezogen werden. In der Analyse der Ergebnisse zeigt sich, dass verformte Bereiche mit der entwickelten Methodik zuverlässig detektiert und die Elemente der Starrkörperbewegung mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden können.

Durch Erhöhung der Diskretisierungsdichte wird versucht, einen höheren Detailgrad der Lokalisierung der Verformungen zu erreichen; im stochastischen Modell der diskretisierten Flächenpunkte kommt es dabei zu Singularitäten, sobald die durch die Parametrisierung der zugrunde liegenden B-Spline-Fläche definierte maximale Diskretisierungsdichte überschritten wird. Durch verschiedene Ansätze werden Wege aufgezeigt, um die entstehenden singulären Varianz-Kovarianzmatrizen in den entsprechenden Ausgleichungen zu verarbeiten.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Abstract

In deformation analysis, pointwise approaches are able to quantify deformations within an object as well as relatively to its vicinity, including their statistical significance. Prerequisites for such approaches are well designed geodetic networks and a suitable representation of the object through selected and signalized points.

In contrast to pointwise approaches, which are thus characterized by high planning and signaling efforts, an increasing usage of areal approaches can be observed. Areal acquisition techniques such as terrestrial laser scanning allow the dense sampling of the object surface in a short amount of time and with less planning effort. The properties of the resulting point clouds pose several challenges, such as the complexity of the stochastic model or the identification of corresponding areas between the measured epochs. The latter is a main focus of the investigations in the present work.

The developed method to derive deformation estimates between point clouds of the same object surface recorded at different points in time is implemented in MATLAB. It is based on the B-spline approximation of the measurement data which is simulated using a reference surface. The approximated surfaces are used to discretize corresponding points in a regular grid, which are then utilized to estimate the elements of rigid body movement and to detect superimposed distortions within the object surface. The analysis of the results shows that deformed areas can be reliably detected with the developed methodology and that the elements of rigid body movement can be determined with sufficient accuracy.

By increasing the discretization density, a higher level of detail of the distortions' localization is attempted. In the stochastic model of the discretized surface points, singularities occur as soon as the maximum discretization density defined by the parameterization of the underlying B-spline surface is exceeded. Different approaches are used to demonstrate ways to process the resulting singular variance-covariance matrices in the subsequent estimations.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung **1**
1.1. Motivation . . . 1
1.2. Ziel und Aufbau der Arbeit . . . 3

2. Theoretische Grundlagen **4**
2.1. Grundlegendes zum Testen von Hypothesen . . . 4
2.2. Klassische und flächenhafte Deformationsanalyse . . . 7
2.2.1. Deformationsanalyse im Kongruenzmodell . . . 7
2.2.2. Deformationsanalyse auf Basis flächenhafter Messungen . . . 9
2.3. Modellierung von Punktwolken mit B-Spline-Flächen . . . 12
2.3.1. Mathematische Eigenschaften von B-Spline-Kurven und -Flächen 13
2.3.2. Schätzung der Unbekannten von B-Spline-Flächen . . . 15
2.4. Überbestimmte dreidimensionale Helmerttransformation . . . 18
2.4.1. Ausgleichungsmodell der Helmerttransformation . . . 19
2.4.2. Robuste Schätzung der Transformationsparameter . . . 21
2.4.3. Ausreißertest im Gauß-Markov-Modell . . . 24
2.4.4. Helmerttransformation mit singulärer Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen . . . 27

3. Methodik **28**
3.1. Simulation von flächenhaften Messungen und Objektdeformationen . . 28
3.2. Berechnung von Identpunkten zwischen den Epochen . . . 32
3.3. Ermittlung unverformter Bereiche zur Bestimmung von Näherungswerten für die Elemente der Starrkörperbewegung . . . 35
3.4. Lokalisierung von Verformungen . . . 38
3.5. Regularisierung des Gleichungssystems . . . 42

4. Ergebnisse **46**
4.1. Simulierte Datensätze . . . 46
4.2. Deformationsanalyse im Regulärfall . . . 50
4.2.1. Bestimmung einer initialen Stabilpunktmenge . . . 51
4.2.2. Lokalisierung von Verformungen durch Erweiterung der Stabilpunktmenge . . . 52
4.2.3. Diskussion der Ergebnisse . . . 61
4.3. Deformationsanalyse mit singulären Varianz-Kovarianzmatrizen . . . 63
4.3.1. Bestimmung einer initialen Stabilpunktmenge . . . 64
4.3.2. Lokalisierung von Verformungen durch Erweiterung der Stabilpunktmenge . . . 71

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

4.3.3. Vergleich und Diskussion der Ergebnisse 79

5. Zusammenfassung und Ausblick **83**

Symbolverzeichnis **86**

Literatur **88**

A. Anhang: Weitere Ergebnisse **90**

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

1. Einleitung

1.1. Motivation

Geodätische Überwachungsmessungen und die damit verbundene Analyse der Messdaten dienen der Detektion von geometrischen Veränderungen (Deformationen), denen ein zu überwachendes Objekt unterliegt und bilden einen wesentlichen Aufgabenbereich der Ingenieurgeodäsie. Abhängig von der Geschwindigkeit der erwarteten Veränderungen wird das Objekt für eine *geodätische Deformationsanalyse* an mehreren Zeitpunkten (Epochen) erfasst und als Teil eines Risikomanagements auf kritische Veränderungen untersucht. In diesem Zusammenhang wird oftmals auch von einem sogenannten *(geodätischen) Monitoring* gesprochen (Heunecke et al. 2013).

Zusammen mit den Eingangsgrößen, also äußeren Einflüssen, die das Objekt belasten und eine Deformation verursachen können, und den Ausgangsgrößen, die die möglichen Deformationen repräsentieren, wird das Objektmodell im Rahmen der Systemtheorie als ein dynamisches System betrachtet. Demnach wandeln Prozesse innerhalb des Objekts die äußeren Einflüsse in eine Bewegung der Objektpunkte um. Wie diese Umwandlung erfolgt, hängt vom sogenannten Übertragungsverhalten des Objekts ab. Je nach dem, ob und in welchem Ausmaß in der Auswertung der Überwachungsmessungen eine Modellierung des zeitlichen Ablaufs der Deformationen und der Eingangsgrößen erfolgt, ergeben sich unterschiedliche Auswertemodelle (vgl. Tabelle 1.1). Da die Modellierung des Einflusses der Eingangsgrößen eine hohe Komplexität zur Folge hat, werden in den meisten Fällen die zu untersuchenden Systeme rein deskriptiv betrachtet, es werden also lediglich die Ausgangsgrößen analysiert (ebd.).

Im Unterschied dazu existieren erklärende (kausale) Modelle, welche die meist sehr komplexen Wirkungsweisen zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen untersuchen. Wird in der deskriptiven Auswertung zudem keine zeitliche Modellierung der Deformationen vorgenommen, erfolgt die Auswertung im *Kongruenzmodell* (vgl. Abschnitt 2.2.1). Hierbei liegt der Fokus auf der geometrischen Beschreibung des Objekts zu verschiedenen Zeitpunkten und der Untersuchung der Kongruenz der in den Messepochen erfassten Punkte (Niemeier 2008).

Grundlegend gibt es zwei Arten von Deformationen, die an einem Objekt auftreten können (vgl. Abbildung 1.1): bewegt sich das Objekt als Ganzes relativ zu seiner Umgebung, spricht man von einer *Starrkörperbewegung*, die sich aus Verschiebungen und Verdrehungen zusammensetzt. Zudem können *Verformungen* innerhalb des Objekts die Objektform, also dessen innere Geometrie, verändern; Ursache hierfür sind Verzerrungen, also Dehnungen und Schubverformungen im Objekt, die die relative Lage zwischen den Objektpunkten beeinflussen. Beide Deformationsarten können gleichzeitig auftreten und sich überlagern. Aufgrund der Aufnahme zu bestimmten Zeitpunkten wird von

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Tabelle 1.1.: Einteilung und Anwendungsbereiche der Auswertemodelle für Deformationsanalysen. Aus Niemeier (2008)

	Modell	**Modellierung**		**Objektstatus**
		Zeit	**einwirkende Kräfte**	
Deskriptive Modelle	Kongruenz-modell	nein	nein	im Gleichgewicht
	Kinematisches Modell	Funktion der Zeit	nein	in Bewegung
Kausale Modelle	Statisches Modell	nein	Verschiebung als Funktion der Zeit	im Gleichgewicht
	Dynamisches Modell	Bewegungen als Funktion von Zeit und Kräften		in Bewegung

einer *zeitlichen Diskretisierung* des Deformationsvorgangs gesprochen. Ebenso wird der Zustand des Objekts nicht kontinuierlich, sondern stets mit einer *räumlichen Diskretisierung* erfasst, da die Aufnahme nur an einzelnen, ausgewählten Messpunkten erfolgt, typischerweise mit einer Totalstation im Zuge einer geodätischen Netzmessung. Die Punkte am Objekt müssen dabei so platziert sein, dass die erwarteten Deformationen durch sie repräsentiert werden können. Durch den relativ hohen Aufwand der Signalisierung ist in der Planung grundsätzlich zwischen Wirtschaftlichkeit und Vollständigkeit der Aufnahme abzuwägen (Heunecke et al. 2013).

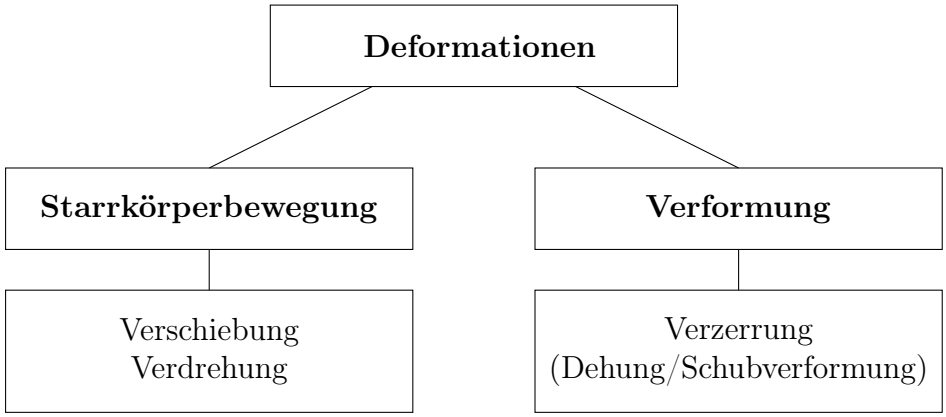


Abbildung 1.1.: Übersicht über Deformationsarten. Nach Heunecke et al. (2013)

Demgegenüber steht seit einigen Jahren die immer breiter verfügbare Laserscanning-Messtechnik, welche eine lückenlose und zügige Erfassung der Objektoberfläche verspricht. Während mit klassischen geodätischen Aufnahmeverfahren stets die Gefahr besteht, dass deformierte Bereiche in nicht-signalisierten Bereichen übersehen werden, scheint dieser Nachteil in der flächenhaften Aufnahme nicht zu existieren. Motiviert durch diese Eigenschaft des Laserscannings kommt vermehrt die Fragestellung nach der Nutzung der flächenhaften Messdaten im Kontext der Deformationsanalyse auf

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

(Holst und Kuhlmann 2016).

Messdaten aus flächenhaften Aufnahmen (*Punktwolken*) entstehen durch die berührungslose, räumlich dichte Abtastung von Oberflächen, im ingenieurgeodätischen Bezug hauptsächlich via terrestrischem Laserscanning (TLS). Durch die Aufnahme der Gesamtheit der Objektoberfläche entfällt im Vergleich zur punktweisen Aufnahme die Notwendigkeit, das oftmals unbekannte Deformationsverhalten im Vorfeld abzuschätzen und durch Einzelpunkte zu repräsentieren. Die Gefahr, unerwartete Deformationen zwischen den signalisierten Objektpunkten zu übersehen, kann somit durch geeignete flächenhafte Modellierung vermieden werden (Wunderlich et al. 2016).

Während einige Nachteile der klassischen Deformationsanalyse durch die flächenhafte Aufnahme und Auswertung umgangen werden können, entstehen im Gegenzug jedoch zahlreiche andere, grundlegende Herausforderungen (Holst und Kuhlmann 2016). Unter Anderem im Zusammenhang mit der Aufnahme an sich (stochastisches Modell, Standpunktplanung, Registrierung), aber auch mit der Auswertung der Messdaten und deren Vergleichbarkeit zwischen verschiedenen Aufnahmezeitpunkten ergeben sich dabei einige Schwierigkeiten, welche dazu führen, dass die Verfahren der klassischen Deformationsanalyse nicht oder nur eingeschränkt auf die Analyse von flächenhaften Messungen übertragen werden können.

1.2. Ziel und Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit soll ein Verfahren entwickelt und umgesetzt werden, mit dem aus flächenhaften Aufnahmen einer Objektoberfläche zu verschiedenen Zeitpunkten statistisch gesicherte Aussagen über das Deformationsverhalten des Objekts abgeleitet werden können. Ziel ist es, sowohl eine Starrkörperbewegung, als auch eine überlagerte Verformung innerhalb des aufgenommenen Bereichs zu detektieren. Aufbauend auf einem bereits entwickelten Ansatz der flächenhaften Approximation von Punktwolken durch B-Spline-Flächen werden die approximierenden Flächen für die Ableitung von räumlichen Korrespondenzen zwischen den Aufnahmen herangezogen.

In Kapitel 2 werden zunächst auf die theoretischen Grundlagen, die für die Entwicklung und die Einordnung des Ansatzes in das Themenfeld der klassischen und flächenhaften Deformationanalyse benötigt werden, vorgestellt. Dazu gehören die mathematischen Grundlagen von B-Spline-Flächen und des Ausgleichungsmodells der Flächenschätzung, der Helmerttransformation und der Identifizierung und Lokalisierung von Ausreißern in verformten Bereichen. In Kapitel 3 wird die Methodik der implementierten Deformationsanalyse erläutert. Diese umfasst grundlegend einerseits die Simulation von flächenhaften Messdaten und Deformationen, welche andererseits im Anschluss durch Modellierung der Starrkörperbewegung und schrittweise Lokalisierung der Verformung aufgedeckt werden. Kapitel 4 stellt die Ergebnisse des implementierten Verfahrens auf Basis der simulierten Daten dar. Eine Zusammenfassung und Einordnung des Verfahrens wird in Kapitel 5 gegeben, ebenso ein Ausblick darauf, wie es weiterentwickelt werden kann.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

2. Theoretische Grundlagen

In den folgenden Abschnitten werden theoretische Grundlagen, die für das Verständnis der in dieser Arbeit entwickelten Methodik (Kapitel 3) notwendig sind, vorgestellt. Die abgeleiteten Deformationsaussagen werden darin mit Hilfe statistischer Tests, welche in Abschnitt 2.1 erläutert werden, statistisch abgesichert. Der implementierte Ansatz ist den flächenhaften Deformationsanalysen zuzuordnen, welche der klassichen Analyse im Kongruenzmodell gegenübergestellt werden (vgl. Abschnitt 2.2).

Die Methodik basiert auf der Approximation von Punktwolken mit B-Spline-Flächen (vgl. Abschnitt 2.3); auf den geschätzten Flächen der Punktwolken von Null- und Vergleichsepoche werden Identpunkte berechnet, welche im Basismodell des entwickelten Ansatzes auf Deformationen untersucht werden. Dieses umfasst die in Abschnitt 2.4 eingeführte Helmerttransformation, wobei die Verformungen innerhalb der Fläche als Ausreißer interpretiert und mit robusten Verfahren verarbeitet bzw. mit Ausreißertests lokalisiert werden können.

2.1. Grundlegendes zum Testen von Hypothesen

Ein essentielles Instrument in der Geodäsie und insbesondere im Kontext der Deformationsanalyse ist der statistische Test. Allgemein kann nach Niemeier (2008) mit Hilfe statistischer Tests oder Hypothesentests eine Aussage darüber getroffen werden, ob „ein Schätzwert mit einem gegebenen theoretischen Wert oder einem weiteren, unabhängigen Schätzwert im Rahmen bestimmter Wahrscheinlichkeiten übereinstimmt“. Die Messgrößen werden als Zufallsvariablen aufgefasst, denen eine statistische Verteilung zugrunde liegt. Voraussetzung für die Durchführung eines statistischen Tests von Schätzwerten, die aus Stichproben, also konkreten Messungen dieser Zufallsvariablen berechnet werden, ist die Kenntnis dieser Verteilung – bei geodätischen Beobachtungen wird meist davon ausgegangen, dass sie einer Normalverteilung folgen. Durch diese Kenntnis ist es dann möglich – in Verbindung mit einer Wahrscheinlichkeitsaussage – Behauptungen bezüglich der Schätzwerte zu widerlegen oder zu bestätigen.

Ein statistischer Test, der in der Interpretation geodätischer Messungen sehr häufig zur Anwendung kommt, ist der *Globaltest*. Mit dem Globaltest kann im Anschluss an eine Ausgleichung die Korrektheit sowohl des stochastischen als auch des funktionalen Modells überprüft werden (Jäger et al. 2005). Die Konsistenz des Modells stellt eine Behauptung dar und wird als sogenannte *Nullhypothese* H_0 formuliert. Im Anschluss wird getestet, ob der geschätzte a posteriori-Varianzfaktor $\hat{\sigma}_0^2$ mit dem a priori-Wert übereinstimmt oder ob signifikante Unterschiede zwischen beiden Werten bestehen. Der Begriff der *Signifikanz* beinhaltet die Wahrscheinlichkeitsaussage des Tests: auf einem festgelegten Signifikanzniveau α wird eine Entscheidung darüber getroffen, ob

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

die Differenz zwischen den Werten im Rahmen des Zufalls entstanden ist oder ob der (signifikante) „Unterschied nicht mehr durch den Zufall erklärt werden kann, also die Gültigkeit der Nullhypothese unwahrscheinlich ist“ (Witte und Sparla 2015).

Der grundlegend immer gleiche Ablauf eines statistischen Tests soll im Folgenden am Beispiel des Globaltests detaillierter beschrieben werden:

1. **Aufstellen einer Nullhypothese H_0 sowie einer Alternativhypothese H_A**
   Generell wird die Nullhypothese aufgestellt, um sie zu verwerfen – mit einem statistischen Test können lediglich Unterschiede, jedoch keine Übereinstimmungen ermittelt werden (ebd.). Beim Globaltest wird die Nullhypothese

   $$H_0 : E(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2 \tag{2.1}$$

   formuliert, welche die Behauptung der Gleichheit des Erwartungswertes des geschätzten a posteriori-Varianzfaktors mit dem a priori-Wert, also die Überprüfung des stochastischen Modells, beinhaltet (Jäger et al. 2005). Die Alternativhypothese

   $$H_A : E(\hat{\sigma}_0^2) > \sigma_0^2 \tag{2.2}$$

   entsteht durch die einseitige Fragestellung im Globaltest: H_0 wird verworfen, wenn $\hat{\sigma}_0^2$ signifikant größer ist als σ_0^2.

2. **Festlegen eines Signifikanzniveaus α**
   Das Signifikanzniveau, auch als *Irrtumswahrscheinlichkeit* oder *Fehler 1. Art* bezeichnet, beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der eine eigentlich gültige Nullhypothese verworfen wird. Die Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ wird im Gegensatz dazu *Sicherheitswahrscheinlichkeit* oder *statistische Sicherheit* genannt, welche jenen Bereich der Testverteilung definiert, in dem die Nullhypothese nicht verworfen wird. $1-\alpha$ steht damit für die Wahrscheinlichkeit, mit der H_0 korrekterweise nicht verworfen wird. Bei einseitigen Fragestellungen liegt der Grenzwert zum Verwerfungsbereich der Nullhypothese an der Stelle des $(1-\alpha)$-Quantils der Testverteilung (vgl. Abbildung 2.1), bei zweiseitigen Fragestellungen entsprechend an den Stellen des $(\alpha/2)$- und $(1-\alpha/2)$-Quantils. Üblicherweise wird für α ein Wert von 0.05 oder 0.01 gewählt (Witte und Sparla 2015).

   Der *Fehler 2. Art* β ist die Wahrscheinlichkeit, die falsche Nullhypothese beizubehalten, $\gamma = 1-\beta$ wird als *Testgüte* bezeichnet und beschreibt die Wahrscheinlichkeit der korrekten Annahme von H_A – statistische Tests, die eine hohe Testgüte besitzen, werden auch *trennscharf* genannt. Größere Stichprobenumfänge führen (bei gleich bleibendem α) zu einer besseren Testgüte (ebd.).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

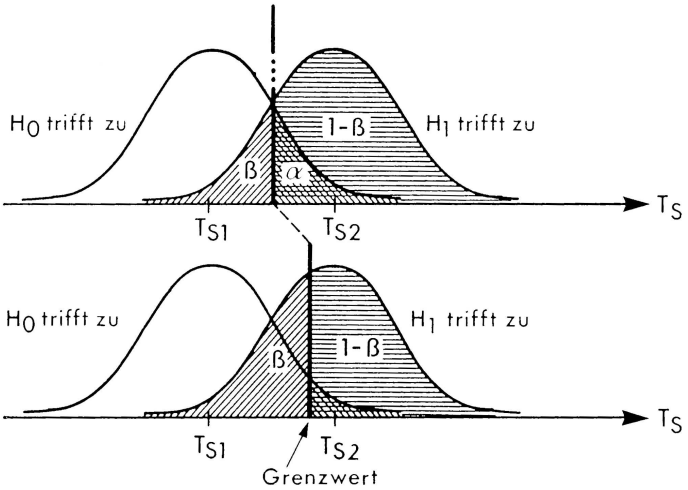


Abbildung 2.1.: Testverteilungen für H_0 und $H_A = H_1$ bei einseitiger Fragestellung und verschiedenen Signifikanzniveaus. Aus Witte und Sparla (2015).

3. **Ermitteln der Testgröße T**
   Die Testgröße im Globaltest lautet

$$T_G = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{Q}_{ll}^{-1} \boldsymbol{e}}{f \sigma_0^2} \sim F_{f,\infty} = \frac{\chi_f^2}{f} \tag{2.3}$$

   und entsteht durch Division zweier χ^2-verteilter Größen mit den Freiheitsgraden $f_1 = f$ und $f_2 = \infty$. Sie folgt damit, bei Zutreffen von H_0, einer $F_{f,\infty}$-Verteilung, die mit der χ_f^2-Verteilung äquivalent ist (Heunecke et al. 2013).

4. **Fällen der Testentscheidung**
   Die Testentscheidung wird getroffen, indem der aus der Testverteilung abgeleitete Grenzwert $\chi_{f,1-\alpha}^2$ mit der Testgröße verglichen wird. Gilt $T_G \leq \chi_{f,1-\alpha}^2$, so kann die Nullhypothese nicht verworfen werden. Bei $T_G > \chi_{f,1-\alpha}^2$ wird H_0 verworfen. Grund für ein Verwerfen kann ein falsches funktionales Modell sein; falls grobe Fehler in den Beobachtungen enthalten sind, führt dies (neben nicht berücksichtigten systematischen Einflüssen) zu einem nicht zutreffenden stochastischen Modell und somit ebenfalls zum Verwerfen von H_0 (Niemeier 2008).

Die hier vorgestellten Schritte eines Hypothesentests lassen sich auf alle anderen Arten von statistischen Tests übertragen, je nach Art der Hypothesenbildung und der Zusammensetzung von T ergeben sich dabei unterschiedliche Testverteilungen. Wichtige Tests, die ebenfalls nach diesem Schema im Zusammenhang mit dieser Arbeit zur Anwendung kommen, sind der Globaltest (vgl. Abschnitte 3.3 und 3.4) sowie der Einzeltest zur Lokalisierung grober Beobachtungsfehler (vgl. Abschnitt 3.4).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

2.2. Klassische und flächenhafte Deformationsanalyse

2.2.1. Deformationsanalyse im Kongruenzmodell

Dieser Abschnitt basiert, sofern nicht anderweitig angegeben, auf den Ausführungen in Heunecke et al. (2013), die eine umfassende Einführung in die Thematik der Deformationsanalyse bieten. Die folgende, kurze Einführung in die Methodik des Kongruenzmodells soll im weiteren Verlauf dabei helfen, Parallelen und Unterschiede allgemein zu flächenhaften Ansätzen sowie speziell zum in dieser Arbeit entwickelten Ansatz (vgl. Kapitel 3) aufzeigen zu können.

Überwachungsmessungen, die im Rahmen der klassischen Deformationsanalyse im Kongruenzmodell verwendet werden, werden innerhalb eines sorgfältig geplanten Überwachungsnetzes durchgeführt. Voraussetzung für die Vergleichbarkeit der Messungen und die Aufdeckbarkeit von Starrkörperbewegungen gegenüber der Umgebung ist eine identische Festlegung des geodätischen Datums in den jeweiligen Epochen. Die Datumsfestlegung ist notwendig, da die Beobachtungen einer Netz- oder Überwachungsmessung i.A. lediglich die innere Geometrie der Netzpunkte definieren – sollen als Ergebnis einer Netzausgleichung die Netzpunkte in einem übergeordneten Bezugssystem gelagert sein, müssen zusätzliche Informationen berücksichtigt werden; diese Informationen werden aus den Näherungswerten der Netzpunkte, welche ohnehin für die Lösung des nichlinearen Gleichungssystems benötigt werden, bezogen.

Die Netzpunkte, von denen das Datum bezogen wird, müssen in einem stabilen Bereich liegen, der keinen Deformationen unterliegt. Die grundlegende Annahme des Kongruenzmodells ist die Deckungsgleichheit oder Kongruenz zumindest einiger Teile des Netzes zwischen den Epochen, wodurch sich ein *zweistufiger Netzaufbau* ergibt. Über Signifikanztests (vgl. Abschnitt 2.1) und iterative Ausgleichung wird geprüft, für welche Punkte diese Annahme zutreffend ist.

Das Basismodell umfasst das funktionale Modell $\boldsymbol{l} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}$, das die Netzkonfiguration der Messepochen, die Verbesserungen $\boldsymbol{e}$ und die Parameterschätzwerte $\hat{\boldsymbol{x}}$ enthält, sowie das stochastische Modell $\sigma_0^2 \boldsymbol{Q}_{ll}$, welches mit der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{ll}$ bzw. der Kofaktormatrix $\boldsymbol{Q}_{ll}$ die Genauigkeitsinformation der Messungen $\boldsymbol{l}$ berücksichtigt. Für zwei Epochen lässt sich das Basismodell wie folgt aufstellen, wobei eine Erweiterung auf mehrere Epochen problemlos möglich ist:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_0 \\ \boldsymbol{l}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_0 \\ \boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_0 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_1 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ll} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{ll,0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_{ll,1} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Das funktionale Modell bietet die Möglichkeit, unterschiedliche Konfigurationen $\boldsymbol{A}_0$ und $\boldsymbol{A}_1$ zuzulassen, wodurch der Wegfall oder die Hinzunahme von Netzpunkten modelliert werden kann. Zwischen den Epochen wird zudem weder eine funktionale, noch eine stochastische Abhängigkeit definiert. Dadurch kann die Bestimmung der Koordinaten

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

der Netzpunkte ($\hat{\boldsymbol{x}}_0$ und $\hat{\boldsymbol{x}}_1$) und somit auch die Datumsfestlegung durch Ausgleichung der Einzelepochen durchgeführt werden.

Ein gängiges Verfahren für die Datumsfestlegung im Kongruenzmodell ist eine freie Ausgleichung mit *Teilspurminimierung*, die auf Basis der Näherungswerte von Stabilpunkten erfolgt. Aus den Normalgleichungen der Teilspurminimierung der i-ten Epoche

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{Q}_i^{-1} \boldsymbol{A}_i & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{11,i} & \boldsymbol{Q}_{12,i} \\ \boldsymbol{Q}_{21,i} & \boldsymbol{Q}_{22,i} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

kann mit Hilfe der Matrix $\boldsymbol{G}$, die die datumsverfügenden Bedingungsgleichungen enthält, die Bestimmung der Parameter über

$$\hat{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{Q}_{11,i} \boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{Q}_{ll,i}^{-1} \boldsymbol{l}_i \tag{2.7}$$

erfolgen (Niemeier 2008). Für weitere Verfahren zur Datumsverfügung sei ebenfalls auf Heunecke et al. (2013) verwiesen – auf den generellen Ablauf im Kongruenzmodell hat das gewählte Verfahren keinen Einfluss, solange die Ausgleichung der Einzelepochen auf der gleichen Datumsverfügung beruht. Die ausgeglichenen Netzpunkte liegen dann im gleichen Bezugssystem vor und können zwischen den Epochen auf Deformationen untersucht werden.

Neben den epochenübergreifenden Näherungskoordinaten besteht eine weitere Verbindung zwischen den einzelnen Epochen durch die Festlegung eines gemeinsamen a priori Varianzfaktors σ_0^2 in (2.5). Die Übereinstimmung der geschätzten Varianzfaktoren

$$\hat{\sigma}_{0,i}^2 = \frac{\boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{Q}_i^{-1} \boldsymbol{e}_i}{f_i} \tag{2.8}$$

ist im Anschluss an die Einzelausgleichungen mit einem Signifikanztest zu prüfen. Bei Übereinstimmung können die Schätzwerte zu einem Gesamtwert $\hat{\sigma}_0^2$ mit $f = \Sigma f_i$ Freiheitsgraden zusammengefasst werden.

Mit der anschließenden Ausgleichung im Basismodell werden die Netzgeometrien der Epochen auf Kongruenz überprüft, zunächst die Punktgruppe der Stützpunkte. Wird im entsprechenden *Globaltest* oder *globalen Kongruenztest* (Niemeier 2008) die Hypothese der Deckungsgleichheit der Netzgeometrien aus beiden Epochen

$$H_0 : \hat{\boldsymbol{x}}_1 - \hat{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{0} \tag{2.9}$$

abgelehnt, muss mit der signifikanten Verschiebung eines oder mehrerer Punkte gerechnet werden. Durch Berücksichtigung der Hypothese im Basismodell ändert sich die Verbesserungsquadratsumme um einen Zuschlag R, mit der die *mittlere Klaffung* $\Theta = {}^{R}/_{h}$ (mit $h = f_H - f$, wobei f_H die Freiheitsgrade des hypothesenbehafteten Modells sind) berechnet werden kann (Heunecke et al. 2013). Die Testgröße

$$T = \frac{\Theta}{\hat{\sigma}_0^2} \sim F_{h,f} \tag{2.10}$$

beinhaltet den Vergleich von Θ mit der geschätzten Varianz des Basismodells $\hat{\sigma}_0^2$ und folgt im Fall des Zutreffens von H_0 einer Fisher-Verteilung mit h und f Freiheitsgraden – in diesem Fall ist mit keiner Deformation der Stabilpunkte zu rechnen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

Spricht der Globaltest dagegen für eine Annahme der Alternativhypothese

$$H_A : \hat{\boldsymbol{x}}_1 - \hat{\boldsymbol{x}}_0 > \mathbf{0}\,, \tag{2.11}$$

also für eine Verschiebung von Stützpunkten, wird in einer weiteren Stufe der Kongruenzuntersuchung eine Lokalisierung dieser Punkte durchgeführt.

Der generelle Ablauf dabei folgt einer *Rückwärtsstrategie*: in der Menge der Stabilpunkte werden Punkte gesucht, die für die Ablehnung des Globaltests verantwortlich sind. Wenn eine signifikante Verschiebung eines Einzelpunkts detektiert wird, wird dieser aus der Gruppe der Stützpunkte entfernt. Danach muss die Datumsfestlegung auf Basis der aktualisierten Stützpunkte erneut durchgeführt werden. Dieser Vorgang ist so oft zu wiederholen, bis der Globaltest nicht mehr abgelehnt wird. Die verbleibenden Stützpunkte bilden dann die „datumstragende Bezugsbasis“, von der ausgehend eine *Vorwärtsstrategie* zur Überprüfung der Stabilität der Punkte am zu untersuchenden Objekt erfolgt.

In einer Vorwärtsstrategie werden diese Punkte dann nacheinander einzeln zur Gruppe der bereits als stabil detektierten Punkte hinzugefügt und ein Globaltest durchgeführt. Von allen Punkten, bei denen der Globaltest nicht abgeleht wird, wird derjenige Punkt zur Gruppe der Stabilpunkte hinzugefügt, dessen R den kleinsten Wert aufweist. Dieser Vorgang wird so oft wiederholt, bis alle Globaltests verworfen werden müssen. Als Ergebnis erhält man somit eine statistische gesicherte Aussage darüber, ob und wo signifikante Punktveränderungen zwischen den Epochen stattgefunden haben.

2.2.2. Deformationsanalyse auf Basis flächenhafter Messungen

Der sorgfältig geplanten, punktweisen Aufnahme und Untersuchung auf mögliche Deformationen im Kongruenzmodell steht die Möglichkeit gegenüber, flächenhafte Deformationsaussagen aus Punktwolken abzuleiten. Punktwolken werden im ingenieurgeodätischen Bezug hauptsächlich über terrestrisches Laserscanning erstellt und repräsentieren die aufgenommene Objektform durch die flächenhafte Abtastung als Ganzes. Die Eigenschaften der Aufnahme und der entstehenden Punktwolke haben zur Folge, dass etablierte Auswerteverfahren der klassischen Deformationsanalyse nicht ohne Weiteres auf die flächenhaften Messdaten übertragen werden können – vielmehr führen sie zu neuen Herausforderungen, welche für die Entwicklung von Ansätzen zur flächenhaften Deformationsanalyse in Betracht gezogen werden müssen. Holst und Kuhlmann (2016) und Wujanz (2016) geben einen ausführlichen Überblick über die entstehenden Herausforderungen und zeigen auf, welche Auswirkungen ein Ignorieren der Probleme auf die abgeleiteten Deformationsaussagen haben kann. Im Folgenden sollen diese Herausforderungen näher beschrieben werden.

Äquivalent zur Planung des geodätischen Netzes im Zuge der klassischen Deformationsanalyse stellt sich für die Aufnahme eines Objekts mit TLS die Frage einer nötigen Planung der Scanner-Standpunkte. Die Position des Scanners relativ zum Objekt beeinflusst die Verteilung der Messpunkte und der Punktdichte, der Größe der Laserspots am Objekt, sowie den Einfallswinkel des Laserstrahls der einzelnen Messungen. Diese Einflüsse sowie Eigenschaften des aufzunehmenden Objekts haben direkte Auswirkungen auf das stochastische Modell der Messung. Aufgrund dieser Schwierigkeiten wird im

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

berücksichtigten stochastischen Modell der meisten Ansätze vereinfachend von unkorrelierten Messungen ausgegangen. Die Genauigkeiten der abgeleiteten Parameter werden somit zu optimistisch geschätzt, womit daraus abgeleitete Deformationen fälschlicherweise als signifikant eingestuft werden könnten (Holst und Kuhlmann 2016).

Erfolgt die Aufnahme des Objekts von mehreren Standpunkten aus, müssen die in den lokalen Systemen der einzelnen Standpunkte aufgenommenen Messdaten in ein übergeordnetes Koordinatensystem überführt werden. Um die Punktwolken für eine Deformationsanalyse vergleichbar zu machen, ist es zudem notwendig, ein gemeinsames geodätisches Datum für die Punktwolken aus den verschiedenen Epochen zu definieren. Für diese sogenannte *Registrierung* der Punktwolken existieren verschiedene Anstätze, für die auf Wujanz (2016) verwiesen sei.

Eine weitere Herausforderung besteht in der Modellierung der Abweichungen, die aus instrumentellen Fehlern hervorgehen. Werden die resultierenden systematischen Effekte vernachlässigt, können diese unter Umständen nicht von Objektdeformationen getrennt werden. Eine fehlende Kalibrierung der verwendeten terrestrischen Laserscanner kann dadurch unerwünschte Einflüsse auf die Deformationsanalyse haben (Holst und Kuhlmann 2016).

Die genannten Herausforderungen stellen aktuelle Forschungsfragen dar und werden in einer Vielzahl von Beiträgen behandelt. Solange die entstehenden Unsicherheiten nicht mit ausreichender Genauigkeit modelliert werden können, sind Aussagen, die aus flächenhaften Deformationsanalysen erhalten werden, immer unter deren Einbeziehung zu bewerten.

Weitere Herausforderungen ergeben sich dahingehend, wie räumliche Korrespondenzen zwischen den Messepochen hergestellt werden können. Während homologe Punkte zwischen den Epochen bei der – in der klassischen Deformationsanalyse üblichen – punktweisen Aufnahme durch die Auswahl repräsentativer Punkte bereits im Zuge der Planung feststehen, stellt deren Identifikation in Punktwolken eine Schwierigkeit dar. Dies liegt darin begründet, dass eine Reproduzierbarkeit der Einzelpunkte in der flächenhaften Abtastung in den meisten Fällen nicht realisierbar ist (Heunecke et al. 2013).

Eine mögliche Methode, um diese Punktkorrespondenzen in den Punktwolken herzustellen, ist das Anbringen von Referenzzielen am zu untersuchenden Objekt. Aus diesen Referenzzielen werden Einzelpunkte abgeleitet, die dann, wie in der klassischen Deformationsanalyse, auf Veränderungen untersucht werden können. Nachteil dieser Vorgehensweise ist jedoch, dass der Mehrwert der dichten Abtastung des zu untersuchenden Objekts durch die Auswahl einzelner Bereiche nicht genutzt wird (ebd.).

Unter Nutzung der gesamten Punktwolke ergeben sich nach Ohlmann-Lauber und Schäfer (2011) fünf grundlegende Modelle für auf Laserscanningdaten basierende Deformationsanalysen:

1. **Punktbasierte Modelle** kommen im Spezialfall der Reproduzierbarkeit der Einzelpunkte einer Punktwolke, welcher bei gleichem Scannerstandpunkt und identischen Abtastparametern realisiert werden kann, zum Einsatz. Als Ergebnis erhält man zur Messrichtung parallele Differenzvektoren zwischen den homologen Einzelpunkten der Punktwolken.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

2. **Punktwolkenbasierte Modelle** nutzen sogenannte *cloud-to-cloud*-Algorithmen, welche ebenfalls direkte Punktvergleiche durchführen; im Gegensatz zu punktbasierten Modellen werden mangels eindeutiger Punktzuordnung die Vergleiche aber mit Hilfe von Nachbarschaftsbeziehungen und Unterteilung der Punktwolken (z.B. durch Octrees) angestellt.

3. **Oberflächenbasierte Modelle** leiten aus den Punktwolken Oberflächenmodelle (z.B. Dreiecksvermaschungen) ab. Durch Interpolation innerhalb dieser Oberflächenmodelle können Punktzuordnungen ermittelt werden, welche dann für die Analyse möglicher Deformationen herangezogen werden.

4. **Geometriebasierte Modelle** approximieren die Punktwolken der gemessenen Oberflächen mit einzelnen geometrischen Formen; aus der Veränderung von Orientierung und Lage der approximierten Geometrien können dann Deformationsaussagen abgeleitet werden.

5. **Parameterbasierte Modelle** nutzen ebenfalls überbestimmte Approximationsansätze und sind eine Weiterentwicklung der geometriebasierten Modelle; in parameterbasierten Modellen kommen vermehrt Methoden zum Einsatz, die auch komplexere Objektformen modellieren können, wie zum Beispiel Freiformflächen oder Flächen höherer Ordnung. Die Änderung der geschätzten Parameter der approximierenden Flächen werden im Anschluss an eine Ausgleichung dann Signifikanztests unterzogen, wodurch statistisch gesicherte Aussagen über das Deformationsverhalten getroffen werden können.

Eine umfassende Übersicht über Anwendungsbeispiele flächenhafter Deformationsanalysen und ihrer Einordnung in die oberflächen-, geometrie- und parameterbasierten Modelltypen finden sich in Neuner et al. (2016). Darin wird deutlich, dass bei der Untersuchung natürlicher Objekte vorwiegend oberflächenbasierte Modelle zum Einsatz kommen. Geometrie- und parameterbasierte Ansätze sind hingegen besser für Objekte geeignet, deren Form durch einfache Geometrien beschrieben werden kann, was vor allem bei künstlichen bzw. technischen Objekten wie Bauwerken der Fall ist.

Der große Vorteil der beiden letzt genannten Modelle liegt in der kontinuierlichen Beschreibung der Oberfläche, die durch überbestimmte Schätzung unter Berücksichtigung aller gemessenen Punkte erfolgt – wodurch der Einfluss zufälliger Messabweichungen auf die geschätzten Parameter verringert wird (Holst und Kuhlmann 2016). Das Problem der fehlenden Punktkorrespondenzen wird durch den Übergang auf die Ableitung von Deformationen aus den approximierenden Geometrien umgangen, wodurch Deformationen ebenso kontinuierlich beschrieben werden können. Die Kenntnis der Objektform sollte in diesen Fällen für die Wahl einer geeigneten Parametrisierung (vgl. Abschnitt 2.3.2) im Vorfeld der Deformationsanalyse bekannt sein. Die Tatsache, dass die Objektform jedoch nur mit begrenzter Genauigkeit bekannt ist, führt zu einer Vereinfachung des Objektmodells und somit zu systematischen Abweichungen in den geschätzten Parametern (ebd.).

Durch die Vielfalt der entwickelten und meist anhand von einzelnen Objekten untersuchten Verfahren zur Detektion von Deformationen in Punktwolken gibt es noch

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

kein Verfahren, das sich im allgemeinen Kontext durchgesetzt hat. Eine Möglichkeit, um die Untersuchung der Anwendbarkeit der Verfahren zu vereinheitlichen, besteht daher in der freien Verfügbarkeit von Testdatensätzen (Neuner et al. 2016). Wunderlich et al. (2016) stellt fest, dass bislang nur wenige Ansätze existieren, die die ermittelten Deformationen auf statistische Signifikanz überprüfen. Die Deformationen werden oft nur visuell beurteilt oder mit einem fixen Grenzwert verglichen, meist geht mit der Analyse auch eine Reduktion der Anzahl der berücksichtigten Messungen oder eine Dimensionsreduktion einher.

Parameterbasierte Modelle sind zwar in der Lage, die gesamte Information aus den Messungen in die Analysen einzubeziehen und ermittelte Deformationen auf Signifikanz zu untersuchen. Die Schwierigkeit in diesen Ansätzen liegt jedoch oftmals darin, die Deformationen, die diese Änderungen verursachen, am Objekt zu lokalisieren. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn Messdaten komplexerer Objektformen mit Hilfe von Freiformflächen approximiert werden sollen (Holst und Kuhlmann 2016). Die in Kapitel 3 entwickelte Methodik hat zum Ziel, eine solche Lokalisierung zu ermöglichen.

2.3. Modellierung von Punktwolken mit B-Spline-Flächen

Für die Approximation von Oberflächen aus Punktwolken, wie sie in dieser Arbeit zur Anwendung kommt (vgl. Abschnitt 3.2), existieren verschiedene Ansätze. Bekannte Verfahren arbeiten mit polynomialen Funktionen oder mit Freiformkurven und -flächen wie B-Splines oder NURBS. Speziell B-Spline-Kurven und -Flächen haben den Vorteil, dass sie trotz möglicher ungünstiger Eigenschaften von Punktwolken, wie ungleichmäßigen Punktdichten und Datenlücken, eine optimale Modellierung der Oberflächen ermöglichen können. Zudem besteht die Möglichkeit der Approximation von Geometrien beliebiger Komplexität und die Eigenschaft der Lokalität, also des Einflusses der Kurven- und Flächenparameter auf einen jeweils begrenzten Bereich. B-Spline-Kurven und -Flächen sind somit auch für den Bereich der Deformationsanalysen interessant (Bureick et al. 2016).

Bereits mehrere Arbeiten beschäftigten sich mit der Modellierung von Deformationen aus flächenhaften Messungen mit Hilfe von B-Splines. Harmening und Neuner (2016b) modellieren die Punktwolke eines Probekörpers aus zwei Epochen mit B-Spline-Flächen und zeigen, dass aus der Lage der geschätzten Kontrollpunkte in den verschiedenen Epochen die Starrkörperbewegung des Probekörpers ermittelt werden kann. In Harmening und Neuner (2020) wird anhand simulierter Daten gezeigt, dass Verformungen innerhalb desselben Probekörpers als ein stochastisches Signal durch einen Kollokationsansatz modelliert werden können; zur Trendbereinigung wird die unverformte Referenzfläche durch eine approximierende B-Spline-Fläche repräsentiert. Paffenholz und Wujanz (2019) vergleichen untereinander die Ergebnisse eines B-Spline-Ansatzes und eines punktwolkenbasierten Ansatzes zur Auswertung von flächenhaften Deformationsmessungen. Der Vergleich zwischen den approximierten B-Spline-Flächen findet darin durch deren Diskretisierung in einem regelmäßigen Raster statt und liefert zum punkt-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

wolkenbasierten Ansatz ähnliche Ergebnisse – mit dem Vorteil des B-Spline-Ansatzes, Lücken in den Messdaten verarbeiten zu können.

2.3.1. Mathematische Eigenschaften von B-Spline-Kurven und -Flächen

Eine B-Spline-Kurve vom Grad p ist eine Kurve in der Parameterform

$$\hat{\boldsymbol{C}}(u) = \sum_{i=0}^{c_u} N_{i,p}(u)\boldsymbol{P}_i\,, \tag{2.12}$$

die von $c_u + 1$ Kontrollpunkten $\boldsymbol{P}_i$ und den Basisfunktionen $N_{i,p}$ vom Grad p bestimmt wird. Die Kurvenpunkte $\hat{\boldsymbol{C}}$ lassen sich demnach als gewichtetes Mittel der Kontrollpunkte auffassen, wobei die Basisfunktionen als Gewichte agieren. Die Kurve verläuft innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte und ist parametrisiert durch den fortlaufenden Kurvenparameter u, der üblicherweise auf das Intervall $[0, ..., 1]$ beschränkt wird. Dieses Intervall wird mit den $m+1$ Knoten im Knotenvektor $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_0 & \dots & u_m \end{bmatrix}$ in m Teilintervalle (engl. *knot spans*) aufgeteilt. Zwischen der Anzahl der Kontrollpunkte, der Anzahl der Knoten und dem Grad der Kurve gilt der einfache Zusammenhang

$$m = c_u + p + 1 \tag{2.13}$$

(Piegl und Tiller 1997). Die Basisfunktionen können rekursiv über den sogenannten Cox-de Boor-Algorithmus berechnet werden (de Boor (1972) und Cox (1972)):

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.14}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \tag{2.15}$$

Nach Formel (2.14) nimmt jede der m Basisfunktionen vom Grad 0 auf genau einem halboffenen Teilintervall $[u_i, u_{i+1})$ von $\boldsymbol{U}$ den Wert 1 an, im restlichen Wertebereich von u den Wert 0 – es handelt sich hierbei also um Treppenfunktionen. Für $p > 0$ werden die $N_{i,p}$ aus einer Linearkombination der Basisfunktionen vom Grad $p - 1$ gebildet (Piegl und Tiller 1997).

In Tabelle 2.1 ist die Berechnung der Basisfunktionen schematisch für $m \geq 5$ und $p = 3$ dargestellt. Darin wird auch eine wichtige Eigenschaft der B-Splines ersichtlich: die entsprechende Basisfunktion wird zu Null, wenn der Kurvenparameter u außerhalb des Intervalls $[u_i, u_{i+p+1})$, bestehend aus $p + 1$ Teilintervallen, liegt. Im Falle der Berechnung von $N_{1,2}$ (vgl. Tabelle 2.1) hat also lediglich das Kurvenintervall $[u_1, u_4)$ einen Einfluss auf den Funktionswert der Basisfunktion. Das lokale Verhalten der Basisfunktionen überträgt sich auf die B-Spline-Kurve und bewirkt, dass die Verschiebung eines Kontrollpunkts $\boldsymbol{P}_i$ die Kurvenform nur in einem begrenzen Bereich zwischen den Knoten u_i und u_{i+p+1} verändert.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Tabelle 2.1.: Rekursive Berechnung der Basisfunktionen nach Piegl und Tiller (1997). Beispiel: diejenigen $N_{i,p}$, die in die Berechnung von $N_{1,2}$ einfließen, sind grau hinterlegt

$[u_0, u_1)$	$N_{0,0}$			
		$N_{0,1}$		
$[u_1, u_2)$	$N_{1,0}$		$N_{0,2}$	
		$N_{1,1}$		$N_{0,3}$
$[u_2, u_3)$	$N_{2,0}$		$N_{1,2}$	
		$N_{2,1}$		$N_{1,3}$
$[u_3, u_4)$	$N_{3,0}$		$N_{2,2}$	$\vdots$
		$N_{3,1}$	$\vdots$	
$[u_4, u_5)$	$N_{4,0}$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$			

Ein Knotenvektor

$$\boldsymbol{U} = \left[\underbrace{0 \ \dots \ 0}_{p+1} \ u_{p+1} \ \dots \ u_{m-p-1} \ \underbrace{1 \ \dots \ 1}_{p+1} \right] , \tag{2.16}$$

dessen erste und letzte $p+1$ Elemente, die äußeren Knoten, mit Nullen bzw. Einsen besetzt sind, führt dazu, dass die B-Spline-Kurve den ersten und letzten Kontrollpunkt interpoliert. Der Start- und Endpunkt der Kurve wird also durch diese beiden Kontrollpunkte festgelegt. Die inneren Knoten von $\boldsymbol{U}$ definieren die Bereiche der Kurve, die von den zugehörigen Basisfuktionen beeinflusst werden (Piegl und Tiller 1997). In Abschnitt 2.3.2 wird das Problem der optimalen Bestimmung des Knotenvektors näher erläutert.

In Abbildung 2.2 werden die $c_u + 1 = 6$ quadratischen Basisfunktionen ($p = 2$) für einen Knotenvektor $\boldsymbol{U} = \left[\ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0.25 \ \ 0.50 \ \ 0.75 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \right]$ dargestellt, in Abbildung 2.3 ist beispielhaft eine daraus berechnete B-Spline-Kurve visualisiert.

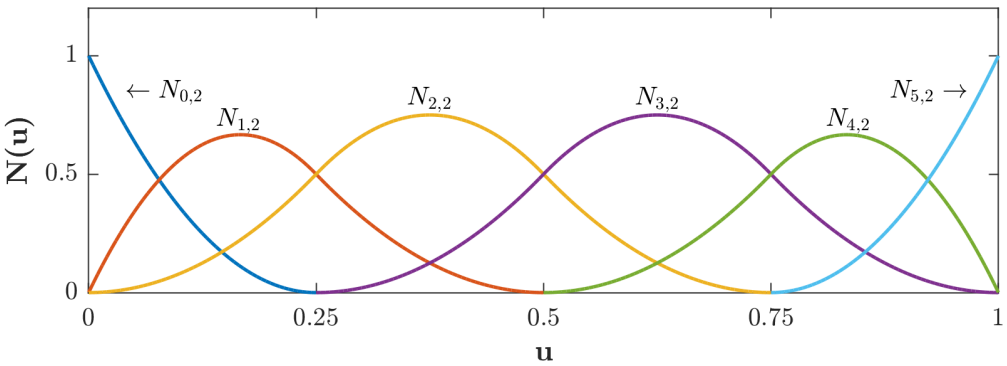


Abbildung 2.2.: Basisfunktionen für $p = 2$ und den inneren Knoten $u_3 = 0.25$, $u_4 = 0.50$, $u_5 = 0.75$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

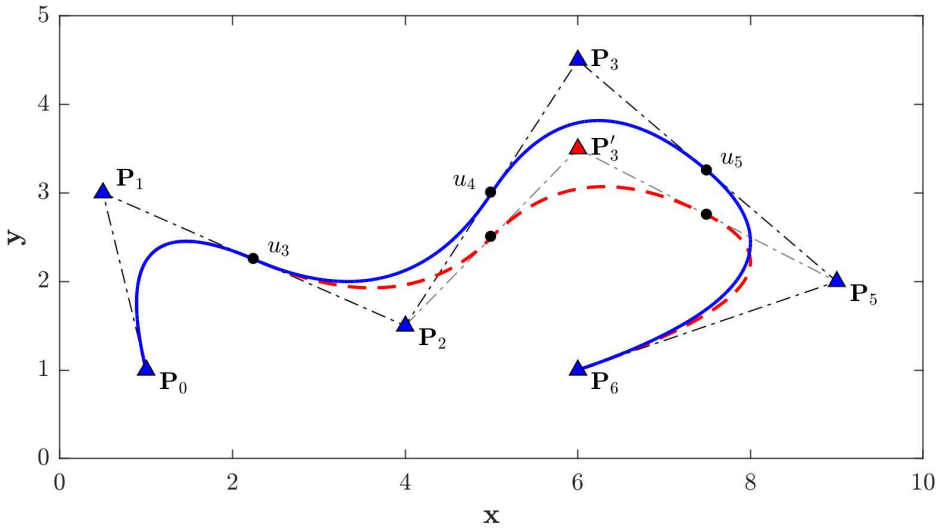


Abbildung 2.3.: B-Spline-Kurve für $p = 2$ und den inneren Knoten $u_3 = 0.25$, $u_4 = 0.50$, $u_5 = 0.75$. Das lokale Verhalten zeigt sich anhand der Verschiebung eines Kontrollpunkts ($\boldsymbol{P}_3 \rightarrow \boldsymbol{P}'_3$)

Die Definition von B-Spline-Kurven (2.12) lässt sich leicht auf die Darstellung von B-Spline-Flächen erweitern. Eine anschauliche Erklärung hierfür ist die Entstehung der Fläche durch (unendlich viele) B-Spline-Kurven, die in zwei verschiedenen Richtungen verlaufen, was durch ein Tensorprodukt repräsentiert werden kann (Harmening und Neuner 2017). Während für die Definition der B-Spline-Kurven eine Parameterrichtung ausreichend ist, wird für die Flächenbeschreibung somit ein weiterer Parameter v benötigt, der senkrecht zu u verläuft. Die Flächenpunkte $\hat{\boldsymbol{S}}$ werden durch die Linearkombination

$$\hat{\boldsymbol{S}}(u,v) = \sum_{i=0}^{c_u} \sum_{j=0}^{c_v} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \boldsymbol{P}_{i,j} \tag{2.17}$$

berechnet, das Tensorprodukt wird darin durch Multiplikation der entsprechenden Basisfunktionen realisiert. Für die Berechnung der Basisfunktionen $N_{j,q}$ wird ein weiterer Knotenvektor $\boldsymbol{V}$ eingeführt, ebenso wird mit q der Grad der Basisfunktionen in v-Richtung definiert. Analog zu den B-Spline-Kurven liegt die Fläche innerhalb der konvexen Hülle der $c_{\boldsymbol{P}} = (c_u + 1) \cdot (c_v + 1)$ Kontrollpunkte; das lokale Verhalten zeigt sich dann darin, dass sich die Verschiebung eines Kontrollpunkts $\boldsymbol{P}_{i,j}$ lediglich auf das durch die Parameter $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_i, v_{j+q+1})$ begrenzte Flächenstück auswirkt (Piegl und Tiller 1997).

