



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

DIPLOMARBEIT

Kollektiver Risikoausgleich in der Pensionsvorsorge

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

im Rahmen des Studiums

Finanz- und Versicherungsmathematik

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten RHEINLÄNDER

Univ.Lektor Dipl.-Ing. Dr.techn. Christian WEBER

durch

Raffaella HEILY BSc

Martikelnnummer 01326780

Ausgeführt am Institut für *Financial and Actuarial Mathematics*
der *Technischen Universität Wien*

Wien, November 2020

(Unterschrift Verfasser)

(Unterschrift Betreuer)



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Abstract

The risk-sharing plan tries to deal with longevity and low-interest phases. As an alternative to common pension plans the benefit paid to the plan members is calculated and adjusted through several adjustment parameters each year due to the changing membership profile. This mechanism allows to pay stable benefits without giving any guarantees.

Zusammenfassung

Kollektiver Risikoausgleich in der Pensionsvorsorge durch den vorgestellten Risikoteilungsplan stellt eine Alternative zu herkömmlichen Vorsorgemodellen dar. Dabei wird eine Lösung vorgeschlagen um den aktuellen Problemen im Lebensversicherungsbereich, wie Langlebigkeit und eine anhaltende Niedrigzinslage, entgegenzuwirken.

Die Höhe der Leistungen wird je nach Entwicklung des Sparkollektivs jährlich angepasst. Ziel ist es durch eine geeignete Parameterwahl möglichst stabile Pensionsleistungen ohne die Zusage von Garantien gewährleisten zu können.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Diplomarbeit unterstützt und motiviert haben, insbesondere bei meinen beiden Betreuern.

Ein großer Dank geht dabei an Univ.Lektor Dipl.-Ing. Dr.techn. Christian Weber, der mich mit seiner großen Begeisterung für dieses Thema durch diese Masterarbeit geführt und sich stets Zeit für motivierende und hilfreiche Diskussionen genommen hat. Auch für die sonstige Unterstützung während dieser Zeit und die Literaturempfehlungen möchte ich mich bedanken. Weiterer Dank gebührt Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer für seine Denkanstöße und Motivation während der Fertigstellung dieser Arbeit.

Zuletzt möchte ich mich herzlichst bei meiner Familie und meinen Freunden, die während dieser Zeit verständnisvoll all meinen Problemen gelauscht haben, aufrichtig bedanken. Aber nicht nur für diese finale Phase, sondern auch für die Unterstützung und Motivation während meines gesamten Studiums möchte ich ihnen aufrichtigen Dank aussprechen.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Motivation der Risikoteilung beim Sparkollektiv	1
1.2. Allgemeines	2
1.2.1. Motivation	2
1.2.2. Implementierung	2
1.2.3. Simulationen	3
1.2.4. Rechnungsgrundlagen	3
1.2.5. Vereinfachungen	3
1.2.6. Notationen und Abkürzungen	3
2. Das Ausgangsmodell der Risikoteilung	4
2.1. Anpassungen und Parametrisierungen	4
2.1.1. Parameter zur Anpassung der Investitionsstrategie	4
2.1.2. Parameter zur AAF-Anpassung	5
2.2. Jährlicher Akkumulationsfaktor (AAF)	5
2.3. Finanzierungsniveau	5
2.4. Simulation des Kapitalmarktes	5
2.5. Plots	6
2.5.1. Quantile	6
2.5.2. Vergleichsmodelle	6
2.6. Sonstige Annahmen	7
3. Anwartschaft	8
3.1. Modellannahmen und Grundlegendes	8
3.2. Beiträge	8
3.3. Entwicklungen	8
3.3.1. Reserveentwicklung	9
3.3.2. Umlaufvermögen	9
3.4. Plots	9
4. Rentenphase	14
4.1. Modellannahmen und Grundlegendes	14
4.2. Entwicklungen	15
4.2.1. Reserveentwicklung	15
4.2.2. Umlaufvermögen	15
4.3. Leistungen	15
4.4. Plots	16
4.4.1. Durchschnittliche AAFs	16
4.4.2. Ausbezahlte Leistungen	18
5. Simulationen	20
5.1. Kapitalmarkt	20
5.2. Sterblichkeit	24

6. Mathematische Motivation	26
6.1. Voraussetzungen und Grundlagen	26
6.1.1. Stochastische Analysis	26
6.1.2. Finanzmathematik	29
6.2. Basismodell	30
6.2.1. Kapitalmarkt	30
6.2.2. Asset-Liability Management	31
6.2.3. Faire Rendite	34
6.2.4. Ruinwahrscheinlichkeit	34
7. Fazit	38
7.1. Zusammenfassung	38
7.2. Ausblick	38
8. Quellcode	39
8.1. Klassen	39
8.1.1. Beitrags- und Anteilsvektor	41
8.2. Sterbetafel	42
8.3. Kommutationszahlen und Barwerte	43
8.4. Kapitalmarkt	46
8.5. Aufschubzeit und Rentenphase	46
8.6. Hilfsfunktionen	49
8.6.1. Quantile	49
A. Anhang	i
A.1. Abkürzungen	i
A.2. Notationen	i
A.3. Sterbetafel	ii
B. Verzeichnisse	vii

1. Einleitung

Überblick über die Diplomarbeit

Im nächsten Unterkapitel 1.1 *Motivation der Risikoteilung beim Sparkollektiv* erfolgt zu Beginn eine kurze Motivation weshalb die Betrachtung eines kollektiven Spargedankens im Vergleich zu herkömmlichen Anlagemethoden für Versicherungsnehmer¹ von Interesse sein kann. Auch wird hier grob skizziert worum es sich beim Risikoteilungsmodell handelt. Im Kapitel 2 *Das Ausgangsmodell der Risikoteilung* werden die Grundlagen für die betrachteten Modelle sowie allgemeingültige Annahmen in diesen, in Hinblick auf Sensitivitätsanalysen erläutert. Im Kapitel 3 *Anwartschaft* wird zunächst ein vereinfachtes Modell für die Aufschubzeit dargestellt. Dieses wird im darauffolgenden Abschnitt 4 *Rentenphase* auf die leistungspflichtige Zeit ausgeweitet. Am Beginn beider Kapitel werden Grundlagen und Formeln näher dargestellt und Vor- bzw. Nachteile der Risikoteilungsmodelle im Vergleich zu herkömmlichen Beitragsprimaten anhand von Sensitivitätsanalysen in Bezug auf die Modellparameter des Risikoteilungsplans erläutert. Im Anschluss daran wird im Kapitel 5 *Simulationen* die Sensitivität der Modelle gegenüber unterschiedlicher Kapitalmarktszenarien und Sterblichkeitsentwicklungen (Langlebigkeit und Übersterblichkeit) des betrachteten Sparkollektivs genauer analysiert und diskutiert. Anschließend wird im Kapitel 6 *Mathematische Motivation* das Basismodell anhand finanzmathematischer Überlegungen unter Zuhilfenahme von Grundlagen der Stochastischen Analysis und Finanzmathematik kurz dargestellt und auf seine Zuverlässigkeit untersucht. Im vorletzten Kapitel 7 *Fazit* erfolgt eine kurze Zusammenfassung der Modellergebnisse. Im letzten Abschnitt 8 *Quellcode* werden verwendete Codestellen dargestellt.

1.1. Motivation der Risikoteilung beim Sparkollektiv

Einerseits führen bei klassischen Pensionsvorsorgesystemen, die eine reine Leistungs- oder Beitragszusage gewähren, sowohl steigende Langlebigkeit als auch die anhaltende Niedrigzinslage dazu, dass immer mehr Alternativen angedacht werden müssen. Während zu niedrige Zinsen über längere Perioden hinweg bei Leistungsversprechen mit zusätzlichen Einzahlungen verbunden sein können und somit insgesamt eine schlechtere monetäre Gesamtsituation ergeben, bekommen Versicherungsnehmer bei Beitragsprimaten eine verhältnismäßig niedrige Pensionsleistung wodurch sie ebenfalls finanziell schlechter gestellt sind.

Alternativ können VN riskantere Sparmodelle, wie beispielsweise fondsgebundene Rentenversicherungen, wählen, bei denen ein Teil der gezahlten Prämien in Fonds investiert wird. Dies kann zu höheren Renditen führen. Bei FRV tragen die Versicherungsnehmer direkt das Kapitalanlagerisiko. Falls es zu einer schlechten Fondsentwicklung kommt, muss auch hier der Versicherungsnehmer mit finanziellen Einbußen rechnen. Somit ist, abgese-

¹Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird in dieser Diplomarbeit die Sprachform des generischen Maskulinums angewandt. Es wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die ausschließliche Verwendung der männlichen Form geschlechtsunabhängig verstanden werden soll.

hen von der ungewissen Entwicklung ein gewisses Know-How erforderlich.

Zwischen jenen risikoaversen und dieser risikofreudigen Herangehensweisen gibt es als Mittelstück dazu Versicherungsprodukte mit Überschussbeteiligungen. Bei diesen werden die Kapitalerträge nicht zur Gänze dem VN entgolten, sondern ein Teil wird einer kollektiven Reserve zugeführt. Dies ermöglicht einen Risikotransfer zwischen den einzelnen versicherten Personen, denn einerseits können Kapitalmarktverluste durch Entnahmen der kollektiven Reserve ausgeglichen werden und andererseits führen Gewinne zum Aufbau dieser.

Als Alternative zum Überschussbeteiligungsmodell wird das Konzept des Kollektiven Sparens betrachtet. Die Idee dabei ist es traditionelle Garantien mit niedriger Volatilität durch kollektives Sparen und ein geeignetes Asset-Management zu ersetzen.^[2]

Beim Kollektiven Sparen werden die Leistungen jährlich entsprechend der Kapitalmarktsituation und der sonstigen Entwicklung des Kollektivs, wie beispielsweise höhere bzw. niedrigere Sterblichkeit, angepasst.

Beim Risikoteilungsmodell erwirbt der VN, anders als beim individuellen Sparen, mit jedem Beitrag bzw. jeder (Versicherungs-)Prämie einen Anteil am Kapitalstock und nicht Fondsanteile. Somit ist dieses Sparmodell ähnlich zur *reinen Beitragszusage*^[1], die in Deutschland 2018 mit dem Betriebsrentenstärkungsgesetz eingeführt wurde, denn auch hier werden die Rentenzahlungen nicht garantiert. Bei der rBZ werden Rentenhöhen jedoch nicht jährlich neu bestimmt, sondern beim Rentenübergang kalkuliert.

Die in den nachfolgenden RS-Modellen betrachtete Risikoteilung hat sowohl für die Versicherungsnehmer, die bereits eine Rente beziehen, als auch für diejenigen, die sich noch in der Anwartschaft befinden, Vorteile. Jene bekommen verhältnismäßig angemessene Rentenzahlung und diese eine durchgehende sowie stabile finanzielle Absicherung. Anders als bei klassischem Fondssparen wird den VN die Entscheidung über die Fondsveranlagung abgenommen und von Finanzexperten im Rahmen des *Asset-Liabilities-Managements* geregelt.

1.2. Allgemeines

1.2.1. Motivation

Ausgang und Motivation für die betrachteten Modelle bilden die Arbeiten von C. Donnelly^[4] und O. Goecke^[5].

1.2.2. Implementierung

Alle Berechnungen und Algorithmen wurden mit **R**² der freien Programmiersprache für statistische Berechnungen und Grafiken implementiert.

²<https://www.r-project.org/>

1.2.3. Simulationen

Für die statistischen Analysen und die Verdeutlichung der Resultate anhand unterschiedlicher Grafiken, wurde für jeden betrachteten Zeitpunkt t stets mit $i = 1, \dots, 5000$ Simulationen gerechnet. Dabei wurden lognormalverteilte Zufallszahlen mit **R** generiert (vgl. 2.4 *Simulation des Kapitalmarktes*).

1.2.4. Rechnungsgrundlagen

Für alle Betrachtungen wurden zur Vereinfachung keine Kosten berücksichtigt. Weiters wurde stets exemplarisch ein Rechnungszins von 2% verwendet. Als Sterbetafel wurde die DAV 2004 RB-20 herangezogen, deren Herleitung im Anhang A.3 *Sterbetafel* erläutert wird.

1.2.5. Vereinfachungen

Neben dem Weglassen der Kosten (vgl. Kapitel 1.2.4 *Rechnungsgrundlagen*) wird als weitere Vereinfachung nur der planmäßige Vertragsverlauf betrachtet, das heißt außerplanmäßige Änderungen wie beispielsweise Rückkauf, Zuzahlung oder Verkürzung der Prämienzahlungsdauer sind nicht berücksichtigt worden. Auch gibt es keine Garantien jeglicher Form wie zum Beispiel Beitragsdynamiken oder Überschussbeteiligungen.

1.2.6. Notationen und Abkürzungen

Die während der gesamten Diplomarbeit vorkommenden Indizes sowie Notationen sind dem Anhang A.2 *Notationen* und die verwendeten Abkürzungen dem Anhang A.1 *Abkürzungen* zu entnehmen.

2. Das Ausgangsmodell der Risikoteilung

2.1. Anpassungen und Parametrisierungen

Bei den nachfolgend beschriebenen Pensionsvorsorgemodellen mit kollektivem Risikoausgleich wird einerseits die Investitionsstrategie angepasst, was dazu führt, dass auch das Investmentrisiko des Vorsorgeplans eine Anpassung erfährt. Andererseits werden die jährlichen Leistungen angeglichen. Eine Angleichung der Beiträge wird hier nicht berücksichtigt, sondern deren Höhe wird bereits bei Versicherungsbeginn fest vorgegeben.

Diese beiden Anpassungen erfolgen in Abhängigkeit des jeweiligen Finanzierungsniveaus $F_{i,t}$ (siehe Abschnitt 2.3 *Finanzierungsniveau*) in Bezug auf ein zu Beginn des Modells fixiertes und angestrebtes Niveau, im Folgenden das sogenannte „Ziel-Finanzierungsniveau“ \bar{F} . C. Donnelly postulierte in ihrer Arbeit bereits, dass durch diesen Mechanismus $F_{i,t}$ selbstkorrigierend und der Plan höchst flexibel sei^[4].

Weiters wird festgelegt, welcher Anteil des kollektiven Vermögens langfristig in riskante Aktien mit Rendite R_t investiert werden soll. Dieser Anteil wird im Folgenden stets mit s^{LT} bezeichnet. Es wird angenommen, dass die VN nicht selbst auswählen können, in welche Fonds das Kapital veranlagt wird. Diese Entscheidung wird ihnen abgenommen und von Finanzexperten geregelt.

Zu Beginn des Pensionsplans wird somit im Rahmen des Asset-Liability-Managements von ALM-Experten das Investitions-Anpassungs-Quadrupel $(a, \beta, s^{LT}, \bar{F})$ festgelegt (die Definition der Parameter a und β ist den Unterkapiteln 2.1.1 *Parameter zur Anpassung der Investitionsstrategie* und 2.1.2 *Parameter zur AAF-Anpassung* zu entnehmen).

2.1.1. Parameter zur Anpassung der Investitionsstrategie

Bei den betrachteten Risikoteilungs-Modellen wird zu jedem Zeitpunkt t in eine Aktie, mit Rendite $R_{i,t} > -1$ im betrachteten Zeitraum $[t, t - 1)$, sowie eine risikolose Anleihe mit einem konstanten Zinssatz $r > -1$, der zu Beginn festgelegt wird, investiert. Die Investitionsstrategie $\pi_{i,t}$ gibt an wie viel vom Anlagevermögen zum Zeitpunkt t in die risikobehaftete Aktie investiert wird. Sie wird neben der zu Beginn festgelegten langfristigen Investition $s^{LT} \in [0, 1]$ auch noch, wie bereits zuvor erwähnt, wesentlich von dem Finanzierungsniveau $F_{i,t}$ beeinflusst. Dieses führt formal zu:

$$\pi_{i,t-1} := \max \{0; \min\{1; s^{LT} + a(F_{i,t-1} - \bar{F})\}\} \quad (2.1)$$

Der Term $\tilde{F} := F_{i,t} - \bar{F}$ in (2.1) misst dabei zu jedem Zeitpunkt t , ob der Pensionsplan über- ($\tilde{F} > 0$) oder unterfinanziert ($\tilde{F} < 0$) ist. Ersteres führt folglich dazu, dass mehr in die risikobehaftete Aktie und Zweiteres, dass mehr in die risikolose Anleihe investiert wird. Gleichzeitig steigt bzw. sinkt dadurch jedoch auch die erwartete Rendite.

Die Konstante $a \geq 0$, im Folgenden mit „Anpassung des Investmentrisikos“, wird zu

Beginn des Vorsorgemodells festgelegt und bestimmt den Einfluss der Über- bzw. Unterfinanzierung. Dieser Parameter ist somit ein wichtiger Betrachtungspunkt für die nachfolgenden Sensitivitätsanalysen.

2.1.2. Parameter zur AAF-Anpassung

Der zweite Parameter, der ebenfalls zu Beginn fixiert wird und bei dem Sensitivitätsanalysen eine hohe Aussagekraft liefern, ist der sogenannte „*jährliche Akkumulationsfaktor*“ (kurz *AAF-Faktor*) $\beta \geq 0$. Auch dieser verstärkt oder schwächt das Verhältnis vom tatsächlichen Finanzierungsniveau zum vorgegebenen Ziel-Finanzierungsniveau und wird additiv bei der Berechnung des Faktors *AAF* (vgl. (2.2)) verwendet.

2.2. Jährlicher Akkumulationsfaktor (AAF)

Der jährliche Akkumulationsfaktors (*Annual Accumulation Factor*, kurz *AAF*) ist derjenige Wert um den sich die Beiträge jährlich erwartungsgemäß steigern. Konkret ist er gegeben durch:

$$AAF_{i,t-1} := 1 + r + \pi_{i,t-1} \cdot (\mathbb{E}[R] - r) + \beta \cdot (F_{i,t-} - \bar{F}). \quad (2.2)$$

Hier wird anders als bei \tilde{F} nicht das Finanzierungsniveau zur Zeit t , sondern t_- betrachtet. Dabei handelt es sich um jenen Zeitpunkt kurz bevor Zahlungen stattfinden. Es wird also die Zeitspanne $[t - 1, t)$ betrachtet.

Die Konstruktion ist wie bei C. Donelly gewählt und soll dazu führen, dass der Risikoteilungsplan verspricht, den akkumulierten Wert der Beiträge jedes Jahr mit der erwarteten Rendite der Vermögenswerte zu erhöhen, angepasst je nachdem ob der Vorsorgeplan über- oder unterfinanziert (also $\tilde{F} > 0$ oder $\tilde{F} < 0$) ist^[4].

2.3. Finanzierungsniveau

Das Finanzierungsniveau $F_{i,t}$ ist durch das Verhältnis der vorhandenen Vermögenswerte des Kollektivs (d.h. die „Assets“ $A_{i,t}$) zu den bestehenden Verbindlichkeiten gegenüber diesem (d.h. die „Liabilities“ $L_{i,t}$), formal also gegeben durch:

$$F_{i,t} := \frac{A_{i,t}}{L_{i,t}} \quad (2.3)$$

2.4. Simulation des Kapitalmarktes

Für die Berechnungen wurde stets ein risikoloser Zins von 0.125% p.a. verwendet. Die jährlichen Renditen $R_{i,t}$ der Aktien wurden gemäß dem Black-Scholes-Modell, als geometrische Brownsche Bewegung, basierend auf 5000 Simulationen modelliert und in

der Funktion `R_Matrix()` (siehe Quellcode 11: *Simulation Renditen*) berechnet. Die Parameter wurden dabei wie bei C. Donnelly gewählt mit

$$\mu = 0.0375 \text{ und } \sigma = 0.15,$$

was zu einer durchschnittlichen jährlichen Rendite mit Volatilität führt von

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_{i,t}] &:= \exp\{\mu + 0.5 \cdot \sigma^2\} \approx 0.05 \quad \text{und} \\ \sqrt{\mathbb{V}[R_{i,t}]} &:= \sqrt{\exp\{\sigma^2 - 1\}} \cdot \exp\{\mu + 0.5 \cdot \sigma^2\} \approx 0.16. \end{aligned}$$

Bemerkung: Erst im Kapitel 5 *Simulation Zins* werden diese Parameter für die Zwecke der Sensitivitätsanalysen abgeändert.

2.5. Plots

2.5.1. Quantile

Viele Simulationsergebnisse werden in dieser Diplomarbeit wie bereits bei C. Donnelly mithilfe von Quantilen der durchschnittlichen AAFs illustriert. Das heißt auch hier gilt: falls die jährlichen Akkumulationsfaktoren in den ersten fünf Jahren beispielsweise bei 1.040, 1.045, 1.050, 1.055 und 1.060 liegen, dann entspricht dies einem durchschnittlichen AAF von

$$1.050 \approx \sqrt[5]{\prod_{t=1}^5 AAF_t}$$

und wird in den Plots mit 0.050 dargestellt (um somit den prozentualen Zusammenhang zu verdeutlichen). Auch wird der Interquartilsabstand $IQR := Q_{0.75} - Q_{0.25}$, als guter robuster Schätzer, betrachtet. Eine Darstellung der Codestellen für die Berechnungen findet sich im Unterkapitel 8.6.1 *Quantile* wieder.

