TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

DIPLOMARBEIT

Semi-Markov-Prozesse in der Versicherungsmathematik

ausgeführt am

Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Professor Stefan Gerhold

durch

Valerie Eberhartinger
Matrikelnummer: 01525823

Wien 2021

Abstract

This work introduces an application of an semi-markov modell for the personal insurance. This is accomplished by presenting a way to compute the acturial reserve. The first part of this thesis reviews the markov and the semi-markov processes. Afterwards a semi markov process is used to establish a model for a genereal personal insurance.

This model is then implemented in the programming language R as an surviving dependent pension and as a disability pension. Finally, the acturial reserve is calculated for concrete examples followed by a discussing of the results.

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird eine Anwendung eines Semi-Markov-Modells in der Personenversicherung vorgestellt. Damit wird eine Möglichkeit, die Deckungsrückstellung zu bestimmen, beschrieben. Im ersten Teil setzt sich diese Arbeit zunächst mit Markov- und Semi-Markov-Prozessen auseinander. Anschließend wird ein Semi-Markov-Prozess als Grundlage für die Erstellung von einem allgemeinen Personenversicherungsmodell verwendet.
Zur Veranschaulichung ist das vorgestellte Modell für eine Hinterbliebenenrente und für eine Invaliditätspension in der Programmiersprache R implementiert worden. Die Deckungsrückstellungen werden für konkrete Beispiele berechnet und die Ergebnisse werden vorgestellt und diskutiert.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am

Valerie Eberhartinger

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Listings

1 Einleitung

In dem Jahr 2019 war von dem gesamten Prämieneinkommen aller Versicherungsunternehmen in Österreich der größte Anteil, nämlich 30,8%, der Versicherungssparte Lebensversicherung zugeordnet. Diese Information geht aus dem Jahresbericht des Verbands der Versicherungsunternehmen Österreichs [14] hervor. Damit wird direkt die Wichtigkeit der Lebensversicherung deutlich und in diesem Zusammenhang auch die Wichtigkeit, dass die Lebensversicherungsunternehmen immer im Stande sein müssen, ihre Verpflichtungen aus den Versicherungsverträgen erfüllen zu können. Daher ist die Berechnung der Deckungsrückstellung von großer Bedeutung.

Die folgende Arbeit untersucht nun die Möglichkeit für ein allgemeines Personenversicherungsmodell die Deckungsrückstellung mit Hilfe von Semi-Markov-Prozessen zu berechnen. Um dieses Modell aufzustellen, werden Markov- und Semi-Markov-Prozesse vorgestellt und in ein generelles Versicherungsmodell eingebettet. Die daraus resultierenden Formeln werden in der Programmiersprache R konkret für eine Hinterbliebenenrente und für eine Invaliditätspension implementiert. Die Grunddaten für die Berechnungen werden teilweise der Website der Statistik Austria [12] entnommen.

Ihren Ursprung hatten Homogene Semi-Markov-Prozesse im Jahre 1954. Anfangs fanden sie im Ingenieurbereich Anwendung. [8] 1966 sind Homogene Semi-Markov Prozesse erstmalig in dem Bereich der Versicherungsmathematik von Janssen J. verwendet worden. [7] Die nicht homogenen Semi-Markov-Prozesse wurden ab den 70er Jahren behandelt [8] und haben unter anderem durch Haberman und Pitacco in [4] Anwendung gefunden.

In dieser Arbeit werden im Kapitel 2 zuerst allgemeine mathematische Grundlagen erläutert, die für den Einsatz von Semi-Markov-Prozessen benötigt werden. Weiters kommt es auch zu einer kurzen Beschreibung der Personenversicherung, insbesondere der Deckungsrückstellung.

In dem darauffolgenden Kapitel 3 werden Markov-Ketten erklärt. Dabei wird zwischen homogenen und nicht homogenen sowie zwischen diskreten und stetigen Markov-

Ketten unterschieden. Anschließend wird sich diese Arbeit mit Semi-Markov-Prozessen auseinandersetzen und in Kapitel 4.2.1 auf diskrete nicht homogene Semi-Markov-Prozesse näher eingehen. Diese bilden die Grundlage für das in Kapitel 5 beschriebene allgemeine Modell zur Bestimmung der Deckungsrückstellung.
Im nächsten Kapitel werden die Resultate aus den vorherigen Kapiteln anhand einer Hinterbliebenenrente und einer Invaliditätspension angewendet und es erfolgt eine Erklärung der Implementierung inklusive der Datenaufbereitung. Letztendlich werden noch einmal die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst.

2 Grundlegende Theorie

Um verstehen zu können, worum genau es sich bei einem Markov-Prozess oder einem Semi-Markov-Prozess handelt, werden einige grundlegende Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie sowie ein Überblick über einen speziellen Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie, nämlich der Erneuerungstheorie, benötigt.
Außerdem brauchen wir Grundwissen bezüglich Versicherungen, im Speziellen über Personenversicherungen und deren Barwerte, um Semi-Markov-Prozesse letztendlich anhand einer Rentenversicherung anwenden zu können.

2.1 Stochastische Prozesse

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dieses Tripel kann man mit einer Filtration zu einem Quadrupel erweitern. Zur Vereinfachung bezeichne T im restlichen Kapitel immer die diskrete Menge $\mathbb{N}_0$ oder das Intervall $[0, \infty)$.

Definition 2.1. *Gegeben sei eine Menge von Sigmaalgebras $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$. Wenn für alle $s \leq t$ mit $s, t \in T$ $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ gilt, dann wird $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ eine Filtration genannt.*

Somit erhält man $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t, t \in T\})$ als einen gefilterten Wahrscheinlichkeitsraum. Die Menge der Filtrationen kann als eine Menge von Informationen betrachtet werden. Dabei stellt $\mathcal{F}_t$ alle Informationen bzw. Geschehnisse dar, die zum Zeitpunkt t beobachtbar sind. [6, 16]

Definition 2.2. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\tilde{\Omega}, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Für $X : \Omega \to \tilde{\Omega}$ ist X $(\mathcal{F}, \mathcal{A}) - messbar$, wenn*

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

gilt, wobei $B \subset \mathcal{A}$ und $\omega \in \Omega$.

Damit lässt sich ein stochastischer Prozess definieren:

Definition 2.3. *Eine Familie von Zufallsvariablen* $\{X_t, t \in T\}$*, für die*

$$\forall t \in T : X_t : \Omega \to \tilde{\Omega} \text{ } ist \text{ } (\mathcal{F}, \mathcal{A}) - messbar \tag{2.1}$$

gilt, ist ein stochastischer Prozess, der Werte in $(\tilde{\Omega}, \mathcal{A})$ *annimmt.* [6]

Definition 2.4. *Wenn für einen stochastischen Prozess* $\{X_t, t \in T\}$ *gilt, dass* X_t *für alle* $t \in T$ $\mathcal{F}_t$*- messbar ist, dann ist* $\{X_t, t \in T\}$ *ein bezüglich der Filtration* $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ *adaptierter stochastischer Prozess.*

Definition 2.5. *Für jedes* $t \in T$ *sei* $\mathcal{B}[0,t]$ *die Borelmenge auf* $[0,t]$*. Weiters sei ein auf* $[0,t]$ *eingeschränkter stochastischer Prozess auf* $[0,t] \times \Omega$ *messbar bezüglich* $\mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{F}_t$*. Dann ist der stochastische Prozess progressiv messbar.*

Wenn ein stochastischer Prozess progressiv messbar ist, so folgt, dass der Prozess auch messbar und adaptiert ist. Umgekehrt folgt für einen messbaren und adaptierten Prozess nicht zwingend auch progressive Messbarkeit. [16]

2.2 Erneuerungstheorie

Die Erneuerungstheorie findet sich bei vielen Problemen wieder. Für einen Unternehmer, der für sein Unternehmen eine bestimmte Komponente, die alle paar Monate kaputt geht und ersetzt werden muss, benötigt, ist beispielsweise die Frage, wie viele Komponenten der Unternehmer auf Vorrat haben sollte, von Bedeutung, da die Komponente immer gleich ausgetauscht werden sollte.
In der Erneuerungstheorie wird das Unternehmen nun als System angesehen. Zum Startzeitpunkt hat das System eine funktionierende Komponente. T_1 sei nun der Zeitpunkt, zudem die Komponente zum ersten Mal erneuert werden muss. Anschließend ist die Komponente einige Zeit in Takt bis sie zum Zeitpunkt T_2 erneut ausgetauscht wird. Diesen Vorgang sieht man in der Abbildung 2.1. Auf der x-Achse ist dabei die Zeit abgebildet und die Zeitpunkte einer neuen Komponente sind eingezeichnet. [6]

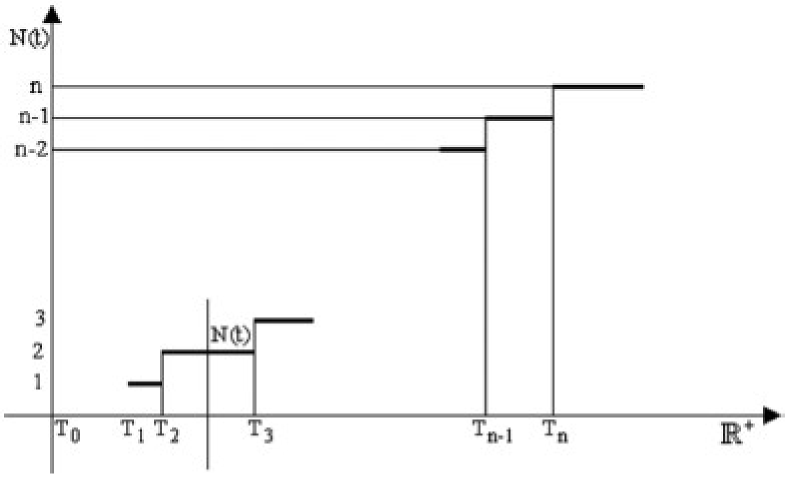

Abbildung 2.1: Darstellung der Zufallsvariablen $(T_n, n \in \mathbb{N}_0)$ und $N(t)$
Quelle: [6, S. 43]

Damit ergibt sich eine Folge von Zufallsvariablen

$$(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ mit } T_0 = 0,$$

die die Zeitpunkte der Erneuerung beschreiben und im Allgemeinen Werte in $\mathbb{R}^+$ annehmen. Mit deren Hilfe kann nun auch die Zeitdauer beschrieben werden, die eine Komponente jeweils im System ist:

$$X_n = T_n - T_{n-1}, \quad n > 0.$$

Auf der y-Achse der Abbildung 2.1 wird mitgezählt, wie oft die Komponente über die Zeit hinweg erneuert wird. Diese Anzahl der Erneuerungen definieren wir uns ebenfalls als eine Zufallsvariable, nämlich als $N(t)$, wobei $t \in \mathbb{R}^+$ für die Zeit steht. Insgesamt stellt $N(t)$ also die absoluten Erneuerungen bis zum Zeitpunkt t dar. Die zentrale Frage in der Erneuerungstheorie ist damit, welchen Wert man sich für die Zufallsvariable zu einem bestimmten Zeitpunkt erwarten kann. [6]
Nach der Darstellung der grundlegenden Idee kommen wir nun zu den wichtigen Definitionen.

Definition 2.6. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem eine Folge von nicht negativen, unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben ist. Die Folge von Zufallsvariablen $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist dann eine erneuerbare Folge* *oder ein Erneuerungsprozess und wird durch*

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$T_0 = 0 \textit{ fast sicher}$$

definiert. Die einzelnen Zufallsvariablen des Erneuerungsprozesses werden als Erneuerungszeiten bezeichnet und die X_n mit $n \in \mathbb{N}$ stellen die Zwischenankunftszeiten dar.

Definition 2.7. *Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Erneuerungsprozess, dann existiert ein dazu passender stetiger, stochastischer Prozess $(N(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$. $N(t)$ nimmt dabei nur diskrete Werte in $\mathbb{N}_0$ an und wird als assoziierter Zählprozess oder Erneuerungs-Zählprozess bezeichnet.*
Weiters gilt folgende Äquivalenz:

$$N(t) > n - 1 \Leftrightarrow T_n \leq t, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Definition 2.8. *Wenn $\mathbb{E}[N(t)] < \infty$, dann ist die Erneuerungsfunktion durch*

$$H(t) = \mathbb{E}[N(t)]$$

gegeben.

Definition 2.9. *Wenn für einen Erneuerungsprozess $(T_n, n \in \mathbb{N})$*

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_n < \infty$$

gilt, dann ist er rekurrent. Ansonsten handelt es sich um einen transienten Erneuerungsprozess.

Definition 2.10. *Wenn die möglichen Werte der Zwischenankunftszeiten X_n mit $n \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Menge der Form $\{0, \delta, 2\delta, ...\}$ bilden und δ sei die größtmögliche Zahl, für die das möglich ist, dann ist der Erneuerungsprozess $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ periodisch mit Periode δ. Existiert kein derartiges δ, so ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aperiodisch.*

Definition 2.11. *$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei ein Erneuerungsprozess, dann nennt man die Zufallsvariable*

$$L = sup\{T_n : T_n < \infty\}$$

die Lebenszeit dieses Erneuerungsprozesses.

Definition 2.12. *Die Zufallsvariable*

$$N = sup\{N(t), t \in \mathbb{R}^+\}$$

beschreibt die absolute Anzahl von Erneuerungen auf dem Intervall $(0, \infty)$. *[6]*

2.3 Personenversicherung

Neben den mathematischen Grundlagen benötigen wir auch einiges an Grundwissen in Bezug auf die Versicherungswirtschaft. Ziel dieser Arbeit ist, die Deckungsrückstellung einer Hinterbliebenenrente und einer Invaliditätspension mit Hilfe eines Semi-Markov-Prozesses zu berechnen. Daher müssen wir vorab festhalten, was eine Deckungsrückstellung ist, warum eine Versicherung diese benötigt und letztendlich wie eine Rente mathematisch beschrieben wird.
Beim Abschluss eines Versicherungsvertrags ist es für das Versicherungunternehmen erstrebenswert, dass der Barwert der zu zahlenden Leistungen dem Barwert entspricht, den das Versicherungsunternehmen durch Prämienzahlungen des Versicherungsnehmers einnimmt. Das entspricht dem Äquivalenzprinzip. Personenversicherungsverträge werden in der Regel mit einer langen Laufzeit abgeschlossen. Über die Dauer der Laufzeit verändern sich die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Versicherungsfall eintritt und damit auch die beiden Barwerte. Das hat zur Folge, dass die Barwerte nicht mehr übereinstimmen. Es kann demnach der Fall eintreten, dass der Barwert der erwarteten Versicherungsleistungen größer ist als der Barwert der Prämienzahlungen. In dem Fall benötigt die Versicherung eine Reserve in der Höhe dieser Differenz, damit die dauernde Erfüllbarkeit der Verischerungsleistungen gewährleistet ist. Diese Differenz wird Deckungsrückstellung genannt. Die Deckungsrückstellung kann natürlich auch negativ sein. [2]
Wenn eine gleichbleibende Zahlung über einen längeren Zeitraum hinweg in regelmäßigen Abständern erfolgt, beispielsweise eine Prämienzahlung oder eine Rente für den Versicherungsnehmer, dann kann man diese mittels

$$\ddot{a}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+r)^k} \tag{2.2}$$

beschreiben. $\ddot{a}_n$ steht für eine Rente in der Höhe von 1, die über eine Dauer von n Jahren am Anfang jedes Jahres gezahlt wird und r entspricht dem Zinssatz, da die zukünftigen Zahlungen abgezinst werden müssen. Wenn nun jährlich für die Dauer von n Jahren eine Rente in der Höhe von R ausbezahlt wird, so ist diese durch

$$R \cdot \ddot{a}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R}{(1+r)^k} \tag{2.3}$$

gegeben. Analog kann auch die nachschüssige Rente

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} \tag{2.4}$$

definiert werden. [15]

3 Markov-Ketten

3.1 Diskrete Homogene Markov-Ketten

Als erstes wollen wir die grundlegenden Theorien zu Markov-Ketten vorstellen. Eine Markov-Kette ist ein stochastischer Prozess, der bestimmte Eigenschaften erfüllt. [13] Um Markov-Ketten beschreiben zu können, brauchen wir zuerst ein System S, das m verschiedenen Zuständen annehmen kann. Die Menge dieser Zustände bezeichnen wir mit

$$I = \{1, 2, ..., m\}.$$

[6]
Der Zustand des Systems kann sich immer zu diskreten Zeitpunkten, $n \in \mathbb{N}$, ändern. Ein Zustandswechsel erfolgt zufällig. Wir definieren J_n als Zufallsvariable, die den Zustand des Systems zu einem Zeitpunkt n bezeichnet. J_0 entspricht dem Zustand, in dem sich das System zum Startzeitpunkt $n = 0$ befindet. Nun ist es möglich, eine Markov-Kette zu definieren:

Definition 3.1. *Die Folge von Zufallsvariablen $(J_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist genau dann eine Markov-Kette, wenn für alle $j_0, j_1, ..., j_n \in I$ die Markov- Eigenschaft*

$$\mathbb{P}(J_n = j_n | J_0 = j_0, J_1 = j_1, ..., J_{n-1} = j_{n-1}) = \mathbb{P}(J_n = j_n | J_{n-1} = j_{n-1}) \tag{3.1}$$

gilt.