2.3.2. Schätzung der Unbekannten von B-Spline-Flächen

Da in dieser Arbeit der Fokus auf der flächenhaften Beschreibung von Deformationen liegt, wird im folgenden Abschnitt die Schätzung der Unbekannten von B-Spline-Flächen näher erläutert; die Zusammenhänge lassen sich jedoch leicht auf B-Spline-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Kurven übertragen.

Ziel der Parameterschätzung ist es, aus den flächenhaften Messungen eine bestangepasste B-Spline-Fläche zur mathematischen Beschreibung der gemessenen Objektoberfläche abzuleiten. Der Zusammenhang (2.17) zur Berechnung der Flächenpunkte kann für eine Parameterschätzung in einem linearen Gauß-Markov-Modell als Beobachtung

$$\hat{\boldsymbol{S}}(u,v) = \boldsymbol{S}(u,v) + \boldsymbol{e}(u,v) \tag{2.18}$$

aufgefasst werden. $\boldsymbol{S}(u,v)$ enthält darin die Koordinaten der s gemessenen dreidimensionalen Punkte der zu approximierenden Punktwolke, jeder Punkt steuert also drei Gleichungen zum System der Beobachtungsgleichungen bei. Die Kontrollpunkte $\hat{\boldsymbol{P}}$ stellen die zu schätzenden Parameter dar. Die $(s \times c_{\boldsymbol{P}})$-dimensionale Designmatrix $\boldsymbol{A}_{xyz}$ enthält demzufolge die entsprechenden Produkte der Basisfunktionen (Bureick et al. 2016) und hat die Form

$$\boldsymbol{A}_{xyz} = \begin{bmatrix} N_{0,p}(u_1)N_{0,q}(v_1) & \dots & N_{n,p}(u_1)N_{l,q}(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}(u_s)N_{0,q}(v_s) & \dots & N_{n,p}(u_s)N_{l,q}(v_s) \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

wenn eine koordinatenweise Schätzung der Kontrollpunkte erfolgt. Für eine gleichzeitige Schätzung aller Komponenten entsteht die $(3s \times 3c_{\boldsymbol{P}})$-dimensionale Designmatrix $\boldsymbol{A}$ durch Multiplikation jedes Elements aus $\boldsymbol{A}_{xyz}$ mit der (3×3)-Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}$ über das Kronecker-Produkt

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{xyz} \otimes \boldsymbol{I}\,. \tag{2.20}$$

Die Auflösung im Gauß-Markov-Modell mit dem funktionalen Modell

$$\boldsymbol{S} + \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} S_x(u_1,v_1) \\ S_y(u_1,v_1) \\ S_z(u_1,v_1) \\ \vdots \\ S_x(u_s,v_s) \\ S_y(u_s,v_s) \\ S_z(u_s,v_s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_x(u_1,v_1) \\ e_y(u_1,v_1) \\ e_z(u_1,v_1) \\ \vdots \\ e_x(u_s,v_s) \\ e_y(u_s,v_s) \\ e_z(u_s,v_s) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \hat{P}_{x,0,0} \\ \hat{P}_{y,0,0} \\ \hat{P}_{z,0,0} \\ \vdots \\ \hat{P}_{x,n,l} \\ \hat{P}_{y,n,l} \\ \hat{P}_{z,n,l} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{P}} \tag{2.21}$$

und dem stochastischen Modell

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{SS}} = \sigma_0^2 \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{SS}}\,, \tag{2.22}$$

das die Genauigkeitsinformation der zu approximierenden Punkte berücksichtigt, erfolgt nach dem bekannten Ablauf:

$$\hat{\boldsymbol{P}} = (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{SS}}^{-1} \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{SS}}^{-1} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{SS}}^{-1} \boldsymbol{S} \tag{2.23}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{SS}}^{-1} \boldsymbol{e}}{3(s - c_{\boldsymbol{P}})} \tag{2.24}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{P}}\hat{\boldsymbol{P}}} = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{N}^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{P}}\hat{\boldsymbol{P}}} \tag{2.25}$$

Nach Koch (2004) stellt – geometrisch interpretiert – die Schätzung $\hat{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{P}}$ im Gauß-Markov-Modell eine orthogonale Projektion der ursprünglichen Beobachtungen $\boldsymbol{S}$ auf den $3c_{\boldsymbol{P}}$-dimensionalen Spaltenraum von $\boldsymbol{A}$ dar. Die ausgeglichenen Beobachtungen $\hat{\boldsymbol{S}}$ können also durch Linearkombination der geschätzten Kontrollpunkte $\hat{\boldsymbol{P}}$ berechnet werden, wodurch, wegen $s > c_{\boldsymbol{P}}$, lineare Abhängigkeiten zwischen den $\hat{\boldsymbol{S}}$ bestehen. Die über

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{P}}\hat{\boldsymbol{P}}}\boldsymbol{A}^T \tag{2.26}$$

zu berechnende Varianz-Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen liegt dann mit einem maximalen Rang von $Rang(\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}) = 3c_{\boldsymbol{P}}$ vor, $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}$ ist somit singulär.

Damit ein linearer Zusammenhang zwischen Beobachtungen und Unbekannten besteht und die Schätzung im Gauß-Markov-Modell ohne Näherungswerte für die Unbekannten erfolgen kann, muss im Vorfeld eine Parametrisierung der gemessenen Punkte sowie eine Bestimmung der Anzahl und Positionen der Knoten in $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ erfolgen.

Die Parametrisierung umfasst die Bestimmung der Werte der Flächenparameter u und v für jeden Punkt der Punktwolke. Dadurch wird jedem gemessenen Punkt eine eindeutige Position auf der Fläche zugeordnet (Bureick et al. 2016). Da die zu approximierende Form jedoch vor der Schätzung nicht bekannt ist, muss die Parametrisierung über geeignete Näherungsverfahren bestimmt werden. In Piegl und Tiller (1997) werden für Kurvenparameter mit der Bestimmung über die Sehnenlänge und die zentripetale Bestimmung einfache Verfahren vorgestellt, mit denen sich auch Flächenparameter für geordnete Punktwolken ableiten lassen. Da eine Punktwolke allgemein in ungeordneter Form vorliegt, muss für eine Bestimmung der beiden Flächenparameter jedoch auf komplexere Verfahren zurückgegriffen werden. Harmening und Neuner (2015) schlagen einen Ansatz vor, der ausgehend von geschätzten Randkurven der Punktwolke eine Näherungs- oder Basisfläche, den sogenannten *Coons Patch*, interpoliert. Über iterative Reparametrisierung und dem Einsatz von Randbedingungen können dann optimale Parameterwerte geschätzt werden.

Die Lage der Knoten innerhalb von $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ legt fest, welche Basisfunktionen und Kontrollpunkte einen Einfluss auf einen bestimmten Bereich der B-Spline-Fläche haben. Da damit das lokale Approximationsverhalten und damit auch die Qualität der Approximation beeinflusst wird, sollten die Knotenpositionen an die zu approximierende Objektform angepasst werden – kleinere Abstände zwischen den Knoten haben zur Folge, dass in diesen Bereichen mehr Details modelliert werden können. Eine Übersicht über die Vielzahl von Ansätzen zur Bestimmung der Knotenpositionen ist in Bureick et al. (2016) gegeben. Generell gibt es keine eindeutige Lösung für die optimale Positionierung der Knoten, weshalb auch hier auf Näherungsverfahren zurückgegriffen werden muss. So kann beispielsweise durch das Einfügen von Knoten in Bereichen mit hoher Punktdichte oder in stark gekrümmten Bereichen eine lokale Verbesserung des Approximationsverhaltens erreicht werden. Werden die Knotenpositionen gemeinsam mit den Kontrollpunkten als zu schätzende Parameter aufgefasst, führt dies auf einen hochgradig nichtlinearen funktionalen Zusammenhang, für den bislang keine stabilen Lösungsansätze existieren (Schmitt und Neuner 2015).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Ein weiterer Schritt, der vor der Parameterschätzung bedacht werden sollte, ist die Festlegung des Grads der B-Spline-Fläche sowie der Anzahl der zu schätzenden Kontrollpunkte. Die Modellierung mit kubischen B-Splines hat sich etabliert, weshalb üblicherweise $p = q = 3$ gesetzt wird. Die Anzahl $(c_u + 1) \cdot (c_v + 1)$ der Kontrollpunkte beeinflusst die Komplexität und das Erscheinungsbild und damit die ebenfalls Approximationsqualität der Fläche. Generelles Ziel der Approximation ist, die Information der Form der gemessenen Oberfläche vom Messrauschen zu trennen. Erfolgt die Modellierung der Punktwolke mit zu wenigen Kontrollpunkten, werden Details der Objektform nicht durch die approximierende Fläche repräsentiert (vgl. grüne Kurve in Abbildung 2.4). Bei zu vielen Kontrollpunkten besteht dagegen die Gefahr einer Überanpassung, bei der selbst kleinste Variationen in der gemessenen Punktwolke und somit auch das Messrauschen approximiert werden können (vgl. schwarze Kurve in Abbildung 2.4). Die Wahl eines geeigneten Approximationsmodells und damit der Anzahl der Kontrollpunkte besteht daher immer in der Schwierigkeit, die Forderungen nach einer möglichst geringen Komplexität der approximierenden Fläche und einer möglichst genauen Approximation der Objektform zu vereinen (Harmening und Neuner 2016a).

Oftmals erfolgt die Wahl einer passenden Anzahl von Kontrollpunkten nach der subjektiven Trial-and-Error-Methode. In (Harmening und Neuner 2017) werden mögliche alternative, objektive Vorgehensweisen zur Bestimmung der optimalen Anzahl von Kontrollpunkten bei der Schätzung von B-Spline-Flächen beschrieben.

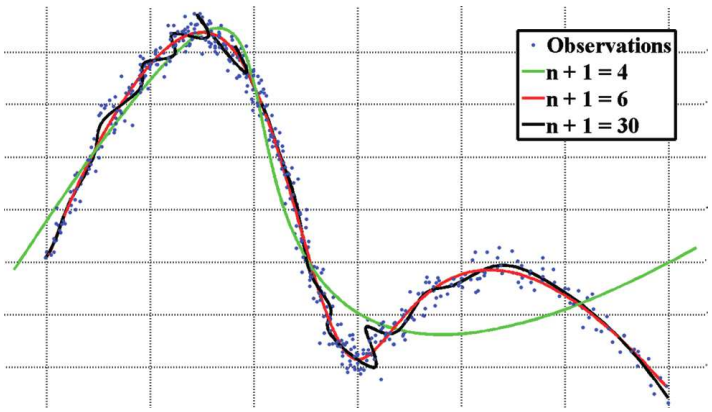


Abbildung 2.4.: Visualisierung verschiedener Modelle von B-Spline-Kurven zur Approximation von Messdaten. Aus Harmening und Neuner (2016a).

2.4. Überbestimmte dreidimensionale Helmerttransformation

Der implementierten Methodik liegt eine Ähnlichkeitstransformation zugrunde, mittels der eine Bewegung des erfassten Objekts bestimmt werden soll. Für die dreidimensionale Ähnlichkeitstransformation zwischen n_{ident} identen Punkten (mit $i \in \{1, ..., n_{ident}\}$)

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

$\boldsymbol{x}_{0,i} = \left[\ x_{0,i}\ y_{0,i}\ z_{0,i}\ \right]^T$ und $\boldsymbol{x}_{1,i} = \left[\ x_{1,i}\ y_{1,i}\ z_{1,i}\ \right]^T$ besteht der Zusammenhang

$$\mathbf{x}_{1,i} = \mu \boldsymbol{R} \boldsymbol{x}_{0,i} + \boldsymbol{t}\,, \tag{2.27}$$

worin der Maßstab μ, die Rotationsmatrix $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\omega, \phi, \kappa) = \boldsymbol{R}_\omega \boldsymbol{R}_\phi \boldsymbol{R}_\kappa$ (mit trigonometrischen Funktionen der Drehwinkel ω, ϕ und κ um die x-, y- bzw. z-Achse) und der Translationsvektor $\boldsymbol{t} = \left[\ t_x\ t_y\ t_z\ \right]^T$ die Transformationsparameter darstellen. In der Geodäsie auch unter der *Helmerttransformation* oder der *7-Parameter-Transformation* bekannt, wird diese Abbildung meist dazu genutzt, um Punkte von einem Koordinatensystem ($\boldsymbol{x}_0$, Startsystem) in ein anderes Koordinatensystem ($\boldsymbol{x}_1$, Zielsystem) zu überführen oder um in einem ersten Schritt die unbekannten Transformationsparameter zwischen beiden Systemen zu bestimmen (Niemeier 2008).

Liegen die Punkte im selben geodätischen Datum vor, kann dieser Ansatz zur Bestimmung einer möglichen Starrkörperbewegung eines durch die Identpunkte repräsentierten Objekts herangezogen werden (Harmening und Neuner 2016b). Starrkörper unterliegen keiner Deformation, die innere Geometrie des Objekts bleibt also erhalten – die Bestimmung der Elemente der Starrkörperbewegung kann somit als Schätzung der Transformationsparameter einer Helmerttransformation verstanden werden; zudem kann in (2.27) der Maßstab auf $\mu = 1$ gesetzt werden, wenn die Aufnahme des Objekts mit dem selben Laserscanner und unter ähnlichen atmosphärischen Bedingungen durchgeführt wird. Die Anzahl der unbekannten Parameter reduziert sich dann auf $u_{TF} = 6$.

2.4.1. Ausgleichungsmodell der Helmerttransformation

Im klassischen Helmert-Ansatz zur Schätzung der Transformationsparameter werden die Koordinaten der Punkte im Zielsystem aus (2.27) als Beobachtungen aufgefasst – jeder Identpunkt steuert so drei Beobachtungsgleichungen der Form

$$\begin{aligned} x_{1,i} + e_{x_{1,i}} &= r_{11} x_{0,i} + r_{12} y_{0,i} + r_{13} z_{0,i} + t_x \\ y_{1,i} + e_{y_{1,i}} &= r_{21} x_{0,i} + r_{22} y_{0,i} + r_{23} z_{0,i} + t_y \\ z_{1,i} + e_{z_{1,i}} &= r_{31} x_{0,i} + r_{32} y_{0,i} + r_{33} z_{0,i} + t_z \end{aligned} \tag{2.28}$$

(mit $\mu = 1$) bei. Die r_{jk} sind darin die Elemente der Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}(\omega, \phi, \kappa)$, die eine Nichtlinearität in den Beobachtungsgleichungen verursachen. Wegen der nötigen Linearisierung des funktionalen Zusammenhangs im Zuge der Ausgleichung müssen geeignete Näherungswerte $\boldsymbol{X}_0 = \left[\ t_{x0}\ t_{y0}\ t_{z0}\ \omega_0\ \phi_0\ \kappa_0\ \right]^T$ für die Parameter bestimmt werden – Quaternionen bieten hierfür einen eleganten Ansatz (Niemeier 2008).

Die Berechnung von $\boldsymbol{X}_0$ über Quaternionen nach Shen et al. (2006) erfolgt ausgehend von den auf die jeweiligen Schwerpunkte reduzierten Koordinaten beider Systeme:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{0,i} &= \boldsymbol{x}_{0,i} - \frac{1}{n_{ident}} \sum_{i=1}^{n_{ident}} \boldsymbol{x}_{0,i} \\ \boldsymbol{\xi}_{1,i} &= \boldsymbol{x}_{1,i} - \frac{1}{n_{ident}} \sum_{i=1}^{n_{ident}} \boldsymbol{x}_{1,i}\,. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Aus der Eigenwertzerlegung der Matrix

$$\boldsymbol{N}_Q = \sum_{i=1}^{n_{ident}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{1,i}^T \boldsymbol{\xi}_{0,i} & -\boldsymbol{\xi}_{1,i}^T \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_{0,i}) \\ -\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_{1,i})\boldsymbol{\xi}_{0,i} & \boldsymbol{\xi}_{1,i}\boldsymbol{\xi}_{0,i}^T + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_{1,i})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_{0,i}) \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

mit der Hilfsmatrix

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\xi}_z & \boldsymbol{\xi}_y \\ \boldsymbol{\xi}_z & 0 & -\boldsymbol{\xi}_x \\ -\boldsymbol{\xi}_y & \boldsymbol{\xi}_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

erhält man den (4×1)-dimensionalen Eigenvektor zum größten Eigenwert. Dieser entspricht der Quaternion $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & \boldsymbol{q}^T \end{bmatrix}^T$, aus dem die Rotationsmatrix

$$\boldsymbol{R}_0 = (q_0^2 - \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{q})\boldsymbol{I} + 2(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T + q_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})) = \boldsymbol{R}(\omega_0, \phi_0, \kappa_0) \tag{2.32}$$

abgeleitet werden kann, welche wiederum die Näherungswerte für die Rotationsparameter über

$$\omega_0 = \tan^{-1}\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right);\ \phi_0 = \sin^{-1}(-r_{13});\ \kappa_0 = \tan^{-1}\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right) \tag{2.33}$$

enthält. Die Näherungswerte für die Translationsparameter können dann mit $\boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{\xi}_{0,i}$ und $\boldsymbol{\xi}_{1,i}$ aus (2.27) bestimmt werden.

Die Linearisierung der Beobachtungsgleichungen (2.28) führt zur Designmatrix

$$\boldsymbol{A}_i = \begin{bmatrix} \underbrace{\left.\frac{\partial \boldsymbol{x}_{1,i}}{\partial t_x}\right|_{\boldsymbol{X}_0} \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}_{1,i}}{\partial t_y}\right|_{\boldsymbol{X}_0} \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}_{1,i}}{\partial t_z}\right|_{\boldsymbol{X}_0}}_{=I} \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}_{1,i}}{\partial \omega}\right|_{\boldsymbol{X}_0} \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}_{1,i}}{\partial \phi}\right|_{\boldsymbol{X}_0} \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}_{1,i}}{\partial \kappa}\right|_{\boldsymbol{X}_0} \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

für jeden der Identpunkte, die zusammengefassten Teilmatrizen ergeben dann

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{A}_{n_{ident}} \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

in der Dimension $(3n_{ident} \times u_{TF})$.

Das stochastische Modell der Ausgleichung mit $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ll}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1}$ ist in der Lage, Vorinformation lediglich über die Qualität der Punktkoordinaten im Zielsystem, jedoch nicht der Punktkoordinaten im Startsystem zu berücksichtigen. In Niemeier (2008) wird mit $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ll}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0} + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1}$ eine Möglichkeit gegeben, stochastische Information aus beiden Systemen zumindest näherungsweise einzuführen. Für eine präzise Berücksichtigung der Varianz-Kovarianzmatrizen beider Systeme existieren hingegen zwei Ansätze:

1. Ausgleichung im Gauß-Helmert-Modell
2. Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell mit direkt beobachteten Unbekannten

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Die Gegenüberstellung der beiden Ansätze in Koch (2002) zeigt, dass mit beiden Modellen „identische Parameterschätzungen und Residuen“ erhalten werden. Aufgrund der leicht umsetzbaren Erweiterung des klassischen Ansatzes im Gauß-Markov-Modell sowie der dafür verfügbaren und in dieser Arbeit benötigten Ausreißertests (vgl. Abschnitt 2.4.3) wird im Folgenden auf das angepasste Gauß-Markov-Modell näher eingegangen.

Durch die Hinzunahme der Koordinaten des Startsystems als Unbekannte $\overline{\boldsymbol{x}}_0$ erweitert sich das funktionale Modell aus (2.28) um zusätzliche Beobachtungsgleichungen, wobei wieder jeder der Identpunkte drei Gleichungen beisteuert:

$$\begin{aligned} x_{0,i} + e_{x_{0,i}} &= \overline{x}_{0,i} \\ y_{0,i} + e_{y_{0,i}} &= \overline{y}_{0,i} \\ z_{0,i} + e_{z_{0,i}} &= \overline{z}_{0,i}\,. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Das erweiterte funktionale Modell ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{1,i} + \boldsymbol{e}_{1,i} &= \boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{x}}_{0,i} + \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{x}_{0,i} + \boldsymbol{e}_{0,i} &= \overline{\boldsymbol{x}}_{0,i}\,, \end{aligned} \tag{2.37}$$

die Designmatrix muss also um die Ableitungen aller Beobachtungsgleichungen nach den neuen Parametern $\left.\frac{\partial \boldsymbol{x}_{1,i}}{\partial \overline{\boldsymbol{x}}_{0,1}}\right|_{\boldsymbol{X}_0} = \boldsymbol{R}_0$ und $\left.\frac{\partial \boldsymbol{x}_{0,i}}{\partial \overline{\boldsymbol{x}}_{0,i}}\right|_{\boldsymbol{X}_0} = \boldsymbol{I}$ ergänzt werden (ebd.). Sortiert man die Zeilen in der aus allen $6n_{ident}$ Beobachtungen entstehenden Designmatrix $\boldsymbol{A}$ so, dass in der oberen Hälfte die Beobachtungen im Zielsystem und in der unteren Hälfte die Beobachtungen im Startsystem angeordnet sind, ergibt sich

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}_1} & diag(\boldsymbol{R}_0) \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

in der Dimension $6n_{ident} \times (u_{TF} + 3n_{ident})$; das zugehörige stochastische Modell lautet

$$\boldsymbol{Q}_{ll} = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0} \end{bmatrix}. \tag{2.39}$$

Mit dieser Erweiterung können nun also Genauigkeitsinformationen aus beiden Systemen in der Schätzung der Transformationparameter bzw. der Elemente der Starrkörperbewegung berücksichtigt werden, Korrelationen zwischen den Systemen bzw. den (kongruenten Bereichen der) Epochen sind in (2.39) nicht vorgesehen. Die anschließende Durchführung der Ausgleichung unterscheidet sich nicht von der des klassischen Gauß-Markov-Modells.

2.4.2. Robuste Schätzung der Transformationsparameter

Übersicht über robuste Schätzverfahren

Voraussetzung für die erwartungstreue Schätzung in einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten ist, dass die Messunsicherheiten der berücksichtigten Beobachtungen normalverteilt sind oder zumindest nahe an der Normalverteilung liegen (Niemeier 2008).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Fehler in den Beobachtungen, die eine signifikante Abweichung von der Normalverteilung verursachen, sind systematische Abweichungen sowie die sogenannten *groben Fehler*. Insbesondere grobe Fehler können einen beliebig großen Einfluss auf das Ausgleichungsergebnis haben und zu falschen Ergebnissen führen. Ist davon auszugehen, dass ein gewisser Teil der Messdaten mit groben Fehlern behaftet ist, kann auf robuste Schätzverfahren zurückgegriffen werden. Entscheidendes Merkmal der robusten Schätzverfahren ist der sogenannte Bruchpunkt, der den kleinsten Anteil grob falscher Beobachtungen beschreibt, der zu einem falschen Schätzergebnis führt (Caspary 2013). Demnach weist die Methode der kleinsten Quadrate einen Bruchpunkt von (nahezu) 0% auf, da bereits *eine* grob falsche Beobachtung falsche Schätzwerte zur Folge haben kann.

Vereinfachend betrachtet gibt es zwei grundlegende Arten der robusten Parameterschätzung: auf der einen Seite stehen Verfahren, die durch Anpassung der Zielfunktion den Einfluss grober Fehler auf das Ausgleichungsergebnis abschwächen. Dazu gehören u.a. die Gruppen der M- und der L-Schätzer, deren Eigenschaften in Caspary (ebd.) detailliert beschrieben werden. Andererseits gibt es Verfahren, die aus der Vielzahl der möglichen Kombinationen von Beobachtungen, die die Parameter eindeutig bestimmen, eine Kombination auswählen, die eine Lösung des Gleichungssystems frei von groben Fehlern zulässt. Die bekanntesten Vertreter dieser Verfahren sind das *least median squares* (LMS)-Verfahren sowie RANSAC (engl. *random sample concensus*).

In der Literatur lassen sich einige Untersuchungen finden, die sich mit der robusten Schätzung der Parameter einer Ähnlichkeitstransformation befassen. In Caspary und Beineke (2003) werden für den 2D-Fall der Helmerttransformation die Ergebnisse verschiedener M-Schätzer und des L1-Schätzers verglichen. Es zeigt sich, dass der Einfluss der groben Fehler in der untersuchten Punktkonstellation (wenige Punkte, hoher Anteil grober Fehler) mit dem Huber-Schätzer (einem M-Schätzer) zwar gedämpft, jedoch nicht vollständig eliminiert werden kann. Für den Hampel-Schätzer, ebenfalls ein M-Schätzer, und den L1-Schätzer lassen sich dagegen gute Ergebnisse erzielen. Das LMS-Verfahren in der räumlichen Helmerttransformation wird in Lösler (2011) behandelt. Darin wird zunächst die LMS-Lösung der Parameter ermittelt, diese Parameter werden dann im Anschluss als Näherungswerte in eine Ausgleichung nach kleinsten Quadraten eingeführt. Mit Hilfe der normierten Verbesserungen wird dann eine Gewichtung aller Beobachtungen durchgeführt, die mutmaßliche Ausreißer aus den Beobachtungsdaten entfernt (*reweighted least squares*). Mit dieser Methode werden zufriedenstellende Ergebnisse ermittelt; ein Nachteil des LMS-Verfahrens ist jedoch, dass bei einer großen Anzahl von Beobachtungen extrem viele eindeutige Kombinationen der Beobachtungen auszuwerten sind.

RANSAC zur Schätzung der Parameter einer Helmerttransformation

Die Schätzung der Transformationsparameter erfolgt in dieser Arbeit im Zusammenhang mit der Detektion von deformierten Bereichen. Punkte in Bereichen, die einer Deformation unterliegen, können im Kontext der Helmerttransformation zwischen den Epochen als Ausreißer betrachtet werden – der Einsatz eines Verfahren, welches in der Lage ist, zuverlässig stabile Bereiche ohne Ausreißer zu identifizieren, stellt also einen geeigneten Weg dar. Ein robustes Verfahren, welches aus einer Menge von Messda-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

ten oder Punkten direkt eine modellkonforme Untermenge frei von groben Fehlern ermitteln kann und zudem einen hohen Bruchpunkt ($> 50\%$) aufweist und leicht zu implementieren ist, ist RANSAC (Fischler und Bolles 1981). Im Vergleich zu LMS liegt der Fokus also nicht nur darauf, die Transformationsparameter frei vom Einfluss der Ausreißer zu berechnen, sondern auch eine (möglichst große) Gruppe von konsistenten Beobachtungen zu finden. Zudem müssen im Gegensatz zu LMS nicht alle eindeutigen Lösungen berechnet werden – die Suche kann abgebrochen werden, sobald eine geeignete Untermenge gefunden wird. In Paláncz et al. (2017) wird RANSAC bereits für die robuste Schätzung der Parameter einer dreidimensionalen Ähnlichkeitstransformation angewandt.

Das Grundprinzip von RANSAC besteht darin, aus der Menge der s_I verfügbaren Punkte zunächst ein möglichst kleines Subset von s_r Punkten zufällig auszuwählen, das die Parameter eines Modells vorläufig bestimmt. Im Anschluss werden die Abstände dieses vorläufigen Modells zu allen Punkten berechnet; diejenigen Punkte, die innerhalb einer zu wählenden Fehlertoleranz liegen, werden als stimmig angesehen und zum sogenannten *Concensus Set* $\mathbb{S}_{CS}$ hinzugefügt. Caspary (2013) beschreibt den RANSAC-Algorithmus durch die Ausführung folgender Schritte:

1. Zufällige Auswahl von s_r Punkten aus der Menge der s_I verfügbaren Punkte und Bestimmung der Parameter $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ des hypothetischen Modells M_i; Fischler und Bolles (1981) empfehlen die Wahl von s_r so, dass die Parameter gerade eindeutig bestimmt werden.

2. Berechnung der Abstände $\boldsymbol{d}_i$ aller s_I Punkte zu M_i

3. Hinzufügen der s_i Punkte, die eine vorgegebene Fehlertoleranz t unterschreiten, zum $\mathbb{S}_{CS}$ des Modells M_i

4. Iteration der Punkte 1. bis 3., bis
   a) das $\mathbb{S}_{CS}$ eine vorgegebene Mindestanzahl von s_{min} Punkten enthält oder
   b) die maximale Anzahl von i_{max} Durchläufen erreicht ist; das $\mathbb{S}_{CS}$ mit der größten Punktanzahl wird angenommen, oder ein neuer Durchlauf mit angepassten RANSAC-Parametern (s. unten) muss durchgeführt werden

5. Schätzung der Parameter $\hat{\boldsymbol{x}}_{CS}$ mit den Punkten des $\mathbb{S}_{CS}$

Für die Durchführung sind mit t, s_{min} und i_{max} insgesamt drei RANSAC-Parameter zu wählen. Nach Caspary (2013) sind dabei folgende Punkte zu beachten:

- Die Fehlertoleranz t sollte so gewählt werden, dass ausschließlich modellkonforme Punkte in das $\mathbb{S}_{CS}$ aufgenommen werden. Ist t zu klein, werden Punkte fälschlicherweise als Ausreißer identifiziert; wird t zu groß gesetzt, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass Ausreißer im $\mathbb{S}_{CS}$ enthalten sind und somit das Schätzergebnis verfälscht wird. Der Parameter sollte optimalerweise analytisch unter Berücksichtigung der Genauigkeitsinformation der Identpunkte gewählt werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

- Die Mindestanzahl s_{min} der modellkonformen Punkte, die für die Annahme des aktuellen $\mathbb{S}_{CS}$ benötigt werden, sollte anhand des erwarteten Ausreißeranteils ε abgeschätzt werden. Ist ε bekannt, ergibt sich der optimale Wert zu $s_{min} = (1-\varepsilon)s_I$.

- Die maximale Iterationsanzahl i_{max} berechnet sich über die gewünschte Wahrscheinlichkeit W, mit der eine Lösung ohne Ausreißer gefunden werden soll:

$$i_{max} \geq \frac{log(1-W)}{log(1-(1-\varepsilon)^{s_e})} \tag{2.40}$$

  Darin steht s_e für die Anzahl der Punkte, die zur eindeutigen Lösung des Modells benötigt werden. Im Fall der dreidimensionalen Helmerttransformation kann $s_e = 3$ gesetzt werden. In Tabelle 2.2 sind dafür exemplarisch einige i_{max} für verschiedene Ausreißeranteile dargestellt.

Tabelle 2.2.: Anzahl der maximalen RANSAC-Durchläufe für verschiedene W und ε.

ε	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$W = 0.90$	2	6	18	85	2302
$W = 0.95$	3	8	23	110	2995
$W = 0.99$	4	11	35	169	4603

2.4.3. Ausreißertest im Gauß-Markov-Modell

Neben robusten Schätzverfahren bieten statistische Tests die Möglichkeit, einzelne grobe Fehler in den Beobachtungsdaten zu identifizieren. Während der Globaltest (vgl. Abschnitt 2.1) das mathematische Modell des Ausgleichs im Gesamten überprüft und somit eine Kontrolle gegenüber der generellen Existenz von Ausreißern in den Beobachtungsdaten darstellt, können diese mit Hilfe von Einzeltests lokalisiert werden.

Im bekannten Verfahren des Datasnoopings werden einzelne Beobachtungen verdächtigt, mit einem groben Fehler behaftet zu sein. Die standardisierte Verbesserung der i-ten Beobachtung

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \tag{2.41}$$

ist unter der Nullhypothese (2.1) standard-normalverteilt ($w_i \sim N(0,1)$) und bildet die Testgröße im Datasnooping mit unkorrelierten Beobachtungen (Niemeier 2008). Aus (2.41) kann die bekannte 3σ-Regel abgeleitet werden.

Dem Datasnooping zugrunde liegt eine Erweiterung des Gauß-Markov-Modells (Jäger et al. 2005), worin mögliche grobe Fehler mit Hilfe eines zusätzlichen Parametervektors $\hat{\nabla}$ geschätzt werden können. Die Modellerweiterung ermöglicht die simultane Untersuchung mehrerer Beobachtungen auf eine grobe Abweichung – was im Kontext einer Helmerttransformation wünschenswert ist, da dort das Testen einzelner Beobachtungen (Koordinaten) wenig aussagekräftig ist.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

Das linearisierte Gauß-Markov-Modell

$$H_0 : E(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{2.42}$$

stellt die Nullhypothese dar und wird um den Unbekanntenvektor $\hat{\nabla}$ mit der zugehörigen Designmatrix $\boldsymbol{B}$ erweitert:

$$H_A : E(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}' + \boldsymbol{B}\hat{\nabla} \tag{2.43}$$

Die Nullhypothese beinhaltet die Behauptung der Gültigkeit des ursprünglichen funktionalen Modells. Bei Ablehnung von H_0 wird die Hypothese H_A angenommen, nach der das erweiterte Modell die Wirklichkeit besser widerspiegelt als das Ausgangsmodell (Niemeier 2008).

Durch die Modellerweiterung entstehen veränderte Schätzwerte der Unbekannten $\hat{\boldsymbol{x}}'$ sowie Verbesserungen $\boldsymbol{e}'$. Die Dimension von $\hat{\nabla}$ und $\boldsymbol{B}$ richtet sich nach der Anzahl n_A der verdächtigten Beobachtungen – $\hat{\nabla}$ ist ein n_A-dimensionaler Vektor und $\boldsymbol{B}$ eine $(n_{\boldsymbol{l}} \times n_A)$-Matrix, die an den entsprechenden Stellen der verdächtigten Beobachtungen mit Einsen und ansonsten mit Nullen besetzt ist. Im Datasnooping ist $n_A = 1$; soll hingegen beispielsweise ein dreidimensionaler Punkt $\boldsymbol{x}_i$ der Helmerttransformation (2.37) mit n_{ident} Identpunkt-Paaren auf einen groben Fehler untersucht werden, gilt $n_A = 3$ und $n_{\boldsymbol{l}} = 6n_{ident}$, $\boldsymbol{B}$ nimmt damit folgende Form an:

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{\boldsymbol{x}_{1,1}} & \dots & \underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{\boldsymbol{x}_{1,i}} & \dots & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{\boldsymbol{x}_{1,n_{ident}}} & \dots & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{\boldsymbol{x}_{0,n_{ident}}} \end{bmatrix}_{3\times 6n_{ident}} \tag{2.44}$$

Allgemein lässt die Modellerweiterung also zu, nicht nur einzelne Beobachtungen oder Punkte, sondern auch eine Gruppe von Punkten simultan auf eine grobe Abweichung zu untersuchen. Die maximale Anzahl an Beobachtungen $n_{A,max}$, die in den Ausreißertest einfließen, wird von der Redundanz f des Ausgangsmodells (2.42) bestimmt (Jäger et al. 2005), es gilt

$$n_{A,max} = f\,. \tag{2.45}$$

Dem Parametertest, der die verdächtigten Beobachtungen auf grobe Fehler überprüft, liegt die mit (2.42) äquivalente Nullhypothese

$$H_0 : E(\hat{\nabla}) = \boldsymbol{0} \tag{2.46}$$

zugrunde. Es wird also untersucht, ob die geschätzten groben Abweichungen signifikant vom Soll $\tilde{\nabla} = \boldsymbol{0}$ abweichen. Das Normalgleichungssystem des erweiterten Modells ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}' \\ \hat{\nabla} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{l} \end{bmatrix}. \tag{2.47}$$

Nach Jäger et al. (ebd.) kann (2.47) durch Anwendung des Gauß'schen Eliminationsverfahrens auf die unbekannten Parameter $\hat{\nabla}$ reduziert werden:

$$\begin{aligned} &\left(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\hat{\nabla} \\ &\quad = \left(\boldsymbol{B}^T - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\right)\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}\boldsymbol{l} \end{aligned} \tag{2.48}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Unter Einsatz der Beziehungen $\boldsymbol{Q_{ee}} = \boldsymbol{Q_{ll}^{-1}} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}$ sowie $\boldsymbol{Q_{ee}}\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\mathbf{l} = -\boldsymbol{e}$ ergibt sich

$$\hat{\nabla} = -(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{Q_{ee}}\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{e}\,, \tag{2.49}$$

durch Fehlerfortpflanzung erhält man die zugehörige Kofaktormatrix

$$\boldsymbol{Q}_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}} = (\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{Q_{ee}}\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{B})^{-1}\,. \tag{2.50}$$

Für die Berechnung von $\hat{\nabla}$ ist es also nicht erforderlich, die Schätzung im erweiterten Modell (2.47) durchzuführen - alle in (2.49) sowie (2.50) benötigten Größen können im ursprünglichen Modell (2.42) berechnet werden. Für die Bildung der Testgröße sind zudem die Fehlerquadratsumme Ω' und der a posteriori-Varianzfaktor $\hat{\sigma}_0^{2\prime}$ des erweiterten Modells erforderlich:

$$\Omega' = \boldsymbol{e}'^T\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{e} - \hat{\nabla}^T\boldsymbol{Q}_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}}^{-1}\hat{\nabla} \tag{2.51}$$

$$\hat{\sigma}_0^{2\prime} = \frac{\Omega'}{f - n_A} \tag{2.52}$$

Die Testgröße

$$T = \frac{\hat{\nabla}^T\boldsymbol{Q}_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}}^{-1}\hat{\nabla}}{n_A\hat{\sigma}_0^{2\prime}} = \frac{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{Q_{ee}}\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{e}}{n_A\hat{\sigma}_0^{2\prime}} \tag{2.53}$$

kann somit ohne eine Neuausgleichung im erweiterten Modell gebildet werden, was eine effiziente Realisierung der Einzeltests ermöglicht. T ist, sofern die Nullhypothese (2.46) zutrifft, eine Fisher-verteilte Größe mit den Freiheitsgraden $f_1 = n_A$ und $f_2 = f - n_A$.

Aus dem erweiterten Modell (2.47) lässt sich nach Jäger et al. (2005) ebenfalls die Testgröße des Globaltests (2.3) ableiten. Der Ansatz beinhaltet die Verdächtigung *aller* Beobachtungen, also der „Überprüfung des funktionalen Modells auf eine globale Inkonsistenz“. Die Designmatrix B wird demnach zur $(n_{\boldsymbol{l}} \times n_{\boldsymbol{l}})$-Einheitsmatrix und $\hat{\nabla}$ ergibt sich zu

$$\hat{\nabla} = -(\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{Q_{ee}}\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}})^{+}\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{e} \tag{2.54}$$

mit der Kofaktormatrix $\boldsymbol{Q}_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}} = (\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{Q_{ee}}\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}})^{+}$. Damit erhält man mit einigen Umformungen die auf die a priori-Varianz bezogene Testgröße

$$T_G = \frac{\boldsymbol{l}^T\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{Q_{ee}}\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{l}}{f\sigma_0^2}\,, \tag{2.55}$$

welche wiederum mit $\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{Q_{ee}}\boldsymbol{Q_{ll}^{-1}}\boldsymbol{l}$ auf den Ausdruck in (2.3) gebracht werden kann. Damit ist gezeigt, dass der Globaltest neben der Überprüfung des stochastischen Modells gleichzeitig auch eine Überprüfung des funktionalen Modells beinhaltet.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

2.4.4. Helmerttransformation mit singulärer Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen

Entstammen die Beobachtungen, die in einer Helmerttransformation verarbeitet werden sollen, aus einer Vorausgleichung, so besteht die Möglichkeit, dass die zugehörige Varianz-Kovarianzmatrix einen Rangdefekt ausweist (Pelzer 1974). Die dann singuläre zugehörige Kofaktormatrix $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}$ ist nicht invertierbar und die Gewichtsmatrix $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}$, die in der Ausgleichung benötigt wird, kann nicht aufgestellt werden. In der Literatur werden einige Ansätze, die mit singulären Varianz-Kovarianzmatrizen umgehen können, diskutiert.

Pelzer (ebd.) berechnet eine Lösung der Ausgleichungsaufgabe mit singulärer Varianz-Kovarianzmatrix, indem der Beobachtungsvektor in einen r-dimensionalen Vektor bestimmbarer Funktionen (mit $r = Rang(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}})$) umgewandelt wird. Zusammen mit der zugehörigen, dann regulären Varianz-Kovarianzmatrix kann die Ausgleichung durchgeführt werden.

In Wang et al. (1998) wird ein Ansatz verfolgt, der eine Lösung von Ausgleichungen mit singulärer Varianz-Kovarianzmatrix durch generalisierte Inversen bzw. Pseudoinversen ermöglichen soll. Zudem wird in diesem Zusammenhang die Anwendbarkeit von Ausreißerdetektion und Zuverlässigkeitsbetrachtungen untersucht.

Nach Koch (2002) ist die generalisierte Inverse $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-}$ von $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}$ durch die Eigenschaft

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}} \tag{2.56}$$

definiert. Die *Pseudoinverse* (auch: Moore-Penrose-Inverse) $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{+}$ von $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}$ ist eine generalisierte Inverse mit den zusätzlichen Eigenschaften $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{+}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{+} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{+}$, $(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{+})^T = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{+}$ sowie $(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{+}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}})^T = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{+}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}$. $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{+}$ ist zudem eindeutig bestimmbar und es gilt $Rang(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{+}) = Rang(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}})$. Ist $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}$ eine reguläre Matrix, ergibt sich $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{+} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1}$.

Ein üblicher Weg der Bestimmung der Pseudoinversen erfolgt über die Singulärwertzerlegung

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}} = \tilde{\boldsymbol{U}}\tilde{\boldsymbol{S}}\tilde{\boldsymbol{V}}^T \tag{2.57}$$

durch

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{+} = \tilde{\boldsymbol{V}}\tilde{\boldsymbol{S}}^{+}\tilde{\boldsymbol{U}}^T \tag{2.58}$$

(Golub und Kahan 1965). Da $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}$ im vorliegenden Fall eine quadratische Matrix ist, sind $\tilde{\boldsymbol{U}}$, $\tilde{\boldsymbol{S}}$ und $\tilde{\boldsymbol{V}}$ von der selben Dimension. $\tilde{\boldsymbol{S}}$ ist eine Diagonalmatrix, die mit den $r = Rang(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}})$ Singulärwerten und sonst mit 0 besetzt ist. Im Zuge der Berechnung von $\tilde{\boldsymbol{S}}^{+}$, die die Reziprokwerte der Singulärwerte enthält, muss – sofern r nicht bekannt ist – aufgrund von Rechenunschärfen darüber entschieden werden, welche Singulärwerte klein genug sind, um als 0 angesehen zu werden (ebd.).

Eine weitere Möglichkeit, um singuläre Varianz-Kovarianzmatrizen im Zuge einer Ausgleichung invertieren zu können, besteht in ihrer Regularisierung. Dies kann, wie in Warton (2008) angeführt, über

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ll,reg} = \boldsymbol{\Sigma}_{ll} + \lambda\boldsymbol{I}\,, \tag{2.59}$$

erfolgen. Dabei wird auf die Hauptdiagonale der Varianz-Kovarianzmatrix ein Skalar $\lambda > 0$ addiert, um eine Behebung der Singularität zu erreichen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

3. Methodik

In dieser Arbeit wird eine Methodik zur Detektion und Lokalisierung von flächenhaften Deformationen entwickelt. Grundlage für die flächenhafte Deformationsanalyse sind Punktwolken aus zwei Epochen, in denen jeweils eine B-Spline-Fläche approximiert wird. Aufbauend auf der Ermittlung der Starrkörperbewegung zwischen den Flächen wird untersucht, ob das Objekt selbst einer Verformung unterliegt.

Die Implementierung der Methodik erfolgt in MATLAB. Für die B-Spline-Approximation wird von der Forschungsgruppe Ingenieurgeodäsie der TU Wien eine Toolbox mit den benötigten Funktionen zur Verfügung gestellt. Die Funktionalitäten im Zusammenhang mit dieser Arbeit bauen auf dieser Toolbox auf. In Abbildung 3.1 ist eine schematische Übersicht über die einzelnen implementierten Bausteine der Methodik gegeben, welche in den folgenden Abschnitten näher erläutert werden. Das entwickelte Programm lässt sich dabei grob in zwei Teilbereiche gliedern:

1. **Simulation der Messdaten von Referenz- und Vergleichsepoche**
   Die Entwicklung des Programms für die flächenhafte Deformationsanalyse erfolgt auf Basis simulierter Messdaten, wobei einer möglichen Starrkörperbewegung auch Verformungen innerhalb der repräsentierten Fläche überlagert werden können. Eine definierte B-Spline-Fläche dient dabei als Referenzfläche, aus welcher die simulierten Messdaten der Referenzepoche E_0 und der Vergleichsepoche E_1 abgeleitet werden. Die Deformationen in E_1 werden durch Änderungen der Lage der Kontrollpunkte der Referenzfläche realisiert.

2. **Flächenhafte Deformationsanalyse**
   Die Deformationsanalyse bildet den Hauptteil des entwickelten Programms. Sie basiert auf einer B-Spline-Approximation der Punktwolken aus beiden Epochen. Auf beiden Flächen wird über Diskretisierung in einem zwischen den Epochen identischen und im Parameterraum definierten Raster Flächenpunkte berechnet, welche die Vergleichsbasis des Ansatzes bilden. Aus den identischen Flächenpunkten werden im Rahmen einer Helmerttransformation die Parameter der Starrkörperbewegung ermittelt und eine statistisch gesicherte Lokalisierung der möglichen Verformungen durchgeführt.

3.1. Simulation von flächenhaften Messungen und Objektdeformationen

Die Grundlage für die Simulation der Messungen bildet die B-Spline-Fläche des in Harmening, Teodori et al. (2017) vorgestellten Testkörpers mit einer Ausdehnung von

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

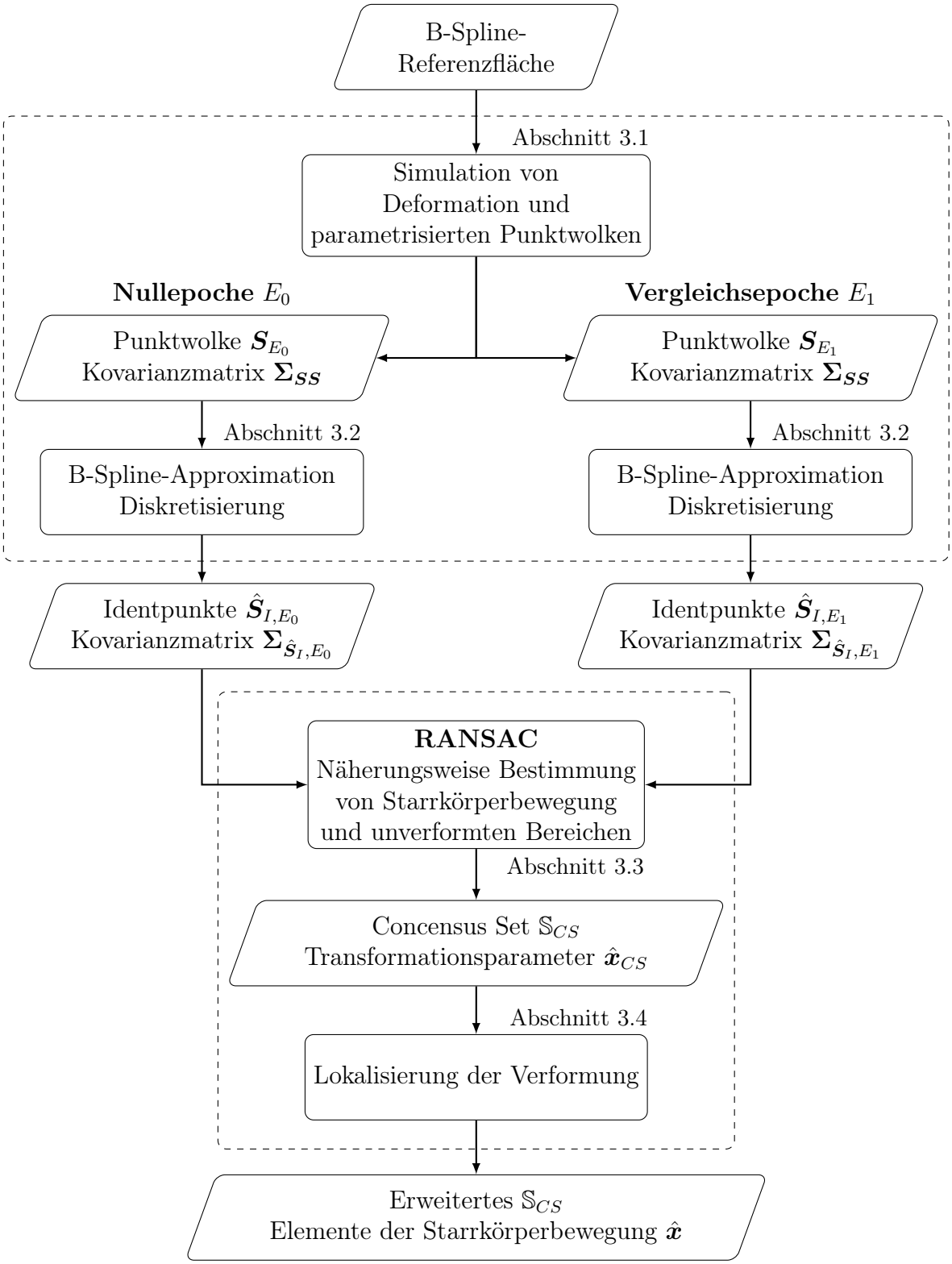


Abbildung 3.1.: Übersicht über die Bestandteile der entwickelten Methodik.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

ca. $20cm \times 40cm \times 40cm$ (vgl. Abbildung 3.2). Die Knotenvektoren $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ der B-Spline-Fläche vom Grad $p = q = 3$ sind aus 11 bzw. 13 Knoten aufgebaut, die mit den nach Formel (2.13) insgesamt $c_{\boldsymbol{P}} = (c_u + 1) \cdot (c_v + 1) = 7 \cdot 9 = 63$ Kontrollpunkten $\boldsymbol{P}_{Ref}$ die Referenzfläche festlegen.

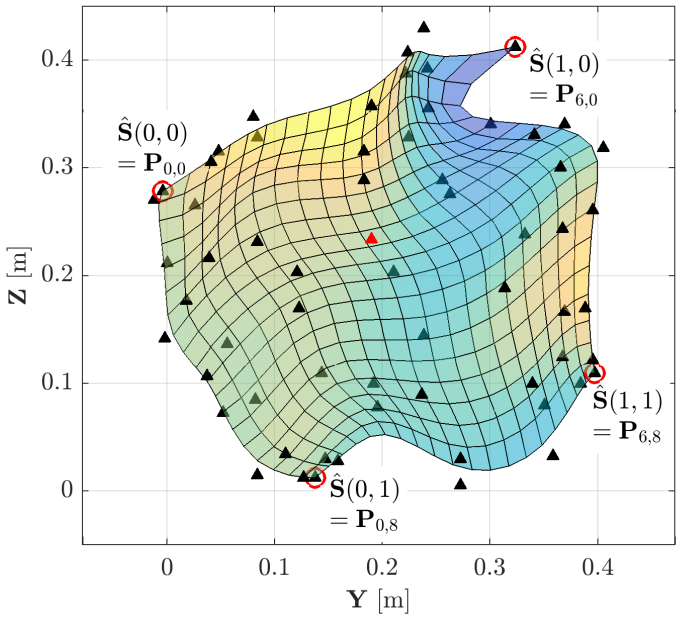


Abbildung 3.2.: B-Spline-Referenzfläche mit Kontrollpunkten. Die vier rot umrandeten Kontrollpunkte definieren die Eckpunkte der Fläche, der rot markierte Kontrollpunkt $\boldsymbol{P}_{3,3}$ wird im folgenden Beispiel für die Simulation der Verformung verschoben.

Die Messungen können auf Basis eines regelmäßigen Rasters von (u, v)-Paaren über den Zusammenhang (2.17) oder mit der Designmatrix $\boldsymbol{A}$ aus (2.20) über

$$\boldsymbol{S}_{E_0} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{Ref} + \Delta_S \,, \tag{3.1}$$

berechnet werden. Durch Diskretisierung der Parameterrichtungen in $n_u = n_v = 100$ gleichabständige Werte lassen sich so insgesamt $s = n_u n_v = 10000$ Messpunkte auf der Fläche simulieren, was einer räumlichen Auflösung von etwa 4 bis $5\,mm$ entspricht. Den berechneten Koordinaten werden zur Simulation des Messrauschens normalverteilte Abweichungen $\Delta_{\boldsymbol{S}} \sim N(0, {}^1\!/_3\, mm^2)$ mit einer Standardabweichung von

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{xyz} = {}^1\!/\!\sqrt{3}\, mm \tag{3.2}$$

überlagert, womit sich nach $\sigma_{\boldsymbol{S}}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 3\sigma_{xyz}^2$ (Niemeier 2008) ein mittlerer Punktfehler bzw. ein Rauschniveau von $1mm$ ergibt.

