

Diploma Thesis

Damping of Single-Span Pedestrian Bridges under Human-Induced Loads

submitted in satisfaction of the requirements for the degree of Diplom-Ingenieur of the TU Wien, Faculty of Civil Engineering

DIPLOMARBEIT

Dämpfung einfeldriger Fußgängerbrücken unter menscheninduzierten Lasten

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs eingereicht an der Technischen Universität Wien, Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Thomas Kreiderits, BSc

Matr.Nr.: 01426249

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer

Institut für Hochbau, Baudynamik und Gebäudetechnik Forschungsbereich Strukturdynamik und Risikobewertung von Tragwerken Technische Universität Wien, Karlsplatz 13/208-01, A-1040 Wien

Wien, im Februar 2021

Kurzfassung

Das Ziel der Diplomarbeit ist es, die Wirksamkeit von verschiedenen Dämpfungsmaßnahmen für Fußgängerbrücken unter menscheninduzierten Lasten zu vergleichen. Aus diesem Grund werden zu Beginn die menscheninduzierten Lasten definiert. Danach werden unterschiedliche Dämpfungsmaßnahmen für Fußgängerbrücken beschrieben, wobei in dieser Diplomarbeit ausschließlich passive Dämpfungsmaßnahmen untersucht werden. Da die Wirkung der Dämpfer anhand eines Beispiels getestet wird, ist die Vordimensionierung einer Fußgängerbrücke notwendig. Dabei soll die Brücke die vorgeschriebenen statischen Lasten aufnehmen können und die erste Eigenfrequenz der Brücke in vertikaler und horizontaler Richtung soll nahe der Schrittfrequenz von gehenden Personen liegen. Dadurch kommt es zu großen Schwingungsamplituden und die Wirksamkeit der Dämpfer kann getestet werden. Außerdem kann festgestellt werden, ob die Schwingungen der Brücke mithilfe der Dämpfer so weit reduziert werden können, dass die Gebrauchstauglichkeit erfüllt ist. Die Schwingungen der Brücke werden numerisch mit MATLAB R2020b berechnet.

Die Simulationen der Brückenschwingungen haben gezeigt, dass die Verschiebungen und somit auch die Beschleunigungen der Brücke ohne Dämpfer sehr groß ausgefallen sind. Mithilfe der verschiedenen Dämpfungsmaßnahmen konnten die Werte deutlich reduziert werden. Dabei hat der viskose dynamische Schwingungsdämpfer bei den vertikalen Schwingungen bessere Ergebnisse hervorgebracht als der Flüssigkeitsdämpfer. Bei den horizontalen Schwingungen hat der Pendeldämpfer mit geschalteter Reibung bessere Ergebnisse erzielt als der Flüssigkeitsdämpfer. Trotz der Reduktionen der Schwingungen durch die Dämpfer konnte die Gebrauchstauglichkeit der Fußgängerbrücke bei keiner der untersuchten Varianten eingehalten werden. Die Berechnungen haben verdeutlicht, dass die Betrachtung der Eigenfrequenzen der Fußgängerbrücke während der Planungsphase von großer Bedeutung ist, da die Wirkungen der nachträglichen Dämpfungsmaßnahmen begrenzt sind.

Abstract

The aim of the diploma thesis is to compare the effectiveness of different damping measures for pedestrian bridges under human-induced loads. For this reason, the human-induced loads are defined at the beginning of the diploma thesis. Afterwards different damping measures for pedestrian bridges are described, whereby only passive damping measures are examined in this thesis. Since the effect of the dampers is tested on the basis of an example, the predimensioning of a pedestrian bridge is necessary. The bridge should be able to carry the required static loads and the eigenfrequency of the bridge in vertical and horizontal direction should be close to the step frequency of walking persons. This results in large vibration amplitudes and the effectiveness of the dampers can be tested. In addition, it can be determined whether the mechanical vibrations of the bridge can be reduced with the help of the dampers to such an extent that the serviceability is fulfilled. The bridge vibrations are calculated numerically using MATLAB R2020b.

The simulations of the bridge vibrations have shown that the displacements and consequently the accelerations of the bridge without dampers turned out to be very large. With the help of the various damping measures, the values could be significantly reduced. The tuned mass damper produced better results for the vertical mechanical vibrations than the tuned liquid column damper. For the horizontal mechanical vibrations, the pendulum damper with series connection of friction achieved better results than the tuned liquid column damper. Despite the reductions of vibrations by the dampers, the serviceability of the pedestrian bridge could not be maintained for any of the variants investigated. The calculations have shown that the consideration of the natural frequencies of the pedestrian bridge during the planning phase is of great importance, as the effects of the subsequent damping measures are limited.

Inhaltsverzeichnis

| 1 | Einleitung | | | 5 |
|-----|---|---------|--|------|
| | 1.1 | Motiva | ation | 5 |
| | 1.2 | Zielset | zung | 5 |
| | 1.3 | Stand | der Normung | 6 |
| 2 | Men | schenin | duzierte Lasten | 7 |
| | 2.1 | Gehen | | 7 |
| | 2.2 | Laufen | | . 10 |
| | 2.3 | Hüpfei | ٩ | . 13 |
| | 2.4 | Einflus | s von Personengruppen | . 14 |
| 3 | Däm | pfung v | on Fußgängerbrücken | 16 |
| | 3.1 | Grund | lagen | . 16 |
| | 3.2 | Dynam | nischer Schwingungsdämpfer | . 17 |
| | | 3.2.1 | Viskoser Dämpfer | . 20 |
| | | 3.2.2 | Pendeldämpfer mit geschalteter Reibung | . 22 |
| | | 3.2.3 | Flüssigkeitsdämpfer | . 24 |
| | 3.3 | Tilger. | | . 28 |
| | | 3.3.1 | Pendel | . 29 |
| | | 3.3.2 | Flüssigkeitstilger | . 30 |
| 4 | Num | erische | Simulation der Schwingungen | 31 |
| | 4.1 | Vordin | nensionierung der Fußgängerbrücke | . 31 |
| | 4.2 | Berech | nungsgrundlagen | . 33 |
| | 4.3 | Schwir | ngungen ohne Schwingungsdämpfer | . 34 |
| | | 4.3.1 | Vertikale Schwingungen | . 35 |
| | | 4.3.2 | Horizontale Schwingungen | . 36 |
| | 4.4 Schwingungen mit Schwingungsdämpfer | | ngungen mit Schwingungsdämpfer | . 36 |
| | | 4.4.1 | Vertikale Schwingungen mit viskosem Dämpfer | . 37 |
| | | 4.4.2 | Vertikale Schwingungen mit Flüssigkeitsdämpfer | . 38 |
| | | 4.4.3 | Horizontale Schwingungen mit Pendeldämpfer | . 40 |
| | | 4.4.4 | Horizontale Schwingungen mit Flüssigkeitsdämpfer | . 42 |
| 5 | Zusa | mmenfa | issung | 43 |
| Anl | Anhang 47 | | | |

1 Einleitung

1.1 Motivation

Fußgängerbrücken können meist schlank dimensioniert werden, da die einwirkenden Lasten im Vergleich zu Straßenbrücken oder Eisenbahnbrücken gering sind. Diese schlanken Baukonstruktionen, welche häufig aus Stahl hergestellt werden, neigen zu großen Schwingungsamplituden, wenn die Frequenz der dynamischen Belastung mit maßgebenden Eigenfrequenzen der Konstruktion übereinstimmt. Aus diesem Grund ist eine dynamische Untersuchung dieser Bauwerke empfehlenswert, da eine statische Betrachtung alleine oft nicht ausreichend ist, um die Gebrauchstauglichkeit einer Fußgängerbrücke nachweisen zu können. Bei der Gebrauchstauglichkeit einer Fußgängerbrücke sind der Schwingweg und die Schwingbeschleunigung von großer Bedeutung. Wichtig in diesem Zusammenhang ist, dass sowohl horizontale Schwingungen, als auch vertikale Schwingungen auftreten.

Wenn bei einer bereits gebauten Fußgängerbrücke große Schwingungen auftreten, können nachträgliche Dämpfungsmaßnahmen diese Schwingungen reduzieren. Diese Maßnahmen sind jedoch kostspielig und sollten vermieden werden. Daher ist es notwendig, die dynamischen Einwirkungen von Menschen auf eine Brücke bereits während der Planungsphase zu berücksichtigen. Wie bereits vorher erwähnt, handelt es sich bei den Schwingungen hauptsächlich um ein Problem der Gebrauchstauglichkeit, die Tragfähigkeit der Baukonstruktion ist dabei meist nicht gefährdet.

1.2 Zielsetzung

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist die beispielhafte dynamische Untersuchung einer schwingungsanfälligen Fußgängerbrücke und der Variantenvergleich von verschiedenen Dämpfungsmaßnahmen.

Bei den dynamischen Lasten handelt es sich ausschließlich um menscheninduzierte Lasten, wie Gehen, Laufen oder Hüpfen. Andere dynamische Lasten, wie beispielsweise Wind, Erdbeben oder Anprall werden in dieser Diplomarbeit nicht berücksichtigt. Ebenfalls nicht berücksichtigt werden die Lasten durch Fahrradfahren, da es sich hierbei um eine statisch wirkende Wanderlast handelt und nicht um eine periodisch wirkende dynamische Last.

Als zu untersuchende Fußgängerbrücke wird eine einfeldrige Balkenbrücke aus Stahl gewählt. Die Brücke wird unter Zuhilfenahme von den beiden Normen ÖNORM EN 1990:2013 und ÖNORM EN 1991-2:2012 so vordimensioniert, dass sie eine erste Eigenfrequenz in vertikaler Richtung von ca. 2 Hz und eine erste Eigenfrequenz in horizontaler Richtung quer zur Längsachse von ca. 1 Hz zeigt. Die höheren Eigenfrequenzen sind deutlich separiert, sodass die dominanten Schwingungsantworten in der Umgebung der Grundfrequenzen auftreten. Torsionsschwingungen werden nicht explizit untersucht, da die erste Eigenfrequenz der Torsion signifikant über den ersten Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen liegt. Für die vordimensionierte Brücke wird die Schwingungsantwort berechnet, welche durch Anregung menscheninduzierter Lasten entsteht. Anschließend werden für diese Brücke verschiedene passive Dämpfungsmaßnahmen gewählt und miteinander verglichen. Die Berechnungen werden mittels MATLAB R2020b durchgeführt.

1.3 Stand der Normung

Die Berechnung von Fußgängerbrücken erfolgt mithilfe der sogenannten Eurocodes, damit sind die Normen EN 1990 bis EN 1999 gemeint. Im Folgenden sind einige Auszüge aus diesen Normen beschrieben, welche für Fußgängerbrücken relevant sind.

In der ÖNORM EN 1990/A1:2013 sind Grenzwerte der Gebrauchstauglichkeit für die Beschleunigungen des Überbaus definiert. Der Grenzwert der Beschleunigung beträgt 0,7 m/s² für vertikale Schwingungen und 0,2 m/s² für horizontale Schwingungen. Zusätzlich wird ein Nachweis für die Einhaltung dieser Grenzwerte empfohlen, wenn die Eigenfrequenz für Vertikalschwingungen kleiner als 5 Hz ist bzw. die Eigenfrequenz für Horizontalschwingungen kleiner als 2,5 Hz ist.

Laut ÖNORM EN 1991-2:2012 ist als Nutzlast eine vertikal wirkende Flächenlast anzunehmen. Die Größe der Flächenlast ist von der Belastungslänge Labhängig und kann mit (1.1) berechnet werden.

$$q_{fk} = 2.0 + \frac{120}{L+30} \quad kN/m^2 \tag{1.1}$$

Für die Flächenlast gilt außerdem, dass nur Werte zwischen 2,5 kN/m² und 5,0 kN/m² zulässig sind.

Die ÖNORM EN 1993-2:2010 gibt keine konkreten Grenzwerte für Beschleunigungen oder Verformungen an. Es wird jedoch darauf hingewiesen, dass der Nutzungskomfort von Fußgängerbrücken nicht durch übermäßige Schwingungen eingeschränkt werden soll.

Gemäß ÖNORM EN 1995-2:2006 können Beschleunigungen für vertikale und horizontale Schwingungen von Holzbrücken, welche durch eine oder mehrere Personen hervorgerufen werden, berechnet werden. Die in dieser Norm angeführten Formeln sind von der Gesamtmasse der Brücke, dem Dämpfungskoeffizienten, der Eigenfrequenz der Brücke, der Anzahl der überquerenden Personen und einem spezifischen Beiwert abhängig.

In der nicht mehr gültigen Norm BS 5400-2:1978, welche durch die bereits erwähnten Eurocodes ersetzt wurde, wird ein Grenzwert für die vertikale Beschleunigung von Fußgängerbrücken angegeben. Dieser Grenzwert ist von der Eigenfrequenz der Brücke f_0 abhängig und ist in (1.2) dargestellt.

$$a_{Grenz,vert} = 0.5 * \sqrt{f_0} \quad m/s^2 \tag{1.2}$$

Wird die Gleichung (1.2) für eine Eigenfrequenz von 2 Hz ausgewertet, ergibt sich eine Beschleunigung von 0,71 m/s². Dieses Ergebnis ist beinahe ident mit dem Grenzwert für vertikale Beschleunigungen nach ÖNORM EN 1990/A1:2013 von 0,7 m/s².

2 Menscheninduzierte Lasten

2.1 Gehen

Beim Gehen handelt es sich um eine periodische Last, also eine in regelmäßigen Zeitabständen wiederkehrende Last. Gehen ist dadurch gekennzeichnet, dass zu jedem Zeitpunkt zumindest ein Fuß in Kontakt mit dem Boden steht, es existieren keine Flugphasen bei dieser Fortbewegungsart (Bachmann & Ammann, 1987; Flesch, 1993; Petersen & Werkle, 2017). Die Schrittabfolge erfolgt dadurch, dass abwechselnd der linke und rechte Fuß angehoben, nach vorne bewegt und wieder abgesetzt wird. Dabei wandert der Körperschwerpunkt einerseits nach oben und unten, andererseits nach links und rechts. Durch die Lageveränderung des Körperschwerpunktes werden sowohl dynamische Lasten in vertikaler Richtung, als auch dynamische Lasten in horizontaler Richtung auf den Boden abgegeben (Bachmann, 1988; Grundmann et al., 1993).

Um den zeitlichen Verlauf der vertikalen dynamischen Lasten einer Person beim Gehen darzustellen, werden die abgegebenen Kräfte der beiden Füße überlagert und zu einer periodischen Funktion zusammengefasst. Es kommt immer dann zu einer Überlagerung der Kräfte, wenn beide Füße gleichzeitig in Kontakt mit dem Boden stehen. Diese Situation tritt ein, wenn die Ferse des vorderen Fußes und der Fußballen des hinteren Fußes Bodenkontakt haben. Da es sich bei dieser Art der Belastung um eine periodische Belastungsfunktion handelt, kann die Funktion als Summe harmonischer Funktionen ausgedrückt werden. Bachmann und Ammann (1987) definieren diese Fourierreihe wie in (2.1) dargestellt.

$$F_{p}(t) = G + \Delta G_{1} * \sin(2\pi f_{S}t) + \Delta G_{2} * \sin(4\pi f_{S}t - \varphi_{2}) + \Delta G_{3} * \sin(6\pi f_{S}t - \varphi_{3})$$
(2.1)

Die dazugehörigen Koeffizienten sind in Tab. 2.1 aufgelistet.

| Koeffizient | Beschreibung | Größenordnung |
|----------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| G | Eigengewicht einer Person | i. Allg. 800 N |
| ΔG_1 | Lastanteil 1. Harmonische | 0,4 G für f _s = 2,0 Hz |
| | | 0,5 G für f _s = 2,4 Hz |
| ΔG_2 | Lastanteil 2. Harmonische | 0,1 G |
| ΔG_3 | Lastanteil 3. Harmonische | 0,1 G |
| fs | Schrittfrequenz | 1,7 Hz bis 2,3 Hz |
| φ ₂ | Phasenwinkel 2. Harmonische | π/2 |
| φ ₃ | Phasenwinkel 3. Harmonische | π/2 |

Tab. 2.1: Koeffizienten der Fourierreihe für Vertikalkräfte beim Gehen

Quelle: In Anlehnung an Bachmann & Ammann, 1987, S.20

Dabei kann für ΔG_1 , dem Lastanteil der 1. Harmonischen, für Schrittfrequenzen zwischen 2,0 Hz und 2,4 Hz linear interpoliert werden. Nach Bachmann und Ammann (1987) kann für normales Gehen eine Schrittfrequenz von 2,0 Hz, eine Schrittlänge von 0,75 m und eine Schrittgeschwindigkeit von 1,5 m/s angenommen werden. Für die physikalischen Größen Schrittfrequenz, Schrittlänge und Schrittgeschwindigkeit gilt der direkt proportionale Zusammenhang, dass die Schrittgeschwindigkeit das Produkt aus Schrittfrequenz und Schrittlänge ist. Da die Periodendauer der reziproke Wert der Frequenz ist, ergibt sich für eine Schrittfrequenz von 2,0 Hz eine Schrittdauer von 0,5 s. In Abb. 2.1 wird (2.1) für eine Schrittfrequenz von 2,0 Hz und ein Eigengewicht von 800 N ausgewertet.



