



UNIVERSITÉ  
DE LORRAINE



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

**THÈSE**  
pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES**

par

**Johann VERWEE**

Titre :

**Théorèmes d'Erdős-Wintner effectifs**

**Effective Erdős-Wintner theorems**

Directeurs de thèse : Gérald TENENBAUM et Michael DRMOTA

Rapporteurs :

M. Peter GRABNER Technische Universität Linz  
M. Bruno MARTIN Université du Littoral Côte d'Opale

Jury :

|                     |                                  |              |
|---------------------|----------------------------------|--------------|
| M. Michael DRMOTA   | Technische Universität Wien      | Directeur    |
| Mme Roswitha HOFER  | Johannes Kepler Universität Linz | Examinatrice |
| M. Thomas STOLL     | Université de Lorraine           | Président    |
| M. Gérald TENENBAUM | Université de Lorraine           | Directeur    |
| M. Reinhard WINKLER | Technische Universität Wien      | Examinateur  |



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Dissertation ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.  
The approved original version of this doctoral thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Ce travail est présenté dans le cadre  
d'une convention de cotutelle  
entre  
l'Université de Lorraine  
et  
l'Université Technique de Vienne (Technische Universität Wien).



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Dissertation ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.  
The approved original version of this doctoral thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Remerciements

Je souhaite avant tout remercier mes directeurs de thèse, monsieur Gérard Tenenbaum, professeur à l'Institut Élie Cartan de Lorraine à Nancy, ainsi que monsieur Michael Drmota, professeur à la *Technische Universität Wien*, qui m'ont encadré durant ces trois années de thèse. Je remercie le professeur Tenenbaum pour toutes ses connaissances mathématiques et ses conseils avisés qu'il m'a apportés et le professeur Drmota pour son accueil à Vienne, sa gentillesse et ses nombreuses idées.

Je tiens à remercier les professeurs Peter Grabner et Bruno Martin qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de ma thèse.

J'exprime ma gratitude aux professeurs Michael Drmota, Gérard Tenenbaum, Thomas Stoll et Reinhard Winkler, ainsi qu'à la maîtresse de conférences Roswitha Hofer, qui ont accepté de faire parti du jury.

J'adresse mes remerciements aux directeurs des instituts qui m'ont accueilli, l'ancien directeur de l'Institut d'Élie Cartan de Lorraine à Nancy, le professeur Xavier Antoine et l'ancien directeur de l'*Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie*, le professeur Michael Drmota.

Je remercie également le professeur Thomas Stoll, de m'avoir proposé ce projet de thèse, ainsi qu'au professeur Frédéric Robert, qui m'ont aidé durant ces trois dernières années.

Merci aux personnes présentes aux séminaires de théorie des nombres à Nancy et en particulier à la maîtresse de conférence Anne de Roton.

Mes plus profonds remerciements vont aussi à mes parents, qui ont toujours été là pour m'aider. Ils ont toujours cru en moi et je ne les remercierai jamais assez.

Enfin, je tiens également à remercier mes collègues de travail, que ce soient monsieur Pierre-Adrien Tahay ou monsieur Robin Riblet à Nancy, ou monsieur Clément Requilé à Vienne, qui ont toujours répondu à mes questions dont je les affligeais. Je remercie aussi tous mes autres collègues de bureau autrichien, en particulier monsieur Marefat Mansouri et monsieur Lukas Spiegelhofer.

Un grand merci aussi à tout le personnel administratif de l'Université de Lorraine, en particulier à madame Sabrina Ferry, ainsi que celui de la *Technische Universität Wien*, en particulier à madame Barbara Triebel-Kraus et madame Sonja Rees.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Dissertation ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.  
The approved original version of this doctoral thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Résumé en français et en anglais

## Résumé

Les entiers naturels se prêtent à de multiples formes de représentation. Parmi les plus fondamentales figurent la décomposition en facteurs premiers et l'écriture dans une base de numération. La littérature s'est donc naturellement intéressée aux morphismes associés, autrement dit aux fonctions arithmétiques qui respectent les structures sous-jacentes. Les fonctions additives transportent la structure multiplicative de  $\mathbb{N}^*$  vers la structure additive de  $\mathbb{C}$ ; les fonctions  $q$ -additives transportent la représentation  $q$ -adique vers cette même structure additive du corps des nombres complexes.

Le célèbre théorème d'Erdős-Wintner apporte une réponse complète à la question de l'existence d'une loi de répartition limite pour les fonctions additives. Des énoncés analogues ont été établis pour d'autres systèmes de numération, comme les représentations  $q$ -adiques ou associées à une base de Cantor à chiffres bornés. Une version partielle est connue dans le cas de la représentation dans la base de Zeckendorf — cf. Barat et Grabner [2]. Dans ce travail nous nous proposons d'une part de compléter ce dernier énoncé et, d'autre part, d'établir des versions effectives des théorèmes précités.

Le premier chapitre de ce travail est consacré au cas classique, lié à la notion de fonction additive basé sur la décomposition de tout entier naturel en produit de puissances de nombres premiers. Dans certaines circonstances particulières, un renforcement des hypothèses permet une approche directe (voir par exemple, le théorème 5.6 de [16], ou le corollaire 1.5 de [6]), cependant il n'existe pas actuellement de résultat général fournissant une estimation effective de la qualité de l'approximation par la loi limite et applicable dans le même cadre que le théorème initial. Des résultats récents, dus au professeur Tenenbaum [45] et concernant les valeurs moyennes de fonctions multiplicatives à valeurs complexes, permettent l'obtention de telles estimations effectives dans le cadre optimal souhaité.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons au système de numération  $q$ -adique. Un théorème de type Erdős-Wintner a été prouvé dans ce cadre par Delange [12] en étudiant les propriétés des fonctions  $q$ -multiplicatives de module inférieur ou égal à l'unité, permettant ainsi d'établir une version effective utilisant certaines idées de même nature que celles qui permettent de traiter le cas "classique".

Le troisième chapitre est consacré à une généralisation de l'étude précédente lorsque le système de numération est celui de Cantor. Dans l'esprit du travail de Coquet [10], nous étendons aux fonctions  $Q$ -multiplicatives à valeurs dans le cercle unité les résultats établis dans [12]. Cela permet d'énoncer, dans le cadre d'un système à chiffres bornés, un théorème de type Erdős-Wintner et d'en obtenir une version effective selon la nature de la loi limite.

Dans le dernier chapitre, nous nous intéressons au système de numération de Zeckendorf, pour lequel nous établissons un critère de type Erdős-Wintner. Comme la suite de Fibonacci vérifie une relation de récurrence d'ordre 2, cela conduit à étudier des suites récurrentes linéaires du second ordre à coefficients non-constants — une différence notable avec les deux contextes précédents, associés à des relations d'ordre 1. Nous obtenons également, pour ce système, une version effective du théorème de type Erdős-Wintner sous des hypothèses plus générales.

## Abstract

Natural integers lend themselves to multiple forms of representation. Among the most fundamental are prime factors decomposition and representation in a numeral system. The literature has therefore naturally been interested in associated morphisms, that is, arithmetic functions that respect the underlying structures. Additive functions transport the multiplicative structure of  $\mathbb{N}^*$  to the additive structure of  $\mathbb{C}$ ; additive  $q$ -additive functions transport the  $q$ -adic representation to this same additive structure of the complex number field.

The famous Erdős-Wintner theorem provides a complete answer to the question of the existence of a limit distribution law for additive functions. Analogous statements have been established for other representation systems, such as  $q$ -adic or Cantor representations. A partial version is known for the representation in the Zeckendorf base — *cf.* Barat and Grabner [2]. In this work we propose on the one hand to complete this last statement and, on the other hand, to establish effective versions of the above theorems.

The first chapter of this work is devoted to the classical case, linked to the notion of additive function based on the decomposition of a natural integer into the product of powers of prime numbers. In some particular circumstances, a reinforcement of the hypotheses allows a direct approach (see for example the theorem 5.6. of [16], or corollary 1.5 of [6]), however there is currently no general result that provides an effective estimate of the quality of the approximation by the limit law and applicable in the same framework as the initial theorem. Recent results, due to professor Tenenbaum [45] and concerning the values averages of multiplicative functions with complex values, allow such effective estimates to be obtained in the desired optimal setting.

In the second chapter, we look at the  $q$ -adic number system. A theorem of type Erdős-Wintner has been proved in this framework by Delange [12] by studying the properties of  $q$ -multiplicative functions of modulus less than or equal to unity, thus allowing to establish an effective version using some ideas of the same nature as those allowing to treat the "classical" case.

The third chapter is devoted to a generalization of the previous study when the numeration system is that of Cantor.

In the spirit of Coquet's work [10], we extend to the  $Q$ -multiplicative functions with values in the unit circle the results established in [12]. This makes it possible to state, within the framework of a constant-like system, a theorem of Erdős-Wintner type and to obtain an effective version according to the nature of the limit law.

In the last chapter, we are interested in the Zeckendorf representation, for which we establish a criterion of type Erdős-Wintner. As the Fibonacci sequence verifies a recurrence relation of order 2, this leads us to study second order linear recurrent sequences with non-constant coefficients — a notable difference with the two previous contexts, associated with relations of order 1. We also obtain, for this system, an effective version of the Erdős-Wintner theorem under more general hypotheses.



# Sommaire

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>0</b> | <b>Introduction</b>  | <b>11</b> |
| 0.1      | Introduction en français . . . . .   | 11        |
| 0.2      | Introduction in English . . . . .  | 24        |
| <b>1</b> | <b>Cas classique</b>   | <b>37</b> |
| 1.1      | Notations et résultats utiles . . . . .  | 37        |
| 1.2      | Fonctions additives et multiplicatives . . . . .                                 | 38        |
| 1.2.1    | Définitions et propriétés . . . . .  | 39        |
| 1.2.2    | Ordre normal et inégalité de Turán-Kubilius . . . . .                            | 40        |
| 1.2.3    | Valeur moyenne de fonctions multiplicatives de module inférieur à 1 . . . . .    | 41        |
| 1.3      | Loi limite et théorème d'Erdős-Wintner . . . . .                                 | 42        |
| 1.3.1    | Loi limite et fonctions caractéristiques . . . . .                               | 42        |
| 1.3.2    | Fonction de concentration et inégalité de Berry-Esseen . . . . .                 | 45        |
| 1.3.3    | Le théorème d'Erdős-Wintner . . . . .  | 46        |
| 1.4      | Version effective dans le cas discret . . . . .                                  | 47        |
| 1.4.1    | Énoncé et preuve du théorème . . . . .   | 47        |
| 1.4.2    | Exemples . . . . .   | 53        |
| 1.5      | Version effective dans le cas continu . . . . .                                  | 57        |
| 1.5.1    | Énoncé et preuve du théorème . . . . .   | 58        |
| 1.5.2    | Exemples . . . . .   | 64        |
| <b>2</b> | <b>Système de numération <math>q</math>-adique</b>                               | <b>67</b> |
| 2.1      | Définitions et énoncé du théorème d'Erdős-Wintner . . . . .                      | 67        |
| 2.2      | Cas discret . . . . .  | 71        |
| 2.3      | Cas continu . . . . .  | 72        |
| 2.4      | Existence de densité et estimation de la fonction de concentration . . . . .     | 77        |
| 2.5      | Exemples . . . . .   | 78        |
| 2.5.1    | Premier exemple . . . . .  | 78        |
| 2.5.2    | Deuxième exemple . . . . .   | 79        |
| 2.5.3    | Troisième exemple : mesures de Cantor-Lebesgue . . . . .                         | 85        |
| <b>3</b> | <b>Système de numération de Cantor</b>   | <b>99</b> |
| 3.1      | Définitions et résultats à propos des fonctions $Q$ -multiplicatives . . . . .   | 99        |
| 3.2      | Critère pour l'existence d'une valeur moyenne . . . . .                          | 100       |
| 3.3      | Théorème d'Erdős-Wintner pour les systèmes de Cantor à chiffres bornés . . . . . | 106       |
| 3.4      | À propos des systèmes de Cantor à chiffres non-bornés . . . . .                  | 109       |
| 3.5      | Version effective dans le cas discret . . . . .                                  | 111       |
| 3.6      | Version effective dans le cas continu . . . . .                                  | 111       |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.7      | Exemple . . . . .                                  | 116        |
| <b>4</b> | <b>Système de numération de Zeckendorf</b>         | <b>117</b> |
| 4.1      | Définitions et théorème d'Erdős-Wintner . . . . .  | 117        |
| 4.2      | Longueur de la décomposition d'un entier . . . . . | 126        |
| 4.3      | Version effective dans le cas continu . . . . .    | 128        |
| 4.3.1    | Valeur moyenne . . . . .                           | 129        |
| 4.3.2    | Preuve de la version effective . . . . .           | 134        |
| 4.4      | Exemple et conclusion . . . . .                    | 137        |
|          | <b>Bibliographie</b>                               | <b>141</b> |

# Chapitre 0

## Introduction

### 0.1 Introduction en français

Les deux concepts centraux utilisés dans ce travail sont, d'une part, la représentation d'un entier naturel dans des systèmes de numération et, d'autre part, les fonctions additives et multiplicatives associées. Un concept très proche des systèmes de numération est la décomposition en facteurs premiers de tout entier naturel, qui consiste à écrire un entier naturel  $n \geq 2$  sous forme d'un produit de nombres premiers, résultat appelé théorème fondamental de l'arithmétique ou premier théorème d'Euclide.

Il est intéressant de connaître des classes de *fonctions arithmétiques*, c'est-à-dire des fonctions définies sur  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$  à valeurs complexes, respectant la structure multiplicative de  $\mathbb{N}$ , au sens où l'image d'un entier naturel est la somme (respectivement le produit) des images des puissances des nombres premiers intervenant dans sa décomposition canonique : ce sont les fonctions additives (respectivement multiplicatives).

Plus généralement, de telles fonctions peuvent être définies sur ce qu'on appelle des systèmes de numération, chacun d'eux pouvant être vu comme une application injective associant à tout élément d'un ensemble à énumérer la suite de ses chiffres. Ainsi le système décimal est un système de numération utilisant la base 10, omniprésent dans la vie de tous les jours et est donc en réalité une injection (et même une bijection), qui à tout entier naturel associe la suite finie de ses chiffres appartenant à l'ensemble  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ .

Afin de définir la notion de loi limite pour une fonction arithmétique et ainsi énoncer le théorème d'Erdős-Wintner, nous avons besoin d'introduire la notion de fonction de répartition ainsi que quelques résultats connexes.

Nous désignons par *fonction de répartition* une fonction croissante au sens large  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , continue à droite et satisfaisant à

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} F(z) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z) = 1.$$

Il existe trois classes centrales et classiques de telles fonctions :

- une fonction de répartition est dite *purement discrète* ou *atomique* si elle croît exclusivement par sauts et est constante dans tout intervalle fermé ne contenant pas de points de discontinuité ;
- une fonction de répartition  $F$  est dite *absolument continue* s'il existe une fonction positive  $h$  intégrable au sens de Lebesgue telle que

$$\int_{\mathbb{R}} h(t) dt = 1 \quad \text{et} \quad F(z) = \int_{-\infty}^z h(t) dt \quad (z \in \mathbb{R}) ;$$

· une fonction de répartition  $F$  est dite *purement singulière* si elle est continue et si nous avons la relation

$$\int_{\mathcal{N}} dF_1(z) = 1,$$

où  $\mathcal{N}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue nulle.

En désignant par  $\mathcal{C}(F)$  l'ensemble des points de continuité de  $F$ , on dit qu'une suite  $(F_n)_{n \geq 1}$  de fonctions de répartition converge faiblement vers une fonction  $F$  si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = F(z) \quad (z \in \mathcal{C}(F)).$$

Considérons maintenant une fonction arithmétique réelle  $f$ . Pour chaque  $N \geq 1$  la fonction

$$(0.1) \quad F_N(z) := \nu_N(\{n : f(n) \leq z\}) = \frac{1}{N} |\{n \leq N : f(n) \leq z\}|$$

est une fonction de répartition atomique.

**Définitions.** 1) On dit qu'une fonction arithmétique réelle  $f$  possède une fonction de répartition  $F$  (ou encore : possède une loi limite de fonction de répartition  $F$ ) si la suite  $(F_N)_N$  définie par (0.1) converge faiblement vers  $F$  et si  $F$  est une fonction de répartition.

2) De plus, une fonction de répartition  $F$  (ou une loi de fonction de répartition  $F$ ) est pure si elle est soit atomique, soit continue purement singulière, soit absolument continue.

Le théorème d'Erdős-Wintner fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction réelle additive possède une loi limite. Nous n'avons pas encore défini la notion d'additivité pour une fonction arithmétique, mais cette notion varie suivant que nous considérons le cas "classique" avec les nombres premiers ou bien les autres systèmes de numération.

Dans chaque chapitre de cette thèse, nous nous plaçons dans un système de numération particulier, puis nous considérons une fonction réelle ayant une propriété additive, qui satisfait au critère du théorème de type Erdős-Wintner et qui possède ainsi une loi limite. Nous énonçons alors une version effective de ce résultat selon que la loi limite est purement discrète ou continue, c'est-à-dire que nous explicitons le terme d'erreur associé à la convergence de la suite  $(F_N)_N$  vers la fonction de répartition limite  $F$ .

Pour ce faire, nous avons besoin de plusieurs outils analytiques, certains apparaissant dans les démonstrations du théorème d'Erdős-Wintner comme par exemple le théorème de continuité de Lévy. Afin d'énoncer le théorème de Lévy, nous rappelons la définition de la *fonction caractéristique* d'une fonction de répartition  $F$  : c'est la transformée de Fourier de la mesure de Stieltjes  $dF(z)$ , soit

$$\varphi(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} dF(z) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

C'est une fonction uniformément continue sur la droite réelle, satisfaisant à

$$|\varphi(\tau)| \leq 1 = \varphi(0) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Le célèbre théorème de continuité de Paul Lévy relie la convergence faible des fonctions de répartition à la convergence simple des fonction caractéristiques.

**Théorème** (Théorème de continuité, Lévy, 1925). *Soit  $(F_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions de répartition et  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  la suite de leurs fonctions caractéristiques. Alors  $F_n$  converge faiblement vers une fonction de répartition  $F$  si, et seulement si,  $\varphi_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $\varphi$  continue en 0. De plus, dans ce cas,  $\varphi$  est la fonction caractéristique de  $F$  et la convergence de  $\varphi_n$  vers  $\varphi$  est uniforme sur tout compact.*

Ce résultat est établi en détail dans de nombreux livres sur la théorie des probabilités (cf. par exemple [10]). Pour la suite de fonctions de répartitions définie par (0.1), nous avons

$$\Phi_N(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} dF_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} d\delta_{f(n)}(z) = \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} e^{i\tau f(n)} \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

où  $\delta_a$  désigne la mesure de Dirac au point  $a$ . Nous obtenons ainsi le critère suivant.

**Théorème.** *Soit  $f$  une fonction arithmétique réelle. Alors  $f$  possède une fonction de répartition  $F$  si, et seulement si, la suite de fonctions  $(\Phi_N(\tau))_{N \geq 1}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $\Phi$  continue en 0. Dans ce cas,  $\Phi$  est la fonction caractéristique de  $F$ .*

Lorsque  $f$  est une fonction additive, la fonction  $n \mapsto e^{i\tau f(n)}$  est, pour chaque nombre réel  $\tau$ , une fonction multiplicative de module 1. Le problème de l'existence d'une loi limite pour  $f$  est donc équivalent à celui de l'existence de la valeur moyenne pour une famille de fonctions multiplicatives  $g_\tau$  à valeurs dans le disque unité, c'est-à-dire, l'existence de la limite de  $(1/N) \sum_{n \leq N} g_\tau(n)$ . Nous montrerons que l'obtention d'un terme d'erreur effectif dans l'estimation de la valeur moyenne d'une telle fonction multiplicative permet une estimation de la vitesse de convergence vers la loi limite.

Pour démontrer les différentes versions effectives des théorèmes de type Erdős-Wintner lorsque la loi limite est continue, nous utilisons deux outils : la fonction de concentration et l'inégalité de Berry-Esseen.

La fonction de concentration  $Q_F$  d'une fonction de répartition  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$  par la formule

$$Q_F(h) := \sup_{z \in \mathbb{R}} \{F(z+h) - F(z)\} \quad (h \geq 0).$$

Ainsi  $F$  est continue si, et seulement si,  $Q_F(\ell) \rightarrow 0$  lorsque  $\ell \rightarrow 0^+$ , de sorte que la fonction de concentration peut être vue comme une mesure de la distance de  $F$  à l'ensemble des fonctions de répartitions continues. Cet aspect apparaît dans l'énoncé de l'inégalité de Berry-Esseen (cf. par exemple [17], lemme 1.47).

**Théorème** (Berry-Esseen). *Soit  $F$  et  $G$  deux fonctions de répartition de fonctions caractéristiques respectives  $\varphi$  et  $\psi$ . Nous avons alors, pour tout  $T > 0$ ,*

$$\|F - G\|_\infty \ll Q_F\left(\frac{1}{T}\right) + \int_{-T}^T \left| \frac{\varphi(\tau) - \psi(\tau)}{\tau} \right| d\tau.$$

L'inégalité de Berry-Esseen permet d'obtenir une majoration quantitative de l'approximation de  $F$  par  $F_N$ , sous les conditions que  $F$  soit continue et que l'intégrale précédente converge.

Dans le **chapitre 1**, nous nous intéressons au cas classique du théorème. Dans ce cas, une fonction arithmétique  $f$  est dite *additive* si l'on a, pour tout entier naturels  $m$  et  $n$  premiers entre eux

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

Nous pouvons ainsi écrire

$$(0.2) \quad f\left(\prod_{p^\nu \parallel n} p^\nu\right) = \sum_{p^\nu \parallel n} f(p^\nu),$$

où la lettre  $p$  désigne un nombre premier dans toute cette thèse et où la notation  $p^\nu \parallel n$  signifie que  $p^\nu \mid n$  et  $p^{\nu+1} \nmid n$ . Nous remarquons donc qu'une fonction additive est entièrement définie par ses valeurs sur l'ensemble des puissances des nombres premiers. Le théorème d'Erdős-Wintner s'énonce alors comme suit.

**Théorème** (Erdős-Wintner, 1939). *Soit  $f$  une fonction additive réelle.  $f$  possède une loi de répartition limite si, et seulement si, les trois séries suivantes convergent pour au moins une valeur du nombre réel positif  $R$*

$$\sum_{|f(p)| > R} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq R} \frac{f(p)}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq R} \frac{f(p)^2}{p}.$$

Quand les conditions sont satisfaites, la fonction caractéristique est donnée par le produit convergent

$$\varphi(\tau) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{e^{i\tau f(p^\nu)}}{p^\nu} \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

La loi limite est nécessairement pure, c'est-à-dire que la fonction de répartition limite  $F$  est soit atomique, soit continue purement singulière, soit absolument continue. Elle est continue si, et seulement si,

$$\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p} = \infty.$$

Une preuve de ce théorème se base sur des travaux dus à Delange à propos de la valeur moyenne des *fonctions multiplicatives* à valeurs dans le disque unité. Nous disons qu'une fonction arithmétique (définie sur  $\mathbb{N}^*$ )  $g$  est *multiplicative* si  $g(1) = 1$  et si pour tous entiers naturels  $m$  et  $n$  premiers entre eux

$$g(mn) = g(m)g(n).$$

Nous démontrons alors deux versions effectives du théorème d'Erdős-Wintner selon que la loi limite de la fonction additive  $f$  est discrète ou continue.

Supposons d'abord qu'elle est atomique. Le résultat prouvé fournit non seulement une expression explicite de la fonction de répartition limite, mais aussi une version effective. Afin d'énoncer ce théorème, nous devons introduire de nombreuses quantités : nous posons  $\mathcal{P} := \{p^\nu : f(p^\nu) \neq 0\}$ , définissons une fonction multiplicative  $u$  par

$$u(p^\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } p^\nu \in \mathcal{P}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et pour tout nombre premier  $p$ , nous désignons par  $w_p$  la fonction suivante

$$w_p := \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 1} \frac{u(p^\nu)}{p^\nu}.$$

De plus, nous posons

$$S(t) := \sum_{p > t, f(p) \neq 0} \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \psi(y) := \frac{1}{\ln y} \int_1^y \frac{S(t)}{t} dt.$$

**Théorème.** Soit  $f$  une fonction additive réelle possédante une loi limite discrète. Nous avons alors uniformément pour  $z \in \mathbb{R}$  et  $x \geq 1$ ,

$$(i) \quad F(z) = \prod_p (1 - w_p) \sum_{f(m) \leq z} \frac{u(m)}{m} \prod_{p|m} \left( \frac{1 - 1/p}{1 - w_p} \right);$$

$$(ii) \quad F_x(z) = F(z) + O(R_x),$$

où l'on a posé

$$R_x := S(x^{1/\ln_2 x}) + \psi(\sqrt{x})^{1/4} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}},$$

les constantes implicites pouvant dépendre de  $f$ .

Nous appliquons alors cette estimation à un exemple général. En considérant deux suites de nombres réels positifs  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$  telles que  $a_n + 1 \leq b_n \leq a_{n+1}$  pour tout entier  $n$ , nous introduisons l'ensemble

$$J := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} ]a_n; b_n] \cap \mathbb{P}$$

et la fonction additive

$$f(n) := \sum_{p \in J, p|n} 1 \quad (n \geq 1)$$

Nous montrons alors que cette fonction  $f$  vérifie les hypothèses du théorème d'Erdős-Wintner et possède une loi limite atomique si, et seulement si,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left( \frac{\ln b_n}{\ln a_n} \right) < \infty.$$

Un premier exemple est fourni par le choix  $a_n = 2^n$ ,  $b_n = 2^n \{1 + 1/(\ln n)^c\}$  pour  $n \geq 2$  où  $c > 1$  est un paramètre. Nous obtenons alors l'estimation suivante

$$R_x \asymp \frac{1}{(\ln_2 x)^{(c-1)/4}}.$$

Nous considérons également un second exemple, donné par  $a_n = 2^n$ ,  $b_n = 2^n (1 + 1/n^c)$  pour  $n \geq 2$ , où à présent  $c > 0$ , ce qui nous permet d'obtenir l'estimation

$$R_x \asymp \frac{1}{(\ln x)^\beta}$$

où  $\beta := \min(c/4, 1/6)$ .

Supposons maintenant que la loi limite de  $f$  soit continue. Posons

$$B_f(R)^2 := 2 + \sum_{p^\nu \leq R} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} \quad (R \geq 2) \quad \text{et} \quad Q_F(h) := \sup_{z \in \mathbb{R}} \{F(z+h) - F(z)\} \quad (h > 0)$$

et, pour tout  $x \geq 3$ , nous désignons par  $\varepsilon = \varepsilon_x$  une fonction vérifiant  $1/\sqrt{\ln x} \leq \varepsilon_x = o(1)$ .

**Théorème.** *Pour une constante absolue convenable  $c$  et tous nombres réels  $R, T$  vérifiant  $3 \leq R \leq x$ ,  $T \geq 1$  et*

$$\begin{cases} 2 \ln_2 R + \frac{1}{2} T^2 \eta(R) + c \leq \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon_x} \right), \\ T^2 \eta(x^{\varepsilon_x}) \ll \varepsilon_x^{1/3}, \end{cases}$$

nous avons

$$\|F_x - F\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + \varepsilon_x^{1/6} \ln \left( \frac{T B_f(R)}{\varepsilon_x} \right) + \eta(R).$$

Nous appliquons alors ce résultat à deux exemples de fonctions et discutons de la pertinence des résultats obtenus : d'abord, à la fonction additive  $f$  définie par

$$f(p^\nu) = \frac{1}{(\ln p)^\alpha} \quad (\alpha > 1),$$

ce qui fournit alors la majoration

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{(\ln x)^{1/32}},$$

puis, nous considérons la fonction

$$f(p) = \frac{1}{p^\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

ce qui nous donne alors l'estimation

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{(\ln x)^{1/24}}.$$

Le *système de numération  $q$ -adique*, où  $q \geq 2$  est un nombre entier, constitue le cadre de l'étude présentée au **chapitre 2**. Il est associé à la représentation des entiers naturels sous la forme

$$(0.3) \quad n = \sum_{i \geq 0} e_i q^i$$

où  $e_i \in \{0, \dots, q-1\}$  et  $e_i = 0$  pour tout indice  $i$  assez grand. Dans ce cas, une fonction arithmétique définie sur  $\mathbb{N}$  (et non plus sur  $\mathbb{N}^*$  comme dans le premier chapitre) à valeurs complexes est dite  *$q$ -additive* si, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $0 \leq \ell < q^k$ , elle vérifie

$$f(q^k n + \ell) = f(q^k n) + f(\ell).$$

Il suit alors par récurrence, pour tout  $K \in \mathbb{N}$ ,

$$(0.4) \quad f \left( \sum_{0 \leq k \leq K} e_k q^k \right) = \sum_{0 \leq k \leq K} f(e_k q^k),$$

ce qui montre, dans ce cas, que toute fonction  $q$ -additive est entièrement déterminée par les valeurs  $f(aq^k)$ ,  $a \in \{1, \dots, q-1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $f(0) = 0$ .

Établie par Delange [12], la version  $q$ -adique du théorème de type Erdős-Wintner fait l'objet de l'énoncé suivant.



**Théorème.** Une fonction  $q$ -additive  $f$  possède une loi limite si, et seulement si, les deux séries

$$(0.5) \quad \sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j), \quad \sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)^2$$

convergent. Dans ce cas, la fonction caractéristique de loi limite est donnée par le produit convergent

$$\varphi(\tau) = \prod_{j \geq 0} \frac{1}{q} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < q} e^{i\tau f(dq^j)} \right) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

La question de la nature de la loi limite est résolue grâce au résultat suivant que nous démontrerons (la preuve ressemblera en partie à celle de la proposition 3 de [3], utilisant des résultats de [28] et de [35]).

**Proposition.** Dans le théorème précédent, la loi limite est pure. De plus, elle est atomique si, et seulement si,  $f(dq^j) = 0$  ( $1 \leq d < q$ ) pour tout  $j$  assez grand.

Lorsque la loi limite est atomique,  $f$  est  $q^J$ -périodique et nous avons la majoration (optimale)

$$\|F_N - F\|_\infty \ll \frac{1}{N}.$$

Afin d'énoncer notre résultat le cas où la loi est continue, introduisons quelques notations. Nous posons  $L_N := \ln N / \ln q$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) et

$$\varepsilon_{1,N} := \sum_{j > L_N} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j), \quad \varepsilon_{1,N}^* := \sum_{j > L_N} \sum_{1 \leq d < q} |f(dq^j)|, \quad \varepsilon_{2,N} := \sum_{j > L_N} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)^2.$$

Pour tous  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $T \geq 1$ , notons  $h_T := \ln(T \ln T) / \ln q$  et

$$\eta_N(T) := \sum_{L_N - h < j \leq L_N} \sum_{1 \leq d < q} |f(dq^j)|, \quad \psi_N(\tau) := \frac{8}{q^2} \sum_{j \leq L_N} \sum_{1 \leq d < q} \left\| \frac{\tau f(dq^j)}{2\pi} \right\|^2,$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la distance à l'ensemble des entiers. Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème.** Soit  $f$  une fonction  $q$ -additive réelle. Supposons que les deux séries (0.5) convergent et que l'on ait  $f(dq^j) \neq 0$  pour une infinité de valeurs du couple  $(d, j)$  ( $j \geq 0$ ,  $0 \leq d < q$ ). Pour tout nombre réel  $T \geq 1$  et pour tout entier naturel  $N \geq 1$  vérifiant  $h_T \leq L_N$ , nous avons alors

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \eta_N(T) + \int_{1/T}^T \min \left( \frac{1}{1+\tau}, |\varepsilon_{1,N}| + \tau \varepsilon_{2,N} \right) e^{-\psi_N(\tau)} d\tau,$$

où la constante implicite dépend de  $q$ .

De plus, si la première série de (0.5) est absolument convergente, alors l'expression  $|\varepsilon_{1,N}| + \tau \varepsilon_{2,N}$  peut être remplacée par  $\varepsilon_{1,N}^*$ .

**Remarque.** Dans les hypothèses du théorème précédent, nous avons trivialement

$$\psi_N(\tau) \geq \frac{2\tau^2}{\pi^2 q^2} \sum_{(d,j) \in S(\tau), j \leq L_N} f(dq^j)^2,$$

où l'on a posé  $S(\tau) := \{(d, j) \in \{1, \dots, q-1\} \times \mathbb{N} : |f(dq^j)| \leq \pi/|\tau|\}$  ( $\tau > 0$ ). Cette minoration est plus maniable, mais insuffisante dans certains cas, comme celui de la fonction 2-additive  $f(2^j) = \gamma^j$ , où  $0 < \gamma < 1$ .

Nous pouvons également simplifier l'estimation du théorème précédent afin qu'elle réfère plus explicitement aux séries (0.5). En utilisant les mêmes notations que précédemment, nous introduisons deux nouveaux restes, pour tout entier naturel  $N$  et tout réel  $T$

$$\varepsilon_{1,N}^*(T) := \sum_{j > L_N - h_T} \sum_{1 \leq d < q} |f(dq^j)| \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2,N}(T) := \sum_{j > L_N - h_T} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)^2.$$

**Corollaire.** *Soit  $f$  une fonction  $q$ -additive réelle telle que les deux séries (0.5) convergent et que l'on ait  $f(dq^j) \neq 0$  pour une infinité de valeurs du couple  $(d, j)$  ( $j \geq 0$ ,  $0 \leq d < q$ ). Pour tout nombre réel  $T \geq 1$  vérifiant  $h_T \leq L_N$ , nous avons*

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \eta_N(T) + T |\varepsilon_{1,N}| + T^2 \varepsilon_{2,N},$$

où la constante implicite dépend de  $q$ . De plus, si la première série de (0.5) est absolument convergente, alors les trois derniers termes précédents peuvent être remplacés par  $T \varepsilon_{1,N}^*(T)$ .

En particulier,

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T |\varepsilon_{1,N}| + T \sqrt{\varepsilon_{2,N}(T) \ln T},$$

où la constante implicite dépend encore de  $q$ .

Nous appliquerons ce résultat à différents exemples : si la décroissance de la fonction  $f$  est très rapide, comme c'est par exemple le cas pour la suite de van der Corput  $(f(n))_n$ , fonction  $q$ -additive définie par  $f(dq^j) = dq^{-j-1}$ , nous obtenons l'estimation

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{\ln N}{N^{1/3}}.$$

En outre, lorsque la fonction  $f$  ne décroît pas trop rapidement vers 0, par exemple la fonction  $q$ -additive définie par  $f(d) = 0$  et  $f(dq^j) := j^{-\alpha}$  ( $\alpha > 1$ ) pour tout  $j \geq 1$  et  $d \in \{1, \dots, q-1\}$  ( $q \geq 2$ ), nous obtenons alors l'estimation

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \begin{cases} \frac{1}{(\ln N)^{\alpha-1}} & \text{si } 1 < \alpha < 2, \\ \frac{\sqrt{\ln_2 N}}{(\ln N)^{\alpha/2}} & \text{si } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

Enfin, nous généralisons le premier exemple dans le cas où  $q = 2$  en appliquant notre version effective à la fonction 2-additive définie par  $f(2^j) := \gamma^j$ , où  $0 < \gamma < 1$ . Nous obtenons alors le résultat suivant.

**Théorème.** *Soit  $f$  la fonction 2-additive définie par  $f(2^j) = \gamma^j$  ( $j \geq 0$ ) avec  $0 < \gamma < 1$ . Il existe alors une constante  $c(\gamma) > 0$  telle que*

$$\|F - F_N\| \ll_\gamma N^{-c(\gamma)} (\ln N)^{\ln(1/\gamma)/\ln 2}.$$

Une valeur admissible est

$$c(\gamma) := \frac{\ln(1/\gamma) \ln(2)}{\ln(4/\gamma) \ln(2/\gamma) + \ln(2)^2}.$$

En outre, si  $Q_F(t) \ll t$  ( $t > 0$ ) (par exemple si  $F$  possède une densité bornée), on peut choisir

$$c(\gamma) = \frac{\ln(1/\gamma)}{\ln(4/\gamma)}.$$

Le cas  $\gamma = 1/2$  correspond (à un décalage d'indice près) à la suite de van der Corput, étudiée dans le premier exemple. Nous redémontrerons que sa loi limite est la loi uniforme sur  $[0, 1]$  (cf. [34, Théorème 3.5]), donc elle possède une densité bornée et en appliquant le résultat du théorème précédent, nous retrouvons la même estimation que dans le premier exemple.

En outre, désignons par  $\nu_\gamma$  la mesure de répartition de la série aléatoire  $\sum \pm \gamma^n$ , où les signes sont choisis de manière indépendante avec probabilité  $1/2$  et qui est étroitement liée à la loi limite de la fonction 2-additive définie par  $f(2^j) = \gamma^j$  comme précédemment. Comme écrit dans [39], Garsia [21] a trouvé le plus grand ensemble explicite de  $\gamma \in ]1/2, 1[$  connu à ce jour, pour lesquels  $\nu_\gamma$  est absolument continue et possède une densité bornée. Les éléments de cet ensemble sont les conjugués des nombres algébriques appartenant à  $]1; 2[$  dont le polynôme minimal est unitaire, possède un coefficient constant égal à  $\pm 2$  et dont ses autres racines sont en dehors du cercle unité.

Dans le **chapitre 3**, nous généraliserons les propriétés obtenus par Delange [12] afin de prouver à nouveau le théorème de type Erdős-Wintner dans un système de numération de Cantor à *chiffres bornés* (*constant-like* en anglais), ce résultat ayant été prouvé par Barat et Grabner [3] d'un point de vue ergodique, en contournant ainsi l'utilisation du théorème de Lévy.

Soit  $(a_j)_{j \geq 0}$  une suite d'entier naturels où  $a_n \geq 2$  : nous définissons un *système de numération de Cantor*  $Q = (q_j)_{j \geq 0}$  par  $q_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q_{j+1} = a_j q_j$ , d'où  $q_j = a_{j-1} \dots a_1 a_0$  (cette formule étant encore vraie pour  $j = 0$  avec la convention standard qu'un produit vide est égal à 1). Tout entier naturel possède alors une décomposition unique sous la forme

$$n = \sum_{j \geq 0} e_j(n) q_j, \quad (0 \leq e_j(n) < a_j).$$

En particulier, si  $a_j \equiv q$  est constante, nous retrouvons le cas traité dans le deuxième chapitre.

Nous définissons alors, de la même manière que pour les fonctions  $q$ -additives  $f$  (respectivement  $q$ -multiplicatives  $g$ ) dans le deuxième chapitre, la notion de fonctions  $Q$ -additives (respectivement  $Q$ -multiplicatives) par, pour tout entier naturel  $n$

$$f(0) = 0 \text{ et } f(n) = \sum_{j \geq 0} f(e_j(n)q_j) \quad \left( \text{respectivement } g(0) = 1 \text{ et } g(n) = \prod_{j \geq 0} g(e_j(n)q_j) \right).$$

Nous établirons d'abord un critère pour l'existence d'une valeur moyenne pour les fonctions  $Q$ -multiplicatives de module inférieur à l'unité, dans l'esprit de l'article de Delange [12], puis nous nous intéresserons aux systèmes de numération de Cantor à *chiffres bornés*, appelés "constant-like" en anglais.

**Définition.** *Un système de numération de Cantor est dit à chiffres bornés si la suite initiale  $(a_j)_{j \geq 0}$  est majorée.*

Dans ce cas, nous donnons une preuve élémentaire du théorème de type Erdős-Wintner en utilisant les mêmes idées que Delange pour le cas  $q$ -adique, i.e. en faisant appel aux propriétés prouvées dans la première section de ce chapitre ainsi qu'au critère de Lévy.

**Théorème.** *Soit  $f$  une fonction  $Q$ -additive par rapport à un système de numération à chiffres bornés. Alors  $f$  possède une fonction de répartition si, et seulement si, les deux séries*

$$(0.6) \quad \sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j) \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)^2$$

*convergent.*

Quand les conditions sont remplies, la fonction caractéristique est donnée par le produit convergent

$$\Phi(\tau) = \prod_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} \exp(i\tau f(dq_j)) \right) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

D'autre part, nous prouverons une version effective de ce résultat suivant la nature de la loi limite comme dans le deuxième chapitre. En effet, nous avons le résultat suivant (cf. [3, Proposition 3]).

**Proposition.** *Lorsqu'elle existe, la loi de répartition limite  $dF$  de la fonction  $Q$ -additive  $f$  est nécessairement pure.*

*En outre, si  $Q$  est à chiffres bornés, alors  $dF$  est atomique si, et seulement si, il existe un  $J \in \mathbb{N}$  tel que  $f(dq_j) = 0$  pour tous  $d \in \{0, \dots, a_j - 1\}$ ,  $j \geq J$ .*

Lorsque la loi limite est atomique, nous montrerons que  $f$  est  $q_J$ -périodique et que nous avons la majoration (optimale)

$$\|F_N - F\|_\infty \ll \frac{1}{N}.$$

Dans le cas où la loi limite est continue, nous désignons par  $\mathcal{L}_N$  la longueur de la décomposition de l'entier naturel  $N$  définie par

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N := \max \{j \geq 0 : e_j(N) \neq 0\}$$

(avec  $\mathcal{L}_0 := 0$ ), qui est l'unique entier naturel tel que

$$1 \leq \frac{N}{q^{\mathcal{L}}} < a_{\mathcal{L}}.$$

En outre, nous introduisons à nouveau quelques restes

$$\eta_{1,N} := \sum_{j > \mathcal{L}_N} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j), \quad \eta_{1,N}^* := \sum_{j > \mathcal{L}_N} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} |f(dq_j)|, \quad \eta_{2,N} := \sum_{j > \mathcal{L}_N} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)^2.$$

De plus, nous désignons par  $a$  le minimum de la suite  $(a_n)$  et pour tous  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $T \geq 1$  et tout entier  $N \geq 1$  nous définissons le réel  $h_T := \ln(T \ln T) / \ln a$ , ainsi que les deux sommes

$$\varepsilon_N(T) := \sum_{\mathcal{L}_N - h < j < \mathcal{L}_N} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} |f(dq_j)| \quad \text{et} \quad \psi_N(\tau) := 8 \sum_{j \leq \mathcal{L}_N} \sum_{1 \leq d < a_j} \frac{1}{a_j^2} \left\| \frac{\tau f(dq^j)}{2\pi} \right\|^2.$$

Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème.** *Soit  $Q$  un système de numération de Cantor à chiffres bornés et soit  $f$  une fonction  $Q$ -additive réelle telle que les deux séries (0.6) convergent et que l'on ait  $f(dq_j) \neq 0$  pour une infinité de valeurs du couple  $(d, j)$  ( $j \geq 0$ ,  $0 \leq d < q$ ). Pour tout nombre réel  $T \geq 1$  et pour tout entier naturel  $N \geq 1$  vérifiant  $h_T \leq \mathcal{L}_N$ , on a*

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \varepsilon_N(T) + \int_{1/T}^T \min \left( \frac{1}{1 + \tau}, |\eta_{1,N}| + \tau \eta_{2,N} \right) e^{-\psi_N(\tau)} d\tau.$$

*De plus, si la première série de (0.6) est absolument convergente, alors l'expression  $|\eta_{1,N}| + \tau \eta_{2,N}$  peut être remplacée par  $\eta_{1,N}^*$ .*

**Remarque.** Dans les hypothèses du théorème précédent, nous avons la minoration

$$\psi_N(\tau) \geq \frac{2\tau^2}{\pi^2} \sum_{(d,j) \in S_C(\tau), j \leq \mathcal{L}_N} \frac{f(dq_j)^2}{a_j^2}$$

où l'on a posé  $S_C(\tau) := \{(d, j) \in \{1, \dots, a_j - 1\} \times \mathbb{N} : |f(dq_j)| \leq \pi/|\tau|\}$  ( $\tau > 0$ ).

Comme dans le cas  $q$ -adique, nous pouvons simplifier l'estimation du théorème précédent afin qu'elle se réfère plus directement aux séries (0.6). En utilisant les mêmes notations que précédemment, nous introduisons deux nouveaux restes, pour tout entier naturel  $N$  et tout réel  $T$

$$\eta_{1,N}^*(T) := \sum_{j > \mathcal{L}_N - h_T} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} |f(dq_j)| \quad \text{et} \quad \eta_{2,N}(T) := \sum_{j > \mathcal{L}_N - h_T} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)^2.$$

**Corollaire.** Soit  $Q$  un système de numération de Cantor à chiffres bornés et soit  $f$  une fonction  $Q$ -additive réelle telle que les deux séries (0.6) convergent et que l'on ait  $f(dq_j) \neq 0$  pour une infinité de valeurs du couple  $(d, j)$  ( $j \geq 0, 0 \leq d < a_j$ ). Pour tout nombre réel  $T \geq 1$  vérifiant  $h_T \leq \mathcal{L}_N$ , on a

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \varepsilon_N(T) + T |\eta_{1,N}| + T^2 \eta_{2,N},$$

où la constante implicite dépend du maximum de la suite  $(a_n)$ . De plus, si la première série de (0.6) est absolument convergente, alors les trois derniers termes précédents peuvent être remplacés par la quantité  $T \eta_{1,N}^*(T)$ .

En particulier, on obtient

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T |\eta_{1,N}| + T \sqrt{\eta_{2,N}(T) \ln T},$$

où la constante implicite dépend toujours du maximum de la suite  $(a_n)$ .

En désignant par  $A$  ce dernier, nous appliquons ce résultat à la fonction  $Q$ -additive

$$v(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k(n)}{q_{k+1}},$$

qui définit la suite de van der Corput pour un système de numération de Cantor et qui nous apportera la majoration

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{\ln N}{N^{(\ln a)/(3 \ln A)}}.$$

Le **chapitre 4** concerne le système de numération de Zeckendorf, basé sur le théorème de ce dernier, indiquant que chaque entier naturel  $n$  peut s'écrire de manière unique comme une somme de nombres de Fibonacci, donnés par la suite  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ , où il est interdit de prendre deux nombres de Fibonacci adjacents (il est facile de voir que cette dernière condition est nécessaire, car si  $F_N$  et  $F_{N+1}$  apparaissent tous les deux dans une représentation de  $n$  comme une somme de nombres de Fibonacci, où  $N$  est maximal, en prenant  $F_{N+2}$  nous obtenons une autre représentation.) En d'autres termes, chaque entier naturel  $n$  peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$n = \sum_{N \geq 0} e_N(n) F_N,$$

où  $e_N(n) \in \{0, 1\}$ ,  $e_N(n) = 0$  pour tout  $N$  sauf un nombre fini de fois, et si  $e_N(n) = 1$ , alors  $e_{N+1}(n) = 0$ .

Ce système est un cas particulier du système de numération d'Ostrowski, qui est basé sur le développement en fraction continue d'un nombre réel. Le cas de la représentation de Zeckendorf est obtenu en spécifiant le système d'Ostrowski par rapport au nombre d'or  $\varphi$ . Toutefois, nous ne serons pas concernés par le cas général.

Une fonction  $f$  est appelée  $Z$ -additive si

$$f(n) = \sum_{j \geq 2} f(e_j(n)F_j).$$

Nous prouvons un théorème de type Erdős-Wintner dont la preuve diffère de celles des précédents chapitres, puisque la suite de Fibonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (i.e.  $F_{N+2} = F_{N+1} + F_N$  pour tout entier naturel  $N$ , avec  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$ ). Nous utiliserons alors une preuve matricielle (ce théorème généralise un des résultats obtenus dans un article de Barat et Grabner [2]).

Afin d'énoncer notre théorème, nous avons besoin d'introduire quelques quantités : d'abord, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , nous posons la suite  $\eta_n = \eta_n(\tau) := \exp(i\tau f(F_n)) - 1$ . Ensuite, nous définissons la condition suivante, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$

$$(0.7) \quad \exists m_0 = m_0(\tau) \geq 1 : \forall n \geq m_0, |\eta_n(\tau)| \leq 2\varphi - 3.$$

Ainsi, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , nous introduisons l'entier naturel  $n_0(\tau) = n_0$  par

$$(0.8) \quad n_0 := \begin{cases} m_0 & \text{si (0.7) est vraie,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sous la condition (0.8) pour  $|\tau| \leq T$ , pour tout  $T > 0$ , nous définissons la suite  $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_0-1} \in \mathbb{C}, \\ \varepsilon_{n_0} = 0, \\ \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}(\tau) = \frac{\eta_n - (\varphi - 1)\varepsilon_n}{\varphi + \varepsilon_n}, \quad n \geq n_0. \end{cases}$$

Nous posons enfin  $H_L = H_L(\tau) = \sum_{n < F_L} \exp(i\tau f(F_n))$  et nous désignerons par  $\varphi$  (respectivement  $\bar{\varphi}$ ) le nombre d'or (respectivement le nombre d'or conjugué).

**Théorème.** *Soit  $f$  une fonction  $Z$ -additive à valeurs réelles. Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  et pour tout  $L \geq n_0(\tau)$ , nous avons l'identité*

$$\frac{H_L(\tau)}{F_L} = \frac{(H_{n_0} - \bar{\varphi} H_{n_0-1}) \varphi^{L-n_0+1}}{\sqrt{5} F_L} \prod_{\ell=n_0+1}^L \left(1 + \frac{\varepsilon_\ell}{\varphi}\right) + \frac{(\varphi H_{n_0-1} - H_{n_0}) \bar{\varphi}^{L-n_0+1}}{\sqrt{5} F_L} \prod_{\ell=n_0+1}^L \left(1 + \frac{\varepsilon_\ell}{\bar{\varphi}}\right),$$

où  $n_0$  est donné par (0.8).

Ainsi,  $f$  possède une loi limite si, et seulement si, les deux séries suivantes convergent

$$\sum_{n \geq 2} f(F_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 2} f(F_n)^2.$$

Quand les conditions sont réalisées, la fonction caractéristique de la loi limite est donnée par le produit convergent

$$\Phi(\tau) = \frac{H_{n_0}(\tau) - \bar{\varphi} H_{n_0-1}}{\varphi^{n_0-1}} \prod_{\ell=n_0+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon_\ell(\tau)}{\varphi}\right) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Une caractérisation de la nature discrète de la loi limite est donnée par le théorème suivant (cf. [2, Proposition 11]).

**Proposition.** *Dans le théorème précédent, la loi limite est discrète si, et seulement si,  $f(F_j) = 0$  pour tout  $j$  assez grand.*

Contrairement aux deux précédents systèmes de numération, le cas d'une loi limite discrète n'implique plus une périodicité pour  $f$ . En outre, il n'existe pas de résultat prouvant que la loi limite est nécessairement pure, donc nous avons uniquement prouvée une version effective du théorème précédent dans le cas d'une loi limite continue et sous des hypothèses plus générales que les théorèmes effectifs précédents.

Pour tout entier  $N \geq 1$  et tout réel  $T \geq 1$ , nous définissons les nombres  $\mathcal{L}_N := \ln N / \ln \varphi$  et  $h_T := \ln(T \ln T \ln N) / \ln \varphi$  ainsi que les quantités

$$\lambda_N(T) := \sum_{\mathcal{L}_N - 2h < j \leq \mathcal{L}_N} |f(F_j)| \quad \text{et} \quad \vartheta_N(T) := \sum_{j \geq \mathcal{L}_N - h_T} |f(F_j)|.$$

Enfin, pour toute fonction  $Z$ -additive  $f$  et tout réel  $\tau > 0$ , nous introduisons l'ensemble

$$\tilde{S}(\tau) := \{j \geq 2 : |f(F_j)| \leq \pi/|\tau|\},$$

ainsi que la somme

$$\psi_{N,T}(\tau) := \tau^2 \sum_{j \in \tilde{S}(\tau), j < \mathcal{L}_N - h_T} f(F_j)^2.$$

Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème.** *Soit  $f$  une fonction  $Z$ -additive réelle telle que la série*

$$\sum_{j \geq 2} |f(F_j)|$$

*converge et admettant une loi limite continue. Pour tout nombre réel  $T \geq 1$  et tout entier  $N \geq 1$  tels que  $h_T \leq \mathcal{L}_N/2$ , on a*

$$\|F_N - F\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \lambda_N(T) + \int_{1/T}^T \min \left( \frac{1}{1+\tau}, \vartheta_N(T) \right) \exp(-c_2 \psi_{N,T}(\tau)) \, d\tau,$$

où  $c_2 > 0$  est une constante absolue.

**Remarque.** *Il est possible de changer la valeur de  $h$  et de le rendre égal à  $\ln_\varphi(T \ln T)$ , mais en contre partie le terme d'erreur supplémentaire  $(\ln N)/T$  apparaîtrait.*

Comme dans les cas précédents, nous pouvons obtenir une majoration un peu plus simple et qui renvoie explicitement à la convergence de la série  $\sum |f(F_j)|$ .

**Corollaire.** *Soit  $f$  une fonction  $Z$ -additive réelle telle que la série*

$$\sum_{j \geq 2} |f(F_j)|$$

*converge et admettant une loi limite continue. Pour tout nombre réel  $T \geq 1$  vérifiant  $h_T \leq \mathcal{L}_N/2$ , on a*

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \sum_{j > \mathcal{L}_N - 2h} |f(F_j)|$$

Nous terminons alors par l'application de cette version effective à la fonction  $Z$ -additive définie par  $f(F_j) = j^{-\alpha}$  pour  $j \geq 2$  et pour un réel  $\alpha > 1$ , qui nous donne

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \begin{cases} \frac{1}{(\ln N)^{\alpha-1}} & \text{si } 1 < \alpha < 2, \\ \frac{\sqrt{\ln_2 N}}{(\ln N)^{\alpha/2}} & \text{si } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

ainsi qu'une discussion à propos de problèmes ouverts liés aux théorèmes d'Erdős-Wintner dans des systèmes de numération plus généraux.