Zur Simulation der Messdaten der Vergleichsepoche E_1 wird zunächst durch die Verschiebung eines Kontrollpunkts eine Verformung der B-Spline-Referenzfläche durchgeführt. Eine Verschiebung von $\boldsymbol{P}_{3,3}$ um $1.2\,cm$ (vgl. Abbildung 3.2) führt dabei beispielsweise zu einer Verformung der Fläche innerhalb des durch die Knoten $u_3 = 0$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

und $u_7 = 1$ bzw. $v_3 = 0$ und $v_7 = 0.6337$ definierten Bereichs (vgl. Abbildung 3.3). Beim Vergleich der verformten Fläche mit der ursprünglichen Referenzfläche fällt auf, dass der Abstand zwischen korrespondierenden Flächenpunkten in einem Großteil des genannten Bereichs sehr kleine Werte $d_{min} \ll 1\,mm$ annimmt. Im Vergleich zum simulierten Messrauschen sind diese Abweichungen somit als nichtsignifikant einzuschätzen. Das größte Ausmaß der Verformung liegt in der Mitte des Bereichs und nimmt kontinuierlich zu – die maximale Verformung d_{max} beträgt dort über $5\,mm$.

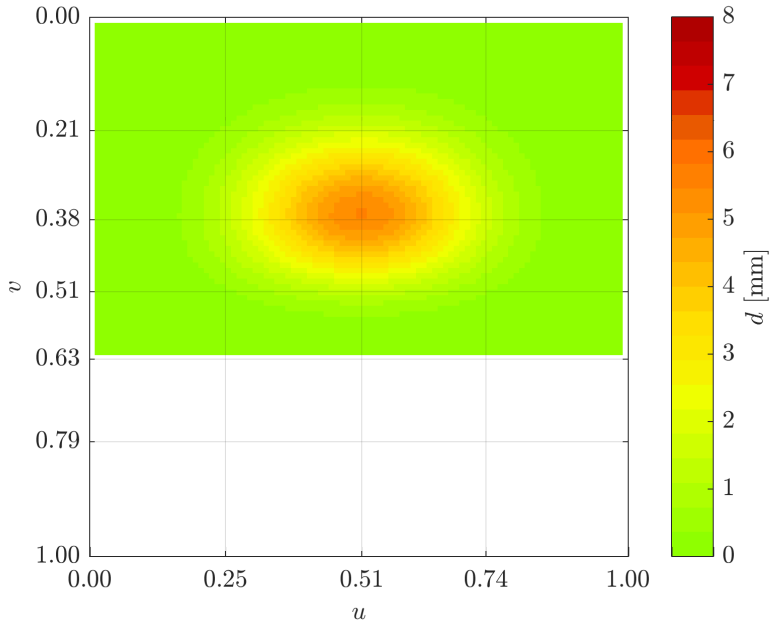


Abbildung 3.3.: Abstände zwischen korrespondierenden Flächenpunkten durch Verschiebung von Kontrollpunkt $\boldsymbol{P}_{3,3}$ um $1.2\,cm$ in x-Richtung. Darstellung des beeinflussten Bereichs im Parameterraum.

Im Anschluss werden die Kontrollpunkte der verformten B-Spline-Fläche einer Helmerttransformation

$$\boldsymbol{P}_{E_1} = \boldsymbol{R}(\omega, \phi, \kappa)\boldsymbol{P}_{Ref} + \boldsymbol{t} \tag{3.3}$$

(vgl. Formel (2.27)) mit $\mu = 1$ unterzogen, womit eine Starrkörperbewegung der Fläche simuliert werden kann (Harmening und Neuner 2016b). Auf Basis dieser verformten und transformierten B-Spline-Fläche wird analog zur Referenzepoche eine Punktwolke $\boldsymbol{S}_{E_1}(u, v)$ bestehend aus $s = 10000$ Punkten erstellt und mit normalverteilten Abweichungen der gleichen Größenordnung verrauscht.

Eine Reparametrisierung der simulierten Messdaten, welche durch die Überlagerung mit $\Delta_{\boldsymbol{S}}$ eigentlich notwendig ist, wird nicht durchgeführt. Hierbei wird angenommen, dass der zufällige Charakter der veränderten Punktlage und damit der Änderungen der Parameterwerte keine signifikanten Auswirkungen auf die anschließende Flächenschätzung hat – zudem folgt die Simulation beider Messepochen dem selben Prinzip, wodurch die Vergleichbarkeit zwischen beiden Epochen trotz der Vereinfachung gegeben bleibt.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

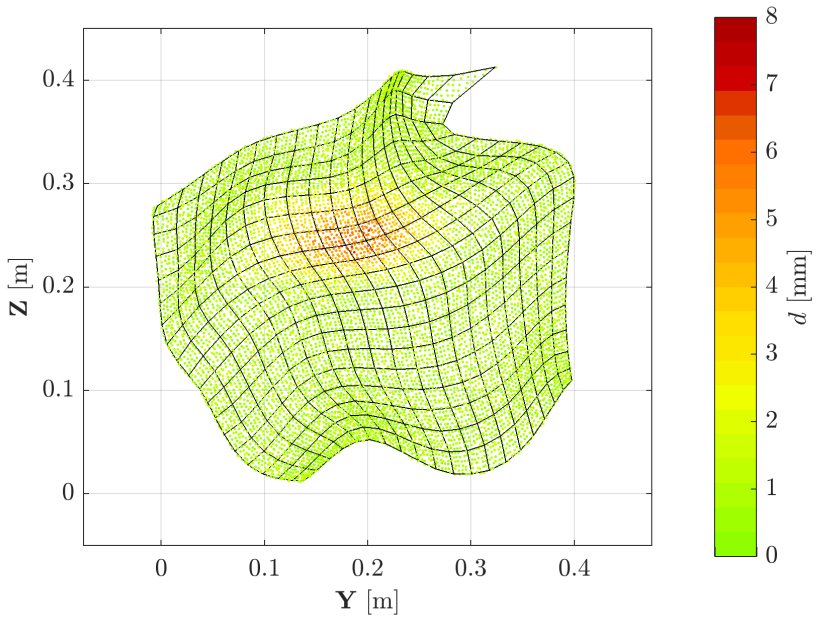


Abbildung 3.4.: Abstände zwischen den aus verformter B-Spline-Fläche simulierten Messungen und der unverformten Referenzfläche (ohne Starrkörperbewegung)

Durch die als gegeben vorausgesetzte Parametrisierung der Messdaten entfällt somit auch die Notwendigkeit, im Rahmen der Implementierung der Deformationsanalyse die Herausforderung der gemeinsamen Bestimmung von u und v (vgl. Abschnitt 2.3.2) im Sinne einer Datumsfestlegung im Parameterraum zu berücksichtigen.

Weitere Vereinfachungen hinsichtlich der in Abschnitt 2.3.2 vorgestellten Herausforderungen ergeben sich durch die Simulation der Messdaten, wodurch jegliche dem Messinstrument oder der Messanordnung zuzuordnende Einflüsse auf die Messdaten nicht modelliert werden müssen, ebenso kann auch die Registrierung der Punktwolken verzichtet werden. Die simulierten Messdaten weisen keine Lücken auf, ebenso gibt es keine Inhomogenitäten in der Punktdichte. Korrelationen zwischen den simulierten Punkten werden wie alle anderen genannten Einflüsse auf das stochastische Modell der Messdaten, welche unter realen Bedingungen zu berücksichtigen sind, somit nicht miteinbezogen.

3.2. Berechnung von Identpunkten zwischen den Epochen

In den simulierten Punktwolken beider Messepochen wird nun unabhängig voneinander jeweils eine ausgleichende B-Spline-Fläche geschätzt (vgl. Abschnitt 2.3.2), die Knotenvektoren und der Grad der Basisfunktionen werden dafür von der Referenzfläche

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

übernommen. Die funktionalen Modelle der Ausgleichungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{S}}_{E_0} &= \boldsymbol{S}_{E_0} + \boldsymbol{e}_{E_0} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{P}}_{E_0} \\ \hat{\boldsymbol{S}}_{E_1} &= \boldsymbol{S}_{E_1} + \boldsymbol{e}_{E_1} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{P}}_{E_1} \,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Das für beide Epochen identische stochastische Modell der simulierten Messungen

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{S},E_0} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{S},E_1} = \frac{1}{\sigma_0^2}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{SS}} \tag{3.5}$$

wird aus der Diagonalmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{SS}} = diag(\sigma_{xyz}^2) = \sigma_{xyz}^2\boldsymbol{I} \tag{3.6}$$

mit den Varianzen der Koordinaten der Messpunkte (vgl. (3.2)) gebildet. Durch das Fehlen der Korrelationen zwischen den Messpunkten stellt es ein idealisiertes Modell dar.

Die Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell liefert Schätzungen für die unbekannten Koordinaten der Kontrollpunkte $\hat{\boldsymbol{P}}_{E_0}$ und $\hat{\boldsymbol{P}}_{E_1}$, deren Genauigkeitsinformation ist in den Kovarianzmatrizen $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{P}},E_0}$ bzw. $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{P}},E_1}$ enthalten. Die beiden Flächen dienen im weiteren Verlauf als Basisgeometrien, welche für die Analyse der Deformationen herangezogen werden. Zur Untersuchung, ob sich Lage und Form der B-Spline-Fläche aus E_1 im Vergleich zu E_0 verändert hat, werden zwischen den Epochen reproduzierbare Punkte auf den Flächen ermittelt.

Voraussetzung für die Reproduzierbarkeit der Flächenpunkte ist, dass die Schätzung der B-Spline-Flächen in den jeweiligen Epochen auf Basis identischer Parametrisierung durchgeführt wird. Nur so ist gewährleistet, dass sich die (u, v)-Paare, mit denen die Diskretisierung der Flächen durchgeführt werden, auf gleiche Positionen innerhalb der Flächen beziehen; diese Voraussetzung ist für die simulierten Messdaten gegeben.

Die Berechnung der identen Flächenpunkte $\hat{\boldsymbol{S}}_I$ erfolgt analog zur Simulation der Punktwolken im vorigen Abschnitt über ein zwischen den Epochen übereinstimmendes Raster von (u, v)-Paaren, womit an den entsprechenden Stellen des Parameterraums die 3D-Positionen der $s_I = n_u n_v$ Flächenpunkte diskretisiert werden. Mit der $(3s_I \times 3c_{\boldsymbol{P}})$-dimensionalen Matrix $\boldsymbol{A}_d$, welche aus den s_I (u, v)-Paaren nach (2.20) gebildet wird, und den geschätzten Kontrollpunkten ergeben sich die Flächenpunkte der jeweiligen Epoche aus:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{S}}_{I,E_0} &= \boldsymbol{A}_d\hat{\boldsymbol{P}}_{E_0} \\ \hat{\boldsymbol{S}}_{I,E_1} &= \boldsymbol{A}_d\hat{\boldsymbol{P}}_{E_1} \,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Die Genauigkeitsinformation der diskretisierten Identpunkte wird, analog zu (2.26), über Kovarianzfortpflanzung aus den Kontrollpunkten der ausgleichenden B-Spline-Flächen abgeleitet:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I,E_0} &= \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{P}},E_0}\boldsymbol{A}_d^T \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I,E_1} &= \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{P}},E_1}\boldsymbol{A}_d^T \,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

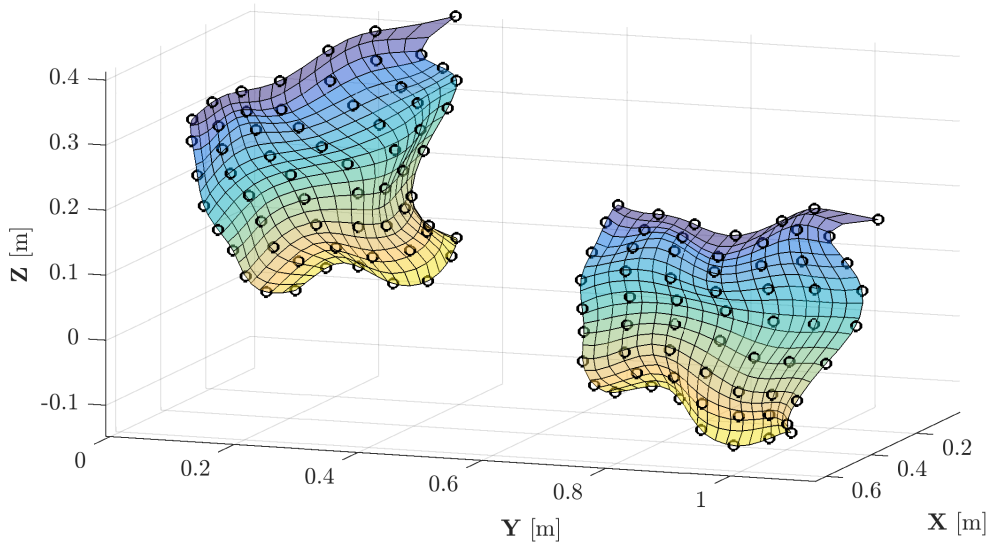


Abbildung 3.5.: Approximierende B-Spline-Flächen für E_0 (links) und E_1 (rechts) mit diskretisierten Identpunkten ($n_u = 7$, $n_v = 9$)

Wie in den Erläuterungen in Abschnitt 2.3.2 dargelegt, werden die $\hat{\boldsymbol{S}}_I$ durch Linearkombination der $\hat{\boldsymbol{P}}$ gebildet. Somit bilden sich ab einer gewissen Anzahl diskretisierter Punkte lineare Abhängigkeiten zwischen den $\hat{\boldsymbol{S}}_I$ innerhalb der Epochen und dadurch auch ein Rangdefekt in den $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$. Genauer betrachtet entsteht dieser, sobald in mindestens einer Parameterrichtung der B-Spline-Fläche mehr Flächenpunkte diskretisiert werden, als entsprechende Kontrollpunkte definiert sind. Der in u-Richtung verursachte Rangdefekt ergibt sich zu

$$\delta_u = \begin{cases} 0 & \text{für } n_u \leq c_u + 1 \\ 3 \cdot (n_u - (c_u + 1))(c_v + 1) & \text{sonst,} \end{cases} \tag{3.9}$$

analog erfolgt die Berechnung in v-Richtung über

$$\delta_v = \begin{cases} 0 & \text{für } n_v \leq c_v + 1 \\ 3 \cdot (n_v - (c_v + 1))(c_u + 1) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.10}$$

Der Rangdefekt δ, der wegen der identischen Diskretisierung für die $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ beider Epochen gleich ist, berechnet sich dann aus der Summe beider Anteile:

$$\delta = \delta_u + \delta_v \tag{3.11}$$

Im entwickelten Ansatz bilden die $\hat{\boldsymbol{S}}_I$ die Basis für die Deformationsanalyse, für die abgeleiteten Genauigkeiten in den $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ berücksichtigt werden müssen. In nachfolgenden Ausgleichungen, in die die $\hat{\boldsymbol{S}}_I$ als Beobachtungen eingeführt werden, müssen die $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ zur Erstellung der Gewichtsmatrix $\boldsymbol{Q}^{-1}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}$ invertierbar sein. Die maximale Anzahl diskretisierter Flächenpunkte $s_{I,max}$ mit einer regulären und damit invertierbaren $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

wird somit durch die Anzahl der Kontrollpunkte der approximierenden B-Spline-Fläche determiniert. Im Fall der in dieser Arbeit verwendeten Referenzfläche gilt

$$s_{I,max} = n_{u,max} \cdot n_{v,max} = (c_u + 1) \cdot (c_v + 1) = c_{\boldsymbol{P}} = 63. \tag{3.12}$$

3.3. Ermittlung unverformter Bereiche zur Bestimmung von Näherungswerten für die Elemente der Starrkörperbewegung

Ausgehend von den Identpunkten zwischen den Epochen sollen nun, zunächst näherungsweise, die Elemente der Starrkörperbewegung bestimmt werden. Die benötigten Parameter lassen sich nach Harmening und Neuner (2016b) mittels einer dreidimensionalen Helmerttransformation ermitteln – im Gegensatz zum dort vorgestellten Ansatz sollen hier jedoch nicht die Kontrollpunkte der B-Spline-Flächen, sondern die zuvor diskretisierten Flächenpunkte herangezogen werden.

Mit der Bestimmung der Transformationsparameter muss notwendigerweise eine Eliminierung der Flächenpunkte in verformten Bereichen einhergehen, da mit diesen Punkten die benötigte Deckungsgleichheit der Identpunkte in der Helmerttransformation nicht gegeben ist. Die Berücksichtigung dieser Punkte in der Ausgleichung würde zu einer Verfälschung der geschätzten Parameter führen, sie können also als Ausreißer interpretiert werden.

Das iterative RANSAC-Verfahren (vgl. Abschnitt 2.4.2) bietet die Möglichkeit, zum Modell der Helmerttransformation konforme Punkte zu identifizieren und somit eine Bestimmung der Transformationsparameter ohne den Einfluss der Ausreißer in verformten Bereichen zu ermöglichen. Ein Überblick über den Ablauf des in dieser Arbeit implementierten RANSAC-Verfahrens ist in Abbildung 3.6 gegeben.

Zur Bestimmung der $u_{TF} = 6$ Transformationsparameter wird am Beginn der i-ten Iteration eine zufällige Auswahl von $s_r = 3$ identen Flächenpunkten getroffen. Aus diesen Identpunkten werden zunächst Näherungswerte $\boldsymbol{X}_{0,i} = \boldsymbol{X}_{Q,i}$ für die Transformationsparameter mittels der in Abschnitt 2.4.1 vorgestellten Quaternionen-Methode ermittelt. Die Quaternionen-Methode bestimmt ebenfalls den Maßstab, der im Rahmen dieser Analyse jedoch zu $\mu = 1$ gesetzt wird (vgl. Abschnitt 2.4) – was zu Ungenauigkeiten in den Translations- und Rotationsparametern aus $\boldsymbol{X}_{0,i}$ führen kann. Mit den zufällig ausgewählten Punkten und $\boldsymbol{X}_{0,i}$ erfolgt deshalb im Anschluss die Bestimmung der Translations- und Rotationsparameter $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ im erweiterten Modell (2.37) unter Berücksichtigung der Punktgenauigkeiten beider Epochen aus dem stochastischen Modell

$$\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} = \frac{1}{\sigma_0^2}\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} = \frac{1}{\sigma_0^2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I,E_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I,E_0} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

(vgl. Zusammenhang (2.39)).

Mit $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ werden im Anschluss über den Zusammenhang (2.27) alle Flächenpunkte der Nullepoche $\hat{\boldsymbol{S}}_{I,E_0}$ in die Nähe der Punkte der Vergleichsepoche transformiert. Der

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

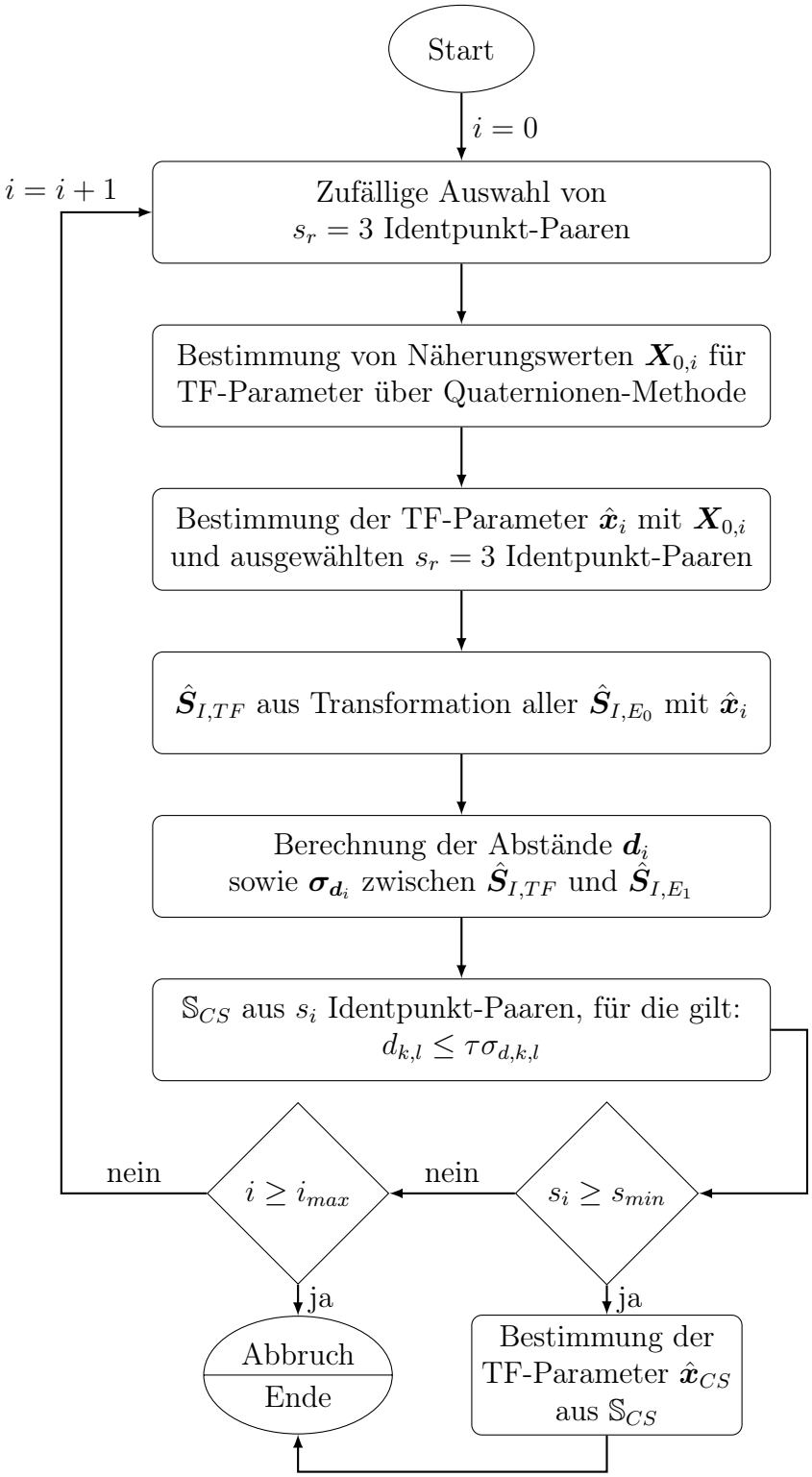


Abbildung 3.6.: Übersicht über den Ablauf des RANSAC-Verfahrens zur Bestimmung der Starrkörperbewegung

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

euklidische Abstand

$$d_{k,l} = \left\| \hat{\boldsymbol{S}}_{k,l,E_1} - \hat{\boldsymbol{S}}_{k,l,TF} \right\|_2 \tag{3.14}$$

zwischen dem transformierten Punkt aus E_0 und dem Punkt aus E_1 des jeweiligen Identpunktpaars $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l} = \hat{\boldsymbol{S}}_I(u_k, v_l)$ (mit $k \in \{0, ..., n_u - 1\}$ bzw. $l \in \{0, ..., n_v - 1\}$) dient als Grundlage für die Entscheidung, ob ein $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l}$ in das Concensus Set $\mathbb{S}_{CS}$ der modellkonformen Punkte aufgenommen wird. Der Grenzwert $t_{k,l}$, unter dem $d_{k,l}$ liegen muss, wird dazu für jedes Punktpaar individuell aus der Genauigkeit $\sigma_{d,k,l}$ des bestimmten Abstands abgeschätzt, da die diskretisierten Flächenpunkte nicht mit einer homogenen Genauigkeit vorliegen (vgl. Abbildung 3.7):

$$d_{k,l} \leq t_{k,l} = \tau \sigma_{d,k,l} \,. \tag{3.15}$$

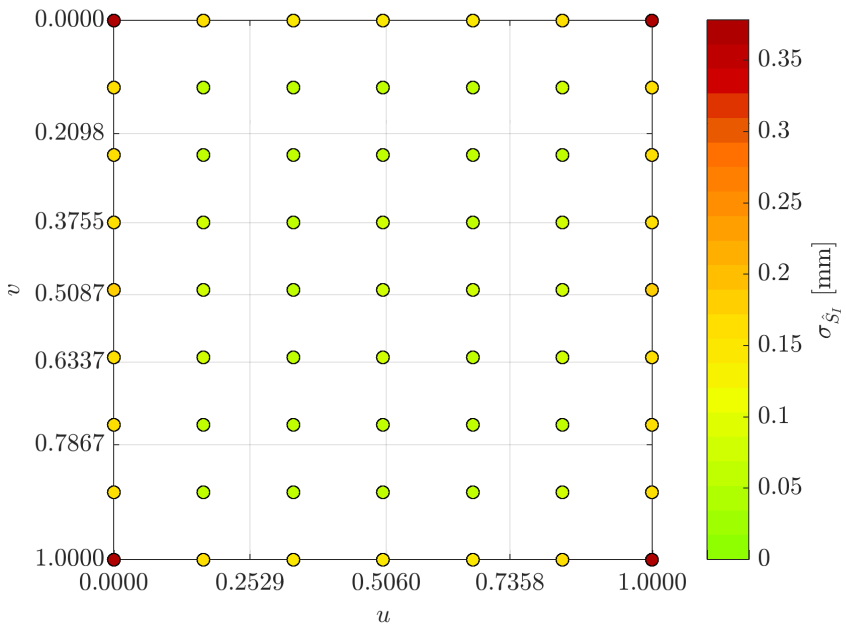


Abbildung 3.7.: Mittlerer Punktfehler $\sigma_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ der diskretisierten Identpunkte im Parameterraum ($n_u = 7$, $n_v = 9$): Flächenpunkte im Randbereich werden ungenauer bestimmt als im inneren Bereich der Fläche.

Die σ_d^2 des entsprechenden Identpunktpaars erhält man dabei aus der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma_{dd}}$ über die Fehlerfortpflanzung

$$\boldsymbol{\Sigma_{dd}} = \boldsymbol{F} \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} \boldsymbol{F}^T \,, \tag{3.16}$$

worin $\boldsymbol{F}$ die Ableitungen der $d_{k,l}$ nach den Koordinaten der Identpunkte enthält.

Liegt die Anzahl s_i der Punkte, für die (3.15) zutrifft, unter einer bestimmten Mindestanzahl s_{min}, wird eine weitere RANSAC-Iteration mit $s_r = 3$ anderen, zufällig ausgewählten Flächenpunkten durchgeführt – sofern die maximale Anzahl von i_{max} Iterationen noch nicht erreicht ist. Gilt $s_i \geq s_{min}$, wird aus dem $\mathbb{S}_{CS}$ der modellkonformen Punkte eine überbestimmte Schätzung der Transformationsparameter, erneut im

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

erweiterten Modell (2.37), durchgeführt. Mit einem abschließenden Globaltest (vgl. Abschnitt 2.1) kann das Vorhandensein von Ausreißern statistisch gesichert ausgeschlossen werden – spricht der Globaltest gegen eine Annahme der Nullhypothese, sollte ebenfalls eine neue RANSAC-Iteration erfolgen.

Als Ergebnis erhält man somit mit dem $\mathbb{S}_{CS}$ eine Menge von $s_{CS} = s_i$ Identpunktpaaren, welche mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha_G$ (Sicherheitswahrscheinlichkeit des Globaltests) frei von Ausreißern ist. Die Punkte im $\mathbb{S}_{CS}$ können damit dem verformungsfreien Bereich der B-Spline-Fläche aus E_1 zugeordnet werden, mit dem die Elemente der Starrkörperbewegung ermittelt werden können.

3.4. Lokalisierung von Verformungen

Die mit dem vorgestellten RANSAC-Ansatz ermittelten Stabilpunkte des $\mathbb{S}_{CS}$ repräsentieren, abhängig von den gewählten Parametern t (bzw. τ) und s_{min}, im Allgemeinfall nur einen Teil des unverformten Bereichs der untersuchten Fläche – über die Lage möglicher Verformungen kann somit bislang keine präzise Aussage getroffen werden. Im Sinne einer Vorwärtsstrategie (vgl. Abschnitt 2.2.1) soll nun die Menge der Stabilpunkte im $\mathbb{S}_{CS}$ durch statistisch gesicherte Hinzunahme einzelner Punkte erweitert werden, um den Verformungsbereich durch schrittweise Eingrenzung zu lokalisieren. Durch die Erweiterung der Menge der Stabilpunkte können somit auch die Elemente der Starrkörperbewegung nach und nach mit größerer Redundanz bestimmt werden. Der generelle Ablauf der Lokalisierung ist in Abbildung 3.8 zusammengefasst.

Zur Überprüfung, ob ein bestimmtes Identpunkt-Paar $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l}$ für die Erweiterung des $\mathbb{S}_{CS}$ in Frage kommt, soll der in Abschnitt 2.4.3 vorgestellte Ausreißertest zur Anwendung kommen. Die Menge der zu testenden Punkte $\mathbb{S}_T$ umfasst alle nicht im initialen $\mathbb{S}_{CS}$ enthaltenen Punkte:

$$\mathbb{S}_T = \{\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l} \mid \hat{\boldsymbol{S}}_{k,l} \notin \mathbb{S}_{CS}\} \,. \tag{3.17}$$

Für den Ausreißertest eines Identpunktpaars $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l} \in \mathbb{S}_T$ wird dieses – zunächst temporär – in das Ausgleichungsmodell der Helmerttransformation (2.37) aufgenommen. Da im Ausreißertest eine grobe Abweichung der Punktkoordinaten der Vergleichsepoche E_1 detektiert werden soll, wird für die Modellierung der Abweichung in der Designmatrix $\boldsymbol{B}_{k,l}$ an den entsprechenden Stellen der drei in E_1 beobachteten Punktkoordinaten die (3×3)-Einheitsmatrix eingefügt (vgl. Zusammenhang (2.44)).

Wie bereits in Abschnitt 2.4.3 erwähnt, können im erweiterten Modell des Ausreißertests ebenfalls mehrere Punkte gleichzeitig auf das Vorhandensein einer groben Abweichung hin untersucht werden – diese Möglichkeit kann genutzt werden, um Verformungen im gesamten umgebenden Bereich des betrachteten Punkts $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l,E_1}$ im Vergleich zu E_0 zu detektieren und so im Vergleich zum Test einzelner diskretisierter Punkte eine flächenhaftere Deformationsaussage abzuleiten. Die Berücksichtigung des umgebenden Bereichs im Ausreißertest macht vor allem dann Sinn, wenn eine enge Diskretisierung mit größeren n_u- und n_v-Werten durchgeführt wird.

In Abbildung 3.9 ist der im Ausreißertest berücksichtigte Bereich eines zu untersuchenden Flächenpunkts im Parameterraum dargestellt. Der Bereich wird darin durch

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

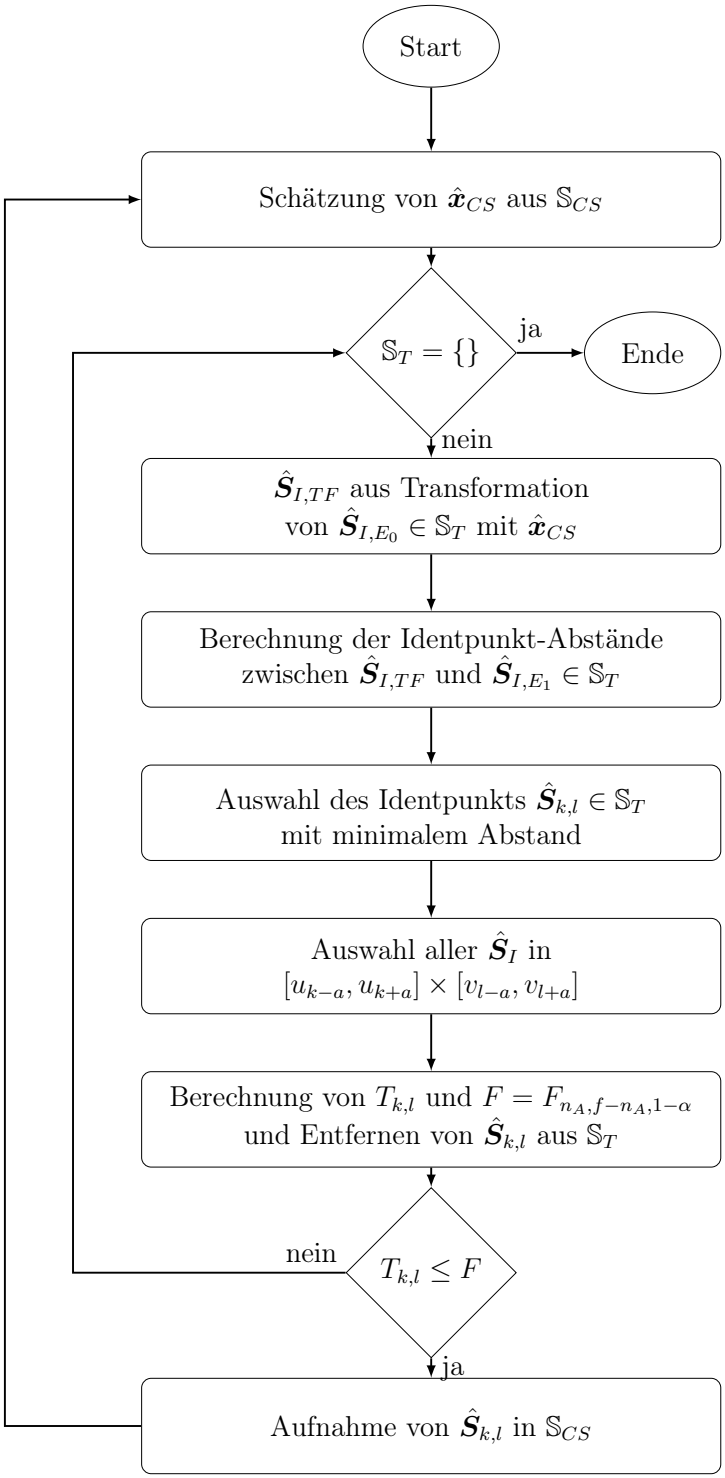


Abbildung 3.8.: Übersicht über den Ablauf der Ausreißertests zur Erweiterung der Menge der Stabilpunkte.

die direkte Nachbarschaft von $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l}$ mit den im Flächenstück $[u_{k-a}, u_{k+a}] \times [v_{l-a}, v_{l+a}]$ mit $a = 1$ liegenden Identpunkte definiert. a bestimmt die Anzahl der zu $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l}$ benach-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

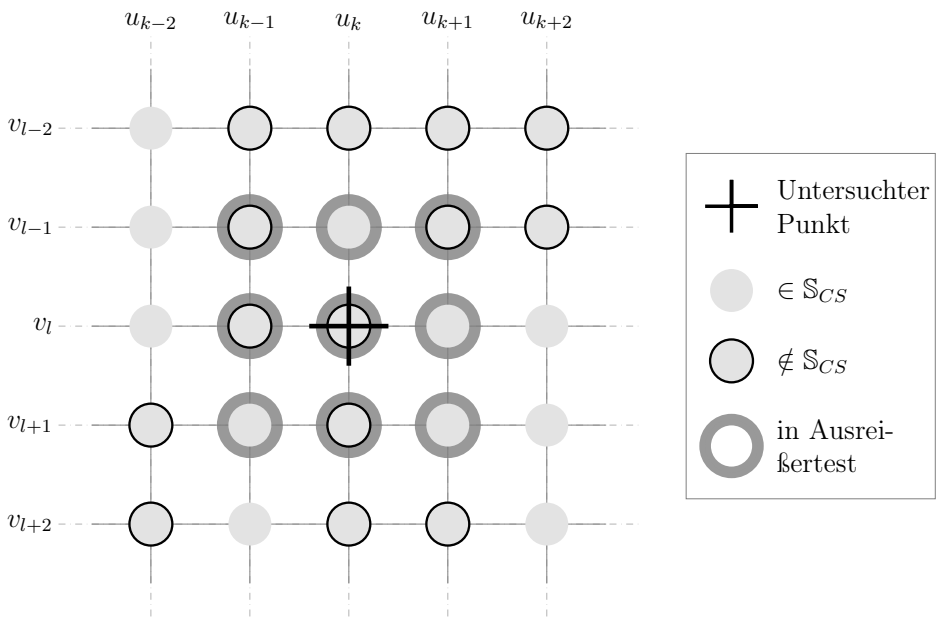


Abbildung 3.9.: Schematische Darstellung des im Ausreißertest von $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l} = \hat{\boldsymbol{S}}_I(u_k, v_l)$ berücksichtigten Bereichs für $a = 1$.

barten Punkte in jede Parameterrichtung und damit die Größe des Bereichs, der in die Berechnung der Testgröße $T_{k,l}$ einfließt. Abhängig von der Wahl von a werden im Ausreißertest

$$n_A = 3(2a+1)^2 \tag{3.18}$$

Beobachtungen aus E_1 auf eine grobe Abweichung untersucht. Von diesem Zusammenhang ausgenommen ist logischerweise der Fall, wenn das zu untersuchende Flächenstück über den Randbereich der approximierten B-Spline-Flächen hinausgeht, n_A reduziert sich dann entsprechend.

Im Gegensatz zum Einzelpunkt-Test müssen im Test des gesamten umgebenden Bereichs alle Punkte aus beiden Epochen, welche im Flächenstück liegen und nicht im aktuellen $\mathbb{S}_{CS}$ enthalten sind, für die Dauer des Ausreißertests zum Ausgleichungsmodell der Helmerttransformation hinzugefügt werden. Die $(n_A \times 6s_{CS})$-dimensionale Matrix $\boldsymbol{B}_{k,l}$ wird dann an den entsprechenden Stellen aller im Flächenstück liegenden Punktkoordinaten aus E_1 angepasst.

Spricht der Vergleich der über (2.53) berechneten Testgröße $T_{k,l}$ mit dem entsprechenden Quantil der Fisher-Verteilung für eine Annahme von H_0 und somit gegen die Existenz grober Abweichungen in den n_A hinzugefügten Beobachtungen, wird $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l}$ in das $\mathbb{S}_{CS}$ aufgenommen und in den folgenden Ausreißertests als Stabilpunkt berücksichtigt – s_{CS} erhöht sich somit um 1.

Im Falle einer Annahme von H_A ist davon auszugehen, dass grobe Abweichungen in den entsprechenden Beobachtungen vorliegen und eine Verformung der Fläche im berücksichtigten Bereich zwischen E_0 und E_1 stattgefunden hat. $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l}$ wird dementsprechend nicht in die Menge $\mathbb{S}_{CS}$ der als unverformt eingeschätzten Punkte aufgenommen.

Mit der Durchführung des Ausreißertests wird $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l}$ in jedem Fall aus $\mathbb{S}_T$ entfernt,

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

bevor mit dem nächsten zu testenden Punkt fortgefahren wird. Die berechnete Testgröße wird $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l}$ zugeordnet und die Ausreißertests werden so lange durchgeführt, bis keine Identpunkte mehr in $\mathbb{S}_T$ enthalten sind. Mit dem erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$ erfolgt dann eine endgültige Bestimmung der Elemente der Starrkörperbewegung. Ein abschließender Globaltest kann dann zusätzlich zur Überprüfung der Konsistenz der ermittelten Stabilpunktmenge herangezogen werden.

Die Reihenfolge, mit der die Hinzunahme von Identpunkten zum $\mathbb{S}_{CS}$ geprüft wird, wird durch die Abstände zwischen den identen Punkten festgelegt. Diese werden analog zu (3.14) nach Transformation der $\hat{\boldsymbol{S}}_{I,E_0} \in \mathbb{S}_T$ mit den aus dem aktuellen $\mathbb{S}_{CS}$ geschätzten Transformationsparametern $\hat{\boldsymbol{x}}_{CS}$ berechnet. Von den $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l} \in \mathbb{S}_T$ wird dann dasjenige dem Ausreißertest unterzogen, welches den kleinsten Abstand aufweist – ein geringer Abstand zwischen den Identpunkten nach der Transformation mit $\hat{\boldsymbol{x}}_{CS}$ spricht für eine Zustimmung des untersuchten Punktpaars zum bereits existierenden Modell der Helmerttransformation des $\mathbb{S}_{CS}$. Ein Vorgehen in dieser Reihenfolge führt somit zu einer zügigen Erweiterung der modellkonformen Punktmenge und damit auch schneller zu einer größeren Überbestimmung im Ausgleichungsmodell. Dadurch können die Ausreißertests in weiterer Folge mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art β (bzw. einer höheren Testgüte γ) durchgeführt werden (vgl. Abschnitt 2.1). β steht in diesem Zusammenhang für die Wahrscheinlichkeit einer durch den Ausreißertest nicht aufgedeckten Verformung der Fläche, welche allgemein im Rahmen einer Deformationsanalyse möglichst klein gehalten werden sollte.

Darüber hinaus stellt sich die Frage, ob die mit dem RANSAC-Verfahren ermittelten Stabilpunkte des initialen $\mathbb{S}_{CS}$ ebenfalls einzeln Ausreißertests unterzogen werden sollten. Im Fall von $a = 0$ ist – nach Annahme von H_0 im Globaltest am Ende des RANSAC-Verfahrens – davon auszugehen, dass die Ausreißertests einzelner $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l}$ keine Verformungen detektieren werden. Soll in der Verformungsanalyse jedoch der umgebende Bereich miteinbezogen werden ($a > 0$), so macht es Sinn, in einem ersten Schritt zunächst ebenfalls das initiale $\mathbb{S}_{CS}$ auf Verformungen zu untersuchen. Im Vergleich zum oben vorgestellten (und dann folgenden) Verfahren zur Erweiterung der Stabilpunktmenge ergeben sich dabei folgende Unterschiede:

- Die Menge der zu testenden Identpunktpaare besteht aus $\mathbb{S}_T = \{\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l} \mid \hat{\boldsymbol{S}}_{k,l} \in \mathbb{S}_{CS}\}$
- Bei einer Annahme von H_A wird $\hat{\boldsymbol{S}}_{k,l}$ aus dem $\mathbb{S}_{CS}$ entfernt
- Wird im Verlauf der Überprüfung des $\mathbb{S}_{CS}$ die vorgegebene Mindestanzahl von Identpunktpaaren $s_{CS,min}$ erreicht (vgl. Tabelle 3.1), erfolgt nach jeder Entfernung eines Identpunktpaars automatisch die Hinzunahme desjenigen Paars zu $\mathbb{S}_T$ und $\mathbb{S}_{CS}$, das den aktuell kleinsten Identpunkt-Abstand aufweist. Nach der Hinzunahme kann das aktualisierte $\mathbb{S}_{CS}$ mit einem Globaltest auf Konsistenz überprüft werden. Kann so kein weiterer konsistenter Identpunkt mehr gefunden werden, muss die Verformungsanalyse abgebrochen werden.

Aufgrund der Beziehung (2.45) hat die mit a festgelegte Größe des zu untersuchenden Bereichs Auswirkungen auf die benötigte Mindestanzahl $s_{CS,min}$ von Punkten in

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

der initialen Punktmenge des $\mathbb{S}_{CS}$ – besteht es aus zu wenigen Punkten, liegt die Redundanz f des ursprünglichen Modells der Helmerttransformation unter n_A und die Ausreißertests können nicht durchgeführt werden. Die benötigte Mindestanzahl kann mit $u_{TF} = 6$ über

$$\begin{aligned} 3(2a+1)^2 &\leq 6s_{CS,min} - u_{TF} \\ (2a+1)^2 &\leq 2s_{CS,min} - 2 \\ \left\lceil \frac{1}{2}\left((2a+1)^2 + 2\right) \right\rceil &< s_{CS,min} \end{aligned} \tag{3.19}$$

abgeleitet werden und ist in Tabelle 3.1 für einige a zusammengefasst. Dabei sei nochmals angemerkt, dass im Fall von $s_{CS} = s_{CS,min}$ die Berechnung der geschätzten Varianz $\hat{\sigma}_0^2$ in (2.52) nur mit wenigen Freiheitsgraden $f - n_A$ erfolgen kann. Für eine größere Redundanz und damit einer gesteigerten Aussagekraft des Ergebnisses der ersten Ausreißertests (sowie eines möglichst kleinen β-Werts) muss also auf eine ausreichend große Wahl der Mindestanzahl von Identpunkt-Paaren im $\mathbb{S}_{CS}$ geachtet werden, welche über die in Tabelle 3.1 gezeigten $s_{CS,min}$-Werte hinausgeht. Der RANSAC-Parameter s_{min} sollte unter Berücksichtigung dieser Überlegungen im Vorfeld der Ausreißertests festgelegt werden. Im Zuge dieser Arbeit wird mit $s_{min} = s_{CS,min} + 10$ gearbeitet.

Tabelle 3.1.: Benötigte Mindestanzahl von Identpunktpaaren im initialen $\mathbb{S}_{CS}$ zur Durchführung des Ausreißertests

a	n_A	$s_{CS,min}$
0	3	2
1	27	6
2	75	14
3	147	26

Die festgelegten Werte für s_{min} und a haben damit auch Einfluss auf den maximalen Anteil des verformten Bereichs der Fläche, der mit dem implementierten Ansatz aufgedeckt werden kann. Bei steigendem Verformungsanteil sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass mit dem RANSAC-Verfahren ein ausreichend großes $\mathbb{S}_{CS}$ gefunden wird, welches eine zuverlässige Lokalisierung erlaubt. Eine Diskretisierung über $s_{I,max} = 63$ (vgl. Zusammenhang (3.12)) hinaus biete eine Möglichkeit, diese Einschränkung zu umgehen.

3.5. Regularisierung des Gleichungssystems

Ein weiterer Grund für die Erhöhung der Diskretisierungsdichte ist der Wunsch nach der Ableitung möglichst kontinuierlicher sowie detaillierter Deformationsaussagen unabhängig von den Eigenschaften der approximierenden B-Spline-Flächen. Die mit einer Diskretisierung mit mehr als $s_{I,max}$ Identpunktpaaren einhergehende Singularität der

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ (vgl. Abschnitt 3.2) führt dazu, dass deren Inversion zur Berechnung der Gewichtsmatrizen $\boldsymbol{Q}^{-1}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}$ (vgl. Zusammenhang (3.13)) im Ausgleichungsmodell der Helmerttransformation nicht erfolgen kann.

Die notwendige Regularisierung der $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ bzw. Lösung der Ausgleichung mit singulärer $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}$ kann auf verschiedene Weisen erfolgen (vgl. Abschnitt 2.4.4). Im Folgenden wird die Umsetzung einiger Ansätze dargelegt.

Um überprüfen zu können, ob die Berechnung von $\hat{\nabla}$ und $\boldsymbol{Q}_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}}$ durch die vereinfachten Zusammenhänge (2.49) bzw. (2.50) aus den Größen des Ausgangsmodells (2.42) trotz der Anwendung der verschiedenen Regularisierungsmethoden gültig bleibt, kann die Ermittlung der beteiligten Größen ebenfalls im erweiterten Modell erfolgen. Da im vorgestellten Ansatz der Lokalisierung der Verformungen ohnehin eine Neuausgleichung nach jeder Änderung der Menge der Stabilpunkte durchgeführt werden muss, spielt der Mehraufwand einer Ausgleichung im erweiterten Modell (2.47) im Vergleich zum Ausgangsmodell keine große Rolle. Die Auflösung des erweiterten Modells für $\hat{\nabla}$ aus (2.48) mit

$$\boldsymbol{N}_A = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1} \boldsymbol{A} \tag{3.20}$$

und

$$\boldsymbol{N}_B = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1} \boldsymbol{B} \tag{3.21}$$

ergibt

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} &= \left(\boldsymbol{N}_B - \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{N}_A^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1} \boldsymbol{B}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{B}^T - \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{N}_A^{-1} \boldsymbol{A}^T\right) \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1} \boldsymbol{l} \\ &= \boldsymbol{F}_{\nabla} \boldsymbol{l} \,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Äquivalent lässt sich aus (2.47) $\hat{\boldsymbol{x}}'$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{l}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}' &= \left(\boldsymbol{N}_A - \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1} \boldsymbol{B} \boldsymbol{N}_B^{-1} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1} \boldsymbol{A}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1} \boldsymbol{B} \boldsymbol{N}_B^{-1} \boldsymbol{B}^T\right) \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1} \boldsymbol{l} \\ &= \boldsymbol{F}_x \boldsymbol{l} \,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Die Verbesserungen im erweiterten Modell berechnen sich dann aus (2.43) zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}' &= \boldsymbol{A} \boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{l} + \boldsymbol{B} \boldsymbol{F}_{\nabla} \boldsymbol{l} - \boldsymbol{l} \\ &= \left(\boldsymbol{A} \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{B} \boldsymbol{F}_{\nabla} - \boldsymbol{I}\right) \boldsymbol{l} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{e}} \boldsymbol{l} \,. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Die entsprechenden Kofaktormatrizen ergeben sich dann durch Kofaktorfortpflanzung der $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}} &= \boldsymbol{F}_{\nabla} \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}} \boldsymbol{F}_{\nabla}^T \\ \boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{x}}'\hat{\boldsymbol{x}}'} &= \boldsymbol{F}_x \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}} \boldsymbol{F}_x^T \\ \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}'} &= \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{e}} \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{e}}^T \,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Für die Freiheitsgrade im erweiterten System gilt

$$f_e = tr(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}'} \boldsymbol{Q}^{-1}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}) = f - n_A \,, \tag{3.26}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

die Testgröße kann somit über

$$T = \frac{\hat{\nabla}^T \boldsymbol{Q}_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}}^{-1} \hat{\nabla}}{n_A \hat{\sigma}_0^{2\prime}} \tag{3.27}$$

mit

$$\hat{\sigma}_0^{2\prime} = \frac{\boldsymbol{e}'^T \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{ll}}^{-1} \boldsymbol{e}'}{f_e} \tag{3.28}$$

berechnet werden. Die Differenz zwischen den gewichteten Quadratsummen $\hat{\nabla}^T \boldsymbol{Q}_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}}^{-1} \hat{\nabla}$ aus der Berechnung im erweiterten Modell und der entsprechenden vereinfachten Auflösung im Ausgangsmodell sollte durch die Regularisierung möglichst klein gehalten werden.

Der in Pelzer (1974) beschriebene Ansatz, der mit einer Transformation der Beobachtungen in einen Raum anderer Dimension einhergeht, eignet sich nicht für die Durchführung der Ausreißertests, da diese auf der Überprüfung der ursprünglichen Beobachtungen basieren. Die anderen in Abschnitt 2.4.4 beschriebenen Ansätze können dagegen zur Durchführung der Ausreißertests bei singulären $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ im Rahmen dieser Arbeit umgesetzt und untersucht werden:

- **Vernachlässigung der Korrelationen zwischen Flächenpunkten**
  Die trivialste Methode, um die Korrelationen zwischen den diskretisierten Flächenpunkten zu eliminieren und reguläre $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ zu erhalten, ist das Nullsetzen der Kovarianzen über

  $$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_{I,reg}} = diag(\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I})\boldsymbol{I}\,. \tag{3.29}$$

  Die Beschränkung auf die Varianzinformation führt, nach der Anwendung des vereinfachten stochastischen Modells der Messungen in (3.6) zu einer zusätzlichen Idealisierung. Durch die Vernachlässigung der Korrelationen werden Abhängigkeiten zwischen den diskretisierten Punkten, welche im Zuge der B-Spline-Approximation entstanden sind, ignoriert und lediglich die Varianz der Koordinaten der einzelnen Flächenpunkte berücksichtigt. Als Konsequenz muss damit gerechnet werden, dass mit den Ausreißertests fehlerhafte Deformationsaussagen abgeleitet werden.

- **Anwendung der Pseudoinverse**
  Aus den singulären $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ kann durch Berechnung der Moore-Penrose-Inverse eine eindeutige Inverse $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}^{+}$ abgeleitet werden. Diese Gewichtsmatrix erlaubt es somit, die stochastischen Eigenschaften der diskretisierten Identpunkte in den Ausreißertests zu berücksichtigen. Alle im Verlauf der Ausreißertests zu erstellenden Inversen müssen dann gleichermaßen berechnet werden, da der Rangdefizit in der $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}^{+}$ nicht behoben wird und sich somit auf alle daraus abgeleiteten Matrizen überträgt.

  Für die korrekte Berechnung von $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}^{+}$ über die Singulärwertzerlegung in den Ausreißertests ist es notwendig, den jeweils aktuellen Rang bzw. das Rangdefizit δ_{CS} der $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ für die am Modell der Helmerttransformation beteiligten s_{CS}

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

Identpunkte zu bestimmen. Da – abgesehen von der aus allen s_I zusammengesetzten $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ – ein Zusammenhang zwischen einer Auswahl von Flächenpunkten und resultierendem Rangdefekt im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht ermittelt werden konnte, muss in der Auswertung auf eine sorgfältige Wahl der in der Berechnung der Pseudoinversen benötigten (von 0 verschiedenen) Singulärwerte geachtet werden. Die MATLAB-Funktion `pinv`, welche die Pseudoinverse mit Hilfe der Singulärwertzerlegung berechnet, nutzt dazu, bezogen auf die zu invertierende Kofaktormatrix $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}$, den Grenzwert

$$t_{sv} = 6 s_{CS} \cdot eps \cdot \left\| \boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} \right\|_2 \tag{3.30}$$

in Abhängigkeit von der Maschinengenauigkeit *eps* und der Matrixnorm $\|\cdot\|_2$. Alle Singulärwerte, die unter t_{sv} liegen, werden in der weiteren Berechnung zu 0 gesetzt.

Die Qualität der erstellten Pseudoinversen lässt sich analog zu den Auswertungen in Katsikis et al. (2011) mit den Fehlermaßen

$$\begin{aligned} D_1^+ &= \left\| \boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} \boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} - \boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} \right\|_2 \\ D_2^+ &= \left\| \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} \boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} - \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} \right\|_2 , \end{aligned} \tag{3.31}$$

welche aus den Eigenschaften der Pseudoinverse (vgl. Abschnitt 2.4.4) abgeleitet werden, bewerten.