Abb. 2.1: Dynamische vertikale Last einer Person beim Gehen mit 2 Hz laut Gleichung (2.1)

In Abb. 2.1 ist zu erkennen, dass die maximale dynamische Last in vertikaler Richtung knapp über 1200 N beträgt und somit mehr als 50 % größer ist als die statische Last mit 800 N, welche als strichlierte Linie eingezeichnet ist. Die Beschreibung der Koeffizienten der Fourierreihe in Tab. 2.1 zeigt, dass auch kleine Lastanteile in der 2. und 3. Harmonischen, also mit der doppelten und dreifachen Frequenz, abgegeben werden. Die Überlagerung der ersten drei Berücksichtigung der Phasenverschiebungen Harmonischen, unter der 2. und 3. Harmonischen, ergibt die in Abb. 2.1 dargestellte periodische Funktion. Höhere Harmonische können vernachlässigt werden, da die Lastanteile noch kleiner sind als bei den Harmonischen davor (Bachmann & Ammann, 1987). Daraus resultiert, dass eine Person mit einer Schrittfrequenz von 2 Hz eine Fußgängerbrücke, welche beispielsweise eine erste Eigenfrequenz in vertikaler Richtung von 4 Hz hat, durch die Lastanteile der 2. Harmonischen teilweise resonant anregt.

Um den zeitlichen Verlauf der horizontalen dynamischen Lasten einer Person beim Gehen darzustellen, werden wie zuvor bei den vertikalen Lasten harmonische Schwingungen in Form einer Fourierreihe überlagert. Bei den horizontalen Lasten wird zwischen Lasten quer zur Bewegungsrichtung und Lasten parallel zur Bewegungsrichtung unterschieden. Dabei werden nach Bachmann und Ammann (1987) für horizontale Schwingungen quer zur Bewegungsrichtung hauptsächlich Lastanteile in der halben und eineinhalbfachen Schrittfrequenz abgegeben. Dieser Umstand lässt sich dadurch erklären, dass nur jeder zweite Schritt eine Anregung in eine Richtung bewirkt und somit nur mit der halben bzw. mit der eineinhalbfachen Schrittfrequenz angeregt wird. Für horizontale Schwingungen in Bewegungsrichtung sind ähnlich wie bei den vertikalen Schwingungen die Schrittfrequenz und die zweifache Schrittfrequenz dominant. Petersen und Werkle (2017) definieren die Fourierreihe für horizontale Kräfte wie in (2.2).

$$F_h(t) = G * \sum_j c_{h,j} * \sin(\pi j f_s t + \varphi_j)$$
 (2.2)

Die dazugehörigen Koeffizienten sind in Tab. 2.2 aufgelistet.

| Koeffizient Beschreibung | | Größenordnung quer | Größenordnung längs |
|--------------------------|-------------------------------|-----------------------|------------------------|
| G | Eigengewicht einer Person | i. Allg. 800 N | i. Allg. 800 N |
| fs | Schrittfrequenz | 1,7 bis 2,3 Hz | 1,7 bis 2,3 Hz |
| j | Index | 1, 2, 3, 4 | 1, 2, 3, 4 |
| C _{h,1} | Lastanteil 0,5. Harmonische | 0,1 | 0 |
| C _{h,2} | Lastanteil 1. Harmonische | 0 | 0,2 |
| C h,3 | Lastanteil 1,5. Harmonische | 0,1 | 0 |
| Ch,4 | Lastanteil 2. Harmonische | 0 | 0,1 |
| φ1 | Phasenwinkel 0,5. Harmonische | -π / 4 | 0 |
| φ ₂ | Phasenwinkel 1. Harmonische | 0 | -π / 8 |
| φ ₃ | Phasenwinkel 1,5. Harmonische | π/8 | 0 |
| φ4 | Phasenwinkel 2. Harmonische | 0 | π/4 |

Tab. 2.2: Koeffizienten der Fourierreihe für Horizontalkräfte beim Gehen

Quelle: In Anlehnung an Petersen & Werkle, 2017, S.1144

Obwohl die Lastanteile der horizontalen Kräfte kleiner sind als die Lastanteile der vertikalen Kräfte, können die durch Gehen hervorgerufenen horizontalen Schwingungen der Brücke zu großen Problemen der Gebrauchstauglichkeit führen. Einerseits liegt das daran, dass der Grenzwert der Beschleunigung nach ÖNORM EN 1990/A1:2013 für horizontale Schwingungen mit 0,2 m/s² kleiner ist als der Grenzwert der Beschleunigung für vertikale Schwingungen mit 0,7 m/s². Andererseits reagieren Menschen auf horizontale Bewegungen viel empfindlicher als auf vertikale Bewegungen und versuchen ihre Schrittfrequenz an die Frequenz der Horizontalschwingung anzupassen (Zivanovic et al., 2005). Diese Frequenzanpassung wird Synchronisationseffekt oder auch Lock-in Effekt genannt und führt zu einer stärkeren



Anregung der Konstruktion. In Abb. 2.2 wird (2.2) für eine Schrittfrequenz von 2,0 Hz und ein Eigengewicht von 800 N ausgewertet.

Abb. 2.2: Dynamische horizontale Last einer Person beim Gehen mit 2 Hz laut Gleichung (2.2)

In Abb. 2.2 ist zu erkennen, dass die Periodendauer der Belastungsfunktion in Querrichtung eine Sekunde beträgt, was einer Frequenz von einem Hertz entspricht. In Querrichtung wird die Brücke dementsprechend nur mit der halben Schrittfrequenz angeregt. In Längsrichtung beträgt die Periodendauer der Belastungsfunktion 0,5 Sekunden, somit ist die Frequenz gleich der Schrittfrequenz und hat einen Wert von 2 Hz.

2.2 Laufen

Beim Laufen handelt es sich wie beim Gehen um eine periodische Last. Laufen ist jedoch dadurch charakterisiert, dass zwischen den einzelnen Schritten Flugphasen, also Phasen ohne Bodenkontakt, existieren (Bachmann & Ammann, 1987; Flesch, 1993; Petersen & Werkle, 2017). Außerdem werden zwei aufeinanderfolgende Schritte beim Laufen nicht überlagert, da immer nur maximal ein Fuß in Kontakt mit dem Boden steht und niemals beide gleichzeitig. Demnach wirkt jeder Schritt für sich selbst und es gibt pro Schritt nur ein Lastmaximum. Bachmann und Ammann (1987) beschreiben die entstehende Belastungsfunktion durch ein Halbsinusmodell. Dabei werden unterschiedliche Funktionen für die Kontaktphase und die Flugphase wie in (2.3) definiert.

$$F_{p}(t) = \begin{cases} k_{p} * G * \sin(\pi * \frac{t}{t_{p}}) & f \ddot{u}r & t \le t_{p} \\ 0 & f \ddot{u}r & t_{p} < t \le T_{p} \end{cases}$$
(2.3)

Die dazugehörigen Koeffizienten sind in Tab. 2.3 aufgelistet.

| Koeffizient | Beschreibung | Größenordnung |
|----------------|---------------------------|----------------|
| G | Eigengewicht einer Person | i. Allg. 800 N |
| k _p | Dynamischer Stoßfaktor | 1,5 bis 6 |
| tp | Kontaktdauer | 0,1 bis 0,5 s |
| Tp | Schrittdauer | 0,25 bis 0,5 s |

Tab. 2.3: Koeffizienten des Halbsinusmodells für Vertikalkräfte beim Laufen

Quelle: In Anlehnung an Bachmann & Ammann, 1987, S.21

Die Schrittdauer ist wie bereits erwähnt der reziproke Wert der Schrittfrequenz. Beim Laufen werden üblicherweise Schrittfrequenzen zwischen 2,0 Hz und 3,5 Hz erreicht, wobei für normales Laufen eine Frequenz von 2,5 Hz angenommen werden kann (Bachmann & Ammann, 1987). Die Kontaktdauer t_p kann nach Petersen und Werkle (2017) angenähert werden zu (2.4).

$$t_p = \frac{0.4}{f_s - 1} + 0.044 * (2.5 - f_s) \quad mit \quad f_s > 1.74 \ Hz \tag{2.4}$$

Die Kontaktdauer t_p ist nach (2.4) ausschließlich von der Schrittfrequenz f_s abhängig. Wie in Abb. 2.3 zu erkennen ist, nimmt die Kontaktdauer mit zunehmender Frequenz ab.



Abb. 2.3: Frequenzabhängige Kontaktdauer beim Laufen laut Gleichung (2.4)

Der dimensionslose dynamische Stoßfaktor k_p ist vom Verhältnis zwischen Kontaktdauer t_p und Schrittdauer T_p abhängig und wird nach Petersen und Werkle (2017) in (2.5) beschrieben.

$$k_p = \frac{\pi}{2} * \frac{1}{t_p/T_p}$$
(2.5)

Je kleiner das Verhältnis von Kontaktdauer zu Schrittdauer ist, desto größer ist der dynamische Stoßfaktor. Grund dafür ist, dass die Fläche unter der Halbsinusfunktion im Zeitraum t_p gleich groß sein muss wie die Fläche unter der statischen Belastungsfunktion im Zeitraum T_p (Petersen & Werkle, 2017). Daher muss bei kürzerer Kontaktdauer der dynamische Stoßfaktor größer werden, um die Flächengleichheit zu gewährleisten. Da sowohl die Kontaktdauer, als auch die Schrittdauer von der Schrittfrequenz abhängig sind, kann der dynamische Stoßfaktor wie in Abb. 2.4 in Abhängigkeit der Schrittfrequenz dargestellt werden.





Wie Abb. 2.4 zeigt, wird der dynamische Stoßfaktor mit zunehmender Schrittfrequenz immer größer. Je höher Personen ihre Schrittfrequenz beim Laufen wählen, desto kürzer und intensiver sind die Kontakte mit dem Untergrund. Dabei werden vertikale Lasten an den Boden abgegeben, die einem Vielfachen des eigenen Körpergewichts entsprechen. In Abb. 2.5 wird (2.3) für eine Schrittfrequenz von 2,5 Hz und ein Eigengewicht von 800 N ausgewertet. Für eine Schrittfrequenz von 2,5 Hz ergibt sich eine Schrittdauer von 0,40 s und nach (2.4) eine Kontaktdauer von 0,27 s. Der dynamische Stoßfaktor errechnet sich bei dieser Frequenz nach (2.5) zu 2,36.



Abb. 2.5: Dynamische vertikale Last einer Person beim Laufen mit 2,5 Hz laut Gleichung (2.3)

Das bereits beschriebene Halbsinusmodell der vertikalen Lasten beim Laufen ist in Abb. 2.5 dargestellt. Exemplarisch sind fünf Schritte einer laufenden Person skizziert. Dabei handelt es sich um eine periodische Funktion, bei der jeder Schritt aus einer Kontaktphase und einer Flugphase besteht. Während der Kontaktphase werden Kräfte in Form einer halben Sinuswelle an den Untergrund abgegeben. Während der Flugphase werden keine Kräfte an den Untergrund abgegeben, daher ist die Belastungsfunktion in diesem Bereich eine Nullfunktion. Als Schrittdauer wird die Summe aus Kontaktdauer und Flugdauer bezeichnet. Das Verhältnis von Kontaktdauer zu Schrittdauer und der dynamische Stoßfaktor sind von der Schrittfrequenz abhängig.

2.3 Hüpfen

Hüpfen am Ort kann wie Laufen durch das Halbsinusmodell (2.3) beschrieben werden (Bachmann & Ammann, 1987). Dabei sind die Kontaktdauer und der dynamische Stoßfaktor nicht mehr von der Schrittfrequenz, sondern von der Hüpffrequenz abhängig. In (2.4) und (2.5) wird die Schrittfrequenz demnach durch die Hüpffrequenz ersetzt. Nach Bachmann und Ammann (1987) liegt die Hüpffrequenz einer Person zwischen 1,8 und 3,4 Hz. Beim Hüpfen auf Fußgängerbrücken handelt es sich meist um eine mutwillige Anregung der Konstruktion. Also um den bewussten Versuch, die Brücke durch ein bestimmtes Sprungverhalten in Schwingung zu versetzen. Aus diesem Grund unterscheidet sich das Hüpfen von den bereits beschriebenen Lasten Gehen und Laufen, bei denen die Schwingungsanregung der Brücke nicht mutwillig stattfindet, sondern aus der Ähnlichkeit von Schrittfrequenz und Eigenfrequenz resultiert.

2.4 Einfluss von Personengruppen

Bislang wurden nur die menscheninduzierten Lasten einer einzelnen Person, bei unterschiedlichen Aktivitäten beschrieben. Doch Fußgängerbrücken werden im Normalfall nicht nur durch Einzelpersonen, sondern auch durch Personengruppen belastet. Eine Personengruppe ist dadurch gekennzeichnet, dass sich alle Personen innerhalb der Gruppe mit der gleichen Geschwindigkeit fortbewegen. Die Schrittfrequenzen und Schrittlängen können gleich sein, müssen aber nicht gleich sein. Es gilt der Zusammenhang, dass die Schrittgeschwindigkeit das Produkt aus Schrittfrequenz und Schrittlänge ist. Wenn bei mehreren Personen zwei Parameter gleich sind, muss auch der dritte Parameter gleich sein. Es kann jedoch vorkommen, dass nur ein Parameter gleich ist und die anderen beiden Parameter unterschiedlich sind. Zum Beispiel kann die gleiche Schrittgeschwindigkeit erreicht werden, wenn die Schrittlänge verkürzt aber die Schrittfrequenz dementsprechend erhöht wird. Da die Schwingungsanregung von Brücken von der Schrittfrequenz und nicht von der Schrittgeschwindigkeit abhängig ist, ergibt sich eine kritische Anregung dadurch, dass sich verschiedene Personen mit der gleichen Schrittfrequenz über eine Brücke bewegen. Dabei ist es nicht relevant, ob die Personen alleine oder in einer Gruppe unterwegs sind, entscheidend für eine kritische Anregung ist nur die gleiche Schrittfrequenz bei möglichst kleiner Phasenverschiebung. Große Phasenverschiebungen zwischen Schrittfrequenzen führen teilweise zur Reduktion der Schwingungsamplitude, da die vertikale Last an bestimmten Zeitpunkten der Brückenschwingung entgegenwirkt. Nach Matsumoto et al. (1978) besteht ein Zusammenhang zwischen der Schwingungsamplitude von mehreren Personen und der Schwingungsamplitude einer Einzelperson auf einer Brücke. Dafür wird eine Poisson-Verteilung für die Ankunftswahrscheinlichkeit der Personen angenommen. In (2.6) wird ein Faktor m definiert, der das Verhältnis dieser beiden Schwingungsamplituden beschreibt.

$$m = \sqrt{\lambda * T_0} \tag{2.6}$$

Mittels (2.6) kann die Schwingungsamplitude der Brücke bei Anregung durch mehrere Personen ermittelt werden, indem die Schwingungsamplitude einer Einzelperson mit dem Faktor m multipliziert wird. Das Produkt aus λ und T₀ bezeichnet die Anzahl der Personen, die sich gleichzeitig auf der Brücke befinden. Die mittlere Ankunftsrate λ steht für die Anzahl der Personen, die pro Sekunde einen bestimmten Querschnitt passieren und kann nach Petersen und Werkle (2017) mit (2.7) berechnet werden.

$$\lambda = q * b * v \quad Personen/s \tag{2.7}$$

Die in (2.7) vorkommenden Faktoren können wie folgt definiert werden. Der Faktor q steht für die Personendichte und kann mit 1,0 Personen pro m² angenommen werden. Der Wert b steht für die effektive Breite einer Brücke und kann durch die Nutzbreite abzüglich 0,5 m berechnet werden. Die Schrittgeschwindigkeit v kann für normales Gehen mit 1,5 m/s angenommen werden. Der in (2.6) vorkommende Faktor T₀ steht für die Zeit, welche von einer Person benötigt wird, um die Brücke zu überqueren und wird in Sekunden angegeben. Berechnet werden kann diese Zeit, indem die Länge der Brücke in Meter durch die Schrittgeschwindigkeit, üblicherweise 1,5 m/s, dividiert wird.

Der in (2.6) definierte Vergrößerungsfaktor m kann für Fußgängerbrücken, welche eine erste Eigenfrequenz in vertikaler Richtung zwischen 1,8 und 2,2 Hz haben, verwendet werden (Bachmann & Ammann, 1987). Ist die erste Eigenfrequenz kleiner als 1,6 Hz oder größer als 2,4 Hz wird m = 2 empfohlen. Bei Eigenfrequenzen von 1,6 bis 1,8 Hz oder 2,2 bis 2,4 Hz soll zwischen m = 2 und m nach (2.6) linear interpoliert werden.

