



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN



DISSERTATION

Modellbildung des Lenkungsflatterns an Fahrrädern

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der technischen Wissenschaften (Dr.techn.) eingereicht an der
Technischen Universität Wien, Fakultät für Maschinenwesen und
Betriebswissenschaften von

Dipl.-Ing. Julia Nusime
Mat.Nr.: 00626017

unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl
E325-01
Institut für Mechanik und Mechatronik
TU Wien

Begutachtet von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Johannes Edelmann
Institut für Mechanik und Mechatronik
TU Wien

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.med Dr.techn. Dr.phil. Thomas Angeli
Institut für Konstruktionswissenschaften und Produktentwicklung
TU Wien

Prof. Dipl.-Ing. Dr. Peter Pfeffer
Fakultät für Maschinenbau, Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau
Hochschule München

Wien, im März 2021

Eidstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen, sind als solche kenntlich gemacht.

Das Thema dieser Arbeit wurde von mir bisher weder im In- noch Ausland einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Arbeit stimmt mit der von den Begutachtern beurteilten Arbeit überein.

Ich nehme zur Kenntnis, dass die vorgelegte Arbeit mit geeigneten und dem derzeitigen Stand der Technik entsprechenden Mitteln (Plagiat-Erkennungssoftware) elektronisch-technisch überprüft wird. Dies stellt einerseits sicher, dass bei der Erstellung der vorgelegten Arbeit die hohen Qualitätsvorgaben im Rahmen der geltenden Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis "Code of Conduct" an der TU Wien eingehalten wurden. Zum anderen werden durch einen Abgleich mit anderen studentischen Abschlussarbeiten Verletzungen meines persönlichen Urheberrechts vermieden.

Wien,

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit fokussiert auf die Modellbildung des Wobblemodes an Fahrrädern, welcher durch eine selbsterregte Schwingung des Lenksystems, die mitunter zu gefährlichen Stürzen führen kann, charakterisiert wird.

Um zum Verständnis des Mechanismus zur Aufrechterhaltung dieser Schwingung beizutragen, werden anfangs einfache Modelle eines gezogenen Rades, dem Schleppradmodell vorgestellt und potentielle Anfachungsmechanismen identifiziert.

Basierend auf den Erkenntnissen vom einfachen Schleppradmodell wird auf die Lenkungsschwingungen des Fahrrades anhand von Rennrad- und Touringradmodellen eingegangen. In diesem Zusammenhang erfolgte die Betrachtung der Auswirkungen diverser Modellbildungsaspekte, wie beispielsweise die Einbindung der Reifenkräfte. Dafür wird ein lineares Reifenmodell nichtlinearen Modellen gegenüber gestellt, deren Formulierung entweder empirischen Ursprung hat oder auf physikalischen Modellen basiert. Dabei besteht die Möglichkeit, den Beitrag einzelner Kräfte bzw. Momente zum Stabilitätsverhalten des Systems gezielt herauszuarbeiten. Die Betrachtung des vollständigen nichtlinearen MKS-Modells in Simpack ermöglicht eine Bifurkationsanalyse des gesamten Systems, wodurch nicht nur die Stabilitätsgrenzen des Systems sondern auch die Amplitude des Grenzzyklus einer instabilen Wobbleschwingung veranschaulicht werden können.

Weiters wird die Abbildung der Struktursteifigkeit und Dämpfung des Systems auf zwei verschiedene Varianten, durch Einbindung eines zusätzlichen Drehfreiheitsgrades in das Starrkörpermodell behandelt und der Beitrag der gyrokopischen Effekte zur Stabilität des jeweiligen Systems abgebildet.

Der Einfluss eines passiven Fahrers, dabei in erster Linie dessen Sitzposition (aufrecht oder gebeugt) und die Anbindung des Fahrerkörpers im Bereich des Sattels an den Rahmen, wird anschließend untersucht, aber auch die Modellbildung der freihändigen Fahrt jener, wenn der Fahrer die Lenkergriffe mit beiden Händen umfasst, gegenübergestellt.

Schließlich wird der Zusammenhang zwischen einfachem Schleppradmodell und komplexem Fahrradmodell und somit zwischen Shimmy und Wobblemode hinsichtlich der Modellbildung charakterisiert.

Abstract

Wobble of a bicycle is a self-excited mode of the bicycle and may lead to hazardous crashes when becoming unstable.

With the objective to get more insight into the mechanisms leading to sustainable wobble oscillation, modelling aspects are introduced by means of a simple trailing wheel system.

Based on findings from the stability analysis of the simplified trailing wheel model, it is the aim to better understand the wobble phenomenon of a bicycle by considering the linearized equations of a multibody–system–model.

Several modelling aspects of the full bicycle model are addressed. Starting from a linear tyre model, the impact of nonlinear tyre models are investigated by linear stability analysis and bifurcation analysis of the fully nonlinear system model.

Besides tyre models, an alternative modelling approach of lateral stiffness and damping of the rigid–body–system by introducing a rotational degree of freedom is presented, and the impact of for example gyroscopic effects on the limits of stability boundary is analyzed.

Further, a passive rider model is used to reveal effects of the rider’s body position and arms fixed to the handlebar.

Finally, differences between the model of the trailing wheel system and the linearized bicycle model with respect to shimmy and wobble mode are shown.

Danksagung

Diese Arbeit entstand am Institut für Mechanik und Mechatronik der Technischen Universität Wien, Abteilung für Technische Dynamik und Fahrzeugdynamik.

Mein großer Dank gebührt **Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl**, für die Betreuung während der gesamten Dissertation sowie seine stete Geduld und Unterstützung bei Problemen unterschiedlichen Ursprungs während meiner Zeit am Institut. Seine Anmerkungen und Fragestellungen waren stets richtungsweisend für diese Arbeit.

Ebenso möchte ich mich bei **Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Johannes Edelmann, Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.med Dr.techn. Dr.phil. Thomas Angeli** und **Prof. Dipl.-Ing. Dr. Peter Pfeffer** für die Begutachtung der Dissertation bedanken.

Zudem bedanke ich mich sehr herzlich bei allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern am Institut für das freundliche Arbeitsklima.

Besonderer Dank gebührt an dieser Stelle **Hrn. Dipl.-Ing. Dr. techn. Martin Haudum**, mit dem mich bereits seit der Diplomarbeit eine gute Freundschaft verbindet und mit dem ich zahlreiche fachliche aber auch persönliche Konversationen in einer selten erlebten, herrlich direkten aber immer angenehmen Weise genießen durfte.

Ganz besonders bedanke ich mich für die wertvolle Unterstützung meiner Eltern und meiner Schwester, die mit offenen Ohren und Herzen stets zur Seite stehen und deren Mitfiebern (besonders mütterlicherseits) während der gesamten Dissertation ich dankbar erwähnen möchte.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei meinem Vater, zu dem ich nicht nur aufgrund seiner bemerkenswerten fachlichen Kompetenz respektvoll aufsehe, für die vielen fachlichen Diskussionen und Ratschläge bedanken, für die ich auch in Zukunft weiterhin noch sehr dankbar sein werde.

Zuletzt möchte ich noch meinem Lebensgefährten Rainer, der selbst in Momenten der Verzweiflung von der Fertigstellung dieser Arbeit überzeugt war, für seine große Geduld und Ruhe, die er mir entgegengebracht hat, danken.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	8
2	Shimmy	11
2.1	Einführung	11
2.2	Gezogenes Rad	17
2.2.1	Anregung durch den querelastischen Reifen - "Tyre shimmy"	17
2.2.2	Querelastische Aufhängung - "lateral suspension compliance shimmy"	20
2.2.3	Gyroskopische Effekte - "gyroscopic shimmy"	22
2.2.4	Eigenwertanalyse der Schleppradmodelle	24
3	Selbsterregte Schwingungen und Stabilität	26
3.1	Linearisiertes System	28
3.2	Entstehungsmechanismen	33
3.3	Nichtlineares System	36
4	Wobblemode	40
4.1	Entwicklung des Fahrradmodells	40
4.2	Modellbildung	45
4.2.1	Lineares Modell	45
4.2.1.1	Reifenmodell	45
4.2.1.2	Laterale Auslenkung	53
4.2.1.3	Gyroskopische Effekte	59
4.2.1.4	Fahrer	61
4.2.2	Nichtlineares Modell	66
4.2.2.1	Reifenmodell	67
4.2.2.2	Reifen-Fahrbahn Kontakt	74
4.2.2.3	geneigte Fahrbahn - Luftwiderstand	76
4.2.2.4	Bifurkationsdiagramme	79
4.2.2.5	Fahrer	83
4.3	Einflussfaktoren	84
4.3.1	Reifen	86
4.3.1.1	Einlauflänge	88
4.3.1.2	Sättigung der Reifenkennlinie	89
4.3.1.3	Spin	90
4.3.2	laterale Auslenkung	96
4.3.3	Gyroskopische Effekte	99
4.3.4	Fahrer	101
4.3.4.1	Anbindung des Fahrers an den Rahmen	102
4.3.4.2	Anbindung der Arme an den Lenker	104

4.4	Shimmy und Wobblemode	112
5	Rekapitulation, Conclusio und Ausblick	114
5.1	Rekapitulation und Conclusio	114
5.2	Ausblick	116
	Abbildungsverzeichnis	122
	Literaturverzeichnis	123
A	Reifenmodelle	129
A.1	Brush	129
A.1.1	Parameterwerte	130
A.2	simplified Magic Formula	130
A.3	Magic Formula extended Version	132
A.3.1	Parameterwerte	133
A.4	Linearisiertes Modell	135
A.4.1	Parameterwerte des ρ -Modells	135
A.4.1.1	Rennrad	135
A.4.2	Parameterwerte des Schlepprades	136
A.4.2.1	Tire compliance shimmy	136
A.4.2.2	Lateral compliance shimmy	136
A.4.2.3	Gyroskopisch shimmy	136
B	Stabilitätsuntersuchung	137
B.1	Lineare Systeme	137
B.1.1	Stabilitätskriterien mit Hilfe von Eigenwerten	137
B.1.2	Stabilitätskriterien durch charakteristische Koeffizienten	138
B.2	Nichtlineare Systeme	139
C	Linearisierte Bewegungsgleichungen	144
C.1	β -Modell	144
C.2	ρ -Modell	145

1

Einleitung

Die Fähigkeit, ein Fahrrad zu manövrieren wird meist schon im jungen Kindesalter erlernt. Dabei liegt zumeist die größte Herausforderung im Erlernen, einen instabilen Weavemode im unteren Geschwindigkeitsbereich stabilisieren zu können und so das Fahrrad aufrecht zu balancieren.

Im Laufe der Jahre hat sich eine Vielzahl an Fahrradtypen etabliert, in denen sich verschiedenste Interessensgruppen vertreten fühlen. Mit dem klassischen Hollandrad mit einer komfortablen Sitzposition sowie einer Rahmenkonstruktion, die ein einfaches, angenehmes Aufsteigen ermöglicht, robusten Mountainbikes, die speziell für den Einsatz abseits asphaltierter Straßen konzipiert sind im Gegensatz zu sportlich leichten Rennrädern, die mit ihrer hochentwickelten Technik immer höhere Geschwindigkeiten erreichen, kleinen wendigen BMX-Rädern, mit denen teils hochriskante Sprünge vollführt werden, Downhillrädern, mit denen man mit hohen Geschwindigkeiten bergabwärts auf unwegsamem Gelände teils über Hindernisse rast bzw. springt, Bahnradern, die dafür konzipiert sind, maximale Geschwindigkeiten in Steilkurven zu erzielen bis hin zu äußerst puristischen Singlespeedrädern bzw. sogenannten Fixies sind ein paar Vertreter des Fahrrades genannt.

Doch auch so sehr der Radsport sich durch ständige technische Innovationen weiterentwickelt, stellt der Wobblemode, welcher sich durch eine mögliche aufklingende Schwingung des Lenksystems, auch Lenkungsflattern genannt, auszeichnet, weiterhin ein aktuelles Problemfeld dar.

Um Abhilfemaßnahmen zu entwickeln strebt man in erster Linie danach, die physikalische Erklärung dieses Phänomens zu erfassen, um in weiterer Folge Rückschlüsse auf einzelne Systemparameter in Funktion einer Stellschraube zu ziehen und diese unangenehme Schwingung zu vermeiden.

Dafür ist es naheliegend, ein geeignetes mechanisches Ersatzmodell zu finden, das nach dem Leitsatz "so einfach wie möglich, so komplex wie nötig" alle relevanten Details einbindet, um diese Schwingung entsprechend abbilden zu können. Die Frage nach der Komplexität des verwendeten Modells bzw. welche Vereinfachungen am Modell getroffen werden dürfen, wirft noch weitere Fragestellungen auf.

Der Wobblemode an sich wird einer allgemeineren Klasse selbsterregter Schwingungen, dem *Wheel-Shimmy* zugeordnet, der wiederum einer selbsterregten Schwingung eines gezogenen Rades um seine vertikale Lenkachse entspricht. Diese Instabilität tritt beispielsweise an Bugrädern von Flugzeugen, bei Vorderrädern von

PKW bzw. LKW oder den Rädern von Einkaufswagen auf. Mit dem mechanischen Ersatzmodell eines gezogenen Rades, dessen Lenkachse sich mit konstanter Geschwindigkeit vorwärts bewegt, dem Schleppradmodell, ist es möglich, diese Schwingung abzubilden.

Nun stellt sich die Frage, worin der Unterschied von Shimmy und Wobble besteht bzw. ob der anfachende Mechanismus für Wobblemode mit einem ähnlich einfachen Ersatzmodell zu erklären ist, oder ob es dafür ein komplexeres Modell benötigt.

Als Beispiel sei die Einwirkung des Fahrers genannt, der aufgrund seiner Masse und Massenträgheitsmomente einen Großteil der Trägheitseigenschaften des Gesamtsystems festlegt. Selbst bei einem rein passiven Verhalten des Fahrers trägt dieser entscheidend zum Systemverhalten bei.

Hinsichtlich des Entstehungsmechanismus' dieser selbsterregten Schwingung wird nach einem Verfahren gestrebt, möglichst einfach die anfachenden Terme in den Bewegungsgleichungen zu identifizieren, wobei die Einbindung von Flexibilitäten der Bauteile sowie einem Reifenmodell unumgänglich ist.

Zur Ermittlung der Stabilitätsgrenzen bei Geradeausfahrt genügt die Linearisierung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen um den aufrechten, geradlinigen Fahrzustand. Für Informationen darüber hinaus, müssen allerdings die nichtlinearen Bewegungsgleichungen in Betracht gezogen werden. Eine analytische Lösung dieses nichtlinearen gekoppelten Differentialgleichungssystems ist nicht mehr möglich, sodass eine numerische Analyse unumgänglich wird. Mit der Bifurktionstheorie gelingt der Einblick in das Stabilitätsverhalten eines Systems in Abhängigkeit von bestimmten Systemparametern, den Bifurkationsparametern. Dabei wird in der Literatur die Ein- bzw. Zweiparameter-Bifurkation angewandt um das Systemverhalten selbst nach Stabilitätsverlust zu untersuchen. Dafür ist allerdings weit größerer mathematischer Aufwand zu betreiben als im Vergleich dazu für die Stabilitätsanalyse des linearisierten Modells.

Im Zuge dieser Arbeit wurde versucht, die oben aufgelisteten Fragepunkte aufzugreifen und einen Teil zum Verständnis dieses Phänomens beizutragen.

Zu Beginn wird ein Überblick gegeben, welche mechanischen Ersatzmodelle des Schlepprades genügen, um eine selbsterregte Schwingung abbilden zu können. Dabei werden drei Mechanismen angesprochen, die dem System als Anfachung für eine oszillatorische Bewegung dienen, nämlich transiente Reifenkräfte, ein zusätzlicher lateraler Freiheitsgrad und gyroskopische Effekte, die durch die Neigung eines rotierenden Rades um eine Achse, welche normal zur Rotationsachse steht, entstehen.

Dabei stellt sich die Frage nach der Herkunft der Energie zur Anfachung dieser Schwingung und wie sich der Energiehaushalt während einer Shimmyschwingung ändert.

Anschließend wird der Wobblemode am gesamten Fahrradmodell betrachtet, wobei die Bedeutung einzelner Größen des nichtlinearen Reifenmodells, wie die Einlauf-länge, der Spin und die Sättigung der Reifenkräfte ebenso untersucht werden, wie Modellbildungsvarianten zur Abbildung des lateralen Freiheitsgrades. Außerdem

wird auf die Wirkung der gyroskopischen Effekte an zwei verschiedenen Modellbildungsvarianten eingegangen.

Die Modellbildung des Fahrers, dem für die gesamte Arbeit lediglich passives Verhalten zugesprochen wird, stellt einen weiteren Punkt der Untersuchungen dar. Die Modellbildung des starr mit dem Rahmen verbundenen Fahrerkörpers wird überarbeitet, um die Auswirkungen der Rumpfmuskulanspannung bzw. von Relativbewegungen des Fahreroberkörpers zum Rahmen auf den Wobblemode, wie es von Versuchsfahrten berichtet wurde, abbilden zu können. Die Abänderung des Fahrermodells von einer aufrechten Sitzposition während freihändiger Fahrt am Touringrad bis hin zur sportlich gebeugten Sitzposition auf einem Rennrad, während der Fahrer mit beiden Händen den Lenker hält wird anschließend dokumentiert.

Schließlich wird auch eine Methode vorgestellt, mit der die Stabilität eines nichtlinearen Mehrkörpermodells des Fahrrades mit der Bifurkationsanalyse untersucht werden kann.

Eine Zusammenfassung der gewonnenen Neuerkenntnisse soll abschließend zur Diskussion anregen und einen Ausblick in die weiterführende Fragestellung bieten.

2

Shimmy

Um Verständnis über den Mechanismus zu erlangen, der eine instabile Wobblerschwingung aufrecht erhält, ist es hilfreich, das System weitestgehend zu vereinfachen, aber das zu untersuchende Phänomen noch abgebildet ist.

Bereits das Modell eines gezogenen Rades, dessen vertikale Lenkachse vor dem Reifenaufstandspunkt liegt, ist in der Lage, eine selbsterregte Schwingung um die Lenkachse auszuführen. Diese unter dem Begriff *'shimmy'* bekannte Bewegung zeigt prinzipiell starke Ähnlichkeiten mit dem Wobblemode am Fahrrad und kann durch die dafür notwendige, vergleichsweise einfache Modellbildung zum Verständnis des Wobblemodes beitragen. In weiterer Folge stellt sich natürlich die Frage, was die Shimmybewegung von der des Wobblemodes unterscheidet.

Wissenschaftliches Interesse an diesem Phänomen besteht bereits seit der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts, als die technische Weiterentwicklung des Luftreifens Schwingungen des Lenksystems an Zweirädern und später auch Automobilen mit sich brachte. Um diesem Problem entgegenwirken zu können, ergab sich die Notwendigkeit, den Mechanismus dahinter theoretisch zu erfassen. Gleichzeitig war es aber auch notwendig, rasch praktische Abhilfemaßnahmen zu finden.

Die Herausforderung beim Verständnis der Shimmybewegung liegt im komplexen Zusammenspiel mehrerer Faktoren, die eine derartige selbsterregte Schwingung ermöglichen. Hierfür haben sich drei Modelle (siehe Abschnitt 2.2) als geeignet erwiesen und werden nach einem Überblick über die vorhandene Literatur näher beschrieben.

2.1 Einführung

Bereits zu Beginn der 1920er Jahre erfolgten erste Überlegungen zum Shimmyphänomen, damals auch bekannt unter den Namen *'wobble'*, *'wabble'*, *'waddling'*, *'wheel flap'* oder auch *'goldfishing'*. Charakteristisch für diese Bewegung war und ist die Oszillation eines Rades um dessen Lenkachse.

Erste Berichte entstanden in Verbindung mit Problemen bei Automobilen als die technischen Entwicklungen Neuerungen wie den Luftreifen und damit einhergehende Erhöhung der Reifenflexibilität und der Massen an den Reifen mit sich brachten, wodurch das Auftreten dieser Schwingung offensichtlich begünstigt wurde.

Dabei war Brouhiet [5] einer der ersten, der die Einbindung von Reifenflexibilität in die Modellbildung als notwendig erachtete. Er führte den Begriff des Schräglaufwinkels (*'angle d'envirage'*) ein und beschrieb in weiterer Folge auch den elastischen Querversatz des Radaufstandspunktes am Boden, der durch Einwirkung einer lateralen Kraft auf den zuvor unbelasteten Reifen erfolgt. Weiters errechnete er die verrichtete Arbeit dieser Kraft bei einer Schwingung um die Lenkachse und stellte dadurch einen kausalen Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen und dem Energiebedarf der Schwingung her. Brouhiet erklärte also, dass die Energie zur Aufrechterhaltung der Shimmyschwingung letztendlich vom Antriebssystem des Fahrzeuges kommen muss.

1927 errechnete De Lavaud [31] die kritischen Geschwindigkeiten für die beobachteten oszillatorischen Moden eines Modells der Vorderachse eines Automobils, bestehend aus Chassis, der Achse und den Räder anhand eines mechanischen Ersatzmodells. Dabei beschrieb er zwei Bewegungsarten: *'le dandinement'* – gleichzusetzen mit einer Trampelbewegung und *'le shimmy'* – eine bis dahin noch wenig bekannte, aber gefürchtete Eigenbewegung der Vorderräder. Erstmals sprach er auch den gyroskopischen Effekten, die bei einer Drehung eines rotierenden Rades um eine Achse normal zu dessen Rotationsachse entstehen, Bedeutung zu.

Mit den Erkenntnissen aus [5] und [31] wurden zwei wichtige grundlegende Elemente des Shimmyphänomens, nämlich der Reifen und die gyroskopischen Effekte, erkannt, auf die in der nachfolgenden Literatur immer wieder zurückgegriffen wurde.

Ein weiterer vielzitiertes Bericht folgte 1931 von Becker et. al [3]. Der aus sechs Teilen bestehende Bericht entstand in Zusammenarbeit von drei Autoren. Mögliche Erregungsmöglichkeiten von Schwingungen des Vorderachssystems eines Automobils wurden dabei hervorgehoben. Neben geometrischer Unrundheit der Räder und periodischer Beschaffenheit der Fahrbahn, welche sich hauptsächlich auf vertikale Bewegungen der Achse auswirken, wurde auch der Einfluss des mangelnden Massenausgleichs der Räder untersucht. Sind die exzentrischen Massen der Vorderachse 180° versetzt, so wirkt das nach [3] begünstigend für Trampelschwingungen der Achse bzw. Flatterschwingungen der Räder.

Als letzte Erregungsmöglichkeit wird die Anfachung in Betracht gezogen, also ein Aufklängen einer Schwingung des Lenksystems trotz vorhandener Dämpfung des Systems, ohne dass periodische Einflüsse von außen gegeben sind. Verglichen wurde dies mit der Flutterbewegung einer Fahne im Wind, bei der ein gleichmäßig wirkender Luftstrom das Flattern der Fahne aufrechterhält. Eine Anfachung wurde auch bei der Unterteilung der Schwingungsformen aufgrund der Art der Erregungen in Betracht gezogen. Zur Überlagerung von Anfachung und Dämpfung betrachtete man jeweils die zur Anfachung zugeführte und zur Dämpfung entzogene Energie und ermittelte eine Bilanz. Hierfür wurden die Bewegungsgleichungen für das vereinfachte System eines Vorderrades dargestellt und die Hurwitz-Determinanten errechnet. Die Freiheitsgrade ergeben sich dabei durch den Trampelausschlag λ , den Flatterausschlag φ und die seitliche Schiebung ξ des Mittelpunktes der Reifenkontaktfläche auf der Fahrbahn. Schnell stellte sich heraus, dass sich die Determinanten bei einem derartig einfachen mechanischen System schon als so kompliziert erwiesen, dass allgemeine Schlüsse nur mit viel

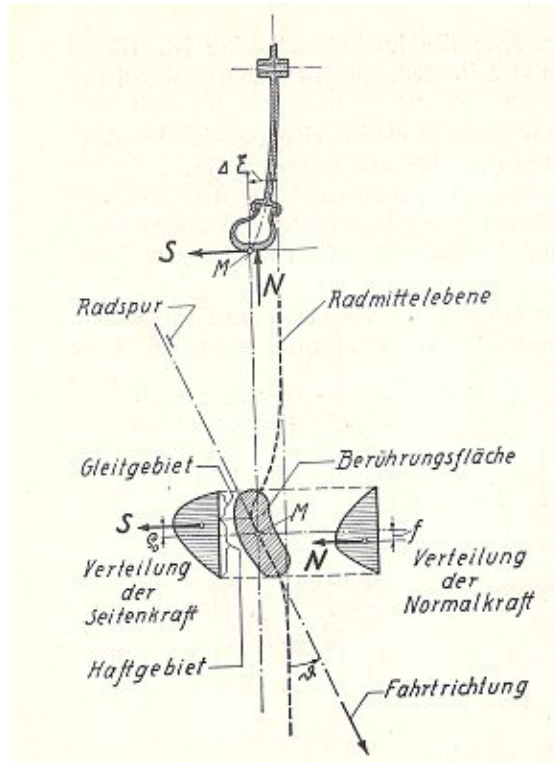


Abbildung 2.1: Kräfteverteilung auf Verformungen am Rad unter Berücksichtigung von Seitenschlupf [3]

Mühe gezogen werden können und es ratsam ist, besondere Fälle zu betrachten. Nicht nur die theoretische Erklärung der Flutterbewegung wurde in [3] versucht. Die Autoren machten sich auch umfangreiche Gedanken über die Einflussparameter, womit die Schwingungsintensität zu beeinflussen wäre. Der Lenkzapfenwinkel und in Verbindung damit der Nachlauf der Vorderräder sei hier als Beispiel genannt. Hierzu schrieben sie nach praktischen Versuchen: *„Die Veränderung der Winkelstellung des Lenkzapfens ändert die Erregungsmöglichkeiten für erzwungene Schwingungen kaum und beeinflusst auch die Federung und Massenwirkung wenig. Die großen Unterschiede in den Schwingungsausschlägen sind vor allem auf die Änderungen der Kopplung und der Anfachung zurückzuführen, welche von der Winkelstellung der Lenkzapfen abhängig sind.“*

Weitere wichtige Überlegungen folgten zum Reifen–Fahrbahn–Kontakt und den dabei entstehenden Kräften.

In Abbildung 2.1 sind dazu die Seitenkraft– und Aufstandskraftverteilung am Rad abgebildet, sowie das seitliche Ausbeulen des Reifens durch Belastung und die laterale Auslenkung der Felge. Letzterer wurde große Bedeutung zugesprochen: *„Die Ergebnisse haben gezeigt, daß eine seitliche Federung der Räder und einiger Felgen in Abhängigkeit von ihrer Bauart erheblich ist. In einzelnen war der Anteil der Räder an der gesamten Seitenfederung des Rades mit Bereifung 14%“*.

Bezüglich der Schwingungen an Vorderrädern von Automobilen haben Hale ([10] in [9]) und Day ([8] in [9]) bereits 1924 Unterschiede zwischen *„high-speed-shimmy“* und *„low-speed-shimmy“* erarbeitet. Hauptaugenmerk bei der Untersuchung von

Shimmy war damals (wie auch heute) die laterale Elastizität des Reifens sowie der Einfluss gyroskopischer Effekte (speziell für die Untersuchung von "high-speed-shimmy"). Diese Thematik wurde später bei Spierings [73] und Sharp [70] am Motorrad wieder aufgegriffen.

Bis zur Mitte der 1930er Jahre wurde das Shimmyproblem hauptsächlich an Automobillenkungen untersucht. Die politischen Entwicklungen zu dieser Zeit forcierten aber auch die Flugzeugentwicklung maßgebend und somit auch die Erforschung und Begründung des Shimmyphänomens bei Bugrädern/Spornrädern von Flugzeugen. Aufgrund der technischen Entwicklungen verlagerte sich der Fokus von Shimmy an Spornrädern später zu Bugrädern von Flugzeugen, welcher aufgrund der größeren Masse und den zugehörigen Trägheitsmomenten heftiger ausfällt, als vergleichsweise bei Spornrädern zuvor.

Zu dieser Zeit versuchte man auch den Unterschied zwischen selbsterregten Schwingungen und Resonanzen zu erarbeiten, wie beispielsweise in einem Bericht von Herrmann (Ref. No. 60 in [9]).

Mit der Identifikation des Shimmymodes als selbsterregte Schwingung, ergab sich als nächste Herausforderung, den Mechanismus zur Aufrechterhaltung dieser Bewegung zu verstehen, wobei in erster Linie davon ausgegangen wurde, dass die Energiequelle zur Aufrechterhaltung der Shimmyszillation die Interaktion zwischen Reifen und Fahrbahn bilden muss.

Rotta (Referenzen No. 184 und 185 in [9]) führte erste Theorien zu nichtlinearen Effekten infolge der Reibung zwischen Reifen und Fahrbahn ein und gab somit Ausblick auf eine damit mögliche Berechnung der Schwingungsamplitude, sowie daraus folgende Aufschlüsse über den Einfluss der Reibung.

Riekert [55] beschäftigte sich 1941 mit der Frage nach der Herkunft der Energie, welche die Shimmyschwingung aufrechterhält. Hierzu schrieb er, dass aufgrund der immer vorhandenen Dämpfung im System (Deformation des Reifens/ Reibung im Rotationsgelenk) Energie von außen zugeführt werden muss, um die Schwingung aufrecht zu erhalten. Dafür sei der Phasenverzug des Winkels φ ("Shimmywinkel") um die Lenkachse gegenüber der lateralen Bewegung Voraussetzung, um instabilen Shimmy zu gewährleisten.

Von Schlippe und Dietrich (u.a. [58], [59] und [57]) konzentrierten sich in ihren Arbeiten zum Lenkungsflattern von Bugrädern in den Anfängen der 1940er Jahre auf die Elastizität des Reifens im Kontaktgebiet mit dem Boden. Unter der Voraussetzung, dass der Reifen keine Gleitbewegung gegenüber der Fahrbahn ausführt und der Reifenlatsch in erster Näherung zu einer Linie zusammengefasst werden kann, wurde eine Differentialgleichung ermittelt, welche die seitliche Auslenkung des vorderen Latschpunktes beschreibt, sofern der Reifen in einem flachen Winkel zu seiner Ebene bewegt wird. Die Bewegung der nachfolgenden Punkte im Reifenlatsch wurde unter der Annahme beschrieben, dass diese die gleiche Bahn wie der vorderste Punkt durchlaufen, allerdings mit einer zeitlichen Verzögerung, welche vom Abstand zum vorderen Latschpunkt beeinflusst wird. Außerhalb des Berührungsbereiches wurden die Verformungen des Reifens als Exponentialfunktionen mit der Radebene als Asymptote angesehen. Diese Überlegung bildet die Grundlage für das "taut-string-tire model" von Pacejka [50].

Eine Erweiterung des Modells beinhaltet die Berücksichtigung der Latschbreite.

Dadurch können auch längselastische Verformungen in Umfangsrichtung des Reifens berücksichtigt werden, welche auch bei der Kurvenfahrt zum Tragen kommen. Basierend auf den Verformungen des Reifenlatsches wurden die dadurch entstehenden elastischen Kräfte in Quer- und Längsrichtung in der Latschenebene, sowie eine Funktion für das Moment um die vertikale Achse ermittelt, jedoch alles unter der Voraussetzung, dass der Reifenlatsch vollständig am Boden haftet. Es wird allerdings darauf hingewiesen, dass in den Randgebieten des Reifenlatsches Teilrutschen auftritt, welches sich auf die Form der Latschlinien auswirkt und infolgedessen auch in den Gleichungen nicht mehr vernachlässigt werden dürfe.

Die Arbeiten von Schlippe und Dietrich bilden eine wesentliche Grundlage für spätere Entwicklungen von Reifenmodellen (u.a. [46],[50], [4]).

In den darauffolgenden Jahren stieg die Bedeutung des Reifenmodells bei der Untersuchung des Shimmyphänomens, sowohl im Flugzeug- als auch im Automobilbereich.

1951 veröffentlichte Moreland [42] einen umfassenden Bericht über mechanische Modelle zur Untersuchung der Shimmyschwingung eines Bugrades, deren Komplexität sich von einem System dritter Ordnung (laterale Bewegung der Masse und Rotation um eine vertikale Achse der Radaufhängung mit nicht-holonomen Reifen-Fahrbahn-Kontakt) über ein Modell vierter Ordnung, durch Einführung einer begrenzten Elastizität des Systems und Berücksichtigung einer Dämpfung um die Rotationsachse bis hin zu einem komplexen Modell sechster Ordnung, welches den Einfluss des Reifens auch noch berücksichtigt, erstreckt. Anhand dieser Modelle wurde gezeigt, dass die Energie zur Aufrechterhaltung der Schwingung aus der Vorwärtsbewegung des Systems resultiert. Moreland unterstrich dabei die Notwendigkeit einer verzögert wirkenden Seitenkraft um eine Schwingung aufrecht zu erhalten: *"The theory is as follows: A wheel rolling over the ground with a forward velocity V [...]will, when acted upon by a force F from the ground, travel along the path V' making the yaw angle ψ with its plane.[...] But the force F does not instantly create the yaw angle ψ ."*

Aus Berechnungen mittels Computermodellen sowie Feldtests an Kampfflugzeugen und Transportmaschinen konnte Moreland schließen, dass ein Modell zur realitätsgetreuen Abbildung des Shimmyphänomens mindestens fünf Freiheitsgrade besitzen muss, sodass die Deformation des Reifens, der Gierwinkel, die laterale Auslenkung der Lenkachse, die Bewegung des Flugzeugkörpers, sowie die Belastung des Dämpfers berücksichtigt werden.

1957 veröffentlichte Smiley [72] einen umfassenden Bericht, der die zu dieser Zeit existierenden linearen Reifenmodelle und Shimmy zusammenfasste. Außerdem stellte er eine Theorie (*"summary theory"*) vor, die sich hauptsächlich an jener von Von Schlippe und Dietrich [59] orientiert. Anhand von linearen Systemen konnten, unter Vernachlässigung der Reifenbreite, einwirkende Kräfte separat identifiziert werden. Dazu zählte einerseits die auf den Reifen wirkenden Kräfte und Momente, welche ihren Ursprung in dessen elastischer Deformation haben, sowie gyroskopische Momente durch Kippen des Rades um dessen Längsachse, Rotation um dessen Hochachse oder durch lateralen Versatz des Reifenkontaktpunktes zur Radmittelebene. Morelands Zeitkonstante, welche den Phasenverzug der Seitenkraft beschreibt, wurde in [72] mit einer Hystereseschleife der Reifenkraft gleichgesetzt.

1966 veröffentlichte Pacejka [46] ein fundamentales Paper zur Theorie des Shimmyphänomens. Dabei widerlegte er unter anderem die Theorie, dass Shimmy durch unwuchte Räder entsteht, indem eine Unwucht erregende Masse bei auftretenden Oszillationen vom Rad entfernt wurde, die Oszillation danach aber nicht abgeklungen ist, sondern bei gleicher Frequenz fortgesetzt wurde: *“...the motion does not die out but continues nearly unchanged as a violent oscillation. This indicates the existence of a self-excited vibration, a motion which sustains itself”*. Basierend auf seinen Erkenntnissen in [47] unterschied er zwei Arten von Shimmy: nämlich einerseits jene Schwingung, die aus der Querelastizität der Reifen bzw. der Elastizität der Aufhängung entstehen, andererseits dem gyroskopischen Shimmy. Anhand eines einfachen, linearen Modells eines nachgezogenen Rades – dem Schlepprad – wurden die Stabilitätsgrenzen in Abhängigkeit von der Vorwärtsgeschwindigkeit ermittelt. Durch die Annahme hoher Vorwärtsgeschwindigkeiten konnte durch die damit einhergehende relativ große Wellenlänge der Shimmybewegung ein lineares System dritter Ordnung auf ein System zweiter Ordnung reduziert werden. Mit diesem vereinfachten System zeigte Pacejka, dass unter bestimmten Umständen (entsprechend kleine laterale Steifigkeit bzw. laterale Reifensteifigkeit) negative Dämpfung auftreten kann und dadurch ein anfachender Term entsteht, der eine kontinuierliche Zunahme der Schwingungsamplitude begründet.

Die durch gyroskopische Effekte hervorgerufene Shimmybewegung wurde mit einem linearen Modell beschrieben, dessen Vereinfachung in der Vernachlässigung aller lateralen Steifigkeiten liegt. Durch eine Differentialgleichung zweiten Grades zur Beschreibung der Bewegung wurde ersichtlich gemacht, dass für hinreichend kleine Werte des Verhältnisses der Rotationssteifigkeit um die Längsachse zum zugehörigen Massenträgheitsmoment selbsterregte Schwingungen durch die einhergehenden negativen Dämpfungsterme auftreten können.

Es wird aber ausdrücklich betont, dass diese einfachen linearen Systeme nicht für systematische Untersuchungen des Systems geeignet sind, sondern eher einen Einblick in das Phänomen geben sollen. Um mehr Verständnis vor allem über den Einfluss des Reifens sowie der Lagerreibung, sowie Lagerspiel zu bekommen, wurde bereits auf die nichtlinearen Gleichungen verwiesen. Dadurch konnten quantitative Aussagen über die Schwingungsamplitude, zugehörige Grenzzyklen und auch über die erforderliche äußere Störung zur Entstehung einer selbsterregten Schwingung getroffen werden.

Anhand eines nichtlinearen Modells mit möglichst realistischen Parametern konnte die stabilisierende Wirkung der gyroskopischen Effekte bei verhältnismäßig geringen Vorwärtsgeschwindigkeiten demonstriert werden. Dabei zeigt sich, dass eine Erhöhung der Steifigkeit um die longitudinale Rotationsachse durch die daraus resultierende geringere laterale Auslenkung des Rades zu einer Reduktion der gyroskopischen Effekte führt, jedoch eine starke Verringerung dieser Steifigkeit gyroskopischen Shimmy provozieren kann. Eine Erhöhung der Quersteifigkeit zeigte wiederum, dass sich der Bereich, in dem selbsterregte Schwingungen auftreten können, verkleinert. Basierend auf den obigen Erkenntnissen wurden in [50] mechanische Modelle unterschiedlicher Komplexität angeführt, die die Fähigkeit besitzen, Lenkungsflattern in Form einer selbsterregten Schwingung auszuführen. Ein Überblick darüber wird in den folgenden Unterkapiteln geboten.

2.2 Gezogenes Rad

Das Schleppradmodell dient primär zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens des Rades in Kombination mit dessen Aufhängung. Drei mechanische Ersatzmodelle sind in weiterer Folge angeführt.

Nach [48] ist ein System, ähnlich einem Anhänger, der an einem gelenkig gelagerten Punkt von einer Zugmaschine gezogen wird, in der Lage, selbsterregte Schwingungen auszuführen, wenn es zumindest zwei unterschiedliche Bewegungsmöglichkeiten besitzt, nämlich einerseits die laterale Bewegung des Rades quer zur Bewegungsrichtung und andererseits eine Rotation um eine vertikale Achse. In [48] schreibt Pacejka zusammenfassend: *"For all unstable motions considered it appears essential that the systems possess both lateral and angular (yaw) motion degrees of freedom"*.

Das erste Modell in Abbildung 2.2 zeigt den typischen Aufbau eines solchen Sys-

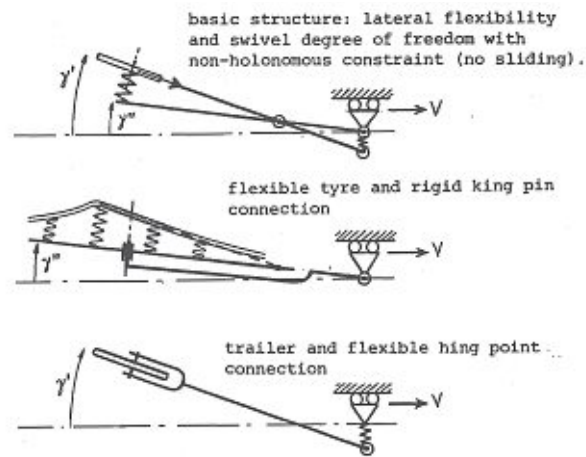


Abbildung 2.2: Allgemeiner Aufbau eines Anhängermodells und Ableitungen, aus [48]

tems, sowie daraus abgeleitete, einfachere Systeme. Einerseits kann die laterale Bewegung des Reifen-Fahrbahn-Kontaktpunktes durch eine Quersteifigkeit des Reifens abgebildet werden, andererseits kann bei nicht-holonomen Bindungen im Reifenkontaktpunkt durch eine Quersteifigkeit in der Aufhängung (unteres System in Abbildung 2.2) ebenfalls eine Seitwärtsbewegung erzielt werden. Die Einführung einer Zwangsbedingung, wie beispielsweise nicht-holonomen Bindungen, reduziert die Mindestordnung des Systems für selbsterregte Schwingungen auf drei.

2.2.1 Anregung durch den querelastischen Reifen - "Tyre shimmy"

Das Schlepprad aus Abbildung 2.3 kann eine Gierbewegung ψ um die vertikale Lenkachse, welche sich mit konstanter Vorwärtsgeschwindigkeit u in x -Richtung bewegt, ausführen. Diesbezüglich wirkt eine Drehfeder mit der Steifigkeit c_ψ sowie ein Dämpfer mit k_ψ .

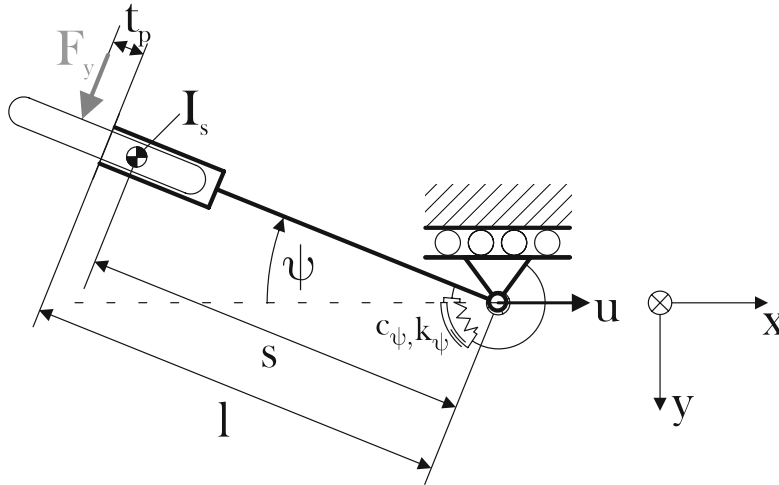


Abbildung 2.3: Modell des gezogenen Rades - "Reifenshimmy"

Bei positivem mechanischen Nachlauf l befindet sich der Aufstandspunkt des Rades hinter dem Durchstoßpunkt der Lenkachse auf der Fahrbahn, ein Umstand, der auch durch Neigung der Lenkachse - wie beispielsweise beim Fahrrad - herbeigeführt werden kann.

Eine essentielle Voraussetzung für selbsterregte Schwingungen dieses Systems ist die Querelastizität des Reifens und damit eine verzögert wirkende Seitenkraft des Reifens F_y (im Abstand t_p hinter dem Kontaktpunkt).

Döhring [10] beschrieb den Mechanismus dieser verzögert wirkenden, schwingungsanfachenden Kraft durch die laterale Verformung des Reifens während einer Pendelbewegung. Aufgrund des Phasenverzugs der Seitenkraft würde sich die Aufstandsfläche des Reifens bei maximalem Lenkwinkel noch in Richtung Normalstellung des Rades verformen und der Reifen dadurch Federenergie aufnehmen (vgl. dazu Bild 1. in Abbildung 2.4). Beim Zurückpendeln des Rades verformt sich

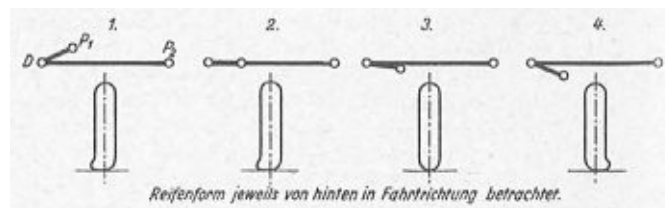


Abbildung 2.4: Verformungen des Reifens während einer Shimmyschwingung [10]

der Reifen entsprechend der Flutterbewegung erst verspätet. Somit ist er noch immer seitlich verformt, wenn der Reifen die Mittellage durchläuft (vgl. Bild 2. in Abbildung 2.4). Die zuvor gespeicherte Federenergie wird dadurch vom Reifen auf das Schwingungssystem übertragen und das Rad aus der Mittellage herausgeführt. Die Deformation bildet sich erst zurück, wenn das Rad bereits in die andere Richtung ausgelenkt ist (Bild 3. in Abbildung 2.4).

Die Bewegungsgleichung ergibt sich zu:

$$(I_S + ms^2)\ddot{\psi} + k_\psi\dot{\psi} + c_\psi\psi = -C_{F\alpha}(l + t_p)\alpha' \quad (2.1)$$

Dabei entspricht der Term auf der rechten Gleichungsseite dem Moment durch die verzögerte Seitenkraft zufolge des transienten Schräglaufwinkels am Reifen, welche von der Schräglauftiefe $C_{F\alpha}$ maßgebend bestimmt wird.

Nach den Gleichungen des *"single-contact-point transient tire model"* aus [50] wird der mit der Zeitkonstante $\tau = \frac{\sigma}{u}$ transiente Schräglaufwinkel mit folgendem Einlaufverhalten beschrieben:

$$\frac{\sigma}{u}\dot{\alpha}' + \alpha' = \psi + \frac{l}{u}\dot{\psi} \quad (2.2)$$

Für große Vorwärtsgeschwindigkeiten u wird die Zeitkonstante τ entsprechend kleiner bzw. die Wellenlänge der Oszillation ausreichend groß. Die dadurch mögliche Approximation führt nach Pacejka [46] zu folgender Differentialgleichung:

$$(I_s + ms^2)\ddot{\psi} + [k_\psi u + C_{F\alpha}(l + t_p)(l - \sigma)]\frac{1}{u}\dot{\psi} + (c_\psi + C_{F\alpha}(l + t_p))\psi = 0 \quad (2.3)$$

Aus Gleichung (2.3) ist unter der Annahme, dass $k_\psi = 0$ ersichtlich, dass der Dämpfungsterm durch hinreichend große Werte der Einlaufänge σ negativ werden kann, was einen anfachenden Term bildet.

Eine alternative Herangehensweise setzt ebenfalls hinreichend kleine Werte von τ voraus. Zieht man zur Beschreibung des Systems Gleichung (2.1) heran und beschreibt den transienten Schräglaufwinkel als Funktion vom Gierwinkel ψ mit der Totzeit τ durch $\alpha' = \psi(t - \tau) + \frac{l}{u}\dot{\psi}(t - \tau)$, so erhält man nach einer Approximation durch eine Taylorreihe ebenfalls Gleichung (2.3).

Das charakteristische Polynom dieses linearen Systems (Gleichungen (2.1) und (2.2)) ergibt sich unter der Vernachlässigung einer Dämpfung um die Lenkachse zu einem Polynom dritten Grades:

$$\left\{ (I_s + ms^2) \frac{\sigma}{u} \right\} \lambda^3 + \left\{ (I_s + ms^2) \right\} \lambda^2 + \left\{ c_\psi \frac{\sigma}{u} + C_{F\alpha}(l + t_p) \frac{l}{u} \right\} \lambda + \left\{ c_\psi + C_{F\alpha}(l + t_p) \right\} = 0 \quad (2.4)$$

Nach Gleichung (B.11) muss für das Auftreten oszillatorischer Instabilität gelten:

$$\mathbf{H}_2 = 0 \Rightarrow (l + t_p)(l - \sigma) = 0 \quad (2.5)$$

Daraus ergeben sich die Stabilitätsgrenzen für oszillatorische Instabilität des linearen Systems zu $l = -t_p$ bzw. $l = \sigma$, innerhalb welcher der Gierwinkel eine Oszillation mit exponentiell aufklingender Amplitude ausführt. Erwähnenswert ist in diesem Zusammenhang, dass die Stabilitätsgrenzen nicht von der Vorwärtsgeschwindigkeit beeinflusst werden. Dies kann nur durch Vernachlässigung äußerer Dämpfung wie k_ψ erzielt werden und hat somit keine praktische Relevanz.

Wird die Breite des Reifenlatsches in die Formulierung der Reifenkräfte miteinbezogen, so erweitert sich das Rückstellmoment um einen Term $\frac{\kappa^*}{u}\dot{\psi}$, siehe [50], und berücksichtigt damit den Bohrschlupf, welcher gerade bei geringen Geschwindigkeiten aufgrund der dämpfenden Eigenschaften die Oszillation unterdrücken kann. Eine zusätzliche Lenkungs-dämpfung k_ψ kann unter Umständen Shimmy komplett stabilisieren. Durch die obige Vereinfachung des Systems auf lineare Zusammenhänge sind die Möglichkeiten, die diese Systembeschreibung liefert, jedoch

beschränkt und die Einbindung von Nichtlinearitäten in die Modellbildung lässt auf weiterführende Informationen hoffen.

Erweitert man also die bisher lineare Charakteristik der Seitenkraft bzw. des Reiferrückstellmoments durch einen Sättigungsbereich, so wird dadurch bei Erreichen der Sättigung der anfachende Term begrenzt und in Kombination mit Dämpfungstermen, wie beispielsweise im linearen Fall $k_\psi \dot{\psi}$, stellt sich nach Aufklingen einer Schwingung eine konstante Amplitude ein (siehe dazu Abbildung 2.5). Befindet

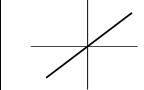
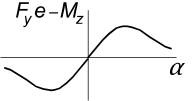
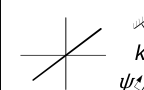

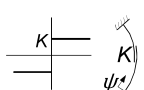
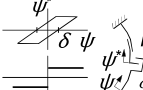
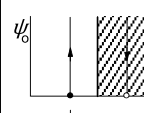
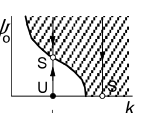
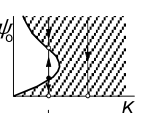
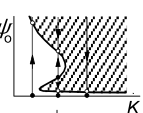
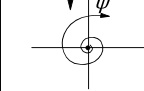
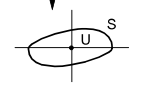
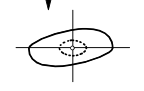
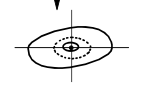
tyre characteristic				
steer damping / play				
limit amplitudes				
limit cycles				
stability	Unstable or Stable	U - S or S	S - U - S or S	U-S or U-S-U-S or U-S

Abbildung 2.5: Nichtlineare Untersuchung des Schleppradsystems [50]

sich also das System im oszillatorisch instabilen Bereich, aber in aufrechter Geradeausfahrt, so erhöht sich die Schwingungsamplitude nach einer äußeren Störung solange, bis ein stabiler Grenzzyklus erreicht ist. An diesem Punkt ist die zugeführte Energie, welche zur Aufrechterhaltung der Schwingung beiträgt, gleich groß dem dissipierten Anteil.

Ersetzt man die viskose Dämpfung um die Lenkachse durch trockene Reibung, so wird die unausgelenkte aufrechte Geradeausfahrt zu einer stabilen Gleichgewichtslage. Es bedarf dadurch einer größeren Auslenkung, um das Moment aufgrund der trockenen Reibung zu überwinden, damit sich anschließend die Gierbewegung zu einem stabilen Grenzzyklus entwickelt (vgl. Abbildung 2.5, dritte Spalte).

2.2.2 Querelastische Aufhängung - "lateral suspension compliance shimmy"

Ein weiteres Modell, das in der Lage ist, durch laterale Auslenkung der Rad-aufhängung ebenfalls eine Quelle für oszillatorische Instabilität zu bilden, ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Anhand der nichtlinearen Bewegungsgleichungen in einem bewegten ($x'-y'$ -) Koordinatensystem, welches mit der Verbindungsstange zwischen Lenkachse und Radnabe fest verbunden ist, wird der Einfluss der Antriebskraft F_d sichtbar. Diese wird als Energiequelle zur Aufrechterhaltung einer

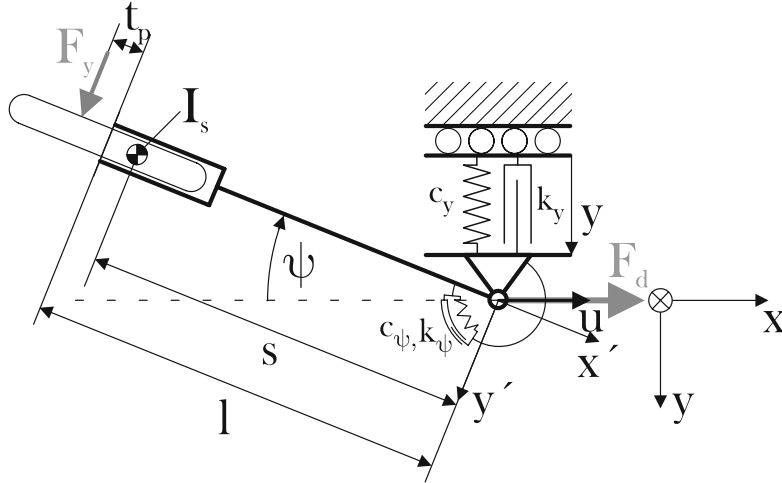


Abbildung 2.6: Modell des gezogenen Rades - "Lateral compliance Shimmy"

Oszillation für eine konstante Geschwindigkeit benötigt.

$$\begin{aligned}
 m(\sin(\psi)\ddot{y} + s\dot{\psi}^2) &= -c_y y \sin(\psi) - k_y \dot{y} \sin(\psi) + F_d \cos(\psi) \\
 m(\cos(\psi)\ddot{y} - s\ddot{\psi}) &= -c_y y \cos(\psi) - k_y \dot{y} \cos(\psi) - F_d \sin(\psi) + C_{F\alpha}\alpha' \\
 (I_s + m.s^2)\ddot{\psi} - m.s \cos(\psi)\ddot{y} &= -k_\psi \dot{\psi} - c_\psi \psi - C_{F\alpha}\alpha'(l + t_p)
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Der zugehörige transiente Schräglaufwinkel, welcher die zeitverzögert wirkende Seitenkraft am Reifen bestimmt, ergibt sich aus Gleichung (2.7)

$$\frac{\sigma}{u}\dot{\alpha}' + \alpha' = \psi + \frac{l\dot{\psi} - \dot{y}}{u}
 \tag{2.7}$$

Durch Linearisierung des Systems (2.6) für kleine Gierwinkelausschläge entfällt allerdings die Antriebskraft und ist somit als mögliche Energiequelle zur Anfängerung der selbsterregten Schwingung beim linearen System nicht mehr sichtbar.

Als weitere Vereinfachung wird die Quergeschwindigkeit des Kontaktpunktes zu null gesetzt. Die zugehörige nichtholonome Zwangsbedingung ist

$$\alpha = 0 = \psi - \frac{\dot{y}}{u} + \frac{l\dot{\psi}}{u}
 \tag{2.8}$$

Leitet man diesen Ausdruck ab und setzt ihn anschließend in die linearisierten Bewegungsgleichungen von System (2.6) ein, so führt dies unter Vernachlässigung des Rückstellmoments zu Gleichung (2.9). Nach nochmaligem Ableiten erhält man schließlich das charakteristische Polynom in Gleichung (2.10)

$$\ddot{\psi}[I_s + m(l - s)^2] + \dot{\psi}[mu(l - s) + k_\psi + k_y l^2] + \psi(c_\psi + k_y ul) + c_y ly = 0
 \tag{2.9}$$

$$\lambda^3[I_s + m(l - s)^2] + \lambda^2[mu(l - s) + k_\psi + k_y l^2] + \lambda[c_\psi + k_y ul + c_y l^2] + c_y lu = 0
 \tag{2.10}$$

Für das ungedämpfte System ($k_\psi = k_y = 0$) ergeben sich nach dem Stabilitätskriterium von Stodola die notwendigen Bedingungen für asymptotische Stabilität:

$$l > 0 \quad (2.11)$$

$$s < l \quad (2.12)$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität nach Hurwitz ist, dass die Hurwitzdeterminanten positiv sind. Da im vorliegenden Fall ein System dritter Ordnung vorliegt, ist die zweite Koeffizienten-Determinante von Interesse. Sie ergibt folgenden Zusammenhang

$$mu(l - s)(c_\psi + c_y l^2) > c_y l u [I_s + m(l - s)^2] \quad (2.13)$$

Aus Gleichung (2.13) ergeben sich dann folgende Bedingungen für die Spezialfälle $s = 0$ und $s = l$:

$$\text{für } s = 0 : \quad m c_\psi > I_s c_y \quad (2.14)$$

$$\text{für } s = l : \quad 0 > I_s c_y l u \quad (2.15)$$

Für $s = l$, das würde einem verhältnismäßig schweren Reifen im Vergleich zur restlichen Aufhängung entsprechen, ist das System für positiven Nachlauf immer oszillatorisch instabil.

Betrachtet man das obige System und bezieht in die Bewegungsgleichungen ein transientes Reifenmodell ein, so wird die Ermittlung der Stabilitätsgrenzen deutlich aufwendiger. Hierfür sei auf [50] verwiesen.

2.2.3 Gyroskopische Effekte - "gyroscopic shimmy"

In [72] wurde die Entstehung und die Auswirkung von gyroskopischen Effekten auf das Systemverhalten untersucht und drei verschiedene Ursprünge beschrieben: nämlich das Kippen des Rades um eine Achse parallel zur Fahrbahn in dessen Längssymmetrieebene, die Rotation um die Hochachse des Rades sowie die laterale Verschiebung des Reifenkontaktpunktes zu dessen Mittelebene (durch eventuelle zusätzliche Flexibilitäten der Aufhängung bzw. der Felgen).

In der Modellbildung des Schlepprades werden die gyroskopischen Effekte beispielsweise durch Einführung einer zur Fahrbahn parallelen Rotationsachse in Längsrichtung des Rades in einer bestimmten Höhe h über dem Boden abgebildet (vgl. Abbildung 2.7).

Die dadurch auftretenden Kreismomente bilden eine Kopplung der Rotationsbewegung ψ um die Lenkachse und um die zusätzlich eingeführte Kippachse β . Ihre Größe wird von der Vorwärtsgeschwindigkeit beeinflusst, wodurch deren Auswirkungen auf die Größe des stabilen Bereichs in Abhängigkeit von der Vorwärtsgeschwindigkeit erklärbar sind. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen sind in Gln. (2.16) - (2.18) angegeben.

$$\underbrace{(I_{S\psi\psi} + ms^2)}_{I_\psi} \ddot{\psi} + k_\psi \dot{\psi} + c_\psi \psi + (I_{S\beta\psi} + msh_s) \ddot{\beta} - I_{\omega y} \frac{u}{r} \dot{\beta} = -C_{F\alpha} (l + t_p) \alpha' \quad (2.16)$$

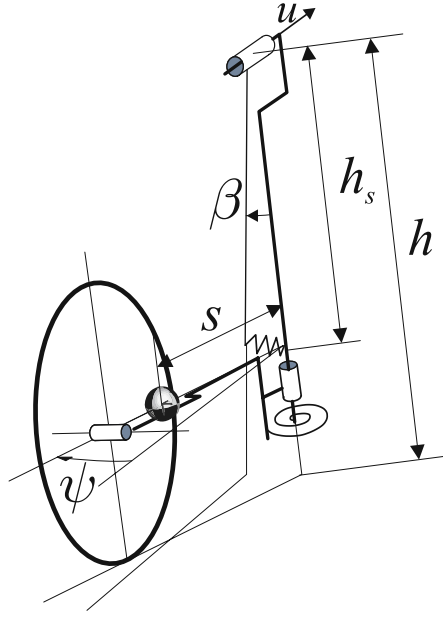


Abbildung 2.7: Modell des gezogenen Rades – "Gyroscopic Shimmy"

$$\underbrace{(I_{S\beta\beta} + mh_s^2)}_{I_\beta} \ddot{\beta} + k_\beta \dot{\beta} + (c_\beta + mh_s g - F_z h) \beta + (I_{S\beta\psi} + msh_s) \ddot{\psi} + I_{\omega y} \frac{u}{r} \dot{\psi} = -hC_{F\alpha} \alpha' \quad (2.17)$$

$$\frac{\sigma}{u} \dot{\alpha}' + \alpha' = \psi + \frac{l}{u} \dot{\psi} + \frac{h}{u} \dot{\beta} \quad (2.18)$$

Als Vereinfachung wird nun angenommen, dass sich der Schwerpunkt des Systems auf Fahrbahnebene und auf der vertikalen Lenkachse befindet ($s = 0$, $h_s = h$). Vernachlässigt man nun auch noch die Dämpfung bei einer Rotation β und die Drehfedersteifigkeit um die Lenkachse ($k_\beta = 0$, $c_\psi = 0$), so ergeben sich die Bewegungsgleichungen nach Vereinfachung von Gleichung (2.18) für entsprechend große Geschwindigkeiten zu

$$I_\psi \ddot{\psi} + k_\psi \dot{\psi} - I_{\omega y} \frac{u}{r} \dot{\beta} = C_{F\alpha} (-l - t_p) \psi \quad (2.19)$$

$$I_\beta \ddot{\beta} + c_\beta \beta + I_{\omega y} \frac{u}{r} \dot{\psi} = -C_{F\alpha} h \psi \quad (2.20)$$

Eine auftretende selbsterregte Schwingung wird sich im eingeschwungenen Zustand ähnlich einer harmonischen Schwingung mit der Frequenz ω_s verhalten, womit aus den Gleichungen (2.20) und (2.19) folgt:

$$\left[I_\psi + \frac{(I_{\omega y} \frac{u}{r})^2}{c_\beta - \omega_s^2 I_\beta} \right] \ddot{\psi} + \left[k_\psi + \frac{I_{\omega y} \frac{u}{r} C_{F\alpha} h}{c_\beta - \omega_s^2 I_\beta} \right] \dot{\psi} + C_{F\alpha} (l + t_p) \psi = 0 \quad (2.21)$$

Aus Gleichung (2.21) ist somit ersichtlich, dass ein entsprechend geringes Verhältnis $\frac{c_\beta}{I_\beta}$ zu einer möglichen selbsterregten Schwingung führen kann.

In einer alternativen Herangehensweise kann man die laterale Auslenkung des Rades nicht mit der Drehbewegung β sondern in Anlehnung an den *lateral compliance shimmy* mit der translatorischen Bewegung y , welche über den Hebelsarm h in β übergeführt wird, beschreiben. Durch diese Vorgehensweise unterscheiden sich die Bewegungsgleichungen für den *gyroscopic shimmy* von jenen des *lateral compliance shimmy* nur durch die zusätzlichen gyroskopischen Terme.

