Diplomarbeit

Untersuchung von Schaukelbewegungen und Bestimmung von deren Ursachen bei Mikrolautsprechern mittels Starrkörpermodellierung

—

Rocking investigation and root cause identification of microspeakers through lumped parameter modelling

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs, eingereicht an der TU Wien, Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften, von

Matthias Alois Pössl
Matr. Nr.: 01226799

unter der Leitung von

Ass. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Florian Toth
und
Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Kaltenbacher

Institut für Mechanik und Mechatronik
Forschungsbereich Technische Akustik
Technische Universität Wien,
Getreidemarkt 9/E325, A-1060 Wien

Wien, Februar 2020

Ich nehme zur Kenntnis, dass ich zur Drucklegung dieser Arbeit nur mit Bewilligung der Prüfungskommission berechtigt bin.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen, sind als solche kenntlich gemacht. Das Thema dieser Arbeit wurde von mir bisher weder im In- noch Ausland einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Arbeit stimmt mit der von den Begutachterinnen/Begutachtern beurteilten Arbeit überein.

Ort, Datum *Unterschrift*

Sperrvermerk

Die vorgelegte Diplomarbeit basiert auf internen, vertraulichen Daten und Informationen des Unternehmens Sound Solutions Austria GmbH. In diese Arbeit dürfen Dritte, mit Ausnahme der Gutachter und befugten Mitgliedern des Prüfungsausschusses, ohne ausdrückliche Zustimmung des Unternehmens und des Verfassers keine Einsicht nehmen. Eine Veröffentlichung der Diplomarbeit ohne ausdrückliche Genehmigung ist für zwei Jahre ab dem Datum der Diplomprüfung, dem 24.02.2021 nicht erlaubt.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Ursachen von Schaukelbewegungen bei elektrodynamischen Lautsprechern untersucht. Zu diesem Zweck wird das reale System reduziert. Zunächst wird die Membran als eine über den Umfang variable Federbettung modelliert und die Auswirkungen von unausgeglichenen Steifigkeitsverteilungen studiert. In einem weiteren Schritt wird ein lineares Modell für die mechanische und die elektrische Domäne eines Lautsprechers hergeleitet. Das „lumped parameter"-Modell ist ein Mehrfreiheitsgradsystem, das heißt, es werden neben dem Hub auch mögliche Schiefstellungen berücksichtigt. Damit können abhängig von den Modellparametern Aussagen über das Kleinsignalverhalten eines Lautsprechers in Anwesenheit gewisser Aufbauungenauigkeiten wie Massen-, Steifigkeits- und Anregungsasymmetrie getroffen werden.

Mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate werden Lautsprecher identifiziert, indem der Modellausgang an reale Messdaten angenähert wird. Zur Identifikation werden Spannung, Strom und Auslenkung der Membranplatte bei aktiver Anregung gemessen, zusätzlich wird eine weitere Messbedingung verwendet und der Lautsprecher (durch Druckanregung) passiv betrieben. Die Überprüfung von Modell und Identifikationsalgorithmus erfolgt mit Messdaten von Lautsprechern, welche durch das Anbringen von Massen und externen Permanentmagneten verstimmt wurden.

Schließlich wird ein Blick auf die nichtlineare Dynamik geworfen. Damit das Modell auch für höhere Hübe verwendet werden kann, wird es entsprechend erweitert. Dazu werden die nichtlinearen Abhängigkeiten der Steifigkeiten und des magnetischen Flusses vom Hub durch Terme höherer Ordnung berücksichtigt. Periodische Lösungen der erzwungenen Schwingung werden auf harmonische Verzerrungen untersucht, mit Messdaten verglichen und auf Stabilität überprüft. Im Rahmen der nichtlinearen Dynamik wird versucht, einen Erklärungsansatz für das Auftreten von spontanem Schaukeln bei großen Hüben in einem engen Frequenzbereich zu liefern. Ohne direkte Erregung durch Asymmetrien tritt bei bestimmten Frequenzen das subharmonische Schaukeln mit der doppelten Periodendauer der Anregung auf. Dieses Phänomen wurde bei den untersuchten Teilen beobachtet und kann durch den Mechanismus der Auto-Parametererregung erklärt werden.

Abstract

The aim of this thesis is the investigation of the main root causes of rocking in electrodynamic transducers. Besides modelling the membrane in form of a circumferencal stiffness distribution and studying the effects of irregular distributions, the whole speaker is modelled by a multidegree of freedom, lumped parameter model.

With this model one is able to predict the behaviour of speakers at low excursions. Furthermore the impacts of potential eccentricities of mass, stiffness and excitation may be simulated.

In a next step the system parameters of actual speakers are predicted by fitting the model output to measured data in the least squares sense. The identification algorithm is using the signals of input voltage, current and dome excursion at multiple points, measured in an active configuration. Additionaly a second measurement condition is used, where the speaker is driven by pressure in a passive configuration. Both, model and identification procedure, are verified with measurement data of detuned samples where the actual root causes of rocking are known to a certain degree. Detuning of samples is done by external magnets and application of small eccentric masses on the dome.

In the last section the large signal behaviour and accompanying nonlinear effects are studied. For this purpose the linear model is adapted and the nonlinear excursion-dependencies of stiffness and force parameters are taken into acount by adding higher order terms. Simulated periodic solutions are calculated and compared to measurement data. The presence of harmonic distortions is examined and the periodic solutions are checked for stability. Finally an attempt is made to provide an explanation for spontaneous rocking which will only occur at high excursions and in a narrow frequency range. Without direct excitation by eccentricities, subharmonic rocking with twice the period of excitation occurs at certain frequencies. The phenomenon was observed in the studied speakers and may be explained by the mechanism of (auto)-parametric excitation.

1. Einleitung

Elektroakustische Wandler sind in der Lage elektrische Energie in Schallenergie umzuformen. Zur Schallerzeugung ist ein schwingungsfähiges mechanisches System erforderlich. Nach dem Prinzip, wie die Kräfte zur Anregung der Schwingung erzeugt werden, also nach Art der mechanisch-elektrischen Umwandlung, können elektroakustische Wandler unterschieden werden. Beim elektrodynamischen Lautsprecher befindet sich ein beweglicher Leiter in einem feststehenden permanenten Magnetfeld. In der Praxis ist der bewegliche Leiter meistens zu einer Schwingspule gewickelt. Beim Anlegen einer Spannung wirkt eine dem Strom proportionale Kraft auf die Spule. Die Spule bildet mit der Membranplatte und der Membran das schwingungsfähige System, von welchem möglichst viel der mechanischen Energie in Form von Schall abgestrahlt werden soll ([9] S. 91f.). Abbildung 1.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines elektrodynamischen Lautsprechers.

Das schwingende System führt im Idealfall eine rein translatorische Bewegung aus. Bei realen Bauteilen kommt es allerdings auch zu einer überlagerten Drehbewegung. Das Verkippen wird auch als Schaukeln, Taumeln oder Rocking bezeichnet. Dieser Effekt bringt eine Reihe von Nachteilen mit sich und ist daher unerwünscht. Zum einen

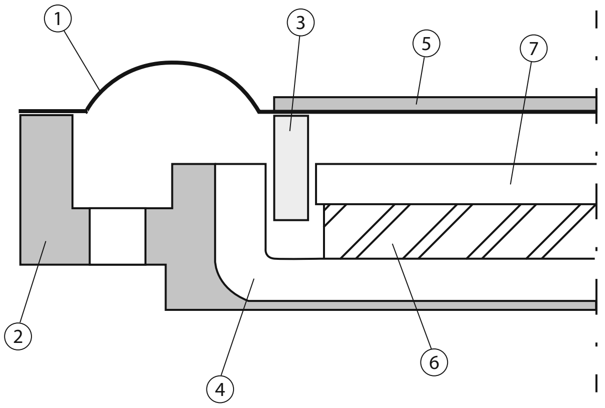


Abbildung 1.1.: Aufbau eines elektrodynamischen Wandlers: 1) Membran 2) Rahmen 3) Spule 4) Weicheisen 5) Membranplatte 6) Magnet 7) Weicheisen. Angelehnt an [2] S. 34.

wird ein Teil der elektrischen Energie für diese Schaukelbewegung aufgewandt, aber effektiv kein zusätzlicher Schalldruck erzeugt. Außerdem kann bei großen Auslenkungen, wegen der zusätzlichen Schrägstellung, der Hubraum nicht voll ausgenutzt werden und im schlimmsten Fall die Spule am Magnetsystem anstoßen oder anstreifen. Im Allgemeinen sind Ungenauigkeiten im Aufbau bzw. im Prozess die Ursache für diese unerwünschte Bewegung. So kann eine ungleichmäßige Masseverteilung (durch z.B. Kleberreste o. ä.), eine ungleichmäßige Steifigkeitsverteilung (versetzt aufgeklebte oder ungleichmäßig geformte Membran) oder eine außermittige Anregung (asymmetrisches Magnetsystem, unausgewogene Spulenwindungen) zur Anregung einer Schaukelmode führen ([15] S. 3f.).

Es liegt nahe die Ungleichmäßigkeiten zu beseitigen und das Rocking durch einen präzisen symmetrischen Aufbau zu reduzieren. Diesem Vorgehen sind durch die einhergehenden Kosten Grenzen gesetzt – insbesondere bei Produktion mit hohen Stückzahlen ([4] S. 103).

Bei großen Lautsprechern kann eine zusätzliche Aufhängung, welche das System zentriert, Abhilfe schaffen ([4] S. 92-103). Eine zweite Aufhängung ist auch bei Mikrolautsprechern möglich, allerdings steigt die Wirkung mit der Distanz der Aufhängungen – gerade dieser Abstand ist durch die geringe Bauteilhöhe begrenzt. Ob nun eine zweite Aufhängung zum Einsatz kommt oder nicht, es ist jedenfalls ein symmetrischer Aufbau erwünscht. Zunächst kann bei einem Lautsprecher, bei dem Rocking auftritt, keine Aussage über dessen Ursache getroffen werden. Um einen gezielten Eingriff in den Produktionsprozess vornehmen zu können, ist es aber erforderlich die Fehlerquelle zu kennen.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird zunächst ein einfaches, möglichst universelles, lineares Modell vorgestellt. Dieses ist in der Lage die lineare Dynamik eines schaukelnden Lautsprechers in konsistenter Weise abzubilden. In weiterer Folge ist es möglich reale Lautsprecher anhand von Messdaten mithilfe des linearen Models zu identifizieren. Die identifizierten Modelparameter erlauben es, das Taumeln auf einzelne Ursachen (Exzentrizitäten von Masse, Steifigkeit und Anregung) zurückzuführen.

Weiters werden die Grenzen der Gültigkeit des linearen Systems untersucht. Zu diesem Zweck wird das lineare Model durch hubabhängige Parameter erweitert. Als Basis für die nichtlinearen Zusammenhänge dienen Ergebnisse aus Finite Elemente Analysen. Schließlich werden die Auswirkungen der nichtlinearen Effekte auf die Dynamik des Modells untersucht.

2. Lineares Modell

Als Ausgangspunkt dient zunächst ein einfaches eindimensionales Modell. Solche Modelle sind in ähnlicher Form sehr häufig in der Literatur zu finden. Hier wird der Lautsprecher als vereinfachter elektrischer Schaltkreis dargestellt (Abbildung 2.1). Die mechanischen Komponenten können mit entsprechenden Analogien (FI-Analogie) durch elektrische Komponenten ersetzt werden: e_g (Quellspannung), R_g (Widerstand der Quelle), R_E (ohmscher Widerstand des Lautsprechers), C_{MES} (Kapazität aufgrund der schwingenden Gesamtmasse des Systems), L_{CES} (Induktivität aufgrund der mechanischen Nachgiebigkeit bzw. Steifigkeit des Systems), R_{ES} (Widerstand für die mechanische Dämpfung). Bei niedrigen Frequenzen kann die akustische Impedanz vernachlässigt werden ([18] S. 244), ebenso – bei niedrigen Frequenzen – die Induktivität L_E der Spule. Die verschobene Luftmasse wird der Gesamtmasse zugeschlagen.

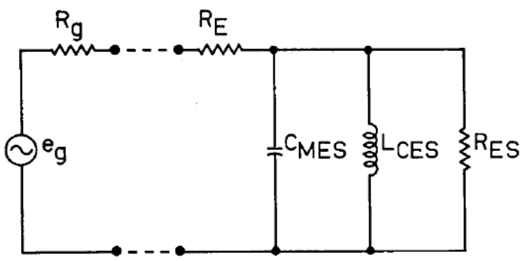


Abbildung 2.1.: Vereinfachter äquivalenter elektrischer Schaltkreis [21].

Das ist die einfachste Form des Ersatzschaltkreises von Lautsprechern (Direct-Radiator-Loudspeaker). Das Modell kann mithilfe der Zusammenhänge $C_{MES} = M_{MS}/Bl^2$, $L_{CES} = C_{MS}Bl^2$ und $R_{ES} = Bl^2/R_{MS}$ durch wenige Parameter vollkommen beschrieben werden: Dem Kraftfaktor Bl, dem Widerstand R_E, der Gesamtmasse M_{MS}, der mechanischen Nachgiebigkeit C_{MS} und der mechanischen Dämpfung R_{MS}. Diese Parameter wurden erstmals von Thiele und Small ([21] S. 275ff.) beschrieben und werden daher Thiele-Small-Parameter (TSP) genannt.

Zugrunde liegende Differentialgleichungen

Im folgenden Abschnitt werden die in der Mechanik üblichen Abkürzungen verwendet: Masse m (M_{MS}), Steifigkeit k ($1/C_{MES}$), Dämpfungskoeffizient c (R_{MS}). Das mechanische System entspricht einem einfachen Feder-Masse-Dämpfer Schwinger, der durch die Lorentzkraft f_L erregt wird. Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter in einem stationären Magnetfeld ist proportional zum Strom I, der Länge des Leiters l im Magnetfeld und der magnetischen Flussdichte B und ist durch $f_L = BlI$ definiert. Üblicherweise wird das Produkt aus Flussdichte und Spulenlänge als ein Parameter Bl betrachtet ([21] S. 275) und wird in weiterer Folge Kraftfaktor genannt. Die beschreibenden Differentialgleichungen werden durch die mechanische Impulsbilanz

$$BlI = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx \tag{2.1}$$

und die elektrische Netzwerkgleichung

$$U = R_E I + Bl\dot{x} \tag{2.2}$$

bestimmt. Auf der elektrischen Seite sind die am Widerstand R_E abfallende Spannung und die durch die im Magnetfeld bewegte Spule induzierte Spannung $Bl\dot{x}$ zu berücksichtigen. Durch die Vernachlässigung der Induktivität kann aus diesen Gleichungen der Strom eliminiert und die Übertragungsfunktion von Spannung zu Auslenkung durch Laplace-Transformation mit den Anfangsbedingungen $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ direkt angeschrieben werden

$$G_{xU}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{Bl}{R_E} \frac{1}{s^2\, m + s\left(c + \frac{Bl^2}{R_E}\right) + k}\,. \tag{2.3}$$

Unter Verwendung der Laplace-Variable s sind $X(s)$ bzw. $U(s)$ die Laplace-Transformierten von Auslenkung $x(t)$ und Spannung $U(t)$. Mit der ungedämpften Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, dem Dämpfungskoeffizienten $c_t = c + Bl^2/R_E$ und dem Dämpfungsgrad $\vartheta_t = c_t/2m\omega_0$ sind die Polstellen von $G_{xU}(s)$ gegeben

$$p_{1,2} = -\vartheta_t \pm i\sqrt{1 - \vartheta_t^2}\,. \tag{2.4}$$

Da ein schwach gedämpftes System ($\vartheta_t < 1$) vorliegt, sind die Pole konjugiert komplex.

2.1. Systemmatrizen

Ähnliche Überlegungen lassen sich auf ein System mit mehreren Freiheitsgraden übertragen. Im folgenden Abschnitt werden die entsprechenden Systemmatrizen für sechs Freiheitsgrade hergeleitet.

2.1.1. Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}$ stellt die Verschiebungen und Verdrehungen mit den Rückstellkräften und -momenten in Beziehung. Darin sind alle Speicher für potentielle Energie, aufgrund von elastischen Elementen enthalten. Der Einfluss der Schwerkraft ist gegenüber den anderen Kräften vernachlässigbar klein und wird hier nicht berücksichtigt.

Bright stellt in [2] S. 198 ff. ein primitives theoretisches Modell für die Aufhängung eines Lautsprechers vor (Abbildung 2.2). Gerade wegen der Einfachheit kann eine der Rockingursachen anschaulich erklärt werden. Der Lagevektor und die Steifigkeitsmatrix dieses Systems sind durch

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -(L_1k_1 - L_2k_2) \\ -(L_1k_1 - L_2k_2) & k_1L_1^2 + k_2L_2^2) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

gegeben [2, 23]. Im Allgemeinen führen die Koppelterme bei zentrischer Auslenkung in x-Richtung zu einer zusätzlichen Verdrehung. Erst bei einem Gleichgewicht ($L_1k_1 - L_2k_2 = 0$) wird keine Drehbewegung induziert. Diese Überlegungen werden in ([2] S. 198 ff.) fortgeführt und für axialsymmetrische Lautsprecher auf ein dreidimensionales System erweitert. Analog zum 2D-Beispiel wird im 3D-Fall eine entlang des Umfanges variable Verteilung der Steifigkeit angenommen.

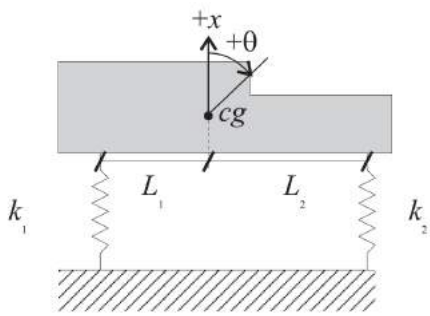


Abbildung 2.2.: 2D Modell mit einem Translations- und einem Rotationsfreiheitsgrad ([2] S. 198).

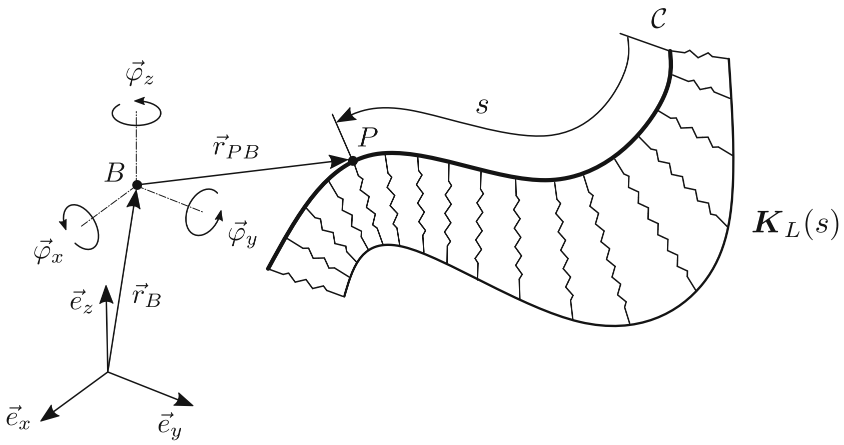


Abbildung 2.3.: Anbindung des starren Systems entlang der Kurve $\mathcal{C}$ mit lokaler Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_L$.

Starres System auf Federbettung

Im Fokus dieser Arbeit stehen in erster Linie Mikrolautsprecher für die Anwendung in Smartphones, diese sind aus Platzgründen üblicherweise rechteckförmig ausgeführt. Daher werden nachfolgend ähnliche Überlegungen für zunächst beliebige Geometrien angestellt.

Die Lage eines beliebigen Punkts P kann mithilfe des Bezugspunkts B durch den Ortsvektor

$$\vec{r}_P = \vec{r}_B + \vec{r}_{PB} \tag{2.6}$$

beschrieben werden. Die Berandung des starren Systems kann als Kurve $\mathcal{C}$ aufgefasst werden (Abbildung 2.3), die Position jedes Punkts P ist durch den Parameter s der Kurve definiert. Die wirksame Steifigkeit der Membran an diesem Punkt wird durch die lokale Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_L$, welche hier nur Diagonaleinträge (elastische Bettung in drei Richtungen) besitzt, beschrieben. Das schwingende System selbst ist bis auf die elastische Bettung starr. Die Starrkörperbeziehungen erlauben die Beschreibung aller Punkte P durch sechs Freiheitsgrade: Die Verschiebungskomponenten $\vec{x} = (x, y, z)^T$ des Bezugspunkts B und die Drehwinkel $\vec{\varphi} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)^T$ des Körpers um B. Die momentane Lage ist gegeben durch

$$\vec{r}_B = \vec{r}_B{}^0 + \vec{x} \qquad\qquad \vec{r}_{PB} = R\,\vec{r}_{PB}{}^0 \tag{2.7}$$

mit ${\vec{r}_B}^0$ dem Lagevektor des Bezugspunkts B und ${\vec{r}_{PB}}^0$ dem Vektor von B nach P in der Ausgangslage. Die aus Elementardrehungen um x, y, z aufgebaute Drehmatrix $\boldsymbol{R}$[1] entspricht in linearisierter Form dem Kreuzprodukt $\vec{\varphi} \times {\vec{r}_{PB}}^0$ in Matrixschreibweise plus der Einheitsmatrix. Schließlich kann der Lagevektor und der Verschiebungsvektor geschrieben als

$$\vec{r}_P = {\vec{r}_B}^0 + \vec{x} + {\vec{r}_{PB}}^0 + \vec{\varphi} \times {\vec{r}_{PB}}^0 \,, \tag{2.9}$$

$$\vec{u}_P = \vec{x} + \vec{\varphi} \times {\vec{r}_{PB}}^0 \,. \tag{2.10}$$

Die Rückstellkraft aufgrund der Bettung gegen die Verschiebung und dessen Moment bezüglich B kann lokal angeschrieben werden

$$\vec{f}(s) = \boldsymbol{K}_L(s)\, \vec{u}_P = \boldsymbol{K}_L(s) \left(\vec{x} + \vec{\varphi} \times \vec{\xi}(s) \right) \,, \tag{2.11}$$

$$\vec{m}_B(s) = \vec{\xi}(s) \times \vec{f}(s) = \vec{\xi}(s) \times \left[\boldsymbol{K}_L(s) \left(\vec{x} + \vec{\varphi} \times \vec{\xi}(s) \right) \right] \,. \tag{2.12}$$

Dabei wurde ${\vec{r}_{PB}}^0$ durch die Parameterdarstellung $\vec{\xi}(s)$ der Kurve ausgedrückt. Der Parameter s entspricht der Bogenlänge entlang des Umfangs. Rückführen der Kurvenintegrale auf normale Integrale[2] liefert die globalen Beziehungen

$$\vec{F} = \int_a^b \vec{f}(s)\; ds \,, \qquad \vec{M}_B = \int_a^b \vec{m}_B(s)\; ds \,. \tag{2.14}$$

Beispielhaft wurde die Integration an einem geraden Kurvenstück durchgeführt (Anhang A.1). Unter Verwendung des verallgemeinerten Lagevektors $\boldsymbol{x} = [x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]^T$ ergibt sich die Steifigkeitsmatrix

---

[1] Rotationsmatrix mit den Abkürzungen c_{φ_i}: $\cos(\varphi_i)$ und s_{φ_i}: $\sin(\varphi_i)$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} c_{\varphi_x} c_{\varphi_y} & c_{\varphi_x} s_{\varphi_y} s_{\varphi_z} - s_{\varphi_x} c_{\varphi_z} & c_{\varphi_x} s_{\varphi_y} c_{\varphi_z} + s_{\varphi_x} s_{\varphi_z} \\ s_{\varphi_x} c_{\varphi_y} & s_{\varphi_x} s_{\varphi_y} s_{\varphi_z} + c_{\varphi_x} c_{\varphi_z} & s_{\varphi_x} s_{\varphi_y} c_{\varphi_z} - c_{\varphi_x} s_{\varphi_z} \\ -s_{\varphi_y} & c_{\varphi_y} s_{\varphi_z} & c_{\varphi_y} c_{\varphi_z} \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{R}^{lin} = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_x & \varphi_y \\ \varphi_x & 1 & -\varphi_z \\ -\varphi_y & \varphi_z & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

[2]

$$\int_c \vec{v}\, ds = \int_a^b \vec{v}(\vec{x}(t))\, \|\vec{x}'(t)\|\, dt \qquad \|\vec{x}'(s)\| = 1 \quad \text{für} \quad s \in [a, b] \tag{2.13}$$

$$
\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix}
k^x & 0 & 0 & 0 & k^x s_z^x & -k^x s_y^x \\
0 & k^y & 0 & -k^y s_z^y & 0 & k^y s_x^y \\
0 & 0 & k^z & k^z s_y^z & -k^z s_x^z & 0 \\
0 & -k^y s_z^y & k^z s_y^z & \Theta_{xx}^z + \Theta_{xx}^y & -\Theta_{xy}^z & -\Theta_{xz}^y \\
k^x s_z^x & 0 & -k^z s_x^z & -\Theta_{yx}^z & \Theta_{yy}^x + \Theta_{yy}^z & -\Theta_{yz}^x \\
-k^x s_y^x & k^y s_x^y & 0 & -\Theta_{zx}^y & -\Theta_{zy}^x & \Theta_{zz}^y + \Theta_{zz}^x
\end{bmatrix} . \qquad (2.15)
$$

Diese Matrix ist unabhängig von der genauen Geometrie immer von derselben Bauart. Dabei ist k^x die wirksame Steifigkeit in x-Richtung. Wird die Steifigkeitsverteilung als Fläche interpretiert, ist s_z^x der z-Abstand des Schwerpunkts der x-Steifigkeit. Θ_{xx}^z ist dann ein Flächenmoment 2. Grades und stellt den Widerstand der z-Steifigkeitsverteilung gegen eine x-Drehung um B dar. Die Flächenmomente 2. Grades abseits der Diagonale, (z.B.: Θ_{xy}^z) sind Kopplungen zwischen den Rotationen bei entsprechend ungleichmäßiger Verteilung der Bettung.