Es wird natürlich vorausgesetzt, dass diese Wahrscheinlichkeiten auch existieren. Eine wichtige Eigenschaft, die eine Markov- Kette erfüllen kann, ist Homogenität. [6]

Definition 3.2. *Eine Markov- Kette $(J_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist genau dann homogen, wenn die Markov- Eigenschaft (3.1) nicht vom Zeitpunkt n abhängt. Ansonsten ist sie nicht homogen.*

Für eine homogene Markov- Kette wird die Übergangsmatrix mit

$$\mathbf{P} = [p_{ij}]$$

bezeichnet, wobei die einzelnen Wahrscheinlichkeiten durch

$$p_{ij} = \mathbb{P}(J_n = j | J_{n-1} = i) \qquad \text{mit} \quad i, j \in I \tag{3.2}$$

gegeben sind [6] und folgende Eigenschaften erfüllen:

- $0 \leq p_{ij} \leq 1, \qquad \forall i, j \in I$
- $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1, \qquad \forall i \in I$

[4] **P** wird auch Markov- Matrix genannt.
Damit eine homogene Markov- Kette vollständig charakterisiert wird, werden neben der Übergangsmatrix **P** auch die Wahrscheinlichkeiten für den Anfangszustand J_0 benötigt. Mathematisch ist diese Anfangsverteilung für die einzelnen Zustände $i \in I$ durch

$$p_i = \mathbb{P}(J_0 = i)$$

gegeben. Diese Wahrscheinlichkeiten werden als Vektor

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$$

zusammengefasst [6] und erfüllen

- $0 \leq p_i \leq 1, \qquad \forall i \in I$
- $\sum_{i \in I} p_i = 1.$

[4] Insgesamt beschreibt das Paar $(\mathbf{p}, \mathbf{P})$ damit eine homogene Markov- Kette. [6]
Wenn wir bereits wissen, dass das System fast sicher in einem bestimmten Zustand j beginnt, gilt $p_j = 1$ und wir können die einzelnen Anfangswahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Kronecker- Deltas

$$p_i = \delta_{ij}$$

beschreiben.
Mit p_{ij} bezeichnen wir also die Wahrscheinlichkeit, dass das Systems S, das sich zu einem gegebenen Zeitpunkt im Zustand i befindet, zum darauffolgenden Zeitpunkt

in dem Zustand j ist. [6]
Analog können wir die Wahrscheinlichkeit definieren, dass das Systems S, das sich zu einem gegebenen Zeitpunkt im Zustand i befindet, nach n Zeitpunkten in dem Zustand j ist. Diese Übergangswahrscheinlichkeit in Formeln ausgedrückt ergibt:

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(J_{\nu+n} = j | J_\nu = i).$$

Für $n = 2$ folgt:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(2)} &= \mathbb{P}(J_{\nu+2} = j | J_\nu = i) \\ &\overset{\text{addiere alle Möglichkeiten}}{=} \mathbb{P}(J_{\nu+2} = j | J_{\nu+1} = 1)\mathbb{P}(J_{\nu+1} = 1 | J_\nu = i) \\ &+ \mathbb{P}(J_{\nu+2} = j | J_{\nu+1} = 2)\mathbb{P}(J_{\nu+1} = 2 | J_\nu = i) + ... \\ &+ \mathbb{P}(J_{\nu+2} = j | J_{\nu+1} = m)\mathbb{P}(J_{\nu+1} = m | J_\nu = i) \\ &\overset{(3.2)}{=} p_{1j}p_{i1} + p_{2j}p_{i2} + ... + p_{mj}p_{im} \\ &= \sum_{k \in I} p_{ik}p_{kj} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Damit ergibt sich für die Übergangsmatrix

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2,$$

wobei wir $\mathbf{P}^{(2)} = [p_{ij}^{(2)}]$ definieren. Analog lässt sich dies für alle n zeigen und wir erhalten, dass die Übergangsmatrix für n Zeitschritte äquivalent zur n-ten Potenz der Übergangsmatrix zweier aufeinanderfolgenden Zeitpunkte $\mathbf{P}$ ist. Daher gilt

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n \tag{3.4}$$

für alle $n \geq 1$. [6]
Außerdem erfüllen die Übergangswahrscheinlichkeiten die Chapman-Kolmogorov Gleichung.

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{\tilde{n}} p_{kj}^{(n-\tilde{n})}, \tag{3.5}$$

wobei $1 \leq \tilde{n} < n$. Diese Gleichung gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass das System nach $\tilde{n}$ Schritten in einen Zustand k mit $k \neq i, j$ und $k, i, j \in I$ wechselt und nach weiteren $(n - \tilde{n})$ Schritten in den Zustand j. Insgesamt befindet sich damit das Sys-

tem nach n Zeitschritten im Zustand j, unter der Voraussetzung, dass das System vor diesen n Zeitschritten in dem Zustand i gewesen ist. [4]
Die Randverteilungen von den Systemzuständen J_n nach n Zeitschritten werden durch

$$p_i(n) = \mathbb{P}(J_n = i)$$

für alle $i \in I$ definiert und damit erhalten wir

$$p_i(n) = \sum_{k \in I} p_k p_{ki}^{(n)} \tag{3.6}$$

zur Berechnung. (3.6) ist für alle $n \geq 0$ erfüllt, wenn für $n = 0$ entweder die Übergangsmatrix der Einheitsmatrix,

$$\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{I},$$

oder die Übergangswahrscheinlichkeiten dem Kronecker- Delta,

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$$

entsprechen. $p_i(n)$ stellt demnach die Wahrscheinlichkeit dar, dass sich das System nach n Zeitschritten in dem Zustand i befindet. Fassen wir nun die Randverteilungen nach n Zeitschritten $p_i(n)$ als einen m-dimensionalen Vektor auf, $p_i(n) = (p_1(n), p_2(n), ..., p_m(n))$ können wir für (3.6) die Matrix- Vektor- Schreibweise

$$p(n) = \mathbf{p}\mathbf{P}^n$$

benutzen. [6] Mit der Übergangsmatrix für n Zeitschritte $\mathbf{P}^{(n)}$ lässt sich nun eine wichtige Eigenschaft für die Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ definieren.

Definition 3.3. *Die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ heißt genau dann regulär, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass alle Matrixeinträge der k-ten Potenz $\boldsymbol{P}^{(k)}$ echt positiv sind, das heißt, $p_{ij}^{(k)} > 0 \quad \forall i, j \in I$.*

Eine weitere wichtige Charakterisierung von Übergangsmatrizen ist, dass sie graphisch dargestellt werden können. Eine positive Übergangswahrscheinlichkeit von einem Zustand $i \in I$ in einen Zustand $j \in I$ wird dann mittels eines Pfeils symbolisiert. [6]
Ein simples Beispiel einer graphischen Darstellung von einer Übergangsmatrix können

wir in Abbildung 3.1 betrachten. Hier ist unser System eine Person, die sich in einem von drei möglichen Zuständen befinden kann. Entweder sie ist aktiv, invalid oder tot. Die möglichen Zustandsübergänge sind mittels Pfeile eingezeichnet. p_{ai} bezeichnet beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Person von dem aktiven Zustand in die Invalidität übergeht. Klarerweise führen vom Zustand des Todes keine Pfeile weg.

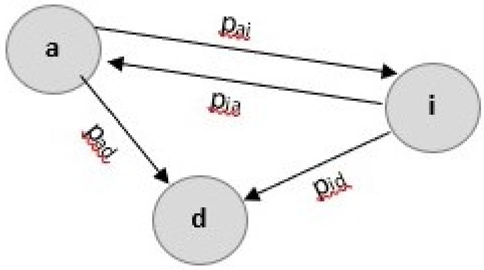

Abbildung 3.1: graphische Darstellung einer Übergangsmatrix mit 3 Zuständen
a...active i...invalid d...dead
Quelle: eigene Darstellung

3.1.1 Eigenschaften

Man unterscheidet zwischen periodischen und aperiodischen Markov-Ketten, wobei man bei unserer Anwendung von Markov-Ketten hauptsächlich aperiodische betrachtet.

Definition 3.4. *Sei $(J_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette und $\boldsymbol{P}$ die zugehörige Übergangsmatrix. Für $i \in I$ ist*

$$d(i) = ggT(\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\})$$

die Periode des Zustandes i und $ggT(.)$ bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler einer Menge.
In dem Fall, dass $d(i) > 1$ gilt, ist der Zustand i periodisch und jeder Zustand, der die Periode 1 hat, wird aperiodisch genannt.
Die Markov- Kette $(J_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wird als aperiodisch bezeichnet, wenn alle Zustände aperiodisch sind, das heißt, wenn $\forall i \in I : d(i) = 1$.

[6]
In der restlichen Arbeit werden wir immer aperiodische Markov-Ketten betrachten. Wir kommen nun zu einigen interessanten Eigenschaften der Zustände.

Definition 3.5. *Seien i, j Zustände aus I und $p_{ij} > 0$, dann führt der Zustand i nach j. Wir bezeichnen das mit $i \rhd j$.*
Wenn auch der Zustand j zu i führt, kommuniziert der Zustand i mit j: $i \lhd\rhd j$, das heißt:

$$i \lhd\rhd j \Leftrightarrow i \rhd j \wedge j \rhd i.$$

Damit ist es möglich eine Äquivalenzrelation zu definieren. Wenn für den Zustand i außerdem gilt, dass

$$\forall j \in I : i \rhd j \text{ gilt } i \lhd\rhd j,$$

dann kommuniziert i mit allen Zuständen zu denen es führt und i wird wesentlich genannt. Ist dies nicht erfüllt, ist i unwesentlich.

Die Menge der wesentlichen Zustände kann in Äquivalenzklassen zerlegt werden und in einer Äquivalenzklasse befinden sich nur Zustände, die miteinander kommunizieren. Lässt sich der gesamte Zustandsraum in genau eine Äquivalenzklasse unterteilen, liegt eine irreduzierbare Markov-Kette vor. [3] Führt der Zustand i zu keinem anderen Zustand, das heißt, es gilt $p_{ii} = 1$, dann handelt es sich um einen absorbierenden Zustand. [6] Betrachten wir nochmals Abbildung 3.1, so erkennen wir, dass der Zustand des Todes ein absorbierender Zustand ist.
Weiters ergibt sich, dass wenn $p_{ii} > 0$ für $i \in I$, dieser Zustand mit sich selbst kommuniziert und aperiodisch ist, da $p_{ii}^{(n)} > 0$ bereits für $n = 1$ erfüllt ist, und weil 1 nur durch sich selbst teilbar ist, dies auch der größte gemeinsame Teiler sein muss.
Es kann natürlich der Fall eintreten, dass die Zustände einer Teilmenge $I' \subset I$ so zueinander führen, dass kein Zustand $i \in I \setminus I'$ mehr erreicht werden kann, sobald einmal ein Zustand $i' \in I'$ erreicht wird.

Definition 3.6. *Die Teilmenge $I' \subseteq I$ heißt abgeschlossen, wenn*

$$\sum_{j \in I'} p_{i'j} = 1 \qquad \forall i' \in I'.$$

Nun wollen wir uns noch mit jenem Zeitpunkt beschäftigen, an dem das System einen bestimmten Zustand das erste Mal annimmt, und mit dessen Wahrscheinlichkeit. Dafür muss der Anfangszustand J_0 des Systems als gegeben vorausgesetzt werden.

Definition 3.7. *Sei $J_0 = i$ mit $i \in I$, dann bezeichnet die Zufallsvariable*

$$\tau_{ij} = \begin{cases} n, & \textit{wenn } J_\nu \neq j \textit{ für } 0 < \nu < n \textit{ und } J_n = j \\ \infty, & \textit{wenn } J_\nu \neq j \quad \forall \nu > 0 \end{cases}$$

den Zeitpunkt des erstmaligen Erreichens von dem Zustand $j \in I$.

Die dazuzugehören Wahrscheinlichkeiten, den Zustand j nach genau n Schritten das erste Mal zu erreichen, bezeichnen wir mit

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(\tau_{ij} = n | J_0 = i). \tag{3.7}$$

Die Wahrscheinlichkeit den Zustand überhaupt einmal zu erreichen, also nach endlich vielen Schritten, wird durch

$$f_{ij} = \mathbb{P}(\tau_{ij} < \infty | J_0 = i). \tag{3.8}$$

gegeben. Nun lässt sich die Wahrscheinlichkeit, den Zustand nach einer gewissen Schrittanzahl anzunehmen, leicht mittels einer Formel darstellen und berechnen. Dafür setzen wir die Definition von τ_{ij} in (3.7) ein:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}(J_n = j, J_\nu \neq j, 0 < \nu < n | J_0 = i) \\ &= \sum_{S_{n,i,j}} \prod_{k=0}^{n-1} p_{s_k s_{k+1}}, \end{aligned}$$

wobei $S_{n,i,j} = \{(s_0, s_1, ..., s_n) : s_0 = i, s_n = j, s_k \neq j, 0 < k < n\}$. Man summiert hier alle Möglichkeiten, bei denen das System im Zustand i beginnt, nach n Schritten im Zustand j ist und den Zustand j davor nicht annimmt.
Damit lassen sich nun rekurrente und transiente Zustände definieren.

Definition 3.8. *Ein Zustand $i \in I$ heißt* $\begin{cases} \textit{transient genau dann, wenn } f_{ii} < 1 \\ \textit{rekurrent genau dann, wenn } f_{ii} = 1. \end{cases}$

Aus dieser Definition und aus (3.8) ergibt sich, dass ein Zustand i rekurrent ist, wenn das System in endlicher Zeit erneut in den Anfangszustand zurückkehrt. Damit kann der Anfangszustand immer wieder erreicht werden und es folgt, dass i genau dann rekurrent ist, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

gilt. Analog ist der Zustand genau dann transient, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$$

erfüllt ist. [6]
Betrachtet man eine Markov-Kette mit einer dazugehörigen Übergangsmatrix, dann verändert sich die Übergangsmatrix anhängig davon, für wie viele Zeitschritte man diese betrachtet. Das bedeutet, dass $P^5 = P^4 P$ in der Regel nicht mit P^4 übereinstimmen wird. Wenn ein Vektor $(\pi)_{i \in S}$, der die Eigenschaften $\pi_i \geq 0 \ \forall i \in S$ und $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ erfüllt, existiert und für den zusätzlich $\pi P = \pi$ gilt, dann ist π eine stationäre Verteilung der Markov-Kette. Tritt der Fall ein, dass bereits die Anfangsverteilung einer Markov-Kette eine stationäre Verteilung darstellt, nennt man die Markov-Kette stationär und die Übergangsmatrizen ändern sich nicht mit den Zeitschritten.
Nun stellt sich die Frage, ob und unter welchen Umständen eine stationäre Verteilung einer Markov-Kette eindeutig ist. Die Antwort dazu liefert uns folgender Satz:

Satz 3.1. *(Hauptgrenzwertsatz für Markov-Ketten)*
Gegeben sei eine irreduzierbare und aperiodische Markov-Kette $(J_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und die dazugehörige Übergangsmatrix P, für die eine stationäre Verteilung π existiert. Dann ist π eindeutig und

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(J_n = j | J_0 = i) = \pi_j \qquad \forall i, j \in E \tag{3.9}$$

gilt. [3]

3.2 Diskrete Nicht Homogene Markov-Ketten

Den diskreten nicht homogenen Markov-Ketten liegt, wie schon zuvor, ein System zugrunde, das Zustände aus einer Menge $I = \{1, ..., m\}$ annehmen kann. Die Folge der Zufallsvariablen $(J_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschreibt wieder, in welchem Zustand sich das System zum gegebenen Zeitpunkt n befindet. Damit es sich hierbei tatsächlich um eine Markov-Kette handelt, muss natürlich die Markov Eigenschaft (3.1) erfüllt sein.