- **Regularisierung über die Hauptdiagonale**
  Die Addition eines kleines Werts λ auf die Hauptdiagonale der $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ (vgl. (2.59)) kann – bei geeigneter Wahl von λ – eine Regularisierung und damit Invertierbarkeit bewirken. Durch die Vergrößerung der Varianzen findet eine Änderung des stochastischen Modells statt, daher sollte in diesem Ansatz darauf geachtet werden, dass λ möglichst klein gehalten wird.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

4. Ergebnisse

4.1. Simulierte Datensätze

Zum Testen der implementierten Methodik werden verschiedene Datensätze erstellt (vgl. Tabelle 4.1). Um die Eignung der Methodik bei verschiedenen Verformungs- bzw. Ausreißeranteilen ε zu prüfen, wird die Verformung innerhalb der Fläche durch Verschiebung einer verschieden großen Anzahl von Kontrollpunkten um $d_{\boldsymbol{P}}$ in positive x-Richtung erzeugt, wodurch eine Deformation „aus der Fläche heraus“ simuliert wird. Die Auswirkungen der Verschiebung sind in Abbildung 4.1 im Parameterraum als Abstände zwischen Identpunkten an Positionen identischer Parameterwerte der unverformten und verformten B-Spline-Fläche im jeweils unverrauschten Zustand visualisiert.

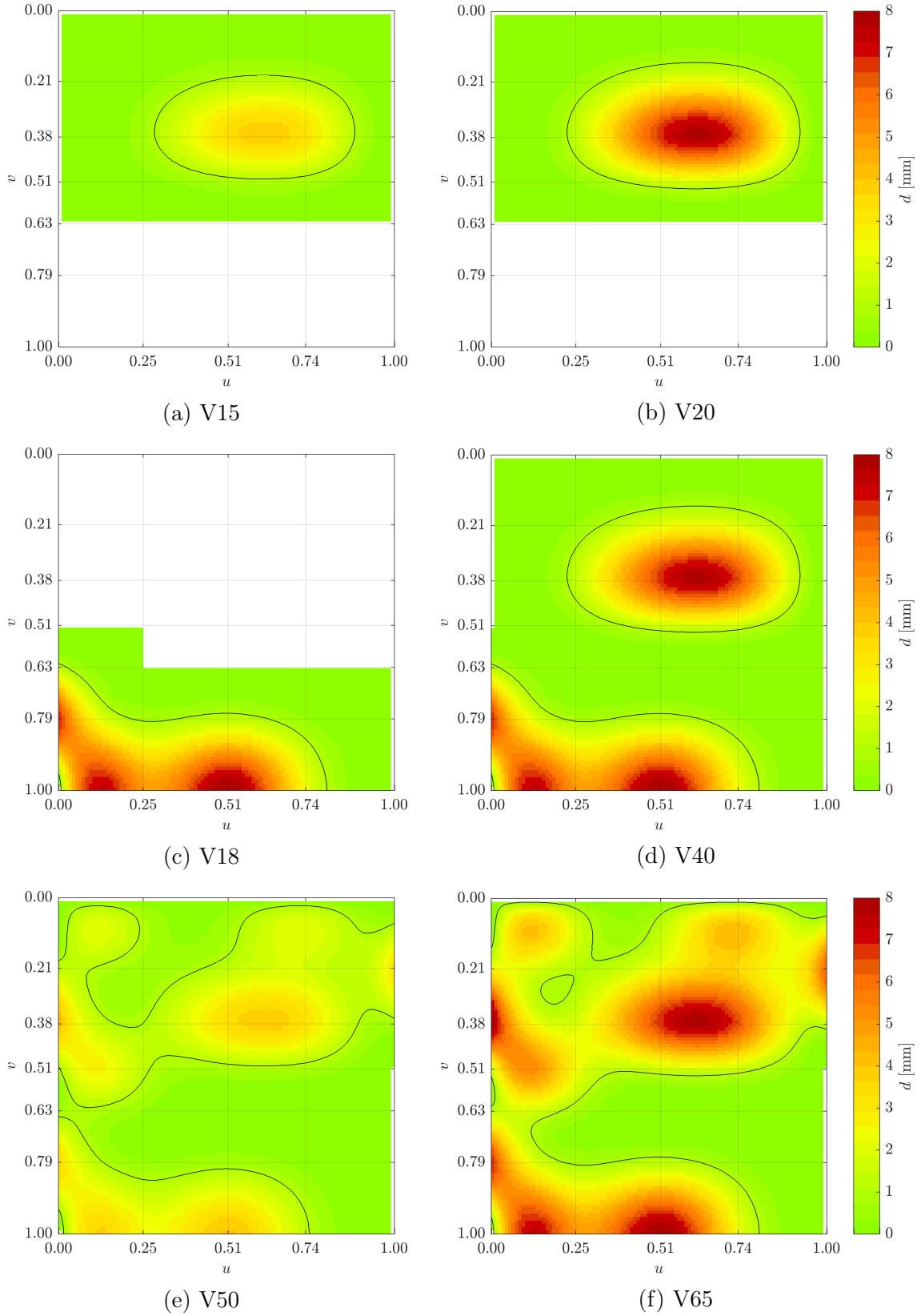
Ziel der Methodik soll es sein, Verformungen zu lokalisieren, die über die Genauigkeit $\sigma_{\boldsymbol{S}}$ der simulierten Messpunkte hinausgehen (vgl. Isolinien in Abbildung 4.1). Die folgenden Untersuchungen beziehen sich dabei auf simulierte Punktwolken mit $\sigma_{\boldsymbol{S}} = 1\,mm$ (vgl. (3.2)). In Tabelle 4.1 wird ε deshalb als der Anteil an der gesamten B-Spline-Fläche aus E_1 angegeben, in der durch die Verschiebung der Kontrollpunkte eine Verformung von $d_{max} \geq d > \sigma_{\boldsymbol{S}} = 1\,mm$ entsteht.

Als Referenz wird zusätzlich ein unverformter Datensatz erstellt, um zu überprüfen, wie anfällig das Lokalisierungsverfahren für die fehlerhafte Aufdeckung von Verformungen in unverformten Bereichen (Fehler 1. Art) ist.

Tabelle 4.1.: Übersicht über simulierte Datensätze. Die Bezeichnungen der Datensätze enthalten mit Vε den Verformungsanteil der unverrauschen Fläche.

Datensatz	Verschobene $\boldsymbol{P}_{E_1}$	$d_{\boldsymbol{P}}[mm]$	ε [%]	$d_{max}[mm]$
V0	—	0.0	0	0.0
V15	$\boldsymbol{P}_{3,3}, \boldsymbol{P}_{4,3}$	6.0	15	3.9
V20	$\boldsymbol{P}_{3,3}, \boldsymbol{P}_{4,3}$	12.0	21	7.8
V18	$\boldsymbol{P}_{0,6}, \boldsymbol{P}_{1,7}, \boldsymbol{P}_{1,8}, \boldsymbol{P}_{3,7}, \boldsymbol{P}_{3,8}$	12.0	18	8.1
V40	$\boldsymbol{P}_{0,6}, \boldsymbol{P}_{1,7}, \boldsymbol{P}_{1,8}, \boldsymbol{P}_{3,3}, \boldsymbol{P}_{3,7}, \boldsymbol{P}_{3,8}, \boldsymbol{P}_{4,3}$	12.0	39	8.1
V50	$\boldsymbol{P}_{0,6}, \boldsymbol{P}_{0,3}, \boldsymbol{P}_{1,1}, \boldsymbol{P}_{1,4}, \boldsymbol{P}_{1,7}, \boldsymbol{P}_{1,8}$ $\boldsymbol{P}_{3,3}, \boldsymbol{P}_{3,7}, \boldsymbol{P}_{3,8}, \boldsymbol{P}_{4,1}, \boldsymbol{P}_{4,3}, \boldsymbol{P}_{6,2}$	6.0	50	4.1
V65	$\boldsymbol{P}_{0,6}, \boldsymbol{P}_{0,3}, \boldsymbol{P}_{1,1}, \boldsymbol{P}_{1,4}, \boldsymbol{P}_{1,7}, \boldsymbol{P}_{1,8}$ $\boldsymbol{P}_{3,3}, \boldsymbol{P}_{3,7}, \boldsymbol{P}_{3,8}, \boldsymbol{P}_{4,1}, \boldsymbol{P}_{4,3}, \boldsymbol{P}_{6,2}$	12.0	66	8.1

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub



(a) V15 (b) V20

(c) V18 (d) V40

(e) V50 (f) V65

Abbildung 4.1.: Durch Verschiebung der Kontrollpunkte der Referenzfläche verursachte Verformung im Zuge der Erstellung der verschiedenen Datensätze.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Die Simulation der Starrkörperbewegung (3.3) erfolgt in allen Datensätzen einheitlich mit den Transformationsparametern

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega & \phi & \kappa \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 35.000 & 0.000 & -10.000 \end{bmatrix} [g] \\ \boldsymbol{t} &= \begin{bmatrix} 0.300 & 0.600 & 0.000 \end{bmatrix}^T [m] \,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die geschätzten Kontrollpunkte $\hat{\boldsymbol{P}}$ der B-Spline-Approximation der simulierten Datensätze liegen (im Fall von $\sigma_{\boldsymbol{S}} = 1\,mm$) mit einem mittleren Punktfehler $\sigma_{\hat{\boldsymbol{P}}}$ zwischen 0.3 und $0.6\,mm$ vor. In den $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{P}}}$ erkennt man zudem, dass die Schätzung der Kontrollpunkte sowohl positive als auch negative Korrelationen zwischen den $\hat{\boldsymbol{P}}$ zur Folge hat (vgl. Abbildung 4.2). Das Ausmaß der Korrelation nimmt grundsätzlich mit der Entfernung zwischen den Kontrollpunkten ab, wobei die Korrelationen immer nur koordinatenweise bestehen (vgl. koordinatenweise Schätzung, Abschnitt 2.3.2).

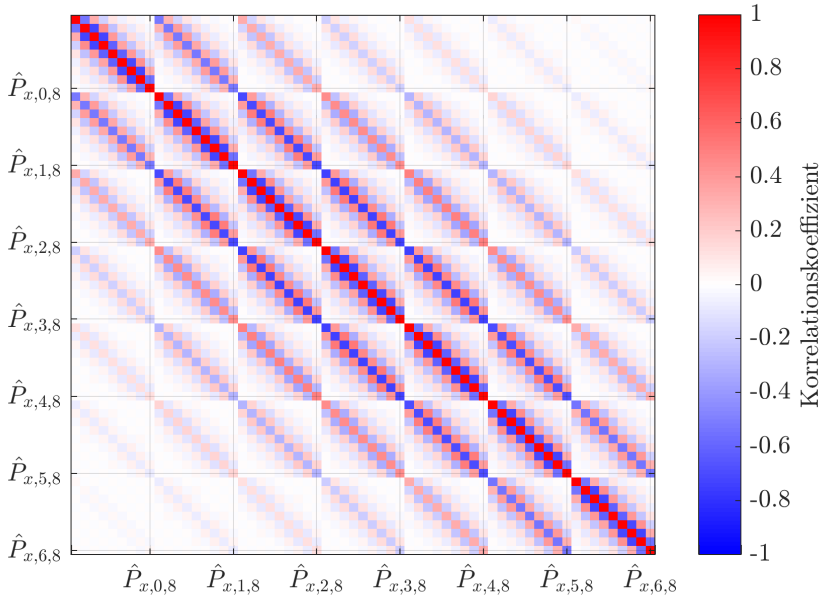


Abbildung 4.2.: Korrelationskoeffizient zwischen x-Koordinaten der geschätzten Kontrollpunkte innerhalb einer Epoche.

Tabelle 4.2 zeigt die verschiedenen Diskretisierungen, mit denen die identen Flächenpunkte auf den approximierenden B-Spline-Flächen beider Epochen der Datensätze aus Tabelle 4.1 berechnet werden. Die Diskretisierungsdichte wird so variiert, dass ausgehend von der maximal möglichen Diskretisierung mit regulärer $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ im $n_u \times n_v = 7 \times 9$-Raster Datensätze mit der zwei- und dreifachen Punktdichte erstellt werden. Mit ε_{s_I} wird der Anteil der diskretisierten Identpunkte angegeben, die im simulierten Verformungsbereich der deformierten Referenzfläche liegen.

Wird die Diskretisierung erhöht, liegt die $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ der jeweiligen Epoche auch mit einem größeren Rangdefekt vor. Dadurch, dass hier die Diskretisierung in beide Parameterrichtungen um den selben Faktor erhöht wird, vereinfachen sich die Zusammenhänge zur Bestimmung des Rangdefekts aus (3.9) bzw. (3.10) mit der vorliegenden B-Spline-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Fläche zu

$$\delta = 3(n_u n_v - 63)\,. \tag{4.2}$$

Tabelle 4.2.: Übersicht über erstellte Diskretisierungen.

Diskretisierung	$n_u \times n_v$	s_I	$\varepsilon_{s_I}[\%]$
I-V0	7×9	63	0
I-V15	7×9	63	11
I-V20	7×9	63	16
I-V18	7×9	63	17
I-V40	7×9	63	33
I-V50	7×9	63	44
I-V65	7×9	63	56
II-V0	14×18	252	0
II-V40	14×18	252	38
II-V65	14×18	252	62
III-V0	28×36	567	0
III-V40	28×36	567	38
III-V65	28×36	567	65

Die Genauigkeitsinformation der geschätzten Kontrollpunkte in $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{P}}}$ wird durch die Diskretisierung mit der Kovarianzfortpflanzung (3.8) auf die $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ der diskretisierten Flächenpunkte übertragen. Die Eckpunkte liegen dann mit einer Genauigkeit von etwa $\sigma_{\hat{\boldsymbol{S}}} = 0.4\,mm$ vor, alle anderen Randpunkte mit $0.15\,mm \leq \sigma_{\hat{\boldsymbol{S}}} \leq 0.20\,mm$. Die restlichen Flächenpunkte weisen eine homogene Genauigkeit von $0.05\,mm \leq \sigma_{\hat{\boldsymbol{S}}} \leq 0.10\,mm$ auf (vgl. Abbildung 3.7). Auffällig ist hier, dass diese Angaben unabhängig von der Diskretisierungsdichte sind – auch bei engeren Diskretisierungen werden lediglich die äußersten Randpunkte um ein Vielfaches ungenauer bestimmt als die restlichen Punkte.

Die beschriebenen Korrelationen zwischen den Kontrollpunkten haben ebenfalls Auswirkungen auf die diskretisierten Flächenpunkte. In Abbildung 4.3 ist dazu der Verlauf des Ausmaßes der Korrelation für den Eckpunkt $\hat{\boldsymbol{S}}_{0,0}$ zu allen Punkten in der jeweiligen Parameterrichtung dargestellt. Darin wird deutlich, dass sich im Verlauf positive und negative Korrelationen abwechseln und zu (im Parameterraum) weiter entfernt liegenden Punkten tendenziell abnehmen – eine Entfernungsabhängigkeit ist analog zu den Kontrollpunkten also ebenfalls gegeben.

Beim Vergleich der Korrelationen in der direkten Umgebung von $\hat{\boldsymbol{S}}_{0,0}$ (vgl. auch Abbildung 4.4) werden die Auswirkungen der engeren Diskretisierung sichtbar: in der Umgebung der jeweiligen $\hat{\boldsymbol{S}}_I$ treten mit zunehmender Diskretisierungsdichte deutlich größere (positive) Korrelationen auf. Durch die Zunahme der Korrelationen zwischen benachbarten Flächenpunkten stellt sich die Frage, wie sich dies auf die Verformungsanalyse auswirkt. Auf dieses Verhalten sollte daher in der Interpretation der Ergebnisse Rücksicht genommen werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

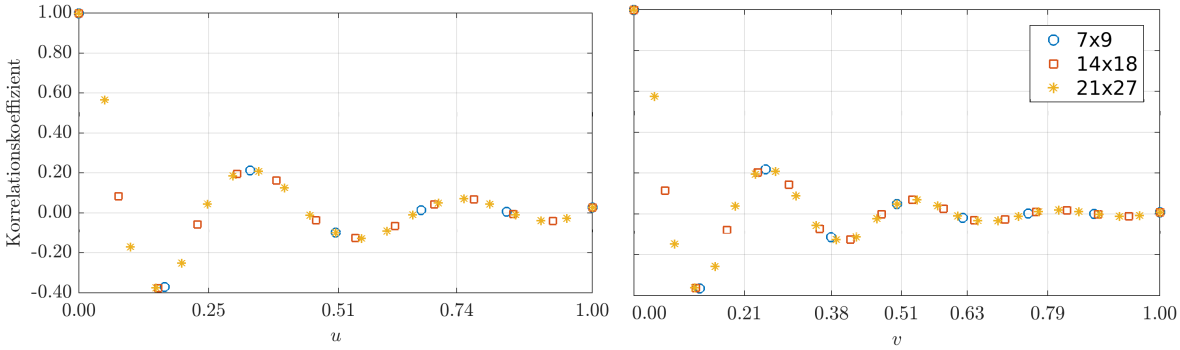
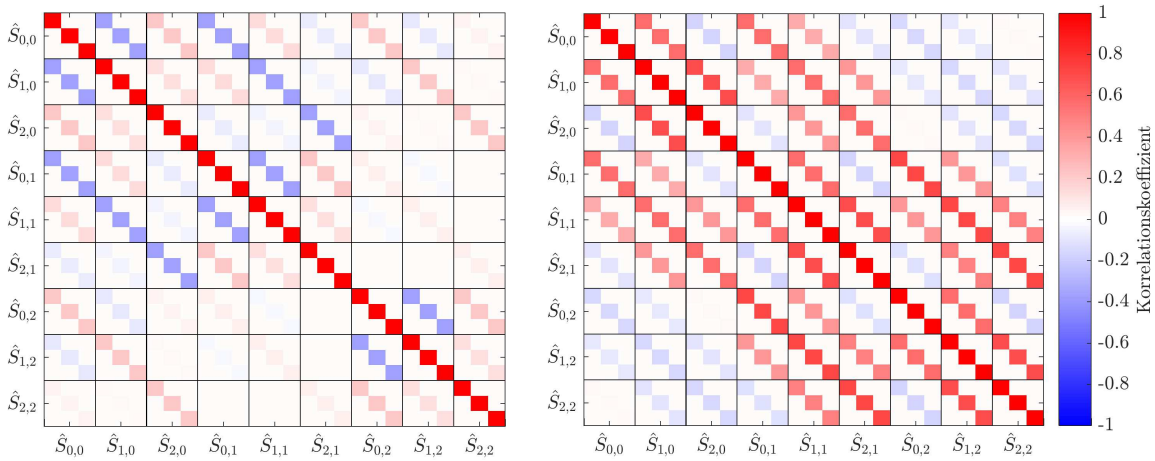


Abbildung 4.3.: Korrelationskoeffizient zwischen $\hat{\boldsymbol{S}}_{0,0}$ und allen diskretisierten $\hat{\boldsymbol{S}}_I$ entlang der Parameterrichtungen für unterschiedliche Diskretisierungen.



(a) 7×9-Raster

(b) 21×27-Raster

Abbildung 4.4.: Korrelationskoeffizient zwischen 3D-Koordinaten in der direkten Nachbarschaft ($a = 1$) von $\hat{\boldsymbol{S}}_{1,1}$.

Die später aus den diskretisierten Identpunkten bestimmten Elemente der Starrkörperbewegung können – im Fall des unverformten Datensatzes – gut mit den aus den Kontrollpunkten $\hat{\boldsymbol{P}}$ bestimmten Transformationsparametern verglichen werden. Für V0 ergeben sich die in Tabelle 4.3 angegebenen ausgeglichenen Transformationsparameter.

4.2. Deformationsanalyse im Regulärfall

Zunächst soll hier auf die Ergebnisse der entwickelten Deformationsanalyse im Fall regulärer $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ mit maximal möglicher Diskretisierungsdichte mit $s_{I,max} = c_{\boldsymbol{P}} = 63$ Flächenpunkten je Epoche im 7×9-Raster (vgl. Tabelle 4.2) eingegangen werden, um die generelle Funktionsweise der Methodik zu veranschaulichen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Tabelle 4.3.: Aus Kontrollpunkten geschätzte Elemente der Starrkörperbewegung für den unverformten Datensatz V0.

t_x, t_y, t_z $[m]$	$\sigma_{t_x}, \sigma_{t_y}, \sigma_{t_z}$ $[mm]$	ω, ϕ, κ $[gon]$	$\sigma_\omega, \sigma_\phi, \sigma_\kappa$ $[mgon]$
0.300	0.023	35.002	3.816
0.600	0.015	0.008	4.392
0.000	0.026	− 9.997	4.279

4.2.1. Bestimmung einer initialen Stabilpunktmenge

Die näherungsweise Bestimmung der Elemente der Starrkörperbewegung und der initialen Stabilpunktmenge $\mathbb{S}_{CS}$ wird mit der in Abschnitt 3.3 beschriebenen RANSAC-Methodik bestimmt. Das Ergebnis der Überprüfung der Auswirkung einiger RANSAC-Parameter wird dazu in Tabelle 4.4 zusammengefasst. Zum Vergleich des Verhaltens des RANSAC-Verfahrens in Abhängigkeit der kritischen Parameter τ, a und s_{min} wird darin die bei zehnmaligem Ausführen durchschnittlich benötigte Iterationszahl $\bar{i}$ zum Erreichen einer modellkonformen Punktmenge sowie die durchschnittliche Anzahl von Identpunkten $\bar{s}_{CS}$ in der gefundenen Stabilpunktmenge dargestellt. Ein konformes $\mathbb{S}_{CS}$ muss zudem zur Annahme des Golbaltests ($\alpha_G = 5\%$) der abschließenden Helmerttransformation führen. Diejenigen RANSAC-Parameter, die die maximale Iterationszahl beeinflussen, werden hierbei nicht näher untersucht.

Die Genauigkeit des Abstands σ_d zwischen den Identpunkten, die für die Grenzwertberechnung in (3.15) herangezogen wird, liegt zwischen $0.05\,mm$ im mittleren Bereich der Fläche und $0.1\,mm$ im Randbereich bzw. $0.3\,mm$ im den Eckpunkten. Mit $\tau > 3$ liegt der Grenzwert in den Eckpunkten dann bereits über dem Abstand zwischen identen Punkten, über dem Deformationen aufgedeckt werden sollen, weshalb hier nur Kombinationen von RANSAC-Parametern mit $\tau \leq 3$ im Detail untersucht werden sollen.

Tabelle 4.4.: Auswirkungen ausgewählter RANSAC-Parameter auf Anzahl der Iterationen und die Größe des $\mathbb{S}_{CS}$.

Diskretisierung	τ	a	s_{min}	$\bar{i}$	$\bar{s}_{CS}$
I-V0	1	0	12	57	13
	2	0	12	2	27
I-V40	2	0	12	20	15
	2	1	16	40	19
	3	1	16	11	23
I-V65	2	0	12	549	12
	3	1	16	214	17

Beim unverformten Datensatz zeigt sich, dass mit $\tau = 1$ in allen Fällen nur ein

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

minimales $\mathbb{S}_{CS}$ mit einer Punktanzahl gefunden werden kann, die nahe an s_{min} liegt oder s_{min} entspricht. Zudem müssen deutlich mehr Iterationen durchgeführt werden, bis eine modellkonforme Punktmenge gefunden werden kann, als für $\tau = 2$, wo meist nach ein bis zwei Iterationen bereits ein geeignetes $\mathbb{S}_{CS}$ ermittelt wird. $\tau = 2$ ist somit ein geeigneter Faktor für die Grenzwertberechnung, mit dem auch bei $a > 0$ ein $\mathbb{S}_{CS}$ gefunden wird. Ein Grenzwert mit $\tau = 3$ führt zu einer weiteren Vergrößerung der Punktmenge, ab $\tau = 4$ werden in einigen Durchläufen bereits alle 63 $\hat{\boldsymbol{S}}_I$ in das $\mathbb{S}_{CS}$ aufgenommen.

Mit dem verformten Datensatz V40 erweist sich die Grenzwertbildung mit $\tau = 1$ als ungeeignet, es kann auch nach hunderten Iterationen keine konforme Lösung bestimmt werden. Mit $\tau = 2$ erreicht man nach wenigen Iterationen eine geeignete Punktmenge, mit der durchschnittlich in etwa 15 Punkte in unverformten Bereichen gefunden werden. Wird a auf 1 erhöht, müssen aufgrund der erhöhten Mindestanzahl auch mehr RANSAC-Durchläufe durchgeführt werden, gleichzeitig enthält das $\mathbb{S}_{CS}$ dann auch mehr Punkte. Größere $\mathbb{S}_{CS}$ mit durchschnittlich 23 Punkten werden dann auch dadurch erreicht, den Faktor τ auf 3 zu erhöhen, allerdings bei weniger benötigten Iterationen. Die maximale Punktmenge, die damit gefunden werden kann, enthält 28 $\hat{\boldsymbol{S}}_I$. Mehr als 28 Punkte werden auch dann nicht gefunden, wenn τ weiter erhöht wird; diese Punktmenge kann deshalb Maximum angesehen werden, mit der eine Annahme des Globaltests erreicht werden kann.

Für V65 zeigt sich ebenfalls, dass mit $\tau = 2$ ein genügend großes $\mathbb{S}_{CS}$ ermittelt werden kann, das in den meisten Fällen jedoch erst nach einigen hundert Iterationen gefunden wird und lediglich s_{min} Punkte enthält. In Verbindung mit $a = 1$ kann keine Lösung gefunden werden. Wird τ auf 3 erhöht, kann mit $a = 1$ ein Großteil der Punkte im verformungsfreien Bereich identifiziert werden. Eine weitere Erhöhung von τ führt ebenso auf maximal 17 $\hat{\boldsymbol{S}}_I$, die zu einer Annahme des Globaltests führen.

Es zeigt sich also, dass mit der Diskretisierung im 7×9-Raster eine Grenzwertbildung mit $\tau \geq 2$ ein ausreichend großes $\mathbb{S}_{CS}$ als Grundlage für die folgende Verformungsanalyse gefunden wird. Von s_{min} hängt dabei ab, wie viele Iterationen im Schnitt durchlaufen werden müssen – mit $\tau = 3$ kann dann sowohl eine Reduktion der benötigten Iterationen als auch eine Vergrößerung des Umfangs der ermittelten Punktmengen erreicht werden.

4.2.2. Lokalisierung von Verformungen durch Erweiterung der Stabilpunktmenge

Im Folgenden dienen die zuvor mit dem RANSAC-Verfahren für die Datensätze mit verschiedenen Verformungsanteilen bestimmten initialen $\mathbb{S}_{CS}$ als Basis für das Testen des implementierten Lokalisierungsverfahrens. Vor der Erweiterung der Stabilpunktmenge erfolgt in allen Fällen die Überprüfung des $\mathbb{S}_{CS}$ durch Einzeltests (vgl. Abschnitt 3.4). Ebenfalls werden die Auswirkungen der Einbeziehung der direkten Nachbarschaft ($a = 1$) auf die Testentscheidungen überprüft. Für die Irrtumswahrscheinlichkeit der Einzeltests wird $\alpha = 1\%$ gewählt.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

Unverformter Datensatz (V0)

Im Fall des verformungsfreien Datensatzes sollen zunächst Unterschiede in den Ausreißertests sowohl für erstellte Punktktmengen mit $\tau = 2$ ($\mathbb{S}_{CS}$ A, vgl. Abbildung 4.5 (a)), als auch mit der maximal möglichen Punktmenge untersucht werden ($\mathbb{S}_{CS}$ B, vgl. Abbildung 4.5 (b)). Das Verhalten des Lokalisierungsverfahrens wird in Tabelle 4.5 durch ausgewählte Punkte repräsentiert, in Abbildung 4.5 (c) bis (f) werden die Ergebnisse durch die ermittelten Testgrößen visualisiert.

In Abbildung 4.5 (c) und (d) erkennt man, dass der Identpunkt $\hat{\boldsymbol{S}}_{2,5}$ unabhängig von der initialen Punktmenge fälschlicherweise als Ausreißer detektiert wird. Wird die Nachbarschaft im Ausreißertest berücksichtigt (vgl. Abbildung 4.5 (e) und (f)), zeigt sich, dass diese Fehldetektion mit beiden $\mathbb{S}_{CS}$ behoben wird. Im $\mathbb{S}_{CS}$ A hingegen kommen weitere Fehldetektionen hinzu, während für das $\mathbb{S}_{CS}$ B ein korrektes Ergebnis erzielt werden kann. Vor allem für Tests mit $a = 1$ scheint es also eine Abhängigkeit von der Größe des aktuellen $\mathbb{S}_{CS}$ zu geben, falsche Testentscheidungen werden zudem vornehmlich dann getroffen, wenn erst wenige Punkte im $\mathbb{S}_{CS}$ enthalten sind (vgl. $\hat{\boldsymbol{S}}_{3,4}$ in Tabelle 4.5). Tests mit $a = 1$ führen aber jedenfalls zu einer Homogenisierung der berechneten Testgrößen, Differenzen zwischen benachbarten Punkten werden verringert.

Die auftretenden Fehler 1. Art treten dabei im mittleren Bereich der Fläche auf; die Eckpunkte, wo die Verformung im Vergleich zu den restlichen $\hat{\boldsymbol{S}}_I$ mit ca. $0.7\,mm$ relativ groß ausfällt, werden dagegen korrekt als unverformt eingestuft. Ein einfacher Zusammenhang zwischen den Fehlern und den Ergebnisgrößen der jeweiligen Ausgleichungen ist in Tabelle 4.5 jedoch nicht erkennbar.

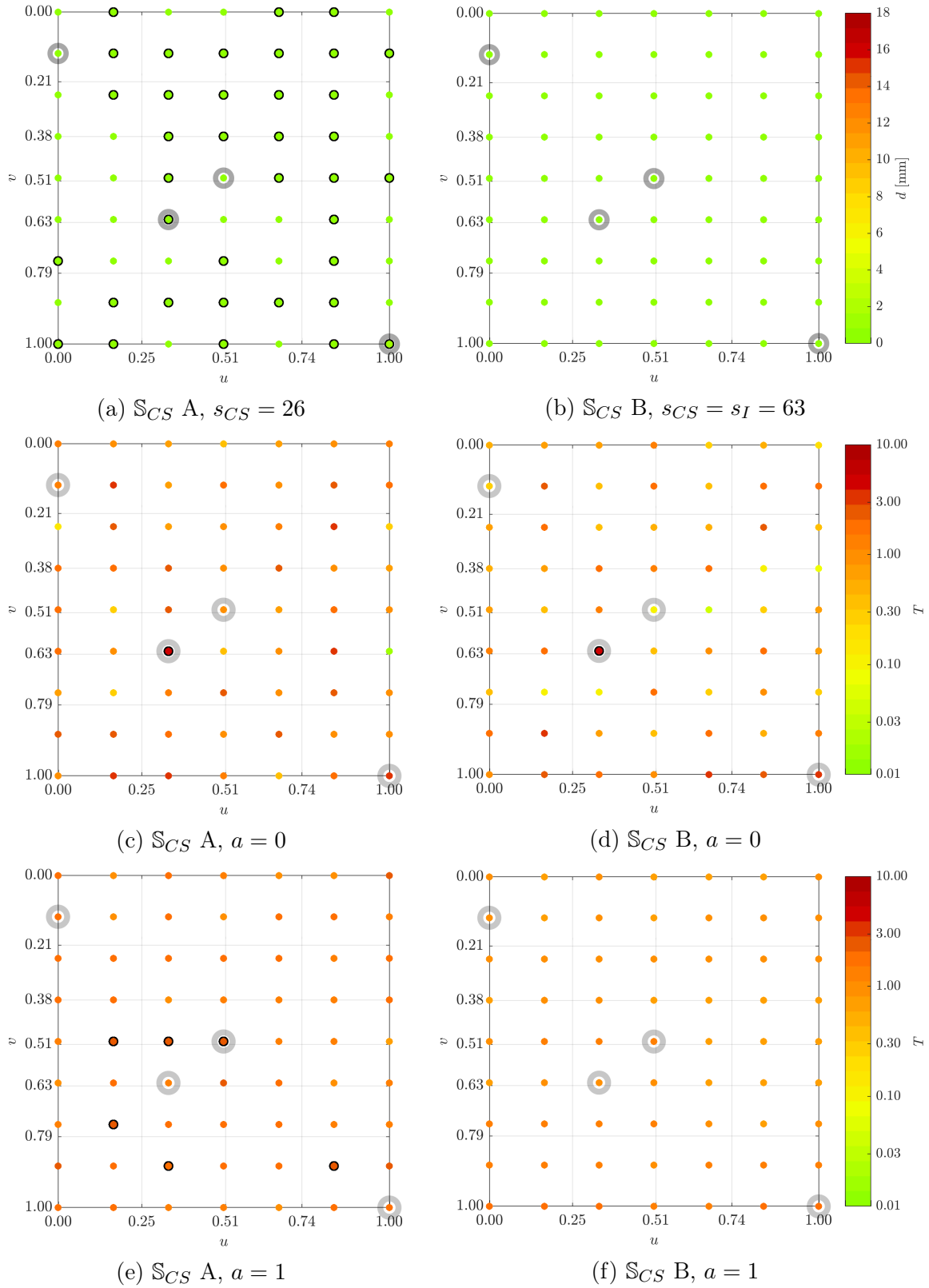
Datensätze mit einer Verformung im mittleren Bereich der Fläche (V15, V20)

Bei V20 zeigt sich, dass nach der Verformungsanalyse der Globaltest der Helmerttransformation ($\alpha_G = 5\%$) mit allen in den Einzeltests mit $a = 0$ als unverformt detektierten Identpunkten nicht angenommen werden kann. Führt man zur näheren Analyse den Globaltest nach jeder Erweiterung des $\mathbb{S}_{CS}$ durch, zeigt sich eine Ablehnung nach mehreren Einzeltests mit Testentscheidung für H_0, deren Testgrößen aber nahe am entsprechenden Quantil liegen. Die Hinzunahme dieser Identpunkte in die Menge der Stabilpunkte führt zu einer deutlichen Erhöhung von $\hat{\sigma}_0^2$ und schlussendlich dazu, dass im weiteren Verlauf das Quantil der χ^2-Testverteilung des Globaltests nicht mehr unterschritten wird.

In weiteren Untersuchungen stellt sich heraus, dass durchaus andere initiale $\mathbb{S}_{CS}$ gebildet werden können, mit denen eine Verformungsanalyse ohne Ablehnung des abschließenden Globaltests möglich ist; wird die Verformungsanalyse für V20 mit anderen als dem in Tabelle 4.6 angegebenen $\mathbb{S}_{CS}$ durchgeführt, zeigt sich: liegen in der initialen Punktmenge mehrere Punkte nahe am bzw. an der Grenze zum Verformungsbereich oder sind die Punkte sehr ungleichmäßig über die Gesamtfläche verteilt, kommt es nach der Erweiterung gehäuft zur Ablehnung des Globaltests.

Gleichzeitig stellt sich bei mehrfacher Ausführung der Verformungsanalyse mit verschiedenen inititalen $\mathbb{S}_{CS}$ heraus, dass sich zwischen den Endergebnissen die Testent-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $s_{CS} = 26$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $s_{CS} = s_I = 63$

(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$

(e) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$

(f) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$

Abbildung 4.5.: Initiale Punktmengen ((a) und (b)) sowie Ergebnis des Lokalisierungsverfahrens ((c) bis (f)). Schwarz umrandete Punkte sind nicht in den $\mathbb{S}_{CS}$ enthalten. Testentscheidungen der grau markierten Punkte sind in Tabelle 4.5 zusammengefasst.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Tabelle 4.5.: Ergebnisse des Ausreißertests für ausgewählte Punkte von I-V0. Rot hinterlegte Felder markieren fehlerhafte Testentscheidungen (Fehler 1. Art).

$\hat{\boldsymbol{S}}$	init. $\mathbb{S}_{CS}$	a	$d[mm]$	s_{CS}	$f - n_A$	$\hat{\sigma}_0^{2\prime}$	T	$F_{0.99}$
$\hat{\boldsymbol{S}}_{0,1}$	A	0	0.206	26	69	0.576	1.17	4.08
	A	1	0.206	20	45	0.704	1.63	2.36
	B	0	0.141	63	180	1.109	0.28	3.89
	B	1	0.141	63	165	1.099	0.97	2.05
$\hat{\boldsymbol{S}}_{2,5}$	A	0	0.180	54	156	0.934	4.82	3.91
	A	1	0.173	47	120	0.938	1.23	1.90
	B	0	0.232	63	180	1.042	4.19	3.89
	B	1	0.232	63	156	1.097	0.99	1.86
$\hat{\boldsymbol{S}}_{3,4}$	A	0	0.111	26	69	0.577	1.08	4.08
	A	1	0.111	21	51	0.660	2.23	2.13
			0.064	23	57	0.604	2.37	2.09
	B	0	0.035	63	180	1.112	0.10	3.89
	B	1	0.035	63	156	1.059	1.24	1.86
$\hat{\boldsymbol{S}}_{6,8}$	A	0	0.716	62	177	1.000	3.48	3.89
	A	1	0.717	56	156	1.098	1.62	2.30
	B	0	0.670	62	177	1.000	3.48	3.89
	B	1	0.670	63	171	1.048	1.69	2.29

scheidungen nur bei einigen wenigen Identpunkten unterscheiden – wodurch insgesamt gesehen wenige verschiedene erweiterte $\mathbb{S}_{CS}$ entstehen, von denen eben einige zur Ablehnung des Globaltests führen.

Durch die Ablehnung des Globaltests ist davon auszugehen, dass sich im erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$ unentdeckte Ausreißer befinden, es bei den Testentscheidungen also zu einem oder mehreren Fehlern 2. Art kommt. Diese unentdeckten Ausreißer liegen vermutlich im Übergangsbereich zwischen verformten und unverformten Bereichen der Fläche, da erweiterte Punktmengen, die genau diese Punkte nicht enthalten, zu einer Annahme des Globaltests führen. So zeigt sich bei einer manuellen Aufnahme der Identpunkte $\hat{\boldsymbol{S}}_{2,1}$, $\hat{\boldsymbol{S}}_{1,2}$ und $\hat{\boldsymbol{S}}_{1,4}$ in das in Abbildung 4.6 (d) visualisierte erweiterte $\mathbb{S}_{CS}$, dass H_0 des Globaltest nicht mehr verworfen wird.

Um die Wahrscheinlichkeit β für nicht detektierte Ausreißer in den Einzeltests zu vermindern, kann die Irrtumswahrscheinlichkeit α erhöht werden, im Gegenzug kann es dadurch allerdings zu mehreren Fällen falsch detektierter Verformungen kommen. Im Zuge der Untersuchungen stellt sich aber zudem heraus, dass diesem Umstand ebenfalls durch möglichst viele Identpunkte im initialen $\mathbb{S}_{CS}$ begegnet werden kann.

Zwischen denjenigen Identpunkten, die an der Grenze des definierten Verformungsbereichs liegen und als Ursache für das beschriebene Verhalten ausgemacht werden,

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Tabelle 4.6.: Verlauf der Schritte im Lokalisierungsverfahren ($\alpha = 1\%$) und geschätzte Elemente der Starrkörperbewegung mit dem erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$ für I-V15 und I-V20. Das rot hinterlegte Feld markiert das $\mathbb{S}_{CS}$, für das der Globaltest ($\alpha_G = 5\%$) nicht angenommen werden kann.

	s_{CS} inital	s_{CS} überpr.	s_{CS} erw.	t_x, t_y, t_z $[m]$	$\sigma_{t_x}, \sigma_{t_y}, \sigma_{t_z}$ $[mm]$	ω, ϕ, κ $[gon]$	$\sigma_\omega, \sigma_\phi, \sigma_\kappa$ $[mgon]$
I-V15 $a = 0$	25	25	45	0.300	0.026	35.000	4.211
				0.600	0.017	− 0.010	4.912
				0.000	0.028	− 9.997	4.848
I-V15 $a = 1$		14	28	0.300	0.037	34.994	6.880
				0.600	0.027	0.000	9.491
				0.000	0.045	−10.008	7.951
I-V20 $a = 0$	21	21	48	0.300	0.031	35.002	5.022
				0.600	0.021	− 0.020	5.873
				0.000	0.034	− 9.999	5.887
I-V20 $a = 1$		11	20	0.300	0.043	35.002	8.789
				0.600	0.035	0.018	17.087
				0.000	0.072	−10.008	10.616

bestehen Abstände, die deutlich unterhalb der angestrebten, minimal aufzudeckenden $\sigma_{\boldsymbol{S}}$-Grenze liegen. Es kann also erwartet werden, dass mit der Verformungsanalyse – bei angemessener Konfiguration der Einzeltests – deutlich kleinere Verformungen aufgedeckt werden können.

Für V15 zeigen sich die beschriebenen Probleme im Übergangsbereich der Verformung nicht, selbst bei mehrfacher Ausführung mit verschiedenen initialen $\mathbb{S}_{CS}$. Allgemein lässt sich sowohl für V15 als auch für V20 feststellen, dass die Durchführung der Verformungsanalyse unter Einbeziehung der Nachbarschaft ($a = 1$) stets zur Annahme des erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$ führt und sich die Ergebnisse von Durchläufen mit verschiedenen initialen $\mathbb{S}_{CS}$ höchstens in einzelnen Punkten unterscheiden – die zuvor festgestellte Abhängigkeit der Ergebnisse vom initialen $\mathbb{S}_{CS}$ wird also reduziert und nahezu aufgehoben. Andererseits führen Einzeltests mit $a = 1$ im Vergleich zur Durchführung mit $a = 0$ zu einer deutlichen Vergrößerung des detektierten Verformungsbereichs bzw. zu einer Verkleinerung des erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$. Durch die geringere Überbestimmung erfolgt die abschließende Bestimmung der Elemente der Starrkörperbewegung dann mit reduzierten Genauigkeiten (vgl. Tabelle 4.6).

In Abbildung 4.6 (c) und (d) erkennt man ebenfalls, dass der unterschiedliche Verformungsanteil (vgl. ε_{s_I} in Tabelle 4.2) keine bemerkbaren Auswirkungen auf das Ausmaß des detektierten Verformungsbereichs hat. Vielmehr wirkt sich die Größe der Verformungen auf die berechneten Testgrößen aus: für $\hat{\boldsymbol{S}}_{4,3}$, der in der Mitte der jeweiligen Verformungsbereiche liegt und wo die maximale Verformung erreicht wird, nehmen sie maximale Werte von $max(T) \approx 1500$ für V15 bzw. $max(T) \approx 4000$ für V20 an. Dies

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

ist auch der Grund dafür, dass sich das Ausmaß der lokalisierten Verformungen mit $a = 1$ durch die Verteilung auf benachbarte Punkte für V20 vergrößert (vgl. Abbildung 4.6 (e) und (f)). Durch die Homogenisierung sind die Testgrößen allgemein kleiner, liegen innerhalb der Verformungen aber noch immer deutlich über dem Quantil der entsprechenden Testverteilung.

Datensatz mit einer Verformung im Randbereich der Fläche (V18)

Die Verformungsanalyse mit V18 und $a = 0$ erweist sich, im Gegensatz zu V20, als sehr stabil; auch mit verschiedenen initialen $\mathbb{S}_{CS}$ entsteht eine nahezu identische erweiterte Punktmenge (vgl. Abbildung 4.7 (a)), welche sich nur in maximal ein bis zwei Identpunkten im Übergangsbereich unterscheidet und stets zu einer Annahme des Globaltests führt – wobei T_G in vielen Fällen nur sehr knapp unterhalb des Quantils der Testverteilung liegt. Auch der Eckpunkt $\hat{\boldsymbol{S}}_{0,8}$, der zwar außerhalb, aber dennoch sehr nahe am simulierten Verformungsbereich liegt, wird stets korrekt als unverformt identifiziert. Die maximale Testgröße $max(T) \approx 1900$ ergibt sich für den Punkt $\hat{\boldsymbol{S}}_{3,7}$, welcher im Bereich der stärksten Verformung liegt.

Mit $a = 1$ zeigt sich, analog zu den zuvor untersuchen Datensätzen, erneut eine Vergrößerung des als verformt detektierten Bereichs sowie eine Homogenisierung der berechneten Testgrößen, wodurch beispielsweise auch der Eckpunkt $\hat{\boldsymbol{S}}_{0,8}$, der zuvor als unverformt eingestuft wurde, in den lokalisierten Verformungsbereich fällt. Wie im Fall von $a = 0$ ergeben sich, unabhängig vom initialen $\mathbb{S}_{CS}$, erweiterte Punktmengen, die sich von der in Abbildung 4.7 (b) dargestellten nicht oder nur in einzelnen $\hat{\boldsymbol{S}}_I$ unterscheiden. Durch den geringeren Umfang der erweiterten Stabilpunktmenge werden die Elemente der Starrkörperbewegung wiederum etwas ungenauer bestimmt (vgl. Tab. 4.7)

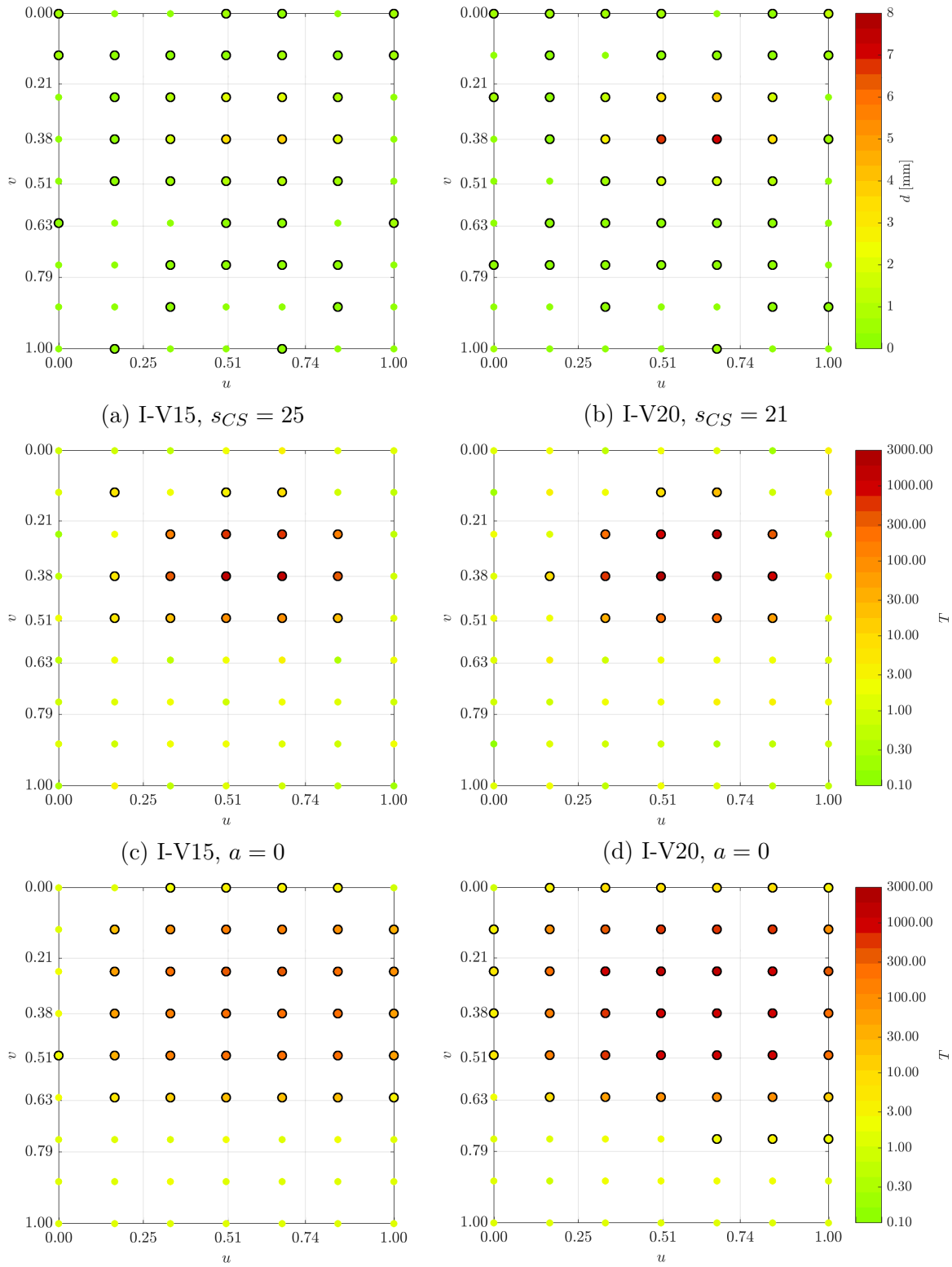
Tabelle 4.7.: Verlauf der Schritte im Lokalisierungsverfahren ($\alpha = 1\%$) und geschätzte Elemente der Starrkörperbewegung mit dem erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$ für V18.

	s_{CS} inital	überpr.	erw.	t_x, t_y, t_z $[m]$	$\sigma_{t_x}, \sigma_{t_y}, \sigma_{t_z}$ $[mm]$	ω, ϕ, κ $[gon]$	$\sigma_\omega, \sigma_\phi, \sigma_\kappa$ $[mgon]$
I-V18 $a = 0$	23	23	47	0.300	0.031	34.995	5.206
				0.600	0.019	0.011	5.986
				0.000	0.038	−10.000	4.973
I-V18 $a = 1$		17	34	0.300	0.038	34.997	7.309
				0.600	0.024	0.004	7.898
				0.000	0.056	−10.003	5.586

Datensätze mit mehreren Verformungsbereichen (V40, V50, V65)

Im Datensatz V40 werden die Verformungen von V18 und V20 kombiniert. Es zeigt sich, dass mit $a = 0$ die erweiterte Stabilpunktmenge (vgl. Abbildung 4.8 (a)) zu einer Annahme des abschließenden Globaltests führt, obwohl diejenigen Punkte, die bei V20

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub



(a) I-V15, $s_{CS} = 25$

(b) I-V20, $s_{CS} = 21$

(c) I-V15, $a = 0$

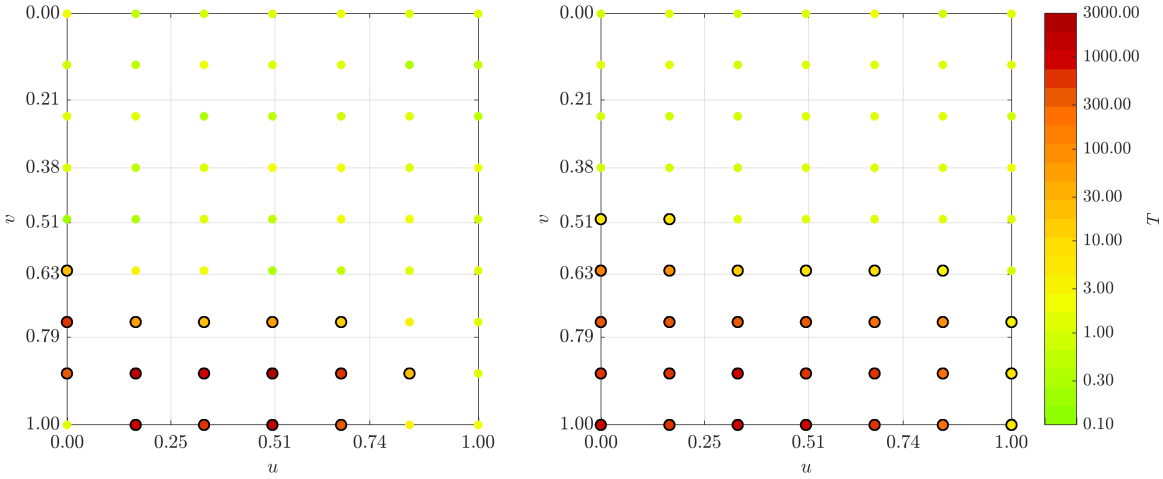
(d) I-V20, $a = 0$

(e) I-V15, $a = 1$

(f) I-V20, $a = 1$

Abbildung 4.6.: Initiale $\mathbb{S}_{CS}$ und Ergebnis des Lokalisierungsverfahrens für V15 und V20.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN



(a) I-V18, $a = 0$ (b) I-V18, $a = 1$

Abbildung 4.7.: Ergebnis des Lokalisierungsverfahrens für V18.

als Ursache für dessen Ablehnung ausgemacht wurden, nicht im erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$ enthalten sind. Als mögliche Ursache hierfür kann die wegen des höheren Verformungsanteils gegenüber V20 deutlich niedrigere Redundanz gesehen werden.

Bei der Verformungsanalyse des Datensatzes V40 mit anderen $\mathbb{S}_{CS}$ wird analog zu V20 deutlich, dass die bereits näher untersuchten Punkte im Übergangsbereich der Verformung im mittleren Bereich der Fläche in manchen Endergebnissen zu den Stabilpunkten gezählt werden, in anderen jedoch als verformt detektiert werden. Bei den Testentscheidungen der betreffenden Punkte ist also erneut eine Abhängigkeit von der initialen Stabilpunktmenge bzw. der Reihenfolge der Einzeltests festzustellen. Am Beispiel des Identpunkts $\hat{\boldsymbol{S}}_{2,1}$ zeigt sich diese Abhängigkeit sehr deutlich: in der Verformungsanalyse, deren Ergebnis in Abbildung 4.8 (a) bzw. Tabelle 4.8 zusammengefasst ist, liegt der Punkt im initialen $\mathbb{S}_{CS}$ und wird aufgrund des geringen Abstands zum korrespondierenden Punkt als erster Punkt überprüft; die Testentscheidung spricht dann mit $T_{2,1} = 2.513 < 4.218$ für eine Beibehaltung des Identpunkts im $\mathbb{S}_{CS}$. Nach einer weiteren Ausführung des RANSAC-Verfahrens (mit $s_{CS} = 20$) für V40 liegt $\hat{\boldsymbol{S}}_{2,1}$ nicht im initialen $\mathbb{S}_{CS}$ und wird im Zuge der Erweiterung der Stabilpunktmenge durch die Testentscheidung $T_{2,1} = 10.318 > 4.066$ dagegen als verformter Punkt identifiziert.