## 0.2 Introduction in English

The two central concepts used in this work are, on the one hand, the representation of a natural integer in numeration systems and on the other hand the associated additive and multiplicative functions. A concept very close to numeration system is the decomposition of any natural integer into prime factors, which consists in seeking to write a natural integer  $n \geq 2$  as a product of prime numbers, a result called the fundamental theorem of arithmetic or Euclid's first theorem.

It is then interesting to know classes of *arithmetic functions*, that is functions defined on  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$  with complex values, respecting the multiplicative structure of  $\mathbb{N}$ , in the sense that the image of a natural integer is the sum (respectively the product) of the images of the powers of the first numbers involved in its canonical decomposition : these are the additive (respectively multiplicative) functions.

More generally, such functions can be defined on so-called numeration systems, each of which can be seen as an injective application associating to any element of a set the sequence of its numbers. Thus the decimal system, which is a numeration system using the 10 base and omnipresent in everyday life and is in reality an injection, which has a natural integer that provides the sequence of its digits belonging to the set  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ .

In order to define the notion of limit law for an arithmetic function and thus be able to state Erdős-Wintner's theorem, we need to introduce the notion of distribution function as well as some results related to it.

The term *distribution function* refers to a non-decreasing function  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ , which is right-continuous and satisfies

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} F(z) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z) = 1.$$

We can introduce three central classes of such functions :

- a distribution function is said to be *purely discrete* or *atomic* if it increases exclusively by jumps and is constant on any closed interval containing no discontinuity points ;
- a distribution function  $F$  is *absolutely continuous* if there is a non-negative function  $h$  that can be integrated in the Lebesgue sense such that

$$\int_{\mathbb{R}} h(t) dt = 1 \quad \text{and} \quad F(z) = \int_{-\infty}^z h(t) dt \quad (z \in \mathbb{R});$$

- $F$  is *purely singular* if it's continuous and if we have the relation

$$\int_{\mathcal{N}} dF_1(z) = 1,$$



where  $\mathcal{N}$  is a subset of  $\mathbb{R}$  with zero Lebesgue measure.

By denoting  $\mathcal{C}(F)$  the set of continuity points of  $F$ , a sequence  $(F_n)_{n \geq 1}$  of distribution functions converges weakly towards a  $F$  function if we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = F(z) \quad (z \in \mathcal{C}(F)).$$

Let us now consider a real arithmetic function  $f$ . For each  $N \geq 1$  the function

$$(0.9) \quad F_N(z) := \nu_N(\{n : f(n) \leq z\}) = \frac{1}{N} |\{n \leq N : f(n) \leq z\}|$$

is an atomic distribution function.

**Definition.** A real arithmetic function  $f$  is said to have a (limiting) distribution function  $F$  (or : is said to have a limit law with distribution function  $F$ ) if the sequence  $(F_N)_N$  defined by (0.9) converges weakly to  $F$  and if  $F$  is indeed a distribution function.

Erdős-Wintner's theorem gives a necessary and sufficient condition to the fact that an additive real function has a limit law. We have not yet defined the notion of additivity for an arithmetic function, but this notion varies slightly according to the "classic case" with primes or other numeration systems.

In each chapter of this thesis, we place ourselves in a particular number system, we take a real function with an additive property, which has a limit law thanks to the "Erdős-Wintner" type theorem. We then state an effective version of this result depending on whether the limit law is purely discrete or continuous, i.e. we explain the error term associated with the convergence of the  $(F_N)_N$  sequence to the  $F$  limit distribution function.

To do this, we will need several analytical tools, some of which appear in Erdős-Wintner's theorem demonstrations, such as Lévy's continuity theorem. In order to state Lévy's theorem, we recall the definition of a characteristic function of a distribution function  $F$  : it's the Fourier transform of the Stieltjes measure  $dF(z)$ , i.e.

$$\varphi(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} dF(z) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

It is a uniformly continuous function on the real line, satisfying

$$|\varphi(\tau)| \leq 1 = \varphi(0) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

The famous continuity theorem of Paul Levy connects weak convergence of distribution functions to pointwise convergence of characteristic functions.

**Theorem 0.1** (Continuity theorem, Levy, 1925). *Let  $(F_n)_{n \geq 1}$  be a sequence of distribution functions and  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  the sequence of their characteristic functions. Then  $F_n$  converges weakly to a distribution function  $F$  if, and only if,  $\varphi_n$  converges pointwise on  $\mathbb{R}$  to a function  $\varphi$  which is continuous at 0. Furthermore, in this case,  $\varphi$  is the characteristic function of  $F$  and the convergence of  $\varphi_n$  to  $\varphi$  is uniform on any compact subset.*

This classical result is established in detail in most books on probability theory (see for example [10]). In our case, by taking the suite of distribution functions defined by (0.9), we have

$$\Phi_N(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} dF_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} d\delta_{f(n)}(z) = \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} e^{i\tau f(n)} \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

where  $\delta_a$  is the Dirac measure at point  $a$ . This gives us the following criterion.

**Theorem.** *Let  $f$  be a real arithmetic function. Then  $f$  has a distribution function  $F$  if, and only if, the sequence of functions  $\Phi_N(\tau)$  converges pointwise on  $\mathbb{R}$  to a function  $\Phi$  which is continuous at 0. In this case,  $\Phi$  is the characteristic function of  $F$ .*

When  $f$  is an additive function, the function  $n \mapsto e^{i\tau f(n)}$  is, for each real number  $\tau$ , a multiplicative function of modulus 1 for all real  $\tau$ . The problem of the existence of a limit law for  $f$  is therefore equivalent to that of the existence of the mean value of a multiplicative function  $g$  with values in the unit disk, that is, the existence of the limit of  $\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} g(n)$ . We will show how obtaining an effective error term in the estimation of the mean value of such a multiplicative function allows an estimation of the speed of convergence to the limit law.

Finally, it should be noted that, in the classic case [11] (respectively in the  $q$ -additive case [12]), Delange has provided new evidence (respectively proved) the Erdős-Wintner theorem.

To demonstrate the different effective versions when the limit law is continuous, we use two tools : the concentration function and Berry-Esseen inequality.

The concentration function  $Q_F$  of a distribution function  $F$  is defined as  $\mathbb{R}^+$  by the formula

$$Q_F(h) := \sup_{z \in \mathbb{R}} \{F(z+h) - F(z)\} \quad (h > 0).$$

We can notice that  $F$  is continuous if, and only if,  $Q_F(l) \rightarrow 0$  when  $l \rightarrow 0^+$ , so that the concentration function can be considered as a measure of the distance of  $F$  to all continuous distribution functions. This notion appears in Berry-Esseen's statement of inequality (*cf.* for example [17], lemma 1.47).

**Theorem** (Berry-Esseen). *Let us say  $F$  and  $G$  two functions for distributing characteristic functions,  $\varphi$  and  $\psi$  respectively. So we have, for any  $T > 0$*

$$\|F - G\|_\infty \ll Q_F\left(\frac{1}{T}\right) + \int_{-T}^T \left| \frac{\varphi(\tau) - \psi(\tau)}{\tau} \right| d\tau.$$

Berry-Esseen's inequality then makes it possible to obtain a quantitative upper bound of the approximation of  $F$  per  $F_N$  under the conditions that  $F$  is continuous and the integral converges.

In **chapter 1**, we are thus interested in the classical case of the theorem, i.e. the decomposition into powers of prime numbers and in this case, an arithmetic function  $f$  is *additive* if we have, for any natural integer  $m$  and  $n$  coprime

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

We can thus write

$$f\left(\prod_{p^\nu \parallel n} p^\nu\right) = \sum_{p^\nu \parallel n} f(p^\nu),$$

where the letter  $p$  stands for a prime number throughout this thesis and the notation  $p^\nu \parallel n$  means only  $p^\nu \mid n$  and  $p^{\nu+1} \nmid n$ . We therefore notice that an additive function is entirely defined by its values on all the powers of the prime numbers : Erdős-Wintner's theorem is then stated as follows.

**Theorem** (Erdős-Wintner, 1939). *Let  $f$  be a real additive function.  $f$  has a limiting distribution law if, and only if, the following three series converge for at least one value of the positive real number  $R$*

$$\sum_{|f(p)| > R} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq R} \frac{f(p)}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq R} \frac{f(p)^2}{p}.$$

When the conditions are met, the characteristic function is given by the converging product

$$\varphi(\tau) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{e^{i\tau f(p^\nu)}}{p^\nu} \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

The limit law is necessarily pure, i.e. the limit distribution function  $F$  is either atomic, continuous, purely singular or absolutely continuous. It is continuous if, and only if,

$$\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p} = \infty.$$

One proof of this theorem is based on work by Delange on the average value of the *multiplicative functions* with values in the unit disk. We say that an arithmetic function (defined as  $\mathbb{N}^*$ )  $g$  is *multiplicative* if  $g(1) = 1$  and if for any natural integer  $m$  and  $n$  first among them

$$g(mn) = g(m)g(n).$$

We then prove two effective versions of Erdős-Wintner's theorem depending on whether the limit law of the additive function  $f$  is discrete or continuous : let us first assume that it's discrete. The proven result provides us not only an explicit expression of the limit distribution function but also an effective version. To do this, we have to introduce many quantities : let's put  $\mathcal{P} := \{p^\nu : f(p^\nu) \neq 0\}$  and define a multiplicative function  $u$  by

$$u(p^\nu) = \begin{cases} 1 & \text{if } p^\nu \in \mathcal{P}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

as well as the following function

$$w_p := \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 1} \frac{u(p^\nu)}{p^\nu}.$$

In addition, let us pose

$$S(t) := \sum_{p > t, f(p) \neq 0} \frac{1}{p} \quad \text{and} \quad \psi(y) := \frac{1}{\ln y} \int_1^y \frac{S(t)}{t} dt.$$

**Theorem.** *Let  $f$  be an additive function with a discrete limit law. We then have*

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{R}, F(z) = \prod_p (1 - w_p) \sum_{f(m) \leq z} \frac{u(m)}{m} \prod_{p|m} \left(\frac{1 - 1/p}{1 - w_p}\right);$$

$$(ii) \quad F_x(z) = F(z) + O(R_x),$$

uniformly for all  $z \in \mathbb{R}$  and  $x \geq 1$ , where

$$R_x := S\left(x^{1/\ln 2} x\right) + \psi(\sqrt{x})^{1/4} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}},$$

the implicit constants can depend on  $f$ .

We then apply this estimation to the following example. By putting  $(a_n)_n$  and  $(b_n)_n$  two positive real sequences such that  $a_n + 1 \leq b_n \leq a_{n+1}$  for any integer  $n$ , we introduce the set

$$J := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} ]a_n; b_n].$$

and the additive function

$$(0.10) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) := \sum_{p \in J, p|n} 1.$$

We show that this function  $f$  checks both the hypotheses of the Erdős-Wintner theorem and has an atomic limit law if, and only if,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left( \frac{\ln b_n}{\ln a_n} \right) < \infty.$$

A first example is provided by the choice  $a_n = 2^n$  and  $b_n = 2^n (1 + (\ln n)^{-c})$  for  $n \geq 2$  where  $c > 1$  is a parameter. We then get the following estimation

$$R_x \asymp \frac{1}{(\ln_2 x)^{(c-1)/4}}.$$

We also consider a second example, given by  $a_n = 2^n$ ,  $b_n = 2^n (1 + n^{-c})$  for  $n \geq 2$ , where at present  $c > 0$ , which gives us the estimation

$$R_x \asymp \frac{1}{(\ln x)^\beta}$$

where  $\beta := \min(c/4, 1/6)$ .

Now suppose that the  $f$  limit law is continuous. Let's put

$$B_f(R)^2 := 2 + \sum_{p^\nu \leq R} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} \quad (R \geq 2) \quad \text{and} \quad Q_F(h) := \sup_{z \in \mathbb{R}} \{F(z+h) - F(z)\} \quad (h > 0)$$

and, for any  $x \geq 3$ , we designate by  $\varepsilon = \varepsilon_x$  any function checking  $1/\sqrt{\ln x} \leq \varepsilon_x = o(1)$ .

**Theorem.** For a suitable absolute constant  $c$  and all real numbers  $R, T$  such that  $3 \leq R \leq x, T \geq 1$  and

$$\begin{cases} 2 \ln_2 R + \frac{1}{2} T^2 \eta(R) + c \leq \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon_x} \right), \\ T^2 \eta(x^{\varepsilon_x}) \ll \varepsilon_x^{1/3}, \end{cases}$$

we have

$$\|F_x - F\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + \varepsilon_x^{1/6} \ln \left( \frac{T B_f(R)}{\varepsilon_x} \right) + \eta(R).$$

We then apply this result to two examples of functions and discuss the relevance of the results obtained : first, to the additive function  $f$  defined by

$$f(p^\nu) = \frac{1}{(\ln p)^\alpha} \quad (\alpha > 1),$$

which then provides the increase

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{(\ln x)^{1/32}},$$

then we consider the function

$$f(p) = \frac{1}{p^\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

which thus gives us the estimate

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{(\ln x)^{1/24}}.$$

The  $q$ -adic number system, where  $q \geq 2$  is an integer, is the subject of **chapter 2** : any natural integer  $n$  can be written uniquely in the form

$$n = \sum_{i \geq 0} e_i q^i$$

where  $e_i \in \{0, \dots, q-1\}$  and  $e_i = 0$  for all  $i$  except a finite number of exceptions. In this case, we say that an arithmetic function defined on  $\mathbb{N}$  (instead of  $\mathbb{N}^*$  like the first case) with complex values is  $q$ -additive if, for any integer  $n \in \mathbb{N}$ , for any  $k \in \mathbb{N}$  and for any  $0 \leq \ell < q^k$ , it checks

$$f(q^k n + \ell) = f(q^k n) + f(\ell).$$

It then follows by induction, for any  $K \in \mathbb{N}$

$$f\left(\sum_{0 \leq k \leq K} \delta_k q^k\right) = \sum_{0 \leq k \leq K} f(\delta_k q^k),$$

which shows, in this case, that any  $q$ -additive function is entirely determined by the values  $f(aq^k)$ ,  $a \in \{1, \dots, q-1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  and  $f(0) = 0$ .

Stated by Delange [12], the  $q$ -adic version of Erdős-Wintner theorem is the subject of the following result.

**Theorem.** *A  $q$ -additive function  $f$  has a limit law if, and only if, the series*

$$(0.11) \quad \sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j) \quad \text{and} \quad \sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)^2$$

*converge. In this case, the characteristic function of the limit law is given by the convergent product*

$$\varphi(\tau) = \prod_{j \geq 0} \frac{1}{q} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < q} \exp(i\tau f(dq^j)) \right) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

The question of the nature of the limit law is solved by the following theorem (the proof will look like that of Proposition 3 of [3], using results from [28] and [36]).

**Proposition.** *In the previous theorem, the limit law is pure. Moreover, it is purely discret if, and only if, there is  $J$  such that  $f(dq^j) = 0$  for any  $j \geq J$ .*

When the limit law is atomic,  $f$  is  $q^J$ -periodic and we easily have the (optimal) upper bound

$$\|F_N - F\|_\infty \ll \frac{1}{N}.$$

In order to state our result in the case where the law is continuous, let's introduce some notations. We put  $L_N := \ln N / \ln q$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) and

$$\varepsilon_{1,N} := \sum_{j > L_N} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j), \quad \varepsilon_{1,N}^* := \sum_{j > L_N} \sum_{1 \leq d < q} |f(dq^j)|, \quad \varepsilon_{2,N} := \sum_{j > L_N} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)^2.$$

For any  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $T \geq 1$ , let's denote  $h_T := \ln(T \ln T) / \ln q$  and

$$\eta_N(T) := \sum_{L_N - h < j \leq L_N} \sum_{1 \leq d < q} |f(dq^j)|, \quad \psi_N(\tau) := \frac{8}{q^2} \sum_{j \leq L_N} \sum_{1 \leq d < q} \left\| \frac{\tau f(dq^j)}{2\pi} \right\|^2,$$

where  $\|\cdot\|$  is the distance to the nearest integer. We then have the following result.

**Theorem.** *Let  $f$  be a real-valued  $q$ -additive function such that the two series (0.11) converge and such that  $f(dq^j) \neq 0$  for infinitely many instances. For all real  $T \geq 1$  and for all integer  $N \geq 1$  such that  $h_T \leq L_N$ , we then have*

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \eta_N(T) + \int_{1/T}^T \min \left( \frac{1}{1 + \tau}, |\varepsilon_{1,N}| + \tau \varepsilon_{2,N} \right) e^{-\psi_N(\tau)} d\tau,$$

where the implicit constant depending on  $q$ .

Moreover, if the first series of (0.11) is absolutely convergent, then the expression  $|\varepsilon_{1,N}| + \tau \varepsilon_{2,N}$  can be replaced by  $\varepsilon_{1,N}^*$ .

**Remark.** *In the hypotheses of the previous theorem, we trivially have*

$$\psi_N(\tau) \geq \frac{2\tau^2}{\pi^2 q^2} \sum_{(d,j) \in S(\tau), j \leq L_N} f(dq^j)^2$$

where we have put  $S(\tau) := \{(d, j) \in \{1, \dots, q-1\} \times \mathbb{N} : |f(dq^j)| \leq \pi/|\tau|\}$  ( $\tau > 0$ ). This estimation is easier to handle, but insufficient in some cases, like that of the 2-additive function  $f(2^j) = \gamma^j$  where  $0 < \gamma < 1$ .

We can also simplify this upper bound so that it refers more explicitly to the series (0.5). By using the same notations as previously, we introduce two new remainders, for any natural integer  $N$  and any real  $T$

$$\varepsilon_{1,N}^*(T) := \sum_{j > L_N - h_T} \sum_{1 \leq d < q} |f(dq^j)| \quad \text{and} \quad \varepsilon_{2,N}(T) := \sum_{j > L_N - h_T} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)^2.$$

**Corollary.** *Let  $f$  be a real  $q$ -additive function such that the two series (0.11) converge and that  $f(dq^j) \neq 0$  for infinitely many instances. For all real numbers  $T \geq 1$  such that  $h_T \leq L_N$ , we have*

$$(0.12) \quad \|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \eta_N(T) + T |\varepsilon_{1,N}| + T^2 \varepsilon_{2,N},$$

where the implicit constant depends on  $q$ . Moreover, if the first series of (0.11) is absolutely convergent, then the three last terms can be replaced by  $T \varepsilon_{1,N}^*(T)$ .

In particular,

$$(0.13) \quad \|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T |\varepsilon_{1,N}| + T \sqrt{\varepsilon_{2,N}(T) \ln T},$$

where the implicit constant still depends on  $q$ .

We will apply this result to different examples : if the decrease of the function  $f$  is very fast, as it is for example the case for the van der Corput sequence  $(f(n))_n$ , a  $q$ -additive function defined by  $f(dq^j) = dq^{-j-1}$ , we obtain the estimation

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{\ln N}{N^{1/3}},$$

whereas the exact order is  $(\ln, N)/N$ .

Moreover, when the function  $f$  does not decrease too quickly to 0, for example the  $q$ -additive function defined by  $f(d) = 0$  and  $f(dq^j) := j^{-\alpha}$  ( $\alpha > 1$ ) for any  $j \geq 1$  and  $d \in \{1, \dots, q-1\}$ , we then get the estimation

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \begin{cases} \frac{1}{(\ln N)^{\alpha-1}} & \text{if } 1 < \alpha < 2, \\ \frac{\sqrt{\ln_2 N}}{(\ln N)^{\alpha/2}} & \text{if } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

Finally, we will generalize the first example for  $q = 2$  by applying our effective version to the 2-additive function defined by  $f(2^j) := \gamma^j$ , where  $0 < \gamma < 1$ . We then get the following result.

**Theorem.** *There is a constant  $c(\gamma) > 0$  such that*

$$\|F - F_N\| \ll_\gamma N^{-c(\gamma)} (\ln N)^{\ln(1/\gamma)/\ln 2}.$$

An admissible value is

$$c(\gamma) = \frac{\ln(1/\gamma) \ln(2)}{\ln(4/\gamma) \ln(2/\gamma) + \ln(2)^2}.$$

Furthermore, if  $Q_F(t) \ll t$  ( $t > 0$ ) (for example if  $F$  has a bounded density), we can choose

$$c(\gamma) = \frac{\ln(1/\gamma)}{\ln(4/\gamma)}.$$

We can apply this result to  $\gamma = 1/2$  in order to find the van der Corput sequence (with a index shift) in the case  $q = 2$ , studied in the first example. Its limit law is the uniform law on  $[0, 1]$  (cf. [34, Theorem 3.5]), so it has a bounded density, and applying the result of the previous theorem, we find the same estimation as in the first example.

More generally, let us designate by  $\nu_\gamma$  the distribution of the random series  $\sum \pm \gamma^n$ , where the signs are chosen independently with probability  $1/2$  and which is closely related to the limit law of the 2-additive function defined by  $f(2^j) = \gamma^j$  as previously. As written in [39], Garsia [21] found the largest explicitly set of  $\gamma \in ]1/2, 1[$  known to date, for which  $\nu_\gamma$  is absolutely continuous and has a bounded density. The elements of this set are the reciprocals of algebraic numbers in  $]1, 2[$  whose minimal polynomial is monic, has the constant coefficient equal to  $\pm 2$  and whose other roots are outside the unit circle.

In **chapter 3**, we will generalize the properties obtained by Delange [12] in order to prove once again the "Erdős-Wintner" type theorem in a Cantor numbering system *almost constant* (in English, we say that the system is *constant-like*), this result having been proven by Barat and Grabner [3] from an ergodic point of view, thus bypassing the use of Lévy's theorem.

Let's say  $(a_j)_{j \geq 0}$  a sequence of natural numbers where  $a_j \geq 2$  : we define a *Cantor number system*  $Q = (q_j)_{j \geq 0}$  by  $q_0 = 1$  and, for any  $j \in \mathbb{N}$ ,  $q_{j+1} = a_j q_j$ , hence  $q_j = a_{j-1} \dots a_1 a_0$  (this formula being still

true for  $n = 0$  with the standard convention that an empty product is equal to 1). All natural integers then have a unique decomposition under the form

$$n = \sum_{j \geq 0} e_j(n) q_j, \quad (0 \leq e_j(n) < a_j).$$

In particular, if  $a_n \equiv q$  is constant, we find the case treated in the second chapter.

We then define, in the same way as for the  $q$ -additive  $f$  functions (respectively  $q$ -multiplicative  $g$ ) in the second chapter, the notion of  $Q$ -additive functions (respectively  $Q$ -multiplicative) by, for any natural integer  $n$ ,

$$f(0) = 0 \text{ and } f(n) = \sum_{j \geq 0} f(e_j(n)q_j) \quad \left( \text{respectively } g(0) = 1 \text{ and } g(n) = \prod_{j \geq 0} g(e_j(n)q_j) \right).$$

First, we will study some properties of the  $Q$ -additive functions in the spirit of Delange's article [12]. Then, we will define that a Cantor numeration system is said to be *constant-like* if the sequence  $(a_j)_{j \geq 0}$  is bounded. In this case we give an elementary proof of the "Erdős-Wintner" type theorem using the same ideas as Delange for the  $q$ -adic case, i.e. using the properties proven in the first section of this chapter as well as the Lévy theorem.

**Theorem.** *Let  $f$  be a  $Q$ -additive function with respect to a constant-like Cantor numeration system. Then  $f$  has a distribution function  $F$  if and only if the two following series converge*

$$(0.14) \quad \sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j) \quad \text{and} \quad \sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)^2$$

When the conditions are met, the characteristic function is given by the convergent product

$$\Phi(\tau) = \prod_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} \exp(i\tau f(dq_j)) \right) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

On the other hand, we will prove an effective version of this result according to the nature of the limiting law as in the second chapter. Indeed, we have the following result (cf. [3, Proposition 3]).

**Proposition.** *When it exists, the limit distribution  $dF$  of the  $Q$ -additive function  $f$  is necessarily pure.*

*Moreover, if  $Q$  is constant-like, then  $dF$  is atomic if and only if there exists a natural integer  $J$  such that  $f(dq_j) = 0$  for all  $d \in \{0, \dots, a_j - 1\}$  and for  $j \geq J$ .*

When the limit law is atomic, we will show that  $f$  is  $q_J$ -périodic and that we have the (optimal) upper bound

$$\|F_N - F\|_\infty \ll \frac{1}{N}.$$

In the case where the law is continuous, let us introduce again some notations, let note  $\mathcal{L}_N$  be the length of the representation of  $N$  defined by

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N := \max\{j \geq 0 : e_j(N) \neq 0\}$$

(with  $\mathcal{L}_0 := 0$ ), which is the unique natural integer such that

$$q_{\mathcal{L}} \leq N < q_{\mathcal{L}+1}.$$



We also introduce

$$\eta_{1,N} := \sum_{j>\mathcal{L}_N} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j), \quad \eta_{1,N}^* := \sum_{j>\mathcal{L}_N} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} |f(dq_j)|, \quad \eta_{2,N} := \sum_{j>\mathcal{L}_N} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)^2.$$

Moreover, let denote by  $a$  the minimum of the sequence  $(a_n)$  and for all  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $T \geq 1$  and all integer  $N \geq 1$  we define the real number  $h_T := \ln(T \ln T) / \ln a$  and the two sums

$$\varepsilon_N(T) := \sum_{\mathcal{L}_N - h < j \leq \mathcal{L}_N} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} |f(dq_j)| \quad \text{and} \quad \psi_N(\tau) := 8 \sum_{j \leq \mathcal{L}_N} \sum_{1 \leq d < a_j} \frac{1}{a_j^2} \left\| \frac{\tau f(dq_j)}{2\pi} \right\|^2.$$

We then have the following result.

**Theorem.** *Let  $f$  be a real-valued  $Q$ -additive function with respect to a constant-like Cantor numeration system such that the two series (0.14) converge and  $f(dq^j) \neq 0$  for infinitely many instances. For any real number  $T \geq 1$  and any integer  $N \geq 1$  such that  $h_T \leq \mathcal{L}_N$ , we have*

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \varepsilon_N(T) + \int_{1/T}^T \min \left( \frac{1}{1+\tau}, |\eta_{1,N}| + \tau \eta_{2,N} \right) e^{-\psi_N(\tau)} d\tau.$$

where the implicit constants depend on the maximum of the sequence  $(a_n)_n$ .

Moreover, if the series (0.14) is absolutely convergent, then the expression  $|\eta_{1,N}| + \tau \eta_{2,N}$  can be replaced by  $\eta_{1,N}^*$ .

**Remark.** *In the hypotheses of the previous theorem, we have*

$$\psi_N(\tau) \geq \frac{2\tau^2}{\pi^2} \sum_{(d,j) \in S_C(\tau), j \leq \mathcal{L}_N} \frac{f(dq_j)^2}{a_j^2}$$

where we have put  $S_C(\tau) := \{(d, j) \in \{1, \dots, a_j - 1\} \times \mathbb{N} : |f(dq_j)| \leq \pi/|\tau|\} (\tau > 0)$ .

As in the case of  $q$ -adic, we can simplify this estimation so that it refers more directly to the series (0.14). By using the same notations as previously, we then introduce two new remainders, for any natural integer  $N$  and any real number  $T$

$$\eta_{1,N}^*(T) := \sum_{j>\mathcal{L}_N - h_T} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} |f(dq_j)| \quad \text{and} \quad \eta_{2,N}(T) := \sum_{j>\mathcal{L}_N - h_T} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)^2.$$

**Corollary.** *Let  $Q$  be a constant-like Cantor numeration system and  $f$  a real  $Q$ -additive function such that the two series (0.14) converge and that  $f(dq^j) \neq 0$  for infinitely many instances. For all real numbers  $T \geq 1$  such that  $h_T \leq \mathcal{L}_N$ , we have*

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \varepsilon_N(T) + T |\eta_{1,N}| + T^2 \eta_{2,N},$$

where the implicit constant depends on the maximum of the sequence  $(a_n)$ . Moreover, if the first series of (0.14) is absolutely convergent, then the three last terms can be replaced by  $T \eta_{1,N}^*(T)$ .

In particular, we obtain

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T |\eta_{1,N}| + T \sqrt{\eta_{2,N}(T) \ln T},$$

where the implicit constant still depends on the maximum of  $(a_n)$ .

By defining by  $A$  the maximum of the sequence  $(a_n)$ , we will apply this result to the function  $Q$ -additive

$$v(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k(n)}{q_{k+1}},$$

which defines van der Corput's sequence for a numeration system of Cantor and which will bring us the non-optimal upper bound

$$\|F - F_N\|_{\infty} \ll \frac{\ln N}{N^{\ln a/(3 \ln A)}}$$

instead of the estimation  $(\ln N)/N$ .

**Chapter 4** concerns the Zeckendorf numbering system, based on the Lekkerkerker-Zeckendorf theorem, indicating that each natural number  $n$  can be written uniquely as a sum of Fibonacci numbers, subsequently given  $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ , where it is forbidden to take two adjacent Fibonacci numbers (it is easy to see that the latter condition is necessary, because if  $F_N$  and  $F_{N+1}$  both appear in a  $n$  representation as a sum of Fibonacci numbers, where  $N$  is maximum, taking  $F_{N+2}$  gives another representation.) In other words, each natural number  $n$  can be written uniquely in the form of

$$n = \sum_{j \geq 2} e_j(n) F_j,$$

where  $e_j(n) \in \{0, 1\}$ ,  $e_j(n) = 0$  for any  $j$  except a finite number of times, and if  $e_j(n) = 1$ , then  $e_{j+1}(n) = 0$ .

This system is a special case of the Ostrowski numbering system, which is based on the continuous fraction development of a real number. The case of the representation of Zeckendorf is obtained by specifying the Ostrowski system in relation to the golden number  $\varphi$ . However, we will not be concerned by the general case.

A function  $f$  is called  $Z$ -additive if

$$f(n) = \sum_{j \geq 2} f(e_j(n) F_j).$$

We prove a "Erdős-Wintner" type theorem whose proof defers from those of the previous chapters, since the Fibonacci sequence is a linear recurrence sequence of order two, i.e.  $F_{N+2} = F_{N+1} + F_N$  for any natural integer  $N$ , with  $F_0 = 0$  and  $F_1 = 1$ . We'll use a matrix proof (this theorem generalizes one of the results obtained in a Barat and Grabner's article [2]).

In order to state our theorem, we need to introduce some quantities : first, for every  $\tau \in \mathbb{R}$  and  $n \in \mathbb{N}$ , let's put the sequence  $\eta_n = \eta_n(\tau) := g_{\tau}(F_n) - 1$ . Then, let's define the following condition, for all  $\tau \in \mathbb{R}$

$$(0.15) \quad \exists m_0 = m_0(\tau) \geq 0, : \forall n \geq m_0, |\eta_n(\tau)| \leq 2\varphi - 3.$$

Thus, for all  $\tau \in \mathbb{R}$ , we introduce the natural integer  $n_0(\tau) = n_0 \geq 0$  by

$$(0.16) \quad n_0 := \begin{cases} m_0 & \text{if (0.15) is true,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Under the condition (0.16) for  $|\tau| \leq T$ , for all  $T > 0$ , we define the sequence  $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  by

$$\begin{cases} \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_0-1} \in \mathbb{C}, \\ |\varepsilon_{n_0}| \leq \varphi - 1, \\ \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}(\tau) = \frac{\eta_n - (\varphi - 1)\varepsilon_n}{\varphi + \varepsilon_n}, \quad n \geq n_0. \end{cases}$$

Finally, we put  $H_L = H_L(\tau) = \sum_{n < F_L} \exp(i\tau f(F_n))$  and  $\varphi$  (respectively  $\bar{\varphi}$ ) the golden ratio (respectively the golden ratio conjugate).

**Theorem.** *Let  $f$  be a  $Z$ -additive function. For every  $\tau \in \mathbb{R}$  and for every  $L \geq n_0(\tau) + 1$ , we have the identity*

$$\frac{H_L(\tau)}{F_L} = \frac{(H_{n_0} - \bar{\varphi} H_{n_0-1}) \varphi^{L-n_0+1}}{\sqrt{5} F_L} \prod_{\ell=n_0+1}^L \left(1 + \frac{\varepsilon_\ell}{\varphi}\right) + \frac{(\varphi H_{n_0-1} - H_{n_0}) \bar{\varphi}^{L-n_0+1}}{\sqrt{5} F_L} \prod_{\ell=n_0+1}^L \left(1 + \frac{\varepsilon_\ell}{\bar{\varphi}}\right),$$

where  $n_0(\tau)$  is given by (0.16).

Thus,  $f$  has a limit law if, and only if, the following two series

$$\sum_{n \geq 2} f(F_n) \quad \text{and} \quad \sum_{n \geq 2} f(F_n)^2$$

converge. In this case, for  $|\tau| \leq T$  and for any  $T > 0$ , the limit characteristic function is given by the convergent product

$$\Phi(\tau) = \frac{H_{n_0}(\tau) - \bar{\varphi} H_{n_0-1}}{\varphi^{n_0-1}} \prod_{\ell=n_0+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon_\ell(\tau)}{\varphi}\right) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

A characterization of the atomic nature of the limit law is given by the following theorem (cf. [2, Proposition 11]).

**Theorem.** *In the previous theorem, the limit law is atomic, if, and only if,  $f(dq^j) = 0$  ( $1 \leq d < q$ ) for all  $j$  enough big.*

However, there is no result proving that the limit law is necessarily pure, so we have only studied continuous case under more general assumptions than in the previous chapters.

For any integer  $N \geq 1$ ,  $T \geq 1$ , we define  $\mathcal{L}_N := \ln N / \ln \varphi$  and  $h_T := \ln(T \ln T \ln N) / \ln \varphi$  and the quantities

$$\lambda_N(T) := \sum_{\mathcal{L}_N - 2h < j \leq \mathcal{L}_N} |f(F_j)| \quad \text{and} \quad \vartheta_N(T) := \sum_{j \geq \mathcal{L}_N - h_T} |f(F_j)|.$$

Finally, for any  $Z$ -additive function  $f$  et for all real number  $\tau > 0$ , we introduce the set

$$\tilde{S}(\tau) := \{j \geq 2 : |f(F_j)| \leq \pi/|\tau|\},$$

and the sum

$$\psi_{N,T}(\tau) := \tau^2 \sum_{j \in \tilde{S}(\tau), j < \mathcal{L}_N - h_T} f(F_j)^2.$$

**Théorème.** *Let  $f$  be a real  $Z$ -additive function such that the series*

$$\sum_{j \geq 2} |f(F_j)|$$

*converges and has a continuous limit law. For any real  $T$  and any integer  $N$  such as  $h_T \leq \mathcal{L}_N/2$ , we have*

$$\|F_N - F\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \lambda_N(T) + \int_{1/T}^T \min \left( \frac{1}{1+\tau}, \vartheta_N(T) \right) e^{-c_2 \psi_{N,T}(\tau)} d\tau,$$

*where  $c_2 > 0$  is an absolute constant.*

**Remark.** *It is possible to change the value of  $h$  and make it equal to  $\ln_\varphi(T \ln T)$ , but in return the additional error term  $(\ln N)/T$  would appear.*

As in the previous cases, we can get a slightly simpler upper bound which explicitly refers to the convergence of the series  $\sum |f(F_j)|$ .

**Corollary.** *Let  $f$  be a real  $Z$ -additive function such that the series*

$$\sum_{j \geq 2} |f(F_j)|$$

*converges and its limit law is continuous. For all real numbers  $T \geq 1$  such that  $h_T \leq \mathcal{L}_N/2$ , we have*

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \sum_{j > \mathcal{L}_N - 2h} |f(F_j)|.$$

We then continue by applying this theorem to the  $Z$ -additive function  $f$  such that

$$f(F_j) = j^{-\alpha}$$

for all integer  $j \geq 2$  and any number  $\alpha > 1$  that gives us

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \begin{cases} \frac{1}{(\ln N)^{\alpha-1}} & \text{if } 1 < \alpha < 2, \\ \frac{\sqrt{\ln_2 N}}{(\ln N)^{\alpha/2}} & \text{if } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

We end with open problems related to Erdős-Wintner's theorems in more general numeration systems.

# Chapitre 1

## Cas classique<sup>1</sup>

### 1.1 Notations et résultats utiles<sup>2</sup>

La lettre  $p$  désigne un nombre premier.  $a \mid b$  signifie que  $a$  divise  $b$ ;  $p^\nu$  signifie :  $p^\nu \mid a$  et  $p^{\nu+1} \nmid a$ . Nous notons également

$$(a, b) := \text{pgcd}(a, b).$$

La partie entière supérieure du nombre réel  $x$  est notée  $\lfloor x \rfloor$ .

Dans ce premier chapitre, nous désignons par  $\ln_k$  la  $k$ -ième itérée de la fonction logarithmique. La notation  $\log$  est réservée au logarithme complexe, pris en détermination principale. Nous désignons également le cardinal d'un ensemble fini  $\mathcal{A}$  soit par  $|\mathcal{A}|$ , soit par  $\#\mathcal{A}$  et par  $\pi(x)$  le nombre de nombres premiers n'excédant pas  $x$ .

**Définition.** On définit la constante d'Euler  $\gamma$  par

$$\gamma := 1 - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt.$$

Dans le formalisme de l'intégrale de Stieljes, la sommation d'Abel constitue un outil simple mais efficace pour la manipulation de sommes arithmétiques. Nous pouvons trouver l'essentiel des notions concernant l'intégralité de Stieljes dans le chapitre 1 du livre de Widder [48].

**Théorème** (Formule sommatoire d'Abel). Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres complexes. Nous posons

$$A(t) := \sum_{n \leq t} a_n \quad (t > 0).$$

Alors, pour toute fonction  $b \in \mathcal{C}^1([1, x])$ , nous avons pour tout  $x \geq 1$

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n b(n) = A(x) b(x) - \int_1^x A(t) b'(t) dt.$$

Grâce à cela, nous pouvons par exemple montrer (voir [30]) que la définition précédente de  $\gamma$  est équivalente à la suivante :

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right).$$

---

1. Les résultats obtenus dans ce chapitre font l'objet d'un article [46] en collaboration avec G. Tenenbaum.  
 2. Le contenu des parties 1.1, 1.2 et 1.3 de ce premier chapitre proviennent en très grande partie de [44].

Comme écrit dans [44], certaines quantités liées aux nombres premiers n'excédant pas  $x$  ont un comportement asymptotique plus facilement accessible que la fonction  $\pi(x)$ .

**Théorème 1.1** (Premier théorème de Mertens). *Pour  $x \geq 2$ , on a*

$$\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1).$$

*De plus le terme  $O(1)$  figurant dans cette formule varie dans l'intervalle ouvert  $] -1 - \ln 4, \ln 4[$ .*

Le premier théorème de Mertens fournit un équivalent d'une somme pondérée portant sur les nombres premiers. Il est en quelque sorte le prototype d'une classe de résultats dont le point culminant est le théorème des nombres premiers. Le théorème précédent permet alors d'évaluer deux expressions liées aux nombres premiers comme établis par les deux énoncés suivants.

**Théorème 1.2.** *Il existe une constante absolue  $C > 0$  telle que l'on ait pour  $x \geq 2$*

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln_2 x + C + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Les deux théorèmes précédents permettent de prouver la formule suivante que nous utiliserons dans les preuves de ce chapitre.

**Théorème 1.3** (Formule de Mertens). *Nous avons pour  $x \geq 2$*

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln x} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\}.$$

Énonçons maintenant le théorème des nombres premiers version forte, qui nous sera utile plus tard (cf. Théorème II.4.1 de [44] pour une preuve de ce dernier).

**Théorème 1.4** (Théorème des nombres premiers (version forte)). *Il existe une constante  $c > 0$  telle que l'on ait, pour  $x$  tendant vers l'infini*

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O\left(x \exp\left(-c\sqrt{\ln x}\right)\right).$$

Nous signalons qu'une preuve du théorème des nombres premiers avec le terme d'erreur le plus précis connu i.e.

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + O\left(x \exp\left(-c(\ln x)^{3/5} (\ln_2 x)^{-1/5}\right)\right) \quad (c > 0, x \rightarrow \infty),$$

utilisant la région sans zéro de Vinogradov-Korobov, peut être trouvée dans le chapitre 6 de [27].

## 1.2 Fonctions additives et multiplicatives

Dans cette partie, nous rappellerons quelques résultats connus à propos des fonctions additives et multiplicatives ainsi que l'inégalité de Turán-Kubilius.

### 1.2.1 Définitions et propriétés

Une *fonction arithmétique (réelle)* est une fonction définie sur  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$  à valeurs complexes (réelles). Deux classes de fonctions arithmétiques jouent un rôle particulier : les fonctions additives et les fonctions multiplicatives.

**Définitions 1.5.** Une fonction arithmétique  $f$  est additive si l'on a, pour tout entier naturels  $m$  et  $n$  premiers entre eux

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

Une fonction arithmétique  $g$  est multiplicative si l'on a, pour tout entier naturels  $m$  et  $n$  premiers entre eux

$$g(mn) = g(m)g(n).$$

Dues à la représentation canonique

$$n = \prod_{p^\nu \parallel n} p^\nu$$

de tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons les égalités

$$f(n) = \sum_{p^\nu \parallel n} f(p^\nu) \quad \text{et} \quad g(n) = \prod_{p^\nu \parallel n} g(p^\nu).$$

Par exemple, la fonction  $\omega$  qui compte le nombre total de facteurs premiers de  $n$  sans multiplicité est additive, tandis que la fonction de Möbius, définie par

$$(1.1) \quad \mu(n) := \begin{cases} (-1)^{\omega(n)} & \text{si } n \text{ est sans facteur carré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est multiplicative.

Un outil essentiel dans l'étude d'une fonction arithmétique est le concept de série de Dirichlet. Nous nous limitons ici à rappeler sa définition et le résultat que nous utiliserons plus tard.

**Définition 1.6.** Soit  $f$  une fonction arithmétique. La série de Dirichlet associée de  $f$  est la fonction  $F$  définie sur les nombres complexes par

$$(1.2) \quad F(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$$

pour tous les points  $s$  où la série converge.

Le théorème suivant fournit une condition suffisante pour que la série de Dirichlet d'une fonction multiplicative soit développable en produit eulérien (cf. Théorème II.1.3 de [44]).

**Théorème 1.7.** Soit  $g$  une fonction multiplicative et  $s$  un nombre complexe. Sous l'hypothèse

$$(1.3) \quad \sum_p \sum_{\nu \geq 1} \left| \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}} \right| < \infty,$$

la série de Dirichlet (1.2) est absolument convergente et l'on a

$$F(s) = \prod_p \sum_{\nu \geq 0} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}.$$

Nous pouvons remarquer que si la série (1.2) est absolument convergente, il en va de même de (1.3). Ainsi les convergences absolues de (1.2) et (1.3) sont équivalentes.

### 1.2.2 Ordre normal et inégalité de Turán-Kubilius

Nous introduisons maintenant le concept d'ordre normal d'une fonction de répartition afin d'énoncer l'inégalité de Turán-Kubilius, qui intervient dans la partie consacrée au cas continu. Cette notion est analogue, en théorie probabiliste des nombres, à celle d'égalité presque sûre de variables aléatoires en théorie des probabilités. Plus précisément, on dit qu'une fonction arithmétique  $f$  est d'ordre normal  $g$  si  $g$  est une fonction arithmétique telle que, pour chaque  $\varepsilon > 0$ , on ait

$$|f(n) - g(n)| \leq \varepsilon |g(n)|$$

pour un ensemble d'entiers  $n$  de densité unité. Une fonction  $f$  donnée peut avoir plusieurs ordres normaux, qui sont des fonctions équivalentes à l'infini. La notion est ainsi pertinente uniquement dans le cas où ces fonctions  $g$  sont plus explicites que  $f$ .

En termes de fonctions de répartition, l'existence d'un ordre normal s'interprète comme la convergence vers une loi impropre après une renormalisation convenable : autrement dit, la fonction de répartition associée à la loi est égale à une fonction de saut en un point unique

$$F(z) = \begin{cases} 0 & (z < z_0) \\ 1 & (z \geq z_0). \end{cases}$$

Par exemple, dans le cas de fonctions positives, la relation équivaut à la convergence faible des fonctions de répartitions

$$H_N(z) := \nu_N \{n : f(n)/g(n) \leq z\}$$

vers la fonction indicatrice  $\mathbb{1}_{[1, \infty[}(z)$ .

Dans l'étude d'une fonction arithmétique  $f$ , il est souvent raisonnable de considérer l'espérance (ou une approximation adéquate de celle-ci)

$$\mathbb{E}_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n)$$

comme un bon candidat pour un ordre normal de  $f$ . Il est alors naturel de s'attendre qu'un calcul de dispersion, c'est-à-dire une évaluation de la variance empirique

$$(1.4) \quad \mathbb{V}_N(f) := \mathbb{E}_N(|f - \mathbb{E}_N(f)|^2),$$

permettra, par l'inégalité Bienaymé-Tchebychev, une preuve efficace que  $g$  est en effet un ordre normal pour  $f$ .

Cette méthode est particulièrement efficace dans le cas de fonctions additives. L'inégalité de Turán-Kubilius fournit alors une majoration pour (1.4) qui est souvent suffisant pour déterminer l'ordre normal.

Toutefois, nous allons citer et utiliser une autre version de cette inégalité et nous renvoyons au chapitre III.3 de [44] pour plus de détails. Pour toute fonction additive complexe  $\psi$  et tout nombre réel  $x > 0$ , nous posons

$$(1.5) \quad A_\psi(x) := \sum_{p^\nu \leq x} \frac{\psi(p^\nu)}{p^\nu} \quad \text{et} \quad B_\psi^*(x)^2 := \sum_{p^\nu \leq x} \frac{|\psi(p^\nu)|^2}{p^\nu}.$$



**Théorème** (Inégalité de Turán-Kubilius). *Pour toute fonction additive complexe  $\psi$ , nous avons*

$$\frac{1}{x} \sum_{1 \leq n \leq x} |\psi(n) - A_\psi(x)|^2 \ll B_\psi^*(x)^2 \quad (x > 0),$$

où la constante implicite est absolue.

Nous signalons que cette inégalité persiste si les termes généraux des sommes (1.5) sont affectés du poids  $(1 - 1/p)$  (cf. [16, chapitre 4] ou [44, chapitre III.3] pour cette autre version, mais aussi [7, 25, 32, 33, 42, 44] pour des renseignements sur les meilleures constantes).

### 1.2.3 Valeur moyenne de fonctions multiplicatives de module inférieur à 1

Un outil central dans la preuve du théorème d'Erdős-Wintner est l'étude de valeur moyenne de fonctions multiplicatives  $g$  : autrement dit, nous voulons élucider le comportement asymptotique de la quantité suivante, pour  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} g(n).$$

Par exemple, le théorème suivant règle la question pour une certaine classe de fonctions multiplicatives (cf. Théorème I.3.12 de [44]).

**Théorème.** *Soit  $g$  une fonction arithmétique multiplicative à valeurs dans  $[0, 1]$ . Nous posons*

$$\widetilde{M}(g) := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}$$

où le produit infini est considéré comme valant 0 lorsqu'il est divergent. Alors nous avons

$$\sum_{n \leq x} g(n) = x \left( \widetilde{M}(g) + o(1) \right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Comme l'écrit le professeur Tenenbaum dans un de ses articles [45], les estimations de valeurs moyennes de fonctions multiplicatives constituent un outil privilégié de la théorie probabiliste des nombres. Elles permettent notamment d'appréhender la répartition des fonctions additives sur les  $N$  premiers entiers via leurs fonctions caractéristiques et d'obtenir des théorèmes de convergence avec contrôle de l'approximation.

L'existence de valeurs moyennes pour une fonction multiplicative a été étudié par A. Wintner : il a affirmé que si une fonction multiplicative  $g$  est à valeurs dans  $\{\pm 1\}$ , alors la valeur moyenne existe toujours. Toutefois, l'esquisse de sa preuve n'a pas pu être étayée et le problème est resté ouvert comme étant la conjecture d'Erdős-Wintner. Les fonctions multiplicatives de module inférieur à l'unité et possédant une valeur moyenne non-nulle furent alors caractérisées par Delange [11] en 1961.

**Théorème 1.8.** *Soit  $g$  une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité.*

(i) *Si la valeur moyenne de  $g$  est non nulle*

$$M(g) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} g(n),$$

alors nous avons

(a) *la série  $\sum_p (1 - g(p)) / p$  converge,*

(b) *il existe un entier  $\nu \geq 1$  tel que  $g(2^\nu) \neq -1$ .*

(ii) *Si la condition (a) est remplie, alors  $g$  possède une valeur moyenne, donné par la formule suivante*

$$M(g) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{g(p^\nu)}{p^\nu}.$$

Ce théorème fournit ainsi une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction multiplicative de module  $\leq 1$  ait une valeur moyenne non nulle. Wirsing [49] en 1967 et Halasz [24] en 1968 ont par la suite terminé l'étude du comportement moyen d'une fonction multiplicative de module  $\leq 1$ , le premier pour les fonctions réelles, le second pour les fonctions complexes.

## 1.3 Loi limite et théorème d'Erdős-Wintner

### 1.3.1 Loi limite et fonctions caractéristiques

Les notions définies dans cette section sont primordiales dans tous les chapitres de ce papier. Afin de définir la notion de loi limite pour une fonction arithmétique et ainsi pouvoir énoncer le théorème d'Erdős-Wintner, nous avons besoin d'introduire la notion de fonction de répartition ainsi que quelques résultats en lien avec.

Nous désignons par *fonction de répartition* une fonction croissante au sens large  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , continue à droite et satisfaisant à

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} F(z) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z) = 1.$$

Nous pouvons introduire trois classes centrales de telles fonctions :

- une fonction de répartition est dite *purement discrète* ou *atomique* si elle croît exclusivement par sauts et est constante dans tout intervalle fermé ne contenant pas de points de discontinuité ;
- une fonction de répartition  $F$  est *absolument continue* s'il existe une fonction positive  $h$  intégrable au sens de Lebesgue telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt = 1 \quad \text{et} \quad F(z) = \int_{-\infty}^z h(t) dt \quad (z \in \mathbb{R}) ;$$

- $F$  est *purement singulière* si elle est continue et si nous avons la relation

$$\int_{\mathcal{N}} dF_1(z) = 1,$$

où  $\mathcal{N}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  de mesure de Lebesgue nulle.

Nous pouvons alors lier ces trois catégories de fonctions grâce à l'énoncé suivant.

**Théorème** (Théorème de décomposition de Lebesgue). *Toute fonction de répartition  $F$  peut être représentée de manière unique sous la forme*

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$$

avec  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$  et où les  $F_i$  sont des fonctions de répartition telles que  $F_1$  est absolument continue,  $F_2$  est purement singulière et  $F_3$  est atomique.

L'ensemble  $\mathcal{D}(F)$  des *points de discontinuité* d'une fonction de répartition  $F$  est au plus dénombrable et ne contient que des discontinuités de saut. Nous désignons par  $\mathcal{C}(F)$  le complémentaire de  $\mathcal{D}(F)$ , c'est-à-dire *l'ensemble des points de continuité* de  $F$ . On dit qu'une suite  $(F_n)_{n \geq 1}$  de fonctions de répartition *converge faiblement* vers une fonction  $F$  si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = F(z) \quad (z \in \mathcal{C}(F)).$$

Il est à souligner que la limite faible  $F$  n'est pas forcément une fonction de répartition. Par exemple, si on considère la suite de fonctions de terme général

$$F_n : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq n, \\ x - n & \text{si } x \in ]n, n + 1[, \\ 1 & \text{si } x \geq n + 1, \end{cases}$$

alors  $F_n$  est une fonction de répartition pour tout entier naturel  $n$ , mais la suite  $(F_n)$  converge faiblement vers la fonction nulle.

Nous considérons maintenant une fonction arithmétique réelle  $f$ . Pour chaque  $N \geq 1$  la fonction

$$(1.6) \quad F_N(z) := \nu_N(\{n : f(n) \leq z\}) = \frac{1}{N} |\{n \leq N : f(n) \leq z\}|$$

est une fonction de répartition atomique (définition que nous pouvons facilement étendre en remplaçant les entiers  $N \geq 1$  par les réels  $x \geq 1$ ).

**Définitions.** 1) *Nous disons qu'une fonction arithmétique réelle  $f$  possède une fonction de répartition  $F$  (ou encore : possède une loi limite de fonction de répartition  $F$ ) si la suite  $(F_N)_N$  définie par (1.6) converge faiblement vers  $F$  et si  $F$  est une fonction de répartition.*

2) *De plus, nous disons qu'une fonction de répartition  $F$  (ou qu'une loi de fonction de répartition  $F$ ) est pure si elle est soit atomique, soit continue purement singulière, soit absolument continue.*

Le théorème d'Erdős-Wintner donne une condition nécessaire et suffisante au fait qu'une fonction réelle additive possède une loi limite. Nous n'avons pas encore défini la notion d'additivité pour une fonction arithmétique, mais cette notion varie suivant si nous considérons le cas "classique" avec les nombres premiers ou bien les autres systèmes de numération.

Dans chaque chapitre de cette thèse, nous nous plaçons dans un système de numération particulier, puis nous prenons une fonction réelle ayant une propriété additive, qui possède une loi limite grâce au théorème type "Erdős-Wintner". Nous énonçons alors une version effective de ce résultat selon que la loi limite est purement discrète ou continue, c'est-à-dire que nous explicitons le terme d'erreur associé à la convergence de la suite  $(F_N)_N$  vers la fonction de répartition limite  $F$ .