Der grundlegende Unterschied zwischen homogenen und nicht homogenen Markov-Ketten, ist nun, dass die Definition der Homogenität (3.2) aus Kapitel 3.1 nicht erfüllt ist. Das führt dazu, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das System von dem Zustand i in den Zustand j mit $i, j = 1, ..., m$ wechselt, zum Zeitpunkt t anders ist als zum Zeitpunkt $\tilde{t}$, wobei $t, \tilde{t} \in \mathbb{N}_0$ und $t \neq \tilde{t}$.
Mathematisch sind die einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten innerhalb von einem Zeitschritt durch

$$p_{ij}(t, t+1) = \mathbb{P}(J_{t+1} = j | J_t = i) \tag{3.10}$$

gegeben, wobei $i, j \in I$ und $t \in \mathbb{N}_0$. [6] Die Übergangswahrscheinlichkeit, dass sich das System zu einem gegebenen Zeitpunkt s in dem Zustand i befindet und zum späteren Zeitpunkt t in dem Zustand j, ist durch

$$p_{ij}(s, t) = \mathbb{P}(J_t = j | J_s = i) \tag{3.11}$$

gegeben mit $s, t \in \mathbb{N}_0$ und $s < t$.
Diese Wahrscheinlichkeiten müssen wieder

- $0 \leq p_{ij}(n) \leq 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad \forall i, j \in I$
- $\sum_{j \in I} p_{ij}(n) = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad \forall i \in I.$

erfüllen. Weiters gilt die Chapman-Kolmogorov Gleichung:

$$p_{ij}(s, t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t) \tag{3.12}$$

mit $s \leq u \leq t$ und $s, t, u \in \mathbb{N}_0$. Diese beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass das System zum Zeitpunkt s in dem Zustand i ist, sich zum Zeitpunkt u dann in dem Zustand k befindet und anschließend noch in den Zustand j wechselt, in dem es sich dann zum Zeitpunkt t aufhält. [4]

3.3 Stetige Markov-Prozesse

Neben den diskreten Markov-Prozessen gibt es natürlich auch welche in stetiger Zeit. Für diese müssen wir vorab einen Sprungprozess definieren.

Definition 3.9. *Sei $(J_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ ein stochastischer Prozess. Wenn der Prozess*

- *seinen Wert immer zu zufälligen Zeitpunkten t wechselt,*
- *zwischen den einzelnen Wechseln immer konstant ist, also stückweise konstant ist,*
- *eine Folge bildet, die wächst,*

dann wird er Sprungprozess genannt. [5]

Es sei wieder eine Menge $I = \{1, ..., m\}$ gegeben, die m verschiedene und mögliche Zustände beinhaltet. Weiter ist diese Menge $I = \{1, ..., m\}$ entweder endlich oder abzählbar.

Definition 3.10. *Es sei $(J_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ ein Sprungprozess. Wenn*

$$\mathbb{P}(J_t = i | J_0, J_1, ..., J_s) = \mathbb{P}(J_t = i | J_s) \tag{3.13}$$

für $i \in T$ und $0 \leq s < t$ gilt, dann ist $(J_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ ein Markov-Prozess, der bezüglich der Zeit stetig ist.

[16] Die Definition mittels eines Sprungprozesses ist sinnvoll, da der Markov-Prozess zu zufälligen Zeitpunkten von einem Zustand sprunghaft in einen anderen wechselt. Wie bereits bei den diskreten Markov-Prozessen unterscheidet man zwischen homogenen und nicht homogenen stetigen Markov-Prozessen. Für beide Fälle ist

$$\mathbb{P}(J_t = j | J_s = i) \tag{3.14}$$

mit $i, j \in I$ und $0 \leq s < t$ die Übergangswahrscheinlichkeit, wobei man sich zum Zeitpunkt s in dem Zustand i befindet und zum späteren Zeitpunkt t in dem Zustand j. Für homogene stetige Markov-Prozesse bezeichnet man (3.14) mit $p_{ij}(t-s)$, da die Übergangswahrscheinlichkeit nur von der vergangenen Zeit zwischen den Zeitpunkten t und s abhängt, aber nicht von den Zeitpunkten selber. Das bedeutet, dass für $r = t - s$

$$\mathbb{P}(J_r = j | J_0 = i) = \mathbb{P}(J_t = j | J_s = i) \tag{3.15}$$

gilt. Außerdem ist eine wichtige Voraussetzung, dass

$$\lim_{r \to 0^+} p_{ij}(r) = \delta_{ij}$$

für

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & sonst \end{cases}$$

erfüllt ist, wobei r die Zeitdifferenz, für die die Wahrscheinlichkeit betrachtet wird, darstellt. Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten wird mit

$$\mathbf{P}(r) = [p_{ij}(r)]$$

bezeichnet.
Wir betrachten nun einen nicht homogenen stetigen Markov-Prozess $(J_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$. Dann wird die Übergangswahrscheinlichkeit (3.14) mit $p_{ij}(s,t)$ beschrieben und hängt nun explizit von den Zeitpunkten s und t ab. (3.15) gilt damit nicht mehr. Die Übergangsmatrix ist für zwei Zeitpunkte $0 \leq s < t$ durch

$$\mathbf{P}(s,t) = [p_{ij}(s,t)] \tag{3.16}$$

gegeben. Eine Voraussetzung für die Übergangswahrscheinlichkeiten ist analog wie im homogenen Fall, dass

$$\lim_{t \to s^+} p_{ij}(s,t) = \delta_{ij}$$

für

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & sonst \end{cases}$$

gilt. Insgesamt erfüllen diese Wahrscheinlichkeiten, analog zu den bisherigen Markov-Ketten, für $0 \leq s \leq t$ und $i, j \in I$ folgende Eigenschaften:

- $0 \leq p_{ij}(s,t) \leq 1$
- $\sum_{j \in I} p_{ij}(s,t) = 1.$

Außerdem gilt abermals die Chapman-Kolmogorov Gleichung

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(s,u) p_{kj}(u,t) \tag{3.17}$$

mit $0 \leq s \leq u \leq t$. Diese Eigenschaften gelten natürlich analog für homogene stetige Markov-Prozesse, da $p_{ij}(s, s+h) = p_{ij}(h)$ für $s, h \geq 0$. [16]

3.4 Occupation Time

In diesem Kapitel interessiert uns, wie oft ein bestimmter Zustand von dem System angenommen wird. Dafür wird eine Folge von Zufallsvariablen $(J_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ betrachtet, die Werte in $I = \{1, ..., m\}$ annimmt. Die Occupation Time eines Zustands $i \in I$ wird als eine Zufallsvariable $N_i(n)$ definiert, die zählt, wie oft der Zustand i in den ersten n Schritten angenommen wird.

$$N_i(n) = |\{k \in \{1, ..., n\} : J_k = i\}|$$

$|.|$ bezeichnet hierbei die Mächtigkeit der Menge. Für n gegen unendlich, erhalten wir

$$N_i(\infty) = lim_{n \to \infty} N_i(n)$$

als die totale Occupation Time des Zustandes i. Damit können wir nun (3.8) in

$$f_{ij} = \mathbb{P}(N_j(\infty) > 0 | J_0 = i)$$

umschreiben. Anstatt der Mächtigkeit können wir auch eine Summendarstellung für $N_i(n)$ verwenden, indem wir

$$Z_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } J_n = i \\ 0 & \text{für } J_n \neq i \end{cases}$$

definieren und damit

$$N_i(n) = \sum_{l=1}^{n} Z_i(l)$$

erhalten. [6]

3.5 Anwendungen

Markov-Ketten finden in den verschiedensten Gebieten Anwendung. In dem Forschungsfeld der Biologie lässt sich beispielsweise im Bereich der Genetik der Paarungsvorgang von Tieren mit einer Markov-Kette beschreiben. Das System beginnt mit zwei Tieren, die sich vermehren. Von deren Nachkommen finden sich wieder zwei Tiere, die sich paaren. Die Genetik der Tiere bestimmt die Übergangswahrscheinlichkeiten bzw. beeinflusst, welche Tiere ein Paar werden, und die verschiedenen Paarungsmöglichkeiten unter den Nachkommen bilden die Zustände.
Ein weiteres Beispiel lässt sich in der Soziologie finden. Berufliche Klassen bilden die möglichen Zustände. In der Übergangsmatrix sind die Wahrscheinlichkeiten dafür abgebildet, in welche berufliche Klasse die Nachkommen von Eltern, deren Klasse bekannt ist, kommen. Das Ziel ist es hierbei herauszufinden, inwieweit die zukünftige berufliche Laufbahn der Kinder von deren Eltern und deren Klasse abhängt. [9]
Neben diesen beiden Beispielen gibt es natürlich noch viele weitere Anwendungsmöglichkeiten von Markov-Ketten.

4 Semi-Markov-Prozesse

In diesem Kapitel werden Semi-Markov-Prozessen beschrieben. Wir beschäftigen uns zuerst mit einigen Grundlagen, bevor wir dann zu den Definitionen von homogenen und nicht homogenen Semi-Markov-Prozessen übergehen. Wie bereits bei den Markov-Prozessen haben wir auch hier ein System S, das einen der m möglichen Zustände aus dem Zustandsraum $I = \{1, ..., m\}$ annehmen kann. Zum Zeitpunkt $n = 0$ befindet sich das System im Anfangszustand J_0. Der Unterschied zu einem Markov-Prozess liegt nun darin, dass der Zustandswechsel nicht nach festen Zeitschritten geschehen kann, sondern, dass die Länge der Zeit, die sich unser System in einem Zustand befindet, durch eine Zufallsvariable beschrieben wird. In diesem Fall steht X_1 für die Dauer, die das System im Zustand J_0 ist. Anschließend befindet sich das System im Zustand J_1 bis es nach einer Dauer von X_2 in den nächsten Zustand J_2 kommt. Insgesamt erhalten wir mit dieser Vorgehensweise einen zweidimensionalen stochastischen Prozess $(J_n, X_n)_{n\geq 0}$, wobei $X_0 = 0$ gelten muss und X_n die Zeit darstellt, die sich das System S in dem Zustand J_{n-1} aufhält. Weiters gilt $J_n : \Omega \to I$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Wenn wir uns nun nicht für die einzelnen Aufenthaltsdauern interessieren, sondern die expliziten Zeitpunkte, zu denen ein Zustandswechsel stattfindet, wissen möchten, müssen die vorherigen X_n addiert werden:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_1 &= X_1 \\ T_n &= \sum_{l=1}^{n} X_l \end{aligned}$$

$(T_n)_{n\geq 0}$ stellt damit die Folge der Zeitpunkte des n-ten Zustandswechsels dar.
Analog zu den Markov-Prozessen sind die Anfangsverteilungen $P(J_0 = i) = p_i$ für $i \in I$ mit $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ durch einen Wahrscheinlichkeitsvektor $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m)$ gegeben. [6]

4.1 Homogene Semi-Markov-Prozesse

Eine wichtige Eigenschaft, die Semi-Markov-Prozesse erfüllen können, ist, wie bereits bei den Markov-Ketten, die Homogenität. In diesem Kapitel betrachten wir die homogenen Semi-Markov-Prozesse. Vorab können wir die wohl wichtigste Charakterisierung für Semi-Markov-Prozesse definieren. Es sei

$$Q_{J_{n-1}j}(x) = P(J_n = j, X_n \leq x|(J_k, X_k), k = 0, ..., n-1) \tag{4.1}$$

für $n > 0$ und für $j \in I$. [6] Mit Worten kann (4.1) als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des j-ten Zustands vor oder spätestens zum Zeitpunkt, bei dem die Aufenthaltsdauer im vorherigen Zustand x beträgt, beschrieben werden, unter der Voraussetzung, dass die vorherigen Zustände und Aufenthaltsdauern bekannt sind. [13] Die Homogenität ist tatsächlich erfüllt, da bei (4.1) die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 0}$ nicht explizit von n abhängen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} und $Q_{ij}(x)$ hängen nur von den Zuständen $i, j \in I$ und $Q_{ij}(x)$ zusätzlich auch von der Zeitdauer x ab, aber nicht von den Zeitpunkten. [6]
Erwähnenswert ist hier, dass es für die Bestimmung von (4.1) ausreicht, den vorherigen Zustand J_{n-1} zu kennen. Das liegt daran, dass das Wissen über den einen Zustand $J_{n-1} = i$ für $i \in I$ genügt, um die zukünftige Entwicklung des Prozesses zu bestimmen. Dabei kann man den Prozess als neu gestartet betrachten, so als wäre zu $n = 0$ der Anfangszustand i.
Wenn wir die Variable x bei (4.1) immer größer werden lassen und die Grenzwerte

$$p_{ij} = lim_{x\to\infty} Q_{ij}(x), \qquad \forall i, j \in I \tag{4.2}$$

existieren, dann stellen diese die Wahrscheinlichkeiten, irgendwann von dem Zustand i in den Zustand j zu wechseln, dar und es gilt

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1, \qquad \forall i \in I. \tag{4.3}$$

Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich mittels Matrizen vereinfacht darstellen, wobei $\mathbf{Q}(x) = [Q_{ij}(x)]$ und $\mathbf{P} = [p_{ij}]$. [6]
Mit diesen grundlegenden Bezeichnungen lassen sich nun homogene Semi-Makov-Prozesse definieren.

Definition 4.1. *$\boldsymbol{Q}$ sei eine $m \times m$ Matrix, die Werte in $\mathbb{R}^+$ annimmt. Wenn $\boldsymbol{Q}$ (4.2) und (4.3) erfüllt, dann ist es eine homogene Semi- Markov Matrix.*

Definition 4.2. *Sei $\boldsymbol{Q}$ eine homogene Semi- Markov Matrix und $\boldsymbol{p}$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor, der die Anfangsverteilung angibt, dann definiert das Paar $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{Q})$ einen positiven (J, X) Prozess, wobei $(J, X) = (J_n, X_n)_{n \geq 0}$ und $J_n \in I$ und $X_n \in \mathbb{R}^+$ für alle $n \geq 0$. Dieser Prozess wird dann homogener Semi-Markov-Prozess genannt.*

Betrachtet man den stochastischen Prozess $(J_n)_{n \geq 0}$ alleine, so ist er eine homogene Markov-Kette, die $\mathbf{P}$ als Übergangsmatrix hat. Daher wird $(J_n)_{n \geq 0}$ im Zusammenhang mit einem Semi-Markov-Prozess auch als eingebettete Markov-Kette bezeichnet und die Resultate und Eigenschaften aus Kapitel 3.1 gelten. [6]
Gehen wir nun zu dem am Anfang von Kapitel 4 erwähnten stochastischen Prozess $(T_n)_{n \geq 0}$ zurück, der die Zeitpunkte eines Zustandswechsels beschreibt. T bezeichne nun die Werte, die $(T_n)_{n \geq 0}$ annehmen kann. Es gilt entweder, $T = \mathbb{R}^+$ oder $T = \mathbb{N}_0$. Erinnern wir uns an das Kapitel der Erneuerungstheorie 2.2, dann stellt $(T_n)_{n \geq 0}$ die Erneuerungszeitpunkte dar. Wird bei dem zweidimensionalen stochastischen Prozess $(J_n, X_n)_{n \geq 0}$ der zweite Prozess $(X_n)_{n \geq 0}$ durch $(T_n)_{n \geq 0}$ ersetzt, führt das zu einem anderen speziellen zweidimensionalen Prozess.

