

DIPLOMARBEIT

Hedging von Langlebigkeitsrisiko

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieurin

im Rahmen des Studiums

Masterstudium Finanz- und Versicherungsmathematik

eingereicht von

Melanie Dobrowolny, BSc

Matrikelnummer 01204190

ausgeführt am Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Fakultät für Mathematik und Geoinformation der Technischen Universität Wien

Betreuung

Betreuer: Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer

Wien, 31. Januar 2023

(Unterschrift Verfasserin)

(Unterschrift Betreuer)



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 31. Januar 2023

Melanie Dobrowolny

Einverständniserklärung zur Plagiatsprüfung

Ich nehme zur Kenntnis, dass die vorgelegte Arbeit mit geeigneten und dem derzeitigen Stand der Technik entsprechenden Mitteln (Plagiat-Erkennungssoftware) elektronisch-technisch überprüft wird. Dies stellt einerseits sicher, dass bei der Erstellung der vorgelegten Arbeit die hohen Qualitätsvorgaben im Rahmen der ausgegebenen der an der TU Wien geltenden Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis - „Code of Conduct“ (Mitteilungsblatt 2007, 26. Stück, Nr. 257 idgF.) an der TU Wien eingehalten wurden. Zum anderen werden durch einen Abgleich mit anderen studentischen Abschlussarbeiten Verletzungen meines persönlichen Urheberrechts vermieden.

Wien, am 31. Januar 2023

Melanie Dobrowolny



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Danksagung

Vorab möchte ich an dieser Stelle einigen Personen meinen Dank aussprechen, ohne die die Fertigstellung dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Trotz der Tatsache, dass es auch unangenehm werden konnte, wenn die Frage nach dem Fortschreiten der Diplomarbeit gestellt wurde, muss ich mich genau dafür bei sämtlichen Freund:innen und Familienmitgliedern bedanken. Ihre unterstützenden Worte halfen mir weiterzumachen und motivierten mich.

Insbesondere ein großes Danke an Marisa, Markus, Petra und Ricarda für eure hilfreichen Ratschläge und eure offenen Ohren für meine Probleme.

Besonders möchte ich mich auch bei Benjamin bedanken, der mir half, an mich selbst zu glauben und mir eine große emotionale Stütze war.

Zuletzt danke ich natürlich auch meinem Betreuer, Thorsten Rheinländer, der sehr geduldig mit mir war und stets unterstützende Worte für mich hatte.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Inhaltsverzeichnis

1	Betrachtung im zeitdiskreten Szenario	10
1.1	Die Verpflichtung	10
1.1.1	Modelpoints	10
1.1.2	Experience Ratios	11
1.1.3	Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten	12
1.1.4	Der Barwert der Rentenobligations - $L(0)$	13
1.1.5	Bewertung der Verpflichtung zum Zeitpunkt T	14
1.2	Der Langlebigkeitshedge	15
1.2.1	Das Hedginginstrument	15
1.2.2	Das Hedge-Underlying	16
2	Einbindung eines Kapitalmodells	18
2.1	Kapitalerleichterung	18
2.2	Vorgehensweise zur Berechnung der Kapitalerleichterung	20
3	Simulation von zwei Populationen	22
3.1	Das Lee Carter Modell	23
3.1.1	Parameterschätzung im Lee Carter Modell	24
3.2	Das Plat Modell	25
4	Betrachtung des zeitstetigen Szenarios	27
4.1	Die Verpflichtung im zeitstetigen Szenario	27
4.1.1	Allgemeines	27
4.1.2	Stochastische Mortalitätsintensität	28
4.1.3	Bewertung der Verpflichtung im zeitstetigen Szenario	30
4.2	Der Langlebigkeitshedge im zeitstetigen Szenario	31
4.2.1	Das Hedginginstrument (zeitstetig)	31
4.2.2	Das Hedge-Underlying (zeitstetig)	31
5	Berechnung der Kapitalerleichterung anhand der Daten von Österreich und Wien	33
5.1	Lee Carter Modell für Österreich	34

5.2	Lee Carter Modell für Wien	36
5.3	Erzeugung einer Simulation	37
5.4	Ergebnisse	39
6	Zusammenfassung	42
A	R Code	43
	Literatur	61

Einleitung

„Longevity risk - the risk that life spans exceed expectation - is a significant concern for defined benefit pension plans and life insurers with large annuity portfolios.“

- Coughlan u. a., 2011, S. 150

Langlebighkeitsrisiko entsteht immer dann, wenn es um monetäre Absicherung im Alter geht und betrifft somit im versicherungsmathematischen Umfeld jegliches Produkt mit Erlebensversicherungs- oder Rentenversicherungscharakter.

Als Absicherung dieses Risikos waren lange Zeit nur Verträge mit Rückversicherungen möglich. Im Jahr 2008 kamen dann die ersten Langlebighkeits-Hedges am Kapitalmarkt auf. Die erste Transaktion von Langlebighkeitsrisiko aus einer Rentenobligatiion basierte auf einem standardisierten, indexbasierten Hedge. Dieser wurde vom Versicherungsunternehmen Lucida plc ausgeübt und basierte auf einem sogenannten q-Forward¹, dessen Payoff vom LifeMetrics longevity index für England and Wales abhing².

Die Zuhilfenahme eines indexbasierten Hedges hat dabei diverse Vor- als auch Nachteile.

Zum einen erreicht man durch ein solches Hedging-Instrument eine größere Liquidität und damit einhergehend geringere Risikokosten aufgrund der Möglichkeit zur breiteren Streuung des Risikos. Zum anderen kann ein großes zu hedgendes Risiko zur Notwendigkeit der Verwendung eines Index führen.

Zu den Nachteilen zählt hier allen voran das basis risk, das dadurch entsteht, dass der Hedge aufgrund der abweichenden Mortalitätsentwicklungen bzw. -annahmen des zu hedgenden Portfolios und des Index nicht perfekt sein kann (Coughlan u. a., 2011).

In der folgenden Arbeit soll die Vorgehensweise zur Durchführung eines solchen indexbasierten Langlebighkeits-Hedges anhand eines Rentenportfolios vorgestellt werden.

¹Ein q-Forward ist im Grunde ein Zero-Coupon-Swap zwischen einer fixierten und der realisierten Mortalität. Das heißt, die Vertragspartner einigen sich darauf, zu einer festen Maturität einen Nominalbetrag entsprechend der jeweiligen Mortalität auszutauschen. Die Bepreisung eines solchen Vertrages erfolgt durch die Wahl der fixen Mortalität, da zu Vertragsabschluss kein Geld fließt.

²In der Literatur bilden die Daten der männlichen Bevölkerung von England und Wales oft die Grundlage für praktische Beispiele.

In Kapitel 1 wird ein zeitdiskretes Szenario zugrundegelegt, welches in Kapitel 4 auf ein zeitstetiges Szenario ausgeweitet wird.

Kapitel 2 geht auf die Einbindung eines Kapitalmodells ein und in Kapitel 3 wird eine mögliche Simulation von zwei Populationen betrachtet.

Abschließend folgt in Kapitel 5 ein mittels des Programms R durchgeführtes Beispiel anhand der Daten der weiblichen Bevölkerung von Österreich und Wien.

Zuletzt erfolgt abschließend eine kurze Zusammenfassung dieser Arbeit, sowie im Anhang der zu Kapitel 5 gehörende R Code.

