



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

DIPLOMARBEIT

# Berechnung von Ruinwahrscheinlichkeiten mithilfe der Fourier-Cosinus Methode

ausgeführt am

Institut für  
Stochastik und Wirtschaftsmathematik  
TU Wien

unter der Anleitung von

**Ao.Univ.Prof. Dr. Peter Grandits**

durch

**Elisabeth Bräuer BSc**

Matrikelnummer: 11701244

Wien, am 9. März 2023

# Eidesstattliche Erklärung und Einverständniserklärung zur Plagiatsprüfung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Ich nehme zur Kenntnis, dass die vorgelegte Arbeit mit geeigneten und dem derzeitigen Stand der Technik entsprechenden Mitteln (Plagiat-Erkennungssoftware) elektronisch-technisch überprüft wird. Dies stellt einerseits sicher, dass bei der Erstellung der vorgelegten Arbeit die hohen Qualitätsvorgaben im Rahmen der ausgegebenen der an der TU Wien geltenden Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis - „Code of Conduct“ (Mitteilungsblatt 2007, 26. Stück, Nr. 257 idgF.) an der TU Wien eingehalten wurden. Zum anderen werden durch einen Abgleich mit anderen studentischen Abschlussarbeiten Verletzungen meines persönlichen Urheberrechts vermieden.

Wien, am 9. März 2023

---

Elisabeth Bräuer

# Abstract

The probability of ruin can be represented in theory as infinite sums of convolutions. However, calculating the convolutions of random variables is generally very difficult and is associated with high complexity. This means that in most cases it is not possible to calculate the probability of ruin exactly. Therefore, approximation methods are often used to obtain approximations for the probability of theoretical ruin.

The goal of this work is to present and test the Fourier-Cosine method for probability of ruin, developed by Chau, Yam and Yang. This method has the advantage that the probability of ruin can be approximated with less effort and that a margin of error can be given for this approximation. Under certain conditions, this margin of error can even be improved.

In the first chapter of this diploma thesis, the most important mathematical basics of ruin theory are summarized. In the second chapter, Lévy processes are defined and some properties of these processes are examined in more detail. The third chapter deals with the Fourier transform, which is needed for the Fourier-Cosine method described in the fourth chapter. The error estimate of the approximation and the improvement of this margin of error are carried out in the fifth and sixth chapters. In chapter 7, the Fourier-Cosine method is extended to also approximate the case of a statistical distribution function. Chapter 8 introduces a method to ensure monotonicity in the approximation function depending on the initial capital. Finally, in chapter 9, the Fourier-Cosine method is tested using a Cramér-Lundberg process with exponentially distributed individual losses, a risk process with a Poisson-distributed loss process and a Cramér-Lundberg process with Gamma distributed individual losses.

# Zusammenfassung

Ruinwahrscheinlichkeiten lassen sich in der Theorie als unendliche Summen von Faltungen darstellen. Die Berechnung der Faltungen von Zufallsvariablen gestaltet sich im Allgemeinen jedoch als sehr schwierig und ist mit hoher Komplexität verbunden. Daraus folgt, dass es in den meisten Fällen nicht möglich ist, Ruinwahrscheinlichkeiten exakt zu berechnen. Daher wird oft auf Approximationsverfahren zurückgegriffen, um an Näherungen für die Wahrscheinlichkeit des theoretischen Ruins zu gelangen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es die Fourier-Cosinus Methode für Ruinwahrscheinlichkeiten, die von Chau, Yam und Yang entwickelt wurde, vorzustellen und zu testen. Diese Methode hat den Vorteil, dass die Ruinwahrscheinlichkeiten mit geringem Aufwand angenähert werden können und für diese Approximation eine Fehlerschranke angegeben werden kann. Diese kann unter bestimmten Voraussetzungen sogar verbessert werden.

Im ersten Kapitel dieser Diplomarbeit werden die wichtigsten mathematischen Grundlagen zur Ruintheorie zusammengefasst. Im zweiten Kapitel werden Lévy-Prozesse definiert und einige Eigenschaften dieser Prozesse näher beleuchtet. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Fourier-Transformation, die für die Fourier-Cosinus Methode, die dann im vierten Kapitel beschrieben wird, benötigt wird. Die Fehlerabschätzung der Approximation und die Verbesserung dieser Fehlerschranke erfolgt im fünften und sechsten Kapitel. Im Kapitel 7 wird die Fourier-Cosinus Methode erweitert, um auch im Falle einer statistischen Verteilungsfunktion zu einer Approximation zu gelangen. Kapitel 8 stellt eine Methode vor, um für Monotonie in der Approximationfunktion abhängig vom Anfangskapital zu sorgen. Abschließend wird im Kapitel 9 die Fourier-Cosinus Methode anhand eines Cramér-Lundberg Prozesses mit exponentialverteilten Einzelschäden, eines Risikoprozesses mit einem poissonverteilten Verlustprozess und eines Cramér-Lundberg Prozesses mit Gamma-verteilten Einzelschäden getestet.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Lévy-Prozesse</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Fourier-Transformation</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Fourier-Cosinus Methode für Ruinwahrscheinlichkeiten</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Fehlerabschätzung</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Verbesserung der Fehlerabschätzung</b>	<b>19</b>
<b>7</b>	<b>Alternativer Vermögensprozess</b>	<b>23</b>
<b>8</b>	<b>Rearrangement inequality</b>	<b>27</b>
<b>9</b>	<b>Anwendung der Fourier-Cosinus Methode anhand von ausgewählten Beispielen</b>	<b>33</b>
9.1	Cramér-Lundberg Prozess mit exponentialverteilten Einzelschäden	33
9.1.1	Martingalbeweis der Ruinwahrscheinlichkeit eines Cramér-Lundberg Prozesses mit exponentialverteilten Einzelschäden . . . . .	39
9.1.2	Rearrangement . . . . .	41
9.2	Lévy-Risikoprozess mit poissonverteilterm Verlustprozess . . . . .	41
9.3	Cramér-Lundberg Prozess mit Gamma-verteilten Einzelschäden . . . . .	43
<b>10</b>	<b>Conclusio</b>	<b>45</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Für ein Versicherungsunternehmen ist es von hoher Priorität, finanziell gut aufgestellt zu sein, um den Verpflichtungen aus den laufenden Versicherungsverträgen dauerhaft nachkommen zu können. Sollte dies nicht mehr der Fall sein, droht die Insolvenz. Daher ist es wichtig zu wissen, wie wahrscheinlich es zum finanziellen Ruin kommen wird. Diese Wahrscheinlichkeiten werden mathematisch durch Ruinwahrscheinlichkeiten modelliert.

Man stelle sich das Vermögen eines Versicherungsunternehmens als den Inhalt eines finanziellen Behälters vor. Der Pegel des Behälters wird durch deterministische Zuflüsse, die die Prämienzahlungen darstellen und stochastische Abflüsse, die die Schadenszahlungen modellieren, beeinflusst. Fallen die Zahlungen der Versicherungsnehmer aus oder tritt ein außergewöhnlich hoher Schaden ein, so kann es vorkommen, dass der Pegel des finanziellen Behälters unter null fällt. Dieses Phänomen nennt man Ruin.

Für die formale Definition des Ruins benötigt man zuerst den Vermögensprozess eines Versicherungsunternehmens, auch Risikoprozess genannt, der das Vermögen des Versicherungsunternehmens modelliert.

Der klassische Risikoprozess (auch Cramér-Lundberg-Risikoprozess) setzt sich aus zwei Dingen zusammen. Zuerst betrachte man die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$ , die die Einzelschadenshöhen nach dem Kollektivmodell modellieren.[1] Im Kollektivmodell sind die Einzelschadenshöhen unabhängige, identisch verteilte, nicht negative Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion  $F_X$ . [2] Der Zählprozess  $N_t$  stellt die Anzahl der Schäden, die im Zeitintervall  $[0, t]$  eingetreten sind, dar und wird als unabhängig von den Einzelschadenshöhen angenommen. Ein Zählprozess ist dabei folgendermaßen definiert:

**Definition 1.1** (Zählprozess). *Ein Zählprozess mit Zeitraum  $T = \mathbb{R}_+$  ist ein  $\mathbb{N}$ -wertiger Prozess  $(N_t)_{t \geq 0}$ , welcher außerdem die folgende Eigenschaft erfüllt:*

$$N_s \leq N_t \text{ fast sicher } \forall 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Der Prozess  $N_t$  wird im Cramér-Lundberg Modell üblicherweise als homogen Poisson-verteilt mit Intensität  $\lambda$  angenommen.

**Definition 1.2.** Ein homogener Poissonprozess mit Intensität  $\lambda$  ist ein Zählprozess  $(N_t)_{t \geq 0}$  mit

1.  $N_0 = 0$  fast sicher,
2.  $N_t$  hat unabhängige Inkremente  $\forall t \geq 0$ ,
3.  $N_t - N_s \sim \text{Poi}(\lambda(t - s))$  für  $0 \leq s \leq t$ ,
4. hat fast sicher cadlag Pfade (rechtsstetig und Limes von links existiert).

Nun wird der Risikoprozess folgendermaßen definiert:

**Definition 1.3** (Risikoprozess). Ein Prozess wird Risikoprozess genannt, falls

$$Y_t = r_0 + ct - \sum_{i=0}^{N_t} X_i \quad \text{für } t \geq 0, c > 0, r_0 \geq 0 \text{ und } X_0 = 0.$$

Die Prämienintensität betitelt dabei  $c$  und  $r_0$  das Anfangsvermögen des Versicherungsunternehmens. Daher gilt immer  $Y_0 = r_0$ .

Die Summe  $\sum_{i=0}^{N_t} X_i$  ist also eine Zufallssumme, da sowohl die Summanden als auch die Anzahl der Summanden stochastisch sind. Diese Summe wird auch Verlustprozess genannt. Die Verteilung des Verlustprozesses ist die zusammengesetzte Poisson-Verteilung.

**Definition 1.4** (Zusammengesetzter Poissonprozess). Sei  $(N_t)_{t \geq 0}$  ein homogener poissonverteilter Zählprozess und seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die unabhängig von  $(N_t)_{t \geq 0}$  sind. Dann ist

$$S_t := \sum_{i=0}^{N_t} X_i \text{ für alle } t \geq 0, \text{ wobei } X_0 = 0,$$

ein zusammengesetzter Poissonprozess.

Es ist möglich Ruinwahrscheinlichkeiten im unendlichen Zeithorizont, aber auch im endlichen Zeithorizont zu betrachten.

**Definition 1.5** (Ruinwahrscheinlichkeit im unendlichen Zeithorizont). Unter der Ruinwahrscheinlichkeit im unendlichen Zeithorizont versteht man

$$\psi(r_0) := P\left[\inf_{t \geq 0} Y_t < 0\right].$$

Die Funktion  $\psi$  ist abhängig vom Anfangsvermögen des Versicherungsunternehmens.[1]

Der Begriff Ruin ist dabei theoretisch zu verstehen, da ein Versicherungsunternehmen auch bei einem negativen Vermögen nicht sofort bankrott geht.[2]

**Definition 1.6** (Ruinwahrscheinlichkeit im endlichen Zeithorizont). Die Ruinwahrscheinlichkeit im Intervall  $[0, t^*]$  für  $t^* > 0$  ist definiert als

$$\psi(r_0; t^*) := P\left[\inf_{0 \leq t \leq t^*} Y_t < 0\right].$$

Der Zeitpunkt, in dem der Ruin eintritt (Ruinzeitpunkt), ist folgendermaßen definiert:

$$T = \inf\{t \geq 0 \mid Y_t < 0\} \text{ für den Fall, dass Ruin eintritt, ansonsten } T = \infty.$$

Die Ruinwahrscheinlichkeiten lassen sich folglich auch abhängig vom Ruinzeitpunkt formulieren:

$$\psi(r_0; t^*) = P[T < t^*] \quad \forall t^* \in (0, \infty)$$

und

$$\psi(r_0) = \lim_{t^* \rightarrow \infty} P[T < t^*] = P[T < \infty]. [1]$$

Das Komplement der Ruinwahrscheinlichkeiten ( $R(r_0) = 1 - \psi(r_0)$ ,  $R(r_0; t^*) = 1 - \psi(r_0; t^*)$ ) heißt Überlebenswahrscheinlichkeit. Ein Kriterium, das den Fortbestand eines Versicherungsunternehmens sichert, ist die Nettoprofitbedingung:

$$c > \lambda E(X).$$

Im Cramér-Lundberg Modell wird angenommen, dass diese Ungleichung erfüllt wird. Die Nettoprofitbedingung sagt aus, dass die Prämieinnahmen höher sind als die erwarteten Schadenzahlungen. Man sehe sich den Erwartungswert des Risikoprozesses an:

$$E[Y_t] = E\left[r_0 + ct - \sum_{i=0}^{N_t} X_i\right] = r_0 + ct - E\left[\sum_{i=0}^{N_t} X_i\right] = r_0 + t(c - \lambda E[X]).$$

Mit dem Gesetz der großen Zahlen folgt nun, dass

$$\lim_{t^* \rightarrow \infty} \frac{Y_t}{t} = c - \lambda E[X] \text{ fast sicher.}$$

Falls also die Prämie nicht größer als  $\lambda E(X)$  gewählt wird, tritt fast sicher Ruin ein. Daher wird  $c$  üblicherweise folgendermaßen gewählt:

$$c = (1 + \Lambda)\lambda E[X].$$

Die Konstante  $\Lambda$  wird relativer Sicherheitszuschlag genannt.[2]



# Kapitel 2

## Lévy-Prozesse

Der Cramér-Lundberg-Prozess mit Poisson-verteilten Schadenzahlen modelliert das Vermögen eines Versicherungsunternehmens stark vereinfacht und ist aus diesem Grund nur begrenzt anwendbar. Daher wurden Risikoprozesse entwickelt, die die Realität besser abbilden. Eine wichtige Alternative sind Lévy-Risikoprozesse. Dabei wird der Verlustprozess durch einen Lévy-Prozess modelliert. Dieser ist folgendermaßen definiert:

**Definition 2.1** (Lévy-Prozess). *Ein stochastische Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  wird Lévy-Prozess genannt, wenn er die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

1.  $X_0 = 0$  fast sicher,
2. die Zuwächse sind unabhängig und stationär,
3.  $(X_t)_{t \geq 0}$  ist überall stochastisch stetig, das heißt  
$$\forall t \geq 0, \epsilon > 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} P[|X_{t+h} - X_t| > \epsilon] = 0.$$

Die Pfade eines Lévy-Prozesses werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit als fast sicher cadlag angenommen, da sich für jeden Lévy-Prozess eine Modifikation mit cadlagen Pfaden finden lässt. Eine Modifikation ist ein Prozess, der sich nur um eine Nullmenge von dem ursprünglichen Prozess unterscheidet. Der Beweis dafür wird hier nicht angeführt, er kann aber zum Beispiel in dem Buch „Stochastic Integration and Differential Equations“ von Philip Potter nachgelesen werden. Die Brownsche Bewegung oder auch der Poissonprozess sind Beispiele für Lévy-Prozesse.[3]

Der Lévy-Risikoprozess verwendet als Verlustprozess einen Lévy-Prozess. Es werden also im Vergleich zum Cramér-Lundberg-Modell zahlreiche weitere Verlustprozesse möglich. Man kann daher den Vermögensprozess modellieren, ohne genaue Annahmen über Schadenhöhe und Schadenanzahl zu treffen.[2]

Ein wichtiger Begriff im Zusammenhang mit Lévy-Prozessen ist die unbeschränkte Teilbarkeit.