Steifigkeitsverteilung

Der Steifigkeitsbeitrag der Membran ist entlang des Umfangs selbst bei perfekt symmetrischem Aufbau nicht konstant. Im Bereich der Ecken ist die Membran in zwei Richtungen gekrümmt. Um die Bewegung in z-Richtung ohne ein Verspannen der Membran zu ermöglichen sind Sicken, Vertiefungen in radialer Richtung, erforderlich. Es ist also in den Eckbereichen mit einem höheren Steifigkeitsbeitrag zu rechnen. Beispielhaft wurde eine Verteilung an einem konkreten Design durch eine Finite-Elemente-Analyse berechnet (Abbildung 2.4). Das schwingende System besteht vereinfacht aus der Spule

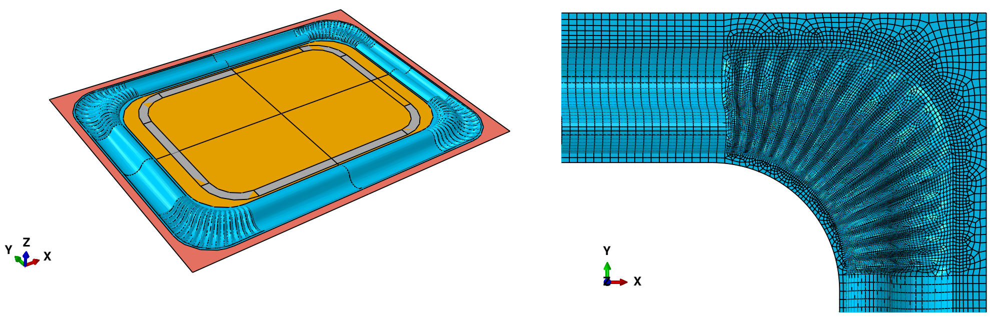


Abbildung 2.4.: Membrandesign mit Sicken für die FE Analyse.

und der Membranplatte. An der Unterseite der Platte ist die Membran umlaufend angeklebt. Spule und Platte werden für die Simulation durch eine Rigid-Spinne, welche die Klebestelle der Membran direkt mit dem Referenzpunkt verbindet, ersetzt.

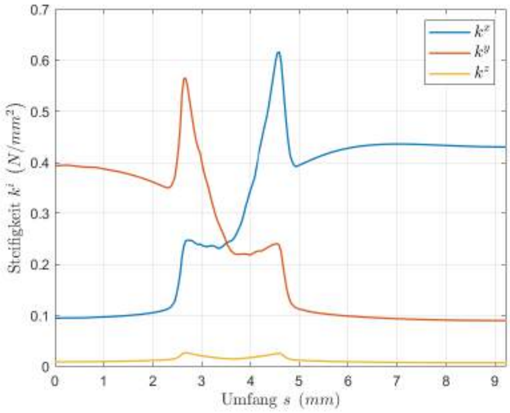
Die Membran selbst besteht aus einem Dreischichtverbund mit Folien als Deckschichten und einem weicheren Klebermaterial als Kern. Der Schichtaufbau wurde durch Composite-Shell Elemente modelliert. Analysen, bei welchen die vergleichsweise dickere und schubweichere Kleberschicht durch 3D Kontinuums Elemente modelliert wurde, lieferten, in diesem Fall, äquivalente Ergebnisse.

Durch kleine Auslenkungen des Referenzpunkts und den daraus resultierenden Knotenkräften wird die lineare Steifigkeitsmatrix für die Starrkörperbewegung bestimmt. Zur Abschätzung der lokalen Steifigkeiten wird die Membran entlang der Verbindungslinie zum starren System freigeschnitten. An jedem dieser freien Knoten werden nacheinander kleine Verschiebungen in allen drei Raumrichtungen aufgebracht und die korrespondierende Knotenkräfte ausgelesen. Damit die Verteilungen mit den globalen Steifigkeiten bei Starrkörperverschiebung am Bezugspunkt übereinstimmen, müssen sie entsprechend normiert werden. Die Ergebnisse der Analyse sind in Abbildung 2.5 dargestellt. Es sind starke Unterschiede der x- und y-Verteilungen entlang der langen und kurzen Seiten zu sehen. Dieser Unterschied ist durch die hohe Schubsteifigkeit der Membran in tangentialer Richtung zu erklären. Eine Koordinatentransformation auf lokale Koordinaten in Tangential- und Normalrichtung zeigt das deutlich.

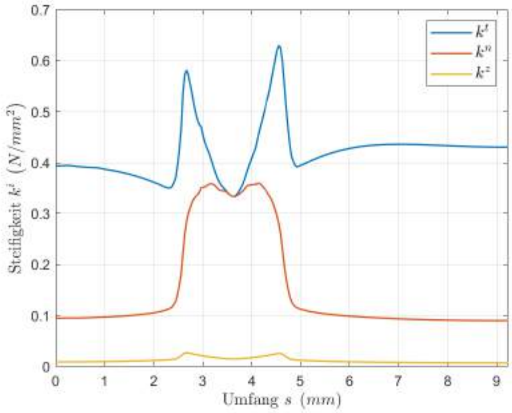
Die mit diesen lokalen Steifigkeitsverteilungen (Abbildung 2.5) nach Gleichung (2.15) berechnete Steifigkeitsmatrix (2.16) stimmt gut mit jener aus der FE-Analyse überein (2.17). Um mit der symmetrischen Verteilung nicht nur Diagonaleinträge zu erhalten, wurde ein Bezugspunkt mit allgemeiner Lage gewählt. Die relative Abweichung beider Matrizen beträgt $\epsilon = 0.014$[3]. Die vereinfachte Modellierung der Membran mit komplexer Geometrie durch eine einfache Federbettung scheint demnach eine gute Näherung im Bezug auf die globalen Steifigkeitseigenschaften zu sein.

---

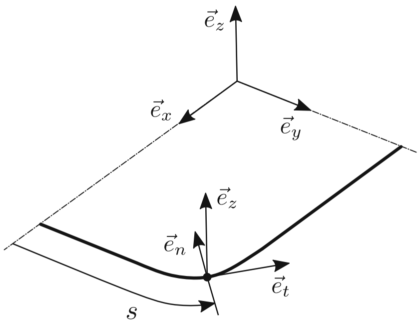
[3] $\epsilon = \frac{\|{}^{\mathrm{Int}}\boldsymbol{K} - {}^{\mathrm{FE}}\boldsymbol{K}\|}{\|{}^{\mathrm{FE}}\boldsymbol{K}\|}$, hier kennzeichnet $\|\ldots\|$ die Frobenius-Norm.



(a) Globale Koordinaten x, y, z



(b) Lokale Koordinaten t, n, z



(c) Koordinatensysteme.

Abbildung 2.5.: Steifigkeitsverteilung entlang des Umfangs aus FE-Analyse.

$$
{}^{\mathrm{Int}}\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 11727 & 0 & 0 & 0 & -11.727 & 11.728 \\ 0 & 8225.5 & 0 & 8.2255 & 0 & -8.3829 \\ 0 & 0 & 442.85 & -0.4430 & 0.4414 & 0 \\ 0 & 8.2255 & -0.4430 & 0.0134 & -0.0005 & -0.0084 \\ -11.727 & 0 & 0.4414 & -0.0005 & 0.0225 & -0.0117 \\ 11.728 & -8.3829 & 0 & -0.0084 & -0.0117 & 0.4069 \end{bmatrix} \tag{2.16}
$$

$$
{}^{\mathrm{FE}}\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 11565 & -0.2692 & 0.0067 & -0.0005 & -8.9263 & 11.563 \\ -0.2693 & 8111.8 & 0.0666 & 5.6110 & 0.0001 & -8.0225 \\ 0.0067 & 0.0666 & 436.74 & -0.4368 & 0.4366 & 0.0004 \\ -0.0005 & 5.6110 & -0.4368 & 0.0101 & -0.0004 & -0.0055 \\ -8.9263 & 0.0001 & 0.4366 & -0.0004 & 0.0180 & -0.0089 \\ 11.563 & -8.0225 & 0.0004 & -0.0055 & -0.0089 & 0.5680 \end{bmatrix} \tag{2.17}
$$

Einfluss ungleichmäßiger Steifigkeitsverteilungen

Wie vorhin beschrieben, sind die Steifigkeiten nicht konstant über den Umfang verteilt. Es stellt sich die Frage, wie sich inhomogene Verteilungen auf die Steifigkeitsmatrix K auswirken.

Zu diesem Zweck werden neben einer konstanten Verteilung noch zwei weitere Verläufe in Form eines Kosinus und eines Kosinus mit doppelter Frequenz angenommen

$$k(s) = k_0 \,, \tag{2.18}$$

$$k(s) = k_0 + k_1 \cos(2\pi(s + s_m)/l) \,, \tag{2.19}$$

$$k(s) = k_0 + k_1 \cos(4\pi(s + s_m)/l) \,. \tag{2.20}$$

Die Phasenlage wird durch den Parameter s_m, der den Ort des ersten Maximums am Umfang angibt, beschrieben. Diese Verläufe sind in Abbildung 2.6 über den Umfang mit der Länge l des starren Systems dargestellt.

Ein ähnlicher Ansatz wurde von Bright in ([2] S. 199ff.) für kreisförmige Strukturen verwendet. Darin wird die Steifigkeitsverteilung als Fourierreihe approximiert, wobei bereits die ersten drei Glieder genügen, um die wesentlichen Eigenschaften des Rockings zu modellieren. Die folgenden Darstellungen zeigen qualitativ den Einfluss der Steifigkeitsverteilung auf die einzelnen Matrixeinträge K_{ij}. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde auf die Achsenbeschriftung verzichtet. Die horizontale Achse zeigt die relative Phasenlage s_m/l an. Auf der vertikalen Achse ist die Steifigkeit K_{ij} aufgetragen. Als Bezugspunkt B für die Berechnung der Steifigkeitswerte dient der geometrische Mittelpunkt. In Abbildung 2.7 sind die Einträge bei einer homogenen Verteilungen dargestellt. Neben den konstanten Diagonaleinträgen sind alle anderen Einträge null.

Nun wird eine ungleichmäßige Verteilung verwendet, dazu wird die x-Steifigkeit kosinusförmig angenommen. Das Integral der Verteilung über die Länge ist gleich wie im homogenen Fall. Nun wird die Lage des Maximums variiert (Phasenverschiebung). Das Ergebnis ist in Abbildung 2.8 zu sehen. Einzig der Eintrag K_{16} ist davon betroffen. Da die Verteilung asymmetrisch ist, kommt es bei entsprechender Phase bei einer x-Verschiebung zu einer Verdrehung um z und vice versa. Da unabhängig von der Phasenlage jede Drehung um die z Achse das gleiche Moment liefert, ist der Eintrag K_{66} unempfindlich. Anders verhält es sich bei einer Kosinusverteilung mit doppelter Frequenz (Abbildung 2.6). Hier gleichen sich Wellenberge und -täler nicht aus. Das Trägheitsmoment um z ist abhängig von der Phase der Verteilung, dafür verschwindet der Eintrag K_{16}, bedingt durch die Symmetrie der Verteilung. Der Eintrag K_{15} is jedenfalls null, da

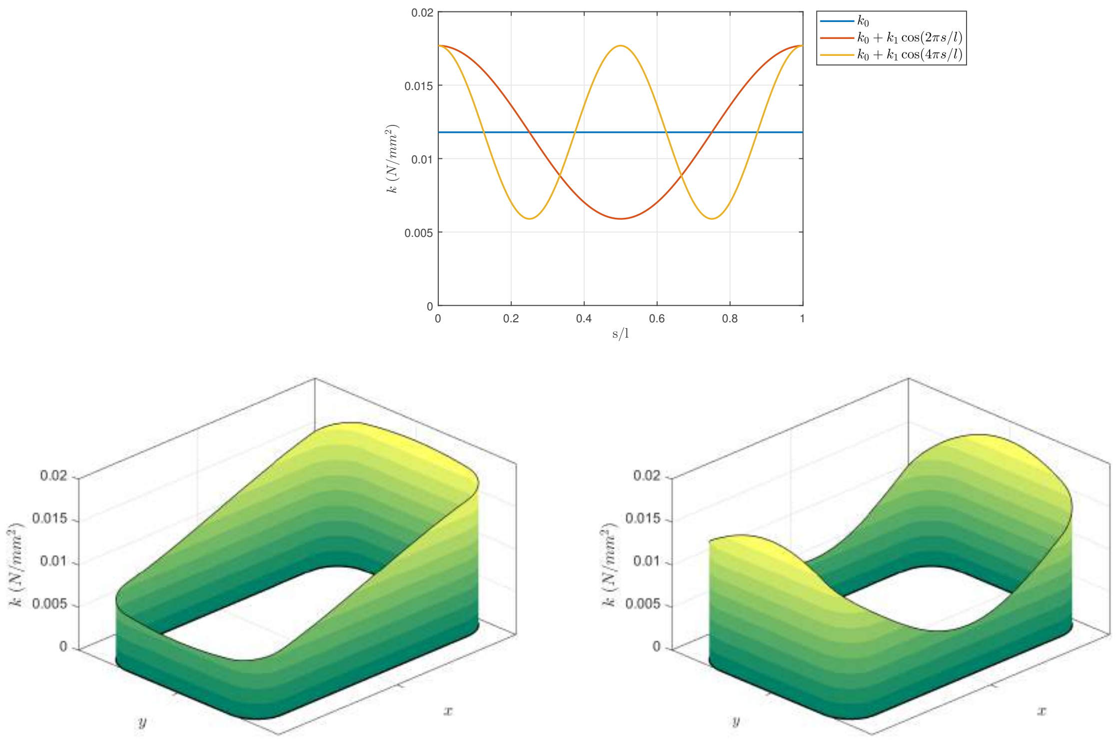


Abbildung 2.6.: Test-Steifigkeitsverteilung entlang des Umfangs bei $s_m = 0$.

der z-Abstand jedes Punkts der Kurve zum Bezugspunkt null ist (Abbildung 2.9).

Die Variation der y-Verteilung verhält sich ähnlich (Abbildung 2.10, 2.11).

Interessant ist eine ungleichmäßige Verteilung der z-Steifigkeit. Bei einer Kosinusverteilung treten bei entsprechender Phasenlage die Koppelterme K_{34} und K_{35} auf. Also führt eine reine z-Verschiebung des Bezugspunkts zu einer Verdrehung um die y- und z-Achse (Abbildung 2.12). Bei der zweiten Verteilung tritt bei entsprechender Phase neben der Abhängigkeit der Diagonaleinträge K_{44} und K_{55} auch der Deviationsterm K_{45} auf (Abbildung 2.13).

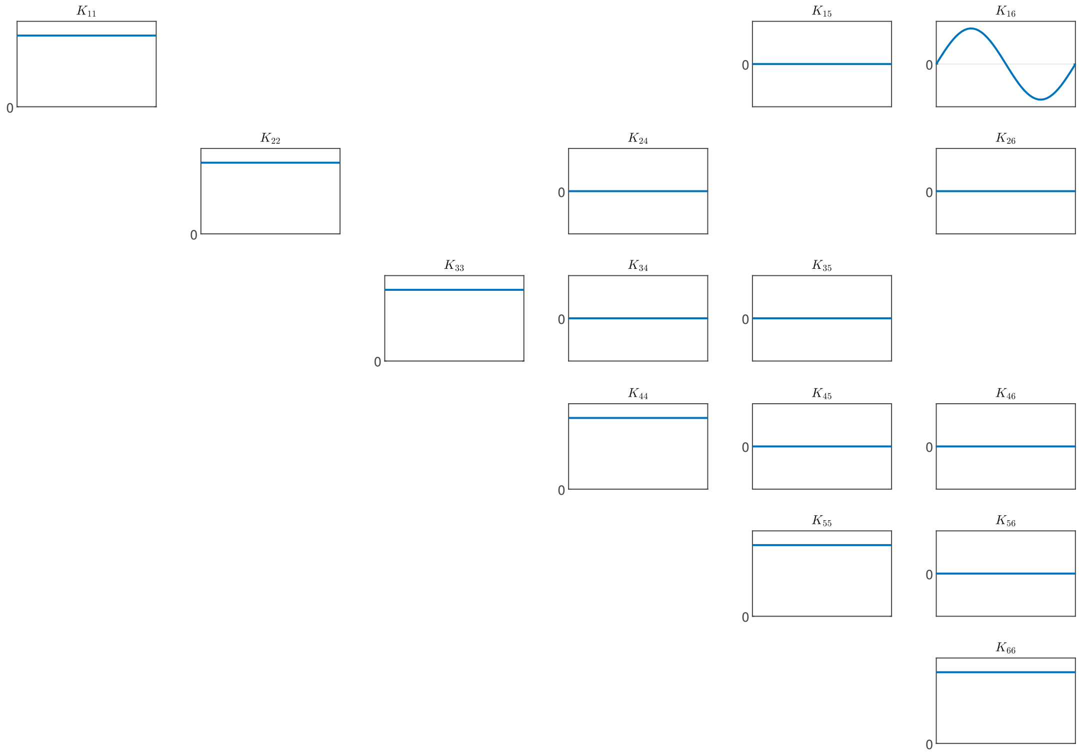


Abbildung 2.8.: cos-Verteilung in x. Variation der Lage des Maximums s_m.

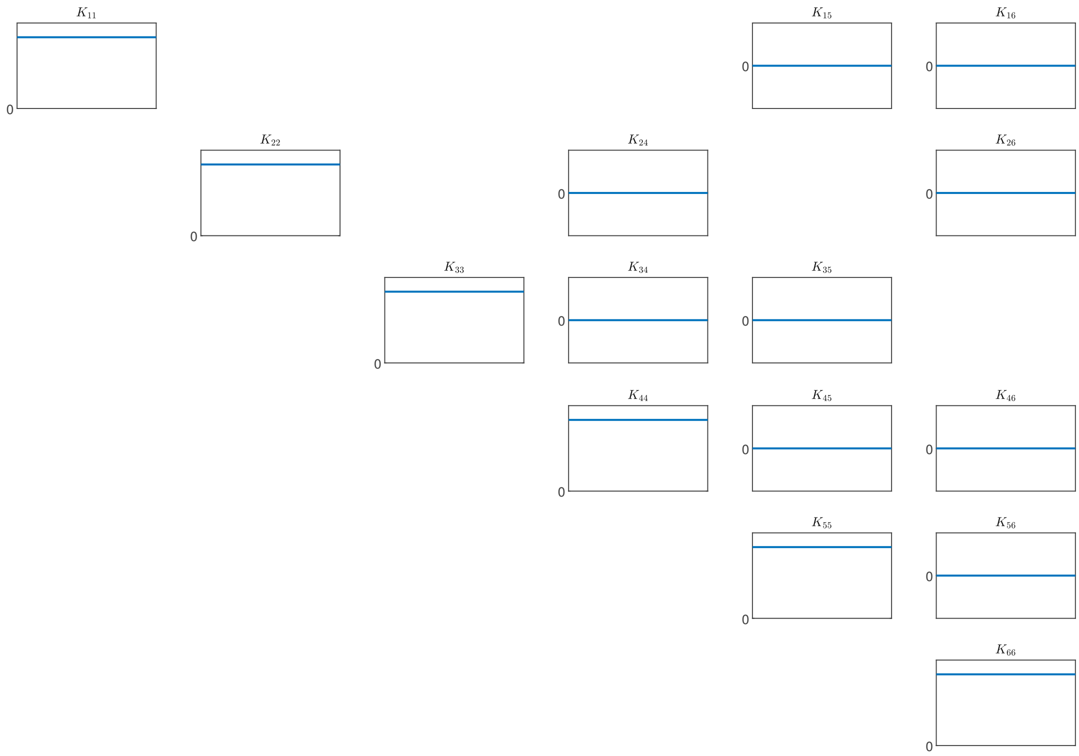


Abbildung 2.7.: Matrix K bei konstanter Steifigkeitsverteilung in allen Raumrichtungen.

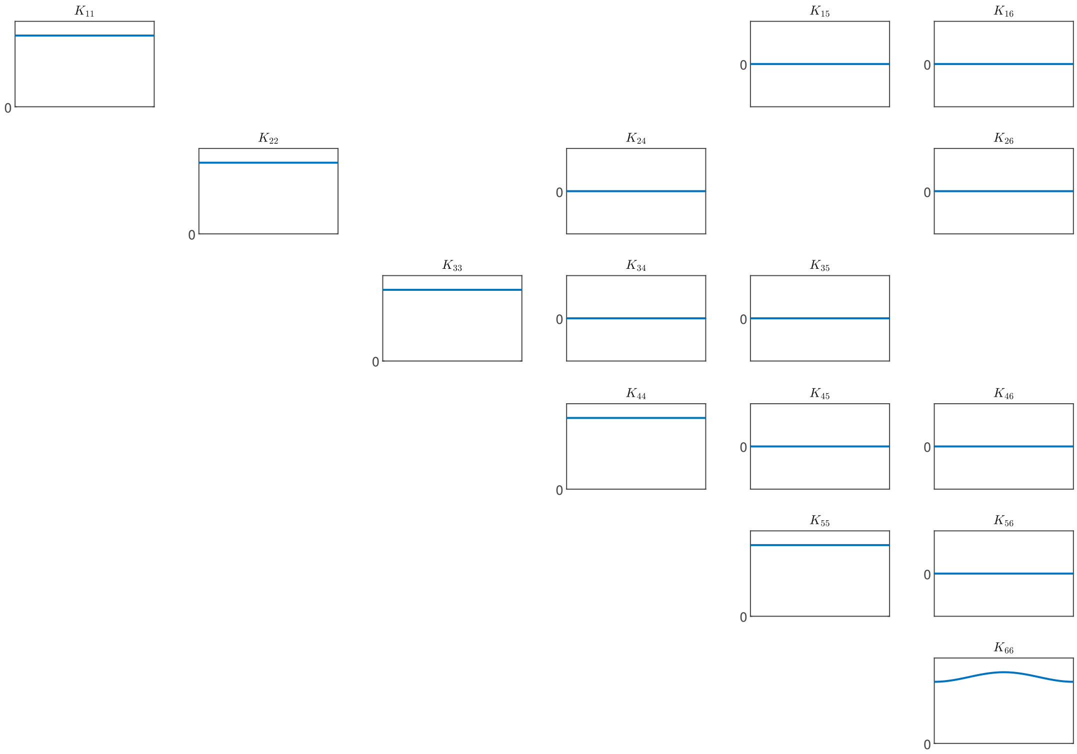


Abbildung 2.9.: $\cos 2$-Verteilung in x. Variation der Lage des Maximums s_m.

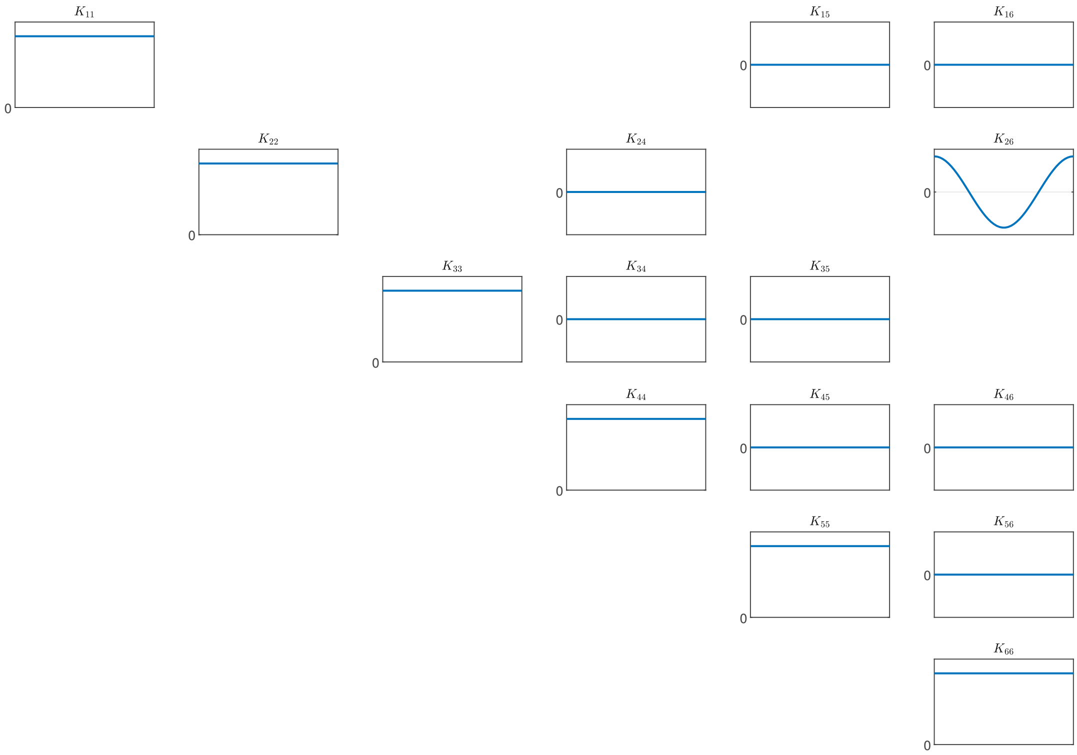


Abbildung 2.10.: cos-Verteilung in y. Variation der Lage des Maximums s_m.

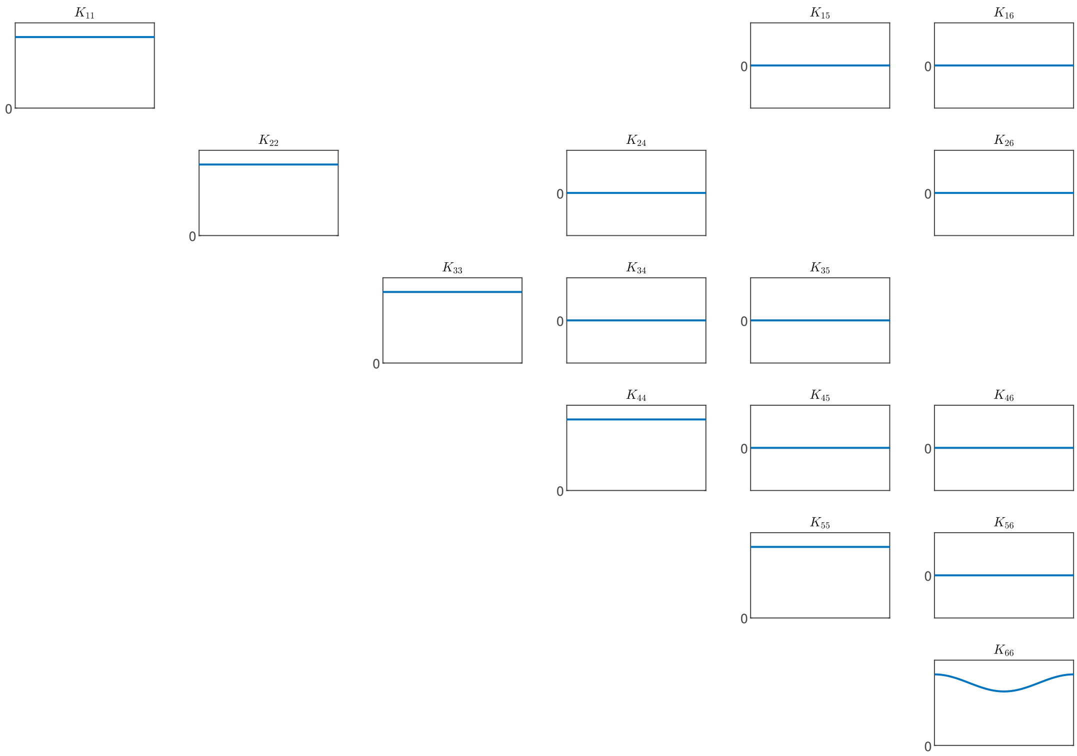


Abbildung 2.11.: $\cos 2$-Verteilung in y. Variation der Lage des Maximums s_m.