Kapitel 1

Betrachtung im zeitdiskreten Szenario

Bevor in Kapitel 4 die Transformation in ein zeitstetiges Setting erfolgt, sollen vorerst die Erkenntnisse und die Vorgehensweise im zeitdiskreten Fall ausgeführt werden. Im praktischen Teil dieser Arbeit wird zudem auf dieses Kapitel Bezug genommen, da die verwendeten Daten zeitdiskret sind.

Im Weiteren folgen wir dazu der Vorgehensweise von Andrew J.G. Cairns und Ghali El Boukfaoui in deren Paper “Basis Risk in Index-Based Longevity Hedges: A Guide for Longevity Hedgers”.

1.1 Die Verpflichtung

Zunächst ist es notwendig, die Verpflichtung, welcher das maßgebliche, zu hedgende Risiko zugrunde liegt, näher zu betrachten. Die in diesem Kapitel betrachtete Verpflichtung sei ein Portfolio an Rentenversicherungen. Jede Rentenversicherung soll in der leistungspflichtigen Phase pro Jahr nachschüssig eine Geldeinheit auszahlen. Für unterjährige Rentenzahlungen (also zum Beispiel bei monatlicher Auszahlung) müsste die folgende Vorgehensweise entsprechend angepasst werden. Man bräuchte hierzu in etwa angepasste Überlebenswahrscheinlichkeiten und Diskontierungsfaktoren.

Da die vereinfachende Annahme der jährlichen Rentenzahlungen aber die Ergebnisse nicht beeinflusst, wird diese gewählt.

1.1.1 Modelpoints

Dazu definieren wir die signifikanten Merkmale (auch Modelpoints genannt), anhand derer die Verpflichtung dargestellt werden kann. Es wird also eine Menge von Modelpoints erstellt. Diese Menge kann unter anderem folgende Punkte enthalten, muss jedoch nicht auf diese beschränkt sein:

- Alter der ersten versicherten Person

- Geschlecht der ersten versicherten Person
- Alter der zweiten versicherten Person
- Geschlecht der zweiten versicherten Person
- Auszahlungsintensität
- Beginn der Auszahlung

Wir betrachten also Rentenzahlungen, welche nach dem Ableben der ersten versicherten Person auf eine hinterbliebene Person übergehen können (zum Beispiel auf eine:n Witwe:r oder Waise:n). Im praktischen Abschnitt wird hier zur Vereinfachung die zweite versicherte Person nicht behandelt, sondern ein Portfolio von Rentenversicherungen ohne Übergang betrachtet.

Die Menge der Modelpoints wird als Exposure bezeichnet und ihre Mächtigkeit mit N .

Die zu hedgende Verpflichtung ist daher der Barwert einer Rentenobligation, es wird zum Zeitpunkt 0 also ein Punktschätzer benötigt. Im Rahmen von Solvency II wäre das zum Beispiel die Best Estimate Reserve plus einer Risikomarge. Wir führen folgende Notation ein:

- L sei der Barwert der Rentenobligation zum Zeitpunkt 0, also eine Zufallsvariable, die erst zum Tod der versicherten Person bekannt ist.
- $L(0)$ sei ein Punktschätzer von L zum Zeitpunkt 0. $L(0)$ ist die Reserve zum Zeitpunkt 0.
- $L(t)$ bezeichne einen Punktschätzer von L zum Zeitpunkt t , $L(t)$ ist also ebenfalls eine Zufallsvariable, die erst zum Todeszeitpunkt der versicherten Person bekannt ist.

1.1.2 Experience Ratios

Es werden weiters zwei verschiedene Populationen betrachtet, zwischen denen im Folgenden unterschieden werden muss. Natürlich ist dies zum einen die eigene oder individuelle Population des Hedgers und zum anderen eine Referenzpopulation, anhand derer der indexbasierte Langlebigkeitshedge später definiert wird. Erstere soll nun mit I und letztere mit R bezeichnet werden. Für die Notation wurden die von Cairns und El Boukfaoui, 2021 vorgeschlagenen Bezeichnungen abgeändert, um die deutschen Bezeichnungen sinnvoll wiederzugeben.

Jede dieser Populationen hat eigene Mortalitätsentwicklungen. Es wird jedoch ein Zusammenhang zwischen den beiden Populationen benötigt. Wir definieren also experience ratios, welche die Mortalität der Population I als Anteil an jener der Population R darstellen sollen. Experience ratios müssen nicht konstant bleiben, sondern können mit fortgeschrittener Zeit rekaliert werden. Diese seien wie folgt definiert.

$\epsilon_1^0(i, t)$ = experience ratio zum Zeitpunkt 0, welche für Rückstellungsberechnungen zum Zeitpunkt 0 für die erste versicherte Person verwendet wird. Dabei sei i der jeweilige Modelpoint und t der Zeitpunkt, zu dem dieser Faktor anwendbar ist.

$\epsilon_2^0(i, t)$ = experience ratio zum Zeitpunkt 0, welche für Rückstellungsberechnungen zum Zeitpunkt 0 für die hinterbliebene Person verwendet wird. Dabei sei i der jeweilige Modelpoint und t der Zeitpunkt, zu dem dieser Faktor anwendbar ist.

$\epsilon_1^T(i, t)$ = rekaliبریerte experience ratio zum Zeitpunkt T , welche sämtliche Informationen bis T für die erste versicherte Person beinhaltet. Dabei sei i der jeweilige Modelpoint und t der Zeitpunkt, zu dem dieser Faktor anwendbar ist. $\epsilon_1^T(i, t)$ ist für Berechnungen der Reserve zum Zeitpunkt T für zukünftige Verpflichtungen zu verwenden, also gilt in diesem Fall $t > T$.

$\epsilon_2^T(i, t)$ = rekaliبریerte experience ratio zum Zeitpunkt T , welche sämtliche Informationen bis T für die hinterbliebene Person beinhaltet. Dabei sei i der jeweilige Modelpoint und t der Zeitpunkt, zu dem dieser Faktor anwendbar ist. $\epsilon_2^T(i, t)$ ist für Berechnungen der Reserve zum Zeitpunkt T für zukünftige Verpflichtungen zu verwenden, also gilt in diesem Fall $t > T$.

Experience ratios werden als Teil des Hedgevertrages vereinbart und müssen daher zum Zeitpunkt 0 explizit definiert werden. Diese können von den experience ratios, welche zur Bewertung der Verpflichtung zur Zeit 0 dienen, abweichen. Die im Hedgevertrag festgehaltenen experience ratios sollen mit $\epsilon_k^{H0}(i, t)$ bezeichnet werden.

Für praktische Anwendungen gilt jedoch meist $\epsilon_k^{H0}(i, t) = \epsilon_k^0(i, t)$ für alle k, i und t .

