

# EINE EINFÜHRUNG IN MATHEMATISCHE MODELLIERUNGEN DER QUANTENPHYSIK

MASTERARBEIT

KARIM HATIM MEJDOUBI



*Betreut von Ao.Univ.Prof.Mag.rer.nat Dr.rer.nat*

*Gabriela Schranz-Kirlinger*

INSTITUT FÜR ANALYSIS AND SCIENTIFIC  
COMPUTING

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1	Grundkonzepte aus der Analysis und der linearen Algebra . . .	3
1.2	Fouriertransformation . . . . .	10
1.3	Laplacetransformation . . . . .	12
1.4	Funktionentheorie . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>21</b>
2.1	Die Rolle der Energie in der Physik . . . . .	21
2.2	Das Modell der klassischen Mechanik . . . . .	24
2.3	Die Grenzen der klassischen Mechanik und der Übergang zur Quantenmechanik . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Die Schrödingergleichung</b>	<b>31</b>
3.1	Die Schrödingergleichung und der Hamiltonoperator . . . . .	31
3.2	Physikalische Deutung der Schrödingergleichung . . . . .	32
3.3	Das freie Teilchen . . . . .	33
3.4	Der Potentialtopf . . . . .	36
3.5	Potentialbarriere . . . . .	39
3.6	Quantenmechanischer Harmonischer Oszillator . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Frobeniusmethode und Fuchssche DG</b>	<b>50</b>
4.1	Der Potenzreihenansatz . . . . .	51
4.2	Spezielle Differentialgleichungen . . . . .	55
4.2.1	Die Legendreschesche Differentialgleichung . . . . .	55
4.2.2	Besselsche Differentialgleichung . . . . .	58
4.3	Singuläre Differentialgleichungen . . . . .	64
4.3.1	Fuchssche Klasse . . . . .	64
4.3.2	Hypergeometrische Differentialgleichung und ihre Lösung	85

<b>5</b>	<b>Störungstheorie</b>	<b>92</b>
5.1	Hintergründe und elementare Beispiele . . . . .	92
5.1.1	Beispiel 1: Ein gestörtes exponentielles Abklingen . . .	93
5.1.2	Beispiel 2: Ein gestörtes exponentielles Wachstum . . .	94
5.1.3	Beispiel 3: Gestörter harmonischer Oszillator . . . . .	95
5.2	Stabilitätsanalyse . . . . .	98
5.2.1	Beispiele aus dem vorherigen Abschnitt . . . . .	98
5.2.2	Linearisierung und Stabilität . . . . .	99
5.2.3	Der Entwicklungssatz von Poincaré . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Der Laplaceoperator in Kugel- und Zylinderkoordinaten</b>	<b>107</b>
6.1	Koordinatentransformationen . . . . .	108
6.2	Die Laplacegleichung in Kugelkoordinaten . . . . .	109
6.2.1	Separationsansatz für (6.4) . . . . .	109
6.3	Die Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten . . . . .	114
6.3.1	Separationansatz für (6.1) in Zylinderkoordinaten . . .	114
<b>7</b>	<b>Sturm-Liouville Operatoren</b>	<b>116</b>
7.1	Definition und Eigenschaften des Sturm-Liouville-Eigenwertproblems . . . . .	116
7.2	Sturm-Liouville-Normalform . . . . .	120
<b>8</b>	<b>Modelle</b>	<b>124</b>
8.1	Das Wasserstoffatom . . . . .	124
8.1.1	Zentralpotential und Schwerpunktskoordinaten . . . . .	124
8.2	Die Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom . . . . .	125
8.2.1	Separation der Schrödingergleichung (8.1) . . . . .	126
8.2.2	Der Radianteil des Wasserstoffatoms . . . . .	126
8.3	Das Mathematische Pendel . . . . .	130
<b>9</b>	<b>Ausblick</b>	<b>133</b>
9.1	Mathematik . . . . .	133
9.1.1	Rückblick . . . . .	133
9.1.2	Weiterführende mathematische Begriffe . . . . .	134
9.2	Verwandte physikalische Gebiete . . . . .	134

# Kapitel 1

## Mathematische Grundlagen

Wir erinnern an grundlegende Konzepte aus der Analysis, und orientieren uns dabei an der Notation und den Definitionen aus [3] und [4]. Wir geben eine kurze Zusammenfassung von Konzepten aus der Funktionalanalysis, die wir im Weiteren benötigen, wobei die Beweise in [3],[4] und [5] zu finden sind. In allen Abschnitten setzen wir voraus, wenn nicht anders angegeben, dass die Funktionen hinreichend oft stetig differenzierbar sind.

### 1.1 Grundkonzepte aus der Analysis und der linearen Algebra

**Definition 1.1.1** (Metrik und metrischer Raum).

Sei  $X$  eine Menge. Eine Funktion  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- $d(x, y) \geq 0, d(x, x) = 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

nennen wir *Metrik*. In diesem Kontext bezeichnen wir das Paar  $(X, d)$  als *metrischen Raum*.

**Definition 1.1.2** (Cauchy-Folge).

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  mit der Eigenschaft

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \ d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \forall m, n > N(\varepsilon)$$

nennen wir *Cauchy-Folge* in  $(X, d)$ .

**Definition 1.1.3** (Vollständigkeit).

Sei  $X$  eine Menge, versehen mit einer Metrik  $d$ . Dann nennen wir den metrischen Raum  $(X, d)$  *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in  $(X, d)$  einen Grenzwert in  $(X, d)$  hat.

**Satz 1.1.4** (Induzierte Metrik und induzierte Norm).

Eine Norm  $\|\cdot\|$  induziert durch  $d(x, y) := \|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in X$  eine Metrik. Ein Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  induziert durch  $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ ,  $\forall x \in X$  eine Norm und dadurch auch eine Metrik.

**Definition 1.1.5** (Banachraum).

Sei  $X$  ein Vektorraum und  $(X, d_X)$  ein vollständiger metrischer Raum. Falls die Metrik  $d_X$  durch die Norm  $\|\cdot\|_X$  induziert wird, nennen wir  $(X, \|\cdot\|_X)$  einen *Banachraum*.

**Definition 1.1.6** ( $L^p$ -Norm).

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f$  eine Funktion von  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $1 \leq p < \infty$ . Dann nennen wir den Ausdruck

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f|^p dx}$$

die  $L^p$ -Norm von  $f$  und schreiben dafür auch  $\|f\|_p$ .

**Satz 1.1.7** (Vollständigkeit der  $L^p$ -Räume).

Es seien die gleichen Voraussetzungen gegeben wie in der obigen Definition 1.1.6. Dann ist der Vektorraum der Äquivalenzklassen von Funktionen von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}$ , die bis auf einer Lebesgue-Nullmenge ident sind, versehen mit der  $L^p$ -Norm ein Banachraum.

**Definition 1.1.8** (Hilbertraum).

Sei  $X$  ein Vektorraum und  $(X, d_X)$  ein vollständiger metrischer Raum. Falls die Metrik  $d_X$  durch das Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_X$  induziert wird nennen wir  $(X, (\cdot, \cdot)_X)$  einen *Hilbertraum*.

**Satz 1.1.9** ( $L^2$  – Skalarprodukt).

Im Banachraum  $L^2(\Omega)$  bildet die Bilinearform

$$(f, g) \mapsto \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt. Der Raum  $L^2(\Omega)$  versehen mit diesem Skalarprodukt bildet einen Hilbertraum.

**Definition 1.1.10** (Abbildungsnorm).

Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume mit jeweiligen Normen  $\|\cdot\|_X$  beziehungsweise  $\|\cdot\|_Y$  und  $L$  ein linearer Operator von  $X$  nach  $Y$ . Dann nennen wir die Zahl

$$\|L\| := \sup_{\|x\|_X=1} \|Lx\|_Y,$$

falls existent, die *Abbildungsnorm* von  $L$ . Falls dieses Supremum nicht endlich ist, setzen wir  $\|L\| := \infty$ .

**Satz 1.1.11** (Stetigkeit eines linearen Operators).

Ein linearer Operator  $L$  ist *stetig/beschränkt*, genau dann wenn  $\|L\|$  endlich ist.

**Definition 1.1.12** (Eigenwerte).

Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix. Falls es eine Zahl  $\lambda$  und einen Vektor  $x$  gibt mit

$$Ax = \lambda x$$

nennen wir  $x$  einen *Eigenvektor* von  $A$  zum *Eigenwert*  $\lambda$ .

**Satz 1.1.13** (Banachraum der beschränkten linearen Abbildungen).

Seien  $X, Y$  Banachräume. Dann ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ , versehen mit der Abbildungsnorm, ebenfalls ein Banachraum. Wir schreiben für diesen Banachraum  $\mathcal{B}(X, Y)$ .

**Definition 1.1.14** (Spektrum und Punktspektrum einer linearen Abbildung).

Sei  $A$  eine stetige lineare Selbstabbildung, also es gelte  $A \in \mathcal{B}(X, X)$ . Es bezeichne  $id : X \rightarrow X$  die Identität. Dann bezeichnen wir mit

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda \cdot id) \text{ nicht bijektiv}\}$$

das *Spektrum* des Operators  $A$ . Wir bezeichnen mit

$$\sigma_P(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda \cdot id) \text{ nicht injektiv}\}$$

das *Punktspektrum* von  $A$ .

**Satz 1.1.15** (Charakterisierung des Punktspektrums).

Sei  $A \in \mathcal{B}(X, X)$ .  $\lambda \in \sigma_P(A)$ , genau dann, wenn  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  ist.

*Beweis.*

$\lambda$  ist ein Eigenwert von  $A$ , wenn es ein Element  $x \in X$  gibt mit  $Ax = \lambda x$ .

Es gilt dann

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ Ax - \lambda x &= 0 \\ (A - \lambda \cdot id)x &= 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung bedeutet aber genau, dass  $(A - \lambda id)$  nicht injektiv ist, da es mindestens ein nichttriviales Element im Kern besitzt.  $\square$

**Definition 1.1.16** (Adjungierter Operator).

Sei  $(X, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum und sei  $L \in \mathcal{B}(X, X)$ . Falls es einen Operator  $L^*$  gibt mit

$$(Lx, y) = (x, L^*y)$$

nennen wir den Operator  $L^*$  den zu  $L$  bezüglich  $(\cdot, \cdot)$  *adjungierten Operator*. In der Physik wird der Operator manchmal mit  $L^\dagger$  bezeichnet.

**Satz 1.1.17** (Existenz des adjungierten Operators).

Sei  $(X, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum und sei  $L \in \mathcal{B}(X, X)$ . Dann existiert ein eindeutiger Operator  $S$  mit  $S = L^*$  und  $S^* = L$ .

**Definition 1.1.18** (Selbstadjungiertheit und Antiselbstadjungiertheit).

Sei  $(X, (\cdot, \cdot))$  ein Banachraum und  $L \in \mathcal{B}(X, X)$ . Dann heißt  $L$  *selbstadjungiert* (oder im Falle eines komplexwertigen Skalarproduktes *hermitsch*), falls  $L^* = L$  und *antiselbstadjungiert* (oder *antihermitsch*) falls  $L^* = -L$ .

**Satz 1.1.19** (Eigenwerte von  $L^*$ ).

Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $L$  zur Eigenfunktion  $\psi$ . Dann ist  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert von  $L^*$  zur Eigenfunktion  $\psi$ . Falls  $L$  hermitsch ist sind die Eigenwerte reell und falls  $L$  antihermitsch ist sind die Eigenwerte rein imaginär.

*Beweis.*

Sei  $\psi$  wie oben definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} (L\psi, \psi) &= (\lambda\psi, \psi) \\ &= (\psi, \bar{\lambda}\psi) \\ &= (\psi, L^*\psi) \end{aligned}$$

Falls  $L$  hermitsch ist gilt

$$\begin{aligned} (L\psi, \psi) &= (\lambda\psi, \psi) \\ &= (\psi, L\psi) \\ &= (\psi, \lambda\psi) \\ &= (\bar{\lambda}\psi, \psi) \\ \lambda\|\psi\|^2 &= \bar{\lambda}\|\psi\|^2 \end{aligned}$$

und somit  $\lambda = \bar{\lambda}$  was äquivalent dazu ist, dass  $\lambda$  reellwertig ist.

Es sei nun  $L$  antihermitsch. Dann gilt

$$\begin{aligned} (L\psi, \psi) &= (\lambda\psi, \psi) \\ &= (\psi, -L\psi) \\ &= (\psi, -\lambda\psi) \\ &= (-\bar{\lambda}\psi, \psi) \\ \lambda\|\psi\|^2 &= -\bar{\lambda}\|\psi\|^2 \end{aligned}$$

was äquivalent dazu ist, dass  $\lambda$  rein imaginär ist. □



**Definition 1.1.20** (Isometrie/Unitäre Abbildung).

Es sei  $(X, (\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum oder  $(X, \|\cdot\|)$  ein Banachraum und es bezeichne  $\mathbb{T}$  die Einheitskreislinie in  $\mathbb{C}$ . Ein Operator  $A \in \mathcal{B}(X, X)$  heißt *isometrisch* (oder *Isometrie*), falls  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{T}$ . Eine Isometrie ist immer längen- und winkeltreu. Eine andere mögliche Charakterisierung ist, unter Vorhandsein eines Skalarproduktes, die Gleichung

$$(x, y) = (Ax, Ay)$$

beziehungsweise  $A^* = A^{-1}$ . Wir nennen Abbildungen mit komplexen Eigenwerten  $\mathbb{C}$  *unitäre Abbildungen*.

**Beispiel 1.1.21** (Translation auf  $L^2(\mathbb{R})$ ).

Betrachte den Raum  $L^2(\mathbb{R})$  versehen mit  $\|\cdot\|_{L^2}$ . Es sei der Operator  $S$  gegeben durch

$$\begin{aligned} S : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f(x) &\mapsto f(x + 10). \end{aligned}$$

Wir weisen die dritte Eigenschaft aus der Definition 1.1.20 mittels der Substitution  $y = x + 10$  nach.

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 10)g(x + 10)dx \\ &= (Sf, Sg) \end{aligned}$$

**Definition 1.1.22** (Erstes Integral).

Es sei  $f$  lokal Lipschitzstetig,  $f : A \rightarrow B$  und  $\mathcal{H} : B \rightarrow \mathbb{R}$  sei hinreichend glatt. Gegeben sei eine Differentialgleichung mit

$$x'(t) = f(x(t), t), \quad x(0) = x_0. \quad (1.1)$$

Falls es eine Funktion  $\mathcal{H}(x)$  gibt, die entlang der Lösungen von (1.1) konstant ist, nennen wir  $\mathcal{H}$  ein *erstes Integral* von (1.1). Aus

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x(t)) &= \text{const} \\ \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \nabla \mathcal{H} \cdot x'(t) = 0 \end{aligned}$$

folgt, dass die Niveaulinien von  $\mathcal{H}$  genau die Lösungen sind. Der Anfangswert gibt das Niveau an.

**Beispiel 1.1.23** (Harmonischer Oszillator und erstes Integral).

Betrachte die skalare (dimensionslose) Differentialgleichung

$$\begin{aligned}x'' + x &= 0 \\x(0) &= 1 \\x'(0) &= 0\end{aligned}$$

Die Funktion

$$\mathcal{H} = \frac{x'(t)^2}{2} + \frac{x(t)^2}{2}$$

stellt ein erstes Integral dar:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= x''(t)x'(t) + x'(t)x(t) \\&= x'(t)(x''(t) + x(t)) \\&= 0.\end{aligned}$$

**Definition 1.1.24** (Unstetige/unbeschränkte Operatoren).

Ein linearer Operator  $L$  heißt *unbeschränkt*, wenn  $\|L\| = \infty$

**Satz 1.1.25** (Definitionsbereich eines unbeschränkten Operators).

Sei  $L$  unbeschränkt. Dann kann  $L$  auf einen dichten Teilraum definiert werden auf dem  $L$  stetig ist. Wir bezeichnen diesen Teilraum als *Domain* von  $L$  oder abgekürzt  $\text{dom}(L)$ .

**Beispiel 1.1.26** (Differentialoperator auf  $L^2$ ).

Wir betrachten den Differentialoperator  $L(f) := f''$  definiert auf der Menge  $D := \{f \in L^2[0, 1], f \in C^2[0, 1] | f(0) = f(1) = 0\}$ . Das Eigenwertproblem von  $L$  lösen entspricht folgendem Randwertproblem

$$f'' = \lambda f, f(0) = f(1) = 0.$$

Dieses Eigenwertproblem stellt ein Sturm-Liouville Eigenwertproblem dar, die Lösungen und Eigenwerte sind gegeben durch

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \sin(n\pi x) \\ \lambda_n &= -n^2\pi^2\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind unbeschränkt, daher ist

$$\|L\| = \sup_{\|f\|=1} \left\| \frac{f''}{f} \right\| \geq |n^2\pi^2| = \infty.$$

**Definition 1.1.27** (Phasenraum).

Gegeben sei die Differentialgleichung  $x' = f(x)$ ,  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Wir nennen den Raum  $\mathbb{R}^{2n} = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x' = f(x)\}$  *Phasenraum* und Lösungen der Differentialgleichung *Trajektorien* oder *Phasenkurven*.

**Definition 1.1.28** (Gammafunktion).

Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Wir bezeichnen das folgende Integral

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt \quad (1.2)$$

als *Gammafunktion*. Diese Funktion ist analytisch für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  und erfüllt

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die obigen Gleichungen lassen sich mit partieller Integration und Induktion beweisen. Es lässt sich beweisen, dass die Gammafunktion genau Polstellen bei den negativen ganzen Zahlen hat.

## 1.2 Fouriertransformation

**Definition 1.2.1.**

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

Die *Fouriertransformierte*  $\hat{f}$  von  $f$  ist definiert durch

$$\hat{f}(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ipx) dx,$$

wobei  $p$  die zu  $x$  *konjugierte Fouriervariable* heißt. Der Vorfaktor ist so gewählt dass die Fouriertransformation eine Isometrie auf  $L^1(\mathbb{R})$  ist.

**Satz 1.2.2.**

Es sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann gilt  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Beweis: Wir beweisen die Kontraposition.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) \neq 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \text{ konvergiert nicht} \Rightarrow f \notin L^1(\mathbb{R}) \quad \square$$

**Satz 1.2.3** (Satz von Riemann-Lebesgue).

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(p) = 0$$

**Satz 1.2.4.**

Es habe  $f$  die Fouriertransformierte  $\hat{f}$  und es sei  $p$  die zu  $x$  konjugierte Fouriervariable. Dann gilt:

$$pf(x) = -if'(x)$$

Beweis: Wir verwenden dafür Satz 1.2.2.

$$\begin{aligned} \widehat{-if'(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -if'(x) \exp(-ipx) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( -if(x) \exp(-ipx) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-if(x)) \frac{\partial}{\partial x} \exp(-ipx) dx \\ &= i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ip) \exp(-ipx) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p \exp(-ipx) dx \\ &= \widehat{pf(x)} \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.2.5.**

Die Fouriertransformation ist injektiv, daher gilt die Gleichung

$$pf(x) = -if'(x).$$

Die Gleichung ist so zu verstehen, dass eine Funktion  $F(x, p)$  die Relation folgendermaßen erfüllt:

$$pF(x, p) = -i \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Eine zweite Interpretation ist, dass mit  $p$  multiplizieren im Originalraum einer Ableitung entspricht, siehe dazu den Ausblick in Kapitel 5 in [5].

## 1.3 Laplacetransformation

**Definition 1.3.1.** *Es sei  $f$  stetig und zwar so, dass es ein  $s > 0$  gibt mit  $f(t) \exp(-st) \in L^1(\mathbb{R})$ . Die Laplacetransformierte  $\mathcal{L}(f)(s)$  beziehungsweise  $F(s)$  lautet*

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt.$$

**Satz 1.3.2** (Rechenregeln für die Laplacetransformation).

- Linearität  
 $\mathcal{L}(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \mathcal{L}(f_1) + a_2 \mathcal{L}(f_2)$
- Ähnlichkeitssatz  
 $\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
- Verschiebung im Originalbereich  
 $\mathcal{L}(f(t-a)) = \exp(-as) F(s)$
- Verschiebung im Signalbereich  
 $\mathcal{L}(\exp(-at)) f(t) = F(s+a)$
- erste Ableitung im Originalbereich  
 $\mathcal{L}(f') = sF(s) - f(0)$
- zweite Ableitung im Originalbereich  
 $\mathcal{L}(y'') = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
- $n$ -te Ableitung im Originalbereich  
 $\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$

Originalfunktion $f(t)$	Bildfunktion $F(s)$
$\exp(-at)$	$\frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}(s) > -a$
$\Theta(t)$ (Heaviside-Funktion/Einheitssprungfunktion)	$\frac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$t$	$\frac{1}{s^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t \exp(-at)$	$\frac{1}{(s+a)^2}, \operatorname{Re}(s) > -a$
$t^n \exp(-at)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, \operatorname{Re}(s) > -a$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \operatorname{Re}(s) >  a $
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \operatorname{Re}(s) >  a $

Tabelle: Laplacetransformierte  $F(s)$  der Funktion  $f(t)$ 

Beweis: siehe [3].

## 1.4 Funktionentheorie

Wir wollen einige Ergebnisse aus [12] über Potenzreihen und Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen vorstellen. Alle Themen und Beweise zu den Sätzen lassen sich ebenso dort finden. Es bezeichne  $G$  in diesem Abschnitt ein offenes Gebiet in  $\mathbb{C}$ .

**Definition 1.4.1** (Holomorphie).

Eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *holomorph*, wenn  $f$  im ganzen Gebiet komplex differenzierbar ist, also wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$\forall z_0 \in G$  existiert und endlich ist. Eine Funktion die auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph ist nennen wir *ganz*.

**Bemerkung 1.4.2** (Holomorphe Funktionen).

Die Funktionen  $\exp, \sin$  und  $\cos$  sind auf  $\mathbb{C}$  holomorph. Die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$  ist auf  $\mathbb{C}^*$  holomorph, wobei  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Satz 1.4.3** (Potenzreihenentwicklungssatz).

Sei  $f$  holomorph in  $G$ . Dann besitzt  $f$  eine (zumindest lokale) Potenzreihenentwicklung.

**Definition 1.4.4** (Kompakte Konvergenz).

Eine Funktionenfolge  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *kompakt konvergent* gegen  $f$ , falls  $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert für jedes Kompaktum  $K$  in  $G$ .

**Satz 1.4.5** (Weierstraßscher Konvergenzsatz).

Sei  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Folge holomorpher Funktionen. Falls  $f_n$  kompakt gegen  $f$  konvergiert, so ist  $f$  holomorph.

**Satz 1.4.6** (Berechnung der Koeffizienten der Potenzreihe).

Eine Funktion ist genau dann holomorph, wenn ihre Taylorreihe mit ihrer Potenzreihe um  $x_0$  übereinstimmt. Dann gilt  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ .

*Beweis.*

$\Rightarrow$

Eine holomorphe Funktion besitzt eine lokale Potenzreihenentwicklung, daher müssen Potenz- und Taylorreihe übereinstimmen.

$\Leftarrow$

Eine Funktion, die eine Taylorreihe besitzt ist unendlich oft komplex differenzierbar und somit holomorph.

Die Gleichung folgt aus der Gleichheit der Reihen.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ \Rightarrow a_k &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \end{aligned}$$

**Definition 1.4.7** (Singularitäten).

Es sei  $f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Eine Singularität  $z_0 \in G$  heißt

- *hebbare* Unstetigkeitsstelle, falls  $f$  auf ganz  $U$  holomorph fortgesetzt werden kann.
- *Polstelle*, falls  $f(z)(z - z_0)^m$  holomorph fortgesetzt werden kann. Das kleinste  $m$  welches die Eigenschaft erfüllt nennen wir *Ordnung* der Polstelle. Wir lassen dabei auch  $m \leq 0$  zu: wenn das kleinste  $m$  negativ ist nennen wir  $z_0$  *Nullstelle*  $-m$ -ter Ordnung.

- *wesentliche Singularität* wenn  $z_0$  weder eine Polstelle noch hebbare Unstetigkeitsstelle ist.

**Beispiel 1.4.8** (Singularitäten).

1. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^2 + 1 \end{aligned}$$

ist bei  $z_0 = 0$  undefiniert und somit ist  $z_0 = 0$  eine Singularität.  $f$  hat an der Stelle  $z_0 = 0$  eine hebbare Unstetigkeitsstelle.

2. Die Funktion

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} \setminus \{i\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z^2}{(z-i)^4} \end{aligned}$$

hat an der Stelle  $z_0 = i$  eine Polstelle vierter Ordnung.

3. Die Funktion

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto (z-1)^2 \cos(z) \end{aligned}$$

hat an der Stelle  $z_0 = 1$  eine Nullstelle zweiter Ordnung.

4. Die Funktion

$$\begin{aligned} k : \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \exp\left(\frac{-1}{z}\right) \end{aligned}$$

hat an der Stelle  $z_0 = 0$  eine wesentliche Singularität.

**Definition 1.4.9** (Meromorphe Funktion).

Eine Funktion die bis auf isolierte Polstellen in  $U$  holomorph ist, nennen wir *meromorph*.



**Satz 1.4.10.**

Sei  $f$  auf  $G$  holomorph und habe an der Stelle  $z_0$  eine Nullstelle  $k$ -ter Ordnung. Dann gibt es eine holomorphe Funktion  $q(z)$  mit  $q(z_0) \neq 0$  so, dass

$$f(z) = q(z)(z - z_0)^k.$$

*Beweis.*

Die Funktion  $\frac{f(z)}{(z-z_0)^k}$  ist für jedes  $z \in U$  holomorph. Daher existiert eine holomorphe Funktion  $q(z)$  mit  $\frac{f(z)}{(z-z_0)^k} = q(z)$ . Auflösen nach  $f$  liefert dann

$$f(z) = q(z)(z - z_0)^k$$

Die Funktion  $q$  hat keine Nullstelle bei  $z_0$ , denn sonst hätte  $f$  eine Nullstelle  $(k + 1)$ -ter Ordnung. □

**Satz 1.4.11.**

Sei  $f$  auf  $G$  holomorph und habe an der Stelle  $z_0$  eine Polstelle  $k$ -ter Ordnung. Dann gibt es eine holomorphe Funktion  $q(z)$  mit  $q(z_0) \neq 0$  so, dass

$$f(z) = \frac{q(z)}{(z - z_0)^k}.$$

*Beweis.*

Die Funktion  $f(z)(z - z_0)^k$  ist für jedes  $z \in U$  holomorph. Daher existiert ist  $q(z)$  mit  $f(z)(z - z_0)^k = q(z)$  holomorph. Auflösen nach  $f$  liefert dann

$$f(z) = \frac{q(z)}{(z - z_0)^k}$$

Die Funktion  $q$  hat keine Nullstelle bei  $z_0$ , denn sonst hätte  $f$  eine Polstelle  $(k - 1)$ -ter Ordnung. □

**Satz 1.4.12** (Darstellung von meromorphen Funktionen).

Sei  $f$  eine meromorphe Funktion mit einer Polstelle  $m$ -ter Ordnung. Dann existieren holomorphe Funktionen  $g, h$  die bei  $z_0$  keine Nullstelle besitzen und

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)(z - z_0)^m}$$

erfüllen.

*Beweis.*

Wir verwenden Satz 1.4.11 und erhalten die Existenz der Darstellung.

**Satz 1.4.13.**

Es seien  $g, h$  holomorph und es seien  $k_1, k_2$  die Nullstellenordnungen von  $g, h$  an der Stelle  $z_0$ . Dann ist die Funktion

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

meromorph und besitzt

- eine Polstelle  $k_2 - k_1$ -ter Ordnung falls  $k_2 > k_1$ .
- eine hebbare Unstetigkeitsstelle, falls  $k_1 = k_2$ .
- eine Nullstelle der Ordnung  $k_1 - k_2$ , falls  $k_1 > k_2$ .

*Beweis.*

Folgt aus den Sätzen 1.4.11, 1.4.12 und etwaigem Kürzen.

**Satz 1.4.14** (Charakterisierung von meromorphen Funktionen).

Meromorphe Funktionen sind genau jene Quotienten von holomorphen Funktionen, wo die Nullstellenordnung des Nenners größer als die Nullstellenordnung des Zählers ist.

**Bemerkung 1.4.15** (Potenzreihen und Taylorreihen).

Eine Funktion  $f$  besitzt um die Entwicklungsstelle  $z_0$  genau dann eine Potenzreihe, wenn  $f$  in einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  holomorph ist. Um diesen Entwicklungspunkt sind, bei holomorphen Funktionen, Taylorreihe und Potenzreihe ident. Falls  $f$  nur meromorph ist, existiert die Taylorreihe um die Polstelle  $z_0$  nicht. Dazu wird das Konzept der Potenzreihe erweitert.

**Definition 1.4.16** (Laurentreihe).

Es sei  $m \in \mathbb{Z}$ . Wir nennen die folgende Funktionenreihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

eine *Laurentreihe* um  $z_0$ . Die Begriffe *Konvergenz*, *gleichmäßige Konvergenz*, *absolute Konvergenz* sind analog zu definieren wie bei gewöhnlichen Potenzreihen. Wir nennen die Ausdrücke

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  *Nebenteil*
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}$  *Hauptteil*

der Laurentreihe.

Unser Ziel ist es meromorphe Funktionen in Laurentreihen zu entwickeln.

Typische Entwicklungsgebiete sind Kreisscheiben, also Mengen der Art

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$

**Satz 1.4.17** (Berechnung der Koeffizienten einer Laurentreihe).

Gegeben sei eine Funktion  $f(z)$  mit ihrer Laurentreihe  $\sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ .  
Dann gilt:

$$a_k = \frac{1}{(m+k)!} \left( (z - z_0)^m f(z) \right)^{(m+k)} \Big|_{z=z_0}.$$

*Beweis.*

Die Funktion  $f$  hat bei  $z_0$  eine Polstelle  $m$ -ter Ordnung, daher ist  $(z - z_0)^m f(z)$  eine holomorphe Funktion und wir erhalten die Darstellung durch den *Satz 1.4.6*.

**Satz 1.4.18.**

Eine Funktion  $f$  besitzt in  $z_0$

- eine hebbare Unstetigkeitsstelle, falls der Hauptteil der Laurentreihe verschwindet.
- eine Polstelle  $m$ -ter Ordnung, falls  $a_{-m} \neq 0$  und  $a_k = 0$ ,  $k < m$ .
- eine wesentliche Singularität, fagenau dann in einer Umgebung von  $z_0$  unendliche viele  $a_k \neq 0$  mit  $k < 0$ .

**Bemerkung 1.4.19** (Maximale Fortsetzbarkeit).

Eine bei  $z_0$  holomorphe Funktion ist als Potenzreihe darstellbar, wobei der Konvergenzradius typischerweise genau der Abstand von  $z_0$  bis zur nächsten Polstelle  $z_1$  ist. Falls eine der Polstellen ein Verzweigungspunkt ist oder gar eine wesentliche Singularität ist, so kann es mehrere unterschiedliche Fortsetzungen geben. Der *Monodromiesatz* und die Konstruktion der *Kreisketten* geben hinreichende Voraussetzungen für die Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung einer Funktion.

**Satz 1.4.20** (Periodizität der Exponentialfunktion).

Die Funktion  $\exp(z)$  ist  $2\pi i$  periodisch.