Pour ce faire, nous aurons besoin de plusieurs outils analytiques, qui nous seront utiles dans la preuve du théorème d'Erdős-Wintner, comme par exemple le théorème de continuité de Lévy. Afin d'énoncer le théorème de Lévy, nous rappelons qu'une *fonction caractéristique* d'une fonction de répartition  $F$  est la transformée de Fourier de la mesure de Stieltjes  $dF(z)$ , soit

$$\varphi(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} dF(z) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

C'est une fonction uniformément continue sur la droite réelle, satisfaisant à

$$|\varphi(\tau)| \leq 1 = \varphi(0) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Nous appelons *convolée* de deux fonctions de répartitions  $F$  et  $G$ , notée  $F * G$ , la fonction de répartition  $H$  définie par

$$H(z) = (F * G)(z) := \int_{-\infty}^{\infty} F(z - y) dG(y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z - y) dF(y).$$

Si  $\phi(\tau)$ ,  $\gamma(\tau)$  sont les fonctions caractéristiques respectives de  $F$  et  $G$ , alors  $\eta(\tau) = \phi(\tau)\gamma(\tau)$  est la fonction caractéristique de  $H$ .

Le célèbre théorème de continuité de Paul Lévy relie alors la convergence faible des fonctions de répartition à la convergence simple des fonction caractéristiques.

**Théorème 1.9** (Théorème de continuité de Lévy, 1925). *Soit  $(F_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions de répartition et  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  la suite de leurs fonctions caractéristiques. Alors  $F_n$  converge faiblement vers une fonction de répartition  $F$  si, et seulement si,  $\varphi_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $\varphi$  continue en 0. De plus, dans ce cas,  $\varphi$  est la fonction caractéristique de  $F$  et la convergence des  $\varphi_n$  vers  $\varphi$  est uniforme sur tout compact.*

Ce résultat est établi en détail dans de nombreux livres sur la théorie des probabilités (cf. par exemple [10]). Dans notre cas, en prenant la suite de fonctions de répartitions définie par (1.6), nous avons

$$\varphi_N(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} dF_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} d\delta_{f(n)}(z) = \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} e^{i\tau f(n)} \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

où  $\delta_a$  désigne uniquement ici la mesure de Dirac au point  $a$ . Grâce à cette observation et au Théorème 1.9, nous pouvons en déduire le critère suivant, que nous appellerons *critère de Lévy* dans toute la suite.

**Théorème 1.10.** *Soit  $f$  une fonction arithmétique réelle. Alors  $f$  possède une fonction de répartition  $F$  si, et seulement si, la suite de fonctions  $(\Phi_N)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $\Phi$  continue en 0. Dans ce cas,  $\Phi$  est la fonction caractéristique de  $F$ .*

Dans la preuve de ce corollaire, il apparaît l'observation élémentaire, néanmoins importante, que la fonction  $n \mapsto e^{i\tau f}$  est, pour chaque  $\tau$ , une fonction multiplicative de module 1, si  $f$  est additive. Le problème de l'existence d'une loi limite pour  $f$  est donc équivalent à celui de l'existence de la valeur moyenne d'une fonction multiplicative  $g$  à valeurs dans le disque unité : nous montrerons qu'avoir un terme d'erreur dans l'estimation de la valeur moyenne d'une fonction multiplicative permet d'obtenir une version effective du théorème d'Erdős-Wintner.

Nous terminons cette section en citant le théorème 2.7 de [44], qui regroupe trois résultats fondamentaux sur la convergence de produits de convolutions de fonctions de répartitions. Pour ce faire, nous désignons par  $F_j$  une fonction de répartition, par  $\varphi_j$  sa fonction caractéristique ainsi que par  $s_j$  le plus grand saut de  $F_j$ , soit

$$s_j := \max_{z \in \mathbb{R}} (F_j(z) - F_j(z^-)).$$

**Théorème 1.11.** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le produit  $F_1 * F_2 * \dots * F_n$  converge faiblement vers une fonction de répartition  $F$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,*

(ii)  $\exists \delta > 0 : \lim_{m, n \rightarrow \infty} \prod_{m < j \leq n} \varphi_j(\tau) = 1 \quad (|\tau| \leq \delta),$

$$(iii) \lim_{m,n \rightarrow \infty} F_m(z) * \dots * F_n(z) = \mathbb{1}_{[0, \infty[}(z) \quad (z \neq 0).$$

Lorsque l'une de ces trois conditions est réalisée, on a :

(a) (Jessen & Wintner [28]) *Si chaque  $F_n$  est atomique, alors  $F$  est pure.*

(b) (Lévy [36])  *$F$  est continue si, et seulement si,*

$$(1.7) \quad \exists n \geq 1 : s_n = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{n \geq 1} (1 - s_n) = +\infty.$$

On pourra trouver une démonstration complète des points (a) et (b) dans le lemme 1.22 de [16]. La preuve du critère (1.7) repose sur la notion de *fonction de concentration*, que nous allons étudier un peu plus en détails dans la prochaine section.

### 1.3.2 Fonction de concentration et inégalité de Berry-Esseen

Pour démontrer les différentes versions effectives des théorèmes type "Erdős-Wintner" dans le cas où la loi limite est continue, nous utilisons deux outils : la fonction de concentration et l'inégalité de Berry-Esseen.

La fonction de concentration  $Q_F$  d'une fonction de répartition  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$  par la formule

$$(1.8) \quad Q_F(h) := \sup_{z \in \mathbb{R}} \{F(z+h) - F(z)\} \quad (h > 0).$$

Cette notion a été introduite par Paul Lévy en 1937. Nous pouvons remarquer que  $F$  est continue si, et seulement si,  $Q_F(\ell) \rightarrow 0$  lorsque  $\ell \rightarrow 0^+$ , de sorte que la fonction de concentration peut être regardée comme une mesure de la distance de  $F$  à l'ensemble des fonctions de répartition continues. Cette notion apparaît dans l'énoncé de l'inégalité de Berry-Esseen.

**Théorème 1.12** (Berry-Esseen). *Soit  $F$  et  $G$  deux fonctions de répartition de fonctions caractéristiques respectives  $\varphi$  et  $\psi$ . Alors nous avons, pour tout  $T > 0$*

$$\|F - G\|_\infty \ll Q_F\left(\frac{1}{T}\right) + \int_{-T}^T \left| \frac{\varphi(\tau) - \psi(\tau)}{\tau} \right| d\tau.$$

Cette inégalité (cf. [17], lemme 1.47) permet alors d'obtenir une majoration quantitative de l'approximation de  $F$  par  $F_x$  liée aux fonctions caractéristiques  $\varphi$  et à la suite de fonctions caractéristiques  $\varphi_x$  définies précédemment. Autrement dit, pour chaque  $T > 0$ , nous avons

$$(1.9) \quad \|F - F_x\|_\infty \ll Q_F\left(\frac{1}{T}\right) + \int_{-T}^T \left| \frac{\varphi_x(\tau) - \varphi(\tau)}{\tau} \right| d\tau.$$

En outre, comme dit précédemment, lorsque  $F$  est continue, nous savons que  $Q_F(h) \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0^+$  : dans ce cas, nous serons amenés à majorer  $Q_F(h)$  pour  $h > 0$  (et nous pourrions même connaître son ordre de grandeur exact dans certains cas). Il existe déjà de nombreux exemples dans la littérature (voir par exemple [6], [19], [31], [40], [44, chapitre III.2]).

Dans certains cas, nous pouvons appliquer des résultats pour obtenir une majoration immédiate : lorsque  $F$  possède une densité bornée, i.e. que sa norme sup  $\|\cdot\|_\infty$  est majorée, alors nous avons, pour tout  $h > 0$  et  $z \in \mathbb{R}$

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} F'(t) dt \leq h \|F'\|_\infty$$

d'où

$$Q_F(h) \ll h.$$

Si  $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ , alors nous pouvons utiliser la majoration suivante (cf. [44, Lemme III.2.9])

$$(1.10) \quad Q_F(h) \ll h \int_{-1/h}^{1/h} |\varphi(t)| dt$$

et l'inégalité d'Hölder afin d'obtenir  $Q_F(h) \ll h^{1/p}$ .

Un autre résultat intéressant est l'inégalité de Kolmogorov-Rogozin (cf. [44, Théorème III.2.8]) : si  $f$  est une fonction additive réelle possédant une loi limite, nous avons alors

$$Q_F(h) \ll \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{|f(p)| > h} 1/p}}.$$

Quant à la question d'une minoration, nous pouvons remarquer que, pour toute fonction de répartition  $F$  et pour tout  $h > 0$  assez petit, nous avons toujours

$$(1.11) \quad Q_F(h) \gg_F h.$$

En effet, il existe un intervalle  $[a, b]$  dans lequel  $F$  varie entre  $1/4$  et  $3/4$ , ce qui implique l'inégalité  $Q_F(h) \geq h/(4(b-a))$  pour tout  $h \leq b-a$ . On peut prouver ce résultat par l'absurde : s'il existe un réel  $h_0 \leq b-a$  tel que  $Q_F(h_0) < h_0/(4(b-a))$ , alors, en posant  $M := \lceil (b-a)/h_0 \rceil$ , nous avons, pour tout  $j \in \{0, \dots, M-1\}$ ,

$$F(a + (j+1)h_0) - F(a + jh_0) \leq Q_F(h_0)$$

et donc

$$F(a + Mh_0) - F(a) < Mh_0/(4(b-a)) \leq 1/2.$$

Or,  $a + Mh_0 \geq b$  donc

$$F(a + Mh_0) - F(a) \geq F(b) - F(a) \geq 1/2,$$

d'où la contradiction.

Une conclusion importante est donc que nous avons immédiatement l'ordre exact  $Q_F(h) \asymp h$  ( $h \rightarrow 0^+$ ) dès lors que  $F$  possède une densité bornée.

### 1.3.3 Le théorème d'Erdős-Wintner

Le théorème d'Erdős-Wintner apporte une réponse complète à la question d'existence d'une loi limite pour une fonction additive. Son énoncé et sa preuve permet de le voir comme un théorème de comparaisons entre fonctions additives et sommes de variables aléatoires indépendantes. Le résultat probabiliste sous-jacent est le théorème des trois séries de Kolmogorov (cf, par exemple, [20], chapitre IX.9).

**Théorème 1.13** (Erdős-Wintner, 1939). *Soit  $f$  une fonction additive réelle.  $f$  possède une loi de répartition limite si, et seulement si, les trois séries suivantes convergent pour au moins une valeur du nombre réel positif  $R$*

$$(1.12) \quad \sum_{|f(p)| > R} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq R} \frac{f(p)}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq R} \frac{f(p)^2}{p}.$$

Quand les conditions sont satisfaites, la fonction caractéristique est donnée par le produit convergent :

$$\varphi(\tau) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{e^{i\tau f(p^\nu)}}{p^\nu} \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

La loi limite est nécessairement pure, c'est-à-dire que la fonction de répartition limite  $F$  est soit atomique, soit continue purement singulière, soit absolument continue. Elle est continue si, et seulement si,

$$\sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p} = \infty.$$

**Remarques 1.14.** (a) Si les trois séries de l'énoncé convergent pour une valeur de  $R > 0$ , alors il en va de même pour toute valeur de  $R > 0$ . Il n'y a donc, en pratique, pas de perte de généralité à supposer  $R = 1$ .

(b) L'existence d'une loi de répartition limite pour  $f$  ne dépend pas des valeurs  $f(p^\nu)$  lorsque  $\nu \geq 2$ .

La démonstration originale pour la condition suffisante est due à Erdős. Néanmoins, une démonstration plus simple a été donnée par Delange [11] en 1961 et repose essentiellement sur le Théorème 1.8 et sur le théorème de continuité de Lévy (cf. Théorème III.4.1 de [44] pour une preuve complète).

De plus, la suite de fonctions de répartition  $(F_N)_N$  converge vers la fonction de répartition  $F$  donnée par la relation

$$F = \ast_p G_p$$

où  $G_p$  est la fonction de répartition atomique donnée par

$$G_p(z) = \sum_{f(p^\nu) \leq z} \frac{1}{p^\nu} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (z \in \mathbb{R}).$$

## 1.4 Version effective dans le cas discret

### 1.4.1 Énoncé et preuve du théorème

Soit  $f$  une fonction additive réelle satisfaisant aux hypothèses du Théorème 1.13 et pour laquelle la loi limite est discrète, ce qui équivaut donc à

$$(1.13) \quad \sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p} < \infty.$$

Nous remarquons que cette hypothèse implique (1.12).

Nous pouvons alors trouver une expression pour la fonction de répartition limite  $F$ , ainsi qu'un terme d'erreur effectif.

**Théorème 1.15.** Soit  $f$  une fonction additive réelle vérifiant la condition (1.13). Nous avons alors

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{R}, F(z) = \prod_p (1 - w_p) \sum_{f(m) \leq z} \frac{u(m)}{m} \prod_{p|m} \left( \frac{1 - 1/p}{1 - w_p} \right);$$

$$(ii) \quad F_x(z) = F(z) + O(R_x),$$

uniformément pour tout  $z \in \mathbb{R}$  et  $x \geq 1$ , où

$$R_x := \varepsilon \left( x^{1/\ln_2 x} \right) + \eta(\sqrt{x})^{1/4} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}},$$

les constantes implicites pouvant dépendre de  $f$ .

Nous remarquons que l'application du Théorème 1.15 à  $f$  ne dépend pas des valeurs  $f(p^\nu)$  lorsque  $\nu \geq 2$ , mais seulement de l'ensemble des  $f(p)$  ne s'annulant pas, permettant de faire converger la série de (1.13).

Nous allons transformer l'écriture des  $F_N$  afin de leur appliquer un résultat prouvé dans [45], ce qui nous permettra d'obtenir une expression explicite pour  $F$ , ainsi qu'un terme d'erreur effectif pour la convergence des  $F_N$  vers  $F$ .

Posons  $\mathcal{P} := \{p^\nu : f(p^\nu) \neq 0\}$  et définissons deux fonctions multiplicatives  $u$  et  $v$  telles que

$$\forall \nu \in \mathbb{N}^*, u(p^\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } p^\nu \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad v(p^\nu) = 1 - u(p^\nu).$$

**Proposition 1.16.** *Chaque entier naturel non nul  $n$  se décompose de manière unique sous la forme  $n = md$  avec  $u(m) = v(d) = 1$  et  $(m, d) = 1$ . Dans ce cas, nous avons  $f(n) = f(m)$ .*

*Démonstration.* Nous avons canoniquement  $n = md$  avec

$$m = \prod_{\substack{p^\nu \parallel n \\ p^\nu \in \mathcal{P}}} p^\nu \quad \text{et} \quad d = \prod_{\substack{p^\nu \parallel n \\ p^\nu \notin \mathcal{P}}} p^\nu,$$

ce qui prouve le résultat attendu. □

La Proposition 1.16 permet donc de modifier l'écriture des  $F_N$ . Pour tout  $x > 0$  et  $z \in \mathbb{R}$ , nous avons

$$(1.14) \quad xF_x(z) = \sum_{\substack{n \leq x \\ f(n) \leq z}} 1 = \sum_{\substack{m \leq x \\ f(m) \leq z}} u(m) \sum_{\substack{d \leq x/m \\ (m,d)=1}} v(d) = \sum_{\substack{m \leq x \\ f(m) \leq z}} u(m) \sum_{d \leq x/m} v_m(d),$$

où l'on a posé

$$v_m(d) := \begin{cases} v(d) & \text{si } (m, d) = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Citons maintenant le corollaire de [45] que nous voulons appliquer à la somme intérieure du membre de droite de (1.14).

Pour tous paramètres  $A > 0, B > 0$ , nous notons  $\mathcal{M}(A, B)$  la classe des fonctions multiplicatives vérifiant

$$\max_p |g(p)| \leq A, \quad \sum_{p, \nu \geq 2} \frac{|g(p^\nu)| \ln p^\nu}{p^\nu} \leq B.$$



Soit  $g$  une telle fonction multiplicative et supposons qu'il existe un paramètre  $\varrho > 0$  tel que

$$(1.15) \quad \sum_p \frac{\varrho - \operatorname{Re} g(p)}{p} < \infty.$$

Sous cette hypothèse, par sommation d'Abel, nous avons

$$\sum_{p \leq x} \frac{\{\varrho - \operatorname{Re} g(p)\} \ln p}{p} \leq \eta_x \ln x \quad (x \rightarrow \infty),$$

pour une fonction convenable  $\eta_x$  tendant vers 0 à l'infini. Nous notons

$$M(x; g) := \sum_{n \leq x} g(n) \quad \text{et} \quad Z(x; g) := \sum_{p \leq x} \frac{g(p)}{p}.$$

Enfin, nous posons également  $w_g := 1$  si  $g$  est réelle, et  $w_g := \frac{1}{2}$  dans le cas général.

**Théorème 1.17** ([45]). *Soient  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $\varrho > 0$  et  $g \in \mathcal{M}(A, B)$  une fonction multiplicative complexe telle que  $|g(p)| \leq \varrho$  pour tout nombre premier  $p$ . Sous l'hypothèse (1.15), nous avons alors*

$$M(x; g) = \frac{e^{-\gamma \varrho x}}{\Gamma(\varrho) \ln x} \left\{ \prod_p \sum_{p^\nu \leq x} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} + O \left( \eta_x^a e^{Z(x; g)} + \frac{e^{Z(x; g)}}{(\ln x)^b} \right) \right\},$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler et où l'on a posé

$$a := w_f \min(1, \varrho) / \{5 - \min(1, \varrho)\}, \quad b := w_f \min(1, \varrho) / 6$$

Pour tout  $m \leq x$  tel que  $f(m) \leq z$ , nous voulons donc appliquer ce résultat en prenant  $g = v_m$ . Nous allons montrer que cette fonction vérifie bien les hypothèses du Théorème 1.17. Notons que, pour tout  $m \geq 1$ , la fonction  $v_m$  est multiplicative et est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ .

En posant

$$B := \sum_p \frac{(2p-1) \ln p}{p(p-1)^2},$$

on vérifie que  $v_m$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{M}(1, B)$ .

Par définition de  $v_m$ , pour  $y \geq 3$  et  $m \leq y$ , nous savons que

$$(1.16) \quad \sum_p \frac{1 - v_m(p)}{p} = \sum_{p|m} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p \nmid m \\ f(p) \neq 0}} \frac{1}{p} \leq \ln_3(y) + O(1),$$

et

$$(1.17) \quad \sum_{p \leq y} \frac{\{1 - v_m(p)\} \ln p}{p} = \int_1^y \left( \sum_{\substack{t < p \leq y \\ p \nmid m}} \frac{u(p)}{p} \right) \frac{dt}{t} + \sum_{p|m} \frac{\ln p}{p} \leq \eta(y) \ln(y) + O(\ln_2 y),$$

où

$$\varepsilon(t) := \sum_{\substack{p > t \\ f(p) \neq 0}} \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \eta(y) := \frac{1}{\ln y} \int_1^y \frac{\varepsilon(t)}{t} dt.$$

Pour établir la majoration de (1.16), nous remarquons grâce au Théorème 1.2

$$\forall m \leq y, \sum_{p|m} \frac{1}{p} \leq \sum_{q \leq \kappa} \frac{1}{q} = \ln_2 \kappa + O(1),$$

pour tout  $\kappa$  tel que  $\pi(\kappa) \geq \omega(m)$ , puisque cela garantit l'existence d'une injection  $j$  de l'ensemble des facteurs premiers de  $m$  dans  $\mathbb{P} \cap [1, \kappa]$  telle que  $j(p) \leq p$  pour tout  $p$  divisant  $m$ .

Pour choisir une valeur pour  $\kappa$ , nous pouvons prendre par exemple  $\kappa = 2 \ln y$ , ce qui implique, en prenant les logarithmes,  $\ln \kappa = \ln_2 y + O(1)$ , puis  $\ln_2 \kappa = \ln_3 y + O(1)$ , d'où la majoration attendue. Le choix de  $\kappa$  est justifié par les majorations suivantes, valables pour  $m$  assez grand et toute constante  $c > 1$ ,

$$\omega(m) \leq \frac{c \ln m}{\ln_2 m} \leq \frac{\kappa}{\ln \kappa},$$

De même, la majoration de (1.17) est obtenue en observant, grâce au premier théorème de Mertens (voir Théorème 1.1), pour tout  $m \leq y$ ,

$$\sum_{p|m} \frac{\ln p}{p} \leq \sum_{q \leq \kappa} \frac{\ln q}{q} = \ln \kappa + O(1) = \ln_2 y + O(1).$$

D'après (1.13), la fonction  $\varepsilon$  tend vers 0 à l'infini, donc il en est de même pour sa moyenne logarithmique  $\eta$ . De plus,  $v_m$  est réelle et  $\varrho = 1$ , donc nous pouvons appliquer le Théorème 1.17 à  $v_m$  avec  $a = 1/4$  et  $b = 1/6$ . Nous obtenons donc pour  $1 \leq m \leq y$

$$\begin{aligned} M(y; v_m) &= \frac{y e^{-\gamma}}{\ln y} \left\{ \prod_p \sum_{p^\nu \leq y} \frac{v_m(p^\nu)}{p^\nu} + O \left( \eta(y)^{1/4} e^{Z(y; v_m)} + \frac{e^{Z(y; v_m)}}{(\ln y)^{1/6}} \right) \right\} \\ &= \frac{y e^{-\gamma}}{\ln y} \prod_p \sum_{p^\nu \leq y} \frac{v_m(p^\nu)}{p^\nu} + O \left( \frac{y \eta(y)^{1/4} e^{Z(y; v_m)}}{\ln y} + \frac{y e^{Z(y; v_m)}}{(\ln y)^{7/6}} \right) \\ &=: y \psi_m(y) + O(R_m(y)). \end{aligned}$$

Pour le premier terme, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 1.18.** *Pour  $1 \leq m \leq y$ , nous avons*

$$\psi_m(y) = \left\{ 1 + O \left( \varepsilon(y) + \frac{1}{\ln y} \right) \right\} \prod_p (1 - w_p) \prod_{p|m} \left( \frac{1 - 1/p}{1 - w_p} \right),$$

où

$$S_p := \sum_{\nu \geq 1} \frac{u(p^\nu)}{p^\nu} \quad \text{et} \quad w_p := \left( 1 - \frac{1}{p} \right) S_p.$$

*Démonstration.* D'après la formule de Mertens (cf. Théorème 1.3), nous avons

$$\begin{aligned} \psi_m(y) &= \frac{e^{-\gamma}}{\ln y} \prod_{p \nmid m} \sum_{p^\nu \leq y} \frac{1 - u(p^\nu)}{p^\nu} \\ &= \left\{ 1 + O \left( \frac{1}{\ln y} \right) \right\} \prod_{p \leq y} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid m}} \left( \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} - S_p + O \left( \frac{1}{y} \right) \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} - S_p = \frac{1 - w_p}{1 - 1/p} \geq 1,$$

on a

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} - S_p + O\left(\frac{1}{y}\right) = \left(1 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right) \frac{1 - w_p}{1 - 1/p},$$

d'où

$$\begin{aligned} \psi_m(y) &= \left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln y}\right)\right\} \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid m}} \left(\frac{1 - w_p}{1 - 1/p}\right) \\ &= \left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln y}\right)\right\} \prod_{p \leq y} (1 - w_p) \prod_{p|m} \left(\frac{1 - 1/p}{1 - w_p}\right), \end{aligned}$$

en utilisant le fait que le terme général du dernier produit est supérieure ou égal à 1. Puisque  $w_p \leq 1/p$ , nous avons  $\ln(1 - w_p) \geq -2w_p$  et donc

$$\prod_{p > y} (1 - w_p) \geq \exp\left\{-2 \sum_{p > y} w_p\right\} \geq 1 - O(\varepsilon(y)),$$

d'où le résultat attendu. □

Intéressons-nous maintenant au reste  $R_m$ . Pour ce faire, nous posons

$$R_0(y) := \eta(y)^{1/4} + \frac{1}{(\ln y)^{1/6}}.$$

**Proposition 1.19.** *Pour  $1 \leq m \leq y$ , nous avons*

$$R_m(y) \ll y R_0(y).$$

*Démonstration.* Cela résulte de la majoration

$$Z(y; v_m) = \sum_{p \leq y} \frac{v_m(p)}{p} \leq \ln_2(y) + O(1). □$$

Les Propositions 1.18 et 1.19 permettent d'en déduire immédiatement l'expression suivante pour  $M(y; v_m)$ .

**Proposition 1.20.** *Nous avons, pour tout  $1 \leq m \leq y$ ,*

$$(1.18) \quad M(y; v_m) = y \prod_p (1 - w_p) \prod_{p|m} \frac{1 - 1/p}{1 - w_p} + O(y R_1(y)),$$

où  $R_1(y) := \varepsilon(y) + \eta(y)^{1/4} + 1/(\ln y)^{1/6}$ .

Énonçons également un dernier résultat qui nous sera utile dans la preuve du théorème à venir.

**Proposition 1.21.** *Nous avons*

$$\sum_{m \geq 1} \frac{u(m)}{m} < \infty.$$

*Démonstration.* D'après (1.13) et par définition de la fonction  $u$ , nous avons

$$\sum_p \sum_{\nu \geq 1} \frac{u(p^\nu)}{p^\nu} \leq \sum_{f(p) \neq 0} \frac{1}{p} + \sum_p \sum_{\nu \geq 2} \frac{1}{p^\nu} < \infty.$$

La conclusion découle alors du Théorème 1.7. □

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 1.15. Pour tout  $1 \leq m \leq y$  et  $z \in \mathbb{R}$ , posons

$$h(m) := u(m) \prod_{p|m} \left( \frac{1 - 1/p}{1 - w_p} \right) \quad \text{et} \quad G(z) := \prod_p (1 - w_p) \sum_{f(m) \leq z} \frac{h(m)}{m}.$$

Nous remarquons que  $G$  est une fonction de répartition. En effet, puisque  $w_p \leq 1$  et  $h(m) \geq 0$ , la fonction  $G$  est croissante. De plus, on peut remarquer que  $G$  est continue à droite, que  $G$  tend vers 0 en  $-\infty$ , car la somme dans  $G$  est alors vide, et qu'on a

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} G(z) &= \prod_p (1 - w_p) \sum_m \frac{h(m)}{m} = \prod_p (1 - w_p) \sum_m \frac{u(m)}{m} \prod_{p|m} \frac{1 - 1/p}{1 - w_p} \\ &= \prod_p (1 - w_p) \prod_p \left( 1 + \frac{1 - 1/p}{1 - w_p} S_p \right) = \prod_p \left( 1 - w_p + \left( 1 - \frac{1}{p} \right) S_p \right) = 1. \end{aligned}$$

Pour tout  $x \geq 1$  et  $z \in \mathbb{R}$ , puisque  $M(x/m; v_m) \leq x/m$ , nous avons

$$\begin{aligned} F_x(z) &= \frac{1}{x} \sum_{\substack{m \leq x \\ f(m) \leq z}} u(m) M\left(\frac{x}{m}; v_m\right) = \frac{1}{x} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} \\ f(m) \leq z}} u(m) M\left(\frac{x}{m}; v_m\right) + O(E_1) \\ &= \prod_p (1 - w_p) \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} \\ f(m) \leq z}} \frac{h(m)}{m} + O(E_1 + E_2), \quad \text{d'après la Proposition 1.20} \\ &= G(z) + O(E_1 + E_2), \end{aligned}$$

où nous avons posés

$$\begin{aligned} E_1 &:= \sum_{m > \sqrt{x}} \frac{u(m)}{m}, \\ E_2 &:= \sum_{m \leq \sqrt{x}} \frac{u(m)}{m} R_1\left(\frac{x}{m}\right) \ll R_1(\sqrt{x}), \quad \text{grâce à la Proposition 1.21.} \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que  $G = F$ , d'où le premier point (i) du théorème.

Pour majorer  $E_1$ , introduisons un paramètre  $T \geq 2$  dépendant de  $x$  et scindons la sommation selon que le plus grand facteur premier de  $m$  excède ou non  $T$ . Nous obtenons alors

$$E_1 = \sum_{\substack{m > \sqrt{x} \\ P^+(m) \leq T}} \frac{u(m)}{m} + \sum_{\substack{m > \sqrt{x} \\ P^+(m) > T}} \frac{u(m)}{m} =: A + B.$$

Pour tout  $\alpha \in ]0, \frac{1}{3}[$ , nous avons

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{\substack{m \geq 1 \\ P^+(m) \leq T}} \left( \frac{m}{\sqrt{x}} \right)^\alpha \frac{u(m)}{m} \leq \frac{1}{x^{\alpha/2}} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ P^+(m) \leq T}} \frac{1}{m^{1-\alpha}} \\ &\leq \frac{1}{x^{\alpha/2}} \prod_{p \leq T} \left( 1 + \frac{1}{p^{1-\alpha} - 1} \right) \ll \frac{1}{x^{\alpha/2}} \prod_{p \leq T} \left( 1 + \frac{1}{p^{1-\alpha}} \right), \text{ car } \alpha < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Pour majorer le second terme, nous utilisons le fait que pour tout entier  $m \geq 1$ , il existe un unique couple d'entiers non nuls  $(n, \nu)$  tel que  $m = P^+(m)^\nu n$  et  $P^+(m) \nmid n$ . Ainsi, grâce à la Proposition 1.21, nous obtenons

$$\begin{aligned} B &\leq \sum_{p > T} \sum_{\nu \geq 1} \sum_{n > \sqrt{x} p^{-\nu}} \frac{u(p^\nu) u(n)}{p^\nu n} \leq \sum_{p > T} \sum_{\nu \geq 1} \frac{u(p^\nu)}{p^\nu} \sum_{n \geq 1} \frac{u(n)}{n} \\ &\ll \sum_{p > T} \frac{u(p)}{p} + \sum_{p > T} \sum_{\nu \geq 2} \frac{u(p^\nu)}{p^\nu} \ll \varepsilon(T) + \sum_{p > T} \frac{1}{p(p-1)} \ll \varepsilon(T) + \frac{1}{T}. \end{aligned}$$

Choisissons, pour  $T$  assez grand,  $\alpha := 4/\ln T$ . Le produit apparaissant dans  $A$  est alors  $\ll \ln T$ . En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq T} \frac{1}{p^{1-\alpha}} &= \sum_{p \leq T} \frac{1}{p} + O\left( \alpha \sum_{p \leq T} \frac{\ln p}{p} \right), \text{ car } p^\alpha = 1 + O(\alpha \ln p) \\ &= \ln_2 T + O(1), \text{ car } \alpha \ll \frac{1}{\ln T}, \end{aligned}$$

d'où

$$\prod_{p \leq T} \left( 1 + \frac{1}{p^{1-\alpha}} \right) \leq \exp\left( \sum_{p \leq T} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \right) \ll \ln T.$$

Il suit ainsi que

$$E_1 \ll x^{-2/\ln T} \ln T + \varepsilon(T) + \frac{1}{T}.$$

En posant  $T := x^{1/\ln_2 x}$ , nous obtenons alors

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &\ll x^{-2 \ln_2 x / \ln x} \frac{\ln x}{\ln_2 x} + \varepsilon\left(x^{1/\ln_2 x}\right) + x^{-1/\ln_2 x} + R_1(\sqrt{x}) \\ &\ll \varepsilon\left(x^{1/\ln_2 x}\right) + \eta(\sqrt{x})^{1/4} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}} + \frac{1}{(\ln x) \ln_2 x} + x^{-1/\ln_2 x} \\ &\ll \varepsilon\left(x^{1/\ln_2 x}\right) + \eta(\sqrt{x})^{1/4} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}}. \end{aligned}$$

### 1.4.2 Exemples

Soient  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$  deux suites de nombres réels positifs telles que  $a_n + 1 \leq b_n \leq a_{n+1}$  pour tout entier  $n$ . Nous posons également

$$J := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} ]a_n; b_n] \cap \mathbb{P}.$$

Nous définissons alors la fonction suivante

$$f(n) := \sum_{\substack{p|n \\ p \in J}} 1 \quad (n \geq 1).$$

$f$  est donc une fonction additive comptant le nombre de facteurs premiers comptés sans multiplicité dans  $J$ . Cette fonction ne vérifie par forcément le Théorème 1.15, par exemple si  $J = \mathbb{N}^*$ . Afin de le lui appliquer, nous donnons, d'abord, une condition suffisante sur les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  pour que  $J$  contienne une infinité de nombres premiers, puis, sous cette condition, une condition nécessaire et suffisante afin que la condition (1.13) soit satisfaite.

**Proposition 1.22** (Tenenbaum). *S'il existe une constante absolue  $c > 0$  assez petite telle que*

$$(1.19) \quad b_n > a_n + a_n^{1-c},$$

alors  $|J| = \infty$  et, sous cette condition, nous avons l'équivalence

$$(1.20) \quad \sum_{p \in J} \frac{1}{p} < \infty \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left( \frac{\ln b_n}{\ln a_n} \right) < \infty.$$

*Démonstration.* Un résultat dû à Hoheisel [26] implique  $\pi(x+y) - \pi(x) \asymp y/\ln x$  pour  $x^{1-c} \leq y \leq 2x$  et  $c > 0$  assez petit (le meilleur résultat connu étant  $c = 0,475$  — cf. [1]). Si nous imposons la condition (1.19), alors  $J$  est infini.

Nous nous plaçons désormais sous (1.19). D'une part, supposons, par exemple,  $a_n + a_n^{1-c} < b_n \leq a_n + a_n/\ln a_n$  : cela implique  $a_n \sim b_n (n \rightarrow \infty)$  et donc  $b_n/a_n - 1 \sim \ln(b_n/a_n) (n \rightarrow \infty)$ , d'où

$$\frac{b_n - a_n}{a_n \ln a_n} \sim \frac{\ln(b_n/a_n)}{\ln a_n} = \frac{\ln b_n}{\ln a_n} - 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Puisque les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont positives, équivalentes et ne tendent pas vers 1, nous avons l'équivalence  $\ln a_n \sim \ln b_n (n \rightarrow \infty)$  et donc nous obtenons grâce au résultat de Hoheisel

$$\vartheta_n := \sum_{a_n < p \leq b_n} \frac{1}{p} \asymp \frac{b_n - a_n}{a_n \ln a_n} \sim \frac{\ln b_n}{\ln a_n} - 1 \sim \ln \left( \frac{\ln b_n}{\ln a_n} \right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

D'autre part, si  $b_n > a_n + a_n/\ln a_n$ , alors nous utilisons la version forte du théorème des nombres premiers (cf. Théorème 1.4). Par sommation d'Abel, nous avons

$$\begin{aligned} \vartheta_n &= \int_{a_n}^{b_n} \frac{d\pi(t)}{t} = \int_{a_n}^{b_n} \left( \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(\ln t)^2} \right) \frac{dt}{t} + \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{t} dO \left( t \exp \left( -c\sqrt{\ln t} \right) \right) \\ &= \ln \left( \frac{\ln b_n}{\ln a_n} \right) + O \left( \exp \left( -\frac{1}{2}\sqrt{\ln a_n} \right) \right) \sim \ln \left( \frac{\ln b_n}{\ln a_n} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

□

Avec la définition de  $f$  considérée dans cet exemple, nous remarquons que  $f(p^\nu) = u(p^\nu)$  pour  $\nu \geq 1$ . De plus, en introduisant l'ensemble  $E := \{n \geq 1 : p|n \Rightarrow p \in J\}$ , nous avons  $u(n) = \mathbf{1}_E(n)$ . Ainsi, sous l'hypothèse (1.20), nous obtenons

$$(a) \quad \forall z \in \mathbb{R}, F(z) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \prod_{a_n < p \leq b_n} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \sum_{\substack{m \in E \\ f(m) \leq z}} \frac{1}{m};$$

$$(b) \quad F_x(z) = F(z) + O(R_x),$$

uniformément pour tout  $z \in \mathbb{R}$  et  $x \geq 1$ , où

$$\varepsilon(t) = \sum_{\substack{p>t \\ p \in J}} \frac{1}{p}, \quad \eta(y) := \frac{1}{\ln y} \int_1^y \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad R_x := \varepsilon(x^{1/\ln_2 x}) + \eta(\sqrt{x})^{1/4} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}}.$$

Explicitons maintenant  $R_x$  en fonction des  $a_n$  et  $b_n$ . Nous remarquons que la fonction  $\varepsilon$  est constante sur l'intervalle  $]1; a_0]$  :

$$\forall t \in ]1; a_0], \quad \varepsilon(t) = \sum_{p \in J} \frac{1}{p} =: C.$$

Soit  $t > a_0$ . Comme  $J$  est infini, il existe un entier  $N(t)$  non nul tel que

$$t \in ]a_{N(t)-1}; b_{N(t)-1}] \quad \text{ou bien} \quad b_{N(t)-1} < t \leq a_{N(t)}.$$

Nous avons alors

$$\varepsilon(t) = \sum_{n=N(t)}^{\infty} \sum_{a_n < p \leq b_n} \frac{1}{p} + \sum_{t < p < b_{N(t)-1}} \frac{1}{p} =: \varepsilon_1(t).$$

Ainsi, comme  $x$  tend vers l'infini, nous avons  $a_0 < x^{1/\ln_2 x}$  et donc  $\varepsilon(x^{1/\ln_2 x}) = \varepsilon_1(x^{1/\ln_2 x})$ . Dès que  $x > e$  et  $a_0 < \sqrt{x}$ , nous obtenons alors

$$\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt = \int_1^{a_0} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt + \int_{a_0}^{\sqrt{x}} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt = C \ln a_0 + \int_{a_0}^{\sqrt{x}} \frac{\varepsilon_1(t)}{t} dt,$$

d'où

$$\begin{aligned} R_x &= \varepsilon_1(x^{1/\ln_2 x}) + \left( \frac{2}{\ln x} \left( C \ln a_0 + \int_{a_0}^{\sqrt{x}} \frac{\varepsilon_1(t)}{t} dt \right) \right)^{1/4} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}} \\ &\asymp \varepsilon_1(x^{1/\ln_2 x}) + \left( \frac{\Delta(x)}{\ln x} \right)^{1/4} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}}, \end{aligned}$$

où  $\Delta$  est la fonction définie par

$$\Delta(x) := \int_{a_0}^{\sqrt{x}} \frac{\varepsilon_1(t)}{t} dt.$$

Prenons maintenant deux types d'exemples pour  $a_n$  et  $b_n$  telle que  $a_n \sim b_n$ .

Comme premier exemple de suites, nous choisissons  $a_n = 2^n$  et  $b_n = 2^n (1 + (\ln n)^{-c})$  pour  $n \geq 3$  où  $c$  est une constante strictement positive. Nous remarquons que la suite  $(b_n/a_n)$  converge vers 1, que ces suites vérifient la condition (1.19) et donc, d'après la Proposition 1.22, elles vérifient (1.20) si, et seulement si  $c > 1$ , puisque

$$\ln \left( \frac{\ln b_n}{\ln a_n} \right) \sim \frac{1}{n(\ln n)^c}.$$

Avec ces suites, nous en déduisons

$$N(t) \sim \frac{\ln t}{\ln 2} \quad (t \rightarrow +\infty).$$

En particulier, nous obtenons

$$N(x^{1/\ln_2 x}) \sim \frac{\ln x}{(\ln_2 x) \ln 2} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

En outre, nous avons

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) &= \sum_{n=N(t)}^{\infty} \sum_{a_n < p \leq b_n} \frac{1}{p} + \sum_{t < p < b_{N(t)-1}} \frac{1}{p} \asymp \sum_{n=N(t)}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^c} + \ln \left( \frac{\ln b_{N(t)-1}}{\ln t} \right) \\ &\asymp \frac{1}{(\ln N(t))^{c-1}} + \frac{1}{(\ln t)(\ln_2 t)^c} \asymp \frac{1}{(\ln_2 t)^{c-1}} + \frac{1}{(\ln t)(\ln_2 t)^c} \asymp \frac{1}{(\ln_2 t)^{c-1}}. \end{aligned}$$

En posant  $\phi(x) := x^{1/\ln_2 x}$ , nous en déduisons

$$\begin{aligned} R_x &\asymp \varepsilon_1 \left( x^{1/\ln_2 x} \right) + \left( \frac{\Delta(x)}{\ln x} \right)^{1/4} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}} \\ &\asymp \frac{1}{(\ln_2 \phi(x))^{c-1}} + \left( \frac{\Delta(x)}{\ln x} \right)^{1/4} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}}. \end{aligned}$$

Nous remarquons alors qu'on a l'ordre de grandeur exact

$$\int_8^{\sqrt{x}} \frac{dt}{t(\ln_2 t)^{c-1}} \asymp \frac{\ln x}{(\ln_2 x)^{c-1}}.$$

En effet, par intégration par parties, nous avons

$$\int_8^{\sqrt{x}} \frac{dt}{t(\ln_2 t)^{c-1}} = \frac{\ln \sqrt{x}}{(\ln_2 \sqrt{x})^{c-1}} - \frac{\ln \sqrt{8}}{(\ln_2 \sqrt{8})^{c-1}} + (c-1) \int_8^{\sqrt{x}} \frac{dt}{t(\ln_2 t)^c},$$

et nous remarquons que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{(\ln_2 \sqrt{x})^{c-1}}{\ln \sqrt{x}} \int_8^{\sqrt{x}} \frac{dt}{t(\ln_2 t)^c} = \frac{(\ln_2 \sqrt{x})^{c-1}}{\ln \sqrt{x}} \int_{\ln_2 8}^{\ln_2 \sqrt{x}} \frac{e^t}{t^c} dt \\ &\ll \frac{(\ln_2 \sqrt{x})^{c-1}}{\ln \sqrt{x}} \left( 1 + \int_{c+1}^{\ln_2 \sqrt{x}} \frac{(t-c)e^t}{t^{c+1}} dt \right) \\ &\ll \frac{(\ln_2 \sqrt{x})^{c-1}}{\ln \sqrt{x}} \left( 1 + \left[ \frac{e^t}{t^c} \right]_{c+1}^{\ln_2 \sqrt{x}} \right) \\ &\ll \frac{1}{\ln_2 \sqrt{x}} \ll 1. \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement

$$R_x \asymp \frac{1}{(\ln_2 x)^{c-1}} + \frac{1}{(\ln_2 x)^{(c-1)/4}} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}},$$

d'où

$$R_x \asymp \frac{1}{(\ln_2 x)^{(c-1)/4}}.$$

Comme second exemple, nous considérons les suites  $a_n = 2^n$  et  $b_n = 2^n(1+n^{-c})$  pour  $n \geq 2$ , où  $c$  est une constante strictement positive. Nous remarquons que la suite  $(b_n/a_n)$  converge vers 1, que ces suites vérifient la condition (1.19) et donc, d'après la Proposition 1.22, elles vérifient toujours (1.20), puisqu'on a

$$\ln \left( \frac{\ln b_n}{\ln a_n} \right) \sim \frac{1}{n^{1+c} \ln 2}.$$



Nous remarquons qu'on a la même équivalence pour  $N(t)$  à l'infini que dans le premier exemple. De plus, nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(t) &= \sum_{n=N(t)}^{\infty} \sum_{a_n < p \leq b_n} \frac{1}{p} + \sum_{t < p < b_{N(t)-1}} \frac{1}{p} \asymp \sum_{n=N(t)}^{\infty} \frac{1}{n^{1+c}} + \ln \left( \frac{\ln b_{N(t)-1}}{\ln t} \right) \\ &\asymp \frac{1}{N(t)^c} + \frac{1}{(\ln t)^{1+c}} \asymp \frac{1}{(\ln t)^c} + \frac{1}{(\ln t)^{1+c}} \asymp \frac{1}{(\ln t)^c}.\end{aligned}$$

Or

$$\int_4^{\sqrt{x}} \frac{dt}{t(\ln t)^c} \asymp \begin{cases} (\ln x)^{1-c} & \text{si } 0 < c < 1 \\ \ln_2 x & \text{si } c = 1 \\ 1 & \text{si } c > 1. \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons

$$R_x \asymp \left( \frac{\ln_2 x}{\ln x} \right)^c + \left( \frac{\Delta(x)}{\ln x} \right)^{1/4} + \frac{1}{(\ln x)^{1/6}},$$

avec

$$\Delta(x) = \begin{cases} (\ln x)^{1-c} & \text{si } 0 < c < 1 \\ \ln_2 x & \text{si } c = 1 \\ 1 & \text{si } c > 1. \end{cases}$$

Nous en déduisons finalement

$$R_x \asymp \frac{1}{(\ln x)^\beta}$$

où  $\beta := \min(c/4, 1/6)$ .

## 1.5 Version effective dans le cas continu

Soit  $f$  une fonction additive réelle satisfaisant aux hypothèses de ce théorème et plaçons-nous dans le cas où la loi limite est continue. De plus, désignons par  $\eta(z)$  une fonction tendant vers 0 à l'infini telle que

$$\left| \sum_{\substack{p > z \\ |f(p)| \leq 1}} \frac{f(p)}{p} \right| \leq \eta(z) \quad \text{et} \quad \sum_{p^\nu > z} \frac{\min(1, f(p^\nu)^2)}{p^\nu} \leq \eta(z) \quad (z \geq 1).$$

Nous supposons  $\eta$  continue et décroissante.

La fonction  $f$  possède une fonction de répartition limite, notée  $F$ . Nous nous proposons ici d'évaluer la vitesse de convergence de  $(F_N)$  vers  $F$ .

Rappelons que l'inégalité de Berry-Esseen permet d'obtenir une majoration quantitative de l'approximation de  $F$  par  $F_N$ . Pour chaque  $T > 0$ , nous avons

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + \int_{-T}^T \left| \frac{\varphi_x(\tau) - \varphi(\tau)}{\tau} \right| d\tau,$$

où la fonction  $\varphi_x$  est définie par

$$\varphi_x(\tau) := \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} e^{i\tau f(n)} \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

### 1.5.1 Énoncé et preuve du théorème

Nous posons

$$B_f(R)^2 := 2 + B_f^*(R)^2$$

où  $B_f^*(R)$  est définie en (1.5) et, pour tout  $x \geq 3$ , nous désignons par  $\varepsilon = \varepsilon_x$  toute fonction vérifiant  $1/\sqrt{\ln x} \leq \varepsilon_x = o(1)$ .

**Théorème 1.23.** *Pour une constante absolue convenable  $c$  et tous nombres réels  $R, T$  vérifiant  $3 \leq R \leq x, T \geq 1$ , et*

$$(1.21) \quad \begin{cases} 2 \ln_2 R + \frac{1}{2} T^2 \eta(R) + c \leq \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1}{\varepsilon_x} \right), \\ T^2 \eta(x^{\varepsilon_x}) \ll \varepsilon_x^{1/3}, \end{cases}$$

nous avons

$$(1.22) \quad \|F_x - F\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + \varepsilon_x^{1/6} \ln \left( \frac{T B_f(R)}{\varepsilon_x} \right) + \eta(R).$$

*Démonstration.* Définissons, pour chaque nombre réel  $R \geq 3$ , une fonction additive  $f_R$  par

$$f_R(p^\nu) := \begin{cases} f(p^\nu) & \text{si } p^\nu \leq R \text{ ou } |f(p^\nu)| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $(F_N(\cdot; R))_x$  la suite de fonctions de répartition définie par  $F_x(z; R) := |\{n \leq x : f_R(n) \leq z\}|$ , pour tout  $x \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathbb{R}$ . Puisque  $f_R$  vérifie les hypothèses du théorème d'Erdős-Wintner, cette suite converge simplement vers une fonction de répartition notée  $F(\cdot; R)$ .

En outre, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , posons

$$\varphi_x(\tau; R) := \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} e^{i\tau f_R(n)} \quad (x > 0),$$

convergeant donc simplement vers la fonction caractéristique limite associée à  $f_R$  définie par

$$\varphi(\tau; R) := \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{e^{i\tau f_R(p^\nu)}}{p^\nu} \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , nous avons l'inégalité

$$|F_N(z) - F_N(z; R)| = \frac{1}{x} \left| \sum_{\substack{n \leq x \\ f(n) \leq z}} 1 - \sum_{\substack{n \leq x \\ f_R(n) \leq z}} 1 \right| \leq \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ |f(n) - f_R(n)| > 0}} 1.$$

Or nous remarquons, pour tout  $n \leq x$

$$|f(n) - f_R(n)| = \left| \sum_{p^\nu \| n} (f(p^\nu) - f_R(p^\nu)) \right| \leq \sum_{\substack{R < p^\nu \leq x \\ p^\nu \| n, |f(p^\nu)| > 1}} |f(p^\nu)|.$$

Cela implique que chaque entier naturel  $n \leq x$  vérifiant  $|f(n) - f_R(n)| > 0$  est divisible exactement par une puissance d'un nombre premier, disons  $p^\nu$ , telle que  $R < p^\nu \leq x$  et  $|f(p^\nu)| > 1$ .

Ainsi, nous obtenons

$$(1.23) \quad |F_N(z) - F_N(z; R)| \leq \frac{1}{x} \sum_{\substack{R < p^\nu \leq x \\ |f(p^\nu)| > 1}} \sum_{\substack{m \leq x/p^\nu \\ p \nmid m}} 1 \leq \sum_{\substack{p^\nu > R \\ |f(p^\nu)| > 1}} \frac{1}{p^\nu} \leq \eta(R),$$

cette dernière majoration étant valable également pour  $|F(z) - F(z; R)|$  en faisant tendre  $x$  vers l'infini. Nous pouvons donc se restreindre à évaluer  $F_N(z; R) - F(z; R)$  avec la perspective d'optimiser la valeur de  $R$ .

Afin de majorer la quantité  $|F_N(z; R) - F(z; R)|$ , nous allons appliquer l'inégalité de Berry-Esseen. À cette fin, il faut estimer la différence des fonctions caractéristiques.

Pour  $3 \leq R \leq x$ , grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$(1.24) \quad \begin{aligned} A_{f_R}(x) &= \sum_{p^\nu \leq R} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} + \sum_{\substack{R < p^\nu \leq x \\ |f(p^\nu)| \leq 1}} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \\ &\leq \left( \sum_{p^\nu \leq R} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} \right)^{1/2} \left( \sum_{p^\nu \leq R} \frac{1}{p^\nu} \right)^{1/2} + \sum_{\substack{R < p \leq x \\ |f(p)| \leq 1}} \frac{f(p)}{p} + \sum_{\substack{\nu \geq 2 \\ R < p^\nu \leq x}} \frac{1}{p^\nu} \end{aligned}$$

$$(1.25) \quad \ll B_f(R) \sqrt{\ln_2 R},$$

puisque les deux derniers termes de (1.24) sont bornés et  $B_f(R) \geq 2$ . Grâce à l'application successive des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Turán-Kubilius, nous obtenons alors, pour  $x \in \mathbb{N}^*$  et  $3 \leq R \leq x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f_R(n) &= \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (f_R(n) - A_{f_R}(x)) + A_{f_R}(x) \\ &\ll \left( \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f_R(n) - A_{f_R}(x)|^2 \right)^{1/2} + B_f(R) \sqrt{\ln_2 R} \\ &\ll B_{f_R}^*(x) + B_f(R) \sqrt{\ln_2 R}. \end{aligned}$$

Cependant, nous avons immédiatement

$$(1.26) \quad B_{f_R}^*(x)^2 = \sum_{p^\nu \leq R} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} + \sum_{\substack{R < p^\nu \leq x \\ |f(p^\nu)| \leq 1}} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} \ll B_f(R)^2 + \eta(R) \ll B_f(R)^2,$$

ce qui implique

$$(1.27) \quad \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f_R(n) \ll B_f(R) \sqrt{\ln_2 R}.$$

D'autre part, pour  $x \in \mathbb{N}^*$  et  $3 \leq R \leq x$ , en appliquant à nouveau l'inégalité de Turán-Kubilius, nous obtenons grâce aux majorations (1.25) et (1.26)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f_R(n)^2 &\leq \frac{2}{x} \sum_{n \leq x} |f_R(n) - A_{f_R}(x)|^2 + 2 A_{f_R}(x)^2 \\ &\ll B_{f_R}^*(x)^2 + A_{f_R}(x)^2 \\ (1.28) \qquad \qquad \qquad &\ll B_f(R)^2 \ln_2 R. \end{aligned}$$

Finalement, puisque nous avons, pour tout  $x \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\varphi_x(\tau; R) := \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} e^{i\tau f_R(n)} = 1 + \frac{i\tau}{x} \sum_{n \leq x} f_R(n) + O\left(\frac{\tau^2}{x} \sum_{n \leq x} f_R(n)^2\right),$$

en reportant (1.27) et (1.28) dans la relation précédente, nous obtenons

$$\varphi_x(\tau; R) = 1 + O\left(|\tau| B_f(R) \sqrt{\ln_2 R} + \tau^2 B_f(R)^2 \ln_2 R\right) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

En faisant tendre  $x$  vers l'infini dans la relation précédente, nous obtenons la même évaluation pour  $\varphi(\tau; R)$ , ce qui nous permet d'en déduire la majoration

$$(1.29) \quad \frac{\varphi_x(\tau; R) - \varphi(\tau; R)}{\tau} \ll B_f(R) \sqrt{\ln_2 R} + |\tau| B_f(R)^2 \ln_2 R \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Nous utiliserons cette estimation pour les petites valeurs de  $|\tau|$ .

Évaluons à présent  $\varphi_x(\tau; R)$  lorsque  $|\tau|$  n'est pas trop proche de 0 et sous l'hypothèse (1.12) : nous allons appliquer le théorème 2.3 de [45] et pour ce faire, nous introduisons quelques notations.

Pour tous paramètres  $A > 0, B > 0, N \geq 2$ , nous notons  $\mathcal{M}(N; A, B)$  la classe des fonctions multiplicatives complexes  $h$  vérifiant

$$\max_{p \leq N} |h(p)| \leq A, \quad \sum_{\substack{\nu \geq 2 \\ p^\nu \leq N}} \frac{|h(p^\nu)| \ln p^\nu}{p^\nu} \leq B.$$

Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , posons  $w_h := 1$  si  $h$  est réelle et  $\frac{1}{2}$  dans le cas général.