1.1.3 Sterbe- und Überleberlebenswahrscheinlichkeiten

Unter Verwendung der experience ratios lassen sich nun die Sterbewahrscheinlichkeiten der beiden Population zusammengefasst betrachten. Es seien die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten für die erste Person im Modelpoint i und deren hinterbliebene Person der Referenzpopulation wie folgt:

$q_1^R(i, t) = \mathbb{P}(\text{erste Person im Modelpoint } i \text{ tot zur Zeit } t \text{ unter der Bedingung, dass sie zum Zeitpunkt } t - 1 \text{ noch am Leben war})$

$q_2^R(i, t) = \mathbb{P}(\text{zugehörige hinterbliebene Person in Modelpoint } i \text{ tot zur Zeit } t \text{ unter der Bedingung, dass sie zum Zeitpunkt } t - 1 \text{ noch am Leben war})$

Analog gelten die Bezeichnungen $q_1^I(i, t)$ und $q_2^I(i, t)$ für die entsprechenden Sterbewahrscheinlichkeiten der individuellen Population. Mittels der experience ratios gilt nun für $k = 1, 2$ zum Zeitpunkt 0

$$q_k^I(i, t) = e_k^0(i, t) q_k^R(i, t).$$

Bekanntermaßen kann auch die Überlebenswahrscheinlichkeit bis zu einem bestimmten Zeitpunkt mittels der Sterbewahrscheinlichkeiten bestimmt werden. Es sei

$$S_k^I(i, t) = \prod_{n=1}^t (1 - q_k^I(i, n))$$

für $k = 1, 2$ der Anteil an bis zum Zeitpunkt t überlebenden Personen/zugehörigen Hinterbliebenen der individuellen Population. Folglich bezeichnet $(1 - S_1^I(i, t))(S_2^I(i, t))$ den Anteil an überlebenden hinterbliebenen Personen der individuellen Population, unter der Voraussetzung, dass die erste Person zum Zeitpunkt t bereits verstorben ist.

Wahrscheinlichkeitstheoretisch betrachtet gehen wir davon aus, dass die Todeszeitpunkte aller betrachteten Personen voneinander unabhängige Zufallsvariablen sind. Dies ist eine vereinfachende Annahme, als Erweiterung könnten an dieser Stelle in etwa Abhängigkeiten zwischen erster Person und hinterbliebener Person betrachtet werden.

1.1.4 Der Barwert der Rentenobligatio - $L(0)$

Es wurden nun bereits einige Grundlagen erarbeitet, welche benötigt werden, um den $L(0)$ zu ermitteln. Für die Bezeichnung der Rentenleistungen führen wir folgende Notation ein:

$B_1(i, t)$ = Rentenleistung zum Zeitpunkt t im Modelpoint i , zahlbar falls die erste versicherte Person noch am Leben ist

$B_2(i, t)$ = Rentenleistung zum Zeitpunkt t im Modelpoint i , zahlbar falls die erste versicherte Person verstorben, die hinterbliebene Person aber noch am Leben ist

Für die Ermittlung der Überlebenswahrscheinlichkeiten $S_k^I(i, t)$ ist in der Theorie die Mortalität der individuellen Population notwendig. Für die praktische Berechnung sind an dieser Stelle Punktschätzer zu verwenden. Das kann entweder durch Erwartungswertbildung oder einfach durch die Verwendung des mittleren Pfades der Verteilung der Mortalität der Referenzpopulation geschehen (wir wollen schlussendlich nur auf Basis der Referenzpopulation rechnen).

Diese Schätzwerte seien $\hat{q}_k^{VR}(i, t)$ für $k = 1, 2$. Das V in der Notation soll dabei hervorheben, dass diese Sterbewahrscheinlichkeiten zur Bewertung der Verpflichtung dienen.

Der Barwert der Verpflichtung lässt sich nun wie folgt berechnen:

$$L(0) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^M P(0, t) (\hat{S}_1^I(i, t) B_1(i, t) + (1 - \hat{S}_1^I(i, t)) \hat{S}_2^I(i, t) B_2(i, t))$$

Dabei seien

- N = Mächtigkeit der Menge der Modelpoints,
- M = letztmöglicher Zeitpunkt einer Rentenzahlung bezüglich aller Modelpoints,
- $\hat{S}_k^I(i, t) = \prod_{n=1}^t (1 - \epsilon_k^0(i, n) \hat{q}_k^{VR}(i, n))$ die Schätzer für $S_k^I(i, t)$ für $k = 1, 2$ und
- $P(0, t)$ der Preis einer Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t , die einer Geldeinheit zu $T > t$ auszahlt. $P(0, t)$ entspricht daher einem geeigneten Diskontierungsfaktor.

1.1.5 Bewertung der Verpflichtung zum Zeitpunkt T

Um die Effektivität des Hedges zu messen, ist es notwendig, die Verteilung der Verpflichtung zum Zeitpunkt T zu betrachten.

Dabei wollen wir zur Berechnung zum Zeitpunkt 0 konsistent bleiben. Wir erhalten daher:

$$\begin{aligned}
 L(T) &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{P(0, t)}{P(0, T)} (S_1^I(i, t) B_1(i, t) + (1 - S_1^I(i, t)) S_2^I(i, t) B_2(i, t)) \\
 &+ \sum_{i=1}^N \sum_{t=T+1}^M \frac{P(0, t)}{P(0, T)} (\tilde{S}_1^I(i, t) B_1(i, t) + (1 - \tilde{S}_1^I(i, t)) \tilde{S}_2^I(i, t) B_2(i, t))
 \end{aligned}$$

Dabei ist darauf zu achten, welche Rechnungsgrundlagen in der Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Terme herangezogen werden.

In der ersten Doppelsumme handelt es sich zum Zeitpunkt T um Sterblichkeitsdaten aus der Vergangenheit, da $t \leq T$. Hier können also die bereits definierten Sterbewahrscheinlichkeiten $q_k^I(i, t) = \epsilon_k^0(i, t) q_k^R(i, t)$ für $k = 1, 2$ verwendet werden.

Die zweite Doppelsumme muss zudem wieder anhand der zukünftigen Sterblichkeit der Referenzpopulation ausgewertet werden. Da bereits Zeit bis T vergangen ist, werden hier also die oben beschriebenen rekalierten experience ratios benötigt. Diese werden mit der projizierten Mortalität der Referenzpopulation kombiniert.

Explizit gilt daher für die Überlebenswahrscheinlichkeiten für $k = 1, 2$

$$\begin{aligned}
 S_k^I(i, t) &= \prod_{n=1}^t (1 - q_k^I(i, n)) \text{ für } t \leq T \text{ und} \\
 \tilde{S}_k^I(i, t) &= S_k^I(i, T) \prod_{n=T+1}^t (1 - \epsilon_k^T(i, n) \hat{q}_k^{VR}(i, n)) \text{ für } t > T.
 \end{aligned}$$

Die projizierten Sterbewahrscheinlichkeiten $\tilde{q}_k^{VR}(i, n)$ entstammen einem (rekalibrierten) Sterblichkeitsmodell der Referenzpopulation, welches unter Berücksichtigung aller Informationen bis zum Zeitpunkt T erstellt wird. Dieses Modell muss nicht ident zu jenem sein, welches zur Ermittlung des Payoffs des Hedginginstruments verwendet wird.

1.2 Der Langlebigkeitshedge

In diesem Kapitel soll das Hedge-Underlying in einer Art und Weise konstruiert werden, dass es die Verpflichtung zu einer vorgegebenen Zeit T so gut wie möglich repliziert. Dabei soll natürlich ebenfalls die Mortalität der Referenzpopulation die einzige Quelle an Unsicherheit darstellen. Hierzu halten wir uns weiterhin an die Vorgehensweise von Cairns und El Boukfaoui, 2021.

Im Folgenden sei T ein definierter fester Zeitpunkt, es ist daher für Rentenleistungen nach T ein geeignetes Modell zur Bewertung dieser zukünftigen Zahlungen notwendig. Dieses Modell soll ebenfalls in diesem Kapitel vorgestellt werden. Damit werden sowohl die cash flows bis zum Zeitpunkt T als auch der Barwert der cash flows nach T abgebildet.

1.2.1 Das Hedginginstrument

Zunächst halten wir folgende Definitionen fest.