2.5.2. Vergleichsmodelle

Für die betrachteten Plots werden zum besseren Verständnis die Risikoteilungsmodelle mit herkömmliche Beitragsprimaten verglichen, bei denen anders als beim RS-Modell die Investitionsstrategie nicht abhängig von dem jährlichen Finanzierungsniveau und somit der tatsächlichen Kapitalmarktsituation dynamisch angepasst wird, sondern bei denen das Anlagevermögen mit der fixen Langzeitstrategie s^{LT} veranlagt wird. Beim BP gilt stets $\hat{F} = 0$, da Leistungen zu Versicherungsbeginn bestimmt werden und diese somit den akkumulierten Beiträgen entsprechen.

Es wird jeweils einer der beiden Anpassungsparameter a und β variiert. Auch wird der Fall, dass beide Parameter Null gesetzt werden, also somit einerseits die Investitionsstrategie im Einklang mit der Langzeitinvestitionsstrategie ist (d.h. $\pi_{i,t} = s^{LT}$, $\forall i, t$) und andererseits der jährliche Akkumulationsfaktor um die erwartete Rendite steigt und keine

Anpassung abhängig vom Finanzierungsniveau geschieht, betrachtet. Diese beiden Vergleichsmodelle werden in den nachfolgenden Abbildungen stets mit „*Beitragsprimat*“ und „*Vergleichsplan*“ bezeichnet.

2.6. Sonstige Annahmen

Als vereinfachende Annahme wurde stets ein abgeschlossenes Kollektiv betrachtet. Das heißt im Wesentlichen, dass nach dem „Startzeitpunkt“ des Kollektivs keine Neuzugänge betrachtet beziehungsweise modelliert wurden. In diesem Zusammenhang wurde auch angenommen, dass alle Versicherungsnehmer denselben Versicherungsbeginn haben. Dieser ist der Startzeitpunkt des Sparkollektivs.

3. Anwartschaft

In diesem Kapitel wird auf die Anwartschaft des Risikoteilungsmodells eingegangen. Hierbei werden Rentenzahlungen vorerst nicht berücksichtigt. Wenn eine VP das Ende seiner Aufschubzeit erreicht, wird in diesem Modell der Versicherungsvertrag dadurch implizit beitragsfrei gestellt, falls er dies nicht bereits wie bei Einmalzahlung ohnehin schon war, jedoch kommt es nicht explizit zu einer Leistungsphase mit Rentenzahlungen. Das angesammelte Kapital derjenigen versicherten Personen bleibt unverändert in der kollektiven Reserve bestehen. Auf die Entnahmen durch Rentenzahlungen wird im darauffolgenden Kapitel 4 *Rentenphase* genauer eingegangen.

3.1. Modellannahmen und Grundlegendes

Im betrachteten Sparkollektiv befinden sich $VPanz$ versicherte Personen mit unterschiedlich langen Aufschubzeiten $n_j^k \geq 1$. Jeder Versicherungsnehmer k des Kollektivs, mit $k = 1, \dots, VPanz$ zahlt abhängig von seiner Beitragszahlweise $zwInk^k$, die in den betrachteten Modellen neben Einmalbeitrag zu Versicherungsbeginn auch monatlich, vierteljährlich, halbjährlich oder jährlich sein kann (vgl. Tabelle 2: *Zahlweisen*), vorschüssig einen Beitrag der Höhe C_t^k ein.

3.2. Beiträge

Es werden Lebensversicherungsverträge mit einmaligen oder laufenden Versicherungsprämien betrachtet. Der kollektiven Reserve werden jährlich Beiträge der Höhe C_t zugeführt, wobei gilt

$$C_t = \sum_{k=1}^{VPanz} C_t^k \quad \text{mit} \quad (3.1)$$

$$C_t^k = zb \cdot zwInk^k \begin{cases} zb^k \cdot zwInk^k, & t = 0, \dots, nj^k - 1 \quad [zwInk^k \neq 0] \\ zb^k \cdot zwInk^k, & t = 0 \quad [zwInk^k = 0] \\ 0, & t = 1, \dots, nj^k - 1 \quad [zwInk^k = 0] \end{cases}$$

3.3. Entwicklungen

Die Prämien werden gesammelt für das Kollektiv vom Versicherungsunternehmen entsprechend der Investitionsstrategie (2.1) am Kapitalmarkt veranlagt. Die Beiträge steigern sich jährlich erwartungsgemäß um $AAF_{i,t-1}$ (2.2).

3.3.1. Reserveentwicklung

Der akkumulierte Wert der Beiträge zur Zeit t ergibt zuzüglich der Versicherungsprämien C_t , die zum Zeitpunkt t fällig sind, die kollektive Reserve $L_{i,t}$ (*Liabilities*) des VUs:

$$L_{i,t} := L_{i,t-1} \cdot AAF_{i,t-1} + C_t \quad \text{mit } L_{i,0} := 1 \quad (3.2)$$

Für den Zeitpunkt t_- ergibt sich somit:

$$L_{i,t_-} := L_{i,t-1} \cdot (1 + s^{LT} \cdot (\mathbb{E}[R] - r)) \quad (3.3)$$

3.3.2. Umlaufvermögen

Das Umlaufvermögen, speziell die Kapitalanlagen, für die Zeitpunkte t beziehungsweise t_- , ist gegeben durch:

$$A_{i,t} := A_{i,t-1} \cdot (1 + r + \pi_{i,t-1} \cdot ((R_{i,t} - 1) - r)) + C_t \quad \text{mit } A_{i,0} := 1 \quad (3.4)$$

$$A_{i,t_-} := A_{i,t-1} \cdot (1 + r + \pi_{i,t-1} \cdot (\mathbb{E}[R] - r)) \quad (3.5)$$

3.4. Plots

Für das Anwartschaftsmodell wurden 112 versicherte Personen (sowohl 56 Männern als auch 56 Frauen) mit zufällig Eintrittsaltern zwischen 25 und 40 Jahren betrachtet. Die Aufschubzeit wurde so modelliert, dass die betrachteten Männer den Rentenbeginn zwischen 60 und 67 Jahren und Frauen zwischen 59 und 65 Jahren haben.

Für die nachfolgenden Plots dieses Unterkapitels sei weiters angenommen, dass alle Versicherungsverträge denselben Versicherungsbeginn haben. Als Endzeitpunkt N wurde für die Abbildungen des Anwartschaftsmodells die maximale Aufschubzeit der VPen, die sich im Kollektiv befinden, verwendet, also

$$N := \max_j n_j^k.$$

Bei den Simulationen (vgl. Abbildung 1 bis Abbildung 6) hat sich gezeigt, dass die Anpassung des Investmentrisikos a direkt proportional zur Größe des Interquantilsabstandes ist, denn wie man in Abbildung 1 *Variation a* gut erkennen kann, wird dieser für kleine a möglichst gering gehalten bzw. weist für große a eine größere Spannweite auf.

Bei der Variation des Parameters β für die AAF-Anpassung kann man, anders als bei den Simulationen in denen a variiert, kein so großes Delta zu reinen Beitragsprimaten erkennen; der Verlauf der Kurven der durchschnittlichen jährlichen Akkumulationsfaktoren ist bei Weitem nicht so flach.

	Mann	Frau	N	\bar{F}	s^{LT}
Anzahl/ Ausprägung	56	56	42	1.00	0.80
Eintrittsalter	25-40	25-40			
Rentantrittsalter	60-67	59-65			

Tabelle 1: Eingabe Abbildung 1 bis Abbildung 6

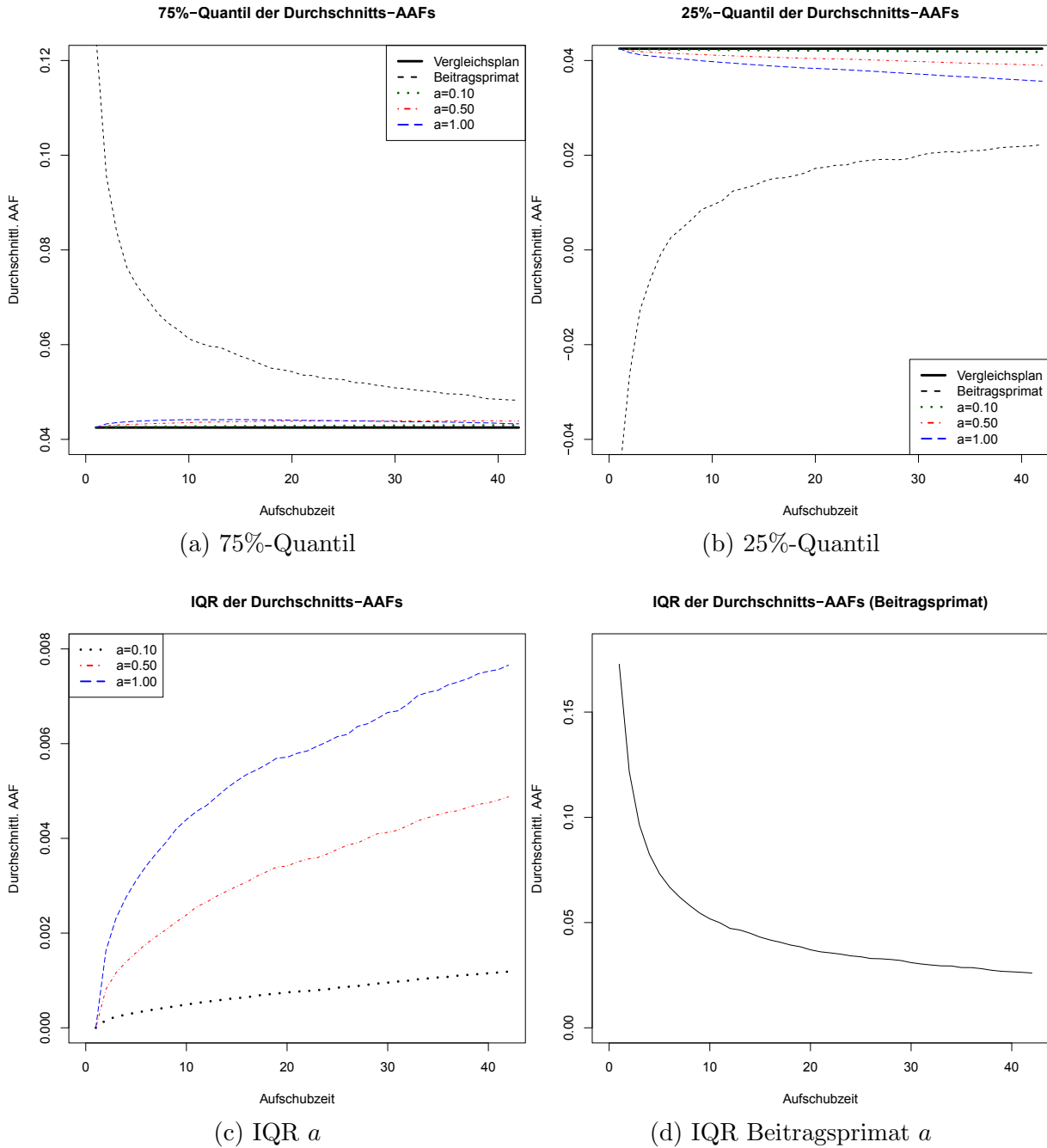


Abbildung 1: Variation a (Anwartschaft)

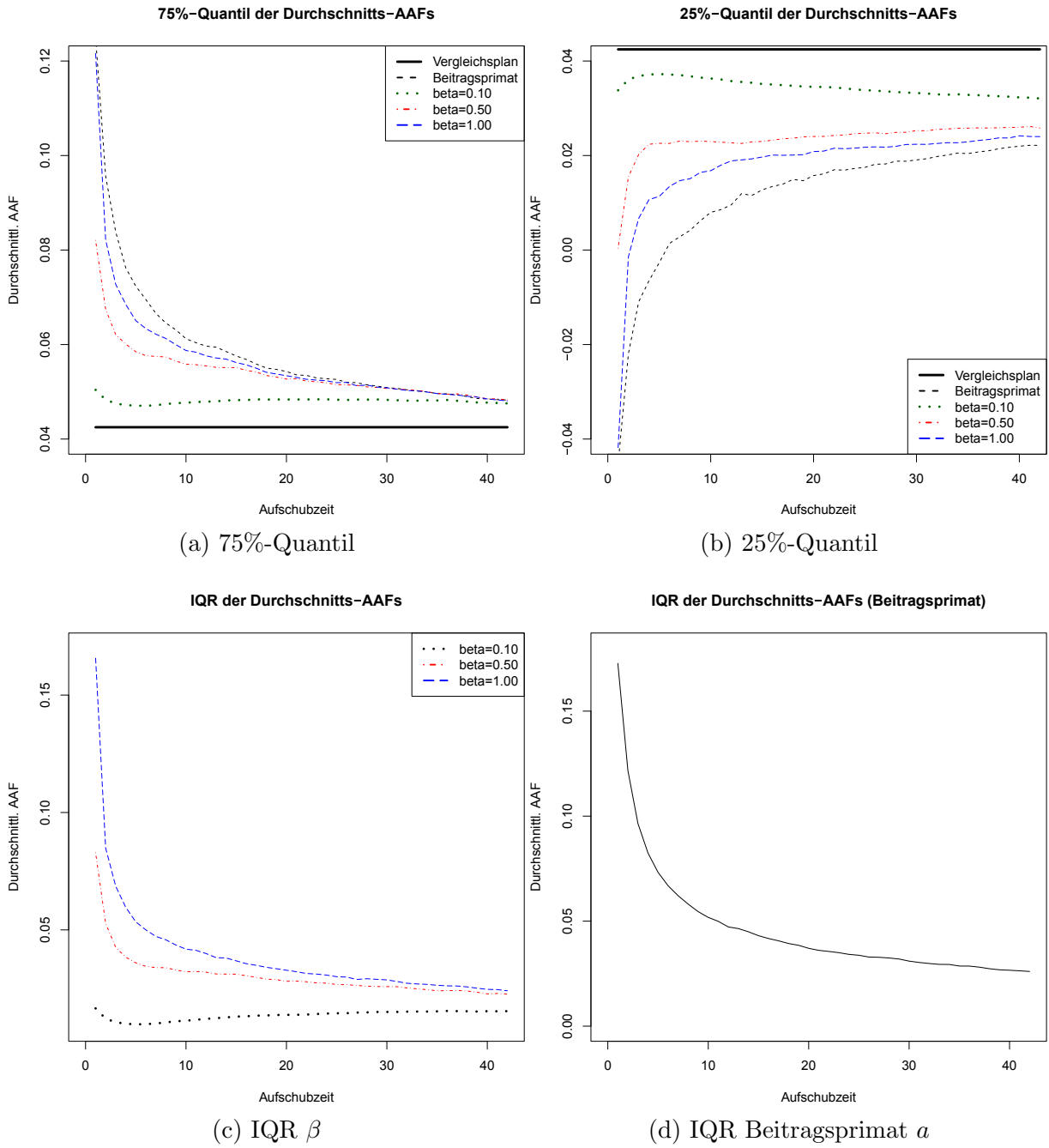


Abbildung 2: Variation β (Anwartschaft)

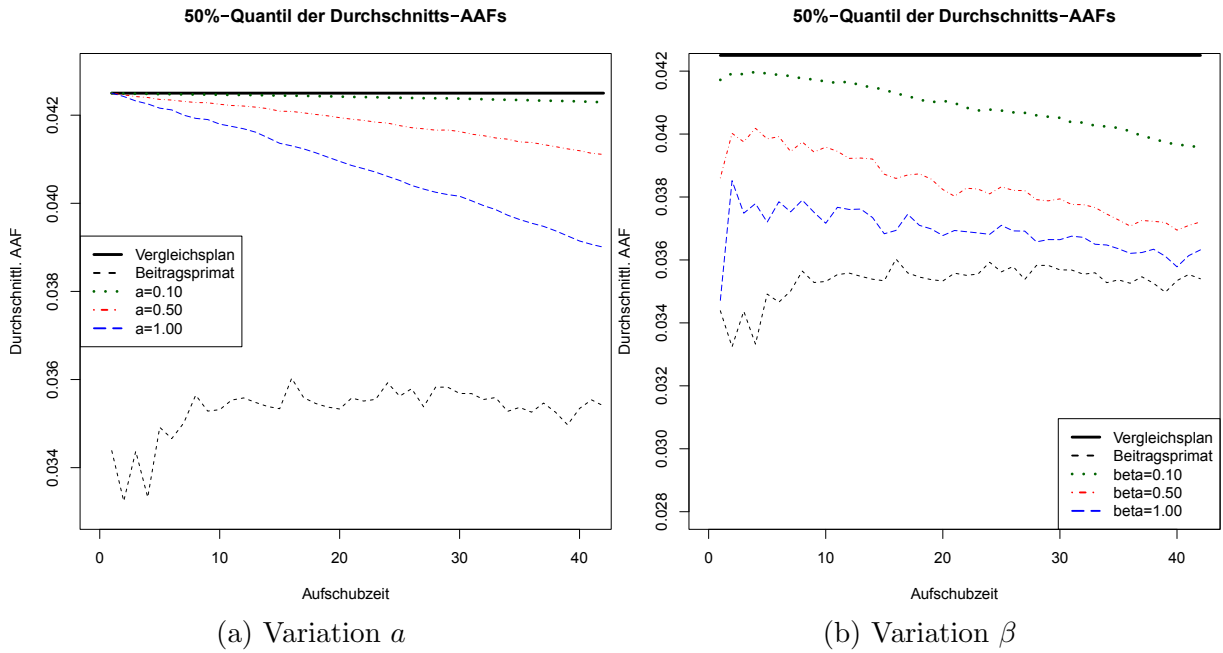


Abbildung 3: 50%-Quantil (Anwartschaft)

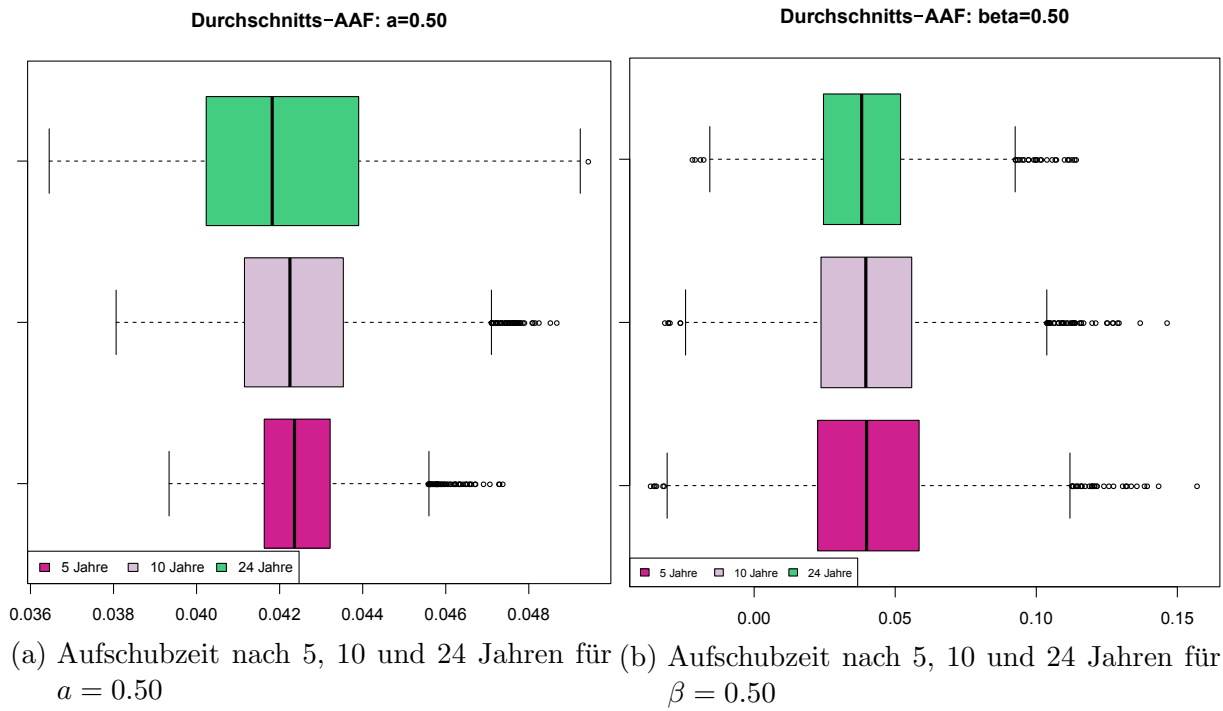
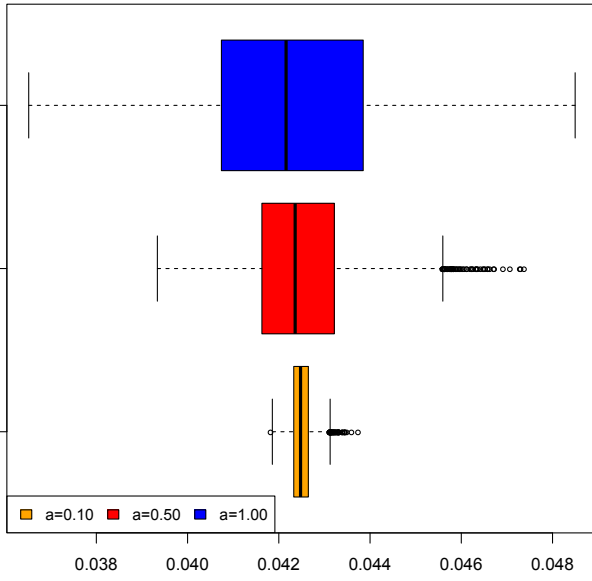