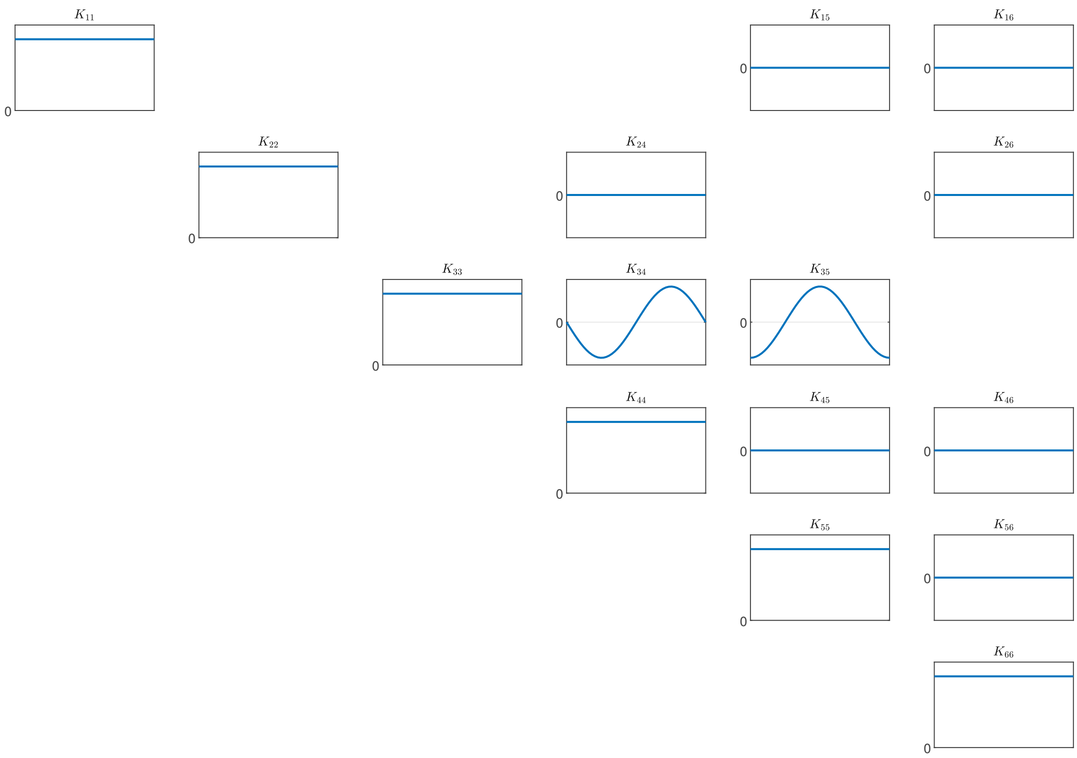


Abbildung 2.12.: cos-Verteilung in z. Variation der Lage des Maximums s_m.

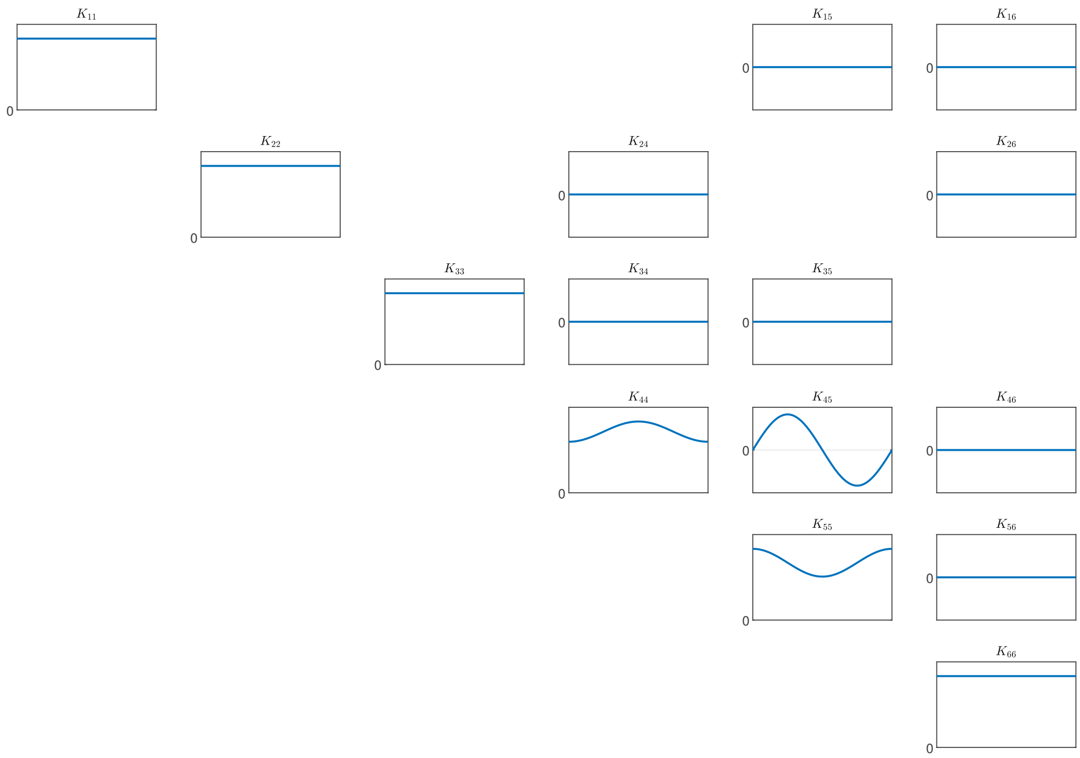


Abbildung 2.13.: $\cos 2$-Verteilung in z. Variation der Lage des Maximums s_m.

2.1.2. Massenmatrix

Sind die betrachteten Achsen keine Trägheitshauptachsen, treten im Allgemeinen Deviationsmomente auf. Die Massenmatrix bezüglich des Schwerpunkts lautet dann

$$\boldsymbol{M}_S = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Sxx} & I_{Sxy} & I_{Sxz} \\ 0 & 0 & 0 & I_{Syx} & I_{Syy} & I_{Syz} \\ 0 & 0 & 0 & I_{Szx} & I_{Szy} & I_{Szz} \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Die auf einen allgemeinen Punkt B bezogene Massenmatrix $\boldsymbol{M}_B$ erhält man durch Transformation[4] auf die neuen Lagekoordinaten $\boldsymbol{q} = [x_B, y_B, z_B, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]$. Dabei sind die Einträge I_{Bij} die auf B bezogenen Massenträgheits- bzw. Deviationsmomente:
$I_{Bxx} = I_{Sxx} m e_y^2 + m e_z^2$, $I_{Byy} = I_{Syy} + m e_x^2 + m e_z^2$, $I_{Bzz} = I_{Szz} + m e_x^2 + m e_y^2$
$I_{Bxy} = I_{Sxy} - m e_x e_y$, $I_{Byz} = I_{Syz} - m e_y e_z$, $I_{Bxz} = I_{Sxz} - m e_x e_z$.

$$\boldsymbol{M}_B = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & e_z m & -e_y m \\ 0 & m & 0 & -e_z m & 0 & e_x m \\ 0 & 0 & m & e_y m & -e_x m & 0 \\ 0 & -e_z m & e_y m & I_{Bxx} & I_{Bxy} & I_{Bxz} \\ e_z m & 0 & -e_x m & I_{Bxy} & I_{Byy} & I_{Byz} \\ -e_y m & e_z m & 0 & I_{Bxz} & I_{Byz} & I_{Bzz} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

2.1.3. Dämpfungsmatrix

Im Allgemeinen ist die Dämpfung nichtlinear von Lage und Geschwindigkeit abhängig. Allerdings lässt sich der Fall der linearen viskosen Dämpfung besonders einfach darstellen, weil hierbei die Dämpfungskraft proportional zur Geschwindigkeit ist. Als weitere Vereinfachung wird eine diagonale Dämpfungsmatrix angenommen.

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{Rxx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{Ryy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{Rzz} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

[4]Koordinatentransformation mit der Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{q}_S = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_B, \qquad \boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{M}_S \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & e_z & -e_y \\ 0 & 1 & 0 & -e_z & 0 & e_x \\ 0 & 0 & 1 & e_y & -e_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

2.2. Modalanalyse

Mit den Matrizen (2.15) und (2.23) ergibt sich das homogene Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{2.25}$$

für freie ungedämpfte Schwingungen. Einsetzen eines exponentiellen Ansatz $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}e^{\lambda t}$ führt auf das Eigenwertproblem

$$\left(\lambda^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0} \tag{2.26}$$

$$\det\left(\lambda^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}\right) = 0\,. \tag{2.27}$$

Die Eigenwerte λ_i werden mit (2.27) und die zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{\phi}_i$ mit Gleichung (2.26) bestimmt. Im ungedämpften Fall sind die $2n$ Eigenwerte λ_i konjugiert komplex, wobei der Realteil null ist. Der Imaginärteil entspricht den ungedämpften Eigenkreisfrequenzen ω_{0i}, wobei nur die positiven Frequenzen von Interesse sind. Die Eigenvektoren eines perfekt ausbalancierten Modells sind in Abbildung 2.14 dargestellt. Neben Kolbenhub und den beiden Rockingmoden treten im Allgemeinen auch Schubmoden auf. Im

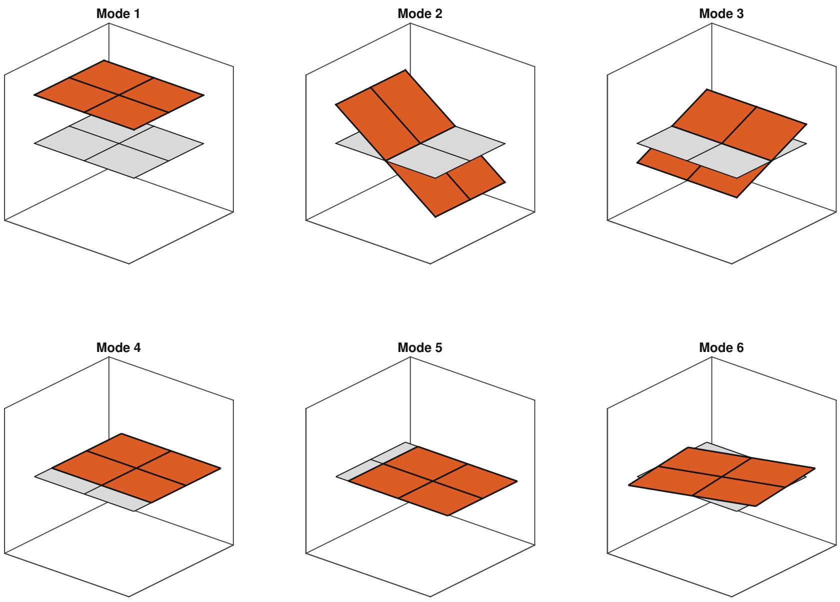


Abbildung 2.14.: Moden des perfekten Systems. Eigenfrequenzen aufsteigend.

gedämpften Fall wird das Gleichungssystem um die Dämpfungsmatrix erweitert

$$\left(\lambda^2\boldsymbol{M} + \lambda\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0}\,, \tag{2.28}$$

$$\det\left(\lambda^2 \boldsymbol{M} + \lambda \boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}\right) = 0\,. \tag{2.29}$$

Wenn die Bedingung

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{\Phi} = \mathrm{diag} \qquad \boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \ldots, \boldsymbol{\phi}_n) \tag{2.30}$$

erfüllt ist, sind die Eigenvektoren identisch mit denen des ungedämpften Falls $\boldsymbol{\phi}_{di} = \boldsymbol{\phi}_i$. Für den Fall der proportionalen Dämpfung

$$\boldsymbol{C} = \alpha \boldsymbol{K} + \beta \boldsymbol{M} \tag{2.31}$$

ist (2.30) immer erfüllt ([6] S. 239). Die Zusammenhänge zwischen den ungedämpften, den gedämpften Eigenkreisfrequenzen ω_i, und den Dämpfungsgraden ζ_i sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Gedämpfte Eigenfrequenzen	$\omega_{di} = \mathrm{Im}\left(\lambda_i\right)$
Ungedämpfte Eigenfrequenzen	$\omega_i = \lvert\lambda_i\rvert$
Dämpfungsgrad	$\zeta_i = -\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right)/\omega_i$
	$\omega_{di} = \sqrt{1-\zeta_i^2}\omega_i$

Tabelle 2.1.: Größen beim gedämpften System ([6] S. 239).

2.3. Erzwungene Schwingung

2.3.1. Erregungsvektor, induzierte Spannung

Die Erregung erfolgt über die bestromte Spule im stationären Magnetfeld. Die Lorentzkraft auf einen Leiter wird mit

$$\vec{f}_L = I \int_{\mathcal{C}} d\vec{s} \times \vec{B} \tag{2.32}$$

berechnet. Es wird die Annahme getroffen, dass $\vec{B}$ nur Komponenten in x und y hat und außerdem gilt das $d\vec{s} \perp \vec{B}$. Daraus folgt, dass nur die z-Komponente der resultierenden Kraft

$$f_z = I \int_{\mathcal{C}} |\vec{B}| ds = I\bar{B}l \tag{2.33}$$

von null verschieden ist. Wie im eindimensionalen Fall wird die Kraft durch das Produkt aus Strom und Kraftfaktor $\bar{B}l$ gebildet. $\bar{B}l$ entspricht dem Effektivwert der B-Verteilung multipliziert mit der Gesamtspulenlänge. Im Normalfall greift die resultierende Lorentzkraft nicht am Bezugspunkt an, sondern im Schwerpunkt der Verteilung $B(s)$ und verursacht daher mit dem Relativvektor

$$\vec{r}_{LB} = \frac{\int_{\mathcal{C}} |\vec{B}| \vec{r}_{PB} ds}{\int_{\mathcal{C}} |\vec{B}| ds} \qquad \vec{r}_{LB} = [e_{Lx}\ e_{Ly}\ 0]^T \tag{2.34}$$

ein Moment um B

$$\vec{M}_{BL} = \vec{r}_{LB} \times \vec{f}_L\,. \tag{2.35}$$

Zusammenfassen von Kräften und Momenten führt auf den Erregungsvektor

$$\boldsymbol{f} = I\boldsymbol{b_l} \qquad \boldsymbol{b_l} = \bar{B}l\,[0\ 0\ 1\ e_{Ly}\ {-e_{Lx}}\ 0]^T\,. \tag{2.36}$$

Erweitern des homogenen Gleichungssystems um diesen Vektor liefert das lineare Differentialgleichungssystem für erzwungene Schwingungen

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{b_l}\,. \tag{2.37}$$

Ähnliche Überlegungen lassen sich über die induzierte Spannung der bewegten Spule im stationären Magnetfeld anstellen. Die induzierte Spannung in einer kleinen Länge ds der Spule mit der Geschwindigkeit v kann mit

$$dU_b = |\vec{B}||v|ds \tag{2.38}$$

angegeben werden. Lösen des Integrals unter Verwendung der Starrkörperbeziehungen für die Geschwindigkeitsverteilung führt auf die gesamte induzierte Spannung

$$U_b = \bar{B}l\,(\dot{z}_M + \dot{\varphi}_x e_{Ly} - \dot{\varphi}_y e_{Lx})\,. \tag{2.39}$$

Diese lässt sich einfach durch das Produkt aus verschmiertem Kraftfaktor $\bar{B}l$ und der Geschwindigkeit des Punkts L, an dem die Lorentzkraft angreift, anschreiben. Damit ergibt sich analog zum eindimensionalen Fall die Gleichung für die elektrische Seite

$$U = R_E I + \left(L_E \frac{dI}{dt}\right) + \boldsymbol{b_l}^T \dot{\boldsymbol{x}}\,. \tag{2.40}$$

Aus (2.37) und 2.40 folgt, ohne Berücksichtigung der Induktivität L_E, die Beziehung zwischen der Spannung und der Auslenkung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \left(\boldsymbol{C} + \frac{1}{R_E}\boldsymbol{b_l}\boldsymbol{b_l}^T\right)\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} &= \frac{1}{R_E}\boldsymbol{b_l}U(t) \ , \\ \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} &= \tilde{\boldsymbol{f}}(t) \ . \end{aligned} \tag{2.41}$$

2.3.2. Harmonische Erregung

Bei gegebenen Systemparametern kann der Frequenzgang der Auslenkung mit den oben beschriebenen linearen Zusammenhängen direkt berechnet werden. Damit können Aussagen getroffen werden, wie und in welchem Ausmaß die Parameter, insbesondere die Exzentrizitäten, etwaiges Rocking hervorrufen. Im Abschnitt 2.1.1 wurden bereits vorab einige Überlegungen dazu angestellt.

Abbildung 2.16 zeigt die Vorhersage des Modells für eine erzwungene Schwingung bei verschiedenen Exzentrizitäten. Zur Darstellung wurden relative Größen verwendet, da diese besonders anschauliche Kurven liefern. Jede der einzelnen Exzentrizitäten e_k, e_m und e_L zeichnet sich charakteristisch im relativen Rocking-Winkel ab 2.16b. Steifigkeiten sind in den Tiefen, Massen in den Höhen und die Anregung im gesamten Frequenzbereich wirksam. Durch die geringe Dämpfung gibt es um die Rocking-Eigenfrequenz eine starke Überhöhung. Sind mehrere Exzentrizitäten vorhanden, können sie anhand des Rocking-Frequenzgangs nicht eindeutig unterschieden werden.

Die Imperfektionen wirken sich auch auf die Hub- und die Stromkurve aus (Abbildung 2.16a und 2.16c). Zur Darstellung wurde für die Exzentrizitäten ein extremer Wert von $1\,mm$ gewählt, bei der realistischen Größenordnung $\leq 100\,\mu m$ sind im Vergleich zum komplett symmetrischen System kaum Unterschiede auszumachen.

Reduzierung der Freiheitsgrade

Mit dem Lösungsvektor in modalen Koordinaten $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{x}$ ist der modal contribution factor durch

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{q}\|}, \qquad \sum_i \rho_i^2 = 1 \tag{2.42}$$

gegeben. Die Einträge ρ_i beschreiben den Beitrag der einzelnen Moden zur Gesamtlösung. Für einen plausiblen Satz an Parametern wurden die Faktoren berechnet und im Frequenzbereich in Abbildung 2.15 dargestellt. Für den Frequenzbereich $f < 2\,kHz$ scheint eine Reduktion des Modells auf die ersten drei Moden sinnvoll.

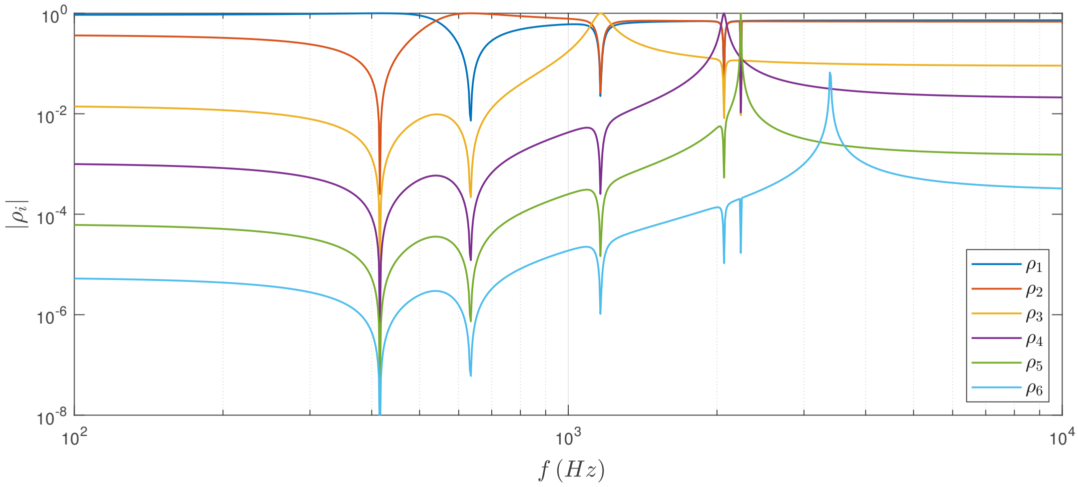


Abbildung 2.15.: Modal contribution factor über Frequenzbereich.

Als Maß für die Beteiligung einzelner Moden an einer Startkörperverschiebung $\boldsymbol{e}_j$ kann der modal mass participation factor

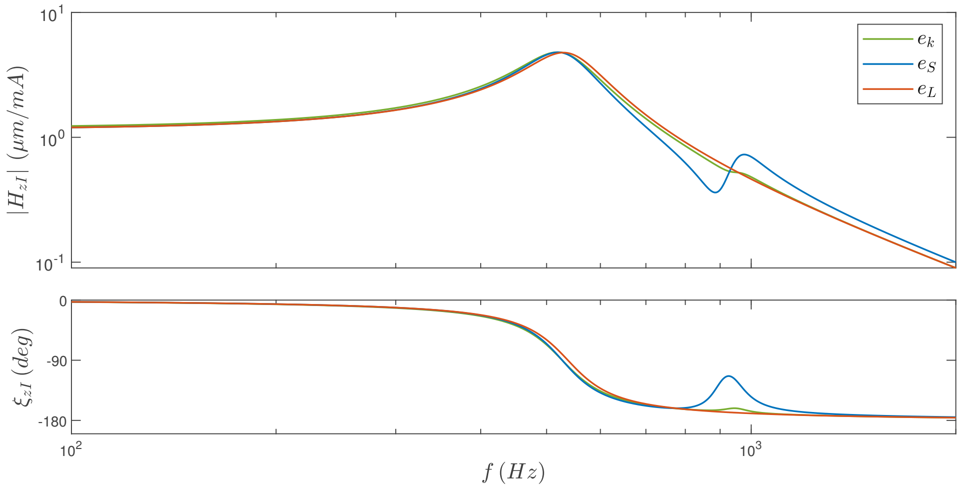
$$\boldsymbol{\Gamma}_j = \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{e}_j\right) \tag{2.43}$$

berechnet werden. Die Beiträge der Moden bei einer Verschiebung in Hubrichtung $\boldsymbol{e}_3 = [0, 0, 0, 1\,mm, 0, 0]^T$ sind in Tabelle 2.2 aufgelistet. Auch hier nimmt die Signifikanz der Moden mit höherer Eigenfrequenz ab. In den weiteren Berechnungen werden die Freiheitsgrade in x-und y-Richtung vernachlässigt. Diese spielen wie oben und im Abschnitt 2.1.1 beschrieben eine untergeordnete Rolle.

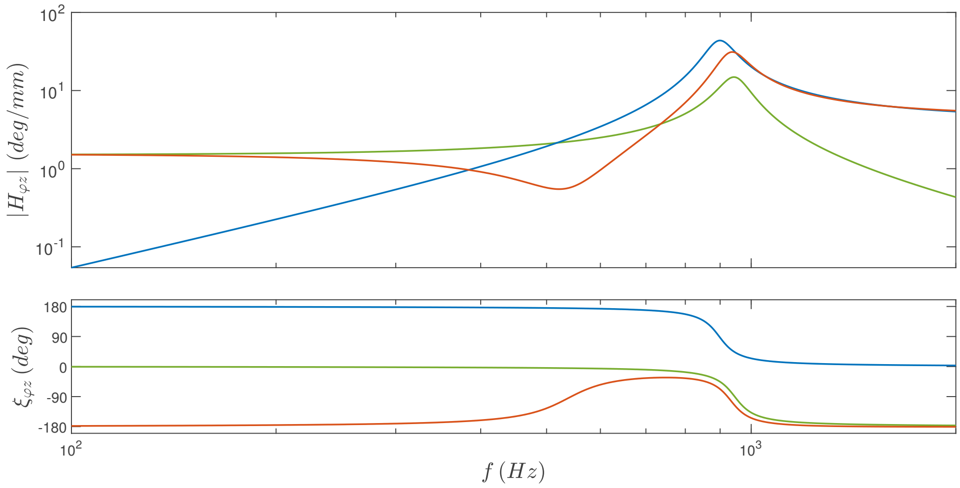
Mode Nr. i	Γ_{i3}
1	-2.176e−05
2	5.584e−07
3	4.978e−08

Mode Nr. i	Γ_{i3}
4	2.035e−08
5	−1.322e−08
6	−1.873e−10

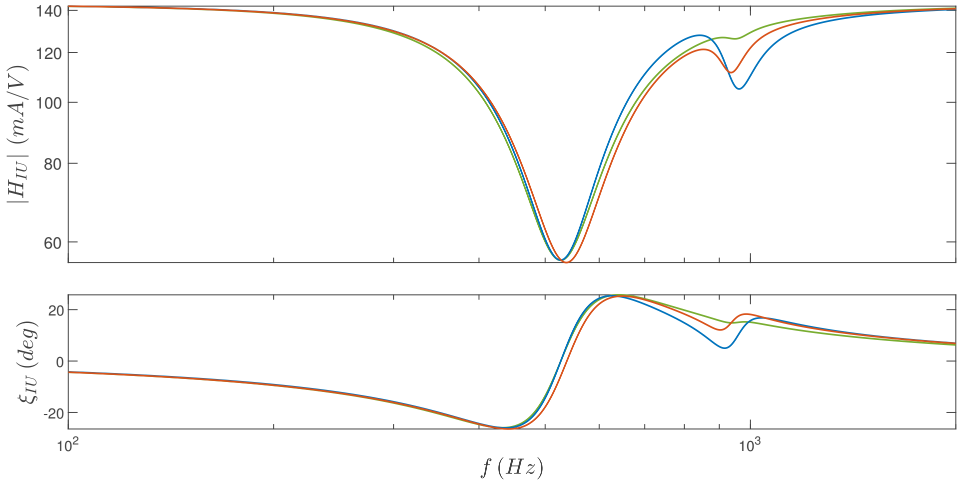
Tabelle 2.2.: Modal mass participation factor, bei einer Verschiebung in z-Richtung.



(a) Hubfrequenzgang mit Strom als Referenz.



(b) Rocking-Winkel mit Hub als Referenz (Rel. Rocking-Winkel).



(c) Stromfrequenzgang mit Spannung als Referenz.

Abbildung 2.16.: Auswirkungen von Steifigkeits- (e_k), Massen- (e_S) und Anregungsexzentrizität (e_L).

3. Identifikation im Frequenzbereich

Bei stochastischer Anregung kann zwischen Signal und Rauschen nicht unterschieden werden, daher würde es bei Messungen in Feedback-Schleifen zu systematischen Fehlern kommen. Für die Identifikation im Frequenzbereich sind periodische Anregungssignale von Vorteil. Diese liefern, sogar bei korreliertem Ein- und Ausgang, bei ausreichend großem Störabstand konsistente Ergebnisse. Im Gegensatz zur stochastischen Anregung wird bei einem periodischen Signal jede Abweichung des periodischen Verhaltens als Rauschen gewertet ([20] S. 62, 178, 243).