- Der fixe Zeitpunkt T sei die Maturität des Hedges.
- $X(T)$ sei das Hedge-Underlying, welches im Folgenden noch definiert wird.
- $H(T) = u \cdot h(X(T))$ sei der Payoff des Hedginginstruments zum Zeitpunkt T , wobei u die fiktive Quantität sei. Aus den folgenden Beschreibungen wird die intuitive Wahl von u aufgrund der Konstellation des gewählten Hedginginstruments hervorgehen.

Hier sei das Hedginginstrument ein Bull-Call-Spread (oder Hausse Spread). Dabei handelt es sich um eine Option, welche sich aus einem Kauf einer Calloption mit niedrigerem Ausübungspreis und einem Verkauf einer Calloption mit höherem Ausübungspreis konstruieren lässt. Der Ausübungszeitpunkt sowie das Underlying der Calls sei jedoch ident. Der Bull-Call-Spread gehört zu den vertikalen Spreads und ist im Vergleich zu einem Long Call durch den Spread (Differenz aus dem Basispreis des Short Calls und dem Basispreis des Long Calls) begrenzt (vgl. CAPTRADER, 2022).

Wir bezeichnen mit AP (Attachment Point) den Ausübungspreis der Long-Call-Position und mit EP (Exhaustion Point) den Ausübungspreis der Short-Call-Position.

Bei Wahl dieser Optionsstrategie wird auf einen moderaten Anstieg im Preis des Underlyings gehofft.

Somit gilt

$$h(x) = \max\left\{0, \min\left\{\frac{x - AP}{EP - AP}, 1\right\}\right\}.$$

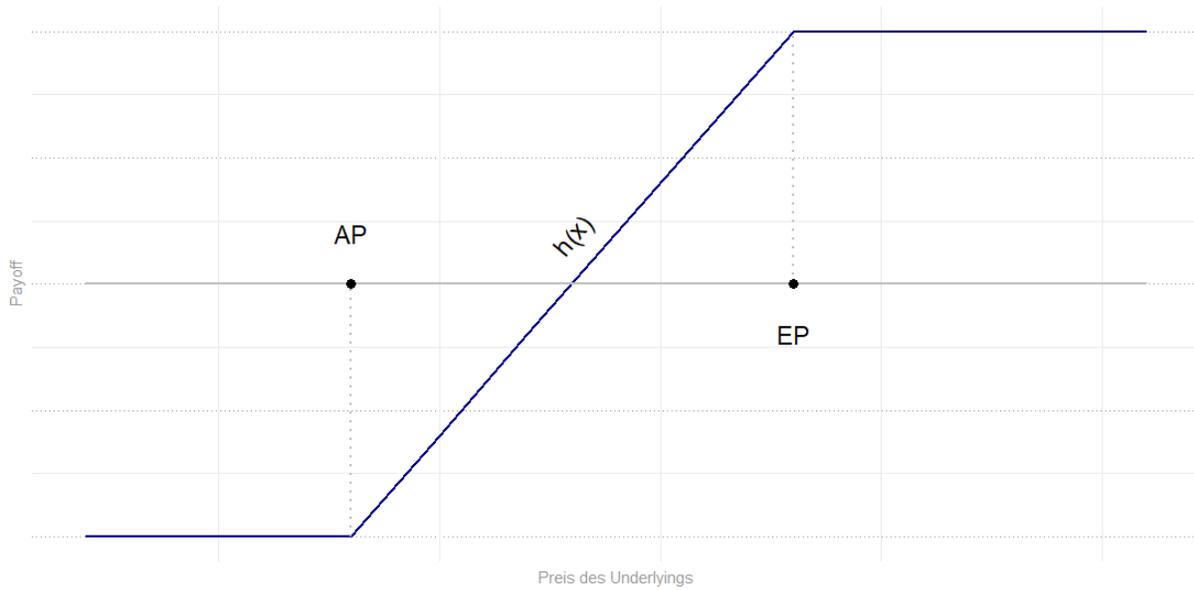


Abbildung 1.1: Payoff eines Bull-Call-Spreads. Die horizontale Linie repräsentiert dabei den Kurs des Underlyings am Verfallstag.

Mit dem platzierten Hedge $H(T)$ und dem Wert der Verpflichtung $L(T)$ lässt sich zum Zeitpunkt T der Nettowert P des Portfolios nun folgendermaßen ermitteln:

$$P = L(T) - H(T).$$

1.2.2 Das Hedge-Underlying

Für den indexbasierten Hedge ist es von Notwendigkeit, dass sich der Wert des Hedge-Underlyings allein auf Basis der beobachteten Mortalität der Referenzpopulation bis zur Zeit T berechnen lässt.

Wir führen zunächst $\tilde{L}(T)$ ein, welches den Wert der Verpflichtung abbildet und vorerst einen Platzhalter für $X(T)$ darstellen soll. Dazu sei

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}(T) = & \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{P(0,t)}{P(0,T)} (S_1^{HR}(i,t)B_1(i,t) + (1 - S_1^{HR}(i,t))(S_2^{HR}(i,t)B_2(i,t))) \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{t=T+1}^M \frac{P(0,t)}{P(0,T)} (\tilde{S}_1^{HR}(i,t)B_1(i,t) + (1 - \tilde{S}_1^{HR}(i,t))(\tilde{S}_2^{HR}(i,t)B_2(i,t))).
 \end{aligned}$$

Per Konstruktion ist die Formulierung des Hedge-Underlyings also sehr ähnlich zur Re-serverechnung der Verpflichtung, welche oben beschrieben wurde.

Das H in der Notation deutet hier auf die Verwendung für den Hedge hin. Die verschiedenen Überlebenswahrscheinlichkeiten bedürfen auch in diesem Ausdruck wieder einer Spezifikation:

$$S_k^{HR}(i, t) = \prod_{n=1}^t (1 - \epsilon^{H0}(i, n) q_k^R(i, n)) \text{ für } k = 1, 2 \text{ und } t \leq T$$

$$\tilde{S}_k^{HR}(i, t) = S_k^{HR}(i, T) \prod_{n=T+1}^t (1 - \epsilon^{H0}(i, n) \tilde{q}_k^R(i, n)) \text{ für } k = 1, 2 \text{ und } t > T$$

Hier ist anzumerken, dass sowohl in der Kalkulation der Überlebenswahrscheinlichkeiten für $t \leq T$ als auch in jener für $t > T$ die experience ratios $\epsilon^{H0}(i, n)$, welche zum Zeitpunkt 0 im Hedgevertrag definiert wurden, verwendet werden.

Währenddessen wird für die Jahre $1, \dots, T$ die tatsächliche Sterbewahrscheinlichkeit $q_k^R(i, n)$ der Referenzpopulation (multipliziert mit den Zeit-0 Hedgevertrag experience ratios) herangezogen, für Zeitpunkte nach T jedoch wieder eine Projektion der Sterbewahrscheinlichkeiten. Dieses Mortalitätsmodell und dessen Rekalibrierung zu T , welches zur Bewertung des Hedge-Underlyings benötigt wird, muss ebenfalls im Hedgevertrag zur Zeit 0 vereinbart werden. Es verwendet bei der Rekalibrierung sämtliche zum Zeitpunkt T verfügbaren Informationen und sollte zum Zeitpunkt 0 dem Best Estimate des zum Zeitpunkt T verwendeten Reservierungsmodells entsprechen, um bestmögliche Effektivität zu erzielen. Im Normalfall entspricht dies dem zum Zeitpunkt 0 verwendeten Reservierungsmodell.