Bei weiteren Untersuchungen stellt sich auch für V40 heraus, dass wenige Identpunkte im initialen $\mathbb{S}_{CS}$ ($s_{CS} < 10$) die Abhängigkeit des Ergebnisses der Verformungsanalyse tendenziell vergrößern und eher dazu führen, dass die erweiterte Stabilpunktmenge zu einer Ablehnung des Globaltests führt. In diesen Fällen ist dann oftmals nicht nur der Verformungsbereich in der Mitte der Fläche, sondern ebenfalls der aus V18 stammende Bereich von der beschriebenen Abhängigkeit betroffen.

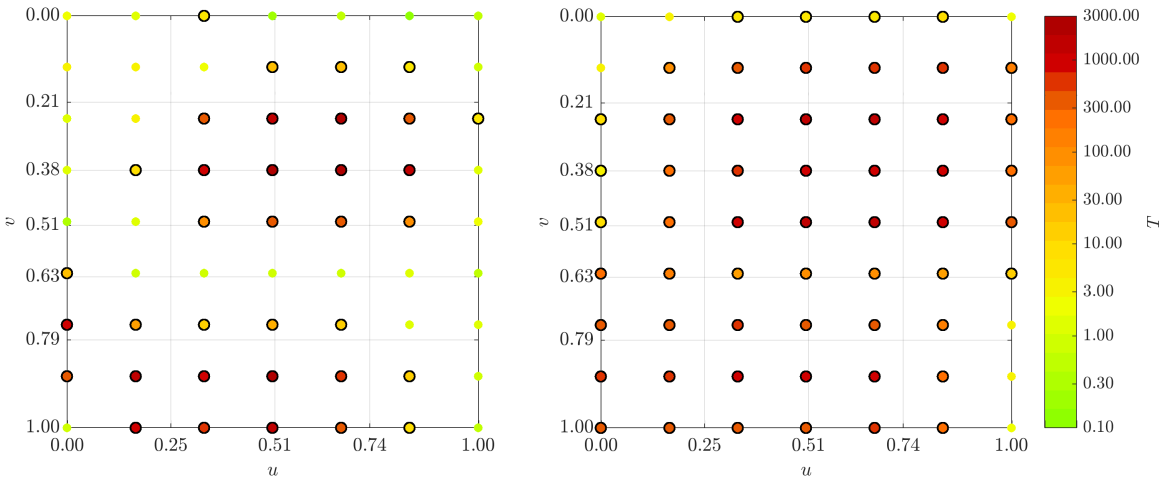
Die Analyse mit $a = 1$ führt wiederum zu einer Ausweitung des detektierten Verformungsbereichs. In Verbindung mit dem hohen Verformungsanteil enthält die überprüfte und erweiterte Stabilpunktmenge dann lediglich sieben Identpunkte in den äußersten unverformten Randbereichen der Fläche, wodurch auch die Elemente der Starrkörperbewegung mit geringerer Genauigkeit bestimmt werden können (vgl. Tabelle 4.8).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Auch hier kommt es zu geringfügigen Abhängigkeiten von der Größe des initialen $\mathbb{S}_{CS}$, der Globaltest mit der erweiterten Punktmenge wird jedoch in allen getesteten Fällen angenommen.

Tabelle 4.8.: Verlauf der Schritte im Lokalisierungsverfahren ($\alpha = 1\%$) und geschätzte Elemente der Starrkörperbewegung mit dem erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$ für V40.

	s_{CS} inital	überpr.	erw.	t_x, t_y, t_z $[m]$	$\sigma_{t_x}, \sigma_{t_y}, \sigma_{t_z}$ $[mm]$	ω, ϕ, κ $[gon]$	$\sigma_\omega, \sigma_\phi, \sigma_\kappa$ $[mgon]$
I-V40 $a = 0$	19	19	28	0.300 0.600 0.000	0.041 0.028 0.045	35.007 − 0.004 −10.025	5.785 8.032 6.860
I-V40 $a = 1$		7	7	0.300 0.600 0.000	0.141 0.097 0.118	35.014 − 0.014 − 9.989	12.867 20.105 21.812



(a) I-V40, $a = 0$ (b) I-V40, $a = 1$

Abbildung 4.8.: Ergebnis des Lokalisierungsverfahrens für V40.

Eine weitere Erhöhung des Verformungsanteils (V50 und V65) bewirkt mit den erweiterten Punktmengen ($\alpha = 1\%$) eine Ablehnung von H_0 im Globaltest in allen Fällen. Zwar werden die stark verformten Bereiche stets korrekt detektiert, die Hinzunahme von $\hat{\boldsymbol{S}}_I$ in den Übergangsbereichen zu $\mathbb{S}_{CS}$ verursacht jedoch erneut einen starken Anstieg von $\hat{\sigma}_0^2$ und damit der Testgröße im Globaltest – weshalb auch hier davon ausgegangen werden kann, dass es sich um Fehler 2. Art in den Einzeltests handelt.

Dabei zeigt sich erneut, dass kleinere initiale $\mathbb{S}_{CS}$ zu größeren Unterschieden zwischen resultierenden detektierten Verformungsbereichen und zu einer deutlicheren Testentscheidung für H_A im Globaltest mit der erweiterten Punktmenge führt, es kommt in diesen Fällen also vermehrt zu falschen Entscheidungen in den Einzeltests mit $\alpha = 1\%$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

Während diese Abhängigkeit in den vorigen Untersuchungen bei geringeren Verformungsanteilen durch eine Vergrößerung der initialen Punktmenge so abgeschwächt werden konnte, dass eine konsistente erweiterte Punktmenge resultiert, ist dies für V50 und V65 aufgrund des geringen Anteils unverformter Bereiche nicht mehr möglich.

Eine Erhöhung von α der Einzeltests auf 5% ermöglicht eine zuverlässigere Ermittlung der verformten Bereiche, zudem wird sichergestellt, dass der abschließende Globaltest der erweiterten Stabilpunktmenge angenommen werden kann. Durch die Erhöhung der Irrtumswahrscheinlichkeit ändern sich einige Testentscheidungen so, dass Punkte, welche zuvor zu den Stabilpunkten gezählt wurden, als verformt detektiert werden – unter Umständen auch bei Punkten, welche eindeutig den stabilen Bereichen der Fläche zuzuordnen sind. Nichtsdestotrotz gilt auch für die Verformungsanalyse mit $\alpha = 5\%$, dass die Abhängigkeit des Endergebnisses von der initialen Punktmenge steigt, je weniger Punkte diese enthält.

Eine Verformungsanalyse mit $a = 1$ ist mit V50 und V65 aufgrund des geringen Anteils stabiler Bereiche nicht mehr durchführbar und schlägt bereits während der Überprüfung des initialen $\mathbb{S}_{CS}$ fehl. Wird die Verformungsanalyse ohne die Überprüfung der initialen Punktmenge durchgeführt, kommt es in der Regel zu keiner Hinzunahme von Identpunkten.

Das Ausmaß der Verformung spiegelt sich bei allen Datensätzen wieder in den Testgrößen der Einzeltests wider, die maximalen Werte werden jeweils für den Identpunkt $\hat{\boldsymbol{S}}_{4,3}$ mit $max(T) \approx 6500$ für V40, $max(T) \approx 4500$ für V65 und $max(T) \approx 1300$ für V50 berechnet.

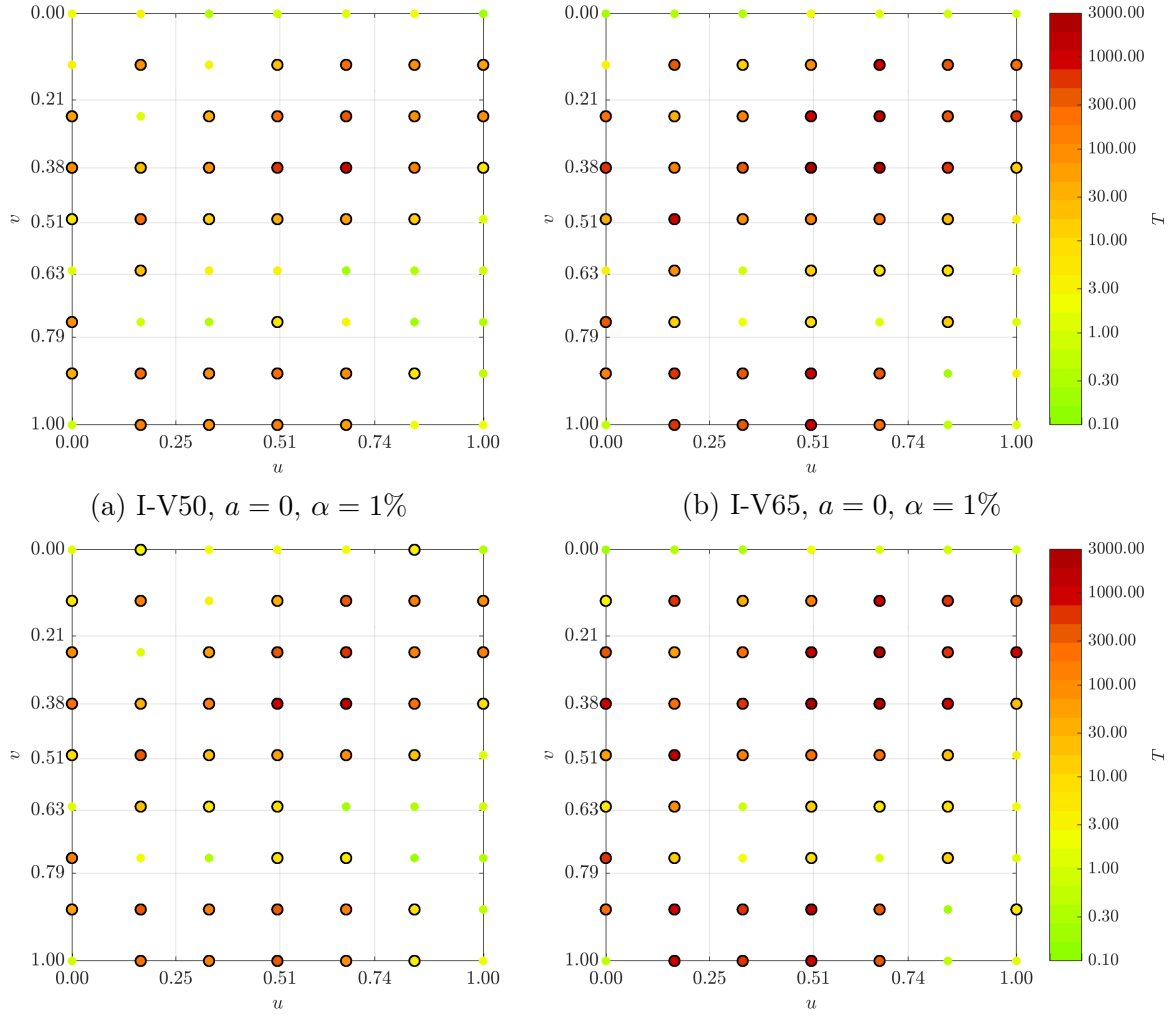
Tabelle 4.9.: Verlauf der Schritte im Lokalisierungsverfahren ($\alpha = 1\%$) und geschätzte Elemente der Starrkörperbewegung mit dem erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$ für V50 und V65. Die rot hinterlegten Felder markieren wiederum die Ablehnung von H_0 im Globlatest.

	s_{CS}			t_x, t_y, t_z	$\sigma_{t_x}, \sigma_{t_y}, \sigma_{t_z}$	ω, ϕ, κ	$\sigma_\omega, \sigma_\phi, \sigma_\kappa$
	inital	überpr.	erw.	$[m]$	$[mm]$	$[gon]$	$[mgon]$
I-V50 $a = 0$	17	16	26	0.300	0.064	34.996	9.240
				0.600	0.043	− 0.032	11.109
				0.000	0.066	−10.057	11.090
I-V65 $a = 0$	17	17	20	0.301	0.084	34.994	10.878
				0.600	0.050	0.056	12.789
				0.000	0.077	−10.048	14.739

4.2.3. Diskussion der Ergebnisse

Die Verformungsanalyse mit regulärer $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ zeigt bei den verschiedenen Datensätzen mit unterschiedlichen Verformungsanteilen also einige Gemeinsamkeiten, die bei der Durchführung und Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden sollten. Generell ist festzustellen, dass verformte Bereiche in allen überprüften Konstellationen zuverlässig

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub



(a) I-V50, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) I-V65, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(c) I-V50, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(d) I-V65, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

Abbildung 4.9.: Ergebnis des Lokalisierungsverfahrens für V50 und V65.

detektiert werden und dass die berechneten Testgrößen größer ausfallen, je stärker die Verformung zwischen korrespondierenden Punkten ausfällt.

Es stellt sich heraus, dass die Herausforderung in der Verformungsanalyse weniger darin besteht, tatsächlich verformte Bereiche zu detektieren, sondern vielmehr darin, diese präzise von den unverformten Bereichen abzugrenzen. So kann es im Übergangsbereich zwischen starken Verformungen und unverformten Bereichen in Einzeltests mit $\alpha = 1\%$ zu Fehlern 2. Art kommen, welche die Ablehnung des abschließenden Globaltests ($\alpha_G = 5\%$) verursachen. Die Fehler 2. Art treten vermehrt dann auf, wenn die initiale, mit dem RANSAC-Verfahren erstellte Punktmenge nur wenige Punkte enthält, was dem RANSAC-Parameter s_{min} in dieser Hinsicht eine wichtige Funktion zukommen lässt. Die Übergangsbereiche zeichnen sich dabei nicht eindeutig durch größere Abstände zwischen korrespondierenden Punkten im Vergleich zu unverformten Bereichen aus – was vermuten lässt, dass die Ursache für deren Detektion als Ausreißer zum Großteil in den Korrelationen mit benachbarten Punkten, die im verformten Bereich

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

liegen, zu suchen ist.

Liegen im initialen $\mathbb{S}_{CS}$ zu wenige Punkte vor und kommt es zur Ablehnung des Globaltests mit der erweiterten Punktmenge, so kann die Wahrscheinlichkeit β für Fehler 2. Art durch die Erhöhung von α auf etwa 5% reduziert werden – dieser Weg sollte vor allem dann genutzt werden, wenn die Größe der initialen Punktmenge durch hohe Verformungsanteile nicht weiter gesteigert werden kann. Im Gegenzug kommt es dadurch aber gehäuft zur Detektion von Verformungen in eigentlich unverformten Bereichen, also zu Fehlern 1. Art. Diese Fehler entstehen jedoch vereinzelt ebenso bei ausreichend großen initialen $\mathbb{S}_{CS}$ und Einzeltests mit $\alpha = 1\%$ – deutlich zu sehen beim untersuchten unverformten Datensatz V0.

Eine weitere Möglichkeit zur Vermeidung der Fehler 2. Art in den Einzeltests besteht in der Berücksichtigung der direkten Nachbarschaft ($a = 1$) des untersuchten Identpunkts. Durch die Homogenisierung der berechneten Testgrößen kommt es zu einer Vergrößerung des als verformt detektierten Bereichs und damit dazu, dass der fehleranfällige Übergangsbereich als verformt identifiziert wird. Bei V40 besteht die resultierende Stabilpunktmenge jedoch nur noch aus einzelnen Punkten; für größere Verformungsanteile ist diese Methode demnach nicht mehr anwendbar, da dann alle Punkte der Fläche als verformt detektiert werden würden.

Bei niedrigen Verformungsanteilen lassen sich mit der Kombination der Parameter $a = 1$ und $\alpha = 1\%$ somit zuverlässig Ergebnisse ohne den Einfluss von Fehlern 2. Art finden. Bei stärker verformten Flächen mit einem Verformungsanteil von mehr als 20% verursacht die Ermittlung der Testgrößen aus der direkten Nachbarschaft eine sehr kleine erweiterte Stabilpunktmenge; ist mehr als die Hälfte der Fläche verformt, schlägt die Verformungsanalyse fehl – in diesen Fällen sollte dann auf Einzeltests mit den Parametern $a = 0$ und $\alpha = 5\%$ in Kombination mit möglichst großen initialen $\mathbb{S}_{CS}$ übergegangen werden, um eine endgültige Stabilpunktmenge zu finden, mit der eine Annahme des abschließenden Globaltests erreicht werden kann.

4.3. Deformationsanalyse mit singulären Varianz-Kovarianzmatrizen

Im Folgenden werden die Ergebnisse zusammengestellt, die durch die Verformungsanalyse bei den Diskretisierungen mit einer über das 7×9-Raster hinausgehenden Diskretisierungsdichte durch die verschiedenen Ansätze der Verarbeitung der singulären $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ entstehen. Dabei kann unterschieden werden zwischen Ansätzen, die die Ausgleichungen im Zuge der Ausreißertests mit Pseudoinversen durchführen und jenen, die eine Regularisierung der singulären Matrizen bewirken (vgl. Abschnitt 3.5). Die Untersuchungen beschränken sich wiederum auf die in Tabelle 4.2 aufgeführten Diskretisierungen, welche aus den Datensätzen V0, V40 und V65 erstellt werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

4.3.1. Bestimmung einer initialen Stabilpunktmenge

Analog zum Regulärfall soll hier das Verhalten des RANSAC-Verfahrens bei der Bestimmung des initialen $\mathbb{S}_{CS}$ mit singulären $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ untersucht werden. Erneut werden dazu für jede Konfiguration der RANSAC-Parameter die bei zehnmaliger Ausführung durchschnittlich benötigten Iterationen sowie die durchschnittliche Anzahl der Identpunkte des resultierenden $\mathbb{S}_{CS}$ zusammengefasst, die Voraussetzung für den Abschluss ist wiederum die Annahme von H_0 des Globaltests ($\alpha_G = 5\%$) nach Schätzung der Transformationsparameter mit der ermittelten Menge potenzieller Stabilpunkte. Die Kofaktormatrix $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}$ wird dabei stets mit einem a priori-Varianzfaktor von $\sigma_0^2 = 1$ nach (3.13) erstellt.

Berechnung der Gewichtsmatrix mit `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv})

Zur Berechnung der in der Ausgleichung benötigten Gewichtsmatrix $\boldsymbol{Q}^{+}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}$ als Pseudoinverse der Kofaktormatrix kommt die MATLAB-Funktion `pinv` zum Einsatz.

Bei doppelter Diskretisierungsdichte im 14×18-Raster (vgl. Tabelle 4.10) werden beim verformungsfreien Datensatz mit $\tau = 2$ initiale $\mathbb{S}_{CS}$ ermittelt, welche durchschnittlich 105 Identpunkte enthalten. Erhöht man τ auf 3, werden in einigen Durchläufen bereits ein Großteil der Identpunkte in das initiale $\mathbb{S}_{CS}$ aufgenommen, mit $\tau = 4$ enthält das $\mathbb{S}_{CS}$ in vielen Fällen alle Punkte.

Die Untersuchung des RANSAC-Verhaltens mit V40 ergibt mit $\tau = 2$ ein initiales $\mathbb{S}_{CS}$, das mit nur 27 Punkten im Vergleich zum 7×9-Raster anteilig an der Gesamtanzahl der Identpunkte deutlich weniger Punkte enthält – zudem müssen um ein Vielfaches mehr Iterationen durchgeführt werden, um zu einem konformen Ergebnis zu kommen. Zwar werden in vielen Iterationen mehr Punkte gefunden, die die aus τ gebilete RANSAC-Bedingung (3.15) erfüllen, mit diesen Punkten kann jedoch H_0 des abschließenden Globaltests nicht angenommen werden. Eine Erhöhung von τ auf 3 verstärkt diesen Effekt: die weitere Steigerung der Anzahl der Identpunkte, welche (3.15) erfüllen, führt zu einer wahrscheinlicheren Ablehnung von H_0 im Globaltest, wodurch im Vergleich zu $\tau = 2$ noch mehr Iterationen benötigt werden. Obwohl die RANSAC-Bedingung durch die Erhöhung von τ abgeschwächt wird, enthält das ermittelte $\mathbb{S}_{CS}$ dann durchschnittlich trotzdem nicht mehr Punkte.

Für V65 verstärkt sich dieses Verhalten weiter: hier müssen mit $\tau = 2$ durchschnittlich 150 Iterationen durchlaufen werden, bis ein konformes $\mathbb{S}_{CS}$ gefunden wird – wobei dieses wiederum im Vergleich zum Anteil an der Gesamtanzahl der Identpunkte im 7×9-Raster deutlich kleiner ausfällt. Erhöht man τ, müssen wie zuvor mehr Iterationen durchgeführt werden.

Die Untersuchungen im 21×27-Raster zeigen ein ähnliches Verhalten: während mit V0 in den meisten Fällen bereits nach einer Iteration ein initiales $\mathbb{S}_{CS}$ mit durchschnittlichem Umfang von 235 ($\tau = 2$) bzw. 330 ($\tau = 3$) Punkten gefunden werden kann, sorgt ein steigender Verformungsanteil in V40 und V65 dafür, dass übermäßig viele Iterationen benötigt werden. Die ermittelten $\mathbb{S}_{CS}$ enthalten dann sogar weniger Identpunkte, als die entsprechenden initialen Punktmengen aus den Diskretisierungen mit geringerer Punktdichte. Hinzu kommt bei dieser Diskretisierungsdichte, dass die Laufzeiten für einzelne Iterationen – sobald mehrere Hundert Identpunkte die RANSAC-Bedingung

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Tabelle 4.10.: Auswirkungen ausgewählter RANSAC-Parameter auf Anzahl der Iterationen und die Größe des $\mathbb{S}_{CS}$ für Diskretisierungen im 14×18-Raster.

Diskretisierung	τ	a	s_{min}	$\bar{i}$	$\bar{s}_{CS}$
II-V0	2	0	12	1	105
	3	0	12	1	150
II-V40	2	0	12	30	27
	3	1	16	252	24
II-V65	2	0	12	150	17
	3	1	16	1756	22

erfüllen und in der Ausgleichung verarbeitet werden – im Vergleich den zuvor untersuchen Diskretisierungen um ein Vielfaches steigen. In den Untersuchungen werden daher RANSAC-Durchläufe abgebrochen, welche mehr als 4000 Iterationen benötigen. Für V40 und V65 lassen sich mit $\tau = 3$ nur noch vereinzelt konforme Punktmengen unterhalb dieser Grenze von 4000 benötigten Iterationen finden, weshalb diese Konfiguration in Tabelle 4.11 nicht mehr aufgeführt wird.

Tabelle 4.11.: Auswirkungen ausgewählter RANSAC-Parameter auf Anzahl der Iterationen und die Größe des $\mathbb{S}_{CS}$ für Diskretisierungen im 21×27-Raster.

Diskretisierung	τ	a	s_{min}	$\bar{i}$	$\bar{s}_{CS}$
III-V0	2	0	12	1	235
	3	0	12	1	330
III-V40	2	0	12	1244	18
III-V65	2	0	12	1345	15

Neben dem Problem, dass bei engeren Diskretisierungen und höheren Verformungsanteilen nur noch mit hohem Aufwand eine konforme Stabilpunktmenge gefunden werden kann, welche in allen Fällen lediglich einen Bruchteil des unverformten Bereichs der Fläche abdeckt, kommt hinzu, dass es in einigen Konstellationen die ausgleichende Helmerttransformation nicht konvergiert. Neben den Konvergenzproblemen kommt es zudem in manchen Durchläufen dazu, dass die Verbesserungsquadratsumme $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{s}}} \boldsymbol{e}$ im negativen Bereich liegt, was auf eine fehlerhafte Berechnung der Gewichtsmatrix hindeutet.

Eine weitere Erhöhung der Diskretisierungsdichte erweist sich als wenig praktikabel: einerseits führt die große Anzahl von Identpunkten vor allem bei geringeren Verformungsanteilen zu sehr langen Laufzeiten bei der Verarbeitung der entsprechend größer werdenden Matrizen im Verlauf der Ausgleichung. Andererseits lassen sich bei stärker verformten Flächen immer schwieriger ausreichend große $\mathbb{S}_{CS}$ im RANSAC-Verfahren ermitteln.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Berechnung der Gewichtsmatrix mit `pinv` (angepasster Grenzwert t'_{sv})

Nach einigen weiteren Versuchen stellt sich heraus, dass eine Veränderung des von MATLAB vorgegebenen Grenzwerts bei der Berechnung des Pseudoinversen zur Erstellung der Gewichtsmatrix Einfluss auf das Verhalten des RANSAC-Verfahrens hat. Der Default-Grenzwert t_{sv} aus (3.30) liegt bei den untersuchten Matrizen zwischen 10^{-20} und 10^{-21}, was bei den $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}$, welche aus allen Flächenpunkten gebildet werden, stets zur korrekten Bestimmung des Rangs und damit auch der Pseudoinversen führt (vgl. blaue Singulärwerte in Abbildung 4.10). Der maximale Rang der gemeinsamen Kofaktormatrix beider Epochen ist nach Zusammenhang (3.12) $Rang(\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}) = 378$ (vgl. vertikale strichlierte Linie in Abbildung 4.10). Dieser ist im dargestellten Fall eindeutig durch den Wertesprung zwischen dem 378. und 379. Singulärwert ($\approx 6.9 \cdot 10^{-9}$ zu $\approx 9.6 \cdot 10^{-23}$) festgelegt und kann leicht mit t_{sv} detektiert werden. Daneben kommt es zu weiteren Sprüngen zwischen dem 24. und 25. bzw. dem 168. und 169. Singulärwert.

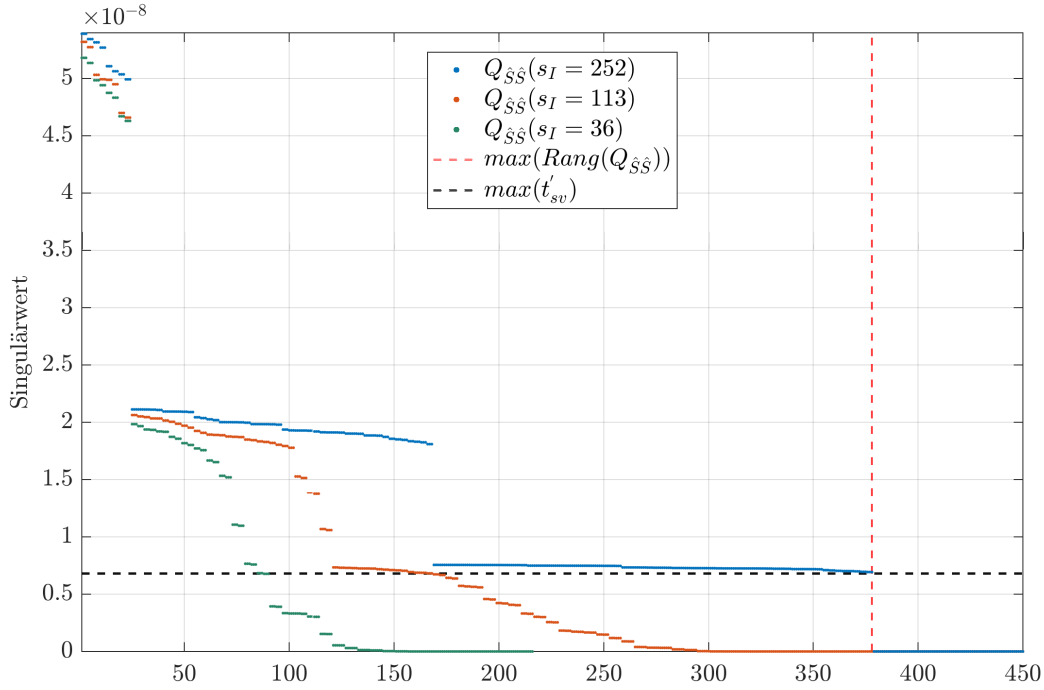


Abbildung 4.10.: Visualisierung der ersten 450 Singulärwerte der Kofaktormatrix der diskretisierten Flächenpunke im 14×18-Raster bei variierender Punktauswahl.

Wird die Kofaktormatrix dagegen aus einer Auswahl von Flächenpunkten gebildet, zeigen sich diese eindeutig zu identifizierenden Sprünge in den Singulärwerten nicht mehr, stattdessen ist ein kontinuierlicherer Übergang zu erkennen – wodurch die Bestimmung des korrekten Rangs über t_{sv} unter Umständen nicht mehr eindeutig erfolgen kann. In Abbildung 4.10 sind zur Veranschaulichung dieses Verhaltens die Singulärwerte der $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}$ dargestellt, welche aus $s_I = 36$ bzw. $s_I = 113$ Identpunkten gebildet wird.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Es kann also vermutet werden, dass der von MATLAB angewandte Default-Grenzwert zumindest in einigen Konstellationen ungeeignet ist, um den Rang und damit die Pseudoinverse korrekt zu bestimmen.

Diese Hypothese wird unterstützt, wenn man die in Abschnitt 3.5 eingeführten Fehlermaße (3.31) zur Beurteilung der erstellten Pseudoinversen heranzieht. Für die Berechnung mit `pinv` und t_{sv} ergeben diese sich zu den in Tabelle 4.12 zusammengefassten Werten. Während die Inversion für die aus allen Identpunkten gebildete Kofaktormatrix nur sehr kleine Fehler aufweist, kommt es bei einer kleineren Auswahl von Punkten zu deutlichen Abweichungen. Besonders in der Konstellation mit $s_I = 113$ Identpunkten nimmt D_2^+ einen Wert an, der die Größen in $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}^+$ deutlich übersteigt – was eine Erklärung dafür sein kann, dass eine Lösung mit `pinv` und t_{sv} bei einigen Konstellationen nur schwer möglich ist.

Tabelle 4.12.: Fehlermaße für die mit der MATLAB-Funktion `pinv` und dem Default-Grenzwert t_{sv} (3.30) erstellten Pseudoinversen aus der Kofaktormatrix (3.13) mit Flächenpunkten im 14×18-Raster.

s_I	D_1^+	D_2^+
252	$4.5 \cdot 10^{-22}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$
113	$3.5 \cdot 10^{-15}$	$6.6 \cdot 10^{12}$
36	$1.3 \cdot 10^{-17}$	$8.6 \cdot 10^{6}$

Ein angepasster Grenzwert t'_{sv} sollte jedenfalls unterhalb des 378. Singulärwerts liegen, um eine korrekte Berechnung der Pseudoinversen der Kofaktormatrix aller Identpunkte sicherzustellen. Zur Untersuchung der Auswirkungen verschiedener Grenzwerte werden die entstehenden Fehler erneut anhand der in Abbildung 4.10 und Tabelle 4.12 dargestellten Konstellationen berechnet und in Tabelle 4.13 zusammengestellt. Darin ist zu erkennen, dass die Anpassung des Grenzwerts – abgesehen von der aus allen Idenpunkten berechneten Pseudoinversen – eine Beschränkung von D_2^+ zur Folge hat. D_1^+ nimmt dagegen in etwa die Größe von t'_{sv} an; je kleiner t'_{sv} gewählt wird, desto größer wird wiederum D_2^+. Eine weitere Verkleinerung des Grenzwerts liefert bis einschließlich $t'_{sv} = 1.0 \cdot 10^{-14}$ annehmbare Werte für D_2^+, bevor diese wieder in den Bereich der in Tabelle 4.12 gezeigten Abweichungen steigen.

Analoge Untersuchungen lassen sich ebenfalls mit den Diskretisierungen im 21×27-Raster anstellen. Dort liegt der 378. Singulärwert der $\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}$ aller $s_I = 1008$ Identpunkte bei $1.7 \cdot 10^{-8}$, `pinv` mit dem Default-Grenzwert liefert auch in diesem Fall geringe D_1^+ und D_2^+, bewirkt jedoch bei einer Auswahl von Identpunkten größere Abweichungen. Die für das 14×18-Raster ermittelten t'_{sv} eignen sich auch hier für eine Reduktion dieser Abweichungen.

Die Anwendung der t'_{sv} führt nun zu einer Veränderung des Verhaltens des RANSAC-Ansatzes. Für dessen Untersuchung werden erneut die bei zehnmaliger Ausführung durchschnittlich benötigten Iterationen und die durchschnittliche Größe des ermittelten $\mathbb{S}_{CS}$ betrachtet (vgl. Tabellen 4.14 und 4.15 für $t'_{sv} = 10^{-14}$).

Je größer t'_{sv} gewählt wird, desto weniger Iterationen werden grundsätzlich benötigt,

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Tabelle 4.13.: Fehlermaße für die mit der MATLAB-Funktion `pinv` und verschiedenen Grenzwerten t'_{sv} erstellten Pseudoinversen aus der Kofaktormatrix (3.13) mit Flächenpunkten im 14×18-Raster.

t'_{sv}	s_I	D_1^+	D_2^+
	252	$4.5 \cdot 10^{-22}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$
$6.9 \cdot 10^{-9}$	113	$6.9 \cdot 10^{-9}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$
	36	$6.8 \cdot 10^{-9}$	$2.8 \cdot 10^{-7}$
	252	$4.5 \cdot 10^{-22}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$
$1.0 \cdot 10^{-9}$	113	$8.8 \cdot 10^{-10}$	$4.0 \cdot 10^{-6}$
	36	$5.4 \cdot 10^{-10}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$
	252	$4.5 \cdot 10^{-22}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$
$1.0 \cdot 10^{-14}$	113	$9.6 \cdot 10^{-16}$	$3.1 \cdot 10^{2}$
	36	$1.6 \cdot 10^{-15}$	$0.6 \cdot 10^{-1}$

um zu einer konformen Lösung zu kommen; zudem enthalten diese $\mathbb{S}_{CS}$ auch mehr Stabilpunkte. Nichtsdestotrotz sollte das Ziel sein, t'_{sv} klein zu halten, um möglichst viel Information aus der Kofaktormatrix in die Berechung der Pseudoinversen einfließen zu lassen. Für $t'_{sv} = 10^{-14}$, also dem zuvor ermittelten, kleinst möglichen Grenzwert, liegt die benötigte Iterationszahl bei der Untersuchung des 14×18-Rasters jedoch auf einem ähnlichen Niveau, wie im RANSAC-Verfahren bei der Berechnung der Pseudoinversen mit Default-Grenzwert – wobei die ermittelten $\mathbb{S}_{CS}$ im Vergleich etwas mehr Punkte enthalten.

Tabelle 4.14.: Auswirkungen ausgewählter RANSAC-Parameter auf Anzahl der Iterationen und die Größe des $\mathbb{S}_{CS}$ für Diskretisierungen im 14×18-Raster und $t'_{sv} = 10^{-14}$.

Diskretisierung	τ	a	s_{min}	$\bar{i}$	$\bar{s}_{CS}$
II-V40	2	0	12	37	31
	2	0	40	316	46
	3	1	16	220	37
	3	1	30	684	44
II-V65	2	0	12	86	20
	2	0	20	810	23
	3	1	16	1495	28

Für das 21×27-Raster zeigt sich mit $t'_{sv} = 10^{-14}$, dass im Vergleich zum Default-Grenzwert vor allem bei hohen Verformungsanteilen deutlich weniger Iterationen durchgeführt werden müssen – bei nahezu gleich bleibendem Umfang der ermittelten $\mathbb{S}_{CS}$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

Das Problem, dass trotz steigender Punktanzahl nicht mehr oder sogar weniger Punkte im unverformten Bereich der Fläche gefunden werden, besteht also nach wie vor.

Tabelle 4.15.: Auswirkungen ausgewählter RANSAC-Parameter auf Anzahl der Iterationen und die Größe des $\mathbb{S}_{CS}$ für Diskretisierungen im 21×27-Raster und $t'_{sv} = 10^{-14}$.

Diskretisierung	τ	a	s_{min}	$\bar{i}$	$\bar{s}_{CS}$
III-V40	2	0	12	310	18
	2	1	16	1015	32
III-V65	2	0	12	892	16

Das bei der Anwendung der mit dem Default-Grenzwert berechneten Pseudoinversen beschriebene Verhalten, dass sich die benötigte Iterationszahl bei steigendem τ erhöht, liegt also im Gegensatz zu den Untersuchungen im Regulärfall weiterhin vor. Bei den Diskretisierungen im 21×27-Raster kann so erneut mit $\tau = 3$ keine konforme Punktmenge mehr ermittelt werden. Durch den angepassten Grenzwert wird jedoch erreicht, die Iterationszahl bei hohen Verformungsanteilen (und $\tau < 3$) zu verringern und das Problem der bei einigen Konstellationen auftretenden negativen $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{s}}} \boldsymbol{e}$ zu beheben.

Die erhöhte Diskretisierungsdichte im 14×18-Raster erlaubt generell einen größeren Umfang des initialen $\mathbb{S}_{CS}$. Die Schlüsse, die hinsichtlich der Stabilität der Einzeltests in Abhängigkeit von der Größe des initialen $\mathbb{S}_{CS}$ im Regulärfall gezogen wurden, können unter Verwendung von t'_{sv} durch ein erhöhtes s_{min} im RANSAC-Ansatz berücksichtigt werden. Die Ergebnisse derjenigen s_{min}, mit denen eine Ermittlung initialer Punktmengen bei vertretbarem Aufwand erreicht werden kann, sind daher zusätzlich in den Tabelle 4.14 dargestellt. Auch für die 21×27-Diskretisierung kann durch die Erhöhung von s_{min} eine Vergrößerung des $\mathbb{S}_{CS}$ erreicht werden – allerdings nur bis zu einem mittleren Verformungsanteil.

Gewichtsmatrix aus regularisierter Varianz-Kovarianzmatrix

Bei der Wahl von λ in (2.59) führt bereits ein Wert von 10^{-18} zu einer Regularisierung und damit Invertierbarkeit der ursprünglich singulären $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{s}}_I}$, deren Hauptdiagonalen mit Werten zwischen $7.5 \cdot 10^{-10}$ und $5.0 \cdot 10^{-8}$ besetzt sind. Die Auswirkungen verschiedener λ auf die geschätzten Elemente der Starrkörperbewegung lassen sich gut anhand des unverformten Datensatzes V0 quantifizieren – dort sollte der Unterschied zu den aus den Kontrollpunkten geschätzten Transformationsparametern (vgl. Tabelle 4.3) möglichst klein bleiben.

Bei der Analyse stellt sich heraus, dass die Werte der aus den Identpunkten mit regularisierter Varianz-Kovarianzmatrix geschätzten Parameter sehr robust gegenüber λ sind. Ausgehend von $\lambda = 10^{-18}$ sind bei einer Vergrößerung des auf die Hauptdiagonale der Kovarianzmatrix aufaddierten Werts erst bei $\lambda = 10^{-10}$ Änderungen in der sechsten Nachkommastelle im Vergleich zu den geschätzten Parametern aus den Kontrollpunkten (vgl. Tabelle 4.3) zu erkennen. Durch den Eingriff in das stochastische Modell ändern sich allerdings die Genauigkeiten der Parameter: diese werden durch die

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Änderung der Kovarianzmatrix im Vergleich zur Schätzung aus den Kontrollpunkten scheinbar genauer bestimmt (vgl. Tabelle 4.16). Auffällig ist auch hier, dass sich diese Genauigkeiten im Bereich von $10^{-18} \leq \lambda \leq 10^{-11}$ nicht ändern. Bei den Korrelationskoeffizienten zwischen benachbarten Flächenpunkten (vgl. Abschnitt 4.1) verursacht die Anwendung von λ hingegen Differenzen zwischen ca. 10^{-9} (bei $\lambda = 10^{-18}$) bzw. 10^{-2} (bei $\lambda = 10^{-11}$) im Vergleich zu $\lambda = 0$.

Tabelle 4.16.: Aus Identpunkten des diskretisierten V0-Datensatzes geschätzte Elemente der Starrkörperbewegung auf Basis regularisierter Kovarianzmatrizen ($10^{-18} \leq \lambda \leq 10^{-11}$).

Diskretisierung	t_x, t_y, t_z $[m]$	$\sigma_{t_x}, \sigma_{t_y}, \sigma_{t_z}$ $[mm]$	ω, ϕ, κ $[gon]$	$\sigma_\omega, \sigma_\phi, \sigma_\kappa$ $[mgon]$
II-V0	0.300	0.012	35.002	1.885
	0.600	0.007	0.008	2.170
	0.000	0.013	− 9.997	2.114
III-V0	0.300	0.008	35.002	1.254
	0.600	0.005	0.008	1.443
	0.000	0.009	− 9.997	1.406

Im Hinblick auf die Auswirkungen auf das Verhalten der Ermittlung des initialen $\mathbb{S}_{CS}$ zeigt sich ein zur Analyse im vorigen Abschnitt (`pinv` mit $t'_{sv} = 10^{-14}$) ähnliches Bild: $\bar{i}$ und $\bar{s}_{CS}$ liegen in einem ähnlichen Bereich – auf eine entsprechende Übersicht wird deshalb an dieser Stelle verzichtet; tendenziell steigt der Umfang des ermittelten initialen $\mathbb{S}_{CS}$ aber leicht mit steigendem λ. Für III-V65 und $\tau = 3$ kann aber auch mit diesem Ansatz keine Stabilpunktmenge gefunden werden.

Gewichtsmatrix aus diagonalisierten Varianz-Kovarianzmatrizen

Eine Beschränkung der $\mathbf{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ der Identpunkte auf deren Hauptdiagonale (vgl. (3.29)) führt zu einer Änderung der Rotationsparameter im Milligon-Bereich, die Translationsparameter bleiben zu den aus den Kontrollpunkten geschätzten Parametern identisch. Analog zur Schätzung mit regularisierten Kovarianzmatrizen kommt es zu einer Steigerung der Genauigkeit der geschätzten Parameter (vgl. Tabelle 4.17).

Durch die Nichtberücksichtigung der Korrelationen zwischen den Flächenpunkten können im RANSAC-Verfahren deutlich größere initiale $\mathbb{S}_{CS}$ bei weniger benötigten Iterationen ermittelt werden – einige der mit $\tau = 3$ ermittelten $\mathbb{S}_{CS}$ decken dabei sogar einen Großteil der unverformten Bereiche der Fläche ab. Die Ergebnisse der zu den vorigen Untersuchungen analogen Versuche sind in den Tabellen 4.18 und 4.19 zusammengefasst.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Tabelle 4.17.: Aus Identpunkten des diskretisierten V0-Datensatzes geschätzte Elemente der Starrkörperbewegung auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Diskretisierung	t_x, t_y, t_z $[m]$	$\sigma_{t_x}, \sigma_{t_y}, \sigma_{t_z}$ $[mm]$	ω, ϕ, κ $[gon]$	$\sigma_\omega, \sigma_\phi, \sigma_\kappa$ $[mgon]$
II-V0	0.300	0.011	35.004	1.838
	0.600	0.007	0.006	2.067
	0.000	0.012	− 9.996	2.081
III-V0	0.300	0.008	35.004	1.181
	0.600	0.005	0.006	1.330
	0.000	0.009	− 9.996	1.335

Tabelle 4.18.: Auswirkungen ausgewählter RANSAC-Parameter auf Anzahl der Iterationen und die Größe des $\mathbb{S}_{CS}$ für Diskretisierungen im 14×18-Raster auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Diskretisierung	τ	a	s_{min}	$\bar{i}$	$\bar{s}_{CS}$
II-V40	2	0	12	7	45
	3	0	12	6	57
II-V65	2	0	12	67	20
	3	0	12	33	30

4.3.2. Lokalisierung von Verformungen durch Erweiterung der Stabilpunktmenge

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Verformungsanalyse anhand der in Tabelle 4.2 aufgeführten Diskretisierungen, welche im letzten Abschnitt im Zuge der Analyse des RANSAC-Verfahrens untersucht wurden, zusammengefasst und diskutiert. Die Verarbeitung der singulären $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ erfolgt dabei unter Einbeziehung der zuvor erlangten Erkenntnisse zu den verschiedenen dazu implementierten Ansätzen.

Die visualisierten Ergebnisse beziehen sich dabei auf die Auswertung von III-V40. Alle weiteren erstellten und im Folgenden nicht dargestellten Ergebnisse der Verformungsanalyse mit den zugehörigen initialen $\mathbb{S}_{CS}$ sind zur Übersicht als Darstellungen der Flächenpunkte im Anhang A zusammengestellt. Die nachfolgenden Darstellungen der Ergebnisse der Verformungsanalyse sind dabei nach dem Betrag der Testgröße farbcodiert, fehlgeschlagene Berechnungen der T sind in grauer Farbe markiert; schwarz umrandete Punkte kennzeichnen darin Flächenpunkte, die als verformt detektiert werden.

Berechnung der Gewichtsmatrix mit `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv})

Beim verformungsfreien Datensatz zeigt sich bei Anwendung von t_{sv} in allen untersuchten Diskretisierungen ein zur Analyse im 7×9-Raster ähnliches Verhalten: enthält

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Tabelle 4.19.: Auswirkungen ausgewählter RANSAC-Parameter auf Anzahl der Iterationen und die Größe des $\mathbb{S}_{CS}$ für Diskretisierungen im 21×27-Raster auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Diskretisierung	τ	a	s_{min}	$\bar{i}$	$\bar{s}_{CS}$
III-V40	2	0	12	7	92
	3	1	16	9	149
III-V65	2	0	12	77	34
	3	1	12	85	53

das initiale $\mathbb{S}_{CS}$ alle Punkte, so weist das Ergebnis der Verformungsanalyse nur wenige ($a = 0$) oder keine ($a = 1$) Fehldetektionen auf. Werden alle Identpunkte korrekterweise als unverformt detektiert, sind die abschließend daraus geschätzten Elemente der Starrkörperbewegung wiederum identisch mit denen, die aus den Kontrollpunkten abgeleitet werden können. Umfasst das initiale $\mathbb{S}_{CS}$ jedoch nicht alle Identpunkte, kann es vermehrt zu Fehldetektionen kommen, die auch durch Berücksichtigung der Nachbarschaft in den Einzeltests nicht behoben werden können.

Bei allen (verformten wie unverformten) Datensätzen kommt es, je nach Konstellation und vor allem dann, wenn nur sehr wenige Identpunkte im intitalen $\mathbb{S}_{CS}$ enthalten sind, während des Ausgleichs in den Einzeltests ($\alpha = 1\%$) mancher Punkte zu negativen Werten für $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} \boldsymbol{e}$ – ein Problem, welches auch schon bei der Analyse des RANSAC-Verfahrens beobachtet werden konnte. In weiterer Folge führen diese negativen Werte dann dazu, dass T (2.53) nicht berechnet werden kann.

Ein weiteres Problem, welches dann vielfach während der Berechnung der Testgrößen auftritt, liegt darin, dass die berechnete gewichtete Quadratsumme $\hat{\nabla}^T \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}} \hat{\nabla}$ sowie $\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}} \boldsymbol{e}$ unrealistische und teilweise sogar negative Werte annehmen, die sich über $\hat{\sigma}_0^{2\prime}$ (2.52) auf T fortpflanzen.

Charakteristisch für die Einzeltests, die diese Probleme verursachen, ist dann ebenfalls ein deutlicher Unterschied zwischen der $\hat{\nabla}^T \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}} \hat{\nabla}$, welche im reduzierten Modell berechnet wird und der aus den Größen des erweiterten Modells berechneten Quadratsumme (vgl. Abschnitt 3.5); zudem wird in manchen Fällen die Bedingung der Äquivalenz der Freiheitsgrade (3.26) zwischen den Modellen verletzt. Des Weiteren ist zu beobachten, dass die Zwischenergebnisse zwischen den einzelnen Iterationen der jeweiligen Ausgleichungen starken Schwankungen unterliegen – was in den Einzeltests, die stabil verlaufen und diese Probleme nicht verursachen, nicht der Fall ist.

Wie schon im RANSAC-Verfahren kann davon ausgegangen werden, dass diese Instabilität der Ausgleichung bei manchen Punktkonstellationen durch eine fehlerhafte Berechnung der Pseudoinversen $\boldsymbol{Q}^+_{\hat{\boldsymbol{S}}\hat{\boldsymbol{S}}}$ verursacht wird. Unterstützt wird diese Vermutung dadurch, wenn der Verlauf der Einzeltests näher betrachtet wird: verlaufen die ersten Tests stabil, liegt D_2^+ bei entsprechend niedrigem Stabilpunktumfang im Bereich des in Tabelle 4.12 aufgeführten Wertebereichs. Treten dann nach der Erweiterung durch einige Stabilpunkte die ersten Instabilitäten auf, geht dies mit einem sprunghaften Anstieg von D_2^+ einher. Im Allgemeinen ist also erneut eine Abhängigkeit der Größe

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

von D_2^+ vom Umfang des aktuellen $\mathbb{S}_{CS}$ erkennen: während bei kleinen $\mathbb{S}_{CS}$ generell noch geringere D_2^+ auftreten, kommt es, sobald eine gewisse Anzahl von Punkten in der Stabilpunktmenge enthalten ist, vermehrt zu größeren Werten für D_2^+. Dabei kann ebenfalls beobachtet werden, dass im 14×18-Raster im Vergleich zur höheren Diskretisierungsdichte deutlich mehr Punkte im $\mathbb{S}_{CS}$ enthalten sein können, bevor D_2^+ zu große Werte annimmt – was auch eine Erklärung dafür sein kann, dass die Verformungsanalyse dort deutlich stabiler abläuft als im 21×27-Raster.

Die beschriebenen Probleme entstehen unabhängig davon, ob die Berechnung der Testgröße im reduzierten oder erweiterten Modell erfolgt – für eine detailliertere Ursachensuche kommt erschwerend hinzu, dass sie je nach Modell bei unterschiedlichen Punkten auftreten. Grundsätzlich ist aber erkennbar, dass die Berechnung der Testgrößen im erweiterten Modell stabiler verläuft, weshalb alle folgenden Analysen in diesem Modell durchgeführt werden. Eine Vergrößerung des initialen $\mathbb{S}_{CS}$, welche zudem meist eine bessere Verteilung der Stabilpunkte zur Folge hat, sowie – in begrenzter Weise – die Kombination mit einer Berücksichtigung der Nachbarschaft bewirkt eine Abschwächung dieser Probleme.

In weiteren Versuchen stellt sich zudem heraus, dass die beschriebenen Instabilitäten weniger häufig auftreten, wenn die Einzeltests mit $\alpha = 5\%$ durchgeführt werden. Wie bereits im Regulärfall festgestellt, kommt es bei der Analyse mit $\alpha = 1\%$ in den Übergangsbereichen zwischen verformten und unverformten Bereichen zu mutmaßlich fälschlicherweise als unverformt detektierten Flächenpunkten, die dann im weiteren Verlauf zur Instabilität der Ausgleichungen beitragen. Mit $\alpha = 5\%$ können diese somit, zumindest bis zu einem gewissen Grad, vermieden werden. Nichtsdestotrotz kommt es auch mit dieser Konfiguration noch zu instabilen Ausgleichungen.

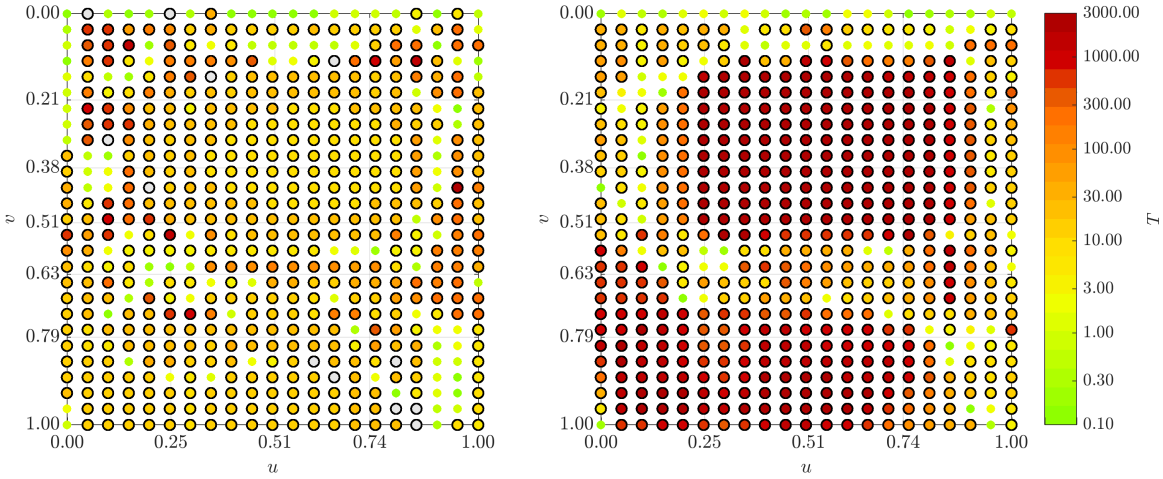
Berechnung der Gewichtsmatrix mit `pinv` (angepasster Grenzwert t'_{sv})

Der in der Analyse des RANSAC-Verfahrens ermittelte Grenzwert $t'_{sv} = 10^{-14}$ zur die Berechnung der Gewichtsmatrix kommt auch in den Einzeltests zur Anwendung. Da im RANSAC-Verfahren mit dem angepassten Grenzwert grundsätzlich ähnliche Ergebnisse erreicht werden wie mit dem Default-Grenzwert, können die in der Verformungsanalyse mit t_{sv} verwendeten initialen $\mathbb{S}_{CS}$ auch hier verwendet werden – mit dem Vorteil, dass die Auswirkungen direkt verglichen werden können.