Pacejka [50] zeigte anhand von Stabilitätskarten in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit und dem mechanischen Nachlauf, dass durch die Einbindung dieser gyroskopischen Koppelsterme ein zweiter instabiler Bereich entsteht, der bei höheren Geschwindigkeiten auftritt und auch eine höhere Frequenz aufweist. Hierzu schreibt Pacejka [50]: "*Also, the mode of vibration is quite different for this 'gyroscopic' shimmy exhibiting a considerably larger lateral motion amplitude of the wheel contact center with respect to the yaw angle amplitude than in the original 'lateral (tire) compliance' shimmy mode.*"

Dabei zeigt sich, dass dieser instabile Bereich umso größer wird, je geringer die Quersteifigkeit c_y ist.

2.2.4 Eigenwertanalyse der Schleppradmodelle

Anhand der vorliegenden Schleppradmodelle zeigte sich – abgesehen von negativer Dämpfung zur Anfachung selbsterregter Schwingungen – auch die Möglichkeit durch die Koppelung der Gier- und Querbewegung selbsterregte Schwingungen auszuführen. Dies basiert einerseits auf einer Wechselwirkung der beiden Bewegungsmöglichkeiten zueinander (vgl. *lateral suspension compliance shimmy*), andererseits auch auf dem Phasenverzug einer Querbewegung gegenüber der Gierbewegung (vgl. *tyre shimmy*) oder der gyroskopischen Kopplung dieser beiden Bewegungen durch die gyroskopischen Momente (vgl. *gyroscopic shimmy*).

Aufschlussreich kann die Darstellung der Eigenwerte des jeweiligen Systems in Abhängigkeit von meist einem Parameter sein.

Im Folgenden wurden die Eigenwerte der Modelle zum Zwecke der Vergleichbarkeit in Abhängigkeit von der Vorwärtsgeschwindigkeit dargestellt.

Das linke Diagramm in Abbildung 2.8 zeigt den Verlauf der Realteile der Eigenwerte der drei Modelle (Reifenshimmy, Shimmy durch querelastische Aufhängung des Reifens und eine nichtholonome Bindung im Reifenkontaktpunkt sowie Shimmy durch gyroskopische Effekte), während in der rechten Hälfte die zugehörigen Imaginärteile abgebildet sind. Die dafür verwendeten Parameter sind Anhang A.4.2 zu entnehmen und orientieren sich an den Massedaten des Lenksystems eines Touringbikes. Dabei ist für das Modell aus Abschnitt 2.2.1 der gesamte untersuchte Geschwindigkeitsbereich (hellblaue Linie) instabil. Ähnliches gilt für die Eigenwerte des Modells aus Abschnitt 2.2.2 (mittelblaue Linie), hier wurden, um den Einfluss der Querelastizität zu verdeutlichen, die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung einer nichtholonomen Zwangsbedingung im Reifenkontaktpunkt verwendet.

Das Modell aus Abschnitt 2.2.3 (schwarze Linie) zeigt nun eine Stabilisierung des Systems im unteren Geschwindigkeitsbereich, allerdings werden diese im höheren Geschwindigkeitsbereich wieder positiv, was einer neuerlichen Instabilität dieses

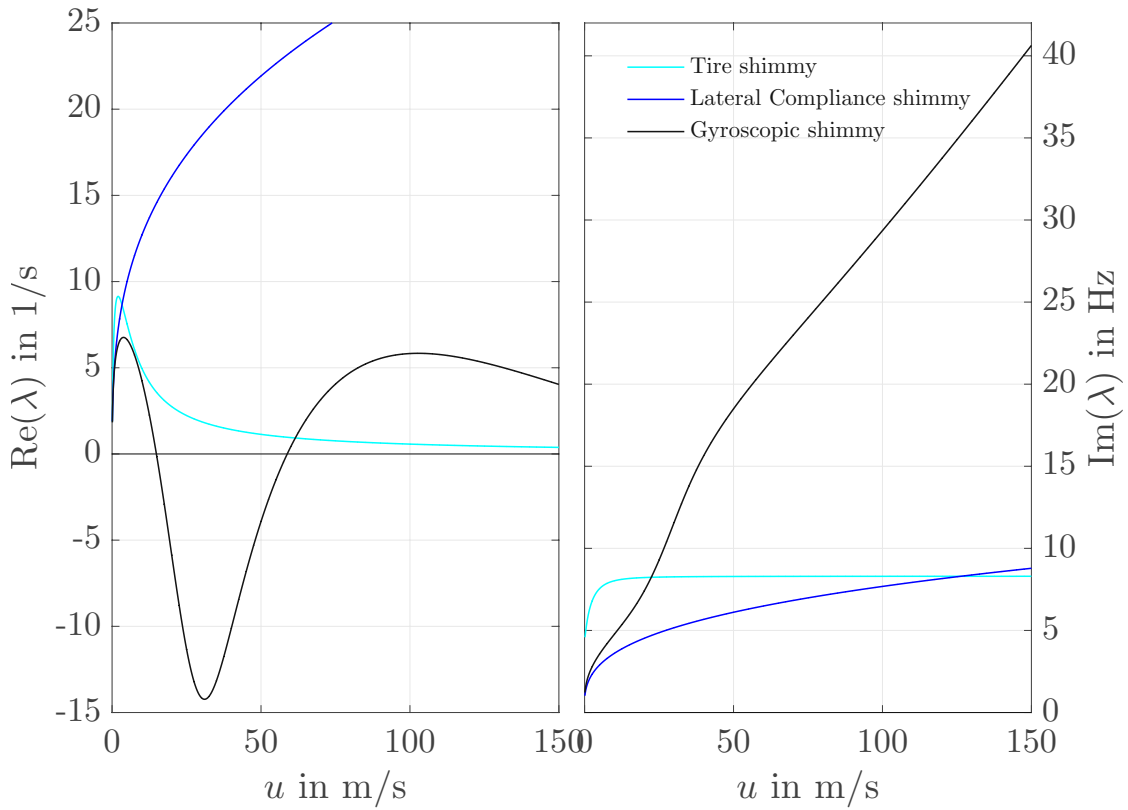


Abbildung 2.8: "Reifenshimmy", Shimmy durch laterale Flexibilität, gyroscopischer Shimmy

Modes entspricht. Diese wird in der Literatur oft auch als "*gyroscopic shimmy*" oder auch "*high-speed shimmy*" (vgl. [73]) bezeichnet. Angemerkt sei an dieser Stelle, dass derartig hohe Geschwindigkeiten wenig praktische Relevanz haben. Sie sollen viel mehr zum Verständnis der Mechanismen zur Anfachung einer Shimmybewegung beitragen.

3

Selbsterregte Schwingungen und Stabilität

Die Zuordnung der Shimmybewegung in die Kategorie der selbsterregten Schwingungen liegt an der Art der Charakterisierung von Schwingungen. Diese kann aus unterschiedlichen Standpunkten erfolgen, wie es von Magnus und Popp [27] in einem Überblick dargestellt wird.

Demnach kann sie sich am Freiheitsgrad des Systems orientieren, wodurch eine lückenlose aber sehr formale Einteilung möglich ist. Eine ähnliche Vorgehensweise besteht in der Einteilung nach den systembeschreibenden Differentialgleichungen. Dazu gehört in erster Linie die Unterscheidung von linearen und nichtlinearen Differentialgleichungen und in weiterer Folge auch die Einteilung nach der Ordnung. Magnus und Popp fokussieren sich in [27] auf die Einteilung nach dem Entstehungsmechanismus, was unter anderem auch den Vorteil hat, dass die Berechnungsverfahren der jeweiligen Kategorie verwandt sind.

Eine dieser Kategorien stellen die freien Schwingungen dar. Dabei ist der Schwinger sich selbst überlassen und die Bewegungen erfolgen ohne Einwirkungen von außen und somit auch ohne Energiezufuhr.

Im Gegensatz dazu ist bei selbsterregten Schwingungen - denen die Shimmybewegung zugeordnet wird - eine äußere Energiequelle vorhanden, aus der sich der Schwinger - im Takt seiner Eigenschwingung - Energie entnehmen kann, sodass die im System dissipierte Energie ausgeglichen werden kann und die selbsterregte Schwingung somit aufrecht erhalten wird. Die Differentialgleichungen zur Beschreibung dieser Bewegungen sind stets nichtlinear, wobei die Nichtlinearität ausschlaggebend ist.

Selbsterregte und freie Schwingungen weisen die Gemeinsamkeit auf, dass die Frequenz der Schwingung stets vom Schwinger selbst bestimmt wird, solche Systeme werden auch als autonom bezeichnet.

Parametererregte Schwingungen basieren hingegen auf periodischen Veränderungen eines oder mehrerer Parameter. Die Differentialgleichungen besitzen zeitabhängige, meist periodische Koeffizienten, deren Periodizität auch die Frequenz der Schwingung bestimmt.

Im Gegensatz zu parametererregten Schwingungen erfolgt bei fremderregten Schwingungen die Erregung über ein äußeres Störglied (und nicht über einen Parameter)

welches in Form einer zeitabhängigen Funktion auf der rechten Seite der Differentialgleichung auftritt.

Die Frequenz der parametererregten, wie auch der fremderregten Schwingungen wird von der äußeren Einwirkung (Fremderregung) vorgegeben. Derartige Systeme werden auch als heteronom bezeichnet.

Im Zuge dieser Einteilung sollten speziell im Hinblick auf Shimmy bzw. den Wobblemode auch Koppelschwingungen erwähnt werden, die durch die gegenseitige Beeinflussung mehrerer Schwinger entstehen bzw. bei einem Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden auftreten.

Prinzipiell können nach dieser Einteilung auch Kombinationen der einzelnen Kategorien auftreten wie beispielsweise eine Kombination aus parametererregten und selbsterregten Schwingungen.

Analytische Betrachtungen der Systemmatrizen können Aussagen liefern, ob ein System die Fähigkeit besitzt, selbsterregte Schwingungen auszuführen, wie beispielsweise in einem Bericht von Kurt Magnus [34] dargelegt wird.

Zuvor soll allerdings von den Bewegungsgleichungen eines linearen Systems der Form (3.1) ausgegangen werden.

$$\mathbf{M}\ddot{\underline{q}} + \mathbf{K}_s\dot{\underline{q}} + \mathbf{C}_s\underline{q} = \underline{0} \quad (3.1)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die $(n \times n)$ -Massenmatrix \mathbf{M} symmetrisch und positiv definit ($\mathbf{M} \succ 0$) ist und die Steifigkeitsmatrix \mathbf{C}_s und – sofern vorhanden – die Dämpfungsmatrix \mathbf{K}_s symmetrisch sind. Liegt ein konservatives System vor, so bleibt die Energie des Systems über den Bewegungsvorgang erhalten und wechselt zwischen kinetischer und potentieller Energie -vgl. Glg. (3.2).

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2}\dot{\underline{q}}^T \mathbf{M} \dot{\underline{q}}}_{E_{kin}} + \underbrace{\frac{1}{2}\underline{q}^T \mathbf{C}_s \underline{q}}_{E_{pot}} \right) + \underbrace{\dot{\underline{q}}^T \mathbf{K}_s \dot{\underline{q}}}_{2R} = 0 \quad (3.2)$$

Im Falle einer gedämpften Schwingung wird durch die im System enthaltene Dämpfung Energie dissipiert. Diese kann in der Dissipationsfunktion R zum Ausdruck gebracht werden. Gilt $R > 0$, ist also die Dämpfungsmatrix nicht nur symmetrisch ($\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_s^T$) sondern auch positiv definit ($\mathbf{K}_s \succ 0$), dann wird dem System bei jeder Bewegungsform Energie entzogen (vollständige Dämpfung).

An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass ein System auch bei nur positiv semidefiniter Dämpfungsmatrix ($\mathbf{K}_s \succeq 0$, $\det(\mathbf{K}_s) = 0$) infolge der Koppelungen im System gedämpfte Schwingungen ausführen kann, diese bezeichnet man als durchdringende Dämpfung.

Eine Erweiterung des Systems (3.2) mit gyroskopischen Kräften in Form einer schiefsymmetrischen Matrix \mathbf{K}_a und mit einer schiefsymmetrischen Steifigkeitsmatrix \mathbf{C}_a erhält man das System (3.3)

$$\mathbf{M}\ddot{\underline{q}} + \mathbf{K}_s\dot{\underline{q}} + \mathbf{K}_a\dot{\underline{q}} + \mathbf{C}_s\underline{q} + \mathbf{C}_a\underline{q} = 0 \quad (3.3)$$

Dabei enthält die symmetrische Matrix \mathbf{K}_s Terme für geschwindigkeitsproportionale, nicht-konservative Kräfte, durch die dem System Energie zugeführt (negative Dämpfung – Anfachung) oder entzogen (Dämpfung) werden kann. Die Einträge

der Matrix \mathbf{C}_a dienen dabei zur Beschreibung der nichtkonservativen Lagekräfte bzw. der zirkulatorischen Kräfte. Eine Multiplikation der Gleichung (3.3) mit $\dot{\underline{q}}^T$ von links führt zu Gleichung (3.4), welche ersichtlich macht, dass die Matrizen $\underline{\mathbf{K}}_s$ und \mathbf{C}_a den Energiehaushalt des Systems verändern.

$$\underbrace{\dot{\underline{q}}^T \mathbf{M} \ddot{\underline{q}}}_{\frac{d}{dt} E_{kin}} + \underbrace{\dot{\underline{q}}^T \mathbf{K}_s \dot{\underline{q}}}_{2R} + \underbrace{\dot{\underline{q}}^T \mathbf{K}_a \dot{\underline{q}}}_0 + \underbrace{\dot{\underline{q}}^T \mathbf{C}_s \underline{q}}_{\frac{d}{dt} E_{pot}} + \dot{\underline{q}}^T \mathbf{C}_a \underline{q} = 0 \quad (3.4)$$

Zu beachten ist jedenfalls, ob es sich bei dem betrachteten System um ein lineares System handelt oder um ein System, das durch Linearisierung des ursprünglich nichtlinearen Gleichungssystems entstanden ist. Vor allem bei der Untersuchung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung muss dies berücksichtigt werden. Treten nämlich einzelne, nicht mehrfach auftretende Wurzeln mit verschwindendem Realteil $\text{Re}(\lambda)$ auf, so kann bei einem linearen System auch noch von Stabilität gesprochen werden. Bei einem linearisierten System müssen in diesem Fall die Nichtlinearitäten berücksichtigt werden. [34]

3.1 Linearisiertes System

Die Bewegungsdifferentialgleichungen eines Systems mit n verallgemeinerten Koordinaten q_i können als nichtlineare Funktionen der Form

$$f_i(\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, t) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

angeschrieben werden. [20]

Unter der Voraussetzung, dass nur kleine Bewegungen aus der Ruhelage untersucht werden und die Funktionen f_i stetig differenzierbar sind, lassen sich die Funktionen aus Glg. (3.5) in eine Taylorreihe der Form (3.6) entwickeln

$$f_i(0, \dots, 0, t) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial \ddot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial q_j} q_j \right) + \mathcal{O}(\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

Dabei sind die Ableitungen von f_i ebenfalls an der Stelle der Ruhelage auszuwerten. Die linearisierten Bewegungsgleichungen in Matrixform ergeben sich dann mit $\underline{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ zu

$$\mathbf{M}(t) \ddot{\underline{q}}(t) + \mathbf{K}(t) \dot{\underline{q}}(t) + \mathbf{C}(t) \underline{q}(t) = \underline{f}_0(t) \quad (3.7a)$$

$$\underline{f}_0(t) = (f_1(0, \dots, 0, t), \dots, f_n(0, \dots, 0, t))^T \quad (3.7b)$$

Die $n \times n$ -Matrizen $\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{K}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ haben die Elemente

$$m_{ij}(t) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial \ddot{q}_j} \right|_{(0, \dots, 0, t)}, \quad k_{ij}(t) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} \right|_{(0, \dots, 0, t)}, \quad c_{ij}(t) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right|_{(0, \dots, 0, t)} \quad (3.8)$$

Durch Umformen kann das linearisierte Differentialgleichungssystem (3.7a) mit $\underline{f}_0(t) = \underline{0}$ als $(2n \times 2n)$ -System erster Ordnung mit dem Zustandsvektor $\underline{x} = [\dot{\underline{q}} \quad \underline{q}]^T$ in der Form

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \underline{x}(t) \quad (3.9)$$

angeschrieben werden, für das folgende Sätze der Stabilitätstheorie nach *Ljapunov* gelten:

Stabilität nach erster Näherung: Ist das linearisierte System (3.9) gleichmäßig asymptotisch stabil, so ist die Gleichgewichtslage $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$ des nichtlinearen Systems

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{h}(\underline{x}, t) \quad (3.10)$$

mit $\underline{h}(\underline{0}, t) = \underline{0}$ für

$$|\underline{h}(\underline{x}, t)| = o(|\underline{x}|) \quad (3.11)$$

ebenfalls gleichmäßig asymptotisch stabil. ([40], S.79)

Das Landausche Symbol in Glg. (3.11) bedeutet dabei, dass

$$\lim_{|\underline{x}| \rightarrow 0} \frac{|\underline{h}(\underline{x}, t)|}{|\underline{x}|} = 0 \quad (3.12)$$

Nach [40] bestimmen also die linearen Glieder das asymptotische Stabilitätsverhalten, wenn es möglich ist, das nichtlineare Gleichungssystem (3.5) in eine Taylorreihe der Form (3.10) überzuführen. Für Instabilität gilt folgendes:

Instabilität nach erster Näherung: Hat die Matrix \mathbf{A} des zeitinvarianten Systems (3.9) mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil (d.h. ist Glg. (3.9) "exponentiell instabil"), so ist die Gleichgewichtslage $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$ des zeitinvarianten nichtlinearen Systems

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{h}(\underline{x}, t) \quad (3.13)$$

mit $\underline{h}(\underline{0}, t) \equiv \underline{0}$ für

$$|\underline{h}(\underline{x}, t)| = o(|\underline{x}|) \quad (3.14)$$

ebenfalls instabil. ([40], S.60)

Die obigen Sätze stellen somit eine Rechtfertigung für die Linearisierung nichtlinearer Bewegungsgleichungen dar. Zu bedenken ist allerdings, dass das linearisierte System zwar Informationen liefern kann, ob die Gleichgewichtslage für hinreichend kleine Anfangsstörungen stabil oder instabil ist, wodurch im Falle der Instabilität in weiterer Folge auf die Fähigkeit geschlossen werden kann, selbsterregte Schwingungen auszuführen. Über das Systemverhalten nach Stabilitätsverlust bzw. für eine qualitative Aussage über auftretende selbsterregte Schwingungen ist aber mit dem linearen System keine Aussage zu treffen, da in diesem Fall die Nichtlinearitäten des Systems maßgebend sind.

Liegen die Bewegungsgleichungen in Form von Gleichung (3.15) vor,

$$\mathbf{M}\ddot{\underline{q}} + (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_a)\dot{\underline{q}} + (\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_a)\underline{q} = \underline{0} \quad (3.15)$$

sind in einzelnen, wenigen Fällen Aussagen über das Systemverhalten durch Rückschluss aus den Systemmatrizen möglich. Bleibt allerdings mindestens eine der oben angegebenen Systemmatrizen unbesetzt, so fällt es schon wesentlich leichter, anhand der Struktur der vorhandenen Matrizen Aussagen über das Stabilitätsverhalten zu treffen. Müller [40] und auch Hagedorn [20] haben einen guten Überblick

über mögliche Konstellationen der Systemmatrizen und die daraus resultierenden Aussagen zum Stabilitätsverhalten geboten.

Nach Müller [40] ist eine notwendige Bedingung für (asymptotische) Stabilität eines Systems der Form aus Gleichung 3.15, dass gilt:

$$\text{Sp}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_s) \geq 0(> 0) \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_a) \geq 0(> 0) \quad (3.16)$$

Hinreichend für Instabilität ist

$$\text{Sp}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_s) < 0 \quad \text{oder} \quad \det(\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_a) < 0 \quad (3.17)$$

Für ein allgemeines System aus Gleichung (3.15) mit $\mathbf{C}_a \neq \mathbf{0}$ gilt, wenn \mathbf{C}_s positiv definit ist:

$$\mathbf{C}_s \succ 0 \quad \text{-und dadurch auch} \quad (\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_a) \succ 0 \quad (3.18)$$

dass eventuell auftretende Instabilitäten oszillatorisch sind (Flutterinstabilität). Dies ist mit Glg. (3.17) ersichtlich, da aufgrund von $(\mathbf{C}_s) \succ 0$ alle Hauptminoren positiv sein müssen und somit auch $\det(\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_a) > 0$ und daher keine divergente Instabilität vorhanden ist.

Im folgenden Abschnitt werden die Systeme aus den Abschnitten 2.2.2 und 2.2.3 hinsichtlich Stabilität untersucht. Dazu ist es notwendig, die Bewegungsgleichungen in Form von Glg. (3.7a) anzuschreiben, wofür teilweise Vereinfachungen der vorliegenden Gleichungssysteme notwendig sind. Das lineare Stabilitätsverhalten dieser Systeme wurde in Kapitel 2 bereits nach Hurwitz und Stodola untersucht.

System mit transientem Reifenmodell: Durch das Anschreiben der Bewegungsgleichungen des Systems aus Abschnitt 2.2.1 in Form von Glg. (3.15) entfällt aufgrund der Ordnung der Differentialgleichung in Glg. (2.2) ein Term in der Massenmatrix, wodurch diese positiv semidefinit wird.

Als Vereinfachung wird das transiente Verhalten des Reifens vernachlässigt, wodurch sich die Systemgleichungen zu Glg. (3.19) vereinfachen:

$$\underbrace{(I_s + ms^2)}_{\hat{=}\mathbf{M}} \ddot{\psi} + \underbrace{\left(k_\psi + \frac{c_\alpha l(l + t_p)}{u}\right)}_{\hat{=}\mathbf{K}_s} \dot{\psi} + \underbrace{(c_\psi + c_\alpha(l + t_p))}_{\hat{=}\mathbf{C}_s} \psi = 0 \quad (3.19)$$

In diesem Falle könnte das System unter der Bedingung, dass ein negativer Dämpfungsterm vorhanden ist, selbsterregte Schwingungen ausführen, wenn $\mathbf{C}_s \succ 0$ und das System dadurch nicht monoton instabil ist. Unter Vernachlässigung einer Dämpfung um die Lenkachse ($k_\psi = 0$) gilt folgende Bedingung für den Nachlauf l , damit das System oszillatorisch instabil ist:

$$-t_p < l < 0 \quad (3.20)$$

Nachdem die Größen t_p und l entsprechend Abbildung 2.3 positiv angenommen wurden, entspricht ein negativer Nachlauf wie in Gleichung (3.20) einem geschobenen Rad, dessen Radaufstandspunkt vor dem Durchstoßpunkt der Verlängerung der Lenkachse liegt.

Unter Berücksichtigung des transienten Reifenverhaltens ist der transiente Schräglaufwinkel vom Drehwinkel ψ sowie der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ um die Lenkachse abhängig. Die dadurch zeitverzögert wirkende Seitenkraft F_y facht die Schwingungen des Systems, dem Mechanismus folgend an, wie er schon von Döhning (vgl. Abb. 2.4) beobachtet worden ist. Folglich ist der Phasenverzug der Seitenkraft gegenüber dem Gierwinkel ψ ursächlich für die auftretende selbsterregte Schwingung. Ding [12] bezeichnet diesen Mechanismus als Rückkoppelungsmechanismus, wobei eine positive Rückkoppelung anfachend wirkt, während eine negative Rückkoppelung eine Dämpfung bewirkt.

Babitsky et. al [2] bezeichnen diese Art von Schwingungen als *"auto-oscillations with inertial self-excitation"* nachdem ihr Auftreten von der "Trägheit" der Kopplung der Differentialgleichungen abhängig ist.

Dabei wurde ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem nach der Linearisierung der Gleichungen als *"mechanical system with a half degree of freedom"* angeschrieben:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = -ky \quad (3.21)$$

$$\dot{y} + \gamma y = ax + c\dot{x} \quad (3.22)$$

Dabei sind die Kreisfrequenz mit ω_0 , δ als Dämpfungskonstante, γ als inverse Zeitkonstante zur Beschreibung der Bewegung y bezeichnet.

Nach Anwendung des Routh-Hurwitz Kriteriums ergibt sich als Bedingung für oszillatorische Instabilität

$$k[a - c(2\delta + \gamma)] > 2\delta(\omega_0^2 + 2\delta\gamma + \gamma^2) \quad (3.23)$$

wodurch sich zeigt, dass die Bedingungen für oszillatorische Instabilität von den Parametern k , a und c abhängt, also jenen Parametern, die die Koppeltermine der Differentialgleichung beschreiben.

Betrachtet man beispielsweise das Schleppradsystem mit transientem Reifenmodell und Gierfreiheitsgrad ψ , so zeigt sich mit $a = \frac{u}{\sigma}$, $c = \frac{l}{\sigma}$ und $k = \frac{C_{F\alpha}(l+t_p)}{I_s+ms^2}$, dass für $c_\psi = k_\psi = 0$ die Stabilitätsgrenzen mit $-t_p < l < \sigma$ angegeben werden können.

System mit querelastischer Aufhängung: Lässt man wieder die zeitverzögerte Wirkung der Reifenkräfte und -momente außer Acht und bindet diese unverzögert in die Bewegungsgleichungen ein, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen

für das System aus Abschnitt 2.2.2 zu Glg. (3.24).

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} m & -ms \\ -ms & I_s + ms^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \\
 & + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} k_y + \frac{C_{F\alpha}}{2u} & -\frac{C_{F\alpha}(2l+t_p)}{2u} \\ -\frac{C_{F\alpha}(2l+t_p)}{2u} & k_\psi + \frac{C_{F\alpha}l(l+t_p)}{u} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{C_{F\alpha}t_p}{2u} \\ -\frac{C_{F\alpha}t_p}{2u} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_a} \right) \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 & + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} c_y & -\frac{C_{F\alpha}}{2} \\ -\frac{C_{F\alpha}}{2} & c_\psi + C_{F\alpha}(l+t_p) \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{C_{F\alpha}}{2} \\ \frac{C_{F\alpha}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_a} \right) \begin{bmatrix} y \\ \psi \end{bmatrix} = \underline{0}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Für das vorliegende System mit querelastischer Aufhängung in Glg. (3.24) gilt:

$$\mathbf{C}_s \succ 0, \quad \det(\mathbf{C}_s) > 0 \quad \text{wenn} \quad c_y(c_\psi + C_{F\alpha}(l+t_p)) > \frac{C_{F\alpha}^2}{4} \tag{3.25}$$

$$\text{für} \quad c_\psi = 0 \Rightarrow c_y > \frac{C_{F\alpha}}{4(l+t_p)}$$

$$\det(\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_a) > 0 \quad \text{wenn} \quad c_y(c_\psi + C_{F\alpha}(l+t_p)) > 0 \tag{3.26}$$

$$\text{Sp}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_s) = \frac{C_{F\alpha}}{I_s u} \left[\frac{I_s + ms^2}{m} + l(l+t_p) - s(2l+t_p) \right] \tag{3.27}$$

Aus den obigen Gleichungen ist ersichtlich, dass für $\mathbf{C}_s \succ 0$ eine Shimmybewegung möglich ist. Gleichung (3.27) kann unter geeigneter Wahl der Parameter negativ werden.

System mit gyroskopischen Effekten: Eine analoge Vorgehensweise führt für das "gyroscopic shimmy"-System zu Gleichungen (3.28)

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} I_{Sxx} + mh^2 & -(I_{Sxz} + msh) \\ -(I_{Sxz} + msh) & I_S + ms^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \\
 & + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} k_\beta + \frac{C_{F\alpha}h^2}{u} & \frac{C_{F\alpha}h(2l+t_p)}{u} \\ \frac{C_{F\alpha}h(2l+t_p)}{u} & k_\psi + \frac{C_{F\alpha}h(l+t_p)}{u} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{C_{F\alpha}ht_p}{u} + I_{\omega y} \frac{u}{r} \\ \frac{C_{F\alpha}ht_p}{u} - I_{\omega y} \frac{u}{r} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_a} \right) \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 & + \left(\underbrace{\begin{bmatrix} c_\beta & \frac{C_{F\alpha}h}{2} \\ \frac{C_{F\alpha}h}{2} & c_\psi + C_{F\alpha}(l+t_p) \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{C_{F\alpha}h}{2} \\ -\frac{C_{F\alpha}h}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_a} \right) = \underline{0}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Für das System mit gyroskopischen Effekten in Glg. (3.28) gilt:

$$\mathbf{C}_s \succ 0, \quad \det(\mathbf{C}_s) > 0 \quad \text{wenn} \quad c_\beta(c_\psi + C_{F\alpha}(l+t_p)) > \frac{C_{F\alpha}^2}{4} \tag{3.29}$$

$$\det(\mathbf{C}_s + \mathbf{C}_a) > 0 \quad \text{wenn} \quad c_\beta(c_\psi + C_{F\alpha}(l + t_p)) > 0 \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_s) &= \frac{C_{F\alpha} [h^2(I_{sxx} + ms^2)]}{u[(I_{sxz} + mhs)^2 + (I_{sxx} + mh^2)(I_{sxx} + ms^2)]} \\ &+ \frac{C_{F\alpha} [l(I_{sxx} + mh^2)(l + t_p) + h(I_{sxz} + mhs)(2l + t_p)]}{u[(I_{sxz} + mhs)^2 + (I_{sxx} + mh^2)(I_{sxx} + ms^2)]} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Aus den obigen Gleichungen ist ersichtlich, dass für $c_\psi = 0$ die Größe der Drehfedersteifigkeit c_β maßgeblich zum Auftreten einer Shimmybewegung beiträgt, falls $\text{Sp}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_s) < 0$.

3.2 Entstehungsmechanismen

Nach Ding [12] haben sich zumindest zwei Mechanismen etabliert, die das Auftreten dieser selbsterregten Schwingungen näher bringen: **Energiemechanismus** und **Rückkoppelungsmechanismus**.

Als Beispiel zum Energiemechanismus führt Ding ein nicht-konservatives System mit einem Freiheitsgrad ein. Die Bewegungsgleichung sei mit der Auslenkung x , der Masse m , der Funktion für nicht-konservative Kräfte $h(x, \dot{x})$ und der konservativen Kraft $f(x)$ gegeben durch Glg. (3.32).

$$m\ddot{x} + h(x, \dot{x}) + f(x) = 0 \quad (3.32)$$

Mit der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ und der potentiellen Energie $U = \int f(x)dx$ ergibt sich folglich

$$d(T + U) = -h(x, \dot{x})dx \quad (3.33)$$

Das Vorzeichen der Funktion $h(x, \dot{x})$ beschreibt das Stabilitätsverhalten des Systems: ist die Funktion positiv, sinkt die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ständig, wodurch sich die Auslenkung asymptotisch der stabilen Gleichgewichtslage annähert.

Umgekehrt beschreibt eine negative Funktion $h(x, \dot{x})$ einen divergenten Energieinhalt, wodurch sich das System mit einer monotonen Bewegung von der instabilen Gleichgewichtslage fortbewegt.

Ist das Vorzeichen der Funktion $h(x, \dot{x})$ allerdings alternierend, kann der Energieinhalt sowohl zu- als auch abnehmen. Diese Eigenschaft ist ein Hinweis auf mögliche selbsterregte Schwingungen.

In diesem Fall beschreibt Ding die Auslenkung x des Systems als quasi-periodische Bewegung mit langsam veränderlicher Amplitude $a(t)$ und konstanter Frequenz ω :

$$x(t) = a(t)[\sin(\omega t + \psi(t))] \quad (3.34)$$

Besteht nun die Möglichkeit den Term der nicht-konservativen Kräfte in einen dämpfenden und einen anfachenden Teil aufzuspalten, so gilt für den Schwingungszyklus der selbsterregten Schwingung, dass die im System dissipierte Energie

$\Delta E_D(a)$ gleich der anfachenden Energie $\Delta E_Z(a)$ ist.

$$\int_0^T h(x, \dot{x}) \dot{x} dt = \Delta E_D(a) - \Delta E_Z(a) = 0 \quad (3.35)$$

Diese Überlegungen werden im Folgenden am Schleppradsystem mit transientem Reifenmodell und Quersteifigkeit in der Aufhängung angewendet. Dadurch kann ein Einblick in den Mechanismus zur Anfachung der Shimmybewegung gegeben werden. In weiterer Folge soll auf die Bedeutung des Energietransfers zwischen Antrieb und dem Reifen näher eingegangen werden, da dieser als rein passives Element nicht von selbst eine Energiequelle sein kann.

Ersteres wurde bereits in [4] anhand eines einfachen Schlepprades untersucht, indem die Energiebilanz des Reifens für einen Schwingungszyklus angeschrieben wurde.

Hierfür betrachtet man den Reifen des Systems aus Abbildung 2.3, während dieser periodische Schwingungen mit konstanter Amplitude –entsprechend einer eingeschwingenen Shimmybewegung– ausführt. Dadurch wird die Bewegung des Reifen–Aufstandspunktes mit dem Gierwinkel $\psi(t)$ und der Querbewegung $\bar{y}(t)$ wie folgt angeschrieben:

$$\bar{y}(t) = A\eta \sin(\omega t + \zeta) \quad (3.36)$$

$$\psi(t) = A \sin(\omega t) \quad (3.37)$$

Hier wird die Querbewegung durch das Amplitudenverhältnis η und den zugehörigen Phasenwinkel ζ in Relation zur Gierbewegung gesetzt.

Zunächst wird das System noch weiter vereinfacht, indem der mechanische Nachlauf $l = 0$ gesetzt wird. Somit verrichtet nur das Reifenrückstellmoment $M'_z(t) = -t_p F_y(t) = -C_{M\alpha} A \sin(\omega t + \phi)$ Arbeit während einer Shimmyschwingung. Der Phasenwinkel ϕ ist unter Berücksichtigung des *”straight tangent tire model”* aus [50] negativ, somit läuft das Rückstellmoment der Gierbewegung nach.

Zur weiteren Rechnung wird $\omega t = \Theta$ gesetzt und es ergibt sich mit Gleichung (3.38) die Arbeit in Gleichung (3.39):

$$M'_z(s) = -t_p C_{F\alpha} A \sin(\omega t + \phi) \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} W &= \int M'_z d\psi = \int_0^{2\pi} M'_z \frac{d\psi}{d\Theta} d\Theta \\ &= - \int_0^{2\pi} t_p C_{F\alpha} A^2 \sin(\Theta + \phi) \cos(\Theta) d\Theta \\ &= -\pi t_p C_{F\alpha} A^2 \sin(\phi) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Das Vorzeichen der Arbeit in Glg. (3.39) hängt also vom Phasenwinkel ϕ des Rückstellmoments ab. Im vorliegenden Fall ist die Arbeit also positiv, somit wird dem System Energie zugeführt.

In [54] hat Ran die Umwandlung der Antriebsenergie in Shimmyenergie am Schlepprad veranschaulicht. Unter der Annahme, dass sich das frei rollende Rad mit konstanter Geschwindigkeit V bewegt, wurde die Energieänderung im Reifen für einen

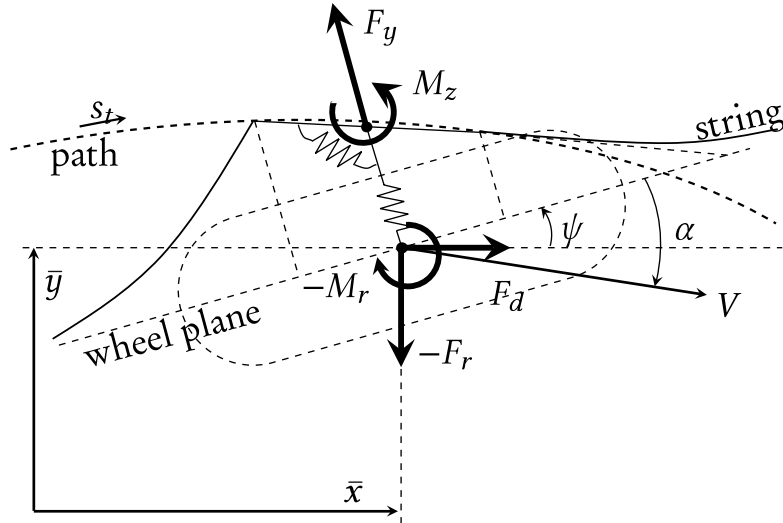


Abbildung 3.1: Kräftebilanz am Reifen, adaptiert aus [54]

Zeitschritt Δt dargestellt. Abbildung 3.1 zeigt die Antriebskraft F_d sowie die Seitenkraft F_y und das Rückstellmoment M_z an der Kontaktlinie. Als Reifenmodell ging Ran vom *stretched sting tyre model*, vgl. [50] aus, wobei eine Gleitreibungskraft im Kontaktgebiet vernachlässigt wird. Dies hat zur Folge, dass dadurch keine Energie an der Hinterkante der Kontaktlinie dissipiert wird.

F_r und M_r stellen die resultierende Kraft bzw. das resultierende Moment im Radmittelpunkt dar. Durch Vernachlässigung dynamischer Effekte gilt:

$$F_r = -F_y \cos(\psi) \quad (3.40)$$

$$M_r = -M_z \quad (3.41)$$

Für die Energieänderung des Reifens für einen Zeitschritt Δt gilt mit der potentiellen Energie ΔV und der kinetischen Energie ΔU :

$$F_r \dot{y} \Delta t + F_d \dot{x} \Delta t + M_r \dot{\psi} \Delta t = \Delta V + \Delta U \quad (3.42)$$

Substitution der Gleichungen (3.40) und (3.41) in Gleichung (3.42) sowie anschließende Integration der Gleichung über einen Schwingungszyklus mit konstanter Amplitude und Schwingungsdauer T ergibt:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} F_d \dot{x} dt = \int_{t_0}^{t_0+T} (F_y \cos(\psi) \dot{y} + M_z \dot{\psi}) dt \quad (3.43)$$

Unter der Annahme kleiner Gierwinkel ψ folgt aus Gleichung (3.43)

$$W = \int_{t_0}^{t_0+T} (F_y \dot{y} + M_z \dot{\psi}) dt \quad (3.44)$$

In weiterer Folge zeigte Ran [54] die Arbeit der Seitenkraft und des Rückstellmoments unter der Annahme eine sinusförmigen Bewegung analog zu Gleichungen (3.36) und (3.37). Eine Betrachtung der Arbeit W (*shimmy energy*) für reine Gier- bzw. Querbewegung ist in Abbildung 3.2 dargestellt und zeigt, dass die

Arbeit der Seitenkraft bei reiner Querbewegung über den betrachteten Frequenzbereich stets negativ ist. Die Arbeit des Rückstellmoments bei reiner Gierbewegung hingegen, zeigt im Bereich niedriger Frequenzen (bzw. großer Wellenlängen) positive Werte. Eine Analoge Vorgehensweise wendete Ran für die Bewegung des

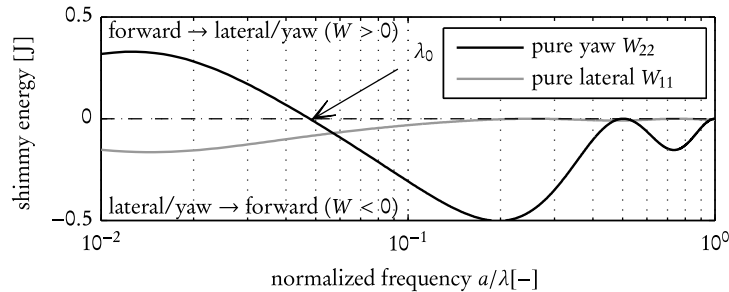


Abbildung 3.2: Arbeit der Seitenkraft bzw. des Rückstellmomentes bei reiner Quer- bzw. Gierbewegung [54]

Schlepprades während der Shimmybewegung an und betrachtete die gesamte verrichtete Arbeit für eine Schwingungsperiode.

Dabei zeigte sich bei einer Kombination aus Gier- und Querbewegung des Schleppradsystems, dass die Arbeit für große Wellenlängen sowohl für die Gier- als auch die Querbewegung positiv ist. Für kleine Wellenlängen hingegen zeigte sich, dass die Arbeit in Summe negativ ausfällt obwohl der Anteil der Querbewegung positiv ist. Dieser bemerkenswerte Vorzeichenunterschied zur reinen Querbewegung bei sinusförmiger Bewegung (vgl. Abbildung 3.2) lässt darauf schließen, dass die Querbewegung des Schlepprades erst durch Koppelung mit der Gierbewegung zur Anfachung des Shimmy beitragen kann.

Eine weitere Herangehensweise von Ding [12] erfolgte durch die Betrachtung des Systems als Regelstrecke mit Rückkopplung. Die Stabilität des Systems hängt dabei von der Art der Rückkopplung ab – eine positive Rückkopplung wirkt sich dabei destabilisierend, also anfachend aus.

Der Reifen produziert dabei eine Seitenkraft, die am System mit querelastischer Aufhängung eine Gier- und Querbewegung hervorruft. Bei einer bestimmten Geschwindigkeit entsteht durch diese Bewegungen kombiniert mit dem Einlaufverhalten des Reifens wieder eine Seitenkraft, siehe dazu [4]. Das rückgekoppelte System kann dann stabil oder instabil sein.

3.3 Nichtlineares System

Abgeleitet von den ursprünglich nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines Modells wurde bisher hauptsächlich die Stabilität am linearisierten System untersucht. Die Analyse des linearisierten Systems reicht für eine Beurteilung der Stabilität einer Gleichgewichtslage zwar aus, aber für das quantitative und auch qualitative Verhalten abseits dieser Lage ist das lineare System nicht geeignet.

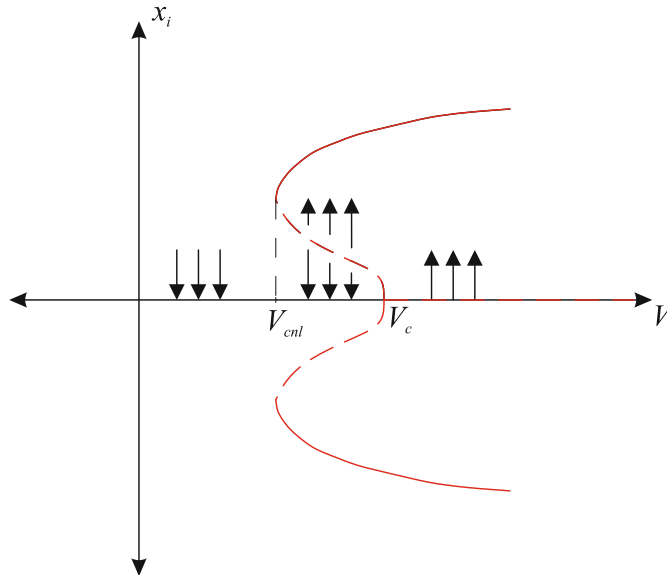


Abbildung 3.3: Beispiel eines Bifurkationsdiagrammes mit multiplen Attraktoren-Auslenkung x_i über Bifurkationsparameter V

parameter, die größer als V_c sind, ist diese Gleichgewichtslage instabil, bei kleineren Parametern ergibt eine lineare Stabilitätsanalyse eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslage. Dass aber das System erst bei noch kleineren Parametern als V_{cnl} eine globale, stabile Gleichgewichtslage besitzt und das Verhalten für $V_{cnl} < V < V_c$ entscheidend von der Anfangsstörung abhängt, ist mit der linearen Stabilitätsanalyse nicht zu erfassen.

Ein ähnliches Phänomen konnte in [54] bei der Untersuchung nichtlinearer Schleppradmodelle beobachtet werden.

Dabei wurde die Komplexität des Reifenmodells basierend auf dem *Magic Formula* Modell schrittweise erhöht indem zusätzliche Einflüsse wie Bohrschlupf oder Dynamik der Lauffläche oder des Gürtels mit einbezogen wurden.

Am Schleppradmodell mit einem Gierfreiheitsgrad und einem transienten Reifenmodell basierend auf der *Magic Formula* unter Einbindung von Bohrschlupf konnte Ran [54] einen Wertebereich für den mechanischen Nachlauf (=Bifurkationsparameter) zeigen, innerhalb dessen ebenfalls ein bistabiles Szenario vorhanden ist.

Die Ermittlung von Grenzyklen, wie es in [54] erfolgt, ist allerdings nicht auf beliebige nichtlineare Systeme anwendbar. Für die Untersuchung des Systems mit MatCont [18] muss es möglich sein, die Bewegungsgleichungen als gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung anzuschreiben. Eine Untersuchung von beispielsweise differential-algebraischen Systemen ist mit diesem Berechnungstool nicht möglich.

In [53] wurden zwei alternative Methoden zur Untersuchung von komplexeren nichtlinearen Systemen, speziell am Beispiel von Schienenfahrzeugmodellen er-

klärt. Bei der so genannten *brute-force* Methode wird ein stabiler Grenzyklus bei hinreichend großen Parameterwerten ermittelt und davon ausgehend der Bifurkationsparameter während einer Simulation so lange reduziert, bis der Grenzyklus verschwindet, also keine instabile periodische Lösung mehr vorhanden ist. Bei der Analyse der Bewegung ist sicherzustellen, dass sich das System im eingeschwungenen Zustand befindet, wodurch diese Methode viel Zeit erfordert, um die Simulation durchzuführen. Auch die Möglichkeiten, den Ablauf dieser Berechnungen zu automatisieren, sind sehr begrenzt, so dass diese Methode ein hohes Maß an Arbeitszeit in Anspruch nimmt. Weiters können koexistente Lösungen, in Bereichen multipler Attraktoren, mit dieser Methode nur abgeschätzt, nicht aber genau berechnet werden.

Eine andere Methode ist die sogenannte *Path-Following* Methode, bei der eine Residuum-Funktion fortgesetzt wird. Dafür muss allerdings zuerst eine periodische Lösung

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(t + T) \quad (3.45)$$

für das System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}(t), t) \quad (3.46)$$

in der Form

$$\underline{x}(t = t_0) = \underline{x}_0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{x}(\underline{x}_0, t) \quad (3.47)$$

vorliegen. Durch Nullsetzen einer Residuum-Funktion

$$\underline{r}(\underline{x}_0, T) = \underline{x}(\underline{x}_0, T) - \underline{x}_0 \Rightarrow \underline{r}(\underline{x}_0, T) = \underline{0} \quad (3.48)$$

können \underline{x}_0 und T ermittelt werden, wodurch ein periodischer Attraktor eindeutig beschrieben werden kann. Abgesehen von der Schwierigkeit eine solche Lösung als Anfangswert für diese Methode bereitzustellen, können damit nur periodische Lösungen abgebildet werden. Als Beispiel für quasi-periodische Lösungen sind hier Bewegungen von Drehgestellen genannt, die durch gegenseitige Interaktion über den Wagenkasten beeinflusst werden. Außerdem ist eine Abbildung von instabilen Grenzyklen und chaotischen Bewegungen ebenfalls nicht möglich.

Ein kurzer Einblick in die Behandlung nichtlinearer Differentialgleichungssysteme, wie sie bei der Untersuchung von Schlepprädern und in weiterer Folge Fahrradmodellen auftreten, ist in Anhang B.2 gegeben. Das umfangreiche Buch von Kuznetsov [30] bietet einen guten Einblick in die Bifurkationstheorie. Basierend darauf wurde das Berechnungstool MatCont für Matlab entwickelt, womit es möglich ist, mit einer ODE-Darstellung der Bewegungsgleichungen eines nichtlinearen Systems eine Bifurkationsanalyse durchzuführen.

Bei der Bifurkationsanalyse nichtlinearer Systeme beginnt man mit der Fortsetzung einer Gleichgewichtslage, wofür zuerst ein geeigneter Startpunkt gefunden werden muss.

Tritt auf der Gleichgewichtskurve ein Verzweigungspunkt (im Falle von Wobble/Shimmy handelt es sich hierbei um eine Andronov-Hopf-Verzweigung) auf, so tritt an diesem Punkt mindestens ein Eigenwert mit verschwindendem Realteil auf. Im Fall des Wobblemodes/ der Shimmybewegung tritt also bei diesem Verzweigungspunkt ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar mit verschwindendem Realteil auf.

Bei der Fortsetzung von Grenzyklen unterstreicht True [76] die Wichtigkeit, diese ebenfalls auf Bifurkationspunkte zu untersuchen. Als Beispiel sei die Fortsetzung eines superkritischen Grenzyklus' von dessen möglichem zweiten Bifurkationspunkt sich ein instabiler Zweig fortsetzen könnte, der sogar das Stabilitätsverhalten des Systems in einem Parameterbereich vor dem ersten Bifurkationspunkt beeinflussen könnte.

Bei der Interpretation von Bifurkationsdiagrammen sollte allerdings bedacht werden, dass man meist mehrdimensionale Probleme vorliegen hat und dabei auch das Verhalten aller Bewegungen des Systems untersucht werden sollte [76].

Außerdem beschränkt sich ein Bifurkationsdiagramm nicht nur auf die Untersuchung des Systemverhaltens in Abhängigkeit eines einzelnen Parameters. Als Beispiel sei hier die 2-Parameter-Bifurkation genannt. Für weiterführende Informationen zu Bifurkationen der Kodimension 2 in kontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen wird auf [30] verwiesen.

4

Wobblemode

4.1 Entwicklung des Fahrradmodells

Obwohl bereits zuvor Veröffentlichungen zum Stabilitätsverhalten des Fahrrades bestanden haben, gilt das Fahrradmodell von Carvallo–Whipple als DAS Vorreitermodell für nachfolgende Forschungen bezüglich der Fahrstabilität eines Fahrrades. 1899 veröffentlichten Carvallo (siehe Literatur in [35]) und Whipple [77] fast zeitgleich, ohne voneinander zu wissen, einen Artikel zur Fahrstabilität des Fahrrades, und zeigten, dass sich dieses unter gewissen Umständen selbst stabilisieren kann. In dem Artikel von Whipple [77] werden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines Fahrrades hergeleitet. Das Modell selbst besteht aus zwei Hauptbaugruppen: einerseits dem Lenker, der Lenkstange, der Gabel und dem Vorderrad und andererseits der hinteren Baugruppe, welche die Fahrer Masse, den Rahmen und das Hinterrad einschließt. Die Winkelgeschwindigkeit der beiden Räder ergibt sich durch die Annahme reinen Rollens aus der Vorwärtsgeschwindigkeit. In Querrichtung wird der Reifenkontakt nichtholonom modelliert und somit ist keine Quergeschwindigkeit des Kontaktpunktes erlaubt.

Mangels computerunterstützter Lösungsmethoden für nichtlineare Gleichungssysteme begnügte sich Whipple mit der Untersuchung der Stabilität des linearisierten Systems mit Hilfe des Routh–Hurwitz Kriteriums während aufrechter Geradeausfahrt mit konstanter Geschwindigkeit.

1910 veröffentlichten Klein und Sommerfeld [24] in ihrem Buch zur Theorie des Kreisels unter technischen Beispielen einen Paragraphen, der sich der Stabilität des Fahrrades widmete. Dabei wurden die Auswirkungen der gyroskopischen Effekte auf das Stabilitätsverhalten des Fahrrades gezeigt, trotz dem Wissen, dass die Massen der Räder vergleichsweise gering gegenüber der Masse des gesamten Fahrrades ausfallen. In diesem Zusammenhang bezieht sich der Begriff "Stabilitätsverhalten" aufgrund der angeführten Modellbildung auf die Stabilität des Weave- und Capsizemodes. Dabei werden anhand von Parametern eines damals zeitgemäßen Fahrrades Geschwindigkeiten mittels Routh–Hurwitz–Kriteriums ermittelt, die die Stabilitätsgrenzen des aufrecht fahrenden Fahrrades beschreiben.

Bezüglich der gyroskopischen Effekte fassten sie zusammen, dass den Kreiselmomenten lediglich die "Rolle der Auslösung" zur Selbststabilisierung zukommt, da durch die Einlenkbewegung des Rades die Zentrifugalkraft erhöht wird und das

Fahrrad in weiterer Folge wieder aufrichtet.

Ein Punkt in dieser Arbeit, der hinsichtlich der Modellbildung nicht unerwähnt bleiben sollte, ist dass die Modellbildung des Fahrerkörpers als fest mit dem Rahmen verbundene Masse kritisiert wurde. Dies sei in der Realität nicht abzubilden, da dieser (un)bewusst stabilisierend auf das Verhalten des Systems eingreifen könne. Bis zur Umsetzung dieses durchaus berechtigten Vorschlags dauerte es allerdings noch bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts, als Wilson–Jones [79] den Einfluss des Fahrers auf das Motorrad wieder aufgriff.

Das Interesse am Wobblemode besteht seit den 1920-er Jahren, als bei einem Motorrad bei höheren Geschwindigkeiten oszillatorische Instabilitäten festgestellt wurden, die Pearsall [51] damals als *”speedman’s wobble”* bezeichnete.

In den darauffolgenden Jahren blieb die Zahl der Artikel zu diesem Thema allerdings sehr gering. Erst als die Motorräder größere Fahrgeschwindigkeiten leisten konnten und somit der Wobblemode bei Motorrädern an Interesse gewann, mehrten sich auch wieder die wissenschaftlichen Artikel zum Thema Zweirad (vgl. [67]).

Eine Modellerweiterung, die starken Einfluss von den Erkenntnissen aus der Shimmyuntersuchung erfuhr, ist der Einsatz von Reifenmodellen, die Schlupf in Längs- bzw. Querrichtung im Reifen–Fahrbahnkontaktpunkt zulassen. Damit einhergehende Kräfte und Momente müssen nun unmittelbar oder verzögert wirkend in die Bewegungsgleichungen miteinbezogen werden.

In dem 1951 veröffentlichten Artikel von Wilson–Jones [79] zur Stabilität des Motorrads wurde beispielsweise ein Motorradmodell eingeführt, dessen Reifen als krafterzeugende Elemente angesehen wurden. Er erklärte das Eigenlenkverhalten eines Zweirades zufolge dreier Kräfte, nämlich der Gewichtskraft der vorderen Baugruppe, die aufgrund ihres Angriffspunktes vor der Lenkachse bei der Neigung des gesamten Fahrzeugs zu einem Einlenken in genau diese Richtung führt (*”steer into the fall”*), andererseits wird der Seitenkraft im Kontaktpunkt mit der Fahrbahn zufolge eines gestürzten Rades ein großer Beitrag zugeschrieben und drittens seien es die gyroskopischen Effekte, die zum Eigenlenkverhalten des Fahrrades beitragen.

Döhring ([11],[10]) untersuchte die auftretenden Lenkungsschwingungen an einem Motorrad, allerdings stellt sich im Nachhinein die Frage, ob es sich dabei tatsächlich um Wobbleschwingungen handelt oder aufgrund der verhältnismäßig geringen Frequenz eher um einen instabilen Weavemode.

Zur grundsätzlichen Untersuchung der Eigenstabilität des Fahrrades ohne Lenkungsflattern genügt das Whipple–Modell. Mit Hilfe dieses Modells wurde der Weavemode präziser charakterisiert, sowie der Einfluss der gyroskopischen Effekte, des Nachlaufs, der Massenverteilung etc. darauf extrahiert. In diesem Zusammenhang sei speziell auf Werke von Schwab, Meijaard, Ruina und Papadopoulos verwiesen ([63],[62],[35],[60]).

Die Kenntnisse über die Kräfte und Momente im Kontaktgebiet eines Reifens mit der Fahrbahn wurden in detaillierter Form 1971 in Sharp [65] am Modell eines Motorrads, bestehend aus zwei Körpern (*front- und rearframe*), die sich durch die Lenkbewegung relativ zueinander bewegen können, umgesetzt. Drei

Methoden, den Reifen–Fahrbahnkontakt zu modellieren, wurden hinsichtlich der Abbildung des Wobblemode miteinander verglichen. Das erste Modell ist mit nicht–holonomen Bindungen im Kontaktpunkt beschrieben. Dem gegenübergestellt wurde ein Modell, das Querschlepp in den Kontaktpunkten zulässt, allerdings mit sofortiger Wirkung Reifenkräfte bzw. –momente aufbaut. Das letzte und umfangreichste Modell beinhaltet ein Reifenmodell, bei dem die Kräfte und Momente zeitverzögert auf den Reifen wirken. Sharp kam zu dem Schluss, dass die Berücksichtigung des Querschlepps des Reifens, sowie des transienten Verhaltens der Reifenkräfte, für die Abbildung der dynamischen Eigenschaften eines Motorrades unerlässlich sind. Vor allem für die Darstellung des Wobblemodes sind diese Aspekte notwendig, denn mit nicht–holonomen Bindungen im Kontaktpunkt kann dieser Mode gar nicht dargestellt werden. Außerdem werden in [65] auch erstmals die drei wichtigsten und somit charakteristischen Moden eines Motorrades (selbiges gilt auch für Fahrräder) vorgestellt: der reelle Eigenmode, als Capsize bezeichnet, sowie die beiden oszillatorischen Moden Weave und Wobble. Alle anderen Moden weisen über die betrachteten Geschwindigkeitsbereiche negative Realteilverläufe auf.

Ausgehend von diesem Modell folgten einige Verbesserungen der Modellbildung. So erweiterte Eaton [16] beispielsweise das Reifenmodell um ein rückstellendes und ein aufrichtendes Moment, das aus dem seitlichen Versatz der Vertikalkraft im Kontaktgebiet bei einem gestürzten Reifen resultiert. Ein Jahr später erweiterte Sharp [66] sein Modell aus [65] um einen Drehfreiheitsgrad zwischen Hinterrad und Rahmen, sodass das Hinterrad relativ zum Rahmen stürzen kann. Sharp erhoffte sich dadurch, die bisher vernachlässigte Rahmenflexibilität abbilden zu können. Die Ergebnisse zeigten allerdings keine Veränderungen des Capsizemodes und nur geringe Veränderungen beim Wobblemode.

Trotz Weiterentwicklungen der mechanischen Modelle war es zu diesem Zeitpunkt noch nicht möglich, den Wobblemode so abzubilden, dass er mit Messergebnissen aus der Praxis übereinstimmte. Segel und Wilson waren der Meinung, dass eine detailliertere Beschreibung der Reifenkräfte und –momente notwendig sei, um den Wobblemode entsprechend abbilden zu können. Sie führten Messungen durch um den transienten Aufbau der Seitenkraft zufolge Sturz sowie des aufrichtenden Moments zu erfassen.

Sharp und Jones ([25] in [67]) entwickelten ein Reifenmodell für Motorradreifen, das auf der *”taut string tire model”*–Theorie basierte, wie es bis dahin für Flugzeug– und Autoreifen bekannt war. Nachdem die benötigten Parameter ermittelt worden waren, führten sie Stabilitätsanalysen durch, womit sie zu dem Schluss kamen, dass das Einlaufverhalten der Reifenkräfte infolge eines Sturzwinkels keine Auswirkungen auf die Stabilität des Wobblemodes am Motorrad hat.

1980 veröffentlichten Koenen und Pacejka ([35] in [67]) ein mathematisches Modell eines Motorrades, das dessen Verhalten nach kleinen äußeren Störungen in der stationären Kurvenfahrt beschreibt. Das hier verwendete Modell ist als weiterer Meilenstein in der Entwicklungsgeschichte des Zweiradmodells zu sehen, denn abgesehen von radial flexiblen Reifen wurde auch die Form des Reifenquerschnitts in die Berechnungen miteinbezogen, wodurch bei gestürztem Rad die Verlagerung des Kontaktpunktes mit berücksichtigt wurde.

Im gleichen Jahr veröffentlichten Sharp und Alstead [70] einen Artikel über die Einbindung von Rahmenflexibilitäten in das mechanische Modell des Motorrades. Ziel dabei war, die Dämpfung des Wobblemodes, welche bei moderaten Geschwindigkeiten in der Theorie nicht mit praktischen Beobachtungen übereinstimmte, besser abbilden zu können.

Drei verschiedene Modelle zur Abbildung dieser Flexibilitäten wurden dabei vorgestellt: Das erste Modell (A) lässt eine Querbewegung des Vorderrades entlang dessen Rotationsachse zu und wird dabei durch ein lineares Feder-Dämpferelement beschränkt. Das zweite Modell (B) lässt der Gabel eine Rotation gegenüber dem Lenker um eine Achse parallel zur Lenkachse zu. Diese Rotationsachse geht durch den Massenmittelpunkt der vorderen Baugruppe. Die Bewegung ist ebenso mit einem linearen Feder-Dämpferelement beaufschlagt.

Das dritte Modell (C) besitzt einen Rotationsfreiheitsgrad im Sinne einer zusammengefassten Rahmenflexibilität, dessen Achse durch den Lenkkopf geht und normal auf die Lenkachse steht.

Für alle Modelle gilt die Voraussetzung, dass der Fahrer als Teil des Rahmens modelliert wird und keinen Lenkeinfluss auf die vordere Baugruppe ausübt. Das verwendete Reifenmodell zur Beschreibung der Reifenkräfte basiert auf der *"taut string theory"* von Pacejka.

Die Seitenkraft und das Rückstellmoment am Reifen zufolge des Schräglaufwinkels wurden als zeitverzögert wirkend in die Bewegungsgleichungen eingebunden, hingegen für die Anteile des Reifenmoments in vertikaler Richtung durch Latschbreite und gyroskopische Effekte setzte man eine unverzögerte Wirkung voraus. Gleiches gilt für die Reifenkräfte durch einen Sturzwinkel, nachdem bei vorangegangenen Analysen keine Sensibilität der Fahrstabilität bezüglich der Einlauflänge von Sturzwinkeln nachgewiesen werden konnte. Aerodynamische Effekte wurden nur insofern berücksichtigt, als dass sie bei zunehmender Geschwindigkeit Einfluss auf die Lastverteilung auf Vorder- und Hinterräder nahmen. Schlussendlich konnte nur das letzte Modell C die erwarteten Änderungen der Wobblemodedämpfung aufweisen. Die Berechnungen zeigten allerdings auch, dass man bei einer Anpassung (Reduktion) des Steifigkeitsparameters der Rahmenflexibilität im Modell C hinsichtlich des Eigenwerteverlaufs des Wobblemodes eine damit einhergehende Destabilisierung des Weavemodes in Kauf nehmen muss. Ein Jahr später veröffentlichte Spierings [73] ebenfalls einen Artikel über den Einfluss von Flexibilitäten in der Modellbildung des Motorrades. Seine Herangehensweise war, unabhängig von den Überlegungen Sharps [70], die lateralen Flexibilitäten des Motorrades in der vorderen Baugruppe zusammenzufassen, was auf Beobachtungen in [56] basierte. Er teilte diese Baugruppe deshalb in einen oberen Teil, bestehend aus dem Lenker und einem Teil der Gabel (*"frontframe"*) und in eine untere Baugruppe, also dem Vorderrad und dem unteren Teil der Gabel (*"subframe"*), welche relativ zum *"frontframe"* um eine Achse normal auf die Lenkachse, rotieren kann. Die Rotationsachse liegt in der Längssymmetrieebene des Lenkers und wurde mit einem linearen Feder-Dämpfer-Element beaufschlagt, dessen Dämpfungskonstante ca. 10% der kritischen Dämpfung entspricht, wenn der untere Teil eine freie Schwingung ausführt.