Definition 4.3. *Der zweidimensionale stochastische Prozess $(J_n, T_n)_{n \geq 0}$ wird als Markov-Erneuerungsprozess von $\boldsymbol{Q}$ bezeichnet,*

wobei $\mathbf{Q}$ die Semi-Markov Matrix des dazugehörigen Semi-Markov-Prozesses ist. Die Randverteilung von $(J_n, T_n)_{n \geq 0}$ ist durch

$$Q_{ij}^n(t) = \mathbb{P}(J_n = j, T_n \leq t | J_0 = i) \tag{4.4}$$

gegeben, wobei $i, j \in I$, $n \geq 0$ und $t \in T$. Sie erfüllt

$$Q_{ij}^n(t) = Q_{ij}^{(n)}(t)$$

und

$$lim_{t \to \infty} Q^{(n)}(t) = P^n.$$

Damit lässt sich (4.1) zu

$$Q_{ij}(t) = \mathbb{P}(J_n = j, T_n - T_{n-1} \leq t | J_{n-1} = i) \tag{4.5}$$

umschreiben, wobei $i, j \in I$ und $t \in T$. Nun können stetige und diskrete homogene Semi-Markov-Prozesse unterschieden werden. Wenn $T = \mathbb{R}^+$, dann erzeugt die Semi-Markov Matrix $\mathbf{Q} = [Q_{ij}(t)]$ einen stetigen homogenen Semi-Markov-Prozess und für $T = \mathbb{N}_0$ erhalten wir einen diskreten homogenen Semi-Markov-Prozess. [6]
Wenn Semi-Markov-Prozesse und Markov-Erneuerungsprozesse miteinander verglichen werden, so fallen viele Ähnlichkeiten auf. Erwähnenswert ist hier der grundlegende Unterschied beider Prozesse. Bei dem Semi-Markov-Prozess ist nämlich für jeden Zeitpunkt $t \in T$ ein Zustand gegeben, während bei dem Markov-Erneuer-ungsprozess ein Zustand nur zu den Sprüngen, also zu den Zustandswechseln, definiert ist. [17]

4.2 Nicht Homogene Semi-Markov-Prozesse

Wir kommen in diesem Kapitel zu den nicht homogenen Semi-Markov-Prozessen. Diese Prozesse unterscheiden sich von den im vorherigen Kapitel behandelten homogenen Semi-Markov-Prozessen dadurch, dass die Folge der Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 0}$ explizit von n abhängt. Das bedeutet, dass die Verweildauer in einem Zustand abhängig davon ist, zu welchem Zeitpunkt dieser Zustand erreicht wird.
Es sei $(T_n)_{n\geq 0}$ wieder die Folge der Zeitpunkte des n-ten Zustandswechsels. Für die zwei stochastischen Prozesse $(J_n)_{n\geq 0}$ und $(T_n)_{n\geq 0}$ gilt nun:

Definition 4.4. *Der zweidimensionale stochastische Prozess $(J_n, T_n)_{n\geq 0}$ ist genau dann ein nicht homogener Markov-Erneuerungsprozess, wenn die Semi-Markov Matrix durch*

$$\boldsymbol{Q} = [Q_{ij}(s,t)]$$

mit

$$Q_{ij}(s,t) = P(J_n = j, T_n \leq t | J_{n-1} = i, T_{n-1} = s) \tag{4.6}$$

gegeben ist, wobei $i, j \in I$ und $t \in T$.

Die Definition der Semi-Markov Matrix (4.5) ist damit für den nicht homogenen Fall umgeschrieben worden. Der nicht homogene Semi-Markov-Prozess ist analog zu der Definition 4.2 gegeben.
Die Übergangswahrscheinlichkeit der eingebetteten Markov-Kette zum Zeitpunkt s wird mit $i, j \in I$ und $s, t \in T$ durch

$$\mathbf{P}(s) = [p_{ij}(s)] = [lim_{t\to\infty} Q_{ij}(s,t)] \tag{4.7}$$

bestimmt.
Neben der Homogenität unterscheiden wir abermals auch zwischen zeitstetigen und zeitdiskreten Semi-Markov-Prozessen. Wenn für die Menge T gilt, dass $T = \mathbb{R}^+$ ist, so handelt es sich um einen stetigen nicht homogenen Markov-Prozess und für $T = \mathbb{N}_0$ haben wir einen diskreten nicht homogenen Markov-Prozess. Letzteren wollen wir nun genauer betrachten.[6]

4.2.1 Diskrete Nicht Homogene Semi-Markov Prozesse

Gegeben sei ein diskreter nicht homogener Markov-Erneuerungsprozess $(X_n, T_n)_{n\geq 0}$ mit einer Semi-Markov Matrix $\mathbf{Q}$, die (4.6) erfüllt. Unter der Annahme, dass der n-ten Zustandswechsel zum Zeitpunkt $s > 0$ stattfindet und das System sich dann im Zustand $i \in I$ befindet, definieren wir uns zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass unser System den nächsten Zustandswechsel vor oder spätestens genau zum Zeitpunkt $t > s$ hat. Diese Wahrscheinlichkeit eines Zustandswechsels bezeichnen wir mit $S_i(s,t)$.

$$S_i(s,t) = \mathbb{P}(T_{n+1} \leq t | X_n = i, T_n = s) \tag{4.8}$$

Wenn die Semi-Markov Matrix bekannt ist, kann man diese Wahrscheinlichkeit einfach durch Aufsummierung erhalten, da

$$S_i(s,t) = \sum_{\substack{j\in I \\ j\neq i}} Q_{ij}(s,t) \tag{4.9}$$

gilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass unser System ab Zeitpunkt $s > 0$ im Zustand $i \in I$ ist und dass es zum Zeitpunkt $t > s$ noch zu keinem Zustandswechsel gekommen ist, ist die Gegenwahrscheinlichkeit von $S_i(s,t)$, das heißt $1 - S_i(s,t)$. [8]
Eine weitere, benötigte Wahrscheinlichkeit, ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System zum Zeitpunkt $s > 0$ in den Zustand i kommt, der nächste Zustandswechsel zum Zeitpunkt $t > s$ stattfindet und dass das System in den Zustand j wechselt:

$$b_{ij}(s,t) = P(X_{n+1} = j, T_{n+1} = t | X_n = i, T_n = s), \tag{4.10}$$

wobei wieder $i, j \in I$ und $i \neq j$.
Wie auch $S_i(s,t)$ lässt sich auch $b_{ij}(s,t)$ mittels $Q_{ij}(s,t)$ darstellen:

$$b_{ij}(s,t) = \begin{cases} Q_{ij}(s,s) = 0 & \text{für } t = s \\ Q_{ij}(s,t) - Q_{ij}(s,t-1) & \text{für } t > s. \end{cases} \tag{4.11}$$

Damit können wir, wenn der vorherige Zustand $i \in I$ und der darauffolgende Zustand $j \in I$ mit $i \neq j$ bekannt sind, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Aufenthaltsdauer in dem Zustand i

$$F_{ij}(s,t) = P(T_{n+1} \leq t | X_n = i, X_{n+1} = j, T_n = s) \tag{4.12}$$

definieren. Mit Hilfe von (4.6) und (4.7) ist (4.12) äquivalent zu

$$F_{ij}(s,t) = \begin{cases} Q_{ij}(s,t)/p_{ij}(s) & \text{für } p_{ij}(s) \neq 0 \\ 1 & \text{für } p_{ij}(s) = 0. \end{cases}$$

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten kann man von dem diskreten nicht homogenen Markov-Erneuerungsprozess zu dem diskreten nicht-homogenen Semi-Markov-Prozess übergehen. Diesen bezeichnen wir ab jetzt mit $(Z_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$, wobei Z_t den Zustand $i \in I$ des Systems zu dem Zeitpunkt t angibt. Die Übergangswahrscheinlichkeit von Z_s nach Z_t wird mit

$$p_{ij}(s,t) = P(Z_t = j | Z_s = i) \tag{4.13}$$

beschrieben. Anhand von folgender Gleichung, können die einzelnen Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet werden:

$$p_{ij}(s,t) = \delta_{ij}(1 - S_i(s,t)) + \sum_{\beta \in I} \sum_{\nu = s}^{t} b_{i\beta}(s,\nu) p_{\beta j}(\nu, t), \tag{4.14}$$

wobei

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases} \tag{4.15}$$

Der erste Teil der rechte Seite von (4.14) beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand ab dem Zeitpunkt s bis zum Zeitpunkt t unverändert bleibt. Wenn man die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Zustand i in einen anderen Zustand j,

$i \neq j$, betrachtet, so muss dieser Term natürlich 0 sein. Diese Bedingung wird durch δ_{ij} erfüllt. Der zweiter Term gibt die Wahrscheinlichkeit wieder, dass man von dem Anfangszustand i zu dem Zeitpunkt ν mit $s \leq \nu \leq t$ in einen beliebigen Zustand β, wobei klarerweise $\beta \neq i$ gilt, wechselt und dass man sich letztendlich zum Zeitpunkt t im Zustand j befindet. [8]

5 Semi-Markov-Prozesse in einem Personenversicherungsmodell

In diesem Kapitel wollen wir nun anhand von einem Beispiel zeigen, welche Möglichkeiten uns mit einem Semi-Markov-Prozess offen stehen. Anwendung finden diese Prozesse vor allem in dem Gebiet der Warteschlangentheorie. Wir werden uns hier aber mit einer möglichen Anwendung von diskreten nicht homogenen Semi-Markov-Prozessen in der Personenversicherung beschäftigen. Im Speziellen werden wir später zuerst eine Hinterbliebenenrente betrachten und anschließend noch eine Invaliditätspension und für diese mit Hilfe eines diskreten nicht homogenen Semi-Markov-Prozesses die Deckungsrückstellung für ein Versicherungsunternehmen bestimmen.

Dafür ist unser System der Versicherungsnehmer, der sich in einem Zustand i aus der Menge $I = \{1, ..., m\}$ befindet. Zunächst erweitern wir den diskreten nicht homogenen Semi-Markov-Prozess, indem wir Rewards in Form von Geld für die einzelnen Zustände oder für die Zustandswechsel einfügen. Dabei kann ein Reward entweder positiv oder negativ sein. Ein positiver Reward würde bedeuten, dass die Versicherung Geld an den Versicherungsnehmer auszahlt und ein negativer, dass das Versicherungsunternehmen eine Zahlung von dem Versicherungsnehmer erhält. Letzteres sind in der Regel die Prämienzahlungen des Versicherungsnehmers.

Es sei nun ψ_i der Reward, den der Versicherungsnehmer erhält oder bezahlt, wenn er sich im Zustand i, wobei wieder $i \in I$, befindet. Damit die Versicherung ihre Verpflichtungen auch erfüllen kann, ist es wichtig zu wissen, wie hoch der Barwert aller Zahlungen ab dem Zeitpunkt s bis zum Zeitpunkt t ist, wenn sich der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt s im Zustand i aufgehalten hat. Diesen bezeichnen wir im Folgenden mit $V_i(s,t)$. Da hier ein diskreter nicht homogener Semi-Markov-Prozess zugrunde liegt, gilt natürlich $s < t$ und $s, t \in \mathbb{N}_0$. Da es sich bei $V_i(s,t)$ um einen Barwert handelt, müssen die Beträge mit einem Zinssatz r, wobei $0 < r < 1$, abgezinst werden. Die Diskontierung der Zahlungen kann mittels einer Rente beschrieben werden. Im Nachfolgenden betrachten wir nur Zahlungen, die am Anfang des Jahres bezahlt werden. Analog kann man aber natürlich auch nachschüssige Zahlungen betrachten. Der Barwert aller Zahlungen ist insgesamt durch

$$\begin{aligned} V_i(s,t) &= (1 - S_i(s,t))\psi_i \ddot{a}_{t-s} \\ &+ \sum_{\beta \in I} \sum_{\nu=s}^{t} b_{i\beta}(s,\nu)\psi_i \ddot{a}_{\nu-s} \\ &+ \sum_{\beta \in I} \sum_{\nu=s}^{t} b_{i\beta}(s,\nu) V_\beta(\nu,t)(1+r)^{s-\nu} \end{aligned} \tag{5.1}$$

gegeben, wobei $b_{i\beta}(s,t)$ und $S_i(s,t)$ die Wahrscheinlichkeiten (4.10) und (4.8) sind. [8] In den letzten beiden Termen der Formel würde es keinen Unterschied machen, wenn man die Summe über die Zeitpunkte $\sum_{\nu=s}^{t}$ erst bei $s+1$ starten lässt, da nach (4.11) gilt, dass $b_{ij}(s,s) = 0$ für alle $i,j \in I$ und $s \in \mathbb{N}_0$. In einer allgemeineren Darstellung von (5.1) werden wir später die Bedeutung der einzelnen Terme der Gleichung noch genau erläutern.

Die hier definierten Rewards ändern sich zwar mit den Zuständen, sie sind aber unabhängig von dem Zeitpunkt, in dem sich der Versicherungsnehmer in diesem Zustand befindet. Wir wollen die Rewards nun in zeitabhängige umwandeln. Dafür beschreiben wir die Diskontierung in den ersten beiden Termen von (5.1) nicht mehr mittels einer Rente, da immer unterschiedliche Beträge abgezinst werden. Insgesamt wird (5.1) damit zu

$$\begin{aligned} V_i(s,t) &= (1 - S_i(s,t)) \sum_{k=s+1}^{t} \psi_i(s,k-s)(1+r)^{s-k} \\ &+ \sum_{\beta \in I} \sum_{\nu=s}^{t} b_{i\beta}(s,\nu) \sum_{k=s+1}^{\nu} \psi_i(s,k-s)(1+r)^{s-k} \\ &+ \sum_{\beta \in I} \sum_{\nu=s}^{t} b_{i\beta}(s,\nu) V_\beta(\nu,t)(1+r)^{s-\nu} \end{aligned} \tag{5.2}$$

erweitert. Dabei beschreibt $\psi_i(s,k-s)$ den Reward, der in dem Zustand i, $i \in I$, zu dem Zeitpunkt k von dem Versicherungsunternehmen ausgezahlt oder erhalten wird. s beschreibt bei dieser Darstellung den Zeitpunkt, in dem der Versicherungsnehmer in den Zustand i gekommen ist und $k-s$ ist die Dauer, die der Versicherungsnehmer sich schon in dem Zustand i aufhält.

In einem Personenversicherungsmodell gibt es aber nicht nur Zahlungen, die in einer gewissen Regelmäßigkeit stattfinden wie Prämienzahlungen von dem Versicherungsnehmer und Rentenzahlungen von den Versicherungsunternehmen, sondern es können auch Einmalzahlung vorkommen. Das würde bedeuten, dass es zu einer Zahlung kommt, wenn man in einen bestimmten Zustand wechselt. Bleibt man anschließend in diesem Zustand, dann kommt es zu keinen weiteren Zahlungen. Wir bezeichnen mit $\lambda_{ij}(t)$ die Rewards, die ein Versicherungsnehmer erhält oder bezahlen muss, wenn er von den Zustand i zu dem Zeitpunkt t in den Zustand j wechselt, wobei wieder $i, j \in I$ mit $i \neq j$ und $t \in \mathbb{N}$. Eine andere Art von Einmalzahlungen kann durch die Zeitabhängigkeit der $\psi_i(s, k-s)$ berücksichtig werden. Das betrifft Rewards, die erhalten oder ausgezahlt werden, wenn der Versicherungsnehmer sich eine bestimmte Zeit in dem Zustand i aufgehalten hat. Wenn beispielsweise nach n Jahren eine Einmalzahlung erfolgt, wäre $\psi_i(s, k-s) = 0$ für $k - s \neq n$ und $\psi_i(s, k-s) \neq 0$ für $k - s = n$.

Werden die $\lambda_{ij}(t)$ nun in (5.2) eingebunden, erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
V_i(s,t) = (1 - S_i(s,t)) \sum_{k=s+1}^{t} \psi_i(s, k-s)(1+r)^{s-k} \\
+ \sum_{\beta \in I} \sum_{\nu=s}^{t} b_{i\beta}(s,\nu) \sum_{k=s+1}^{\nu} \psi_i(s, k-s)(1+r)^{s-k} \\
+ \sum_{\beta \in I} \sum_{\nu=s}^{t} b_{i\beta}(s,\nu) V_\beta(\nu, t)(1+r)^{s-\nu} \\
+ \sum_{\beta \in I} \sum_{\nu=s}^{t} b_{i\beta}(s,\nu) \lambda_{i\beta}(\nu)(1+r)^{s-\nu}.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Unter der Voraussetzung, dass der Versicherungsnehmer sich zu dem Zeitpunkt s in dem Zustand i aufhält, bezeichnet die linke Seite dieser Gleichung klarerweise den Barwert aller Zahlungsflüsse, die von den Zeitpunkt s bis zu dem Zeitpunkt t stattgefunden haben. Die rechte Seite der Gleichung spaltet sich in 4 Terme. In dem ersten Term steckt die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherungsnehmer sich durchgehend, also von dem Zeitpunkt s bis t, in dem Zustand i befindet. In dem Fall finden die ganze Zeit über die entsprechenden Zahlungsflüsse $\psi_i(s, k-s)$ für den Zustand i statt und werden angemessen abgezinst.