Die Abbildungen 4.11 und 4.12 zeigen jeweils einen Vergleich zwischen den Ergebnissen der Verformungsanalysen, deren Einzeltests auf der Ermittlung der Gewichtsmatrix mit t_{sv} bzw. $t'_{sv} = 10^{-14}$ basieren. Darin zeigt sich die deutliche Stabilisierung der Ausgleichungen, die im Zuge der Berechnung der Testgrößen durchgeführt werden: die erläuterten Probleme, die zur fehlerhaften Berechnung von T führen (vgl. Abbildungen 4.11 (a) bzw. 4.12 (a)) können erfolgreich reduziert werden (vgl. Abbildungen 4.11 (b) bzw. 4.12 (b)). Die Stabilisierung wird auch darin erkennbar, dass die berechneten $\hat{\nabla}^T \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}} \hat{\nabla}$ im reduzierten und erweiterten Modell nahezu identisch sind und gleiche Freiheitsgrade ermittelt werden. Der Fehler D_2^+ wird im Vergleich zur Berechnung der Gewichtsmatrix mit t_{sv} deutlich reduziert.

Insgesamt wird sichtbar, dass das Ausmaß der Verformungen besser in den berechneten Testgrößen widergespiegelt wird als bei Berücksichtigung der mit `pinv` und t_{sv} ermittelten Gewichtsmatrix, was auf die Stabilisierung der Ausgleichungen zurückzu-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN



(a) Ergebnis mit `pinv` und t_{sv}

(b) Ergebnis mit `pinv` und $t'_{sv} = 10^{-14}$

Abbildung 4.11.: Ergebnis des Lokalisierungsverfahrens für III-V40 ($a = 0$ und $\alpha = 5\%$) unter Verwendung eines identischen initialen $\mathbb{S}_{CS}$ ($s_{CS} = 14$).

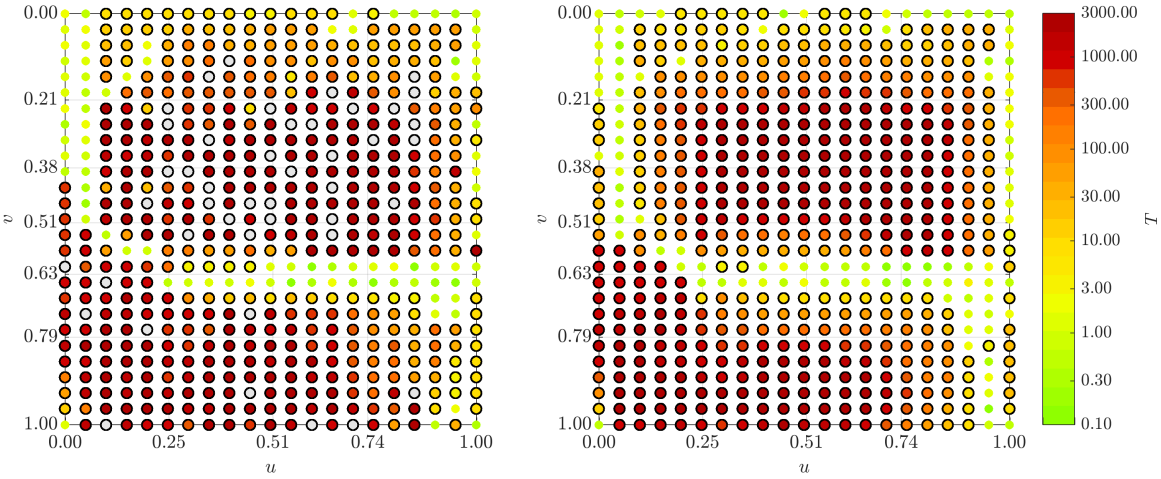
führen ist. Zwar kann es trotzdem vielfach noch zu Fehlern 1. Art kommen – durch eine Vergrößerung des initialen $\mathbb{S}_{CS}$ kann deren Anteil aber minimiert werden (vgl. Abbildung 4.12). Gleichzeitig bewirkt die Vergrößerung auch in vielen Fällen, dass der abschließende Globaltest mit der erweiterten Punktmenge angenommen werden kann, was ausgehend von zu kleinen initialen $\mathbb{S}_{CS}$ oftmals nicht gegeben ist (vgl. Tabelle 4.20).

Der Vergleich mit der Anwendung von t_{sv} in Tabelle 4.20 zeigt ebenfalls, dass der abschließende Globaltest der Ausgleichungen mit dem Default-Grenzwert stets in einer Ablehnung von H_0 endet – für den dargestellten Fall mit $s_{CS} = 14$ wird die Testentscheidung für H_A aber weitaus deutlicher getroffen ($338.759 > 1.178$) als ausgehend von der initialen Stabilpunktmenge mit $s_{CS} = 25$ ($6.738 > 1.204$).

Besonders auffällig wird das Verhalten der falsch detektierten Verformungen bei V0, wo es, falls das initiale $\mathbb{S}_{CS}$ nur relativ wenige Punkte enthält, zu einem sehr großen Anteil dieser Fehler kommt. Die Beobachtung, dass die Verformungsbereiche besser von den unverformten Bereichen abgegrenzt werden können, je mehr Punkte in der initialen Stabilpunktmenge vorliegen, kann auch für alle anderen, mit t'_{sv} durchgeführten Verformungsanalysen gemacht werden.

Für V65 wird es dann zunehmend schwierig, auf Basis der aus dem RANSAC-Verfahren verfügbaren initialen $\mathbb{S}_{CS}$ mit sehr begrenztem Umfang diese korrekte Abgrenzung zu erreichen – vor allem bei der Diskretisierung im 21×27-Raster. Hier kann es dann auch mit angepasstem Grenzwert dazu kommen, dass bei zu geringem Umfang sehr deutliche Fehler 1. Art begangen werden; mit $a = 1$ können dann im ungünstigsten Fall keine Stabilpunkte mehr detektiert werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN



(a) Ergebnis mit `pinv` und t_{sv}

(b) Ergebnis mit `pinv` und $t'_{sv} = 10^{-14}$

Abbildung 4.12.: Ergebnis des Lokalisierungsverfahrens für III-V40 ($a = 0$ und $\alpha = 5\%$) unter Verwendung eines identischen initialen $\mathbb{S}_{CS}$ ($s_{CS} = 25$).

Ausreißertests mit regularisierter Varianz-Kovarianzmatrix

Zur Untersuchung dieses Ansatzes werden ebenfalls die initialen $\mathbb{S}_{CS}$ verwendet, die im RANSAC-Verfahren mit `pinv` und t_{sv} ermittelt wurden. Die Berücksichtigung der regularisierten Varianz-Kovarianzmatrizen der Identpunkte in der Durchführung der Einzeltests der Verformungsanalyse bewirkt dabei grundsätzlich eine Stabilisierung der bei der Anwendung von `pinv` zu beobachtenden und zuvor beschriebenen Probleme.

Durch die Regularisierung wird der Rangdefekt der Varianz-Kovarianzmatrizen behoben, was dann auch zu einer deutlichen Änderung der berechneten Zwischenergebnisse der Ausgleichungen in den Einzeltests und damit der Testgrößen im Vergleich zu den zuvor untersuchten Ansätzen mit `pinv` führt. Die Korrektheit der berechneten T kann also nicht direkt quantifiziert werden – vielmehr handelt es sich bei diesem Ansatz durch die Veränderung des stochastischen Modells um eine Näherungslösung, deren Beurteilung primär visuell über den Vergleich mit dem Sollbereich der Verformung erfolgen muss.

Eine mögliche (indirekte) Vergleichsbasis bietet dennoch der Regulärfall im 7×9-Raster. Wendet man bei dieser Diskretisierung die Vergrößerung der Hauptdiagonalelemente an, kommt es ab $\lambda \geq 10^{-12}$ zu Änderungen in den berechneten Testgrößen im Vergleich zur Durchführung mit unveränderten Varianz-Kovarianzmatrizen. Aus diesem Grund werden auch in der Verformungsanalyse bei engerer Diskretisierung die zu untersuchenden Ergebnisse auf den Bereich $10^{-18} \leq \lambda \leq 10^{-13}$ (vgl. λ im RANSAC-Verfahren) beschränkt.

Im gewählten Bereich kommt es bei engeren Diskretisierungen zwischen verschiedenen λ zwar dennoch zu Schwankungen in den berechneten T, welche sich aber nur in seltenen Fällen auf die Testentscheidung auswirken. Durch die Schwankungen werden jedenfalls keine Fehler 2. Art, welche es unbedingt zu vermeiden gilt, ausgelöst.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Tabelle 4.20.: Verlauf der Schritte im Lokalisierungsverfahren ($\alpha = 5\%$) und geschätzte Elemente der Starrkörperbewegung mit dem erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$ für III-V40 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` mit Default-Grenzwert t_{sv} sowie $t'_{sv} = 10^{-14}$ (Rot hinterlegte Felder: Ablehnung von H_0 im Globaltest).

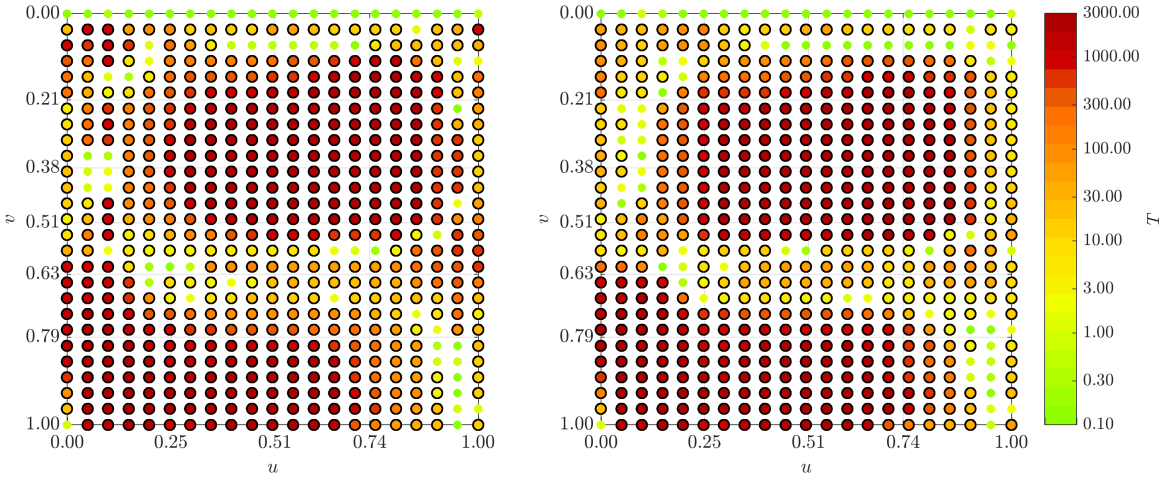
	s_{CS} inital	überpr.	erw.	t_x, t_y, t_z $[m]$	$\sigma_{t_x}, \sigma_{t_y}, \sigma_{t_z}$ $[mm]$	ω, ϕ, κ $[gon]$	$\sigma_\omega, \sigma_\phi, \sigma_\kappa$ $[mgon]$
$a = 0$ t_{sv}	14	13	101	0.302 0.600 0.001	0.412 0.267 0.460	34.966 0.246 −10.108	67.189 77.496 75.456
$a = 0$ t_{sv}	25	20	86	0.300 0.600 0.000	0.079 0.053 0.090	35.009 − 0.002 −10.012	12.386 15.277 13.576
$a = 0$ t'_{sv}	14	13	76	0.300 0.600 0.000	0.031 0.020 0.036	35.004 0.004 − 9.998	4.864 5.868 5.203
$a = 0$ t'_{sv}	25	25	101	0.300 0.600 0.000	0.028 0.020 0.032	35.008 − 0.001 −10.012	4.378 5.459 4.783

Die Anzahl der Fehler 1. Art sowie die Deutlichkeit, mit der diese Fehlentscheidungen getroffen werden, können in begrenztem Ausmaß durch die Größe von λ gesteuert werden. Während für die Untersuchungen im 14×18-Raster mit $10^{-18} \leq \lambda \leq 10^{-15}$ durchwegs akzeptable Ergebnisse erzielt werden, sollte für das 21×27-Raster λ auf 10^{-15} bis 10^{-13} vergrößert werden, um grobe Fehlentscheidungen in den unverformten Bereichen zu reduzieren (vgl. Abbildung 4.13).

Beim Vergleich der im reduzierten und erweiterten Modell der Einzeltests berechneten $\hat{\nabla}^T \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}} \hat{\nabla}$ ist festzustellen, dass die Unterschiede zwischen beiden Berechnungsarten generell sehr klein ausfällt und mit größer werdendem λ sogar weiter abnimmt. So unterscheiden sich die berechneten T für $\lambda = 10^{-18}$ in der Regel erst nach der fünften oder sechsten Nachkommastelle, bei $\lambda = 10^{-13}$ tritt ein Unterschied erst nach der 10. Nachkommastelle auf. Das reduzierte Modell ist also für die Verarbeitung der regularisierten Varianz-Kovarianzmatrizen als geeignet anzusehen.

Insgesamt ist zu erkennen, dass die mit der Regularisierungsmethode durchgeführten Verformungsanalysen sehr ähnliche Ergebnisse zum zuvor untersuchten Ansatz (`pinv` mit $t'_{sv} = 10^{-14}$) liefern. Wie auch dort kommt es in vielen Fällen zu einigen in unverformten Bereichen detektierten Verformungen. Ausgenommen von diesem Verhalten sind die untersuchten Diskretisierungen des verformungsfreien Datensatzes, wo durch die Regularisierung alle berechneten T nahe 0 liegen und somit alle Punkte korrekterweise als unverformt detektiert werden können. Für die untersuchten Diskretisierungsdichten ist hierfür $\lambda = 10^{-18}$ ausreichend – die obige Einschränkung für den zu

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub



(a) Ergebnis mit $\lambda = 10^{-18}$ (b) Ergebnis mit $\lambda = 10^{-13}$

Abbildung 4.13.: Ergebnis des Lokalisierungsverfahrens für III-V40 ($a = 0$ und $\alpha = 5\%$) bei verschiedenen λ unter Verwendung eines identischen initialen $\mathbb{S}_{CS}$ ($s_{CS} = 14$).

verwendenden Bereich gilt also nur für die verformten Datensätze.

Tabelle 4.21.: Verlauf der Schritte im Lokalisierungsverfahren ($\alpha = 5\%$) und geschätzte Elemente der Starrkörperbewegung mit dem erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$ für III-V40 bei Berücksichtigung der regularisierten Varianz-Kovarianzmatrizen ($\lambda = 10^{-13}$).

	s_{CS} inital	überpr.	erw.	t_x, t_y, t_z $[m]$	$\sigma_{t_x}, \sigma_{t_y}, \sigma_{t_z}$ $[mm]$	ω, ϕ, κ $[gon]$	$\sigma_\omega, \sigma_\phi, \sigma_\kappa$ $[mgon]$
				0.300	0.022	35.008	3.295
$a = 0$	14	13	79	0.600	0.015	− 0.005	4.005
				0.000	0.024	−10.009	3.683
				0.300	0.019	35.009	2.988
$a = 0$	25	25	117	0.600	0.013	0.000	3.649
				0.000	0.022	−10.011	3.215

In vielen Fällen lässt sich auch hier wieder die Abhängigkeit der Qualität des Ergebnisses vom Umfang der initialen Stabilpunktmenge beobachten, besonders im 21×27-Raster. So zeigt sich beispielsweise im Vergleich zum in Abbildung 4.13 dargestellten Beispiel der Verformungsanalyse bei der Ausführung mit einem größeren initialen $\mathbb{S}_{CS}$ ($s_{CS} = 25$, vgl. Anhang A), dass sich so der Anteil der Fehler 1. Art deutlich reduzieren lässt. Für die III-V65-Diskretisierung kann mit diesem Ansatz bei zu geringem initialen Stabilpunktumfang erneut keine (korrekte) Lösung gefunden werden.

Analog zu den vorhergehenden Untersuchungen der verformten Datensätze ist in Kombination mit $a = 0$ ein Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ zu wählen, um zuverlässig

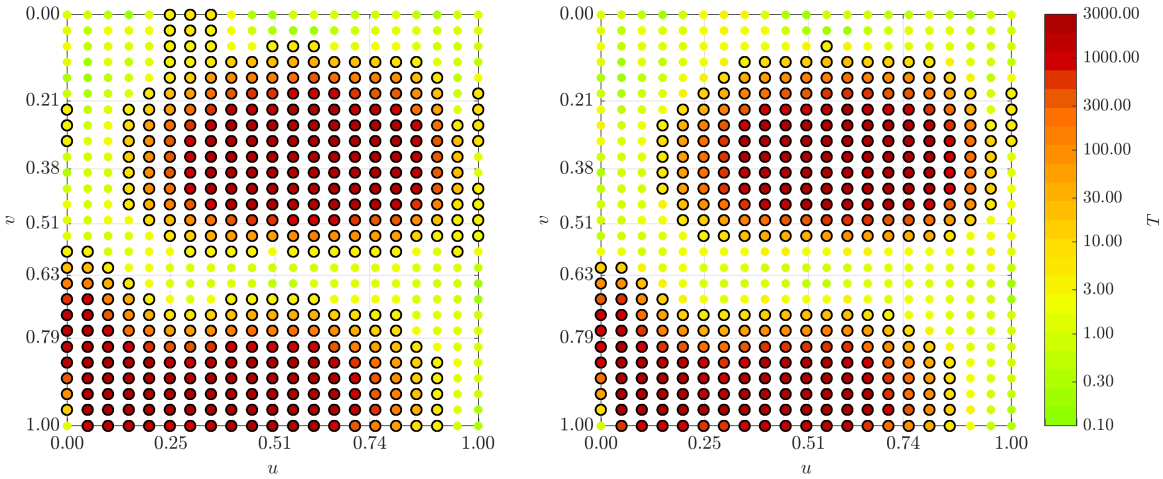
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

erweiterte $\mathbb{S}_{CS}$ zu finden, mit denen der abschließende Globaltest zu einer Annahme der Nullhypothese führt. Unter Berücksichtigung der Nachbarschaft in den Einzeltests ($a = 1$) kann dagegen wieder mit $\alpha = 1\%$ gearbeitet werden. In dieser Konfiguration sind im Ergebnis nur noch sehr geringe Unterschiede sowohl zwischen verschiedenen λ als auch zur Analyse mit `pinv` mit t'_{sv} zu erkennen.

Ausreißertests mit diagonalisierten Varianz-Kovarianzmatrizen

Die Verformungsanalyse auf Basis der diagonalisierten $\mathbf{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$, also ohne die aus der B-Spline-Schätzung abgeleiteten Abhängigkeiten zwischen den Flächenpunkten, führt zu einer einer deutlichen Reduktion der Fehler 1. Art und gleichzeitig auch zu einer Verkleinerung der detektierten Verformungsbereiche (vgl. Abbildung 4.14).

Im Gegensatz zu den zuvor untersuchten Ansätzen ist es möglich, die Ausreißertests bei verformten Datensätzen mit $\alpha = 1\%$ durchzuführen, um stets eine konsistente Stabilpunktmenge zu ermitteln, welche bei Minimierung der Fehler 1. Art zu einer Annahme von H_0 im abschließenden Globaltest führt.



(a) Ergebnis mit $\alpha = 5\%$ (b) Ergebnis mit $\alpha = 1\%$

Abbildung 4.14.: Ergebnis des Lokalisierungsverfahrens für III-V40 ($a = 0$, $s_{CS} = 25$) auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Eine Abhängigkeit vom Umfang der initialen Stabilpunktmenge ist in diesem Ansatz nur mehr in abgeschwächter Form zu erkennen: die Untersuchungen der verformten Datensätze mit verschiedenen $\mathbb{S}_{CS}$ weisen in den Endergebnissen nur geringe oder keine Unterschiede auf. Beim verformungsfreien Datensatz sind dagegen deutliche Unterschiede feststellbar; dort wird, wie auch schon in den mit `pinv` arbeitenden Ansätzen, nur bei genügend großer Anzahl von initialen Stabilpunkten ein überwiegender Teil der Identpunkte korrekt als unverformt detektiert.

Die Nichtberücksichtigung der Korrelationen zwischen den Flächenpunkten bewirkt, dass die T von der größten Verformung hin zum unverformten Bereich im Vergleich zu den anderen Ansätzen schneller kleiner werden, was eine engere Eingrenzung der Verformungsbereiche zur Folge hat. Dadurch enthalten die erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$ stets mehr Punkte – die hohe Genauigkeit der geschätzten Elemente der Starrkörperbewegung

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

(vgl. Tabelle 4.22) kommt aber hauptsächlich durch das Nullsetzen der Korrelationen zustande.

Tabelle 4.22.: Verlauf der Schritte im Lokalisierungsverfahren und geschätzte Elemente der Starrkörperbewegung mit dem erweiterten $\mathbb{S}_{CS}$ für III-V40 ($s_{CS} = 25$) bei Berücksichtigung der diagonalisierten Varianz-Kovarianzmatrizen.

	s_{CS} inital	überpr.	erw.	t_x, t_y, t_z $[m]$	$\sigma_{t_x}, \sigma_{t_y}, \sigma_{t_z}$ $[mm]$	ω, ϕ, κ $[gon]$	$\sigma_\omega, \sigma_\phi, \sigma_\kappa$ $[mgon]$
$a = 0$ $\alpha = 5\%$	25	24	177	0.300	0.010	35.007	1.538
				0.600	0.007	− 0.011	1.929
				0.000	0.011	−10.010	1.696
$a = 0$ $\alpha = 1\%$	25	24	236	0.300	0.011	35.008	1.636
				0.600	0.007	− 0.006	2.017
				0.000	0.012	−10.013	1.840

Durch die Berücksichtigung der Nachbarschaft in den Ausreißertests kommt es zwar wiederum zu einer Ausweitung des detektierten Verformungsbereichs, die Homogenisierung der T fällt aber deutlich schwächer aus, als in den Ansätzen, die die Korrelationen miteinbeziehen.

4.3.3. Vergleich und Diskussion der Ergebnisse

Bei der Durchführung der Verfomungsanalyse in verschiedenen Diskretisierungsdichten lassen sich einige Gemeinsamkeiten beobachten. So lässt sich der Anteil von fälschlicherweise in unverformten Bereichen detektierten Verformungen (Fehler 1. Art) durch eine Vergrößerung der im RANSAC-Verfahren bestimmten initialen Stabilpunktmenge deutlich reduzieren.

Die detektierten Verformungsbereiche lassen dabei, abgesehen vom Ansatz, der die Korrelationen vernachlässigt, nicht detaillierter durch engere Diskretisierungen eingrenzen; die detektierten Bereiche bleiben also, unabhängig von der Diskretisierungsdichte, in etwa gleich groß, je nach Anteil der Fehler 1. Art kommt es im Vergleich zum 7×9-Raster sogar zu einer Vergrößerung. Ein diesbezüglicher Informationsgewinn im Vergleich zum Regulärfall lässt sich also – zumindest in den untersuchten Diskretisierungen – nicht eindeutig feststellen. Hinzu kommt, dass einerseits der Rechenaufwand für die Ausgleichungen bei engeren Diskretisierungen, vor allem bei geringeren Verformungsanteilen, durch die größer werdenden zu verarbeitenden Matrizen um ein Vielfaches steigt. Andererseits muss für eine stabile Verarbeitung der singulären Varianz-Kovarianzmatrizen der Flächenpunkte eine mehr oder weniger starke Manipulation des stochastischen Modells in Kauf genommen werden.

Diese Manipulationen haben demnach, wie bereits zuvor dargestellt, Auswirkungen auf die endgültige Schätzung der Transformationsparameter, aber auch auf die

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

berechneten T der Einzeltests und damit in einigen Fällen auch auf die Testentscheidungen. Dazu sind in Tabelle 4.23 für jeweils einen Identpunkt mit starker Verformung ($\hat{\boldsymbol{S}}_{12,9}$), nahe der verformten Bereiche ($\hat{\boldsymbol{S}}_{12,15}$) und im unverformten Bereich ($\hat{\boldsymbol{S}}_{0,4}$) die Zwischengrößen der Ausgleichungen im Zuge der Einzeltests zusammengefasst. Das Lokalisierungsverfahren wird dabei auf Basis eines identischen initialen $\mathbb{S}_{CS}$ ausgeführt ($s_{CS} = 25$, vgl. Abbildung A.21 (b)).

Tabelle 4.23.: Ergebnisse des Ausreißertests für ausgewählte Punkte von III-V40 bei Anwendung der untersuchten Ansätze ($t'_{sv} = 10^{-14}$, $\lambda = 10^{-13}$). Für α wird im *diag*-Ansatz 1% gewählt, in allen anderen Ansätzen 5%. Rot hinterlegte Felder kennzeichnen die Verletzung der Bedingung (3.26) der Äquivalenz der Freiheitsgrade zwischen reduziertem und erweitertem Modell.

$\hat{\boldsymbol{S}}$	Ansatz	$d\,[mm]$	s_{CS}	f_e	$\hat{\sigma}_0^{2\prime}$	T	$F_{1-\alpha}$
$\hat{\boldsymbol{S}}_{12,9}$	t_{sv}	7.641	86	149	0.752	$1.6 \cdot 10^4$	2.67
	t'_{sv}	7.642	101	138	0.825	$1.4 \cdot 10^4$	2.67
	$+\lambda\boldsymbol{I}$	7.635	117	345	0.384	$3.0 \cdot 10^4$	2.63
	diag	7.612	236	702	0.810	$1.1 \cdot 10^4$	3.81
$\hat{\boldsymbol{S}}_{12,15}$	t_{sv}	0.105	73	132	0.792	$4.7 \cdot 10^3$	2.67
	t'_{sv}	0.090	84	129	0.792	64.24	2.68
	$+\lambda\boldsymbol{I}$	0.087	87	255	0.465	$1.2 \cdot 10^2$	2.64
	diag	0.090	144	423	0.519	3.13	3.83
$\hat{\boldsymbol{S}}_{0,4}$	t_{sv}	0.063	25	49	0.966	1.52	2.79
	t'_{sv}	0.063	25	48	0.952	1.54	2.80
	$+\lambda\boldsymbol{I}$	0.063	25	66	0.753	0.05	2.74
	diag	0.063	25	66	0.581	0.32	4.09

Das Identpunktpaar $\hat{\boldsymbol{S}}_{0,4}$ liegt dabei in der initialen Stabilpunktmenge und weist dort den minimalen Abstand auf, wodurch der erste Einzeltest bei der Überprüfung des $\mathbb{S}_{CS}$ mit diesem Punkt durchgeführt wird – die Auswirkungen der verschiedenen Ansätze sind dort also direkt vergleichbar. Durch die Anwendung von t'_{sv} kommt es im Vergleich zum Default-Grenzwert zwar nur zu kleinen Veränderungen, dennoch werden bei t_{sv} die zuvor beschriebenen Instabilitäten in der Ausgleichungen sichtbar: die berechneten Freiheitsgrade im erweiterten Modell ($f_e = 49$) stimmen nicht mit denen im reduzierten Modell ($f - n_A = 48$) überein, auch zwischen den jeweiligen $\hat{\nabla}^T \boldsymbol{Q}^+_{\hat{\nabla}\hat{\nabla}} \hat{\nabla}$ kommt es zu unterschieden. Hierbei zeigt sich also, dass diese Instabilitäten nicht nur in den offensichtlichen und deutlichen Fehlentscheidungen vorzufinden sind, sondern ebenfalls in vielen anderen Fällen – wenn auch in schwächerem Ausmaß (vgl. auch $\hat{\boldsymbol{S}}_{12,9}$). Unter Verwendung von t'_{sv} werden die f_e korrekt ermittelt, zwischen den beiden Modellen kommt es zudem zu keinen nennenswerten Unterschieden. Die beiden anderen Ansätze führen bei $\hat{\boldsymbol{S}}_{0,4}$ (wie auch bei allen anderen Punkten) zu einer Erhöhung von f_e, welche

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

durch die Regularisierung der $\mathbf{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ entsteht; die Freiheitsgrade berechnen sich dann aus $f_e = 3s_{CS} - u_{TF} - n_A$. Gleichzeitig kommt es zu einer Verkleinerung der T, diese liegen dann deutlich unter den entsprechenden Quantilen der Testverteilungen.

Die T der anderen Punkte sind aufgrund der unterschiedlich zusammengesetzten $\mathbb{S}_{CS}$ zum Zeitpunkt der Einzeltests zwar nicht direkt vergleichbar, bei großen Unterschieden zwischen den Größen lässt sich der Einfluss der aktuellen Stabilpunktmenge jedoch ausschließen. Für $\hat{\boldsymbol{S}}_{12,9}$ zeigen sich Unterschiede zwischen den T der verschiedenen Ansätze, aufgrund deren Größe haben diese jedoch keine Auswirkungen auf die Testentscheidungen. Bei $\hat{\boldsymbol{S}}_{12,15}$, der sich in der Nähe des Verformungsbereichs befindet, jedoch nur sehr kleine Verformungen von $d \approx 0.1\,mm$ aufweist, ergeben sich große Differenzen zwischen den ermittelten T, welche auch Auswirkungen auf die Testentscheidung haben können. Sehr deutlich wird der Unterschied in der T des Ansatzes mit der Regularisierung der $\mathbf{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$, wo es durch die Anwendung von t'_{sv} zu einer gravierenden Reduktion der Testgröße kommt; die Diagonalisierung führt zu einer weiteren Reduktion und letztendlich im Gegensatz zu allen anderen Ansätzen zu einer Annahme von H_0 des Einzeltests.

Der Vergleich der Testgrößen im Verhältnis zur tatsächlichen Verformung der einzelnen diskretisierten Flächenpunkte zeigt, dass sich das Ausmaß der Verformung im Allgemeinen durch die Vernachlässigung der Korrelationen zwischen den Punkten sichtlich besser widerspiegelt, als in den anderen untersuchten Ansätzen – was vor allem im Übergang zwischen verformten und unverformten Bereichen der Fläche erkennbar wird. In diesem Bereich hat dies verstärkt Auswirkungen auf Testentscheidungen und sorgt dafür, dass gering verformte Punkte, unabhängig von der Verformung in ihrer Umgebung, eher als unverformt detektiert werden.

Für die Testentscheidung der Einzeltests in den anderen Ansätzen ist also nicht erstrangig entscheidend, wie groß die Verformung zwischen dem entsprechenden Identpunktpaar ausfällt, sondern vielmehr die Nähe des überprüften Punkts zum tatsächlichen Verformungsbereich. Mit a wurde bei der Entwicklung der Verformungsanalyse ein Parameter eingeführt, mit dem durch Berücksichtigung der Punktnachbarschaft eine flächenhaftere Deformationsaussage abgeleitet werden sollte. Die hier gewonnenen Erkenntnisse zeigen jedoch, dass die aus den Kontrollpunkten abgeleiteten Korrelationen eine solche Berücksichtigung der Nachbarschaft – wenn auch in komplexerer Form (vgl. Abbildung 4.3) – ohnehin implizieren. Eine Anwendung von a in Kombination mit den Ansätzen, welche die Korrelation berücksichtigen, sollte daher in Frage gestellt werden – zumal dadurch der detektierte Verformungsbereich weiter vergrößert wird und eine Vielzahl tatsächlich unverformter Punkte in diesen Bereich fallen. Bei hohen Verformungsanteilen führt dies dann wiederum dazu, dass die Elemente der Starrkörperbewegung aufgrund des geringen Umfangs der finalen Stabilpunktmenge auch nur mit geringer Genauigkeit bestimmt werden können.

Insgesamt ist zu erkennen, dass das anfangs vorgegebene Ziel, Verformungen aufzudecken, welche größer als das die Genauigkeit der simulierten Messpunkte (hier $1\,mm$) hinausgehen, übererfüllt wird. Selbst im Ansatz ohne berücksichtigte Korrelationen werden noch Punkte als verformt detektiert, welche Verformungen von weit unter dem angestrebten Wert aufweisen. Durch die aus den Korrelationen entstehenden

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

Abhängigkeiten ist bei den Ansätzen, die diese berücksichtigen, kein allgemein gültiger Grenzwert für minimal aufdeckbare Verformungen feststellbar; beim Ansatz ohne Berücksichtigung der Korrelationen können mit $0.40\,mm$ und $0.15\,mm$ solche Werte für den Randbereich bzw. den inneren Bereichen der Fläche angegeben werden, über denen die Verformungen liegen müssen, um erfolgreich aufgedeckt werden zu können. Diese Werte liegen somit im Bereich der ein- bis dreifachen Standardabweichung $\sigma_{\hat{\boldsymbol{S}}}$ der Punktlage der diskretisierten Punkte (vgl. Abschnitt 4.1).

Das bei der Auswertung des RANSAC-Verfahrens beobachtete Verhalten, dass eine steigende Diskretisierungsdichte bei gleich bleibendem Verformungsanteil nicht zu einer Vergrößerung der ermittelten Stabilpunktmengen führt, lässt sich ebenfalls auf die Korrelationen zwischen den Flächenpunkten zurückführen: die Auswahl der Punkte, die für die Erstellung des initialen $\mathbb{S}_{CS}$ in Frage kommen, erfolgt über einen Grenzwert, der allein auf dem Abstand zwischen den Punkten des jeweiligen Identpunktpaars und dessen Genauigkeit basiert. Die Punkte im Übergangsbereich weisen in der Regel kleine Identpunkt-Abstände auf und fallen daher unter den Grenzwert. Die abschließende ausgleichende Transformation der diese Punkte enthaltenden Punktmenge führt jedoch, aufgrund der Korrelation zu Flächenpunkten im Verformungsbereich, in den meisten Fällen zu einer Ablehnung des Globaltests und daher nicht zu einer konformen Lösung. Mit steigendem Verformungsanteil gibt es dann nur noch wenige Punkte, mit denen eine solche konforme Lösung möglich ist – wodurch die Wahrscheinlichkeit sinkt, diese mit einer anfänglichen zufälligen Auswahl von drei Identpunkten zu repräsentieren, ohne dass Punkte aus dem Übergangsbereich unter dem Grenzwert liegen; dadurch werden einerseits die hohen Iterationszahlen notwendig, andererseits enthalten die ermittelten Punktmengen nur wenige Punkte, bei hohen Verformungsanteilen kann deshalb auch keine konforme Menge mehr gefunden werden.

Ausnahme von diesem Verhalten des RANSAC-Verfahrens bildet wiederum der Ansatz mit diagonalisierten $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$. Hier ist es durch Vernachlässigung der Korrelationen möglich, mit weitaus weniger Rechenaufwand ein deutlich größeres initiales $\mathbb{S}_{CS}$ zu finden, welches zu einer Annahme des Globaltests führt.

Auch in der Verformungsanalyse mit diagonalisierten $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{S}}_I}$ wird eine deutliche Reduzierung des benötigten Rechenaufwands und damit der Laufzeit des Verfahrens bemerkbar: im Vergleich zu den anderen Ansätzen, bei denen die Inversion der vollbesetzten und bei steigender Diskretisierungsdichte immer größer werdenden Matrizen mehr und mehr Rechenkapazität in Anspruch nimmt, kann die Gesamtlaufzeit der Lokalisierung durch die Diagonalisierung um 50 bis 60 % gesenkt werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

5. Zusammenfassung und Ausblick

Das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren bietet die Möglichkeit, flächenhafte Verformungen, die zwischen zwei simulierten Messepochen auftreten, zu detektieren. Die statistisch gesicherten Deformationsaussagen werden dabei auf Basis von korrespondierenden Punkten getroffen, welche auf den approximierenden B-Spline-Flächen durch Diskretisierung in einem im Parameterraum definierten, regelmäßigen Raster bestimmt werden. Nach der in Abschnitt 2.2.2 definierten Einteilung der Modelle für laserscanningbasierte Deformationsanalysen ist das Verfahren somit den parameterbasierten Modellen zuzuordnen.

Der Ablauf des implementierten Verfahrens zeigt dabei einige Parallelen zum Kongruenzmodell aus der klassischen, punktbasierten Deformationsanalyse: nach der getrennten Ausgleichung der Einzelepochen zur Approximation der Punktwolken kann nach dem Übergang auf die diskretisierten Flächenpunkte ebenfalls von einem zweistufigen Aufbau durch die Unterteilung in unverformte und verformte Punkte gesprochen werden. Basierend auf den im RANSAC-Verfahren ermittelten Stabilpunkten werden die Parameter der Helmerttransformation geschätzt, mit denen die Starrkörperbewegung als systematische Abweichung zwischen den Epochen modelliert werden kann. Diese Modellierung ist Voraussetzung dafür, dass im anschließenden Schritt die Verformungsanalyse durchgeführt werden kann, um vom Modell der Helmerttransformation bzw. der Kongruenz abweichende Punkte detektieren zu können. Die Lokalisierung dieser Punkte wird – erneut analog zum klassischen Kongruenzmodell – nach einem zweistufigen Aufbau implementiert, der auf der iterativen Analyse einzelner Punkte basiert, wobei zunächst die zuvor ermittelten Stabilpunkte verdächtigt werden, einer Verformung zu unterliegen (Rückwärtsstrategie). Im zweiten Schritt werden im Sinne einer Vorwärtsstrategie alle weiteren Punkte, welche bislang nicht in der Stabilpunktmenge enthalten sind, auf Konformität mit dem Modell der Helmerttransformation untersucht. Als Parallele zum globalen Kongruenztest kann hier der Globaltest nach der Helmerttransformation gesehen werden.

Durch Fehlerfortpflanzung wird im Zuge der Diskretisierung die stochastische Information der in der B-Spline-Approximation geschätzten Koordinaten der Kontrollpunkte auf die diskretisierten Flächenpunkte übertragen. Die in den Folgeausgleichungen benötigte Invertierbarkeit der entstehenden Varianz-Kovarianzmatrix der Flächenpunkte ist abhängig von den im Vorfeld festgelegten Parametern der B-Spline-Fläche und nicht mehr gegeben, wenn die Anzahl der diskretisierten Werte des Rasters in mindestens einer Parameterrichtung die Anzahl der Kontrollpunkte übersteigt. Die hier verwendete B-Spline-Fläche begrenzt somit die Anzahl der Flächenpunkte, an denen die Verformungen im Regulärfall untersucht werden können, auf $7 \cdot 9 = 63$ Identpunkte.

Der Detailgrad bzw. die Flächenhaftigkeit der abgeleiteten Deformationsaussage ist

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

jedoch abhängig von der Diskretisierungsdichte der Flächenpunkte, weshalb mit dem Ziel der Erhöhung der Diskretisierungsdichte drei verschiedene Ansätze umgesetzt wurden, mit denen die damit einhergehende Singularität der Varianz-Kovarianzmatrizen verarbeitet werden kann. Diese Ansätze arbeiten entweder mit der Pseudoinversion der singulären Matrizen oder mit ihrer Regularisierung.

Die Berechnung der Pseudoinversen auf Basis der Singulärwertzerlegung erfordert dabei die Wahl eines geeigneten Grenzwerts für das Nullsetzen der kleinsten Singulärwerte. Ein solcher Grenzwert konnte mit $t'_{sv} = 10^{-14}$ für das verwendete stochastische Modell empirisch ermittelt werden – ändern sich bei Auswertungen anderer Datensätze die zu invertierenden Matrizen, was bei anderer Parametrisierung der B-Spline-Flächen oder anderen Rauschniveaus der Fall ist, sollte die Wahl des Grenzwerts erneut überprüft und gegebenenfalls angepasst werden. Gleiches gilt für den Regularisierungsparameter λ, der mit einem Wertebereich von $10^{-18} \leq \lambda \leq 10^{-13}$ für die hier vorgegebene B-Spline-Fläche und das Rauschniveau der simulierten Messungen angepasst zur Anwendung kommt. Der Ansatz, mit dem die Deformationsanalyse über die Diagonalisierung der Varianz-Kovarianzmatrizen durchgeführt wird, ist hingegen unabhängig vom Aufbau des stochastischen Modells einsetzbar; für die beiden anderen Ansätze sollte hingegen in einer Weiterentwicklung der Deformationsanalyse die Eignung der hier eingesetzten t'_{sv} und λ auf Veränderungen im stochastischen Modell genauer untersucht werden. Ziel sollte es dabei sein, deren Betrag analytisch aus den Varianz-Kovarianzmatrizen abzuleiten.

Ein weiterer möglicher Ansatz zur Verarbeitung der singulären Matrizen besteht in Berechnungsmöglichkeiten der Pseudoinversen, die nicht über die Singulärwertzerlegung erfolgen. Das in Katsikis et al. (2011) vorgestellte Verfahren, das mit der QR-Zerlegung der singulären Matrizen arbeitet, verspricht dabei eine stabile Berechnung der Pseudoinversen bei gleichzeitig reduzierten Laufzeiten im Vergleich zum Weg über die Singulärwertzerlegung – was durch in dieser Arbeit durchgeführten, ersten Versuchen zunächst nicht bestätigt werden konnte. Dies ist damit zu begründen, dass auch in diesem Ansatz ein geeigneter Grenzwert einfließen muss, welcher jedoch hier nicht ermittelt werden konnte. In zukünftigen Entwicklungen sollte diese Möglichkeit aber nochmals in Betracht gezogen werden.

Da die maximale Diskretisierungsdichte mit regulärer Varianz-Kovarianzmatrix von der Parametrisierung der zugrunde liegenden B-Spline-Fläche abhängt, besteht eine weitere Möglichkeit in der Erhöhung des Detailgrads der Verformungsanalyse in der Anpassung der Flächenparameter. Um die Anzahl der Kontrollpunkte und damit auch der regulär diskretisierbaren Flächenpunkte zu erhöhen, sorgt demnach eine Erhöhung der Anzahl der Knoten in den Knotenvektoren. Dieser Weg birgt jedoch die Gefahr einer Überparametrisierung, welche negative Auswirkungen auf die Approximationsqualität hat. Da es sich bei der hier untersuchten Fläche zudem um eine Sollfläche handelt, wurde dieser Ansatz nicht näher untersucht; in künftigen Entwicklungen, welche die Schätzung der Flächenparameter im Vorfeld der hier implementierten Deformationsanalyse behandeln, könnte diese Möglichkeit der Maximierung der Kontrollpunktanzahl aber berücksichtigt werden.

Die Ergebnisse der Lokalisierung der Verformungen zeigen, dass tatsächlich verformte

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Bereiche stets, auch unabhängig von der Wahl Diskretisierungsdichte und des Ansatzes zur Verarbeitung der singulären Varianz-Kovarianzmatrizen, als solche detektiert werden. Eindeutige Fehler 2. Art in den Einzeltests sind dabei nur zu beobachten, wenn in den entsprechenden Ansätzen t'_{sv} und λ nicht an das stochastische Modell angepasst werden oder die initialen Stabilpunktmengen nur wenige (oder schlecht verteilte) Identpunktpaare enthalten. Generell betrachtet liegt die Schwierigkeit in der Lokalisierung der Verformungen darin, Identpunktpaare, zwischen denen keine Verformung besteht, auch korrekt als unverformt zu erkennen. Besonders bei zunehmender Verformung der Fläche und Diskretisierungsdichte ist die Ursache hierfür in den Korrelationen zwischen den Flächenpunkten zu suchen, wodurch die verformten Bereiche der Fläche starken Einfluss auf die Bereiche haben, die eigentlich keinen Verformungen unterliegen.

Für die Lokalisierung verformter Punkte besteht in der Theorie die Option, den Vorteil der Ausgleichung im reduzierten Modell zu nutzen, mit der die Einzeltests ohne Neuausgleichung durchgeführt werden können – was eine deutliche Reduktion der Laufzeit zur Folge hätte. Voraussetzung hierfür ist jedoch eine konstant bleibende Stabilpunktmenge, wodurch deren fortlaufende Erweiterung nicht in der Berechnung der für die Testgröße relevanten Größen berücksichtigt werden könnte. Diese Möglichkeit könnte in Weiterentwicklungen jedoch zumindest so genutzt werden, dass, sobald eine weitere Vergrößerung der Stabilpunktmenge aufgrund der Größe der Testgrößen nicht mehr zu erwarten ist, auf die Neuausgleichungen verzichtet wird. Auch eine Maximierung des Umfangs der Stabilpunktmenge im RANSAC-Verfahren könnte hier eine Möglichkeit bieten, die folgenden Einzeltests nur auf Basis dieser Punktmenge umzusetzen – die hohen Korrelationen zwischen den Flächenpunkten bei steigender Diskretisierungsdichte verhindern hier jedoch wiederum, eine deutliche Vergrößerung der initialen Punktmenge zu erreichen.

Unter den in Abschnitt 2.2.2 dargelegten und im Zusammenhang mit dieser Arbeit nicht näher behandelten Herausforderungen bei der Entwicklung flächenhafter Deformationsanalysen muss in der Weiterentwicklung und vor allem vor dem Übergang der Anwendung des Ansatzes auf reale Messdaten das Problem der notwendigen identischen Parametrisierung gelöst werden. Ohne diese Voraussetzung kann die hier durchgeführte Diskretisierung zur Zuordnung identer Bereiche nicht erfolgen; eine Möglichkeit besteht hier darin, eine potenzielle Starrkörperbewegung zwischen den Messepochen zunächst näherungsweise zu bestimmen, um damit die Punktwolke der Vergleichsepoche in die Nähe der Nullepoche zu transformieren. Anhand der dann übereinander liegenden Punktwolken könnte eine gemeinsame B-Spline-Fläche approximiert werden, die als Basis für die Parametrisierung der Messdaten herangezogen werden kann.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

Symbolverzeichnis

$\boldsymbol{A}$	Designmatrix im Gauß-Markov-Modell
a	Größe der Nachbarschaft im Ausreißertest
α	Signifikanzniveau
$\boldsymbol{B}$	Designmatrix zu $\hat{\nabla}$ im erweiterten Gauß-Markov-Modell
β	Fehler 2. Art
$\hat{\boldsymbol{C}}$	B-Spline-Kurvenpunkte
$c_{\boldsymbol{P}}$	Anzahl der Kontrollpunkte einer B-Spline-Fläche
$c_u + 1$	Anzahl der Kontrollpunkte in u-Richtung
$c_v + 1$	Anzahl der Kontrollpunkte in v-Richtung
$\boldsymbol{d}$	Vektor der euklidischen Abstände zwischen korrespondierenden Punkten
d	Euklidischer Abstand eines korrespondierenden Punktpaars
δ	Rangdefekt
$\Delta_{\boldsymbol{S}}$	Simuliertes Messrauschen
D^+	Fehlermaß für Pseudoinverse
$\boldsymbol{e}$	Vektor der Verbesserungen im Gauß-Markov-Modell
E_0	Null- bzw. Referenzepoche
E_1	Vergleichsepoche
ε	Ausreißeranteil
f	Anzahl der Freiheitsgrade
γ	Testgüte
H_0	Nullhypothese
H_A	Alternativhypothese
$\boldsymbol{l}$	Gekürzte Beobachtungen im Gauß-Markov-Modell
λ	Parameter für die Regularisierung singulärer Varianz-Kovarianzmatrizen
$m + 1$	Anzahl der Knoten in u-Richtung
μ	Maßstab der Helmerttransformation
$\boldsymbol{N}$	Normalgleichungsmatrix im Gauß-Markov-Modell
n_A	Anzahl der als Ausreißer verdächtigten Beobachtungen im Ausreißertest
$\hat{\nabla}$	Zusätzlicher Parametervektor zur Modellierung grober Fehler im erweiterten Gauß-Markov-Modell
n_{ident}	Anzahl Identpunkte
$n_{\boldsymbol{l}}$	Anzahl der Beobachtungen

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

s_{min}	Mindestanzahl von Punkten im RANSAC Concensus Set
n_u	Anzahl diskretisierter Werte in u-Richtung
$N_{i,p}$	B-Spline-Basisfunktion vom Grad p in u-Richtung
n_v	Anzahl diskretisierter Werte in v-Richtung
$N_{j,q}$	B-Spline-Basisfunktion vom Grad q in v-Richtung
p	Grad einer B-Spline-Basisfunktion in u-Richtung
$\boldsymbol{P}$	Kontrollpunkte einer B-Spline-Kurve oder -Fläche
$\hat{\boldsymbol{P}}$	Geschätzte Kontrollpunkte
$\boldsymbol{Q}$	Kofaktormatrix
q	Grad einer B-Spline-Basisfunktion in v-Richtung
$\boldsymbol{R}$	Rotationsmatrix der Helmerttransformation
$\boldsymbol{S}$	Flächenhafte Messpunkte
s	Anzahl flächenhafter Messpunkte oder Flächenpunkte
$\hat{\boldsymbol{S}}$	B-Spline-Flächenpunkte
$\boldsymbol{\Sigma}$	Varianz-Kovarianzmatrix
$\hat{\sigma}_0^2$	geschätzter Varianzfaktor a posteriori
σ_0^2	Varianzfaktor a priori
$\mathbb{S}_{CS}$	Menge der Indentpunkt-Paare im Concensus Set
$\mathbb{S}_T$	Menge der zu testenden Identpunkt-Paare im Ausreißertest
$\boldsymbol{t}$	Translationsvektor der Helmerttransformation
τ	Faktor für die Bildung der RANSAC-Fehlertoleranz
T	Testgröße
t	RANSAC-Fehlertoleranz
t_{sv}	Grenzwert in der Berechnung der Pseudoinversen mittels Singulärwertzerlegung
$\boldsymbol{U}$	Knotenvektor in u-Richtung
u_{TF}	Anzahl unbekannter Transformationsparameter
$\boldsymbol{V}$	Knotenvektor in v-Richtung
$\boldsymbol{x}_0$	Punkte des Startsystems/der Nullepoche E_0
$\boldsymbol{X}_0$	Näherungswerte für unbekannte Parameter
$\boldsymbol{x}_1$	Punkte des Zielsystems/der Vergleichsepoche E_1
$\hat{\boldsymbol{x}}$	Schätzwerte der Parameter im Gauß-Markov-Modell

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

Literatur

Bureick, J. et al. (2016). „Curve and surface approximation of 3D point clouds“. In: *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN)* 123, S. 315–327.

Caspary, W. (2013). *Fehlertolerante Auswertung von Messdaten: Daten-und Modellanalyse, robuste Schätzung*. De Gruyter.

Caspary, W. und D. Beineke (2003). „Robuste Helmert-Transformation“. In: *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN)* 7, S. 242–247.

Cox, M. G. (1972). „The Numerical Evaluation of B-Splines“. In: *IMA Journal of Applied Mathematics* 10.2, S. 134–149.

de Boor, C. (1972). „On calculating with B-splines“. In: *Journal of Approximation Theory* 6.1, S. 50–62.

Fischler, M. A. und R. C. Bolles (1981). „Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography“. In: *Communications of the ACM* 24.6, S. 381–395.

Golub, G. und W. Kahan (1965). „Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix“. In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis* 2.2, S. 205–224.

Harmening, C. und H. Neuner (2015). „A constraint-based parameterization technique for B-spline surfaces“. In: *Journal of Applied Geodesy* 9. DOI: 10.1515/jag-2015-0003.

– (2016a). „Choosing the optimal number of B-spline control points (Part 1: Methodology and approximation of curves)“. In: *Journal of Applied Geodesy* 10.3, S. 139–157.

– (2016b). „Detecting rigid body movements from TLS-based areal deformation measurements“. In:

– (2017). „Choosing the optimal number of B-spline control points (Part 2: Approximation of surfaces and applications)“. In: *Journal of Applied Geodesy* 11.1, S. 43–52.

– (2020). „A spatio-temporal deformation model for laser scanning point clouds“. In: *Journal of Geodesy* 94.

Harmening, C., G. Teodori und H. Neuner (Okt. 2017). „Evaluating the freeform modelling of point clouds by means of a test specimen“. In:

Heunecke, O. et al. (2013). *Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen, Handbuch Ingenieurgeodäsie*. Wichmann.

Holst, C. und H. Kuhlmann (2016). „Challenges and present fields of action at laser scanner based deformation analyses“. In: *Journal of applied geodesy* 10.1, S. 17–25.

Jäger, R. et al. (2005). *Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren*. Wichmann.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Katsikis, V., D. Pappas und A. Petralias (2011). „An improved method for the computation of the Moore–Penrose inverse matrix“. In: *Applied Mathematics and Computation* 217.23.

Koch, K.-R. (2002). „Räumliche Helmert-Transformation variabler Koordinaten im Gauß-Helmert- und im Gauß-Markoff-Modell“. In: *ZfV-Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 3.

– (2004). *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. 4., bearbeitete Auflage.*

Lösler, M. (2011). „Robuste Schätzung der Transformationsparameter einer räumlichen Helmert-Transformation“. In: *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN)* 118.5, S. 187–191.

Neuner, H., C. Holst und H. Kuhlmann (Jan. 2016). „Overview on current modelling strategies of point clouds for deformation analysis“. In: 123, S. 328–339.

Niemeier, W. (2008). *Ausgleichungsrechnung: statistische Auswertemethoden.* De Gruyter.

Ohlmann-Lauber, J. und T. Schäfer (2011). „Ansätze zur Ableitung von Deformationen aus TLS-Daten“. In: *Terrestrisches Laserscanning – TLS 2011 mit TLS-Challenge.* DVW. Wißner, S. 147–157.

Paffenholz, J.-A. und D. Wujanz (Mai 2019). „Spatio-temporal monitoring of a bridge based on 3D point clouds - A comparison among several deformation measurement approaches“. In:

Paláncz, B., J. Awange und L. Völgyesi (2017). „A novel RANSAC approach to robustly solve the 3D similarity transformation problem“. In: *Australian Journal of Earth Sciences* 64.4, S. 565–576.

Pelzer, H. (1974). „Zur Behandlung singulärer Ausgleichungsaufgaben“. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen* 99, S. 181–194, 479–488.

Piegl, L. und W. Tiller (1997). *The NURBS Book (2nd Ed.)* Springer-Verlag.

Schmitt, C. und H. Neuner (2015). „Knot estimation on B-Spline curves“. In: *Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation (VGI), begutachteter Beitrag* 103.2+3, S. 188–197.