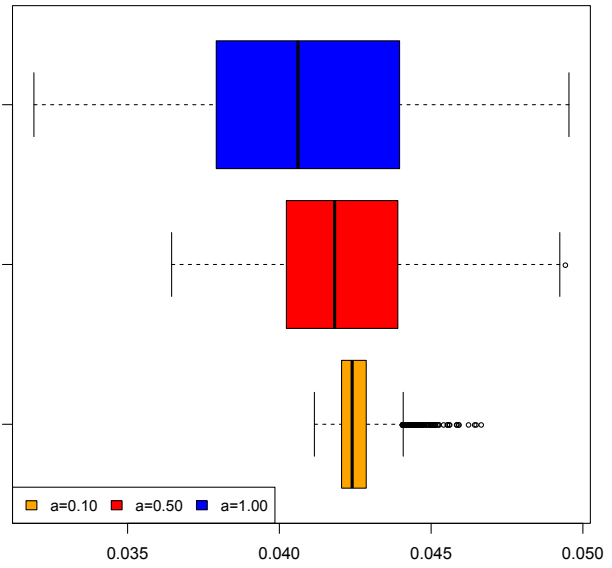
Abbildung 4: Boxplot Variation a und β (Anwartschaft)

Durchschnitts-AAF nach 5 Jahren



(a) Aufschiebzeit nach 5 Jahren

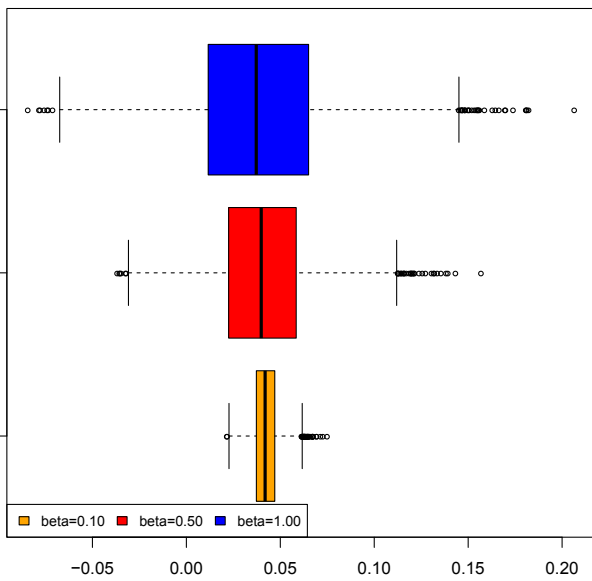
Durchschnitts-AAF nach 24 Jahren



(b) Aufschiebzeit nach 24 Jahren

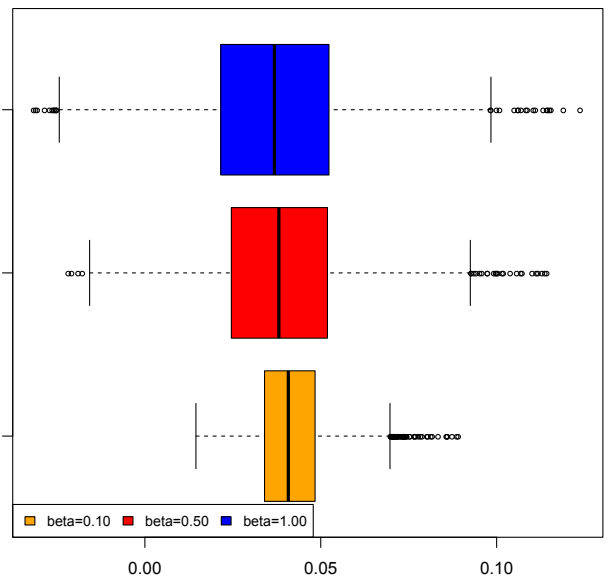
Abbildung 5: Boxplot Variation a (Anwartschaft)

Durchschnitts-AAF nach 5 Jahren



(a) Aufschiebzeit nach 5 Jahren

Durchschnitts-AAF nach 24 Jahren



(b) Aufschiebzeit nach 24 Jahren

Abbildung 6: Boxplot Variation β (Anwartschaft)

4. Rentenphase

In diesem Kapitel wird das Risikoteilungsmodell des vorherigen Kapitels 3 *Anwartschaft* um die Rentenphase erweitert, das heißt konkret, dass hier nicht nur die einzuzahlenden Prämien sondern auch die auszubehandelnden Leistungen bei den Berechnungen berücksichtigt werden.

Wenn eine VP mit seinem Versicherungsvertrag das Ende seiner Aufschubzeit erreicht, wird das ihm anteilsmäßig zustehende Kapital in eine lebenslange vorschüssige Rente umgewandelt. Diese Umwandlung passiert beim Risikoteilungsmodell jedoch nicht einmalig beim Rentenübergang, sondern es findet jährlich eine Neukalkulation gemäß der Entwicklung der kollektiven Reserve statt. Somit kann es sein, dass beispielsweise in einem Jahr in dem die Kapitalentwicklung schlechter verlaufen ist oder weniger Versicherungsnehmer als zuvor angenommen aus dem Kollektiv ausgeschieden sind, die jeweiligen Versicherungsnehmer eine niedrigere Rentenzahlung erhalten. Hingegen kann es in Jahren in denen sich das Umlaufvermögen besser entwickelt hat als erwartet, somit der Plan überfinanziert in Bezug auf das zuvor definierte Finanzierungsniveau \bar{F} ist, oder mehr VP als erwartet ausscheiden, dazu kommen, dass höhere Renten ausbezahlt werden.

Dieses Risikoteilungsmodell in dem auch die leistungspflichtige Zeit modelliert ist, wurde so implementiert, dass der Rentenübergang für jede versicherte Person zu Versicherungsbeginn individuell wählbar ist um somit die Realität besser widerzuspiegeln. Neben dem Weglassen der Kosten (vgl. Kapitel 1.2.4 *Rechnungsgrundlagen*) wird als weitere Vereinfachung nur der planmäßige Verlauf der Rentenphase betrachtet, das heißt außerplanmäßige Änderungen wie beispielsweise Rückkauf, Zuzahlung oder Kürzung der Beitragszahlungsdauer sind nicht berücksichtigt worden (vgl. Kapitel 1.2.5 *Vereinfachungen*).

4.1. Modellannahmen und Grundlegendes

Es gelten die in Kapitel 3.1 *Modellannahmen und Grundlegendes* beschriebenen Grundlagen für die Anwartschaft. Weiters wird jedem Versicherungsnehmer k des Sparkollektivs zum Zeitpunkt t eine Leistung der Höhe B_t^k ausbezahlt, somit ergibt sich jährlich ein Abgang aus der kollektiven Reserve durch Auszahlungen der Höhe

$$B_t = \sum_{k=1}^{VPanz} B_t^k \quad \text{mit} \quad (4.1)$$

$$B_t^k \begin{cases} \geq 0, & t \geq n_j^k \\ = 0, & t < n_j^k \end{cases}$$

Es wurden die untenstehenden Zahlweisen (vgl. Tabelle 2: *Zahlweisen*) bei den unterschiedlichen Modellen verwendet. Eine Kapitalabfindung nach Anwartschaft ist nicht vorgesehen beziehungsweise getestet worden, da das Hauptaugenmerk auf den Rentenentwicklungen lag.

Inkasso		Exkasso	
Ausprägung	Zahlweise	Ausprägung	Zahlweise
12	monatlich	12	monatlich
4	vierteljährlich	4	vierteljährlich
2	halbjährlich	2	halbjährlich
1	jährlich	1	jährlich
0	Einmalbeitrag		

Tabelle 2: Zahlweisen

4.2. Entwicklungen

4.2.1. Reserveentwicklung

Der akkumulierte Wert der Beiträge zur Zeit t ergibt, wie zuvor in Kapitel 3.3.1 *Reserveentwicklung* beschreiben (vgl. Gleichung (3.2)), abzüglich der Rentenzahlungen an die Versicherungsnehmer, die kollektive Reserve $L_{i,t}$ (*Liabilites*) zum Zeitpunkt t beziehungsweise t_- des Versicherungsunternehmens:

$$L_{i,t} := L_{i,t-1} \cdot AAF_{i,t-1} + C_t - B_t \quad \text{mit } L_{i,0} := 1 \quad (4.2)$$

$$L_{i,t_-} := L_{i,t-1} \cdot (1 + s^{LT} \cdot (\mathbb{E}[R] - r)) \quad (4.3)$$

4.2.2. Umlaufvermögen

Das Umlaufvermögen für die Zeitpunkte t beziehungsweise t_- ist wie zuvor in Kapitel 3.3.2 *Umlaufvermögen* beschreiben (vgl. Gleichung (3.2)), abzüglich der Rentenzahlungen an die Versicherungsnehmer, gegeben durch:

$$A_{i,t} := A_{i,t-1} \cdot (1 + r + \pi_{i,t-1} \cdot ((R_{i,t} - 1) - r)) + C_t - B_t \quad \text{mit } A_{i,0} := 1 \quad (4.4)$$

$$A_{i,t_-} := A_{i,t-1} \cdot (1 + r + \pi_{i,t-1} \cdot (\mathbb{E}[R] - r)) \quad (4.5)$$

4.3. Leistungen

Die auszubehandelnden Leistungen werden für jede VP jährlich neu bestimmt und anschließend als aufsummierte Leistung der kollektiven Reserve entnommen (vgl. (4.1)).

Die Bestimmung der individuellen Leistungen geschieht in Abhängigkeit der Entwicklung des Kollektivs, das heißt konkret die Reserveentwicklung beeinflusst durch die Kapitalmarktentwicklung und durch das Ausscheiden oder Verweilen der versicherten Personen

aus dem beziehungsweise im Kollektiv.

$$K_t^k := L_{t-} \cdot ant^k \quad (4.6)$$

In Gleichung (4.6) handelt es sich bei L_{t-} um den durchschnittlichen Wert der Liabilities zum Zeitpunkt t über alle Simulationen i . Mit ant^k wird der Anteil der k -ten VP an der kollektiven Reserve bezeichnet. Dieser Reserveanteil wird anhand der während der Laufzeit zu bezahlenden Beiträge, gemessen am Beitragsvolumen des Kollektivs, bestimmt und in der Klasse "VTver" (vgl. Kapitel 8.1 *Klassen*) abgespeichert.

Bei K_t^k handelt es sich um das durchschnittliche Kapital über alle Simulationen zum Zeitpunkt t multipliziert mit dem Anteilsfaktor der versicherten Person k . Um die individuelle Leistung B_t^k zu erhalten, muss dies noch durch den Barwert einer lebenslangen vorschüssigen Leibrente \ddot{a}_{x+t} dividiert werden:

$$B_t^k := \frac{K_t^k}{\ddot{a}_{x+t}} \quad (4.7)$$

4.4. Plots

In diesem Unterkapitel werden die Resultate der Sensitivitätsanalysen bei unterschiedlicher Parametrisierung des Investitions-Anpassungs-Quadrupels $(a, \beta, s^{LT}, \bar{F})$ graphisch dargestellt und interpretiert. Die Langzeitinvestitionsstrategie wurde nicht abgeändert und bei allen Abbildungen mit $s^{LT} = 0.8$ parametrisiert.

4.4.1. Durchschnittliche AAFs

Für die nachfolgenden Abbildungen wurden dieselben Annahmen wie im Kapitel 3.4 *Plots* getroffen. Hier werden auch nur die ersten 42 Jahre der Quantile der durchschnittlichen jährlichen Akkumulationsfaktoren dargestellt.

Variation a und β

Für den betrachteten Zeitraum von 42 Jahren unterscheiden sich die Abbildungen im Wesentlichen nicht von denen des Anwartschaftsmodells. Auch hier kann man bei der Variation des Parameters a einen flachen Verlauf der durchschnittlichen jährlichen Akkumulationsfaktoren erkennen. Bei unterschiedlichen Parameterausprägungen für β zeigt sich auch in der Leistungsphase des Risikoteilungsmodells, ein ähnlicher durchschnittlicher AAF wie beim Beitragsprimaten.

Variation \bar{F} und

Eine Variation des Zielfinanzierungsniveaus \bar{F} hat wie man in Abbildung 8: *IQR: Variation \bar{F} (inkl. Leistungsphase)* erkennen kann, nur eine geringe Auswirkung auf den Verlauf

der durchschnittlichen AAFs. Ein niedrigeres Zielniveau führt zu einer leicht nach oben verschobenen Kurve und ein höheres Niveau hat eine leichte Verschiebung nach unten zur Folge.

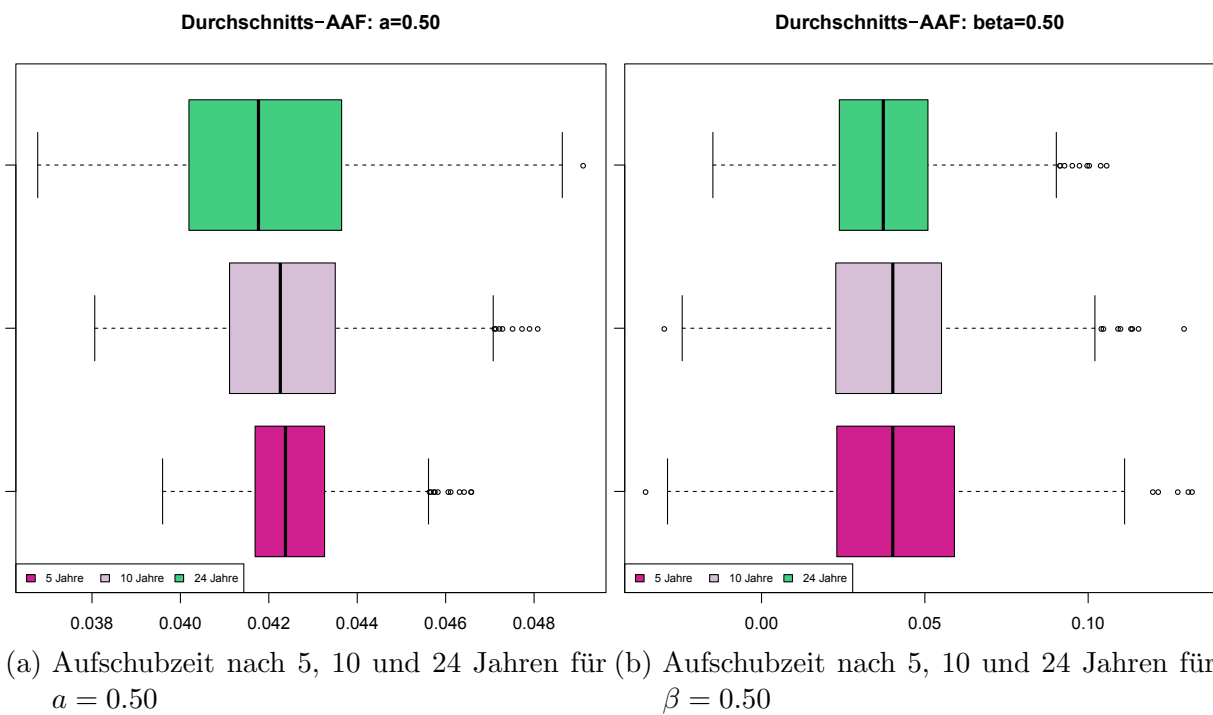


Abbildung 7: Boxplot Variation a und β (inkl. Leistungsphase)

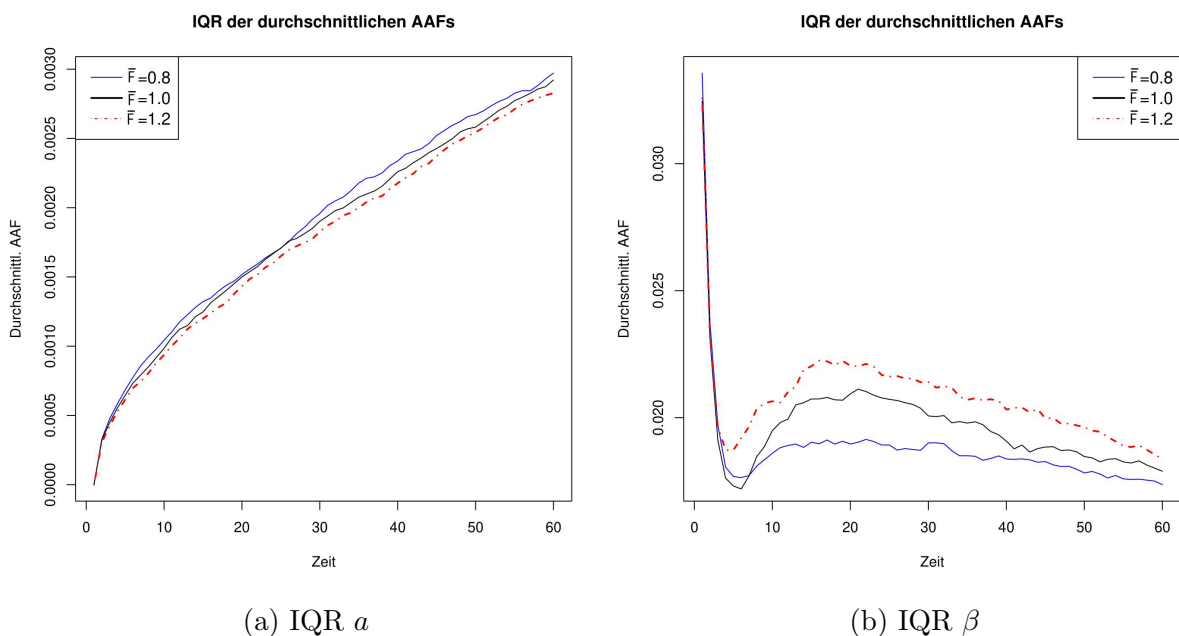


Abbildung 8: IQR: Variation \bar{F} (inkl. Leistungsphase)

4.4.2. Ausbezahlte Leistungen

In diesem Unterkapitel werden die auszubehahlenden Leistungen an das Kollektiv für den Risikoteilungsplan im Vergleich zu denen des Beitragsprimaten dargestellt. In diesem Vergleichsmodell ist die Rentenhöhe, die jeder Versicherungsnehmer lebenslang vorschüssig ausbezahlt bekommt, konstant.

Es gelten dieselben Annahmen wie in 3.4 *Plots*. Für die Grafik 9: *Ausbezahlte Leistungen* wurden die ersten 60 Jahren nach Versicherungsbeginn betrachtet.

In der Abbildung 9: *Ausbezahlte Leistungen* ist erkennbar, dass die auszubehahlenden, jährlich angepassten Leistungen des Risikoteilungsmodells sowohl bei Investmentrisikoanpassung als auch bei Anpassung des jährlichen Akkumulationsfaktors höher sind als die vom Versicherungsunternehmen geleisteten konstanten Rentenzahlungen beim Beitragsprimaten.

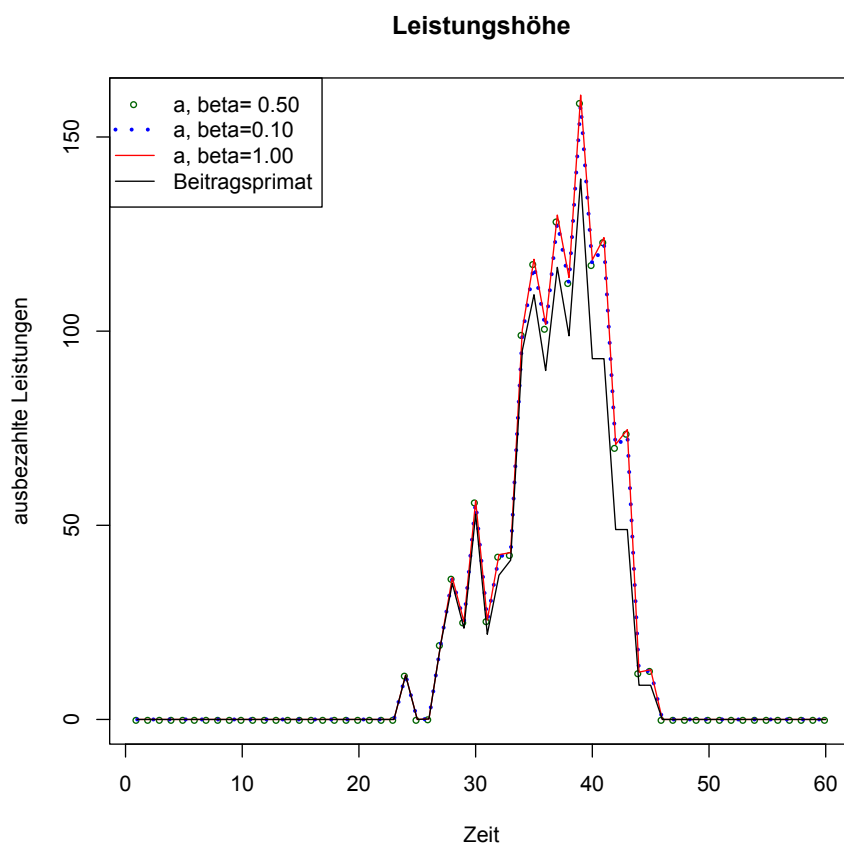


Abbildung 9: Ausbezahlte Leistungen (Variation a)

Variation \bar{F}

Ein niedrigeres Zielfinanzierungsniveau führt zu geringfügig höheren auszubehandelnden Versicherungsleistungen an das Sparkollektiv, wohingegen ein niedrigeres Niveau leicht höhere Pensionszahlungen zur Folge hat. Jedoch liegt selbst bei einem Wert von $\bar{F} = 1.2$ die Leistungshöhe über der des Beitragsprimaten.

