



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

DIPLOMARBEIT

Kombinatorik linearer Erweiterungen von endlichen Halbordnungen

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

im Rahmen des Studiums

Masterstudium Technische Mathematik

eingereicht von

Manuel Grossauer B.Sc.

Matrikelnummer 01227121

ausgeführt am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
der Fakultät für Mathematik und Geoinformation der Technischen Universität Wien

Betreuung

Betreuer: Ao.Univ.Prof.Dipl.-Ing.Dr.techn. Bernhard Gittenberger

Wien, 22.10.2020

(Unterschrift Verfasser)

(Unterschrift Betreuer)

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Erweiterungen endlicher Halbordnungen	5
2	Spezielle Halbordnungen	8
2.1	Seriell-parallele Halbordnungen	8
2.1.1	Erzeugung linearer Erweiterungen	9
2.1.2	Anzahl der linearen Erweiterungen	14
2.2	Wälder	15
2.3	Der Boolesche Verband	17
2.4	Zweidimensionale Halbordnungen	29
2.4.1	Die Ordnungsdimension	29
2.4.2	Die schwache Bruhat-Ordnung	35
2.5	Rechteckige Halbordnungen	37
2.5.1	Mustervermeidende lineare Erweiterungen	40
2.5.2	Vermeidung von Mustern der Länge drei	43
3	Geometrische Techniken zur Bestimmung von $l(P)$	47
3.1	Das Ordnungspolytop	47
3.2	Das Kettenpolytop	48
4	Zufällige Halbordnungen	54
4.1	Die geometrische zufällige halbgeordnete Menge $P_k(n)$	54
4.2	Die graphentheoretische zufällige halbgeordnete Menge $P_p(n)$	60
5	Die Ordnungs-Markov-Kette	73
5.1	Geometrische Interpretation	73
5.2	Der Algorithmus	75
5.3	Konduktanz	76
6	Die 1/3-2/3-Vermutung	79
6.1	Das Sortierproblem	79
6.2	Die Vermutung	79
6.3	Der Beweis für N-freie halbgeordnete Mengen	80
7	Anwendungen	85
7.1	Folgenanalyse	85
7.2	Molekularbiologie	85
7.3	Sortieren	86
7.4	Präferenzforschung	86
7.5	KI-Planungssysteme	86
	Literaturverzeichnis	88

Einleitung

Diese Arbeit soll einen Überblick über die Kombinatorik linearer Erweiterungen von endlichen Halbordnungen verschaffen. Im ersten Kapitel werden grundlegende Begriffe, wie etwa der einer linearen Erweiterung und die verschiedenen Betrachtungsweisen einer solchen, erklärt. In den darauf folgenden Kapiteln werden diese immer wieder gebraucht werden.

Betrachtet man statt einer vollkommen allgemein gehaltenen Halbordnung eine mit zusätzlichen Eigenschaften, so lassen sich weit mehr Aussagen über diese treffen. Einige der prominentesten solcher speziellen Halbordnungen werden im zweiten Kapitel untersucht. Seriell-parallele halbgeordnete Mengen haben dabei eine besonders „schöne“ Struktur. Sie entstehen durch die kombinierte iterative Anwendung von zwei schlichten Operationen: der seriellen und der parallelen Komposition. Dennoch handelt es sich dabei um eine große Klasse von Halbordnungen, die in ihrer Struktur auch äußerst komplex sein können. Diese halbgeordneten Mengen lassen sich in Algorithmen aufgrund ihres rekursiven Aufbaus gut verwenden, weshalb in der Praxis im Zusammenhang mit linearen Erweiterungen von Halbordnungen oft seriell-parallele Halbordnungen verwendet werden. Die Erzeugung linearer Erweiterungen sowie die Bestimmung der Anzahl der linearen Erweiterungen einer seriell-parallelen Halbordnung ist in effizienter Weise möglich. Für Halbordnungen, deren zugehöriger Graph der direkten Nachfolger ein Wurzelwald ist, kann mithilfe einer Hakenlängenformel die Anzahl der linearen Erweiterungen exakt bestimmt werden. Im Abschnitt über Boolesche Verbände werden Abschätzungen für die Anzahl der linearen Erweiterungen des Booleschen Verbandes, der wie jeder Verband auch als halbgeordnete Menge betrachtet werden kann, erarbeitet. Auch für die allgemeineren gereihten Halbordnungen gibt es dazu Ergebnisse. Zielführend sind hierfür probabilistische Methoden und die Verwendung von Entropie von Zufallsvariablen. Anschließend werden zweidimensionale Halbordnungen behandelt. Die verschiedenen Möglichkeiten, diese Klasse von Halbordnungen zu charakterisieren, erleichtern die Untersuchung der linearen Erweiterungen. Unter anderem stellt sich heraus, dass die linearen Erweiterungen einer zweidimensionalen halbgeordneten Menge einem Hauptideal in der schwachen Bruhat-Ordnung entsprechen. Im anschließenden Abschnitt wird eine Formel für die Anzahl der linearen Erweiterungen von rechteckigen Halbordnungen hergeleitet. Dabei wird ein Zusammenhang zu den Standard-Young-Tableaus verwendet. Danach werden lineare Erweiterungen rechteckiger Halbordnungen untersucht, die gewisse Muster vermeiden. Die Anzahlen der linearen Erweiterungen, die Muster der Länge drei vermeiden, werden bis auf eine ungelöste Ausnahme bestimmt.

Im dritten Kapitel werden Halbordnungen und ihre linearen Erweiterungen von einem geometrischen Standpunkt aus betrachtet. Dabei spielen das Ordnungspolytop und das Kettenpolytop zentrale Rollen. Schlussendlich wird ein Zusammenhang der Volumina dieser Polytope mit der Anzahl der linearen Erweiterung einer halbgeordneten Menge hergestellt.

Über zufällige Halbordnungen geht es im vierten Kapitel. Zuerst wird eine zufällige Halbordnung mit geometrischem und danach eine mit graphentheoretischem Hintergrund betrachtet. Die wichtigste Frage, der dabei nachgegangen wird, ist die nach der erwarteten Anzahl an linearen Erweiterungen.

Die Ordnungs-Markov-Kette, die im fünften Kapitel behandelt wird, ist ein praktisches Werkzeug zur Generierung linearer Erweiterungen beliebiger Halbordnungen. Anschließend an die geometrische Interpretation dieser Kette wird ein Algorithmus zur fast zufälligen Erzeugung linearer Erweiterungen vorgestellt.

Das sechste Kapitel befasst sich mit dem Sortierproblem und der sogenannten „1/3-2/3-Vermutung“, welche bis heute in ihrer allgemeinen Form immer noch nicht bewiesen wurde, ihre Richtigkeit jedoch als nahezu sicher gilt. Diese Vermutung wird anschließend für den Fall der N-freien Halbordnungen betrachtet und bewiesen.

Den Abschluss der Arbeit bildet ein Einblick in die wichtigsten Anwendungsgebiete der Kombinatorik linearer Erweiterungen von endlichen Halbordnungen. Dazu zählen die Folgenanalyse, die Molekularbiologie, das Sortieren von Listen, die Präferenzforschung, die beispielsweise im Marketing eine Rolle spielt, sowie KI-Planungssysteme.

1 Lineare Erweiterungen endlicher Halbordnungen

Zunächst klären wir einige grundlegende Begriffe, auf die später immer wieder Bezug genommen wird. Folgende Definition ist aus [14].

Definition 1.1. Sei $P = (M, \leq_P)$ eine endliche halbgeordnete Menge. Eine Obermenge \leq_T der Halbordnung \leq_P , die eine Totalordnung ist, nennt man eine *lineare Erweiterung* von \leq_P beziehungsweise von P . Die Menge aller linearen Erweiterungen von P bezeichnen wir mit $L(P)$ und ihre Anzahl mit $l(P)$.

Bemerkung 1.2. Nach obiger Definition ist eine Totalordnung \leq_T daher genau dann eine lineare Erweiterung der halbgeordneten Menge $P = (M, \leq_P)$, falls für alle $x, y \in M$ aus $x \leq_P y$ folgt, dass $x \leq_T y$.

Bemerkung 1.3. Die Anzahl der Elemente von M wird in dieser Arbeit mit „ n “ bezeichnet. Damit hat jede halbgeordnete Menge stets mindestens eine und maximal $n!$ lineare Erweiterungen. Dabei ist $l(P) = 1$ genau dann, wenn P eine Kette ist und $l(P) = n!$ genau dann, wenn P eine Antikette ist.

Bemerkung 1.4. Man kann eine Halbordnung auf M auf zwei Arten definieren. Eine transitive, reflexive und antisymmetrische Halbordnung bezeichnen wir mit „ \leq_P “. Entfernt man von dieser alle Relationspaare (x, x) , erhält man die zugehörige „strenge“ Halbordnung, welche transitiv und irreflexiv ist und mit „ $<_P$ “ bezeichnet wird.

Die nächste Definition ist in [5] zu finden.

Definition 1.5. Sei P eine halbgeordnete Menge. Der *Graph der direkten Nachfolger* G von P ist jener gerichtete azyklische Graph (GAG), dessen Knoten die Elemente der Grundmenge M von P sind und der folgende Kantenmenge hat:

$$E = \{(x, y) \in M \times M : (x <_P y) \wedge \neg(\exists z \in M : x <_P z <_P y)\}$$

Die zugehörige grafische Darstellung nennt sich *Hasse-Diagramm*.

Wenn $(x, y) \in E$, so sagen wir, dass x von y *überdeckt* wird und schreiben $x <_P y$. Im Hasse-Diagramm ist dabei y oberhalb von x und die beiden Elemente sind mit einer Strecke verbunden.

Die folgenden Erklärungen sind aus [16].

Definition 1.6. Für zwei halbgeordnete Mengen $P = (M_P, \leq_P)$ und $Q = (M_Q, \leq_Q)$ nennen wir eine Abbildung $\theta : M_P \rightarrow M_Q$ *ordnungserhaltend*, falls aus $x \leq_P y$ immer $\theta(x) \leq_Q \theta(y)$ folgt.

P und Q nennen sich *isomorph*, wenn es eine Bijektion $\theta : M_P \rightarrow M_Q$ gibt, sodass $x \leq_P y$ genau dann wenn $\theta(x) \leq_Q \theta(y)$ für alle x, y aus M_P .

Definition 1.7. Eine *markierte halbgeordnete Menge* (P, w) ist eine halbgeordnete Menge P zusammen mit einer *Markierung* w . Das ist eine Bijektion von der Grundmenge von P nach $\{1, \dots, n\}$. Eine ordnungserhaltende Markierung nennt sich *natürliche Markierung*.

Bemerkung 1.8. Gegeben sei die halbgeordnete Menge $P = (M, \leq_P)$. Jeder natürlichen Markierung w entspricht genau eine lineare Erweiterung $\leq_T \supseteq \leq_P$ (und umgekehrt) durch folgende Äquivalenz:

$$x \leq_T y \Leftrightarrow w(x) \leq_{\mathbb{N}} w(y)$$

Beispiel 1.9. Sei $P = (\{a, b, c, d, e\}, \{(b, a), (c, a), (e, d)\})$ und eine natürliche Markierung w von P sei gegeben durch $w(c) = 1, w(e) = 2, w(b) = 3, w(a) = 4$ und $w(d) = 5$. Die zu w zugehörige lineare Erweiterung ist *cebad*.

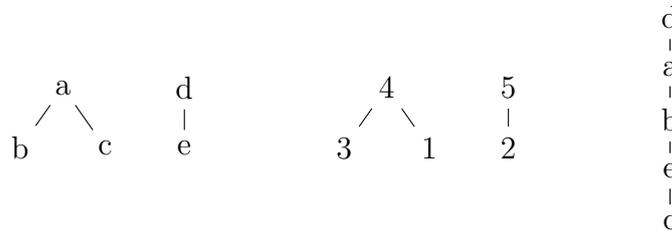


Abbildung 1: $P, (P, w)$ und die entsprechende lineare Erweiterung

Bemerkung 1.10. Ist (P, w) eine markierte halbgeordnete Menge, so entspricht jeder linearen Erweiterung $\leq_T \supseteq \leq_P$ genau eine Permutation $\pi \in S_n$ (und umgekehrt) durch die Äquivalenz

$$x \leq_T y \Leftrightarrow \pi^{-1}(w(x)) \leq_{\mathbb{N}} \pi^{-1}(w(y)).$$

Beispiel 1.11. Sei $P = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{(3, 5), (2, 5), (5, 1), (5, 4)\})$ mit $w = \text{id}$. Diese halbgeordnete Menge hat die linearen Erweiterungen 32514, 32541, 23514 und 23541. Dabei entspricht nach Bemerkung 1.10 beispielsweise 32514

der Permutation $(\pi(1), \dots, \pi(5)) = (3, 2, 5, 1, 4)$, welche wir ebenfalls kurz als 32514 anschreiben können.

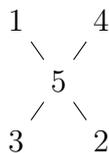


Abbildung 2: Die halbgeordnete Menge P

Definition 1.12. Für jede halbgeordnete Menge $P = (M, <_P)$ gibt es den zugehörigen *Vergleichsgraphen*. Das ist der ungerichtete Graph $C(P) = (M, E)$ mit $\{x, y\} \in E$ genau dann, wenn $x <_P y$ oder $y <_P x$.

Bemerkung 1.13. Zu jeder halbgeordneten Menge gibt es genau einen Vergleichsgraphen. Diesen erhält man auch, indem man den transitiven Abschluss des Graphen der direkten Nachfolger bildet und die Orientierung entfernt.

Umgekehrt kann es für einen gegebenen ungerichteten Graphen keine, eine oder auch mehrere halbgeordnete Mengen geben, deren Vergleichsgraph eben dieser Graph ist.

Definition 1.14. Die *Länge* einer Kette oder Antikette ist die Anzahl ihrer Elemente. Die *Höhe* $h(P)$ einer halbgeordneten Menge $P = (M, \leq_P)$ ist die Länge der längsten Kette in P . Die *Höhe* $h(x)$ eines Elementes $x \in M$ ist definiert als die Höhe von $\downarrow x := \{y \in M : y \leq_P x\}$, minus 1. Die *Weite* (auch *Spernerzahl*) einer halbgeordneten Menge P ist die Länge der längsten Antikette in P .

2 Spezielle Halbordnungen

Für eine gänzlich allgemeine halbgeordnete Menge lassen sich weit weniger Aussagen treffen als wenn bekannt ist, dass sie sich einer gewissen Klasse zuordnen lässt. Deshalb betrachtet man gerne spezielle Halbordnungen, daher welche mit zusätzlichen Eigenschaften.

In diesem Kapitel wird eine Auswahl von prominenten speziellen Halbordnungen behandelt.

2.1 Seriell-parallele Halbordnungen

Zunächst betrachten wir die Klasse der seriell-parallelen Halbordnungen. Diese Halbordnungen haben die nützliche Eigenschaft, dass sie durch die iterative Anwendung der selben zwei Operationen, nämlich der „parallelen Komposition“ und der „seriellen Komposition“, entstanden sind. Diese rekursive Struktur lässt sich algorithmisch gut verwenden. Am Ende dieses Abschnitts präsentieren wir einen Algorithmus zur zufälligen Erzeugung von linearen Erweiterungen. Für diesen Abschnitt wurden [5] und [28] verwendet.

Definition 2.1. Seien $P = (M_P, \leq_P)$ und $Q = (M_Q, \leq_Q)$ zwei halbgeordnete Mengen mit disjunkten Grundmengen.

- Die *parallele Komposition* R von P und Q , in Zeichen $R = P \parallel Q$, ist jene halbgeordnete Menge, deren Grundmenge die Vereinigung von M_P und M_Q ist und für die gilt

$$\forall E \in \{M_P, M_Q\}, \forall x, y \in E : x \leq_R y \Leftrightarrow x \leq_E y.$$

- Die *serielle Komposition* S von P und Q , in Zeichen $S = P.Q$, ist jene halbgeordnete Menge, deren Grundmenge die Vereinigung von M_P und M_Q ist und für die gilt

$$\forall x, y \in M_P \cup M_Q : x \leq_S y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in M_P \wedge x \leq_P y \\ x, y \in M_Q \wedge x \leq_Q y \\ x \in M_P \wedge y \in M_Q \end{cases}.$$

Bemerkung 2.2. Bei der parallelen Komposition werden also zwei halbgeordnete Mengen zu einer neuen halbgeordneten Menge vereinigt. Dabei entstehen keine neuen Relationstupel. Die parallele Komposition ist sowohl assoziativ als auch kommutativ.

Bei der seriellen Komposition hingegen werden die zwei halbgeordneten Mengen nicht nur vereinigt, zusätzlich werden alle Elemente der ersten Menge mit allen Elementen der zweiten Menge in Relation gesetzt. Die serielle Komposition ist assoziativ aber nicht kommutativ.

Definition 2.3. Die Klasse der *seriell-parallelen Halbordnungen* ist die kleinste Klasse, die die einelementige halbgeordnete Menge enthält und bezüglich der parallelen und seriellen Kompositionen abgeschlossen ist.

Bemerkung 2.4. Die Klasse der seriell-parallelen halbgeordneten Mengen ist genau die Klasse der N-freien halbgeordneten Mengen (siehe etwa [3]). Dabei nennen wir eine halbgeordnete Menge $P = (M, \leq_P)$ N-frei, wenn keine vierelementige Teilmenge von M mit der darauf eingeschränkten Halbordnung von \leq_P isomorph zu $(\{a, b, c, d\}, (a, b), (c, d), (c, b))$ ist. Der Name „N-frei“ kommt daher, dass jene vierelementige halbgeordnete Menge die Form eines „N“ hat.

Bemerkung 2.5. Nach Definition 2.3 ist jede nicht-atomare seriell-parallele halbgeordnete Menge „top-down“ betrachtet durch die serielle oder parallele Komposition von zwei seriell-parallelen halbgeordneten Mengen entstanden. „Bottom-up“ betrachtet entsteht durch die iterative serielle oder parallele Komposition von seriell-parallelen halbgeordneten Mengen (die auch Atome sein können) eine neue seriell-parallele halbgeordnete Menge.

2.1.1 Erzeugung linearer Erweiterungen

Wir wollen im Folgenden die Möglichkeit haben, zwischen den Kindern eines Knotens unterscheiden zu können. Dazu benötigen wir die kantenbezogene Definition eines Graphen und den Begriff der kombinatorischen Einbettung.

Definition 2.6. Seien E eine endliche Menge und V eine Partition der Menge $E \times \{+1, -1\}$. Dann nennt sich das Paar (V, E) *Graph*, V wird als Knotenmenge und E als Kantenmenge bezeichnet.

Bemerkung 2.7. Anders als bei der klassischen, knotenbezogenen Definition eines Graphen handelt es sich bei einem Knoten in dieser kantenbezogenen Definition um eine Menge, die auch mehr als einelementig sein kann. Für Elemente aus $E \times \{+1, -1\}$ schreiben wir statt $(e, +1)$ kurz e^+ und statt $(e, -1)$ schreiben wir e^- .

Definition 2.8. Sei π eine Permutation der Menge $[n]$. Der *Orbit* eines Elements $x \in [n]$ ist die Menge $\{y \in [n] : \exists k \in \mathbb{N} : \pi^k(x) = y\}$.

Definition 2.9. Eine *kombinatorische Einbettung* eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Permutation $\pi : E \times \{+1, -1\} \rightarrow E \times \{+1, -1\}$, deren Orbits genau die Knoten von G sind.

Bemerkung 2.10. Ist eine kombinatorische Einbettung gegeben, so kennt man nicht nur den Graphen, sondern zusätzlich, in welcher Reihenfolge die zu einem Knoten inzidenten Kanten angeordnet sind.

Beispiel 2.11. Gegeben sei folgender Graph in seiner kantenbezogenen Form:

$$G = (V, E) = (\{\{a^+\}, \{b^+\}, \{a^-, b^-, c^+, d^+\}, \{c^-\}, \{d^-\}\}, \{a, b, c, d\})$$

Die Abbildungsvorschrift von π , einer der vier zu diesem Graphen existierenden kombinatorischen Einbettungen, ist in folgender Tabelle festgehalten.

x	$\pi(x)$
a^+	a^+
b^+	b^+
c^-	c^-
d^-	d^-
a^-	c^+
c^+	d^+
d^+	b^-
b^-	a^-

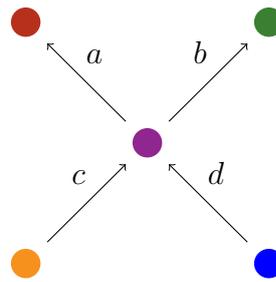


Abbildung 3: Eine kombinatorische Einbettung von G

Die Orbits von π , die den Knoten von G entsprechen, sind in gleicher Farbe gehalten. Die Elemente a^+, b^+, c^- und d^- müssen bei jeder kombinatorischen Einbettung auf sich selbst abgebildet werden, da die diese Elemente enthaltenden Mengen jeweils Knoten sind. Da $\{a^-, b^-, c^+, d^+\}$ ein Knoten von G ist (in Abbildung 3 in der Mitte), muss diese Menge für eine kombinatorische Einbettung ein Orbit sein. Die kombinatorischen Einbettungen unterscheiden sich in der Reihenfolge, in der die Elemente dieser Menge „durchlaufen“ werden.

Bemerkung 2.12. Nachdem wir nun wissen, wie wir den Graphen der direkten Nachfolger einer seriell-parallelen Halbordnung kombinatorisch einbetten können, können wir uns eine bijektive Funktion definieren, die diese kombinatorische Einbettung auf einen besser handzuhabenden kombinatorisch eingebetteten Graphen abbildet, nämlich einen binären Graphen. Dabei müssen

wir in Kauf nehmen, dass dieser binäre Graph eine größere Knotenmenge haben kann als der ursprüngliche. Die zusätzlichen Knoten werden wir als „weiße“ und die ursprünglichen, den Elementen der halbgeordneten Menge entsprechenden, als „schwarze“ Knoten bezeichnen.

Definition 2.13. Sei Ψ folgende Funktion, von der Menge der kombinatorischen Einbettungen von Graphen der direkten Nachfolger von seriell-parallelen halbgeordneten Mengen in die Menge der kombinatorischen Einbettungen der zweifärbigen binären gerichteten azyklischen Graphen (GAG), mit der Abbildungsvorschrift:

$$\Psi(\emptyset) = \circ \quad \Psi(\bullet) = \bullet \quad \Psi\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array}\right) = \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array}$$

$$\Psi(P.(Q||R).S) = \begin{array}{ccc} & \Psi(S) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \Psi(Q) & & \Psi(R) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & \Psi(P) & \end{array}$$

P, Q, R und S sind hier kombinatorisch eingebettete Graphen der direkten Nachfolger von seriell-parallelen halbgeordneten Mengen. P und S dürfen leer sein, Q und R jedoch nicht. Weiters gilt für R : $\neg(\exists R_1, R_2 : R = R_1 || R_2)$.

Der folgende Satz ist in [5] zu finden. Laut Bodini et al. lässt sich dieser direkt mit struktureller Induktion beweisen.

Satz 2.14. *Wählen wir für jede seriell-parallele halbgeordnete Menge eine beliebige kombinatorische Einbettung ihres Graphen der direkten Nachfolger und nennen die Menge dieser gewählten Einbettungen \mathcal{E} , so gilt:
 Ψ ist eine Bijektion von \mathcal{E} auf die Menge der seriell-parallelen, binären, zweifärbigen GAGs.*

Mit Ψ haben wir nun eine kanonische Darstellung jeder seriell-parallelen halbgeordneten Menge in Form eines eindeutigen binären GAG. Algorithmisch sind sowohl die binäre als auch die rekursive Struktur von Vorteil. Folgende Charakterisierung ist aus [5] entnommen.

Proposition 2.15. *Die Klasse \mathcal{D} der seriell-parallelen, binären, zweifärbigen GAGs ist eindeutig durch folgende Rekursion bestimmt:*

$$\mathcal{D} = \bullet + \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \mathcal{D}_t \end{array} + \begin{array}{c} \bullet + \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{D} \quad \mathcal{D}_r \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathcal{D} + \circ \end{array}$$

$$\mathcal{D}_t = \bullet + \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \mathcal{D}_t \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{D} \quad \mathcal{D}_r \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathcal{D} + \circ \end{array}$$

$$\mathcal{D}_r = \mathcal{D}_t + \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{D} \quad \mathcal{D}_r \\ \diagup \quad \diagdown \\ \mathcal{D} \end{array}$$

Im Folgenden wird der Pseudocode eines Algorithmus präsentiert, welcher in [5] zu finden ist. Der Input S ist das Bild einer seriell-parallelen halbgeordneten Menge P unter der Abbildung Ψ , also ein gerichteter, azyklischer, zweifärbiger, binärer Graph. Der Output ist eine zufällige lineare Erweiterung von P .

Algorithmus zur Erzeugung von zufälligen linearen Erweiterungen einer seriell-parallelen halbgeordneten Menge

```

function RandLinExt(S)
  if  $S = \circ$  return [ ]
  else if  $S = \bullet_x$  return [x]
  else if  $S = \bullet_x . T$  return [x, RandLinExt(T)]
  else if  $S = \square . (L \parallel R) . T$  then
     $h := \text{Shuffle}(\text{RandLinExt}(L), \text{RandLinExt}(R))$ 
     $t := \text{RandLinExt}(T)$ 
    if  $\square = \bullet_x$  then return [x, h, t]
    else return [h, t]
  
```

Die Blackbox der nichtdeterministischen Funktion „Shuffle“ sieht wie folgt

aus: Der Input besteht aus zwei Listen A und B mit den Längen a respektive b . Diese entsprechen den topologischen Sortierungen von Teilgraphen von S . Der Output ist eine Liste C der Länge $a + b$, die aus genau den Elementen aus A und B besteht und die Totalordnungen der beiden Listen erhält. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit für jede der $\binom{a+b}{a}$ möglichen Listen, Output von „Shuffle“ zu sein gleich.

Beispiel 2.16. Betrachten wir die seriell-parallele halbgeordnete Menge

$$P = (\{a, b, c, d, e, f\}, \{(b, a), (c, a), (d, a), (f, e)\}).$$

Bilden wir diese mit Ψ ab, erhalten wir einen binären GAG, der fünf zusätzliche weiße Knoten enthält (siehe Abbildung 4). Der Algorithmus läuft wie folgt ab: Von der Wurzel ausgehend gibt es einen linken und einen rechten Teilgraphen, die miteinander durch keine Kante verbunden, ihre zugehörigen halbgeordneten Mengen also parallel sind. Der linke enthält die Knoten a, b, c, d sowie drei weiße Knoten. Der rechte Teilgraph besteht nur aus e und f . Der Algorithmus wird auf beide rekursiv angewendet. Da e und f schon linear angeordnet sind ist der Output dieses rechten Teilgraphen $[e, f]$. Der Teilgraph mit a als Wurzel hat wiederum zwei Teilgraphen, deren zugehörige halbgeordnete Mengen parallel sind. Im Graphen, der aus b und c , sowie zwei weißen Knoten besteht, wird nun „Shuffle“ auf b und c angewendet. Mit einer Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{2}$ wird entweder $[b, c]$ oder $[c, b]$ gewählt. Nun wird „Shuffle“ eine Rekursionsebene höher auf die gewählte Liste, etwa $[c, b]$ und die einelementige Liste $[d]$ angewandt. Jede der drei möglichen Listen $[d, c, b]$, $[c, d, b]$ sowie $[c, b, d]$ wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ gewählt. Die gewählte Liste wird nun mit a zu Beginn ergänzt. Insgesamt haben wir also als linke Liste etwa $[a, d, c, b]$ und als rechte Liste $[e, f]$. Einer der $\binom{6}{2} = 15$ möglichen Outputs von „Shuffle“ dieser beiden Listen ist $[e, a, d, c, b, f]$.

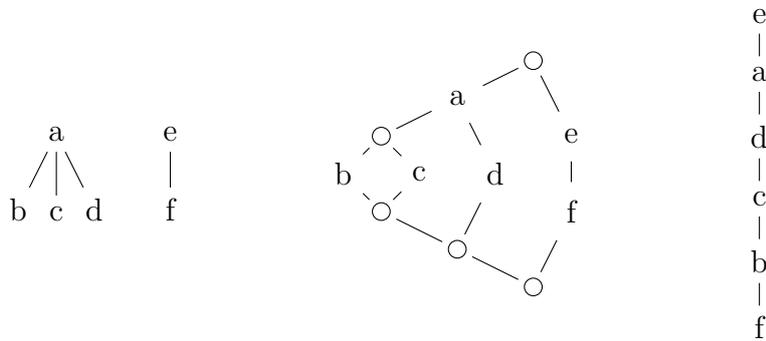


Abbildung 4: P , $\Psi(P)$ und eine lineare Erweiterung von P

2.1.2 Anzahl der linearen Erweiterungen

Die Anzahl der linearen Erweiterungen einer seriell-parallelen halbgeordneten Menge lässt sich in polynomieller (sogar linearer) Zeit bestimmen. Für allgemeine Halbordnungen muss das nicht der Fall sein, wie Brightwell und Winkler in [14] zeigten.

Um die Anzahl der linearen Erweiterungen einer seriell-parallelen halbgeordneten Menge zu bestimmen, macht man sich die rekursive Struktur zunutze.

Ist P eine seriell-parallele halbgeordnete Menge, so ist P entweder aus der parallelen oder aus der seriellen Komposition zweier seriell-parallelen halbgeordneten Mengen P_1 und P_2 entstanden. Diese beiden Mengen sind dabei im Allgemeinen nicht eindeutig. Für die Berechnung von $l(P)$ ist es aber irrelevant, wie man P „aufbaut“. Bezeichnen wir die Anzahl der Elemente in P_1 mit p_1 und die Anzahl der Elemente von P_2 mit p_2 . Die Anzahl der linearen Erweiterungen von P lässt sich nun durch folgende Formeln rekursiv berechnen:

$$l(P_1 || P_2) = \binom{p_1 + p_2}{p_1} l(P_1) l(P_2)$$

$$l(P_1 . P_2) = l(P_1) l(P_2)$$

$$l(P) = 1 \quad \text{falls } |M| = 1$$

Die erste Formel kommt wie folgt zustande. Ist $P = P_1 || P_2$, können die Elemente aus P_1 in einer linearen Erweiterung von P unabhängig von den Elementen aus P_2 „platziert“ werden. Da gibt es $\binom{p_1 + p_2}{p_1}$ Möglichkeiten. Relevant sind nur die Ordnungen innerhalb von P_1 respektive P_2 , und davon

gibt es jeweils $l(P_1)$ und $l(P_2)$ viele. Ist $P = P_1.P_2$, müssen in einer linearen Erweiterung von P alle Elemente aus P_2 kleiner als alle Elemente aus P_1 sein. Die linearen Erweiterungen von P bestehen in diesem Fall schlicht aus zwei aneinander gereihten linearen Erweiterungen von P_1 bzw. P_2 .