**Théorème 1.24.** [45] *Soient*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \in ]0, \frac{1}{2}], \mathbf{b} \in [\mathbf{a}, 1[, A \geq 2\mathbf{b}, B > 0, \\ x \geq 1, \varrho = \varrho_x \in [2\mathbf{b}, A], \mathbf{p} := \frac{\pi \varrho}{A}, \beta := 1 - \frac{\sin \mathbf{p}}{\mathbf{p}}, \mathbf{h} := \frac{1 - \mathbf{b}}{\min(1, \varrho) - \mathbf{b}} \end{aligned}$$

Pour tout  $\varepsilon = \varepsilon_x \in ]1/\sqrt{\ln x}, \frac{1}{2}]$ , les assertions suivantes relatives aux fonctions multiplicatives  $h$ ,  $r$  telles que  $|h| \leq r$  sont vérifiées. Sous les hypothèses

$$\sum_{p \leq x} \frac{r(p) - \Re h(p)}{p} \leq \frac{1}{2} \mathbf{b} \ln(1/\varepsilon),$$

$$\sum_{x^\varepsilon < p \leq y} \frac{\{r(p) - \Re h(p)\}^{\mathfrak{b}} \ln p}{p} \ll \varepsilon^{\varepsilon_1 \mathfrak{b}} \ln y \quad (x^\varepsilon < y \leq x),$$

$$\sum_{p \leq y} \frac{\{r(p) - \varrho\} \ln p}{p} \ll \varepsilon \ln y \quad (x^\varepsilon < y \leq x),$$

où  $\varepsilon_1 \in ]0; \frac{2}{3} \mathfrak{b}]$ , nous avons, uniformément pour  $x \geq 2$ ,  $r \in \mathcal{M}(x; A, B)$ ,

$$M(x; h) = \frac{e^{-\gamma x}}{\Gamma(\varrho) \ln x} \left\{ \prod_p \sum_{p^\nu \leq x} \frac{h(p^\nu)}{p^\nu} + O\left(\varepsilon^\delta e^{Z(x; h)}\right) \right\},$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler-Mascheroni et avec les notations suivantes

$$\delta := w_h \varepsilon_1, \quad M(x; h) := \sum_{n \leq x} h(n) \quad \text{et} \quad Z(x; h) = \sum_{p \leq x} \frac{h(p)}{p}.$$

Nous voulons donc appliquer ce théorème à la fonction  $h = g_\tau(\cdot; R)$  avec  $r \equiv 1$ ,  $\mathfrak{b} = 1/2$ ,  $A = \varrho = 1$  et

$$B = \sum_p \frac{(2p-1) \ln p}{p(p-1)^2},$$

de sorte que  $\mathfrak{p} = \pi$ ,  $\beta = \mathfrak{h} = 1$  et  $\varepsilon_1 = 1/3$ . Il faut donc trouver une fonction  $\varepsilon_x$  vérifiant les deux conditions suivantes, pour  $|\tau| \leq T$

$$U_x(\tau; R) := \sum_{p \leq x} \frac{1 - \cos(\tau f_R(p))}{p} \leq \frac{1}{4} \ln(1/\varepsilon_x),$$

$$V_x(\tau; R) := \sum_{x^{\varepsilon_x} < p \leq y} \frac{\{1 - \cos(\tau f_R(p))\} \ln p}{p} \ll \varepsilon_x^{1/3} \ln y \quad (x^{\varepsilon_x} < y \leq x).$$

Montrons que si  $\varepsilon_x$  vérifie les hypothèses du Théorème 1.23, alors ces deux inégalités sont satisfaites. D'une part, pour tout  $|\tau| \leq T$ , nous avons

$$\begin{aligned} U_x(\tau; R) &= \sum_{p \leq R} \frac{1 - \cos(\tau f(p))}{p} + \sum_{\substack{R < p \leq x \\ |f(p)| \leq 1}} \frac{1 - \cos(\tau f(p))}{p} \\ (1.30) \quad &\leq 2 \ln_2 R + O(1) + \frac{T^2 \eta(R)}{2} \\ &\leq \frac{\ln(1/\varepsilon_x)}{4}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est vraie grâce à l'hypothèse (1.12).

D'autre part, pour majorer  $V_x(\tau; R)$ , remarquons que nous avons  $x^{\varepsilon_x} > R$ , puisque

$$x^{\varepsilon_x} \geq \exp\left(\sqrt{\ln x}\right) > \exp\left((\ln x)^{1/16}\right) \geq \exp\left(\varepsilon_x^{-1/8}\right) > R,$$

la dernière inégalité provenant de l'hypothèse (1.12).

Ainsi, pour  $|\tau| \leq T$  et  $x^{\varepsilon x} < y \leq x$ , en utilisant à nouveau (1.12), nous obtenons

$$(1.31) \quad V_x(\tau; R) \leq \tau^2 \sum_{\substack{x^{\varepsilon x} < p \leq y \\ |f(p)| \leq 1}} \frac{f(p)^2 \ln y}{p} \leq T^2 \eta(x^{\varepsilon x}) \ln y \ll \varepsilon_x^{1/3} \ln y.$$

Nous pouvons donc bien appliquer le Théorème 1.24 à la fonction  $e^{i\tau f_R}$ , pour  $|\tau| \leq T$  et dans l'hypothèse (1.12) et nous obtenons, uniformément pour  $x \geq 2$ ,

$$\varphi_x(\tau; R) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln x} \left\{ \prod_p \sum_{p^\nu \leq x} \frac{e^{i\tau f_R(p^\nu)}}{p^\nu} + O\left(\varepsilon^\delta e^{Z(x; e^{i\tau f_R})}\right) \right\}.$$

Nous avons la majoration suivante

$$\begin{aligned} e^{Z(x; e^{i\tau f_R})} &\ll \exp\left(\sum_{p \leq x} \frac{\cos(\tau f_R(p))}{p}\right) \leq \exp(\ln_2 x + O(1)) \\ &\ll \ln x. \end{aligned}$$

Ainsi, en développant l'égalité précédente, en remarquant que la somme est égale à 1 pour tout  $p > x$  et en utilisant la formule de Mertens (cf. Théorème 1.3), nous avons alors

$$\begin{aligned} \varphi_x(\tau; R) &= \frac{e^{-\gamma}}{\ln x} \prod_{p \leq x} \sum_{p^\nu \leq x} \frac{e^{i\tau f_R(p^\nu)}}{p^\nu} + O\left(\varepsilon_x^{1/6}\right) \\ &= \left( \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{p^\nu \leq x} \frac{e^{i\tau f_R(p^\nu)}}{p^\nu} \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) + O\left(\varepsilon_x^{1/6}\right) \\ &= \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{p^\nu \leq x} \frac{e^{i\tau f_R(p^\nu)}}{p^\nu} + O\left(\varepsilon_x^{1/6}\right), \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant des inégalités immédiates

$$\frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{(\ln x)^{1/12}} \ll \varepsilon_x^{1/6}.$$

Maintenant, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 1.25.** *Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  deux suites de nombres complexes à valeurs dans le disque unité. Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , nous avons alors*

$$\left| \prod_{n=1}^N u_n - \prod_{n=1}^N v_n \right| \leq \sum_{n=1}^N |u_n - v_n|.$$

Nous obtenons ainsi la majoration

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{p^\nu \leq x} \frac{e^{i\tau f_R(p^\nu)}}{p^\nu} - \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{e^{i\tau f_R(p^\nu)}}{p^\nu} \right| &\leq \sum_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left| \sum_{p^\nu > x} \frac{e^{i\tau f_R(p^\nu)}}{p^\nu} \right| \\
&\ll \sum_{p \leq x} p^{-[\ln x / \ln p] - 1} \\
&\ll \frac{\pi(\sqrt{x})}{x} + \sum_{p > \sqrt{x}} p^{-2} \\
&\ll \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} \ll \varepsilon_x^{1/6},
\end{aligned}$$

où  $[\cdot]$  désigne la fonction partie entière et où nous avons utilisé l'inégalité  $[y] > y - 1$  valable pour tout  $y \in \mathbb{R}$ . Ainsi, nous avons

$$\varphi_x(\tau; R) = \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{e^{i\tau f_R(p^\nu)}}{p^\nu} + O\left(\varepsilon_x^{1/6}\right).$$

De plus, en utilisant l'évaluation  $1 + z = \exp(z + O(z^2))$  pour  $|z| \leq 1/2$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\prod_{p > x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geq 0} \frac{e^{i\tau f_R(p^\nu)}}{p^\nu} &= \prod_{p > x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{e^{i\tau f_R(p)}}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right) \\
&= \prod_{p > x} \left(1 + \frac{e^{i\tau f_R(p)} - 1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{p > x} \left(\frac{e^{i\tau f_R(p)} - 1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(i\tau \sum_{p > x} \frac{f_R(p)}{p} + O\left(\tau^2 \sum_{p > x} \frac{f_R(p)^2}{p} + \sum_{p > x} \frac{1}{p^2}\right)\right) \\
&= \exp\left(O\left(|\tau| \eta(x) + \tau^2 \eta(x) + \frac{1}{x \ln x}\right)\right) \\
&= 1 + O\left(\eta(x) |\tau| (1 + |\tau|) + \frac{1}{x \ln x}\right).
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors, pour  $|\tau| \leq T$

$$\varphi_x(\tau; R) = \varphi(\tau; R) \left(1 + O\left(\eta(x) T^2 + \frac{1}{x \ln x}\right)\right) + O\left(\varepsilon_x^{1/6}\right).$$

Grâce à l'hypothèse (1.12) et à la décroissance de  $\eta$ , nous avons

$$\eta(x) T^2 \leq \frac{\eta(x)}{\eta(x^{\varepsilon_x})} \varepsilon_x^{1/3} \ll \varepsilon_x^{1/6}$$

et donc nous en déduisons finalement, pour  $|\tau| \leq T$

$$(1.32) \quad \varphi_x(\tau; R) = \varphi(\tau; R) + O\left(\varepsilon_x^{1/6}\right).$$

Nous sommes à présent en mesure d'appliquer l'inégalité de Berry-Esseen

$$\|F_N(\cdot; R) - F(\cdot; R)\|_\infty \ll Q_{F_R} \left(\frac{1}{T}\right) + \int_{-T}^T \left| \frac{\varphi_x(\tau; R) - \varphi(\tau; R)}{\tau} \right| d\tau \quad (T \geq 1),$$

où  $Q_{F_R}$  est la fonction de concentration associée à  $F(\cdot; R)$ . En prenant en compte (1.23), il suit, pour  $T \geq 1$

$$\|F_N - F\|_\infty \ll Q_F \left(\frac{1}{T}\right) + \int_{-T}^T \left| \frac{\varphi_x(\tau; R) - \varphi(\tau; R)}{\tau} \right| d\tau + \eta(R),$$

car, pour tout  $z \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} |F(z+h; R) - F(z; R)| &\leq |F(z+h) - F(z)| + |F(z+h; R) - F(z+h)| + |F(z; R) - F(z)| \\ &\leq |F(z+h) - F(z)| + 2\eta(R). \end{aligned}$$

Pour majorer la dernière intégrale, disons  $I$ , nous nous donnons un paramètre  $u \in ]0, 1[$  et employons (1.29) pour  $|\tau| \leq u$ , puis (1.32) pour  $u < |\tau| \leq T$ . Nous obtenons

$$I \ll u B_f(R) \sqrt{\ln_2 R} + u^2 B_f(R)^2 \ln_2 R + \varepsilon_x^{1/6} \ln(T/u).$$

Pour le choix quasi-optimal

$$u = \frac{\varepsilon_x^{1/6}}{B_f(R) \sqrt{\ln_2 R}},$$

nous obtenons

$$I \ll \varepsilon_x^{1/6} \ln\left(\frac{T B_f(R)}{\varepsilon_x}\right),$$

car nous avons  $\ln_2 R \ll \ln(1/\varepsilon_x)$ , grâce à (1.12), et donc  $\ln_3 R \ll \ln(1/\varepsilon_x)$ . □

## 1.5.2 Exemples

Considérons quelques exemples de fonctions fortement additives auxquelles nous allons appliquer le résultat obtenu (on dit que  $f$  est *fortement additive* si elle est additive et si elle vérifie la relation  $f(p^\nu) = f(p)$  pour tout  $\nu \geq 1$ ).

### 1.5.2.1 Premier exemple

Considérons la fonction fortement additive  $f$  définie par

$$f(p) = \frac{1}{(\ln p)^\alpha} \quad (\alpha > 1).$$

Cette fonction  $f$  vérifie les conditions du théorème d'Erdős-Wintner compte tenu de la convergence des séries

$$\sum_p \frac{1}{p(\ln p)^\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_p \frac{1}{p(\ln p)^{2\alpha}}.$$



Nous pouvons donc estimer les différents termes qui apparaissent dans le Théorème 1.24. D'abord, il découle d'un résultat de Koukoulopoulos [31] précisant une estimation de La Bretèche et Tenenbaum [6] que  $Q(\varepsilon) \asymp \varepsilon^{1/\alpha}$  ( $0 < \varepsilon \leq 1/3$ ).

Ensuite, nous avons, par exemple par sommation par parties

$$\sum_{\substack{p > z \\ |f(p)| \leq 1}} \frac{f(p)}{p} = \sum_{p > z} \frac{1}{p (\ln p)^\alpha} \asymp \frac{1}{(\ln z)^\alpha} \quad (z \rightarrow \infty)$$

et

$$\sum_{p^\nu > z} \frac{\min(1, f(p^\nu)^2)}{p^\nu} = \sum_{p^\nu > z} \frac{1}{p^\nu (\ln p)^{2\alpha}} \ll \frac{1}{(\ln z)^{2\alpha}} \quad (z \rightarrow \infty).$$

Pour obtenir la seconde majoration, nous utilisons, par exemple, l'estimation

$$C(t) := \sum_{p^\nu \leq t} 1 \ll (\ln t) \sum_{p \leq t} \frac{1}{\ln p} \ll \frac{t}{\ln t} \quad (t \rightarrow \infty),$$

qui nous donne

$$S(t) := \sum_{p^\nu \leq t} \frac{1}{(\ln p)^{2\alpha}} = \int_{2^-}^t \frac{dC(u)}{(\ln u)^{2\alpha}} \ll \frac{t}{(\ln t)^{2\alpha+1}} + \int_2^t \frac{du}{(\ln u)^{2\alpha+2}} \ll \frac{t}{(\ln t)^{2\alpha+1}} \quad (t \rightarrow \infty),$$

ce qui implique

$$\sum_{p^\nu > z} \frac{1}{p^\nu (\ln p)^{2\alpha}} = \int_z^\infty \frac{dS(t)}{t} \ll \frac{1}{(\ln z)^{2\alpha+1}} + \int_z^\infty \frac{dt}{t (\ln t)^{2\alpha+1}} \ll \frac{1}{(\ln z)^{2\alpha}} \quad (z \rightarrow \infty).$$

Nous pouvons donc prendre

$$\eta(z) \asymp \frac{1}{(\ln z)^\alpha}.$$

En outre, nous remarquons

$$B_f(R)^2 = 2 + \sum_{p^\nu \leq R} \frac{1}{p^\nu (\ln p)^{2\alpha}} \asymp 1.$$

Ainsi il existe une constante absolue  $c > 0$  telle que, pour  $3 \leq R \leq x$  et  $T \geq 1$  vérifiant (1.21), nous ayons

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{T^{1/\alpha}} + \varepsilon_x^{1/6} \ln \left( \frac{T}{\varepsilon_x} \right) + \frac{1}{(\ln R)^\alpha}.$$

En prenant  $\varepsilon_x \asymp 1/\sqrt{\ln x}$ , les choix  $R = \exp(c_0(\ln x)^{1/16})$ , où  $c_0 > 0$  est une constante assez petite et  $T = (\ln x)^{\alpha/32}$  vérifient la condition (1.21), ce qui nous donne

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{(\ln x)^{1/32}}.$$

### 1.5.2.2 Second exemple

Il peut se produire que l'estimation générale (1.22) soit de qualité inférieure à certaines évaluations de la littérature lorsque  $f(p)$  est à décroissance rapide et régulière. Considérons, par exemple, la fonction fortement additive  $f$  définie par

$$f(p) = \frac{1}{p^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Cette fonction  $f$  vérifie les conditions du théorème d'Erdős-Wintner en vertu de la convergence des séries

$$\sum_p \frac{1}{p^{\alpha+1}} \quad \text{et} \quad \sum_p \frac{1}{p^{2\alpha+1}}.$$

Nous pouvons ainsi appliquer le Théorème 1.24. D'abord, nous avons  $Q(1/T) \asymp 1/(\ln T)$  pour tout  $T \geq 3$  en vertu du corollaire 1.3 de [6]. Ensuite, par sommation d'Abel, nous avons pour  $z$  tendant vers l'infini

$$\sum_{\substack{p>z \\ |f(p)| \leq 1}} \frac{f(p)}{p} = \sum_{p>z} \frac{1}{p^{\alpha+1}} \ll \frac{1}{z^\alpha \ln z} \quad \text{et} \quad \sum_{p^\nu > z} \frac{\min(1, f(p^\nu)^2)}{p^\nu} = \sum_{p^\nu > z} \frac{1}{p^{\nu+2\alpha}} \ll \frac{\ln z}{z}.$$

Pour obtenir la seconde majoration, nous pouvons utiliser l'estimation

$$\sum_{p^\nu \leq t} \frac{1}{p^{2\alpha}} \ll (\ln t) \sum_{p \leq t} \frac{1}{p^{2\alpha} \ln p} \ll \ln t \quad (t \rightarrow \infty),$$

ce qui implique

$$\sum_{p^\nu > z} \frac{1}{p^{\nu+2\alpha}} \ll \frac{\ln z}{z} + \int_z^\infty \frac{\ln u}{u^2} du \ll \frac{\ln z}{z} \quad (z \rightarrow \infty).$$

Nous pouvons donc prendre

$$\eta(z) \asymp \frac{\ln z}{z}.$$

En outre, nous remarquons

$$B_f(R)^2 = 2 + \sum_{p^\nu \leq R} \frac{1}{p^{2\alpha+\nu}} \asymp 1.$$

Ainsi il existe une constante absolue  $c > 0$  telle que, pour  $3 \leq R \leq x$  et  $T \geq 1$  vérifiant (1.12), nous ayons

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{\ln T} + \varepsilon_x^{1/6} \ln \left( \frac{T}{\varepsilon_x} \right) + \frac{\ln R}{R}.$$

En prenant  $R = \exp(c_1(\ln x)^{1/16})$ , où  $c_1 > 0$  est une constante assez petite, nous obtenons

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{\ln T} + \varepsilon_x^{1/6} \ln \left( \frac{T}{\varepsilon_x} \right) + \frac{(\ln x)^{1/16}}{\exp(c_1(\ln x)^{1/16})}.$$

Nous remarquons alors

$$\frac{1}{\ln T} = \varepsilon_x^{1/6} \ln T \iff \ln T = \varepsilon_x^{-1/12}$$

et donc, sous l'hypothèse (1.21), le choix optimal est  $\ln T \asymp \varepsilon_x^{-1/12}$  et  $\varepsilon_x \asymp 1/\sqrt{\ln x}$ , ce qui nous donne au final

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{(\ln x)^{1/24}},$$

alors que la majoration

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{\ln_2 x}{(\ln x) \ln_3 x},$$

a été établie au corollaire 1.5 de [6].

Ce défaut de précision trouve son origine dans l'emploi des majorations générales (1.30) et (1.31), qui ne prennent en compte qu'une information partielle sur la répartition des  $f(p)$  : lorsque  $f(p)$  décroît rapidement, une estimation directe des écarts entre fonctions caractéristiques permet d'obtenir l'amélioration indiquée.

## Chapitre 2

# Systeme de numération q-adique<sup>1</sup>

Dans un sens informel et général, les *fonctions digitales* (*digital functions* en anglais) sont des fonctions définies d'une certaine manière, qui est dépendante des chiffres apparaissant dans les représentations digitales des entiers. Dans le cas le plus simple, la représentation digitale est la représentation q-adique et la dépendance de la fonction sur les chiffres est additive, comme la fonction *somme des chiffres*  $s_q$  donnée par

$$s_q \left( \sum_{k=0}^K a_k q^k \right) = \sum_{k=0}^K a_k,$$

qui est aussi l'exemple le plus important pour de telles fonctions.

Dans ce cadre de décomposition en base  $q$ , Delange [12] a prouvé un résultat analogue au théorème d'Erdős-Wintner (*cf.* Théorème 1.13) : le but de ce chapitre est alors d'établir une version effective de ce théorème et de l'appliquer à différents exemples.

### 2.1 Définitions et énoncé du théorème type d'Erdős-Wintner<sup>2</sup>

La notion de *fonction q-additive* a été introduite indépendamment par Bellman et Shapiro [4] et Gelfond [22]. Si on désigne par  $A$  un groupe abélien, une fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  est dite *q-additive* si elle vérifie, pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq \ell < q^k$

$$f(q^k n + \ell) = f(q^k n) + f(\ell).$$

Il suit alors par récurrence pour tout entier  $K \geq 0$

$$f \left( \sum_{k=0}^K a_k q^k \right) = \sum_{k=0}^K f(a_k q^k).$$

Une fonction  $q$ -additive  $f$  est ainsi entièrement déterminée par la condition  $f(0) = 0$  et par les valeurs  $f(aq^k)$ , où  $a \in \{1, \dots, q-1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Cette notion de  $q$ -additivité joue le même rôle dans ce contexte que les fonctions additives vues dans le Chapitre 1.

---

1. Les résultats obtenus dans ce chapitre font en partie l'objet d'un article [15] en collaboration avec M. Drmota.  
 2. La plupart des définitions et remarques du paragraphe d'introduction et de cette première section sont issus de [13].

Similairement, nous pouvons définir la notion de *fonctions  $q$ -multiplicatives* : si on désigne par  $A$  un monoïde (noté multiplicativement), une fonction  $g : \mathbb{N} \rightarrow A$  est dite  *$q$ -multiplicative* si elle vérifie pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq \ell < q^k$

$$g(q^k n + \ell) = g(q^k n) g(\ell).$$

Il suit par récurrence

$$g\left(\sum_{k=0}^K a_k q^k\right) = \prod_{k=0}^K g\left(a_k q^k\right),$$

ce qui montre qu'une fonction  $q$ -multiplicative  $g$  est entièrement déterminée par la condition  $g(0) = 1$  et les valeurs  $g(aq^k)$ , où  $a \in \{1, \dots, q-1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Nous allons énoncer l'analogie du théorème d'Erdős-Wintner énoncé au Chapitre 1 (prouvé par Delange [12]) accompagné d'une nouvelle preuve, étant donné que nous utiliserons des idées similaires pour prouver sa version effective (nous signalons au lecteur que toutes les définitions et résultats liés aux fonctions de répartition et à la notion de loi limite ont été définis dans la section 1.3.1 du Chapitre 1).

**Théorème 2.1** (Delange, 1972). *Une fonction  $q$ -additive  $f$  à valeurs réelles possède une fonction de répartition  $F$  si et seulement si les deux séries*

$$(2.1) \quad \sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j), \quad \sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)^2$$

*convergent. Lorsque les conditions sont remplies, la fonction caractéristique est donnée par le produit convergent*

$$(2.2) \quad \varphi(\tau) = \prod_{j \geq 0} \frac{1}{q} \left( \sum_{0 \leq d < q} e^{i\tau f(dq^j)} \right) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

**Remarque 2.2.** *Le Théorème 2.1 montre que les fonctions complètement  $q$ -additives (i.e. telles que  $f(dq^j) = f(d)$  pour tous entiers  $0 \leq d < q$  et  $j \geq 0$ ), comme la fonction  $s_q$  mentionnée dans l'introduction de ce chapitre ou bien les fonctions  $q$ -additives réelles telles que  $(f(dq^j))_j$  ne converge pas vers 0 ne possèdent pas de loi limite. Toutefois, il existe un théorème central limite pour certaines de ces fonctions (cf. [13, Théorème 9.3.9]).*

*Démonstration.* L'élément principal de la preuve est le critère de Lévy (cf. Théorème 1.10). Supposons que les deux séries (2.1) convergent et montrons qu'il existe une fonction  $\varphi$  continue en 0 telle que, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  fixé,

$$(2.3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} e^{i\tau f(n)} = \varphi(\tau).$$

Comme prouvé dans [12], nous avons l'identité

$$\varphi_{q^L}(\tau) := \frac{1}{q^L} \sum_{n < q^L} e^{i\tau f(n)} = \prod_{0 \leq j < L} \left( \frac{1}{q} \sum_{0 \leq d < q} e^{i\tau f(dq^j)} \right),$$

ce qui implique que la fonction caractéristique limite doit être

$$\varphi(t) = \prod_{j \geq 0} \left( \frac{1}{q} \sum_{0 \leq d < q} e^{i\tau f(dq^j)} \right).$$

Nous posons maintenant

$$(2.4) \quad m_{j,q} := \frac{1}{q} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j) \quad \text{et} \quad \sigma_{j,q}^2 := \frac{1}{q} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)^2.$$

Grâce à l'estimation  $\exp(iu) = 1 + iu + O(u^2)$  pour tout nombre réel  $u$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{1}{q} \sum_{0 \leq d < q} e^{i\tau f(dq^j)} \right) &= \log (1 + i\tau m_{j,q} + O(\tau^2 \sigma_{j,q}^2)) \\ &= i\tau m_{j,q} + O(\tau^2 (m_{j,q}^2 + \sigma_{j,q}^2)) \\ &= i\tau m_{j,q} + O(\tau^2 \sigma_{j,q}^2), \end{aligned}$$

où nous avons, d'une part, omis  $m_{j,q}^2$  grâce à l'inégalité  $m_{j,q}^2 \leq \sigma_{j,q}^2$  pour tout entier  $j \geq 0$  (en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et d'autre part supposé implicitement que  $j$  est suffisamment grand (dépendant de  $\tau$ ) afin de pouvoir composer par la fonction  $\log$  (qui est la branche principale du logarithme complexe). Puisque les deux séries (2.1) convergent, la suite  $(\varphi_{q^L})_L$  converge faiblement dans  $\mathbb{R}$  (i.e. point par point) et donc sa limite est exactement  $\varphi$ . Il reste à montrer que la convergence  $\varphi_{q^L}(t) \rightarrow \varphi(t)$  implique la relation (2.3) et nous renvoyons le lecteur à la proposition 1.3 de [41], qui prouve exactement cette implication. Finalement,  $\varphi$  est continue en 0 grâce au lemme 6 de [12] : nous montrerons plus tard que nous avons en réalité  $\varphi(\tau) = 1 + O(|\tau|)$ .

Réciproquement, supposons que  $f$  admet une loi limite : d'après le critère de Lévy, cela implique l'existence d'une fonction  $\varphi$  continue en 0 vérifiant (2.3). Il existe donc un réel  $T > 0$  tel que  $|\varphi(\tau)| \geq 1/2$  pour tout  $|\tau| \leq T$ . En utilisant l'inégalité  $1 - \cos(x) = 2 \sin^2(x/2) \geq 8 \|x/(2\pi)\|^2$  (où  $\|\cdot\|$  désigne la distance à l'ensemble des entiers), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \sum_{0 \leq d < q} e^{i\tau f(dq^j)} \right|^2 &= \sum_{0 \leq k, \ell < q} \cos(\tau (f(kq^j) - f(\ell q^j))) \\ &\leq q^2 - 2 \sum_{1 \leq d < q} (1 - \cos(\tau f(dq^j))) \\ &\leq q^2 - 16 \sum_{1 \leq d < q} \left\| \frac{\tau f(dq^j)}{2\pi} \right\|^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\left| \frac{1}{q} \sum_{0 \leq d < q} e^{i\tau f(dq^j)} \right| \leq \exp \left( -\frac{8}{q^2} \sum_{1 \leq d < q} \left\| \frac{\tau f(dq^j)}{2\pi} \right\|^2 \right),$$

où nous avons utilisé l'inégalité  $\ln(1+x) \leq x$  (pour tout nombre réel  $x > -1$ ).

Pour tout  $|\tau| \leq T$ , nous avons donc l'encadrement

$$(2.5) \quad \frac{1}{2} \leq |\varphi(\tau)| = \prod_{j \geq 0} \frac{1}{q} \left| \sum_{0 \leq d < q} e^{i\tau f(dq^j)} \right| \leq \exp \left( -\frac{8}{q^2} \sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < q} \left\| \frac{\tau f(dq^j)}{2\pi} \right\|^2 \right).$$

Nous en déduisons

$$(2.6) \quad \sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < q} \left\| \frac{\tau f(dq^j)}{2\pi} \right\|^2 \ll 1 \quad (|\tau| \leq T)$$

et donc la suite  $(\|\tau f(dq^j)/(2\pi)\|)_{j \geq 0}$  ( $1 \leq d < q$ ) converge vers 0 pour tout  $|\tau| \leq T$ . De plus, cela implique aussi que la suite  $(f(dq^j))_{j \geq 0}$  tend vers 0,<sup>3</sup> et donc, en particulier, la suite  $(f(dq^j))_{j \geq 0}$  est bornée. Ainsi, nous pouvons choisir un réel  $0 < |\tau_0| \leq T$  tel que  $|\tau_0 f(dq^j)| \leq \pi$  pour tous les entiers  $1 \leq d < q$  et  $j \geq 0$ . Grâce à (2.6), nous en déduisons que la série

$$\sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < q} \left( \frac{\tau_0 f(dq^j)}{2\pi} \right)^2$$

est bornée et est donc convergente. Puisque  $\tau_0 > 0$ , nous obtenons également la convergence de la série

$$\sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)^2.$$

En utilisant le fait que la suite  $(\varphi_{q^L})_L$  converge faiblement vers  $\varphi$  et en composant par la fonction logarithme comme précédemment, nous en concluons que la série

$$\sum_{j \geq 0} m_{j,q} = \frac{1}{q} \sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)$$

converge également. □

Comme écrit dans la preuve précédente dans la note 3 en bas de page, nous allons énoncer et prouver le résultat manquant. Ce dernier nous sera utile dans plusieurs preuves de ce travail.

**Lemme 2.3** (Tenenbaum). *Soient  $\eta > 0$  et  $(a_n)_n$  une suite de nombres réels telle que, pour tout  $\tau \in (0, \eta]$ , on ait*

$$\|\tau a_n\| \rightarrow 0$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la distance à l'ensemble des entiers. Alors  $a_n \rightarrow 0$ .

Nous pouvons remarquer que la conclusion du lemme n'est plus valide si on suppose la condition uniquement vraie pour tout  $\tau \in \mathbb{Q}$ , car  $a_n = n!$  est alors un contre-exemple.

*Démonstration.* Par hypothèse  $\|\tau a_n\| \rightarrow 0$  (pour  $\tau \in (0, \eta]$ ). Ainsi, la suite de fonctions définie par  $f_n(\tau) := 1 - \cos(2\pi\tau a_n)$  converge ponctuellement vers 0 sur cet intervalle. D'après le théorème de Lebesgue, il s'ensuit que

$$\frac{1}{\eta} \int_0^\eta f_n(\tau) d\tau = 1 - \frac{\sin(2\pi\eta a_n)}{2\pi\eta a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui implique que  $a_n \rightarrow 0$ , comme attendu. □

Maintenant que nous avons prouvé ce théorème, la question naturelle est de savoir si nous pouvons déterminer la nature de la loi limite comme dans le cas classique (cf. Section 1.3.1 et Théorème 1.13). Le résultat suivant répond complètement à cette question.

**Proposition 2.4.** *Dans le Théorème 2.1, la loi limite est pure. De plus, elle est atomique si, et seulement si, il existe un entier  $J \geq 0$  tel que  $f(dq^j) = 0$  pour tous  $j \geq J$ ,  $0 \leq d < q$ .*

3. Ce résultat est prouvé grâce au Lemme 2.3 énoncé après cette preuve.

La démonstration de ce résultat découle en grande partie du Théorème 1.11 (regroupant des résultats de Jessen et Wintner [28] et de Lévy [36]) et s'inspire de la Proposition 2.4 s'inspire de celle de la proposition 3 de [3], résultat plus général que nous utiliserons également dans le troisième chapitre (cf. Proposition 3.14).

*Démonstration.* La loi limite est égale au produit de convolution infini

$$\ast_{j \geq 0} F_j$$

où  $F_j$  est la fonction de répartition atomique définie par

$$F_j(z) = \frac{1}{q} \sum_{\substack{0 \leq d < q \\ f(dq^j) \leq z}} 1 \quad (z \in \mathbb{R}).$$

Ainsi, d'après le Théorème 1.11, la loi limite est pure et elle est discrète si, et seulement si,

$$(2.7) \quad \forall j \geq 0, s_j \neq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq 0} (1 - s_j) < \infty.$$

Si on suppose qu'il existe un entier  $J \geq 0$  tel que  $f(dq^j) = 0$  pour tous  $j \geq J$ ,  $0 \leq d < q$ , alors  $s_j = 1$  pour tout  $j \geq J$  et (2.7) est immédiatement vérifiée.

Réciproquement, supposons que (2.7) est vraie. Puisque cette condition implique la convergence de la suite  $(s_j)$  vers 1, il existe un entier naturel  $J$  tel que  $1 - s_j \leq 1/(2q)$  pour tout entier  $j \geq J$ . Puisque  $s_j \in \{0, 1/q, \dots, 1 - 1/q, 1\}$ , nous en déduisons  $s_j = 1$  ( $j \geq J$ ). Ainsi, nous avons les égalités  $s_j = F_j(0) - F_j(0^-) = 1$  et nous en déduisons que les fonctions de répartition  $F_j$  pour tout entier  $j \geq J$  sont toutes des fonctions sauts en 0 (on rappelle que  $f(0) = 0$ ). Nous avons donc bien  $f(dq^j) = 0$  pour tous  $j \geq J$ ,  $0 \leq d < q$ . □

**Exemple 2.5.** *La fonction  $q$ -additive*

$$v(n) = \sum_{j \geq 0} \frac{e_j(n)}{q^{j+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

définit la suite de van der Corput (cf. [14] et [34]) et vérifie les hypothèses du Théorème 2.1. Nous pouvons alors prouver que la loi limite de cette suite est la distribution uniforme sur  $[0, 1]$  en calculant sa fonction caractéristique limite (cf. Section 2.5.1).

Grâce à la Proposition 2.4, nous allons pouvoir prouver une version effective du Théorème 2.1 en séparant en deux cas selon la nature de la loi limite.

## 2.2 Cas discret

Soit  $f$  une fonction  $q$ -additive à valeurs réelles vérifiant les hypothèses du théorème d'Erdős-Wintner et nous supposons que la loi limite est purement discrète.

**Proposition 2.6.** *Soit  $f$  une fonction  $q$ -additive possédant une loi limite discrète et  $J$  un entier naturel vérifiant le critère de la Proposition 2.4.  $f$  est alors  $q^J$ -périodique et on a l'estimation (optimale)*

$$\|F_N - F\|_\infty \ll \frac{1}{N}.$$

Ce résultat provient immédiatement de l'observation suivante.

**Proposition 2.7.** *Soit  $g$  une fonction arithmétique  $T$ -périodique. Alors  $g$  admet une loi limite et si on désigne par  $F$  sa fonction de répartition limite, on a la majoration (optimale)*

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{T}{N}.$$

*Démonstration.* Si nous écrivons  $N = Td_N + r_N$  avec  $0 \leq r_N < T$ , il suit par périodicité de  $f$

$$(2.8) \quad NF_N(z) = Td_N F_T(z) + r_N F_{r_N}(z).$$

Ainsi nous obtenons l'égalité pour tout nombre réel  $z$

$$F_N(z) = \left(1 - \frac{r_N}{N}\right) F_T(z) + \frac{r_N}{N} F_{r_N}(z) = F_T(z) + O\left(\frac{T}{N}\right).$$

En faisant tendre  $N$  vers l'infini, on en déduit que  $f$  admet une loi limite où  $F = F_T$  et qu'on a

$$\|F_N - F\|_\infty \ll \frac{T}{N}.$$

Nous pouvons également remarquer que cette majoration est optimale, dans le sens où, si  $r_N = 0$ , alors  $F = F_N$  et si  $r_N \neq 0$ , alors  $\|F_{r_N} - F_T\|_\infty > 0$  et l'égalité (2.8) implique

$$\|F_N - F\|_\infty \gg \frac{1}{N}.$$

□

*Démonstration de la Proposition 2.6.* Nous savons que ce cas ne peut se produire que si, et seulement si, il existe un entier  $J \in \mathbb{N}$  tel que  $f(dq^j) = 0$  pour tout  $j \geq J$  et pour  $d \in \{1, \dots, q-1\}$ . Cette hypothèse implique que  $f$  est  $q^J$ -périodique et la Proposition 2.7 permet de conclure. □

## 2.3 Cas continu

Soit  $f$  une fonction  $q$ -additive réelle telle que  $f(dq^j) \neq 0$  une infinité de fois. Nous posons  $L_N := \ln N / \ln q$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) et

$$\varepsilon_{1,N} := \sum_{j > L_N} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j), \quad \varepsilon_{1,N}^* := \sum_{j > L_N} \sum_{1 \leq d < q} |f(dq^j)| \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2,N} := \sum_{j > L_N} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)^2.$$

Puisque  $f$  vérifie les hypothèses du Théorème 2.1, les restes  $\varepsilon_{1,N}$  et  $\varepsilon_{2,N}$  tendent vers 0, mais en général  $\varepsilon_{1,N}^* = \infty$ .

Nous rappelons que  $Q_F$  désigne la fonction de concentration d'une fonction  $F$  (cf. Section 1.3.2 pour plus de précisions).

De plus, pour tous  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $T \geq 1$  nous définissons le réel  $h_T := \ln(T \ln T) / \ln q$ , ainsi que les deux sommes

$$\eta_N(T) := \sum_{L_N - h < j \leq L_N} \sum_{1 \leq d < q} |f(dq^j)| \quad \text{et} \quad \psi_N(\tau) := \frac{8}{q^2} \sum_{j \leq L_N} \sum_{1 \leq d < q} \left\| \frac{\tau f(dq^j)}{2\pi} \right\|^2$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la distance à l'ensemble des entiers.



**Théorème 2.8.** Soit  $f$  une fonction  $q$ -additive réelle telle que les deux séries (2.1) convergent et que l'on ait  $f(dq^j) \neq 0$  pour une infinité de valeurs du couple  $(d, j)$  ( $j \geq 0, 0 \leq d < q$ ). Pour tout nombre réel  $T \geq 1$  et pour tout entier naturel  $N \geq 1$  vérifiant  $h_T \leq L_N$ , on a

$$(2.9) \quad \|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \eta_N(T) + \int_{1/T}^T \min \left( \frac{1}{1+\tau}, |\varepsilon_{1,N}| + \tau \varepsilon_{2,N} \right) e^{-\psi_N(\tau)} d\tau,$$

où la constante implicite dépend de  $q$ .

De plus, si la première série de (2.1) est absolument convergente, alors l'expression  $|\varepsilon_{1,N}| + \tau \varepsilon_{2,N}$  peut être remplacée par  $\varepsilon_{1,N}^*$ .

**Remarques 2.9.** (i) Même si le reste  $\varepsilon_{1,N}^*$  ne tend pas vers 0 (i.e. que nous n'avons pas de convergence absolue), nous pourrions toujours choisir  $T = T_N$  tendant suffisamment lentement vers l'infini tel que  $\eta_N(T_N) \rightarrow 0$  (comme tous les autres membres de (2.9)). Pour s'en rendre compte, il suffit d'appliquer deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la somme  $\eta_N$  afin d'obtenir la majoration suivante, pour tout nombre réel  $T \geq 1$  et pour tout entier naturel  $N \geq 1$  vérifiant  $h_T \leq L_N$

$$\eta_N(T) \ll_q \sqrt{h_T} \sum_{j > L_N - h_T} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)^2 \ll_q \sqrt{\ln T} \sum_{j > L_N - h_T} \sum_{1 \leq d < q} f(dq^j)^2.$$

Ainsi, nous pourrions toujours choisir  $T = T_N$  tendant suffisamment lentement vers l'infini tel que  $\eta_N(T_N) \rightarrow 0$ .

(ii) La minoration (1.11) implique que le membre de droite de (2.9) est  $\gg 1/T$ .

(iii) Dans les hypothèses du théorème précédent, nous avons trivialement

$$\psi_N(\tau) \geq \frac{2\tau^2}{\pi^2 q^2} \sum_{(d,j) \in S(\tau), j \leq L_N} f(dq^j)^2$$

où l'on a posé  $S(\tau) := \{(d, j) \in \{1, \dots, q-1\} \times \mathbb{N} : |f(dq^j)| \leq \pi/|\tau|\}$  ( $\tau > 0$ ). Cette minoration est plus maniable, mais insuffisante dans certains cas, comme celui de la fonction 2-additive  $f(2^j) = \gamma^j$ , où  $0 < \gamma < 1$ . Toutefois, cette minoration est utile pour traiter certains exemples, comme celui de la fonction  $q$ -additive  $f(dq^j) = j^{-\alpha}$  où  $\alpha > 1$  (cf. Section 2.5.2).

Dans la Section 1.3.2, nous avons présenté quelques résultats permettant de majorer les fonctions de concentration. Dans le cas des fonctions  $q$ -additives, nous pouvons obtenir facilement une majoration de  $Q_F$ .

**Proposition 2.10.** Soit  $f$  une fonction  $q$ -additive réelle admettant une loi limite, dont la fonction de répartition limite est donnée  $F$ . On a alors

$$(2.10) \quad Q_F \left( \frac{1}{T} \right) \ll \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\psi_N(\tau)} d\tau \ll \frac{1}{T} \int_0^T \exp \left( -\frac{2\tau^2}{\pi^2 q^2} \sum_{(d,j) \in S(\tau), j \leq L_N} f(dq^j)^2 \right) d\tau \quad (T > 0).$$

Cette majoration est immédiate en utilisant les notations du Théorème 2.8 et en combinant l'estimation (1.10) avec la majoration issue de (2.5).

Il est aussi intéressant d'avoir des versions effectives plus simples et qui réfèrent explicitement aux deux séries apparaissant dans le Théorème 2.1.

**Corollaire 2.11.** *Soit  $f$  une fonction  $q$ -additive réelle telle que les deux séries (2.1) convergent et que l'on ait  $f(dq^j) \neq 0$  pour une infinité de valeurs du couple  $(d, j)$  ( $j \geq 0, 0 \leq d < q$ ). Pour tout nombre réel  $T \geq 1$  vérifiant  $h_T \leq L_N$ , on a*

$$(2.11) \quad \|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \eta_N(T) + T |\varepsilon_{1,N}| + T^2 \varepsilon_{2,N},$$

où la constante implicite dépend de  $q$ . De plus, si la première série de (2.1) est absolument convergente, alors les trois derniers termes précédents peuvent être remplacés par  $T \varepsilon_{1,N}^*$ .

En particulier, on obtient

$$(2.12) \quad \|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T |\varepsilon_{1,N}| + T \sqrt{\varepsilon_{2,N}(T) \ln T},$$

où la constante implicite dépend encore de  $q$ .

*Démonstration.* À partir du Théorème 2.8, il suffit de majorer trivialement l'exponentielle apparaissant dans l'intégrale par 1 et le minimum par  $|\varepsilon_{1,N}| + \tau \varepsilon_{2,N}$  pour obtenir (2.11).

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au deuxième terme de (2.11) et l'estimation  $T^2 \varepsilon_{2,N} \ll T \sqrt{\varepsilon_{2,N}} \leq T \sqrt{h} \sqrt{\varepsilon_{2,N}(T)}$ , nous en déduisons (2.12). □

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 2.8.

*Démonstration.* L'inégalité Berry-Esseen fournit une estimation quantitative de l'approximation de  $F$  par  $F_N$ . Pour chaque  $T > 0$ , nous avons

$$(2.13) \quad \|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + \int_{-T}^T \left| \frac{\varphi_N(\tau) - \varphi(\tau)}{\tau} \right| d\tau,$$

où nous avons défini

$$\varphi_N(\tau) := \frac{1}{N} \sum_{n < N} g_\tau(n).$$

Comme dans la preuve du Théorème 2.1, nous pouvons montrer par récurrence

$$\varphi_{q^k}(\tau) = \prod_{0 \leq j < k} \frac{1}{q} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < q} g_\tau(dq^j) \right) \quad (k \geq 0).$$

Nous voulons utiliser l'estimation  $\varphi_N(\tau) = 1 + O(\tau)$  (uniformément quand  $N \rightarrow \infty$ ) et pour prouver cette relation, avec la notation introduite dans la preuve du Théorème 2.1 à la page 69, nous posons

$$M_q(N) := \sum_{0 \leq j \leq \ln N / \ln q} m_{j,q}, \quad D_q^2(N) := \sum_{0 \leq j \leq \ln N / \ln q} (\sigma_{j,q}^2 - m_{j,q}^2).$$

Nous utiliserons la propriété générale suivante (cf. Théorème 9.3.2 de [13]), qui peut être considérée comme un analogue de la célèbre inégalité de Turán-Kubilius (cf. Théorème III.3.1 de [44]) relative au cas classique traité au Chapitre 1.

**Théorème 2.12.** *Soit  $f$  une fonction  $q$ -additive réelle. On a alors*

$$\frac{1}{N} \sum_{n < N} (f(n) - M_q(N))^2 \leq 2D_q^2(N).$$

Ainsi, pour établir que  $\varphi_N(\tau) = 1 + O(\tau)$  (uniformément quand  $N \rightarrow \infty$ ), nous partons de sa définition et en appliquant successivement l'estimation  $e^{iy} = 1 + O(|y|)$  ( $y \in \mathbb{R}$ ), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Théorème 2.12, nous avons

$$\begin{aligned} \varphi_N(\tau) - 1 &\ll \frac{|\tau|}{N} \sum_{n < N} |f(n)| \\ &\ll |\tau| \left( \frac{1}{N} \sum_{n < N} |f(n) - M_q(N)| + |M_q(N)| \right) \\ &\ll |\tau| \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \sum_{n < N} (f(n) - M_q(N))^2 \right)^{1/2} + |M_q(N)| \right) \\ &\ll |\tau| (|D_q(N)| + |M_q(N)|) \\ &\ll |\tau|, \end{aligned}$$

où la dernière majoration vient du fait que  $f$  vérifie les hypothèses du Théorème 2.1 et donc que  $(D_q(N))_N$  et  $(M_q(N))_N$  convergent. En faisant tendre  $N$  vers l'infini, nous avons alors aussi  $\varphi(\tau) = 1 + O(\tau)$ , ce qui implique pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$

$$(2.14) \quad \left| \frac{\varphi_N(\tau) - \varphi(\tau)}{\tau} \right| \ll 1.$$

Nous utiliserons cette estimation pour les petites valeurs de  $|\tau|$ .

Nous évaluons maintenant la différence  $\varphi_N(\tau) - \varphi(\tau)$  lorsque  $|\tau|$  n'est pas trop proche de 0 en utilisant l'inégalité

$$(2.15) \quad |\varphi_N(\tau) - \varphi(\tau)| \leq \left| \varphi_N(\tau) - \varphi_{q^{\mathcal{L}_N+1}}(\tau) \right| + \left| \varphi_{q^{\mathcal{L}_N+1}}(\tau) - \varphi(\tau) \right|.$$

où  $\mathcal{L}_N := \lfloor \ln N / \ln q \rfloor$  est la longueur de la décomposition  $q$ -adique de  $N$ . Nous utiliserons parfois la notation  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_N$  afin d'alléger les formules. Pour majorer le premier terme, nous utilisons le résultat suivant.

**Proposition 2.13.** *Pour toute fonction  $q$ -multiplicative  $g$  telle que  $|g(n)| \leq 1$  ( $n \geq 0$ ) et pour tout  $h \geq 1$ , nous avons pour tout entier  $N \geq q^h$*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(n) - \prod_{j \leq \mathcal{L}_N} \frac{1}{q} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < q} g(dq^j) \right) \right| \leq \frac{2}{q^{h-1}} + 2\sqrt{2} \sum_{\mathcal{L}_N - h < j \leq \mathcal{L}_N} \max_{1 \leq d \leq q-1} \sqrt{1 - \operatorname{Re} g(dq^j)}.$$

La preuve de cette majoration reprend quasiment les mêmes idées que la proposition 6 de [12], affirmant

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(n) - \prod_{j \leq \mathcal{L}_N} \frac{1}{q} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < q} g(dq^j) \right) \right| \leq \frac{2}{q^{h-1}} + 2 \left( 2h \sum_{\mathcal{L}_N - h < j \leq \mathcal{L}_N} \max_{1 \leq d \leq q-1} (1 - \operatorname{Re} g(dq^j)) \right)^{1/2}$$

mais cette dernière est un cas particulier de la Proposition 2.13, puisqu'il suffit d'appliquer l'inégalité Cauchy-Schwarz pour l'obtenir.

En utilisant la Proposition 2.13 dans notre cas avec  $g = g_\tau$ , nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition 2.14.** *Pour tout  $h \geq 1$ , on a*

$$\left| \varphi_N(\tau) - \varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau) \right| \leq \frac{2}{q^{h-1}} + 2\sqrt{2} \sum_{\mathcal{L}_N - h < j \leq \mathcal{L}_N} \max_{1 \leq d \leq q-1} \sqrt{1 - \cos(\tau f(dq^j))}.$$

Finalement, en utilisant l'inégalité  $1 - \cos \vartheta \leq \vartheta^2/2$  ( $\vartheta \in \mathbb{R}$ ), on obtient, pour tous  $h \geq 1$  et  $N \geq 2^h$

$$(2.16) \quad \left| \varphi_N(\tau) - \varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau) \right| \ll \frac{1}{q^h} + |\tau| \eta_N(T).$$

Pour majorer le dernier terme de (2.15), nous utilisons la majoration suivante

$$(2.17) \quad \left| \varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau) \right| \leq e^{-\psi_N(\tau)},$$

qui se prouve de la même manière que la seconde majoration issue de (2.5) et ce qui nous donne

$$\frac{\left| \varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau) - \varphi(\tau) \right|}{|\tau|} \leq \frac{\left| 1 - \varphi(\tau)/\varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau) \right|}{|\tau|} e^{-\psi_N(\tau)}.$$

De plus, pour majorer la quantité  $\left| 1 - \varphi(\tau)/\varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau) \right|$ , nous avons deux possibilités. D'une part, nous avons la majoration triviale  $\left| 1 - \varphi(\tau)/\varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau) \right| \leq 2$ , mais aussi  $\left| 1 - \varphi(\tau)/\varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau) \right| = O(\tau)$  ( $\tau \rightarrow 0$ ), ce qui implique donc

$$\frac{\left| 1 - \varphi(\tau)/\varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau) \right|}{|\tau|} \ll \frac{1}{1 + |\tau|}.$$

En regroupant tout cela, nous obtenons une première majoration possible

$$(2.18) \quad \frac{\left| \varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau) - \varphi(\tau) \right|}{|\tau|} \ll \frac{e^{-\psi_N(\tau)}}{1 + |\tau|}.$$

D'autre part, nous pouvons aussi évaluer directement  $\varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau)$ . En effet, nous savons que ce produit infini converge dans  $\mathbb{C}^*$ , donc en reprenant les notations (2.4) de la preuve du Théorème 2.1 et en reportant les évaluations  $e^{iu} = 1 + iu + O(u^2)$  avec  $u \in \mathbb{R}$  et  $1 + z = \exp(z + O(z^2))$  pour  $|z| \leq 1/2$ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau)} &= \prod_{j > \mathcal{L}} \frac{1}{q} \sum_{0 \leq d < q} g_\tau(dq^j) \\ &= \prod_{j > \mathcal{L}} (1 + i\tau m_{j,q} + O(\tau^2 \sigma_{j,q}^2)) \\ &= \exp\left(\frac{i\tau \varepsilon_{1,N}}{q} + O_q(\tau^2 \varepsilon_{2,N})\right) \\ &= \exp(O_q(|\tau \varepsilon_{1,N}| + \tau^2 \varepsilon_{2,N})) \quad (\tau \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Puisque le membre de gauche est majoré en module par 1, nous avons alors l'estimation, pour tout  $|\tau| \leq T$

$$(2.19) \quad \left| \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_{q^{\mathcal{L}_{N+1}}}(\tau)} - 1 \right| \ll_q |\tau \varepsilon_{1,N}| + \tau^2 \varepsilon_{2,N}.$$

En combinant (2.17), (2.18) et (2.19), nous obtenons finalement

$$(2.20) \quad \frac{|\varphi_{q^{\mathcal{L}+1}}(\tau) - \varphi(\tau)|}{|\tau|} \ll_q \min \left( \frac{1}{1 + |\tau|}, |\varepsilon_{1,N}| + |\tau| \varepsilon_{2,N} \right) e^{-\psi_N(\tau)}.$$

En reportant (2.16) et (2.20) dans (2.15), nous obtenons pour tout  $\tau \neq 0$

$$(2.21) \quad \frac{|\varphi_N(\tau) - \varphi(\tau)|}{|\tau|} \ll_q \frac{1}{|\tau| q^h} + \eta_N(T) + \min \left( \frac{1}{1 + |\tau|}, |\varepsilon_{1,N}| + |\tau| \varepsilon_{2,N} \right) e^{-\psi_N(\tau)}.$$

Maintenant, nous pouvons majorer l'intégrale de (2.13), notée  $I$ . En effet, en se donnant un paramètre  $u \in ]0, 1[$  et en utilisant (2.14) pour  $|\tau| \leq u$ , puis (2.21) pour  $u < |\tau| \leq T$ , on obtient, pour tous  $h \geq 1$  et  $N \geq q^h$

$$I \ll_q u + \frac{\ln T}{q^h} + T \eta_N(T) + \int_u^T \min \left( \frac{1}{1 + \tau}, |\varepsilon_{1,N}| + \tau \varepsilon_{2,N} \right) e^{-\psi_N(\tau)} d\tau.$$

En choisissant  $u = 1/T$  et  $h = \ln(T \ln T) / \ln q$ , de manière à ce que  $\ln T / q^h \ll 1/T$ , nous obtenons le résultat annoncé.