**Definition 2.2** (Unbeschränkte Teilbarkeit). *Eine Zufallsvariable wird unbeschränkt teilbar genannt, wenn sie sich wie folgt als Summe identisch verteilter, unabhängiger Zufallsvariablen darstellen lässt:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists Y_1, Y_2, \dots, Y_n \text{ i.i.d., sodass } X \stackrel{d}{=} Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n.$$

**Theorem 2.1.** *Wenn  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein Lévy-Prozess ist, dann ist  $X_t$  unbeschränkt teilbar, für alle  $t > 0$ .*

*Beweis.* Seien also  $t > 0$  und  $n$  gegeben. Dann zerlege  $X_t$  folgendermaßen:

$$X_t = X_0 + X_{\frac{t}{n}} - X_{\frac{t}{n}} + X_{\frac{2t}{n}} - \dots - X_{\frac{(n-1)t}{n}} + X_t.$$

Die Zufallsvariable  $X_t$  lässt sich wie oben darstellen, da  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein Lévy-Prozess ist und daher  $X_0 = 0$ . Sei  $R_{1,n} = X_0 + X_{\frac{t}{n}}$ ,  $R_{2,n} = -X_{\frac{t}{n}} + X_{\frac{2t}{n}}$ ,  $\dots$ ,  $R_{n,n} = -X_{\frac{(n-1)t}{n}} + X_t$ . Es gilt also:

$$X_t = R_{1,n} + R_{2,n} + \dots + R_{n,n}.$$

Die Zufallsvariable  $X_t$  lässt sich also als Summe von  $n$  Zufallsvariablen darstellen. Es bleibt zu zeigen, dass diese unabhängig und identisch verteilt sind. Da  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein Lévy-Prozess ist und daher die Inkremente stationär und unabhängig sind, folgen die zu zeigenden Eigenschaften für die  $R_{1,n}, R_{2,n}, \dots, R_{n,n}$  direkt. [1]  $\square$

Lévy-Prozesse sind cadlag, daher sind die Unstetigkeitsstellen dieser Prozesse Sprungstellen. Um diese zu analysieren, wird der Sprung an der Stelle  $t$  folgendermaßen definiert:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-},$$

dabei ist  $X_{t-}$  der linksseitige Grenzwert an der Stelle  $t$ . Sei  $\Lambda$  eine Borelmenge, für die  $0 \notin \bar{\Lambda}$  gilt. Nun werden  $T_\Lambda^1, \dots, T_\Lambda^{n+1}$  für einen Lévy-Prozess  $X$  definiert als

$$\begin{aligned} T_\Lambda^1 &= \inf\{t > 0 : \Delta X_t \in \Lambda\}, \\ &\vdots \\ T_\Lambda^{n+1} &= \inf\{t > T_\Lambda^n : \Delta X_t \in \Lambda\}. \end{aligned}$$

Jedes  $T_\Lambda^n$  ist eine Stoppzeit, da  $\{T_\Lambda^n \geq t\} \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ . Weiters sei

$$N_t^\Lambda = \sum_{0 < s \leq t} 1_\Lambda(\Delta X_s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{T_\Lambda^n \leq t}.$$

**Theorem 2.2.** *Die Funktion*

$$\nu(\Lambda) = E \left[ N_1^\Lambda \right] = E \left[ \sum_{0 < s \leq 1} 1_\Lambda(\Delta X_s) \right]$$

*definiert ein sigmaendliches Maß und wird Lévy-Maß genannt.*

Dies folgt, da die Funktion  $\Lambda \mapsto N_1^\Lambda(\omega)$  ein Zählmaß ist.

Ein weiteres wichtiges Resultat im Zusammenhang mit Lévy-Prozessen ist die Lévy-Khintchin-Formel. Diese beschäftigt sich mit der Darstellung der charakteristischen Funktion von Lévy-Prozessen.

**Theorem 2.3** (Lévy-Khintchin-Formel). *Es sei  $X$  ein Lévy-Prozess mit Lévy-Maß  $\nu$ . Dann gilt*

$$E[e^{iuX_t}] = e^{-t\psi(u)},$$

wobei

$$\psi(u) = \frac{\sigma^2}{2}u^2 - i\beta u + \int_{\{|x| \geq 1\}} (1 - e^{iux}) \nu(dx) + \int_{\{|x| < 1\}} (1 - e^{iux} + iux) \nu(dx)$$

*Ist  $\nu$ ,  $\beta$  und  $\sigma^2$  gegeben, so ist der dazugehörige Lévy-Prozess eindeutig durch seine Verteilung gegeben.*

Dieser Satz kann auch für den mehrdimensionalen Fall formuliert werden:

**Theorem 2.4** (Mehrdimensionale Lévy-Khintchin-Formel). *Es sei  $X$  ein Lévy-Prozess in  $\mathbb{R}^n$  mit  $X_0 = 0$ . Dann existiert eine Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\mathbb{R}^n$ , sodass  $\mathcal{L}(X_t) = \mu_t$  ist. Die charakteristische Funktion von  $\mu_t$  ist  $e^{-t\psi(u)}$ , wobei*

$$\psi(u) = -i(u, a) + \frac{1}{2}(\Sigma u, u) - \int \{e^{i(u,x)} - 1 - i(u, \eta(x))\} \nu(dx).$$

*Hier bezeichnet  $(\cdot, \cdot)$  das kanonische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  ist eine Konstante und  $\Sigma$  ist eine positiv definite  $n \times n$  Matrix. Die stetige und beschränkte Funktion  $\eta$  erfüllt  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta(x) - x}{|x|^2} = 0$  und für das Lévy-Maß  $\nu$  gilt, dass*

1.  $\nu(\Lambda) < \infty$ , für eine beschränkte, null nicht enthaltende Borelmenge  $\Lambda$ ,
2.  $\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty$  und  $\nu(0) = 0$ . [4]

# Kapitel 3

## Fourier-Transformation

Fourier-Reihen werden bekanntlich dazu verwendet periodische, bezüglich der  $L^2$ -Norm integrierbarer Funktionen mithilfe einer Reihenentwicklung darzustellen. Diese Reihe konvergiert dann, abhängig von der Funktion, absolut, gleichmäßig, punktweise oder bezüglich der  $L^2$ -Norm gegen die Funktion. Durch Berechnung einiger Summanden der Reihe kann zum Beispiel ein Funktionswert angenähert werden.

Für die Definition der Fourier-Cosinus-Transformation benötigt man den Begriff einer geraden Funktion.

**Definition 3.1** (Gerade Funktion). *Eine Funktion  $f$ , deren Definitionsbereich bezüglich der Null symmetrisch ist, heißt gerade, falls für alle  $x$  aus dem Definitionsbereich gilt:*

$$f(x) = f(-x).$$

Gerade,  $2\pi$ -periodische Funktionen aus dem  $L^2$ -Raum können wie folgt in eine Reihenentwicklung verwandelt werden:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx),$$

wobei

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx.$$

Da aber  $f$  und  $\cos$  gerade Funktionen sind, gilt

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx.$$

Falls die Funktion zwar periodisch ist, jedoch nicht  $2\pi$ -periodisch, kann man die Variable  $x$  durch  $y = x\pi/T$  ersetzen, wobei  $T$  die Länge der Periode ist.

Durch diese Substitution erhält man eine  $2\pi$ -periodische Funktion und kann in die Formel für die Reihenentwicklung einsetzen.

Ein anderer Begriff im Zusammenhang mit Fourier-Transformation ist die Fourier-Transformierte.

**Definition 3.2** (Fourier-Transformierte). Für  $f$  aus  $L^1(\mathbb{R})$  sei die Fouriertransformierte  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp(-i\xi\zeta) \, d\lambda(\xi),$$

wobei  $\lambda$  das Lebesgue-Maß bezeichnet.

Die Normierungskonstante  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  wird je nach Quelle verschieden verwendet, sodass sie teilweise sogar weggelassen wird. Auch wird die Fourier-Transformierte öfters mit  $\exp(i\xi\zeta)$ , also ohne dem Minus im Exponentialterm, definiert. Diese kann leicht mit der Formel für die inverse Fourier-Transformation verwechselt werden:

**Definition 3.3** (inverse Fourier-Transformation). Für  $f$  aus  $L^1(\mathbb{R})$  und die Fouriertransformierte  $\hat{f}$  von  $f$  gilt:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \exp(i\xi\zeta) \, d\lambda(\xi). [5]$$

# Kapitel 4

## Fourier-Cosinus Methode für Ruinwahrscheinlichkeiten

Im Jahr 2008 stellten Fang und Oosterlee in dem Paper „A novel pricing method for European options based on Fourier-cosine series expansions“, das sich mit europäischen Optionen beschäftigt, die Fourier-Cosinus Methode vor. Durch die Verwendung dieser Methode hatte das dort betrachtete Problem nur mehr linearen Aufwand, das heißt eine Lösung wurde wesentlich schneller gefunden. Die Komplexität wurde mithilfe der Approximation durch eine Fourier-Cosinus Reihe deutlich gemindert. Fang und Oosterlee konnten außerdem eine Schranke für den Fehler der Approximation angeben.

Im Paper „Fourier-cosine method for ruin probabilities“ von Chau, Yam und Yang, das im Journal of Computational and Applied Mathematics erschienen ist, wird diese Methodik aufgegriffen um Ruinwahrscheinlichkeiten anzunähern. Der von Chau, Yam und Yang verwendete Vermögensprozess lautet wie folgt:

$$R_t = u + ct - L_t.$$

Dabei kennzeichnet  $u$  das oben als  $r_0$  definierte Anfangsvermögen,  $c$  ist wie oben definiert und  $L_t$  ist ein fast sicher monoton wachsender Lévy-Prozess (im Folgenden Subordinator genannt). Der Prozess  $L_t$  setzt sich also aus einem deterministischen Drift und einem Sprungprozess zusammen. Die charakteristische Funktion des Lévy-Prozesses  $L_t$  lässt sich mithilfe der Lévy-Khintchin-Formel darstellen:

$$\Phi_{L_t}(\omega) = E[e^{i\omega L_t}] = \exp \left( t * \left( i b \omega - \frac{1}{2} a \omega^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^{i\omega x} - 1 - i\omega x 1_{|x| < 1}) \nu(dx) \right) \right).$$

Das Maß  $\nu$  ist hier ein Lévy-Maß und erfüllt daher  $\int_0^\infty \min(|x|^2, 1) \nu(dx) < \infty$ . Da  $L_t$  fast sicher monoton wachsend ist und wegen der ersten Eigenschaft von Lévy-Prozessen gilt, dass  $L_1 \geq 0$ .

Aus dem Beweis der Lévy-Khintchin-Formel geht hervor, dass man  $a$ ,  $b$  und  $\nu$  von  $L_1$  so wählen kann, dass  $\nu((-\infty, 0)) = 0$ . Daher sieht die charakteristische Funktion von  $L_1$  folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}\Phi_{L_1}(\omega) &= \exp\left(ib\omega - \frac{1}{2}a\omega^2 + \int_0^\infty (e^{i\omega x} - 1 - i\omega x 1_{x \in (0,1)}) \nu(dx)\right) \\ &= \exp\left(ib\omega - \frac{1}{2}a\omega^2\right) * \exp\left(\int_0^\infty (e^{i\omega x} - 1 - i\omega x 1_{x \in (0,1)}) \nu(dx)\right).\end{aligned}$$

Da charakteristische Funktionen eindeutig sind und wegen (2.3) folgt aus der obigen Darstellung der charakteristischen Funktion von  $L_1$ , dass  $L_1 \stackrel{d}{=} Y_1 + Y_2$ , wobei  $Y_1$  und  $Y_2$  unabhängig und unbeschränkt teilbar sind. Weiters ist die Zufallsvariable  $Y_1$  normalverteilt mit Erwartungswert  $b$  und Varianz  $a$ , wie man an ihrer charakteristischen Funktion  $\exp(ib\omega - \frac{1}{2}a\omega^2)$  erkennen kann. Weil aber  $L_1 \geq 0$  ist, muss  $a = 0$  gelten. Die charakteristische Funktion des Subordinators  $L_t$  ist also

$$\Phi_{L_t}(\omega) = \exp\left(ib\omega t + t \int_0^\infty (e^{i\omega x} - 1 - i\omega x 1_{x \in (0,1)}) \nu(dx)\right) [6].$$

Weiters wird  $\mu_1 := \int_0^\infty x \nu(dx) < \infty$  angenommen. Daher ist das Integral  $\int_0^1 x \nu(dx) = c < \infty$ . Ist nun  $b' := b - c$ , so folgt

$$\Phi_{L_t}(\omega) = \exp\left(ib'\omega t + t \int_0^\infty (e^{i\omega x} - 1) \nu(dx)\right).$$

Außerdem wird  $b'$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit in weiterer Folge null gesetzt, da man, falls  $b'$  ungleich null ist,  $d' := d - b'$  setzt und  $L'_t$  als reinen Sprungprozess definiert. Es wird angenommen, dass  $c > \mu_1$  um fast sicheren Ruin zu vermeiden (vergleiche relativer Sicherheitszuschlag).[6]

Die Ruinwahrscheinlichkeit wird nun analog zu oben definiert:

$$\psi(u) := P\left[\inf_{t \geq 0} \{R_t < 0\} < \infty \mid R_0 = u\right].$$

Mithilfe der Erkenntnisse des Papers „Ruin probabilities and decompositions for general perturbed risk processes“ von Miljenko Huzak, Mihael Perman, Hrvoje Šikić und Zoran Vondraček lässt sich die Ruinwahrscheinlichkeit umschreiben in

$$\psi(u) = \rho - (1 - \rho) \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j \int_0^u h^{*j}(x) dx = \rho - (1 - \rho) \int_0^u f(x) dx. [7]$$

Dabei ist:

1.  $\rho := \mu_1/c$ ,

$$2. h(x) := \nu((x, \infty)) / \mu_1,$$

$$3. f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j h^{*j} \text{ (} h^{*j} \text{ ist dabei die } j\text{-te Faltung der Funktion } h(x)\text{)}.$$

Es gilt  $h(x) := \nu((x, \infty)) / \mu_1 \geq 0$  für alle  $x \in [0, \infty)$  und  $\int_0^{\infty} h(x) dx = 1$ . Weil  $\nu$  ein Maß ist, das die Verteilung der Anzahl der Sprünge des Lévy-Prozesses misst, ist  $\nu((x, \infty))$  sicher positiv. Auch  $\mu_1 = \int_0^{\infty} x \nu(dx) < \infty$  ist als Integral einer positiven Funktion positiv.