Falls eine Gruppe von Personen eine Brücke im Gleichschritt, also mit gleicher Schrittfrequenz und keiner Phasenverschiebung, überqueren würde, wäre der Vergrößerungsfaktor m_{Gleichschritt} nach (2.8) zu wählen, da in diesem Fall ein direkt proportionaler Zusammenhang zwischen der Anzahl der Personen auf der Brücke und der Vergrößerung der Schwingungsamplitude vorliegen würde (Bachmann, 2004).

$$m_{Gleichschritt} = \lambda * T_0 \tag{2.8}$$

Das Produkt aus λ und T₀ bezeichnet die Anzahl der Personen, die sich gleichzeitig auf der Brücke befinden. Beispielsweise würden 10 im Gleichschritt über eine Brücke gehende Personen die Schwingungsamplitude um den Faktor 10 erhöhen. Diese Art der Einwirkung kann im Allgemeinen ausgeschlossen werden, da laut Österreichischer Straßenverkehrsordnung 1960 (StVO 1960) das Marschieren einer Personengruppe im Gleichschritt über eine Brücke verboten ist (§ 77 Absatz 1 Satz 3 StVO 1960).

3 Dämpfung von Fußgängerbrücken

3.1 Grundlagen

Dämpfung bezeichnet einen Vorgang, bei dem Bewegungsenergie in Wärme umgewandelt wird. Diese Art der Energieumwandlung wird auch als Dissipation bezeichnet. Dämpfung ist in allen Baukonstruktionen vorhanden, jedoch in unterschiedlichen Größen. Angegeben wird die Größe der Dämpfung über das Lehrsche Dämpfungsmaß ζ. Das Lehrsche Dämpfungsmaß ist von vielen Faktoren, wie Art des Baustoffes, Art der Konstruktion oder Lagerungsbedingungen abhängig und kann für Fußgängerbrücken aus Stahl mit $\zeta = 0,008$ angenommen werden (Petersen & Werkle, 2017). Für ungedämpfte Systeme ist die Schwingungsamplitude im Resonanzfall, also bei Anregung eines schwingungsfähigen Systems mit der Eigenfrequenz, theoretisch unendlich groß. Bei gedämpften Systemen wird die Schwingungsamplitude im Resonanzfall durch die Dämpfung beschränkt und ist um den Faktor $1/(2\zeta)$ größer als die statische Auslenkung. Für das bereits angenommene Lehrsche Dämpfungsmaß bei Fußgängerbrücken aus Stahl mit $\zeta = 0,008$ ist die dynamische Auslenkung im eingeschwungenen Resonanzfall um den Faktor 62,5 größer als die statische Auslenkung. Außerdem bewirkt Dämpfung bei einer freien Schwingung, dass die maximale Schwingungsamplitude mit der Zeit kleiner wird und gegen Null geht. Grundsätzlich kann die Bewegung eines linearen Einmassenschwingers durch (3.1) beschrieben werden. Für Mehrmassenschwinger können die skalaren Größen m, c und k durch Matrizen ersetzt werden.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{3.1}$$

Dabei steht m für die Masse in kg, \ddot{x} für die Beschleunigung in m/s², c für die Dämpfungskonstante in Ns/m, \dot{x} für die Geschwindigkeit in m/s, k für die Federkonstante in N/m, x für die Verschiebung in m und F(t) für die Kraft in N.

Zentrale Begriffe in der Dynamik sind die Eigenkreisfrequenz ω und die Eigenfrequenz f einer Konstruktion. Für einen ungedämpften Einmassenschwinger können die beiden Werte mithilfe von (3.2) und (3.3) berechnet werden.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{rad}{s}}$$
(3.2)

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \qquad Hz \tag{3.3}$$

Bei gedämpften Konstruktionen werden die Eigenkreisfrequenz und die Eigenfrequenz vom Lehrschen Dämpfungsmaß beeinflusst und können durch (3.4) und (3.5) ermittelt werden.

$$\omega_d = \omega_0 * \sqrt{1 - \zeta^2} \qquad \frac{rad}{s} \tag{3.4}$$

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} \qquad \qquad Hz \tag{3.5}$$

Der Wurzelausdruck in (3.4) charakterisiert das Verhältnis von ω_d zu ω_0 und ist ausschließlich vom Lehrschen Dämpfungsmaß ζ abhängig. Der Zusammenhang zwischen dem Lehrschen Dämpfungsmaß und dem Verhältnis ω_d / ω_0 ist in Abb. 3.1 dargestellt.



Abb. 3.1: Eigenkreisfrequenz bei vorhandener Dämpfung laut Gleichung (3.4)

In Abb. 3.1 ist zu erkennen, dass das Lehrsche Dämpfungsmaß für einen im Bauwesen üblichen Wertebereich von $0 < \zeta < 0,20$ keinen nennenswerten Einfluss auf die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems hat. Selbst bei einer großen Dämpfung von $\zeta = 0,20$ beträgt die gedämpfte Eigenkreisfrequenz 98 % der ungedämpften Eigenkreisfrequenz. Der Fehler bei Vernachlässigung der Dämpfung würde demnach 2 % ausmachen. Bei einem Lehrschen Dämpfungsmaß von $\zeta = 0,008$, wie es für Stahlbrücken verwendet werden kann, beträgt der Fehler bei Vernachlässigung der Dämpfung nur 0,003 %. Daher wird die Dämpfung bei schwach gedämpften Konstruktionen oft vernachlässigt und die Eigenkreisfrequenz wird auf Basis des ungedämpften Systems berechnet.

Ein weiterer wichtiger Zusammenhang besteht zwischen dem Lehrschen Dämpfungsmaß ζ und der Konstante c einer viskos angenommenen Dämpfung:

$$\zeta = \frac{c}{2 * m * \omega_0} \tag{3.6}$$

Nach (3.6) kann die Dämpfungskonstante c rückgerechnet werden, wenn die Masse m, die Eigenkreisfrequenz ω_0 und das Lehrsche Dämpfungsmaß ζ des schwingenden Systems bekannt sind.

3.2 Dynamischer Schwingungsdämpfer

Falls die Eigendämpfung einer Baukonstruktion nicht ausreichend ist, um die Schwingungsantwort der Konstruktion in bestimmten Grenzen zu halten, kann ein dynamischer Schwingungsdämpfer (Tuned Mass Damper) das gewünschte Ergebnis erzielen.

Nach Petersen und Werkle (2017) ist ein dynamischer Schwingungsdämpfer eine Zusatzmasse, die mittels Feder und Dämpfer an der Hauptkonstruktion befestigt ist. Feder und Dämpfer sind in diesem Fall parallel geschaltet und liegen somit dem Voigt-Kelvin-Modell zugrunde. Wenn die Zusatzmasse nur mit einer Feder an der Hauptkonstruktion befestigt ist und nicht mit Feder und Dämpfer, wird von einem Tilger gesprochen. Aufgrund der Koppelung zwischen der Masse der zu dämpfenden Konstruktion und der Masse des Dämpfers, wird aus dem ursprünglichen Einmassenschwinger ein Zweimassenschwinger. In Abb. 3.2 ist vereinfacht das System eines Zweimassenschwingers dargestellt.



Abb. 3.2: Dynamischer Schwingungsdämpfer nach dem Voigt-Kelvin-Modell

Der Grundgedanke eines dynamischen Schwingungsdämpfers besteht darin, dass die Resonanzspitze in einem gewählten Frequenzbereich des Hauptsystems durch optimale Abstimmung der Dämpfungsparameter so weit wie möglich reduziert wird. Wie bereits erwähnt, ist das Verhältnis von dynamischer Auslenkung zu statischer Auslenkung bei einem Einmassenschwinger im Resonanzfall nur durch die Eigendämpfung beschränkt. Der Vergrößerungsfaktor beträgt an dieser Stelle mit guter Näherung $1/(2\zeta)$. Bei Erweiterung eines Einmassenschwingers zu einem Zweimassenschwinger bilden sich zwei Spitzen der Vergrößerungsfunktion aus. Die erste Spitze wird vor der Eigenfrequenz des Hauptsystems auftreten und die zweite Spitze wird nach der Eigenfrequenz des Hauptsystems auftreten (Petersen, 2001). Bei einer optimalen Wahl von Masse, Federkonstante und Dämpferkonstante des Schwingungsdämpfers befinden sich die beiden Spitzen auf der gleichen Höhe. So kann ein möglichst breitbandiges Spektrum an Erregerfrequenzen abgedeckt werden. In Abb. 3.3 ist der beschriebene Sachverhalt dargestellt. Die Parameter in diesem Beispiel wurden frei gewählt und dienen ausschließlich der Veranschaulichung.



Abb. 3.3: Vergrößerungsfunktion mit und ohne Schwingungsdämpfer Parameter: f_H = 2,00 Hz, ζ_H = 0,02, f_D = 1,89 Hz, ζ_D = 0,14, μ = 0,06

Die Vergrößerungsfunktionen für ein System mit Schwingungsdämpfer und ein System ohne Schwingungsdämpfer sind in Abb. 3.3 dargestellt. Zu erkennen ist, dass bei dem System ohne Schwingungsdämpfer die Spitze der Vergrößerungsfunktion an der Stelle auftritt, an der die Erregerfrequenz mit der Eigenfrequenz übereinstimmt. Da die Funktion in diesem Punkt einen Wert von 25 hat, kann das Lehrsche Dämpfungsmaß zu $\zeta = 0,02$ bestimmt werden. Mithilfe des Schwingungsdämpfers kann der Maximalwert der Vergrößerungsfunktion in diesem Beispiel auf etwa 5 reduziert werden. Die Maximalwerte treten kurz vor und kurz nach dem Resonanzfall des Einmassenschwingers auf. Stark beeinflusst wird der Maximalwert von der Masse des Dämpfers. Bei einer optimalen Einstellung der Dämpferkonstante reduziert eine größere Dämpfermasse die beiden Spitzen der Vergrößerungsfunktion. Als wirtschaftlich werden nach Petersen und Werkle (2017) Dämpfermassen bezeichnet, die 5 bis 8 % der kinetisch äquivalenten Ersatzmasse des Hauptsystems betragen.

Die optimalen Größen der Parameter des dynamischen Schwingungsdämpfers können für eine zeitlich harmonische Anregung nach Den Hartog und Mesmer (1952) berechnet werden und sind in (3.7) und (3.8) angeführt.

$$\kappa_{opt} = \frac{1}{1+\mu} \tag{3.7}$$

$$\zeta_{D,opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}}$$
(3.8)

Die in (3.7) und (3.8) vorkommenden Symbole werden wie folgt definiert. Der Buchstabe μ steht für das Massenverhältnis zwischen der Dämpfermasse und der Masse des Hauptsystems. Der Parameter κ_{opt} bezeichnet das optimale Verhältnis zwischen der

Eigenkreisfrequenz des Dämpfers und der Eigenkreisfrequenz des Hauptsystems. Der optimale Wert für das Lehrsche Dämpfungsmaß des Schwingungsdämpfers wird durch (D. opt ausgedrückt. Streng genommen sind diese Optimierungskriterien nur dann gültig, wenn das Hauptsystem ungedämpft ist. Nach Petersen (2001) liefern die in (3.7) und (3.8) definierten Kriterien für μ < 0,10 und ζ_{H} < 0,10 sehr gute Ergebnisse und können daher auch für schwach gedämpfte Konstruktionen verwendet werden. Der Berechnungsablauf des dynamischen Schwingungsdämpfers beginnt mit der Wahl von µ, also dem Verhältnis von Dämpfermasse zu Hauptmasse. Nach Petersen und Werkle (2017) werden für µ Werte zwischen 0,05 und 0,08 empfohlen. Anschließend können die Eigenkreisfrequenz und das Lehrsche Dämpfungsmaß des Dämpfers unter Zuhilfenahme von (3.7) und (3.8) berechnet werden. Die Federkonstante des Dämpfers kann durch Umformung von (3.2) berechnet werden, indem die Dämpfermasse mit dem Quadrat der Eigenkreisfrequenz des Dämpfers multipliziert wird. Zum Schluss kann die Dämpferkonstante mithilfe von (3.9) ermittelt werden. Dabei gilt nach Den Hartog und Mesmer (1952), dass die Eigenkreisfrequenz des Hauptsystems und nicht die Eigenkreisfrequenz des Dämpfers eingesetzt wird.

$$c_D = \zeta_{D,opt} * 2 * m_D * \omega_H \tag{3.9}$$

In (3.9) steht der Index D für Dämpfer und der Index H für Hauptsystem. Da nun alle Parameter des dynamischen Schwingungsdämpfers bekannt sind, ist die Berechnung abgeschlossen und der Schwingungsdämpfer kann an der Hauptkonstruktion befestigt werden. Dabei entfaltet der Schwingungsdämpfer die größte Wirkung, wenn er an der Stelle der maximalen Auslenkung der zu dämpfenden Schwingungsform montiert wird. Beispielsweise ist diese Stelle bei einem beidseitig gelenkig gelagerten Balken, welcher in der ersten Eigenform schwingt, die Mitte des Balkens. Bei einem unten eingespannten und oben freien Kragarm, welcher in erster Eigenform schwingt, ist das obere Ende des Kragarms die Stelle der maximalen Auslenkung.

Bezüglich der Systematik von Schwingungsdämpfern kann zwischen aktiven und passiven Schwingungsdämpfern unterschieden werden (Petersen & Werkle, 2017). Bei aktiv wirkenden Systemen handelt es sich um geregelte Systeme, die eine elektrische Energiequelle benötigen. Dabei messen Sensoren die Bewegungen des Bauwerks und mittels Hydraulikzylinder wird die Dämpfermasse so angeregt, dass die Schwingungen von Dämpfermasse und Baukonstruktion gegengleich verlaufen. Durch diese gesteuerte Gegenbewegung kommt es zur Verringerung der Amplituden und somit zu einer Dämpfung der Schwingung. Bei passiv wirkenden Systemen gibt es keinen elektrischen Regelkreis. Die Dämpfermasse ist ausschließlich mittels Feder und Dämpfer an dem Bauwerk befestigt. Erst durch eine Bewegung der Baukonstruktion wird der Schwingungsdämpfer gemäß den Bewegungsgleichungen in Schwingung versetzt. Dabei ist eine präzise Berechnung der Dämpfungsparameter notwendig, um den Schwingungsdämpfer auf den gewünschten Frequenzbereich optimal abzustimmen. In dieser Diplomarbeit werden ausschließlich passive Systeme beschrieben und untersucht.

3.2.1 Viskoser Dämpfer

Bei viskosen Dämpfern ist die Dämpferkraft proportional zur Geschwindigkeit. Die Bewegungsgleichung (3.1) geht demnach von einem viskosen Dämpfer aus, da die

Dämpfungskonstante c mit der zeitlichen Ableitung des Weges multipliziert wird. Technisch realisiert kann ein viskoser Dämpfer über einen mit Öl gefüllten beweglichen Kolben werden. Innerhalb des Kolbens befinden sich Bleche, die bei Bewegung das Öl verdrängen und somit Scherspannungen hervorrufen (Petersen, 2001). Für eine newtonsche Flüssigkeit gilt, dass die Scherspannungen proportional zur Schergeschwindigkeit sind. Somit ist die Dämpferkraft von der Bewegungsgeschwindigkeit des Kolbens abhängig und die Definition eines viskosen Dämpfers ist erfüllt. Der Zusammenhang zwischen der Dämpferkraft und der Wegamplitude wird durch eine Hysteresekurve dargestellt. Diese Hysteresekurve hat bei viskoser Dämpfung die Form einer Ellipse. In Abb. 3.4 ist beispielhaft eine Hysteresekurve eines viskosen Dämpfers abgebildet. Die maximale Auslenkung wird in diesem Beispiel mit 0,02 m und die maximale Dämpferkraft mit 50 N gewählt.



Abb. 3.4: Hysteresekurve eines viskosen Dämpfers

Eine wichtige Größe im Zusammenhang mit Dämpfung ist die pro Schwingungszyklus dissipierte Bewegungsenergie. Dabei ist jene Bewegungsenergie gemeint, die mittels Reibung in Wärme umgewandelt wird. Nach Petersen und Werkle (2017) wird diese dissipierte Energie als Dämpfungsarbeit W_d bezeichnet und entspricht dem Flächeninhalt der Hysteresekurve. Berechnet werden kann die Dämpfungsarbeit W_d mit (3.10).

$$W_d = \pi * F_d * x = \pi * c * \dot{x} * x \quad Nm$$
(3.10)

In (3.10) steht c für die Dämpferkonstante in Ns/m, F_d für die Dämpfungskraft in N, \dot{x} für die Geschwindigkeitsamplitude in m/s und x für die Wegamplitude in m.

Die Federung eines viskosen Dämpfers wird bei vertikaler Anregung meist mithilfe von Spiralfedern ausgeführt. Dabei ist es technisch sinnvoll, die Spiralfedern in der Ausgangslage auf Druck zu belasten. Zugfedern sind bei dynamischen Schwingungsdämpfern aufgrund von Ermüdungserscheinungen zu vermeiden (Petersen, 2001).

PKW-Stoßdämpfer sind nach Petersen (2001) für bautechnische Anwendungen ebenfalls zu vermeiden, da die Anpassung der Dämpfer an die spezifischen Gegebenheiten und die Wartung der Dämpfer schwer umzusetzen sind.