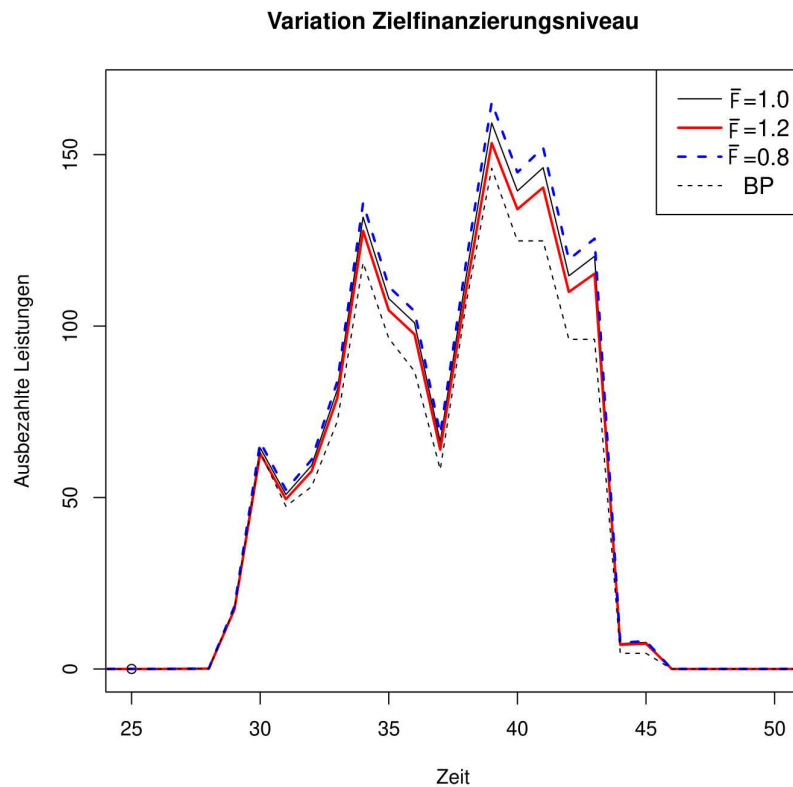


Abbildung 10: Ausbezahlte Leistungen (Variation \bar{F})

5. Simulationen

Bisher wurden für die Risikoteilungsmodelle in Anwartschaft und Leistungsphase die Auswirkungen von unterschiedlichen Parametrisierungen der ersten beiden Parameter des Investitions-Anpassungs-Quadrupels $(a, \beta, s^{LT}, \bar{F})$ berücksichtigt. In diesem Kapitel werden weiterführende Simulationen und deren Ergebnisse betrachtet.

Zunächst werden Sensitivitätsanalysen in Hinblick auf sich ändernde Kapitalmarktentwicklungen durchgeführt. Anschließend wird das Verhalten von Sterblichkeitsszenarien im ausgewählten Kollektiv betrachtet.

Zum Zweck der Analysen wurde das in Kapitel 4 *Rentenphase* dargestellte Modell (siehe auch Quellcode 13: *RS_Entwicklung: Rentenphase*) erweitert um zunächst unterschiedliche Kapitalmarktszenarien, insbesondere Zinsschocks für einen ausgewählten Zeitraum zu modellieren. Anschließend wurde die Funktion `RS_Entwicklung()` so modifiziert, sodass auch verschiedene Sterblichkeiten berücksichtigt werden konnten.

5.1. Kapitalmarkt

Um die Auswirkungen unterschiedlicher Kapitalmarktentwicklungen auf den durchschnittliche jährliche Akkumulationsfaktor des Risikoteilungsplanes zu untersuchen wurde ein Zinsschock innerhalb eines Zeitraumes von fünf Jahre modelliert. Anschließend wurde angenommen, dass sich die Rendite nach diesen Jahren wieder wie vor dem Zinsereignis entwickelt.

In den Plots Abbildung 12 bis Abbildung 15 wurden unterschiedliche Kapitalmarktsituationen berücksichtigt, deren Parametrisierung der Tabelle 3: *Eingabe Abbildung 11 & 12* zu entnehmen ist. Auch beziehen sich die Beschriftungen in den Abbildungen auf die dort genannten Szenarien. In Abbildung 11 (a) *Renditeentwicklung (Normal)* ist der normale Verlauf der Renditen mit den Parametern $\mu = 0.0375$ und $\sigma = 0.15$ zu sehen und in der Abbildung 11 (a) *Renditeentwicklung (Zinsschock)* daneben ist ein Ausschnitt der Zinsschocks während der Vertragsjahre 35 bis 40 für die unterschiedlichen Szenarien 0.1 und 0.01 zu sehen.

Szenario	μ	σ	$\mathbb{E}[R_{i,t}]$	$\sqrt{\mathbb{V}[R_{i,t}]}$
Normal	0.037500	0.1500	0.04996	0.15838
0.1	0.003750	0.0150	0.00387	0.01506
0.01	0.000375	0.0015	0.00038	0.00150

Tabelle 3: Eingabe Abbildung 11 & 12

Auch bei einer sich ändernden Kapitalmarktsituation bleiben die zuvor in den Kapiteln 3.4 *Plots* und 4.4 *Plots* getätigten Interpretationen der Sensitivitätsanalysen für die Variationen der beiden Parameter a und β gültig.

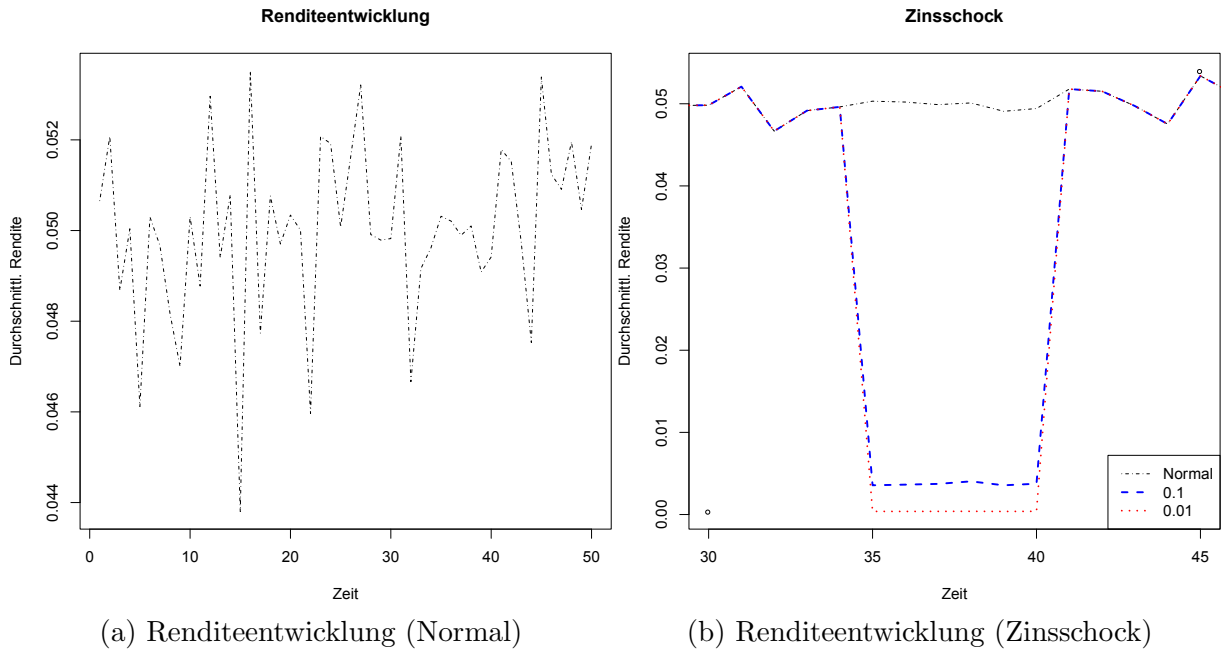


Abbildung 11: Renditeentwicklung

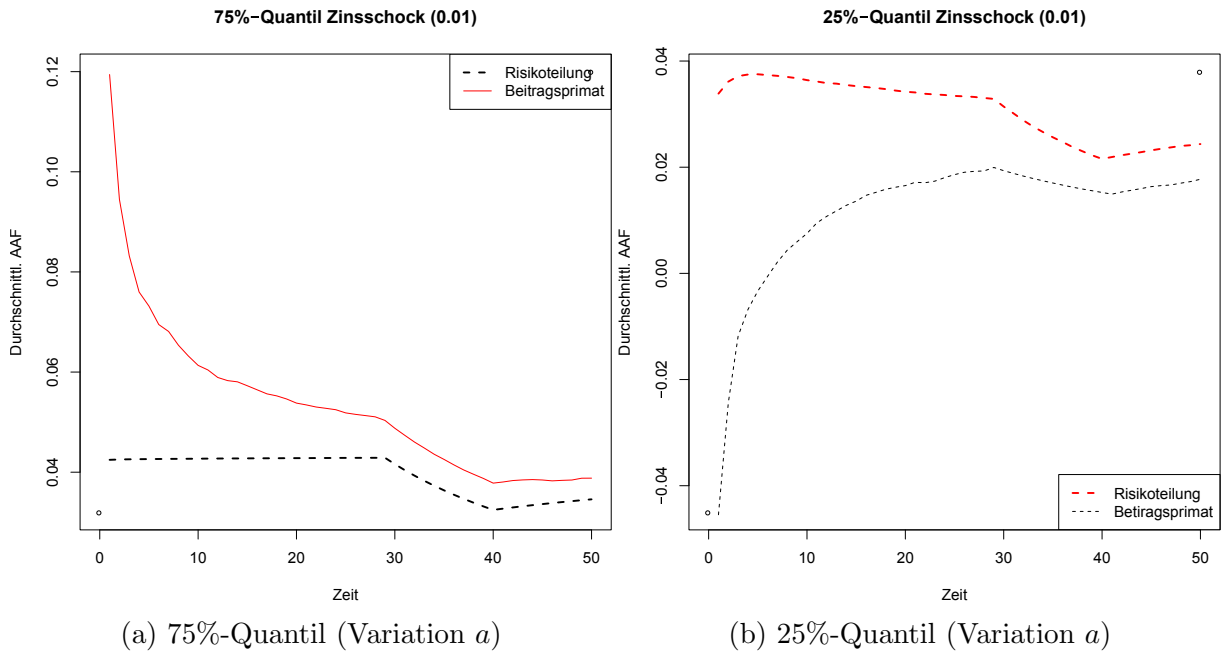
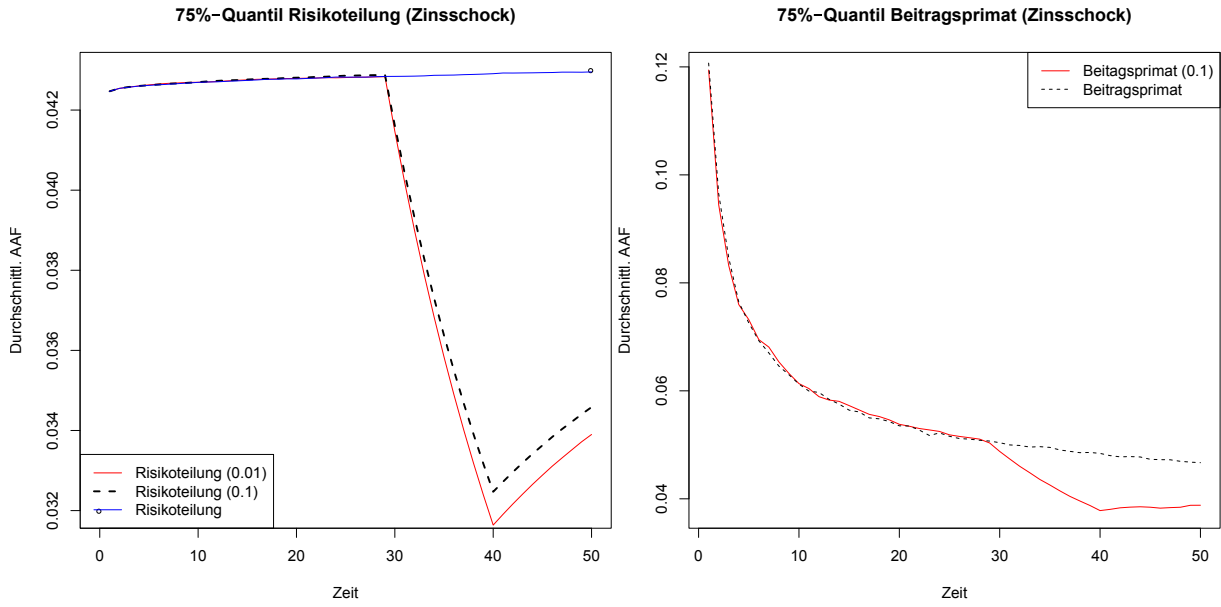
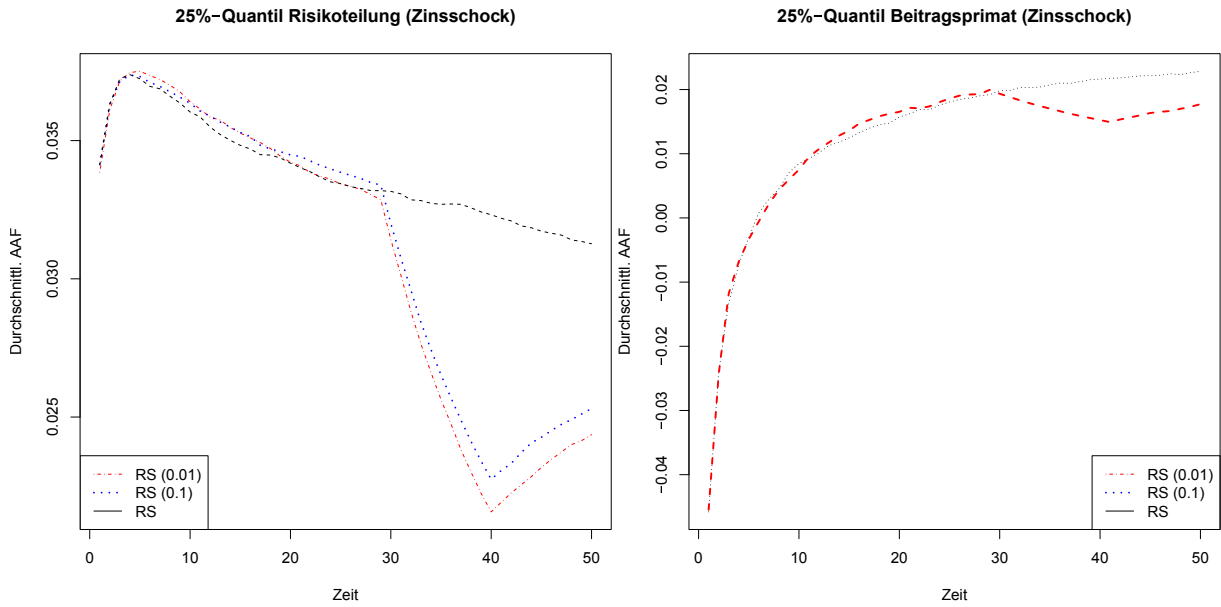


Abbildung 12: Zinsschock in den Jahren 35-40 (Variation a)



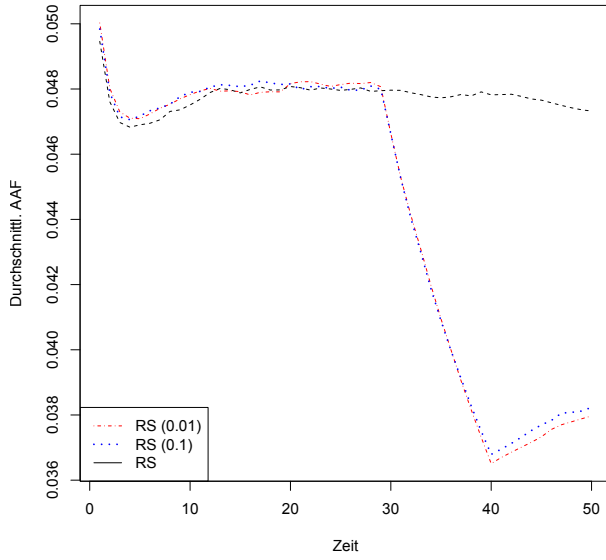
(a) Zinsschock RS (Variation a , 75%-Quantil) (b) Zinsschock BP (Variation a , 75%-Quantil)



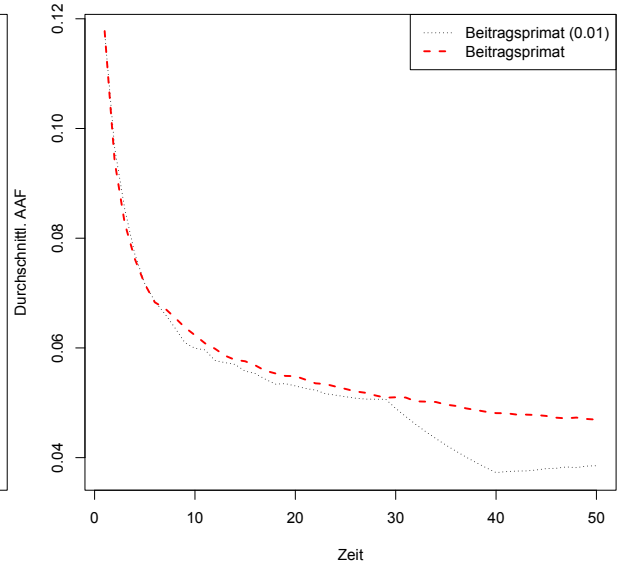
(c) Zinsschock RS (Variation a , 25%-Quantil) (d) Zinsschock BP (Variation a , 25%-Quantil)

Abbildung 13: Zinsschock in den Jahren 35-40 (Variation a , 75%- & 25%-Quantil)

25%-Quantil Risikoteilung (Zinsschock)

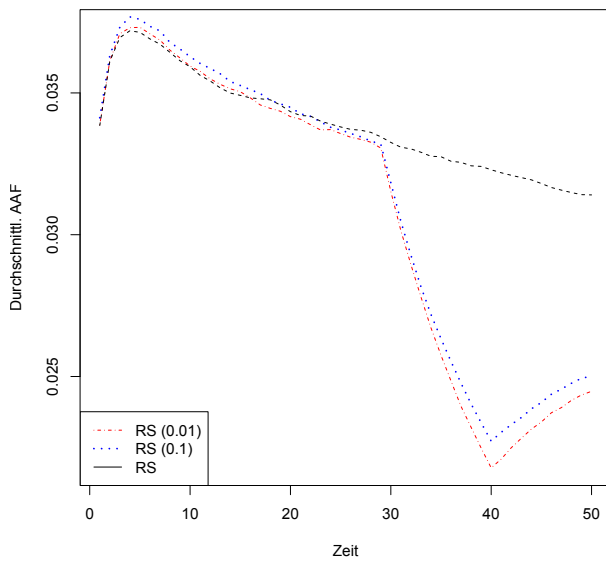


75%-Quantil Beitragsprimat (Zinsschock)

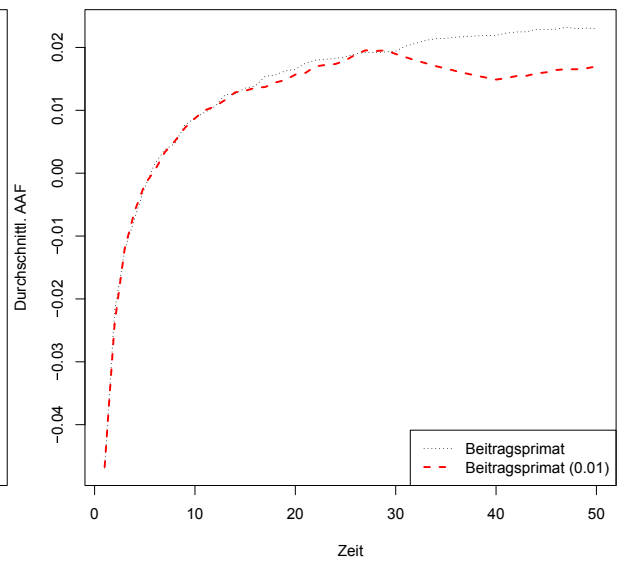


(a) Zinsschock RS (Variation β , 75%-Quantil) (b) Zinsschock BP (Variation β , 75%-Quantil)