Formt man wie folgt um, sieht man obige Aussage

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} h(x) dx &= \int_0^{\infty} \nu((x, \infty)) / \mu_1 dx = \int_0^{\infty} \frac{\nu((x, \infty))}{\int_0^{\infty} x \nu(dx)} dx \\ &= \frac{\int_0^{\infty} \int_0^x 1 dy \nu(dx)}{\int_0^{\infty} x \nu(dx)} = \frac{\int_0^{\infty} x \nu(dx)}{\int_0^{\infty} x \nu(dx)} = 1. \end{aligned}$$

Der Ausdruck  $((1 - \rho) / \rho) f$  kann als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer zusammengesetzten Zufallsvariable verstanden werden. Diese Zufallsvariable ist eine Summe von Zufallsvariablen  $V := Y_1 + Y_2 + \dots + Y_M$ , wobei die  $Y_i$  für  $i \in 1, \dots, M$  unabhängig und identisch verteilt mit Verteilungsfunktion  $h(x)$  sind und  $P(M = k) = (1 - \rho) \rho^{k-1}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} P[V = k] &= P[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_M = k] = \sum_{j \geq 1} (1 - \rho) \rho^{j-1} P[Y_1 + Y_2 + \dots + Y_j = k] \\ &= \sum_{j \geq 1} (1 - \rho) \rho^{j-1} h^{*j}(k) = \frac{1 - \rho}{\rho} f(k). \end{aligned}$$

Wenn man also  $\int_0^{\infty} ((1 - \rho) / \rho) f(x) dx$  betrachtet, so ist dieser Ausdruck als Integral über eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion 1. Man darf damit annehmen, dass sowohl  $((1 - \rho) / \rho) f$  als auch  $f$   $L^1(\mathbb{R})$  Funktionen sind. Weiters gilt, da  $\lim_{x \rightarrow \infty} \nu((x, \infty)) / \mu_1 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \rho^j h^{*j}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \rho^j \lim_{x \rightarrow \infty} h^{*j}(x) = 0.$$

Der nächste Schritt ist nun die Funktion  $f$  mithilfe der Fourier-Cosinus Methode anzunähern. Dafür wird eine fixe Konstante  $a$  gewählt, die größer als das Anfangsvermögen des Versicherungsunternehmens  $u$  ist. Dann wird die Funktion  $f$ , die ursprünglich auf  $[0, \infty)$  definiert war, auf das Intervall  $[0, a]$  eingeschränkt. Man kann das Integral umschreiben in

$$\varphi(u) = \rho - (1 - \rho) \int_0^u f(x) dx = \rho - (1 - \rho) \int_0^a 1_{x \leq u} f(x) dx,$$



da  $1_{x \leq u} f(x) = 0$  für  $x \in (u, a]$ . Die Funktion  $f$  wird nun folgendermaßen auf  $[-a, a]$  fortgesetzt:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \geq 0, \\ f(-x) & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Die Funktion ist gerade und kann daher als Fourier-Cosinus-Reihe dargestellt werden:

$$f^*(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right)$$

mit

$$A_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(s) \cos\left(k\pi \frac{s}{a}\right) ds.$$

Setzt man nun die Fourier-Reihe in die Formel für Ruinwahrscheinlichkeit ein, erhält man

$$\varphi(u) = \rho - (1 - \rho) \int_0^a 1_{x \leq u} \left( \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \right) dx.$$

Da  $A_k$  eine Konstante und  $\cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right)$  stetig ist, kann man das Integral und die Summe mithilfe des Satzes von Fubini vertauschen:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \rho - (1 - \rho) \int_0^a 1_{x \leq u} \left( \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \right) dx \\ &= \rho - (1 - \rho) \left( \int_0^u \frac{A_0}{2} dx + \int_0^u \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right) dx \right) \\ &= \rho - (1 - \rho) \left( \int_0^u \frac{A_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^u A_k \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right) dx \right). \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, wird in Zukunft statt  $\frac{A_0}{2}$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$  der Term  $\sum_{k=0}^{\infty} 'A_k$  verwendet, wobei das  $\Sigma'$  bedeutet, dass der erste Summand durch zwei dividiert wird. Da  $\cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right)$  für  $k = 0$  gleich 1 ist, kann man  $\varphi(u)$  schreiben als

$$\varphi(u) = \rho - (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} 'A_k \int_0^u \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right) dx.$$

Weiters ist das Integral über  $c$  bis  $d$  von  $\cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right)$  gleich

$$\chi_k(c, d) := \begin{cases} \left[ \sin\left(k\pi \frac{d}{a}\right) - \sin\left(k\pi \frac{c}{a}\right) \right] \frac{a}{k\pi}, & k \neq 0 \\ d - c, & k = 0. \end{cases}$$

Also folgt für die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\varphi(u) = \rho - (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} {}'A_k \chi_k(0, u).$$

Es gilt der Zusammenhang  $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ .

Daher kann  $A_k$  mithilfe der Exponentialfunktion folgendermaßen dargestellt werden

$$A_k = \frac{2}{a} \Re \left( \int_0^a f(x) e^{i \frac{k\pi x}{a}} dx \right).$$

Lässt man das Integral nicht nur von 0 bis  $a$  gehen, sondern integriert man über 0 bis  $\infty$ , so erhält man eine Näherung des ursprünglichen Integrals. Wie groß der Fehler dabei ist, wird in einem späteren Kapitel erläutert. Das Integral

$$\Phi_f \left( \frac{k\pi}{a} \right) = \int_0^{\infty} f(x) e^{i \frac{k\pi x}{a}} dx$$

ist sowohl die charakteristische Funktion als auch die Fourier-Transformierte der Funktion  $f$  an der Stelle  $\frac{k\pi}{a}$ . Das negative Vorzeichen der Fourier-Transformierten ist eine Konvention, hier wird jedoch die positive Fourier-Transformierte verwendet. Sei

$$F_k := \frac{2}{a} \Re \left( \Phi_f \left( \frac{k\pi}{a} \right) \right).$$

Die  $A_k$  werden durch die  $F_k$  ersetzt und man erhält eine Näherung des vorherigen Ausdrucks:

$$\varphi(u) \approx \rho - (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} {}'F_k \chi_k(0, u).$$

Nun schneidet man die Summe nach  $N$  Summanden ab und erhält die finale Approximation

$$\varphi_e(u, N) = \rho - (1 - \rho) \sum_{k=0}^{N-1} {}'F_k \chi_k(0, u). \quad (4.1)$$

Diese Approximation hat zwei große Vorteile:

- Statt die Faltung der Funktion  $h(x)$  auszurechnen, reicht es die Fourier-Transformierte von  $f(x)$  zu berechnen.
- Es lässt sich eine explizite Schranke für den Fehler dieser Approximation finden. Das ist bei vielen anderen Approximationen nicht der Fall oder es ist sehr schwer den Fehler zu berechnen.

Die Fourier-Transformierte von  $f(x)$  lässt sich leichter als die Faltung der  $h(x)$  berechnen. Um dies zu sehen, benötigt man die charakteristische Funktion von  $h(x)$

$$\begin{aligned}\phi_h(\omega) &= \frac{1}{\mu_1} \int_0^\infty e^{i\omega x} v(x, \infty) dx = \frac{1}{\mu_1} \int_0^\infty \int_0^x e^{i\omega y} dy v(dx) \\ &= \frac{1}{\mu_1} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} v(dx) \quad \text{für } \omega \neq 0,\end{aligned}$$

sonst  $\phi_h(0) = 1$ .

Dann gilt für  $\omega \neq 0$

$$\begin{aligned}\phi_f(\omega) &= \int_0^\infty e^{i\omega x} f(x) dx = \int_0^\infty e^{i\omega x} \left( \sum_{j=1}^\infty \rho^j h^{*j} \right) dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty e^{i\omega x} \rho^j h^{*j} dx. [3]\end{aligned}$$

Mit Fubini und da sich die charakteristische Funktion der Faltung von Funktionen auf die Multiplikation der charakteristischen Funktionen dieser Funktionen reduziert, folgt nun

$$\int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty e^{i\omega x} \rho^j h^{*j} dx = \sum_{j=1}^\infty \rho^j \int_0^\infty e^{i\omega x} h^{*j} dx = \sum_{j=1}^\infty \rho^j \phi_h^j(\omega).$$

Das ist eine geometrische Reihe, also

$$\begin{aligned}\phi_f(\omega) &= \sum_{j=1}^\infty \rho^j \phi_h^j(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\rho}{\mu_1} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} v(dx)} - \rho^0 \phi_h^0(\omega) \\ &= \frac{\frac{\rho}{\mu_1} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} v(dx)}{1 - \frac{\rho}{\mu_1} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} v(dx)} = \frac{\int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} v(dx)}{c - \int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} v(dx)}. \quad (4.2)\end{aligned}$$

Für  $\omega = 0$  ist  $\phi_f(0) = \rho/(1 - \rho)$ . Zu überprüfen bleibt, ob dieser Ausdruck wohldefiniert ist. Da aber die Bedingung  $c > \mu_1$  erfüllt ist, folgt mit der Dreiecksungleichung und mit  $|e^{i\omega x} - 1| < |\omega x|$  die Wohldefiniertheit:

$$\left| c - \int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} v(dx) \right| \geq c - \int_0^\infty \left| \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} \right| v(dx) \geq c - \mu_1 > 0. [8]$$

# Kapitel 5

## Fehlerabschätzung

Im vorigen Kapitel wurden zwei Abschätzungen gemacht. Diese Abschätzungen führen zu Fehlern, die nun genauer betrachtet werden. Der erste Fehler entsteht dadurch, dass die  $A_k$  durch die  $F_k$  ersetzt werden. Also gilt

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \left| (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} (F_k - A_k) \chi_k(0, u) \right| \\ &= \left| (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2}{a} \Re \left( \int_0^{\infty} f(x) e^{i \frac{k\pi x}{a}} dx \right) - \frac{2}{a} \Re \left( \int_0^a f(x) e^{i \frac{k\pi x}{a}} dx \right) \right) \chi_k(0, u) \right| \\ &= \left| (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{a} \Re \left( \int_a^{\infty} f(x) e^{i \frac{k\pi x}{a}} dx \right) \chi_k(0, u) \right|. \end{aligned}$$

Vorerst werden nur die ersten  $n + 1$  Summanden betrachtet:

$$\left| (1 - \rho) \sum_{k=0}^n \frac{2}{a} \Re \left( \int_a^{\infty} f(x) e^{i \frac{k\pi x}{a}} dx \right) \chi_k(0, u) \right| \leq (1 - \rho) \int_a^{\infty} \left| \frac{2}{a} \sum_{k=0}^n \chi_k(0, u) \cos \left( k\pi \frac{x}{a} \right) \right| f(x) dx.$$

Bei der Abschätzung wurde der Zusammenhang  $\Re(\exp(ix)) = \cos(x)$  verwendet, die Dreiecksungleichung und dass  $f(x) \geq 0$  ist.

**Theorem 5.1.** *Es gilt die folgende Abschätzung*

$$\left| \frac{2}{a} \sum_{k=0}^n \chi_k(0, u) \cos \left( k\pi \frac{x}{a} \right) \right| \leq 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

*Beweis.* Mit der Definition von  $\chi_k(0, u)$  und den Additionstheoremen für Sinus

und Cosinus folgt

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{a} \sum_{k=0}^n \chi_k(0, u) \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \\
 &= \frac{2}{a} \left( \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^n \sin\left(k\pi \frac{u}{a}\right) \frac{a}{k\pi} \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \right) \\
 &= \frac{u}{a} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(k\pi \frac{u}{a}\right) \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right)}{k} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(k\pi \frac{u}{a}\right) \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right)}{k} \\
 &= \frac{u}{a} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(k\pi \frac{u}{a} + k\pi \frac{x}{a}\right) - \cos\left(k\pi \frac{u}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{x}{a}\right)}{k} \\
 &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(k\pi \frac{u}{a} - k\pi \frac{x}{a}\right)k + \cos\left(k\pi \frac{u}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{x}{a}\right)}{k} \\
 &= \frac{u}{a} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(k\pi \frac{u+x}{a}\right)}{k} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(k\pi \frac{u-x}{a}\right)}{k} \\
 &= \frac{u}{a} + \frac{1}{\pi} S_n\left(\pi \frac{u+x}{a}\right) + \frac{1}{\pi} S_n\left(\pi \frac{u-x}{a}\right),
 \end{aligned}$$

wobei  $S_n(y) := \sum_{k=1}^n \frac{\sin(ky)}{k}$ . Die Funktion  $S_n(y)$  ist  $2\pi$ -periodisch, da der erste Summand  $2\pi$ -periodisch ist und die nächsten Summanden  $\pi/k$ -periodisch sind. Es gilt

$$S_n(0) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(0)}{k} = 0.$$

Auch gilt  $S_n(\pi) = 0$  und aus der Periodizität, und, da Sinus eine ungerade Funktion ist, folgt  $S_n(2\pi - y) = -S_n(y)$  für  $y \in (0, \pi)$ . Nun kann man also die  $S_n(y)$  nur für  $y \in (0, \pi)$  betrachten. Für  $y \in (0, \pi)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $l = 0, 1, \dots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor$  gilt Folgendes:

1.  $S_n(\pi/(n+1)) \geq S_n(y)$ ,
2.  $S_{n+1}((2l+1)\pi/(n+2)) > S_n(((2l+1)\pi)/(n+1))$ .

Wendet man diese Abschätzungen für  $l = 0$  an, folgt für alle  $y \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned}
 S_n(y) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) \frac{\pi}{n+1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) \left(\frac{(k+1)\pi}{n+1} - \frac{k\pi}{n+1}\right) \\
 &= \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt.
 \end{aligned}$$

Es gilt also  $|S_n(y)| \leq \int_0^\pi \sin(t)/t dt$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $y \in (0, \pi)$ . Aufgrund der Periodizität gilt es sogar für alle  $y \in \mathbb{R}$ . Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{2}{a} \sum_{k=0}^n {}' \chi_k(0, u) \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \right| &= \left| \frac{u}{a} + \frac{1}{\pi} S_n\left(\pi \frac{u+x}{a}\right) + \frac{1}{\pi} S_n\left(\pi \frac{u-x}{a}\right) \right| \\
 &\leq 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt.
 \end{aligned}$$

□

Also gilt

$$(1 - \rho) \int_a^\infty \left| \frac{2}{a} \sum_{k=0}^n {}' \chi_k(0, u) \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \right| f(x) dx \leq (1 - \rho) \left( 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \right) \int_a^\infty f(x) dx.$$

Lässt man nun  $n \rightarrow \infty$ , so gilt für den ersten Fehler

$$\epsilon_1 \leq (1 - \rho) \left( 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \right) \int_a^\infty f(x) dx.$$

Der zweite Fehler entsteht, da nur die ersten  $N$  Summanden in der finalen Approximation verwendet werden. Es gilt daher

$$\begin{aligned}
 \epsilon_2 &= \left| \rho - (1 - \rho) \sum_{k=0}^\infty {}' F_k \chi_k(0, u) - \rho + (1 - \rho) \sum_{k=0}^{N-1} {}' F_k \chi_k(0, u) \right| \\
 &= \left| -(1 - \rho) \sum_{k=N}^\infty {}' F_k \chi_k(0, u) \right| = \left| (\rho - 1) \sum_{k=N}^\infty \frac{a F_k}{k\pi} \sin\left(k\pi \frac{u}{a}\right) \right|.
 \end{aligned}$$

Um an eine Abschätzung des Fehlers zu kommen, braucht man die folgende Definition:

**Definition 5.1** (Algebraischer Index der Konvergenz). *Unter einem algebraischen Index der Konvergenz der Folge  $A_k$  versteht man die größte Zahl  $s$ , sodass*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |A_k| k^s < \infty.$$

Es gilt mithilfe partieller Integration und für  $f$  und  $f' \neq 0$  aus  $L^1$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{aF_k}{2} &= \Re \left( \int_0^\infty f(x) e^{i \frac{k\pi x}{a}} dx \right) = \int_0^\infty f(x) \cos \left( k\pi \frac{x}{a} \right) dx \\ &= \left[ \frac{a}{k\pi} \sin \left( k\pi \frac{x}{a} \right) f(x) \right]_0^\infty - \frac{a}{k\pi} \int_0^\infty f'(x) \sin \left( k\pi \frac{x}{a} \right) dx \\ &= -\frac{a}{k\pi} \int_0^\infty f'(x) \sin \left( k\pi \frac{x}{a} \right) dx. \end{aligned}$$