Diese Art der Modellbildung ermöglichte Spierings die Unterscheidung zweier Ein-

flüsse auf den Wobblemode, nämlich einerseits den Einfluss der lateralen Auslenkung der unteren Baugruppe und andererseits den Einfluss der durch die Rotation des *"subframe"* wirkenden gyroskopischen Effekte.

Auch wenn Spierings in seiner Modellbildung ein vergleichsweise einfaches Reifenmodell verwendete, so sind die Aussagen bezüglich der Dämpfungseigenschaften von Weave und Wobble von großer Bedeutung. Eine pauschale Aussage über die erforderliche Steifigkeit des Rahmens konnte dennoch nicht gefunden werden, denn schon alleine der Wobblemode zeigte gegenteiliges Verhalten durch Änderungen der Steifigkeitswerte: bei einer höheren Steifigkeit zeigte der Wobblemode bei geringen Geschwindigkeiten eine starke Dämpfung, und bei hohen Geschwindigkeiten gegenteiliges Verhalten. Auch in Verbindung mit der Dämpfung des Weavemodes über den Geschwindigkeitsbereich von 0 – 240km/h konnten keine eindeutigen Aussagen gefunden werden.

Ausschlaggebend erwies sich nicht nur die Steifigkeit selbst, sondern auch die Lage dieses Drehfreiheitsgrades zwischen *"frontframe"* und *"subframe"*.

Wenig später stellte Koenen [28] ein komplexeres Modell vor, das sowohl die Flexibilität der vorderen Baugruppe mit einschließt, als auch ein komplexes Reifenmodell mit berücksichtigt, das einen Schlupf des Reifenkontaktpunktes in Längs- und Querrichtung zulässt. Die Reifenkräfte und -momente wurden nach dem *"taut string model"* aus [50] errechnet. Zur Beschreibung des Reifenrückstellmoments wurden nicht nur, wie bis dahin üblich Sturz- und Schräglaufwinkel der Reifens eingebunden, sondern auch Bohrschlupf (*"turnslip"*) und gyroskopische Effekte, die durch den Seitenversatz der Karkasse, der Felge und des Gürtels des rotierenden Reifens entstehen.

Für das passive Fahrermodell wurde das Modell des Fahrerkörpers in zwei Teile unterteilt (Ober- und Unterkörper), wobei letzterer als Masse dem Rahmen zugeordnet wurde und der Oberkörper relativ dazu im Bereich der Lendenwirbelsäule eine Neigung durchführen kann. Die Rotationsachse dieses Gelenks liegt in Längssymmetrieebene des Rahmens auf nominaler Höhe des Lenkers und ist mit einem Feder-Dämpfersystem versehen.

Koenen untersuchte mit diesem Modell die aufrechte Geradeausfahrt, aber auch die Kurvenfahrt bei großen Sturzwinkelwerten und hohen Querbeschleunigungen. Dieses in [28] verwendete Modell ist das bisher am Häufigsten verwendete mechanische Modell eines Motorrades. In Anlehnung an das Modell aus [28] verwendete Pacejka [50] ein Motorradmodell mit passivem Fahrermodell zur Untersuchung von dessen Stabilität während der aufrechten Fahrt. Zur Beschreibung des Reifenverhaltens wurde ein lineares, transientes Reifenmodell herangezogen, welches zuvor von der *"Magic-Formula"* für Motorräder abgeleitet worden war.

Sharp hat in [32] einen Überblick über die Geschichte der Modellbildung, sowie Reifenmodelle, Fahrermodelle und charakteristische Moden des Modells eines Motorrades bzw. Fahrrades gegeben.

Eine umfangreiche Arbeit zur Modellbildung und Regelung des Fahrrades stammt von Sharp, [69]. Dabei wird eine Erweiterung des Carvallo-Whipple Modells bzw. des Benchmark-Modells [35] vorgestellt, das ein transientes Reifenmodell berücksichtigt. Die Seitenkraft wird durch den Schräglaufwinkel, Bohrschlupf und den Sturzwinkel gebildet, wobei die ersten beiden Größen transient eingehen und

die Seitenkraft zufolge eines Sturzwinkels sofort entsteht. Das Rückstellmoment entsteht, ebenfalls zeitverzögert, allerdings lediglich durch den Schräglaufwinkel. Auch die Modellerweiterung durch eine im Lenkkopf zusammengefasste Flexibilität der Bauteile sowie ein Rollfreiheitsgrad des Fahrerkörpers werden in die Modellbildung eingebunden und die charakteristischen Eigenmoden analysiert.

4.2 Modellbildung

Im Folgenden werden notwendige Erweiterungen des linearen Carvallo–Whipplemodells hinsichtlich einer möglichst realitätsnahen Abbildung des Wobblemodes angeführt und mit Beispielen aus der Literatur untermauert. Diese Erweiterungen werden sowohl am linearisierten Modell, als auch am vollständig nichtlinearen Modell untersucht.

In erster Linie wird auf die Auswirkungen eines transienten Reifenmodells, einer lateralen Auslenkung des Reifen–Fahrbahn–Kontaktpunktes sowie der gyroskopischen Effekte des Vorderrades eingegangen. Anschließend wird die Abbildung eines passiven, beweglichen Fahrermodells diskutiert.

4.2.1 Lineares Modell

Da die Untersuchung nichtlinearer Modelle zu komplexeren mathematischen Problemstellungen führt, werden zuvor Aussagen aus der Stabilitätsanalyse linearer bzw. linearisierter Modelle getroffen.

Dafür liegen die linearisierten Bewegungsgleichungen eines solchen Fahrradmodells bereits aus vorangegangenen Diplomarbeiten ([1],[45],[44] und [25]) vor. Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen sowie die Ermittlung von Parametern, die das Stabilitätsverhalten maßgebend beeinflussen, sei auf die oben genannten Arbeiten verwiesen.

4.2.1.1 Reifenmodell

Für die lineare Stabilitätsanalyse bezüglich der Geradeausfahrt genügen ebenso lineare Funktionen des Reifenmodells in Abhängigkeit von den transienten Größen des Schräglaufwinkels und des Sturzwinkels (bzw. Spins als Kombination aus Bohrschlupf und Sturzwinkel).

Grundsätzlich beruhen die Gleichungen zur Beschreibung der Reifenkräfte und Momente entweder auf empirischen Ergebnissen oder werden anhand von physikalischen Modellen unterschiedlicher Komplexität abgeleitet. Die Parameter für empirische Modelle müssen dabei nicht unbedingt physikalische Bedeutung haben, während die Parameter physikalischer Modelle durchaus den Modellgrößen entsprechen und meistens auch messtechnisch erfasst werden können.

Zur Einbindung der Reifenkräfte und Momente in die linearen Bewegungsgleichungen werden die Kräfte in den fiktiven Kontaktpunkt reduziert, welcher auf der Schnittgeraden der Reifensymmetrieebene und Fahrbahnebene liegt. Der eigentliche Kontaktpunkt hingegen wandert bei Sturz- oder Rollwinkeln entlang der

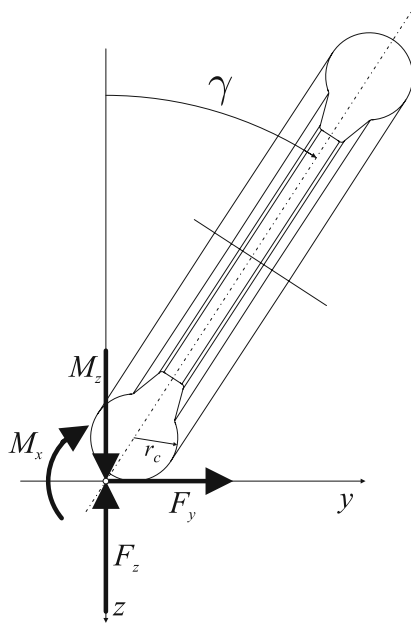


Abbildung 4.1: Skizze der im fiktiven Kontaktpunkt wirkenden Reifenkräfte

Karkasse bzw. bei Kurvenfahrten zum Kurvenmittelpunkt. Abbildung 4.1 bildet die in den fiktiven Reifenkontaktpunkt reduzierten Kräfte für die Querdynamik ab.

Da durch die Linearisierung der analytischen nichtlinearen Bewegungsgleichungen um die Gleichgewichtslage, die Längs- und Querdynamik entkoppelt wird, kann im Fall einer unbeschleunigten Geradeausfahrt und Vernachlässigung von Fahrwiderständen, die Längsgeschwindigkeit u des Fahrrades als Modellparameter behandelt werden.

Wie komplex das Reifenmodell eingebunden wird, hängt in erster Linie davon ab, welche Bewegung vordergründig damit untersucht werden soll. Beispielsweise kann der Einfluss der Reifenmasse bei niederfrequenten Bewegungen vernachlässigt werden [54]. Die wichtigsten Bestandteile des Reifenmodells, auf die bei der Analyse von Shimmybewegungen nicht verzichtet werden sollte, sind die Einlauf-länge, Schräglauf- und Sturzsteifigkeiten sowie der pneumatische Nachlauf.

Zu Beginn wird das *”single-contact-point transient tire model”* ([50], Kap. 7) vorgestellt, welches das Kontaktgebiet zwischen Reifen und Fahrbahn auf einen elastisch an die Felge gebundenen Punkt in Fahrbahnebene reduziert.

Für die folgenden Betrachtungen wird der Unterschied zwischen der Längsgeschwindigkeit V_x des Reifenmittelpunktes und jener des Kontaktpunktes am undeformierten Reifen V_{cx} vernachlässigt.

Mit dem linear elastischen Verhalten der Seitenkraft $F_y = C_{Fy}v_\alpha$ in Abhängigkeit von lateralen Deformationen v_α bzw. dem Zusammenhang der Seitenkraft mit dem Schräglaufwinkel α' am Reifen $F_y = C_{F\alpha}\alpha' = -C_{F\alpha}\frac{V'_{sy}}{|V_x|}$ und dem Verhältnis der Schräglaufsteifigkeit zur Quersteifigkeit des Reifens, welches in [50] definiert

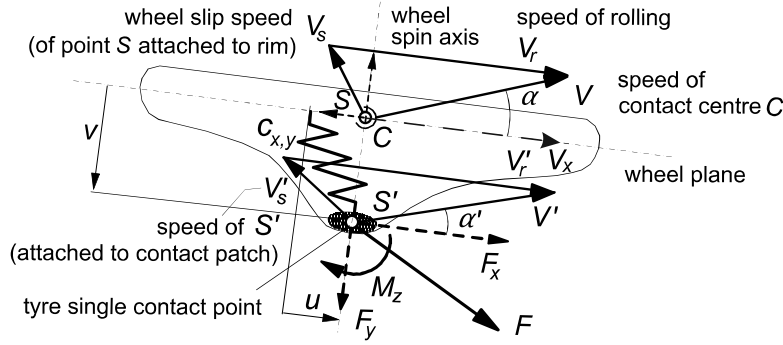


Abbildung 4.2: Auslenkung des Kontaktpunktes am *single-contact-point tire model*, adaptiert Fig.7.1 aus [50]

wird durch

$$\sigma_\alpha = \frac{C_{F\alpha}}{C_{Fy}} \quad (4.1)$$

ergibt sich durch Gleichsetzen dieser Beziehungen mit der lateralen Deformation zufolge eines Schräglaufwinkels v_α Glg. (4.2)

$$-V'_{sy} = \underbrace{\frac{C_{Fy}}{C_{F\alpha}}}_{\alpha'} v_\alpha |V_x| \quad (4.2)$$

Mit der Beschreibung der zeitlichen Ableitung der lateralen Deformation des Reifenkontaktpunktes

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = -(V_{sy} - V'_{sy}) \quad (4.3)$$

folgt die Differentialgleichung

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = -(V_{sy} + \frac{C_{Fy}}{C_{F\alpha}} v_\alpha |V_x|) \quad (4.4)$$

welche sich schlussendlich für den transienten Schräglaufwinkel

$$\alpha' = \frac{v_\alpha}{\sigma_\alpha} \quad (4.5)$$

zu

$$\sigma_\alpha \frac{d\alpha'}{dt} + |V_x| \alpha' = |V_x| \alpha \quad (4.6)$$

ergibt. σ_α ist die Einlaufänge für den Schräglaufwinkel.

Betrachtet man nun die laterale Deformation des Reifens infolge eines Sturzwinkels, so wird bei diesem Reifenmodell eine sofortige Krümmung der Kontaktlinie und eine damit einhergehende Seitenkraft $C_{F\gamma}\gamma$ im Kontaktgebiet angenommen. Infolgedessen wird sich ein Schräglaufwinkel α'_γ im Kontaktgebiet einstellen, der die laterale Deformation zufolge des Sturzwinkels v_γ bewirkt.

Für die Seitenkraft zufolge eines Sturzwinkelsprungs ergibt sich dann

$$F_y = C_{Fy}v_\gamma = C_{F\gamma}\gamma + C_{F\alpha}\alpha'_\gamma \quad (4.7)$$

Damit wird ein Verlauf der Seitenkraft in Folge eines Sturzwinkelsprungs beschrieben, wie es Higuchi in [21] anhand von Versuchen am Reifenprüfstand demonstrierte.

Ausgehend von Gleichung (4.3) folgt nun, da für die Betrachtung der Reifenkraft zufolge eines Sturzwinkels $V_{sy} = 0$ gehalten wird:

$$\frac{dv_\gamma}{dt} = V'_{sy} = -|V_x|\alpha'_\gamma \quad (4.8)$$

α'_γ ergibt sich durch Umformen von Gleichung (4.7) zu

$$\alpha'_\gamma = \frac{C_{Fy}v_\gamma}{C_{F\alpha}} - \frac{C_{F\gamma}}{C_{F\alpha}}\gamma \quad (4.9)$$

wodurch schließlich Gleichung (4.10) folgt.

$$\frac{dv_\gamma}{dt} + \frac{1}{\sigma_\alpha}|V_x|v_\gamma = \frac{C_{F\gamma}}{C_{F\alpha}}|V_x|\gamma \quad (4.10)$$

Eine vereinfachte Schreibweise der Seitenkraft zufolge eines Sturzwinkelsprungs erfolgt mit dem Sturzwinkel γ' . Dieser ergibt sich aus dem Sturzwinkel γ des Rades und dem dadurch induzierten Schräglaufwinkel

$$C_{Fy}v_\gamma = C_{F\gamma}\gamma' = C_{F\gamma}\gamma + C_{F\alpha}\alpha'_\gamma \quad (4.11)$$

zu $\gamma' = \frac{C_{Fy}v_\gamma}{C_{F\gamma}}$ und mit Gleichung (4.1) zu

$$\gamma' = \frac{C_{F\alpha}}{C_{F\gamma}} \frac{1}{\sigma_\alpha} v_\gamma \quad (4.12)$$

In Summe ergeben sich dann folgende lineare Gleichungen für die Seitenkraft und das Rückstellmoment:

$$F_y = \underbrace{C_{F\alpha}\alpha'}_{F_{y\alpha}} + \underbrace{C_{F\gamma}\gamma'}_{F_{y\gamma}} \quad (4.13)$$

$$M_z = -t_\alpha(F_{y\alpha} + F_{y\gamma}) + \underbrace{(C_{M\gamma} + t_\alpha C_{F\gamma})\gamma}_{M_{zr\gamma}} \quad (4.14)$$

Der zweite Summand in Glg. (4.13) setzt sich mit Gleichung (4.11) aus der Seitenkraft durch den Sturzwinkel, welche unmittelbar entsteht und dem Teil, welcher durch den vom Sturzwinkel induzierten Schräglaufwinkel α'_γ hervorgerufen wird, zusammen.

Das Rückstellmoment M_z enthält das sogenannte "residual torque", welches hauptsächlich durch die Einbindung der Laufflächenbreite und den mit einem Sturzwinkel einhergehenden Längskräften im Reifenlatsch entsteht. Mit Glg. (4.9) ergibt sich schließlich für das Rückstellmoment Glg. (4.15)

$$M_z = -C_{M\alpha}(\alpha' + \alpha'_\gamma) + C_{M\gamma}\gamma \quad (4.15)$$

In den Bewegungsgleichungen des linearen Reifenmodells in [50] (Kap. 11) verwendete Pacejka allerdings eine vereinfachte Form des obigen Modells. Dabei wurde das Rückstellmoment in Abhängigkeit von $C_{M\alpha}$ und $C_{M\gamma}$ angeschrieben

$$F_y = C_{F\alpha}\alpha' + C_{F\gamma}\gamma' \quad (4.16)$$

$$M_z = -C_{M\alpha}\alpha' + C_{M\gamma}\gamma' \quad (4.17)$$

Die transienten Eingangsgrößen für die Bestimmungsgleichungen der Reifenkräfte und Momente werden dann mit der Längsgeschwindigkeit u des Fahrrads durch die Differentialgleichungen (4.18) und (4.19) beschrieben.

$$\frac{1}{u}\sigma_{\alpha i}\dot{\alpha}'_i + \alpha'_i = \alpha_i \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{u}\sigma_{\gamma i}\dot{\gamma}'_i + \gamma'_i = \gamma_i \quad (4.19)$$

Einlauflänge Einen wesentlichen Parameter des Reifenmodells stellt die Einlauflänge dar. Da sie das Einlaufverhalten des Schräglauf- und Sturzwinkels beschreibt, trägt diese Größe zum Phasenverzug der Seitenkraft bei einer Wobble-schwingung bei. Für das lineare Reifenmodell wird sie als konstanter Parameter angesehen, wodurch die Abhängigkeit von der Aufstandskraft aber auch eine Reduktion der Einlauflänge bei zunehmendem Schräglaufwinkel ausgeschlossen werden. In der Dissertation von Ran [54] erfolgte eine Überarbeitung der Einlauflänge als konstanten Parameter durch zusätzliches Abbilden der Dynamik der Kontaktfläche des Reifens. Diesbezüglich schrieb Ran [54]: *”Since the magnitude of the side slip also grows with the yaw vibration of the suspension, the relaxation length will decrease with the growth of the limit cycle amplitude for the model with contact patch dynamics. It can be seen that a decaying relaxation length has a slight impact on reducing the amplitude.”* Bifurktationsdiagramme des nichtlinearen Schleppradmodells in [54] haben anhand eines Vergleichs des einfachen *”Magic Formula”* - Reifenmodells aus [50] mit einer Erweiterung der Dynamik in der Kontaktfläche (*”contact patch dynamics”*) ergeben, dass die Amplitude der Shimmyschwingung bei einer mit zunehmendem Schräglaufwinkel abnehmenden Einlauflänge (wie es bei der Berücksichtigung der Dynamik der Kontaktfläche in [54] der Fall ist), geringer ausfällt, als beim herkömmlichen *”Magic Formula”* - Reifenmodell mit konstanter Einlauflänge.

Bei dem Versuch, plausible Werte für die Einlauflänge für den Fahrradreifen zu finden, stößt man auf Schwierigkeiten.

Für das *”Single-Contact-Point Transient Tire Model”* in Abbildung 4.2 gilt für die Einlauflänge zufolge eines Schräglaufwinkels, siehe (4.1)

$$\sigma_{\alpha} = \frac{C_{F\alpha}}{C_{Fy}} \quad (4.20)$$

In den Bewegungsgleichungen wird das Einlaufverhalten durch eine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben:

$$\frac{\sigma}{u}\dot{\alpha}' + \alpha' = \alpha \quad (4.21)$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung nach einem Schräglaufwinkelsprung auf $\alpha = \alpha_{\text{stat}} = \text{konst}$ wird als Ansatz für die homogene Lösung $\alpha'_h(t) = C_1 e^{\lambda t}$ gewählt und als Ansatz für die partikuläre Lösung gilt $\alpha'_p(t) = C_2$. Durch Ermitteln der Konstanten mit bekannten Anfangsbedingungen $\alpha'(0) = 0$ ergibt sich

$$\alpha'(t) = -\alpha_{\text{stat}} e^{-\frac{u}{\sigma} t} + \alpha_{\text{stat}} \quad (4.22)$$

Daraus folgt für den Reifen mit der konstanten Längsgeschwindigkeit u , dass zum Zeitpunkt, an dem der Weg σ zurückgelegt worden ist gilt:

$$\alpha'\left(\frac{\sigma}{u}\right) = \alpha_{\text{stat}}(1 - e^{-1}) = 0.6321\alpha_{\text{stat}} \quad (4.23)$$

σ beschreibt somit jene Länge, die der Reifen mit der Geschwindigkeit u zurücklegt, bis ca. 63% des Schräglaufwinkels α_{stat} und somit auch der Seitenkraft aufgebaut sind. In [15] dokumentierte Dressel anhand von Messungen die Diskrepanz zwischen der errechneten Einlauflänge aus Gleichung (4.20) durch zuvor gemessene Steifigkeiten und jener Länge, die der Reifen zurücklegt, bis 63% des Stationärwertes der Seitenkraft aufgebaut wurden –siehe Glg.(4.23). Die errechneten Werte als Quotient der Steifigkeiten sind dabei ca. 40% geringer als jene, die mit der "63%-Methode" gemessen wurden.

Zur Abschätzung der Einlauflänge bezüglich der Seitenkraft F zufolge eines Schräglaufwinkels α sind in der Literatur unterschiedliche Werte zu finden, die sich allerdings an dem jeweils gewählten Reifenmodell orientieren. Ein Vergleich der Einlauflängen verschiedener Modelle in [50] ergibt einen Bereich zwischen $\sigma_{F\alpha} = 3a$ (für "straight tangent approximation") und $\sigma_{F\alpha} = 4a$ ("single-contact-point model"). In [69] verwendet Sharp für das Reifenmodell des Fahrrades allerdings weit geringere Werte für die Einlauflänge ($\sigma_F = 0.02016$ m bei einer Länge der Aufstandsfläche von $2a = 0.12$ m bzw. $\sigma_R = 0.02746$ m bei $2a = 0.13$ m) und bezieht sich dabei auf die damit einhergehende Konsistenz mit den Werten für Schräglauf- und Sturzwinkelsteifigkeiten sowie Aufstandsflächendimensionen entsprechend der "taut-string theory".

Pacejka [50] verwendet zur Ermittlung der Einlauflänge am Motorradmodell folgende Gleichung

$$\sigma_\alpha = \sigma_\gamma = f_1 F_{z0} + f_2 (F_z - F_{z0}) \quad (4.24)$$

Vernachlässigt man hierbei die Radlastschwankungen $F_z - F_{z0}$ und setzt $f_1 = 0.00015$, wie in [50] vorgeschlagen, so ergibt sich ebenfalls eine Einlauflänge in einer Größenordnung, wie sie auch Sharp am Fahrrad [69] verwendet hat.

Messungen an Touringradreifen, wie sie unter anderem in der Dissertation von Dressel [14] dokumentiert wurden, ergaben für den Touringradreifen für Normalkräfte zwischen 324 N und 731 N bei einem Reifendruck zwischen 3 – 6 bar Einlauflängen im Bereich von $1.8a \rightarrow 4.7a$. Für Rennradreifen ergaben sich bei einem Reifendruck zwischen 5 – 9 bar ähnliche Einlauflängen. Diese verhältnismäßig breite Streuung kann unter anderem auch auf die mit einspielende Flexibilität der Felgen sowie des jeweiligen Versuchsstandes zurückgeführt werden. Dazu schreibt Dressel [14]: "Any measured value would be greatly exaggerated as the wheel and the frame flexed under the building lateral force." Am Reifen des Touringrads, welches in [45] und [44] als Messfahrzeug diente, wurde bei einem Reifenluftdruck

von 4 bar eine Aufstandsflächenlänge von ca. 10.5 cm ermittelt, wobei die statische Aufstandskraft für das Vorderrad des Touringbikes ca. 339 N beträgt. Dieser Wert stimmt mit den in [14] ermittelten Werten für ähnlichen Luftdruck und Aufstandskraft überein. Der gemittelte Wert der gemessenen Einlaufängen für das Touringrad aus [14] bei entsprechender Aufstandskraft und Luftdruck ergibt sich folglich für das Vorderrad zu $\sigma_\alpha \approx 14.6$ cm. Nachdem der Einfluss der Einlaufänge des Hinterrades auf den Wobblemode vernachlässigbar ist, wird die entsprechende Einlaufänge gleich jener am Vorderrad gewählt. Eine Anpassung des linearen Touringradmodells in Matlab aus [25] an diese Parameter führte zu einer Reduktion der Geschwindigkeit ab der der Weavemode stabil wird, der Capsizemode zeigte durch diese Anpassung positive Realteile im betrachteten Geschwindigkeitsbereich. Der Wobblemode wurde durch eine Anpassung der Reifenparameter an die Messwerte aus der Dissertation von Dressel [14] bei geringen Geschwindigkeiten instabil und die zugehörige Frequenz reduzierte sich im betrachteten Geschwindigkeitsbereich. Durch eine Erhöhung der Drehfedersteifigkeit um 20% und der Dämpfung um 30% im Drehgelenk β konnte der Verlauf der Realteile des Wobblemodes wieder an den bisherigen, in [45] validierten Verlauf angepasst werden. Spätere Stabilitätskarten basieren allerdings auf den Reifenparametern aus [25].

In den Diplomarbeiten von Angrosch [1], Ott [45] und Nusime [44] orientierte man sich an der halben Aufstandsflächenlänge, welche konstant mit 0.06m angenommen wurde und somit für die Einlaufänge $\sigma_\alpha = \sigma_\gamma = 0.03$ m gewählt wurde. In einer Anpassung u.a. der Reifenparameter an Werte aus Publikationen von Dressel [15] und Doria [13] erfolgte in der Diplomarbeit von Klinger [25] eine Erhöhung der konstant angenommenen Einlaufänge für das Touringradmodell zu $\sigma_\alpha = \sigma_\gamma = 0.06$ m, was mit der im Zuge dieser Arbeit ermittelten Aufstandsflächenlänge von ca. 10.5cm korreliert. Für das entsprechende Rennradmodell wurde eine konstante Einlaufänge von $\sigma_\alpha = \sigma_\gamma = 0.05$ m angesetzt.

Die in der Literatur angegebenen Einlaufängen beziehen sich auf die Einlaufänge des Reifens bezüglich eines Schräglaufwinkelsprungs. Werte für die Einlaufänge bezüglich eines Sturzwinkelsprungs sind schwer zu finden, allerdings haben Eigenwertberechnungen am linearen Fahrradmodell gezeigt, dass der Wobblemode unsensibel gegenüber einer Änderung der Einlaufänge für den Sturzwinkel ist. Es scheint also legitim, dass im Folgenden der Fokus auf das Einlaufverhalten nach einer Schräglaufwinkeländerung gelegt wird und die Werte für die Einlaufänge des Sturzwinkels übernommen werden. Diesbezüglich schreibt Pacejka in [50]: *“The relaxation length concerned is about equal to the one used for the response to side slip variations.”*

Spin Nachdem bisher am linearen Modell lediglich der Schräglaufwinkel und der Sturzwinkel in die Reifencharakteristik einspielte, nicht aber der Bohrschlupf, wird eine Erweiterung des Reifenmodells um den Bohrschlupf zuerst am linearen Modell gezeigt. Nach der Definition des Spin von Pacejka setzt sich dieser additiv aus dem Sturzwinkel und Bohrschlupf (*turnslip*) $\varphi_t = \psi/V_{cx}^*$ zusammen. Dabei wird letzterer aus der Giergeschwindigkeit ψ und der Längsgeschwindigkeit des Reifenkontaktpunktes $V_{cx} \approx V_{cx}^*$ zusammengesetzt. Diese Eingangsgröße zu berücksichtigen

ist vor allem bei der Untersuchung von Lenkungsschwingungen sinnvoll (siehe Ran [54]). Die bei einem Fahrradreifen im Vergleich zu einem Autoreifen verhältnismäßig großen möglichen Sturzwinkel γ ($> 10^\circ$) unterstreichen die Bedeutung des gesamten Spin als Eingangsgröße für das Reifenmodell zusätzlich. Betrachtet man vorerst das stationäre Verhalten des Reifens durch reinen Spin (ohne Schräglaufwinkel und Längsschlupf), dann gilt mit der Geschwindigkeit des Kontaktpunktes $V_{cx} = V_c = \Omega r_e$ ($r_e \dots$ effektiver Rollradius, $\Omega \dots$ Winkelgeschwindigkeit des rollenden Rades) Gleichung (4.25)

$$\varphi = -\frac{1}{V_c} \left[\dot{\psi} - (1 - \epsilon_\gamma) \Omega \sin(\gamma) \right] = -\frac{1}{R} + \frac{1 - \epsilon_\gamma}{r_e} \sin(\gamma) \quad (4.25)$$

ϵ_γ entspricht einem Korrekturfaktor, der für die Querschnittsform des Fahrradreifens (siehe Motorradreifen [50]) mit $\epsilon_\gamma = 0$ angenommen wird. Mit Gleichung (4.25) ergibt sich in weiterer Folge unter Annahme kleiner Sturzwinkel

$$F_y = -C_{F\varphi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1 - \epsilon_\gamma}{r_e} \gamma \right) = -C_{F\varphi} \frac{1}{R} + C_{F\gamma} \gamma \quad (4.26)$$

und

$$M_z = -C_{M\varphi} \varphi_t + C_{M\gamma} \gamma \quad (4.27)$$

Aus den Gleichungen (4.26) und (4.27) ist ersichtlich, dass bei aufrechtem Bogenlauf ($\gamma = 0$) die Seitenkraft weg vom Krümmungsmittelpunkt des Bogens zeigt, und auch das Moment entgegen der Gierbewegung zeigt.

Pacejka schreibt dazu: *”Consequently, both the force and the moment try to reduce the curvature $\frac{1}{R}$ ”.*

Betrachtet man hingegen die Seitenkraft und das Moment zufolge des Sturzwinkels γ ($\varphi_t = 0$), so zeigt die Seitenkraft in Richtung des Schnittpunktes einer Verlängerung der Radachse mit der Fahrbahn und das entsprechende Moment bewirkt eine Drehung in Richtung dieses Punktes.

In [49] beschreibt Pacejka die Zusammensetzung des Spin aus dem Bohrschlupf und dem Sturzwinkel formal und zeigt unter anderem, dass die laterale Deformation eines gestürzten Motorradreifens aufgrund der Querschnittsform betragsmäßig größer ist, als im Vergleich dazu bei einem Autoreifen. Dieses Verhalten wird in den Gleichungen mit dem Korrekturfaktor ϵ_γ beschrieben.

Turnslip kann unter der Annahme, dass beide Größen transient in das Reifenmodell eingehen, analog zum Sturzwinkel als transiente Eingangsgröße für die Seitenkraft und das Rückstellmoment in die Bewegungsgleichungen eingerechnet werden kann. In Gleichungen (4.28) – (4.31) sind die transienten Gleichungen zur Beschreibung des Spin beider Reifen angegeben (vgl. dazu Abbildung 4.7).

$$\frac{\sigma_{\varphi_t F}}{u} \dot{\varphi}'_{t1} + \varphi'_{t1} = \frac{-r - \cos(\epsilon) \dot{\delta} - \sin(\epsilon) \dot{\beta}}{u} \quad (4.28)$$

$$\frac{\sigma_{\varphi_t F}}{u} \dot{\gamma}'_1 + \gamma'_1 = \varphi + \sin(\epsilon) \delta + \cos(\epsilon) \beta \quad (4.29)$$

$$\frac{\sigma_{\varphi_t R}}{u} \dot{\varphi}'_{t2} + \varphi'_{t2} = \frac{-r}{u} \quad (4.30)$$

$$\frac{\sigma_{\varphi_t R}}{u} \dot{\gamma}'_2 + \gamma'_2 = \varphi \quad (4.31)$$

Für die linearen Berechnungsmodelle in der vorliegenden Arbeit wurden die Ausdrücke für die Seitenkraft und das Rückstellmoment zufolge Schräglauf- und Sturzwinkel analog zu den Gleichungen (4.16) und (4.17) eingesetzt und das Einlaufverhalten entsprechend Gleichungen (4.18) und (4.19) in die Bewegungsgleichungen eingebunden.

Für die Berücksichtigung des Bohrschlupfes im Reifenmodell wurden zusätzlich die Gleichungen (4.28) bis (4.31) in die linearen Bewegungsgleichungen implementiert. Dabei geht die Einlaufänge $\sigma_{\varphi_{ti}} = \sigma_{\gamma_i}$ als konstante Modellgröße in die Gleichungen ein.

4.2.1.2 Laterale Auslenkung

Die Entwicklungsgeschichte eines mechanischen Starrkörpermodells eines Motorrades hat gezeigt, dass die Einbindung einer Nachgiebigkeit der Bauteile, zusammengefasst in einem zusätzlichen Gelenk, zur realitätsnahen Darstellung der Wobblenschwingung notwendig ist (vgl. dazu [70], [73]). Der konstruktive Aufbau eines Motorradrahmens, sowie die Platzierung und Masse des Motorblocks und der restlichen Antriebseinheiten lassen darauf schließen, dass sich dieser Teil der Maschine in lateraler Richtung vergleichsweise wenig deformieren wird und jener Teil, bei dem die Querelastizität zum Systemverhalten beiträgt, hauptsächlich in der Lenkeinheit zu finden sein wird.

Demnach erscheint die bisherige Zusammenfassung der Elastizitäten der Bauteile in einem virtuellen Drehgelenk mit entsprechender Steifigkeit und Dämpfung plausibel für das Motorrad.

Obwohl das Fahrrad auf den ersten Blick dem Motorrad sehr ähnlich erscheint, bestehen abgesehen von der Masse der Bauteile einige Unterschiede, die eine Alternative zur bisherigen Modellierung nahelegen. Einerseits besteht ein größeres Verhältnis der Fahrer Masse zum Fahrzeug, andererseits ist die Steifigkeit des Rahmens durch den Wegfall der Antriebseinheit und die konstruktiv feinere Gestalt geringer. Dabei ist die Gestalt des Rahmens (Diamantrahmen bzw. Herrenrahmen oder Damenrahmen ev. sogar Tiefdurchstiegrahmen) tonangebend für die Werte dieser strukturellen Steifigkeit.

Wie sehr die Steifigkeit und Dämpfung, mit der das virtuelle Gelenk beaufschlagt wurde, zum Systemverhalten beiträgt, hat Spierings [73] bereits 1981 am Motorrad untersucht und die Begriffe für *high-speed* und *low-speed-wobble* geprägt. Untersucht wurde ein Motorradmodell wie in Abbildung 4.3 dargestellt, wobei die Lage der Achse des Rotationsgelenks entlang der Lenkachse zwei Modellen Namen gab: am *high-axis-model* liegt die Rotationsachse 10 cm unterhalb der Gabelbrücke, hingegen liegt die Rotationsachse beim *low-axis-model* weiter unten, entlang der Lenkachse auf Höhe der Vorderradnabe.

Es zeigte sich beim *high-axis-model*, dass der Wobblemode bei geringer Drehfedersteifigkeit des Gelenks bereits im niederen Geschwindigkeitsbereich instabil wird, dafür aber bei höheren Geschwindigkeiten durchwegs stabil ist. Gegenteiliges wird bei einer sehr hohen Steifigkeit beobachtet: die Instabilität des Wobblemode im niederen Geschwindigkeitsbereich konnte durch die hohe Drehfedersteifigkeit

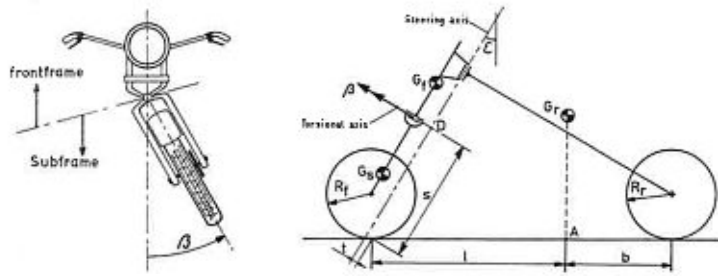


Abbildung 4.3: Drehgelenk β zur Abbildung der Quersteifigkeit der Lenkeinheit [73]

vollständig unterdrückt werden, allerdings zeigte sich dann im hohen Geschwindigkeitsbereich eine Instabilität (vgl. dazu Abbildung 4.4) wodurch der Begriff

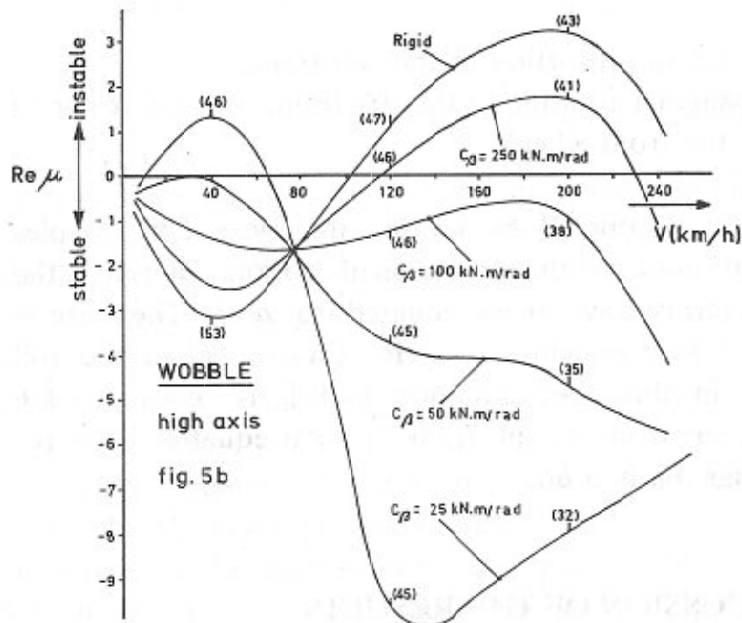


Abbildung 4.4: Realteile des Wobblemodes eines Motorrades aus [73]

des *high-* und *low-speed-wobble* beschrieben ist. Auch bei Parametervariationen am Modell des Touringrades in [44] konnte ein ähnliches Verhalten beobachtet werden. Die Modellbildung des in dieser Arbeit vorgestellten Fahrrades, in Anlehnung an die Modellbildung von Spierings wird in diesem Kapitel etwas später beschrieben.

Zur quantitativen Erfassung der Bewegung während des auftretenden Wobblemodes und zur Validierung theoretischer Modelle dienten praktische Versuchsfahrten.

Hinsichtlich des Touringrades sei auf die Diplomarbeit von Ott [45] verwiesen, der zur Validierung des mechanischen Ersatzmodells zahlreiche Messfahrten durch-

geführt hat. Mittels eines auf dem Prinzip eines Drehpotentiometers basierenden Sensors konnte der Lenkwinkel gemessen werden, während am Gepäckträger eine IMU montiert war, die Beschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten in drei Richtungen messen kann. Zusätzlich wurde dort eine GPS-Antenne zur Geschwindigkeits- und Positionsermittlung montiert.

In [33] wurde der instabile Wobblemode an einem Rennrad beobachtet und versucht, die Bewegung mittels Beschleunigungsaufnehmern und Winkelgeschwindigkeitssensoren messtechnisch zu erfassen. Dabei trat die Instabilität bei ca. 50 – 60 km/h auf, wenn der Fahrer mit höheren Geschwindigkeiten als vergleichsweise beim Touringrad bergab fuhr. Diese sehr heftige Oszillation ist durch den Fahrer nur sehr schwer unter Kontrolle zu bekommen und die Ratschläge in diversen Internetforen wie beispielsweise den Lenker fest zu halten und zu versuchen, mit angespannter Armmuskulatur die Schwingung zu unterdrücken oder durch Bremsen die Geschwindigkeit zu reduzieren, scheinen kein "Allheilmittel" zu sein, sodass ein folgenschwerer Sturz des Fahrers dadurch nicht ausgeschlossen werden kann. Weitere Ratschläge sind in Wilson [78] zu finden, der anhand von Experimenten behauptet, dass die Verbindung zwischen Sattel und Fahrer maßgebend für die Geschwindigkeit bei Stabilitätsverlust ist. Für Berechnungen zu diesem Thema wird auf Kapitel 4.3.4 verwiesen. Magnani hat in [33] Fahrversuche mit einem Rennrad der Marke Colnago C59 (Größe 52S) original ausgestattet mit Fulcrum Wheels Racing Zero Laufrädern, Komponenten (Super Record) von Campagnolo und einem SMP Light 209 Sattel durchgeführt und dokumentiert. Zwei Messeinheiten wurden am Fahrrad montiert, die jeweils die Beschleunigungen in drei Koordinatenrichtungen, sowie Winkelgeschwindigkeiten um drei Achsen mit einer Abtastrate von 100Hz aufnahmen. Ein GPS Sensor, zur Aufnahme der Fahrgeschwindigkeit und Position wurde ebenfalls am Fahrrad montiert. Eine Messeinheit befand sich am Lenkervorbau (IMU1) und die zweite Messeinheit wurde am Sattelrohr (in unmittelbarer Nähe) zum Sattel (IMU2) fixiert. Abbildung 4.5 zeigt die gemessenen Querbeschleunigungen an den beiden IMUs, sowie das Geschwindigkeitssignal während der Lenkerschwingung. Die Tatsache, dass die Schwingung noch aufrecht erhalten bleibt, obwohl der Fahrer durch Bremsen die Geschwindigkeit stark reduziert, lässt darauf schließen, dass der Wobblemode auch bei niedrigeren Geschwindigkeiten noch instabil ist.

Weitere Versuche bei geänderten Bedingungen zeigten, dass das Auftreten der Wobblebewegung stark vom Fahrer abhängt. Bei gleichwertigen Versuchen, allerdings mit einem Fahrer größerer Statur ist die instabile Wobblebewegung nicht aufgetreten. Dabei werden nicht nur die Masseeigenschaften des Fahrers, sondern auch dessen physiologische Eigenschaften (Steifigkeit und Dämpfung) sowie die Fahrtechnik dazu beitragen.

Modell mit Drehfreiheitsgrad im Lenkrohr: β – Modell Die Modellerweiterung analog zu Spierings [73] wird nun auch auf das Fahrradmodell übertragen, sodass der zusätzliche Rotationsfreiheitsgrad das Lenksystem in der Mitte des Steuerkopfes in zwei Körper unterteilt. Diese Drehbewegung β wird zusätzlich noch mit einem parallelen, linearen Feder-Dämpferelement beaufschlagt. Abbil-

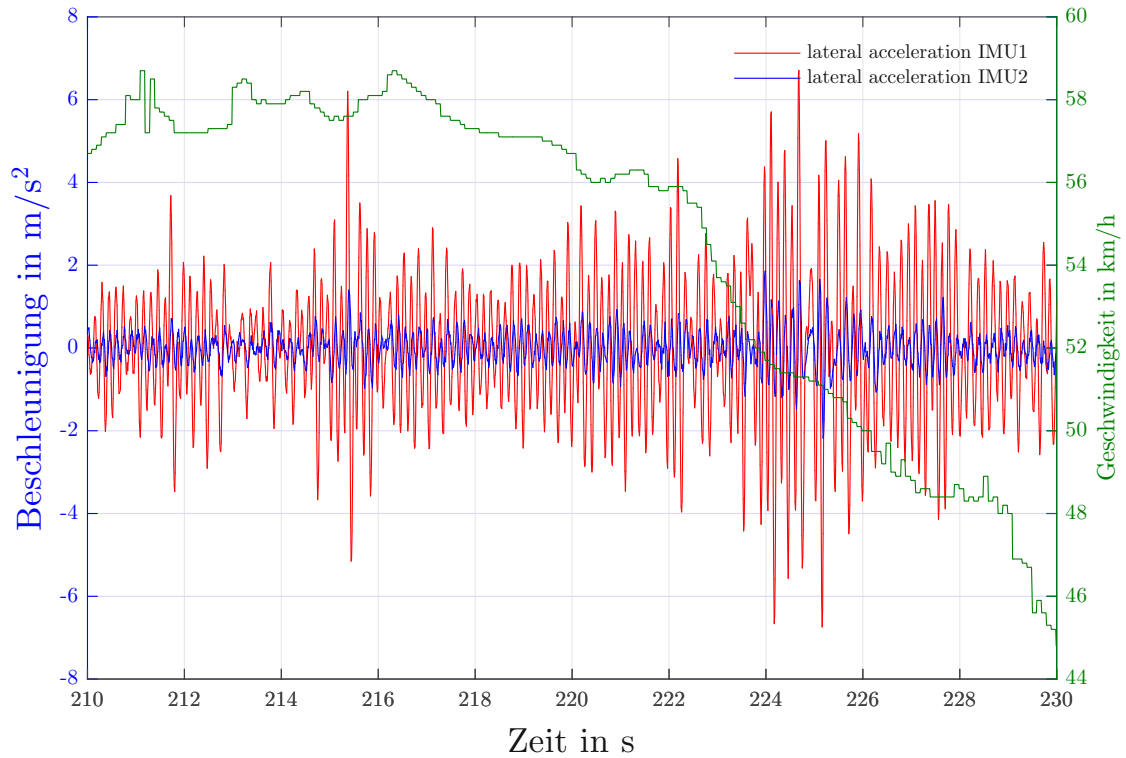


Abbildung 4.5: Laterale Beschleunigungen in m/s^2 der beiden IMUs am Rennrad während einer auftretenden Lenkungsschwingung, sowie dabei gemessenes Geschwindigkeitssignal in km/h (grün)

dungen 4.6 und 4.7 zeigen das Modell des Fahrrades in aufrechter Position und in Kurvenfahrt. Die entsprechenden linearen Bewegungsgleichungen wurden in

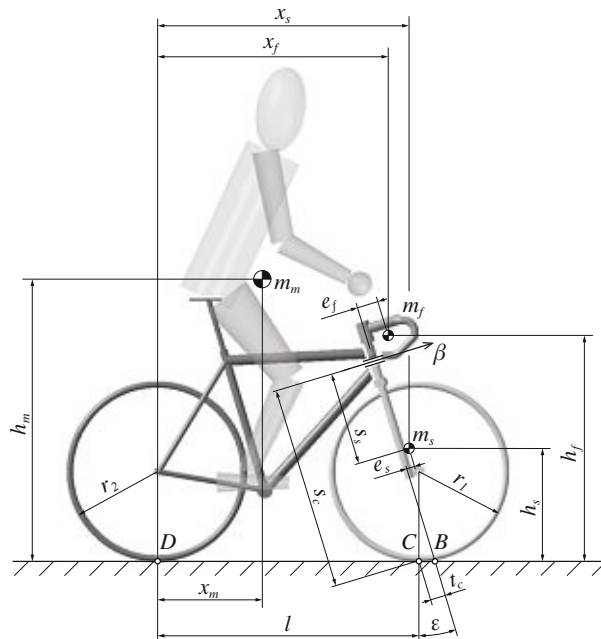


Abbildung 4.6: Fahrradmodell [25]

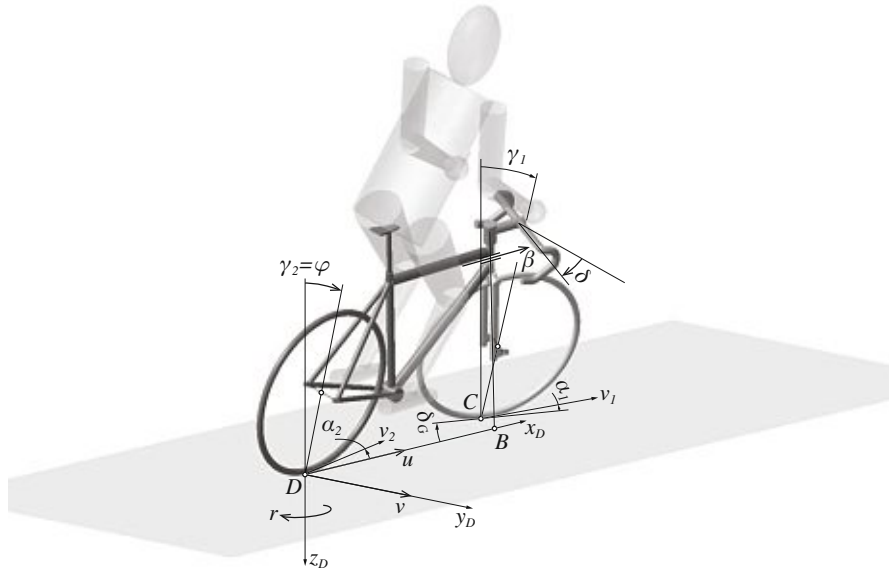


Abbildung 4.7: Fahrradmodell in Kurvenfahrt aus [45]

den vorangegangenen Diplomarbeiten hergeleitet und überarbeitet. Der Zustandsvektor für dieses Modell ergibt sich nach Elimination der zyklischen Koordinaten zu

$$\underline{x} = [\varphi, \delta, \beta, v, \dot{\varphi}, \dot{\delta}, \dot{\beta}, r, \alpha'_1, \gamma'_1, \alpha'_2, \gamma'_2] \quad (4.32)$$

Dabei beschreibt φ den Rollwinkel des Fahrrades, δ den Lenkwinkel, β den lateralen Ausdrehwinkel aufgrund der zusammengefassten Flexibilität in der Gabel, v die Quergeschwindigkeit des Bezugspunktes, r die Gierrate des Fahrrades und $\alpha'_{1/2}$ bzw. $\gamma'_{1/2}$ den transienten Schräglauf- bzw. Sturzwinkel am Vorder- bzw. Hinterrad.

Die entsprechenden Bezeichnungen wurden ebenso wie die vereinfachten Gleichungen aus [25] übernommen und sind ebenso in Anhang C.1 angegeben.

Bei einem Motorrad trägt vorwiegend die Flexibilität der Lenkeinheit (speziell Gabelholme) zu einer reduzierten Quersteifigkeit des Systems bei, der Rahmen besitzt im Vergleich dazu eine weit höhere Steifigkeit. Das Rotationsgelenk bildet somit die Biegesteifigkeit der Gabel ab, zu einem Teil aber auch die Torsion des Rahmens. Dadurch wird die hohe Position der Rotationsachse am Motorrad begründet.

Eine Parametervariation bezüglich der Steifigkeits- und Dämpfungskennwerte dieses Gelenks in [73] zeigte, dass eine höhere Steifigkeit höhere Frequenzen der Wobbel-schwingung zur Folge hat, erhöhte Dämpfungswerte dieses Drehgelenks bewirken zusätzlich, dass der Wobblemode erst bei höheren Geschwindigkeiten instabil wird.

Auch in [44] konnte ein ähnliches Verhalten anhand von Parametervariationen an einem linearen Touringradmodell gezeigt werden. Bei sehr großen Steifigkeits- und Dämpfungskennwerten des β -Gelenks zeigte sich eine drastische Änderung des Realteilverlaufs über der Geschwindigkeit. Während die Eigenwerte im geringen bis mittleren Geschwindigkeitsbereich negative Realteile aufwiesen, zeigte

sich im höheren Geschwindigkeitsbereich ein instabiler Wobblemode, ähnlich dem *high-speed-wobble* in [73].

Modell mit Drehfreiheitsgrad im Sattelrohr: ρ -Modell Beobachtungen während der Versuchsfahrten sowie das Erscheinungsbild der Flutterbewegung bei Rennrädern in [33] lassen auf eine alternative Modellbildung für das Rennrad schließen. Die Masse sowie die Massenträgheitsmomente der Lenkeinheit (speziell Vorderrad und Gabel) sind bei einem Rennrad deutlich geringer als bei einem Touringrad, wodurch auch der Einfluss der gyroskopischen Effekte geringer ausfällt. Auch die Steifigkeit der Bauteile wird sich schon alleine aufgrund anderer Materialien von den Werten des Touringrades deutlich unterscheiden. Zusätzlich geben Beobachtungen während Versuchsfahrten Anlass zu einer alternativen Abbildung der lateralen Steifigkeit des Systems. Diese wird nun nicht mehr durch das bisherige Drehgelenk β abgebildet, sondern durch ein Drehgelenk ρ , dessen Achse vertikal angeordnet ist und in der Mitte des Sattelrohres liegt. Dadurch wird eine laterale Auslenkung des Lenksystems aber auch des vorderen Rahmenteils ermöglicht. Diese Art der Modellbildung ähnelt durch den Querversatz der Lenkachse der Modellbildung des *lateral-compliance-shimmy* in Abschnitt 2.2.2. Abbildung 4.8 zeigt die Lage dieses Drehgelenks am mechanischen Modell. Dieses

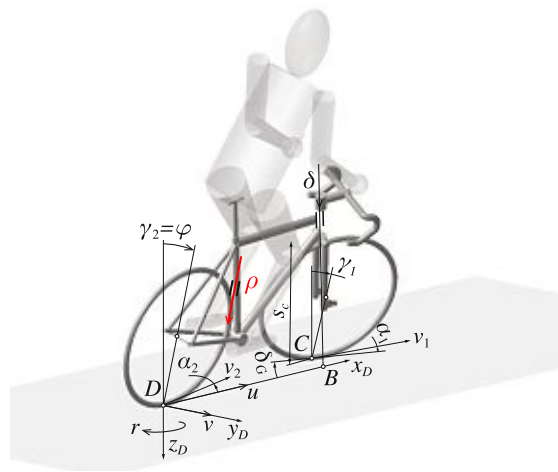


Abbildung 4.8: Alternative Modellbildung mit vertikalem Drehgelenk zur Abbildung der Steifigkeiten

besteht folglich aus der hinteren Baugruppe, die sich aus dem Hinterrad, dem Fahrer und dem hinteren Rahmenteil (Kettenstreben, Sattelstreben und Sattelrohr) zusammensetzt, dem vorderen Rahmenteil bestehend aus dem Oberrohr, Unterrohr und Lenkrohr sowie der Lenkeinheit. Letztere beinhaltet den Lenker, die Lenkstange, die Gabel und das Vorderrad und kann eine Lenkbewegung gegenüber dem Rahmen ausführen. Analog zum bisherigen linearen Modell ergibt sich bei dieser Modellbildung folgender Zustandsvektor Glg.(4.33)

$$\underline{x} = [\varphi, \delta, \rho, v, \dot{\varphi}, \dot{\delta}, \dot{\rho}, r, \alpha'_1, \gamma'_1, \alpha'_2, \gamma'_2] \quad (4.33)$$

Die linearen Bewegungsgleichungen ergeben sich nach Anwendung des d'Alembert'schen Prinzips und Linearisierung der Bewegungsgleichungen bezüglich der geraden, aufrechten Fahrt und sind Anhang C.2 zu entnehmen.

4.2.1.3 Gyroskopische Effekte

Der Einfluss der gyroskopischen Effekte auf die Stabilität eines Fahrrades wird bereits seit dem Erlangen der Bewegungsgleichungen diskutiert.

Klein und Sommerfeld [24] zeigten anhand ihrer Gleichungen, dass ein selbststabiles Fahrrad ohne Wirkung der Kreiseffekte bei sonst unveränderten Fahrradparametern seine Selbststabilität verliert. Jones [22] hingegen versuchte diese Behauptung mittels praktischer Versuche zu widerlegen, indem die gyroskopischen Effekte des Vorderrades durch ein entgegen diesem Rad rotierendes Rad auf der gleichen Achse mit gleichen Masseigenschaften eliminiert wurden. Er setzte die Fähigkeit der Selbststabilität des Fahrrades in direkte Verbindung mit dem positiven Nachlauf des Vorderrades und begründete seine Behauptung durch praktische Versuche.

Schwab et al. [29] bestätigten zwar nach Korrektur von Fehlern in den Gleichungen von [24], dass das betrachtete Fahrrad ohne Wirkung der gyroskopischen Effekte keinen autostabilen Bereich mehr aufweist, von einer Verallgemeinerung dieser Aussage wurde aber Abstand genommen.

Sie zeigten anschließend mit einem stark vereinfachten Modell eines Fahrrades durch analytische Eigenwertberechnungen und nachfolgende praktische Versuche, dass weder gyroskopische Effekte, noch ein positiver Nachlauf des Vorderrades notwendige (und hinreichende) Kriterien für Selbststabilität sind, hoben aber hervor, dass diese sehr häufig bedeutenden Einfluss auf das Stabilitätsverhalten des Systems haben. Dabei wurden aufgrund der Modellbildung allerdings immer nur die charakteristischen Eigenmoden *Weave* und *Capsize* betrachtet.

Anhand mehrerer Parameterkombinationen und anschließende Stabilitätsanalyse des linearisierten Systems konnten keine eindeutigen notwendigen Bedingungen für Selbststabilität identifiziert werden. Schließlich wurde eine notwendige Bedingung für Selbststabilität angeführt, nämlich, dass zumindest ein Term in den Bewegungsgleichungen vorhanden sein muss, der die Rollbewegung des Fahrrades mit der Lenkbewegung koppelt. Daraus konnten einflussreiche Parameter identifiziert werden, wobei es allerdings auf die geeignete Kombination dieser Parameter ankommt, damit das System autostabil ist. Zu diesen Parametern zählen der Nachlauf, die gyroskopischen Effekte, die Neigung der Lenkachse aber auch die Position der Massenmittelpunkte sowie der zugehörigen Massenträgheitsmomente der vorderen und hinteren Baugruppe.

Spierings [73] hat die Effekte auf den Wobblemode, die aufgrund der lateralen Elastizität sowie der gyroskopischen Effekte, durch Einführung des Rotationsfreiheitsgrades entstehen, extrahiert, indem er die sechs gyroskopischen Momente, die eine Koppelung des Rotationsgelenks mit den übrigen Freiheitsgraden darstellen, in seinen Berechnungen eliminierte.

Dabei stellte er die Eigenwertberechnungen zweier Modelle gegenüber: jenes Modell, dessen Lenkeinheit als ein Körper angesehen wurde, verglich er mit einem Modell, dessen Lenksystem um den Rotationsfreiheitsgrad β erweitert wurde. Die

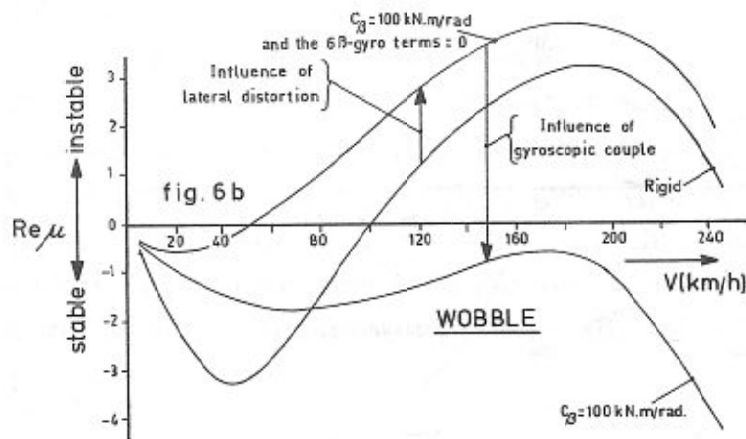


Abbildung 4.9: Auswirkungen der gyrokopischen Effekte auf die Realteile des Wobblemodes am *high-axis-model* eines Motorrades aus [73]

Auswirkungen auf die Eigenwerte des Wobblemode sind in Abbildung 4.9 veranschaulicht. Dabei zeigte sich, dass die laterale Auslenkung β am Motorrad zu einer Begünstigung des instabilen Wobblemodes beiträgt, sodass dieser bereits bei geringeren Geschwindigkeiten instabil wird als im Vergleich dazu bei einem Modell mit starrer Lenkeinheit. Bei zusätzlicher Berücksichtigung der gyrokopischen Effekte zufolge dieser Auslenkung blieb der Wobblemode für das verwendete Motorradmodell im betrachteten Geschwindigkeitsbereich allerdings durchgehend stabil.

Eine Vernachlässigung der zusätzlichen gyrokopischen Effekte in den Bewegungsgleichungen zeigt an den Realteilen des Wobblemodes in Abhängigkeit der Vorwärtsgeschwindigkeit, dass dieser durchwegs destabilisiert wird, sobald diese Terme außer Acht gelassen werden.

Daraus folgerte Spierings, dass die gyrokopischen Koppelterme, welche mit der Einführung der Flexibilität der Gabel einhergehen, mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit den Wobblemode stärker dämpfen. Andererseits wirke sich die Querelastizität der Gabel, die erst diese gyrokopischen Terme entstehen lässt, fördernd für den instabilen Wobblemode aus. Dazu schreibt Spierings [73]: *“From this we can not only conclude that a certain amount of flexibility is desirable but also that the lateral distortion of the front fork must be opposed as much as possible.”*

Aus diesem Grund wurde in [73] zusätzlich ein Modell mit einer tiefer liegenden Rotationsachse vorgestellt. Diese Modelladaptation wirkte sich nicht wesentlich auf den Weavemode aus, der Wobblemode wurde dadurch im geringen bis mittleren Geschwindigkeitsbereich stärker gedämpft, als im Vergleich dazu am ursprünglichen Modell mit höherer Rotationsachse. Ein Vergleich der Wobblemode-Realteile beider Modelle bei hohen Geschwindigkeiten zeigte eine stärkere Dämpfung der Realteile des Wobblemode am Modell mit höher liegender Rotationsachse.

Auch in [8] untersuchten Cossalter et al. die lineare Stabilität eines Scooters und kamen zu ähnlichen Ergebnissen wie Spierings. Anhand ihres Modells konnte ebenfalls die dämpfende Wirkung von gyrokopischen Effekten – hervorgerufen durch den Rotationsfreiheitsgrad β des Lenksystems demonstriert werden.

4.2.1.4 Fahrer

Um das Systemverhalten des Fahrrades ohne die Einwirkung des Fahrers bei konstanter Fahrgeschwindigkeit während einer aufrechten Geradeausfahrt zu untersuchen, wurde der Fahrer bisher als Teil des Rahmens abgebildet, siehe Whipple [77]. Abgesehen von der dadurch ausbleibenden Bewegungsmöglichkeit des Fahrers gegenüber dem Rahmen wurde damit auch die Einwirkung des Fahrers auf das (Lenk-)System unterbunden.

Die folgenden Überlegungen sind auf das passive Verhalten des Fahrers begrenzt und konzentrieren sich im wesentlichen auf zwei Hauptthemen. Einerseits werden alternative Herangehensweisen für die Anbindung des Fahrerkörpers an das Fahrrad überdacht, andererseits wird die Modellbildung der freihändigen Fahrt ersetzt durch eine Verbindung der Hände zum Lenker.