Der zweite Term berücksichtigt die fälligen Rewards für den Fall, dass der Versicherungsnehmer nur bis zu dem Zeitpunkt ν, wobei $s \leq \nu \leq t$, in dem Zustand i verweilt und anschließend in den Zustand β, mit $\beta \in I$, wechselt. Die Rewards werden klarerweise wieder passend diskontiert. Der dritte Term lässt, ebenfalls für den Fall, dass der Versicherungsnehmer nach einer gewissen Zeit den Zustand wechselt, den Barwert für die Zeit nach dem Wechsel bis zum Ende der Laufzeit t in die Formel einfließen. Der vierte und letzte Term berechnet die Ein- und Auszahlungen, die aufgrund eines Zustandswechsels anfallen, ein und zinst diese entsprechend ab. [8]
Insgesamt lässt sich sagen, dass bei der Darstellung des Barwertes (5.3) schon sehr viele Aspekte berücksichtigt werden. Eine wichtige Information fehlt allerdings noch. Gerade in der Personenversicherung hängt die Wahrscheinlichkeit eines Zustandswechsels stark von dem Alter der versicherten Personen ab. Eine junge Person hat klarerweise ein geringeres Sterbe- oder Krankheitsrisiko als eine ältere Person. Daher sollten alle in der Formel (5.3) vorkommenden Wahrscheinlichkeiten nicht nur von den Zeitpunkten abhängen, sondern auch von dem Alter, in dem sich der Versicherungsnehmer zum Startzeitpunkt s befindet. Das betrifft die Wahrscheinlichkeiten $S_i(s,t)$ und $b_{ij}(s,t)$. Im Folgenden bezeichne x nun das Alter des Versicherungsnehmers zum Zeitpunkt s. Damit erhalten wir den Barwert zu dem Zeitpunkt s von allen Zahlungen, die eine x-jährige Person, die sich zum Zeitpunkt s in dem Zustand i befindet, in der Zeit ab s bis inklusive zum Zeitpunkt t erhält oder bezahlt:

$$\begin{aligned}
{}^xV_i(s,t) = (1 - {}^xS_i(s,t)) \sum_{k=s+1}^{t} \psi_i(s,k-s)(1+r)^{s-k} \\
+ \sum_{\beta\in I}\sum_{\nu=s}^{t} {}^xb_{i\beta}(s,\nu) \sum_{k=s+1}^{\nu} \psi_i(s,k-s)(1+r)^{s-k} \\
+ \sum_{\beta\in I}\sum_{\nu=s}^{t} {}^xb_{i\beta}(s,\nu)\, {}^{x+\nu-s}V_\beta(\nu,t)(1+r)^{s-\nu} \\
+ \sum_{\beta\in I}\sum_{\nu=s}^{t} {}^xb_{i\beta}(s,\nu)\lambda_{i\beta}(\nu)(1+r)^{s-\nu}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Laut (5.4) braucht man nun die beiden Wahrscheinlichkeiten ${}^xS_i(s,t)$ und ${}^xb_{i\beta}(s,\nu)$ um die Formel anwenden zu können. Wegen (4.11) und (4.9) ist es ausreichend die Wahrscheinlichkeiten ${}^xQ_{ij}(s,t)$ abhängig von dem Alter x zu kennen. Damit kommen wir nun auch zu einem Nachteil dieser Anwendung. Um ${}^xQ_{ij}(s,t)$ für alle Zustände, Zeitpunkte und Alter bestimmen zu können, muss man in der Regel eine sehr große Menge an Grunddaten zur Verfügung haben und diese müssen zusätzlich in einer geeigneten Form gegeben sein, damit man die einzelnen Wahrscheinlichkeiten herauslesen kann. [8]

5.1 Ein variabler Zinssatz

Im vorherigen Kapitel wurden bereits alle möglichen Arten von Rewards berücksichtigt. Trotzdem kann (5.4) noch allgemeiner formuliert werden, indem die Zinsen verallgemeinert werden. Aktuell sind wir davon ausgegangen, dass der Zinssatz r immer konstant ist. Stattdessen können wir aber auch für jeden Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ einen anderen Zinssatz $r_1, r_2, r_3, ...$ haben. Der Diskontierungsfaktor für den Zeitraum ab dem Zeitpunkt s bis zu dem Zeitpunkt t lässt sich dann durch

$$\upsilon(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } s = t \\ \prod_{l=s+1}^{t} \frac{1}{(1+r_l)} & \text{für } s < t \end{cases} \tag{5.5}$$

berechnen.
Durch (5.5) können nun die konstanten Zinssätze in (5.4) ersetzt werden:

$$\begin{aligned} {}^{x}V_i(s,t) = {} & (1 - {}^{x}S_i(s,t)) \sum_{k=s+1}^{t} \psi_i(s,k-s)\upsilon(s,k) \\ & + \sum_{\beta \in I} \sum_{\nu=s}^{t} {}^{x}b_{i\beta}(s,\nu) \sum_{k=s+1}^{\nu} \psi_i(s,k-s)\upsilon(s,k) \\ & + \sum_{\beta \in I} \sum_{\nu=s}^{t} {}^{x}b_{i\beta}(s,\nu)\, {}^{x+\nu-s}V_\beta(\nu,t)\upsilon(s,\nu) \\ & + \sum_{\beta \in I} \sum_{\nu=s}^{t} {}^{x}b_{i\beta}(s,\nu)\lambda_{i\beta}(\nu)\upsilon(s,\nu). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Somit haben wir den Barwert aller Zahlungsflüsse mit Zinssätzen, die sich mit der Zeit ändern, erweitert. Dabei wurde vorausgesetzt, dass der Zinssatz für jeden Zeitpunkt bekannt ist. In der Realität ist dies oft schwierig, da die Zeitpunkte in der Zukunft liegen und sich der genaue Zinssatz nicht im Vorhinein fixieren lässt. Man kann allerdings einige mögliche Zinssätze prognostizieren. Wenn nun alle Möglichkeiten für

die Zinssätze bekannt sind, kann man den Zinssatz als stochastischen Zins auffassen und (5.6) abermals verallgemeinern.
Um den stochastischen Zinssatz darzustellen, verwenden wir abermals einen diskreten nicht-homogenen Semi-Markov-Prozess. In diesem Fall ist das System der Zins und die Menge aller möglichen stochastischen Zinssätze bildet den Zustandsraum. Diesen bezeichnen wir mit

$$R = \{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_k\}, \tag{5.7}$$

wobei k die Anzahl der Zinssätze ist.
Analog zu (4.14) ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zinssatz zum Zeitpunkt t $\rho_{\tilde{j}}$ ist, wenn der Zinssatz zum Zeitpunkt s $\rho_{\tilde{i}}$ gewesen ist, durch

$$\tilde{p}_{\tilde{i}\tilde{j}}(s,t) = \delta_{\tilde{i}\tilde{j}}(1 - S_{\tilde{i}}(s,t)) + \sum_{\beta=1}^{k} \sum_{\nu=s}^{t} b_{\tilde{i}\beta}(s,\nu)\tilde{p}_{\beta\tilde{j}}(\nu,t) \tag{5.8}$$

gegeben, wobei $\tilde{i}, \tilde{j} = 1, ..., k$, $s, t \in \mathbb{N}_0$ mit $s < t$ und

$$\delta_{\tilde{i}\tilde{j}} = \begin{cases} 1 & \text{für } \tilde{i} = \tilde{j} \\ 0 & \text{für } \tilde{i} \neq \tilde{j}. \end{cases} \tag{5.9}$$

unter der Voraussetzung, dass der Zinssatz $\rho_{\tilde{i}}$ zu dem Zeitpunkt s bekannt ist, kann der erwartete Zinssatz für den Zeitpunkt l durch

$$\sum_{j=1}^{k} \tilde{p}_{\tilde{i}\tilde{j}}(s,l)\rho_{\tilde{j}} \tag{5.10}$$

ermittelt werden. Dies kann man nun in (5.5) einsetzen und man erhält

$$\upsilon_{\tilde{i}}(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{für } s = t \\ \prod_{l=s+1}^{t} \frac{1}{(1+\sum_{j=1}^{k} \tilde{p}_{\tilde{i}\tilde{j}}(s,l)\rho_{\tilde{j}})} & \text{für } s < t \end{cases} \tag{5.11}$$

als zu erwartenden Abzinsungsfaktor für die Zeitdauer $t-s$. Für den Barwert der Zahlungsflüsse ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} {}^{x}V_i^{\tilde{i}}(s,t) &= (1 - {}^{x}S_i(s,t)) \sum_{k=s+1}^{t} \psi_i(s,k-s)\upsilon_{\tilde{i}}(s,k) \\ &+ \sum_{\beta\in I}\sum_{\nu=s}^{t} {}^{x}b_{i\beta}(s,\nu) \sum_{k=s+1}^{\nu} \psi_i(s,k-s)\upsilon_{\tilde{i}}(s,k) \\ &+ \sum_{\beta\in I}\sum_{\nu=s}^{t} {}^{x}b_{i\beta}(s,\nu)\, {}^{x+\nu-s}V_\beta(\nu,t)\upsilon_{\tilde{i}}(s,\nu) \\ &+ \sum_{\beta\in I}\sum_{\nu=s}^{t} {}^{x}b_{i\beta}(s,\nu)\lambda_{i\beta}(\nu)\upsilon_{\tilde{i}}(s,\nu), \end{aligned} \tag{5.12}$$

wobei abermals vorausgesetzt wird, dass $\rho_{\tilde{i}}$ der Zinssatz zum Zeitpunkt s ist. [8]
Es kann natürlich auch der Fall eintreten, dass der Zinssatz zum Zeitpunkt s noch nicht bekannt ist. Dann ist der Barwert durch

$${}^{x}V_i(s,t) = \sum_{\tilde{i}=1}^{k} {}^{x}V_i^{\tilde{i}}(s,t)\tilde{p}_{\eta\tilde{i}}(0,s)$$

gegeben. Hier ist ρ_η der bereits bekannte Zinssatz zum Zeitpunkt 0 und $\tilde{p}_{\eta\tilde{i}}(0,s)$ die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten.

6 Anwendungen

6.1 Hinterbliebenenrente

Ziel ist es nun die Formeln aus den vorherigen Kapiteln, speziell von 4.2 und 5, in einem konkreten Beispiel anzuwenden. Wir betrachten nun eine Hinterbliebenenrente, wobei der Hauptversicherte ein x_m-jähriger Mann ist, der eine x_w-jährige Frau und ein x_c-jähriges Kind hat. Vorab benötigen wir die möglichen Zustände, in denen sich die Familie befinden kann, die möglichen Zustandswechsel und die verschiedenen Rewards, die von einzelnen Personen erhalten oder bezahlt werden. All diese Informationen lassen sich übersichtlich mittels eines Graphes darstellen. Ein Zustandswechsel kann immer jährlich erfolgen und da die Familienmitglieder dann auch um ein Jahr gealtert sind, verändern sich auch die Übergangswahrscheinlichkeiten jährlich.
In der Abbildung 6.1 ist der Übergangsgraph unseres Beispiels zu sehen. Hier gelten folgende Abkürzungen:

- m...der Mann lebt in diesem Zustand noch
- w...die Frau lebt in diesem Zustand noch
- c...das Kind lebt in diesem Zustand noch
- pm...Überlebenswahrscheinlichkeit vom Mann
- pw...Überlebenswahrscheinlichkeit von der Frau
- pc...Überlebenswahrscheinlichkeit vom Kind
- P1...Prämie, wenn noch alle leben
- P2...Prämie, wenn nur noch der Mann und das Kind leben
- P3...Prämie, wenn nur noch der Mann und die Frau leben

- a...Rentenzahlung für die Frau, wenn der Mann tot ist
- LS...Einmalzahlung für das Kind beim Ableben beider Elternteile

Die Sterbewahrscheinlichkeit ist natürlich immer die Gegenwahrscheinlichkeit der Überlebenswahrscheinlichkeit. Sie würde also beispielsweise für den Mann $(1 - pm)$ entsprechen.
Der Start unseres diskreten nicht homogenen Semi-Markov-Prozesses wird in der Regel in dem auf der Abbildung 6.1 obersten Zustand sein, in dem alle drei Familienmitglieder noch am Leben sind. In diesem Zustand wird dann eine Hinterbliebenenrente für eine Laufzeit T von dem Mann abgeschlossen. Der Zeitpunkt des Abschlusses ist zu $t = 0$, wobei $t \in \mathbb{N}_0$ mit $t \leq T$ die Jahre angibt, die der Versicherungsvertrag bereits läuft. Solange die ganze Familie am Leben ist, wird jährlich eine Prämie in Höhe von $P1$ bezahlt. Da das Versicherungsunternehmen Geld bekommt, ist das Vorzeichen negativ. Sollte während der Laufzeit der Fall eintreten, dass nur noch das Kind am Leben ist und beide Elternteile, entweder in unterschiedlichen Jahren oder im selben Jahr, verstorben sind, so erhält das Kind von dem Versicherungsunternehmen eine Einmalzahlung in einer Höhe von LS. Wenn der Mann stirbt und die Frau noch am Leben ist, wird für diese die Rente a ausgezahlt. Für den Fall, dass die Frau oder das Kind sterben, verringert sich die Versicherungsprämie, die der Mann einzahlt, da für das Versicherungsunternehmen eines der beiden Risiken weggefallen ist. Im Konkreten sind die beiden versicherten Risiken, dass die Frau Witwe wird oder dass das Kind ein Waise wird. Daher gibt es in dem Zustand, in dem nur noch der Mann lebt auch keine weiteren Zahlungen mehr. Mit dem Wegfall der versicherten Risiken, gibt es auch keinen Bedarf mehr an einer Versicherung.
Klarerweise ist der Zustand, in dem der Mann, die Frau und das Kind tot sind, ein absorbierender Zustand und die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Zustand beibehalten wird, ist 1.

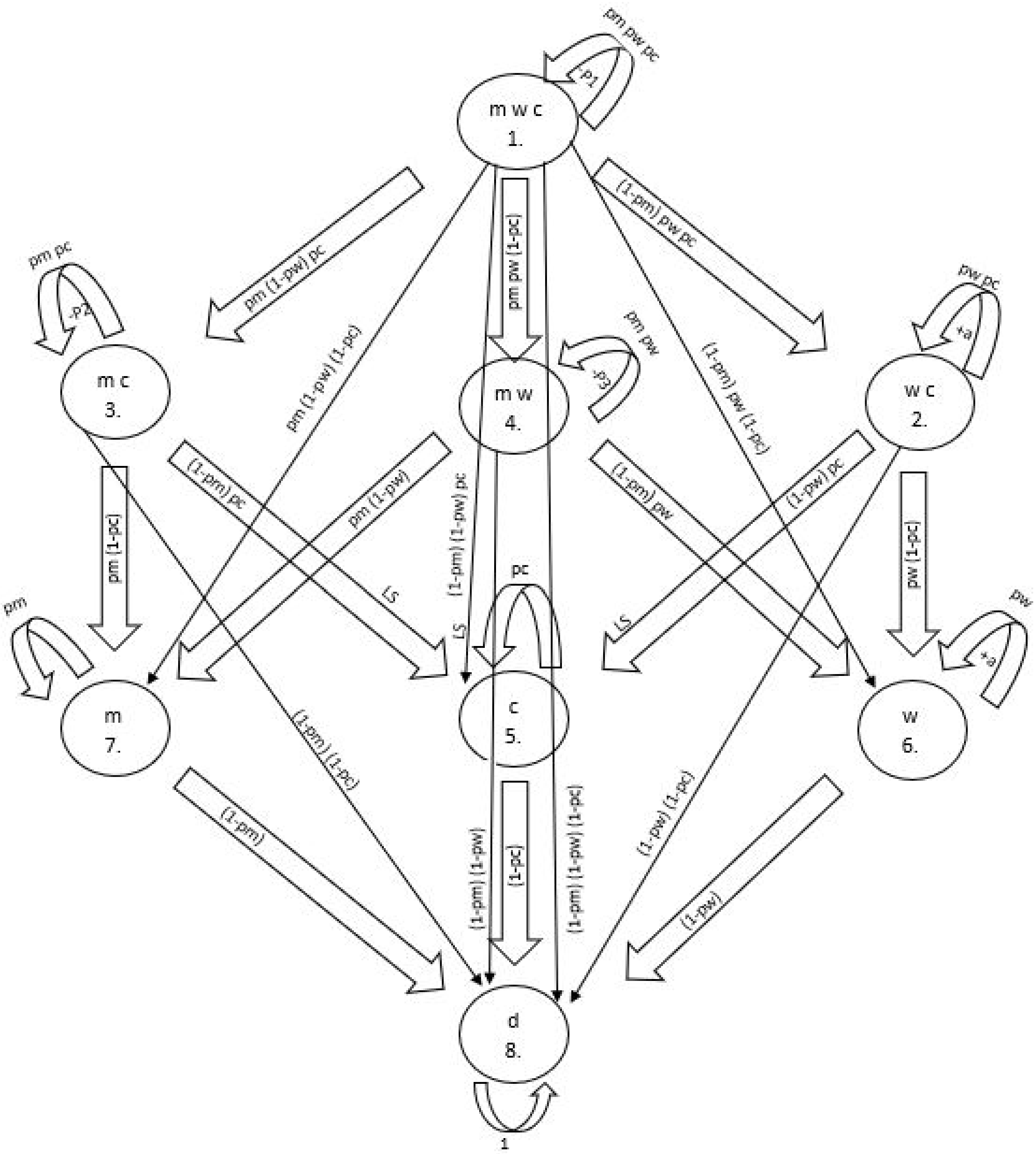

Abbildung 6.1: graphische Darstellung: Beispiel Hinterbliebenenrente
Quelle: eigene Darstellung