Daher gibt es ein  $C \in \mathbb{R}$ , sodass  $\frac{a}{2}|F_k| \leq (a/k\pi) \int_0^\infty |f'(x)| dx \leq C/k$ . Dieses  $C$  ist klarerweise von  $a$  abhängig. Formt man diese Ungleichung um, sieht man, dass  $\frac{a}{2}F_k$  einen algebraischen Index der Konvergenz von maximal eins hat. Sei also  $0 < \beta \leq 1$  der algebraische Index der Konvergenz von  $\frac{a}{2}F_k$ . Dann ist

$$\epsilon_2 = (1 - \rho) \left| \sum_{k=N}^\infty \frac{aF_k}{k\pi} \sin \left( k\pi \frac{u}{a} \right) \right| \leq (1 - \rho) \sum_{k=N}^\infty \frac{1}{k\pi} |aF_k| \leq (1 - \rho) \frac{2}{\pi} \sum_{k=N}^\infty \frac{C}{k^{\beta+1}}.$$

Die Reihe  $\sum_{k=N}^\infty \frac{1}{k^{\beta+1}}$  konvergiert, da  $\frac{1}{k^{\beta+1}}$  monoton fallend ist und somit die Reihe durch das Integralkriterium abgeschätzt werden kann. Damit ist

$$\sum_{k=N}^\infty \frac{1}{k^{\beta+1}} \leq \int_{N-1}^\infty \frac{1}{k^{\beta+1}} = \frac{\beta}{(N-1)^\beta}.$$

Nun sei  $\bar{C} = \frac{2\beta}{\pi}C$ , dann gilt

$$\epsilon_2 \leq (1 - \rho) \frac{\bar{C}}{(N-1)^\beta}.$$

Der gesamte Fehler, der durch die Approximation der Ruinwahrscheinlichkeit durch die Fourier-Cosinus Methode entsteht, lässt sich also folgendermaßen abschätzen:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \leq (1 - \rho) \left[ \left( 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt \right) \int_a^\infty f(x) dx + \frac{\bar{C}}{(N-1)^\beta} \right].$$

Der erste Teil der eckigen Klammer hängt nur von  $a$  ab. Er fällt mit wachsendem  $a$ . Der zweite Ausdruck hängt sowohl von  $N$  als auch von  $a$  ab. Die Abhängigkeit von  $a$  steckt in  $\bar{C}$ . Dieser Term fällt mit fallendem  $a$  und mit wachsendem  $N$ . Üblicherweise wird durch den ersten Term der Wert von  $a$  bestimmt und dann damit aus dem zweiten Term der Wert von  $N$  berechnet.[8]

# Kapitel 6

## Verbesserung der Fehlerabschätzung

Eine Möglichkeit, die Fehlerabschätzung zu verbessern und genauere Schranken zu finden, ist es, Bedingungen an die Monotonie des Realteils  $\Re(\phi_f(\omega)) = \Re(E(i\omega f(x)))$  zu stellen. Dazu betrachte man Folgendes:

**Theorem 6.1.** Sei  $u \in [\theta, a - \theta]$ , wobei  $\theta > 0$ , und  $F_k = (2/a)\Re(\phi_f(k\pi/a))$ . Gelte nun für  $u$  und  $F_k$ :

1.  $(a/2)F_k$  hat algebraischen Index der Konvergenz  $\beta > 0$ , und  $F_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ ;
2. Es existiert ein  $N'$ , sodass  $\Delta F_k$  dasselbe Vorzeichen hat für alle  $k \geq N'$ , wobei  $\Delta F_k := F_{k+1} - F_k$ .

Dann folgt: Es existiert eine Konstante  $C_\theta$ , die von  $\theta$  und  $a$  abhängt, und ein  $N \geq N'$ , sodass

$$\epsilon_2 = (1 - \rho) \left| \sum_{k=N}^{\infty} aF_k \sin\left(\frac{k\pi u}{a}\right) \frac{1}{k\pi} \right| \leq \frac{C_\theta}{N^{\beta+1}}.$$

*Beweis.* Da  $u \in [\theta, a - \theta]$  für  $\theta > 0$  und  $[\theta, a - \theta] \subset (0, a)$ , folgt für  $x = \frac{u}{a}\pi$ , dass  $x \in (0, \pi)$ . Weiters gilt, dass  $\Delta\left(\frac{F_k}{k}\right)$  dasselbe Vorzeichen für alle  $k > N'$  hat. Dafür betrachte man

$$\Delta\left(\frac{F_k}{k}\right) = \frac{F_{k+1}}{k+1} - \frac{F_k}{k} = \frac{kF_{k+1} - (k+1)F_k}{k(k+1)} = \frac{k\Delta F_k - F_k}{k(k+1)}.$$

Wie bereits bekannt nimmt  $\Delta F_k$  ab  $k = N'$  dasselbe Vorzeichen für alle  $k$  an. Es bleibt daher zu zeigen, dass dies auch für  $F_k$  gilt. Sei also  $\Delta F_k = F_{k+1} - F_k \geq$



0 für  $k \geq N'$ . Daher ist  $F_k$  für  $k \geq N'$  fallend. Da aber  $F_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  vorausgesetzt wurde, folgt  $F_k \geq 0$  für  $k \geq N'$ . Die Argumentation für den Fall  $\Delta F_k \leq 0$  funktioniert analog. Sei nun  $b_k = F_k/k$ . Es gilt  $b_k = -\sum_{l=k}^{\infty} \Delta b_l$ , da  $\sum_{l=k}^{\infty} \Delta b_l = \sum_{l=k}^{\infty} b_{l+1} - b_l = -b_k + b_{k+1} - b_{k+1} + b_{k+2} - b_{k+2} + \dots = -b_k$ . Daraus folgt für  $N \geq N'$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=N}^{\infty} \frac{F_k}{k} \sin(kx) &= \sum_{k=N}^{\infty} b_k \sin(kx) \\
 &= \sum_{k=N}^{\infty} \left[ -\sum_{l=k}^{\infty} \Delta b_l \right] \sin(kx) \\
 &= -\sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \sin(Nx) - \sum_{l=N+1}^{\infty} \Delta b_l \sin((N+1)x) - \sum_{l=N+2}^{\infty} \Delta b_l \sin((N+2)x) - \dots \\
 &= -\sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \sin(Nx) - \sum_{l=N+1}^{\infty} \Delta b_l \sin((N+1)x) - \Delta b_N \sin((N+1)x) + \Delta b_N \sin((N+1)x) \\
 &\quad - \sum_{l=N+2}^{\infty} \Delta b_l \sin((N+2)x) - \Delta b_{N+1} \sin((N+2)x) + \Delta b_{N+1} \sin((N+2)x) \\
 &\quad - \Delta b_N \sin((N+2)x) + \Delta b_N \sin((N+2)x) - \dots \\
 &= -\sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \sin(Nx) - \sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_N \sin((N+1)x) + \Delta b_N \sin((N+1)x) \\
 &\quad - \sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \sin((N+2)x) + \Delta b_{N+1} \sin((N+2)x) + \Delta b_N \sin((N+2)x) - \dots \\
 &= -\sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \left( \sum_{k=N}^{\infty} \sin(kx) \right) + \Delta b_N \sin((N+1)x) + \Delta b_N \sin((N+2)x) + \dots + \Delta b_{N+1} \sin((N+2)x) + \dots \\
 &= -\sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \left( \sum_{k=N}^{\infty} \sin(kx) \right) + \sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \left( \sum_{m=l+1}^{\infty} \sin(mx) \right) \\
 &= -\sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \left( \sum_{k=N}^l \sin(kx) \right).
 \end{aligned}$$

Weiters gilt für  $x$  ungleich  $0, \pi/2, \pi, \dots$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \sin(kx) &= \Im \left( \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \Im \left( \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} * \frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}}} \right) = \Im \left( \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-\frac{ix}{2}}}{\underbrace{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}_{i \sin(\frac{x}{2}) - (-i) \sin(\frac{x}{2})}} \right) \\
 &= \Im \left( \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} + i \frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) \\
 &= \Im \left( -i \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) \\
 &= -\frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Da  $x \in (0, \pi)$  ist, gilt

$$\sum_{k=N}^l \sin(kx) = \sum_{k=0}^l \sin(kx) - \sum_{k=0}^N \sin(kx) = \frac{\cos\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(l + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned}
 -\sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \left( \sum_{k=N}^l \sin(kx) \right) &= -\frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \left( \cos \left[ \left( N - \frac{1}{2} \right) x \right] - \cos \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right) x \right] \right) \\
 &= \frac{\cos \left[ \left( N - \frac{1}{2} \right) x \right]}{2 \sin \frac{x}{2}} \left( -\sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \right) + \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \cos \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right) x \right] \\
 &= \frac{\cos \left[ \left( N - \frac{1}{2} \right) x \right]}{2 \sin \frac{x}{2}} b_N + \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{l=N}^{\infty} \Delta b_l \cos \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right) x \right].
 \end{aligned}$$

Nimmt man nun den Betrag dieser Gleichung folgt mithilfe der Dreiecksunglei-

chung:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{F_k}{k} \sin(kx) \right| &\leq \left| \frac{\cos \left[ \left( N - \frac{1}{2} \right) x \right]}{2 \sin \frac{x}{2}} b_N \right| + \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{l=N}^{\infty} \left| \Delta b_l \cos \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right) x \right] \right| \\
 &\leq \frac{|b_N|}{2 \sin \frac{x}{2}} + \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \sum_{l=N}^{\infty} |\Delta b_l| \\
 &= \frac{|b_N|}{2 \sin \frac{x}{2}} + \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left| \sum_{k=N}^{\infty} \Delta b_k \right| \\
 &= \frac{|b_N|}{\sin \frac{x}{2}}.
 \end{aligned}$$

Dass  $\sum_{l=N}^{\infty} |\Delta b_l| = \left| \sum_{k=N}^{\infty} \Delta b_k \right|$  ist, folgt, da  $N \geq N'$  und da  $\Delta(F_k/k)$  dasselbe Vorzeichen für alle  $k \geq N'$  annimmt. Es gilt also für den zweiten Fehler, da  $(a/2)F_k$  einen algebraischen Index der Konvergenz  $\beta > 0$  hat:

$$\epsilon_2 = (1 - \rho) \left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{aF_k}{k\pi} \sin \left( k\pi \frac{u}{a} \right) \right| \leq (1 - \rho) \frac{a}{\pi} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \frac{|F_N|}{N} \leq \frac{C_\theta}{N^{\beta+1}}$$

Dabei hängt  $C_\theta$  von  $a$  und  $\theta$  ab, ist aber unabhängig von  $N$ . [8] □

# Kapitel 7

## Alternativer Vermögensprozess

Die Resultate der vorherigen Kapitel basieren auf dem Modell, das dem Vermögensprozess zugrunde liegt. Jedoch ist es in der realen Welt oft nicht so einfach, die vorliegenden Daten mithilfe dieses Modells darstellen zu können. Es ist oft einfacher die Verteilungsfunktion statistisch zu schätzen. Sei also  $Y$  eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion  $h(x)$  von der Form  $h(x) := \nu((x, \infty))/\mu_1$  (siehe Kapitel 4 (2)). Nun sei  $\iota_k$  das  $k$ -te Moment der Zufallsvariable  $Y$ . Es gilt also

$$\begin{aligned} \iota_k &= \mathbb{E} [Y^k] = \int_0^\infty x^k h(x) dx = \int_0^\infty x^k \frac{\nu(x, \infty)}{\mu_1} dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^x \frac{y^k}{\mu_1} dy \nu(dx) = \frac{1}{(k+1)\mu_1} \int_0^\infty x^{k+1} \nu(dx). \end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit wird  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{k+1} \nu(x, \infty)/(k+1) = 0$  angenommen. Außerdem wird  $\iota_0 = 0$  gesetzt. Nun kann die charakteristische Funktion von  $Y$  mittels der Taylor Approximation angenähert werden

$$\begin{aligned} \phi_h(\omega) &= \mathbb{E} [e^{iY\omega}] = \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iY\omega)^k}{k!} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^m \frac{(iY\omega)^k}{k!} + \int_0^{Y\omega} \dots \int_0^{s_m} e^{is_{m+1}} ds_{m+1} \dots ds_1 \right] = \sum_{k=0}^m \frac{(i\omega)^k}{k!} \iota_k + R, \end{aligned}$$

wobei  $R := \mathbb{E} \left[ \int_0^{Y\omega} \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_m} e^{is_{m+1}} ds_{m+1} \dots ds_2 ds_1 \right]$ . [8]

**Theorem 7.1** (Satz von Taylor mit Integralrestglied-Darstellung). *Falls die  $(n+1)$ -te Ableitung einer Funktion  $f$  auf einem offenen Intervall, das  $a$  enthält, existiert, gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \quad (7.1)$$

**Theorem 7.2.** *Es gilt*

$$|R| \leq \frac{|\omega|^{m+1}}{(m+1)!} \iota_{m+1}.$$

*Beweis.* Mit 7.1 und  $a = 0$  folgt, dass

$$R = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m!} \int_0^{Y\omega} (Y\omega - t)^m (e^{it})^{(m+1)} dt \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{i^{m+1}}{m!} \int_0^{Y\omega} (Y\omega - t)^m e^{it} dt \right].$$

Es gilt für  $Y\omega \geq 0$ , da  $|i| = 1$ ,  $|e^{it}| = 1$  und wegen der Dreiecksungleichung für Integrale

$$\begin{aligned} |R| &\leq \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m!} \int_0^{Y\omega} |(Y\omega - t)^m| * |e^{it}| dt \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m!} \int_0^{Y\omega} (Y\omega - t)^m dt \right] = \mathbb{E} \left[ -\frac{1}{m+1!} (Y\omega - t)^{m+1} \Big|_0^{Y\omega} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m+1!} (Y\omega)^{m+1} \right] \leq \frac{|\omega|^{m+1}}{(m+1)!} \iota_{m+1}. \end{aligned}$$

Für  $Y\omega < 0$  gilt

$$\begin{aligned} |R| &\leq \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m!} \int_{Y\omega}^0 |(Y\omega - t)^m| * |e^{it}| dt \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m!} \int_{Y\omega}^0 (t - Y\omega)^m dt \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m+1!} (t - Y\omega)^{m+1} \Big|_{Y\omega}^0 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{m+1!} (-Y\omega)^{m+1} \right] \leq \frac{|\omega|^{m+1}}{(m+1)!} \iota_{m+1}. [9] \end{aligned}$$

□

Angenommen die Momente von  $Y$  besitzen maximal polynomiales Wachstum, also es ein  $c > 0$  gibt, sodass  $\iota_k \leq c^k$ , dann konvergiert  $|R|$  gegen null für  $m$  gegen unendlich. Dies folgt, da  $\frac{c^n}{n!}$  eine Nullfolge ist und

$$|R| \leq \frac{|\omega|^{m+1}}{(m+1)!} \iota_{m+1} \leq \frac{(|\omega|c)^{m+1}}{(m+1)!} \rightarrow 0.$$

Weiter ist also

$$\phi_f(\omega) = \frac{\rho\phi_h(\omega)}{1 - \rho\phi_h(\omega)} = \frac{\rho\phi_h(\omega)}{1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(i\omega)^k}{k!} \iota_k - \rho R}.$$

Aus Kapitel 4 ist bereits bekannt, dass  $\rho = \mu_1/c$ , wobei  $c > \mu_1$  gilt. Außerdem gilt für die charakteristische Funktion einer Zufallsvariable  $X$ :

$$|\phi_X(\omega)| \leq 1.$$

Damit folgt, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(i\omega)^k}{k!} \iota_k = 1 - \rho \phi_h(\omega) \neq 0.$$