Shen, Y.-Z., Y. Chen und D.-H. Zheng (2006). „A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm“. In: *Journal of Geodesy* 80.5, S. 233–239.

Wang, J., Y. Cheng und B. Tao (1998). „Outlier Detection and Reliability of Adjustment Models with Singular Covariance Matrices“. In: *Geo-spatial Information Science* 1.1, S. 55–59.

Warton, D. (2008). „Penalized Normal Likelihood and Ridge Regularization of Correlation and Covariance Matrices“. In: *Journal of the American Statistical Association* 103, S. 340–349.

Witte, B. und P. Sparla (2015). *Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen.* Wichmann.

Wujanz, D. (2016). „Terrestrial Laser Scanning for Geodetic Deformation Monitoring“. Diss. Technische Universität Berlin.

Wunderlich, T. et al. (2016). „Areal Deformation Analysis from TLS Point Clouds – The Challenge“. In: *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN)* 123, S. 340–351.

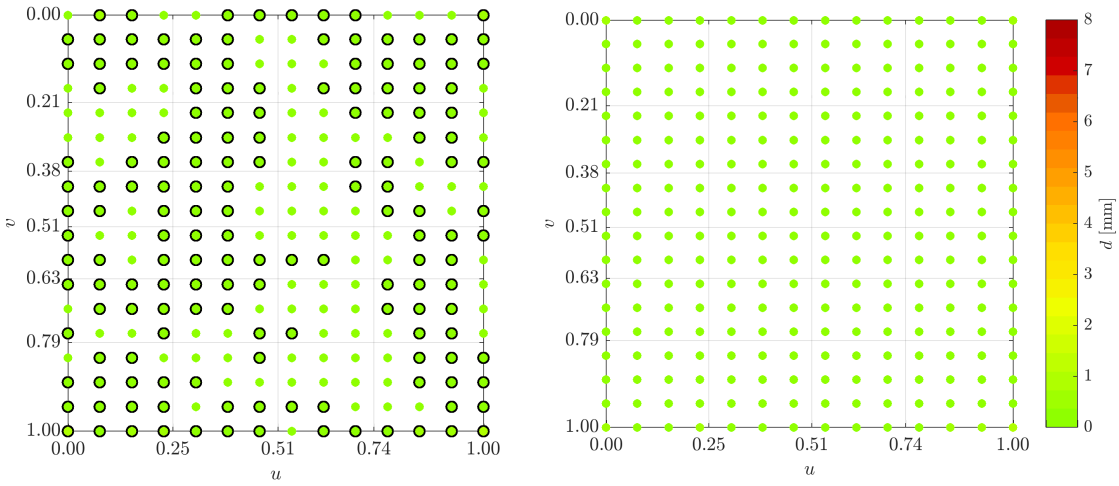
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

A. Anhang: Weitere Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Verformungsanalyse durch Einzeltests zusammenfassend dargestellt, die im Zuge der Auswertungen der Datensätze mit singulärer Varianz-Kovarianzmatrix erstellt wurden. Die Farbskala der initialen $\mathbb{S}_{CS}$ steht dabei für die Abstände zwischen den Identpunkten, die zugehörigen, jeweils nachfolgend platzierten Abbildungen sind nach dem Betrag der Testgröße farbcodiert (logarithmische Farbskala); grau eingefärbte Punkte markieren diejenigen Identpunkte, deren Testgröße nicht ermittelt werden konnte. Schwarz umrandete Punkte sind dem detektierten Verformungsbereich zuzuordnen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

II-V0: initiale Stabilpunktmengen



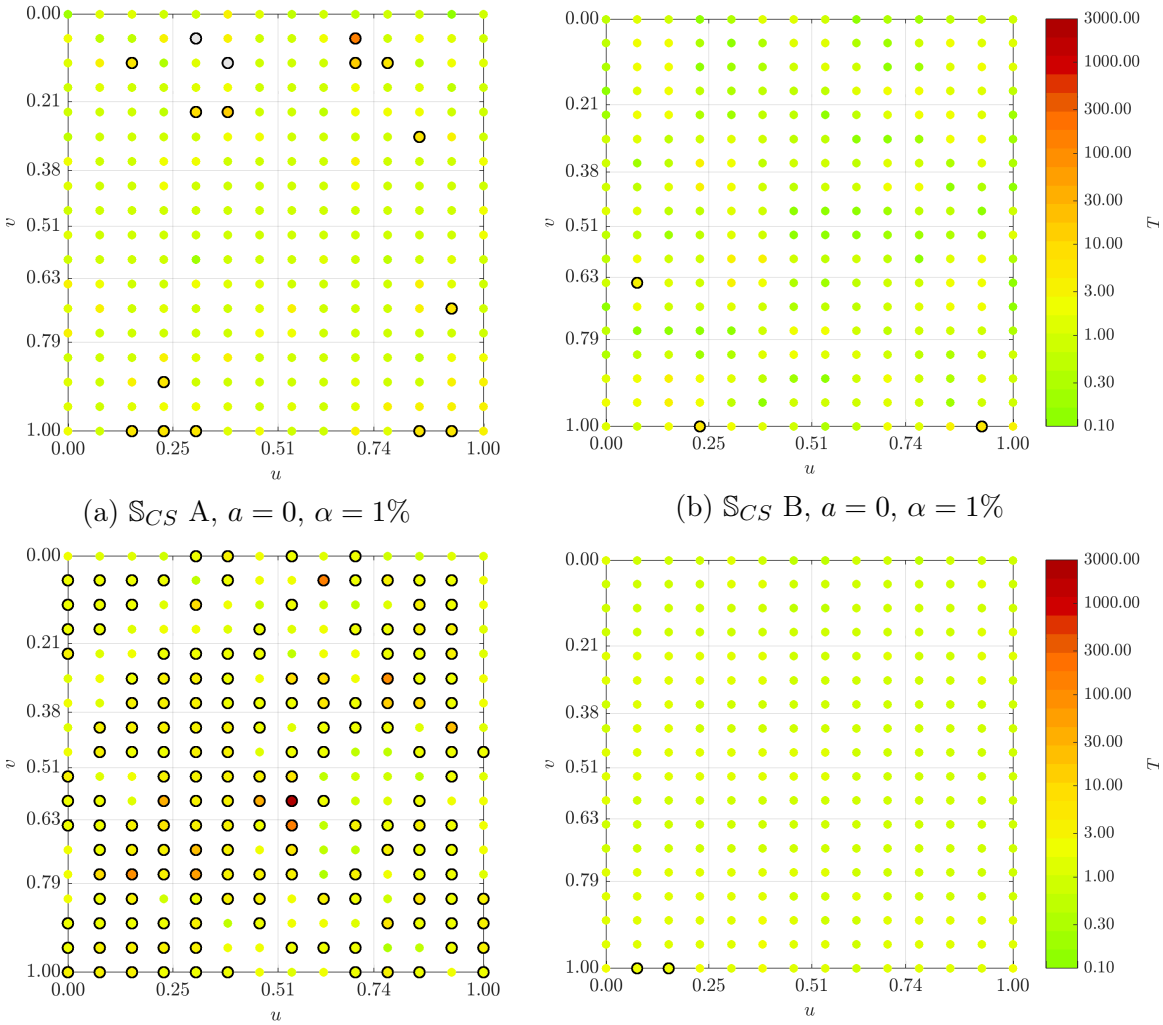
(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $s_{CS} = 95$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $s_{CS} = 252$

Abbildung A.1.: Initiale Stabilpunktmengen für II-V0 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

II-V0: Ergebnisse der Verformungsanalyse bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv})



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

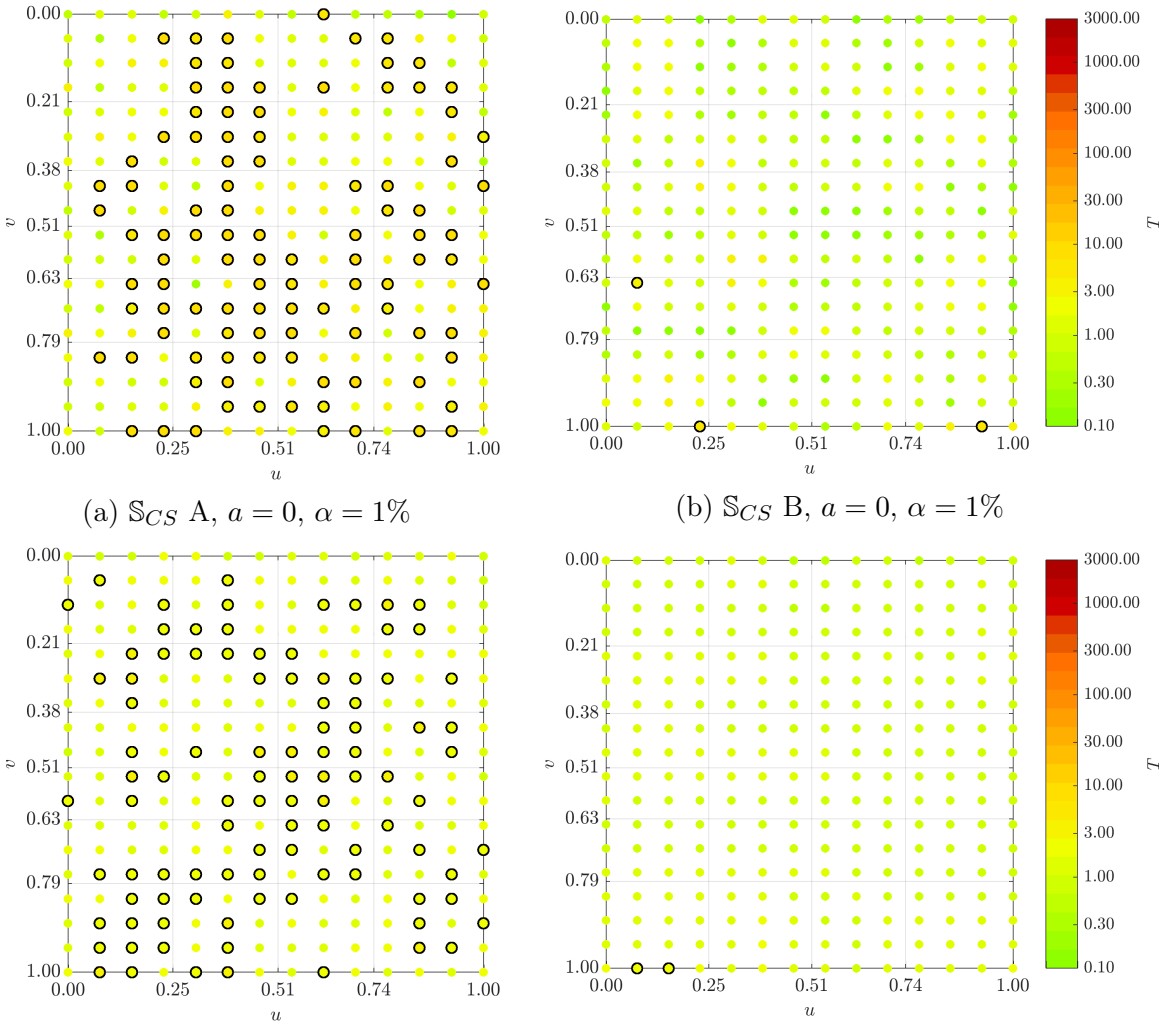
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.2.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für II-V0 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

II-V0: Ergebnisse der Verformungsanalyse bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (angepasster Grenzwert $t'_{sv} = 10^{-14}$)



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

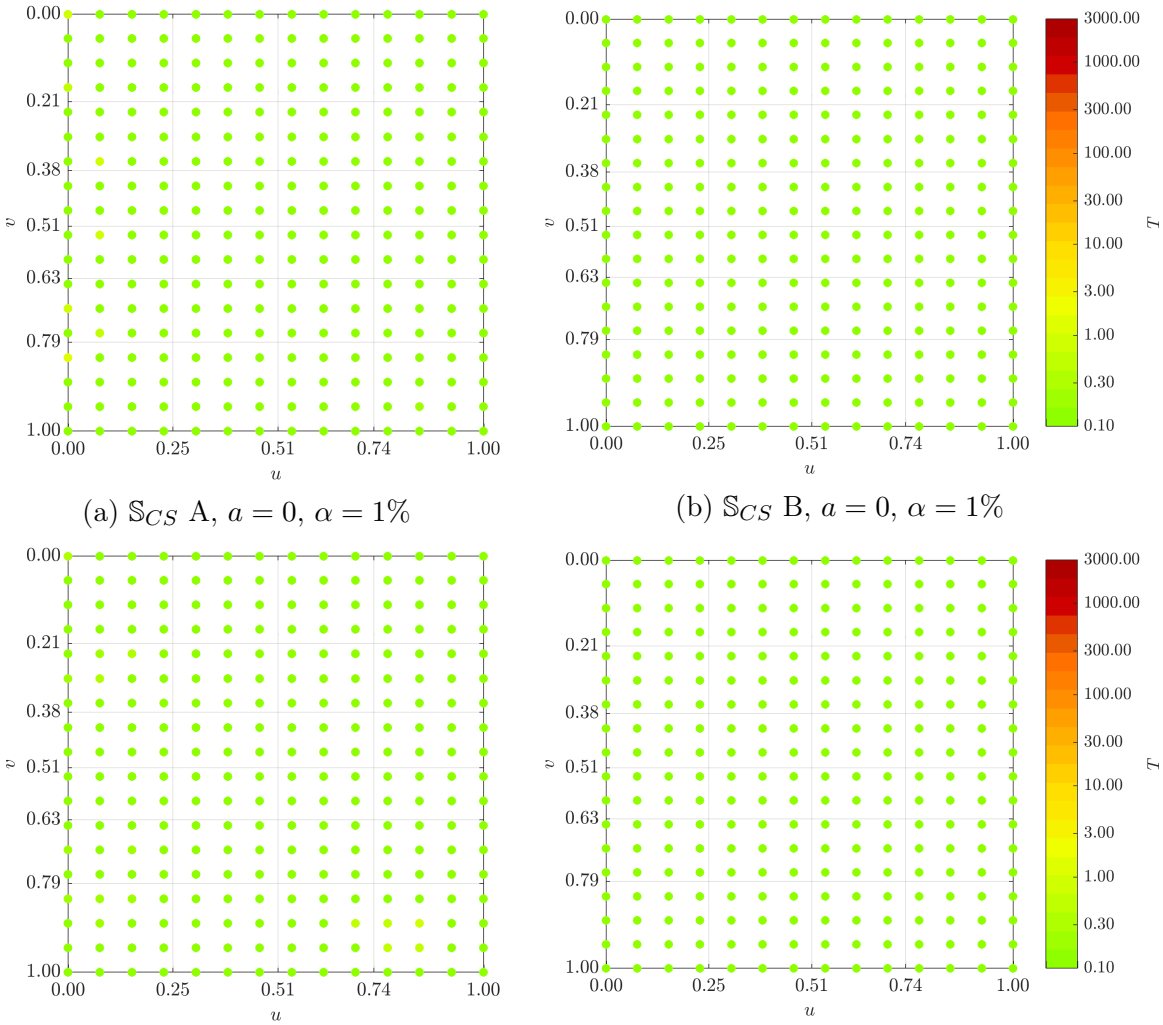
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.3.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für II-V0 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` mit angepasstem Grenzwert t'_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

II-V0: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis regularisierter Varianz-Kovarianzmatrizen ($\lambda = 10^{-18}$)



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

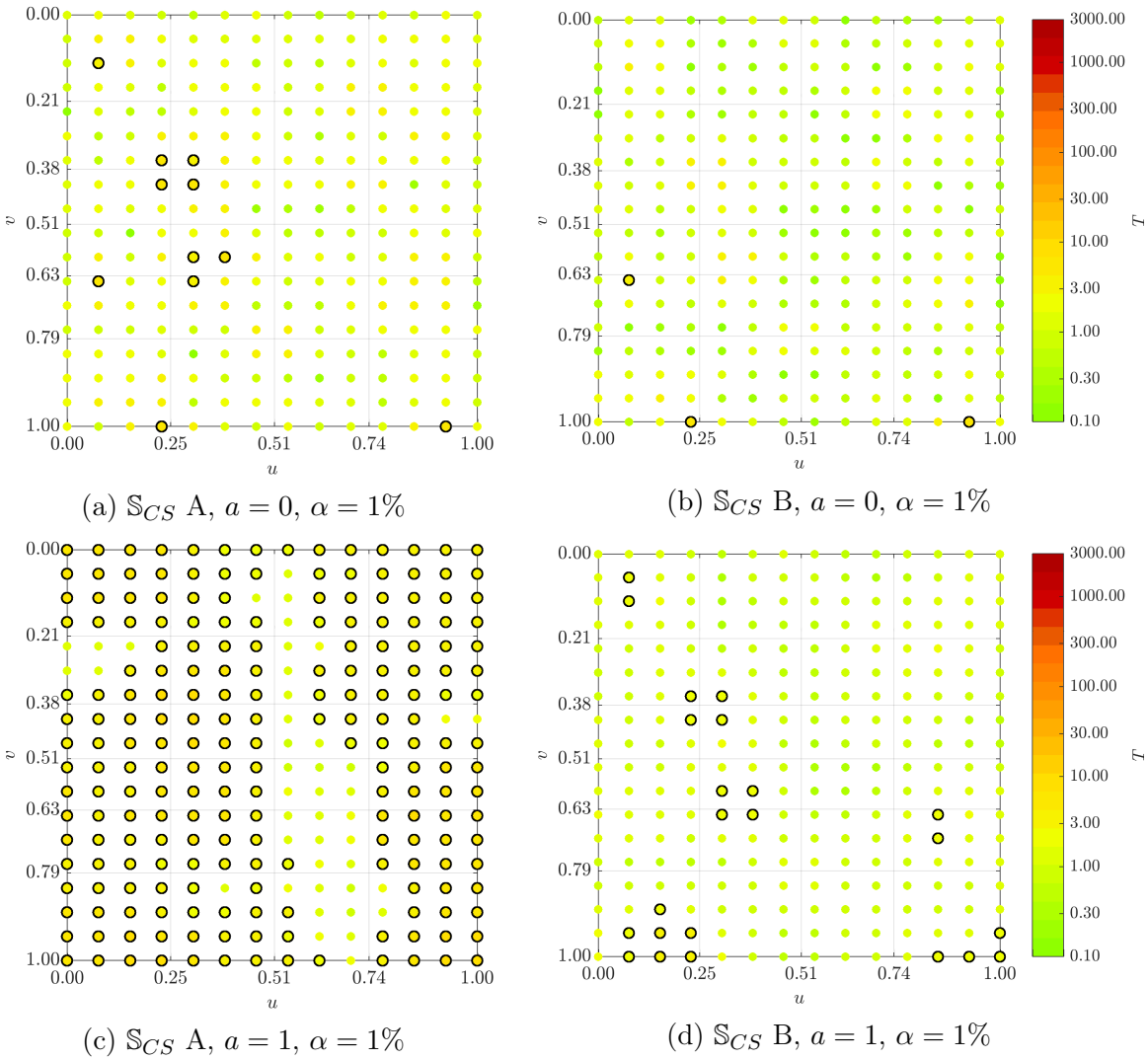
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.4.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für II-V0 auf Basis regularisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

II-V0: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

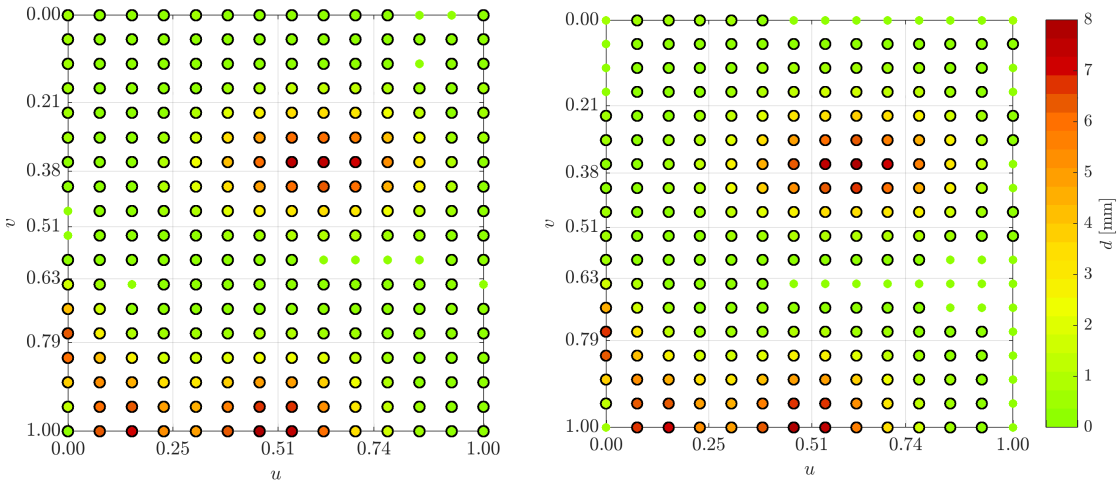
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.5.: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

II-V40: initiale Stabilpunktmengen



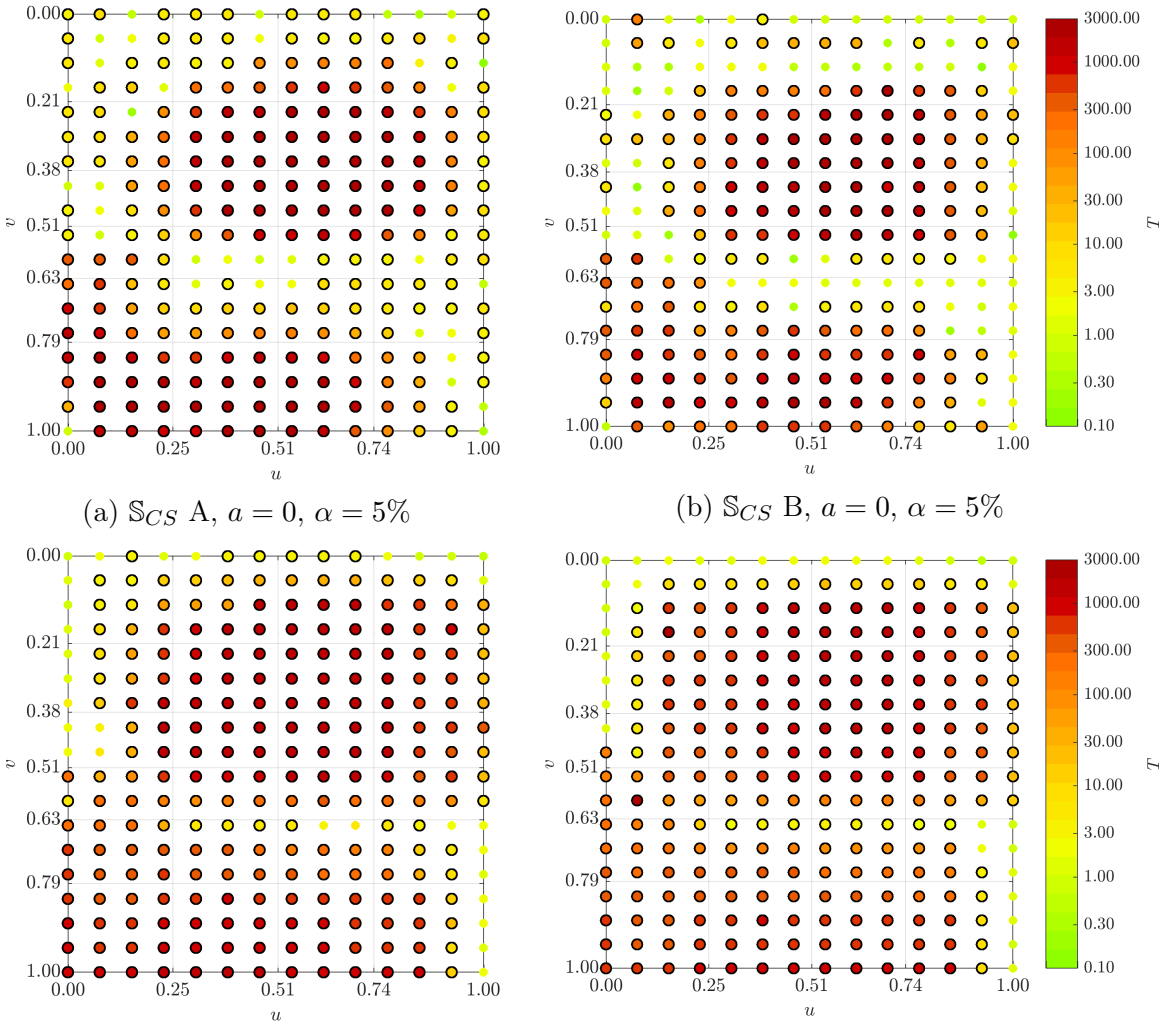
(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $s_{CS} = 12$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $s_{CS} = 36$

Abbildung A.6.: Initiale Stabilpunktmengen für II-V40 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

II-V40: Ergebnisse der Verformungsanalyse bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv})



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

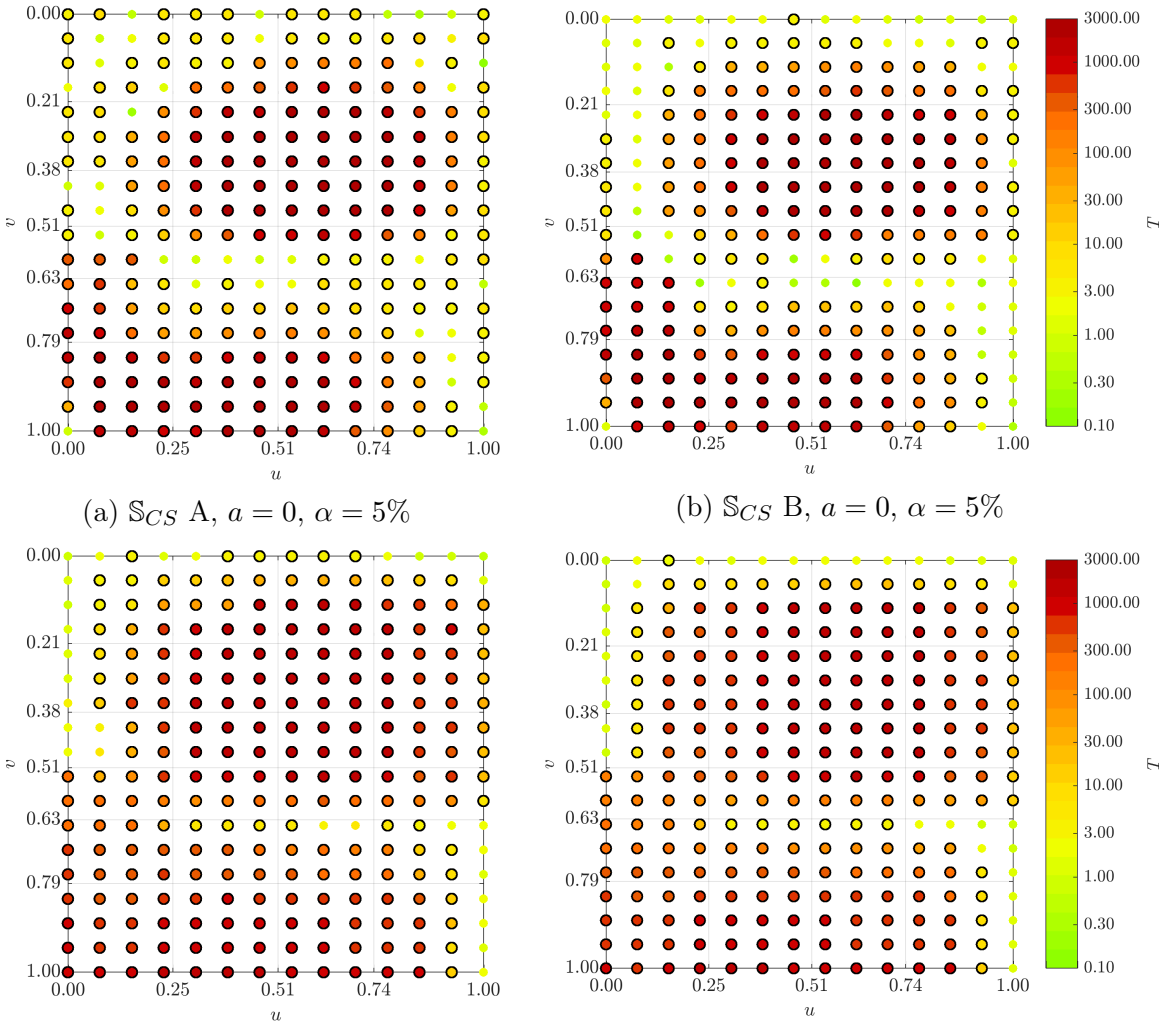
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.7.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für II-V40 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

II-V40: Ergebnisse der Verformungsanalyse bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (angepasster Grenzwert $t'_{sv} = 10^{-14}$)



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

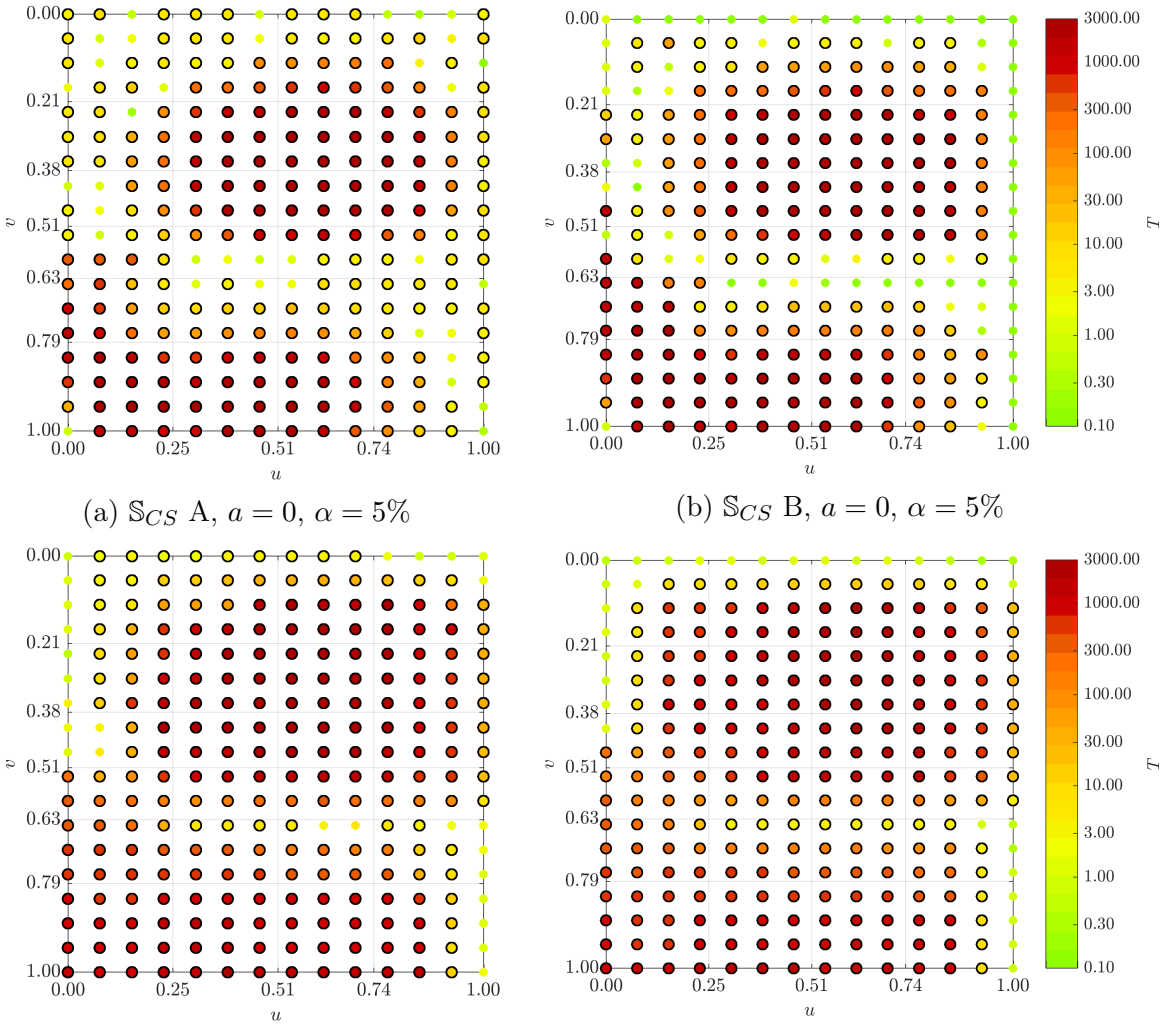
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.8.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für II-V40 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` mit angepasstem Grenzwert t'_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

II-V40: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis regularisierter Varianz-Kovarianzmatrizen ($\lambda = 10^{-18}$)



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

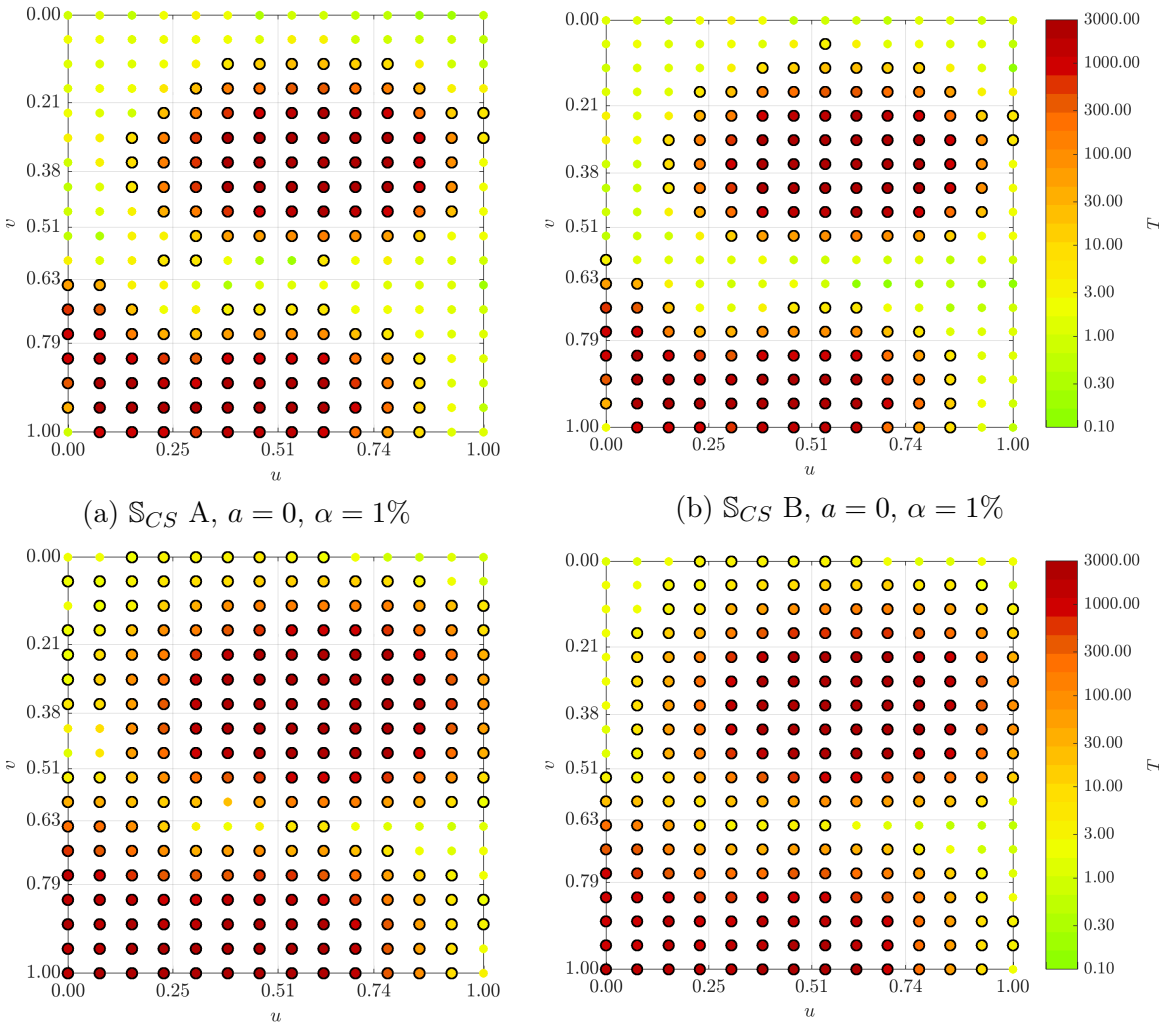
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.9.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für II-V40 auf Basis regularisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

II-V40: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

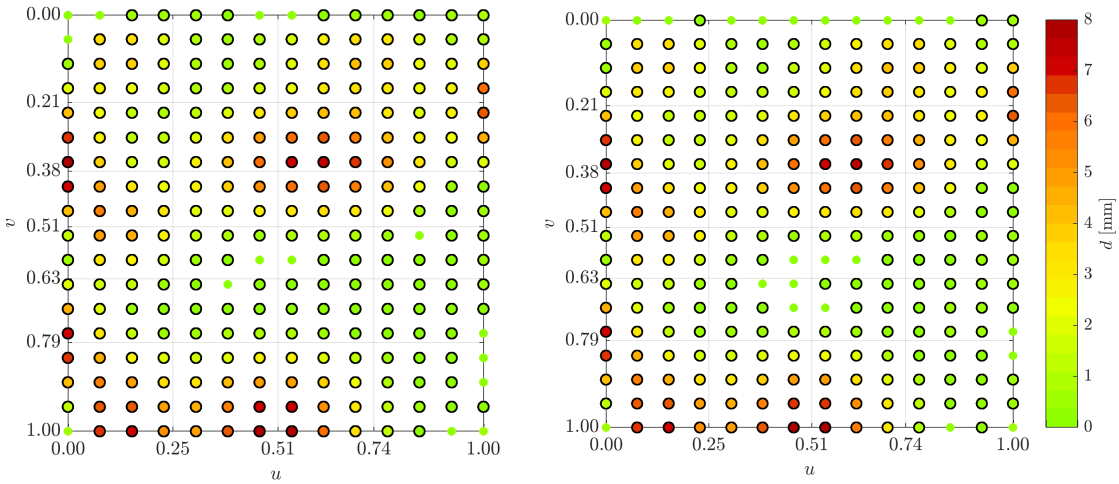
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.10.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für II-V40 auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

II-V65: initiale Stabilpunktmengen



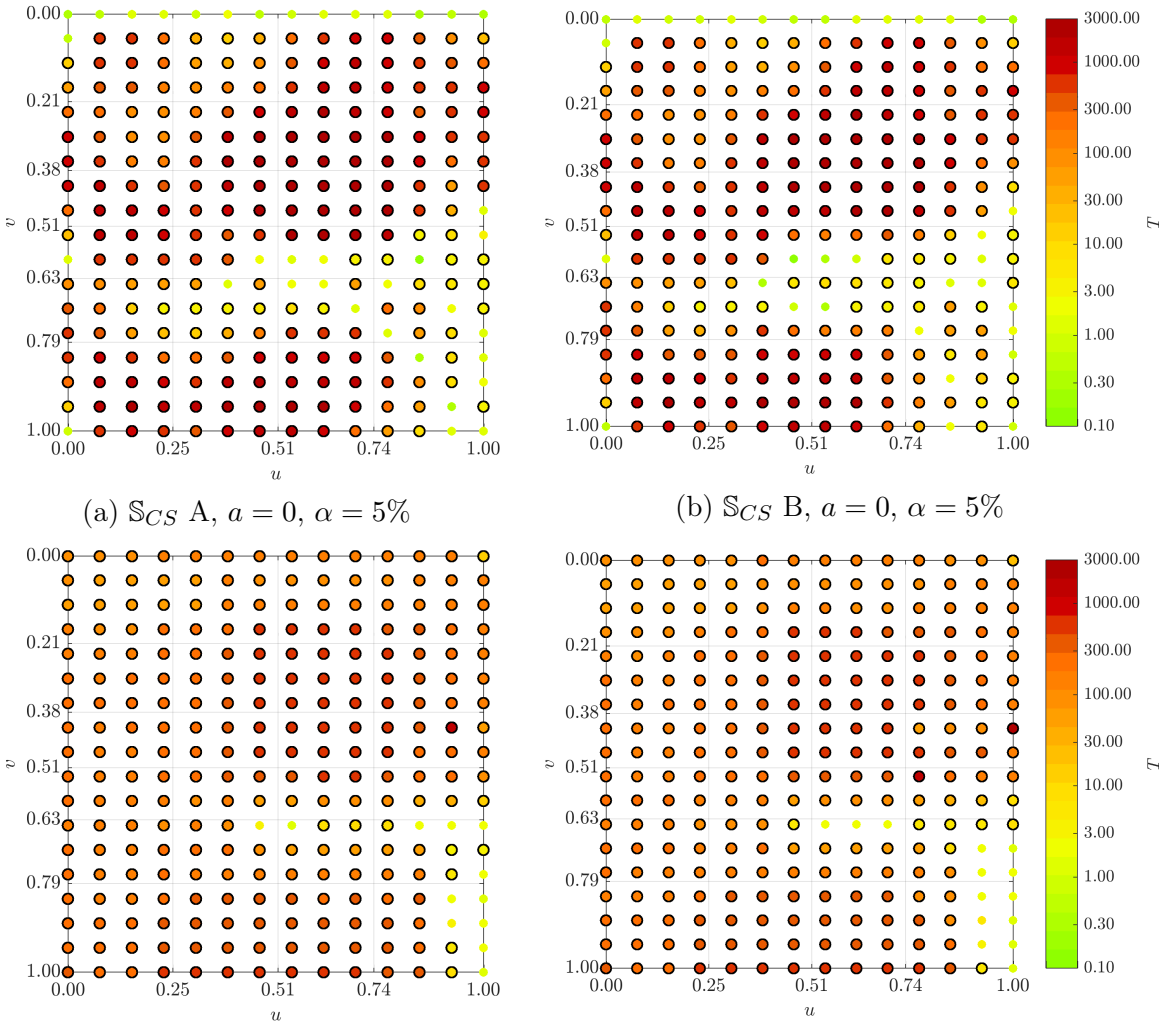
(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $s_{CS} = 15$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $s_{CS} = 23$

Abbildung A.11.: Initiale Stabilpunktmengen für II-V65 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

II-V65: Ergebnisse der Verformungsanalyse bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv})



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

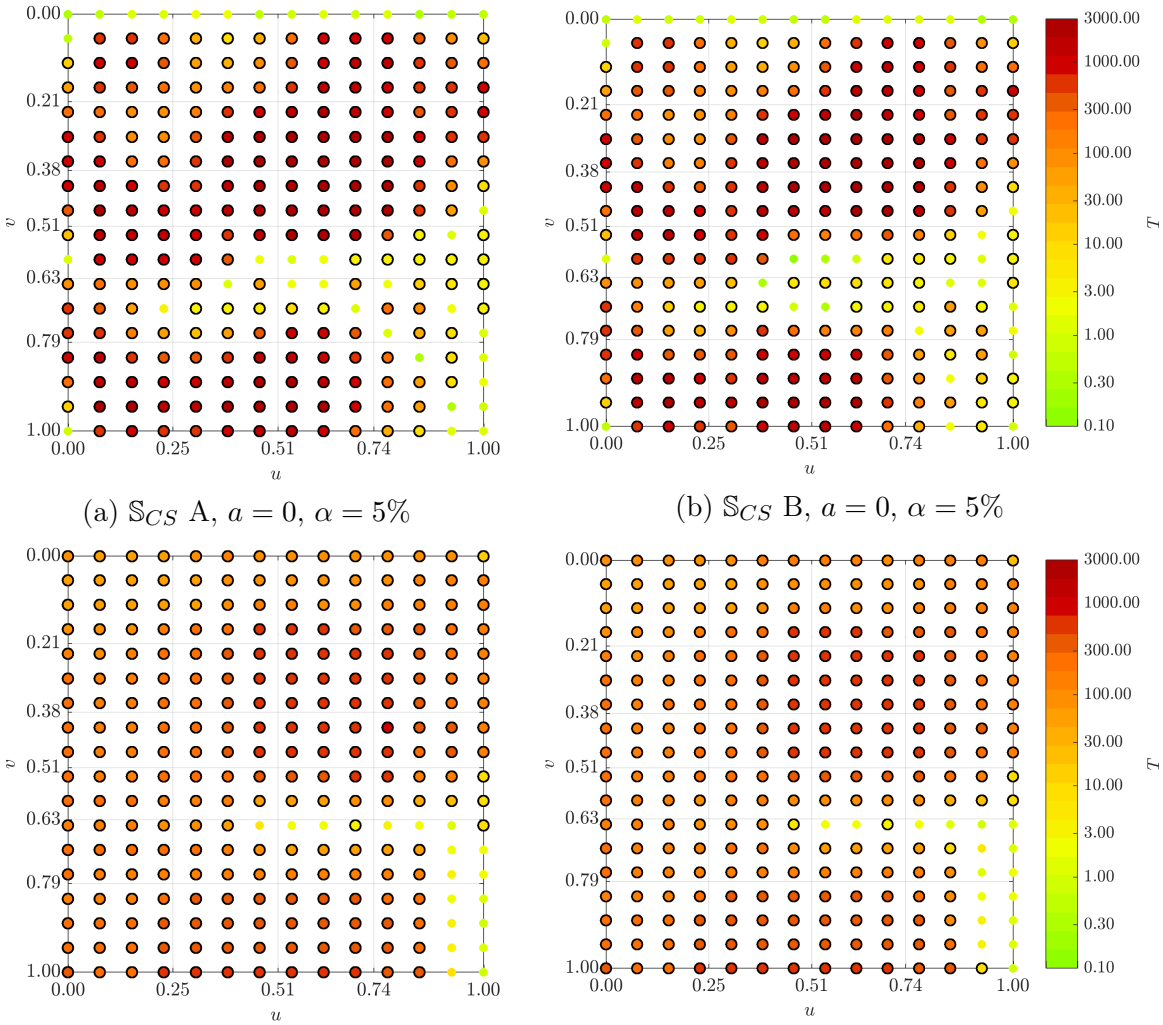
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.12.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für II-V65 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

II-V65: Ergebnisse der Verformungsanalyse bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (angepasster Grenzwert $t'_{sv} = 10^{-14}$)



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

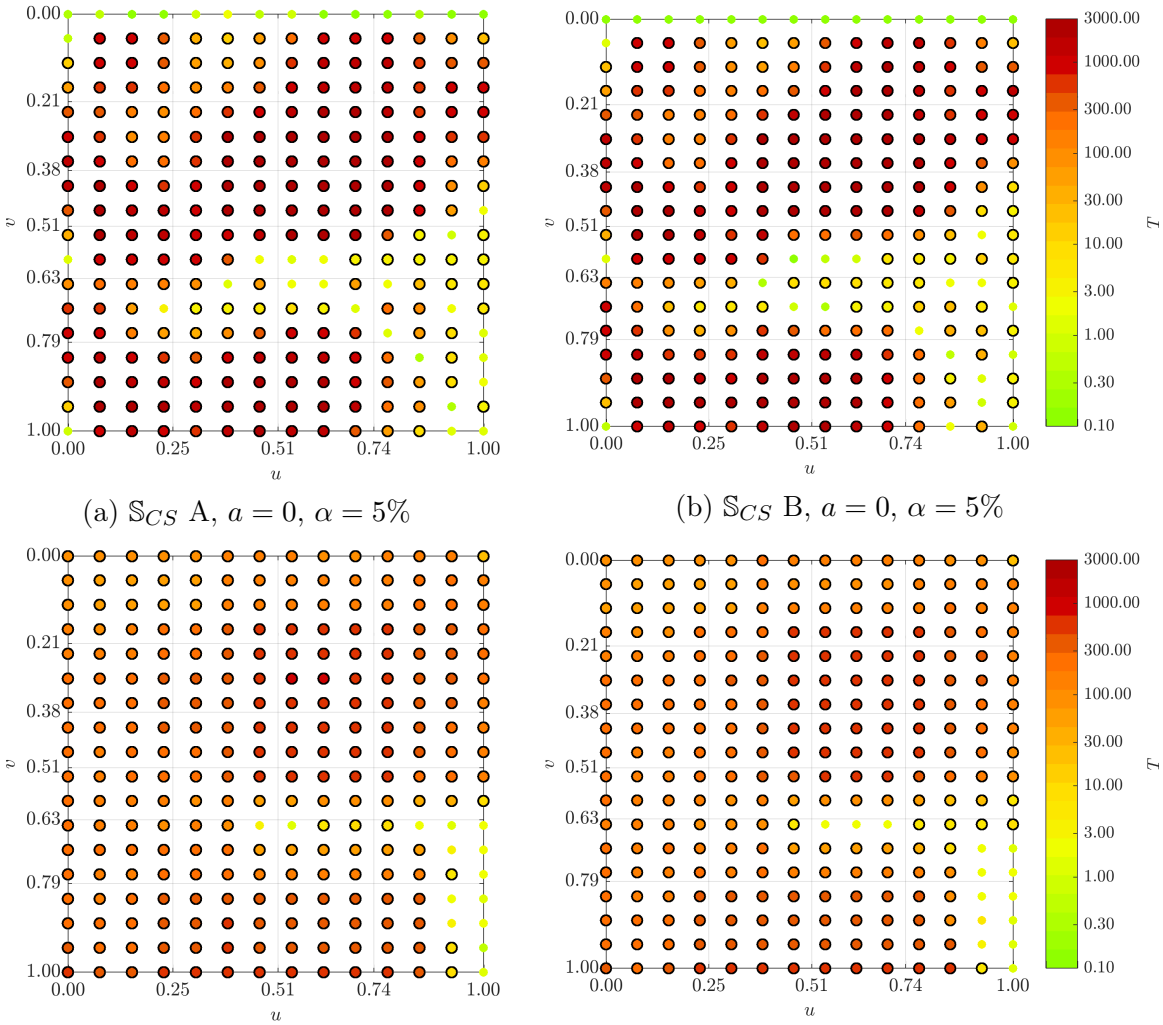
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.13.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für II-V65 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` mit angepasstem Grenzwert t'_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

II-V65: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis regularisierter Varianz-Kovarianzmatrizen ($\lambda = 10^{-18}$)



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

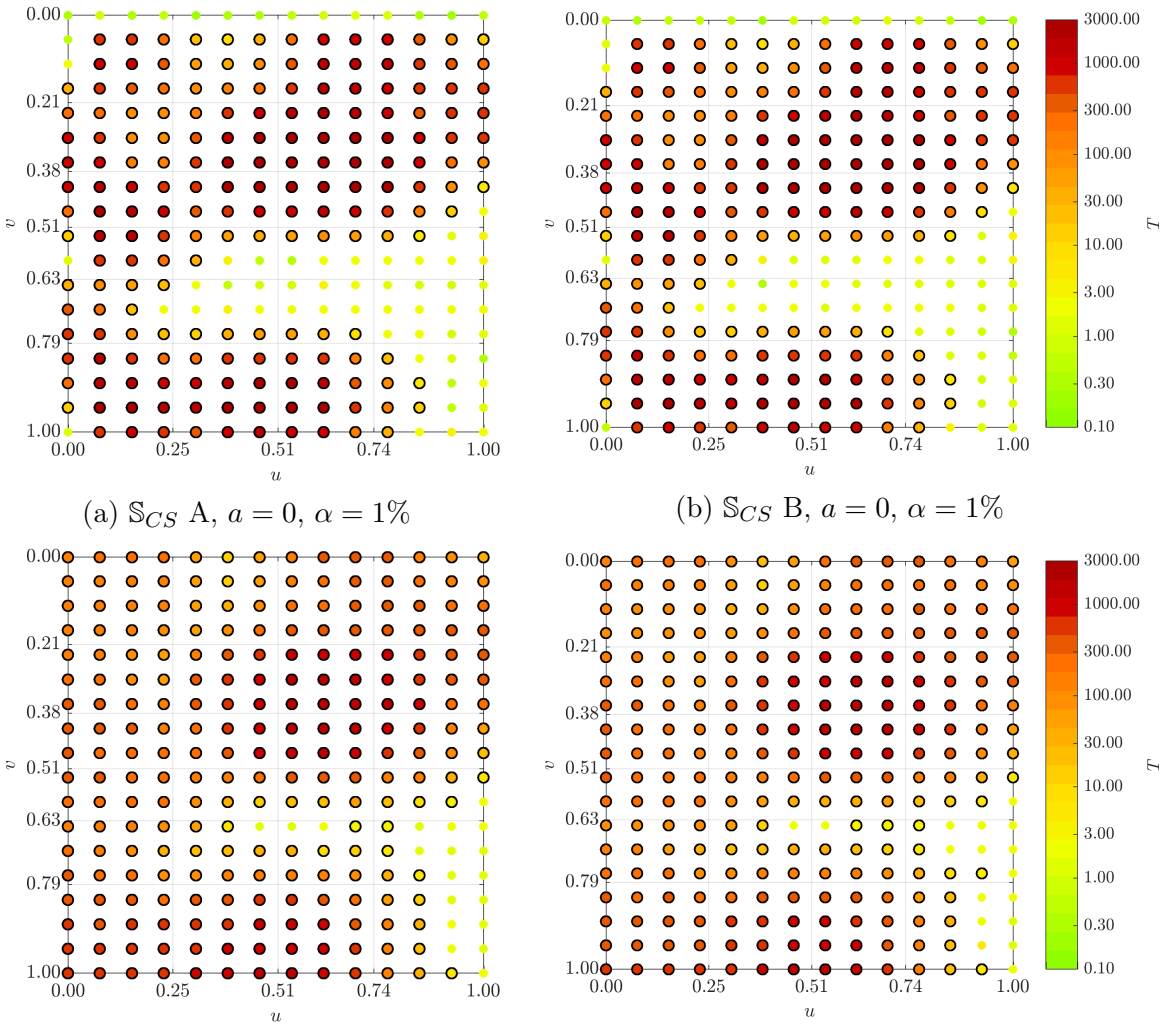
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.14.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für II-V65 auf Basis regularisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