Anbindung Fahrerkörper – Sattel Eine Modellerweiterung, zur Abbildung der Bewegung des Fahrerkörpers, ist durch einen zusätzlichen Rollfreiheitsgrad des Oberkörpers gegenüber dem Rahmen [23] beschrieben, wie er u.a. von Sharp und Limebeer [71] eingebunden wurde. Hier wurde diesem zusätzlich auch ein Gierfreiheitsgrad gegenüber dem Rahmen zugesprochen: *“Especially when the rider tenses as result of sensing the onset of dangerous oscillations, there is a closed structural loop, in which the rider tries to control the steering vibrations with his/her arms, the forces in the arms feed back into the shoulders, the upper body participates in the vibrations and the mobility at the steering head is affected. To model this loop closure realistically, an additional yaw freedom for the rider’s upper body is needed”*.

In Nishimi [43] ermöglichte man dem Körper hingegen eine translatorische Querbewegung gegenüber dem Rahmen, während der Oberkörper zusätzlich eine Rollbewegung ausführen konnte.

Pacejka [50] wiederum übernahm die Modellbildung von Koenen [28] und bildete den Fahrer im Zuge der Untersuchung eines linearen Motorradmodells als inverses Pendel, dessen Rotationsachse in der Längssymmetrieebene im Bereich des Beckens liegt, ab. Diese Modellbildung wurde in der Diplomarbeit von Ott [45] auf das Touringradmodell übertragen, erwies sich allerdings als wenig zufriedenstellend in Bezug auf den Einfluss des Fahrers auf den Wobblemode. Bei Messfahrten mit einem Touringrad zeigte sich nämlich eine starke Abhängigkeit des Wobblemodes von der Rumpfmuskulanspannung des Fahrers, wohingegen eine Variation der Parameter des Feder-Dämpfer-Elements um die Rotationsachse des Fahreroberkörpers dieses Verhalten aber nicht abbilden konnte. Die charakteristischen Moden des Fahrrades werden durch diesen zusätzlichen Freiheitsgrad nicht wesentlich verändert, es zeigt sich in den Stabilitätskarten lediglich ein zusätzlicher Mode, der *Lean-Mode* des Fahrers. Ein Verbesserungsvorschlag bezüglich der Modellbildung war, ein zusätzliches energieabsorbierendes Element hinzuzufügen, das eine translatorische Lateralbewegung bzw. eine Drehung um die vertikale Achse im Bereich

des Fahrer–Sattelkontaktes zulässt.

Wilson [78] sprach der Verbindung zwischen Sattel und Fahrer maßgebenden Einfluss auf die kritische Geschwindigkeit, bei der Lenkungsflattern auftritt, zu. Praktische Versuche in [78] zeigten: reduziert der Fahrer den Druck zum Sattel, so war es möglich, die instabile Wobblebewegung zu höheren Geschwindigkeiten zu verschieben, während durch eine Erhöhung der lateralen Steifigkeit in der Fahrer–Sattel–Verbindung sowie Anspannen der Gesäßmuskulatur und Erhöhen des Drucks auf die Pedale, Wobble bereits bei niedrigeren Geschwindigkeiten auftrat.

Wilson und Papadopoulos [78] postulierten außerdem, dass die Frequenz der Shimmybewegung unabhängig von der Fahrgeschwindigkeit sei und im Bereich der lateralen Eigenfrequenz des Lenksystems liegt. Diese wurde zuvor durch messtechnische Erfassung der Frequenz der vorderen Baueinheit ermittelt, wobei der Sattel fest an einem Türrahmen eingespannt wurde.

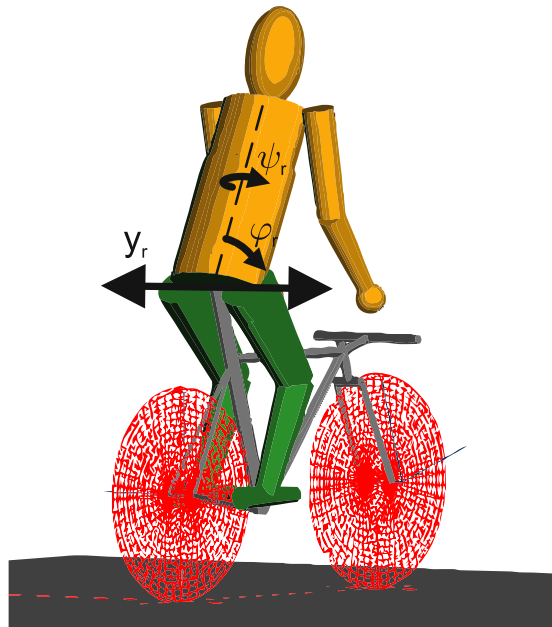


Abbildung 4.10: Bewegungsmöglichkeiten des Fahrerkörpers gegenüber dem Rahmen

Die im Folgenden beschriebenen Bewegungsmöglichkeiten des Fahreroberkörpers gegenüber dem Fahrradrahmen werden in das β -Modell eingebunden, wobei jeder zugefügte Freiheitsgrad mit einem linearen Feder–Dämpfer–Element beaufschlagt und die Eigenwerte in Abschnitt 4.3.4.1 untersucht werden. Die Rollbewegung des Fahreroberkörpers gegenüber dem Rahmen erfolgt mit der Bewegung φ_r . Die Feder– und Dämpferkonstanten wurden für einen Fahrer mit entspannter Rumpfmuskulatur aus [45] mit $c_{\varphi_r} = 380\text{Nm/rad}$ und $k_{\varphi_r} = 24\text{Nms/rad}$ übernommen. Zur Gierbewegung des Fahreroberkörpers gegenüber dem Rahmen wird ein Gierfreiheitsgrad ψ_r des Oberkörpers im Kontaktpunkt am Sattel eingeführt, vgl. Abbildung 4.10. Die Parameterwerte für die Steifigkeit und Dämpfung der Gierbewegung wurden in ersten Berechnungen aus der Literatur [71] übernommen. Die Werte für einen entspannten Fahrer betragen für die Steifigkeit $c_{\psi_r} = 60\text{Nm/rad}$ und für die Dämpfung von $k_{\psi_r} = 13.5\text{Nms/rad}$. Für einen angespannten Fahrer

wurden folgende Werte angeführt: $c_{\psi_r} = 120\text{Nm/rad}$ und $k_{\psi_r} = 15\text{Nms/rad}$. Eine weitere Bewegungsmöglichkeit des Fahrers stellt die Querbewegung des Fahrerkörpers y_r gegenüber dem Rahmen dar, der in [43] ein Rollfreiheitsgrad des Fahreroberkörpers überlagert wurde. Die Kennwerte für Steifigkeit von $c_{y_r} = 42001.88\text{N/m}$ und eine Dämpfung von $k_{y_r} = 1072.84\text{N/rad}$ für die Lateralbewegung des Unterkörpers sind aus [43] übernommen. Sie korrelieren außerdem mit den Werten aus den Untersuchungen von Cossalter [7]. In den zugehörigen Eigenwertberechnungen wurden die soeben beschriebenen Modellerweiterungen separat durchgeführt und die zugehörigen Stabilitätskarten in Abschnitt 4.3.4.1 erstellt.

Verbindung Hände – Lenker Die bisher beschriebene Modellbildung beschränkte sich auf die freihändige Fahrt.

Dies hat zur Folge, dass das Stabilitätsverhalten des Systems "Fahrrad und Fahrer" untersucht werden kann und dadurch die Auswirkungen bestimmter Systemparameter auf das Stabilitätsverhalten nicht von Aktionen des Fahrers beeinträchtigt wurden.

Hinsichtlich der Entwicklung und Validierung eines geeigneten mechanischen Ersatzmodells eines Touringrades zur Identifikation von Parametereinflüssen auf den Wobblemode erwies sich diese Modellbildung ebenfalls als nützlich. Einerseits ließ sich der Wobblemode durch eine freihändige Fahrt besser provozieren und die Oszillation durch einen möglichst steif an den Rahmen angebondenen, freihändigen Fahrer leicht reproduzieren ([1], [45], [44]), andererseits zeigte das in diesen Diplomarbeiten betrachtete Touringrad eine Stabilisierung des instabilen Wobblemodes bereits durch leichtes Halten des Lenkers.

Eine andere Fragestellung bietet sich bei der Betrachtung des Wobblemodes am Rennrad. Abgesehen von den unterschiedlichen konstruktiven Parametern dieser beiden Räder unterscheidet sich auch die Körperhaltung des Fahrers deutlich zwischen einer freihändigen Fahrt und einer sportlichen, vorgebeugten Sitzposition, wie es für den Rennradfahrer bei normaler Fahrt üblich ist.

Da der Wobblemode am Rennrad auch auftritt, obwohl der Fahrer beide Hände am Lenker hat, besteht nun auch die Notwendigkeit, diese Situation in der Modellbildung zu übernehmen.

Da außerdem noch Unklarheit herrscht, wie im Falle eines auftretenden Wobblemodes am Rennrad zu handeln ist, damit diese Schwingung möglichst rasch gedämpft werden kann, könnte ein mechanisches Modell dazu dienen eventuelle Abhilfemaßnahmen theoretisch zu erarbeiten.

Beispielsweise könnte man meinen, dass das Anspannen der Armmuskulatur und ein möglichst fester Griff am Lenker die Schwingung unterdrücken könnte, was sich bei praktischen Versuchen allerdings nicht bestätigte. Auch das Verringern der Fahrgeschwindigkeit bei Auftreten der Schwingung erwies sich nicht immer als geeignete Abhilfemaßnahme – in Abbildung 4.5 zeigt sich, dass durch eine Reduktion der Fahrgeschwindigkeit von ca. 58km/h auf 48km/h kein Abklingen der Schwingung erzielt werden konnte.

Als Vorbild für eine derartige Modellbildung dient die Publikation von Schwab et al. [61], wobei man die Stabilität, aber auch die Steuerbarkeit des Fahrrades

bzw. dessen Eigenmoden untersuchte. Zwei verschiedene Fahrermodelle wurden dabei vorgestellt: Modell 1 in Abbildung 4.11(a) entspricht der Sitzposition auf einem Mountainbike – der Unterkörper ist fest mit dem Rahmen verbunden und der leicht vorgebeugte Oberkörper besitzt im Bereich der Hüfte zwei Rotationsfreiheitsgrade, sodass ein Nicken und Gieren des Torso möglich ist. Diese zusätzlichen Bewegungsmöglichkeiten werden durch einfache Schannergelenke zwischen dem Oberkörper und dem Unterkörper abgebildet. Die gestreckt abgebildeten Arme des Fahrers können sich relativ zum Oberkörper wiederum durch zwei Schannergelenke bewegen, welche im Bereich des Schultergelenks angebracht sind. Die Wahl der Bewegungsmöglichkeiten erfolgte so, dass über die kinematische Schleife kein Freiheitsgrad hinzugefügt wird. Die Anbindung der Arme an den Lenker geschieht durch ein Kugelgelenk. Eigenwertberechnungen dieses Systems während

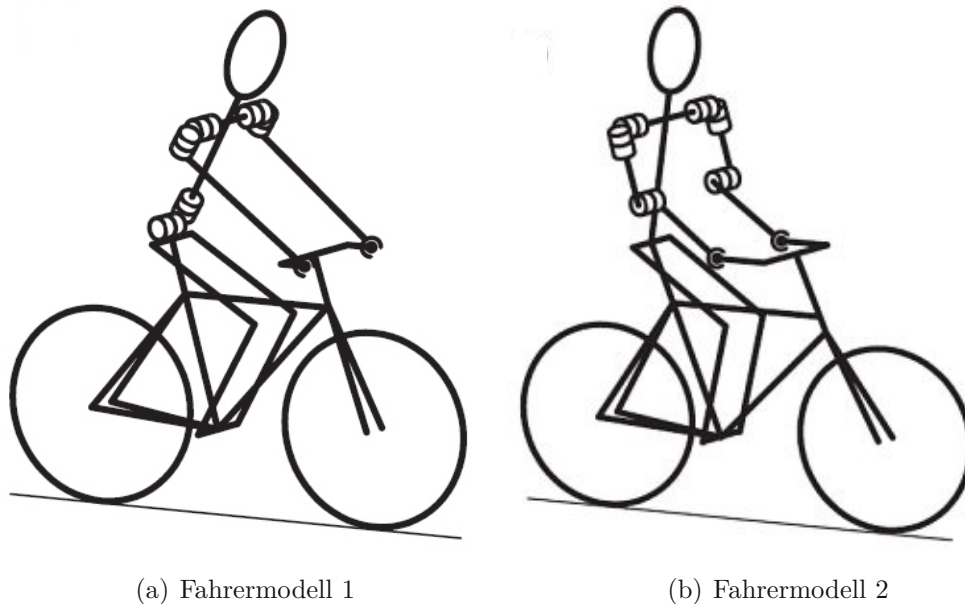


Abbildung 4.11: Fahrermodell 1 und 2 aus [61]

der Geradeausfahrt mit konstanter Geschwindigkeit wurden mit den Eigenwerten des Whipplemodells verglichen und zeigten keine wesentlichen Änderungen im charakteristischen Verlauf von Weave, Capsize und Castermode. Durch die Anbindung der Arme an den Lenker erhöht sich das Massenträgheitsmoment bezüglich der Lenkachse sowie eine Steifigkeit, die der Lenkbewegung zugeordnet ist. Daraus resultiert eine leichte Verschiebung des stabilen Geschwindigkeitsbereiches zu höheren Werten sowie eine geringere Weavemodefrequenz im Vergleich zum Whipplemodell.

Das Fahrermodell 2 in Abbildung 4.11(b) bildet die aufrechte Sitzposition des Fahrers auf einem Hollandrad ab. Dabei besitzt der Oberkörper des Fahrers keine Bewegungsmöglichkeit gegenüber dem Unterkörper und dem Rahmen. Die Arme sind abgewinkelt, sodass zu den beiden Schannergelenken im Schultergelenk das Ellbogengelenk ebenfalls durch ein Schannergelenk zugefügt wird. Die Anbindung der Arme an den Lenker wird – wie zuvor – über ein Kugelgelenk realisiert. Die

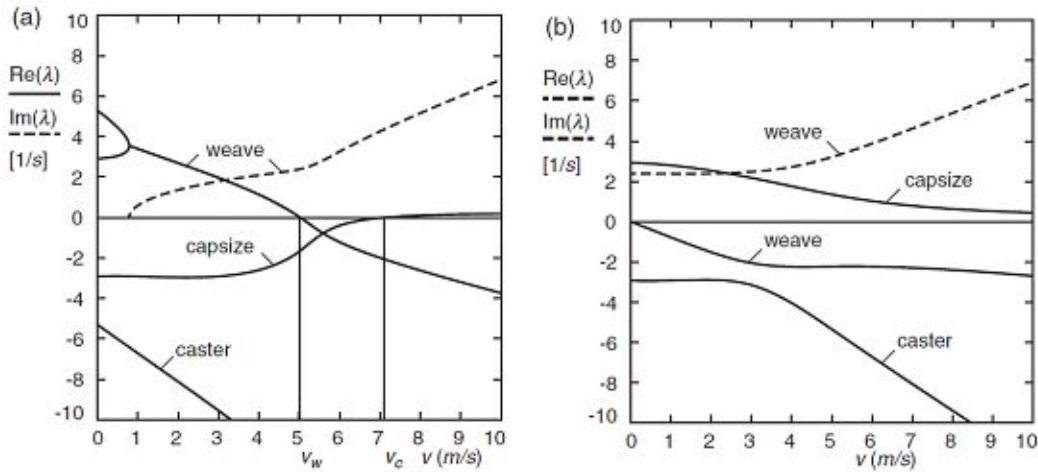


Abbildung 4.12: Eigenwerte des starr an den Rahmen angebondenen Fahrers (links) im Vergleich zum Fahrer mit beweglichen Armen (rechts) aus [61]

Berechnung der Eigenwerte dieses Modells zeigte eine drastische Änderung des Stabilitätsverhaltens im Vergleich zum Whipplemodell, vgl. Abbildung 4.12. Während der Weavemode über den gesamten betrachteten Geschwindigkeitsbereich ein stabiler, konjugiert komplexer Eigenmode ist, ist der Capsizemode durchgehend instabil, wodurch der autostabile Bereich des Fahrrades verschwindet.

Schwab et al. [61] erklären diese Änderungen des Stabilitätsverhaltens dadurch, dass durch die Anbindung der gelenkigen Arme an den Lenker, diesem ein Oszillator, ähnlich einem Pendel, zugefügt wird, wodurch zwar einerseits der Weavemode stabilisiert wird, aber andererseits der Mechanismus des Einlenkens in Richtung des Fallens (*„steer into the fall“*) unterdrückt wird. Dadurch wird der Capsizemode durchgehend instabil. Diese Veränderung wird einerseits durch die Erhöhung des Eintrags in der Massenmatrix, welcher der Lenkbewegung zugeordnet ist, erklärt, da sich dieser Term durch das hinzufügen der Arme nahezu verdoppelt.

Andererseits ändert jener Term der Steifigkeitsmatrix, der der Lenkbewegung zugeordnet ist, durch diese Modelladaption sein Vorzeichen von einem zuvor negativen Wert zu einem positiven Eintrag. Die Modellbildung in [61] mit nichtholonomen Bindungen im Reifen–Fahrbahn Kontaktpunkt und einem starren Rahmen ohne Einbindung von Flexibilitäten, reicht allerdings nicht aus, um den Wobblemode damit abzubilden.

Eine schrittweise Anpassung des Touringradmodells mit freihändig fahrendem Fahrer in aufrechter Sitzposition hin zum sportlich gebeugten Rennradfahrer der den Lenker mit seinen Händen umschließt, erfolgte in [25] und [26].

Dabei wurde zuerst eine vereinfachte Abbildung der Hände am Lenker durch Zurechnen der Massen der Hände des Fahrers in gebeugter Sitzposition zum Lenker durchgeführt, sowie ein zusätzliches Feder–Dämpferelement um die Lenkbewegung δ eingeführt.

In einem weiteren Schritt wurde in [25] das mechanische System betrachtet, bei dem die Armbewegungen des Fahrers zusätzlich in das Systemverhalten mit einspielen. Durch die Anbindung der Hände an den Lenker, in Form einer kinema-

tischen Schleife, ist die Position der Ober- und Unterarme (Winkel $\theta_{1,j}, \theta_{2,j}, \theta_{3,j}$, vgl. Abbildung 4.13) über den Lenkwinkel definiert. Die Herleitung der linearen Bewegungsgleichungen durch zuvor gedankliches Auftrennen der Verbindung in den Handgelenken und anschließendes Zusammenführen über die Schleifenschließbedingungen wird in [25] im Detail beschrieben. Durch Einführen der impliziten Schleifenschließbedingungen wird das bisher gewöhnliche Differentialgleichungssystem in ein differential-algebraisches Gleichungssystem übergeführt. Nachdem zur Untersuchung der Eigenwerte des Systems die aufrechte, nicht eingelenkte Fahrt gewählt wird, dieser Zustand einen Gleichgewichtszustand darstellt und durch die Linearisierung das System auf kleine Auslenkungen beschränkt ist, werden die Schleifenschließbedingungen ebenso durch eine Taylorreihe angenähert. Diese Linearisierung ermöglicht wiederum eine explizite Darstellung der Armwin-

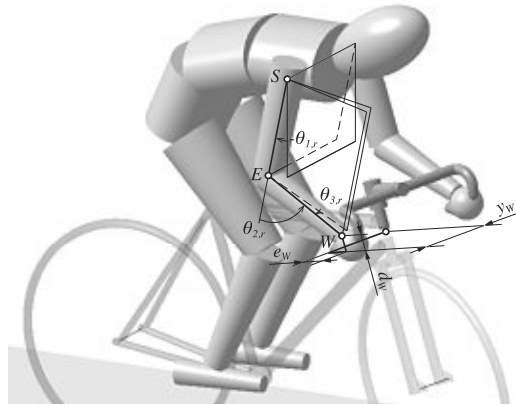


Abbildung 4.13: Verbindung des Fahreroberkörpers mit dem Lenker über die Arme und Darstellung der Winkel am Beispiel des rechten Arms [25]

kel $\theta_{i,j}$ als Funktion des Lenkwinkels:

$$\begin{bmatrix} \theta_{1,j} \\ \theta_{2,j} \\ \theta_{3,j} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \theta_{10,j} \\ \theta_{20,j} \\ \theta_{30,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11,j} \\ u_{21,j} \\ u_{31,j} \end{bmatrix} \delta + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{12,j} \\ u_{22,j} \\ u_{32,j} \end{bmatrix} \delta^2 + \dots, \quad j = l, r \quad (4.34)$$

Dabei beschreiben $\theta_{i0,j}$ die Winkel, welche bei einer nicht eingelenkten, aufrechten Position des Systems bestehen und $u_{i1,j}, u_{i2,j}, \dots$ beschreiben die dimensionslosen Übersetzungen zwischen dem Lenkwinkel und den jeweiligen Armwinkeln.

Mit dem expliziten Zusammenhang der Armwinkel mit dem Lenkwinkel können die Bewegungsgleichungen wie in gewohnter Form, analog dem bisherigen System in Baumstruktur dargestellt werden. Diese unterscheiden sich von den bisherigen Hands-Off-Bewegungsgleichungen nur durch Terme, die durch die Lenker-Arm-Kopplung hinzukommen.

4.2.2 Nichtlineares Modell

Da die bisher vorgestellten linearen Modelle aus einer Linearisierung der zuvor nichtlinearen Bewegungsgleichungen für kleine Abweichungen aus der Gleichge-

wichtslage resultierten, ist dabei die Linearisierung der Funktionen für Reifenkräfte und –momente ebenso inbegriffen, wie die geometrische Linearisierung, wodurch Koppelterme höherer Ordnung verschwinden. Als Beispiel sei hier der Entfall der Antriebskraft aus den Bewegungsgleichungen für das Schlepprad genannt, der aus einer Linearisierung folgt. Eine qualitative Änderung des Systemverhaltens ist in erster Linie auf die nichtlineare Charakteristik des Seitenkraft- bzw. Momentenverlaufs in Abhängigkeit von Schräglauf- und Sturzwinkel zurückzuführen. In weiterer Folge wird zuerst ein Überblick über die nichtlinearen Reifenmodelle gegeben, die in ein entsprechendes MKS-Modell in SIMPACK integriert wurden. Anschließend wird noch auf Aspekte der Modellbildung eingegangen, die im Hinblick auf die nichtlineare Stabilitätsanalyse und Modellbildung in einem Mehrkörperdynamikprogramm zu beachten sind.

4.2.2.1 Reifenmodell

Die folgenden Reifenmodelle entsprechen, soweit aus der Modellbildung übertragbar, in ihrer linearisierten Form den linearen Funktionen für Reifenkräfte und –momente aus Abschnitt 4.2.1.1. Konkret wird das Bürstenmodell als Vertreter physikalischer Modelle eingeführt und dem *Magic-Formula*-Reifenmodell als Vertreter empirischer Reifenmodelle gegenübergestellt.

Die Besonderheiten der jeweiligen Modellgleichungen werden hervorgehoben, für die detaillierten, in die Berechnungsmodelle implementierten Funktionen beider Reifenmodelle sowie Parameterwerte wird auf Anhang A verwiesen.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass sich zwar die Seiten- und Längskraft am Reifen gegenseitig beeinflussen. Im Zuge dieser Arbeit durchgeführte Simulationen der auftretenden Instabilität zeigten aber, dass eine Vereinfachung im Sinne einer Entkoppelung dieser beiden Kräfte für die Betrachtung von Wobbleschwingungen zulässig ist. Die Amplituden der Längs- und Seitenkraft wurden einander gegenübergestellt und davon ausgegangen, dass aufgrund eines sehr geringen Betrages der Längskraft (ca. 3% der Seitenkraft bei einer Fahrt mit 2° Hangneigung am Bürstenmodell) diese den Betrag der Seitenkraft bezüglich des Reifenkennfeldes nicht wesentlich beeinträchtigt.

Bürstenmodell Dieses physikalische Modell aus [50] stellt stationäre Gleichungen der Seitenkraft und des Rückstellmoments für Schräglaufwinkel und Spin bzw. deren Kombination als Eingangsgrößen bereit, wobei die vergleichsweise geringe Anzahl an benötigten Parametern einen attraktiven Vorteil bietet.

Man betrachtet vorerst einen Reifen, dessen Seitenkraft und Rückstellmoment ausschließlich durch die Querdeformation der radial angeordneten Bürstenelemente am Umfang des Reifens aufgrund eines Schräglaufwinkels hervorgerufen werden. Während ein Bürstenelement die Aufstandsfläche im Haftgebiet durchläuft, nimmt dessen laterale Auslenkung zu, sodass die Spitzen der Bürstenelemente im Kontaktgebiet eine Kontaktgerade formen, die parallel zum aktuellen Geschwindigkeitsvektor ist. Abbildung 4.14 wurde aus [50] übernommen und zeigt den Grund- und

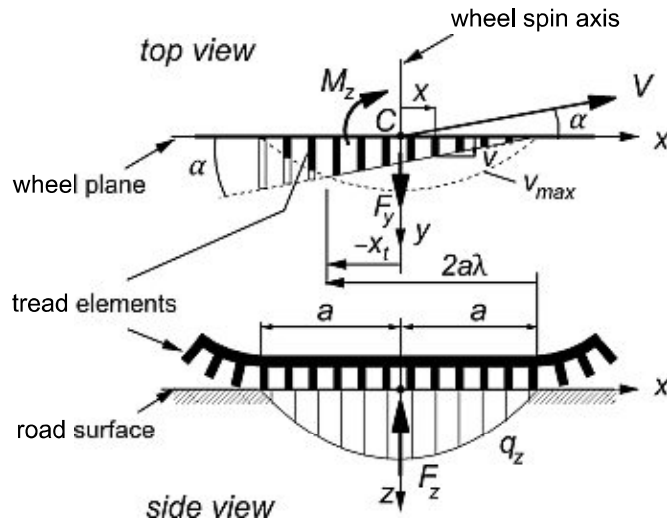


Abbildung 4.14: Deformation der Bürstenelemente unter Einwirkung eines Schräglaufwinkels, Fig.3.3 in [50]

Aufriss dieses Modells. In Abhängigkeit des Abstands x vom Kontaktpunkt in Längsrichtung ergibt sich also für die laterale Auslenkung

$$v = (a - x) \tan(\alpha) \quad (4.35)$$

Für den Fall, dass kein Gleitgebiet im Kontaktgebiet vorhanden ist, wird die Seitenkraft F_y mit der Quersteifigkeit c_{py} der Kontaktflächenelemente pro Längeneinheit durch das Integral über die Länge der Aufstandsfläche des Reifens berechnet.

$$F_y = \int_{-a}^a c_{py} v dx = 2c_{py} a^2 \alpha \quad (4.36)$$

Eine Integration des Produktes aus der Seitenkraft und deren Hebelsarm zur Mitte der Aufstandsfläche (Punkt C in Abbildung 4.14) über die Länge der Aufstandsfläche des Reifens ergibt das Rückstellmoment in Glg. 4.37. Dabei resultiert der pneumatische Nachlauf zu $t_p = \frac{a}{3}$.

$$M_z = \int_{-a}^a c_{py} v x dx = -\frac{2}{3} c_{py} a^3 \alpha = -C_{M\alpha} \alpha \quad (4.37)$$

Die maximal mögliche Auslenkung der Elemente hängt vom Reibungskoeffizienten μ und der Druckverteilung im Reifenlatsch, welche in [50] parabolisch angenommen wird, ab. Für die Aufstandskraft pro Längeneinheit q_z ergibt sich dann

$$q_z = \frac{3F_z}{4a} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] \quad (4.38)$$

Mit dem Reibungskoeffizienten μ wird die maximal mögliche Seitenkraft pro Längeneinheit am Reifen in Abhängigkeit von der Position x auf der Kontaktfläche

(vgl. Abbildung 4.14) zu

$$|q_{y,max}| = \mu q_z = \frac{3}{4} \mu F_z \frac{a^2 - x^2}{a^3} \quad (4.39)$$

Nach Abbildung 4.14 nimmt die laterale Auslenkung der Bürstenelemente mit dem Abstand vom Anfangspunkt des Kontaktgebiets linear zu, wobei die Kontaktlinie parallel zum aktuellen Geschwindigkeitsvektor ist. Sobald diese Auslenkung die maximal mögliche Auslenkung $v_{max} = |q_{y,max}|/c_{py}$ schneidet, beginnt die Gleitzone im Kontaktgebiet (vgl. Abbildung 4.14). Letztere nimmt mit zunehmendem Schräglaufwinkel zu bis sich bei $\alpha = \alpha_{sl}$ die Gleitzone über das gesamte Kontaktgebiet ausgebreitet hat und somit vollständiges Gleiten besteht. Für die vollständige Berechnung von Seitenkraft und Rückstellmoment sei auf den Anhang A.1 verwiesen.

Im folgenden Abschnitt wird der Reifen nur unter alleiniger Einwirkung von Spin betrachtet, wobei die Modellbildung vorerst unter Annahme eines dreidimensionalen Reifens – die Breite der Aufstandsfläche (2b) wird also auch mitberücksichtigt – erfolgt.

Die Seitenkraft ergibt sich aus der Quersteifigkeit c'_{py} der Reifens pro Flächeneinheit und der Querdeformation v des Reifens, hervorgerufen durch den Spin φ . Eine Integration dieses Produktes über die gesamte Aufstandsfläche, welche hier als rechteckförmig mit der Länge $2a$ und Breite $2b$ angenommen wurde, ergibt die Seitenkraft

$$F_y = \int_{-a}^a \int_{-b}^b c'_{py} v dy dx = \frac{4}{3} c'_{py} a^3 b \varphi = C_{F\varphi} \varphi \quad (4.40)$$

mit

$$v = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\varphi \quad (4.41)$$

Analoge Vorgehensweise ergibt mit der Deformation des Reifens u in Längsrichtung und der Längssteifigkeit der Reifens c'_{px} pro Flächeneinheit das Moment

$$M_z = \int_{-a}^a \int_{-b}^b c'_{px} u dy dx = \frac{4}{3} c'_{px} a^2 b^3 \varphi = C_{M\varphi} \varphi \quad (4.42)$$

mit

$$u = -y(a - x)\varphi \quad (4.43)$$

Nachdem die Querdeformation des Reifens zufolge Spin eine symmetrische Verteilung im Latsch aufweist, schließt Pacejka daraus, dass das Moment M_z durch den Längsschlupf im Reifen erzeugt wird. Hierzu schreibt er: *“The generation of the moment may be explained by considering three wheels rigidly connected to each other, mounted on one axle. The wheels rotate at the same rate but in a curve the wheel centers travel different distances in a given time interval and, when cambered, these distances are equal but the effective rolling radii are different. In both situations, opposite longitudinal slip occurs, which results in a braked and a driven wheel [...] and consequently in a couple M_z .”*[50]

Obige Gleichungen wurden unter der Annahme erstellt, dass kein Gleiten im Kontaktgebiet des Reifens mit der Fahrbahn auftritt.

Die Berücksichtigung eines Gleitgebietes würde für den dreidimensionalen Reifen

mit einem einfachen Modell, wie es hier betrachtet wird, zu komplexen Gleichungen führen, wofür Pacejka auf ein Reifenmodell verweist, das auf einer Simulation der Deformation einzelner Profilelemente basiert, während diese das Kontaktgebiet durchlaufen. Dabei werden Einflussfaktoren wie beispielsweise die Druckverteilung im Reifenlatsch, eine Kombination von Längs-, Quer- und Bohrschlupf sowie Sturzwinkel des Reifens berücksichtigt.

Um die Unterscheidung zwischen Haft- und Gleitgebiet im Reifenlatsch zu berücksichtigen und in weiterer Folge die Seitenkraft und das Rückstellmoment zufolge einer Kombination aus Schräglauf- und Spin zu beschreiben, wird nun für die folgenden Betrachtungen das zweidimensionale Reifenmodell mit verschwindender Breite ($b = 0$) betrachtet.

Damit ergibt sich mit der Quersteifigkeit c_{py} des Reifens pro Längeneinheit für die Seitenkraft zufolge Spin

$$F_y = \int_{-a}^a c_{py} v dx = \frac{2}{3} c_{py} a^3 \varphi = C_{F\varphi} \varphi \quad (4.44)$$

Das Rückstellmoment zufolge Spin, dessen Entstehung zuvor mit dem entgegengerichteten Längsschlupf links und rechts der Reifenmittelebene erklärt wurde, entfällt nun durch die verschwindende Reifenbreite. Ein detaillierter Gleichungssatz, in dem zwischen Haften und Gleiten $\alpha = \alpha_{sl}$ unterschieden wird, ist in Anhang A.1 angeführt.

Eine Gegenüberstellung der Gleichung für das Rückstellmoment M_z zufolge eines Schräglaufwinkels α (4.37) und der Gleichung für die Seitenkraft F_y zufolge Spin (4.44) am zweidimensionalen Reifenmodell zeigt

$$\frac{2}{3} c_{py} a^3 = C_{F\varphi} = C_{M\alpha} \quad (4.45)$$

Mit der Gleichung (4.26) gilt außerdem

$$C_{F\varphi} = \frac{r_e}{1 - \epsilon_\gamma} C_{F\gamma} = C_{M\alpha} \quad (4.46)$$

Nachdem die Messwerte für $C_{M\alpha}$ und $C_{F\gamma}$ aus [14] vorliegen und ϵ_γ für Motorradreifen und somit auch Fahrradreifen näherungsweise null ist [50], kann der formale Zusammenhang zwischen $C_{M\alpha}$ und $C_{F\varphi}$ bzw. $C_{F\gamma}$ durch die Messwerte von Fahrradreifen überprüft werden. Leider erfüllten die verwendeten Werte den Zusammenhang in Glg. (4.46) nicht. Beispielsweise ergibt sich für die vorliegenden Reifenmodelle (vgl. Tabelle 4.1) für den Vorderreifen des Touringrad-Reifenmodells aus [45] $\epsilon_\gamma = -0.195$, mit den Parameterwerten für das Touringrad aus [25] $\epsilon_\gamma = 0.162$. Auch Pacejka [49] erwähnt in diesem Zusammenhang eine Diskrepanz zwischen dem theoretischen Zusammenhang dieser beiden Werte und den zugehörigen Messwerten und erklärt, dass dieser Diskrepanz durch eine Modellerweiterung, welche sich durch das Moment zufolge der Torsion des Gürtels in Form eines Moments M_z^* zeigt, Abhilfe geschaffen werden kann.

Dieses Moment entsteht durch die Berücksichtigung der Laufflächenbreite, wodurch sich mit der Steifigkeit nur aus Längsdeformationen $C_{M\varphi^*}$ und der Torsions-

steifigkeit c_ψ des unteren Teil des Gürtels folgende Zusammenhänge ergeben

$$C_{F\varphi} = C_{M\alpha} + \frac{C_{F\alpha}C_{M\varphi}^*}{c_\psi} \quad (4.47)$$

$$C_{M\varphi} = C_{M\varphi}^* - \frac{C_{M\alpha}C_{M\varphi}^*}{c_\psi} \quad (4.48)$$

Allerdings ist eine Weiterverwendung dieser Zusammenhänge aus der Literatur für das Bürstenmodell unter Kombination aus Schräglaufwinkel und Spin bis dato nicht bekannt.

Für die Gleichungen des Bürstenmodells am Fahrradreifen (angeführt in Anhang A.1) wurde jedenfalls der Zusammenhang $C_{F\varphi} = C_{F\gamma} \frac{r_e}{1-\epsilon_\gamma}$ (und $\epsilon_\gamma = 0$) angewendet, nachdem lediglich Messwerte für $C_{F\gamma}$ und $C_{M\gamma}$ vorliegen.

Für die Anwendung des Reifenmodells am Fahrrad ist es interessant, sowohl Schräglaufwinkel, als auch Spin in den Gleichungen der Reifenkräfte bzw. -momente zu beachten. Für eine Kombination aus Schräglauf- und Spinmodell wird die Latschbreite in [50] vernachlässigt, sodass im Endeffekt auch das *residual torque* M_{zr} durch Verformungen in Längsrichtung, außer Acht gelassen wird. Durch eine Berücksichtigung dieses Torsionsmoments würde als Folgeeffekt der effektive Schräglaufwinkel vergrößert werden und müsste zusätzlich in die Formel für die Seitenkraft und das Rückstellmoment eingehen.

Um die Reifenkräfte bzw. Momente in Kombination aus Schräglaufwinkel und Spin zu beschreiben, verweist Pacejka auf zwei Modelle: einerseits das zweidimensionale Bürstenmodell, welches mit vergleichsweise einfachen Formeln für die Stationärwerte auch den nichtlinearen Bereich abdeckt und für eine Kombination aus Spin und Schräglaufwinkel verwendet werden kann. Andererseits wird zur Einbindung der Laufflächenbreite und somit des *residual torque* auf das so genannte *”stretched-string-based tire model”* verwiesen. Allerdings stellt dieses Modell lediglich den linearen Zusammenhang zwischen der Eingangs- und Ausgangsgröße dar.

Magic Formula Mit dem Bürstenmodell ist es zwar möglich, die nichtlineare Charakteristik der Seitenkraft und des Rückstellmoments vergleichsweise einfach abzubilden, allerdings können mit der *Magic Formula* [50] durch Approximation von empirisch ermittelten Werten, auch Effekte mit einbezogen werden, die dieses Bürstenmodell aufgrund der Modellbildung nicht abbilden kann (z.B. *residual torque*). Die Gleichungen erfordern allerdings eine Vielzahl an Parametern, deren Ermittlung mitunter eine Schwierigkeit darstellt.

Bei Reifenmodellen für Auto- bzw. LKW-Reifen spielt der Sturzwinkel nur eine untergeordnete Rolle, für Motorradreifen (bzw. auch Fahrradreifen), bei denen allerdings größere Sturzwinkel auftreten und hier auch der Einfluss von Bohrschlupf in Betracht gezogen werden muss, steht eine Erweiterung der Gleichungen zur Verfügung.

Die Auswirkungen des Spin (Sturzwinkel und Bohrschlupf) werden in der erweiterten Version der *Magic Formula* durch Faktoren ξ_i berücksichtigt. Die detaillierten Gleichungen der Stationärwerte der erweiterten Magic Formula sowie im Vergleich

dazu die vereinfachte Version (siehe [13]) sind Anhang A.2 zu entnehmen. Für die Verwendung des *Magic Formula*-Modells sei angemerkt, dass im gegenwärtigen Modell Einflüsse, wie Konizität und verschiedene Reifendrucke nicht berücksichtigt wurden und der Reibungskoeffizient zwischen Reifen und Fahrbahn als konstant angenommen wurde.

Um Ausgabewerte der *Magic Formula* mit dem Einlaufverhalten der Kräfte und Momente am Reifen zu vereinen, reicht es nach [50] nicht aus, die nichtlinearen Stationärwerte der Seitenkraft in Abhängigkeit vom momentanen Schräglaufwinkel in eine Gleichung der Form (4.49) einzusetzen, da aufgrund des Phasenverzugs der Seitenkraft Werte ermittelt werden könnten, die nicht mit der aktuellen Radlast korrelieren.

$$\sigma_\alpha \frac{dF'_y}{dt} + |V_x|F'_y = |V_x|F_y \quad (4.49)$$

Diese Herangehensweise könnte allerdings dazu führen, dass an der Haftgrenze angenommen wird, dass noch ein Haftgebiet vorhanden ist, während aber bereits vollständiges Gleiten auftritt.

Eine bessere Methode – welche auch in der vorliegenden Arbeit angewandt wurde – ist, die transienten Größen α' , γ' , φ' , κ' für Schräglauf-, Sturzwinkel, Spin und Längsschlupf aus den zugehörigen Differentialgleichungen (vgl. dazu Kapitel 4.2.1.1) in die Gleichungen der *Magic Formula* einzusetzen.

$$F_x = F_x(\kappa', \alpha', F_z) \quad (4.50)$$

$$F_y = F_y(\alpha', \gamma', \kappa', F_z) \quad \text{bzw.} \quad F_y(\alpha', \varphi', \kappa', F_z) \quad (4.51)$$

$$M'_z = -t_\alpha F_y \quad (4.52)$$

$$M_{zr} = M_{zr}(\gamma, \alpha', \kappa', F_z) \quad \text{bzw.} \quad M_{zr}(\varphi, \alpha', \kappa', F_z) \quad (4.53)$$

$$M_z = M'_z + M_{zr} + sF_x \quad (4.54)$$

Residual Torque Während die physikalische Erklärung des Rückstellmoments zufolge eines reinen Schräglaufwinkelsprungs sowie dessen mathematische Formulierung plausibel erscheinen, fehlt noch eine Erklärung der Auswirkungen von Spin/Sturzwinkel auf das Rückstellmoment. Dabei stellt sich einerseits die Frage nach dem physikalischen Entstehungsmechanismus dieses Moments, andererseits besteht Unklarheit über den zeitlichen Verlauf der Seitenkraft bzw. des Moments am Reifen.

Das Rückstellmoment zufolge (hinreichend kleiner) Schräglaufwinkel und Sturz setzt sich dabei aus dem Moment M'_z , das bereits unter alleiniger Wirkung des Schräglaufwinkels entsteht, und einem Restmoment (*"residual torque"*) zusammen. Im Zuge der Erklärung der Reifencharakteristik mit Hilfe der *similarity method* [50], stellt Pacejka die beiden Graphen der Seitenkraft und des Reifenmoments, wenn entweder nur ein Schräglaufwinkel, oder eine Kombination aus Schräglauf und Sturzwinkel wirkt, gegenüber und erklärt den Übergang schrittweise (vgl. Abbildung 4.15). Dabei zeigt sich, dass die Momentenkurve im $F_y - \alpha$ -Diagramm durch den zusätzlich eingerechneten Sturzwinkel um $S_{Hy} = \frac{C_{F\gamma}(F_z)}{C_{M\alpha}(F_z)}\gamma$ nach links verschoben wird. Dieser zusätzliche Sturzwinkel bewirkt, dass an der Stelle $\alpha = 0$ bereits eine Seitenkraft (jene zufolge γ) wirkt. Durch den Versatz der Seitenkraftkurve nach links wird auch die Momentenkurve nach links verschoben, sodass

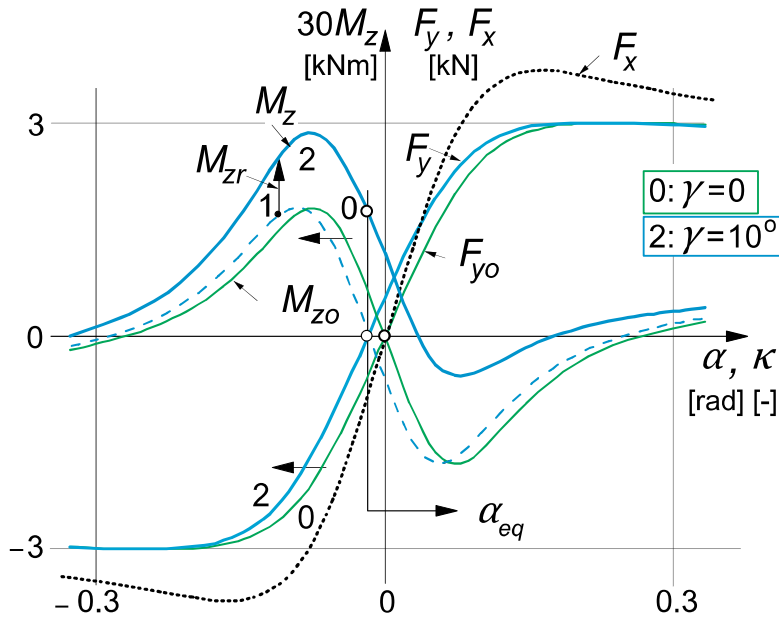


Abbildung 4.15: Darstellung der Seitenkraft F_y und des Rückstellmoments M_z über dem Schräglaufwinkel bei einem zusätzlichen Sturzwinkel, Fig.4.5 aus [50] adaptiert

beide Kurven wieder den gleichen Nulldurchgang besitzen und an der Stelle $\alpha = 0$ das Rückstellmoment den Wert $-C_{M\alpha}S_{Hy}$ hat (vgl. unterbrochene blaue Linie in Abbildung 4.15). Messungen ergaben aber an der Stelle des Nulldurchgangs der Seitenkraftkurve ein positives Moment, wodurch die nach links verschobene Momentenkurve auch noch vertikal verschoben werden muss (vgl. Übergang von unterbrochener zu voller Momentenkurve in Abbildung 4.15). Somit ergibt sich für den vertikalen Versatz der Momentenkurve

$$S_{Vz} = C_{M\gamma}\gamma + C_{M\alpha}S_{Hy}$$

Hierzu schreibt Pacejka: *"This additional moment corresponds to the so-called residual torque M_{zr} , which is the moment that remains when the side force becomes equal to zero."*

Später schreibt Pacejka: *"...the aligning torque caused by camber at zero slip angle is attributed to the residual torque M_{zr} and to the counteracting moment equal to the aligning stiffness $C_{M\alpha}$ times the camber induced slip angle $\Delta\alpha_\gamma$ which is the same as $-t_\alpha F_y$ at $\alpha = 0$ "*

Transientes Verhalten zufolge eines Sturzwinkelsprungs Die oben betrachteten Werte beziehen sich auf die stationären Werte der Reifenkraft bzw. des Rückstellmoments.

Das transiente Verhalten des Reifens zufolge eines Sturzwinkelsprungs, hier vor allem die Entstehung des Rückstellmoments, ist allerdings auch noch nicht restlos geklärt.

Anhand des *"single-contact-point transient tire model"* erklärt Pacejka [50] den

Verlauf des Moments nach einem Sturzwinkelsprung ähnlich jenem nach einer Änderung des Bohrschlupfes durch zwei Phänomene. Einem *residual torque*, das durch die Modellierung der Breite des Latsches entsteht und in erster Näherung sofort wirkt, wird ein weiteres Moment überlagert, das mit einer Einlauflänge, die σ_α entspricht, aufgebaut wird. Die physikalische Erklärung für dieses Verhalten basiert auf der Annahme, dass das *residual torque* M_{zr} , welches mit sofortiger Wirkung eine Torsion des Gürtels herbeiführt, einen zusätzlichen Schräglaufwinkel im Reifen (*camber induced slip angle*) bewirkt. Dadurch entsteht wiederum eine Seitenkraft, die dieses entgegengerichtete Moment produziert.

Vergleich der Reifenmodelle Für das nichtlineare Modell des Fahrrades wurden nun drei wesentliche Modelle gewählt, um das Systemverhalten nach Stabilitätsverlust zu untersuchen. Das *Brush*-Modell vernachlässigt zwar die Breite des Reifens, die Auswirkungen des Sättigungsbereiches der Seitenkraft, sowie das nichtlineare Verhalten des Rückstellmoments in Abhängigkeit von Schräglaufwinkel und Spin auf das Systemverhalten des Modells, sind mit diesem Modell allerdings gut abzubilden. Die Plausibilität der Kräfte bzw. Momente ist aufgrund der wenigen, auf Messwerten basierenden Parameter gegeben, sodass das Bürstenmodell und das bisherige lineare Reifenmodell bei kleinen Schräglauf- bzw. Spinwerten übereinstimmen. Die große Anzahl an geforderten Modellparametern der *simplified* sowie *extended Magic Formula* kann durch Anpassung an die Werte des Bürstenmodells identifiziert werden. Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils den Verlauf der Stationärwerte der Längskraft (Abb. 4.16) in Abhängigkeit vom Längsschlupf bzw. der Seitenkraft (Abb. 4.17) und des Rückstellmoments 4.18 jeweils über dem Schräglaufwinkel und teils bei verschiedenen Sturzwinkel an einem Rennradreifen. Für hinreichend kleine Winkel stimmen die nichtlinearen Modelle gut mit dem linearen Reifenmodell aus Abschnitt 4.2.1.1 überein.

In Abbildung 4.18 ist deutlich erkennbar, dass das *residual torque* für das Bürstenmodell aufgrund der Modellvereinfachung zu $b = 0$ ausbleibt, wodurch dessen vertikaler Versatz bei $\alpha = 0$ nicht vorhanden ist. Außerdem verschwindet das Rückstellmoment für große Schräglaufwinkel durch die im Modell symmetrisch verteilte laterale Auslenkung der Bürstenelemente in der Kontaktfläche, was bei dem *Magic Formula* Modell nicht der Fall ist. Zur Implementierung transienter Größen in die Modelle werden unabhängig vom verwendeten Reifenmodell zuerst über die Differentialgleichungen erster Ordnung die transienten Größen α' , γ' bzw. φ' ermittelt, diese gehen erst anschließend in die Gleichungen für die Seitenkraft und das Rückstellmoment ein.

Die Längskraft geht allerdings unverzögert in die Modellgleichungen ein.

4.2.2.2 Reifen–Fahrbahn Kontakt

Die Übertragung der Kräfte und Momente zwischen Fahrbahn und Reifen erfolgt am linearen Modell über einen fiktiven Reifenkontaktpunkt zwischen Reifen und Fahrbahn, welcher stets in Reifenmittelebene angenommen wird (vgl. Abbildung 4.1). Um bei auftretenden Sturzwinkeln die kurveninnenseitige Verlagerung dieses Aufstandspunktes am Reifen zu berücksichtigen, müssen im linearen Modell

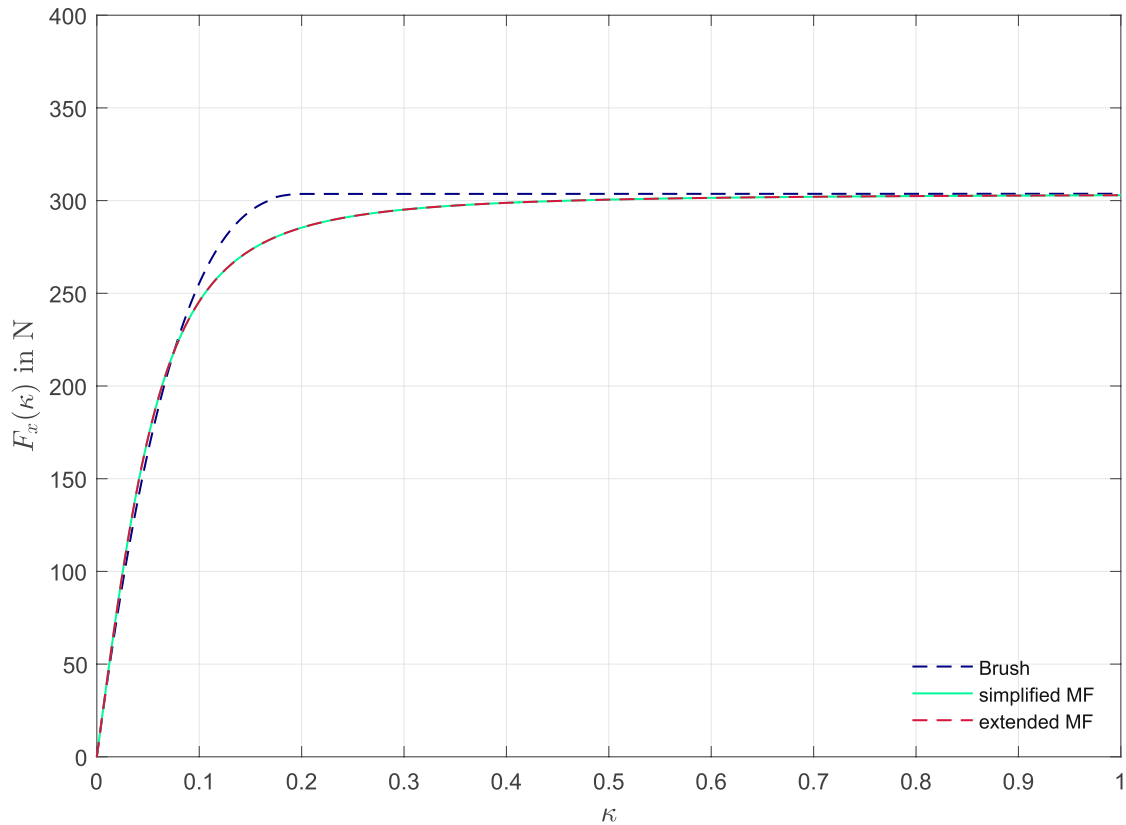


Abbildung 4.16: Längskraft in Abhängigkeit vom Längsschlupf, $F_z = 303.7\text{N}$

Reduktionsmomente der Reifenkräfte berücksichtigt werden.

Die Modellbildung des nichtlinearen MKS-Modells berücksichtigt diese Verlagerung des Reifenkontaktpunktes durch ein Markerelement. Abbildung 4.19 zeigt die beiden dafür notwendigen Marker. Während sich der Marker M_{Boden} in Fahrbahnebene bewegen kann und dessen z -Achse stets mit dem Normalvektor auf die Fahrbahnebene zusammenfällt, wird der zweite Marker M_{Reifen} stets so ausgerichtet, dass dessen z -Achse parallel zur z -Achse des M_{Boden} -Markers liegt. Dabei befindet sich der Ursprung des Markers M_{Reifen} stets auf der Oberfläche des undeformierten Reifens.

Zusätzlich wird vertikales Einfedern des Reifens durch dessen Belastung abgebildet indem ein lineares Feder-Dämpferelement in z -Richtung zwischen den beiden Kontaktmarkern installiert wurde. Die Einfederung ist in Abbildung 4.19 mit d_z beschrieben.

Die somit vorhandene Normalkraft besteht allerdings nur, solange $d_z > 0$ (Einfedern). Sollte der Reifen während dynamischer Simulationen von der Fahrbahn abheben, so würde die Normalkraft zu Null gesetzt.

Nachdem die Reifenkräfte und -momente bezüglich des Ursprungs des Markers M_{Reifen} berechnet wurden, aber in der Fahrbahnebene am eingefederten Reifen wirken, wurden im MKS-Modell zusätzlich Reduktionsmomente der Reifenkräfte bezüglich des Ursprungs des Markers M_{Boden} berücksichtigt.

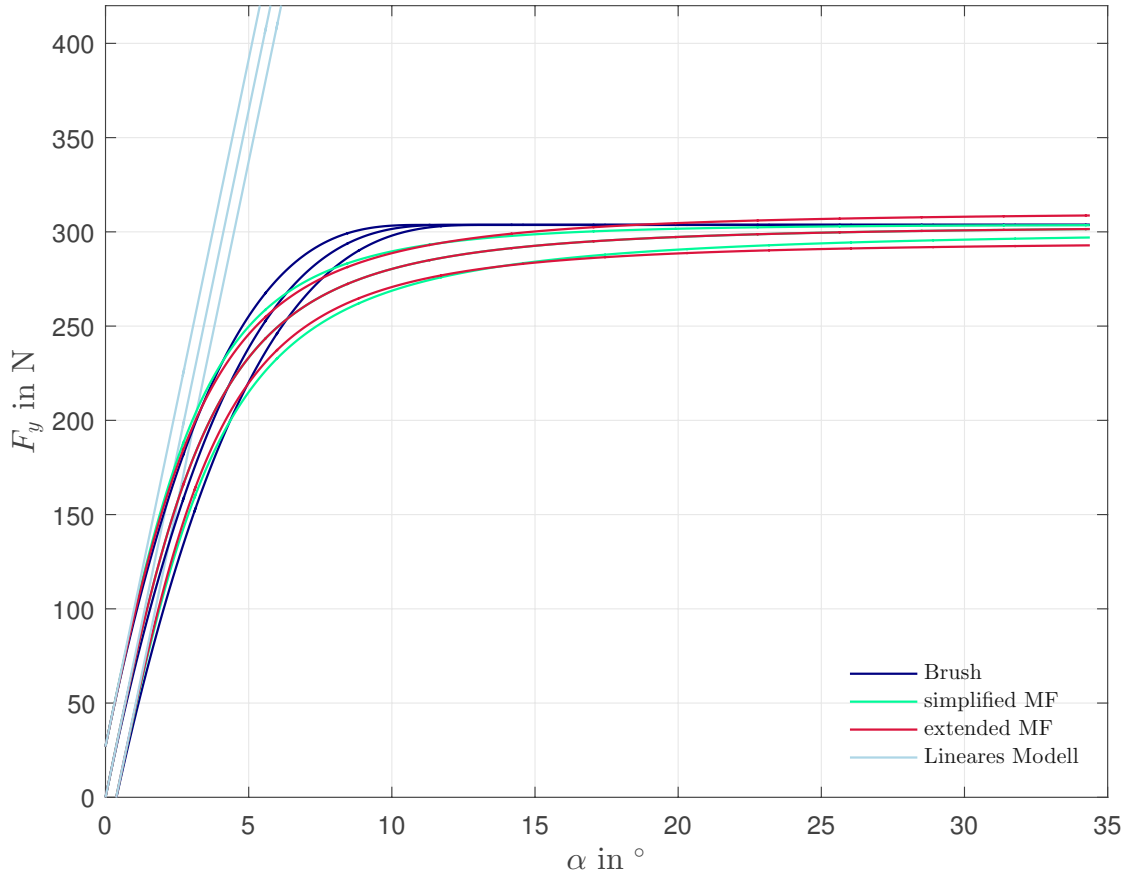


Abbildung 4.17: Seitenkraft in Abhängigkeit von Schräglauf- und Sturzwinkel;
 $F_z = 303.7\text{N}$; $\gamma = [-20^\circ 0^\circ 20^\circ]$

4.2.2.3 geneigte Fahrbahn - Luftwiderstand

Am vollständig nichtlinearen Modell kann die Längsgeschwindigkeit des Fahrrades nun nicht mehr als Parameter angesehen werden, da die Kopplung von Längs- und Querdynamik nun vorhanden ist. Um einen Überblick über das Stabilitätsverhalten des Fahrrades zu erhalten ist es aber hilfreich, dieses über der konstanten Fahrgeschwindigkeit – analog zum linearen Modell – abzubilden.

An einem Motorradmodell, wie beispielsweise in [36], wird die Vorwärtsgeschwindigkeit durch einen Regelalgorithmus des Antriebsmomentes konstant gehalten. Somit kann als Bifurkationsparameter die Sollgeschwindigkeit des Fahrzeuges verwendet werden. Am Fahrrad erscheint eine solche Herangehensweise allerdings weniger sinnvoll.

Um aber dennoch eine konstante Fahrgeschwindigkeit gewährleisten zu können, wurde die Annahme getroffen, dass das Fahrrad einen Hang mit konstanter Neigung ζ abwärts fährt. So steht der hangabwärts gerichtete Teil der Gewichtskraft als konstante Antriebskraft zu Verfügung. Um eine konstante Fahrgeschwindigkeit zu gewährleisten, wird der Luftwiderstand im Gesamtschwerpunkt eingeführt. Durch diesen Angriffspunkt des zu einer Einzelkraft zusammengefassten Luftwiderstandes werden die Auswirkungen eines Momentes aus den Stabilitätsuntersuchungen ausgeschlossen. Somit stellt sich bei ungestörter Geradeausfahrt eine

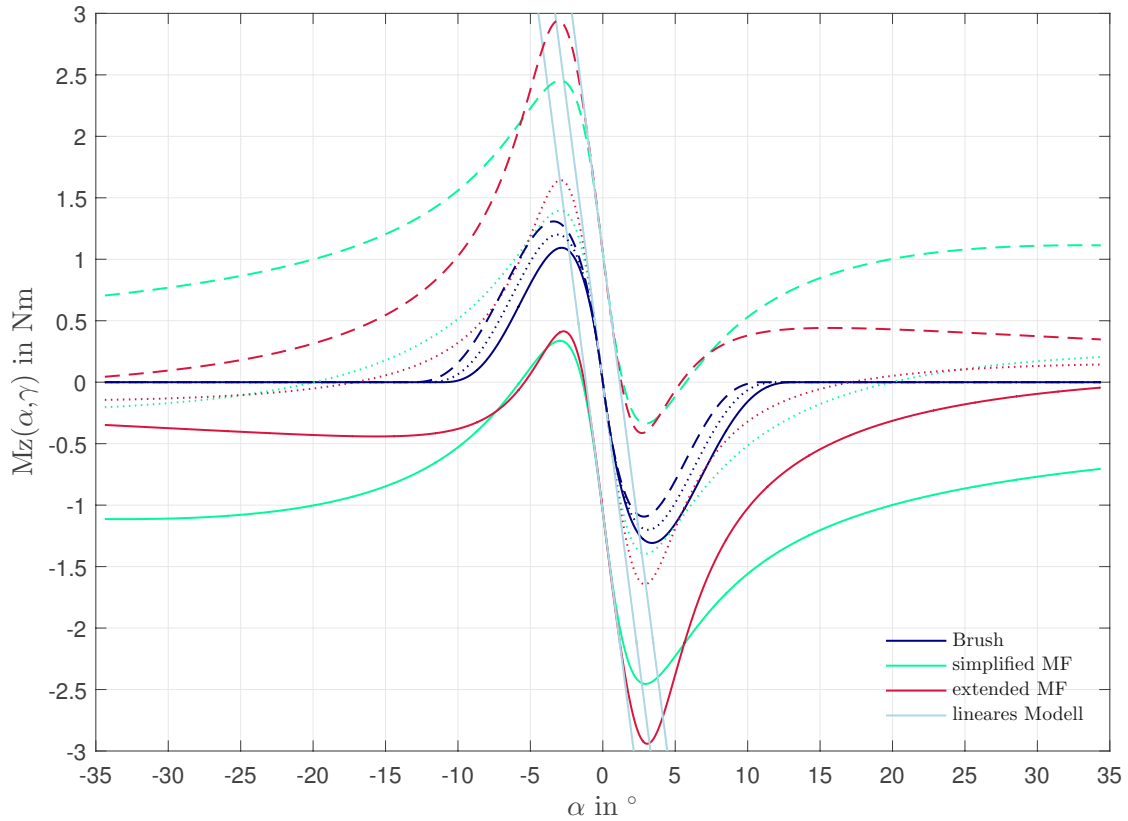


Abbildung 4.18: Rückstellmoment in Abhängigkeit von Schräglauf- und Sturzwinkel; $F_z = 303.7\text{N}$; $\gamma = [-20^\circ 0^\circ 20^\circ]$

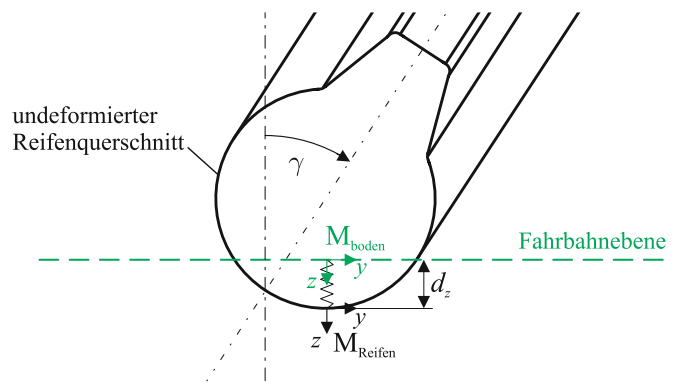


Abbildung 4.19: Markerpositionen im Reifen–Bodenkontakt am gestürzten Rad

konstante Fahrgeschwindigkeit ein, sobald die hangabwärts gerichtete Komponente der Gewichtskraft mit der Luftkraft und den Längskräften im Reifenkontaktpunkt im Gleichgewicht ist.