Damit folgt direkt, dass der Aufwand zur Berechnung von $l(P)$ linear in n ist.

Definition 2.17. Grafisch kann P durch einen *binären Konstruktionsbaum* dargestellt werden. Das ist ein Binärbaum, dessen Blätter den Elementen aus P entsprechen und dessen innere Knoten jeweils für die serielle (S) bzw. parallele (P) Komposition der beiden Teilbäume stehen, welche als Wurzel ein Kind jenes inneren Knotens haben.

Bemerkung 2.18. Da die Konstruktion einer seriell-parallelen halbgeordneten Menge durch die beiden Kompositionen nicht eindeutig ist, gibt es im Allgemeinen auch mehrere binäre Konstruktionsbäume von P .

Beispiel 2.19. In Abbildung 5 ist eine seriell-parallele halbgeordnete Menge P und einer ihrer Konstruktionsbäume zu sehen. Die Anzahl der linearen Erweiterungen des linken Teilbaumes ist nach den obigen Formeln 3, die des rechten 2. Insgesamt ist daher $l(P) = 3 \cdot 2 = 6$.

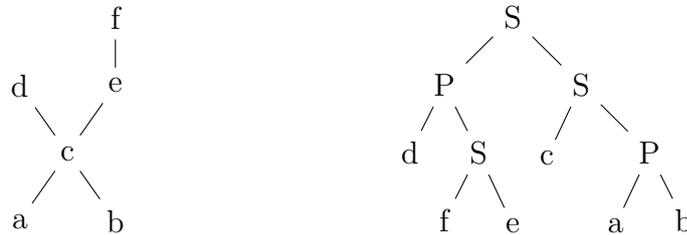


Abbildung 5: P und ein binärer Dekompositionsbaum von P

2.2 Wälder

In diesem kurzen Abschnitt befassen wir uns mit Halbordnungen, deren Graph der direkten Nachfolger ein Wald ist. Hauptsächlich wurde [4] verwendet.

Definition 2.20. Wir nennen einen gerichteten Graphen *Wurzelwald*, wenn jeder Knoten von höchstens einem Knoten überdeckt wird.

Definition 2.21. Für eine halbgeordnete Menge $P = (M, \leq_P)$ nennt sich eine nichtleere Teilmenge $I \subseteq M$ *Ordnungsideal*, wenn gilt:

$$x \in M, y \in I : x \leq_P y \Rightarrow x \in I$$

Ein *Hauptordnungsideal* H_x ist ein Ordnungsideal, das sich schreiben lässt als $H_x = \{y \in M : y \leq_P x\}$.

Für jedes Element $x \in M$ ist die *Hakenlänge* h_x definiert als $h_x = |H_x|$.

Der folgende wichtige Satz ist beispielsweise in [4] zu finden.

Satz 2.22. *Sei $P = (M, \leq_P)$ eine beliebige halbgeordnete Menge mit $|M| = n$. Dann gilt*

$$l(P) \geq \frac{n!}{\prod_{x \in P} h_x}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn der Graph der direkten Nachfolger von P ein Wurzelwald ist.

Beweis. Sei $x_1 \leq_T x_2 \leq_T \dots \leq_T x_n$ eine feste lineare Erweiterung von P . Bezeichnen wir mit H_i das von x_i erzeugte Hauptordnungsideal. Weiters sei $\varphi : L(P) \times H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n \rightarrow W(P)$. Dabei ist $W(P)$ die Menge aller Markierungen von P und $L(P)$ betrachten wir hier als die Menge der natürlichen Markierungen. Für eine natürliche Markierung u und $y_i \in H_i$ sei $w = \varphi(u, y_1, y_2, \dots, y_n)$ jene Markierung, die wir aus u erhalten, wenn wir sukzessive $u(y_i)$ mit $u(x_i)$ für $i = 1, \dots, n$, beginnend mit $i = 1$, vertauschen. Um zu sehen, dass φ surjektiv ist, sei $w \in W(P)$. Wir vertauschen nun sukzessive $w(x_i)$ mit der größten Markierung $w(y_i)$ von H_i für $i = n, \dots, 1$, beginnend mit $i = n$. Die so erhaltene Markierung u ist offensichtlich eine natürliche, es gilt $y_i \in H_i$ sowie $\varphi(u, y_1, y_2, \dots, y_n) = w$. Da φ surjektiv ist, muss ihre Definitionsmenge mindestens so mächtig sein wie ihre Bildmenge. Es gilt also

$$|W(P)| \leq |L(P) \times H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n|.$$

Da $|W(P)| = n!$, $|H_x| = h_x$ und die Mächtigkeit eines kartesischen Produkts gleich dem Produkt der Mächtigkeiten der einzelnen Mengen ist, folgt

$$n! \leq |L(P)| \cdot \prod_{x \in P} h_x.$$

Nach Division durch das Produkt auf der rechten Seite erhalten wir das Gewünschte.

Dass für Wurzelwälder in besagter Formel Gleichheit gilt ist genau Knuths Hakenlängenformel. Dazu verweisen wir auf [29]. Sei der Graph der direkten Nachfolger von P nun kein Wurzelwald. Wir wollen daraus folgern, dass dann φ nicht injektiv ist und somit die strikte Ungleichung gilt. Es gibt also ein Element y , das von mindestens zwei Elementen überdeckt wird. Wir wählen eine fixe lineare Erweiterung $x_1 \leq_T x_2 \leq_T \dots \leq_T x_n$ so, dass zwei dieser y überdeckenden Elemente direkt nacheinander kommen. Nennen wir diese x_j und x_{j+1} . Wir definieren uns die natürliche Markierung u durch $u(x_i) = i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Sei v jene Markierung mit $v(x_i) = i$ für $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j, j+1\}$, $v(x_j) = j+1$ und $v(x_{j+1}) = j$. Da x_j und x_{j+1} unvergleichbar sind, ist auch v eine natürliche Markierung. Seien $y_i = x_i$ für $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j, j+1\}$, $y_j = y$ und $y_{j+1} = y$. Damit ist $\varphi(u, y_1, \dots, y_n)$ jene Markierung, die aus u durch Rotation der Markierungen von x_j, x_{j+1} und y hervorgeht. Diese Markierung erhält man auch aus v , indem die Markierung von x_j mit der von y vertauscht werden. Dafür müssen wir nur $z_i = x_i$ für $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ und $z_j = y$ wählen. Insgesamt haben wir also $\varphi(u, y_1, \dots, y_n) = \varphi(v, z_1, \dots, z_n)$. \square

2.3 Der Boolesche Verband

Ein Verband, der distributiv und komplementär ist, nennt sich Boolescher Verband. Die Potenzmenge der Menge $[t] = \{1, \dots, t\}$ ist zusammen mit der Vereinigung, dem Durchschnitt, dem Komplement, der leeren Menge als Nullelement und der Menge $[t]$ als Einselement ein Boolescher Verband, den wir Q^t nennen. Wie jeden Verband kann man auch diesen als Ordnungsstruktur betrachten. Die Halbordnung auf $\mathcal{P}([t])$ ist schlicht die Mengeninklusion. Für dieses Kapitel wurden hauptsächlich [7] und [41] verwendet.

Unser Ziel ist, die Anzahl der linearen Erweiterungen von Q^t so gut wie möglich abzuschätzen. Dazu bezeichnen wir mit A_j das Mengensystem jener Teilmengen von $[t]$, deren Mächtigkeit genau j ist. Zunächst überlegen wir uns eine einfache untere Schranke von $l(Q^t)$. Wir zählen jene linearen Erweiterungen von Q^t , bei denen alle Elemente aus A_j vor allen Elementen aus A_{j+1} kommen, für jedes j . Da $|A_j| = \binom{t}{j}$, können die Elemente aus A_j in solch einer linearen Erweiterung auf $\binom{t}{j}!$ Arten angeordnet werden. Damit ist $\prod_{j=0}^t \binom{t}{j}!$ auf jeden Fall eine untere Schranke von $l(Q^t)$.

Für eine obere Schranke ist der Satz von Sperner nützlich, welcher beispielsweise in [24, Satz 2.1] samt Beweis zu finden ist. Dieser besagt genau, dass die Länge einer jeden Antikette in Q^t höchstens $\binom{t}{\lfloor t/2 \rfloor}$ ist. Wenn man sich vorstellt, dass man eine lineare Erweiterung vom ersten bis zum letzten

Element nacheinander aufschreibt, so ist die Menge an Elementen, die bei jedem Schritt zur Auswahl stehen, offenbar eine Antikette. Da $|\mathcal{P}([t])| = 2^t$ erhalten wir für $l(Q^t)$ als obere Schranke $\binom{t}{\lfloor t/2 \rfloor} 2^t$.

Definition 2.23. Eine halbgeordnete Menge nennt sich *gereiht*, wenn alle maximalen Ketten die selbe Länge haben.

Bemerkung 2.24. Gereichte halbgeordnete Mengen lassen sich in natürlicher Weise in *Ränge* A_1, \dots, A_k partitionieren, wobei A_j aus jenen Elementen x besteht, für die die längste Kette, die x als größtes Element enthält, genau Länge j hat. Wird in einer gereichten halbgeordneten Menge y von $x \in A_j$ ($j \geq 2$) überdeckt, folgt, dass $y \in A_{j-1}$. Weiters gilt für $j \geq 2$, dass jedes Element aus A_j mindestens ein Element aus A_{j-1} überdeckt und für $j \leq k-1$ wird jedes Element aus A_j von mindestens einem Element aus A_{j+1} überdeckt.

Für den Beweis des nächsten Satzes benötigen wir noch etwas Wissen über Entropie.

Definition 2.25. Die *Entropie* einer diskreten Zufallsvariable \mathbf{X} ist definiert als

$$H(\mathbf{X}) = \sum_x p(x) \log_2 \frac{1}{p(x)},$$

wobei $p(x) := \mathbb{P}(\mathbf{X} = x)$.

Die *bedingte Entropie* ist für Zufallsvariablen \mathbf{X} und \mathbf{Y} definiert als

$$H(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) = \sum_y p(y) H(\mathbf{X} | \mathbf{Y} = y) = \sum_y p(y) \sum_x p(x | y) \log \frac{1}{p(x | y)},$$

wobei $p(x | y) := \mathbb{P}(\mathbf{X} = x | \mathbf{Y} = y)$.

Bemerkung 2.26. Für einen Zufallsvektor $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$, als Zufallsvariable betrachtet, gilt

$$H(\mathbf{X}) = H(\mathbf{X}_1) + H(\mathbf{X}_2 | \mathbf{X}_1) + \dots + H(\mathbf{X}_n | \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{n-1}) \quad (1)$$

Für Zufallsvariablen \mathbf{X} , \mathbf{Y} und \mathbf{Z} gilt:

$$H(\mathbf{X}) \leq \log_2 |\text{range}(\mathbf{X})|, \quad \text{mit Gleichheit für gleichverteiltes } \mathbf{X} \quad (2)$$

$$H(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) \leq H(\mathbf{X}) \quad (3)$$

$$H(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) \leq H(\mathbf{X} | \mathbf{Z}), \text{ falls } \mathbf{Z} \text{ von } \mathbf{Y} \text{ bestimmt wird} \quad (4)$$

Dabei bedeutet „ \mathbf{Z} wird von \mathbf{Y} bestimmt“ formal, dass $H(\mathbf{Z} | \mathbf{Y}) = 0$.
(1) und (4) implizieren

$$H(\mathbf{X}) \leq H(\mathbf{Y}) + H(\mathbf{X} | \mathbf{Y}). \quad (5)$$

Weiters ist die Entropie eines Zufallsvektors subadditiv:

$$H(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n) \leq \sum_{i=1}^n H(\mathbf{X}_i) \quad (6)$$

Das gilt auch für die bedingte Entropie:

$$H(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n | \mathbf{Y}) \leq \sum_{i=1}^n H(\mathbf{X}_i | \mathbf{Y}) \quad (7)$$

Für $A \subseteq \mathbb{N}$ sei $\mathbf{X}_A := (X_i : i \in A)$. Wir benötigen noch folgenden als „Shearers Lemma“ bekannten Hilfssatz. Dieser ist in [41] zu finden.

Lemma 2.27. *Sei $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m)$ und \mathcal{A} eine Familie von nicht notwendigerweise disjunkten Teilmengen von $[m]$, wobei jedes Element aus $[m]$ in mindestens d Elementen aus \mathcal{A} enthalten ist. Dann gilt*

$$H(\mathbf{X}) \leq \frac{1}{d} \sum_{A \in \mathcal{A}} H(\mathbf{X}_A).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & \sum_{A \in \mathcal{A}} H(\mathbf{X}_A) \stackrel{(1)}{=} \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{i \in A} H(\mathbf{X}_i | \{\mathbf{X}_l : l \in A, l < i\}) \\ & \stackrel{(4)}{\geq} \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{i \in A} H(\mathbf{X}_i | \{\mathbf{X}_l : l < i\}) \geq d \sum_{i=1}^m H(\mathbf{X}_i | \{\mathbf{X}_l : l < i\}) = dH(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

Bei der letzten Abschätzung wurde verwendet, dass jedes i in mindestens d Elementen aus \mathcal{A} enthalten ist. □

Lemma 2.27 gilt auch, wenn jede der auftretenden Entropien als Bedingung die selbe Zufallsvariable \mathbf{Y} hat.

Der nächste Satz, welcher in [7] zu finden ist, ist auf den Booleschen Verband Q^t anwendbar und liefert eine gute Abschätzung für die Anzahl der linearen Erweiterungen.

Satz 2.28. *Sei P eine gereichte halbgeordnete Menge mit $|P| = n$, $|A_j| = n_j$ und k Rängen, wobei für $j \geq 2$ jedes Element aus A_j genau d_j Elemente aus A_{j-1} überdeckt und für $j \leq k-1$ jedes Element aus A_j von genau u_j Elementen aus A_{j+1} überdeckt wird. Weiters sei $r = \sum_{j=2}^k n_{j-1}/d_j$. Dann gilt:*

$$l(P) \leq \left(\frac{2e(k-1)n}{r} \right)^r n_1! \cdots n_k!$$

Beweis. Für $M \in \mathbb{N}$ bezeichne C_M die Kette auf $[M]$ mit der natürlichen Ordnung. Wir finden zunächst eine obere Schranke für die Anzahl $O_M(P)$ von ordnungserhaltenden Abbildungen von P nach C_M und erhalten daraus eine obere Schranke für $l(P)$.

Sei \mathbf{f} eine gleichverteilte Zufallsvariable auf der Menge aller ordnungserhaltenden Abbildungen von P nach C_M . Für eine Teilmenge X von der Grundmenge von P sei \mathbf{f}_X die Einschränkung von \mathbf{f} auf X . Ist $x \in A_i$, bezeichnen wir mit $U(x) = \{y \in A_{i+1} : x \prec_P y\}$ die Menge aller Elemente, die x überdecken. Weiters fixieren wir $s \in \mathbb{N}$ mit $s \leq M$ und definieren \mathbf{B}_x als die Zufallsvariable $\lceil \frac{s}{M} \min \mathbf{f}_{U(x)} \rceil$. \mathbf{B}_x nimmt daher ganzzahlige Werte von 1 bis s an. Das Hasse-Diagramm von C_M muss man sich dabei in s Blöcke aufgeteilt vorstellen, die von unten nach oben aufsteigend markiert sind. Bis auf den obersten Block haben sie die Länge $\lfloor M/s \rfloor$. Nun gibt \mathbf{B}_x die kleinste Blockmarkierung an, auf die Elemente aus $U(x)$ abgebildet werden. Für $y \prec_P x$ gilt mit $\mathbf{B}_x = b_x$ und $\mathbf{B}_y = b_y$, dass $\mathbf{f}(x) \leq \min \mathbf{f}_{U(x)} \leq \frac{M}{s} b_x$ und $\mathbf{f}(x) \geq \min \mathbf{f}_{U(y)} > \frac{M}{s} (b_y - 1)$. Daher hat $\mathbf{f}(x)$ maximal $\frac{M}{s} (b_x - b_y + 1)$ Werte. Es gilt daher

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{f}_x \mid \mathbf{B}_x = b_x, \mathbf{B}_y = b_y) &\stackrel{(3)}{\leq} H(\mathbf{f}_x) \\
 &\stackrel{(2)}{\leq} \log_2 |\text{range}(\mathbf{f}_x)| \leq \log_2 (M/s(b_x - b_y + 1))
 \end{aligned} \tag{8}$$

Im Folgenden definieren wir $p_x(b) := \mathbb{P}(B_x = b)$ für $x \in P$ und $b \in [s]$ und $p_{y|x}(c \mid b) := \mathbb{P}(\mathbf{B}_y = c \mid \mathbf{B}_x = b)$ für $y \prec_P x$ und $c \leq b$ aus $[s]$. Da \mathbf{f} gleichverteilt ist, gilt wegen (2) und (1)

$$\log_2 O_M(P) = H(\mathbf{f}) = H(\mathbf{f}_{A_k}) + H(\mathbf{f}_{A_{k-1}} \mid \mathbf{f}_{A_k}) + \dots + H(\mathbf{f}_{A_1} \mid \mathbf{f}_{A_2 \cup \dots \cup A_k}).$$

Wir behaupten für $j = 1, \dots, k$, dass die Summe der obigen letzten j Terme,

$$\sum_{i=1}^j H(\mathbf{f}_{A_i} \mid \mathbf{f}_{A_{i+1} \cup \dots \cup A_k}) = H(\mathbf{f}_{A_1 \cup \dots \cup A_j} \mid \mathbf{f}_{A_{j+1} \cup \dots \cup A_k}),$$

nach oben beschränkt ist durch

$$\frac{1}{n_j} \sum_{x \in A_j} \sum_{b_j=1}^s p_x(b_j) \log_2 \left(s^{r_j} (M/s)^{n_1 + \dots + n_j} \max_{\substack{b_1, \dots, b_{j-1} \\ 1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_j}} \left[b_1^{n_1} \prod_{i=2}^j (b_i - b_{i-1} + 1)^{n_i} \right] \right),$$

wobei $r_j = \sum_{i=2}^j (n_{i-1}/d_i)$ (daher ist $r_k = r$).

Wir zeigen die Aussage mit Induktion nach j . Für $j = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} H(\mathbf{f}_{A_1} \mid \mathbf{f}_{A_2 \cup \dots \cup A_k}) &\stackrel{(7)}{\leq} \sum_{x \in A_1} H(\mathbf{f}(x) \mid \mathbf{f}_{A_2 \cup \dots \cup A_k}) \stackrel{(4)}{\leq} \sum_{x \in A_1} H(\mathbf{f}(x) \mid \mathbf{B}_x) \\ &\stackrel{\text{Def. } H}{=} \sum_{x \in A_1} \sum_{b_1=1}^s p_x(b_1) H(\mathbf{f}_x \mid \mathbf{B}_x = b_1) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \sum_{x \in A_1} \sum_{b_1=1}^s p_x(b_1) \log_2[(M/s)b_1] \\ &= \frac{1}{n_1} \sum_{x \in A_1} \sum_{b_1=1}^s p_x(b_1) \log_2[(m/s)^{n_1} b_1^{n_1}]. \end{aligned}$$

Da $r_1 = 0$ ist dies der gewünschte Term. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Aussage für $j-1$ gilt und zeigen sie für j . Dazu betrachten wir den j -ten Summanden $H(\mathbf{f}_{A_j} \mid \mathbf{f}_{A_{j+1} \cup \dots \cup A_k})$ unserer abzuschätzenden Summe. Auf diesen können wir Lemma 2.27 anwenden. Sei $A_j = \{y_1, \dots, y_{n_j}\}$. Die Mengen $\{i : y_i \in U(y)\}$ mit $y \in A_{j-1}$ bilden eine Familie \mathcal{A} von Teilmengen von $[n_j]$. Da jedes Element aus A_j genau d_j Elemente aus A_{j-1} überdeckt, ist auch jedes Element aus $[n_j]$ in genau (und daher mindestens) d_j Elementen aus \mathcal{A} enthalten. Daher ist $H(\mathbf{f}_{A_j} \mid \mathbf{f}_{A_{j+1} \cup \dots \cup A_k})$ mindestens so groß wie

$$\begin{aligned} &\frac{1}{d_j} \sum_{y \in A_{j-1}} H(\mathbf{f}_{U(y)} \mid \mathbf{f}_{A_{j+1} \cup \dots \cup A_k}) \\ &\stackrel{(5)}{\leq} \frac{1}{d_j} \sum_{y \in A_{j-1}} \left(H(\mathbf{B}_y \mid \mathbf{f}_{A_{j+1} \cup \dots \cup A_k}) + H(\mathbf{f}_{U(y)} \mid \mathbf{B}_y, \mathbf{f}_{A_{j+1} \cup \dots \cup A_k}) \right) \\ &\stackrel{(4)}{\leq} \frac{1}{d_j u_{j-1}} \sum_{y \in A_{j-1}} \sum_{x \in U(y)} H(\mathbf{B}_y \mid \mathbf{B}_x) + \frac{1}{d_j} \sum_{y \in A_{j-1}} \sum_{x \in U(y)} H(\mathbf{f}_x \mid \mathbf{B}_y, \mathbf{B}_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{d_j u_{j-1}} \sum_{y \in A_{j-1}} \sum_{x \in U(y)} \sum_{b_j=1}^s p_x(b_j) \sum_{b_{j-1}=1}^{b_j} p_{y|x}(b_{j-1} | b_j) \log_2(1/p_{y|x}(b_{j-1} | b_j)) \\
 &+ \frac{1}{d_j} \sum_{y \in A_{j-1}} \sum_{x \in U(y)} \sum_{b_j=1}^s p_x(b_j) \sum_{b_{j-1}=1}^{b_j} p_{y|x}(b_{j-1} | b_j) H(\mathbf{f}_x | \mathbf{B}_y = b_{j-1}, \mathbf{B}_x = b_j) \\
 &\leq \frac{1}{d_j u_{j-1}} \sum_{y \in A_{j-1}} \sum_{x \in U(y)} \sum_{b_j=1}^s p_x(b_j) \sum_{b_{j-1}=1}^{b_j} p_{y|x}(b_{j-1} | b_j) \\
 &\quad \times \log_2 \left(\frac{(M/s)^{u_{j-1}} (b_j - b_{j-1} + 1)^{u_{j-1}}}{p_{y|x}(b_{j-1} | b_j)} \right).
 \end{aligned}$$

Für die letzte Ungleichung wurde die zweite große Summe mit u_{j-1}/u_{j-1} multipliziert, (8) verwendet und anschließend herausgehoben.

Zur besseren Lesbarkeit definieren wir:

$$X(b_{j-1}) := s^{r_{j-1}} (M/s)^{n_1 + \dots + n_{j-1}} \max_{\substack{b_1, \dots, b_{j-2} \\ 1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_{j-1}}} \left[b_1^{n_1} \prod_{i=2}^{j-1} (b_i - b_{i-1} + 1)^{n_i} \right]$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $H(\mathbf{f}_{A_1 \cup \dots \cup A_{j-1}} | \mathbf{f}_{A_j \cup \dots \cup A_k})$ höchstens so groß wie

$$\frac{1}{n_{j-1}} \sum_{y \in A_{j-1}} \sum_{b_{j-1}=1}^s p_y(b_{j-1}) \log_2 X(b_{j-1}).$$

Diesen Ausdruck kann man unter Verwendung von $|U(y)| = u_{j-1}$ umschreiben zu

$$\frac{1}{n_{j-1} u_{j-1}} \sum_{y \in A_{j-1}} \sum_{x \in U(y)} \sum_{b_{j-1}=1}^s \sum_{b_j=b_{j-1}}^s p_x(b_j) p_{y|x}(b_{j-1} | b_j) \log_2 X(b_{j-1}).$$

Wir erhalten daher insgesamt nach einer Umsortierung der Summationsreihenfolge, Multiplikation mit 1, geschrieben als d_j/d_j , in der zweiten großen Summe, sowie anschließendem Herausheben:

$$\begin{aligned}
 &H(\mathbf{f}_{A_1 \cup \dots \cup A_j} | \mathbf{f}_{A_{j+1} \cup \dots \cup A_k}) = H(\mathbf{f}_{A_1 \cup \dots \cup A_{j-1}} | \mathbf{f}_{A_j \cup \dots \cup A_k}) + H(\mathbf{f}_{A_j} | \mathbf{f}_{A_{j+1} \cup \dots \cup A_k}) \\
 &\leq \frac{1}{d_j u_{j-1}} \sum_{y \in A_{j-1}} \sum_{x \in U(y)} \sum_{b_j=1}^s p_x(b_j) \sum_{b_{j-1}=1}^{b_j} p_{y|x}(b_{j-1} | b_j)
 \end{aligned}$$

$$\times \log_2 \left(\frac{(M/s)^{u_{j-1}} (b_j - b_{j-1} + 1)^{u_{j-1}} (X(b_{j-1}))^{d_j/n_{j-1}}}{p_{y|x}(b_{j-1} | b_j)} \right)$$

Da der Logarithmus eine konkave Funktion ist und sich die Summe der bedingten Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt, lässt sich die Ungleichung von Jensen anwenden. Damit und nach einer weiteren Umsortierung der Summationsreihenfolge können wir den letzten Ausdruck abschätzen mit:

$$\leq \frac{1}{d_j u_{j-1}} \sum_{x \in A_j} \sum_{\substack{y \in A_{j-1} \\ y <_P x}} \sum_{b_j=1}^s p_x(b_j) \\ \times \log_2 \left(\sum_{b_{j-1}=1}^{b_j} (M/s)^{u_{j-1}} (b_j - b_{j-1} + 1)^{u_{j-1}} (X(b_{j-1}))^{d_j/n_{j-1}} \right)$$

Die Summe, die das Argument des Logarithmus ist, hat maximal s Summanden. Da der Logarithmus monoton wachsend ist, können wir diese Summe mit s mal dem größten Summanden nach oben abschätzen.

$$\leq \frac{1}{u_{j-1}} \sum_{x \in A_j} \sum_{b_j=1}^s p_x(b_j) \log_2 \left(s (M/s)^{u_{j-1}} \max_{b_{j-1}} [(b_j - b_{j-1} + 1)^{u_{j-1}} X(b_{j-1})^{d_j/n_{j-1}}] \right)$$

Da $n_{j-1} u_{j-1} = n_j d_j$, ist $1/u_{j-1} = n_{j-1}/(d_j n_j)$. Wir erhalten

$$= \frac{1}{n_j} \sum_{x \in A_j} \sum_{b_j=1}^s p_x(b_j) \log_2 \left(s^{n_{j-1}/d_j} (M/s)^{n_j} \max_{b_{j-1}} [(b_j - b_{j-1} + 1)^{n_j} X(b_{j-1})] \right) \\ = \frac{1}{n_j} \sum_{x \in A_j} \sum_{b_j=1}^s p_x(b_j) \log_2 \left(s^{r_j} (M/s)^{n_1 + \dots + n_j} \max_{\substack{b_1, \dots, b_{j-1} \\ 1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_j}} \left[b_1^{n_1} \prod_{i=2}^j (b_i - b_{i-1} + 1)^{n_i} \right] \right),$$

womit der Induktionsschritt gezeigt ist.

Wir verwenden nun die gezeigte Abschätzung für $j = k$ und erhalten mit $\mathbf{B}_x = s$ für $x \in A_k$

$$O_M(P) \leq s^r (M/s)^n \max_{\substack{b_1, \dots, b_{k-1} \\ 1 \leq b_1 \leq \dots \leq s}} \left[b_1^{n_1} \prod_{i=2}^k (b_i - b_{i-1} + 1)^{n_i} \right]$$

Führt man die Maximierung durch, erhält man

$$\begin{aligned} O_M(P) &\leq s^r (M/s)^n \left(\frac{n_1}{n} (s+k-1) \right)^{n_1} \cdots \left(\frac{n_k}{n} (s+k-1) \right)^{n_k} \\ &= s^r (M/s)^n (s+k-1)^n \frac{n_1^{n_1} \cdots n_k^{n_k}}{n^n}. \end{aligned}$$

Es gilt für jedes M , dass $O_M(P) \geq l(P) \binom{M}{n}$, denn die rechte Seite ist genau die Anzahl aller bijektiven ordnungserhaltenden Abbildungen von P auf jede n -elementige Teilmenge von M .

Damit gilt

$$\begin{aligned} l(P) &\leq O_M(P) \frac{n!}{M \cdot (M-1) \cdots (M-n+1)} \\ &\leq s^r M^n \left(1 + \frac{k-1}{s} \right)^n \frac{n_1^{n_1} \cdots n_k^{n_k}}{n^n} \frac{n!}{(M-n)^n} \\ &\leq s^r \left(1 + \frac{n}{M-n} \right)^n \left(1 + \frac{k-1}{s} \right)^n n_1! \cdots n_k!, \end{aligned}$$

wobei bei der letzten Abschätzung der Multinomialssatz verwendet wurde.

Mit Grenzwertbildung von M gegen unendlich erhalten wir für jedes beliebige s :

$$l(P) \leq s^r e^{(k-1)n/s} n_1! \cdots n_k!$$

Für $s = \lceil (k-1)n/r \rceil$ ist der obige Ausdruck minimal. Da $r \leq n$ und $k-1 \geq 1$ gilt $(k-1)n/r \leq s \leq 2(k-1)n/r$ und damit

$$l(P) \leq \left(\frac{2(k-1)n}{r} \right)^r e^r n_1! \cdots n_k!,$$

was zu zeigen war. □

Nun kommen wir zum Hauptsatz dieses Kapitels, welcher in [7] zu finden ist.