3.2.2 Pendeldämpfer mit geschalteter Reibung

Pendeldämpfer kommen fast ausschließlich zur Dämpfung von horizontalen Schwingungen zum Einsatz. Dabei werden die Spiralfedern durch die Wirkung des Pendels ersetzt, welches meist als mathematisches Pendel idealisiert wird. Dieses Pendel ist gekennzeichnet durch eine Punktmasse, die an einem masselosen Stab befestigt ist, welcher oben gelenkig aufgehängt wird. Eine weitere mögliche Ausbildung des Pendels ist das Transversalpendel. Bei dieser Art des Pendels wird die Pendelmasse an mehreren Stäben befestigt, welche an beiden Enden ein Gelenk aufweisen. In Abb. 3.5 werden ein mathematisches Pendel (links) und ein Transversalpendel (rechts) gegenübergestellt.



Abb. 3.5: Gegenüberstellung mathematisches Pendel – Transversalpendel Quelle: In Anlehnung an Petersen, 2001, S.303

In Abb. 3.5 ist zu erkennen, dass die Pendellänge I unterschiedlich definiert wird. Beim mathematischen Pendel auf der linken Seite wird die Pendellänge bis zum Massenschwerpunkt definiert. Beim Transversalpendel auf der rechten Seite wird die Pendellänge mit der Stablänge der Aufhängungen gleichgesetzt. Die Pendellänge ist von größter Bedeutung, da die Eigenkreisfrequenz des Pendels ausschließlich von der Pendellänge und der Fallbeschleunigung abhängig ist. Berechnet werden kann die Eigenkreisfrequenz mittels (3.11).

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \frac{rad}{s} \tag{3.11}$$

In (3.11) bezeichnet g die Fallbeschleunigung mit 9,81 m/s² und I die Pendellänge in m. Durch Vergleich der beiden Ausdrücke (3.2) und (3.11) für die Eigenkreisfrequenz kann eine äquivalente Federsteifigkeit von k = mg/l angegeben werden.

Da ein dynamischer Schwingungsdämpfer aus Feder und Dämpfer besteht, muss in das System, welches als ungedämpft betrachtet werden kann, noch eine Dämpfung integriert werden. In diesem Zusammenhang kann eine viskose Dämpfung oder eine Dämpfung durch Reibung gewählt werden. Bei der Wahl eines viskosen Dämpfers würde es sich wie bereits beschrieben um einen klassischen dynamischen Schwingungstilger handeln, welcher nach den Optimierungskriterien von Den Hartog ausgelegt werden könnte. Bei einem Reibungsdämpfer handelt es sich um einen nicht viskosen Dämpfer, der nur durch nichtlineare Differentialgleichungen numerisch berechnet werden kann. Nach Petersen (2001) ist es möglich einen Reibungsdämpfer mithilfe einer Iterationsberechnung in einen äquivalenten viskosen Dämpfer zu überführen. Der Grundgedanke dabei ist, dass der Reibdämpfer pro Schwingungszyklus die gleiche Dämpfungsarbeit W_d leistet wie ein viskoser Dämpfer. Daher werden in einem ersten Berechnungsschritt die Dämpfungsarbeit des viskosen Dämpfers und die Relativamplitude, also die Differenz der Schwingungsamplitude von Hauptsystem und Dämpfer, berechnet. Anschließend können, unter Annahme eines Reibungskoeffizienten, die Masse der Reibplatte und somit die Reibungskraft berechnet werden. Die Verwendung von mehreren, übereinander angeordneten Reibplatten wird empfohlen, da bei dieser geschalteten Reibung der Dämpfer bereits bei kleinen Auslenkungen seine Wirkung entfaltet (Petersen, 2001). In Abb. 3.6 ist zum Zwecke der Veranschaulichung ein Pendeldämpfer mit fünf übereinander angeordneten Reibplatten skizziert.



Abb. 3.6: Pendeldämpfer mit geschalteten Reibplatten Quelle: In Anlehnung an Petersen, 2001, S.257

Wie in Abb. 3.6 ersichtlich, unterscheiden sich die einzelnen Platten durch die Größe des Lochdurchmessers in der Mitte der Platte. Aus diesem Grund werden sie durch die schwingende Pendelstange nicht gleichzeitig, sondern nacheinander aktiviert. Dabei wird die Reibungskraft immer größer, je mehr Platten aktiviert werden, da die Reibungskraft direkt proportional mit dem Gewicht der Reibplatten ansteigt. Zwischen den einzelnen Reibplatten wird ein Reibbelag angeordnet, der einen konstanten Reibungskoeffizienten über einen langen Zeitraum garantieren soll. In Petersen (2001) wird ein Jurid-Belag mit einem Reibungskoeffizienten von 0,25 verwendet. Die dabei entstehende Hysteresekurve ist nicht elliptisch, sondern stufenförmig. Die Anzahl der Stufen ist von der Anzahl der Reibplatten abhängig. In Abb. 3.7 wird beispielhaft eine Hysteresekurve eines Reibdämpfers mit fünf Reibplatten dargestellt.



Abb. 3.7: Hysteresekurve eines Reibungsdämpfers Quelle: In Anlehnung an Petersen, 2001, S.253

In Abb. 3.7 ist die Hysteresekurve eines Reibungsdämpfers mit fünf Reibplatten angeführt. Dabei ist zu erkennen, dass die Änderung der Reibungskraft immer sprunghaft stattfindet. Vorausgesetzt wird bei dieser Hysteresekurve, dass alle Reibplatten die gleiche Masse und somit die gleiche Reibungskraft aufweisen. Zusätzlich muss die Abstufung der Lochdurchmesser konstant sein. Die Lochdurchmesser der einzelnen Reibplatten werden von oben nach unten jeweils um den gleichen Betrag vergrößert. Um dennoch die gleiche Masse zu erzielen, wird entweder der Außendurchmesser der Reibplatte oder die Plattendicke angepasst. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Äquivalenz von viskoser Dämpfung und Reibungsdämpfung dann gegeben ist, wenn die Flächeninhalte der beiden Hysteresekurven gleich groß sind.

3.2.3 Flüssigkeitsdämpfer

Dynamische Schwingungsdämpfer können auch als Flüssigkeitsdämpfer (Tuned Liquid Column Damper) ausgebildet werden. Dabei übernimmt ein an beiden Enden verschlossenes Rohr, welches mit Wasser und Frostschutzmittel teilweise befüllt ist, sowohl die Aufgabe einer Feder, als auch die Aufgabe eines Dämpfers. Da das Rohr nur teilweise mit Flüssigkeit befüllt ist, können sich an beiden Enden des Rohres Luftfedern ausbilden, welche bei der Dämpfung eine entscheidende Rolle spielen. Im Allgemeinen unterscheiden sich Flüssigkeitsdämpfer von viskosen Dämpfern dadurch, dass nicht die gesamte Masse der Flüssigkeit aktiv zur Reduktion der Schwingungsamplitude beiträgt. Der Anteil der aktiven Masse ist hauptsächlich von der Geometrie des Schwingungsdämpfers abhängig. Um dennoch die Optimierungskriterien von Den Hartog anwenden zu können, kann eine Analogie zwischen dem realen System des Flüssigkeitsdämpfers und dem Voigt-Kelvin-Modell eines Zweimassenschwingers hergestellt werden (Reiterer, 2004). Dabei kommt es zu einer Transformation der realen Systemgrößen einen analogen Zweimassenschwinger. Im analogen Modell können die in

Optimierungskriterien unter Berücksichtigung der Geometriefaktoren angewendet werden. Anschließend kann der analoge Zweimassenschwinger wieder in das reale System rücktransformiert werden. Bei dieser Transformation und anschließender Rücktransformation entstehen modifizierte Optimierungskriterien, die für das reale System verwendet werden können. Dabei wird zwischen Flüssigkeitsdämpfern für vertikale und horizontale Anwendung unterschieden, da die Flüssigkeitsdämpfer je nach Anregung unterschiedlich ausgebildet werden.

Bei Flüssigkeitsdämpfern für vertikale Schwingungsreduktion wird eine V-Form empfohlen (Kuss, 2008). Dabei ist es von größter Bedeutung, dass die beiden Flüssigkeitsspiegel in der Ruhelage auf unterschiedlicher Höhe liegen, da die aktive Masse durch diesen Höhenunterschied definiert wird. Aus diesem Grund wird nach Befüllen des Rohres ein Rohrende verschlossen und solange Druckluft eingeblasen, bis die gewünschte Höhendifferenz erreicht ist. Erst dann wird das zweite Rohrende verschlossen. In Abb. 3.8 ist ein V-förmiger Flüssigkeitsdämpfer in der Ruhelage dargestellt.



Abb. 3.8: Flüssigkeitsdämpfer zur Reduktion vertikaler Schwingungen Quelle: In Anlehnung an Kuss, 2008, S.166

In Abb. 3.8 bezeichnet H_L die Länge der Luftfeder, H die halbe Länge der Flüssigkeitssäule, α den Neigungswinkel des Rohres, D den Rohrdurchmesser und Δz_0 die Differenz der Wasserspiegel. Für den beschriebenen Flüssigkeitsdämpfer kann die Eigenkreisfrequenz nach Kuss (2008) angegeben werden zu (3.12).

$$\omega_{0} = \sqrt{\frac{2gsin(\alpha)}{2H} * \left(1 + \frac{\gamma}{2\rho g} * \left(\frac{p_{0}}{H_{L}sin(\alpha) - \frac{\Delta z_{0}}{2}} + \frac{p_{0} + \rho g \Delta z_{0}}{H_{L}sin(\alpha) + \frac{\Delta z_{0}}{2}}\right)\right)} \quad \frac{rad}{s} \quad (3.12)$$

Die vorkommenden Symbole werden wie folgt definiert. Die Fallbeschleunigung g beträgt 9,81 m/s², H bezeichnet die halbe Länge der Flüssigkeitssäule in m, H_L bezeichnet die Länge der Luftfeder in m, γ steht für den Adiabatenkoeffizient und wird für Luft mit 1,405 angegeben, die Dichte des Wassers ρ beträgt 1000 kg/m³, α definiert den Neigungswinkel des Rohres, Δz_0 ist der Höhenunterschied der Wasserspiegel in m und p₀ steht für den Luftdruck mit 100.000 N/m².

Die in (3.7) und (3.8) definierten Optimierungskriterien können nicht direkt verwendet werden, sondern müssen für das reale System modifiziert werden (Kuss, 2008). In einem ersten Schritt wird das optimale Frequenzverhältnis f_{opt}^{**} für den analogen Zweimassenschwinger in (3.13) definiert. Das doppelte Sternsymbol im Index kennzeichnet das analoge System des Zweimassenschwingers.

$$f_{opt**} = \frac{1}{1 + \mu_{**}} \tag{3.13}$$

Wobei µ** nach (3.14) definiert ist.

$$\mu_{**} = \frac{\mu\kappa(1+\mu)}{1+\mu(2-\kappa-\kappa^2)}$$
(3.14)

In (3.14) steht μ für das bereits definierte Verhältnis von Dämpfermasse zur Masse des Hauptsystems. Das Symbol κ steht in diesem Fall für den Geometriefaktor, welcher bei vertikal wirkenden Flüssigkeitsdämpfern in (3.15) definiert ist.

$$\kappa = \frac{\Delta z_0}{2H} \tag{3.15}$$

Da nun das optimale Frequenzverhältnis des analogen Zweimassenschwingers bekannt ist, muss noch der Bezug zu dem optimalen Frequenzverhältnis des realen Systems hergestellt werden. Dafür wird nach Kuss (2008) der in (3.16) definierte Zusammenhang verwendet.

$$f_{opt} = \frac{\omega_D}{\omega_H} = \frac{\omega_{D^{**}}}{\omega_{H^{**}}} * \frac{1}{\sqrt{1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2)}} = \frac{f_{opt^{**}}}{\sqrt{1 + \mu(2 - \kappa - \kappa^2)}}$$
(3.16)

Nach (3.16) kann das optimale Frequenzverhältnis des realen Systems berechnet werden. Das optimale Dämpfungsmaß des realen Systems kann mit (3.17) berechnet werden.

$$\zeta_{D,opt} = \zeta_{D,opt**} = \sqrt{\frac{3\mu_{**}}{8(1+\mu_{**})^3}}$$
(3.17)

Die modifizierten Optimierungskriterien (3.16) und (3.17) können nun direkt für das reale System des vertikalen Schwingungsdämpfers verwendet werden. Entscheidend beeinflusst werden die Ergebnisse von Δz_0 , der Differenz der Wasserspiegel des vertikalen Schwingungsdämpfers.

Bei Flüssigkeitsdämpfern für horizontale Schwingungsreduktion wird eine U-Form empfohlen (Hochrainer, 2001). Nachdem das Rohr mit Flüssigkeit befüllt wird, werden beide Enden des Rohres verschlossen. Dabei befinden sich in der Ruhelage beide Wasserspiegel auf der gleichen Höhe. In Abb. 3.9 ist ein U-förmiger Flüssigkeitsdämpfer in der Ruhelage dargestellt.



Abb. 3.9: Flüssigkeitsdämpfer zur Reduktion horizontaler Schwingungen Quelle: In Anlehnung an Reiterer, 2004, S.119

In Abb. 3.9 bezeichnet H_L die Länge der Luftfeder, H die Länge einer schrägen Flüssigkeitssäule, B die Länge der horizontalen Flüssigkeitssäule, α den Neigungswinkel des Rohres und D den Rohrdurchmesser. Für den beschriebenen Flüssigkeitsdämpfer kann die Eigenkreisfrequenz nach Reiterer (2004) angegeben werden zu (3.18).

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2gsin(\alpha)}{L_{eff}} + \frac{2np_0}{\rho L_{eff}H_L}} \quad \frac{rad}{s}$$
(3.18)

Die vorkommenden Symbole werden wie folgt definiert. Die Fallbeschleunigung g beträgt 9,81 m/s², H_L bezeichnet die Länge der Luftfeder in m, n steht für den Polytropenexponent und wird für Luft mit 1,2 angegeben, die Dichte des Wassers ρ beträgt 1000 kg/m³, α definiert den Neigungswinkel des Rohres, p₀ steht für den Luftdruck mit 100.000 N/m² und L_{eff} kann für einen konstanten Rohrdurchmesser mittels (3.19) berechnet werden.

$$L_{eff} = 2H + B \tag{3.19}$$

Wie schon zuvor bei den vertikal wirkenden Flüssigkeitsdämpfern müssen die Optimierungskriterien auch für horizontal wirkende Flüssigkeitsdämpfer modifiziert werden (Hochrainer, 2001). Dabei wird wieder ein Zusammenhang zwischen dem realen System und dem analogen Zweimassenschwinger hergestellt. Das optimale Frequenzverhältnis ergibt sich für den äquivalenten Zweimassenschwinger demnach zu (3.20).

$$f_{opt**} = \frac{1}{1 + \mu_{**}} \tag{3.20}$$

Wobei µ** nach (3.21) definiert ist.

$$\mu_{**} = \frac{\kappa^2 \mu}{1 + \mu (1 - \kappa^2)} \tag{3.21}$$

In (3.21) steht μ für das bereits definierte Verhältnis von Dämpfermasse zur Masse des Hauptsystems. Das Symbol κ steht für den Geometriefaktor, welcher bei horizontal wirkenden Flüssigkeitsdämpfern in (3.22) definiert ist.

$$\kappa = \frac{2H * \cos(\alpha) + B}{L_{eff}}$$
(3.22)

Da nun das optimale Frequenzverhältnis des analogen Zweimassenschwingers bekannt ist, muss noch der Bezug zu dem optimalen Frequenzverhältnis des realen Systems hergestellt werden. Dafür wird nach Hochrainer (2001) der in (3.23) definierte Zusammenhang verwendet.

$$f_{opt} = \frac{\omega_D}{\omega_H} = \frac{\omega_{D^{**}}}{\omega_{H^{**}}} * \frac{1}{\sqrt{1 + \mu(1 - \kappa^2)}} = \frac{f_{opt^{**}}}{\sqrt{1 + \mu(1 - \kappa^2)}}$$
(3.23)

Nach (3.23) kann das optimale Frequenzverhältnis des realen Systems berechnet werden. Das optimale Dämpfungsmaß des realen Systems kann mit (3.24) berechnet werden.

$$\zeta_{D,opt} = \zeta_{D,opt**} = \sqrt{\frac{3\mu_{**}}{8(1+\mu_{**})^3}}$$
(3.24)

Wie schon zuvor können nun die modifizierten Optimierungskriterien (3.23) und (3.24) direkt für das reale System verwendet werden. Bei der Auslegung von Flüssigkeitsdämpfern ist besondere Vorsicht bei der Berechnung des Massenverhältnisses μ^{**} und des Geometriefaktors κ geboten, da für vertikal bzw. horizontal wirkende Schwingungsdämpfer unterschiedliche Definitionen verwendet werden.

3.3 Tilger

Von einem Schwingungstilger oder Tilger wird gesprochen, wenn die Zusatzmasse des Zweimassenschwingers nur mit einer Feder an der Hauptmasse befestigt ist (Petersen & Werkle, 2017). Bei Vernachlässigung der Dämpfung der Hauptkonstruktion liegt ein vollständig ungedämpftes System vor. In Abb. 3.10 ist das beschriebene System skizziert.