Wird nun der instabile Mode des Lenksystems nach einer äußeren Störung angefacht, so wird ein Teil der antreibenden, hangabwärts gerichteten Gewichtskraftkomponente zur Erhaltung der auftretenden Schwingung verwendet und das Fahrrad dadurch verzögert, bis sich erneut ein Gleichgewicht einstellt. Die Modellierung des Luftwiderstandes orientiert sich dabei an Herangehensweisen aus der Literatur.

Cooper [6] hat beispielsweise mittels praktischen Versuchen am Motorrad gezeigt, dass die einflussreichste aerodynamische Größe auf das Verhalten eines Motorrades der Luftwiderstand in Fahrzeuglängsrichtung ist. Meist wird diese Kraft in einem Druckpunkt, in Fahrzeuglängsrichtung wirkend, angenommen. Auch Pacejka hat in [50] den Luftwiderstand nur in Längsrichtung des Motorrades eingerechnet, und die Auswirkungen auf die Radlastverteilung und die Reifenlängskräfte mit berücksichtigt.

In [37] wurde der Luftwiderstand in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit eines Druckpunktes am Rahmen gegenüber der Umgebung ermittelt und unter anderem auch der Einfluss des Luftwiderstandes auf die Stabilität eines nichtlinearen Motorradmodells analysiert. In diesem Modell bewirkt der Luftwiderstand eine zusätzliche Dämpfungskraft in laterale Richtung sowie ein zusätzliches Nickmoment, das sich aufgrund der Modellbildung der Lenkeinheit mit einer Teleskopgabel auf den Lenkachsenwinkel auswirkt. Außerdem wird die einhergehende Aufstandskraftänderung mit berücksichtigt, was sich aufgrund des verwendeten Reifenmodells unter anderem auch auf die Einlaufängen auswirkt.

Sharp untersuchte in [68] die Sensitivität der charakteristischen Eigenmoden eines Motorrades auf diverse Parameteränderungen, darunter auch den Luftwiderstand. Das mechanische Ersatzmodell beinhaltet den Fahrer, sowohl bei freihändiger Fahrt, als auch bei Anbindung der Arme und Hände an das Lenksystem. Der Luftwiderstand wurde dabei wieder als Funktion des Quadrates der Längsgeschwindigkeit eingerechnet und wirkt in einem Druckpunkt auf dem Rahmen. Eine Aufteilung des Luftwiderstandes auf Lenksystem und Rahmen, hat im Vergleich zu einer in einem Druckpunkt zusammengefassten Kraft keine Veränderungen des Systemverhaltens gezeigt.

Für das gegenwärtige nichtlineare MKS-Modell des Fahrrades ist der Luftwiderstand wie bereits erwähnt durch eine Einzelkraft in Fahrzeuglängsebene modelliert, deren Kraftangriffspunkt mit dem Gesamtschwerpunkt des Systems zusammenfällt.

$$F_{drag} = \rho_L C_{dA} \frac{u^2}{2} \quad (4.55)$$

Die Geschwindigkeit u beschreibt dabei die Geschwindigkeitskomponente in Fahrzeuglängsrichtung, $\rho_L = 1.184\text{kg/m}^3$ die Dichte der Luft und C_{dA} das Produkt aus der Luftangriffsfläche und dem konstanten Luftwiderstandsbeiwert. Für einen aufrecht sitzenden Fahrer, wie es beispielsweise durch die Sitzposition am Touringrad üblich ist, ist der Wert $C_{dA} = 0.4\text{m}^2$ freilich größer, als für einen gebeugten Fahrer am Rennrad mit $C_{dA} = 0.3168\text{m}^2$. Beide Werte wurden [78] entnommen.

Aufgrund von Coopers Erkenntnissen sowie häufig angewandten Methoden zur Einrechnung des Luftwiderstandes in Modelle von Motorrädern ([37], [50]) werden also die Seiten- und Auftriebskraft durch aerodynamische Effekte vernachlässigt. Durch die Deckungsgleichheit von Kraftangriffspunkt des Luftwiderstandes und dem Gesamtschwerpunkt des Systems entsteht allerdings kein zusätzliches Nickmoment.

Zu berücksichtigen ist allerdings, dass selbst diese einfache Annahme des Luftwiderstandes das Systemverhalten verändern wird, da sich andere Radlasten ein-

stellen werden, wodurch sich in weiterer Folge der gesamte Parametersatz der Reifenmodelle ändern wird.

4.2.2.4 Bifurkationsdiagramme

Die Stabilitätsanalyse des nichtlinearen Modells erfolgt in dieser Arbeit mittels Bifurkationsdiagrammen um die Amplitude des Lenkwinkels nach einem Verzweigungspunkt über der Fahrgeschwindigkeit abzubilden, wobei die Hangneigung den eigentlichen Bifurkationsparameter bildet.

Auf dem Gebiet der Dynamik einspuriger Fahrzeuge untersuchten Meijaard und Popov in [36] die Stabilität eines nichtlinearen Motorradmodells. Das bereits zuvor vorhandene Motorradmodell von Sharp [65] wurde dabei mit einem nichtlinearen Reifenmodell mit den Eingangsgrößen Quer- und Längsschlupf, sowie Spin erweitert. Der Reifen selbst wurde als Torus modelliert. Die Reifenkräfte und Momente wirken verzögert mit einer radlastabhängigen Einlaufänge.

Der Fahrerkörper wird dem Rahmen zugerechnet und ist starr an diesen angebunden. Eine Verbindung der Fahrerarme zum Lenksystem wurde in diesem Modell jedoch nicht abgebildet.

Die symbolischen Bewegungsgleichungen wurden mittels AutoSim generiert und an ein numerisches Fortsetzungsprogramm AUTO, das eine eingeschränkte Bifurkationsanalyse von autonomen Differentialgleichungssystemen durchführen kann, übergeben.

Dabei wurde das Modell während aufrechter Geradeausfahrt sowie bei stationärer Kurvenfahrt analysiert und die auftretenden Bifurkationen sowie deren Lösungskurven dargestellt.

Einige Modellerweiterungen folgten in [38] am Reifenmodell sowie der Geometrie des Reifenquerschnitts.

In [39] wurde das Motorradmodell um flexible Radaufhängungen vorne und hinten sowie den Luftwiderstand in Form einer geschwindigkeitsabhängigen Einzelkraft am Rahmen erweitert. Anhand von Bifurkationsdiagrammen, deren Bifurkationsparameter die Vorwärtsgeschwindigkeit ist, konnten Wobble- und Weaveschwingungen in Form von Grenzyklen ermittelt werden und unter anderem auch der Einfluss des Luftwiderstandes auf diese beiden Moden dargestellt werden. Dabei verkleinert sich der instabile Bereich des Wobblemodes im Vergleich zu einem Modell ohne Luftwiderstand. Auf den Weavemode konnte ein gegenteiliger Effekt beobachtet werden. Dieses Verhalten korreliert übrigens auch mit Beobachtungen von Pacejka in [50] während der Analyse der linearen Bewegungsgleichungen des Motorradmodells.

Nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen am Rennrad wurden in [74] durchgeführt. Das Modell bildet einen Rennradfahrer in einer typischen Sitzposition am Rennrad ab, wobei in diesem Modell die Hände an den Lenker gebunden wurden. Die Parameterwerte sowie die Bewegungsgleichungen wurden in linearer Form aus [26] übernommen. Einzige Erweiterung und damit auch Nichtlinearität des Modells ist die Charakteristik der Reifenkräfte und –momente, welche als nichtlineare Funktionen der beiden Eingangsgrößen, dem Schräglauf- und Sturzwinkel implementiert wurden. Schon alleine die Einbindung nichtlinearer Funktionen der Reifenkräfte und –momente reicht aus, um einen Grenzyklus des Wobblemodes zu beobachten.

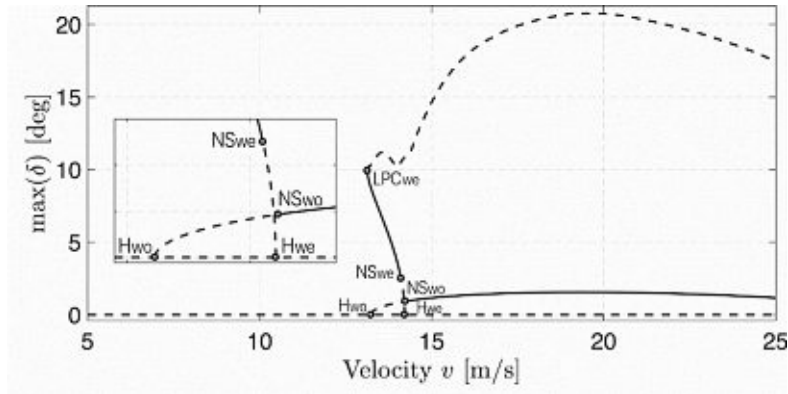


Abbildung 4.20: Bifurkationsdiagramm aus [74]: Lenkwinkelamplitude über Fahrgeschwindigkeit

Als Bifurkationsparameter in Abbildung 4.20 wurde die Vorwärtsgeschwindigkeit des Fahrrades gewählt. Diese Vorgehensweise ist allerdings nur aufgrund der noch immer vorausgesetzten geometrischen Linearität des Modells möglich.

Entlang der Gleichgewichtskurve treten zwei superkritische Hopfverzweigungspunkte auf (für Weave- und Wobblemode). Ausgehend von H_{W_0} setzt sich ein instabiler Grenzyklus fort, der bei NS_{W_0} in einen stabilen Grenzyklus übergeht. Ab diesem Punkt kann eine Wobbleschwingung mit konstanter Amplitude beobachtet werden. Im Geschwindigkeitsbereich zwischen den beiden Neimark-Sacker-Bifurkationen (NS_{W_0} und NS_{W_e}) befindet sich ein stabiler Torus, charakterisiert durch eine so genannte "Mode-Interaction", wobei sich die beiden Moden Weave und Wobble gegenseitig beeinflussen. Gerade aber bei der Fortsetzung des Weavemode zeigen sich bei der Abbildung des Lenkwinkels (Abbildung 4.20) Winkelamplituden, die die Annahme der geometrischen Linearität als fragwürdig erscheinen lassen.

Ein Zwei-Parameter-Bifurkationsdiagramm, wie in Abbildung 4.21, zeigt die Abhängigkeit des Systemverhaltens von der Drehfedersteifigkeit im Drehgelenk β (hier mit k_β bezeichnet) und der Fahrgeschwindigkeit, hier v . Einen charakteristischen

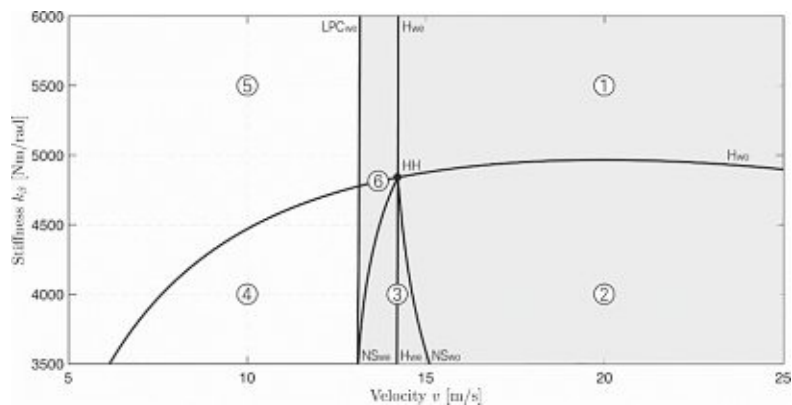


Abbildung 4.21: Zwei-Parameter-Bifurkationsdiagramm aus [74] in Abhängigkeit von der Steifigkeit im Drehgelenk β und der Fahrgeschwindigkeit

Punkt zeigt dabei ein Hopf-Hopf-Punkt, also jener Punkt, an dem der Hopfpunkt des Weavemode und jener des Wobblemode zusammenfallen. Bei einer Reduktion

der Drehfedersteifigkeit setzen sich von diesem Punkt zwei weitere Linien fort, welche die Punkte der Neimark–Sacker–Bifurkation bezeichnen. Der Bereich 3, welcher den Bereich der Modeinteraktion beschreibt, erstreckt sich bei weiterer Reduktion der Drehfedersteifigkeit über einen zunehmenden Geschwindigkeitsbereich.

Der Bereich 2 beschreibt jenen Bereich, in dem ein stabiler Wobblegrenzyklus vorhanden ist, hingegen in Bereich 4 bringen oszillatorische Instabilitäten das Fahrrad früher oder später zu Fall. Bereich 5 beschreibt eine Parameterzusammensetzung, bei der eine instabile, nicht-oszillatorische Bewegung auftritt und in Bereich 1 ist das System stabil. Bereich 6 beschreibt das Vorhandensein eines stabilen Weave-modes.

Nichtlineares Modell in SIMPACK Die Topologie des im Zuge dieser Arbeit untersuchten Simpack-Modells ist in Abbildung 4.22 schematisch dargestellt. Die Masseigenschaften der Hilfskörper (Referenzsystem, Hilfskoordinatensystem 1 und 2) sind dermaßen dimensioniert, dass sie keine relevanten Auswirkungen auf das dynamische Verhalten des Gesamtsystems haben. Der Koordinatenursprung des Referenzsystems liegt im Aufstandspunkt des hinteren Rades, wobei die x-Achse des Koordinatensystems in Fahrzeuglängsrichtung zeigt und mit der Schnittgeraden der Symmetrieebene in Fahrzeuglängsrichtung und der Fahrbahnebene zusammenfällt. Die Translation in x- und y-Richtung gegenüber dem globalen Koordinatensystem (*Isys*) sowie eine Rotation um die z-Achse des *Isys* ergeben den Freiheitsgrad des Referenzsystems. Gemäß [50] zeigt dabei die z-Achse des Systems in die Fahrbahnebene hinein.

Das Hilfskoordinatensystem 1 ermöglicht ein Nicken des gesamten Fahrrades um die y-Achse des Referenzsystems, anschließend kann das Fahrrad um die x-Achse des Hilfskoordinatensystems rollen, wodurch die Rollbewegung φ des Fahrrades beschrieben wird.

Die noch ausstehende Hubbewegung des Fahrrades entlang der z-Achse wird durch das System Rahmen, welches nun den Rahmen des Fahrrades sowie den vorerst fest mit dem Rahmen verbundenen Fahrer beinhaltet, gewährleistet. Der Lenker kann gegenüber dem Rahmen eine Drehbewegung um die geneigte Lenkachse durchführen, welche den Lenkwinkel δ_L ergibt.

Die Gabel führt gegenüber dem Lenker eine Drehbewegung um die β -Achse aus, die normal auf die Lenkachse steht und, wie auch schon zuvor am linearen Modell, in der Längssymmetrieebene des Fahrrades liegt. In diesem Gelenk werden die Steifigkeit und Dämpfung des Rahmens gegenüber dem Lenksystems zusammengefasst und durch ein lineares Feder-Dämpferelement realisiert.

Abschließend ist das Vorderrad gegenüber der Gabel um eine Achse normal auf die Symmetrieebene der Gabel durch den Winkel φ_{VR} frei beweglich. Die Verbindung des Vorderrades zum Boden über ein Kraftelement wird letztlich über zwei Kontaktmarker gewährleistet (vgl. Abbildung 4.19).

Analog zur topologischen Struktur des Vorderrades verhält sich das Hinterrad, welches sich gegenüber dem Rahmen um den Winkel φ_{HR} frei drehen kann.

Der zuvor erwähnte Luftwiderstand wirkt in Fahrzeuglängsrichtung, stellt also eine Folgelast dar, die unabhängig vom Gierwinkel wirkt.

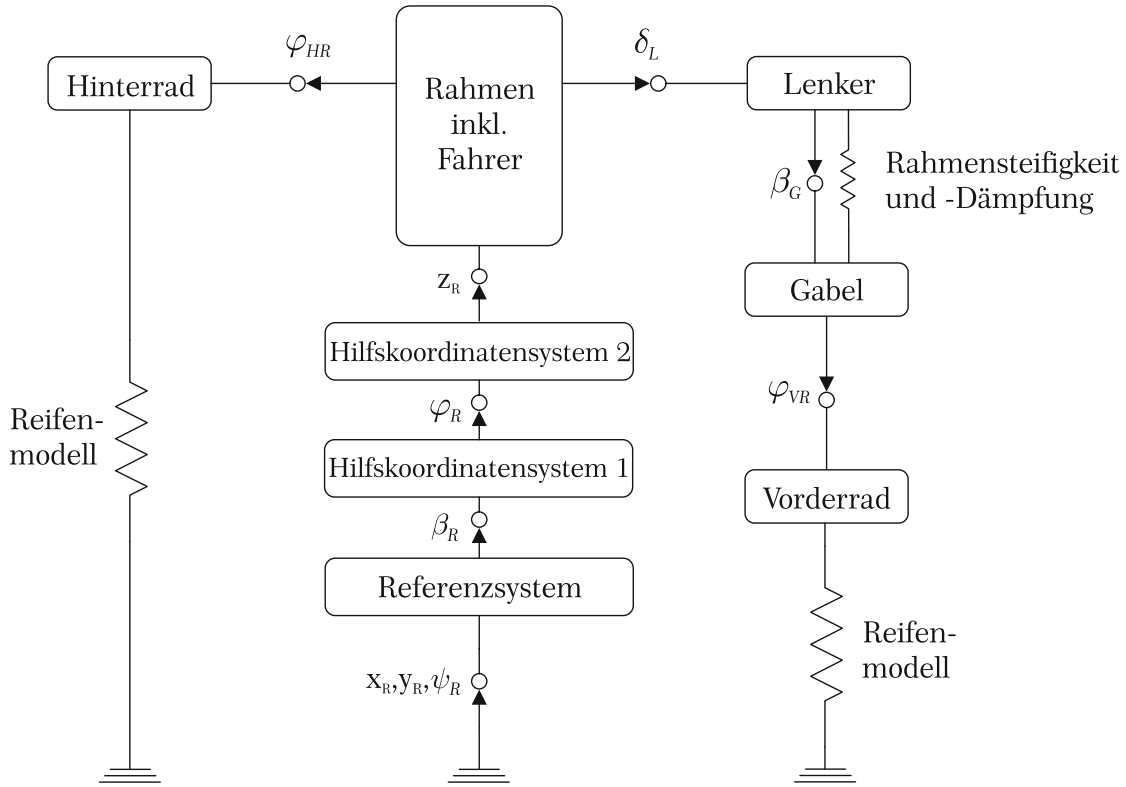


Abbildung 4.22: Topologie des Simpack Modells

Die Stabilitätsanalyse des nichtlinearen Modells (siehe Abbildung 4.23) erfolgt über die für Matlab programmierte Toolbox – MatCont. Zur Berechnung werden die Bewegungsgleichungen mit \underline{x} als Zustandsvektor und ν als Bifurkationsparameter in einer für einen ODE-Solver üblichen Form

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \nu) \quad (4.56)$$

benötigt. Nachdem die nichtlinearen Bewegungsgleichungen weder in analytischer Form vorliegen, noch in analytischer Form von Simpack ausgegeben werden können, wurde ein Programmablauf zur Kommunikation zwischen Simpack und Matlab erstellt, so dass MatCont die zeitliche Ableitung eines zuvor bestimmten Zustandsvektors aus Simpack in numerischer Form erhält.

Der Nachteil an dieser Vorgehensweise ist, dass durch die fehlende analytische Darstellung der Bewegungsgleichungen auch die Jacobi- sowie Hessematrizen nicht in symbolischer Form vorliegen und deren numerische Berechnung eine erhöhte Rechenzeit zur Folge hat. Um diesem Effekt zumindest teilweise entgegenzuwirken wurde zur Berechnung der Gleichgewichtslage anstelle der in MatCont implementierten Nullstellensuche mittels Newton-Verfahren ein SIMPACK-internes Newtonverfahren aufgerufen.

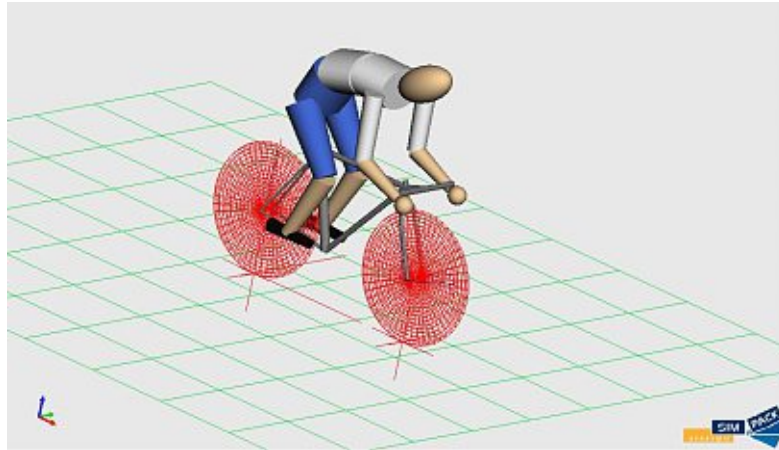


Abbildung 4.23: Modell des gebeugten Fahrers in Simpack

4.2.2.5 Fahrer

In [75] konnte der Wobblemode eines nichtlinearen Fahrradmodells abgebildet werden. Die Parameter des Fahrrades basieren auf [26], das Fahrermodell entspricht allerdings einem Mehrkörpermodell in Modelica, welches die einzelnen Körperpartien durch einfache geometrische Bauteile wie Zylinder und Quader abbildet. Die einzelnen Körper sind über Kugel- bzw. Schaniergelenke miteinander verbunden und mit parallelen Feder-Dämpferelementen beaufschlagt, um Steifigkeits- und Dämpfungsparameter der Muskulatur abbilden zu können. Die Anbindung des Fahrerkörpers an die Pedale sowie an den Lenker erfolgt ebenfalls über parallele Feder-Dämpferelemente. Die Verbindung des Fahrerkörpers an den Sattel wird außerdem durch ein Drehgelenk im Sattelpunkt ermöglicht, um die Neigung des Fahreroberkörpers gegenüber dem Fahrrad abzubilden.

Die Querschnittsform des Reifens wird durch einen Torus abgebildet, sodass die Verschiebung des Reifenkontaktpunktes bei auftretenden Sturzwinkeln mit berücksichtigt werden kann. Das Verhalten der Reifenkräfte und -momente erfolgt über lineare Funktionen, die aber in einen Sättigungsbereich übergehen um ein Reifenverhalten ähnlich der Magic Formula einzubinden. Einzig, die Formulierung für die Reifenlängskraft bleibt eine lineare Funktion vom Längsschlupf.

Tomiati [75] bildete unter Einbindung einer in einem Drehgelenk zusammengefassten Rahmenflexibilität mit diesem vollständig nichtlinearen Modell einen Wobblemode ab, stellte diesen Berechnungen gegenüber, in denen ein starrer Rahmen berücksichtigt wurde. In diesem Fall konnte jedoch kein Wobblemode abgebildet werden.

Mit der oben beschriebenen Modellbildung konnte Tomiati jedenfalls den Grenzzyklus des Wobblemodes am Fahrrad abbilden, wobei der Fahrer mit beiden Händen den Lenker umfasst.

Um das in der vorliegenden Arbeit verwendete vollständig nichtlineare Modell in Simpack nicht weiter nur auf die freihändige Fahrt zu beschränken, sondern ebenfalls die Anbindung der Hände des Fahrers an den Lenker zu realisieren, wurde in einem ersten Schritt die Masse der Hände dem Lenker zugeschrieben. In einem weiteren Schritt wurden die Bewegungsmöglichkeiten der Arme analog zu

[25] ausgeführt. Von einer kinematischen Anbindung der beweglichen Arme an die Hände im Bereich des Handgelenks wurde allerdings abgesehen, da damit eine Änderung der Topologie des Systems von einer Baumstruktur zu einer Schleifenstruktur einherginge. Eine derartige Veränderung der Systemstruktur würde nämlich aus dem nichtlinearen System gewöhnlicher Differentialgleichungen ein differentialalgebraisches System machen, wodurch eine Stabilitätsuntersuchung mittels MatCont ausgeschlossen wäre. Umgangen wird dieses Problem durch ein steifes Feder-Dämpferelement zwischen dem Anbindungspunkt im Bereich des Handgelenks am Unterarm und dem entsprechenden Punkt an der Hand, welche fest mit dem Lenker verbunden ist. Diese Vorgehensweise erfolgt sowohl am rechten als auch am linken Handgelenk. Leider konnten mit diesem Modell bisher keine Bifurkationsdiagramme erstellt werden, da auch die steife Anbindung der Arme an den Lenker zu numerischen Problemen während der Simulation führte.

4.3 Einflussfaktoren

Im folgenden Abschnitt werden nun einige Einflussfaktoren vorgestellt, die im Hinblick auf die Modellbildung speziell für den Wobblemode von Bedeutung sind. Eine Liste von bisher erarbeiteten Einflussfaktoren aus vorangegangenen Diplomarbeiten soll zunächst einen Überblick über jene Modellparameter geben, die zur Charakteristik des Wobblemode maßgebend beitragen. Variationen der Reifenparameter beziehen sich in erster Linie auf Parametervariationen am Vorderreifen, Parameteränderungen, die lediglich am Hinterreifen durchgeführt werden, zeigen keine erwähnenswerten Veränderungen der Charakteristik des Wobblemode.

- Die Schräglaufsteifigkeit $C_{F\alpha}$ reduziert die Dämpfung des Wobblemode mit zunehmendem Betrag, wobei andere charakteristische Moden davon kaum betroffen werden. Je größer die Schräglaufsteifigkeit ist, umso geringer ist die Fahrgeschwindigkeit, ab der der Wobblemode instabil wird. Außerdem steigt die Abhängigkeit der Wobblefrequenz von der Fahrgeschwindigkeit, je höher die Schräglaufsteifigkeit ist. Der enge Zusammenhang des Wobblemodes mit der Seitenkraft bildet sich dadurch ab.
- Die Sturzwinkelsteifigkeit $C_{F\gamma}$ beeinflusst den instabilen Wobblemode marginal, dafür aber sind die Auswirkungen auf Weave und Capsize deutlich sichtbar, was diesen Parameter erwähnenswert macht. Eine geringere Sturzwinkelsteifigkeit verringert zwar den instabilen Geschwindigkeitsbereich des Weavemode, damit geht aber möglicherweise auch eine auftretende Instabilität des Capsizemodes einher.
- Die Rückstellmomentensteifigkeit $C_{M\alpha}$ zufolge eines Schräglaufwinkels wirkt sich bei zunehmenden Werten destabilisierend, also begünstigend für den instabilen Wobblemode aus.
- Die Sturzmomentensteifigkeit $C_{M\gamma}$ hat einen bedeutenden Einfluss auf das Stabilitätsverhalten des Capsizemodes. Dieser kann durch entsprechend

hohe Sturzmomentensteifigkeiten vollständig stabilisiert werden. Dabei sollte allerdings die gegenteilige Wirkung auf den Weavemode im Auge behalten werden.

- Rahmensteifigkeit und Dämpfung: diese beiden Werte wurden in der Modellbildung im Drehgelenk β bzw. alternativ dem Drehgelenk ρ zusammengefasst. Die Rahmensteifigkeit beeinflusst dabei die Wobblfrequenz entscheidend, während die Dämpfung in erster Linie die Geschwindigkeit bestimmt, ab der der Wobblemode instabil wird. Je höher diese Dämpfung ist, umso größer ist auch die Geschwindigkeit des Stabilitätsübertritts des Wobblemode. Dieses Verhalten ist sowohl mit dem β - als auch mit dem ρ -Modell zu zeigen.
- Eine geringere Einlauflänge der Seitenkraft bedeutet einen rascheren Aufbau der Seitenkraft und verringert dadurch die anfachende Wirkung der Seitenkraft auf den Wobblemode.
- Je geringer das Fahrergewicht ist, desto weniger stark tritt die Wobblschwingung auf. Da dieser Parameter allerdings Auswirkungen auf eine Vielzahl anderer Parameterwerte hat, kann eine eindeutige Ursache für dieses Verhalten nicht identifiziert werden. Als Beispiel dieser Interaktion sei die Auswirkung auf die Radaufstandskräfte erwähnt, die durch eine Reduktion des Fahrergewichts ebenfalls reduziert werden und infolgedessen die davon abhängigen Reifenparameter beeinflussen.
Eine mit der Reduktion der Fahrer Masse einhergehende Reduktion des gesamten Massenträgheitsmomentes wird ebenfalls einen bedeutenden Beitrag dazu leisten.
- Je weiter hinten sich die Sattelposition und damit auch die Sitzposition des Fahrers befindet, desto größer ist der stabile Geschwindigkeitsbereich des Wobblemodes.
- Das Festhalten der Lenkeinheit, wodurch eine erhöhte Massenträgheit des Lenkers um die Lenkachse und zusätzlich eine Dämpfung der Lenkbewegung entsteht, kann den Wobblemode unter Umständen sogar unterdrücken.
- Ein zusätzliches Gewicht am Gepäckträger, sowie im Fahrkorb am Lenker, wirken begünstigend für die Instabilität des Wobblemode.
- Die Lage des virtuellen Gelenks β weist Auswirkungen auf das Verhalten des Wobblemodes auf. Je weiter nach oben das Gelenk entlang der Lenkachse verschoben wird, desto geringer ist die Geschwindigkeit ab der der Wobblemode instabil wird. Ähnliches Verhalten zeigt sich auch bei Parametervariationen am ρ -Modell. Liegt die vertikale Rotationsachse des ρ -Gelenks näher am vorderen Radaufstandspunkt, was einem geringen Abstand des Lenksystems zur ρ -Achse entspricht, so werden die Eigenwertrealeile des Wobblemodes erst bei höheren Geschwindigkeiten positiv.

Diese Einflussfaktoren werden den drei Hauptaspekten für Lenkungsflattern zugeordnet:

- Reifen
- laterale Auslenkung
- gyroskopische Effekte

Im folgenden Abschnitt wird nun versucht, den Zusammenhang der Einflussfaktoren mit der auftretenden Schwingung herauszuarbeiten, um das Wobblephänomen verständlicher zu machen.

4.3.1 Reifen

Der Einfluss des Reifens auf das Verhalten des Wobblemode zeigt sich gleich in mehreren Aspekten. Einerseits sind die in den Modellgleichungen eingebundenen Funktionen – linear oder nichtlinear – sowie die Abbildung physikalischer Effekte durch das jeweilige Reifenmodell (Einbindung von Flexibilität von Felgen, Karkasse, Laufflächenelementen, Bohrschlupf etc.) essentiell für das dynamische Verhalten des Fahrradmodells, andererseits ist die Größe einiger Parameterwerte mitbestimmend für die charakteristischen Eigenmoden des Systems. Bereits in den Diplomarbeiten von Angrosch [1] und Ott [45] wurden die Beiträge der Reifenkennwerte auf das Stabilitätsverhalten untersucht. Dabei konnte Ott [45] zeigen, dass sich jene Kennwerte, die dem Schräglaufwinkel zugeordnet sind, hauptsächlich auf den Wobblemode auswirken, hingegen jene Werte, die dem Sturzwinkel zugeordnet sind, in erster Linie Weave und Capsizemode beeinflussen.

Die für das lineare Reifenmodell erforderlichen Reifenkennwerte wurden bis dato aus der Literatur übernommen ([69], [28], [50]) und gegebenenfalls den Ergebnissen aus Messfahrten angepasst. In den letzten Jahren wurden allerdings neue, gemessene Reifenkennwerte von Fahrradreifen veröffentlicht, die an unterschiedlichen Reifenprüfständen ermittelt wurden ([13], [15], [14]). Eine Gegenüberstellung der Werte für Sturzmomentensteifigkeiten bei vergleichbaren Reifenarten war teilweise etwas unstimmg. Auf diesen Umstand wird in Abschnitt 4.3.1.3 eingegangen.

Die verzögert wirkende Seitenkraft am Reifen ist durch ihren potentiell anfachen den Beitrag zur Lenkungsschwingung ebenso wichtig wie die Reifen-Quersteifigkeit selbst, welche auch den Betrag der Seitenkraft bestimmt. Möchte man aber über die lineare Stabilitätsanalyse hinaus schreiten und das Schwingungsverhalten des Systems weitergehend analysieren, so steht man vor der Wahl eines passenden nichtlinearen Reifenmodells, das auch das Sättigungsverhalten der Seitenkraft mit einschließt. Nach Pacejka [50] ist letzteres ein essentielles Charakteristikum: *”Due to the degressive nature of the tire force and moment characteristics, the system which was found to be oscillatory unstable near the undisturbed rectilinear motion (result of linear analysis) will increase in amplitude until a periodic motion is approached which is designated as a limit cycle”.*

Durch Einbindung der drei nichtlinearen Reifenmodelle (*Brush*, *simplified Magic Formula*, *extended Magic Formula*) in das mechanische Modell des Fahrrades werden im Anschluss die Auswirkungen folgender Einflussfaktoren auf das Systemverhalten des Fahrrades untersucht:

- Einlaufverhalten der Reifenkräfte

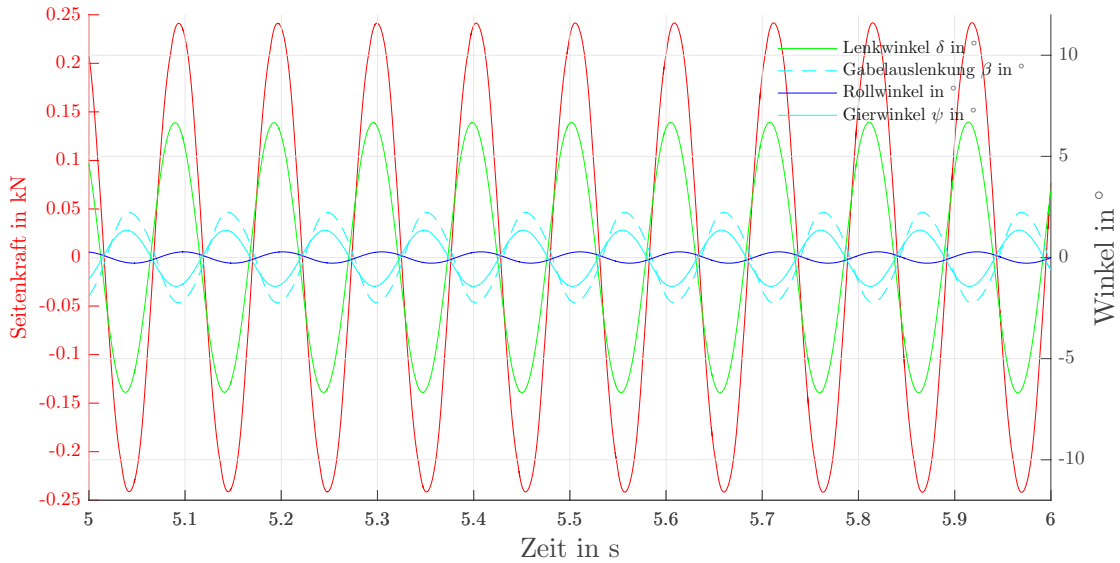


Abbildung 4.24: Wobbleschwingung eines Rennrades bei 4° Hangneigung, *simplified Magic Formula* Reifenmodell

- Sättigung der Seitenkraft- und Momentenkurve des Reifens über dem Schräglaufwinkel
- Einfluss von Spin (vergleichbar mit viskoser Dämpfung um die Lenkachse - siehe [50])

Abbildung 4.24 zeigt, basierend auf einer Zeitsimulation des Rennradmodells mit dem *simplified Magic Formula* Reifenmodell in Simpack, die Seitenkraft sowie den Lenkwinkel, die Auslenkung des virtuellen Gelenks im Lenkkopf als Winkel β , den Rollwinkel φ des gesamten Fahrrades und den Gierwinkel ψ während einer Zeitsimulation der Wobbleschwingung. Der Fahrer wurde dabei in aufrechter Sitzposition und starrer Anbindung an den Rahmen abgebildet. Es zeigt sich, dass der Lenkwinkel δ die größte Auslenkung erfährt – ein Charakteristikum der Wobbleschwingung, welches auch die Eigenvektoren dieser Bewegung bestätigen. Außerdem ist das Zusammenpiel der Auslenkung von Rollwinkel φ und Gabelauslenkwinkel β ersichtlich. Bei positivem Rollwinkel (entspricht einer Neigung des gesamten Rades in Fahrtrichtung gesehen nach rechts), tritt ein negativer Gabelauslenkwinkel auf, was bedeutet, dass der untere Teil der Lenkeinheit per definitionem ebenfalls nach rechts auslenkt und somit der Aufstandspunkt des Vorderreifens in diese Richtung ausgelenkt wird.

Abbildung 4.24 zeigt außerdem die Lenkbewegung in Rollrichtung (gleiches Vorzeichen von Roll- und Lenkwinkel), was in der Literatur auch mit *”steer into the fall”* bezeichnet wird.

Eine vergrößerte Darstellung eines Teilbereichs dieses Diagramms (Abbildung 4.25) macht den Phasenverzug der Seitenkraft gegenüber der Lenkwinkelbewegung δ deutlich und dadurch die anfachende Wirkung der Seitenkraft auf den Lenkwinkel sichtbar. Durch diesen Zeitverzug der Seitenkraft während einer Schwingung haben der Lenkwinkel δ und die Seitenkraft F_y für einen kurzen Zeitabschnitt gegenteiliges Vorzeichen. Sobald beide Größen wieder gleiches Vorzeichen besitzen,

wirkt die Seitenkraft entgegen der Lenkbewegung und zwingt diese dadurch wieder zurück in die Nulllage, welche aber aufgrund der dann noch vorhandenen Seitenkraft in der Position $\delta = 0$ nur durchlaufen wird. Dieses Verhalten stimmt mit den Beschreibungen von Döhring [10] 1956 gut überein – vgl. dazu Abbildung 2.4. Die oben beschriebene Wirkungsweise wird bei einer Erhöhung der Schräglaufsteifigkeit durch damit einhergehende Erhöhung der Seitenkraft verstärkt, wie auch aus der Diplomarbeit von Ott [45] hervor geht. Ebenso begünstigt eine Erhöhung der Rückstellmomentensteifigkeit, welche bei konstant gehaltener Schräglaufsteifigkeit am linearen Modell einer Vergrößerung des pneumatischen Nachlaufs entspricht, die Entstehung der Lenkungsschwingung.

Ran [54] hat bei ähnlicher Vorgehensweise durch Berechnung der verrichteten Arbeit der Seitenkraft bzw. des Rückstellmomentes über eine Periode der Schwingung die gesamte Shimmyenergie am Schlepprad ermittelt. Die für die Berechnung der Arbeit benötigte Auslenkung des Reifens wird über den Verlauf der Bodenkontaktlinie des Reifens relativ zu jenem der Reifenmittelebene berechnet. Bei einer reinen Querbewegung des Reifens zeigt die Seitenkraft aufgrund des Einlaufverhaltens (zeitverzögerte Querbewegung der Kontaktlinie) entgegen der Bewegungsrichtung, wodurch die Shimmyenergie negativ bleibt. Kommt jedoch zur reinen Querbewegung eine gekoppelte Gierbewegung hinzu, kann im allgemeinen auch die Querbewegung des Rades für die Shimmy-Instabilität verantwortlich sein. Dann überwiegt für einen Schwingungszyklus der Anteil der anfachenden Terme, und es liegt eine selbsterregte Schwingung vor.

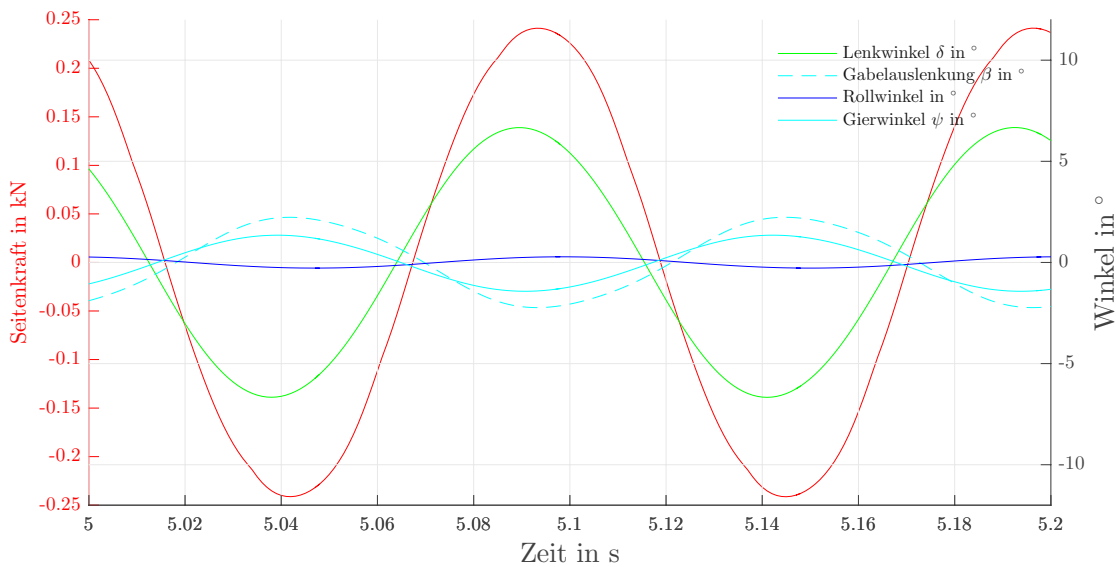


Abbildung 4.25: Zustandsgrößen während einer Wobbleschwingung

4.3.1.1 Einlauflänge

Nachdem der zeitlich verzögerten Wirkung der Seitenkraft eine potentiell anfachende Wirkung zugesprochen wird, zeigt Abbildung 4.26 eine Anpassung der Einlauflänge (bezüglich aller transients Größen) auf jene Werte, die aus [14] hervorgingen. In Übereinstimmung mit den Erkenntnissen aus Abbildung 4.24 wird

das Auftreten des Wobblemode durch eine größere Einlauflänge begünstigt. Eine Anpassung der Einlauflänge auf 14.6cm würde für das Touringrad eine Veränderung der Parameter für das Drehgelenk β zu $c_\beta = 68.75\text{Nm}/^\circ$ und $k_\beta = 24.75\text{Nm/s}$ erfordern, um den quantitativen Verlauf der Eigenwerte an die Messergebnisse aus den Diplomarbeiten [45] und [44] bzw. den Verlauf der Eigenwerte (unterbrochene Linie) an die durchgezogene Linie in Abbildung 4.26 anzunähern. Reduziert man hingegen die Einlauflänge am gleichen Modell auf $\sigma = 10^{-5}\text{m}$, so

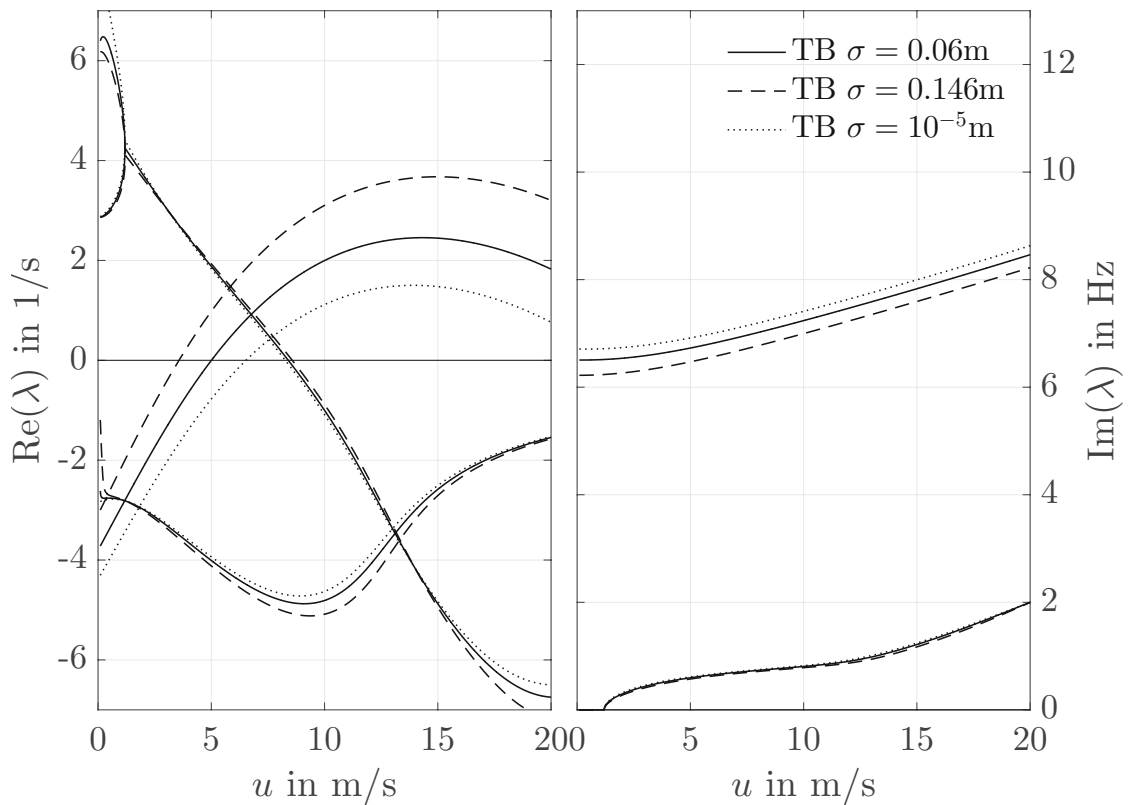


Abbildung 4.26: Variation der Einlauflänge am Touringradmodell; lineares Reifenmodell, starr an den Rahmen angebundener Fahrer in aufrechter Sitzposition, freihändig; Parameterwerte für das Ausgangsmodell aus [25]

wird der Verlauf der Realteile des Wobblemode über den gesamten betrachteten Geschwindigkeitsbereich reduziert, wodurch der Beginn des instabilen Geschwindigkeitsbereiches bei höheren Werten liegt und dieser außerdem verkleinert wird. Eine größere Einlauflänge wirkt sich in diesem Parameterbereich somit begünstigend für den instabilen Wobblemode aus.

4.3.1.2 Sättigung der Reifenkennlinie

Durch Einbindung nichtlinearer, degressiver Reifenkennlinien in das MKS-Modell zeigt sich bei aufrechter Geradeausfahrt im instabilen Geschwindigkeitsbereich, dass die aufklingende Schwingung des Lenkers ebenfalls eine Sättigung besitzt und ein Grenzzyklus auftritt. Während die Amplitude des Wobblemode bei einem linearen Modell exponentiell aufklingt, stellt sich nach einer Einbindung von

degressivem Reifenverhalten in das Modell eine konstante Schwingungsamplitude ein, vgl. Abbildung 4.27 für den zeitlichen Verlauf dieser aufklingenden Lenker-

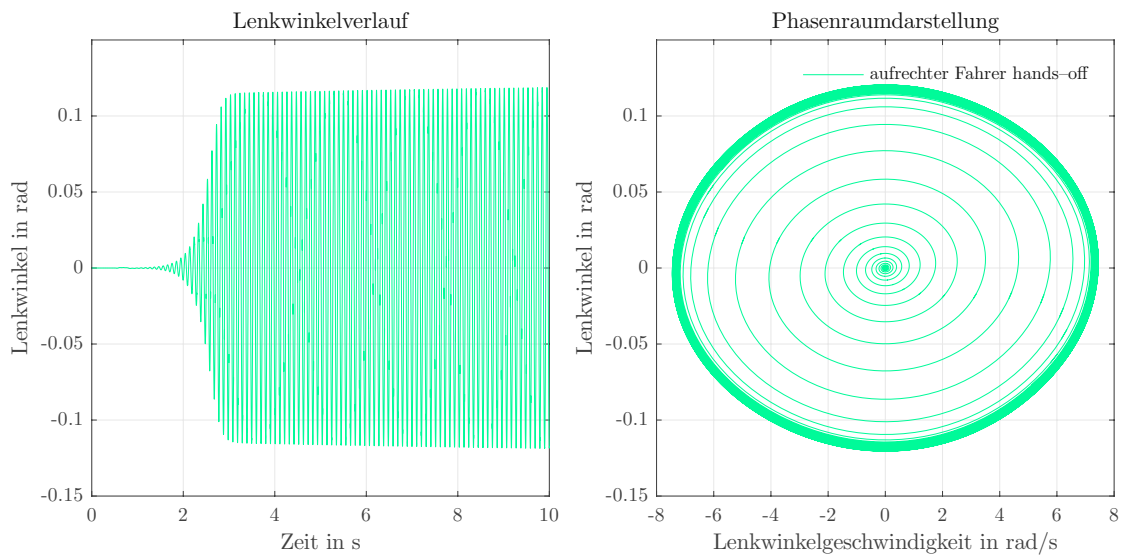


Abbildung 4.27: Lenkwinkelverlauf und Phasenraumdarstellung aus einer Zeitsimulation in Simpack bei auftretendem Wobblemode mit nicht-linearem Reifenmodell (Rennradmodell mit starr an den Rahmen gebundenem Fahrer, freihändig; Reifenmodell: *simplified MF*; Hangneigung: 4°)

schwingung bis zur maximalen Schwingungsamplitude des Wobblemodes sowie den zugehörigen Grenzzyklus in der Phasenraumdarstellung.

4.3.1.3 Spin

Im Fokus des folgenden Abschnitts stehen jene Größen, die am Spin maßgebend beteiligt sind. Dazu gehört einerseits die Sturzmomentensteifigkeit und andererseits die Einbindung von Bohrschlupf in das lineare sowie nichtlineare Fahrradmodell, dessen Auswirkungen in erster Linie auf das Stabilitätsverhalten des Wobblemodes untersucht werden.

Sturzmomentensteifigkeit Die Parameterwerte für die Sturzmomentensteifigkeit ergeben sich entweder als Funktion der Normalkraft, wie in [50] oder aus Messergebnissen ([14], [15] oder [13]) an Reifenprüfständen, die das Moment um die vertikale Achse in Abhängigkeit vom Sturzwinkel angeben (*"twisting torque"*). Bei der Ermittlung der Parameterwerte aus Messergebnissen ist zu berücksichtigen, dass das gemessene Moment nicht nur aus dem Sturzwinkel des Rades resultiert, sondern unter Umständen auch der dabei entstehende Bohrschlupf miteinspielt. Das gemessene Moment entspricht außerdem dem stationären Wert und setzt sich somit hauptsächlich aus der Verteilung der Längsschubspannung im Reifenlatsch zusammen.

Eine Variation der Sturzmomentensteifigkeit hat zwar äußerst geringen Einfluss auf den Wobblemode, aber die Änderungen von Weave- und Capsizemode sollten

vor allem wegen der Diskrepanz in den Messwerten von Doria [13] und Dressel [14] nicht unerwähnt bleiben. In der 2013 veröffentlichten Publikation von Doria [13] wurden Parameterwerte (D, C, B) für die vereinfachte Form der Magic Formula, vgl. Glg. (4.57) anhand von Messwerten der Seitenkraft und des Rückstellmoments zufolge Schräglaufwinkel und Sturz von 4 Touringradreifen messtechnisch erfasst.

$$\frac{Y(x)}{F_z} = D \cdot \sin[C \cdot \arctan(B \cdot x)] \quad (4.57)$$

In Gleichung (4.57) stellt $Y(x)$ die gemessene Größe und x die Eingangsgröße (Schräglaufwinkel, Sturz) dar. Der dafür verwendete Prüfstand wurde ursprünglich für Auto- bzw. Motorradreifen konzipiert, wodurch die Dimensionen für die Messung von Fahrradreifen etwas grob erscheinen. Aufgrund auftretender Vertikalschwingungen musste der Messbereich für die Fahrradreifen auf eine Geschwindigkeit von 4km/h und einen maximalen Sturzwinkel von 24° beschränkt werden. Parallel dazu entstand eine weitere Publikation zur Parameterermittlung von Fahrradreifen [15]. Darin wurden zwar die Reifenkräfte bei anderen Reifendimensionen als in [13] gemessen, jedoch ergaben sich für die Schräglaufsteifigkeiten vergleichbare Werte wie sie in [13] ermittelt wurden und deren Größenordnung mit denen in [1], [45] bzw. [69] verwendeten Werten übereinstimmt.

In der Dissertation von Dressel [14] erfolgten umfassende Messungen von Fahrradreifen unterschiedlicher Typen (Rennradreifen, Touringradreifen und Mountainbikereifen). Die Messungen wurden auf drei verschiedenen Prüfraahmen mit Variationen von Luftdruck und Aufstandskräften durchgeführt.

Der Vergleich der Messwerte von Doria [13] und Dressel [14] zeigte eine deutliche Diskrepanz in den gemessenen Sturzmomentensteifigkeiten. Diese unterscheiden sich teilweise um eine Größenordnung. Mögliche Erklärungen für diesen Unterschied können eventuell in der Konstruktion des jeweiligen Versuchsstandes liegen. Beispielsweise könnte bei Doria [13] die Fahrbahn, welche als rotierende Scheibe ausgeführt ist, in die Messungen einspielen oder in [14] die Krümmung der Trommel (als Fahrbahn) bzw. die fehlende Möglichkeit an Versuchstand 3 in [14] den Schräglaufwinkel aus den Messungen auszuschließen, sein.

Angesichts der vielen und auch in sich konsistenten Messwerte in [14] wurde in Tabelle 4.1 eine Anpassung der Parameterwerte für den Touringrad- und auch Rennradreifen vorgenommen, indem die arithmetischen Mittelwerte von Messwerten aus [14] bei denen der Luftdruck und die Aufstandskraft mit den in dieser Arbeit verwendeten Reifenmodellen korrelieren, gebildet. Diese sind den Parameterwerten der bisherigen Diplomarbeiten [45], [25] gegenübergestellt.

Eine Anpassung der Werte aus [25] für die Sturzmomentensteifigkeit an die gemessenen Werte in [14] ist in Abbildung 4.28 angeführt. Dabei beschreibt die schwarze, volle Linie den Eigenwertverlauf des linearen Touringrad-Modells, dessen Parameter aus der Diplomarbeit von Klinger [25] übernommen wurden. Die unterbrochene Linie beschreibt die Eigenwerte nach Anpassung der Sturzwinkelsteifigkeit und Sturzmomentensteifigkeit an die Messergebnisse aus [14]. Durch diese Adaption zeigt sich in Abbildung 4.28 eine geringere Übertrittsgeschwindigkeit des Weavemode in den stabilen Bereich – eine Veränderung, die plausibel

Referenz	$C_{F\alpha}/F_z$	$C_{M\alpha}/C_{F\alpha}$	$C_{F\gamma}/F_z$	$C_{M\gamma}/C_{F\gamma}$	$C_{M\gamma}/F_z$	$\sigma_\alpha = \sigma_\gamma$
[45] TB VR	$0.35 \frac{180}{\pi}$	0.014	1	0.014	0.014	0.03m
[45] TB HR	$0.35 \frac{180}{\pi}$	0.02	1	0.02	0.02	0.03m
[25] TB VR	$0.22 \frac{180}{\pi}$	0.0273	$0.015 \frac{180}{\pi}$	0.0432	$0.000648 \frac{180}{\pi}$	0.06m
[25] TB HR	$0.18 \frac{180}{\pi}$	0.025	$0.014 \frac{180}{\pi}$	0.0325	$0.000455 \frac{180}{\pi}$	0.06m
[25] RB VR	$0.24 \frac{180}{\pi}$	0.025	$0.015 \frac{180}{\pi}$	0.04	$0.0006 \frac{180}{\pi}$	0.05m
[25] RB HR	$0.24 \frac{180}{\pi}$	0.025	$0.015 \frac{180}{\pi}$	0.04	$0.0006 \frac{180}{\pi}$	0.05m
neu TB VR	$0.22 \frac{180}{\pi}$	0.0136	$0.00892 \frac{180}{\pi}$	0.0131	$0.000117 \frac{180}{\pi}$	0.146m
neu TB HR	$0.18 \frac{180}{\pi}$	0.025	$0.01346 \frac{180}{\pi}$	0.0149	$0.0002 \frac{180}{\pi}$	0.146m
neu RB VR/HR	$0.24 \frac{180}{\pi}$	0.0125	$0.00898 \frac{180}{\pi}$	0.00758	$0.000068 \frac{180}{\pi}$	0.08m

Tabelle 4.1: Reifenparameter

erscheint, nachdem bereits bei [25] angezweifelt wurde, dass der Weavemode erst bei derartig hohen Geschwindigkeiten stabil wird. Allerdings wird der Capsize-mode durch diese Anpassung instabil.

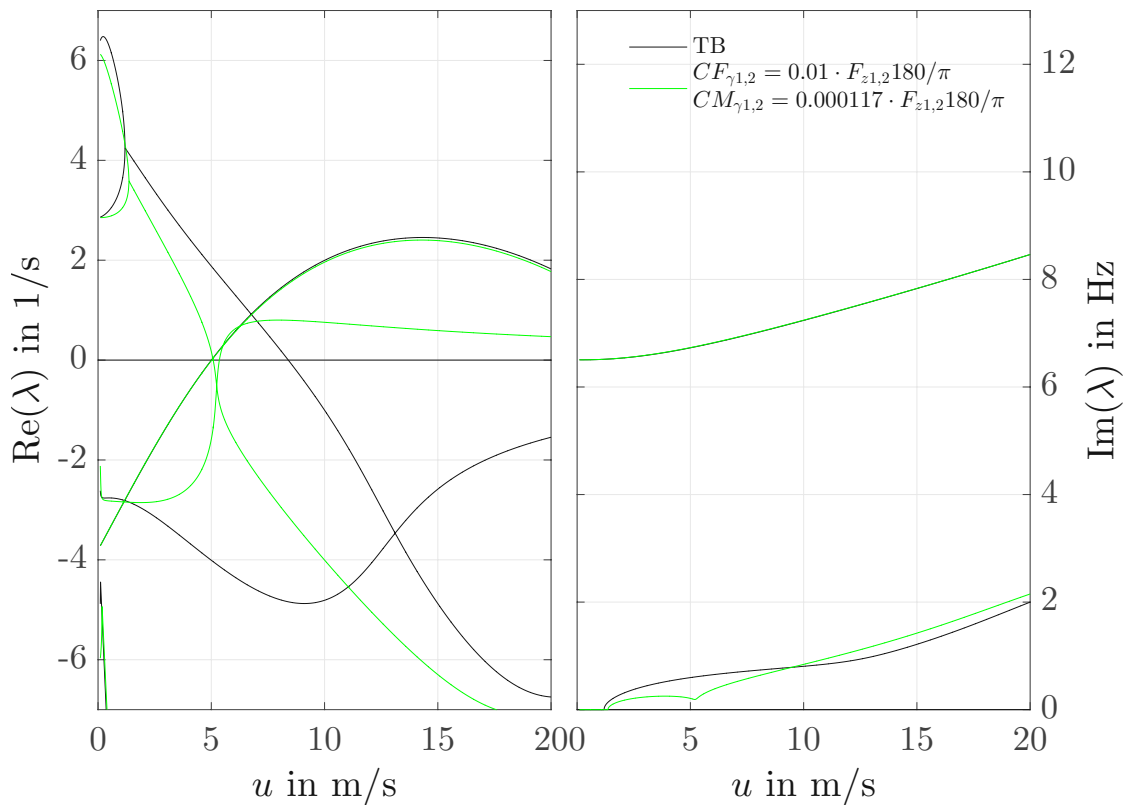


Abbildung 4.28: Eigenwertverlauf in Abhängigkeit der Vorwärtsgeschwindigkeit für das Touringrad und Einfluss der Reifenparameter zufolge Sturz des Rades; lineares Reifenmodell, starr an den Rahmen angebundener Fahrer in aufrechter Sitzposition, freihändig; Parameterwerte für das Ausgangsmodell aus [25]

Bohrschlupf Die mit der zusätzlichen Einbindung der transienten Größen für den Bohrschlupf in das lineare Fahrradmodell einhergehenden Veränderungen auf den Verlauf der charakteristischen Eigenmoden sind in Abbildung 4.29 dargestellt. Dabei wird die Einlauflänge zufolge Bohrschlupf $\sigma_{\varphi_{ti}} = \sigma_{\gamma_i} = 0.06\text{m}$ gesetzt. Als Vergleichsmodell dient wie zuvor das lineare Modell des Touringrades, dessen Parameter aus der Diplomarbeit von Klinger [25] übernommen wurden. Die stärkste Veränderung im Geschwindigkeitsbereich zwischen 0 – 10 m/s zeigen dabei die Realteile des Weavemode. Außerdem erhöht sich durch den zusätzlichen Bohrschlupf die Übertrittsgeschwindigkeit des Wobblemode, was folglich als Dämpfung um die Lenkachse verstanden werden kann.

