



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

DIPLOMARBEIT

Einlagenmodellierung

ausgeführt am

Institut für

Stochastik und Wirtschaftsmathematik

TU Wien

unter der Anleitung von

**Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich
Hubalek**

durch

Ralph Thaller, BSc

Matrikelnummer: 1127026



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Kurzfassung

Diese Diplomarbeit behandelt Kundengeschäfte von Kreditinstituten die eine unbestimmte Kapital- und Zinsbindung haben. Klassischerweise ist dies zum Beispiel ein Girokonto oder Sparbuch. Wir wollen uns damit beschäftigen, wie das bereits vorhandene Geschäft, welches keine Zins- und Kapitalbindung hat, im Hinblick auf die Messung, Steuerung und Minimierung des Zinsrisikos behandelt werden kann. Für Geschäfte dieser Kategorie ergeben sich bei der Bestimmung von Cashflows, welche für die Ableitung von Risikokennzahlen und für die Erfüllung aufsichtsrechtlicher Meldepflichten nötig sind, mehrere Felder von Unsicherheit die damit mit Risiko behaftet sind. Es müssen die Kapital- und Zinsbindung geschätzt werden. Gleichzeitig muss aber auch die Entwicklung der Zinssätze und der Neugeschäftsvolumina im Auge behalten werden. Auch ist erst durch die Darstellung als Geld und Kapitalmarkt-Geschäft mit fixierten Cashflows eine fristengerechte Refinanzierung durch die Treasury Abteilungen möglich. Die Arbeit vergleicht hierbei Modelle von verschiedener Komplexität und implementiert diese in R.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Abstract

This diploma thesis deals with customer deposits of credit institutions which have an indefinite capital and interest commitment. Classically, this is for example a current account or a savings book. We want to deal with how the already existing business, which has no interest and capital commitment, can be treated with regard to the measurement, control and minimization of the interest risk. For transactions in this category, several fields of uncertainty arise in the determination of cash flows, which are necessary for the derivation of risk indicators and for the fulfillment of regulatory reporting requirements, and are thus associated with risk. The capital and interest commitment must be estimated. At the same time, however, the development of interest rates and new business volumes must also be kept in mind. Also, only the presentation as money and capital market business with fixed cash flows enables timely refinancing by the treasury departments. The work compares models of different complexity and offers implementations in R.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 22.11.2020

Ralph Thaller



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Begriffsdefinitionen	2
1.1.1	Non-Maturity Deposits (NMD)	3
1.1.2	Zinssatz und Zinsstruktur	5
1.1.3	Risikoarten	6
2	Theoretische Hintergründe	9
2.1	Zinsstrukturmodellierung	9
2.1.1	Vasicek Modell	10
2.1.2	Cox-Ingersoll-Ross	10
2.1.3	Cox-Ingersoll-Ross++	11
2.1.4	Kalibrierung mittels Kalman Filter	11
2.2	Multiple lineare Regression	18
3	Aufsichtsrechtliche Ansätze	23
3.1	Österreich	23
3.1.1	Bankwesengesetz	23
3.1.2	Kreditinstitute-Risikomanagementverordnung (KI-RMV)	24
3.1.3	Leitfaden zum Management des Zinsrisikos im Bankbuch	25
3.2	Europäische Union	26
3.2.1	Capital Requirements Directive und Regulation	26
3.2.2	European Banking Authority	26
3.3	Internationale Organisationen	27
3.3.1	Rahmenwerke Basel I - III	27
3.3.2	Zinsrisiko im Bankbuch	28
4	Modellierung	31
4.1	Bodensatztheorie	31
4.2	Bestimmung Kapitalablauffiktion	33
4.3	Portfolioreplizierung	35
4.3.1	Maes und Timmermans	35

4.3.2	Bardenhewer	37
4.4	Elastizitätsansatz	38
4.4.1	Verzögerungseffekte	40
4.5	Stochastic Factor Approach (SFA)	41
4.6	Option Adjusted Spread-Modelle	43
4.7	Constant-Maturity-Bond-Ansatz	44
4.8	Backtesting	45
4.8.1	Abflüsse	45
4.9	Vergleichskriterien	46
5	Implementierung anhand einer Fallstudie	49
5.1	Datenlage und -aggregation	49
5.1.1	Marktzinssätze	50
5.2	Stochastic Factor Approach	51
5.3	Liquiditätsrisiko	53
5.3.1	Bodensatz	53
5.3.2	Abflüsse	54
5.4	Zinsänderungsrisiko	55
5.4.1	Elastizitätsansatz	55
5.4.2	Replizierendes Portfolio	55
5.5	Konklusion und Modellauswahl	55
6	Anhang	57
6.1	R Codes	57
6.1.1	Kalman Filter	57
6.1.2	Cox-Ingersoll-Ross	59
6.1.3	Stochastic Factor Approach	60
6.1.4	Bodensatz	61
6.1.5	Kapitalabaufprofile	62
6.1.6	Elastizitätsansatz	64
6.1.7	Maes Timmermans Replikationsportfolio	65
6.2	Tabellen	69
6.3	Abkürzungsverzeichnis	69
	Abbildungsverzeichnis	71

Tabellenverzeichnis	71
Literaturverzeichnis	73



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

1 Einleitung

Eine Bank leistet drei wesentliche volkswirtschaftliche Funktionen: Die Fristen-, Losgrößen- und Risikotransformation. Jede dieser Funktionen ist mit einem Risiko behaftet. Durch das immer stärker regulatorisch getriebene Umfeld wird es für Kreditinstitute zur Notwendigkeit diese Transformationsfunktionen einer adäquaten Überwachung zu unterstellen.

Die Fristentransformation ist aufzuteilen in die Transformation der Kapitalbindungsfrist und die Transformation der Zinsbindungsfrist. Daraus ergeben sich Liquiditätsbeziehungsweise Zinsänderungsrisiken. Teilen wir die Geschäfte die eine Bank mit ihren Kunden abschließt nach Art dieser Bindungen ein, ergeben sich sechs verschiedene Kategorien, welche Abbildung 1.1 aufzeigt.

Für die Risikobetrachtung ergeben sich bei Kategorie VI die meisten offenen Fragen, die diese Arbeit beantworten möchte. Es handelt sich dabei also um Geschäfte bei denen der Kunde prinzipiell ständig über sein Kapital verfügen kann und dies abziehen kann, andererseits kann die Bank die Konditionen im Rahmen des Marktes festlegen. Diese Kategorie wird auch als Non-Maturity Deposits (NMD) bezeichnet.

Für Geschäfte dieser Kategorie ergeben sich bei der Bestimmung von Cashflows, welche für die Ableitung von Risikokennzahlen und für die Erfüllung aufsichtsrechtlicher Meldepflichten nötig sind, mehrere Felder von Unsicherheit die damit mit Risiko behaftet sind. Es müssen die Kapital- und Zinsbindung geschätzt werden. Gleichzeitig muss aber auch die Entwicklung der Zinssätze und der Neugeschäftsvolumina im Auge behalten werden. Auch ist erst durch die Darstellung als Geld und Kapitalmarkt-Geschäft mit fixierten Cashflows eine fristengerechte Refinanzierung durch die Treasury Abteilungen möglich.

		Art der Kapitalbindung	
		bestimmt	unbestimmt
Art der Zinsbindung	zinsfix	I. z. B. Fixzinskredite, Sparbriefe	II. z. B. Fixzinskredite mit Kündigungsmöglichkeit
	variabel	III. z. B. An Geld- oder Kapital- markt-gebundene Kredite	IV. z. B. Spareinlagen mit Geld- oder Kapitalmarkt- anpassung
	unbestimmt	V. z. B. Kredite mit BAW (bis auf weiteres)-Vereinbarung	VI. z. B. Kontokorrenteinlagen, Giro- und Spareinlagen

Abbildung 1.1: Einteilung des Kundengeschäfts eines Kreditinstituts [23, Grafik 15]

Diese Arbeit hat sich zum Ziel gesetzt die ersten beiden Felder zu behandeln. Wir wollen uns damit beschäftigen, wie das bereits vorhandene Geschäft, welches keine Zins- und Kapitalbindung hat, im Hinblick auf die Messung, Steuerung und Minimierung des Zinsrisikos behandelt werden kann. Dafür soll zuerst ein Überblick über die Sicht der Aufsicht auf dieses Thema gegeben werden. In einem zweiten Kapitel sollen Ansätze zur Modellierung vorgestellt werden, welche dann in einem dritten Kapitel auf den Bestand einer österreichischen Regionalbank angewendet werden. Dabei soll dann eine Bewertung und Analyse der Ergebnisse durchgeführt werden.

1.1 Begriffsdefinitionen

In diesem Abschnitt wollen wir Definitionen für die später zu beschreibenden Risikoarten geben um sie voneinander abzugrenzen und damit gezielt ansteuern zu können.

1.1.1 Non-Maturity Deposits (NMD)

Auf den ersten Blick wirken NMDs wie sehr einfache Finanzprodukte. Implizit enthalten sie jedoch mehrere einzelne Bestandteile die jeweils Optionscharakter aufweisen. Wir wollen diese Spezifika nun benennen um sie später in der Modellierung adressieren zu können. [17]

Kündigungsrecht

Die erste wichtige Eigenschaft ist die Kündigung bzw. Abhebung die der Kunde üblicherweise jederzeit zu geringen oder keinen Kosten vornehmen kann. Dies führt dazu, dass wenn andere Investments höhere Zinsen bieten, der Kunde sein Geld abziehen wird. Dies wurde auch empirisch gezeigt unter anderem in [24].

Asymmetrie der Anpassung

Üblicherweise erwarten wir natürlicherweise einen starken Zusammenhang zwischen dem Einlagenzinssatz und den Interbankensätzen, also jenen Zinssätzen zu denen sich Banken gegenseitig Geld leihen. In [2] wird gezeigt, dass Erhöhungen von den Interbankensätzen nur teilweise an die Einlagenzinssätze weitergegeben werden. Es zeigt sich auch, dass nicht nur die Höhe sondern auch die Geschwindigkeit der Anpassung asymmetrisch ist. Die Einlagenzinssätze passen sich schneller an, wenn die Zinssätze sinken, als wenn sie steigen. Dies kann so interpretiert werden, dass Banken die langsame Reaktion von Kunden zu ihrem Vorteil nutzen. Auch ein Zusammenhang zwischen der Marktmacht von Banken und der Größe der Asymmetrie kann gezeigt werden, was diese These weiter bestätigt.

Implizite Optionen

Eine weitere Optionskomponenten sind die implizierten Caps und Floors, welche entweder durch bankinterne oder rechtliche Vorgaben entstehen können. Im Jahr 2009 hat der österreichische Oberste Gerichtshof in einem Urteil festgelegt, dass Klauseln die eine Aussetzung der Verzinsung ermöglichen rechtswidrig sind. [14]

Dabei bezieht sich der oberste Gerichtshof auf die Definition von Spareinlagen im Bankwesengesetz (BWG) in §31, die besagt, dass Spareinlagen „Geldanlagen bei Kreditinstituten, die nicht dem Zahlungsverkehr, sondern der Anlage dienen bind, womit eine Nullverzinsung dem Zweck einer Spareinlage widerspricht. Für Einlagen auf einem Girokonto können verschiedene Urteile zum Thema Verzinsung von Krediten angewandt werden, welche besagen, dass die Bank die Verzinsung nicht einseitig beschränken kann. Es muss also sowohl eine Floor als auch eine Cap Komponente geben.

Einlagensicherung

Eine Einlagensicherung soll auch dafür verantwortlich sein, den Einlagenzinssatz niedriger zu halten, da die Kunden weniger Risikoprämie erwarten. In Österreich wurde die EU Richtlinie 2014/49/EU über Einlagensicherungssysteme im Jahr 2015 im Einlagensicherungs- und Anlegerschädigungsgesetz umgesetzt. Dabei sind Einlagen von natürlichen und juristischen Personen auf Konten bei in Österreich konzessionierten Banken bis zu einer Höhe von 100.000 Euro pro Person und Bank gesichert.

Makroökonomische Faktoren

Für die Höhe der Einlagenstände einer Bank sind natürlich viele weitere Faktoren verantwortlich. Neben makroökonomischen Faktoren wie der allgemeine Zustand der Wirtschaft, sind natürlich auch die marketingtechnische und regionale Positionierung des Kreditinstituts verantwortlich für den Erfolg. Zusätzlich sind auch in vielen Ländern saisonale Schwankungen bedingt durch makroökonomische Faktoren auf die Einlagenhöhe einflussnehmend.

All diese Faktoren und optionsähnlichen Ausprägungen machen die Einlagen einer Bank zu einem komplexen finanziellen Vehikel welches einer sorgfältigen Modellierung und Überwachung unterzogen werden muss.

1.1.2 Zinssatz und Zinsstruktur

Ein Zinssatz beschreibt in Prozent den Preis für geliehenes Kapital. Diese Zinssätze hängen im Allgemeinen von diversen Faktoren wie Bindungsdauer, Bonität des Schuldners und sonstigen Risiken ab.

Betrachten wir nur die zeitliche Abhängigkeit, also die Abhängigkeit der Zinshöhe von der Bindungsdauer und vergleichen diese, sprechen wir von der Zinsstruktur. Die grafische Veranschaulichung wird auch als Zinskurve bezeichnet.

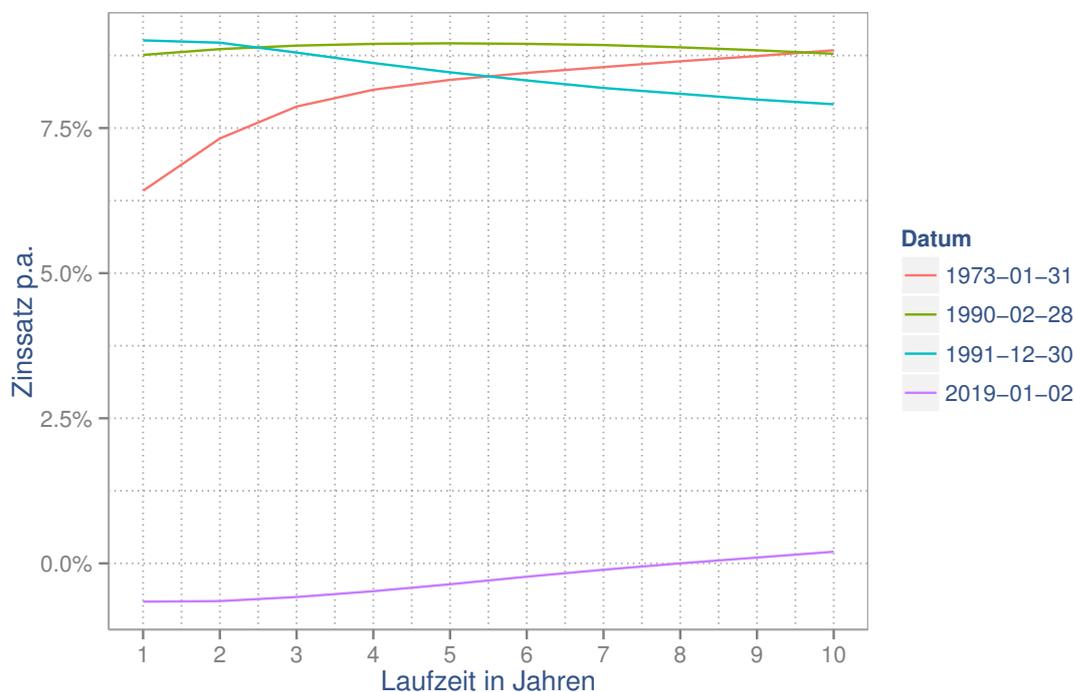


Abbildung 1.2: Zinskurve für börsennotierte deutsche Bundeswertpapiere

In Abbildung 1.2 bestehend aus Daten zu den Geldmarktsätzen der deutschen Bundesbank zeigen sich verschiedene Ausprägungen der Zinsstrukturkurve.

Für 1973 sehen wir eine normale Zinskurve, das bedeutet, dass sie steigend ist und für längere Bindungsdauer höhere Zinsen bezahlt werden.

Das Beispiel 1990 zeigt eine flache Zinskurve, hierbei hängt der Zins nicht von der Bindungsdauer ab.

1991 sehen wir eine inverse Zinskurve. Für eine inverse Zinskurve kann es verschiedene Gründe geben. Als Beispiel sei die Erwartung einer Konjunkturschwäche genannt, was dazu führt, dass Investoren in langfristige Geldanlagen gehen und damit diese Zinsen in diesem Bereich nach unten drücken.

1.1.3 Risikoarten

Risiko umfasst je nach Kontext viele verschiedene Bedeutungen. In der betriebswirtschaftlichen Forschung und Lehre, welche für das Bankwesen die tragfähigste Unterlage bietet, kommt das Risiko meist in Entscheidungssituationen vor. Risiko kommt hier in als Form der unsicheren Erwartungsstruktur vor. Unsicherheit in dem Sinne, dass Einflussfaktoren nicht dem Handlungsspielraum des Entscheiders zugeordnet werden können und dass mehrere Ausprägungen eines Einflussfaktors mit positiver Wahrscheinlichkeit eintreten können. [33, S. 14]. Um Risikosituationen einschätzen zu können, hat sich die Stochastik als Instrumentarium herauskristallisiert. Die Stochastik versucht die Auswirkungen des Zufalls auf Vorgänge und Ereignisse in mathematische Modelle zu gießen.

In der Finanzwirtschaft bezeichnet das Wort Risiko meist auch die Zahl, welche die Abweichung von einem erwarteten Ergebnis beschreibt. Dabei können wir Risiko nun in Risikoarten einteilen, welche das Risiko nach seiner Ursache klassifiziert. Im weiteren werden wir uns mit dem Liquiditäts- und Zinsänderungsrisiko näher befassen, welches wir nun definieren wollen.