Also geht  $\left| \rho R / \left( 1 - \rho \sum_{k=0}^m (i\omega)^k \iota_k / k! \right) \right|$  gegen null für  $m$  gegen unendlich, insbesondere gibt es ein  $m$ , sodass  $\left| \rho R / \left( 1 - \rho \sum_{k=0}^m (i\omega)^k \iota_k / k! \right) \right| \leq 1$ . Nun folgt

$$\begin{aligned} \phi_f(\omega) &= \frac{\rho \phi_h(\omega)}{1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(i\omega)^k}{k!} \iota_k - \rho R} = \frac{\rho \phi_h(\omega)}{1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(i\omega)^k}{k!} \iota_k} + O\left(\frac{\rho R}{1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(i\omega)^k}{k!} \iota_k}\right) \\ &= \frac{\rho \sum_{k=0}^m \frac{(i\omega)^k}{k!} \iota_k}{1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(i\omega)^k}{k!} \iota_k} + O\left(\frac{\rho R}{1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(i\omega)^k}{k!} \iota_k}\right). \end{aligned}$$

In Kapitel 4 ersetzt man folglich  $\phi_f$  durch

$$\phi_r(\omega) := \frac{\rho \sum_{k=0}^m \frac{(i\omega)^k}{k!} \iota_k}{1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(i\omega)^k}{k!} \iota_k}.$$

Betrachtet man nun 4.1, so ergibt sich der Fehler der Approximation als

$$\begin{aligned} \epsilon_3 &= |\varphi_e^f(u, N) - \varphi_e^r(u, N)| \\ &= \left| \rho - (1 - \rho) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{a} \Re\left(\Phi_f\left(\frac{k\pi}{a}\right)\right) \chi_k(0, u) - \left( \rho - (1 - \rho) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{a} \Re\left(\Phi_r\left(\frac{k\pi}{a}\right)\right) \chi_k(0, u) \right) \right| \\ &= \left| (1 - \rho) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{a} \Re\left(\Phi_f\left(\frac{k\pi}{a}\right) - \Phi_r\left(\frac{k\pi}{a}\right)\right) \chi_k(0, u) \right| \\ &= \left| (1 - \rho) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{a} \Re\left(\Phi_f\left(\frac{k\pi}{a}\right) - \Phi_r\left(\frac{k\pi}{a}\right)\right) \sin\left(k\pi \frac{u}{a}\right) \frac{a}{k\pi} \right| \\ &\leq \frac{2}{\pi} (1 - \rho) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \Re\left(\Phi_f\left(\frac{k\pi}{a}\right) - \Phi_r\left(\frac{k\pi}{a}\right)\right) \\ &\leq \frac{2}{\pi} (1 - \rho) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \Re\left(\frac{\rho R}{1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(ik\pi/a)^k}{k!} \iota_k}\right) \\ &\leq \frac{2}{\pi} (1 - \rho) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \left| \frac{\rho R}{1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(ik\pi/a)^k}{k!} \iota_k} \right| \\ &\leq \frac{2}{\pi} (1 - \rho) \max_{1 \leq l \leq N-1} \frac{\rho |R|}{\left| 1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(ik\pi/a)^k}{k!} \iota_k \right|} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Weiters gilt für die Partialsummen der harmonischen Reihe  $\sum_{k=0}^N 1/k \leq \ln(N) + 1$ ,  
damit folgt

$$\begin{aligned} \epsilon_3 &\leq \frac{2}{\pi}(1-\rho) \max_{1 \leq l \leq N-1} \frac{\rho|R|}{\left|1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(ik\pi/a)^k}{k!} t_k\right|} (\ln(N-1)) \\ &= C(1-\rho)(\ln(N-1)) \max_{1 \leq l \leq N-1} \frac{\rho|R|}{\left|1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(ik\pi/a)^k}{k!} t_k\right|}, \text{ wobei } C := \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Weiters folgt mit der Monotonie des Logarithmus und  $C_2 := C(1-\rho)$

$$\epsilon_3 \leq C_2 \log N \max_{1 \leq l \leq N} \left( \frac{\rho|R|}{\left|1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(ik\pi)^k}{a^k k!} t_k\right|} \right).$$

Damit gilt für den Gesamtfehler dieser Approximation

$$\epsilon_R \leq (1-\rho) \left[ \left(1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt\right) \int_a^\infty f(x) dx + \frac{C_1}{(N-1)^\beta} + C_2 \log N \max_{1 \leq l \leq N} \left\{ \frac{\rho|R|}{\left|1 - \rho \sum_{k=0}^m \frac{(ik\pi)^k}{a^k k!} t_k\right|} \right\} \right]. [8]$$

# Kapitel 8

## Rearrangement inequality

Eine wesentliche Eigenschaft der Ruinwahrscheinlichkeiten besteht darin, dass die Wahrscheinlichkeit des Ruins für wachsendes Anfangskapital des Versicherungsunternehmens monoton gegen null fällt. Die Approximation 4.1 fällt im Allgemeinen jedoch nicht monoton für  $u \rightarrow \infty$ , sondern ist aufgrund der Sinus-Terme nicht monoton. Eine Möglichkeit dieses Problem zu beheben, ist eine Methode, die von Chernozhukov in dem Paper „Rearranging Edgeworth–Cornish–Fisher expansions“ vorgestellt wird. Zuerst wird die Definition eines wachsenden Rearrangements benötigt:

**Definition 8.1** (Wachsendes Rearrangement). Sei  $\chi$  ein kompaktes Intervall und  $f$  eine messbare Funktion auf  $\chi$  nach  $K \subset \mathbb{R}$  und  $K$  sei beschränkt. Dann nennt man  $f^*$  das wachsende Rearrangement von  $f$ , wobei

$$f^*(x) := \inf \left\{ y \in \mathbb{R} : \left[ \int_{\chi} 1\{f(u) \leq y\} du \right] \geq x \right\}.$$

Alternativ kann  $f^*$  auch mithilfe der Verteilungsfunktion  $F_f(y) := \int_{\chi} 1\{f(u) \leq y\} du$  von  $f(X)$  dargestellt werden, wobei  $X$  eine gleichverteilte Zufallsvariable auf  $[0, 1]$  ist:

$$f^*(x) := \inf \{ y \in \mathbb{R} : F_f(y) \geq x \}.$$

Das wachsende Rearrangement  $f^*$  kann also als Quantil der Zufallsvariable  $f(X)$  verstanden werden. Analog dazu wird das fallende Rearrangement definiert:

**Definition 8.2** (Fallendes Rearrangement). Sei  $\chi$  ein kompaktes Intervall und  $f$  eine messbare Funktion auf  $\chi$  nach  $K \subset \mathbb{R}$  und  $K$  sei beschränkt. Dann nennt man  $f^*$  das fallende Rearrangement von  $f$ , wobei

$$f^*(x) := \inf \left\{ y \in \mathbb{R} : \left[ \int_{\chi} 1\{f(u) \geq y\} du \right] \geq x \right\}.$$



**Definition 8.3** (Submodulare Funktion). Eine Funktion  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  wird submodular genannt, falls für alle Paare  $(v, t), (v', t')$  aus  $\mathbb{R}^2$  gilt, dass

$$L(v \wedge v', t \wedge t') + L(v \vee v', t \vee t') \leq L(v, t) + L(v', t').$$

Ist die Ungleichung strikt, wird die Funktion strikt submodular genannt.

Das fallende Rearrangement minimiert die p-Norm für eine gegebene Approximation.

**Theorem 8.1.** Sei  $f_0 : \mathcal{X} = [a, b] \rightarrow K$  eine messbare wachsende (fallende) Funktion in  $x$ , wobei  $K$  eine beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist. Weiters sei  $\hat{f} : \mathcal{X} \rightarrow K$  eine messbare Approximation der Funktion  $f_0$ . Dann gilt:

1. Für alle  $p \in [1, \infty]$  gilt für das wachsende (fallende) Rearrangement von  $\hat{f}$ , im Folgenden  $\hat{f}^*$ :

$$\left[ \int_{\mathcal{X}} |\hat{f}^*(x) - f_0(x)|^p dx \right]^{1/p} \leq \left[ \int_{\mathcal{X}} |\hat{f}(x) - f_0(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

2. Falls es zwei Mengen  $\mathcal{X}_0$  und  $\mathcal{X}'_0$  gibt, deren Maß jeweils größer ist als  $\delta > 0$ , und für alle  $x \in \mathcal{X}_0$  und  $x' \in \mathcal{X}'_0$  gilt, dass (i)  $x' > x$ , (ii)  $\hat{f}(x) > (<)$   $\hat{f}(x') + \epsilon$ , und (iii)  $f_0(x') > (<)$   $f_0(x) + \epsilon$ , für ein  $\epsilon > 0$ , dann gilt sogar für alle  $p \in [1, \infty]$

$$\left[ \int_{\mathcal{X}} |\hat{f}^*(x) - f_0(x)|^p dx \right]^{1/p} \leq \left[ \int_{\mathcal{X}} |\hat{f}(x) - f_0(x)|^p dx - \delta_X \eta_p \right]^{1/p},$$

mit  $\eta_p = \inf \{|v - t|^p + |v' - t|^p - |v - t|^p - |v' - t|^p\}$ ,  $\eta_p > 0$  für  $p \in (1, \infty)$  und  $\delta_X = \delta/(b - a)$ . Das Infimum wird über alle  $v, v', t, t'$  in  $K$  genommen, wobei  $v' \geq v + \epsilon$  und  $t' \geq t + \epsilon$  gelten muss.

*Beweis.* Es wird  $\mathcal{X} = [0, 1]$  angenommen. Der allgemeine Fall  $\mathcal{X} = [a, b]$  folgt ähnlich.

Zuerst wird der erste Teil des Theorems bewiesen. Dazu wird angenommen, dass  $\hat{f}$  und  $f_0$  Treppenfunktionen sind, es also Punkte  $1, \dots, r$  gibt, sodass die Funktion auf den Intervallen  $((s-1)/r, s/r]$  für  $s = 1, \dots, r$  konstant ist. Jeder Treppenfunktion  $f$  wird nun ein r-dimensionaler Vektor so zugeordnet, dass der s-te Eintrag des Vektors  $f_s$  mit dem Wert der Funktion im s-ten Intervall übereinstimmt:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_s \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1/r) \\ \vdots \\ f(s/r) \\ \vdots \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

Nun wird der Operator  $S$  folgendermaßen definiert: Sei  $k$  aus  $1, \dots, r$ . Falls es nun ein  $m > k$  gibt, sodass  $f_k > f_m$  ist, so gilt

$$S \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_k \\ \dots \\ f_m \\ \dots \\ f_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_m \\ \dots \\ f_k \\ \dots \\ f_r \end{pmatrix}.$$

Falls es kein  $m$  mit der gewünschten Eigenschaft gibt, setze  $Sf = f$ . Es gilt für jede submodulare Funktion  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und für  $f$  und  $f_0$  mit  $f_k \geq f_m$  und  $f_{0m} \geq f_{0k}$

$$L(f_m, f_{0k}) + L(f_k, f_{0m}) \leq L(f_m \wedge f_k, f_{0k} \wedge f_{0m}) + L(f_k \vee f_m, f_{0m} \vee f_{0k}) \leq L(f_k, f_{0k}) + L(f_m, f_{0m}).$$

Es gilt

$$\int_X L\{S\hat{f}(x), f_0(x)\} dx \leq \int_X L\{\hat{f}(x), f_0(x)\} dx,$$

da Treppenfunktionen integriert werden und man diesen Ausdruck schreiben kann als

$$\sum_{s=1}^r \frac{1}{r} L\left(S\hat{f}\left(\frac{s}{r}\right), f_0\left(\frac{s}{r}\right)\right) \leq \sum_{s=1}^r \frac{1}{r} L\left(\hat{f}\left(\frac{s}{r}\right), f_0\left(\frac{s}{r}\right)\right).$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^r \frac{1}{r} L\left(\hat{f}\left(\frac{s}{r}\right), f_0\left(\frac{s}{r}\right)\right) - \sum_{s=1}^r \frac{1}{r} L\left(S\hat{f}\left(\frac{s}{r}\right), f_0\left(\frac{s}{r}\right)\right) &= \frac{1}{r} L\left(\hat{f}\left(\frac{k}{r}\right), f_0\left(\frac{k}{r}\right)\right) - \frac{1}{r} L\left(\hat{f}\left(\frac{m}{r}\right), f_0\left(\frac{k}{r}\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{r} L\left(\hat{f}\left(\frac{m}{r}\right), f_0\left(\frac{m}{r}\right)\right) - \frac{1}{r} L\left(\hat{f}\left(\frac{k}{r}\right), f_0\left(\frac{m}{r}\right)\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Wendet man den Operator  $S$  genügend oft auf  $\hat{f}$  an, so erhält man einen total geordneten Vektor, der mit  $\hat{f}^*$  übereinstimmt. Also folgt mit der obigen Ungleichung

$$\int_X L\{\hat{f}^*(x), f_0(x)\} dx \leq \int_X L\{S \dots S\hat{f}(x), f_0(x)\} dx \leq \int_X L\{\hat{f}(x), f_0(x)\} dx. \tag{8.1}$$

Nun wird dieses Resultat für Treppenfunktion auf allgemeine messbare Funktionen übertragen. Seien dazu  $f$  und  $f_0$  messbare Funktionen, die  $[0, 1]$  auf  $K$  abbilden, wobei  $f_0$  eine Quantilfunktion ist, also die Inverse der zugehörigen Verteilungsfunktion.

Es gibt Folgen von Treppenfunktionen  $\hat{f}^{(q)}$  und  $f_0^{(q)}$ , die gegen  $\hat{f}$  und  $f_0$  fast überall für  $q \rightarrow \infty$  konvergieren. Die Funktionen  $f_0^{(q)}$  sollen wiederum Quantilfunktionen sein. Die Konvergenz fast überall von  $\hat{f}^{(q)} \rightarrow \hat{f}$  impliziert die fast überalle Konvergenz ihrer Quantilfunktion. Also konvergiert  $\hat{f}^{*(q)}$  gegen  $\hat{f}^*$  fast überall. Da 8.1 für jedes  $q$  gilt, folgt mithilfe des Satzes zur dominierten Konvergenz, dass die Ungleichung auch für die Grenzwerte gilt.[10]

Die Existenz der Folgen  $\hat{f}^{(q)}$  und  $f_0^{(q)}$  folgt, da es für jede messbare Funktion  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von messbaren Treppenfunktionen  $\varphi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$  für alle  $x \in X$ , wobei  $(X, \mathcal{M})$  ein messbarer Raum sei.[11] Diese Folge muss nicht zwingend eine Folge von Quantilfunktionen sein, ersetzt man jedoch jedes Folgeglied durch ihr Rearrangement, so erhält man eine Folge aus Quantilfunktionen, die fast überall gegen  $f_0$  konvergiert.

Es kann leicht gezeigt werden, dass die Funktion  $L(v, w) = |v - w|^p$  für  $p \in [1, \infty]$  eine submodulare Funktion ist. Daher folgt

$$\int_X |\hat{f}^*(x) - f_0(x)|^p dx \leq \int_X |\hat{f}(x) - f_0(x)|^p dx.$$

Um den zweiten Teil des Theorems zu beweisen, wird wie im ersten Teil angenommen, dass  $\hat{f}$  und  $f_0$  Treppenfunktionen sind. Hier muss  $r$  groß genug gewählt werden, um die Voraussetzungen des Theorems zu erfüllen, also dass es zwei Mengen  $X_0$  und  $X'_0$  gibt, deren Maß jeweils größer ist als  $\delta > 0$ , und dass für alle  $x \in X_0$  und  $x' \in X'_0$  gilt, dass (i)  $x' > x$ , (ii)  $\hat{f}(x) > \hat{f}(x') + \epsilon$ , und (iii)  $f_0(x') > f_0(x) + \epsilon$ , für ein  $\epsilon > 0$ .