Abb. 3.10: Ungedämpfter Zweimassenschwinger mit Tilger

Wie bereits aufgezeigt wird die Amplitude eines Einmassenschwingers im Resonanzfall nur durch die Dämpfung begrenzt. Bei einem ungedämpften Einmassenschwinger, wie es bei alleiniger Betrachtung des Hauptsystems der Fall ist, wird die Schwingungsamplitude theoretisch unendlich groß. In der Realität kann eine Amplitude niemals unendlich groß werden, da die Strukturdämpfung im System immer größer als Null ist. Das Hinzufügen einer Zusatzmasse, welche nur mit einer Feder an die Hauptmasse gekoppelt ist, bewirkt eine Verschiebung der Resonanzspitze. Da es sich bei dem neuen System um einen Zweimassenschwinger handelt, werden zwei Resonanzspitzen entstehen. Anschaulich dargestellt ist dieser Zusammenhang in Abb. 3.11.



Abb. 3.11: Vergrößerungsfunktion mit und ohne Tilger Parameter: $f_H = f_D = 2,00$ Hz, $\zeta_H = \zeta_D = 0$, $\mu = 0,06$

In Abb. 3.11 werden die Vergrößerungsfunktionen der Hauptkonstruktion ohne Tilger und der Hauptkonstruktion mit Tilger gegenübergestellt. Es ist zu erkennen, dass die Schwingung der Hauptkonstruktion im Resonanzfall durch einen Tilger auf Null reduziert werden kann. Dies ist nur dann möglich, wenn der Tilger die gleiche Eigenkreisfrequenz wie das Hauptsystem hat. Bei der Schwingungstilgung handelt es sich im Allgemeinen um einen schmalbandigen Prozess (Petersen & Werkle, 2017). Das bedeutet, dass die Schwingungsamplitude nur in einem kleinen Frequenzbereich verkleinert wird. Bei Anregungen außerhalb dieses Bereiches treten jedoch größere Amplituden als bei dem Einmassenschwinger ohne Tilger auf. Schwingungstilger sind daher nur dann geeignet, wenn die Erregerfrequenz ziemlich genau bekannt ist und nur kleinen Schwankungen unterliegt. Außerdem werden Tilger hauptsächlich bei horizontaler Anregung eingesetzt. Da im Bauwesen die Erregerfrequenzen zumeist über ein breites Spektrum verteilt sind, wird die Verwendung eines dynamischen Schwingungsdämpfers generell bevorzugt.

3.3.1 Pendel

Eine häufig verwendete Form der Schwingungstilgung stellt das bereits beschriebene Pendel dar. Es wird als mathematisches Pendel oder als Transversalpendel ausgebildet und kann bei horizontaler Anregung verwendet werden. Die Eigenkreisfrequenz ist nur von der Fallbeschleunigung, welche mit 9,81 m/s² als konstant angesehen werden kann und der Pendellänge abhängig und kann wie in (3.11) berechnet werden. Wird ein Pendel als Tilger eingesetzt, sind keine Dämpfungselemente wie Reibplatten oder viskose Dämpfer in das System zu integrieren. Die Reduktion der Schwingungsamplitude erfolgt ausschließlich über die ungedämpfte Pendelbewegung.

3.3.2 Flüssigkeitstilger

Abgesehen von einem Pendel kann auch ein zusätzlich installierter Flüssigkeitstilger die Schwingungsamplituden eines Hauptsystems reduzieren. Dabei handelt es sich um ein teilweise mit Wasser und Frostschutzmittel gefülltes Rohr, welches an beiden Rohrenden offen ist. Die Ausbildung einer Luftfeder, wie zuvor bei den geschlossenen Flüssigkeitsdämpfern, ist nicht möglich. Für ein U-förmiges Rohr mit konstantem Querschnitt kann die Eigenkreisfrequenz nach Reiterer (2004) berechnet werden und ist in (3.25) angeführt.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g * \sin(\alpha)}{2H + B}} \quad \frac{rad}{s}$$
(3.25)

Die einzelnen Variablen des U-förmigen Flüssigkeitstilgers in (3.25) können analog zu Abb. 3.9 definiert werden. Dabei bezeichnet g die Fallbeschleunigung, α den Neigungswinkel des Rohres und der Ausdruck 2H + B die effektive Länge des Flüssigkeitsfadens.

4 Numerische Simulation der Schwingungen

4.1 Vordimensionierung der Fußgängerbrücke

Um die Wirksamkeit von verschiedenen Dämpfungsmaßnahmen berechnen und vergleichen zu können, wird eine Fußgängerbrücke vordimensioniert. Dabei werden einige Anforderungen an die Fußgängerbrücke gestellt. Die Brücke soll eine einfeldrige Balkenbrücke aus Stahl sein, welche die in (1.1) angegebene Nutzlast samt Eigengewicht im Lastfall der Tragfähigkeit aufnehmen kann. Außerdem soll die Brücke bei menscheninduzierten Lasten große Schwingungen aufweisen. Daher soll die erste Eigenfrequenz der Brücke für vertikale Schwingungen bei ca. 2 Hz und die erste Eigenfrequenz für horizontale Schwingungen bei ca. 1 Hz liegen. Wenn die Schrittfrequenz beim Gehen mit 2 Hz angenommen wird, kommt es zu einer resonanten Anregung der Brücke und zu großen Schwingungsamplituden. Dadurch kann untersucht werden, ob nachträglich installierte dynamische Schwingungsdämpfer die Schwingungen der Brücke soweit reduzieren können, dass die Vorgaben der Gebrauchstauglichkeit laut ÖNORM EN 1990/A1:2013 eingehalten werden. Somit wird ein Szenario untersucht, in dem die Fußgängerbrücke die statischen Lasten im Lastfall der Tragfähigkeit aufnehmen kann aber die Gebrauchstauglichkeit der Brücke aufgrund der dynamischen Lasten nicht erfüllt ist. Dieses Szenario ist von Interesse, da die Bemessung von Fußgängerbrücken in den bereits erwähnten Eurocodes hauptsächlich statische Lasten berücksichtigt und wenig Bezug auf die dynamischen Effekte beim Gehen oder Laufen genommen wird.

Um die oben angeführten Anforderungen zu erfüllen, ist eine iterative Berechnung der Abmessungen notwendig. Die daraus resultierenden Kennwerte der Brücke sind in Tab. 4.1 aufgelistet.

| Kennwert | Größe |
|-------------------------------|------------|
| Länge der Brücke | 20,5 m |
| Breite der Brücke | 2,5 m |
| Stahlgüte | S355JR |
| Іуу | 66.180 cm⁴ |
| lzz | 15.780 cm⁴ |
| Gesamtmasse der Brücke | 9.717 kg |
| 1. Eigenfrequenz (vertikal) | 2,01 Hz |
| 1. Eigenfrequenz (horizontal) | 0,98 Hz |

Tab. 4.1: Kennwerte der Fußgängerbrücke

Mittels iterativer Berechnungen konnten die Eigenfrequenzen sehr nahe an die geforderten Ergebnisse angenähert werden. Dabei ist vor allem die Wahl der Brückenlänge entscheidend. Die zweiten oder dritten Eigenfrequenzen können für beide Richtungen vernachlässigt werden, da sie bei einer Balkenbrücke mit einem konstanten Querschnitt um den Faktor 4 bzw. um den Faktor 9 größer sind als die ersten Eigenfrequenzen. Auch die Grundfrequenz der Torsionsschwingung liegt mit 19,23 Hz weit außerhalb der maßgebenden Erregerfrequenzen. Somit kommt es weder beim Gehen, noch beim Laufen zu einer resonanten Anregung der höheren Eigenfrequenzen und eine Untersuchung der ersten Eigenfrequenz ist ausreichend. Eine Skizze des Brückenquerschnittes ist in Abb. 4.1 dargestellt. Dabei sind die beiden Hauptträger (HEA 360) in Längsrichtung der Brücke zu erkennen. Darüber befinden sich in regelmäßigen Abständen Querträger, auf denen ein Gitterrost aufliegt. Das Brückengeländer wird ebenfalls an den Querträgern befestigt.



Abb. 4.1: Querschnitt der Fußgängerbrücke

In Abb. 4.1 ist eine Skizze des Brückenquerschnittes dargestellt. Die nutzbare Breite der Brücke beträgt 2,5 m. Das primäre Tragsystem bilden die beiden HEA 360 – Profile, welche in Längsrichtung der Brücke verlaufen. Die Brücke ist als Einfeldträger ausgebildet und spannt über 20,5 m.

Um die numerische Simulation der Schwingungen zu vereinfachen, wird das reale System der Brücke in ein kinetisch äquivalentes Ersatzsystem überführt. Dabei wird vorausgesetzt, dass die reale Brücke einen konstanten Querschnitt und somit eine konstante Biegesteifigkeit und eine konstante Masse pro Laufmeter hat. Anschließend kann nach Petersen und Werkle (2017) ein Zusammenhang zwischen der Gesamtmasse der Brücke und der kinetisch äquivalenten Ersatzmasse hergestellt werden. Außerdem wird die konstante Biegesteifigkeit durch eine Federsteifigkeit ersetzt. Somit wird die reale Brücke in einen Einmassenschwinger überführt und kann als solcher berechnet werden. In weiterer Folge wird der Einmassenschwinger mithilfe einer zusätzlichen Masse, welche als Dämpfer wirkt und in Brückenmitte befestigt wird, zu einem Zweimassenschwinger. Der Vergleich zwischen dem realen System der Brücke und dem kinetisch äquivalenten Ersatzsystem ist in Abb. 4.2 dargestellt.



Abb. 4.2: Reales System – Kinetisch äquivalentes Ersatzsystem

In Abb. 4.2 ist der Vergleich zwischen dem realen System (oben) und dem kinetisch äquivalenten Ersatzsystem (unten) dargestellt. Das reale System kennzeichnet sich durch eine konstante Massenbelegung μ und eine konstante Biegesteifigkeit El. Bei dem kinetisch äquivalenten Ersatzsystem ist die Massenbelegung μ = 0 und die Biegesteifigkeit El wird durch die Federsteifigkeit k ersetzt, außerdem steht m für die kinetisch äquivalente Ersatzmasse. Die Definitionen für m und k sind nach Petersen und Werkle (2017) in (4.1) und (4.2) angeführt.

$$m = \frac{1}{2} * \mu l \quad kg \tag{4.1}$$

In (4.1) steht m für die kinetisch äquivalente Ersatzmasse in kg, μ steht für die Massenbelegung pro Laufmeter in kg/m und L steht für die Gesamtlänge in m. Demnach ist die Ersatzmasse m halb so groß wie die Gesamtmasse der Brücke.

$$k = \frac{48 * EI}{l^3} \quad \frac{N}{m} \tag{4.2}$$

In (4.2) steht k für die Federsteifigkeit in N/m, E steht für den E-Modul von Stahl mit einer Größe von $2,1*10^{11}$ N/m², I steht für das Flächenträgheitsmoment in m⁴, für vertikale Schwingungen wird I_{YY} eingesetzt und für horizontale Schwingungen wird I_{ZZ} eingesetzt, L steht für die Gesamtlänge in m.

4.2 Berechnungsgrundlagen

Die numerischen Simulationen der Schwingungen werden mittels MATLAB R2020b durchgeführt, die Codes für die Berechnungen sind im Anhang der Diplomarbeit ersichtlich. Da es sich bei MATLAB um eine mit Matrizen arbeitende Software handelt, werden die Bewegungsgleichungen der analysierten Zweimassenschwinger in Matrizendarstellung angegeben. Aus diesem Grund wird das in Abb. 3.2 dargestellte Modell eines Zweimassenschwingers gedanklich freigeschnitten und die daraus resultierenden Bewegungsgleichungen werden in Form von Matrizen angeschrieben. In (4.3) ist das Ergebnis dieser Berechnung angeführt.

$$\begin{bmatrix} m_H & 0\\ 0 & m_D \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{x}_H\\ \ddot{x}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_H + c_D & -c_D\\ -c_D & c_D \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{x}_H\\ \dot{x}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_H + k_D & -k_D\\ -k_D & k_D \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_H\\ x_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t)\\ 0 \end{bmatrix}$$
(4.3)

In (4.3) sind die Bewegungsgleichungen eines Zweimassenschwingers mithilfe von Matrizen dargestellt. Der Index H steht für Hauptsystem und der Index D steht für Dämpfer. Ansonsten bezeichnen m die Massen in kg, c die Dämpferkonstanten in Ns/m und k die Federkonstanten in N/m. Der Weg wird mit x bezeichnet und in m angegeben, die Geschwindigkeit mit \dot{x} in m/s und die Beschleunigung mit \ddot{x} in m/s². Die von der Zeit t abhängige Kraftanregung des Hauptsystems wird mit F(t) bezeichnet und in N angeführt.

Die Berechnung der Differentialgleichungen erfolgt mithilfe des Newmark–Verfahrens, dabei handelt es sich um ein numerisches Zeitschrittverfahren. Zu Beginn werden die Startwerte, also die Werte für Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung des ersten Zeitschrittes, vorgegeben. Danach berechnet der Algorithmus die weiteren Zeitschritte, wobei das Ergebnis eines einzelnen Zeitschrittes von dem vorherigen Zeitschritt abhängig ist. Das Berechnungsverfahren arbeitet implizit und kann für harmonische, periodische und transiente Lasten verwendet werden. Die dafür notwendigen Formeln werden Petersen und Werkle (2017) entnommen.

In Kapitel 2.4 wurde bereits der Einfluss von Personengruppen auf das Schwingungsverhalten der Brücke beschrieben. Dabei wurde der Erhöhungsfaktor nach Matsumoto in (2.6) definiert. Die durch eine Personengruppe hervorgerufene Schwingungsamplitude wird ermittelt, indem die Schwingungsamplitude einer Einzelperson mit dem Erhöhungsfaktor nach Matsumoto multipliziert wird. Um die nachträgliche Berechnung der Schwingungsamplitude zu umgehen und die Ergebnisse für Schwingungsamplitude, Geschwindigkeit und Beschleunigung direkt zu erhalten, wird die Gewichtskraft einer Einzelperson mit dem Erhöhungsfaktor nach Matsumoto multipliziert. Der Erhöhungsfaktor wird also bereits auf der Seite der einwirkenden Kräfte berücksichtigt. Somit wird sichergestellt, dass die einwirkende Kraft der einer Personengruppe entspricht und keine nachträglichen Berechnungen notwendig sind. Da es sich bei der in (4.3) definierten Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung handelt, liefert die Berechnung mit erhöhter Gewichtskraft die gleichen Ergebnisse wie die nachträgliche Erhöhung der Amplitude.

4.3 Schwingungen ohne Schwingungsdämpfer

In einem ersten Berechnungsdurchgang werden die durch eine gehende Personengruppe hervorgerufenen Schwingungen der Fußgängerbrücke in vertikaler und horizontaler Richtung ermittelt. Da die Eigenfrequenzen der Brücke bewusst an die Schrittfrequenz der Personen angenähert wurden, können große Schwingungsamplituden erwartet werden. Das System wird als Einmassenschwinger berechnet, da noch keine zusätzliche Dämpfermasse an die Brücke angeschlossen wurde. In einem zweiten Berechnungsdurchgang wird der Zweimassenschwinger, welcher aus kinetisch äquivalenter Brückenmasse und Dämpfermasse besteht, berechnet und die Ergebnisse werden mit den Ergebnissen des ersten Berechnungsdurchganges ohne Dämpfermasse verglichen. Damit kann die Wirksamkeit der Dämpfungsmaßnahmen getestet werden.

4.3.1 Vertikale Schwingungen

Für die vertikalen Schwingungen der Fußgängerbrücke ohne Schwingungsdämpfer unter Einwirkung einer gehenden Personengruppe wurden die in Tab. 4.2 aufgelisteten Maximalwerte berechnet.

| Zustandsgröße | Wert |
|-----------------|------------------------|
| Verschiebung | 0,155 m |
| Geschwindigkeit | 1,86 m/s |
| Beschleunigung | 23,28 m/s ² |

Tab. 4.2: Maximale vertikale Zustandsgrößen ohne Schwingungsdämpfer

In Tab. 4.2 ist zu erkennen, dass die Beschleunigung der Brücke mit 23,28 m/s² den geforderten Grenzwert für vertikale Schwingungen mit 0,7 m/s² um ein Vielfaches überschreitet. Der zeitliche Verlauf der vertikalen Verschiebungen der Brücke ist in Abb. 4.3 dargestellt.



Abb. 4.3: Vertikale Verschiebungen ohne Schwingungsdämpfer

In Abb. 4.3 sind die vertikalen Verschiebungen der Brücke ohne Schwingungsdämpfer unter Einwirkung einer gehenden Personengruppe dargestellt. Nach ungefähr 30 Sekunden ist der Einschwingvorgang beendet und die Schwingungsamplitude bleibt auf einem konstanten Niveau.

4.3.2 Horizontale Schwingungen

Für die horizontalen Schwingungen der Fußgängerbrücke ohne Schwingungsdämpfer unter Einwirkung einer gehenden Personengruppe wurden die in Tab. 4.3 aufgelisteten Maximalwerte berechnet.

| Zustandsgröße | Wert |
|-----------------|-----------|
| Verschiebung | 0,086 m |
| Geschwindigkeit | 0,54 m/s |
| Beschleunigung | 3,34 m/s² |

| Fab. 4.3: Maximale horizont | ale Zustandsgrößen oh | ne Schwingungsdämpfer |
|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|
|-----------------------------|-----------------------|-----------------------|

In Tab. 4.3 ist zu erkennen, dass die Beschleunigung der Brücke mit 3,34 m/s² den geforderten Grenzwert für horizontale Schwingungen mit 0,2 m/s² um ein Vielfaches überschreitet. Der zeitliche Verlauf der horizontalen Verschiebungen der Brücke ist in Abb. 4.4 dargestellt.