En outre, si la première série de (2.1) est absolument convergente, alors la preuve reste la même hormis l'estimation (2.19), puisque nous écrivons, pour  $0 < |\tau| \leq T$ ,

$$\left| \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_{q^{\mathcal{L}+1}}(\tau)} - 1 \right| = \left| \prod_{j>\mathcal{L}} \frac{1}{q} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < q} g_\tau(dq^j) \right) - 1 \right|$$

et en utilisant l'inégalité  $|e^{iu} - 1| \leq |u| (u \in \mathbb{R})$  et le Lemme 1.25, nous obtenons bien

$$\left| \prod_{j>\mathcal{L}} \frac{1}{q} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < q} g_\tau(dq^j) \right) - 1 \right| \leq \frac{1}{q} \sum_{j>\mathcal{L}} \sum_{0 \leq d < q} |\exp(i\tau f(dq^j)) - 1| \ll_q |\tau| \varepsilon_{1,N}^*.$$

□

## 2.4 Existence de densité et estimation de la fonction de concentration

Il est naturel de se demander si nous pouvons trouver une caractérisation au fait qu'une loi continue soit purement singulière ou non. La réponse à cette question semble tendre vers le négatif au vue de la nature de la loi limite associée à la fonction 2-additive définie par  $f(2^j) = \gamma^j$  ( $0 < \gamma < 1$  fixé), étudiée à la Section 2.5.3, mais nous connaissons de nombreuses conditions suffisantes.

Par exemple, nous avons le théorème suivant donnant une identité entre la dérivée de  $F$  et  $\varphi$ .

**Théorème 2.15.** *Si  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $F$  est presque partout dérivable et sa dérivée  $F'$  vérifie la relation*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itz} \varphi(\tau) dt.$$

Par conséquent, si nous pouvons montrer que la fonction caractéristique appartient à  $L^1(\mathbb{R})$ , alors nous saurons que la loi est absolument continue. Nous avons également un autre résultat similaire, qui nous sera utile et qui est énoncé par exemple dans l'exercice 258 de [44], résolu dans [47].

**Théorème 2.16.** *Soit  $F$  une fonction de répartition de fonction caractéristique  $\varphi$ . Si  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ , alors  $F$  est absolument continue.*

Dans ce cas, comme expliqué dans la Section 1.3.2, lorsque  $F$  possède une densité bornée, i.e. que la norme  $\|F'\|_\infty$  est majorée, alors nous avons l'ordre exacte  $Q_F(h) \asymp h$  ( $h \rightarrow 0^+$ ).

Toutefois, la majoration de  $Q_F$  n'est plus si immédiate lorsque la loi limite est continue purement singulière : comme dit précédemment, la Section 1.3.2 permet de donner quelques résultats pour estimer  $Q_F$ , mais nous pouvons également utiliser la majoration (2.10).

## 2.5 Exemples

### 2.5.1 Premier exemple

L'estimation du Théorème 2.8 ne semble pas très pertinente pour le moment quand la fonction  $q$ -additive décroît très rapidement vers 0. Par exemple, soit  $q \geq 2$  et  $(v(n))_n$  la suite de van der Corput, fonction  $q$ -additive définie par  $v(dq^j) = dq^{-j-1}$ . Cette fonction  $q$ -additive vérifie les hypothèses du Théorème 2.1 et puisque  $v(dq^j) = dq^{-(j+1)}$ , nous avons, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{q^{J+1}} \sum_{0 \leq n < q^{J+1}} e^{i\tau v(n)} = \frac{1}{q^{J+1}} \prod_{0 \leq j < J} \sum_{0 \leq d < q} e^{i\tau d/q^{j+1}} = \frac{1}{q^{J+1}} \sum_{0 \leq m < q^{J+1}} e^{i\tau m/q^{J+1}} = \frac{e^{i\tau} - 1}{q^{J+1} (e^{i\tau/q^{J+1}} - 1)}$$

où nous avons développé le produit afin d'obtenir la seconde égalité. Nous en déduisons donc

$$\varphi(\tau) = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1}{q^{J+1}} \sum_{0 \leq n < q^{J+1}} e^{i\tau v(n)} = \frac{e^{i\tau} - 1}{i\tau}.$$

Nous voyons ainsi que la fonction de répartition limite  $F$  est absolument continue, puisque  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  grâce au Théorème 2.16. De plus, nous reconnaissons la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$  et donc nous avons trouvé la distribution limite de la suite de van der Corput. Ceci est une observation déjà connue grâce à des résultats de discrédance, puisque nous pouvons prouver l'inégalité suivante (cf. [34, Théorème 3.5])

$$(2.22) \quad |F_N(z) - z| \leq \frac{\ln(N+1)}{N \ln 2} \quad (0 \leq z \leq 1),$$

ce qui implique que la suite des fonctions  $F_N$  tend ponctuellement vers la fonction linéaire  $z \mapsto z$  sur  $[0, 1]$ , qui est bien la fonction de répartition d'une loi uniforme sur  $[0, 1]$  (on a immédiatement  $F_N(z) = 0$  si  $z < 0$  et  $F_N(z) = 1$  si  $z > 1$ ). En particulier, nous avons l'égalité  $Q_F(h) = \min(h, 1)$  pour tout  $h > 0$ .

Nous appliquons maintenant notre théorème. Puisque  $(v(n))_n$  est une suite positive, nous utilisons la deuxième partie du Théorème 2.8. D'abord, nous avons  $Q_F(1/T) = 1/T$  pour  $T \geq 1$ . Deuxièmement, nous remarquons que

$$\varepsilon_{1,N}^* = \sum_{j > L_N} \sum_{1 \leq d < q} \frac{d}{q^{j+1}} \asymp \sum_{j > L_N} \frac{1}{q^j} \asymp q^{-L_N} \asymp \frac{1}{N};$$

$$\eta_N(T) \asymp \sum_{L_N - h < j \leq L_N} \frac{1}{q^j} \asymp q^{h-L_N} \asymp \frac{q^h}{N}.$$

Puisque nous avons  $q^h \asymp_q T \ln T$  par définition de  $h$ , nous obtenons alors pour tout nombre réel  $T \geq 1$  et tout entier  $N \geq 1$  tels que  $h_T \leq L_N$

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{T} + \frac{T q^h}{N} + \frac{T}{N} \asymp \frac{1}{T} + \frac{T^2 \ln T}{N}.$$

En prenant le choix quasi-optimal  $T = N^{1/3}$ , nous en déduisons

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{\ln N}{N^{1/3}}.$$

### 2.5.2 Deuxième exemple

Nous choisissons maintenant une fonction qui ne décroît pas trop rapidement vers 0. Soient  $q \geq 2$  et  $f$  la fonction  $q$ -additive définie par  $f(d) = 0$  et  $f(dq^j) := j^{-\alpha}$  ( $\alpha > 1$ ) pour tout  $j \geq 1$  et  $d \in \{1, \dots, q-1\}$ , qui vérifie les hypothèses du théorème d'Erdős-Wintner (les raisonnements sont quasiment similaires si la fonction  $f$  vérifiait  $f(dq^j) \asymp j^{-\alpha}$ ).

De plus, nous avons, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |\varphi(\tau)|^2 &= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} \left| 1 + \sum_{1 \leq d < q} \exp\left(\frac{d\tau}{j^\alpha}\right) \right|^2 = \prod_{j=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{2(q-1)}{q^2} \left( 1 - \cos\left(\frac{\tau}{j^\alpha}\right) \right) \right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{2(q-1)}{q^2} \sum_{j > |\tau|^{1/\alpha}} \left( 1 - \cos\left(\frac{\tau}{j^\alpha}\right) \right)\right). \end{aligned}$$

Si  $j > |\tau|^{1/\alpha}$ , alors  $0 < |\tau| j^{-\alpha} < 1$  et donc il existe une constante absolue  $c > 0$  telle que

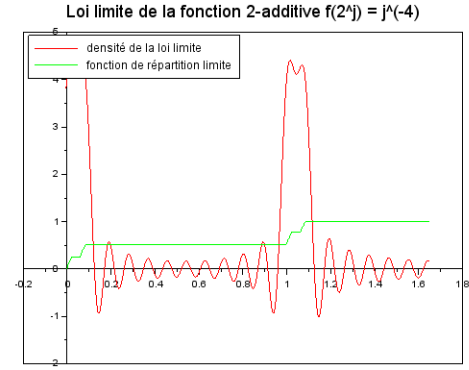
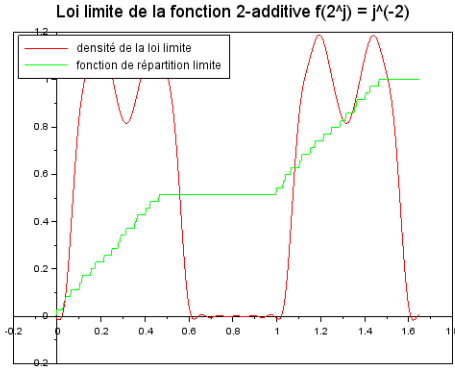
$$\cos\left(\frac{\tau}{j^\alpha}\right) \geq 1 - \frac{c\tau^2}{j^{2\alpha}}.$$

Ainsi, nous obtenons

$$|\varphi(\tau)| \leq \exp\left(-\frac{2c(q-1)\tau^2}{q^2} \sum_{j > |\tau|^{1/\alpha}} j^{-2\alpha}\right) \leq \exp(-C|\tau|^{1/\alpha}),$$

où  $C > 0$  est une constante dépendante uniquement de  $q$ . Grâce au Théorème 2.15, nous savons alors que la loi limite de  $F$  possède une densité.

Les graphiques suivants permettent de visualiser la densité et la fonction de la répartition de la loi limite de  $f$  pour  $\alpha = 2$  et  $\alpha = 4$ .



Nous pouvons maintenant appliquer le Théorème 2.8. En utilisant les notations introduites dans ce dernier, nous avons  $S(\tau) = [(\tau/\pi)^{1/\alpha}; +\infty[$  : ainsi, pour tout  $\tau > 0$

$$\sum_{(d,j) \in S(\tau)} f(dq^j)^2 \geq \sum_{j \geq (\tau/\pi)^{1/\alpha}} \gg \tau^{-2+1/\alpha}.$$

Par conséquent, grâce à la majoration (2.10), nous en déduisons que  $Q_F(1/T) \ll 1/T$ , ce qui est son ordre exact. De plus, nous avons l'estimation

$$\eta_N(T) \asymp \sum_{L_N - h < j \leq L_N} j^{-\alpha} \asymp h L_N^{-\alpha} \asymp \frac{\ln T}{(\ln N)^\alpha},$$

ce qui implique que le second terme dans le Théorème 2.8 est majoré par la fraction  $T \ln T / (\ln N)^\alpha$ . En outre, nous remarquons

$$\varepsilon_{1,N}^* \asymp \sum_{j > L_N} j^{-\alpha} \asymp L_N^{1-\alpha} \asymp (\ln N)^{1-\alpha}$$

et pour tout  $\tau > 0$

$$\sum_{j \in S(\tau), j \leq L_N} f(dq^j)^2 = \sum_{(\tau/\pi)^{1/\alpha} \leq j \leq L_N} j^{-2\alpha} \gg (|\tau|^{-2+1/\alpha} - L_N^{-2\alpha+1}) \gg |\tau|^{-2+1/\alpha},$$

ce qui implique que le dernier terme dans le Théorème 2.8 est majoré par  $(\ln N)^{1-\alpha}$ . En combinant les résultats précédents, nous obtenons pour  $T, N \geq 1$  tels que  $h_T \leq L_N$

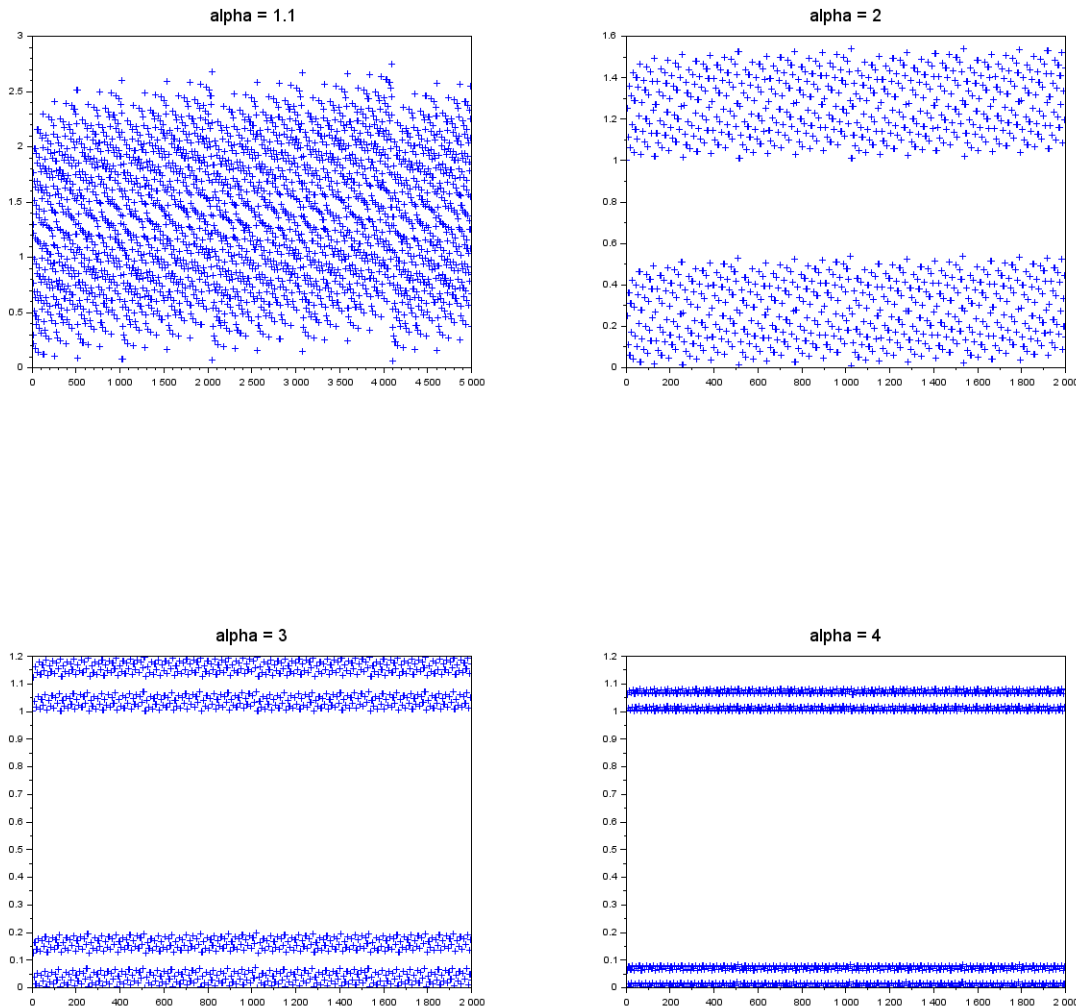
$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{T} + \frac{T \ln T}{(\ln N)^\alpha} + \frac{1}{(\ln N)^{\alpha-1}}.$$

Finalement, en prenant les choix optimaux  $T = (\ln N)^{\alpha-1}$  si  $1 < \alpha < 2$  et  $T = \sqrt{\ln_2 N} / (\ln N)^{\alpha/2}$  si  $\alpha \geq 2$ , nous en déduisons l'estimation

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \begin{cases} \frac{1}{(\ln N)^{\alpha-1}} & \text{si } 1 < \alpha < 2, \\ \frac{\sqrt{\ln_2 N}}{(\ln N)^{\alpha/2}} & \text{si } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

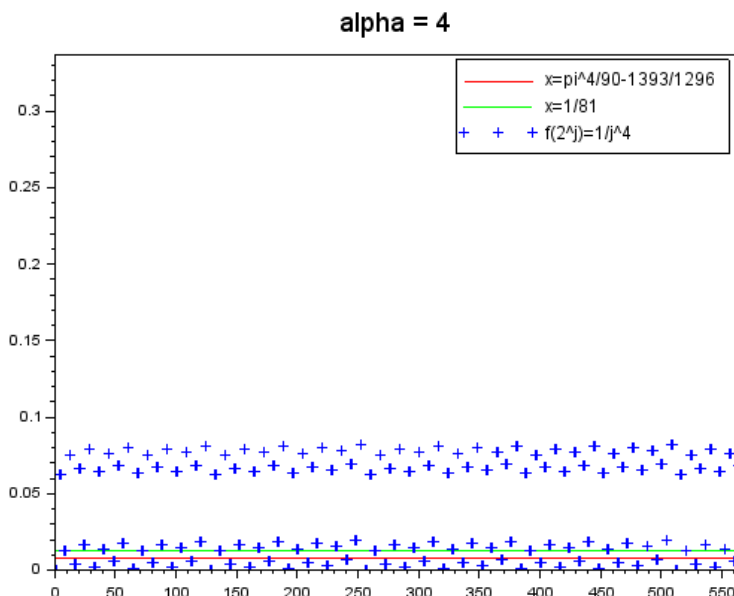


Le reste de cet exemple sera destiné à s'intéresser à un phénomène apparaissant sur le graphique de  $f$  pour  $q = 2$  lorsqu'on fait croître  $\alpha$ . En effet, nous pouvons voir apparaître des bandes disjointes comme l'illustrent les graphiques suivants.



### 2.5.2.1 Nombre de bandes

Il n'est pas vraiment facile de voir que les croix composant les quatre bandes bleues de la dernière figure sont en réalité également divisées en deux parties et donc que nous avons en réalité huit bandes distinctes : par exemple, la bande la plus basse est divisée en deux (voir graphique ci-dessous) par les lignes  $\{x = \zeta(4) - 1 - 2^{-4} - 3^{-4}\}$  (en rouge), où  $\zeta$  désigne la fonction zêta de Riemann, et  $\{x = 3^{-4}\}$  (en vert) i.e. les lignes  $\{x = \pi^4/90 - 1393/1296\}$  et  $\{x = 1/81\}$ . Entre ces deux lignes horizontales et sur la ligne rouge, il n'y a aucune croix bleue et il n'en existe qu'une seule sur la ligne verte, qui est celle associée à  $n = 9$  (en raison de l'équivalence  $f(n) = 3^{-4} \Leftrightarrow n = 9$ ).



Nous allons maintenant étudier le nombre de bandes suivant la valeur de  $\alpha$ . Pour ce faire, nous posons  $R_n(z) := \zeta(z) - H_n(z) := \zeta(z) - \sum_{1 \leq j \leq n} j^{-z}$  (avec la convention  $H_0(z) := 0$ ) pour tout nombre réel  $z > 1$  et nous définissons les suites  $u_n := (\ln 2)/\ln(1 + 1/n)$  pour tout  $n \geq 1$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  par  $v_0 := 1$  et

$$v_n := \inf \{z \geq u_n : R_n(z) < n^{-z}\}.$$

Nous pouvons remarquer que nous avons les bornes suivantes :  $v_1 \in (1.72, 1.73)$ ,  $v_2 \in (2.42, 2.43)$ ,  $v_3 \in (3.11, 3.12)$ ,  $v_4 \in (3.81, 3.82)$ , etc. De plus, les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ne semblent pas être égales, du moins pour les premiers termes, mais elles ont l'air d'être équivalentes en l'infini.

**Lemme 2.17.** (i) Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $v_n$  est bien définie, c'est-à-dire que l'ensemble qui apparaît dans la définition de  $v_n$  n'est pas vide.

(ii) Pour tout  $n \geq 1$ , nous avons l'expression alternative  $v_n = \inf \{y \geq u_n : t \geq y \Rightarrow R_n(t) < n^{-t}\}$ .

(iii) Pour tout  $n \geq 0$ , nous avons l'encadrement  $2n/3 + 1 \leq v_n \leq n + 1$ .

(iv) La suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est croissante et tend vers  $+\infty$ .

*Démonstration.* Prouvons d'abord (i). Pour tout entier  $m, n \geq 1$  et tout réel  $z > 1$ , en appliquant la formule d'Euler-Maclaurin à la fonction  $x \mapsto x^{-z}$  sur l'intervalle  $[1, n]$ , nous avons

$$H_n(z) = \frac{1 - n^{1-z}}{z-1} + \frac{1 + n^{-z}}{2} + \sum_{2 \leq k \leq m} b_k \frac{z^{(k-1)}}{k!} (1 - n^{-z-k+1}) - \frac{z^{(m)}}{m!} \int_1^n \frac{B_m(\{x\})}{x^{z+m}} dx,$$

où  $z^{(m)} := z(z+1)\dots(z+m-1)$ ,  $\{\cdot\}$  est la fonction partie fractionnaire, les  $B_m$  sont les polynômes de Bernoulli et  $b_k := B_k(0)$  les nombres de Bernoulli. En faisant tendre  $n$  vers l'infini dans l'égalité

précédente, nous obtenons

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} + \sum_{2 \leq k \leq m} b_k \frac{z^{(k-1)}}{k!} - \frac{z^{(m)}}{m!} \int_1^\infty \frac{B_m(\{x\})}{x^{z+m}} dx.$$

En soustrayant cette identité avec l'égalité précédente, nous avons alors

$$(2.23) \quad n^{-z} - R_n(z) = \frac{3n^{-z}}{2} - \frac{n^{1-z}}{z-1} + \sum_{2 \leq k \leq m} \frac{b_k}{k!} z^{(k-1)} n^{-z-k+1} + \frac{z^{(m)}}{m!} \int_n^\infty \frac{B_m(\{x\})}{x^{z+m}} dx.$$

Si on prend  $m = 1$  dans (2.23), puisque  $B_1(\{x\}) = \{x\} - 1/2$ , on a

$$v_n = \inf \left\{ z \geq u_n : \frac{3n^{-z}}{2} - \frac{n^{1-z}}{z-1} + z \int_n^\infty \frac{\{x\} - 1/2}{x^{z+1}} dx > 0 \right\}.$$

De plus, nous avons la majoration

$$(2.24) \quad \left| \int_n^\infty \frac{\{x\} - 1/2}{x^{z+1}} dx \right| \leq \frac{1}{2z n^z},$$

ce qui nous donne

$$\left\{ z \geq u_n : R_n(z) < n^{-z} \right\} \supset \left\{ z \geq u_n : 1 - \frac{n}{z-1} > 0 \right\} = ]n+1, +\infty[ ,$$

ce qui implique que l'ensemble de gauche est non-vide and donc  $v_n$  est bien définie.

Le point (ii) provient du fait que la fonction  $z \mapsto R_n(z) - n^{-z}$  est strictement décroissante sur  $]1, +\infty[$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

Nous allons maintenant prouver (iii). En utilisant l'estimation (2.24) comme précédemment, nous obtenons

$$\inf \left\{ z \geq u_n : 2 - \frac{n}{z-1} > 0 \right\} \leq v_n \leq \inf \left\{ z \geq u_n : 1 - \frac{n}{z-1} > 0 \right\},$$

i.e.

$$\frac{n}{2} + 1 \leq v_n \leq n + 1.$$

Si on prend  $m = 2$  dans (2.23) et grâce à nouveau à la majoration (2.24), nous avons l'encadrement

$$\frac{2n}{3} + 1 \leq v_n \leq 6n - \frac{\sqrt{112n^2 - 24n + 1}}{2} + \frac{1}{2},$$

ce qui prouve (iii).

La preuve de (iv) est aussi très rapide, puisqu'on remarque, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$v_{n+1} = \inf \left\{ z \geq u_n : R_n(z) < 2(n+1)^{-z} \right\}$$

et qu'on a pour tout nombre réel  $z \geq u_n$ , l'inégalité  $2(n+1)^{-z} \leq n^{-z}$ . Ces deux observations prouvent la croissance de la suite  $(v_n)$ . Le point précédent implique directement que cette dernière tend vers  $+\infty$ .  $\square$

Pour tout entier  $n \geq 0$  et tout  $\alpha \in (v_n, v_{n+1}]$ , on peut remarquer que l'image de  $f$ , notée  $\text{Im}(f)$ , est divisée en un ensemble de  $2^n$  bandes de nombres distinctes. Pour être plus précis, nous remarquons que pour tous les entiers  $0 \leq i < j$ ,

$$(2.25) \quad f(i) = f(j) \iff (e_0(i) = 0 \text{ et } j = i + 1).$$

Ainsi, nous pouvons détailler un processus afin d'obtenir une expression explicite de l'ensemble des bandes qui contient l'image de la fonction  $f$ . Il suffit de supprimer les "doublons" décrits dans (2.25) de l'ensemble  $(f(m))_{0 \leq m \leq 2^{n+1}-1}$  et en ordonnant les valeurs restantes, nous créons un nouveau ensemble  $A_n \subset \text{Im}(f)$  dont les éléments sont notés  $a_1^{(n)} < \dots < a_{2^n}^{(n)}$ . Par exemple,  $a_1^{(n)} = 0$  et  $a_{2^n}^{(n)} = H_n(\alpha)$  pour tout entier  $n \geq 0$ .

**Proposition 2.18.** *Pour tout entier  $n \geq 0$  et  $\alpha \in (v_n, v_{n+1}]$ , nous avons l'inclusion*

$$\text{Im}(f) \subset \biguplus_{1 \leq \ell \leq 2^n} [a_\ell^{(n)}, a_\ell^{(n)} + R_n(\alpha)].$$

Si on désigne par  $V_n$  cette union disjointe d'intervalles, alors l'ensemble des bandes à l'étape  $n$  est exactement  $\mathbb{N} \times V_n$ .

*Démonstration.* Pour être plus compréhensible, nous fixons une étape  $n$  et nous notons  $a_\ell^{(n)} = a_\ell$ . Nous devons prouver deux choses : la non-intersection des intervalles et l'inclusion. Tout d'abord, pour tout  $\ell \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}$ , nous remarquons  $a_{\ell+1} - a_\ell \geq n^{-\alpha}$  et puisque  $\alpha \geq v_n$ , nous avons

$$a_{\ell+1} - (a_\ell + R_n(\alpha)) \geq n^{-\alpha} - R_n(\alpha) > 0,$$

ce qui implique  $a_\ell + R_n(\alpha) < a_{\ell+1}$ , qui est le résultat attendu. Soit maintenant  $x \in \text{Im}(f)$  : il existe un entier  $m \geq 0$  tel que

$$x = f(m) = \sum_{j \geq 1} \frac{e_j(m)}{j^\alpha} = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{e_j(m)}{j^\alpha} + \sum_{j \geq n+1} \frac{e_j(m)}{j^\alpha}.$$

Comme la première somme du membre de droite de la dernière égalité est un certain élément de  $A_n$ , noté  $a_\ell$ , et la seconde somme est strictement inférieure à  $R_n(\alpha)$ , nous avons  $x \in [a_\ell, a_\ell + R_n(\alpha)]$ .  $\square$

Grâce au point (iii) du Lemme 2.17, nous savons que  $v_n \asymp n$  ( $n \rightarrow \infty$ ), mais nous n'avons qu'extra-poler un équivalent pour cette suite, qui est le même que celui de la suite  $(u_n)$ .

**Conjecture 2.19.** *On a l'équivalence  $v_n \sim n \ln 2$  quand  $n$  tend vers l'infini.*

### 2.5.2.2 Construction des ensembles $V_n$

Chaque ensemble  $V_n$ , défini dans la Proposition 2.18, est différent suivant la valeur du réel  $\alpha \in (v_n, v_{n+1}]$ , même s'ils sont toujours composés de  $2^n$  bandes. Nous nous donnons donc une suite de réels  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  telle que  $\alpha_n \in (v_n, v_{n+1}]$  pour tout entier  $n \geq 0$ . On peut alors obtenir  $V_n$  par "similarité" en posant  $V_0 = [0, \zeta(\alpha_0))$  et

$$V_{n+1} = h_n(V_n) \uplus (h_n(V_n) + (n+1)^{-\alpha_{n+1}}),$$

où  $h_n$  est une homothétie dont le rapport  $r_n$  est donné par

$$r_n := \frac{R_{n+1}(\alpha_{n+1})}{R_n(\alpha_n)} = 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha_{n+1}} R_n(\alpha_{n+1})} < 1.$$

Nous signalons que si on suppose avoir choisi la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  aléatoirement, i.e. que chaque terme  $\alpha_n$  est vu comme une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $(v_n, v_{n+1}]$ , alors la largeur d'une bande à l'étape  $n$  est donnée par la variable aléatoire  $R_n(\alpha_n)$ .

### 2.5.2.3 Mesure de l'objet limite

Nous nous donnons à nouveau une suite de réels  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  comme précédemment et donc en particulier nous avons l'encadrement  $v_n < \alpha_n \leq v_{n+1}$ . Nous posons  $V := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$  : puisque  $a_0^{(n)} = 0$  pour tout  $n$ , alors  $0 \in V$ . En désignant par  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , nous avons  $\lambda(V_0) = \zeta(\alpha_0)$  et  $\lambda(V_{n+1}) = \lambda(\mathcal{T}_n(V_n)) = \lambda(V_n) - 2^n(n+1)^{-\alpha_{n+1}}$ . Grâce à cette relation de récurrence ou à la Proposition 2.18, nous en déduisons l'égalité  $\lambda(V_n) = 2^n R_n(\alpha_n)$ . Puisqu'on a l'estimation asymptotique  $v_n \asymp n$  (grâce au point (iii) du Lemme 2.17) et le développement asymptotique

$$R_n(\alpha_n) = \frac{1}{(\alpha_n - 1)n^{\alpha_n - 1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha_n}}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

nous en déduisons que la suite  $(\lambda(V_n))$  tend vers 0 et donc que  $V$  est un ensemble de mesure nulle, puisque tous les  $V_n$  contiennent  $V$ .

### 2.5.3 Troisième exemple : mesures de Cantor-Lebesgue

La fonction 2-additive  $f(2^j) = \gamma^j$  ( $0 < \gamma < 1$ ) vérifie les hypothèses du Théorème 2.8 et la loi limite de fonction de répartition  $F$  est continue (nous retrouvons la suite de van der Corput si  $\gamma = 1/2$ , étudiée dans la Section 2.5.1). De plus, la mesure limite  $\mu_\gamma$  de cette fonction est étroitement liée à la mesure  $\nu_\gamma$  du produit de convolution infini des mesures  $\frac{1}{2}(\delta_{-\gamma^n} + \delta_{\gamma^n})$  où  $\delta_a$  désigne la mesure de Dirac au point  $a$ ). En effet, la fonction caractéristique limite de  $f$  est donnée par

$$\Phi(\tau) = \prod_{j \geq 0} \left( \frac{1 + e^{i\tau\gamma^j}}{2} \right) \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$

qui est la fonction caractéristique du produit infini de convolution des mesures  $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_{\gamma^n})$ . De plus, nous avons la relation

$$\mu_\gamma(B) = \nu_\gamma\left(2B - \frac{1}{1-\gamma}\right)$$

pour tout ensemble borélien  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Afin d'illustrer la nature très erratique de  $\nu_\gamma$  (et donc de  $\mu_\gamma$ ), nous traduisons un paragraphe issu de [39] qui résume parfaitement la nature de cette loi selon les valeurs de  $\gamma$ .

« Kershner et Wintner (1935) ont observé que la loi  $\nu_\gamma$  est singulière pour  $\gamma \in (0, 1/2)$ , puisqu'elle est supportée sur un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue nulle (en fait,  $\nu_\gamma$  est la mesure Cantor-Lebesgue standard sur cet ensemble de Cantor). Wintner (1935) a remarqué que  $\nu_\gamma$  est uniforme sur  $[-2, 2]$  pour  $\gamma = 1/2$ , et pour  $\gamma = 2 - 1/k$  avec  $k \geq 2$  elle est absolument continue, avec une densité appartenant à la classe de fonctions  $\mathcal{C}^{k-2}(\mathbb{R})$ . Pour  $\gamma \in (1/2, 1)$ , le support de  $\nu_\gamma$  est l'intervalle  $[-(1-\gamma)^{-1}, (1-\gamma)^{-1}]$  et donc on pourrait supposer que  $\nu_\gamma$  est absolument continue pour toutes ces valeurs de  $\gamma$ . Cependant, Erdős (1939) a montré dans [18] que  $\nu_\gamma$  est singulière quand  $\gamma$  est la réciproque d'un nombre de Pisot (rappelons qu'un nombre de Pisot est un entier algébrique dont tous les conjugués sont de module strictement inférieur à 1). Cela donne un ensemble dénombrable fermé de valeurs de  $\gamma \in (1/2, 1)$  où  $\nu_\gamma$  est singulière. »

En particulier, nous en déduisons que  $\mu_{1/2}$  suit une loi uniforme sur  $[0, 2]$ .

Notre but est d'appliquer le Théorème 2.8, mais un problème survient lorsque nous devons majorer la fonction de concentration  $Q_F$ . Hormis le fait que la loi limite n'est pas toujours absolument continue, on

peut remarquer que la majoration (2.10) devient inutile, puisqu'elle ne permet d'obtenir que l'estimation triviale  $Q_F(h) \ll 1$  pour tout  $h > 0$ .

Un autre résultat, évoqué dans la Section 1.3.2, est l'inégalité de Kolmogorov-Rogozin. Si nous désignons par  $F_n$  la fonction de répartition de la distribution  $\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_{\gamma^n})$ , alors la fonction de répartition  $F$  de  $\mu_\gamma$  est égale au produit infini de convolution des  $F_n$  où

$$\forall z \in \mathbb{R}, F_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0, \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq z < \gamma^n, \\ 1 & \text{si } \gamma^n \leq z. \end{cases}$$

Puisque nous avons

$$Q_{F_j}(h) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < h \leq \gamma^j, \\ 1 & \text{si } h > \gamma^j, \end{cases}$$

et  $0 < h \leq \gamma^j \iff j \leq \ln_\gamma(h)$ , nous obtenons l'estimation

$$Q_F(h) \ll \sqrt{\frac{2 \ln(1/\gamma)}{\ln(1/h)}} \ll_\gamma \frac{1}{\sqrt{\ln(1/h)}} \quad (h > 0).$$

Cette méthode nous donne donc une première majoration possible, mais les deux preuves que nous présenterons seront plus précises et nous amènerons à démontrer le résultat suivant.

**Théorème 2.20.** *Soit  $f$  la fonction 2-additive définie par  $f(2^j) = \gamma^j$  ( $j \geq 0$ ) avec  $0 < \gamma < 1$ . Il existe alors une constante  $c(\gamma) > 0$  telle que*

$$\|F - F_N\|_\infty \ll_\gamma N^{-c(\gamma)} (\ln N)^{\ln(1/\gamma)/\ln 2}$$

pour un certain exposant  $c(\gamma) > 0$  (la constante implicite dépendant aussi de  $\gamma$ ).

En outre, si on a la majoration  $Q_F(t) \ll t$  ( $t > 0$ ) (par exemple si  $F$  possède une densité bornée), on peut choisir

$$c(\gamma) = \frac{\ln(1/\gamma)}{\ln(4/\gamma)}.$$

Nous pouvons remarquer que si nous choisissons  $\gamma = 1/2$ , nous retrouvons la même majoration que dans le premier exemple à propos de la suite de van der Corput pour  $q = 2$  dont la loi limite possède une densité bornée.

Plus généralement et comme écrit dans [39], Garsia [21] a trouvé le plus grand ensemble explicite de  $\gamma \in ]1/2, 1[$  connu à ce jour, pour lesquels  $\nu_\gamma$  est absolument continue et possède même une densité bornée. Les éléments de cet ensemble sont les conjugués de nombres algébriques appartenant à  $]1, 2[$  dont le polynôme minimal est unitaire, possède un coefficient constant égal à  $\pm 2$  et dont ses autres racines sont en dehors du cercle unité.

Afin de prouver le théorème précédent, nous allons démontrer qu'il existe une constante  $\eta'(\gamma) > 0$  telle que  $Q_F(h) \ll h^{\eta'(\gamma)}$  pour tout  $h > 0$ . Nous présentons deux méthodes : la première est fondée sur des majorations spécifiques à certaines intégrales et sur l'inégalité de Chernoff, alors que la seconde, due au professeur Tenenbaum, est plus directe et utilise différents produits de convolution de fonctions de répartition, reliés entre eux grâce aux propriétés de la fonction de concentration  $Q_F$ . La première

approche est plus compliquée et moins élégante, mais repose sur des techniques utiles dans d'autres contextes — en fait, nous avons adapté plusieurs idées de [5] et [43]. La deuxième méthode présente également une certaine souplesse.

Nous avons donc décidé de les inclure toutes les deux dans la présente thèse, même si la seconde méthode est plus courte, plus directe et qu'elle fournit une majoration explicite.

Nous conjecturons que la minoration de  $\|F - F_N\|_\infty$  est de la même forme que la majoration du théorème précédent — avec un exposant éventuellement différent pour le facteur logarithmique, i.e. de la forme  $N^{-C(\gamma)+o(1)}$  pour une certaine constante  $C(\gamma) > 0$ .

### 2.5.3.1 Première méthode

Nous désignons le noyau de Fejér par

$$w(z) := \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin z/2}{z/2} \right)^2.$$

Nous pouvons maintenant citer le lemme suivant (cf. lemme 2.9 de [44], cité lors de l'inégalité (1.10)) que nous utilisons comme point de départ de nos preuves.

**Proposition 2.21.** *Posons  $K_1 := w(1) > 0,146$  et  $K_2 := 1/(2\pi w(1/2)) < 1.022$ . Pour toute fonction de répartition  $F$ , de fonction caractéristique  $\varphi$ , nous avons, pour tout  $h > 0$*

$$(2.26) \quad K_1 h \int_{-1/h}^{1/h} |\varphi(\tau)|^2 d\tau \leq Q_F(h) \leq K_2 h \int_{-1/h}^{1/h} |\varphi(\tau)| d\tau$$

Nous remarquons que dans notre cas, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$

$$(2.27) \quad |\varphi(\tau)|^2 = \prod_{j \geq 0} \left( \frac{1 + \cos(\tau \gamma^j)}{2} \right) = \prod_{j \geq 0} \left( 1 - \frac{1 - \cos(\tau \gamma^j)}{2} \right).$$

Grâce au Théorème 2.27, nous avons

$$|\varphi(\tau)|^2 \leq \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{j \geq 0} (1 - \cos(\tau \gamma^j)) \right).$$

Par convexité, nous avons  $|\sin \pi z| \geq 2 \|z\|$  pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , où  $\|\cdot\|$  est la distance à l'ensemble des entiers. Ainsi,

$$\cos(\tau \gamma^j) \leq 1 - \frac{1}{2} \sin^2(\tau \gamma^j) \leq 1 - 2 \left\| \frac{\tau \gamma^j}{\pi} \right\|^2.$$

Nous obtenons donc

$$|\varphi(\tau)| \leq \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{j \geq 0} \left\| \frac{\tau \gamma^j}{\pi} \right\|^2 \right) =: \exp \left( -\frac{1}{2} T(\tau) \right).$$

et donc grâce à (2.26) nous avons, pour tout  $0 < h \leq \gamma$

$$(2.28) \quad Q_F(h) \leq 2 K_2 h \left( 1 + \int_1^{1/h} \exp \left( -\frac{1}{2} T(\tau) \right) d\tau \right).$$

En définissant  $\Gamma := 1/\gamma > 1$ , on remarque, pour  $0 < h \leq \gamma$

$$\begin{aligned} \int_1^{1/h} \exp\left(-\frac{1}{2}T(\tau)\right) d\tau &= \sum_{J \leq \frac{\ln(1/h)}{\ln \Gamma} - 1} \int_{\Gamma^J}^{\Gamma^{J+1}} \exp\left(-\frac{1}{2}T(\tau)\right) d\tau \\ &\leq \sum_{J \leq \frac{\ln(1/h)}{\ln \Gamma} - 1} \int_{\Gamma^J}^{\Gamma^{J+1}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j \leq J} \left\| \frac{\tau \gamma^j}{\pi} \right\|^2\right) d\tau. \end{aligned}$$

Maintenant, en faisant le changement de variables  $y = \gamma^J \tau$  dans l'intégrale précédente, puis le changement d'indice " $j \leftrightarrow J - j$ " dans la somme intérieure, nous avons, pour tout  $J \leq \frac{\ln(1/h)}{\ln \Gamma} - 1$

$$(2.29) \quad \int_1^{1/h} \exp\left(-\frac{1}{2}T(\tau)\right) d\tau \leq \sum_{J \leq \frac{\ln(1/h)}{\ln \Gamma} - 1} \Gamma^J \int_1^\Gamma \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j \leq J} \left\| \frac{y \gamma^j}{\pi} \right\|^2\right) dy.$$

Ainsi, en désignant par  $S_J(y)$  la somme intérieure, pour tout  $1 \leq y \leq \Gamma$  et  $J \leq \frac{\ln(1/h)}{\ln \Gamma} - 1$ , nous allons montrer qu'il existe deux constantes  $D_0, \eta > 0$  dépendantes de  $\gamma$  telles que

$$(2.30) \quad \int_1^\Gamma \exp\left(-\frac{1}{2}S_J(y)\right) dy \leq D_0 \exp(-\eta J).$$

Pour majorer l'intégrale précédente, nous devons d'abord prouver certains résultats intermédiaires (ces idées proviennent de [5] et [43]). Nous définissons la fonction *tri* par  $\text{tri}(x) := \max(1 - |x|, 0)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lemme 2.22.** *Pour tous réels  $u, \alpha$ , nous avons*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cos(u(t + \alpha)) dt = \cos(u\alpha) \times \text{tri}\left(\frac{u}{2}\right).$$

En particulier, pour tous  $u \geq 2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cos(u(t + \alpha)) dt = 0.$$

*Démonstration.* On remarque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cos(u(t + \alpha)) dt = \text{Re} \left( e^{iu\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 e^{iut} dt \right),$$

et donc nous devons rechercher la transformée de Fourier du carré du sinus cardinal, qui est la fonction triangulaire *tri*. En effet, nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{tri}(t) e^{-iut} dt = 2 \int_0^1 (1-t) \cos(ut) dt = \frac{2(1 - \cos(u))}{u^2} = \left(\frac{\sin(u/2)}{u/2}\right)^2$$

et ainsi grâce au théorème d'inversion de Fourier, nous obtenons

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 e^{2iut} dt = \text{tri}(u),$$

d'où le résultat. □



Nous définissons la fonction

$$f(z) := \frac{1}{12} - \|z\|^2 \quad (z \in \mathbb{R}).$$

Son développement en série de Fourier est donné par

$$f(z) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos(2\pi kz)}{k^2} := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(2\pi kz) \quad (z \in \mathbb{R}).$$

Soit  $H \geq 1$  et  $\beta \geq 2$  deux nombres entiers tel que

$$(2.31) \quad \Gamma^{4H} - 2H^\beta \Gamma^{3H} - 2\pi\Gamma^{2H} + 2\pi \geq 0.$$

Pour tout  $j \geq 0$ , nous définissons

$$n_j(\Gamma) = n_j := \begin{cases} \frac{(\Gamma-1)\Gamma^j}{\pi} & \text{si } \Gamma \geq 2, \\ \frac{\Gamma^j}{\pi} & \text{si } 1 < \Gamma < 2, \end{cases}$$

et nous posons, pour  $z \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}$

$$g(z) := \sum_{k=1}^{H^\beta} c_k \cos(2\pi kz) \quad \text{and} \quad U_m(z) := \sum_{\ell=Hm+1}^{H(m+1)} g(n_\ell z).$$

Pour tout nombre réel  $z$ , nous avons  $|g(z)| \leq 1/6$ , donc  $|U_m(z)| \leq H/6$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Nous posons ensuite

$$\xi = \xi(\Gamma) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma-1} & \text{si } \Gamma \geq 2, \\ 0 & \text{si } 1 < \Gamma < 2, \end{cases}$$

et pour un paramètre  $\lambda > 0$ , que nous choisirons plus tard, nous définissons

$$\chi_\varphi(\lambda, M) := \begin{cases} (\Gamma-1) \int_0^1 \exp\left(\frac{\lambda}{2} \sum_{j=0}^M \varphi(n_j(t+\xi))\right) dt & \text{si } \Gamma \geq 2, \\ \int_1^\Gamma \exp\left(\frac{\lambda}{2} \sum_{j=0}^M \varphi(n_j t)\right) dt & \text{si } 1 < \Gamma < 2, \end{cases}$$

où  $\varphi \in \{f, g\}$  and  $M \in \mathbb{N}$ .

Nous avons ainsi

$$(2.32) \quad \int_1^\Gamma \exp\left(-\frac{1}{2} S_J(y)\right) dy = \exp\left(-\frac{J+1}{24}\right) \chi_f(1, J).$$

Nous allons d'abord majorer  $\chi_f(\lambda, J)$  en majorant également  $\chi_g(\lambda, J)$ , puis prouver une inégalité entre  $\chi_f(1, J)$  et  $\chi_f(\lambda, J)$  pour obtenir une majoration pour  $I_J$  grâce à (2.30) et (2.32).

**Lemme 2.23.** *Il existe une constante  $C_0 > 0$  dépendant uniquement de  $\Gamma$  telle que pour tout entier naturel  $m$  et  $k \geq 1$ , nous avons*

$$(2.33) \quad \Xi_1(k) := \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2 \exp \left( \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^{k-1} U_{2m}(t + \xi) \right) dt \leq \pi \exp \left( \frac{\lambda^3 k H^3}{1728} + C_0 \lambda^2 k H \right)$$

et

$$(2.34) \quad \Xi_2(k) := \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2 \exp \left( \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^k U_{2m-1}(t + \xi) \right) dt \leq \pi \exp \left( \frac{\lambda^3 k H^3}{1728} + C_0 \lambda^2 k H \right),$$

où

$$C_0 := \frac{1}{720} + \frac{\sqrt{10}}{60 \pi^2} \left( \frac{2}{\Gamma^2 - 1} + \frac{\sqrt{6}}{3(\Gamma^{3/2} - 1)} \right).$$

De plus, (2.33) et (2.34) restent valables même si les blocs  $U_{2k-2}(t)$  et  $U_{2k-1}(t)$  (i.e. les derniers blocs dans les sommes apparaissant dans (2.33) et (2.34)) contiennent moins de  $H$  termes.

*Démonstration.* Pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , nous avons l'inégalité suivante

$$(2.35) \quad e^z \leq (1 + z + z^2) e^{|z|^3}.$$

En outre, nous avons

$$(2.36) \quad \sum_{m=0}^{k-1} |U_{2m}(t + \xi)|^3 \leq \sum_{m=0}^{k-1} \left| \frac{H}{6} \right|^3 = \frac{k H^3}{216}.$$

Grâce à (2.35) et (2.36), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Xi_1(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2 \prod_{m=0}^{k-1} \exp \left( \frac{\lambda U_{2m}(t + \xi)}{2} \right) dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2 \prod_{m=0}^{k-1} \left( \left( 1 + \frac{\lambda U_{2m}(t + \xi)}{2} + \left( \frac{\lambda U_{2m}(t + \xi)}{2} \right)^2 \right) \right) \\ &\times \exp \left( \frac{\lambda^3}{8} \sum_{m=0}^{k-1} |U_{2m}(t + \xi)|^3 \right) dt \\ &\leq \exp \left( \frac{\lambda^3 k H^3}{1728} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2 \prod_{m=0}^{k-1} \left( 1 + \frac{\lambda U_{2m}(t + \xi)}{2} + \frac{\lambda^2 U_{2m}^2(t + \xi)}{4} \right) dt. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la même idée que dans [43], on remarque que  $W_m(t)$  est la somme de fonctions trigonométriques dont les fréquences sont comprises entre  $n_{Hm}$  et  $2H^\beta n_{H(m+1)}$  telles que

$$(2.37) \quad U_m^2(t + \xi) \leq 4C_0 H + W_m(t).$$

En effet, nous avons

$$U_m^2(t + \xi) = \sum_{\ell=Hm+1}^{H(m+1)} g^2(n_\ell(t + \xi)) + 2 \sum_{\ell=Hm+1}^{H(m+1)} \sum_{j=\ell+1}^{H(m+1)} g(n_\ell(t + \xi))g(n_j(t + \xi))$$

et, pour  $Hm < l < j \leq H(m+1)$ ,

$$g^2(n_\ell(t+\xi)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{H^\beta} c_k^2$$

et

$$g(n_\ell(t+\xi))g(n_j(t+\xi)) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 < r, s \leq H^\beta \\ |n_j r - n_\ell s| < n_{Hm}}} c_r c_s \cos(2\pi(n_\ell s - n_j r)(t+\xi))$$

sont toutes deux des sommes de fonctions trigonométriques dont les fréquences se situent entre  $n_{Hm}$  et  $H^\beta(n_j + n_\ell)$ . Par conséquent, si nous définissons  $W_m(t)$  comme suit

$$(2.38) \quad \begin{aligned} U_m^2(t+\xi) = W_m(t) &+ \frac{H}{2} \sum_{k=1}^{H^\beta} c_k^2 \\ &+ \sum_{\ell=Hm+1}^{H(m+1)-1} \sum_{j=\ell+1}^{H(m+1)} \sum_{\substack{0 < r, s \leq H^\beta \\ |n_j r - n_\ell s| < n_{Hm}}} c_r c_s \cos(2\pi(n_\ell s - n_j r)(t+\xi)) \end{aligned}$$

alors  $W_m(t)$  est bien la somme des fonctions trigonométriques dont les fréquences sont comprises entre  $n_{Hm}$  et  $2H^\beta n_{H(m+1)}$ . Si  $V_m(t)$  désigne le dernier terme de (2.38), alors nous avons

$$\begin{aligned} |V_m(t)| &\leq \sum_{\ell=Hm+1}^{H(m+1)-1} \sum_{j=\ell+1}^{H(m+1)} \sum_{\substack{0 < r, s \leq H^\beta \\ |n_j r - n_\ell s| < n_{Hm}}} |c_r c_s| \leq \sum_{\ell=Hm+1}^{H(m+1)} \sum_{j>\ell} \sum_{|s-rn_j/n_\ell| < 1} |c_r c_s| \\ &\leq \sum_{\ell=Hm+1}^{H(m+1)-1} \sum_{j>\ell} \left( \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{s>n_j/n_{\ell-1}} c_s^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité Cauchy-Schwarz pour prouver la dernière.

Nous rappelons que  $c_k = (-1)^{k+1}/(\pi^2 k^2)$  pour tout  $k \geq 1$ . Puisque  $\sum_{k \geq 1} k^{-4} = \pi^4/90$  et  $n_j/n_\ell = \Gamma^{j-\ell}$ , on obtient

$$|V_m(t)| \leq \frac{\sqrt{10}}{30\pi^2} \sum_{\ell=Hm+1}^{H(m+1)-1} \sum_{j>\ell} \left( \sum_{s>\Gamma^{j-\ell-1}} \frac{1}{s^4} \right)^{1/2}.$$

Pour estimer la dernière série, nous appliquons l'inégalité suivante

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{n \geq N+1} \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{3N^3},$$

ce qui nous donne, en dénotant par  $\lceil \cdot \rceil$  la fonction partie entière supérieure et en utilisant l'inégalité  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  (pour tous réels  $a, b$ )

$$\left( \sum_{s>\Gamma^{j-\ell-1}} \frac{1}{s^4} \right)^{1/2} \leq \left( \frac{1}{|\Gamma^{j-\ell} - 1|^4} + \sum_{s \geq \lceil \Gamma^{j-\ell} \rceil} \frac{1}{s^4} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{|\Gamma^{j-\ell} - 1|^2} + \frac{1}{\sqrt{3} |\Gamma^{j-\ell} - 1|^{3/2}}.$$

Puisque  $\Gamma^{j-\ell} > 1$ , alors nous pouvons appliquer l'inégalité  $x \leq 2[x - 1]$ , vraie pour tout  $x > 1$ , et donc

$$\left( \sum_{s > \Gamma^{j-\ell-1}} \frac{1}{s^4} \right)^{1/2} \leq \frac{4}{\Gamma^{2(j-\ell)}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\Gamma^{3(j-\ell)/2}}.$$

D'où nous obtenons

$$\begin{aligned} |V_m(t)| &\leq \frac{\sqrt{10}}{30\pi^2} \sum_{\ell=Hm+1}^{H(m+1)} \sum_{j>\ell} \left( \frac{4}{\Gamma^{2(j-\ell)}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\Gamma^{3(j-\ell)/2}} \right) \\ &\leq \frac{\sqrt{10}}{15\pi^2} \sum_{\ell=Hm+1}^{H(m+1)-1} \left( \frac{2}{\Gamma^2-1} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\Gamma^{3/2}-1)} \right) = \frac{\sqrt{10}}{15\pi^2} \left( \frac{2}{\Gamma^2-1} + \frac{\sqrt{6}}{3(\Gamma^{3/2}-1)} \right) H. \end{aligned}$$

En remarquant que  $\sum_{k=1}^{H^\beta} c_k^2 \leq 1/90$  et que la constante ci-dessus est égale à  $4C_0 - 1/180$ , il s'ensuit (2.37), grâce à (2.38).