Liquiditätsrisiko

Liquidität, wie wir den Begriff hier verwenden, beschreibt die Zahlungsfähigkeit eines Unternehmens, also dass die fälligen Verbindlichkeiten beglichen werden können. Liquiditätsrisiken erwachsen aus der Fristentransformation und beschreiben das Risiko, dass Mittelab- und -zuflüsse sich nicht synchron vollziehen lassen. [6, S. 682] Einige wichtige Unterarten bzw. Einflussfaktoren [31, 328]:

- Substitutionsrisiko: Fehlende Ersatzbeschaffung fristgerecht abgezogener Einlagen

- Prolongationsrisiko: Einlagenabzug vor Fälligkeit
- Terminrisiko: Unplanmäßige Verlängerung der Kapitalbindungsdauer
- Abrufisiko: Einlagen werden unerwartet abgezogen
- sonstige Risiken.

Auch andere Risiken haben Auswirkungen auf die Liquiditätssituation der Bank. Hier wären zum Beispiel das Währungsrisiko, das Bonitätsrisiko und das Zinsänderungsrisiko zu nennen. [6, S. 681]

Zinsänderungsrisiko

Das Zinsänderungsrisiko beschreibt die Abweichung des Ist-Werts vom Soll-Wert eines Zins, die sich durch eine nicht antizipierte Änderung der Zinsstruktur ergibt. [6, S. 728] Es gibt dabei zwei wesentliche Risikofaktoren: Die Höhe des Exposures, also das Ausmaß der Fristentransformation, und die Höhe der Änderung der Zinsstruktur.

Zinsänderungsrisiken sind systematische Risiken, also ein Risiko welches selbst bei optimaler Mischung von Einzelwerten im Portfolio nicht komplett diversifiziert werden kann und welche von diversen volkswirtschaftlichen Faktoren abhängen, deren Zusammenhang aktuell nicht vollständig zu modellieren oder zu erfassen ist.

Zinsänderungsrisiken treten sowohl bei Geschäften mit Festzinssätzen als auch bei vereinbarten variablen Zinssätzen auf.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

2 Theoretische Hintergründe

In diesem Kapitel wollen wir die mathematischen Grundlagen und Methoden die im Zuge unserer Modellierungen verwendet werden näher beschreiben und ausführen.

2.1 Zinsstrukturmodellierung

Viele Einlagenmodelle verwenden als einen der Hauptfaktoren die Einlagenzinsen, diese wiederum können am besten in Abhängigkeit des allgemeinen Zinsumfelds modelliert werden. Aus diesem Grund stellt ein gutes Zinsmodell eine wichtige Basis für die korrekte Einlagenmodellierung dar und wir stellen einige Modelle im Folgenden vor.

Grundlegend werden Zinsstrukturmodelle nach der beschriebenen Variable in drei Klassen eingeteilt:

- Short-Rate-Modelle
- Forward-Rate-Modelle
- Markt-Modelle (Erklärung der EURIBOR oder LIBOR Zinssätze).

Wir werden uns auf Short-Rate-Modelle beschränken, also Modelle für den Zinssatz, für den ein Marktteilnehmer Geld für einen infinitesimalen Zeitraum ausborgen kann. Mittels eines Arbitragefreiheitsarguments und Ito's Lemma können wir aus der Short-Rate auf die gesamte Zinskurve schließen.

Es soll jedoch erwähnt werden, dass für manche Short-Rate-Modelle äquivalente Forward-Rate-Modelle existieren.

Vorerst werden wir uns außerdem auf affine Ein-Faktor-Modelle einschränken. Dies bedeutet, dass die Dynamik beschrieben werden kann durch eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$dr_t = f(r_t, t)dt + \rho(r_t, t)dW_t, \quad (2.1)$$

wobei W_t ein Wiener Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist. Dabei

gibt f den Drift und ρ den Diffusionsterm an. Die Interpretation dieser Modellklasse ist relativ klar. Es gibt einen Drift-(Trend)term und einen Diffusions-(Varianz-)term, der zufällig ist und ein Differenzialinkrement einer Brownschen Bewegung inkludiert.

2.1.1 Vasicek Modell

Wir beginnen mit dem Vasicek Modell. Es handelt sich dabei um ein Ein-Faktor Short-Rate-Modell welches 1977 von Oldřich Vašíček eingeführt wurde. [35] Vašíček beschreibt die Short-Rate dabei durch die stochastische Differentialgleichung

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t. \quad (2.2)$$

Dabei ist W_t ein Wiener Prozess, der den zufälligen Marktrisikofaktor modelliert. σ spiegelt die Volatilität wider. Der Parameter θ kann als Langzeitmittel angesehen werden, also alle Trajektorien bewegen sich um θ . κ beschreibt die Geschwindigkeit mit der der Prozess sich gegen θ bewegt.

2.1.2 Cox-Ingersoll-Ross

Das Cox-Ingersoll-Ross Modell (CIR) wurde 1985 erstmals vorgestellt. [9] Dabei wird die Short-Rate wieder durch eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (2.3)$$

beschrieben. Wiederum ist W_t ein Wiener Prozess, κ wieder die Geschwindigkeit mit der sich der Prozess zur Mitte bewegt, θ den Langzeitmittelwert und σ die Volatilität.

Die vom CIR Modell modellierte Short-Rate ist nicht-negativ. Falls die sogenannte Feller Bedingung $2\kappa\theta > \sigma^2$ erfüllt ist, erreicht der Short-Rate Prozess 0 auch nicht.

Die Verteilung kann explizit bestimmt werden als

$$r_t|r_{t-1} \sim C\chi_\nu^2(\delta r_{t-1}) \quad (2.4)$$

mit

$$\nu = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}, C = \sigma^2 \frac{1 - e^{-\kappa\Delta t}}{4\kappa}, \delta = \frac{4\kappa}{\sigma^2(e^{\kappa\Delta t} - 1)}. \quad (2.5)$$

Damit ist eine Simulation leicht möglich.

2.1.3 Cox-Ingersoll-Ross++

Eine Erweiterung des CIR-Modells stellt das CIR++ Modell dar. [4] Dabei wird die Short-Rate beschrieben durch

$$r_t = x_t + \phi_t \quad (2.6)$$

wobei gilt

$$dx_t = \kappa(\theta - x_t)dt + \sigma\sqrt{x_t}dW_t \quad (2.7)$$

und ϕ_t eine deterministische Funktion ist.

2.1.4 Kalibrierung mittels Kalman Filter

Wir wollen einen Systemzustand $X \in \mathbb{R}^n$ mittels einer Messung $Y \in \mathbb{R}^m$ finden, für den eine lineare Messgleichung $Y = \mathbf{H}X$ gilt. Um dies so gut wie möglich zu lösen, wollen wir X so wählen, dass $\|\mathbf{H}X - Y\|$ bezüglich eines Maßes $\|\cdot\|$ minimiert wird.

Eine Möglichkeit unsere Zinsmodelle zu kalibrieren bietet der Bayes'sche Minimum-Varianz-Schätzer Kalman-Filter. Speziell für die Situation, in der wir unsere zugrundeliegende Zustandsvariablen nicht beobachten können, bietet sich dieser mathematische Satz an. Es folgt nun eine allgemeine Formulierung und Lösung des Problems, darauf dann eine Anwendung auf Zinsstrukturmodelle.

Das Systemmodell ist bei Kalman [16] ein lineares der Form

$$X_{k+1} = \mathbf{A}_k \underline{x}_k + \mathbf{B}_k \underline{u}_k + \underline{w}_k \quad (2.8)$$

wobei \mathbf{A}_k die Systemmatrix darstellt, die den Zustand X_k auf X_{k-1} abbildet. \underline{u}_k ist ein Eingabevektor, der von \mathbf{B}_k auf den Systemzustand abgebildet wird. Zusätzlich bildet die stochastische Größe \underline{w}_k einen Rauschterm, der üblicherweise mehrdimensional normalverteilt mit Mittelwert 0 und Kovarianzmatrix C_k ist.

Mittels der Beobachtungsgleichung

$$Z_k = H_k X_k + v_k, \quad (2.9)$$

mit Beobachtungsmatrix H_k und Messrauschen v_k , können wir einen prädizierten Zustand X_k auf einen Messwert abbilden.

Das Filterprobleme beschränkt sich aufgrund der Normalverteilung von w und v auf die Bestimmung von Mittelwert und Kovarianz, da auch das Modell weiter normalverteilt bleibt. Wir müssen also anhand der Messwerte z_k, \dots, z_1 die Werte \hat{x}_k und \hat{P}_k des Systems $\hat{X}_k \sim \mathcal{N}(\hat{x}_k, \hat{P}_k)$ bestimmen.

Dazu prädizieren wir mittels

$$\hat{x}_{k|k-1} = \mathbf{A}_{k-1} \hat{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} u_{k-1} \quad (2.10)$$

$$\hat{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_{k-1} \hat{P}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^T + C_{k-1} \quad (2.11)$$

um im nächsten Schritt zu korrigieren

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + \hat{K}_k \tilde{y}_k \quad (2.12)$$

$$\hat{P}_k = \hat{P}_{k|k-1} - \hat{K}_k S_k \hat{K}_k^T \quad (2.13)$$

mit den Hilfsgrößen Innovation, Residualkovarianz und Kalman-Matrix:

$$\tilde{y}_k = z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \quad (2.14)$$

$$S_k = \mathbf{H}_k \hat{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + R_k \quad (2.15)$$

$$\hat{K}_k = \hat{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T S_k^{-1} \quad (2.16)$$

Anwendung auf Zinsstrukturmodelle

Wir wollen das Kalman-Filter nun auf das CIR Modell anwenden. Dazu müssen wir unser Modell zuerst in eine Zustandsraumdarstellung umformulieren um eine Anwendung zu ermöglichen. Wir orientieren uns dabei an Duan und Simonato [11], für

tiefgehende Informationen über die Lösung der entstehenden Differentialgleichungen verweisen wir auf Bolder [3].

Für affine Zinsstrukturmodelle ist der risikolose Preis eines Bonds zur Zeit t mit Fälligkeit T gegeben als

$$P(\tau, r) = e^{A(\tau) - B(\tau)r} \quad (2.17)$$

wobei $\tau = T - t$ die Restlaufzeit ist.

Die Effektivverzinsung (Yield to Maturity) ergibt sich für diesen Bond als $R_t(\tau, r_t) = -\frac{1}{\tau} \ln(P(\tau, r_t))$.

Wenn wir nun annehmen, dass es einen Messfehler gibt und deshalb einen Fehlerterm dazunehmen und in die Bondpreisformel einsetzen können wir für N Bonds folgende Beobachtungsgleichung konstruieren:

$$\begin{bmatrix} R_t(\tau_1, r_t) \\ R_t(\tau_2, r_t) \\ \vdots \\ R_t(\tau_N, r_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A(\tau_1)/\tau_1 \\ -A(\tau_2)/\tau_2 \\ \vdots \\ -A(\tau_N)/\tau_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\tau_1)/\tau_1 \\ B(\tau_2)/\tau_2 \\ \vdots \\ B(\tau_N)/\tau_N \end{bmatrix} r_t + \begin{bmatrix} \nu_{t,1} \\ \nu_{t,2} \\ \vdots \\ \nu_{t,N} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

wobei $\nu_{t,i}$ die zufälligen Messfehler mit Mittelwert 0 und Standardabweichung σ_ν bilden.

Nun wollen wir noch die Übergangsgleichung formulieren, die wir schreiben können als

$$r_t = \theta(1 - e^{-\kappa dt}) + e^{-\kappa dt} r_{t-1} + \epsilon_t, \quad (2.19)$$

wobei ϵ_t normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz

$$\frac{\theta\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa dt})^2 + \frac{\sigma^2}{\kappa}(e^{-\kappa dt} - e^{-2\kappa dt})r_{t-1} \quad (2.20)$$

ist.

Für das CIR Modell ergibt sich durch das Lösen einiger Differentialgleichungen fol-

gende Darstellung:

$$A(\tau) = \ln \left(\frac{2\gamma e^{\frac{(\gamma+\kappa+\lambda)\tau}{2}}}{(\gamma + \kappa + \lambda)(e^{\lambda\tau} - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2\kappa\Theta}{\sigma^2}}, \quad (2.21)$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\gamma\tau} - 1)}{(\gamma + \kappa + \lambda)(e^{\lambda\tau} - 1) + 2\gamma}, \quad (2.22)$$

$$\gamma = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}. \quad (2.23)$$

Modell des Zustandsraumes

Für den Kalmanfilter unterteilen wir unser Modell in beobachtbare Variablen, in unserem Fall n Zero-Coupon Bonds, welche aber nur fehlerhaft gemessen werden können. Aus der Formel für den Preis eines solchen Zero-Coupon Bonds kann dann das sogenannte Messsystem hergeleitet werden. Der zweite Teil, die Übergangsgleichungen, kann aus den stochastischen Differentialgleichungen für das verwendete Zinsmodell gewonnen werden.

Das **Messsystem** hat nach [3] folgende Form:

$$\begin{pmatrix} Z_{i1} \\ Z_{i2} \\ \vdots \\ Z_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-A(\tau_1)}{\tau_1} \\ \frac{-A(\tau_2)}{\tau_2} \\ \vdots \\ \frac{-A(\tau_n)}{\tau_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{B(\tau_1)}{\tau_1} \\ \frac{B(\tau_2)}{\tau_2} \\ \vdots \\ \frac{B(\tau_n)}{\tau_n} \end{pmatrix} Y_i + \begin{pmatrix} \nu_{i1} \\ \nu_{i2} \\ \vdots \\ \nu_{in} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

mit

$$A(\tau) = \ln \left(\frac{2\gamma e^{\frac{(\gamma+\kappa+\lambda)\tau}{2}}}{(\gamma+\kappa+\lambda)(e^{\gamma\tau}-1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \quad (2.25)$$

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\gamma\tau}-1)}{(\gamma+\kappa+\lambda)(e^{\gamma\tau}-1) + 2\gamma} \quad (2.26)$$

$$\gamma = \sqrt{(\kappa+\lambda)^2 + 2\sigma^2} \quad (2.27)$$

$$\nu_i \sim N(0, R) \quad (2.28)$$

$$R = \begin{pmatrix} r_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n^2 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Kurz schreiben wir auch $Z_i = G + HY_i + \nu_i$ wobei

$$G = \begin{pmatrix} \frac{-A(\tau_1)}{\tau_1} \\ \frac{-A(\tau_2)}{\tau_2} \\ \vdots \\ \frac{-A(\tau_n)}{\tau_n} \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} \frac{B(\tau_1)}{\tau_1} \\ \frac{B(\tau_2)}{\tau_2} \\ \vdots \\ \frac{B(\tau_n)}{\tau_n} \end{pmatrix}, \nu_i = \begin{pmatrix} \nu_{i1} \\ \nu_{i2} \\ \vdots \\ \nu_{in} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Das **Übergangssystem** für das Cox-Ingersoll-Ross Modell schreiben wir kurz als

$$Y_i = C + FY_{i-1} + \epsilon_i \quad (2.31)$$

wobei

$$C = \theta(1 - e^{-\kappa\Delta t}) \quad (2.32)$$

$$F = e^{-\kappa\Delta t} \quad (2.33)$$

$$\epsilon_i | \mathcal{F}_{i-1} \sim N(0, Q) \quad (2.34)$$

$$Q = \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa\Delta t})^2 + \frac{\sigma^2}{\kappa}(e^{-\kappa\Delta t} - e^{-2\kappa\Delta t})Y_{i-1}. \quad (2.35)$$

Anfangsbedingungen

Wir legen die Anfangsbedingungen für die Rekursion als den unbedingten Erwartungswert und Varianz der Übergangsgleichungen fest.

$$EY_1 = E[Y_1] = \theta \quad (2.36)$$

$$VY_1 = V[Y_1] = \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa} \quad (2.37)$$

Vorhersagen

Nun können wir eine erste Vorhersage für unsere Messgleichung treffen. Dazu berechnen wir bedingten Erwartungswert als

$$EZ_i = E[G + HY_i + \nu_i | F_{i-1}] \quad (2.38)$$

$$= G + HE[Y_i | F_{i-1}] + E[\nu_i | F_{i-1}] \quad (2.39)$$

$$= G + HEY_i \quad (2.40)$$

und die bedingte Varianz

$$(2.41)$$

$$VZ_i = V[G + HY_i + \nu_i | F_{i-1}] \quad (2.42)$$

$$= V[HY_i | F_{i-1}] + V[\nu_i | F_{i-1}] \quad (2.43)$$

$$= H VY_i H' + R \quad (2.44)$$

wobei die dritte Gleichheit wegen [21, (6.13)] gilt.

Zustand updaten

Nach Beobachtung des wahren Wertes können wir den Prognosefehler berechnen als

$$\zeta_i = Z_i - EZ_i \quad (2.45)$$

und damit die bedingte Erwartung des Übergangssystems anpassen.

Wir betrachten also $Y_i|F_{i-1}$ und bedingen dies auf $Z_i|F_{i-1} = Z_i$.