*Beweis.*

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \exp(2\pi i) = \exp(z) \cdot 1$$

□

**Definition 1.4.21** (Komplexer Logarithmus und Hauptzweig des Logarithmus).

Die komplexe Exponentialfunktion  $\exp(z)$  ist periodisch und somit nicht bijektiv als Funktion von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$ . Ein *komplexer Logarithmus* kann folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{aligned} \text{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \ln(|z|) + i\varphi \end{aligned}$$

wobei mit  $\ln$  der reelle Logarithmus gemeint ist und  $\varphi$  eine reelle Zahl ist mit  $z = re^{i\varphi}$ . Jede Einschränkung von  $\varphi$  auf einem Intervall der Länge  $2\pi$  ergibt einen (wohldefinierten) Zweig des komplexen Logarithmus. Der *Hauptzweig Log* des komplexen Logarithmus ist jener Zweig mit  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ . Wir können auch andere Logarithmen definieren indem wir die komplexe Ebene anders *schlitzen*, das heißt einen anderen Strahl durch den Ursprung entfernen. Ebenso kann für die Winkel ein anderes Intervall gewählt werden, zum Beispiel  $[0, 2\pi)$  statt  $(-\pi, \pi]$ .

**Beispiel 1.4.22** (Hauptzweig des Logarithmus).

Wir wählen den Hauptzweig des Logarithmus so, dass die Winkel  $\varphi$  in  $(-\pi, \pi)$  liegen.

$$\text{Log}(i) = \ln(1) + i\frac{\pi}{2} = \frac{i\pi}{2}$$

$$\text{Log}(e) = \ln(e) + i \cdot 0 = 1$$

$$\text{Log}(4 - 4i) = \ln(\sqrt{32}) - i\frac{\pi}{4}$$

**Definition 1.4.23** (Komplexe Potenzen).

Seien  $w, z \in \mathbb{C}$ . Wir geben dem Ausdruck  $w^z$  folgendermaßen Sinn:

$$w^z := \exp(z \log(w))$$

wobei mit  $\log$  ein Zweig des komplexen Logarithmus gemeint ist.

**Beispiel 1.4.24** (Komplexe Potenzen).

Wir betrachten den Hauptzweig des komplexen Logarithmus wie oben beschrieben.

$$e^z = \exp(z(\ln(e) + i \arg(e))) = \exp(z), \quad z > 0$$

$$i^i = \exp(i \operatorname{Log}(i)) = \exp\left(i \frac{i\pi}{2}\right) = \exp\left(\frac{-\pi}{2}\right)$$

$$x^2 = \exp(2 \operatorname{Log}(x)) = \exp(2 \ln(x) + 2i \arg(x)) = \exp(2 \ln(x)) = x^2, \quad x > 0$$

# Kapitel 2

## Physikalische Grundlagen

Wir machen die Lesenden mit Konzepten aus der Physik vertraut, die in den späteren Kapiteln eine große Rolle spielen und stellen eine Verbindung her zwischen physikalischem Modell und den mathematischen Gegebenheiten. Wir berücksichtigen in dieser Arbeit keine Einheiten. Es lässt sich alles genauer nachlesen in [2] und [11].

### 2.1 Die Rolle der Energie in der Physik

Eine der zentralen Größen in der Physik ist die Energie, sie bestimmt im Wesentlichen wozu ein physikalisches System in der Lage ist. In den folgenden Modellen betrachten wir eine Punktmasse, das heißt ein Objekt das keine Ausdehnung aber eine nichttriviale Masse besitzt. Relevante Fragestellungen sind beispielsweise:

- Wie bewegt sich das Massenteilchen räumlich? In welcher Menge liegt der Orbit  $x(t)$  des Massepunktes?
- Kann es gewisse Hindernisse wie eine Wand überwinden?
- Wie sehr kann die Umgebung beeinflussen? Wie groß ist der Einfluss der Umgebung auf das Massenteilchen?

Die Energie mathematisch zu definieren ist aufwändiger, wir gehen dabei zunächst von einem Spezialfall aus.

**Bemerkung 2.1.1** (Zweites Newtonsches Axiom).

Es bezeichne  $m$  die Masse des Teilchens und  $\sum F_{ext}$  die Summe aller Kräfte, die von außen auf das Teilchen einwirken.

In der klassischen Mechanik wird dann die Position  $x(t)$  eines Masseilchens durch die Differentialgleichung

$$mx'' = \sum F_{ext} \quad (2.1)$$

beschrieben.

**Satz 2.1.2** (Energie als erstes Integral).

Es sei die Summe der Kräfte nur von der Position  $x$  abhängig und von der Geschwindigkeit  $x'$  und der Zeit  $t$  unabhängig. Dann lässt sich ein erstes Integral finden, welches als Funktion  $E$  die Gesamtenergie des physikalischen Systems darstellt.

*Beweis.*

Wir beweisen die Aussage im skalaren Fall.

Es sei die Gleichung

$$mx'' = \sum F_{ext} = F(x)$$

mit  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Dazu definieren wir die folgenden Ausdrücke, die gemeinsam die Gesamtenergie  $E$  ergeben.

$$V(x) := \int_{x_0}^x -F(s) ds$$

$$T(x) := \frac{m(x')^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x) &= -F(x)x' \\
\frac{d}{dt}T(x) &= mx''x' \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}T(x) &= -\frac{d}{dt}V(x) \\
\frac{d}{dt}\left(T(x) + V(x)\right) &= 0 \\
E &= T(x) + V(x) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}E &= 0 \quad \square
\end{aligned}$$

**Bemerkung 2.1.3.**

Die Größe  $E$  ist die Gesamtenergie des Systems,  $T$  ist die kinetische Energie und  $V$  ist die potentielle Energie. Die Energie wird somit entlang der Lösung  $x(t)$  erhalten, sie bildet ein erstes Integral von (2.1). In der Physik bezeichnen wir diese Aussage als Energieerhaltungssatz.

**Bemerkung 2.1.4** (Konservative/Dissipative Kräfte).

Eine Kraft  $F$ , die ein Potential besitzt heißt konservative Kraft. Dass bedeutet es gibt eine Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit  $F = -\nabla\Phi$ . Das zusätzliche Vorzeichen ist eine Konvention in der Physik. Eine Kraft  $F_{dis}$  die nicht konservativ ist heißt dissipativ. Es kann der Energieerhaltungssatz verallgemeinert werden zu

$$\frac{dE}{dt} = F_{dis}x'.$$

Konservative und dissipative Kräfte in der Physik spiegelt die *Helmholtzsche Zerlegung* wider: ein Vektorfeld, in diesem Fall die Summe der Kräfte, kann, unter gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen, als Summe eines konservativen Kraftfelds und eines dissipativen Kraftfelds geschrieben werden. In diesem Sinne gilt dann

$$\sum F = \nabla(\Phi) + \nabla \times A$$

wobei  $\Phi$  die Stammfunktion der Summe der konservativen Kräfte darstellt und  $A$  ein Vektorpotential der Summe der dissipativen Kräfte repräsentiert.



## 2.2 Das Modell der klassischen Mechanik

Die Mechanik bezeichnet jenes Teilgebiet der Physik, welches sich mit Bewegungen, Kräften und Energien von Punktmassen und ausgedehnten Körpern befasst. In der klassischen Mechanik wird postuliert, dass die Position  $x(t)$  und die Geschwindigkeit  $x'(t)$  eines Teilchens beliebig genau gemessen werden können. Mathematisch bedeutet es, dass beide durch Funktionen  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $x'(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  beschrieben werden können, die eine Bewegungsgleichung erfüllen. Allgemeiner werden die zeitlichen Entwicklungen von Systemen oft mit dem Hamiltonformalismus behandelt.

**Definition 2.2.1** (Hamiltonfunktion und Hamiltonformalismus).

Es seien  $p(t), q(t) \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\mathcal{H}(p(t), q(t))$  heißt *Hamiltonfunktion*, wenn die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\end{aligned}$$

erfüllt sind. Typischerweise hat die Funktion  $\mathcal{H}$  die Gestalt

$$\mathcal{H}(p, q) = T(p) + V(q).$$

Sie stellt die Gesamtenergie dar. Die Variablen  $p, q$  heißen kanonische oder verallgemeinerte Impuls- bzw Ortskoordinaten, sie übernehmen die Rolle von  $x'$  bzw  $x$  im Phasenraum.

**Beispiel 2.2.2** (Klassischer harmonischer Oszillator im Hamiltonformalismus).

Es sei  $n = 1$ . Für den harmonischen Oszillator gilt

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

Dabei ist  $m > 0$  die Masse und  $\omega > 0$  die Kreisfrequenz. Die Niveaumengen von  $\mathcal{H}$  sind Ellipsen mit den Halbachsen  $a = \sqrt{2m}$  und  $b = \sqrt{\frac{2}{\omega}}$ .

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= p' = \frac{d\mathcal{H}}{dq} = m\omega^2 q \\ \frac{dq}{dt} &= q' = -\frac{d\mathcal{H}}{dp} = -\frac{p}{m}\end{aligned}$$

Umschreiben in ein System erster Ordnung liefert

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & m\omega^2 \\ -\frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0. \quad (2.2)$$

Das ist ein lineares System mit konstanten Koeffizienten, daher lösen wir (2.2) mithilfe der Eigenwerte und der Eigenvektoren.

$$\begin{aligned}r(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & m\omega^2 \\ \frac{-1}{m} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 \\ \lambda_1 &= -i\omega \\ \lambda_2 &= i\omega\end{aligned}$$

Das System (2.2) ist reellwertig, daher lässt sich ein reelles Fundamentalsystem aus dem Realteil und dem Imaginärteil konstruieren. Für die komplexe Lösung  $z(t) = p(t) + iq(t)$  gilt

$$\begin{aligned}v_1 &\in \ker \begin{pmatrix} -\lambda_1 & m\omega^2 \\ \frac{-1}{m} & -\lambda_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i\omega & m\omega^2 \\ \frac{-1}{m} & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} im\omega \\ 1 \end{pmatrix} \\ z_1(t) &= z_0 \exp(-i\omega t) \begin{pmatrix} im\omega \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_0 \in \mathbb{C} \\ z_1(t) &= c_0 \begin{pmatrix} -m\omega \sin(\omega)t \\ \cos(\omega)t \end{pmatrix} + ic_1 \begin{pmatrix} -im\omega \cos(\omega)t \\ -i \sin(\omega)t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Geeignete Wahl von  $c_0, c_1$  liefert

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \cos(\omega t) - q_0 m \omega \sin(\omega t) \\ q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m \omega} \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Der Sinn und Zweck des Hamiltonformalismus ist eine systematische Beschreibung der Lösungen  $(p(t), q(t))$  ohne die Zeit berücksichtigen zu müssen. Anstatt die Lösungen  $(p(t), q(t))$  als Funktionen der Zeit zu interpretieren geben wir eine implizite Darstellung des ersten Integrals. Dadurch rücken wir die Rolle der Zeit in den Hintergrund und heben die Wichtigkeit der Energie hervor.

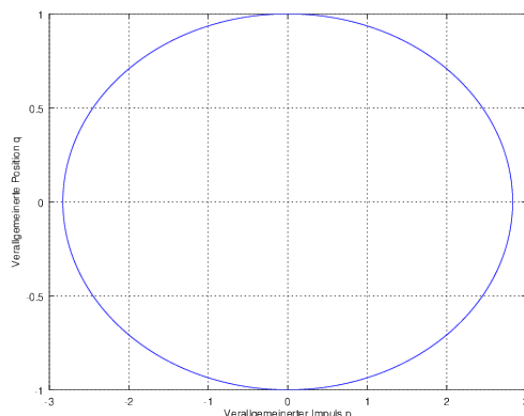


Abbildung 2.1: Eine Skizze der Trajektorie von (2.2) im Phasenraum für  $\omega = 2, m = 4$ .

## 2.3 Die Grenzen der klassischen Mechanik und der Übergang zur Quantenmechanik

Die klassische Mechanik bildet ein zugängliches Modell mit Einschränkungen: sie beschreibt die zeitliche Entwicklung von Punkten und Körpern, funktioniert aber in den Grenzfällen, wo die Größen (Energie, Längen usw.) sehr klein werden nicht mehr. Bei diesen Größenordnungen stößt das Modell an die Grenzen und kann Phänomene nicht vorhersagen, wodurch die Richtigkeit der klassischen Mechanik in diesen Fällen infrage gestellt werden muss. Wir zählen hier die Grundannahmen der klassischen Mechanik auf, um besser zu verstehen inwiefern diese Grundannahmen verändert werden müssen.

1. Die Position und Geschwindigkeit  $x, x'$  beziehungsweise die verallgemeinerten Orts- und Impulskoordinaten können beliebig genau gemessen werden.
2. Die physikalischen Gesetze und Formeln zur Beschreibung der Objekte sind unabhängig von der Größe der Körper, sie gilt für Punktmassen genauso wie für ausgedehnte Körper.
3. Die Gesamtenergie und alle physikalischen Größen sind kontinuierlich und können beliebige Werte annehmen.
4. Ein physikalisches System mit Gesamtenergie  $E_0$  kann eine Potentialbarriere mit der Energie  $E_1 > E_0$  nicht überwinden, da die Gesamtenergie erhalten werden muss.
5. Punktmassen verhalten sich wie Teilchen und nicht wie Wellen, Effekte wie Brechung oder Interferenz werden nicht beobachtet.

Am Ende des 19. Jahrhunderts beziehungsweise am Anfang des 20. Jahrhunderts gab es eine Reihe an wichtigen Experimente, welche die Grenzen der klassischen Mechanik deutlich gemacht haben. Wir werden nicht in die Details der Versuche eingehen, wir wollen vielmehr einfach stichwortartig die Resultate der Physik zur Jahrhundertwende zusammenfassen, alles lässt sich genauer in [2] und [11] finden.

1. Experimentell ist nachgewiesen worden, dass die Größen  $x, x'$  nicht zeitgleich beliebig genau gemessen werden können, es gibt eine untere

Schranke für die Varianz der Messungen. Dieses Ergebnis heißt *Heisenbergsche Unschärferelation*.

2. Strahlen mit Teilchen die eine Masse  $m > 0$  besitzen können Interferenzeigenschaften zeigen, genau wie Licht, solange die Teilchen hinreichend klein sind. Eine spezielle Wechselwirkung (*Compton-Effekt*) zwischen Photonen (masselose Lichtteilchen) und Elektronen (nicht masselos) zeigt die Dualität von mikroskopischen Masseteilchen. Ein anderes Experiment, welches die Wellennatur beweist, ist die *Beugung von Elektronstrahlen am Doppelspalt*.
3. Ein Teilchen mit der Gesamtenergie  $E_0$  kann eine Potentialbarriere mit höherer Energieschwelle  $E_1 > E_0$  überwinden. Dieses Phänomen heißt *Tunneleffekt*.
4. Wasserstoffteilchen, die mit Photonen bombardiert werden, können nicht bei beliebiger Energie die Photonen absorbieren, es gibt vereinzelte Energien wo die Absorption möglich ist. Im Absorptionsspektrum gibt es diskrete Linien. Siehe *Franck-Hertz-Versuch*.

Wir verlangen eher axiomatisch, gewisse Eigenschaften von einem Modell welches die Quantenphysik repräsentieren soll.

1. Physikalische Größen sind, im Mikroskopischen, diskret. Es gibt eine kleinste Energieeinheit (*erste Quantisierung*).
2. Teilchen werden durch Wellenfunktionen  $\psi(x, t)$  dargestellt. Dabei gibt  $\int_{\Omega} |\psi(x, t)|^2 dx$  die Wahrscheinlichkeitsdichte an, zum Zeitpunkt  $t$  das Teilchen im Bereich  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  zu finden. Insbesondere sind die physikalischen Größen wie Position  $x$  und Impuls  $p$  eines Teilchens Zufallsvariablen und nicht mehr *deterministisch*.
3. Das Modell geht im Grenzfall größerer Teilchen/Systeme wieder in die klassische Mechanik über (*Bohrsches Korrespondenzprinzip*).
4. Messungen physikalischer Größen, die *Observablen*, werden durch lineare, hermitesche Operatoren beschrieben, die auf die Wellenfunktionen wirken.

5. Der *Mittelwert* einer Observablen  $A$  ist durch

$$\langle A \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x, t)} A \psi(x, t) dx dt$$

gegeben. Der Mittelwert gibt genau den Messwert der Größe  $A$  im Zustand  $\psi$  an. Beispielsweise gibt  $\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x, t)} E \psi(x, t)$  genau die Energie des Teilchens mit der Wellenfunktion  $\psi$  an.

6. Die Eigenwerte einer Observablen entsprechen genau den möglichen Messwerten.
7. Wird bei einer Messung der Observable  $A$  der Eigenwert  $a_n$  gemessen, so wird aus der Linearkombination  $\psi = \sum_i \alpha_i \psi_i$  die Eigenfunktion  $\psi_n$  zum Eigenwert  $a_n$ . Wir sagen auch die Wellenfunktion ist *kollabiert*.
8. Der *Impulsoperator*  $P$  entspricht dem Differentialoperator  $-i\hbar \frac{d}{dx}$  im Ortsraum, der Faktor  $\hbar$  kommt aus Dimensiongründen zustande und heißt in der Physik *reduziertes Wirkungsquantum*.

Der erste Schritt lautet eine Gleichung zu formulieren, welche die zeitliche Entwicklung eines Systems beschreiben kann. Wir suchen demnach ein quantenmechanisches Pendant des *zweiten Newtonschen Axioms*, eine Gleichung, welche die zeitliche oder räumliche Entwicklung der Wellenfunktion angibt. Diese Gleichung heißt *Schrödingergleichung*.

**Bemerkung 2.3.1** (Wellenfunktionen und Erwartungswerte).

Wir haben die Observablen als lineare Operatoren definiert. Beispielsweise ist der Operator  $X$  jener Operator, welcher die Position misst. Lassen wir den Operator auf die Wellenfunktion wirken, so erhalten wir

$$X\psi := x\psi(x).$$

Diese Definition ist konsistent mit den Axiomen. Wenn wir beispielsweise die mittlere Position eines Teilchens bestimmen, so müssen wir den Mittelwerte des Positionsoperators berechnen.

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &:= \int_{\Omega} \bar{\psi} X \psi dx dt \\ &= \int_{\Omega} \bar{\psi} x \psi dx dt \end{aligned}$$

Die letzte Zeile interpretieren wir folgendermaßen: die Wellenfunktion gibt im Wesentlichen eine (komplexe) Wahrscheinlichkeitsdichte an und es steht der Erwartungswerte für die Position im Raum  $x$  bezüglich der Wahrscheinlichkeitsdichte  $\bar{\psi}\psi$ . Diese Interpretation bildet vermutlich eine der Grundideen die Wirkung der Operatoren durch Multiplikation durch *geeigneten Funktionen* zu definieren und diese Integrale als Erwartungswerte anzusehen.

**Bemerkung 2.3.2** (Ehrenfestsches Theorem).

Wir halten ein weiteres Ergebnis fest: nur weil die klassische Physik an ihre Grenzen stößt, bedeutet das nicht, dass die Gleichungen aus den anderen Modellen falsch sind. Der Physiker Paul Ehrenfest hat seinen bekannten Satz folgendermaßen formuliert:

*Gleichungen aus der klassischen Physik gelten auch in der Quantentheorie, jedoch nur für die Mittelwerte.*

Wenn wir beispielsweise ein (ideales) Gas betrachten, welches aus sehr vielen Teilchen besteht, dann erfüllen die Teilchen folgende Gleichung

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} k_B \langle T \rangle .$$

wobei  $T$  die *Temperatur* und  $k_B$  die *Boltzmannkonstante* ist.

# Kapitel 3

## Die Schrödingergleichung

### 3.1 Die Schrödingergleichung und der Hamiltonoperator

Der Ausgangspunkt der Schrödingergleichung und aller Operatoren aus der Quantenmechanik ist die Inkompatibilität der Bewegungs- und Energieerhaltungsgleichungen aus der klassischen Mechanik. Gewisse Phänomene sind mit der klassischen Mechanik nicht zu erklären gewesen. Dadurch wurde versucht, ein Modell zu finden beziehungsweise zu formulieren das sowohl die klassische Mechanik als Grenzfall enthält aber auch in der Lage ist die neuen Beobachtungen vorherzusagen. Ein Ansatz war, die Hamiltonfunktion aus der klassischen Mechanik zu betrachten und ein Äquivalent als Operator zu finden.

**Definition 3.1.1** (Hamiltonoperator).

Der Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$  aus der klassischen Mechanik entspricht der Hamiltonoperator  $\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} + V(X)$  wobei diesmal  $P, V(X)$  die zugehörigen Observablen zum Impuls  $P$  beziehungsweise zum Potential  $V(X)$  sind. Somit entspricht  $\mathcal{H}$  genau dem *Energieoperator*. Der Hamiltonoperator ist eine Observable. Wie wir am Ende von Kapitel 2 gesehen haben, entspricht die Wirkung von  $\mathcal{H}$  genau der Messung der Energie. In dem Sinne: jene Zahlen  $\lambda_n$ , die  $\mathcal{H}\psi = \lambda_n\psi$  erfüllen sind automatisch die möglichen Energien des Systems mit der Wellenfunktion  $\psi$ .

**Satz 3.1.2** (Stationäre Schrödingergleichung).



Für eine gegebene Wellenfunktion  $\psi$  und Potentialfunktion  $V(x)$  ist die Messung der Energiezustände  $E_n$  des Teilchens gegeben durch

$$\frac{P^2}{2m}\psi_n + V(x)\psi_n = E_n\psi_n. \quad (3.1)$$

Die Gleichung (3.1) enthält sowohl die Variable  $x$  als auch die konjugierte Fouriervariable  $p$  beziehungsweise den Operator  $P$ . Der Operator  $P^2$  lässt sich mit dem Satz 1.2.4 als  $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$  umschreiben. Es kann die Eigenwertgleichung im  $x$ -Raum folgendermaßen formuliert werden:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi. \quad (3.2)$$

Gleichung (3.2) heißt *stationäre oder zeitunabhängige Schrödingergleichung*.

**Bemerkung 3.1.3** (Plancksches Wirkungsquantum).

Die Größe  $\hbar$  heißt *reduziertes Plancksches Wirkungsquantum* und die Größe  $h = 2\pi\hbar$  heißt *Plancksches Wirkungsquantum*. Es handelt sich um Naturkonstanten.

**Definition 3.1.4** (Gebundene- und Streuzustände).

Wir sagen eine Wellenfunktion ist im *gebundenen Zustand*, falls ihre Eigenenergie  $E_n$  negativ ist. Andernfalls sagen wir eine Wellenfunktion ist im *Streuzustand*.

## 3.2 Physikalische Deutung der Schrödingergleichung

Die Wellenfunktion  $\psi$  stellt eine Wahrscheinlichkeitsdichte dar, die Wahrscheinlichkeit, dass das quantenmechanische Teilchen im Intervall  $[a, b]$  ist, ist  $\int_a^b |\psi(x)|^2$ . Dementsprechend werden die Lösungen der Schrödingergleichung so gewählt, dass  $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ . Die Eigenfunktionen geben dann an, welche Zustände mit welcher Energie zu finden sind. Die Energien sind genau die Eigenwerte des Hamiltonoperators. Das Energiespektrum ist nicht kontinuierlich, sondern nimmt nur gewisse Werte

an (erste Quantisierung). Mathematisch können wir das, zunächst ohne Randbedingungen, als Eigenwertproblem formulieren:

$$\mathcal{H}\psi_n = E_n\psi_n. \quad (3.3)$$

In den folgenden Abschnitten bezeichnen wir mit Eigenenergien die Eigenwerte des Hamiltonoperators  $\mathcal{H}$ .

Wir stellen typische physikalische Potentiale  $V(x)$  vor, lösen die Schrödingergleichung in diesen Fällen und berechnen die entsprechenden Eigenwerte. Dazu wählen wir die Randbedingungen so, dass die Lösungen  $\psi$  normiert sind und in Abhängigkeit der gewählten Potentiale  $V(x)$  gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllen.

### 3.3 Das freie Teilchen

Unter einem freien Teilchen verstehen wir ein Teilchen, mit Potential  $V(x) = 0$  innerhalb eines gegebenen Gebietes  $[a, b]$  und mit verschwindender Wellenfunktion  $\psi \equiv 0$  außerhalb von  $[a, b]$ . Diese Einschränkung wird deshalb gewählt, weil in diesem Fall die Schrödingergleichung die Form einer Schwingungsgleichung ohne Reibungsterm hat mit trigonometrischen Funktionen als Lösungen und diese auf  $\mathbb{R}$  nicht normierbar sind.

$$\frac{-\hbar^2\psi''}{2m} = E_n\psi, \quad x \in [a, b], \quad \psi(a) = \psi(b) = 0 \quad (3.4)$$

Jedes reelle endliche Intervall kann durch Streckung/Stauchung und Verschiebung auf das Intervall  $[0, 1]$  transformiert werden. Wir wählen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Intervall  $[0, 1]$  aus. Mit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezeichnen wir die zugelassenen Eigenwerte des Randwertproblems. Um die Lösungen als Funktionen von  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zu betrachten setzen wir die Funktionen außerhalb von  $[a, b]$  mit 0 fort. Wir lösen das Randwertproblem und skizzieren die Lösungen zu verschiedenen Eigenwerten.

Um die Notation zu vereinfachen definieren wir  $\kappa = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}}$  und erhalten

$$-\kappa^2\psi'' = E_n\psi, \quad x \in [0, 1], \quad \psi(0) = \psi(1) = 0. \quad (3.5)$$

Wir führen eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von  $E_n$  durch und versuchen die Randbedingungen so zu erfüllen, dass es eine nichttriviale Lösung gibt.

$$\kappa^2\psi'' + E_n\psi = 0$$

- $E_n < 0$

Das charakteristische Polynom lautet  $p(\mu) = \kappa^2 \mu^2 + E_n = 0$ . Für  $E_n < 0$  erhalten wir zwei reelle Nullstellen,  $\mu_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-E_n}{\kappa^2}}$  mit den Fundamentallösungen  $\psi_{1,2}(t) = \exp\left(\pm \sqrt{\frac{-E_n}{\kappa^2}} x\right)$ . Die allgemeine Lösung von (3.5) lautet somit:

$$\psi(x) = c_1 \exp(\mu_1 x) + c_2 \exp(\mu_2 x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wir überprüfen, ob nichttriviale Lösungen existieren.

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0 = c_1 + c_2 \\ c_1 &= -c_2 \\ \psi(1) &= c_1 \exp(\mu_1) + c_2 \exp(-\mu_1) \\ &= c_1 \exp(\mu_1) - c_1 \exp(-\mu_1) \\ &= 2c_1 \sinh(\mu_1) = 0 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt nur, wenn  $\mu_1 = 0$  oder  $c_1 = 0$ . Da wir von  $E_n < 0$  und somit  $\mu_1 \neq 0$  ausgegangen sind, erhalten wir in diesem Fall nur triviale Lösungen.

- $E_n = 0$

Wir erhalten  $p(\mu) = \kappa^2 \mu^2 = 0$ , also eine doppelte Nullstelle bei  $\mu = 0$ . Die allgemeine Lösung lautet

$$\psi(x) = c_1 + c_2 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wir überprüfen, ob es nichttriviale Lösungen gibt.

$$\begin{aligned} \psi(0) &= c_1 + 0 \cdot c_2 = c_1 = 0 \\ \psi(1) &= c_1 + c_2 = c_2 = 0 \end{aligned}$$

Es gibt nur triviale Lösungen.

- $E_n > 0$

Wir erhalten  $p(\mu) = \kappa^2 \mu^2 + E_n = 0$  und als Nullstellen  $\mu_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{E_n}{\kappa^2}}$ .

Ein reelles Fundamentalsystem ist  $\cos\left(\sqrt{\frac{E_n}{\kappa^2}}x\right), \sin\left(\sqrt{\frac{E_n}{\kappa^2}}x\right)$  und die allgemeine Lösung von (3.5) lautet

$$\psi(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{E_n}{\kappa^2}}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{E_n}{\kappa^2}}x\right).$$

Wir überprüfen, ob es eine Lösung geben kann, die die Randbedingungen erfüllt und nichttrivial ist.

$$\psi(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 = 0$$

$$\psi(1) = c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{E_n}{\kappa^2}}\right) = 0$$

$$\sqrt{\frac{E_n}{\kappa^2}} = n\pi, n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{E_n}{\kappa^2} = n^2\pi^2, n \in \mathbb{N}$$

$$E_n = \kappa^2 n^2 \pi^2, n \in \mathbb{N}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m}, n \in \mathbb{N}$$

Genau dann, wenn  $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m}$  existieren nichttriviale Lösungen, nämlich  $\psi_n(x) = \sin\left(\sqrt{\frac{E_n}{\kappa^2}}x\right)$  beziehungsweise  $\psi_n(x) = \sin(n\pi x)$ . In der folgenden Abbildung sehen wir die ersten vier Eigenfunktionen mit dem gleichen Vorfaktor  $c_2 = 1$ .

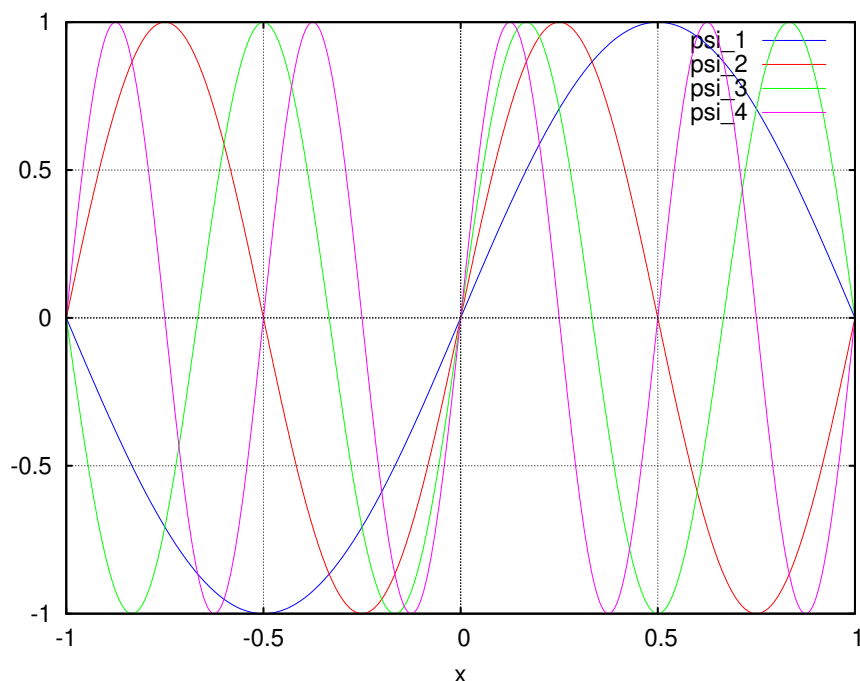


Abbildung 3.1: Die ersten vier Eigenfunktionen des Randwertproblems (3.5) mit  $E_n > 0$ .