Zur Identifikation werden durch Optimieren der Parameter $\boldsymbol{\theta}$ die Übertragungsfunktionen des Modells $\boldsymbol{G}(s, \boldsymbol{\theta})$ jenen der Messung $\boldsymbol{G}(s)$ angeglichen. Die gemessene Übertragungsfunktion wird aus den Frequenzspektren des Ausgangs und des Eingangs gebildet. Das Frequenzspektrum eines diskreten Zeitsignals x_j mit N Samples wird durch die diskrete Fourier-Transformation (DFT)

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} jk\right) \qquad k = 0, \ldots, N-1 \tag{3.1}$$

bzw. schnelle Fourier-Transformation (FFT) berechnet. Die Division der FFT-Spektra von Aus- und Eingang liefert die Übertragungsfunktion. Bei diesem Ansatz ist zu beachten, dass bei einem kleinen Eingangssignal (z.B. Nulldurchgang) oder bei starkem Rauschen am Eingang, Probleme auftreten können ([20] S. 178). Die Abweichung zwischen Messung und Modell wird mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate optimiert. Konkret wird die Summe der Quadrate

$$V_{NLS}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{e}(k, \boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{e}(k, \boldsymbol{\theta}) \tag{3.2}$$

an allen Frequenzpunkten k der Residuen

$$\boldsymbol{e}(k, \boldsymbol{\theta}) = \hat{\boldsymbol{G}}(k) - \boldsymbol{G}(k, \boldsymbol{\theta}) \tag{3.3}$$

minimiert. Das Modell ist nichtlinear vom Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ abhängig. Hier wurde zur Lösung des Problems (3.2) der nichtlineare Least-Squares-Algorithmus *lsqnonlin* der Optimization-Toolbox von Matlab verwendet. Bei dieser Funktion kann zwischen dem Trust-Region- und dem Levenberg-Marquardt-Verfahren gewählt werden. Die Übertragungsfunktion ist für zeitkontinuierliche Systeme in rationaler Form

$$G(s, \boldsymbol{\theta}) = \frac{B(s, \boldsymbol{\theta})}{A(s, \boldsymbol{\theta})} \tag{3.4}$$

bzw. bei mehrdimensionalen Problemen in Matrizenschreibweise

$$\boldsymbol{G}(s, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{A}^{-1}(s, \boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{B}(s, \boldsymbol{\theta}) \tag{3.5}$$

darstellbar. Wobei A und B im eindimensionalen Fall Polynome der Form $A = \sum_{k=0}^{n_a} a_k s^k$ sind. Diese Form ist per Definition nicht vollständig identifizierbar. Die Formulierung ist nicht eindeutig, denn mit einem beliebigen Skalar λ gilt $G(s, \theta) = G(s, \lambda\theta)$. Zur vollständigen Identifikation ist eine weitere Bedingung notwendig. In der Praxis wird oft ein Parameter fest vorgegeben. Außerdem dürfen die Polynome keine gemeinsamen Nullstellen haben. Es werden Daten an mindestens $(n_a + n_b + 1)/2$[1] verschiedenen Frequenzen[2] benötigt ([20] S. 152f.).

3.1. Eindimensionales Modell

Moreno nutzt in ([18] S. 243ff.) eine Methode zur Bestimmung der Kleinsignalparameter von Lautsprechern, bei der der gesamte Satz an Parametern aus den gemessenen Frequenzgängen von Spannung, Strom und Schnelle bestimmt werden können.

Anschaulich kann die Übertragungsfunktion $G_{xU}(s)$ (2.3) aus dem Produkt der Übertragungsfunktionen $G_{xI}(s)$ und $G_{IU}(s)$ gebildet werden (Abbildung 3.1). Für harmonische Anregung $s = i\Omega$, mit der Kreisfrequenz Ω, ergeben sich die Frequenzgänge

$$H_{xI}(i\Omega) = \frac{X(i\Omega)}{I(i\Omega)} = \frac{Bl}{-\Omega^2 m + i\Omega c + k}\,, \tag{3.6}$$

$$H_{IU}(i\Omega) = \frac{I(i\Omega)}{U(i\Omega)} = \frac{-\Omega^2 m + i\Omega c + k}{R_E\left(-\Omega^2 m + i\Omega c + k\right) + i\Omega Bl^2}\,. \tag{3.7}$$

Statt der Admittanz H_{vI} [18] wurde die Rezeptanz H_{xI} verwendet. Diese sind durch den

[1] n_a Grad des Nennerpolynoms, n_a Grad des Zählerpolynoms.
[2] $f = 0, f = f_{nyq}$ zählen nur 1/2.

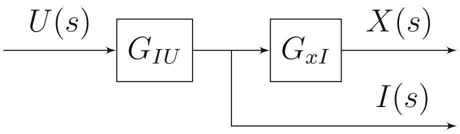


Abbildung 3.1.: Vereinfachtes Blockschaltbild mit den Laplace-Transformierten Größen U, I, X von Spannung, Strom und Hub.

Zusammenhang $H_{vI} = i\Omega H_{xI}$ ineinander überführbar[3]. Dieses Model hat 5 Parameter (k, m, c, Bl, R_E). Der Zusammenhang (3.6) liefert 3 unabhängige Gleichungen, besteht aber aus 4 Unbekannten. Durch Einbeziehen des Stromsignals wird zwar eine weitere Unbekannte R_E hinzugefügt, aber es werden durch die Beziehung (2.3) zwei weitere Gleichungen gewonnen. Mit den Frequenzgängen von Spannung, Strom und Hub können somit alle Parameter bestimmt werden.

3.2. Erweitertes Modell

Mit Hilfe der in Abschnitt 2.1 hergeleiteten Matrizen können die oben beschriebenen Gleichungen auf ein Mehrfreiheitsgradsystem angewandt werden. Eine Erfassung der lateralen Bewegung war mit den zur Verfügung stehenden Messmitteln nicht möglich. Außerdem sind die Freiheitsgrade in x-und y-Richtung, sowie die Rotation um z von untergeordneter Bedeutung. Daher wird das Systems um diese Freiheitsgrade reduziert. Cardenas verwendet in [15] ebenfalls nur drei Freiheitsgrade. Damit ergibt sich der neue Lagevektor $\boldsymbol{x} = [z, \varphi_x, \varphi_y]^T$ mit den zugehörigen Matrizen

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k & e_{ky}k & -e_{kx}k \\ e_{ky}k & k_{Rxx} + ke_{ky}^2 & k_{Rxy} - ke_{kx}e_{ky} \\ -e_{kx}k & I_{Sxy} - ke_{kx}e_{ky} & k_{Ryy} + ke_{kx}^2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c_{Rxx} & 0 \\ 0 & 0 & c_{Ryy} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & e_{Sy}m & -e_{Sx}m \\ e_{Sy}m & I_{Sxx} + me_{Sy}^2 & I_{Sxy} - me_{Sx}e_{Sy} \\ -e_{Sx}m & I_{Sxy} - me_{Sx}e_{Sy} & I_{Syy} + me_{Sx}^2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b_l} = \begin{bmatrix} 1 \\ e_{Ly} \\ -e_{Lx} \end{bmatrix} Bl\,. \tag{3.10}$$

3

$$H_{vI}(i\Omega) = \frac{Bl}{R_{MS} + i\Omega M_{MS} + 1/\left(i\Omega C_{MS}\right)} \tag{3.8}$$

$$H_{uI}(i\Omega) = R_E + \frac{i\Omega Bl^2}{-\Omega^2 M_{MS} + i\Omega R_{MS} + 1/\left(i\Omega C_{MS}\right)} \tag{3.9}$$

Der Zusammenhang zwischen Auslenkung und Erregung entspricht dem Gleichungssystem für erzwungene Schwingung eines MFG-Systems

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{b_l}\,. \tag{3.11}$$

Um auch etwaige Exzentrizitäten der anregenden Kraft berücksichtigen zu können, greift die Lorentzkraft abseits des geometrischen Mittelpunkts an. Dieser Abstand ist im Vektor $\boldsymbol{b_l}$ berücksichtigt. Daraus ergibt sich mit der dynamischen Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{M}s^2 + \boldsymbol{C}s + \boldsymbol{K} \tag{3.12}$$

die Übertragungsfunktion von Strom zu Auslenkung

$$\boldsymbol{G}_{xI}(s) = \frac{\boldsymbol{X}(s)}{I(s)} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{b_l}\,. \tag{3.13}$$

Die Übertragungsfunktion von Strom zu Spannung lässt sich in ähnlicher Weise herleiten wie im eindimensionalen Fall. Wie bereits dargelegt ist die induzierte Spannung gleich dem Parameter Bl multipliziert mit der Geschwindigkeit am Angriffspunkt der resultierenden Lorentzkraft. Der Schwerpunkt der Verteilung ist exakt jener Punkt an dem die Lorentzkraft angreift. Somit ergibt sich die Übertragungsfunktion von Strom zu Spannung

$$G_{IU}(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \left(R_E + s\left(L_E + \boldsymbol{b_l}^T\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{b_l}\right)\right)^{-1} \tag{3.14}$$

für das erweiterte Modell. Das dreidimensionale Modell besteht aus 18 Parametern (exklusive Deviationsterme): k, e_{kx}, e_{ky}, k_{Rxx}, k_{Ryy}, m, e_{Sx}, e_{Sy}, I_{Sxx}, I_{Syy}, c, c_{Rxx}, c_{Ryy}, Bl, e_{Lx}, e_{Ly}, R_E, L_E. Das Gleichungssystem 3.13 liefert 9 Gleichungen. Theoretisch sind in 3.14 weitere 7 Gleichungen[4] enthalten. Die Auswirkungen von Rocking auf die induzierte Spannung und damit auf die Stromkurve ist sehr klein. Daher ist davon auszugehen, dass die Identifikation von Exzentrizitäten mit realistischer Größenordnung schwierig ist.

3.2.1. Zusätzliche Bedingungen

Dieser Umstand spiegelt sich besonders deutlich bei der Identifikation von Systemen mit bekannten Parametern wider. Mit einem vorgegebenen Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ können mit den Gleichungen (3.13) und (3.14) Testdaten erzeugt werden. Diese Frequenzgänge

[4] Einbeziehen der Induktivität L_E erhöht den Grad des Nennerpolynoms zusätzlich um 1

wurden mit leichtem Rauschen überlagert und dienen anschließend als „Messdaten“ zur Bewertung der Identifikation. Der Vorteil gegenüber realen Messdaten ist, dass hier die Abweichung der Schätzung direkt angegeben werden kann. Für die Simulation wurden 1000 Systeme mit unterschiedlicher Größenordnung von Exzentrizitäten untersucht. Die exakten Werte der Exzentrizitäten, sowie deren Startwerte für die Identifikation, wurden zufällig erzeugt. Konkret wurden 16 Parameter geschätzt, I_{Sxx} und I_{Syy} müssen mangels Gleichungen vorgegeben werden.

Der relative Fehler der geschätzten Exzentrizitäten

$$\epsilon = \|\boldsymbol{\Delta}\|/\|\boldsymbol{\theta}\| \qquad\qquad \Delta = \|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}\| \tag{3.15}$$

ist in Abbildung 3.2 über die Größenordnung der Exzentrizitäten aufgetragen. Das Diagramm enthält alle Ergebnisse, auch jene bei denen der Identifikationsalgorithmus divergiert ist. Bei 500 μm liegt der Median des relativen Fehlers bereits bei rund 5% und steigt darunter stark an. Bei Konvergenz ist der Fehler zwar um mindesten eine Größenordnung kleiner, aber diese Lösungen sind klar in der Unterzahl. Die Detektion von kleinen Exzentrizitäten wird zunehmend schwieriger und gelingt nur bei guten Startwerten. Wegen der geringen Auswirkung der Schaukelbewegung auf die Stromkurve, sind, insbesondere in Anwesenheit von Rauschen, nur 3 Gleichungen nutzbar — Zur Identifikation aller Parameter fehlen daher weitere 6 Gleichungen. Aus diesem Grund sind zusätzliche Messbedingungen notwendig.

Weitere Bedingungen können durch bekannte Eingriffe ins System erhalten werden. Zum Beispiel war im eindimensionalen Fall, bevor das Stromsignal zur Identifikation der TSP genutzt wurde, das Anbringen von bekannten Massen üblich. Ein Eingriff in die Massenverteilung des Systems ist denkbar, praktisch durch die Größe der zu untersuchenden Lautsprecher aber schwierig umzusetzen und schlecht wiederholbar.

Zusätzliches Rückvolumen

Einfacher ist ein Eingriff in die Steifigkeit des Systems durch das Anbringen eines Rückvolumens. Die Steifigkeit des Rückvolumen lässt sich über die Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$

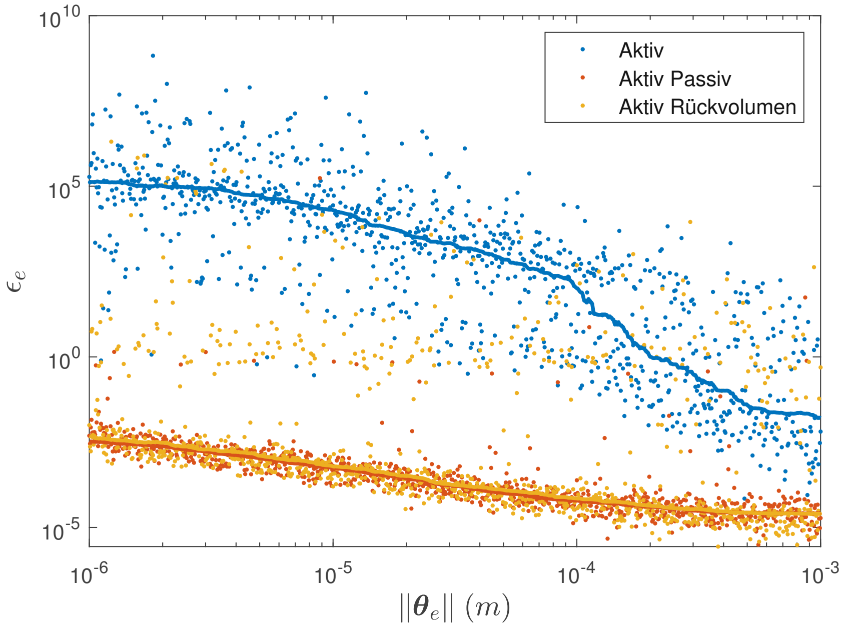


Abbildung 3.2.: Relativer Fehler der geschätzten Exzentrizitäten in Abhängigkeit von deren Größenordnung $\boldsymbol{\theta}_e = [e_{Sx}, e_{Sy}, e_{kx}, e_{ky}, e_{Lx}, e_{Ly}]$ bei unterschiedlichen Messbedingungen.

für ideale Gase

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n \qquad\qquad n = \begin{cases} 1 & \text{isotherm} \\ \kappa & \text{isentrop} \end{cases} \tag{3.16}$$

abschätzen (vgl. [25] S. 139f., 207). Dabei sind p und V der Druck und das Volumen, der Exponent n gibt die Art der Zustandsänderung an. Damit lässt sich mit dem Ausgangszustand 0 der Druck

$$p = \left(\frac{V}{V_0}\right)^n p_0 \tag{3.17}$$

und in weiterer Folge, durch Ersetzen des Volumens durch das Produkt von Auslenkung x und Angriffsfläche A, die Kraft

$$f = (p - p_0)\, A = \left[\left(1 + x\,\frac{A}{V_0}\right)^n - 1\right] p_0 A \tag{3.18}$$

in Abhängigkeit der Lage x angeben. Wird dieser Term um $x = 0$ durch eine lineare Taylorreihe ohne höhere Terme approximiert, folgt der lineare Ausdruck für die Kraft

$$f_{\text{lin}} = \frac{np_0 A^2}{V_0}\, x\,. \tag{3.19}$$

Daraus ergibt sich die Steifigkeit des Rückvolumens für isotherme bzw. isentrope Zustandsänderung

$$k_{B,\text{isoth}} = \frac{p_0 A^2}{V_0}\,, \tag{3.20}$$

$$k_{B,\text{isentr}} = \frac{\kappa p_0 A^2}{V_0}\,. \tag{3.21}$$

Die Modellierung des Rückvolumens als reine Steifigkeit ist für niedrige Frequenzen zulässig. Des Weiteren wird von unnachgiebigen Hohlraumwänden, kleinen Abmessungen $<< \lambda$, kleinen Innendruckänderungen $<< p_0$ und Vernachlässigbarkeit der Luftmasse ausgegangen (vgl. [25] S. 139f.).

Unter der Annahme einer gleichmäßigen Druckverteilung innerhalb des Rückvolumens greift die zusätzliche Steifigkeit im geometrischen Mittelpunkt an und ist daher nur im ersten Element der Steifigkeitsmatrix zu berücksichtigen ($K_{11} = k + k_B$). Neben der zusätzlichen Unbekannten k_B erhält man 4 weitere Gleichungen.

Zusätzliche Passiv-Messung

Eine andere Möglichkeit bietet der Passivbetrieb des zu untersuchenden Lautsprechers. Dafür wird der Lautsprecher in einen Passivadapter eingesetzt. Im Adapter wird ein Überdruck erzeugt, welcher an der Innenseite der Membran wirksam wird. Das Versuchsobjekt wird nicht aktiv betrieben, es existiert also keine Lorentzkraft, und es wird bei offenen Kontakten keine Spannung in der Spule induziert. Wie beim Rückvolumen wird von einer gleichmäßigen Druckverteilung ausgegangen, die Passiverregung erfolgt also zentrisch. Unter dieser Annahme beschreibt

$$\boldsymbol{G}_{xp^*}(s) = \frac{\boldsymbol{X}(s)}{p^*(s)} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{f}_p \qquad\qquad \boldsymbol{f}_p = [1\ 0\ 0]^T f_p \tag{3.22}$$

den Zusammenhang zwischen Auslenkung und Druck. Der Druck im Volumen wird über ein Mikrophon mitgemessen. Tatsächlich wird kein absoluter Druck gemessen, sondern ein zum Druck proportionales Spannungssignal p^*. Außerdem geht zwischen Druck und anregender Kraft auch noch die Membranfläche ein. Dieser Abweichung zwischen gemessenem Signal und der tatsächlichen Kraft wird durch den unbekannten Faktor f_p Rechnung getragen.

Mit beiden Methoden erhält man wesentlich bessere Ergebnisse für den relativen Fehler bei künstlich erzeugten Testdaten mit geringem Rauschanteil (vgl. Abbildung 3.2).

Für die letzten zwei Bedingungen wurden bekannte Trägheitsmomente der Hauptachsen angenommen. Die Werte können relativ gut durch die Massengeometrie abgeschätzt werden.

3.3. Versuchsdurchführung

Untersucht werden mehrere $12{\times}16{\times}2.25\,mm$ große Lautsprecher mit einem Maximalhub von $1\,mm$ und einem Nennwiderstand von $8\,\Omega$ (Abbildung 3.3a).

Zur Bestimmung der linearen Systemparameter sind kleine Auslenkungen von Vorteil. Im konkreten Fall werden Amplituden in der Größenordnung von $30\,\mu m$ betrachtet. Als Messsystem wird ein Polytec PSV-400 Scanning Vibrometer verwendet. Zwischen dem Lautsprecher und der Vibrometer-Kontrolleinheit ist ein GRAS 12 AU Power Module geschaltet. Der Laser-Messkopf des Vibrometers misst die Geschwindigkeit an zuvor definierten Punkten. Die Messung der einzelnen Punkte erfolgt nacheinander, daher werden die Signale mithilfe eines internen oder externen Triggers synchronisiert. Zusätzlich zum Geschwindigkeitskanal sind noch drei zusätzliche Eingänge vorhanden, diese werden mit den Ausgängen des GRAS Verstärkers belegt: der Eingangsspannung am Lautsprecher, dem Strom und einem Mikrofonausgang. Der Mikrofonkanal wird zur Messung des Drucks im Passivadapter verwendet.

Aktiv-Messung

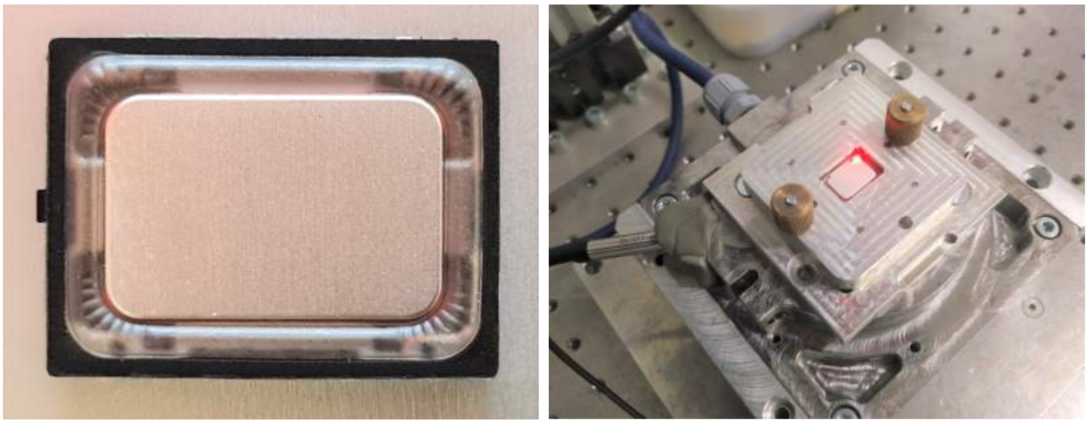
Die Kleinsignalmessung erfolgt bei einer Eingangsspannung mit $\hat{U} = 60\,mV$ Amplitude. Über die Messdauer wird die Frequenz in Form eines periodic chirps

$$U(t) = \hat{U}\cos\left(2\pi\left(f_0 + (f_1 - f_0)\,\frac{t}{t_1}\right)\right) \tag{3.23}$$

von $f_0 = 100\,Hz$ auf $f_1 = 2\,kHz$ kontinuierlich gesteigert. Die Dauer t_1 wird so gewählt, dass nahezu der eingeschwungene Zustand, welcher sich bei Anregung mit konstanter Frequenz einstellen würde, erreicht wird. Auf der Membranplatte ist ein Gitter von 3×3 Punkten definiert, an jedem dieser Punkte wird die Geschwindigkeit erfasst. Die Frequenzdaten der z-Auslenkungen, der Eingangsspannung und des Stroms werden während der Messung durch diskrete Fourier-Transformation berechnet. Zur Reduzierung des Einflusses von Rauschen wird die Messung dreimal wiederholt und komplex gemittelt. Bei Verwendung eines Rückvolumens muss, damit derselbe Hub erreicht wird, die Eingangsspannung leicht angepasst werden.

Passiv-Messung

Der Druck zur Anregung wird im Passivadapter erzeugt (Abbildung 3.3b). Mit dem Mikrophon im Gehäuse wird der Druck in Form eines proportionalen Signals gemessen. Zur Anregung wird dasselbe Signal wie bei der Aktiv-Messung benutzt, die Eingangsspannung wird an den Zielhub angepasst.



(a) Untersuchter Lautsprecher. (b) Passivadapter mit Mikrophon.

Abbildung 3.3.: Messaufbau mit Polytec Scanning Vibrometer für Kleinsignalmessungen. Quelle: Sound Solutions Austria.

3.4. Parameterschätzung

Minimierung von (3.2) liefert Schätzwerte für die Systemparameter $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Je nach verwendeten Übertragungsfunktionen können zwei Methoden unterschieden werden.

1. Aktiv - Passiv: Dafür ist eine Aktiv-Messung und eine Passiv-Messung erforderlich. Zur Identifikation werden die Frequenzgänge von Auslenkung zu Strom $\boldsymbol{H}_{xI}$, von Strom zu Spannung H_{IU} und Auslenkung zu Druck $\boldsymbol{H}_{xp^*}$ verwendet. Die gesuchten Parameter sind k, e_{kx}, e_{ky}, k_{Rxx}, k_{Ryy}, m, e_{Sx}, e_{Sy}, c, c_{Rxx}, c_{Ryy}, Bl, e_{Lx}, e_{Ly}, R_E, L_E undf_p.

2. Aktiv offen - Aktiv mit Rückvolumen: Dafür sind zwei Aktiv-Messungen erforderlich, eine mit und eine ohne Rückvolumen. Hier werden die Frequenzgänge von Auslenkung zu Strom $\boldsymbol{G}_{xI}$ und von Strom zu Spannung H_{IU} mit und ohne Rückvolumen verwendet. Die gesuchten Parameter sind k, e_{kx}, e_{ky}, k_{Rxx}, k_{Ryy}, m, e_{Sx}, e_{Sy}, c, c_{Rxx}, c_{Ryy}, Bl, e_{Lx}, e_{Ly}, R_E, L_E und k_B.

3.4.1. Lautsprecher mit unbekannter Rockingursache

Zunächst wurden 10 Teile mit der Aktiv-Passiv-Methode untersucht. Für eines dieser Teile ist in Abbildung 3.4 eine Gegenüberstellung von Messung und Modell dargestellt. An die Hubdaten z_i der einzelnen Messpunkte $(x_i,\, y_i)$ wird mittels linearer Regression eine Ebene mit den Parametern z_0, φ_x und φ_y angepasst. Das Regressionsmodell ist

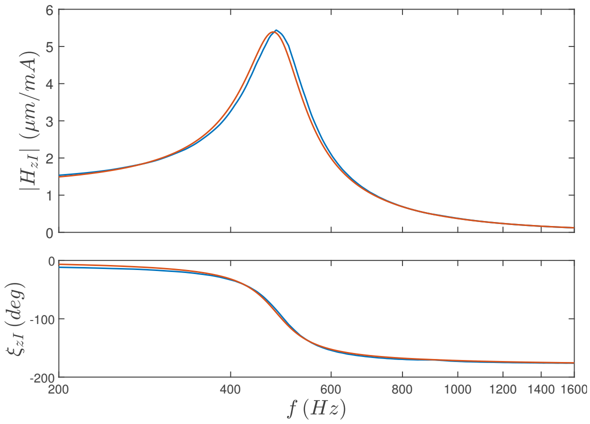
$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} z_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

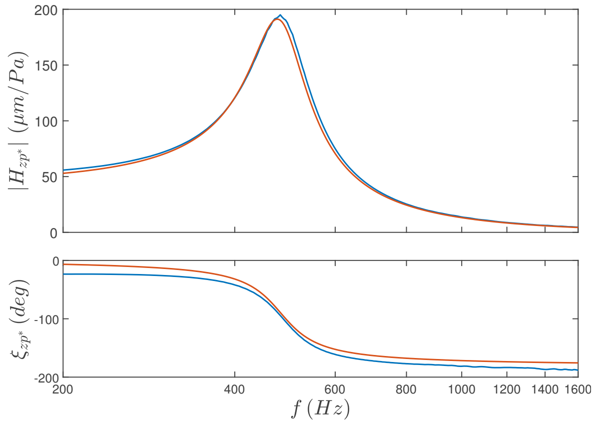
mit dem Vektor der abhängigen Variablen $\boldsymbol{z}$, der Datenmatrix $\boldsymbol{X}$, dem Parametervektor $\boldsymbol{\beta}$ und dem Fehler $\boldsymbol{e}$. Zur Minimierung von $\boldsymbol{e}$ wird wieder die Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet. Die Schätzwerte der Parameter des linearen Problems können mit

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{z} \tag{3.25}$$

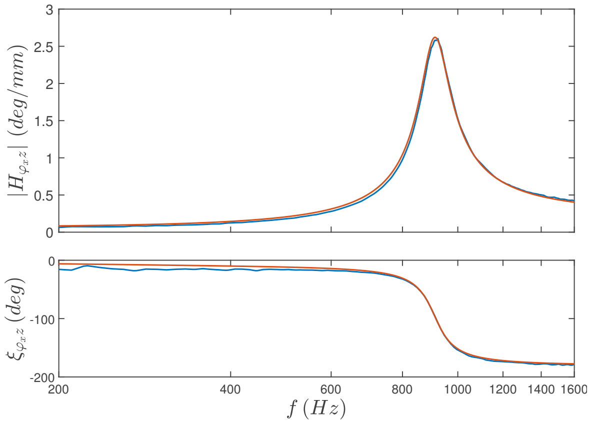
direkt berechnet werden. Anstatt der neun Messpunkte können mit den drei Parametern der Regressionsebene die Daten etwas übersichtlicher dargestellt werden. Laut Abbildung 3.4 konnten gute Ergebnisse erzielt und das Modell an die Messdaten angenähert werden. Lediglich die Hubkurven der Passivmessung weisen eine gewisse Welligkeit auf, welche aber aufgrund ihrer geringen Größenordnung erst im Rockingwinkel als solche ersichtlich wird (vgl. Abbildung 3.4d). Bei moderaten Amplituden kommt der Least-Squares-Löser damit gut zurecht, der Fit wird in die Mitte zwischen Wellenberge und -täler gelegt.