Für die Kovarianz gilt mit Formeln 2.1.4, 2.40 und der Unabhängigkeit von ν

$$\text{Cov}[Y_i, Z_i] = E[(Y_i - E[Y_i])(Z_i - E[Z_i])^T] \quad (2.46)$$

$$= E[(Y_i - E[Y_i])(Z_i - A + HE[Y_i])^T] \quad (2.47)$$

$$= E[(Y_i - E[Y_i])(A + HY_i + \nu_i - A + HE[Y_i])^T] \quad (2.48)$$

$$= E[(Y_i - E[Y_i])(HY_i + HE[Y_i])^T] \quad (2.49)$$

$$= VY_i H^T. \quad (2.50)$$

Für den Erwartungswert gilt dann nach [21, (S. 180)]

$$E[Y_i|F_i] = E[Y_i|F_{i-1}] + \text{Cov}[Y_i, Z_i]\text{Cov}[Z_i, Z_i]^{-1}(Z_i - E[Z_i|F_{i-1}]) \quad (2.51)$$

$$= EY_i + \text{Cov}[Y_i, Z_i](VZ_i)^{-1}Z_i - \text{Cov}[Y_i, Z_i](VZ_i)^{-1}E[Z_i|F_{i-1}] \quad (2.52)$$

$$= EY_i + VY_i H'(VZ_i)^{-1}Z_i - VY_i H^T(VZ_i)^{-1}EZ_i \quad (2.53)$$

$$= EY_i + VY_i H'(VZ_i)^{-1}\zeta_i. \quad (2.54)$$

Wenn wir die sogenannte Kalman Gain Matrix definieren als

$$K_i = VY_i H'(VZ_i)^{-1} \quad (2.55)$$

können wir kurz schreiben

$$E[Y_i|F_i] = EY_i + K_i\zeta_i. \quad (2.56)$$

Wenn wir in gleicher Weise die Kovarianz $\text{Cov}[Z_i, Y_i] = H VY_i$ berechnen folgt wieder nach [21, (S. 180)]

$$V[Y_i|F_i] = V[Y_i|F_{i-1}] - \text{Cov}[Y_i, Z_i](VZ_i)^{-1}\text{Cov}[Z_i, Y_i] \quad (2.57)$$

$$= VY_i - VY_i H^T(VZ_i)^{-1}H VY_i \quad (2.58)$$

$$= VY_i - K_i H VY_i \quad (2.59)$$

$$= (I - K_i H) VY_i. \quad (2.60)$$

Zustandsmodell vorhersagen

Wir können nun noch für den nächsten Zeitschritt den Zustandsraum vorhersagen. Für den Erwartungswert gilt

$$E[Y_{i+1}|F_i] = E[C + FY_i + \epsilon_i|F_i] \quad (2.61)$$

$$= C + FE[Y_i|F_i] + E[\epsilon_i|F_i] \quad (2.62)$$

$$= C + FE[Y_i|F_i] \quad (2.63)$$

und für die Varianz

$$V[Y_{i+1}|F_i] = V[C + FY_i + \epsilon_i|F_i] \quad (2.64)$$

$$= FV[Y_i|F_i] + V[\epsilon_i|F_i] \quad (2.65)$$

$$= FV[Y_i|F_i] + Q. \quad (2.66)$$

Likelihood aufstellen

Wir führen die obigen Schritte für jeden Zeitpunkt durch und generieren damit einen Prädiktionsfehler und einen Prädiktionsfehlerkovarianzmatrix. Unter der Annahme, dass diese Fehler einer Gauß-Verteilung folgen, können wir eine Log-Likelihood Funktion aufstellen. Mit der Verteilungsfunktion der multivariaten Normalverteilung gilt dann

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{i=1}^N \ln \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(VZ_i)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\zeta_i^T V^{-1} \zeta_i} \right] \quad (2.67)$$

$$= -\frac{nN \ln(2\pi)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\ln(\det(VZ_i)) + \zeta_i^T VZ_i^{-1} \zeta_i]. \quad (2.68)$$

2.2 Multiple lineare Regression

Bei einer multiplen Regression mit k Kovariablen soll eine abhängige Variable y durch k erklärende Variablen x_1, \dots, x_k beschrieben werden. Diese erklärenden Variablen können sowohl metrisch, binär aber auch mehrkategorial sein. [12]

Dabei ist diese Abhängigkeit nicht durch eine exakte Funktion $f(x_1, \dots, x_k)$ gegeben sondern wird durch Störungen überlagert. Man versucht nun, die systematische Komponente von der stochastischen Störgröße zu trennen.

Wir verwenden dazu nun das Modell

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i,1} + \dots + \beta_k x_{i,k} + \epsilon_i. \quad (2.69)$$

Dabei beschreibt $x_{i,1}$ die i -te Beobachtung der Variable x_1 . ϵ_i sind die Störgrößen, welche bei geforderter Homoskedastizität als normalverteilt mit gleicher Varianz angenommen werden.

Nun gibt es für die Bestimmung der Regressionskoeffizienten β_i mehrere Ansätze. Zu nennen sind hier die Methode der kleinsten Quadrate und die Maximum-Likelihood-Methode.

Bei der Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung der β_i versucht man die euklidische Norm $\|y - x\beta\|_2$ also

$$KQ(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i,1} + \dots + \beta_k x_{i,k})^2 \quad (2.70)$$

$$= \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 \quad (2.71)$$

$$= \boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.72)$$

zu minimieren.

Um das Minimum zu bestimmen formen wir unter Ausnutzen von $\beta'X'y = (\beta'X'y)' = y'X\beta$ folgend um [12, (3.10)]

$$KQ(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\epsilon}'\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.73)$$

$$= (y - X\boldsymbol{\beta})'(y - X\boldsymbol{\beta}) \quad (2.74)$$

$$= y'y - y'X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'X'X\boldsymbol{\beta} \quad (2.75)$$

$$= y'y - 2y'X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'X'X\boldsymbol{\beta}. \quad (2.76)$$

Dies können wir nun zweimal differenzieren womit folgt

$$\frac{\partial KQ(\beta)}{\partial \beta} = -2X'y + 2X'X\beta \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial^2 KQ(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'} = 2X'X. \quad (2.78)$$

Da laut Annahme die Spalten von X linear unabhängig sind und damit $rg(X) = p$ gilt, ist die Matrix XX' positiv definit. Somit erhalten wir die Lösung des Minimierungsproblems durch Nullsetzen der ersten Ableitung. Es ergibt sich damit die sogenannte Normalgleichung $X'X\beta = X'y$. Aus der positiven Definitheit von $X'X$ folgt die Invertierbarkeit und damit erhalten wir die eindeutige Lösung der Normalgleichung und damit den KQ-Schätzer für β als

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \quad (2.79)$$

Nun können wir die geschätzte lineare Funktion

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_k) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \dots + \hat{\beta}_k x_k \quad (2.80)$$

als Schätzung für den bedingten Erwartungswert von y bei gegeben x_1, \dots, x_k angesehen und damit zur Prognose verwendet werden. [12, S. 20]

Bestimmtheitsmaß

Zur Bestimmung der Güte der Regression definieren wir das Bestimmtheitsmaß R^2 als

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (2.81)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (2.82)$$

wobei die Gleichheit mit der Zerlegungsformel aus [12, (3.18)] gilt.

Es gilt $\beta_0 \leq R^2 \leq 1$. Aus $R^2 = 1$ folgt $\sum \epsilon_i^2 = 0$ und damit ist die Anpassung exakt.

Bei $R^2 = 0$ folgt $\sum(\hat{y}_i - \bar{y}^2) = 0$ und damit $\hat{y}_i = \bar{y}$, was bedeutet, dass die Prognose unabhängig von den erklärenden Variablen ist.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

3 Aufsichtsrechtliche Ansätze

In diesem Kapitel soll ein Überblick über die Sicht der Aufsicht auf das Thema Einlagenmodellierung gegeben werden. Der Großteil der Veröffentlichungen beschäftigt sich mit dem Zinsrisiko als Ganzes, wovon die Modellierung und Betrachtung von Einlagen ein integraler Bestandteil ist.

Die aufsichtsrechtliche Behandlung von Themen im Finanzbereich gliedert sich in mehrere Ebenen. Eine erste Empfehlung und Vorgabe ohne Pflicht zur Umsetzung wird meist von supranationalen Gemeinschaften wie der Bank für Internationale Zusammenarbeit (BIZ) erarbeitet. Diese werden dann von der Europäischen Union oder Staaten direkt in verpflichtendes Recht umgewandelt oder, im Falle der EU, durch Direktiven an die Nationalstaaten weitergegeben. Die Direktiven werden dann von Nationalstaaten in Recht umgesetzt. Hier kann in Österreich noch eine Präzisierung der Gesetzgebung durch die Aufsichtsbehörden in Form von Verordnungen folgen.

3.1 Österreich

3.1.1 Bankwesengesetz

Der österreichische Gesetzgeber beschäftigt sich im BWG mit dem Thema Risikomanagement. Wir wollen dazu hier § 39 BWG zitieren:

§ 39. (1) Die Geschäftsleiter eines Kreditinstitutes haben bei ihrer Geschäftsführung die Sorgfalt eines ordentlichen und gewissenhaften Geschäftsleiters im Sinne des § 84 Abs. 1 AktG anzuwenden. Dabei haben sie sich insbesondere über die bankgeschäftlichen und bankbetrieblichen Risiken zu informieren, diese durch angemessene Strategien und Verfahren zu steuern, zu überwachen und zu begrenzen sowie über Pläne und Verfahren gemäß § 39a zu verfügen. Weiters haben sie auf die Gesamtertragslage des Kreditinstitutes Bedacht zu nehmen.

§ 39. (2) Die Kreditinstitute haben für die Erfassung, Beurteilung, Steue-

rung und Überwachung der bankgeschäftlichen und bankbetrieblichen Risiken sowie ihrer Vergütungspolitik und -praktiken über Verwaltungs-, Rechnungs- und Kontrollverfahren zu verfügen, die der Art, dem Umfang und der Komplexität der betriebenen Bankgeschäfte angemessen sind. [...]

(2b) Die Verfahren gemäß Abs. 2 haben insbesondere zu berücksichtigen: 1. das Kreditrisiko und Gegenparteausfallrisiko, 2. das Konzentrationsrisiko, 3. das Marktrisiko, 4. das Risiko einer übermäßigen Verschuldung, 5. das operationelle Risiko, 6. das Verbriefungsrisiko, 7. das Liquiditätsrisiko, 8. das Zinsrisiko hinsichtlich sämtlicher Geschäfte, die nicht bereits unter Z 3 erfasst werden, [...]

Das BWG macht also nur eine sehr allgemeine Aussage, dass das Zinsrisiko behandelt werden muss, gibt jedoch keine Vorschriften in welcher Form. Es ist explizit erwähnt, dass das Zinsrisiko welches nicht bereits als Marktrisiko klassifiziert ist, behandelt werden muss.

3.1.2 Kreditinstitute-Risikomanagementverordnung (KI-RMV)

Die österreichische Finanzmarktaufsicht (FMA) beschäftigt sich mit dem Thema Zinsrisiko und hat in Umsetzung der CRR und der Vorgaben des BWG eine Verordnung zu den Mindestanforderungen zum Zwecke der ordnungsgemäßen Erfassung, Steuerung, Überwachung und Begrenzung der Risikoarten erlassen. Das Zinsrisiko wird dabei in § 10 behandelt.

§ 10. Kreditinstitute haben über geeignete Systeme zu verfügen, um das Risiko möglicher Zinsänderungen, die sich auf die im Anlagebuch erfassten Geschäfte auswirken, ermitteln, messen, steuern, überwachen und begrenzen zu können.

Hieraus ergeben sich für die Modellierung von Einlagen keine direkten Auswirkungen.

3.1.3 Leitfaden zum Management des Zinsrisikos im Bankbuch

Die österreichische Nationalbank veröffentlichte im Frühjahr 2008 einen Leitfaden der sich mit dem Zinsrisiko im Bankbuch beschäftigt.

Die OeNB nimmt damit den Ball der auf europäischer Ebene gespielt wurde auf und implementiert die durch Basel II vorgegebenen und durch das Committee of European Banking Supervisors (CEBS) konkretisierten Regelungen für Österreich.

Dieser beinhaltet bereits wesentlich genauere Vorschläge wie Kreditinstitute mit Einlagen und deren Darstellung umzugehen haben. Die Methoden in Grafik 3.1 sind dabei als beispielhaft zu betrachten und sind in ihren Ausführungen in Kapitel 3 näher beschrieben. Die Nationalbank betont, dass immer der Proportionalitätsgedanke im Auge behalten werden sollte und Art, Umfang und Komplexität des Geschäfts und nicht nur die Größe des Instituts bei der Auswahl der Methodik berücksichtigt werden müssen.

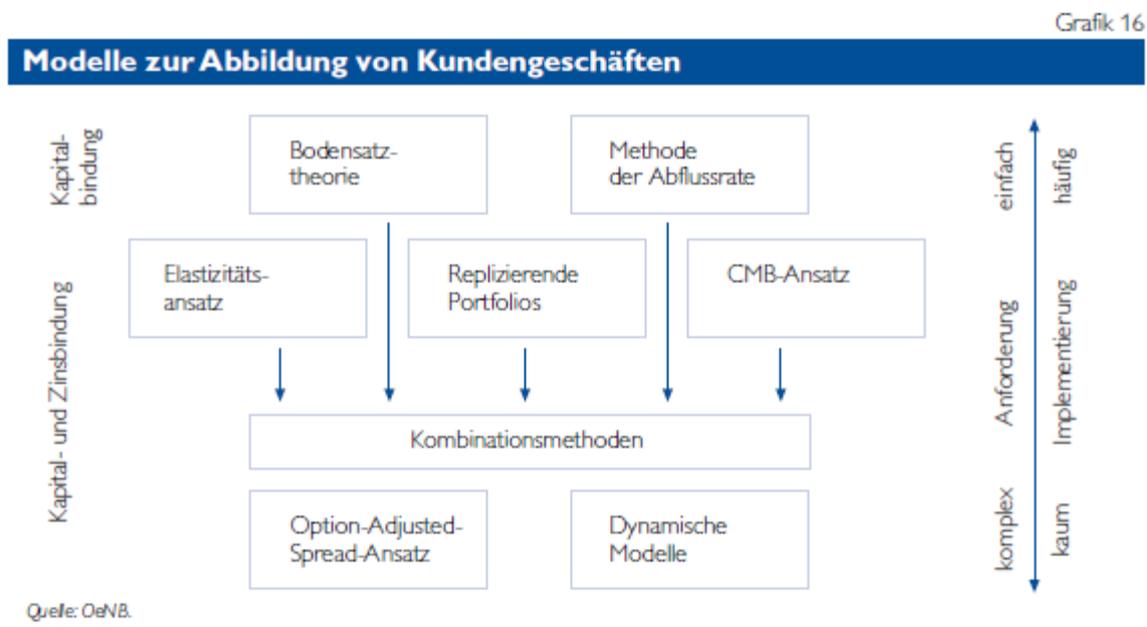


Abbildung 3.1: Modelle zur Abbildung von Kundengeschäften [23, Grafik 16]

3.2 Europäische Union

3.2.1 Capital Requirements Directive und Regulation

Im Jahr 2013 setzte die Europäische Union die Basel III Empfehlungen mit zwei Rechtsakten in europäisches Recht um.

Zum einen mit der Richtlinie 2013/36/EU über den Zugang zur Tätigkeit von Kreditinstituten und die Beaufsichtigung von Kreditinstituten und Wertpapierfirmen, welche als vierte ihrer Art auch als Capital Requirements Directive IV (CRD IV) bezeichnet wird.

Zum anderen mit der Verordnung (EU) Nr. 575/2013 Kapitaladäquanzverordnung, bekannt unter dem Namen Capital Requirements Regulation (CRR).

Hierbei gilt zu beachten, dass eine Richtlinie (Directive) nicht direkt anzuwenden ist, sondern von den jeweiligen Mitgliedsstaaten in nationales Recht umgesetzt werden muss. Die CRR ist direkt anzuwenden.

Für das Zinsrisiko sind folgende Punkte aus CRD und CRR relevant: [23]

- Artikel 84 CRD fordert die zuständigen Behörden auf, sicherzustellen, dass die Institute Systeme einführen, um das Zinsänderungsrisiko zu ermitteln, zu steuern und zu bewerten.
- Artikel 448 CRR legt den Instituten eine Offenlegungspflicht für das Zinsrisiko von nicht im Handelsbuch enthaltenen Positionen auf. Dabei muss die Art des Zinsrisikos und die wichtigsten Annahmen sowie die Häufigkeit der Messung dargestellt werden.

3.2.2 European Banking Authority

Auch die European Banking Authority (EBA) brachte 2015 einen Leitfaden zum Zinsrisiko im Bankbuch heraus, welcher seit dem 1. Jänner 2016 Gültigkeit aufweisen. [1]

Darin wird von der EBA festgelegt, dass Banken fähig sein müssen, Einlagen ohne feste Laufzeit in einen stabilen und einen volatilen Anteil aufteilen zu können und

diese dann in verschiedene Laufzeitbänder einzusortieren. Hier ist vor allem hervorzuheben, dass die durchschnittliche Laufzeit mit 5 Jahren beschränkt wird, wobei sowohl der stabile als auch der volatile Anteil berücksichtigt werden.

Es werden dann weiter für die Bestimmung des Zinsrisikos Zinsschocks definiert, also Drehungen oder Verschiebungen der verschiedenen Zinskurven, um die Auswirkungen von Zinsänderungen auf das Portfolio der Bank quantifizieren zu können.

3.3 Internationale Organisationen

Als maßgebliche internationale Organisation im Bereich Bankenregulierung ist der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (englisch Basel Committee on Banking Supervision (BCBS)) bei der BIZ zu nennen. Der Basler Ausschuss ist ein Zusammenschluss von Zentralbanken und Bankaufsichtsbehörden der 1974 von den G10-Staaten gegründet wurde, mittlerweile jedoch 27 Mitglieder hat. Ziel ist ein gemeinsames Verständnis von Bankenaufsicht zu gewinnen und somit zur Stärkung des internationalen Finanzsystems beizutragen.