Für jede strikt submodulare Funktion  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  gilt, dass

$$\eta = \inf \{L(v', t) + L(v, t') - L(v, t) - L(v', t')\} > 0, \quad (8.2)$$

wobei das Infimum über alle  $v, v', t, t'$  in  $K$  genommen wird, und  $v' \geq v + \epsilon$  und  $t' \geq t + \epsilon$  gelten muss. Dies folgt aus der Definition einer strikt submodularen Funktion, da

$$L(v', t) + L(v, t') > L(v, t) + L(v', t') = L(v \wedge v', t \wedge t') + L(v' \vee v, t' \vee t).$$

Nun kann man den der Treppenfunktion  $\hat{f}$  zugeordneten  $r$ -dimensionalen Vektor folgendermaßen sortieren: Man vertauscht einen Eintrag des Vektors  $\hat{f}(x)$  wobei  $x \in X_0$  mit dem Eintrag  $\hat{f}(x')$  wobei  $x' \in X'_0$ . Das ist möglich, da kein Eintrag des Vektors der Treppenfunktion  $\hat{f}$  gleichzeitig eine Funktion von  $X_0$  und  $X'_0$  sein kann, aufgrund der Voraussetzung (ii). Hier ein Beispiel zur Veranschaulichung der Funktionsweise des Sortieroperators

$$T \begin{pmatrix} f(1/r), 1/r \in \mathcal{X} \setminus (\mathcal{X}_0 \dot{\cup} \mathcal{X}'_0) \\ \ddots \\ f(k/r), k/r \in \mathcal{X}_0 \\ \ddots \\ f(m/r), m/r \in \mathcal{X}'_0 \\ \ddots \\ f(1), 1 \in \mathcal{X} \setminus (\mathcal{X}_0 \dot{\cup} \mathcal{X}'_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1/r) \\ \ddots \\ f(m/r) \\ \ddots \\ f(k/r) \\ \ddots \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man nun die Summanden von

$$\int_{\mathcal{X}} L\{\hat{f}(x), f_0(x)\} dx - \int_{\mathcal{X}} L\{T(\hat{f})(x), f_0(x)\} dx = \frac{1}{r} \sum_{s=1}^r L\left(\hat{f}\left(\frac{s}{r}\right), f_0\left(\frac{s}{r}\right)\right) - L\left(T\hat{f}\left(\frac{s}{r}\right), f_0\left(\frac{s}{r}\right)\right),$$

so sind diese für alle  $s$ , außer die beiden vertauschten Einträge  $m$  und  $k$ , gleich null. Also folgt mit 8.2, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{X}} L\{\hat{f}(x), f_0(x)\} dx - \int_{\mathcal{X}} L\{T(\hat{f})(x), f_0(x)\} dx \\ &= \frac{1}{r} \left( L\left(\hat{f}\left(\frac{k}{r}\right), f_0\left(\frac{k}{r}\right)\right) - L\left(T\hat{f}\left(\frac{k}{r}\right), f_0\left(\frac{k}{r}\right)\right) + L\left(\hat{f}\left(\frac{m}{r}\right), f_0\left(\frac{m}{r}\right)\right) - L\left(T\hat{f}\left(\frac{m}{r}\right), f_0\left(\frac{m}{r}\right)\right) \right) \\ &= \frac{1}{r} \left( L\left(\hat{f}\left(\frac{k}{r}\right), f_0\left(\frac{k}{r}\right)\right) - L\left(\hat{f}\left(\frac{m}{r}\right), f_0\left(\frac{k}{r}\right)\right) + L\left(\hat{f}\left(\frac{m}{r}\right), f_0\left(\frac{m}{r}\right)\right) - L\left(\hat{f}\left(\frac{k}{r}\right), f_0\left(\frac{m}{r}\right)\right) \right) > \frac{1}{r} \eta. \end{aligned}$$

Nun wird der Sortieroperator  $T$  so oft wie möglich angewandt. Dann sortiert man die restlichen Einträge wie im Teil 1 des Beweises. Es werden also mindestens  $r\delta$  Einträge vertauscht. Damit gilt

$$\int_{\mathcal{X}} L\{\hat{f}^*(x), f_0(x)\} dx \leq \int_{\mathcal{X}} L\{\hat{f}(x), f_0(x)\} dx - \delta\eta. [10]$$

□

Die Ruinwahrscheinlichkeit im endlichen Zeithorizont erfüllt die Voraussetzungen aus Theorem 8.1, sie ist eine fallende, messbare Funktion und bildet ein Intervall  $[0, a]$  auf  $K$  ab. Also kann diese Methode auf die Approximation aus Kapitel 4 angewandt werden. Das Rearrangement ist dann eine fallende Approximation der Ruinwahrscheinlichkeit, die außerdem die  $p$ -Norm minimiert. Da es sich um Ruinwahrscheinlichkeiten handelt, ist  $K$  oft  $[0, 1]$ . Ist dies nicht der Fall, so gilt Folgendes:

**Theorem 8.2.** Für  $p \in [0, \infty]$  gilt

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^a |\tilde{\varphi}_e^*(x) - \varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \left[ \int_0^a |\varphi_e^*(x) - \varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[ \int_0^a |\varphi_e(x) - \varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{g} := (0 \vee g) \wedge 1$  für eine Funktion  $g$ .

Der Fehler dieser Approximation bezüglich der p-Norm ist also wiederum kleiner. In der Praxis ist es oft nicht einfach das Rearrangement zu berechnen. Daher berechnet man es folgendermaßen: Sei  $\Pi := \{x_i = ai/n \mid i = 0, 1, \dots, n\}$  eine äquidistante Partition von  $[0, a]$ . Betrachtet man nun die Menge  $\{f_0(x_i) \mid x_i \in \Pi\}$  und sortiert die Elemente in absteigender Reihenfolge, so ist dies ein Approximation des Arrangements. Die Menge der Punkte  $x_i$  hängt dabei von der zu approximierenden Funktion  $f_0$  ab. Genauer kann  $\hat{f}^*(u)$  für  $u \in [0, a]$  durch das u-Quantil von  $\{f_0(x_i) \mid x_i \in \Pi\}$  berechnet werden. Alternativ kann auch eine stochastische Methode angewandt werden um das Rearrangement zu berechnen. Dazu sei  $\{U_i : i = 1, \dots, n\}$  eine Menge von unabhängigen und gleichverteilten Zufallsvariablen auf  $[0, a]$ . Analog zum deterministischen Fall bestimmt man  $\hat{f}^*(u)$  für  $u \in [0, a]$ , indem man das u-Quantil von  $\{f_0(U_i) \mid i = 1, \dots, n\}$  berechnet.[8]

# Kapitel 9

## Anwendung der Fourier-Cosinus Methode anhand von ausgewählten Beispielen

In diesem Kapitel wird die Fourier-Cosinus Methode anhand von Beispielen getestet. Zu beachten ist dabei, Lévy-Prozesse zu wählen, deren Ruinwahrscheinlichkeiten explizit zu berechnen sind.

### 9.1 Cramér-Lundberg Prozess mit exponentialverteilten Einzelschäden

In diesem Beispiel wird ein Cramér-Lundberg Prozess mit  $\text{Exp}(\alpha)$ -verteilten Einzelschäden betrachtet, da sich die Ruinwahrscheinlichkeit für diesen explizit berechnen lässt. Zuerst wird die Markov-Eigenschaft des Cramér-Lundberg Risikoprozess gezeigt:

**Theorem 9.1.** *Sei  $(R_t)_{t \geq 0}$  ein Cramér-Lundberg Risikoprozess und  $T$  eine endliche Stoppzeit. Dann ist  $(R_{T+t} - R_T)_{t \geq 0}$  ein Cramér-Lundberg Risikoprozess mit Anfangskapital 0 und ist unabhängig von  $F_T$ , wobei  $F_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}$*

*Beweis.* Es gilt

$$R_{T+t} - R_T = ct - \sum_{i=N_T+1}^{N_{T+t}} X_i.$$

Da die  $X_i$  unabhängig von  $N_t$  und i.i.d. sind, bleibt zu zeigen, dass  $N_{T+t} - N_T$  ein Poissonprozess unabhängig von  $F_T$  ist. Poisson-Prozesse sind Erneuerungsprozesse (also Zählprozesse, deren Zwischenankunftszeiten  $X_i$  unabhängige, iden-

tisch verteilte, nicht negative Zufallsvariablen sind). Der Zeitraum zwischen zwei Zuwächsen ist  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt. Daher reicht es zu zeigen, dass  $T_{N_T+1} - T$   $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt und unabhängig von  $\mathcal{F}_T$  ist, wobei  $T_{N_T+1} = \min\{t \in [0, \infty) | N_t = N_T + 1\}$ . Dies folgt aus der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung:

$$P[T_{N_T+1} - T > x | T_{N_T}, T] = P[T_{N_T+1} - T_{N_T} > x + T - T_{N_T} | T_{N_T}, T, T_{N_T+1} - T_{N_T} > T - T_{N_T}] = e^{-\lambda x}.$$

Dass  $(R_{T+t} - R_T)_{t \geq 0}$  unabhängig von  $F_T$  ist, folgt, da  $T_{N_T+1}$  nur von  $T_{N_T}$  und  $T$  abhängt.  $\square$

Ein wichtiger Begriff ist auch der der Überlebenswahrscheinlichkeit:

**Definition 9.1** (Überlebenswahrscheinlichkeit). *Die Überlebenswahrscheinlichkeit  $\delta(x)$  sei die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess mit Anfangskapital  $x$  nicht ruiniert:*

$$\delta(x) = 1 - \psi(x).$$

Sei nun  $h > 0$  klein. Dann gilt wegen Theorem 9.1, falls im Intervall  $(0, \min(T_1, h)]$  kein Ruin eingetreten ist, dass zum Zeitpunkt  $\min(T_1, h)$  ein neuer Cramér-Lundberg Prozess mit Anfangskapital  $R_{\min(T_1, h)}$  gestartet wird. Es gilt  $P[T_1 > h] = e^{-\lambda h}$  und daher folgt mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\delta(x) = e^{-\lambda h} \delta(x + ch) + \int_0^h \int_0^{x+ct} \delta(x + ct - y) dG(y) \lambda e^{-\lambda t} dt, \quad (9.1)$$

wobei  $G(y)$  die Verteilungsfunktion der Einzelschadenshöhen ist. Wenn man in dem obigen Ausdruck  $h$  gegen 0 laufen lässt, sieht man, dass  $\delta(x)$  rechtsstetig ist. Teilt man nun 9.1 durch  $h$  und addiert  $\delta(x + ch)/h$ , so folgt

$$-\frac{1}{h} \int_0^h \int_0^{x+ct} \delta(x + ct - y) dG(y) \lambda e^{-\lambda t} dt + \frac{1 - e^{-\lambda h}}{h} \delta(x + ch) = c \frac{\delta(x + ch) - \delta(x)}{ch}.$$

Aus  $h$  gegen 0 folgt die Differenzierbarkeit von  $\delta(x)$ :

$$c\delta'(x) = \lambda \left( \delta(x) - \int_0^x \delta(x - y) dG(y) \right). \quad (9.2)$$

Ersetzt man in 9.1  $x$  durch  $x - ch$ , so folgt analog zu oben die Linksstetigkeit und die linksseitige Differenzierbarkeit. Daher ist die Überlebenswahrscheinlichkeit  $\delta(x)$  stetig und differenzierbar in allen Punkten, in denen  $G(y)$  stetig ist.

In den Unstetigkeitsstellen von  $G(y)$  stimmt die rechte und linke Ableitung nicht überein. Weiters gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{c}{\lambda}(\delta(x) - \delta(0)) &= \frac{c}{\lambda} \int_0^x \delta'(y) dy \\
 &= \int_0^x \delta(y) dy - \int_0^x \int_0^y \delta(y-u) dG(u) dy \\
 &= \int_0^x \delta(y) dy - \int_0^x \int_u^x \delta(y-u) dy dG(u) \\
 &= \int_0^x \delta(y) dy - \int_0^x \int_0^{x-u} \delta(y) dy dG(u) \\
 &= \int_0^x \delta(y) dy - \int_0^x \int_0^{x-y} dG(u) \delta(y) dy \\
 &= \int_0^x \delta(y)(1 - G(x-y)) dy.
 \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert der Einzelschadenshöhen gilt

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x dG(x) = - (1 - G(x))x \Big|_0^\infty + \int_0^\infty (1 - G(x)) dx.$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz und da  $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = 1$  folgt, dass

$$c(1 - \delta(0)) = \lambda \int_0^\infty (1 - G(x)) dx.$$

Somit gilt also

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Nun kann die Ruinwahrscheinlichkeit für  $\text{Exp}(\alpha)$ -verteilte Einzelschäden berechnet werden:

**Theorem 9.2.** Die Ruinwahrscheinlichkeit eines Cramér-Lundberg Prozesses mit  $\text{Exp}(\alpha)$ -verteilten Einzelschadenshöhen ist

$$\psi(x) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{\left(\frac{\lambda}{c} - \alpha\right)x}.$$

*Beweis.* Da die Einzelschäden  $\text{Exp}(\alpha)$ -verteilt sind, ist  $G(y) = 1 - e^{-\alpha y}$ . Also folgt mit 9.2

$$\begin{aligned}
 c\delta'(x) &= \lambda \left( \delta(x) - \int_0^x \delta(x-y) \alpha e^{-\alpha y} dy \right) = \lambda \delta(x) - \lambda \int_0^x \delta(y) \alpha e^{-\alpha(x-y)} dy \\
 &= \lambda \delta(x) - \lambda e^{-\alpha x} \int_0^x \delta(y) \alpha e^{\alpha y} dy.
 \end{aligned}$$



Multipiziert man nun mit  $e^{\alpha x}/\alpha$  und definiert  $f(x) = \int_0^x \delta(y)e^{\alpha y} dy$ , so kann man die obige Gleichung schreiben als

$$\frac{c}{\alpha} f''(x) - \left(c + \frac{\lambda}{\alpha}\right) f'(x) + \lambda f(x) = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist  $f(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\frac{\lambda}{c} x}$ , also  $\delta(x) = f'(x)e^{-\alpha x} = D_1 + D_2 e^{(\frac{\lambda}{c} - \alpha)x}$ . Wegen der Nettoprofitbedingung gilt  $\lambda E[X] = \lambda \frac{1}{\alpha} < c$ . Damit folgt aus  $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = 1$ , dass  $D_1 = 1$ . Da  $\delta(0) = 1 - \frac{\lambda}{c}$ , gilt  $D_2 = \frac{\lambda}{\alpha c}$ . Daher

$$\psi(x) = 1 - \delta(x) = \psi(x) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{(\frac{\lambda}{c} - \alpha)x}. [12]$$

□

In diesem Beispiel wird also  $L_t := \sum_{i=0}^{N_t} X_i$  gewählt, wobei  $N_t \sim \text{Poi}(\lambda t)$  und  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig sind und  $X_1, X_2, \dots$  identisch verteilte Zufallsvariablen mit  $X_i \sim \text{Exp}(\alpha)$  sind. Es gilt:

**Theorem 9.3.** Die charakteristische Funktion des zusammengesetzten Poisson-Prozesses  $Y_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i$  ist

$$\varphi_{Y_t}(s) = \exp(\lambda t(\varphi_{X_1}(s) - 1)),$$

wobei  $\varphi_{X_1}$  die charakteristische Funktion von  $X_1$  ist.