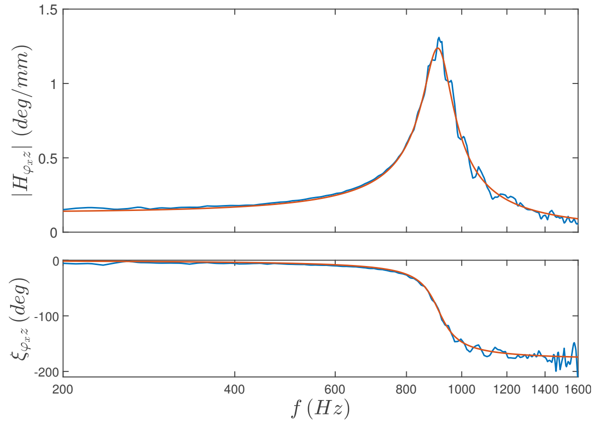
(a) Hub zu Strom (aktiv)



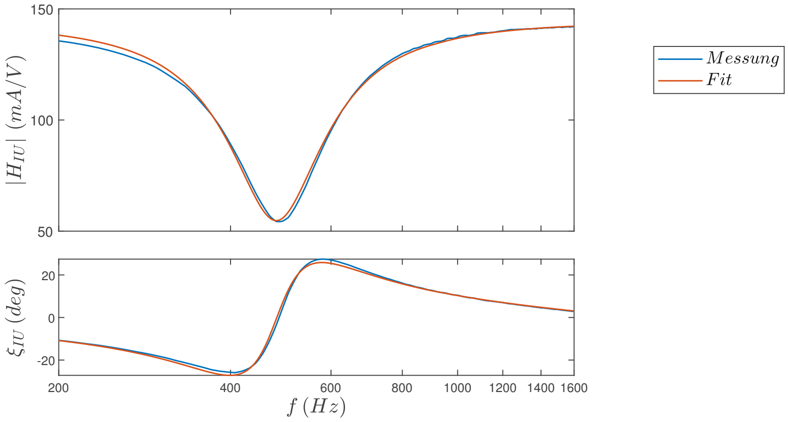
(b) Hub zu Druck (passiv)



(c) Relativer Winkel (aktiv)



(d) Relativer Winkel (passiv)



(e) Strom zu Spannung (aktiv)

Abbildung 3.4.: Frequenzgänge der Messung und des identifizierten Modells (Aktiv-Passiv-Methode).

3.4.2. Validierung im Zeitbereich

Bisher wurde das Modell durch die Übertragungsfunktion beschrieben. Für den Zeitbereich werden die Differentialgleichungen (2.37) und (2.41) in die Zustandsraum-Darstellung

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{B}U$$
$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{x}} \\ I \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \text{-}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & \text{-}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b_l} \\ \boldsymbol{0} & \text{-}\boldsymbol{b_l}^T/L_E & \text{-}R_E/L_E \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ 1/L_E \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

gebracht. Diese Form ist für Systeme erster Ordnung, daher muss die Ordnung des ursprünglichen Gleichungssystems reduziert werden. Aus diesem Grund ist neben $\boldsymbol{x}$ und I auch die Zeitableitung von $\boldsymbol{x}$ im Vektor der Zustandsvariablen enthalten. Das System (3.26) kann für beliebige Eingangssignale $U(t)$ mittels numerischer Integration gelöst werden. Für die folgenden Ergebnisse wurde ein Runge-Kutta-Verfahren[5] verwendet.

Um die Qualität des Modells im Zeitbereich beurteilen zu können, wird der im oberen Abschnitt im Frequenzbereich identifizierte Lautsprecher erneut gemessen. Als Eingang wird ein pseudo-random (periodic-random) Signal verwendet, welches üblicherweise durch inverse Fourier-Transformation eines zuvor im Frequenzbereich definierten flachen Spektrums erzeugt wird ([8] S. 235). Abbildung 3.5 zeigt einen Ausschnitt der gemessenen Eingangsspannung und die zugehörigen Ausgangssignale. Zum direkten Vergleich ist auch die Vorhersage des Modells für die Ausgangsgrößen bei gleichem Eingang dargestellt. Die Güte der Annäherung des Models an die Messdaten wird durch das Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2} \qquad 0 \leq R^2 \leq 1 \tag{3.27}$$

angegeben. Das Bestimmtheitsmaß der Impedanz ist ausgezeichnet, die Annäherung des Kolbenhubs ist mit $R^2 = 0.95$ ebenfalls gut. Die beiden Rocking-Winkel werden deutlich schlechter angenähert, dennoch ist ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 > 0.85$ akzeptabel.

[5]Matlab Funktion *ODE45*

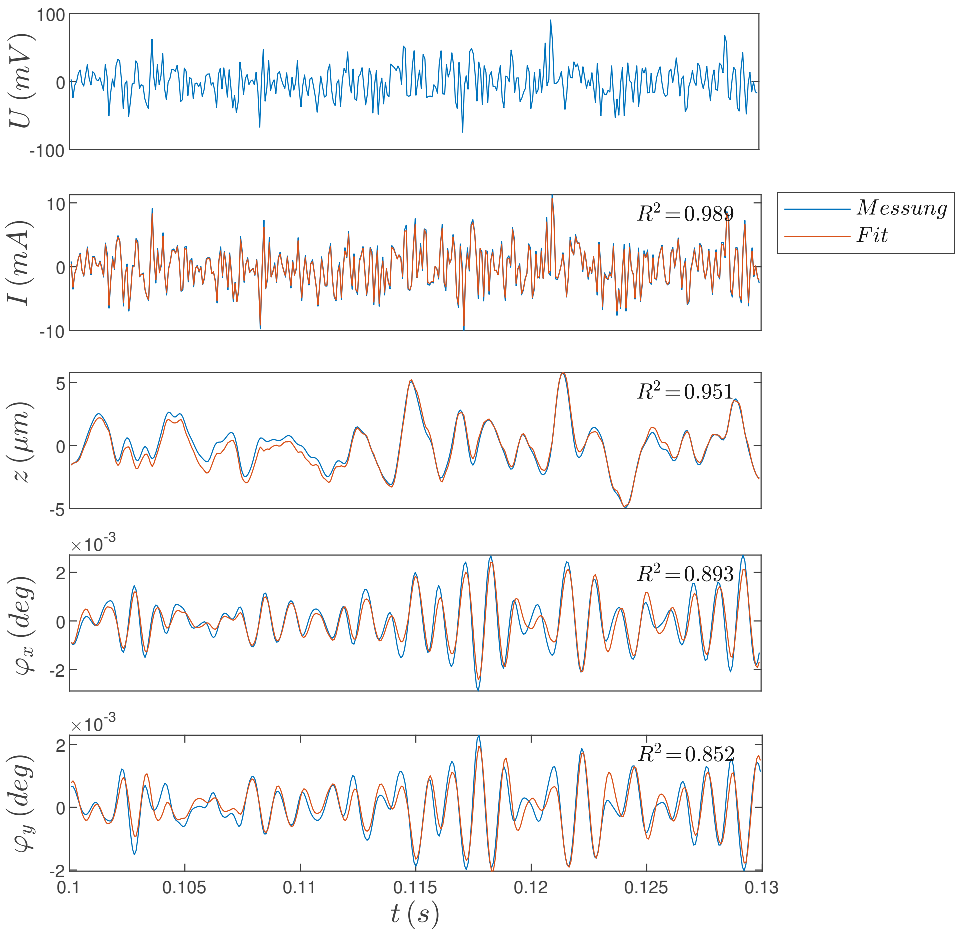


Abbildung 3.5.: Vergleich von Messdaten und simulierten Daten im Zeitbereich bei stochastischer Anregung.

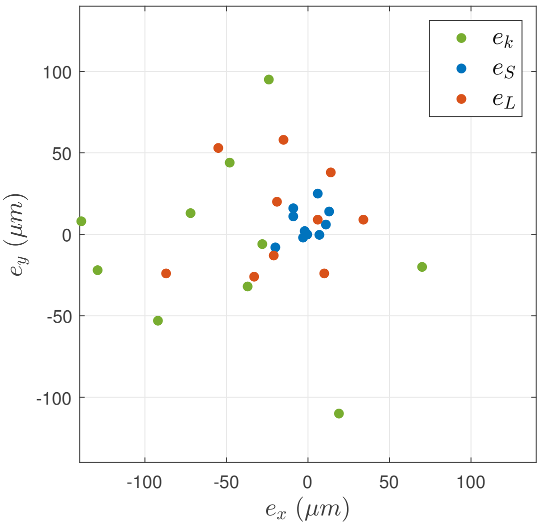


Abbildung 3.6.: Geschätzte Exzentrizitäten von zehn untersuchten Teilen.

Exzentrizitäten

Mit der Aktiv-Passiv-Methode wurden alle Systemparameter der zehn untersuchten Teile bestimmt. Insbesondere die Exzentrizitäten sind als Rocking-Ursachen von besonderer Bedeutung, sie sind in Abbildung 3.6 dargestellt. Diese Ergebnisse ermöglichen eine gezielte Fehlersuche bei schaukelnden Lautsprechern. Deshalb ist es notwendig, dass die Exzentrizitäten in der Lage sind Fehler richtig anzuzeigen.

3.4.3. Identifikation von verstimmten Lautsprechern

Um die aus den gemessenen Frequenzgängen mit der oben beschriebenen Methode geschätzten Systemparameter $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ überprüfen zu können, wird wiederum bewusst in das System eingegriffen. Zu diesem Zweck wurden gezielt Teile ohne nennenswerte Neigung zum Schaukeln ausgewählt und diese dann durch Einbringen einer bekannten Ursache verstimmt. Das Anbringen einer kleinen exzentrischen Punktmasse auf der Membranplatte verursacht eine ungleichmäßige Massenverteilung (Abbildung 3.8a-3.8c). Die Optik des Laser-Vibrometers ermöglicht eine relativ genaue Positionierung der Zusatzmasse, so kann deren Einfluss auch analytisch abgeschätzt werden.

Außerdem kann durch externe Permanentmagnete (Abbildung 3.8d-3.8f) der magnetische Fluss entlang des Luftspalts beeinflusst und so eine exzentrische Anregung hervorgerufen werden. Der Einfluss eines externen Magnetpaares ist in Abbildung 3.7 zu sehen. Der magnetische Fluss wurde mit einer Hallsonde entlang der Lufspalthöhe gemessen. Der Referenzpunkt ($h = 0$) befindet sich an der Oberseite des Center-Magneten. Neben der Referenzkurve ohne Verstimmung ist der gestärkte bzw. geschwächte Fluss bei Beeinflussung von außen nach Abbildung 3.8e aufgetragen. Die Identifikation von Lautsprechern mit bekannten Rocking-Ursachen erlaubt es die Methodik und insbesondere das Modell bis zu einem gewissen Grad zu verifizieren.

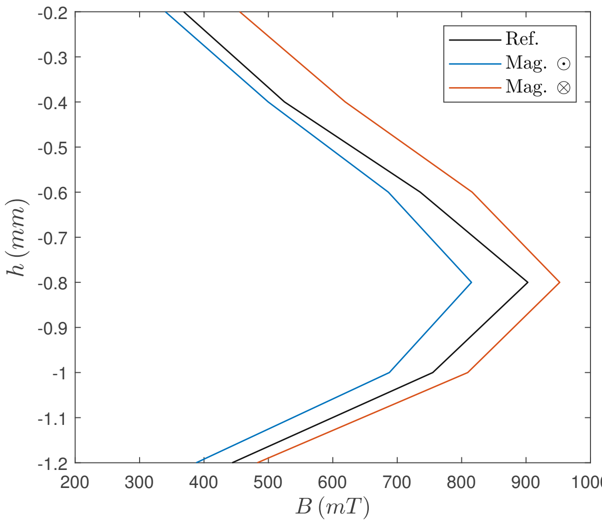
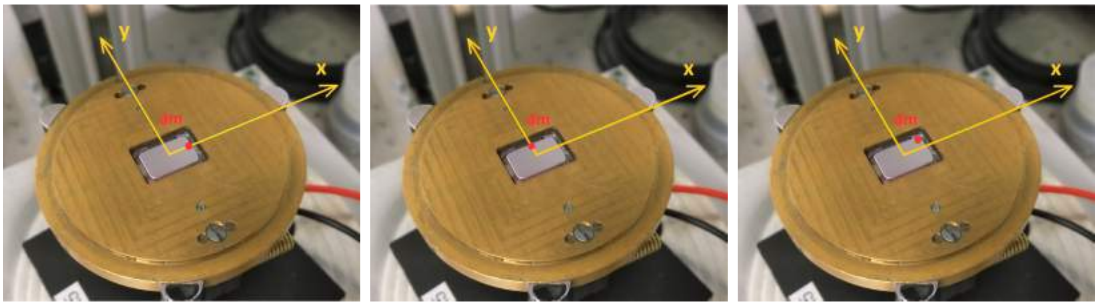
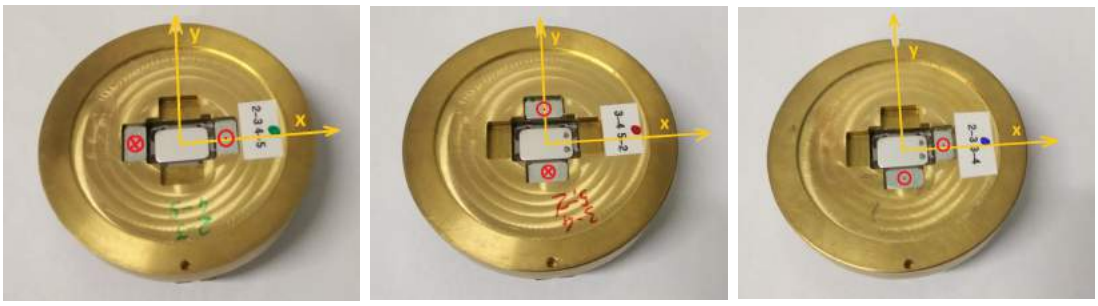


Abbildung 3.7.: Einfluss der B-Feld Verstimmung.



(a) Masse, $[x, y] = [4.2, 0]$ (b) Masse, $[x, y] = [0, 3]$ (c) Masse, $[x, y] = [4.2, 3]$



(d) $\odot$ Mag., $[x, y] = [\ 11, 0]$
$\otimes$ Mag., $[x, y] = [-11, 0]$
(e) $\odot$ Mag., $[x, y] = [0,\ \ 9]$
$\otimes$ Mag., $[x, y] = [0, -9]$
(f) $\odot$ Mag., $[x, y] = [11,\ \ 0]$
$\odot$ Mag., $[x, y] = [\ 0, -9]$

Abbildung 3.8.: Massen- und Magnetverstimmung, Längenangaben in mm.
Quelle: Sound Solutions Austria.

Die geschätzten Parameter einiger Messungen sind in Tabelle 3.1 und 3.2 aufgelistet. Diese Ergebnisse wurden mit der Aktiv-Passiv-Methode bestimmt.

Massen-Verstimmung

Die Massen-Verstimmung wird klar durch die Parameter e_{Sx}, e_{Sy} angezeigt (Tabelle 3.1). Im Vergleich zur Referenzmessung ist auch ein Anstieg der Masse zu beobachten, dieser wird aber etwas unterschätzt und erreicht nicht ganz die applizierten $2\,mg$. Die durch die Zusatzmasse m^* mit Abstand r_{m^*} verursachte Exzentrizität kann durch

$$\Delta e_S = \frac{m^*}{m^* + m} \left(r_{m^*} - e_S \right) \tag{3.28}$$

abgeschätzt werden. Bei anfänglich ausgeglichener Masse $m = 62\,mg$, $e_S = 0$ und einer Zusatzmasse von $m^* = 2\,mg$ in einem x-Abstand von $4.2\,mm$, ist demnach mit einer Zunahme der Exzentrizität von $+131\,\mu m$ zu rechnen. Laut Modell ist die Differenz des Schätzwerts $\hat{e}_{Sx}$ zur Referenz (ohne Zusatzmasse) $\Delta\hat{e}_{Sx} = +116\,\mu m$. Die geschätzte Exzentrizität wird also qualitativ richtig angezeigt und der Schätzwert ist auch quantitativ von plausibler Größenordnung. Bei derselben Masse in $y = 3\,mm$ steht die analytische

Berechnung von $+94\,\mu m$ einer Schätzung von $\Delta\hat{e}_{Sx} = +73\,\mu m$ gegenüber.

Alle anderen Exzentrizitäten sind von den Verstimmungen mit Zusatzmasse unbeeinflusst und bleiben wie erwartet nahezu konstant.

Weitere Verstimmungen mit in beiden Richtungen versetzten Massen liefern auch plausible Ergebnisse (vgl. Tabelle 3.1).

Bl-Verstimmung

Auch die Magnetfeld-Verstimmung wird durch die Parameter e_{Lx}, e_{Ly} richtig angezeigt (Tabelle 3.2). Bei Umkehrung der Orientierung der externen Magnete, ändern sich die Parameter relativ zur Referenzmessung in die entgegengesetzte Richtung, aber um nahezu den gleichen Betrag. Die anderen Exzentrizitäten bleiben auch hier unbeeinflusst. Bei gleicher, konstruktiver Polarisationsrichtung beider externer Magnete wird auch ein leichter Anstieg des Kraftfaktors Bl angezeigt, da der magnetische Fluss im Luftspalt in Summe zunimmt.

			Referenz	Zusatzmasse $2mg$		
				$x = 4.2mm$, $y = 0$	$x = 0$, $y = 3mm$	$x = 4.2mm$, $y = 3mm$
Masse	m	kg	$62,2E{-}6$	$63,1E{-}6$	$63,2E{-}6$	$63,7E{-}6$
Trägheitsmoment x	I_{Sxx}	kgm^2	$390,0E{-}12$	$390,0E{-}12$	$420,0E{-}12$	$420,0E{-}12$
Trägheitsmoment y	I_{Syy}	kgm^2	$640,0E{-}12$	$680,0E{-}12$	$640,0E{-}12$	$680,0E{-}12$
Massenexz. x	e_{Sx}	m	$-23,7E{-}6$	$92E{-}6$	$-24E{-}6$	$84E{-}6$
Massenexz. y	e_{Sy}	m	$17E{-}6$	$16E{-}6$	$89E{-}6$	$87E{-}6$
Steifigkeit z	k	N/m	$593E{+}0$	$579E{+}0$	$577E{+}0$	$581E{+}0$
Rot. Steifigkeit x	k_{Rxx}	Nm/rad	$14E{-}3$	$13E{-}3$	$14E{-}3$	$13E{-}3$
Rot. Steifigkeit y	k_{Ryy}	Nm/rad	$22E{-}3$	$20E{-}3$	$22E{-}3$	$20E{-}3$
Steifigkeitsexz. x	e_{kx}	m	$-103,9E{-}6$	$-108,6E{-}6$	$-106,8E{-}6$	$-95,5E{-}6$
Steifigkeitsexz. y	e_{ky}	m	$38,0E{-}6$	$32,3E{-}6$	$35,5E{-}6$	$35,5E{-}6$
Dämpfungskoeff. z	d	Ns/m	$43E{-}3$	$44E{-}3$	$43E{-}3$	$44E{-}3$
Rot. Dämpfungskoeff. x	d_{Rx}	Nms/rad	$244E{-}9$	$272E{-}9$	$277E{-}9$	$358E{-}9$
Rot. Dämpfungskoeff. y	d_{Ry}	Nms/rad	$385E{-}9$	$464E{-}9$	$377E{-}9$	$408E{-}9$
Kraftfaktor	Bl	Tm	$687E{-}3$	$683E{-}3$	$683E{-}3$	$686E{-}3$
Lorentzkraftexz. x	e_{Lx}	m	$-20E{-}6$	$-13E{-}6$	$-15E{-}6$	$-6E{-}6$
Lorentzkraftexz. y	e_{Ly}	m	$2E{-}6$	$-3E{-}6$	$8E{-}6$	$13E{-}6$
Gleichstromwiderst.	R_E	Ω	$7,0$	$7,0$	$7,1$	$7,1$
Induktivität	L_E	H	$49E{-}6$	$50E{-}6$	$49E{-}6$	$49E{-}6$
Druckfaktor	f_p	m^2	$25E{-}3$	$25E{-}3$	$24E{-}3$	$25E{-}3$

Tabelle 3.1.: Geschätzte Systemparameter von verstimmten Lautsprechern. (Teil 1 - Massenverstimmung)

		Externe Magnete					
		$\odot\ x = 11mm$ $\otimes\ x = -11mm$	$\odot\ x = -11mm$ $\otimes\ x = 11mm$	$\odot\ y = 9mm$ $\otimes\ y = -9mm$	$\odot\ y = -9mm$ $\otimes\ y = 9mm$	$\odot\ y = 11mm$ $\odot\ y = -9mm$	$\odot\ y = -11mm$ $\odot\ y = 9mm$
m	kg	$60,1E{-}6$	$61,2E{-}6$	$61,7E{-}6$	$61,2E{-}6$	$57,1E{-}6$	$61,7E{-}6$
I_{Sxx}	kgm^2	$390,0E{-}12$	$390,0E{-}12$	$390,0E{-}12$	$390,0E{-}12$	$390,0E{-}12$	$390,0E{-}12$
I_{Syy}	kgm^2	$640,0E{-}12$	$640,0E{-}12$	$640,0E{-}12$	$640,0E{-}12$	$640,0E{-}12$	$640,0E{-}12$
e_{Sx}	m	$-22E{-}6$	$-21E{-}6$	$-24E{-}6$	$-24E{-}6$	$-28E{-}6$	$-22E{-}6$
e_{Sy}	m	$17E{-}6$	$17E{-}6$	$15E{-}6$	$15E{-}6$	$16E{-}6$	$15E{-}6$
k	N/m	$570E{+}0$	$578E{+}0$	$583E{+}0$	$578E{+}0$	$542E{+}0$	$583E{+}0$
k_{Rxx}	Nm/rad	$13E{-}3$	$13E{-}3$	$14E{-}3$	$14E{-}3$	$14E{-}3$	$14E{-}3$
k_{Ryy}	Nm/rad	$20E{-}3$	$21E{-}3$	$21E{-}3$	$21E{-}3$	$20E{-}3$	$21E{-}3$
e_{kx}	m	$-91,3E{-}6$	$-87,7E{-}6$	$-104,0E{-}6$	$-106,4E{-}6$	$-103,0E{-}6$	$-91,6E{-}6$
e_{ky}	m	$38,3E{-}6$	$39,3E{-}6$	$24,7E{-}6$	$25,3E{-}6$	$27,7E{-}6$	$26,6E{-}6$
d	Ns/m	$43E{-}3$	$43E{-}3$	$43E{-}3$	$43E{-}3$	$43E{-}3$	$43E{-}3$
d_{Rx}	Nms/rad	$247E{-}9$	$227E{-}9$	$266E{-}9$	$269E{-}9$	$269E{-}9$	$265E{-}9$
d_{Ry}	Nms/rad	$381E{-}9$	$395E{-}9$	$364E{-}9$	$379E{-}9$	$272E{-}9$	$394E{-}9$
Bl	Tm	$677E{-}3$	$681E{-}3$	$682E{-}3$	$680E{-}3$	$692E{-}3$	$699E{-}3$
e_{Lx}	m	$77E{-}6$	$-116E{-}6$	$-18E{-}6$	$-20E{-}6$	$21E{-}6$	$-65E{-}6$
e_{Ly}	m	$3E{-}6$	$3E{-}6$	$120E{-}6$	$-115E{-}6$	$-54E{-}6$	$58E{-}6$
R_E	Ω	$7,0$	$7,1$	$7,1$	$7,1$	$7,2$	$7,2$
L_E	H	$50E{-}6$	$49E{-}6$	$49E{-}6$	$49E{-}6$	$52E{-}6$	$50E{-}6$
f_p	m^2	$24E{-}3$	$24E{-}3$	$25E{-}3$	$24E{-}3$	$24E{-}3$	$25E{-}3$

Tabelle 3.2.: Geschätzte Systemparameter von verstimmten Lautsprechern (Teil 2 - Magnetverstimmung)