25%-Quantil Risikoteilung (Zinsschock)



25%-Quantil Beitragsprimat (Zinsschock)



(c) Zinsschock RS (Variation β , 25%-Quantil) (d) Zinsschock BP (Variation β , 25%-Quantil)

Abbildung 14: Zinsschock in den Jahren 35-40 (Variation β , 75%- & 25%-Quantil)

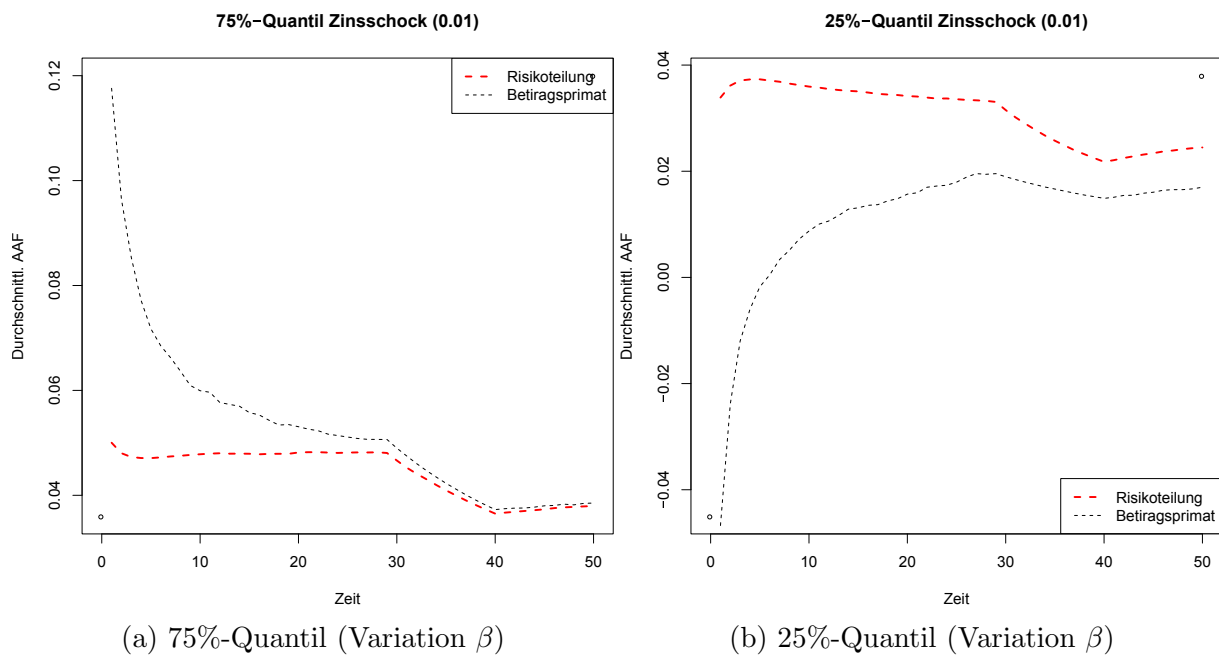


Abbildung 15: Zinsschock in den Jahren 35-40 (Variation a)

5.2. Sterblichkeit

Um die Auswirkungen unterschiedlicher Sterblichkeitssituationen im betrachteten Kollektiv zu untersuchen, wurde eine modifizierte Sterblichkeit für jeweils einen Zeitraum von fünf Jahren modelliert. Bei dieser Modellierung werden die versicherten Personen des Sparkollektivs während dieser Periode durch eine Verschiebung in der Sterbetafel älter beziehungsweise jünger gemacht.

In Abbildung 17: *IQR: unterschiedliche Sterblichkeiten (inkl. Leistungsphase)* sind die Interquartilsabstände bei Variation der Parameter a und β dargestellt. Für diese Grafiken wurde in den Versicherungsjahren 35 bis 40 einerseits eine Verschiebung in der Sterbetafel zehn Jahre nach oben und andererseits nach unten vorgenommen. Es lässt sich erkennen, dass der IQR bei steigender beziehungsweise sinkender Sterblichkeit eine kaum merkliche Veränderung der Spannweite im Vergleich zur erwarteten Sterblichkeit aufweist. Auch ist hier der Verlauf bei Variation der Investmentrisikoanpassung flacher und glatter als der bei AAF-Anpassung.

In Abbildung 16: *Sterblichkeit* ist zu erkennen, dass die erwartete Höhe der auszubehrenden Leistungen an das Sparkollektiv für die verbleibenden VP steigt, wenn mehr Personen als angenommen sterben beziehungsweise sinkt, wenn weniger ausscheiden. Dabei wurden für diese Grafik in den Versicherungsjahren 35 bis 40 eine Verschiebung in der Sterbetafel fünf Jahre nach oben beziehungsweise unten vorgenommen.

Leistungshöhe unterschiedlicher Sterblichkeiten

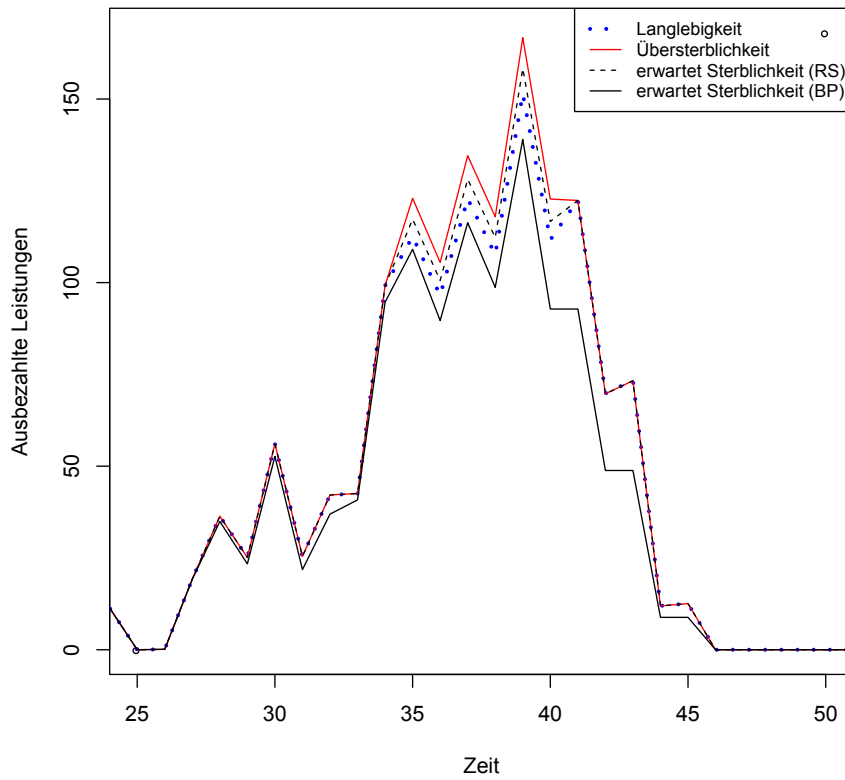
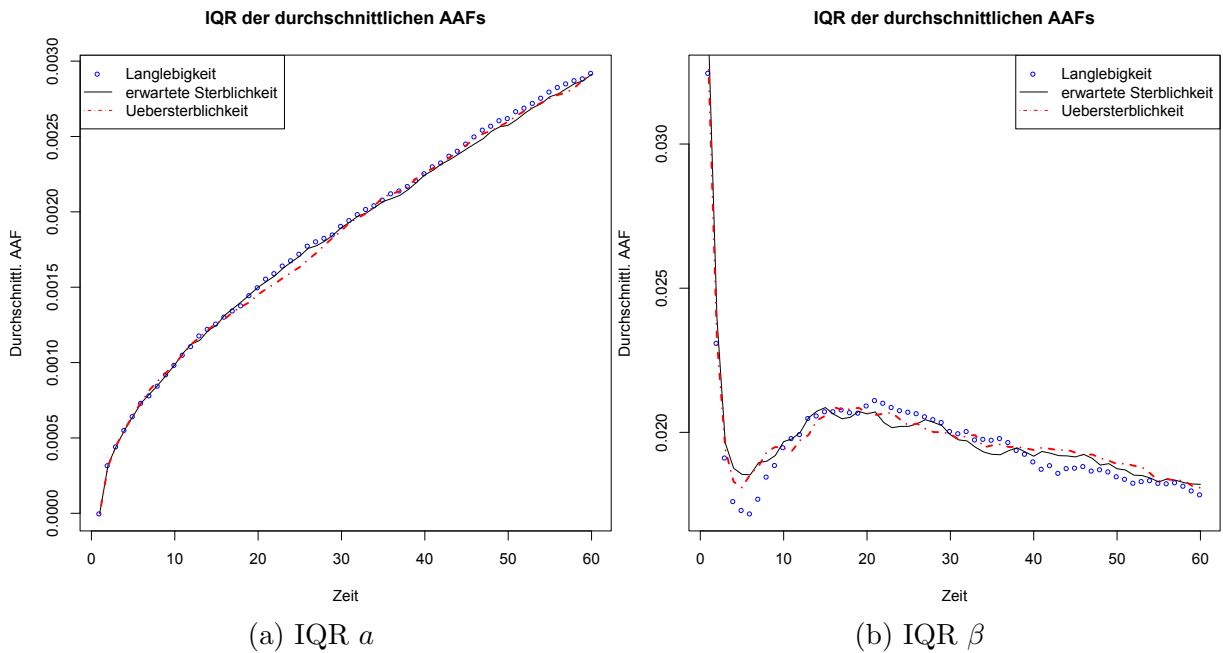


Abbildung 16: Sterblichkeit



(a) IQR a

(b) IQR β

Abbildung 17: IQR: unterschiedliche Sterblichkeiten (inkl. Leistungsphase)

6. Mathematische Motivation

In diesem Kapitel wird das zeitstetige Basismodell auf dem das kollektive Sparmodell der Diplomarbeit aufbaut genauer dargestellt und erläutert. Bei jenem werden im Vergleich zu diesem Modell auch individuelle Reserven betrachtet, jedoch bezieht sich das Ausgangsmodell lediglich auf die Anwartschaft.

6.1. Voraussetzungen und Grundlagen

Um die Gültigkeit der Aussagen in diesem Kapitel zu gewährleisten, wird angenommen, dass im Folgenden die betrachteten Stochastischen Prozesse sowohl die üblichen Messbarkeitsbedingungen erfüllen, als auch (zumindest) rechtsstetig sind.

In diesem Kapitel werden mathematische Grundlagen^{[9][8]}, die im Folgenden benötigt werden, zusammengefasst dargestellt.

6.1.1. Stochastische Analysis

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $t \in [0, T]$ mit $T < \infty$.

Definition 6.1 (Filtration).

Eine wachsende Familie $\mathbb{F} = (F_t)_{t \geq 0}$ von σ -Algebren mit $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, $\forall s < t$ heißt Filtration.

Definition 6.2 (Martingal).

Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt P -Martingal, falls folgende Eigenschaften gelten:

- (i) X ist adaptiert an $(F_t)_{t \geq 0}$,
- (ii) X ist integrierbarer Prozess und
- (iii) $\mathbb{E}[X_t | F_s] = X_s$ P -f.s. $\forall s \leq t$.

Bzw. Submartingal, falls in (iii) $\geq X_t$ oder Supermartingal, falls in (iii) $\leq X_t$ gilt.

Definition 6.3 (Predictable Prozess).

Jeder \mathcal{P} -messbare Prozess heißt predictable. Dabei bezeichnet \mathcal{P} die Sigmaalgebra, die auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ von allen adaptierten linksstetigen Prozessen erzeugt wird.

Definition 6.4 (Stoppzeit).

Eine Zufallsvariable $\tau \in [0, T]$ mit $\{\tau \geq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in [0, T]$ heißt Stoppzeit.

Definition 6.5 (Lokales Martingal).

Ein adaptierter rechtsstetiger stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt lokales Martingal, falls eine lokalisierende Sequenz, d.h. eine aufsteigende Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n \geq 0}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ f.s. existiert, sodass $(X_{\min\{t, T_n\}} \mathbb{1}_{\{T_n > 0\}})_{t \geq 0} \forall t$ ein Martingal ist.

Definition 6.6 (absolut stetige und äquivalente Maße).

Seien Q und P Wahrscheinlichkeitsmaße. Dann gilt:

- (i) Q ist absolut stetig bezüglich P , falls alle P -Nullmengen auch Q -Nullmengen sind [i.Z.: $Q \ll P$].
- (ii) Q und P sind äquivalent, wenn $Q \ll P$ und $P \ll Q$ [i.Z.: $Q \sim P$].

Theorem 6.7 (Radon-Nikodým).

Sei $Q \ll P$. Dann existiert eine positive Zufallsvariable $Z \in L^1(P)$, sodass $\frac{dQ}{dP} = Z$ und $\mathbb{E}_P[Z] = 1$.

Definition 6.8 (Brownsche Bewegung).

Ein stochastischer Prozess $(B_t)_{t \geq 0}$ heißt Brownsche Bewegung, falls gilt

- (i) B_0 ist F_0 -messbar,
- (ii) $B_s - B_r$ ist $\forall r < s \in [0, T]$ F_s -messbar,
- (iii) $B_t - B_s$ ist $\forall s < t \in [0, T]$ unabhängig von F_s ,
- (iv) $\mathcal{L}(B_t - B_s) = \mathcal{L}(B_{t-s} - B_0)$, $\forall s < t \in [0, T]$,
- (v) $\mathcal{L}(B_t - B_s) = \mathcal{N}(0, t - s)$, $\forall s < t \in [0, T]$ und
- (v) B hat P -f.s. stetige Pfade.

Falls zusätzlich $P[B_0 = 0] = 1$ gilt, wird B Standard Brownsche Bewegung genannt.

Definition 6.9 (Quadratische Variation).

Sei X ein Semimartingal. $(\Pi_n)_{n \geq 0}$ sei eine Folge zufälliger Partitionen. Jede dieser Partitionen ist eine endliche Folge endlicher Stoppzeiten $0 = T_0^n \geq T_1^n \geq \dots \geq T_k^n = T$ mit $\|\Pi_n\| = \sup_i |T_{i+1}^n - T_i^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ f.s.. Der Quadratische Variationsprozess $[X]$ folgender wachsender adaptierter Prozess:

$$[X] := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})^2 \quad \text{glm.i.W.} \quad (6.1)$$

Definition 6.10 (Quadratintegrierbarkeit).

- (i) Ein Martingal M heißt quadrat-integrierbar (bzw. L^2 -Martingal), falls $\mathbb{E}[[M]_T] < \infty$.
- (ii) Ein Semimartingal $X = M + A$ heißt quadrat-integrierbar, falls M ein L^2 -Martingal ist und $\mathbb{E}[A_t^2] < \infty$.

Theorem 6.11 (Itô-Formel).

Sei X ein Semimartingal und $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^{1,2}$ -Funktion.

Dann ist $f(t, X_t)$ ein Semimartingal und mit $[X^c]_t = [X]_t - \sum_{s \leq t} (\Delta X_s)^2$ gilt:

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s, X_s) ds + \int_0^t f'(s, X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} f''(s, X_s) d[X^c]_s \quad (6.2)$$

$$+ \sum_{0 < s \leq t} \{f(s, X_s) - f(s, X_{s-}) - f'(s, X_{s-}) \Delta X_s\}.$$

Theorem 6.12 (Itô-Isometrie).

Sei M ein lokales Martingal und ξ ein predictable Prozess mit $\mathbb{E} \left[\int_0^T \xi_t^2 d[M]_t \right] < \infty$. Dann ist $\int \xi dM$ quadrat-integrierbar und es gilt:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \xi_t dM_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \xi_t^2 d[M]_t \right]. \quad (6.3)$$

Definition 6.13 (Stochastisches Exponential).

Sei X ein Semimartingal mit $X_0 = 0$. Dann existiert genau eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung $dZ = Z_- dX$ mit $Z_0 = 1$. Der Prozess $\mathcal{E}(X) := Z$ heißt stochastisches Exponential von X :

$$Z = 1 + \int Z_- dX. \quad (6.4)$$

Bemerkung 6.14. Für die Brownsche Bewegung B ergibt aus obiger Definition:

$$\mathcal{E}(B) = \exp \left(B - \frac{1}{2} \cdot t \right) \quad (6.5)$$

Definition 6.15 (Ornstein-Uhlenbeck-Prozess).

Sei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung. Weiters seine die Konstanten $a \in \mathbb{R}$ (Anfangswert), $\mu \in \mathbb{R}$ (Mean-Reversion-Level), $\sigma > 0$ (Diffusion) und $\theta > 0$ (Mean-Reversion-Rate) gegeben. Die Lösung folgender stochastischen Differentialgleichung heißt Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (OU-Prozess):

$$dX_t = \theta \cdot (\mu - X_t) dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = a. \quad (6.6)$$

Bemerkung 6.16. Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist normalverteilt mit

$$\mathbb{E}[X_t] = a \cdot e^{-\theta \cdot t}$$

$$\mathbb{V}[X_t] = \frac{\sigma^2}{2 \cdot \theta} \cdot (1 - e^{-2 \cdot \theta \cdot t}) \quad (6.7)$$

6.1.2. Finanzmathematik

Sei nun S ein Semimartingal bezüglich P .

Definition 6.17 ((äquivalentes) Martingalmaß).

Ein zu P absolut stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß Q heißt Martingalmaß für S , falls S ein lokales Martingal ist. Falls weiters auch P absolut stetig bezüglich Q ist, dann ist Q ein äquivalentes Martingalmaß.

Definition 6.18 (Handelsstrategie, Wertprozess).

Eine Strategie ϕ ist ein $(T + 1)$ -Tupel $\phi = (\phi_0, \dots, \phi_T)$ von \mathbb{R}^{i+1} -wertigen Zufallsvariablen, derart, dass ϕ_t \mathcal{F}_{t-} -messbar ist für $t = 0, \dots, T$.

Der assoziierte Wertprozess ist definiert durch $V_t(\phi) := \phi_t \cdot S_t$.

Definition 6.19 (zulässige Strategie).

Eine Strategie ϕ heißt zulässig, wenn der assoziierte Wertprozess V ein Q -Supermartingal für jedes äquivalente Martingalmaß Q ist.

Definition 6.20 (Arbitrage-Möglichkeit).

Eine Strategie ϕ erlaubt Arbitrage, falls für den Wertprozess V gilt:

- (i) $V_0(\phi) \leq 0$,
- (ii) $V_T(\phi) \geq 0$ und
- (iii) $P(V_T(\phi) > 0) > 0$.

Bemerkung 6.21 (1. Fundamentalsatz der Preistheorie).

Aus der Existenz eines zu P äquivalenten Martingalmaßes Q folgt die Arbitragefreiheit des Marktes.

Theorem 6.22 (Satz von Girsanov).

Sei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung und sei $(\theta_t)_{t \geq 0}$ ein adaptierter quadratintegrierbarer Prozess. Der Prozess $(Z_t)_{t \geq 0}$, definiert durch $Z_t = \exp(\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds)$, ist ein Martingal. Dann gilt unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q mit der Dichte Z_T bezüglich P , dass der Prozess $(\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ gegeben durch $\tilde{W}_t := W_t - \int_0^t \theta_s ds$ ist eine Standard Brownsche Bewegung.

6.2. Basismodell

Im Folgenden sei das zeitstetige Basismodell auf dem das kollektive Sparmodell der Diplomarbeit aufbaut genauer dargestellt und als Motivation erläutert. Das Modell und die Beschreibung entspricht im Wesentlichen den Überlegungen und Ausführungen im Paper von O. Goecke.^[6]

Zunächst wird der Kapitalmarkt anhand des Black-Scholes-Modells modelliert. Anschließend wird die Modellierung des Anlage- sowie Kundenguthabens im Rahmen des Asset-Liability Managements kurz skizziert. Mit diesen Rahmenbedingungen wird im Anschluss das Basismodell auf seine Zuverlässigkeit untersucht.

6.2.1. Kapitalmarkt

Für den Kapitalmarkt wird ein (Standard-) Black-Scholes-Modell verwendet: Dabei wird in eine risikolose Anlage B mit konstanter Rendite $\bar{\mu}$ und in eine risikobehaftete Aktie S (Marktportfolio) investiert.