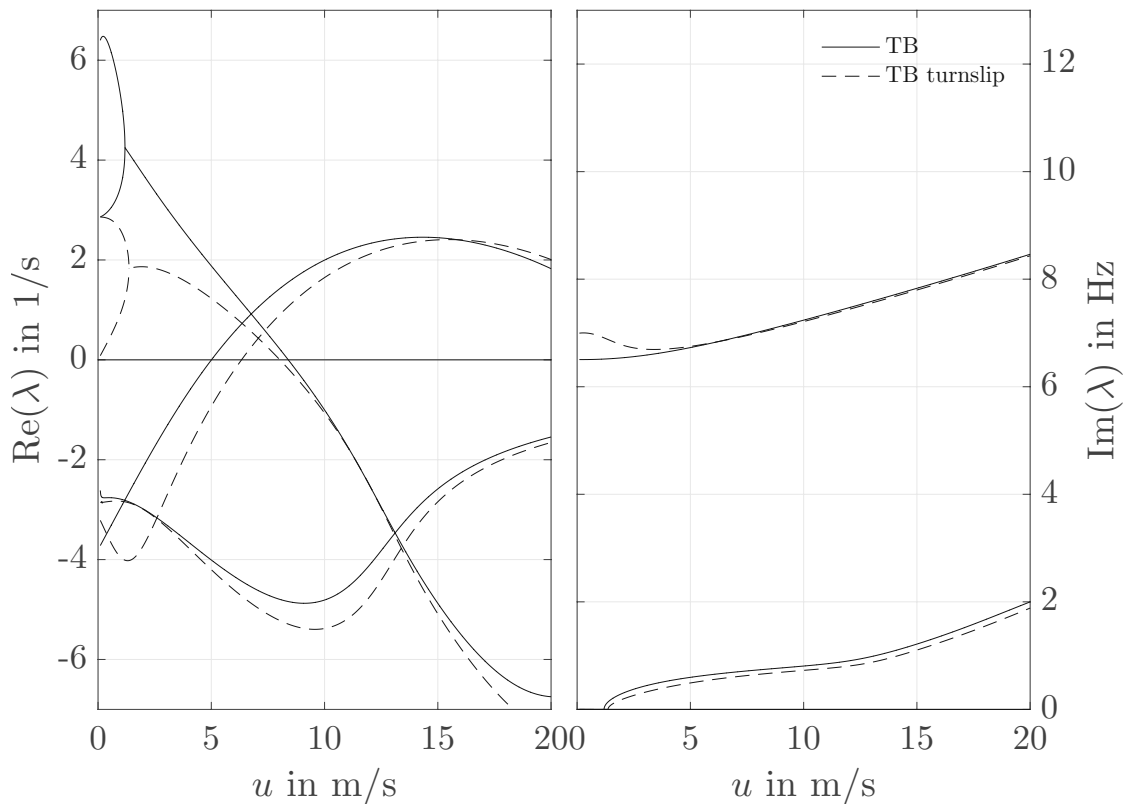


Abbildung 4.29: Erweiterung des linearen Reifenmodells um den Bohrschlupf - Eigenwertverlauf in Abhängigkeit der Vorwärtsgeschwindigkeit für das Touringrad; lineares Reifenmodell, starr an den Rahmen angebundener Fahrer in aufrechter Sitzposition, freihändig; Parameterwerte für das Ausgangsmodell aus [25]

Stabilitätskarten, wie sie bisher anhand des linearisierten Modells in Matlab erstellt wurden, können mittels Simpack-internaler Eigenwertberechnung auch am nichtlinearen Modell berechnet werden. Beim linearisierten Modell in Matlab wurde die Fahrgeschwindigkeit wegen der mit der Linearisierung der Bewegungsgleichungen einhergegangenen Entkopplung von Längs- und Querdynamik als Parameter verwendet.

Folglich dient die Hangneigung am nichtlinearen Fahrradmodell in Simpack als Parameter, wodurch sich aufgrund des Luftwiderstandes bei ungestörter Bergabfahrt wiederum eine konstante Fahrgeschwindigkeit einstellt. Abbildung 4.30 zeigt diese Stabilitätskarten des Rennradmodells (Parameterwerte aus [25]), unter Einbindung der drei nichtlinearen Reifenmodelle (*Brush*, *simplified Magic Formula*, *extended Magic Formula*) in Abhängigkeit der Hangneigung. In allen Fällen wird der Fahrer in aufrechter Position während freihändiger Fahrt, starr an den Rahmen gebunden, abgebildet. Auf diesen Modellkonfigurationen basieren auch die Abbildungen 4.31 und 4.32. Die dunkelblauen Werte entsprechen den Eigenwerten des Fahrradmodells mit implementiertem Bürstenmodell des Reifens (*Brush*). Die grünen Werte entsprechen den Ergebnissen mit dem *simplified Magic Formula*-Modell und die dunkelroten Werte entsprechen einer durch den Bohrschlupf erweiterten Version, der *extended Magic Formula*. Nachdem die Abbildungen 4.31

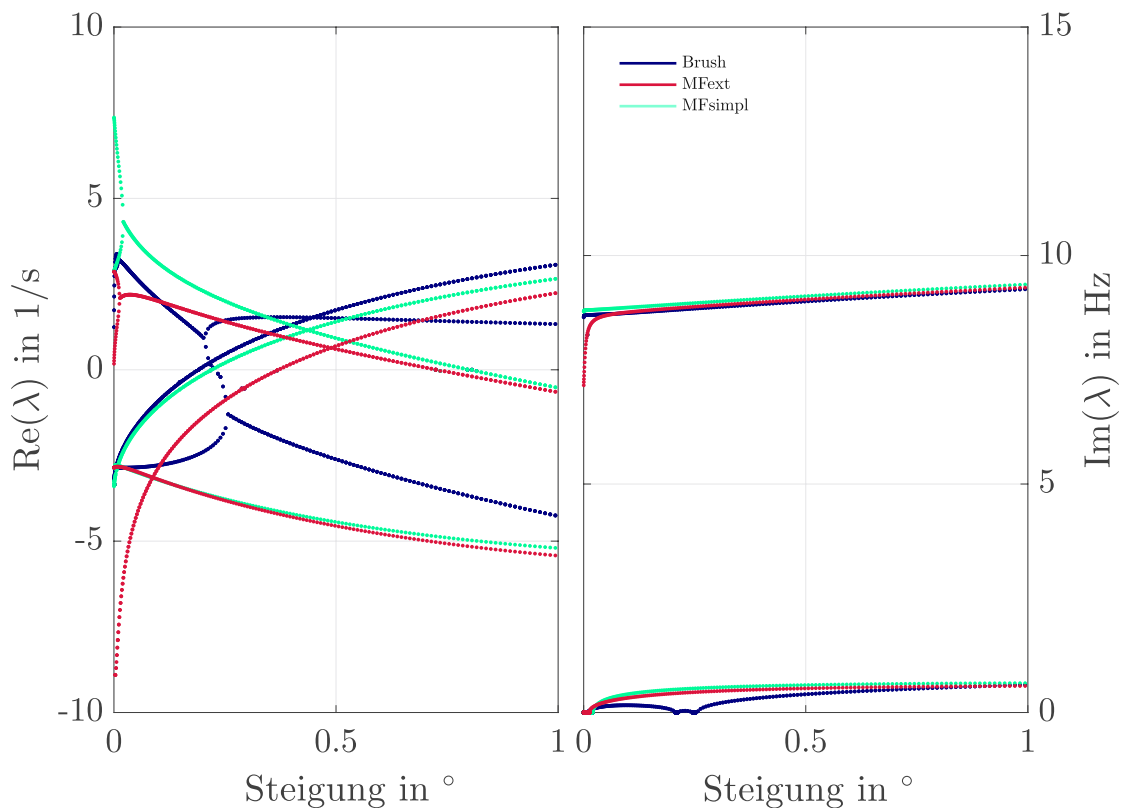


Abbildung 4.30: Vergleich der Eigenwerte von Weave-, Capsize- und Wobblemode der Rennradmodelle aus Simpack, Fahrer aufrecht und freihändig mit drei verschiedenen Reifenmodellen in Abhängigkeit von der Hangneigung

und 4.32 aus der selber Simulation wie Abbildung 4.30 abgeleitet wurden, gelten hier auch die gleichen Modell- bzw. Parameterkonfigurationen.

Betrachtet man den Verlauf der Capsize-Eigenwerte am *Brush*-Modell, so zeigt sich, dass dieser ebenfalls instabil wird, was mit den Auswirkungen der verringerten Sturzmomentensteifigkeit in Abbildung 4.28 vergleichbar ist. Nachdem aus Abbildung 4.18 ersichtlich ist, dass am *Brush*-Modell kein vertikaler Versatz der

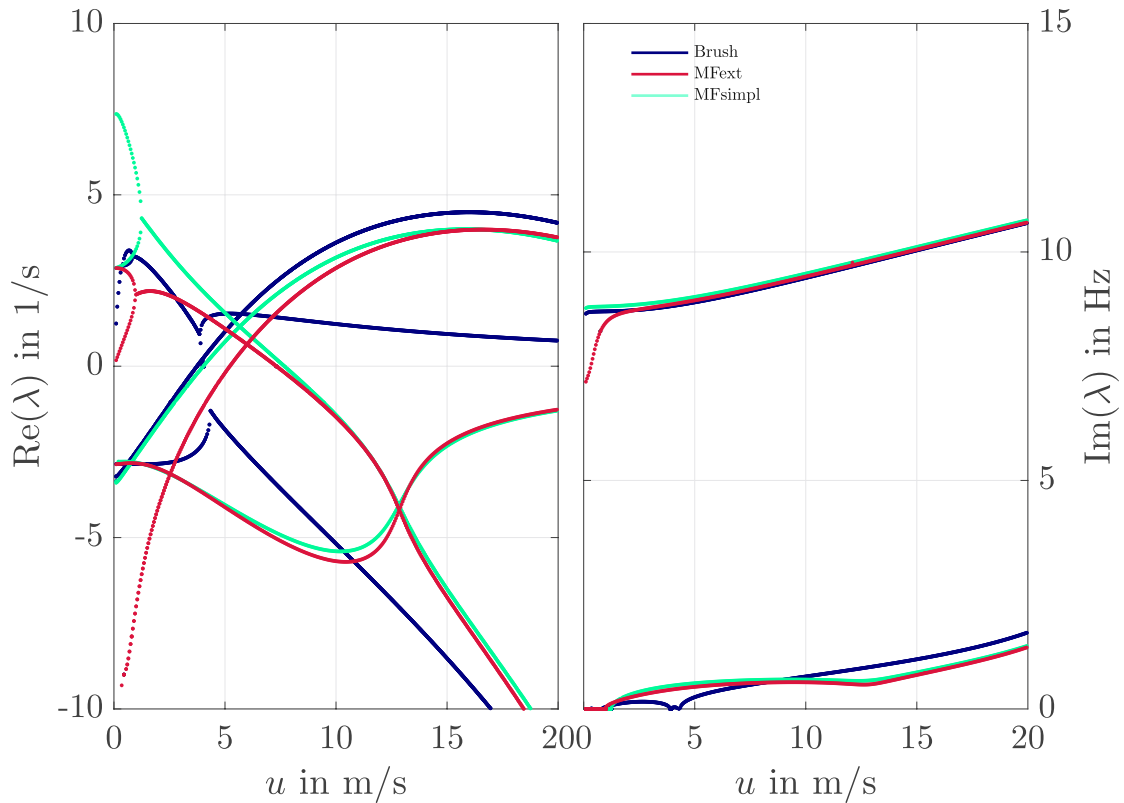


Abbildung 4.31: Vergleich der Eigenwerte von Weave-, Capsize- und Wobblemode der Rennradmodelle aus Simpack, Fahrer aufrecht und freihändig mit drei verschiedenen Reifenmodellen in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit, Modellkonfigurationen analog zu Abbildung 4.30

Rückstellmomentenkurve durch den Spin erfolgt (das bedeutet, kein *residual torque*), könnte diese Modelleigenschaft den Verlauf der Eigenwerte des Weave- und Capsizemode erklären.

Aus beiden Diagrammen ist außerdem ersichtlich, dass die Übertrittsgeschwindigkeit bzw. jener Wert der Hangneigung, an dem der Wobblemode instabil wird, bei verwendetem *Brush*-Modell bzw. *simplified Magic Formula* vergleichbare Werte aufweisen, bei der *extended Magic Formula* verschiebt sich dieser Punkt allerdings durch den zusätzlich dämpfenden Einfluss des *turnslip* im Rückstellmoment zu höheren Geschwindigkeitswerten.

In Abbildung 4.32 sind die Bifurkationsdiagramme des Rennradmodells dargestellt. Für die drei Reifenmodelle sind jeweils der Lenkwinkel δ , der Rollwinkel φ , der Gabelauslenkwinkel β und der Gierwinkel ψ über der Fahrgeschwindigkeit dargestellt. Nachdem die Bifurkationsanalyse als Kosimulation über Matlab (MatCont) und Simpack einige Rechenzeit und -leistung in Anspruch nimmt, wurden die Berechnungen nach einer vorgegebenen Anzahl an Berechnungspunkten beendet, um plausible Rechenergebnisse zu gewährleisten. In Übereinstimmung mit den Stabilitätskarten liegen die Hopfpunkte des Wobblemode bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Die Schwingungsamplituden zeigen am Bürstenmodell

einen geringeren Anstieg mit steigender Hangneigung (bzw. Fahrgeschwindigkeit) im Vergleich zu den *Magic Formula* Reifenmodellen. Abbildung 4.33 zeigt das

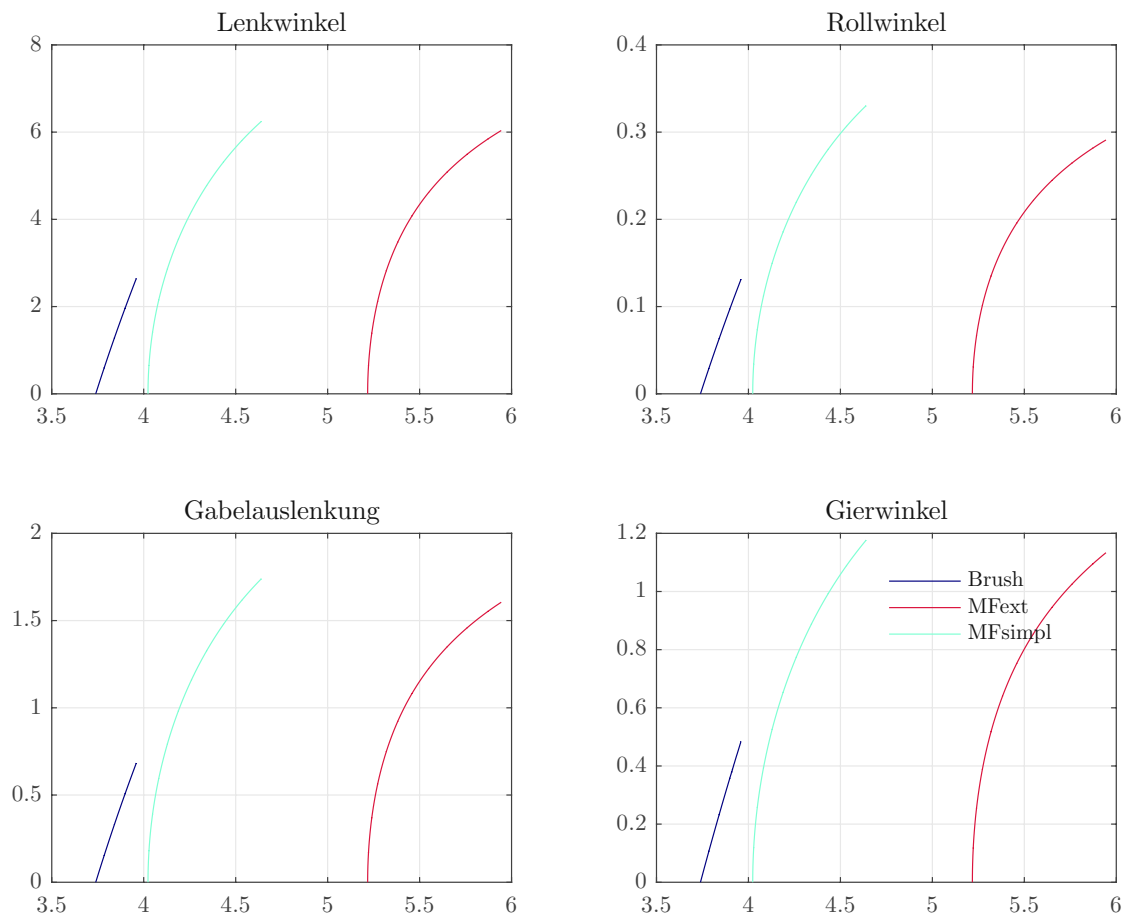


Abbildung 4.32: Vergleich der Winkelamplituden des Wobblemode in $^{\circ}$ der Rennradmodelle aus Simpack und MatCont, Fahrer aufrecht und freihändig mit drei verschiedenen Reifenmodellen in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit in m/s

Phasendiagramm des Lenkwinkels sowie die Lenkwinkelgeschwindigkeit des Rennradmodells mit Einbindung des *simplified Magic Formula* - Reifenmodells in Abhängigkeit der Hangneigung in Grad, welche den Bifurkationsparameter darstellt.

4.3.2 laterale Auslenkung

Die laterale Auslenkung bezieht sich nach Abschnitt 2.2.2 auf die Querbewegung des Rades (und somit auch des Reifenkontaktpunktes).

Am β -Modell des Touringrades wird diese Auslenkung durch das Drehgelenk im Lenkkopf abgebildet womit zusätzliche gyroscopische Effekte, welche den Ausdrehwinkel β und die übrigen Bewegungen (δ, φ, ψ) koppeln, entstehen.

Für den Zusammenhang der zugehörigen Steifigkeits- und Dämpfungsparameter mit dem Wobblemode wird an dieser Stelle auf die Diplomarbeiten [1], [45], [44] und [25] verwiesen. In [44] wurden unter anderem jene Terme identifiziert, die bei

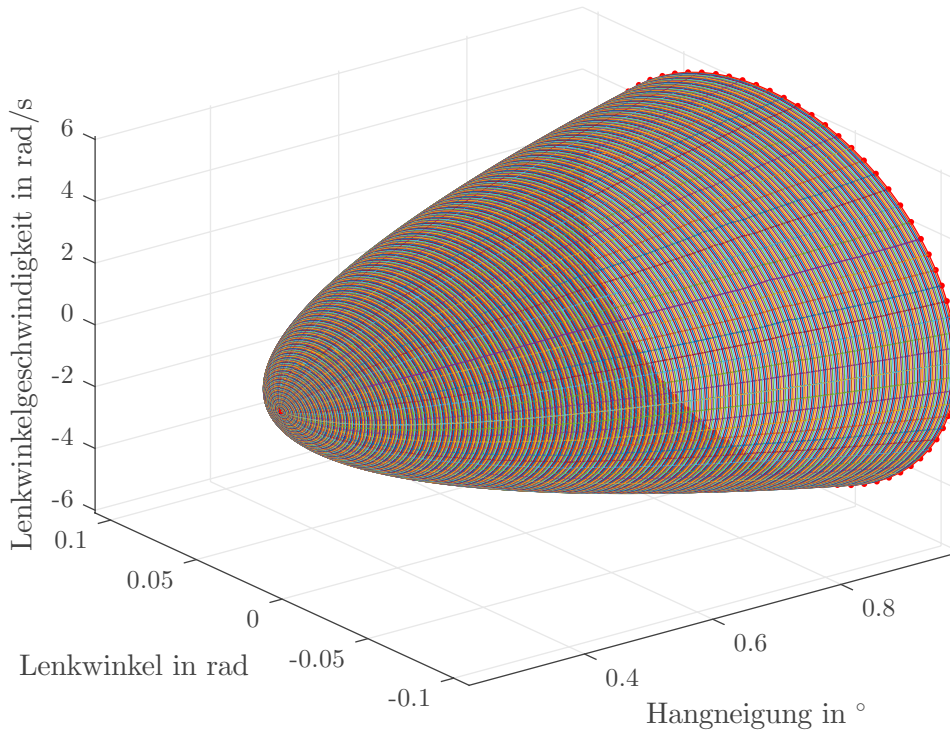


Abbildung 4.33: Grenzyklus der Wobbleschwingung

einer Positionsänderung der β -Achse am meisten zum Systemverhalten beitragen. Dabei konnte dem Moment bezüglich der Rotationsachse β , welches von der Seitenkraft am Reifen entsteht, eine deutliche Wirkung nachgewiesen werden.

Speziell im Hinblick auf die Modellbildung des Rennradmodells wurde in Abschnitt 4.2.1.2 eine alternative Modellbildung (ρ -Modell) vorgestellt, wo durch ein vertikales Drehgelenk die Flexibilität der Lenkeinheit und des Rahmens abgebildet wird. Werden die Steifigkeitsparameter für das ρ -Gelenk so gewählt, dass sich im Reifenkontaktpunkt die gleiche statische laterale Auslenkung bei fixierter Lenkung ergibt, wie bei gleich großer Seitenkraft im vorderen Aufstandspunkt am β -Modell, bzw. die Dämpferkonstante entsprechend gewählt, sodass bei der Querbewegung des Reifenkontaktpunktes am ρ -Modell die gleiche Energie dissipiert wird, wie am β -Modell, ergeben sich die Eigenwerte für das lineare Rennradmodell, wie in Abbildung 4.34. Dabei werden die Stabilitätskarten des ρ -Modells jenen des β -Modells gegenüber gestellt. In beiden Fällen wird der Fahrer – in aufrechter Sitzposition – starr an den Sattel (und damit Rahmen) angebunden, während freihändiger Fahrt abgebildet. Am ρ -Modell zeigt sich die Frequenz des Wobblemodes als weniger stark von der Fahrgeschwindigkeit abhängig, als im Vergleich dazu am β -Modell. Die schwache Abhängigkeit der Wobblefrequenz von der Fahrgeschwindigkeit ist in [78] nachzulesen und wurde auch von Magnani [33] berichtet. Während sich die Frequenz des Wobblemodes bei einer Erhöhung der Drehfedersteifigkeit ebenfalls

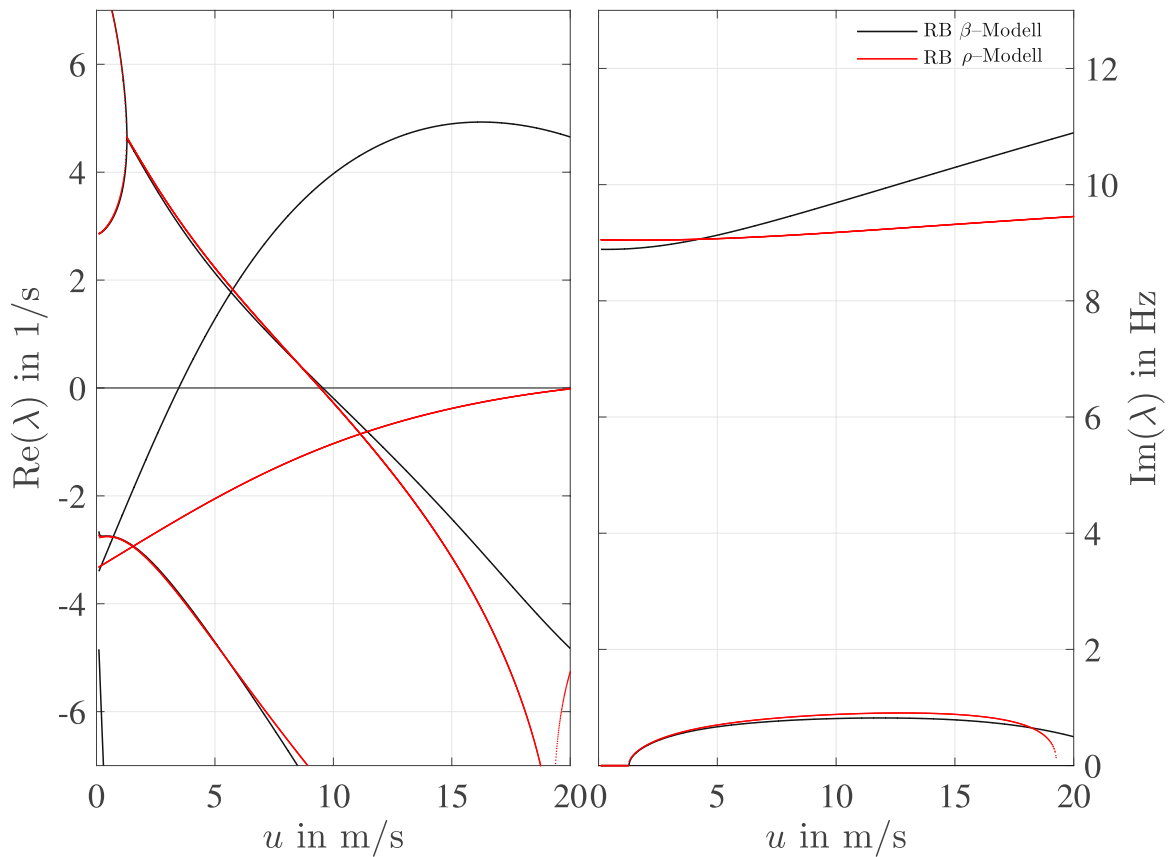


Abbildung 4.34: Gegenüberstellung des Eigenwertverlaufs am β -Modell und ρ -Modell; Rennradmodell mit linearem Reifenmodell; aufrecht sitzender, starr mit dem Rahmen verbundener Fahrer, freihändig. $c_\rho = 4044.8\text{Nm/rad}$, $k_\rho = 9.0097\text{Nms/rad}$

erhöht, hängt die Geschwindigkeit an der die Realteile des Wobblemodes positiv werden, stark von der Dämpfung im Gelenk ρ bzw. β ab. Da es allerdings an Dämpfungswerten von Fahrradrahmen mangelt, können diese Werte lediglich abgeschätzt werden. Die Wobblefrequenz am Rennrad ist allerdings im Geschwindigkeitsbereich von ca. 5m/s bekannt, wodurch in Abbildung 4.35 die Steifigkeit im ρ -Gelenk angepasst wurde, sodass die Wobblefrequenz am ρ -Modell in diesem Geschwindigkeitsbereich mit jener am β -Modell übereinstimmt. Außerdem wurde nun die Dämpfung im ρ -Gelenk reduziert, sodass der Wobblemode im betrachteten Geschwindigkeitsbereich nun einen Übertritt in den instabilen Bereich aufweist.

In Abbildung 4.36 sind die Zeigerdiagramme des Wobblenmode beider Modelle bei einer Geschwindigkeit von 5m/s (rote Pfeile) und 15m/s (blaue Pfeile) gegenübergestellt. Bei 5m/s ist der Wobblemode des β -Modells bereits instabil, während der Wobblemode des ρ -Modells noch stabil ist. Abgesehen von den unterschiedlichen Freiheitsgraden β und ρ ist die Anregung der restlichen Freiheitsgrade bei beiden Modellen vergleichbar und der Wobblemode des ρ -Modells weist ebenso die meiste Anregung der Lenkrate auf, wie es beim β -Modell der Fall ist. In beiden Modellen zeigt sich eine Zunahme des Phasenverzugs des β/ρ -Winkels gegenüber

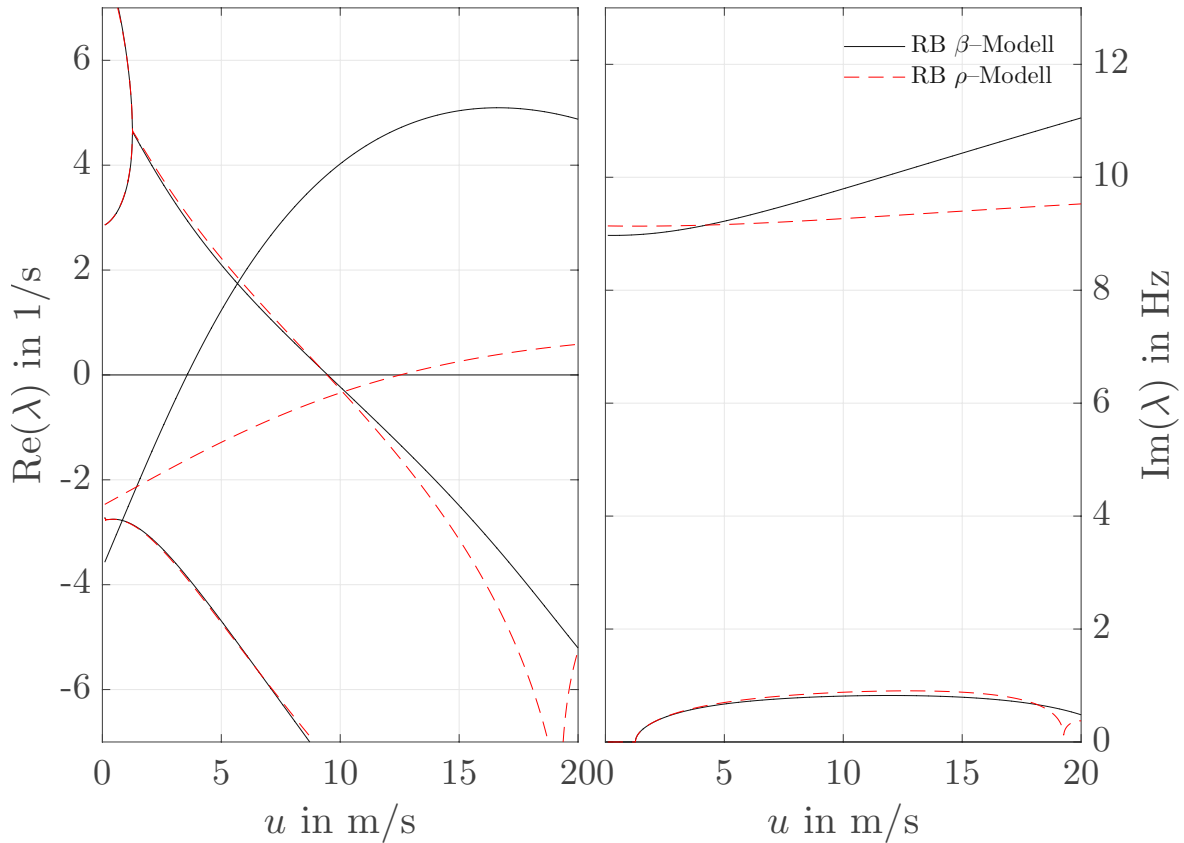


Abbildung 4.35: Gegenüberstellung des Eigenwertverlaufs am β -Modell und ρ -Modell; Rennradmodell mit linearem Reifenmodell; aufrecht sitzender, starr mit dem Rahmen verbundener Fahrer, freihändig. $c_\rho = 4125.3\text{Nm/rad}$, $k_\rho = 6.736\text{Nms/rad}$

dem Lenkwinkel, wenn die Geschwindigkeit erhöht wird.

4.3.3 Gyroskopische Effekte

Durch die Erweiterung um den Rotationsfreiheitsgrad β bzw. ρ wird nicht nur ein Querversatz des Aufstandspunktes des Rades im Modell realisiert, es wirken auch zusätzliche gyroskopische Momente.

In beiden Fällen wirken zwar bereits ohne dieses Gelenk gyroskopische Effekte, die die Roll-, Gier- und Lenkbewegung miteinander koppeln, jedoch kommen durch das zusätzliche Gelenk β bzw. ρ noch weitere Terme hinzu. Den Einfluss der zusätzlichen gyroskopischen Effekte durch die Gabelauslenkbewegung hat Spierings in [73] bereits am Motorrad untersucht. Abbildung 4.37 zeigt ähnliche Berechnungen für das β -Modell des linearen Touringrad-Modells (Originalmodell: volle Linie) in Matlab. Der Wobblemode wird bei ca. 3.6m/s instabil und die Abhängigkeit der Wobblefrequenz von der Vorwärtsgeschwindigkeit ist deutlich gegeben. Die strichlierte Linie zeigt im Vergleich zur durchgezogenen Linie den Eigenwertverlauf, wenn die gesamten gyroskopischen Effekte des Vorderrades aus-

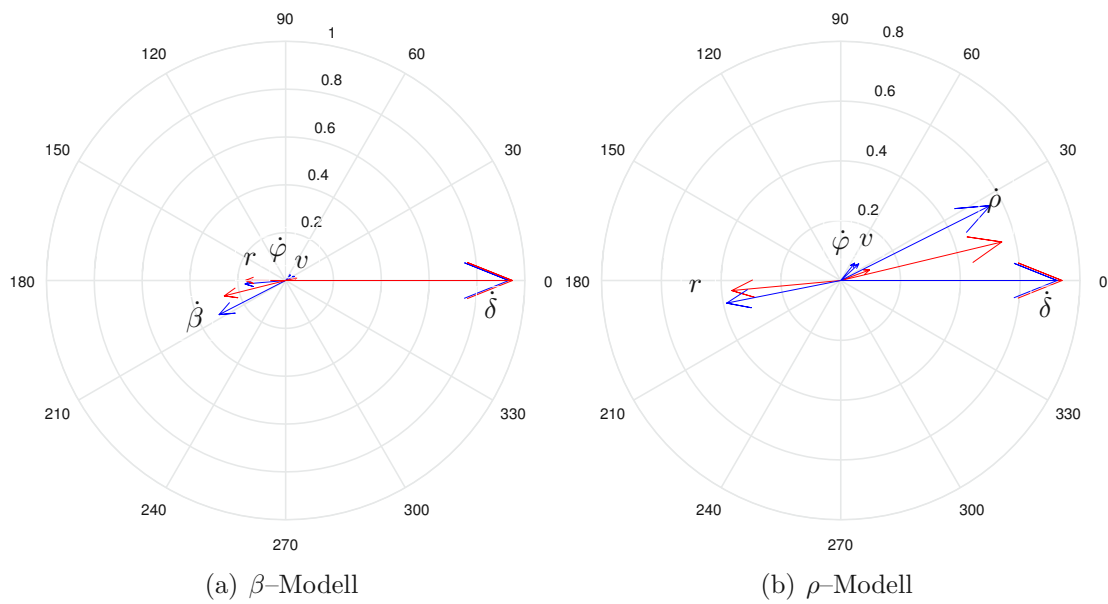


Abbildung 4.36: Zeigerdiagramme der charakteristischen Moden am β -Modell (a) und ρ -Modell (b) bei 5m/s (rot) und 15m/s (blau) Fahrgeschwindigkeit; Modellkonfiguration und Parameter analog zu Abbildung 4.35

gegliedert werden. Die Vernachlässigung dieser Effekte wirkt sich auf die Realteile des Wobblemodes aus, sodass dessen Realteilverlauf im betrachteten Geschwindigkeitsbereich keine Tendenz zu einer neuerlichen Stabilisierung zeigt. Die bisher starke Abhängigkeit der Frequenz von der Geschwindigkeit reduziert sich durch die Vernachlässigung dieser Terme ebenso. Außerdem zeigt der Weavemode nun instabiles Verhalten über dem betrachteten Geschwindigkeitsbereich. Diese Instabilität ist gleichzusetzen mit der von Klein und Sommerfeld berichteten Instabilität (vgl. Abschnitt 4.1). In weiterer Folge zeigt die punktierte Linie – ähnlich wie bei Berechnungen von Spierings [73] – den Verlauf der Eigenwerte, wenn die gyroscopischen Effekte, welche nur die Drehbewegung β betreffen, vernachlässigt werden. Es lässt sich erkennen, dass sich diese β -gyroscopischen Effekte offensichtlich dämpfend auf den Wobblemode auswirken, wohingegen die übrigen gyroscopischen Effekte anfachend auf den Wobblemode wirken. Die Wobblefrequenz zeigt durch den Wegfall der β -gyroscopischen Effekte ebenfalls eine geringere Abhängigkeit von der Vorwärtsgeschwindigkeit. Der Weavemode, wie auch der Capsizemode, zeigen hingegen keine bemerkenswerten Veränderungen.

Abbildung 4.38 zeigt ein analoges Prozedere für das ρ -Modell des Touringrades bei ansonsten gleicher Parameterkonfiguration. Ähnlich wie beim β -Modell bleibt der Weavemode durch Vernachlässigung der gesamten gyroscopischen Effekte im betrachteten Geschwindigkeitsbereich instabil. Bemerkenswert ist das Verhalten des Wobblemode bei Vernachlässigung der gesamten gyroscopischen Effekte am Vorderrad. Dadurch wird dieser erst bei etwas höheren Geschwindigkeiten instabil als am Originalmodell und die Realteile fallen im Vergleich zum Ausgangsmodell

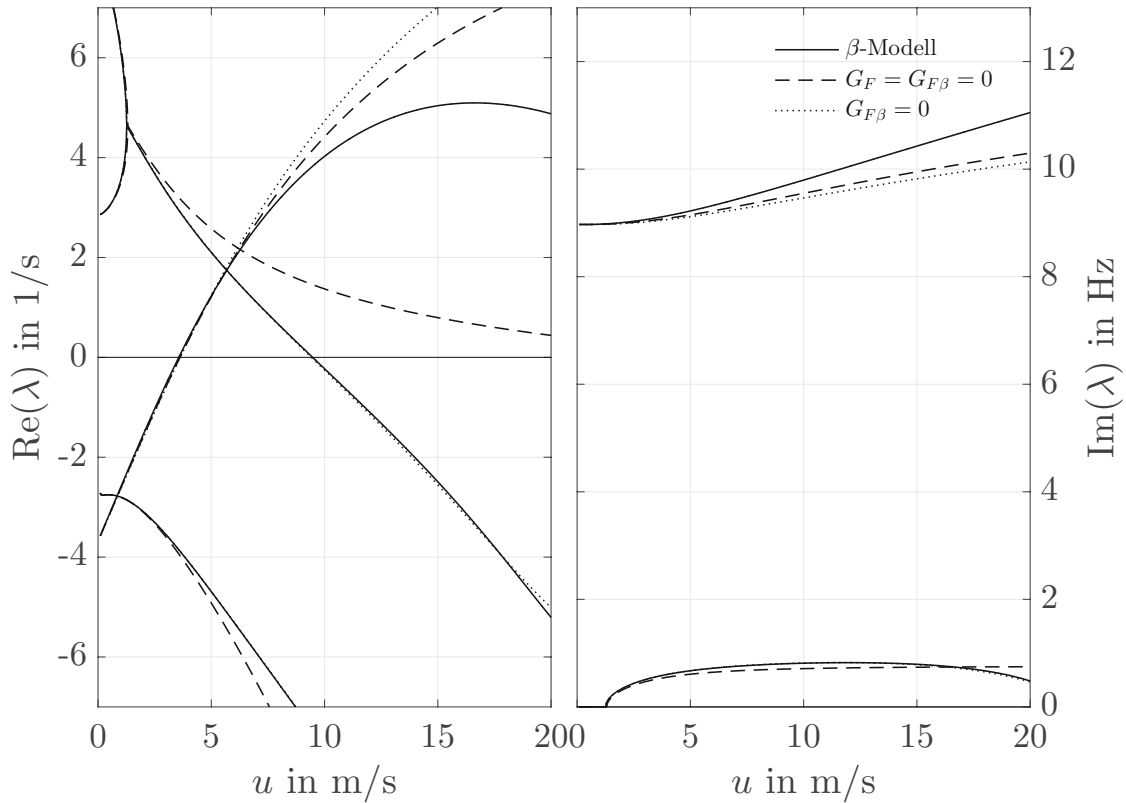


Abbildung 4.37: Eigenwertverlauf in Abhängigkeit der Vorwärtsgeschwindigkeit für das Touringrad mit Rotationsfreiheitsgrad β und der Einfluss der gyroskopischen Effekte des Vorderrades; Parameterwerte aus [25], Fahrer in aufrechter Sitzposition, freihändig

geringer aus. Dieses Verhalten stellt somit einen wesentlichen Unterschied zum β -Modell dar.

Durch den Wegfall der ρ -gyroskopischen Effekte zeigt der Wobblemode wiederum keine deutlichen Veränderungen, allerdings wird der Weavemode durch diese Vernachlässigung sichtlich verändert, was sich beispielweise an der Geschwindigkeit zeigt, an der dieser wieder stabil wird.

Während der Wobblemode am Touringrad- β -Modell durch die Vernachlässigung der gyroskopischen Effekte des Vorderrades größere positive Realteile der Eigenwerte aufweist, zeigt der Wobblemode am Touringrad- ρ -Modell ein gegenteiliges Verhalten, was sich an der höheren Geschwindigkeit, an der der Wobblemode instabil wird, und an den geringeren Eigenwertrealteilen des Wobblemode, zeigt.

4.3.4 Fahrer

Die Modellbildung des Fahrerkörpers wird im folgenden Abschnitt in zweierlei Hinsicht betrachtet. Einerseits soll die Anbindung des gesamten Fahrerkörpers an den Rahmen des Fahrrades untersucht werden, andererseits wird die Verbindung der Hände zum Lenker – im Gegensatz zur freihändigen Fahrt – in Betracht gezogen.

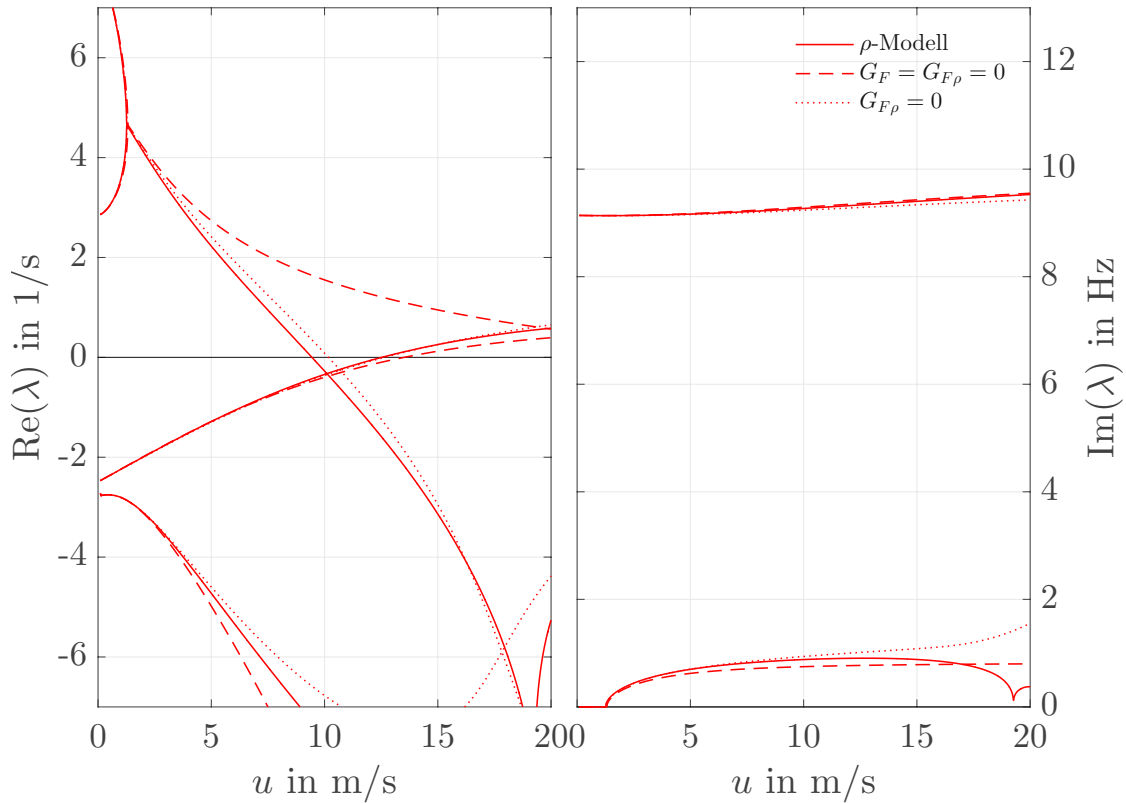


Abbildung 4.38: Eigenwertverlauf in Abhängigkeit der Vorwärtsgeschwindigkeit für das Touringfahrrad mit Rotationsfreiheitsgrad ρ und der Einfluss der gyroskopischen Effekte des Vorderrades

4.3.4.1 Anbindung des Fahrers an den Rahmen

Nachdem sich bei zahlreichen Versuchsfahrten in [45] gezeigt hat, dass der Fahrer das Auftreten eines instabilen Wobblemodes durch Anspannung der Rumpfmuskulatur erleichtern kann, wurde in der Diplomarbeit von Ott [45] ein zusätzlicher Rollfreiheitsgrad des Fahreroberkörpers gegenüber dem Rahmen im Sinne eines inversen Pendels eingeführt. Dabei konnten die bei den Versuchsfahrten gemessenen Werte bei angespannter ($c_{\varphi_r} = 1520\text{Nm/rad}$ und $k_{\varphi_r} = 48.1\text{Nms/rad}$) bzw. entspannter ($c_{\varphi_r} = 380\text{Nm/rad}$ und $k_{\varphi_r} = 24.04\text{Nms/rad}$) Rumpfmuskulatur mit Parametervariationen der Feder– Dämpferkonstanten bezüglich des Oberkörper– Drehgelenks am Ersatzmodell nicht reproduziert werden. Aus diesem Grund begnügte man sich in [25] mit einer starren Verbindung des Fahreroberkörpers an den Rahmen.

Als Alternative zu dieser Modellbildung wurden im Zuge der vorliegenden Arbeit zwei Varianten aus der Literatur ([71], [43]) untersucht. Dabei wurde einerseits dem Fahreroberkörper ein Gierfreiheitsgrad und andererseits dem gesamten Fahrerkörper ein translatorischer Lateralfreiheitsgrad hinzugefügt. Beide erweiterten Bewegungsmöglichkeiten wurden mit linearen Feder– Dämpferelementen beaufschlagt.

Abbildung 4.39 zeigt eine Stabilitätskarte dieser in Abschnitt 4.2.1.4 vorgestellten Modellerweiterungen des Rennrades mit *simplified Magic Formula*–Reifenmodell.

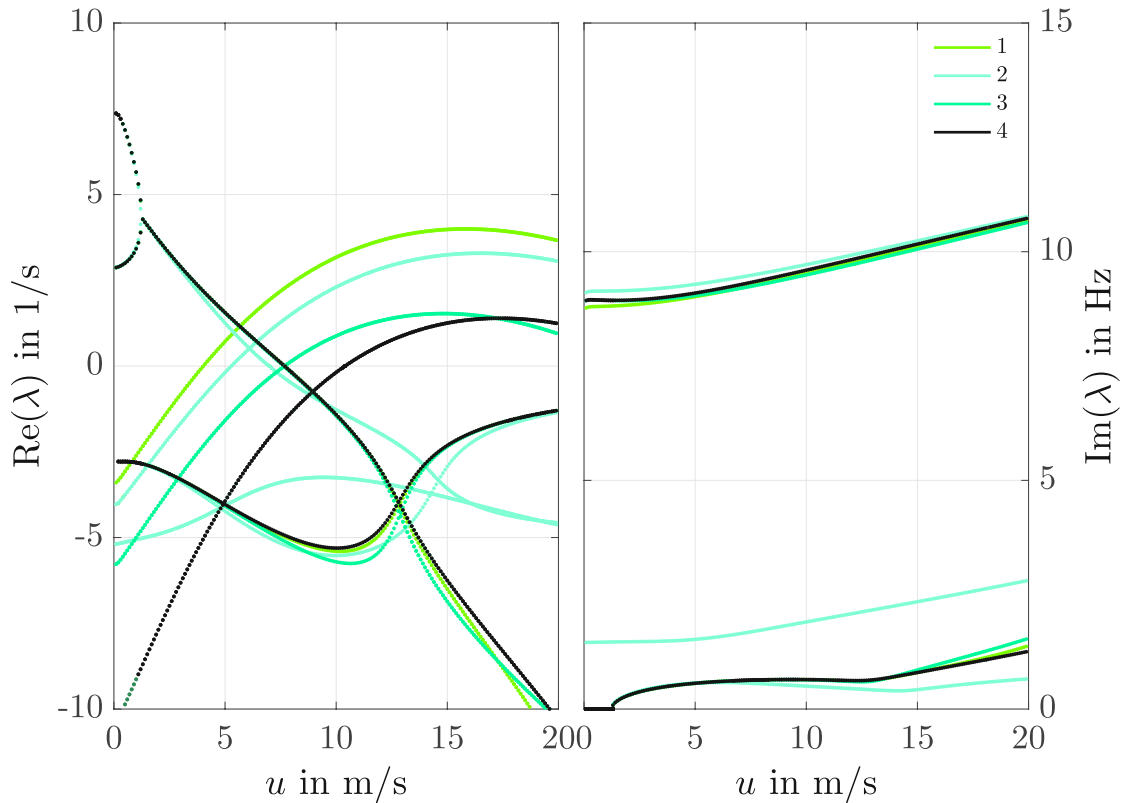


Abbildung 4.39: Variation der Bewegungsmöglichkeiten des Fahrers gegenüber dem Rahmen, RB und *simplified MF* Reifenmodell

Diese sind durch eine Kosimulation aus Matlab und Simpack entstanden, wobei die Eigenwerte der linearisierten Bewegungsgleichungen des Modells in Simpack ermittelt wurden und an Matlab übergeben wurden.

Die mittelgrünen Linien (1) stammen vom linearen Rennradmodell mit einem Fahrer in aufrechter Position während freihändiger Fahrt mit starrer Verbindung des Körpers zum Rahmen. Erweitert man dieses Modell um den Rollfreiheitsgrad φ_r des Oberkörpers (mit $c_{\varphi_r} = 380\text{Nm/rad}$ und $k_{\varphi_r} = 24.04\text{Nms/rad}$) analog zu [45], so zeigt sich dadurch der Leanmode als stabiler Eigenmode mit einer Frequenz von ca. 2 – 4Hz (vgl. hellblaue Linie – 2).

Bei Einführung einer Gierbewegung des Fahreroberkörpers hingegen war mit Parameterwerten für die Steifigkeit und Dämpfung aus der Literatur [71] kein instabiler Wobblemode mehr abzubilden. Erst eine Erhöhung der Drehfedersteifigkeit von $c_{\psi_r} = 120\text{Nm/rad}$ aus [71] auf $c_{\psi_r} = 1000\text{Nm/rad}$ und eine gleichzeitige Änderung der Dämpfungskonstante von $k_{\psi_r} = 15\text{Nms/rad}$ auf $k_{\psi_r} = 100\text{Nms/rad}$ ermöglichte eine Darstellung des Wobblemode, wie in Abbildung 4.39 (türkisgrüne Linie – 3). Durch die Einführung einer weiteren Bewegungsmöglichkeit kommt in der Stabilitätskarte ein weiterer Eigenmode hinzu. Nachdem dieser aber durchwegs negative Realteile besitzt, wird von einer Abbildung dessen abgesehen.

Schließlich folgt die Erweiterung des Systems um eine translatorische Querbewegung y_r (vgl. Abbildung 4.10) des gesamten Fahrerkörpers, (vgl. schwarze Linie – 4). Variationen der Steifigkeits- und Dämpfungsparameter, welche im Zuge die-

ser Arbeit durchgeführt wurden, haben gezeigt, dass eine Reduktion dieser Werte zur Stabilisierung des Wobblemodes beiträgt, während erhöhte Steifigkeits- und Dämpfungswerte zu einer geringeren Übertrittsgeschwindigkeit des Wobblemodes und somit zu einem größeren instabilen Geschwindigkeitsbereich führen.

Auch hier zeigt sich, dass sich eine entspannte Sitzposition des Fahrers (entspricht geringen Steifigkeits- und Dämpfungswerten) stabilisierend auf den Wobblemode auswirkt. Um allerdings quantitative Aussagen zum Beitrag des Oberkörper-Gierfreiheitsgrades bzw. der lateralen Bewegung des gesamten Körpers treffen zu können, wären Versuchsfahrten und Messreihen notwendig, die auch die Bewegung des Fahrers während der auftretenden Schwingung dokumentieren.

4.3.4.2 Anbindung der Arme an den Lenker

Ausgehend vom Rennradmodell mit starr an den Rahmen gebundenem, aufrechten Fahrerkörper wird im Folgenden eine Modellanpassung bis hin zum gebeugt sitzenden Rennradfahrer aus [25], dessen Hände starr mit dem Lenker verbunden sind, vorgenommen.

Diese Anpassung erfolgte in [25] durch Adaption der linearen Bewegungsgleichungen, sodass einzelne Parameter identifiziert werden konnten, die den qualitativen Verlauf der Eigenwerte am meisten beeinflussen.

Abbildung 4.40 aus [25] bildet die Eigenwerte bei dieser schrittweisen Veränderung ab. Die breite, schwarze Linie zeigt den Verlauf der Eigenwerte des linearen Rennrad-Modells mit aufrecht sitzendem, freihändig fahrendem Fahrer.

In weiterer Folge wird der Oberkörper des Fahrers in eine sportliche vorgebeugte Position gebracht. Da der Fahrerkörper als Bestandteil des Rahmens gilt, ändern sich dadurch die Massenträgheitsmomente des Rahmens. Dabei verringern sich die Werte für das Massenträgheitsmoment bezüglich der x-Achse, sowie das Deviationsmoment bezüglich x- und z-Achse des Referenzkoordinatensystems im hinteren Radaufstandspunkt (vgl. dazu Abbildung 4.7). Zusätzlich erhöht sich durch diese Positionsänderung das Massenträgheitsmoment bezüglich der z-Achse, womit auch die größte Veränderung der Eigenwertrealteile einhergeht.

Die blaue Linie in Abbildung 4.40 bildet dabei die Eigenwerte unter Berücksichtigung der eben genannten Veränderung des Massenträgheitsmomentes ab. Deutlich sichtbar ist, dass dadurch der Wobblemode bereits bei geringeren Geschwindigkeiten instabil wird und der Weavemode erst bei höheren Geschwindigkeiten in den stabilen Bereich übertritt.

Im nächsten Schritt wurde die Lageänderung des Gesamtschwerpunktes mit einbezogen, die durch die Positionsänderung des Fahreroberkörpers entsteht, allerdings wird von einer damit einhergehenden Anpassung der Aufstandskräfte vorerst abgesehen, um bei der Untersuchung Folgeeffekte wie geänderte Reifenparameter auszuschließen (siehe rote unterbrochene Linie in Abbildung 4.40).

Zuletzt werden auch noch diese Effekte mit berücksichtigt, sodass die schwarze dünne Linie dem Modell eines gebeugten Fahrers entspricht, allerdings noch immer keine Bindung der Hände an den Lenker besteht. Eine Anpassung der aufstandskraftabhängigen Reifenparameter geht damit einher, wobei in erster Linie die Schräglaufwinkelsteifigkeit und die Rückstellmomentensteifigkeit am Vorder- rad zur Grenzggeschwindigkeit des Wobblemode sowie des Weavemodes beitragen.

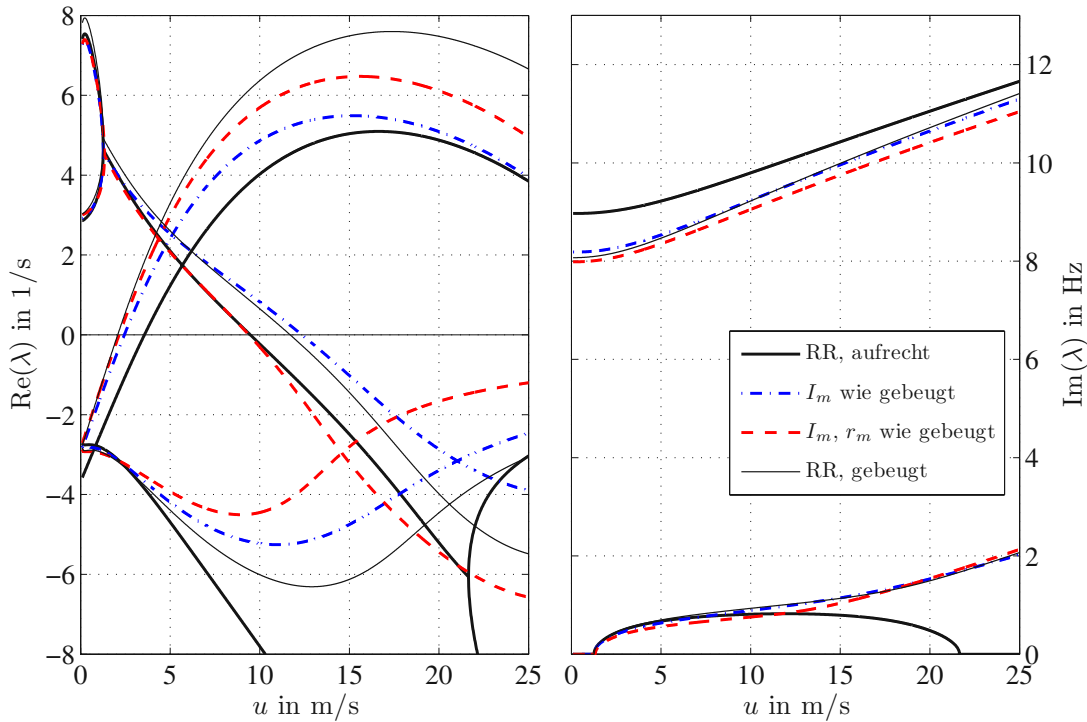


Abbildung 4.40: Effekte bei der Veränderung der Sitzposition des Fahrers am Rennrad von aufrecht zu gebeugt [25]

Ein Eindruck über die Auswirkungen auf das lineare Stabilitätsverhalten, wenn der Fahrer den Lenker mit seinen Händen umfasst, kann in erster Näherung durch ein Übergangsmodell erreicht werden (vgl. Abbildung 4.41). Dabei wird ausgehend vom Modell mit sportlicher Sitzposition des Fahrers aus Abbildung 4.40 die Masse der Hände des Fahrers nicht mehr dem Rahmen sondern jetzt dem Lenker zugezählt.

Dadurch ändert sich zwar an der Schwerpunktslage des Gesamtsystems im Ausgangszustand (aufrecht und nicht eingelenkt) nichts, allerdings wird dadurch die Lage des Schwerpunktes der gesamten Lenkeinheit sowie das zugehörige Massenträgheitsmoment geändert. Für eine detaillierte Untersuchung einzelner Terme wird auf [25] verwiesen; zusammenfassend kann festgehalten werden, dass sich die Schwerpunktslage der Lenkeinheit in erster Linie bei zunehmender Geschwindigkeit auf Weave- und Capsizemod auswirkt, die Erhöhung des Massenträgheitsmomentes des Lenkers um die Lenkachse ($I_{F\delta\delta}$) hauptsächlich zur Dämpfung des Wobblemod beiträgt.

Eine Erhöhung der Deviationsmomente, $I_{H\delta zD}$, welches die Lenkbewegung der Lenkeinheit und die Gierbewegung des Fahrrades miteinander koppelt, führt nach [25] zu einer Destabilisierung des Weave- und Wobblemod ab dem mittleren Geschwindigkeitsbereich und zu einer Erhöhung der Wobblefrequenz.

Gemeinsam mit der zuvor erwähnten Stabilisierung durch das Trägheitsmoment bezüglich der Lenkachse erfolgt in Summe ein flacherer Verlauf der Wobblemode-anteile über der Geschwindigkeit und dessen zugehörige Frequenzen fallen im betrachteten Geschwindigkeitsbereich niedriger aus.

In einem weiteren Schritt wird zusätzlich eine Steifigkeit und Dämpfung um die Lenkachse eingeführt, um die Anspannung der Armmuskulatur einzubinden. Bei Werten, die einer lockeren Armmuskulatur ($c_\delta = 3.2 \text{ Nm/rad}$, $k_\delta = 0.72 \text{ Nms/rad}$) entsprechen, verändert sich der Weavemode bei geringen Fahrgeschwindigkeiten (siehe dazu Abbildung 4.41). Auch der Verlauf der Realteile des Wobblemode fällt durch diese Einführung des Feder-Dämpferelements geringer aus und der instabile Geschwindigkeitsbereich wird deutlich reduziert.

Bei Werten, die einer stark angespannten Armmuskulatur ($c_\delta = 59.4 \text{ Nm/rad}$, $k_\delta =$

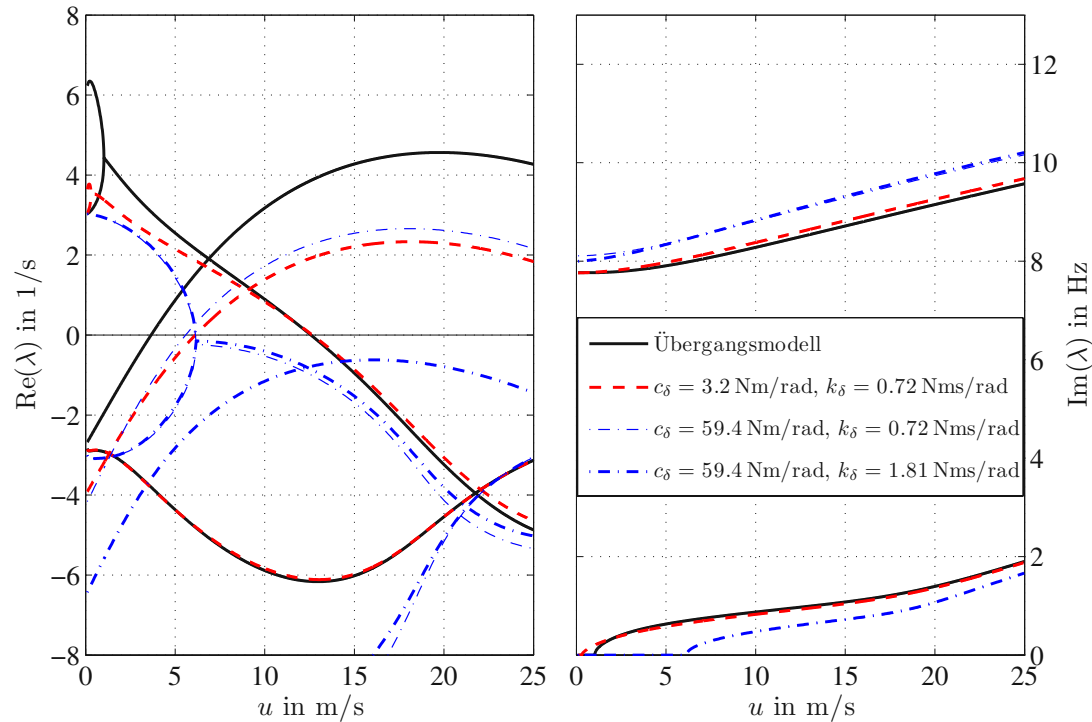


Abbildung 4.41: Variation der Anspannung der Armmuskulatur am Rennrad [25]

1.81Nms/rad) entsprechen, verändert sich hingegen der qualitative Verlauf der Realteile des Weavemode sichtlich. Dies geschieht schon alleine durch die Erhöhung der Federsteifigkeit bezüglich der Lenkbewegung, was auch mit den Beobachtungen bei Änderungen des Terms in der Steifigkeitsmatrix ($K_{0\delta\delta}$) in [61] übereinstimmt. Ein deutlicher Einfluss auf den Verlauf des Wobblemode konnte hingegen erst bei der Anpassung der Dämpfungskonstante an die Werte für angespannte Armmuskulatur abgebildet werden. Diese Dämpfung wirkt sich deutlich stabilisierend auf den Wobblemode aus, sodass dieser unter der vorliegenden Parameterkonfiguration keinen instabilen Bereich mehr aufweist.