Ainsi, nous avons

$$\Xi_1(k) \leq \exp\left(\frac{\lambda^3 k H^3}{1728}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \prod_{m=0}^{k-1} \left(1 + \lambda^2 C_0 H + \frac{\lambda U_{2m}(t+\xi)}{2} + \frac{\lambda^2 W_{2m}(t)}{4}\right) dt.$$

Notons  $P_m(t) := \lambda U_{2m}(t+\xi)/2 + \lambda^2 W_{2m}(t)/4$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  qui est un polynôme trigonométrique tel que  $P_m(t) =: \sum_{j=1}^{N(m)} d_{2m,j} \cos(2\pi u_{2m,j}(t+\xi))$  et  $\widetilde{C}_0 := 1 + \lambda^2 C_0 h$ . En développant le produit, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \prod_{m=0}^{k-1} (\widetilde{C}_0 + P_m(t)) dt = \pi \widetilde{C}_0^k + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \sum_{\substack{\ell=1 \\ 0 \leq k_1 < \dots < k_\ell \leq k-1}}^k \widetilde{C}_0^{k-\ell} P_{k_1}(t) \dots P_{k_\ell}(t) dt.$$

En désignant par  $\Phi(k)$  l'intégrale du membre de droite précédent, nous voulons prouver l'égalité  $\Phi(k) = 0$  pour tout entier  $k \geq 1$  grâce au Lemme 2.22. Comme on peut intervertir les sommes finies et l'intégrale grâce à la définition de  $c_k$  et à la convergence uniforme, on remplace  $(P_{k_i})_i$  par leurs définitions ce qui donne

$$\Phi(k) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ 0 \leq k_1 < \dots < k_\ell \leq k-1}}^k \widetilde{C}_0^{k-\ell} \sum_{j_1=1}^{N(k_0)} \dots \sum_{j_\ell=1}^{N(k_\ell)} d_{2k_0,j_1} \dots d_{2k_\ell,j_\ell} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \Pi_\ell(t) dt,$$

où

$$\Pi_\ell(t) := \prod_{i=1}^{\ell} \cos(2\pi u_{2k_i,j_i}(t+\xi)).$$

Il reste à montrer grâce au Lemme 2.22, pour tout entier  $k \geq 1$  et  $\ell \in \{0, \dots, k\}$

$$(2.39) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \Pi_\ell(t) dt = 0.$$

Pour ce faire, nous utilisons l'identité  $2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$  pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Ainsi en appliquant cette relation plusieurs fois, l'égalité (2.39) est vraie, grâce au Lemme 2.22, si, pour  $k \geq 1$ ,  $\ell \in \{1, \dots, k\}$  et pour tout  $0 \leq k_1 < \dots < k_\ell \leq k$

$$\Delta_\ell := u_{2k_\ell, j_\ell} - \sum_{i=1}^{\ell-1} u_{2k_i, j_i} \geq 2.$$

Par les discussions ci-dessus, nous savons que  $n_{2Hm} \leq u_{2m, j} \leq 2H^\beta n_{H(2m+1)}$  pour tout  $j$  : de plus,  $k_\ell \geq 1$  quitte à faire commencer l'indice de sommation plus tard. Nous avons donc par (2.31), pour tout  $\Gamma > 1$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_\ell &\geq n_{2Hk_\ell} - \sum_{i=0}^{l-1} 2H^\beta n_{H(2k_i+1)} \geq \frac{\Gamma^{2Hk_\ell}}{\pi} \left( 1 - 2H^\beta \Gamma^H \sum_{i=1}^{l-1} \Gamma^{-2H(k_\ell - k_i)} \right) \\ &\geq \frac{\Gamma^{2H}}{\pi} \left( 1 - 2H^\beta \Gamma^H \sum_{j=1}^{l-1} \Gamma^{-2Hj} \right) \geq \frac{\Gamma^{2H}}{\pi} \left( 1 - \frac{2H^\beta \Gamma^{-H}}{1 - \Gamma^{-2H}} \right) \geq 2, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité  $k_\ell - k_i \geq l - i$  et en effectuant le changement de variables  $j = l - i$ . Ainsi, nous obtenons

$$\Xi_1(k) \leq \pi \exp\left(\frac{\lambda^3 k H^3}{1728}\right) (1 + \lambda^2 C_0 H)^k \leq \pi \exp\left(\frac{\lambda^3 k H^3}{1728} + C_0 \lambda^2 k H\right),$$

ce qui nous donne le résultat. De la même manière, nous prouvons (2.34). □

**Lemme 2.24.** *Il existe une constante  $D_0 > 0$  dépendant uniquement de  $\Gamma$  telle que pour tout entier  $p \geq 1$ ,  $0 \leq r < H$*

$$\chi_g(\lambda, Hp + r) \leq D_0 \exp\left(\frac{\lambda^3 p H^3}{6912} + \frac{C_0 \lambda^2 p H}{4}\right),$$

avec

$$D_0 := 4\pi \cdot \max\left(\Gamma - 1; \frac{1}{(\sin 2)^2}\right).$$

*Démonstration.* Supposons, par exemple, que  $p$  soit pair :  $p = 2k$ . Nous avons alors

$$\sum_{j=1}^{Hp+r} g(n_j(t + \xi)) = \sum_{m=0}^k U_{2m}(t + \xi) + \sum_{m=1}^k U_{2m-1}(t + \xi),$$

où  $U_0, U_1, \dots, U_{2k-1}$  sont des blocs complets mais  $U_{2k}$  ne contient que  $r$  termes.

Supposons d'abord  $\Gamma \geq 2$ . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp\left(\frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{Hp+r} g(n_j(t + \xi))\right) dt &\leq \left( \int_0^1 \exp\left(\lambda \sum_{m=0}^k U_{2m}(t + \xi)\right) dt \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left( \int_0^1 \exp\left(\lambda \sum_{m=1}^k U_{2m-1}(t + \xi)\right) dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

L'inégalité  $(\sin t/t)^2 \geq 1/4$ , pour  $0 < t \leq 1$ , et le Lemme 2.23 impliquent

$$\chi_g(\lambda, Hp + r) \leq 4(\Gamma - 1) \Xi_1 \left(\frac{p}{2}\right)^{1/2} \Xi_2 \left(\frac{p}{2}\right)^{1/2} \leq D_0 \exp\left(\frac{\lambda^3 p H^3}{6912} + \frac{C_0 \lambda^2 p H}{4}\right).$$

Le cheminement reste quasiment identique si  $1 < \Gamma < 2$ , puisque dans ce cas, nous avons  $\Gamma < 2 < \pi$  et donc pour  $1 < t < \Gamma$

$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \geq \left(\frac{\sin 2}{2}\right)^2 > 0,$$

d'où

$$\chi_g(\lambda, Hp + r) \leq \frac{4}{(\sin 2)^2} \Xi_1 \left(\frac{p}{2}\right)^{1/2} \Xi_2 \left(\frac{p}{2}\right)^{1/2} \leq D_0 \exp\left(\frac{\lambda^3 p H^3}{6912} + \frac{C_0 \lambda^2 p H}{4}\right).$$

Pour les  $p$  impairs, la preuve est similaire. □

**Lemme 2.25.** *Il existe une constante  $C_1 > 0$  dépendant uniquement de  $\Gamma$  telle que*

$$\chi_f(\lambda, J) \leq D_0 \exp\left(\frac{\lambda J}{2\pi^2 H^\beta} + \frac{\lambda^3 J H^2}{6912} + \frac{C_0 \lambda^2 J}{4}\right).$$

*Démonstration.* On remarque qu'on a la décomposition

$$\sum_{j=1}^J f(n_j t) = \sum_{j=1}^J g(n_j t) + \sum_{j=1}^J h(n_j t)$$

où  $h(t) := f(t) - g(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). De plus, le développement en série de Fourier de  $h$  est

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(2\pi k t)$$

où  $\tilde{c}_k = 0$  for  $1 \leq k \leq H^\beta$  et  $\tilde{c}_k = c_k$  for  $k > H^\beta$ . Puisque  $H \geq 1$  est un nombre entier, ce qui implique que pour tout  $z \in \mathbb{R}$

$$|h(z)| \leq \frac{1}{\pi^2} \sum_{j>H^\beta} \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{\pi^2 H^\beta}.$$

Nous obtenons

$$\exp\left(\frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^J h(n_j(t + \xi))\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda J}{2\pi^2 H^\beta}\right)$$

et donc

$$\chi_f(\lambda, J) \leq \exp\left(\frac{\lambda J}{2\pi^2 H^\beta}\right) \chi_g(\lambda, J).$$

Nous utilisons maintenant la décomposition  $J = Hp + r$  où  $p \geq 1$  et  $0 \leq r < H$  et nous avons donc  $Hp \leq J$  et  $H^3 p \leq JH^2$ . Ainsi, grâce au Lemme 2.24, il existe bien une constante  $C_1 > 0$  dépendant de  $\Gamma$  telle que

$$\chi_f(\lambda, J) \leq D_0 \exp\left(\frac{\lambda J}{2\pi^2 H^\beta} + \frac{\lambda^3 J H^2}{6912} + \frac{C_0 \lambda^2 J}{4}\right).$$

□

**Proposition 2.26.** *Pour tout  $J \leq \frac{\ln(1/h)}{\ln \Gamma} - 1$ , pour tous paramètres  $\lambda, \kappa > 0$  et  $H \in \mathbb{N}$  vérifiant (2.31), on a*

$$\int_1^\Gamma \exp\left(-\frac{1}{2}S_J(y)\right) dy \leq (\Gamma - 1) \exp\left(\frac{-J}{24} + \frac{\kappa}{2}\right) + D_0 \exp\left(\frac{\lambda J}{2\pi^2 H^\beta} + \frac{\lambda^3 J H^2}{6912} + \frac{C_0 \lambda^2 J}{4} - \frac{\lambda \kappa}{2}\right).$$

*Démonstration.* En définissant

$$\overline{S}_J(t) := \sum_{j=0}^J f(n_j(t + \xi))$$

nous avons, pour tout entier  $J \geq 0$

$$\frac{J+1}{12} - \overline{S}_J \geq 0.$$

Soit  $\Lambda$  la mesure de Lebesgue : nous définissons ainsi

$$\Lambda_\Gamma := \begin{cases} (\Gamma - 1) \Lambda & \text{if } \Gamma \geq 2, \\ \Lambda & \text{if } 1 < \Gamma < 2, \end{cases} \quad \text{et} \quad I_\Gamma := \begin{cases} [0, 1] & \text{if } \Gamma \geq 2, \\ [1, \Gamma] & \text{if } 1 < \Gamma < 2. \end{cases}$$

Grâce à (2.32), nous obtenons, pour tout paramètre  $\kappa > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_1^\Gamma \exp\left(-\frac{1}{2}S_J(y)\right) dy &= \exp\left(-\frac{J+1}{24}\right) \chi_f(1, J) = \exp\left(-\frac{J+1}{24}\right) \int_{I_\Gamma} \exp\left(\frac{1}{2}\overline{S}_J\right) d\Lambda_\Gamma \\ &\leq \exp\left(\frac{-J}{24} + \frac{\kappa}{2}\right) \Lambda_\Gamma(I_\Gamma) + \Lambda_\Gamma(\{t \in I_\Gamma : |\overline{S}_J(t)| \geq \kappa\}) \\ &\leq (\Gamma - 1) \exp\left(\frac{-J}{24} + \frac{\kappa}{2}\right) + \Lambda_\Gamma(\{t \in I_\Gamma : |\overline{S}_J(t)| \geq \kappa\}). \end{aligned}$$

Pour majorer le dernier terme, nous utilisons l'inégalité de Tchebychev.

**Lemme 2.27.** *Soient  $(X, \Sigma, \mu)$  un espace mesuré,  $f$  une fonction mesurable à valeurs réelles définie sur  $X$  et  $g$  une fonction mesurable à valeurs réelles, positive et décroissante sur l'image de  $f$ . Pour tout nombre réel  $t > 0$ , on a*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{1}{g(t)} \int_X g \circ f d\mu.$$

Nous obtenons alors l'inégalité de Chernoff

$$\Lambda_\Gamma(\{t \in I_\Gamma : |\overline{S}_J(t)| \geq \kappa\}) \leq e^{-\lambda \kappa/2} \chi_f(\lambda, J),$$

ce qui implique, grâce au Lemme 2.25

$$\int_1^\Gamma \exp\left(-\frac{1}{2}S_J(y)\right) dy \leq (\Gamma - 1) \exp\left(\frac{-J}{24} + \frac{\kappa}{2}\right) + D_0 \exp\left(\frac{\lambda J}{2\pi^2 H^\beta} + \frac{\lambda^3 J H^2}{6912} + \frac{C_0 \lambda^2 J}{4} - \frac{\lambda \kappa}{2}\right)$$

qui est le résultat attendu. □

Nous pouvons enfin prouver l'estimation  $Q_F(h) \ll h^{\eta'}$  ( $\eta' = \eta'(\gamma) > 0$ ). Dans le Lemme 2.26, en prenant  $\kappa = J/24$ , ainsi que  $H$  et  $\beta$  suffisamment grand pour vérifier (2.31) et  $\lambda > 0$  assez petit pour qu'elles vérifient l'inégalité

$$\frac{1}{2\pi^2 H^\beta} + \frac{\lambda^2 H^2}{6912} + \frac{C_0 \lambda}{4} \leq \frac{1}{96},$$

alors nous avons

$$\int_1^\Gamma \exp\left(-\frac{1}{2}S_J(y)\right) dy \leq (\Gamma - 1) \exp\left(-\frac{J}{48}\right) + D_0 \exp\left(-\frac{\lambda J}{96}\right).$$

En choisissant  $\eta := \min(1/48; \lambda/96)$ , nous obtenons alors

$$\int_1^\Gamma \exp\left(-\frac{1}{2}S_J(y)\right) dy \leq D_0 \exp(-\eta J),$$

où

$$D_0 := 4\pi \cdot \max\left(\Gamma - 1; \frac{1}{(\sin 2)^2}\right),$$

ce qui prouve (2.30). Grâce à (2.29) et en supposant  $\Gamma > e^\eta$  sans perdre de généralité (quitte à rendre  $\lambda$  encore plus petit), nous obtenons

$$\int_1^{1/h} \exp\left(-\frac{1}{2}T(\tau)\right) d\tau \leq D_0 \sum_{J \leq \frac{\ln(1/h)}{\ln \Gamma} - 1} \Gamma^J \exp(-\eta J) \leq \frac{D_0}{\Gamma e^{-\eta} - 1} h^{-(1-\eta/\ln \Gamma)}.$$

En reportant cette inégalité dans (2.28), nous obtenons finalement

$$Q_F(h) \leq \frac{2K_2 D_0}{\Gamma e^{-\eta} - 1} \left(1 + h^{1-\eta/\ln \Gamma}\right) h^{\eta/\ln \Gamma} \ll_\gamma h^{\eta'},$$

où  $\eta' := \eta/\ln \Gamma$ .

Finalement, nous pouvons prouver le Théorème 2.20.

*Démonstration.* En utilisant les notations du Théorème 2.8 et la majoration précédente  $Q_F(1/T) \ll T^{-\eta'}$  pour tout nombre réel  $T \geq 1$  et pour tout entier naturel  $N \geq 1$  vérifiant  $h_T \leq L_N$ , nous avons

$$\begin{aligned} \|F - F_N\|_\infty &\ll_\gamma T^{-\eta/\ln(1/\gamma)} + T \eta_N(T) \\ &+ \int_{1/T}^T \min\left(\frac{1}{1+\tau}, \varepsilon_{1,N}^*\right) \exp\left(-\frac{2\tau^2}{\pi^2 q^2} \sum_{(1,j) \in S(\tau), j \leq L_N} f(2^j)^2\right) d\tau. \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\sum_{L_N - h < j \leq L_N} f(2^j) \asymp \gamma^{L_N - h_T} \asymp T N^{-\frac{\ln(1/\gamma)}{\ln 2}} (T \ln T)^{\frac{\ln(1/\gamma)}{\ln 2}}$$

et

$$\varepsilon_{1,N}^* \asymp \gamma^{L_N} \asymp_\gamma N^{-\frac{\ln(1/\gamma)}{\ln 2}},$$

ce qui nous donne

$$\|F - F_N\|_\infty \ll_\gamma T^{-\eta/\ln(1/\gamma)} + T N^{-\frac{\ln(1/\gamma)}{\ln 2}} (T \ln T)^{\frac{\ln(1/\gamma)}{\ln 2}}.$$

Ainsi en choisissant  $T = N^{c_0(\gamma)}$  où  $c_0 = c_0(\gamma) = \ln(1/\gamma)^2 / (\eta \ln 2 + \ln(1/\gamma) \ln(2/\gamma))$ , nous obtenons bien  $\|F - F_N\| \ll N^{-c(\gamma)} (\ln N)^{\ln(1/\gamma)/\ln 2}$  avec  $c(\gamma) = \eta c_0 / \ln(1/\gamma)$ .

Finalement, si  $Q_F(h) \ll h$  ( $h > 0$ ), alors nous avons comme précédemment

$$\|F - F_N\|_\infty \ll_\gamma T^{-1} + T N^{-\frac{\ln(1/\gamma)}{\ln 2}} (T \ln T)^{\frac{\ln(1/\gamma)}{\ln 2}}.$$



En choisissant  $T = N^{\overline{c_0}}$  où  $\overline{c_0} = \overline{c_0}(\gamma) = \ln(1/\gamma)/\ln(4/\gamma)$ , nous obtenons l'estimation annoncée

$$\|F - F_N\| \ll_{\gamma} N^{-\ln(1/\gamma)/\ln(4/\gamma)} (\ln N)^{\ln(1/\gamma)/\ln 2}.$$

□

Si on conserve le choix  $\kappa = J/24$ , l'obstacle qui nous empêche d'obtenir une expression explicite relativement satisfaisante pour  $\eta$  est la difficulté à trouver les valeurs optimales pour  $H$ ,  $\beta$  et  $\lambda$  qui vérifient à la fois (2.31) et

$$\frac{\lambda^2 H^2}{6912} + \frac{C_0 \lambda}{4} + \frac{1}{2\pi^2 H^\beta} < \frac{1}{48}.$$

### 2.5.3.2 Seconde méthode

Comme écrit dans le paragraphe précédent la section 2.5.3.1, le professeur G. Tenenbaum a pu expliciter une valeur possible pour la constante  $c(\gamma)$  du Théorème 2.20 et nous allons détailler son raisonnement.

**Théorème 2.28** (Tenenbaum). *Soit  $f$  la fonction 2-additive définie par  $f(2^j) = \gamma^j (j \geq 0)$  avec  $0 < \gamma < 1$  et  $F$  la fonction de répartition de sa loi limite. Alors on a*

$$Q_F(h) \ll h^{c_0(\gamma)} \quad \text{avec} \quad c_0(\gamma) := \frac{\ln 2}{\ln(4/\gamma)}.$$

*Démonstration.* Comme observé dans le paragraphe précédant le Théorème 2.20, la fonction caractéristique limite de  $f$  est égale au produit de celles de variables aléatoires indépendantes  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , suivant une loi de Bernoulli avec  $\mathbb{P}[X_n = 0] = \mathbb{P}[X_n = \gamma^n] = \frac{1}{2}$ . En désignant par  $G_M$  la fonction de répartition du produit de convolution des lois de  $X_0 \dots X_M$  pour tout entier  $M \geq 0$ , nous en déduisons que  $Q_F(h) \leq Q_{G_M}(h)$  pour tout  $h > 0$  (où nous avons utilisé la propriété que la concentration d'un produit de convolution ne dépasse pas celui de ses facteurs, cf. [44], chapitre III.2).

Nous posons alors  $M := \lfloor \ln(T)/\ln(1/\gamma) \rfloor$ , de sorte que  $\gamma^M \geq 1/T$ , et  $R := 1 + \lfloor \ln(4)/\ln(1/\gamma) \rfloor$ , ce qui implique  $\gamma^R < 1/4$ .

Nous introduisons maintenant des variables aléatoires  $Y_0, \dots, Y_{R-1}$ , définies par

$$Y_a := \sum_{\substack{0 \leq n \leq M \\ n \equiv a [R]}} X_n \quad (0 \leq a < R)$$

et nous désignons par  $F_a$  la fonction de répartition associée. Ainsi,  $G_M$  est aussi la fonction de répartition du produit des variables aléatoires  $Y_a$ ,  $0 \leq a < R$  et donc nous avons  $Q_{G_M}(h) \leq Q_{F_a}(h)$  pour tout  $h > 0$  et  $0 \leq a < R$ .

Nous avons alors la décomposition suivante

$$Y_a = \gamma^a \sum_{0 \leq k \leq M/R} e_k(a) (\gamma^R)^k$$

où les  $e_k(a) \in \{0, 1\}$  sont des variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de probabilité  $1/2$ . Puisque  $\gamma^R < 1/4$ , pour chaque  $a$  les valeurs des  $Y_a$  sont lexicographiquement ordonnées. De plus, l'écart entre les abscisses de deux sauts consécutifs de chaque  $F_a$  est strictement supérieur à  $\gamma^M \geq h$  et la hauteur d'un saut est égale à  $2^{-1-M/R}$ .

Finalement, nous obtenons

$$Q_F(1/T) \leq Q_{F_a}(1/T) \ll 2^{-\ln(T)/(\ln(1/\gamma)(1+\ln(4)/\ln(1/\gamma)))} = T^{-c_0(\gamma)}.$$

□

**Corollaire 2.29.** *Dans le Théorème 2.20, une valeur admissible pour la constante  $c(\gamma)$  est*

$$c(\gamma) = \frac{\ln(1/\gamma) \ln(2)}{\ln(4/\gamma) \ln(2/\gamma) + \ln(2)^2}.$$

*Démonstration.* Grâce au Théorème 2.8, nous avons alors (avec les valeurs  $L = \ln N / \ln 2$  et  $h_T = \ln(T \ln T) / \ln 2$ )

$$\|F - F_N\| \ll T^{-c_0(\gamma)} + T\gamma^{L_N - h_T} \ll T^{-c_0(\gamma)} + T^{1 + \frac{\ln(1/\gamma)}{\ln 2}} N^{-\frac{\ln(1/\gamma)}{\ln 2}} (\ln T)^{\frac{\ln(1/\gamma)}{\ln 2}}.$$

Ainsi en prenant le choix quasi-optimal

$$T = N^{\frac{\ln(1/\gamma)/\ln 2}{1 + \ln(1/\gamma)/\ln 2 + c_0(\gamma)}},$$

nous obtenons finalement

$$\|F - F_N\| \ll N^{-\frac{c_0(\gamma) \ln(1/\gamma) / \ln 2}{1 + \ln(1/\gamma) / \ln 2 + c_0(\gamma)}} (\ln N)^{\frac{\ln(1/\gamma)}{\ln 2}} = N^{-c(\gamma)} (\ln N)^{\frac{\ln(1/\gamma)}{\ln 2}}$$

comme attendu. □

# Chapitre 3

## Systeme de numération de Cantor <sup>1</sup>

Nous étudierons dans ce chapitre les systèmes de numération de Cantor, qui généralisent le système  $q$ -adique vu précédemment.

Pour commencer, nous démontrons un critère pour l'existence d'une valeur moyenne de fonctions  $Q$ -multiplicatives de module inférieur à l'unité. Même si ce résultat est généralisé dans Coquet [9], il est suffisant afin de reprouver d'une autre manière le théorème d'Erdős-Wintner dans ce cadre, déjà démontré dans [3].

Cependant, le principal but de ce chapitre est d'établir une version effective du théorème d'Erdős-Wintner lorsque la suite initiale est majorée. Les résultats et leurs preuves sont facilement généralisables à partir de ceux du cas  $q$ -adique. Toutefois, nous remarquons que tout n'est plus aussi simple lorsque le système de Cantor choisi est défini à partir d'une suite non bornée.

### 3.1 Définitions et résultats à propos des fonctions $Q$ -multiplicatives

Soit  $(a_j)_{j \geq 0}$  une suite d'entiers vérifiant  $a_j \geq 2$  pour tout  $j \geq 0$  : on définit alors la suite  $(q_n)_{n \geq 0}$  par  $q_0 = 1$  et  $q_{j+1} = a_j q_j$ , pour tout entier naturel  $j$ , d'où  $q_j = a_{j-1} \dots a_1 a_0$  (cette formule est encore vraie pour  $j = 0$  avec la convention standard selon laquelle un produit vide est égal à 1).

La suite  $(a_j)_{j \geq 0}$  est la base d'un système de numération appelé *système de Cantor* associé à la suite  $Q := (q_j)_{j \geq 0}$ . Chaque entier naturel  $n$  y possède la représentation unique

$$n = \sum_{j \geq 0} e_j(n) q_j, \quad (0 \leq e_j(n) < a_j).$$

En particulier, si  $a_j = q$  est constant pour tout  $j$ , on retrouve le système de numération  $q$ -adique du Chapitre 2. Le système de numération de Cantor est dit à *chiffres bornés* (*constant-like* en anglais), si la suite  $(a_j)_{j \geq 0}$  est majorée.

Nous posons également  $a := \min_{j \geq 0} a_j$ .

**Définition 3.1.** Une fonction arithmétique  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite  $Q$ -additive si  $f(0) = 0$  et si elle satisfait

$$f(n) = \sum_{j \geq 0} f(e_j(n) q_j) \quad (n \geq 0).$$

Une fonction  $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$  est dite  $Q$ -multiplicative si l'on a

$$g(n) = \prod_{j \geq 0} g(e_j(n) q_j) \quad (n \geq 0).$$

1. Les résultats obtenus dans ce chapitre font en partie l'objet d'un article [15] en collaboration avec M. Drmota.

Pour toute fonction  $Q$ -additive  $f$  réelle et pour tout  $N \geq 1$ , nous désignons par  $(F_N)$  la suite de fonctions de répartition définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$F_N(z) := \frac{1}{N} |\{n < N : f(n) \leq z\}|.$$

Nous avons le résultat suivant, prouvé par Coquet [9] (cf. aussi le théorème 1 de [3] pour une preuve ergodique) et généralisant le Théorème 2.1.

**Théorème 3.2.** *Soit  $f$  une fonction  $Q$ -additive par rapport à un système de numération de Cantor à chiffres bornés. Alors  $f$  admet une fonction de répartition limite  $F$ , si, et seulement si, les deux séries*

$$(3.1) \quad \sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j), \quad \sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)^2$$

convergent.

Lorsque ces conditions sont remplies, la fonction caractéristique de  $F$  est donnée par le produit convergent

$$\Phi(\tau) = \prod_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} \exp(i\tau f(dq_j)) \right) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Afin de prouver ce théorème, nous allons d'abord démontrer quelques propriétés à propos des fonctions  $Q$ -multiplicatives à valeurs dans le disque unité. Ces résultats généralisent ceux de l'article [12] écrit par Delange à propos des fonctions  $q$ -multiplicatives de module inférieur à 1.

### 3.2 Critère pour l'existence d'une valeur moyenne

Soit  $g$  une fonction  $Q$ -multiplicative par rapport à un système de Cantor telle que  $|g(n)| \leq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Nous définissons alors quelques notations

$$\varphi_n := \frac{1}{n} \sum_{m < n} g(m),$$

$$\varepsilon_j := \max_{1 \leq d \leq a_j - 1} (1 - \operatorname{Re} g(dq_j)) \quad \text{et} \quad u_j := \frac{1}{a_j} \sum_{d < a_j} (g(dq_j) - 1).$$

On dit que  $g$  possède une *valeur moyenne* lorsque la suite  $(\varphi_n)_n$  converge et dans ce cas, on note  $M(g)$  cette limite. Nous notons également  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_N$  la longueur de la décomposition d'un entier  $N$  dans une base de numération de Cantor

$$\mathcal{L} := \max \{j \geq 0 : e_j(N) \neq 0\}$$

(avec  $\mathcal{L}_0 := 0$ ), qui est l'unique entier naturel tel que

$$1 \leq \frac{N}{q^{\mathcal{L}}} < a_{\mathcal{L}}.$$

Finalement, nous définissons la suite  $(\Pi_k)_k$  par  $\Pi_0 = 1$  et pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\Pi_k = \prod_{0 \leq j < k} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g(dq_j) \right) = \frac{1}{q^k} \prod_{0 \leq j < k} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g(dq_j) \right).$$

Ici, nous généralisons certains résultats dûs à Delange [12] en utilisant grandement certaines de ses idées. De plus, ces derniers sont inspirés de ceux de Coquet [10] et s'y réfèrent en général.

**Proposition 3.3.** *Pour tout  $k \geq 0$ ,*

$$\sum_{0 \leq n < q_k} g(n) = q_k \Pi_k.$$

*Démonstration.* Il suffit de faire une récurrence sur  $k \geq 0$ , puisque nous avons

$$\sum_{0 \leq n < q_k} g(n) = \sum_{0 \leq d < a_k} \left( \sum_{0 \leq m < q_k} g(dq_k + m) \right) = \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_k} g(dq_k) \right) \left( \sum_{0 \leq m < q_k} g(m) \right).$$

□

Nous signalons juste que la proposition précédente reste vraie sans l'hypothèse  $|g(n)| \leq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 3.4.** *On a, pour tout  $n \geq 1$*

$$\left| \sum_{0 \leq m < n} g(m) \right| \leq \sum_{0 \leq j \leq \mathcal{L}_N} e_j(n) q_j |\Pi_j|.$$

*Démonstration.* Le résultat est direct pour  $1 \leq n < q_1$ . Nous supposons maintenant qu'il est vrai pour tout entier naturel  $n < q_N$ , avec  $N > 0$  et nous allons montrer qu'il l'est encore pour  $q_N \leq n < q_{N+1}$ . Pour cela, nous utilisons la décomposition  $n = cq_N + b$  où  $c = e_N(n)$  et  $b = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(n) q_j$ , ce qui implique

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq m < n} g(m) &= \sum_{0 \leq d < c} \left( \sum_{0 \leq \ell < q_N} g(dq_N + \ell) \right) + \sum_{0 \leq \ell < b} g(cq_N + \ell) \\ &= \left( \sum_{0 \leq d < c} g(dq_N) \right) \left( \sum_{0 \leq \ell < q_N} g(\ell) \right) + g(cq_N) \left( \sum_{0 \leq \ell < b} g(\ell) \right). \end{aligned}$$

Grâce à la Proposition 3.3 et l'hypothèse de récurrence, nous en déduisons

$$\left| \sum_{0 \leq m < n} g(m) \right| \leq e_N(n) q_N |\Pi_N| + \left| \sum_{0 \leq \ell < b} g(\ell) \right| \leq \sum_{0 \leq j \leq N} e_j(n) q_j |\Pi_j|.$$

□

**Proposition 3.5.** *Pour tous  $N \geq 0$  et  $h \geq 1$*

$$|\Pi_{N+h+1} - \Pi_{N+1}| \leq \sqrt{2} \sum_{N < j \leq N+h} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} \sqrt{1 - \operatorname{Re} g(dq_j)}.$$

*Démonstration.* Nous avons l'identité

$$\Pi_{N+h+1} - \Pi_{N+1} = \Pi_{N+1} \left( \prod_{N < j \leq N+h} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g(dq_j) \right) - 1 \right),$$

ce qui nous donne grâce au Lemme 1.25

$$\begin{aligned} |\Pi_{N+h+1} - \Pi_{N+1}| &\leq \left| \prod_{N < j \leq N+h} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g(d q_j) \right) - 1 \right| \\ &\leq \sum_{N < j \leq N+h} \left| \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g(d q_j) \right) - 1 \right|. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que tout nombre complexe  $|z| \leq 1$  vérifie l'inégalité  $|z - 1|^2 \leq 2(1 - \operatorname{Re} z)$ , nous obtenons pour tout  $j \geq 0$

$$\left| \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g(d q_j) \right) - 1 \right| = \frac{1}{a_j} \left| \sum_{1 \leq d < a_j} (g(d q_j) - 1) \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} \sqrt{1 - \operatorname{Re} g(d q_j)},$$

d'où le résultat annoncé. □

Nous introduisons maintenant, pour tout entier  $N \geq 0$ , la fonction  $g_N$  définie par

$$g_N(n) := \prod_{0 \leq j \leq N} g(e_j(n) q_j).$$

**Proposition 3.6.** *Si  $n < q_{N+h+1}$  avec  $h \geq 1$ , on a*

$$|g(n) - g_N(n)| \leq \sqrt{2} \sum_{N < j \leq N+h} \sqrt{1 - \operatorname{Re} g(e_j(n) q_j)}.$$

*Démonstration.* Si  $n < q_{N+1}$ , on a  $g_N(n) = g(n)$ . Si  $q_{N+1} \leq n < q_{N+h+1}$ , on a

$$g(n) = g_N(n) \prod_{N < j \leq N+h} g(e_j(n) q_j),$$

et donc, en utilisant le Lemme 1.25, nous obtenons

$$\begin{aligned} |g(n) - g_N(n)| &= |g_N(n)| \left| \prod_{N < j \leq N+h} g(e_j(n) q_j) - 1 \right| \\ &\leq \sum_{N < j \leq N+h} |g(e_j(n) q_j) - 1| \leq \sqrt{2} \sum_{N < j \leq N+h} \sqrt{1 - \operatorname{Re} g(e_j(n) q_j)}. \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.7.** *Pour tous entiers  $n \geq 1$  et  $N \geq 0$ , on a*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{0 \leq m < n} g_N(m) - \Pi_{N+1} \right| < \frac{2 q_{N+1}}{n}.$$

*Démonstration.* Nous remarquons d'abord que, pour tout  $d \geq 0$ , nous avons

$$g_N(dq_{N+1} + m) = g(m)$$

où  $0 \leq m < q_{N+1}$ , puisque  $e_j(dq_{N+1} + m) = e_j(m)$  pour  $j \leq N$ . Ainsi, pour tout entier  $k \geq 1$ , nous obtenons grâce à la Proposition 3.3

$$\sum_{0 \leq m < kq_{N+1}} g_N(m) = k \sum_{0 \leq m < q_{N+1}} g(m) = k q_{N+1} \Pi_{N+1}.$$

Donc, si  $n = k q_{N+1}$ , nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{0 \leq m < n} g_N(m) - \Pi_{N+1} = 0.$$

Si maintenant, nous supposons  $k q_{N+1} < n < (k+1) q_{N+1}$ , avec  $k \geq 1$ , on a

$$\sum_{0 \leq m < n} g_N(m) - n \Pi_{N+1} = -(n - k q_{N+1}) \Pi_{N+1} + \sum_{k q_{N+1} \leq m < n} g_N(m)$$

et donc

$$\left| \sum_{0 \leq m < n} g_N(m) - n \Pi_{N+1} \right| \leq 2(n - k q_{N+1}) < 2 q_{N+1}.$$

Finalement, l'inégalité à établir est directe si  $1 \leq n < q_{N+1}$ , puisque nous avons toujours

$$\left| \sum_{0 \leq m < n} g_N(m) - n \Pi_{N+1} \right| \leq 2n.$$

□

**Proposition 3.8.** *Pour tout entier  $h \geq 1$  et  $n \geq q_h$ , on a*

$$|\varphi_n - \Pi_{\mathcal{L}_{N+1}}| \leq \frac{2}{a_{\mathcal{L}_{N-h+1}} \cdots a_{\mathcal{L}_{N-1}}} + 2\sqrt{2} \sum_{\mathcal{L}_{N-h} < j \leq \mathcal{L}_N} \varepsilon_j^{1/2}.$$

*Démonstration.* Posons  $N := \mathcal{L}_N - h \geq 0$ . Nous avons alors  $n \geq q_{N+h}$  et la Proposition 3.7 nous donne

$$(3.2) \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{0 \leq m < n} g_N(m) - \Pi_{N+1} \right| < \frac{2q_{N+1}}{n} \leq \frac{2q_{N+1}}{q_{N+h}} = \frac{2}{a_{N+1} \cdots a_{N+h-1}}.$$

La Proposition 3.5 implique

$$(3.3) \quad |\Pi_{N+h+1} - \Pi_{N+1}| \leq \sqrt{2} \sum_{N < j \leq N+h} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} \sqrt{1 - \operatorname{Re} g(dq_j)} \leq \sqrt{2} \sum_{N < j \leq N+h} \varepsilon_j^{1/2}.$$

De plus, puisque  $n < q_{N+h+1}$ , nous avons grâce à la Proposition 3.6

$$|g(m) - g_N(m)| \leq \sqrt{2} \sum_{N < j \leq N+h} \sqrt{1 - \operatorname{Re} g(e_j(n) q_j)}$$

uniformément pour tout  $0 \leq m \leq n-1$  et donc

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{0 \leq m < n} g(m) - \frac{1}{n} \sum_{0 \leq m < n} g_N(m) \right| \leq \sqrt{2} \sum_{N < j \leq N+h} \sqrt{1 - \operatorname{Re} g(e_j(n) q_j)} \leq \sqrt{2} \sum_{N < j \leq N+h} \varepsilon_j^{1/2}.$$

Ainsi en combinant (3.2) et (3.3) avec l'inégalité précédente, nous obtenons bien le résultat attendu en se rappelant que  $N+h = \mathcal{L}_N$ . □

**Théorème 3.9.** (a) *Si la série  $\sum \varepsilon_j$  converge, alors on a*

$$(3.4) \quad \varphi_n = \prod_{j \leq \mathcal{L}_{N-1}} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g(dq_j) \right) + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

(b) *Si la série  $\sum \varepsilon_j/a_j$  diverge, alors  $\varphi_n \rightarrow 0$  et (3.4) est encore vraie.*

*Démonstration.* Le point (a) découle immédiatement de la Proposition 3.8 : en effet, en lui appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons pour tous entiers  $h \geq 1$  et  $n \geq q_h$

$$|\varphi_n - \prod_{\mathcal{L}_{N-1}} \frac{1}{a_j}| \leq \frac{2}{a_{\mathcal{L}_{N-h+1}} \cdots a_{\mathcal{L}_{N-1}}} + 2\sqrt{2h} \left( \sum_{\mathcal{L}_{N-h} < j \leq \mathcal{L}_N} \varepsilon_j \right)^{1/2},$$

ce qui implique pour tout entier  $h \geq 1$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \varphi_n - \prod_{j \leq \mathcal{L}_{N-1}} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g(dq_j) \right) \right| \leq \frac{2}{a^{h-1}}.$$

Supposons maintenant que la série  $\sum \varepsilon_j/a_j$  diverge. En utilisant l'inégalité

$$\left| \frac{1}{m} (1 + z_1 + \dots + z_{m-1}) \right| \leq 1 - \frac{1}{2m} \max_{1 \leq k \leq m-1} (1 - \operatorname{Re} z_k)$$

valable pour tout nombre complexe  $|z_k| \leq 1$  ( $k \geq 1$ ) et pour tout entier  $1 \leq k \leq m-1$  (prouvée dans [12]), nous avons pour tout  $j \geq 0$

$$\left| \frac{1}{a_j} \sum_{0 \leq j < a_j} g(dq_j) \right| \leq 1 - \frac{\varepsilon_j}{2a_j} \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon_j}{2a_j}\right).$$

Il en résulte que, pour chaque  $k \geq 1$ ,

$$(3.5) \quad |\Pi_k| \leq \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{0 \leq j < k} \frac{\varepsilon_j}{a_j}\right)$$

et donc que la suite  $(\Pi_k)$  tend vers 0.



Il nous reste donc à montrer qu'il en est de même pour la suite  $(\varphi_n)$ . Nous fixons  $\varepsilon > 0$  : il existe alors un entier  $K > 0$  tel que, pour tout  $k \geq K$ , on ait  $|\Pi_k| \leq \varepsilon$ . Pour tout entier  $n > q^K$ , nous avons alors grâce à la Proposition 3.4

$$\begin{aligned} \left| \sum_{0 \leq m < n} g(m) \right| &\leq \sum_{0 \leq j < k} e_j(n) q_j |\Pi_j| + \sum_{K \leq j \leq \mathcal{L}_N} e_j(n) q_j |\Pi_j| \\ &\leq \sum_{0 \leq j < k} e_j(n) q_j |\Pi_j| + \varepsilon n. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{0 \leq m < n} g(m) \right| \leq \varepsilon,$$

d'où la convergence de  $(\varphi_n)$  vers 0 et le point (b).  $\square$

**Remarque 3.10.** *Nous pouvons compléter le second point du Théorème 3.9 en ajoutant que, lorsque  $g$  possède une valeur moyenne  $M(g)$  non nulle, nous avons*

$$\sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon_j}{a_j} \leq 2 \ln \left( \frac{1}{|M(g)|} \right).$$

En effet, pour tout  $k \geq 1$ , le produit  $\Pi_k$  est non nul et l'inégalité (3.5) peut se réécrire

$$\sum_{0 \leq j < k} \frac{\varepsilon_j}{a_j} \leq 2 \ln \left( \frac{1}{|\Pi_k|} \right).$$

Par passage à la limite, cette dernière donne le résultat attendu.

**Corollaire 3.11.** *Si la suite  $(a_j)$  est bornée, alors (3.4) est toujours vraie.*

*Démonstration.* Si la série  $\sum_{j \geq 0} \varepsilon_j$  converge, alors le point (a) du Théorème 3.9 nous donne immédiatement le résultat. Si la série  $\sum_{j \geq 0} \varepsilon_j$  diverge, alors le résultat découle directement du point (b) de ce même théorème.  $\square$

**Théorème 3.12.** *Supposons que la série  $\sum \varepsilon_j$  converge ou bien que la suite  $(a_j)$  soit bornée.*

- 1) *Si  $g$  possède une valeur moyenne non nulle, alors on a*  
 (i) *la convergence de la série*

$$(3.6) \quad \sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} (1 - g(dq_j));$$

- (ii)  $1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g(dq_j) \neq 0$  pour tout  $j \geq 0$ .

2) *Si la condition (i) précédente est réalisée, alors  $g$  possède une valeur moyenne, donnée par la formule*

$$(3.7) \quad M(g) = \prod_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g(dq_j) \right).$$

Ce théorème est moins général qu'un résultat prouvé par Coquet [9] (*cf.* Théorème 3.15).

*Démonstration.* Nous commençons d'abord par une petite observation : sous les hypothèses du théorème, le produit infini (3.7) est convergent ou non en même temps que la série (3.6). En effet, nous avons grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout entier  $j \geq 0$

$$\begin{aligned} |u_j|^2 &\leq \frac{1}{a_j^2} \left( \sum_{1 \leq d < a_j} |g(dq_j) - 1| \right)^2 \leq \frac{a_j - 1}{a_j^2} \sum_{1 \leq d < a_j} |g(dq_j) - 1|^2 \\ &\leq 2 \left( 1 - \frac{1}{a_j} \right)^2 \varepsilon_j, \end{aligned}$$

où nous avons également utilisé l'inégalité  $|z - 1|^2 \leq 2(1 - \operatorname{Re} z)$  valable pour tout nombre complexe  $|z| \leq 1$ .

Si la série  $\sum \varepsilon_j$  est convergente, alors  $\sum (1 - 1/a_j)^2 \varepsilon_j$  l'est également et  $\sum |u_j|^2$  aussi. Le produit infini (3.7) est ainsi convergent ou non en même temps que la série (3.6), car nous avons l'égalité  $\sum_{1 \leq d < a_j} (1 - g(dq_j)) = -a_j u_j$  par définition.

Si la suite  $(a_j)$  est bornée, alors le point (b) du Théorème 3.9 permet d'en déduire la convergence de la série des  $\varepsilon_j$  et donc celle de  $\sum |u_j|^2$  comme précédemment.

Si  $g$  possède une valeur moyenne  $M(g)$  non nulle, le Théorème 3.9 implique que les facteurs du produit infini (3.7) sont tous non nuls et est convergent avec pour valeur  $M(g)$ . Grâce à la remarque faite au précédent paragraphe, le point 1) du Théorème 3.12 découle immédiatement de l'hypothèse de convergence de la série  $\sum \varepsilon_j$ .

En outre, si la suite  $(a_j)$  est majorée, l'observation précédente et le Corollaire 3.11 impliquent également le premier point du théorème.

Nous allons maintenant prouver le point 2. Si la série  $\sum \varepsilon_j$  converge, nous pouvons alors appliquer le premier résultat du Théorème 3.9 qui montre que le produit infini (3.7) a tous ses facteurs non nuls et est convergent avec pour valeur  $M(g)$ . Grâce à l'observation du premier paragraphe, nous en déduisons que la série (3.6) est convergente.

Si la suite  $(a_j)$  est bornée, alors en remarquant que pour chaque  $j \geq 0$ , nous avons

$$\operatorname{Re}(-a_j u_j) = \sum_{1 \leq d < a_j} (1 - \operatorname{Re} g(dq_j)) \geq \varepsilon_j,$$

nous en déduisons que la condition (i) implique la convergence de la série  $\sum \varepsilon_j$  et nous pouvons conclure comme précédemment. □

### 3.3 Théorème d'Erdős-Wintner pour les systèmes de Cantor à chiffres bornés

Dans [9], Coquet prouve un théorème d'Erdős-Wintner dans le cadre de fonctions  $Q$ -additives quand la suite  $(a_j)$  est bornée.

**Théorème 3.13.** *Soit  $f$  une fonction  $Q$ -additive à valeurs réelles par rapport à un système numération de Cantor à chiffres bornés. La fonction  $f$  possède une fonction de répartition  $F$  si, et seulement si,*

les deux séries suivantes convergent

$$(3.8) \quad \sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j) \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)^2.$$

Lorsque les conditions sont remplies, la fonction caractéristique est donnée par le produit convergent

$$(3.9) \quad \varphi(\tau) = \prod_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \left( \sum_{0 \leq d < a_j} e^{i\tau f(dq_j)} \right) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Nous pourrions démontrer ce théorème comme l'avait fait Delange dans le cas  $q$ -adique avec l'aide du Théorème 3.12, mais nous allons plutôt prouver ce résultat de la même manière que dans le chapitre précédent, puisque nous utiliserons les idées de la démonstration dans celle de la version effective. Nous signalons également que Barat et Grabner [3] ont rédigé une autre preuve d'un point de vue ergodique dans laquelle ils évitent l'utilisation de résultats appartenant à l'analyse de Fourier.

*Démonstration.* L'élément principal de la preuve est à nouveau le critère de Lévy (cf. Théorème 1.10). Supposons que les deux séries (2.1) convergent et montrons qu'il existe une fonction  $\varphi$  continue en 0 telle que, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  fixé,

$$(3.10) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} e^{i\tau f(n)} = \varphi(\tau).$$

Grâce à la Proposition 3.3, nous avons l'identité

$$\varphi_{q_L}(\tau) := \frac{1}{q_L} \sum_{n < q_L} e^{i\tau f(n)} = \prod_{0 \leq j < L} \left( \frac{1}{a_j} \sum_{0 \leq d < a_j} e^{i\tau f(dq_j)} \right) \quad (L \geq 0),$$

ce qui implique que la fonction caractéristique limite doit être

$$\varphi(t) = \prod_{j \geq 0} \left( \frac{1}{a_j} \sum_{0 \leq d < a_j} e^{i\tau f(dq_j)} \right).$$

Nous posons maintenant

$$\widetilde{m}_j := \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j) \quad \text{et} \quad \widetilde{m}_{2;j}^2 := \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)^2.$$

Grâce à l'estimation  $\exp(iu) = 1 + iu + O(u^2)$  pour tout réel  $u$  et à l'inégalité  $|\widetilde{m}_j| \leq |\widetilde{m}_{2;j}|$  pour tout entier  $j \geq 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{1}{a_j} \sum_{0 \leq d < a_j} e^{i\tau f(dq_j)} \right) &= \log \left( 1 + i\tau \widetilde{m}_j + O \left( \tau^2 \widetilde{m}_{2;j}^2 \right) \right) \\ &= i\tau \widetilde{m}_j + O \left( \tau^2 \left( \widetilde{m}_j^2 + \widetilde{m}_{2;j}^2 \right) \right) \\ &= i\tau \widetilde{m}_j + O \left( \tau^2 \widetilde{m}_{2;j}^2 \right), \end{aligned}$$

en supposant que  $j$  est suffisamment grand (dépendant de  $t$ ). Puisque les deux séries (3.8) convergent, la suite  $(\varphi_{q_L})_L$  converge faiblement dans  $\mathbb{R}$  (i.e. point par point) et donc sa limite est exactement  $\varphi$ . Il

reste à montrer que la convergence  $\varphi_{q_L}(t) \rightarrow \varphi(t)$  implique (3.10), qui est immédiat grâce au Théorème 3.12. La fonction  $\varphi$  est alors continue en 0 grâce au lemme 6 de [12] (nous montrerons également plus tard que nous avons en réalité  $\varphi(\tau) = 1 + O(|\tau|)$  pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ ).

Réciproquement, supposons que  $f$  admet une loi limite : d'après le critère de Lévy, cela implique l'existence d'une fonction  $\varphi$  continue en 0 vérifiant (3.10). Il existe donc un réel  $T > 0$  tel que  $|\varphi(\tau)| \geq 1/2$  pour tout  $|\tau| \leq T$ . En utilisant l'inégalité  $1 - \cos(x) \geq 8 \|x/(2\pi)\|^2$ , nous obtenons pour tout  $j \geq 0$

$$\left| \sum_{0 \leq d < a_j} e^{i\tau f(dq_j)} \right|^2 \leq a_j^2 - 16 \sum_{1 \leq d < a_j} \left\| \frac{\tau f(dq_j)}{2\pi} \right\|^2$$

et donc

$$\left| \frac{1}{a_j} \sum_{0 \leq d < a_j} e^{i\tau f(dq_j)} \right| \leq \exp \left( -\frac{8}{a_j^2} \sum_{1 \leq d < a_j} \left\| \frac{\tau f(dq_j)}{2\pi} \right\|^2 \right).$$

Pour tout  $|\tau| \leq T$ , nous avons donc l'encadrement

$$(3.11) \quad \frac{1}{2} \leq |\varphi(\tau)| = \prod_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \left| \sum_{0 \leq d < a_j} e^{i\tau f(dq_j)} \right| \leq \exp \left( -\frac{8}{a_j^2} \sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < a_j} \left\| \frac{\tau f(dq_j)}{2\pi} \right\|^2 \right).$$

Nous en déduisons

$$(3.12) \quad \sum_{j \geq 0} \sum_{1 \leq d < a_j} \left\| \frac{\tau f(dq_j)}{2\pi} \right\|^2 \ll 1 \quad (|\tau| \leq T)$$

et donc la suite  $(\|\tau f(dq_j)/(2\pi)\|)_{j \geq 0}$  ( $1 \leq d \leq a_j - 1$ ) converge vers 0 pour tout  $|\tau| \leq T$ . De plus, cela implique aussi que la suite  $(f(dq_j))_{j \geq 0}$  tend vers 0 grâce au Lemme 2.3. Ainsi, nous pouvons choisir un réel  $0 < |\tau_0| \leq T$  tel que  $|\tau_0 f(dq_j)| \leq \pi$  pour tous les entiers  $1 \leq d \leq a_j - 1$  et  $j \geq 0$ . Grâce à (3.12), nous en déduisons que la série

$$\sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} \left( \frac{\tau_0 f(dq_j)}{2\pi} \right)^2$$

est bornée et est donc convergente. Puisque  $\tau_0 > 0$ , nous obtenons également la convergence de la série

$$\sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)^2.$$

En utilisant le fait que la suite  $(\varphi_{q_L})_L$  converge faiblement vers  $\varphi$  et en composant par la fonction logarithme comme précédemment, nous en concluons que la série

$$\sum_{j \geq 0} \widetilde{m}_{j,q} = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)$$

converge également. □

Maintenant que nous avons prouvé ce théorème, la question naturelle est de savoir si nous pouvons déterminer la nature de la loi limite comme dans le cas classique (cf. Section 1.3.1 et Théorème 1.13). La proposition 3 de [3] répond complètement à cette question et donne même une condition nécessaire et suffisante pour des systèmes de Cantor généraux.

Soit  $F$  la fonction de répartition de la loi limite de la fonction  $Q$ -additive  $f$ . Alors cette loi est égale au produit de convolution infini

$$\bigast_{k \geq 0} F_k,$$

où  $F_k$  est la fonction de répartition atomique donnée par

$$(3.13) \quad F_k(z) = \frac{1}{a_k} \sum_{\substack{0 \leq d < a_k \\ f(dq_k) \leq z}} 1 \quad (z \in \mathbb{R}).$$

**Proposition 3.14.** *Soit  $Q$  un système de numération de Cantor et  $f$  une fonction  $Q$ -additive vérifiant les hypothèses du Théorème 3.13. Alors la loi limite est pure.*

*En outre, si  $Q$  est à chiffres bornés, alors la loi limite de  $f$  est atomique si, et seulement si, il existe un entier  $J \geq 0$  tel que  $f(dq_j) = 0$  pour tout  $j \geq J$  et  $1 \leq d < a_j$ .*

Comme dans le cas de la Proposition 2.4, la démonstration de ce résultat découle en grande partie du Théorème 1.11 et s’inspire de la preuve de la proposition 3 de [3].

*Démonstration.* La loi limite est égale au produit de convolution infini  $\bigast_{k \geq 0} F_k$  où  $F_k$  est la fonction de répartition donnée par (3.13).

Ainsi, d’après le Théorème 1.11, la loi limite est pure et elle est discrète si, et seulement si,

$$(3.14) \quad \forall j \geq 0, s_j \neq 0 \quad \text{et} \quad \sum_j (1 - s_j) < \infty.$$

Pour toute la suite de la preuve, nous nous plaçons sous l’hypothèse que  $Q$  est à chiffres bornés et nous désignons par  $A$  le maximum de la suite  $(a_n)$ . Si nous supposons qu’il existe un entier  $J \geq 0$  tel que  $f(dq_j) = 0$  pour tous  $j \geq J$ ,  $1 \leq d < a_j$ , alors  $s_j = 1$  pour tout  $j \geq J$  et (2.7) est immédiatement vérifiée.

Réciproquement, supposons que (3.14) est vraie. Puisque cette condition implique la convergence de la suite  $(s_j)$  vers 1, il existe un entier naturel  $J$  tel que  $1 - s_j \leq 1/(2A)$  pour tout entier  $j \geq J$ . Nous en déduisons donc l’égalité  $s_j = 1$  ( $j \geq J$ ). Ainsi, les fonctions de répartition  $F_j$ , pour tout entier  $j \geq J$ , sont toutes des fonctions sauts en 0 (on rappelle que  $f(0) = 0$ ) et donc on a bien  $f(dq_j) = 0$  pour tous  $j \geq J$ ,  $1 \leq d < a_j$ . □

### 3.4 À propos des systèmes de Cantor à chiffres non-bornés

Le fait que la suite  $(a_j)$  soit bornée est important, puisque, dans le cas contraire, nous pouvons construire une fonction  $Q$ -additive  $f$  telle que la convergence des deux séries (3.8) tienne mais que  $f$  ne possède pas de loi limite (nous allons reformuler l’exemple 1 de [3]).