Da nun das Hedge-Underlying unsere betrachtete Verpflichtung nachstellt, ist eine intuitive Wahl der fiktiven Quantität u möglich:

$$u = EP - AP$$

Eine weitere Möglichkeit würde natürlich darin bestehen, über u zu optimieren. Hier soll jedoch mit der obigen intuitiven Wahl weitergearbeitet werden.

Kapitel 2

Einbindung eines Kapitalmodells

Das Risiko einer Unterreservierung für das Risiko Langlebigkeit wird durch ein ökonomisches Kapitalmodell dargestellt. Dieses Modell ist abhängig von der Verteilung von $L(T)$ bzw. basiert auf einem regulatorisch vorgeschriebenen Schock.

Wir können die Kapitalanforderung für das betrachtete Problem generell wie folgt darstellen:

$$C = VaR(L(T), \alpha) - \mathbb{E}[L(T)].$$

Unter Solvency II verwendet eine nicht zu vernachlässigende Zahl an Unternehmen die Standardformel zur Berechnung der Kapitalanforderung, welche einen deterministischen Schock auf den zentralen Pfad der Mortalitätsintensität vorschreibt, um die stressed amount der Verpflichtung zu ermitteln. So wird daher die Mindestkapitalanforderung festgelegt.

Der im weiteren Verlauf dieser Arbeit vorgestellte numerische Teil basiert auf einem Proxyansatz der einen Schätzwert für das basis risk unter Berücksichtigung der Standardformel unter Solvency II erlaubt. Dieser Zugang erfolgt über eine Erzeugung von Proxyverteilungen für die Verpflichtungen, welche dieselbe Kapitalanforderung erzeugen, die aus der Anwendung der Standardformel entsteht. Dies soll dabei kein internes Modell darstellen sondern lediglich zum Zweck der Ermittlung des basis risk dienen.

2.1 Kapitalerleichterung

Ist der Hedge platziert, so hat er folglich eine Auswirkung auf die Berechnung der Kapitalanforderung, da sich die Bewertung der betrachteten Verpflichtung $L(T)$ auf die Bewertung des Portfolios $P = L(T) - H(T)$ erweitert. Bezeichnet man die neue Kapitalanforderung mit Hedge mit \tilde{C} , so erhält man

$$\tilde{C} = VaR(L(T) - H(T), \alpha) - \mathbb{E}[L(T) - H(T)].$$

Mittels C und \tilde{C} lässt sich nun die Kapitalerleichterung E durch den platzierten Hedge definieren:

$$\begin{aligned}
E &= C - \tilde{C} \\
&= VaR(L(T), \alpha) - \mathbb{E}[L(T)] - (VaR(L(T) - H(T), \alpha) - \mathbb{E}[L(T) - H(T)]).
\end{aligned}$$

Je nachdem, wovon die Verteilung von $L(T)$ abhängt, lässt sich nun folgende Unterscheidung bezüglich der Abhängigkeit von E treffen:

Fall 1: Wir nehmen an, dass die Verteilung von $L(T)$ alleine von der Entwicklung der Mortalität der Referenzpopulation abhängt. Dieser Fall tritt also ein, falls sich die Mortalität der individuellen Population exakt nach den experience ratios $\epsilon^{H0}(i, t)$, welche im Hedge-Vertrag vereinbart wurden, entwickelt.

Demzufolge gilt $\mu^I(i, t) = \epsilon^{H0}(i, t)\mu^R(i, t)$ und damit $L(T) = \tilde{L}(T)$.

Es ist daher leicht erkennbar, dass die Kapitalanforderung und in weiterer Folge auch die Kapitalerleichterung ohne Vorhandensein von basis risk zu berechnen ist. Zur Unterscheidung führen wir für die Kapitalanforderung in diesem Fall die Notation C_1 ein und können diese als $C_1 = f(q^R)$ schreiben, wobei q^R für Informationen über die Mortalität der Referenzpopulation steht.

Fall 2: Die Verteilung von $L(T)$ hängt sowohl von der Entwicklung der Mortalitätsintensität der Referenzpopulation als auch von jener der individuellen Population ab. Dies tritt ein, falls die experience ratios $\epsilon^{H0}(i, t)$ (zur Zeit 0 definiert) immer noch zur Berechnung der Bewertung des Hedges verwendet werden, die Entwicklung der Mortalität der individuellen Population bis zur Maturität T jedoch der tatsächlich realisierten Mortalitätsintensität folgt. Der Best Estimate der Verpflichtung wird also mithilfe des rekalierten Mittelwertes der Mortalität zur Zeit T und den rekalierten experience ratios $\epsilon^T(i, t)$ berechnet.

Im Gegensatz zum 1. Fall ist hier daher das Vorhandensein von basis risk gegeben und wir schreiben analog zu vorhin $C_2 = f(q^R, q^I)$, wobei q^R wieder für Informationen über die Mortalität der Referenzpopulation und q^I für Informationen über die Mortalität der individuellen Population, jeweils bis zur Maturität T , stehen.

Zusammenfassend lässt sich daher festhalten, dass das Hedge-Underlying stets allein von der Mortalität der Referenzpopulation abhängt, während in der Bewertung der Verpflichtung $L(T)$ entweder deterministische experience ratios oder die tatsächlichen Realisationen der Mortalitätsintensität der individuellen Population herangezogen werden können.

2.2 Vorgehensweise zur Berechnung der Kapitalerleichterung

Um die Kapitalerleichterung durch den platzierten Hedge schlussendlich kalkulieren zu können, ist somit eine Reihe von Schritten notwendig, welche nacheinander abgearbeitet werden müssen.

In erster Linie ist das Sammeln der relevanten historischen Daten der individuellen und der Referenzpopulation vonnöten. Diese historischen Daten bis zum Zeitpunkt 0 dienen im weiteren Verlauf zur Erstellung der Simulationsmodelle der Mortalitätsentwicklung. Dazu wird im folgenden Kapitel eine Möglichkeit zur parallelen Simulation von zwei Populationen vorgestellt.

Weiters werden damit jene experience ratios berechnet, welche im Hedgevertrag festgehalten werden können (es können allerdings auch andere experience ratios vereinbart werden, welche die Erwartung der Sterblichkeitsentwicklung der Populationen aus der Sicht des Hedgers besser abbildet).

Nun werden simulierte Sterberaten benötigt, um die Berechnung der Werte der Verpflichtung von 0 bis T durchführen zu können. Auch für die Auswertung des Hedge-Underlyings und damit zur Berechnung des Hedge-Payoffs werden die simulierten Daten (der Referenzpopulation) benötigt.

Sowohl das Simulationsmodell der zwei Populationen als auch das Modell für den Hedge-Payoff kann gegebenenfalls um eine Methode zur Extrapolation der Sterberaten für hohe und niedrige Alter erweitert werden. Mithilfe des Hedge-Payoff Modells werden damit die Sterberaten der Referenzpopulation über T hinaus und gegebenenfalls für hohe und niedrige Alter projiziert.

Neben den bisherigen beiden Modellen (Simulation von zwei Populationen, Hedge-Payoff) wird ein drittes benötigt, das Modell zur Bewertung der Verpflichtung. Dieses ist das (zum Betrachtungszeitpunkt 0) plausibelste Modell zu T , mit welchem Bewertungen in der individuellen Population durchgeführt werden. Es kann auch eine Möglichkeit der Rekalibrierung beinhalten.