Abbildung 4.42 zeigt schließlich eine Gegenüberstellung der Eigenwerte der drei Modellkonfigurationen (ursprüngliches hands-off-Modell in gebeugter Fahrerposition, Übergangsmodell mit Parameterwerten für eine entspannte Armmuskulatur und hands-on-Modell mit kinematischer Bindung der Arme an den Lenker). Dabei ist ersichtlich, wie der Wobblemode durch die Anbindung der Arme an den Lenker eine weitere Stabilisierung erfährt. Parametervariationen in [25] zufolge sind das Massenträgheitsmoment $I_{a\delta\delta}$ und das Deviationsmoment $I_{a\delta z_D}$ die beiden

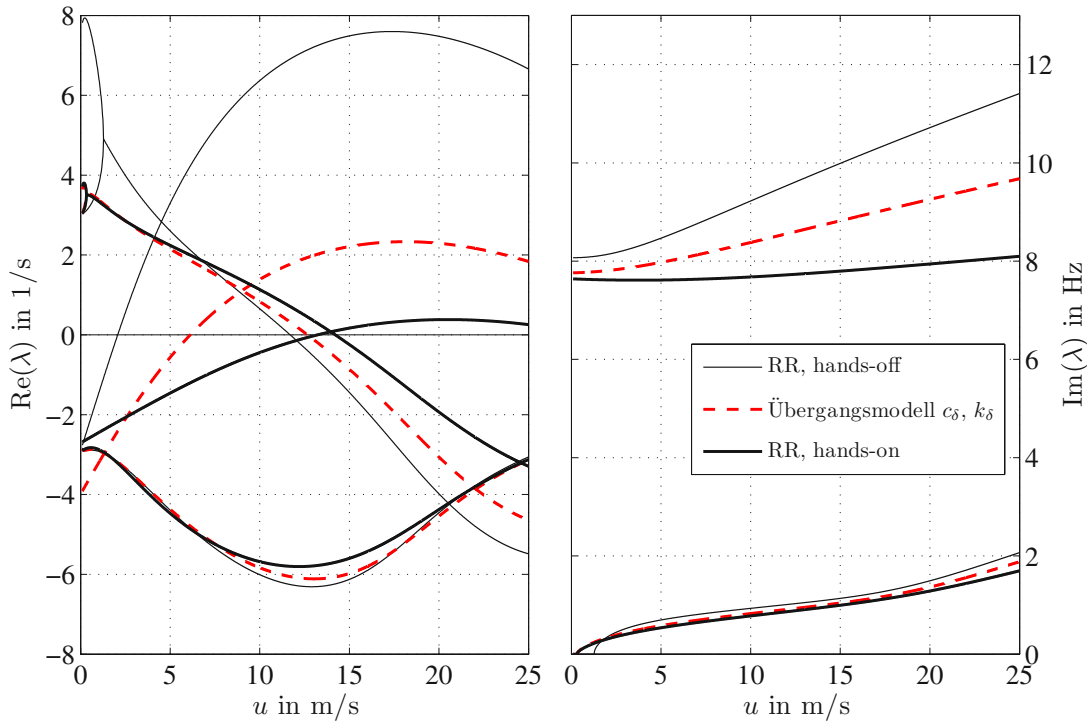


Abbildung 4.42: Vergleich der charakteristischen Eigenwerte des Rennrades für das hands-off-, das Übergangs- und das hands-on-Modell [25]

hauptverantwortlichen Terme für den neuen Verlauf des Wobblemodes in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit. Dabei koppelt das Deviationsmoment der Arme $I_{a\delta z_D}$ die Lenkbewegungen mit den Gierbewegungen des Gesamtsystems und verschiebt den Maximalwert der Realteilkurve zu höheren Werten sowie höheren Geschwindigkeiten. Ein höheres Massenträgheitsmoment der Arme bezüglich der Lenkachse $I_{a\delta\delta}$ bewirkt hingegen eine Reduktion der Wobblefrequenz über den betrachteten Geschwindigkeitsbereich sowie geringere Eigenwertrealteile. Das führt folglich dazu, dass der Wobblemode erst bei höheren Geschwindigkeiten instabil wird.

Mit den Berichten in [33] übereinstimmend, ist die Abhängigkeit der Frequenz des Wobblemodes von der Fahrgeschwindigkeit nun auch geringer als noch ohne Kopplung der Arme an die Bewegung des Lenkers.

Durch eine Variation der Übersetzungsverhältnisse zwischen Lenkwinkel und den Armwinkeln konnte Klinger [25] zeigen, dass der Wobblemode hauptsächlich von den Bewegungen der Arme in Längsrichtung beeinflusst wird und deren Querbewegung lediglich einen geringen Beitrag zum Verhalten des Wobblemode leistet.

Ausgehend von den Erkenntnissen aus Abbildung 4.41 sowie Beobachtungen von aufklingenden Lenkerschwingungen bei Touringrädern, aber teilweise auch bei Rennrädern, dass eine Anspannung der Armmuskulatur unter Umständen zu einer Dämpfung dieser Schwingung führen kann, wurde in Abbildung 4.43 eine Variation der Steifigkeits- und Dämpfungskennwerte um die Lenkachse durchgeführt. Daraus lässt sich schließen, dass der Wobblemode durch ein Versteifen der Armmuskulatur nicht stabilisiert werden kann. Außerdem ist die starke Abhängigkeit

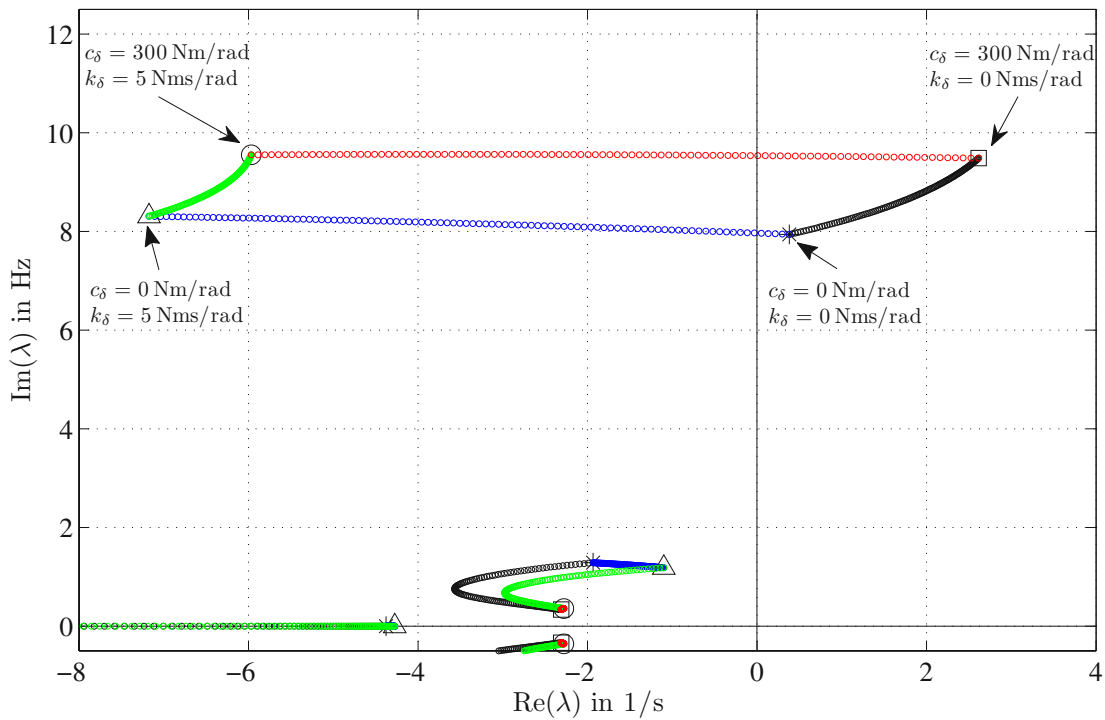


Abbildung 4.43: Variation der Federsteifigkeit bzw. der Dämpfungskonstante des Feder-Dämpfer-Elements um die Lenkachse bei einer Fahrgeschwindigkeit von $u = 20\text{m/s}$ [25]

der Realteile des Wobblemode von der Dämpferkonstante ersichtlich, während dessen Frequenz dabei annähernd gleich bleibt bzw. sich nur geringfügig ändert. Eine erhöhte Dämpfung um die Lenkachse führt nach Abbildung 4.43 zu einer Stabilisierung des Wobblemodes, was bei Motorrädern oft durch Lenkungsdämpfer bewerkstelligt wird.

Eine Untersuchung des nichtlinearen hands-on-Modells erfolgte im Zuge dieser Arbeit unter der Annahme, dass die Verbindung der Unterarme an die Hände im Bereich der Handgelenke mit jeweils einem linearen Feder-Dämpferelement erfolgt. Die Steifigkeit wird sowohl für die linke als auch rechte Hand mit $c = 5000\text{N/m}$ und die Dämpferkonstante $k = 500\text{Ns/m}$ analog zur Modellbildung in [74] beaufschlagt.

Abbildung 4.44, welche über eine Eigenwertberechnung in Simpack entstanden ist, zeigt den Vergleich der Eigenwerte des Rennrades mit aufrechtem Fahrer während freihändiger Fahrt, gegenüber jenen mit einem gebeugtem Oberkörper als hands-off und hands-on-Modell und *simplified Magic Formula* Reifenmodell. Dabei erfolgt durch die gebeugte Fahrerposition und das Hinzuzählen der Massen der Fahrerhände zum Lenker eine Dämpfung des Wobblemode sowie eine Reduktion der Wobblefrequenz (schwarze Linie in Abbildung 4.44).

In einem weiteren Schritt werden den Armen des Fahrers Bewegungsmöglichkeiten analog zu Abbildung 4.13 hinzugefügt und die Stelle der Handgelenke über ein lineares Feder-Dämpferelement an den Lenker gebunden. Diese Modelladaption führt in Abbildung 4.44 zu einer weiteren Reduktion der Eigenwertrealteile

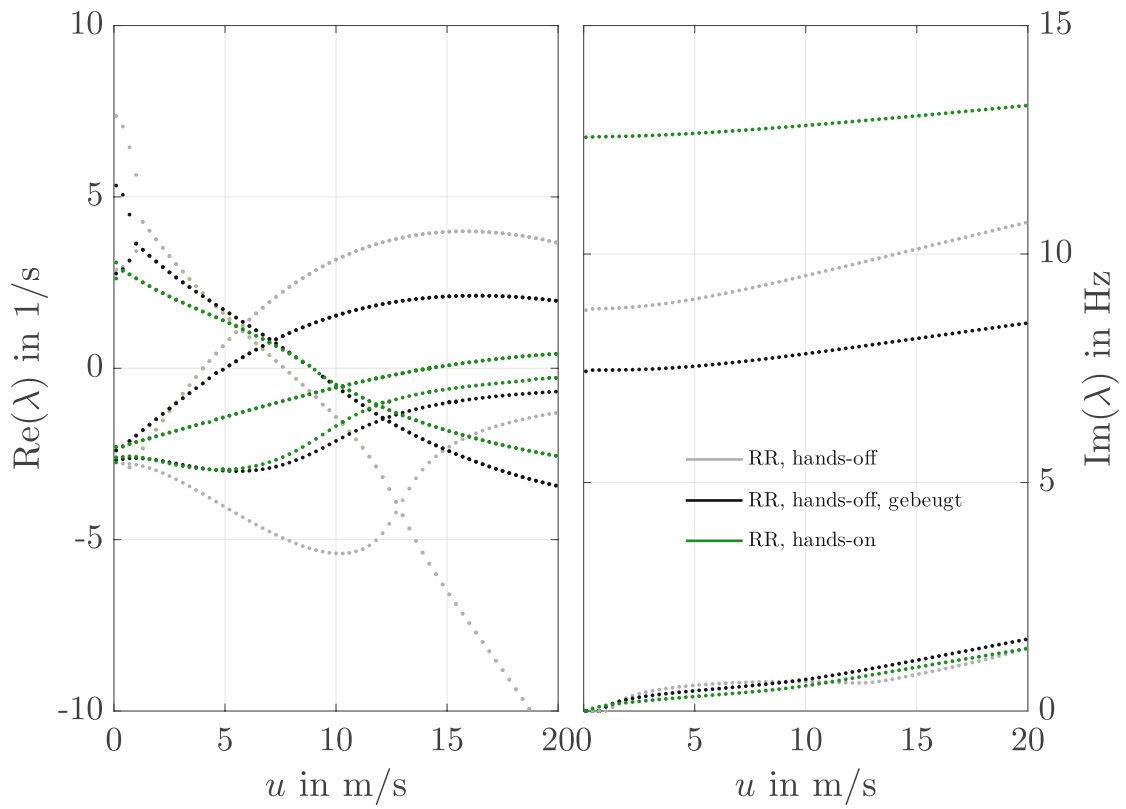


Abbildung 4.44: Vergleich der Eigenwertverläufe am Rennrad bei aufrechtem Fahrer, gebeugtem Fahrer hands-off und hands-on; RM: *simplified MF*

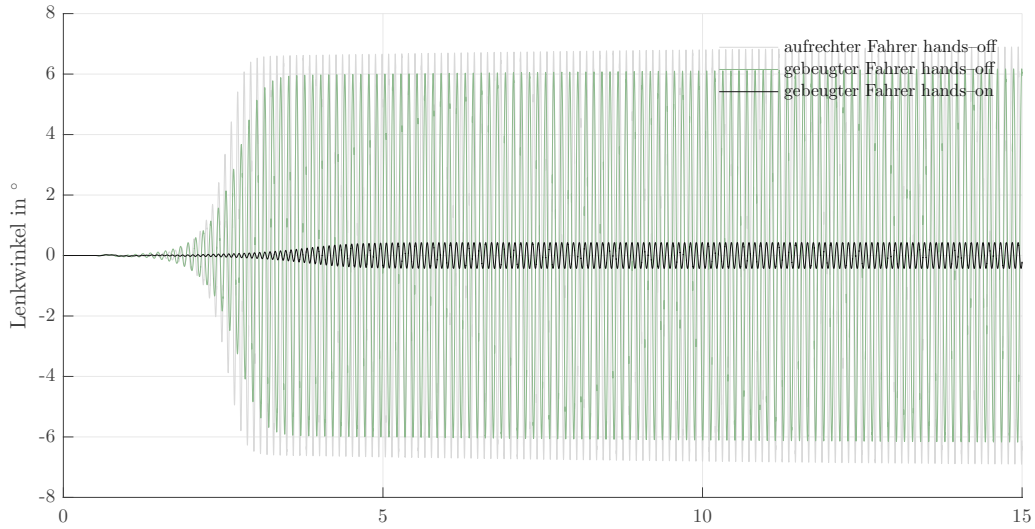


Abbildung 4.45: Zeitsimulation des Lenkwinkels bei aufklingender Wobbleschwingung: Vergleich am Rennrad bei aufrechtem Fahrer mit gebeugtem Fahrer hands-off und hands-on

des Wobblemode und zu einer deutlich höheren Frequenz. Eine Zeitsimulation der aufklingenden Wobbleschwingung der Modelle aus Abbildung 4.44 bei einer Fahrt über einen Hang mit 4° Neigung zeigt in Abbildung 4.45, dass die Amplitude des Wobblemode bereits durch eine gebeugte, sportliche Sitzposition des Fahrers geringere Werte aufweist. Durch die Verbindung der Arme an den Lenker treten allerdings nochmals deutlich geringere Schwingungsamplituden auf als ohne Verbindung.

Nachdem bisher die Auswirkungen der Anbindung am β -Modell erfolgt ist, soll im Folgenden das linearisierte ρ -Modell in Matlab betrachtet werden. Um im Zuge einer Vereinfachung die Veränderung der Eigenwerte am linearisierten ρ -Modell in Matlab mit und ohne kinematische Bindung der Arme an den Lenker zu vergleichen, wurde eine Anpassung der Systemmatrizen des linearen ρ -Modells des Rennrades (Fahrer starr an den Rahmen angebunden, ausgehend von einer aufrechten Sitzposition) vorgenommen. Dabei wurden – ohne neuerliche Herleitung der Bewegungsgleichungen – analog zum β -Modell jene Werte in den Systemmatrizen angepasst, die auch am β -Modell durch die Anbindung der Arme an den Lenker hinzukommen, vgl. Abbildung 4.42. Zu beachten ist dabei allerdings, dass durch diese Vorgehensweise jene Terme am ρ -Modell, die durch den Winkel ρ mit den übrigen Bewegungsmöglichkeiten des Systems gekoppelt sind, vernachlässigt wurden.

Diese grobe Adaption von der freihändigen Fahrt zum hands-on-Modell zeigt in Abbildung 4.46 zwar auch am ρ -Modell eine Veränderung des Weave- und Capsize-Mode sowie eine Reduktion der Wobblefrequenzen, ähnlich dem β -Modell, allerdings bleibt die Übertrittsgeschwindigkeit des Wobblemodes in den stabilen Bereich nahezu unverändert, was einen wesentlichen Unterschied zum Verhalten am β -Modell beschreibt. Für die Eigenwerte des β -Modells in Abbildung 4.46 wurden zuvor die Steifigkeits- und Dämpfungsparameter des β -Gelenks an gemessene

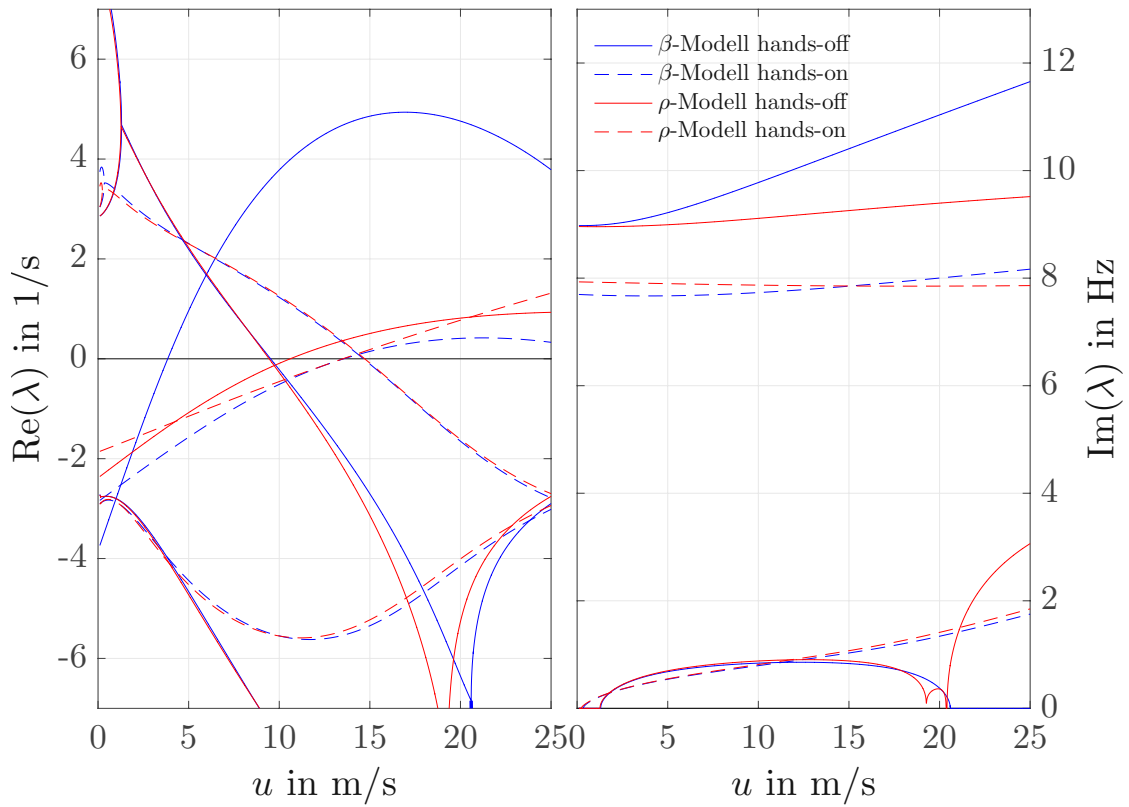


Abbildung 4.46: Vergleich hands-on und hands-off-Modelle am β - bzw. ρ -Modell des Rennrades (lineares Modell in Matlab; lineares Reifenmodell)

Werte aus [33] angepasst, wonach die Frequenz einer Wobbleschwingung am Rennrad bei ca. 15m/s mit ca. 8Hz aufgenommen wurde.

4.4 Shimmy und Wobblemode

Rückblickend und abschließend werden noch die Eigenwertplots des einfachen Schleppradmodells (Abbildung 2.8), im Speziellen des Verlaufs der Eigenwerte des *gyroscopic shimmy*, mit dem Verlauf der Eigenwerte des Wobblemodes am Fahrrad verglichen, da beide Moden durch dominante Lenkbewegungen charakterisiert sind. Auch in der Literatur [78] wird die Ähnlichkeit des Wobblemode und Shimmy aufgegriffen und das einfache Schleppradmodell herangezogen, um den Mechanismus dieser selbsterregten Schwingung zu veranschaulichen.

Betrachtet man Abbildung 2.8, so zeigt sich, dass mit dem *gyroscopic shimmy*-Modell ein Eigenmode auftritt, dessen Verlauf der Realteile im niedrigen Geschwindigkeitsbereich qualitativ mit jenen des Wobblemodes am Fahrrad vergleichbar ist. Doch auch wenn die Modellparameter aus jenen des Lenksystems des Fahrrades abgeleitet wurden, sind die Werte quantitativ nicht miteinander vergleichbar. Es bedarf also noch einer Modellerweiterung des Schleppradmodells.

Ein naheliegender Schritt in diesem Zusammenhang ist, die zusätzliche Masse des Rahmens und des Fahrers mit einzubeziehen, da mittels Parametervariation am linearen Fahrradmodell gezeigt werden konnte, dass etwa eine Änderung des Massenträgheitsmomentes um die Gierachse des Systems deutliche Auswirkungen auf den Wobblemode gezeigt hat.

In Abb. 4.47 zeigt die schwarze durchgezogene Linie (1) den bereits bekannten Verlauf der Eigenwerte des linearen Rennradmodells in Matlab mit starr an den Rahmen gebundenem, aufrecht sitzendem und freihändig fahrendem Fahrer.

Im Vergleich dazu bildet die unterbrochene Linie (2) den Verlauf der Eigenwerte eines ebenen Zweiradmodells ab. Dabei entspricht die Lenkeinheit dem *tyre shimmy*-Modell aus Kapitel 2.2.1, wobei die benötigten Parameter für das System von jenen des linearen Rennradmodells aus (1) abgeleitet wurden. Dabei zeigt sich über den betrachteten Geschwindigkeitsbereich kein instabiler Eigenmode.

Bei zusätzlicher Einführung einer querelastischen Radaufhängung analog zum *lateral compliance shimmy*-Modell aus Kapitel 2.2.2, zeigt sich ein relevanter Eigenmode (blaue, punktierte Linie (3)), der im betrachteten Geschwindigkeitsbereich instabil wird. Dabei wurden die Parameter analog zu (2) gesetzt und die Quersteifigkeit c_y so gewählt, dass bei einer auftretenden Querkraft im Reifenkontaktpunkt die gleiche statische laterale Auslenkung wie am linearen β -Modell (1) auftritt.

Trotz der Modellerweiterung um den Rahmen und den Fahrer entspricht der Verlauf der Eigenwerte nicht jenen des vollständigen, linearisierten Fahrradmodells in Matlab.

Abschließend bleibt noch die Änderung zu einem dreidimensionalen Modell wodurch sich der Freiheitsgrad des Systems um die Rollbewegung erweitert. Damit spielen auch weitere Faktoren aus der Massengeometrie, wie beispielsweise das Trägheitsmoment des Gesamtsystems um die Längsachse mit ein. Auch die Reifenkraft- und -Momente werden durch den mit der Rollbewegung des Gesamtsystems

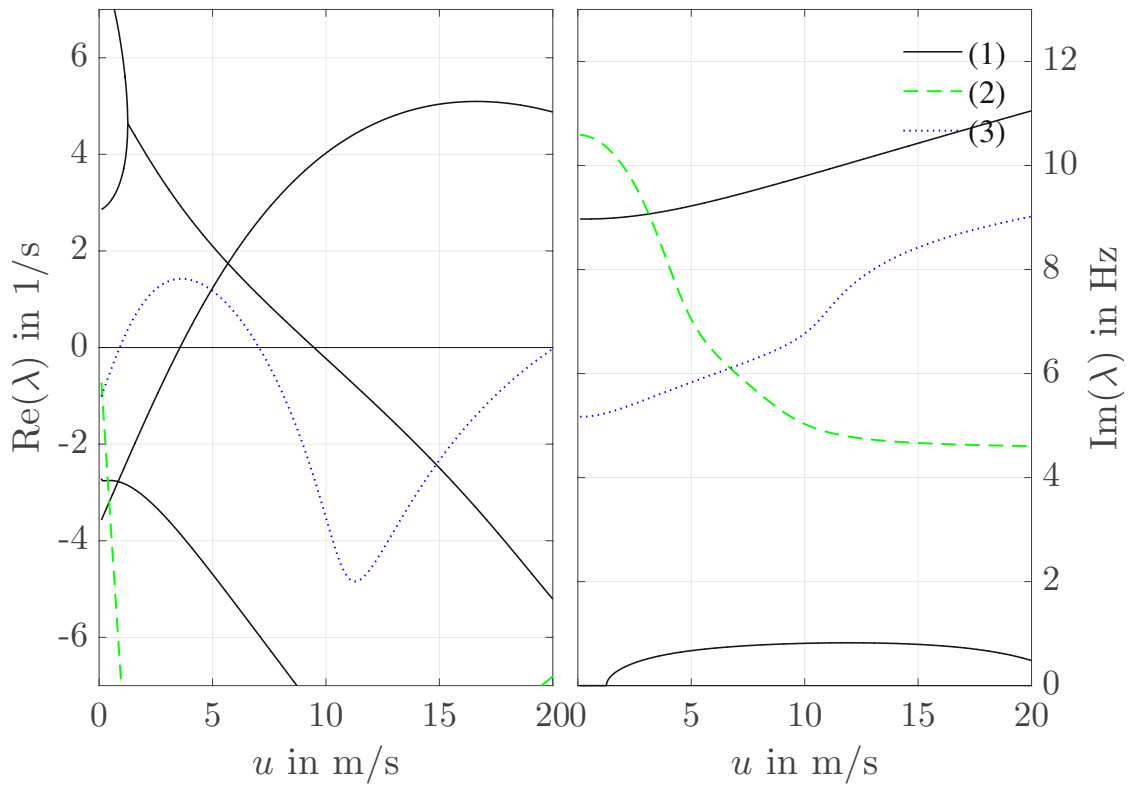


Abbildung 4.47: Eigenwertverlauf über der Fahrgeschwindigkeit – Erweiterung der Bewegungsmöglichkeiten des Systems vom Schlepprad zum Fahrrad

einhergehenden Sturzwinkel der Reifen beeinflusst. Allerdings zeigte sich, dass der Beitrag des Sturzwinkels weniger auf den Wobblemode als auf den Weave- und Capsizemode Einfluss nimmt.

Eine wesentliche Veränderung, die mit dieser Modellerweiterung einhergeht, ist jedoch die Wirkung der gyroskopischen Effekte, die nun die Gier-, Roll- und Lenkbewegung sowie die laterale Gabelauslenkung miteinander koppeln.

Abschließend kann festgehalten werden, dass das einfache Schlepprad alleine zwar einen Eigenmode aufweisen mag, der mit dem Wobblemode verwandt ist, aber umfassende Modellerweiterungen dieses einfachen Modells notwendig sind, um den Wobblemode des Fahrrades darstellen zu können.

5

Rekapitulation, Conclusio und Ausblick

5.1 Rekapitulation und Conclusio

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, einen Beitrag zur Modellbildung für das Verständnis des Phänomens des Wobblemode an Fahrrädern zu leisten.

Ausgehend von vereinfachten Modellen in Kapitel 2, die in erster Linie aus einem gezogenen Rad bestehen und eine selbsterregte Schwingung um die Lenkachse ausführen, wurden Bedingungen ermittelt, die für das Auftreten einer oszillatorischen Instabilität notwendig sind. Dazu gehört einerseits ein Reifenmodell, das eine Querbewegung des Reifenkontaktpunktes auf der Fahrbahn zulässt und die auftretende Seitenkraft bzw. ein Rückstellmoment verzögert wirken. Den anfachen Mechanismus der Seitenkraft durch diese verzögerte Wirkung hat Döhring für eine Schwingungsperiode am Schlepprad veranschaulicht [10]. Als weitere Möglichkeit zur Anfachung einer Schwingung um die Lenkachse wurde die Querbewegung des Systems durch eine querelastische Aufhängung vorgestellt. Auch hier ist eine Querbewegung des Reifenkontaktpunktes möglich, wobei der Phasenverzug der Querbewegung gegenüber der Lenkbewegung vorhanden ist. Als alternative Modellbildung dazu wurde die Querbewegung des Reifens durch ein Drehgelenk ermöglicht, dessen Rotationsachse in einer vorgegebenen Höhe über der Fahrbahn in Längssymmetrieebene liegt. Diese Art der Modellbildung bringt noch einen weiteren Mechanismus ein, nämlich die gyroskopischen Effekte des Rades.

In Kapitel 3 wird anhand einer Stabilitätsanalyse des linearisierten Systems mit dem Routh–Hurwitz–Kriterium ein Überblick über Effekte einzelner Parameterwerte, die zum Auftreten selbsterregter Schwingungen beitragen, erlangt, allerdings kann damit keine Aussage über das Systemverhalten nach einer äußeren Störung getroffen werden. Die Analyse der Systemmatrizen in Bezug auf das Stabilitätsverhalten nach Aufteilung der Dämpfungs– und Steifigkeitsmatrix in jeweils eine symmetrische und eine schiefsymmetrische Matrix ist beim Schlepprad nur unter Vernachlässigung des Einlaufverhaltens der Reifenkräfte einfach möglich. Doch auch in diesem Fall erwies sich der Informationsgehalt für praktische Aussagen über ein selbsterregungsfähiges System – im Speziellen eventuell anfachende Terme – als recht eingeschränkt.

Außerdem hat sich gezeigt, dass die Antriebskraft, welche dem selbsterregungsfähigen System als Energiequelle zur Aufrechterhaltung der Schwingung dient, durch Linearisierung der Bewegungsgleichungen aus ebendiesen verschwindet. Trotzdem erfüllt das danach vorliegende, linearisierte System die Bedingungen des Routh–Hurwitz–Kriteriums für ein selbsterregungsfähiges System.

Die Umwandlung der zugeführten Energie in jene zur Aufrechterhaltung der Schwingung wurde durch Anschreiben der Energiebilanz am einfachen Schlepprad sichtbar. Die anfachende Wirkung für die Shimmybewegung am Schlepprad erfolgt nur solange über die Seitenkraft und das Rückstellmoment am Reifen, solange die Energiebilanz positiv ist. Sowohl Besselinik [4] als auch Ran [54] zeigten, dass dieses Vorzeichen abhängig vom Phasenverzug ist, wodurch sich die Bedeutung der Einlauflänge beim Reifenmodell bzw. der Phasenverzug einer zusätzlichen Querbewegung gegenüber der Lenkbewegung hervorhebt.

Die Untersuchung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines dynamischen Systems führen im Allgemeinen zu komplexen mathematischen Problemstellungen. Allerdings wird damit eine Bifurkationsanalyse möglich, die das Systemverhalten (auch abseits der Gleichgewichtslage) in Abhängigkeit eines oder mehrerer Bifurkationsparameter beschreibt.

Kapitel 4 orientiert sich an den drei Hauptthemen der Modellbildung aus Kapitel 2 und dokumentiert den Einfluss einzelner Aspekte auf das Stabilitätsverhalten des Fahrrades – im Speziellen auf den Wobblemode.

Im Hinblick auf das Reifenmodell konnte am linearisierten Fahrradmodell gezeigt werden, dass die Einlauflänge des Reifens einen instabilen Wobblemode begünstigt. Außerdem zeigte sich, dass das gewählte Reifenmodell nicht nur Auswirkungen auf die Stabilitätsgrenzen des Wobblemode hat, sondern auch auf die Amplitude der Wobbleschwingung. Beispielweise konnte mittels Bifurkationsdiagrammen am nichtlinearen Fahrradmodell gezeigt werden, dass der Wobblemode bei Einbindung des *Brush*-Modells, welches zwar den Bohrschlupf im Reifenmodell berücksichtigt, aber das *residual torque* vernachlässigt, bei geringeren Geschwindigkeiten instabil wird, als vergleichsweise bei Einbindung des *extended Magic Formula*-Reifenmodells, das auch das *residual torque* mit berücksichtigt. Dabei steigt die Amplitude der Wobblemodeschwingung durch das *Brush*-Modell mit zunehmender Geschwindigkeit weniger an als bei Einbindung des *extended/simplified Magic Formula*-Reifenmodells. Die Einbindung von Spin im *extended Magic Formula*-Reifenmodell wirkt sich durch den darin enthaltenen Anteil des Turnslip mit dem Moment M_z dämpfend auf den Wobblemode aus, sodass dieser erst bei höheren Geschwindigkeiten instabil wird. Ein zunehmender Anteil am Rückstellmoment zufolge des Sturzwinkels des Rades wirkt sich destabilisierend auf den Weave- und stabilisierend auf den Capsizemode aus.

Die Sättigung der Reifenkennlinie trägt wesentlich zur Entstehung eines Grenzyklus bei, denn bereits bei alleiniger Einbindung eines nichtlinearen Reifenverhaltens und ansonsten linearisierten Bewegungsgleichungen konnte Tomiati [74] einen Grenzyklus des Wobblemodes nachweisen.

Aber nicht nur das Reifenmodell ist ein Aspekt der Modellbildung, der aufgrund seiner Auswirkungen auf das Stabilitätsverhalten des Fahrrades besondere Beachtung verdient. Auch die Abbildung der Nachgiebigkeit des Fahrradrahmens und

der Gabel entweder durch das Drehgelenk β , das ein Ausschwenken des unteren Teils der Gabel und des Vorderrades beschreibt oder alternativ dazu durch ein Drehgelenk ρ mit einer vertikalen Achse im Bereich des Sattelrohres, wodurch eine seitliche Auslenkung des Aufstandspunktes am Vorderrad ermöglicht wird, beeinflusst den Wobblemode maßgeblich. Diese Modellbildungsvariante zeigt, dass der Frequenzverlauf des Wobblemode über der Fahrgeschwindigkeit eine geringere Abhängigkeit von der Geschwindigkeit hat, als im Vergleich dazu beim β -Modell.

In weiterer Folge wurde die Modellbildung des Fahrers untersucht, der stets als passives Element in die Modellgleichungen eingebunden wurde. Dabei wurde unter anderem der Wobblemode des linearisierten Modells bei einer Modelladaption vom freihändig fahrenden, aufrecht sitzenden Fahrermodell hin zum Fahrer, der in gebeugt sitzender, sportlicher Fahrposition mit beiden Händen den Lenker umfasst und somit das Auftreten des Wobblemode beeinflusst, untersucht. Das zeigt sich in erster Linie durch eine geringere Abhängigkeit der Wobblfrequenz von der Fahrgeschwindigkeit sowie eine höhere Geschwindigkeit, an der der Wobblemode instabil wird.

Für entsprechende Zeitsimulationen mit dem MKS-Simpackmodell wurde die Verbindung der Arme an die Hände durch ein lineares Feder-Dämpfer-Element abgebildet, um eine kinematische Schleife zu umgehen. Dadurch ergibt sich eine deutlich geringere Schwingungsamplitude des Grenzzyklus als noch zuvor ohne Anbindung der Arme an den Lenker. Diese Tendenz wurde zuvor auch bei Fahrversuchen am Renn- bzw. Touringrad beobachtet. Eine vollständige Dämpfung der Wobbleschwingung konnte dadurch am Rennrad allerdings nicht beobachtet werden.

5.2 Ausblick

Durch die Betrachtung einzelner Aspekte der Modellbildung des Fahrrades aus unterschiedlichen Blickwinkeln haben sich neue, zusätzliche Fragestellungen aufgetan.

Einen großen Bereich deckt in dieser Hinsicht der Reifen ab. Nach wie vor mangelt es an zuverlässigen Reifenparametern für Fahrradreifen. Dressel hat mit seiner Dissertation [14] bereits ein breites Spektrum an Messergebnissen geliefert, allerdings bleiben bei einzelnen Parametern Unsicherheiten, die bis dato nicht restlos geklärt sind. Die teils widersprüchlichen Messwerte der Sturzmomentensteifigkeit an unterschiedlichen Reifenprüfständen ([14],[13]), die Messmethode der Einlaufänge am Reifen und der Einfluss der Nachgiebigkeiten der Prüfstandskonstruktion sowie der Radaufhängung und Felge auf die Messergebnisse werden an dieser Stelle nur als Beispiele angeführt.

Auch eine gemessene und detaillierte Erfassung der elastischen Eigenschaften von Rahmen, Gabel und Felge ist wünschenswert, vor allem aber eine realistische Abbildung des Dämpfungsverhaltens dieser Bauteile.

In Bezug auf die Modellbildung bestehen vor allem für die Modellbildung des Fahrerkörpers offene Punkte. Diese reichen von den Bewegungsmöglichkeiten des Fahrers gegenüber dem Rahmen, dem Kontakt zwischen Fahrer und Sattel bzw. Pedalen, über die Abbildung des Muskeltonus bis hin zum Eingriff des Fahrers in

das Verhalten des Fahrrades. Dieser ist zwar aufgrund der hohen Frequenz nicht in der Lage, der aufklingenden Schwingung aktiv entgegen zu wirken, allerdings wird er bei einer aufklingenden Wobbleschwingung sowohl bewusst als auch unbewusst Aktionen setzen, um die aufklingende Schwingung zu dämpfen, beispielsweise durch plötzliche Anspannung der Armmuskulatur, wodurch die Abbildung des Fahrers als passives Element mit konstanten Steifigkeits- und Dämpfungsparametern nur für den Beginn der aufklingenden Schwingung plausibel erscheint. Zuguterletzt soll an dieser Stelle das noch nicht erreichte Ziel erwähnt werden, mit Hilfe von mechanischen Ersatzmodellen den möglichen Einfluss des Fahrers auf eine aufklingende Lenkerschwingung zu verstehen, um entsprechende Abhilfemaßnahmen, sowohl aus konstruktiver Sicht als auch in Form von empfohlenen Verhaltensmaßnahmen für den Fahrer, erarbeiten zu können. Denn leider verhält sich nicht jedes Fahrrad so wie das alte Puchrad meiner Großmutter, mit dem bei freihändiger Fahrt der Grenzyklus einer Wobbleschwingung auftritt, dessen Amplitude allerdings so gering ist, dass man nicht zum Eingreifen gezwungen wird, aber trotzdem Passanten zum Staunen bringt.🚲

Ich bin immer noch verwirrt, aber auf
einem höheren Niveau.

(Enrico Fermi)

Abbildungsverzeichnis

2.1	Kräfteverteilung auf Verformungen am Rad unter Berücksichtigung von Seitenschlupf [3]	13
2.2	Allgemeiner Aufbau eines Anhängermodells und Ableitungen, aus [48]	17
2.3	Modell des gezogenen Rades - "Reifenshimmy"	18
2.4	Verformungen des Reifens während einer Shimmyschwingung [10]	18
2.5	Nichtlineare Untersuchung des Schleppradsystems [50]	20
2.6	Modell des gezogenen Rades - "Lateral compliance Shimmy"	21
2.7	Modell des gezogenen Rades - "Gyroscopic Shimmy"	23
2.8	"Reifenshimmy", Shimmy durch laterale Flexibilität, gyroskopischer Shimmy	25
3.1	Kräftebilanz am Reifen, adaptiert aus [54]	35
3.2	Arbeit der Seitenkraft bzw. des Rückstellmomentes bei reiner Quer- bzw. Gierbewegung [54]	36
3.3	Beispiel eines Bifurkationsdiagrammes mit multiplen Attraktoren- Auslenkung x_i über Bifurkationsparameter V	37
4.1	Skizze der im fiktiven Kontaktpunkt wirkenden Reifenkräfte	46
4.2	Auslenkung des Kontaktpunktes am <i>single-contact-point tire model</i> , adaptiert Fig.7.1 aus [50]	47
4.3	Drehgelenk β zur Abbildung der Quersteifigkeit der Lenkeinheit [73]	54
4.4	Realteile des Wobblemodes eines Motorrades aus [73]	54
4.5	Laterale Beschleunigungen in m/s^2 der beiden IMUs am Rennrad während einer auftretenden Lenkungsschwingung, sowie dabei gemessenes Geschwindigkeitssignal in km/h (grün)	56
4.6	Fahrradmodell [25]	56
4.7	Fahrradmodell in Kurvenfahrt aus [45]	57
4.8	Alternative Modellbildung mit vertikalem Drehgelenk zur Abbildung der Steifigkeiten	58
4.9	Auswirkungen der gyroskopischen Effekte auf die Realteile des Wobblemodes am <i>high-axis-model</i> eines Motorrades aus [73]	60
4.10	Bewegungsmöglichkeiten des Fahrerkörpers gegenüber dem Rahmen	62
4.11	Fahrermodell 1 und 2 aus [61]	64
4.12	Eigenwerte des starr an den Rahmen angebundenen Fahrers (links) im vergleich zum Fahrer mit beweglichen Armen (rechts) aus [61]	65
4.13	Verbindung des Fahreroberkörpers mit dem Lenker über die Arme und Darstellung der Winkel am Beispiel des rechten Arms [25]	66
4.14	Deformation der Bürstenelemente unter Einwirkung eines Schrägl- aufwinkels, Fig.3.3 in [50]	68

4.15	Darstellung der Seitenkraft F_y und des Rückstellmoments M_z über dem Schräglaufwinkel bei einem zusätzlichen Sturzwinkel, Fig.4.5 aus [50] adaptiert	73
4.16	Längskraft in Abhängigkeit vom Längsschlupf, $F_z = 303.7\text{N}$	75
4.17	Seitenkraft in Abhängigkeit von Schräglauf- und Sturzwinkel; $F_z = 303.7\text{N}$; $\gamma = [-20^\circ 0' 20'']$	76
4.18	Rückstellmoment in Abhängigkeit von Schräglauf- und Sturzwinkel; $F_z = 303.7\text{N}$; $\gamma = [-20^\circ 0' 20'']$	77
4.19	Markerpositionen im Reifen–Bodenkontakt am gestürzten Rad	77
4.20	Bifurkationsdiagramm aus [74]: Lenkwinkelamplitude über Fahrgeschwindigkeit	80
4.21	Zwei–Parameter–Bifurkationsdiagramm aus [74] in Abhängigkeit von der Steifigkeit im Drehgelenk β und der Fahrgeschwindigkeit	80
4.22	Topologie des Simpack Modells	82
4.23	Modell des gebeugten Fahrers in Simpack	83
4.24	Wobbleschwingung eines Rennrades bei 4° Hangneigung, <i>simplified Magic Formula</i> Reifenmodell	87
4.25	Zustandsgrößen während einer Wobbleschwingung	88
4.26	Variation der Einlauflänge am Touringradmodell; lineares Reifenmodell, starr an den Rahmen angebundener Fahrer in aufrechter Sitzposition, freihändig; Parameterwerte für das Ausgangsmodell aus [25]	89
4.27	Lenkwinkelverlauf und Phasenraumdarstellung aus einer Zeitsimulation in Simpack bei auftretendem Wobblemode mit nichtlinearem Reifenmodell (Rennradmodell mit starr an den Rahmen gebundenem Fahrer, freihändig; Reifenmodell: <i>simplified MF</i> ; Hangneigung: 4°)	90
4.28	Eigenwertverlauf in Abhängigkeit der Vorwärtsgeschwindigkeit für das Touringrad und Einfluss der Reifenparameter zufolge Sturz des Rades; lineares Reifenmodell, starr an den Rahmen angebundener Fahrer in aufrechter Sitzposition, freihändig; Parameterwerte für das Ausgangsmodell aus [25]	92
4.29	Erweiterung des linearen Reifenmodells um den Bohrschlupf - Eigenwertverlauf in Abhängigkeit der Vorwärtsgeschwindigkeit für das Touringrad; lineares Reifenmodell, starr an den Rahmen angebundener Fahrer in aufrechter Sitzposition, freihändig; Parameterwerte für das Ausgangsmodell aus [25]	93
4.30	Vergleich der Eigenwerte von Weave–, Capsize– und Wobblemode der Rennradmodelle aus Simpack, Fahrer aufrecht und freihändig mit drei verschiedenen Reifenmodellen in Abhängigkeit von der Hangneigung	94
4.31	Vergleich der Eigenwerte von Weave–, Capsize– und Wobblemode der Rennradmodelle aus Simpack, Fahrer aufrecht und freihändig mit drei verschiedenen Reifenmodellen in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit, Modellkonfigurationen analog zu Abbildung 4.30	95

4.32	Vergleich der Winkelamplituden des Wobblemode in $^\circ$ der Rennradmodelle aus Simpack und MatCont, Fahrer aufrecht und freihändig mit drei verschiedenen Reifenmodellen in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit in m/s	96
4.33	Grenzyklus der Wobbleschwingung	97
4.34	Gegenüberstellung des Eigenwertverlaufs am β -Modell und ρ -Modell; Rennradmodell mit linearem Reifenmodell; aufrecht sitzender, starr mit dem Rahmen verbundener Fahrer, freihändig. $c_\rho = 4044.8\text{Nm/rad}$, $k_\rho = 9.0097\text{Nms/rad}$	98
4.35	Gegenüberstellung des Eigenwertverlaufs am β -Modell und ρ -Modell; Rennradmodell mit linearem Reifenmodell; aufrecht sitzender, starr mit dem Rahmen verbundener Fahrer, freihändig. $c_\rho = 4125.3\text{Nm/rad}$, $k_\rho = 6.736\text{Nms/rad}$	99
4.36	Zeigerdiagramme der charakteristischen Moden am β -Modell (a) und ρ -Modell (b) bei 5m/s (rot) und 15m/s (blau) Fahrgeschwindigkeit; Modellkonfiguration und Parameter analog zu Abbildung 4.35	100
4.37	Eigenwertverlauf in Abhängigkeit der Vorwärtsgeschwindigkeit für das Touringrad mit Rotationsfreiheitsgrad β und der Einfluss der gyrokopischen Effekte des Vorderrades; Parameterwerte aus [25], Fahrer in aufrechter Sitzposition, freihändig	101
4.38	Eigenwertverlauf in Abhängigkeit der Vorwärtsgeschwindigkeit für das Touringfahrrad mit Rotationsfreiheitsgrad ρ und der Einfluss der gyrokopischen Effekte des Vorderrades	102
4.39	Variation der Bewegungsmöglichkeiten des Fahrers gegenüber dem Rahmen, RB und <i>simplified MF</i> Reifenmodell	103
4.40	Effekte bei der Veränderung der Sitzposition des Fahrers am Rennrad von aufrecht zu gebeugt [25]	105
4.41	Variation der Anspannung der Armmuskulatur am Rennrad [25]	106
4.42	Vergleich der charakteristischen Eigenwerte des Rennrades für das hands-off-, das Uebergangs- und das hands-on-Modell [25]	107
4.43	Variation der Federsteifigkeit bzw. der Dämpfungskonstante des Feder-Dämpfer-Elements um die Lenkachse bei einer Fahrgeschwindigkeit von $u = 20\text{m/s}$ [25]	108
4.44	Vergleich der Eigenwertverläufe am Rennrad bei aufrechtem Fahrer, gebeugtem Fahrer hands-off und hands-on; RM: <i>simplified MF</i>	109
4.45	Zeitsimulation des Lenkwinkels bei aufklingender Wobbleschwingung: Vergleich am Rennrad bei aufrechtem Fahrer mit gebeugtem Fahrer hands-off und hands-on	110
4.46	Vergleich hands-on und hands-off- Modelle am β - bzw. ρ -Modell des Rennrades (lineares Modell in Matlab; lineares Reifenmodell)	111
4.47	Eigenwertverlauf über der Fahrgeschwindigkeit – Erweiterung der Bewegungsmöglichkeiten des Systems vom Schlepprad zum Fahrrad	113
B.1	Sattel-Knoten-Bifurkation (a) und Transkritische Bifurkation (b)	141
B.2	superkritische (a) und subkritische Pitchfork Bifurkation (b)	141
B.3	Super und subkritische Hopfbifurkation, adaptiert aus [17]	142

B.4	sanfter und harter Stabilitätsverlust, adaptiert aus [17]	142
C.1	ρ -Modell	146

Literaturverzeichnis

- [1] ANGROSCHE, B.: *Fahrradstabilität unter besonderer Berücksichtigung des Lenkungsflatterns*, Technische Universität Wien, Diplomarbeit, 2010
- [2] BABITSKY, V.I. ; LANDA, P.S.: Auto-oscillation Systems with Inertial Self-excitation. In: *ZAMM - Z. Angew. Math. u. Mech.* 64 (1984), S. 329–339
- [3] BECKER, G. ; FROMM, H. ; MARUHN, H.: *Schwingungen in Automobillenkungen*. M.Krayn, 1931
- [4] BESSELINK, I.J.M.: *Shimmy of Aircraft Main Landing Gears*, Technische Universiteit Delft, Diss., 2000
- [5] BROULHIET, M.G.: La suspension de la voiture automobile - shimmy et dandinement. In: *Mémoires et compte rendu des travaux de la société des ingénieurs civils de France* (1925), S. 540–554
- [6] COOPER, K.R.: The effect of aerodynamics on the performance and stability of high speed motorcycles. In: *Proceedings of the Second AIAA Symposium on Aerodynamics of Sports and Competition Automobiles* (1974)
- [7] COSSALTER, V. ; DORIA, A. ; FABRIS, D. ; MASO, M.: Measurement and identification of the vibration characteristics of motorcycle riders. In: *Proceedings of the ISMA* (2006), S. 1793–1806
- [8] COSSALTER, V. ; LOT, R. ; MASSARO, M.: The influence of frame compliance and rider mobility on the scooter stability. In: *Vehicle System Dynamics* 45 (2007), Nr. 4, S. 313–326
- [9] DENGLER, M. ; GOLAND, M. ; HERRMAN, G.: A bibliographic survey of automobile and aircraft wheel shimmy. In: *WADC Technical Report* (1951), S. 52–141
- [10] DÖHRING, E.: Das Lenkungsflattern von Eispurfahrzeugen. In: *Automobiltechnische Zeitschrift* 56 (1954), S. 68–72
- [11] DÖHRING, E.: Die Stabilität von Einspurfahrzeugen. In: *Automobiltechnische Zeitschrift* 58 (1956), S. 282–286
- [12] DING, W.: *Self-Excited Vibration*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012
- [13] DORIA, A. ; TOGNAZZO, M. ; CUSIMANO, G. ; BULSINK, V. ; COOKE, A. ; KOOPMAN, B.: Identification of the mechanical properties of bicycle tyres for modelling of bicycle dynamics. In: *Vehicle System Dynamics* 51 (2013), S. 405–420

- [14] DRESSEL, A.: *Measuring and modeling the mechanical properties of bicycle tires*, University of Wisconsin-Milwaukee, Diss., 2013
- [15] DRESSEL, A. ; RAHMAN, A.: Measuring sideslip and camber characteristics of bicycle tyres. In: *Vehicle System Dynamics* 50 (2012), S. 1365–1378
- [16] EATON, D.J.: *Man-machine dynamics in the stabilization of single-track vehicles*, The University of Michigan, Diss., 1973
- [17] F.DELLA ROSSA, Carlo P. Giampiero Mastinu M. Giampiero Mastinu: Bifurcation analysis of an automobile model negotiating a curve. In: *Vehicle System Dynamics* 50 (2012), S. 1539–1562
- [18] GOVAERTS, W. ; KUZNETSOV, Y. ; DEWITTE, V. ; DHOOGHE, A. ; MEIJER, H. ; MESTROM, W. ; RIET, A. ; SAUTOIS, B.: *MATCONT and CL MATCONT: Continuation toolboxes in MATLAB*. Universiteit Gent, Utrecht University, 2011
- [19] GUCKENHEIMER, J. ; HOLMES, P.: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag New York Inc., 1983
- [20] HAGEDORN, P. ; HOCHLENERT, D.: *Technische Schwingungslehre - Schwingungen linearer diskreter mechanischer Systeme*. Verlag Harri Deutsch, 2012
- [21] HIGUCHI, A.: *Transient Response of Tyres at Large Wheel Slip and Camber*, Technische Universiteit Delft, Diss., 1997
- [22] JONES, D.E.H.: The stability of the bicycle. In: *Physics today* 23 (1970), S. 34–40
- [23] KATAYAMA, T. ; AOKI, A. ; NISHIMI, T.: Control Behaviour of Motorcycle Riders. In: *Vehicle System Dynamics* 17 (1988), S. 211 – 229
- [24] KLEIN, F. ; SOMMERFELD, A.: *Über die Theorie des Kreisels - Heft IV. Die Technischen Anwendungen der Kreiseltheorie*. B.G.Teubner, 1910
- [25] KLINGER, F.: *Theoretische Untersuchungen zum High-Speed-Wobble-Phänomen bei Rennrädern*, Technische Universität Wien, Diplomarbeit, 2013
- [26] KLINGER, F. ; NUSIME, J. ; EDELMANN, J. ; PLÖCHL, M.: Wobble of a racing bicycle with a rider hands on and hands off the handlebar. In: *Vehicle System Dynamics* 52 (2014), S. 51–68. – Supplement
- [27] K.MAGNUS ; K.POPP: *Schwingungen*. 5. B.G. Teubner Stuttgart, 1996
- [28] KOENEN, C.: *The Dynamic Behaviour of a Motorcycle when running straight ahead and when cornering*, Technische Universiteit Delft, Diss., 1983
- [29] KOOLJMAN, J.D.G. ; MEIJAARD, J.P. ; PAPADOPOULOS, J. ; RUINA, A. ; SCHWAB, A.L.: A bicycle can be self-stable without gyroscopic or caster effects. In: *Science Magazine* 332/6027 (2011), S. 339–342

- [30] KUZNETSOV, Y.A.: *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag New York, 2004
- [31] LAVAUD, S. de: Les vitesses critiques fondamentales d'une voiture automobile. In: *Académie des Sciences* 184 (1927), S. 1636–1638
- [32] LIMEBEER, D.J.N. ; SHARP, R.S.: Bicycles, Motorcycles and Models. In: *IEEE Control Systems Magazine* 218 (20), S. 34–61
- [33] MAGNANI, G. ; CERIANI, N.M. ; PAPADOPOULOS, J.: On-Road Measurements of High Speed Bicycle Shimmy, and Comparison to Structural Resonance. In: *Proceeding of the IEEE International Conference on Mechatronics* (2013)
- [34] MAGNUS, K.: Der Einfluß verschiedener Kräftearten auf die Stabilität linearer Systeme. In: *ZAMP* 21 (1970), S. 523–534
- [35] MEIJAARD, J.P. ; PAPADOPOULOS, J. ; RUINA, A. ; SCHWAB, A.L.: Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review. In: *Proceedings of the Royal Society A* 463 (2007), S. 1955–1982
- [36] MEIJAARD, J.P. ; POPOV, A.A.: Application of Non-Linear Dynamics to Instability Phenomena in Motorcycles. In: *Vehicle System Dynamics* 41 (2004), S. 567–576
- [37] MEIJAARD, J.P. ; POPOV, A.A.: Influences of aerodynamic drag, the suspension system and rider's body position on instabilities in a modern motorcycle. In: *Vehicle System Dynamics* 44 Supplement (2006), S. 690–697
- [38] MEIJAARD, J.P. ; POPOV, A.A.: Numerical Continuation of Solutions and Bifurcation Analysis in Multibody Systems Applied to Motorcycle Dynamics. In: *Nonlinear Dynamics* 43 (2006), S. 97–116
- [39] MEIJAARD, J.P. ; POPOV, A.A.: Multi-body modelling and analysis into the non-linear behaviour of modern motorcycles. In: *Proc. IMechE Part K: Journal of Multi-body Dynamics* 221 (2007), S. 63–76. – Special Issue Paper
- [40] MÜLLER, P.C.: *Stabilität und Matrizen*. Springer-Verlag, 1977
- [41] MÜLLER, P.C. ; SCHIEHLEN, W.O.: *Linear vibrations*. Martinus Nijhoff Publishers, 1985
- [42] MORELAND, W.J.: Landing-gear vibration. In: *WADC AF TECHNICAL REPORT No. 6590* (1951)
- [43] NISHIMI, T. ; AOKI, A. ; KATAYAMA, T.: Analysis of Straight Running Stability of Motorcycles. In: *SAE Technical Paper 856124* (1985)
- [44] NUSIME, J.: *Parametereinflüsse auf den Wobble-Mode bei Fahrrädern- Theorie und Praxis*, Technische Universität Wien, Diplomarbeit, 2012

- [45] OTT, C.: *Untersuchung des Wobble-Modes bei Fahrrädern - Theorie und Fahrversuch*, Technische Universität Wien, Diplomarbeit, 2011
- [46] PACEJKA, H.B.: ANALYSIS OF THE SHIMMY PHENOMENON. In: *Proc Instn Mech Engrs* 180 (1965-66), S. 251–268
- [47] PACEJKA, H.B.: *The wheel shimmy phenomenon: A theoretical and experimental investigation with particular reference to the non-linear problem*, Technische Hochschule von Delft, Diss., 1966
- [48] PACEJKA, H.B.: Non-linearities in Road Vehicle Dynamics. In: *Vehicle System Dynamics* 15 (1986), S. 237–254
- [49] PACEJKA, H.B.: Spin: camber and turning. In: *Vehicle System Dynamics* 43 (2005), S. 3–17. – Supplement
- [50] PACEJKA, H.B.: *Tire and Vehicle Dynamics*. 3. Butterworth-Heinemann, 2012
- [51] PEARSALL, R.H.: The Stability of a Bicycle. In: *Proc. Inst. Automobile Engrs* XVII (1922), S. 395–402
- [52] PLASCHKO, P. ; BROD, K.: *Nichtlineare Dynamik, Bifurkation und Chaotische Systeme*. vieweg, 1995
- [53] POLACH, O. ; KAISER, I.: Comparison of Methods Analyzing Bifurcation and Hunting of Complex Rail Vehicle Models. In: *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 7 (2012), S. 041005–1 – 041005–8
- [54] RAN, S.: *Tyre models for shimmy analysis: from linear to nonlinear*, Technische Universiteit Eindhoven, Diss., 2016
- [55] RIEKERT, P.: Grundsätzliche Erkenntnisse über das Radflattern (Fundamental Perceptions on Wheel Shimmy). In: *NACA TM 1365* (1941), S. 115–124. – Englische Übersetzung aus Bericht 149 der Lilienthal Gesellschaft, pp33-35
- [56] ROE, G.E. ; THORPE, T.E.: A Solution of the Low-speed Wheel Flutter Instability in Motorcycles. In: *Journal Mechanical Engineering Science* 18 (1976), S. 57–65
- [57] SCHLIPPE, B. von ; DIETRICH, R.: Das Flattern eines bepneuten Rades (Shimmying of a pneumatic wheel). In: *Bericht 140 der Lilienthal Gesellschaft: NACA TM 1365 Englische Übersetzung* (1941)
- [58] SCHLIPPE, B. von ; DIETRICH, R.: *Zur Mechanik des Luftreifens*. ZWB - R.Oldenbourg, 1942
- [59] SCHLIPPE, B. von ; DIETRICH, R.: Das Flattern eines mit Luftreifen versehenen Rades. In: *Jahrbuch 1943 der deutschen Luftfahrtforschung* (1943)
- [60] SCHWAB, A.L. ; MEIJAARD, J.P. ; KOOLJMAN, J.D.G.: Some recent developments in bicycle dynamics. In: *12th IFToMM World Congress* (2007)

- [61] SCHWAB, A.L. ; MEIJAARD, J.P. ; KOUIJMAN, J.D.G.: Lateral dynamics of a bicycle with a passive rider model: stability and controllability. In: *Vehicle System Dynamics* (2011), S. 1–16
- [62] SCHWAB, A.L. ; MEIJAARD, J.P. ; PAPADOPOULOS, J.: Benchmark Results on the Linearized Equations of Motion of an Uncontrolled Bicycle. In: *Proceedings of the ACMD* (2004)
- [63] SCHWAB, A.L. ; MEIJAARD, J.P. ; PAPADOPOULOS, J.: A multibody dynamics benchmark on the equations of motion of an uncontrolled bicycle. In: *Proceedings of the Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference ENOC* (2005), S. 511–520
- [64] SEYDEL, R.: *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Springer New York, 1994
- [65] SHARP, R.S.: The Stability and Control of Motorcycles. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 13 (1971), S. 316–329
- [66] SHARP, R.S.: Research Note: The influence of frame flexibility on the lateral stability of motorcycles. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 16 (1974), Nr. 2, S. 117–120
- [67] SHARP, R.S.: The Lateral Dynamics of Motorcycles and Bicycles. In: *Vehicle System Dynamics* 14 (1985), S. 265–283
- [68] SHARP, R.S.: Vibrational modes of motorcycles and their design parameter sensitivities. In: *IMEchE* (1994), S. 107–121
- [69] SHARP, R.S.: On the Stability and Control of a Bicycle. In: *ASME* 61 (2008)
- [70] SHARP, R.S. ; ALSTEAD, C.J.: The Influence of Structural Flexibilities on the Straight-running Stability of Motorcycles. In: *Vehicle System Dynamics* 9 (1980), S. 327–357
- [71] SHARP, R.S. ; LIMEBEER, D.J.N.: On steering wobble oscillations of motorcycles. In: *Proc. Instn. Mech. Engrs Part C* 218 (2004), S. 1449–1456
- [72] SMILEY, R.F.: Correlation, Evaluation, and Extension of Linearized Theories for the tire motion and wheel shimmy. In: *NACA Report 1299* (1957), S. 137–186
- [73] SPIERINGS, P.T.J.: The Effects of Lateral Front Fork Flexibility on the Vibrational Modes of Straight-Running Single-Track Vehicles. In: *Vehicle System Dynamics* 10 (1981), S. 21–35
- [74] TOMIATI, N. ; A.COLOMBO ; MAGNANI, G.: A nonlinear model of bicycle shimmy. In: *Vehicle System Dynamics* (2018), S. 1–21
- [75] TOMIATI, N. ; MAGNANI, G. ; SCAGLIONI, B. ; FERRETTI, G.: Model Based Analysis of Shimmy in a Racing Bicycle. In: *Proceedings of the 12th International Modelica Conference* (2017), S. 441–447

- [76] TRUE, H.: Multiple attractors and critical parameters and how to find them numerically: the right, the wrong and the gambling way. In: *Vehicle System Dynamics* 51 (2013), S. 443–459
- [77] WHIPPLE, F.J.W.: The stability of the motion of a bicycle. In: *The quarterly journal of pure and applied mathematics* XXX (1899)
- [78] WILSON, D.G.: *Bicycling Science*. 3. The MIT Press, 2004
- [79] WILSON-JONES, R.A.: Steering and Stability of Single-track Vehicles. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 4 (1951), S. 191–199