Satz 2.29. Für jede positive ganze Zahl t gilt:

$$l(Q^t) \leq \exp\left(2^t \frac{6 \ln t}{t}\right) \prod_{j=0}^t \binom{t}{j}!$$

Beweis. Wir wenden Satz 2.28 auf den Booleschen Verband $P = Q^t$ an, der offenbar dessen Voraussetzungen erfüllt. Es gilt $|Q^t| = n = 2^t$. Die Anzahl der Ränge ist $k = t + 1$, da genau die $(j - 1)$ -elementigen Mengen für $j = 1, \dots, t + 1$ den j -ten Rang A_j bilden. Damit gilt $|A_j| = n_j = \binom{t}{j-1}$ und $d_j = j - 1$. Wir erhalten für r folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=2}^k \frac{n_{i-1}}{d_i} = \sum_{i=2}^{t+1} \binom{t}{i-2} \frac{1}{i-1} = \sum_{i=0}^{t-1} \binom{t}{i} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=0}^{t-1} \frac{t!}{(i+1)!(t-i)!} = \\ &= \sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{t+1} \frac{(t+1)!}{(i+1)!(t-i)!} = \sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{t+1} \binom{t+1}{i+1} = \frac{1}{t+1} \sum_{i=1}^t \binom{t+1}{i} = \\ &= \frac{1}{t+1} \left(\sum_{i=0}^{t+1} \binom{t+1}{i} 1^i 1^{t+1-i} - 2 \right) = \frac{1}{t+1} (2^{t+1} - 2) = \frac{2n-2}{t+1} < \frac{2n}{t} \end{aligned}$$

Daher ist $1/r < t/2n$. Mit Satz 2.28 gilt nun für $t \geq 3$:

$$\begin{aligned} l(Q^t) &\leq \left(\frac{2tne}{r}\right)^r \binom{t}{0}! \binom{t}{1}! \dots \binom{t}{t}! \leq (et^2)^{\frac{2n}{t}} \prod_{j=0}^t \binom{t}{j}! \leq (t^3)^{\frac{2n}{t}} \prod_{j=0}^t \binom{t}{j}! \\ &= (e^{3 \ln t})^{\frac{2n}{t}} \prod_{j=0}^t \binom{t}{j}! = e^{\frac{6n \ln t}{t}} \prod_{j=0}^t \binom{t}{j}! \end{aligned}$$

Für $t \leq 2$ gilt offenbar

$$l(Q^t) = \prod_{j=0}^t \binom{t}{j}! \leq e^{\frac{6n \ln t}{t}} \prod_{j=0}^t \binom{t}{j}!,$$

womit der Satz bewiesen ist. □

Zum Abschluss dieses Kapitels behandeln wir noch einen Spezialfall einer gereihten Halbordnung. Satz 2.30, Lemma 2.31 sowie Satz 2.32 sind aus [7] entnommen.

Satz 2.30. *Sei P eine n -elementige gereichte halbgeordnete Menge mit zwei Rängen A und B , wobei jedes Element von A von genau u Elementen aus B überdeckt wird und jedes Element aus B genau d Elemente aus A überdeckt. Dann gilt:*

$$l(P) \leq n! \binom{d+u}{u}^{-\frac{n}{d+u}}$$

Für den Beweis benötigen wir noch ein Lemma und einen Satz. Mit folgendem Lemma wird ein praktischer Zusammenhang zwischen der Anzahl der linearen Erweiterungen $l(P)$ einer beliebigen halbgeordneten Menge P und der Anzahl $O_M(P)$ der ordnungserhaltenden Abbildungen von P in die M -elementige Kette C_M hergestellt.

Lemma 2.31. *Für jede halbgeordnete Menge P gilt:*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{O_M(P)}{M^n} = \frac{l(P)}{n!}$$

Satz 2.32. *Sei P eine n -elementige gereichte halbgeordnete Menge mit zwei Rängen A und B , wobei jedes Element von A von genau u Elementen aus B überdeckt wird und jedes Element aus B genau d Elemente aus A überdeckt. Sei M eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt*

$$O_M(P) \leq \left(\sum_{j=1}^M [(M-j+1)^u - (M-j)^u] j^d \right)^{\frac{n}{d+u}} = (O_M(K_{d,u}))^{\frac{n}{d+u}},$$

wobei $K_{d,u}$ jene gereichte halbgeordnete Menge mit zwei Rängen ist, in der jedes der d minimalen Elemente von jedem der u maximalen Elemente überdeckt wird.

Beweis. Im Folgenden seien $|A| = a$ und $|B| = b$. Weiters sei \mathbf{f} eine gleichverteilte Zufallsvariable auf der Menge aller ordnungserhaltenden Abbildungen von P nach C_M . Für eine Teilmenge X der Grundmenge von P sei \mathbf{f}_X die Einschränkung von \mathbf{f} auf X . Für $x \in A$ bezeichne $U(x)$ die Menge der Elemente aus B , die x überdecken und $\mathbf{Y}_x := \min \mathbf{f}_{U(x)}$. Ist $x \in A$ und $j \in [M]$, dann bezeichne $p_j(x)$ die Wahrscheinlichkeit, dass \mathbf{Y}_x gleich j ist. Es gilt

$$\log O_M(P) \stackrel{(2)}{=} H(\mathbf{f}) \stackrel{(1)}{=} H(\mathbf{f}_B) + H(\mathbf{f}_A | \mathbf{f}_B).$$

Markieren wir die Elemente von B mit $B = \{y_1, \dots, y_b\}$ und schreiben \mathbf{f}_i für $\mathbf{f}(y_i)$. Damit ist \mathbf{f}_B der Zufallsvektor $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_b)$. Auf diesen wenden wir Lemma 2.27 an. Für $x \in A$ bilden die Mengen $\{i : y_i \in U(x)\}$ eine Familie \mathcal{A} von Teilmengen von $[b]$. Jedes Element aus $[b]$ ist in genau (und daher mindestens) d Elementen aus \mathcal{A} enthalten. Wir erhalten

$$H(\mathbf{f}_B) \leq \frac{1}{d} \sum_{x \in A} H(\mathbf{f}_{U(x)}).$$

Da $H(\mathbf{Y}_x | \mathbf{f}_{U(x)}) = 0$, gilt

$$\begin{aligned} H(\mathbf{f}_{U(x)}) &= H(\mathbf{Y}_x + h(\mathbf{f}_{U(x)} | \mathbf{Y}_x)) \\ &= \sum_{j=1}^M p_x(j) \log_2 \frac{1}{p_x(j)} + \sum_{j=1}^M p_x(j) H(\mathbf{f}_{U(x)} | \mathbf{Y}_x = j). \end{aligned}$$

Die Anzahl der Werte, die $\mathbf{f}_{U(x)}$ unter der Bedingung $\mathbf{Y}_x = j$ annehmen kann, ist $(M - j + 1)^u - (M - j)^u$. Dies erklärt sich wie folgt: Die Anzahl an Möglichkeiten, den u Elementen aus $U(x)$ unabhängig voneinander Werte aus $\{j, j + 1, \dots, M\}$ zuzuordnen, ist $(M - j + 1)^u$. Damit mindestens eines dieser u Elemente den Wert j zugeordnet bekommt, muss man die Anzahl jener Zuordnungen abziehen, bei denen nur Werte aus $\{j + 1, \dots, M\}$ ausgewählt wurden. Diese Anzahl ist genau $(M - j)^u$. Mit (2) erhalten wir

$$H(\mathbf{f}_{U(x)} | \mathbf{Y}_x = j) \leq \log_2[(M - j + 1)^u - (M - j)^u].$$

Nun müssen wir noch den Term $H(\mathbf{f}_A | \mathbf{f}_B)$ nach oben abschätzen. Nach (7) ist dieser höchstens so groß wie

$$\begin{aligned} \sum_{x \in A} H(\mathbf{f}(x) | \mathbf{f}_B) &\stackrel{(4)}{\leq} \sum_{x \in A} H(\mathbf{f}(x) | \mathbf{Y}_x) = \sum_{x \in A} \sum_{j=1}^M p_x(j) H(\mathbf{f}(x) | \mathbf{Y}_x = j) = \\ &= \sum_{x \in A} \sum_{j=1}^M p_x(j) \sum_{i=1}^j \mathbb{P}(\mathbf{f}(x) = i | \mathbf{Y}_x = j) \log_2 \frac{1}{\mathbb{P}(\mathbf{f}(x) = i | \mathbf{Y}_x = j)} = \\ &= \sum_{x \in A} \sum_{j=1}^M p_x(j) \sum_{i=1}^j \frac{1}{j} \log_2 j = \sum_{x \in A} \sum_{j=1}^M p_x(j) \log_2 j \end{aligned}$$

Multiplizieren wir letzteren Term mit d/d , erhalten wir nach dem Herausheben insgesamt

$$\log_2 O_M(P) \leq \frac{1}{d} \sum_{x \in A} \sum_{j=1}^M p_x(j) \log_2 \left(\frac{[(M-j+1)^u - (M-j)^u] j^d}{p_x(j)} \right).$$

Wir wenden die Jensensche Ungleichung an und erhalten

$$\log_2 O_M(P) \leq \frac{1}{d} \sum_{x \in A} \log_2 \left([(M-j+1)^u - (M-j)^u] j^d \right).$$

Da $|A| = a$ ergibt dies

$$O_M(P) \leq \left(\sum_{j=1}^M [(M-j+1)^u - (M-j)^u] j^d \right)^{\frac{a}{d}}.$$

Weil $au = bd$ und damit $a/d = b/u = n/(d+u)$ ist dies der gewünschte Ausdruck. Der j -te Summand ist dabei genau die Anzahl an ordnungserhaltenden Abbildungen f von $K_{d,u}$ nach C_M , für die $\min_{y \in B} f(y)$ gleich j ist. Die Summe ist daher gleich $O_M(K_{d,u})$. □

Beweis. (Satz 2.30)

Für eine halbgeordnete Menge P mit den im Satz genannten Eigenschaften gilt aufgrund von Lemma 2.31 und Satz 2.32:

$$\begin{aligned} \frac{l(P)}{n!} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{O_M(P)}{M^n} \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{O_M(K_{d,u})^{n/(d+u)}}{M^n} = \\ &= \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{O_M(K_{d,u})}{M^{d+u}} \right)^{n/(d+u)} \\ &= \left(\frac{l(K_{d,u})}{(d+u)!} \right)^{n/(d+u)} = \left(\frac{d!u!}{(d+u)!} \right)^{n/(d+u)} = \binom{d+u}{u}^{-n/(d+u)} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.33. Sei n ein Vielfaches von $d+u$. Dann gilt für die halbgeordnete Menge, die eine Vereinigung von $n/(d+u)$ Kopien von $K_{d,u}$ ist, offenbar Gleichheit in in der Aussage von Satz 2.30. Deren Anzahl an linearen Erweiterungen ist daher exakt bestimmt.

2.4 Zweidimensionale Halbordnungen

Es gibt mehrere Dimensionsbegriffe für halbgeordnete Mengen, dazu zählen unter anderen die sphärische Dimension, die boolesche Dimension und die lokale Dimension. Der gängigste Dimensionsbegriff ist jedoch die sogenannte „Ordnungsdimension“ mit der wir uns in diesem Abschnitt befassen werden. Wir betrachten dabei im Speziellen halbgeordnete Mengen mit Ordnungsdimension zwei und deren lineare Erweiterungen. Für dieses Unterkapitel wurden hauptsächlich [18], [19], [30] und [42] verwendet.

2.4.1 Die Ordnungsdimension

Definition 2.34. Für eine halbgeordnete Menge $P = (M, \leq_P)$ ist eine *Realisierung* von P eine Menge $\mathcal{R} = \{\leq_{T_1}, \dots, \leq_{T_k}\}$ von linearen Erweiterungen von P , sodass $\leq_{T_1} \cap \dots \cap \leq_{T_k} = \leq_P$.

Bemerkung 2.35. Offenbar ist eine Menge $\mathcal{R} = \{\leq_{T_1}, \dots, \leq_{T_k}\}$ von linearen Erweiterungen von P genau dann eine Realisierung von $P = (M, \leq_P)$, wenn es für alle $a, b \in M$, die in P unvergleichbar sind, ein i gibt, sodass $a \leq_{T_i} b$ und ein j gibt, sodass $b \leq_{T_j} a$.

Definition 2.36. Die *Ordnungsdimension* (oder *Dushnik-Miller-Dimension*) einer halbgeordneten Menge P ist definiert als

$$\dim(P) = \min_{\mathcal{R}} |\mathcal{R}|,$$

wobei das Minimum über alle Realisierungen \mathcal{R} von P genommen wird.

Bemerkung 2.37. Nach Dilworth [17] ist die Ordnungsdimension einer halbgeordneten Menge höchstens so groß wie ihre Weite. Hiraguchi [23] zeigte, dass $\dim(P) \leq n/2$ für $n \geq 4$. Da außerdem die maximale Weite $n - 1$ ist, gibt es halbgeordnete Mengen mit einer Dimension größer als zwei nur für $n \geq 5$.

Bemerkung 2.38. Seien M eine Menge und $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von M . Dann bildet \mathcal{S} zusammen mit der Mengeninklusion bekanntlich eine halbgeordnete Menge. Ist eine Halbordnung \leq_P auf M gegeben, so gibt es immer eine zu $P = (M, \leq_P)$ isomorphe halbgeordnete Menge $S = (\mathcal{S}, \subseteq)$ mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Denn ein solches zu P isomorphes S lässt sich stets definieren durch $\mathcal{S} = \{\{x \in M : x \leq_P s\} : s \in M\}$.

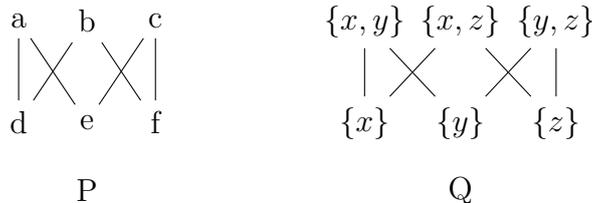
Definition 2.39. Eine *Darstellung* einer halbgeordneten Menge $P = (M, \leq_P)$ ist eine zu P isomorphe halbgeordnete Menge $S = (\mathcal{S}, \subseteq)$ mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(E)$ für eine Menge E .

Ist \mathcal{S} eine Potenzmenge und nicht nur Teilmenge einer solchen, ist uns durch folgenden Satz (siehe [30]) ihre Dimension bekannt.

Satz 2.40. *Sei M eine n -elementige Menge. Dann ist die Ordnungsdimension von $P = (\mathcal{P}(M), \subseteq)$ gleich n .*

Beweis. Wir bezeichnen mit \mathcal{M}'_a die Menge aller Teilmengen von M , die leer oder mit $\{a\}$ unvergleichbar sind. Mit \mathcal{M}''_a bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von M , die echte Obermengen von $\{a\}$ sind. Statten wir diese beiden Mengensysteme mit der Mengeninklusion aus, die wir der Einfachheit halber immer mit \subseteq bezeichnen, erhalten wir die zwei halbgeordneten Mengen $P' = (\mathcal{M}'_a, \subseteq)$ und $P'' = (\mathcal{M}''_a, \subseteq)$. Wir wählen nun für jedes $a \in M$ je eine feste lineare Erweiterung L'_a von P' und L''_a von P'' . Nun definieren wir uns für jedes $a \in M$ die Kette $L'_a < \{a\} < L''_a$. Dabei handelt es sich um eine lineare Erweiterung von P , die wir L_a nennen. Denn jedes $A \in \mathcal{M}''_a$ ist echte Obermenge von $\{a\}$ und kann daher keine Teilmenge von $\{a\}$, einer zu $\{a\}$ unvergleichlichen Menge oder der leeren Menge sein. Und da jedes $B \in \mathcal{M}'_a$ leer oder unvergleichlich zu $\{a\}$ ist, kann $\{a\}$ keine Teilmenge von B sein. Für $a \neq b$ ist $L_a \neq L_b$. Denn es ist $\{b\} <_{L_a} \{a\}$ aber $\{a\} <_{L_b} \{b\}$. Damit ist die Mächtigkeit von $\{L_a : a \in M\}$ gleich n . Weiters ist $\{L_a : a \in M\}$ eine Realisierung von P . Um das zu sehen seien A und B Teilmengen von M , die unvergleichlich sind. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $a \notin B$ und ein $b \in B$ mit $b \notin A$. Daraus folgt $B <_{L_a} \{a\} <_{L_a} A$ und $A <_{L_b} \{b\} <_{L_b} B$. Damit gilt nun $\dim(P) \leq n$. Wir behaupten, dass auf der anderen Seite jede Realisierung von P aus mindestens n linearen Erweiterungen bestehen muss. In jeder Realisierung muss es für $a, b \in M$ mit $a \neq b$ eine lineare Erweiterung geben mit $\{a\}^c < \{a\}$ sowie eine mit $\{b\}^c < \{b\}$. Angenommen, es gäbe eine lineare Erweiterung von P , in der sowohl $\{a\}^c < \{a\}$ als auch $\{b\}^c < \{b\}$ gilt. Da $\{a\} \subset \{b\}^c$, folgt $\{a\}^c < \{a\} < \{b\}^c < \{b\}$, im Widerspruch zu $\{b\} \subset \{a\}^c$. Somit ist die Ordnungsdimension von P mindestens n , womit die Aussage gezeigt ist. □

Beispiel 2.41. Die unten abgebildeten halbgeordneten Mengen P und Q sind offenbar isomorph.



Eine Kette L ist genau dann eine lineare Erweiterung von Q , wenn L , um das kleinste Element \emptyset und das größte Element $\{x, y, z\}$ erweitert, eine lineare Erweiterung von $(\mathcal{P}(\{x, y, z\}), \subseteq)$ ist. Nach Satz 2.40 ist Q und damit auch P dreidimensional.

Wir werden im Folgenden halbgeordnete Mengen P mit $\dim(P) = 2$ charakterisieren. Dazu benötigen wir noch ein paar Begriffe.

Definition 2.42. Zwei halbgeordnete Mengen P und Q mit der selben Grundmenge M heißen zueinander *konjugiert*, falls je zwei unterschiedliche Elemente a und b aus M entweder durch P oder durch Q in Relation stehen.

Wir nennen eine halbgeordnete Menge P *reversierbar*, falls es eine zu P konjugierte halbgeordnete Menge Q gibt.

Eine lineare Erweiterung \leq_T einer halbgeordneten Menge P heißt *separierend*, falls es Elemente a, b, c gibt, sodass $a <_T b <_T c$, $a <_P c$ und b in P weder mit a noch mit c in Relation steht.

Definition 2.43. Ist \leq_P eine Halbordnung auf M und \geq_P die zugehörige Umkehrrelation, daher $x \leq_P y$ genau dann, wenn $y \geq_P x$, so bezeichnen wir die zu $P = (M, \leq_P)$ umgekehrte halbgeordnete Menge mit $P^{-1} := (M, \geq_P)$.

Lemma 2.44 und Satz 2.45 sind in [18] zu finden.

Lemma 2.44. *Ist $P = (M, \leq_P)$ reversierbar mit konjugierter halbgeordneter Menge $Q = (M, \leq_Q)$, so sind $A_1 = (M, \leq_P \cup \leq_Q)$ und $A_2 = (M, \leq_P \cup \geq_Q)$ lineare Erweiterungen von P .*

Beweis. Wir bezeichnen $\leq_P \cup \leq_Q$ mit \leq_{A_1} . Da \leq_{A_1} Obermenge von \leq_P ist, brauchen wir nur zu zeigen, dass \leq_{A_1} eine Totalordnung ist. Sei nun $a \leq_{A_1} b \leq_{A_1} c$. Falls $a \leq_P b \leq_P c$ oder $a \leq_Q b \leq_Q c$ folgt $a \leq_{A_1} c$, da P und Q transitiv sind. Ist $a \leq_P b \leq_Q c$ und angenommen $c \leq_P a$, folgt wegen $a \leq_P b$, dass $c \leq_P b$, was einen Widerspruch liefert, da $b \leq_Q c$ und P und Q zueinander konjugiert sind. Nehmen wir an, dass $c \leq_Q a$, folgt wegen $b \leq_Q c$, dass $b \leq_Q a$, im Widerspruch zu $a \leq_P b$. Der Fall $a \leq_Q b \leq_P c$ ist analog. Damit ist \leq_{A_1} transitiv. Als Vereinigung von reflexiven Halbordnungen ist auch \leq_{A_1} reflexiv. Da P und Q zueinander konjugiert sind, ist \leq_{A_1} antisymmetrisch und total. Insgesamt ist A_1 daher eine lineare Erweiterung von \leq_P . Der Beweis für A_2 ist analog. □

Der folgende Satz liefert eine Charakterisierung für zweidimensionale halbgeordnete Mengen. Dabei ist zu beachten, dass eine halbgeordnete Menge genau dann eindimensional ist, wenn sie total geordnet ist.

Satz 2.45. *Folgende Eigenschaften einer halbgeordneten Menge P sind äquivalent:*

- (i) P ist reversierbar
- (ii) P hat eine nicht-separierende lineare Erweiterung
- (iii) $\dim(P) \leq 2$
- (iv) Es existiert eine Darstellung von P durch Intervalle auf einer totalgeordneten Menge.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass (ii) aus (i) folgt. Sei also $P = (M, \leq_P)$ eine reversierbare halbgeordnete Menge mit konjugierter $Q = (M, \leq_Q)$. Nach Lemma 2.44 ist $A := (M, \leq_A) := (M, \leq_P \cup \leq_Q)$ eine lineare Erweiterung von P . Seien a, b und c beliebige Elemente aus M , sodass $a <_A b <_A c$. Ist b in P mit a und c unvergleichbar, folgt $a <_Q b$ und $b <_Q c$, da P und Q zueinander konjugiert sind. Mit der Transitivität von Q erhalten wir $a <_Q c$ und somit $a \not<_P c$. Folglich ist A eine nicht-separierende lineare Erweiterung von P .

Nun zeigen wir, dass (iii) aus (ii) folgt. Dazu sei $A = (M, \leq_A)$ eine nicht separierende lineare Erweiterung von $P = (M, \leq_P)$. Wir definieren $Q := (M, \leq_Q) := (M, (\leq_A \setminus \leq_P) \cup \{(a, a) : a \in M\})$. Es gelte $a <_Q b$ und $b <_Q c$. Dann ist b in P weder mit a noch mit c vergleichbar. Da $\leq_Q \subseteq \leq_A$ und \leq_A transitiv ist, gilt nun auch $a <_A c$. Es ist $a \not<_P c$, da andernfalls b in A von a und c separiert werden würde. Daher ist $a <_Q c$ und Q somit transitiv. Weiters ist Q offenbar auch reflexiv und antisymmetrisch und damit eine halbgeordnete Menge. Nach Definition sind P und Q daher zueinander konjugierte halbgeordnete Mengen und nach Lemma 2.44 ist $B := (M, \leq_P \cup \geq_Q)$ eine lineare Erweiterung von P . Es ist $A = (M, \leq_P \cup \leq_Q)$ und somit wird P von A und B realisiert, folglich ist $\dim(P) \leq 2$.

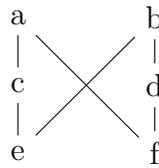
Als nächstes zeigen wir, dass (iv) aus (iii) folgt. Seien also P eine höchstens zweidimensionale halbgeordnete Menge und A und B lineare Erweiterungen, die P realisieren. Sei $B^* = (M^*, \leq_{B^*})$ eine zu B^{-1} isomorphe Totalordnung mit zu M disjunkter Grundmenge M^* . Wir bezeichnen das Bild von $a \in M$ unter dem Isomorphismus mit $a^* \in M^*$. Sei $C := A.B^*$ die serielle Komposition von A und B^* . Es ist daher C eine totalgeordnete Menge mit Grundmenge

$M \cup M^*$, deren „untere“ Hälfte aus B^* und deren „obere“ Hälfte aus A besteht. Wir bezeichnen das Intervall $[a^*, a]$ in C mit I_a . Wir behaupten, dass die Abbildung von P nach $((I_a)_{a \in M}, \subseteq)$, die jedem $a \in M$ das Intervall I_a zuordnet, ein Isomorphismus ist. Offenbar handelt es sich um eine Bijektion. Gilt $a <_P b$, so gilt, dass $a <_B b$ und damit $b <_{B^{-1}} a$ und $b^* <_{B^*} a^*$. Da dann auch $a <_A b$ gilt, haben wir insgesamt $b^* <_C a^* <_C a <_C b$. Folglich ist $I_a \subset I_b$. Gilt $a \not<_P b$, folgt im Falle, dass $a >_P b$ analog $I_a \supset I_b$ und damit $I_a \not\subset I_b$. Falls a und b in P unvergleichlich sind, folgt, da P zweidimensional ist, o.B.d.A. $a <_A b$ und $a >_B b$. Das impliziert nun $a^* <_C b^* <_C a <_C b$, womit ebenso $I_a \not\subset I_b$ gilt. Somit haben wir eine Darstellung von P mit Intervallen auf einer totalgeordneten Menge gefunden.

Zuletzt zeigen wir, dass (i) aus (iv) folgt. P hat daher eine Darstellung durch Intervalle auf einer totalgeordneten Menge C . Das zu $a \in M$ gehörige Intervall in C bezeichnen wir mit I_a . Sind zwei verschiedene Elemente a und b aus M in P unvergleichbar, so sind die in C kleinsten Elemente in I_a und I_b unterschiedlich. Denn wären sie gleich, wäre das eine Intervall im anderen enthalten. Wir definieren uns eine Relation \leq_Q auf M wie folgt. Es sei $a \leq_Q b$ genau dann, wenn a und b in P unvergleichbar sind und in C das kleinste Element in I_a nicht nach dem kleinsten Element in I_b kommt. Es ist schnell überprüft, dass $Q = (M, \leq_Q)$ eine halbgeordnete Menge ist, die offenbar konjugiert zu P ist.

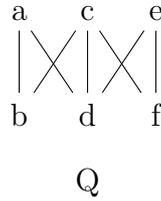
□

Beispiel 2.46. Wir betrachten folgende sechs-elementige halbgeordnete Menge P :



P

Eine Realisierung von P besteht aus den beiden linearen Erweiterungen $\leq_A = fdebca$ und $\leq_B = ecfadb$. Damit ist P zweidimensional. Zu P isomorph ist etwa die halbgeordnete Menge, die aus den Intervallen $[x^*, x]$ der Kette $b^*d^*a^*f^*c^*e^*fdebca$ besteht. Eine nicht-separierende lineare Erweiterung von P ist \leq_A . Eine zu P konjugierte, und damit ebenfalls zweidimensionale, halbgeordnete Menge Q ist durch folgendes Hasse Diagramm gegeben:



Korollar 2.47. *Eine halbgeordnete Menge P ist genau dann höchstens zweidimensional, wenn das Komplement ihres Vergleichsgraphen $C(P)$ ein Vergleichsgraph ist.*

Beweis. Nach Satz 2.45 ist $\dim(P) \leq 2$ genau dann, wenn P reversierbar ist. Offenbar ist P aber genau dann reversierbar, wenn das Komplement von $C(P)$ ein Vergleichsgraph ist. □

Satz 2.48. *Sei P eine zweidimensionale halbgeordnete Menge und \bar{P} eine zu P konjugierte halbgeordnete Menge. Dann gilt:*

$$l(P)l(\bar{P}) \geq n!$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn P seriell-parallel ist.

Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [42, Korollar 12], da dessen Länge über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen würde. Eine interessante Funktion, die für den Beweis des Satzes verwendet wird, sei hier noch in Kürze erwähnt. Für einen ungerichteten Graphen G sei μ definiert als

$$\mu(G) = \max_{A \in \mathcal{C}(G)} \sum_{v \in A} \mu(G \setminus \{v\}),$$

wobei $\mathcal{C}(G)$ die Menge der maximalen Cliques von G ist. Eine Clique eines Graphen ist eine Menge von Knoten, die alle paarweise adjazent sind. Eine Clique ist maximal, wenn jede echte Obermenge der Clique keine Clique ist.

Es stellt sich heraus, dass die Anzahl der linearen Erweiterungen einer beliebigen halbgeordneten Menge P gleich dem μ -Wert des Komplements des Vergleichsgraphen von P ist, dass also gilt:

$$l(P) = \mu((C(P))^c)$$

2.4.2 Die schwache Bruhat-Ordnung

Für natürlich markierte zweidimensionale halbgeordnete Mengen gibt es einen schönen Zusammenhang zu der symmetrischen Gruppe S_n der Permutationen. Für das Studium solcher halbgeordneten Mengen und deren linearen Erweiterungen erweist sich die sogenannte schwache Bruhat-Ordnung als nützlich.

Sei $P = ([n], \leq_P)$ eine natürlich markierte zweidimensionale halbgeordnete Menge. Dann ist die Identität $\text{id} \in S_n$ offenbar eine lineare Erweiterung von P . Wir verwenden dabei die Identifizierung von linearen Erweiterungen mit Permutationen nach Bemerkung 1.10. Nun gibt es genau eine Permutation $\pi \in S_n$, sodass $\{\text{id}, \pi\}$ eine Realisierung von P ist.

Ist andererseits eine beliebige Permutation $\pi \in S_n$ gegeben, so definiert

$$x <_P y \Leftrightarrow x <_{\mathbb{N}} y \wedge \pi^{-1}(x) <_{\mathbb{N}} \pi^{-1}(y)$$

eine natürlich markierte halbgeordnete Menge P , die genau für $\pi = \text{id}$ eindimensional und für $\pi \neq \text{id}$ zweidimensional ist. Die Transitivität, Reflexivität und Antisymmetrie werden direkt von $<_{\mathbb{N}}$ geerbt.

Damit haben wir eine Eins-zu-eins-Beziehung zwischen natürlich markierten zweidimensionalen halbgeordneten Mengen mit n Elementen und den Permutationen der Länge n ungleich der Identität. Wir schreiben statt P deshalb auch P_π , um darauf hinzuweisen, dass zu P die Permutation π gehört.

Definition 2.49. Ein *Fehlstand* oder eine *Inversion* einer Permutation σ ist ein Tupel (i, j) mit $i < j$ und $\sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)$. Die Menge aller Fehlstände von σ bezeichnen wir mit $I(\sigma)$.

Eine *sortierende Transposition* von σ bei i und j mit $i < j$ ist eine Permutation $\sigma' = \text{sort}(\sigma, i, j)$ die gleich σ ist, mit der Ausnahme, dass falls $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt, ist $\sigma'(i) = \sigma(j)$ und $\sigma'(j) = \sigma(i)$.