3.3.1 Rahmenwerke Basel I - III

Als Basel I, Basel II und Basel III werden Rahmenwerke von Eigenkapitalvorschriften für Banken des Basler Ausschusses bezeichnet.

Basel I wurde 1988 nach dem Zusammenbruch der Herstatt Bank beschlossen und zielte erstmals auf die Sicherung einer angemessenen Eigenmittelausstattung von Kreditinstituten in einem internationalen Kreis ab. Basel I ist mittlerweile in über 100 Ländern anerkannt und wird dort von den jeweiligen Bankenaufsichten überwacht. Konkret sieht Basel I eine Eigenkapitalunterlegung von 8% der risikogewichteten Forderungssumme vor. [25]

Basel II ist ein weiterer Satz von Eigenkapitalvorschriften der im Juni 2004 veröffentlicht wurde. [26] Basel II folgt dabei einer 3 Säulen-Architektur:

- Säule I: Mindestkapitalanforderungen
- Säule II: Bankaufsichtlicher Überwachungsprozess

- Säule III: Erweiterte Offenlegung

Das Zinsrisiko wird in der Säule II behandelt. Dabei wird geregelt, dass im Rahmen des Internal Capital Adequacy Assessment Process (ICAAP) das Zinsrisiko behandelt werden muss. Auch in Zusammenhang mit dem zweiten Teil der Säule II, des Supervisory Review and Evaluation (SREP), sind Auswirkungen auf das Zinsrisiko zu erkennen, da die Aufsichten diesen Bereich nun betrachten müssen.

Säule III enthält explizite Offenlegungspflichten für das Zinsrisiko. Es müssen sowohl Informationen über die Art und Häufigkeit der Messung als auch quantitative Kennzahlen zumindest einmal jährlich veröffentlicht werden.

Basel III [27] aus dem Jahr 2010 enthält nun weitere Empfehlungen zu Basel II die aus den Erfahrungen mit Basel II und der weltweiten Finanz- und Wirtschaftskrise 2007/2008 gewonnen wurden. Es wird eine weitere Stärkung des Eigenkapitals gefordert, eine Verschuldungsobergrenze (Leverage Ratio) und zwei neue Liquiditätskennzahlen (Liquidity Coverage Ratio (LCR) und Net Stable Funding Ratio (NSFR)) eingeführt.

3.3.2 Zinsrisiko im Bankbuch

Der Basler Ausschuss gibt in seinem Dokument zum Zinsrisiko im Bankbuch relativ klare Vorgaben wie die Einlagenmodellierung zukünftig aussehen soll. [28] Dieses 2016 vorgestellte Framework muss bis zum Jahr 2018 umgesetzt sein.

Dabei gibt der BCBS in zentralen Bereichen der Zinsrisikobehandlung Vorgaben. Im speziellen werden folgende Bereiche vorgegeben

- Beschreibung zur Cashflow Darstellung und Vorgaben zu den Laufzeitbändern
- Modellierung von Vorfälligkeiten und Einlagen
- Berücksichtigung von Zinsoptionen
- Konkrete Szenarien für Stresstesting
- Vorgaben zur Währungsaggregation
- Beschreibung der Berechnung des Risikos unter Berücksichtigung von Barwert- und Zinssensitivitäten

Die vorgeschlagene Standardmethode des BCBS zur Modellierung von Einlagen enthält

als ersten Schritt eine Einteilung in Privatkunden (Retail) und Geschäftskunden (Wholesale). Dabei können Einlagen von Klein- und Mittelbetrieben (KMUs) als Retaileinlagen behandelt werden. Diese sind so zu definieren, dass die summierten Einlagen kleiner als 1 Million Euro sind.

In einem zweiten Schritt erfolgt die Aufteilung in einen stabilen und nicht stabilen Anteil. Der stabile Anteil soll dabei jener Anteil sein, der mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht abgezogen wird und auch bei großen Zinsänderungen nicht repriced. Dabei sollen die Volumsänderungen der vergangen 10 Jahre zugrunde liegen.

Nun wird der nicht stabile Anteil in das kürzeste (overnight) Laufzeitband eingestellt. Für den stabilen Anteil muss die Bank eine Methode entwickeln, mit der die Einteilung in die Laufzeitbänder vorgenommen wird.

Als Einschränkung ist sowohl ein maximale Begrenzung für den Anteil der stabilen Einlagen als auch für die durchschnittliche Laufzeit des Portfolios gegeben.

	Max. stabile Einlagen	Max. durchschn. Laufzeit
Retail/transacational	90%	5
Retail/non-transa.	70%	4.5
Wholesale	50%	4

Tabelle 3.1: BCSP Caps



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

4 Modellierung

In diesem Kapitel wollen wir verschiedenen Bausteine zur Einlagenmodellierung vorstellen, beschreiben und analysieren. Diese sollen in den späteren Kapitel direkt implementiert werden.

4.1 Bodensatztheorie

Ein wichtiger Baustein vieler Modelle ist eine Aufteilung der Einlagen in einen stabilen und einen instabilen Anteil. Stabil bedeutet in diesem Zusammenhang, dass dieser Anteil eine sehr lange Verweildauer im Sinne der Kapitalbindung hat. Dieser stabile Anteil wird vielfach auch als „Bodensatz“ bezeichnet.

Das BCBS schlägt in seinem Papier zu Zinsrisiko vor [28], dass zuerst eine Aufteilung der Einlagen in Retail und Wholesale vorgenommen wird, da die Annahme vorliegt, dass diese Segment unterschiedliche Verhaltensweise aufzeigen. Dann soll auf eine mindestens 10-jährige Zeitreihe der Volumensänderungen zurückgegriffen werden und daraus ein Bodensatz abgeleitet werden.

Die Österreichische Nationalbank (OeNB) legt in ihren Vorschläge nahe, auch eine Aufteilung nach Produktarten vorzunehmen. Außerdem schlägt sie vor, den Bodensatz als jenen Teil anzusetzen, der unterhalb der zweifachen Standardabweichung der Volumensveränderungen liegt.

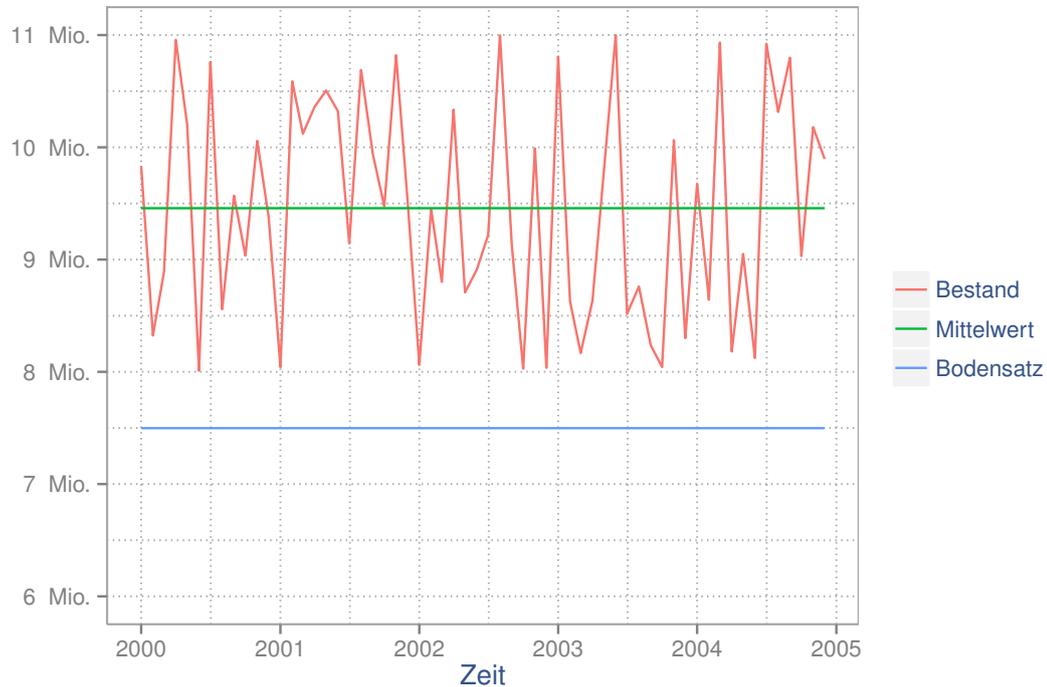


Abbildung 4.1: Beispielhafte Darstellung des Bodensatzes

Es stellt sich die Frage, mit welcher Granularität Daten vorliegen und wieweit diese sinnvoll auswertbar sind. Ab einer gewissen Größe einer Bank ist es jedoch möglich, viel tiefer zu gehen und Daten bis auf Kontoebene auswertbar zu machen um zum Beispiel folgende Kriterien bei der Bodensatzbestimmung einfließen zu lassen: [13]

- Natürliche saisonale (monatliche und jährliche) Schwankungen,
- Neuere Guthaben sind oft instabiler,
- Länge der Beziehung mit und die Retention Rate des Kunden,
- Steueranreize,
- Durchschnittliche Einlagenhöhe (hohe Einlagen sind mobiler),
- Substitutionsmöglichkeiten des Produkts,
- Garantien,
- Änderungen von Technologien, Demographie und Wettbewerb,
- Wirtschaftliche Einflussfaktoren.

Wie genau sich diese Faktoren auf die Bestimmung des stabilen Anteils der Einla-

gen auswirken, hängt vom jeweiligen Institut ab und sollte durch die ausreichende Datenlage dementsprechend valide sein.

4.2 Bestimmung Kapitalablauffiktion

Eine weitere Möglichkeit diese Aufteilung vorzunehmen besteht darin, mittels historischer Daten ein Ablaufprofil der Einlagen zu erstellen. Dies möchten wir hier näher ausführen und implementieren.

Im ersten Schritt werden die logarithmischen Bestandsveränderungen berechnet

$$LR(t_1) = \log(S_{t_2}) - \log(S_{t_1}), \quad (4.1)$$

daraus wird ein Mittelwert μ und eine Standardabweichung σ bestimmt.

Der berechnete Mittelwert und die Standardabweichungen liegen nun für die monatlichen Daten vor. Wir wollen diese aber auch für längere Zeitperioden vorliegen haben und müssen diese in geeigneter Form skalieren.

Wir wollen wie im Modell von Black-Scholes annehmen, dass die Entwicklung einer geometrischen Brownschen-Bewegung mit konstantem Drift und Volatilität folgt:

$$LR_t = \mu t + \sigma W_t \quad (4.2)$$

wobei μ und σ und W_t eine Brownsche Bewegung ist. Die Logrenditen sind somit normalverteilt.

Daraus folgt, dass wir den Bestand bestimmen können als

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right). \quad (4.3)$$

Damit können wir den zeitbezogenen, also skalierten, Drift der Logrenditen zum Horizont t bestimmen als $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$.

Für die Standardabweichung ziehen wir die Wurzel-T-Regel heran. Es handelt sich dabei um eine Methode mittels der ein Diffusionsprozess skaliert werden kann. Sie

besagt

$$\sigma_{t_2} = \sigma_{t_1} \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}, \quad (4.4)$$

wobei in unserem Fall $t_1 = 1$ gilt, da wir die Standardabweichung für ein Monat bestimmt haben.

Wir folgen außerdem der Bodensatztheorie, welche besagt, dass wir davon ausgehen können, dass ein gewisser Teil der Einlagen nicht mobil ist und nicht von den Konten abgezogen wird. [32]

Diesen Bodensatz bestimmen wir als das Minimum zweier Faktoren:

1. Historischer Bodensatz $\frac{\min(S_t)}{S_0}$.
2. Maximaler Rückgang $1 + \max LR_t$, wobei hier bei der Bestimmung der Rückgänge auch ein längerer Zeitraum als eine Zeiteinheit berücksichtigt werden kann.

Im nächsten Schritt bestimmen wir den Wert der Log-Rendite für einen Zeitpunkt t mittels des Quantils der Normalverteilung anhand des vordefinierten Konfidenzniveaus, des zeitbezogenen Mittelwerts und der Standardabweichung. Damit haben wir den prozentualen Abflusswert bestimmt den wir auch in absolute Abflüsse umrechnen können.

Um die Risikosteuerung möglich zu machen, ist eine Fiktion der Kapitalabläufe über wählbare Laufzeitbänder nötig. Wir gehen dabei retrograd vor und beginnen beim längsten gewählten Laufzeitband. Dabei wird der Durchschnitt der Abflüsse bis zum nächstkleineren Laufzeitband bestimmt. Davon abgezogen wird das Volumen, welches bereits in den vorherigen Laufzeitbänder eingestellt wurde. Nun werden die Abflüsse über die Zeitbänder summiert und am Ende kumuliert.

Zusammenfassend lässt sich die Vorgehensweise in 4 Schritte unterteilen:

1. Analyse Historie
2. Aufteilung auf Stützstellen
3. Rückwirkende Aufteilung auf vorherige Monate
4. Kumulierung

4.3 Portfolioreplizierung

Bei der Gruppe der Modelle die sich auf Portfolioreplizierung stützen wird ein Portfolio aus Einlagen ohne fixe Laufzeit transformiert in ein Portfolio mit fixer Laufzeit, damit die aus dem Portfolio entstehenden Cashflows fixiert werden und damit eine wesentlich leichtere Risikoabschätzung möglich wird.

4.3.1 Maes und Timmermans

Maes und Timmermans empfehlen in [19] zuerst eine Aufteilung der Einlagen in einen Kernteil, einen volatilen Teil und eine übrig bleibende Differenz. Der Kernteil wird als Bodensatz angenommen und in lange laufende Instrumente investiert, der volatile in kurzfristige. Nur für die übrige Differenz wird ein replizierendes Portfolio optimiert.

Wir haben n verschiedene Standardassets zur Verfügung die wir zur Replizierung heranziehen können, welche zur Zeit t den Zins $r_{t,i}, i = 1, \dots, n$ abwerfen. Nun gewichtigen wir diese in unserem Portfolio mit $w = (w_1, \dots, w_n)$ und kommen so zu einem Portfolio mit Return $r_{t,p}$.

Um die Gewichte zu bestimmen wollen wir die Marge, also die Differenz des Returns des Portfolios und unseres tatsächlichen Einlagenzinssatzes d_t möglichst konstant halten, sprich die Standardabweichung minimieren. Es soll also das Optimierungsproblem

$$\text{Min std}(r_p - d) \tag{4.5}$$

gelöst werden unter den Nebenbedingungen

- $\sum_{i=1}^n w_i r_{t,i} = r_{t,p}$
- $\sum_{i=1}^n w_i = 1$
- $w_i \geq 0, \forall i, t,$

es soll also shorten verboten sein.

Der replizierte Einlagenzins ergibt sich dann als $d_{t,p} = r_{t,p} - m$, wobei m eine Marge darstellt. Diese Marge kann entweder als Durchschnitt von $r_{t,p} - d_t$ gebildet werden oder durch eine Minimierung des quadratischen Fehlers zwischen $r_{t,p} - m - d_t$.

Da die Marktzinsen in fast allen Fällen höher sind als die Einlagenzinsen, ergibt sich eine positive Durchschnittsmarge.

Es ist oft so, dass die Einlagenzinssätze etwas verzögert auf Änderungen der Marktzinsen reagieren. Um diesen Effekt auszugleichen können wir Maes und Timmermans dahingehend erweitern, dass wir einen gleitenden Mittelwert mit Lag n der Marktzinsen verwenden. Dieser bestimmt sich für jeden Zinssatz r_t als

$$r_{t,n}^- = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_{t-i}. \quad (4.6)$$

Dabei entsteht eine Verzögerung von $\tau = \frac{n-1}{2}$, um welche die gemittelten Werte hinterher hinken. Außerdem entsteht durch Anwendung des gleitenden Mittelwerts eine Glättung die ebenfalls wünschenswert ist, da die Einlagenzinsen meist nicht in dem Ausmaß der Marktzinsen volatil sind.

Erweiterung

Wir wollen das Modell von Maes und Timmermans ein wenig erweitern, um es an die tatsächlichen Gegebenheiten in einer Bank anzupassen und die wirklichen wirtschaftlichen Vorgänge besser abbilden zu können und so näher an die Realität zu kommen.

Wenn wir annehmen, wirklich das replizierende Portfolio aufzubauen und darin zu investieren, würden wir für die unterjährigen Zinsen Instrumente kaufen, die an die jeweiligen EURIBOR Zinsen gebunden und dem entsprechenden EURIBOR Tenor nach repricen. Somit ist es hier korrekt, wenn wir davon ausgehen, dass diese im Laufe der Zeit schwanken.

Für die überjährigen Swap-Sätze, ist der Ansatz jedoch nicht korrekt, hier die schwankenden historischen Werte zu verwenden, da bei Investition in diese Produkte ja die Zinssätze fixiert werden über die Laufzeit und erst nach Ablauf dieser neu gekauft werden, zu dem dann aktuellen Zinssatz.

Wir werden deshalb die Swapsätze so anpassen, dass zu jedem Zeitpunkt für den ein optimales Portfolio nach obiger Vorgehensweise bestimmt wird, die Swapsätze

für ihre Laufzeit konstant sind. Beispielsweise gilt für den 2-Jahres-Swap Satz r (bei monatlich vorliegenden Werten):

$$\begin{aligned} r_t &= r_1 && \text{für } 1 \leq t \leq 24 \\ r_t &= r_{25} && \text{für } 25 \leq t \leq 48, \dots \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die optimalen Gewichte $w_{i,t}$ für jeden Zeitpunkt und bilden dann für jedes Gewicht den Mittelwert. Wir gehen außerdem so vor, dass wir nicht wie Maes und Timmermans die Standardabweichung der Marge minimieren, sondern wir nehmen eine Standard OLS Optimierung auf die Portfoliogewichte inklusive Marge vor.