Es ist möglich, dass sich dieses Modell vom Zeit-0 Bewertungsmodell, vom Simulationsmodell und vom Hedge-Payoff Modell unterscheidet. Mithilfe von realisierten Szenarien bis zum Zeitpunkt T kann das Zeit- T Bewertungsmodell der Verpflichtung kalibriert werden. Dann sind projizierte Sterberaten für Zeitpunkte nach T zu ermitteln und gegebenenfalls die Sterberaten für hohe und niedrige Alter zu projizieren.

Nun werden die im Hedgevertrag festgehaltenen experience ratios benötigt, um die dem Hedge-Payoff zugrundeliegende synthetische Verpflichtung $\tilde{L}(T)$ auszuwerten. Hierzu werden die bis T simulierten, beziehungsweise nach dem Zeitpunkt T projizierten Sterberaten der Referenzpopulation verwendet. Mithilfe des so ermittelten Underlyings $\tilde{L}(T)$ lässt sich nun

der Payoff des Hedges $H(T)$ berechnen.

Zuletzt ist die tatsächliche Verpflichtung $L(T)$ zu berechnen. Dafür werden die bis T simulierten, beziehungsweise nach dem Zeitpunkt T projizierten Sterberaten der individuellen Population benötigt.

Kapitel 3

Simulation von zwei Populationen

Da wir zwei verschiedene Populationen parallel zueinander betrachten, wird ein Modell zur Sterblichkeitsmodellierung benötigt, welches auch die Abhängigkeiten der Populationen untereinander beschreibt und miteinbezieht. Nur so besteht auch die Möglichkeit, die zukünftige gemeinsame Sterblichkeitsentwicklung zu modellieren und somit die Effektivität des Hedges zu untersuchen und dessen Einfluss auf die Kapitalerleichterung zu kalkulieren. Wir verwenden daher nicht zwei separate Modelle sondern ein gemeinsames, welches die zusammenhängende Mortalitätsstruktur der zwei Populationen beschreibt.

Um die Konsistenz zu den bisherigen Annahmen zu bewahren, soll die Mortalität der individuellen Population auch im Zweipopulationen-Modell von der Mortalität der Referenzpopulation abhängig sein. Für die Modellierung der Referenzpopulationen soll das Lee Carter Modell (1992) verwendet werden. Dazu beschränken wir uns zunächst auf die Modellierung des Alters x (anstelle des Modelpoints i) und bezeichnen mit $\mu^R(x, t)$ die Sterberate der Referenzpopulation.

Die Sterberate $\mu^I(x, t)$ der individuellen Population wird in Abhängigkeit von $\mu^R(x, t)$ mittels eines adjustierenden Spreads $\mu^{adj}(x, t)$ modelliert. Das entspricht weiterhin dem Vorgehen von Cairns und El Boukfaoui, 2021.

Wir erhalten damit folgendes Modell:

$$\ln \mu^R(x, t) = A(x) + B(x)K(t) \tag{3.1}$$

$$\ln \mu^I(x, t) = \ln \mu^R(x, t) + \ln \mu^{adj}(x, t) \tag{3.2}$$

wobei

$$\ln \mu^{adj}(x, t) = a(x) + k_1(t) + (x - \bar{x})k_2(t). \tag{3.3}$$

Hierbei beschreiben $A(x)$ und $B(x)$ die altersspezifischen Komponenten des Lee Carter Modells, während $K(t)$ die zeitabhängigen Veränderungen darstellt.

3.1 Das Lee Carter Modell

Die Schätzung der Parameter im Lee Carter Modell wie beschrieben ist allerdings noch nicht eindeutig lösbar. Seien die Vektoren A_1 , B_1 und K_1 eine Lösung, so lässt sich schnell erkennen dass für einen Skalar C die modifizierten Vektoren

$$\begin{aligned}A_2 &= A_1 - B_1 C, \\B_2 &= B_1, \\K_2 &= K_1 + C\end{aligned}$$

ebenfalls eine Lösung sind, da

$$\begin{aligned}\ln \mu^R(x, t) &= A_2(x) + B_2(x)K_2(t) \\&= A_1(x) - B_1(x)C + B_1(x)(K_1(t) + C) \\&= A_1(x) + B_1(x)K_1(t).\end{aligned}$$

Um Eindeutigkeit bei der Schätzung zu erhalten, genügen die folgenden Bedingungen, welche auch von Lee und Carter, 1992 angewandt werden:

$$\sum_x B(x) = 1 \text{ und} \tag{3.4}$$

$$\sum_t K(t) = 0. \tag{3.5}$$

Diese natürliche Wahl für die Einschränkung (4.5) hat im Weiteren die Auswirkung, dass die $A(x)$ einfach die Durchschnitte der $\ln \mu^R(x, t)$ über die Zeit beschreiben.

Über die Parameter im Lee Carter Modell können durch Beobachtung von verschiedenen vorhandenen Sterbedaten folgende Aussagen getroffen werden:

$K(t)$ fallen mit der Zeit, das heißt die Mortalität ist umso niedriger, je höher t ist. Dies entspricht der natürlichen Erwartungshaltung der Sterblichkeitsverbesserungen bei fortschreitender Zeit.

Zuletzt lässt sich bei den $B(x)$ feststellen, dass diese mit wachsendem Alter fallen. Diese Eigenschaft lässt sich so übersetzen, dass die Auswirkungen der zeitabhängigen Komponente $K(t)$ für höhere Alter kleiner werden.

$A(x)$ sind wachsend mit dem Alter. Auch dies ist intuitiv, da sie, wie oben angemerkt, Durchschnittswerte der logarithmierten Sterberaten sind und die Sterblichkeit mit dem Alter eines Individuums steigt.

Mit der geschaffenen eindeutigen Identifizierbarkeit des Schätzproblems können nun Schätzer für die Parameter $A(x)$, $B(x)$ und $K(t)$ gesucht werden, um das Lee Carter Modell an die Daten zu fitten. Das sind in unserem Fall die Sterblichkeitsdaten der Referenzpopulation R .

3.1.1 Parameterschätzung im Lee Carter Modell

Wie bereits von Lee & Carter (1992) beschrieben, kann die Singulärwertzerlegung auf die Matrix der logarithmierten Sterberaten, von denen die Schätzwerte der altersspezifischen Raten abgezogen wurden, angewandt werden. So erhalten wir Kleinste-Quadrate Schätzer für die Parameter $B(x)$ und $K(t)$.

Um diese Matrix bilden zu können, müssen zuerst die Schätzer $\hat{A}(x)$ für $A(x)$ ermittelt werden. Dazu wird im ersten Schritt die Summe über die Gleichungen, welche durch (3.1) beschrieben werden, gebildet. Dabei wird das Alter x festgehalten und über alle t summiert:

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=0}^M \ln \mu^R(x, t) &= \sum_{t=0}^M (A(x) + B(x)K(t)) \\
 &= (M + 1) A(x) + \sum_{t=0}^M B(x)K(t) \\
 &= (M + 1) A(x) + B(x) \sum_{t=0}^M K(t) \\
 &= (M + 1) A(x)
 \end{aligned}$$

Die zweite Summe fällt aufgrund der Nebenbedingung (3.5) weg und damit erhält man

$$\hat{A}(x) = \frac{1}{M + 1} \sum_{t=0}^M \ln \mu^R(x, t) \tag{3.6}$$

Damit kann nun die oben beschriebene Matrix S aufgestellt werden.