### 3.4 Der Potentialtopf

Der Potentialtopf (engl. *potential well*) ist eine Idealisierung der folgenden Idee: Wenn wir von einem Teilchen erwarten, dass es in einem gewissen Intervall bleibt müssen wir nur die Barrieren am Rand des Intervalls sehr hoch machen. Damit es nicht durchtunneln (siehe Abschnitt 2.3) kann, müssen eben diese Barrieren *unendlich hoch* sein. Das konstante Potential  $V_0$  innerhalb des Intervalls wird vorgegeben. Somit erhalten wir als ideales Potential für dieses Modell die untenstehende Funktion. Das Vorzeichen und der Name des Modells lassen sich dadurch erklären, dass das Teilchen in einem Loch ist und sozusagen unter dem Nullniveau ist.

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & |x| \leq L \\ \infty, & |x| > L \end{cases}$$

Mathematisch können wir das modellieren durch das Randwertproblem

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\psi''(x) - V_0\psi(x) = E_n\psi(x), \quad \psi(-L) = \psi(L) = 0. \quad (3.6)$$

Wir verlangen zusätzlich  $\psi(x) = 0, |x| > L$ . Wir verwenden wieder den Exponentialansatz um (3.6) zu lösen, dabei ist  $\kappa = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m}}$ . Wir unterscheiden nach dem Vorzeichen der Differenz  $V_0 - E_n$ .

$$p(\lambda) = \kappa^2\lambda^2 + (V_0 - E_n). \quad (3.7)$$

Da die Gleichung dieselbe Struktur hat wie (3.5) können wir die Fälle  $V_0 - E_n < 0$  und  $V_0 - E_n = 0$  ausschließen, da sie nur triviale Lösungen besitzen.

$V_0 - E_n > 0$  :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{V_0 - E_n}{\kappa^2}}$$

$$\psi(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{V_0 - E_n}{\kappa^2}}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{V_0 - E_n}{\kappa^2}}x\right)$$

$$\psi(-L) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{V_0 - E_n}{\kappa^2}}L\right) + c_2 \sin\left(-\sqrt{\frac{V_0 - E_n}{\kappa^2}}L\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\psi(L) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{V_0 - E_n}{\kappa^2}}L\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{V_0 - E_n}{\kappa^2}}L\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\psi(L) + \psi(-L) = 2c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{V_0 - E_n}{\kappa^2}}L\right) = 0$$

$$\sqrt{\frac{V_0 - E_n}{\kappa^2}}L = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{V_0 - E_n}{\kappa^2} = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}, n \in \mathbb{N}$$

$$V_0 - E_n = \frac{\hbar^2(2n+1)^2\pi^2}{8mL^2}, n \in \mathbb{N}$$

$$E_n = V_0 - \frac{\hbar^2(2n+1)^2\pi^2}{8mL^2}, n \in \mathbb{N}$$

Nur wenn die letzte Identität erfüllt ist, existieren nichttriviale Lösungen. In den Abbildungen wählen wir  $L = 1$  und setzen das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum  $\hbar = 1$ .

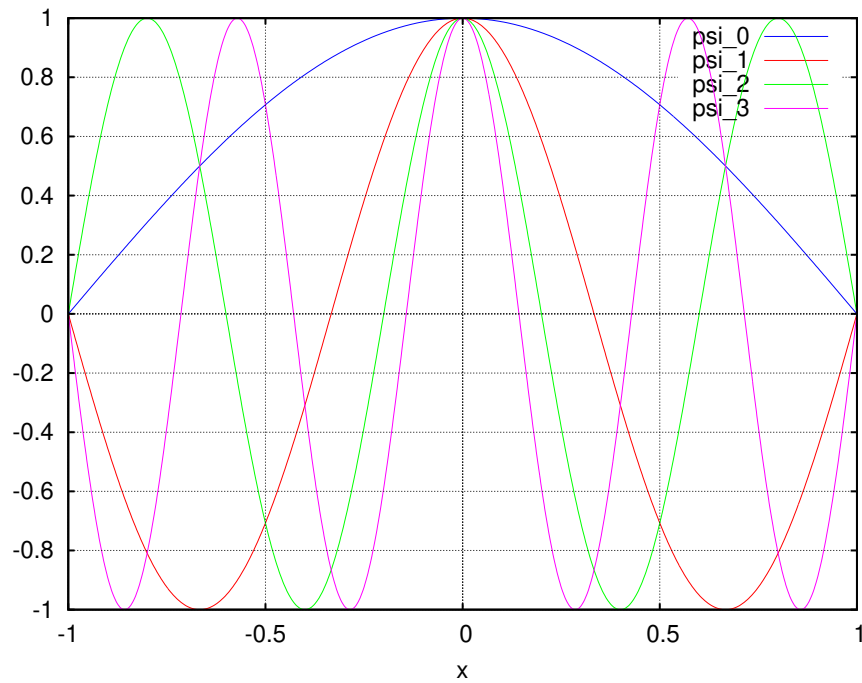


Abbildung 3.2: Die ersten vier Eigenfunktionen von (3.6) für  $L = 1$  und  $V_0 - E_n > 0$ .

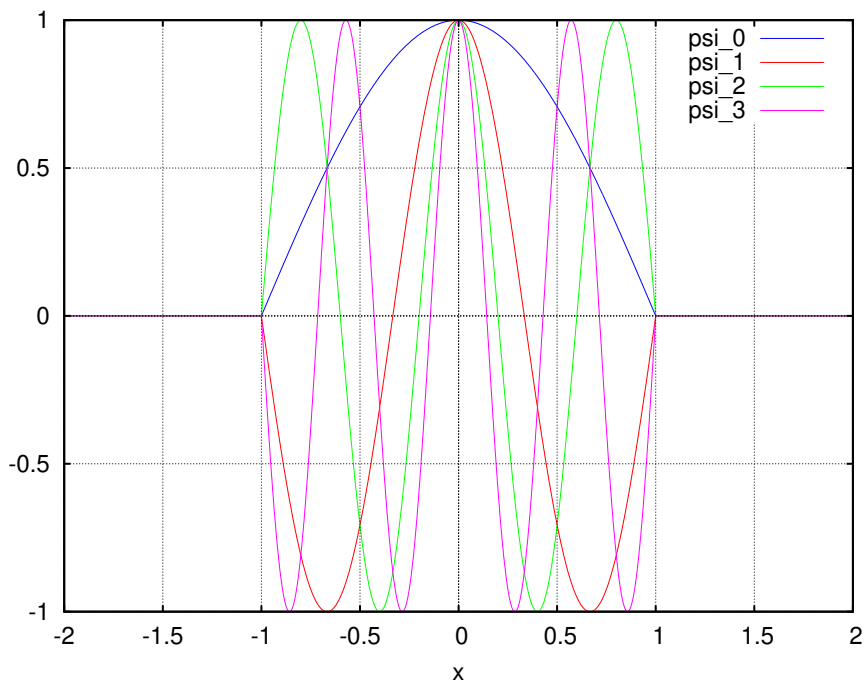


Abbildung 3.3: Die ersten vier Eigenfunktionen von (3.6) für  $L = 1$  und  $V_0 - E_n > 0$  in  $[-2, 2]$ .

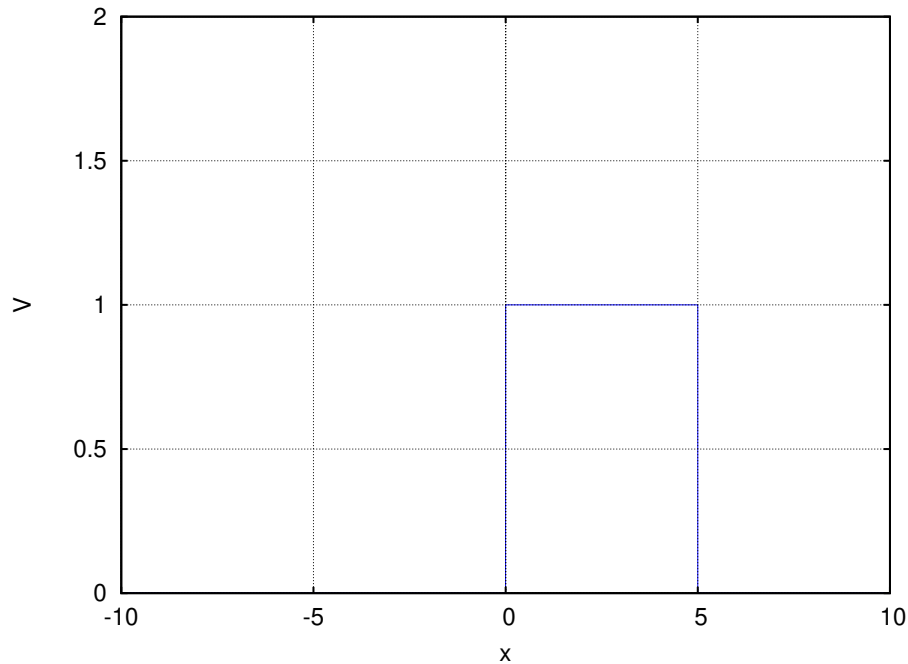
### 3.5 Potentialbarriere

Diesmal betrachten wir eine Potentialbarriere der *Höhe*  $V_0$ , also eine Potentialfunktion die stückweise konstant ist:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & 0 \leq x < L \\ 0, & L \leq x \end{cases}$$

mit  $V_0, L > 0$ .



Abbildung 3.4: Potentialbarriere  $V(x)$  mit  $V_0 = 1, L = 5$ .

Wir betrachten eine Differentialgleichung auf einem symmetrischen Intervall  $[-a, a]$  mit  $a > L > 0$ .

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi \quad (3.8)$$

Wir behandeln den Fall, wo  $0 < E < V_0$  und nennen diesen Fall die *Subbarrierenstreuung*. Der Ausgangspunkt ist ein freies Teilchen mit vorgegebener Gesamtenergie  $E$ , welches auf eine Potentialbarriere der Höhe  $V_0$  trifft. In der klassischen Mechanik müsste das Teilchen an der Barriere abprallen. Wir zeigen, dass die Wellenfunktion für  $x \geq 0$  nicht verschwindet. Das bedeutet, dass dieses Teilchen sehr wohl durch diese Barriere *tunneln* kann.

Da die Funktion  $V(x)$  unstetig ist, und in der Gleichung  $\psi''$  vorkommt, verlangen wir, dass das  $\psi \in C^1$ . Wir teilen das Intervall  $[-a; a]$  in die Bereiche  $[-a; 0]$ ,  $(0; L)$  und  $(L, a]$  und lösen die Differentialgleichung stückweise unter Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen für  $\psi$ . Die

Differentialgleichung ist im ersten und dritten Bereich dieselbe, es sind somit die Ansätze in diesen Bereichen ident.

Um die Notation zu vereinfachen definieren wir  $\kappa = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  und  $\mu = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$ . Wir lösen (3.8) wie in [6] und verzichten auf Anfangswerte/Randwerte.

#### Ansatz im Bereich I

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m}\psi'' - E\psi &= 0 \\ p(\lambda) &= \frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 + E = 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm i\kappa, \quad E > 0 \\ \psi_I(x) &= A \exp(i\kappa x) + B \exp(-i\kappa x) \end{aligned}$$

#### Ansatz im Bereich II

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m}\psi'' + (V_0 - E)\psi &= 0 \\ p(\lambda) &= \frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 + (E - V_0) = 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} = \pm \mu_n, \quad V_0 - E > 0 \\ \psi_{II}(x) &= C \exp(-\kappa x) + D \exp(\kappa x) \end{aligned}$$

#### Ansatz im Bereich III

$$\psi_{III}(x) = F \exp(i\kappa x) + G \exp(-i\kappa x)$$

Wir haben 4 Stetigkeitsbedingungen für die sechs Konstanten  $A, B, C, D, F, G$  und nehmen daher zwei sinnvolle physikalische Bedingungen dazu.

- $A = 1$   
Das Teilchen läuft von links mit normierter Amplitude ein. Diese kann beliebig sein, wir setzen sie der Einfachheit halber auf 1.

- $G = 0$

Die transmittierte Welle enthält nur auslaufende Wellen, das heißt diese bewegen sich von links nach rechts mit wachsendem  $x$ . Es gibt keine von rechts *einlaufende* Welle.

#### Stetigkeitsbedingungen

Wir verwenden die Voraussetzungen  $\psi \in C^1$ .

$$\begin{aligned}\psi_I(0) &= \psi_{II}(0) \\ 1 + B &= C + D \\ \psi'_I(0) &= \psi'_{II}(0) \\ i\kappa - i\kappa_n B &= i\mu C - i\mu D \\ \psi_{II}(L) &= \psi_{III}(L) \\ C \exp(-\mu L) + D \exp(\mu L) &= F \exp(i\kappa L) \\ \psi'_{II}(L) &= \psi'_{III}(L) \\ -\mu C \exp(-\mu L) + \mu D \exp(\mu L) &= iF\kappa \exp(i\kappa L)\end{aligned}$$

Umgeschrieben in lineare Gleichungssysteme erhalten wir

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\kappa}{i\mu} & 1 + \frac{\kappa}{\mu} \\ 1 + \frac{\kappa}{i\mu} & 1 - \frac{\kappa}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{i\mu}{\kappa}\right) e^{(i\mu+\kappa)L} & \left(1 + \frac{i\mu}{\kappa}\right) e^{(-i\mu+\kappa)L} \\ \left(1 + \frac{i\mu}{\kappa}\right) e^{(i\mu-\kappa)L} & \left(1 - \frac{i\mu}{\kappa}\right) e^{(-i\mu-\kappa)L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

Es sind beide Koeffizientenmatrizen regulär und daraus kann man folgern, dass  $F \neq 0$ . Die Tatsache, dass  $F$  ungleich 0 ist, ist genau der *Tunneleffekt*, das Teilchen kann im quantenmechanischen Modell sehr wohl die Barriere überwinden. Im klassischen Modell gilt  $F = 0$  und  $B = 1$  gelten, die Welle läuft mit derselben Amplitude aus da sie die Barriere nicht überwinden kann.

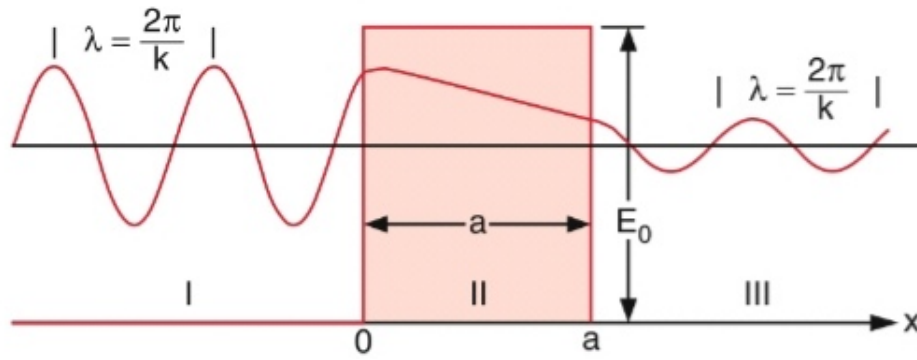


Abbildung 3.5: Eine Skizze der Wellenfunktion aus [11].

### 3.6 Quantenmechanischer Harmonischer Oszillator

Wir betrachten hier das Potential  $V(x) = \frac{Dx^2}{2}$ , wobei die Größe  $D > 0$ , der Federkonstante eines harmonischen Oszillators entspricht. Für die Schrödingergleichung folgt damit:

$$\frac{-\hbar^2 d^2\psi}{2m dx^2} + \frac{Dx^2\psi}{2} = E_n\psi. \quad (3.9)$$

Wir lösen die Differentialgleichung (3.9) wie in [2] und teilen die Aufgabe in zwei Teile.

Schritt 1: Zurückführen auf die Hermitsche Differentialgleichung

Wir führen die Konstanten  $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ ,  $C = \frac{2E}{\hbar\omega}$  und die Variable  $\xi = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$  ein.

Wir erhalten  $\frac{d}{d\xi} = \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$  und schreiben die Schrödingergleichung (3.9) in  $\xi$  um.

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2 d^2\psi}{2m dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2\psi}{2} &= E_n\psi \\ \frac{-\hbar^2 d^2\psi}{2m d\xi^2} \frac{m\omega}{\hbar} + \frac{\hbar\omega\xi^2}{2}\psi &= E_n\psi \\ \frac{-\hbar\omega d^2\psi}{2 d\xi^2} + \frac{\hbar\omega\xi^2}{2}\psi &= E_n\psi \\ -\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \xi^2\psi &= \frac{2E_n}{\hbar\omega}\psi = C\psi \\ \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (C - \xi^2)\psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Für  $C = 1$  ist die Lösung  $\psi_0(\xi) = \exp(-\frac{\xi^2}{2})$ , der Lösungsansatz kommt aus der operatortheoretischen Behandlung des Hamiltonoperators und der sogenannten Auf- und Absteigeoperatoren, siehe Kapitel 7.

Wir machen den Ansatz  $\psi(\xi) = H(\xi)\psi_0(\xi)$ .

$$\begin{aligned} \psi'(\xi) &= H'(\xi)\psi_0(\xi) - \xi H(\xi)\psi_0(\xi) \\ \psi''(\xi) &= H''(\xi)\psi_0(\xi) - \xi H'(\xi)\psi_0(\xi) - H(\xi)\psi_0(\xi) - \xi H'(\xi)\psi_0(\xi) + \xi^2 H(\xi)\psi_0(\xi) \\ &= H''\psi_0 - 2\xi H'\psi_0 + (\xi^2 - 1)H\psi_0 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung (3.10) liefert

$$\begin{aligned} H''\psi_0 - 2\xi H'\psi_0 + (\xi^2 - 1)H\psi_0 + (C - \xi^2)H\psi_0 &= 0 \\ H''\psi_0 - 2\xi H'\psi_0 + \xi^2 H\psi_0 - H\psi_0 + CH\psi_0 - \xi^2 H\psi_0 &= 0 \end{aligned}$$

$\psi_0$  hat keine Nullstellen in  $\mathbb{R}$ , dividieren durch  $\psi_0$  liefert

$$\frac{d^2 H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + (C - 1)H = 0. \quad (3.11)$$

Die Gleichung (3.11) heißt *Hermitsche Differentialgleichung*, sie kommt in der Physik häufig vor.

### Schritt 2: Lösen der Hermitschen Differentialgleichung

Wir lösen die Gleichung (3.11) indem wir für die Funktion  $H(\xi)$  die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$  mit unbekanntem Koeffizienten  $a_k$  einsetzen.

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \\ \frac{dH}{d\xi} &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} \xi^k \\ \frac{d^2 H}{d\xi^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} \xi^k \\ 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} \xi^k - 2\xi \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} \xi^k + (C-1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \\ 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} \xi^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1) a_{k+1} \xi^{k+1} + (C-1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \\ 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} \xi^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k \xi^k + (C-1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \end{aligned}$$

Wir stellen die folgende Rekursionsgleichung auf:

$$\begin{aligned}
 & \underline{k = 0} : \\
 & 2a_2 + (C - 1)a_0 = 0 \\
 & a_2 = \frac{1 - C}{2}a_0 \\
 & \underline{k = 1} : \\
 & 6a_3 - 2a_1 + (C - 1)a_1 = 0 \\
 & a_3 = \frac{3 - C}{6}a_1 \\
 & \underline{k \geq 2} : \\
 & (k + 2)(k + 1)a_{k+2} - 2ka_k + (C - 1)a_k = 0 \\
 & a_{k+2} = \frac{2k + 1 - C}{(k + 2)(k + 1)}a_k \\
 & = \frac{2k - (C - 1)}{(k + 2)(k + 1)}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten folgende Rekursionsgleichung:

$$a_{k+2} = \frac{2k - (C - 1)}{(k + 2)(k + 1)}a_k \quad (3.12)$$

Wir erhalten zwei linear unabhängige Lösungen, die Potenzreihen  $H_{1,C}(x)$  wobei  $a_0 = 1, a_1 = 0$  und die Potenzreihe  $H_{2,C}(x)$  mit  $a_0 = 0, a_1 = 1$ . Die Funktionen  $H_{1,C}$  sind gerade und die Funktionen  $H_{2,C}$  sind ungerade. Falls der Parameter die Gleichung  $C - 1 = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  erfüllt bricht eine der beiden Reihen ab. Die jeweiligen abbrechenden Reihen sind die *Hermite-Polynome*. Die Hermite-Polynome  $H_n(x)$  sind die Eigenfunktionen der Gleichung (3.11) für  $C_n = 2n + 1 \in \mathbb{N}$ .

Für die Hermite-Polynome gibt es keine geschlossene Formel. Es lassen sich aber implizite Darstellungen finden..

Wir stellen die ersten vier Hermitepolynome auf indem wir in die obige Rekursionsgleichung einsetzen.

•  $H_0(x)$ 

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 0$$

$$C = 1$$

$$a_2 = 0$$

$$a_{2k} = 0$$

$$a_{2k+1} = 0$$

$$H_0(x) = 1$$

•  $H_1(x)$ 

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$C = 3$$

$$a_{2k} = 0$$

$$a_{2k+1} = 0, k \geq 1$$

$$H_1(x) = x$$

•  $H_2(x)$ 

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 0$$

$$C = 5$$

$$a_2 = -2$$

$$a_{2k} = 0$$

$$a_{2k+1} = 0$$

$$H_2(x) = -2x^2 + 1$$



- $H_3(x)$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$C = 7$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = \frac{-2}{3}$$

$$a_{2k} = 0$$

$$a_{2k+1} = 0, k \geq 1$$

$$H_3(x) = \frac{-2x^3}{3} + x$$

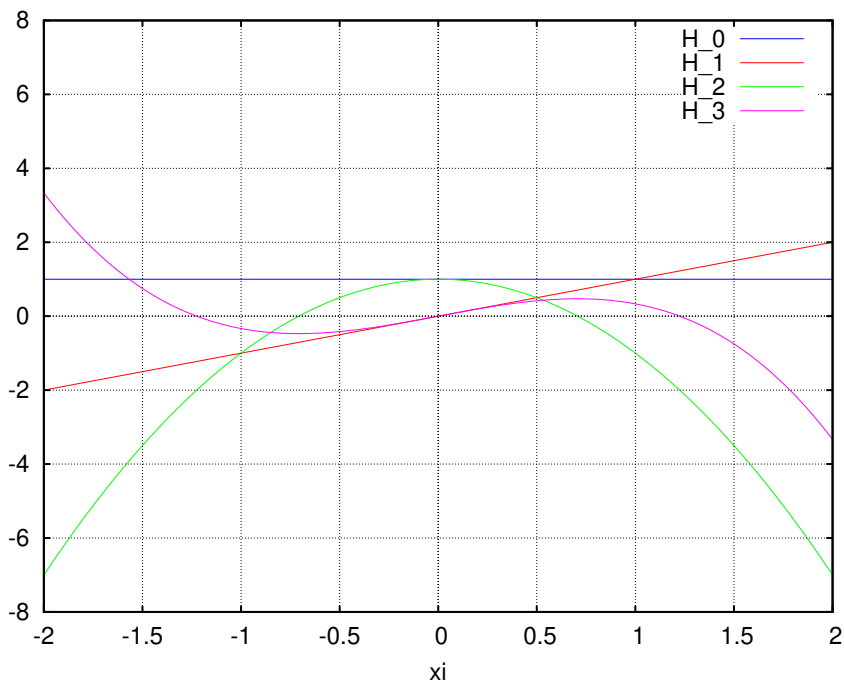


Abbildung 3.6: Die ersten vier Eigenfunktionen der Gleichung (3.11)

In dem folgenden Kapitel wollen wir eine Methode formal begründen,

welche uns erlaubt Differentialgleichungen mit Potenzreihen zu lösen und wir in diesem Kapitel naiv verwendet haben. Dazu werden wir Ergebnisse aus Kapitel 1.3 verwenden um über Eigenschaften wie Analytizität und Regularität der Lösungen zu diskutieren.

# Kapitel 4

## Frobeniusmethode und Fuchssche DG

In diesem Kapitel stellen wir eine Methode aus [7] und [10] vor, mit der eine gewisse Klasse von linearen Differentialgleichungen gelöst werden kann. Diese Methode besteht im Wesentlichen darin, für die gesuchte Funktion  $y(x)$  eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  mit unbekanntem Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$  anzusetzen, die dann rekursiv berechnet werden. Diese Methode heißt *Frobeniusmethode*. Nachdem wir uns mit Differenzgleichungen beschäftigen werden, stellen wir eine Lösungsformel vor.

**Satz 4.0.1** (Lösungsformel für lineare Differenzgleichungen erster Ordnung).

Gegeben sei die Differenzgleichung

$$a_{n+1} + f(n)a_n = 0, a(0) = a_0 \neq 0.$$

mit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Dann ist die Lösung gegeben durch

$$a_n = a_0 (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} f(k), n \geq 0$$

*Beweis.*

Wir beweisen die Aussage mit einer Induktion. Wir definieren das leere Produkt  $\prod_k^n a_k = 1$  mit  $k > n$ .

1. *Induktionsanfang:*  $n = 0$   
 $a_0 = a_0$

2. *Induktionsschritt*

Es gelte  $a_n = a_0(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} f(k)$ .

$$a_{n+1} + f(n)a_n = 0$$

$$a_{n+1} = -f(n)a_n = a_0(-1)^{n+1} \prod_{k=0}^n f(k)$$

## 4.1 Der Potenzreihenansatz

### Beispiel 4.1.1.

Betrachten wir das Beispiel

$$y'' + x^2y = 0. \quad (4.1)$$

Wir wählen für die Lösung  $y$  von (4.1) einen Potenzreihenansatz und setzen einen positiven Konvergenzradius  $R > 0$  voraus. Im Konvergenzbereich gilt

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k. \end{aligned}$$

Einsetzen in (4.1) liefert dann folgende Gleichungen.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} &= 0 \\ \sum_{k=2}^{\infty} \left[ (k+2)(k+1) a_{k+2} + a_{k-2} \right] x^k &= 0, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir folgende Rekursionsgleichung vierter Ordnung.

$$\begin{aligned} (k+4)(k+3) a_{k+4} + a_k &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Um zwei linear unabhängige Lösungen zu erhalten wählen wir für eine Lösung apriori  $a_0 = 1, a_1 = 0$  und für die zweite Lösung  $a_0 = 0, a_1 = 1$ . Es ergeben sich somit die beiden neuen Rekursionsgleichungen für  $b_n = a_{4n}$  und  $c_n = a_{4n+1}$ .

$$(4n + 4)(4n + 3)b_{n+1} + b_n = 0$$

$$(4n + 5)(4n + 4)c_{n+1} + c_n = 0$$

Die Lösungen lauten

$$b_n = (-1)^n \prod_{l=0}^{n-1} \frac{1}{(4l + 4)(4l + 3)}$$

$$c_n = (-1)^n \prod_{l=0}^{n-1} \frac{1}{(4l + 5)(4l + 4)}$$

Wir erhalten die Fundamentallösungen von (4.1)

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^4}{12} + \frac{x^8}{672} - \frac{x^{12}}{88704} + \frac{x^{16}}{21288960} - \frac{x^{20}}{8089804800} \dots$$

$$y_2(x) = x - \frac{x^5}{20} + \frac{x^9}{1440} - \frac{x^{13}}{224640} + \frac{x^{17}}{61102080} - \frac{x^{21}}{25662873600} \dots$$

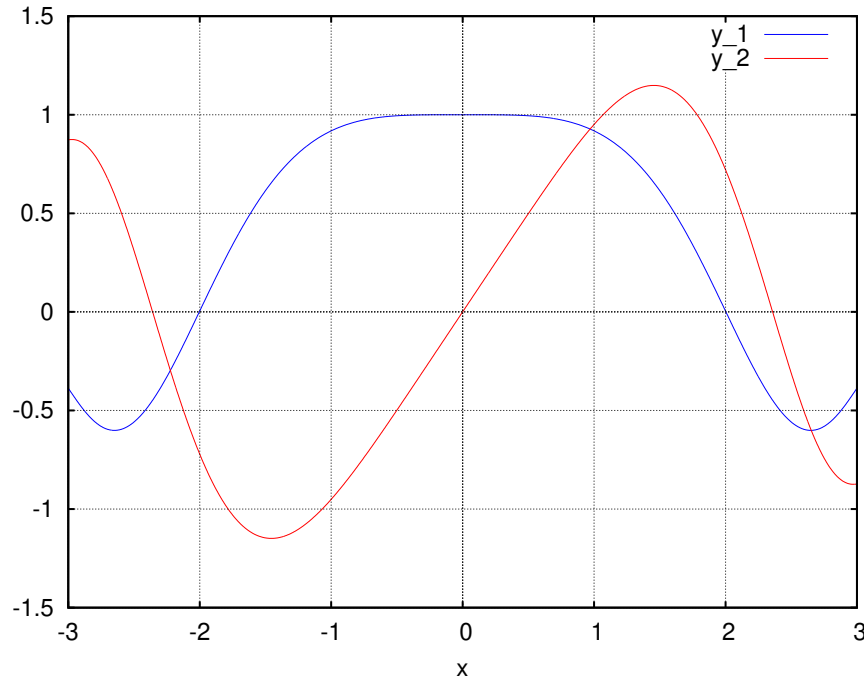


Abbildung 4.1: Die beiden Fundamentallösungen  $y_1, y_2$  von (4.1), jeweils entwickelt bis zum sechsten Term.

### Beispiel 4.1.2.

Betrachten wir das Beispiel

$$y'' + xy' + y = 0. \quad (4.2)$$

Wir lösen die Gleichung (4.2) mithilfe der Potenzreihenmethode.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k.$$

Nach Einsetzen in Gleichung (4.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 0 \end{aligned}$$

und somit die Rekursion

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + (k+1)a_k = 0, \quad k \geq 1.$$

$$a_{k+2} = -\frac{1}{k+2}a_k$$

Wir wählen für die Fundamentallösung eine Lösung  $y_1(x)$  mit  $a_0 = 1, a_1 = 0$  und eine zweite Lösung  $y_2(x)$  mit  $a_0 = 0, a_1 = 1$ . Es ergeben sich somit die beiden neuen Rekursionsgleichungen für  $b_n = a_{2n}$  und  $c_n = a_{2n+1}$ .

$$(2n+2)b_{n+1} + b_n = 0$$

$$(2n+3)c_{n+1} + c_n = 0$$

Die Lösungen lauten

$$\begin{aligned} b_n &= (-1)^n \prod_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l+2} \\ c_n &= (-1)^n \prod_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2l+3} \end{aligned}$$

beziehungsweise die zugehörigen Fundamentallösungen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} - \frac{x^{10}}{3840} + \frac{x^{12}}{46080} - \dots \\ y_2(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} - \frac{x^7}{105} + \frac{x^9}{945} - \frac{x^{11}}{10395} + \frac{x^{13}}{135135} - \dots \end{aligned}$$

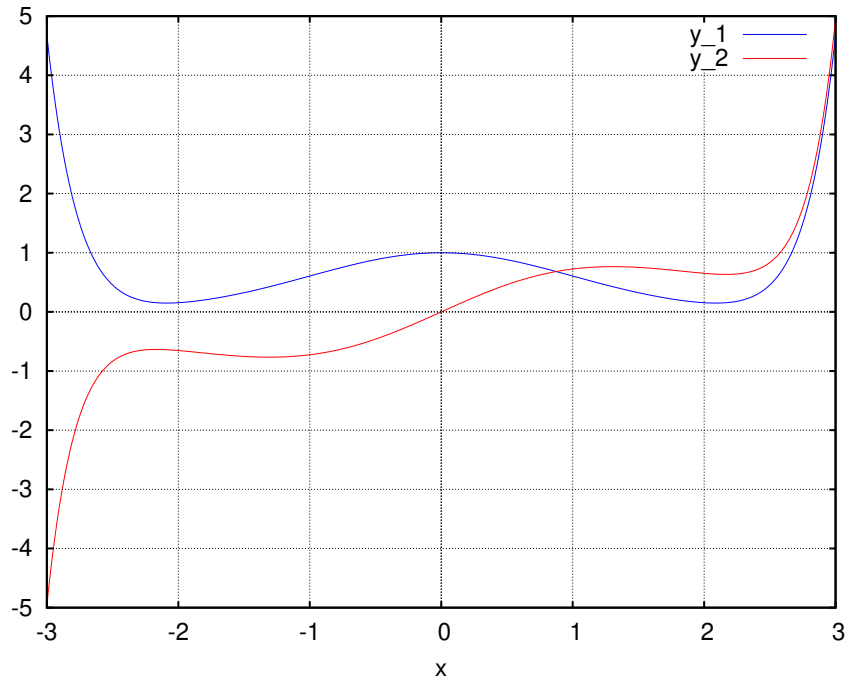


Abbildung 4.2: Die beiden Fundamentallösungen  $y_1, y_2$  von (4.2), jeweils entwickelt bis zum siebten Term.