En effet, soit  $Q$  un système de numération de Cantor à chiffres non bornés. Puisque la suite  $(a_j)_n$  n’est pas majorée, il existe une sous-suite  $(a_{\sigma(j)})_j$  telle que le produit infini  $\prod (1 - 1/a_{\sigma(j)})$  converge, avec  $\prod_{j \geq 0} (1 - 1/a_{\sigma(j)}) \geq 1/2$ . Nous définissons alors une fonction  $Q$ -additive par  $f(q_{\sigma(j)}) = 1$  et  $f(\varepsilon q_m) = 0$  sinon :  $f$  est ainsi à valeurs entières. On remarque alors que les deux séries (3.1) convergent.

Par l’absurde, supposons maintenant que  $f$  admet une loi limite : alors la limite de la suite des  $\frac{1}{N} \#\{n < N : f(n) = 1\}$  existe.

En prenant  $N = q_{\sigma(J)}$  pour un certain entier  $J$ ,  $f(n) = 1$  pour  $n < q_{\sigma(J)}$  si précisément un seul chiffre

de  $n$  correspondant à un certain  $\sigma(j)$  ( $j < J$ ) est égal à 1 et si ses autres chiffres correspondant aux  $\sigma(l)$  ( $l < J, l \neq j$ ) sont nulles (les chiffres restant étant arbitraires). Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{\sigma(J)}} \#\{n < q_{\sigma(J)} : f(n) = 1\} &= \sum_{j < J} \frac{1}{a_{\sigma(j)}} \prod_{\ell < J, \ell \neq j} \left(1 - \frac{1}{a_{\sigma(\ell)}}\right) \\ &= \prod_{\ell < J} \left(1 - \frac{1}{a_{\sigma(\ell)}}\right) \sum_{j < J} \frac{1}{a_{\sigma(j)}} \left(1 - \frac{1}{a_{\sigma(j)}}\right)^{-1} \end{aligned}$$

qui converge vers  $\prod(1 - 1/a_{\sigma(\ell)}) \cdot \sum 1/(a_{\sigma(j)} - 1)$ . Cependant, nous avons

$$\#\{n < 2q_{\sigma(J)} : f(n) = 1\} = \#\{n < q_{\sigma(J)} : f(n) = 1\} + \#\{n < q_{\sigma(J)} : f(n) = 0\}$$

puisque nous avons distingué entre  $n < q_{\sigma(J)}$  et  $q_{\sigma(J)} \leq n < 2q_{\sigma(J)}$ . Le premier cas est le même que précédemment, mais dans le second cas, nous avons déjà un chiffre valant 1 et donc tous les autres correspondant à une valeur de la suite  $(\sigma(n))$  doivent être nuls. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2q_{\sigma(J)}} \#\{n < 2q_{\sigma(J)} : f(n) = 1\} &= \frac{1}{2} \prod_{\ell < J} \left(1 - \frac{1}{a_{\sigma(\ell)}}\right) \left(1 + \sum_{j < J} \frac{1}{a_{\sigma(j)}} \left(1 - \frac{1}{a_{\sigma(j)}}\right)^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \prod_{\ell < J} \left(1 - \frac{1}{a_{\sigma(\ell)}}\right) \left(1 + \sum_{j < J} \frac{1}{a_{\sigma(j)} - 1}\right). \end{aligned}$$

Puisque nous avons supposé qu'une loi limite existe, ces deux limites doivent coïncider. Toutefois, cela impliquerait que  $\sum_{j \geq 0} 1/(a_{\sigma(j)} - 1) = 1$ , ce que nous pouvons éviter.

En conclusion, nous venons de prouver que dans un système de numération de Cantor à chiffres non-bornés, la convergence des deux séries (3.8) n'implique pas nécessairement l'existence d'une loi limite : il faut donc des hypothèses supplémentaires.

Coquet [9] prouva un résultat à propos de la valeur moyenne pour les fonctions  $Q$ -multiplicatives de module  $\leq 1$  lorsque  $(a_j)_{j \geq 1}$  est non bornée, ressemblant au Théorème 3.12, l'amenant à démontrer un théorème d'Erdős-Wintner partiel.

**Proposition 3.15** (Coquet [9]). *Soit  $g$  une fonction  $Q$ -multiplicative avec  $|g| \leq 1$ .*

1) *Si  $g$  possède une valeur moyenne non nulle et si*

$$\sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{0 \leq d < a_j} (1 - \operatorname{Re} f(dq_j)) < \infty,$$

alors on a

(i) *la convergence de la série*

$$\sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} (1 - g(dq_j));$$

(ii)  $1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g(dq_j) \neq 0$  pour tout  $j \geq 0$ .

2) *Si  $\max_{1 \leq k \leq a_j - 1} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{0 \leq d \leq k} (1 - \operatorname{Re} g(dq_j))\right) \rightarrow 0 (j \rightarrow \infty)$  et si la condition (i) précédente est réalisée, alors  $g$  possède une valeur moyenne, donnée par la formule*

$$M(g) = \prod_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \left(1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g(dq_j)\right).$$

Ce résultat donna à Coquet une condition suffisante quand la suite  $(a_j)_{j \geq 1}$  n'est pas bornée.

**Proposition 3.16** (Coquet [9]). *Soit  $f$  une fonction  $Q$ -additive à valeurs réelles. On pose, pour tout  $j \geq 0$  et  $d \in \{1, \dots, j\}$*

$$f^*(dq_j) = \begin{cases} f(dq_j) & \text{si } |f(dq_j)| \leq 1, \\ 1 & \text{si } |f(dq_j)| > 1, \end{cases}$$

et

$$\beta_j := \max_{1 \leq k \leq a_j - 1} \left( \frac{1}{k+1} \sum_{0 \leq d \leq k} f^*(dq_j) \right)^2.$$

Si  $\beta_j \rightarrow 0$  et les séries

$$\sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f^*(dq_j) \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f^*(dq_j)^2$$

convergent, alors  $f$  possède une loi limite et sa fonction caractéristique est donnée par le produit convergent

$$\prod_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} \exp(i\tau f(dq_j)) \right) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Nous avons déjà mentionné que Barat et Grabner [3] ont prouvé le Théorème 3.13 à l'aide de méthodes ergodiques. En fait, ils font le lien avec une propriété de convergence d'une série  $\sum f_n(x)$  qui est définie sur les entiers  $Q$ -adiques  $x \in \mathbb{Z}_Q = \varprojlim \mathbb{Z}/q_n\mathbb{Z}$ . Cependant, dans le cas de chiffres non-bornés, ils observent (avec l'aide du contre-exemple cité ci-dessus) que cette relation n'est plus une équivalence. Il reste alors un problème ouvert que de formuler un théorème d'Erdős-Wintner pour des systèmes de Cantor à chiffres non-bornés.

### 3.5 Version effective dans le cas discret

**Proposition 3.17.** *Soit  $Q$  un système de Cantor à chiffres bornés et  $f$  une fonction  $Q$ -additive possédant une loi limite discrète. Alors on a la majoration (optimale)*

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{N}.$$

*Démonstration.* Nous raisonnons exactement comme dans le cas  $q$ -adique. Nous savons que la loi limite est discrète si, et seulement si, il existe un entier  $J \in \mathbb{N}$  tel que  $f(dq_j) = 0$  pour tout  $j \geq J$  et pour  $d \in \{1, \dots, a_j - 1\}$ . Cette hypothèse implique que  $f$  est  $q_J$ -périodique et la Proposition 2.7 permet de conclure immédiatement. □

### 3.6 Version effective dans le cas continu

Pour toute fonction  $Q$ -additive  $f$  à valeurs réelles dans un système de numération de Cantor à chiffres bornés et pour chaque nombre réel  $\tau$ , nous définissons la fonction  $q$ -multiplicative  $g_\tau$  par

$$g_\tau(n) := e^{i\tau f(n)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Parallèlement aux définitions introduites dans le cas  $q$ -adique, nous désignons par  $\mathcal{L}_N$  la longueur de la décomposition de l'entier naturel  $N$ , autrement dit l'unique entier naturel  $\ell$  vérifiant

$$q\ell \leq N < q\ell+1.$$

De plus, nous posons

$$\eta_{1,N} := \sum_{j>\mathcal{L}_N} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j), \quad \eta_{1,N}^* := \sum_{j>\mathcal{L}_N} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} |f(dq_j)|, \quad \eta_{2,N} := \sum_{j>\mathcal{L}_N} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)^2.$$

Puisque  $f$  vérifie les hypothèses du Théorème 3.13, les restes  $\eta_{1,N}$  et  $\eta_{2,N}$  tendent vers 0, mais en général  $\eta_{2,N}^* = \infty$ .

Par ailleurs, nous désignons toujours par  $Q_F$  la fonction de concentration d'une fonction de répartition  $F$  (cf. Section 1.3.2 pour plus de précisions).

De plus, nous désignons par  $a$  le minimum de la suite  $(a_n)$  et pour tous  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $T \geq 1$  et tout entier  $N \geq 1$  nous définissons le réel  $h_T := \ln(T \ln T) / \ln a$ , ainsi que les deux sommes

$$\varepsilon_N(T) := \sum_{\mathcal{L}_N - h < j \leq \mathcal{L}_N} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} |f(dq_j)| \quad \text{et} \quad \psi_N(\tau) := 8 \sum_{j \leq \mathcal{L}_N} \sum_{1 \leq d < a_j} \frac{1}{a_j^2} \left\| \frac{\tau f(dq_j)}{2\pi} \right\|^2.$$

**Théorème 3.18.** *Soit  $Q$  un système de numération de Cantor à chiffres bornés et soit  $f$  une fonction  $Q$ -additive réelle telle que les deux séries (3.8) convergent et que l'on ait  $f(dq_j) \neq 0$  pour une infinité de valeurs du couple  $(d, j)$  ( $j \geq 0$ ,  $0 \leq d < a_j$ ). Pour tout nombre réel  $T \geq 1$  vérifiant  $h_T \leq \mathcal{L}_N$ , on a*

$$(3.15) \quad \|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \varepsilon_N(T) + \int_{1/T}^T \min \left( \frac{1}{1+\tau}, |\eta_{1,N}| + \tau \eta_{2,N} \right) e^{-\psi_N(\tau)} d\tau.$$

où la constante implicite dépend du maximum de la suite  $(a_j)$ .

De plus, si la première série de (3.8) est absolument convergente, alors l'expression  $|\eta_{1,N}| + \tau \eta_{2,N}$  peut être remplacé par  $\eta_{1,N}^*$ , qui donne une meilleure majoration, par exemple quand  $f$  est positive.

**Remarque.** Dans les hypothèses du le théorème précédent, nous avons

$$\psi_N(\tau) \geq \frac{2\tau^2}{\pi^2} \sum_{(d,j) \in S_C(\tau), j \leq \mathcal{L}_N} \frac{f(dq_j)^2}{a_j^2}$$

où l'on a posé  $S_C(\tau) := \{(d, j) \in \{1, \dots, a_j - 1\} \times \mathbb{N} : |f(dq_j)| \leq \pi/|\tau|\}$  ( $\tau > 0$ ).

Comme dans le cas  $q$ -adique, nous pouvons obtenir ici facilement une majoration pour  $Q_F$ .

**Proposition 3.19.** *Soit  $Q$  un système de numération de Cantor à chiffres bornés et soit  $f$  une fonction  $Q$ -additive réelle admettant une loi limite, dont la fonction de répartition limite est donnée  $F$ . On a alors*

$$Q_F \left( \frac{1}{T} \right) \ll \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\psi_N(\tau)} d\tau \ll \frac{1}{T} \int_0^T \exp \left( -\frac{2\tau^2}{\pi^2} \sum_{(d,j) \in S_C(\tau), j \leq \mathcal{L}_N} \frac{f(dq_j)^2}{a_j^2} \right) d\tau \quad (T > 0).$$

Cette majoration est immédiate en utilisant les notations du Théorème 3.18 et en combinant l'estimation (1.10) avec la majoration issue de 3.11.



Similairement au chapitre précédent, il est aussi intéressant d'avoir des versions effectives plus simples et qui réfèrent explicitement aux deux séries apparaissant dans le théorème d'Erdős-Wintner 3.13 (les preuves sont similaires à celles du chapitre précédent). Nous introduisons alors deux nouveaux restes. En utilisant les mêmes notations que précédemment, pour tout entier naturel  $N$  et tout réel  $T$

$$\eta_{1,N}^*(T) := \sum_{j > \mathcal{L}_N - h_T} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} |f(dq_j)| \quad \text{et} \quad \eta_{2,N}(T) := \sum_{j > \mathcal{L}_N - h_T} \frac{1}{a_j} \sum_{1 \leq d < a_j} f(dq_j)^2.$$

**Corollaire 3.20.** *Soit  $Q$  un système de numération de Cantor à chiffres bornés et soit  $f$  une fonction  $Q$ -additive réelle telle que les deux séries (0.6) convergent et que l'on ait  $f(dq_j) \neq 0$  pour une infinité de valeurs du couple  $(d, j)$  ( $j \geq 0$ ,  $0 \leq d < a_j$ ). Pour tout nombre réel  $T \geq 1$  vérifiant  $h_T \leq \mathcal{L}_N$ , on a*

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \varepsilon_N(T) + T |\eta_{1,N}| + T^2 \eta_{2,N},$$

où la constante implicite dépend du maximum de la suite  $(a_n)$ . De plus, si la première série de (0.6) est absolument convergente, alors les trois derniers termes précédents peuvent être remplacés par la quantité  $T \eta_{1,N}^*(T)$ .

En particulier, on obtient

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T |\eta_{1,N}| + T \sqrt{\eta_{2,N}(T) \ln T},$$

où la constante implicite dépend toujours du maximum de la suite  $(a_n)$ .

**Remarque 3.21.** *En général, il suffit d'inverser la fonction croissante  $q_j$  pour obtenir une expression de la longueur  $\mathcal{L}_N$ , grâce à l'inégalité  $q_{\mathcal{L}_N} \leq N < q_{\mathcal{L}_N+1}$ .*

*Nous signalons également que si la suite  $(a_j)$  est majorée par un réel  $A$ , alors nous avons l'encadrement  $\ln N / \ln A - 1 < \mathcal{L}_N \leq \ln N / \ln a$ .*

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 3.18.

*Démonstration.* Nous appliquons à nouveau l'inégalité de Berry-Esseen. Nous posons

$$\varphi_N(\tau) := \frac{1}{N} \sum_{n < N} g_\tau(n)$$

Grâce à la Proposition 3.3, nous avons l'identité

$$\varphi_{q_k}(\tau) = \prod_{0 \leq j < k} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g_\tau(dq_j) \right) \quad (k \geq 0).$$

Nous voulons utiliser l'estimation  $\varphi_N(\tau) = 1 + O(\tau)$  (uniformément quand  $N \rightarrow \infty$ ) et pour prouver cette relation, avec la notation introduite dans la preuve du Théorème 3.13, nous posons

$$M(N) := \sum_{0 \leq j \leq \mathcal{L}_N} \widetilde{m}_j \quad \text{et} \quad D^2(N) := \sum_{0 \leq j \leq \mathcal{L}_N} \left( \widetilde{m}_{2;j}^2 - \widetilde{m}_j^2 \right).$$

Nous allons utiliser un résultat prouvé dans [37] et qui est un analogue de l'inégalité de Turán-Kubilius.

**Théorème 3.22.** *Soit  $f$  une fonction  $Q$ -additive réelle pour un système de numération de Cantor (quelconque). On a alors*

$$\frac{1}{N} \sum_{n < N} (f(n) - M(N))^2 \leq 2D^2(N).$$

Ainsi, pour établir que  $\varphi_N(\tau) = 1 + O(\tau)$  (uniformément quand  $N \rightarrow \infty$ ), nous partons de sa définition et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\varphi_N(\tau) - 1 \ll |\tau| \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \sum_{n < N} (f(n) - M(N))^2 \right)^{1/2} + |M(N)| \right) \ll |\tau|,$$

où la dernière majoration vient du fait que  $f$  vérifie les hypothèses du Théorème 2.1 et donc que  $(D(N))_N$  et  $(M(N))_N$  convergent. En faisant tendre  $N$  vers l'infini, nous avons alors aussi  $\varphi(\tau) = 1 + O(\tau)$ , ce qui implique pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$

$$(3.16) \quad \left| \frac{\varphi_N(\tau) - \varphi(\tau)}{\tau} \right| \ll 1.$$

Nous utiliserons cette estimation pour des petites valeurs de  $|\tau|$ .

Nous évaluons maintenant la différence  $\varphi_N(\tau) - \varphi(\tau)$  lorsque  $|\tau|$  n'est pas trop proche de 0 en utilisant l'inégalité

$$(3.17) \quad |\varphi_N(\tau) - \varphi(\tau)| \leq \left| \varphi_N(\tau) - \varphi_{q\mathcal{L}_{N+1}}(\tau) \right| + \left| \varphi_{q\mathcal{L}_{N+1}}(\tau) - \varphi(\tau) \right|.$$

Nous utiliserons parfois la notation  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_N$  afin de raccourcir les formules. Pour majorer le premier terme, nous utilisons la Proposition 3.8 et le fait que  $(a_j)$  soit majorée (par exemple par un réel  $A$ ), ce qui implique pour tout entier  $h \geq 1$  et  $n \geq qh$

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \left| \varphi_N - \varphi_{q\mathcal{L}_{N+1}}(\tau) \right| &\leq \frac{2}{a_{\mathcal{L}_N - h + 1} \cdots a_{\mathcal{L}_N - 1}} + 2\sqrt{2} \sum_{\mathcal{L}_N - h < j \leq \mathcal{L}_N} \max_{1 \leq d \leq a_j - 1} \sqrt{1 - \cos(\tau f(dq_j))} \\ &\ll_A \frac{1}{a^h} + |\tau| \varepsilon_N(T). \end{aligned}$$

Pour majorer le dernier terme de (3.17), nous utilisons la majoration suivante

$$(3.19) \quad \left| \varphi_{q\mathcal{L}_{N+1}}(\tau) \right| \leq e^{-\psi_N(\tau)},$$

qui se prouve de la même manière que (2.17) et ce qui nous donne

$$\frac{\left| \varphi_{q\mathcal{L}_{N+1}}(\tau) - \varphi(\tau) \right|}{|\tau|} \leq \frac{\left| 1 - \varphi(\tau) / \varphi_{q\mathcal{L}_{N+1}}(\tau) \right|}{|\tau|} e^{-\psi_N(\tau)}.$$

De plus, pour majorer la quantité  $\left| 1 - \varphi(\tau) / \varphi_{q\mathcal{L}_{N+1}}(\tau) \right|$ , nous avons deux possibilités. D'une part, comme dans le cas  $q$ -adique, nous avons

$$(3.20) \quad \frac{\left| \varphi_{q\mathcal{L}_{N+1}}(\tau) - \varphi(\tau) \right|}{|\tau|} \ll \frac{e^{-\psi_N(\tau)}}{1 + |\tau|}.$$

D'autre part, nous pouvons aussi évaluer directement  $\varphi_{q_{\mathcal{L}+1}}(\tau)$ . En effet, nous savons que ce produit infini converge dans  $\mathbb{C}^*$ , donc en reprenant les notations de la preuve du Théorème 3.13 et en reportant les évaluations  $e^{iu} = 1 + iu + O(u^2)$  avec  $u \in \mathbb{R}$  et  $1 + z = \exp(z + O(z^2))$  pour  $|z| \leq 1/2$ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_{q_{\mathcal{L}+1}}(\tau)} &= \prod_{j>\mathcal{L}} \frac{1}{a_j} \sum_{0 \leq d < a_j} g_\tau(dq_j) \\ &= \prod_{j>\mathcal{L}} \left( 1 + i\tau \widetilde{m}_j + O\left(\tau^2 \widetilde{m}_{2;j}^2\right) \right) \\ &= \exp\left(i\tau \eta_{1,N} + O\left(\tau^2 \eta_{2,N}\right)\right) \\ &= \exp\left(O\left(|\tau \eta_{1,N}| + \tau^2 \eta_{2,N}\right)\right) \quad (\tau \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Puisque le membre de gauche est majoré en module par 1, nous avons alors l'estimation, pour tout  $|\tau| \leq T$

$$(3.21) \quad \left| \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_{q_{\mathcal{L}+1}}(\tau)} - 1 \right| \ll |\tau \eta_{1,N}| + \tau^2 \eta_{2,N}.$$

En combinant (3.19), (3.20) et (3.21), nous obtenons finalement

$$\frac{|\varphi_{q_{\mathcal{L}+1}}(\tau) - \varphi(\tau)|}{|\tau|} \ll \min\left(\frac{1}{1 + |\tau|}, |\eta_{1,N}| + |\tau| \eta_{2,N}\right) e^{-\psi_N(\tau)}.$$

En reportant (3.18) et la majoration précédente dans (3.17), nous obtenons pour tout  $\tau \neq 0$

$$(3.22) \quad \frac{|\varphi_N(\tau) - \varphi(\tau)|}{|\tau|} \ll_A \frac{1}{|\tau| a^h} + \varepsilon_N(T) + \min\left(\frac{1}{1 + |\tau|}, |\eta_{1,N}| + |\tau| \eta_{2,N}\right) e^{-\psi_N(\tau)}.$$

Comme dans le cas  $q$ -adique, en séparant l'intégrale, qui apparaît dans l'inégalité de Berry-Esseen et notée  $\tilde{I}$ , au niveau  $1/T$  et en utilisant (3.16) pour  $|\tau| \leq 1/T$ , puis (3.22) pour  $1/T < |\tau| \leq T$ , on a alors, pour tous  $h \geq 1$  et  $N \geq q^h$

$$\tilde{I} \ll_A Q_F\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{\ln T}{a^h} + T \varepsilon_N(T) + \int_u^T \min\left(\frac{1}{1 + \tau}, |\eta_{1,N}| + \tau \eta_{2,N}\right) e^{-\psi_N(\tau)} d\tau.$$

En choisissant  $h = \ln(T \ln T) / \ln a$ , de manière à ce que  $\ln T / a^h \leq 1/T$ , nous obtenons le résultat annoncé.

En outre, si la première série de (3.8) est absolument convergente, alors la preuve reste la même hormis l'estimation (3.21), puisque nous écrivons, pour  $0 < |\tau| \leq T$ ,

$$\left| \frac{\varphi(\tau)}{\varphi_{q_{\mathcal{L}+1}}(\tau)} - 1 \right| = \left| \prod_{j>\mathcal{L}} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g_\tau(dq_j) \right) - 1 \right|$$

et en utilisant l'inégalité  $|e^{iu} - 1| \leq |u|$  ( $u \in \mathbb{R}$ ) et le Lemme 1.25, nous obtenons bien

$$\left| \prod_{j>\mathcal{L}} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} g_\tau(dq_j) \right) - 1 \right| \leq \sum_{j>\mathcal{L}} \frac{1}{a_j} \sum_{0 \leq d < a_j} |\exp(i\tau f(dq_j)) - 1| \leq |\tau| \eta_1^*(T).$$

□

### 3.7 Exemple

La fonction  $Q$ -additive

$$v(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k(n)}{q_{k+1}}$$

définit la suite de van der Corput pour un système de numération de Cantor. Cette fonction additive vérifie l'hypothèse du théorème d'Erdős-Wintner et puisque  $v(dq_j) = dq_{j+1}^{-1}$ , nous avons, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \prod_{j \geq 0} \frac{1}{a_j} \left( 1 + \sum_{1 \leq d < a_j} \exp\left(\frac{i\tau d}{q_{j+1}}\right) \right) \\ &= \prod_{j \geq 0} \left( \frac{\exp\left(\frac{i\tau}{2q_j} - \frac{i\tau}{2q_{j+1}}\right)}{a_j} \frac{\sin(\tau/2q_j)}{\sin(\tau/2q_{j+1})} \right) \\ &= e^{\frac{i\tau}{2}} \prod_{j \geq 0} \frac{2q_j \sin(\tau/2q_j)}{2q_{j+1} \sin(\tau/2q_{j+1})} \\ &= e^{\frac{i\tau}{2}} \frac{\sin(\tau/2)}{\tau/2} \\ &= \frac{e^{i\tau} - 1}{i\tau}, \end{aligned}$$

où le dernier produit infini est télescopique. Ainsi, nous voyons que  $F$  est absolument continue, puisque  $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$  grâce à la Proposition 2.16. Comme dans le cas  $q$ -adique et grâce à l'expression de la fonction caractéristique limite, la distribution de cette suite est uniforme sur  $[0, 1]$  et, plus généralement, nous savons que

$$\|F - F_N\|_{\infty} \ll \frac{\ln N}{N}.$$

On peut trouver des résultats plus généraux et plus spécifiques dans [23] par exemple.

Maintenant, supposons que la suite  $(a_j)_j$  est bornée pour appliquer le Théorème 3.18. En utilisant la Remarque 3.21, nous avons

$$\eta_{1,N}^* = \frac{1}{2} \sum_{j > \mathcal{L}} \frac{a_j - 1}{q_{j+1}} = \frac{1}{2q_{\mathcal{L}+1}} \ll a^{-\mathcal{L}} \ll N^{-\ln a / \ln A}$$

et

$$\varepsilon_N(T) = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{L}-h < j \leq \mathcal{L}} \frac{a_j - 1}{q_{j+1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q_{\mathcal{L}-h+1}} - \frac{1}{q_{\mathcal{L}+1}} \right) \asymp \frac{1}{q_{\mathcal{L}-h+1}} \ll \frac{a^h}{N^{\ln a / \ln A}}.$$

En remarquant que  $a^h \asymp T \ln T$ , puis en prenant le choix quasi-optimal  $T = N^{\ln a / (3 \ln A)}$ , nous obtenons finalement

$$\|F - F_N\|_{\infty} \ll \frac{1}{T} + \frac{T^2 \ln T}{N^{\ln a / \ln A}} \ll \frac{\ln N}{N^{\ln a / (3 \ln A)}}.$$

## Chapitre 4

# Système de numération de Zeckendorf<sup>1</sup>

Nous voulons énoncer le théorème d'Erdős-Wintner pour des systèmes de numération plus généraux, par exemple le système de Zeckendorf. Nous donnerons d'abord une caractérisation complète de l'existence d'une loi limite (jusqu'à présent, seule une condition suffisante était connue dans [2]). Nous établirons ensuite une version quantitative sous des hypothèses plus générales.

### 4.1 Définitions et théorème d'Erdős-Wintner

Comme rappelé dans [2], chaque suite strictement croissante d'entiers positifs  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $G_0 = 1$  donne lieu à une représentation pour tout  $n \in \mathbb{N}$  qui peuvent être écrits sous la forme

$$n = \sum_{k=0}^K e_k(n) G_k \quad \text{avec} \quad \forall k : 0 \leq e_k(n) < \frac{G_{k+1}}{G_k}.$$

La condition supplémentaire

$$(4.1) \quad \forall k, e_0(n)G_0 + \dots + e_k(n)G_k < G_{k+1}$$

rend cette représentation unique. Les chiffres  $e_k$  peuvent être calculés par l'algorithme glouton (*greedy algorithm* en anglais), dont nous rappelons le principe (cf. [38]) : si  $e_k(n)$  est déjà défini pour tout  $k < K$ , alors on définit  $e_K(n)$  comme étant le plus grand entier dans  $\{0, 1, \dots, G_{K+1}/G_K - 1\}$  satisfaisant

$$\sum_{k=0}^K e_k(n) G_k \leq n.$$

La principale différence entre cette notion générale d'expression numérique et le cas de  $q$ -adique, présenté dans le deuxième chapitre, est la dépendance entre les chiffres donnés par (4.1).

Un problème qui se pose est de généraliser les résultats de distribution aux systèmes de numération  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , où cette suite  $G_k$  satisfait  $G_0 = 1$  et une récurrence linéaire

$$G_k = c_1 G_{k-1} + c_2 G_{k-2} + \dots + c_d G_{k-d}, \quad k \geq d,$$

et

$$G_k = c_1 G_{k-1} + c_2 G_{k-2} + \dots + c_k G_0, \quad 1 \leq k < d$$

1. Les résultats obtenus dans ce chapitre font l'objet d'un article [15] en collaboration avec M. Drmota.

avec des entiers positifs  $c_i$ .

Si nous supposons que les coefficients satisfont les relations

$$(c_j, c_{j+1}, \dots, c_d) \leq (c_1, c_2, \dots, c_{d-j+1}), \quad 2 \leq j \leq d,$$

(où  $\leq$  désigne l'ordre lexicographique), alors chaque entier naturel  $n$  possède une unique représentation  $G$ -adique

$$n = \sum_{j \geq 0} e_j(n) G_j$$

avec des chiffres  $e_j(n) \geq 0$  si, et seulement si,

$$(e_j(n), e_{j-1}(n), \dots, e_{j-d+1}(n)) < (c_1, c_2, \dots, c_d), \quad j \geq 0.$$

Cela montre que les chiffres ne sont pas indépendants.

Maintenant, en prenant  $d = 2$  et  $c_1 = c_2 = 1$ , nous obtenons le système de Zeckendorf qui est basé sur les *nombre de Fibonacci*  $(F_n)_n : F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \dots$

Chaque entier naturel  $n$  peut être représenté de manière unique comme la somme d'un ou plusieurs nombres de Fibonacci distincts de telle sorte que la somme ne comprenne pas deux nombres de Fibonacci consécutifs. Plus précisément, si  $n$  est un entier naturel quelconque, il existe également des entiers naturels  $e_j(n) \in \{0, 1\}$  tels que

$$(4.2) \quad n = \sum_{j \geq 2} e_j(n) F_j.$$

De plus, si  $e_j(n) e_{j+1}(n) = 0$  pour tout  $j \geq 2$ , la représentation est unique. Cette dernière est optimale dans le sens où le nombre de nombres de Fibonacci, composant la représentation d'un entier comme somme de tels nombres, est minimale. Nous obtenons alors ces chiffres grâce à l'algorithme glouton, qui prend une forme plus simple ici. On cherche le plus grand nombre de Fibonacci, noté par exemple  $F_j$ , tel que  $n - F_j \geq 0$  : si l'inégalité précédente est une égalité, alors l'algorithme est terminé, sinon on recommence le procédé avec l'entier  $n - F_j$  au lieu de  $n$ . Au final, il reste à sommer les différents  $F_j$  obtenus afin d'obtenir la décomposition.

En outre, la formule de Binet-de Moivre permet d'explicitier les nombres de Fibonacci

$$F_n = \frac{\varphi^n + (-1)^{n+1} \varphi^{-n}}{\sqrt{5}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

où  $\varphi := (1 + \sqrt{5})/2$  désigne le *nombre d'or*, qui satisfait l'équation  $\varphi^2 = 1 + \varphi$ . Nous noterons  $\bar{\varphi}$  le *nombre d'or conjugué*, qui est l'autre nombre réel satisfaisant l'équation  $\bar{\varphi}^2 = 1 + \bar{\varphi}$ .

**Définition 4.1.** Une fonction  $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$  est dite *Z-additive* si

$$f(n) = \sum_{j \geq 2} f(e_j(n) F_j)$$

et une fonction  $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$  est dite *Z-multiplicative* si

$$g(n) = \prod_{j \geq 2} g(e_j(n) F_j).$$

Pour toute fonction  $Z$ -additive  $f$ , la suite de fonctions de répartition  $(F_N)$  est à nouveau définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F_N(z) := \frac{1}{N} |\{n < N : f(n) < z\}| \quad (N \geq 1, z \in \mathbb{R}).$$

Le premier but de ce chapitre est de prouver l'analogie au théorème d'Erdős-Wintner dans le cadre d'un système de numération de Zeckendorf. Toutefois, nous allons devoir introduire quelques notations avant d'énoncer ce résultat.

Pour tout nombre réel  $\tau$ , nous définissons une fonction  $Z$ -multiplicative par

$$g_\tau(n) := e^{i\tau f(n)} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ainsi que la suite  $\eta_n = \eta_n(\tau) := g_\tau(F_n) - 1$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $\tau \in \mathbb{R}$ . Nous définissons alors la condition suivante, pour tout nombre réel  $\tau \in \mathbb{R}$

$$(4.3) \quad \exists m_0 = m_0(\tau) \geq 1, \forall n \geq m_0, |\eta_n(\tau)| \leq 2\varphi - 3.$$

Ainsi, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , nous désignons l'entier naturel  $n_0(\tau) = n_0 \geq 0$  par

$$(4.4) \quad n_0 := \begin{cases} m_0 & \text{si (4.3) est vraie,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sous (4.4), pour tout nombre réel  $\tau$  nous définissons la suite  $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_0-1} \in \mathbb{C}, \\ \varepsilon_{n_0} = 0, \\ \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}(\tau) = \frac{\eta_n - (\varphi - 1)\varepsilon_n}{\varphi + \varepsilon_n}, \quad n \geq n_0. \end{cases}$$

Nous définissons également, pour tout  $L \in \mathbb{N}$  et  $\tau \in \mathbb{R}$

$$H_L = H_L(\tau) := \sum_{n < F_L} g_\tau(n).$$

**Théorème 4.2.** *Soit  $f$  une fonction  $Z$ -additive à valeurs réelles. Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  et pour tout  $L \geq n_0(\tau)$ , nous avons l'identité*

$$(4.5) \quad \frac{H_L}{F_L} = \frac{(H_{n_0} - \bar{\varphi} H_{n_0-1}) \varphi^{L-n_0+1}}{\sqrt{5} F_L} \prod_{\ell=n_0+1}^L \left(1 + \frac{\varepsilon_\ell}{\varphi}\right) + \frac{(\varphi H_{n_0-1} - H_{n_0}) \bar{\varphi}^{L-n_0+1}}{\sqrt{5} F_L} \prod_{\ell=n_0+1}^L \left(1 + \frac{\varepsilon_\ell}{\bar{\varphi}}\right)$$

où  $n_0$  est donné par (4.4) (et où nous avons omis la dépendance en  $\tau$  de  $n_0$  et des suites  $(H_n)$  et  $(\varepsilon_n)$ ). Ainsi,  $f$  possède une loi limite, si, et seulement si, les deux séries suivantes convergent

$$(4.6) \quad \sum_{n \geq 2} f(F_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 2} f(F_n)^2.$$

Quand les conditions sont réalisées, la fonction caractéristique de la loi limite est donnée par le produit convergent

$$(4.7) \quad \Phi(\tau) = \frac{H_{n_0}(\tau) - \bar{\varphi} H_{n_0-1}}{\varphi^{n_0-1}} \prod_{\ell=n_0+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon_\ell(\tau)}{\varphi}\right) \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

L'introduction de l'entier  $n_0 = n_0(\tau)$  permet d'assurer que  $\varepsilon_n(\tau) \neq -\varphi$  pour tout entier  $n \geq n_0$  et tout réel  $\tau$  : nous prouverons cela au Lemme 4.5. De plus, nous pouvons simplifier l'expression du produit (4.7) quand  $\tau$  est assez petit.

**Proposition 4.3.** *Sous les hypothèses du Théorème 4.2 et si  $f$  admet une loi limite, alors il existe un nombre réel  $\sigma > 0$  tel que*

$$\Phi(\tau) = \prod_{\ell=2}^{\infty} \left( 1 + \frac{\varepsilon_{\ell}(\tau)}{\varphi} \right) \quad (|\tau| \leq \sigma).$$

*Démonstration.* Puisque  $f$  admet une loi limite, nous avons la convergence  $f(F_n) \rightarrow 0$  et donc pour tout nombre réel  $\delta > 0$ , il existe un entier  $N(\delta) \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq N(\delta)$ ,  $|f(F_{n-1})| \leq \delta$ . Nous fixons alors  $\varepsilon_0 > 0$  et nous définissons le réel  $\sigma = \sigma(\varepsilon_0) > 0$  par

$$\sigma(\varepsilon_0) := \frac{2\varphi - 3}{\max\left(\varepsilon_0, \max_{2 \leq j < N(\varepsilon_0)} |f(F_{j-1})|\right)}.$$

Pour tout entier  $n \geq N(\delta)$  et tout réel  $|\tau| \leq \sigma$ , nous avons

$$|\eta_n(\tau)| = \left| e^{i\tau f(F_n)} - 1 \right| \leq |\tau| \cdot |f(F_n)| \leq \frac{2\varphi - 3}{\delta} \times \delta = 2\varphi - 3.$$

Sinon, pour tout entier  $1 \leq n < N(\delta)$  et  $|\tau| \leq \sigma$ , nous obtenons

$$|\eta_n(\tau)| \leq |\tau f(F_n)| \leq \frac{2\varphi - 3}{\max_{1 \leq j < N(\delta)} |f(F_j)|} \times |f(F_n)| \leq 2\varphi - 3.$$

Ainsi, nous avons montré

$$\forall |\tau| \leq \sigma, \forall n \geq 2, |\eta_n(\tau)| \leq 2\varphi - 3,$$

ce qui implique que (4.3) est vraie pour tout  $|\tau| \leq \sigma$  avec  $m_0 = 1$  et donc nous pouvons prendre  $n_0 = 1$ . En reportant cette valeur de  $n_0$  dans (4.7), nous obtenons l'expression attendue.  $\square$

Comme dans les autres systèmes de numération, nous pouvons nous poser des questions à propos de la nature de la loi limite. Malheureusement, nous n'avons pas trouver de théorème répondant entièrement à cette question, mais un résultat partiel est donné par la proposition 11 de [3], que nous appliquons au système de Zeckendorf.

**Proposition 4.4.** *Soit  $f$  une fonction  $Z$ -additive admettant une loi limite. Cette dernière est alors atomique si, et seulement si, il existe un entier  $N \geq 2$  tel qu'on ait  $f(F_n) = 0$  pour tout entier  $n \geq N$ .*

Après ces quelques remarques, nous pouvons commencer à démontrer les différents résultats qui nous seront utiles dans la démonstration du Théorème 4.2. Nous faisons remarquer au lecteur que nous ne ferons plus apparaître la dépendance en  $\tau$  afin de simplifier les différentes notations et formules. Un des arguments clés est l'étude de la suite de fonctions  $(\varepsilon_n)_n$  et en particulier l'équivalence

$$\left( \sum_{n \geq 2} f(F_n) \text{ converge} \ \& \ \sum_{n \geq 2} f(F_n)^2 < \infty \right) \iff \left( \sum_{n \geq n_0} \varepsilon_n \text{ converge} \ \& \ \sum_{n \geq n_0} |\varepsilon_n|^2 < \infty \right).$$

Nous commençons par prouver une première propriété à propos des suites  $(\varepsilon_n)_n$  et  $(\eta_n)_n$ .



**Lemme 4.5.** *La suite  $(\varepsilon_n)_n$  est bien définie. En outre, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (i) *la suite  $(\varepsilon_n)_n$  tend vers 0 ;*
- (ii) *la suite  $(\eta_n)_n$  tend vers 0.*

Afin de prouver l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i), nous avons besoin d'un autre lemme.

**Lemme 4.6.** *Soient  $(a_j)_{j \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  deux suites telles que  $a_n \geq 0$  pour tout entier  $n \geq 0$  et  $(b_n)_n$  converge vers 0. S'il existe  $L \in [0, 1[$  tel que  $a_{j+1} \leq L a_n + b_n$  pour tout  $n \geq 0$ , alors  $(a_n)_n$  converge aussi vers 0.*

*Démonstration.* Nous posons  $Q_n := L^{-n} a_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, en remplaçant dans l'inégalité entre  $a_n$  et  $b_n$ , nous obtenons

$$Q_{n+1} - Q_n \leq \frac{b_n}{L^{n+1}}$$

ce qui implique pour  $n \geq 1$ , grâce à un télescopage

$$a_n \leq L^n \left( a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{L^{k+1}} \right).$$

Maintenant, soit  $\delta > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $|b_n| \leq \delta$ . Puisque  $L^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , nous avons

$$a_n \leq L^n \left( a_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b_k}{L^{k+1}} \right) + \delta L^n \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{L^{k+1}} \leq o(1) + \delta \frac{1 - L^{n-N}}{1 - L} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ainsi, nous obtenons

$$\forall \delta > 0, \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| \leq \frac{\delta}{L - 1},$$

d'où le résultat. □

Nous pouvons maintenant prouver les premières propriétés sur  $(\varepsilon_n)_n$ .

*Démonstration du Lemme 4.5.* Pour montrer que  $(\varepsilon_n)_n$  est bien définie, nous prouvons, par récurrence, que  $|\varepsilon_n| \leq \varphi - 1$  pour tout  $n \geq n_0$ . Par définition,  $|\varepsilon_{n_0}| \leq \varphi - 1$ , nous supposons donc que, pour un certain  $n \geq n_0$ ,  $|\varepsilon_n| \leq \varphi - 1$  et nous montrons que cela est toujours vrai pour  $n + 1$ . Encore une fois, cela est prouvé grâce à la définition de  $(\varepsilon_n)_n$  : par hypothèse de récurrence, nous avons  $|\varphi + \varepsilon_n| \geq \varphi - |\varepsilon_n| \geq 1$ , donc nous obtenons

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{n+1}| &= \left| \frac{\eta_n - (\varphi - 1)\varepsilon_n}{\varphi + \varepsilon_n} \right| \\ &\leq |\eta_n| + (\varphi - 1)|\varepsilon_n| \leq (2\varphi - 3) + (\varphi - 1)^2 = \varphi - 1, \end{aligned}$$

ce qui implique bien par récurrence  $|\varepsilon_n| \leq \varphi - 1$ , pour tout  $n \geq n_0$ . Ainsi  $(\varepsilon_n)_n$  est bien définie. Maintenant, par définition de  $(\varepsilon_n)_n$ , nous obtenons directement la première implication (i)  $\Rightarrow$  (ii).

Réciproquement, nous remarquons que nous avons, pour tout  $n \geq n_0$

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq |\eta_n| + (\varphi - 1)|\varepsilon_n|,$$

ce qui implique que  $(\varepsilon_n)$  converge vers 0, grâce au lemme précédent en prenant  $a_n = |\varepsilon_{n-n_0}|$  et  $b_n = |\eta_{n-n_0}|$ . □

**Lemme 4.7.** *Sous l'hypothèse  $f(F_n) \rightarrow 0$ , les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

$$(i) \sum_{n \geq 2} f(F_n) \quad \& \quad \sum_{n \geq 2} f(F_n)^2 \quad \text{convergent ;}$$

$$(ii) \sum_{n \geq n_0} \eta_n \quad \& \quad \sum_{n \geq n_0} |\eta_n|^2 \quad \text{convergent ;}$$

$$(iii) \sum_{n \geq n_0} \varepsilon_n \quad \& \quad \sum_{n \geq n_0} |\varepsilon_n|^2 \quad \text{convergent .}$$

*Démonstration.* Puisque  $f(F_n) \rightarrow 0$  par hypothèse, nous pouvons supposer  $|\tau f(F_n)| \leq \pi$ . L'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) est alors immédiate grâce au développement  $\eta_n = i\tau f(F_n) + O(\tau^2 f(F_n)^2)$  et aux inégalités  $\frac{4}{\pi^2} \tau^2 f(F_n)^2 \leq |\eta_n|^2 \leq 2 \tau^2 f(F_n)^2$ .

Nous allons maintenant montrer l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (iii). Grâce au même raisonnement utilisé dans le Lemme 4.5, nous savons que  $|\varepsilon_{n+1}| \leq |\eta_n| + (\varphi - 1) |\varepsilon_n|$  pour tout entier  $n \geq n_0$ . En utilisant les mêmes idées que dans le Lemme 4.6 ou bien par itération, nous obtenons

$$|\varepsilon_n| \leq (\varphi - 1)^{n-n_0} |\varepsilon_{n_0}| + \sum_{\ell=1}^{n-n_0} |\eta_{n-\ell}| (\varphi - 1)^{\ell-1} \quad (n \geq n_0).$$

En passant au carré de chaque côté de l'inégalité, en sommant sur tous les entiers  $n \geq n_0$ , puis en utilisant successivement la majoration  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq n_0} |\varepsilon_n|^2 &\leq 2 \sum_{n \geq n_0} \sum_{k, \ell=1}^{n-n_0} |\eta_{n-\ell}| |\eta_{n-k}| (\varphi - 1)^{k+\ell-2} + 2 \sum_{n \geq n_0} (\varphi - 1)^{2(n-n_0)} |\varepsilon_{n_0}|^2 \\ &= 2 \sum_{k, \ell \geq 1} (\varphi - 1)^{k+\ell-2} \sum_{n \geq n_0 + \max\{k, \ell\}} |\eta_{n-\ell}| |\eta_{n-k}| + 2 \frac{|\varepsilon_{n_0}|^2}{\varphi - 1} \\ &\leq \frac{1}{\varphi - 1} \sum_{n \geq n_0} |\eta_n|^2 + 2 \frac{|\varepsilon_{n_0}|^2}{\varphi - 1}. \end{aligned}$$

Puisque la série  $\sum_{n \geq n_0} |\eta_n|^2$  converge, alors  $\sum_{n \geq n_0} |\varepsilon_n|^2$  est aussi convergente. En outre, par définition de la suite  $(\varepsilon_n)_n$ , nous avons

$$(4.8) \quad \eta_n = \frac{\varepsilon_n}{\varphi} + \varphi \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$$

et donc, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons pour tout  $n_0 \leq M \leq N$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\varphi} \sum_{n=M}^N \varepsilon_n + \varphi \sum_{n=M}^N \varepsilon_{n+1} \right| &\leq \left| \sum_{n=M}^N \eta_n \right| + \sum_{n=M}^N |\varepsilon_n \varepsilon_{n+1}| \\ &\leq \left| \sum_{n=M}^N \eta_n \right| + \left( \sum_{n=M}^N |\varepsilon_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=M}^N |\varepsilon_{n+1}|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi la convergence  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  et le critère de Cauchy impliquent que la série  $\sum_{n \geq n_0} \varepsilon_n$  est convergente et donc (iii) est vraie.

Il nous reste à prouver l'implication réciproque (iii)  $\Rightarrow$  (ii). À nouveau grâce à l'égalité (4.8) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\left| \sum_{n=M}^N \eta_n \right| \leq \frac{1}{\varphi} \left| \sum_{n=M}^N \varepsilon_n \right| + \varphi \left| \sum_{n=M}^N \varepsilon_{n+1} \right| + \left( \sum_{n=M}^N |\varepsilon_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=M}^N |\varepsilon_{n+1}|^2 \right)^{1/2},$$

ce qui implique la convergence de la série  $\sum_{n \geq n_0} \eta_n$ . Enfin, l'identité (4.8) et la convergence  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  implique l'estimation  $|\eta_n| \ll |\varepsilon_n| + |\varepsilon_{n+1}|$ , ce qui nous donne

$$\eta_n^2 = \varphi^2 \varepsilon_{n+1}^2 + O(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et le critère de Cauchy permettent à nouveau de conclure, ici que la série  $\sum_{n \geq n_0} |\eta_n|^2$  converge et donc de prouver que (ii) est vraie.  $\square$

L'autre argument clé dans la preuve du Théorème 4.2 est le rôle du produit matriciel suivant. Pour tous  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}$ , nous définissons

$$A_k = A_k(\tau) := \begin{pmatrix} 1 & g_\tau(F_k) \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et pour tous  $M, N \in \mathbb{N}$ , tels que  $0 \leq M \leq N$

$$P(M, N) = P_\tau(M, N) := \prod_{j=N}^M A_j(\tau) = A_N(\tau) \dots A_M(\tau).$$

Ce dernier va nous permettre de prouver l'identité (4.5), faisant apparaître une relation entre la fonction  $Z$ -multiplicative  $g_\tau$  et la suite  $(\varepsilon_n)$ . Le résultat suivant permet de prouver une première propriété pour le produit  $P$ .

**Lemme 4.8.** *Pour tous  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $k \geq n_0$  et  $M \in \mathbb{N}$ , on a la relation*

$$P_\tau(k, k+M) \begin{pmatrix} \varphi + \varepsilon_k \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi^{M+1} \left( \prod_{\ell=k}^{k+M} \left( 1 + \frac{\varepsilon_\ell}{\varphi} \right) \right) \begin{pmatrix} \varphi + \varepsilon_{M+k+1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*La même égalité reste vraie si on remplace  $\varphi$  par  $\bar{\varphi}$ .*

*Démonstration.* Puisque, pour tout  $k \geq n_0 - 1$ , nous avons l'égalité

$$A_k \begin{pmatrix} \varphi + \varepsilon_k \\ 1 \end{pmatrix} = (\varphi + \varepsilon_k) \begin{pmatrix} \varphi + \varepsilon_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

le résultat de la proposition se déduit immédiatement par récurrence sur  $M \in \mathbb{N}$ . Nous raisonnons de la même manière quand  $\varphi$  est remplacé par  $\bar{\varphi}$   $\square$

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 4.2 en commençant par démontrer l'identité (4.5). Nous rappelons la définition

$$H_L = H_L(\tau) := \sum_{n < F_L} g_\tau(n) \quad (L \geq 0).$$

En désignant par  $\varepsilon_i(n)$  le  $i$ -ème chiffre de la décomposition (4.2) de  $n$ , selon si  $\varepsilon_{L-1}(n) = 0$  ou  $\varepsilon_{L-1}(n) = 1$  (cette dernière condition impliquant  $\varepsilon_{L-2}(n) = 0$ ), nous avons

$$(4.9) \quad \forall L \geq 2, \quad H_L = H_{L-1} + g_\tau(F_{L-1}) H_{L-2}.$$

Ainsi,  $H_L$  vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2, que nous pouvons récrire sous forme matriciel

$$\forall L \geq 1, \quad \begin{pmatrix} H_{L+1} \\ H_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & g_\tau(F_L) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_L \\ H_{L-1} \end{pmatrix} = A_L \begin{pmatrix} H_L \\ H_{L-1} \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors par récurrence

$$(4.10) \quad \forall L \geq n_0, \quad \begin{pmatrix} H_{L+1} \\ H_L \end{pmatrix} = \left( \prod_{k=L}^{n_0} A_k \right) \begin{pmatrix} H_{n_0} \\ H_{n_0-1} \end{pmatrix} = P_\tau(n_0, L) \begin{pmatrix} H_{n_0} \\ H_{n_0-1} \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons pour tout  $L \geq n_0$

$$(4.11) \quad H_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} P_\tau(n_0 + 1, L) \begin{pmatrix} H_{n_0} \\ H_{n_0-1} \end{pmatrix}$$

En utilisant le fait que  $\varepsilon_{n_0} = 0$ , nous remarquons alors que nous avons la décomposition

$$(4.12) \quad \begin{pmatrix} H_{n_0} \\ H_{n_0-1} \end{pmatrix} = \frac{(H_{n_0} - \bar{\varphi} H_{n_0-1})}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(\varphi H_{n_0-1} - H_{n_0})}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ 1 \end{pmatrix}$$

En reportant (4.12) dans (4.10), puis en appliquant alors la Proposition 4.8 avec  $k = n_0$  et  $M = L - n_0$  dans et en reportant dans (4.11), nous obtenons pour tout  $L \geq n_0$

$$H_L = \frac{(H_{n_0} - \bar{\varphi} H_{n_0-1}) \varphi^{L-n_0+1}}{\sqrt{5}} \prod_{\ell=n_0+1}^L \left( 1 + \frac{\varepsilon_\ell}{\varphi} \right) + \frac{(\varphi H_{n_0-1} - H_{n_0}) \bar{\varphi}^{L-n_0+1}}{\sqrt{5}} \prod_{\ell=n_0+1}^L \left( 1 + \frac{\varepsilon_\ell}{\bar{\varphi}} \right),$$

ce qui prouve l'identité (4.5).

Nous pouvons finalement prouver l'équivalence (4.6). Nous supposons d'abord que les séries (4.6) convergent : grâce au Lemme 4.7, cette convergence implique celles des deux produits apparaissant dans (4.5). Ainsi, la suite  $(H_L/F_L)$  converge et sa limite  $\Phi$  est donné par (4.7). Comme dans le cas  $q$ -adique, cela implique aussi que  $\Phi_N(\tau) := (1/N) \sum_{n < N} g_\tau(n) \rightarrow \Phi(\tau)$  (cf. Lemme 4.16) (puisque le facteur du second terme de 4.5 tend alors vers 0). Finalement,  $\Phi$  est continue en 0 (voir par exemple le Lemme 4.20, impliquant même  $\Phi(t) = 1 + O(t)$  quand  $t \rightarrow 0$ ) et la conclusion suit grâce au théorème de Lévy.

Nous supposons maintenant que  $f$  possède une loi limite et nous allons prouver que les deux séries (4.6) convergent. Grâce au critère de Lévy,  $g_\tau$  possède une valeur moyenne pour chaque  $\tau$ . Grâce à (4.5),  $\Phi$  est la fonction caractéristique de la loi limite et donc, en particulier,  $\Phi(0) = 1$  et  $\Phi$  est continue en  $\tau = 0$ . Il existe donc un  $T_0 > 0$  tel que  $|\Phi(\tau)| \geq \frac{1}{2}$  for  $|\tau| \leq T_0$ .

De plus, nous avons la convergence  $H_L(\tau)/F_L \rightarrow \Phi(\tau)$  pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , où  $\Phi$  est la fonction caractéristique limite associée à la loi limite de  $f$ . L'égalité (4.9) implique alors  $e^{i\tau f(F_n)} \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$  et ainsi  $f(F_n) \rightarrow 0$  grâce au Lemme 2.3, ce qui nous permettra d'appliquer le Lemme 4.5.

Maintenant, il ne reste plus qu'à prouver que la série  $\sum f(F_n)^2$  converge pour terminer la preuve. En effet, en raisonnant comme dans la preuve du Lemme 4.5, cela impliquerait la convergence de la série  $\sum |\eta_n|^2$  et ainsi celle de  $\sum |\varepsilon_n|^2$ . Grâce à la Proposition 4.3, en choisissant  $\tau$  suffisant petit, cela impliquerait que le produit  $\prod (1 + \varepsilon_j/\varphi)$  convergerait dans  $\mathbb{C}^*$ . Ainsi, la convergence de la série  $\sum \varepsilon_n$  en découlerait et le Lemme 4.5 établirait la convergence des séries (4.6).