Abb. 4.4: Horizontale Verschiebungen ohne Schwingungsdämpfer

In Abb. 4.4 sind die horizontalen Verschiebungen der Brücke ohne Schwingungsdämpfer unter Einwirkung einer gehenden Personengruppe dargestellt. Nach ungefähr 80 Sekunden ist der Einschwingvorgang abgeschlossen und die Schwingungsamplitude bleibt auf einem annähernd konstanten Niveau, wobei die Ausbildung einer Schwebung zu erkennen ist.

4.4 Schwingungen mit Schwingungsdämpfer

Da die Grenzwerte der Gebrauchstauglichkeit für die Fußgängerbrücke ohne zusätzliche Dämpfungsmaßnahmen nicht erfüllt sind, werden in den folgenden Abschnitten verschiedene Arten von dynamischen Schwingungsdämpfern getestet und miteinander verglichen. Dabei unterscheiden sich die Schwingungsdämpfer in Abhängigkeit von der Bewegungsrichtung. Bei vertikalen Schwingungen wird ein viskoser Schwingungsdämpfer mit einem V-förmigen Flüssigkeitsdämpfer verglichen. Bei horizontalen Schwingungen wird ein Pendeldämpfer mit geschalteter Reibung mit einem U-förmigen Flüssigkeitsdämpfer verglichen. Zum Zwecke der Vergleichbarkeit wird die maximale Schwingungsamplitude der Brücke mit Dämpfer in Relation zu der maximalen Schwingungsamplitude der Brücke ohne Dämpfer gesetzt. Außerdem wird die Masse des Dämpfers einheitlich mit 5 % der kinetisch äquivalenten Masse der Brücke gewählt.

4.4.1 Vertikale Schwingungen mit viskosem Dämpfer

Für die vertikalen Schwingungen der Fußgängerbrücke mit einem viskosen dynamischen Schwingungsdämpfer unter Einwirkung einer gehenden Personengruppe wurden die in Tab. 4.4 aufgelisteten Maximalwerte berechnet.

| Zustandsgröße | Wert |
|-----------------|-----------------------|
| Verschiebung | 0,023 m |
| Geschwindigkeit | 0,20 m/s |
| Beschleunigung | 2,25 m/s ² |

Tab. 4.4: Maximale vertikale Zustandsgrößen mit viskosem Dämpfer

Obwohl die maximale Beschleunigung der Brücke mit Schwingungsdämpfer nach Tab. 4.4 im Vergleich zu der maximalen Beschleunigung der Brücke ohne Schwingungsdämpfer um 90 % reduziert werden konnte, ist der Grenzwert von 0,7 m/s² deutlich überschritten. Selbst bei einer Verdoppelung der Dämpfermasse auf 10 % der kinetisch äquivalenten Ersatzmasse, was nach Petersen und Werkle (2017) nicht mehr wirtschaftlich ist, wäre der Maximalwert der Beschleunigung mit 1,63 m/s² immer noch zu hoch. Der zeitliche Verlauf der vertikalen Verschiebungen der Brücke mit einer Dämpfermasse von 5 % ist in Abb. 4.5 ersichtlich.



Abb. 4.5: Vertikale Verschiebungen mit viskosem Dämpfer

In Abb. 4.5 sind die vertikalen Verschiebungen der Brücke mit einem viskosen Schwingungsdämpfer unter Einwirkung einer gehenden Personengruppe dargestellt. Nach ungefähr 4 Sekunden ist der Einschwingvorgang beendet und die Schwingungsamplitude bleibt auf einem konstanten Niveau.

Eine mögliche Ausführung des viskosen Schwingungsdämpfers ist in Abb. 4.6 angeführt. Der Schwingungsdämpfer befindet sich in der Mitte der Brückenlängsachse, da er an dieser Stelle seine größte Wirkung entfalten kann. Zusätzlich ist zu beachten, dass die Spiralfedern in der Ruhelage auf Druck beansprucht werden und gegenläufige Windungen besitzen, um eine Verdrehung des Schwingungsdämpfers zu verhindern.



Abb. 4.6: Brückenquerschnitt mit viskosem Dämpfer

4.4.2 Vertikale Schwingungen mit Flüssigkeitsdämpfer

Für die vertikalen Schwingungen der Fußgängerbrücke mit einem V-förmigen Flüssigkeitsdämpfer unter Einwirkung einer gehenden Personengruppe wurden die in Tab. 4.5 aufgelisteten Maximalwerte berechnet.

| Zustandsgröße | Wert |
|-----------------|-----------------------|
| Verschiebung | 0,029 m |
| Geschwindigkeit | 0,28 m/s |
| Beschleunigung | 3,34 m/s ² |

Nach Tab. 4.5 ist die maximale vertikale Beschleunigung für das System mit einem V-förmigen Flüssigkeitsdämpfer gleich 3,34 m/s². Somit kann die Beschleunigung mithilfe des Dämpfers im Vergleich zu der Beschleunigung ohne Dämpfer um 86 % reduziert werden. Der Grenzwert



ist jedoch nicht eingehalten. In Abb. 4.7 ist der zeitliche Verlauf der Verschiebungen angeführt.

Abb. 4.7: Vertikale Verschiebungen mit Flüssigkeitsdämpfer

In Abb. 4.7 sind die vertikalen Verschiebungen der Brücke mit einem Flüssigkeitsdämpfer unter Einwirkung einer gehenden Personengruppe dargestellt. Nach ungefähr 6 Sekunden ist der Einschwingvorgang beendet, danach befindet sich die Schwingungsamplitude auf einem konstanten Niveau. Die Abmessungen des Flüssigkeitsdämpfers ergeben sich zu D = 0,30 m, H = 1,72 m, H_L = 1,34 m, $\Delta z_0 = 1,72$ m und $\alpha = 60^{\circ}$. Um die Größe des erforderlichen Flüssigkeitsdämpfers zu zeigen, wird der Flüssigkeitsdämpfer zusammen mit dem Querschnitt der Brücke in Abb. 4.8 skizziert. Dabei ist offensichtlich, dass die praktische Ausführung dieses Dämpfers aufgrund der großen Abmessungen für den gewählten Brückentyp eher unrealistisch ist. Hingegen bei Fachwerksbrücken ist diese Art der Schwingungsdämpfung durchaus denkbar.



Abb. 4.8: Brückenquerschnitt mit V-förmigem Flüssigkeitsdämpfer

4.4.3 Horizontale Schwingungen mit Pendeldämpfer

Für die horizontalen Schwingungen der Fußgängerbrücke mit einem Pendeldämpfer mit geschalteter Reibung unter Einwirkung einer gehenden Personengruppe wurden die in Tab. 4.6 aufgelisteten Maximalwerte berechnet.

| Zustandsgröße | Wert |
|-----------------|-----------|
| Verschiebung | 0,016 m |
| Geschwindigkeit | 0,10 m/s |
| Beschleunigung | 0,69 m/s² |

Tab. 4.6: Maximale horizontale Zustandsgrößen mit Pendeldämpfer

Die maximale horizontale Beschleunigung der Brücke mit einem Pendeldämpfer mit geschalteter Reibung beträgt 0,69 m/s² laut Tab. 4.6. Somit kann durch den Pendeldämpfer die Beschleunigung um 79 % reduziert werden. Der maximale Grenzwert für horizontale Beschleunigungen liegt bei 0,2 m/s² und ist nicht eingehalten. Der zeitliche Verlauf der horizontalen Verschiebungen ist in Abb. 4.9 dargestellt.



Abb. 4.9: Horizontale Verschiebungen mit Pendeldämpfer

Die horizontalen Verschiebungen der Brücke mit Pendeldämpfer unter Einwirkung einer gehenden Personengruppe sind in Abb. 4.9 dargestellt. Der Einschwingvorgang ist nach ungefähr 10 Sekunden abgeschlossen und die Schwingungsamplitude befindet sich ab diesem Zeitpunkt auf einem konstanten Niveau. Die notwendige Pendellänge beträgt 0,285 m.

Die Anzahl der übereinander angeordneten Reibplatten wird mit vier gewählt. Die berechnete Masse einer Reibplatte beträgt 17,21 kg. Die Dicke der zylinderförmigen Reibplatten wird einheitlich mit 0,015 m gewählt. Da sich der Innendurchmesser der Reibplatten von der obersten Reibplatte bis zur untersten Reibplatte aufgrund der Abstufung vergrößert, müssen die Außendurchmesser dementsprechend angepasst werden, um eine gleiche Masse der einzelnen Reibplatten zu erzielen. In Tab. 4.7 sind die ermittelten Abmessungen der Reibplatten aufgelistet, die Reibplatte 1 befindet sich ganz oben, die Reibplatte 4 ganz unten.

| Reibplatte | Innendurchmesser | Außendurchmesser |
|------------|------------------|------------------|
| 1 | 0,030 m | 0,432 m |
| 2 | 0,058 m | 0,435 m |
| 3 | 0,086 m | 0,440 m |
| 4 | 0,114 m | 0,446 m |

In Tab. 4.7 sind die berechneten Innen- und Außendurchmesser der abgestuften Reibplatten angeführt. Die Dicken und Massen der einzelnen Reibplatten sind gleich groß.

4.4.4 Horizontale Schwingungen mit Flüssigkeitsdämpfer

Für die horizontalen Schwingungen der Fußgängerbrücke mit einem U-förmigen Flüssigkeitsdämpfer unter Einwirkung einer gehenden Personengruppe wurden die in Tab. 4.8 aufgelisteten Maximalwerte berechnet.

| Zustandsgröße | Wert |
|-----------------|-----------|
| Verschiebung | 0,017 m |
| Geschwindigkeit | 0,11 m/s |
| Beschleunigung | 0,73 m/s² |

 Tab. 4.8: Maximale horizontale Zustandsgrößen mit Flüssigkeitsdämpfer

Nach Tab. 4.8 beträgt die maximale horizontale Beschleunigung des Systems mit U-förmigem Flüssigkeitsdämpfer 0,73 m/s². Damit findet eine Reduktion von 78 % gegenüber dem System ohne Flüssigkeitsdämpfer statt. Der Grenzwert von 0,2 m/s² wird dennoch überschritten. In Abb. 4.10 wird der zeitliche Verlauf der horizontalen Verschiebungen dargestellt.



Abb. 4.10: Horizontale Verschiebungen mit Flüssigkeitsdämpfer

Die horizontalen Verschiebungen der Brücke mit Flüssigkeitsdämpfer unter Einwirkung einer gehenden Personengruppe sind in Abb. 4.10 dargestellt. Der Einschwingvorgang ist nach ungefähr 8 Sekunden beendet und die Schwingungsamplitude befindet sich ab diesem Zeitpunkt auf einem konstanten Niveau. Die Abmessungen des Flüssigkeitsdämpfers ergeben sich zu D = 0,25 m, H = 1,50 m, H_L = 1,50 m, B = 1,95 m und α = 45°.

5 Zusammenfassung

Die numerischen Simulationen der Brückenschwingungen haben gezeigt, dass die maximalen Schwingungsamplituden mithilfe der gewählten Dämpfervarianten in einem hohen Ausmaß reduziert werden können. Bei den vertikalen Schwingungen hat der klassische viskose Schwingungsdämpfer, welcher mit den Optimierungsformeln von Den Hartog dimensioniert wurde, bessere Ergebnisse hervorgebracht als der Flüssigkeitsdämpfer in V-Form. Der Grund dafür ist unter anderem, dass bei dem Flüssigkeitsdämpfer nicht die gesamte Masse aktiv wirkt, sondern nur ein von der Geometrie des Dämpfers abhängiger Anteil. Da dieser Anteil kleiner als 100 % ist, kann nicht das gesamte Potential der Dämpfermasse ausgenützt werden. Im Gegensatz dazu wird bei dem viskosen Schwingungsdämpfer die gesamte Dämpfermasse mobilisiert und trägt aktiv zur Reduktion der Schwingungsamplitude bei. Außerdem ist die Einstellung des Flüssigkeitsdämpfers auf die optimale Eigenkreisfrequenz nur iterativ möglich und es werden große Abmessungen benötigt. Da es sich bei der untersuchten Balkenbrücke um eine schlanke Konstruktion handelt, ist die praktische Umsetzung des vertikalen Flüssigkeitsdämpfers kaum umsetzbar. Bei den horizontalen Schwingungen hat der Pendeldämpfer mit geschalteter Reibung die Schwingungsamplitude nur minimal stärker reduzieren können als der Flüssigkeitsdämpfer mit U-Form. Erklärt werden kann dieser Umstand dadurch, dass der Anteil der aktiven Masse bei dem horizontalen Flüssigkeitsdämpfer höher ist als bei dem vertikalen Flüssigkeitsdämpfer. Deswegen ist die Ähnlichkeit des horizontalen Flüssigkeitsdämpfers zu dem Pendeldämpfer größer als die Ähnlichkeit des vertikalen Flüssigkeitsdämpfers zu dem viskosen Schwingungsdämpfer. Für den horizontalen Flüssigkeitsdämpfer gilt ebenfalls, dass die praktische Umsetzung der ermittelten Abmessungen bei schlanken Konstruktionen kaum realisierbar ist.

Trotz der Reduktion der Schwingbeschleunigung um bis zu 90 % gegenüber dem System ohne Dämpfer konnten die Grenzwerte der ÖNORM EN 1990/A1:2013 in keiner der untersuchten Varianten eingehalten werden. Obwohl es sich bei der berechneten Fußgängerbrücke um einen absoluten Extremfall handelt, da die Eigenfrequenzen der Brücke bewusst beinahe exakt mit den Frequenzen der Anregungen übereinstimmen, wird die Tatsache verdeutlicht, dass eine Betrachtung und Abstimmung der Eigenfrequenzen in der Planungsphase unumgänglich sind. Im Idealfall wird die Fußgängerbrücke sowohl auf die vorgeschriebenen statischen Lasten, als auch auf die durch Menschen hervorgerufenen dynamischen Lasten bemessen und es sind keine nachträglichen Dämpfungsmaßnahmen erforderlich. Wenn aus bestimmten Gründen nachträgliche Dämpfungsmaßnahmen erforderlich sind, können die Schwingungen der Brücke durch zusätzlich installierte Dämpfer deutlich reduziert werden. Jedoch ist die Reduktion der Schwingungen aus Sicht der Wirtschaftlichkeit und technischen Realisierbarkeit begrenzt.

Literaturverzeichnis

- Bachmann, H. & Ammann, W. (1987). Schwingungsprobleme bei Bauwerken. Durch Menschen und Maschinen induzierte Schwingung. IABSE AIPC IVBH.
- Bachmann, H. (1988). Schwingungsprobleme bei Fußgängerbauwerken. Bauingenieur, 63, 67-75.
- Bachmann, H. (2004). "Lebendige" Fußgängerbrücken eine Herausforderung. *Bautechnik*, *81*(4), 227-236.
- Den Hartog, J. P. & Mesmer, G. (1952). Mechanische Schwingungen (2. Aufl.). Springer.
- Flesch, R. (1993). Baudynamik praxisgerecht, Band 1: Berechnungsgrundlagen. Bauverlag.
- Grundmann, H., Kreuzinger, H. & Schneider, M. (1993). Schwingungsuntersuchungen für Fußgängerbrücken. *Bauingenieur*, *68*, 215-225.
- Hochrainer, M. J. (2001). *Control of vibrations of civil engineering structures with special emphasis on tall buildings* (Dissertation). Technische Universität Wien.
- Kuss, S. (2008). Sonderuntersuchungen zu Flüssigkeitsschwingungstilgern im Brückenbau (Dissertation). Technische Universität Wien.
- Matsumoto, Y., Shiojiri, H. & Nishioka, T. (1978). Dynamic design of footbridges. *IABSE proceedings*, *P* - 17/78, 1-15.
- Petersen, C. (2001). Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau. Maurer Söhne.
- Petersen, C. & Werkle, H. (2017). Dynamik der Baukonstruktionen (2. Aufl.). Springer.
- Reiterer, M. (2004). *Schwingungsdämpfung von Baukonstruktionen, insbesondere von Brücken* (Dissertation). Technische Universität Wien.
- Zivanovic, S., Pavic, A. & Reynolds, P. (2005). Vibration serviceability of footbridges under humaninduced excitation: a literature review. *Journal of Sound and Vibration*, *279*(1-2), 1-74.