Sei $(W_t)_{t \geq 0}$ die Standard Brownsche Bewegung, dann gilt:

$$\frac{dS^{KM}(t)}{S^{KM}(t)} = \mu^{\tilde{KM}}(t)dt + \sigma^{KM}(t)dW_t \quad \text{mit } S_0 = 1 \quad (6.8)$$

$$\frac{dB^{KM}(t)}{B^{KM}(t)} = \bar{\mu}(s)dt \quad \text{mit } B_0 = 1.$$

Beziehungsweise führt das Lösen obiger SDG mit $\mu^{KM}(t) := \mu^{\tilde{KM}}(t) - \frac{1}{2}(\sigma^{KM}(t))^2$ zu:

$$S^{KM}(t) = S_0^{KM} \cdot \exp \left\{ \int_0^t \mu^{KM}(s)ds + \int_0^t \sigma^{KM}(s)dW_s \right\} \quad (6.9)$$

$$B^{KM}(t) = B_0^{KM} \cdot \exp \left\{ \int_0^t \bar{\mu}(s)ds \right\}$$

Somit ist der Kapitalmarkt durch die folgenden Parameter eindeutig bestimmt:

- $\bar{\mu}$ sicherer Zins
- σ^{KM} Volatilität des Marktportfolios
- μ^{KM} Drift des Marktportfolios
- $r_{SR} := \frac{\mu^{\tilde{KM}} - \bar{\mu}}{\sigma^{KM}}$ Sharpe-Ratio

Dies führt dazu, dass die Veranlagung in Abhängigkeit der Risikoexposition σ_t^{KM} erfolgt. Die zu erwartende Rendite μ_t^{KM} ist so zu wählen, dass das betrachtete Marktportfolio arbitragefrei ist. Um Arbitragefreiheit (s. Bemerkung 6.21) in dem betrachteten Kapitalmarktmodell zu erlangen, sei ein zu P äquivalentes Martingalmaß Q (Nachrechnen) definiert:

$$dQ = \exp \left\{ \frac{1}{2} r_{SR}^2 T - r_{SR} W_T \right\} dP \quad (6.10)$$

Theorem 6.23. Sei ein äquivalentes Martingalmaß Q wie in (6.10) definiert. Dann ist \tilde{W}_t eine Standard Brownsche Bewegung bezüglich dem Maß Q und der diskontierte Marktprozess \tilde{S}_t ein Q -Martingal (Nachrechnen) mit:

$$\tilde{W}_t := r_{SR}t + W_t \quad \text{und} \quad \tilde{S}_t := \exp\{-t\bar{\mu}\} S_t$$

Beweis. Ohne Beweis (s. Theorem 6.22) und Nachrechnen. ■

Lemma 6.24. Sei ein Anlageportfolio $(S_t)_{t \geq 0}$ gegeben durch:

$$S(t) = S_0 \cdot \exp \left\{ \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s \right\}. \quad (6.11)$$

Dann ist der Prozess $\tilde{S}(t) := S(t) \cdot \exp\{-t\bar{\mu}\}$ ein Q -Martingal gdw. gilt:

$$\mu(t) = \bar{\mu} + \sigma(t)r_{SR} - \frac{1}{2}\sigma^2(t) \quad (6.12)$$

Beweis.

Sei $\tilde{W}_t := r_{SR}t + W_t$ Standard Brownsche Bewegung bezüglich Q . Damit folgt:

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t) \left(\left(\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t) \right) dt + \sigma(t)dW_t \right) \\ &= S(t) (\tilde{\mu}(t)dt + \sigma(t)dW_t) = S(t) \left((\tilde{\mu}(t) - \sigma(t)r_{SR}) dt + \tilde{\sigma}(t)d\tilde{W}_t \right) \end{aligned}$$

Damit folgt für den diskontierten Prozess $\tilde{S}(t)$:

$$\begin{aligned} d\tilde{S}(t) &= \exp\{-\bar{\mu}t\} dS(t) - \bar{\mu} \exp\{-\bar{\mu}t\} S(t) dt \\ &= \exp\{-\bar{\mu}t\} S(t) ((\tilde{\mu}(t) - \sigma(t)r_{SR})) dt + \sigma(t)dW_t \end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{S}(t)$ ein Q -Martingal gdw. $\tilde{\mu}(t) - \sigma(t)r_{SR} - \bar{\mu} = 0$ (vgl. Theorem 6.23). ■

6.2.2. Asset-Liability Management

Sei Wert des Anlageportfolios zum Zeitpunkt $t \geq 0$ im Basismodell durch den stochastischen Prozess (6.11) gegeben. $V_i(t)$ bezeichne den Wert der individuellen Versichertenguthaben zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit $i = 1, \dots, n$ Versicherungsnehmern. Es sei angenommen, dass sich das Gesamtvermögen nur in Abhängigkeit des Kapitalmarktes entwickelt. Ein Teil der individuellen Reserven $V_i(t)$ fließt in eine kollektive Reserve. Somit ergibt sich die kollektive Reserve des Versicherungsunternehmens zum Zeitpunkt t durch:

$$R(t) = A(t) - V(t) \quad (6.13)$$

wobei $V(t) = \sum_{i=1}^n V_i(t)$ die Summe der individuellen Reserven bezeichnet.

Diese kollektive Reserve bildet einen wesentlichen Unterschied zum individuellen Sparen. Sie soll in Jahren in denen sich der Kapitalmarkt schlechter als angenommen entwickelt zum Ausgleich dienen und wird somit abgebaut. In Jahren in denen es jedoch eine bessere Entwicklung gibt, soll diese gewissermaßen als Puffer aufgebaut werden. Damit soll eine möglichst stabile Zahlung der Leistungen ermöglicht werden.

Im Rahmen des ALM sollen folgende drei stochastische Prozesse geeignet gesteuert werden: Der Anteil, der in Aktien investiert wird durch die *Aktienquote* $\alpha(t) \in [0, 1]$ gegeben. Dann bezeichnet $\sigma(t) := \alpha(t) \cdot \sigma^{KM}$ die *Risikoexposition*. Die Verzinsung der Versichertenguthaben erfolgt mit dem stochastischen Prozess $\eta(t)$, der sogenannten *Deklaration*. Lokal ist der Zins deterministisch. Dies führt zu dem Wertprozess der Versichertenguthaben:

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{V(t)} &= \eta(t)dt \quad \text{mit } V_0 := V(0) \\ V(t) &= V_0 \cdot \exp \left\{ \int_0^t \eta(s)ds \right\} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Für den Preisprozess der Kapitalanlagen (unter der Annahme einer gleichbleibenden Aktienquote und Risikoexposition) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{A(t)} &= \tilde{\mu}(t)dt + \sigma(t)dW_t \quad \text{mit } A_0 := A(0) \\ A(t) &= A_0 \cdot \exp \left\{ \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s \right\}. \\ \text{mit } \mu(t) &:= \tilde{\mu}(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Weiters ist die (*Log*)-*Reservequote* gegeben durch:

$$\rho(t) := \ln \left(\frac{A(t)}{V(t)} \right) = -\ln \left(1 - \frac{R(t)}{A(t)} \right) \quad (6.16)$$

Damit gilt:

$$\lambda(t) := \frac{R(t)}{A(t)} \leq \rho(t) \leq \frac{R(t)}{V(t)}$$

Das ergibt somit insbesondere für kleine $\rho(t)$ eine gute Näherung des Reservequotienten $\lambda(t)$. Weiters gilt, dass $\rho \rightarrow +\infty$, wenn das Verhältnis des Wertes der kollektiven Reserve zum Wert der Kapitalanlagen gegen eins geht.

Reservewerte $R(t) \leq 0$ sind möglich, jedoch ist es das Ziel des VUs positive Werte zu erhalten damit dieses Modell auch langfristig funktionieren kann. Insbesondere gilt:

$$\rho(t) \geq 0 \Leftrightarrow R(t) \geq 0. \quad (6.17)$$

Im Fall von $\rho(t) < 0$ muss dem Modell Kapital zugeführt werden.

Die Wahl der des Log-Reservequotienten zeigt sich in Gleichung (6.18) als geeignet, denn mit (6.14) bis (6.16) ergibt sich somit für den Reservequotienten:

$$\rho(t) = \ln \left(\frac{A(t)}{V(t)} \right) = \rho_0 + \int_0^t (\mu(s)ds - \eta(s))ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s \quad (6.18)$$

Beziehungsweise ist die zugehörige SDG gegeben durch:

$$d\rho(t) = (\mu(t) - \eta(t))dt + \sigma(t)dW_t \quad \text{mit} \quad \rho_0 := \rho(0) = \ln\left(\frac{A_0}{V_0}\right) \quad (6.19)$$

Unter der Annahme, dass die Risikoexposition und Deklaration im Intervall $[t, t + \Delta)$ konstant sind, ergibt sich anhand der obigen Darstellungen eine normalverteilte Änderung der Log-Reservequote:

$$\rho_{[t, t+\Delta)} := \rho(t + \Delta) - \rho(t) = \Delta (\mu(t) - \eta(t)) + \sigma(t)(W_{t+\Delta} - W_t)$$

mit
$$\mathbb{E}[\rho_{[t, t+\Delta)}] = \Delta (\mu(t) - \eta(t)) \quad \text{und} \quad \mathbb{V}[\rho_{[t, t+\Delta)}] = \Delta \sigma^2(t).$$

Daher gilt für eine positive Risikoexposition:

$$\mathbb{P}[\rho_{[t, t+\Delta)} < 0] = 1 - \Phi\left(\frac{\rho(t) + \Delta (\mu(t) - \eta(t))}{\sqrt{\Delta} \sigma(t)}\right) > 0.$$

Somit kann für das Ziel einer positiven Log-Reservequote, die Bedingung $\mathbb{P}[\rho(t) < 0] = 0$ mit obigen Annahmen nur erfüllt sein, wenn $\sigma(t) = 0, \forall t$.

Im Rahmen des Asset-Liability Managements sind für das verwendete ALM-Modell folgende Strategieparameter zu wählen:

- ρ_{target} : Zielreservequote (Ziel ist es diese im Erwartungswert zu erreichen)
- $\hat{\sigma} > 0$: strategische Risikoexposition
- a : Anpassung der Risikoexposition
- $\theta \geq 0$: Anpassung der Deklaration

Weiters bezeichnet $\hat{\rho}(t) := \rho(t) - \rho_{target}$ die Reserverücke zum Zeitpunkt t (Differenz der Reserve von der Zielreservequote). Daher soll gelten:

$$d\mathbb{E}[\hat{\rho}(t)] = -\theta \rho(t) dt$$

Die Strategie ist gegeben durch:

$$\sigma(t) = \hat{\sigma} + a\hat{\rho}(t) \quad (6.20)$$

$$\eta(t) = \mu(t) + \theta\hat{\rho}(t)$$

6.2.3. Faire Rendite

Falls zu Beginn für die Reservelücke gilt $\hat{\rho}(0) = 0$, also der Startwert der Zielreserve entspricht, stimmen die erwartete Rendite der Kapitalanlage und des Versichertenguthabens überein, denn es gilt:

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{t} \ln \left(\frac{A(t)}{A_0} \right) \right] = \frac{1}{t} \int_0^t \mu(s) ds \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{1}{t} \ln \left(\frac{V(t)}{V_0} \right) \right] &= \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}[\eta(s)] ds = \frac{1}{t} \int_0^t (\mu(s) + \theta \cdot \hat{\rho}_0 \cdot e^{-\theta \cdot s}) ds \\ &= \hat{\rho}_0 \cdot \frac{1 - e^{-\theta \cdot t}}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t \mu(s) ds \end{aligned} \quad (6.22)$$

Indem man die Reservelücke, also eine Anpassung des tatsächlichen Reservequotienten an eine definierte Zielreservequote betrachtet, kann somit eine faire Beteiligung der Sparer am Anlageportfolio erreicht werden.

6.2.4. Ruinwahrscheinlichkeit

Wie zuvor angedeutet ist es von Interesse, dass das Finanzierungsniveau möglichst positiv bleibt. Daher stellt sich die Frage, wann die Reservequote $\rho(t)$ unterhalb einer definierten Grenze liegt. Das ergibt folgende Ruinwahrscheinlichkeit:

$$P[\min_{0 \leq t \leq T} \rho(t) < \rho_{min}] \leq \alpha \quad (6.23)$$

Dabei ist ρ_{min} die Log-Reservequote, die vom VU gewählte minimale Reservequote, die nicht unterschritten werden soll zum Sicherheitsniveau α .

Zunächst stellt sich die Frage von welchen Faktoren die Ruinwahrscheinlichkeit abhängig ist, damit diese Parameter nach Möglichkeit geeignet gesteuert werden können. Dazu seien folgende Propositionen betrachtet.

Proposition 6.25.

Sei $(\sigma(t))_{t \geq 0}$ ein rechtsstetiger nicht-negativer stochastischer Prozess und der Deklarationsprozess wie in (6.20) gegeben. Dann ist der Reserveprozess $(\hat{\rho}(t))_{t \geq 0}$ ein verallgemeinerter mean-reversion Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, der die SDG erfüllt:

$$d\hat{\rho}(t) = -\theta \cdot \hat{\rho}(t) dt + \sigma(t) dW_t \quad (6.24)$$

mit Startbedingung

$$\rho(0) = \hat{\rho}_0 := \rho_0 - \rho_{target}.$$

Dann gilt:

$$(i) \quad \hat{\rho}(t) = e^{-\theta \cdot t} \left(\hat{\rho}_0 + \int_0^t e^{\theta \cdot s} \sigma(s) dW_s \right) \quad (6.25)$$

$$(ii) \quad \mathbb{E}[\hat{\rho}(t)] = \hat{\rho}_0 \cdot e^{-\theta \cdot t} \quad (6.26)$$

$$(iii) \quad \mathbb{V}[\hat{\rho}(t)] = e^{-2\theta t} \int_0^t e^{2\theta s} \mathbb{E}[\sigma^2(s)] ds \quad (6.27)$$

Beweis.

ad (i) Folgt aus (6.19) und (6.24).

ad (ii) Folgt mit (6.24) sowie (6.7).

ad (iii) Mit Itô-Isometrie (6.3) folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\hat{\rho}(t)] &= e^{-2\theta t} \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{\theta s} \cdot \sigma(s) dW_s \right]^2 \\ &= e^{-2\theta t} \int_0^t e^{2\theta s} \mathbb{E}[\sigma^2(s)] ds. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 6.26. Seien nun $\sigma(t) := \hat{\sigma}(t) + a \cdot \hat{\rho}(t)$ und $Z_t := \exp \{ aW_t - \frac{1}{2}a^2t \}$. (Z_t) ist ein Martingal mit $Z_t = 1 + a \int_0^t Z_s dW_s$.

Proposition 6.27.

Sei $\sigma(t) = \hat{\sigma} + a \cdot \hat{\rho}(t)$ mit $\hat{\sigma} > 0$ und $\sigma_0 := \hat{\sigma} + a \cdot \hat{\rho}_0 > 0$. Dann gilt:

$$d\sigma(t) = -\theta(\sigma(t) - \hat{\sigma})dt + a \cdot \sigma(t)dW_t \quad \text{mit} \quad \sigma(0) = \sigma_0 \quad (6.28)$$

$$d\hat{\rho}(t) = -\theta \cdot \hat{\rho}(t)dt + (\hat{\sigma}(t) + a\hat{\rho}(t))dW_t \quad \text{mit} \quad \hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_0 \quad (6.29)$$

Lösen der SDG ergibt:

$$\sigma(t) = e^{-\theta t} Z_t \left(\sigma_0 + \theta \cdot \hat{\sigma} \int_0^t e^{\theta s} Z_s^{-1} ds \right) \quad (6.30)$$

$$\hat{\rho}(t) = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}}{a} \left[e^{-\theta t} Z_t \left(1 + \frac{a\hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}} + \theta \int_0^t e^{\theta s} Z_s^{-1} ds \right) - 1 \right], & a \neq 0 \\ e^{-\theta t} \left(\hat{\rho}_0 + \hat{\sigma} \int_0^t e^{\theta s} dW_s \right), & a = 0 \end{cases} \quad (6.31)$$

Beweis.

Mit der Definition von $\sigma(t)$ und (6.25) gilt:

$$\sigma(t) - \hat{\sigma} = a \cdot \hat{\rho}(t) = e^{-\theta t} \left(\sigma(t) - \hat{\sigma} + a \int_0^t e^{\theta s} \sigma(s) dW_s \right)$$

Somit ergibt sich die SDG (6.28).

(6.30) ist die eindeutige Lösung von (6.28).

Falls $a \neq 0$, dann gilt somit auch: $\hat{\rho}(t) = \frac{\sigma(t) - \hat{\sigma}}{a}$. Damit folgt (6.29) und (6.31).

Falls $a = 0$, dann folgen (6.29) und (6.31) von (6.25).

■

Proposition 6.28.

Seien $a' := \frac{a \cdot \hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}}$, $X_t := Z_t \left(1 + a' + \theta \int_0^t e^{\theta \cdot s} Z_s^{-1} ds \right)$ und $U_t := \int_0^t X_s dW_s$. Dann gilt:

U_t ist ein Martingal mit quadratischer Variation

$$[U]_t = \int_0^t X_s^2 ds \quad (6.32)$$

$$X_t = aU_t + e^{\theta \cdot t} + a' \quad \text{und} \quad dX_t = aX_t dW_t + \theta \cdot e^{\theta \cdot t} dt \quad (6.33)$$

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\theta \cdot t} (\hat{\sigma} U_t + \hat{\rho}_0) \quad (6.34)$$

$$\sigma(t) = \hat{\sigma} + a \cdot e^{-\theta \cdot t} (\hat{\sigma} U_t + \hat{\rho}_0) \quad (6.35)$$

Beweis.

(6.32) folgt aus der Definition von U_t .

Aus der Darstellung in Bemerkung (6.26) ergibt sich $dZ_t = aZ_t dW_t$.

Sei $Y_t := 1 + a' + \theta \int_0^t Z_s^{-1} ds$ ein Prozess mit $dY_t = \theta e^{\theta \cdot t} Z_t^{-1} dt$. Mit der Itô-Formel (6.2) für $f(x, y) = xy$ folgt (6.33)

$$X_t = f(Z_t, Y_t) = 1 + a \int_0^t Y_s Z_s dW_s + \int_0^t Z_s \theta e^{\theta \cdot s} Z_s^{-1} ds = aU_t + a' + e^{\theta \cdot t}$$

Durch Einsetzen der Darstellung von X_t (6.33) in die Gleichung (6.31) erhält man (6.34).

Mit der Darstellung von $\sigma(t)$ in Bemerkung (6.26) folgt daraus schließlich (6.35). ■

Mit der Darstellung der Reservelücke in (6.34) ergibt sich somit aus der Ruinwahrscheinlichkeit in (6.23):

$$P \left[\min_{0 \leq t \leq T} \rho(t) < \rho_{min} \right] = 1 - P \left[U_t \geq -\frac{\hat{\rho}_0 + e^{-\theta \cdot t} (\rho_{target} - \rho_{min})}{\hat{\sigma}} \right], \forall t \leq T. \quad (6.36)$$

Damit hat sich gezeigt, dass die Ruinwahrscheinlichkeit nur von den Parametern $T, a, \theta, \frac{\hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}}$ und $\frac{\rho_{target} - \rho_{min}}{\hat{\sigma}}$ abhängt.

Weiters stellt sich auch die Frage wie man diese Ruinwahrscheinlichkeit berechnen kann. Eine Approximation der Ruinwahrscheinlichkeit für den Fall, dass es keine Anpassung der Risikoexposition gibt, kann mit Hilfe der Gleichung (6.37) in Proposition 6.29 bestimmt werden.

Proposition 6.29.

Falls $a = 0$, ist die Ruinwahrscheinlichkeit gegeben durch:

$$P \left[\min_{0 \leq t \leq T} \rho(t) < \rho_{min} \right] = 1 - P \left[\tilde{W}_s \leq g(s) \right], \forall s \in [0, S_T]. \quad (6.37)$$

mit

$$S_T := \frac{e^{2\theta T} - 1}{2 \cdot \theta}, \quad g(s) := \frac{\hat{\rho}_0 + (\rho_{target} - \rho_{min})\sqrt{1 + 2 \cdot \theta \cdot s}}{\hat{\sigma}}$$

und der Standard Brownschen Bewegung (\tilde{W}_s). (6.38)

Beweis.

Betrachte die quadratische Variation $[U]_t = \int_0^t X_s^2 ds$.

Da $a = 0$ gilt:

$$[U]_t = \int_0^t e^{2\theta \cdot s} ds = \frac{e^{2\theta \cdot t} - 1}{2 \cdot \theta}$$

Damit erhält man eine deterministische Stoppzeit:

$$\tau(s) := \inf\{t : [U]_t > s\} = \frac{\ln(1 + 2 \cdot \theta \cdot s)}{2 \cdot \theta}$$

Da $\tilde{W}_t := U_{\tau(t)}$ eine Standard Brownsche Bewegung ist gilt:

$$\begin{aligned} P \left[-U_t \geq \frac{\hat{\rho}_0 + e^{-\theta \cdot t}(\rho_{target} - \rho_{min})}{\hat{\sigma}}, \forall t \leq T \right] \\ = P \left[-U_{\tau(s)} \geq \frac{\hat{\rho}_0 + e^{-\theta \cdot \tau(s)}(\rho_{target} - \rho_{min})}{\hat{\sigma}}, \forall s \leq S_T \right] \\ = P \left[\tilde{W}_s \geq -g(s), \forall s \leq S_T \right]. \end{aligned}$$

Da \tilde{W}_s und $-\tilde{W}_s$ dieselbe Verteilung besitzen, folgt die Behauptung. ■

Indem $s \mapsto g(s)$ durch lineare Funktionen approximiert wird, erhält man eine Approximation der Ruinwahrscheinlichkeit. Dabei wird ausgenutzt, dass die Brownsche Bewegung lineare Grenzen trifft^[7].