*Beweis.* Das folgt aus der Eigenschaften der charakteristischen Funktion. Für zufällige Summen  $S := \sum_{i=0}^N X_i$  mit  $N, X_1, X_2, \dots$  unabhängig und  $X_1, X_2, \dots$  identisch verteilt gilt

$$\varphi_S(t) = m_N(\varphi_{X_1}(t)),$$

wobei  $m_N$  die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von  $N$  ist. [13] □

Daraus folgt

$$\varphi_{L_t}(s) = \exp\left(\lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{isy} - 1) P_U(dy)\right),$$

wobei  $P_U$  die Verteilung der Sprunghöhen bezeichnet. Betrachtet man die Lévy-Khintchin-Formel 2.3, so gilt für

- $\beta = \lambda \int_{|x| < 1} x P_U(dx)$
- $\sigma^2 = 0$
- $\nu = \lambda P_U$ ,

$$\begin{aligned}
 E[e^{iuL_1}] &= \exp\left(-\left(\frac{\sigma^2}{2}u^2 - i\beta u + \int_{\{|x|\geq 1\}} (1 - e^{iux}) \nu(dx) + \int_{\{|x|<1\}} (1 - e^{iux} + iux) \nu(dx)\right)\right) \\
 &= \exp\left(i\left(\lambda \int_{\{|x|<1\}} x P_U(dx)\right)u + \int_{\{|x|\geq 1\}} (e^{iux} - 1) \nu(dx) + \int_{\{|x|<1\}} (e^{iux} - 1 - iux) \nu(dx)\right) \\
 &= \exp\left(\int_{\{|x|\geq 1\}} (e^{iux} - 1) \lambda P_U(dx) + \int_{\{|x|<1\}} (e^{iux} - 1 - iux + iux) \lambda P_U(dx)\right) \\
 &= \exp\left(\lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) P_U(dx)\right). \tag{9.3}
 \end{aligned}$$

Daher ist

$$\mu_1 = \int_0^\infty x \nu(dx) = \int_0^\infty x * \lambda \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Also folgt  $\rho = \frac{\mu_1}{c} = \frac{\lambda}{\alpha c}$ . Weiters gilt

$$b := \int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} \nu(dx) = \int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} \lambda \alpha e^{-\alpha x} dx.$$

Damit gilt für  $\omega \neq 0$  wegen 4.2

$$\Phi_f(\omega) = \frac{\int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} \nu(dx)}{c - \int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} \nu(dx)} = \frac{b}{c - b}.$$

Es folgt also für die Approximation

$$\begin{aligned}
 \varphi_e(u, N) &= \rho - \frac{1 - \rho}{2} \frac{2}{a} \frac{\rho}{1 - \rho} u - (1 - \rho) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{a} \Re\left(\Phi_f\left(\frac{k\pi}{a}\right)\right) \sin\left(k\pi \frac{u}{a}\right) \frac{a}{k\pi} \\
 &= \rho - \frac{u\rho}{a} - (1 - \rho) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{k\pi} \Re\left(\Phi_f\left(\frac{k\pi}{a}\right)\right) \sin\left(k\pi \frac{u}{a}\right).
 \end{aligned}$$

Der Graph der Ruinwahrscheinlichkeiten für  $N = 10$  ist in der Abbildung 9.1 zu sehen. In diesem Fall wurde  $N = 10$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 20$ ,  $c = 25$  und  $a = 90$  gewählt.

Vergleich exakte Ruinwahrscheinlichkeit versus Approximation N=10

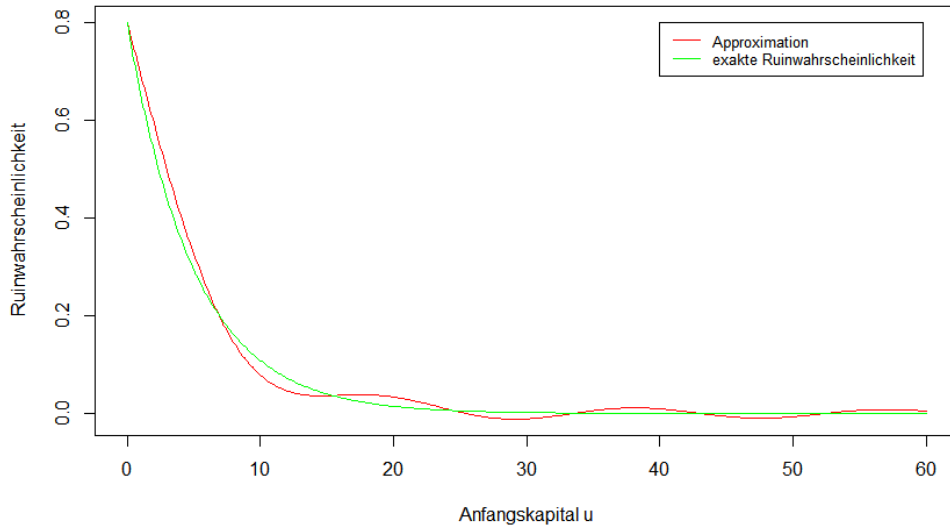


Abbildung 9.1: Exakte und approximative Ruinwahrscheinlichkeit abhängig vom Anfangskapital  $u$  für  $N = 10$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 20$ ,  $c = 25$  und  $a = 90$

Der Fehler der Approximation für  $N = 10$  ist in der folgenden Grafik 9.2 dargestellt.

Fehler der Approximation N=10

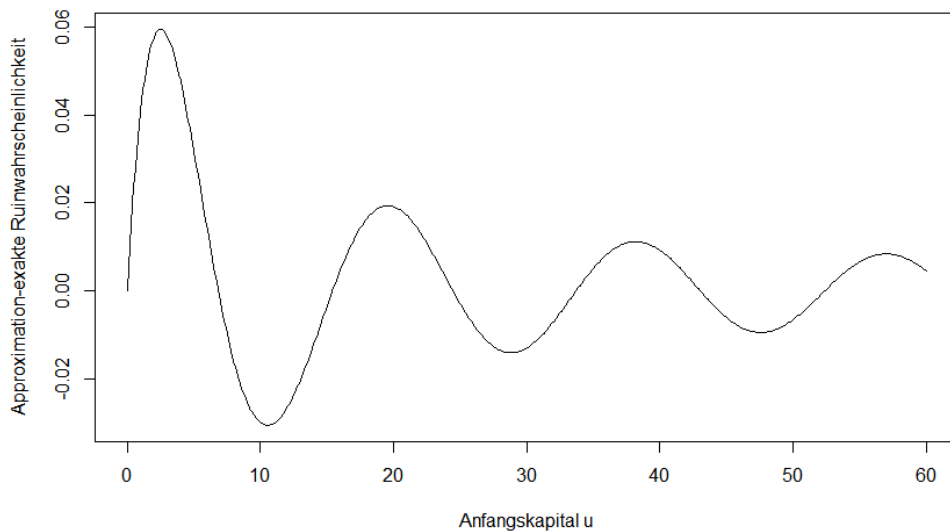


Abbildung 9.2: Fehler der Approximation für  $N = 10$

Abbildung 9.3 zeigt den Fehler für  $N = 100$ .

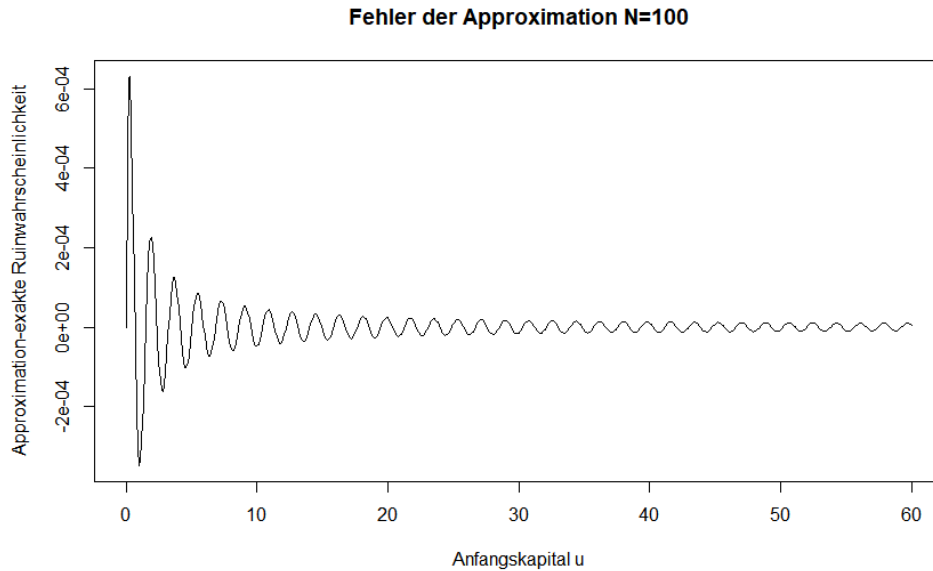


Abbildung 9.3: Fehler der Approximation für  $N = 100$

### 9.1.1 Martingalbeweis der Ruinwahrscheinlichkeit eines Cramér-Lundberg Prozesses mit exponentialverteilten Einzelschäden

In diesem Abschnitt wird ein alternativer Beweis für die Ruinwahrscheinlichkeit eines exponentialverteilten Cramér-Lundberg Prozesses vorgestellt. Der Überschussprozess  $S_t$  eines Risikoprozesses ist definiert als

$$S_t = u - R_t.$$

Ruinwahrscheinlichkeiten lassen sich in manchen Fällen folgendermaßen darstellen:

**Theorem 9.4.** Falls

1.  $\exists \gamma > 0$ , sodass  $(\exp(\gamma S_t))_{t \geq 0}$  ist ein Martingal und
2.  $S_t \rightarrow -\infty$  auf  $\{\tau(u) = \infty\}$ , wobei  $\tau(u)$  der Ruinzeitpunkt  $\tau(u) := \inf\{t \geq 0 : S_t > u\}$  ist,

gilt, dass sich die Ruinwahrscheinlichkeit  $\psi(u)$  darstellen lässt als

$$\psi(u) = \frac{e^{-\gamma u}}{E[e^{\gamma \xi(u)} | \tau(u) < \infty]},$$

wobei  $\xi(u) := S_{\tau(u)} - u$ .

*Beweis.* Zuerst wird das Optional Stopping Theorem zum Zeitpunkt  $\tau(u) \wedge T$  angewendet:

$$1 = E[e^{\gamma S_0}] = E[e^{\gamma S_{\tau(u) \wedge T}}] = E[e^{\gamma S_{\tau(u)}; \tau(u) \leq T}] + E[e^{\gamma S_{\tau(u)}; \tau(u) > T}].$$

Für  $T \rightarrow \infty$  geht aufgrund der zweiten Voraussetzung und des Satzes der dominierten Konvergenz der zweite Term gegen 0. Daher folgt

$$1 = E[e^{\gamma S_{\tau(u)}; \tau(u) < \infty}] = e^{\gamma u} E[e^{\gamma \xi_{\tau(u)}; \tau(u) < \infty}] = e^{\gamma u} E[e^{\gamma \xi_{\tau(u)} | \tau(u) < \infty}] \psi(u).$$

□

In diesem Beispiel ist also

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i - ct = Y_t - t,$$

wobei die Prämienintensität  $c$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich 1 gesetzt wird. Es ist bereits bekannt, dass

$$E[e^{tY_v}] = \exp\left(\lambda v \left(\frac{a}{a-t} - 1\right)\right).$$

Für  $\gamma := a - \lambda$  ist  $E[e^{\gamma S_v}] = 1$ , da

$$E[e^{\gamma S_v}] = E[e^{\gamma Y_v - \gamma v}] = e^{\lambda v \left(\frac{a}{a-\gamma} - 1\right)} \frac{1}{e^{\gamma v}} = \frac{e^{v(a-\lambda)}}{e^{v(a-\lambda)}} = 1.$$

Weiters sind die Zuwächse zusammengesetzter Poisson-Prozesse stationär und unabhängig, also folgt für  $\mathcal{F}_t = \sigma(S_v : v \leq t)$

$$E[e^{\gamma S_{t+v}} | \mathcal{F}_t] = e^{\gamma S_t} E[e^{\gamma(S_{t+v} - S_t)} | \mathcal{F}_t] = e^{\gamma S_t} E[e^{\gamma S_v}] = e^{\gamma S_t}.$$

Die Voraussetzung (1) von Theorem 9.4 ist also für  $\gamma = a - \lambda$  erfüllt. Auch die Voraussetzung (2) ist erfüllt. Das folgt aus dem Gesetz der großen Zahlen, da  $\lambda/a < 1$ . Zum Zeitpunkt  $\tau(u)$  springt  $(S_t)_{t \geq 0}$  auf einen Wert, der größer als  $u$  ist. Sei daher  $\tau(u) = t$  und  $S_{\tau(u)-} = x$ . Dann gilt für die Höhe des Sprungs  $U > u - x$  aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung, dass  $\xi(u) = U - u + x$  exponentialverteilt mit Parameter  $a$  ist. Daher folgt

$$E[e^{\gamma \xi(u)} | \tau(u) < \infty] = \int_0^\infty e^{\gamma x} a e^{-ax} dx = \int_0^\infty a e^{-\lambda x} dx = \frac{a}{\lambda}.$$

Mit Theorem 9.4 folgt die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{a} e^{(\lambda-a)u}. [14]$$

## 9.1.2 Rearrangement

Die approximative Ruinwahrscheinlichkeitsfunktion ist nicht monoton. Um das zu ändern, wird die Methode des Rearrangements aus Kapitel 8 angewandt. Das Rearrangement für  $N = 5$  sieht dann folgendermaßen aus

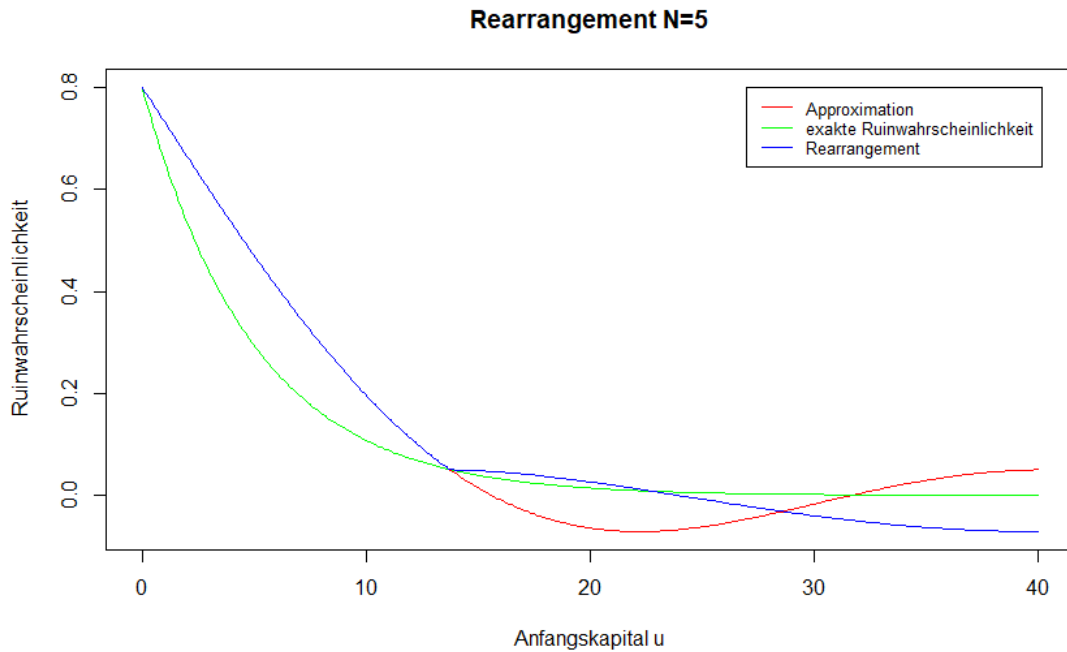


Abbildung 9.4: Exakte und approximative Ruinwahrscheinlichkeit und Rearrangement abhängig vom Anfangskapital  $u$  für  $N = 5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 20$ ,  $c = 25$  und  $a = 90$

Rund um  $u = 20$  ist das Rearrangement näher an der exakten Ruinwahrscheinlichkeit als die Approximation.