Abbildungsverzeichnis

| Abb. 2.1: Dynamische vertikale Last einer Person beim Gehen mit 2 Hz | 8 |
|--|----|
| Abb. 2.2: Dynamische horizontale Last einer Person beim Gehen mit 2 Hz 1 | 0 |
| Abb. 2.3: Frequenzabhängige Kontaktdauer beim Laufen 1 | 1 |
| Abb. 2.4: Dynamischer Stoßfaktor beim Laufen 1 | 2 |
| Abb. 2.5: Dynamische vertikale Last einer Person beim Laufen mit 2,5 Hz1 | 3 |
| Abb. 3.1: Eigenkreisfrequenz bei vorhandener Dämpfung1 | 17 |
| Abb. 3.2: Dynamischer Schwingungsdämpfer nach dem Voigt-Kelvin-Modell1 | 8 |
| Abb. 3.3: Vergrößerungsfunktion mit und ohne Schwingungsdämpfer 1 | 9 |
| Abb. 3.4: Hysteresekurve eines viskosen Dämpfers 2 | 21 |
| Abb. 3.5: Gegenüberstellung mathematisches Pendel – Transversalpendel 2 | 22 |
| Abb. 3.6: Pendeldämpfer mit geschalteten Reibplatten 2 | 23 |
| Abb. 3.7: Hysteresekurve eines Reibungsdämpfers 2 | 24 |
| Abb. 3.8: Flüssigkeitsdämpfer zur Reduktion vertikaler Schwingungen | 25 |
| Abb. 3.9: Flüssigkeitsdämpfer zur Reduktion horizontaler Schwingungen 2 | 27 |
| Abb. 3.10: Ungedämpfter Zweimassenschwinger mit Tilger 2 | 28 |
| Abb. 3.11: Vergrößerungsfunktion mit und ohne Tilger 2 | 29 |
| Abb. 4.1: Querschnitt der Fußgängerbrücke | 32 |
| Abb. 4.2: Reales System – Kinetisch äquivalentes Ersatzsystem | 33 |
| Abb. 4.3: Vertikale Verschiebungen ohne Schwingungsdämpfer 3 | 35 |
| Abb. 4.4: Horizontale Verschiebungen ohne Schwingungsdämpfer 3 | 36 |
| Abb. 4.5: Vertikale Verschiebungen mit viskosem Dämpfer 3 | 37 |
| Abb. 4.6: Brückenquerschnitt mit viskosem Dämpfer 3 | 38 |
| Abb. 4.7: Vertikale Verschiebungen mit Flüssigkeitsdämpfer 3 | 39 |
| Abb. 4.8: Brückenquerschnitt mit V-förmigem Flüssigkeitsdämpfer 4 | 10 |
| Abb. 4.9: Horizontale Verschiebungen mit Pendeldämpfer 4 | 1 |
| Abb. 4.10: Horizontale Verschiebungen mit Flüssigkeitsdämpfer 4 | 12 |

Tabellenverzeichnis

| 7 |
|----|
| 9 |
| 11 |
| 31 |
| 35 |
| 36 |
| 37 |
| 38 |
| 40 |
| 41 |
| 42 |
| |

Anhang

Im Anhang dieser Diplomarbeit sind die verwendeten MATLAB Codes dargestellt. Ausgeführt wurden diese Codes mit MATLAB R2020b.

MATLAB Code 1: Vertikale Schwingungen ohne Schwingungsdämpfer

```
clear
clc
% Multiplikationsfaktor nach Matsumoto
Personendichte = 1.0;
                        % Personen/m^2
Schrittgeschwindigkeit = 1.5;
                                % m/s
Laenge_Bruecke = 20.5;
                         % m
Breite_Bruecke = 2.5;
                        % m
Breite_effektiv = Breite_Bruecke-0.5;
                                        % m
T_0 = Laenge_Bruecke/Schrittgeschwindigkeit;
                                               % s
Lambda = Personendichte*Breite_effektiv*Schrittgeschwindigkeit; % Personen/s
m_Matsumoto = sqrt(Lambda*T_0);
                                  % -
% Kraft einer Personengruppe
dt = 0.005;
              % s
Gesamtzeit = 40;
                   % s
t = 0:dt:Gesamtzeit; % s
Gewicht_PG = m_Matsumoto*800;
                                % N
delta_G1 = 0.4*Gewicht_PG;
                             % N
delta_G2 = 0.1*Gewicht_PG;
                             % N
delta_G3 = 0.1*Gewicht_PG;
                             % N
Schrittfrequenz = 2;
                       % Hz
Phi2 = pi/2;
               % rad
Phi3 = pi/2;
               % rad
Kraft = Gewicht_PG + delta_G1*sin(2*pi*Schrittfrequenz*t) +
delta_G2*sin(4*pi*Schrittfrequenz*t-Phi2) + delta_G3*sin(6*pi*Schrittfrequenz*t-Phi3);
                                                                                          % N
% Angaben zum Einmassenschwinger
m = 4858.5;
              % kg
k = 774329;
            % N/m
Omega = sqrt(k/m);
                     % rad/s
Zeta = 0.008;
               % -
c = 2*m*Omega*Zeta;
                      % Ns/m
% Schwingungsantwort mit Newmark Methode
% Berechnungsparameter
alpha = 0.5;
beta = 0.25;
% Ergebnisvektoren
s = zeros(1,length(t));
                          % m
v = zeros(1,length(t));
                          % m/s
```

```
a = zeros(1,length(t));
                          % m/s^2
a(1) = (Kraft(1)-c*v(1)-k*s(1))/m;
                                     % m/s^2
% Berechnung
for i = 2:1:length(t)
    a_h = 1/beta*m+alpha/beta*c*dt+k*dt^2;
    b_h = (1/beta*m+alpha/beta*c*dt)*s(i-1)+(1/beta*m+(alpha/beta-1)*c*dt)*dt*v(i-
1)+((1/(2*beta)-1)*m+(alpha/(2*beta)-1)*c*dt)*dt^2*a(i-1)+Kraft(i)*dt^2;
    s(i) = a_h^{(-1)*b_h};
    v(i) = (alpha/(beta*dt))*(s(i)-s(i-1))-(alpha/beta-1)*v(i-1)-(alpha/(2*beta)-1)*dt*a(i-1);
    a(i) = (1/(beta*dt^2))*(s(i)-s(i-1))-1/(beta*dt)*v(i-1)-(1/(2*beta)-1)*a(i-1);
end
% Ergebnisse
s_max = max(s);
                  % m
                  % m/s
v_max = max(v);
                  % m/s^2
a_max = max(a);
% Graphische Darstellung der Verschiebung
plot(t,s)
xlabel('Zeit in [s]', 'FontSize',14)
xlim([0 40])
ylabel('Verschiebung in [m]', 'FontSize',14)
ylim([-0.2 0.2])
grid on
```

MATLAB Code 2: Horizontale Schwingungen ohne Schwingungsdämpfer

```
clear
clc
% Multiplikationsfaktor nach Matsumoto
Personendichte = 1.0;
                        % Personen/m^2
Schrittgeschwindigkeit = 1.5;
                                % m/s
Laenge_Bruecke = 20.5;
                         % m
Breite_Bruecke = 2.5;
                        % m
Breite_effektiv = Breite_Bruecke-0.5;
                                        % m
T_0 = Laenge_Bruecke/Schrittgeschwindigkeit;
                                               % s
Lambda = Personendichte*Breite_effektiv*Schrittgeschwindigkeit; % Personen/s
m_Matsumoto = sqrt(Lambda*T_0);
                                  % -
% Kraft einer Personengruppe
dt = 0.005;
             % s
Gesamtzeit = 120;
                    % s
t = 0:dt:Gesamtzeit;
                      % s
Gewicht_PG = m_Matsumoto*800;
                                % N
c_{h1} = 0.1;
            % -
c_h3 = 0.1;
              % -
Schrittfrequenz = 2;
                       % Hz
Phi1 = -pi/4;
               % rad
Phi3 = pi/8;
               % rad
```

```
Kraft =
Gewicht_PG*(c_h1*sin(pi*1*Schrittfrequenz*t+Phi1)+c_h3*sin(pi*3*Schrittfrequenz*t+Phi3)); % N
% Angaben zum Einmassenschwinger
m = 4858.5;
                                      % kg
k = 184632;
                                      % N/m
Omega = sqrt(k/m);
                                                         % rad/s
Zeta = 0.008;
                                           % -
c = 2*m*Omega*Zeta;
                                                            % Ns/m
% Schwingungsantwort mit Newmark Methode
% Berechnungsparameter
alpha = 0.5;
beta = 0.25;
% Ergebnisvektoren
s = zeros(1, length(t));
                                                                       % m
v = zeros(1,length(t));
                                                                       % m/s
a = zeros(1,length(t));
                                                                       % m/s^2
a(1) = (Kraft(1)-c*v(1)-k*s(1))/m;
                                                                                                     % m/s^2
% Berechnung
for i = 2:1:length(t)
           a_h = 1/beta*m+alpha/beta*c*dt+k*dt^2;
           b_h = (1/beta*m+a]pha/beta*c*dt)*s(i-1)+(1/beta*m+(a]pha/beta-1)*c*dt)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(i-b_a)*dt*v(
1)+((1/(2*beta)-1)*m+(alpha/(2*beta)-1)*c*dt)*dt^2*a(i-1)+Kraft(i)*dt^2;
           s(i) = a_h^{(-1)*b_h};
           v(i) = (alpha/(beta*dt))*(s(i)-s(i-1))-(alpha/beta-1)*v(i-1)-(alpha/(2*beta)-1)*dt*a(i-1);
           a(i) = (1/(beta*dt^2))*(s(i)-s(i-1))-1/(beta*dt)*v(i-1)-(1/(2*beta)-1)*a(i-1);
end
% Ergebnisse
s_max = max(s);
                                                 % m
v_{max} = max(v);
                                                 % m/s
a_max = max(a);
                                                 % m/s^2
% Graphische Darstellung der Verschiebung
plot(t,s)
xlabel('Zeit in [s]', 'FontSize',14)
xlim([0 120])
ylabel('Verschiebung in [m]', 'FontSize',14)
ylim([-0.1 0.1])
grid on
```

MATLAB Code 3: Vertikale Schwingungen mit viskosem Dämpfer

```
clear
clc
```

% Multiplikationsfaktor nach Matsumoto

```
Personendichte = 1.0; % Personen/m^2
Schrittgeschwindigkeit = 1.5;
                                % m/s
Laenge_Bruecke = 20.5;
                        % m
Breite_Bruecke = 2.5;
                       % m
Breite_effektiv = Breite_Bruecke-0.5;
                                        % m
T_0 = Laenge_Bruecke/Schrittgeschwindigkeit;
                                               % s
Lambda = Personendichte*Breite_effektiv*Schrittgeschwindigkeit; % Personen/s
m_Matsumoto = sqrt(Lambda*T_0);
                                % -
% Kraft einer Personengruppe
dt = 0.005; % s
Gesamtzeit = 20;
                   % s
t = 0:dt:Gesamtzeit; % s
Gewicht_PG = m_Matsumoto*800;
                                % N
delta_G1 = 0.4*Gewicht_PG;
                             % N
delta_G2 = 0.1*Gewicht_PG;
                             % N
delta_G3 = 0.1*Gewicht_PG;
                             % N
Schrittfrequenz = 2;
                       % Hz
Phi2 = pi/2;
              % rad
Phi3 = pi/2;
              % rad
Kraft = zeros(2,length(t));
                              % N
Kraft_1 = Gewicht_PG + delta_G1*sin(2*pi*Schrittfrequenz*t) +
delta_G2*sin(4*pi*Schrittfrequenz*t-Phi2) + delta_G3*sin(6*pi*Schrittfrequenz*t-Phi3);
                                                                                         % N
Kraft(1,:) = Kraft_1; % N
% Optimierung nach Den Hartog
My = 0.05; \% - (Gewaehlt)
Kappa_opt = 1/(1+My);
                       % -
Zeta_opt = sqrt(3*My/(8*(1+My)^3));
                                      % -
% Angaben zum Zweimassenschwinger
% Hauptsystem
m_H = 4858.5;
                % kg
k_H = 774329;
                % N/m
Zeta_H = 0.008; % -
Omega_H = sqrt(k_H/m_H);
                          % rad/s
c_H = 2*m_H*Omega_H*Zeta_H; % Ns/m
% Daempfer
m_D = My*m_H;
               % kg
Omega_D = Kappa_opt*Omega_H;
                               % rad/s
k_D = m_D * Omega_D^2;
                      % N/m
                    % -
Zeta_D = Zeta_opt;
c_D = 2*m_D*Omega_H*Zeta_D;
                              % Ns/m
% Matrizen des Zweimassenschwingers
M = [m_H 0; 0 m_D]; % kg
C = [C_H+C_D - C_D ; -C_D C_D];
                                 % Ns/m
K = [k_H+k_D - k_D ; -k_D k_D];
                                 % N/m
% Schwingungsantwort mit Newmark Methode
```

```
% Berechnungsparameter
alpha = 0.5;
beta = 0.25;
% Ergebnisvektoren
s = zeros(2,length(t));
                          % m
v = zeros(2,length(t));
                          % m/s
a = zeros(2, length(t));
                          % m/s^2
a(:,1) = (Kraft(:,1)-C*v(:,1)-K*s(:,1))./[m_H ; m_D];
                                                        % m/s^2
% Berechnung
for i = 2:1:length(t)
    a_h = 1/beta*M+alpha/beta*C*dt+K*dt^2;
    b_h = (1/beta*M+a]pha/beta*C*dt)*s(:,i-1)+(1/beta*M+(a]pha/beta-1)*C*dt)*dt*v(:,i-
1)+((1/(2*beta)-1)*M+(alpha/(2*beta)-1)*C*dt)*dt^2*a(:,i-1)+Kraft(:,i)*dt^2;
    s(:,i) = a_h^{(-1)*b_h};
    v(:,i) = (alpha/(beta*dt))*(s(:,i)-s(:,i-1))-(alpha/beta-1)*v(:,i-1)-(alpha/(2*beta)-
1)*dt*a(:,i-1);
    a(:,i) = (1/(beta*dt^2))*(s(:,i)-s(:,i-1))-1/(beta*dt)*v(:,i-1)-(1/(2*beta)-1)*a(:,i-1);
end
% Verschiebungen
s_Hauptsystem = s(1,:);
                          % m
max_s_H = max(s_Hauptsystem);
                                % m
s_Daempfer = s(2,:);
                       % m
max_s_D = max(s_Daempfer);
                             % m
s_Relativ = s_Daempfer-s_Hauptsystem;
                                        % m
max_s_Relativ = max(s_Relativ);
                                  % m
% Geschwindigkeiten
v_Hauptsystem = v(1,:);
                          % m/s
max_v_H = max(v_Hauptsystem);
                                % m/s
v_Daempfer = v(2,:);
                       % m/s
\max_v_D = \max(v_Daempfer);
                             % m/s
% Beschleunigungen
a_Hauptsystem = a(1,:);
                          % m/s^2
max_a_H = max(a_Hauptsystem);
                                % m/s^2
a_Daempfer = a(2,:);
                       % m/s^2
max_a_D = max(a_Daempfer);
                             % m/s^2
% Graphische Darstellung der Verschiebung
plot(t,s_Hauptsystem)
xlabel('Zeit in [s]','FontSize',14)
xlim([0 20])
ylabel('Verschiebung in [m]', 'FontSize',14)
ylim([-0.01 0.025])
grid on
```