7. Fazit

7.1. Zusammenfassung

Die jährlichen Akkumulationsfaktoren der betrachteten Risikoteilungsplänen haben einen stabileren Verlauf im Vergleich zu dem des Beitragsprimaten. Auch die ausbezahlten Leistungen der RS-Modelle liegen über denen der Vergleichspläne. Das gilt sowohl für den erwarteten Verlauf als auch für die betrachteten Extremszenarien wie Zinsschocks und eine veränderte Sterblichkeit des Sparkollektivs. Somit haben die Sparer obwohl sie keine Garantien gewährt bekommen, trotzdem eine gewisse Sicherheit über die zu erwartenden Pensionsleistungen.

Es hat sich gezeigt, dass mit einer unterschiedlichen Parameterwahl des Investitions-Anpassungs-Quadrupels $(a, \beta, s^{LT}, \bar{F})$ die zu erwartende ausbezahlte Leistungshöhe beeinflusst werden kann. So werden mit einer niedrigeren Wahl die Pensionszahlungen höher, jedoch ist der Interquartilsabstand dadurch auch leicht erhöht. Bei einer höheren Parametrisierung gilt genau die Umkehrung. Somit ist für die Parameterwahl ein mit höchster fachlicher Expertise gesteuertes Asset-Liabilities-Management unabdingbar.

7.2. Ausblick

Der Risikoteilungsplan stellt in Zeiten in denen sowohl die steigende Langlebigkeit als auch eine anhaltende Niedrigzinslage eine Rolle spielen, eine gute Alternative zu herkömmlichen Sparmethoden dar. Die Versicherungsnehmer können bei diesem Vorsorgemodell trotz fehlender Garantieverprechen selbst bei diesen beiden Problematiken stabile Rentenzahlungen erwarten. Durch geeignete Wahl der beiden Anpassungsparameter a und β kann langfristig ein selbstkorrigierendes Finanzierungsniveau $F_{i,t}$ erreicht werden, was sowohl im Interesse der VN als auch in dem des Versicherungsunternehmens ist.

8. Quellcode

In diesem Kapitel werden Ausschnitte des implementierten R-Codes dargestellt. Auch werden in diesem Abschnitt noch einige grundsätzliche Funktionalitäten, die bei den Berechnungen und Simulationen von Nutzen waren, erläutert.

8.1. Klassen

Zur einfacheren Lesbarkeit des Codes sowie zur besseren Handhabung bei den Berechnungen, wurden verschiedenen S4-Klassen im R-Script `Classes.R` definiert. Diese wurden im R-Script `Hilfsfunktionen.R` in entsprechenden Funktionen anhand der Eingaben angelegt.

Die notwendigen Parameter des Modells sowie die vertragsrelevanten Daten werden in den Klassen `Anpassungsparameter` und `Parameter` gespeichert:

class / "class name"	member variables	type
anpParam "Anpassungsparameter"	a	numeric
	beta	numeric
para "Parameter"	njGes	numeric
	anzSim	numeric
	s_LT	numeric
	F_target	numeric
	r	numeric
	mu	numeric
	sigma	numeric
	mean_Rt	numeric
	anp	S4
vt "Vertrag"	VPanz	numeric
	ea	ANY
	geb	ANY
	sex	ANY
	beg	ANY
	zwInk	ANY
	zwExk	ANY
	zb	ANY
	nj	ANY
	rz	numeric

Tabelle 4: S4-Classes: Parametrisierung

In der Klasse `VTver` werden die drei in Tabelle: 4 *S4-Classes: Parametrisierung* genannten Klassen sowie weitere Rechengrößen für die jeweiligen versicherten Personen wie der Beitrags- und Anteilsvektor (in `BTG` und `ANT`) und die entsprechenden Ausscheideordnungen (in `TAB`) gespeichert. Das Einlesen passiert in der Funktion `vVtDaten` (siehe Quellcode 1: *vVtDaten: Vertragsdaten*).

Die Tafeln werden in dieser Funktion durch einen Aufruf der Funktionen `qxDAV2004RB20()` und `lxDAV2004RB20()` (siehe Kapitel 8.2 *Sterbetafel*) angelegt.

class name	member variables	type
vVt "VTver"	PARA (Anpassungsparameter & Parameter)	S4
	VT	S4 (Vertrag)
	TAB	ANY
	BTG	ANY
	ANT	ANY
	EX	ANY

Tabelle 5: S4-Class: VTver

```

1 vVtDaten <- function(lstg=NA){
2   #
3   # Tafeln bestimmen:
4   w <- 121 # Endalter der Sterbetafel
5   tafel <- matrix(0,(w+1),(2*vt@VPanz))
6   for(i in 1:vt@VPanz){
7     qx <- 0
8     lx <- 0
9     #
10    # 1. qx-Tafel fuer k-te Person berechnen:
11    qx <- qxDAV2004RB20(vt,k)
12    #
13    # 2. lx-Tafel fuer k-te Person berechnen:
14    qx <- lxDAV2004RB20(qx)
15    #
16    tafel[, (2*k)-1] <- qx
17    tafel[, 2*k] <- lx
18  }
19
20  # Restlebensdauer bestimmen
21  ex_k <- rep(0,anzahl)
22  for(k in 1:anzahl){
23    alter <- vt@ea[k]
24    ex_[k] <- ex(vt,tafel,alter,k)
25  }
26

```



```

27   vVt <- new("VTver"
28             PARA=para,
29             VT=vt,
30             TAB=tafel,
31             BTG=btg,
32             ANT=ant,
33             EK=ex_k)
34   return(vVt)
35 }

```

Quellcode 1: vVtDaten: Vertragsdaten

8.1.1. Beitrags- und Anteilsvektor

Die während der Laufzeit zu zahlenden Beiträge werden in der Funktion `Beitrag()` berechnet. Anhand der Höhe bezahlten Versicherungsprämien wird in der Funktion `Anteil()` der Anteil der jeweiligen VP an der kollektiven Reserve bestimmt; diese Hilfsgröße wird anschließend bei der Berechnung der Leistungshöhen benötigt.

```

1 Anteil <- function(){
2   anteil <- rep(0,vt@VPanz)
3   btg_k <- 0
4   btg_koll <- sum(Beitrag())
6   for(k in 1: (vt@VPanz) ){
7     if((vt@zwInk[k]) == 0){
8       btg_k <- vt@zb[k]
9       anteil[k] <- btg_k / btg_koll
10    } else{
11      btg_k <- (vt@zb[k]) * (vt@zwInk[k]) * (vt@nj[k])
12      anteil[k] <- btg_k / btg_koll
13    }
14  }
15  return(anteil)
16 }

```

Quellcode 2: Anteil: Anteilsvektor

```

1 Beitrag <- function(){
2   vec_temp <- 0
3   # 1. Person:
4   if((vt@zwInk[1]) == 0){
5     if((vt@nj[1]) == 1){
6       C <- vt@zb[1]
7     } else{
8       vec_temp <- rep(0,vt@nj[0]-1)
9       C <- c(vt@zb[1],vec_temp)
10    }
11  }
12  # restliche Personen:
13  for(k in 2:(vt@VPanz)){
14    if((vt@zwInk[k]) == 0){
15      if((vt@nj[k]) == 1){
16        C <- c(C,vt@zb[k])
17      } else{
18        vec_temp <- rep(0,vt@nj[k]-1)
19        C <- c(vt@zb[k],vec_temp)
20      } else{
21        vec_temp <- rep(vt@zb[k]*vt@zwInk[k],vt@nj[k])
22        C <- c(C,vec_temp)
23      }
24    }
25    return(C)
26  }

```

Quellcode 3: Beitrag: Beitragsvektor

8.2. Sterbetafel

Anhand der in Anhang A.3 *Sterbetafel* dargestellten Tafelmodifikation (A.1) sowie der Sterbetafeln und Trendfunktion in Tabelle 7: *DAV 2004 R-B20* wurde für jede versicherte Person in der Funktion `qxDAV2004RB20()` eine Sterbetafel hergeleitet. In der Funktion `lxDAV2004RB20()` wurde mit diesen qx-Tafeln für jede VP eine lx-Tafel mit der erwarteten Anzahl der Überlebenden berechnet. Anschließend wurden beide Tafeln in der Klasse `vVt` in dem Member `TAB` abgespeichert.

```

1 qxDAV2004RB20 <- function(vt, k){
2   tmp <- 0
3   w <- 121 # Endalter der Sterbetafel
4   qxy <- rep(0,(w+1))
5
6   # Einlesen der Maenner- bzw. Frauentafel
7   if((vt@sex[k]) == 1){
8     DAV2004RB <- read.table("C:/Users/DAV2004RBM20.txt", header=TRUE)
9   } else{
10    DAV2004RB <- read.table("C:/Users/DAV2004RBF20.txt", header=TRUE)
11  }
12  for(i in 1:(w+1)){
13    tmp <- ( ((1-DAV2004RB[i,2])*DAV2004RB[i,3])
14             + (DAV2004RB[i,2]*DAV2004RB[i,4])
15             * exp(-(vt@geb[k]) + DAV2004RB[i,1] - 1999)
16             * DAV2004RB[i,5])
17    tmp <- round(tmp,digits=6)
18    qxy[i] <- tmp
19  }
20  return(qxy)
21 }

```

Quellcode 4: qxDAV2004RB20: Erstellung der qx-Tafel

```

1 lxDAV2004RB20 <- function(qxy){
2   w <- 121 # Endalter der Sterbetafel
3   lxy <- rep(0,(w+1))
4   lxy[1] <- 100000
5
6   for(i in 1:w){
7     lxy[i+1] <- round((lxy[i] * (1-qxy[i])), digits=6)
8   }
9   return(lxy)
10 }

```

Quellcode 5: lxDAV2004RB20: Erstellung der lx-Tafel

8.3. Kommutationszahlen und Barwerte

In diesem Unterkapitel werden die für die Berechnungen verwendeten Kommutationszahlen und Barwerte dargestellt. In den Funktionen wurde eine Abfrage auf das Alter der versicherten Personen eingebaut. Diese ist für Abbildungszwecke hinzugefügt worden, damit man auch spätere Zeitpunkte betrachten kann und nach dem Ende der Tafeln

nicht auf einen Fehler läuft.

```
1 LXY <- function(tafel, alter, k){
2   Lx <- 0
3   lx <- tafel
4   omega <- nrow(lx)
5   x <- alter
6   col <- 2*k
7
8   # if-Abfrage fuer Plots
9   if(x < omega){
10    for(j in (x+1):omega){
11      Lx <- Lx + lx[j,col]
12    }
13  }
14  return(Lx)
15 }
```

Quellcode 6: LXY: Aufsummierte Anzahl der Lebenden

```
1 DXY <- function(vVt,alter, k){
2   zw <- vVt@VT@zwExk[k]
3   zins <- vVt@VT@rz / zw
4   v <- 1 / (1 + zins)
5   output <- 0
6   x <- alter
7   col <- 2*k
8   omega <- nrow(vVt@TAB)
9
10  # if-Abfrage fuer Plots
11  if(x < omega){
12    output <- vVt@TAB[x+1,col] * (v^x)
13  }
14  return(Lx)
15 }
```

Quellcode 7: DXY: diskontierte Anzahl der Lebenden

```
1 NXY <- function(vVt, alter, k){
2   Nx <- 0
3   x <- alter
4   omega <- nrow(vVt@TAB) - 1
5
6   # if-Abfrage fuer Plots
7   if(x < omega){
8     for(j in 0:(omega-x)){
9       Nx <- Nx + DXY(x+j,k)
10    }
11  }
12  return(Nx)
13 }
```

Quellcode 8: NXY: Aufsummierte disk. Anzahl der Lebenden

```
1 ex <- function(vt, tafel, alter, k){
2   mean_Kx <- 0
3   lx <- tafel
4   x <- alter
5   col <- 2*k
6
7   mean_Kx <- LXY(lx, x+1, k) / (lx[x+1,col])
8   return(mean_Kx)
9 }
```

Quellcode 9: ex: Durchschnittliche Lebenserwartung eines x-Jährigen

```
1 aexy <- function(vVt, tj, k){
2   output <- 0
3   Dxy <- 0
4   Nxy <- 0
5   x <- vVt@VT@ea[k] + tj
6
7   Dxy <- DXY(tj,k)
8   Nxy <- NXY(vVt,tj,k)
9
10  output <- Nxy / Dxy
11  return(mean_Kx)
12 }
```

Quellcode 10: aexy: lebenslange vorschüssige Leibrente nach t_j abgelaufenen Jahren

8.4. Kapitalmarkt

Die Modellierung der Renditen der riskanten Anlagen als geometrische Brownsche Bewegung erfolgte in der Funktion `R_Matrix()`.

```

1  set.seed(8888)
2  R_Matrix <- function(vVt, y){
3    sim <- vVt@PARA@anzSim
4    mu <- vVt@PARA@mu
5    sigma <- vVt@PARA@sigma
6    S <- numeric(y)
7    R <- numeric(y)
8    Rt_matrix <- matrix(0, sim, y)
9    for(i in 1:sim){
10     S <- rnorm(N,mean=mu,sd=sigma)
11     R <- exp(S)
12     Rt_matrix[i,] <- R
13   }
14   return(Rt_matrix)
14 }

```

Quellcode 11: `R_Matrix`: Simulation Renditen

8.5. Aufschubzeit und Rentenphase

Die Funktion `RS_Entwicklung` für die Rentenphase baut auf der Funktion `RS_Anwartschaft` für die Aufschubzeit auf und ist im Wesentlichen durch die Zeilen (75-97), die einen Leistungszahlungen berücksichtigen, ergänzt. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle nur die Funktion für die Rentenentwicklung dargestellt.

```

1  RS_Entwicklung <- function(vVt, time, output=NA){
2    mat <- output
3    tmp <- switch(mat, "B"="B", "L"="L", "A"="A",
4                  "AAF"="AAF", "PI"="PI")
5    if(is.na(mat)){
6      stop("Fehlende Eingabe fuer Output.")
7    } else if(is.null(tmp)){
8      stop("Falsche Eingabe fuer Output.")
9    }
10
11   #####
12   #-- Initialisierung --#
13   #####

```

```
14 #--- Parameter ---#
15 sim <- vVt@PARA@anzSim
16 s_LT <- vVt@PARA@s_LT
17 F_target <- vVt@PARA@F_target
18 mean_Rt <- vVt@PARA@mean_Rt
19 VPanz <- vVt@PARA@VPanz
20 r <- vVt@PARA@r
21 #--- Matrizen ---#
22 R <- R_Matrix(vVt,time)
23 PI <- matrix(0,sim,time)
24 A <- matrix(0,sim,time+1)
25 A_ <- matrix(0,sim,time)
26 L <- matrix(0,sim,time+1)
27 L_ <- matrix(0,sim,time)
28 FL <- matrix(0,sim,time+1)
29 FL_ <- matrix(0,sim,time)
30 AAF <- matrix(0,sim,time)
31 B <- matrix(0,sim,time)
32 B_av <- rep(0,time)
33 #
34 # Werte fuer Zeitpunkt t=0 zuweisen
35 t0 <- 0
36 C_t <- 0
37 for(k in 1:VPanz){
38   C_0 <- C_0 + vVt@BTG[t0+1]
39   t0 <- t0 + vVt@VT@nj[k]
40 }
41 #
42 #####
43 #---- Berechnung ----#
44 #####
45 for(i in 1:sim){
46   for(t in 1:time){
47     C_t <- 0
48     B_t <- 0
49     tt <- 1
50     # Einzahlung zum Zeitpunkt t
51     for(k in 1:VPanz){
52       if(t >= (vVt@VT@nj[k]) ){
53         tt <- tt + vVt@VT@nj[k]
54       } else{
55         C_t <- C_t + vVt@BTG[tt+t]
56         tt <- tt + vVt@VT@nj[k]
57       }
58     }
59     # PI
```

```

60     PI[i,t] <- max(0, min(1, s_LT * (vVt@PARA@anp@a)
61                       * (FL[i,t]-F_target)))
62     # A_
63     A_[i,t] <- A[i,t] * (1 + r + PI[i,t] * (mean_Rt - r))
64     # L_
65     L_[i,t] <- L[i,t] * (1 + r + s_LT * (mean_Rt - r))
66     # FL_
67     FL_[i,t] <- A[i,t] / L[i,t]
68     # AAF
69     AAF[i,t] <- 1 + r + PI[i,t] * (mean_Rt - r)
70               + (vVt@PARA@anp@beta) * (FL_[i,t] - F_target)
71     # Leistungen bestimmen
72     for(k in 1:VPanz){
73       # VP ist schon in Rente
74       if((t >= (vVt@VT@nj[k])) &&
75         # Abfrage fuer Plots (Auszahlung bis zur Restlebenszeit)
76           (((vVt@VT@ea[k]) + t) < (vVt@EX[k]))){
77         rent <- t - Rente(vVt,L_,t,i,k)
78         B_t <- B_t + rent
79       }
80     }
81     B[i,t] <- B_t
82     #A
83     A[i,t+1] <- (A[i,t] * (1 + r + PI[i,t] * ((R[i,t] - 1) - r)))
84               + C_t - B_t
85     #L
86     L[i,t+1] <- (L[i,t] * AAF[i,t]) + C_t - B_t
87     #FL
88     FL[i,t+1] <- A[i,t+1] / L[i,t+1]
89   }
90 }
91 # durchschn. Beitrag (ueber alle Simul.) fuer Zeitpkte t bestimmen
92 for(t in 1:time){
93   B_av[t] <- sum(B[,t]) / sim
94 }
95
96 switch(mat,
97   B={return(B_av)},
98   L={return(L)},
99   A={return(A)},
100  AAF={return(AAF)},
101  PI={return(PI)}}
102 }

```

Quellcode 12: RS_Entwicklung: Rentenphase

In der Funktion `Rente` wird die Leistung je einer versicherten Person k , mit Hilfe seiner erwarteten zukünftigen Lebensdauer und des Rentenbarwertfaktors, zum Zeitpunkt t bestimmt.

```
1 Rente <- function(vVt, mat, t, i, k){
2   B_t <- 0
3   K_t <- 0
4   sim <- vVt@PARAM@anzSim
5   ant <- vVt@ANT[k]
6   aex <- 0
7
8   mean_Kx <- (sum(mat[,t]) / sim) * ant
9   aex <- aexy(vVt,t,k)
10  B_t <- (K_t / aex)
16  return(B_t)
17 }
```

Quellcode 13: `Rente`: `Rente`

8.6. Hilfsfunktionen

Für die Eingabe unterschiedlicher Parameter zu Simulationszwecken wurden noch Hilfsfunktionen angelegt, die eine flexiblere Eingabe in den Funktionen `RS_Anwartschaft`, `RS_Entwicklung` und `R_Matrix` ermöglicht. Im Wesentlichen werden in diesen Funktionen vorübergehend die entsprechenden Parameter in der Klasse `vVt` mit den abgeänderten Eingabeparametern belegt und die jeweiligen Funktionen aufgerufen. Nach den Funktionsaufrufen werden die Parameter in der Klasse wieder zurückgesetzt. Da es sich hierbei lediglich um Hilfsfunktionen handelt, die nicht von Interesse sind, werden diese Codestellen hier nicht abgebildet. Nur die Quantilberechnung der durchschnittlichen AAFs wird im nächsten Unterkapitel 8.6.1 *Quantile* dargestellt, da diese eine zentrale Rolle bei den Sensitivitätsanalysen gespielt haben.

8.6.1. Quantile

Die Quantile der durchschnittlichen jährlichen Akkumulationsfaktoren werden in der Funktion `Quantile()` bestimmt. In dieser ist ein Aufruf der Funktion `Q()`, in der die durchschnittlichen AAFs bestimmt werden nötig. Die Berechnungen für ein konkretes Jahr erfolgen durch den Aufruf der ausgelagerten Funktion `averageAAF_year()`.