## 4.2 Spezielle Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt lösen wir zwei Differentialgleichungen, welche in der Physik Anwendungen haben. Wir verweisen dabei auf die bereits in Kapitel 3 gelöste Hermitsche Differentialgleichung.

### 4.2.1 Die Legendresche Differentialgleichung

Wir stellen zunächst die Legendresche Differentialgleichung (4.3) vor. Wenn wir die Laplacegleichung  $\Delta u$  in Kugelkoordinaten umschreiben und einen Separationsansatz  $u(r, \varphi, \theta) = R(r)Y(\varphi, \theta)$  durchführen erhalten wir die *Legendrefunktionen*  $P_k, Q_k$  als Lösung für den *Radialanteil*  $R$ .

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2)y'(x) \right) + \lambda y(x) = 0 \quad (4.3)$$



**Bemerkung 4.2.1** (Legendrefunktionen).

Die Funktionen  $P_k$  heißen *Legendrepolynome* und sind regulär. Die Funktionen  $Q_k$  heißen Legendrefunktionen *zweiter Art* und besitzen bei  $x = \pm 1$  Polstellen. Wir interessieren uns ab jetzt nur für die regulären Lösungen  $P_k$ , es lässt sich dazu mehr in [10] finden.

Nach Ausdifferenzieren in (4.3) erhalten wir

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0. \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (4.4) liefert

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (1-x^2)(k+1)(k+2) a_{k+2} x^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^{k+1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^{k+2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= 0 \end{aligned}$$

beziehungsweise die Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} (k+1)(k+2) a_{k+2} - k(k-1) a_k - 2k a_k + \lambda_k a_k &= 0, \quad k \geq 2 \\ (k+1)(k+2) a_{k+2} &= a_k \left[ k(k+1) - \lambda_k \right], \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

Aus der Rekursionsgleichung sehen wir, dass  $\lambda_k = k(k+1)$  erlaubt ist und als Eigenfunktionen in diesem Fall Polynome in Frage kommen, da aus der

Rekursionsgleichung ab einem gewissen Index  $a_{k+2} = 0$  gilt. Wir sehen ebenfalls sofort, dass die Lösungen  $P_k$  Polynome  $k$ -ter Ordnung sind. Diese polynomiellen Lösungen heißen Legendre-Polynome  $P_k$ , wir berechnen die ersten fünf Polynome. Um alle polynomiellen Lösungen zu erhalten müssen wir zwischen geraden und ungeraden Polynomen alternieren. Wir wechseln immer zwischen den Anfangswerten für  $a_0, a_1$  ab.

- $\lambda_0 = 0$

$$P_0(x) = 1$$

- $\lambda_1 = 2$

$$P_1(x) = x$$

- $\lambda_2 = 6$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{-6a_0}{2} = -3$$

$$P_2(x) = -3x^2 + 1$$

- $\lambda_3 = 12$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = \frac{-10a_1}{6} = \frac{-5}{3}$$

$$P_3(x) = \frac{-5x^3}{3} + x$$

- $\lambda_4 = 20$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{-20a_0}{2} = -10$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{-14a_2}{12} = \frac{35}{3}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{3} (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

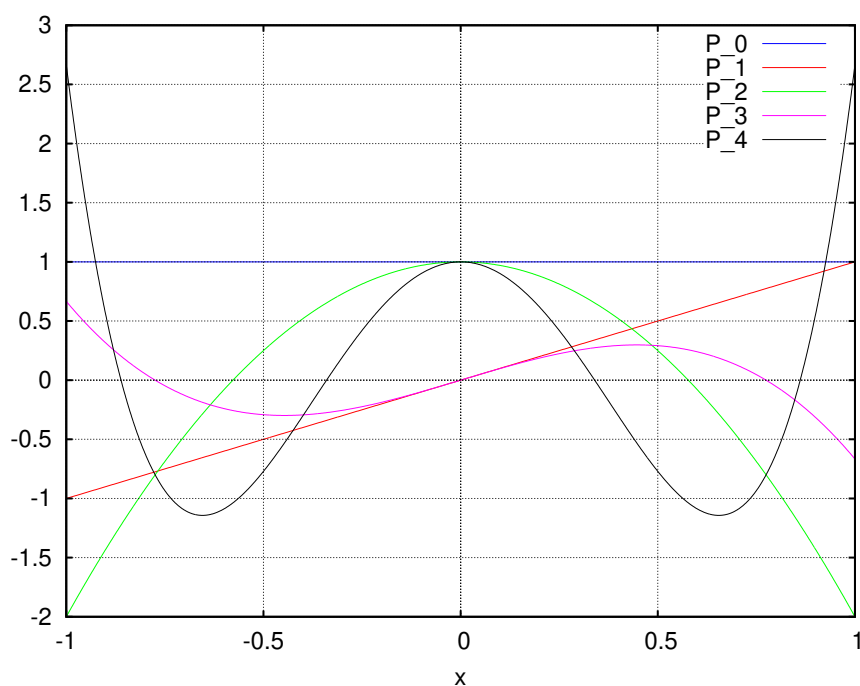


Abbildung 4.3: Eine Skizze der ersten fünf Eigenfunktionen von (4.3) in  $[-1,1]$ .

### 4.2.2 Besselsche Differentialgleichung

Wir stellen hier die Besselsche Differentialgleichung vor. Diese beschreibt die räumliche Veränderung des Axialabstandsanteil  $R(\rho)$  der Lösungen

$u(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$  der Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten. Wir stellen die Rekursionsgleichung auf und diskutieren über die Werte  $\lambda$  im Anschluss. Die Besselsche Differentialgleichung lautet

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\lambda}{x^2}\right)y = 0. \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (4.5) liefert

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k-2} = 0.$$

Wenn wir Regularität bei  $x = 0$  fordern, müssen die Vorfaktoren der negativen Potenzen von  $x$  verschwinden. Aus dieser zusätzlichen Bedingung folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) a_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} x^k = 0.$$

Wir erhalten, unter der Forderung der Regularität bei 0, die Rekursionsgleichung

$$(k+1)(k+2) a_{k+2} + (k+2) a_{k+2} + a_k - \lambda a_{k+2} = 0, \quad k \geq 2$$

beziehungsweise

$$a_{k+2} \left[ (k+2)^2 - \lambda \right] + a_k = 0. \quad (4.6)$$

Wir formulieren Gleichung (4.6) etwas und lösen die Rekursion mithilfe des Satzes 4.0.1. Wir bekommen zwei unabhängige Lösungen, die wir in

Lösungen mit geraden und ungeraden Indizes umschreiben können.

$$a_k = \left[ \lambda - (k+2)^2 \right] a_{k+2}$$

$$a_0 = a_{2n} \prod_{l=1}^n \left[ \lambda - (2l+2)^2 \right]$$

$$a_1 = a_{2n+1} \prod_{l=1}^n \left[ \lambda - (2l+1)^2 \right]$$

Die Forderung der Regularität kann auch folgendermaßen erfüllt werden: einen der Startwerte können wir frei wählen und setzen ihn Null. Es lassen sich in jedem Fall Lösungen finden, welche Polynome sind, da ab einem  $k \in \mathbb{N}$  alle Koeffizienten verschwinden. Hinreichend für die Regularität bei 0 ist die Forderung  $\lambda_k = (k+2)^2$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . In (4.6) können wir auch für  $k = -2, -1$  einsetzen und erhalten

$$0 \cdot a_0 + a_{-2} = 0$$

$$0 \cdot a_1 + a_{-1} = 0.$$

einführen und die Koeffizienten der Laurentreihe  $a_{-2}, a_{-1}$  als Null wählen. Wir erhalten somit als zulässige Eigenwerte  $\lambda_k = k^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Wir berechnen die Koeffizienten der ersten drei Eigenfunktionen. Die regulären Eigenfunktionen werden üblicherweise mit  $J_k$  bezeichnet.

- $\lambda_0 = 0$

$$a_0 = 1$$

$$a_{2n+1} = 0$$

$$a_0 = a_{2n} \prod_{l=1}^n \left[ -(2l+2)^2 \right]$$

$$= a_{2n} (-1)^n \prod_{l=2}^{n+1} \left[ (2l)^2 \right]$$

$$= a_{2n} (-1)^n 4^n ((n+1)!)^2$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n ((n+1)!)^2}$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{576} - \frac{x^6}{36864} + \frac{x^8}{3686400} - \frac{x^{10}}{530841600} + \frac{x^{12}}{104044953600} + \dots$$

- $\lambda_1 = 1$

$$a_0 = 0$$

$$a_{2n} = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{2n+1} \prod_{l=1}^n \left[ 1 - (2l+1)^2 \right] \\ &= a_{2n+1} \prod_{l=1}^n \left[ 1 - 2l - 1 \right] \left[ 1 + 2l + 1 \right] \\ &= a_{2n+1} \prod_{l=1}^n \left[ -2l \right] \prod_{l=1}^n \left[ 2l + 2 \right] \end{aligned}$$

$$= a_{2n+1} (-1)^n \prod_{l=1}^n (2l) \prod_{l=2}^{n+1} (2l)$$

$$= a_{2n+1} (-1)^n 4^n n! (n+1)!$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{4^n n! (n+1)!}$$

$$J_1(x) = x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{3840} - \frac{x^7}{9216} + \frac{x^9}{737280} - \frac{x^{11}}{88473600} + \frac{x^{13}}{4954521600} - \dots$$

- $\lambda_2 = 4$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_{2n+1} = 0$$

$$a_2 = 1$$

$$a_{2n} = \left[ 4 - (2n)^2 \right] a_{2n-2}$$

$$\Rightarrow a_2 = a_{2n} \prod_{l=2}^n \left[ 4 - (2l)^2 \right]$$

$$a_2 = a_{2n} \prod_{l=2}^n \left[ 2 - 2l \right] \left[ 2 + 2l \right]$$

$$a_2 = a_{2n} 4^{n-1} (-1)^{n-1} \prod_{l=2}^n (l-1) \prod_{l=2}^n (l+1)$$

$$a_2 = a_{2n} 4^{n-1} (-1)^{n-1} \prod_{l=1}^{n-1} l \prod_{l=3}^{n+1} (l+1)$$

$$a_2 = a_{2n} 4^{n-1} (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{(n+1)!}{2!}$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} 2!}{4^{n-1} (n-1)! (n+1)!}$$

$$J_2(x) = x^2 - \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{384} - \frac{x^8}{23040} + \frac{x^{10}}{2211840} + \frac{x^{12}}{309657600} - \frac{x^{14}}{59454259200}$$

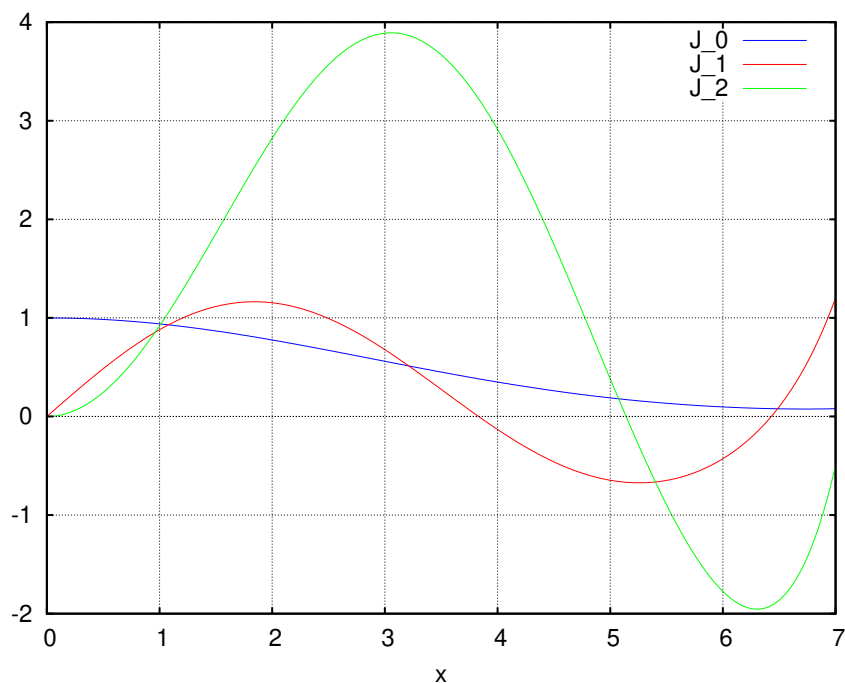


Abbildung 4.4: Die ersten drei Eigenfunktionen  $J_0, J_1, J_2$ , jeweils mit sieben nichttrivialen Termen approximiert.

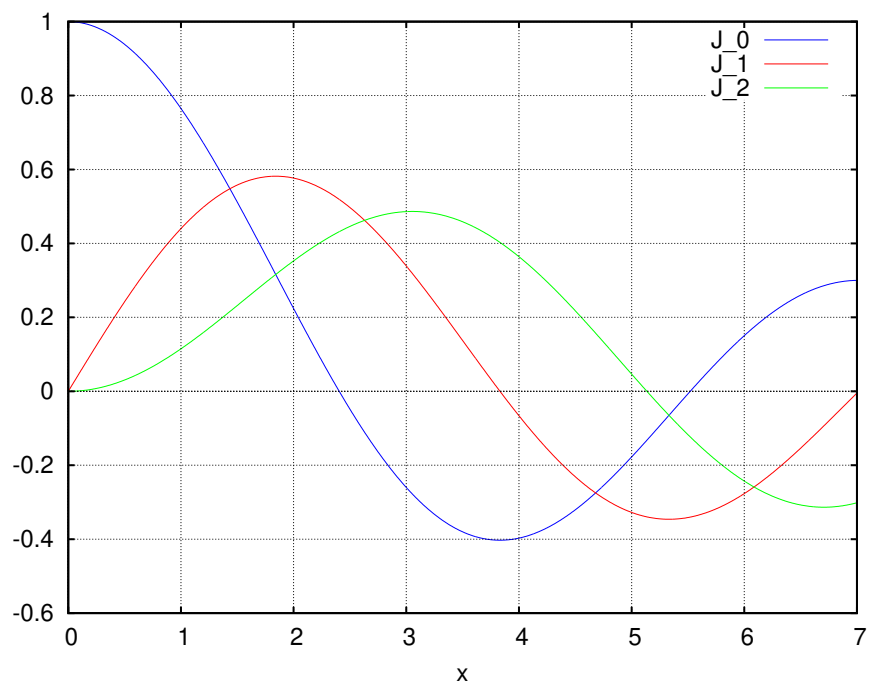


Abbildung 4.5: Eine Skizze der ersten drei Eigenfunktionen  $J_0, J_1, J_2$ .



**Bemerkung 4.2.2** (Besselfunktionen).

Es gibt für die Gleichung (4.5) andere Eigenwerte als  $\lambda_k = k^2$ , diese erzeugen dann die sogenannten Besselfunktionen  $Y_k$  *zweiter Art*. Im Gegensatz zu den Eigenfunktionen  $J_k$  haben die Funktionen  $Y_k$  bei 0 eine Polstelle, siehe dazu [13].

## 4.3 Singuläre Differentialgleichungen

### 4.3.1 Fuchssche Klasse

In diesem Abschnitt stellen wir eine Klasse von Differentialgleichung aus [7] und [10] vor, wo die Lösungen teilweise nicht analytisch sind. Wir nennen eine Differentialgleichung *singulär*, wenn eine der Koeffizientenfunktion am Rand des Intervalls eine Polstelle hat. Im Allgemeinen ist das Anfangswertproblem für singuläre Differentialgleichungen unlösbar. Die Lösungen, falls existent, können dabei auch unbeschränkt werden. Anstatt gewöhnliche Potenzreihen anzusetzen, empfiehlt es sich Lösungen entweder als Laurentreihen oder Reihen der Art  $y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  mit  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$  zu wählen. Diese Lösungen nennen wir *verallgemeinerte Potenzreihen*. Am Ende des Abschnitts stellen wir eine Klasse von singulären Differentialgleichungen und ihre Lösungen vor. Wir betrachten allgemein Differentialgleichungen der Art

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x) \frac{dy}{dx} + p_2(x) y = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (4.7)$$

wobei wir die Regularität der Koeffizienten  $p_1, p_2$  noch offen lassen.

**Definition 4.3.1** (Regulärer Punkt).

Ein Punkt  $x_0$  der Differentialgleichung (4.7) heißt *regulär* (regular/ordinary), wenn beide Koeffizientenfunktionen  $p_1, p_2$  analytisch in  $x_0$  sind. In diesem Fall können die Lösungen durch Potenzreihen um  $x_0$  angegeben werden.

Wenn die Voraussetzung der Regularität der Koeffizientenfunktionen  $p_1, p_2$  abgeschwächt wird, lassen sich dennoch Lösungen finden, welche als verallgemeinerte Potenzreihen darstellbar sind.

**Definition 4.3.2** (Stelle der Bestimmtheit).

Ein Punkt  $x_0$  der Differentialgleichung (4.7) heißt *Stelle der Bestimmtheit* oder *regulärer singulärer Punkt* wenn

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)p_1(x)$  existiert und
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 p_2(x)$  existiert.

Das bedeutet die Koeffizientenfunktionen  $p_1, p_2$  haben bei  $x_0$  höchstens einen Pol erster bzw zweiter Ordnung haben.

**Definition 4.3.3** (Singulärer Punkt).

Wir nennen einen Punkt  $x_0$ , der weder regulär ist noch eine Stelle der Bestimmtheit ist, *singulär*.

**Beispiel 4.3.4** (Regularität von Punkten einer Differentialgleichungen).

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{x}{\sin(x) - x}y = 0, \quad x \in [0, 1]. \quad (4.8)$$

Der einzige kritische Punkt ist  $x_0 = 0$ . Wir prüfen die Regularität von  $x_0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} p_1(x) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} p_2(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos(x) - 1} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x p_1(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 p_2(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\sin(x) - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2}{\cos(x) - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x}{-\sin(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6}{-\cos(x)} = -1 \end{aligned}$$

Somit ist  $x_0$  zwar kein regulärer Punkt aber ein regulärer singulärer Punkt.

**Definition 4.3.5** (Fuchssche Differentialgleichung).

Wir nennen die Differentialgleichung (4.7) *Fuchssche Differentialgleichung*, wenn alle singulären Punkte reguläre singuläre Punkte sind. Wir erhalten, falls  $p_1, p_2$  Pole erster bzw zweiter Ordnung haben, für die Koeffizientenfunktionen folgende Laurentreihendarstellung

$$p_1(x) = \frac{a_1(x)}{x - x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^{n-1}$$

$$p_2(x) = \frac{a_2(x)}{(x - x_0)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x - x_0)^{n-2}$$

mit holomorphen Funktionen  $a_1, a_2$ .

**Bemerkung 4.3.6** (Verallgemeinerter Potenzreihenansatz).

Gegeben sei die Gleichung (4.7) und angenommen sie sei eine Fuchssche Differentialgleichung. Der Ansatz  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  für die Lösung  $y$  ist dann nicht sinnvoll, da die Koeffizientenfunktionen  $p_1, p_2$  Pole haben dürfen. Wir verallgemeinern den Ansatz folgendermaßen:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^{n+\sigma} \quad (4.9)$$

mit  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Wir berechnen folgende Produkte mit dem Cauchyprodukt.

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (n + \sigma) c_k (x - x_0)^{n+\sigma-1} \\
 y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (n + \sigma)(n + \sigma - 1) c_k (x - x_0)^{n+\sigma-2} \\
 a_1(x)y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} (n + \sigma) c_k (x - x_0)^{n+\sigma-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \sigma) (x - x_0)^{\sigma-2} \sum_{k=0}^n \alpha_k c_{n-k} (x - x_0)^n \\
 &= (x - x_0)^{\sigma-2} \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n (n + \sigma) \sum_{k=0}^n \alpha_k c_{n-k} \\
 a_2 y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x - x_0)^{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^{n+\sigma} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^{\sigma-2} \sum_{k=0}^n \beta_k c_{n-k}
 \end{aligned}$$

Wir setzen in (4.7) ein.

$$\begin{aligned}
 (x - x_0)^{\sigma-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( c_n (n + \sigma)(n + \sigma - 1) + \sum_{k=0}^n (n + \sigma) \alpha_k c_{n-k} + \beta_k c_{n-k} \right) &= 0 \\
 \sum_{n=0}^{\infty} \left( c_n (n + \sigma)(n + \sigma - 1) + \sum_{k=0}^n (n + \sigma) \alpha_k c_{n-k} + \beta_k c_{n-k} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist zur zweiten Gleichung äquivalent, da für  $x \neq x_0$  der Faktor vor der Summe nicht verschwindet. Die zweite Gleichung liefert für die unbekanntenen Koeffizienten  $c_n$  eine lineare Rekursionsgleichung die mithilfe der bekannten Koeffizienten  $\alpha_k, \beta_k$  gelöst werden kann. Diese Rekursionsgleichung lösen wir folgendermaßen: Wir setzen  $c_0 = 1$  und stellen eine notwendige Bedingung auf wann es überhaupt Lösungen geben kann.

Für  $n = 0$ ,  $c_0 = 1$

$$\psi(\sigma) := \sigma(\sigma - 1) + \sigma\alpha_0 + \beta_0 = 0 \quad (4.10)$$

Gleichung (4.10) liefert dann eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Systems. Diese Gleichung heißt *charakteristische Gleichung* von (4.7).

**Definition 4.3.7** (Charakteristischer Exponent).

Es sei eine Differentialgleichung der Form (4.7) mit charakteristischer Gleichung (4.10) gegeben. Die Lösungen  $\sigma_1, \sigma_2$  von (4.10) heißen *charakteristische Exponenten*.

**Satz 4.3.8** (Satz von Fuchs).

Es sei eine Differentialgleichung der Form (4.7) mit charakteristischer Gleichung (4.10) gegeben. Dann gilt: (4.7) ist genau dann eine Differentialgleichung der Fuchssche Klasse, falls eine der folgenden Eigenschaften gilt.

- Für  $\sigma_1 - \sigma_2 \notin \mathbb{Z}$  gibt es zwei linear unabhängige Lösungen  $y_1, y_2$  der Form (4.9) mit  $c_0 = d_0 = 1$ , das heißt

$$y_1(x) = (x - x_0)^{\sigma_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

$$y_2(x) = (x - x_0)^{\sigma_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x - x_0)^k.$$

- Für  $\sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $Re(\sigma_1) \geq Re(\sigma_2)$  gibt es nur eine Lösung der Gestalt (4.9), da die selben Exponenten durchlaufen werden. Die zweite Lösung wird mithilfe des Reduktionsverfahrens von d'Alembert konstruiert und wir erhalten

$$y_1(x) = (x - x_0)^{\sigma_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

$$y_2(x) = (x - x_0)^{\sigma_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (x - x_0)^k + A \ln(x - x_0) y_1(x)$$

mit  $c_0 = d_0 = 1$ .

Beweis in [13].

**Beispiel 4.3.9** (Singuläre Eulersche Differentialgleichung aus [10]).

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0 \quad (4.11)$$

Wir haben für dieses Beispiel zwei Lösungsansätze, wir erinnern an den Lösungsansatz für Eulersche Differentialgleichungen.

Lösung mit dem Ansatz  $y = x^\alpha$

$$\begin{aligned} y &= x^\alpha \\ y' &= \alpha x^{\alpha-1} \\ y'' &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \end{aligned}$$

Einsetzen in (4.11) liefert

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \alpha x^{\alpha-2} - x^{\alpha-2} &= 0 \\ \Rightarrow \alpha^2 - \alpha + \alpha - 1 &= 0 \\ \alpha^2 - 1 &= 0 \\ \alpha_{1,2} &= \pm 1 \\ y_1(x) &= x \\ y_2(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Wir lösen (4.11) ebenfalls mit der Methode der Singulären Differentialgleichungen.

Überprüfen ob (4.11) eine Fuchssche DG ist

Wir überprüfen die Ordnung der Pole der Koeffizientenfunktionen  $p_1(x), p_2(x)$

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{1}{x} \\ p_2(x) &= \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

Die Funktionen  $p_1, p_2$  haben einen Pol bei  $x_0 = 0$ , die Pole sind erster beziehungsweise zweiter Ordnung. Daher ist (4.11) eine Fuchssche Differentialgleichung.

Berechnung der charakteristischen Exponenten

$$p_2(x) = \frac{-1}{x^2} = x^{-2}(-1)$$

$$\beta_0 = -1$$

$$\beta_k = 0, \quad k \geq 1$$

$$p_1(x) = \frac{1}{x} = 1x^{-1}$$

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_k = 0, \quad k \geq 1$$

$$\psi(\sigma) = \sigma^2 - \sigma + \alpha_0\sigma + \beta_0$$

$$\psi(\sigma) = \sigma^2 - 1$$

$$\sigma_1 = 1$$

$$\sigma_2 = -1$$

$\sigma_1 - \sigma_2 = -2 \in \mathbb{Z}$ , wir erhalten eine Lösung mit gegebenenfalls einer logarithmischen Singularität bei  $x_0 = 0$ .

Konstruktion der Lösung  $y_1$ 

$$y_1(x) = x^{\sigma_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$c_0 = 1$$

$$0 = c_n(n + \sigma_1)(n + \sigma_1 - 1) + \sum_{k=0}^n (n + \sigma_1) \alpha_k c_{n-k} + \beta_k c_{n-k}$$

Die Gleichung für  $n = 0$  entspricht genau der charakteristischen Gleichung  $\psi(\sigma)$ . Für jedes  $n \geq 1$  sind die Summanden auf der rechten Seite 0 da genau  $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$ . Es ist somit  $c_0 = 1, c_k = 0 \forall k \geq 1$  und somit  $y_1(x) = x$ .

Konstruktion der Lösung  $y_2$

Wir erhalten als Ansatz

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{\sigma_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k + Ax \ln(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{k-1} + Ax \ln(x) \end{aligned}$$

Wir setzen  $y_2$  in (4.11) und lösen das gestaffelte Gleichungssystem für die Koeffizienten  $d_k$ .

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{k-3} + \frac{A \ln(x)}{x} \\ y_2'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k-1) d_k x^{k-2} + A + A \ln(x) \\ \frac{y_2'}{x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (k-1) d_k x^{k-3} + \frac{A}{x} + \frac{A \ln(x)}{x} \\ y_2''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (k-2)(k-1) d_k x^{k-1} + \frac{A}{x} \\ \stackrel{(4.11)}{\Rightarrow} 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( (k-1)^2 - 1 \right) d_k x^{k-3} + \frac{A}{x} + \frac{A \ln(x)}{x} - \frac{A \ln(x)}{x} \\ 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( k(k-2) \right) d_k x^{k-3} + \frac{A}{x} \end{aligned}$$

- $k = 0$

$$\frac{A}{x} = 0 \Rightarrow A = 0$$

- $k = 2$

$$0d_2 x^{-1} = 0$$

Die Gleichung stimmt für jedes  $d_2 \in \mathbb{R}$ , wir wählen  $d_2 = 1$ .



- $k \neq 0, 2$

$$k(k-2)d_k x^{k-3} = 0 \Rightarrow d_k = 0$$

Für die Koeffizientenfolge gilt  $d_k = 1, k \in \{0, 2\}$ ,  $d_k = 0$  sonst.  
Wir erhalten somit als zweite Fundamentallösung  $y_2 = x + \frac{1}{x}$ .

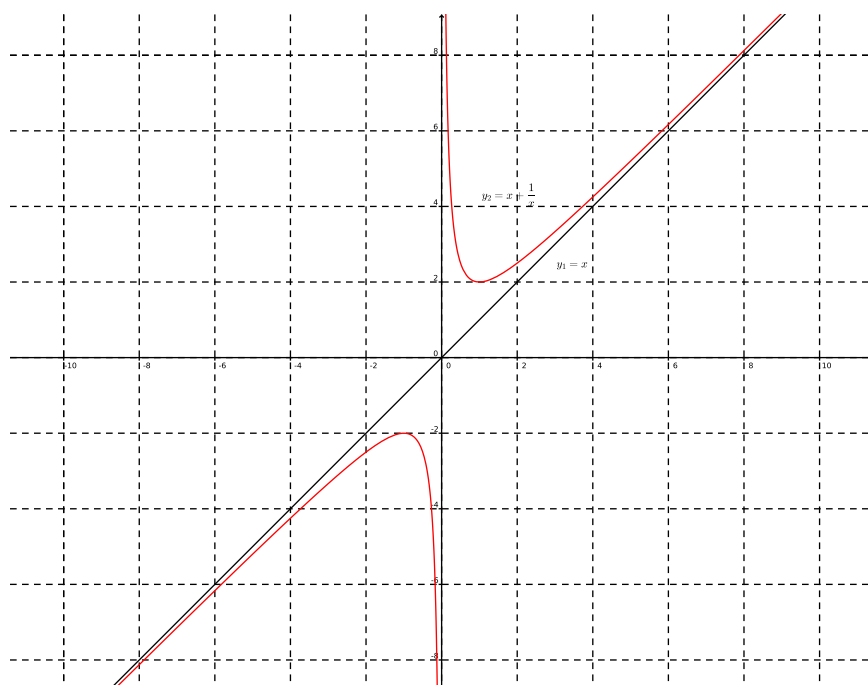


Abbildung 4.6: Eine Skizze der Fundamentallösungen  $y_1, y_2$  von (4.11)

**Beispiel 4.3.10** (Singuläre Differentialgleichung mit Lösungen mit komplexen Exponenten).

Gegeben sei die folgende singuläre Differentialgleichung.

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0 \tag{4.12}$$

Lösungsansatz  $y = x^\alpha$

$$\begin{aligned}
 y &= x^\alpha \\
 y' &= \alpha x^{\alpha-1} \\
 y'' &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \\
 \alpha(\alpha-1)x^\alpha + \alpha x^\alpha + x^\alpha &= 0 = 0 \\
 \alpha^2 + 1 &= 0 \\
 \alpha_{1,2} &= \pm i
 \end{aligned}$$

Wir geben den Lösungen Sinn, indem wir den Hauptzweig  $\text{Log}$  betrachten und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 z_1(x) &= x^i = \exp(i\text{Log}(x)) = \cos(\text{Log}(x)) + i \sin(\text{Log}(x)) \\
 z_1(x) &= x^{-i} = \exp(-i\text{Log}(x)) = \cos(\text{Log}(x)) - i \sin(\text{Log}(x))
 \end{aligned}$$

Das System ist linear und besitzt nur reellwertige Koeffizienten, daher bilden Realteil und Imaginärteil der komplexen Fundamentallösungen ein reelles Fundamentalsystem. Für reelles positives  $x$  sind der Hauptzweig des komplexen Logarithmus  $\text{Log}$  und der natürliche Logarithmus  $\ln$  ident.

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= \cos(\ln(x)) \\
 y_2(x) &= \sin(\ln(x))
 \end{aligned}$$

Wir lösen (4.12) mit der Methode der Singulären Differentialgleichungen.

Überprüfen ob (4.12) eine Fuchssche DG ist

$$\begin{aligned}
 p_1(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\
 p_2(x) &= \frac{1}{x^2} = x^{-2}
 \end{aligned}$$

Die Funktionen  $p_1, p_2$  haben nur einen Pol an der Stelle  $x_0 = 0$ . Die Polstellenordnungen bei  $x_0$  mithilfe des Satzes 1.4.13 ablesen liefert 1 beziehungsweise 2. Die Differentialgleichung (4.12) ist somit eine Fuchssche Differentialgleichung.

Berechnung der charakteristischen Exponenten

$$\begin{aligned}
 p_2(x) &= \frac{1}{x^2} \\
 \beta_0 &= 1 \\
 p_1(x) &= \frac{1}{x} \\
 \alpha_0 &= 1 \\
 \psi(\sigma) &= \sigma^2 - \sigma + \alpha_0\sigma + \beta_0 \\
 \psi(\sigma) &= \sigma^2 + 1 \\
 \sigma_{1,2} &= \pm i \\
 \sigma_1 &= i \\
 \sigma_2 &= -i
 \end{aligned}$$

Es gilt dann  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2i$ , somit erhalten wir zwei verallgemeinerte Potenzreihen als Lösungen.

#### Berechnung der Lösung $y_1$

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= x^i \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+i} \\
 y_1'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+i) c_k x^{k+i-1} \\
 y_1''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+i)(k+i-1) c_k x^{k+i-2} \\
 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+i)(k+i-1) c_k x^{k+i} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+i) c_k x^{k+i} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+i} \\
 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+i} \left( (k+i)^2 + 1 \right) \\
 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+i} \left( k^2 + 2ik \right)
 \end{aligned}$$

Es gilt  $c_0 = 1$  und für  $k \geq 0$  gilt  $c_k = 0$ . Somit ist die Lösung  $y_1(x) = x^i$ .

Berechnung der Lösung  $y_2$

Für  $y_2$  erhalten wir die Differentialgleichung

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (k-i)(k-i-1)d_k x^{k-i} + \sum_{k=0}^{\infty} (k-i)d_k x^{k-i} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{k-i}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{k-i} \left( (k-i)^2 + 1 \right)$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{k-i} \left( k^2 - 2ik \right)$$

Es gilt  $d_0 = 1$  und  $d_k = 0$ ,  $\forall k \geq 1$ . Die Lösung  $y_2 = x^{-i}$  und wir erhalten dieselben Lösungen wie mit dem Euleransatz.

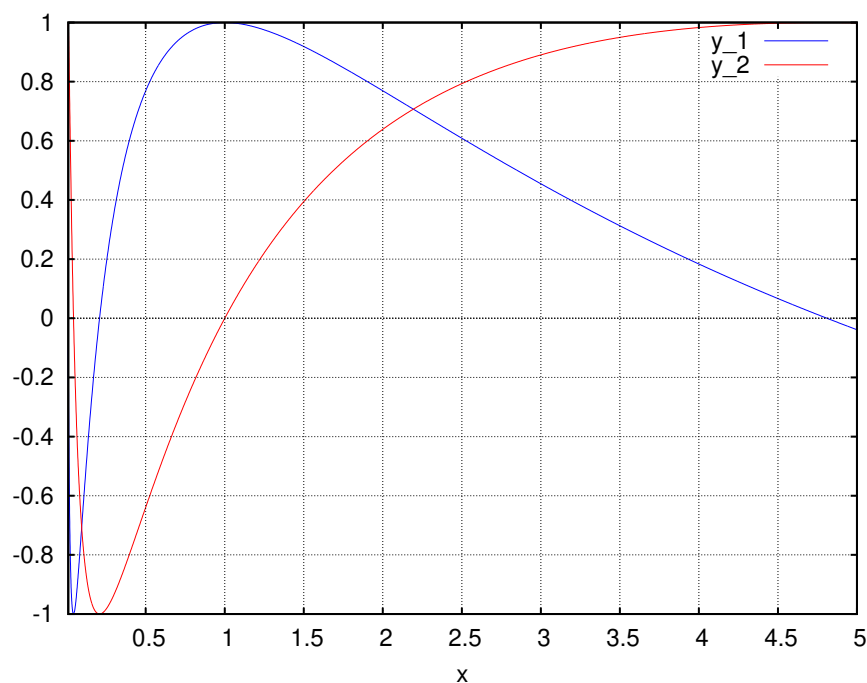


Abbildung 4.7: Eine Skizze der Lösungen  $y_1, y_2$  von (4.12).

**Beispiel 4.3.11** (Beispiel mit trigonometrischer Koeffizientenfunktion).

Wir betrachten die Gleichung

$$y'' + \sin(x)y = 0 \quad (4.13)$$

und lösen sie mit der Frobeniusmethode.  
Überprüfen ob (4.13) eine Fuchssche DG ist

$$\begin{aligned}
 p_2(x) &= \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!} \\
 \beta_0 &= 0 \\
 p_1(x) &= 0 \\
 \alpha_0 &= 0
 \end{aligned}$$

Somit ist (4.13) eine Fuchssche Differentialgleichung.

Berechnung der charakteristischen Exponenten

$$\begin{aligned}
 \psi(\sigma) &= \sigma^2 - \sigma + \alpha_0\sigma + \beta_0 \\
 \psi(\sigma) &= \sigma^2 - \sigma = 0 \\
 \sigma_1 &= 1 \\
 \sigma_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Es gilt  $\sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{N}$ . Daher sind die Lösungen der Form

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\
 y_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k + A \ln(x) y_1(x).
 \end{aligned}$$

Wir stellen eine Rekursionsgleichung für  $y_1, y_2$  auf und berechnen die Lösungen bis zum dritten Glied.

Berechnung der ersten Glieder der Lösung  $y_1$ 

$$p_1(x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_k = 0$$

$$p_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k-1}$$

$$\beta_{2l} = 0$$

$$\beta_{2l+1} = \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( c_n(n+\sigma)(n+\sigma-1) + \sum_{k=0}^n (n+\sigma)\alpha_k c_{n-k} + \beta_k c_{n-k} \right) = 0$$

- $n = 0$

$$c_0 \cdot 0 + \beta_0 c_0 = 0$$

- $n = 1$

$$2c_1 + \beta_0 c_1 + \beta_1 c_0 = 0$$

$$2c_1 = -\beta_1 c_0$$

$$c_1 = \frac{-\beta_1 c_0}{2} = -\frac{1}{2}$$

- $n = 2$

$$6c_2 + \beta_0 c_2 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_0 = 0$$

$$6c_2 + c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{12}$$

- $n = 3$

$$12c_3 + \beta_0 c_3 + \beta_1 c_2 + \beta_2 c_1 + \beta_3 c_0 = 0$$

$$12c_3 + \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = 0$$

$$12c_3 = -\frac{1}{12}$$

$$c_3 = -\frac{1}{144}$$

- $n = 4$

$$20c_4 + \beta_0 c_4 + \beta_1 c_3 + \beta_2 c_2 + \beta_3 c_1 + \beta_4 c_0 = 0$$

$$20c_4 + c_3 - \frac{1}{6}c_1 = 0$$

$$20c_4 = \frac{1}{144}$$

$$c_4 = \frac{1}{2880}$$

- $n = 5$

$$30c_5 + \beta_1 c_4 + \beta_3 c_2 + \beta_5 c_0 = 0$$

$$30c_5 + \frac{1}{2880} - \frac{1}{6} \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = 0$$

$$30c_5 = \frac{-1}{192}$$

$$c_5 = \frac{-1}{5760}$$

Berechnung der ersten Glieder von  $y_2$

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k + A \ln(x) y_1(x)$$

$$y_2'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)d_{k+2} x^k - \frac{A y_1}{x^2} + 2 \frac{A y_1'}{x} + A \ln(x) y_1''$$

$$y_2'' + \sin(x) y_2 = 0$$

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)d_{k+2} x^k - \frac{A y_1}{x^2} + 2 \frac{A y_1'}{x} + A \ln(x) y_1'' + \sin(x) y_2$$

Wenn wir Terme bis zur dritten Ordnung berücksichtigen erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^3 (k+2)(k+1)d_{k+2} - \frac{Ay_1}{x^2} + \frac{2Ay'_1}{x} + A \ln(x)y''_1 \\ & + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \sum_{k=0}^3 (k+2)(k+1)d_{k+2} + \mathcal{O}(x^4) = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

- $k = 0$

$$\begin{aligned} 2d_2 - \frac{A}{x^2} - \frac{2A}{2x} + A \ln(x) \frac{1}{6} &= 0 \\ \Rightarrow A &= 0 \\ d_2 &= 0 \end{aligned}$$

- $k = 1$

$$\begin{aligned} 6d_3 + d_0 &= 0 \\ d_3 &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

- $k = 2$

$$\begin{aligned} 12d_4 + d_1 &= 0 \\ d_1 &:= 1 \\ d_4 &= \frac{-1}{12} \end{aligned}$$

- $k = 3$

$$\begin{aligned} 20d_5 + d_2 - \frac{d_0}{6} &= 0 \\ 20d_5 &= \frac{1}{6} \\ d_5 &= \frac{1}{120} \end{aligned}$$



Wir erhalten als Näherung für die Lösungen

$$y_1(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{144} + \frac{x^4}{2880} - \frac{x^5}{5760} + \mathcal{O}(x^6)$$
$$y_2(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^6)$$

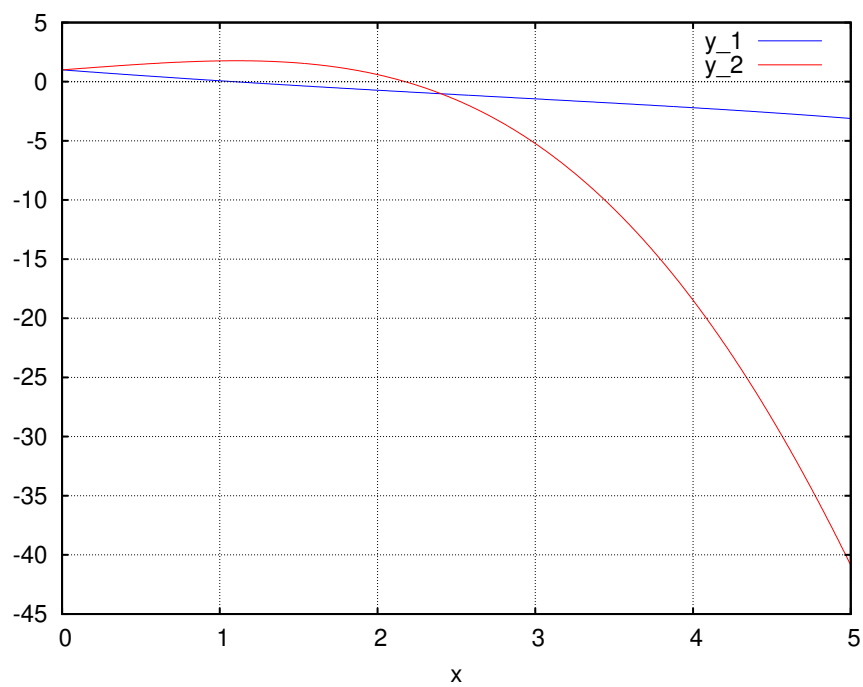


Abbildung 4.8: Eine Skizze der Näherungen  $y_1, y_2$  bis zur fünften Ordnung von (4.13).

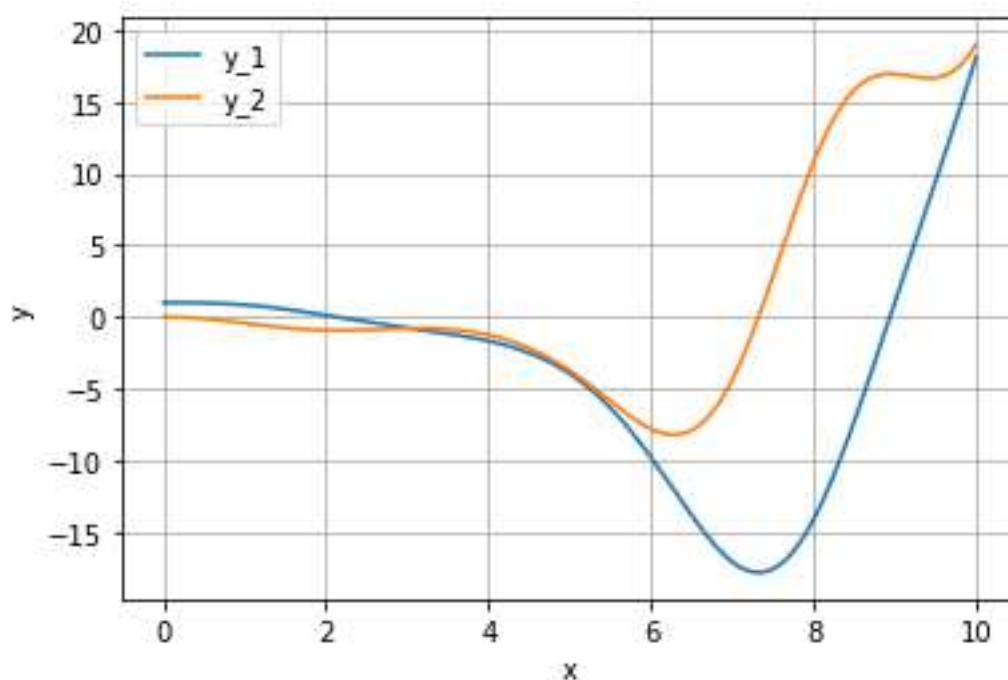


Abbildung 4.9: Eine Skizze der Lösungen  $y_1, y_2$  von (4.13).

**Beispiel 4.3.12** (Besselfunktionen zweiter Art für  $n \geq 1$ ).

Wir stellen die Legendrefunktionen  $Y_n$  *zweiter Art* hier vor, wie sie in [13] behandelt werden. Es handelt sich um die jeweils anderen linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (4.5) für  $\lambda = n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$p_1(x) = \frac{1}{x}$$

$$p_2(x) = \frac{x^2 - n^2}{x^2}$$

$$\alpha_0 = 1$$

$$\beta_0 = -n^2$$

Die Funktion  $p_1$  hat bei  $x = 0$  eine Polstelle erster Ordnung, die Funktion  $p_2(x)$  hat bei  $x = 0$  für  $n \geq 1$  eine Polstelle zweiter Ordnung. Somit erfüllt die Gleichung (4.5) die Voraussetzungen des Satzes von Fuchs (Satz 4.3.8).

Berechnung der charakteristischen Exponenten

$$\begin{aligned}\sigma^2 - \sigma + \alpha_0\sigma + \beta_0 &= 0 \\ p(\sigma) &= \sigma^2 - n^2 \\ \sigma_{1,2} &= \pm n\end{aligned}$$

Die Lösungen  $\sigma_1, \sigma_2$  erfüllen  $\sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{Z}$ , daher haben die Lösungen  $Y_n$  die Gestalt

$$Y_n(x) = \frac{1}{x^n} \sum_{k=0}^{\infty} d_0 x^k + c \ln(x) J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_0 x^{k-n} + c \ln(x) J_n(x) \quad (4.15)$$

mit  $d_0 = 1$  und  $c$  noch unbestimmt.

Wir setzen (4.15) in (4.5) ein und stellen die Rekursionsgleichung auf im Fall  $n = 1$ .

$$\begin{aligned}a_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{4^n n! (n+1)!} \\ J_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k! (k+1)!} x^{2k+1} \\ J_1'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{4^k k! (k+1)!} x^{2k} \\ Y_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{k-1} + c \ln(x) J_1(x) \\ Y_1'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k (k-1) x^{k-2} + c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k! (k+1)!} x^{2k} + c \ln(x) J_1'(x) \\ Y_1''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k (k-1)(k-2) x^{k-3} + c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{4^k k! (k+1)!} x^{2k-1} + c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)(2k+1)}{4^k k! (k+1)!} x^{2k-2} \\ &\quad + c \ln(x) J_1''(x)\end{aligned}$$

Einsetzen in (4.5) liefert eine Gleichung für die Koeffizienten  $d_k$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} d_k(k-1)(k-2)x^{k-3} + c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{4^k k!(k+1)!} x^{2k-1} + c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)(2k+1)}{4^k k!(k+1)!} x^{2k-2} \\ + \frac{1}{x} \left( \sum_{k=0}^{\infty} d_k(k-1)x^{k-2} + c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k!(k+1)!} x^{2k} \right) \\ + \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{k-1} = 0 \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left[ (k-1)(k-2) + (k-1) - 1 \right] x^{k-3} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{k-1} \\ + c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{4^k k!(k+1)!} x^{2k-1} + c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{4^k k!(k+1)!} x^{2k-2} = 0 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich für die ersten Potenzen liefert die folgenden Gleichungen.

- $x^{-3}$

$$2 - 1 - 1 = 0$$

- $x^{-2}$

$$\begin{aligned} -d_1 + c &= 0 \\ c &= d_1 \end{aligned}$$

- $x^{-1}$

$$\begin{aligned} d_0 + c &= 0 \\ c &= -1 \\ d_1 &= -1 \end{aligned}$$

- $x^0$

$$\begin{aligned} 3d_3 + d_1 - \frac{3}{8}c &= 0 \\ 3d_3 &= \frac{5}{8} \\ d_3 &= \frac{5}{24} \end{aligned}$$

Wir bekommen als Näherung für die erste Besselfunktion zweiter Art

$$Y_1(x) \approx \frac{1-x}{x} - c \ln(x) J_1(x).$$

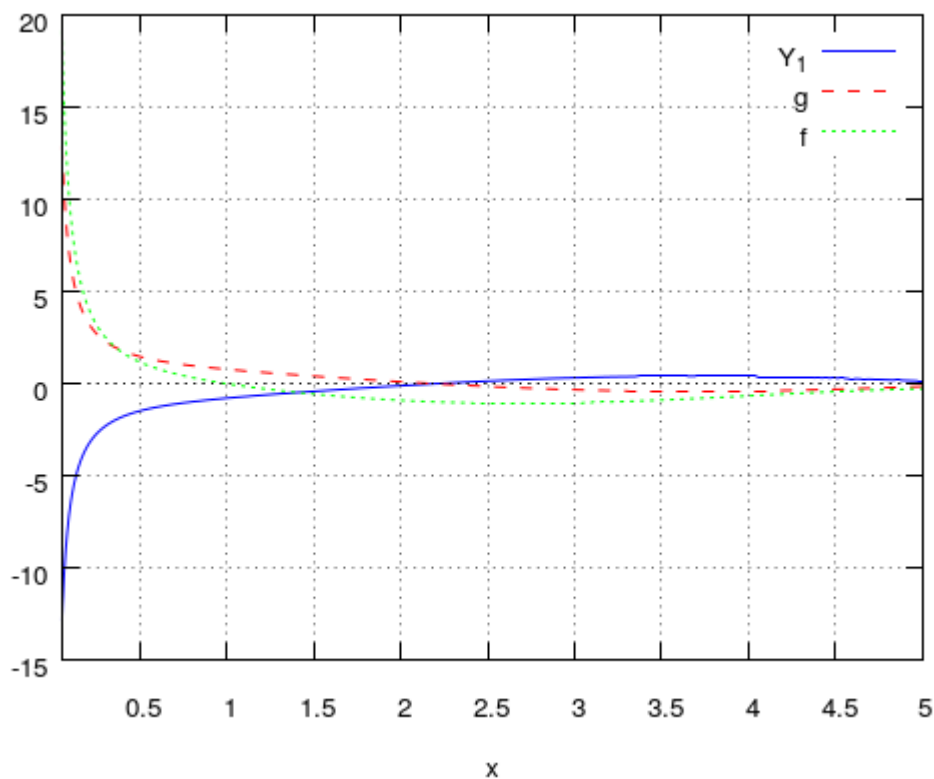


Abbildung 4.10: Eine Skizze der Näherung  $f(x)$ . Die Funktion  $g$  ist die Funktion  $-Y_1$ .

In [13] wird ein allgemeinerer Ausdruck für die Funktionen  $Y_n$  hergeleitet indem die Rekursionsgleichungen sowohl für  $J_n$  als auch für  $Y_k$  systematisch gelöst werden. Diese werden dann, mithilfe des Pochhammersymbols und der Gammafunktion dargestellt.

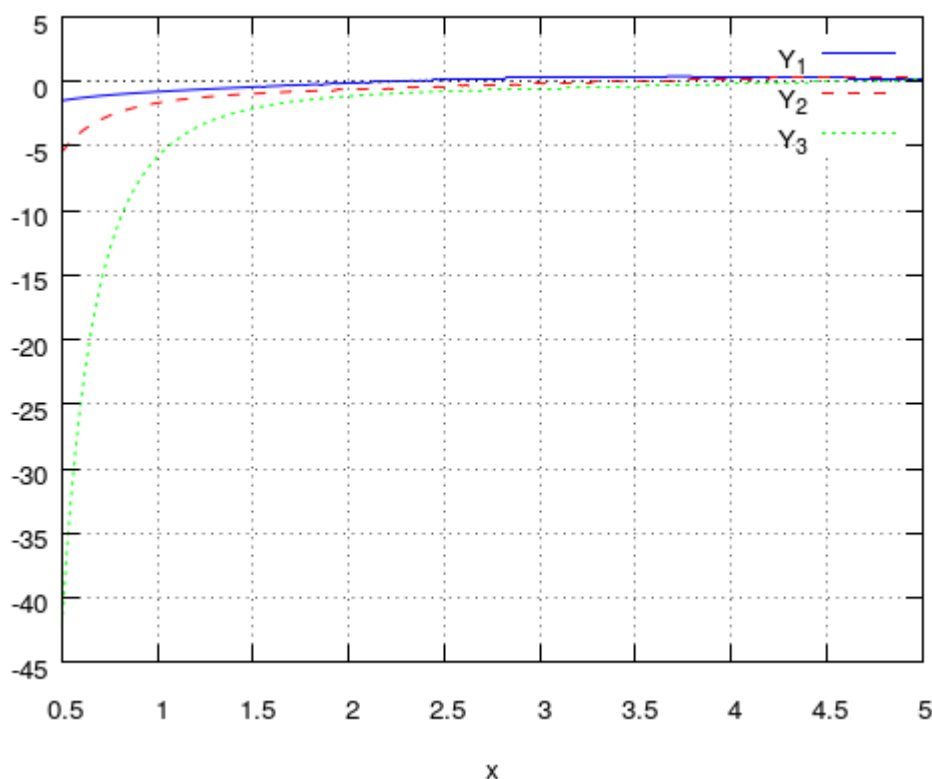


Abbildung 4.11: Eine Skizze der ersten drei Lösungen  $Y_1, Y_2, Y_3$  von (4.5).

**Bemerkung 4.3.13** (Die Lösung  $Y_0$ ).

Die Funktion  $Y_0$  lässt sich nicht mit der Methode des Satzes von Fuchs ausrechnen, wir können aber die Reduktionsmethode von d'Alembert verwenden um einen Ausdruck für  $Y_0$  zu bekommen.

### 4.3.2 Hypergeometrische Differentialgleichung und ihre Lösung

Wir stellen in diesem Abschnitt die hypergeometrische Differentialgleichung vor. Diese Differentialgleichung ist eine Normalform für eine große Klasse von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche die Fuchssche Klasse enthält. Wir können mithilfe der sogenannten *hypergeometrischen Funktion* auch die Lösungen dieser Differentialgleichungen zumindest als

Potenzreihen darstellen, wobei dann für die Koeffizienten auch eine explizite Darstellung möglich ist.

**Definition 4.3.14** (Pochhammersymbol).

Wir definieren das Pochhammersymbol  $(a)_n$  von  $a$  für  $a \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  als

$$(a)_n := \prod_{k=0}^{n-1} (a+k) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

wobei die zweite Darstellung nur existiert für  $a \in \mathbb{C} \setminus \{-k, k \in \mathbb{N}\}$   $\Gamma(z)$  und die Gammafunktion aus Kapitel 1 bezeichnet.

**Beispiel 4.3.15** (Pochhammersymbole).

$$(1)_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = (x+n-1) \frac{\Gamma(x+n-1)}{\Gamma(x)} = \dots = x(x+1) \cdots (x+n-1) = x(x+1)_{n-1}$$

$$(-2)_3 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-2)} = -2(-2+1)(-2+2) = 0$$

$$(-j)_n = 0, \quad j < n, \quad \forall j, n \in \mathbb{N}$$

**Definition 4.3.16** (Hypergeometrische Funktion).

Sei  $c \notin -\mathbb{N}$ . Die Funktion

$$F(a, b, c; z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} z^j. \quad (4.16)$$

heißt *hypergeometrische Funktion*.

**Bemerkung 4.3.17.**

Wir betrachten meistens den Fall, wo  $a, b, c$  komplexe Parameter sind. Wir können auch die Parameter weglassen, dafür schreiben wir  $-$ . Zum Beispiel meinen wir mit  $F(-, -, 1; z)$  die Funktion

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1)_j j!} z^j$$

**Beispiel 4.3.18** (Hypergeometrische Funktion zu speziellen Werten).

$\exp(z)$	$F(-, -, -; z)$
$\cos(z)$	$F(-, -, \frac{1}{2}, \frac{-z^2}{4})$
$\sin(z)$	$F(-, -, \frac{3}{2}, \frac{-z^2}{4})$
$\frac{1}{1-z}$	$F(1, -, -, z)$
$\arcsin(x)$	$xF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x)$
$\arctan(x)$	$xF(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x)$

**Satz 4.3.19** (Ableitung der hypergeometrischen Funktion).

$$\frac{dF(a, b, c; z)}{dz} = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1; z)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} F(a, b, c; z) &= \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{k z^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(c)_{k+1}} \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+1)_k a (b+1)_k b}{(c+1)_k c} \frac{z^k}{k!} = \frac{ab}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+1)_k (b+1)_k}{(c+1)_k} \frac{z^k}{k!} \\ &= \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1; z) \end{aligned}$$

□

**Definition 4.3.20** (Hypergeometrische Differentialgleichung).

Wir nennen die Differentialgleichung

$$z(1-z)y'' + (c - (a+b+1)z)y' - aby = 0 \quad (4.17)$$

die *hypergeometrische Differentialgleichung*.

**Satz 4.3.21** (Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung).



Die hypergeometrische Funktion  $F(a, b, c; z)$  ist eine Lösung der Gleichung (4.17). Falls  $c - 2$  nicht in  $\mathbb{N}$  liegt erhalten wir eine zweite Lösung durch  $z^{1-c}F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z)$ . Falls zusätzlich noch  $c$  keine ganze Zahl ist, sind beide Lösungen linear unabhängig.

*Beweisidee.*

Wir können mit der Frobeniusmethode nachweisen, dass die erste Lösung der Gleichung genau die hypergeometrische Funktion ist. Unter den Voraussetzungen der Konstruktion der zweiten Lösung erhalten wir die Bedingungen für  $c$ .

**Beispiel 4.3.22** (Hypergeometrische Differentialgleichung).

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$z(1-z)y'' - \left(\frac{1}{2} - (2n+1)z\right)y' - n^2y = 0. \quad (4.18)$$

$$a = n$$

$$b = n$$

$$c = \frac{1}{2}$$

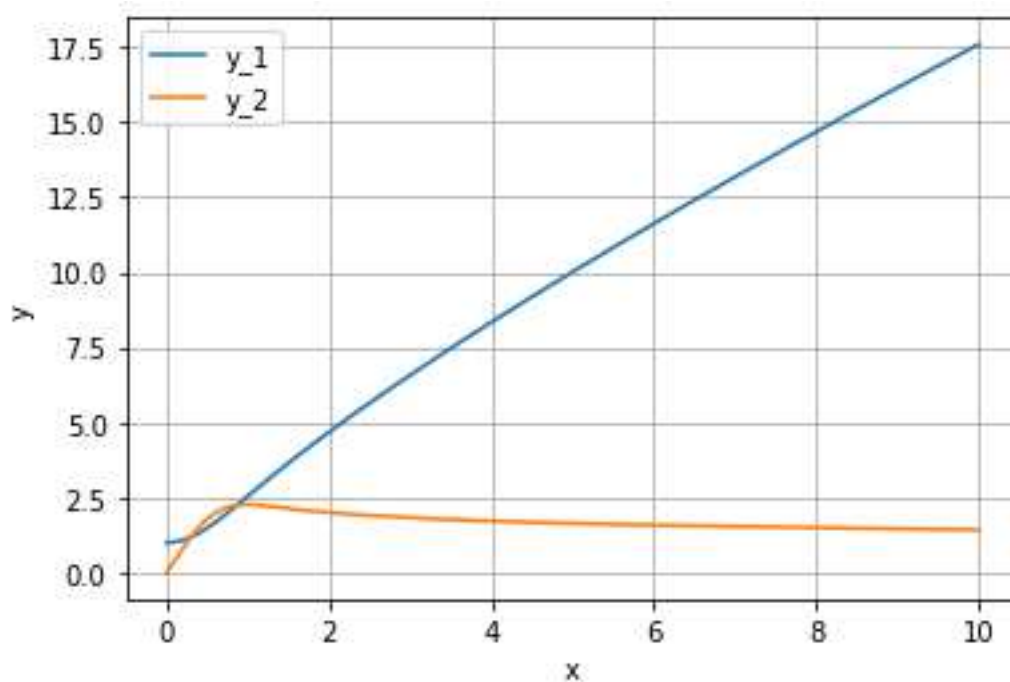
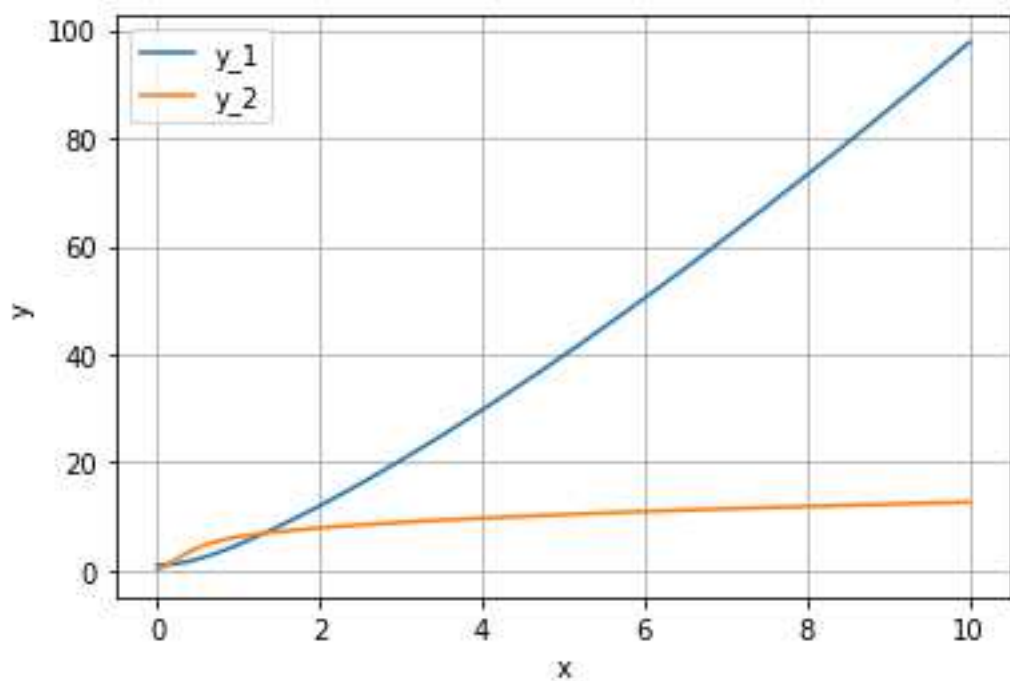
$$(a)_k = \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

$$(b)_k = \frac{(n+k-1)}{(n-1)!}$$

$$(c)_k = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + k)}{\Gamma(k)} = \frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{k!4^k k!}.$$

Die Lösungen ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned}
y_1(z) &= F\left(n, n, \frac{1}{2}; z\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((n+k-1)!)^2 (k!)^2 4^k \sqrt{\pi}}{((n-1)!)^2 (2k)!} z^k \\
y_2(z) &= z^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{2n-1}{2}, \frac{2n-1}{2}, \frac{3}{2}; z\right) \\
&= \sqrt{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{2n-1}{2} + k) \Gamma(\frac{2n-1}{2} + k) (k-1)!}{((k-1)!)^2 \Gamma(\frac{3}{2} + k)} z^k \\
&= \sqrt{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{2(n-1)+1+k}{2})^2}{\Gamma((k+1) + \frac{1}{2}) (k-1)!} z^k \\
&= \sqrt{z} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left((n+k-1) + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{4^{k+1} ((k+1)!)^2}{(2k+2)! \sqrt{\pi}} z^k \\
&= \sqrt{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2n+2k-2)!)^2 \pi}{((n+k-1)!)^2 4^{2n+2k-2}} \frac{4^{k+1} ((k+1)!)^2}{(2k+2)! \sqrt{\pi}} z^k \\
&= \sqrt{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2n+2k-2)!)^2 ((k+1)!)^2 \sqrt{\pi}}{((n+k-1)!)^2 ((2k+1)!)^2 4^{2n+k-3}} z^k.
\end{aligned}$$

Abbildung 4.12: Die Lösungen  $y_1, y_2$  der Gleichung (4.17) mit  $n = 2$ .Abbildung 4.13: Die Lösungen  $y_1, y_2$  der Gleichung (4.17) mit  $n = 3$ .

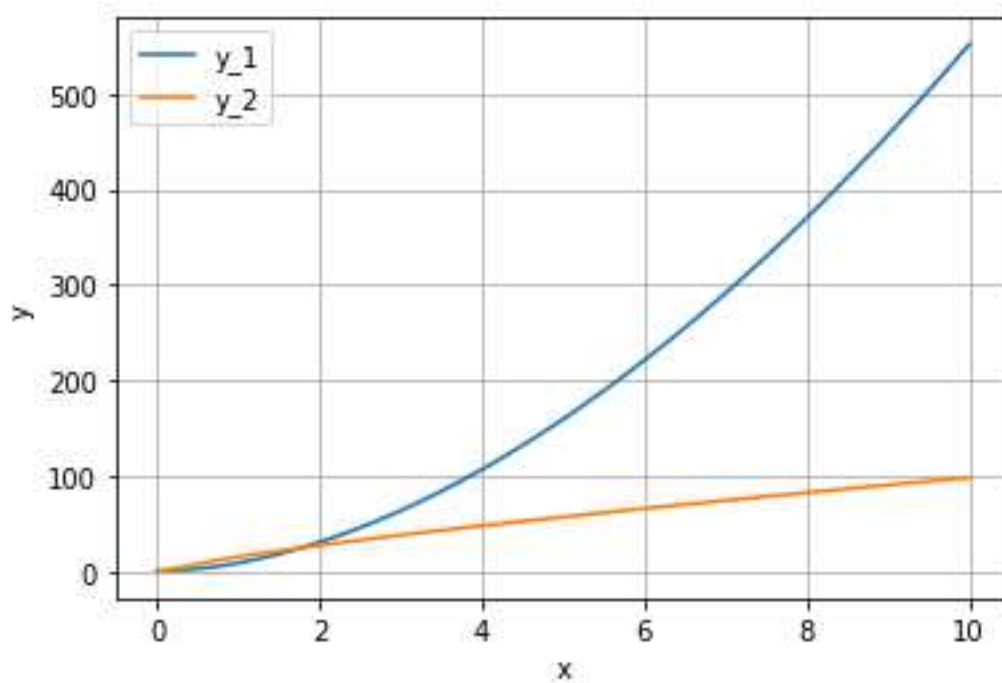


Abbildung 4.14: Die Lösungen  $y_1, y_2$  der Gleichung (4.17) mit  $n = 4$ .

# Kapitel 5

## Störungstheorie

### 5.1 Hintergründe und elementare Beispiele

Der Ursprung der Störungstheorie geht auf das 18. Jahrhundert zurück. Es wurde versucht Probleme, die nicht analytisch lösbar waren, qualitativ genauer zu beschreiben und eine Approximation zu konstruieren welche die Eigenschaften (Regularität, Differenzierbarkeit der rechten Seite, stetige/differenzierbare Abhängigkeit der Parameter oder ähnliches) der Differentialgleichung berücksichtigt. Wir betrachten eine Differentialgleichung

$$x'(t) = f(t, x, \varepsilon)$$

mit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir fordern dabei, dass die Funktion  $f$  in  $C^k$  liegt damit wir mithilfe der differenzierbaren Abhängigkeit der Parameter eine Approximation der Lösung berechnen können. Wir wollen an den Satz über die differenzierbare Abhängigkeit erinnern, siehe [9]]. Ein Beweis dazu ist ebenso dort zu finden.

**Satz 5.1.1** (Differenzierbare Abhängigkeit der Parameter). *Es sei  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $f \in C^k$ . Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems*

$$x'(t) = f(t, x, \varepsilon) \tag{5.1}$$

*eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion.*

Falls  $\varepsilon$  klein ist kann die rechte Seite  $f(t, x, \varepsilon)$  als Taylorpolynom  $T_n(t, x, \varepsilon)$  nach  $\varepsilon$  entwickelt werden. Inwiefern können dann die Eigenschaften der

Differentialgleichung

$$x'(t) = T_n(t, x, \varepsilon)$$

auf (5.1) übertragen werden?

Um diese Frage zu beantworten wollen wir eine Reihe an Beispielen und ein Hauptresultat aus [8] vorstellen.

### 5.1.1 Beispiel 1: Ein gestörtes exponentielles Abklingen

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = -x + \varepsilon, \quad x(0) = 1, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Das zugehörige ungestörte Problem ist gegeben durch

$$y'(t) = -y, \quad y(0) = 1 \quad (5.3)$$

Die Lösungen der Anfangswertprobleme (5.2) und (5.3) sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= \varepsilon + (1 - \varepsilon) \exp(-t) \\ y(t) &= \exp(-t). \end{aligned}$$

Der Abstand zwischen den Lösungen  $|x(t) - y(t)| = \varepsilon - \varepsilon \exp(-t)$  bleibt beschränkt, die Fehlerschranke der Näherung der gestörten Lösung  $x(t)$  durch die ungestörte Lösung bleibt beschränkt.

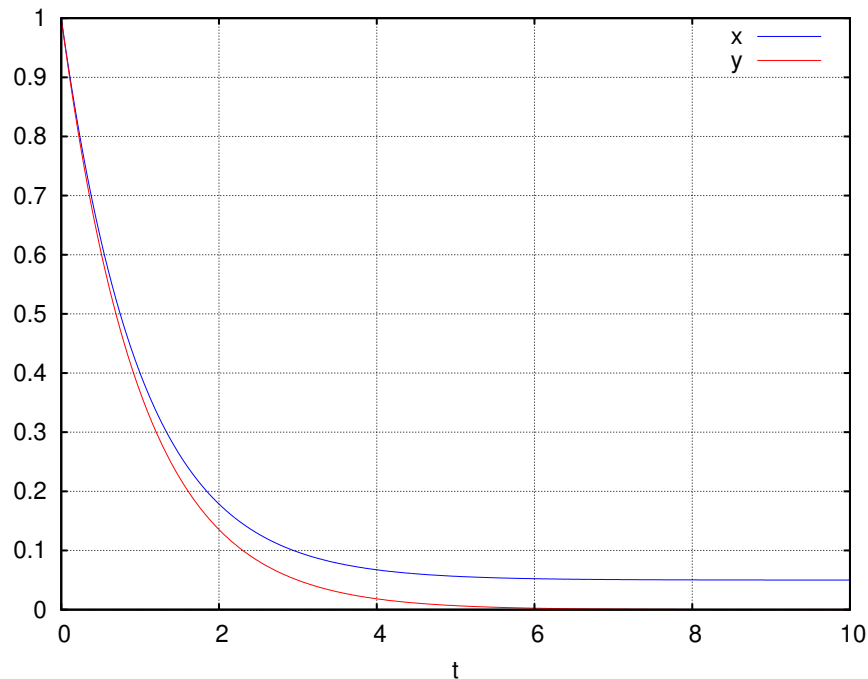


Abbildung 5.1: Eine Skizze der Lösungen von (5.2) und (5.3) mit  $\varepsilon = 0.05$  für  $0 \leq t \leq 10$ .

### 5.1.2 Beispiel 2: Ein gestörtes exponentielles Wachstum

In diesem Abschnitt betrachten wir folgende gestörte Differentialgleichung

$$x'(t) = x + \varepsilon, \quad x(0) = 1, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (5.4)$$

und die ungestörte Differentialgleichung

$$y'(t) = y, \quad y(0) = 1. \quad (5.5)$$

Die Lösungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 + \varepsilon) \exp(t) - \varepsilon \\ y(t) &= \exp(t). \end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist die Differenz  $|x(t) - y(t)| = \varepsilon(1 + \exp(t))$  für  $t$  in Vorwärtszeit im Gegensatz zu (5.2) unbeschränkt.

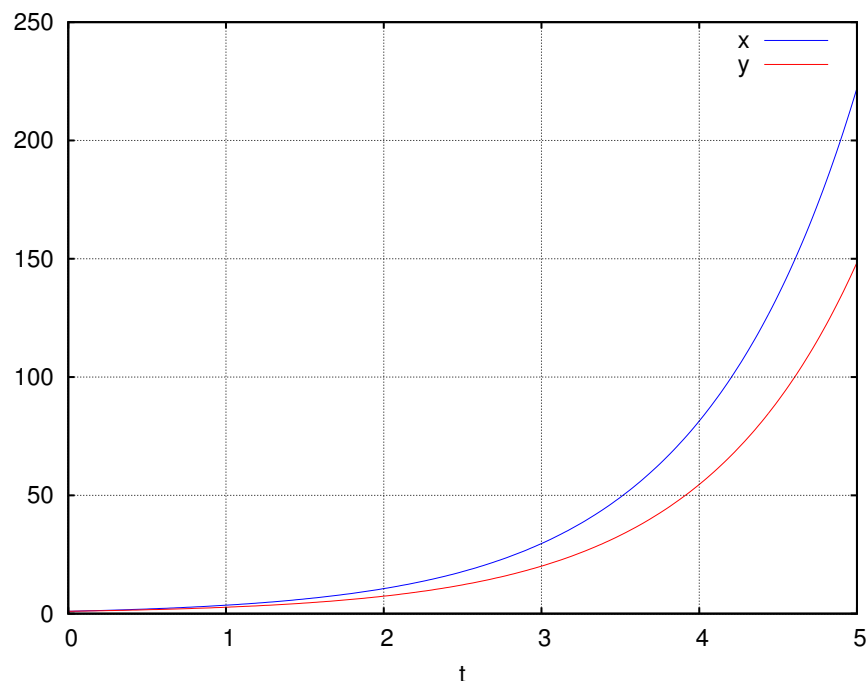


Abbildung 5.2: Eine Skizze der Lösungen von (5.3) und (5.4)

### 5.1.3 Beispiel 3: Gestörter harmonischer Oszillator

Wir betrachten eine lineare skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Gegeben sei die Bewegungsgleichung des gedämpften Oszillator:

$$x''(t) + 2\varepsilon x'(t) + x = 0, \quad x(0) = a, \quad x'(0) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Wir lösen diese Gleichung mit dem Exponentialansatz.

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp(\lambda t) \\ p(\lambda) &= \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + 1 = 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-2\varepsilon \pm \sqrt{4\varepsilon^2 - 4}}{2} \\ \lambda_{1,2} &= -\varepsilon \pm i\sqrt{1 - \varepsilon^2} \end{aligned}$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \exp(-\varepsilon t) \cos(\gamma t) \\ x_2(t) &= \exp(-\varepsilon t) \sin(\gamma t) \end{aligned}$$



mit  $\gamma = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ .

Die Lösung des Anfangswertproblems (5.6) ist

$$x(t) = a \exp(-\varepsilon t) \cos(\gamma t) + \frac{a\varepsilon}{\gamma} \exp(-\varepsilon t) \sin(\gamma t).$$

Die Lösung konvergiert, unabhängig vom Anfangswert  $a$ , gegen Null.

Bei diesem Beispiel verfolgen wir auch einen anderen Ansatz und

vergleichen die Ergebnisse.

Wir nehmen zunächst an, die analytische Lösung  $x(t)$  von (5.6) ließe sich als Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t)$  darstellen. Wie gut ist etwa eine Approximation bis  $k = 2$ ? Lässt sich das qualitative Verhalten der Differentialgleichung durch eine solche Approximation erkennen?

Um diese Fragen zu beantworten setzen wir

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) \\ x'(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x'_k(t) \\ x''(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x''_k(t) \end{aligned}$$

in (5.6) ein und erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x''_k(t) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} x'_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) = 0. \quad (5.7)$$

Umformen liefert

$$\begin{aligned} x''_0 + x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (x''_k + x_k) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} x_k &= 0 \\ x''_0 + x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (x''_k + x_k) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} x_k &= 0 \\ x''_0 + x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (x''_k + x_k) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_{k-1} &= 0 \\ x''_0 + x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (x''_k + 2x_{k-1} + x_k) &= 0 \end{aligned}$$

Es soll (5.6) für unser beliebiges  $\varepsilon \geq 0$  gelten. Wir führen einen Koeffizientenvergleich in den Potenzen von  $\varepsilon$  durch. Die Lösungen sollen für jede Entwicklung bis zur  $k$ -ten Ordnung die Anfangswerte erfüllen. Daher muss  $x_0$  das Anfangswertproblem lösen und die Terme  $x_k$  höherer Ordnung müssen das homogene Problem lösen.

$$\begin{aligned}x_0(0) &= a \\x_0'(0) &= 0 \\x_k(0) &= 0, \quad k \geq 1 \\x_k'(0) &= 0, \quad k \geq 1 \\x_0'' + x_0 &= 0 \\x_k'' + x_k &= -2x_{k-1}, \quad k \geq 1.\end{aligned}$$

Lösen des Systems für  $k \leq 2$  unter Berücksichtigung der Anfangswerte  $x(0) = a$ ,  $x'(0) = 0$  liefert

$$\begin{aligned}x_0(t) &= a \cos(t) \\x_1(t) &= a \sin(t) - at \cos(t) \\x_2(t) &= \frac{a}{4} \cos(t) + \frac{2at^2 - a}{4} \cos(t) + \frac{a}{2} t \sin(t)\end{aligned}$$

In diesem Fall sehen wir dass die Näherung  $y(t) := x_0 + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)$  die analytische Lösung  $x(t) = a \exp(-\varepsilon t) \cos(\gamma t) + \frac{a\varepsilon}{\gamma} \exp(-\varepsilon t) \sin(\gamma t)$  nicht gut approximiert. Insbesondere ist die Näherung  $y(t)$  im Gegensatz zur analytischen Lösung  $x(t)$  unbeschränkt.

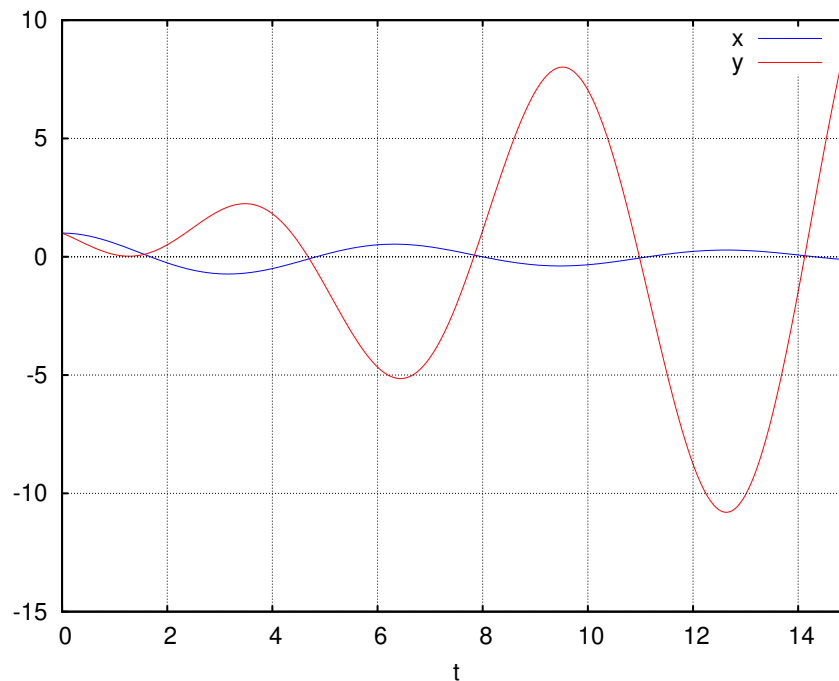


Abbildung 5.3: Eine Skizze der Funktionen  $x(t), y(t)$  mit den Parametern  $a = 1, \varepsilon = 0.1$ .

### Bemerkung 5.1.2.

Die Gleichung (5.6) verzweigt sich im Punkt  $\varepsilon = 0$ , es handelt sich um eine Hopf-Andronov-Verzweigung, siehe dazu [13].

## 5.2 Stabilitätsanalyse

### 5.2.1 Beispiele aus dem vorherigen Abschnitt

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Ergebnisse der Beispiele aus dem vorherigen Abschnitt. In Beispiel 1 existiert eine Ruhelage des gestörten Problems  $\bar{x}(t) = -\varepsilon$ , die asymptotisch stabil ist und es weicht wegen der stetigen Abhängigkeit der Parameter die Lösung des ungestörten Problems höchstens um eine Konstante von der ungestörten Lösung ab. Im zweiten Beispiel ist die Ruhelage  $\bar{x}(t) = -\varepsilon$  abstoßend, daher können die Differenzen zwischen der analytischen Lösung  $x$  und der Approximation  $y$

beliebig groß werden. Im dritten Beispiel haben wir ein grundlegendes Problem. Es tritt eine Hopfverzweigung auf, wenn  $\varepsilon$  das Vorzeichen wechselt. Dadurch stimmt das qualitative Verhalten der approximativen Lösung  $y$  nicht mehr mit der Näherung nahe dem kritischen Punkt überein.

## 5.2.2 Linearisierung und Stabilität

Wir stellen in diesem Abschnitt Kriterien vor, wann eine parameterabhängige Differentialgleichung eine sinnvolle Approximation erlaubt. Wir verlangen, dass die Abweichung zwischen der analytischen Lösung und der Näherung  $k$ -ter Ordnung mindestens  $\mathcal{O}(\varepsilon^{k+1})$  ist. Dazu erinnern wir an die Begriffe Lyapunov-Stabilität, Linearisierung und den Satz über die Linearisierung. Siehe dazu [9].

**Definition 5.2.1** (Lyapunov-Stabilität). *Sei  $x(t, t_0)$  eine Lösung der Differentialgleichung  $x'(t) = f(t, x)$ ,  $x(0) = x_0$ . Dabei sei  $f(t, x)$  in  $x$  lokal Lipschitz-stetig. Dann nennen wir die Lösung  $x(t, x_0)$*

1. *Lyapunov-stabil, falls  $\forall \varepsilon > 0$  es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass aus  $\|x_0 - a\| \leq \delta$  die Existenz der Lösung  $x(t, a)$  und die Beschränktheit von  $\|x(t, x_0) - x(t, a)\| \leq \varepsilon \forall t \geq t_0$  folgt.*
2. *instabil, falls  $x(t, x_0)$  nicht Lyapunov-stabil ist.*
3. *anziehend, falls es ein  $\delta > 0$  existiert, so dass aus  $\|x_0 - a\| \leq \delta$  die Existenz der Lösung  $x(t, a)$  folgt und die Differenz  $\|x(t, a) - x(t, x_0)\|$  gegen Null konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ .*
4. *asymptotisch stabil, falls  $x(t, x_0)$  stabil und anziehend ist.*

**Definition 5.2.2** (Linearisierung um eine Ruhelage).

Es sei die Differentialgleichung

$$x' = f(x) \tag{5.8}$$

mit dem stationärem Punkt  $\bar{x}$  gegeben. Dann heißt die Differentialgleichung

$$y' = df(\bar{x})y \tag{5.9}$$

die Linearisierung der Gleichung (5.8) im Punkt  $\bar{x}$ .

**Definition 5.2.3** (Hyperbolische Ruhelage).

Es sei (5.9) die Linearisierung von (5.8). Wir nennen die Ruhelage  $\bar{x}$  *hyperbolisch*, falls  $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0 \forall \lambda \in \sigma(df(\bar{x}))$ .

**Satz 5.2.4** (Stabilität mittels Linearisierung). *Sei  $\bar{x}$  eine Ruhelage der Differentialgleichung (5.8) mit einem  $C^1$ -Vektorfeld  $f$  und es sei  $A := df(\bar{x})$ . Es bezeichne  $\sigma(A)$  das Spektrum der Matrix  $A$ . Dann gilt:*

1. *Falls alle Eigenwerte  $\lambda \in \sigma(A)$  negativen Realteil haben, so ist die Ruhelage asymptotisch stabil*
2. *Falls mindestens ein Eigenwert  $\lambda \in \sigma(A)$  positiven Realteil hat, so ist die Ruhelage instabil.*
3. *Falls es Eigenwerte  $\lambda \in \sigma(A)$  mit Realteil Null gibt so kann keine Aussage über die Ruhelage mithilfe der Linearisierung getroffen werden da eventuell nichtlineare Terme dominieren können.*

**Satz 5.2.5** (Satz von Hartman-Grobman).

Es seien die Gleichungen (5.8) und (5.9) gegeben mit  $f \in C^1$ . Sei  $x(t, a)$  die Lösung zum Anfangswert  $x(t_0) = a$ . Dann existiert eine Umgebung  $U$  von  $\bar{x}$  und  $V$  von 0 so, dass die Differentialgleichungen (5.8) und  $y' = df(\bar{x})$  topologisch konjugiert sind. Dabei heißen zwei Differentialgleichungen topologisch konjugiert, wenn es einen Homeomorphismus  $\psi$  gibt mit  $y = \psi \circ x \circ \psi^{-1}$ . Geometrisch aufgefasst bedeutet es, dass die Phasenporträts von  $x$  und  $y$  *lokal* äquivalent sind.

**Bemerkung 5.2.6** (Stabilitätsverhalten topologisch konjugierter Differentialgleichungen).

Falls die Ruhelage  $\bar{x}$  hyperbolisch ist kann man aus dem Satz von Hartman-Grobman folgern, dass die Differentialgleichungen (5.8) und (5.9) dasselbe Stabilitätsverhalten haben. Wir fassen das im nächsten Satz zusammen.

**Satz 5.2.7** (Methode der Linearisierung).

Gegeben sei eine allgemeine Differentialgleichung

$$x'(t) = f(x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0$$

Es sei für  $\varepsilon$  hinreichend klein die Linearisierung der Funktion  $f(x, \varepsilon)$  in  $x$  gleichmäßig negativ definit, das heißt für alle  $x, \varepsilon, \lambda$  gilt  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq \alpha$ . Es sei dazu  $\bar{x}$  eine Ruhelage der Funktion  $f(x, \cdot)$ . Zusätzlich sei  $f \in C^1$ . Dann konvergiert die Differenz zwischen der wahren Lösung  $x$  und der Linearisierung  $y$  der Gleichung  $y' = df(\bar{x}, \varepsilon)y$  gegen Null für  $\varepsilon$  hinreichend klein.

*Beweis.*

Wir betrachten die beiden Systeme und bilden die Differenz der Lösungen. Da die Funktion  $f(x, \varepsilon)$  in  $x$  und in  $\varepsilon$  negativ definit ist und die differenzierbare Abhängigkeit der Parameter gegeben ist, gibt es eine Lipschitzkonstante  $L$  so, dass  $\|x(t) - y(t)\| \leq \delta C e^{L|t-t_0|}$ . Die Konstante  $L$  ist nach oben durch  $\sup_{x, \varepsilon, \lambda \in \sigma(df(x))} \operatorname{Re}(\lambda) = \alpha < 0$  beschränkt. Wir setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $t_0 = 0$ . Es seien  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  klein genug.

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(x, \varepsilon_0), & x(0) &= x_0 \\y_1'(t) &= f(y_1, \varepsilon_1), & y_1(0) &= y_{1,0} \\y_2'(t) &= df(\bar{x}, \varepsilon_1), & y_2(0) &= y_{2,0}\end{aligned}$$

Wir führen die Approximation in zwei Schritten: wir nähern die analytische Lösung  $x$  zuerst mithilfe der Störungstheorie und erhalten eine leicht gestörte Lösung  $y_1$ . Im Anschluss linearisieren wir die Differentialgleichung und erhalten die Lösung  $y_2$ .

$$\begin{aligned}\|x(t) - y_2(t)\| &\leq |x(t) - y_1(t) + y_1(t) - y_2(t)| \\&\leq |x(t) - y_1(t)| + |y_1(t) - y_2(t)| \\&\leq \delta C e^{Lt} + R(\varepsilon_1, t) \\&\leq \delta C^{\alpha t} + R(\varepsilon_2, t)\end{aligned}$$

Laut Voraussetzung ist  $\alpha$  negativ. Der Fehler  $R(\varepsilon, t)$  konvergiert laut Satz 5.2.6 für alle  $\varepsilon$  hinreichend klein und für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0. Somit konvergiert der Fehler  $x(t) - y_2(t)$  zumindest im Unendlichen gegen Null und wir können den Fehler nach oben abschätzen.

### Beispiel 5.2.8 (Räuberpopulationen).

Betrachten wir das folgende Modell zweier Räuberpopulationen  $x_1, x_2$  die um die Ressourcen ihres Biotops konkurrieren. Der Parameter  $\varepsilon$  gebe an, wie

stark die Beschränkungen des Habitat ist. Der Term  $\varepsilon x_1 x_2$  beschreibt die konkurrierende Interaktion zwischen den Räuberpopulationen  $x_1$  und  $x_2$ . In diesem Modell nehmen wir auch an, dass die Räuber  $x_1$  der anderen Population überlegen ist. Das soll bedeuten, dass die Räuber  $x_1$  tendenziell häufiger  $x_2$  fressen. Die Umkehrung soll auch möglich sein, mit kleiner Häufigkeit. Dabei sei der Parameter  $\varepsilon$  klein.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 - \varepsilon x_1 x_2 \\ 0.04x_1 - x_2 - \varepsilon x_1 x_2 \end{pmatrix} =: f(x_1, x_2, \varepsilon), \quad a, b, c, d, \varepsilon > 0. \quad (5.10)$$

Wir prüfen die Voraussetzungen des obigen Satzes nach und berechnen die Ruhelagen.

$$\begin{aligned} df(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} -1 - \varepsilon x_2 & 1 - \varepsilon x_1 \\ -0.04 - \varepsilon x_2 & -1 - \varepsilon x_1 \end{pmatrix} \\ f(x_1, x_2, \varepsilon) &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varepsilon x_1 x_2 + x_1 &= x_2 \\ \varepsilon x_1 x_2 - 0.02x_1 &= x_2 \\ x_2 &= \varepsilon x_1 x_2 + x_1 \\ x_2 &= \varepsilon x_1 x_2 - 0.02x_1 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ df(0, 0) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.04 & -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 &= -\frac{6}{5} \\ \lambda_2 &= -\frac{4}{5} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nachdem der Ursprung die einzige Ruhelage ist, folgern wir daraus, dass für  $\varepsilon$  klein genug der Ursprung asymptotisch stabil ist und somit die Lösungen mit  $\exp(-t)$  gegen 0 streben. Das bedeutet aber auch dass eine

Approximation  $y$  von der analytischen Lösung  $x$  höchstens um  $\delta C \exp(-t)$ ,  $\delta > 0$  abweicht im Sinne des obigen Satzes. In diesem Fall würde es sich anbieten für die Approximation einen Ausdruck der Form

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \exp(\lambda_1 t) v_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t) v_2$$

zu nehmen. Diese Methode basiert auf die Eigenwert-Eigenvektormethode und liefert dieselben Erkenntnisse wie die Linearisierung um Ruhelagen. Wir stellen im nächsten Abschnitt ein anderes Kriterium vor, welches Aussagen über Terme höherer Ordnung liefert.

### 5.2.3 Der Entwicklungssatz von Poincaré

Wir stellen in diesem Abschnitt zwei Resultate vor, welche sicherstellen wann die Näherung der analytischen Lösung  $x(t)$  durch die Approximation  $y(t) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k(t)$  hinreichend genau ist. Es sind beide Sätze und deren Beweise aus [8] entnommen.

**Satz 5.2.9.** *Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem*

$$x'(t) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k f_k(t, x) + \varepsilon^{m+1} R(t, x, \varepsilon), \quad x(t_0) = \eta \quad (5.11)$$

mit den Voraussetzungen  $|t - t_0| \leq h$ ,  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Es gelte zusätzlich

1. Die Funktionen  $f_i$  sind stetig in  $t$  und  $(m + 1 - i)$  mal stetig differenzierbar in  $x$ ;
2. Die Funktion  $R(t, x, \varepsilon)$  ist stetig in allen Variablen und Lipschitz-stetig in  $x$ .

Dann liefert die Entwicklung der Funktion  $x(t)$  in die Summe  $\sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k(t)$  mit den Anfangswerten  $x_0(t) = \eta$ ,  $x_i(t) = 0$ ,  $i \geq 1$  eine Näherung der Lösung  $x(t)$  die folgender Ungleichung genügt

$$\left\| x(t) - \sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k(t) \right\| \leq C \varepsilon^{m+1} \quad (5.12)$$



*Beweis*

Wir setzen die Summe  $\sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k(t)$  statt  $x(t)$  in (5.11) und führen einen Koeffizientenvergleich in den Potenzen von  $\varepsilon$  durch. Dazu wollen wir  $f_0$  an der Stelle  $x_0$  auch nach  $x$  bis zur ersten Ordnung in ein Taylorpolynom plus Restglied entwickeln. Es bezeichne die Funktion  $R_2$  das Restglied der Entwicklung der Funktion  $f_0$ . Wir interessieren uns zunächst nur für die Koeffizienten von  $\varepsilon^m$  für  $m = 0, 1$ .

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k(t) \right)' &= \sum_{k=0}^m \varepsilon^k f_k \left( t, \sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k(t) \right) \\ f_0 \left( t, \sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k(t) \right) &= f_0(t, x_0) + \frac{\partial f_0}{\partial x}(t, x_0) \varepsilon x_1 + R_2(t, x, \varepsilon) \\ \Rightarrow \left( \sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k(t) \right)' &= f_0(t, x_0) + \varepsilon f_1(t, x_0) + \varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial x}(t, x_0) x_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ x_0' &= f_0(t, x_0) \\ x_1' &= f_1(t, x_0) + \frac{\partial f_0}{\partial x}(t, x_0) x_1 \end{aligned}$$

Das Ziel ist, mithilfe der Taylorentwicklung, für  $x_i$ ,  $i \geq 1$  lineare Differentialgleichungen zu erhalten. Wir bekommen, mit weiteren Entwicklungen und Koeffizientenvergleichen für  $x_i$ ,  $i \geq 1$  die Gleichungen

$$x_i'(t) = A_i(t) + B_i(t)x_i,$$

wobei die Koeffizientenfunktionen  $A_i, B_i$  höchstens von  $x_0, \dots, x_{i-1}$  abhängen. Umgeschrieben als Integralgleichung für die analytische Lösung  $x(t)$  erhalten wir

$$x(t) = \eta + \sum_{k=0}^m \int_{t_0}^t \varepsilon^k f_k(\tau, x(\tau)) d\tau + \varepsilon^{m+1} \int_{t_0}^t R(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Wir berechnen die Differenz zwischen  $x(t)$  und  $\sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k(t)$  und wählen zunächst  $m = 0$ .

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \eta + \int_{t_0}^t f_0(\tau, x_0(\tau)) d\tau \\ x(t) - x_0(t) &= \int_{t_0}^t (f_0(\tau, x(\tau)) - f_0(\tau, x_0(\tau))) d\tau + \varepsilon \int_{t_0}^t R(t, x(\tau), \varepsilon) \end{aligned}$$

Laut Voraussetzung ist die Funktion  $f_0$  Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante  $L_0$  und die Funktion  $R$  ist lokal beschränkt durch  $M$ . Es gilt daher

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leq \int_{t_0}^t L \|x(\tau) - x_0(\tau)\| + \varepsilon M(t - t_0).$$

Mithilfe des Lemmas von Gronwall erhalten wir

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \varepsilon M(\tau - t_0) L e^{\int_{t_0}^{\tau} L d\tau} \\ &\leq \frac{\varepsilon M h}{L} e^{L(t-t_0)} \end{aligned}$$

Wir haben (5.12) bewiesen für den Fall  $m = 0$ . □.

**Bemerkung 5.2.10** (Aussage für höhere Potenzen).

Für die höheren Potenzen von  $\varepsilon$  lässt sich die Aussage ebenfalls beweisen, ein möglicher Zugang wäre zum Beispiel die Lösungen als Taylorpolynom in Potenzen von  $\varepsilon$  zu entwickeln und Restgliedabschätzungen durchzuführen. Das ist ein hinreichendes Kriterium, wann die Störungstheorie eine Approximation im Sinne von (5.12) liefert. Naheliegender wäre es sich Gedanken zu machen, ob die Approximation lokal für  $m$  gegen unendlich konvergiert und der Fehler bei wachsendem  $m$  beliebig klein werden kann. Diese Fragestellung wurde von Poincaré im Entwicklungssatz von Poincaré bewiesen. Das Ziel ist eine Kontraktion im Raum  $C^m$  zu konstruieren und den Fixpunktsatz von Banach geeignet anzuwenden.

**Satz 5.2.11** (Entwicklungssatz von Poincaré).

Gegeben sei folgendes Anfangswertproblem

$$y' = F(t, y, \varepsilon), \quad y(t_0) = \mu \tag{5.13}$$

mit  $|t - t_0| \leq h$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $0 \leq \mu \leq \mu_0$ . Es sei zusätzlich  $F$  nach  $y$  und  $\varepsilon$  in einer konvergente Potenzreihe für  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\|y\| \leq \rho$  entwickelbar.

Dann kann die analytische Lösung  $y(t)$  in eine lokal konvergente Potenzreihe in der Umgebung von  $(\varepsilon, \mu) = (0, 0)$  entwickelt werden, wobei die Konvergenz im gleichen Sinne wie die Konvergenz nach der Ungleichung (5.12).

*Beweisidee*

Wir konstruieren eine Folge  $y_n$  nach dem folgenden Schema.

$$y_0(t) = \mu$$
$$y_{n+1}(t) = \mu + \int_{t_0}^t F(s, y_n(s)) ds$$

Diese Funktionenfolge konvergiert gleichmäßig für  $|t - t_0|$ . Wir entwickeln nun  $F$  in eine Potenzreihe nach  $\varepsilon$  und  $\mu$ . Die Folgenglieder  $y_n$  sind nun als Potenzreihen darstellbar und somit auf dem selben Gebiet wie  $F$  entwickelbar. Nach dem Weierstraß'schen Konvergenzsatz lässt sich zeigen, dass der Limes  $y$  der Funktionenfolge  $y_n$  selbst analytisch ist.  $\square$ .

## Kapitel 6

# Der Laplaceoperator in Kugel- und Zylinderkoordinaten

In diesem Kapitel wollen wir aus der Laplacegleichung die Differentialgleichungen der Legendre- und Besselfunktionen herleiten. Wir starten mit der Laplacegleichung und beschreiben sie mit Kugel- und Zylinderkoordinaten in  $\mathbb{R}^3$ .

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (6.1)$$

Der Laplaceoperator  $\Delta u$  nimmt dabei eine Sonderstellung in der Physik ein, viele Feldgleichungen im Bereich der Elektrodynamik oder auch der Strömungsmechanik können mithilfe der Laplacegleichung dargestellt werden. (6.1) kann beispielsweise im Kontext der Elektrostatik die Abwesenheit von elektrischen Quellen darstellen, dabei spielt die Funktion  $u$  die Rolle des *elektrischen Potentials*.

$$\Delta u = 0$$

Bekanntere Gleichungen, wo der Laplaceoperator eine Rolle spielt sind zum Beispiel die Gaußgleichung der Elektrostatik oder die Navier-Stokes-Gleichung aus der Strömungsmechanik. Wir formulieren kurz beide Gleichungen und erklären die auftretenden Terme. Die Herleitungen lassen sich in [14] und [15] finden.

- *Gaußgleichung in der Elektrostatik*

Es bezeichne  $\Phi$  das *elektrostatische Potential*, eine Stammfunktion der Feldstärke des elektrischen Feldes  $E$ ,  $\rho$  die *elektrische Ladungsdichte* und  $\varepsilon_0$  eine Naturkonstante. Dann lautet der Zusammenhang zwischen diesen Größen

$$\Delta u = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- *Die Navier-Stokes-Gleichung*

Es sei  $u$  das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit,  $p$  der Druck innerhalb dieser Flüssigkeit,  $\rho$  die Massendichte,  $\eta$  die Viskosität und  $g$  die Erdbeschleunigung. Dann gilt:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \operatorname{div} u \right) u = -\operatorname{grad} p + \rho g + \eta \Delta u$$

## 6.1 Koordinatentransformationen

Koordinatentransformationen werden durchgeführt um die Symmetrie oder Geometrie der Probleme auszunutzen, wie zum Beispiel die Berechnung des elektrischen Felds eines achsensymmetrischen Zylinder. Wir stellen zwei oft verwendete Koordinatentransformation vor, siehe dazu [3].

### KUGELKOORDINATEN

Gegeben ist ein Vektor  $(x, y, z)$  in kartesischen Koordinaten. Die *Kugelkoordinaten* im  $\mathbb{R}^3$  sind gegeben durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Der Definitionsbereich für  $T$  lautet  $[0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ . Die Variablen  $r, \varphi, \theta$  heißen *Radius*, *Polarwinkel*, *Azimutalwinkel*. Kugelkoordinaten sind sinnvoll für Probleme mit Radialsymmetrie.

### ZYLINDERKOORDINATEN

Gegeben sei der Vektor  $(x, y, z)$  in kartesischen Koordinaten. Die *Zylinderkoordinaten* im  $\mathbb{R}^3$  sind gegeben durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Der Definitionsbereich für  $T$  lautet  $[0; \infty) \times [0; 2\pi) \times \mathbb{R}$ . Die Variablen  $r, \varphi, z$  heißen *Axialabstand*, *Polarwinkel*, *Höhe*.

## 6.2 Die Laplacegleichung in Kugelkoordinaten

In diesem Abschnitt transformieren wir die Laplacegleichung in Kugelkoordinaten. Danach *separieren* wir die Gleichung, das heißt wir versuchen mithilfe eines Separationsansatzes  $u(r, \varphi, \theta) = R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\theta)$  entkoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen für jeweils  $R, \Phi, \Theta$  zu erhalten. Wir bestimmen die Lösungen von (6.1). Wir fordern zusätzlich die Periodizität in den Winkelargumenten  $\varphi, \theta$  da wir Winkel modulo  $2\pi$  als gleich erachten.

$$u(r, \varphi + 2k\pi, \theta + 2l\pi) = u(r, \varphi, \theta), \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Zunächst schreiben wir den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten um, siehe [7] und [10].

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Der Laplacegleichung  $\Delta u = 0$  entspricht

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (6.4)$$

Um diese Gleichung zu lösen wählen wir einen Separationsansatz.

### 6.2.1 Separationsansatz für (6.4)

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (6.5)$$

Nach Einsetzen von (6.5) in (6.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 R'(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) R(r) \Theta'(\theta) \Phi(\varphi) \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} R(r) \Theta(\theta) \Phi''(\varphi) \right) = 0 \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 R'(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \right) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) R(r) \Theta'(\theta) \Phi(\varphi) \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} R(r) \Theta(\theta) \Phi''(\varphi) \end{aligned}$$

Durchdividieren der letzten Zeile durch  $u$ :

$$- \frac{1}{r^2} \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 R'(r) \right) = \frac{1}{\sin(\theta) \Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \Theta'(\theta) \right) + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi) \sin^2 \theta} = \lambda. \quad (6.6)$$

Die linke Seite der Gleichung (6.6) hängt nur von  $r$  ab, die rechte Seite hängt nur von  $\theta$  und  $\varphi$ . Deswegen müssen beide Seiten konstant  $\lambda \in \mathbb{C}$  sein. Wir trennen (6.6) in zwei Gleichungen und fangen mit dem Radiananteil an.

### Radialanteil

$$- \frac{1}{r^2} \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 R'(r) \right) = \lambda \quad (6.7)$$

Wir lösen die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 R'(r) \right) &= -\lambda r^2 R(r) \\ \lambda R(r) + 2r R'(r) + r^2 R''(r) &= 0. \end{aligned}$$

Wir wählen den Ansatz  $R(r) = r^\alpha$ .

$$\begin{aligned} R(r) &= r^\alpha \\ R'(r) &= \alpha r^{\alpha-1} \\ R''(r) &= \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} \\ \lambda r^\alpha + 2(\alpha-1)r r^{\alpha-1} + r^2 r^{\alpha-2} &= 0 \\ (\lambda + 2(\alpha-1) + \alpha(\alpha-1))r^2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung gilt für alle  $r \geq 0$ , wir erhalten somit die charakteristische Gleichung.

$$p(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 2 + \lambda.$$

Abhängig von den Werten von  $\alpha$  und  $\lambda$  erhalten wir entweder zwei linear unabhängige Lösungen oder im Falle einer doppelten Nullstelle ist es möglich mithilfe des Reduktionsverfahren von d'Alembert die zweite linear unabhängige Lösung zu konstruieren.

Trennung des Polarwinkel- und des Azimutalwinkelanteils

Wenn wir den Winkelanteil betrachten, erhalten wir die folgende Gleichung.

$$\frac{1}{\sin(\theta)\Theta(\theta)} \left( \sin(\theta)\Theta'(\theta) \right)' + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)\sin^2(\theta)} = \lambda \quad (6.8)$$

Wir separieren die Gleichung (6.8).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(\theta)\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta)\Theta'(\theta) \right)' &= \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)\sin^2(\theta)} + \lambda \\ \frac{\sin(\theta)}{\Theta(\theta)} \left( \sin(\theta)\Theta'(\theta) \right)' + \lambda \sin^2(\theta) &= -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \\ \frac{\sin(\theta)}{\Theta(\theta)} \left( \sin(\theta)\Theta'(\theta) \right)' + \lambda \sin^2(\theta) &= -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} \end{aligned}$$

Die separierte Gleichung lautet daher

$$\frac{\sin(\theta)}{\Theta(\theta)} \left( \sin(\theta)\Theta'(\theta) \right)' + \lambda \sin^2(\theta) = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\omega \quad (6.9)$$

Die Gleichung für den Polaranteil  $\Phi$  ist einfacher als die Gleichung für den Azimutalanteil  $\Theta$ , wir fangen mit  $\Phi$  an.

Lösung des Polaranteils  $\Phi(\varphi)$

Die Lösungen sind periodisch im Polaranteil, das heißt  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ .

Wir bekommen daher zumindest eine Einschränkung für die Werte von  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \Phi'' - \omega\Phi &= 0 \\ \Phi(\varphi + 2k\pi) &= \Phi(\varphi), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Fall 1:  $\omega > 0$

$$\omega = \kappa^2 \quad (6.10a)$$

$$\Phi(\varphi) = c_1 \exp(\kappa\varphi) + c_2 \exp(-\kappa\varphi) \quad (6.10b)$$

$$\Phi(\varphi + 2k\pi) = c_1 \exp(\kappa(\varphi + 2k\pi)) + c_2 \exp(-\kappa(\varphi + 2k\pi)) \quad (6.10c)$$



Die Gleichheit der Terme (6.10b) und (6.10c) ist nur möglich wenn  $c_1, c_2 = 0$ , daher ist dieser Fall uninteressant.

Fall 2:  $\omega = 0$

$$\begin{aligned}\Phi''(\varphi) &= 0 \\ \Phi(\varphi) &= c_1\varphi + c_2 \\ \Phi(\varphi + 2k\pi) &= c_1(\varphi + 2k\pi) + c_2 = c_1\varphi + c_2\end{aligned}$$

Es muss  $c_1$  verschwinden, die Lösungen sind konstante Funktionen.

Fall 3:  $\omega > 0$

$$\begin{aligned}\omega &= \kappa^2 \\ \Phi(\varphi) &= a_\kappa \cos(\kappa\varphi) + b_\kappa \sin(\kappa\varphi)\end{aligned}$$

Die Lösungen sind genau dann  $2\pi$ -periodisch wenn  $\kappa \in \mathbb{Z}$ .  
Insgesamt erhalten wir folgende Lösungen, die wir mit der komplexen Exponentialfunktion zusammenfassen.

$$\Phi_m(\varphi) = a_m \exp(im\varphi) + b_m \exp(-im\varphi), \quad m \in \mathbb{N} \quad (6.11)$$

Lösung des Azimutalanteils  $\Theta(\theta)$

Die Gleichung im Azimutalanteil sieht folgendermaßen aus

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\theta)}{\Theta(\theta)} \left( \sin(\theta)\Theta'(\theta) \right)' + \lambda \sin^2(\theta) &= m^2 \\ \sin(\theta) \left( \sin(\theta)\Theta'(\theta) \right)' + \lambda \sin^2 \Theta(\theta) - m^2\Theta(\theta) &= 0 \\ \sin(\theta) \cos(\theta)\Theta'(\theta) + \sin^2(\theta)\Theta''(\theta) + \lambda \sin^2(\theta)\Theta(\theta) - m^2\Theta(\theta) &= 0\end{aligned}$$

Die obige Gleichung erinnert an eine Differentialgleichungen, wo die Koeffizientenfunktionen Polynome in  $\sin$  sind. Unser Ansatz ist die

Substitution  $\xi := \cos(\theta)$ .

$$\begin{aligned} \xi &:= \cos(\theta) \\ \sin(\theta) &= \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = \sqrt{1 - \xi^2} \\ \frac{d}{d\theta} &= \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{d\theta} = -\frac{d}{d\xi} \sin(\theta) = -\frac{d}{d\xi} \sqrt{1 - \xi^2} \\ 0 &= -\xi(1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} + (1 - \xi^2) \left( -\sqrt{1 - \xi^2} \frac{d}{d\xi} \right) \left( -\sqrt{1 - \xi^2} \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + \lambda(1 - \xi^2)\Theta(\xi) - m^2\Theta(\xi) \\ 0 &= -\xi(1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} + (1 - \xi^2) \left( (1 - \xi^2) \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - \frac{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + \left( \lambda(1 - \xi^2) - m^2 \right) \Theta \\ 0 &= (1 - \xi^2)^2 \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\xi(1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} + \left( \lambda(1 - \xi^2) - m^2 \right) \Theta \end{aligned}$$

Durchdividieren durch  $(1 - \xi^2)$  liefert die Gleichung

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\Theta}{d\xi} + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) \Theta = 0 \quad (6.12)$$

Gleichung (6.12) heißt *modifizierte Legendregleichung*. Für  $m = 0$  erhalten wir die gewöhnliche Legendregleichung, die wir in Kapitel 4 behandelt haben. Für  $m = 0$  lauten die Lösungen für  $\lambda_n = n(n + 1)$  genau  $P_n(\cos(\theta))$ , unter der Voraussetzung dass Regularität der Lösungen gefordert wird. Es lässt sich zeigen, dass die allgemeine Lösung von (6.12)

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

ist.

Die Lösungen des gesamten Winkelanteils, das heißt der rechten Seite der Gleichung (6.6) werden traditionell in der Physik mit  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  bezeichnet und heißen *Kugelflächenfunktionen*. Mit dem richtigen Normierungsfaktor sind die Lösungen gegeben durch die Identität

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l + 1)!(l - m)!}{4\pi(l + m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) \exp(im\varphi).$$

## 6.3 Die Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten

Wir transformieren die Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten und führen einen Separationsansatz durch, siehe dazu [7] und [10].

$$\Delta u(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (6.13)$$

$u$  soll periodisch in  $\varphi$  sein, das heißt  $u(r, \varphi + 2k\pi, z)$ .

### 6.3.1 Separationsansatz für (6.1) in Zylinderkoordinaten

$$u(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z) \quad (6.14)$$

Einsetzen von (6.14) in (6.13) liefert die folgende Gleichungskette.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r R'(r) \Phi(\varphi) Z(z) \right) + \frac{R(r) \Phi''(\varphi) Z(z)}{r^2} + R(r) \Phi(\varphi) Z''(z) &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r R'(r) \Phi(\varphi) Z(z) \right) + R(r) \Phi(\varphi) Z''(z) &= -\frac{R(r) \Phi''(\varphi) Z(z)}{r^2} \end{aligned}$$

Division durch  $u$  und Multiplikation mit  $r^2$  liefert

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left( r R'(r) \right) + \frac{r^2 Z''(z)}{Z(z)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\omega. \quad (6.15)$$

Wir fangen wieder mit dem Polarwinkelanteil  $\Phi$  an. Wir bekommen dieselbe Gleichung für  $\Phi$  wie bei (6.9). Die Lösung lautet dementsprechend wieder

$$\begin{aligned} \omega &= -m^2, \quad m \in \mathbb{Z} \\ \Phi_m(\varphi) &= a_m \exp(im\varphi), \quad a_m \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Entkoppelung des Höhenanteils vom Axialanteil

(6.15) kann nur richtig sein, wenn

$$\begin{aligned} \frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left( r R'(r) \right) + \frac{r^2 Z''}{Z} &= m^2 \\ \frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left( r R'(r) \right) - m^2 &= -\frac{r^2 Z''}{Z}. \end{aligned}$$

Trennung der Variablen liefert dann die Gleichung

$$\frac{1}{rR(r)} \frac{d}{dr} \left( rR'(r) \right) - \frac{m^2}{r^2} = \frac{-Z''}{Z} = \nu \quad (6.16)$$

mit  $\nu \in \mathbb{C}$ .

#### Lösung des Höhenanteils

Über  $Z$  haben wir keine weiteren Informationen, die Lösungen sind, je nach Werten von  $\nu$  und abhängig der Anfangswerte, komplexe Exponentialfunktionen für  $\nu \neq 0$  beziehungsweise Polynome erster Ordnung für  $\nu = 0$ .

#### Lösung des Axialanteils $R$

$$\begin{aligned} \frac{1}{rR(r)} \frac{d}{dr} \left( rR'(r) \right) - \frac{m^2}{r^2} &= \nu \\ R' + rR'' - \frac{m^2 R}{r} - \nu rR &= 0 \end{aligned}$$

Durch Umformung (vgl. (4.7)) erhalten wir die Gleichung

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \left( \nu + \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (6.17)$$

Gleichung (6.17) hat dieselbe Form wie (4.5), es handelt sich um eine nur etwas umskalierte Besselsche Differentialgleichung.

Für die Gleichungen (6.4) und (6.13) lassen sich somit, im Wesentlichen, die Lösungen mithilfe der *Legendrefunktionen* und *Besselfunktionen* angeben, wobei mithilfe von Anfangs- oder Randwerten die Werte der Separationskonstanten vorgegeben werden und die Lösungen konkreter beschrieben werden. Sowohl die Legendre- als auch die Besselfunktionen sind interessant, da sie (mit geeigneten Randwerten) Lösungen von *selbstadjungierten Differentialoperatoren*, die wir im nächsten Kapitel genauer behandeln wollen.

# Kapitel 7

## Sturm-Liouville Operatoren

In diesem Kapitel betrachten wir eine wichtige Klasse von Differentialoperatoren mit reellen Eigenwerten und stellen ihre Normalform vor. Wir definieren Sturm-Liouville Differentialoperatoren wie in [9].

### 7.1 Definition und Eigenschaften des Sturm-Liouville-Eigenwertproblems

Wir betrachten folgendes Eigenwertproblem:

$$L(u) := -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = \lambda r(x)u(x), \quad x \in [a, b] \quad (7.1)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \beta_1 p(a)u'(a) &= 0 \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 p(b)u'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Es sind dabei  $\alpha_i, \beta_i$  Konstanten, welche die Bedingung  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$  für  $i = 1, 2$  erfüllen. Sind die Funktionen  $p(x), r(x)$  strikt positiv und das Intervall  $[a, b]$  endlich so nennen wir das Eigenwertproblem (7.1) regulär. Ansonsten nennen wir (7.1) singular. Wir bezeichnen den Differentialoperator  $L$  als Sturm-Liouville-Differentialoperator und die Funktion  $r(x)$  als Gewichtsfunktion. Es bezeichne  $\text{dom}(L)$  der Definitionsbereich von  $L$ , das sind jene Funktionen  $u$ , die in  $C^2([a, b], \mathbb{C})$  liegen und die Randbedingungen erfüllen. Wir betrachten weiterhin nur *starke Lösungen*, also Lösungen die mindestens zwei mal stetig

differenzierbar sind, im Gegensatz zu moderneren Ansätzen aus der Distributionentheorie oder der Funktionalanalysis.

**Bemerkung 7.1.1** (Randbedingungen).

Je nach Werten von  $\alpha_i, \beta_i$  geben wir den Randwerten unterschiedliche Namen

- Falls  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  gilt, nennen die Bedingungen *Neumannschen Randbedingungen*.
- Falls  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  gilt, nennen wir die Bedingungen *Dirichletsche Randbedingungen*.
- Andernfalls heißen sie *gemischte Randbedingungen*.

**Satz 7.1.2** (Partielle Integration für drei Terme).

Seien  $f_1, f_2, f_3$  stetig differenzierbar auf  $[a, b]$ . Dann gilt

$$\int_a^b f_1'(x) f_2(x) f_3(x) dx = f_1(x) f_2(x) f_3(x) \Big|_a^b - \int_a^b f_1(x) f_2'(x) f_3(x) - \int_a^b f_1(x) f_2(x) f_3'(x) \quad (7.2)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (f_1 f_2 f_3)' &= f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3' \\ (f_1 f_2 f_3) \Big|_a^b &= \int_a^b (f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3') dx \\ \int_a^b f_1' f_2 f_3 &= f_1 f_2 f_3 \Big|_a^b - \int_a^b f_1 f_2' f_3 - \int_a^b f_1 f_2 f_3' \end{aligned}$$

□

**Satz 7.1.3** (Selbstadjungiertheit von  $L$ ).

Sei  $L$  ein regulärer Differentialoperator. Dann ist  $L$  selbstadjungiert bezüglich des Skalarproduktes

$$(f(x), g(x)) := \int_a^b r(x) f(x) g(x) dx,$$

das heißt es gilt  $(L(f), g)_r$  für alle  $f, g \in \text{dom}(L)$

Beweis. Wir verwenden dafür die Identität (7.2). Seien  $f, g$  beliebig in  $\text{dom}(L)$ .

$$\begin{aligned}
 (Lf, g) &= (f, L^*g) = \int_a^b (-(pf')' + qf)g \\
 &= \int_a^b (-p'f'g - pf''g) + \int_a^b qfg \\
 &= -\left(pf'g\Big|_a^b - \int_a^b pf'g'\right) + \int_a^b qfg \\
 &= \int_a^b pf'g' + \int_a^b qfg \\
 &= -\int_a^b (-pg')f' + qfg \\
 &= \int_a^b (-(pg') + qg)f = (f, Lg)
 \end{aligned}$$

□

#### Satz 7.1.4.

Es sei  $X$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$ . Sei  $L$  ein selbstadjungierter Operator von  $X$  nach  $X$ . Dann ist das Spektrum  $\sigma_L$  in  $\mathbb{R}$  enthalten. Ist  $L$  ein stetiger Operator, dann ist das Spektrum  $\sigma_L$  beschränkt.

Beweis.

Sei  $L$  selbstadjungiert und  $\lambda \in \sigma(L)$  ein Eigenwert zur Eigenfunktion  $\psi$ .

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 (L\psi, \psi) &= (\lambda\psi, \psi) \\
 &= (\psi, \bar{\lambda}\psi) \\
 &= (\psi, L^*\psi) \\
 &= (\psi, L\psi) \\
 &= (\psi, \lambda\psi) \\
 \Rightarrow \lambda &= \bar{\lambda}
 \end{aligned}$$

Sei nun  $L$  ein beschränkter Operator, es gelte also  $\|L\| < \infty$ . Wir zeigen den zweiten Teil der Aussage indem wir die folgende Ungleichung  $\|L\| \geq \max_{\lambda \in \sigma(L)} |\lambda|$  zeigen.

Sei dazu  $\lambda_0$  eines jener  $\lambda$ , welche die Betragsmaxima annehmen und  $\psi_0$  die dazugehörige Eigenfunktion und sie seien oBdA auf 1 normiert.

$$|\lambda_0| = \|L\psi_0\| \leq \sup_{\|\psi\|=1} \|L\psi\| = \|L\|$$

Somit gilt  $\sigma_L \subseteq [-L; L]$ . □

Die Zahl  $|\lambda_0|$  nennen wir auch Spektralradius von  $L$  als Anlehnung am Radius des Kreises in dem  $\sigma_L \subseteq \mathbb{C}$  enthalten ist, falls das Spektrum  $L$  auch komplexe Zahlen enthält.

**Satz 7.1.5** (Orthogonalität von Eigenfunktionen).

Sei  $L$  ein Sturm-Liouville Differentialoperator und seien  $\psi_1, \psi_2$  Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$ . Dann sind  $\psi_1$  und  $\psi_2$  orthogonal aufeinander bezüglich des Skalarproduktes

$$(f, g)_r = \int_a^b f(x)g(x)r(x)dx.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} L\psi_1 &= \lambda_1 r\psi_1 \\ L\psi_2 &= \lambda_2 r\psi_2 \\ (L\psi_1, \psi_2) &= (\lambda_1 r\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, \lambda_2 r\psi_2) \\ \lambda_1 \int_a^b \psi_1(x)r(x)\psi_2(x) &= \lambda_2 \int_a^b \psi_1(x)r(x)\psi_2(x) \\ \stackrel{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Rightarrow} \int_a^b \psi_1(x)r(x)\psi_2(x) &= (\psi_1, \psi_2)_r = 0 \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 7.1.6** (Existenz und Oszillationsatz).

Sei  $L$  ein Sturm-Liouville Differentialoperator. Dann gilt:

1. Die Eigenwerte sind abzählbar und  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und die Folge der Eigenwerte ist streng monoton steigend und divergiert gegen  $+\infty$ .
2. Jeder Eigenwert ist einfach.
3. Die Eigenfunktionen  $\psi_n$  bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.

Beweis in [4].



## 7.2 Sturm-Liouville-Normalform

Es gibt für Sturm-Liouville Eigenwertprobleme eine Normalform die keine Ableitungen erster Ordnung enthält und wir wollen diese Normalform erläutern.

**Definition 7.2.1** (Sturm-Liouville Normalform).

$$-\frac{d^2}{dt^2}w(t) + \hat{q}w(t) = \lambda w(t) \quad (7.3)$$

Wir nennen eine Gleichung der Form (7.3) die Normalform des Sturm-Liouville Eigenwertproblems (7.1).

**Satz 7.2.2** (Transformationsformeln für (7.3)). Sei ein Sturm-Liouville Eigenwertproblem dargestellt wie (7.1). Dann gibt es Funktionen  $\xi, w(t), \hat{q}$ , so dass die Darstellung (7.1) äquivalent zur Darstellung (7.3) ist. Dabei sind die Funktion  $\xi, w(t), \hat{q}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \xi = t(x) &:= \int_a^x \sqrt{\frac{r(s)}{p(s)}} ds \\ w(t) &:= \sqrt[4]{p(x(t))r(x(t))} u(x(t)) \\ \hat{q}(t) &:= \frac{1}{r} \left[ -q - \sqrt[4]{rp} \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{rp}} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

mit  $t \in [t(a), t(b)]$ .

*Beweisskizze.*

Die Äquivalenz der Probleme wird genau dann sichergestellt, wenn  $t(x)$  bijektiv ist. Die Ableitung  $t'(x) = \sqrt{\frac{r(x)}{p(x)}}$  ist strikt positiv, damit ist  $t$  sicher eine bijektive, streng monotone Funktion von  $[a, b]$  nach  $[t(a), t(b)]$ . Somit ist die Transformation zulässig. Wir müssten nur noch nachweisen, dass die Form (7.3) erreicht werden kann, dies ließe sich nachrechnen.

**Beispiel 7.2.3** (Sturm-Liouville mit nichtkonstanten Koeffizient).

Wir betrachten das folgende Sturm-Liouville Eigenwertproblem.

$$-(xu')' - \frac{2}{x^2}u(x) = \lambda x^3 u(x), \quad u(2\sqrt{\pi}) = u(4\sqrt{\pi}) = 0 \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned}
 p(x) &= x \\
 q(x) &= \frac{-2}{x^2} \\
 r(x) &= x^3 \\
 t(x) &= \int_{2\sqrt{\pi}}^x \sqrt{\frac{s^3}{s}} ds = \int_{2\sqrt{\pi}}^x s ds = \frac{x^2}{2} - 2\pi \\
 \sqrt[4]{rp} &= x
 \end{aligned}$$

Wir transformieren auf Sturm-Liouville-Normalform.

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{x^2}{2} - 2\pi = \frac{x^2 - 4\pi}{2} \\
 x(t) &= \sqrt{2t} \\
 w(t) &= x(t)u(x(t)) = \sqrt{2t}u(\sqrt{2t}) \\
 \hat{q}(t) &= \frac{1}{r} \left[ -q - \sqrt[4]{rp} \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{rp}} \right) \right) \right] \\
 \hat{q}(x(t)) &= \frac{1}{x^3} \left[ \frac{2}{x^2(t)} - x(t) \left( \left( \frac{1}{x} \right)' \right)' \right] = 0 \\
 \hat{q}(x(t)) &= \frac{1}{x^3} \left[ \frac{2}{x^2} - x \frac{2}{x^3} \right] = 0 \\
 t(2) &= 0 \\
 t(4) &= 6\pi
 \end{aligned}$$

Nach der Transformation von 7.4 erhalten wir

$$-\frac{d^2}{dt^2} w(t) = \lambda w(t), \quad w(0) = w(6\pi) = 0. \quad (7.5)$$

Wir lösen 7.5 mit dem Exponentialansatz.

$$\begin{aligned}
 p(\mu) &= -\mu^2 - \lambda = 0 \\
 \mu_{1,2} &= \sqrt{-\lambda}
 \end{aligned}$$

$\lambda < 0$ 

$$\begin{aligned}\mu_{1,2} &= \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R} \\ w(t) &= c_1 \exp(\mu_1 t) + c_2 \exp(-\mu_1 t) \\ w(0) &= c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 \\ w(21) &= c_1 \exp(21\mu_1) + c_2 \exp(-21\mu_1) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0\end{aligned}$$

 $\lambda = 0$ 

$$\begin{aligned}\mu_{1,2} &= 0 \\ w(t) &= c_1 + c_2 t \\ w(2\pi) &= c_1 \cos + 2\pi c_2 = 0 \\ w(8\pi) &= c_1 + 8\pi c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0\end{aligned}$$

 $\lambda > 0$ 

$$\begin{aligned}\mu_{1,2} &= \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C} \\ \lambda &=: \kappa^2, \kappa \in \mathbb{R} \\ \mu_{1,2} &= \sqrt{-\kappa^2} = \pm i\kappa \\ w(t) &= c_1 \cos(\kappa t) + c_2 \sin(\kappa t) \\ w(0) &= c_1 = 0 \\ w(6\pi) &= c_2 \sin(6\pi\kappa) = 0 \\ \Rightarrow 6\pi\kappa_n &= n\pi, n \in \mathbb{N} \\ \kappa_n &= \frac{n}{6} \\ \lambda_n &= \kappa_n^2 = \frac{n^2}{36}\end{aligned}$$

Die Eigenfunktionen lauten

$$w_n(t) = \sin\left(\frac{nt}{6}\right)$$

beziehungsweise, nach der Rücktransformation,

$$\begin{aligned}u_n(x) &= \frac{w_n(t(x))}{x} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{n(x^2-4\pi)}{12}\right)}{x}\end{aligned}$$

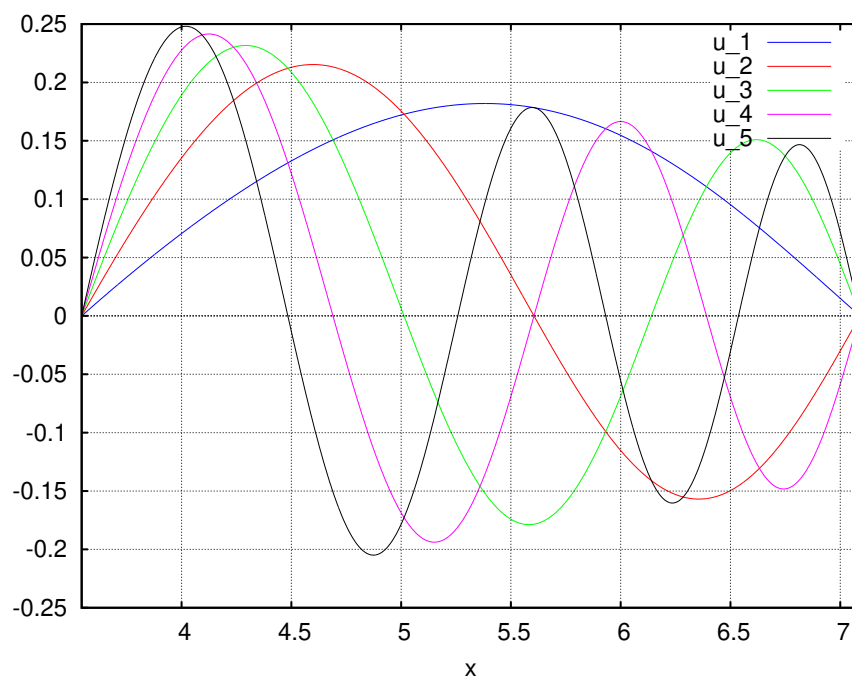


Abbildung 7.1: Eine Skizze der ersten 5 Eigenfunktionen von (7.4)

# Kapitel 8

## Modelle

### 8.1 Das Wasserstoffatom

In diesem Abschnitt leiten wir die Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom her und lösen sie. Zunächst beschreiben wir die Modellierung durch das Coulombpotential und berechnen mithilfe der Separationsmethode und Regularitätsforderungen klassische Lösungen für das Problem.

#### 8.1.1 Zentralpotential und Schwerpunktskoordinaten

Das Wasserstoffatom besteht, unter Vernachlässigung von Isotopen und ionisierten Zuständen, aus einem Proton und einem Elektron. Zwischen diesen Teilchen innerhalb des Atoms gibt es zwei wichtige Wechselwirkungen: die elektrische Coulombkraft und die Schwerkraft. Die Coulombkraft beschreibt die Kräfte zwischen elektrischen Ladungen während die Schwerkraft die Kräfte zwischen Massen beschreibt. Wir berechnen zunächst die Kräfte. Alle physikalischen Gesetze und die Werte der Naturkonstanten lassen sich in [2] finden. Es sei  $F_C$  die Coulombkraft und  $F_G$  die Schwerkraft. Die Zahl  $e_0$  in der Physik beschreibt die Elementarladung, diese gibt den Betrag der Ladung eines Protons/Elektrons,  $r_a$  sei der Abstand zwischen Proton und Elektron. Die Massen seien jeweils  $m_p$  und  $m_e$ . Weitere Größen, die in den Formeln auftauchen sind universelle Naturkonstanten. Wir halten noch fest, dass

beide Kräfte zwischen einem Proton und einem Elektron anziehend wirken.

$$F_C = k \frac{e_0^2}{r_a^2} \approx 2.307 \cdot 10^{-8} N$$

$$F_G = G \frac{m_p m_e}{r_a^2} \approx 1.018 \cdot 10^{-47} N$$

Innerhalb der Atome sehen wir also, dass die Schwerkraft etwa 40 Größenordnungen kleiner als die Coulombkraft ist, daher werden wir sie in diesem Modell vernachlässigen.

Wir haben dennoch ein zweites Problem: das Wasserstoffatom besteht eigentlich aus einem Proton im Atomkern und einem Elektron, das (je nach Modell) in einer Kreisbahn um den Kern rotiert. Um das Problem zu lösen werden sogenannte *Schwerpunktskoordinaten* eingeführt, welche nur noch die Relativbewegung der Teilchen und die effektive Masse  $m$  berücksichtigen. (Schlussendlich halten wir noch fest, dass unser Elektron eine reine Rotationsbewegung innehat und dementsprechend der Impulsanteil eine andere Gestalt halt.) Wir halten noch fest, dass das Coulombpotential  $V(r) = \frac{-ke_0^2}{r}$  ist.

## 8.2 Die Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom

Für das Wasserstoffatom mit einem Proton erhalten wir mit Berücksichtigung aller Überlegungen aus dem vorherigen Abschnitt die Gleichung

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{ke_0^2}{r} \right] \psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi). \quad (8.1)$$

Wie in Abschnitt 6.2 machen wir den Ansatz  $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$  und separieren die Gleichung (8.1) in Radialanteil und Winkelanteil. Es stellt sich heraus, dass die Funktion  $\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$  sich als  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  darstellbar ist da das Potential  $V(r)$  nur von  $r$  abhängig ist. Wir weisen dies aber nach. Dazu schreiben wir die Gleichung (8.1) zuerst etwas um.

### 8.2.1 Separation der Schrödingergleichung (8.1)

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{ke_0^2}{r} - E \right] \psi &= 0 \\ \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) + \frac{ke_0^2}{r} - E \right) \right] \psi &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) \\ \left[ -\left( \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) + \frac{2mke_0^2}{\hbar^2 r} - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \right] \psi &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) \psi \\ \left[ -\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{2mke_0^2 r}{\hbar^2} - \frac{2mEr^2}{\hbar^2} \right] \psi &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \psi \end{aligned}$$

Wir setzen  $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$  ein und dividieren dann durch  $\psi$ .

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dr} \left( r^2 R' \Theta \Phi \right) + \frac{2mke_0^2 r}{\hbar^2} R \Theta \Phi - \frac{2mEr^2}{\hbar^2} R \Theta \Phi &= \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \sin(\theta) R \Theta' \Phi \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} R \Theta \Phi'' \\ -\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 R' \right) + \frac{2mke_0^2 r}{\hbar^2} - \frac{2mEr^2}{\hbar^2} &= \frac{1}{\sin(\theta)\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \sin(\theta)\Theta' \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda \end{aligned}$$

Mit den separierten Gleichungen ist die Aufgabe nun um einiges einfacher: die rechte Seite der Gleichung kennen wir aus Abschnitt 6.2, wir erhalten für den Winkelanteil die Kugelflächenfunktionen  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ . Der Radialanteil wird im nächsten Abschnitt behandelt.

### 8.2.2 Der Radialteil des Wasserstoffatoms

Die Gleichung für den Radialanteil lautet somit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R} \left( 2rR' + r^2R'' \right) + \frac{2mke_0^2 r}{\hbar^2} - \frac{2mEr^2}{\hbar^2} &= l(l+1) \\ -r^2R'' - 2rR' + (Ar - Br^2 - l(l+1))R &= 0 \\ r^2R'' + 2rR' + (Br^2 - Ar + l(l+1))R &= 0 \end{aligned}$$

beziehungsweise in der Gestalt einer singulärer Differentialgleichung

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \frac{Br^2 - Ar - l(l+1)}{r^2}R = 0 \quad (8.2)$$

mit den Ausdrücken  $A = \frac{2mke_0^2}{\hbar^2}$ ,  $B = \frac{2mE}{\hbar^2}$  und  $l \in \mathbb{N}$ . Wir weisen nach, dass (8.2) bei  $r_0 = 0$  einen regulären singulären Punkt hat.

$$p_1(r) = \frac{1}{r}$$

$$p_2(r) = \frac{Br^2 - Ar - l(l+1)}{r^2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} rp_1(r) = 2 = \alpha_0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r^2 p_2(r) = -l(l+1) = \beta_0$$

$r_0 = 0$  ist eine Stelle der Bestimmtheit. Wir behandeln (8.2) mit der Frobeniusmethode. Wie bei allen Winkelfunktionen fordern wir, dass Lösungen von (8.1) beziehungsweise von (8.2) quadratisch integrierbar sind. Bei Integralen in Kugelkoordinaten lautet die Funktionaldeterminante  $r^2 \cos(\theta)$ , daher müssen die Integrale  $\iiint |\psi|^2 r^2 \cos(\theta) dr d\theta d\varphi$  endlich sein. Für den Radialanteil heißt das, wir dürfen höchstens eine Polstelle mit maximal erster Ordnung bei 0 haben.

Die charakteristische Gleichung von (8.2)

$$p(\sigma) = \sigma(\sigma - 1) + \sigma\alpha_0 + \beta_0 = 0$$

$$p(\sigma) = \sigma^2 + \sigma + l(l+1)$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4l(l+1)}}{2}$$

$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_2 = -1$$

Für  $l = 0$  erhalten wir zwei ganzzahlige Nullstellen, diese Lösungsstruktur muss in diesem Fall mit der Frobeniusmethode einzeln behandelt werden. Für dieses Beispiel wollen wir die Lösungen für  $l = 0$  besprechen.



Die Lösung für  $l = 0$

Wir erhalten für (8.2) zwei Lösungen laut Satz von Fuchs (Satz 4.3.8).

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= -1 \\ R_1(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \\ R_2(r) &= \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k + C \ln(r) R_1(r) \\ R_1'(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} r^k \\ R_1''(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} r^k\end{aligned}$$

Wir stellen zuerst eine Rekursionsgleichung für die erste Lösung  $R_1$  auf. Eingesetzt in (8.2) mit  $l = 0$  liefert die Gleichung

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} r^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} r^{k-1} + B \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k - A \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{k-1} &= 0 \\ \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} r^k + 2 \sum_{k=-1}^{\infty} (k+2) a_{k+2} r^k + B \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k - A \sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+1} r^k &= 0\end{aligned}$$

wobei die Gleichung für  $k = -1$  extra behandelt werden muss.

Für  $k = -1$  erhalten wir

$$\begin{aligned}2a_1 - Aa_0 &= 0 \\ a_1 &= \frac{A}{2}\end{aligned}$$

Insgesamt lautet die Rekursionsgleichung

$$(k+2)(k+3)a_{k+2} + Ba_k - Aa_{k+1} = 0, \quad k \geq 0. \quad (8.3)$$

Die Anfangswerte dazu lauten  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \frac{A}{2}$ . Die ersten Terme sind

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-B + \frac{A^2}{2}}{6} = \frac{-2B + A^2}{12} \\ a_3 &= \frac{\frac{-AB}{2} + \frac{-2AB + A^3}{12}}{12} = \frac{A^3 - 8AB}{144} \\ a_4 &= \frac{\frac{A^4 - 8A^2B}{144} + \frac{2B^2 - A^2B}{12}}{20} = \frac{A^4 - 20A^2B + 24B^2}{2880} \end{aligned}$$

Die Lösung  $R_1$  ist auf jeden Fall bei  $r = 0$  analytisch, da  $\sigma_1 = 0$  eine natürliche Zahl ist. Die zweite Lösung  $R_2$  hat die Form  $R_1 + C \ln(r)R_1(r)$  und ist bei  $r = 0$  nicht regulär. Da der Limes der Funktion  $r^2 \ln(r)$  jedoch existiert und 0 ist und  $R_1$  bei  $r = 0$  analytisch ist, lässt sich auf jeden Fall die Integrierbarkeit von  $R_2$  auf jedem kleinen Intervall der Form  $[0, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$  garantieren.

**Bemerkung 8.2.1** (Laguerre Polynome).

Es gibt eine andere Methode um (8.2) zu lösen, diese beruht auf die Substitution  $u(r) = \frac{R(r)}{r}$  und liefert Lösungen der Form  $u(r) = \exp\left(-\frac{r}{2}\right) L(r)$ , wobei die Funktionen  $L_l^m(r)$  wieder spezielle Polynome aus der Physik sind. Diese Polynome heißen *Laguerre-Polynome*, siehe dazu [10],[2] oder [7]. An Gleichung (8.2) soll auch Erwin Schrödinger selbst gescheitert sein, bis er den deutschen Mathematiker Hermann Klaus Hugo Weyl um Hilfe bat.<sup>1</sup> Der Ansatz für die Funktion  $u$  lässt sich dadurch erklären, dass die Funktionen in  $L^2([0, \infty])$  liegen müssen und die Funktion  $\exp\left(-\frac{r}{2}\right)$  auf jeden Fall Integrierbarkeit garantieren solange die Funktion  $L(r)$  höchstens polynomiell wächst.

<sup>1</sup>Dazu ist mehr im Buch *Schrödinger Life and Thought* von *Walter Moore* zu finden.

### 8.3 Das Mathematische Pendel

Als letztes Beispiel behandeln wir das mathematische Pendel. Wir betrachten das folgende mechanische System und wenden das zweite Newtonsche Axiom an. Dabei sei  $P$  ein Massenpunkt, welcher an einem undehnbaren Seil hängt und sonst nur unter dem Einfluss der Schwerkraft sei.

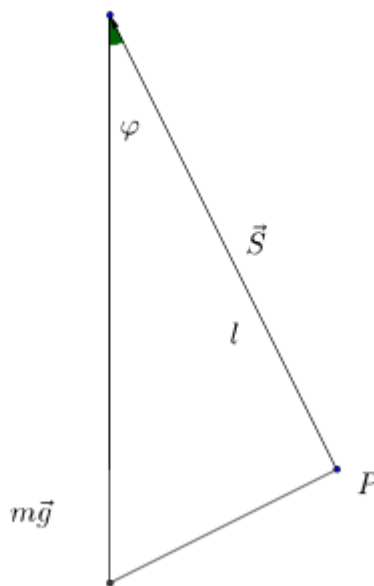


Abbildung 8.1: Die wirkenden Kräfte beim mathematischen Pendel.

Auf den Punkt  $P$  wirken zwei Kräfte, die Rückstellkraft des Seils  $\vec{S}$  und die Schwerkraft  $m\vec{g}$ . Da das Seil undehnbar ist, ist  $S = mg \cos(\varphi)$ . Effektiv bleibt nur die Komponente  $m\vec{g} \sin(\varphi)$  übrig, welche der Bewegungsrichtung entgegengesetzt wirkt. Auf Kreisbahnen gilt der Zusammenhang  $a = l \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ , siehe dazu [14].

Wir erhalten die Gleichung

$$ml\varphi''(t) = -mg \sin(\varphi(t)).$$

Die Konstanten  $l, m, g$  setzen wir alle auf Eins und erhalten die (dimensionslose) Gleichung des mathematischen Pendels. Dabei geben wir dem Pendel eine Anfangsauslenkung  $\varphi(0) = \varphi_0 = 1$  und eine Anfangsgeschwindigkeit  $\varphi'(0) = 0$ .

$$\varphi''(t) + \sin(\varphi(t)) = 0 \quad (8.4)$$

Diese nichtlineare Gleichung lösen wir mit der Frobeniusmethode bis zur Ordnung 3.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \\ a_0 &= \varphi(0) = \varphi_0 = 1 \\ a_1 &= \varphi'(0) = 0 \\ \varphi''(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (k+2)(k+1) t^k \\ \sin(\varphi(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}(t)}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + a_2 t^2 + \dots)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= 1 + a_2 t^2 + a_3 t^3 - \frac{1}{6} (1 + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!} (1 + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots)^5 + \dots + \mathcal{O}(t^4) \\ &= (1 + a_2 t^2 + a_3 t^3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} + \mathcal{O}(t^4) \\ &= (1 + a_2 t^2 + a_3 t^3) \sin(1) + \mathcal{O}(t^4) \end{aligned}$$

Einsetzen in (8.4) liefert

$$a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + \sin(1) + a_2 t^2 \sin(1) + a_3 t^3 \sin(1) = 0$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_2 = -\sin(1)$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{\sin^2(1)}{12}$$

$$a_5 = 0.$$

Das Modell des mathematischen Pendels ist ein fundamentales Modell in der Physik, die Fundamentallösungen sind in diesem Sinne wichtige Funktionen. Die beiden Fundamentallösungen könnten ebenfalls als *spezielle Funktionen* aus der Physik sehen, genauso die Legendrepolynome oder die Besselfunktionen. Die Linearisierung des mathematischen Pendels haben wir übrigens in Kapitel 2 im Abschnitt über den Hamiltonformalismus behandelt.

# Kapitel 9

## Ausblick

Wir stellen die in dieser Arbeit besprochenen Gebiete als Startpunkte für tiefergehende mathematische Fragestellungen und physikalische Modellierungen vor. In diesem Sinne verweisen wir auf mannigfaltige Konzepte, welche entweder die hier genannten Fragestellungen verallgemeinern oder mit neuen Fragestellungen verbinden.

### 9.1 Mathematik

#### 9.1.1 Zusammenfassung

Der Schwerpunkt dieser Arbeit ist, Methoden vorzustellen wie Differentialgleichungen entweder analytisch gelöst werden können oder Näherungen davon berechnet werden können. Wir haben grundlegende Konzept aus der Analysis verwendet und mithilfe dieser Werkzeuge weitere Methoden entwickelt. Diese Verfahren erlauben uns, zumindest die Lösungen hinzuschreiben. Entlang dieser Verfahren haben wir erste Schritte in die Modellierungen der Quantenmechanik gemacht. Wir haben uns die Möglichkeit, Lösungen hinzuschreiben aber dennoch teuer erkaufte. Wir haben dediziert Probleme, welche sich nicht als gewöhnliche Differentialgleichungen schreiben lassen und auch viele nichtlineare Problem nicht behandelt. Deswegen stellen wir im nächsten Abschnitt Anhaltspunkte vor, die andere Klassen von Problemen behandeln.

### 9.1.2 Weiterführende mathematische Gebiete

Reguläre lineare gewöhnliche Differentialgleichungen sind relativ gut ausgeforscht. Es ist zwar nicht immer möglich eine einfache Darstellung für die Lösungen zu erhalten, es lässt sich dennoch immer (zumindest in Reihendarstellung) ein Fundamentalsystem mithilfe der Matrixexponentialfunktion angeben, siehe dazu [9] und [5]. Für beliebige lineare Systeme verallgemeinert der *Satz von Hille-Yoshida* die Beschreibung der Lösungen mittels der Exponentialreihe, siehe dazu [5]. Das Gebiet der *partiellen Differentialgleichungen* setzt in gewisser Weise die Problemstellungen fort, arbeitet jedoch mit anderen Werkzeugen. Innerhalb der gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreiben wir mithilfe der linearen Algebra viele Systeme da die Lösungsräume endlichdimensional sind. Die Lösungsräume von partiellen Differentialgleichungen sind typischerweise unendlichdimensional, daher gibt es mehrere Ziele. Konkrete Lösungen lassen sich für lineare Systeme mittels *Fourierreihen*. Sollten die Koeffizienten nicht regulär sein, ist der Begriff einer *schwachen Lösung* hilfreich. Für nichtlineare Systeme stellen unterschiedliche *Fixpunktsätze* zumindest Existenz oder Eindeutigkeit der Lösungen sicher und garantieren die Konvergenz numerischer Verfahren. Die Methoden der Funktionalanalysis, insbesondere die *Spektralsätze*, gewährleisten gewisse Regularitätsergebnisse oder liefern Einblicke in das Spektrum/in die Eigenfunktionen von *Eigenwertproblemen*. Ergebnisse aus dem eng mit der Physik verwandten Gebiet der *Variationsrechnung* geben Auskünfte über gewisse Optimierungsprobleme, die innerhalb der Physik durchaus ihre Berechtigung haben: das Prinzip der kleinsten Wirkung beschreibt die stabilsten Lösungen innerhalb vieler Teilgebiet, das Fresnelsche Prinzip beschreibt den kürzesten Weg den ein Lichtstrahl befolgen muss. Darstellungssätze aus der Gruppentheorie beziehungsweise das Gebiet der Liegruppen finden Verwendung in der *koordinatenfreien Beschreibung* von quantenmechanischen Systemen. Als letztes wollen wir [1] empfehlen, welches sehr viele mathematische und physikalische Zusammenhänge erklärt und sehr tiefe Einblicke in die mathematischen Hintergründe der Spektraltheorie im Kontext der Schrödingergleichung gewährt.

## 9.2 Verwandte physikalische Gebiete

Innerhalb der Physik ist die Quantenmechanik eine Grunddisziplin. Ausgehend davon können innerhalb anderer fundamentaler Gebiete die Einflüsse der Quantisierungen untersucht werden: innerhalb der Quantenfeldtheorie wird versucht Gleichungen zu formulieren, die auch mit den *Maxwellgleichungen* aus der Elektrodynamik vereinbar sind. Die statistische Physik versucht Thermodynamik mit einem mikroskopischen Standpunkt zu durchleuchten und Phänomene wie die *Einstein-Bose-Kondensierung* als quantenmechanische Wechselwirkung zwischen Atomen eines Gases zu interpretieren. Ein weiteres Anwendungsgebiet ist die Quantenoptik, wo Versuche wie das Doppelspaltexperiment ihre Wurzeln haben.



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Eine Skizze der Trajektorie von (2.2) im Phasenraum für $\omega = 2, m = 4$ . . . . .	27
3.1	Die ersten vier Eigenfunktionen des Randwertproblems (3.5) mit $E_n > 0$ . . . . .	36
3.2	Die ersten vier Eigenfunktionen von (3.6) für $L = 1$ und $V_0 - E_n > 0$ . . . . .	38
3.3	Die ersten vier Eigenfunktionen von (3.6) für $L = 1$ und $V_0 - E_n > 0$ in $[-2, 2]$ . . . . .	39
3.4	Potentialbarriere $V(x)$ mit $V_0 = 1, L = 5$ . . . . .	40
3.5	Eine Skizze der Wellenfunktion aus [11] . . . . .	42
3.6	Die ersten vier Eigenfunktionen der Gleichung (3.11) . . . . .	47
4.1	Die Lösungen der Gleichung (4.1) mit jeweils sechs Termen. . . . .	51
4.2	Die Lösungen der Gleichung (4.2) mit den ersten sieben nicht-trivialen Termen. . . . .	53
4.3	Eine Skizze der ersten fünf Eigenfunktionen von (4.3) in $[-1, 1]$ . . . . .	56
4.4	Eine Skizze der Näherung der ersten 3 Eigenfunktion $J_0, J_1, J_2$ mit sieben nichttrivialen Termen. . . . .	61
4.5	Eine Skizze der ersten drei Eigenfunktionen. . . . .	61
4.6	Eine Skizze der Fundamentallösungen $y_1, y_2$ von (4.10) . . . . .	70
4.7	Eine Skizze der Lösungen $y_1, y_2$ von (4.11). . . . .	73
4.8	Eine Skizze der Näherungen $y_1, y_2$ bis zur fünften Ordnung von (4.12). . . . .	77
4.9	Eine Skizze der Lösungen $y_1, y_2$ von (4.12). . . . .	78
4.10	Eine Skizze unserer Näherung $f(x)$ . Die Funktion $g$ in der obigen Skizze ist genau $-Y_1(x)$ . . . . .	81
4.11	Eine Skizze der ersten drei Lösungen $Y_1, Y_2, Y_3$ . . . . .	82

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Eine Skizze der Trajektorie von (2.2) im Phasenraum für $\omega = 2, m = 4$ . . . . .	26
3.1	Die ersten vier Eigenfunktionen des Randwertproblems (3.5) mit $E_n > 0$ . . . . .	36
3.2	Die ersten vier Eigenfunktionen von (3.6) für $L = 1$ und $V_0 - E_n > 0$ . . . . .	38
3.3	Die ersten vier Eigenfunktionen von (3.6) für $L = 1$ und $V_0 - E_n > 0$ in $[-2, 2]$ . . . . .	39
3.4	Potentialbarriere $V(x)$ mit $V_0 = 1, L = 5$ . . . . .	40
3.5	Eine Skizze der Wellenfunktion aus [11]. . . . .	43
3.6	Die ersten vier Eigenfunktionen der Gleichung (3.11) . . . . .	48
4.1	Die beiden Fundamentallösungen $y_1, y_2$ von (4.1), jeweils entwickelt bis zum sechsten Term. . . . .	53
4.2	Die beiden Fundamentallösungen $y_1, y_2$ von (4.2), jeweils entwickelt bis zum siebten Term. . . . .	55
4.3	Eine Skizze der ersten fünf Eigenfunktionen von (4.3) in $[-1, 1]$ . . . . .	58
4.4	Die ersten drei Eigenfunktionen $J_0, J_1, J_2$ , jeweils mit sieben nichttrivialen Termen approximiert. . . . .	63
4.5	Eine Skizze der ersten drei Eigenfunktionen $J_0, J_1, J_2$ . . . . .	63
4.6	Eine Skizze der Fundamentallösungen $y_1, y_2$ von (4.11) . . . . .	72
4.7	Eine Skizze der Lösungen $y_1, y_2$ von (4.12). . . . .	75
4.8	Eine Skizze der Näherungen $y_1, y_2$ bis zur fünften Ordnung von (4.13). . . . .	80
4.9	Eine Skizze der Lösungen $y_1, y_2$ von (4.13). . . . .	81
4.10	Eine Skizze der Näherung $f(x)$ . Die Funktion $g$ ist die Funktion $-Y_1$ . . . . .	84

4.11 Eine Skizze der ersten drei Lösungen  $Y_1, Y_2, Y_3$  von (4.5). . . . . 85

4.12 Die Lösungen  $y_1, y_2$  der Gleichung (4.17) mit  $n = 2$ . . . . . 90

4.13 Die Lösungen  $y_1, y_2$  der Gleichung (4.17) mit  $n = 3$ . . . . . 90

4.14 Die Lösungen  $y_1, y_2$  der Gleichung (4.17) mit  $n = 4$ . . . . . 91

5.1 Eine Skizze der Lösungen von (5.2) und (5.3) mit  $\varepsilon = 0.05$  für  
 $0 \leq t \leq 10$ . . . . . 94

5.2 Eine Skizze der Lösungen von (5.3) und (5.4). . . . . 95

5.3 Eine Skizze der Funktionen  $x(t), y(t)$  mit den Parametern  $a =$   
 $1, \varepsilon = 0.1$ . . . . . 98

7.1 Eine Skizze der ersten 5 Eigenfunktionen von (7.4) . . . . . 123

8.1 Die wirkenden Kräfte beim mathematischen Pendel. . . . . 130

1

---

<sup>1</sup>Alle Skizzen, bis auf Skizze 3.5 sind selber generiert.

# Literaturverzeichnis

- [1] Brian C. Hall, Quantum Theory for Mathematicians, Springer New York, 2013
- [2] Wolfgang Demtröder, Experimentalphysik 3, Springer-Spektrum 2016
- [3] Michael Kaltenbäck, Analysis 3 Skriptum, TU Wien, 2017
- [4] Michael Kaltenbäck, Funktionalanalysis 1 Skriptum, TU Wien, 2018
- [5] Martin Blümlinger, Funktionalanalysis 2 Skriptum, TU Wien, 2017
- [6] Joachim Burgdörfer, Quantentheorie 1 Skriptum, TU Wien, 2013
- [7] Manfred Schweda, Daniel N. Blaschke, Mathematische Methoden in der Physik Skriptum, TU Wien, 2009
- [8] Ferdinand Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer Berlin Heidelberg 1990
- [9] Peter Szmolyan, Differentialgleichungen 1 Skriptum, TU Wien, 2013
- [10] Karl Svozil, Mathematical Methods of Theoretical Physics Skriptum, Edition Funzl, 2017
- [11] Franz Schwabl, Quantenmechanik, Springer Berlin Heidelberg, 2007
- [12] Klaus Jänich, Funktionentheorie, Springer Heidelberg, 2011
- [13] Gerald Teschl, Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, American Mathematical Society, 2012
- [14] Wolfgang Demtröder, Experimentalphysik 1, Springer-Spektrum 2016
- [15] Wolfgang Demtröder Experimentalphysik 2, Springer-Spektrum 2016