Niedrigzinsumfeld

Was wir zusätzlich beachten müssen, ist das aktuell vorherrschende Niedrigzinsumfeld. Ab einem gewissen Punkt tritt die Situation auf, dass es nur mehr möglich ist eine Marge m mit dem Portfolio zu erwirtschaften, wenn der Einlagenzinssatz negativ wird. Nun kann man diskutieren, ob ein negativer Einlagenzinssatz sinnvoll und möglich ist. Wir gehen jedoch davon aus, dass eine Bank an Privatkunden keine negativen Zinsen weitergeben kann und deshalb müssen wir dies in unserer Modellierung beachten.

Wir schlagen deshalb vor, den Einlagenzinssatz bei m mit einem Floor zu versehen. Dies kann natürlich dementsprechend auf das replizierende Portfolio umgelegt werden. So ist es außerdem möglich, die geforderte Marge weiterhin zu erwirtschaften.

4.3.2 Bardenhewer

Bardenhewer geht in [20] einen etwas anderen Weg und teilt in einem ersten Schritt das Volumen in eine unerwartete Komponente und eine Trendkomponente. Dann wird ein replizierendes Portfolio konstruiert, wobei der unerwartete Teil der kürzesten Laufzeit zugeordnet wird. Die Schätzung erfolgt mittels der Methode der kleinsten Quadrate.

Um den Trend zu schätzen kann entweder auf eine Expertenmeinung zurückgegriffen werden oder ein linearer, quadratischer oder exponentieller Trend geschätzt werden.

$$V_t = \beta_0 + \beta_2 \cdot \Delta_t^2 + \sum_i \kappa_i \cdot (r_{i,t} - \bar{r}_i) + \delta \cdot (d_t - \bar{d}) + \epsilon_t \quad (4.7)$$

wobei V_t das Volumen zur Zeit t ist, $r_{i,t}$ der Zinssatz zur Zeit t mit Laufzeit i Monate, \bar{r}_i der durchschnittliche Zinssatz mit Laufzeit i über die gesamte Schätzperiode, d_t der Einlagenzinssatz, \bar{d} der durchschnittliche Einlagenzinssatz, Δ_t die Zeit in Monaten zwischen 0 und t , $\beta_i, \kappa_i, \delta$ die zu ermittelnden Parameter und ϵ_t das Residuum.

Für das replizierende Portfolio verwendet Bardenhewer gleitende Mittelwerte der Zinssätze, also

$$ma_{j,t} = \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} r_{j,t-i}. \quad (4.8)$$

Nun wird der Einlagenzinssatz modelliert als

$$d_t = \frac{F_t}{V_t} \sum_j w_j \cdot ma_{j,t} + \frac{V_t - F_t}{V_t} \cdot r_{1,t} + \theta_0 + \eta_t \quad (4.9)$$

wobei F_t der Trendanteil des Volumens V_t ist. Die Portfoliogewichte w_j müssen geschätzt werden. θ_0 ist der Aufschlag, η_t das Residuum.

Unser Optimierungsproblem besteht nun daraus, die Volatilität des Aufschlags zu minimieren unter $w_j \geq 0, \forall j$ und $\sum_j w_j = 1$.

4.4 Elastizitätsansatz

Zur Messung der Zinsänderungsrisiken von variabel verzinsten Produkten können sogenannte Elastizitätskonzepte herangezogen werden. [23, S. 63] Dabei beschreibt die Zinsanpassungselastizität (eine Zahl zwischen 0 und 1) die Abhängigkeit eines Produktzinssatzes von einem Marktzinssatz. Eine Elastizität von 0 bedeutet, dass sich eine Änderung des Marktzinssatzes nicht auf den Produktzinssatz auswirkt. Eine Elastizität die größer als 0 ist, beschreibt eine gewisse Abhängigkeit. Um diese Elastizität zu bestimmen, werden Regressionsverfahren herangezogen. Dieses Verfahren

wird nur auf den vorher zu bestimmenden Bodensatz angewendet.

Eine Herausforderung ist die Identifikation des Marktzinssatzes der am besten zu dem Produkt passt. Hierbei kann bei Verwendung von Regressionsverfahren auf ein Gütemaß der Regression wie das Bestimmtheitsmaß zurückgegriffen werden. Dazu berechnet man Regressionen des Produktzinssatzes mit verschiedenen Marktzinssätzen als erklärende Variable und zieht den Marktzinssatz mit dem höchsten Bestimmtheitsmaß heran.

Mittels des Regressionsverfahren wird also jener Teil des Volumens bestimmt, der am Marktzinssatz mit gewisser Bindung partizipiert. Der Teil, der nicht am Marktzinssatz partizipiert, wird als langfristige Fixzinstranche dargestellt. Es ergibt sich damit also beispielsweise eine Darstellung für die Cashflowstruktur wie in Grafik 4.2. Dabei wurde bei einem Volumen von €100 Mio. eine Elastizität zum 3-Monats-EURIBOR von 0,3 bestimmt. Der unelastische Teil des Bodensatzes wird als rollierende Fixzinstranche an einen längeren Satz gebunden (hier 5Y) gebunden.



Abbildung 4.2: Cashflowstruktur bei Elastizitätsansatz [23, Grafik 20]

Nun erfolgt noch eine rollierende Darstellung der Fixzinskomponente. Dies ist eine Annahme aus der Praxis, da ja üblicherweise nicht das gesamte Volumen auf einmal veranlagt wird, sondern dies in einzelnen Tranchen passiert. Deshalb wird die 5Y Fixzinskomponente in 60 gleiche Monatstranchen aufgeteilt. Für das Beispiel ergibt sich damit eine Darstellung der Bodensatzkomponente wie in Grafik 4.3.



Abbildung 4.3: Cashflowstruktur nach Rollierung [23, Grafik 21]

Der Anteil, der nicht dem Bodensatz zugehörig ist, wird als variabler Teil an einen sehr kurzfristigen Satz gebunden.

4.4.1 Verzögerungseffekte

Im Zusammenspiel von Produkt- und Marktzinssatz können Verzögerungseffekte auftreten, welche in der Beschreibung berücksichtigt werden können. Diese können einerseits durch vertragliche Klauseln und andererseits durch das verspätete Einpreisen der Banken entstehen.

Zur Identifikation etwaiger Verzögerungseffekte kann ein Elastizitätsdiagramm herangezogen werden.[30] Dabei werden in einem Koordinatensystem mit der x-Achse als unabhängige Variable und der y-Achse als abhängige Variable die Daten als (x,y) Punkte eingezeichnet. Diese Punkte werden in zeitlicher Abfolge mit einer Linie verbunden. Wenn sich dabei Schleifen bilden, kann dies auf eine zeitliche Verzögerung hinweisen. Ein schematisches Beispiel dafür ist in Grafik 4.4 gegeben.

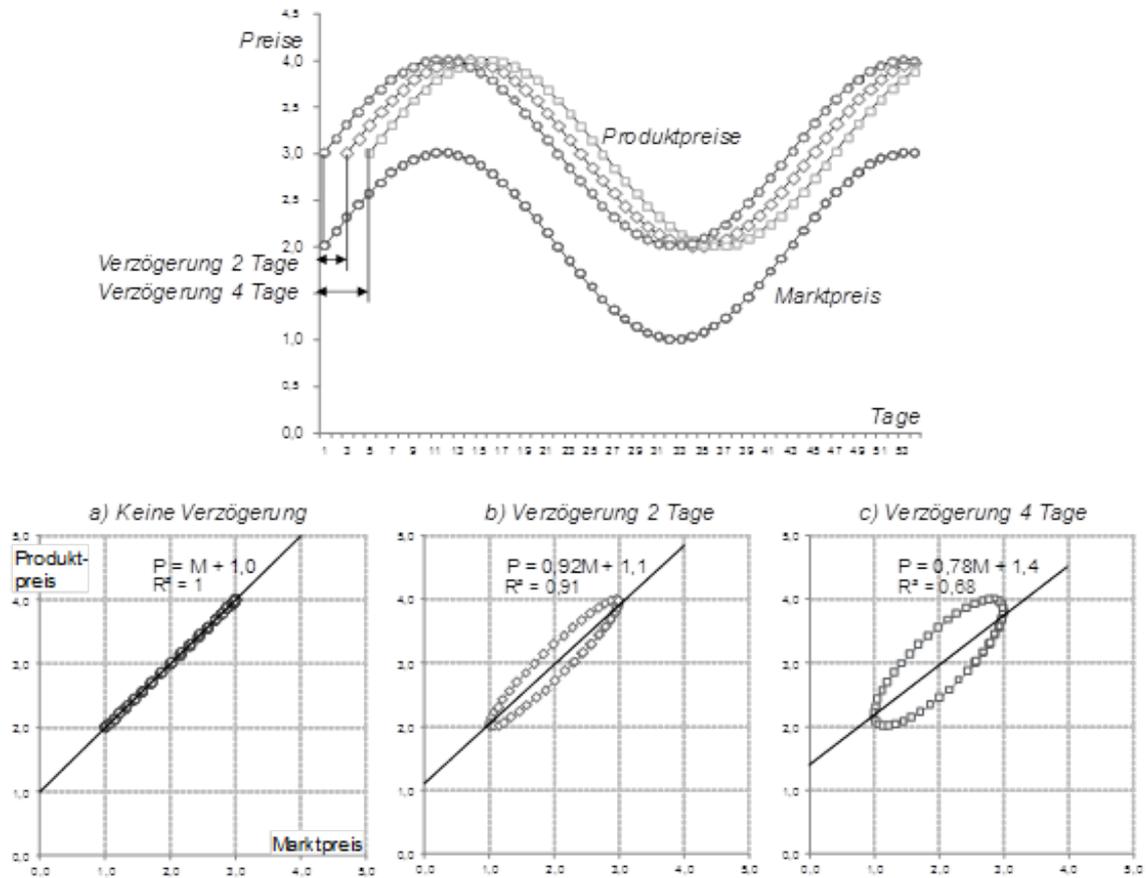


Abbildung 4.4: Elastizitätsdiagramm [8]

4.5 Stochastic Factor Approach (SFA)

Als weiteres Modell wollen wir den Stochastic Factor Approach (SFA) von Castagna und Manenti [7] vorstellen. Es handelt sich dabei um ein mehrstufiges Modell, welches das Kundenverhalten zu simulieren und somit die Liquiditätsbindung von Geschäften zu modellieren versucht.

Die von Castagna und Manenti identifizierten Hauptbausteine eines SFA sind: In einem ersten Schritt simulieren wir einen stochastischen Prozess für die Zinsen. Hier bietet sich das CIR Modell an, welches mittels Kalman Filter auf reale Daten kalibriert wird.

Darauf aufbauend wird der Einlagenzinssatz in Abhängigkeit der Zinsstruktur modelliert. Hier werden wir eine der vorgeschlagenen Varianten verwenden und zwar eine einfache affine Relation der Short Rate mit dem Einlagenzinssatz der Form $d_t = \alpha + \beta r_t + u_t$ wobei $E(u_t) = 0$ gelten soll. Diese werden wir durch eine Regressionsanalyse von realen Daten kalibrieren können.

Nun können wir einen Prozess für die Einlagenvolumina konstruieren, welcher wieder stochastisch sein wird, da er natürlich in Abhängigkeit des Einlagen- und Zinsstrukturmodelles steht. Wir wollen diesen Prozess in Abhängigkeit des Verhaltens der Kunden und nicht linear aufbauen. Dabei steht im Hintergrund die mikroökonomische Liquiditätsprämientheorie. Diese besagt, dass für niedrige Zinsen die Investoren ihr Geld lieber in liquiden Anlagen parken, je höher die Zinsen sind, desto höher ist der Anteil am Vermögen der in weniger liquide Produkte fließt.

1. Jeder Investor hat einen Anteil λ_t seines Einkommens I investiert, wobei er einen Zielanteil $\bar{\lambda}$ verfolgt und dieser mit der Geschwindigkeit ζ angenähert wird.
2. Es gibt einen Zinssatz E ab dem der Investor γ seines Einkommens auf andere Investments verlagert.
3. Es gibt einen Einlagenzinssatz F ab dem der Investor zurückhaltender mit Anteil δ wird beim Abziehen seines Geldes.

Dies führt zur Formel

$$\lambda_{t+\Delta t} - \lambda_t = \zeta(\bar{\lambda} - \lambda_t) + \gamma \mathbb{1}_{[E, \infty)}(r_t) + \delta \mathbb{1}_{[F, \infty)}(d_t). \quad (4.10)$$

Um die verschiedenen Werte für E und F der Kunden darzustellen, wollen wir für diese Werte Verteilungen annehmen. Dabei erweist sich die Gammaverteilung als passend, da diese eine große Flexibilität aufweist.

Die Gammaverteilung $\gamma(p, b)$ ist definiert durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

mit Parametern b und p , wobei für Normierbarkeit $b > 0$ und $p > 0$ gefordert wird. $\Gamma(p)$ beschreibt dabei die Eulersche Gammafunktion, welche über das Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (4.12)$$

definiert ist.

4.6 Option Adjusted Spread-Modelle

Der Option Adjusted Spread (OAS) ist jener Zinsunterschied welcher bei der Bewertung von Wertpapieren durch Beachtung von impliziten Optionen entsteht. [15, S. 729] Dieses Konzept wurde dann auf die Klasse von Mortgage Backed Securities (MBS) übertragen. MBS sind verbriefte Hypotheken, die monatlich gekündigt werden können. [18]

Wir können dieses Konzept in der Form anwenden, dass ein OAS-Modell einen Wert für die Kündigungsoption des Kunden und die Option der Bank, den Zins beliebig ändern zu können, bestimmt.

Man geht nun in drei Schritte vor.[20] [23] Zuerst wird eine Zinsstruktur modelliert. Dann muss die Deposirate bzw. die zukünftige Entwicklung der Konditionen simuliert werden. Dieser Modellbaustein wird auch als Hypothekarmodell bezeichnet. Der dritte Teil ist ein Volumen- oder Amortisationsmodell welches das zukünftige Volumen bzw. Kündigungsverhalten des Kunden simuliert. Daraus können wir dann die zukünftigen Zinszahlungen und Tilgungen gewinnen. Damit sind unsere Cashflows fixiert und wir können mittels Abzinsung einen Barwert errechnen und darstellen.

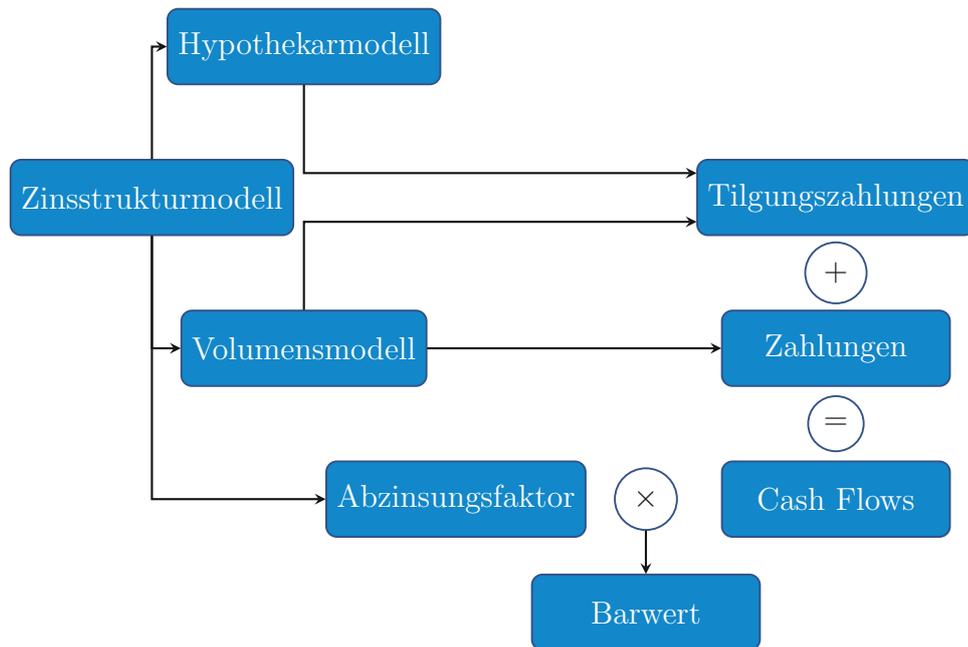


Abbildung 4.5: Schematische Darstellung des OAS-Modells [20]

4.7 Constant-Maturity-Bond-Ansatz

Eine weitere von der OeNB vorgeschlagene Methode ist die Verwendung von Constant maturity Bonds um damit ein Replikationsportfolio aufzubauen. [23, S. 72] Ein Constant Maturity Bond (CMB) ist eine variabel verzinsten Anleihe (Floater), die eine fixe Laufzeit hat und periodisch an einen Kapitalmarktzins anpasst. Damit spiegelt der CMB das Zinsrisikoprofil eines an den Kapitalmarkt gebundenen Kundengeschäfts wider.

CMBs gibt es nicht an Kapitalmärkten, können jedoch durch Replikation aus Forwards gewonnen werden. Dabei wird für z.B. einen 5-Jahres-CMB eine Fixzinsaktive-Position im 5-Jahres-Laufzeitband und 5 Forwardpositionen (1J x 6J, 2J x 7J, ..., 4J x 9J) aufgebaut. Die Höhe der einzelnen Positionen kann über die Key-Rate-Duration ermittelt werden, welche angibt, wie sich Bondpreise verändern, wenn sich die Zinskurve um 1% verschiebt.