In der Funktion `averageAAF_year()` wird in Zeile 12 ein vom durchschnittlichen jährlichen Akkumulationsfaktor zu Darstellungszwecken abgezogen (vgl. 2.5.1 *Quantile*).

```
1 averageAAF_year <- function(vVt, AAF_matrix, p, time){
2   sim <- vVt@PARAM@anzSim
3   NJ <- time
4   q_vec <- rep(0,NJ)
5   np <- sim * p
6   erg <- abs(np - round(np))
7
8   for(l in 1:NJ){
9     k <- 0
10    q <- rep(1,sim)
11    q <- Q[,l]
12    q <- sort(q)
13
14    if((sim%%2) > 0){
15      k <- ceiling(np)
16      q_vec[l] <- q[k]
17    } else{
18      k <- np
19      q_vec[l] <- (q[k] + q[k+1]) / 2
20    }
21  }
22  return(q_vec)
23 }
```

Quellcode 14: Quantil: Quantilberechnung

```
1 averageAAF_year <- function(vVt, AAF_matrix, year, time){
2   sim <- vVt@PARAM@anzSim
3   NJ <- time
4   output <- rep(0,sim)
5
6   for(i in 1:sim){
7     prod <- 1
8     for(n in 1:year){
9       prod <- prod * AAF_matrix[i,n]
10    }
11  }
12  output[i] <- prod^(1/year) - 1
13  return(output)
14 }
```

Quellcode 15: averageAAF_year: durchschnittl. AAF für ein bestimmtes Jahr

```
1 Q <- function(vVt, AAF_matrix, time){
2   averageAAF <- matrix(0,vVt@PARA@anzSim,time)
3   for(n in 1:time){
4     averageAAF[,n] <- averageAAF_year(AAF_matrix,n,time)
5   }
6   return(averageAAF)
7 }
```

Quellcode 16: Q: durchschnittl. AAF für alle Jahre

A. Anhang

A.1. Abkürzungen

AAF	jährlicher Akkumulationsfaktor
ALM	Asset-Liabilities-Management
BP	Beitragsprimat
FRV	fondsgebundene Rentenversicherung
IQR	Interquartilsabstand (<i>Interquartile Range</i>)
rBZ	reine Beitragszusage
RS(-Modell)	Risikoteilung(s-Modell)
SDG	Stochastische Differentialgleichung
VN	Versicherungsnehmer
VP(en)	versicherte Person(en)
VU	Versicherungsunternehmen

A.2. Notationen

Indizes

i	i -te Simulation
k	k -te VP
t	t -ter Zeitpunkt (in ganzen Jahren)
t_-	in Periode $[t - 1, t)$

Notationen

Bemerkung: die folgende Tabelle bezieht sich nicht auf das Kapitel 6 *Mathematische Motivation*. Die dort verwendeten Notationen sind in dem entsprechendem Kapitel zu entnehmen.

Fließtext	Quellcode	Beschreibung
a	a	Anpassung des Investmentrisikos
ant^k	ant [k]	Anteil an kollektiven Reserve der VP k
-	anzSim	Anzahl der Simulationen
\ddot{a}_x	aexy	vorschüssige lebenslange Leibrente
$A_{i,t}$ bzw. $A_{i,t-}$	A bzw. A_	Umlaufvermögen
$AAF_{i,t}$	AAF	jährlicher Akkumulationsfaktor (AAF)
B_t	B_t	Leistungen an VN (Kollektiv)
B_t^k	-	Leistungen an k -ten VN
-	C_0	Beiträge der VN (Kollektiv) zum Zeitpunkt $t = 0$
C_t	C_t	Beiträge der VN (Kollektiv) zum Zeitpunkt $t > 0$
C_t^k	-	Beiträge der des k -ten VN

Fließtext	Quellcode	Beschreibung
$F_{i,t}$ bzw. $F_{i,t-}$ \bar{F} $\tilde{F}_{i,t}$	FL bzw. FL_ F_target -	Finanzierungsniveau Ziel-Finanzierungsniveau Finanzierungsniveau in Abhängigkeit vom Ziel-Finanzierungsniveau \bar{F}
K_t^k	K_t	durchschnittl. Kapital über alle Simulationen i zum
$L_{i,t}$ bzw. $L_{i,t-}$ L_{t-}	L bzw. L_	Verpflichtungen gegenüber dem Versicherungsnehmer durchschnittl. Wert von $L_{i,t-}$ über alle Simulationen
n_j^k N	nj [k] njGes	Aufschubzeit der k -ten VP maximale Aufschubzeit des Kollektivs
-	para bzw. PARA	Klasse „Parameter“
r r_{zw} - $R_{i,t}$ -	r zins rz R R_anz	fester risikoloser Zinssatz Zins je Zahlweise Rechnungszins jährliche effektive Zinsrate der Aktie Anzahl der Jahre für Renditen-Simulation
s^{LT}	s_LT	Langzeitinvestition in die Aktie
$VPanz$ - -	VPanz vt vVt	Anzahl der VPen im Kollektiv Klasse „Vertrag“ Klasse „VTver“
z_b^k z_{wInk}^k z_{wExk}^k	zb[k] zwInk[k] zwExk[k]	Zahlbeitrag der k -ten VP Inkassozahlweise des k -ten VN Exkassozahlweise des k -ten VN
β	beta	AAF-Anpassung der Beiträge
μ	mu	Erwartungswert der Normalverteilung
$\pi_{i,t}$	PI	Anteil des Anlagevermögens, der in der Periode $[t - 1, t)$ in
σ	sigma	Standardabweichung der Normalverteilung
ω	omega	Endalter der Sterbetafel
$\mathbb{E}[R]$	mean_Rt	durchschnittliche jährliche Rendite der riskanten Aktie
$\sqrt{\mathbb{V}[R_{i,t}]}$	-	jährl. Volatilität der Renditen

Tabelle 6: Notationen

A.3. Sterbetafel

Anhand der von der Deutschen Aktuarvereinigung^[3] bereitgestellten Basistafeln und Trendfunktion (siehe Tabelle7) sowie der dazugehörigen Methodik zur Herleitung von Sterbetafeln anhand dieser (siehe Formel A.1), wurden im Source Code Funktionen implementiert um für jeden betrachteten Versicherungsnehmer die relevanten Sterblichkeiten und die daraus resultierenden Kommutationszahlen und Barwerte verwenden zu können.

$$q_{z,t} = ((1 - f_t) \cdot q_{z,1999} + f_t \cdot q_{z,1999}^6) \cdot \exp(-F_1(z)) \quad (\text{A.1})$$

$$\text{mit } z = \begin{cases} x, & \text{Mann} \\ y, & \text{Frau} \end{cases} \text{ und } f_t = \begin{cases} 0, & t = 0, \dots, 67 \\ 1, & t = 67, \dots, \omega \end{cases}$$

Die Basistafeln beziehen sich auf das Jahr 1999. Mit f_t wird das Verhältnis zur Mischung der beiden Tafeln ausgedrückt.

Alter	Basistafel				Trendfunktion	
	Aggregattafel		Selektionstafel		Starttrend	
	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen
x	$q_{x,1999}$	$q_{y,1999}$	$q_{x,1999}^6$	$q_{y,1999}^6$	$F_1(x)$	$F_1(y)$
0	0.003821	0.002993	0.002829	0.002833	0.03071697	0.03071697
1	0.000352	0.000311	0.000260	0.000294	0.03071697	0.03071697
2	0.000237	0.000178	0.000176	0.000169	0.03071697	0.03071697
3	0.000176	0.000137	0.000130	0.000130	0.03071697	0.03071697
4	0.000136	0.000112	0.000100	0.000106	0.03071697	0.03071697
5	0.000120	0.000087	0.000089	0.000082	0.03071697	0.03071697
6	0.000114	0.000090	0.000084	0.000085	0.03071697	0.03071697
7	0.000097	0.000089	0.000072	0.000084	0.03071697	0.03071697
8	0.000110	0.000076	0.000081	0.000072	0.03071697	0.03071697
9	0.000093	0.000076	0.000069	0.000072	0.03071697	0.03071697
10	0.000092	0.000073	0.000068	0.000069	0.03071697	0.03071697
11	0.000109	0.000079	0.000081	0.000075	0.03071697	0.03071697
12	0.000115	0.000083	0.000085	0.000079	0.03071697	0.03071697
13	0.000127	0.000088	0.000094	0.000083	0.03071697	0.03071697
14	0.000155	0.000102	0.000115	0.000097	0.03071697	0.03071697
15	0.000214	0.000134	0.000158	0.000127	0.03071697	0.03071697
16	0.000307	0.000161	0.000227	0.000152	0.03071697	0.03071697
17	0.000405	0.000185	0.000300	0.000175	0.03071697	0.03071697
18	0.000663	0.000262	0.000491	0.000248	0.03071697	0.03071697
19	0.000700	0.000255	0.000518	0.000250	0.03071697	0.03071697
20	0.000697	0.000234	0.000516	0.000242	0.03071697	0.03071697
21	0.000707	0.000238	0.000523	0.000222	0.03071697	0.03071697
22	0.000694	0.000223	0.000514	0.000226	0.03071697	0.03071697
23	0.000713	0.000238	0.000528	0.000211	0.03069099	0.03066540
24	0.000691	0.000246	0.000512	0.000233	0.02906998	0.03054912
25	0.000686	0.000250	0.000508	0.000237	0.02777884	0.03045938
26	0.000684	0.000250	0.000506	0.000237	0.02679668	0.03036306
27	0.000697	0.000261	0.000523	0.000247	0.02608749	0.0302523
28	0.000681	0.000287	0.000538	0.000272	0.02562296	0.02994765
29	0.000670	0.000311	0.000557	0.000294	0.02534597	0.02961642
30	0.000665	0.000323	0.000572	0.000306	0.02519060	0.02920564
31	0.000672	0.000335	0.000606	0.000325	0.02509047	0.02862563
32	0.000695	0.000353	0.000632	0.000365	0.02499842	0.02783050

Alter	Basistafel				Trendfunktion	
	Aggregattafel		Selektionstafel		Starttrend	
	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen
x	q_{x,1999}	q_{y,1999}	q_{x,1999}⁶	q_{y,1999}⁶	F₁(x)	F₁(y)
33	0.000736	0.000383	0.000668	0.000396	0.02488455	0.02683609
34	0.000792	0.000427	0.000726	0.000445	0.02475130	0.02569930
35	0.000861	0.000482	0.000774	0.000494	0.02464684	0.02452122
36	0.000945	0.000543	0.000834	0.000553	0.02460358	0.02337408
37	0.001049	0.000608	0.000912	0.000623	0.02460091	0.02234029
38	0.001164	0.000672	0.000976	0.000673	0.02460058	0.02214715
39	0.001281	0.000740	0.001076	0.000729	0.02457810	0.02075666
40	0.001401	0.000817	0.001204	0.000826	0.02454118	0.02018363
41	0.001524	0.000899	0.001299	0.000915	0.02452067	0.01978051
42	0.001648	0.000983	0.001431	0.001004	0.02450430	0.01955689
43	0.001781	0.001066	0.001559	0.001111	0.02448758	0.01949209
44	0.001924	0.001148	0.001702	0.001198	0.02444339	0.01956202
45	0.002079	0.001236	0.001910	0.001334	0.02435959	0.01972307
46	0.002250	0.001336	0.002080	0.001434	0.02423864	0.01995517
47	0.002438	0.001446	0.002304	0.001550	0.02408125	0.02022307
48	0.002637	0.001562	0.002520	0.001726	0.02390240	0.02050676
49	0.002848	0.001680	0.002807	0.001833	0.02372261	0.02080880
50	0.003069	0.001796	0.003153	0.002025	0.02357175	0.02111503
51	0.003312	0.001911	0.003366	0.002183	0.02346491	0.02142621
52	0.003568	0.002025	0.003731	0.002321	0.02336963	0.02171761
53	0.003832	0.002146	0.004093	0.002514	0.02328138	0.02195433
54	0.004093	0.002280	0.004505	0.002744	0.02319468	0.02212508
55	0.004346	0.002429	0.004910	0.002914	0.02309775	0.02223175
56	0.004594	0.002600	0.005414	0.003197	0.02297822	0.02226878
57	0.004855	0.002796	0.005987	0.003451	0.02283793	0.02224689
58	0.005142	0.003007	0.006543	0.003768	0.02269207	0.02217581
59	0.005480	0.003238	0.007268	0.004145	0.02256449	0.02206194
60	0.005888	0.003494	0.008029	0.004579	0.02249188	0.02194551
61	0.006419	0.003780	0.008802	0.004991	0.02250330	0.02187118
62	0.007092	0.004102	0.009544	0.005402	0.02262231	0.02188462
63	0.007909	0.004467	0.010254	0.005772	0.02285178	0.02202288
64	0.008848	0.004871	0.011037	0.006115	0.02318479	0.02228783
65	0.009873	0.005366	0.011904	0.006474	0.02360716	0.02264256
66	0.011042	0.005865	0.012958	0.006962	0.02408865	0.02305116
67	0.012504	0.006561	0.014260	0.007671	0.02459726	0.02349532
68	0.014097	0.007415	0.015666	0.008557	0.02510590	0.02396378
69	0.015813	0.008387	0.017174	0.009569	0.02557083	0.02444768
70	0.017653	0.009473	0.018800	0.010707	0.02594884	0.02491887
71	0.019626	0.010755	0.020608	0.012076	0.02620078	0.02534923
72	0.021775	0.012183	0.022675	0.013629	0.02630776	0.02571340

Alter	Basistafel				Trendfunktion	
	Aggregattafel		Selektionstafel Rentenbezug		Starttrend	
	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen
x	q_{x,1999}	q_{y,1999}	q_{x,1999}⁶	q_{y,1999}⁶	F₁(x)	F₁(y)
73	0.024109	0.013712	0.025012	0.015313	0.02625087	0.0260053
74	0.026656	0.015454	0.027637	0.017247	0.02602577	0.0261991
75	0.029567	0.017451	0.030682	0.019462	0.02563916	0.02627951
76	0.032815	0.019636	0.034099	0.021873	0.02510796	0.02623404
77	0.036525	0.021914	0.038000	0.024357	0.02444976	0.02605951
78	0.040773	0.024558	0.042448	0.027197	0.02368692	0.02575221
79	0.045673	0.027750	0.047541	0.030567	0.02283883	0.02532124
80	0.051377	0.031705	0.053423	0.034679	0.02192996	0.02476048
81	0.057882	0.036608	0.060076	0.039715	0.02097067	0.02407126
82	0.065269	0.042600	0.067579	0.045822	0.01997992	0.02326317
83	0.073565	0.049627	0.075959	0.052935	0.01899648	0.02235431
84	0.082870	0.057486	0.085314	0.060823	0.01805042	0.02136635
85	0.093221	0.066157	0.095681	0.069460	0.01714082	0.02031348
86	0.104559	0.075764	0.106995	0.078974	0.01626718	0.01922032
87	0.116856	0.086315	0.119229	0.089382	0.01541343	0.01810397
88	0.129921	0.097679	0.132192	0.100565	0.01455701	0.01698222
89	0.143562	0.109624	0.145694	0.112302	0.01369136	0.01585816
90	0.157611	0.121794	0.159573	0.124237	0.01288156	0.01479194
91	0.172067	0.133900	0.173838	0.136087	0.01218253	0.01383990
92	0.186841	0.145981	0.188405	0.147894	0.01159405	0.01300171
93	0.201930	0.158072	0.203273	0.159695	0.01111591	0.01227709
94	0.217297	0.170206	0.218409	0.171521	0.01074796	0.01166580
95	0.232904	0.182365	0.233774	0.183359	0.01049008	0.01116763
96	0.248727	0.194516	0.249345	0.195179	0.01034218	0.01078240
97	0.264756	0.206620	0.265116	0.206945	0.01030289	0.01050998
98	0.280953	0.218694	0.281052	0.218676	0.01030289	0.01035030
99	0.297251	0.230742	0.297086	0.230380	0.01030289	0.01030289
100	0.309795	0.255266	0.309795	0.255266	0.01030289	0.01030289
101	0.326335	0.270389	0.326335	0.270389	0.01030289	0.01030289
102	0.343166	0.285910	0.343166	0.285910	0.01030289	0.01030289
103	0.360290	0.301838	0.360290	0.301838	0.01030289	0.01030289
104	0.377706	0.318186	0.377706	0.318186	0.01030289	0.01030289
105	0.395414	0.334963	0.395414	0.334963	0.01030289	0.01030289
106	0.413411	0.352180	0.413411	0.352180	0.01030289	0.01030289
107	0.431692	0.369844	0.431692	0.369844	0.01030289	0.01030289
108	0.450254	0.387966	0.450254	0.387966	0.01030289	0.01030289
109	0.469088	0.406552	0.469088	0.406552	0.01030289	0.01030289
110	0.488186	0.425607	0.488186	0.425607	0.01030289	0.01030289
111	0.507536	0.445136	0.507536	0.445136	0.01030289	0.01030289
112	0.527123	0.465140	0.527123	0.465140	0.01030289	0.01030289

Alter	Basistafel				Trendfunktion	
	Aggregattafel		Selektionstafel Rentenbezug		Starttrend	
	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen
x	q_{x,1999}	q_{y,1999}	q_{x,1999}⁶	q_{y,1999}⁶	F₁(x)	F₁(y)
113	0.546930	0.485617	0.546930	0.485617	0.01030289	0.01030289
114	0.566935	0.506563	0.566935	0.506563	0.01030289	0.01030289
115	0.587112	0.527966	0.587112	0.527966	0.01030289	0.01030289
116	0.607432	0.549813	0.607432	0.549813	0.01030289	0.01030289
117	0.627860	0.572080	0.627860	0.572080	0.01030289	0.01030289
118	0.648353	0.594737	0.648353	0.594737	0.01030289	0.01030289
119	0.668862	0.617744	0.668862	0.617744	0.01030289	0.01030289
120	0.689333	0.641046	0.689333	0.641046	0.01030289	0.01030289
121	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.00000000	0.00000000

Tabelle 7: DAV 2004 R-B20

B. Verzeichnisse

Tabellenverzeichnis

1.	Eingabe Abbildung 1 bis Abbildung 6	10
2.	Zahlweisen	15
3.	Eingabe Abbildung 11 & 12	20
4.	S4-Classes: Parametrisierung	39
5.	S4-Class: VTver	40
6.	Notationen	ii
7.	DAV 2004 R-B20	vi

Abbildungsverzeichnis

1.	Variation a (Anwartschaft)	10
2.	Variation β (Anwartschaft)	11
3.	50%-Quantil (Anwartschaft)	12
4.	Boxplot Variation a und β (Anwartschaft)	12
5.	Boxplot Variation a (Anwartschaft)	13
6.	Boxplot Variation β (Anwartschaft)	13
7.	Boxplot Variation a und β (inkl. Leistungsphase)	17
8.	IQR: Variation \bar{F} (inkl. Leistungsphase)	17
9.	Ausbezahlte Leistungen (Variation a)	18
10.	Ausbezahlte Leistungen (Variation \bar{F})	19
11.	Renditeentwicklung	21
12.	Zinsschock in den Jahren 35-40 (Variation a)	21
13.	Zinsschock in den Jahren 35-40 (Variation a , 75%- & 25%-Quantil)	22
14.	Zinsschock in den Jahren 35-40 (Variation β , 75%- & 25%-Quantil)	23
15.	Zinsschock in den Jahren 35-40 (Variation a)	24
16.	Sterblichkeit	25
17.	IQR: unterschiedliche Sterblichkeiten (inkl. Leistungsphase)	25

Quellcodeverzeichnis

1.	vVtDaten: Vertragsdaten	41
2.	Anteil: Anteilsvektor	41
3.	Beitrag: Beitragsvektor	42
4.	qxDAV2004RB20: Erstellung der qx-Tafel	43
5.	lxDAV2004RB20: Erstellung der lx-Tafel	43
6.	LXY: Aufsummierte Anzahl der Lebenden	44
7.	DXY: diskontierte Anzahl der Lebenden	44

8.	NXY: Aufsummierte disk. Anzahl der Lebenden	45
9.	ex: Durchschnittliche Lebenserwartung eines x-Jährigen	45
10.	aexy: lebenslange vorschüssige Leibrente nach t_j abgelaufenen Jahren . .	45
11.	R_Matrix: Simulation Renditen	46
12.	RS_Entwicklung: Rentenphase	48
13.	Rente: Rente	49
14.	Quantil: Qunatilberechnung	50
15.	averageAAF_year: durchschnittl. AAF für ein bestimmtes Jahr	50
16.	Q: durchschnittl. AAF für alle Jahre	51

Literaturverzeichnis

Literatur

- [1] BaFin. *Betriebsrenten - Reine Beitragszusage: Gesetz verabschiedet*. 17. Juli 2017.
- [2] C. Boado-Penas, J. Eisenberg, A. Helmert, and P. Krühner. *A new approach for satisfactory pensions with no guarantees*.
- [3] DAV. *Fachgrundsatz der Deutschen Aktuarvereinigung e.V. Reservierung und Überschussbeteiligung von Rentenversicherungen des Bestandes. Richtlinie*. Köln, 21. April 2018.
- [4] C. Donnelly. *A Discussion of a Risk-Sharing Pension Plan*. Heriot-Watt University, 2017.
- [5] O. Goecke. *Sparprozess mit kollektivem Risikogleich*. IVW Köln, 2011.
- [6] O. Goecke. *Pension saving schemes with return smoothing mechanism*. Insurance: Mathematics and Economics 53, 2013.
- [7] A. Novikov, V. Frishling, and N. Kordzakhia. *Approximation of Boundary Crossing Probabilities for a Brownian Motion*. Journal of Applied Probability 35 (4), 1999.
- [8] T. Rheinländer. *Hedging Derivates*. 07. März 2019.
- [9] U. Schmock. *Stochastic Analysis for Financial and Actuarial Mathematics (Lecture Notes)*. 07. März 2019.