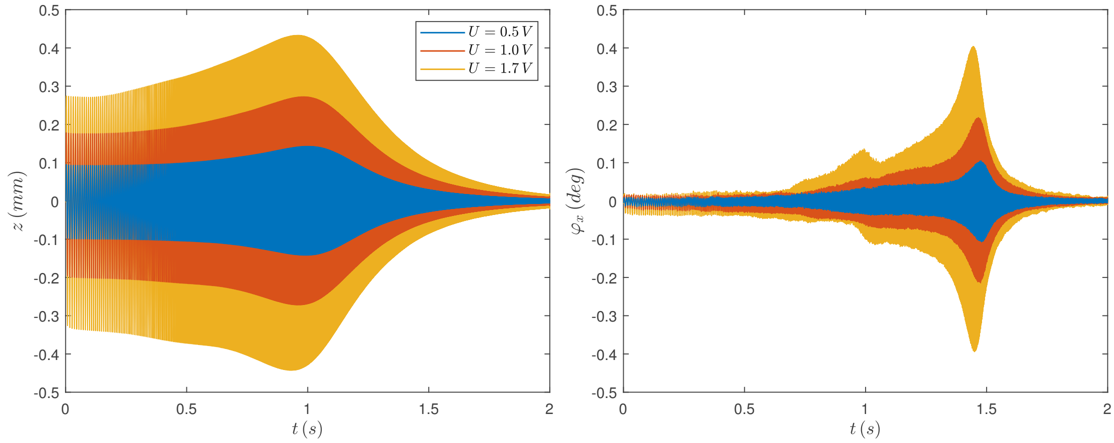
4. Nichtlineare Dynamik

4.1. Großsignalmessung - Modellgrenzen

Bei höheren Leistungen treten Effekte auf, welche von einem linearen Modell nicht beschrieben werden können. Um diese Effekte zu untersuchen, wurde ein zuvor im Kleinsignal untersuchter Lautsprecher erneut mit höherer Eingangspannung vermessen. Bei der Messung wurde ein Hubert A 1110-05-QE Verstärker und ein Keyence LK-H052 Laser verwendet. Das Eingangssignal (4.1) ist ein logarithmischer Chirp

$$U\left(t\right) = \hat{U}\cos\left(2\pi f_0 \left(\frac{f_1}{f_0}\right)^{\frac{t}{t_1}}\right). \tag{4.1}$$

Die Abbildungen 4.1a und 4.1b zeigen Messkurven des zuvor im Kleinsignal identifizierten Lautsprechers (vgl. Abbildung 3.4) bei höheren Leistungen ($0.5\,V$, $1\,V$ und $1.7\,V$ Eingangsspannung). Schon beim Zeitsignal können nichtlineare Effekte beobachtet werden. Die Eigenfrequenzen sind nicht mehr unabhängig von der Eingangsspannung



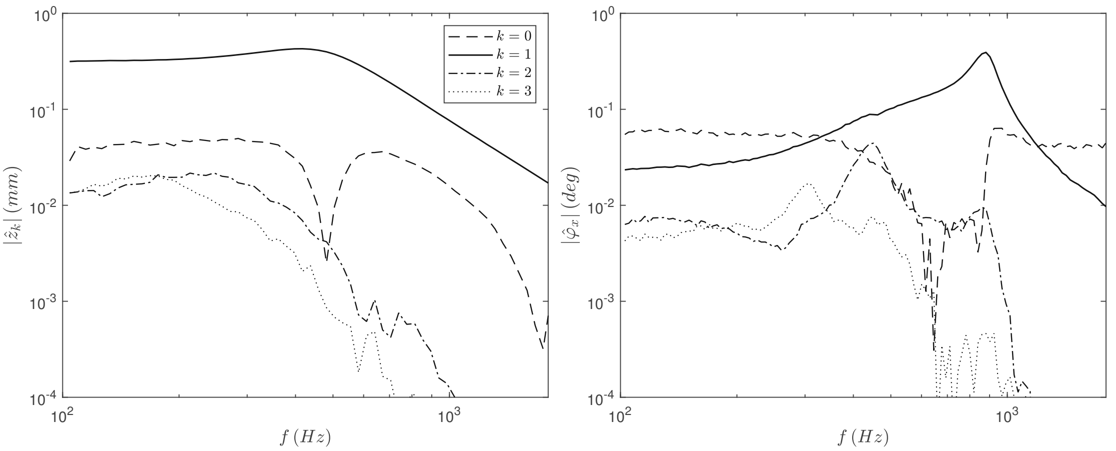
(a) Auslenkung (b) x-Rockingwinkel

Abbildung 4.1.: Zeitsignal von Hub und x-Schiefstellung bei Steigerung der Eingangsspannung.

und verschieben sich zu früheren Zeiten bzw. niedrigeren Frequenzen. Darüber hinaus weist das Zeitsignal des Winkels einen Gleichanteil und eine ausgeprägte Überhöhung bei $t \approx 1\,s$ auf. Mithilfe einer Spektralanalyse können die Frequenzanteile des Signals zu jedem Zeitpunkt geschätzt werden. Hierbei wird das Signal in einzelne Abschnitte (Fenster) unterteilt und diese anschließend einer FFT unterzogen [13]. Zur Berechnung der Kurzzeit-Fourier-Transformation (STFT) wurde die Matlab Funktion *spectrogram* verwendet.

Abbildung 4.3 zeigt die Ergebnisse der STFT-Analyse. Hier ist der Betrag der Fourierspektra von Hub und Schiefstellung, mit den Koeffizienten $\hat{z}_k$ bzw. $\hat{\varphi}_{xk}$ und den zugehörigen Frequenzen f_k, über die anregende Frequenz f zum Zeitpunkt t aufgetragen. Abbildung 4.3a und 4.3b zeigen die Ergebnisse einer Kleinsignalmessung bei $60\,mV$ (Polytec). Wie erwartet besteht die Systemantwort fast ausschließlich aus Frequenzanteilen im unmittelbaren Nahbereich der Anregung f. Im Gegensatz dazu weisen Messungen bei $1.7\,V$ (Abbildung 4.3c und 4.3d) neben der Grundfrequenz auf der Diagonalen auch Anteile höherer Frequenzen und einen statischen Anteil auf. Diese treten, wie bei Harmonischen üblich, an ganzzahlig Vielfachen $k = 0, 1, \ldots$ der Grundfrequenz auf. Die Verzerrungen des Zeitsignals können damit höheren Harmonischen zugeordnet werden.

Für den Hub hält sich der Betrag der harmonischen Verzerrungen in Grenzen. Die nächste höhere Harmonische mit doppelter Frequenz ist mehr als eine Größenordnung kleiner (vgl. Abbildung 4.2a). Der Gleichanteil mit $k = 0$ ist neben der Grundschwingung betragsmäßig am größten. Bei Anregung mit tiefen Frequenzen ist dieser knapp eine Größenordnung kleiner und verschwindet bei hohen Frequenzen. Harmonischen Verzer-

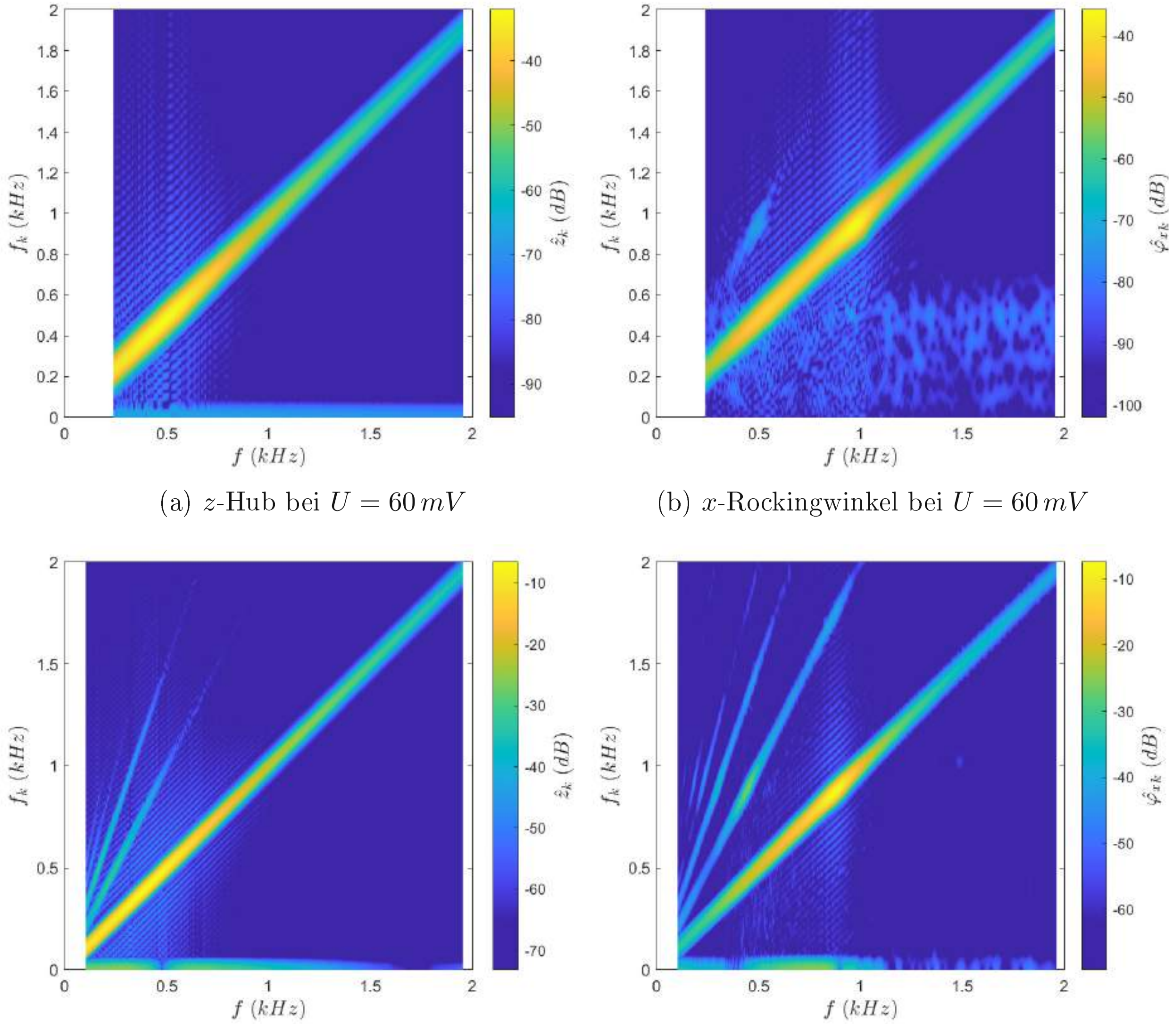


(a) Hub z (b) Rockingwinkel φ_x

Abbildung 4.2.: Harmonische Anteile der Systemantwort über Grundfrequenz bei $1.7\,V$.

rungen des Kolbenhubs ist bereits eine Vielzahl an Literatur gewidmet. Deren Ursachen und Auswirkungen sind z.B. in [14] beschrieben.

Beim Rocking-Winkel sind die harmonischen Verzerrungen deutlich ausgeprägter (vgl. Abbildung 4.2b). In gewissen Frequenzbereichen übersteigt der Betrag des Gleichanteils sogar die Grundschwingung, wodurch der Offset und damit die asymmetrische Form des Zeitsignals verursacht wird. Die Überhöhung bei $t \approx 1\,s$ wird hauptsächlich durch die zweite Harmonische verursacht, darüber hinaus sind auch Anteile höherer Ordnung messbar.



(a) z-Hub bei $U = 60\,mV$

(b) x-Rockingwinkel bei $U = 60\,mV$

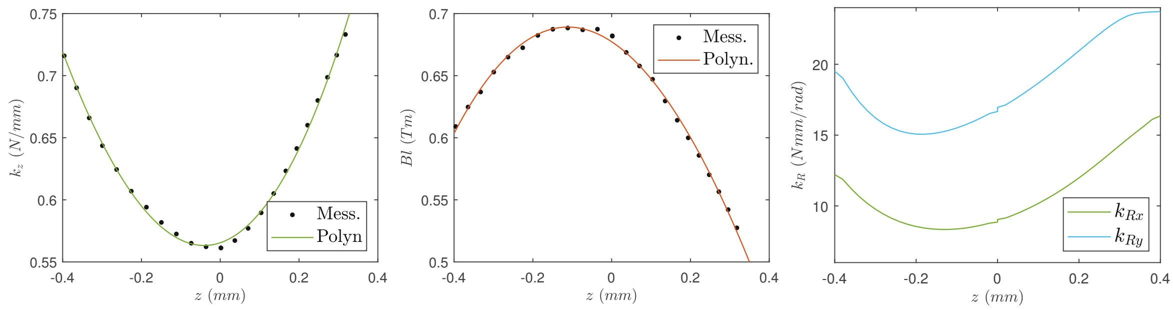
(c) z-Hub bei $U = 1.7\,V$

(d) x-Rockingwinkel bei $U = 1.7\,V$

Abbildung 4.3.: STFT von z und φ_x über Erregungsfrequenz im Klein- und Großsignal.

4.2. Nichtlineares Modell

Klippel beschreibt in ([14] S. 3ff.) Ursachen für Nichtlinearitäten bei elektrodynamischen Lautsprechern. Für einen Großteil sind die hubabhängige Membransteifigkeit und die Ungleichmäßigkeit des Magnetfeldes im Luftspalt über die Magnethöhe verantwortlich. Abbildung 4.4 zeigt die Verläufe beider Größen für einen untersuchten Lautsprecher. Diese Kurven wurden mit einer quasi-statischen Messmethode erstellt. Dabei wird am Lautsprecher eine Wechselspannung mit kleiner Amplitude und einem überlagerten Gleichanteil angelegt. Durch inkrementelles Steigern der Gleichspannung wird der Wandler auf unterschiedlichen Hubniveaus betrieben. Aus Hub- und Stromdaten lassen sich die Verläufe von $k(z)$ und $Bl(z)$ bestimmen [14, 3].



(a) z-Steifigkeit (b) Kraftfaktor (c) Drehsteifigkeiten

Abbildung 4.4.: Steifigkeit und Kraftfaktor in Abhängigkeit der Auslenkung aus Messungen. Die Daten wurden durch ein Polynom 2. Grades angenähert. Die Drehsteifigkeiten wurden durch eine FE-Analyse bestimmt.

Diese Kurven zeigen, dass für größere Auslenkungen eine Erweiterung des linearen Gleichungssystems (2.40), (2.37) notwendig ist. Die konstanten Steifigkeiten k, k_{Rxx}, k_{Ryy} werden durch Polynome N.-Grades mit dem Hub z als Variable ersetzt $k_x\,(z) = \sum_{i=0}^{N} k_{xi} z^i$. Auch der Parameter Bl wird durch einen entsprechenden Ausdruck $Bl\,(z) = \sum_{i=0}^{N} Bl_i z^i$ substituiert. Somit ist die Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}\,(\boldsymbol{x})$ und der Vektor $\boldsymbol{b_l}\,(\boldsymbol{x})$ vom Lagevektor abhängig und man erhält ein nichtlineares System. Bei den weiteren Untersuchungen wurde auf die Induktivität L_E wegen des geringen Einflusses bei niedrigen Frequenzen verzichtet. Dadurch fällt der Strom aus dem Vektor der Zustandsvariablen aus Darstellung (3.26) heraus und man erhält

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\,\boldsymbol{q} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\,U\,,$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \dot{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{x}\right) & -\boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{C} + \frac{1}{R_E}\boldsymbol{b_l}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{b_l}^T(\boldsymbol{x})\right) \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{q}\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \frac{1}{R_E}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b_l}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

4.2.1. Periodische Lösungen

Das nichtlineare Differentialgleichungssystem (4.3) kann durch Integration über die Zeit numerisch gelöst werden. Für periodische Lösungen wird es gerade bei schwach gedämpften Systemen unter Umständen lange dauern bis sich ein eingeschwungener Zustand einstellt. Daher wird zum Auffinden von periodischen Orbits die Shooting-Methode verwendet[22, 12, 19]. Allgemein ist die Lösung $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\left(t, \boldsymbol{q}_0\right)$ vom Zeitpunkt t und den Anfangsbedingungen $\boldsymbol{q}_0$ abhängig. Für eine periodische Lösung gilt $\boldsymbol{q}\left(t, \boldsymbol{q}_0\right) = \boldsymbol{q}\left(t+T, \boldsymbol{q}_0\right)$, wobei die Periodendauer T bei autonomen Schwingungen nicht von vornherein bekannt ist ([19] S. 3). Bei erzwungenen Schwingungen kann T durch die Periodendauer der Anregung vorgegeben werden. Für eine angenommene Startbedingung $\boldsymbol{q}^0\left(t, \boldsymbol{q}_0\right)$ wird durch Integration die Lösung zum Zeitpunkt T ermittelt. Schließlich wird die periodische Lösung durch Optimierung der Periodizitätsbedingung

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{q}\left(T, \boldsymbol{q}_0\right) - \boldsymbol{q}_0 \tag{4.4}$$

berechnet. Zur Minimierung wird wie Matlab-Funktion *lsqnonlin* mit der Methode nach Levenberg-Marquardt verwendet.

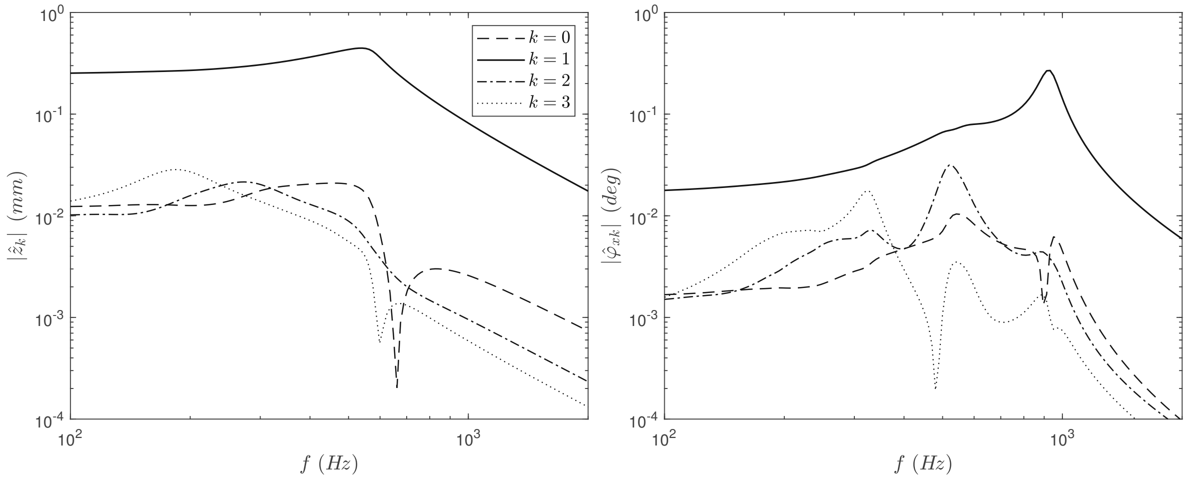
4.2.2. Ergebnisse des nichtlinearen Modells

Im folgenden Abschnitt werden die Messdaten aus Abbildung 4.1 mit Simulationsergebnissen des nichtlinearen Modells verglichen. Die geschätzten linearen Systemparameter des Lautsprechers im Kleinsignal werden um Terme höherer Ordnung aus Messungen bzw. FE-Simulation gewonnenen Daten ergänzt (Abbildung 4.4). Die verwendeten Parameter sind in Tabelle 4.1 aufgelistet. Die Simulationsergebnisse weisen dieselben Charakteristiken auf wie die Messdaten. Die harmonischen Anteile der simulierten, periodischen Lösung bei $1.7\,V$ in Abbildung 4.5 sind mit denen der Messkurven vergleichbar. Die

Simulationen unterscheiden sich durch einen geringeren Gleichanteil $k = 0$ von den Messdaten. Darüber hinaus wirkt der Hub bei Resonanz weitaus weniger gedämpft (4.5a). Weitere Ergebnisse zeigen, dass Berechnung und Messung nicht konsistent im Bezug auf die Leistungsabhängigkeit der Resonanzfrequenzen sind 4.6. Bei realen Lautsprechern geht mit steigender Eingangsspannung ein Abfall der Resonanzfrequenz, welche durch die Lage des Impedanzmaximums gekennzeichnet wird, einher [10]. Im Gegensatz dazu zeigen die Modellergebnisse eine Zunahme der Resonanzfrequenz und bei höherer Eingangsspannung deutlich weniger Dämpfung.

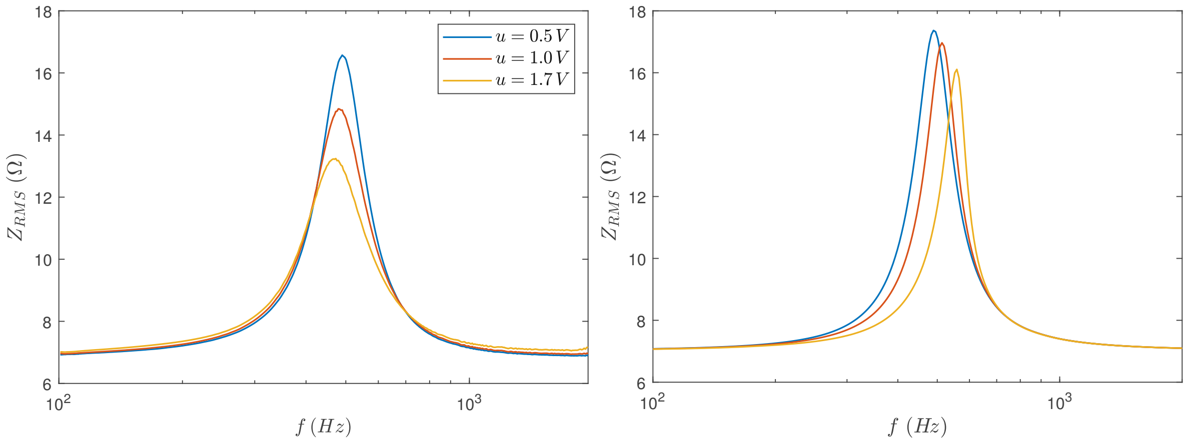
Parameter		**Ordnung i**		
		0	1	2
Masse	m	$61.5E{-}06\,kg$		
Trägheitsmoment x	I_{Sxx}	$390E{-}12\,kgm^2$		
Trägheitsmoment y	I_{Syy}	$640E{-}12\,kgm^2$		
Massenexz. x	e_{Sx}	$-2E{-}6\,m$		
Massenexz. y	e_{Sy}	$2E{-}6\,m$		
Steifigkeit z	k_i	$565\,N/m$	$107E3\,N/m^2$	$1.32E9\,N/m^3$
Rot. Steifigkeit x	k_{Rxi}	$13.0E{-}3\,Nm$	$8.2\,N$	$39.2E3\,N/m$
Rot. Steifigkeit y	k_{Ryi}	$19.2E{-}3\,Nm$	$12.6\,N$	$35.8E3\,N/m$
Steifigkeitsexz. x	e_{kx}	$92E{-}6\,m$		
Steifigkeitsexz. y	e_{ky}	$53E{-}6\,m$		
Dämpfungskoef. z	d	$43E{-}3\,Ns/m$		
Rot. Dämpfungskoef. x	d_{Rx}	$270E{-}9\,Nms$		
Rot. Dämpfungskoef. y	d_{Ry}	$450E{-}9\,Nms$		
Kraftfaktor	Bl_i	$670E{-}3\,Tm$	$-210\,T$	$-912E3\,T/m$
Lorentzkraftexz. x	e_{Lx}	$-33E{-}6\,m$		
Lorentzkraftexz. y	e_{Ly}	$-26E{-}6\,m$		
Gleichstromwiderst.	Re	$7.0\,\Omega$		

Tabelle 4.1.: Lineares System erweitert um nichtlineare Parameter.



(a) z-Hub (b) Rocking Winkel

Abbildung 4.5.: Harmonische Anteile



(a) Messung (b) Simulation

Abbildung 4.6.: Leistungsabhängigkeit der Resonanzfrequenz, Impedanz.

4.3. Untersuchung auf Parametererregung

In diesem Zusammenhang ist auch von Subharmonischen die Rede, da das System mit der halben Frequenz der Anregung antworten kann, wenn die Anregung in der Nähe einer doppelten Eigenfrequenz erfolgt. Cunningham konnte subharmonische Anteile experimentell im Schalldruck nachweisen ([5] S. 422). Bolaños hat dieses Verhalten bei elektrodynamischen Lautsprechern für den Kolbenhub beobachtet [1] und vermutet als Ursache hinter dem Phänomen der subharmonischen Frequenzen den Mechanismus der Parametererregung. Im Normalfall wird die Parametererregung von außen vorgegeben, es kann aber auch Auto-Parametererregung durch eine Eigenresonanz des Systems selbst auftreten ([17] S. 104). Im Allgemeinen sind die Bedingungen für das Auftreten von parametererregten Schwingungen bei herkömmlichen elektrodynamischen Lautsprechern ungünstig, daher tritt das Phänomen eher selten auf. Sollte es doch zur Parametererregung kommen, sind nur kleine Wachstumsraten zu erwarten [5]. Diese Aussagen beziehen sich allerdings auf die translatorische Bewegung. Das Auftreten von Parameterresonanzen wird stark von der Dämpfung bestimmt. Die Drehbewegung ist wesentlich geringer gedämpft als der Hub in z-Richtung, daher ist hier das Auftreten von parametererregten Schwingungen mit größeren Wachstumsraten wahrscheinlicher.

4.3.1. Rocking ohne direkte Anregung

Im folgenden Abschnitt wird der Frage nachgegangen, ob Rocking auch ohne direkte Anregung auftreten kann — also auch wenn alle Exzentrizitäten null sind und das System perfekt ausbalanciert ist.

In diesem Fall verschwinden ebenso alle Koppelterme in den Matrizen, wodurch die einzelnen Differentialgleichungen entkoppelt sind und unabhängig voneinander gelöst werden können. Für den linearen Fall, dass k_z konstant ist, entspricht die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{z} + \left(c + \frac{Bl^2}{R_E}\right)\dot{z} + kz = \frac{Bl}{R_E} U\,(t) \tag{4.5}$$

der Gleichung eines einfachen Einmassenschwingers. Für harmonische Erregung kann die Lösung

$$z(t) = |H_{zU}|(\Omega)\,\hat{U}\cos\left(\Omega t - \zeta_{zu}(\Omega)\right) \tag{4.6}$$

direkt angeschrieben werden [1]. Da die Differentialgleichungen für beide Winkel ähnlich sind, muss nur eine Achse betrachtet werden. Bei zentrischer Erregung wird durch die Lorentzkraft kein Moment erzeugt und es bleibt nur der homogene Anteil der ursprünglichen Differentialgleichung übrig.

$$I_S\ddot{\varphi} + c_R\,\dot{\varphi} + k_R\,(z)\,\varphi = 0 \tag{4.8}$$

Die hubabhängige Rotationssteifigkeit wird zunächst durch ein Polynom ersten Grades modelliert. Dieser Ansatz führt auf ein anschauliches Ergebnis und wie nachfolgend ersichtlich wird, sind Terme höherer Ordnung von untergeordneter Bedeutung. Durch Einsetzen der Lösung des Hubs (4.6) in $k_R\,(z) = k_{R0} + k_{R1}z$ wird der Ausdruck für die Drehsteifigkeit zeitabhängig. Einführen der dimensionslosen Zeit $\tau = \Omega t$ und Anpassen der Differentiale führt zu

$$\begin{aligned} &\varphi'' + \delta\varphi' + [\lambda + \gamma\cos(\tau - \zeta_{zu})]\,\varphi = 0 \\ &\delta = \frac{c_R}{I_S\Omega},\ \lambda = \frac{k_{R0}}{I_S\Omega^2},\ \gamma = \frac{k_{R1}|H_{zU}|\hat{U}}{I_S\Omega^2}\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Diese Gleichung ähnelt der Mathieuschen Differentialgleichung

$$x'' + [\lambda + \gamma\cos(\tau)]\,x = 0 \tag{4.10}$$

und unterscheidet sich von dieser nur durch die Phasenbeziehung ζ_{zU} und den Dämpfungsterm $\delta\varphi'$. Die Mathieuschen Gleichung ist bekannt dafür, dass bei geeigneter Wahl der Parameter λ und γ und Anwesenheit einer kleinen Anfangsstörung parametererregte Schwingungen auftreten können ([17] S. 114). Im vorliegende Fall wird die Rotationssteifigkeit über ihre nichtlineare Abhängigkeit durch die erzwungene Schwingung des Kolbenhubs moduliert (Auto-Parametererregung). Ein ähnlicher Mechanismus einer Kopplung von direkter- und parametererregter Schwingung wird von Jia in [11] untersucht.