II-V65: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

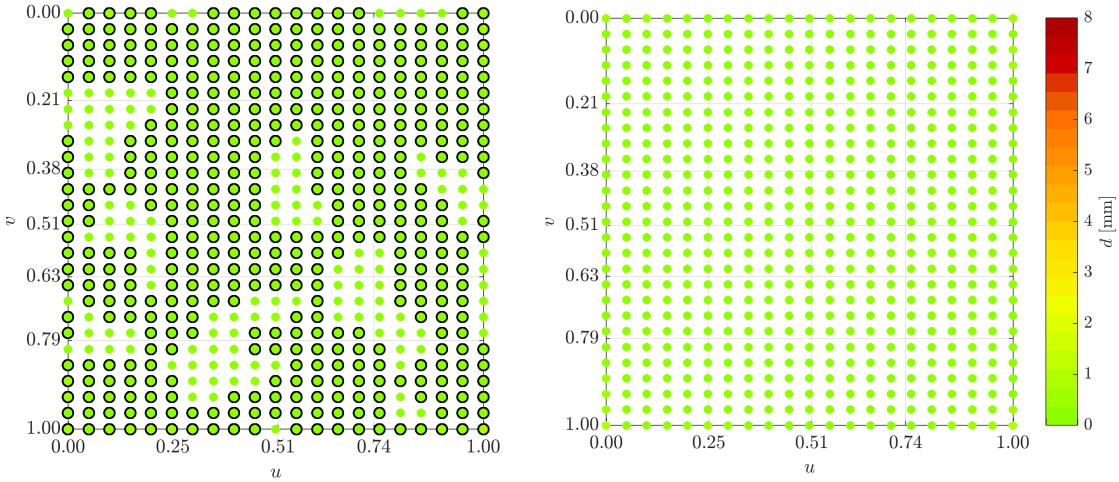
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.15.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für II-V65 auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

III-V0: initiale Stabilpunktmengen



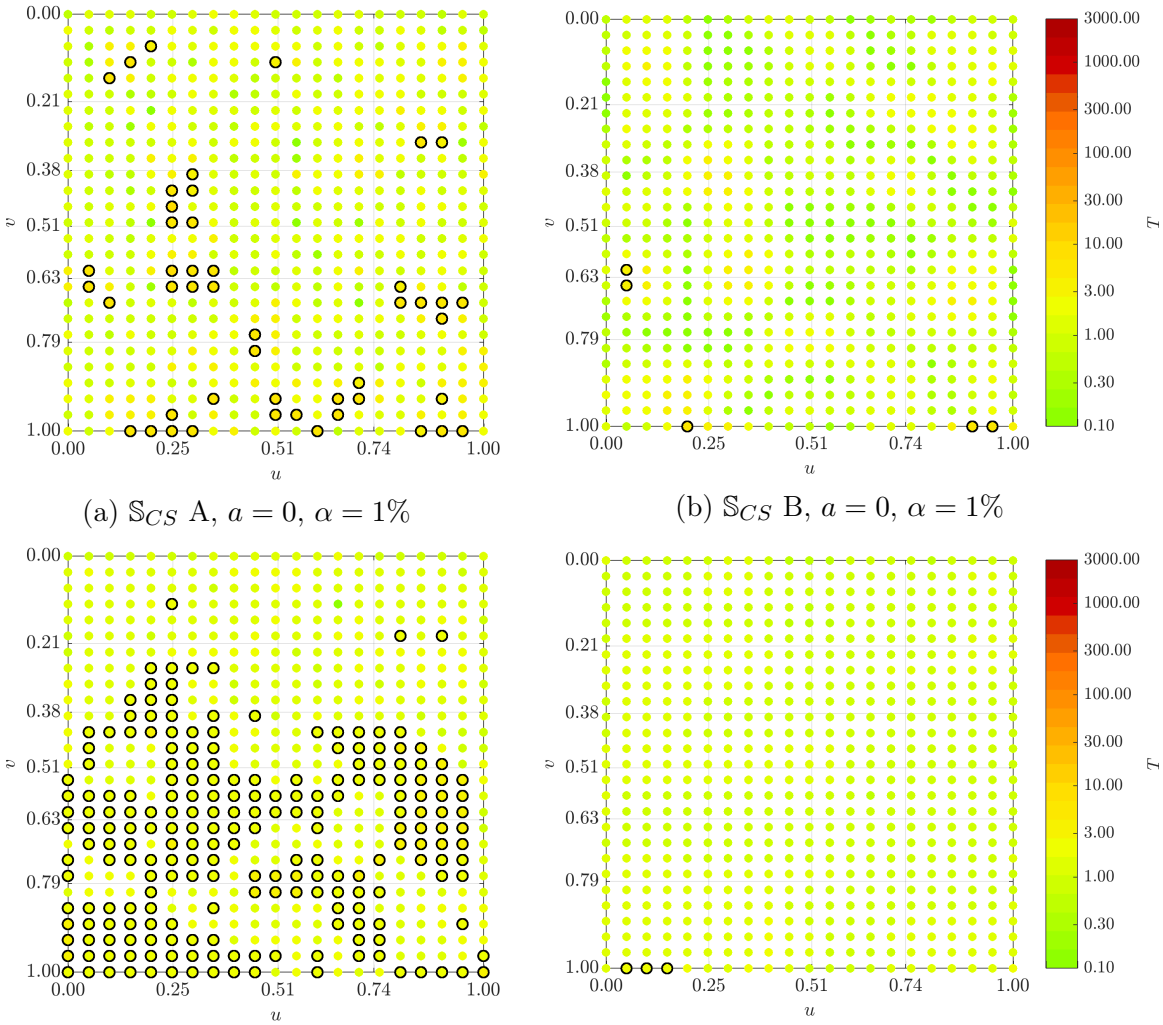
(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $s_{CS} = 126$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $s_{CS} = 567$

Abbildung A.16.: Initiale Stabilpunktmengen für III-V0 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

III-V0: Ergebnisse der Verformungsanalyse bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv})



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

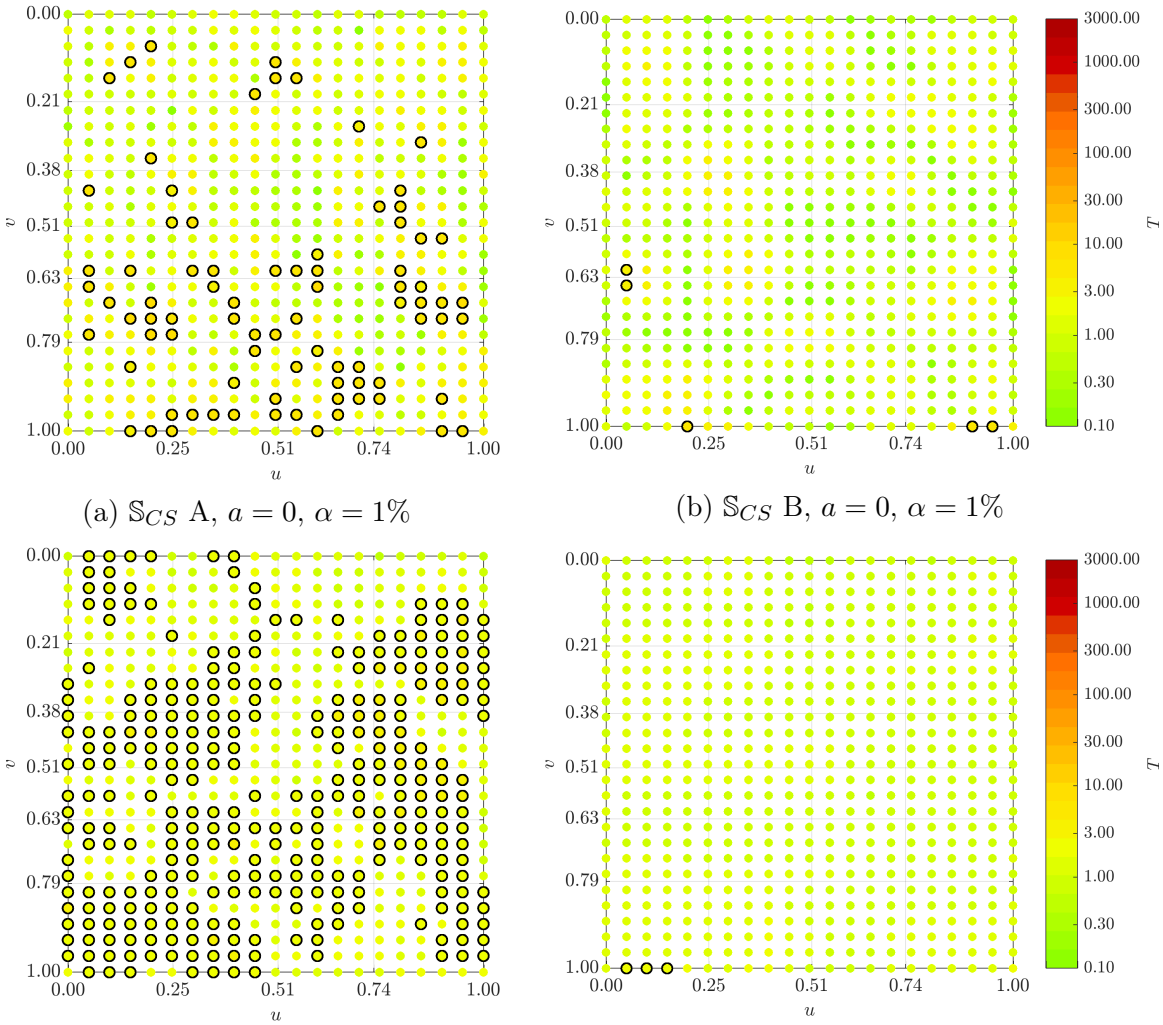
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.17.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für III-V0 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

III-V0: Ergebnisse der Verformungsanalyse bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (angepasster Grenzwert $t'_{sv} = 10^{-14}$)



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

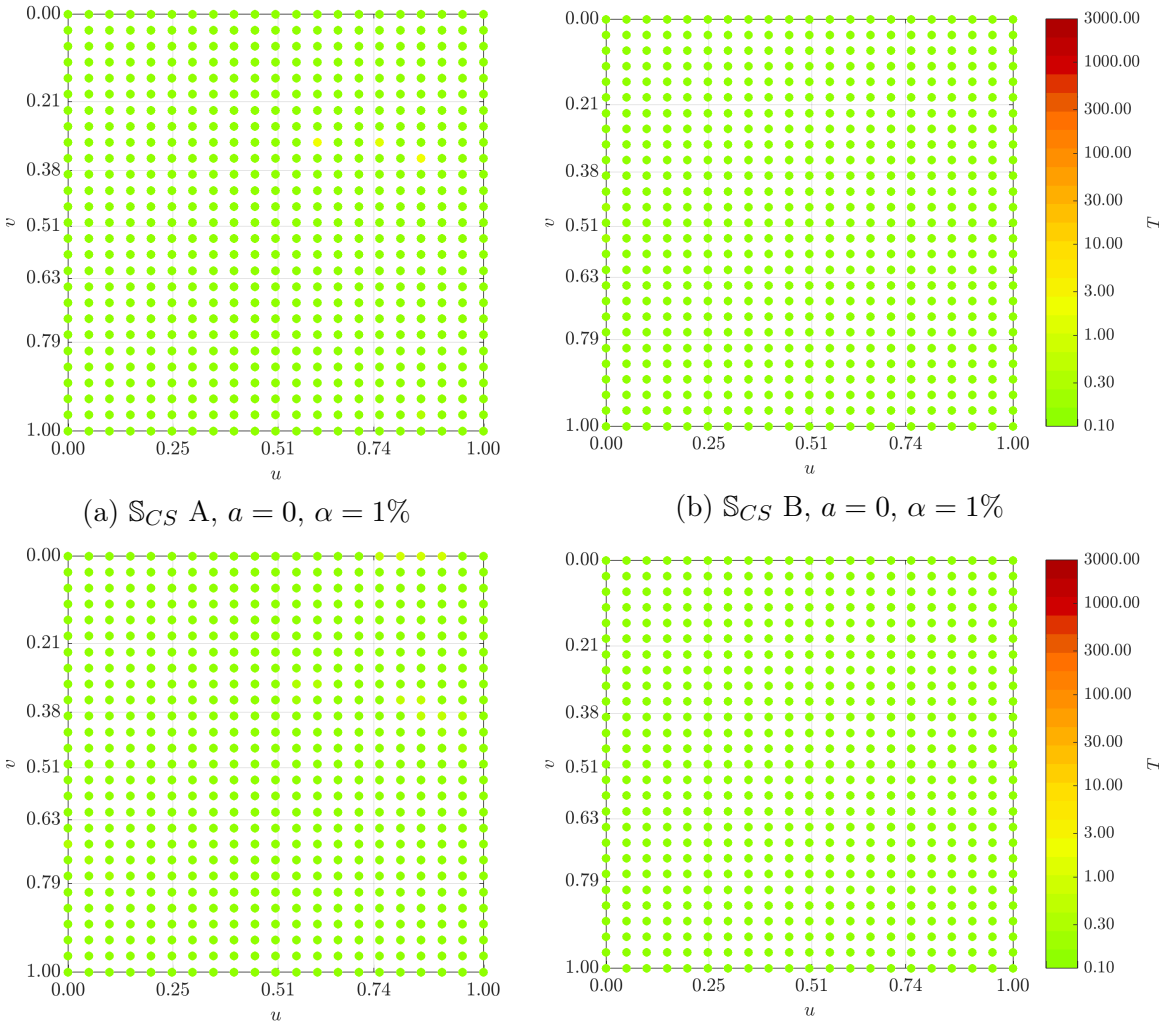
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.18.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für III-V0 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` mit angepasstem Grenzwert t'_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

III-V0: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis regularisierter Varianz-Kovarianzmatrizen ($\lambda = 10^{-18}$)



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

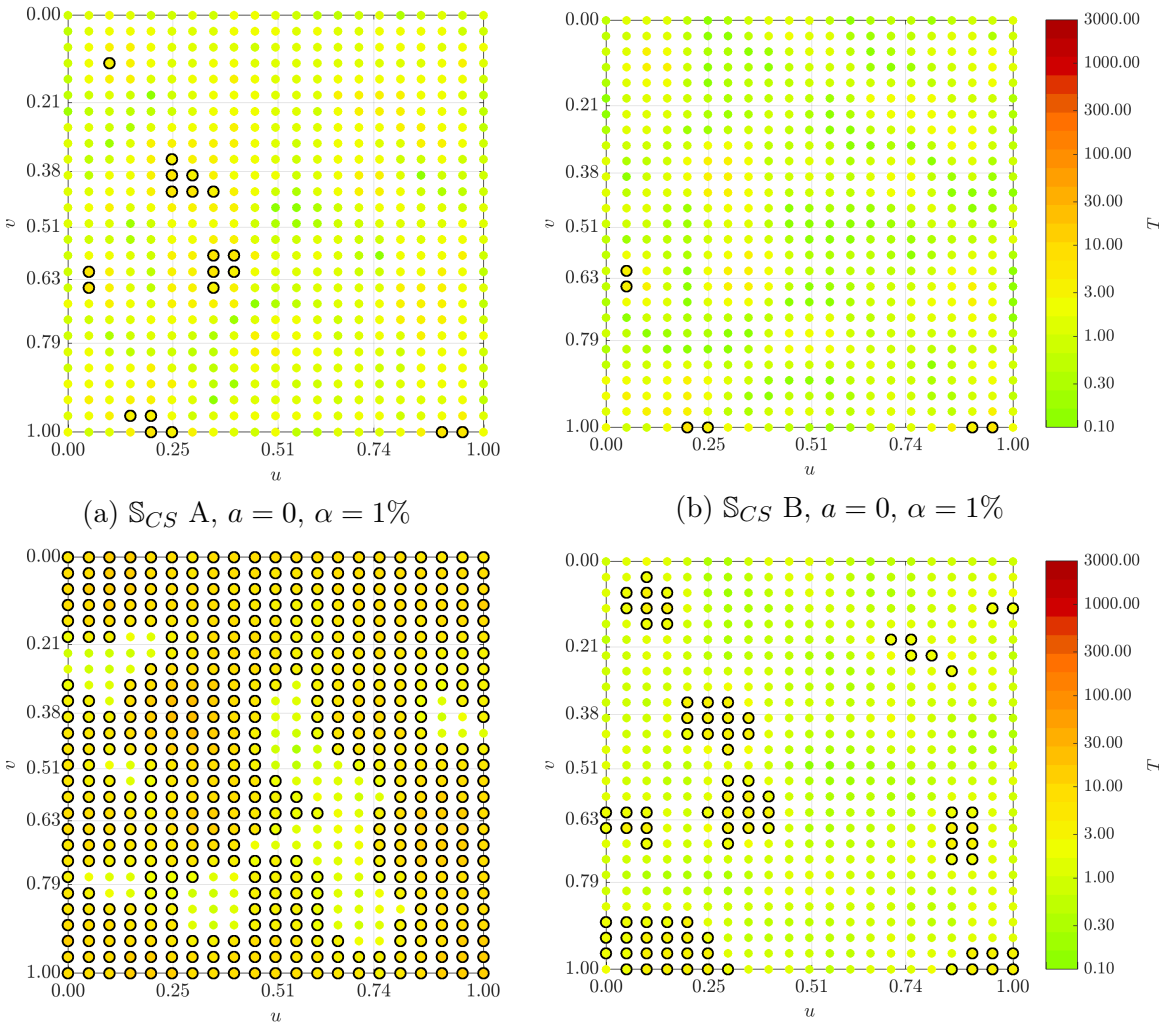
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.19.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für III-V0 auf Basis regularisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

III-V0: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

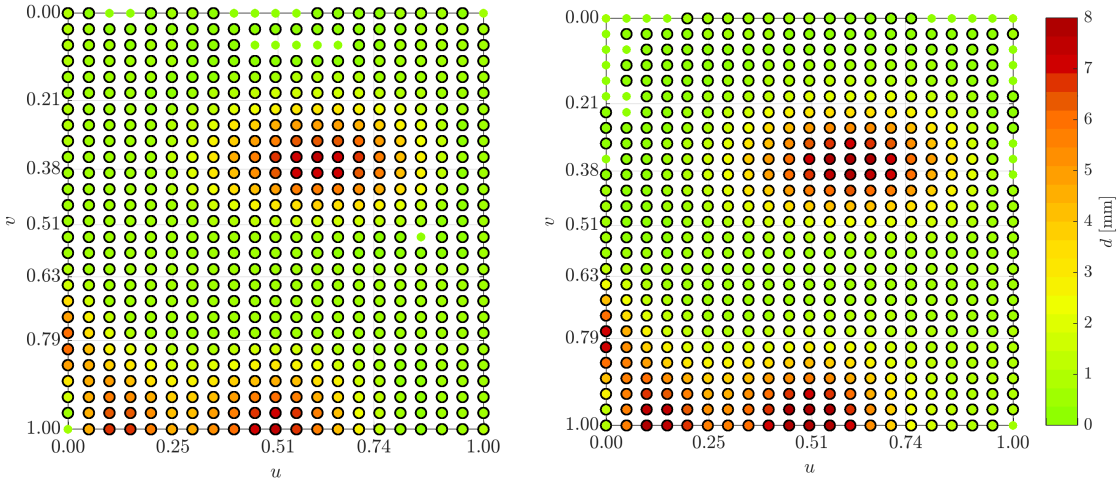
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.20.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für III-V0 auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

III-V40: initiale Stabilpunktmengen



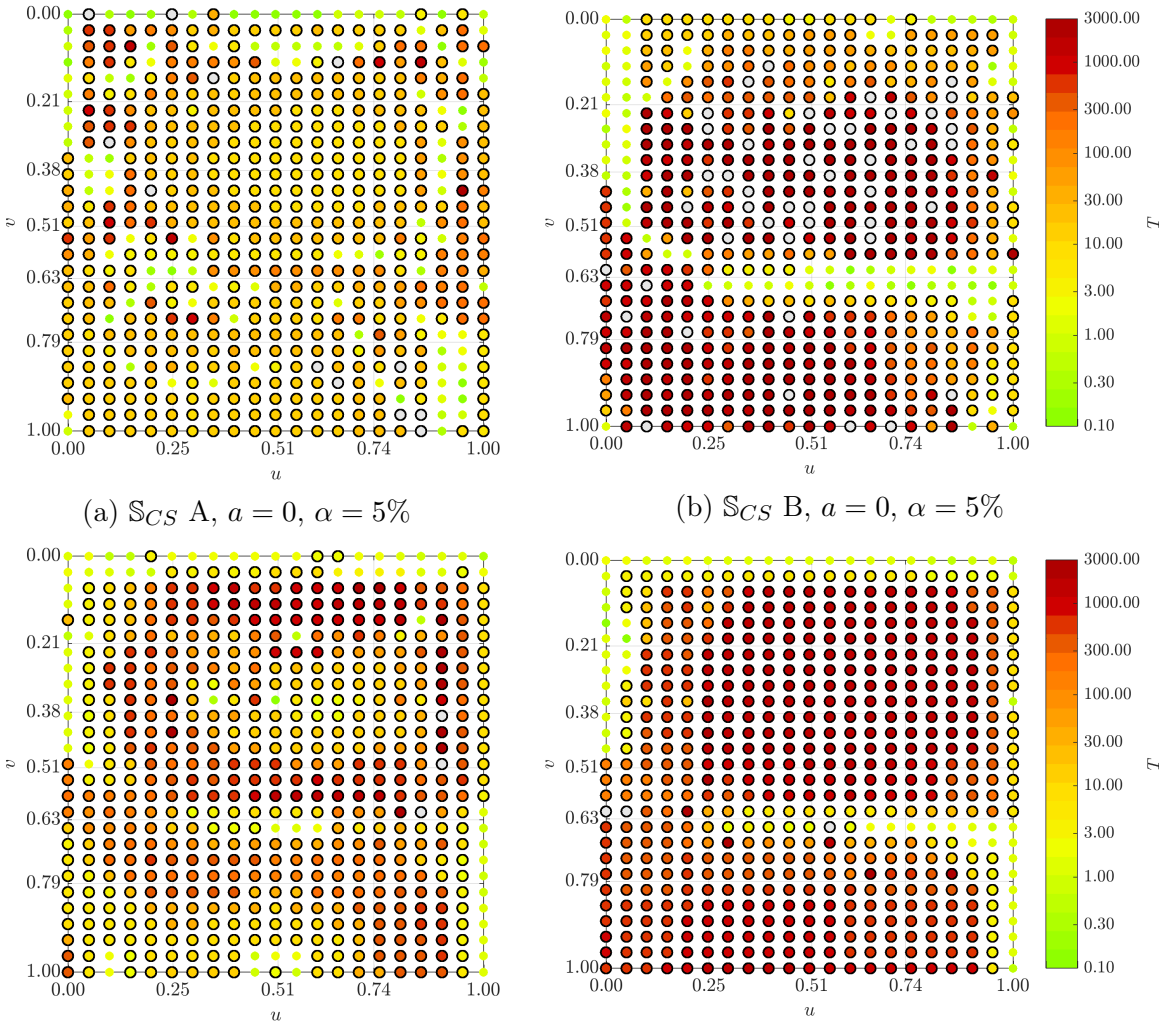
(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $s_{CS} = 14$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $s_{CS} = 25$

Abbildung A.21.: Initiale Stabilpunktmengen für III-V40 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

III-V40: Ergebnisse der Verformungsanalyse bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv})



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

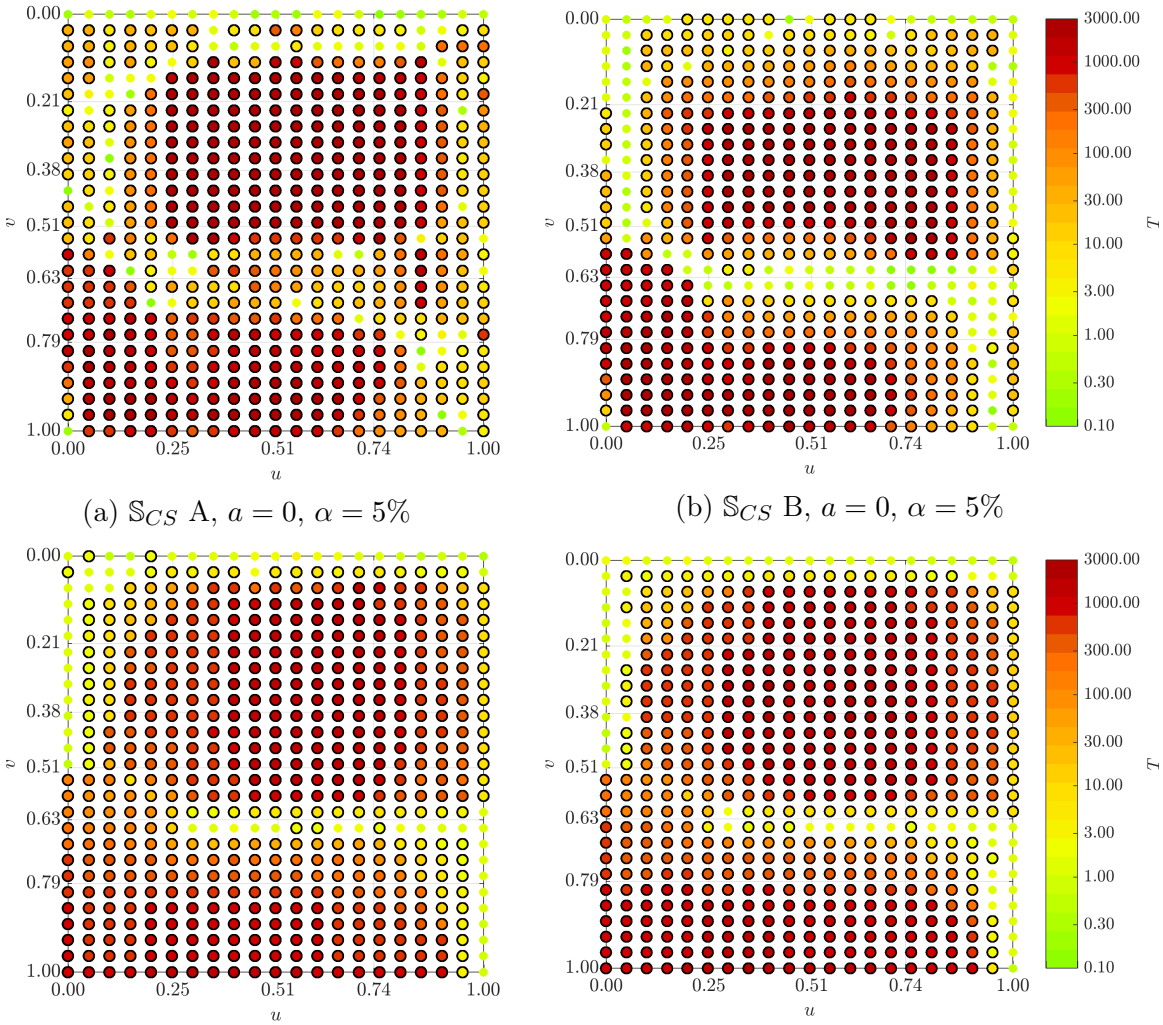
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.22.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für III-V40 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

III-V40: Ergebnisse der Verformungsanalyse bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (angepasster Grenzwert $t'_{sv} = 10^{-14}$)



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

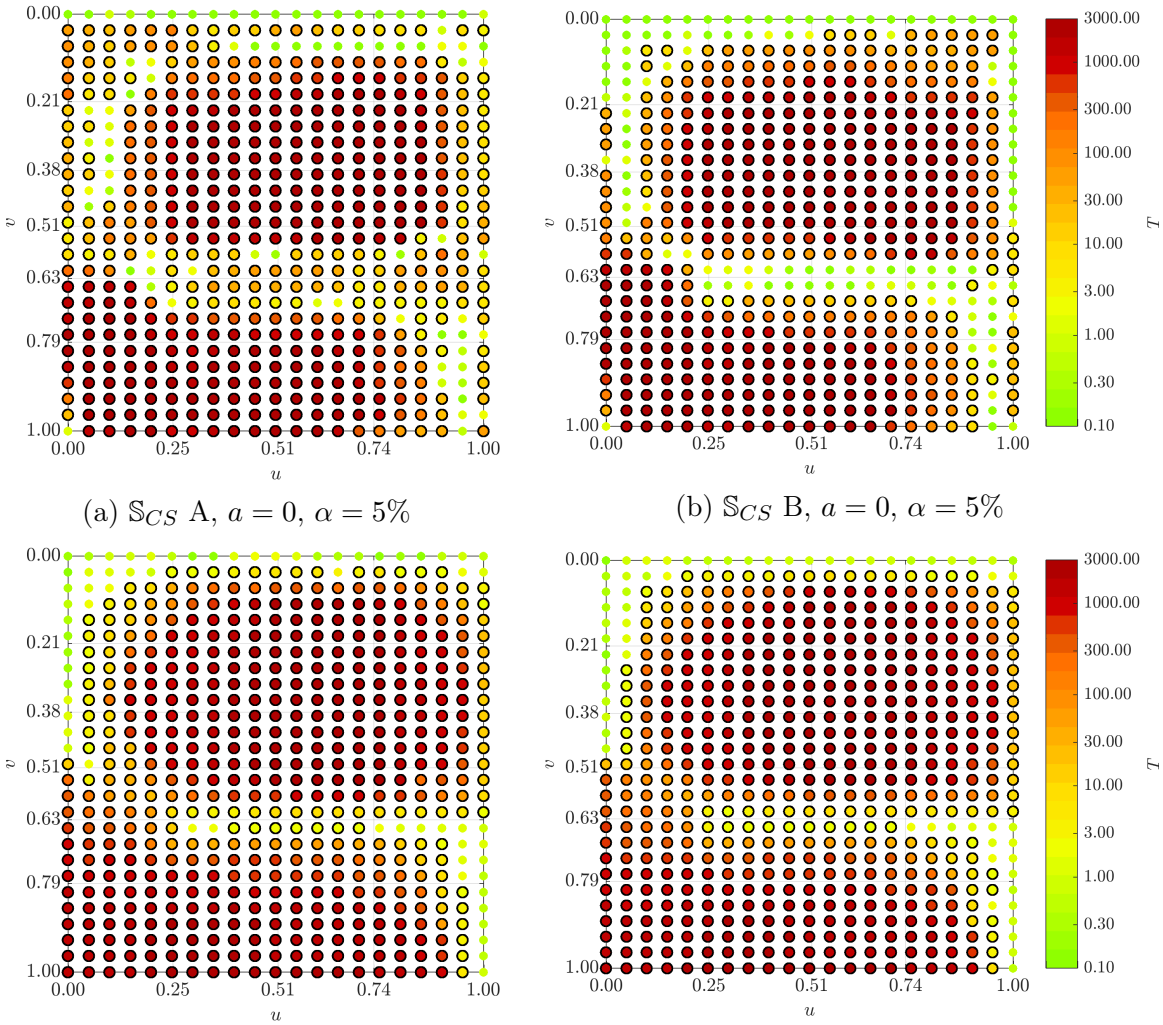
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.23.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für III-V40 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` mit angepasstem Grenzwert t'_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

III-V40: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis regularisierter Varianz-Kovarianzmatrizen ($\lambda = 10^{-13}$)



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

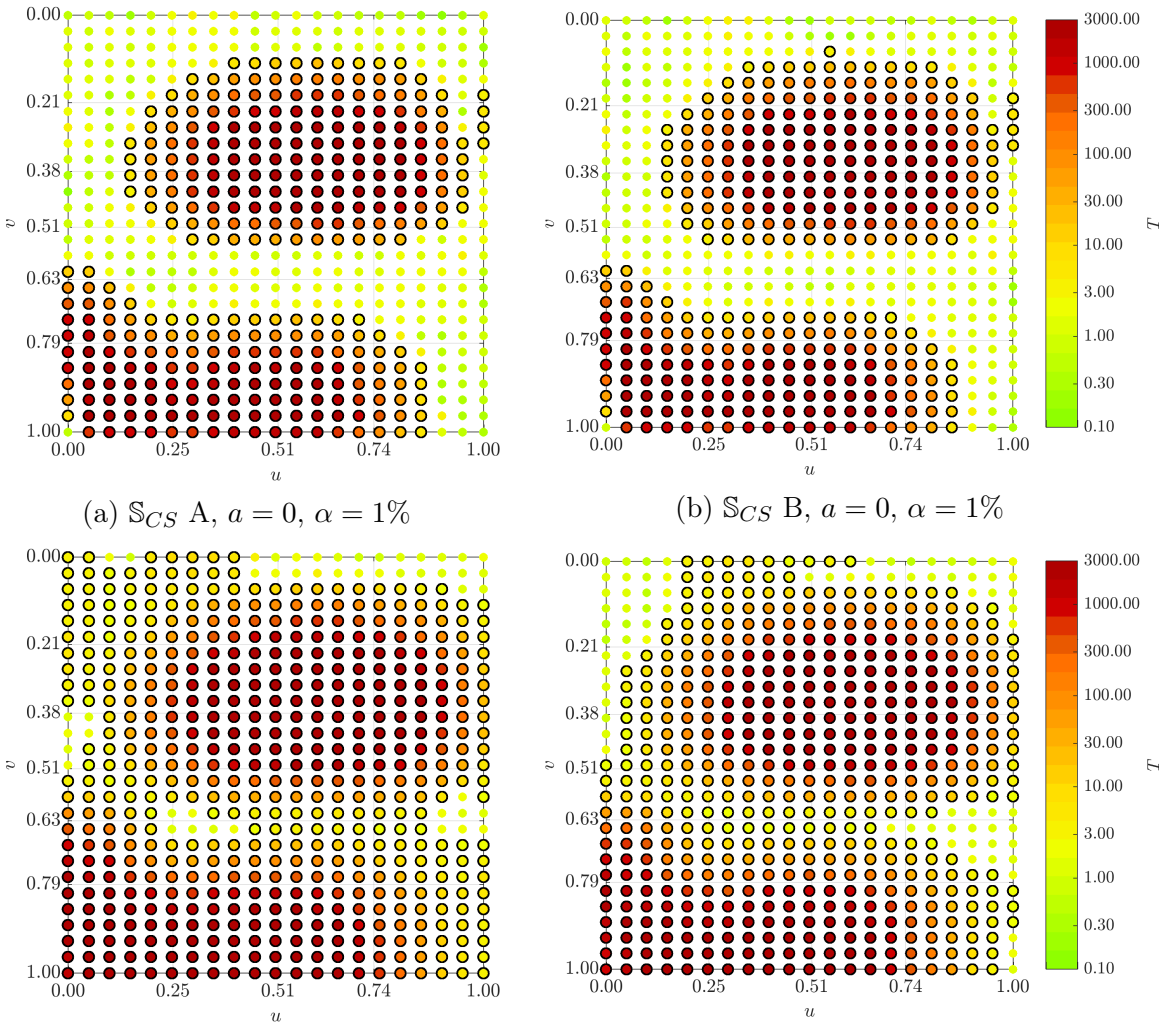
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.24.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für III-V40 auf Basis regularisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

III-V40: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

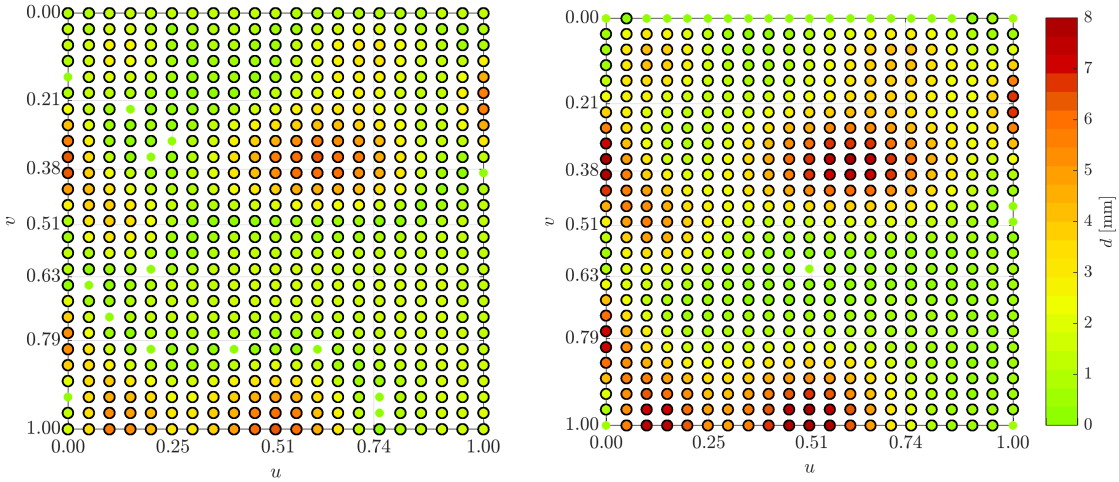
(c) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

(d) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.25.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für III-V40 auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

III-V65: initiale Stabilpunktmengen



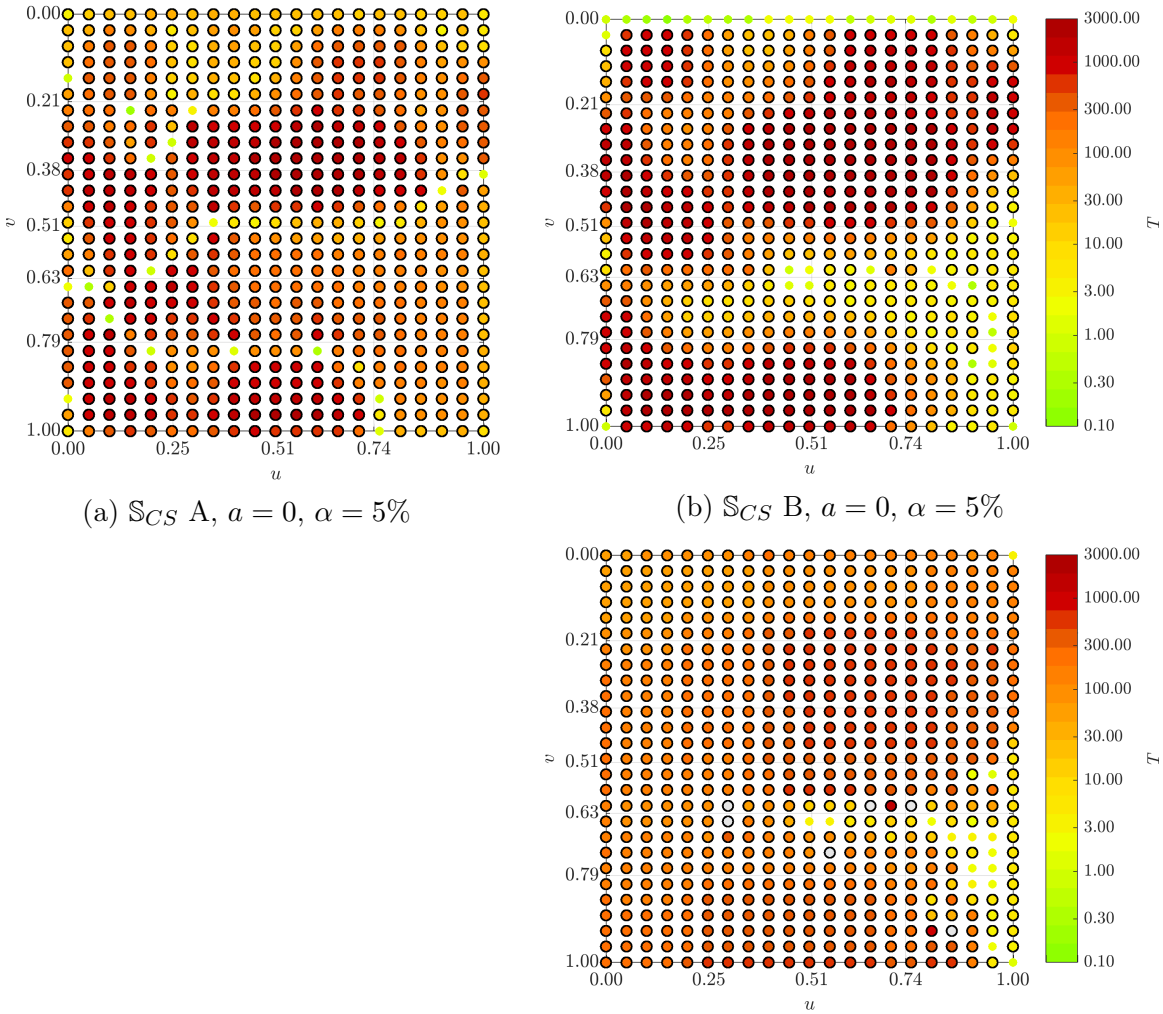
(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $s_{CS} = 14$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $s_{CS} = 23$

Abbildung A.26.: Initiale Stabilpunktmengen für III-V65 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv}).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

III-V65: Ergebnisse der Verformungsanalyse bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv})



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

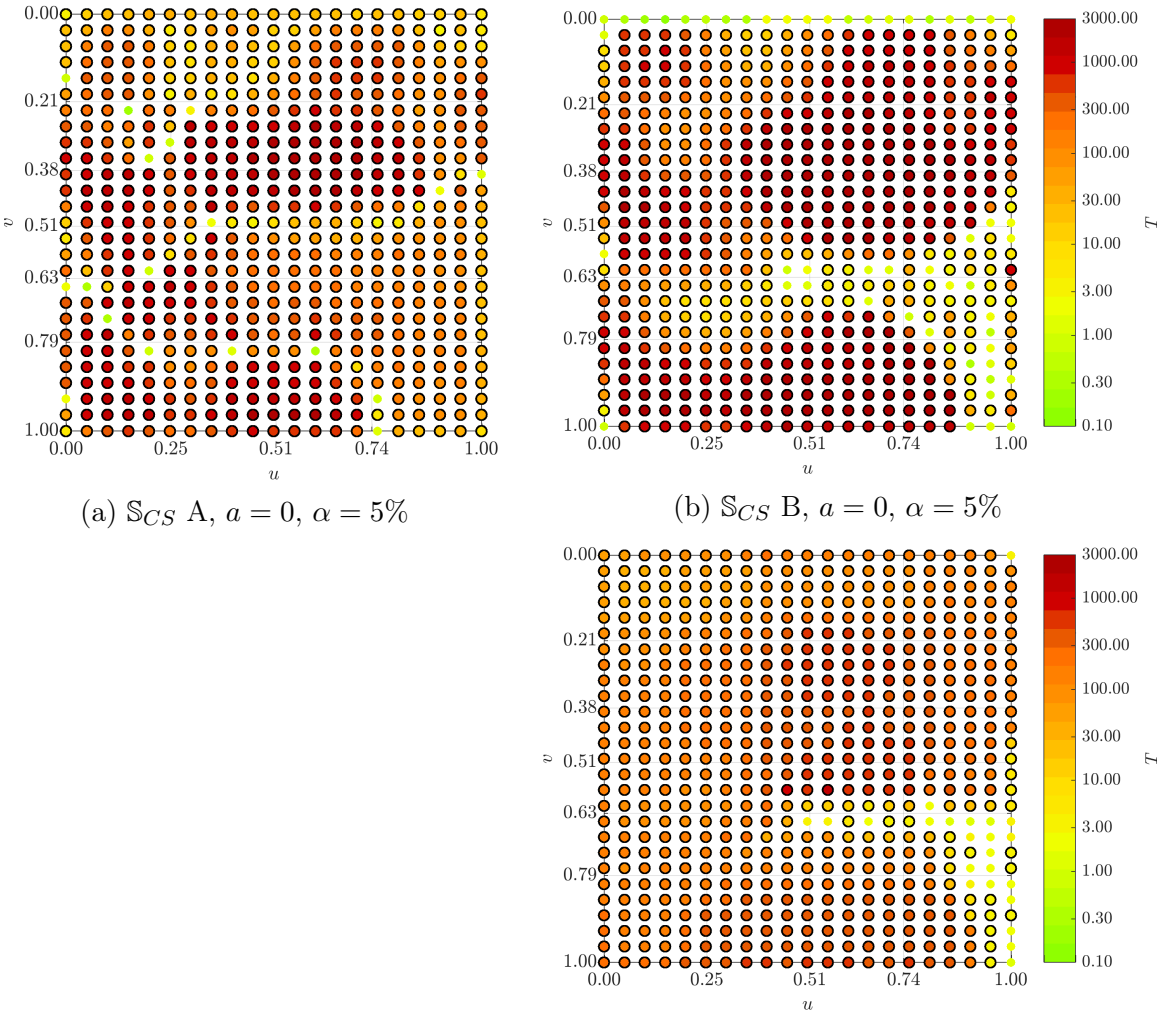
(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(c) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.27.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für III-V65 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (Default-Grenzwert t_{sv}). Für $\mathbb{S}_{CS}$ A kann mit $a = 1$ kein Ergebnis ermittelt werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

III-V65: Ergebnisse der Verformungsanalyse bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` (angepasster Grenzwert $t'_{sv} = 10^{-14}$)



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

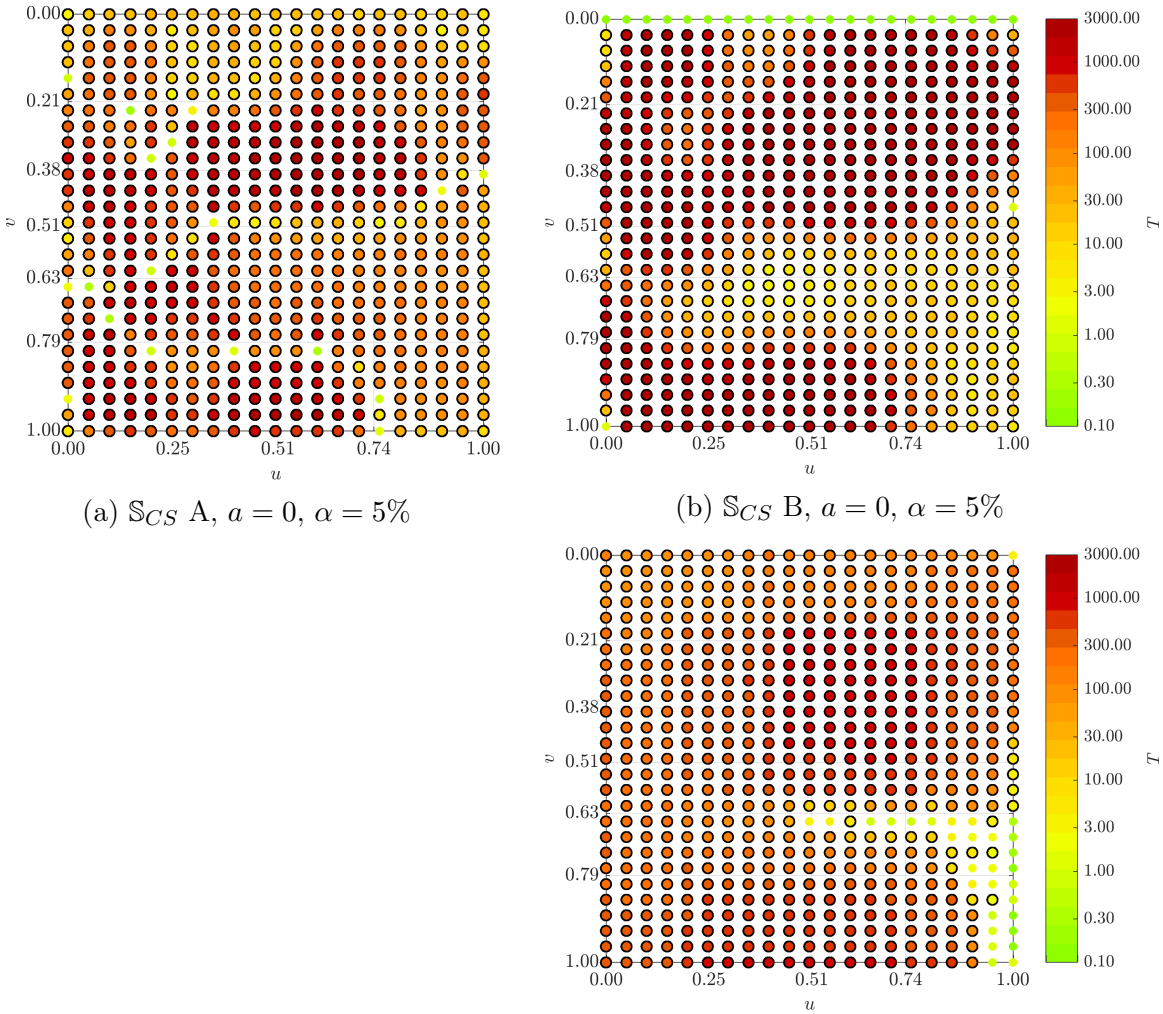
(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(c) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.28.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für III-V65 bei Berechnung der Gewichtsmatrix über `pinv` mit angepasstem Grenzwert t'_{sv}). Für $\mathbb{S}_{CS}$ A kann mit $a = 1$ kein Ergebnis ermittelt werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek WIEN Your knowledge hub

III-V65: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis regularisierter Varianz-Kovarianzmatrizen ($\lambda = 10^{-15}$)



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

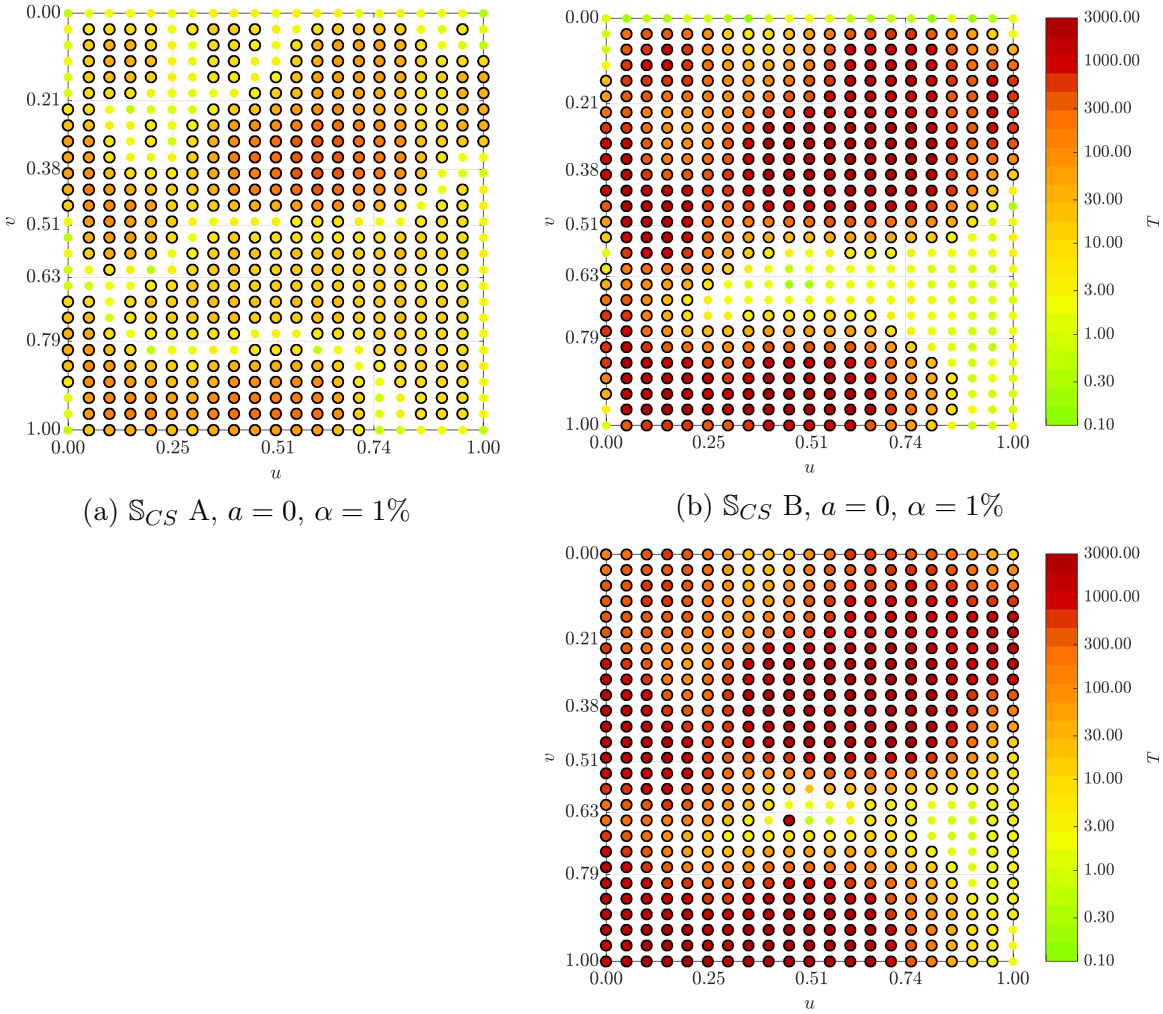
(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 5\%$

(c) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.29.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für III-V65 auf Basis regularisierter Varianz-Kovarianzmatrizen. Für $\mathbb{S}_{CS}$ A kann mit $a = 1$ kein Ergebnis ermittelt werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

III-V65: Ergebnisse der Verformungsanalyse auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen



(a) $\mathbb{S}_{CS}$ A, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(b) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 0$, $\alpha = 1\%$

(c) $\mathbb{S}_{CS}$ B, $a = 1$, $\alpha = 1\%$

Abbildung A.30.: Ergebnisse der Verformungsanalyse für III-V65 auf Basis diagonalisierter Varianz-Kovarianzmatrizen. Für $\mathbb{S}_{CS}$ A kann mit $a = 1$ kein Ergebnis ermittelt werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN