



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

## DIPLOMARBEIT

# Ein Beitrag zur Erstellung einer Gitterschale unter der Verwendung asymptotischer Kurven auf Minimalflächen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines (sic!)  
Diplom-Ingenieurin unter der Leitung

**Univ.Prof. Dipl.-Ing. Peter Bauer**

E259-02 Forschungsbereich Tragwerksplanung und Ingenieurholzbau  
Institut für Architekturwissenschaften

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
Fakultät für Architektur und Raumplanung

von

**Marilies Wedl, BSc**

0709272

Wien, am 2.11.2020

## Kurzfassung

Die Arbeit befasst sich mit den Planungs- und Konstruktionsherausforderungen sowie der baupraktisch geeigneten Anwendung Asymptotischer Gitterschalen. Asymptotische Gitterschalen bestehen aus anfänglich geraden, schlanken Trägern, welche durch elastische Biegung und Torsion, verbunden zu einem Netzwerk, eine dreidimensionale Freiformfläche beschreiben. Das Trägerlayout folgt dabei besonderen Kurven. Aufgrund der geometrischen Verhältnisse, die diesem Typ Gitterschale unterliegen, ist eine Asymptotische Gitterschale mit sehr einfachen und wiederholbar einsetzbaren Bauteilen herstellbar. Träger, welche asymptotischen Kurven folgen, können aufgrund des besonderen Krümmungsverhaltens als gerade Streifen abgewickelt werden. Zusätzlich treffen die Träger, wenn die unterliegende Basisgeometrie eine Minimalfläche ist, orthogonal aufeinander. Dadurch sind sämtliche Verbindungsknoten in der Konstruktion repetitiv einsetzbar. Durch die geeignete Vorrationalisierung wird eine komplexe Form durch sehr einfache Elemente in eine tragstrukturell effiziente, bauliche Struktur gebracht.

Die Thesis nähert sich der Erstellung einer Gitterschale unter der Verwendung von asymptotischen Kurven auf Minimalflächen diskursartig auf drei Ebenen. Zuerst leiten wir über geometrische Zusammenhänge die hervorragende Eignung asymptotischer Kurven auf Minimalflächen als Referenzgeometrie für eine bauliche Struktur her. Wir starten mit Krümmungen von Kurven, erweitern unsere Erkenntnisgewinne daraus auf Flächen und beleuchten Kurven mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten auf Flächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten, was uns schließlich zu der Besonderheit von asymptotischen Kurven auf Minimalflächen führt. Hier werden mehrere Methoden zur geometrischen Modellierung vorgestellt.

Danach denken wir die bisher maßstabslosen Modelle in einer baulichen Struktur weiter und widmen uns ihrer konstruktiven Gestaltung und tragstrukturellen Performance als Globalstruktur. Wir beginnen damit, einzelne Bauelemente zu identifizieren, und evaluieren die Eignung gewählter Materialien sowie Bauteilstärken durch Vorberechnungen. Schließlich beleuchten wir die tragstrukturelle Eignung durch das Berechnen einer konkreten Struktur mit Hilfe einer Finiten-Elemente-Analyse. Die Ergebnisse und Erkenntnisse daraus werden belegt und vertiefend diskutiert.

Schließlich betrachten wir die Konstruktion Asymptotischer Gitterschalen in einer umfassenderen Detailebene und setzen uns mit der Möglichkeit, eine Fassade aus planaren Viereckpaneelen an die Primärkonstruktion anzubringen, auseinander. Hierfür werden wirtschaftliche und elegante Standarddetails entwickelt. Ebenso wird die Konstruktion eines Knotenstabes, der einem komplexen Anforderungskatalog gerecht werden muss, beleuchtet und aus den Erkenntnissen daraus ein 1:1 Prototyp entwickelt.

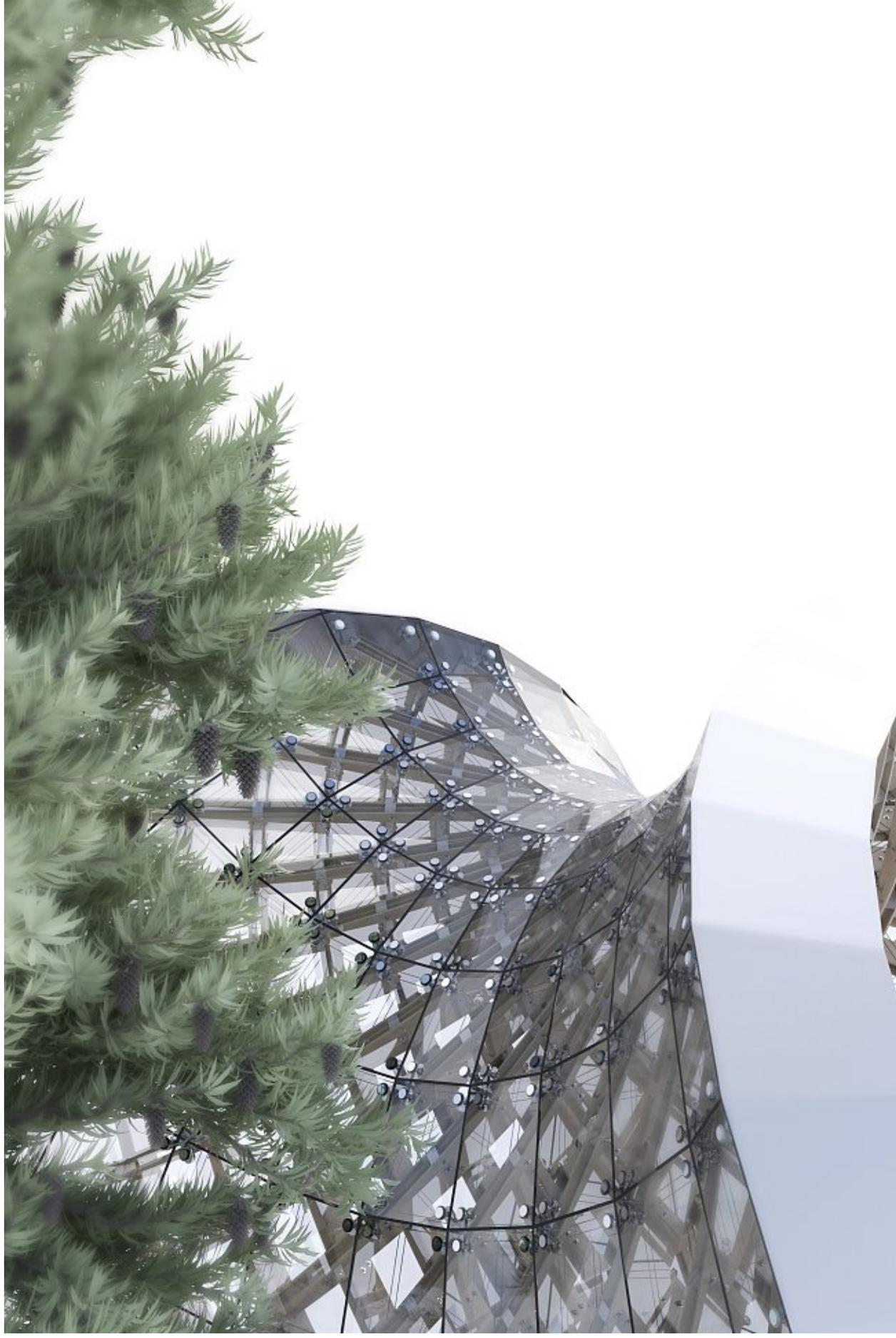
## Abstract

This thesis deals with the planning and construction challenges as well as the practical application of Asymptotic Gridshells. Asymptotic Gridshells consist of initially straight, slender girders which, through elastic bending and torsion, are connected to form a network and describe a freeform surface. The beam layout follows special curves, namely Asymptotic Curves. Due to geometric connections that are subject to this type of gridshell, an Asymptotic Gridshell can be produced with very simple and repeatable components. Because of the special curvature behavior of Asymptotic Curves, beams, following them, can be developed into straight strips. In addition, if the underlying base geometry is a Minimal Surface, the beams meet orthogonally. This means that all nodes within the construction can be used repeatedly.

The work approaches the creation of a gridshell using Asymptotic Curves on Minimal Surfaces in a manner of discourse on three levels. First, we derive the excellent qualification of Asymptotic Curves on Minimal Surfaces as reference geometry for a building structure through geometric relationships. We start with the curvatures of curves, expand our knowledge gained from this to surfaces and examine curves with excellent curvature behavior on surfaces with excellent curvature behavior, which finally leads us to the particularity of Asymptotic Curves on Minimal Surfaces. Several modelling methods for creating these geometries are presented.

Afterwards, we proceed to embed the previously scale-less models in a building scale and address to their construction and structural performance as a global structure. We start by identifying individual building components and evaluating the adequacy of the selected materials and component dimensions through preliminary calculations. Finally, we investigate the performance of the supporting structure by calculating a specific structure using Finite Element Analysis. The results and insights are documented and discussed in depth.

Finally, we consider the construction of Asymptotic Gridshells in a more comprehensive level of detail and deal with the possibility of attaching a facade made of Planar Quads to the primary structure. For this purpose, efficient and elegant standard details are developed. The construction of a node, which has to meet certain requirements, is also discussed and from the insights gained, a 1:1 prototype is developed.



# Inhaltsverzeichnis

|             |  |           |
|-------------|--|-----------|
| 1.          | Einführung in die Arbeit.....  | 1         |
| 1.1.        | Einleitendes.....  | 1         |
| 1.2.        | Gitterschalen.....   | 3         |
| 1.3.        | Referenzen .....   | 5         |
| <b>I.</b>   | <b>Geometrische Betrachtungen .....</b>  | <b>9</b>  |
| 2.          | Geometrische Grundlagen.....   | 9         |
| 2.1.        | Kurven.....  | 9         |
| 2.2.        | Flächen.....   | 11        |
| 2.3.        | Ausgezeichnete Kurven auf Flächen .....  | 17        |
| 3.          | Erzeugung von asymptotischen Kurven auf Minimalflächen: Implementierungsstrategien .....                         | 23        |
| 3.1.        | Minimalflächen als parametrisierte Flächen: Modell „Enneper“ .....   | 24        |
| 3.2.        | Minimalflächen durch digitale physikalische Formfindung: Modell „Monroe“ .....                                   | 30        |
| 3.3.        | Diskrete Minimalflächen aus polyedrischer Diskretisierung einer Kugel .....                                      | 36        |
| <b>II.</b>  | <b>Evaluierung einer Gesamtstruktur.....</b>   | <b>43</b> |
| 4.          | Konstruktive Überlegungen .....  | 46        |
| 4.1.        | Konstruktive Elemente der Asymptotischen Gitterschale .....  | 46        |
| 5.          | Die Asymptotische Gitterschale als Tragstruktur .....  | 50        |
| 5.2.        | Tragstrukturelle Wirkungsweisen einer asymptotischen Gitterschale: qualitative Phänomene .....                   | 52        |
| 5.3.        | Die Asymptotische Gitterschale „Enneper“: Fallstudie zur quantitativen Erfassung ihrer Tragwerksperformance..... | 54        |
| 5.4.        | FE- Simulation.....  | 58        |
| <b>III.</b> | <b>Detailbetrachtungen.....</b>  | <b>68</b> |
| 6.          | Rückblick: Geometrische Einbettung.....  | 68        |
| 6.1.        | <i>Meshes und Offset Meshes</i> .....  | 68        |
| 7.          | Entwicklung Fassadenhaut.....  | 71        |
| 7.1.        | Arbeitsgrundlagen .....  | 71        |
| 7.2.        | Elemente der Fassadenhaut.....   | 73        |
| 7.3.        | Parametrische Modellierung des Anschlusses Glaspaneel-Knotenstab.....  | 75        |
| 7.4.        | Parametrische Modellierung des Anschlusses Glaspaneel-Randträger.....  | 78        |
| 7.5.        | Anschluss Spantpaar-Randträger .....   | 80        |
| 8.          | Herstellungsstrategien einer Asymptotischen Gitterschale und konstruktive Folgerungen.....                       | 84        |
| 8.1.        | Errichtung durch elastische Deformation .....  | 84        |
| 8.2.        | Vorevaluierung weiterer konstruktiver Anforderungen durch die Herstellung eines 1:1.5 Mock- Up                   | 84        |
| 9.          | Entwicklung eines Standard Verbindungsknoten.....  | 87        |
| 9.1.        | Anforderungen an den Verbindungsknoten und konstruktive Lösungsvorschläge.....                                   | 87        |
| 9.2.        | Resultate und Zusammenfassung .....  | 108       |
| 10.         | Resümee und Ausblicke .....  | 110       |

# 1. Einführung in die Arbeit

## 1.1. Einleitendes

### 1.1.1. Hintergründe und Motivation

Als Architektin möchte ich inspirierende Räume, in denen wir vor allem unsere Freiheit spüren, schaffen. Wir befinden uns in einer Phase, die durch Begriffe wie „klimagerechtes Bauen“, „Ressourcenknappheit“, „Post- Wachstum“ geprägt ist und die zutiefst richtige Forderung nach einer Architektur, die mit Anstand entsteht, betrieben wird und wieder verschwindet, wird immer dringlicher. Ich bin besorgt, dass unsere Antworten auf die Fragen, die unsere Zeit an uns stellt, nach und nach aus dem Diktat einer puritanischen, zweckrationalen und lieblosen Haltung heraus entstehen. Daher möchte ich mit dieser Arbeit versuchen, aus einem alternativen Gesichtswinkel heraus, einen Beitrag für eine ressourcengerechte Architektur zu stellen.

Beginnen möchte ich mit dem Potenzial, das ich in der integralen Planung sehe. Ich bin davon überzeugt, wir können wunderbare Konstruktionen schaffen, indem wir Geometrie, Tragwerksplanung und Architektur interdisziplinär miteinander vernadeln. Durch die geometrisch korrekte Einbettung eines Entwurfs können sehr komplexe Formen mit sehr simplen Mitteln effektiv hergestellt werden. Es ist zum Beispiel erstaunlicher Zusammenhang wird in dieser Arbeit erklärt- dass durch eine bestimmte Abbildung von Kreisen auf einer Kugel plötzlich komplexe Flächen aus geraden Streifen als Träger, planaren Vierecken als Fassade und einem Typ von Verbindungsknoten baubar werden. Und das Ganze mündet noch in eine Struktur, die tragstrukturell äußerst effizient ist und in einer Weise konstruiert wird, so dass die Struktur ohne toxische Überreste sowie als Mine für ihren Folgebau anständig wieder verschwinden darf. Solche Synergieeffekte entstehen vor allem dann, wenn wir uns mit unseren Schwesterdisziplinen ernsthaft auseinandersetzen, Empathie für sie hegen, aber gleichsam ihre Eigenständigkeit respektieren.

Diese Haltung liegt auch der Erstellung dieser Arbeit zugrunde. Asymptotische Gitterschalen befinden sich genau in dieser thematischen Schnittstelle. Bisherige gebaute Beispiele solcher Strukturen sind vor allem im prototypischen Forschungsumfeld angesiedelt. Ich möchte einen Beitrag dazu leisten, diese Strukturen in ihrer baulichen Anwendung zu fördern. Meine Mitwirkung dazu ist die Entwicklung einer Fassadenkonstruktion und eines Verbindungsknotens, der die aus planaren Vierecken bestehende Fassade effektiv an die Primärkonstruktion anbindet.

### 1.1.2. Angewandte Mittel

Die Arbeit beruht stark auf digitaler sowie physischer Modellierung. Die digitalen Werkzeuge inkludieren 3D-Modelliersoftware, sowie Scripting- und Programmierumgebungen. Sie werden dazu verwendet, um Theorien aus der Geometrie anzuwenden und daraus bauliche Strukturen zu entwickeln. Weiters werden digitale Simulierungs- und Optimierungstools angewandt. Ein FEM-Add-On einer Scripting-Umgebung wird verwendet, um das tragstrukturelle Vermögen einer baulichen Struktur in einer Substanzuntersuchung zu erkunden. Dabei entstand ein parametrischer Workflow, welcher die Erzeugung der Designfläche, über die Erstellung der Primärkonstruktion, der Aussteifung der Fassade mit sämtlichen Anschlüssen und die tragstrukturelle Evaluierung bis zur Lochleibungsfestigkeit einer Verbindung nach Eurocode 5 überspannt.

### 1.1.3. Sprache

Der Großteil der Fachliteratur rund um die Felder „Architekturgeometrie“ und „parametrisch gestützte Architektur“ ist in Englisch verfasst. Es wurde versucht, weitgehend deutsche Übersetzungen für die englischen Fachbegriffe zu finden. Dort, wo keine eindeutige Übersetzung gefunden werden konnte, oder die Übersetzung sehr weit vom englischen Referenzwort entfernt ist, wird entweder die deutsche Übersetzung angeführt und daneben die Englische angegeben, oder es wird nur der englische Fachbegriff, durch kursive Schriftformatierung gekennzeichnet, verwendet.

### 1.1.4. Struktureller Aufbau

Die Arbeit gliedert sich, nach dem einführenden Kapitel 1, in dem wir noch den Begriff „Gitterschale“ beleuchten und zwei großartige Baustrukturen untersuchen, in drei große Teile:

Teil I: Geometrie

Teil II: Evaluierung einer Gesamtstruktur

Teil III: Detailbetrachtungen

Im **Teil I** werden grundlegende Konzepte zur Krümmung von Kurven und Flächen erklärt. Danach werden Flächen mit besonderen Krümmungsverhalten, die Minimalflächen, besprochen. Schließlich widmen wir uns ausgezeichneten Kurven auf Flächen und diskutieren die Vor- und Nachteile dieser Kurven hinsichtlich ihrer referentiellen Eignung als Baugeometrie. Wir beleuchten Netzwerke aus asymptotischen Kurven auf Minimalflächen im Detail und erkunden einige Modelliervarianten dazu.

Danach wenden wir uns von der bisher maßstablosen Geometrie Asymptotischer Gitterschalen zum **Teil II** und beschäftigen uns mit der Tektonik, in der wir durch Materialisierung, konstruktiver Gestaltung und tragstruktureller Evaluierung eine Asymptotische Gitterschale in einer baulichen Primärstruktur weiterdenken. Die Analyse baut auf einer konkreten Fallstudie auf.

Im **Teil III** beleuchten wir konstruktive Aspekte Asymptotischer Gitterschalen im Detail. Wir beschäftigen uns mit Errichtungsmethoden und deren konstruktiven Folgen. Danach widmen wir uns der Herstellung einer Fassadenhaut, welche aus planaren Vierecken besteht, und sehen uns mögliche repetitive Anschlüsse an Knotenstäbe und Randträger an. Schließlich beleuchten wir den Verbindungsknoten an sich und entwickeln einen eleganten Knotentyp, welcher in der ganzen Baustruktur repetitiv einsetzbar ist und somit einigen Anforderungen gerecht werden muss. Wir sehen uns den Anschluss zwischen Knotenstab und Hauptträgern an und führen hinsichtlich der Tragfähigkeit der Verbindung einen rechnerischen Nachweis durch.

## 1.2. Gitterschalen

### 1.2.1. Erläuterungen zum Begriff

Baustrukturen werden in vielen unterschiedlichen Weisen klassifiziert, welche beispielweise auf ihre Form, Funktion, Tragverhalten und Materialien, aus denen sie gebaut sind, Bezug nehmen. Chris Williams beginnt seinen Aufsatz „What is a shell“ mit der Definition einer Schale. Diese kann durch eine gekrümmte Fläche beschrieben werden, deren Dicke im Verhältnis zu ihrer Spannweite gering ist. Um sein Verständnis zu Gitterschalen zu illustrieren, führt er den Gegenstand eines Küchensiebs an. Eine gekrümmte Fläche wird durch eine große Anzahl anfänglich gerader Drähte, welche flach miteinander verwoben werden, zu einer Halbkugel geformt (vgl. Williams, 2014: 21 f. ).

Eine umfassende Definition und Abgrenzung zum Begriff „Gitterschale“ schufen die Autoren des deutsch-japanischen Forschungsprojekts zum Thema „Gleichmaschige druckbeanspruchte Gitterschalen“ 1974 in ihrem Bericht IL 10 Gitterschalen.

„Die Gitterschale ist ein räumlich gekrümmtes Stabtragwerk. Die Stabelemente bilden ein flächiges Gitter mit viereckigen Maschen. Die Form der Gitterschale wird durch die Umkehrung der Form eines hängenden biegeunsteifen Netzes bestimmt. Die Umkehrung der Kettenlinie zur Stützlinie des momentenfreien Bogens ist eine Idealisierung. In Analogie dazu ergibt die Umkehrung der Form des hängenden Netzes die Stützfläche einer momentenfreien Gitterschale (Hennicke, et al., 1974: 26).“

Seitdem hat sich das Forschungs- und Anwendungsfeld zu Gitterschalen erweitert. Heutige Definitionen lösen sich von der idealisierten Form der Umkehrung von Kettenlinien.

Vor allem durch neue digitale Fertigungsmöglichkeiten, unter Anderem, in der Holztechnologie die CNC-Fertigung von Holzträgern, haben große Auswirkungen auf die Ästhetik, das Tragverhalten, die Produktion und Errichtung der Gitterschalen von heute.

### 1.2.2. Unter Spannung stehende Gitterschalen VS. Nicht unter Spannung stehende Gitterschalen

Wir können zwischen zwei großen Subtypen innerhalb der Domäne der Gitterschalen unterscheiden. Zwischen den unter Spannung stehenden Gitterschalen (*strained gridshells*) und den nicht unter Spannung stehenden Gitterschalen (*unstrained gridshells*).

Unter Spannung stehende Gitterschalen werden aus anfänglich geraden, schlanken, langen Trägern, welche sowohl biegefähig als auch stark belastbar zugleich sind, errichtet. Sie sind sogenannte biegeaktive Tragwerke, deren Systemsteifigkeit und Geometrie durch das elastische Verformen der Tragelemente erzielt wird. Das Biegen liegt als formgebendes Prinzip dahinter und ermöglicht die Konstruktion von Gitterschalen, die aus einem ebenen Stabgitternetzwerk bestehen und in eine doppelt gekrümmte Schalenform gebogen werden. Aus der elastischen Verformung der Stäbe entstehen Rückstellkräfte, welche das System unter Vorspannung setzen und neben der Formgebung auch dessen Systemsteifigkeit erhöhen (vgl. Lienhard, 2014: IV).

Daher sind unter Spannung stehende Gitterschalen aus tragstruktureller Sicht, aber auch hinsichtlich der Bauteilfertigung aus anfänglich geraden Elementen, sehr effizient.

Im Gegensatz dazu stehen Gitterschalen, welche nicht unter Spannung stehen. Diese werden aus vorgefertigten, gekrümmten Trägern errichtet, so dass sie bereits im Anfangsstadium, ohne zusätzliche elastische Verformung, eine dreidimensionale Form beschreiben. Beispiele für solche Träger sind plastisch vorgebogene Stahl- oder Aluminiumträger oder in Form laminierte Holzträger. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, gerade Träger zu verwenden und Krümmungen durch die Verbindungsknoten einzuführen.

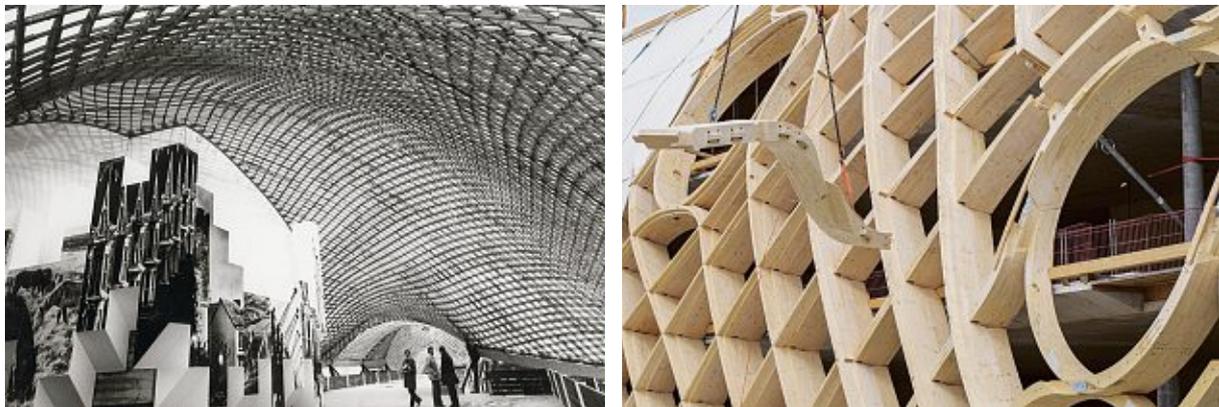


Abbildung 1: Unter Spannung stehende VS nicht unter Spannung stehende Gitterschalen. Links: Multihalle Mannheim Quelle: <https://mannheim-multihalle.de/architektur/>. Rechts: Bauphase des Swatch-Hauptsitzes als nicht unter Spannung stehende Gitterschale. Quelle: <https://www.lehmann-gruppe.ch/holzbau/free-form/swatch.html>.

## 1.3. Referenzen

### 1.3.1. Die Multihalle Mannheim

Ohne Zweifel ist der Architekt Frei Otto (1925-2015) einer der wichtigsten Pioniere und Visionäre des Leichtbaus des 20. Jahrhunderts und damit der Vorreiter der Konstruktion und Konzeption von Holz-Gitterschalen. Die bis heute größte frei geformte Holzgitterschale, in ihrer Konstruktionsweise ein Erstlingsbau, ist die Multihalle in Mannheim, welche anlässlich der Bundesgartenschau 1975 errichtet wurde. Die Planungs- und Ausführungsarbeiten wurden sehr umfangreich vom Institut für leichte Tragwerke (IL) unter IL13 publiziert (vgl. Burghardt, 1978).

Als räumliche Idee lag ein Aktionsraum mit einem vielfältigen Raumangebot und Möglichkeiten zur Ruhe, Entertainment und Erfrischung zugrunde.

Ausgangsbasis für die Formfindung der Gitterschale mit Hilfe eines hängenden Netzes war ein im Zuge des Vorentwurfes entwickeltes Drahtmodell. Dieses Netzmodell simuliert die Gittermaschen des stehenden druckbeanspruchten Gitterrostes aus Holz. Hier entstehen im Eigengewichtszustand nur momentfreie Druckspannungen.

Die gesamte Struktur wurde durch aufwendigen Modellbau ermittelt. Jedoch wurden für weitere Berechnungen des Hängernetzes auch Rechenmodelle, wie die Kraft-Dichte Methode, angewandt. Zusätzlich wurde das Modell mit Hilfe der Nahbereichsphotogrammetrie digitalisiert.

Im flachen Zustand ist das Netz mit einem Freiheitsgrad kinematisch, wodurch das Gitter in eine doppelt gekrümmte Schalenform gebracht werden kann. Wenn das Gitter in Schalenform gebracht ist, wird es nur durch die Verbindung mit dem Rand befestigt. Um große Verformungen zu verhindern, wird eine Steifigkeit in Diagonalrichtung eingeführt (vgl. Burghardt, 1978: 61). Die einwirkenden Lasten können in Stützlinsenlasten, welche nur Normalkräfte in den Latten erzeugen, und Störlasten, die Biegemomente und große Verschiebungen verursachen, eingeteilt werden. Um große Verschiebungen aufgrund von Störlasten zu verhindern werden eine Dachmembran und Zugglieder eingebaut. Damit wird die Steifigkeit in der Schalenebene erhöht. Eine Erhöhung der Biegesteifigkeit senkrecht zur Schalenebene kann durch Vergrößerung des Trägheitsmoments des einzelnen Gliedes erreicht werden. Ein zweilagiges Trägersystem löst dieses Problem effektiv. Jedoch erhöht dies den konstruktiven Aufwand, da bei der Errichtung nun zwei Latten entlang der Gitterlinie gegeneinander verschoben werden. In der endgültigen Form muss dieses Verschieben verhindert werden. Letztendlich wurde die Gitterschale zweilagig aus Latten, 50\*50 mm nordamerikanischer Hemlocktanne, mit einem Maschenabstand von 50 cm errichtet. (vgl. Burghardt, 1978:) Die minimalen Biegeradien betragen 10m und vereinzelt 6 m. Um die Bruchgefahr zu verringern, wurden due 50 mm Latten in Bereichen mit einem Biegeradius unter 10 m in zwei Lagen, je 25 mm, aufgeteilt (vgl. Williams, 2014: 30-31).

Während der Errichtung muss jeder Knoten ein Gleiten der einen Holzlage über der anderen ermöglichen. Dies wurde durch die Einführung von Langlöchern erbracht. Um jedoch im errichteten Zustand sämtliche Steifigkeiten zu nutzen, ist es notwendig, Schubkräfte an jedem Knoten zu übertragen. Um eine dafür erforderliche Reibung zu erzeugen, müssen die Klemmkkräfte auch bei Schwinden des Holzes ausreichend sein. Dies wird durch die Verwendung von Tellerfedern erreicht. Zur Errichtung wurde das Gitter aus Trägern flach zusammengebaut und anschließend in die gewünschte Form gehoben.

Heute steht die Halle unter Denkmalschutz, obwohl sie ursprünglich als temporäres Bauwerk errichtet wurde.



Abbildung 2: Außenansicht der Multihalle- Mannheim. Quelle: <https://www.db-bauzeitung.de/db-themen/schwerpunkt/multihalle-in-mannheim/#slider-intro-2>. Foto: Stadtpark Mannheim/Archiv Frei Otto.

### 1.3.2. „Inside/Out Gridshell“

Das zweite großartige Referenzobjekt ist der Inside/Out Pavillon von Eike Schling. Hier handelt es sich um die erste größere Tragstruktur, welche asymptotische Kurven, das sind spezielle Kurven auf einer Fläche, welche in Teil I ausführlich beleuchtet werden, für das Trägerlayout heranzieht. Sie wurde 2017 fertig gestellt.

Der Inside/Out Pavillon ist eine unter Spannung stehende Gitterschale. Schlanke, anfänglich gerade Stahlträger beschreiben, durch Biegung und Torsion verformt, eine dreidimensionale Fläche.

Die Träger sind aufgrund der innenwohnenden Geometrisierung normal auf eine gedachte unterliegende Basisfläche ausgerichtet. Das erweist sich tragstrukturell aufgrund der erhöhten Biegesteifigkeit als vorteilhaft. Um die Festigkeiten zu erhöhen und die Knickegefahr einzelner Träger zu verringern, werden die Träger doppelt als Trägerpaar pro Kurvenachse ausgeführt. An Kreuzungspunkten werden die Träger bis zur Mitte eingeschlitzt und ineinandergesteckt. Ein minimalistischer Knoten hält sie an den Kreuzungspunkten zusammen.

Die Schale wurde flach vormontiert und anschließend in ihre dreidimensionale Form gehievt. Um diese Bewegung zu ermöglichen, muss das Gitter in der Ebene scheren können. Daher sind die Schlitzte in doppelter Weite ausgeführt. Um eine Schubsteifigkeit in Schalenebene herzustellen, werden diagonale Stahlseile als Spannglieder eingeführt.

Neben dem wunderschönen Bauwerk hat Eike Schling in der Verschriftlichung seiner Dissertation, im Zuge derer auch der Pavillon entstanden ist, eine kleine Fibel zum Thema „Asymptotische Gitterschalen“ verfasst. Darin werden geometrische Grundlagen, Erläuterungen zur Konstruktionsweise bis hin zur Dokumentation der Errichtung der Schale sehr anschaulich behandelt.



Abbildung 3: Foto des Inside/Out Pavillons. Quelle: <https://www.tum.de/fileadmin/processed/9/0/csm08Forschungspavillon029e35ce2e9b.jpg>.  
Foto: Felix Noe.



# I. Geometrische Betrachtungen

## 2. Geometrische Grundlagen

Kurven und Flächen kommen in vielfältiger Weise in der Architektur vor. Die Kenntnis grundlegender Konzepte dazu ist für das Verständnis der weiteren Arbeit wichtig. Aus methodischen Gründen startet das folgende Kapitel mit Aspekten zu Kurven und durchläuft dann das Themengebiet „Krümmung von Flächen“. Das Kapitel schließen wir mit ausgezeichneten Kurven auf Flächen ab, indem wir uns Grundlagen zu Hauptkrümmungslinien, geodätischen Linien und asymptotischen Linien erarbeiten.

### 2.1. Kurven

Unter Kurven versteht man die Menge der Punkte, aus der ein geometrisches Objekt, ein eindimensionales, glattes Gebilde, besteht. Liegen sämtliche Punkte einer Kurve in einer Ebene, wird von ebenen Kurven gesprochen. Das Pendant wird als Raumkurve bezeichnet (vgl. Pottmann, et al., 2010: 207).

Damit die folgenden Konzepte zur Analyse einer Kurve anwendbar sind, muss die Kurve stetig, also mehrfach differenzierbar sein.

#### 2.1.1. Kurventangenten

Eine glatte, also stetig differenzierbare Kurve, kann in einem Punkt  $P$  lokal durch eine Gerade, die Tangente  $T$ , approximiert werden. Diese ist über die Grenzlage der Sekante  $k$  festgelegt. Wenn wir auf  $c$ , nahe an  $P$  einen Punkt  $Q$  wählen, diese beiden Punkte mit einer Geraden  $g$  verbinden und  $Q$  immer näher an  $P$  heranrücken lassen, fällt  $Q$  in der Grenze mit  $P$  zusammen und  $g$  nimmt eine Grenzlage an, nämlich die Tangente  $T$  von  $c$  in  $P$ . Somit berührt  $T$  die Kurve  $c$  im Punkt  $P$ .

Darauf basierend können wir die mathematische Beschreibung einer Tangente herleiten und erkennen, dass der erste Ableitungsvektor ein Richtungsvektor der Kurventangente ist. Somit ist die Tangente am Punkt  $P = c(t)$  an der Kurve  $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$  durch die Parameterdarstellung  $T: x(u) = c(t) + u * c'(t)$  gegeben. Die Normalen  $n_P$  einer ebenen Kurve stehen normal auf die Tangente im jeweiligen Berührungspunkt. Eine Raumkurve besitzt unendlich viele Normalen um die Tangente  $T_P$ . All diese Normalen liegen in der Normalebene  $\pi_P$  am Punkt  $P$  der Raumkurve  $c$  (vgl. Pottmann, et al., 2010: 214 f.).

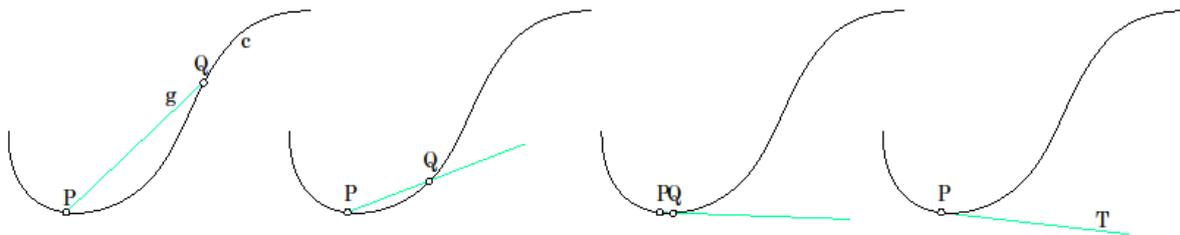


Abbildung 4: Konstruktion der Tangente  $t$  an  $c$  als Grenzübergang (MW, 2020, nach Pottmann, et al., 2007: 224).

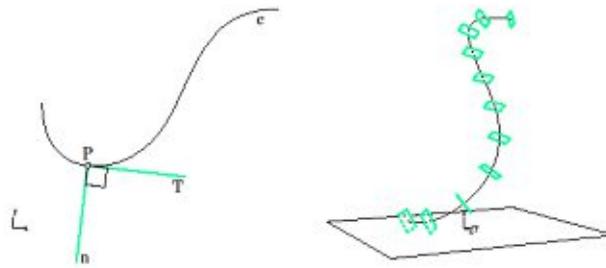


Abbildung 5: Links: Kurvennormale. Rechts: Normalebenen (MW, 2020, nach Pottmann, et al., 2007: 224).

### 2.1.2. Diskrete Kurven

Um einen Einblick in die Geometrie der Kurven ohne Verwendung der Analysis zu erläutern, eignet sich die Vermittlung über den so genannten diskreten Zugang (vgl. Pottmann, et al., 2010: 216). Das heißt, ein geometrisches Kontinuum, zum Beispiel eine Kurve, wird in ein polygonales Objekt, welches aus Punkten und Verbindungsgeraden zwischen diesen Punkten besteht, unterteilt. Bei geeigneter Verfeinerung konvergiert das Polygon  $p_c$  gegen die stetige Kurve  $c$ . Die Verbindungsgeraden von  $p_c$  werden in der Grenze zu Tangenten von  $c$ .

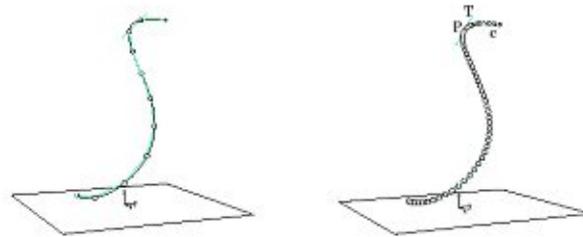


Abbildung 6: Diskrete Kurve welche eine glatte Kurve  $c$  annähert ( MW, 2020, nach Pottmann, et al., 2007: 216).

Im Kapitel „Netze“ werden wir wieder auf dieses Konzept des Diskretisierens geometrischer Kontinua treffen. Die Disziplin der Diskreten Differentialgeometrie forscht genau im diesem Grenzbereich zwischen Geometrie, Differentialgeometrie sowie diskreter Mathematik und sucht nach Analogien, um wesentliche Eigenschaften der klassischen Differentialgeometrie auch in der diskreten Geometrie zu erhalten.

### 2.1.3. Krümmung und Torsion einer Raumkurve

Das Konzept der oben beschriebenen Tangentenkonstruktion können wir wie folgt erweitern. Drei aufeinanderfolgende Punkte  $C_1, C_2, C_3$  spannen eine Verbindungsebene  $\mathfrak{e}_2$  auf. Der Punkt  $C_2$  wird nun als fixiert angenommen, das Polygon darum aber verfeinert, so dass die Punkte  $C_1$  und  $C_3$  sich immer mehr  $C_2$  nähern. Als Grenzlage erhalten wir die Schmiegeebene  $\mathfrak{e}_2$  der glatten Kurve  $c$  an  $C_2$ .

Die mathematische Beschreibung des Grenzübergangs zeigt, dass die Schmiegeebene im Punkt  $c(t)$  vom ersten Ableitungsvektor  $c'(t)$  und dem zweiten Ableitungsvektor  $c''(t)$  aufgespannt wird.

Durch die drei aufeinanderfolgenden Punkte können wir auch einen Kreis  $k_2$  legen, der natürlich in der Verbindungsebene  $\mathfrak{e}_2$  liegt. Auch hier laufen im Zuge des Verfeinerungsprozesses die Punkte  $C_1$  und  $C_3$  zusammen. Der Kreis  $k_2$  in der Grenzlage wird Krümmungskreis genannt (vgl. Pottmann, et al., 2010: 217 f.).

Die lokale Krümmung  $k$  an einer Kurve kann also durch den Krümmungskreis in jedem Punkt ermittelt werden und ist durch den Kehrwert des Krümmungsradius  $r$  festgelegt.

$$k = \frac{1}{r}$$

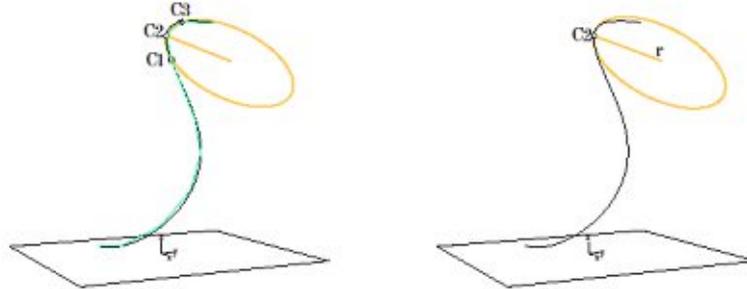


Abbildung 7: Krümmungskreis an einem Punkt  $C2$  an einer Raumkurve  $c$  (MW, 2020).

Das Bestreben einer Kurve, sich aus der „momentanen“ Schmiegeebene herauszuwinden wird Torsion genannt (vgl. Weitz, 2019: 97). Kurven, deren Krümmung und Torsion konstant ist, beschreiben einen Kreis, eine Helix oder, wenn  $k = 0$  eine gerade Linie (vgl. Schling, 2018: 6).

## 2.2. Flächen

Die Erweiterung der Konzepte der Kurven führt zum Studium von Flächen. „Während wir eine Kurve als eindimensionale Menge erklärt haben, sehen wir Flächen als eine Art zweidimensionale Haut im Raum an (Pottmann, et al., 2010: 229).“

### 2.2.1. Parameterdarstellung einer Fläche, Tangentialebene und Flächennormale

Im Gegensatz zu Kurvenpunkten hängen die Koordinaten eines Flächenpunktes von zwei verschiedenen Parametern  $u, v$  ab und können durch  $\mathbf{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  beschrieben werden.

Wir erhalten eine Flächenkurve durch die Vorschreibung eines Parameters  $u(t)$  bzw.  $v(t)$  als Funktion. Somit kann eine Flächenkurve mit  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  beschrieben werden. Die Tangente einer solchen Flächenkurve in einem Punkt  $P$  heißt **Flächentangente** (vgl. Pottmann, et al., 2010: 233).

Die Tangenten an sämtliche Flächenkurven, die durch einen regulären Flächenpunkt  $P$  durchgehen liegen in einer Ebene, der **Tangentialebene**  $\tau$  des Flächenpunktes  $P$ . Bereits die Tangenten  $t_u$  und  $t_v$  der Parameterlinien bestimmen die Tangentialebene  $\tau$ .

Der Vektor  $n$ , der durch den Flächenpunkt  $P$  geht und normal auf die Tangentialebene  $\tau$  steht heißt **Flächennormale** (vgl. Pottmann, et al., 2010: 234). Nachdem er senkrecht auf die Tangenten  $t_u$  und  $t_v$  liegt kann er durch deren Kreuzprodukt bestimmt werden.

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$$

## 2.2.2. Krümmung einer Fläche

Die Normalkrümmung einer Fläche an einem Punkt  $P$  kann wie folgt erfasst werden: Die Fläche wird mit einer Ebene  $R$ , welche die Flächennormale  $\mathbf{n}$  in sich trägt, geschnitten. Die Krümmung der besagten Schnittkurve  $p(\alpha)$  im Flächenpunkt  $P$  wird **Normalkrümmung**  $k_n$  genannt. Natürlich gibt es unendlich viele solcher Ebenen und Schnittkurven radial um diesen Punkt  $P$ . Die beiden Schnittkurven, welche die höchste und niedrigste Normalkrümmung aufweisen heißen **Hauptkrümmungen**  $k_1$  und  $k_2$ . Diese beiden Hauptkrümmungsrichtungen stehen immer rechtwinklig aufeinander.

Wir können dieses Szenario in ein lokales Koordinatensystem einbetten, wobei der Punkt  $P$  den Koordinatenursprung, die erste Hauptkrümmungsrichtung die  $x$ -Achse und die Flächennormale  $\mathbf{n}$  die  $z$ -Achse beschreiben. Die Ebene  $R$  enthält die Flächennormale  $\mathbf{n}$  und einen Vektor  $\mathbf{u}$ . Der Winkel  $\alpha$ , welcher von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$  eingeschlossen wird, kann unter der Nutzung des Skalarproduktes durch

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{x}|}$$

$$\alpha = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

ermittelt werden.

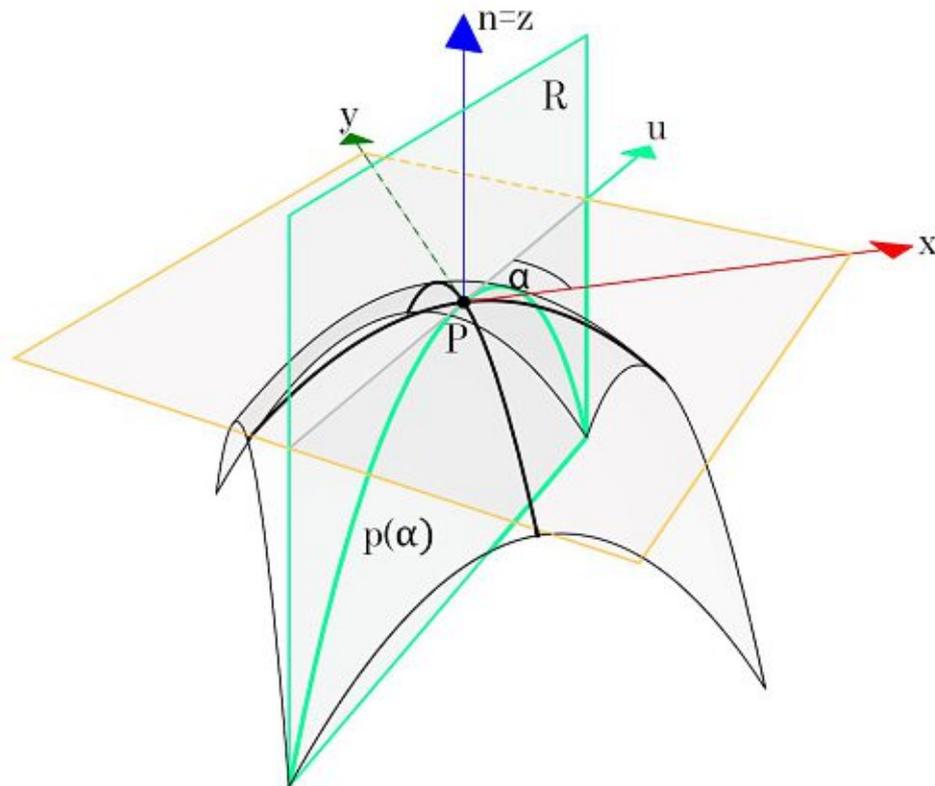


Abbildung 8: Normalkrümmung einer Fläche im Punkt  $P$  (MW, 2020, nach Pottmann, et al., 2007: 490).

Von den beiden Hauptkrümmungen ausgehend, können wir die Normalkrümmung jeder Richtung an diesem Flächenpunkt  $P$  durch

$$k_n = k_1(\cos\alpha)^2 + k_2(\sin\alpha)^2$$

festlegen.

Weiters können wir aus den Hauptkrümmungen zwei wichtige Größen für die Krümmungsanalysen von Flächen, die „**Gauß-Krümmung**“ und die „**mittlere Krümmung**“ ableiten.

### Die Gauß-Krümmung

Die Gauß-Krümmung ergibt sich aus dem Produkt  $K = k_1 * k_2$  der beiden Hauptkrümmungen. Dem Prinzip des Krümmungskreises, das wir bereits im vorigen Kapitel „Kurven“ kennen gelernt haben folgend können wir auch an den Flächenpunkt  $P$  einen Krümmungskreis bestimmen.

Liegen die Mittelpunkte beider Krümmungskreise auf derselben Seite bezüglich der Tangentialebene, dann hat deren Krümmung dasselbe Vorzeichen. Daher ist auch deren Produkt, die Gauß-Krümmung positiv und der Punkt wird **Elliptischer Flächenpunkt** genannt. Die Fläche ist an diesem Punkt **synklastisch**. Liegen die Mittelpunkte der beiden Krümmungskreise auf unterschiedlichen Seiten der Tangentialfläche ist ein Vorzeichen der beiden negativ. Daher ist das Produkt aus  $k_1 * k_2$  negativ. Dieser Punkt wird **hyperbolischer Flächenpunkt** mit negativer, antiklastischer Gauß-Krümmung genannt.

Ist eine der beiden Hauptkrümmungen null, dann ist auch deren Produkt null. Ein Punkt an einer solchen Stelle wird **parabolischer Flächenpunkt** genannt (vgl. Schling, 2018: 6 f.). Flächen, deren Gauß-Krümmung an jeder Stelle null ist, werden abwickelbare Flächen genannt. Sie können durch isometrische Projektion verzerrungsfrei in einer Ebene abgebildet werden. (vgl. Pottmann, et al., 2007: 498 ).

### Die Mittlere Krümmung

Die mittlere Krümmung wird aus dem arithmetischen Mittel der beiden Hauptkrümmungen  $H = \frac{k_1+k_2}{2}$  gebildet. Eine Flächentyp mit besonderer mittlerer Krümmung, welche wir im folgenden Abschnitt im Detail betrachten, ist die Minimalfläche. Sie besitzt konstant eine mittlere Krümmung von null. Dies ist der Fall, wenn beide Hauptkrümmungen denselben Wert, jedoch unterschiedliche Orientierungen, also Vorzeichen besitzen (vgl. Pottmann, et al., 2007: 498 ).

### Hauptkrümmungsrichtungen und asymptotische Richtungen

Damit wir uns asymptotische Richtungen besser vorstellen können, stellen wir uns, angelehnt an Schling (2018), folgendes Szenario vor:

Das geometrisch abstrahierte Modell eines Pferdesattels ist eine Sattelfläche, zum Beispiel ein hyperbolisches Paraboloid. Nun platzieren wir ein Lineal aufrecht auf Punkt  $P$  und rotieren das Lineal um die Flächennormale  $n$ . Das Lineal wird die Fläche an zwei Stellen, dort wo die Normalkrümmung null ist berühren. Diese Richtungen werden **asymptotische Richtungen** genannt (vgl. Schling, 2018: 7).

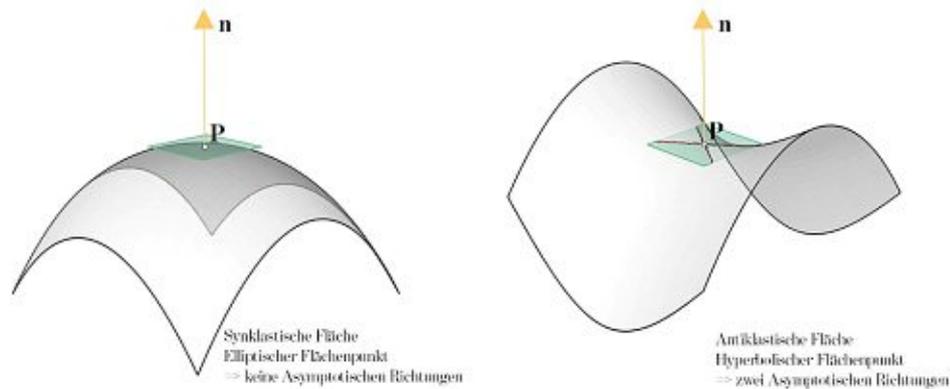


Abbildung 9: Elliptischer- und Hyperbolischer Flächenpunkt (MW, 2020, nach Schling, 2018: 8).

Die asymptotischen Richtungen sind jene Richtungen, an denen die Normalkrümmung ( $k_n = 0$ ) verschwindet. An einem hyperbolischen Flächenpunkt gibt es zwei asymptotische Richtungen. Diese sind symmetrisch bezüglich der Hauptkrümmungslinien.

An einem parabolischen Flächenpunkt fallen die beiden asymptotischen Richtungen mit den Hauptkrümmungsrichtungen zusammen.

Wenn die mittlere Krümmung einer Fläche null ist schneiden die asymptotischen Kurven die Hauptkrümmungsrichtungen in ihrer Symmetrieebene ( $\alpha = 45^\circ$ ), sie stehen also rechtwinklig zueinander.

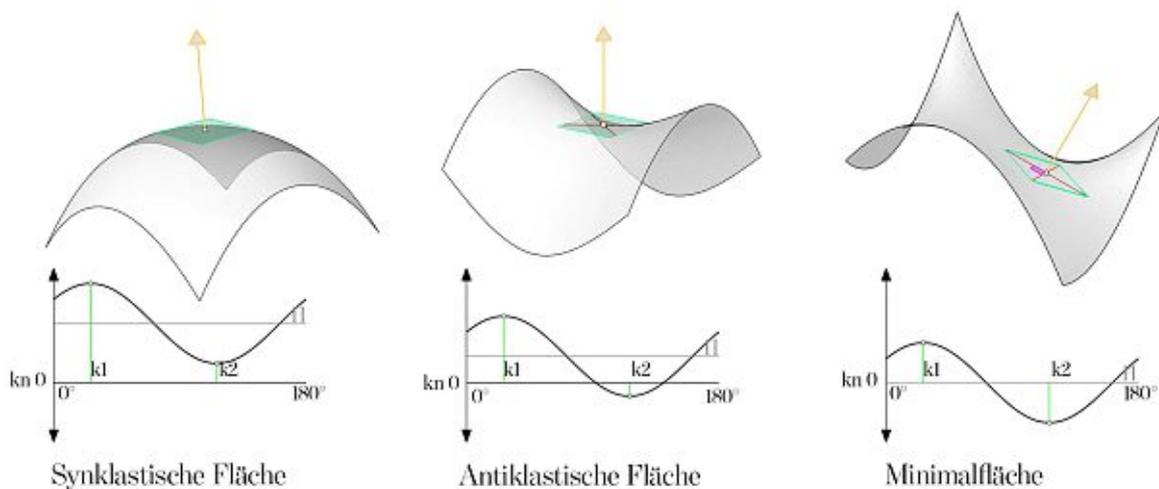


Abbildung 10: Darstellung des Zusammenhangs der mittleren Krümmung und der asymptotischen Richtung (MW, 2020, nach Schling 2018: 7 f.).

### 2.2.3. Gauß-Abbildung

Die Gauß-Abbildung bildet eine gerichtete Fläche im  $\mathbb{R}^3$  auf die Einheitskugel  $\mathcal{S}^2$  ab. Wir erhalten also die Gauß-Abbildung einer Fläche, indem wir jedem Punkt einer Fläche seinen normierten Normalvektor zuweisen. Diese Vektoren verschieben wir nun in das Zentrum einer Einheitskugel. Aus dem Bild, welches nun auf der Kugel erzeugt wird, können wir auf eine Vielzahl geometrischer Eigenschaften Rückschlüsse ziehen. Der Flächeninhalt der Gauß-Abbildung quantifiziert die Totalkrümmung einer Fläche. Zum Beispiel erhalten wir als Gauß-Bild einer abwickelbaren Fläche stets eine Kurve, da deren Gauß-Krümmung null ist.

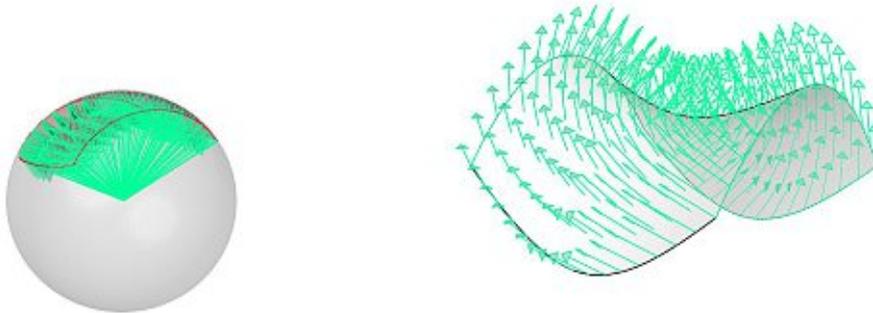


Abbildung II: Gauß-Abbildung einer nicht abwickelbaren Fläche (MW, 2020).

### 2.2.4. Minimalflächen

Eines der ältesten Optimierungsprobleme in der Mathematik in der Thematik Flächen ist das Plateau's Problem, bei dem es darum geht, die Fläche mit dem geringsten Flächeninhalt  $A$  für eine gegebene, geschlossene, nicht sich selbst schneidende Randkurve zu finden. Eine solche Fläche heißt Minimalfläche (vgl. Pottmann, et al., 2007: 647 ff.).

Physikalisch entsteht eine Minimalfläche zum Beispiel durch das Eintauchen von Drähten in Seifenlaugen. Wenn wir die Störkräfte außer Acht lassen, führt die Oberflächenspannung dazu, dass die Gestalt der Fläche die Form einer Minimalfläche einnimmt.

Wir haben bereits festgestellt, dass die mittlere Krümmung  $H$  einer Minimalfläche an jedem Punkt null ist. Da  $\frac{k_1+k_2}{2} = 0$  gilt muss auch  $k_1 = -k_2$  gelten. Somit ist jeder reguläre Punkt einer Minimalfläche ein **hyperbolischer Punkt**. Aus Abbildung 10 erkennen wir, dass die asymptotischen Richtungen die Hauptkrümmungsrichtungen in ihrer Symmetrieebene schneiden. Daraus folgernd können wir sehr regelmäßige Netzwerke aus Hauptkrümmungslinien und asymptotischen Linien erhalten (vgl. Pottmann, et al., 2007: 647 ff.). Darauf gründend eignen sich Minimalflächen hervorragend, um Strukturen aus repetitiven Elementen zu bauen. Damit werden wir uns später noch intensiv auseinandersetzen.

Minimalflächen weisen auch Besonderheiten bezüglich ihrer Gauß-Abbildung auf. Für jede nicht abwickelbare Fläche  $\mathcal{S}$  gilt, dass ihr Netz, welches aus Hauptkrümmungslinien aufgespannt wird, auf der entsprechenden Gauß-Abbildung ebenfalls ein orthogonales Liniennetzwerk bildet. Für Minimalflächen gilt dasselbe für das aus asymptotischen Kurven gebildete Kurvennetzwerk, was durchaus erstaunlich ist und womit wir uns noch inhaltlich später beschäftigen werden (vgl. Pottmann, et al., 2007: 647 ff.).

Uns stehen unterschiedliche Möglichkeiten zur Verfügung, Minimalflächen digital zu modellieren. Einerseits können wir theoretisch jede Minimalfläche über eine parametrische Repräsentation erhalten, andererseits können wir die Forderung an einem minimierenden Flächeninhalt als Optimierungsproblem modellieren oder die physikalische Oberflächenspannung durch das Definieren eines Gleichgewichtszustands eines unter Spannung stehenden Netzwerks simulieren. Diese Methoden und deren Implementierung werden in den folgenden Kapiteln weiter diskutiert. Wir werden uns dort auch der diskreten Version einer Minimalfläche widmen.

### 2.2.5. Netze (*meshes*)

Ein Netz (*mesh*) ist eine Menge von Punkten (*vertices*), die in Grundelemente, so genannte Facetten, oder Flächen (*faces*) gebündelt sind. Meist dominiert eine Art von Flächen, zum Beispiel Dreiecke, Vierecke, oder Sechsecke. Sie hängen entlang von Kanten (*edges*) zusammen und beschreiben grob die Form einer glatten Fläche (vgl. Pottmann, et al., 2010: 387). Wenn wir aus Freiformflächen bauliche Strukturen entwickeln wollen, ist ein Schritt der Zerlegung der Fläche in einzelne Bauelemente notwendig. Hierfür eignen sich oft Netze als geometrische Repräsentationsmodelle.

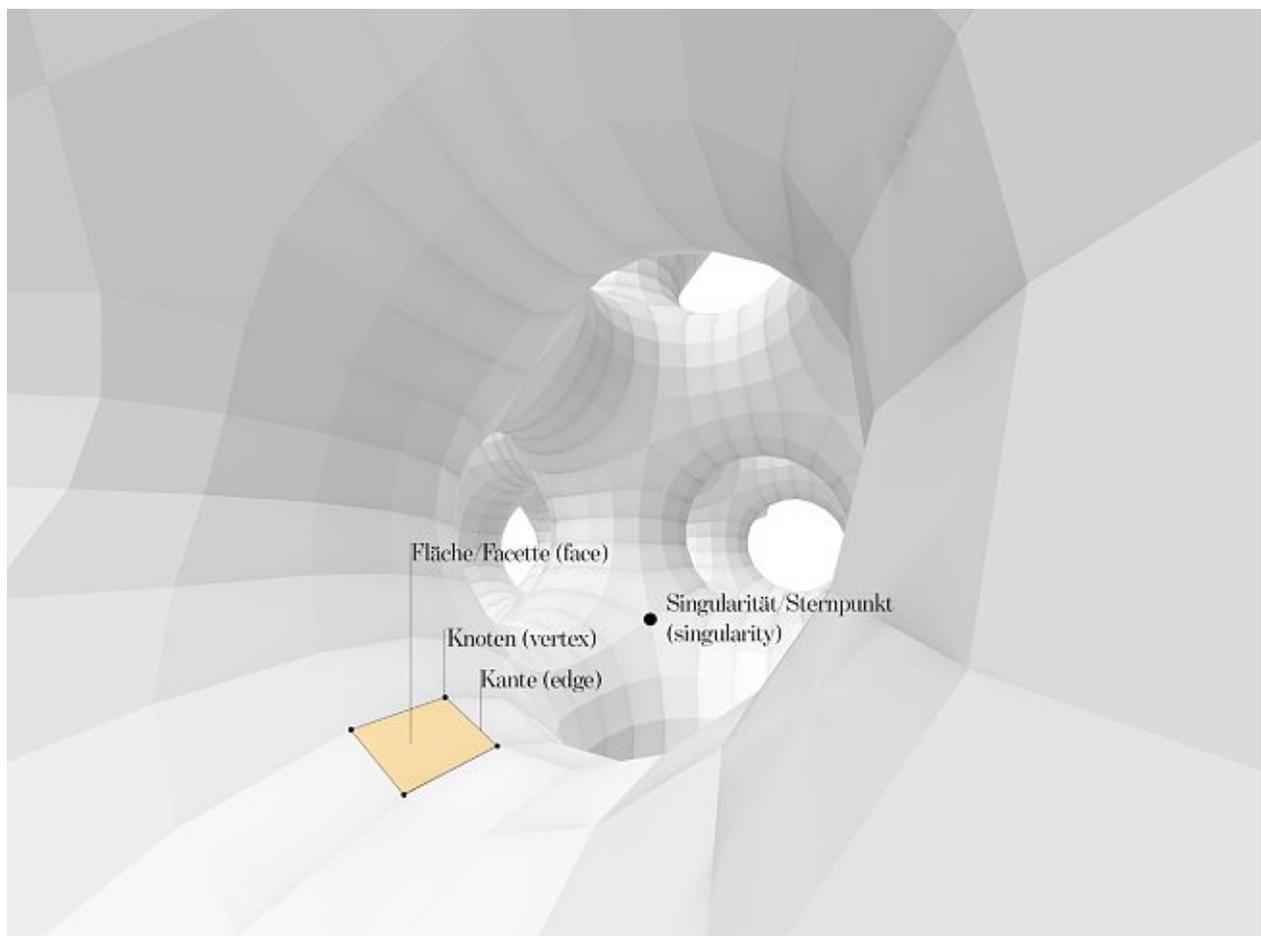


Abbildung 12: Diskrete Minimalfläche als Netz repräsentiert (MW, 2020).

## 2.3. Ausgezeichnete Kurven auf Flächen

Wenn wir eine Kurve auf einer Fläche analysieren, stehen uns die Richtung der Kurve und die Orientierung der Fläche als kombinierte Informationsträger zur Verfügung. Die folgenden Erläuterungen, bis einschließlich Abschnitt 2.3.2, basieren auf Schling (2018: 121 ff).

### 2.3.1. Die Darboux-Basis

Die Krümmung und Torsion einer Raumkurve  $c$  können wir mit der Darboux-Basis beschreiben. Diese Orthonormalbasis ist dem jeweiligen Kurvenpunkt  $P$  der Kurve  $c$  auf der Fläche  $s$  angehängt und besteht aus dem Tangentialvektor  $t$ , dem Normalvektor  $n$  und dem Binormalvektor  $u$  von  $c$  in  $P$ . Die Abbildung 13 zeigt die Darboux-Basis eines Kurvenpunktes  $P$  der Kurve  $c$  auf der Fläche  $s$ .

Die Rotationen um alle drei Vektoren können quantifiziert werden, wobei die Rotation um  $n$  als **geodätische Krümmung**  $k_g$ , um  $t$  **geodätische Torsion**  $\tau_g$  und um  $u$  **Normalkrümmung**  $k_n$  bezeichnet werden. Die Krümmungsradien  $k_g$  und  $k_n$  erhalten wir, indem wir den jeweiligen Krümmungsvektor in die Tangentialebene, oder die Ebene, welche von der Tangente und Normale aufgespannt wird, projizieren (vgl. Schling, 2018: 8 f.).

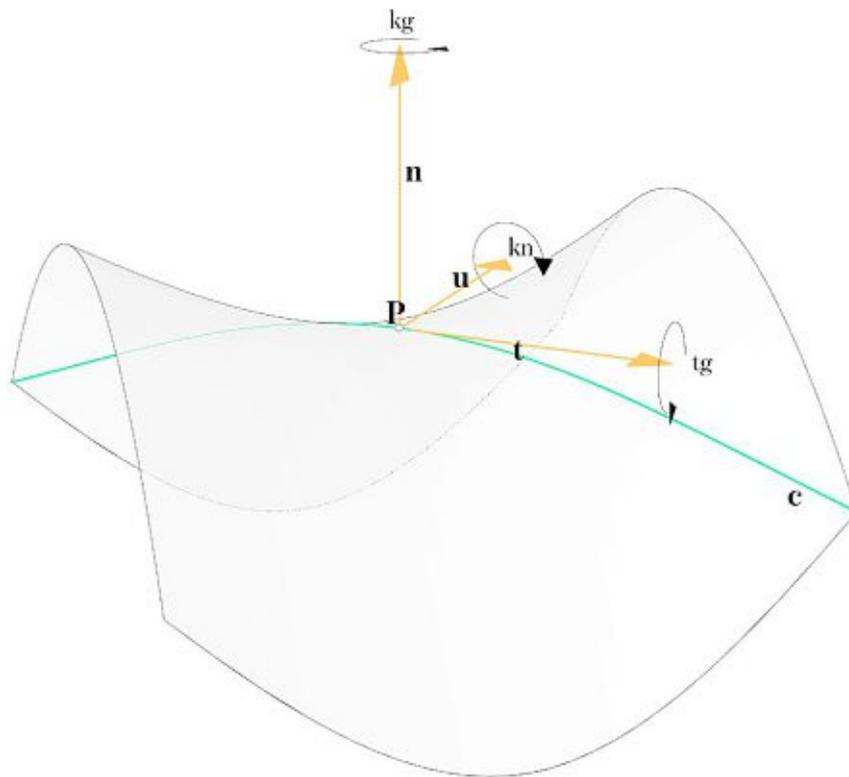


Abbildung 13: Krümmungen einer Kurve auf einer Fläche. Darstellung der Darboux-Basis (MW, 2020, nach Schling, 2018: 9).

Schling (2018: 9) schildert das Erleben dieser Krümmungen sehr anschaulich durch den Vergleich eines durch eine Landschaft fahrenden Autos. Fährt das Auto einen Hügel hinauf und hinunter erlebt die im Auto sitzende Person Normalkrümmung. Wenn das Auto nach rechts oder nach links fährt geodätische Krümmung. Und wenn die Person zu schnell um die Kurve fährt und das Auto nur noch auf zwei Reifen derselben Seite dahinschlittert, erlebt sie geodätische Torsion.

### Normalkrümmung $k_n$

Die Normalkrümmung ist abhängig von den Hauptkrümmungen einer Fläche an einem Punkt  $P$  und der Richtung der Kurve  $c$  an  $P$ . Gegeben ist sie durch:

$$k_n = k_1(\cos\mu)^2 + k_2(\sin\mu)^2$$

Die beiden Hauptkrümmungen werden durch  $k_1$  und  $k_2$  bezeichnet.  $\mu$  quantifiziert die Abweichung der Tangente zu den Hauptkrümmungsrichtungen.

### Geodätische Torsion $\tau_g$

Sie beschreibt die Verdrehung einer Kurve und kann wie folgt berechnet werden:

$$\tau_g = \frac{1}{2}(k_2 - k_1)\sin 2\mu$$

### Geodätische Krümmung $k_g$

Sie ist nicht von den Hauptkrümmungen der Fläche abhängig, sondern beschreibt die Abweichung der Kurve  $c$  auf  $s$  von einer geraden Strecke. Daher kann keine mathematische Relation zur Flächenkrümmung hergeleitet werden.

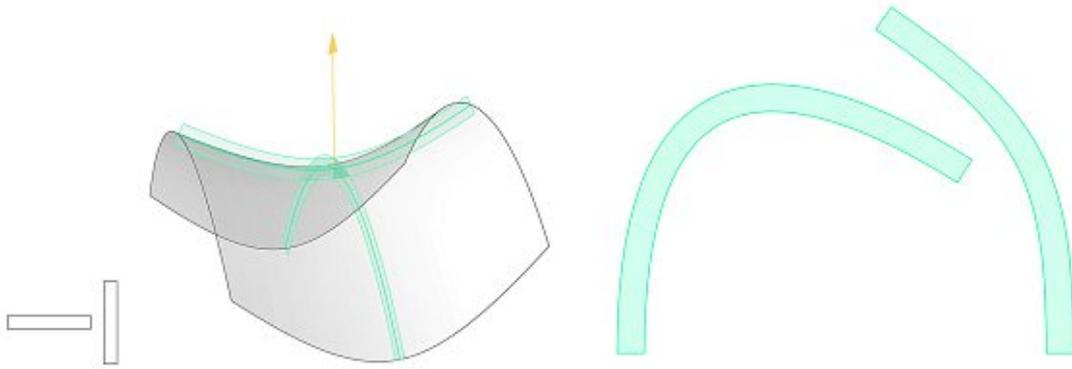
#### 2.3.2. Ausgezeichnete Kurven auf Flächen

Im Folgenden betrachten wir spezielle Kurven auf Flächen in Bezug auf deren Eignung als Referenzgeometrie für bauliche Elemente. Wichtig sind dabei die Ausbreitung des Kurvenverlaufs, das Krümmungs- und Torsionsverhalten der Kurven sowie die Art und Weise, wie Querschnitte entlang dieser Kurve eingesetzt werden können, um Flächenstreifen zu beschreiben.

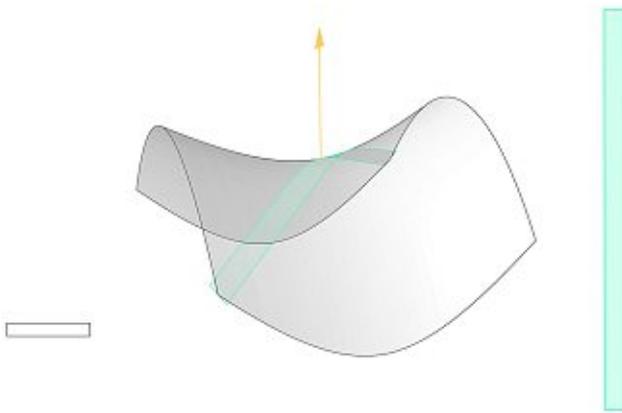
Bei den Querschnitten werden hier ausschließlich rechteckige Querschnitte angeführt. Wir gehen davon aus, dass die Ausdehnung in einer Richtung deutlich größer ist als in die zweite Richtung und der Querschnitt somit eine starke Bauteilachse besitzt. Die Ausrichtung des Querschnitts zu einer unterliegenden Fläche ist für die tragstrukturelle Eignung entscheidend.

Weiters bestimmt das Krümmungs- und Torsionsverhalten der Kurve an der Fläche das Abbild, das wir erhalten, wenn wir den erzeugten Flächenstreifen in einer Ebene ausbreiten. Funktioniert dies verzerrungsfrei, dann sprechen wir von abwickelbaren Flächen. Erhalten wir als abgewinkelte Flächenstreifen gerade Streifensegmente, dann ist die Herstellung von Trägern, welche geometrisch auf den Flächentreifen basieren sehr wirtschaftlich.

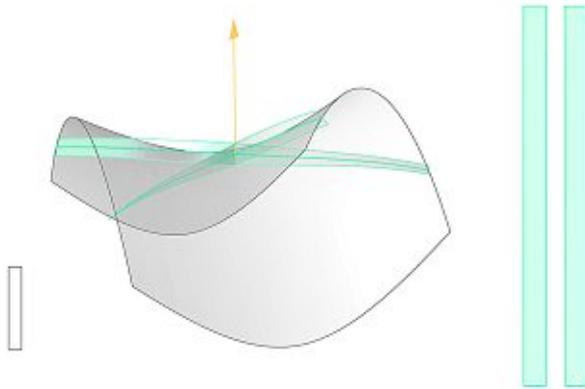
Abbildung 14 zeigt drei Arten von ausgezeichneten Kurven auf Flächen. Diese Kurventypen werden anschließend im Detail beleuchtet.



Hauptkrümmungslinien auf einer Fläche. Die Flächenstreifen können normal oder tangential zur Fläche stehend ausgeführt werden. Die Flächenstreifen sind abwickelbar, bestehen jedoch nicht aus geraden Streifen.



Geodätische Linien auf einer Fläche. Die Flächenstreifen liegen tangential zur Fläche, sind exakt abwickelbar und bestehen aus geraden Streifen.



Asymptotische Linien auf einer Fläche. Die Flächenstreifen können senkrecht auf die Fläche stehend ausgeführt werden. Die Flächenstreifen bestehen aus geraden Streifen.

Abbildung 14: Flächenstreifen, ausgerichtet an: Hauptkrümmungslinien, geodätischen Linien und asymptotischen Kurven (MW, 2020).

## Hauptkrümmungslinien

Hauptkrümmungslinien sind jene Linien, deren Tangenten an jedem Punkt mit den Hauptkrümmungsrichtungen zusammenfallen. Die Kurven besitzen eine verschwindende geodätische Torsion. Eine Hauptkrümmungslinie kann digital durch punktweise Konstruktion modelliert werden. Wir definieren einen Ausgangspunkt  $P$  auf der Fläche  $S$  und errechnen dort die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen. Der darauffolgende Punkt folgt dieser Richtung in einem definierten Abstand (*resolution*). Dies wird so lange iterierend durchgeführt, bis ein Abbruchkriterium in Kraft tritt. Der weitere Kurvenverlauf ist von der Krümmung der unterliegenden Fläche abhängig. Aus den Kurven können wir sowohl Flächenstreifen, deren Erzeugenden aus den jeweiligen Flächennormalen bestehen, sowie Flächenstreifen, welche aus den zu den Kurven normalen Flächentangenten bestehen, erzeugen. Diese Flächenstreifen sind, wenn wir sie in der Ebene flach auslegen, verzerrungsfrei abwickelbar. Jedoch bilden die abgewickelten Streifen gekrümmte Formen und jeder Streifen hat eine individuelle Gestalt. Eine Struktur, welche aus einem Hauptkrümmungsliniennetzwerk besteht, kann aus planaren Streifen, welche um ihre schwache Achse gebogen werden, gebaut werden. Wenn wir so eine Streifenschar als Tragwerk betrachten, dann wäre die Ausrichtung der Flächennormalstreifen aufgrund der Ausnutzung ihrer statischen Höhe interessant. Jeder Streifen trifft, nachdem wir schon festgestellt haben, dass die Hauptkrümmungsrichtungen orthogonal zueinanderstehen, rechtwinklig aufeinander.

## Geodätische Kurven

Geodätische Kurven besitzen eine verschwindende geodätische Krümmung. Sie folgen dem kürzesten Weg zwischen zwei Punkten auf einer Fläche. Wenn wir ein Netzwerk aus geodätischen Linien erzeugen möchten, führt eine Fläche mit starken Krümmungsunterschieden zu großen Unterschieden in deren Dichte. Sie dünnen sich in synklastischen Bereichen aus und konzentrieren sich in antiklastischen Bereichen. Flächenstreifen können als Rechtecke ausgeführt werden. Diese Streifen werden tangential an der ursprünglichen Fläche ausgerichtet. Daher können nur geringe externe Lasten von einer solchen Struktur aufgenommen werden.

## Asymptotische Kurven

Asymptotische Kurven, auch Schmiegeflächen genannt, sind jene Kurven auf der Fläche  $S$ , deren Tangenten an jedem Punkt mit der entsprechenden asymptotischen Richtung von  $S$  zusammenfallen. Solche Pfade bestehen nur auf antiklastischen Regionen einer Fläche. Ähnlich den Hauptkrümmungslinien können wir asymptotische Kurven durch punktweise Konstruktion und gleichzeitiger Krümmungsanalyse erzeugen.

Ein abwickelbarer Flächenstreifen, der einer asymptotischen Kurve folgt, enthält spezielle Erzeugende, welche in der Ebene liegen, die durch die Flächennormale  $\mathbf{n}$  und die Tangente  $\mathbf{t}$  der jeweiligen Darboux-Basis aufgespannt wird. Der Vektor  $\mathbf{r}$  der Erzeugenden kann wie folgt errechnet werden:

$$\mathbf{r} = k_g \mathbf{n} + \tau_g \mathbf{t}$$

Für asymptotische Kurven, bei denen die Normalkrümmung  $k_n = 0$  ist, ist  $k_g$  mit  $k$  gleichzusetzen. Die Krümmung  $k$  kann über den Krümmungskreis ermittelt werden.

$$k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$$

Wenn:  $k_n = 0$  dann entspricht  $k = k_g$

Diese Erzeugenden liegen in der Regel nicht normal zur unterliegenden Referenzfläche. Daher ergibt das Schnittbild zweier sich schneidenden Flächenstreifen potenziell eine Kurve und keine gerade Linie. Bei Flächenregionen mit einer hohen Gauß-Krümmung neigen sich die Erzeugenden so stark zu den Kurventangenten zu, dass die Erzeugung von Flächenstreifen unmöglich wird.

Eine gute Alternative besteht in der Erzeugung von Flächenstreifen entlang asymptotischer Kurven durch die Verwendung der Flächennormalen als Erzeugenden. Die Flächenstreifen sind zwar nicht exakt, aber ohne große Abweichungen abwickelbar. Die Bild der Abwicklung ergibt gerade Streifen. Somit kann eine Struktur aus asymptotischen Kurven gebaut werden, deren Träger aus geraden Streifen, welche um ihre schwache Achse gebogen werden, bestehen. Dass die Streifen zur Fläche hin aufrecht orientiert werden können bringt tragstrukturelle Vorteile mit sich.

Asymptotische Kurven können punktweise konstruiert werden. Wir wissen, dass die Kurven stets den asymptotischen Richtungen mit  $k_n = 0$  folgen.

Aus

$$k_n = k_1(\cos\mu)^2 + k_2(\sin\mu)^2$$

können wir für  $\mu$  also folgendes festlegen:

$$\mu = 2\pi - 2\tan^{-1} \sqrt{\frac{2\sqrt{k_2(k_2 - k_1)} + k_1 - 2k_2}{k_1}}$$

Auf Minimalflächen beträgt  $\mu$  immer  $45^\circ$ . Die Art und Weise, wie sich eine asymptotische Kurve ausbreitet ist von der Gauß-Krümmung der unterliegenden Fläche abhängig.

Je höher die Gauß-Krümmung, desto gerader wird die Kurve. Wenn wir uns in Bereichen sehr niedriger Gauß-Krümmung einem Nabelpunkt nähern, erhöht sich die geodätische Krümmung drastisch. Auch die geodätische Torsion ist von der Gauß-Krümmung abhängig. Je höher die Gauß-Krümmung, desto mehr geodätische Torsion können wir erwarten (vgl. Schling, 2018: 129 ff.).

### 2.3.3. Netzwerke aus asymptotischen Kurven und Hauptkrümmungslinien

Die Flächenstreifen, welche wir im vorigen Kapitel erstellt haben können als geometrisches Referenzobjekt für ein Bauelement, zum Beispiel als Träger oder Spannglied einer Gitterschale gesehen werden. Damit wir eine tragfähige und baukonstruktiv sinnvolle Struktur erhalten, ist die Strategie, wie wir aus einzelnen Trägern ein Trägergefüge komponieren von Bedeutung.

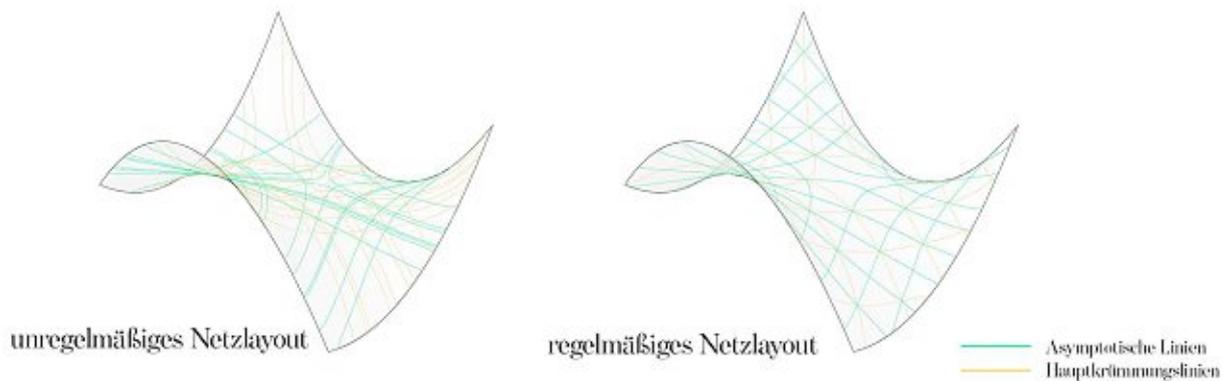


Abbildung 15: Netz aus asymptotischen Kurven und Hauptkrümmungslinien (MW, 2020).

Eine Herausforderung, der sich diese Arbeit stellt, ist das Finden geeigneter Basisgeometrien, welche sowohl ein taugliches Trägerlayout für die Primärkonstruktion einer Gitterschale vorweisen, aber gleichzeitig die Möglichkeit schaffen, eine baupraktische Fassadenhaut an die Primärkonstruktion anzubinden. Es hat sich erwiesen, Minimalflächen tragen ein solches geeignetes Layout potenziell bereits in sich.

Asymptotische Kurven eignen sich sehr gut als Achsen für ein Trägerlayout, da die Träger als gerade Streifen mit sehr geringen Materialverlust herstellbar sind. Gleichzeitig können die Träger normal zur Basisfläche hin orientiert werden, was aufgrund der höheren Biegesteifigkeit Vorteile bezüglich ihrer Tragwerksperformance bringt.

Darüber hinaus können wir Hauptkrümmungslinien als Spannglieder zur Strukturaussteifung vorsehen. Gleichzeitig bieten sie sich als Basis für eine Fassadenhaut, welche aus planaren Vierecken bestehen, an.

### 3. Erzeugung von asymptotischen Kurven auf Minimalflächen: Implementierungsstrategien

Das folgende Kapitel erläutert drei Strategien, um Minimalflächen und ihnen innewohnende ausgewogene Netze aus asymptotischen Kurven und Hauptkrümmungslinien zu extrahieren.

Zuerst wird im jeweiligen Abschnitt die geometrische Modellierung und deren digitale Implementierung und Geometrisierung erklärt. Danach werden Vor- und Nachteile dieser Methode erläutert. Schließlich, um die Richtigkeit der digitalen Modellierung zu überprüfen, aber auch, um weitere praktische Erkenntnisse über Asymptotische Gitterschalen zu erlangen, finden die digitalen Modelle in Papierstreifenmodelle ihre physische Anwendung. Dieser Herstellungsprozess wird ebenfalls dokumentiert.

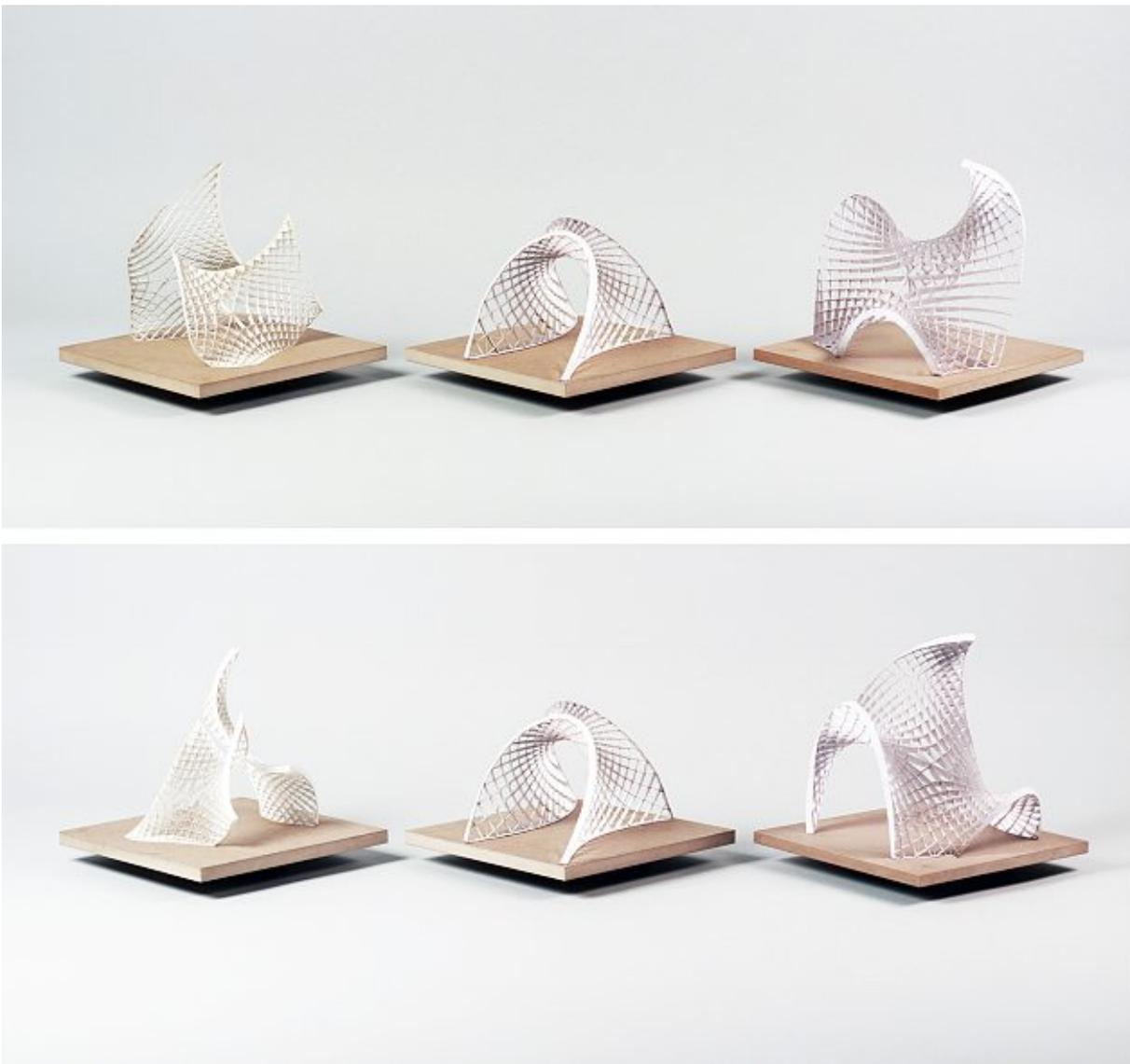


Abbildung 16: Modellfotos der Modelle „Luv und Lee“, „Enneper“ und „Monroe“ (MW, 2020).

## 3.1. Minimalflächen als parametrisierte Flächen: Modell „Enneper“

### 3.1.1. Formfindung und digitale Umsetzung

Dieser Abschnitt basiert auf Pottmann et al. (2007: 649 ff.). Eine Minimalfläche ist hinsichtlich ihrer Gauß-Abbildung außergewöhnlich. Für jede nicht abwickelbare Fläche trifft zu, dass ein Netzwerk aus Hauptkrümmungslinien der Fläche  $\mathcal{S}$  als Gauß-Abbildung  $\mathcal{S}^*$  ebenfalls ein orthogonales Kurvennetzwerk erhält. Für Minimalflächen gilt das ebenso wie für ein Netzwerk aus asymptotischen Kurven. Dies folgt der Tatsache, dass die Gauß-Abbildung einer Minimalfläche  $\mathcal{S}$  zur Einheitskugel  $\mathcal{S}^*$  konform, also winkelerhaltend ist. Solche winkelerhaltenden Abbildungen erhalten wir mit Hilfe komplexer Funktionen. Darin wurzelt, dass theoretisch jede Minimalfläche durch eine differenzierbare komplexe Funktion repräsentiert werden kann.

Die Repräsentation einer Minimalfläche ist durch

$$\begin{aligned}x &= I[(t^2 - 1)f''(t) - 2tf'(t) + 2f(t)] \\y &= R[-(1 + t^2)f''(t) + 2tf'(t) - 2f(t)] \\z &= 2I[-tf''(t) + f'(t)]\end{aligned}$$

mit  $t = u + iv$  als komplexe Variable und  $f(t)$  als komplexe Funktion von  $t$  gegeben.

Wenn wir für  $f(t) = t^3$  einsetzen erhalten wir eine polynomiale Fläche, welche als Enneper-Fläche bekannt ist.

Das digitale Modell einer Enneper-Fläche wurde mit Hilfe der untenstehenden Gleichung in einer Evaluierungskomponente in der Scriptingumgebung Grasshopper, einem Add-On der Modelliersoftware Rhino 6 erstellt.

Die Gleichung dazu lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}x &= 6u^2 - 2v^3 - 6v \\y &= -2u^3 + 6uv^2 - 6u \\z &= -12uv\end{aligned}$$

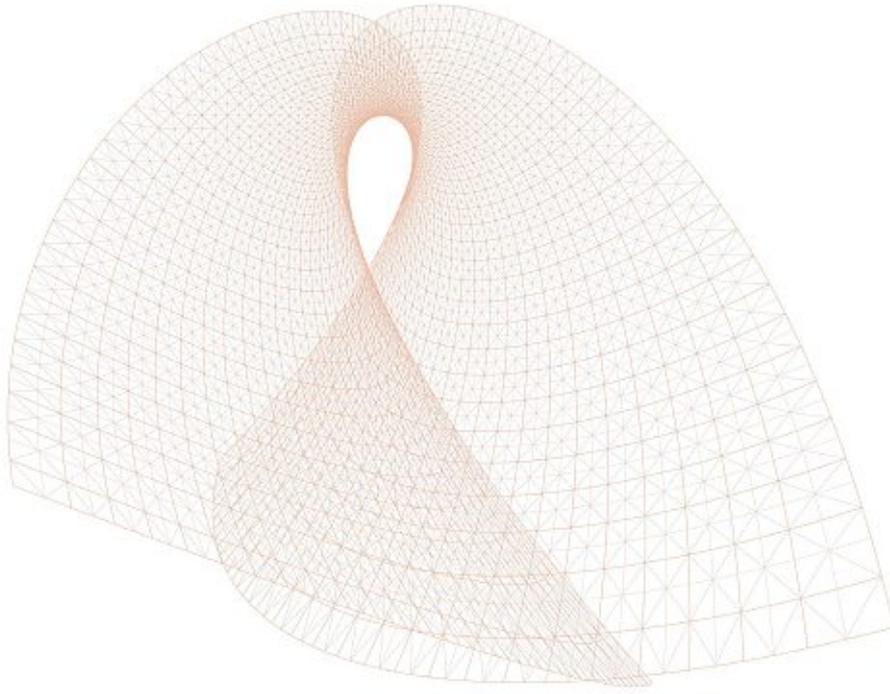


Abbildung 17: 3D Modell einer Enneper-Fläche aus Hauptkrümmungslinien und asymptotischen Linien (MW, 2020).



Abbildung 18: Gauß-Abbildung der Enneper Fläche. Konforme Abbildung der asymptotischen Linien und Hauptkrümmungslinien (MW, 2020).

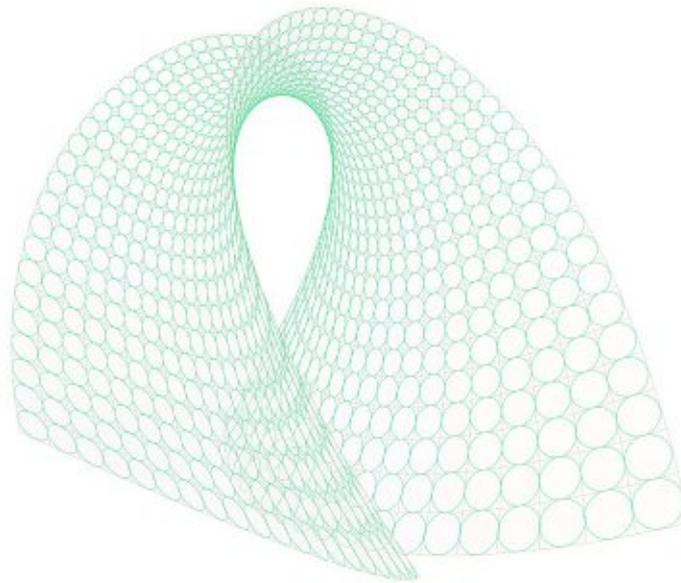


Abbildung 19: "Circle Packing" auf einer Enneper-Fläche (MW, 2020).

Minimalflächen sind Teil der isothermen Flächen. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie durch eine Parametrisierung  $(u, v)$  beschreibbar sind, in welcher die Iso-Parameterlinien Hauptkrümmungslinien darstellen und eine konforme Abbildung von der  $u, v$ -Parameter-Ebene zur eigentlichen Fläche besteht (vgl. Schling, et al., 2018: 5). Eine Parameterlinie erhält man, wenn ein Parameter der beiden Flächenparameter konstant gesetzt wird und der Zweite ein Intervall durchläuft. Parameterlinien sind im Allgemeinen krummlinig. Nachdem Minimalflächen aber isotherme Flächen sind, besitzen sie Parametrisierungen, in welchen die Parameterlinien rechtwinklig aufeinander stehen und den Hauptkrümmungslinien folgen. Die Hauptkrümmungslinien können somit vergleichsweise einfach extrahiert werden. Nachdem die asymptotischen Kurven die Hauptkrümmungslinien in der Winkelhalbierenden schneiden, können diese ebenfalls, durch die Einführung von Diagonalen ermittelt werden. Abbildung 19 zeigt eine isotherm parametrisierte Enneper-Fläche. Wir erkennen, dass wir in jedes Flächensegment, welches durch Flächenunterteilung durch die Hauptkrümmungslinien entsteht, einen Inkreis so setzen können, dass dieser jede Kante des umgebenden Flächenstücks berührt. Diese geometrische Einbettung wird, wenn wir in den späteren Kapiteln eine Minimalfläche als Basisgeometrie einer baulichen Struktur betrachten, sehr viele Vorteile mit sich bringen.

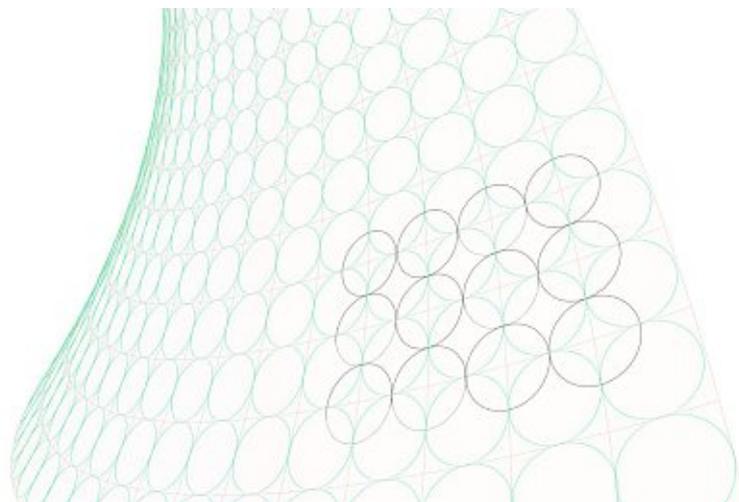


Abbildung 20: Inkreise als „Circle Packing“ (MW, 2020).

## Diskussion

Der große Vorteil der Modellierung von Minimalflächen über parametrische Repräsentation ist, dass die Iso-Parameterlinien für die weitere Verarbeitung direkt herangezogen werden können und die Flächen exakte Minimalflächen darstellen. Aus entwerfender Sicht ist dieser Prozess aber sehr unintuitiv. Eine Fläche kann zufällig für die geplante Aufgabe geeignet sein oder nicht. Es stehen kaum Möglichkeiten zu Verfügung, den Entwurf nach äußeren Bedürfnissen zu gestalten.

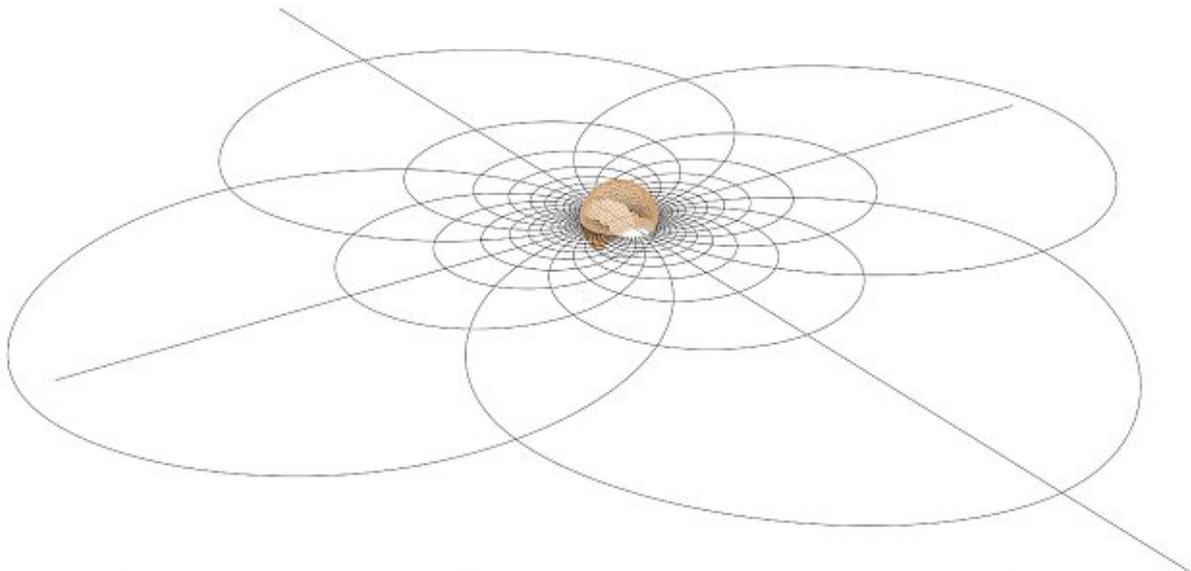


Abbildung 21: Stereographische Projektion der Gauß-Abbildung einer Enneper-Fläche in  $xy$ -Ebene (MW, 2020).

## Physisches Modell

Die asymptotischen Kurven werden direkt als Referenzachsen für die Trägererzeugung herangezogen. Um Flächenstreifen zu erhalten, wird jede Kurve in einer angemessenen Auflösung unterteilt. An den Unterteilungspunkten wird die Basisfläche analysiert und deren Normalvektoren bestimmt. Entlang dieser Normalvektoren errechnen wir Linien, deren Mittelpunkte auf der Basisfläche liegen. Die Richtung der Linien entspricht der zugehörigen Flächennormale und die Länge der gewünschten Trägerhöhe.

Damit die Enneper-Fläche unseren Bedürfnissen als Schale besser entspricht, wird sie mit zwei im Raum allgemein stehenden Ebenen sowie einer horizontalen Ebene getrimmt. Die Randkurven werden als allgemeine Kegelflächen modelliert.

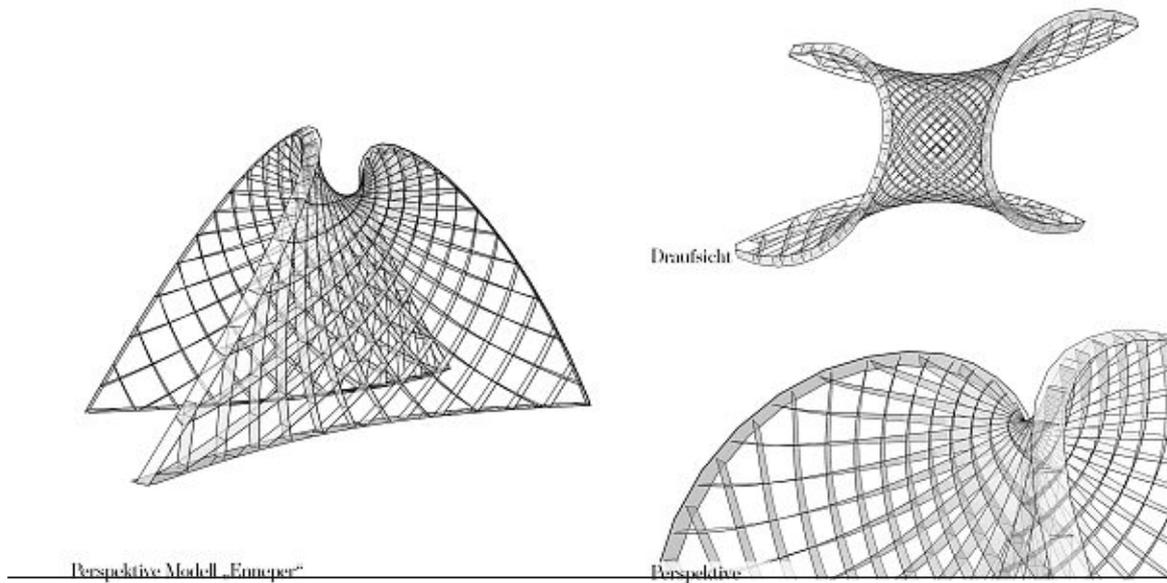


Abbildung 22: Trägermodellierung durch Extrusion der Unterteilungspunkte entlang der Flächennormalen (MW, 2020).

Dieses Modell ist nun das Basismodell für das weitere Papierstreifenmodell. Sämtliche Produktionsdateien, wie Abwicklung, Einschlitzung und Beschriftung sind parametrisch implementiert. Die Streifen werden mit einem Lasercutter geschnitten und anschließend manuell zusammengebaut.



Abbildung 23: Automatisierte Erzeugung der Produktionsgeometrie für das weitere Laserschneiden (MW, 2020).



Abbildung 24: Entstehungsprozess Modell „Enneper“ (MW, 2020).

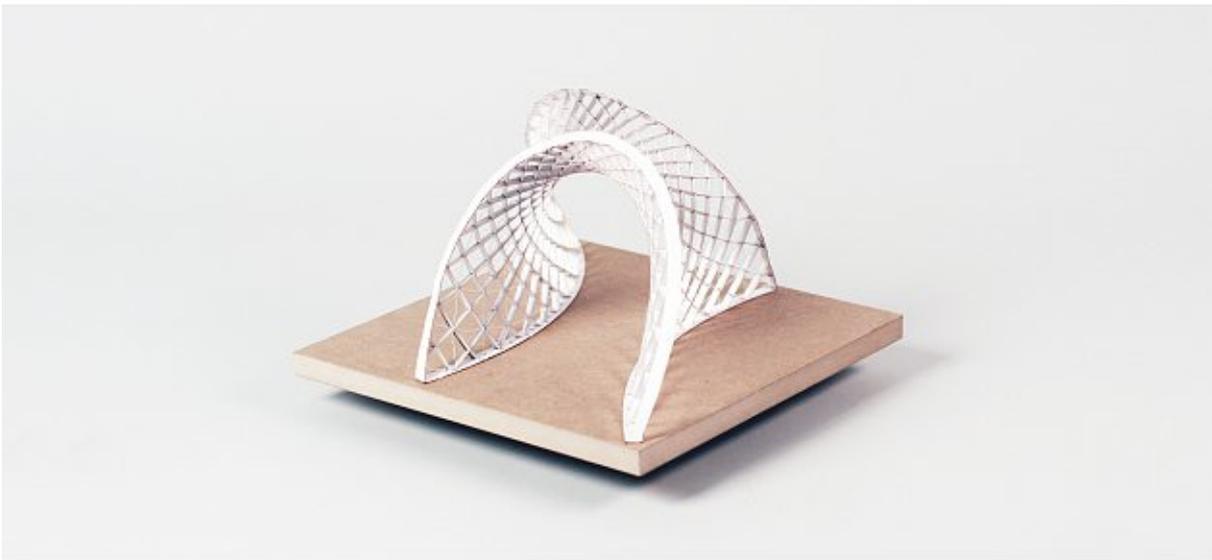
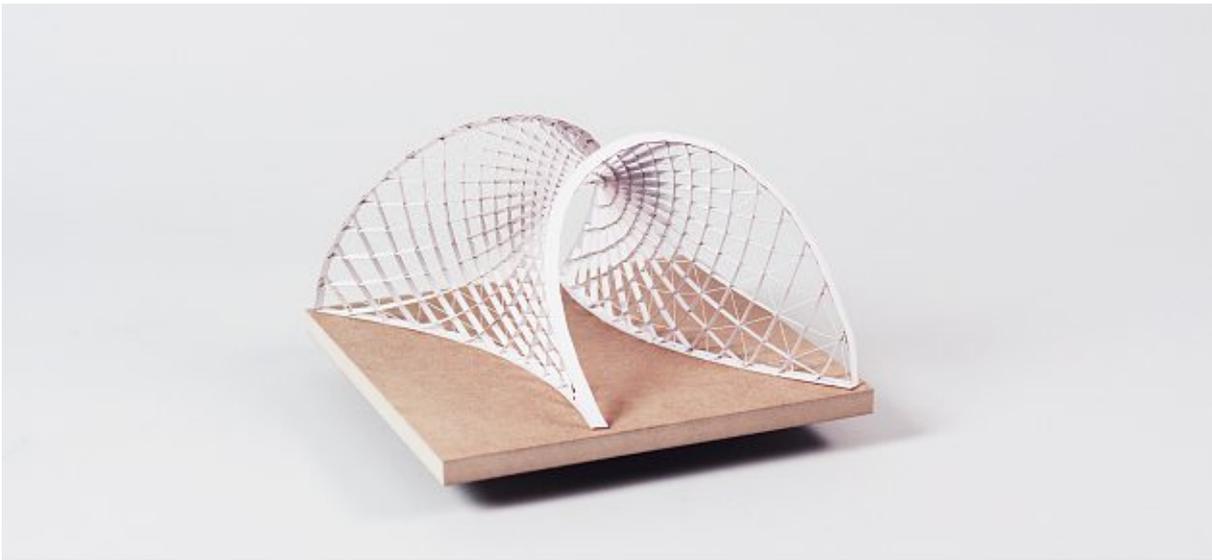


Abbildung 25: Modellfotos „Enneper“ (MW, 2020).

## 3.2. Minimalflächen durch digitale physikalische Formfindung: Modell „Monroe“

Nach Pottmann et. al (2007: 655) können die im vorigen Abschnitt erläuterten Gleichungen alle möglichen Minimalflächen erzeugen, sie erschließen aber nicht Plateaus Problem, der Suche nach einer Fläche mit minimalem Flächeninhalt zu einer gegebenen Raumkurve, im eigentlichen Sinn. Dieses kann aber über Optimierungsalgorithmen gelöst werden. Hier haben wir eine gegebene Randkurve, erzeugen ein Fläche, oder ein Netz mit der Kurve als Umrandung und wenden einen Algorithmus an, welcher durch Minimierung des Flächeninhalts und der mittleren Krümmung eine Minimalfläche erzeugt.

Gängige Werkzeuge für diesen Ansatz zur Konstruktion von Minimalflächen sind der „Surface Evolver“ von K. Brakke (Brakke, 1992) oder das hier verwendete Grasshopper Plugin „Kangaroo Physics“ von D. Piker (Piker, 2013).

### 3.2.1. Formfindung und digitale Umsetzung

#### Erzeugung der Basisfläche

Die digitale, geometrische Basisfläche für das Modell „Monroe“ wurde mit „Kangaroo Physics“ wie folgt erzeugt: Aus vier Randkurven wird eine Fläche aufgespannt. Diese Fläche wird in ein trianguliertes Netz umgeformt. Diesem Netz werden Optimierungsziele zugewiesen, wobei das größte Gewicht („*strength*“) den Zielen „*Soap Film*“ und „*Tangential Smooth*“ zugewiesen wird. Diese bewirken einen Ausgleich hinsichtlich einer verschwindenden mittleren Krümmung. Nach der Optimierung wird das Netz wieder in den Typ Fläche ummodelliert. Jedoch ist ihre Parametrisierung nicht isotherm. Auch „Monroe“ wird mit einer horizontalen Ebene getrimmt, um den strukturellen Anforderungen einer Schale gerechter zu werden.

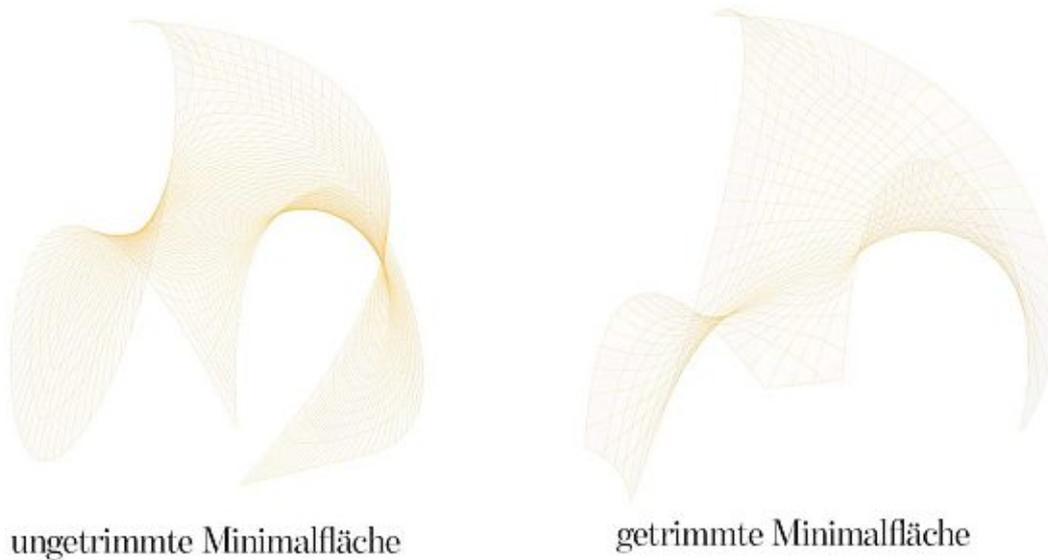


Abbildung 26: Ungetrimmte und getrimmte Minimalflächen als Basisflächen für das Modell „Monroe“ (MW, 2020).

In Abbildung 25 sind die Iso-Parameterlinien der Fläche „Monroe“ dargestellt. Wir können schnell erkennen, dass die Parametrisierung nicht dazu geeignet ist, Hauptkrümmungslinien und asymptotische Linien direkt zu extrahieren. Sie folgen weder den Hauptkrümmungslinien noch stehen sie rechtwinklig zueinander.

## Erzeugung des Gitters aus Hauptkrümmungslinien und asymptotischen Linien

In diesem Abschnitt wird das sogenannte „*curve tracing*“ als weitere Methode, um Hauptkrümmungslinien und asymptotische Linien zu erzeugen, vorgestellt. Das Rhino Plugin „*Evolute Tools*“ bietet eine Funktion (*etExtractCurvatureLines*) zur Extraktion dieser Linien. Ebenso wurde im Grasshopper-Forum ein VB-Skript für Grasshopper/Rhino zur Erstellung von Hauptkrümmungslinien (Rutton & Gregson, 2011) und asymptotischen Kurven (Schling, 2016) zu Verfügung gestellt.

Wie in 2.3.2 unter dem Abschnitt „Asymptotische Kurven“ bereits erläutert, steht hinter dieser Konstruktionsmethode das Prinzip der punktweisen Konstruktion einer Kurve. Dadurch können wir zwar an jedem beliebigen Punkt auf der Basisfläche asymptotische Linien und Hauptkrümmungslinien konstruieren, jedoch ist diese Methode recht anfällig hinsichtlich Ungenauigkeiten. Einerseits trägt unsere über Formfindung erstellte Fläche bereits Ungenauigkeiten in sich, andererseits birgt jeder Iterationsschritt der Punkterstellung Toleranzen in sich.

Bevor wir damit starten das Netz auszulegen, widmen wir uns kurz strategischen Überlegungen zur Startposition der Netzgenerierung. Es kann aus ästhetischer Sicht, bei symmetrischen Basisgeometrien explizit erwünscht oder unerwünscht sein, das Netzlayout anhand dieser Symmetrie auszurichten. Zudem haben planare Flächenpunkte einen großen Einfluss auf die Netzästhetik. Dort entstehen Nabelpunkte (*singularities*), die dadurch ausgezeichnet sind, eine abweichende Knotenvalenz zu besitzen. In einem „*quad-dominant Mesh*“, also einem Netz, das regulär aus Vierecken besteht, laufen im Normalfall vier Kanten in einem Punkt zusammen. Singularitäten weichen von dieser Knotenvalenz ab.

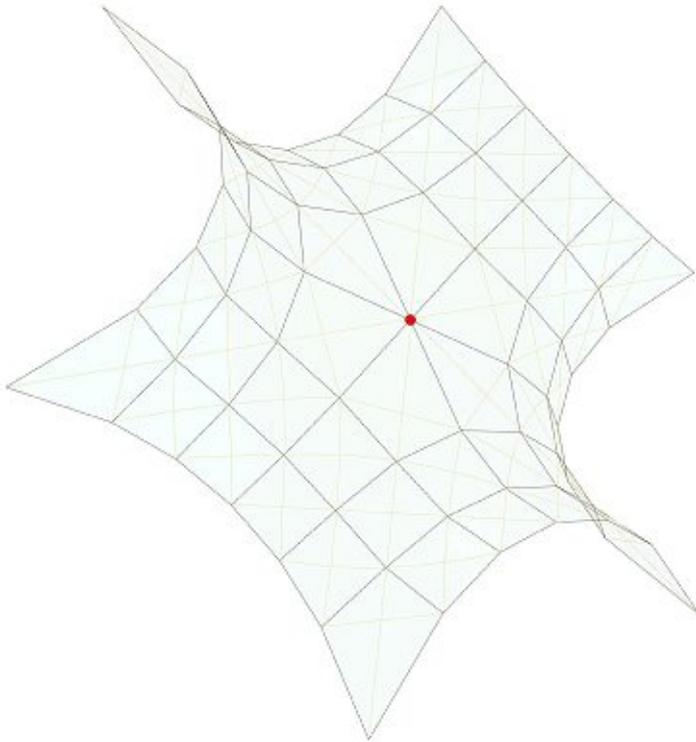


Abbildung 27: Singularität mit einer Knotenvalenz von sechs in einem vierecks-dominierenden Netz (MW, 2020).

Singularitäten entstehen auf Flächenpunkten mit einer Gauß-Krümmung von null. Für die Ermittlung solcher Punkte wird die folgende Methode angewandt: Anhand der Flächenästhetik und der Visualisierung der Gauß-Krümmung können Regionen auf der Fläche, an denen Singularitäten potenziell auftreten abgeschätzt, werden. Die Parameterdomäne dieses Bereiches wird als eingrenzendes Variablenspektrum evaluiert. Mit einem Evolutionären Solver (Rutton, 2010) wird ein Optimierungsziel hinsichtlich einer Minimierung der Gauß-Krümmung formuliert und berechnet. Als Output wird ein Punkt mit verschwindender Gauß-Krümmung in diesem Bereich vorgeschlagen.

An diesem Punkt ausgerichtet können wir, wie in Abbildung 28 dargestellt, nun mit der Netzauslegung starten. Wir konstruieren durch den Nabelpunkt asymptotische Linien und Hauptkrümmungslinien. Anschließend setzen wir eine Kugel mit Mittelpunkt im Nabelpunkt. Der Kugelradius spezifiziert die Zellengröße des gesamten Netzlayouts. Die Kugel wird mit den bisher erstellten Hauptkrümmungslinien geschnitten. Die entstandenen Schnittpunkte dienen als Basispunkte für neue Hauptkrümmungslinien und asymptotische Linien. Dieses Prinzip können wir nun iterieren, bis die gesamte Fläche durch das Netz unterteilt wurde.

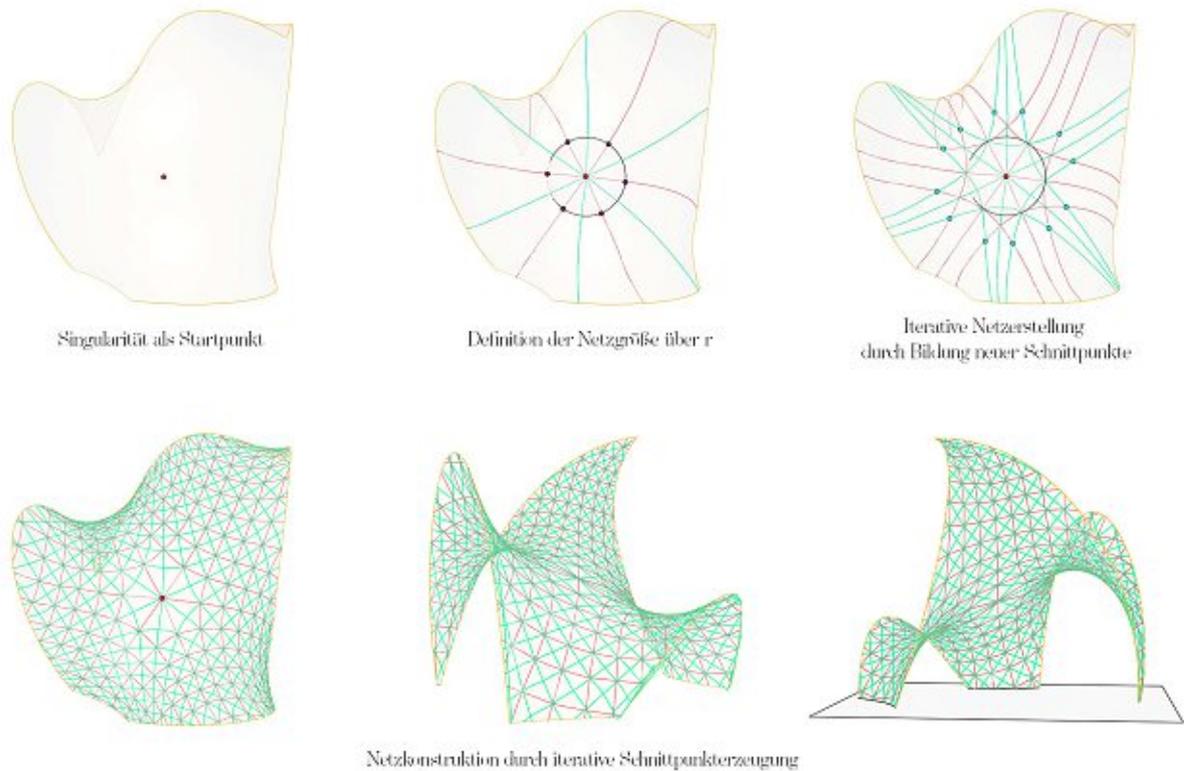


Abbildung 28: Netzkonstruktion durch iterative Schnittpunktbildung (MW, 2020).

## Diskussion

Der große Vorteil an der Erzeugung von Minimalflächen als Optimierungsverfahren liegt in der intuitiven Gestaltungsmöglichkeit und Anpassungsfähigkeit der Flächen. Der Optimierungsvorgang verläuft zeitlich unmittelbar und wir können die Fläche quasi in Echtzeit modellieren. Jedoch, wie bereits erwähnt, trägt diese Methode, unter Anderem abhängig von der Auflösung und Modellierung des Basisgitternetzes, bereits Ungenauigkeiten in sich. Dazu kommen noch die Toleranzen aus der Methode der punktwisen Konstruktion von asymptotischen Linien und Hauptkrümmungslinien.

Weiters ist die iterative Konstruktion des Gitternetzes recht arbeitsintensiv. Theoretisch ist eine Formulierung, die dieses Verfahren automatisiert, leicht möglich. Praktisch hindern genau diese Ungenauigkeiten den automatisierten Ablauf, da zum Beispiel Schnittpunkte, wie Abbildung 29 zeigt, nicht mehr eindeutig sind und somit weitere Iterations- oder Abbruchformulierungen nicht mehr ausgelöst werden.



Abbildung 29: Ungenauigkeiten der punktwisen Konstruktion asymptotischer Linien und Hauptkrümmungslinien (MW, 2020).

## Physisches Modell

Um aus den gebogenen Stabachsen Flächenstreifen zu erstellen, wird dasselbe Prinzip, wie in 3.1 Physisches Modell, angewandt. Die Randkurven werden als abwickelbare Kegel- und Tangentialflächen modelliert.

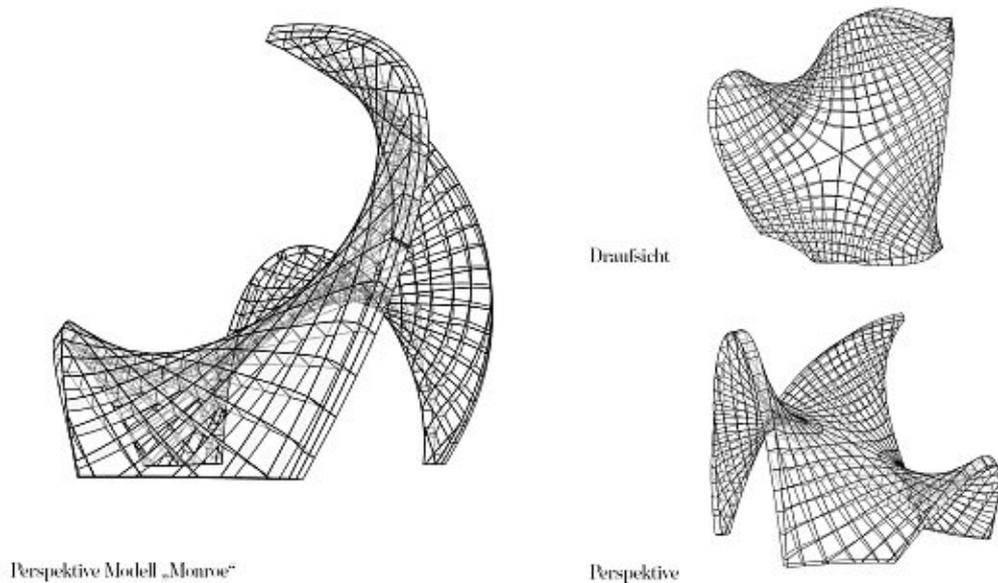


Abbildung 30: Digitales Streifenmodell „Monroe“ (MW, 2020).

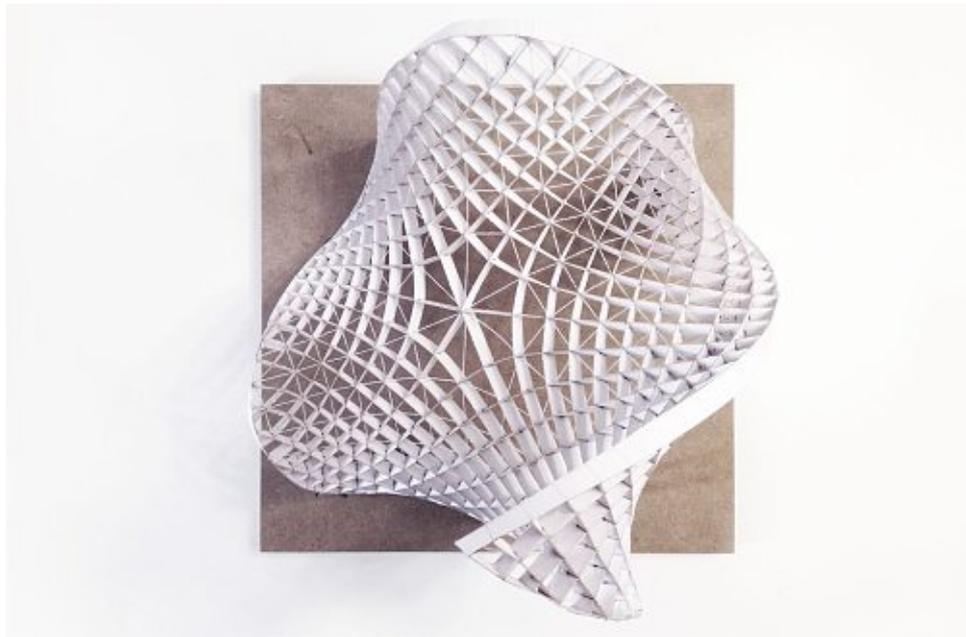


Abbildung 31: Draufsicht Modell „Monroe“ (MW, 2020).



Abbildung 32: Innenperspektive Modell „Monroe“ (MW, 2020).

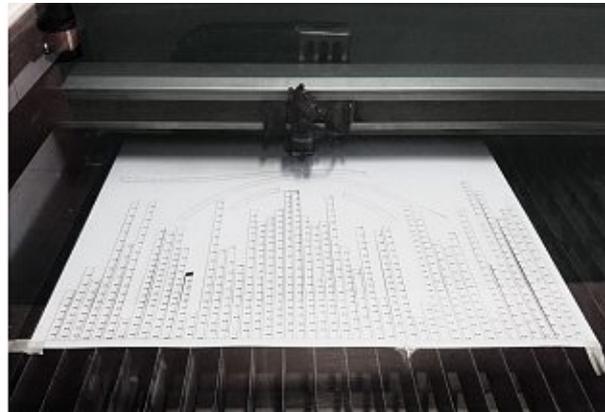
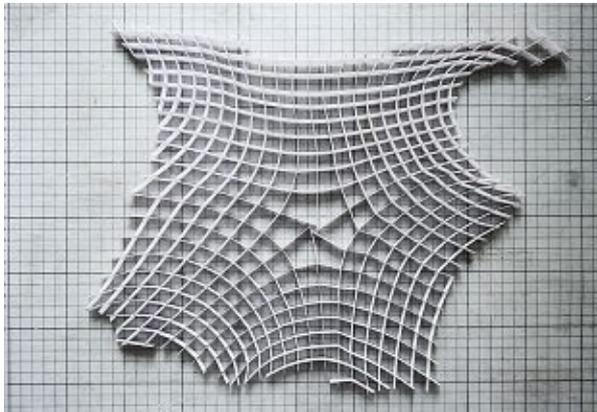


Abbildung 33: Links.: Flacher Zustand des vormontierten Modells „Monroe“. Rechts: Streifenproduktion im Lasercutter (MW, 2020).



Abbildung 34: Modellfoto „Monroe“ (MW, 2020).

### 3.3. Diskrete Minimalflächen aus polyedrischer Diskretisierung einer Kugel

Die Vorteile, ein diskretes Model einer Minimalfläche zu erhalten, anhand derer Flächenstreifen oder spätere Träger ausgerichtet werden, wurden bereits erläutert. Dieser Abschnitt widmet sich einer eleganten Methode, welche Vierecksnetze bereits als eine diskrete Version einer Minimalfläche, mit entlang der Hauptkrümmungslinien ausgerichteten Kanten, aufgrund ihres Grundtyps darstellt.

Wir haben bereits erkannt, dass wir die Gauß-Abbildung einer kontinuierlichen Minimalfläche als konforme Transformation erhalten. Dasselbe gilt für den diskreten Fall. Zusätzlich können wir den Weg auch umgekehrt gehen und über eine konforme Transformation einer geeigneten diskreten Gauß-Abbildung eine diskrete Minimalfläche erhalten.

Wenn wir uns mit diskreten Gauß-Abbildungen beschäftigen befassen wir uns mit Möglichkeiten eine Kugel polyedrisch zu beschreiben. Im Vorfeld sei erwähnt, dass wir grundsätzlich zwischen drei Typen polyedrischer Diskretisierungen der Kugel unterscheiden können: „*Circular Meshes*“, „*Conical Meshes*“ und „*Koebe Meshes*“. Aus allen drei Typen können wir diskrete Minimalflächen erhalten. Wir beschäftigen uns hier mit dem dritten Typ, dem Koebe-Polyeder. In Teil III werden wir noch einmal auf diese drei Typen der Diskretisierung treffen.

Die diskreten Minimalflächen, mit denen wir uns hier weiter beschäftigen heißen „diskrete Minimalflächen des Typs Koebe“. Auch diese weisen eine starke Verbindung zu „*Circle patterns*“ auf, eine Ahnung dazu haben wir bereits in 3.1.1 erhalten (vgl. Bobenko, et al., 2017: 7).

Ein Koebe-Polyeder ist ein Netz, dessen Kanten eine Kugel tangential berühren. Das Schnittbild der Flächen (*faces*) ergibt Kreise, welche Inkreise der Flächen darstellen. Solche Netze haben besondere „*Offset*“-Charakteristika (vgl. Pottmann, et al., 2007: 698). Diese werden weiter in Teil III erläutert. Wendet man auf das Koebe-Mesh eine Christoffel Transformation, welche wir nachfolgend detaillierter beleuchten, an, erhalten wir dessen Dual, eine diskrete Minimalfläche.

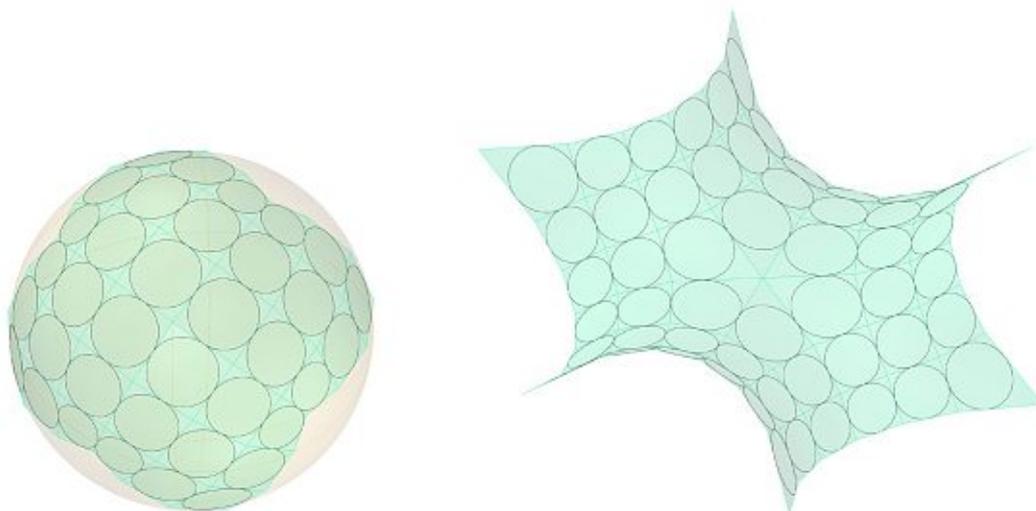


Abbildung 35: Koebe-Polyeder und transformierte diskrete Minimalfläche (MW, 2020).

### 3.3.1. Formfindung und digitale Umsetzung

#### Erzeugung eines Koebe-Polyeders

Die hier verwendete digitale Routine basiert auf einem Workflow, welcher von Piker (2019) entwickelt wurde. Die Implementierung erfolgt in der Umgebung Grasshopper mit Zuhilfenahme des Physics- Solver „Kangaroo“. Ein reguläres Polyeder wird als Basispolyeder als Typ Netz deklariert. Dieses wird als Input für eine Optimierung herangezogen. Die Ziele, „Isotherm“ und „LineTangentToSphere“ bewirken als Optimierung eine Transformierung des Netzes derartig, dass die Netzflächen (*faces*) jeweils einen Inkreis besitzen, der alle anliegenden Kanten berührt (*isotherm*) und die Kanten (*edges*) tangential an eine Kugel ausgerichtet sind.

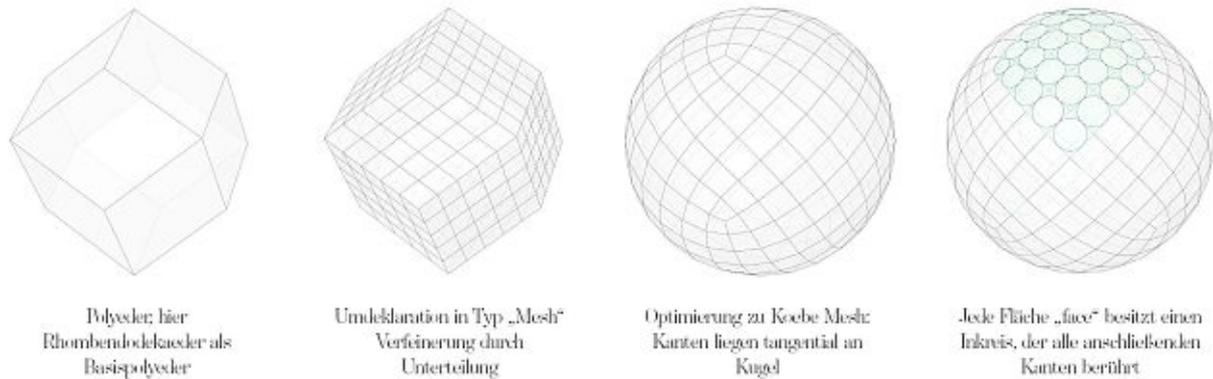


Abbildung 36 Konstruktion Koebe-Netz. (MW, 2020, auf Basis von Piker, 2019)

#### Modellierung des Christoffel-Duals

So ein-Koebe Netz besitzt ein reziprokes, paralleles Netz, welches eine diskrete Minimalfläche darstellt. Zwei Netze werden als parallel zueinander bezeichnet, wenn es eine kombinatorische Äquivalenz gibt, also eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen den Knoten, Kanten und Facetten, und wenn deren korrespondierenden Kanten parallel sind (vgl. Pottmann, et al., 2007: 688).

Die Konstruktion dieses parallelen Netzes können wir sehr gut veranschaulichen, indem wir eine Facette (face) aus dem Netz extrahieren.  $Q = 1^*2^*3^*4^*$  ist eine Vierecks-Facette des Koebe-Meshes  $S$ .

Wir erzeugen die jeweiligen Diagonalen aus  $1^*3^*$  und  $2^*4^*$ . Die parallele Facette  $Q$  hat nun eine umgekehrte Orientierung  $Q^* = 1^*4^*3^*2^*$ , die Diagonalen von  $Q^*$  sind parallel zu  $Q$ . Abbildung 37 illustriert diesen Vorgang.

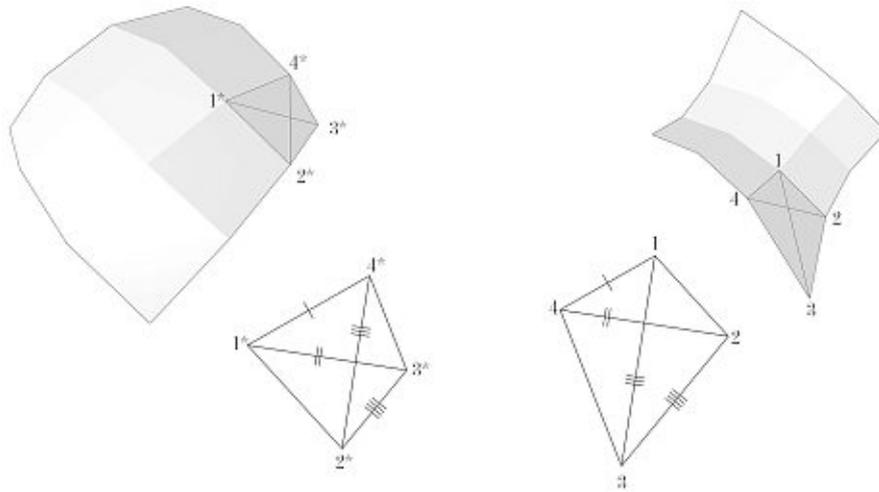


Abbildung 37: Eine Vierecks-Facetten  $Q^*$  und dessen parallele-Vierecks Facetten  $Q$  (MW, 2020, auf Basis von Pottmann, et al., 2007: 700).

Bemerkenswert ist, dass jede Vierecks-Facetten von  $Q^*$  samt Inkreis impliziert, dass auch die Facetten der diskreten Minimalfläche Inkreise in sich tragen (vgl. Pottmann, et al., 2007: 702).

Weiters ist markant, dass wir die Methode, welche in Abbildung 37 illustriert wurde, sowohl vom Koebe-Mesh zu diskreter Minimalfläche, aber auch reziprok, von Minimalfläche zu Koebe-Mesh anwenden können. Aufgrund dieser Dualitätsbeziehung sind die beiden Netze Christoffel-Duale. Die Transformation wird auch Christoffel-Transformation genannt. Das Koebe-Mesh kann zudem als diskrete Gauß-Abbildung der diskreten Minimalfläche interpretiert werden.

Um diese Transformation zu automatisieren wurde von der Autorin ein C#-Knoten innerhalb der Scripting-Umgebung Grasshopper programmiert. Über die Transformation hinaus wurde, um das Netz für die Transformation vorzubereiten ein Sortierungsalgorithmus implementiert, welcher die Knotenreihenfolge und Facettenreihenfolge im Falle einer inkohärenten Sortierung adjustiert.

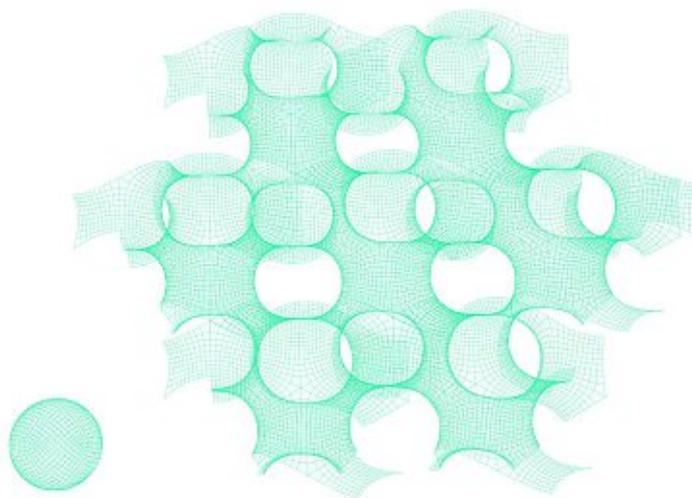


Abbildung 38: Koebe-Netz und dessen paralleles Netz führen zu einem Gyroid als diskrete Minimalfläche (MW, 2020).

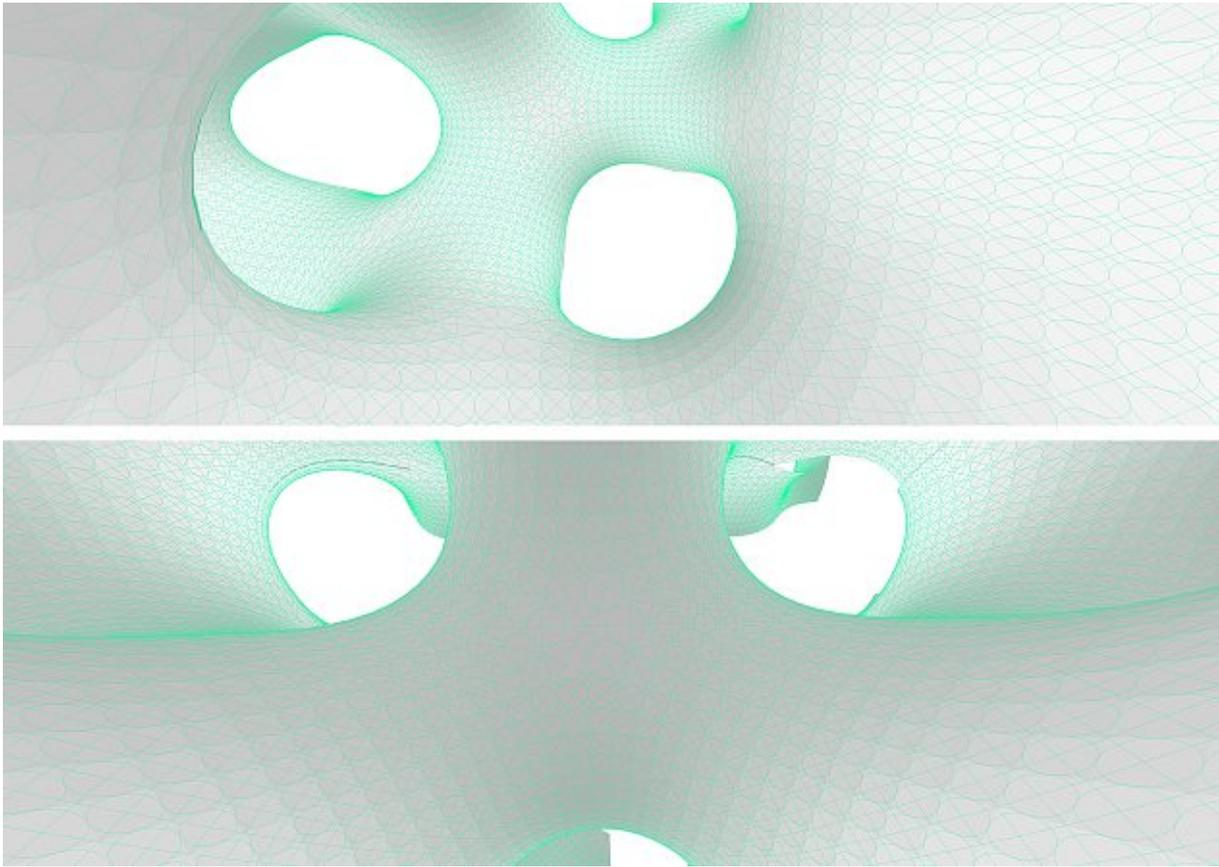


Abbildung 39: Gyroid als diskrete, quasiisotherme Minimalfläche (MW, 2020).

### Erzeugung der asymptotischen Kurven

Das Netzlayout ist an den diskreten Hauptkrümmungslinien ausgerichtet. Daher erhalten wir, indem wir die Diagonalen einer Facette konstruieren, die zugehörigen diskreten asymptotischen Kurven. Durch die Verwendung von interpolierten NURBS- Kurven erhalten wir das kontinuierliche Analogon. Die Flächenstreifen werden anhand der Knotennormalen orientiert.

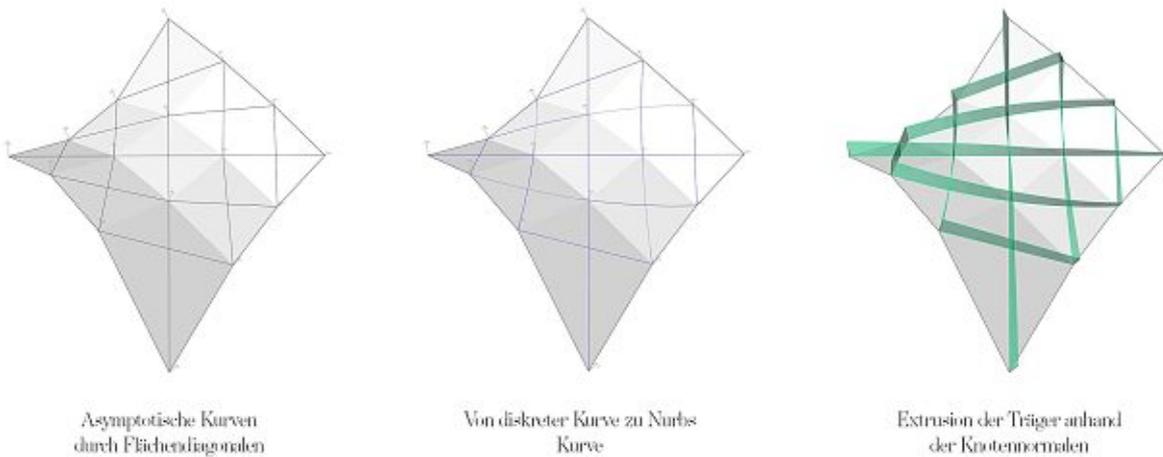


Abbildung 40: Erzeugung asymptotischer Träger auf diskreter Minimalfläche (MW, 2020).

## Physisches Modell

Um auch diese Methode zur geometrischen Modellierung zu testen wurde das Modell „Luv und Lee“ entwickelt. Es basiert auf eine Christoffel Transformation eines Koebe Polyeders, welche zu einer Schwarz P Fläche führt.

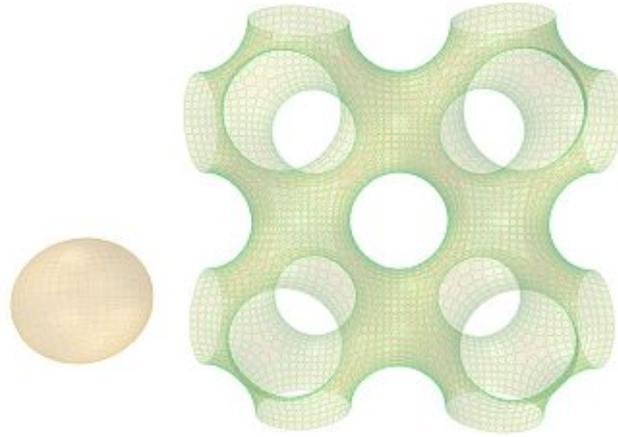


Abbildung 41: Quasiisotherme Schwarz Fläche als Referengeometrie für Modell „Luv und Lee“ (MW, 2020).

Zwei Schalen werden aus der periodischen Fläche ausgeschnitten und kompositorisch arrangiert, so dass sie aneinander lehnen. Die Randkurven bestehen aus planaren Flächen oder allgemeinen Kegelflächen.

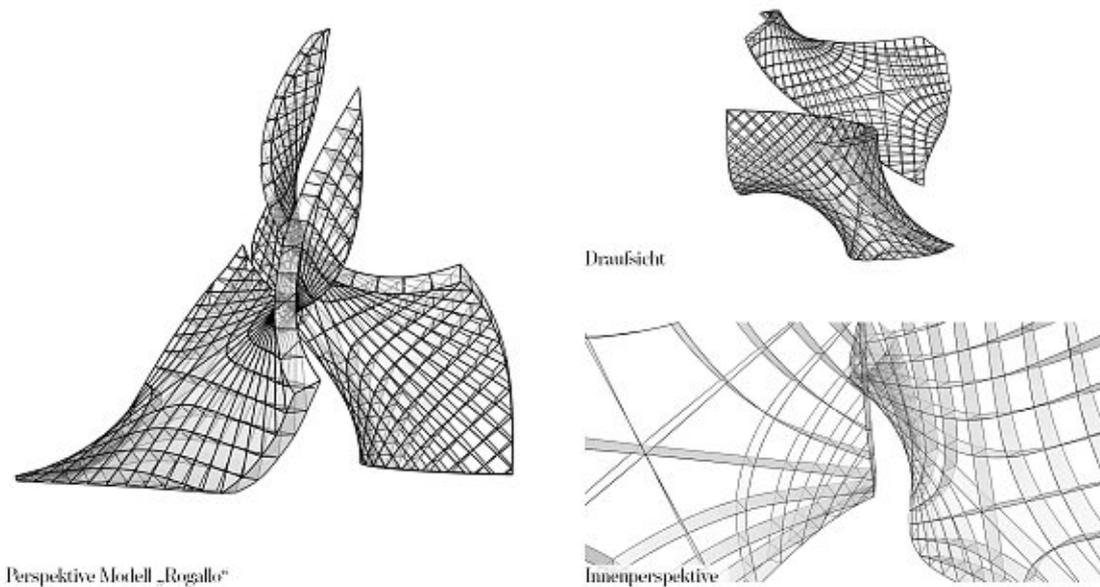


Abbildung 42: Digitales Modell „Luv und Lee“ (MW, 2020).

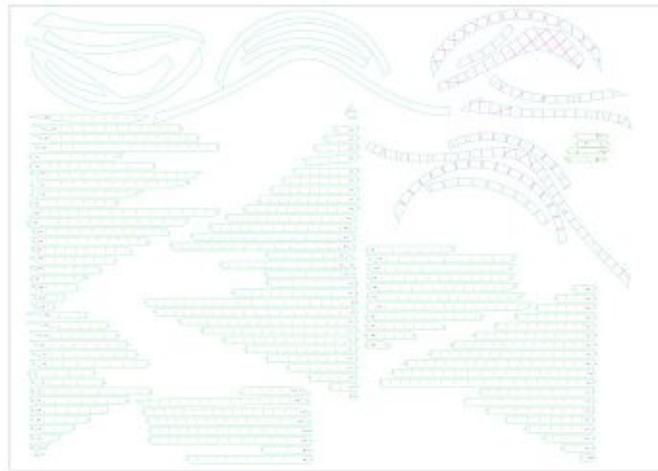


Abbildung 43: Abwicklung des Modells „Luv und Lee“ als Basis der Produktionsdateien für das weitere Laserschneiden (MW, 2020).



Abbildung 44: Entstehungsprozess „Luv und Lee“ (MW, 2020).

## Diskussion

Der große Vorteil der Erzeugung von diskreten Minimalflächen als Duale der isothermen Parametrisierung einer Kugel besteht darin, dass wir sehr exakte Modelle erhalten. Es ist sehr erstaunlich, wie mächtig ein „circle packing“ auf einer Kugel hinsichtlich weiterer geometrischer Konsequenzen ist.

Die Formerstellung ist nicht so intuitiv, wie die Variante, mit Hilfe von Optimierungsalgorithmen Minimalflächen zu erstellen, jedoch ist die Genauigkeit des Modells viel exakter und weniger umständlich.

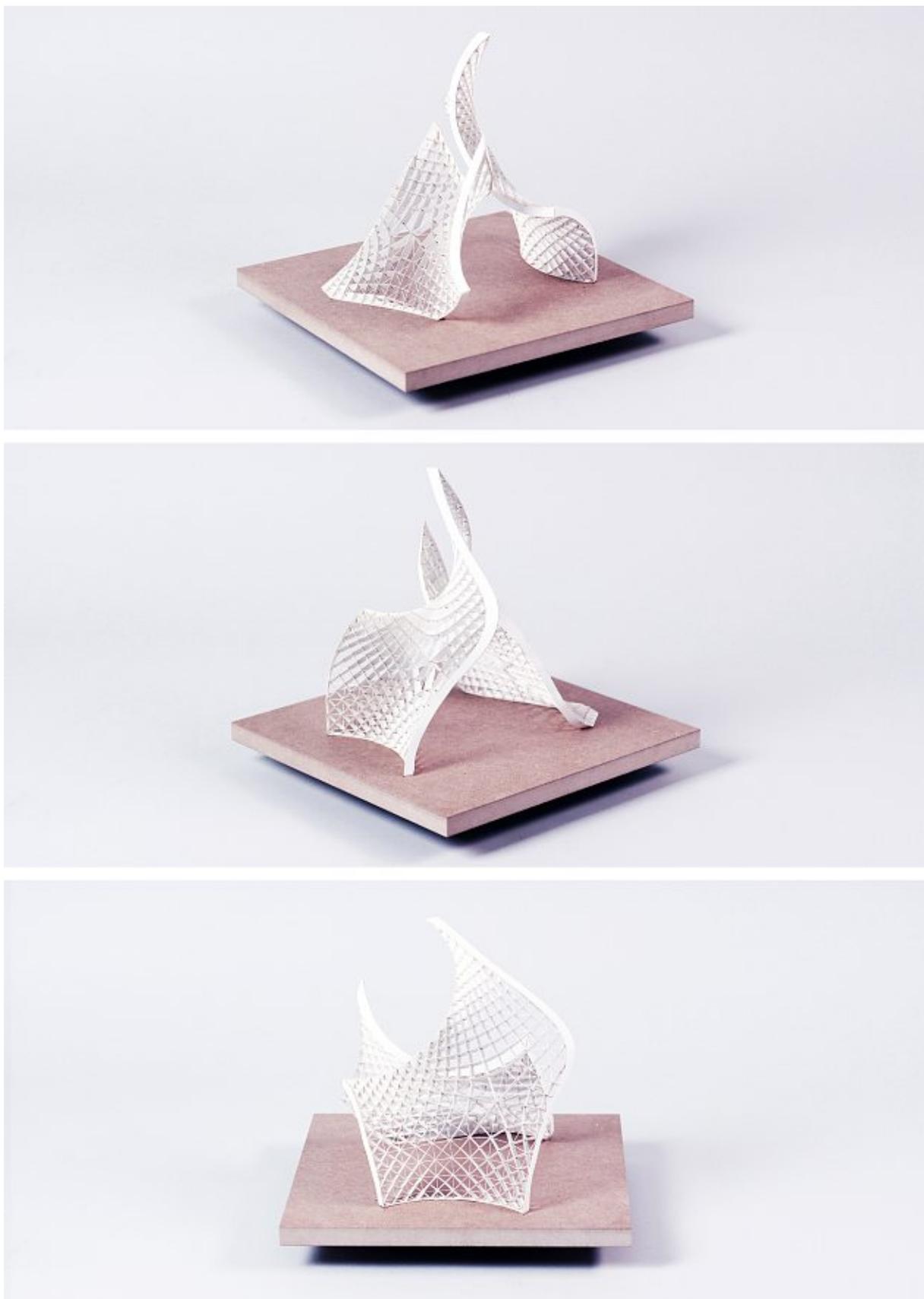


Abbildung 45: Modellfotos Modell „Luv und Lee“ (MW, 2020).

## II. Evaluierung einer Gesamtstruktur

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns damit, die bisher maßstabslose Geometrie Asymptotischer Gitterschalen durch Materialisierung, konstruktive Gestaltung und tragstrukturelle Evaluierung in einer baulichen Primärstruktur weiterzudenken. Ich versuche das in einer Sensibilität zu tun und stets das Entstehen, Betreiben und Verschwinden einer solchen Struktur in Betracht zu ziehen. Im Tragwerk, der Primärkonstruktion, sehe ich das Potenzial für architektonische Artikulation und die Fähigkeit, einem Raum einen identitätsstiftenden Charakter und Atmosphäre zu verleihen. In der Materialisierung und Konstruktion ist mir wichtig, technische Anforderungen in ihrer formativen Rolle ernst zu nehmen, sie als Design-Driver wahrzunehmen und sie in integrativen Elementen umzusetzen. Und elegante Lösungen anzubieten, so dass das Bauteilgefüge einer ihr selbst innenwohnenden Logik folgt.

### Einführung der Fallstudie „Enneper“

Als Referenzobjekt, auf dessen Basis wir Konzepte zur konstruktiven Gestaltung und Tragwerksevaluierung entwickeln, eignet sich eine sehr reguläre Fläche zu verwenden, bei der wir uns in erster Linie auf Standard Sachverhalte konzentrieren können und uns nicht zu sehr mit der Bewältigung von Ausnahmen beschäftigen.

Das Modell „Enneper“, welches wir geometrisch schon im Abschnitt 3.1. erfasst haben eignet sich sehr gut als Referenzobjekt für die Entwicklung solcher Konzepte.

Zunächst holen wir uns noch einmal die Fläche als geometrisches Modell ins Gedächtnis

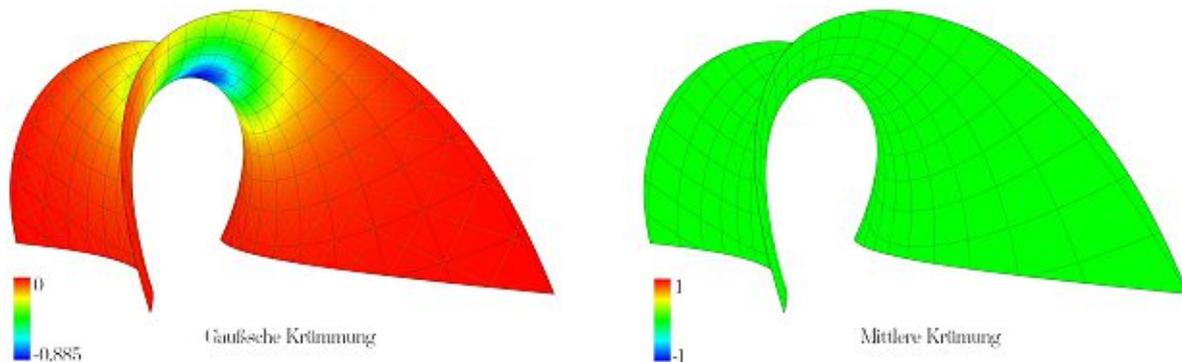


Abbildung 46: Gauß-Krümmung und mittlere Krümmung des Modells "Enneper" (MW, 2020).

In Abbildung 46 ist zu sehen, dass die Gauß-Krümmung stets kleiner als null ist, wir haben es also mit einer anitklastischen Fläche zu tun. Nachdem es sich hier um eine Minimalfläche handelt, ist die mittlere Krümmung null. In der linken Grafik der Abbildung 46 blau dargestellt erkennen wir im Sattel eine Region, deren Gauß-Krümmung ein Extremum darstellt. In dieser Region können wir eine hohe Torsion der Träger erwarten.

Das geometrische Modell wird zunächst in eine adäquate Größe skaliert und variiert in seiner Spannweite zwischen 2.3 und 3.7 m, der Stich zwischen 3.3 und 4.1 m.



Abbildung 47: Visualisierung- Perspektive der Gesamtstruktur mit Sockel (MW, 2020).



Abbildung 48: Festlegung der Ausmaße des Modells „Enneper“ (MW, 2020).

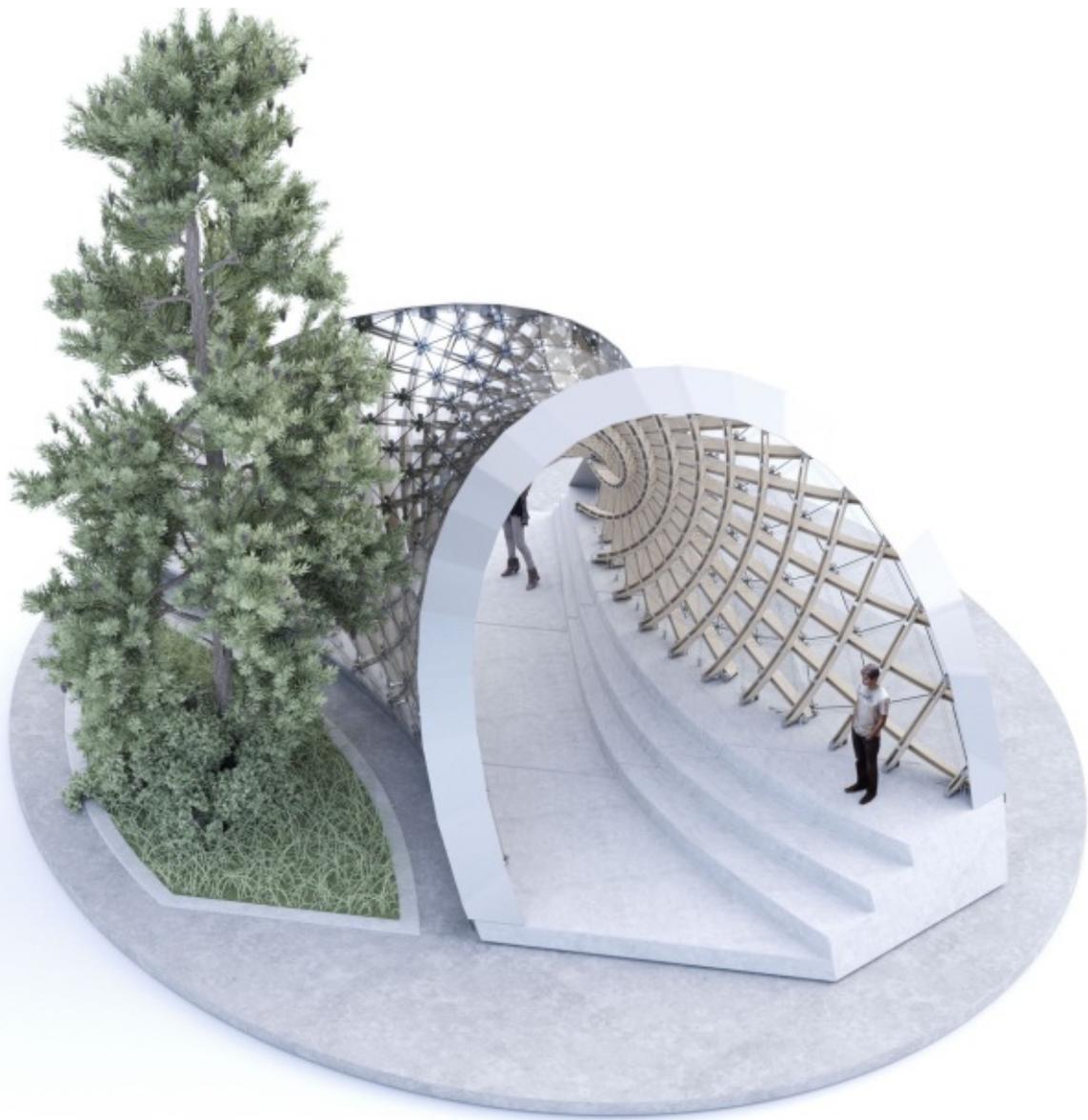


Abbildung 49: Visualisierung Gesamtstruktur „Enneper“ (MW, 2020)

## 4. Konstruktive Überlegungen

### 4.1. Konstruktive Elemente der Asymptotischen Gitterschale

#### 4.1.1. Träger

Die Achse der Hauptträger wird entlang der asymptotischen Kurven ausgerichtet. Die Bauteilorientierung erfolgt normal zur unterliegenden Basisfläche. Die Träger werden, um diesen Kurven zu folgen, um ihre schwache Achse gebogen und tordiert. Dies verlangt nach einer sehr geringen Bauteildicke und einem Material, welches flexibel und stark zugleich ist. Die beiden Variablen, die hierfür aussagekräftig sind, sind der E-Modul  $E$  und die maximal zulässigen Biegespannungen  $\sigma_{y,k}$ .

Lienhard definiert für aktiv gebogene Tragwerke jene Materialien als geeignet, die in einem Verhältnis von  $\frac{E}{\sigma} > 2.5$  stehen (vgl. Lienhard, 2014: 36).

| Metals:                   |                         |                               |       |
|---------------------------|-------------------------|-------------------------------|-------|
| Type                      | Flexural Strength [MPa] | Flexural Youngs Modulus [GPa] | Ratio |
| S245                      | 245                     | 210                           | 1.17  |
| S355                      | 355                     | 210                           | 1.69  |
| S450                      | 450                     | 210                           | 2.14  |
| S690                      | 690                     | 210                           | 3.29  |
| Spring Steel              | 1100                    | 210                           | 5.24  |
| Titanium                  | 340                     | 102                           | 3.33  |
| Aluminum                  | 330                     | 70                            | 4.71  |
| Timber:                   |                         |                               |       |
| Type                      | Flexural Strength [MPa] | Flexural Youngs Modulus [GPa] | Ratio |
| Spruce                    | 16                      | 8                             | 2     |
| Pine                      | 24                      | 11                            | 2.18  |
| Douglas                   | 30                      | 12                            | 2.5   |
| Western Hemlock           | 35                      | 13                            | 2.69  |
| Yellow Cedar              | 40                      | 15                            | 2.67  |
| Oak                       | 30                      | 10                            | 3     |
| Beech                     | 35                      | 10                            | 3.5   |
| Afzelia                   | 40                      | 11                            | 3.64  |
| Bongossi                  | 60                      | 17                            | 3.53  |
| GL24h                     | 24                      | 11.6                          | 2.07  |
| GL28h                     | 28                      | 12.6                          | 2.22  |
| GL32h                     | 32                      | 13.7                          | 2.34  |
| GL36h                     | 36                      | 14.7                          | 2.45  |
| Birch Plywood (6.4 mm)    | 50.9                    | 12.737                        | 4     |
| Birch Plywood (18 mm)     | 40.2                    | 10.048                        | 4     |
| Combi-Plywood (6.4 mm)    | 50.8                    | 12.69                         | 4     |
| Combi-Plywood (18 mm)     | 35.8                    | 8.95                          | 4     |
| Softwood Plywood (6.4 mm) | 29.1                    | 9.462                         | 3.08  |
| Softwood Plywood (18 mm)  | 23                      | 7.464                         | 3.08  |
| Bamboo                    | 213                     | 19.129                        | 11.13 |
| FRP:                      |                         |                               |       |
| Type                      | Flexural Strength [MPa] | Flexural Youngs Modulus [GPa] | Ratio |
| CRFP-HAT                  | 2800                    | 165                           | 16.97 |
| CRFP-IM                   | 2800                    | 210                           | 13.33 |
| CRFP-HM                   | 1350                    | 300                           | 4.5   |
| P E 23                    | 300                     | 23                            | 13.04 |
| GRFP-M                    | 80                      | 7                             | 11.43 |
| GRFP-MW                   | 120                     | 12                            | 10    |
| GRFP-FM/FMU               | 160                     | 15                            | 10.67 |
| NRFP                      | 101                     | 14.38                         | 7.02  |

Abbildung 50: Verhältnis E-Modul zu Biegefestigkeit (Lienhard, 2014: 35, basierend auf Ashby, 2005).

Für Anwendungen mit aktiver Bauteilbiegung eignen sich vor allem Sperrholz und faserverstärkter Kunststoff. Aufgrund der ökologischen Verträglichkeit, Verfügbarkeit und einem sehr guten Verhältnis des E-Moduls zu Biegefestigkeit wird für die Primärträger Birkenperrholz mit einer Bauteildicke von 9 mm und einer Höhe von 160 mm festgelegt.

Um die Tragfähigkeit zu vergrößern und gleichzeitig die Flexibilität des Bauteils zu bewahren, werden die Träger in doppelter Ausführung als Trägerpaar mit einem lichten Abstand von 45 mm entlang der asymptotischen Kurven ausgeführt. Dies ermöglicht, die Träger nach der Errichtung in gewissen Abständen mit Scherblöcken zu koppeln und mit einem zentralen Knotenstab zu verbinden. Die beiden Richtungen der asymptotischen Kurven werden auf zwei Ebenen symmetrisch hinsichtlich der Basisfläche angeordnet. So kann die maximale Bauteilhöhe zur statischen Bemessung herangezogen werden.

#### 4.1.2. Spannglieder

Zur Aussteifung der Struktur werden Stahlseile, welche dem Layout der Hauptkrümmungslinien folgen und somit das Layout der asymptotischen Träger triangulieren, angebracht. Dadurch wird die Schubsteifigkeit in der Ebene gegeben. Zusätzlich werden die Spannseile vorgespannt und erhöhen somit die Eigenspannung der Struktur. Die tragstrukturellen Effekte daraus werden ausführlicher in 5.2 erörtert.

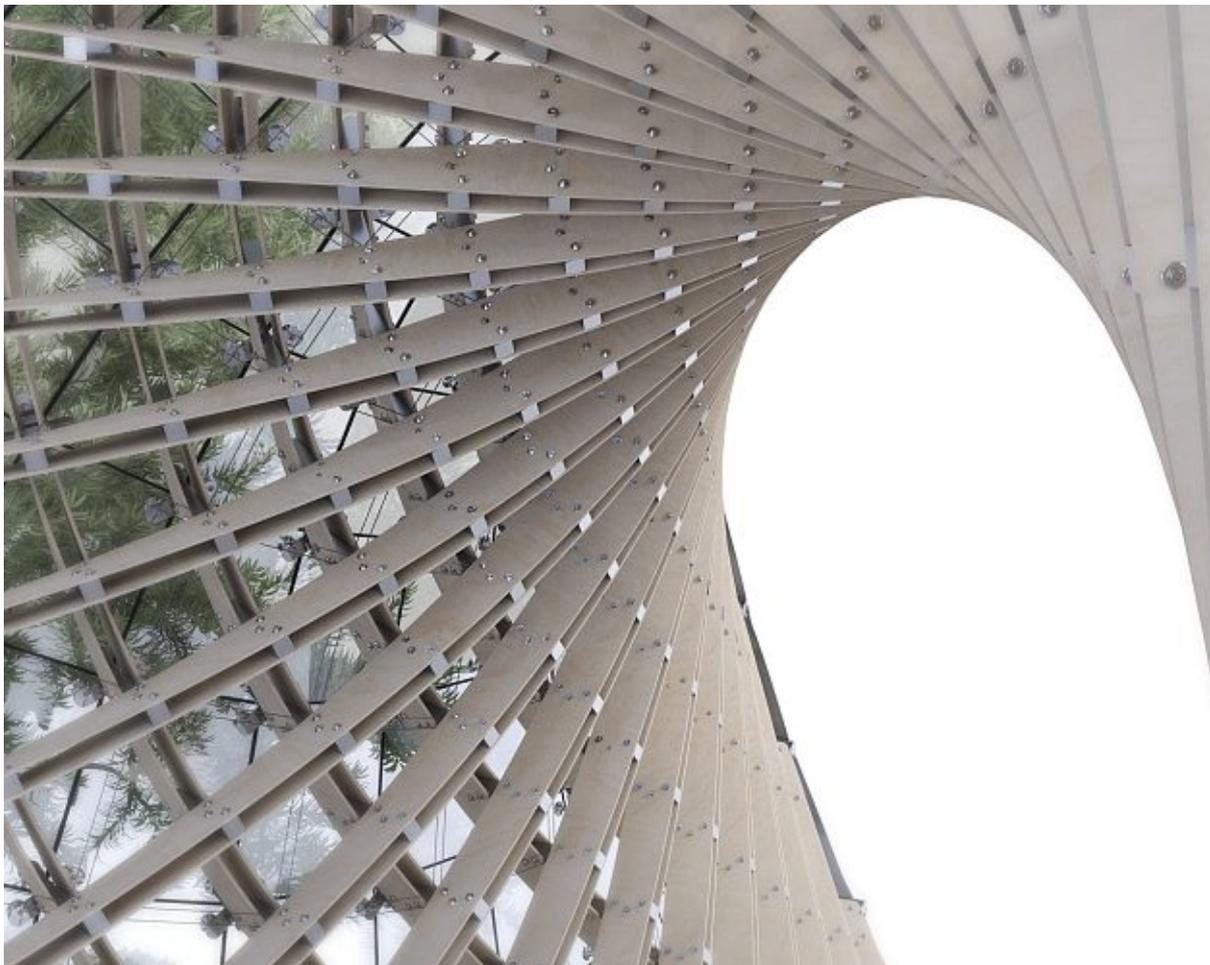


Abbildung 51: Visualisierung- Innenperspektive der Tragstruktur (MW, 2020).

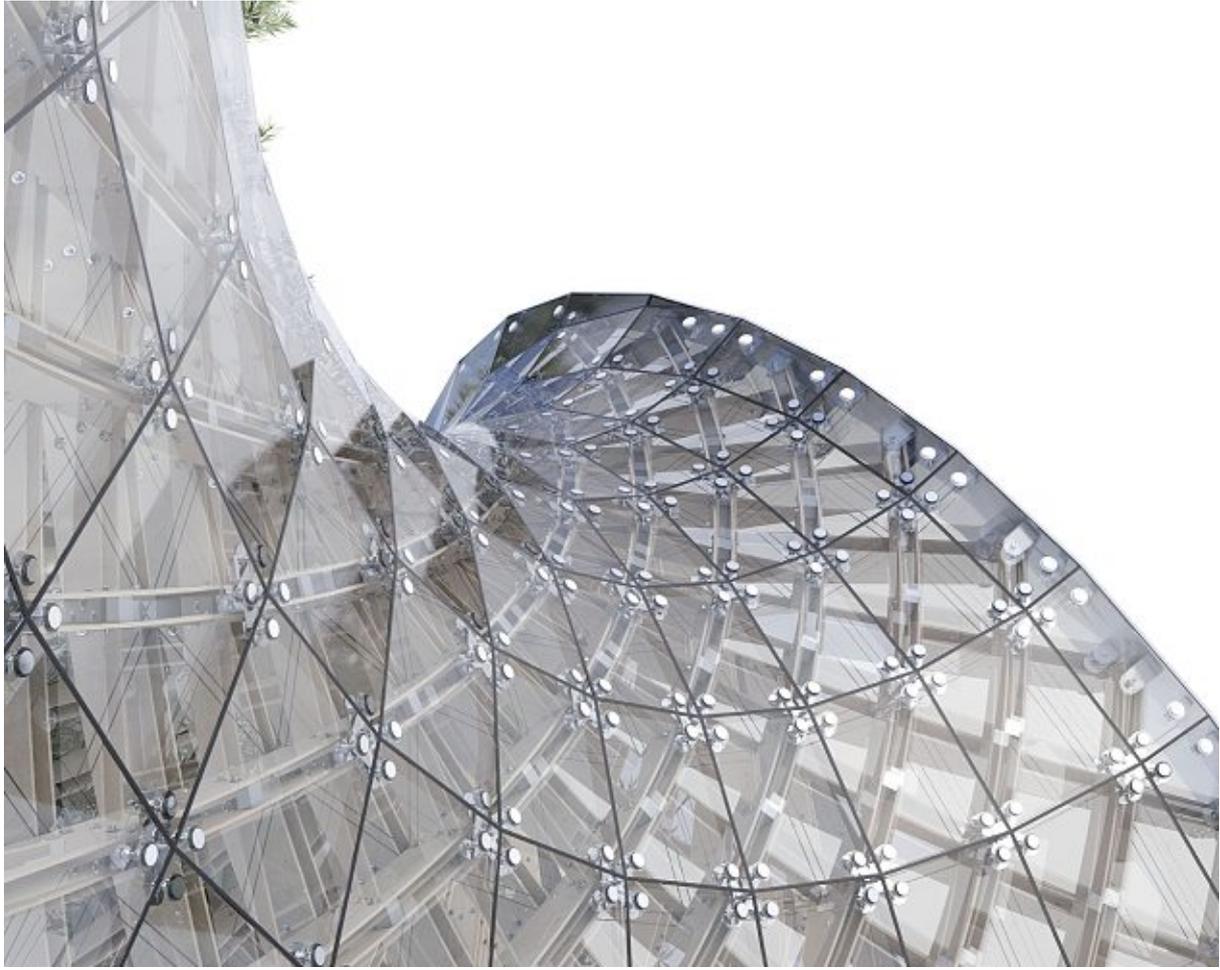


Abbildung 52: Visualisierung- Fassadenhaut (MW, 2020).

#### 4.1.3. Scherverbinder

Zwischen den Knoten entsteht die Gefahr, dass Träger durch Biegedrillknicken versagen und ausbeulen. Um die Knickfestigkeit der Träger zu erhöhen, werden diese regelmäßig mit Scherblöcken gekoppelt. Abhängig von der Belastung der Träger werden diese Blöcke in Feldmitte, im Drittel, bzw. Viertel angebracht. Die Scherblöcke bestehen aus 45 mm\*45 mm Aluminium-Vierkantrohr, da dieses ein leichtes Material darstellt. Holz, das eigentlich bevorzugte Material wird hier nicht eingesetzt, da aufgrund der Mindestabstände der Verbindungsmittel von den Rändern der Scherblöcke diese höher dimensioniert werden müssten. Dies würde weitere Konsequenzen hinsichtlich des Abstandes der Trägerpaare haben. Der Abstand sollte jedoch so gering wie möglich gehalten werden, damit die Träger nah an der idealen asymptotischen Referenzkurve bleiben und geometrische Abweichungen geringgehalten werden.

#### 4.1.4. Randträger

Aufgrund von Detailkonstruktionen, welche wir im Abschnitt III genauer beleuchten werden, werden die Randträger als abwickelbare allgemeine Kegelflächen geometrisiert. Da sie Bewitterungen ausgesetzt sind werden, sie in Aluminium ausgeführt.

#### 4.1.5. Verbindungsknoten

Die Entwicklung des Verbindungsknoten wird in Abschnitt III ausführlich erklärt. Da sämtliche Träger orthogonal aufeinander treffen kann ein Knotentyp repetitiv in der gesamten Struktur eingesetzt werden. Der Knoten besteht im Wesentlichen aus zwei Aluminiumvierkantteilen. Ein Teil koppelt das obere Trägerpaar, der zweite das untere. Über einen zentralen Gewindestab, welcher eine Scherung in der Ebene erlaubt, werden beide Teile miteinander verbunden. Durch Nuten in den zentralen Stirnflächen der beiden Teile ist der Knoten arretierbar. Gleichzeitig können die Spannseile darin geführt und mit Hilfe einer integrierten Spannfeder gequetscht werden.

Darüber hinaus bildet der Verbindungsknoten die Anbindung der Glasfassade an die Primärkonstruktion aus. Über einen Gewindestab im oberen Aluminiumteil wird ein Vierarmspider angebracht. Dieser bildet die Verbindungsstelle zwischen den kugelgelagerten Punkthaltern und Glasfassade aus.

#### 4.1.6. Auflager und Fundament

Ein ausreichend tragfähiges Auflager und Fundament ist herzustellen. Grundsätzlich wird angenommen, dass die Frage nach der Dimensionierung hier bereits gelöst ist und wird daher in dieser Arbeit nicht weiter beleuchtet.

#### 4.1.7. Gebäudehülle

Der primäre Anspruch an die Außenhaut besteht in der Funktion als Wetterschutzschicht. Zwischen Innen- und Außenraum werden keine Anforderungen an eine thermische Trennung gesetzt. Aufgrund der besonderen geometrischen Verhältnisse, welche einer Asymptotischen Gitterschale innewohnen ist eine aus planaren Vierecken bestehende Fassade hier verhältnismäßig einfach herzustellen. Das Paneel-Layout richtet sich an den Hauptkrümmungslinien aus. Die Viereckpaneele werden als VSG-Verglasung festgelegt und über gelenkig gelagerte Punkthalter und einen Vierarmspider an die Primärkonstruktion angebunden.

Im Abschnitt III werden dazu die geometrischen Rahmenbedingungen und die Konstruktion in einem höheren Detailgrad diskutiert.



Abbildung 53: Visualisierung Fassade (MW, 2020).

## 5. Die Asymptotische Gitterschale als Tragstruktur

Im Kapitel 5.1 werden generische Phänomene erläutert, welche aus tragstruktureller Sicht für die qualitative Beschreibung einer Asymptotischen Gitterschale als Tragstruktur relevant sind. In 5.2 wird als Fallstudie die Struktur „Enneper“ im Sinne einer tragstrukturellen Substanzerkundung qualitativ und quantitativ mit Vorberechnungen und einer Finiten-Elemente-Simulation erfasst.

### „Die optimale Struktur“

In diesem Kapitel werden wir noch feststellen, dass wir uns in der Domäne des Leichtbaus befinden. Ein Leichtbau ist unter anderem dadurch gekennzeichnet, dass die bemessungsrelevanten Lasten der betrachteten Struktur nicht mehr das Eigengewicht, sondern zusätzliche Störlasten, wie Windlasten, darstellen.

In den letzten Jahren entstanden beachtliche Forschungsarbeiten zu Freiformschalen und deren Tragvermögen. Forschungsergebnisse der Block Research Group, zum Beispiel, setzten neue Maßstäbe im Bau von Freiformschalen. Optimierungsstrategien in der Formfindung zur idealen Lastableitung wurden so, in Kombination mit leicht zugänglichen digitalen Werkzeugen einem breiteren Publikum geöffnet.

Als Einführungsbeispiel in der Literatur zum Tragverhalten einer Schale wird sehr gerne das Analogon „Hookes Hängekette“ und dem „invertierten Bogen“ verwendet. Es besagt, sobald wir die Form einer Hängekette, welche nur Zugkräfte erfährt und keine Biegung aufnehmen kann, invertieren, erhalten wir einen Bogen, der nur unter Druck steht (vgl. Adriaenssens, et al., 2014: 8). Dieses Prinzip können wir vom Bogen zur Schale erweitern.

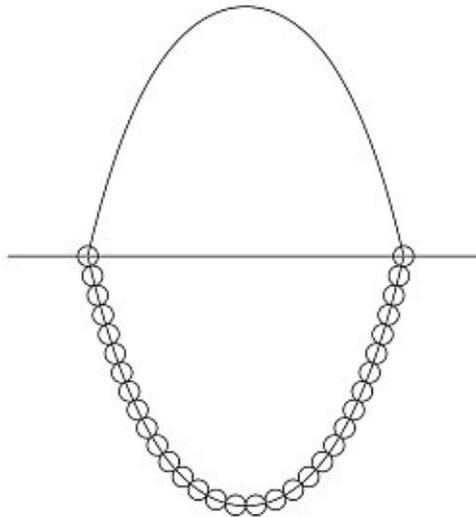


Abbildung 54: Hookes Kettelinie und der invertierte Bogen (MW, 2020, nach Adriaenssens, et al., 2014: 8).

In einem idealen Bogen, beziehungsweise Schale, treten die aus Eigenlast resultierenden Druckkräfte als Axiale Kräfte, also entlang der Achse des betrachteten Bauteils auf. Diese Belastungsart- das Vermögen darüber wird Membrantragwirkung genannt- ist sehr vorteilhaft hinsichtlich der Ausnutzung des Bauteils, da alle Fasern im Querschnitt, im Gegensatz zu Spannungen aufgrund von Biegung homogen beansprucht werden.

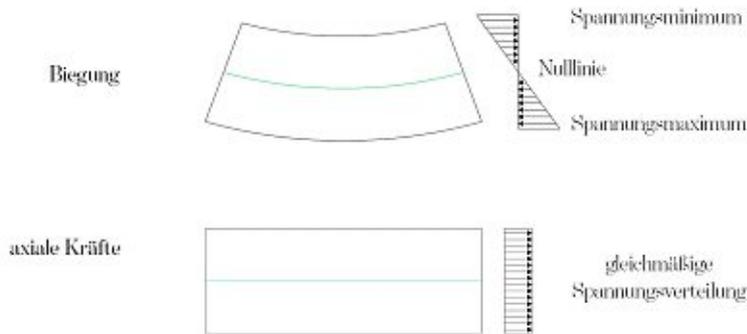


Abbildung 55: Ungleichmäßige und gleichmäßige Spannungsverteilung (MW, 2020).

Für diese Strukturen und Optimierungsverfahren, oft in Stein oder Ziegel gedacht, wird vorausgesetzt, dass das Eigengewicht die bemessungsrelevante Last darstellt.

Die Asymptotische Gitterschale teilt Aspekte dieser Schalenwirkung, unterscheidet sich aber wesentlich in zweierlei Hinsicht. Aufgrund des geringen Eigengewichts der Schale resultiert die bemessungsrelevante Last nicht aus dem Eigengewicht, sondern entsteht in Kombination mit anderen Störlasten, vor allem Windlasten. Zusätzlich handelt es sich bei der Asymptotischen Gitterschale um ein unter Spannung stehendes Tragwerk (*strained gridshell*).

Die maßgebende Beanspruchung übt somit einen großen Einfluss darauf aus, ob Optimierungsstrategien der Geometrie einer Schale allein hinsichtlich der Verteilung des Eigengewichtes sinnvoll sind oder nicht. Weiters treten Einschränkungen hinsichtlich der Formgestalt aus gestalterischen oder konstruktiven Gründen auf (vgl. Block, et al., 2016: 115). Im Falle der Asymptotischen Gitterschale fließen viele Anforderungen, über die reine ideale Kraftableitung hinaus zusammen, um eine ressourcenschonende, baupraktische und recyclinggerechte Struktur, die nicht nur das Entstehen, sondern auch das Verschwinden des Gebauten berücksichtigt herzustellen.

Durch die Verwendung asymptotischer Kurven auf Minimalflächen erhalten wir viele Vorteile hinsichtlich dieses Anforderungskatalogs. Diese vorrationalisierte Geometrie stellt zwar nicht das Optimum hinsichtlich der reinen Membrantragwirkung dar. Wir können aber die Membrantragwirkung dazu nutzen, Querschnitte der Gitterschale hinsichtlich ihrer Ausnutzung sehr gut einzusetzen.

## 5.2. Tragstrukturelle Wirkungsweisen einer Asymptotischen Gitterschale: qualitative Phänomene

### 5.2.1. Schalen und Gitterschalen

Schalentragwerke sind gekrümmte Tragwerke, die Beanspruchungen in ihrer Ausdehnungsfläche oder orthogonal dazu aufnehmen und im Wesentlichen über Druck- und Zugkräfte abtragen. Sie können in kontinuierliche Schalen,- oder in Gitterschalen unterschieden werden und verfügen über Membran- und Biegetragwirkung, welche im Anschluss noch erläutert werden (vgl. Block, et al., 2016: 115).

#### Unter Spannung stehende Gitterschalen (*Strained Gridshells*)

Gitterschalen können in unter Spannung stehende und in nicht unter Spannung stehende Gitterschalen (*strained and unstrained gridshells*) unterteilt werden. Unter Spannung stehende Gitterschalen, dazu zählt auch die Asymptotische Gitterschale, bestehen aus kontinuierlichen Stäben, welche auch durch Knotenverbindungen durchlaufen. Sie bestehen aus anfänglich geraden Stäben und erhalten ihren finalen Formzustand, indem sie zu einem Netzwerk gefügt und gemeinsam räumlich gebogen und tordiert werden, bis sie die gewünschte Formation einnehmen. Diese Transformation führt zu inneren Spannungen in den einzelnen Trägern, daher die Bezeichnung (vgl. Adriaenssens, et al., 2014: 89 ff.). Diese Spannungen können zugunsten, aber auch nachteilig gegenüber den Gesamteinwirkungen stehen. Sie erhöhen aber die Steifigkeit der Struktur und das hat positive Auswirkungen hinsichtlich des Spannungszustandes der Gesamtstruktur.

#### Membrantragwirkung

Als Membrantragwirkung wird das Vermögen bezeichnet, Lasten aufzunehmen und in Druck- und Zugkräfte weiterzuleiten. Die, wie in Abbildung 55 dargestellt, dadurch gegebene gleichmäßige Beanspruchung des Querschnitts erlaubt eine wesentlich effizientere Ausnutzung der Querschnittsfasern gegenüber einer Biegetragwirkung (vgl. Block, et al., 2016: 115). Schalen verfügen über die Fähigkeit der Membrantragwirkung, das macht sie aus tragstruktureller Sicht so einzigartig.

#### Biegetragwirkung aus der Ebene

Wie wir schon erkannt haben, ist eine axiale Beanspruchung eines Querschnittes sehr effizient. Unterschiedliche Einflussfaktoren, geometriebedingt, aber auch aufgrund von Störlasten, verursachen jedoch Kräfte orthogonal zur gekrümmten Basisfläche und fordern damit die Biegetragfähigkeit eines Trägers aus der Ebene (vgl. Adriaenssens, et al., 2014: 91). Für Gitterschalen ist daher die Ausrichtung der starken Achse des Trägers zur Basisfläche von großer Bedeutung. Wir haben bereits ausgezeichnete Kurvenfamilien auf Flächen und die Möglichkeit der Querschnittsausrichtung hinsichtlich der Basisfläche und ihre Eigenschaften in der Abwicklung erläutert. Ein Trägerlayout anhand asymptotischer Kurven auszurichten ist tragstrukturell sehr effektiv, da die Träger orthogonal an der Basisfläche ausgerichtet sind. Dies trägt wesentlich zur Biegetragfähigkeit der Gitterschale aus der Ebene bei.

#### Schubkräfte in Plattenebene

Eine kontinuierliche Schale verfügt über das Vermögen, axiale Kräfte sowie Schubkräfte in ihrer Ebene aufnehmen zu können. Eine Gitterschale, welche aus einem Vierecksgitter besteht und deren Knoten in der Ebene scheren können, verfügt allein über keine Schubsteifigkeit in der Ebene. Diese kann aber durch diagonale Spannglieder und biegesteife Knoten eingeführt werden (vgl. Adriaenssens, et al., 2014: 90 f.).

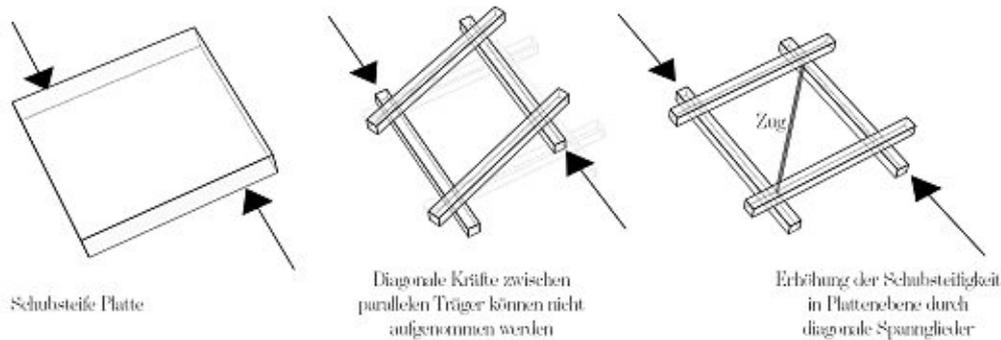


Abbildung 56: Vergleich der Schubsteifigkeiten einer Platte und einer Gitterschale (MW, 2020).

### 5.2.2. Biegeaktive Tragwerke

Biegeaktive Tragwerke sind Tragsysteme, deren Geometrie auf der elastischen Deformation anfänglich gerader oder planarer Elemente besteht. Diese großen Deformationen erzeugen konstante innere Biege- und Normalspannungen (vgl. Lienhard, 2014: 17). Diese Vorspannungen beeinflussen die Steifigkeit einer Struktur. Im Allgemeinen bewirkt eine Zugkraft eine Erhöhung der Steifigkeit, eine Druckkraft verringert diese. Abbildung 57 zeigt diesen Effekt. Wirkt die Kraft  $P$  als Druckkraft erhöht sich die Verformung  $w$  und damit das Einspannmoment. Wirkt die Kraft  $P$  als Zugkraft sind die Verformungen sowie das resultierende Einspannmoment geringer. Dieser Effekt wird auch P-Delta Effekt genannt. Er wird, hier wird nun ein wenig vorgegriffen, nur in Finiten-Elemente-Berechnungen nach Theorie II. - und Theorie III. Ordnung berücksichtigt (vgl. Lienhard, 2014: 18).

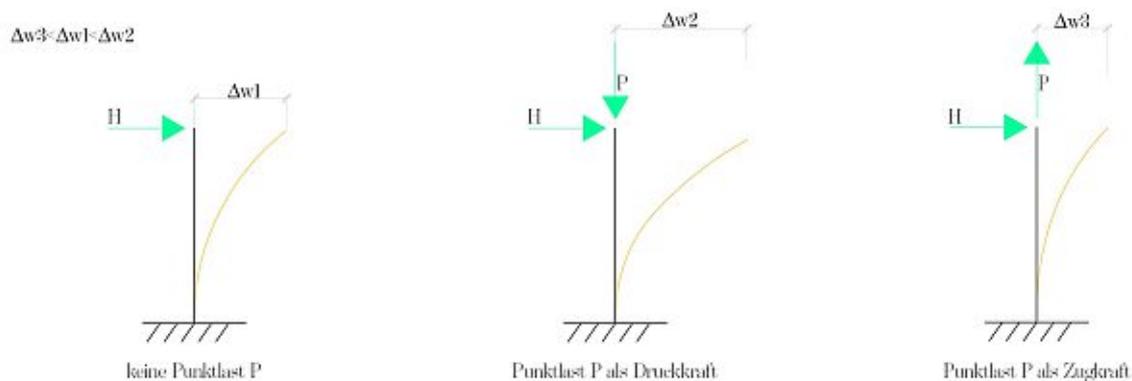


Abbildung 57: Unterschiedliche Steifigkeiten durch Vorspannungen (MW, 2020, nach Lienhard, 2014: 18)

Die Steifigkeit und Masse haben einen Einfluss auf die Eigenfrequenz eines Systems. Lienhard erklärt dieses Phänomen sehr anschaulich mit dem Beispiel einer Gitarrensaite. Wenn die Spannung der Saite erhöht wird, erhöht sich die Eigenfrequenz und wir erhalten einen höheren Ton. Genauso erhöht sich, wenn die Gitarrensaite durch Aufdruck eines Fingers gekürzt wird, die Eigenfrequenz und damit der Ton. Daraus erkennen wir, dass wir identische Strukturen mit sehr unterschiedlichen inneren Spannungszuständen erhalten können. Diese Spannungszustände beeinflussen die Steifigkeit einer Struktur in einem großen Ausmaß (vgl. Lienhard, 2014: 25 f.).

## 5.3. Die Asymptotische Gitterschale „Enneper“: Fallstudie zur quantitativen Erfassung ihrer Tragwerksperformance

In Anlehnung an die frühen Planungsphasen der Tragwerksplanung widmen wir uns nun der technischen Substanzerkundung und führen Untersuchungen, um Lösungsmöglichkeiten zur Umsetzung des Tragwerks vorschlagen zu können, durch. Unsere Erkenntnisse aus den vorläufigen Berechnungen ermöglichen uns wesentliche Festlegungen für Dimensionierungen, Materialangaben und Herstellungsverfahren zu treffen.

### 5.3.1. Berechnungen zur Vorevaluierung der Spannungen aufgrund der aktiven Verformung

Die folgenden Strategien zur Vorevaluierung der Spannungen in den Trägern aufgrund aktiver, elastischer Verformung basieren auf Schling (2018: 152 ff.). Als Materialkennwerte dafür werden anschließende Werte aus Abbildung 58 aus dem Handbuch über finnisches Sperrholz (Verband der finnischen Forstindustrie, 2001) verwendet.

| Querschnittsdaten |                | Biegung         |             | Char. Festigkeit |             | Zug             |             |
|-------------------|----------------|-----------------|-------------|------------------|-------------|-----------------|-------------|
| Rohdichte $\rho$  | Nennstärke $t$ | $f_m \parallel$ | $f_m \perp$ | $f_c \parallel$  | $f_c \perp$ | $f_t \parallel$ | $f_t \perp$ |
| $kg/m^3$          | $mm$           | $N/mm^2$        | $N/mm^2$    | $N/mm^2$         | $N/mm^2$    | $N/mm^2$        | $N/mm^2$    |
| 630               | 9              | 45.6            | 32.1        | 28.3             | 23.7        | 40.8            | 34.2        |

| Mittl. E-Modul  |             |                     |                 | Char. Festigkeit |             |                 |             |
|-----------------|-------------|---------------------|-----------------|------------------|-------------|-----------------|-------------|
| Biegung         |             | Druck und Zug       |                 | Panelschub       |             | Rollenschub     |             |
| $E_m \parallel$ | $E_m \perp$ | $E_{t/c} \parallel$ | $E_{t/c} \perp$ | $f_v \parallel$  | $f_v \perp$ | $f_r \parallel$ | $f_r \perp$ |
| $N/mm^2$        | $N/mm^2$    | $N/mm^2$            | $N/mm^2$        | $N/mm^2$         | $N/mm^2$    | $N/mm^2$        | $N/mm^2$    |
| 11395           | 6105        | 9511                | 7989            | 9.5              | 9.5         | 2.68            | 2.35        |

| Mittl. Schubmodul |             |                 |             |
|-------------------|-------------|-----------------|-------------|
| Panelschub        |             | Rollenschub     |             |
| $G_v \parallel$   | $G_v \perp$ | $G_r \parallel$ | $G_r \perp$ |
| $N/mm^2$          | $N/mm^2$    | $N/mm^2$        | $N/mm^2$    |
| 620               | 620         | 206             | 155         |

Abbildung 58: Konstruktionswerte Birkensperrholz 9 mm  
(MW, 2020. Werte entnommen aus Verband der finnischen Forstindustrie, 2001: 19).

### Flächenkrümmung und Trägerverformung

Um dem Verlauf asymptotischer Kurven zu folgen, werden durchgehende und anfänglich gerade Stäbe elastisch gebogen und normal zur Basisfläche orientiert. Die Orientierung des Profils  $x$ ,  $y$  und  $z$  fallen mit den Vektoren des Darboux-Rahmens zusammen und die Deformationen  $k_x$ ,  $k_y$  und  $k_z$  können mit den geometrischen Krümmungen  $\tau_g$ ,  $k_n$  und  $k_g$  gleichgesetzt werden (vgl. Schling, 2018: 152).

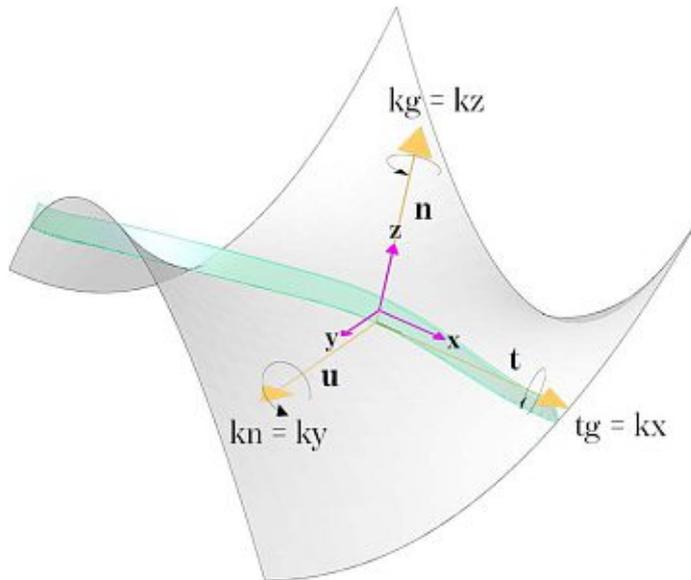


Abbildung 59: Stabverformungen in Abhängigkeit der Krümmungen (MW, 2020, nach Schling, 2018: 152).

### Normalspannungen aufgrund Biegungen

Aufgrund der geodätischen Krümmung werden die Träger um ihre schwache Achse, die z-Achse, gebogen. Um daraus resultierende Spannungen zu berechnen, wird die klassische Balkentheorie nach Euler-Bernoulli angewandt. Der Zusammenhang zwischen der Krümmung  $k_g$  und dem Biegemoment  $M_z$  basiert auf der Biegesteifigkeit  $EI_z$ .

$$k_g = k_z = \frac{1}{r} = \frac{M_z}{EI_z} [mm^{-1}]$$

Dieses Verhältnis kann im Zuge der Vorevaluierung herangezogen werden, um den minimalen Biegeradius  $r_{min}$  der Träger festzulegen.

$$r_{min} = \frac{EI_z}{M_{z,max}} = \frac{EI_z}{\sigma_{y,k} W_z} = \frac{Et}{\sigma_{y,k} 2} [mm]$$

Mit:

$$I_z = \frac{t^3 h}{12} \text{ und } W_z = \frac{t^2 h}{6}$$

Somit ergibt sich als minimaler Radius:

$$r_{min} = \frac{11395 \frac{N}{mm^2} 9mm}{45.6} = 1149 \text{ mm}$$

Der kleinste Biegeradius der Struktur beträgt 3213 mm, dies verursacht Normalspannungen von  $16 \text{ N/mm}^2$  beziehungsweise eine Materialausnutzung von 35 %.

## Schubspannungen aufgrund Torsion

Eine Relation zwischen der geodätischen Torsion  $\tau_g$  und dem Torsionsmoment  $M_T$  um die x-Achse basiert auf der Torsionssteifigkeit  $GI_T$  wobei  $G$  das Schubmodul und  $I_T$  die Torsionskonstante festlegt. Die Drehung  $k_x$  wird als Winkel im Bogenmaß mit der Rotation  $\theta$  pro Längeneinheit entlang des Trägers bestimmt.

$$\tau_g = k_x = \frac{M_T}{GI_T}$$

Daraus folgt:

$$\tau_{g,max} = k_{x,max} = \frac{M_{\tau,max}}{GI_{\tau}} = \frac{\tau_{y,k} W_{\tau}}{GI_{\tau}} = \frac{\tau_{y,k}}{Gt} \left[ \frac{rad}{m} \right]$$

mit:

$$I_{\tau} = \frac{t^3 h}{3} \quad \text{und} \quad W_T = \frac{t^2 h}{3}$$

Wir können die maximale Torsion innerhalb der zulässigen Schubspannungen wie folgt festlegen:

$$\tau_{g,max} = k_{x,max} = \frac{9.5 \text{ N/mm}^2}{620 \text{ N/mm}^2 * 9 \text{ mm}} * 1000 \text{ mm/m} = 1.7 \left[ \frac{rad}{m} \right] \approx 97^\circ/m$$

Die maximale Torsion beträgt **0.938 rad/m** bzw. **53°/m**. Dies verursacht Schubspannungen von **5 N/mm<sup>2</sup>**.

## Normalspannungen aufgrund starker Torsion

Schling (2018: 154) erläutert den geometrischen Effekt der Normalspannungen aufgrund sehr starker Torsion wie folgt:

Die geodätische Torsion der Träger verursachen eine nicht abwickelbare Deformation. Dies wurde in Kauf genommen, um eine einfache Knotenherstellung und gut definierte Flächenstreifen zu erzeugen.

Den Längenunterschied, welcher diese Torsion bewirkt kann über den Vergleich einer Helix-Kurve an einem Rotationszylinder geschildert werden. Die Länge der Helix ist von der geodätischen Torsion  $\tau_g$  und dem Radius  $r = h/2$  abhängig (vgl. Schling, 2018: 154).

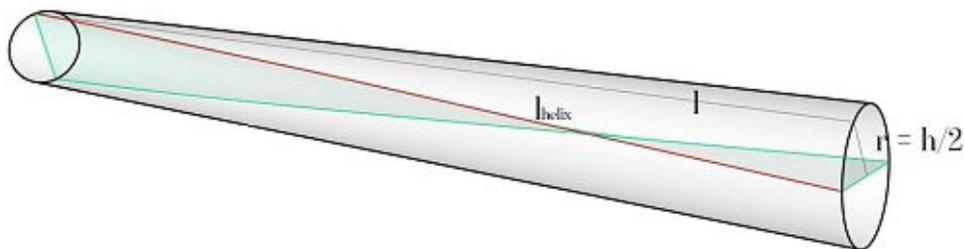


Abbildung 60: Längenänderung aufgrund von Torsion (MW, 2020, nach Schling, 2018: 154).

Diese Längenänderung bildet die Basis für die hier verwendete Theorie der „Helix Torsion“ (vgl. Schling, 2018: 154, nach Lumpe & Gensichen, 2014: 118 ff.). Die Theorie quantifiziert die Normalspannungen aufgrund starker Torsion und geht von folgendem Szenario aus: Im Zuge der Torsion möchten sich äußere Fasern verschieben, daran werden sie aber von den inneren Fasern verhindert. Wir treffen als weitere Annahme, dass Querschnitte eben bleiben. Um den Verschiebungen der äußeren Fasern entgegen zu wirken, sind über den Querschnitt paraboloid verteilte Zugspannungen erforderlich. Da bei einer reinen Torsionsbeanspruchung daraus keine Normalkraft resultieren darf, muss das Volumen des Spannungsparaboloids parallel verschoben werden. So stellt sich ein Zustand ein, bei dem die äußeren Fasern gedehnt und die inneren gestaucht werden (vgl. Lumpe & Gensichen, 2014: 120).

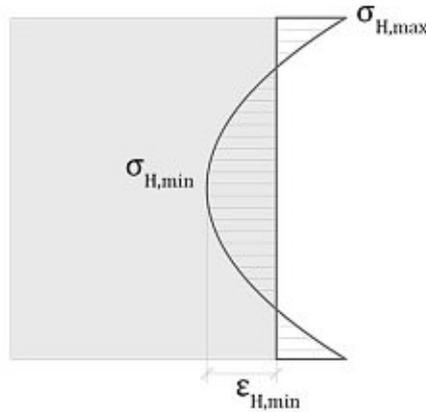


Abbildung 61: Verschiebung der Normalspannungen aus starker Torsion (MW, 2020, nach Schling, 2018: 154).

Schling (2018) vereinfacht für sehr schlanke Querschnitte die Gleichungen aus Lumpe & Gensichen (2014: 120 f.), so dass nur noch die Bauteilhöhe für die Normalspannungen aus starker Torsion relevant ist. (Schling, 2018) Als Trägerhöhe werden 160 mm festgelegt.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{H,max} &\approx \frac{1}{12} h^2 k_x^2 = \frac{1}{12} (160\text{mm})^2 (0.000938 \frac{1}{\text{mm}})^2 = 0.001875 \left[ \frac{N}{\text{mm}^2} \right] \\ \varepsilon_{H,min} &\approx -\frac{1}{24} h^2 k_x^2 = -\frac{1}{24} (160\text{mm})^2 (0.000938 \frac{1}{\text{mm}})^2 = -0.00938 [N/\text{mm}^2] \\ \sigma_{H,max} &= \varepsilon_{H,max} * E = 0.001875 * 9511 = 17.835 [N/\text{mm}^2] \\ \sigma_{H,min} &= \varepsilon_{H,min} * E = -8.9 [N/\text{mm}^2] \end{aligned}$$

Die maximal zulässige Zugspannung für den gewählten Baustoff beträgt **40.8 N/mm<sup>2</sup>**. Damit werden hier 41 % der zulässigen Spannungen ausgenutzt.

Als vorteilhaft erweist sich die Lage der stark tordierten Träger. Diese befinden sich entlang des Sattels der Schale. In diesem Bereich gibt es kaum weitere Lasten, welche zu erhöhten Spannungen führen. Gleichzeitig gibt es eine reziproke Beziehung zwischen Torsion und Biegung. Wo die geodätische Krümmung hoch ist, verschwindet die geodätische Torsion und vice versa. Daher kumulieren die Normalspannungen aus Biegung und Torsion nicht.

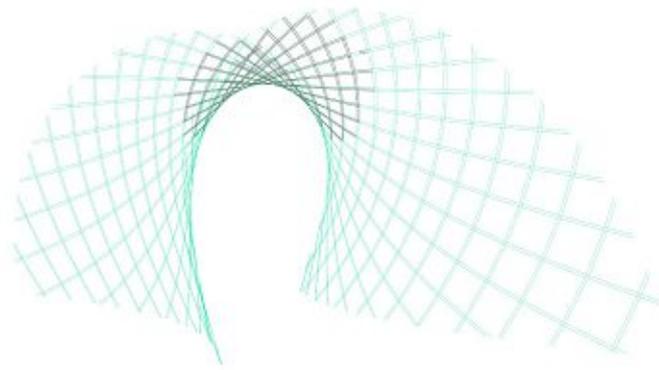


Abbildung 62: Lage der Träger mit einer Torsion  $> 30^\circ / \text{m}$  (MW, 2020).

## 5.4. FE- Simulation

Über diese Vorberechnungen hinaus wurde die Baustruktur unter der Verwendung einer Finite-Elemente-, kurz FE-Simulation berechnet. Dies ermöglicht die Berechnung von komplexeren Strukturen, bei denen klassische Theorien aus der Tragwerkslehre, wie der Balkentheorie, nicht mehr anwendbar sind. Hierzu wurde das Grasshopper Plug-In „Karamba“ verwendet. „Karamba“ ist vor allem für den Einsatz in interaktiven, parametrischen Architekturanwendungen ausgerichtet.

Der Ablauf der Simulation ist in Abbildung 63 dargestellt. Zuerst wird die Geometrie aufbereitet, danach sämtliche Elemente, Querschnitte, Materialien und Lasten festgelegt. Diese werden schließlich in einem Modell zusammengeführt und berechnet. Die Zugehörigkeit von Elementen, Querschnitten, Materialien und Lasten wird über eine ID vergeben.



Abbildung 63: Prozessdiagramm der FE-Modellierung (MW, 2020).

### Vorbemerkungen

Die Ebene der Glasfassade liegt hinsichtlich der Ebene der Spantenachsen versetzt. Dieser Abstand verursacht Störlasten. Diese werden in der FE-Modellierung nicht abgebildet. In Teil III leiten wir im Zuge der Berechnung der Verbindung Knotenstab und Spantenpaare diese Störlasten her. Wir sehen für die maximale Ausnutzung der Trägerelemente im FE-Modell einen Ausnutzungsgrad von ca. 50% vor. Somit bleiben uns Reserven für den Fassadenversatz und die Knoten- Trägerverbindung erhalten.

#### 5.4.1. Geometriaufbereitung

Die asymptotischen Kurven sind ursprünglich als kontinuierliche Nurbs-Kurven modelliert. Für das FE-Modell ist die Diskretisierung in ein Linien- Knoten Modell erforderlich.

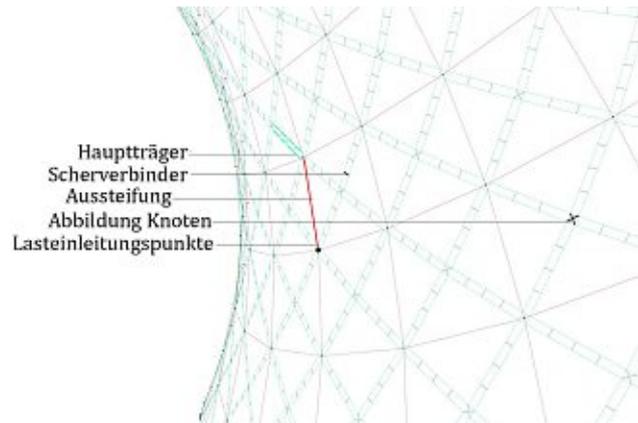
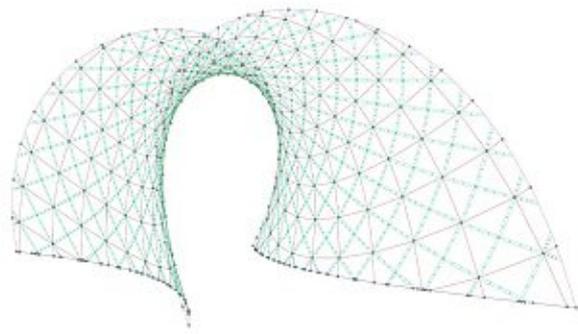


Abbildung 64: Diskretisierung der Gitterschale. (MW, 2020).

## 5.4.2. Elemente und Querschnittfestlegung

### Hauptträger

Die Hauptträger folgen mit einem *Offset* von 45 mm als Linien, der Verbindung zweier Punkte, den asymptotischen Kurven. Ihre Orientierung wird anhand des jeweiligen Normalvektors, je nach Richtung nach innen oder nach außen, zur Basisfläche ausgerichtet. Der Querschnitt wird als Rechteckquerschnitt mit  $0.9 \times 16$  cm definiert. Den Hauptträgern wird das Material „Sperrholz“, gemäß Abbildung 58, zugewiesen.

### Weitere Elemente

Die weiteren Elemente werden hier zusammenfassend angeführt. Unsere Untersuchungen beschäftigen sich vor allem mit der Frage, ob Sperrholz als Material für die Hauptträger geeignet ist oder nicht. Wir können davon ausgehen, dass die Fragestellung hinsichtlich Materials- und Querschnittswahl für Randträger, Aussteifung und Fundamente weitgehend gelöst ist. Daher wurden hier Querschnitte und Materialien gewählt, die die auftretenden Spannungen jeweils gut aufnehmen können.

Die Spannseile folgen den Hauptkrümmungslinien. Sie erhalten einen kreisrunden Querschnitt mit einem Durchmesser von 0.4 cm. Den Elementen wird die Biegesteifigkeit abgesprochen.

Hinsichtlich der Randträger ist vor allem der Anschluss an die Hauptträger interessant. Dieser wird in der Schalenebene gelenkig modelliert, damit das Anschlussdetail aus repetitiven Elementen ausgeführt werden kann. Die gesamte Struktur wird auf zwei Bodenträgern, an welche die finalen Auflagerpunkte angehängt werden, abgelastet. Die ideale Anzahl der Scherblöcke wurde iterativ ermittelt. Sie werden in der Hälfte, im Drittel oder im Viertel zwischen zwei Knoten eingesetzt und als kurzer Stab zwischen zwei asymptotischen Kurven abgebildet. Die Verbindungsknoten werden als auskreuzende Stäbe nachmodelliert, um die zusätzlichen Steifigkeiten und Festigkeiten, die sie in die Konstruktion bringen, abzubilden. Die Geometrisierung des diskreten FE- Achsenmodells ist in Abbildung 64 dargestellt. Die Abbildung 65 stellt das diskretisierte Modell als Netz dar.

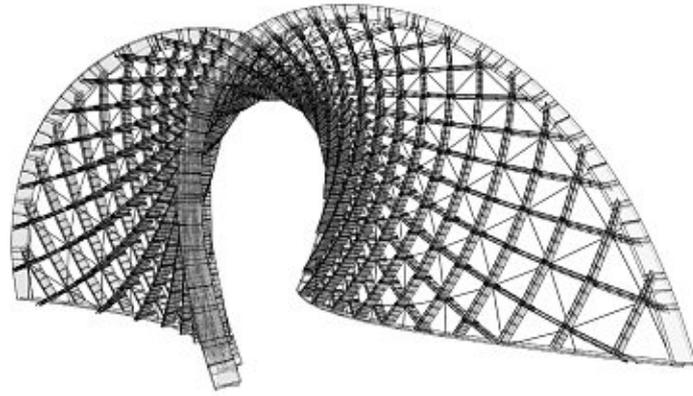


Abbildung 65: „Karamba“ Netz- Modell (MW, 2020).

### 5.4.3. Lasten

Um wesentliche Festlegungen bezüglich der tragstrukturellen Eignung der Asymptotischen Gitterschale „Enneper“ treffen zu können wird das Tragverhalten mit vereinfachten Lastannahmen, wie folgt untersucht:

#### Ständige Lasten:

- Eigenlast Primärkonstruktion
- Eigenlast Fassadenhaut
- Lasten aufgrund aktiver Biegung
- Lasten aufgrund aktiver Torsion
- Vorspannung Spannglieder

#### Veränderliche Lasten:

- Schneelast
- Windlast

Im Sinne des semiprobabilistischen Sicherheitskonzepts werden den ständigen Lasten  $G$  ein Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_G = 1.35$  und veränderlichen Lasten  $Q$  ein Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_Q = 1.5$  beifügt.

#### Eigenlast Primärkonstruktion

Die Eigenlast wird im FE- Modell durch die Schwerkraft, im Modell mit einem negativen Z- Vektor abgebildet.

#### Eigenlast Fassadenhaut

Die Fassadenhaut wird als Netzgeometrie modelliert. Sie wird entsprechend einer 13 mm dicken Verglasung mit  $-0.325 \text{ kN/m}^2$  angegeben.

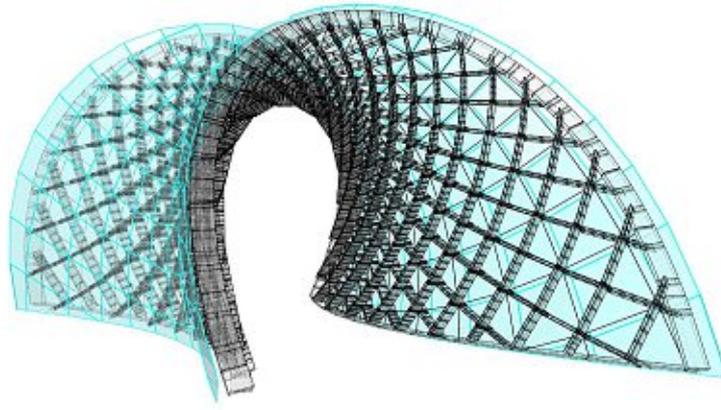


Abbildung 66: Darstellung Eigenlast Fassadenhaut (MW, 2020).

### Lasten aufgrund aktiver Biegung und Torsion

Diese Lasten werden ebenfalls direkt in der FE- Simulation als Input eingebracht. Die Biegung wird über den Krümmungsradius des nächstgelegenen Punktes der ursprünglichen NURBS-Kurve, dem kontinuierlichen Kurvenäquivalent, zum Mittelpunkt der diskretisierten Linie ermittelt. Der Torsionswinkel wird über den Winkel der Flächennormalen an Anfangs- und Endpunkt einer Linie ermittelt und in *rad/m* umgerechnet.

### Vorspannung

Der Grad der Vorspannung wurde iterativ unter Eigenlast evaluiert. Die Spannseile werden gleichsam mit 1,5mm/m vorgespannt.

### Schneelast

Die finale Struktur erhält eine verglaste Fassadenhaut. Diese ist Schneelasten ausgesetzt. Jedoch werden nur Paneele, welche flacher als  $60^\circ$  zur Horizontalen geneigt sind, miteinbezogen. Als Schneelast werden Werte aus der Schneelastzone 2 mit  $1.36 \text{ kN/m}^2$  determiniert.

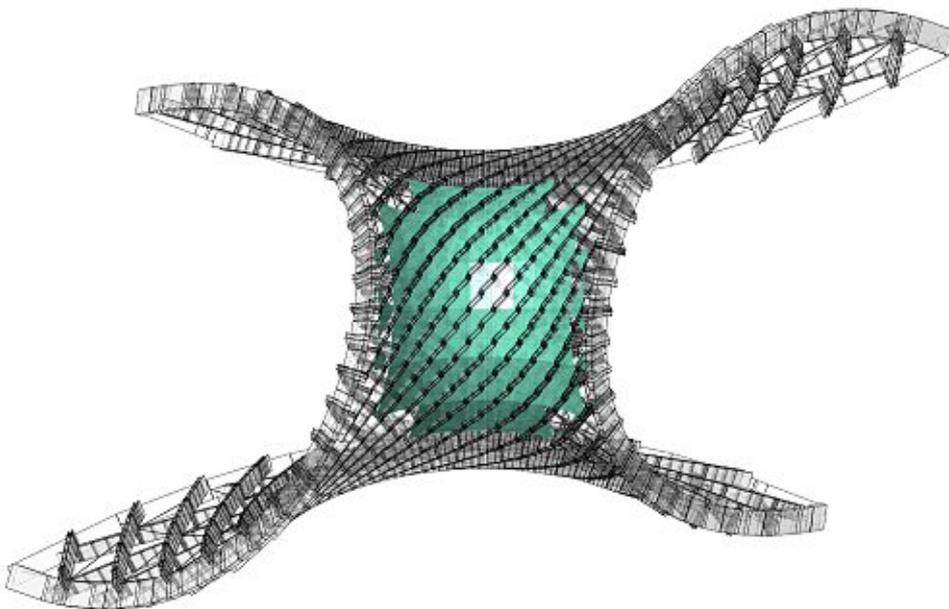


Abbildung 67: Für Schneelasten berücksichtigter Flächenanteil (MW, 2020).

## Windlasten

Die Windlasten orientieren sich modellhaft an ÖNORM EN 1991-1-4: gekrümmte Dächer und Kuppeln mit rechteckigem Grundriss. Die Außendruckbeiwerte wurden hier mit Druckkräften von 0,8 und Sogkräften von 0,4 sowie 1,2 kN angenommen. Für den Standort Gegend Wien werden diese mit einem Grundstaudruck von 1,00 kN/m<sup>2</sup> multipliziert.

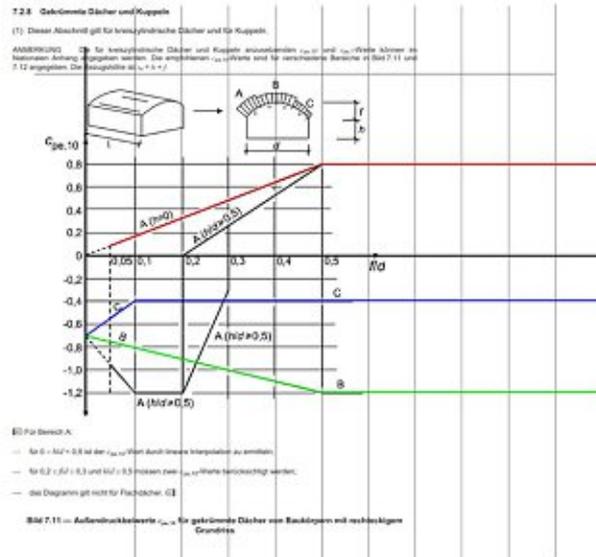


Abbildung 68: Diagramm Windlasten für gekrümmte Dächer und Kuppeln (basierend auf ÖNORM EN 1991-1-4 editiert durch MW, 2020).

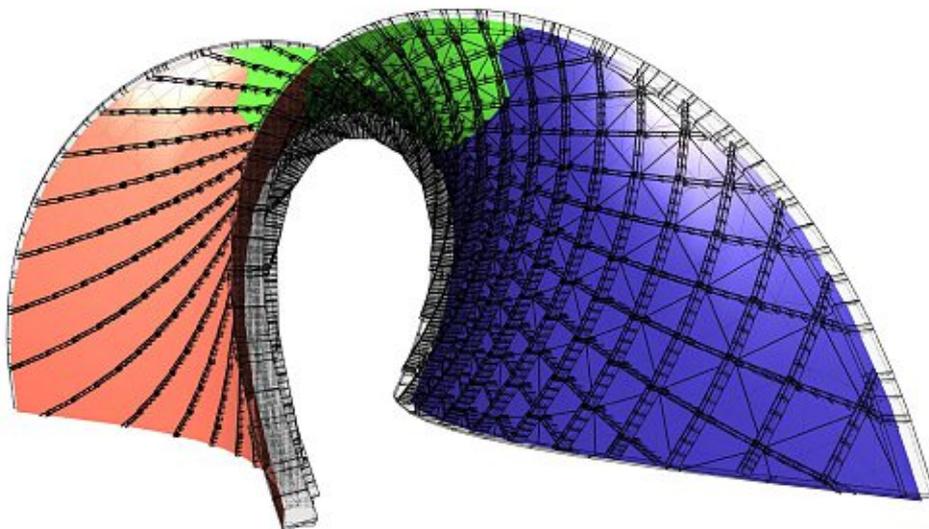


Abbildung 69: Aufgliederung der Windlasten in drei Bereiche (MW, 2020).

#### 5.4.4. Lasteinleitungspunkte

Die Lasten aus der Fassadenhaut, Wind- und Schneelasten werden als Punktlasten in jene Punkte, an denen später ein Knotenstab platziert wird, eingeleitet.

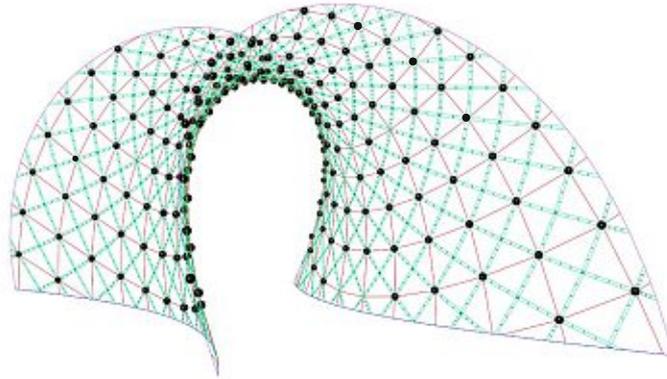


Abbildung 70: Darstellung der Lasteinleitungspunkte (MW, 2020).

#### 5.4.5. Analyse

Nachdem die Geometrie, Auflager und Lasten festgelegt wurden ist das FE-Modell für weitere Berechnungen vorbereitet. „Karamba“ bietet drei Algorithmen zur Modellberechnung an. Normalkräfte in Stäben beeinflussen die Steifigkeit einer Struktur. Berechnungen nach Theorie II berücksichtigen diese Effekte. Fallen diese Effekte gering aus, können sie vernachlässigt werden, daher werden sie in der Analyse nach Theorie I nicht berücksichtigt. Nachdem die zusätzlichen Steifigkeiten durch Biegung und Torsion in aktiv elastisch verformten Strukturen eine große Rolle spielen, ist ihre Repräsentation in der statischen Analyse nicht zu gering zu schätzen. Daher wird die Struktur nach Theorie II berechnet.

#### 5.4.6. Lastfälle und Ergebnisse

Die Windlasten greifen teilweise entgegengesetzt zum Eigengewicht und den Schneelasten an. Daher wird die Struktur einmal unter Eigenlast und Lasten aus Vorspannungen, dann unter Eigenlast, Lasten aus Vorspannungen und Schneelast und letztendlich unter Eigenlast, Lasten aus Vorspannungen und Windlast berechnet. Die Auswertung ergab, dass der Lastfall unter Eigenlast, Lasten aus Vorspannungen und Windlast der Bemessungsrelevante ist.

#### Ergebnisse aus Eigenlast, Vorspannungen und Windlast

Im Folgenden werden die Ergebnisse, unter der Beachtung der Eigenlasten, Lasten aus Vorspannungen und Windlasten aus der FE-Simulation angeführt und diskutiert.

## 5.4.7. Auswertung und Qualitative Bewertung der Simulation

### Verformung

Die Struktur erfährt eine maximale Verformung von **2.06 cm**. Interessant ist die Verformungsdifferenz zwischen dem Lastfall Eigenlast, Vorspannungen samt Windlast und nur Eigenlast und Vorspannungen. Diese beträgt **1.6 cm**. Ein wesentlich höherer Wert würde die Eventualität von großen Spannungen innerhalb der und zwischen den Glaspaneelen, die zum Glasbruch führen könnten, indizieren.

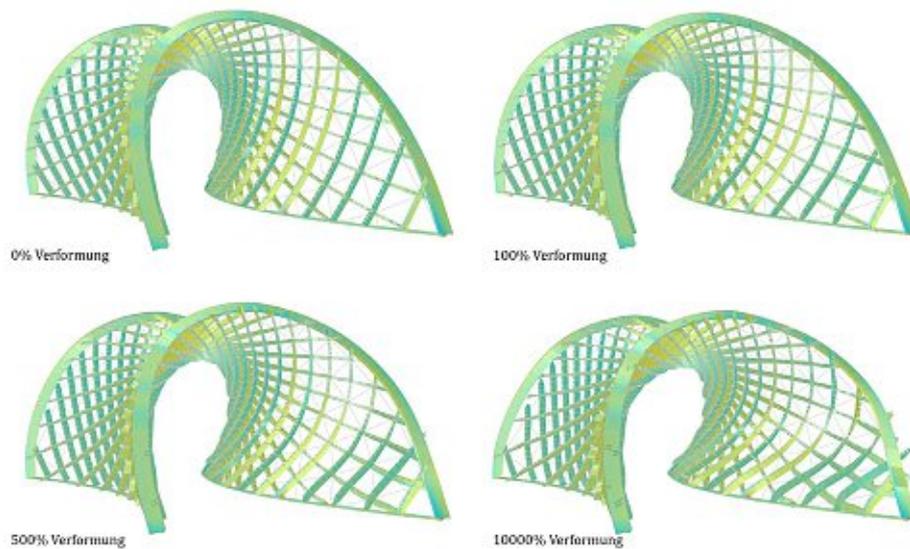


Abbildung 71: Überzeichnetes Verformungsbild der Struktur unter Eigenlasten, Vorspannungen und Windlasten (MW, 2020).

### Maximale Ausnutzung

Um ausreichende Reserven für weitere Störlasten aus der Fassadenhaut und Verbindungsmittel zu erhalten wurde eine maximale Auslastung von ca. 50% angestrebt. Abbildung 72 zeigt in der linken Grafik den Ausnutzungsgrad der Hauptträger, die rechte Grafik zeigt die Ausnutzung sämtlicher Elemente der „Enneper“-Struktur. Wir können eine Ausnutzung, welche weitestgehend zwischen **-40%** im Druckbereich und **30%** im Zugbereich liegt ablesen.

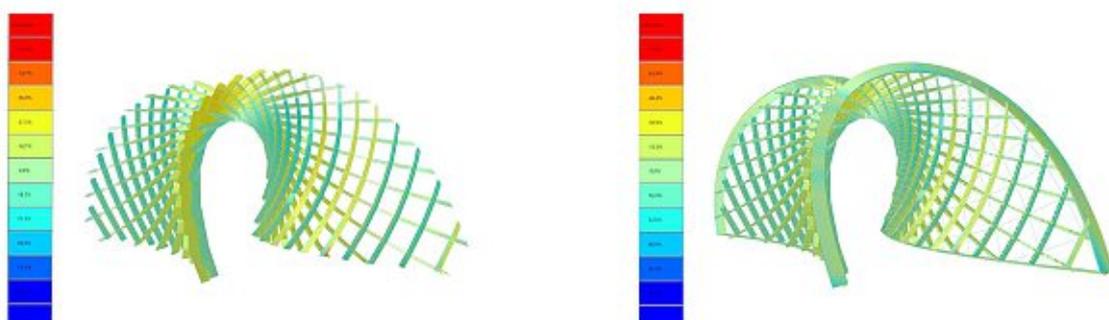


Abbildung 72: Die linke Grafik zeigt den Ausnutzungsgrad der Hauptträger. Die rechte Grafik den Ausnutzungsgrad sämtlicher Elemente der Struktur (MW, 2020).

Die schwarz hinterlegten Linien aus Abbildung 73 zeigen Liniensegmente mit einer Ausnutzung von über **55 %**. Diese befinden sich in den Anschlussbereichen zu den Randträgern. Der konstruktive Anschluss sieht Verstärkungen an diesen Stellen vor. Diese sind im FE-Modell nicht abgebildet.

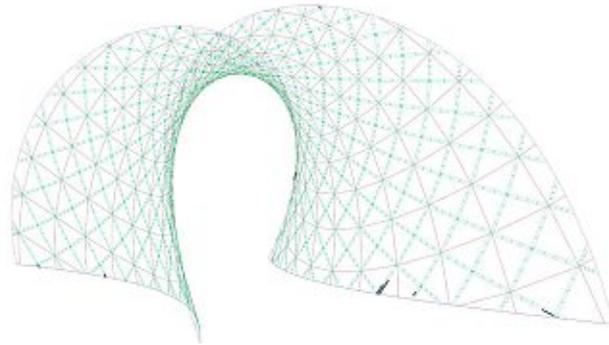


Abbildung 73: Liniensegmente mit einer Ausnutzung  $>50\%$  sind schwarz hinterlegt (MW, 2020).

### Schnittkräfte

Einen wesentlichen Beitrag zur Ausnutzung der Stäbe stellen die Normalkräfte mit bis zu  $38\%$  dar. Die maximalen Normalkräfte betragen **11 kN** Druckkraft und **6,8 kN** Zugkraft. Die Stäbe mit den höchsten Normalkräften treten im Bereich der unteren Auflager auf. Die Schnittkraftverläufe sind in Abbildung 74 dargestellt. Sie zeigen den graduellen Anstieg der Normalkräfte in Richtung Auflager.

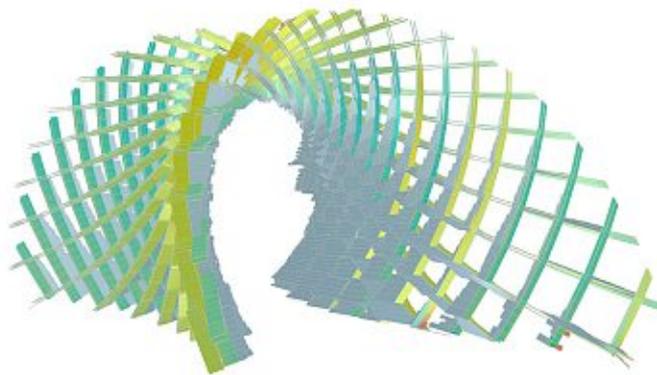


Abbildung 74: Darstellung Normalkräfte (MW, 2020).

Die Momente  $M_z$  spiegeln die Biegung um die lokale  $z$ - Achse. Auch hier ist die reziproke Abhängigkeit der geringen Biegung in Regionen mit hoher Gauß-Krümmung ablesbar.

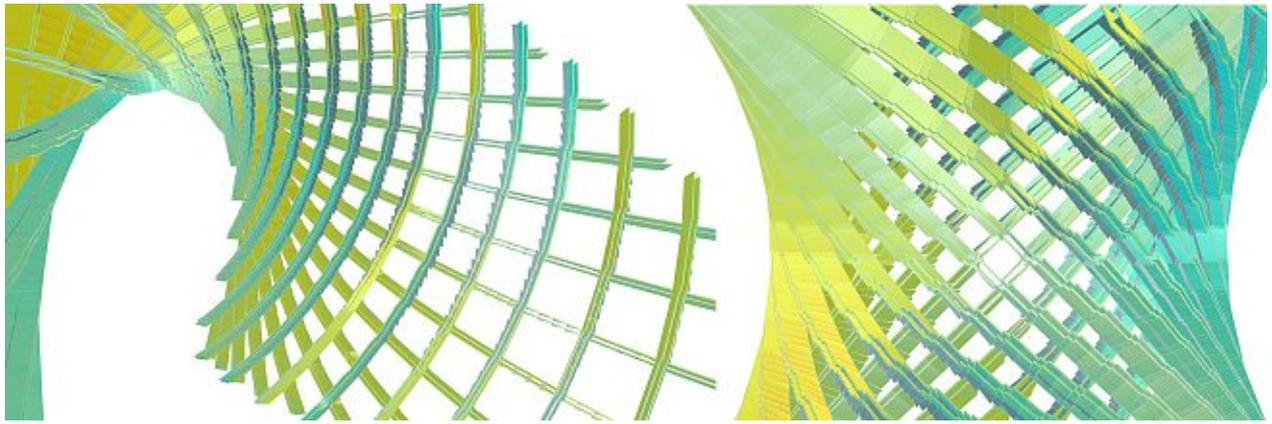


Abbildung 75: Momente  $M_z$  in Abhängigkeit von der Biegung um die schwache Achse (MW, 2020).

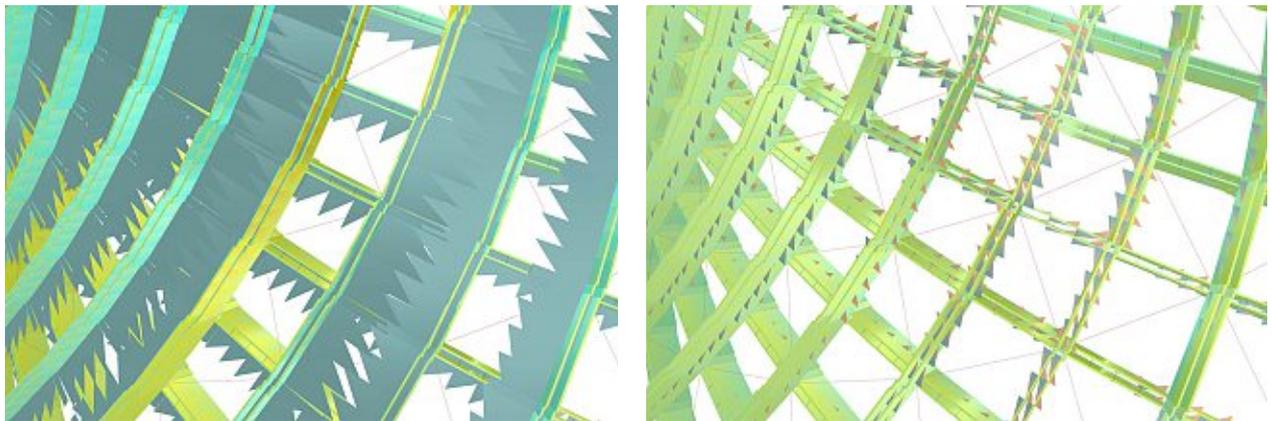


Abbildung 76: Grafik links: Momente  $M_z$  mit aktiver Biegung um die lokale z-Achse in zehnfacher Skalierung. Grafik rechts: Momente  $M_z$  mit deaktivierter Biegung um die lokale z-Achse in zehnfacher Skalierung (MW, 2020).

Die Momente  $M_y$  weisen Höchstwerte an den jeweiligen Einspannungspunkten auf.

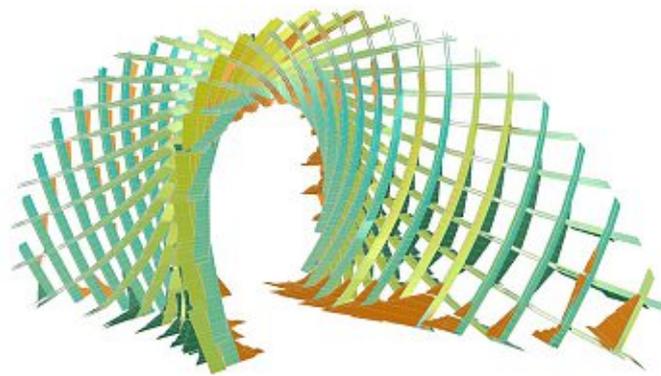


Abbildung 77: Momente  $M_y$  (MW, 2020).

Die Torsionsmomente  $M_t$ , tragen zur Ausnutzung weniger als 10 % bei, die Querkäfte  $V_z$  18%. Auffallend sind wenige Ausreißer der Querkräfte  $V_y$  im Auflagerbereich. Die Kräfte  $V_y$  tragen maximal 20% zur Ausnutzung bei.

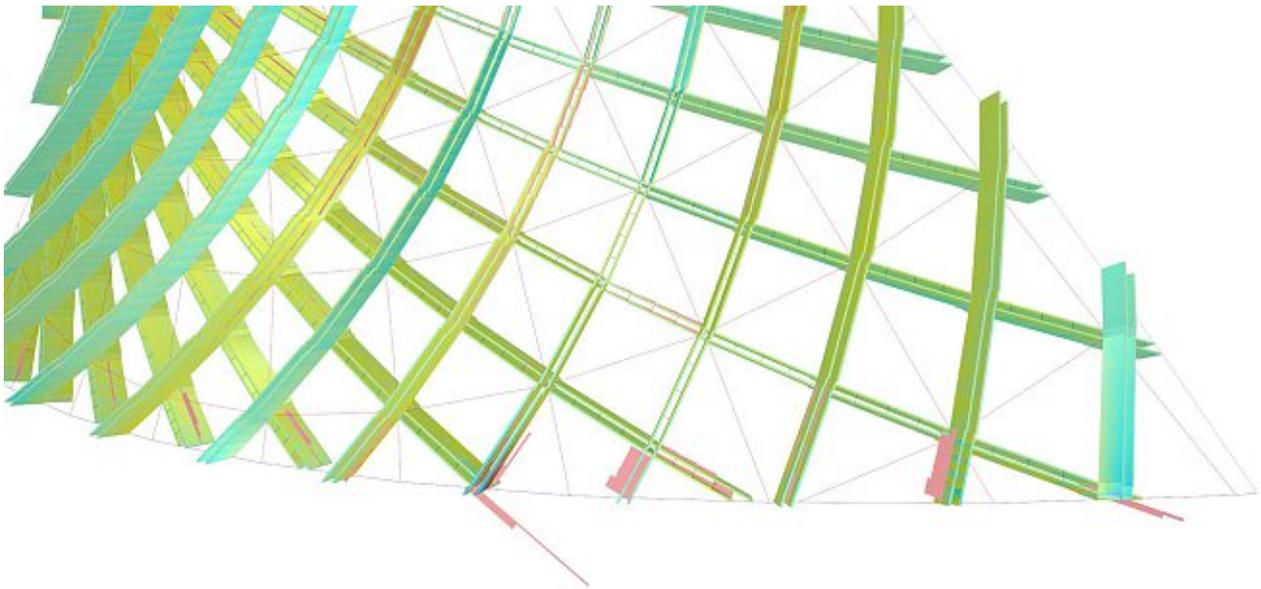


Abbildung 78: Ausreißer der Querkräfte  $V_y$  im Auflagerbereich (MW, 2020).

Die maximalen Schubspannungen betragen  $0.5 \text{ kN/cm}^2$ . Dieser Wert entspricht ziemlich genau den aus 6.2.1 ermittelten Schubspannungen.

### Resümee und weitere Anmerkungen

Die Modellierung und Evaluierung der FE-Simulation wurden hier als linearer Prozess geschildert. In Wirklichkeit, vor allem in der Ebene der Fein-Justage ähnelt die Erstellung der Modellierung eher einem Näherungsverfahren.

Ein gutes Beispiel dafür ist die Festlegung des richtigen Querschnittes für die Hauptträger. Wenn wir uns nicht in der Domäne des Bauens mit aktiv gebogenen und tordierten Bauteilen befinden können wir, sollten wir bei einem gewählten Querschnitt den Nachweis der Tragfähigkeit nicht erbringen können, den Querschnitt einfach erhöhen. Das ist hier nicht so leicht möglich, da sowohl das Erhöhen der Bauteilstärke als auch der Bauteilhöhe wieder zu höheren Normalspannungen im System führt. Kombiniert mit der Suche nach der richtigen Vorspannung der Spannseile, der Anzahl an Scherverbinder und der richtigen Abbildung der Verbindungsknoten haben wir einige Parameter, welche ineinander verwoben sind und in gegenseitiger Abhängigkeit stehen. Und die Veränderung eines Parameters stellt die für als richtig justiert gehaltenen weiteren Parameter von Neuem in Frage.

### III. Detailbetrachtungen

In diesem Abschnitt widmen wir uns Detailbetrachtungen hinsichtlich der Konstruktion einer Asymptotischen Gitterschale. Wir beschäftigen uns mit der Fassadenkonstruktion und deren Anschluss an einen zentralen Knotenstab. Danach widmen wir uns sehr ausführlich dem Knotenstab selbst und entwickeln einen Prototyp, welcher einer Vielzahl an Anforderungen gerecht wird. Schließlich betrachten wir den Anschluss des Knotenstabes an die Primärkonstruktion und führen einen rechnerischen Nachweis zur Tragfähigkeit der Verbindung durch.

#### 6. Rückblick: Geometrische Einbettung

Bevor wir in die konstruktiven Feinheiten der Detaillierung eintauchen, frisken wir die geometrischen Rahmenbedingungen rund um die Knoten- und Fassadenkonstruktion noch einmal auf.

Wir können das Trägerlayout der orthogonal aufeinandertreffenden, asymptotischen Träger, auch wenn sie aus durchlaufenden, gebogenen Elementen bestehen, als diskretes Netz einer unterliegenden Minimalfläche weiterdenken. Die Träger stellen die Primärkonstruktion, welche gleichzeitig die reziproke Unterkonstruktion der Fassade ist, dar. Damit die Träger untereinander wirtschaftlich verbunden werden können, ist die Art und Weise, wie die Träger genau aufeinandertreffen, entscheidend.

Gleichzeitig möchten wir dazu ein Fassadensystem entwickeln, welches aus planaren Vierecken besteht. Eine Konstellation zu finden, die beiden Anforderungen, nämlich eine wirtschaftliche Primärkonstruktion als Unterkonstruktion, gekoppelt mit einer aus planaren Vierecken bestehende Fassade auszubilden gerecht wird ist kein triviales Thema, sondern Teil der aktuellen Forschung der Architekturgeometrie. In der Regel sind Optimierungsschritte notwendig um eine planare Fassade, welche Freiformflächen folgt, zu erhalten. Meistens werden diese Systeme in der Post-Rationalisierung, also nachdem schon ein Entwurf für eine Freiformarchitektur besteht, entwickelt. Wir gehen den umgekehrten Weg. Durch zahlreiche Überlegungen und Verständnis für Geometrie erhalten wir a priori Strukturen, welche unseren Anforderungen perfekt entsprechen. Wir beleuchten dazu noch einmal die Hintergründe

##### 6.1. Meshes und Offset Meshes

Die folgenden Erläuterungen basieren auf Pottmann et. al (2007: 685 ff).

Ein Netz (*mesh*) kann als abstrahierte Version einer baulichen Struktur gedacht werden. Wenn wir an Glasebenen, die Primärkonstruktion, einer eventuellen Sekundärkonstruktion etc. denken, kommen wir nicht mehr mit einem einzelnen Netz als geometrisches Referenzmodell aus, sondern wir benötigen eine Menge an Netzen, welche mit den unterschiedlichen Konstruktionsebenen übereinstimmen. Eine Forderung an diese Netze ist, dass sie parallel zueinanderstehen. Wir wissen bereits, unter parallelen Netzen versteht man Netze, welche kombinatorisch gleich sind und deren korrespondierenden Kanten parallel zueinander sind. Weiters sind die Flächen des Netzes, damit auch des Offset-Netzes planar. Das teilt unsere Anforderung an planare Vierecke zur Ausbildung der Fassadenhaut.

An einem Knoten treffen mehrere Träger, im geometrischen Modell Kanten, zusammen. Wenn es eine gemeinsame Knotenachse gibt, welche in allen Ebenen der eintreffenden Träger enthalten ist, ist die Knotenkonstruktion erheblich vereinfacht. Wir nennen einen solchen Knoten torsionsfrei. Parallele Netze enthalten solche Knotenachsen. Sind die Netze nicht nur parallel zueinander, sondern haben auch einen konstanten Abstand  $d$  zueinander, dann werden sie auch „*Offset-Meshes*“ genannt, wobei der Abstand  $d$  noch spezifiziert werden muss. Dieser kann zwischen den Knoten „*Vertex offsets*“, den Flächen „*Face offsets*“ und den Kanten „*Edge Offsets*“ gemessen werden. Diese *Offsets* sind jeweils an bestimmte Netztypen gebunden. „*Vertex Offsets*“ an „*Circular Meshes*“, „*Face Offsets*“ an „*Conical Meshes*“ und „*Edge Offsets*“ an „*Meshes with edge Offsets*“.

In Teil I haben wir bereits erörtert, dass wir diskrete Minimalflächen durch die diskrete, quasiisotherme Parametrisierung einer Kugel und ihre duale Christoffel-Transformation erhalten. Für die diskrete Abbildung können wir entsprechend drei Typen an Polyeder heranziehen. Jene, deren Knoten auf der Einheitskugel liegen werden „*Circular Meshes*“ genannt, Netze, deren Flächen tangential die Einheitskugel berühren, die „*Conical Meshes*“ und Netze, deren Kanten tangential die Einheitskugel berühren „*Koebe Meshes*“. Wir sehen also, alle diese Typen besitzen „*Offset Meshes*“ (vgl. Bobenko, et al., 2017: 7).

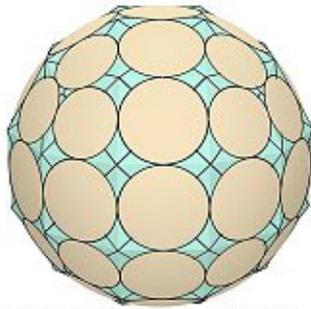
Wir beleuchten nun exemplarisch den letzten Typ, das Koebe-Netz. Da die vier Kanten, welche an einem Knotenpunkt entspringen, sich tangential an die Einheitskugel schmiegen, bilden sie, wie in Abbildung 80 dargestellt die Erzeugenden eines Rotationskegels, dessen Spitze im Knotenpunkt liegt. Alle von einem Knoten entspringende Kanten spannen zur Kegelachse denselben Winkel auf. Dies führt dazu, dass Träger, welche entlang der Netzkante ausgerichtet sind, mit konstanter Höhe an einem Knoten perfekt anschließen würden.

Für unsere Betrachtungen ist vor allem wichtig, dass die Rotationsachse des Zylinders als Achse für einen Knotenstab herangezogen werden kann. Zusätzlich folgt dem ein Flächenlayout aus planaren Vierecken. Und das alles in einem Setting, indem Minimalflächen, auf denen asymptotische Kurven als Layout für eine bauliche Struktur sehr gut geeignet sind, da sie als gerade Flächenstreifen abgewickelt werden können und in jedem Knotenpunkt orthogonal aufeinanderstoßen.

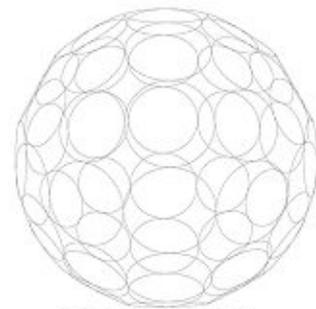
Äußerst interessant wäre nun die Beleuchtung und Gegenüberstellung der unterschiedlichen Netztypen hinsichtlich ihrer geometrischen Auswirkungen auf die Detailmodellierung. Gedanken und Ausblicke dazu werden im Resümee erläutert.



Koebe Mesh

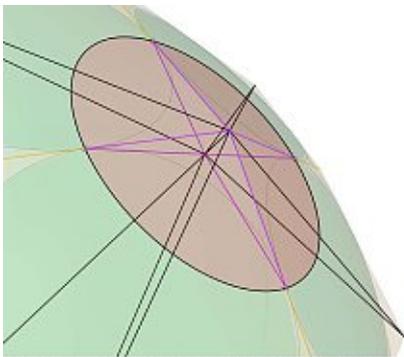


Schnittbild des Koebe Meshes mit Einheitskugel

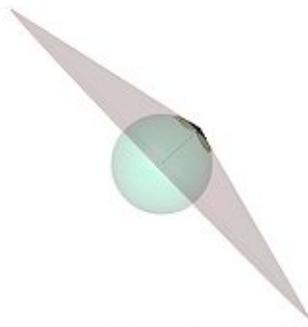


Circle Packing als Schnittbild

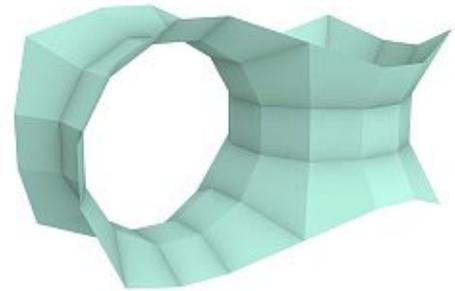
Abbildung 79: Schnittbild eines Koebe-Netzes mit der Einheitskugel (MW, 2020).



Rotationskegel; einfallende Kanten spannen denselben Winkel zur Kegelachse auf.



Rotationskegel; Kegelachse mündet in den Kugelmittelpunkt



Diskrete Minimalfläche nach Christoffel Transformation

Abbildung 80: Zusammenhang „Circle Packing“ und Knotenachsen (MW, 2020).

## 7. Entwicklung Fassadenhaut

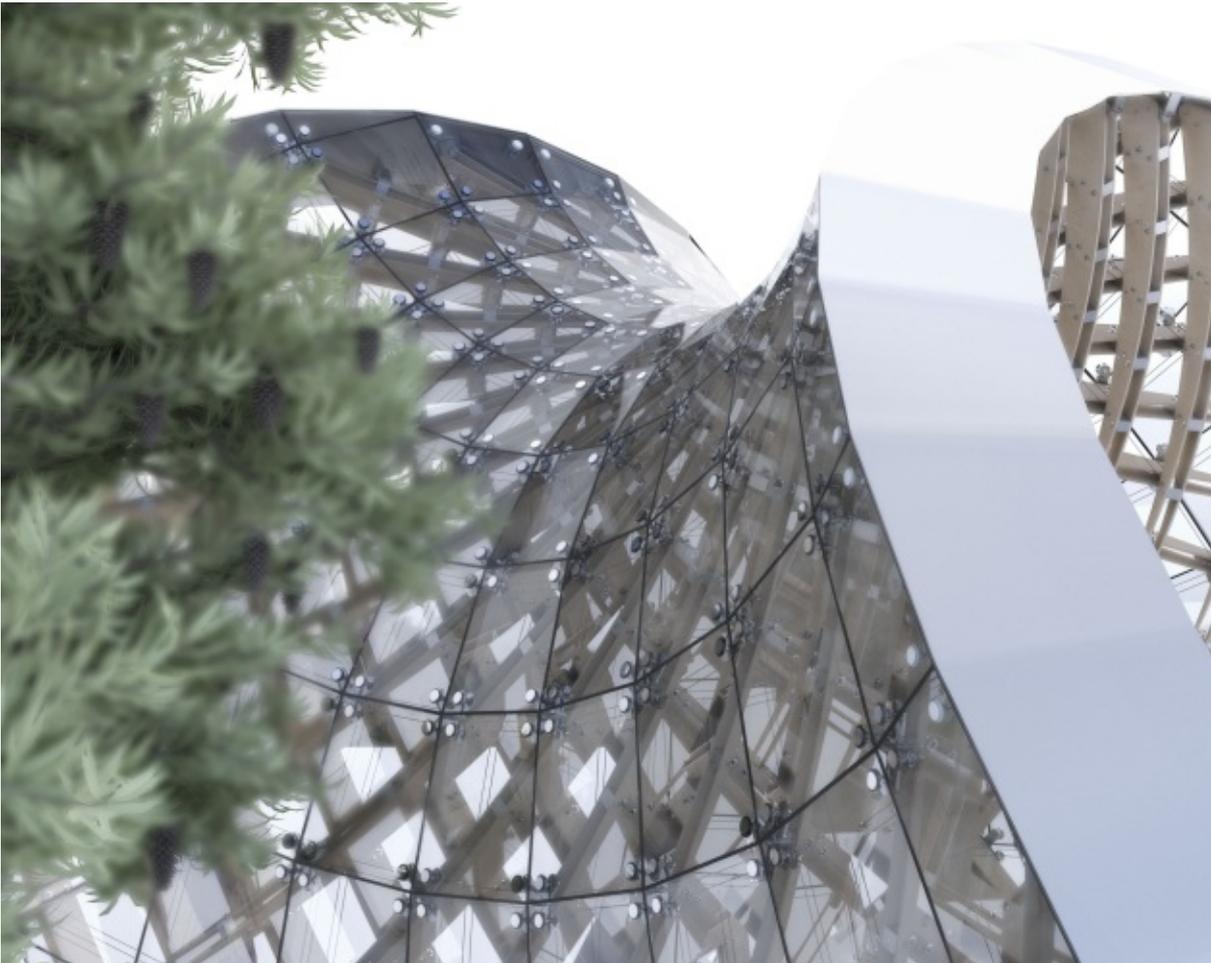


Abbildung 81: Screenshot Ausschnitt Fassade (MW, 2020).

### 7.1. Arbeitsgrundlagen

Im vorigen Kapitel haben wir eine Herleitung getroffen, die uns das Vorhandensein eines planaren Vierecksnetzes und einer Knotenachse als geometrischen Ausgangspunkt für die weiteren konstruktiven Entwicklungsschritte der Fassade bietet. Zudem sei vorausgeschickt, dass folgende Details auf der Grundlage des Modells „Enneper“ entwickelt werden.

Die planaren Vierecke repräsentieren baulich gesehen Glaspaneele, die Knotenachsen die Achsen eines Verbindungsknotens. An der Knotenachse treffen vier planare Glaspaneele, zwei asymptotische Trägerpaare und die diagonal laufende Spannseile zusammen. Das Zusammenfügen dieser Elemente auf einer eleganten, ressourcenschonenden und wirtschaftlichen Weise stellt den inhaltlichen Hauptteil dieses Abschnittes.

Eine elegante Variante als Anschlussmittel zwischen den Glaspaneelen und dem Knotenstab, welche einige konstruktive Vorteile mit sich bringt, ist die Verwendung eines Vierarmspiders in Kombination mit kugelgelagerten Punkthaltern. Im Folgenden werden die einzelnen Elemente erklärt. Danach wird die parametrische Modellierung der Anschlüsse an die Gesamtstruktur beschrieben.

Für den Gesamteindruck der Fassade ist ein einheitliches Fugenbild und eine perfekte Ausrichtung der Glasebenen zueinander von großer Bedeutung. Gleichzeitig ist die zwängungsfreie Lagerung mit gleichzeitig kontrollierter Lasteinleitung wichtig. Um diesen Anforderungen gerecht zu werden, ist es wichtig Toleranzausgleichmöglichkeiten miteinzuplanen. Dies stellt zusätzliche konstruktive Anforderungen an das Anschlussystem.



Abbildung 82: Gesamtstruktur (MW, 2020).

## 7.2. Elemente der Fassadenhaut

### 7.2.1. Punkthalter

Punkthalter bieten den visuellen Vorteil einer rahmenlosen Verglasung. Sie sind zudem aufgrund des geringen Materialaufwandes ressourcenschonend und in der Freiformarchitektur sehr gut eingesetzt, da auf eine weitere lineare Unterkonstruktion verzichtet werden kann. Sie werden durch lokale Bohrungen mit der Glasscheibe verbunden. Punkthalter sind als flächenbündige Variante oder mit äußerer Klemmscheibe erhältlich. Zudem gibt es starre oder gelenkige Ausführungen. Die zweite Variante bietet den Vorteil, dass unterschiedliche Winkel im Punkthalter selbst aufgenommen werden können. Punkthalter mit einer Winkelbeweglichkeit von  $21^\circ$  sind möglich. Diese stellen auch für unsere Anforderungen ein ideales Produkt dar, da sie unterschiedliche Winkel zwischen den Glaspaneelen und der Knotenachse aufnehmen können. Weiters werden über den Gewindebolzen Toleranzen in der Tiefe aufgenommen. Aufgesetzte Teller bieten zwar den Vorteil, dass zusätzliche Toleranzen in der Fläche durch die Glasbohrung aufgenommen werden können, visuell ist, das ist aber jetzt persönliche Geschmackssache, die flächenbündige Variante zurückhaltender und eleganter. Daher wurde auch diese Variante gewählt. Eine weitere Folge ist, dass aufgrund der Senkbohrung im Glas bei Verbundsicherheitsglas eine Mindestglasdicke von 13.76 mm gilt.

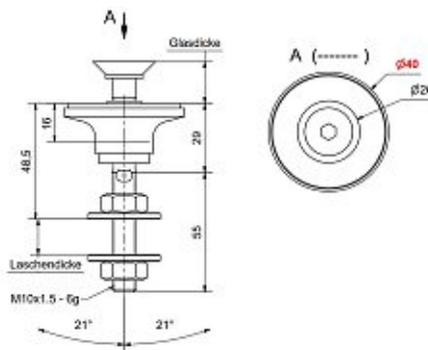


Abbildung 83: Detailzeichnung eines kugelgelagerten Senkkopfpunkthalters. Quelle: gebo glas-elemente-befestigungssysteme

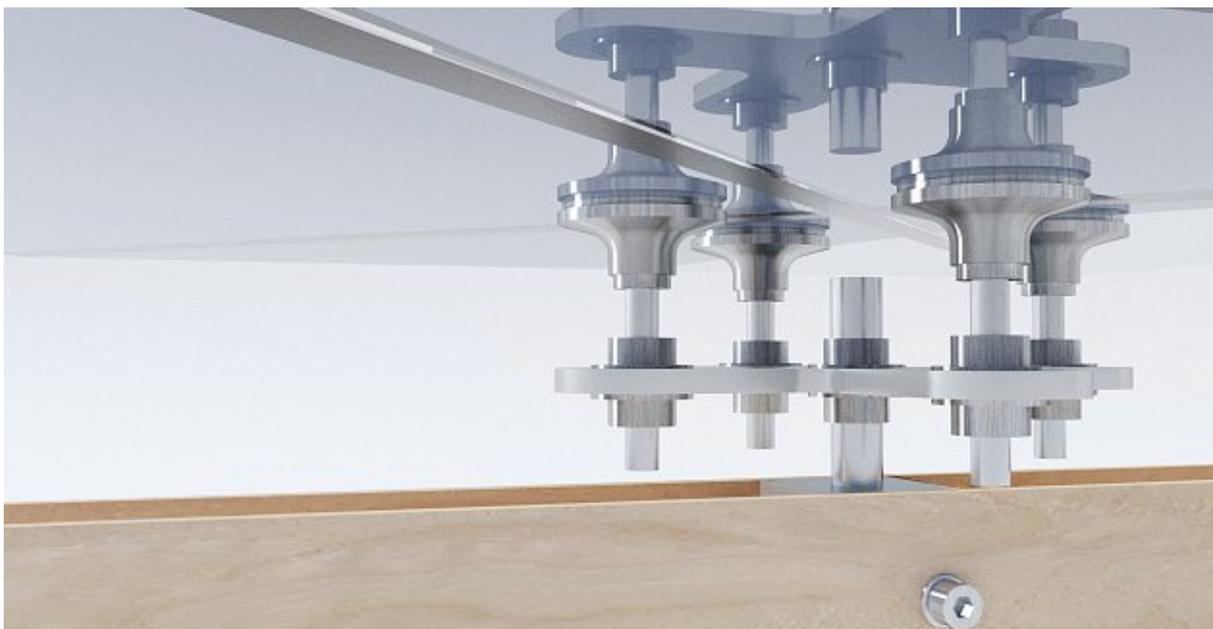


Abbildung 84: Visualisierung Punkthalter an Spider (MW, 2020).

### 7.2.2. Verglasung

Laut OIB Richtlinie 4 sind Horizontalverglasungen bei einer Neigung zur Vertikalen von mehr als  $15^\circ$  aus Verbund- Sicherheitsglas auszuführen, oder es müssen Schutzvorrichtungen gegen das Herabfallen von Glasteilen errichtet werden. Aufgrund von Anforderungen der Punkthalter, ist eine Mindestdicke von 13.76 mm bei Senkkopfbohrungen notwendig. Im Zuge dieser Arbeit wurden keine Berechnungen zum Nachweis der Tragfähigkeit der Verglasung durchgeführt. Erstaunlich ist, dass die zusätzliche Auflast durch Erhöhung der Glasdicke, sie wurde anfänglich mit 8 mm angenommen, tragstrukturell in unserem Fall sogar vorteilhaft ist. Das resultiert aus der Kombination, dass es sich bei der asymptotischen Gitterschale um einen Leichtbau handelt und der bemessungsrelevante Lastfall, der mit zusätzlichen Windlasten darstellt.

Wichtig ist, dass die Scheiben zwängungsfrei eingebaut werden. Dazu sind Fest-, Horizontal- und Loslager zu definieren.

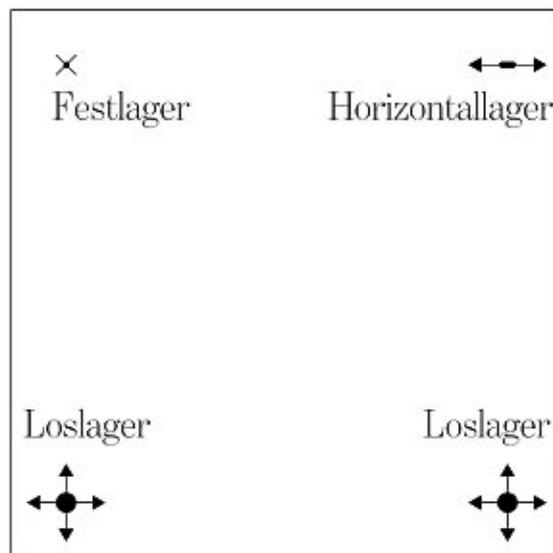


Abbildung 85: Ausbildung Fest-, Horizontal- und Loslager. (MW, 2020, nach gebo glas-elemente-befestigungssysteme, 2020)

### 7.2.3. Spider

Der Vierarmspider bietet die Anbindung der Punkthalter an die Unterkonstruktion an. Nachdem bei Senkkopfpunkthalter der Toleranzausgleich in der Ebene durch größere Glasbohrungen nicht ausgeführt werden kann, wird diese nun in die Bohrungen im Spider verlegt. Im Zentrum des Spiders befindet sich ebenso eine Gewindebohrung. Dort findet der Anschluss an den Knotenstab durch eine Gewindestange statt.

### 7.3. Parametrische Modellierung des Anschlusses Glaspaneel-Knotenstab

Ein wesentliches Merkmal, welches sich durch die Konstruktion der Asymptotischen Gitterschale als roter Faden durchzieht, ist der Einsatz repetitiver Elemente. Diesem Prinzip soll auch der Anschluss der Glaspaneel an die Knotenstäbe folgen. Ein Skript wurde entwickelt, welches sämtliche Winkel zwischen Glasebene und Knotenachsen ermittelt, und unter Miteinbeziehung des Winkeltoleranzausgleiches einen Spider, welcher den Anforderungen aus den Konstruktionstoleranzen entspricht, erstellt. Die Konstruktionsweise dazu wird folgend illustriert.

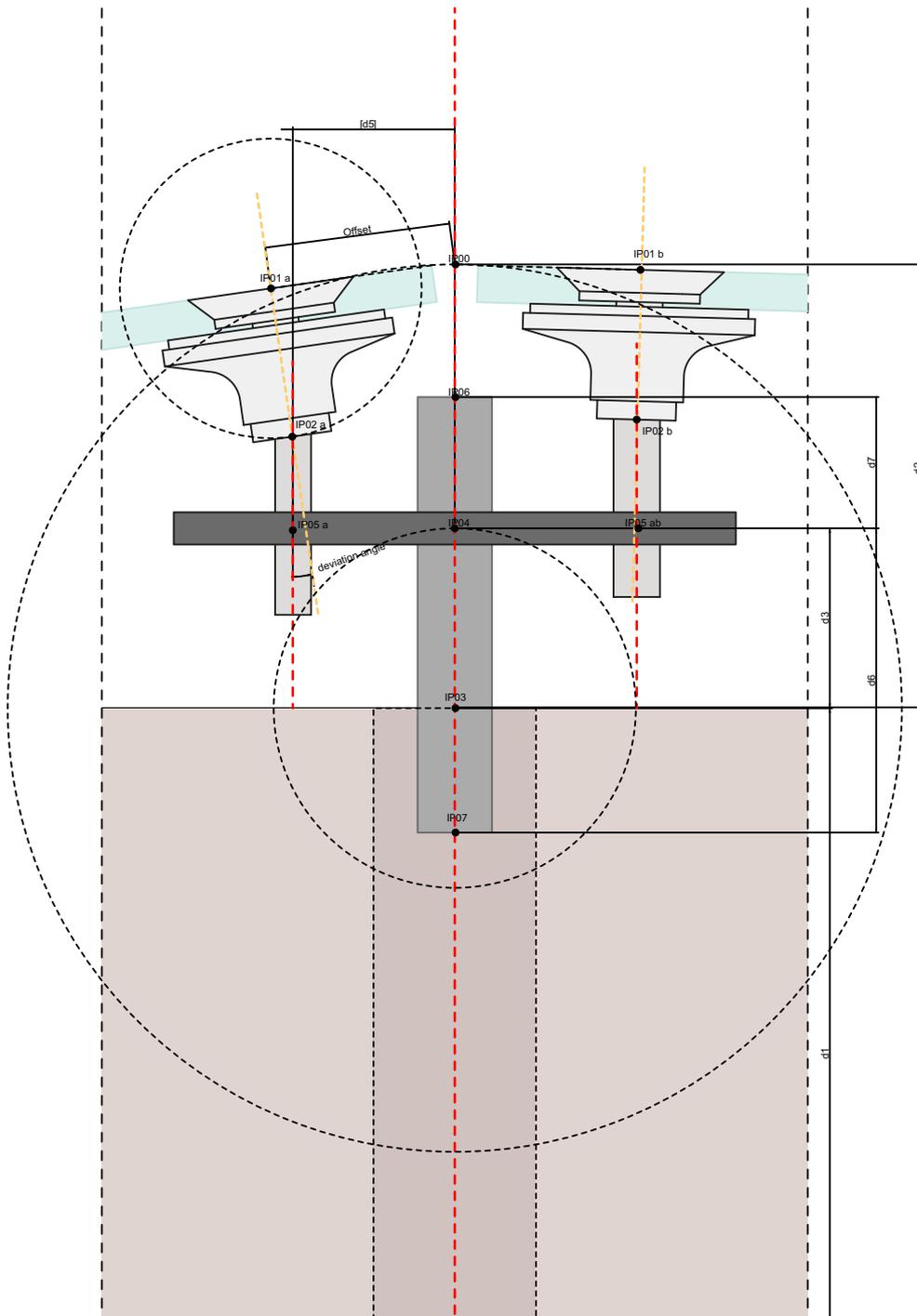


Abbildung 86: Konstruktionszeichnung parametrische Abhängigkeiten der Ausrichtung der Punkthalter (MW, 2020).

### 7.3.1. Bezugsebenen und Variablen

#### Bezugsebenen:

IP00: Ebenennormale = Knotenachse; Ebenenursprung in Schnittpunkt äußere Glasebenen -Knotenachse

IP01a-d: Ebene im Zentrum Glasbohrung; durch Offset festgelegt; Ebene kollinear zur Ebene Verglasung

IP02a-d: Winkelrotationspunkt; parallel zu IP01 mit Abstand lt. Herstellerangaben

IP03: Ebenennormale= Knotenachse; Abstand Referenzebene IP zu IP03= d1;

IP04: Ebenennormale= Knotenachse; Abstand IP03 – IP04= d3;

IP05a-d: Orthogonalprojektion IP02 auf IP04

IP06: Ebenennormale= Knotenachse; Abstand IP04 – IP06= d7;

#### Variablen:

Offset: Abstand Glasrand zu Zentrum Glasbohrung

d1: Trägerhöhe

d2: Abstand äußerer Trägerrand äußere Glasebene

d3: Abstand Spider- Äußerer Trägerrand

d6:  $d6+d7$  = Länge Gewindestab; d6= Abstand unteres Gewindestabende-Spider

d7:  $d6+d7$  = Länge Gewindestab; d7= Abstand oberes Gewindestabende -Spider

[D5]: Domäne Abstand IP04-IP05; bestimmt Lochweite

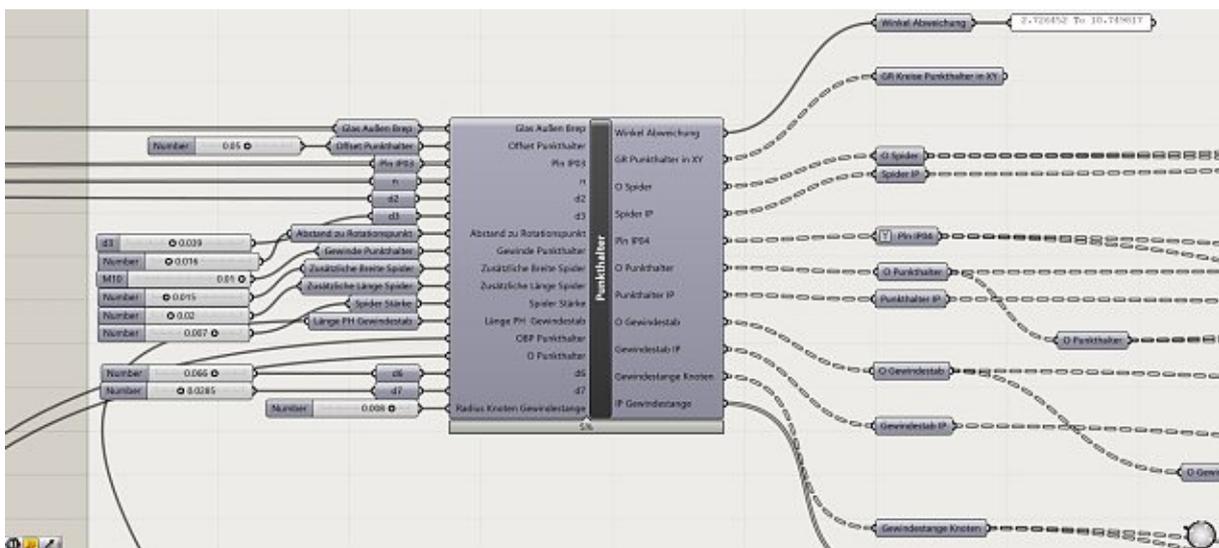


Abbildung 87: Screenshot des Grasshopper „Canvas“ mit Punkthalter- Spider Knoten (MW, 2020).

## Berechnung Lochweite Spider

Aufgrund der unterschiedlichen Neigungen der Glaspaneele zur Knotenachse variiert der Abstand von IP04 zu IP05, je nach Neigung der Glaspaneele. Damit ein Typ Spider repetitiv eingesetzt werden kann, wird die Lage sämtlicher Punkthalter evaluiert und aufgrund des gesamten Fußabdruckes, wie in Abbildung 88 dargestellt, die Lochweite der Spider, mit zusätzlichen Toleranzmaßen ermittelt. Eines der vier Lager innerhalb einer Glasscheibe muss als Fixlager ausgebildet werden. Dieses wird über den Anpressdruck hergestellt.

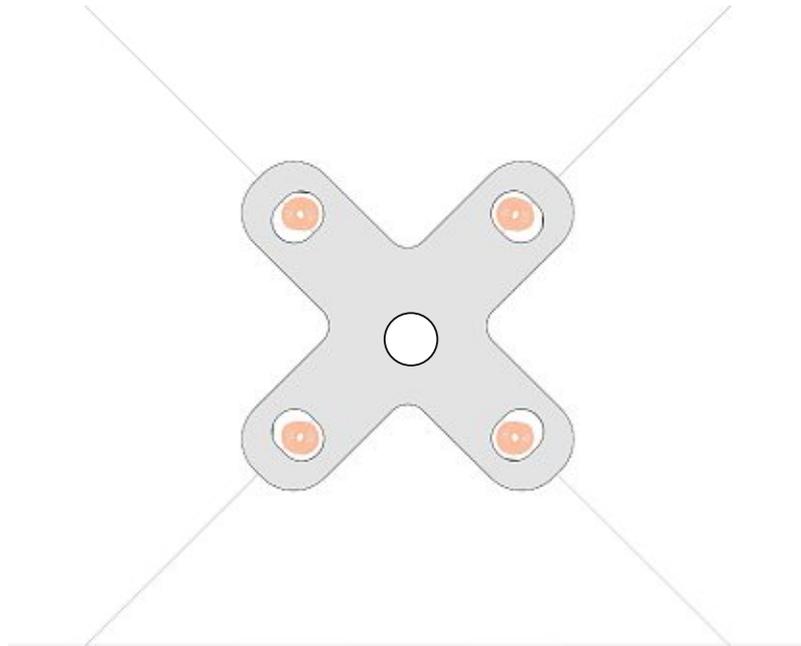


Abbildung 88: Evaluierung der Lochweite der Punkthalter (MW, 2020).

## Maximale Verschwenkung

Die Winkelrotation der Punkthalter verlaufen zwischen 2.7 und 10.7 Grad. Dies unterläuft bei Weitem die maximal zulässige Rotation von 21°. Abbildung 89 zeigt zur visuellen Prüfung der Richtigkeit die Projektion aller Punkthalter mit Spider in dieselbe Horizontalebene.



Abbildung 89: Visualisierung der individuellen Rotationen der Punkthalter (MW, 2020).

## 7.4. Parametrische Modellierung des Anschlusses Glaspaneel-Randträger

Auch der Anschluss der Glaspaneel an die Randträger wird als repetitiv einsetzbares Detail konzipiert. Das Skript aus 7.3 wurde so erweitert, dass es ebenfalls die Anschlüsse im Randbereich berücksichtigt. Es ermittelt sämtliche Winkel zwischen Glasebene und Randträger, bildet daraus den Mittelwert und konstruiert unter Miteinbeziehung des Toleranzausgleiches über das Gelenk des Punkthalter und des Langlochs den fertigen Aufnahmewinkel, welcher repetitiv für alle Anschlüsse verwendet werden kann.

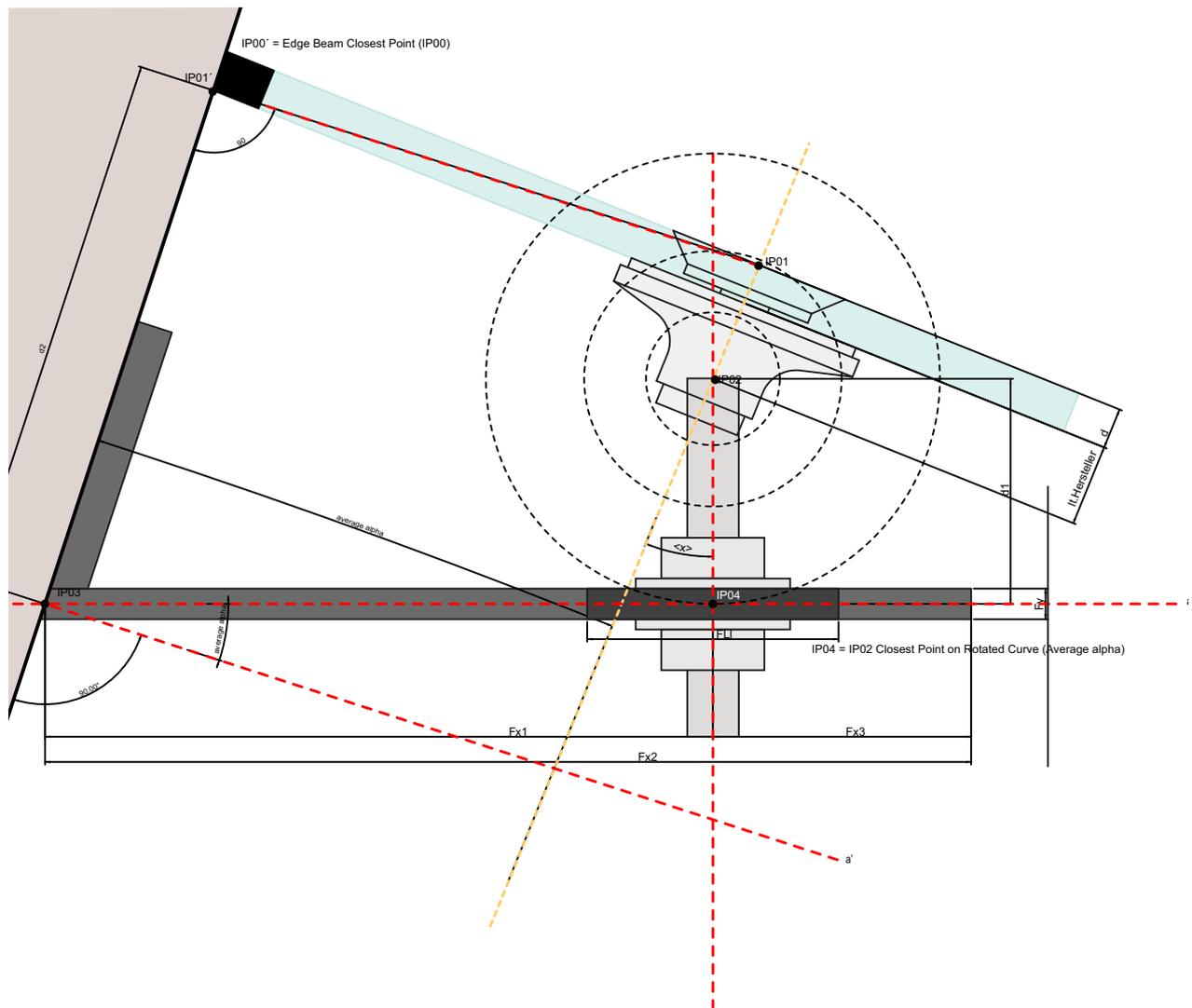


Abbildung 90: Konstruktionszeichnung parametrische Abhängigkeiten Anschluss Punkthalter Randträger (MW, 2020).

### 7.4.1. Bezugsebenen und Variablen

#### Bezugsebenen:

IP01a: Ebene im Zentrum Glasbohrung; durch Offset festgelegt; Ebene liegt in Ebene Verglasung

IP01': Ebenenursprung durch Schnittpunkt des auf den Randträger orthogonal auftreffenden Strahls aus IP01; lokale .x-Achse aus Verschnitt Ebene durch Achse IP01-IP02 und IP01 und IP01' mit Fläche Randträger

IP02: Winkelrotationspunkt; parallel zu IP01 mit Abstand lt. Herstellerangaben

IP03: Ursprung der Ebene durch Abstand d2 lt. Detailzeichnung auf Schnittkurve

IP04: Orthogonalprojektion IP02 auf a'

#### Variablen:

Average Alpha: arithmetisches Mittel sämtlicher Winkel lt. Detailzeichnung

[d1]: Domäne Abstand IP02 IP03 d2: Abstand IP01' IP03

d2: Abstand äußerer Trägerrand äußere Glasebene

d3: Abstand Spider- Äußerer Trägerrand

[FLI]= Domäne Länge Langloch

Fx1: Abstand IP03 IP04

[D5]: Domäne Abstand IP04-IP05; bestimmt Lochweite

### 7.4.2. Die Geometrie der Randträger

Ursprünglich wurden die Randträger als planare Träger angedacht. Problematisch stellte sich hier heraus, dass aufgrund des vorerst gewählten spitzen Winkels zu den Glaspaneelen und des gewünschten Abstands zur Glaskante die Punkthalter mit den Randträgern kollidierten. Daher werden die Randträger als abwickelbare allgemeine Kegelflächen konstruiert.

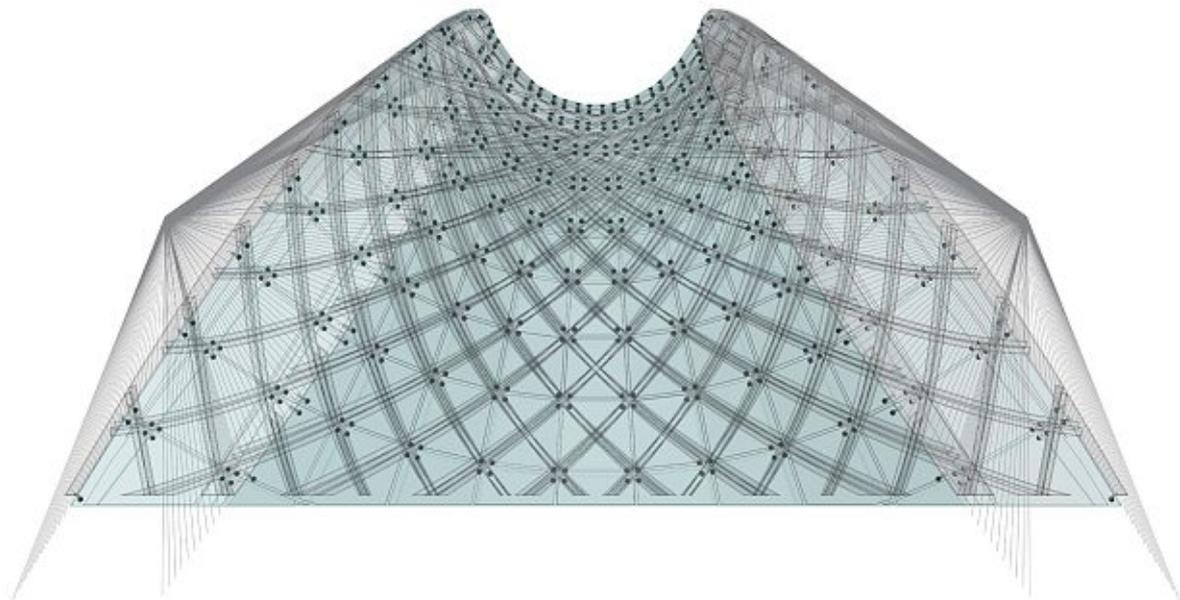


Abbildung 91: Modellierung Randträger als allgemeine Kegelfläche (MW, 2020).

## 7.5. Anschluss Spantpaar-Randträger

Eine wichtige Anforderung an das Standarddetail „Anschluss Spantpaar-Randträger“ ist der mögliche Einsatz repetitiver Elemente. Jedes Trägerpaar schließt in Schalenebene in einem individuellen Winkel an die Randträger an. Eine Möglichkeit, anstatt jeden Winkel durch eine individuelle Komponente aufzunehmen, ist die Ausbildung eines in Schalenebene gelenkigen Anschlusses. Dafür wird ein Aluminium C-Flansch eingeführt, welcher eine zentrale Bohrung erhält. Mit Hilfe einer gelenkigen Schraubverbindung an den zentralen Alu-Konnektor, der wiederum mit den Spantpaaren verbunden ist, kann jeder individuelle Winkel in Schalenebene aufgenommen werden. Die Anschlüsse sind so konstruiert, dass sämtliche Mindestabstände der Verbindungsmittel zu den Randbereichen laut Eurocode 5, diese werden in 9.1.1 erklärt eingehalten werden.



Abbildung 92: Visualisierung Standard Detail Anschluss Randträger in Gesamtstruktur (MW, 2020).

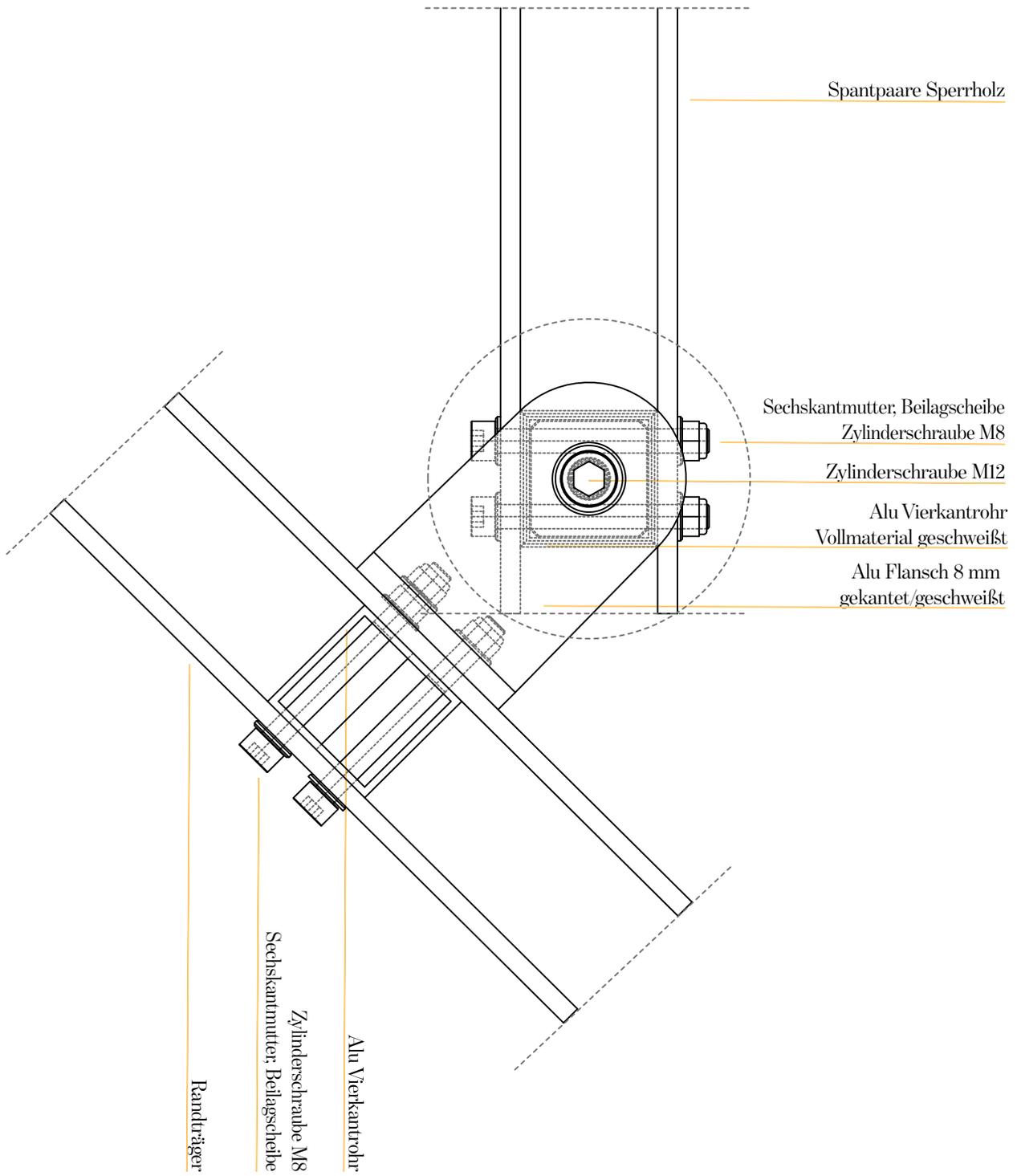


Abbildung 93: Grundriss Standarddetail Anschluss Spantpaar- Randträger (MW, 2020).

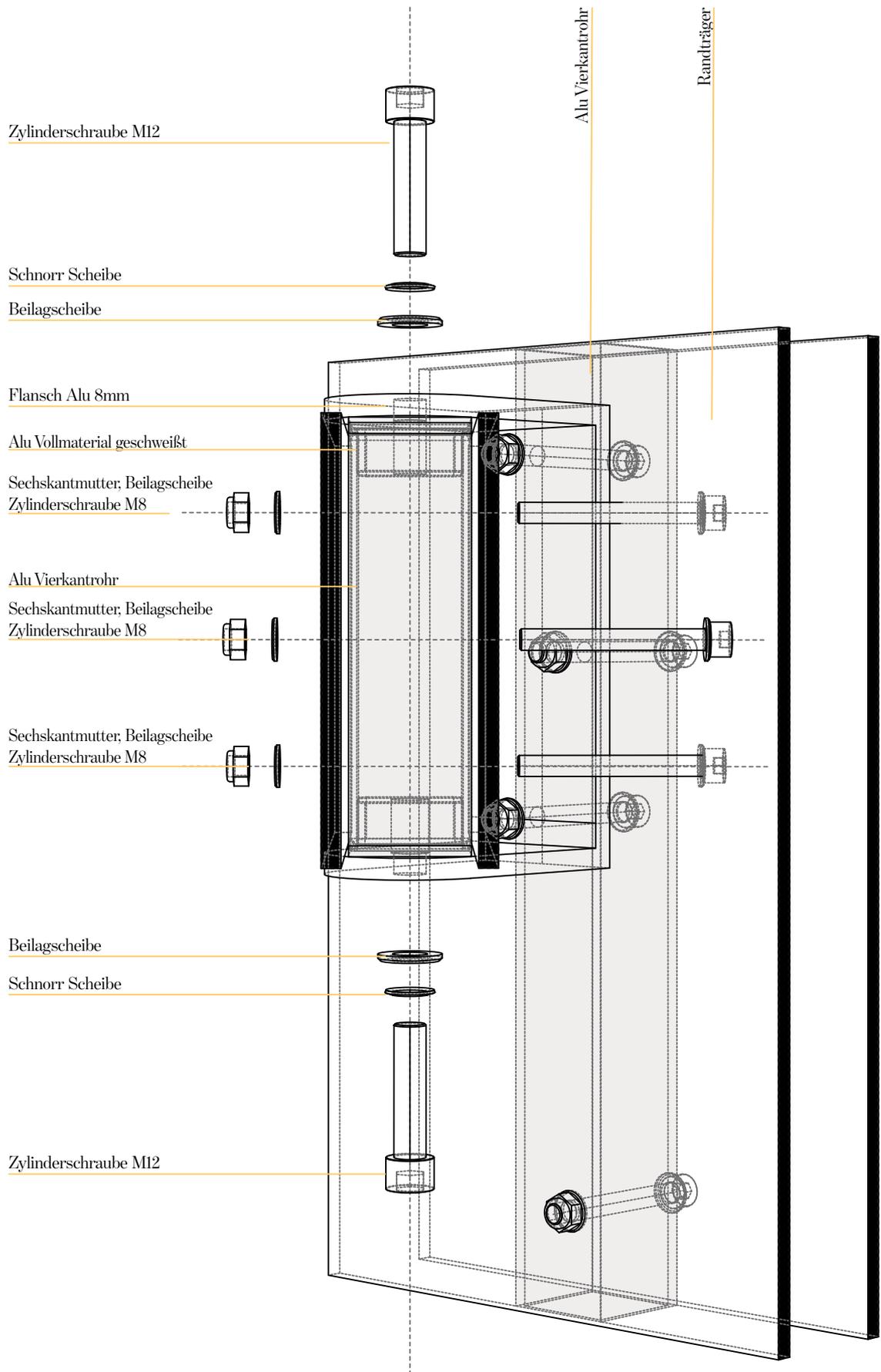


Abbildung 94: Perspektivische Explosionszeichnung Standard- Detail Anschluss Randträger- Spantpaar (MW, 2020).



Abbildung 95: Visualisierung Standard Detail Anschluss Randträger- Spanten (MW, 2020).

## 8. Herstellungsstrategien einer Asymptotischen Gitterschale und konstruktive Folgerungen

### 8.1. Errichtung durch elastische Deformation

Eine Besonderheit, welche dem Aufbau einer Asymptotischen Gitterschale zugutekommt, ist ihr außergewöhnlicher Errichtungsvorgang. Nachdem die Asymptotische Gitterschale aus anfänglich geraden Flächenstreifen besteht und ihre Form durch elastische Deformation erhält, entsteht die Möglichkeit, die Schale flach vorzumontieren. Indem wir die Auflager an ihre finale Position schieben, nimmt die Schale selbstständig den dreidimensionalen Zustand an (*self-formation*).



Errichtung einer ASGS

Abbildung 96: Elastische Errichtung des Modells „Monroe“ (MW, 2020).

#### 8.1.1. Limitationen

Problematisch erweist sich für diese Errichtungsart die Verwendung von Trägerpaaren. Die jeweiligen Trägerachsen des Paares entstehen durch den Versatz (*offset*) einer Referenzkurve. Diese ist in der Regel gekrümmt. Dadurch entstehen Längenunterschiede in den versetzten Kurven. Diese bewirken, dass die Struktur sich aus dem flachen Zustand bereits in ihre dreidimensionale Schalenform wölben möchte. Ein Vorschlag zum Umgang lautet wie folgt: Bei stark gekrümmten Trägern wird in der Vormontage nur eines der beiden Elemente eingesetzt. Danach wird die Schale errichtet. Hat sie den finalen Zustand erreicht, wird der zweite Träger dazu gekoppelt.

### 8.2. Vorevaluierung weiterer konstruktiver Anforderungen durch die Herstellung eines 1:1.5 Mock- Up

Um zu testen, ob in der Herstellung einer Asymptotischen Gitterschale weitere Anforderungen an die Verbindung anfallen und um den Ablauf der Vormontage und Errichtung zu testen, wurde ein 1:1.5 Mock-Up errichtet.

#### 8.2.1. Erstellung der Basisgeometrie

Für die Geometrieerstellung des Mock-Ups wurde das Modellierverfahren einer diskreten Minimalfläche über die Christoffel-Transformation eines Koebe-Polyeders verwendet.

Die Struktur besteht aus drei Typen von Doppelträgern, welche symmetrisch angeordnet sind. Pro Lage werden fünf Doppelträger eingesetzt.

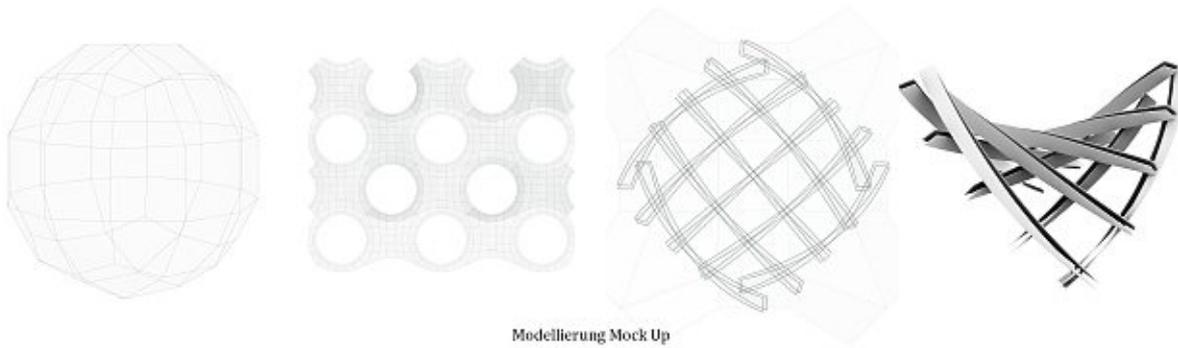


Abbildung 97: Geometrierstellung Mock-Up (MW, 2020).

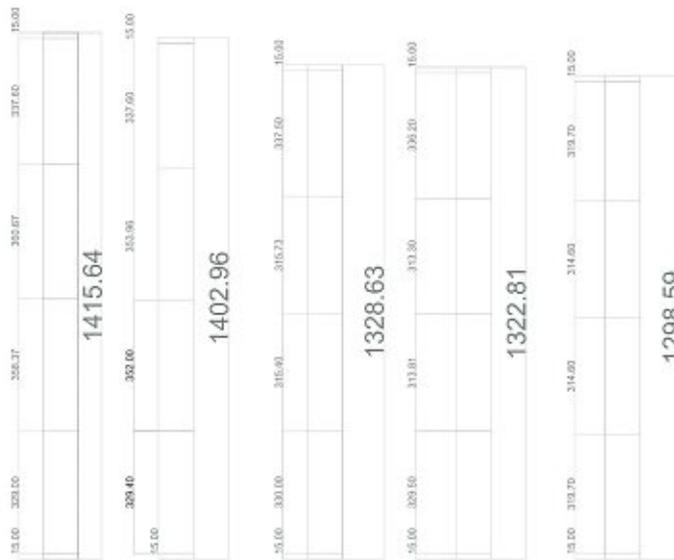


Abbildung 98: Abgewinkelte Trägerstreifen (MW, 2020).

## 8.2.2. Konstruktive Ausführung

Die beiden Trägerlagen werden mit Knotenstäben, welche in den Schnittpunkten der Träger platziert sind, verbunden. Die Knotenstäbe sind aus 30mm Kieferstaffel gefertigt und bestehen aus drei Komponenten. An den beiden äußeren Komponenten werden die Träger befestigt. Dafür werden entsprechende Bohrungen gesetzt. Stirnseitig werden jeweils im Flächenzentrum Rampa-Muffen eingedreht. Das Mittelstück wird axial durchbohrt. In die Rampa-Muffen und das Mittelstück durchlaufend wird ein Gewindestab eingedreht. Dieser erlaubt eine Scherung in der Ebene. Dies wird für die elastische Errichtung benötigt.

Die Träger bestehen aus 4 mm Birkenperrholz. Ihre Höhe beträgt 90 mm. Die Streifen wurden mit Hilfe einer Großformatsäge zugeschnitten und anschließend auf der Tischkreissäge abgelängt. Die exakten Bohrungen wurden mit der Handbohrmaschine durchgeführt. Die Trägerpaare werden pro Verbindungsknoten mit zwei Linsenkopfschrauben, Muttern und Beilagscheiben miteinander gekoppelt. Zur Aussteifung werden diagonal verlaufende Stahlseile eingeführt. Diese laufen durch Ösenschrauben, welche an den Kanten des Mittelstücks eingedreht sind.

### 8.2.3. Resümee

Eine große Frage, welche mit dem Bau des Mock-Ups beantwortet werden sollte, war, ob während des Errichtungsvorgangs Bewegungen in der Struktur entstehen, welche die Einführung von Langlöchern in den Trägern erfordern. Es gab Versuche, diesen Errichtungsvorgang digital zu simulieren, diese waren jedoch nicht aussagekräftig. Die Erkenntnisse, die durch den Bau des Mock-Ups gewonnen wurden, bestätigen, dass keine Langlöcher notwendig sind. Dies ist für den Nachweis der Verbindung sehr vorteilhaft, da nach Eurocode 5 die Löcher einer Bolzenverbindung nicht viel größer als das eigentliche Bohrloch sein dürfen. Die Annahmen, dass stark gebogene Trägerpaare aufgrund ihrer Längenunterschiede bereits in der Vormontage ihren dreidimensionalen Zustand einnehmen, wurde ebenfalls bestätigt. Im Aufbau haben spontan zwei Verbindungsknoten durch Delamination versagt. Daher traf auch die Hypothese, dass Holz für den vielfach geschwächten Knotenstab nicht das ideale Material ist, zu.



Abbildung 99: Mock-Up (MW, 2020).

## 9. Entwicklung eines Standard Verbindungsknoten

In diesem Kapitel widmen wir uns der detaillierten Entwicklung eines Standard-Verbindungsknotens. Wir beginnen damit, sämtliche Anforderungen an den Knoten herzuleiten und entwickeln daraus konstruktive Vorschläge. Anschließend wird die Tragfähigkeit der Verbindung zwischen Träger und Knotenstab berechnet und den Einwirkungen gegenübergestellt.

### 9.1. Anforderungen an den Verbindungsknoten und konstruktive Lösungsvorschläge

#### 9.1.1. Konstruktive Anforderungen

##### Setting

Sämtliche Verbindungsknoten sind aufgrund ihrer geometrischen Einbettung torsionsfrei, orthogonal und kongruent. Somit ist eine Type von Verbindungsknoten repetitiv einsetzbar. In der Entwicklungsphase des Verbindungsknotens traten einige Anforderungen auf, welche für die weitere Knotenentwicklung maßgebend sind. Diese werden nachstehend erläutert.

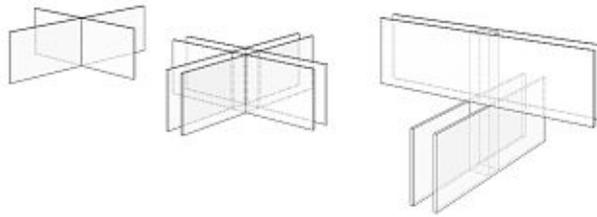


Abbildung 100: Verbindung der Trägerpaare auf unterschiedlichen Ebenen (MW, 2020).

Um eine ausreichende Tragfähigkeit mit einem gleichzeitigen Biegungs- und Torsionsvermögen zu erhalten, werden die Sperrholzträger als Trägerpaare auf zwei unterschiedlichen Ebenen platziert. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, einen zentralen Verbindungstab als Zentrum der Befestigung vorzusehen.

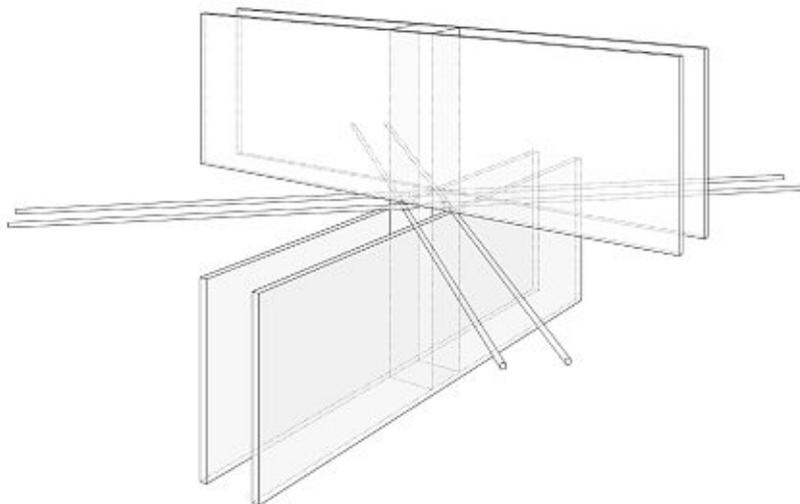


Abbildung 101: Lage Anbringung der Stahlseile (MW, 2020).

Die Anbringung der aussteifenden Stahlseile in der Symmetrieebene der beiden Trägerebenen, also in der Mitte des Verbindungsstabes ist tragstrukturell vorteilhaft. Da, wie nachfolgend noch im Detail erläutert wird, das Stahlseil nicht zentrisch durch den Verbindungsstab verlaufen kann, erfolgt die Anbringung zweier Seilpaare punktsymmetrisch um die zentrale Stabachse.



Abbildung 102: Visualisierung des Standardknotens (MW, 2020).

Für die Befestigung der Glaspaneele an den Hauptträgern werden eingelassene Gelenkkopf-Punkthalter mit Vierarmspider vorgesehen. Diese werden mit einem Gewindestab, der entlang der Achse des Verbindungsstabes angebracht ist, mit der Primärkonstruktion verbunden.

### **Gelenkausbildung: Scherung in der Ebene**

Für die Errichtung einer Gitterschale eignet sich das Aufstellen durch elastische Deformation als wirtschaftliche Methode. Hierfür ist es notwendig, dass die Trägerpaare um ihre zentrale Achse rotieren können. Im vormontierten, flachen Zustand befinden sich die Sperrholzträger in einem allgemeinen Winkel zueinander. Im Errichtungsvorgang formieren sie sich, bis sie orthogonal zueinanderstehen.

Der Knoten muss zwar einerseits diese Scherung zulassen, andererseits muss die finale Position zur Fixierung arretierbar ausgeführt werden.

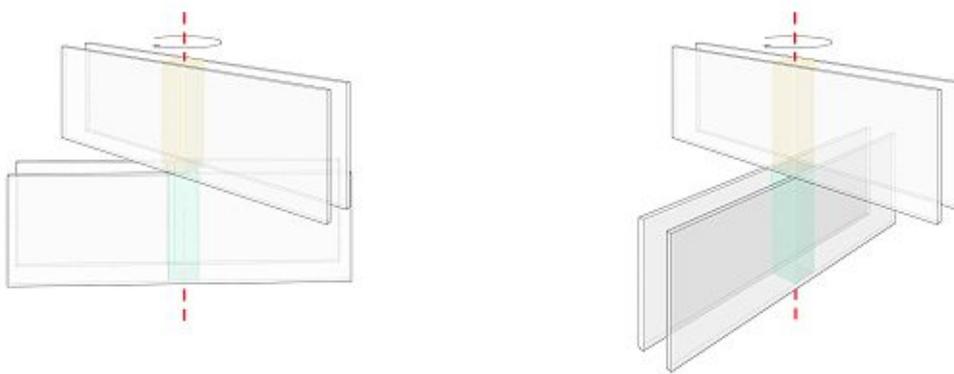


Abbildung 103: Scherung in Ebene (MW, 2020).

### Arretierung

Um diese Rotation zu ermöglichen wird der Verbindungsstab zweiteilig ausgeführt und mit einem zentralen Bolzen, welcher diese Bewegung erlaubt, wieder verbunden. Um eine Arretierung auszubilden, sind die jeweiligen Stirnflächen mit Nuten versehen, so dass, sobald die beiden Teile des Verbindungsstabes orthogonal zueinanderstehen, die Vertiefungen ineinandergreifen. Durch das Anziehen des zentralen Bolzens werden die beiden Teile ineinander gehalten und ein erneuertes Auseinandergleiten wird verhindert.

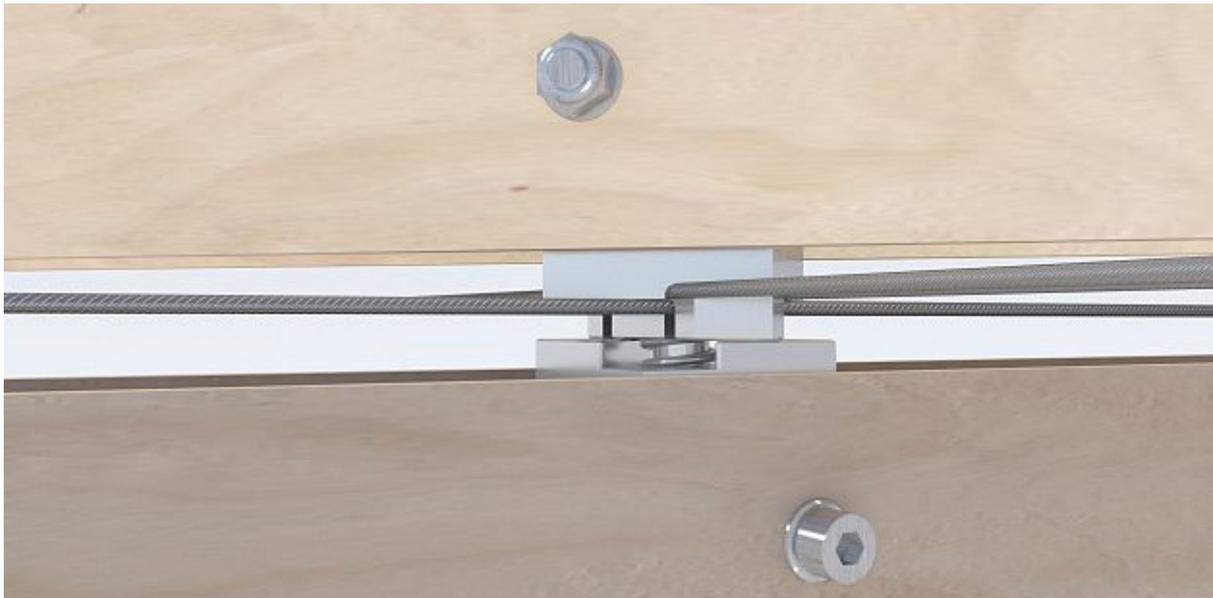


Abbildung 104: Visualisierung Knoten- Rotation in Ebene (MW, 2020).

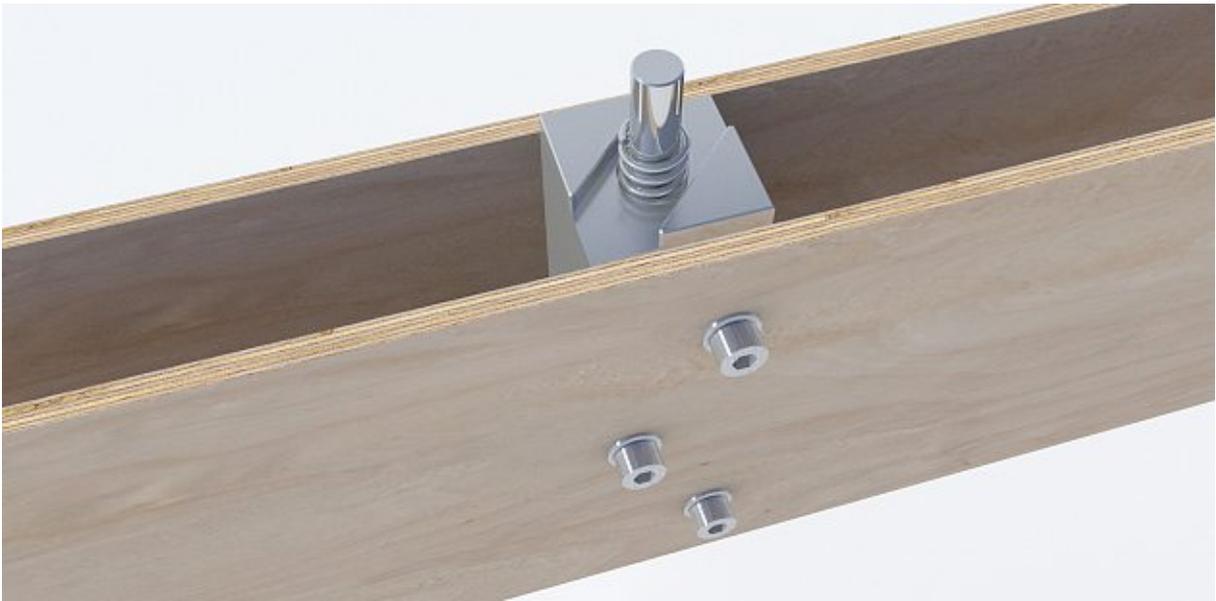


Abbildung 105: Arretierung des Knotens durch Nuten: unterer Teil (MW, 2020).

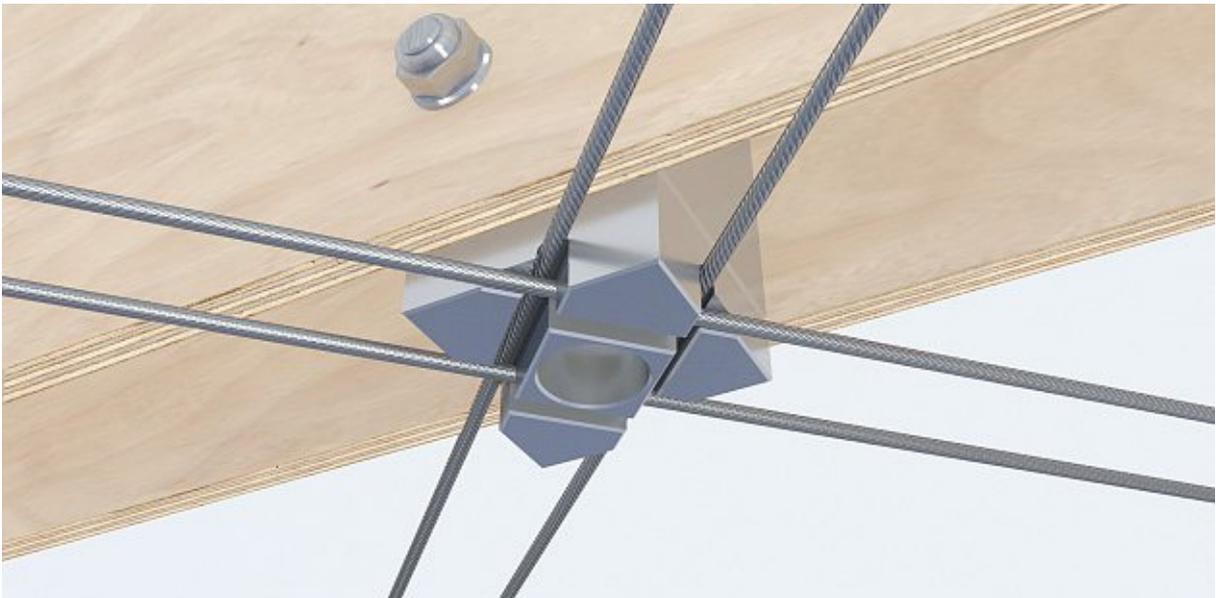
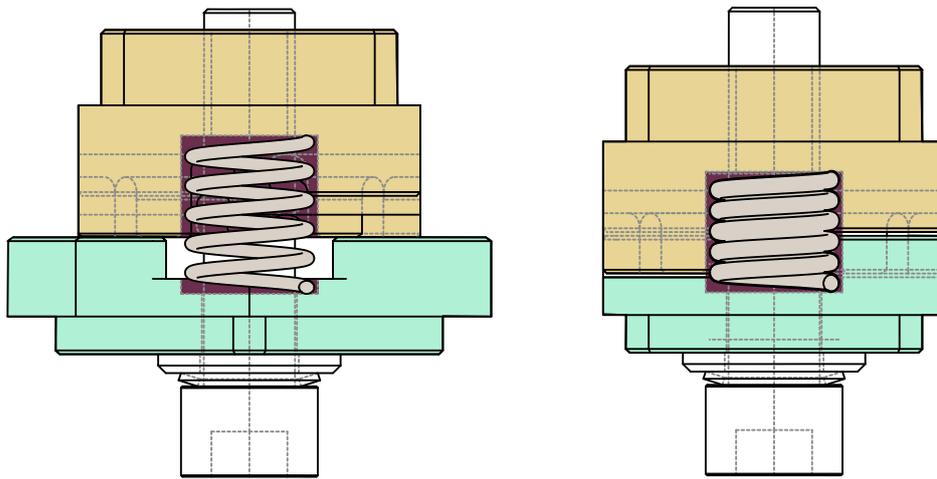


Abbildung 106: Arretierung des Knotens durch Nuten: oberer Teil (MW, 2020).

### Durchführung und Klemmung der Stahlseile

Für die Anbringung der Stahlseile werden weitere Ausnehmungen hinzugefügt. Diese sind so dimensioniert, dass die Stahlseile in der Endmontage durch den Knoten gequetscht und fixiert werden. Um eine exakte Vorspannung während der Errichtung, beziehungsweise spätere Nachspannungen durchführen zu können, wird in der Verbindung eine Druckfeder verbaut, welche genug Kraft aufbringt, um beide Stabteile im Montagezustand auseinanderzuhalten.



Zustand „Montage“  
45° Verdrehung

Zustand „errichtet“  
90° Verdrehung

Abbildung 107: Darstellung Druckfeder in Verbindungsknoten (MW, 2020).

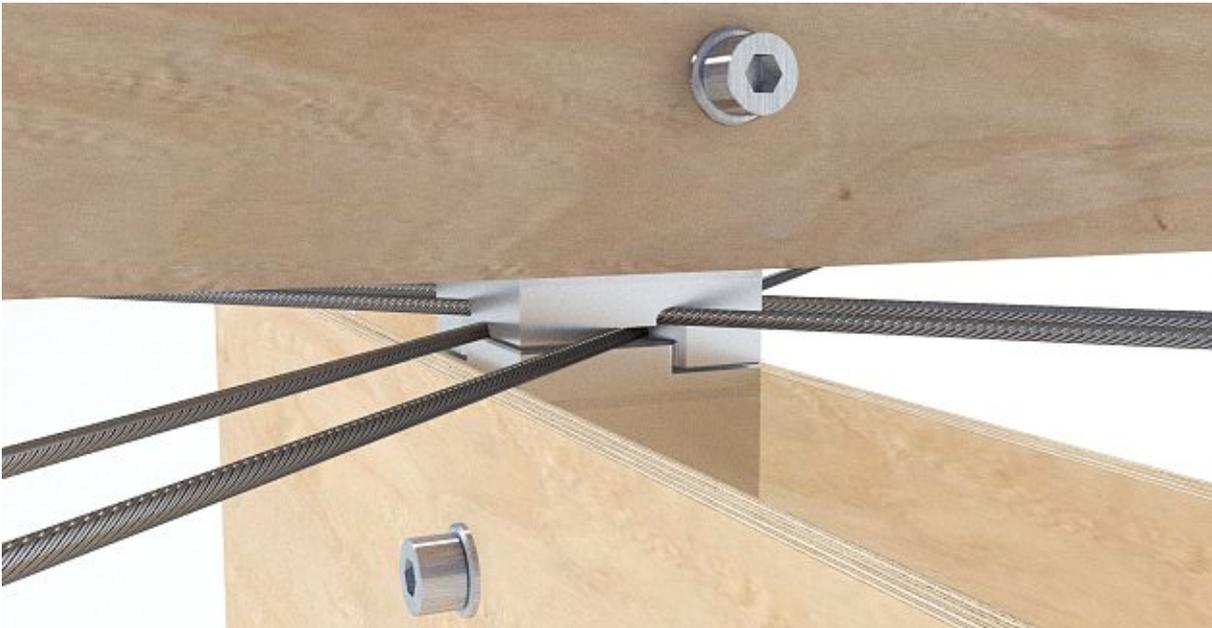


Abbildung 108: Visualisierung Knotendetail (MW, 2020).

## Materialanforderungen

Für die Materialwahl des Verbindungsstabes werden im Sinne des Leichtbaus anfänglich Baubuche und Aluminium in Betracht gezogen. Da der Knoten jedoch auch stirnseitig und in Furnierlagenrichtung beansprucht wird und zusätzliche Schwächungen durch Nutausbildungen erfährt verringert sich die Eignung des Einsatzes von Baubuche. Zusätzlich schlägt der Eurocode 5 Mindestabstände von Verbindungsmittel zu Hirnholz und Rändern derartig vor, so dass diese Abstände für die Knotendimensionierung maßgeblich wären und nach einem höheren Stabquerschnitt sowie einer größeren Trägerhöhe, als aus der Vorbemessung erforderlich wäre, verlangt hätte.

Die Wahl einer Kombination aus Aluminium-Voll- und Rohrmaterial kann den Anforderungen einer leichten und schlanken Verbindung jedoch sehr gut gerecht werden und wird daher als geeignetes Material weiter in Betracht gezogen.

## Mindestabstände nach Eurocode 5

Die Mindestabstände metallischer Verbindungsmittel von Hirnholzenden und Rändern sind im Eurocode 5 unter 8.5.1.1 geregelt. Die Abbildung 109 zeigt die Mindestabstände lt. Eurocode in vereinfachter Form. Grundsätzlich wird die Faserrichtung für die Feststellung der Mindestabstände miteinbezogen. Abbildung 109 geht bereits vom jeweilig schlechtesten Fall aus.

| Abstände                       | Mindestabstände    |
|--------------------------------|--------------------|
| rechtwinklig zur Faserrichtung | $4d$               |
| beanspruchtes Hirnholzende     | $\max. (7d; 80mm)$ |
| beanspruchter Rand             | $4d$               |
| unbeanspruchter Rand           | $3d$               |

Abbildung 109: Mindestabstände metallischer Verbindungsmittel zu den Rändern ( MW, 2020, basierend auf ÖNORM B 1995-1-1, 2019:109).

Als Verbindungsmittel für den Anschluss Knotenstab- Spantenpaare werden 8 mm Bolzen gewählt. Daher ergibt sich der Mindestabstand von den unbeanspruchten Rändern von  $3d$ . Dimensioniert wurde ein Abstand von  $4d = 32$  mm.

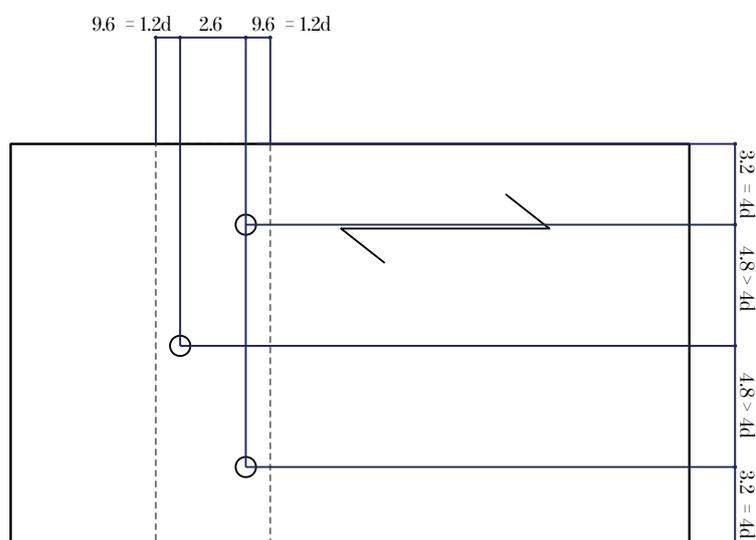


Abbildung 110: Die gewählten Mindestabstände. MW (2020)

Würde der Knotenstab aus Holzwerkstoff hergestellt werden, würde der Mindestabstand vom unbeanspruchten Rand mindestens  $32$  mm zu jeder Seite betragen. Daher würde sich eine Mindestbreite den Knotenstabs von  $64$  mm ergeben. Für den Verlauf der asymptotischen Kurvenpaare, an der die Träger ausgerichtet sind, ist jedoch wichtig, dass der Abstand zu der zentralen Referenzkurve so gering wie möglich gehalten wird. Dies ist auch ein Grund, warum für diese Anwendung ein Knotenstab aus Aluminium gewählt wurde. So konnte der lichte Abstand von  $45$  mm zwischen den Spantpaaren beibehalten werden.

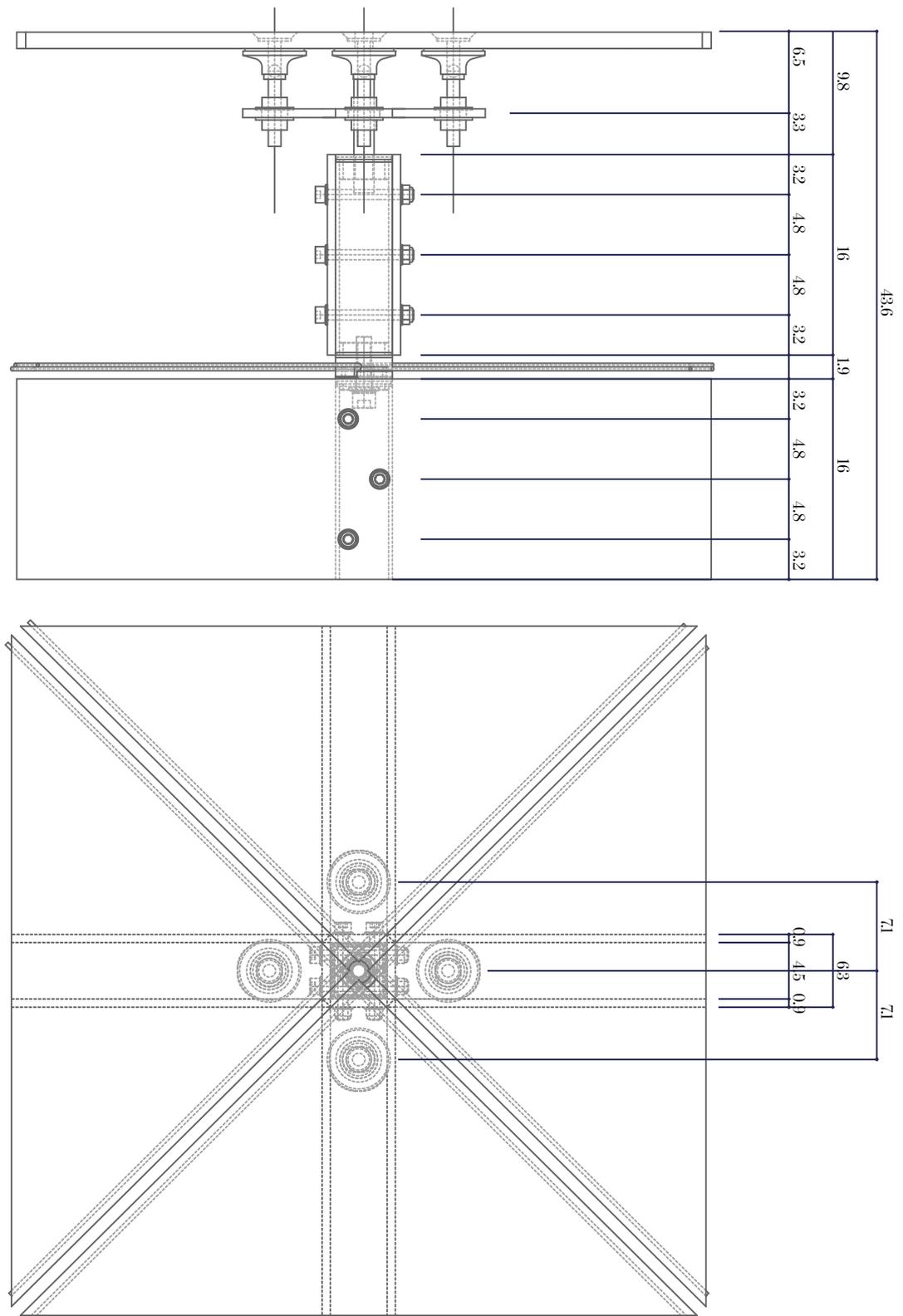


Abbildung III: Abmessungen Verbindungsknoten (MW, 2020).

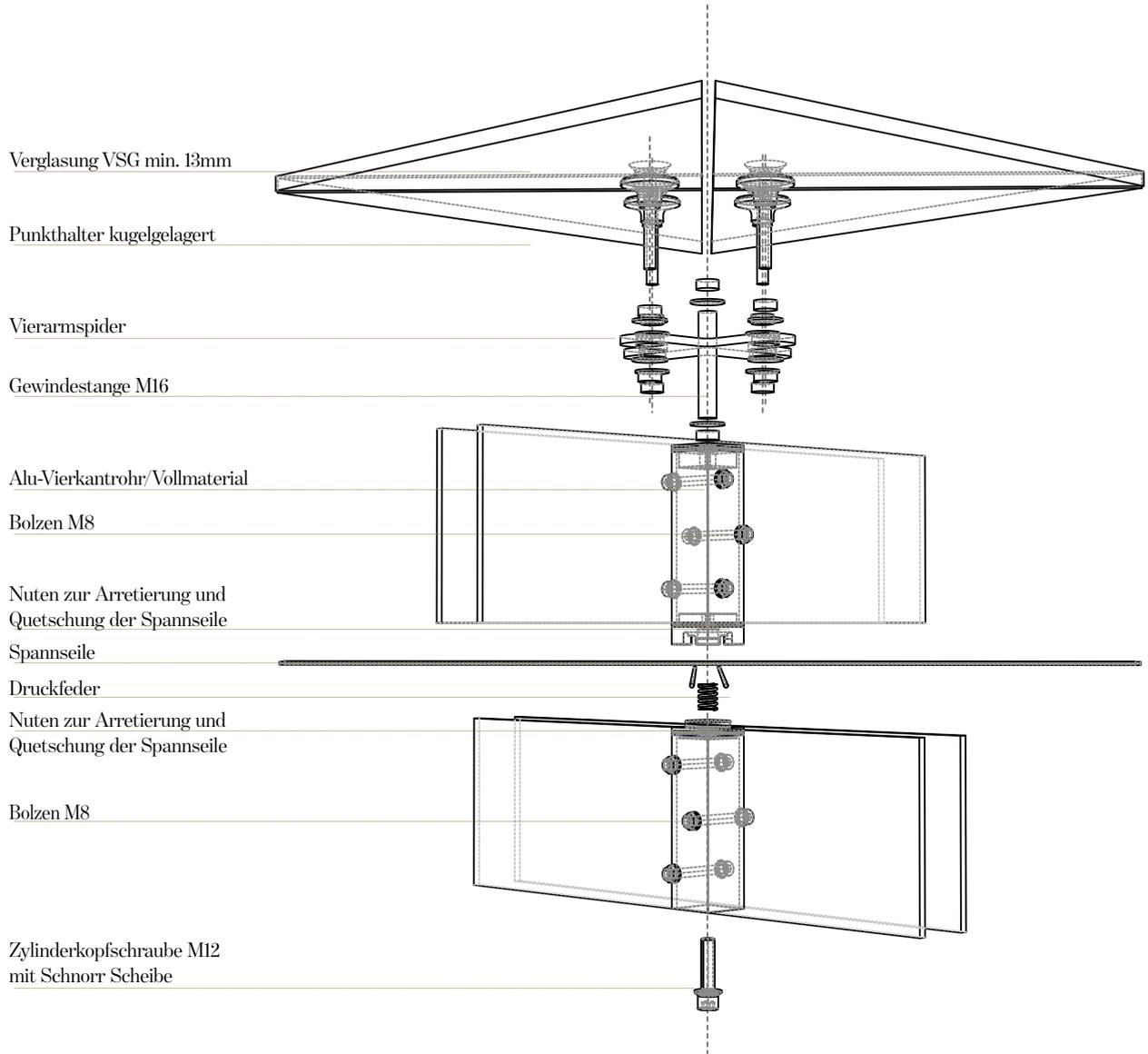


Abbildung 112: Explosionszeichnung des finalen Verbindungsknoten (MW, 2020).

### 9.1.3. Anforderungen an die Tragfähigkeit der Verbindung zwischen Knotenstab und Trägern

Die Entwicklung einer geeigneten Verbindungsmethodik zwischen Knotenstab und Primärkonstruktion und der Primärkonstruktion selbst stellt die Herausforderung des folgenden Abschnitts dar.

#### Allgemeine Anforderungen an eine Verbindung

Um die Qualität, Dauerhaftigkeit und Wirtschaftlichkeit einer Holzkonstruktion auch in der Detailebene gewährleisten zu können, steht der Wahl geeigneter Verbindungsmittel eine wesentliche Bedeutung zu.

Grundsätzlich können wir im Holzbau zwischen den folgenden Verbindungsmitteln unterscheiden:

- Zimmermannsmäßige Verbindungen: z.B. Zapfenverbindungen
- Stiftförmige metallische Verbindungsmittel: z.B. Bolzen
- Flächige Verbindungsmittel: z.B. Nagelplatten
- Geklebte Verbindungsmittel: z.B. Schraubenpressklebung

Nachdem die Konstruktion einer Asymptotischen Gitterschale nach einem sehr schlanken Querschnittsprofil verlangt, disqualifizieren sich zimmermannsmäßige Verbindungen sowie flächige Verbindungsmittel.

Wenn wir nicht nur das Entstehen und Betreiben, sondern auch Verschwinden eines Gebäudes berücksichtigen, stellen wir permanent verklebte Verbindungen reversiblen Verbindungsmitteln gegenüber. Unter der Beachtung, dass ein Gebäude potenziell die Mine für einen Nachfolgebau stellt, wurden zur weiteren Konzeption der Verbindung Verbindungsmittel, welche ohne hohen Aufwand demontiert und wiederholt eingesetzt werden können, bevorzugt. Auch der Gedanke ein Konstruktionssystem, welches ermöglicht ein Gebäude mehrmals zerstörungsfrei auf- und abzubauen, zu entwickeln, wird in der weiteren Detailentwicklung berücksichtigt.

Als stiftförmige Verbindungsmittel werden im Eurocode 5 Nägel, Schrauben, Stabdübel, Klammern, Passbolzen und Bolzen angeführt. Aufgrund der Anforderung an eine zerstörungsfreie Demontage und Festigkeitsanforderungen wurde die Verbindung mit Bolzen gewählt.

Normativ wird die Tragfähigkeit der Verbindung von Holzbauten in der ÖNORM B 1995-1-1, dem Eurocode 5: Bemessung von Konstruktion von Holzbauten, behandelt.

Demnach ist die Tragfähigkeit der Verbindungen unter der Berücksichtigung der Kräfte und Momente nachzuweisen, die aufgrund der Berechnung für die gesamte Konstruktion zwischen den zu verbindenden Teilen herrschen. (ÖNORM B 1995-1-1, 2019)

#### Schnittigkeit der Verbindung

Für die Bemessung einer Verbindung ist die Schnittigkeit, das ist die Anzahl der Scherfugen einer Verbindung, von Bedeutung, da sie direkt in die Bemessungsformel einwirkt. Wir können zwischen ein- und mehrschnittigen Verbindungen unterscheiden.



Abbildung 113: Links: Einschnittige Verbindung. Rechts: Zweischnittige Verbindung (MW, 2020).

Die Verbindung der Sperrholz-Trägerpaare mit einem Knotenstab stellen diesem System folgend eine zweischnittige Verbindung dar.

### Verbindungsmittelkräfte unter einem Winkel zur Faserrichtung

Wenn eine Kraft in einer Verbindung unter einem Winkel zur Faserrichtung wirkt, besteht die Gefahr des Querkzugversagens. Laut nationaler Ergänzung zu ÖNORM EN 1995-1-1:2019, Abschnitt 8.1.4(1)P bis (3) darf der Nachweis der Querkzugtragfähigkeit von Bauteilen mit rechteckigem Querschnitt entfallen, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{a}{h} > 0,7$$

Es bedeutet:

**a** Abstand des entferntesten angeordneten Verbindungsmittels vom beanspruchten Holzrand [mm]

**h** Höhe des Holzbauteils [mm]

Die Höhe der Sperrholzträger wird mit 160 mm bestimmt. Der Abstand des entferntesten Verbindungsmittels wird durch den laut ÖNORM EN 1995-1-1:2019, Abschnitt erforderlichen Mindestabstand von  $4d$  mit einem Verbindungsmitteldurchmesser  $d = 8$  mm festgelegt.

$$\left[ \frac{\text{mm}}{\text{mm}} \right] \frac{160 - 32}{160} = 0,8$$

Da  $0,8 > 0,7$  zutrifft darf der weitere Nachweis der Querkzugtragfähigkeit entfallen.

### Tragfähigkeit metallischer, stiftförmiger Verbindungsmittel auf Abscheren

„(1)P Bei der Berechnung der charakteristischen Tragfähigkeit von Verbindungen mit stiftförmigen Verbindungsmitteln aus Metall sind die Einflüsse der Fließgrenze, der Lochleibungsfestigkeit und des Ausziehwiderstandes des Verbindungsmittels zu beachten.“ (ÖNORM B 1995-1-1, 2019 Abschnitt 8.2.1 )

Gemäß nationaler Ergänzung zu ÖNORM EN 1995-1-1:2019, Abschnitt 8.2.1 berechnet sich der Bemessungswert der Tragfähigkeit einer Verbindung mit metallischen, stiftförmigen Verbindungsmitteln auf Abscheren  $F_{v,Rd}$  wie folgt:

$$F_{v,Rd} = k_{mod} \frac{F_{v,Rk}}{\gamma_M}$$

$k_{mod}$  Modifikationsbeiwert für Lasteinwirkungsdauer und Feuchtegehalt

$F_{v,Rk}$  charakteristischer Wert der Tragfähigkeit einer Verbindung, in N

$\gamma_M$  Teilsicherheitsbeiwert für Verbindungen nach ÖNORM EN 1995-1-1:2019, Tabelle 2.3

### Bestimmung des charakteristischen Wertes der Tragfähigkeit einer Verbindung

Normativ sind im Eurocode Holz- Holz und Holz- Stahl Verbindungen geregelt. Bei den Versagensmechanismen zweischnittiger Verbindungen können wir wie folgt unterscheiden:

- das Außenholz versagt
- das Mittelstück (Holz oder Stahl) versagt
- das Verbindungsmittel versagt

Diese Versagensmechanismen einer Holz- Holz bzw. Holzwerkstoff- Holz Verbindung werden numerisch wie folgt bestimmt:

$$F_{v,Rk} = \min \left\{ \begin{array}{ll} f_{h,1,k} t_1 d & g) \\ 0,5 f_{h,2,k} t_2 d & h) \\ 1,05 \frac{f_{h,1,k} t_1 d}{2\beta} \left[ \sqrt{2\beta(1+\beta) + \frac{4\beta(2+\beta)M_{y,Rk}}{f_{h,1,k} t_2^2}} \right] & j) \\ 1,15 \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}} \sqrt{2M_{y,Rk} f_{h,1,k} d + \frac{F_{ax,Rk}}{4}} & k) \end{array} \right.$$

Abbildung 114: charakteristische Tragfähigkeit für Nägel, Klammern, Bolzen, Stabdübel und Schrauben pro Scherfuge und Verbindungsmitte (ÖNORM B 1995-1-1, 8.2.2)

Mit:

$$\beta = \frac{f_{h,2,k}}{f_{h,1,k}}$$

$F_{v,Rk}$  charakteristische Wert der Tragfähigkeit pro Scherfuge und Verbindungsmittel

$t_1$  Holz- oder Holzwerkstoffdicke oder Einbindetiefe

$f_{h,i,k}$  charakteristischer Wert der Lochleibungsfestigkeit im Holzteil i

$d$  Durchmesser des Verbindungsmittels

$M_{y,Rk}$  charakteristisches Fließmoment des Verbindungsmittels

$\beta$  Verhältnis der Lochleibungsfestigkeiten der Bauteile zueinander

$F_{ax,Rk}$  charakteristischer Auszieh Widerstand des Verbindungsmittels

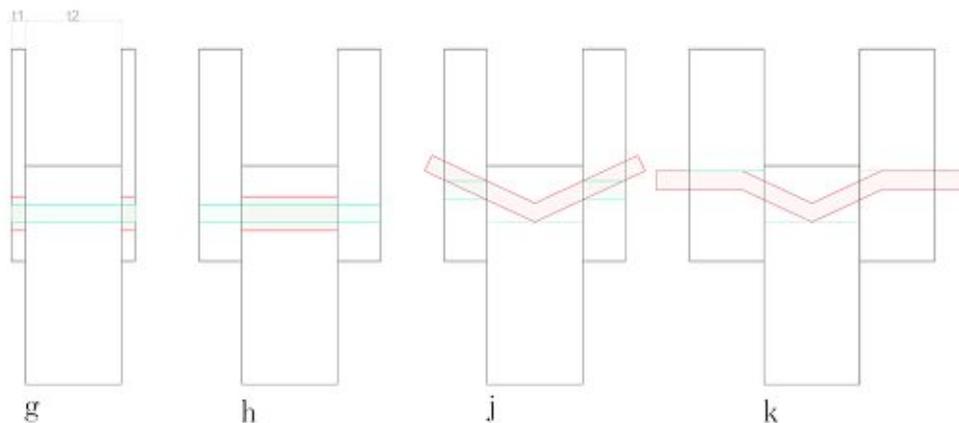


Abbildung 115: Versagensmechanismen Holz- und Holzwerkstoffverbindungen (MW, 2020 nach ÖNORM B 1995-1-1, 2019).

Bei Verbindungen mit sehr dünnem Seitenholz führt die Lochleibungsfestigkeit, gemäß Formel g, als Kleinstwert unabhängig davon, ob es sich um eine Holz-Holz, Holz Stahl, oder, wie im Fall der Knotenbemessung hier, um eine Holz- Alu Verbindung handelt zum Versagen.

Gemäß Abbildung 115 wird  $F_{v,Rk}$  aus

$$F_{v,Rk} = f_{h,1,k} t_1 d$$

bestimmt.

Laut ÖNORM B 1995-1-1 Abschnitt 8.5.1.2 sollte die Lochleibungsfestigkeit  $f_{h,k}$  einer Holzwerkstoff-Holz-Bolzenverbindung für Sperrholz bei allen Winkeln zur Faserrichtung der Deckfurniere der folgende Wert für die charakteristische Lochleibungsfestigkeit in  $N/mm^2$  angenommen werden:

$$f_{h,k} = 0,11(1 - 0,01d)\rho_k$$

mit:

$\rho_k$  charakteristische Wert der Rohdichte des Sperrholzes in  $kg/m^3$

$d$  Bolzendurchmesser in  $mm$

Der Bolzendurchmesser wird mit 8 mm festgelegt. Die charakteristische Rohdichte des Birkenperrholzes beträgt  $630 kg/m^3$  (vgl. Verband der finnischen Forstindustrie, 2001: 18).

Somit gelangen wir zu folgender Berechnung:

$$f_{h,k} = 0,11(1 - 0,08)630$$

$$f_{h,k} = 63.76 \text{ N/mm}^2$$

Damit ergibt sich der charakteristische Wert der Tragfähigkeit pro Scherfuge und Verbindungsmittel, mit  $t_1 = 9 \text{ mm}$  und  $d = 8 \text{ mm}$ , wie folgt:

$$F_{v,Rk} = 63,76 * 9 * 8$$

$$F_{v,Rk} = 4590 \text{ N}$$

Der charakteristische Wert der Tragfähigkeit der gesamten Verbindung auf Abscheren bildet sich aus:

$$R_{v,Rk} = s * m * n_{ef} * F_{v,Rk}$$

Mit

$s$  Schnittigkeit des Verbindungsmittels

$m$  Anzahl der Verbindungsmittelreihen

$n_{ef}$  effektive Anzahl der Verbindungsmittel in einer Verbindung, die in Faserrichtung hintereinander liegen

$F_{v,Rk}$  charakteristische Tragfähigkeit pro Verbindungsmittel in Faserrichtung

Somit ergibt sich bei einer zweischnittigen Verbindung, vorläufig noch mit einer Verbindungsmittelreihe berechnet und einer  $n_{ef}$ , ein charakteristischer Wert der Tragfähigkeit der gesamten Verbindung von

$$R_{v,Rk} = 2 * 1 * 1 * 4590 \text{ N}$$

$$R_{v,Rk} = 9180 \text{ N}$$

Der Bemessungswert  $R_{v,Rd}$  der Verbindung unterliegt folgendem Ausdruck:

$$F_{v,Rd} = k_{mod} \frac{F_{v,Rk}}{\gamma_M}$$

mit

$\gamma_M$  als Teilsicherheitsbeiwert für Baustoffeigenschaften

$k_{mod}$  als Modifikationsbeiwert zur Berücksichtigung der Lasteinwirkdauer und Nutzungsklasse

Der empfohlene Teilsicherheitsbeiwert für Baustoffeigenschaften  $\gamma_M$  wird gemäß ÖNORM B 1995-1-1 mit dem Faktor 1.3 festgesetzt. (ÖNORM B 1995-1-1, 2019Tabelle 2.3 ). Der Modifikationsbeiwert  $k_{mod}$  zur Berücksichtigung der Lasteinwirkdauer und Nutzungsklasse wird für ständige Einwirkungen und den Anforderungen an Trockenbereich, also Nutzungsklasse 1, mit dem Faktor 0.6 bestimmt.

Dies legt den Bemessungswert der Verbindung von

$$F_{v,Rd} = 0,6 \frac{9180}{1,3} N$$

$$F_{v,Rd} = 4237 N \text{ bzw. } F_{v,Rd} = 4,23 \text{ kN}$$

fest.

#### 9.1.4. Bemessungswerte der Einwirkungen einer Verbindung

##### Setting

Im Kapitel 5.4.7 sind die Schnittkräfte der Struktur ermittelt worden. Aufgrund des gewählten Abstraktionsmaßes wurden dabei geometrische Bedingungen unterschlagen, welche zwar für die Substanzerkundung der Gesamtstruktur, unter der Prämisse, dass wir das Sperrholz weitausgehend zu 50% beanspruchen, ausreichend waren, jedoch für die Ermittlung der Einwirkungen auf die Verbindung zu berücksichtigen sind.

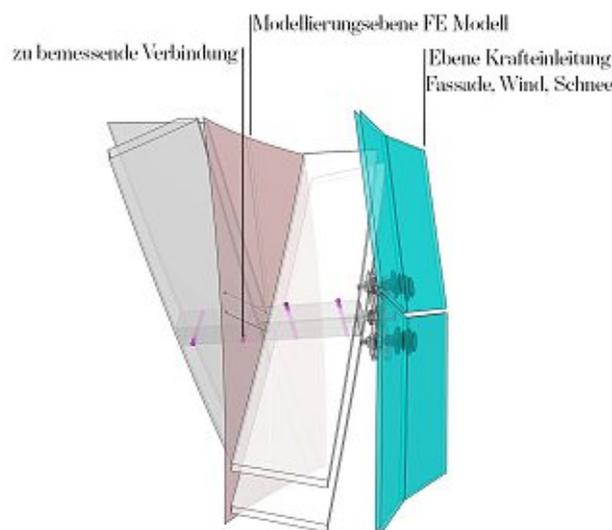


Abbildung II6: Modellierebenen (MW, 2020).

Als Einwirkungen auf die Knotenstab-Träger-Verbindung werden die maßgebenden Lasten aus Eigengewicht der Verglasung und Windlasten, sowie die Lasten, welche aufgrund der vorgespannten Stahlseile die Spanten beanspruchen, berücksichtigt. Nachdem die Lastkombinationen, welche als Punktlasten in die Struktur eigeleitet werden, Kraftvektoren in räumlich allgemeiner Lage aufspannen und bisher nicht bekannt sind, besteht die anschließende Herausforderung darin, aus der digitalen Simulation die Lasteinwirkungen herauszufiltern, welche maßgebend für die Verbindungsbemessung sind. Zusätzlich dazu gilt es, eine Strategie zu finden, um die zusätzlichen Kräfte zu ermitteln, die aufgrund der räumlichen Abstände der Krafteinleitungspunkte in der Glasebene zu den kraftaufnehmenden Verbindungsmitteln entstehen. Eine weitere Aufgabe umfasst die Abstraktion des komplexen Knotens zu einem vereinfachten, repräsentativen, statischen Modell.

## Ermittlung der Einwirkungen

Derzeit gibt es keine Möglichkeit aus der FE-Simulation mit „Karamba“ die jeweiligen Einwirkungen auf einen Knoten direkt ausgeben zu lassen. Wir erhalten jedoch für jedes Trägersegment Werte der zugehörigen Schnittkräfte.

Um den weiteren Überlegungen besser folgen zu können, holen wir uns kurz den folgenden Sachverhalt aus den Grundlagen der Tragwerkslehre ins Gedächtnis. Wir wissen, dass in der Querkraftlinie in lastfreien Bereichen die Querkraft konstant ist und an der Stelle, wo eine Einzellast angreift, die Querkraftlinie einen Sprung in der Größe der angreifenden Lastkomponente macht.

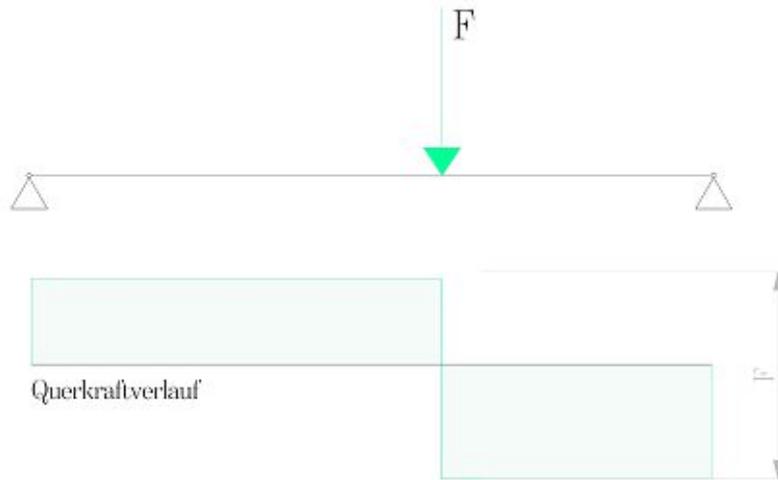


Abbildung 117: Querkraftsprung als Folge einer Einzellast Einwirkung (MW, 2020).

Dieses Konzept ermöglicht uns mit Hilfe der Querkraft- und Axialkraftsprünge aufeinanderfolgender Trägersegmente im FE-Modell auf die äußeren Einwirkungen rückzuschließen. Durch die maximalen Querkraft- und Axialkraftsprünge in der Struktur können wir für die Normalkraft  $N$ , und die Querkraft  $V_z$  die maximalen Einwirkungen ermitteln. Dies wurde parametrisch wie folgt implementiert.

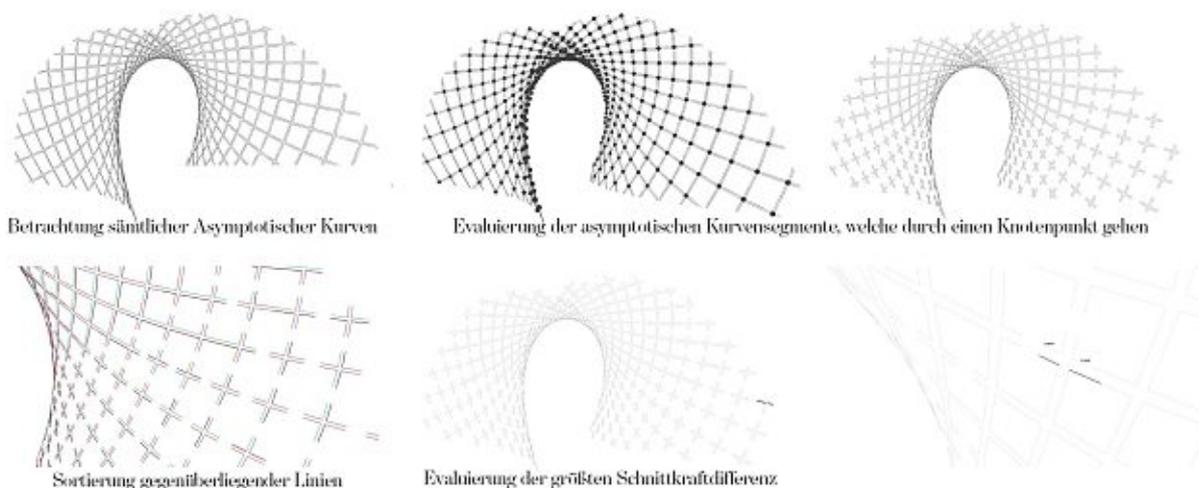


Abbildung 118: Parametrische Evaluierung der maximalen Kraftsprünge (MW, 2020).