[1] Die komplexe Übertagungsfunktion eines Einmassenschwingers aus [7], wird an den vorliegenden Fall angepasst. Unter Verwendung von Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, Frequenzverhältnis $\eta = \Omega/\omega_0$ und Dämpfungsmaß $\theta_t = \left(c + Bl^2/Re\right)/\left(2\sqrt{mk}\right)$ ergibt sich die Übertragungsfunktion von Auslenkung zu Spannung

$$H_{zU} = \frac{Bl}{R_E k_z}\frac{1}{1 - \eta^2 + i2\theta_t\eta}, \qquad \zeta_{zU} = \arg\left(H_{zU}\right). \tag{4.7}$$

4.3.2. Stabilitätsuntersuchung von periodischen Lösungen

Mit der Floquet Theorie (siehe Anhang A.3) ist es möglich, die Stabilität eines periodischen Systems zu bestimmen. Im Rahmen einer Parameterstudie konnten so Bereiche ausgemacht werden, welche besonders anfällig für instabiles Verhalten aufgrund von Parametererregung sind. Damit werden anschließend sogenannte Stabilitätskarten nach Ince und Strutt erstellt. Für das System (4.9) sind die Ergebnisse in Form einer Stabilitätskarte in Abbildung 4.7 dargestellt. Für besagte Analyse wurde die z-Amplitude über den Frequenzbereich konstant gehalten, indem die Eingangsspannung entsprechend angepasst wurde. Dadurch wird der Einfluss des Amplitudenfrequenzganges auf den Parameter γ eliminiert. Die eingezeichneten Punkte markieren die instabilen Bereiche. Davon ist ein Großteil des Gebietes physikalisch nicht sinnvoll, da dort die Gesamtsteifigkeit $k_R(z)$ negativ ist (graue Bereiche). Aber ein kleiner Teil des instabilen Gebietes ist auch mit praktisch relevanten Parametern erreichbar (rote Bereiche).

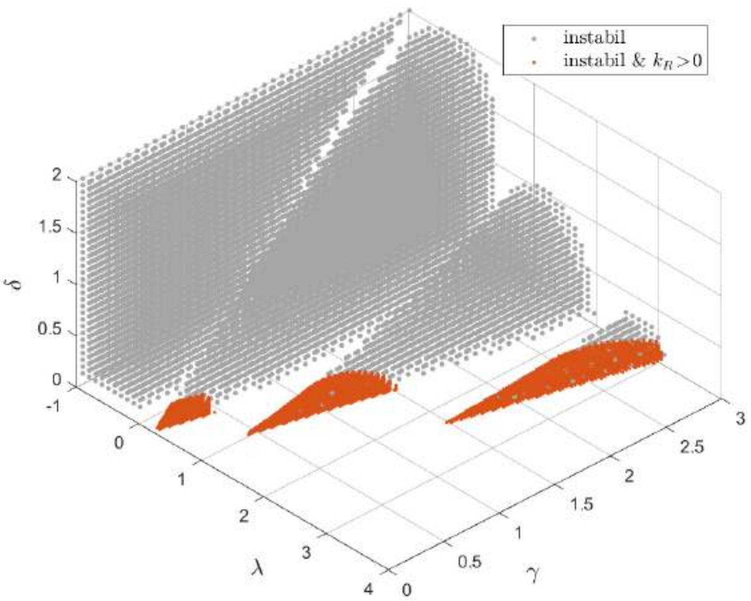
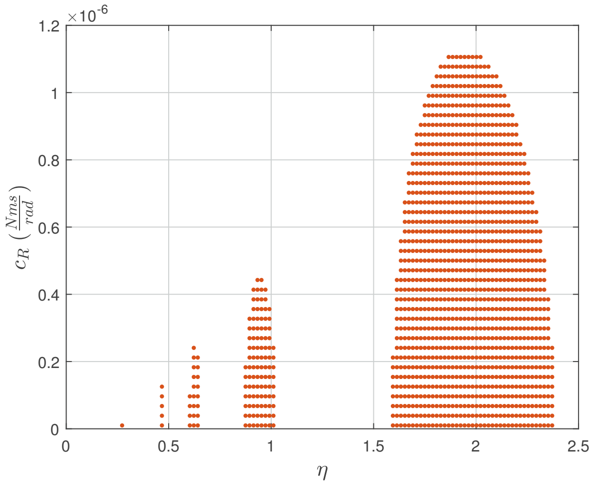


Abbildung 4.7.: Stabilitätskarte der Mathieuschen Gleichung inkl. Dämpfung. Parameter: $k_{z0} = 437\,N/m$, $m = 6.2E{-}05\,kg$, $c = 0.05\,Ns/m$, $Bl = 0.76\,Tm$, $k_{R0} = 2E{-}2\,Nm/rad$, $I_S = 3.9E{-}10\,kgm^2$, $k_{R1} = 0 \ldots 1.0E2\,Nm/rad/m$, $c_R = 1.0E{-}7 \ldots 1.0E{-}6\,Nms/rad$, $\eta = 0.5 \ldots 2.5$.

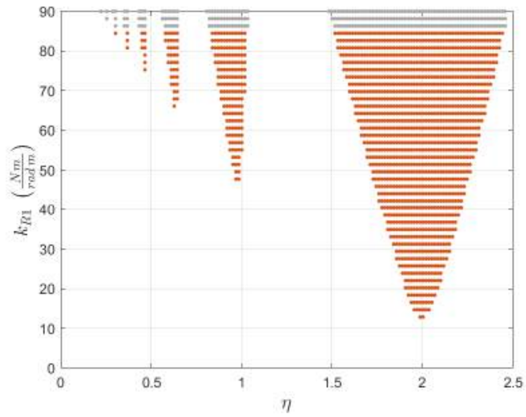
Typisch für die Mathieusche Gleichung sind die instabilen Bereiche bei speziellen Werten von λ (0.25, 1, 2.25, 4 ...). Der Parameter ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Frequenzverhältnisses η. Die Spitzen liegen genau bei $\eta = 2/N$ mit $N \in \mathbb{N}$, diese Frequenzverhältnisse haben daher eine besondere Bedeutung.

Parameterstudie

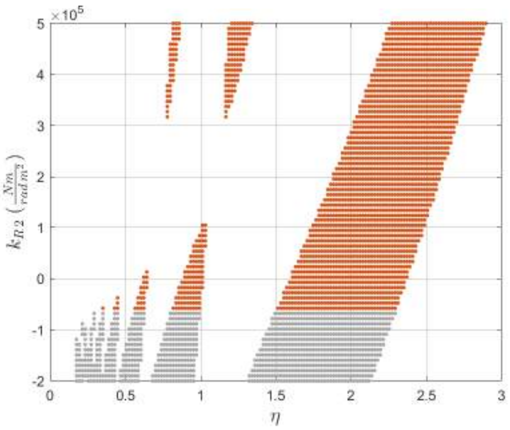
Es wurden weitere Stabilitätsanalysen durchgeführt, diesmal auch unter Berücksichtigung der Nichtlinearität der z-Steifigkeit (bis zum quadratischen Term). Auch bei dieser Analyse wurde die Hubamplitude konstant gehalten. Ohne diese Anpassung ist das Auftreten von Instabilitäten bei Erregungsfrequenzen oberhalb der Kolbenresonanz schwerer, da die Amplitude der modulierten Parameter mit dem Hub skaliert und dieser ab der Kolbenresonanz f_0 stark abfällt. Diese Vorgangsweise (Equalization) ist auch in der Praxis üblich, um auch in hohen Frequenzbereichen genug Hub zu erzeugen [4]. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.8 dargestellt. Damit Instabilitäten auftreten können, muss der Dämpfungskoeffizient klein genug sein (Abbildung 4.8a). Mit der im ersten Teil dieser Arbeit vorgestellten Methode wurden Koeffizienten in der Größenordnung von $c_R \approx 2E{-}7\,Nms/rad$ bestimmt; bei bestimmten Frequenzverhältnissen ($\eta = 2/N$, $N = 1, 2, \ldots$) sind daher Instabilitäten durchaus möglich. Vorausgesetzt der asymmetrische Steifigkeitsparameter k_{R1} und der Hub sind groß genug (Abbildung 4.8b). Hinzufügen des symmetrischen Koeffizienten k_{R2} der Steifigkeit verkleinert die instabilen Regionen (außer bei $\eta = 2$) bis sie schließlich ganz verschwinden (Abbildung 4.8c). Ab einem gewissen Betrag bewirkt k_{R2} das Gegenteil und die instabilen Regionen breiten sich erneut aus. Selbst wenn die Steifigkeit symmetrisch bezüglich z ist ($k_{R1} = 0$, $k_{R2} \neq 0$) sind Instabilitäten möglich. In diesem Fall fehlt die Zunge bei $\eta = 2$, da die Steifigkeit mit der zweifachen Frequenz moduliert wird. Damit dieser Fall eintritt sind sehr hohe Werte von k_{R2} notwendig. Ein signifikanter Einfluss einer nichtlinearen z-Steifigkeit wurde nicht beobachtet.



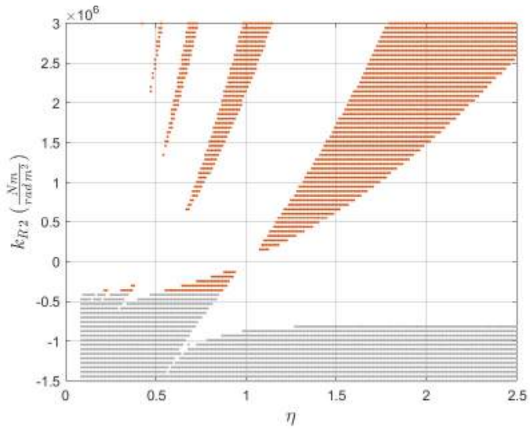
(a) Variablen: d_R, η. $k_{R1} = 80\,Nm/(rad\,m)$, $k_{R2} = 0\,Nm/(rad\,m^2)$



(b) Variablen: k_{R1}, η. $c_R = 2.0E{-}7\,Nms/rad$, $k_{R2} = 0\,Nm/(rad\,m^2)$



(c) Variation von k_{R2} und η, $c_R = 2.0E{-}7 Nms/rad$, $k_{R1} = 80 Nm/(rad\,m)$)



(d) Variablen: k_{R2}, η. $c_R = 2.0E{-}7\,Nms/rad$, $k_{R1} = 0\,Nm/(rad\,m)$)

Abbildung 4.8.: Stabilitätsanalyse bei Variation der Systemparameter η, d_R, k_{R1} und k_{R2}.
Konstante Parameter: $k_{z0} = 437\,N/m$, $m = 6.2E{-}05\,kg$, $c = 0.05\,Ns/m$, $Bl = 0.76\,Tm$, $k_{R0} = 2E{-}2\,Nm/rad$, $I_S = 3.9E{-}10\,kgm^2$

4.3.3. Subharmonisches Rocking beim realen Lautsprecher

Bei den untersuchten Lautsprechern konnte subharmonisches Rocking provoziert werden. Der Effekt trat erst bei hohen Eingangsspannungen $U \geq 3.0\,V$ und bei Anregungsfrequenzen in der Nähe von $1350\,Hz$ auf (Abbildung 4.9, Anhang A.4). Dabei handelt es sich um einen Lautsprecher, welcher im Normalfall kaum zum Rocking neigt. Wird bei entsprechender Eingangsspannungen die Anregungsfrequenz langsam erhöht, tritt ab einer Grenzfrequenz plötzlich sehr starkes Rocking auf, welches bei weiterer Erhöhung und Verlassen eines gewissen Frequenzbereichs wieder rasch abklingt. Die Amplituden sind wesentlich größer als bei normalem Rocking. In manchen Fällen führt die Schrägstellung dazu, dass die Spule am Magnetsystem streift, was deutlich als ein Störgeräusch zu hören ist. Beide Schwingungsformen sind in Abbildung 4.9 gegenübergestellt und über den Phasenwinkel zur Eingangspannung ξ dargestellt. Die Dauer einer Rocking-Schwingung entspricht der doppelten Periodendauer der Kolbenschwingung bzw. Anregung. Während einer Periode der Eingangsspannung findet nur eine halbe Rockingschwingung statt. Diese Form von Rocking tritt nicht exakt bei der doppelten Rockingeigenfrequenz auf, welche im Kleinsignal $f_{R0,60mV} = 954\,Hz$ beträgt. Dennoch ist durch die stärkere thermische Belastung bei der hohen Eingangsspannung von $3\,V$ ein maßgeblicher Abfall der Eigenfrequenz zu erwarten. Schon bei den vorhergehenden Messungen mit $1.7V$ fiel die Rockingfrequenz auf $f_{R0,1.7V} = 880\,Hz$.

Durch Verkürzung der Messzeit und Einschränkung des Frequenzbereichs kann der Temperatureinfluss vermindert werden. Abbildung 4.10 zeigt die Ergebnisse einer Messung, bei welcher die Hubdaten aller Punkte gleichzeitig erfasst wurden. Bereits die Hubkurven der vier Eckpunkte weisen auf ausgeprägtes Rocking von $1500 - 1650\,Hz$ hin. Die mittels Regression berechneten Winkel zeigen, dass der Lautsprecher mit halber Anregungsfrequenz um die x-Achse (Längsachse) rockt.

ξ	**Kolbenschwingung** $f = 1.3\,kHz$, $U = 2.5\,V$	**Subharmonisches Rocking** $f = 1.3\,kHz$, $U = 3.0\,V$

0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π

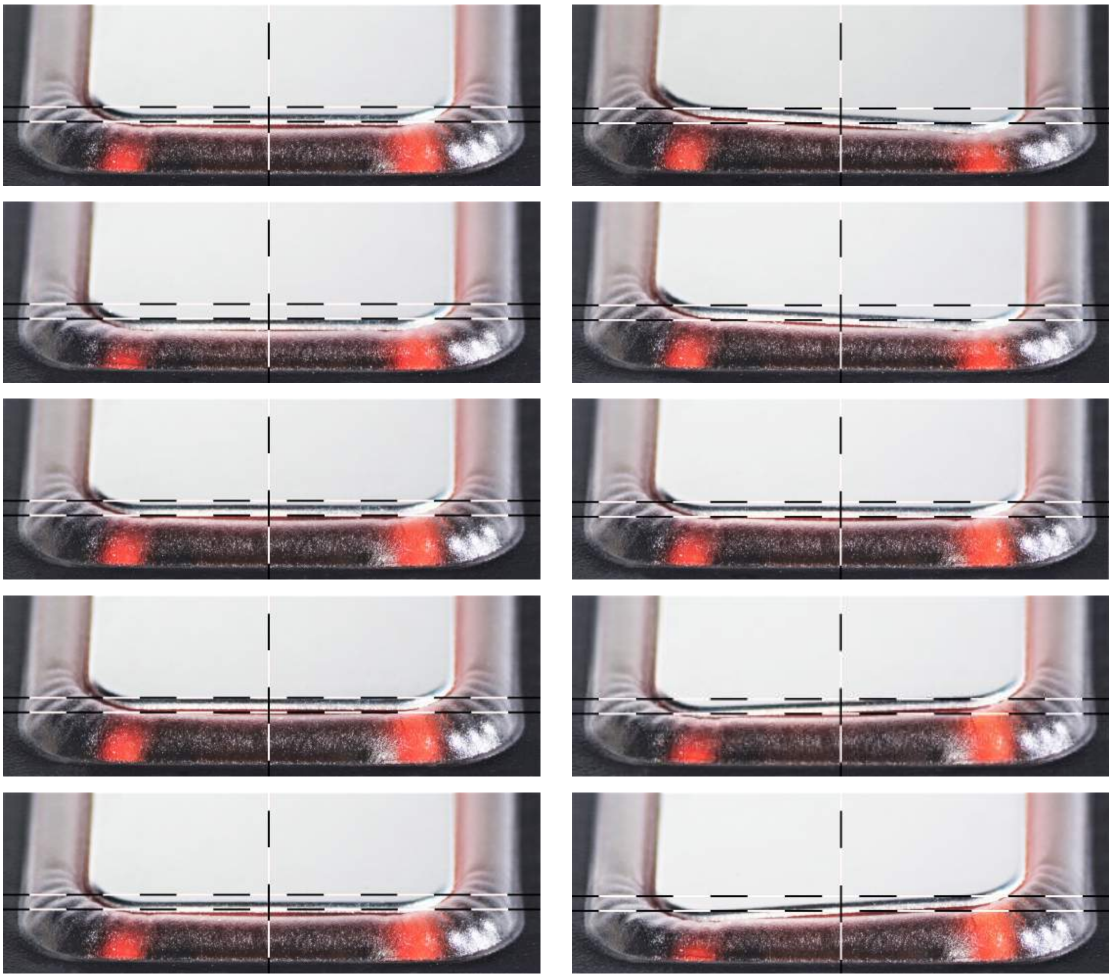
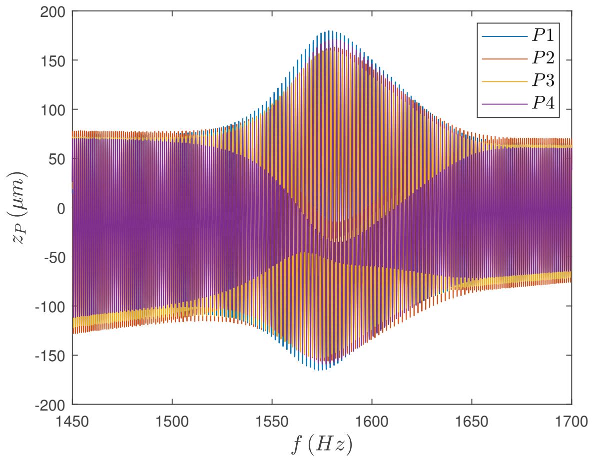
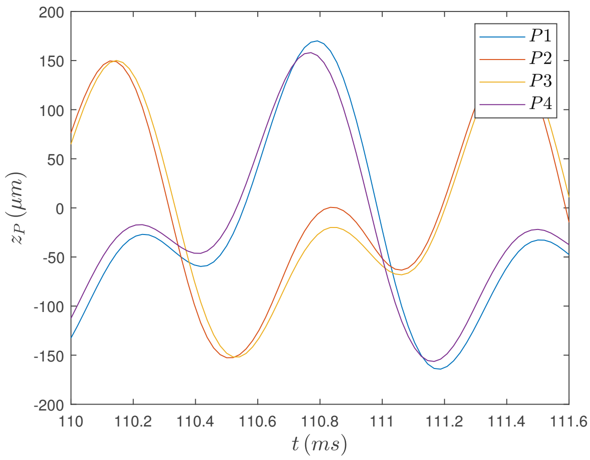


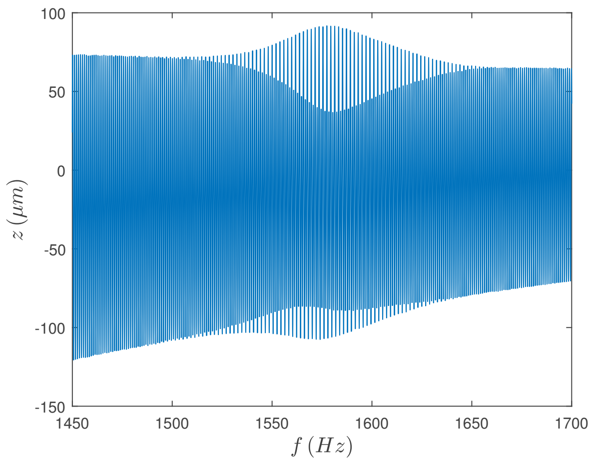
Abbildung 4.9.: Kolben- und subharmonische Rockingschwingung bei verschiedenen Phasen ξ. Die horizontalen Markierungen kennzeichnen die Totpunkte der Kolbenschwingung.



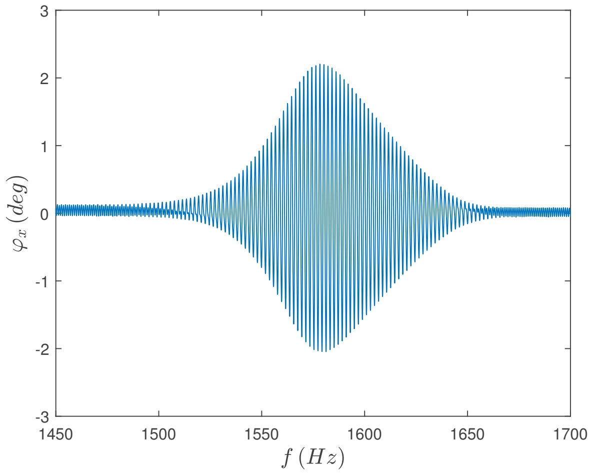
(a) Hubkurven der vier Eckpunkte.



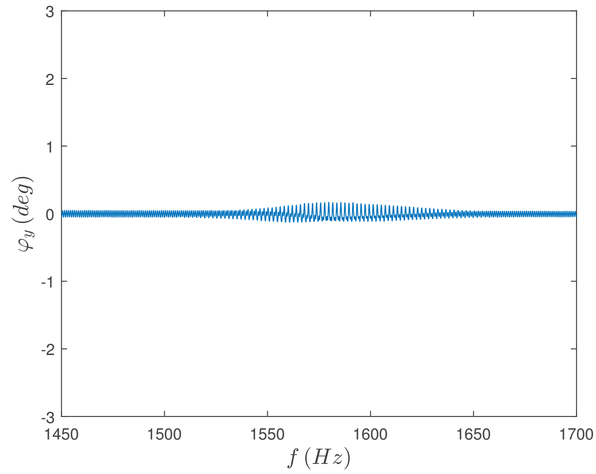
(b) Schwingungsform bei 1580 Hz.



(c) Mittelpunktauslenkung.



(d) x-Rockingwinkel.



(e) y-Rockingwinkel.

Abbildung 4.10.: Subharmonisches Rocking bei 1580 Hz, Eingangsspannung 4.3 V

5. Fazit

In Kapitel 2 wurde ein Modell vorgestellt mit welchem Vorhersagen über das Kleinsignalverhalten von Lautsprechern getroffen werden können. In Abhängigkeit der Modellparameter können die Auswirkungen etwaiger Ungenauigkeiten studiert werden. Die Vorhersagen für einzelne Rocking-Ursachen, wie Massen- und Anregungsexzentrizität, konnten bei Lautsprechern experimentell durch das Anbringen von Massen und Magneten bestätigt werden. Die in Kapitel 3 beschriebene Methode ist in der Lage die Kleinsignalparameter von realen Lautsprechern durch Angleichen der Modellvorhersage an Messdaten zu identifizieren, allerdings müssen zwei der 19 Systemparameter vorgegeben werden. Dabei handelt es sich um die zwei Trägheitsmomente der beiden Rockinghauptachsen, welche aber gut durch ihre Massengeometrie abschätzbar sind. Zur Identifikation der restlichen 16 Parameter war die Hinzunahme einer zweiten Messbedingung erforderlich, eine Identifikation aus nur einer Aktiv-Messung mit Spannung-, Strom- und Hubsignal war nicht möglich. Mit dem Algorithmus konnten Richtungen und Beträge von bekannten Exzentrizitäten bei verstimmten Lautsprechern bestimmt werden.

Mit einer Erweiterung des linearen Systems um hubabhängige Parameter durch Einbeziehen von Termen höherer Ordnung war es möglich harmonische Verzerrungen aus Messdaten bis zu einem gewissen Grad nachzubilden. Konkret wurden die nichtlinearen Kennlinien von Steifigkeiten und Kraftfaktor berücksichtigt. Die progressiven Steifigkeitskurven führen beim Modell bei höherer elektrischer Spannung zu höheren Eigenfrequenzen; Messdaten zeigten den gegenteiligen Effekt. Im Modell ist die freiwerdende Wärme nicht abgebildet, aber in der Realität erreicht die Spule beachtliche Temperaturen von bis zu 150°C. Bei Erwärmung sinkt die Steifigkeit der Membran und darüber hinaus wird auch das restliche System beeinflusst. An sich ist die Membran eine sehr komplexe Struktur bei der auch viskoelastische Effekte auftreten können. Die Modellierung der Dämpfungseigenschaften durch konstante Dämpfungskoeffizienten lieferte bei hohen Auslenkungen keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Die Erweiterung von Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften durch komplexere Modelle wäre denkbar.

Zuletzt wurden einige periodische Lösungen auf Instabilität durch Auto-Parametererregung untersucht. Eine Parameterstudie ergab, dass theoretisch auch bei den untersuchten Lautsprechern das Auftreten des Mechanismus der Parametererregung möglich ist und subharmonisches Rocking hervorrufen kann. Bei der untersuchten Gruppe von Lautsprechern konnte spontanes Rocking in einem engen Frequenzbereich mit der halben Frequenz der Anregung nachgewiesen werden.

Theoretisch ist der Effekt am wahrscheinlichsten bei Anregung mit der doppelten Rockingfrequenz. Damit keine Instabilität durch Parametererregung auftritt, muss die Amplitude der Modulation des entsprechenden Parameters unter dem Schwellenwert liegen. Im Fall des Rockings sind möglichst symmetrische Drehsteifigkeitskennlinien bezüglich z vorteilhaft. Außerdem hängt die Variation des Parameters auch vom Hub ab. Daher ist es ungünstig, wenn die Rocking-Eigenfrequenz die Hälfte der Piston-Eigenfrequenz beträgt. In diesem Fall wird bei Piston-Resonanz die Drehsteifigkeit über die maximale Amplitude des Hubs an dem besonders ungünstigen Frequenzverhältnis $\eta = 2$ moduliert (vgl. [11]). Von Vorteil sind symmetrische, moderat progressive Kennlinien und eine hohe Drehdämpfung.