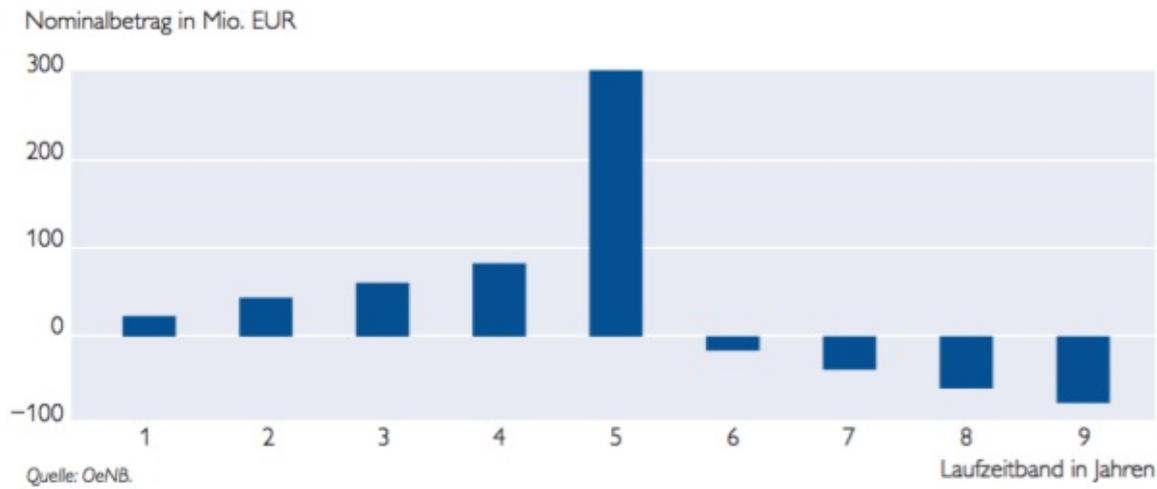


Abbildung 4.6: Schematische Darstellung des Cashflow-Profiles eines Constant Maturity Bond [23, Grafik 30]

4.8 Backtesting

Einen wichtigen Schritt der Modellierung stellt das Backtesting da. Backtesting bedeutet, dass das entworfene Modell auf historische Daten angewendet wird und die tatsächlich eingetretenen Werte mit den prognostizierten verglichen werden. Backtesting grenzt sich dabei von Stresstesting ab, welches die Analyse möglicher zukünftiger Szenarien mittels des Modells darstellt.

Wir wollen dazu die einzelnen Bausteine unseres Modells in regelmäßigen Abständen überprüfen. Diese Überprüfungen sollten mindestens einmal im Jahr vorgenommen werden, um eine adäquate Modellierung sicherzustellen.

4.8.1 Abflüsse

Das in 4.2 vorgestellte Modell für Kapitalabflüsse können wir ähnlich wie Value at Risk Modelle backtesten.

Wir bestimmen für Stützstellen t α -Quantile für die Abflüsse. Wenn wir nun betrachten ob unsere Abflüsse überschritten werden, also den Indikator $I_t = I_{\{(S_t - S_0) > O_\alpha^t\}}$ können wir dies nach [21, S. 352] als Bernoulli Variable mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$

auffassen. Die Folge der I_t bildet einen Prozess von iid. Bernoulli Variablen. Damit ist die Summe von m Indikatoren binomialverteilt mit Parametern m und $1 - \alpha$ und die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Verletzungen unabhängig und geometrisch verteilt.

Damit kann ein Binomialtest angewendet werden. Das bedeutet, dass sich die Summe der Verletzungen wie Realisierungen einer $B(m, 1 - \alpha)$ Verteilung verhalten müsste. Für einen zweiseitigen Test berechnen wir die Teststatistik

$$Z_m = \frac{\sum_{t=1}^m I_t - m(1 - \alpha)}{\sqrt{m\alpha(1 - \alpha)}} \quad (4.13)$$

wobei die Nullhypothese, dass unsere Annahmen korrekt sind, bei einem Testsignifikanzniveau von α_{Test} verworfen wird, falls $|Z_m| > \Phi^{-1}(1 - \alpha_{\text{Test}}/2)$.

4.9 Vergleichskriterien

Wir wollen einen Vergleich der Modelle vornehmen und entscheiden, was ein gutes Modell charakterisiert. Dazu gibt es natürlich verschiedene Wege wir wollen uns hier an den in [17] vorgeschlagenen Kriterien orientieren und als qualitative Faktoren folgende verwenden:

- **Stabilität:** Das Modell soll stabil in der Kalibrierung an historische Daten sein. Dies können wir überprüfen, indem wir eine out-of-sample Analyse durchführen. Wir werden also Parameter mit Daten aus einer Zeitperiode schätzen und dann eine Simulation für eine andere Zeitperiode mit diesen Parametern durchführen.
- **Negativzinsumfeld:** Negative Zinsen sollen Bestandteil des Modells sein können, da diese ja aktuell im Markt vorliegen.
- **Einfachheit:** Die Implementierung soll in Umfang und Komplexität nicht zu aufwendig sein und doch die nötige Güte bieten.

Zusätzlich zu den qualitativen Faktoren wollen wir einen Vergleich mittels der folgenden quantitativen Faktoren vornehmen, welche teilweise auch durch das regulatorische Umfeld beschränkt und vorgegeben werden:

- **Anpassungsgüte:** Das Modell soll natürlich eine gute Anpassung an die his-

torischen Daten bieten.

- **Durchschnittliche Portfolielaufzeit**
- **Durchschnittlicher Zinssatz**



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

5 Implementierung anhand einer Fallstudie

In diesem Kapitel wollen wir nun die theoretisch formulierten Modelle implementieren und direkt auf Sektor Daten der OeNB angewendet werden, die Ergebnisse vergleichen und damit eine kritische Betrachtung der Anwendbarkeit herausarbeiten. Die bereitgestellten R-Programmcodes können in analoger Form für die Daten von einzelnen Instituten verwendet werden.

5.1 Datenlage und -aggregation

In einem ersten Schritt sollten Daten zu Zinssatz und Einlagenstand mindestens auf monatlicher Basis für 5 Jahre vorliegen.

Eine wichtige Information ist die Produktinformation. Beispielsweise ob es ähnlich einem Girokonto und Spareinlagen strukturiert ist. Spareinlagen definieren sich dadurch, dass sie "nicht dem Zahlungsverkehr, sondern der Anlage dienen und als solche nur gegen die Ausfolgung von besonderen Urkunden (Sparurkunden) entgegengenommen werden dürfen". [22, S. 22] Grundlage hierfür bildet das österreichische Bankwesengesetz, welches in §§ 31 und 32 Spareinlagen definiert. [5]

Zusätzlich sollte eine Einteilung in Kundengruppen möglich sein. Beispielsweise in Privatkunden und nichtfinanzielle Unternehmen. Dabei werden nichtfinanzielle Unternehmen definiert als „Unternehmen zu verstehen, deren Hauptfunktion in der Produktion von für den Markt bestimmten Waren und Erbringung von nicht-finanziellen Dienstleistungen besteht.“ Private Haushalte umfassen „Einzelpersonen und Gruppen von Einzelpersonen in ihrer Funktion als Konsumenten und auch in ihrer Eigenschaft als Produzenten, die marktbestimmte Waren und Dienstleistungen produzieren.“ Insbesondere sind hier also auch selbständig Erwerbstätige, wie Einzelunternehmer, und freiberuflich tätige Personen wie Anwälte oder Ärzte enthalten. [22]

Je nach Größe der Bank und ihrer Einlagenhöhen ist es für das Liquiditätsrisiko zur Bodensatzbestimmung zu empfehlen, nicht auf Einzelkontenebene abzustellen, sondern eine Aggregation vorzunehmen. Bezüglich der Art der Einlage (z.B. Giro und Spar) kann keine weitere Unterscheidung für die Betrachtung der Liquidität vorgenommen werden. Es ist oftmals so, dass es zwischen diesen zwei Gruppen große Wechselwirkungen gibt, die durch die Bedingungen der Geschäfte bedingt sind. Läuft zum Beispiel ein gebundenes Sparprodukt aus, wird dies automatisch in Giro umgewandelt. Durch diese Kumulierung werden die Zeitreihen glatter und es kann auf einer sinnvoll großen Ebene mit den Daten gearbeitet werden.

Für das Zinsrisiko soll jedoch die Einteilung in die Produkt bzw. Kundengruppen sehr wohl vornehmen.

5.1.1 Marktzinssätze

Wir ziehen für unsere Analyse die Euro InterBank Offered Rate (EURIBOR) Werte für die Laufzeiten 1 Woche und 1 bis 12 Monate heran. Diese liegen uns seit Jänner 1999 vor. 4 Monate, 5 Monate, 7 Monate, 8 Monate, 10 Monate und 11 Monate werden jedoch seit November 2013 nicht mehr veröffentlicht. Der EURIBOR ist ein anerkannter Referenzzinssatz für Termingeschäfte und wird geschäftstäglich als Durchschnitt der Zinssätzen von 24 EURIBOR-Panel-Banken von der neuseeländischen Firma Global Rate Set Systems ermittelt. Der EURIBOR repräsentiert damit jenen Zinssatz, zu dem sich Banken untereinander im Euroraum Geld leihen und gibt somit den besten Blick auf die Zinssituation im Euroraum.

Für die überjährigen Raten (1 - 10 Jahre) greifen wir auf die SWAP-Raten des Intercontinental Exchange (ICE) zu. Die ICE SWAP-Raten, Nachfolger der ISDA-Fixings, sind die meist verwendeten SWAP-Raten. Die ICE SWAP-Rate bildet den mittleren Preis eines Zinsswaps für verschiedene Tenore und Währungen ab.

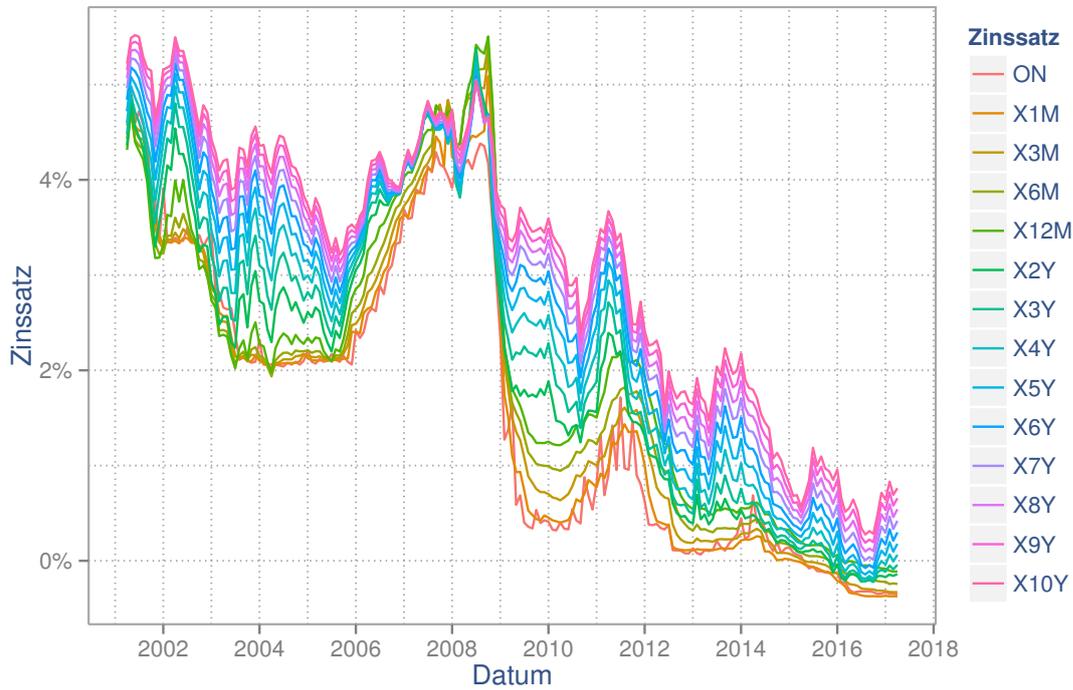


Abbildung 5.1: Entwicklung der EURIBOR und ICE Sätze

5.2 Stochastic Factor Approach

Als ersten Schritt wollen wir das Kalman-Filter wie in 2.1.4. beschrieben für das Cox-Ingersoll-Ross Modell implementieren um unser Zinsstrukturmodell zu kalibrieren. Der R-Programmcode dazu findet sich im Anhang 6.1.1.

Es ergibt sich für die Parameter:

$$\theta = 0,06126947, \quad \kappa = 0,2249431, \quad (5.1)$$

$$\sigma = 0,07004347, \quad \lambda = -0,1110261 \quad (5.2)$$

Mit den gewonnenen Werten der Kalman Filter können wir nun Pfade der Short-Rate mittels des Cox-Ingersoll-Ross Modells simulieren. Wir greifen dabei auf die Verteilung des CIR-Modells zurück und können so eine exakte und vergleichsweise schnelle Simulation sicherstellen. In Grafik 5.2 sind einige Pfade dargestellt (Programmcode

Anhang 6.1.2).

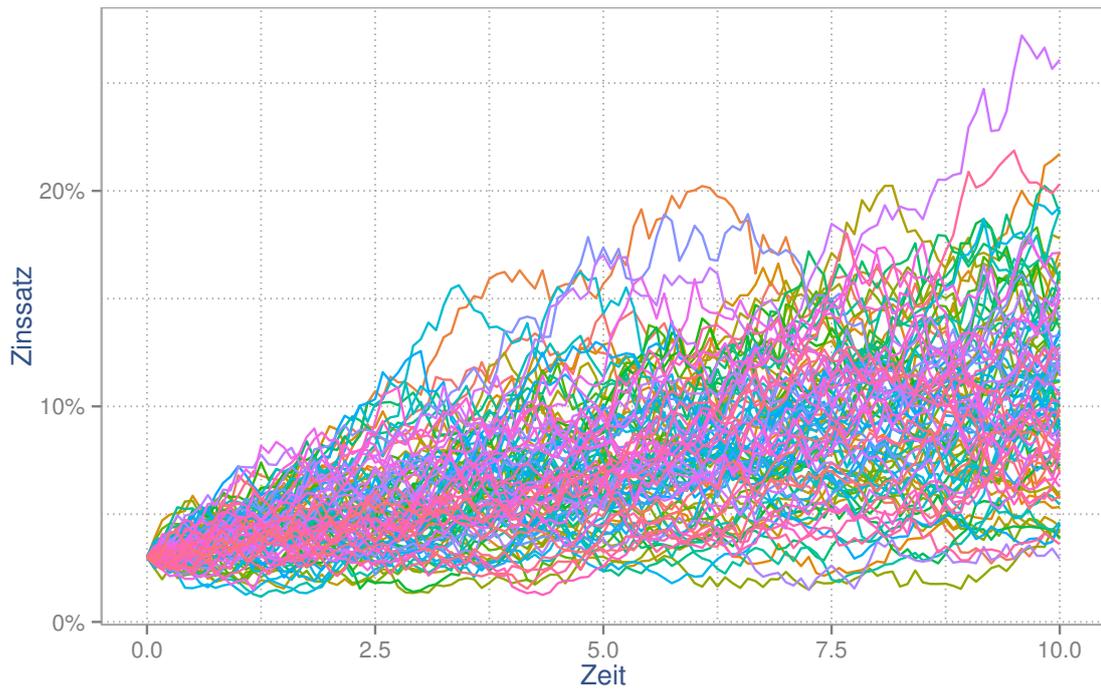


Abbildung 5.2: Pfade der Simulation des CIR Modells

In einem nächsten Schritt können wir nun den Einlagensatz $d_t = \alpha + \beta r_t + u_t$ modellieren. Dazu berechnen wir aus einem bekannten Einlagensatz eine Regression zum 3 Monats EURIBOR und stellen eine Simulation an (Programmcode im Anhang 6.1.3).

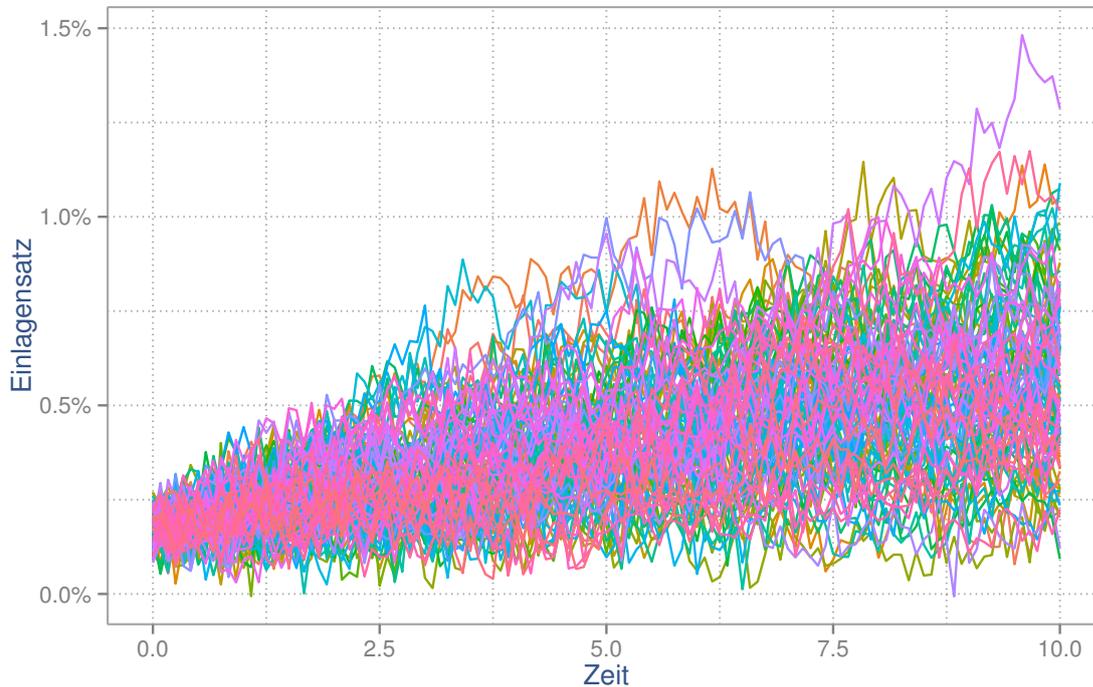


Abbildung 5.3: Pfade der simulierten Depositrate

5.3 Liquiditätsrisiko

Für das Liquiditätsrisiko der Einlagen bestimmen wir in einem ersten Schritt einen Bodensatz und danach Ablaufprofil für die Zeitbänder 1, 3, 6 und 12 Monate.