Analog ist eine *unsortierende Transposition* von σ bei i und j mit $i < j$ eine Permutation $\sigma' = \text{unsort}(\sigma, i, j)$ die gleich σ ist, mit der Ausnahme, dass falls $\sigma(i) < \sigma(j)$ gilt, ist $\sigma'(i) = \sigma(j)$ und $\sigma'(j) = \sigma(i)$.

Eine *sortierende (unsortierende) Nachbar-Transposition* ist eine sortierende (unsortierende) Transposition mit $j = i + 1$.

Bemerkung 2.50. Unabhängig von σ ist $(\sigma(j), \sigma(i))$ ein Fehlstand von $\text{unsort}(\sigma, i, j)$, aber kein Fehlstand von $\text{sort}(\sigma, i, j)$.

Definition 2.51. Die *schwache Bruhat-Ordnung* ist eine Halbordnung \leq_{wB} auf S_n , für die $\tau \leq_{wB} \sigma$ genau dann gilt, wenn τ aus σ durch eine Folge von sortierenden Nachbar-Transpositionen hervorgeht.

Es gibt eine weitere Charakterisierung der schwachen Bruhat-Ordnung. Lemma 2.52 und Satz 2.53 sind in [19] zu finden.

Lemma 2.52. *Jeder Fehlstand von τ ist Fehlstand von σ genau dann, wenn $\tau \leq_{wB} \sigma$.*

Beweis. Gilt $\tau \leq_{wB} \sigma$, so ist τ aus sortierenden Nachbar-Transpositionen entstanden. Da sortierende Transpositionen die Anzahl der Fehlstände nur gleich lassen oder um eins reduzieren können, gilt $I(\tau) \subseteq I(\sigma)$. Ist jeder Fehlstand von τ Fehlstand von σ , so können wir $\tau(1)$ in σ durch sukzessive Nachbar-Transpositionen an die erste Stelle (wo anfangs $\sigma(1)$ war) bringen. Alle Elemente in σ , die in der Tupelschreibweise links von $\tau(1)$ sind, müssen kleiner als $\tau(1)$ sein. Denn wäre ein solches Element x größer als $\tau(1)$, so wäre $(\tau(1), x)$ ein Fehlstand von σ , aber keiner von τ . Damit sind alle diese Nachbar-Transpositionen sortierend. Selbiges Verfahren wendet man anschließend auf $\tau(2)$ an, um es an die zweite Stelle zu bringen. Auch diese Nachbar-Transpositionen müssen aus demselben Grund sortierend sein. Dies führt man bis $\tau(n)$ fort, um τ zu erhalten. □

Satz 2.53. *Die Menge $L(P_\pi)$ der linearen Erweiterungen einer natürlich markierten zweidimensionalen halbgeordneten Menge P_π ist das von π erzeugte Hauptordnungsideal in der schwachen Bruhat-Ordnung.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass σ genau dann eine lineare Erweiterung von P_π ist, wenn $\sigma \leq_{wB} \pi$. Nach Lemma 2.52 ist Letzteres äquivalent zu $I(\sigma) \subseteq I(\pi)$. Wir zeigen daher, dass σ genau dann eine lineare Erweiterung von π ist, wenn $I(\sigma) \subseteq I(\pi)$. Sei daher $I(\sigma) \subseteq I(\pi)$ und $i <_{P_\pi} j$. Damit gilt $\pi^{-1}(i) <_{\mathbb{N}} \pi^{-1}(j)$ und $i <_{\mathbb{N}} j$ nach Definition von π . Folglich ist $(i, j) \notin I(\pi)$ und damit nach Annahme $(i, j) \notin I(\sigma)$. Nun muss aber $\sigma^{-1}(i) <_{\mathbb{N}} \sigma^{-1}(j)$ gelten, womit σ eine lineare Erweiterung von P_π ist. Sei nun $I(\sigma) \not\subseteq I(\pi)$ und (i, j) ein Fehlstand von σ , aber keiner von π . Dann gilt $\pi^{-1}(i) <_{\mathbb{N}} \pi^{-1}(j)$ und $i <_{\mathbb{N}} j$. Daraus folgt $i <_{P_\pi} j$. Da aber $\sigma^{-1}(i) >_{\mathbb{N}} \sigma^{-1}(j)$ gilt, ist σ keine lineare Erweiterung von P_π . □

2.5 Rechteckige Halbordnungen

Wir befassen uns nun mit Halbordnungen, die die Form eines Rechtecks haben. Für dieses Unterkapitel wurde an Literatur [2] sowie [20] verwendet.

Definition 2.54. Wir nennen eine halbgeordnete Menge, die im Hasse-Diagramm als gekipptes Rechteck von $s \cdot t$ Elementen dargestellt werden kann, *rechteckige halbgeordnete Menge*.

Beispiel 2.55. Betrachten wir die rechteckige Halbordnung auf $\{1, \dots, 12\}$, die durch folgendes Hasse-Diagramm gegeben ist:

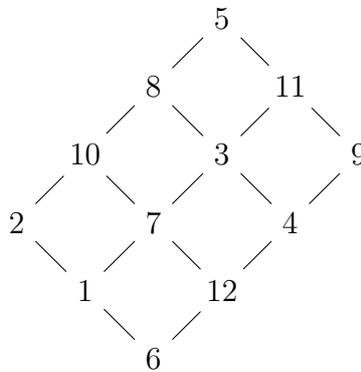


Abbildung 6: Hasse-Diagramm einer rechteckigen Halbordnung

Wir bezeichnen Elementfolgen, die auf einer Gerade von oben rechts nach links unten liegen als *Spine*, und Elementfolgen, die von links oben nach rechts unten verlaufen als *Zähne*. Dabei markieren wir die Spines von links oben nach rechts unten und die Zähne von rechts oben nach links unten. Beispielsweise besteht die erste Spine in Abbildung 6 aus den Elementen 5,8,10 und 2 und der zweite Zahn aus 8,3 und 4. Die Länge der Spines, also die Anzahl ihrer Elemente bezeichnen wir mit s , die Länge der Zähne mit t . In unserem Beispiel sind $s = 4$ und $t = 3$. Die Namensgebung kommt von den *Kamm-Halbordnungen*. Eine solche sehen wir in Abbildung 7.

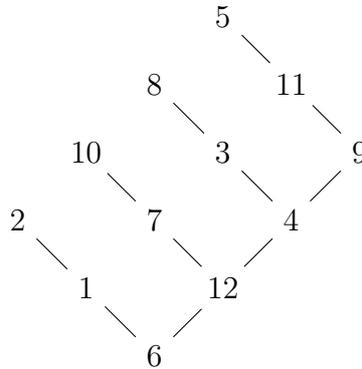


Abbildung 7: Hasse-Diagramm einer Kamm-Halbordnung

Diese Halbordnung hat vier Zähne und ihre Spine bzw. ihr Rückgrat besteht aus den Elementen 6,12,4 und 9.

Bevor wir uns der Frage widmen, wie viele lineare Erweiterungen eine rechteckige Halbordnung hat, braucht es noch folgende Definition sowie die „Hakenlängenformel“ für Standard-Young-Tableaus.

Definition 2.56. Für eine monoton fallende Komposition $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ von n , es gilt daher $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$ und $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$, ist das *Ferrers-Diagramm* eine Darstellung von n leeren Kästchen, die in k Zeilen angeordnet sind. Dabei ist die Anzahl der Kästchen in der i -ten Zeile λ_i .

Ein *Young-Tableau* ist ein Ferrers-Diagramm, bei dem die n Kästchen mit den Zahlen $1, \dots, n$ aufgefüllt sind. Dabei ist jede der $n!$ Anordnungen zulässig.

Ein *Standard-Young-Tableau* ist ein Young-Tableau bei dem die Zahlen sowohl zeilen- als auch spaltenweise aufsteigend geordnet sind.

Die *Hakenlänge* $h_{i,j}$ des Kästchens mit Zeilenindex i und Spaltenindex j ist die Summe der Anzahl von Kästchen rechts davon und der Anzahl von Kästchen darunter, plus eins. Bezeichnen wir mit λ'_j die Anzahl der Kästchen in Spalte j , können wir die Hakenlänge schreiben als:

$$h_{i,j} = \lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1$$

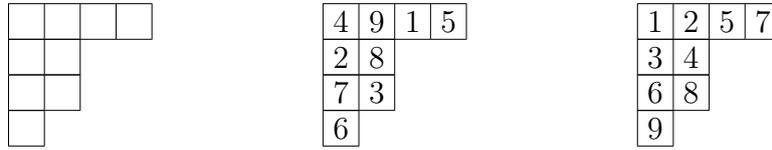


Abbildung 8: Das Ferrers-Diagramm, ein Young-Tableau und ein Standard-Young-Tableau zur Komposition $(4, 2, 2, 1)$

Folgende Hakenlängenformel für Standard-Young-Tableaus benötigen wir, um die Anzahl der linearen Erweiterungen von rechteckigen Halbordnungen zu bestimmen. Ein ausführlicher Beweis findet sich etwa in [37].

Satz 2.57. Für jedes Ferrers-Diagramm ist die Anzahl der zugehörigen Standard-Young-Tableaus gegeben durch $\frac{n!}{\prod h_{i,j}}$, wobei das Produkt über alle Indizes geht, für die es ein entsprechendes Kästchen im Ferrers-Diagramm gibt.

Der folgende wichtige Satz über die Anzahl der linearen Erweiterungen beliebiger rechteckiger Halbordnungen ist in [2] zu finden.

Satz 2.58. Für jede rechteckige halbgeordnete Menge P mit Spinelänge s und Zahlänge t ist die Anzahl ihrer linearen Erweiterungen

$$l(P) = (st)! \prod_{j=1}^t \frac{(j-1)!}{(s+j-1)!}.$$

Beweis. Sei P eine beliebige rechteckige halbgeordnete Menge mit Spinelänge s und Zahlänge t . Wir zeigen, dass es eine Bijektion zwischen $L(P)$ und der Menge der Standard-Young-Tableaus zur Komposition $\underbrace{(t, \dots, t)}_s =: t^s$ gibt.

Sei \leq_T eine lineare Erweiterung von P und w die nach Bemerkung 1.8 zugehörige natürliche Markierung. Ersetzen wir im Hasse-Diagramm von P jedes Element x mit $w(x)$ und drehen das Diagramm um 135° im Uhrzeigersinn, erhalten wir ein Young-Tableau der Form t^s . Es handelt sich dabei um ein Standard-Young-Tableau, denn die aufsteigend sortierten Zähne werden durch die Drehung zu Zeilen und die aufsteigend sortierten Spines werden zu Spalten. Zwei verschiedene lineare Erweiterungen ergeben offensichtlich zwei verschiedene Standard-Young-Tableaus und jedes Standard-Young-Tableau der Form t^s liefert durch die umgekehrte Vorgehensweise eine lineare Erweiterung einer rechteckigen halbgeordneten Menge mit Zahlänge t und Spinelänge s .

Nach Satz 2.57 ist daher $l(P)$ gleich $(st)!$ dividiert durch das Produkt über alle Hakenlängen von Kästchen aus einem Ferrers-Diagramm der Form t^s . Wenn wir dieses Ferrers-Diagramm spaltenweise von rechts nach links und von unten nach oben durchlaufen, erhalten wir für dieses Produkt:

$$\begin{aligned}
 \prod_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq t}} h_{i,j} &= 1 \cdot 2 \cdots s \cdot 2 \cdot 3 \cdots (s+1) \cdots t \cdot (t+1) \cdots (t+s-1) = \\
 &= \frac{s!}{0!} \cdot \frac{(s+1)!}{1!} \cdots \frac{(s+t-1)!}{(t-1)!} = \prod_{j=0}^{t-1} \frac{(s+j)!}{j!} = \prod_{j=1}^t \frac{(s+j-1)!}{(j-1)!}
 \end{aligned}$$

□

Korollar 2.59. Für jede rechteckige halbgeordnete Menge P mit Spinelänge 2 und Zahlänge n (oder umgekehrt) ist die Anzahl ihrer linearen Erweiterungen gleich der Catalan-Zahl C_n :

$$l(P) = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Beweis. Mit $s = 2$ und $t = n$ erhalten wir aus Satz 2.58:

$$l(P) = (2n)! \prod_{j=1}^n \frac{(j-1)!}{(j+1)!} = (2n)! \frac{1}{(n+1)!n!} = (2n)! \frac{1}{n!n!} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

□

2.5.1 Mustervermeidende lineare Erweiterungen

Nachdem wir nun die Anzahl aller linearen Erweiterungen beliebiger rechteckiger Halbordnungen bestimmt haben, möchten wir uns jetzt der Frage widmen, wie viele lineare Erweiterungen es von speziellen rechteckigen Halbordnungen auf $[st]$ gibt, die gewisse „Muster“ vermeiden.

Für gegebene Spinelänge s und Zahlänge t gibt es acht „natürliche“ rechteckige Halbordnungen auf $[st]$. Wir bezeichnen die entsprechenden halbgeordneten Mengen mit $NW_{s,t}$, $NO_{s,t}$, $ON_{s,t}$, $OS_{s,t}$, $SO_{s,t}$, $SW_{s,t}$, $WS_{s,t}$ und $WN_{s,t}$. Die Abkürzungen stehen für die Himmelsrichtungen. Bei der halbgeordneten Menge $NO_{s,t}$ beginnt beispielsweise die Markierung in der nördlichen Ecke und verläuft nach Osten. Als ersten Zahn hat sie daher $1, \dots, t$ von der ersten Spine bis zur letzten, im zweiten Zahn $t+1, \dots, 2t$ von der ersten Spine bis zur letzten und allgemein im j -ten Zahn $(j-1)t+1, \dots, jt$ für $j \in \{1, \dots, s\}$ ebenfalls von der ersten Spine bis zur letzten. Die Markierung der halbgeordneten Menge $WN_{s,t}$ beginnt in der westlichen Ecke und verläuft nach Norden.

Ihre erste Spine ist $1, \dots, s$ vom letzten Zahn bis zum ersten und ihre j -te Spine ist $(j - 1)s + 1, \dots, js$ für $j \in \{1, \dots, t\}$ vom letzten Zahn bis zum ersten. In Abbildung 9 sehen wir die halbgeordnete Menge $\text{NO}_{4,3}$.

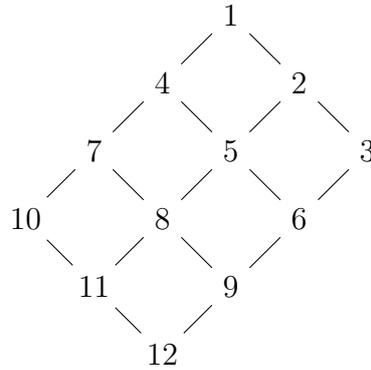


Abbildung 9: Hasse-Diagramm der halbgeordneten Menge $\text{NO}_{4,3}$

Definition 2.60. Seien $\pi \in S_n$ und $\sigma \in S_k$ Permutationen. Wir sagen, π *enthält* σ , falls es in der Tupelschreibweise von π eine Teilfolge gibt, deren relative Ordnung die selbe ist wie von σ . Wir sagen π *vermeidet* σ , falls es keine solche Teilfolge gibt. Man sagt auch, dass π das *Muster* σ enthält bzw. vermeidet.

Beispiel 2.61. Die Permutation $(6, 4, 2, 5, 3, 1) =: 642531$ beinhaltet die Teilfolge 645 und enthält daher das Muster 312. Sie enthält keine Teilfolge mit relativer Ordnung 123, daher vermeidet sie das Muster 123.

Bemerkung 2.62. Jede halbgeordnete Menge P mit Grundmenge $[n]$ ist mit $w = \text{id}$ trivialerweise eine markierte halbgeordnete Menge. Nach Bemerkung 1.10 können wir lineare Erweiterungen von rechteckigen Halbordnungen auf $[st]$ daher als Permutationen $\pi \in S_{st}$ auffassen. Man kann sich nun die Frage stellen, welche bzw. wie viele lineare Erweiterungen einer rechteckigen halbgeordneten Menge gewisse Muster vermeiden. Wir bezeichnen die Menge der linearen Erweiterungen von P , die sämtliche Permutationen $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ vermeiden, mit $L(P(\sigma_1, \dots, \sigma_k))$ und deren Mächtigkeit mit $l(P(\sigma_1, \dots, \sigma_k))$.

Definition 2.63. Ist $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ eine Permutation, so sind

$$\pi^r = (\pi(n), \dots, \pi(1))$$

die zu π *reverse* Permutation und

$$\pi^c = (n - \pi(1) + 1, \dots, n - \pi(n) + 1)$$

die zu π *komplementäre* Permutation.

Wir werden uns im Folgenden mit mustervermeidenden linearen Erweiterungen der acht natürlichen rechteckigen Halbordnungen befassen. Seien dazu $k \in \mathbb{Z}^+$ und $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}^+$ fest gewählt. Will man für alle acht natürlichen Halbordnungen für alle Spinelängen s und Zahlängen t die jeweilige Anzahl an linearen Erweiterungen bestimmen, die die Muster $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ mit $\sigma_j \in S_{i_j}$ vermeiden, so ist es ausreichend, dies nur für NO_{st} und ON_{st} zu tun. Durch vertikale Spiegelung der Hasse-Diagramme erhält man nämlich $\text{NO}_{s,t} = \text{NW}_{t,s}$, $\text{SO}_{s,t} = \text{SW}_{t,s}$, $\text{ON}_{s,t} = \text{WN}_{t,s}$ und $\text{OS}_{s,t} = \text{WS}_{t,s}$. Weiters ist die Mächtigkeit der Menge der linearen Erweiterungen einer halbgeordneten Menge, die $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ vermeiden, gleich der Mächtigkeit der Menge der linearen Erweiterungen der durch horizontale Spiegelung erhaltenen halbgeordneten Menge, die $\sigma_1^r, \dots, \sigma_k^r$ vermeiden. Insgesamt gelten daher folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} l(\text{NO}_{s,t}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)) &= l(\text{NW}_{t,s}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)) = \\ &= l(\text{SW}_{s,t}(\sigma_1^r, \dots, \sigma_k^r)) = l(\text{SO}_{t,s}(\sigma_1^r, \dots, \sigma_k^r)) \\ \\ l(\text{ON}_{s,t}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)) &= l(\text{WN}_{t,s}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)) = \\ &= l(\text{WS}_{s,t}(\sigma_1^r, \dots, \sigma_k^r)) = l(\text{OS}_{t,s}(\sigma_1^r, \dots, \sigma_k^r)) \end{aligned}$$

Sind $l(\text{NO}_{s,t}(\sigma_1, \dots, \sigma_k))$ und $l(\text{ON}_{s,t}(\sigma_1, \dots, \sigma_k))$ für alle s, t und $\sigma_j \in S_{i_j}$ bekannt, so auch $l(\text{OS}_{s,t}(\sigma_1, \dots, \sigma_k))$, $l(\text{SO}_{s,t}(\sigma_1, \dots, \sigma_k))$, $l(\text{SW}_{s,t}(\sigma_1, \dots, \sigma_k))$, $l(\text{WS}_{s,t}(\sigma_1, \dots, \sigma_k))$, $l(\text{WN}_{s,t}(\sigma_1, \dots, \sigma_k))$ und $l(\text{NW}_{s,t}(\sigma_1, \dots, \sigma_k))$.

Mit folgendem praktischen Lemma aus [2] können wir auch die Zahl der zu untersuchenden vermiedenen Muster reduzieren.

Lemma 2.64. *Für jede rechteckige halbgeordnete Menge P und für beliebige Permutationen $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ gilt:*

$$l(P(\sigma_1, \dots, \sigma_k)) = l(P(\sigma_1^{rc}, \dots, \sigma_k^{rc}))$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage für $\text{ON}_{s,t}$, für allgemeine rechteckige halbgeordnete Mengen ist der Beweis analog.

Es gilt offenbar, dass die Permutation π genau dann die Permutation σ vermeidet, wenn π^{rc} die Permutation σ^{rc} vermeidet. Wir behaupten nun, dass für jede lineare Erweiterung π von $\text{ON}_{s,t}$ auch die Permutation π^{rc} eine lineare Erweiterung von $\text{ON}_{s,t}$ ist. Da rc auf jeder symmetrischen Gruppe eine Bijektion ist, wäre damit das Lemma bewiesen. Wir stellen rc nun als

Verknüpfung von Bijektionen auf Mengen von linearen Erweiterungen dar. Eine vertikale Spiegelung des Hasse-Diagramms von $ON_{s,t}$ ergibt das Hasse-Diagramm von $WN_{t,s}$. Da diese beiden halbgeordneten Mengen dieselben sind, ist die Bijektion von der Menge der linearen Erweiterungen von $ON_{s,t}$ auf die Menge der linearen Erweiterungen von $WN_{t,s}$ schlicht die Identität. Eine horizontale Spiegelung des Hasse-Diagramms von $WN_{t,s}$ gibt das Hasse-Diagramm von $WS_{s,t}$. $L(WN_{t,s})$ wird dabei mit der Bijektion r auf $L(WS_{s,t})$ abgebildet. Ersetzt man jedes Element j von $WS_{s,t}$ mit seinem Komplement $st - j + 1$ erhält man wieder die ursprüngliche halbgeordnete Menge $ON_{s,t}$. Die zugehörige Bijektion von $L(WS_{s,t})$ auf $L(ON_{s,t})$ ist c . Insgesamt ist also $c \circ r \circ id = rc$ wie gewünscht eine Bijektion von $L(ON_{s,t})$ auf sich selbst. \square

2.5.2 Vermeidung von Mustern der Länge drei

Wir untersuchen nun, wie viele lineare Erweiterungen es von $ON_{s,t}$ und $NO_{s,t}$ gibt, die konkrete Muster der Länge drei vermeiden. Sämtliche Sätze des Abschnittes 2.5.2 sind aus [2]. Zuerst betrachten wir $ON_{s,t}$.

Satz 2.65. *Für $s \geq 1$ und $t \geq 1$ gilt $l(ON_{s,t}(213)) = 1$.*

Beweis. Jede lineare Erweiterung \leq_T von $ON_{s,t}$, für die es ein $i \in [s-1]$, sowie ein Element a im i -ten Zahn und ein Element b im $(i+1)$ -ten Zahn gibt, sodass $a \leq_T b$, enthält 213. Denn für das Element im $(i+1)$ -ten Zahn und der letzten Spine, $it + 1$, gilt $it + 1 \leq_T a \leq_T y$ und $a \leq_N it + 1 \leq_N b$. Daher müssen in einer 213-vermeidenden linearen Erweiterung alle Elemente im $i+1$ -ten Zahn vor allen Elementen im i -ten Zahn vorkommen. Die einzige solche lineare Erweiterung ist $st - t + 1, st - t + 2, \dots, st, st - 2t + 1, \dots, st - t, \dots, 1, 2, \dots, t$. \square

Satz 2.66. *Für $s \geq 2$ und $t \geq 2$ gilt:*

(i) $l(ON_{1,1}(231)) = 1$

(ii) $l(ON_{1,t}(231)) = 1$

(iii) $l(ON_{s,1}(231)) = 1$

(iv) $l(ON_{s,t}(231)) = 0$

Beweis. Der erste Punkt ist trivial. Die einzigen linearen Erweiterungen von $l(ON_{1,t})$ respektive $l(ON_{s,1})$, nämlich $1, 2, \dots, t$ und $t, t - 1, \dots, 1$ vermeiden offenbar 231.

Für $s \geq 2$ und $t \geq 2$ sehen wir, dass für beliebiges $i \in [s - 1]$ das Element im i -ten Zahn in der ersten Spine, it , in jeder linearen Erweiterung nach allen Elementen im $(i + 1)$ -ten Zahn auftreten muss. Insbesondere muss gelten: $(i + 1)t - 1 \leq_T (i + 1)t \leq_T it$. Daher enthält jede lineare Erweiterung 231.

□

Satz 2.67. Für $s \geq 3$ und $t \geq 1$ gilt:

$$(i) \ l(\text{ON}_{1,t}(321)) = 1$$

$$(ii) \ l(\text{ON}_{2,t}(321)) = C_t$$

$$(iii) \ l(\text{ON}_{s,t}(321)) = 0$$

Beweis. Für $s = 1$ ist die einzige lineare Erweiterung $1, 2, \dots, t$, und diese vermeidet offenbar 321.

Nehmen wir für $s = 2$ an, dass es eine lineare Erweiterung gibt, die 321 enthält. Für jede Teilfolge abc dieser linearen Erweiterung mit dieser relativen Ordnung muss gelten, dass a im zweiten Zahn und b im ersten Zahn liegt, damit $a \geq_{\mathbb{N}} c$ erfüllt ist. Da $b \geq_{\mathbb{N}} c$, gilt für z aber nun $z \leq_T y$ im Widerspruch zur Annahme. Daher ist $l(\text{ON}_{2,t}(321)) = l(\text{ON}_{2,t})$ und nach Lemma 2.59 gilt $l(\text{ON}_{2,t}(321)) = C_t$.

Für $s \geq 3$ ist $2t + 1, t + 1, 1$ in jeder linearen Erweiterung enthalten, daher gilt $l(\text{ON}_{s,t}(321)) = 0$.

□

Satz 2.68. Für $s \geq 1$ und $t \geq 3$ gilt:

$$(i) \ l(\text{ON}_{s,1}(123)) = 1$$

$$(ii) \ l(\text{ON}_{s,2}(123)) = C_s$$

$$(iii) \ l(\text{ON}_{s,t}(123)) = 0$$

Beweis. Für $t = 1$ ist die einzige lineare Erweiterung $s, s - 1, \dots, 1$ und diese vermeidet 123.

Für $t = 2$ sehen wir, dass jede lineare Erweiterung 123 vermeidet. Sei dafür a ein Element in einer beliebigen linearen Erweiterung aus dem j -ten Zahn. Ist a in der ersten Spine, sind alle Elemente rechts von a in der linearen Erweiterung aus dem ersten bis $(j - 1)$ -ten Zahn und daher kleiner als a . Ist a in der zweiten Spine, ist das einzige Element größer als a , das rechts in der

linearen Erweiterung vorkommt, $a + 1$. Daher ist $l(\text{ON}_{s,2}(123)) = l(\text{ON}_{s,2})$ und nach Lemma 2.59 gilt $l(\text{ON}_{s,2}(123)) = C_s$.

Für $t \geq 3$ sind die Elemente 1,2,3 in dieser Reihenfolge in jeder linearen Erweiterung enthalten. □

Aufgrund von von Lemma 2.64 haben wir nun $l(\text{ON}_{s,t}(\sigma))$ für alle $\sigma \in S_3$ bestimmt. Kombiniert man die Resultate, erhält man die Anzahl der linearen Erweiterungen von $\text{ON}_{s,t}$, die jede beliebige Menge von Permutationen der Länge drei vermeiden.

Nun behandeln wir $\text{NO}_{s,t}$.

Satz 2.69. *Für $s \geq 1$ und $t \geq 1$ gilt*

$$l(\text{NO}_{s,t}(213)) = t^{s-1}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis mit Induktion nach s .

Für $s = 1$ gibt es nur eine lineare Erweiterung, nämlich $t, t - 1, \dots, 1$, und diese vermeidet 213. Daher ist $l(\text{NO}_{1,t}(213)) = 1 = t^0$.

Sei $S = a_{st}, \dots, a_1$ eine lineare Erweiterung aus $l(\text{NO}_{s,t}(213))$. Wir erhalten daraus lineare Erweiterungen aus $l(\text{NO}_{s+1,t}(213))$, indem wir die Elemente $(s + 1)t, \dots, st + 1$, in dieser Reihenfolge, so in S einfügen, dass es sich um eine lineare Erweiterung von $\text{NO}_{s+1,t}$ handelt, die 213 vermeidet. Dazu muss $(s + 1)t$ vor a_{st} eingereiht werden, da es nun das kleinste Element im Sinne der Halbordnung ist. Jedes der restlichen Elemente $b \in \{(s + 1)t - 1, \dots, st + 1\}$ muss entweder auch vor a_{st} oder direkt danach eingefügt werden. Andernfalls ergibt a_{st}, k, b mit $k <_{\mathbb{N}} a_{st}$ ein Muster der Form 213. Da die Elemente $(s + 1)t - 1, \dots, st + 1$ in der linearen Erweiterung in dieser Reihenfolge auftreten müssen, gibt es t Möglichkeiten, sie einzufügen. Daher ist $l(\text{NO}_{s+1,t}(213)) = l(\text{NO}_{s,t}(213)) \cdot t$. Nach Induktionsannahme ist $l(\text{NO}_{s,t}(213)) = t^{s-1}$, also gilt $l(\text{NO}_{s+1,t}(213)) = t \cdot t^{s-1} = t^s$. □

Beispiel 2.70. Die lineare Erweiterung 653421 aus $\text{NO}_{2,3}(213)$ kann auf drei Arten zu einer linearen Erweiterung aus $\text{NO}_{3,3}(213)$ ergänzt werden: 968753421, 986753421 und 987653421. Die unterstrichenen Elemente sind hier die eingefügten.

Satz 2.71. *Es gilt $l(\text{NO}_{1,1}(321)) = 1$, $l(\text{NO}_{2,1}(321)) = 1$, $l(\text{NO}_{1,2}(321)) = 1$ und $l(\text{NO}_{s,t}(321)) = 0$ für $s \geq 2$ und $t \geq 2$.*

Beweis. Die ersten drei halbgeordneten Mengen haben nur je eine lineare Erweiterung und diese vermeiden klarerweise Muster, die länger als sie selbst

sind. Für $s \geq 2$ und $t \geq 2$ gilt für jede lineare Erweiterung a_{st}, \dots, a_1 , dass $a_{st} = st$ und $a_1 = 1$. Daher ist für jedes $b \in \{a_{st-1}, \dots, a_2\}$ die Teilfolge a_{st}, b, a_1 ein Muster der Form 321. □

Satz 2.72. Für $s \geq 1$ und $t \geq 1$ gilt $l(\text{NO}_{s,t}(312)) = 1$.

Beweis. Für jede lineare Erweiterung von $\text{NO}_{s,t}$ ist st das erste Element in der Tupelschreibweise. In der Ordnung der natürlichen Zahlen ist dies das größte hier auftretende Element, es entspricht also einer „3“. Eine 312 vermeidende lineare Erweiterung muss daher durchgängig absteigend sein. Diese Eigenschaft hat nur die lineare Erweiterung $st, st - 1, \dots, 1$. □

Wiederum mithilfe von Lemma 2.64 haben wir nun $l(\text{NO}_{s,t}(\sigma))$ für alle $\sigma \in S_3$ bestimmt, bis auf eine Ausnahme: $\sigma = 123$.