$$S = \begin{pmatrix} \ln \mu^R(x_0, 0) - \hat{A}(x_0) & \dots & \ln \mu^R(x_n, 0) - \hat{A}(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln \mu^R(x_0, M) - \hat{A}(x_0) & \dots & \ln \mu^R(x_n, M) - \hat{A}(x_n) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

S ist daher reelle $(M + 1) \times (n + 1)$ - Matrix mit der Singulärwertzerlegung $S = U\Sigma V^T$. Dabei sei U eine orthogonale $(M + 1) \times (M + 1)$ - Matrix, V^T die Transponierte der orthogonalen $(n + 1) \times (n + 1)$ - Matrix V und Σ eine reelle $(M + 1) \times (n + 1)$ - Matrix der Form:

$$\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & \vdots & & \\ & \ddots & & \dots & 0 & \dots \\ & & \sigma_r & \vdots & & \\ \hline & \vdots & & \vdots & & \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots \\ & \vdots & & \vdots & & \end{array} \right)$$

Hierbei sind $\sigma_1 \geq \sigma_2 \cdots \geq \sigma_r \geq 0$ die Singulärwarte von S . Diese und damit einhergehend auch Σ sind durch S eindeutig bestimmt. Es seien u_i , $i = 1, \dots, M + 1$ die Spaltenvektoren von U und v_i^T , $i = 1, \dots, n + 1$ die Spaltenvektoren von V^T . Weder U noch V^T sind eindeutig. Dann kann man S auch wie folgt darstellen:

$$S = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T \quad (3.8)$$

Betrachtet man nun die Problemstellung der Schätzung der übrigen Parameter B und K im Lee Carter Modell $\ln \mu^R(x, t) = A(x) + B(x)K(t)$, so lässt sich feststellen, dass die Matrix S als

$$S = KB^T \quad (3.9)$$

geschrieben werden kann. K und B beschreiben dabei Spaltenvektoren, deren Einträge $K(t)$ für $t = 0, \dots, M$ beziehungsweise $B(x)$ für $x = x_0, \dots, x_n$ sind.

Nun sei $\hat{S} = \sigma_1 u_1 v_1^T$ eine Approximation für S mittels des ersten Summanden aus (3.8). Aus (3.9) erhalten wir daher $\sigma_1 u_1 v_1^T = \hat{K} \hat{B}^T$. Um die Nebenbedingung (3.4) zu gewährleisten, sei $\hat{B}(x) = \frac{1}{\omega} v_1(x)$ mit dem Gewicht $\omega = \sum_{i=1}^{n+1} v_1(i)$. Zuletzt sei $\hat{B}(t) = \omega \sigma_1 u_1(t)$.

3.2 Das Plat Modell

Während wir die Mortalität der Referenzpopulation nach dem Lee Carter Modell modellieren, so folge die Differenz der Mortalität der individuellen Population und jener der Referenzpopulation einem verallgemeinerten Cairns-Blake-Dowd Modell. In dieser Form kann man es auch als eine Vereinfachung des Plat-Modells ansehen, welches wie folgt gebildet wird:

$$\ln \mu^{adj}(x, t) = a(x) + k_1(t) + (x - \bar{x})k_2(t) + (x - \bar{x})^+ k_3(t) + y_{t-x} \quad (3.10)$$

Auch dieses Modell ist in dieser Form noch nicht eindeutig. Seien zum Beispiel die Vektoren a_1 , k_1^1 , k_2^1 , k_3^1 und y_1 eine Lösung von (3.10), so sind es die im Folgenden definierten Vektoren ebenfalls:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + c_1 + c_2 x + c_3 x^2, \\ k_1^2 &= k_1^1 + c_2 t + c_3 (2\bar{x}t - t^2), \\ k_2^2 &= k_2^1 + 2c_3 t, \\ k_3^2 &= k_3^1, \\ y_2 &= y_1 - c_1 - c_2(x + t) - c_3(t + x)^2 \end{aligned}$$

Dies lässt sich einfach durch Einsetzen des zweiten Sets an Vektoren erkennen:

$$\begin{aligned}
\ln \mu^R(x, t) &= a_2(x) + k_1^2(t) + (x - \bar{x})k_2^2(t) + (x - \bar{x})^+k_3^2(t) + y_{t-x}^2 \\
&= a_1(x) + c_1 + c_2x + c_3x^2 + k_1^1(t) + c_2t + c_3(2\bar{x}t - t^2) \\
&\quad + (x - \bar{x})(k_2^1(t) + 2c_3t) + (x - \bar{x})^+k_3^1(t) \\
&\quad + y_{t-x}^1 - c_1 - c_2(x + t) - c_3(t + x)^2 \\
&= a_1(x) + k_1^1(t) + (x - \bar{x})k_2^1(t) + (x - \bar{x})^+k_3^1(t) + y_{t-x}^1.
\end{aligned}$$

In unserem Fall liegt eine Vereinfachung dieses Modells vor, es werden daher lediglich die ersten drei Terme des Modells benötigt. Diese Modellanpassung ist bei der Betrachtung von höheren Altern (wie in unserem betrachteten Rentenportfolio) ausreichend. Analog zum vorherigen Kapitel schränken wir die Parameter ein, um ein identifizierbares Modell zu erhalten. Es gelten daher die Einschränkungen

$$\sum_t k_1(t) = 0, \quad (3.11)$$

$$\sum_t k_2(t) = 0 \text{ und} \quad (3.12)$$

$$\sum_t k_3(t) = 0. \quad (3.13)$$

Durch diese Bedingungen wird sichergestellt, dass die Periodeneffekte um 0 zentriert sind. Die Parameter für dieses Modell lassen sich durch Maximierung der Log-Likelihood schätzen.

Kapitel 4

Betrachtung des zeitstetigen Szenarios

4.1 Die Verpflichtung im zeitstetigen Szenario

4.1.1 Allgemeines

Auf Basis der bisher erarbeiteten Erkenntnisse wollen wir uns nun der Problematik in einem zeitstetigen Setting widmen und folgen in diesem Abschnitt daher nun nicht mehr den Ausführungen von Cairns und El Boukfaoui, 2021. Wir gehen dazu analog vor, wobei die Einbindung der stochastischen Mortalitätsintensität einen wichtigen Punkt darstellt.

Auch in diesem Kapitel muss das zu hedgende Risiko in Form einer Verpflichtung analysiert werden. Im zeitstetigen Szenario seien dies nun stetige Rentenzahlungen eines Portfolios aus Pensionsversicherungen anstelle der oben betrachteten jährlichen Pensionszahlungen.

In den folgenden Ausführungen wird zudem nur der Fall einer versicherten Person behandelt (also ohne die Möglichkeit eines Rentenübergangs auf eine hinterbliebene Person). Wie auch im zeitdiskreten Fall definieren wir den Barwert der Rentenobligation sowie die Punktschätzer der Reserven der Verpflichtung zu den jeweiligen Zeitpunkten wie folgt:

- L sei der Barwert der Rentenobligation zum Zeitpunkt 0, also eine Zufallsvariable, die erst zum Tod der versicherten Person bekannt ist.
- $L(0)$ sei ein Punktschätzer von L zum Zeitpunkt 0. $L(0)$ ist die Reserve zum Zeitpunkt 0.
- $L(t)$ bezeichne einen Punktschätzer von L zum Zeitpunkt t , $L(t)$ ist also ebenfalls eine Zufallsvariable, die erst zum Todeszeitpunkt der versicherten Person bekannt ist.