6.1.1 Die Grunddaten

Eine Schwierigkeit für Semi-Markov Modelle ist bereits im Kapitel 5 angesprochen worden, nämlich dass die Grunddaten in einer geeigneten Form vorhanden sein müssen.
Für das Beispiel in diesem Kapitel werden die Sterbetafeln der Statistik Austria verwendet. Die Daten können unter [12] gefunden werden. Die aktuellsten Sterbetafeln auf dieser Website sind aus den Jahren 2010/2012. Auf diese wird im Folgenden zugegriffen. Wir haben zuerst ein Excel mit 5 verschiedenen Spalten erstellt: Alter, Anzahl der Lebenden weiblich, Anzahl der Toten weiblich, Anzahl der Lebenden männlich und Anzahl der Toten männlich. Die benötigten Informationen sind aus *„ausfuehrliche_allgemeine_und_ausgeglichene_sterbetafeln_186871_bis_201012_.xlsx“* [12] in die entsprechenden Spalten eingefügt worden. Nun haben wir alle erforderlichen Daten kompakt zusammengefasst. Dieses Excel kann nun in das Programm R hineingespielt werden, da in diesem Programm die Berechnungen stattfinden werden.
Da für das Semi-Markov Modell Übergangswahrscheinlichkeiten benötigt werden und keine absoluten Sterbezahlen, ist der erste Schritt diese zu bestimmen. Der Code, der für das Daten Einlesen und für die erste Datenaufbereitung zuständig ist, sieht folgendermaßen aus:

Listing 6.1: Hinterbliebenenrente - Grunddaten einlesen

```
Daten_einlesen <- function(g){
library(readxl)
Sterbetafel <- read_excel("C:\\Users\\Valerie\\Documents
\\Rechnungsgrundlagen\\Sterbetafel.xlsx")

T <- nrow(Sterbetafel) -1
Sterbetafel_matrix <- data.matrix(Sterbetafel,
rownames.force = NA)

q_w <- matrix(Sterbetafel_matrix[,3] / Sterbetafel_matrix[,2],
nrow=T+1, ncol=1)
q_m <- matrix(Sterbetafel_matrix[,5] / Sterbetafel_matrix[,4],
nrow=T+1, ncol=1)
q_w[101,1] <- 1
q_m[101,1] <- 1
if (g=="w"){return(q_w)}
```

```
if (g=="m"){return(q_m)}
else {return("Fehler: Bitte 'm' fuer maennlich oder 'w' fuer
weiblich eingeben ")}
}
```

Hier ist zu beachten, dass die Sterbewahrscheinlichkeiten mit q bezeichnet werden. Der Code gibt einen Spaltenvektor zurück, der 101 Zeilen hat. Dieser beinhaltet entweder die männlichen oder die weiblichen Sterbewahrscheinlichkeiten, wobei in der ersten Zeile die Wahrscheinlichkeit mit 0 Jahren zu sterben ist, in der zweiten Zeile die Wahrscheinlichkeit mit einem Jahr zu sterben bis letztendlich in der 101. Zeile die Wahrscheinlichkeit angegeben wird, mit 100 Jahren zu sterben, die schließlich 1 beträgt. Damit ist in unserem Beispiel 100 Jahre das höchste Alter, das erreicht werden kann.

6.1.2 Die Berechnung

Ziel ist es nun aus den Grunddaten die Übergangswahrscheinlichkeiten zu berechnen. Aus Abbildung 6.1 geht hervor, dass es insgesamt 8 verschiedene Zustände gibt, in denen sich die Familie befinden kann. Die Anzahl der möglichen Zustände wird in dem R-Code mit der Variable m bezeichnet und muss beim Aufrufen der Funktion für die Berechnungen angegeben werden. Die Übergangswahrscheinlichkeiten, dass die Familie von einem Zustand i innerhalb von einem Jahr in den Zustand j wechselt mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, werden durch eine $8x8$ Matrix dargestellt. Aus der Abbildung 6.1 kann man herauslesen, welchem Zustand welche Nummer zugeordnet ist. Weiters bezeichne x_m das Alter des Mannes, x_w das Alter der Frau und x_c das Alter des Kindes. Der Code zur Erstellung dieser Matrix sieht wie folgt aus:

Listing 6.2: Hinterbliebenenrente
Übergangswahrscheinlichkeiten innerhalb von einem Jahr

```
Uebergangsmatrix <- function(m, x_m, x_w, x_c, g_c){

q_m <- Daten_einlesen("m")
q_w <- Daten_einlesen("w")
q_c <- Daten_einlesen(g_c)

P <- matrix(0, nrow=m, ncol=m)
P[1,1] <- (1-q_m[x_m +1, 1]) * (1-q_w[x_w+1,1]) * (1-q_c[x_c+1,1])
```

```
P[1,2] <- (q_m[x_m +1, 1]) * (1-q_w[x_w+1,1]) * (1-q_c[x_c+1,1])
P[1,3] <- (1-q_m[x_m +1, 1]) * (q_w[x_w+1,1]) * (1-q_c[x_c+1,1])
P[1,4] <- (1-q_m[x_m +1, 1]) * (1-q_w[x_w+1,1]) * (q_c[x_c+1,1])

P[1,5] <- (q_m[x_m +1, 1]) * (q_w[x_w+1,1]) * (1-q_c[x_c+1,1])
P[1,6] <- (q_m[x_m +1, 1]) * (1-q_w[x_w+1,1]) * (q_c[x_c+1,1])
P[1,7] <- (1-q_m[x_m +1, 1]) * (q_w[x_w+1,1]) * (q_c[x_c+1,1])
P[1,8] <- (q_m[x_m +1, 1]) * (q_w[x_w+1,1]) * (q_c[x_c+1,1])

P[2,2] <- (1-q_w[x_w+1,1]) * (1-q_c[x_c+1,1])
P[2,5] <- (q_w[x_w+1,1]) * (1-q_c[x_c+1,1])
P[2,6] <- (1-q_w[x_w+1,1]) * (q_c[x_c+1,1])
P[2,8] <- (q_w[x_w+1,1]) * (q_c[x_c+1,1])

P[3,3] <- (1-q_m[x_m+1,1]) * (1-q_c[x_c+1,1])
P[3,5] <- (q_m[x_m+1,1]) * (1-q_c[x_c+1,1])
P[3,7] <- (1-q_m[x_m+1,1]) * (q_c[x_c+1,1])
P[3,8] <- (q_m[x_m+1,1]) * (q_c[x_c+1,1])

P[4,4] <- (1-q_m[x_m+1,1]) * (1-q_w[x_w+1,1])
P[4,6] <- (q_m[x_m+1,1]) * (1-q_w[x_w+1,1])
P[4,7] <- (1-q_m[x_m+1,1]) * (q_w[x_w+1,1])
P[4,8] <- (q_m[x_m+1,1]) * (q_w[x_w+1,1])

P[5,5] <- (1-q_c[x_c+1,1])
P[5,8] <- (q_c[x_c+1,1])

P[6,6] <- (1-q_w[x_w+1,1])
P[6,8] <- (q_w[x_w+1,1])

P[7,7] <- (1-q_m[x_m+1,1])
P[7,8] <- (q_m[x_m+1,1])
P[8,8] <- 1

return(P)
}
```

Für jedes Alter ergeben sich klarerweise andere Übergangswahrscheinlichkeiten. Da die Sterbewahrscheinlichkeit des Kindes nicht nur von dem aktuellen Alter, sondern auch von dem Geschlecht des Kindes abhängt, muss zusätzlich die Variable g_c für die Funktion angegeben werden. Sie kann entweder den Wert „m “ für männlich oder „w “ für weiblich annehmen.

Mit Hilfe dieser jährlichen Übergangswahrscheinlichkeiten kann die Wahrscheinlichkeit, von dem Zustand i nach genau t Jahren in den Zustand j zu wechseln, bestimmt werden. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht (4.10) und wird berechnet, indem man für die ersten $t-1$ Jahre immer die Wahrscheinlichkeiten, dass sich der Zustand der Familie nicht ändert, multipliziert und anschließend noch die Wahrscheinlichkeit multipliziert, dass nach $t-1$ Jahren, ein Zustandswechsels nach einem weiteren Jahr stattfindet. Zu beachten ist hierbei natürlich, dass sich die Übergangswahrscheinlichkeiten jährlich ändern, da die Familienmitglieder immer älter werden. In R lässt sich dies wie folgt realisieren:

Listing 6.3: Hinterbliebenenrente - Zustandswechsel nach genau t Jahren

```
B_ij <- function(m, x_m, x_w, x_c, g_c, t ){

P_t <- Uebergangsmatrix(m, x_m+t-1, x_w+t-1, x_c+t-1,  g_c)
B <- matrix(1, nrow=m, ncol=m)

for(i in 1:m){ for(j in 1:i) {B[i,j] = 0 } }
if(t<1){print("Fehler: t muss mindestens 1 sein")}

if(t>1){
for(k in 0:(t-2) ){
P <-  Uebergangsmatrix(m, x_m+k, x_w+k, x_c+k,  g_c)
for(i in 1:(m-1)){
for(j in (i+1):m){

B[i,j] <- B[i,j] * P[i,i]
}
}
}
}
```

```
B <- B * P_t

return(B)
}
```

Als nächstes wollen wir nun die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass die Familie zu einem gegebenen Zeitpunkt im Zustand i ist und innerhalb der nächsten t Jahre in den Zustand j wechselt. Das entspricht (4.6) und kann bestimmt werden, indem (4.11) zu

$$Q_{ij}(s,t) = \begin{cases} b_{ij}(s,s) = 0 & \text{für } t = s \\ \sum_{k=s}^{t} b_{ij}(s,k) & \text{für } t > s. \end{cases}$$

umgeschrieben und implementiert wird.

Listing 6.4: Hinterbliebenenrente - Zustandswechsel innerhalb von t Jahren

```
Q_ij <- function(m, x_m, x_w, x_c, g_c, t ){

Q <- matrix(0, nrow=m, ncol=m)

if(t==0){return(Q) }
for(i in 1:t){
Q <- Q + B_ij(m, x_m, x_w, x_c, g_c, i)
}

return(Q)
}
```

Die Wahrscheinlichkeit, innerhalb der nächsten t Jahre aus dem Zustand i in irgendeinen anderen Zustand j, wobei $i \neq j$ ist, zu wechseln, kann mittels (4.9) implementiert werden.

Listing 6.5: Hinterbliebenenrente
Zustandswechsel in einen beliebigen Zustand innerhalb von t Jahren

```
S_i <- function(m, x_m, x_w, x_c, g_c, t ){

S <- matrix(0, nrow=m, ncol=1)
Q <- Q_ij(m, x_m, x_w, x_c, g_c, t)
```

```
for(i in 1:m){
for(j in 1:m){
S[i] <- S[i] + Q[i,j]
}
}

return(H)
}
```

Mit diesen R-Codes können alle Wahrscheinlichkeiten berechnet werden, die für die Formel (5.4) aus Kapitel 5 benötigt werden. Um die Formel (5.4) zu realisieren, müssen wir allerdings noch zusätzlich

- P1...Versicherungsprämie, wenn alle leben
- P2...Versicherungsprämie, wenn nur noch der Mann und das Kind leben
- P3...Versicherungsprämie, wenn nur noch der Mann und die Frau leben
- a...Rente für die Frau, wenn der Mann tot ist
- LS...Einmalzahlung für das Kind, wenn beide Elternteile tot sind
- r...konstanter Zinssatz
- t...Laufzeit des Versicherungsvertrags

angeben, wenn die Funktion aufgerufen wird. Insgesamt lässt ich (5.4) wie folgt mittels R verwirklichen:

Listing 6.6: Deckungsrückstellung

```
V <- function(m, x_m, x_w, x_c, pr, prc, prs, rente, EZ,
g_c, t, r ){

if(t==0){return(matrix(0, nrow=m,ncol=1))}

psi <- matrix( c(-pr, rente,  -prc, -prs, 0,  rente, 0, 0),
nrow=m,ncol=1)
lambda <- matrix ( 0 ,nrow=m, ncol=m)
lambda[1,5] <- EZ
```

```
lambda[2,5] <- EZ
lambda[3,5] <- EZ

V <- matrix(0, nrow= m, ncol=t)

before_trans <- matrix(0, nrow=m, ncol=1)
z <- matrix(0, nrow=m, ncol=1)
after_trans <- matrix(0, nrow=m, ncol=1)

for (k in t:1){
if(k==t){Vh <- matrix(0, nrow=m, ncol=1)}
else{
Vh <- V(m, x_m+k ,x_w+k ,x_c+k , pr, prc, prs,
rente, EZ, g_c, t-k,r)[,t-k]
V[,t-k] <- Vh
}
B <- B_ij(m, x_m, x_w, x_c, g_c, k )

for(v in 1:k){ z <- z + psi * (1/(1+r))^(v)}

for(i in 1:m){
for(j in 1:m){
before_trans[i] <- before_trans[i] + (B[i,j] *z[i] )
after_trans[i] <- after_trans[i] + B[i,j] *
(1/(1+r))^(k) * (Vh[j] + lambda[i,j])
}
}
}

y <- matrix(0, nrow=m, ncol=1)
for(v in 1:t){ y <- y + psi * (1/(1+r))^(v) }

V[,t] <-( (1- S_i(m, x_m, x_w, x_c, g_c, t ) ) * y
+ before_trans + after_trans )

return(V)
}
```

Insgesamt berücksichtigen wir bei der Berechnung des Barwerts sowohl das Alter des Mannes, der Frau und des Kindes als auch das Geschlecht des Kindes. Zu erwähnen sei hier, dass man den Code nur leicht ändern bzw. erweitern muss, um analog zum Geschlecht des Kindes, die Geschlechter der zwei Erwachsenen einlesen zu können. Damit könnte man den Barwert auch für ein lesbisches oder ein schwules Pärchen berechnen. Klarerweise kann man auch eine Familie betrachten, in der die Frau die Hauptverdienerin ist, die Prämien einzahlt und der Mann die Hinterbliebenenrente beim Tod der Frau ausgezahlt bekommt. Außerdem kann der Code für beliebig viele Kinder erweitert werden. Da pro Kind je zwei Parameter, das Alter und das Geschlecht, eingelesen werden müssen, sollte man hier jedoch aufpassen, dass der Code nicht zu unübersichtlich wird, wenn sehr viele Kinder eingebaut werden sollen.