MATLAB Code 4: Vertikale Schwingungen mit Flüssigkeitsdämpfer

```
clear
clc
% Multiplikationsfaktor nach Matsumoto
Personendichte = 1.0;
                        % Personen/m^2
Schrittgeschwindigkeit = 1.5;
                                % m/s
Laenge_Bruecke = 20.5;
                         % m
Breite_Bruecke = 2.5;
                        % m
Breite_effektiv = Breite_Bruecke-0.5;
                                        % m
T_0 = Laenge_Bruecke/Schrittgeschwindigkeit;
                                               % s
Lambda = Personendichte*Breite_effektiv*Schrittgeschwindigkeit;
                                                                 % Personen/s
m_Matsumoto = sqrt(Lambda*T_0);
                                  % -
% Kraft einer Personengruppe
dt = 0.005;
              % s
Gesamtzeit = 20;
                   % s
t = 0:dt:Gesamtzeit;
                      % s
Gewicht_PG = m_Matsumoto*800;
                                % N
delta_G1 = 0.4*Gewicht_PG;
                             % N
delta_G2 = 0.1*Gewicht_PG;
                             % N
delta_G3 = 0.1*Gewicht_PG;
                             % N
Schrittfrequenz = 2;
                       % Hz
Phi2 = pi/2;
               % rad
Phi3 = pi/2;
               % rad
Kraft = zeros(2,length(t));
                              % N
Kraft_1 = Gewicht_PG + delta_G1*sin(2*pi*Schrittfrequenz*t) +
delta_G2*sin(4*pi*Schrittfrequenz*t-Phi2) + delta_G3*sin(6*pi*Schrittfrequenz*t-Phi3);
                                                                                         % N
Kraft(1,:) = Kraft_1;
                        % N
% Iterative Einstellung des Fluessigkeitsdaempfers
delta_z0 = 1.72;
                   % m (Gewaehlt)
H = 1.72;
          % m (Gewaehlt)
H_L = 1.34;
             % m (Gewaehlt)
Alpha_grad = 60;
                   % Grad (Gewaehlt)
Alpha = 2*pi/360*Alpha_grad;
                               % rad
g = 9.81;
          % Fallbeschleunigung in m/s^2
Gamma = 1.405;
                % Adiabatenkoeffizient in -
             % Dichte Wasser in kg/m^3
Rho = 1000;
P_0 = 100000;
                % Luftdruck in N/m^2
Omega_0 = sqrt(2*q*sin(Alpha)/(2*H)*(1+Gamma/(2*Rho*q)*(P_0/(H_L*sin(Alpha)-
delta_z0/2)+(P_0+Rho*g*delta_z0)/(H_L*sin(Alpha)+delta_z0/2))));
                                                                   % rad/s
% Modifizierte Optimierung nach Den Hartog
My = 0.05;
             % - (Gewaehlt)
Kappa = delta_z0/(2*H);
                        % Geometriefaktor in -
My_Stern = My*Kappa*(1+My)/(1+My*(2-Kappa-Kappa^2));
                                                       % -
f_opt_Stern = 1/(1+My_Stern);
                               % -
f_opt = f_opt_Stern/(sqrt(1+My*(2-Kappa-Kappa^2)));
                                                      % -
Zeta_opt = sqrt(3*My_Stern/(8*(1+My_Stern)^3));
                                                 % -
% Angaben zum Zweimassenschwinger
```

```
% Hauptsystem
m_H = 4858.5;
                                       % kg
k_H = 774329;
                                       % N/m
Zeta_H = 0.008;
                                          % -
Omega_H = sqrt(k_H/m_H);
                                                                 % rad/s
c_H = 2*m_H*Omega_H*Zeta_H;
                                                                     % Ns/m
% Daempfer
m_D = My*m_H*Kappa;
                                                     % Aktive Daempfermasse in kg
Omega_D = f_opt*Omega_H;
                                                                 % rad/s
k_D = m_D * Omega_D^2;
                                                      % N/m
Zeta_D = Zeta_opt;
                                                  % -
c_D = 2*m_D*Omega_H*Zeta_D;
                                                                         % Ns/m
% Matrizen des Zweimassenschwingers
M = [m_H 0 ; 0 m_D]; % kg
C = [C_H+C_D - C_D; -C_D c_D];
                                                                                 % Ns/m
K = [k_H+k_D - k_D ; -k_D k_D];
                                                                                 % N/m
% Schwingungsantwort mit Newmark Methode
% Berechnungsparameter
alpha = 0.5;
beta = 0.25;
% Ergebnisvektoren
s = zeros(2, length(t));
                                                               % m
v = zeros(2,length(t));
                                                               % m/s
a = zeros(2,length(t));
                                                               % m/s^2
a(:,1) = (Kraft(:,1)-C*v(:,1)-K*s(:,1))./[m_H ; m_D];
                                                                                                                                         % m/s^2
% Berechnung
for i = 2:1:length(t)
          a_h = 1/beta*M+alpha/beta*C*dt+K*dt^2;
          b_h = (1/beta*M+a]pha/beta*C*dt)*s(:,i-1)+(1/beta*M+(a]pha/beta-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M
1)+((1/(2*beta)-1)*M+(alpha/(2*beta)-1)*C*dt)*dt^2*a(:,i-1)+Kraft(:,i)*dt^2;
          s(:,i) = a_h^{(-1)*b_h};
          v(:,i) = (alpha/(beta*dt))*(s(:,i)-s(:,i-1))-(alpha/beta-1)*v(:,i-1)-(alpha/(2*beta)-
1)*dt*a(:,i-1);
          a(:,i) = (1/(beta*dt^2))*(s(:,i)-s(:,i-1))-1/(beta*dt)*v(:,i-1)-(1/(2*beta)-1)*a(:,i-1);
end
% Verschiebungen
s_Hauptsystem = s(1,:);
                                                               % m
max_s_H = max(s_Hauptsystem);
                                                                              % m
s_Daempfer = s(2,:);
                                                       % m
max_s_D = max(s_Daempfer);
                                                                      % m
% Geschwindigkeiten
v_Hauptsystem = v(1,:);
                                                               % m/s
max_v_H = max(v_Hauptsystem);
                                                                              % m/s
```

grid on

```
v_Daempfer = v(2,:);
                       % m/s
max_v_D = max(v_Daempfer);
                             % m/s
% Beschleunigungen
a_Hauptsystem = a(1,:);
                          % m/s^2
max_a_H = max(a_Hauptsystem);
                                % m/s^2
a_Daempfer = a(2,:);
                      % m/s^2
max_a_D = max(a_Daempfer);
                             % m/s^2
% Graphische Darstellung der Verschiebung
plot(t,s_Hauptsystem)
xlabel('Zeit in [s]', 'FontSize',14)
xlim([0 20])
ylabel('Verschiebung in [m]', 'FontSize',14)
ylim([-0.02 0.03])
```

MATLAB Code 5: Horizontale Schwingungen mit Pendeldämpfer

```
clear
clc
% Multiplikationsfaktor nach Matsumoto
Personendichte = 1.0;
                      % Personen/m^2
Schrittgeschwindigkeit = 1.5;
                                % m/s
Laenge_Bruecke = 20.5;
                        % m
Breite_Bruecke = 2.5;
                       % m
Breite_effektiv = Breite_Bruecke-0.5;
                                        % m
T_0 = Laenge_Bruecke/Schrittgeschwindigkeit;
                                               % s
Lambda = Personendichte*Breite_effektiv*Schrittgeschwindigkeit;
                                                                % Personen/s
m_Matsumoto = sqrt(Lambda*T_0);
                                 % -
% Kraft einer Personengruppe
dt = 0.005;
             % s
Gesamtzeit = 20;
                  % s
t = 0:dt:Gesamtzeit;
                      % s
Gewicht_PG = m_Matsumoto*800;
                                % N
c_h1 = 0.1; % -
c_h3 = 0.1;
              % -
Schrittfrequenz = 2;
                       % Hz
Phi1 = -pi/4; % rad
Phi3 = pi/8;
              % rad
Kraft = zeros(2,length(t));
                              % N
Kraft_1 =
Gewicht_PG*(c_h1*sin(pi*1*Schrittfrequenz*t+Phi1)+c_h3*sin(pi*3*Schrittfrequenz*t+Phi3)); % N
Kraft(1,:) = Kraft_1;
                       % N
% Optimierung nach Den Hartog
My = 0.05; % - (Gewaehlt)
Kappa_opt = 1/(1+My);
                       % -
Zeta_opt = sqrt(3*My/(8*(1+My)^3));
                                     % -
```

```
% Angaben zum Zweimassenschwinger
% Hauptsystem
m_H = 4858.5;
                                      % kg
k_H = 184632;
                                      % N/m
Zeta_H = 0.008;
                                          % -
Omega_H = sqrt(k_H/m_H);
                                                                 % rad/s
c_H = 2*m_H*Omega_H*Zeta_H;
                                                                      % Ns/m
% Daempfer
m_D = My*m_H;
                                      % kg
Omega_D = Kappa_opt*Omega_H;
                                                                           % rad/s
k_D = m_D * Omega_D^2;
                                                       % N/m
Pendellaenge = 9.81/Omega_D^2;
                                                                               % m
Zeta_D = Zeta_opt;
                                                  % -
c_D = 2*m_D*Omega_H*Zeta_D;
                                                                        % Ns/m
% Matrizen des Zweimassenschwingers
M = [m_H 0 ; 0 m_D];
                                                     % kg
C = [C_H+C_D - C_D; -C_D C_D];
                                                                               % Ns/m
K = [k_H+k_D - k_D ; -k_D k_D];
                                                                                % N/m
% Schwingungsantwort mit Newmark Methode
% Berechnungsparameter
alpha = 0.5;
beta = 0.25;
% Ergebnisvektoren
s = zeros(2,length(t));
                                                              % m
v = zeros(2,length(t));
                                                              % m/s
a = zeros(2,length(t));
                                                              % m/s^2
a(:,1) = (Kraft(:,1)-C*v(:,1)-K*s(:,1))./[m_H ; m_D];
                                                                                                                                       % m/s^2
% Berechnung
for i = 2:1:length(t)
          a_h = 1/beta*M+alpha/beta*C*dt+K*dt^2;
          b_h = (1/beta*M+a]pha/beta*C*dt)*s(:,i-1)+(1/beta*M+(a]pha/beta-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta+1)*(1/beta*M+a]pha/beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M+a[beta*M+a]pha/beta*M
1)+((1/(2*beta)-1)*M+(alpha/(2*beta)-1)*C*dt)*dt^2*a(:,i-1)+Kraft(:,i)*dt^2;
          s(:,i) = a_h^{(-1)*b_h};
          v(:,i) = (alpha/(beta*dt))*(s(:,i)-s(:,i-1))-(alpha/beta-1)*v(:,i-1)-(alpha/(2*beta)-
1)*dt*a(:,i-1);
          a(:,i) = (1/(beta*dt^2))*(s(:,i)-s(:,i-1))-1/(beta*dt)*v(:,i-1)-(1/(2*beta)-1)*a(:,i-1);
end
% Verschiebungen
s_Hauptsystem = s(1,:);
                                                              % m
max_s_H = max(s_Hauptsystem);
                                                                             % m
s_Daempfer = s(2,:);
                                                       % m
max_s_D = max(s_Daempfer);
                                                                      % m
s_Relativ = s_Daempfer-s_Hauptsystem;
                                                                                                % m
max_s_Relativ = max(s_Relativ);
                                                                                  % m
```

```
% Geschwindigkeiten
v_Hauptsystem = v(1,:); \% m/s
max_v_H = max(v_Hauptsystem);
                                % m/s
v_Daempfer = v(2,:);
                      % m/s
max_v_D = max(v_Daempfer);
                            % m/s
v_Relativ = v_Daempfer-v_Hauptsystem;
                                        % m/s
max_v_Relativ = max(v_Relativ);
                                  % m/s
% Beschleunigungen
a_Hauptsystem = a(1,:); % m/s^2
max_a_H = max(a_Hauptsystem);
                                % m/s^2
a_Daempfer = a(2,:);
                      % m/s^2
max_a_D = max(a_Daempfer);
                             % m/s^2
% Dimensionierung Reibplatten (= RP)
W_d = pi*c_D*max_v_Relativ*max_s_Relativ;
                                            % Daempfungsarbeit in Nm
Anzahl_RP = 4;
               % Gewaehlt
Anzahl_Rechtecke = 2*Anzahl_RP*(1+Anzahl_RP);
                                                % -
Abstufung_RP = max_s_Relativ/Anzahl_RP;
                                          % m
                          % Gewaehlt in -
Reibkoeffizient = 0.25;
G_RP_N = W_d/(Anzahl_Rechtecke*Reibkoeffizient*Abstufung_RP);
                                                                 % N
G_{RP}_{kg} = G_{RP}_{N/9.81};
                         % Masse Einzelplatte in kg
% Graphische Darstellung der Verschiebung
plot(t,s_Hauptsystem)
xlabel('Zeit in [s]', 'FontSize',14)
xlim([0 20])
ylabel('Verschiebung in [m]', 'FontSize',14)
ylim([-0.02 0.02])
grid on
```

MATLAB Code 6: Horizontale Schwingungen mit Flüssigkeitsdämpfer

```
clear
clc
% Multiplikationsfaktor nach Matsumoto
Personendichte = 1.0; % Personen/m^2
Schrittgeschwindigkeit = 1.5;
                                % m/s
Laenge_Bruecke = 20.5;
                         % m
Breite_Bruecke = 2.5;
                        % m
Breite_effektiv = Breite_Bruecke-0.5;
                                        % m
T_0 = Laenge_Bruecke/Schrittgeschwindigkeit;
                                               % s
Lambda = Personendichte*Breite_effektiv*Schrittgeschwindigkeit;
                                                                  % Personen/s
m_Matsumoto = sqrt(Lambda*T_0);
                                 % -
% Kraft einer Personengruppe
dt = 0.005;
              % s
Gesamtzeit = 20;
                   % s
t = 0:dt:Gesamtzeit;
                       % s
Gewicht_PG = m_Matsumoto*800;
                                % N
c_h1 = 0.1; % -
```

```
c_h3 = 0.1;
             % -
Schrittfrequenz = 2;
                       % Hz
Phi1 = -pi/4;
              % rad
Phi3 = pi/8;
               % rad
Kraft = zeros(2,length(t));
                              % N
Kraft_1 =
Gewicht_PG*(c_h1*sin(pi*1*Schrittfrequenz*t+Phi1)+c_h3*sin(pi*3*Schrittfrequenz*t+Phi3)); % N
Kraft(1,:) = Kraft_1;
                        % N
% Iterative Einstellung des Fluessigkeitsdaempfers
H_L = 1.5;
             % m (Gewaehlt)
H = 1.5;
           % m (Gewaehlt)
B = 1.95;
           % m (Gewaehlt)
L_eff = 2*H+B;
                % m
Alpha_grad = 45;
                   % Grad (Gewaehlt)
Alpha = 2*pi/360*Alpha_grad;
                               % rad
g = 9.81; % Fallbeschleunigung in m/s^2
n_{Luft} = 1.2;
                % Polytropenexponent in -
Rho = 1000;
             % Dichte Wasser in kg/m^3
P_0 = 100000;
                % Luftdruck in N/m^2
Omega_0 = sqrt(2*g*sin(Alpha)/L_eff+2*n_Luft*P_0/(Rho*L_eff*H_L));
                                                                     % rad/s
% Modifizierte Optimierung nach Den Hartog
My = 0.05;
            % - (Gewaehlt)
Kappa = (2*H*cos(Alpha)+B)/L_eff;
                                    % Geometriefaktor in -
My_Stern = Kappa^2*My/(1+My*(1-Kappa^2));
                                            % -
f_opt_Stern = 1/(1+My_Stern);
                               % -
f_opt = f_opt_Stern/(sqrt(1+My*(1-Kappa^2)));
                                                % -
Zeta_opt = sqrt(3*My_Stern/(8*(1+My_Stern)^3));
                                                  % -
% Angaben zum Zweimassenschwinger
% Hauptsystem
m_H = 4858.5;
                % kg
k_H = 184632;
                % N/m
Zeta_H = 0.008;
                 % -
Omega_H = sqrt(k_H/m_H);
                           % rad/s
c_H = 2*m_H*Omega_H*Zeta_H;
                             % Ns/m
% Daempfer
m_D = My*m_H*Kappa;
                     % Aktive Daempfermasse in kg
Omega_D = f_opt*Omega_H;
                           % rad/s
k_D = m_D * Omega_D^2;
                       % N/m
Zeta_D = Zeta_opt;
                     % -
c_D = 2*m_D*Omega_H*Zeta_D;
                              % Ns/m
% Matrizen des Zweimassenschwingers
M = [m_H 0 ; 0 m_D];
                       % ka
C = [C_H+C_D - C_D ; -C_D C_D];
                                 % Ns/m
K = [k_H+k_D - k_D ; -k_D k_D];
                                 % N/m
% Schwingungsantwort mit Newmark Methode
```

```
% Berechnungsparameter
alpha = 0.5;
beta = 0.25;
% Ergebnisvektoren
                                                                 % m
s = zeros(2,length(t));
v = zeros(2,length(t));
                                                                  % m/s
a = zeros(2, length(t));
                                                                  % m/s^2
a(:,1) = (Kraft(:,1)-C*v(:,1)-K*s(:,1))./[m_H ; m_D];
                                                                                                                                              % m/s^2
% Berechnung
for i = 2:1:length(t)
          a_h = 1/beta*M+alpha/beta*C*dt+K*dt^2;
          b_h = (1/beta*M+a]pha/beta*C*dt)*s(:,i-1)+(1/beta*M+(a]pha/beta-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-1)*C*dt)*dt*v(:,i-
1)+((1/(2*beta)-1)*M+(alpha/(2*beta)-1)*C*dt)*dt^2*a(:,i-1)+Kraft(:,i)*dt^2;
          s(:,i) = a_h^{(-1)*b_h};
          v(:,i) = (alpha/(beta*dt))*(s(:,i)-s(:,i-1))-(alpha/beta-1)*v(:,i-1)-(alpha/(2*beta)-
1)*dt*a(:,i-1);
          a(:,i) = (1/(beta*dt^2))*(s(:,i)-s(:,i-1))-1/(beta*dt)*v(:,i-1)-(1/(2*beta)-1)*a(:,i-1);
end
% Verschiebungen
s_Hauptsystem = s(1,:);
                                                                 % m
max_s_H = max(s_Hauptsystem);
                                                                                 % m
s_Daempfer = s(2,:);
                                                          % m
max_s_D = max(s_Daempfer);
                                                                         % m
% Geschwindigkeiten
v_Hauptsystem = v(1,:); % m/s
max_v_H = max(v_Hauptsystem);
                                                                                 % m/s
v_Daempfer = v(2,:);
                                                          % m/s
max_v_D = max(v_Daempfer);
                                                                         % m/s
% Beschleunigungen
a_Hauptsystem = a(1,:);
                                                                  % m/s^2
max_a_H = max(a_Hauptsystem);
                                                                                 % m/s^2
a_Daempfer = a(2,:);
                                                          % m/s^2
max_a_D = max(a_Daempfer);
                                                                         % m/s^2
% Graphische Darstellung der Verschiebung
plot(t,s_Hauptsystem)
xlabel('Zeit in [s]','FontSize',14)
xlim([0 20])
ylabel('Verschiebung in [m]', 'FontSize',14)
ylim([-0.02 0.02])
grid on
```