Man zeigt ähnlich wie in Satz 2.68, dass $\text{NO}_{s,1}(123) = 1$, $\text{NO}_{1,t}(123) = 1$, $\text{NO}_{s,2}(123) = C_s$ und $\text{NO}_{2,t}(123) = C_t$. Für $s \geq 3$ und $t \geq 3$ gibt es zwar für kleines s und t Ergebnisse, allgemein ist es aber noch ein offenes Problem.

Damit $l(\text{NO}_{s,t}(\sigma_1, \dots, \sigma_k))$ für jede Menge von Mustern $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ aus $S_3 \setminus \{123\}$ bestimmt ist, fehlt noch folgender Satz.

Satz 2.73. Für $s \geq 1$ und $t \geq 2$ gilt:

- (i) $l(\text{NO}_{s,1}(213, 132)) = 1$
- (ii) $l(\text{NO}_{s,t}(213, 132)) = 2^{s-1}$

Beweis. Der erste Punkt ist klar, den zweiten zeigen wir mit Induktion nach s .

Für $s = 1$ ist die einzige lineare Erweiterung $t, t - 1, \dots, 1$. Diese vermeidet sowohl 213 als auch 132.

Sei $S = a_{st}, \dots, a_1$ eine lineare Erweiterung aus $\text{NO}_{s,t}(213, 132)$. Wir fügen die Elemente $(s+1)t, \dots, st+1$ in S so ein, dass ein Element aus $\text{NO}_{s+1,t}(213, 132)$ entsteht. Dazu darf höchstens ein Element nach a_{st} eingefügt werden, da sonst $a_{st}, st+2, st+1$ ein Muster der Form 132 ergibt. Die so entstehenden linearen Erweiterungen, deren $t+1$ führende Elemente entweder $(s+1)t, (s+1)t - 1, \dots, a_{st}$ oder $(s+1)t, (s+1)t - 1, \dots, st+2, a_{st}, st+1$ sind, vermeiden auch 213. Denn die Elemente danach sind in der natürlichen Ordnung kleiner, können daher keiner „3“ entsprechen. Die führenden $t+1$ Elemente enthalten offenbar auch kein Muster der Form 213. Daher hat $\text{NO}_{s+1,t}(213, 132)$ genau doppelt so viele Elemente wie $\text{NO}_{s,t}(213, 132)$. □

3 Geometrische Techniken zur Bestimmung von $l(P)$

In diesem Kapitel stellen wir einen gut anschaulichen Zusammenhang zwischen Halbordnungen bzw. deren linearen Erweiterungen und gewissen Polytopen im \mathbb{R}^n her, der für die Bestimmung der Anzahl $l(P)$ verwendet werden kann. Es wurden hierfür [6], [8], [44] und [46] verwendet.

Für jede endliche halbgeordnete Menge $P = (\{x_1, \dots, x_n\}, \leq_P)$ betrachten wir den n -dimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^P aller Funktionen $f : P \rightarrow \mathbb{R}$. Zusammen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \sum_{x \in P} f(x)g(x)$ ist dieser ein euklidischer Vektorraum. Wir können daher über konvexe Teilmengen davon und deren Volumina sprechen.

3.1 Das Ordnungspolytop

Definition 3.1. Für jede halbgeordnete Menge P ist das *Ordnungspolytop* $\mathcal{O}(P)$ genau jene Teilmenge von \mathbb{R}^P , deren Elemente folgende Bedingungen erfüllen:

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad \text{für alle } x \in P \quad (1)$$

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{falls } x \leq_P y \quad (2)$$

Bemerkung 3.2. Wir können jede Funktion $f \in \mathbb{R}^P$ vermöge $f(x_i) = y_i$ mit genau einem Punkt $(y_1, \dots, y_n) = y \in \mathbb{R}^n$ identifizieren. Weiters erkennen wir, dass $\mathcal{O}(P)$ ein konvexes Polytop ist, da die Menge durch (1) beschränkt ist und es sich bei (1) und (2) nur um lineare Ungleichungen handelt.

Wir können Bedingung (1) durch folgende ersetzen:

$$0 \leq f(x) \quad \text{falls } x \text{ minimales Element ist} \quad (1')$$

$$f(x) \leq 1 \quad \text{falls } x \text{ maximales Element ist}$$

Denn ist $x \in P$, gibt es ein minimales Element x_1 und ein maximales Element x_2 , sodass aufgrund von (2) die Ungleichungskette $0 \leq f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \leq 1$, also (1) gilt.

Des Weiteren können wir wegen der Transitivität von P (2) ersetzen durch

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{falls } x \text{ von } y \text{ überdeckt wird} \quad (2')$$

Sei $y_1 \leq_T \dots \leq y_n$ eine lineare Erweiterung von P . Dann sind alle $f \in \mathbb{R}^P$, die die Ungleichungskette $0 \leq f(y_1) \leq \dots \leq f(y_n) \leq 1$ erfüllen, Elemente von $\mathcal{O}(P)$. Die Menge all dieser Funktionen bilden ein n -dimensionales, also volldimensionales, Simplex, daher ist auch $\mathcal{O}(P)$ n -dimensional. Jede $(n - 1)$ -dimensionale Seitenfläche des Ordnungspolytops ist die Menge aller $f \in \mathcal{O}(P)$, die genau eine der folgenden Gleichungen erfüllen:

$$f(x_0) = 0 \quad x_0 \text{ ist minimales Element} \quad (3a)$$

$$f(x_0) = 1 \quad x_0 \text{ ist maximales Element} \quad (3b)$$

$$f(x) = f(y) \quad y \text{ überdeckt } x \quad (3c)$$

3.2 Das Kettenpolytop

Wir definieren nun ein weiteres zu P gehöriges Polytop.

Definition 3.3. Für jede halbgeordnete Menge P sei das *Kettenpolytop* $\mathcal{C}(P)$ genau jene Teilmenge von \mathbb{R}^P , deren Elemente folgende Bedingungen erfüllen:

$$0 \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in P \quad (5)$$

$$g(y_1) + \dots + g(y_k) \leq 1 \quad \text{für jede Kette } y_1 \leq_P \dots \leq_P y_k \text{ in } P \quad (6)$$

Bemerkung 3.4. Das Kettenpolytop $\mathcal{C}(P)$ ist ebenso aufgrund der Linearität der Ungleichungen und der Beschränktheit ein konvexes Polytop. Es enthält das n -dimensionale, also volldimensionale, Simplex $\{g \in \mathbb{R}^P : g(x) \geq 0 \forall x \in P, g(x_1) + \dots + g(x_n) \leq 1\}$, daher ist $\mathcal{C}(P)$ n -dimensional. Wir können wegen (5) die Bedingung (6) vereinfachen zu

$$g(y_1) + \dots + g(y_k) \leq 1 \quad \text{für maximale Ketten } y_1 \leq_P \dots \leq_P y_k \text{ in } P \quad (6')$$

Eine *maximale* Kette K in P ist eine Kette, für die es keine Kette in P gibt, die echte Obermenge von K ist. Gleichheit in (5) und (6') definiert genau die Seitenflächen des Kettenpolytops. Die Anzahl der Seitenflächen ist daher gleich n plus die Anzahl der maximalen Ketten in P .

Der folgende Satz ist von Stanley aus [46].

Satz 3.5. *Die Eckpunkte des Kettenpolytops sind genau die Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_A$ von Antiketten A in P . Die Anzahl der Eckpunkte ist daher genau gleich der Anzahl an Antiketten in P .*

Beweis. Sei A eine beliebige Antikette von P . Es gilt $0 \leq \mathbb{1}_A$ und für jede maximale Kette $y_1 \leq_P \dots \leq_P y_k$ ist $\mathbb{1}_A(y_1) + \dots + \mathbb{1}_A(y_k) \leq 1$, also ist

$\mathbb{1}_A \in \mathcal{C}(P)$. Da $0 \leq g(x) \leq 1$ für alle $g \in \mathcal{C}(P)$ und $x \in P$ und $\text{Im}(\mathbb{1}_A) \in \{0, 1\}$ ist $\mathbb{1}_A$ ein Eckpunkt.

Sei nun $g \in \mathcal{C}(P)$ keine Indikatorfunktion einer Antikette aus P . Betrachten wir die Menge $Q = \{x \in P : 0 < g(x) < 1\}$. Wir behaupten Q ist nicht leer. Nehmen wir an Q wäre leer. Dann gilt $\text{Im}(g) \in \{0, 1\}$. Ist g die Nullfunktion, so ist $g = \mathbb{1}_\emptyset$ und da die leere Menge eine Antikette ist, ist dies ein Widerspruch. Ist g nicht die Nullfunktion, so sind die Elemente aus $g^{-1}(1)$ wegen (6) paarweise unvergleichlich also ist $g^{-1}(1)$ eine Antikette A und somit $g = \mathbb{1}_A$, ein Widerspruch. Sei nun Q_1 die Menge aller minimalen Elemente aus Q . Da Q nicht leer ist, ist auch Q_1 nicht leer. Mit Q_2 bezeichnen wir die Menge aller minimalen Elemente aus $Q \setminus Q_1$. Für $P \neq \emptyset$ ist Q_2 genau dann die leere Menge wenn P eine Antikette ist. Wir definieren:

$$\epsilon = \min_{x \in Q_1 \cup Q_2} \{g(x), 1 - g(x)\}$$

$$g_1, g_2 : P \rightarrow \mathbb{R} :$$

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & x \notin Q_1 \cup Q_2 \\ g(x) + \epsilon & x \in Q_1 \\ g(x) - \epsilon & x \in Q_2 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} g(x) & x \notin Q_1 \cup Q_2 \\ g(x) - \epsilon & x \in Q_1 \\ g(x) + \epsilon & x \in Q_2 \end{cases}$$

Wir behaupten $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(P)$. Es gilt offenbar $g_1(x) \geq 0$ und $g_2(x) \geq 0$ für alle $x \in P$. Sei x_1, \dots, x_k eine Kette in P . Sind alle x_i aus $P \setminus \{Q_1 \cup Q_2\}$, gilt $g_j(x_1) + \dots + g_j(x_k) = g(x_1) + \dots + g(x_k) \leq 1$ für $j \in \{1, 2\}$. Nach der Definition von Q_1 kann höchstens ein Element x_a der Kette aus Q_1 sein. Wenn so ein Element existiert gibt es zwei Fälle, entweder es gibt genau ein Element der Kette $x_b \in Q_2$ oder kein Kettenelement ist aus Q_2 . Im ersten Fall erhalten wir für $j \in \{1, 2\}$

$$\sum_{i=1}^k g_j(x_i) = \sum_{i=1}^k g(x_i) + \epsilon - \epsilon \leq 1$$

Ist kein Kettenelement aus Q_2 , so ist x_a das einzige Element der Kette, das in Q liegt. Daher gilt $g(x_i) \in \{0, 1\}$ für $i \neq a$. Wegen (6) und $0 < g(x_a) < 1$ folgt $g(x_i) = 0$ für alle $i \neq a$ und somit

$$\sum_{i=1}^k g_j(x_i) = g(x_a) + \epsilon \leq 1.$$

Es gilt also $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(P)$. Da $g_1 \neq g_2$ und $g = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$ ist g kein Eckpunkt von $\mathcal{C}(P)$. □

Definition 3.6. Für jede halbgeordnete Menge P sei die *Transferabbildung* $\phi : \mathcal{O}(P) \rightarrow \mathcal{C}(P)$ folgendermaßen definiert:

$$(\phi f)(x) = \min_y \{f(x) - f(y) : y \triangleleft_P x\}.$$

Der nächste Satz ist in [46] zu finden.

Satz 3.7. Die Transferabbildung ϕ ist eine stetige, stückweise lineare Bijektion von $\mathcal{O}(P)$ auf $\mathcal{C}(P)$.

Beweis. Die Stetigkeit folgt unmittelbar aus der Definition von ϕ . Für jede lineare Erweiterung $y_1 \leq_T \dots \leq_T y_n$ von P bildet die Menge $\{f \in \mathbb{R}^P : 0 \leq f(y_1) \leq \dots \leq f(y_n) \leq 1\}$ ein Simplex. Man überprüft leicht, dass ϕ auf jedem Simplex linear ist und da die Vereinigung dieser so definierten Simplexe $\mathcal{O}(P)$ überdecken, ist die Transferabbildung stückweise linear. Sei $\psi : \mathcal{C}(P) \rightarrow \mathcal{O}(P)$ mit der Abbildungsvorschrift

$$(\psi g)(x) = \max\{g(y_1) + \dots + g(y_k) : y_1 \leq_P \dots \leq_P y_k = x\}$$

Wir zeigen, dass ψ die Inverse von ϕ ist. Sei $f \in \mathcal{O}(P)$.

$$\psi(\phi(f(a))) = \max\{\phi(f(x_1)) + \dots + \phi(f(x_k)) : x_1 <_P \dots <_P x_k = a\} =$$

$$\max\{\min_{y_1} \{f(x_1) - f(y_1) : y_1 \triangleleft_P x_1\} + \dots +$$

$$+ \min_{y_k} \{f(x_k) - f(y_k) : y_k \triangleleft_P x_k\} : x_1 <_P \dots <_P x_k = a\}$$

Um zu sehen, dass $\psi(\phi(f(a))) \leq f(a)$, sei $x_1 <_P \dots <_P x_k = a$ eine beliebige Kette und seien y_1, \dots, y_k die Elemente, an denen die Minima angenommen werden. Falls x_1 ein minimales Element in P ist, ist y_1 wegzulassen. Es gilt nun $f(y_i) \geq f(x_{i-1})$ für $i = 2, \dots, k$. Die Summe der Minima ist daher

$$\sum_{i=1}^k f(x_i) - f(y_i) = f(x_1) - f(y_1) + \sum_{i=2}^k f(x_i) - f(y_i) \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq f(x_1) - f(y_1) + \sum_{i=2}^k f(x_i) - f(x_{i-1}) = f(x_1) - f(y_1) + f(x_k) - f(x_1) \leq \\
 &\leq f(x_k) = f(a)
 \end{aligned}$$

Da die Kette $x_1 <_P \dots <_P x_k = a$ beliebig war, gilt diese Abschätzung auch für jene Kette, an der das Maximum angenommen wird, daher gilt $\psi(\phi(f(a))) \leq f(a)$.

Wählen wir immer jenes x_i , sodass $f(x_i)$ maximal ist und wenn mehrere maximal sind, ein beliebiges davon, für $i = k - 1, \dots, 1$ in dieser Reihenfolge und so, dass x_1 ein minimales Element ist. Für diese Kette ist die Summe der Minima

$$\begin{aligned}
 f(x_1) + \sum_{i=2}^k f(x_i) - f(y_i) &= f(x_1) + \sum_{i=2}^k f(x_i) - f(x_{i-1}) = \\
 &= f(x_1) + f(x_k) - f(x_1) = f(x_k) = f(a)
 \end{aligned}$$

Daher wird das Maximum mit dieser Kette angenommen und wir haben $\psi(\phi(f(a))) = f(a)$. Wir zeigen nun $\phi(\psi(g(a))) = g(a)$ für beliebiges $a \in P$ und $g \in \mathcal{C}(P)$.

$$\phi(\psi(g(a))) = \min_b \{ \psi(g(a)) - \psi(g(b)) : b <_P a \} =$$

$$\min_b \{ \max \{ g(x_1) + \dots + g(x_k) : x_1 <_P \dots <_P x_k = a \} - \max \{ g(y_1) + \dots + g(y_l) : y_1 <_P \dots <_P y_l = b \} : b <_P a \}$$

Sei $x_1 <_P \dots <_P x_k = a$ so, dass $g(x_1) + \dots + g(x_k)$ maximal ist. Dann wird das obige Minimum offensichtlich mit $y_1 = x_1, \dots, y_l = b = x_{k-1}$ angenommen und wir haben $\phi(\psi(g(a))) = g(x_k) = g(a)$. Damit ist ϕ eine Bijektion mit Umkehrabbildung ψ . □

Das folgende Lemma ist ebenfalls aus [46].

Lemma 3.8. *Seien $f \in \mathcal{O}(P)$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$mf(x) \in \mathbb{N} \quad \forall x \in P \Leftrightarrow m\phi(f(x)) \in \mathbb{N} \quad \forall x \in P$$

Beweis. Es gelte $mf(x) \in \mathbb{N}$. Dann ist $m\phi(f(x)) = m \cdot \min \{ f(x) - f(y) : y <_P x \} = \min \{ mf(x) - mf(y) : y <_P x \} \in \mathbb{N}$. Für $m\phi(f(x)) \in \mathbb{N}$ folgt $mf(x) = m\psi(\phi(f(x))) = \max \{ \sum_{i=1}^k m\phi(f(x_i)) : x_1 <_P \dots <_P x_k = x \} \in \mathbb{N}$. □

Definition 3.9. Sei \mathcal{P} ein d -dimensionales konvexes Polytop im \mathbb{R}^n , dessen Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben. Für $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ definieren wir

$$i(\mathcal{P}, m) = |m\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n|$$

Daher ist $i(\mathcal{P}, m)$ die Anzahl an Elementen $x \in \mathcal{P}$, für die mx in \mathbb{Z}^n liegt. Es handelt sich dabei um ein Polynom in m vom Grad d , das sogenannte *Ehrhart-Polynom*. Wenn $d = n$ ist dessen Führungskoeffizient gleich dem Volumen des Polytops \mathcal{P} . Weitere Informationen und Erläuterungen dazu gibt es in [45].

Betrachten wir die Menge aller ordnungserhaltenden Abbildungen $\eta : P \rightarrow \{1, \dots, m\}$, wobei die Zielmenge mit der Einschränkung der gewöhnlichen Totalordnung auf \mathbb{N} versehen ist. Die Anzahl all dieser Abbildungen η bezeichnen wir mit $\Omega(P, m)$. Es stellt sich heraus, dass $\Omega(P, m)$ ein Polynom in m ist. Der folgende Satz ist in [44] zu finden.

Satz 3.10. $\Omega(P, m)$ ist ein Polynom in m vom Grad n mit Führungskoeffizienten $\frac{l(P)}{n!}$.

Beweis. Bezeichnen wir die Anzahl aller surjektiven ordnungserhaltenden Abbildungen $\xi : P \rightarrow \{1, \dots, s\}$ mit e_s . Es gibt daher e_s ordnungserhaltende Abbildungen von P auf eine beliebige s -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, m\}$. Die Anzahl der s -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, m\}$ ist bekanntlich $\binom{m}{s}$. Damit erhalten wir

$$\Omega(P, m) = \sum_{s=1}^n e_s \binom{m}{s} = e_1 m + \frac{e_2}{2!} m(m-1) + \dots + \frac{e_n}{n!} m(m-1) \cdots (m-n+1)$$

Da die e_i von m unabhängig sind, erhalten wir nach dem Ausmultiplizieren der Klammern und anschließendem Herausheben der Potenzen von m ein Polynom in m vom Grad n . Am obigen letzten Summanden erkennen wir, dass $\frac{e_n}{n!}$ der Führungskoeffizient ist. e_n ist die Anzahl der surjektiven ordnungserhaltenden Abbildungen von P auf $\{1, \dots, n\}$. Diese Abbildungen müssen wegen der gleichen Mächtigkeit auch injektiv sein. Daher ist e_n die Anzahl der natürlichen Markierungen von P und die ist nach Bemerkung 1.8 gleich $l(P)$. □

Der nächste Satz ist aus [46].

Satz 3.11. Für das Ordnungs-Polynom und die Ehrhart-Polynome von $\mathcal{O}(P)$ und $\mathcal{C}(P)$ gilt:

$$i(\mathcal{O}(P), m) = i(\mathcal{C}(P), m) = \Omega(P, m + 1)$$

Beweis. Definitionsgemäß ist $i(\mathcal{O}(P), m)$ gleich der Anzahl an ordnungserhaltenden Abbildungen $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, für die $0 \leq f(x) \leq 1$ und $mf(x) \in \mathbb{Z}$ gilt. Diese Anzahl ist aber gleich der Anzahl an ordnungserhaltenden Abbildungen $mf : P \rightarrow \{0, \dots, m\}$. Somit gilt also $i(\mathcal{O}(P), m) = \Omega(P, m + 1)$. Aus Lemma 3.8 folgt, dass $i(\mathcal{O}(P), m) = i(\mathcal{C}(P), m)$. □

Korollar 3.12. *Das Ordnungspolytop und das Kettenpolytop haben dasselbe Volumen $l(P)/n!$. Es gilt daher für jede beliebige halbgeordnete Menge P :*

$$l(P) = n! \cdot \text{vol}(\mathcal{O}(P)) = n! \cdot \text{vol}(\mathcal{C}(P))$$

4 Zufällige Halbordnungen

In diesem Kapitel betrachten wir Halbordnungen, die durch Zufallsexperimente entstanden sind. Aus einer (bei uns meist endlichen) Menge an Halbordnungen wird eine ausgewählt, die Auswahlwahrscheinlichkeit muss im Allgemeinen nicht für alle Halbordnungen gleich sein. Unser Ziel ist auch hier, Aussagen über die Anzahl an linearen Erweiterungen zu machen. Da die Anzahl an linearen Erweiterungen der von uns betrachteten zufälligen halbgeordneten Mengen sich von Realisierung zu Realisierung unterscheidet, macht es nur Sinn, sich zu überlegen, wie viele lineare Erweiterungen zu erwarten sind. Die Anzahl der linearen Erweiterungen einer zufälligen halbgeordneten Menge ist daher eine Zufallsvariable, deren Erwartungswert in diesem Kapitel abgeschätzt oder sogar genau ermittelt wird. Auch der Frage, wie die Anzahlen an linearen Erweiterungen verteilt sind beziehungsweise wie stark diese um den Erwartungswert konzentriert sind, wird nachgegangen.

4.1 Die geometrische zufällige halbgeordnete Menge $P_k(n)$

Die von uns als erstes betrachtete zufällige halbgeordnete Menge ist $P_k(n)$, welche den Vorteil hat, dass sie auf zwei verschiedene Weisen realisiert werden kann. Bei der Untersuchung dieser halbgeordneten Menge ist es manchmal besser, die geometrische Definition zu verwenden und manchmal ist es besser die rein ordnungstheoretische Definition zu verwenden. Sämtliche Sätze, Lemmata und Korollare des Abschnitts 4.1 sind aus [8] von Brightwell.

Definition 4.1. Die n -elementige k -dimensionale *zufällige halbgeordnete Menge* $P_k(n)$ ist durch die folgenden äquivalenten Definitionen gegeben:

- (1) Aus dem k -dimensionalen Einheitswürfel $[0, 1]^k \subset \mathbb{R}^k$ werden n zufällige Punkte ausgewählt. Die komponentenweise Ordnung dieser ausgewählten Punkte, daher $(a_1, \dots, a_k) < (b_1, \dots, b_k)$ genau dann, wenn $a_i < b_i$ für alle i , ist die Halbordnung von $P_k(n)$.
- (2) Aus der Menge der $n!$ linearen Ordnungen auf $[n]$ werden genau k zufällig ausgewählt. Der Durchschnitt dieser gewählten linearen Ordnungen ist die Halbordnung von $P_k(n)$.

Beispiel 4.2. Sei $k = 3$ und $n = 5$. Eine mögliche Realisierung der Halbordnung wäre wie folgt: Aus dem dreidimensionalen Einheitswürfel werden die fünf Punkte $(0, 0, 0)$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ sowie $(1, 1, 1)$ ausgewählt.

Das Hasse-Diagramm der entsprechenden halbgeordneten Menge ist in Abbildung 10 zu sehen.

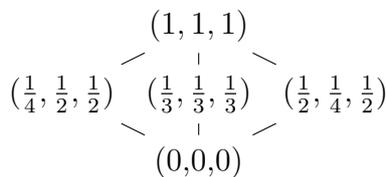


Abbildung 10: Hasse-Diagramm einer Realisierung von $P_3(5)$

Die selbe Halbordnung erhält man, wenn etwa die drei linearen Ordnungen 12345, 13245 und 12435 aus den $5! = 120$ linearen Ordnungen der Menge $\{1, \dots, 5\}$ gewählt werden und man deren Durchschnitt bildet.

Lemma 4.3. *Seien π_1, \dots, π_{k+1} lineare Ordnungen auf $[n]$. Dann ist der Durchschnitt P_{k+1} dieser $k + 1$ linearen Ordnungen genau dann eine Antikette, wenn π_{k+1}^r eine lineare Erweiterung von $P_k = \bigcap_{i \in [k]} \pi_i$ ist.*

Beweis. Sei P_{k+1} eine Antikette. Ist auch P_k eine Antikette, so ist jede lineare Ordnung auf $[n]$ eine lineare Erweiterung von P_{k+1} , insbesondere auch π_{k+1}^r . Ist P_k keine Antikette, dann folgt aus $a < b$ in P_k , dass $b < a$ in π_{k+1} , da P_{k+1} eine Antikette ist. Damit gilt aber $a < b$ in π_{k+1}^r , womit π_{k+1}^r eine lineare Erweiterung von P_k ist.

Sei nun π_{k+1}^r eine lineare Erweiterung von P_k . Ist $a < b$ in P_k , gilt $a < b$ in π_{k+1}^r und somit $b < a$ in π_{k+1} . Damit sind in P_{k+1} je zwei Elemente unvergleichlich, also ist P_{k+1} eine Antikette. □

Bemerkung 4.4. Aufgrund des letzten Lemmas ist das Problem der Bestimmung der erwarteten Anzahl an linearen Erweiterungen von $P_k(n)$ äquivalent zu dem Problem der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass $P_{k+1}(n)$ eine Antikette ist. Genauer gilt nämlich $\mathbb{P}(P_{k+1}(n) \text{ ist eine Antikette}) \cdot n! = \mathbb{E}(l(P_k(n)))$.

Im Folgenden wird es sich als zielführend herausstellen, den k -dimensionalen Einheitswürfel in l^k Würfel mit Seitenlänge $1/l$ zu partitionieren. Dies nennen wir eine l -Partition. Für positive ganze Zahlen i_1, \dots, i_k definieren wir den Würfel

$$W(i_1, \dots, i_k) := \{(x_1, \dots, x_k) \in [0, 1]^k : (i_j - 1)/l \leq x_j < i_j/l \forall j\}.$$

Für positive ganze Zahlen i_1, \dots, i_k , von denen mindestens eine gleich 1 ist, definieren wir den Turm

$$T(i_1, \dots, i_k) := \bigcup_{r=0}^{l-\max i_j} W(i_1 + r, \dots, i_k + r).$$

Eine wichtige Beobachtung an dieser Stelle ist, dass wenn $P_k(n)$ eine Antikette ist, so sind die nach (1) gewählten Punkte in höchstens einem Würfel pro Turm. Die Anzahl aller Türme und somit die maximale Anzahl an für die Antikette „verwendeten“ Würfeln ist kl^{k-1} , da die 1 im k -Tupel (i_1, \dots, i_k) an k verschiedenen Positionen sein kann und die restlichen $k - 1$ Positionen l verschiedene Werte annehmen können.

Satz 4.5. *Die Wahrscheinlichkeit $Q_k(n)$, dass $P_k(n)$ eine Antikette ist, ist höchstens $(2^{\frac{1}{k}} k^{\frac{k+1}{k-1}} n^{-\frac{1}{k-1}})^n$.*

Beweis. Wir wählen $l = \lfloor (n/k^2)^{1/(k-1)} \rfloor$ und betrachten die l -Partition auf $[0, 1]^k$. Bezeichne \mathcal{W} die Menge der Würfeln.

Wir definieren eine Halbordnung \prec auf \mathcal{W} :

$$W(i_1, \dots, i_k) \prec W(j_1, \dots, j_k) \Leftrightarrow i_r < j_r \quad \forall r$$

Damit gilt $W_1 \prec W_2$ genau dann, wenn alle Punkte aus dem Würfel W_1 koordinatenweise kleiner sind als alle Punkte aus dem Würfel W_2 . Ist $P_k(n)$ eine Antikette, so liegen daher die zugehörigen Punkte alle in einer Antikette aus (\mathcal{W}, \prec) . Denn gäbe es zwei zu der Antikette gehörige Punkte, die in vergleichbaren Würfeln liegen, wären auch die Punkte vergleichbar.

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit $Q_k(n)$, dass $P_k(n)$ eine Antikette ist, maximal gleich der Anzahl an maximalen Antiketten in (\mathcal{W}, \prec) multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass alle n Punkte der zufälligen halbgeordneten Menge $P_k(n)$ in der Vereinigung von kl^{k-1} Würfeln liegen. Denn kl^{k-1} ist die Anzahl an Türmen und somit die größtmögliche Länge einer Antikette in (\mathcal{W}, \prec) .

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle n Punkte von $P_k(n)$ in der Vereinigung von vorgegebenen kl^{k-1} Würfeln liegen ist ergibt sich wie folgt. Insgesamt gibt es l^k Würfeln. Die Wahrscheinlichkeit für einen zufälligen Punkt, in den vorgegebenen kl^{k-1} Würfeln zu liegen, ist $kl^{k-1}/l^k = k/l$. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle n Punkte in der gegebenen Würfelvereinigung liegen, gleich $(k/l)^n$.

Nun überlegen wir uns, wie groß die Anzahl an maximalen Antiketten in (\mathcal{W}, \prec) ist. Wir behaupten, dass jede maximale Antikette aus (\mathcal{W}, \prec) von

jedem Turm genau einen Würfel beinhaltet. Dass es maximal ein Würfel sein kann wurde bereits geklärt. Angenommen, es gäbe eine maximale Antikette A von Würfeln, für die es einen Turm T gibt, aus dem sie keinen Würfel enthält. Angenommen, dieser Turm besteht nur aus einem Würfel. Dann muss mindestens eine Koordinate dieses Würfels gleich 1 und mindestens eine Koordinate gleich k sein. Damit ist er aber mit allen Würfeln unvergleichbar und hätte in die Antikette aufgenommen werden müssen, ein Widerspruch zur Maximalität. Angenommen, dieser Turm T enthält daher mindestens zwei Würfel. Es muss für jeden Würfel aus T einen Würfel aus der Antikette A geben, mit dem er vergleichbar ist. Das in der Kette T maximale Element ist offenbar auch maximal in \prec und das minimale Element in T ist minimal in \prec . Damit muss es Würfel $W(i_1, \dots, i_k)$ und $W(i_1 + 1, \dots, i_k + 1)$ in T und $W(a_1, \dots, a_k)$ und $W(b_1, \dots, b_k)$ in A geben, sodass $W(i_1, \dots, i_k) \prec W(b_1, \dots, b_k)$ und $W(a_1, \dots, a_k) \prec W(i_1 + 1, \dots, i_k + 1)$. Nach der Definition von \prec ist daher $a_r \leq i_r$ und $b_r \geq i_r + 1$ für alle r . Damit ist $W(a_1, \dots, a_k) \prec W(b_1, \dots, b_k)$, ein Widerspruch zur Annahme, dass A eine Antikette ist.