6.1.3 Beispiele

Wir betrachten nun eine Hinterbliebenenrente von einen 40-jähriger Mann, der eine 35-jährige Frau und ein 8-jähriges Kind hat. Die Versicherung soll automatisch enden, wenn das Kind 18 Jahre ist, also nach 10 Jahren. Für die Dauer setzen wir einen jährlichen, konstanten Zinssatz von 1,5% voraus. Weiters soll das Kind vorerst einmal männlich sein. Die Prämie, die bezahlt wird, wenn alle leben, beträgt 50€, wenn nur noch der Mann und das Kind leben 30€ und wenn nur noch der Mann und die Frau leben 20€. Die Rente für die Frau im Falle des Ablebens des Mannes ist in einer Höhe von 200€ und die Einmalzahlung für das Kind, sollten beide Elternteile sterben, beträgt 5.000€. Mit diese Voraussetzungen ergibt sich für die Deckungsrückstellung

Listing 6.7: V(8, 40, 35, 8, 50, 30, 20, 200, 5000, "m", 10, 0.015)

```
            [,1]       [,2]       [,3]       [,4]       [,5]
[1,]   -49.24457  -97.40683 -144.96313 -192.25078 -239.50639
[2,]   202.07782  400.87460  596.84122  790.28113  981.42291
[3,]   -13.40127  -28.45675  -45.10537  -63.26393  -82.82832
[4,]   -19.70443  -38.62387  -57.02381  -75.10711  -93.02686
[5,]     0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
[6,]   197.04433  391.35373  583.25491  772.97861  960.69300
[7,]     0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
[8,]     0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
            [,6]       [,7]       [,8]       [,9]      [,10]
[1,]   -286.8984  -334.5440  -382.5240  -430.8929  -479.6796
```

```
[2,] 1170.4816 1357.6345 1543.0270 1726.7807 1908.9678
[3,] -103.6714 -125.6527 -148.6433 -172.5261 -197.1922
[4,] -110.8955 -128.7922 -146.7719 -164.8694 -183.1049
[5,]    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
[6,] 1146.5352 1330.6197 1513.0349 1693.8386 1873.0613
[7,]    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
[8,]    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
```

Hier bezeichnet $V[,10]$ die gesuchte Deckungsrückstellung $V_i(0, 10)$ mit $i \in \{1, ..., 8\}$. i gibt hier den Zustand an, in dem sich die Familie zum Betrachtungsanfang $t = 0$ befindet. Wenn der Versicherungsvertrag erst in diesem Jahr abgeschlossen wird, ist das dann natürlich der Zustand 1, in dem noch alle Familienmitglieder leben.
$V[,9]$ bezeichnet dann die Deckungsrückstellung $V_i(1, 10)$ für die nächsten 9 Jahre, wenn bereits ein Jahr vergangen ist. Hier ist die Deckungsrückstellung wieder abhängig davon, in welchem Zustand sich die Familie ein Jahr später befindet. Analog bezeichnet $V[i, 1]$ die Deckungsrückstellung, die für das letzte Versicherungsjahr benötigt wird, unter der Voraussetzung, dass die Familie in das letzte Jahr mit dem Zustand i startet.
In den Zuständen 5, 7 und 8 existiert kein zu versicherndes Risiko mehr und der Versicherungsvertrag endet automatisch. Daher wird auch keine Deckungsrückstellung mehr benötigt. Zu beachten ist, dass im Zustand 5 die Einmalzahlung für das Kind fällig wird. Diese wird allerdings zu Beginn des Jahres gezahlt und damit ist für die restlichen Jahre keine weitere Reserve nötig.
Betrachten wir nun das gleiche Szenario noch einmal mit dem Unterschied, dass diesmal das Kind weiblich ist, erhalten wir

Listing 6.8: V(8, 40, 35, 8, 50, 30, 20, 200, 5000, "w", 10, 0.015)

```
          [,1]      [,2]       [,3]       [,4]       [,5]
[1,] -49.24456 -97.39350 -144.91822 -192.16219 -239.37066
[2,] 202.07927 400.80183  596.61451  789.85474  980.78913
[3,] -13.39662 -28.44055  -45.06784  -63.19873  -82.73387
[4,] -19.70443 -38.62387  -57.02381  -75.10711  -93.02686
[5,]   0.00000   0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
[6,] 197.04433 391.35373  583.25491  772.97861  960.69300
[7,]   0.00000   0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
[8,]   0.00000   0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
          [,6]      [,7]      [,8]      [,9]     [,10]
```

```
[1,] -286.7168 -334.3206 -382.2626 -430.5936 -479.3409
[2,] 1169.6505 1356.6263 1541.8590 1725.4524 1907.4720
[3,] -103.5486 -125.5041 -148.4711 -172.3304 -196.9720
[4,] -110.8955 -128.7922 -146.7719 -164.8694 -183.1049
[5,]    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
[6,] 1146.5352 1330.6197 1513.0349 1693.8386 1873.0613
[7,]    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
[8,]    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
```

als Deckungsrückstellungen. Die Ergebnisse unterscheiden sich nur sehr gering voneinander. Das ergibt Sinn, wenn man die Sterbewahrscheinlichkeiten für ein 8-jähriges bis 18-jähriges Kind betrachtet. Diese sind sowohl bei den Frauen als auch bei den Männern sehr gering und unterscheiden sich in den Altern kaum. Außerdem sind die Ergebnisse in den Zuständen 4 und 6 ident, da in diesen Fällen, das Kind nicht mehr am Leben ist und das Geschlecht damit nicht in das Ergebnis einfließt.
In einem nächsten Schritt wollen wir uns anschauen, wie sich die Ergebnisse verändern, wenn sich die Übergangswahrscheinlichkeiten signifikant verändern. Das wäre beispielsweise, wenn die Eltern um einiges älter wären und damit ihre Sterbewahrscheinlichkeit deutlich höher ist. Wir betrachten nun einen 80-jährigen Mann, eine 75-jährige Frau und abermals ein 8-jähriges männliches Kind. Dieser Fall könnte eintreten, wenn die Eltern bereits tot sind und das Kind zu den Großeltern kommt, woraufhin der Großvater eine Versicherung für eine Hinterbliebenenrente abschließt.
Als Ergebnis erhalten wir

Listing 6.9: V(8, 80, 75, 8, 50, 30, 20, 200, 5000, "m", 10, 0.015)

```
           [,1]       [,2]        [,3]       [,4]       [,5]
[1,]   6.987066   94.41364  196.896397  283.45549  340.33004
[2,] 538.375609 1015.64859 1464.688123 1906.74346 2355.19031
[3,] 781.828781 1349.94694 1758.422311 2044.88962 2236.11568
[4,] -19.704433  -15.90848   -2.818187   13.32657   29.75463
[5,]   0.000000    0.00000    0.000000    0.00000    0.00000
[6,] 197.044335  403.04310  635.465922  903.98867 1213.15226
[7,]   0.000000    0.00000    0.000000    0.00000    0.00000
[8,]   0.000000    0.00000    0.000000    0.00000    0.00000
           [,6]       [,7]       [,8]       [,9]      [,10]
[1,]  362.29714  348.27534  299.09207  216.37006  101.99802
[2,] 2818.12310 3300.14080 3803.60069 4329.49995 4878.05509
```

```
[3,] 2351.55455 2405.67189 2409.44560 2371.37143 2298.15800
[4,]   45.07305   58.34387   68.72239   75.35672   77.39954
[5,]    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
[6,] 1564.19127 1956.30744 2387.56038 2855.48759 3357.52644
[7,]    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
[8,]    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000    0.00000
```

Hier wäre die Deckungsrückstellung $V_1(0, 10) = 102,00€$, also positiv. Das heißt, das Versicherungunternehmen kann bereits beim Abschluss des Vertrages mit einem Verlust rechnen. In der Realität würde so ein Versicherungsvertrag natürlich nie zu Stande kommen. Der Großvater müssten wegen der höheren Sterbewahrscheinlichkeit eine höhere Prämie bezahlen.
Wir betrachten jetzt, wie sehr sich die Sterbewahrscheinlichkeiten wirklich verändert haben. Die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Großeltern und das Kind im ersten Jahr betragen

Listing 6.10: Uebergangsmatrix(8, 80, 75, 8, ”m”)

```
          [,1]       [,2]       [,3]         [,4]        [,5]
[1,] 0.9210873 0.05953428 0.01813593 6.469916e-05 0.001172212
[2,] 0.0000000 0.98062162 0.00000000 0.000000e+00 0.019308140
[3,] 0.0000000 0.00000000 0.93922327 0.000000e+00 0.060706494
[4,] 0.0000000 0.00000000 0.00000000 9.211520e-01 0.000000000
[5,] 0.0000000 0.00000000 0.00000000 0.000000e+00 0.999929763
[6,] 0.0000000 0.00000000 0.00000000 0.000000e+00 0.000000000
[7,] 0.0000000 0.00000000 0.00000000 0.000000e+00 0.000000000
[8,] 0.0000000 0.00000000 0.00000000 0.000000e+00 0.000000000
             [,6]         [,7]         [,8]
[1,] 4.181817e-06 1.273907e-06 8.233869e-08
[2,] 6.888098e-05 0.000000e+00 1.356245e-06
[3,] 0.000000e+00 6.597307e-05 4.264155e-06
[4,] 5.953846e-02 1.813720e-02 1.172294e-03
[5,] 0.000000e+00 0.000000e+00 7.023723e-05
[6,] 9.806905e-01 0.000000e+00 1.930950e-02
[7,] 0.000000e+00 9.392892e-01 6.071076e-02
[8,] 0.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00
```

Die Wahrscheinlichkeiten, die nächsten 10 Jahre keinen Zustandswechsel zu haben, sind durch

Listing 6.11: 1 - S_i(8, 80, 75, 8, "m", 10)

```
          [,1]
[1,] 0.2147652
[2,] 0.6657885
[3,] 0.3219779
[4,] 0.2151619
[5,] 0.9981562
[6,] 0.6670184
[7,] 0.3225727
[8,] 1.0000000
```

gegeben. Im Vergleich dazu unterscheidet sich die Übergangsmatrix von einem 40 Jahre jüngeren Pärchen, also einem 40-jährigen Mann und einer 35-jährigen Frau, mit einem 8-jährigen Kind, wie vermutet, deutlich.

Listing 6.12: Uebergangsmatrix(8, 40, 35, 8, "m")

```
          [,1]        [,2]         [,3]         [,4]         [,5]
[1,] 0.9982881 0.001246963 0.0003942342 7.012191e-05 4.924385e-07
[2,] 0.0000000 0.999535036 0.0000000000 0.000000e+00 3.947266e-04
[3,] 0.0000000 0.000000000 0.9986823072 0.000000e+00 1.247456e-03
[4,] 0.0000000 0.000000000 0.0000000000 9.983582e-01 0.000000e+00
[5,] 0.0000000 0.000000000 0.0000000000 0.000000e+00 9.999298e-01
[6,] 0.0000000 0.000000000 0.0000000000 0.000000e+00 0.000000e+00
[7,] 0.0000000 0.000000000 0.0000000000 0.000000e+00 0.000000e+00
[8,] 0.0000000 0.000000000 0.0000000000 0.000000e+00 0.000000e+00
             [,6]         [,7]         [,8]
[1,] 8.758938e-08 2.769186e-08 3.458994e-11
[2,] 7.020950e-05 0.000000e+00 2.772645e-08
[3,] 0.000000e+00 7.014960e-05 8.762397e-08
[4,] 1.247051e-03 3.942618e-04 4.924731e-07
[5,] 0.000000e+00 0.000000e+00 7.023723e-05
[6,] 9.996052e-01 0.000000e+00 3.947543e-04
[7,] 0.000000e+00 9.987525e-01 1.247543e-03
[8,] 0.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00
```

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle überleben ist hier um 7,72% höher. Die Wahrscheinlichkeiten, in dem selben Zustand für die nächsten 10 Jahre zu bleiben, betragen bei der jungen Familie

Listing 6.13: 1 - S_i(8, 40, 35, 8, "m", 10)

```
          [,1]
[1,] 0.9712105
[2,] 0.9918059
[3,] 0.9774290
[4,] 0.9730046
[5,] 0.9981562
[6,] 0.9936380
[7,] 0.9792345
[8,] 1.0000000.
```

Hier wird der Unterschied abermals sehr deutlich, da die Wahrscheinlichkeiten für keinen Zustandswechsel hier sehr hoch sind, während bei dem alten Paar mit dem Kind ein Zustandswechsel teilweise wahrscheinlicher ist, als in einem Zustand zu verweilen. Die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Familie stirbt, ist bei den jungen Eltern um 75,64% größer. Durch diese Vergleiche sind die Unterschiede in den Deckungsrückstellungen plausibel.

6.2 Invaliditätspension

In diesem Kapitel wird die allgemeine Formel (5.4) für eine Invaliditätspension adaptiert. Dafür wird ein x-jähriger Mann betrachtet, der sich in einem von drei möglichen Zuständen befinden kann. Er kann entweder aktiv sein, invalide oder tot. Diese Stadien und die dazugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten werden in dem Graphen 6.2 verdeutlicht. Es gelten folgende Abkürzungen:

- a...aktiver Zustand
- i...invalider Zustand
- d...Tod
- p(.,.)...Übergangswahrscheinlichkeit von den Zustand . in den Zustand .
- P...Prämie, die der Mann im aktiven Zustand bezahlt

- R...Rentenzahlung für den Mann, wenn er invalide ist

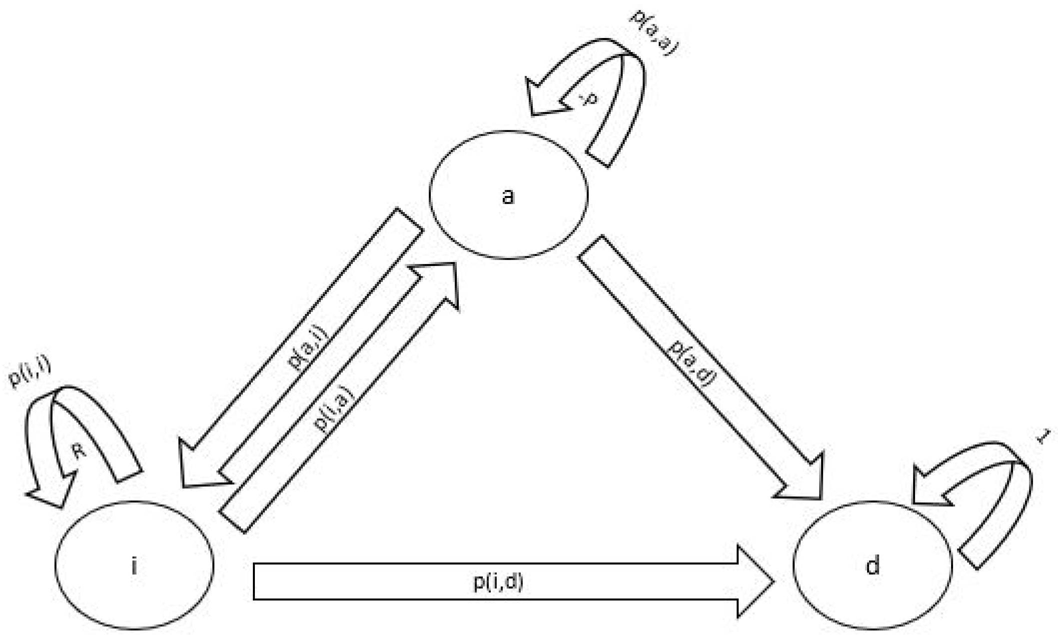

Abbildung 6.2: graphische Darstellung: Beispiel Invaliditätspension
Quelle: eigene Darstellung

Wenn ein x-jähriger Mann eine Versicherung für eine Invaliditätspension abschließt, zahlt er so lange eine Prämie in der Höhe P an das Versicherungsunternehmen bis entweder die Vertragslaufzeit abgelaufen ist oder bis er invalide wird. In den Zustand der Invalidität erhält er von dem Versicherungsunternehmen eine regelmäßige Pension in der Höhe von R. Wenn einmal der Zustand der Invalidität erreicht ist, ist es möglich wieder in den aktiven Zustand zurück zu kommen. Je nachdem in welchem Alter die Invalidität eintritt, unterscheidet sich die Wahrscheinlichkeit einer Reaktivierung. Damit hat ein älterer Mann eine geringere Chance aus der Invalidität herauszukommen als ein junger Mann. Erwähnenswert ist auch, dass die Reaktivierungswahrscheinlichkeit neben dem Alter auch von der Dauer der Invalidität abhängt. Je länger die Invalidität bereits anhält, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit abermals in den aktiven Zustand zurückzukehren.
Analog kann statt dem Mann auch eine x-jährige Frau betrachtet werden. Dafür müssen nur die Sterbe- und Invaliditätswahrscheinlichkeiten von einem Mann durch jene von einer Frau ersetzt werden.