## 9.2 Lévy-Risikoprozess mit poissonverteiltem Verlustprozess

In diesem Beispiel wird  $(L_t)_{t \geq 0}$  poissonverteilt mit Intensitätparameter  $\lambda$  gewählt.

Der Risikoprozess ist daher  $R_t = u + ct - L_t$ .

Der Prozess  $R_t$  lässt sich umschreiben in

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$

wobei  $N_t$  ein homogener Poissonprozess mit Intensitätparameter  $\lambda$  ist und unabhängig von den Schadenhöhen  $X_i$  ist, die unabhängig und identisch Dirac-verteilt zum Punkt 1 sind.

**Theorem 9.5.** *Ist der Schadenhöhenprozess  $X$  auf  $\mu$  degeneriert, so folgt*

$$\psi(u) = 1 - (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\lfloor u/\mu \rfloor} e^{-\rho(k-u/\mu)} \frac{(\rho(k-u/\mu))^k}{k!},$$

wobei  $\rho$  die durchschnittliche kumulierte Höhe aller Schäden pro Zeiteinheit ist. Das heißt

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N_t} X_i \rightarrow \rho$$

fast sicher für  $t$  gegen  $\infty$ . [14]

Der Beweis dieses Satzes kann in dem Buch „Ruin Probabilities“ von Soren Asmussen nachgelesen werden. In diesem Beispiel gilt daher  $\rho = \lambda E[X_1] = \lambda$  und  $\mu = 1$ . Also folgt für die exakte Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(u) = 1 - (1 - \lambda) \sum_{k=0}^{\lfloor u \rfloor} e^{-\lambda(k-u)} \frac{(\lambda(k-u))^k}{k!}. [14]$$

Für die Approximation gilt wegen 9.3:

- $\beta = \lambda \int_{\{|x|<1\}} x \delta(dx)$
- $\sigma^2 = 0$
- $\nu = \lambda \delta,$

wobei  $\delta$  das Diracmaß zum Punkt 1 ist. Also folgt für  $\mu_1$  und  $b$

$$\mu_1 = \int_0^\infty x \nu(dx) = \lambda,$$

$$b = \int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} \nu(dx) = \frac{\lambda(e^{i\omega} - 1)}{i\omega}.$$

Also ist die Approximation analog zu dem vorherigen Beispiel

$$\varphi_e(u, N) = \rho - \frac{u\rho}{a} - (1 - \rho) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{k\pi} \Re \left( \Phi_f \left( \frac{k\pi}{a} \right) \right) \sin \left( k\pi \frac{u}{a} \right),$$

wobei  $\rho = \lambda/c$  und  $\Phi_f(\omega) = b/(c - b)$ . Der Graph der Ruinwahrscheinlichkeiten für  $N = 20$  sieht daher folgendermaßen aus:

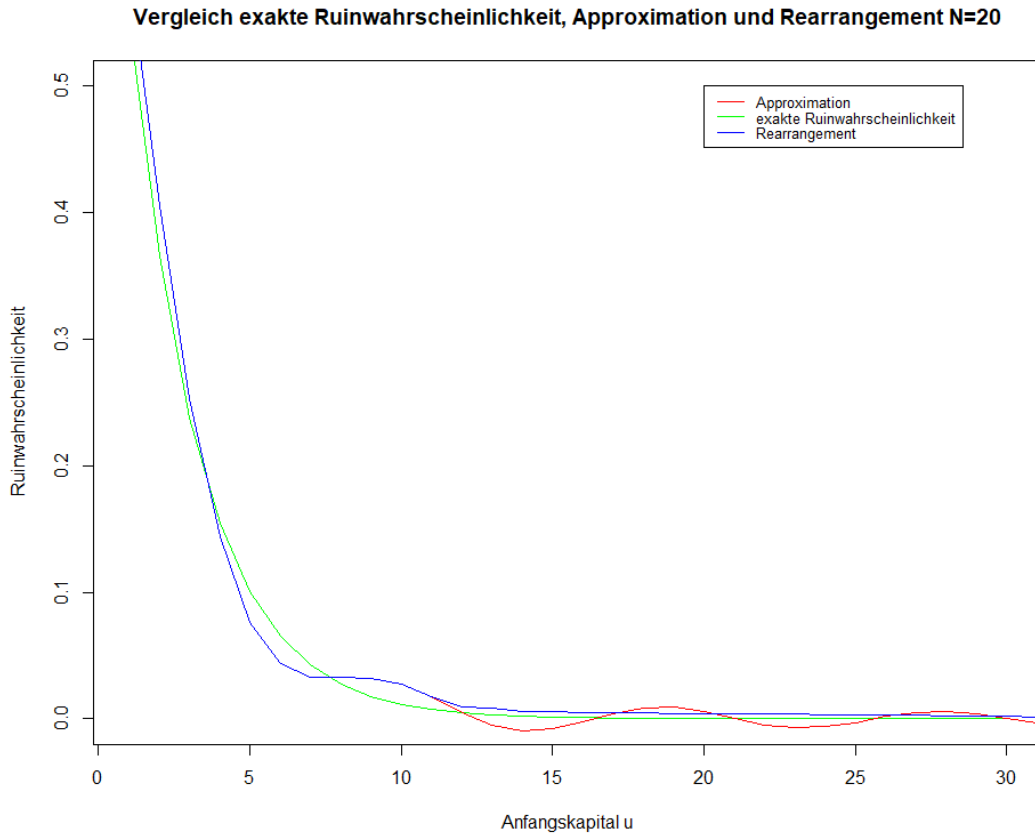


Abbildung 9.5: Exakte und approximative Ruinwahrscheinlichkeit und Rearrangement abhängig vom Anfangskapital  $u$  für  $N = 20$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 20$ ,  $c = 25$  und  $a = 90$

### 9.3 Cramér-Lundberg Prozess mit Gamma-verteiltern Einzelschäden

Die Ruinwahrscheinlichkeiten für einen Cramér-Lundberg Prozess mit Gamma-verteiltern Einzelschäden können nicht exakt berechnet werden. Jedoch können sie mit der Fourier-Cosinus Methode angenähert werden. Sei also

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i,$$



wobei  $(N_t)_{t \geq 0}$  ein homogener Poissonprozess mit Parameter  $\lambda$  ist und  $X_1, X_2, \dots$  sind unabhängige  $G(b, p)$ -verteilte Zufallsvariablen. Der Zählprozess  $(N_t)_{t \geq 0}$  ist unabhängig von  $X_1, X_2, \dots$ . Für die Approximation gilt wegen 9.3:

- $\beta = \lambda \int_0^1 x \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} dx$
- $\sigma^2 = 0$
- $\nu = \lambda \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}$ .

Es folgt daher

$$\mu_1 = \int_0^\infty x \nu(dx) = \int_0^\infty x * \lambda \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} dx = \frac{\lambda p}{b}.$$

Analog zu den letzten Beispielen gilt

$$b = \int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} \nu(dx) = \int_0^\infty \frac{e^{i\omega x} - 1}{i\omega} * \lambda \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} dx$$

und für  $\omega \neq 0$  ist  $\phi_f(\omega) = \frac{b}{c-b}$ . Die Approximation ist dann

$$\varphi_e(u, N) = \rho - \frac{u\rho}{a} - (1 - \rho) \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{k\pi} \Re \left( \Phi_f \left( \frac{k\pi}{a} \right) \right) \sin \left( k\pi \frac{u}{a} \right),$$

wobei  $\rho = \mu_1/c$ . In der Abbildung 9.6 sind die Ruinwahrscheinlichkeiten für  $b = 1$  und  $p = 2.5$  dargestellt.

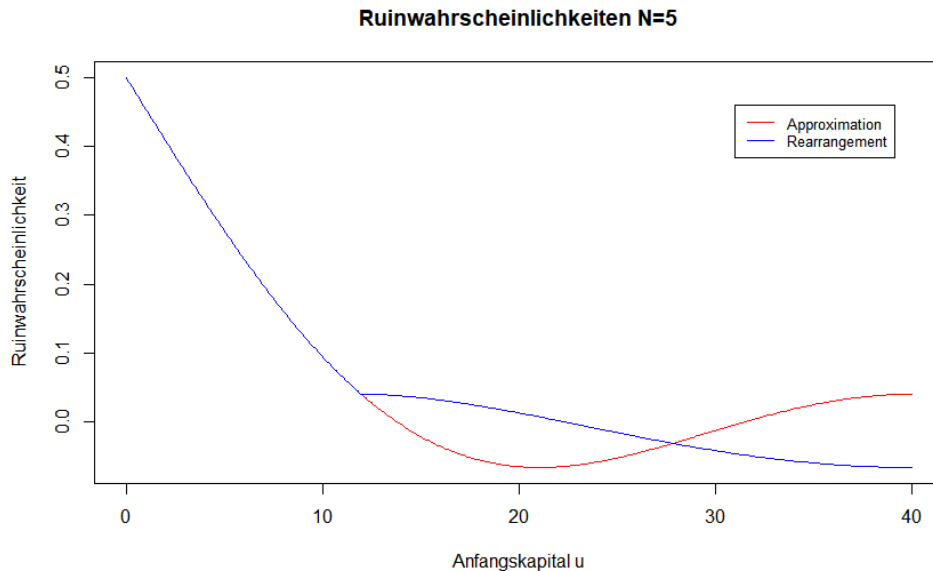


Abbildung 9.6: Approximative Ruinwahrscheinlichkeit und Rearrangement abhängig vom Anfangskapital  $u$  für  $N = 5, p = 2.5, b = 1, \lambda = 5, c = 25, a = 90$

# Kapitel 10

## Conclusio

Schlussendlich können nun die Stärken und Schwächen der Fourier-Cosinus Methode betrachtet werden, nachdem die Funktionsweise und die konkrete Anwendung bekannt sind.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Fourier-Cosinus Methode in den zwei Beispielen, bei denen es möglich war, die Ruinwahrscheinlichkeit explizit zu berechnen, brauchbare Approximationen liefert. Weiters kann mit dem Rearrangement sogar die Monotonie der Ruinwahrscheinlichkeitsfunktion gewährleistet werden. Außerdem kann für die Approximation eine Fehlerschranke angegeben werden.

Nachteilig ist, dass je nach gewünschter Fehlerschranke der Rechenaufwand erhöht werden muss. Dies kann bei sehr klein gewünschtem Fehler zu langen Rechenzeiten führen.

Diese Methode der Approximation kann für Ruinwahrscheinlichkeiten mit Verteilungen, die keine explizite Form haben, verwendet werden. Da aber Ruinwahrscheinlichkeiten nur in einigen ausgewählten Fällen explizit berechnet werden können, ist die Fourier-Cosinus Methode eine wichtige Alternative zu herkömmlichen Approximationsverfahren. In Beispiel 3 wurden approximative Werte der Ruinwahrscheinlichkeiten für einen Cramér-Lundberg Prozess mit Gamma-verteilten Einzelschäden berechnet. Auch können Ruinwahrscheinlichkeiten nur anhand der Momente geschätzt werden, wie in Kapitel 7 erklärt wird.

Die Fourier-Cosinus Methode kann für Versicherungsunternehmen zum Abschätzen der Ruinwahrscheinlichkeit nützlich sein und deren Verwendung sollte auf jeden Fall in Betracht gezogen werden.

## Anhang

Im Folgenden wird der R Code des ersten Beispielles angehängt. Der Code des zweiten und dritten Beispiels gleicht diesem in weiten Teilen. Erwähnenswert ist jedoch, dass die exakten Werte der Ruinwahrscheinlichkeit für das Beispiel 2 in Maple berechnet wurden, da R numerisch mit doppelter Genauigkeit rechnet und das in diesem Fall nicht ausreichend war, um brauchbare Ergebnisse zu erhalten.

```

alpha<-1
lambda<- 20
c<- 25
mul<-lambda/alpha
rho<-mul/c
N<- 5
a<- 90
grossphi<-function(w){
  b<-function(x){
    (exp(1i*w*x)-1)/(1i*w)*lambda*alpha*exp(-alpha*x)
  }
  d<-integrate( function(x) Re(b(x)), 0, Inf )$value +
    1i * integrate( function(x) Im(b(x)), 0, Inf )$value
  return(d/(c-d))
}

Fk<-function(k){
  return(2/a*Re(grossphi((k*pi/a))))
}

appr<-function(u){
  chi<-function(k){
    return(sin(k*pi*u/a)*a/(k*pi))
  }
}

```

```
summe <- 0
for(i in (1:(N-1))){
  summe <- (summe+chi(i)*Fk(i))
}
return(rho -(u*rho)/a-(1-rho)*summe)

}

exact<-function(u){
  return(lambda/(alpha*c)*exp((lambda/c-alpha)*u))
}
```

# Literaturverzeichnis

- [1] Riccardo Gatto. *Stochastische Modelle der aktuarielle Risikotheorie*. Springer Spektrum, 2 edition, 2020.
- [2] Besije Richter. *Über einige neue Formeln für die Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Risikomodell mit Gamma-Schäden*. Technische Universität Wien, 2018. Diplomarbeit.
- [3] Huang Lorick. *Introduction to Lévy Processes*, 2021. [https://perso.math.univ-toulouse.fr/lhuang/files/2012/04/poly\\_levy.pdf](https://perso.math.univ-toulouse.fr/lhuang/files/2012/04/poly_levy.pdf), Last accessed on 2021-28-12.
- [4] Philip E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2003.
- [5] J. C. van den Berg E. M. van de Vrie R. J. Beerends, H. G. ter Morsche. *Fourier and Laplace Transforms*, 2012.
- [6] Ursa Pantle. *Stochastik*. Universität Ulm, 2005. <https://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ss05/wt/skript/node37.html>, Last accessed on 2022-28-03.
- [7] Hrvoje Šikić Zoran Vondraček Miljenko Huzak, Mihael Perman. *Ruin probabilities and decompositions for general perturbed risk processes*. Institute of Mathematical Statistics, August 2004. <https://doi.org/10.1214/105051604000000332>, Last accessed on 2022-28-03.
- [8] H. Yang K.W. Chau, S.C.P. Yam. Fourier-cosine method for ruin probabilities, June 2014. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042714005706?via%3Dihub>, Last accessed on 2021-20-11.
- [9] Po-Ning Chen. *Section 26 Characteristic Functions*. National Chiao Tung University. <http://shannon.cm.nctu.edu.tw/prob/c26s08.pdf>, Last accessed on 2022-02-11.

- [10] Alfred Galichon Victor Chernozhukov, Iván Fernández-Val. *Rearranging edge-worthcornishfisher expansions*. *Economic Theory* 42, 2010. <http://dx.doi.org/10.1007/s00199-008-0431-z>, Last accessed on 2022-11-11.
- [11] Reiner Lauterbach. *Höhere Analysis*. Universität Hamburg, 2015. [https://www.math.uni-hamburg.de/home/lauterbach/scripts/ana3\\_WS1516/v4.pdf](https://www.math.uni-hamburg.de/home/lauterbach/scripts/ana3_WS1516/v4.pdf), Last accessed on 2022-11-11.
- [12] Julia Eisenberg. *Skript zur Ruin- und Risikotheorie*. Technische Universität Wien, 2020.
- [13] Universität Ulm. *Zusammengesetzte Poisson-Prozesse*. <https://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ss05/wt/skript/node16.html>, Last accessed on 2023-25-01.
- [14] Soren Asmussen. *Ruin Probabilities*, 1. edition, 2000.