Reifenmodelle

A.1 Brush

Längskraft

$$\Theta_x = \frac{2c_{px}a^2}{3\mu F_z} \quad (\text{A.1})$$

$$F_x = \begin{cases} 3\mu F_z \Theta_x \kappa \left[1 - |\Theta_x \kappa| + \frac{1}{3}(\Theta_x \kappa)^2 \right] & \text{wenn } |\kappa| \leq \frac{1}{\Theta_x} \\ \mu F_z \text{sign}(\kappa) & \text{wenn } |\kappa| \geq \frac{1}{\Theta_x} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

c_{px} wurde, wie auch in [50], gleich groß wie c_{py} angenommen.

kleiner Spinanteil – Seitenkraft und Rückstellmoment

$$|\varphi| < \varphi_l = \frac{1}{a\Theta_y} \begin{cases} |\tan(\alpha)| \leq \frac{1}{\Theta_y^*} & \rightarrow \text{Glg. A.4 und A.6} \\ |\tan(\alpha)| > \frac{1}{\Theta_y^*} & \rightarrow \text{Glg. A.5 und A.7} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$F_y = 3\mu F_z \Theta_y \tan(\alpha) \left[1 - |\Theta_y^* \tan(\alpha)| + \frac{1}{3}(\Theta_y^* \tan(\alpha))^2 \right] + C_{F\varphi} \varphi \quad (\text{A.4})$$

$$F_y = \mu F_z \text{sign}(\alpha) \quad (\text{A.5})$$

$$M_z = -\mu F_z a \Theta_y \tan(\alpha) \left[1 - 3|\Theta_y^* \tan(\alpha)| + 3(\Theta_y^* \tan(\alpha))^2 - |\Theta_y^* \tan(\alpha)|^3 \right] \quad (\text{A.6})$$

$$M_z = 0 \quad (\text{A.7})$$

mit folgenden Ausdrücken:

$$\Theta_y = \frac{2c_{py}a^2}{3\mu F_z} \quad (\text{A.8})$$

$$\Theta_y^* = \frac{\Theta_y}{1 - a\varphi\Theta_y \text{sign}(\alpha)} \quad (\text{A.9})$$

großer Spinanteil – Seitenkraft und Rückstellmoment

$$|\varphi| \geq \varphi_l = \frac{1}{a\Theta_y} \begin{cases} \tan |(\alpha)| \leq a|\varphi| - \frac{1}{\Theta_y} (> 0) & \rightarrow \text{Glg. A.11 und A.12} \\ \tan |(\alpha)| > a|\varphi| - \frac{1}{\Theta_y} & \rightarrow \text{Glg. A.4 und A.6} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

$$F_y = c_p \frac{\text{sign}(\varphi)}{a} \left[A_1 \left(a^2 x_{s1} - \frac{1}{3} x_{s1}^3 \right) - A_2 \left(a^2 x_{s2} - \frac{1}{3} x_{s2}^3 \right) \right] + c_p \left[(y_{s1} + x_{s1} \tan(\alpha))(x_{s1} - x_{s2}) - \frac{1}{2} \tan(\alpha)(x_{s1}^2 - x_{s2}^2) \right] \quad (\text{A.11})$$

$$M_z = -\frac{1}{2} c_p \frac{\text{sign}(\varphi)}{a} \left[A_1 \left(\frac{1}{2} a^4 - a^2 x_{s1}^2 + \frac{1}{2} x_{s1}^4 \right) - A_2 \left(\frac{1}{2} a^4 - a^2 x_{s2}^2 + \frac{1}{2} x_{s2}^4 \right) \right] + c_p \left[\frac{1}{2} (y_{s1} + x_{s1} \tan(\alpha))(x_{s1}^2 - x_{s2}^2) - \frac{1}{3} \tan(\alpha)(x_{s1}^3 - x_{s2}^3) \right] \quad (\text{A.12})$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(a|\varphi| - \frac{1}{\Theta_y} \right), \quad A_2 = \frac{1}{2} \left(a|\varphi| + \frac{1}{\Theta_y} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$x_{s1} = \frac{-a \tan(\alpha) \text{sign}(\varphi)}{2A_1} \quad (\text{A.14})$$

$$x_{s2} = -\frac{q + \text{sign}(\varphi) \sqrt{q^2 + 4pr}}{2p} \quad (\text{A.15})$$

$$p = \frac{A_2}{a} \text{sign}(\varphi), \quad q = \tan(\alpha), \quad r = aA_2 \text{sign}(\varphi) + y_{s1} + x_{s1} \tan(\alpha) \quad (\text{A.16})$$

Folgende Deformationsgebiete ergeben sich:

$$\text{vorderes Gleitgebiet } (x_{s1} < x < a): \quad y_1 = -A_1 \frac{a^2 - x^2}{a} \text{sign}(\varphi) \quad (\text{A.17})$$

$$\text{Haftgebiet } (x_{s2} < x < x_{s1}): \quad y_2 = y_{s1} + (x_{s1} - x) \tan(\alpha) \quad (\text{A.18})$$

$$y_{s1} = y_1(x_{s1}) \quad (\text{A.19})$$

$$\text{hinteres Gleitgebiet } (-a < x < x_{s2}): \quad y_3 = -A_2 \frac{a^2 - x^2}{a} \text{sign}(\varphi) \quad (\text{A.20})$$

A.1.1 Parameterwerte

A.2 simplified Magic Formula

$$F_x = F_z D_x \sin [C_x \arctan(B_x \kappa)] \quad (\text{A.21})$$

$$F_y = F_z D_y \sin [C_{y\alpha} \arctan(B_{y\alpha} \alpha) + C_{y\gamma} \arctan(B_{y\gamma} \gamma)] \quad (\text{A.22})$$

$$M_z = F_z \left[-D_t \cos \left(C_t \arctan(B_t \alpha) \right) \cos(\alpha) \left(D_y \sin(C_{y\alpha} \arctan(B_{y\alpha} \alpha)) \right) \right] + F_z \left[q_D \gamma \cos \left(\arctan(B_r(\alpha + q_H \gamma)) \right) \right] \quad (\text{A.23})$$

Bezeichnung	Touringbike VR	Touringbike HR	Racingbike
r_e	0.3355	0.3355	0.3342
$\overline{C_{F\alpha}}$	12.6050	10.3132	13.7500
$\overline{C_{F\gamma}}$	0.5109	0.7715	0.5143
$\overline{C_{M\alpha}}$	0.1714	0.2578	0.1718
$\overline{C_{M\gamma}}$	0.0067	0.0115	0.0039
ϵ_γ	0	0	0
$\overline{C_{M\varphi}} = \frac{C_{M\gamma} r_e}{1 - \epsilon_\gamma}$	0.0022	0.0038	0.0013
$a = 3 \frac{\overline{C_{M\alpha}}}{\overline{C_{F\alpha}}}$	0.0408	0.0750	0.0375
F_z	339.0894	560.8302	303.6883
$C_{F\alpha} = \overline{C_{F\alpha}} \cdot F_z$	4.2742e+03	5.7840e+03	4.1757e+03
$c_{py} = \frac{C_{F\alpha}}{2a^2}$	1.2842e+06	5.1425e+05	1.4860e+06
μ	1	1	1
$\Theta_y = \frac{2 * c_{py} * a^2}{3 \mu F_z}$	4.2017	3.4377	4.5833
$C_{M\varphi} = \overline{C_{M\varphi}} F_z$	0.7622	2.1563	0.3958
$C_{F\varphi} = \overline{C_{F\gamma}} F_z r_e$	58.12	145.1619	52.2002

Bezeichnung	Touringbike VR	Touringbike HR	Racingbike
D_x	1	1	1
C_x	1	1	1
B_x	12.6050	10.3132	13.7500
D_y	1	1	1
$C_{y\alpha}$	1	1	1
$B_{y\alpha}$	12.6050	10.3132	13.7500
$C_{y\gamma}$	1	1	1
$B_{y\gamma}$	0.5109	0.7715	0.5141
D_t	0.0136	0.0250	0.0125
C_t	1.1000	1.1	1.1
B_t	20	20	20
F_z	339.0894	560.8302	303.6883
$q_{D\gamma}$	0.0067	0.0115	0.0039
B_r	1	1	1
$q_{H\gamma}$	0	0	0

A.3 Magic Formula extended Version

$$F_x = D - x \sin \left[C_x \arctan(B_x \kappa_x - E_x(B_x \kappa_x - \arctan(B_x \kappa_x))) \right] + S_{V_x} \quad (\text{A.24})$$

$$S_{V_x} = F_z(p_{V_x1} + p_{V_x2} df_z) \lambda_{V_x} \lambda'_{\mu_x} \zeta_1 \quad (\text{A.25})$$

$$S_{H_x} = (p_{H_x1} + p_{H_x2} df_z) \lambda_{H_x} \quad (\text{A.26})$$

$$\kappa_x = \kappa + S_{H_x} \quad (\text{A.27})$$

$$C_x = p_{C_x1} \lambda_{C_x} \quad (\text{A.28})$$

$$D_x = \mu_x F_z \zeta_1 \quad (\text{A.29})$$

$$E_x = (p_{E_x1} + p_{E_x2} df_z + p_{E_x3} df_z^2) 1 - p_{E_x4} \text{sign}(\kappa_x) \lambda_{E_x} \quad (\text{A.30})$$

$$K_{x\kappa} = F_z(p_{K_x1} + p_{K_x2} df_z) e^{p_{K_x3} df_z} (1 + p_{p_x1} d_{pi} + p_{p_x2} d_{pi}^2) \lambda_{K_x\kappa} (= C_{F\kappa}) \quad (\text{A.31})$$

$$B_x = \frac{K_{x\kappa}}{C_x D_x + \epsilon_x} \quad (\text{A.32})$$

$$\zeta_1 = \cos(\arctan(B_{x\varphi} R_0 \varphi)) \quad (\text{A.33})$$

$$B_{x\varphi} = p_{D_{x\varphi}1} (1 + p_{D_{x\varphi}2} df_z) \cos(\arctan(p_{D_{x\varphi}3} \kappa)) \quad (\text{A.34})$$

$$t_0 = D_t \cos(C_t \arctan(B_t \alpha_t - E_t(B_t \alpha_t - \arctan(B_t \alpha_t)))) \cos(\alpha') \quad (\text{A.35})$$

$$D_t = D_{t0} (1 + q_{D_z3} |\gamma^*| + q_{D_z4} \gamma^{*2}) \zeta_5 \quad (\text{A.36})$$

$$D_{t0} = F_{z0} R_0 / F'_{z0} (q_{D_z1} + q_{D_z2} df_z) (1 - p_{p_z1} d_{pi}) \lambda_t \text{sign}(V_{cx}) \quad (\text{A.37})$$

$$\zeta_5 = \cos \left[\arctan(q_{D_t\varphi1} R_0 \varphi) \right] \quad (\text{A.38})$$

$$C_t = q_{C_z1} \quad (\text{A.39})$$

$$B_t = (q_{B_z1} + q_{B_z2} df_z + q_{B_z3} * d_{fz}^2) (1 + q_{B_z5} |\gamma^*| + q_{B_z6} \gamma^{*2}) \lambda_{K_y\alpha} \lambda_{\mu_y}^* \quad (\text{A.40})$$

$$E_t = (q_{E_z1} + q_{E_z2} df_z + q_{E_z3} d_{fz}^2) (1 + (q_{E_z4} + q_{E_z5} \gamma^*) \frac{2}{\pi} \arctan(B_t C_t \alpha_t)) \quad (\text{A.41})$$

$$\alpha_t = \alpha^* + S_{H_t} \quad (\text{A.42})$$

$$\alpha^* = \tan(\alpha) \text{sign}(V_{cx}) \quad (\text{A.43})$$

$$S_{H_t} = q_{H_z1} + q_{H_z2} df_z + (q_{H_z3} + q_{H_z4} df_z) \gamma^* \quad (\text{A.44})$$

$$F_y = D_y \sin(C_y \arctan(B_y \alpha_y - E_y(B_y \alpha_y - \arctan(B_y \alpha_y)))) + S_{V_y} \quad (\text{A.45})$$

$$S_{H_yK} = r_{H_y1} + r_{H_y2} df_z \quad (\text{A.46})$$

$$C_{yK} = r_{C_y1} \quad (\text{A.47})$$

$$K_{z\gamma r0} = F_{z0} R_0 (q_{D_z8} + q_{D_z9} df_z + (q_{D_z10} + q_{D_z11} df_z) |\gamma|) \lambda_{K_z\gamma} \quad (\text{A.48})$$

$$B_{yK} = (r_{B_y1} + r_{B_y4} \gamma^{*2}) \cos(\arctan(r_{B_y2} (\alpha^* - r_{B_y3}))) \lambda_{yK} \quad (\text{A.49})$$

$$B_{D_r\varphi} = K_{z\gamma r0} / (C_{D_r\varphi} D_{D_r\varphi} (1 - \epsilon_r) + \epsilon_r) \quad (\text{A.50})$$

$$M_{z\varphi90} = M_{z\varphi \text{inf}} 2 / \pi \arctan(q_{C_r\varphi2} R_0 |\varphi_t|) G_{yK} \quad (\text{A.51})$$

$$D_{r\varphi} = D_{D_r\varphi} \sin(C_{D_r\varphi} \arctan(B_{D_r\varphi} R_0 \varphi - E_{D_r\varphi}(B_{D_r\varphi} R_0 \varphi - \arctan(B_{D_r\varphi} R_0 \varphi)))) \quad (\text{A.52})$$

$$S_{Ht} = q_{Hz1} + q_{Hz2}d_{fz} + (q_{Hz3} + q_{Hz4}d_{fz})\gamma^* \quad (\text{A.53})$$

$$\zeta_5 = \cos(\arctan(q_{Dt\varphi1}R_0\varphi)) \quad (\text{A.54})$$

$$D_{t0} = F_{z0}(R_0/F'_{z0})(q_{Dz1} + q_{Dz2}d_{fz})(1 - p_{pz1}d_{pi})\lambda_t \text{sign}(V_{cx}) \quad (\text{A.55})$$

$$\cos(\alpha)' = \frac{V_{cx}}{V'_c} \quad (\text{A.56})$$

$$S_{Hf} = S_{Hy} + S_{Vy}/K'_{y\alpha} \quad (\text{A.57})$$

$$\zeta_6 = \cos(\arctan(q_{Br\varphi1}R_0\varphi)) \quad (\text{A.58})$$

$$\zeta_8 = 1 + D_{r\varphi} \quad (\text{A.59})$$

$$\zeta_7 = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{M_{z\varphi90}}{|D_{r\varphi}| + \epsilon_r}\right) \quad (\text{A.60})$$

$$B_t = (q_{Bz1} + q_{Bz2}d_{fz} + q_{Bz3}d_{fz}^2)(1 + q_{Bz5}|\gamma^*|) + q_{Bz6}\gamma^{*2}\lambda_{Ky\alpha}/\lambda_{\mu y}^* \quad (\text{A.61})$$

$$C_t = q_{Cz1} \quad (\text{A.62})$$

$$D_t = D_{t0}(1 + q_{Dz3}|\gamma^*| + q_{Dz4}\gamma^{*2})\zeta_5 \quad (\text{A.63})$$

$$\alpha_t = \alpha^* + S_{Ht} \quad (\text{A.64})$$

$$E_t = (q_{Ez1} + q_{Ez2}d_{fz}q_{Ez3}d_{fz}^2)(1 + (q_{Ez4} + q_{Ez5}\gamma^*)2/\pi \arctan(B_t C_t \alpha_t)) \quad (\text{A.65})$$

$$\alpha_r = \alpha^* + S_{Hf} \quad (\text{A.66})$$

$$B_r = (q_{Bz9}\lambda_{Ky\alpha}/\lambda_{\mu y}^* + q_{Bz10}B_y C_y)\zeta_6 \quad (\text{A.67})$$

$$C_r = \zeta_7 \quad (\text{A.68})$$

$$D_r = F_{z0}R_0((q_{Dz6} + q_{Dz7}d_{fz})\lambda_{Mr}\zeta_2 + ((q_{Dz8} + q_{Dz9}d_{fz})(1 + p_{pz2}d_{pi}) + (q_{Dz10} + q_{Dz11}d_{fz})|\gamma^*|)\gamma^*\lambda_{Kz\gamma}\zeta_0)\lambda_{\mu y}^* \text{sign}(V_{cx}) \cos(\alpha)' + \zeta_8 - 1 \quad (\text{A.69})$$

$$K_{y\alpha0} = \overline{C_{F\alpha}}F_{z0} \quad (\text{A.70})$$

$$\mu_{y0} = 1 \quad (\text{A.71})$$

$$\zeta_{20} = 1 \quad (\text{A.72})$$

$$D_{y0} = \mu_{y0}F_{z0}\zeta_{20} \quad (\text{A.73})$$

$$B_{y0} = K_{y\alpha0}/(C_y D_{y0} + \epsilon_y) \quad (\text{A.74})$$

$$E_{y0} = 0 \quad (\text{A.75})$$

$$F_{y\gamma0} = D_{y0} \sin(C_y \arctan(B_{y0}\alpha - E_{y0}(B_{y0}\alpha - \arctan(B_{y0}\alpha)))) \quad (\text{A.76})$$

$$t_0 = D_t \cos(C_t \arctan(B_t \alpha_t - E_t(B_t \alpha_t - \arctan(B_t \alpha_t)))) \cos(\alpha)' \quad (\text{A.77})$$

$$M_{zr0} = D_r \cos(C_r \arctan(B_r \alpha_r)) \cos(\alpha)' \quad (\text{A.78})$$

$$M'_{z0} = -t_0 F_{y\gamma0} \quad (\text{A.79})$$

$$\boxed{M_z = M'_{z0} + M_{zr0}} \quad (\text{A.80})$$

A.3.1 Parameterwerte

$p_{Cx1} = 1$	$p_{Ky1} = \overline{C_{F\alpha}}$	$q_{Dr\varphi1} = 1.5$	$K_{yR\varphi0} = \frac{C_{F\gamma}F_{z0}}{1-\epsilon_\gamma}$
$p_{Cy1} = 1$	$p_{Ky2} = 1$	$q_{Dr\varphi2} = -1.5$	$V_x = 5$
	$p_{Ky3} = 0$	$q_{Dz1} = 0.0374$	

$p_{Dy1} = 1$	$p_{Ky4} = 2$	$q_{Dz2} = 0$	$A_\mu = 10$
$p_{Dy2} = 0$	$p_{Ky5} = 0$	$q_{Dz3} = 0.5$	$\mu = 1$
$p_{Dx\varphi1} = 0.4$	$p_{Ky\varphi1} = 0.75$	$q_{Dz4} = -1$	$\mu_x = 1$
$p_{Dx\varphi2} = 0$		$q_{Dz6} = 0$	$\mu_y = 1$
$p_{Dx\varphi3} = 0$	$p_{Vx1} = 0$	$q_{Dz7} = 0$	$\epsilon_x = 0.0001$
$p_{Dy\varphi1} = 0.4$	$p_{Vx2} = 0$	$q_{Dz8} = \frac{\overline{C_{M\gamma}}}{R_0}$	$\epsilon_y = 0.0001$
$p_{Dy\varphi2} = 0$	$p_{Vy1} = 0$	$q_{Dz9} = 0$	$\epsilon_K = 0.0001$
$p_{Dy\varphi3} = 0$	$p_{Vy2} = 0$	$q_{Dz10} = 0$	$\epsilon_r = 0.0001$
$p_{Dy\varphi4} = 0$	$p_{Vy3} = 0.15$	$q_{Dz11} = 0$	$\zeta_0 = 0$
	$p_{Vy4} = 0$	$q_{Ez1} = -5$	$\lambda_{Cx} = 1$
$p_{Ex1} = 0$		$q_{Ez2} = 0$	$\lambda_{Cy} = 1$
$p_{Ex2} = 0$	$p_{px1} = 0$	$q_{Ez3} = 0$	$\lambda_{Ex} = 1$
$p_{Ex3} = 0$	$p_{px2} = 0$	$q_{Ez4} = 0$	$\lambda_{Ey} = 1$
$p_{Ex4} = 0$	$p_{py1} = 0$	$q_{Ez5} = 0$	$\lambda_{Fz0} = 1$
$p_{Ey1} = 0$	$p_{py2} = 0$		$\lambda_{Hx} = 1$
$p_{Ey2} = 0$	$p_{py3} = 0$	$q_{Hz1} = 0$	$\lambda_{Hy} = 1$
$p_{Ey3} = 0$	$p_{pz1} = 0$	$q_{Hz2} = 0$	$\lambda_{Kx\kappa} = 1$
$p_{Ey4} = 0$	$p_{pz2} = 0$	$q_{Hz3} = 0.07$	$\lambda_{Ky\alpha} = 1$
$p_{Ey5} = 0$		$q_{Hz4} = 0$	$\lambda_{Ky\gamma} = 1$
	$q_{Br\varphi1} = 5$		$\lambda_{Kz\gamma} = 1$
$p_{Hx1} = 0$			$\lambda'_{\mu x} = 0$
$p_{Hx2} = 0$	$q_{Bz1} = 11$	$r_{By1} = 7$	$\lambda_{\mu y} = 1$
$p_{Hy1} = 0$	$q_{Bz2} = 4$	$r_{By2} = 2.5$	$\lambda_{\mu v} = 0$
$p_{Hy2} = 0$	$q_{Bz3} = 0.6$	$r_{By3} = 0$	$\lambda_{M\varphi} = 1$
	$q_{Bz5} = 0.2$	$r_{By4} = 0$	$\lambda_{Mr} = 1$
$p_{Hy\varphi1} = 1$	$q_{Bz6} = 0$		$\lambda_t = 1$
$p_{Hy\varphi2} = 0.12$	$q_{Bz9} = 0$	$r_{Cy1} = 0$	$\lambda_{Vx} = 1$
$p_{Hy\varphi3} = 0$	$q_{Bz10} = 0.7$		$\lambda_{Vy} = 1$
$p_{Hy\varphi4} = -4$		$r_{Ey1} = 0$	
	$q_{Cr\varphi1} = 0.1$	$r_{Ey2} = 0$	
$p_{Kx1} = \overline{C_{F\alpha}}$	$q_{Cr\varphi2} = 0.01$		
$p_{Kx2} = 0$		$r_{Hy1} = 0$	
$p_{Kx3} = 0$	$q_{Cz1} = 1.05$	$r_{Hy2} = 0$	

A.4 Linearisiertes Modell

A.4.1 Parameterwerte des ρ -Modells

A.4.1.1 Rennrad

r_F, r_R	0.3342	m
l	0.9696	m
ϵ	0.2967	rad
t_c	0.0577	m
e_{sr}	0.3531	m
s_{sr}	-1.0567	m
m_R	77.9904	kg
m_M	0.4959	kg
m_F	2.2000	kg
$e_{F\delta}$	0.0556	m
$s_{F\delta}$	0.1802	m
I_{Rxx}	11.7185	kgm ²
I_{Rzz}	2.2010	kgm ²
I_{Rxz}	-0.9370	kgm ²
I_{Mxx}	0.0139	kgm ²
I_{Mzz}	0.0099	kgm ²
I_{Mxz}	-0.0051	kgm ²
I_{Fxx}	0.1916	kgm ²
I_{Fzz}	0.0560	kgm ²
I_{Fxz}	-0.0116	kgm ²
e_ρ	0.3273	m
s_ρ	-0.5253	m
$e_{M\rho}$	0.2917	m
$s_{M\rho}$	-0.1035	m
$e_{\delta\rho}$	0.4753	m
$s_{\delta\rho}$	-0.2180	m
c_δ	0	Nm/rad
k_δ	0	Nms/rad
c_ρ	3950	Nm/rad
k_ρ	6.4000	Nms/rad
e_F	0.9085	m
s_F	-0.5872	m

A.4.2 Parameterwerte des Schlepprades

A.4.2.1 Tire compliance shimmy

Die Parameterwerte beziehen sich auf die Gleichungen (2.1) und (2.2)

I_S	0,0697kgm ²
m	4,53kg
s	0,0179m
k_ψ	0Nms/rad
c_ψ	0Nms/rad
c_α	4274,2N/rad
l	0,0711m
t_p	0,0273m
σ_α	0,06m

A.4.2.2 Lateral compliance shimmy

Die Parameterwerte entsprechen jenen aus Abschnitt A.4.2.1 und beziehen sich auf die Gleichung (2.9) unter Vernachlässigung der Dämpfung in laterale Richtung $k_y = 0$ und $l = s = 0,0179\text{m}$; $c_y = 6791,5\text{N/m}$

A.4.2.3 Gyroscopic shimmy

Die Bewegungsgleichungen sind in den Gleichungen (2.16) und (2.17) angegeben, die noch ausständigen Parameterwerte sind:

h_s	0,3755m
h	0,8582m
$I_{\omega y 1}$	0,1266kgm ²
$I_{s\beta\psi}$	0,0129kgm ²
$I_{s\beta}$	0,2075kgm ²
c_β	3581Nm/rad

Stabilitätsuntersuchung

B.1 Lineare Systeme

Das *Stabilitätskriterium nach Ljapunov* von 1892 lässt sich nicht nur auf lineare zeitinvariante Systeme anwenden, sondern auch auf linearisierte zeitinvariante Systeme. Es besagt, dass die Gleichgewichtslage eines linearen bzw. linearisierten zeitinvarianten homogenen Systems der Form

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (\text{B.1})$$

(im Sinne von Ljapunov) stabil ist, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein positives $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ gibt, sodass für alle Anfangsbedingungen begrenzt durch Glg.(B.2)

$$|\underline{x}_0| < \delta = \delta(\epsilon) \quad (\text{B.2})$$

die zugehörigen Trajektorien $\underline{x}(t)$ für alle $t \geq 0$ durch ϵ begrenzt bleiben:

$$|\underline{x}(t)| < \epsilon, t \geq 0 \quad (\text{B.3})$$

Das betrachtete System wird als *asymptotisch stabil* bezeichnet, wenn für jede begrenzte Anfangsbedingung nach Glg.(B.2) die zugehörige Trajektorie gegen null strebt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = \underline{0} \quad (\text{B.4})$$

[41]

Um sich im Sinne der obigen Stabilitätsdefinition die Berechnung einer Vielzahl von Trajektorien zu ersparen, werden im Folgenden einige Stabilitätskriterien aufgelistet, welche geeignet sind, um die Stabilität der Gleichgewichtslage eines linearen bzw. linearisierten zeitinvarianten Systems ohne Lösungstrajektorien zu beurteilen.

B.1.1 Stabilitätskriterien mit Hilfe von Eigenwerten

Das lineare bzw. linearisierte, zeitinvariante homogene Differentialgleichungssystem Glg.(B.1) ist *asymptotisch stabil*, wenn, und nur wenn alle Eigenwerte λ_i von \mathbf{A} negative Realteile aufweisen:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = [1, n] \quad (\text{B.5})$$

bzw. ist *instabil*, wenn mindestens ein Eigenwert der Matrix \mathbf{A} einen positiven Realteil aufweist oder wenn zumindest ein mehrfach auftretender Eigenwert mit verschwindendem Realteil besteht, dessen Vielfachheit v_j größer als der Rangabfall d_j der charakteristischen Matrix $(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})$ ist, sodass gilt $Re(\lambda_i) > 0$ für *ein* i oder $Re(\lambda_j) = 0 : v_j > d_j$ für *ein* j .

Existieren hingegen keine Eigenwerte mit positivem Realteil aber zumindest ein Eigenwert mit verschwindendem Realteil und ist außerdem die Vielfachheit v_j dieser Eigenwerte gleich dem Rangabfall der charakteristischen Matrix $(\lambda_j \mathbf{I} - \mathbf{A})$, dann gilt das System als *grenzstabil* - Glg(B.6).

$$Re(\lambda_i) \leq 0, i = [1, n], \quad Re(\lambda_j) = 0 : d_j = v_j \quad (\text{B.6})$$

Für nähere Informationen diesbezüglich sei auf [41]-Kapitel 5 verwiesen.

Um eine für dieses Stabilitätskriterium erforderliche numerische Berechnung der Eigenwerte zu umgehen, können auch andere Stabilitätskriterien angewendet werden, siehe unten.

B.1.2 Stabilitätskriterien durch charakteristische Koeffizienten

Im obigen Kapitel werden zur Beurteilung der Stabilität eines Gleichgewichtszustandes eines linearen bzw. linearisierten zeitinvarianten Systems die Eigenwerte der charakteristischen Matrix $\mathbf{A}(\lambda)$ betrachtet. Diese können durch Aufstellen des charakteristischen Polynoms, Glg.(B.7) errechnet werden.

$$p(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (\text{B.7})$$

Wenn die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ vorliegen, können Rückschlüsse auf die Stabilität gezogen werden, ohne die Eigenwerte explizit berechnen zu müssen.

Ein notwendiges Kriterium für asymptotische Stabilität liefert das 1893/94 postulierte *Stodola Kriterium*: Für asymptotische Stabilität müssen alle Koeffizienten von $p(\lambda)$ positiv sein.

$$R_i > 0, i = 1(1)n \quad (\text{B.8})$$

Für die detaillierte Berechnung der Routhkoeffizienten sei auf [41] verwiesen.

Hurwitz hat ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für asymptotische Stabilität angegeben, wonach für die asymptotische Stabilität einer Gleichgewichtslage alle Hurwitzdeterminanten H_i positiv sein müssen.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$H_i > 0, i = 1(1)n \quad (\text{B.10})$$

Werden ein oder mehrere Parameter eines Systems variiert und beginnt man im Zustand asymptotischer Stabilität, dann gilt bei Erreichen der Stabilitätsgrenze:

$$H_n = a_n H_{n-1} = 0 \quad (\text{B.11})$$

Dabei charakterisiert $a_n = 0$ monotone Grenzstabilität ($\lambda_i = 0$) und $H_{n-1} = 0$ oszillatorische Grenzstabilität.

B.2 Nichtlineare Systeme

So hilfreich und vergleichsweise einfach die Untersuchung der Gleichgewichtslage des linearen bzw. linearisierten Systems ist, eine Einschätzung, wie sich das System in einer Umgebung der stabilen Gleichgewichtslage verhält bzw. wie sich das System nach Stabilitätsverlust verhält, ist mittels linearer Stabilitätsanalyse nicht möglich. Beispiele dafür sind die nichtlinearen Untersuchungen des Schleppradmodells in [50] und auch [54].

Gegeben sei ein System gewöhnlicher nichtlinearer Differentialgleichungen der Form B.12

$$\dot{\underline{x}} = F(\underline{x}, \underline{\nu}) \quad \text{mit} \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{\nu} \in \mathbb{R}^m \quad (\text{B.12})$$

wobei F eine stetig differenzierbare Funktion ist und $\underline{\nu}$ ein Parametervektor der Dimension m .

Die Ko-Dimension von Bifurkationen ist in [52] definiert, als die kleinste Dimension des Parameterraumes $\underline{\nu} \in \mathbb{R}^m$, die eine volle Entfaltung in der Dynamik eines Systems gestattet.

Für Systeme der Ko-Dimension $m = 1$, wie sie im Folgenden betrachtet werden, treten Bifurkationen bei sogenannten kritischen Parameterwerten $\nu = \nu^*$ auf, an denen die strukturelle Stabilität des Systems verloren geht.

In Abhängigkeit der Eigenwerte der Jacobimatrix des Systems (B.12) wird zwischen statischen und oszillatorischen Bifurkationen unterschieden. Seydel [64] unterscheidet außerdem noch zwischen Wendepunkt und Bifurkation.

(\underline{x}_0, ν) is a **simple stationary bifurcation point** if the following four conditions hold:

- (1) $\underline{f}(\underline{x}_0, \nu_0) = \underline{0}$
- (2) $\text{rank} \underline{f}_{\underline{x}}(\underline{x}_0, \nu_0) = n - 1$
- (3) $\underline{f}_{\nu}(\underline{x}_0, \nu_0) \in \text{range} \underline{f}_{\underline{x}}(\underline{x}_0, \nu_0)$; and
- (4) exactly two branches of stationary solutions intersect with two distinct tangents.

[64], Notation angepasst

(\underline{x}_0, ν) is a **turning point** (or fold bifurcation, limit point bifurcation, or saddle-node bifurcation) if stationary solutions of the following four conditions hold:

- (1) $\underline{f}(\underline{x}_0, \nu_0) = \underline{0}$
- (2) $\text{rank} \underline{f}_{\underline{x}}(\underline{x}_0, \nu_0) = n - 1$
- (3) $\underline{f}_{\nu}(\underline{x}_0, \nu_0) \notin \text{range} \underline{f}_{\underline{x}}(\underline{x}_0, \nu_0)$, that is, $\text{rank}(\underline{f}_{\underline{x}}(\underline{x}_0, \nu_0) | \underline{f}_{\nu}(\underline{x}_0, \nu_0)) = n$; and
- (4) there is a parameterization $\underline{x}(\sigma), \nu(\sigma)$ with $\underline{x}(\sigma_0) = \underline{x}_0, \nu(\sigma_0) = \nu_0$, and $d^2\nu(\sigma_0)/d\sigma^2 \neq 0$

[64], Notation angepasst

Sattel-Knoten-Bifurkation Diese Art von Bifurkation wird durch zwei verschiedene Gleichgewichtslagen charakterisiert, die am Bifurkationspunkt entstehen bzw. zusammentreffen. Eine Gleichgewichtslage ist dabei durch einen Knotenpunkt charakterisiert, während die zweite Gleichgewichtslage einen Sattelpunkt bildet. Vor bzw. nach dem Zusammentreffen dieser beiden Gleichgewichtslagen (je nachdem in welche Richtung entlang der Parametervariation sich die Sattel-Knoten-Bifurkation ausbildet) besitzt das System keine Gleichgewichtslage mehr, vgl. Abbildung B.1.

Angemerkt sei hier, dass bei einem Sattelpunkt reelle Eigenwerte auftreten, die unterschiedliches Vorzeichen besitzen. Bei einem Knotenpunkt hingegen besitzen die reellen Eigenwerte gleiches Vorzeichen, welches auch die Stabilität des Knotenpunktes angibt (stabiler oder instabiler Knotenpunkt).

transkritische Bifurkation Hierbei schneiden sich, im Gegensatz zur Sattel-Knoten-Bifurkation zwei Gleichgewichtskurven am Bifurkationspunkt und ändern danach ihre Stabilität, vgl. Abbildung B.1.

Pitchfork-Bifurkation Bei symmetrischen dynamischen Systemen (entspricht einer Invarianz des Systems bezüglich der Transformation $\underline{x} \rightarrow -\underline{x}$) treten Pitchfork - Bifurkationen auf. Aus dieser Invarianz folgt $\underline{f}(-\underline{x}, \nu) = -\underline{f}(\underline{x}, \nu)$, so dass diese Art quadratische Terme, wie sie beispielweise bei der Sattel-Knoten-Bifurkation auftreten, ausgeschlossen werden. [52]

Charakteristisch dafür ist, dass sich die Stabilität der trivialen Gleichgewichtslage ändert und ein neues Eigenwertpaar (aufgrund der Symmetrie) auftritt, vgl. Abbildung B.2. Für weiterführende Informationen zu dieser Art von Bifurkationen wird auf [19], Kap.3 verwiesen.

Andronov-Hopf-Bifurkation Wenn die stabile Gleichgewichtslage eines Systems bei der Variation des Parameters ν an der Stelle $\nu = \nu^*$ in einen Grenzzyklus übergeht, existiert für $\nu > \nu^*$ eine periodische, oszillatorische Lösung des Systems.

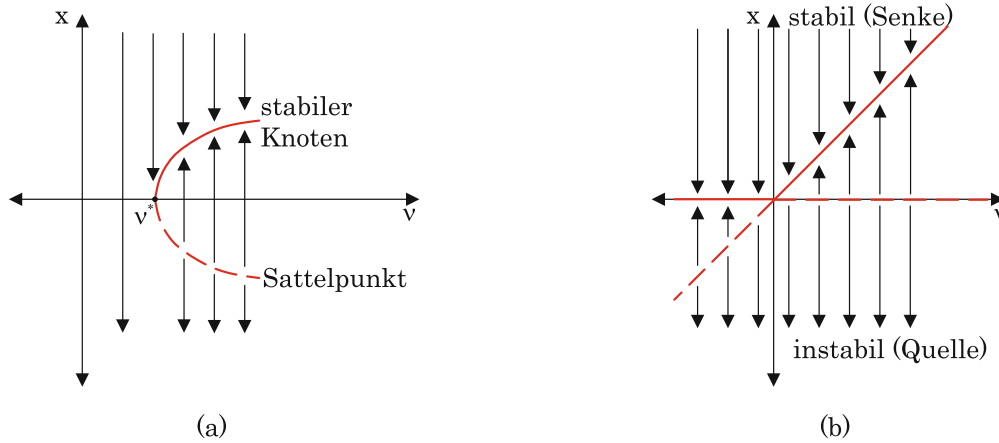


Abbildung B.1: Sattel-Knoten-Bifurkation (a) und Transkritische Bifurkation (b)

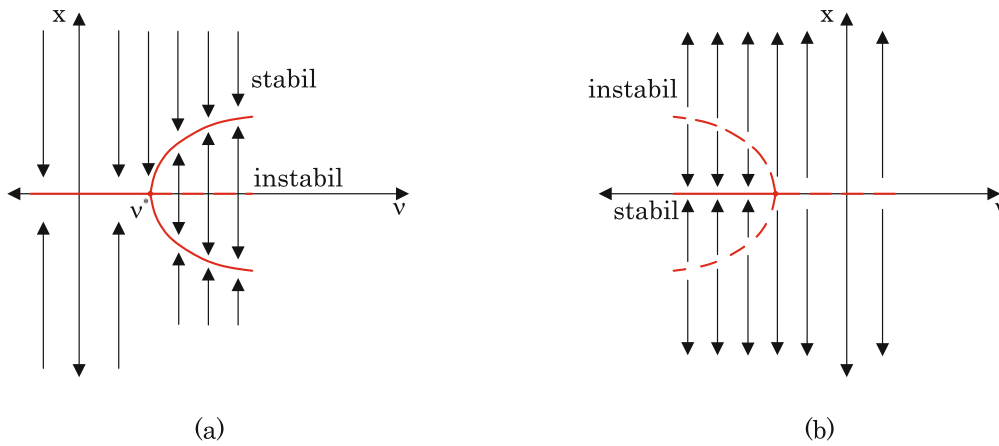


Abbildung B.2: superkritische (a) und subkritische Pitchfork Bifurkation (b)

Bei einem superkritischen Grenzzyklus wird die zuvor stabile Gleichgewichtslage für $\nu > \nu^*$ instabil und gleichzeitig entsteht bei $\nu = \nu^*$ ein stabiler Grenzzyklus, sodass sich die Amplitude der periodischen, oszillatorischen Lösung dem Grenzzyklus annähert.

Bei einem subkritischen Grenzzyklus hingegen, wird die zuvor stabile Gleichgewichtslage bei Erreichen des kritischen Parameterwertes ν^* ebenfalls instabil, allerdings verhält sich das System für $\nu > \nu^*$ chaotisch. In diesem Fall besitzt das System für $\nu < \nu^*$ einen instabilen Grenzzyklus, der die stabile Gleichgewichtslage umgibt und deren Einzugsgebiet begrenzt, vgl. Abbildung B.3.

A bifurcation from a branch of equilibria to a branch of periodic oscillations is called **Hopf bifurcation**.
[64]

Im Phasenporträt lässt sich die Trajektorie als Spirale darstellen, die sich dem stabilen Grenzzyklus asymptotisch annähert.

Eine Hopf-Bifurkation wird folglich ermittelt in dem die Eigenwerte $\lambda_i = a \pm j\omega$ der Jacobimatrix $\mathbf{A}(\underline{x}, \nu)$ analysiert werden und der Realteil einen Vorzeichenwechsel

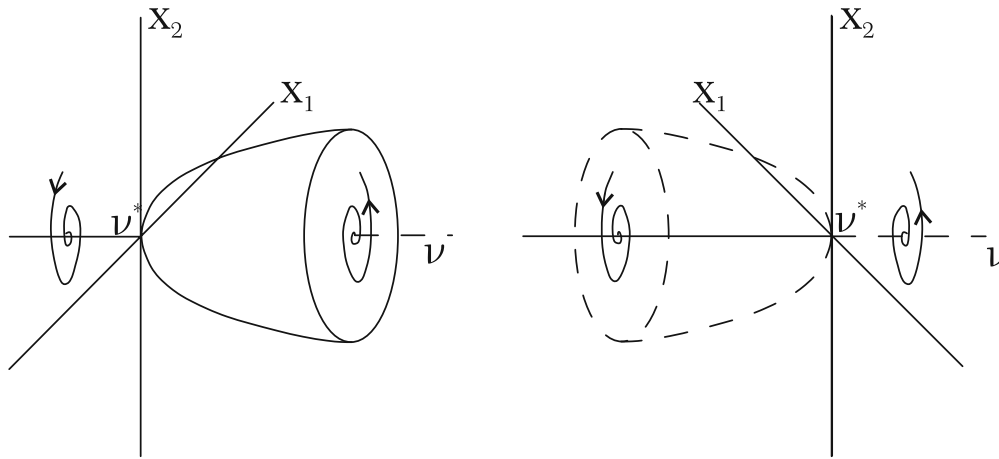


Abbildung B.3: Super und subkritische Hopfbifurkation, adaptiert aus [17]

erfährt. Im Bifurkationspunkt gilt dann:

$$\lambda^* = \pm j\omega$$

Entsteht an einem Bifurkationspunkt ein stabiler Grenzzyklus, so spricht man von einem "weichen Stabilitätsverlust", da sich die Amplitude des Grenzzyklus bei quasistatischer Erhöhung des Parameters ν kontinuierlich ändert. Abbildung B.4 (b) zeigt hingegen den Fall eines "harten Stabilitätsverlustes", da am kritischen Parameterwert ν^* ein instabiler Grenzzyklus entspringt, sodass sich dessen Amplitude ausgehend von $\nu = \nu^*$ für eine geringfügige Erhöhung $\nu > \nu^*$ schlagartig ändert.

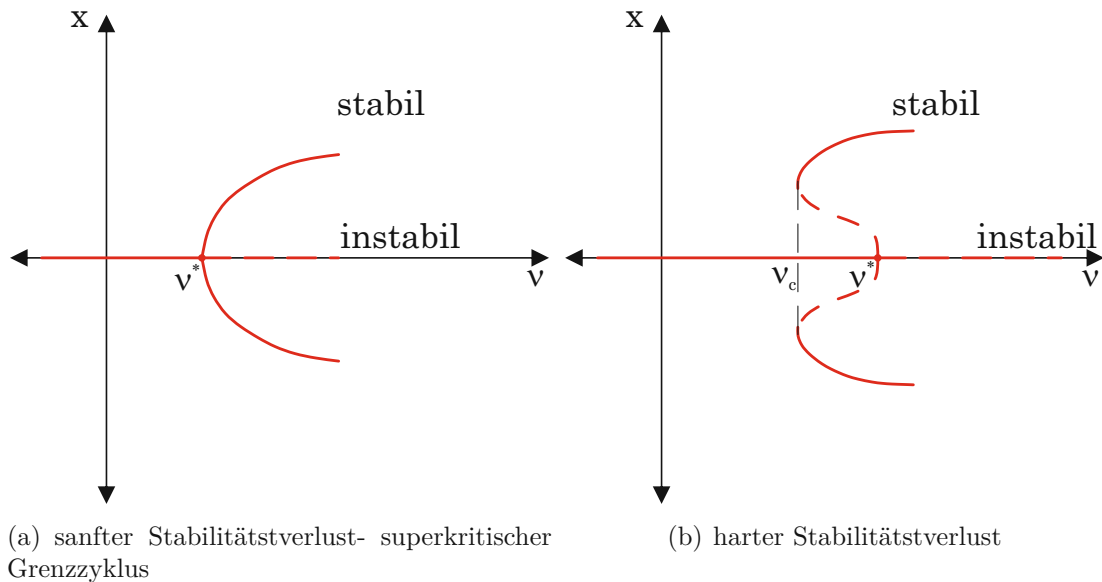


Abbildung B.4: sanfter und harter Stabilitätsverlust, adaptiert aus [17]

Bisher wurden Bifurkationen von Gleichgewichtslagen untersucht. Betrachtet man

allerdings einen periodischen Orbit, so können bei Ko-Dimension 1 Systemen folgende Bifurkationen auftreten:

- Faltung des Grenzzykels
- Flipbifurkation (Periodenverdopplung)
- Neimark-Sacker Bifurkation (Torusbifurkation)

Linearisierte Bewegungsgleichungen

C.1 β -Modell

Vgl. Abbildung 4.7 für die geometrischen Abmaße

$$v : \quad m_T(\dot{v} + ur) + m_T x_T \dot{r} + m_T h_T \ddot{\varphi} + m_H e_H \ddot{\delta} - m_s s_s \ddot{\beta} = F_{y1} + F_{y2} \quad (\text{C.1})$$

$$r : \quad m_T x_T (\dot{v} + ur) + I_{Tzz|D} \dot{r} + I_{Txx|D} \ddot{\varphi} - G_T u \dot{\varphi} + I_{H\delta z_D} \ddot{\delta} - G_1 \sin \varepsilon u \dot{\delta} + I_{s\beta z_D} \ddot{\beta} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\beta} = l F_{y1} + M_{z1} + M_{z2} \quad (\text{C.2})$$

$$\varphi : \quad m_T h_T (\dot{v} + ur) + I_{Txx|D} \dot{r} + G_T u r + I_{Txx|D} \ddot{\varphi} - m_T h_T g \varphi + I_{H\delta x_D} \ddot{\delta} + G_1 \cos \varepsilon u \dot{\delta} - S_\delta g \delta + I_{s\beta x_D} \ddot{\beta} - G_1 \sin \varepsilon u \dot{\beta} - S_\beta g \beta = M_{x1} + M_{x2} \quad (\text{C.3})$$

$$\delta : \quad m_H e_H (\dot{v} + ur) + I_{H\delta z_D} \dot{r} + G_1 \sin \varepsilon u r + I_{H\delta x_D} \ddot{\varphi} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\varphi} - S_\delta g \varphi + I_{H\delta\delta} \ddot{\delta} + k_\delta \dot{\delta} + (c_\delta - S_\delta \sin \varepsilon g) \delta + I_{s\beta\delta} \ddot{\beta} - G_1 u \dot{\beta} - S_\beta \sin \varepsilon g \beta = -t_c F_{y1} + M_{x1} \sin \varepsilon + M_{z1} \cos \varepsilon \quad (\text{C.4})$$

$$\beta : \quad -m_s s_s (\dot{v} + ur) + I_{s\beta z_D} \dot{r} + G_1 \cos \varepsilon u r + I_{s\beta x_D} \ddot{\varphi} + G_1 \sin \varepsilon u \dot{\varphi} - S_\beta g \varphi + I_{s\beta\delta} \ddot{\delta} + G_1 u \dot{\delta} - S_\beta \sin \varepsilon g \delta + I_{s\beta\beta} \ddot{\beta} + k_\beta \dot{\beta} + (c_\beta - S_\beta \cos \varepsilon g) \beta = -s_c F_{y1} + M_{x1} \cos \varepsilon - M_{z1} \sin \varepsilon \quad (\text{C.5})$$

Dabei wurden die Massen und Trägheitsmomente der einzelnen Bauteile wie folgt zusammengefasst [25]:

Gesamtsystem:

$$m_T = m_m + m_f + m_s \quad (\text{C.6})$$

$$x_T = (m_m x_m + m_f x_f + m_s x_s) / m_T \quad (\text{C.7})$$

$$h_T = (m_m h_m + m_f h_f + m_s h_s) / m_T \quad (\text{C.8})$$

$$I_{Txx|D} = I_{mxx} + m_m h_m^2 + (I_{fxx} + I_{sxx}) \cos^2 \varepsilon + (I_{fzz} + I_{szz}) \sin^2 \varepsilon - 2(I_{fzx} + I_{szx}) \cos \varepsilon \sin \varepsilon + m_f h_f^2 + m_s h_s^2 \quad (C.9)$$

$$I_{Tzz|D} = I_{mzz} + m_m x_m^2 + (I_{fxx} + I_{sxx}) \sin^2 \varepsilon + (I_{fzz} + I_{szz}) \cos^2 \varepsilon + 2(I_{fzx} + I_{szx}) \cos \varepsilon \sin \varepsilon + m_f x_f^2 + m_s x_s^2 \quad (C.10)$$

$$I_{Tzx|D} = -I_{mxz} + m_m x_m h_m - (I_{fxx} + I_{sxx} - I_{fzz} - I_{szz}) \cos \varepsilon \sin \varepsilon + (I_{fzx} + I_{szx})(1 - 2 \cos^2 \varepsilon) + m_f x_f h_f + m_s x_s h_s \quad (C.11)$$

Lenksystem aus Lenkeinheit f und Gabeleinheit s

$$m_H = m_f + m_s \quad (C.12)$$

$$e_H = (m_f e_f + m_s e_s) / m_H \quad (C.13)$$

$$I_{H\delta\delta} = I_{fzz} + I_{szz} + m_f e_f^2 + m_s e_s^2 \quad (C.14)$$

$$I_{H\delta x_D} = (I_{fzz} + I_{szz}) \sin \varepsilon - (I_{fzx} + I_{szx}) \cos \varepsilon + m_f e_f h_f + m_s e_s h_s \quad (C.15)$$

$$I_{H\delta z_D} = (I_{fzz} + I_{szz}) \cos \varepsilon + (I_{fzx} + I_{szx}) \sin \varepsilon + m_f x_f e_f + m_s x_s e_s \quad (C.16)$$

Gabeleinheit:

$$I_{s\beta\beta} = I_{sxx} + m_s s_s^2 \quad (C.17)$$

$$I_{s\beta x_D} = I_{sxx} \cos \varepsilon - I_{sxz} \sin \varepsilon - m_s s_s h_s \quad (C.18)$$

$$I_{s\beta z_D} = -I_{sxx} \sin \varepsilon - I_{sxz} \cos \varepsilon - m_s s_s x_s \quad (C.19)$$

$$I_{s\beta\delta} = -I_{sxz} - m_s e_s s_s \quad (C.20)$$

gyroskopische Momente:

$$G_1 = I_{1yy} / r_1 \quad G_2 = I_{2yy} / r_2 \quad G_T = G_1 + G_2 \quad (C.21)$$

weitere Terme:

$$S_\delta = m_T \frac{x_T}{l} t_c + m_H e_H \quad (C.22)$$

$$S_\beta = m_T \frac{x_T}{l} s_c - m_s s_s \quad (C.23)$$

$$F_{z1} = m_T \frac{x_T}{l} g \quad (C.24)$$

$$F_{z2} = m_T \frac{l - x_T}{l} g \quad (C.25)$$

C.2 ρ -Modell

$$v : m_T(\dot{v} + ur) + m_T x_T \dot{r} + m_T h_T \ddot{\varphi} + m_F e_F \ddot{\delta} + m_H e_{H\rho} \ddot{\rho} = F_{y1} + F_{y2} \quad (C.26)$$

$$r : m_T x_T(\dot{v} + ur) + I_{Tzz|D} \dot{r} + I_{Tzx|D} \ddot{\varphi} - G_T u \dot{\varphi} + I_{F\delta z_D} \ddot{\delta} - G_1 \sin \varepsilon u \dot{\delta} + I_{H\rho z_D} \ddot{\rho} = l F_{y1} + M_{z1} + M_{z2} \quad (C.27)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi : \\
 m_T h_T (\dot{v} + ur) + I_{Txz|D} \dot{r} + G_T u r + I_{Txx|D} \ddot{\varphi} - m_T h_T g \varphi + I_{F\delta x_D} \ddot{\delta} + \\
 G_1 \cos \varepsilon u \dot{\delta} - S_\delta g \delta + I_{H\rho x_D} \ddot{\rho} + G_1 u \dot{\rho} - S_\rho g \rho = M_{x1} + M_{x2}
 \end{aligned} \quad (C.28)$$

$$\begin{aligned}
 \delta : \\
 m_F e_F (\dot{v} + ur) + I_{F\delta z_D} \dot{r} + G_1 \sin \varepsilon u r + I_{F\delta x_D} \ddot{\varphi} - G_1 \cos \varepsilon u \dot{\varphi} - S_\delta g \varphi + \\
 I_{F\delta\delta} \ddot{\delta} + k_\delta \dot{\delta} + (c_\delta - S_\delta \sin \varepsilon g) \delta + I_{F\delta\rho} \ddot{\rho} + G_1 u \sin \varepsilon \dot{\rho} = -t_c F_{y1} + M_{x1} \sin \varepsilon + \\
 M_{z1} \cos \varepsilon
 \end{aligned} \quad (C.29)$$

$$\begin{aligned}
 \rho : \\
 m_H e_{H\rho} (\dot{v} + ur) + I_{H\rho z_D} \dot{r} + I_{H\rho x_D} \ddot{\varphi} - G_1 u \dot{\varphi} - S_\rho g \varphi + I_{F\delta\rho} \ddot{\delta} - \\
 G_1 \sin \varepsilon u \dot{\delta} + I_{H\rho\rho} \ddot{\rho} + k_\rho \dot{\rho} + c_\rho \rho = F_{y1} (l - e_\rho) + M_{z1}
 \end{aligned} \quad (C.30)$$

Die Massen und Trägheitsmomente der einzelnen Bauteile – dargestellt in Abbildung C.1 – sind in folgenden Gleichungen zusammengefasst:

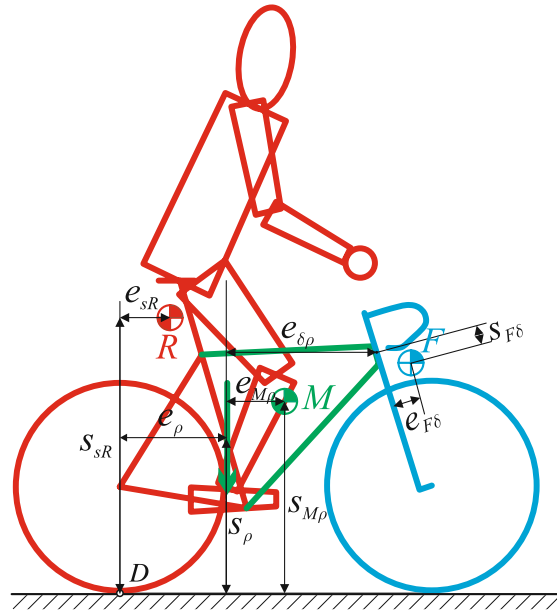


Abbildung C.1: ρ -Modell

Gesamtsystem:

$$m_T = m_R + m_M + m_F \quad (C.31)$$

$$x_T = (m_R x_R + m_M x_M + m_F x_F) / m_T \quad (C.32)$$

$$h_T = (m_R h_R + m_M h_M + m_F h_F) / m_T \quad (C.33)$$

$$\begin{aligned}
 I_{Txx|D} = & I_{Mxx} + I_{Rxx} + I_{Fxx} \cos^2 \varepsilon + m_R s_r^2 + m_M (s_{M\rho} + s_\rho)^2 + \\
 & m_F (s_{\delta\rho} + s_\rho + s_{F\delta} \cos \varepsilon - e_{F\delta} \sin \varepsilon)^2 - 2 I_{Fxz} \cos \varepsilon \sin \varepsilon + \\
 & I_{Fzz} \sin^2 \varepsilon
 \end{aligned} \quad (C.34)$$

$$I_{Tzz|D} = I_{Mzz} + I_{Rzz} + m_R e_{sr}^2 + m_M (e_{m\rho} + e_\rho)^2 + I_{Fzz} \cos^2 \varepsilon + I_{Fxx} \sin^2 \varepsilon + m_F (e_{\delta\rho} + e_\rho + e_{F\delta} \cos \varepsilon + s_{F\delta} \sin \varepsilon)^2 + 2I_{Fxz} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \quad (C.35)$$

$$I_{Txz|D} = -I_{Mxz} - I_{Rxz} - I_{Fxz} \cos^2 \varepsilon + (I_{Fzz} - I_{Fxx}) \cos \varepsilon \sin \varepsilon + I_{Fxz} \sin^2 \varepsilon - m_R e_{sR} s_{sR} - m_M (e_{M\rho} + e_\rho) (s_{M\rho} + s_\rho) - m_F (s_{\delta\rho} + s_\rho + s_{F\delta} \cos \varepsilon - e_{F\delta} \sin \varepsilon) (e_{\delta\rho} + e_\rho + e_{F\delta} \cos \varepsilon + s_{F\delta} \sin \varepsilon) \quad (C.36)$$

Lenkeinheit F und Rahmenteil M -Index H

$$m_H = m_M + m_F \quad (C.37)$$

$$e_H = (m_M e_{M\rho} + m_F (e_{\delta\rho} + e_\rho + e_{F\delta} \cos \varepsilon + s_{F\delta} \sin \varepsilon)) / m_H \quad (C.38)$$

$$e_{H\rho} = e_H - e_\rho \quad (C.39)$$

$$I_{H\rho\rho} = I_{Mzz} + I_{Fzz} \cos^2 \varepsilon + I_{Fxx} \sin^2 \varepsilon + 2I_{Fxz} \sin \varepsilon \cos \varepsilon + m_M e_{m\rho}^2 + m_F (e_{\delta\rho}^2 + e_{F\delta}^2 \cos^2 \varepsilon + 2s_{F\delta} e_{\delta\rho} \sin \varepsilon + s_{F\delta}^2 \sin^2 \varepsilon + 2e_{\delta\rho} e_{F\delta} \cos \varepsilon + 2e_{F\delta} s_{F\delta} \sin \varepsilon \cos \varepsilon) \quad (C.40)$$

$$I_{H\rho x_D} = -I_{Mxz} - I_{Fxz} \cos^2 \varepsilon + I_{Fxz} \sin^2 \varepsilon + (I_{Fzz} - I_{Fxx}) \sin \varepsilon \cos \varepsilon + m_M (-e_{M\rho} s_{M\rho} - e_{M\rho} s_\rho) + m_F (-e_{\delta\rho} s_{\delta\rho} - e_{\delta\rho} s_\rho - e_{F\delta} s_{F\delta} \cos^2 \varepsilon + e_{F\delta} e_{\delta\rho} \sin \varepsilon - s_{F\delta} s_{\delta\rho} \sin \varepsilon - s_{F\delta} s_\rho \sin \varepsilon - s_{F\delta} e_{F\delta} \sin^2 \varepsilon - e_{\delta\rho} s_{F\delta} \cos \varepsilon - e_{F\delta} s_{\delta\rho} \cos \varepsilon - e_{F\delta} s_\rho \cos \varepsilon + e_{F\delta}^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon - s_{F\delta}^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon) \quad (C.41)$$

$$I_{H\rho z_D} = I_{Mzz} + I_{Fzz} \cos^2 \varepsilon + I_{Fxx} \sin^2 \varepsilon + 2I_{Fxz} \sin \varepsilon \cos \varepsilon + m_M (e_{M\rho}^2 + e_{M\rho} e_\rho) + m_F (e_{\delta\rho}^2 + e_{\delta\rho} e_\rho + e_{F\delta}^2 \cos^2 \varepsilon + 2s_{F\delta} e_{\delta\rho} \sin \varepsilon + s_{F\delta} e_\rho \sin \varepsilon + s_{F\delta}^2 \sin^2 \varepsilon + e_{F\delta} e_\rho \cos \varepsilon + 2e_{\delta\rho} e_{F\delta} \cos \varepsilon + 2e_{F\delta} s_{F\delta} \sin \varepsilon \cos \varepsilon) \quad (C.42)$$

Lenkeinheit:

$$I_{F\delta\delta} = I_{Fzz} + m_F e_F^2 \quad (C.43)$$

$$I_{F\delta\rho} = I_{Fzz} \cos \varepsilon + I_{Fxz} \sin \varepsilon + m_F (e_{F\delta} e_{\delta\rho} + e_{F\delta}^2 \cos \varepsilon + e_{F\delta} s_{F\delta} \sin \varepsilon) \quad (C.44)$$

$$I_{F\delta z_D} = m_F (e_{F\delta} e_{\delta\rho} + e_{F\delta} e_\rho + e_{F\delta} s_{F\delta} \sin \varepsilon + e_{F\delta}^2 \cos \varepsilon) + I_{Fxz} \sin \varepsilon + I_{Fzz} \cos \varepsilon \quad (C.45)$$

$$I_{F\delta x_D} = -I_{Fxz} \cos \varepsilon + I_{Fzz} \sin \varepsilon + m_F e_{F\delta} (-s_{\delta\rho} - s_\rho + e_{F\delta} \sin \varepsilon - s_{F\delta} \cos \varepsilon) \quad (C.46)$$

gyroskopische Momente analog zu Glg. (C.21)

weitere Terme:

$$S_\delta = m_T \frac{x_T}{l} t_c + m_F e_F \quad (C.47)$$

$$S_\rho = m_T \frac{x_T}{l} (l - e_\rho) + m_H e_{H\rho} \quad (C.48)$$

$$F_{z1} = m_T \frac{x_T}{l} g \quad (\text{C.49})$$

$$F_{z2} = m_T \frac{l - x_T}{l} g \quad (\text{C.50})$$

Das lineare Reifenmodell wird analog zum β – Modell in die Bewegungsgleichungen eingebunden. Die Gleichungen der transienten Größen der Reifenkräfte am ρ – Modell ergeben sich zu:

$$\frac{\sigma}{u} \dot{\alpha}'_1 + \alpha'_1 = \rho + \delta \cos \varepsilon - \frac{\dot{v} + l\dot{\psi} + (l - e_\rho)\dot{\rho} - t_c \dot{\delta}}{u} \quad (\text{C.51})$$

$$\frac{\sigma}{u} \dot{\gamma}'_1 + \gamma'_1 = \delta \sin \varepsilon + \varphi \quad (\text{C.52})$$

$$\frac{\sigma}{u} \dot{\alpha}'_2 + \alpha'_2 = -\frac{\dot{y}}{u} \quad (\text{C.53})$$

$$\frac{\sigma}{u} \dot{\gamma}'_2 + \gamma'_2 = \varphi \quad (\text{C.54})$$

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name	Julia Nusime
Geburtsdatum	19.05.1988
Geburtsort	Wien
Staatsbürgerschaft	Österreich

Schulische und berufliche Ausbildung

2012	2020	Dr.-Studium der technischen Wissenschaften Maschinenbau an der TU Wien Dissertation: <i>Modellbildung des Lenkungsflatterns an Fahrrädern</i>
2006	2012	Bachelor- und Masterstudium Maschinenbau an der TU Wien Diplomarbeit: <i>Parametereinflüsse auf den Wobble-Mode bei Fahrrädern</i> – <i>Theorie und Praxis</i>
2006		AHS Matura am BG/BRG Werndlpark, Steyr