En étudiant la norme spectrale du produit  $P(1, L)$ , nous allons obtenir une majoration de  $|\Phi|$  faisant intervenir la série  $\sum_{n \geq 2} f(F_n)^2$  dans l'esprit de (2.5). Avant de prouver cela, nous rappelons quelques notations et définitions ainsi qu'un résultat à propos de cette norme.

**Définition 4.9.** Soit  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices complexes de taille  $m \times n$ .

i) La matrice conjuguée d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  est définie par

$$(A^*)_{i,j} = \overline{A_{j,i}}$$

où les indices désignent le  $(i, j)$ -ième coefficient, pour  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ , et la barre désigne le conjugué d'un scalaire.

ii) La norme spectrale  $\|\cdot\|_2$  est la norme matricielle induite par la norme du vecteur euclidien

$$\|A\|_2 := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad (A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})).$$

iii) Pour toute matrice carrée, le rayon spectral  $\rho$  est le module maximal des valeurs propres.

Nous avons alors le résultat suivant qui relie ces trois objets mathématiques.

**Proposition 4.10.** Pour toute matrice carrée  $A$ , on a

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)}.$$

D'abord, nous avons pour tous  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}$

$$A_k A_k^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ainsi les valeurs propres de  $A_k A_k^*$  sont  $\varphi^2$  et  $\bar{\varphi}^2$  et donc  $\|A_k\|_2 = \varphi$ .

Ensuite, nous allons calculer la norme spectrale du produit  $P(1, L)$ . Pour ce faire, nous majorons  $\|A_{j+1} A_j\|_2$ , puis appliquer le Lemme 4.8. Pour  $0 \leq j \leq L-1$ , nous avons

$$(A_{j+1} A_j) (A_{j+1} A_j)^* = A_{j+1} (A_j A_j^*) A_{j+1}^* = \begin{pmatrix} 3 + 2 \cos(\tau f(F_{j+1})) & 2 + e^{i\tau f(F_{j+1})} \\ 2 + e^{-i\tau f(F_{j+1})} & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est donné par  $X^2 - t_j X + 1$ , où  $t_j = t_j(\tau) := 7 + 2 \Re \eta_{j+1}$ . Puisque  $t_j^2 - 4 > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \rho((A_{j+1} A_j) (A_{j+1} A_j)^*) &= \frac{t_j + \sqrt{t_j^2 - 4}}{2} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} + \Re \eta_{j+1} + \frac{\sqrt{t_j^2 - 4} - 3\sqrt{5}}{2} \\ &\leq \varphi^4 \left(1 - \frac{|\Re \eta_{j+1}|}{\varphi^4}\right) \leq \varphi^4 \exp\left(-\frac{|\Re \eta_{j+1}|}{\varphi^4}\right). \end{aligned}$$

Finalement, pour  $0 \leq j \leq L - 1$ , nous obtenons

$$\left\| \frac{1}{\varphi^2} A_{j+1} A_j \right\|_2 \leq \exp \left( -\frac{|\Re \eta_{j+1}|}{2\varphi^4} \right).$$

De plus, grâce à la définition de  $\eta_j$  et le fait que la suite  $(f(F_n))_{n \geq 2}$  converge vers 0, nous en déduisons  $|\Re \eta_{j+1}| \asymp |\eta_{j+1}|^2$ , ce qui implique

$$\left\| \frac{1}{\varphi^2} A_{j+1} A_j \right\|_2 \leq \exp \left( -C |\eta_{j+1}|^2 \right),$$

où  $C > 0$  est une constante absolue. Ainsi, selon que les matrices  $A_j$  sont groupées deux par deux suivant les indices pairs ou impairs, puis en faisant tendre  $L$  vers l'infini, nous obtenons l'inégalité

$$\left\| \prod_{j=-\infty}^{-1} \left( \frac{1}{\varphi} A_{-j} \right) \right\|_2 \leq \min \left( \exp \left( -C \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_{2j}|^2 \right), \exp \left( -C \sum_{j \geq 0} |\eta_{2j+1}|^2 \right) \right)$$

où l'écriture "inversée" du produit matriciel vient du fait que nous multiplions les matrices  $A_k$  de droite à gauche.

Cependant, l'identité (4.5) et l'égalité matricielle (4.10), pour  $|\tau| \leq \sigma$  (où  $\sigma$  est le même nombre réel que dans la Proposition 4.3) et donc avec  $n_0 = 0$ , implique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \prod_{j=-\infty}^{-1} \left( \frac{1}{\varphi} A_{-j} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \Phi(\tau).$$

En prenant la norme spectrale des deux côtés, nous obtenons pour  $|\tau| \leq \min(\sigma, T_0)$  l'encadrement

$$\frac{1}{2} \leq |\Phi(\tau)| \leq \min \left( \exp \left( -C \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_{2j}|^2 \right), \exp \left( -C \sum_{j \geq 0} |\eta_{2j+1}|^2 \right) \right) \quad (|\tau| \leq \min(\sigma, T_0)).$$

En utilisant l'inégalité  $1 - \cos(x) \geq 8 \|x/\pi\|^2$  comme dans le cas  $q$ -adique, nous avons finalement pour  $|\tau| \leq \min(\sigma, T_0)$

$$\frac{1}{2} \leq |\Phi(\tau)| \leq \min \left( \exp \left( -16C \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \frac{\tau f(F_{2j})}{2\pi} \right\|^2 \right), \exp \left( -16C \sum_{j \geq 0} \left\| \frac{\tau f(F_{2j+1})}{2\pi} \right\|^2 \right) \right),$$

ce qui implique, en utilisant les mêmes idées que dans le Chapitre 2, que la série  $\sum_{n \geq 2} f(F_j)^2$  converge.

## 4.2 Longueur de la décomposition d'un entier

En base  $q$ , il est facile d'expliciter une formule pour calculer la longueur de la représentation d'un entier  $N$  dans un système de numération, donnée par l'entier  $\lfloor \ln_q N \rfloor$  (où nous posons  $\ln_m x := \ln x / \ln m$  pour  $x > 0, m > 1$  dans cette section). Dans le système de Zeckendorf, la formule  $\lfloor \ln_\varphi N \rfloor$  pourrait donc être une bonne candidate, mais elle n'est pas exacte pour les entiers tels que 7, 12, 18, 19, etc., même si elle ne diffère que de 1 par rapport à la vraie valeur de leur longueur. Le but de ce paragraphe est donc de prouver que cette formule est toujours exacte sauf pour certains entiers, pour lesquels elle est vraie

à 1 près.

Puisque nous avons l'identité suivante pour tout entier  $N \geq 0$

$$(4.13) \quad F_N = \left\lfloor \frac{\varphi^N}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

et la fonction partie entière est croissante, nous en déduisons la formule

$$\mathcal{L}_N := \max\{j \geq 2 : F_j \leq N\} - 2 = \left\lfloor \ln_{\varphi} \left( N \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{2} \right) \right\rfloor - 2.$$

Nous n'avons pas trouvé d'autres formules dans d'autres papiers, mais en réalité, elle peut être simplifiée comme l'énonce la proposition suivante.

**Proposition 4.11.** *Pour tout entier  $N \geq 1$ , on a l'égalité*

$$\lfloor \ln_{\varphi} N \rfloor - \mathcal{L}_N = \mathbf{1}_V(N),$$

où  $V \subset \mathbb{N}$  est l'ensemble défini par

$$V := \bigcup_{n=4}^{\infty} \{\lceil \varphi^n \rceil, \dots, F_{n+2} - 1\} = \{7, 12, 18, 19, 20, 30, 31, 32, 33, 47, \dots\}.$$

Nous signalons rapidement qu'il n'est pas important de faire commencer l'union disjointe à  $n = 0$  puisque les quatre premiers ensembles sont vides au vue de l'égalité  $\lceil \varphi^n \rceil = F_{n+2}$  pour  $n = 0, 1, 2, 3$ .

*Démonstration.* Grâce à (4.13), nous avons l'encadrement

$$(4.14) \quad \frac{\varphi^{N+1}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} < F_{N+1} \leq \frac{\varphi^{N+1}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \quad (N \geq 0),$$

que nous allons utiliser tout au long de la preuve. Nous avons plusieurs choses à montrer : d'abord, que  $V$  est bien défini, ce qui est impliqué par les inégalités  $F_{n+1} < \lceil \varphi^n \rceil \leq F_{n+2} - 1$  ( $n \geq 4$ ), que nous allons montrer. D'une part, nous avons

$$\lceil \varphi^n \rceil - F_{n+1} \geq \left(1 - \frac{\varphi}{\sqrt{5}}\right) \varphi^n - \frac{1}{2} > 0$$

et d'autre part

$$F_{n+2} - \lceil \varphi^n \rceil > \left(\frac{\varphi^2}{\sqrt{5}} - 1\right) \varphi^n - \frac{3}{2} > 1,$$

où la dernière inégalité est vraie pour  $n \geq 6$  (on vérifie que  $\lceil \varphi^n \rceil = F_{n+2} - 1$  pour  $n = 4, 5$ ). Ainsi,  $V$  est bien défini.

Il nous reste à montrer l'égalité attendue : pour ce faire, nous introduisons la fonction  $\psi(x) := \lfloor \ln_{\varphi} x \rfloor$  définie sur l'ensemble des réels strictement positifs. Grâce à (4.14), nous avons les égalités  $\psi(\lceil \varphi^n \rceil) - 1 = \psi(\lceil \varphi^n \rceil - 1) = \psi(F_{n+1}) = n - 1$  pour  $n \geq 4$  et grâce en plus à la croissance de  $\psi$ , nous obtenons alors les équivalences

$$N \in V \iff \lceil \varphi^{\mathcal{L}_N+1} \rceil \leq N < F_{\mathcal{L}_N+3} \iff \psi(N) = \mathcal{L}_N + 1$$

et

$$N \notin V \iff F_{\mathcal{L}_N+2} \leq N \leq \lceil \varphi^{\mathcal{L}_N+1} \rceil - 1 \iff \psi(N) = \mathcal{L}_N,$$

d'où le résultat. □

### 4.3 Version effective dans le cas continu

Soit  $f$  une fonction  $Z$ -additive possédant une loi limite continue. Nous établissons dans cette partie une version effective plus faible que dans les autres chapitres, car nous avons besoin de la convergence absolue de la série des  $f(F_N)$ . Nous rappelons que  $Q_F$  désigne la fonction de concentration d'une fonction  $F$  (cf. Section 1.3.2).

Pour tout entier  $N \geq 1$  et tout réel  $T \geq 1$ , nous définissons les nombres  $\mathcal{L}_N := \ln N / \ln \varphi$  et  $h_T := \ln(T \ln T \ln N) / \ln \varphi$  ainsi que les quantités

$$\lambda_N(T) := \sum_{\mathcal{L}_N - 2h_T < j \leq \mathcal{L}_N} |f(F_j)| \quad \text{et} \quad \vartheta_N(T) := \sum_{j \geq \mathcal{L}_N - h_T} |f(F_j)|.$$

Enfin, pour toute fonction  $Z$ -additive  $f$  et tout réel  $\tau > 0$ , nous introduisons l'ensemble

$$\tilde{S}(\tau) := \{j \geq 2 : |f(F_j)| \leq \pi/|\tau|\},$$

ainsi que la somme

$$\psi_{N,T}(\tau) := \tau^2 \sum_{j \in \tilde{S}(\tau), j < \mathcal{L}_N - h_T} f(F_j)^2.$$

Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème 4.12.** *Soit  $f$  une fonction  $Z$ -additive réelle telle que la série*

$$(4.15) \quad \sum_{j \geq 2} |f(F_j)|$$

*converge et admettant une loi limite continue. Pour tout nombre réel  $T \geq 1$  et tout entier  $N \geq 1$  tels que  $h_T \leq \mathcal{L}_N/2$ , on a*

$$\|F_N - F\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \lambda_N(T) + \int_{1/T}^T \min \left( \frac{1}{1+\tau}, \vartheta_N(T) \right) e^{-c_2 \psi_{N,T}(\tau)} d\tau,$$

où  $c_2 > 0$  est une constante absolue.

**Remarque 4.13.** *Il est possible de changer la valeur de  $h$  et de le rendre égal à  $\ln_\varphi(T \ln T)$ , mais en contre partie le terme d'erreur supplémentaire  $(\ln N)/T$  apparaîtrait.*

De la même manière que dans le cas  $q$ -adique, nous pouvons obtenir une majoration de la fonction de concentration  $Q_F$ .

**Proposition 4.14.** *Soit  $f$  une fonction  $Z$ -additive à valeurs réelles possédant une loi limite dont la fonction de répartition est notée  $F$ . En utilisant les mêmes notations que le Théorème 4.12, on a l'estimation*

$$Q_F \left( \frac{1}{T} \right) \ll \frac{1}{T} \int_0^T \exp \left( -c_2 t^2 \sum_{j \in \tilde{S}(t)} f(F_j)^2 \right) dt$$

où  $c_2 > 0$  la même constante absolue que dans le théorème précédent.

Comme dans les cas précédents, nous explicitons une majoration un peu plus simple et qui réfèrent explicitement à la convergence de la série  $\sum |f(F_j)|$ .



**Corollaire 4.15.** *Soit  $f$  une fonction  $Z$ -additive réelle telle que la série*

$$\sum_{j \geq 2} |f(F_j)|$$

*converge et admettant une loi limite continue. En notant  $\mathcal{L}_N := \lceil \ln_\varphi N \rceil$  et  $h_T := \lceil \ln_\varphi(T \ln T \ln N) \rceil$  pour tout nombre réel  $T \geq 1$  vérifiant  $h_T \leq \mathcal{L}_N/2$ , on a*

$$\|F - F_N\|_\infty \ll Q_F \left( \frac{1}{T} \right) + T \sum_{j > \mathcal{L}_N - 2h} |f(F_j)|.$$

La preuve du Théorème 4.12 utilise à peu près les mêmes idées que celles du Théorème 4.2, la principale difficulté étant la manipulation de produits de matrices non commutatives.

### 4.3.1 Valeur moyenne

Comme dans les preuves des précédents chapitres, nous aurions besoin d'une inégalité de Turán-Kubilius dans le système de Zeckendorf, mais il ne semble pas en existe à notre connaissance. Cependant, le résultat suivant nous suffit pour établir une version effective partielle du théorème d'Erdős-Wintner.

**Lemme 4.16.** *Soit  $f$  une  $Z$ -additive fonction réelle telle que les deux séries (4.6) convergent. On a alors*

$$(4.16) \quad \frac{1}{N} \sum_{n < N} |f(n)| = O(1)$$

quand  $N \rightarrow \infty$ .

Nous allons présenter deux manières de prouver ce résultat, chacune ayant ses avantages.

#### 4.3.1.1 Première preuve

*Démonstration.* Nous choisissons  $F_{\mathcal{L}_N}$  de telle sorte que  $F_{\mathcal{L}_N - 1} < N \leq F_{\mathcal{L}_N}$  et nous prouverons que

$$\sum_{n < F_{\mathcal{L}_N}} |f(n)| = O(F_{\mathcal{L}_N}),$$

ce qui impliquera directement (4.16). Nous considérons d'abord les sommes

$$S_k := \sum_{n < F_k} f(n).$$

Par définition de  $f$ , nous obtenons la récurrence

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n < F_{k-1}} f(n) + \sum_{m < F_{k-2}} f(F_{k-1} + m) \\ &= S_{k-1} + S_{k-2} + F_{k-2} f(F_{k-1}), \end{aligned}$$

ce qui implique par récurrence l'identité

$$(4.17) \quad S_k = \sum_{\ell=2}^{k-1} F_{k-\ell} F_{\ell-1} f(F_\ell).$$

De même, nous pouvons traiter la somme des carrés. A partir de la récurrence

$$\begin{aligned} T_k &:= \sum_{n < F_k} f(n)^2 = \sum_{n < F_{k-1}} f(n)^2 + \sum_{m < F_{k-2}} f(F_{k-1} + m)^2 \\ &= T_{k-1} + T_{k-2} + F_{k-2} f(F_{k-1})^2 + 2 S_{k-2} f(F_{k-1}) \end{aligned}$$

on obtient à nouveau par récurrence

$$T_k = \sum_{\ell=2}^{k-1} F_{k-\ell} F_{\ell-1} f(F_\ell)^2 + 2 \sum_{\ell=2}^{k-1} F_{k-\ell} S_{\ell-1} f(F_\ell).$$

La première somme peut être gérée de la manière suivante

$$\sum_{\ell=2}^{k-1} F_{k-\ell} F_{\ell-1} f(F_\ell)^2 = O\left(\varphi^{k-1} \sum_{\ell=2}^{k-1} f(F_\ell)^2\right) = O(F_k).$$

Pour la deuxième somme, nous utilisons (4.17) et nous obtenons

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\ell=2}^{k-1} F_{k-\ell} S_{\ell-1} f(F_\ell) &= 2 \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} F_{k-\ell} F_{\ell-j-1} F_{j-1} f(F_\ell) f(F_j) \\ &= \frac{2}{5\sqrt{5}} \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} \left( \varphi^{k-\ell} + (-1)^{k-\ell+1} \varphi^{\ell-k} \right) \\ &\quad \times \left( \varphi^{\ell-j-1} + (-1)^{\ell-j} \varphi^{1+j-\ell} \right) \left( \varphi^{j-1} + (-1)^j \varphi^{1-j} \right) f(F_\ell) f(F_j) \\ &= 2 \frac{\varphi^{k-2}}{5\sqrt{5}} \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} f(F_\ell) f(F_j) + \frac{2}{5\sqrt{5}} \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} \varphi^{k-2j} (-1)^j f(F_\ell) f(F_j) \\ &\quad + \frac{2}{5\sqrt{5}} \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} \varphi^{k-2\ell+2j} (-1)^{\ell-j} f(F_\ell) f(F_j) + \frac{2}{5\sqrt{5}} \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} \varphi^{2\ell-k-2} (-1)^{k-\ell+1} f(F_\ell) f(F_j) \\ &\quad + \frac{2}{5\sqrt{5}} \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} \varphi^{k-2\ell+2} (-1)^\ell f(F_\ell) f(F_j) + \frac{2}{5\sqrt{5}} \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} \varphi^{2\ell-2j-k} (-1)^{k-\ell+j+1} f(F_\ell) f(F_j) \\ &\quad + \frac{2}{5\sqrt{5}} \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} \varphi^{2j-k} (-1)^{k-j+1} f(F_\ell) f(F_j) + \frac{2}{5\sqrt{5}} \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} \varphi^{2-k} (-1)^{k+1} f(F_\ell) f(F_j). \end{aligned}$$

Puisque

$$R := \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} f(F_\ell) f(F_j) = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=2}^{k-1} f(F_j) \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k-1} f(F_j)^2 - \sum_{j=3}^{k-1} f(F_j) f(F_{j-1})$$

et

$$\left| \sum_{j=3}^{k-1} f(F_j) f(F_{j-1}) \right| \leq \left( \sum_{j=3}^{k-1} f(F_j)^2 \cdot \sum_{j=3}^{k-1} f(F_{j-1})^2 \right)^{1/2} = O(1)$$

il s'ensuit que  $R = O(1)$  et que, par conséquent, la première partie de la somme est de l'ordre de  $O(F_k)$ . Les autres parties peuvent être traitées de manière encore plus directe. Par souci de concision, nous

n'abordons que les trois prochains termes (qui sont aussi asymptotiquement les plus importants). Il n'est pas difficile de majorer les quatre autres termes. Premièrement, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} \varphi^{k-2j} (-1)^j f(F_\ell) f(F_j) &= \sum_{j=2}^{k-3} \varphi^{k-2j} (-1)^j f(F_j) \sum_{\ell=j+2}^{k-1} f(F_\ell) \\
&= \sum_{j=2}^{k-3} \varphi^{k-2j} |f(F_j)| O(1) \\
&= O \left( \left( \sum_{j=2}^{k-3} \varphi^{2k-4j} \sum_{j=2}^{k-3} f(F_j)^2 \right)^{1/2} \right) \\
&= O(F_k).
\end{aligned}$$

Deuxièmement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} \varphi^{k-2\ell+2j} (-1)^{\ell-j} f(F_\ell) f(F_j) &= \sum_{r=2}^{k-3} \varphi^{k-2r} (-1)^r \sum_{j=2}^{k-r-1} f(F_{j+r}) f(F_j) \\
&= O \left( \sum_{r=2}^{k-3} \varphi^{k-2r} \sum_{j=2}^{k-1} f(F_j)^2 \right) \\
&= O(F_k).
\end{aligned}$$

Troisièmement, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{j=2}^{\ell-2} \varphi^{2\ell-k-2} (-1)^{k-\ell+1} f(F_\ell) f(F_j) &= \sum_{\ell=2}^{k-1} \varphi^{2\ell-k-2} (-1)^{k-\ell+1} f(F_\ell) \sum_{j=2}^{\ell-2} f(F_j) \\
&= \sum_{\ell=2}^{k-1} \varphi^{2\ell-k-2} |f(F_\ell)| O(1) \\
&= O \left( \left( \sum_{\ell=2}^{k-1} \varphi^{2k-4\ell} \sum_{\ell=2}^{k-1} f(F_\ell)^2 \right)^{1/2} \right) \\
&= O(F_k).
\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons bien grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n < F_{\mathcal{L}_N}} |f(n)| \leq F_{\mathcal{L}_N}^{1/2} \left( \sum_{n < F_{\mathcal{L}_N}} f(n)^2 \right)^{1/2} = O \left( (F_{\mathcal{L}_N} T_{\mathcal{L}_N})^{1/2} \right) = O(F_{\mathcal{L}_N}).$$

□

**Remarque 4.17.** Si on applique l'identité (4.17), par exemple, à la fonction  $Z$ -additive définie par  $f(F_n) = F_n$  pour tout entier  $n \geq 2$ , nous obtenons l'identité

$$\forall k \geq 0, F_k^2 = F_k + 2 \sum_{\ell=2}^{k-1} F_{\ell-1} F_\ell F_{k-\ell},$$

avec la convention qu'une somme vide est nulle.

## 4.3.1.2 Seconde preuve

**Proposition 4.18.** *On a la relation suivante*

$$(4.18) \quad \begin{aligned} 5S_N &= \left( \varphi^{N-1} + \frac{(-1)^{N-1}}{\varphi^{N-1}} \right) \sum_{n=2}^{N-1} f(F_n) + \varphi^{N+1} \sum_{n=2}^{N-1} \frac{(-1)^n}{\varphi^{2n}} f(F_n) \\ &+ \frac{(-1)^{N-1}}{\varphi^{N+1}} \sum_{n=2}^{N-1} (-1)^n \varphi^{2n} f(F_n). \end{aligned}$$

On obtient alors, pour tout  $N \rightarrow \infty$ ,

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \frac{S_N}{F_N} &= \left( \frac{1}{\varphi\sqrt{5}} \sum_{n=2}^{N-1} f(F_n) + \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \sum_{n=2}^{N-1} \frac{(-1)^n}{\varphi^{2n}} f(F_n) + \frac{(-1)^{N-1}}{\varphi^{2N+1}\sqrt{5}} \sum_{n=2}^{N-1} (-1)^n \varphi^{2n} f(F_n) \right) \\ &\times \left( 1 + O\left(\frac{1}{\varphi^{2N}}\right) \right). \end{aligned}$$

En particulier, si la série des  $f(F_n)$  converge, alors il en est de même pour la suite  $(S_N/F_N)_N$  et nous avons l'égalité

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{F_N} = \frac{1}{\varphi\sqrt{5}} \sum_{n=2}^{\infty} f(F_n) + \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\varphi^{2n}} f(F_n).$$

*Démonstration.* En utilisant la formule de Binet

$$F_j = \frac{\varphi^j + (-1)^{j+1}\varphi^{-j}}{\sqrt{5}} \quad (j \geq 0),$$

nous obtenons, pour tout  $2 \leq n \leq N-1$

$$\begin{aligned} 5F_{n-1}F_{N-n} &= (\varphi^{n-1} + (-1)^n\varphi^{-n+1})(\varphi^{N-n} + (-1)^{N-n-1}\varphi^{-N+n}) \\ &= \varphi^{N-1} + (-1)^{N-1}\varphi^{-N+1} + (-1)^{N-n-1}\varphi^{2n-N-1} + (-1)^n\varphi^{N-2n+1}. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors (4.18) grâce à (4.17).

De plus, nous avons

$$\frac{1}{F_N} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi^N + (-1)^{N+1}\varphi^{-N}} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi^N} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\varphi^{2N}}\right) \right) \quad (N \rightarrow \infty),$$

ce qui implique

$$\left( \varphi^{N-1} + \frac{(-1)^{N-1}}{\varphi^{N-1}} \right) \frac{1}{F_N} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi} + O\left(\frac{1}{\varphi^{2N}}\right).$$

En reportant dans (4.18) et en divisant par 5 de chaque côté, on obtient (4.19). □

Nous faisons ici une digression afin de montrer que nous pouvons en déduire le théorème de Lekkerkerker [35]. En effet, nous pouvons appliquer le résultat précédent (4.18) à une fonction  $Z$ -additive

particulière : soit  $N \geq 1$ ,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_N$  la longueur de la décomposition de  $N$  et nous rappelons la définition de la fonction somme-des-chiffres  $s_Z$

$$s_Z(N) := \sum_{j \geq 0} e_j(N) = \sum_{0 \leq j \leq \mathcal{L}_N} e_j(N)$$

Le résultat prouvé par Lekkerkerker [35] énonce (en particulier), que le nombre moyen de nombres de Fibonacci dans la décomposition des entiers compris entre  $F_N$  et  $F_{N+1} - 1$ , est équivalent  $N/(\varphi^2 + 1)$  (cf. [29] pour une étude de la distribution gaussienne de ce nombre et [8] pour une généralisation). Autrement dit, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 4.19.** *Pour tout  $N \geq 1$*

$$G_N := \sum_{n < F_N} s_Z(n) = \frac{N\varphi^{N+1}}{5} \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{\varphi^{2N+2}}\right) + \frac{2\varphi^N}{5\sqrt{5}} \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{\varphi^{2N}}\right),$$

ce qui nous donne à la fois

$$(4.20) \quad \frac{1}{F_N} \sum_{n < F_N} s_Z(n) = \frac{N}{\varphi^2 + 1} + \frac{3 - \sqrt{5}}{5} + O\left(\frac{1}{\varphi^{2N}}\right) \quad (N \rightarrow \infty)$$

et

$$(4.21) \quad \frac{1}{F_{N-1}} \sum_{F_N \leq n < F_{N+1}} s_Z(n) = \frac{N}{\varphi^2 + 1} + \frac{11 - \sqrt{5}}{10} + O\left(\frac{N}{\varphi^{2N}}\right) \quad (N \rightarrow \infty).$$

*Démonstration.* Puisque nous appliquons (4.18) à  $f = s_Z$ , nous remarquons que nous avons

$$\varphi^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{\varphi^{2n}} = \frac{2\varphi^{N+2}}{5 + 3\sqrt{5}} \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{\varphi^{2N}}\right) \text{ et } \frac{(-1)^{N-1}}{\varphi^{N-1}} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \varphi^{2n} = \frac{2\varphi^{N+1}}{5 + \sqrt{5}} \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{\varphi^{2N}}\right).$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} G_N &= \left(\varphi^{N+1} + \frac{(-1)^{N+1}}{\varphi^{N+1}}\right) \frac{N}{5} + \frac{2\varphi^{N+2}}{5(5 + 3\sqrt{5})} \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{\varphi^{2N}}\right) + \frac{2\varphi^{N+1}}{5(5 + \sqrt{5})} \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{\varphi^{2N}}\right) \\ &= \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{\varphi^{2N+2}}\right) \frac{N\varphi^{N+1}}{5} + \varphi^N \left(\frac{2\varphi^2}{5(5 + 3\sqrt{5})} + \frac{2\varphi}{5(5 + \sqrt{5})}\right) \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{\varphi^{2N}}\right) \\ &= \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{\varphi^{2N+2}}\right) \frac{N\varphi^{N+1}}{5} + \frac{2\varphi^N}{5\sqrt{5}} \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{\varphi^{2N}}\right). \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant à nouveau l'estimation

$$\frac{1}{F_N} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{N+2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varphi^{2N}}\right)\right) \quad (N \rightarrow \infty),$$

nous obtenons immédiatement (4.20).

De plus, nous prouvons (4.21) en remarquant

$$\frac{1}{F_{N-1}} \sum_{F_N \leq n < F_{N+1}} s_Z(n) = \frac{G_{N+1} - G_N}{F_{N-1}}$$

et en utilisant l'estimation précédente de  $F_{N-1}^{-1}$ .

□

### 4.3.2 Preuve de la version effective

Avant de se lancer dans la preuve de la version effective du Théorème d'Erdős-Wintner, nous allons prouver un résultat similaire au Lemme 2.14 dans le cas  $q$ -adique.

**Lemme 4.20.** *Soit  $f$  une fonction  $Z$ -additive réelle. On a alors pour tous entiers  $1 \leq h \leq \mathcal{L}_N/2$*

$$|\Phi_N(t) - \Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t)| \leq C_1 \frac{\ln N}{\varphi^h} + C_2 \sum_{\mathcal{L}_N - 2h < j \leq \mathcal{L}_N} (1 - \cos(tf(F_j)))^{1/2}$$

où  $\mathcal{L}_N = \lfloor \ln_{\varphi} N \rfloor$  et  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  sont deux constantes absolues.

*Démonstration.* Pour  $r \geq 2$ , nous introduisons les fonctions

$$f_r(n) := \prod_{2 \leq j < r} f(e_j(n)F_j)$$

et

$$\Phi_N^{(r)}(t) := \frac{1}{N} \sum_{n < N} e^{itf_r(n)}.$$

Nous estimons alors la différence  $\Phi_N(t) - \Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t)$  de la manière suivante

(4.22)

$$\begin{aligned} \left| \Phi_N(t) - \Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t) \right| &\leq \left| \Phi_N(t) - \Phi_N^{(\mathcal{L}_N-h)}(t) \right| \\ &+ \left| \Phi_N^{(\mathcal{L}_N-h)}(t) - \frac{F_{\mathcal{L}_N-h-1}}{\varphi^{\mathcal{L}_N-h-2}} \Phi_{F_{\mathcal{L}_N-h-1}}(t) - \frac{F_{\mathcal{L}_N-h-2}}{\varphi^{\mathcal{L}_N-h-1}} e^{itf(F_{\mathcal{L}_N-h-1})} \Phi_{F_{\mathcal{L}_N-h-2}}(t) \right| \\ &+ \frac{F_{\mathcal{L}_N-h-1}}{\varphi^{\mathcal{L}_N-h-2}} \left| \Phi_{F_{\mathcal{L}_N-h-1}}(t) - \Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t) \right| + \frac{F_{\mathcal{L}_N-h-1}}{\varphi^{\mathcal{L}_N-h-2}} \left| \Phi_{F_{\mathcal{L}_N-h-2}}(t) - \Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t) \right|. \end{aligned}$$

Nous remarquons que  $F_{\mathcal{L}_N-h-1}/\varphi^{\mathcal{L}_N-h-2} + F_{\mathcal{L}_N-h-2}/\varphi^{\mathcal{L}_N-h-1} = 1$ .

Nous considérons maintenant les quatre parties du membre de droite de (4.22) séparément. Pour la première partie, nous observons que  $f(n) = f_{\mathcal{L}_N-h}(n)$  si  $n < F_{\mathcal{L}_N-h}$ . Si  $n \geq F_{\mathcal{L}_N-h}$ , alors nous avons

$$\begin{aligned} \left| e^{itf(n)} - e^{itf_{\mathcal{L}_N-h}(n)} \right| &= \left| \prod_{j \geq \mathcal{L}_N-h} e^{itf(e_j(n)F_j)} - 1 \right| \\ &\leq \sum_{\mathcal{L}_N-h \leq j \leq \mathcal{L}} \left| e^{itf(e_j(n)F_j)} - 1 \right| \\ &= \sqrt{2} \sum_{\mathcal{L}_N-h \leq j \leq \mathcal{L}} \sqrt{1 - \cos(tf(e_j(n)F_j))} \end{aligned}$$

et donc

$$\left| \Phi_N(t) - \Phi_N^{(\mathcal{L}_N-h)}(t) \right| \leq \sqrt{2} \sum_{\mathcal{L}_N-h \leq j \leq \mathcal{L}} \sqrt{1 - \cos(tf(F_j))}.$$

Ensuite, nous utilisons le fait (voir [41]) que pour chaque  $r \geq 2$  il existe une partition de  $[0, 1]$  en  $F_r$  intervalles  $I_r(k)$ ,  $0 \leq k < F_r$ , de longueurs  $|I_r(k)| = \varphi^{2-r}$  si  $0 \leq k < F_{r-1}$  et  $|I_r(k)| = \varphi^{1-r}$  si  $F_{r-1} \leq k < F_r$  tels que

$$(4.23) \quad \{n\varphi\} \in I_r(k) \quad \text{si et seulement si} \quad (e_2(n), e_3(n), \dots, e_{r-1}(n)) = (e_2(k), e_3(k), \dots, e_{r-1}(k)).$$

La discr\u00e9pance de la suite  $\{n\varphi\}$  est d'ordre  $(\ln N)/N$  (cf. [50] par exemple) : plus pr\u00e9cis\u00e9ment, pour tout  $M \geq 1$ , uniform\u00e9ment pour tous les intervalles  $I \subset [0, 1]$ , nous avons

$$|\#\{n < M : \{n\varphi\} \in I\} - M |I|| < \frac{7 \ln 6M}{6}.$$

Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} \Phi_N^{(r)}(t) &= \sum_{k < F_r} \frac{\#\{n < N : \{n\varphi\} \in I_r(k)\}}{N} e^{itf(k)} \\ &= \sum_{k < F_r} \left( |I_r(k)| + O\left(\frac{\ln N}{N}\right) \right) e^{itf(k)} \\ &= \sum_{k < F_r} |I_r(k)| e^{itf(k)} + O\left(\frac{F_r \ln N}{N}\right). \end{aligned}$$

Nous avons

$$\sum_{k < F_r} |I_r(k)| e^{itf(k)} = \frac{F_{r-1}}{\varphi^{r-2}} \Phi_{F_{r-1}}(t) + \frac{F_{r-2}}{\varphi^{r-1}} e^{itf(F_{r-1})} \Phi_{F_{r-2}}(t),$$

ce qui implique (en prenant  $r = \mathcal{L}_N - h$ )

$$\left| \Phi_N^{(\mathcal{L}_N - h)}(t) - \frac{F_{\mathcal{L}_N - h - 1}}{\varphi^{\mathcal{L}_N - h - 2}} \Phi_{F_{\mathcal{L}_N - h - 1}}(t) - \frac{F_{\mathcal{L}_N - h - 2}}{\varphi^{\mathcal{L}_N - h - 1}} e^{itf(F_{\mathcal{L}_N - h - 1})} \Phi_{F_{\mathcal{L}_N - h - 2}}(t) \right| \leq C \frac{\ln N}{\varphi^h}$$

pour une certaine constante  $C > 0$ .

Pour la derni\u00e8re partie, nous rappelons la d\u00e9finition (4.9) des matrices  $A_k = A_k(t)$ . De plus, nous posons

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et nous remarquons que  $\|A - A_k\|_2 = |\eta_k|$  et  $\|A_k\|_2 = \|A\|_2 = \varphi$ . Par exemple, nous avons

$$\|A^h - A_{\mathcal{L}_N} A_{\mathcal{L}_N - 1} \cdots A_{\mathcal{L}_N - h + 1}\|_2 \leq \varphi^{h-1} \sum_{\mathcal{L}_N - h < j \leq \mathcal{L}_N} \|A - A_j\|_2 = \varphi^{h-1} \sum_{\mathcal{L}_N - h < j \leq \mathcal{L}_N} |\eta_j|.$$

Nous remarquons \u00e9galement que  $A^h = \varphi^h M + O(\varphi^{-h})$  o\u00f9  $M$  est la matrice de projection dans la direction  $(\varphi, 1)$  (et satisfait donc  $M^2 = M$ ). En utilisant la relation  $F_{\mathcal{L}_N}/F_{\mathcal{L}_N - h} = \varphi^h + O(\varphi^{3h-2L})$  et

en posant  $\Pi_N := A_{\mathcal{L}_N} A_{\mathcal{L}_N-1} \cdots A_2 - \frac{F_{\mathcal{L}_N}}{F_{\mathcal{L}_N-h}} A_{\mathcal{L}_N-h} A_{\mathcal{L}_N-h-1} \cdots A_2$ , nous avons la décomposition

$$\begin{aligned}
\Pi_N &= A_{\mathcal{L}_N} A_{\mathcal{L}_N-1} \cdots A_2 - \varphi^h A_{\mathcal{L}_N-h} A_{\mathcal{L}_N-h-1} \cdots A_2 + O(\varphi^{2h-L}) \\
&= (A_{\mathcal{L}_N} A_{\mathcal{L}_N-1} \cdots A_{\mathcal{L}_N-h+1} - A^h) A_{\mathcal{L}_N-h} A_{\mathcal{L}_N-h-1} \cdots A_2 \\
&\quad + (A^h - \varphi^h I) A_{\mathcal{L}_N-h} A_{\mathcal{L}_N-h-1} \cdots A_2 + O(\varphi^{2h-L}) \\
&= (A_{\mathcal{L}_N} A_{\mathcal{L}_N-1} \cdots A_{\mathcal{L}_N-h+1} - A^h) A_{\mathcal{L}_N-h} A_{\mathcal{L}_N-h-1} \cdots A_2 \\
&\quad + \varphi^h (M - I) A_{\mathcal{L}_N-h} A_{\mathcal{L}_N-h-1} \cdots A_2 + O(\varphi^{2h-L}) + O(\varphi^{\mathcal{L}_N-2h}) \\
&= (A_{\mathcal{L}_N} A_{\mathcal{L}_N-1} \cdots A_{\mathcal{L}_N-h+1} - A^h) A_{\mathcal{L}_N-h} A_{\mathcal{L}_N-h-1} \cdots A_2 \\
&\quad + \varphi^h (M - I) (A_{\mathcal{L}_N-h} A_{\mathcal{L}_N-h-1} \cdots A_{\mathcal{L}_N-2h+1} - A^h) A_{\mathcal{L}_N-2h} \cdots A_2 \\
&\quad + \varphi^h (M - I) \varphi^h M A_{\mathcal{L}_N-2h} \cdots A_2 + O(\varphi^{\mathcal{L}_N-2h}),
\end{aligned}$$

(où  $I$  est la matrice identité de taille  $2 \times 2$ ) et en remarquant également que  $(M - I)M = 0$ . Nous obtenons alors

$$\|\Pi_N\|_2 \leq \varphi^{\mathcal{L}_N-2} \sum_{\mathcal{L}_N-h < j \leq \mathcal{L}_N} |\eta_j| + \varphi^{\mathcal{L}_N-2} \sum_{j=\mathcal{L}_N-2h+1}^{\mathcal{L}_N-h} |\eta_j| + O(\varphi^{\mathcal{L}_N-2h})$$

et donc

$$\begin{aligned}
|\Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t) - \Phi_{F_{\mathcal{L}_N-h}}(t)| &\leq \sqrt{2} \frac{\varphi^{\mathcal{L}_N-2}}{F_{\mathcal{L}_N}} \sum_{\mathcal{L}_N-2h < j \leq \mathcal{L}_N} |\eta_j| + O(\varphi^{-2h}) \\
&\ll \sum_{\mathcal{L}_N-2h < j \leq \mathcal{L}_N} \sqrt{1 - \cos(tf(F_j))} + \varphi^{-2h}.
\end{aligned}$$

La même estimation reste valable si l'on remplace  $h$  par  $h + 1$  ou  $h + 2$ .  $\square$

Nous sommes maintenant prêts à prouver le Théorème 4.12 et nous utilisons les mêmes idées générales que dans la preuve du Théorème 2.8. En particulier, nous appliquons à nouveau l'inégalité de Berry-Esseen. Avec les mêmes idées que pour la majoration (2.17), nous obtenons (à l'aide de la représentation (4.11) et de la borne  $\|A_j(t)A_{j+1}(t)\|_2 \leq \varphi^2 \exp(-c|\eta_j|^2)$ ) l'estimation

$$(4.24) \quad |\Phi(t)| \leq \exp\left(-c'_1 t^2 \sum_{j \in \tilde{S}(t)} f(F_j)^2\right).$$

Comme dans les preuves des autres versions effectives, nous allons estimer l'intégrale (notée  $I$ ) apparaissant dans l'inégalité de Berry-Esseen en la coupant en trois parties

$$I \leq \int_{-1/T}^{1/T} \frac{|\Phi(t) - \Phi_N(t)|}{|t|} dt + \int_{1/T \leq |t| \leq T} \frac{|\Phi(t) - \Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t)|}{|t|} dt + \int_{1/T \leq |t| \leq T} \frac{|\Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t) - \Phi_N(t)|}{|t|} dt.$$

Grâce au Lemme 4.16, nous obtenons  $\Phi(t) - \Phi_N(t) = O(|t|)$  que nous utiliserons pour estimer la première intégrale du membre de droite i.e. pour  $|t| \leq 1/T$ .



Pour majorer la deuxième intégrale, nous avons besoin de majorer la différence  $\Phi(t) - \Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t)$ . Pour  $t \rightarrow 0$  nous avons certainement

$$|\Phi(t) - \Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t)| = |\Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t)| \left| 1 - \frac{\Phi(t)}{\Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t)} \right| \ll |t| e^{-c_2 \psi_{N,T}(t)}.$$

En utilisant la représentation du produit matriciel, nous obtenons également (pour tout nombre réel  $t$ )

$$|\Phi(t) - \Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t)| \ll e^{-c_2 \psi_{N,T}(t)}.$$

Enfin, en utilisant les mêmes méthodes que dans la preuve du Lemme 4.20, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\Phi(t) - \Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t)| &\ll \sum_{j \geq \mathcal{L}_N - h} |\eta_j| \cdot \varphi^{h - \mathcal{L}_N} \left\| \prod_{2 \leq j < \mathcal{L}_N - h} A_j(t) \right\|_2 + O(\varphi^{-2h}) \\ &\ll |t| \vartheta_N(T) e^{-c_2 \psi_{N,T}(t)} + O(\varphi^{-2h}) \end{aligned}$$

Pour traiter la troisième intégrale, nous appliquons le Lemme 4.20 et pour  $h'_T = \lceil \ln_\varphi(T \ln T \ln N) \rceil$  de manière à ce que  $h'_T \leq \mathcal{L}_N/2$  et  $\ln T \ln N / \varphi^{h'_T} \ll 1/T$ , nous obtenons

$$\int_{1/T \leq |t| \leq T} \frac{|\Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t) - \Phi_N(t)|}{|t|} dt \ll \frac{1}{T} + T \lambda_N(T).$$

Nous signalons ici que, si nous prenons  $h'_T = \lceil \ln_\varphi(T \ln T) \rceil$ , alors nous avons plutôt

$$\int_{1/T \leq |t| \leq T} \frac{|\Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t) - \Phi_N(t)|}{|t|} dt \ll \frac{1}{T} + \frac{\ln N}{T} + T \lambda_N(T),$$

d'où la remarque suivant le Théorème 4.12.

Ainsi, nous avons

$$\int_{1/T \leq |t| \leq T} \frac{|\Phi(t) - \Phi_{F_{\mathcal{L}_N}}(t)|}{|t|} dt \ll \int_{1/T}^T \min\left(\frac{1}{1+t}, \vartheta_N(T)\right) e^{-c_2 \psi_{N,T}(t)} dt + \frac{\ln T}{\varphi^{2h_T}}.$$

En remarquant  $\ln T / \varphi^{2h_T} \ll 1/T$ , nous en déduisons le résultat attendu.

## 4.4 Exemple et conclusion

Dans cette partie, nous allons traiter un exemple similaire à un autre étudié dans le système  $q$ -adique, mais aussi écrire certains problèmes ouverts en lien avec ces théorèmes d'Erdős-Wintner et leurs versions effectives.

**Exemple 4.21.** *Nous considérons une fonction  $Z$ -additive  $f$  telle que*

$$f(F_j) = j^{-\alpha}$$

pour  $j \geq 2$  et pour un réel  $\alpha > 1$  (le raisonnement est quasiment similaire si  $f(F_j) \asymp j^{-\alpha}$ ). Cette fonction admet une loi limite (continue) grâce au Théorème 4.2 et même absolument continue, grâce à l'égalité  $\tilde{S}(\tau) = [(\tau/\pi)^{1/\alpha}; +\infty[$ , à l'inégalité (4.24), qui implique

$$|\varphi(\tau)| \leq \exp\left(-c_2 \tau^2 \sum_{j > |\tau|^{1/\alpha}} j^{-2\alpha}\right) \leq \exp\left(-C |\tau|^{1/\alpha}\right)$$

où  $C > 0$  est une constante absolue et au Théorème 2.15. Nous en déduisons que  $Q_F(1/T) \asymp 1/T$ .

De plus, en appliquant le Théorème 4.12 et par des calculs très proches du cas  $q$ -adique, nous obtenons pour  $T, N \geq 1$  tels que  $h_T = \lceil \ln(T \ln T \ln N) \rceil \leq \lceil \ln_\varphi N \rceil / 2$

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \frac{1}{T} + \frac{T \ln T}{(\ln N)^\alpha} + \frac{1}{(\ln N)^{\alpha-1}}.$$

Finalement, en prenant les choix optimaux  $T = (\ln N)^{\alpha-1}$  si  $1 < \alpha < 2$  et  $T = \sqrt{\ln_2 N} / (\ln N)^{\alpha/2}$  si  $\alpha \geq 2$ , nous en déduisons l'estimation

$$\|F - F_N\|_\infty \ll \begin{cases} \frac{1}{(\ln N)^{\alpha-1}} & \text{si } 1 < \alpha < 2, \\ \frac{\sqrt{\ln_2 N}}{(\ln N)^{\alpha/2}} & \text{si } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

On peut se demander comment obtenir entièrement une version effective du Théorème 4.2, mais aussi dans quelle mesure les Théorèmes 3.18 et 4.12 peuvent être généralisés pour des systèmes de numération ayant comme base des suites  $(G_n)$  qui satisfont des récurrences linéaires à coefficients constants. Il devrait être certainement possible de traiter les suites de base  $(G_n)$  qui sont données par  $G_0 = 1$ ,  $G_1 = a$  et  $G_{n+2} = aG_{n+1} + G_n$  ( $n \geq 0$ ), où  $a \geq 1$  est un nombre entier donné, mais même ce cas semble être très compliqué, car nous serons sûrement amenés à rencontrer les mêmes problèmes que dans ce dernier chapitre. Bien sûr, nous pouvons aussi se poser les mêmes questions pour d'autres systèmes de numération, comme celui d'Ostrowski basé sur le développement en fraction continue d'un nombre irrationnel.

# Bibliographie

- [1] R. C. Baker, G. Harman, & J. Pintz. The difference between consecutive primes, ii. *Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series*, 83(3) :532–562, 2001.
- [2] G. Barat & P. J. Grabner. Distribution properties of  $G$ -additive functions. *Journal of Number Theory*, 60 :103–123, 1996.
- [3] G. Barat & P. J. Grabner. Limit distribution of  $Q$ -additive functions from an ergodic point of view. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae / Sectio computatorica*, 28 :55–78, 2008.
- [4] R. Bellman & H. N. Shapiro. On a problem in additive number theory. *Ann. of Math. (2)*, 49 :333–340, 1948.
- [5] I. Berkes. On the asymptotic behaviour of  $\sum f(n_k x)$ . I. Main Theorems. *Z. Wahr. verw. Geb.*, 34 :319–345, 1976.
- [6] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum. Sur la concentration de certaines fonctions additives. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 152(1) :179–189, 2012.
- [7] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum. Sur l’inégalité de Turán-Kubilius friable. *Journal of the London Mathematical Society*, 93(1) :175–193, 2016.
- [8] E. Burger, D. Clyde, C. Colbert, G. Shin, & Z. Wang. A generalization of a theorem of Lekkerkerker to Ostrowski’s decomposition of natural numbers. *Acta Arithmetica*, 153, 2012.
- [9] J. Coquet. Sur les fonctions  $S$ -multiplicatives and  $S$ -additives. *Thèse de doctorat de Troisième Cycle, Université Paris-Sud, Orsay*, 1975.
- [10] H. Cramèr. *Random Variables and Probability Distributions (troisième édition)*. Cambridge University Press, 1970.
- [11] H. Delange. Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 3-ème série*, 78 :273–304, 1961.
- [12] H. Delange. Sur les fonctions  $q$ -additives ou  $q$ -multiplicatives. *Acta Arithmetica* 21, pages 285–298, 1972.
- [13] M. Drmota & P. Grabner. *Analysis of digital functions and applications. Combinatorics, Automata and Number Theory*, volume 135, pages 452–504. Cambridge University Press, 2010.
- [14] M. Drmota & R. F. Tichy. Sequences, discrepancies, and applications. *Lecture Notes in Mathematics*, 1651, 1997.
- [15] M. Drmota & J. Verwee. Effective Erdős-Wintner theorems for digital expansions. *Soumis*, 2020.
- [16] P. D. T. A. Elliott. *Probalistic Number Theory, I : mean value theorems*. Grundlehren der Math. Wiss. 239, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1979.
- [17] P. D. T. A. Elliott. *Probalistic Number Theory, II : central limit theorems*. Grundlehren der Math. Wiss. 240, Springer, New York, 1980.

- [18] P. Erdős. On a family of symmetric Bernoulli convolutions. *Amer. J. Math.*, 61 :974–976, 1939.
- [19] P. Erdős & L. Kátaı. On the concentration of distribution of additive functions. *Acta. Sci. Math.*, 41 :295–305, 1979.
- [20] W. J. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 2*. Deuxième édition John Wiley & Sons Inc, New York, 1971.
- [21] A. M. Garsia. Arithmetic properties of Bernoulli convolutions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102 :409–432, 1962.
- [22] A. O. Gelfond. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données. *Acta Arith.*, 13 :259–265, 1967/1968.
- [23] A. Haddley, P. Lertchoosakul, & R. Nair. The Halton sequence and its discrepancy in the Cantor expansion. *Periodica Mathematica Hungarica*, 75 (1), pages 128 – 141, 2017.
- [24] G. Halász. Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen. *Acad. Math. Acad. Sci Hungar.*, 19, 1968.
- [25] A. Hildebrand. An asymptotic formula for the variance of an additive function. *Math Z*, 183 :145–170, 1983.
- [26] G. Hoheisel. Primzahl probleme in der Analysis. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1930.
- [27] A. Ivić. *The Riemann zeta-function*. John Wiley, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1985.
- [28] B. Jessen & A. Wintner. Distribution functions and the Riemann Zeta function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 38 :48–88, 1935.
- [29] M. Kologlu, G. Kopp, S. J. Miller, & Y. Wang. On the number of summands in Zeckendorf decompositions. *Fibonacci Quarterly*, 49, 2010.
- [30] J. M. de Koninck & F. Luca. *Analytic Number Theory : Exploring the Anatomy of Integers*. American Mathematical Society, 2012.
- [31] D. Koukoulopoulos. On the concentration of certain additive functions. *Acta Arith.*, 162(3) :223–241, 2014.
- [32] J. Kubilius. Estimating the second central moment for any additive arithmetic functions. *Litovsk. Mat. Sb.*, 23 :110–117, 1983.
- [33] J. Kubilius. Estimating the second central moment for strongly additive arithmetic functions. *Litovsk. Mat. Sb.*, 23 :122–133, 1983.
- [34] L. Kuipers & H. Niederreiter. *Uniform Distribution of Sequences*. Wiley, 1974.
- [35] C. G. Lekkerkerker. Voorstelling van natuurlijke getallen door een som van getallen van Fibonacci. *Simon Stevin*, 29, 1951-1952.
- [36] P. Lévy. Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes. *Studia Math.*, 3 :119–155, 1931.
- [37] E. Manstavičius. Probabilistic theory of additive functions related to systems of numeration. *In New Trends in Probability and Statistics*, 4 (Palanga, 1996), VSP, Utrecht, 1997.
- [38] M. Pedicini. Greedy expansions and sets with deleted digits. *Theor. Comput. Sci.*, 332 :313–336, 2005.
- [39] Y. Peres, W. Schlag, & B. Solomyak. *Sixty years of Bernoulli convolutions*. Birkhäuser Basel, Basel, 2000.
- [40] I. Z. Ruzsa. On the concentration of additive functions. *Acad. Sci. Hungar.*, 36(3-4) :215–232, 1980.

- [41] L. Spiegelhofer. *Correlations for numeration systems*. PhD thesis, TU Wien and Aix-Marseille Université, 2014.
- [42] C. M. Steiner. On the Turán–Kubilius inequality. *Technical Report no. 220, Stanford University*, 1984.
- [43] S. Takahashi. An asymptotic property of a gap sequence. *Proc. Japan Acad.*, **38** :101–104, 1962.
- [44] G. Tenenbaum. *Introduction à la Théorie Analytique et Probabiliste des Nombres (quatrième édition mise à jour)*. Belin, 2015.
- [45] G. Tenenbaum. Moyennes effectives de fonctions multiplicatives complexes. *Ramanujan J.*, 44(3) :641–701, 2017.
- [46] G. Tenenbaum & J. Verwee. Effective Erdős–Wintner theorems. *Prépublication*, 2020.
- [47] G. Tenenbaum & J. Wu. *Exercices corrigés de théorie analytique and probabiliste des nombres*. Cours spécialisés, numéro 2, Société Mathématique de France, 1996.
- [48] D. V. Widder. *The Laplace transform*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1946.
- [49] E. Wirsing. Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen II. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 18, 1967.
- [50] S. K. Zaremba. Good lattice points, discrepancy, and numerical integration. *Annali di Matematica*, 73, 1966.