Wir nennen zwei Türme $T(i_1, \dots, i_k)$ und $T(j_1, \dots, j_k)$ benachbart, falls $i_r = j_r$ für alle Koordinaten bis auf eine, die in keinem der beiden Türme die einzige 1 sein darf und sich die Werte jener einen Koordinate um genau 1 unterscheiden. Seien $T(i_1, \dots, i_m, \dots, i_k)$ und $T(i_1, \dots, i_m \mp 1, \dots, i_k)$ Nachbarn. Dann sind für einen Würfel $W(j_1, \dots, j_m, \dots, j_k)$ aus dem ersten Turm die einzigen benachbarten Würfel aus dem zweiten Turm die zwei Würfel $W(j_1, \dots, j_m \mp 1, \dots, j_k)$ und $W(j_1 \pm 1, \dots, j_m, \dots, j_k \pm 1)$, sofern diese existieren. Wir ordnen alle Türme, indem wir mit einem aus einem einzigen Würfel bestehenden Turm T_1 beginnen und für $j \geq 2$ jeder Turm T_j einen Nachbarn unter T_1, \dots, T_{j-1} hat.

Nun wählen wir eine maximale Antikette aus (\mathcal{W}, \prec) . Beginnend mit T_1 haben wir immer höchstens zwei Möglichkeiten aus dem folgenden T_j einen Würfel auszuwählen, der mit dem eben gewählten Würfel aus T_{j-1} unvergleichbar ist. Da es kl^{k-1} Türme gibt, ist die Anzahl an maximalen Antiketten daher höchstens $2^{kl^{k-1}}$. Insgesamt haben wir also

$$Q_k(n) \leq 2^{kl^{k-1}} (k/l)^n.$$

Für $l \leq (n/k(k-1) \ln 2)^{1/(k-1)}$ ist dies eine monoton fallende Funktion in l . Für unser anfangs gewähltes l als auch für dieses ohne Abrundung ist diese Ungleichung erfüllt, da $k \geq (k-1) \ln 2$. Damit ergibt sich die gewünschte Abschätzung

$$Q_k(n) \leq 2^{n/k} k^{n(k+1)/(k-1)} n^{-n/(k-1)}.$$

□

Da $\mathbb{E}(l(P_k(n))) = n!Q_{k+1}(n)$, erhalten wir direkt unter Verwendung des letzten Satzes und weiterer Abschätzung folgendes Korollar.

Korollar 4.6. *Für die erwartete Anzahl von linearen Erweiterungen von $P_k(n)$ gilt:*

$$\mathbb{E}(l(P_k(n))) \leq (2kn^{1-1/k})^n.$$

Lemma 4.7. *Sei P eine halbgeordnete Menge mit n Elementen und Höhe h . Es gelte $n = ah + b$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$ und $1 \leq a$ und $0 \leq b < h$. Dann hat P mindestens $a!^h(a+1)^b$ lineare Erweiterungen.*

Beweis. Elemente der gleichen Höhe bilden offenbar eine Antikette. Wir können P daher in h Antiketten partitionieren und bezeichnen für $i = 0, \dots, h-1$ die Mächtigkeit der Antikette mit Elementen der Höhe i mit n_i . Die Anzahl der linearen Erweiterungen, bei denen zuerst alle Elemente der Höhe 0, danach alle Elemente der Höhe 1 und so weiter gewählt werden ist damit $\prod_{i=0}^{h-1} n_i$. Dieses Produkt ist daher eine untere Schranke für die Anzahl der linearen Erweiterungen von P . Minimiert wird dieses, indem die Faktoren möglichst gleich groß sind. Da $n = n_0 + \dots + n_{h-1} = ah + b$ ersetzen wir n_0 bis n_{b-1} mit $(a+1)!$ und n_b bis n_{h-1} mit $a!$. Zusammengefasst ergibt das

$$l(P) \geq \prod_{i=0}^{h-1} n_i \geq (a+1)!^b a!^{h-b} = a!^h (a+1)^b.$$

□

Nach [12] haben für festes k und n fast alle $P_k(n)$ eine Höhe von höchstens $en^{1/k}$. Dabei bedeutet „fast alle“, dass die Wahrscheinlichkeit, dass $P_k(n)$ die gegebene Eigenschaft erfüllt, für n gegen unendlich gegen 1 konvergiert. Diese Tatsache zusammen mit Lemma 4.7 ergeben folgendes Korollar.

Korollar 4.8. *Fast alle $P_k(n)$ haben mindestens $(e^{-2}n^{1-1/k})^n$ lineare Erweiterungen.*

Es stellt sich die Frage, ob der „typische“ Wert von $l(P_k(n))$, sofern es so einen gibt und die Werte nicht gleichmäßig verteilt sind, von der selben Größenordnung ist wie der Erwartungswert von $l(P_k(n))$. Auch wenn dies etwa von Brightwell [8] vermutet wird, gibt es dazu keinen Beweis in der Literatur. Eine Antwort gibt es aber für $\ln(l(P_k(n)))$: Dieser Wert ist um seinen Erwartungswert konzentriert, wie wir im Folgenden zeigen werden.

Zunächst benötigen wir eine Lemma, dessen Beweis nicht von unserem Interesse ist und deswegen ausgelassen wird.

Lemma 4.9. Sei $Z(U)$ eine Zufallsvariable, wobei $U = (U_1, \dots, U_m)$ und die U_i unabhängig aus Wahrscheinlichkeitsräumen Ω_i gewählt sind. Weiters sei $|Z(U) - Z(V)| \leq c$ für alle U und V , die sich in genau einer Koordinate unterscheiden. Dann gilt für alle reellen a :

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| > a) \leq 2 \exp(-a^2/2mc^2)$$

Wir können nun Lemma 4.9 auf die Zufallsvariable $\ln(l(P_k(n)))$ anwenden.

Satz 4.10. Für alle $k, n \in \mathbb{Z}^+$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{P}(|\ln(l(P_k(n))) - \mathbb{E} \ln(l(P_k(n)))| > \lambda n^{1/2} \ln n) \leq 2 \exp(-\lambda^2/2)$$

Beweis. Die Zufallsvariable $\ln(l(P_k(n)))$ ist offenbar von den n Punkten aus $[0, 1]^k$ abhängig, da diese die halbgeordnete Menge und damit die Anzahl ihrer linearen Erweiterungen und den logarithmischen Wert davon bestimmen. Seien daher U_1, \dots, U_n Zufallsvariablen, die die Koordinaten der n Punkte bestimmen. Diese sind klarerweise unabhängig. Nun müssen wir zeigen, dass sich $\ln(l(P_k(n)))$ bei Änderung eines einzigen U_i nur bis zu einem gewissen maximalen Wert ändern kann.

Sei P eine n -elementige halbgeordnete Menge und Q eine $(n-1)$ -elementige halbgeordnete Menge, die aus P hervorgeht, wenn genau ein Element entfernt wird. Für jede lineare Erweiterung von Q gibt es mindestens eine Möglichkeit, diese lineare Erweiterung zu einer linearen Erweiterung von P zu erweitern, daher das fehlende Element so einzufügen, dass eine lineare Erweiterung von P entsteht. Dazu muss das fehlende Element x in die lineare Erweiterung von Q nach allen Elementen aus $\{y : y <_P x\}$ und vor allen Elementen aus $\{y : y >_P x\}$ eingefügt werden. Weiters gibt es maximal n Möglichkeiten, die lineare Erweiterung von Q zu einer von P zu erweitern, da es n Positionen gibt, an denen das fehlende Element eingesetzt werden kann. Es gilt daher $l(Q) \leq l(P) \leq nl(Q)$. Sind P_1 und P_2 zwei halbgeordnete Mengen, die aus Q hervorgehen, indem jeweils ein zusätzliches Element hinzukommt, so gilt daher:

$$\ln(l(Q)) \leq \ln(l(P_i)) \leq \ln(n) + \ln(l(Q)) \quad \text{für } i \in \{1, 2\}$$

Daraus folgt nun, dass $|\ln(l(P_1)) - \ln(l(P_2))| \leq \ln n$. Nun können wir Lemma 4.9 anwenden mit $c = \ln(n)$, $m = n$ und $a = \lambda n^{1/2} \ln(n)$, was das gewünschte Ergebnis liefert. □

4.2 Die graphentheoretische zufällige halbgeordnete Menge $P_p(n)$

Nun befassen wir uns mit einer halbgeordneten Menge, die von einem Zufallsgraphen induziert wird. Der Großteil dieses Kapitels beruht auf [1].

Definition 4.11. Der *Zufallsgraph* $G_p(n)$, mit $n \in \mathbb{N}$ und $0 < p < 1$ ist ein gerichteter Graph mit Knotenmenge $V = [n]$, für den für $i <_{\mathbb{N}} j$ die Kante (i, j) mit Wahrscheinlichkeit p existiert. Die Gegenwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, dass es eine Kante nicht gibt, bezeichnen wir mit $q := 1 - p$.

Definition 4.12. Die *zufällige halbgeordnete Menge* $P_p(n)$ hängt vom Zufallsgraphen $G_p(n)$ ab. Ihre Grundmenge ist $[n]$ und ihre Halbordnung \prec ist der transitive Abschluss der Relation

$$iRj \Leftrightarrow (i, j) \text{ ist Kante in } G_p(n).$$

Daher gilt $i \prec j$ genau dann, wenn $i <_{\mathbb{N}} j$ und es einen gerichteten Pfad in $G_p(n)$ von i nach j gibt.

Beispiel 4.13. Sei $n = 8$ und $p = 0,2$. Eine mögliche Realisierung von $G_{0,2}(8)$ und das Hasse-Diagramm der zugehörigen Realisierung von $P_{0,2}(8)$ sind in Abbildung 11 zu sehen.



Abbildung 11: Realisierungen des Zufallsgraphen $G_{0,2}(8)$ und der zugehörigen zufälligen halbgeordneten Menge $P_{0,2}(8)$.

Bemerkung 4.14. Ist G eine Realisierung des Zufallsgraphen $G_p(n)$, so ist mit einer „linearen Erweiterung von G “ klarerweise die lineare Erweiterung der zugehörigen halbgeordneten Menge gemeint.

Die Anzahl der linearen Erweiterungen $l(P_p(n))$ der zufälligen halbgeordneten Menge $P_p(n)$ ist offenbar eine Zufallsvariable. Zunächst wollen wir uns

ihrem Erwartungswert widmen. Dazu definieren wir

$$\kappa(p) := \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k).$$

Diesen Wert werden wir im Folgenden öfters verwenden.

Satz 4.15. *Die erwartete Anzahl an linearen Erweiterungen der zufälligen halbgeordneten Menge $P_p(n)$ ist*

$$\mathbb{E}l(P_p(n)) = \prod_{k=1}^n \frac{1 - q^k}{1 - q}.$$

Für festes p gilt daher

$$\mathbb{E}l(P_p(n)) \sim \kappa(p) \left(\frac{1}{p}\right)^n \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Nach Definition ist eine Totalordnung $<_T$ auf $[n]$ genau dann eine lineare Erweiterung von $P_p(n) = P$, wenn $i <_T j$ für alle i, j mit $i <_{\mathbb{N}} j$ und $i <_P j$. Damit $<_T$ eine lineare Erweiterung von P ist, ist es klarerweise notwendig zu fordern, dass $i <_T j$ für alle i, j mit $i <_{\mathbb{N}} j$, für die ij eine Kante in $G_p(n) = G$ ist. Dies ist jedoch auch hinreichend, denn ist $i <_{\mathbb{N}} j$ und $i <_P j$, aber ij ist keine Kante in G , so ist ij durch den transitiven Abschluss von G entstanden. Es gibt daher ein k , sodass ik und kj Kanten in G sind. Nach Annahme folgt $i <_T k$ und $k <_T j$ und somit $i <_T j$. Für $i <_{\mathbb{N}} j$ und $i <_P j$, für die ij eine Kante in G ist, folgt direkt $i <_T j$.

Nun verwenden wir die Eins-zu-eins-Beziehung aus Bemerkung 1.10 zwischen linearen Erweiterungen und Permutationen, welche sich klarerweise auf alle Totalordnungen auf $[n]$ ausdehnen lässt. Die Markierung ist in diesem Kapitel schlicht $w = id$. Wir erhalten nun folgende zu obigem äquivalente Formulierung:

Eine Totalordnung $<_T$ auf $[n]$ ist genau dann eine lineare Erweiterung von $P_p(n)$, falls gilt:

$$\text{Es gibt keine Kante } ij \text{ in } G_p(n), \text{ sodass } i <_{\mathbb{N}} j \text{ und } \pi^{-1}(i) >_{\mathbb{N}} \pi^{-1}(j). \quad (1)$$

Für eine gegebene Totalordnung $<_T$ und damit Permutation π tritt (1) genau dann ein, wenn für jeden Fehlstand (i, j) von π^{-1} die Kante ij in $G_p(n)$ nicht existiert. Wir erhalten

$$\mathbb{E}l(P_p(n)) = \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \mathbb{P}((1) \text{ gilt}) = \sum_{\pi^{-1} \in S_n} q^{\#\{\text{Fehlstände von } \pi^{-1}\}}.$$

Stellen wir die Summierung um, erhalten wir die erzeugende Funktion der Anzahl $I_k(n)$ der Permutationen der Länge n mit genau k Fehlständen. Permutationen der Länge n haben offenbar maximal $n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$ Fehlstände. Die Gestalt dieser erzeugenden Funktion wurde beispielsweise in [34] bestimmt. Obige Summe ist nun gleich

$$= \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} I_k(n) q^k = \prod_{k=1}^n \frac{1-q^k}{1-q}.$$

□

Es stellt sich heraus, dass für festes p die asymptotische Verteilung von $l(P_p(n))$ lognormal ist.

Satz 4.16. *Sei $0 < p < 1$. Dann gilt für ein $\mu = \mu(p) > 0$ und ein $\sigma^2 = \sigma^2(p) > 0$ für $n \rightarrow \infty$*

$$\frac{\ln l(P_p(n)) - \mu n}{\sqrt{n}} \rightarrow_d N(0, \sigma^2),$$

wobei alle Momente konvergieren. Insbesondere gilt

$$\frac{\ln l(P_p(n)) - \mathbb{E} \ln l(P_p(n))}{\sqrt{\text{Var} \ln l(P_p(n))}} \rightarrow_d N(0, 1).$$

Bevor wir in der Lage sind, diesen Satz zu beweisen, braucht es noch etwas an Vorarbeit.

Wir können als Knotenmenge des Zufallsgraphen statt $[n]$ auch \mathbb{N} oder \mathbb{Z} zulassen. Die entsprechenden unendlichen Zufallsgraphen bezeichnen wir mit $G_p(\mathbb{N})$ und $G_p(\mathbb{Z})$. Den endlichen Zufallsgraphen $G_p([n])$ kann man daher als Einschränkung von $G_p(\mathbb{N})$ oder $G_p(\mathbb{Z})$ auf $[n]$ betrachten.

Definition 4.17. Ein Element in $P_p(n)$, $P_p(\mathbb{N})$ oder $P_p(\mathbb{Z})$ nennt sich *Posten*, wenn es mit jedem anderen Element vergleichbar ist.

Lemma 4.18. *Für jedes $p \in (0, 1)$ gibt es eine Konstante $C(p) > 1$, sodass für hinreichend großes k die Wahrscheinlichkeit, dass keines der k Elemente $2k, 4k, 6k, \dots, 2k^2$ ein Posten in $G_p(\mathbb{Z})$ ist, höchstens $C(p)^{-k}$ ist.*

Beweis. Zunächst halten wir fest, dass für $j \geq 1$

$$\mathbb{P}(j \text{ vergleichbar mit } 0 \mid 1, \dots, j-1 \text{ vergleichbar mit } 0) = 1 - q^j$$

gilt. Denn obiges Ereignis tritt genau dann ein, wenn mindestens eine der j Kanten $\{0j\}, \{1j\}, \dots, \{(j-1)j\}$ in $G_p(\mathbb{Z})$ existiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass keine dieser Kanten existiert ist q^j .

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass 0 mit allen Elementen aus \mathbb{Z}^+ vergleichbar ist, gleich

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j) = \kappa(p).$$

Das selbe Argument funktioniert offenbar auch für \mathbb{Z}^- . Die Wahrscheinlichkeit, dass die 0, und aufgrund der Symmetrie jedes beliebige Element, mit allen anderen Elementen vergleichbar ist, und damit ein Posten ist, ist somit $\kappa(p)^2$.

Das Ereignis, dass keines der Elemente $2k, 4k, 6k, \dots, 2k^2$ ein Posten ist, ist äquivalent zu dem Ereignis, dass es für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ ein zu $2jk$ unvergleichliches Element $n_j \in \mathbb{Z}$ gibt. Wir betrachten nun zwei Ereignisse, deren Vereinigung das eben genannte Ereignis enthält und schätzen deren Wahrscheinlichkeiten nach oben ab.

(i) Für jedes $j \in \{1, \dots, k\}$ gibt es ein zu $2jk$ unvergleichliches Element $n_j \in \mathbb{Z}$ im Intervall $[(2j-1)k, (2j+1)k]$.

Dabei handelt es sich um die Konjunktion von k unabhängigen Ereignissen, denn die Existenz eines solchen Elements n_j hängt nur von den Kanten innerhalb des Intervalls $[(2j-1)k, (2j+1)k]$ ab. Die Wahrscheinlichkeit jedes dieser k Ereignisse ist höchstens so groß wie die, dass es irgend ein Element aus \mathbb{Z} gibt, dass mit $2jk$ unvergleichbar ist. Davon ist die Wahrscheinlichkeit $1 - \kappa(p)^2$. Wegen der Unabhängigkeit ist die Wahrscheinlichkeit des gesamten Ereignisses $(1 - \kappa(p)^2)^k$.

(ii) Es gibt ein $j \in \{1, \dots, k\}$, sodass $2jk$ mit allen Elementen aus dem Intervall $[(2j-1)k, (2j+1)k]$ vergleichbar ist, aber unvergleichbar mit einem Element n_j außerhalb des Intervalls.

Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist höchstens so groß wie $2k$ mal die Wahrscheinlichkeit, dass 0 mit $1, \dots, k$ vergleichbar, aber mit einem Element größer als k unvergleichbar ist. Die Wahrscheinlichkeit davon ist wiederum höchstens

$$\sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}(j+1 \text{ unvergleichbar mit } 0 \mid 1, \dots, j \text{ vergleichbar mit } 0) =$$

$$= \sum_{j=k}^{\infty} q^{j+1} = \sum_{j=k+1}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q} - \sum_{j=0}^k q^j = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^{k+1}}{1-q} = \frac{q^{k+1}}{p}.$$

Verknüpfen wir (i) und (ii), ergibt das

$$\mathbb{P}(\text{keines der Elemente } 2k, \dots, 2k^2 \text{ ist ein Posten}) \leq (1 - \kappa(p)^2)^k + 2kq^{k+1}/p.$$

Wählt man nun $C(p)$ so, dass $\max\{1 - \kappa(p)^2, q\} < C^{-1}(p) < 1$ ist obiges für hinreichend großes k höchstens so groß wie $C^{-k}(p)$. □

Lemma 4.19. *Die Posten in $G_p(\mathbb{Z})$ bilden fast sicher eine in beide Richtungen unendliche Folge und die Zufallsvariablen $\mathbb{1}_{\{i \text{ ist ein Posten}\}}$ haben die selbe Verteilung.*

Beweis. Dass diese Zufallsvariablen die selbe Verteilung haben ist klar. Damit haben die Ereignisse $\{i \text{ ist der erste Posten in } G_p(\mathbb{Z})\}$ alle die gleiche Wahrscheinlichkeit. Da diese Ereignisse außerdem disjunkt und unendlich viele sind, muss die Wahrscheinlichkeit jedes dieser Ereignisse gleich 0 sein. Die Folge der Posten hat folglich fast sicher kein erstes Element. Entweder es existieren unendlich viele Posten oder keiner. Aus Lemma 4.18 folgt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass es keinen Posten gibt, für $k \geq k_0$ höchstens C^{-k} (mit $1 < C$) und damit gleich 0 ist. Damit muss die Folge der Posten fast sicher in beide Richtungen unendlich sein. □

Im Folgenden seien $U_{i \in \mathbb{Z}}$ die Zufallsvariablen, die die Positionen der Posten angeben, wobei U_0 die Position des ersten nichtnegativen Posten ist. Weiters bezeichnen wir die Einschränkungen von $G_p(\mathbb{Z})$ auf die Intervalle $[U_j, U_{j+1}]$ als *Segmente*. Jeder Posten ist daher in genau zwei Segmenten enthalten, jede Kante hingegen in höchstens einem.

Lemma 4.20. *Die Abstände zwischen den Posten $U_{j+1} - U_j, j \geq 0$, sind unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Abstände aufeinanderfolgender Posten unabhängig sind. Aufgrund der Translationsinvarianz ist es hinreichend zu zeigen, dass für ein beliebiges Ereignis E , das nur von Kanten abhängt, die jeweils mit mindestens einem negativen Element inzident sind, Folgendes gilt:

$$\mathbb{P}(m \text{ ist der erste Posten rechts von } 0 \mid E \text{ und } 0 \text{ ist ein Posten}) =$$

$\mathbb{P}(m \text{ ist der erste Posten rechts von } 0 \mid 0 \text{ ist ein Posten})$

Ist 0 ein Posten, so ist das Element m genau dann ein Posten, wenn es mit jedem nichtnegativen Element mit einem gerichteten Pfad verbunden ist, da m über die 0 bereits mit allen negativen Elementen verbunden und daher vergleichbar ist. Dieses Ereignis ist offenbar unabhängig von E , womit obige Gleichung gezeigt ist. Aus dieser folgt nun, dass die Verteilung von $U_1 = U_1 - U_0$ unabhängig von der Verteilung der negativen Posten ist. \square

Bemerkung 4.21. Auch wenn es intuitiv nicht so erscheinen mag, ist die Verteilung von $U_0 - U_{-1}$ eine andere als die von $U_1 - U_0$, wie wir gleich sehen werden.

Wir benötigen noch ein letztes Lemma um Satz 4.16 beweisen zu können.

Lemma 4.22. *Sei L die Zufallsvariable für die Länge des Segments $[U_0, U_1]$, es ist daher*

$$\mathbb{P}(L = l) = \mathbb{P}(U_1 = l \mid U_0 = 0), \quad l \geq 1,$$

dann gilt $\mathbb{E}L^r < \infty$ für alle $r < \infty$.

Weiters gilt auch für $\tilde{L} := U_0 - U_{-1}$, dass $\mathbb{E}\tilde{L}^r < \infty$ für alle $r < \infty$.

Beweis. Wir erhalten mit Lemma 4.18 die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L > 2k^2) &\leq \mathbb{P}(1, \dots, 2k^2 + 1 \text{ sind keine Posten} \mid 0 \text{ ist Posten}) \leq \\ &\leq \mathbb{P}(2k, \dots, 2k^2 \text{ sind keine Posten} \mid 0 \text{ ist Posten}) \leq \\ &\leq \mathbb{P}(2k, \dots, 2k^2 \text{ sind keine Posten}) / \mathbb{P}(0 \text{ ist Posten}) \leq \\ &\leq C(p)^{-k} / \kappa(p)^2 = (C(p)\kappa(p)^{2/k})^{-k} =: (C_1(p))^{-k} \end{aligned}$$

für hinreichend großes k . Dabei haben wir k so groß gewählt, dass $C_1(p) > 1$, was möglich ist, da $C(p) > 1$ und $\kappa(p)^{2/k}$ für wachsendes k monoton gegen 1 steigt.

Mit $l = 2k^2$ folgt nun

$$\mathbb{P}(L > l) \leq C_2^{-\sqrt{l}},$$

mit $C_2(p) > 1$ und hinreichend großem l . Damit ist aber $\mathbb{E}L^r < \infty$.

Nun widmen wir uns den Momenten von \tilde{L} .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\tilde{L} = l) &= \sum_{i=1}^l \mathbb{P}(-j \text{ ist ein Posten und } l-j \text{ ist der darauffolgende}) = \\
 &= l\mathbb{P}(0 \text{ ist Posten und } l \text{ ist der darauffolgende}) = \\
 &= l\mathbb{P}(U_1 = l \mid U_0 = 0)\mathbb{P}(U_0 = 0) = \\
 &= l\mathbb{P}(U_1 = l \mid U_0 = 0)\kappa(p)^2 = \\
 &= l\mathbb{P}(L = l)\kappa(p)^2
 \end{aligned}$$

Folglich ist auch $\mathbb{E}\tilde{L}^r < \infty$. □

Bemerkung 4.23. Wir können den Beweis von Lemma 4.22 verwenden, um den Erwartungswert von L zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}L &= \sum_{l=0}^{\infty} l\mathbb{P}(L = l) = \sum_{l=0}^{\infty} ll^{-1}\kappa(p)^{-2}\mathbb{P}(\tilde{L} = l) = \\
 &= \kappa(p)^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tilde{L} = l) = \kappa(p)^{-2}
 \end{aligned}$$

Bemerkung 4.24. Schränkt man $G_p(\mathbb{N})$ auf das Intervall $(i, j] \subset \mathbb{N}$ ein und bildet den transitiven Abschluss, entsteht eine zufällige halbgeordnete Menge, die wir $P_p(i, j)$ nennen. Damit ist $P_p(0, n) = P_p(n)$. Außerdem gilt

$$l(P_p(i, k)) \geq l(P_p(i, j))l(P_p(j, k)), \quad i < j < k,$$

denn die rechte Seite ist die Anzahl all jener linearen Erweiterungen von $P_p(i, k)$, bei denen alle Elemente aus (i, j) vor allen Elementen aus (j, k) kommen. Ist j ein Posten, müssen in jeder linearen Erweiterung von $P_p(i, k)$ alle Elemente aus (i, j) vor allen Elementen aus (j, k) kommen, es gilt in diesem Fall also Gleichheit in obiger Ungleichung.

Nun sind wir imstande den Satz über die asymptotische Verteilung von $l(P_p(n))$ zu beweisen.

Beweis. (Satz 4.16)

Sei wieder U_i die Zufallsvariable, die die Position des i -ten Posten angibt. Wir definieren $V_i := \ln l(P_p(0, U_i))$ für $i \geq 0$. Weiters seien $W_0 := U_0$ und $Z_0 := V_0$ und für $i \geq 1$ seien $W_i := U_i - U_{i-1}$ die Postenabstände und $Z_i := V_i - V_{i-1} = \ln(l(P_p(0, U_i))/l(P_p(0, U_{i-1}))) = \ln l(P_p(U_{i-1}, U_i))$. Aus Lemma 4.20 folgt, dass (W_i, Z_i) für $i \geq 0$ unabhängige zweidimensionale Zufallsvariablen sind, die für $i \geq 1$ die selbe Verteilung besitzen. Weiters folgt aus Lemma 4.22 für $r < \infty$, dass $\mathbb{E}W_i^r = \mathbb{E}L^r < \infty$ für $i \geq 1$ und dass $\mathbb{E}W_0^r \leq \mathbb{E}\tilde{L}^r < \infty$. Außerdem gilt

$$0 \leq Z_i = \ln l(P_p(U_{i-1}, U_i)) \leq \ln(W_i!) = \sum_{j=1}^{W_i} \ln(W_i - j + 1) \leq W_i \ln W_i.$$

Wir erhalten $\mathbb{E}Z_i^r \leq \mathbb{E}(W_i^r (\ln W_i)^r) \leq \mathbb{E}W_i^r W_i^r = \mathbb{E}W_i^{2r} < \infty$ für $r < \infty$ und $i \geq 0$.

Offenbar haben die Ereignisse $\{W_i = 3 \text{ und } Z_i = \ln 1\}$ und $\{W_i = 3 \text{ und } Z_i = \ln 2\}$ positive Wahrscheinlichkeiten. Daher können W_i und Z_i nicht direkt proportional sein, was wir verwenden, um zu sehen, dass $\gamma^2 := \text{Var}(\mathbb{E}(W_1)Z_1 - \mathbb{E}(Z_1)W_1) > 0$.

Wir definieren weiters $\tau(n) := \min\{i : U_i > n\}$, den Index des ersten Posten, der größer ist als n . Wir verwenden nun Kapitel 4.2 aus [22] und insbesondere Satz 2.3 in ebendiesem. Aus dem bisherigen folgt, dass $\text{Var} W_1$ und $\text{Var} Z_1$ endlich sind. Auch die sonstigen Voraussetzungen von Satz 2.3 sind erfüllt, bis auf den kleinen Unterschied, dass $(W_0, Z_0) = (U_0, Z_0)$ eine andere Verteilung hat als die Zuwächse (W_i, Z_i) für $i \geq 1$. Tatsächlich ist der Satz auch in diesem Fall anwendbar aus Gründen, die wir nicht im Detail ausführen werden. Der Satz liefert uns nun

$$\frac{V_{\tau(n)} - \mu n}{\sqrt{n}} \rightarrow_d N(0, \sigma^2), \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wobei alle Momente konvergieren, $\mu = \mathbb{E}Z_1/\mathbb{E}W_1$ und $\sigma^2 = \gamma^2(\mathbb{E}W_1)^{-3} > 0$.