Literatur

[1] Fernando Bolaños. “Measurement and Analysis of Subharmonics and Other Distortions in Compression Drivers”. In: *Audio Engineering Society Convention 118*. 2005. URL: `http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=13233`.

[2] A. Bright. *Active Control of Loudspeakers: An Investigation of Practical Applications*. Ørsted DTU, Acoustic Technology, Technical University of Denmark, 2002.

[3] David Clark. “precision measurement of loudspeaker parameters”. In: *journal of the audio engineering society* (1997).

[4] Martin Colloms und Paul Darlington. “Developments in Loudspeaker System Design”. In: *High Performance Loudspeakers*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2018.

[5] W. J. Cunningham. “The Growth of Subharmonic Oscillations”. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* (1951). URL: `https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.1906781`.

[6] Clarence W De Silva. *Vibration : fundamentals and practice*. Boca Raton, Fla. [u.a.]: CRC Press, 2000.

[7] *DIN 1311-2:2002-08 Schwingungen und Schwingungsfähige Systeme*. Norm. 2002.

[8] David J Ewins. *Modal testing : theory, practice and application*. Baldock: Research Studies Pr., 2000.

[9] Veit Ivar. *Technische Akustik*. Würzburg, DE, 1996.

[10] M. Jaskuła und W. Mickiewicz. “The effect of lowering the resonant frequency of the loudspeaker during impedance measurement as a function of the signal power”. In: *2013 18th International Conference on Methods Models in Automation Robotics (MMAR)*. 2013, S. 701–704.

[11] Yu Jia und Ashwin A. Seshia. “An auto-parametrically excited vibration energy harvester”. In: *Sensors and Actuators A: Physical* (2014). URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924424714004075`.

[12] Gaetan Kerschen. *Modal analysis of nonlinear mechanical systems.* Wien [u.a.]: Springer, 2014.

[13] Uwe Kiencke, Michael Schwarz und Thomas Weickert. *Signalverarbeitung, Zeit-Frequenz-Analyse und Schätzverfahren.* Oldenbourg Verlag, 2008.

[14] Wolfgang Klippel. "Loudspeaker Nonlinearities – Causes, Parameters, Symptoms". In: *Audio Engineering Society Convention 119.* 2005. URL: `http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=13346`.

[15] Wolfgang Klippel und William Cardenas. "Modeling of Rocking Modes in Electroacoustic Transducers". In: *J. Audio Eng. Soc* (2016). URL: `http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=18530`.

[16] Till Jochen Kniffka. *Numerical, semi-analytical and analytical approaches for investigating parametrically excited non-linear systems.* Wien: TU Wien, 2016. URL: `https://resolver.obvsg.at/urn:nbn:at:at-ubtuw:1-6900`.

[17] Kurt Magnus, Karl Popp und Walter Sextro. *Schwingungen: Eine Einführung in die physikalischen Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.

[18] Jorge N. Moreno. "Measurement of Loudspeaker Parameters Using a Laser Velocity Transducer and Two-Channel FFT Analysis". In: *J. Audio Eng. Soc* (1991). URL: `http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=5988`.

[19] Muriël Peeters u. a. "Computation of nonlinear normal modes, Part I: Numerical continuation in Matlab". In: *Sixth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, Saint Petersbourg, 2008.* Liege, Belgium: University of Liege, 2008.

[20] Rik Pintelon und Johan Schoukens. *System Identification: A Frequency Domain Approach.* New York: John Wiley & Sons, 2012.

[21] Richard H. Small. "Direct Radiator Loudspeaker System Analysis". In: *J. Audio Eng. Soc* (1972). URL: `http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=2066`.

[22] S. Stoykov und S. Margenov. "Numerical computation of periodic responses of nonlinear large-scale systems by shooting method". In: *Computers & Mathematics with Applications* (2014).

[23] Francis S. Tse, Ivan E. Morse und Rolland T. Hinkle. *Mechanical vibrations.* Boston, Mass. [u.a.]: Allyn und Bacon, 1980.

[24] Ferdinand Verhulst. *Nonlinear differential equations and dynamical systems.* Berlin [u.a.]: Springer, 1996.

[25] Manfred Zollner und Eberhard Zwicker. *Elektroakustik.* Berlin [u.a.]: Springer, 1993.

A. Anhang

A.1. Integration eines geraden Kurvenstücks

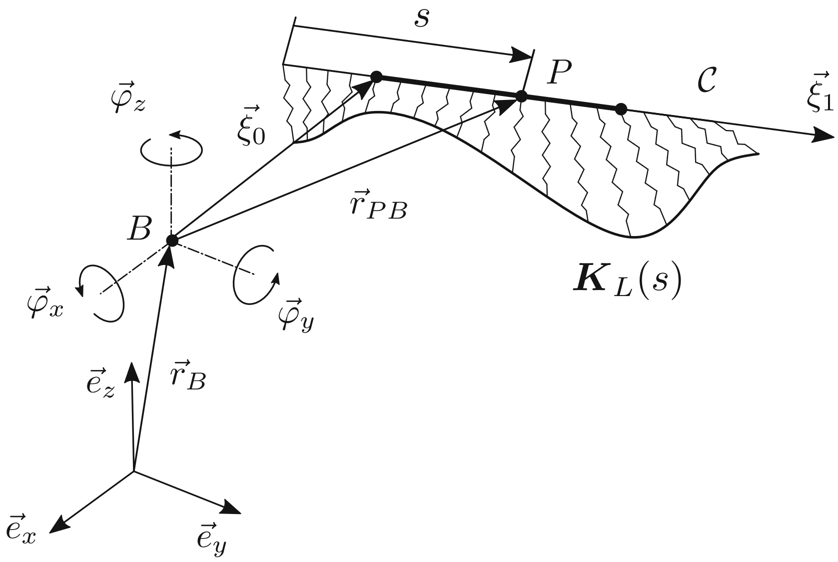


Abbildung A.1.: Gerades Kurvenelement, die Drehbewegung erfolgt um den Bezugspunkt B. Die Anbindung wird durch die lokale Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_L$ beschrieben.

Die Parameterdarstellung eines geraden Stückes $l_1 \leq s \leq l_2$ mit der Länge s der Kurve als Parameter ist

$$\underline{\xi} = \left\{ \begin{bmatrix} \xi_{0x} \\ \xi_{0y} \\ \xi_{0z} \end{bmatrix} + (s - l_1) \begin{bmatrix} \xi_{1x} \\ \xi_{1y} \\ \xi_{1z} \end{bmatrix} \quad \text{if } l_1 \leq s < l_2 \quad . \right. \tag{A.1}$$

Der Vektor der resultierenden Kraft ergibt sich durch das Integral

$$\vec{F} = \int_{l_1}^{l_2} \begin{bmatrix} k^x \left(x + \varphi_y \xi_z - \varphi_z \xi_y\right) \\ k^y \left(y + \varphi_z \xi_x - \varphi_x \xi_z\right) \\ k^z \left(z + \varphi_x \xi_y - \varphi_y \xi_x\right) \end{bmatrix} \, ds \tag{A.2}$$

entlang des Kurvenstückes. Beispielhaft ergibt sich das Integral über die erste Komponente des Kraftvektors

$$\begin{aligned} F_x = & \int_{l_1}^{l_2} k^x \left(x + \varphi_y \left(\xi_{0z} + \left(s - l_1\right) \xi_{1z}\right) - \varphi_z \left(\xi_{0y} + \left(s - l_1\right) \xi_{1y}\right)\right) \, ds \\ = & \, x \int_{l_1}^{l_2} k^x \, ds + \varphi_y \int_{l_1}^{l_2} k^x \left(\xi_{0z} + \left(s - l_1\right) \xi_{1z}\right) \, ds \\ & - \varphi_z \int_{l_1}^{l_2} k^x \left(\xi_{0y} + \left(s - l_1\right) \xi_{1y}\right) \, ds \end{aligned} \quad . \tag{A.3}$$

Interpretiert man $k^x ds$ als Flächenstück, dann ist $x \int_{l_1}^{l_2} k^x ds$ die Fläche entlang des Weges s, welche man auch durch $\bar{k}^x \left(l_2 - l_1\right)$ ersetzen kann. Dabei ist $\bar{k}^x$ die effektive Steifigkeit pro Längeneinheit des Kurvenstücks. Auf ähnliche Weise kann man das Flächenmoment 1. Grades $\int_{l_1}^{l_2} k^x s \, ds$ mithilfe der Definition des Flächenschwerpunkts

$$s_x = \frac{\left(\int_A x \, dA\right)}{\left(\int_A dA\right)} \tag{A.4}$$

durch $\bar{k}^x s_0^x$ ersetzen. s_0^x ist der Abstand des Flächenschwerpunkts zum Ursprung in Richtung des Kurvenstücks. Mit den restlichen Größen vereinfachen sich die Ausdruck zu

$$\begin{aligned} F_x = & \, \bar{k}^x \left(l_2 - l_1\right) \left[x + \varphi_y \left(\xi_{0z} + \left(s_0^x - l_1\right) \xi_{1z}\right) - \varphi_z \left(\xi_{0y} + \left(s_0^x - l_1\right) \xi_{1y}\right)\right] \\ = & \, \bar{k}^x \left(l_2 - l_1\right) \left(x + \varphi_y s_z^x - \varphi_z s_y^x\right) \end{aligned} \tag{A.5}$$

und es tauchen nur mehr die Komponenten des Schwerpunktabstands zum Bezugspunkt s_z^x, s_y^x auf. Die verbleibenden Komponenten des Kraftvektors können durch zyklisches Vertauschen angeschrieben werden. Dasselbe Vorgehen wird für das resultierende Moment um den Bezugspunkt B angewandt. Zusätzlich zu den bereits genannten Größen treten hier auch Flächenmomente 2. Grades (z.B Θ^z_{xy}) auf.

$$\vec{M}_B = \int_{l_1}^{l_2} \begin{bmatrix} \xi_y \left[k^z \left(z + \varphi_x \xi_y - \varphi_y \xi_x\right)\right] - \xi_z \left[k^y \left(y + \varphi_z \xi_x - \varphi_x \xi_z\right)\right] \\ \xi_z \left[k^x \left(x + \varphi_y \xi_z - \varphi_z \xi_y\right)\right] - \xi_x \left[k^z \left(z + \varphi_x \xi_y - \varphi_y \xi_x\right)\right] \\ \xi_x \left[k^y \left(y + \varphi_z \xi_x - \varphi_x \xi_z\right)\right] - \xi_y \left[k^x \left(x + \varphi_y \xi_z - \varphi_z \xi_y\right)\right] \end{bmatrix} ds \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned} M_{Bx} = \int_{l_1}^{l_2} & \left(\xi_{0y} + (s - l_1)\,\xi_{1y}\right) \\ & \quad \left[k^z \left(z + \varphi_x \left(\xi_{0y} + (s - l_1)\,\xi_{1y}\right) - \varphi_y \left(\xi_{0x} + (s - l_1)\,\xi_{1x}\right)\right)\right] \\ & - \left(\xi_{0z} + (s - l_1)\ \xi_{1z}\right) \\ & \quad \left[k^y \left(y + \varphi_z \left(\xi_{0x} + (s - l_1)\,\xi_{1x}\right) - \varphi_x \left(\xi_{0z} + (s - l_1)\,\xi_{1z}\right)\right)\right]\ ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{Bx} = {} & z \int_{l_1}^{l_2} k^z \left(\xi_{0y} + (s - l_1)\,\xi_{1y}\right)\ ds \\ & + \varphi_x \int_{l_1}^{l_2} k^z \left(\xi_{0y} + (s - l_1)\,\xi_{1y}\right)^2\ ds \\ & - \varphi_y \int_{l_1}^{l_2} k^z \left(\xi_{0y} + (s - l_1)\,\xi_{1y}\right)\left(\xi_{0x} + (s - l_1)\,\xi_{1x}\right)\ ds \\ & - y \int_{l_1}^{l_2} k^y \left(\xi_{0z} + (s - l_1)\,\xi_{1z}\right)\ ds \\ & - \varphi_z \int_{l_1}^{l_2} k^y \left(\xi_{0x} + (s - l_1)\,\xi_{1x}\right)\left(\xi_{0z} + (s - l_1)\,\xi_{1z}\right)\ ds \\ & + \varphi_x \int_{l_1}^{l_2} k^y \left(\xi_{0z} + (s - l_1)\,\xi_{1z}\right)^2\ ds \end{aligned} \tag{A.7}$$

Das erste Integral von A.7 ist bereits von oben bekannt. Das zweite Integral

$$\begin{aligned} & \int_{l_1}^{l_2} k^z \left(\xi_{0y} + (s - l_1)\,\xi_{1y}\right)^2\ ds = \\ & \quad = \int_{l_1}^{l_2} k^z \left(\xi_{0y}^2 + 2\,(s - l_1)\,\xi_{0y}\xi_{1y} + (s - l_1)^2\,\xi_{1y}^2\right)\ ds \\ & \quad = \bar{k}^z\,(l_2 - l_1)\left(\xi_{0y}^2 + 2 s_1^z \xi_{0y}\xi_{1y} + \theta_1^{z\,2}\xi_{1y}^2\right) \\ & \quad = \bar{k}^z\,(l_2 - l_1)\,\theta_{xx}^{z\ 2} \\ & \quad = \Theta^z_{xx} \end{aligned} \tag{A.8}$$

stellt den Widerstand der z-Steifigkeitsverteilung gegen eine Drehung um eine zu y parallele Achse durch den Punkt B dar und wird durch Θ^z_{xx} ersetzt. Bei entsprechend ungleichmäßiger Verteilung der Bettung in $z-$Richtung stellt das dritte Integral

$$\begin{aligned}
&\int_{l_1}^{l_2} k^z \left(\xi_{0y} + (s-l_1)\,\xi_{1y}\right)\left(\xi_{0x} + (s-l_1)\,\xi_{1x}\right)\,ds = \\
&\quad= \int_{l_1}^{l_2} k^z \left(\xi_{0y}\xi_{0x} + (s-l_1)\,\xi_{0y}\xi_{1x} + (s-l_1)\,\xi_{1y}\xi_{0x} + (s-l_1)^2\,\xi_{1y}\xi_{1x}\right)\,ds = \\
&\quad= \bar{k}^z\,(l_2-l_1)\left(\xi_{0y}\xi_{0x} + s_1^z\xi_{0y}\xi_{1x} + s_1^z\xi_{1y}\xi_{0x}\right) + \Theta_{1xy}^z = \\
&\quad= \Theta_{xy}^z
\end{aligned} \tag{A.9}$$

einen Koppelterm zwischen den Rotationen um x und y dar. Das Integral wird zur besseren Übersicht durch Θ_{xy}^z ersetzt. Somit ergibt sich das Gesamtmoment in x-Richtung um B

$$\begin{aligned}
M_{Bx} = \bar{k}^z\,(l_2-l_1)\,zs_y^z + \varphi_x\Theta_{xx}^z - \varphi_y\Theta_{xy}^z \\
- \bar{k}^y\,(l_2-l_1)\,ys_z + \varphi_x\Theta_{xx}^y - \varphi_z\Theta_{xz}^y
\end{aligned}, \tag{A.10}$$

die restlichen Momente erhält man wieder durch zyklisches Vertauschen. Schließlich können die Freiheitsgrade und die Kräfte bzw. Momente in der verallgemeinerten Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{f}$ zusammengefasst werden. Deren Zusammenhang

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \tag{A.11}$$

wird über die Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix}
\bar{k}^x l & 0 & 0 & 0 & \bar{k}^x l s_z^x & -\bar{k}^x l s_y^x \\
0 & \bar{k}^y l & 0 & -\bar{k}^y l s_z^y & 0 & \bar{k}^y l s_x^y \\
0 & 0 & \bar{k}^z l & \bar{k}^z l s_y^z & -\bar{k}^z l s_x^z & 0 \\
0 & -\bar{k}^y l s_z^y & \bar{k}^z l s_y^z & \Theta_{xx}^z + \Theta_{xx}^y & -\Theta_{xy}^z & -\Theta_{xz}^y \\
\bar{k}^x l s_z^x & 0 & -\bar{k}^z l s_x^z & -\Theta_{yx}^z & \Theta_{yy}^x + \Theta_{yy}^z & -\Theta_{yz}^x \\
-\bar{k}^x l s_y^x & \bar{k}^y l s_x^y & 0 & -\Theta_{zx}^y & -\Theta_{zy}^x & \Theta_{zz}^y + \Theta_{zz}^x
\end{bmatrix} \tag{A.12}$$

beschrieben.

A.2. Shooting-Algorithmus

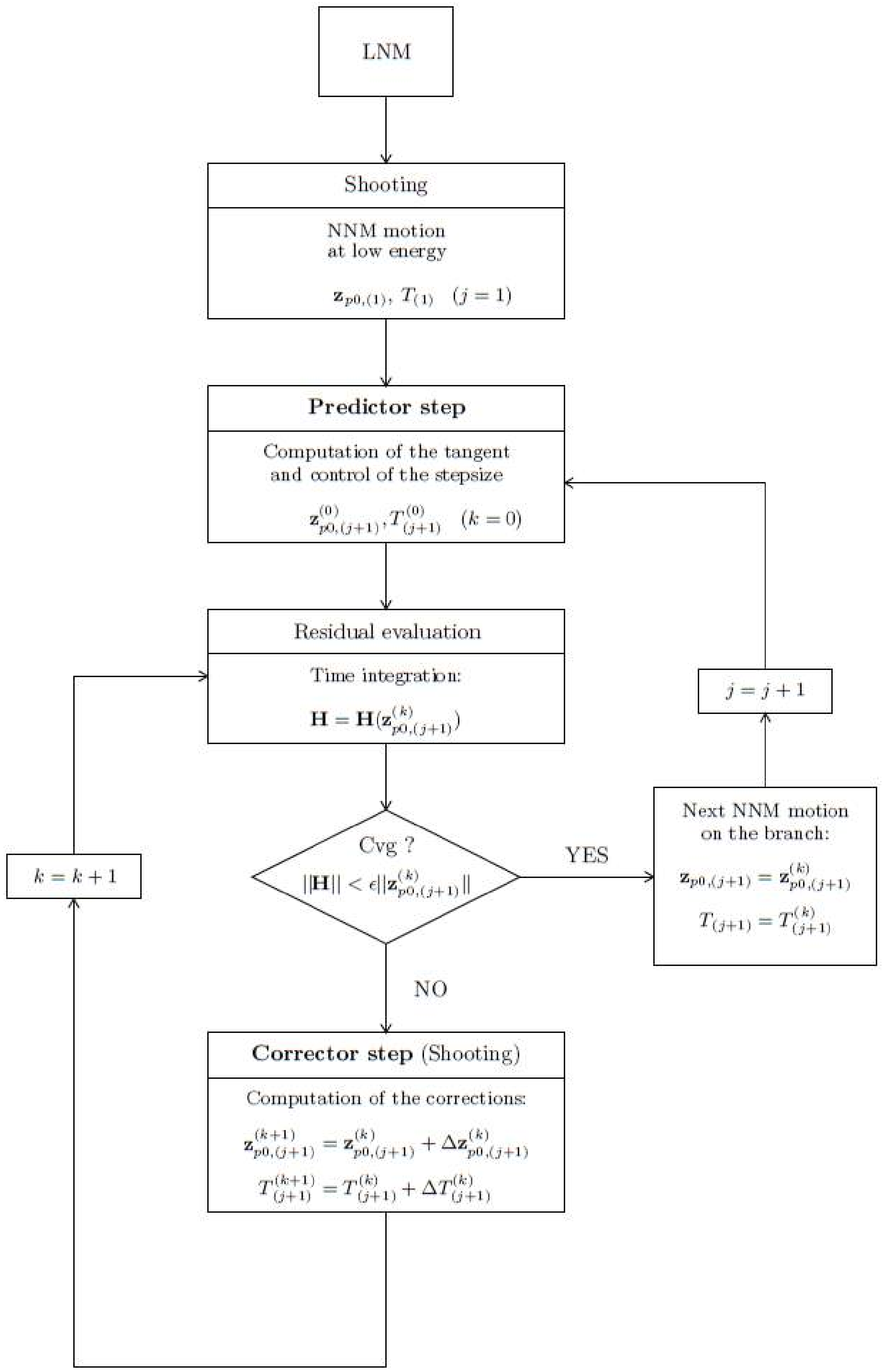


Abbildung A.2.: Algorithmus zur Berechnung von Nichtlinearen Moden ([12] S. 231).

A.3. Floquet Theorie

Die Stabilität einer zeitperiodischen Lösung kann mit der Floquet Theorie bestimmt werden [24, 22, 16]. Dem periodischen System (A.13) mit der Periode T liegt die Fundamentalmatrix (A.14) zugrunde.

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}(t+T) \tag{A.13}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{P}(t)\,e^{(\boldsymbol{B}t)} \tag{A.14}$$

Dabei ist $\boldsymbol{P}(t)$ eine zeitabhängige und $\boldsymbol{B}$ eine konstante Matrix.

$$\boldsymbol{C} = e^{\boldsymbol{B}T} \tag{A.15}$$

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ (A.15) setzt die Fundamentalmatrizen im Abstand von einer Periode in Beziehung (A.15).

$$\boldsymbol{\Phi}(t+T) = \boldsymbol{\Phi}(t)\,\boldsymbol{C} \tag{A.16}$$

$\boldsymbol{C}$ wird Monodromiematrix genannt, ihre Eigenwerte ρ_i sind die Floquet-Multiplizierer. Das periodische System (A.13) ist nur dann stabil wenn (A.17) erfüllt ist.

$$|\rho_i| = |\mathrm{eig}(\boldsymbol{C})| \leq 1 \tag{A.17}$$

Numerisch kann die Monodromiematrix M durch Integration des periodischen Systems (A.13) mit den Startwerten (A.18) über eine Periode T berechnet werden. Durch Aneinanderreihen der Lösungsvektoren zum Zeitpunkt T erhält man die Monodromiematrix (A.19). Alternativ kann sie auch direkt während des Shooting-Algorithmus berechnet werden [22].

$$[\boldsymbol{x}(0)_1, \boldsymbol{x}(0)_2 \ldots \boldsymbol{x}(0)_N] = \boldsymbol{I}, \qquad t = [0, T] \tag{A.18}$$

$$\boldsymbol{M}(T) = [\boldsymbol{x}(T)_1, \boldsymbol{x}(T)_2, \ldots \boldsymbol{x}(T)_N] \tag{A.19}$$

A.4. Subharmonisches Rocking

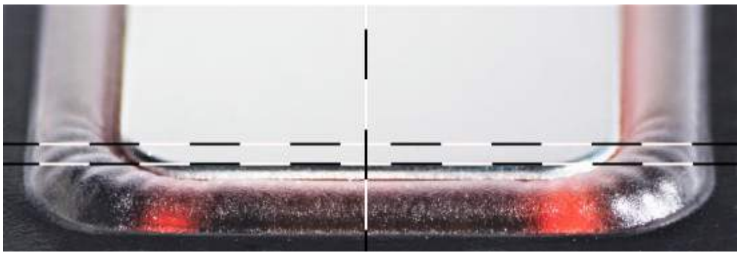
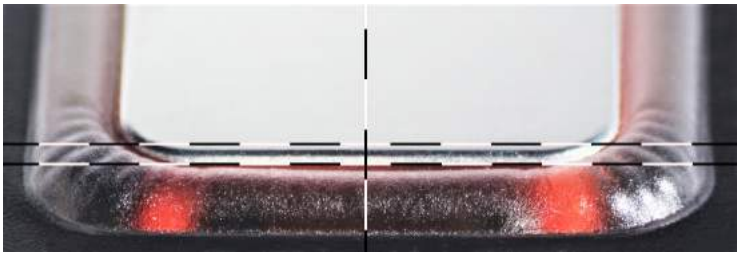
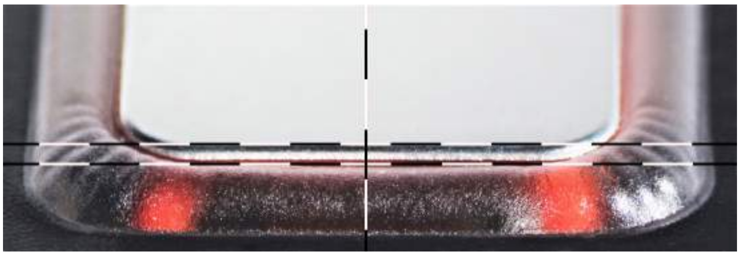
ξ	**Kolbenschwingung** $f = 1.3\,kHz,\ U = 2.5\,V$
0	
$\frac{\pi}{2}$	
π	
$\frac{3\pi}{2}$	
2π	

Abbildung A.3.: Kolbenschwingung unter dem Stroboskop.

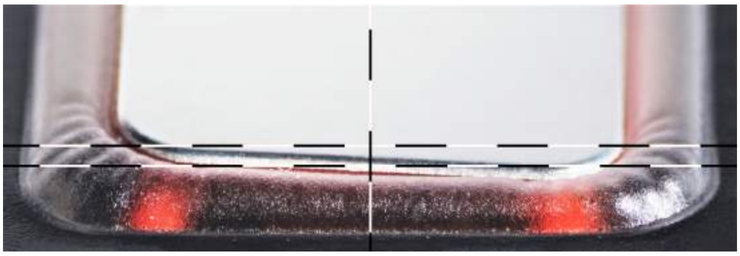
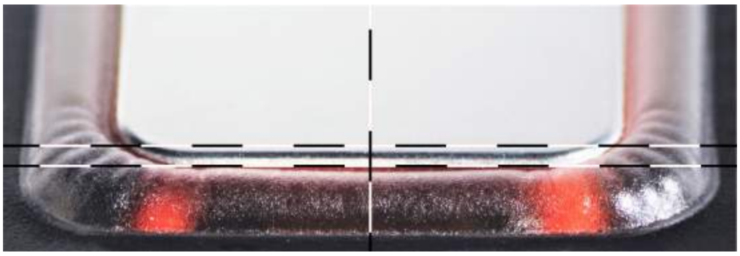
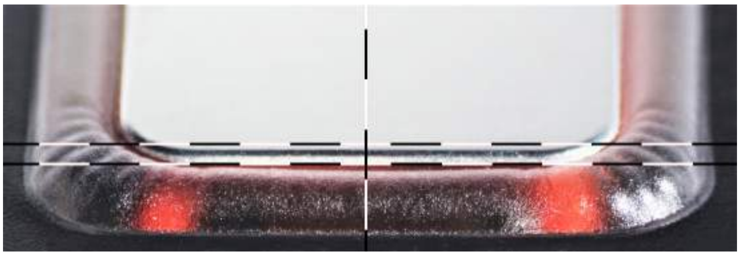
$\boldsymbol{\xi}$	**Subharmonisches Rocking** $f = 1.3\,kHz,\, U = 3.0\,V$
0	
$\frac{\pi}{2}$	
π	
$\frac{3\pi}{2}$	
2π	

Abbildung A.4.: Unter dem Stroboskop sichtbares subharmonisches Rocking