6.2.1 Die Grunddaten

Die Reaktivierungswahrscheinlichkeiten sind für die unterschiedlichen Alter beim Invaliditätseintritt geschätzt worden und nehmen mit der Dauer der Invalidität exponentiell ab. Die Sterbewahrscheinlichkeiten sowie die Wahrscheinlichkeiten, invalide zu werden, stammen aus [11]. Die Grunddaten sind in einem Excel- Blatt zusammengefasst und in R eingelesen worden.

6.2.2 Die Berechnung

Bei den Berechnungen gehen wir wie in 6.1 bei der Hinterbliebenenrente vor. Als erstes sollten wieder die Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmt werden. Intuitiv würden wir dafür eine 3x3 Matrix erstellen. Da die Reaktivierungswahrscheinlichkeit aber sowohl vom Alter als auch von der Dauer der Invalidität abhängt, ist es für die Berechnung einfacher, den Zustand der Invalidität in mehrere Zustände aufzuspalten. Insgesamt betrachten wir eine 7x7 Matrix, wobei der erste und der letzte Zustand wie gehabt den aktiven und den toten Zustand bezeichnen. Die restlichen 5 Zustände gehören alle zu dem Zustand der Invalidiät. Im Zustand 2 befindet man sich, wenn man im ersten Jahr der Invalidiät ist, bleibt man invalide, kommt man in das zweite Jahre der Invalidität, in den Zustand 3. Von dem Zustand 3 kann man entweder reaktiviert werden und in Zustand 1 zurückkehren, sterben oder in den Zustand 4, also in das dritte Jahr der Invalidität, kommen. Analog steht der 5. Zustand für das vierte Jahr der Invalidität und im Zustand 6 sind dann jene, die das fünfte Jahr oder länger invalide sind. Der entsprechende R-Code sieht wie folgt aus:

Listing 6.14: Invaliditätspension
Übergangswahrscheinlichkeiten innerhalb von einem Jahr

```
Uebergangsmatrix <- function(m, x){

q_x <- Daten_einlesen("q", x)
i_x <- Daten_einlesen("i", x)

P <- matrix(0, nrow=m, ncol=m)
P[1,1] <- (1- q_x[x +1 -30, 1] - i_x[x +1 -30, 1])
P[1,2] <- i_x[x +1 -30, 1]
P[1,7] <- q_x[x +1 -30, 1]
```

```
P[2,1] <- Daten_einlesen("r", x-1)[x+1-30,1]
P[2,3] <- 1- P[2,1] -q_x[x +1 -30, 1]
P[2,7] <- q_x[x +1 -30, 1]

P[3,1] <- Daten_einlesen("r", x-2)[x+1-30,1]
P[3,4] <- 1- P[3,1] -q_x[x +1 -30, 1]
P[3,7] <- q_x[x +1 -30, 1]

P[4,1] <- Daten_einlesen("r", x-3)[x+1-30 ,1]
P[4,5] <- 1- P[4,1] -q_x[x +1 -30, 1]
P[4,7] <- q_x[x +1 -30, 1]

P[5,1] <- Daten_einlesen("r", x-4)[x+1-30 ,1]
P[5,6] <- 1- P[5,1] -q_x[x +1 -30, 1]
P[5,7] <- q_x[x +1 -30, 1]

P[6,1] <- Daten_einlesen("r", x-5)[x+1-30 ,1]
P[6,6] <- 1- P[6,1] -q_x[x +1 -30, 1]
P[6,7] <- q_x[x +1 -30, 1]

P[7,7] <- 1

return(P)
}
```

In der Funktion steht x für das Alter des Versicherten und m für die Anzahl der Zustände. Hier ist wichtig, dass aufgrund der Aufspaltung der Invalidität $m = 7$ gesetzt wird. Mit diesen Übergangswahrscheinlichkeiten kann die Wahrscheinlichkeit, nach genau t Jahren von einem Zustand in einen anderen zu wechseln, bestimmt werden. In R können die Wahrscheinlichkeiten (4.10) für eine Invaliditätspension durch

Listing 6.15: Invaliditätspension - Zustandswechsel nach genau t Jahren

```
B_ij <- function(m, x, t ){

P_t <- Uebergangsmatrix(m, x+t-1)
```

```
B <- matrix(1, nrow=m, ncol=m)
for(i in 1:m){B[i,i] = 0}
B[7,] <- 0

for(i in 3:(m-1)){B[1,i] <- 0 }

for(j in 2:(m-1)){
for(i in 2:(m-1)){B[j,i] <- 0 }
}

for(k in 0:(t-2) ){
        P <-  Uebergangsmatrix(m, x+k)
        B[1,2] <- B[1,2] * P[1,1]
        B[1,m] <- B[1,m] * P[1,1]

        for(i in 2:(m-1)){
                if(i+1+k < 7){
                B[i,1] <- B[i,1] * P[i+k,i+1+k]
                B[i,7] <- B[i,7] * P[i+k,i+1+k]
                }

        else{
                B[i,1] <- B[i,1] * P[6,6]
                B[i,7] <- B[i,7] * P[6,6]
        }
        }
}

B[1,2] <- B[1,2] * P_t[1,2]
B[1,7] <- B[1,7] * P_t[1,7]

for(i in 2:(m-1)){
if( (i+1+(t-1)) < 7){
B[i,1] <- B[i,1] * P_t[i+(t-1),1]
B[i,7] <- B[i,7] * P_t[i+(t-1),7]
}
```

```
else{
B[i,1] <- B[i,1] * P_t[6,1]
B[i,7] <- B[i,7] * P_t[6,7]
}
}

return(B)
}
```

berechnet werden. Vergleicht man diese Implementierung mit jener für die Hinterbliebenenrente Listing 6.3, fällt auf, dass der Code länger und komplexer ist. Das hat den Grund, dass die einzelnen Zustände der Invalidität als ein Zustand betrachtet werden müssen. Ein Wechsel von Zustand 2 in den Zustand 3 wird beispielsweise nicht als Zustandswechsel angesehen, da die Person im Zustand der Invalidität bleibt. Die Wahrscheinlichkeiten, von einen Zustand $\{aktiv, invalid, tot\}$ innerhalb der nächsten t Jahren in einen anderen Zustand zu wechseln und die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein Zustandswechsel innerhalb der nächsten t Jahre stattfindet, kann man analog zur Hinterbliebenenrente mittels Listing 6.4 und Listing 6.5 bestimmen.
Insgesamt können nun alle Wahrscheinlichkeiten berechnet werden, um die Formel (5.4) zu implementieren. Der Code unterscheidet sich insoweit von jenen, der bei der Hinterbliebenenrente angewendet wird, dass es bei der Invaliditätspension keine Einmalzahlung gibt. Damit fällt λ_{ij}, wobei i, j zwei mögliche Zustände sind, in (5.4) weg. Weiters gibt es nur noch einen Zustand, in dem eine Prämie bezahlt wird. Diese wird mit P bezeichnet. Die laufende Rente, die im Zustand der Invalidität ausbezahlt wird, wird mit R bezeichnet. Die Variablen t und r stehen wie gehabt für die Zeit und für den über die Dauer der Verischerungslaufzeit gleichbleibenden Zinssatz.

Listing 6.16: Invaliditätspension - Deckungsrückstellung

```
V <- function(m, x, P, R, t, r ){

if(t==0){return(matrix(0, nrow=m,ncol=1))}

psi <- matrix( c(-P, R,  R, R, R,  R, 0), nrow=m,ncol=1)

V <- matrix(0, nrow= m, ncol=t)

before_trans <- matrix(0, nrow=m, ncol=1)
```

```
z <- matrix(0, nrow=m, ncol=1)
after_trans <- matrix(0, nrow=m, ncol=1)

for (k in t:1){


if(k==t){Vh <- matrix(0, nrow=m, ncol=1)}
else{
Vh <- V(m, x+k, P, R, t-k,  r)[,t-k]

V[,t-k] <- Vh}

B <- B_ij(m, x, k )

for(v in 1:k){ z <- z + psi * (1/(1+r))^(v)}

for(i in 1:m){
for(j in 1:m){

before_trans[i] <- before_trans[i] + ( B[i,j] *z[i]  )
after_trans[i] <- after_trans[i] + B[i,j] * (1/(1+r))^(k) *
(Vh[j])
}
}

}

y <- matrix(0, nrow=m, ncol=1)
for(v in 1:t){ y <- y + psi * (1/(1+r))^(v) }

V[,t] <-( (1- S_i(m, x, t ) )  * y  + before_trans + after_trans )

return(V)

}
```

6.2.3 Beispiele

Der soeben vorgestellten Code, soll nun anhand von einigen Beispielen vorgeführt werden. Als erstes betrachten wir einen 35-jährigen Mann, der eine Zusatzversicherung für eine Invaliditätspension abschließt. Dafür zahlt er jährlich eine Prämie von 100€ und erhält im Falle der Invalidität eine Rente in der Höhe von 200€. Für das Versicherungsunternehmen ergeben sich für die Deckungsrückstellungen für die nächsten 5 Jahre:

Listing 6.17: V(7, 35, 100, 200, 5, 0.015)

```
           [,1]       [,2]      [,3]      [,4]     [,5]
[1,] -98.52217 -195.5954 -291.6376 -386.9355 -481.716
[2,] 197.04433  391.1932  630.2125  917.0222 1244.745
[3,] 197.04433  396.1925  658.2297  992.2148 1391.651
[4,] 197.04433  398.3610  672.4501 1035.5248 1486.042
[5,] 197.04433  400.3110  683.3567 1073.8611 1571.423
[6,] 197.04433  401.9487  698.0394 1117.0585 1659.293
[7,]   0.00000    0.0000    0.0000    0.0000    0.000.
```

Der Zinssatz ist dabei über die Jahre hinweg konstant auf 0.015 festgelegt.
An diesem Beispiel kann man die Abhängigkeit der Reaktivierungswahrscheinlichkeit von der Dauer der Invalidität erkennen. Umso länger der Mann sich bereits in der Invalidität befindet, desto höher ist die Deckungsrückstellung, die vom Versicherungsunternehmen benötigt wird. Dieser Anstieg der Deckungsrückstellung ist nur in der ersten Spalte nicht zu beobachten. Das liegt daran, dass in der ersten Spalte die benötigte Deckungsrückstellung für den Mann im Alter von 39 Jahren gegeben ist, dessen Zustand man am Anfang des Jahres kennt. Daher macht es für das Versicherungsunternehmen keinen Unterschied, in welchen Zustand der Mann im nächsten Jahr wechselt, da die entsprechende Versicherungsleistung am Anfang des letzten Versicherungsjahres fällig ist.
Als nächstes wollen wir anhand von einem Beispiel auch noch die Abhängigkeit der Reaktivierungswahrscheinlichkeiten von dem Alter der Person verdeutlichen. Dafür vergleichen wir die Deckungsrückstellungen für 2 Jahre von einem 38-jährigen Mann

Listing 6.18: V(7, 38, 100, 200, 2, 0.015)

```
         [,2]
[1,] -195.5954
[2,]  391.1932
[3,]  396.1925
[4,]  398.3610
[5,]  400.3110
[6,]  401.9487
[7,]    0.0000
```

mit denen von einem 34-jährigen Mann:

Listing 6.19: V(7, 34, 100, 200, 2, 0.015)

```
         [,2]
[1,] -195.6051
[2,]  391.1872
[3,]  395.6156
[4,]  397.8184
[5,]  399.8391
[6,]  401.5633
[7,]    0.0000.
```

Der Altersunterschied beträgt zwar nur 3, trotzdem erkennt man bereits, dass das Versicherungsunternehmen für den älteren Mann für jeden Startzustand mehr Deckungsrückstellung benötigt.

7 Fazit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es gewesen, die Möglichkeiten einer Anwendung von Semi-Markov-Prozessen für das Gebiet der Versicherungsmathematik zu untersuchen. Aus diesem Grund sind vorab Markov-Ketten und Semi-Markov-Prozesse diskutiert worden. Markov-Ketten werden verwendet, um mögliche zukünftige Entwicklungen eines Systems zu beschreiben und dessen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Für die Anwendung im aktuarischen Bereich ist in dieser Arbeit auf Semi-Markov-Prozesse als Grundlage zurückgegriffen worden. Das hat den Grund, dass bei Semi-Markov-Prozessen im Gegensatz zu klassischen Markov-Prozessen nicht nur die Zustände eines Systems durch Zufallsvariablen beschrieben werden, sondern zusätzlich auch die Aufenthaltsdauern in den einzelnen Zuständen.

Mit Hilfe von diesen stochastischen Prozessen ist ein allgemeines Personenversicherungsmodell aufgestellt worden. Dabei werden sowohl laufende Zahlungen als auch Einmalzahlungen eingebaut und die Beträge auch entsprechende abgezinst. Diese Arbeit konzentrierte sich auf ein Modell mit einem fixen Zinssatz. Eine Möglichkeit zur Erweiterung auf einen variablen Zinssatz ist aber vorgestellt worden. Am Beispiel einer Hinterbliebenenrente und einer Invaliditätspension ist das allgemeine Modell angepasst und in der Programmiersprache R implementiert worden. Das Modell könnte ebenfalls für eine Krankenversicherung oder eine allgemeinen Lebensversicherung verwendet werden. Außerdem ist es für jedes beliebige Alter und jedes Geschlecht anpassbar.

Eine Schwierigkeit, die sich im Zusammenhang mit einer Anwendung von Semi-Markov Prozessen ergibt, ist, dass eine große Menge an Grunddaten benötigt wird und diese in einer geeigneten Form zur Verfügung stehen müssen. In Versicherungsunternehmen liegen die Daten aber in der Regel bereits passend vor. [8]

Mögliche zukünftige Forschungsfelder in Bezug auf Semi-Markov Prozesse in der Versicherungsmathematik könnten laut Janssen J. in der Sachversicherung liegen. In [8] wird eine mögliche Anwendung bei einer KFZ-Haftpflichtversicherung in Erwägung gezogen.

Literaturverzeichnis

[1] Amundi, Asset Management: *https://www.amundi.at/institutionelle_firmen-kunden/Investmentmoeglichkeiten/Solvency-II-Ihre-massgeschneiderte-Loesung*, 21.05.2018.

[2] Bender, Hans-Peter *Deckungsrückstellung, Heft 1*, Schriftreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Verlag Versicherungswirtschaft E.V. Karlsruhe 1974.

[3] Grübel, R. *Stochastische Prozesse*, Universität Hannover Institut für Mathematische Stochastik, Sommersemester 2005.

[4] Haberman, S.; Pitacco E. *Actuarial Models for Disability Insurance*, Chapman & Hall, 1999.

[5] Hazewinkel, Michiel (Hrsg.): *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[6] Janssen, Jacques; Manca, Raimondo: *Semi-Markov risk models for finance, insurance and reliability*, Springer Science+Business Media, LLC, 2007.

[7] Janssen, Jacques: *Application des Processus semi-markoviens a un probleme d'invalidite*, Bulletin de l'Association Royale des Actuaries Belges, 63, 35-52, 1966.

[8] Janssen, Jacques; Manca, Raimondo: *General actuarial models in a semi-markov environment*, Italy, 2001.

[9] Kemeny, J. G.; Snell J. L.: *Finite Markov Chains*, Springer-Verlag , 1976.

[10] Kempken, Sebastian: *Modellierung und verifizierte Analyse von zeitkorreliertem Datenverkehr im Internet*, VDI Verlag Düsseldorf, 2009.

[11] Schubert, A.: *Derivation of an Austrian annuity valuation table for the pension insurance*, Diplomarbeit, 2015.

[12] Statistik Austria: *URL:* https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bevoelkerung/sterbetafeln/index.html, September 2020.

[13] STÖRMER, H.: *Semi-Markoff-Prozesse mit endlich vielen Zustände*, Springer-Verlag, 1970.

[14] VERSICHERUNGSVERBAND ÖSTERREICH VVO: *Jahresbericht 2016.*
URL: https://www.vvo.at/vvo/vvo.nsf/sysPages/x8E6423C79111738EC1258562004692C6/$file/72_Kobza_1_VVO_Jahresbericht_GESAMT_220x280_V11_F47L.pdf, 19.10.2020.

[15] WOLFSDORF K.: *Versicherungsmathematik Teil 1 Personenversicherung*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1986.

[16] YIN, GEORGE G.; ZHANG, QING: *Continuous-Time Markov Chains and Applications*, Springer Science+Business Media, LLC, 2013.

[17] YU, SHUN-ZHENG: *Hidden Semi-Markov Models*, 2016.
URL: https://www.sciencedirect.com/topics/computer-science/semi-markov-process, 08.10.2020.