Nach der Definition der V_i gilt $V_{\tau(n)-1} \leq \ln l(P_p(n)) = \ln l(P_p(0, n)) \leq V_{\tau(n)}$. Daraus folgt $|\ln l(P_p(n)) - V_{\tau(n)}| \leq Z_{\tau(n)} \leq \tilde{L}_n \ln \tilde{L}_n$, wobei \tilde{L}_n die Zufallsvariable für die Länge des Segments, das n und $n+1$ beinhaltet, bezeichnet. Offenbar gilt $\tilde{L}_n \xrightarrow{d} \tilde{L}$, wir können mit Lemma 4.22 und dem Satz von Cramér nun $V_{\tau(n)}$ in obiger Konvergenzaussage durch $\ln l(P_p(n))$ ersetzen, womit der Satz bewiesen ist. □

Nun kommen wir zu einer zentralen Konvergenzaussage dieses Kapitels.

Satz 4.25. *Für festes p gilt fast sicher*

$$l(P_p(n))^{1/n} \rightarrow e^{\mu(p)} \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Beweisskizze. Mit Bemerkung 4.24 erhalten wir

$$\ln l(P_p(i, k)) \geq \ln l(P_p(i, j)) + \ln l(P_p(j, k)) \quad \text{für } i < j < k$$

und damit

$$-\ln l(P_p(i, k)) \leq -\ln l(P_p(i, j)) + (-\ln l(P_p(j, k))) \quad \text{für } i < j < k.$$

Nun können wir die Resultate von Kingman über subadditive stochastische Prozesse [26] auf $-\ln l(P_p(i, k))$ anwenden. Wir erhalten, dass $(1/n) \ln l(P_p(n))$ fast sicher gegen eine Zufallsvariable ξ konvergiert. Es lässt sich zeigen, dass ξ konstant und insbesondere fast sicher gleich dem μ aus Satz 4.16 ist, woraus direkt die Behauptung folgt. □

Wir können den letzten Satz mit dem folgenden noch präzisieren.

Satz 4.26. *Sei $0 < p < 1$. Dann gibt es für fast alle $G_p(\mathbb{N})$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$*

$$|l(P_p(n))^{1/n} - e^{\mu(p)}| \leq \frac{15e^{\mu}(\ln n)^{3/2}}{n^{1/2}p^2}.$$

Für den Beweis von Satz 4.26 verwenden wir folgende für dieses Kapitel passende Version von Lemma 4.9.

Lemma 4.27. *Seien $H_1 \cup \dots \cup H_m$ eine Partition von $[n]^2$ und $Z(G)$ eine vom Zufallsgraphen $G = G_p(n)$ abhängige Zufallsvariable, die $|Z(G) - Z(G')| \leq c$ erfüllt, für alle G und G' , die sich nur auf einem H_i unterscheiden. Dann gilt für jedes reelle a*

$$\mathbb{P}(|Z(G_p(n)) - \mathbb{E}Z(G_p(n))| > a) \leq 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2mc^2}\right).$$

Da $P_p(n)$ nach Definition von $G_p(n) = G$ abhängt, können wir statt $l(P_p(n))$ auch $l(G_p(n))$ oder kurz $l(G)$ schreiben. Wir würden nun gerne Lemma 4.27 auf die Zufallsvariable $Z(G) = \ln(l(G))$ anwenden, wobei $m = n$ und $H_j = \{(i, j) \in [n]^2 : i < j\}$. Das ist aber nicht zielführend, da

$|Z(G) - Z(G')| = |\ln(l(G)) - \ln(l(G'))|$ recht groß sein kann. Ist beispielsweise G eine Kette, so ist $\ln(l(G)) = 0$. Entfernt man in G für $n = 2k$ die mittlere Kante beziehungsweise für $n = 2k + 1$ eine der mittleren Kanten, so gilt $\ln(G') = \ln \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ für den daraus entstandenen Graphen G' und die beiden Graphen unterscheiden sich offenbar nur auf $H_{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Deswegen werden wir statt $\ln(l(G))$ eine leicht modifizierte Zufallsvariable verwenden. Sei im folgenden $w > 0$ und G^* jener Zufallsgraph, der aus G hervorgeht, wenn zwischen allen Knoten j und k , für die $2w < k - j$ gilt, eine Kante hinzugefügt wird. Die Anzahl an linearen Erweiterungen von G^* bei gewähltem w bezeichnen wir mit $l(G^*, w)$. Wie wir im Beweis des nächsten Lemmas sehen werden, lässt sich Lemma 4.27 effektiv auf die Zufallsvariable $\ln(l(G^*, w))$ anwenden.

Lemma 4.28. *Seien w und a positive reelle Zahlen. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(|\ln(l(G_p^*(n), w)) - \mathbb{E} \ln(l(G_p^*(n), w))| > a) \leq 2 \exp\left(-\frac{a^2}{16nw^2}\right).$$

Beweis. Wir wenden Lemma 4.27 auf $Z(G) = \ln(l(G^*, w))$ mit $m = n$ und $H_j = \{(i, j) \in [n]^2 : i < j\}$ an. Dazu müssen wir zeigen, dass es ein c gibt, sodass $|Z(G) - Z(G')| < c$ für alle G und G' , die sich auf nur einem H_j unterscheiden. Fügt man einer Halbordnung ein zusätzliches Relationspaar hinzu und bildet den transitiven Abschluss, so ist die Anzahl der linearen Erweiterungen der entstandenen Halbordnung gleich oder kleiner der Anzahl der linearen Erweiterungen der ursprünglichen Halbordnung. $|Z(G) - Z(G')|$ ist daher maximal, wenn o.B.d.A. G keine der Kanten von j nach $\{1, \dots, j-1\}$ enthält und G' alle. Da weiters unsere Zufallsvariable die *-Versionen von G und G' verwendet, können wir o.B.d.A. annehmen, dass G keine der Kanten von j nach $\{j - \lfloor 2w \rfloor, \dots, j - 1\}$ enthält und G' alle. Ist \prec eine lineare Erweiterung von G , erhalten wir daraus eine lineare Erweiterung \prec' von G' , indem wir alle Elemente aus $\{1, \dots, j - 1\}$ unter alle Elemente aus $\{j, \dots, n\}$ setzen und die relativen Ordnungen innerhalb von $\{1, \dots, j - 1\}$ und $\{j, \dots, n\}$ gleich wie in \prec lassen. Unter dieser Abbildung werden höchstens $\binom{2\lfloor 2w \rfloor}{\lfloor 2w \rfloor}$ lineare Erweiterungen \prec von G^* surjektiv auf lineare Erweiterungen \prec' von $(G')^*$ abgebildet, denn das ist umgekehrt die Anzahl an möglichen Anordnungen von $j - \lfloor 2w \rfloor, \dots, j + \lfloor 2w \rfloor - 1$, die aus \prec' lineare Erweiterungen \prec ergeben. Damit gilt

$$l(G^*, w) \leq l((G')^*, w) \binom{2\lfloor 2w \rfloor}{\lfloor 2w \rfloor},$$

woraus folgt, dass

$$Z(G) - Z(G') \leq \ln \binom{2\lfloor 2w \rfloor}{\lfloor 2w \rfloor} \leq 4w \ln 2 < 2\sqrt{2}w =: c.$$

Nun folgt die Behauptung mit Lemma 4.27. □

Damit wir Lemma 4.28 verwenden können, müssen wir w so wählen, dass sich die Zufallsvariable $\ln(l(G^*, w))$ nicht allzu sehr von $\ln(l(G))$ unterscheidet.

Lemma 4.29. *Für $0 < p < 1$ gibt es eine Konstante $C(p)$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{P}(l(G_p(n)) \neq l(G_p^*(n), w)) \leq n^{-2},$$

wobei $w = \lceil C(p) + 3 \ln n / 2p^2 \rceil$.

Beweis. Seien j und k zwei beliebige Knoten in $G_p(n)$. Dann ist das Ereignis, dass j und k in $P_p(n)$ unvergleichbar sind ein Teilereignis vom Ereignis, dass in $G_p(n)$ jeder der $|j - k| - 1$ Zwischenknoten mit höchstens einem der beiden Knoten j oder k adjazent ist. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses höchstens gleich jener des zweiten, dessen Wahrscheinlichkeit genau $(1 - p^2)^{|j - k| - 1}$ ist. Damit können wir die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Paar (j, k) mit $k - j > 2w$ gibt, das nicht in Relation ist, nach oben abschätzen mit

$$\begin{aligned} n \sum_{i=2w}^{\infty} (1 - p^2)^i &= \frac{n}{p^2} (1 - p^2)^{2w} \\ &\leq \frac{n}{p^2} (1 - p^2)^{2C(p)} [(1 - p^2)^{1/p^2}]^{3 \ln n} \end{aligned}$$

Die Funktion $f(p) = (1 - p^2)^{1/p^2}$ ist monoton fallend im Intervall $(0, 1)$ und es gilt $\lim_{p \rightarrow 0} f(p) = 1/e$. Damit ist der letzte obige Term höchstens so groß wie

$$\leq \frac{n}{p^2} (1 - p^2)^{2C(p)} n^{-3}.$$

Letzteres ist für hinreichend großes $C(p)$ höchstens so groß wie n^{-2} . Da $\mathbb{P}(l(G_p(n)) \neq l(G_p^*(n), w))$ höchstens so groß wie die eben abgeschätzte Wahrscheinlichkeit ist, ist damit die Behauptung gezeigt. □

Nun sind wir in der Lage, Satz 4.26 zu beweisen.

Beweis. (Satz 4.26)

Sei $0 < p < 1$ fest. Wir wählen w wie in Lemma 4.29. Sei nun n hinreichend groß, sodass $w \leq 2 \ln n / p^2$. Weiters wählen wir $a = 12n^{1/2}(\ln n)^{3/2}p^{-2}$. Wir erhalten aus Lemma 4.27, dass

$$\mathbb{P}(|\ln l(G_p^*(n), w) - \mathbb{E} \ln l(G_p^*(n), w)| > a) \leq 2n^{-9/4}$$

für alle so gewählten n . Lemma 4.29 liefert uns

$$\mathbb{P}(l(G_p(n)) \neq l(G_p^*(n), w)) \leq n^{-2}.$$

Da für jede Realisierung G von $G_p(n)$ gilt, dass $\ln l(G) \leq n \ln n$, erhalten wir

$$\mathbb{E}(\ln l(G_p(n)) - \ln l(G_p^*(n), w)) \leq n^{-2}n \ln n = \ln n/n.$$

Kombinieren wir diese Resultate, erhalten wir für hinreichend großes n

$$\mathbb{P}(|\ln l(G_p(n)) - \mathbb{E} \ln l(G_p(n))| > 13n^{1/2}(\ln n)^{3/2}p^{-2}) \leq 2n^{-2}.$$

Das Lemma von Borel-Cantelli liefert nun, dass es fast sicher ein $n_1 = n_1(G, p)$ gibt, sodass für alle $n \geq n_1$

$$|\ln l(G_p(n)) - \mathbb{E} \ln l(G_p(n))| \leq 13n^{1/2}(\ln n)^{3/2}p^{-2}.$$

Um nun die Konvergenzrate von $(1/n)\mathbb{E} \ln l(G_p(n))$ gegen den Grenzwert $\mu(p)$ abzuschätzen erweist es sich als zielführend, $l(G_p(2n))$ mit $l(G_p(n))$ zu vergleichen.

Für einen Graphen G mit Knotenmenge $[2n]$ bezeichnen wir dessen Einschränkung auf $[n]$ bzw. $[2n] \setminus [n]$ mit G_1 bzw. G_2 . Mit $A(G)$ bezeichnen wir den Durchschnitt über alle linearen Erweiterungen \prec_1 von G_1 und \prec_2 von G_2 , der Anzahl an linearen Erweiterungen von G , die sowohl \prec_1 als auch \prec_2 erweitern. Mit diesen Bezeichnungen gilt nun

$$\begin{aligned} l(G) &= \sum_{\prec_1} \sum_{\prec_2} \# \text{ lineare Erweiterungen von } G, \text{ die } \prec_1 \text{ und } \prec_2 \text{ erweitern} \\ &= l(G_1)l(G_2)A(G) \end{aligned}$$

Nehmen wir von der letzten Gleichung den natürlichen Logarithmus und bilden dann den Erwartungswert, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \ln l(G_p(2n)) &= 2\mathbb{E} \ln l(G_p(n)) + \mathbb{E} \ln A(G_p(2n)) \\ &\leq 2\mathbb{E} \ln l(G_p(n)) + \ln \mathbb{E} A(G_p(2n))\end{aligned}$$

Der Erwartungswert von $A(G_p(2n))$ ist die erwartete Anzahl an linearen Erweiterungen einer zufälligen Realisierung G von $G_p(2n)$, die die zufällig gewählten linearen Erweiterungen \prec_1 und \prec_2 von G_1 bzw. G_2 erweitert. Nach [9] steigt diese Größe monoton in n und konvergiert gegen $1/\kappa(p)$. Offenbar gilt $A(G) \geq 1$. Wir erhalten mit $\mu_n := (1/n)\mathbb{E} \ln l(G_p(n))$

$$2n\mu_n \leq 2n\mu_{2n} \leq 2n\mu_n + \ln \left(\frac{1}{\kappa(p)} \right).$$

Daraus folgt

$$\mu_n \leq \mu_{2n} \leq \mu_n + \frac{1}{2n} \ln \left(\frac{1}{\kappa(p)} \right).$$

Summieren wir nun die Terme $\mu_{2^k n} - \mu_{2^{k-1} n}$, erhalten wir

$$\mu(p) \geq \mu_n \geq \mu(p) - \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{\kappa(p)} \right).$$

Insgesamt haben wir nun, dass es für fast alle $G_p(\mathbb{N})$ ein $n_2(G, p)$ gibt, sodass für alle $n \geq n_2$

$$|\ln l(G_p(n)) - n\mu(p)| \leq 14n^{1/2}(\ln n)^{3/2}p^{-2},$$

woraus die zu zeigende Behauptung folgt. □

5 Die Ordnungs-Markov-Kette

In diesem Kapitel geht es um die nahezu gleichverteilte Generierung einer zufälligen linearen Erweiterung einer endlichen Halbordnung mithilfe der sogenannten „Ordnungs-Markov-Kette“. Diese wurde von Alexander Karzanov und Leonid Khachiyan entwickelt. Mittlerweile gibt es etliche Adaptionen davon, wir konzentrieren uns aber auf die ursprüngliche Markov-Kette. Für dieses Kapitel wurde hauptsächlich [25] verwendet.

Definition 5.1. Zwei lineare Erweiterungen e_1 und e_2 heißen *Nachbarn*, wenn es ein $k \in [n - 1]$ gibt, sodass $e_2 = (e_1(1), \dots, e_1(k + 1), e_1(k), \dots, e_1(n))$, daher wenn die eine lineare Erweiterung aus der anderen durch Transposition zweier aufeinanderfolgender Elemente hervorgeht. Die Anzahl der Nachbarn von e bezeichnen wir mit $n(e)$ und ist offenbar durch $n - 1$ beschränkt.

Definition 5.2. Für jede halbgeordnete Menge P ist die *Ordnungs-Markov-Kette* mit Zuständen $e \in L(P)$ durch folgende Übergangswahrscheinlichkeiten definiert:

$$p(e_1, e_2) = \begin{cases} \frac{1}{2n-2} & \text{falls } e_1 \text{ und } e_2 \text{ Nachbarn sind} \\ 1 - \frac{n(e)}{2n-2} & \text{falls } e_1 = e_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung 5.3. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand nach einem Schritt unverändert bleibt, ist wegen

$$1 - \frac{n(e)}{2n - 2} \geq \frac{n - 1}{2n - 2} = \frac{1}{2}$$

bei mindestens 50%. Je mehr Nachbarn eine lineare Erweiterung hat, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit einer Zustandsänderung.

5.1 Geometrische Interpretation

Wir wollen uns nun überlegen, was die Ordnungs-Markov-Kette geometrisch bedeutet. Dazu betrachten wir wie in Kapitel 3 das Ordnungspolytop einer halbgeordneten Menge P , aber diesmal nicht als Menge von Funktionen von P nach \mathbb{R} sondern schlicht als konvexe Teilmenge des Einheitswürfels im \mathbb{R}^n . Es handelt sich dabei tatsächlich nur um eine andere Betrachtungsweise des selben Objektes, da der \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^P algebraisch isomorph sind.

Definition 5.4. Das *Ordnungspolytop* $\mathcal{O}(P)$ der halbgeordneten Menge $P = ([n], \leq_P)$ ist folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{O}(P) = \{x \in [0, 1]^n : x_i \leq x_j \text{ falls } i <_P j\}$$

Das Ordnungspolytop $\mathcal{O}(P)$ von P lässt sich in die Ordnungspolytope $\mathcal{O}(e)$ mit $e \in L(P)$ triangulieren.

$$\mathcal{O}(P) = \bigcup_{e \in L(P)} \mathcal{O}(e)$$

Bei den Ordnungspolytopen der linearen Erweiterungen

$$\mathcal{O}(e) = \{x \in [0, 1]^n : 0 \leq x_{e(1)} \leq x_{e(2)} \leq \dots \leq x_{e(n)} \leq 1\}$$

handelt es sich um Simplexes.

Beispiel 5.5. Für $P = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\})$ ist $\mathcal{O}(P)$ der halbe Einheitswürfel $\{x \in [0, 1]^3 : x_1 \leq x_2\}$. P hat drei lineare Erweiterungen, daher lässt sich $\mathcal{O}(P)$ in drei Simplexes $\mathcal{O}(e_1)$, $\mathcal{O}(e_2)$ und $\mathcal{O}(e_3)$ triangulieren. In Abbildung 12 ist $e_1 = 312$ in rot, $e_2 = 132$ in grün und $e_3 = 123$ in blau dargestellt.

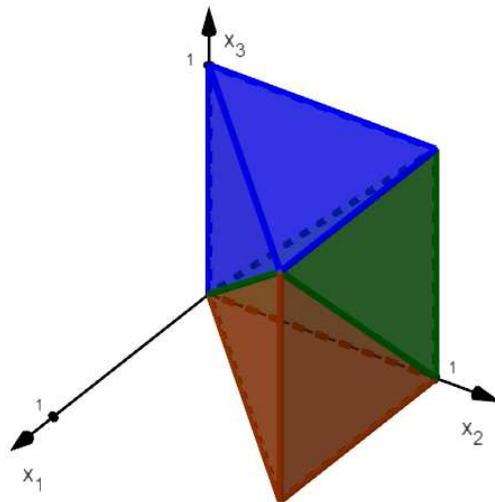


Abbildung 12: Triangulierung eines Ordnungspolytops

Die Ordnungs-Markov-Kette beschreibt eine Irrfahrt von Simplex zu Simplex, die offenbar paarweise unterschiedlichen linearen Erweiterungen von P entsprechen. Das Simplex $\mathcal{O}(e_0)$, bei dem der Random Walk startet, ist durch

eine initiale Verteilung bestimmt, die beliebig gewählt werden kann. Beim t -ten Schritt, $t \geq 0$, wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% zufällig eine der $n - 1$ Facetten von $\mathcal{O}(e_t)$

$$F_k(e_t) = \mathcal{O}(e_t) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_{e_t(k)} = x_{e_t(k+1)}\}, \quad k \in \{1, \dots, n - 1\}$$

ausgewählt. Ist das an die ausgewählte Facette angrenzende Simplex das Ordnungspolytop einer linearen Erweiterung, so wird dieses Simplex beziehungsweise die zugehörige lineare Erweiterung als $(t + 1)$ -ter Zustand der Ordnungs-Markov-Kette gewählt. Andernfalls ist $\mathcal{O}(e_{t+1}) := \mathcal{O}(e_t)$. Sei $\tau(0, \cdot)$ die initiale Wahrscheinlichkeitsfunktion, die die Wahrscheinlichkeiten $\tau(0, e)$ angibt, für die $e \in L(P)$ als erster Zustand der Ordnungs-Markov-Kette gewählt wird. Die Wahrscheinlichkeit, nach genau t Schritten die lineare Erweiterung e als Zustand zu erhalten, ist

$$\tau(t, e) = \sum_{g \in L(P)} \tau(t - 1, g)p(g, e)$$

Unabhängig von der initialen Verteilung konvergiert die Verteilung von τ gegen die Gleichverteilung.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t, e) = \frac{1}{l(P)}$$

Wählt man die Anzahl der Schritte T hinreichend groß, so ist der Output des folgenden Algorithmus eine (fast) zufällig gewählte lineare Erweiterung der halbgeordneten Menge P .

5.2 Der Algorithmus

Der Pseudocode des zur Ordnungs-Markov-Kette gehörigen Algorithmus sieht wie folgt aus.

Algorithmus zur nahezu gleichverteilten Erzeugung von linearen Erweiterungen einer halbgeordneten Menge

```

function RandWalk(P,T)
  suche lineare Erweiterung  $e = (e(1), \dots, e(n))$  von  $P$ 
  for  $t = 1, \dots, T$  do
    wähle  $k \in \{1, \dots, 2n - 2\}$  zufällig
    if  $k \leq n - 1 \wedge \neg(e(k) <_P e(k + 1))$  then
      tmp =  $e(k)$ 
  
```

```

    e(k) = e(k + 1)
    e(k + 1) = tmp
return e

```

Bemerkung 5.6. Da $e(k)$ vor $e(k + 1)$ in der gewählten initialen linearen Erweiterung kommt, gilt $\neg(e(k + 1) <_P e(k))$. Genau wenn $\neg(e(k) <_P e(k + 1))$, gilt, dass $e(k)$ und $e(k + 1)$ unvergleichbar in P sind und dass $(e(1), \dots, e(k + 1), e(k), \dots, e(n))$ eine lineare Erweiterung ist.

Der Aufwand von „RandWalk“ ist $\mathcal{O}(n^2 + T)$, dazu kommt T mal der Aufwand der (pseudo-) zufälligen Erzeugung von $k \in \{1, \dots, 2n - 2\}$.

5.3 Konduktanz

Ein praktisches Hilfsmittel zur Abschätzung der Konvergenzrate der Ordnungs-Markov-Kette ist die sogenannte „Konduktanz“.

Definition 5.7. Die *Konduktanz* einer Ordnungs-Markov-Kette ist definiert als

$$\alpha := \frac{1}{2n - 2} \min \left\{ \frac{C(X)}{|X|} : X \subseteq L(P) : 1 \leq |X| \leq \frac{l(P)}{2} \right\},$$

wobei $C(X)$ die Kapazität des Schnittes $(X, L(P) \setminus X)$ bezeichnet, also die Anzahl an Paaren (e_1, e_2) mit $e_1 \in X$ und $e_2 \in L(P) \setminus X$, sodass e_1 und e_2 Nachbarn sind.

Sinclair und Serrum [43] zeigten, dass sich die Konvergenzrate der Ordnungs-Markov-Kette folgendermaßen abschätzen lässt:

$$\left| \tau(t, e) - \frac{1}{l(P)} \right| \leq (1 - \alpha^2)^t \quad \forall e \in L(P)$$

Dabei ist obige Ungleichung für jede initiale Verteilungsfunktion $\tau(0, \cdot)$ gültig.

Bemerkung 5.8. Da die Anzahl der Nachbarn jeder linearen Erweiterung durch $(n - 1)$ beschränkt ist, gilt $C(X) \leq (n - 1)|X|$ für jede Menge von linearen Erweiterungen X . Daraus folgt, dass $\alpha \leq (n - 1)/(2n - 2) = 1/2$. Je größer α , desto schneller ist die Konvergenz von „RandWalk“.

Satz 5.9. Für die Konduktanz der Ordnungs-Markov-Kette gilt

$$\alpha > 2^{-\frac{3}{2}} n^{-\frac{5}{2}}$$

Bemerkung 5.10. Besteht P aus einer Kette von $n - 1$ Elementen und einem Element x , das mit allen anderen Elementen unvergleichbar ist, so wird das Minimum in der Definition von α für ein $X \subseteq L(P)$ mit $C(X) = 1$ und $|X| = \lfloor n/2 \rfloor$ angenommen. Dabei sind die Elemente von X jene linearen Erweiterungen, die entstehen, wenn x nach den ersten beziehungsweise vor den letzten $0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor - 1$ Kettenelementen eingefügt wird. Es gilt also $\alpha = ((2n - 2)\lfloor n/2 \rfloor)^{-1} \cong n^{-2}$. Man kann daher vermuten, dass sich die Abschätzung aus Satz 5.9 noch um den Faktor $n^{0,5}$ verbessern lässt.

Für den Beweis von Satz 5.9 benötigen wir noch folgenden Satz, dessen Beweis in [25] zu finden ist.

Satz 5.11. Sei Q ein n -dimensionaler konvexer Körper, der von einer $(n - 1)$ -dimensionalen Menge S in zwei Teilmengen U und V partitioniert wird, wobei $S = \partial U \setminus \partial Q = \partial V \setminus \partial Q$, $s = \text{vol}_{n-1} S$, $u = \text{vol}_n U$ und $v = \text{vol}_n V$. Dann gilt

$$s \geq \frac{\min\{u, v\}}{\text{diam } Q}.$$

Beweis. (Satz 5.9)

Seien P eine beliebige halbgeordnete Menge mit $l(P) > 1$ und $X \subseteq L(P)$ mit $1 \leq |X| \leq l(P)/2$. Wir partitionieren $\mathcal{O}(P)$ in folgende zwei Mengen:

$$U = \bigcup_{e \in X} \mathcal{O}(e) \quad V = \bigcup_{e \in L(P) \setminus X} \mathcal{O}(e)$$

Da $\text{vol}_n \mathcal{O}(e) = 1/n!$ für jede lineare Erweiterung e , erhalten wir

$$u = \text{vol}_n U = \frac{|X|}{n!} \leq v = \text{vol}_n V = \frac{l(P) - |X|}{n!}.$$

Nun wollen wir das $(n - 1)$ -dimensionale Volumen von $S := \partial U \setminus \partial \mathcal{O}(P)$ bestimmen. Da $\text{vol}_{n-1} F_k(e) = 2^{1/2}/(n - 1)!$ für jede Facette von jedem Ordnungspolytop $\mathcal{O}(e)$ erhalten wir

$$s = \text{vol}_{n-1} S = \frac{C(X)2^{\frac{1}{2}}}{(n - 1)!}.$$

Nun können wir die Konduktanz nach unten abschätzen.

$$\alpha \geq \frac{1}{2n - 2} \frac{C(X)}{|X|} = \frac{1}{(2n - 2)2^{\frac{1}{2}}n} \frac{s}{\min\{u, v\}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}n^2 - 2^{\frac{3}{2}}n} \frac{s}{\min\{u, v\}} >$$

$$> 2^{-\frac{3}{2}}n^{-2} \frac{s}{\min\{u, v\}} > 2^{-\frac{3}{2}}n^{-2} \frac{1}{\text{diam } \mathcal{O}(P)} = 2^{-\frac{3}{2}}n^{-\frac{5}{2}}$$

Die letzte Abschätzung gilt aufgrund von Satz 5.11. Weiters wurde verwendet, dass $u = \min\{u, v\}$ und $\text{diam } \mathcal{O}(P) = n^{1/2}$, da die Diagonale $\{x \in [0, 1]^n : x_1 = \dots = x_n\}$ Teilmenge jedes Ordnungspolytops ist. \square

Beispiel 5.12. Sei $n = 7$. Wir können mit Satz 5.9 bestimmen, wie viele Schritte T es mindestens braucht, sodass $|\tau(T, e) - \frac{1}{l(P)}| \leq 10^{-3}$ erfüllt ist. Wir erhalten für die Konduktanz $\alpha > 2^{-3/2}7^{-5/2} \cong 0,0027$. Es gilt daher

$$|\tau(T, e) - \frac{1}{l(P)}| \leq (1 - \alpha^2)^T < (1 - 0.0027^2)^T$$

Wir erhalten $T \geq \log(0,001) / \log(1 - 0,0027^2) \cong 928785,7$. „RandWalk“ hat für $T = 928786$ jede beliebige lineare Erweiterung $e \in L(P)$ mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/l(P) \mp 0,001$ als Output.

Bemerkung 5.13. Auch allgemein kann mit Satz 5.9 kann das Wachstum der Anzahl an Schritten T bestimmt werden, die hinreichend sind, um mit „RandWalk“ lineare Erweiterungen mit einer relativen Genauigkeit von

$$|\tau(T, e) - \frac{1}{l(P)}| \leq \frac{\nu}{l(P)}, \quad \forall e \in L(P),$$

mit vorgegebenem $\nu \in (0, 1)$ zu erzeugen. Nach Umformung erhält man

$$T = \mathcal{O}(n^5 \log(l(P))).$$

6 Die 1/3-2/3-Vermutung

6.1 Das Sortierproblem

Wir befassen uns in diesem Kapitel mit dem anwendungstechnisch wichtigen „Sortierproblem“, das unter anderem in [25], [31] und [48] erläutert wird. Dieses lautet wie folgt. Gegeben ist eine halbgeordnete Menge P , die die teilweise Information einer unbekanntenen Totalordnung \leq_T , die eine lineare Erweiterung von P ist, darstellt. Es gilt, jene lineare Erweiterung effizient herauszufinden. Dazu sind Anfragen folgender Form erlaubt. Wir suchen ein in P unvergleichliche Paar (a, b) aus und stellen die Frage: „Gilt $a <_T b$ oder $a >_T b$?“. Je nach Antwort fügen wir nun (a, b) oder (b, a) zur Halbordnung hinzu und bilden den transitiven Abschluss. Die so erhaltene halbgeordnete Menge nennen wir P_1 . Nun stellen wir die Frage für ein in P_1 unvergleichliches Paar und erhalten P_2 . Dies führen wir nun so fort. Nach q Anfragen ist $P_q = (M, \leq_T)$ schließlich mit der gesuchten linearen Erweiterung \leq_T ausgestattet.

Je nachdem, welche Paare ausgewählt werden, werden mehr oder weniger Anfragen benötigt. Das Ziel ist nun, Paare auszuwählen, sodass die Anzahl an Anfragen möglichst gering ist bzw. ein stabiles Ausmaß hat. Im Worst Case werden

$$q \geq \log_2 l(P)$$

Anfragen benötigt. Diese Schranke ist allgemein als „informationstheoretische untere Schranke“ bekannt.

Wir bezeichnen mit $\mathbb{P}(a \leq_T b)$ den Anteil an $l(P)$ von jenen linearen Erweiterungen von P , in denen a kleiner ist als b . Dies macht Sinn, da die unbekanntene lineare Erweiterung \leq_T als zufällig gewählt angenommen wird.