5.3.1 Bodensatz

Um einen Bodensatz zu bestimmen, ermitteln wir einen gleitenden Durchschnitt über die letzten 12 Monate der Einlagenstände in der jeweiligen Kategorie und ziehen davon die zweifache Standardabweichung der gesamten Zeitreihe ab. [23, S. 60] Durch Verwendung des gleitenden Durchschnitts können kurzfristige Schwankungen ausgeglichen werden (Programmcode im Anhang 6.1.4).

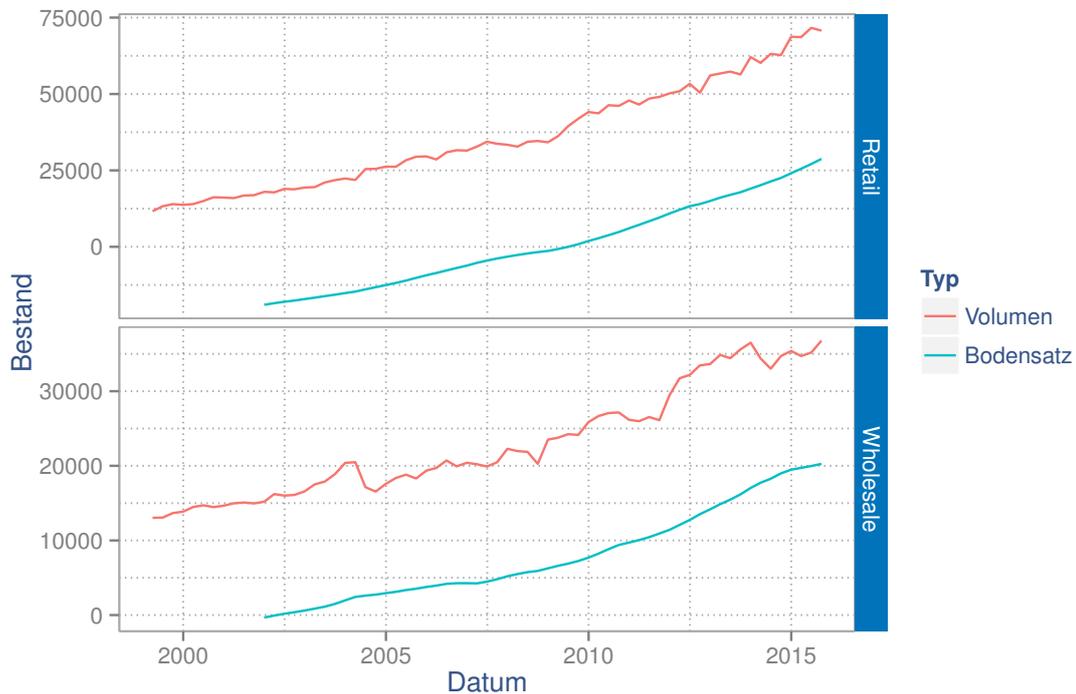


Abbildung 5.4: Einlagenstände mit Bodensätzen

5.3.2 Abflüsse

Für die Abflüsse betrachten wir drei Szenarien, woraus das schlechteste herangezogen wird:

- Die maximale Veränderung im jeweiligen zeitlichen Abstand: Für die 1M Abflüsse betrachten wir also die maximale 1M Veränderung in unserer gesamten Zeitreihe. Für die anderen Zeitbänder erfolgt dies analog, in dem wir die Veränderung für 3M, usw. berechnen.
- Die Veränderungen im 90% Quantil: Dazu berechnen wir die Veränderung über die jeweiligen Zeitabstände (1M, 3M, ...) und berechnen davon dann das 90% Quantil.
- Hochskalierte 1M Veränderungen im 99% Quantil: Dazu berechnen wir die 1M Veränderungen, skalieren diese mittels Wurzel-Zeit-Formel hoch und nehmen davon das 99% Quantil.

Eine Implementierung ist im Anhang dargestellt 6.1.5.

5.4 Zinsänderungsrisiko

5.4.1 Elastizitätsansatz

Nun wollen wir für die Messung des Zinsänderungsrisikos einen Elastizitätsansatz wie in 4.4 beschrieben implementieren.

Wir bestimmen noch einen Floor für den verwendeten Referenzzinssatz. Dabei minimieren wir das R^2 einer einfachen Regression zwischen dem Einlagenzinssatz und dem gefloorten Referenzzinssatz wobei der Floor hier die zu bestimmende Variable bildet.

In einem zweiten Schritt erfolgt dann die Einstellung in Zeitbänder. Dies passiert so, dass zuerst wie oben beschrieben ein Bodensatz bestimmt wird. Dieser Bodensatz wird dann mittels der Elastizität aufgeteilt. Der elastische Teil wird rollierenden an den Referenzzinssatz mit dem höchsten Bestimmtheitsmaß gebunden. Der unelastische Teil des Bodensatzes wird als rollierende Fixzinstranche an einen längeren Satz gebunden. Wir verwenden hier den 3J Satz.

Der Anteil, der nicht dem Bodensatz zugehörig ist, wird als variabler Teil an einen sehr kurzfristigen Satz, hier der Overnightsatz, gebunden.

Der Programmcode zur Implementierung findet sich im Anhang 6.1.6.

5.4.2 Replizierendes Portfolio

Nun wollen wir auch replizierende Portfolios nach den Ideen von Maes und Timmermans berechnen. Der Code dazu findet sich im Anhang 6.1.7.

5.5 Konklusion und Modellauswahl

Nun wollen wir die beschriebenen Modelle und ihre Ergebnisse vergleichen.

Der Elastizitätsansatz bietet den Vorteil, dass er sehr schnell und einfach zu implementieren ist und auch bei vielen Produkten deren Ausprägungen gut erfasst. Er hängt nur von wenigen Variablen ab und ist damit auch sehr stabil gegenüber etwaigen Modellierungsfehlern.

Diese Einfachheit führt natürlich auch zu einigen Unzulänglichkeiten in der Modellierung. Der Zusammenhang zwischen Markt- und Produktzinssatz ist natürlich je nach Portfolio der Bank zeitlichen Veränderungen unterlegen. Hier gilt es, stets eine Validierung durchzuführen, um solche Veränderungen rechtzeitig erfassen zu können. Der Elastizitätsansatz benutzt in dieser Ausprägung auch keinerlei Informationen über die strategische Ausrichtung und zukünftige Bilanzstruktur und kann daher nur zur Betrachtung von kurz- bis mittelfristige Einkommenseffekten herangezogen werden.

Im Vergleich zwischen den multidimensionalen Portfolioreplikationsmodellen hat das eindimensionale Elastizitätsmodell nur geringe Nachteile, es ergeben sich kaum messbare Differenzen.

6 Anhang

6.1 R Codes

Alle Berechnungen in dieser Arbeit wurden mit R [29] durchgeführt. Vielen Dank an die Autoren der Pakete reshape2 [36], ggplot2 [37], scales [39], TTR [34], plyr [38], dplyr [40] und xtable [10].

6.1.1 Kalman Filter

```
### Daten einlesen
Y=read.xls("ir.xls") # Zinssätze
AnzWerte = nrow(Y)
AnzProd = ncol(Y)
tau = c(3/12, 6/12, 1, 5*12) # Laufzeiten der Zinssätze (3
    Monats Euribor, 6 Monats, 1 Jahres, 5 Jahres)

### Optimierung
para0 = c(0.05, 0.1, 0.1, -0.1, c(0.01*runif(AnzProd, 0, 1)))
    # Startparameter
optim(par=para0, fn=loglik, Y=Y, tau=tau, nrow=AnzWerte, ncol=
    AnzProd) # Starte Optimierung

### Log likelihood Funktion
loglik<-function(para,Y,tau,nrow,ncol) {
    theta = para[1]
    kappa = para[2]
    sigma = para[3]
    lambda = para[4]
    sigmai = para[-ncol:-1]
    R = diag(sigmai)
```

```
dt = 1/12 # monatlich

initx = theta
initV = sigma^2*theta/(2*kappa)

F = exp(-kappa*dt)
mu = theta*(1-F)

A = rep(0,ncol)
H = A

for (i in 1:ncol){
  AffineGamma = sqrt((kappa+lambda)^2+2*sigma^2)
  AffineBeta = 2*(exp(AffineGamma*tau[i])-1)/((AffineGamma+
    kappa+lambda)*(exp(AffineGamma*tau[i])-1)+2*AffineGamma
  )
  AffineAlpha = 2*kappa*theta/(sigma^2)*log(2*AffineGamma*
    exp((AffineGamma+kappa+lambda)*tau[i]/2)/((AffineGamma+
    kappa+lambda)*(exp(AffineGamma*tau[i])-1)+2*AffineGamma
  ))

  A[i] = -AffineAlpha/tau[i]
  H[i] = AffineBeta/tau[i]
}

AdjS = initx
VarS = initV
ll = rep(0,nrow)

for (i in 1:nrow){
  PredS = mu+F*AdjS
  Q = theta*sigma*sigma*(1-exp(-kappa*dt))^2/(2*kappa)+sigma
    *sigma/kappa*(exp(-kappa*dt)-exp(-2*kappa*dt))*AdjS
  VarS = F*VarS*F + Q
  PredY = A+H*PredS;
  PredError = as.matrix(Y[i,])-PredY;
```

```
VarY = ((matrix(H) %*% matrix(VarS)) %*% t(H)) +R;
InvVarY = solve(VarY);
DetY = det(VarY);

KalmanGain = (VarS*H) %*% InvVarY;
AdjS = PredS+KalmanGain %*% t(PredError);
VarS = VarS*(1-KalmanGain %*% H );
ll[i] = -(ncol/2)*log(2*pi)-0.5*log(DetY)-0.5* PredError %
        %*% InvVarY %*% t(PredError);
}
return( -sum(ll))
}
```

6.1.2 Cox-Ingersoll-Ross

```
### Variablen
# theta, kappa, sigma und lambda aus dem Vorbeispiel ü
  bernehmen
n <- 1000      # Anzahl der Läufe
T <- 10       # Zeit in Jahren
m <- T*12     # Einteilung in Monate
dt <- T/m     # Zeitintervalle

r <- matrix(0,m+1,n) # Matrix zur Speicherung der Short Rate
r[1,] <- r0

### Durchlaufroutine
for(j in 1:n){
  for(i in 2:(m+1)){
    dr <- k*(theta-r[i-1,j])*dt + sigma*sqrt(max(r[i-1,j],0))*
          rnorm(1,0,1)*sqrt(dt)
    r[i,j] <- r[i-1,j] + dr
  }
}
```

```
### Plot
rPlot <- as.data.frame(cbind("Zeit"=seq(0, T, dt),r[,1:100]))
rPlot <- melt(rPlot,id.vars = "Zeit")

ggplot(rPlot,aes(x=Zeit,y=value,colour=variable))+
  geom_line()+
  theme(legend.position="none") +
  scale_y_continuous(name="Zinssatz", labels=percent)
```

6.1.3 Stochastic Factor Approach

```
### Daten
Einlagensatz <- read.csv2("../Daten/OeNB_Einlagensatz.csv") #
  Einlesen Einlagensatz
ZSR <- read.csv2("../Daten/ZSR Reuters.csv") # Einlesen Reuters
  Euriborsätze

FitDataZins <- Daten[c("Datum","Zins_Giro")] # Auswahl eines
  Zinssatzes
FitDataEB <- ZSR[c("Datum","X3M")] # Auswahl des 3M Eurbor

# Abgleich der Zeitpunkte
FitDataZins <- FitDataZins[FitDataZins$Datum %in% FitDataEB$
  Datum,]
FitDataEB <- FitDataEB[FitDataEB$Datum %in% FitDataZins$Datum
  ,]

### Lineare Regrsson
fit1 <- lm(formula = FitDataZins$Zins_GI ~ FitDataEB$X3M, data
  =Daten)

### Deposit Rate berechnen
alpha <- coefficients(fit1)[1]/10
beta <- coefficients(fit1)[2]/10
stdRes <- summary(fit1)$sigma/10
```

```
d <- matrix(0,m+1,n)

for(j in 1:n){
  for(i in 1:(m+1)){
    d[i,j] = alpha + beta*r[i,j] + rnorm(1,0,stdRes)
  }
}

### Plot
dPlot <- as.data.frame(cbind("Zeit"=seq(0, T, dt),d[,1:100]))
dPlot <- melt(dPlot,id.vars = "Zeit")
ggplot(dPlot,aes(x=Zeit,y=value,colour=variable))+
  geom_line()+
  theme(legend.position="none") +
  scale_y_continuous(name="Einlagensatz", labels=percent)
```

6.1.4 Bodensatz

```
### Daten einlesen
S <- read.csv2("Daten/Einlagen_Oenb.csv")
S$Datum <- as.Date(S$Datum,"%d.%m.%Y")
S$Bodensatz <- 0

### Berechnung
S[S$Seg == "Retail",]$Bodensatz <- rollmean(S[S$Seg == "Retail",]$Volumen, k = 12, fill= NA, align = "right") - 2*sd(S[S$Seg == "Retail",]$Volumen)
S[S$Seg == "Wholesale",]$Bodensatz <- rollmean(S[S$Seg == "Wholesale",]$Volumen, k = 12, fill= NA, align = "right") - 2*sd(S[S$Seg == "Wholesale",]$Volumen)

### Plot
S <- melt(S,id.vars = c("Datum","Seg"),variable.name = "Typ",
  value.name = "Volumen")
ggplot(S,aes(x=Datum,y=Volumen, color=Typ))+
```

```
facet_grid(Seg~., scales="free")+
geom_line()+
scale_y_continuous(labels=Format_Mio, name="Bestand")
```

6.1.5 Kapitalabaufprofile

```
### Daten
S <- readcsv2("../Daten/Einlagen_Oenb.csv")

### Konfiguration
nrow <- nrow(S)
ncol <- ncol(S)
KN <- 0.90
Zeitband <- 1:60 # in Monaten
StStellen <- c(1,2,3,4,6,12,24,60) # in Monaten
AuswertungsTag <- nrow
Lag <- 1
MinStd <- 0.00

### Berechnung
LogRendite <- apply(log(S),2,diff,lag=Lag)
MaxChangeRel <- exp(apply(LogRendite,2,max))-1
MinChangeRel <- exp(apply(apply(log(S),2,diff,lag=12),2,min))
  -1)
Bodensatz <- apply(S,2,min)

StichtagBodensatzRel <- sapply(apply(t(cbind(t(Bodensatz/S[
  AuswertungsTag,]),1+MinChangeRel)),2,min),min,1)
AbbauBestand <- S[AuswertungsTag,]*(1-StichtagBodensatzRel)

ZeitbezogenerMittelwert <- Zeitband %*% t(sapply(apply(
  LogRendite,2,mean),min,0)-0.5*apply(LogRendite,2,sd)^2)

StabW <- sqrt(Zeitband) %*% t(sapply(apply(LogRendite,2,sd),
  max,MinStd))
```

```

QuantilNV <- qnorm(1-KN, ZeitbezogenerMittelwert, StabW)

VerblAbbaubestand <- matrix(as.numeric(AbbauBestand),tail(
  Zeitband,1),ncol,byrow=T)-(matrix(as.numeric(S[
  AuswertungsTag,]),tail(Zeitband,1),ncol,byrow=T)-matrix(as.
  numeric(S[AuswertungsTag,]),tail(Zeitband,1),ncol,byrow=T))*
  exp(QuantilNV))
VerblAbbaubestand[VerblAbbaubestand < 0] <-0
Abfluss <- rbind(AbbauBestand, head(VerblAbbaubestand,-1)) -
  VerblAbbaubestand

Vol <- matrix(0,nrow = length(StStellen), ncol = ncol)
for(i in length(StStellen):1){
  if(i == length(StStellen)){
    Vol[i,] <- apply(Abfluss[(StStellen[i-1]+1):StStellen[i]
    ],,2,mean)
  } else if (i == length(StStellen)-1){
    Vol[i,] <- apply(Abfluss[(StStellen[i-1]+1):StStellen[i]
    ],,2,mean) - Vol[length(StStellen),]
  } else if (i == 1) {
    Vol[i,] <- as.matrix(Abfluss[StStellen[i],] - apply(Vol[(i
    +1):length(StStellen),,2,sum))
  } else {
    Vol[i,] <- apply(Abfluss[(StStellen[i-1]+1):StStellen[i]
    ],,2,mean) - apply(Vol[(i+1):length(StStellen),,2,sum)
    )
  }
}
VolAbs <- diag(StStellen) %*% Vol
VolRel <- VolAbs / matrix(t(S[AuswertungsTag,]),nrow = length(
  StStellen), ncol = ncol, byrow = T)

# Ablauf gleitend und kum bestimmen
AbfSum <- matrix(0,nrow=length(Zeitband),ncol=ncol)
for(i in 1:length(StStellen)){