Nachdem die Komponenten, welche Spannungen aufgrund von Torsion und Biegung nicht von der Verbindung Knotenstab und Hauptträger aufgenommen werden, werden sie für die weiteren Berechnungen abgezogen.

So ergibt sich eine maximale Kraftdifferenz für:

$$N = 1.90N$$

$$V_z = 0.57 \text{ kN}$$

### Statisches Modell der Verbindung Fassade-Knotenstab-Spannen

Bevor wir die Berechnungen ausdehnen, abstrahieren wir die Knotenverbindung so, dass dessen statisches Modell das komplexe System aus Einwirkungen auf die Verbindung Knoten-Träger und deren Aufnahmepunkte vereinfacht und aussagekräftig repräsentiert wird. Abbildung 119 zeigt die gewählte Abstraktion der Knotenstab-Spannen-Verbindung als Federsystem.

Die Kraft einer Feder  $F [kN]$  ist gegeben durch:

$$F = c * s$$

Mit

$c$ : Federkonstante  $\left[\frac{kN}{cm}\right]$

$s$ : Federweg  $[cm]$

Die Federkonstante  $c$  in Längsrichtung eines Stabes kann durch

$$c = \frac{EA}{L}$$

mit

$E$ : E-Modul  $\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$

$A$ : Fläche  $[cm^2]$

$L$ : Stablänge  $[cm]$

ermittelt werden.

Nachdem die Feder  $C_{1h}$  kein definiertes Widerlager besitzt ist die Federkraft sehr gering. Die Federkonstante  $c_{c2h}$  für die Spannseile ( $d= 4mm$ ) ergibt überschlagsmäßig:

$$c_{c2h} = \frac{21000 * 0.126}{L_{c2h}} = \frac{2646}{L_{c2h}}$$

Für die Spannen  $C_{3h}$  und  $C_{4h}$ :

$$c_{c3/4h} = \frac{1140 * (16 * 2 * 0,9)}{L_{c3/4h}} = \frac{32832}{L_{c3/4h}}$$

Da die Länge  $L_{c2h}$ , die Seile laufen als aussteifende Elemente im Feld diagonal, größer ist als die Länge der Spanten  $L_{c3/4h}$  und zusätzlich die Federkonstante der Spanten über das Zehnfache höher ist, wird die Einwirkung der Spannseile und der oberen Spanten als verschwindend gering angenommen und für weitere Berechnungen nicht mehr miteinbezogen.

Zudem wird folgende Vereinfachung getroffen: Sämtliche Knotenstäbe befinden sich in der Regel in allgemeiner Lage im Raum. Daher variiert eigentlich der Horizontalabstand zwischen Kräfteinleitung und Kraftaufnahmepunkt, je nach Neigung. Wir gehen in unseren Berechnungen vom Worst-Case-Szenario aus, in dem der Knotenstab horizontal im Raum liegt. Nachdem die globale Struktur der Schale sogar teilweise unterschritten ist, tauchen solche Regionen in der Tat auf. Zudem befinden sich die größeren Glaspaneele, also auch Lasten durch Glas und Wind, ebenfalls in diesen Regionen.

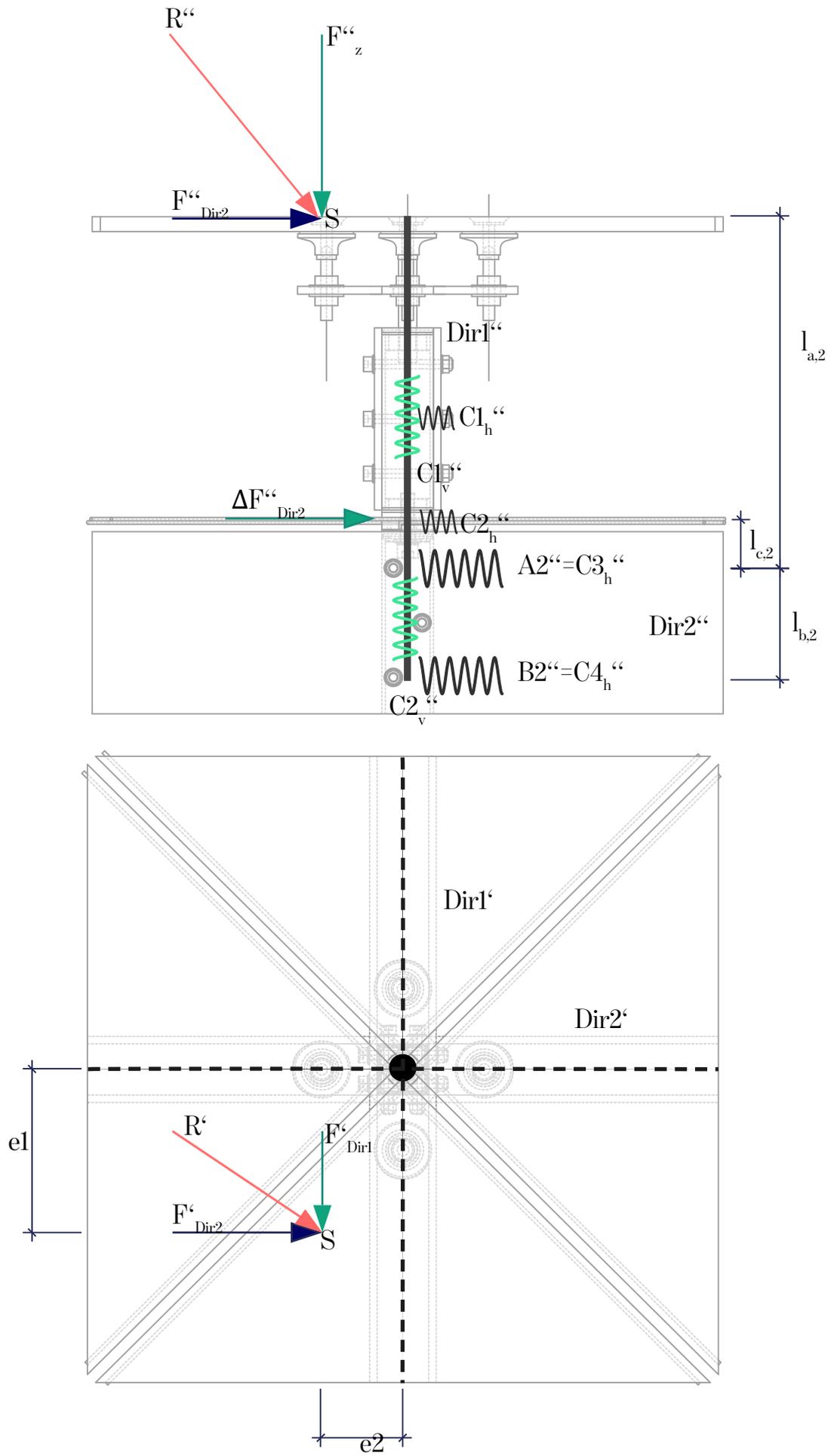


Abbildung 119: Statisches Modell der Verbindung Knotenstab-Spannen als Federsystem (MW, 2020).

A2 erfährt potenziell die höchsten Lasten. Den horizontalen Anteil  $A2_h$  können wir gut berechnen, indem wir sämtliche Momente um B2 = 0 ermitteln.

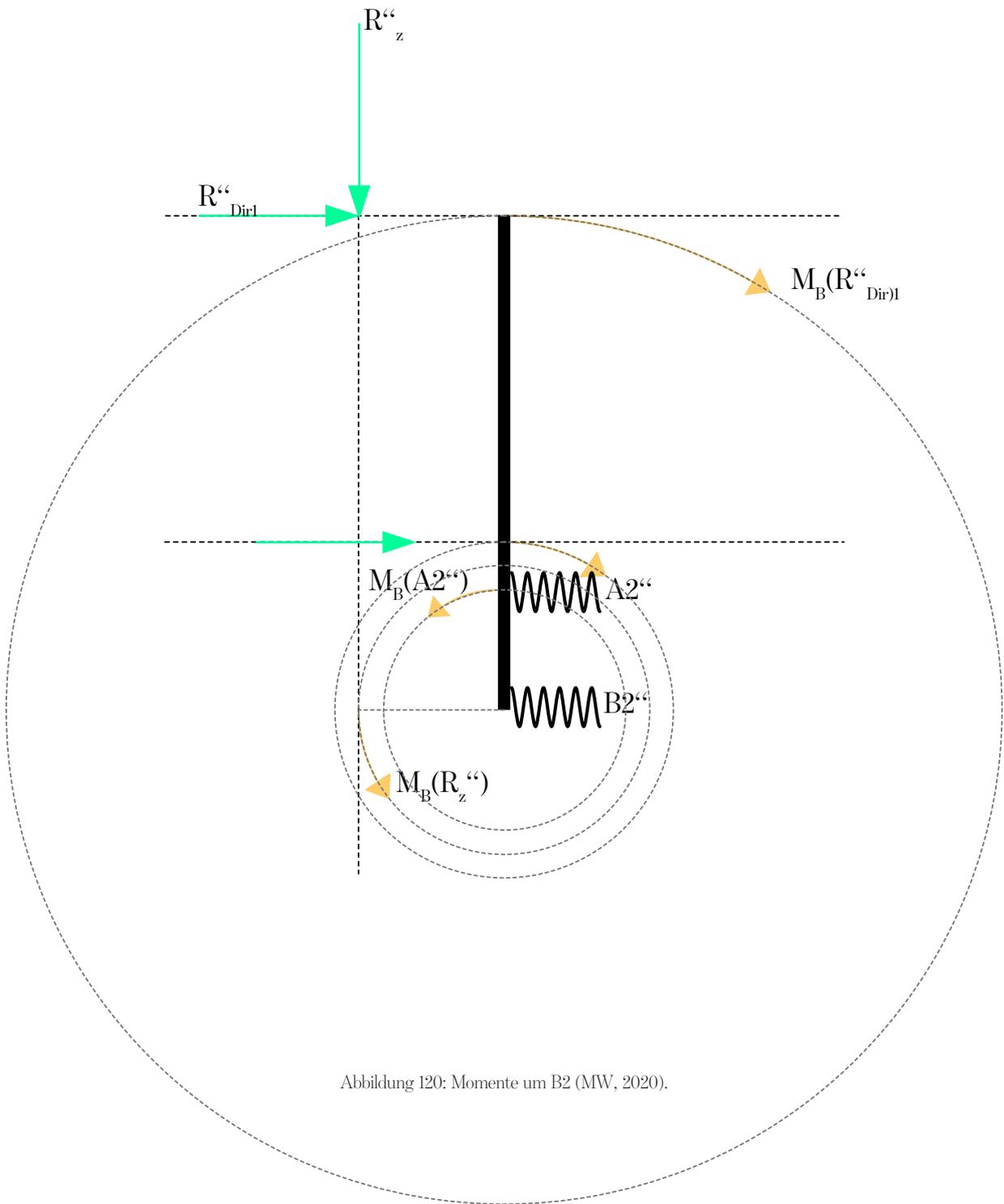


Abbildung 120: Momente um B2 (MW, 2020).

$$\sum M_{B_2} = 0$$

$$M_{B_2} = M_{2,F_z} \pm M_{B,F_{Dir2}} \pm M_{B,\Delta F_{Dir2}} \pm M_{A_2}$$

Wobei für  $M_{2,F_z}$ ,  $M_{B,F_{Dir2}}$  und  $M_{B,\Delta F_{Dir2}}$  Folgendes gilt:

$$M_{2,F_z} = F_z * e_2$$

$$M_{B,F_{Dir2}} = F_{Dir2} * (l_{a,2} + l_{b,2})$$

$$M_{B,\Delta F_{Dir2}} = \Delta F_{Dir2} * (l_{c,2} + l_{b,2})$$

Indem wir  $M_{B_2}$  auf null setzen und  $M_{A_2}$  herausheben erhalten wir:

$$M_{2,F_z} \pm M_{B,F_{Dir2}} \pm M_{B,\Delta F_{Dir2}} = \pm M_{A_2}$$

Aufgrund des parametrisch gestützten Setups kann ermittelt werden, ob  $M_{2,F_z}$  und  $M_{B,F_{Dir2}}$  gleichläufig oder gegenläufig rotieren. Hinsichtlich der anderen Momente wird angenommen, dass sie kumulierend wirken.

Weiters kann  $M_{A_2}$  durch

$$M_{A_2} = F_{A_2} * l_{b,2}$$

und  $F_{A_2}$  durch

$$\frac{M_{2,F_z} \pm M_{B,F_{Dir2}} \pm M_{B,\Delta F_{Dir2}}}{l_{b,2}} = \pm F_{A_2}$$

berechnet werden.

Die Ermittlung der einzelnen Variablen wird untenstehend stichwortartig erklärt und in der Abbildung 119 illustriert.

- $l_{a,2}$ : Abstand Ebene Außenkante Glasfassade und Auflager lt. Abbildung **119**
- $l_{b,2}$ : Abstand zwischen Auflager A2 und B2 lt. Abbildung **119**
- $l_{c,2}$ : Abstand Ebene FE Achsenmodell (= Ebene der Spannseile) und Auflager A2
- $e_2$ : Exzentrizität des Schwerpunktes der vier angrenzenden Glasscheiben in lokaler Richtung 2 von Schwerpunkt s zu Achse Dir1 gemessen.; parametrisch ermittelt
- $F_z$ : axiale Kraftkomponente von R bezüglich des Knotenstabes; aus Kraftsprung FE Modell ermittelt
- $F_{Dir2}$ : Kraftkomponente von R orthogonal auf Knotenstab aus Glas und Windlasten; parametrisch ermittelt
- $\Delta F_{Dir2}$ : maximaler Normalkraftsprung Kraftdifferenz  $N$  (Wind, Glas, Stahlseil) abzüglich  $F_{Dir2}$  (Wind, Glas), da hier nur die Einwirkungen aus den Stahlseilen auftreffen und Wind, sowie Glas in  $F_{Dir2}$  und  $F_z$  bereits berücksichtigt sind
- $F_{A_2,Dir2}$ : Kraftkomponente der Auflagerkraft in A2 in Richtung als Berechnungsergebnis

Die Berechnung wurde parametrisch in Grasshopper implementiert. Der höchste Wert  $F_{A_2,Dir2}$  beträgt  $3.58kN$ .

Dazu wird die vertikale Last  $F_z$  aus den maximalen Querkraftsprüngen hinzuaddiert:

$$R_{A2} = F_{A2,Dir2} + \frac{F_z}{n}$$

$n$ : Anzahl der Verbindungsmittel (3 gewählt)

$$R_{A2} = 3.58 + \frac{0.57}{3} = 3,77kN$$

Und der Nachweis an die Verbindung kann wie folgt erbracht werden:

$$E_d \leq R_d$$

$$3,77kN \leq 4,23 kN$$

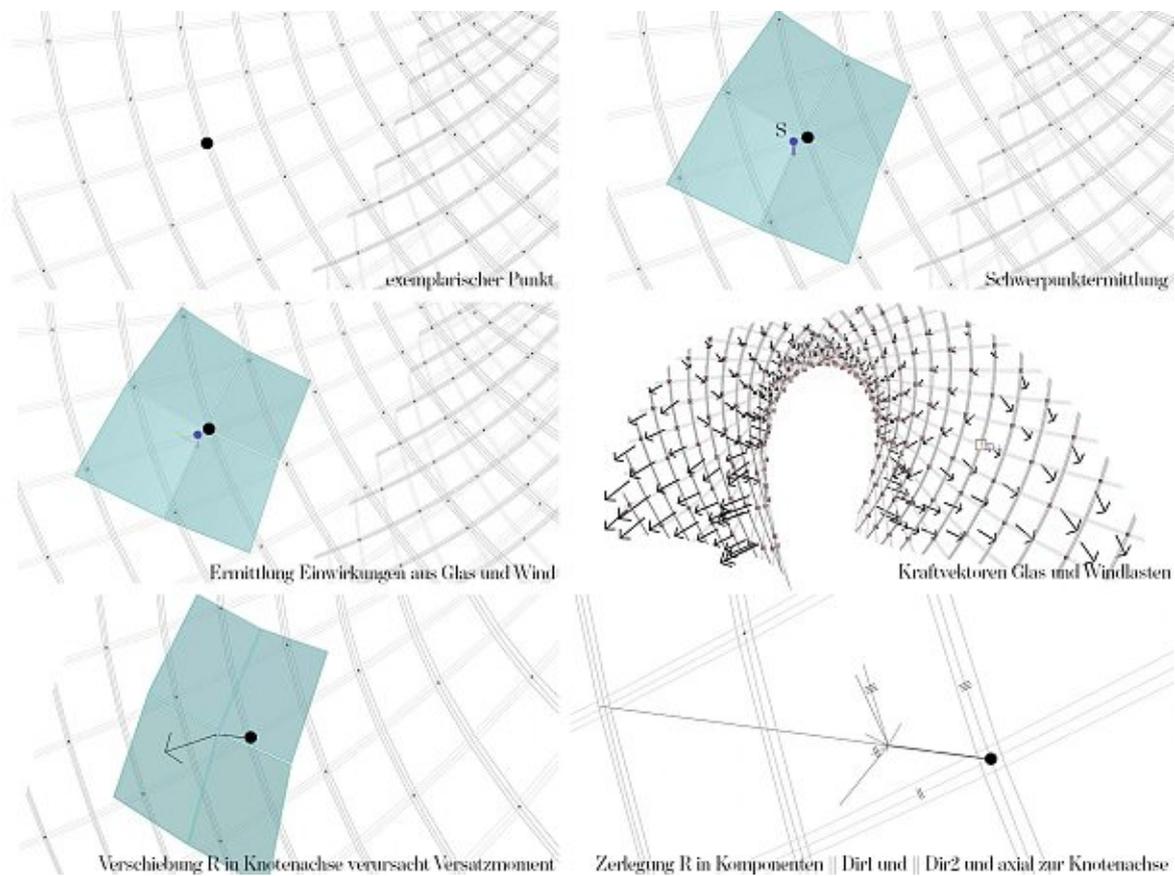


Abbildung 12I: parametrische Evaluierung der Exzentrizitäten der Lasteinwirkung (MW, 2020).

## 9.2. Resultate und Zusammenfassung

Es ist erstaunlich, dass aufgrund der geometrischen Einbettung und der Tatsache, dass die diskrete Gauß-Abbildung einer isothermen Fläche ein Netz mit planaren Vierecken und besonderen Offset- Qualitäten darstellt, die Anbindung einer aus planaren Vierecken bestehende Fassade an eine Asymptotische Gitterschale sich aus einer inneren Logik heraus anbietet. Sehr vereinfacht gesagt ermöglicht uns die bestimmte Anordnung von Kreisen („circle packing“) auf einer Kugel den Einsatz eines Typs Knoten, der einer gesamten, komplex geformten Struktur repetitiv eingesetzt werden kann.

Als Reaktion auf den umfassenden Anforderungskatalog an die Verbindung entstand ein ausgeklügelter Knoten, der ineinandergreifend, reduziert und handwerklich durchdrungen zugleich ist. Zudem erlaubt er ein einfaches „*Disassembly*“ ohne toxische Überreste.

Im November 2020, der Zeit zwischen Abgabe und Präsentation dieser Arbeit, wird der Knoten als 1:1 Prototyp hergestellt. Dieses Modell wird mit einem Förderstipendium der Fakultät für Architektur und Raumplanung der TU Wien finanziert. Der Knotenstab wird aus einer Kombination aus Aluminium Voll- und Rohrmaterial gefertigt. Die Nuten werden aus Alu- Vollmaterial mit Hilfe eines 6- Achs- Industrieroboters gefräst, anschließend wird das bearbeitete Vollmaterial mit dem Vierkanrohr verschweißt und die Bohrlöcher und Gewinde eingeschnitten. Der Spider wird aus Aluminium lasergeschnitten. Ideal gelenkige Punkthalter werden eingesetzt, so dass auch der Anschluss an- und die vier Glaspaneele gezeigt werden. Insgesamt wird der gesamte Anschluss an zwei Spantenpaaren, wie in Abbildung 122 dargestellt präsentiert.

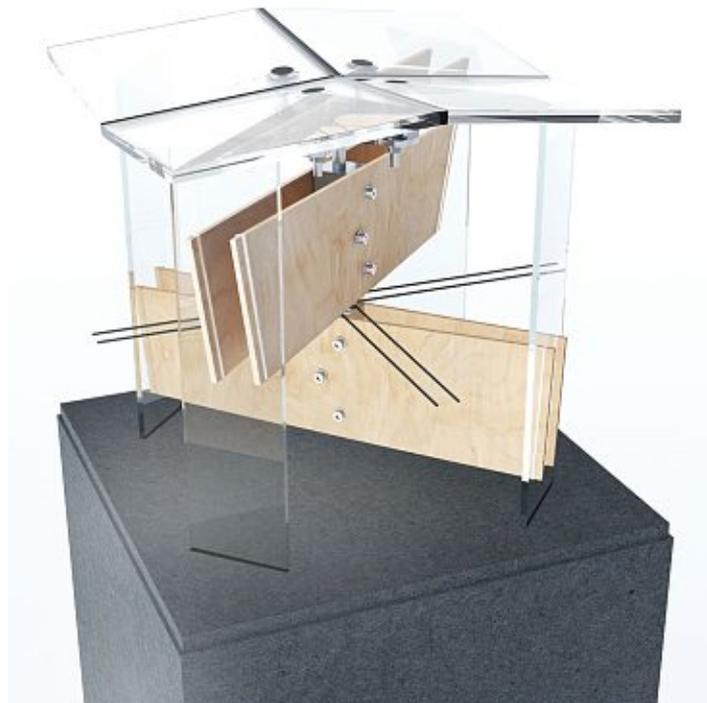


Abbildung 122: Visualisierung Knotenmodell (MW, 2020).



Abbildung 123: Visualisierung Knotenmodell (MW, 2020).

## 10. Resümee und Ausblicke

In dieser Arbeit wurden Planungs- und Konstruktionsherausforderungen, welche bei der Erstellung einer Gitterschale unter der Verwendung asymptotischer Kurven auf Minimalflächen auftreten diskutiert. Sie enthält Konzepte zur geometrischen Einbettung, Materialisierung, konstruktiven Gestaltung und tragstrukturellen Evaluierung.

Die Arbeit gliedert sich nach dem Kapitel 1, einer Einführung in die Thematik, in drei Hauptteile und neun Kapitel.

Teil I: Geometrische Betrachtungen

Kapitel 2 erörtert grundlegende Theorien aus der Geometrie, welche für diese Arbeit relevant sind. Die Krümmung von Kurven und Flächen wird diskutiert und Flächen mit besonderem Krümmungsverhalten, sogenannte Minimalflächen, werden präsentiert. Ausgezeichnete Kurven auf Flächen, die Hauptkrümmungskurven, geodätische Linien und asymptotische Kurven und deren Eignung, als geometrisches Modell für eine bauliche Struktur zu dienen, werden erörtert. Eine Herleitung, welche aufschlüsselt, warum asymptotische Kurven auf Minimalflächen regulär orthogonal aufeinandertreffen, wird angeführt und die Besonderheit daraus baukonstruktive Elemente repetitiv einsetzen zu können, begründet.

Das Kapitel 3 beschäftigt sich mit Implementierungsstrategien zur Erzeugung von asymptotischen Kurven auf Minimalflächen. Zuerst werden Minimalflächen als parametrisierte Flächen vorgestellt, dann die Erstellung durch digitale physikalische Formfindung diskutiert. Abschließend werden diskrete Minimalflächen aus der quasiisothermen Parametrisierung einer Kugel erzeugt. Die jeweiligen Implementierungsstrategien werden Schritt für Schritt erklärt und anhand einer Teststruktur erläutert. Die Vor- und Nachteile der angeführten Modellierstrategien werden anschließend diskutiert.

Teil II beschäftigt sich mit der Evaluierung einer Asymptotischen Gitterschale als architektonische Struktur. Der Fokus liegt darin, eine Fallstudie, die Struktur „Ennepfer“ hinsichtlich ihrer baulichen Eignung zu prüfen. Im Kapitel 4 werden erste konstruktive Überlegungen zur Ausformulierung als Tragwerk getroffen. Anschließend werden im Kapitel 5 tragstrukturelle Wirkungsweisen einer unter Spannung stehenden Gitterschale, bei der Phänomene, wie Membrantragwirkung und aktiver Biegung auftreten, erörtert. Erste Vorberechnungen zeigen die Relation von Biegung, Torsion und daraus resultierende Spannungen. Schließlich wird das Modell „Ennepfer“ in einer FE-Umgebung berechnet. Die Modellierung, die Simulation selbst sowie deren Ergebnisse werden aufgeschlüsselt dargelegt und besprochen.

In Teil III tauchen wir eine Ebene tiefer und widmen uns einigen Detailbetrachtungen zur Erstellung einer Asymptotischen Gitterschale. Ein großes Augenmerk liegt in der Entwicklung einer Fassade, welche aus planaren Vierecken besteht und deren Panel-Layout reziprok zu den Hauptträgern verläuft. Dazu wird im Kapitel 6 die geometrische Einbettung aufgefrischt und „*Offset Meshes*“ werden erläutert. Die Herleitung, warum sich planare Vierecke sehr gut an die Asymptotische Gitterschale anbinden lassen, wird beleuchtet. Im Kapitel 7 wird die konstruktive Detailentwicklung der Fassadenhaut, vor allem der Anschluss der Glasfassade an einen Knotenstab, beleuchtet. Die technischen Anforderungen werden hier in ihrer formativen Rolle ernst genommen und als Design-Driver wahrgenommen. Die Umsetzung erfolgt elegant mit möglichst integrativen Elementen.

Im Kapitel 8 werden Errichtungsstrategien einer Asymptotischen Gitterschale und deren konstruktiven Folgerungen geklärt. Demonstriert und geprüft werden bisherige Annahmen an einem 1:1.5 Mock-Ups.

Schließlich wird im Kapitel 9 ein 1:1 Verbindungsknoten entwickelt. Dieser muss einem komplexen Anforderungskatalog gerecht werden. Die tragstrukturelle Anforderung an die Verbindung zwischen Knotenstab und Hauptträger wird im Detail besprochen und ein modellhafter, rechnerischer Nachweis wird durchgeführt.

Anschließend wird der Knoten in seine Einzelkomponenten aufgegliedert und detailliert besprochen.

Die Arbeit versucht Wissen aus Differentialgeometrie, Ingenieurwesen mit Tragwerksplanung und Architektur synergetisch zusammenzubringen und durch den Rückhalt der Mathematik neue Designlösungen für Asymptotische Gitterschalen und zugehörige architektonische Elemente zu entdecken. Sämtliche Untersuchungen im Rahmen der Arbeit waren sehr mitreißend und vielversprechend. Vor allem der Zusammenhang zwischen der konformen Gauß-Abbildung der Minimalfläche, in Verbindung mit „*Offset Meshes*“ und daraus resultierender Herstellung der Primärkonstruktion und einer planaren Vierecks Fassade, ist wirklich erstaunlich. Hier wären weitere Untersuchungen sehr vielversprechend und bestimmt erkenntnisreich.

Gleichzeitig wirft die Arbeit auch eine unglaubliche Vielzahl offener Themen auf. Unter anderem wäre eine seriöse Modellierung der Spannungen, welche während der Errichtung einer Gitterschale entstehen, erkenntnisreich. Die Untersuchung des Kriechverhaltens einer aus Holz materialisierten Gitterschale ist ebenso ausstehend. Da die Biegesteifigkeit mit der Krümmung in Beziehung steht, könnte Kriechen zu einem größeren Verformungsverhalten führen. Sehr spannend sind auch Fragen hinsichtlich weit-spannenden Strukturen und deren konstruktiven Strategien zur Festigkeitserhöhung. Und natürlich bleibt der Bau einer 1:1 Struktur mit einer 1:1- Testung der Fassade ausstehend.

Darüber hinaus sei gesagt, dass die einzelnen Gebiete, welche sich in der Auseinandersetzung mit der zu untersuchenden Materie eröffneten, geradezu bodenlos wirken. Daher kann die Arbeit wirklich nur als Einblick gebenden Beitrag zu und nicht als Abhandlung von der Erstellung einer Gitterschale unter der Verwendung von asymptotischen Kurven auf Minimalflächen gesehen werden.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Literatur

- Adriaenssens, S., Barnes, M., Harris, R. & Williams, C., 2014. Dynamic relaxation-Design of a strained timber gridshell. In: S. Adriaenssens, P. Block, D. Veenendaal & C. Williams, Hrsg. *Shell Structures for Architecture, Form Finding and Optimization*. London and New York: Routledge Press.
- Ashby, M., 2000. *Materials selection in mechanical design*. Oxford and Woburn: Butterworth-Heinemann .
- Block, P., Gengangel, C. & Peters, S., 2016. *Faustformel Tragwerksentwurf*. München: DVA Dt.Verlags-Anstalt.
- Bobenko, A. I., Bücking, U. & Sechelmann, S., 2017. Discrete minimal surfaces of Koebe type. In: L. Najman & P. Romon, Hrsg. *Modern Approaches to Discrete Curvature*. Cham: Springer.
- Brakke, K., 1992. The Surface Evolver. *Experimental Mathematics 1*, pp. 141-165.
- Burghardt, B., 1978. *IL 13 Multihalle Mannheim*. Stuttgart: Karl Krämer Verlag.
- Burghardt, B., 1978. *IL 13 Multihalle Mannheim*. Stuttgart: Krämer.
- gebo glas-elemente-befestigungssysteme, 2020. <https://www.gebo-net.com>. [Online]  
Available at: <https://www.gebo-net.com/wp-content/uploads/2020/07/Planungshinweise-Punktgehaltene-Verglasung.pdf>  
[Zugriff am 11 10 2020].
- Hennicke , J. et al., 1974. *Gitterschalen*, Stuttgart: Institut für leichte Flächentragwerke (IL).
- Lienhard, J., 2014. *Bending-Active Structures. Form-finding strategies using elastic deformation in static and kinetic systems and the structural potentials therein. Dissertation*, Stuttgart: ITKE: Institut für Tragkonstruktionen und Konstruktives Entwerfen.
- Lumpe, G. & Gensichen, V., 2014. *Evaluierung der linearen und nichtlinearen Stabstatik in Theorie und Software : Prüfbeispiele, Fehlerursachen, genaue Theorie*. Berlin: Ernst.
- ÖNORM B 1995-1-1, ., 2019. Wien: Austrian Standards International.
- ÖNORM EN 1991-1-4, 2019. Wien: Austrian Standards International.
- Piker, D., 2013. Kangaroo. Form Finding with Computational Physics. *Architectural Design*, Issue 83, pp. 136-137.
- Piker, D., 2019. <https://discourse.mcneel.com>. [Online]  
Available at: <https://discourse.mcneel.com/t/isothermic-costa-surface/88957/6>  
[Zugriff am 22 06 2020].
- Pottmann, H., Asperl, A., Hofer, M. & Kilian, A., 2007. *Architectural Geometry*. Exton: Bentley.
- Pottmann, H., Asperl, A., Hofer, M. & Kilian, A., 2010. *Architekturgeometrie*. 1. Hrsg. Wien: Springer-Verlag.
- Preisinger, C., 2013. Linking Structure and Parametric Geometry. *Architectural Design*, Issue 83, pp. 110-113.

- Rutton, D., 2010. <https://www.grasshopper3d.com/profiles/blogs/evolutionary-principles>. [Online] Available at: <https://www.grasshopper3d.com/profiles/blogs/evolutionary-principles> [Zugriff am 03 10 2020].
- Rutton, D. & Gregson, S., 2011. <https://www.grasshopper3d.com/>. [Online] Available at: <https://www.grasshopper3d.com/forum/topics/principal-curvature-lines-on> [Zugriff am 20 04 2020].
- Schling, E., 2016. <https://www.grasshopper3d.com>. [Online] Available at: <https://www.grasshopper3d.com/forum/topics/principal-curvature-lines-on?id=2985220%3ATopic%3A160646&page=1#comments> [Zugriff am 20 04 2020].
- Schling, E., 2018. *Repetitive Structures: Design and construction of curved support structures with repetitive parameters*. München: PhD Thesis, Technische Universität München.
- Schling, E. et al., 2018. Design and Construction of Curved Support Structures with Repetitive Parameters. In: L. Hesselgren, et al. Hrsg. *AAG 2018. Advances in Architectural Geometry*. Göteborg: Klein Publishing GmbH.
- Sechermann, S., 2007. *Discrete Minimal Surfaces, Koebe Polyhedra, and Alexandrov's Theorem. Variational Principles, Algorithms, and Implementation..* Berlin: Diploma Thesis, Technische Universität Berlin.
- Sechermann, S., Rörig, T. & Bobenko, A. I., 2012. Quasiisothermic Mesh Layout. In: L. Hesselgren, et al. Hrsg. *Advances in Architectural Geometry 2012*. Wien: Springer, pp. 243-258.
- Verband der finnischen Forstindustrie, 2001. *Handbuch über finnisches Sperrholz*. Lathi: Verband der finnischen Forstindustrie.
- Weitz, E., 2019. *Elementare Differentialgeometrie (nicht nur) für Informatiker*. Berlin: Springer Spektrum.
- Williams, C., 2014. What is a shell. In: S. Adriaenssens, P. Block, D. Veenendaal & C. Williams, Hrsg. *Shell Structures for Architecture- Form Finding and Optimization*. London and New York: Routledge Press, pp. 21-22.

# Abbildungen

Abbildung 1: Unter Spannung stehende VS nicht unter Spannung stehende Gitterschalen. Links: Multihalle Mannheim Quelle: <https://mannheim-multihalle.de/architektur/>. Rechts: Bauphase des Swatch-Hauptsitzes als nicht unter Spannung stehende Gitterschale. Quelle: <https://www.lehmann-gruppe.ch/holzbau/free-form/swatch.html>..... 4

Abbildung 2: Außenansicht der Multihalle- Mannheim. Quelle: <https://www.db-bauzeitung.de/db-themen/schwerpunkt/multihalle-in-mannheim/#slider-intro-2>. Foto: Stadtpark Mannheim/Archiv Frei Otto..... 6

Abbildung 3: Foto des Inside/Out Pavillons. Quelle: <https://www.tum.de/fileadmin/processed/9/0/csm08Forschungspavillon029e35ce2c9b.jpg>. Foto: Felix Noe. .... 7

Abbildung 4: Konstruktion der Tangente  $t$  an  $c$  als Grenzübergang (MW, 2020, nach Pottmann, et al., 2007: 224). ..... 9

Abbildung 5: Links: Kurvennormale. Rechts: Normalebene (MW, 2020, nach Pottmann, et al., 2007: 224). ..... 10

Abbildung 6: Diskrete Kurve welche eine glatte Kurve  $c$  annähert ( MW, 2020, nach Pottmann, et al., 2007: 216). ..... 10

Abbildung 7: Krümmungskreis an einem Punkt  $C2$  an einer Raumkurve  $c$  (MW, 2020). ..... 11

Abbildung 8: Normalkrümmung einer Fläche im Punkt  $P$  (MW, 2020, nach Pottmann, et al., 2007: 490). ..... 12

Abbildung 9: Elliptischer- und Hyperbolischer Flächenpunkt (MW, 2020, nach Schling, 2018: 8). ..... 14

Abbildung 10: Darstellung des Zusammenhangs der mittleren Krümmung und der asymptotischen Richtung..... 14

Abbildung 11: Gauß-Abbildung einer nicht abwickelbaren Fläche (MW, 2020). ..... 15

Abbildung 12: Diskrete Minimalfläche als Netz repräsentiert (MW, 2020)..... 16

Abbildung 13: Krümmungen einer Kurve auf einer Fläche. Darstellung der Darboux -Basis (MW, 2020, nach Schling, 2018: 9). ..... 17

Abbildung 14: Flächenstreifen, ausgerichtet an: Hauptkrümmungslinien, geodätischen Linien und asymptotischen Kurven (MW, 2020). ..... 19

Abbildung 15: Netz aus asymptotischen Kurven und Hauptkrümmungslinien (MW, 2020). ..... 22

Abbildung 16: Modellfotos der Modelle „Luv und Lee“, „Enneper“ und „Monroe“ (MW, 2020)..... 23

Abbildung 17: 3D Modell einer Enneper-Fläche aus Hauptkrümmungslinien und asymptotischen Linien (MW, 2020). ..... 25

Abbildung 18: Gauß-Abbildung der Enneper Fläche. Konforme Abbildung der asymptotischen Linien und Hauptkrümmungslinien (MW, 2020). ..... 25

Abbildung 19: "Circle Packing“ auf einer Enneper-Fläche (MW, 2020)..... 26

Abbildung 20: Inkreise als „Circle Packing“ (MW, 2020). ..... 26

Abbildung 21: Stereographische Projektion der Gauß-Abbildung einer Enneper-Fläche in  $xy$ -Ebene (MW, 2020). ..... 27

Abbildung 22: Trägermodellierung durch Extrusion der Unterteilungspunkte entlang der Flächennormalen (MW, 2020). ..... 28

Abbildung 23: Automatisierte Erzeugung der Produktionsgeometrie für das weitere Laserschneiden (MW, 2020). ..... 28

Abbildung 24: Entstehungsprozess Modell „Enneper“ (MW, 2020)..... 28

Abbildung 25: Modellfotos „Enneper“ (MW, 2020). ..... 29

Abbildung 26: Ungetrimmte und getrimmte Minimalflächen als Basisflächen für das Modell „Monroe“ (MW, 2020). ..... 30

Abbildung 27: Singularität mit einer Knotenvalenz von sechs in einem vierecks-dominierenden Netz (MW, 2020). ..... 31

Abbildung 28: Netzkonstruktion durch iterative Schnittpunktbildung (MW, 2020). ..... 32

Abbildung 29: Ungenauigkeiten der punktwisen Konstruktion asymptotischer Linien und Hauptkrümmungslinien (MW, 2020). ..... 33

Abbildung 30: Digitales Streifenmodell „Monroe“ (MW, 2020). ..... 33

Abbildung 31: Draufsicht Modell „Monroe“ (MW, 2020)..... 34

Abbildung 32: Innenperspektive Modell „Monroe“ (MW, 2020). ..... 34

Abbildung 33: Links.: Flacher Zustand des vormontierten Modells „Monroe“. Rechts: Streifenproduktion im Lasercutter (MW, 2020). ..... 34

Abbildung 34: Modellfoto „Monroe“ (MW, 2020)..... 35

|   |    |
|---|----|
| Abbildung 35: Koebe-Polyeder und transformierte diskrete Minimalfläche (MW, 2020).....  | 36 |
| Abbildung 36 Konstruktion Koebe-Netz. (MW, 2020, auf Basis von Piker, 2019).....  | 37 |
| Abbildung 37: Eine Vierecks-Facette $Q^*$ und dessen parallele-Vierecks Facette $Q$ (MW, 2020, auf Basis von Pottmann, et al., 2007: 700). ....   | 38 |
| Abbildung 38: Koebe-Netz und dessen paralleles Netz führen zu einem Gyroid als diskrete Minimalfläche (MW, 2020).....   | 38 |
| Abbildung 39: Gyroid als diskrete, quasiisotherme Minimalfläche (MW, 2020). ....  | 39 |
| Abbildung 40: Erzeugung asymptotischer Träger auf diskreter Minimalfläche (MW, 2020).....   | 39 |
| Abbildung 41: Quasiisotherme Schwarz Fläche als Referengeometrie für Modell „Luv und Lee“ (MW, 2020).....   | 40 |
| Abbildung 42: Digitales Modell „Luv und Lee“ (MW, 2020). ....   | 40 |
| Abbildung 43: Abwicklung des Modells „Luv und Lee“ als Basis der Produktionsdateien für das weitere Laserschneiden (MW, 2020). ....   | 41 |
| Abbildung 44: Entstehungsprozess „Luv und Lee“ (MW, 2020).....  | 41 |
| Abbildung 45: Modellfotos Modell „Luv und Lee“ (MW, 2020). ....   | 42 |
| Abbildung 46: Gauß-Krümmung und mittlere Krümmung des Modells "Enneper" (MW, 2020). ....  | 43 |
| Abbildung 47: Visualisierung- Perspektive der Gesamtstruktur mit Sockel (MW, 2020). ....  | 44 |
| Abbildung 48: Festlegung der Ausmaße des Modells „Enneper“ (MW, 2020).....  | 44 |
| Abbildung 49: Visualisierung Gesamtstruktur „Enneper“ (MW, 2020).....   | 45 |
| Abbildung 50: Verhältnis E-Modul zu Biegefestigkeit (Lienhard, 2014: 35, basierend auf Ashby, 2005). ....   | 46 |
| Abbildung 51: Visualisierung- Innenperspektive der Tragstruktur (MW, 2020). ....  | 47 |
| Abbildung 52: Visualisierung- Fassadenhaut (MW, 2020).....  | 48 |
| Abbildung 53: Visualisierung Fassade (MW, 2020). ....   | 49 |
| Abbildung 54: Hookes Kettenlinie und der invertierte Bogen (MW, 2020, nach Adriaenssens, et al., 2014: 8). ....   | 50 |
| Abbildung 55: Ungleichmäßige und gleichmäßige Spannungsverteilung (MW, 2020). ....  | 51 |
| Abbildung 56: Vergleich der Schubsteifigkeiten einer Platte und einer Gitterschale (MW, 2020). ....   | 53 |
| Abbildung 57: Unterschiedliche Steifigkeiten durch Vorspannungen (MW, 2020, nach Lienhard, 2014: 18).....   | 53 |
| Abbildung 58: Konstruktionswerte Birkenperrholz 9 mm .....  | 54 |
| Abbildung 59: Stabverformungen in Abhängigkeit der Krümmungen (MW, 2020, nach Schling, 2018: 152).....  | 55 |
| Abbildung 60: Längenänderung aufgrund von Torsion (MW, 2020, nach Schling, 2018: 154).....  | 56 |
| Abbildung 61: Verschiebung der Normalspannungen aus starker Torsion (MW, 2020, nach Schling, 2018: 154). ....   | 57 |
| Abbildung 62: Lage der Träger mit einer Torsion $> 30^\circ / m$ (MW, 2020). ....   | 58 |
| Abbildung 63: Prozessdiagramm der FE-Modellierung (MW, 2020). ....  | 58 |
| Abbildung 64: Diskretisierung der Gitterschale. (MW, 2020). ....  | 59 |
| Abbildung 65: „Karamba“ Netz- Modell (MW, 2020).....  | 60 |
| Abbildung 66: Darstellung Eigenlast Fassadenhaut (MW, 2020). ....   | 61 |
| Abbildung 67: Für Schneelasten berücksichtigter Flächenanteil (MW, 2020).....   | 61 |
| Abbildung 68: Diagramm Windlasten für gekrümmte Dächer und Kuppeln.....   | 62 |
| Abbildung 69: Aufgliederung der Windlasten in drei Bereiche (MW, 2020). ....  | 62 |
| Abbildung 70: Darstellung der Lastenleitungs-punkte (MW, 2020).....   | 63 |
| Abbildung 71: Überzeichnetes Verformungsbild der Struktur unter Eigenlasten, Vorspannungen und Windlasten (MW, 2020). ....  | 64 |
| Abbildung 72: Die linke Grafik zeigt den Ausnutzungsgrad der Hauptträger. Die rechte Grafik den Ausnutzungsgrad sämtlicher Elemente der Struktur (MW, 2020). ....   | 64 |
| Abbildung 73: Liniensegmente mit einer Ausnutzung $>50\%$ sind schwarz hinterlegt (MW, 2020).....   | 65 |
| Abbildung 74: Darstellung Normalkräfte (MW, 2020). ....   | 65 |
| Abbildung 75: Momente $M_z$ in Abhängigkeit von der Biegung um die schwache Achse (MW, 2020).....   | 66 |
| Abbildung 76: Grafik links: Momente $M_z$ mit aktiver Biegung um die lokale z-Achse in zehnfacher Skalierung. Grafik rechts: Momente $M_z$ mit deaktivierter Biegung um die lokale z-Achse in zehnfacher Skalierung (MW, 2020)..... | 66 |
| Abbildung 77: Momente $M_y$ (MW, 2020). ....  | 66 |
| Abbildung 78: Ausreißer der Querkräfte $V_y$ im Auflagerbereich (MW, 2020). ....  | 67 |
| Abbildung 79: Schnittbild eines Koebe-Netzes mit der Einheitskugel (MW, 2020). ....   | 70 |
| Abbildung 80: Zusammenhang „Circle Packing“ und Knotenachsen (MW, 2020). ....   | 70 |
| Abbildung 81: Screenshot Ausschnitt Fassade (MW, 2020).....   | 71 |

|  |     |
|--|-----|
| Abbildung 82: Gesamtstruktur (MW, 2020).....   | 72  |
| Abbildung 83: Detailzeichnung eines kugelgelagerten Senkkopfpunkthalters. Quelle: gebo glas-elemente-<br>befestigungssysteme.....  | 73  |
| Abbildung 84: Visualisierung Punkthalter an Spider (MW, 2020).....   | 73  |
| Abbildung 85: Ausbildung Fest-, Horizontal- und Loslager. (MW, 2020, nach gebo glas-elemente-<br>befestigungssysteme, 2020).....   | 74  |
| Abbildung 86: Konstruktionszeichnung parametrische Abhängigkeiten der Ausrichtung der Punkthalter (MW,<br>2020).....   | 75  |
| Abbildung 87: Screenshot des Grasshopper „Canvas“ mit Punkthalter- Spider Knoten (MW, 2020).....   | 76  |
| Abbildung 88: Evaluierung der Lochweite der Punkthalter (MW, 2020).....  | 77  |
| Abbildung 89: Visualisierung der individuellen Rotationen der Punkthalter (MW, 2020).....  | 77  |
| Abbildung 90: Konstruktionszeichnung parametrische Abhängigkeiten Anschluss Punkthalter Randträger (MW,<br>2020).....  | 78  |
| Abbildung 91: Modellierung Randträger als allgemeine Kegelfläche (MW, 2020).....   | 79  |
| Abbildung 92: Visualisierung Standard Detail Anschluss Randträger in Gesamtstruktur (MW, 2020).....  | 80  |
| Abbildung 93: Grundriss Standarddetail Anschluss Spantpaar- Randträger (MW, 2020).....   | 81  |
| Abbildung 94: Perspektive Explosionszeichnung Standard- Detail Anschluss Randträger- Spantpaar (MW,<br>2020).....  | 82  |
| Abbildung 95: Visualisierung Standard Detail Anschluss Randträger- Spanten (MW, 2020).....   | 83  |
| Abbildung 96: Elastische Errichtung des Modells „Monroe“ (MW, 2020).....   | 84  |
| Abbildung 97: Geometrieerstellung Mock-Up (MW, 2020).....  | 85  |
| Abbildung 98: Abgewinkelte Trägerstreifen (MW, 2020).....  | 85  |
| Abbildung 99: Mock-Up (MW, 2020).....  | 86  |
| Abbildung 100: Verbindung der Trägerpaare auf unterschiedlichen Ebenen (MW, 2020).....   | 87  |
| Abbildung 101: Lage Anbringung der Stahlseile (MW, 2020).....  | 87  |
| Abbildung 102: Visualisierung des Standardknotens (MW, 2020).....  | 88  |
| Abbildung 103: Scherung in Ebene (MW, 2020).....   | 89  |
| Abbildung 104: Visualisierung Knoten- Rotation in Ebene (MW, 2020).....  | 89  |
| Abbildung 105: Arretierung des Knotens durch Nuten: unterer Teil (MW, 2020).....   | 90  |
| Abbildung 106: Arretierung des Knotens durch Nuten: oberer Teil (MW, 2020).....  | 90  |
| Abbildung 107: Darstellung Druckfeder in Verbindungsknoten (MW, 2020).....   | 91  |
| Abbildung 108: Visualisierung Knotendetail (MW, 2020).....   | 91  |
| Abbildung 109: Mindestabstände metallischer Verbindungsmittel zu den Rändern ( MW, 2020, basierend auf<br>ÖNORM B 1995-1-1, 2019:109).....                               | 92  |
| Abbildung 110: Die gewählten Mindestabstände. MW (2020).....   | 92  |
| Abbildung 111: Abmessungen Verbindungsknoten (MW, 2020).....   | 93  |
| Abbildung 112: Explosionszeichnung des finalen Verbindungsknoten (MW, 2020).....   | 94  |
| Abbildung 113: Links: Einschnittige Verbindung. Rechts: Zweischnittige Verbindung (MW, 2020).....  | 96  |
| Abbildung 114: charakteristische Tragfähigkeit für Nägel, Klammern, Bolzen, Stabdübel und Schrauben pro<br>Scherfuge und Verbindungsmitte (ÖNORM B 1995-1-1, 8.2.2)..... | 97  |
| Abbildung 115: Versagensmechanismen Holz- und Holzwerkstoffverbindungen (MW, 2020 nach ÖNORM B<br>1995-1-1, 2019).....   | 98  |
| Abbildung 116: Modellierebenen (MW, 2020).....   | 100 |
| Abbildung 117: Querkraftsprung als Folge einer Einzellast Einwirkung (MW, 2020).....   | 101 |
| Abbildung 118: Parametrische Evaluierung der maximalen Kraftsprünge (MW, 2020).....  | 101 |
| Abbildung 119: Statisches Modell der Verbindung Knotenstab-Spanten als Federsystem (MW, 2020).....   | 104 |
| Abbildung 120: Momente um B2 (MW, 2020).....   | 105 |
| Abbildung 121: parametrische Evaluierung der Exzentrizitäten der Lasteinwirkung (MW, 2020).....  | 107 |
| Abbildung 122: Visualisierung Knotenmodell (MW, 2020).....   | 108 |
| Abbildung 123: Visualisierung Knotenmodell (MW, 2020).....   | 109 |



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.