Um eine stabile Anzahl an Anfragen garantieren zu können, möchte man Paare (a, b) auswählen, für die $\mathbb{P}(a \leq_T b)$ möglichst nahe bei $\frac{1}{2}$ liegt. Für die halbgeordnete Menge $(\{a, b, c\}, (a, b))$ sind diese Werte für alle vier unvergleichlichen geordneten Paare gleich $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$.

Definition 6.1. Wir nennen ein Paar (a, b) von unvergleichbaren Elementen einer halbgeordneten Menge P *ausgewogen*, wenn $\frac{1}{3} \leq \mathbb{P}(a <_T b) \leq \frac{2}{3}$.

6.2 Die Vermutung

Nun können wir die sogenannte „1/3-2/3-Vermutung“ formulieren.

Vermutung 6.2. In jeder halbgeordneten und nicht totalgeordneten Menge P gibt es ein ausgewogenes Paar.

Anhand des vorher erwähnten Beispiels einer dreielementigen halbgeordneten Menge sehen wir, dass mit $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ das bestmögliche um $\frac{1}{2}$ symmetrische Intervall gewählt wurde.

Eine Konsequenz aus Vermutung 6.2 wäre nun folgende. Bei jeder Anfrage könnte ein ausgewogenes Paar gewählt werden. Damit hätte man die Sicherheit, dass nach jeder Anfrage die Anzahl der linearen Erweiterungen, die die gesuchte lineare Erweiterung sein können, um mindestens $\frac{1}{3}$ ihrer vorherigen Anzahl reduziert wird.

Die Vermutung 6.2 wurde erstmals 1968 von Kisilitsyn [27] aufgestellt. Unabhängig davon hatten sie auch Fredman [21] und Linal [31]. Bis heute wurde sie weder bewiesen noch widerlegt. Brightwell, Felsner und Trotter [10] nannten dieses Problem 1995 „eines der faszinierendsten Probleme der Kombinatorik von halbgeordneten Mengen“.

Laut Brightwell [11] wird weitgehend davon ausgegangen, dass die 1/3-2/3-Vermutung wahr ist. Grund dafür sei, dass in all den Jahren kein Gegenbeispiel gefunden wurde und für die vielversprechendsten Klassen und Beispiele von halbgeordneten Mengen, die Gegenbeispiele bieten könnten, bewiesen wurde, dass sie alle ausgewogene Paare enthalten.

Für folgende Klassen von halbgeordneten Mengen wurde die Vermutung 6.2 bereits bewiesen: N-freie halbgeordnete Mengen [48], halbgeordnete Mengen mit Weite zwei [31], halbgeordnete Mengen mit Höhe zwei [47], halbgeordnete Mengen mit $n \leq 11$ [38], halbgeordnete Mengen, in denen jedes Element mit höchstens sechs Elementen unvergleichbar ist [39] und Semiordnungen [13].

Des Weiteren wurde zwar für allgemeines P , dafür mit „schlechteren“ Grenzen bewiesen: In jeder halbgeordneten Menge existiert ein Paar (a, b) mit $\frac{3}{11} \leq \mathbb{P}(a <_T b) \leq \frac{8}{11}$ [21].

6.3 Der Beweis für N-freie halbgeordnete Mengen

Wir zeigen exemplarisch den Beweis der Vermutung für N-freie halbgeordnete Mengen unter Verwendung von [48].

Satz 6.3. *Jede endliche, N-freie, halbgeordnete Menge, die nicht totalgeordnet ist, enthält ein ausgewogenes Paar.*

Zum Beweis von Satz 6.3 benötigen wir noch ein paar Lemmata.

Lemma 6.4. Sei $P = (M, \leq_P)$ eine N -freie halbgeordnete Menge.

- (i) Gibt es für zwei Elemente $a, b \in M$ ein Element, das beide überdeckt, so ist die Menge der a überdeckenden Elemente gleich der Menge der b überdeckenden Elemente.
- (ii) Gibt es für zwei Elemente $a, b \in M$ ein Element, das von beiden Elementen überdeckt wird, so ist die Menge der Elemente, die von a überdeckt werden gleich der Menge der Elemente, die von b überdeckt werden.

Beweis. Wir zeigen (i), das Argument für (ii) ist analog. Es gelte also für $a \neq b$, dass $a <_P c$ und $b <_P c$. Gäbe es ein Element $d \in M$, für das $a <_P d$, aber d mit b unvergleichbar ist, wäre $\{a, b, c, d\}$ mit der Einschränkung von \leq_P auf diese Menge eine N -Halbordnung. □

Definition 6.5. Mit $\text{Min}(P)$ bezeichnen wir die Menge der minimalen Elemente der halbgeordneten Menge P . Jede halbgeordnete Menge besitzt eine Partitionierung in *Stufen* P_i mit $i = 0, \dots, h - 1$, wenn h die Höhe von P ist. Die Stufen sind definiert durch $P_0 = \text{Min}(P)$ und

$$P_i = \text{Min}(P \setminus \bigcup_{j < i} P_j).$$

Damit ist die Höhe $h(a) = i$ für a aus P_i .

Lemma 6.6. Sei $P = (M, \leq_P)$ eine N -freie halbgeordnete Menge mit Stufen P_0, \dots, P_{h-1} . Für jedes $a \in M$ bilden die a überdeckenden Elemente eine Teilmenge eines P_i für ein $i \in \{0, \dots, h - 1\}$.

Beweis. Wird a von keinem Element überdeckt, gilt das Lemma, da die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist. Gibt es nur ein Element, das a überdeckt, so liegt dieses in einem P_i , da die Stufen eine Partition von P bilden. Nehmen wir nun an, es gäbe zwei verschiedene Elemente $b \in P_j$ und $c \in P_k$, die a überdecken, wobei $j < k$. Dann muss es ein Element $d \in P_{k-1}$ geben, das von c überdeckt wird, da $k \leq 2$. Wäre dieses d gleich a , wäre $a \in P_{k-1}$, was widersprüchlich wäre, da a von b überdeckt wird und $b \in P_j$, aber $j \leq k - 1$. Weiters ist $d \neq b$, da sonst $a <_P b <_P c$ im Widerspruch zu $a <_P c$. Damit sind diese vier Elemente verschieden. Wir behaupten, dass $\{a, b, c, d\}$ ein N in P bildet. Da a von den zwei verschiedenen Elementen b und c überdeckt wird, müssen b und c unvergleichbar sein. Es sind auch b und d unvergleichbar, denn $d <_P b$ ist nicht möglich, da $j \leq k - 1$, während $b <_P d$ nicht möglich ist, da sonst $b <_P d <_P c$ und somit $b <_P c$ gelten würde, aber b und c

sind unvergleichbar. Außerdem sind a und d unvergleichbar, da die beiden Elemente von c überdeckt werden. □

Wir bezeichnen die Menge aller Elemente, die in P größer als a sind, mit $U(a) = \{x \in M : a <_P x\}$ und die Menge aller Elemente, die in P kleiner als a sind, mit $D(a) = \{x \in M : x <_P a\}$.

Lemma 6.7. *Sei P eine N -freie halbgeordnete Menge mit Stufen P_0, \dots, P_{h-1} . Sei $i \in \{0, \dots, h-1\}$, die größte Zahl, sodass es in P_i zwei verschiedene Elemente a und b gibt mit $\{p \in M : p \triangleleft_P a\} = \{q \in M : q \triangleleft_P b\}$. Dann ist $U(x) \cup \{x\}$ für alle $x \in P_i$ eine Kette.*

Beweis. Sei $x \in P_i$. Ist x maximal, ist $U(x) \cup \{x\} = \{x\}$ trivialerweise eine Kette. Sei nun $U(x) \neq \emptyset$ und wir nehmen an, $U(x) \cup \{x\}$ wäre keine Kette. Dann muss es ein Element $y \in U(x) \cup \{x\}$ geben, das von zwei verschiedenen Elementen y_1 und y_2 überdeckt wird. Nach Lemma 6.6 liegen diese beiden Elemente in der selben Stufe P_j mit $i < j$. Nun wissen wir aus Lemma 6.4 (ii), dass $\{p \in M : p \triangleleft_P y_1\} = \{q \in M : q \triangleleft_P y_2\}$. Dies steht nun im Widerspruch zur Wahl von i . □

Definition 6.8. Sei $P = (M, \leq_P)$ eine halbgeordnete Menge. Wir nennen ein geordnetes Paar (x, y) , mit $x, y \in M$, *kritisch*, falls die beiden Elemente in P unvergleichbar sind und $U(y) \subseteq U(x)$ sowie $D(x) \subseteq D(y)$.

Lemma 6.9. *Sei (x, y) ein kritisches Paar einer halbgeordneten Menge P . Vertauscht man in einer linearen Erweiterung, in der y kleiner als x ist, diese beiden Elemente, ist die erhaltene Kette ebenfalls eine lineare Erweiterung. Weiters gilt $\mathbb{P}(x <_T y) \geq \frac{1}{2}$.*

Beweis. Seien (x, y) ein kritisches Paar von P und \leq_{T_1} eine lineare Erweiterung mit $y <_{T_1} x$. Falls y und x in $<_{T_1}$ benachbart sind, können wir die beiden Elemente vertauschen und erhalten eine lineare Erweiterung. Falls es z_1, \dots, z_k gibt mit $y <_{T_1} z_1 <_{T_1} \dots <_{T_1} z_k <_{T_1} x$, so sind die z_i in P alle sowohl mit y als auch mit x unvergleichlich. Denn nehmen wir an, es gibt ein z_i , dass in P mit y vergleichbar ist, folgt $y <_P z_i$ und damit $z_i \in U(y) \subseteq U(x)$. Damit ist $x <_P z_i$. Da aber $<_{T_1}$ eine lineare Erweiterung ist und $z_i <_{T_1} x$, ist dies ein Widerspruch. Nehmen wir an, dass z_i und x vergleichbar sind, so folgt analog $z_i <_P x$ und daraus $z_i \in D(x) \subseteq D(y)$. Damit ist $z_i <_P y$, im Widerspruch zu $y <_{T_1} z_i$. Wenn wir y mit x in $<_{T_1}$ vertauschen, erhalten wir daher eine lineare Erweiterung $<_{T_2}$. Diese Vertauschungsabbildung $<_{T_1} \mapsto <_{T_2}$ von der Menge der linearen Erweiterungen, in denen y kleiner als x ist, in die Menge

der linearen Erweiterungen, in denen x kleiner als y ist, ist offenbar injektiv. Damit ist $\mathbb{P}(y <_T x) \leq \mathbb{P}(x <_T y)$ und somit $\mathbb{P}(x <_T y) \geq \frac{1}{2}$. \square

Nun haben wir alle Hilfsmittel beisammen, um die 1/3-2/3-Vermutung für N-freie halbgeordnete Mengen zu beweisen.

Beweis. (Satz 6.3)

Sei $P = (M, \leq_P)$ eine endliche, N-freie, halbgeordnete und nicht totalgeordnete Menge mit den Stufen P_0, \dots, P_{h-1} .

Seien die ersten m Stufen einelementig, und die $(m + 1)$ -te Stufe mindestens zweielementig, welche es gibt, da P keine Kette ist. Es gilt daher $P_0 = \{p_0\}, P_1 = \{p_1\}, \dots, P_{m-1} = \{p_{m-1}\}$. Nun ist eine Totalordnung e auf $M \setminus \bigcup_{r=0}^{m-1} p_r$ genau dann eine lineare Erweiterung von $P \setminus \bigcup_{r=0}^{m-1} p_r$, wenn $p_0 p_1 \dots p_{m-1} e$ eine lineare Erweiterung von P ist. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass P_0 mindestens zwei verschiedene Elemente enthält. Sei nun $i \in \{0, \dots, h - 1\}$ die größte Zahl, sodass P_i zwei verschiedene Elemente a und b enthält, für die gilt, dass $\{p \in M : p <_P a\} = \{q \in M : q <_P b\}$. Seien nun $U(a) = U(b) = \emptyset$ und z o.B.d.A. so, dass $a <_{T_1} z <_{T_1} b$ in einer beliebigen linearen Erweiterung $<_{T_1}$. Dann ist z in P mit beiden Elementen unvergleichbar. Denn angenommen z ist in P mit a vergleichbar, folgt $a <_P z$, im Widerspruch zur Maximalität von a . Nehmen wir an, dass z in P mit b vergleichbar ist, folgt $z <_P b$ und da nach Annahme $D(a) = D(b)$, folgt $z <_P a$, im Widerspruch zu $a <_{T_1} z$. Die Abbildung $<_{T_1} \mapsto <_{T_2}$, die a und b vertauscht, von der Menge der linearen Erweiterungen von P , in denen a kleiner b ist, in die Menge der linearen Erweiterungen von P , in denen b kleiner a ist, ist daher bijektiv. Folglich ist $\mathbb{P}(a <_T b) = \frac{1}{2}$ und wir sind fertig.

Nehmen wir nun o.B.d.A. an, dass $U(b) \neq \emptyset$. Nach Lemma 6.7 ist $U(b) \cup \{b\}$ eine Kette $b_1 <_P \dots <_P b_l$, wobei $b = b_1$. Wir zeigen den Satz nun indirekt. Wir nehmen an, dass für alle $j \in \{1, \dots, l\}$ das Paar (a, b_j) nicht ausgewogen ist. Für $j \geq 2$ bedeutet das, dass $\mathbb{P}(a <_T b_j) < 1/3$ oder $\mathbb{P}(a <_T b_j) > 2/3$. Für $j = 1$ nehmen wir daher an, dass folgendes gilt:

$$\mathbb{P}(a <_T b) < \frac{1}{3}$$

Dies ist eine Annahme ohne Beschränkung der Allgemeinheit, denn der Fall $U(a) \neq \emptyset$ ist symmetrisch in a und b . Führt diese Annahme zu einem Widerspruch, ist daher auch $\mathbb{P}(b <_T a) < 1/3$ falsch und damit wäre (a, b) ein ausgewogenes Paar. Im Fall $U(a) = \emptyset$ ist (b, a) ein kritisches Paar, da a und b unvergleichbar sind, $U(a) = \emptyset \subset U(b)$ und $D(b) = D(a)$. Nach Lemma 6.9

ist $\mathbb{P}(b <_T a) \geq 1/2$. In diesem Fall können wir daher nur $\mathbb{P}(b <_T a) > 2/3$ fordern, was äquivalent zu unserer Annahme ist. Wir definieren nun:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \mathbb{P}(a <_T b) \\
 q_j &= \mathbb{P}(b_{j-1} <_T a <_T b_j) \text{ für } j \in \{2, \dots, l\} \\
 q_{l+1} &= \mathbb{P}(b_l <_T a)
 \end{aligned}$$

Damit sind alle Möglichkeiten, wie sich a in linearen Erweiterungen bezüglich der b_j einreihen kann, abgedeckt. Es gilt also $\sum_{j=1}^{l+1} q_j = 1$. Wir behaupten weiters, dass $0 \leq q_{l+1} \leq \dots \leq q_1 < \frac{1}{3}$. Die q_j sind positiv, da sie Wahrscheinlichkeiten sind, und nach Annahme ist $q_1 < \frac{1}{3}$. Es fehlt noch, zu zeigen, dass $q_{l+1} \leq \dots \leq q_1$.

Sei eine lineare Erweiterung \leq_{T_1} gegeben, mit $b_l <_{T_1} a$. Jedes z mit $b_l <_{T_1} z <_{T_1} a$ ist in P mit b_l und a unvergleichbar. Denn angenommen, z ist in P mit b_l vergleichbar, dann folgt $b_l <_P z$ im Widerspruch zur Maximalität von b_l . Nehmen wir an, dass z in P mit a vergleichbar ist, folgt $z <_P a$ und da $D(a) = D(b)$, ist $z <_P b <_P b_l$, was einen Widerspruch darstellt, da \leq_{T_1} eine lineare Erweiterung von P ist. Wenn wir a und b_l in \leq_{T_1} vertauschen, erhalten wir daher eine lineare Erweiterung \leq_{T_2} mit $b_{l-1} <_{T_2} a <_{T_2} b_l$. Diese Vertauschungsabbildung ist offenbar injektiv und somit ist $q_{l+1} \leq q_l$.

Sei nun eine lineare Erweiterung \leq_{T_1} gegeben, mit $b_j <_{T_1} a <_{T_1} b_{j+1}$ für $j \in \{1, \dots, l-1\}$. Auch hier ist jedes z , für das $b_j <_{T_1} z <_{T_1} a <_{T_1} b_{j+1}$ gilt, mit b_j und a in P unvergleichbar. Angenommen, z ist mit b_j in P vergleichbar. Dann folgt $b_j <_P z$ und somit ist $z = b_s$ für ein $s \geq j+1$. Aber da $z <_{T_1} b_{j+1}$, ist dies ein Widerspruch. Analog zum Vorigen ist auch z mit a unvergleichbar. Das Vertauschen von a und b_j liefert uns daher eine lineare Erweiterung \leq_{T_2} , für die $b_{j-1} <_{T_2} a <_{T_2} b_j$ (für $j \in \{2, \dots, l-1\}$) bzw. $a <_{T_2} b_1$ (für $j = 1$) gilt. Auch diese Vertauschungsabbildung ist injektiv und wir haben $q_l \leq \dots \leq q_1$.

Sei nun t jene Zahl, für die folgendes gilt:

$$\sum_{j=1}^{t-1} q_j \leq \frac{1}{2} < \sum_{j=1}^t q_j$$

Nun gilt, dass $\sum_{j=1}^{t-1} q_j = \mathbb{P}(a <_T b_{t-1}) \leq 1/2$. Nach Annahme ist $\mathbb{P}(a <_T b_{t-1}) < 1/3$ oder $\mathbb{P}(a <_T b_{t-1}) > 2/3$. Folglich ist $\sum_{j=1}^{t-1} q_j < 1/3$. Weiters gilt nun $\sum_{j=1}^t q_j = \mathbb{P}(a <_T b_t) > 1/2$ und nach Annahme gilt $\mathbb{P}(a <_T b_t) < 1/3$ oder $\mathbb{P}(a <_T b_t) > 2/3$ und damit $\sum_{j=1}^t q_j > 2/3$. Daraus folgt, dass $q_t > 1/3$, im Widerspruch zu $q_t \leq q_1 < 1/3$, womit der Satz bewiesen ist. \square

7 Anwendungen

Wir befassen uns nun damit, wie das kombinatorische Wissen über lineare Erweiterungen in der Praxis angewendet wird. Hierfür ist der Rechenaufwand des Problems des Abzählens von linearen Erweiterungen von Bedeutung. Wird eine vollkommen allgemein gehaltene Halbordnung betrachtet, erweist sich der Aufwand für einige praktische Anwendungen als zu hoch. Brightwell und Winkler zeigten in [14], dass es sich dabei um $\#P$ -vollständiges Problem handelt. Daher werden in der Praxis oft spezielle Halbordnungen verwendet, um den Rechenaufwand geringer zu halten.

7.1 Folgenanalyse

Im Großteil dieser Arbeit wurde eine halbgeordnete Menge, eventuell eines gewissen Types, betrachtet, und Eigenschaften der Menge ihrer linearen Erweiterungen untersucht. Die Herangehensweise in der Folgenanalyse (siehe etwa [33]) ist anders herum. Gegeben ist eine Menge von endlichen Folgen, also totalgeordneten Mengen. Diese Folgen bestehen beispielsweise aus Daten von elektronischem Geschäftsverkehr, Internet Browsing, Alarmprotokollen von Betriebssystemen oder Telekommunikationsnetzwerken und stellen den zeitlichen Ablauf dieser Daten dar. Nun möchte man eine oder mehrere Halbordnung(en) auf der gesamten Datenmenge finden, die die gegebenen Folgen möglichst gut repräsentiert bzw. repräsentieren. Das bedeutet nicht, dass die Folgen alle lineare Erweiterungen der Halbordnungen sein müssen, da sonst oft nur die triviale Halbordnung übrigbleibt, in der jedes Element nur mit sich selbst in Relation steht. Wohl aber soll sich die Menge der Folgen nicht all zu sehr von den Mengen der linearen Erweiterungen unterscheiden. Dazu ist nötig, die Anzahl der linearen Erweiterungen zu bestimmen, was in annehmbarer Laufzeit durchführbar ist, wenn man sich auf die Klasse der seriell-parallelen halbgeordneten Mengen beschränkt.

7.2 Molekularbiologie

Mit dem Aufkommen von Mikroarrays, das sind moderne molekularbiologische Untersuchungssysteme, die parallel mehrere tausend Analysen durchführen, entwickelte sich ein Bedarf an mathematischen Tests, die Eigenschaften aus den resultierenden großen Datenmengen ableiten können. Morton et al. beschäftigten sich in [35] mit dem Studium und der Verfeinerung von sogenannten „Rank Tests“. Ein Rank Test ist eine Partitionierung der symmetrischen Gruppe S_n , welche durch eine Abbildung $\tau : S_n \rightarrow T$, von der symmetrischen Gruppe in eine Menge von Statistiken T , durch $(\tau^{-1}(t))_{t \in T}$

induziert wird. Man betrachtet die Permutationen wie gewohnt als Totalordnungen. Bildet man nun für jedes feste $t \in T$ den Durchschnitt aller Totalordnungen aus $\tau^{-1}(t)$, erhält man eine halbgeordnete Menge. Die Bestimmung der Anzahl der linearen Erweiterungen dieser halbgeordneten Mengen ist dabei von entscheidender Bedeutung für die Untersuchung der Statistiken.

7.3 Sortieren

Die wohl naheliegendste Anwendung der Kombinatorik linearer Erweiterungen von endlichen Halbordnungen ist das Sortieren. In Kapitel 6 wurde das Sortierproblem bereits behandelt: Gegeben ist eine Halbordnung, und es gilt eine unbekannte lineare Erweiterung dieser zu bestimmen. Ist diese Halbordnung trivial, entspricht das Problem dem Sortieren einer Liste von zufällig angeordneten Elementen. Peczarski [40] bestimmte beispielsweise für bestimmte unsortierte Listen, was die kleinstmögliche Anzahl an Vergleichen ist, die ausreicht, um diese Listen zu sortieren. Dazu verwendete er einen Algorithmus, der die Anzahl der linearen Erweiterungen einer halbgeordneten Menge bestimmt. Cardinal et al. [15] entwickelten 2010, aufbauend auf existierenden Ergebnissen, effiziente Algorithmen für das Sortierproblem, bei dem von einer meist nicht trivialen Halbordnung ausgegangen wird.

7.4 Präferenzforschung

Lukasiewicz et al. befassen sich in [32] mit den Präferenzen von allgemein gehaltenen „Einheiten“. Konkret können diese Einheiten etwa Nutzer von diversen Anwendungen, Einzelpersonen, denen Produkte angeboten werden oder sonstige Gruppen von Personen, deren Vorlieben von Interesse sind, sein. Die bekannten Präferenzen werden in Form einer Halbordnung modelliert, wobei die verschiedenen Präferenzen, daher Relationspaare, unterschiedlich gewichtet sind. Um die Wahrscheinlichkeiten der unbekanntenen Präferenzen zu berechnen, müssen die linearen Erweiterungen der Halbordnung bestimmt werden.

7.5 KI-Planungssysteme

Planungssysteme von KI bestimmen die Abfolge von Aktionen von beispielsweise Software-Agenten, Robotern und unbemannten Fahrzeugen. Muise et al. [36] befassen sich mit der Abänderung von linearen Planungssystemen in halbgeordnete Planungssysteme, was einige Verbesserungen mit sich bringen kann. Die Anzahl der linearen Erweiterungen der auftretenden Halbordnungen

gen ist dabei eine wichtige Kennzahl und steht für den Flexibilitätsgrad des Planungssystems.

Literatur

- [1] Alon N., Bollobás B., Brightwell G.R., Janson S., *Linear Extensions of a Random Partial Order*, Annals of applied probability, Vol.4 (1994)
- [2] Anderson D., Egge E.S., Riehl M., Ryan L., Steinke R., Vaughan Y., *Pattern Avoiding Linear Extensions of Rectangular Posets*, Cornell University (2016)
- [3] Bechet D., Groote P., Retoré C., *A complete axiomatisation for the inclusion of series-parallel partial orders*, Rewriting Techniques and Applications (1997), 230-240
- [4] Björner A., Wachs M.L., *Q-hook length formulas for forests*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 52 (1989), 165-187
- [5] Bodini O., Dien M., Genitrini A., Peschanski F., *Entropic Uniform Sampling of Linear Extensions in Series-Parallel Posets*, Springer International Publishing AG (2017)
- [6] Bollobás B., Brightwell G.R., Sidorenko A., *Geometrical Techniques for Estimating Numbers of Linear Extensions*, Europ.J.Combinatorics 20 (1999), 329-335
- [7] Brightwell G.R., Tetali P., *The Number of Linear Extensions of the Boolean Lattice*, Kluwer Academic Publishers (2003)
- [8] Brightwell G.R., *Random k-dimensional orders: Width and Number of Linear Extensions*, Order (1992)
- [9] Brightwell G.R., *Linear extensions of random orders*, Discrete Mathematics 125 (1991), 87-96
- [10] Brightwell G.R., Felsner S., Trotter W.T., *Balancing pairs and the cross product conjecture*, Order 12, (1995), 327-349
- [11] Brightwell G.R., *Balanced pairs in partial orders*, Discrete Mathematics 201 (1999), 25-52
- [12] Brightwell G.R., Bollobás B., *The height of a random partial order: concentration of measure*, Annals of applied probability (1992)
- [13] Brightwell G.R., *Semiordeals and the 1/3-2/3 conjecture*, Order 5 (1989), 369-380

- [14] Brightwell G.R., Winkler P., *Counting linear Extensions*, Order 8 (1991), 225-242
- [15] Cardinal J., Fiorini S., Joret G., Jungers R.M., Munro J.I., *Sorting under Partial Information (without the Ellipsoid Algorithm)*, Combinatorica 33 (2013), 655–697
- [16] Davey B.A., Priestley H.A., *Introduction to Lattices and Order*, New York: Cambridge University Press (2002), 23-24
- [17] Dilworth R.P. *A decomposition theorem for partially ordered sets*, Annals of Mathematics (1950), (161-166)
- [18] Dushnik B., Miller E.W., *Partially Ordered Sets*, American Journal of Mathematics 63, Nr. 3 (1941), 600-610
- [19] Felsner S., Wernisch L., *Markov Chains for Linear Extensions, the Two-Dimensional Case*, Symposium of Discrete Algorithms: Proceedings of the Eight Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Mathematics (1997), 239-247
- [20] Frame J.S., Robinson G. de B., Thrall R.M., *The Hook Graphs of the Symmetric Group*, Cambridge University Press (2018)
- [21] Fredman M., *How good is the information theory bound in sorting*, Theoretical Computer Science 1 (1976), 355-361
- [22] Gut A., *Stopped Random Walks*, Springer (1988)
- [23] Hiraguchi T. *On the Dimension of Orders*, Sci. Rep. Kanazawa Univ. 4 (1955), 1-20
- [24] Károlyi G., *Lectures on extremal set systems and two-colorings of hypergraphs*, Nicht publiziertes Werk (1993)
- [25] Karzanov A., Khachiyan L., *On the conductance of order markov chains*, Institute for System Studies of the U.S.S.R. Academy of Sciences (1991)
- [26] Kingman J.F.C., *The ergodic theory of subadditive stochastic processes*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B (1968), 499-510
- [27] Kislitsyn S.S., *Finite partially ordered sets and their associated set of permutations*, Matematicheskije Zametki Vol.4, Issue 5 (1968), 511–518
- [28] Klein P.N., *Optimization Algorithms for Planar Graphs*, Nicht publiziertes Werk (2011)

- [29] Knuth D.E., *The art of computer programming*, Vol.3, Addison-Wesley (1973), 70
- [30] Komm H., *On the Dimension of Partially Ordered Sets*, American Journal of Mathematics 70, Nr.3 (1948), 507-520
- [31] Linial N., *The information-theoretic bound is good for merging*, SIAM Journal on Computing 13 (1984), 795–801
- [32] Lukasiewicz T., Martinez M.V., Simari G.I., *Probabilistic Preference Logic Networks*, Proceedings of the 21. European Conference on Artificial Intelligence Vol. 263 von Frontiers in Artificial Intelligence and Applications (2014), 561–566
- [33] Mannila H., Meek C., *Global Partial Orders from Sequential Data*, Proceedings of the Sixth International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 161–168
- [34] Margolius B.H., *Permutations with Inversions*, Journal of Integer Sequences, Vol.4 (2001)
- [35] Morton J., Pachter L., Shiu A., Sturmfels B., Wienand O., *Convex Rank Tests and Semigraphoids*, SIAM Journal on Discrete Mathematics 23 (2009), 1117–1134
- [36] Muise C., Beck J.C., McIlraith S.A., *Optimal Partial-Order Plan Relaxation via MaxSAT*, Journal of Artificial Intelligence Research 57 (2016), 113-149
- [37] Novelli J., Pak I., Stoyanovskii A.V., *A direct bijective proof of the hook-length formula*, Chapman & Hall (1997)
- [38] Peczarski M., *The gold partition conjecture*, Order 23 (2006), 89-95
- [39] Peczarski M., *The gold partition conjecture for 6-thin posets*, Order 25 (2008), 91-103
- [40] Peczarski M., *New Results in Minimum-Comparison Sorting*, Algorithmica 40 (2004), 133–145
- [41] Radhakrishnan J., *Entropy and Counting*, IIT Kharagpur on Computational Mathematics, Modelling and Algorithms, Narosa Publishers (2001)
- [42] Sidorenko A., *Inequalities for the number of Linear Extensions*, Order 8 (1992), 331-340

- [43] Sinclair A.J., Jerrum M.R., *Approximate Counting, Uniform Generation and Rapidly Mixing Markov Chains*, Information and Computation 82 (1989), 93-133
- [44] Stanley R.P., *A chromatic-like polynomial for ordered sets*, Harvard University (1971)
- [45] Stanley R.P., *Decompositions of rational convex polytopes*, Annals of Discrete Mathematics 6 (1980)
- [46] Stanley R.P., *Two poset polytopes*, Discrete and Computational Geometry 1 (1968), 9-23
- [47] Trotter W.T., Gehrlein W.V., Fishburn P.C., *Balance theorems for height-2 posets*, Order 9 (1992), 43-53
- [48] Zaguia I., *The $1/3$ - $2/3$ -Conjecture for N -free ordered sets*, Electronic Journal of Combinatorics 19 (2012)