```

```

    AbfSum[1:StStellen[i],] <- AbfSum[1:StStellen[i],] + matrix(
      Vol[i,], nrow=StStellen[i], ncol=ncol, byrow=T)
  }
  KumVolAbs <- -apply(AbfSum,2,cumsum)
  KumVolRel <- KumVolAbs/matrix(t(S[AuswertungsTag,]),nrow =
    length(Zeitband), ncol = ncol, byrow = T)

#### Output
VolAbs
KumVolRel[StStellen,]

```

6.1.6 Elastizitätsansatz

```

### Daten
ZSR <- read.csv2("../Daten/ZSReuters.csv") # EURIBOR Zinsen
Daten <- read.csv2("../Daten/Einlagen_Oenb.csv") #
  Einlagendaten
Daten$Datum <- as.Date(Daten$Datum, "%d.%m.%Y")

### Berechnung
# Optimierungsfunktion für Floorbestimmung
optimiere <- function(x,EZS,ZSR){
  ZSR[ZSR<x] <- as.matrix(x[ZSR<x])
  a <- summary(lm(as.matrix(EZS)~0+ZSR))$r.squared # Optimiere
  if(a == 0) {
    return(0)
  } else {
    return(a)
  }
}

# Elastizitäten bestimmen
table.Elasti <- function(ZSR,Daten,Produkt){
  ZSR$Datum <- ZSR$Datum-1
  ZSREla <- ZSR[ZSR$Datum %in% Daten$Datum,]

```

```
lm.sum<-t(rbind(  
  apply(ZSREla[,-1], 2,  
    function(x.col) summary(lm(as.matrix(Daten[Produkt  
      ])^0+x.col))$r.squared  
  ),  
  apply(ZSREla[,-1], 2,  
    function(x.col) lm(as.matrix(Daten[Produkt])^0+x.  
      col)$coeff)  
  )  
  )  
colnames(lm.sum)<-c("$R^2$", "Elastizität")  
print(xtable(lm.sum, digits=c(0,2,4)),sanitize.text.  
  function=function(x){x})  
}
```

6.1.7 Maes Timmermans Replikationsportfolio

```
### Daten  
ZSR <- read.csv2("../Daten/ZSReuters.csv") # EURIBOR  
EZS <- read.csv2("../Daten/Oenb_Einlagen_Zins.csv") #  
  Einlagenzinssätze  
  
Daten_Long <- melt(Daten,id.vars = "Datum")  
Daten_Long<-cbind(Daten_Long,colsplit(Daten_Long$variable,"\\_  
  ",names = c("Typ","Produkt")))  
Daten_Long$Typ<- as.factor(Daten_Long$Typ)  
Daten_Long$Produkt <- as.factor(Daten_Long$Produkt)  
  
Daten_Long <- Daten_Long[-which(is.na(Daten_Long$value)), ]  
  
### Hilfsfunktionen  
  
# Funktion um Ergebnisse zwischen 0 und 1 mit Summe 1 zu  
  bekommen
```

```
proj <- function(x) exp(x)/sum(exp(x))

# Square Root Abstand
MaesTimmermannSQ <- function(param, EinlagenSatz, ZSR, EZS){
  param[-1] <- proj(param[-1])
  r_p <- as.matrix(ZSR[, VerwendeteZS])%*%param[-1]+param[1]
  m <- r_p-EZS[, EinlagenSatz]
  return(sum(m^2))
}

### Konfiguration
VerwendeteZS <- c(2,4,5,6,7,10,12) #Position der Zinssätze in
  Matrix 0N, 3M, 6M, 12M, 2Y, 5Y, 7Y
StStellenZS <- c(1,3,6,12,24,60,84)
VerwendeteEZS <- c(2,3,4,5) # Welche Einlagensätze sollen
  modelliert werden?
Lag <- 0
Start <- "2005-01-01"
Ende <- "2017-04-01"

EZS$Datum <- EZS$Datum+1

Ergebnis <- list() # Liste zum Ergebnis speichern
for(StartDatum in seq(as.Date(Start), as.Date(Ende), "months")){
  # Beschneide Daten
  StartDatum <- Start
  ZSRKurz <- ZSR[ZSR$Datum>=StartDatum,]
  EZSKurz <- EZS[EZS$Datum %in% ZSRKurz$Datum,]

  ZSRKurz <- ZSR[ZSR$Datum %in% EZSKurz$Datum,]

  Tage <- length(ZSRKurz$Datum)

  # Fixiere überjährige Zinsen für ihre Laufzeit
  for(i in c(2:10)){
    m <- Tage/(i*12)
```

```
if(m > 1){
  for(j in c(1:floor(m))){
    ZSRKurz[((j-1)*(i*12)+1):(j*(i*12)),i+5] <- ZSRKurz[((
      j-1)*(i*12)+1),i+5]
  }
  if(Tage > (j*(i*12))){
    ZSRKurz[(j*(i*12)+1):length(ZSRKurz[,i+5]),i+5] <-
      ZSRKurz[(j*(i*12)+1), i+5]
  }
} else {
  ZSRKurz[1:length(ZSRKurz[,i+5]),i+5] <- ZSRKurz[1, i+5]
}
}

# Optimierungsroutine

EZSKurz$Zins_GIRetail <- na.approx(EZSKurz$Zins_GIRetail)
EZSKurz$Zins_GIWholesale <- na.approx(EZSKurz$Zins_
  GIWholesale)

opSD<-mapply(
  optim, EinlagenSatz=VerwendeteEZS, MoreArgs = list(
    control=list(maxit=10^1),fn=MaesTimmermannSQ,ZSR=
    ZSRKurz, EZS=EZSKurz, par=runif(length(VerwendeteZS)
    +1,0,1/length(VerwendeteZS))))
ergSD <- apply(opSD, 2, function(x) c(x$par[1],proj(x$par
  [-1])))
Ergebnis <- c(Ergebnis,list(list(StartDatum,opSD,ergSD)))
}

# Extrahiere Matrizen
Ergebnismatrizen <- sapply(Ergebnis, "[[", 3, simplify = F)
arr <- array( unlist(Ergebnismatrizen) , c(length(VerwendeteZS
  )+1,length(VerwendeteEZS),length(Ergebnismatrizen)) )
```

```
# Bilde optimales Portfolio als Mittelwert aller vorliegenden
  Portfolien
ergSD <- apply( arr , 1:2 , mean )

EZSKurz <- EZS[EZS$Datum %in% ZSR$Datum,]
ZSR <- ZSR[ZSR$Datum %in% EZS$Datum,]
r_p <- NULL
for(i in c(1:length(VerwendeteEZS))){
  ZSR2<- apply(ZSR[-1],c(1,2),max,-ergSD[1,i])
  r_p <- cbind(r_p, as.matrix(ZSR2[,VerwendeteEZS]) %*% ergSD
    [-1,i] + matrix(ergSD[1,i], nrow=dim(ZSR[,VerwendeteEZS])
    [1], ncol=1,byrow = T))
}

### Plot
colnames(r_p) <- names(EZS)[VerwendeteEZS]

d1 <- melt(data.frame("Datum"=ZSR$Datum, "Modelliert"=r_p[,1],
  "ZS"=EZSKurz$Zins_Basissparbuch, "x"="TaegEPrivB"), id=c("
  Datum","x"))
d2 <- melt(data.frame("Datum"=ZSR$Datum, "Modelliert"=r_p[,2],
  "ZS"=EZSKurz$Zins_GebSparPower, "x"="TaegEComB"), id=c("
  Datum","x"))
d3 <- melt(data.frame("Datum"=ZSR$Datum, "Modelliert"=r_p[,3],
  "ZS"=EZSKurz$Zins_GIRetail, "x"="U2EPrivB"), id=c("Datum"
  ,"x"))
d4 <- melt(data.frame("Datum"=ZSR$Datum, "Modelliert"=r_p[,4],
  "ZS"=EZSKurz$Zins_GIWholesale, "x"="U2EComB"), id=c("Datum
  ","x"))

ggplot(rbind(d1,d2,d3,d4), aes(x=Datum, y=value, colour=
  variable)) +
  geom_line()+
  scale_y_continuous(labels=percent) +
  ggtitle("Modellierter Zinssatz") +
```

```
facet_grid(x ~ .)
```

6.2 Tabellen

	1W	1M	2M	3M	4M	5M	6M	7M	8M	9M	10M	11M	12M
1W	1	0,998	0,995	0,990	0,986	0,983	0,982	0,977	0,974	0,975	0,969	0,966	0,969
1M	0,998	1	0,999	0,996	0,993	0,990	0,989	0,984	0,982	0,983	0,977	0,975	0,977
2M	0,995	0,999	1	0,999	0,996	0,994	0,994	0,990	0,988	0,989	0,983	0,981	0,984
3M	0,990	0,996	0,999	1	0,999	0,997	0,998	0,994	0,993	0,994	0,989	0,987	0,990
4M	0,986	0,993	0,996	0,999	1	1,000	0,998	0,998	0,997	0,996	0,994	0,993	0,993
5M	0,983	0,990	0,994	0,997	1,000	1	0,999	0,999	0,998	0,997	0,997	0,995	0,995
6M	0,982	0,989	0,994	0,998	0,998	0,999	1	0,998	0,998	0,999	0,996	0,994	0,997
7M	0,977	0,984	0,990	0,994	0,998	0,999	0,998	1	1,000	0,998	0,999	0,998	0,997
8M	0,974	0,982	0,988	0,993	0,997	0,998	0,998	1,000	1	0,998	1,000	0,999	0,997
9M	0,975	0,983	0,989	0,994	0,996	0,997	0,999	0,998	0,998	1	0,998	0,997	0,999
10M	0,969	0,977	0,983	0,989	0,994	0,997	0,996	0,999	1,000	0,998	1	1,000	0,998
11M	0,966	0,975	0,981	0,987	0,993	0,995	0,994	0,998	0,999	0,997	1,000	1	0,997
12M	0,969	0,977	0,984	0,990	0,993	0,995	0,997	0,997	0,997	0,999	0,998	0,997	1

Tabelle 6.1: Korrelationen der EURIBOR Zinssätze

6.3 Abkürzungsverzeichnis

BCBS	Basel Committee on Banking Supervision
BIZ	Bank für Internationale Zusammenarbeit
BWG	Bankwesengesetz
CEBS	Committee of European Banking Supervisors
CIR	Cox-Ingersoll-Ross Modell
CMB	Constant Maturity Bond
CRD	Capital Requirements Directive
CRR	Capital Requirements Regulation
EBA	European Banking Authority
EURIBOR	Euro InterBank Offered Rate

EZB	Europäische Zentralbank
ICAAP	Internal Capital Adequacy Assessment Process
ICE	Intercontinental Exchange
KMU	Kleinere und mittlere Unternehmen
LCR	Liquidity Coverage Ratio
MBS	Mortgage Backed Securities
NMD	Non-Maturity Deposits
NSFR	Net Stable Funding Ratio
OAS	Option Adjusted Spread
OeNB	Österreichische Nationalbank
SFA	Stochastic Factor Approach
SREP	Supervisory Review and Evaluation
VaR	Value at Risk

Abbildungsverzeichnis

1.1	Einteilung des Kundengeschäfts eines Kreditinstituts [23, Grafik 15]	2
1.2	Zinskurve für börsennotierte deutsche Bundeswertpapiere	5
3.1	Modelle zur Abbildung von Kundengeschäften [23, Grafik 16]	25
4.1	Beispielhafte Darstellung des Bodensatzes	32
4.2	Cashflowstruktur bei Elastizitätsansatz [23, Grafik 20]	39
4.3	Cashflowstruktur nach Rollierung [23, Grafik 21]	40
4.4	Elastizitätsdiagramm [8]	41
4.5	Schematische Darstellung des OAS-Modells [20]	44
4.6	Schematische Darstellung des Cashflow-Profiles eines Constant Maturity Bond [23, Grafik 30]	45
5.1	Entwicklung der EURIBOR und ICE Sätze	51
5.2	Pfade der Simulation des CIR Modells	52
5.3	Pfade der simulierten Depositrate	53
5.4	Einlagenstände mit Bodensätzen	54

Tabellenverzeichnis

3.1	BCSP Caps	29
6.1	Korrelationen der EURIBOR Zinssätze	69



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Literaturverzeichnis

- [1] European Banking Authority, *Guideline on the management of interest rate risk*, Tech. report, 2015.
- [2] Andreas Blöchlinger, *Identifying, valuing and hedging of embedded options in non-maturity deposits*, *Journal of Banking & Finance* **50** (2015), 34–51.
- [3] David J. Bolder, *Affine term-structure models: Theory and implementation*, Bank of Canada Working Paper 2001-15 (2001).
- [4] Damiano Brigo and Fabio Mercurio, *Interest rate models - theory and practice: With smile, inflation and credit*, 2. ed., corr. 3. print. Springer, Berlin., 2007.
- [5] Bundesgesetz über das Bankwesen (Bankwesengesetz – BWG), *BGBL. Nr. 532/1993 idF BGBL. Nr. 639/1993*.
- [6] H.E. Büschgen, *Bankbetriebslehre: Bankgeschäfte und bankmanagement*, Gabler Verlag, 2013.
- [7] Antonio Castagna and Francesco Manenti, *Sight deposit and non-maturing liability modelling*, *Argo* **1 Winter 2** (2014), 7–18.
- [8] Wikimedia Commons, *Zeitlicher versatz idealisierter zeitreihen auf basis synthetischer sinus-wellen — wikimedia commons, the free media repository*, 2020, [Online; accessed 22-November-2020].
- [9] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross, *A theory of the term structure of interest rates*, *Econometrica* **53** (1985), no. 2, 385–407.
- [10] David B. Dahl, *xtable: Export tables to latex or html*, 2016, R package version 1.8-2.
- [11] Jin-Chuan Duan and Jean-Guy Simonato, *Estimating and testing exponential-affine term structure models by kalman filter*, *Quantitative Finance* **13** (1999), 111–135.
- [12] Ludwig Fahrmeir, Thomas Kneib, and Stefan Lang, *Regression*, Statistik und ihre Anwendungen.

- [13] European Banking Federation, *Interest rate risk in the banking book*, Tech. Report July, 2014.
- [14] Oberster Gerichtshof, *Geschäftszahl 5Ob138/09v*, 2009.
- [15] John C. Hull, *Options, futures, and other derivatives*, Pearson Education, 2010.
- [16] Rudolf E. Kalman, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering **82** (1960), 35–45.
- [17] Andreas Kördel, *Modeling deposit rates of non-maturity deposits*, 2017, KTH Royal Institute of Technology, Degree Project Thesis.
- [18] Alexander Levin and Andrew Davidson, *The concept of credit OAS in valuation of MBS*, The Journal of Portfolio Management **34** (2008), no. 3, 41–55.
- [19] Konstantijn Maes and Thierry Timmermans, *Measuring the interest rate risk of Belgian regulated savings deposits*, Financial Stability Review **3** (2005), no. 1, 137–151.
- [20] Leonard Matz and Peter Neu, *Liquidity risk measurement and management a practitioner’s guide to global best practices*, **408** (2006).
- [21] Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey, and Paul Embrechts, *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*, Princeton university press, 2015.
- [22] Oesterreichische Nationalbank, *Ausweisrichtlinie zur EZB-Zinssatzstatistik*, (2011).
- [23] Oesterreichische Nationalbank and Finanzmarktaufsicht, *Leitfaden zum Management des Zinsrisikos im Bankbuch*, 2008.
- [24] Bank of Japan, *Survey on core deposit modeling in Japan: Toward enhancing asset liability management*, Report and Research Papers (2014).
- [25] Basel Committee on Banking Supervision, *International convergence of capital measurement and capital standards*, (1988).
- [26] ———, *International convergence of capital measurement and capital standards: a revised framework*, (2004).
- [27] ———, *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and*

banking systems, (2010).

- [28] ———, *Interest rate risk in the banking book*, (2015).
- [29] R Core Team, *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2015.
- [30] Bernd Rolfes, *Die Steuerung von Zinsänderungsrisiken in Kreditinstituten*, Schriftenreihe des Institut für Kreditwesen Münster, Westfalen, Knapp, 1985.
- [31] Henner Schierenbeck, *Ertragsorientiertes Bankmanagement Band 1: Grundlagen, Marktzinsmethode und Rentabilitäts-Controlling*, (2003).
- [32] Gennadij Seel, *Grundlagen zum Liquiditätsrisiko*, in: Das Liquiditätsrisiko der Banken in der Finanzkrise, Springer, 2013, pp. 5–32.
- [33] Carolin Stier, *Risikomanagement und wertorientierte Unternehmensführung: Effizienz-und Monopoleffekte*, Springer-Verlag, 2017.
- [34] Joshua Ulrich, *TTR: technical trading rules*, 2015, R package version 0.23-0.
- [35] Oldrich Vasicek, *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics **5** (1977), no. 2, 177–188.
- [36] Hadley Wickham, *Reshaping data with the reshape package*, Journal of Statistical Software **21** (2007), no. 12, 1–20.
- [37] ———, *ggplot2: Elegant graphics for data analysis*, Springer-Verlag New York, 2009.
- [38] ———, *The split-apply-combine strategy for data analysis*, Journal of Statistical Software **40** (2011), no. 1, 1–29.
- [39] ———, *scales: Scale functions for visualization*, 2015, R package version 0.3.0.
- [40] Hadley Wickham and Romain Francois, *dplyr: A grammar of data manipulation*, 2015, R package version 0.4.3.