Ebenfalls analog zum vorherigen Kapitel werden zwei Populationen betrachtet, welche wieder mit I für die individuelle Population und mit R für die Referenzpopulation bezeichnet werden sollen. Auf abweichende Bezeichnungen zum zeitdiskreten Szenario soll an dieser

Stelle verzichtet werden, um eine bessere Lesbarkeit zu gewährleisten.

Wir benötigen abermals experience ratios, auf deren Basis sich die Mortalität der individuellen Population als Anteil an jener der Referenzpopulation abbilden lässt:

$\epsilon^0(i, t)$ = experience ratio zum Zeitpunkt 0, welche für Rückstellungsberechnungen zum Zeitpunkt 0 verwendet wird. Dabei sei i der jeweilige Modelpoint und t der Zeitpunkt, zu dem dieser Faktor anwendbar ist.

$\epsilon^T(i, t)$ = rekaliبریerte experience ratio zum Zeitpunkt T , welche sämtliche Informationen bis zum Zeitpunkt T beinhaltet. Dabei seien i und t wie oben.

$\epsilon^T(i, t)$ dient also zur Reservierungsberechnung zum Zeitpunkt T .

Im zeitstetigen Fall kann die Multiplikation der experience ratios aber nicht auf die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten erfolgen.

Um die experience ratios anwenden zu können, ist an dieser Stelle die Betrachtung historischer Mortalitätsintensitäten notwendig. Wir führen nun $\mu^I(i, t)$ als Notation für die Mortalitätsintensität ein und beziehen uns dabei ebenso wie bei den experience ratios auf den Modelpoint i und den Zeitpunkt t im Gegensatz zur üblich verwendeten Methode des Alters und des Zeitpunktes. Die Mortalitätsintensität wird als stochastischer Prozess modelliert, weshalb im nächsten Abschnitt ein Exkurs hierzu folgt.

4.1.2 Stochastische Mortalitätsintensität

In diesem Abschnitt wird der Vorgehensweise von Biagini, Rheinländer und Widenmann, 2013 in deren Paper “HEDGING MORTALITY CLAIMS WITH LONGEVITY BONDS” gefolgt. Zuerst wird vereinfacht die Todeszeit eines Neugeborenen betrachtet. Diese entspricht einer Zufallsvariable $\tau > 0$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Mithilfe von τ lässt sich der Indikator des Todes definieren:

$$H_t := \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$$

H ist ein rechtsstetiger, stochastischer Prozess, jedoch nicht vorhersehbar. Wir bezeichnen die von H generierte Filtration mit $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$, mit $\mathcal{H}_t = \sigma(H_u : u \leq t)$ und interpretieren sie als Menge der Informationen über die individuelle Mortalität (in unserem Fall die der Population I oder die der Population R).

Weiters sei B eine mehrdimensionale Brown’sche Bewegung im selben Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die von B erzeugte Filtration. Es sei (\mathcal{F}_t) die Filtration der systematischen Mortalität, sie enthalte also generelle Informationen über Einflussfaktoren auf die Mortalität sowie Informationen über die stochastische Entwicklung der Zinsraten. Es sei $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$ die von \mathbb{F} und \mathbb{H} erzeugte Filtration, wobei vorausgesetzt wird, dass alle \mathbb{F} -Martingale auch \mathbb{G} -Martingale bleiben. Unter dieser Annahme ist B auch bezüglich \mathbb{G}

weiterhin eine Brown'sche Bewegung, da B ein \mathbb{G} -Martingal mit $[B]_t = t$ und damit nach Lévy's Charakterisierung eine Brown'sche Bewegung ist. Da der Prozess H wachsend ist, folgt aus der Doob-Meyer Zerlegung, dass ein wachsender, vorhersehbarer Prozess Γ existiert, sodass der Prozess N definiert durch

$$N_t = H_t - \Gamma_{\tau \wedge t}$$

ein \mathbb{G} -Martingal ist. Daher ist Γ der Kompensator des Einsprungprozesses H . Wir nehmen an, dass ein positiver, \mathbb{F} -vorhersehbarer Prozess $\mu = (\mu_t)_{t \geq 0}$ existiert, sodass $\Gamma_t = \int_0^{\tau \wedge t} \mu_s ds$. Es gilt daher

$$N_t = H_t - \int_0^{\tau \wedge t} \mu_s ds = H_t - \int_0^t (1 - H_s) \mu_s ds.$$

Nun können der Überlebensprozess \bar{F} und der Sterbeprozess F definiert werden:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{t,T} &= \mathbb{P}(\tau > T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \mid \mathcal{F}_t] \\ F_{t,T} &= 1 - \bar{F}_{t,T} = \mathbb{P}(\tau \leq T \mid \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

Der Überlebensprozess kann als bester Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, vom Zeitpunkt t bis zum Zeitpunkt T zu überleben, interpretiert werden, während der Sterbeprozess der beste Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit in diesem Intervall zu sterben ist. Es sei $\bar{F}_t := \bar{F}_{0,t}$ und $F_t := 1 - \bar{F}_t$.

Wir nehmen an, dass $\bar{F}_{t,T}$ als

$$\bar{F}_{t,T} = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}[e^{-\int_t^T \mu_s ds}]$$

geschrieben werden kann, wobei μ wie oben die Mortalitätsintensität sei.

Dieses Konzept, welches nun für die Todeszeit τ eines Neugeborenen entwickelt wurde, kann problemlos auf die Todeszeit τ_i eines zum Zeitpunkt 0 im Modelpoint i befindlichen Versicherungsnehmers angewandt werden. Der aktuariellen Notation entsprechend erhalten wir also für den Überlebensprozess

$${}_t p_i = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau_i > t\}} \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[e^{-\int_0^t \mu_s ds} \mid \mathcal{F}_0].$$

In unserem Fall betrachten wir zwei unterschiedliche Populationen und innerhalb dieser verschiedene Modelpoints, weshalb sich die individuellen Filtrationen \mathbb{H} im Allgemeinen unterscheiden. Dadurch erhält man die stochastischen Mortalitätsintensitäten für die unterschiedlichen Populationen und wollen sie im Folgenden mit $\mu^I(i, t)$ für Population I und $\mu^R(i, t)$ für Population R für den Modelpoint i zum Zeitpunkt t bezeichnen.

In analoger Weise seien ${}_t p_i^I$ und ${}_t p_i^R$ definiert.

4.1.3 Bewertung der Verpflichtung im zeitstetigen Szenario

Mithilfe der soeben ausgearbeiteten Mortalitätsintensität kann nun der Barwert der Rentenverpflichtung ermittelt werden, also die Reserve zum Zeitpunkt 0. Wie oben bereits eingeführt, soll dieser mit $L(0)$ bezeichnet werden. Dazu definieren wir mit $B(i, t)$ die Auszahlungsintensität zum Zeitpunkt t für Modelpoint i , wenn der Versicherungsnehmer zu t noch am Leben ist.

Im Folgenden sei $P(0, t)$ der Preis einer Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt t mit Maturität $T > 0$, welche zu T eine Geldeinheit auszahlt. Sie ist daher der geeignete Faktor zum Abzinsen späterer Cashflows auf den Zeitpunkt 0.

Mit M bezeichnen wir den spätest möglichen Zeitpunkt einer Auszahlung unter Berücksichtigung aller Modelpoints.

Weiters sei ${}_t\hat{p}_i^I$ ein Schätzwert für ${}_t p_i^I$. Für dessen Evaluierung werden Schätzer für die Mortalitätsintensität der Referenzpopulation R benötigt, welche wiederum mit $\hat{\mu}^{VR}(i, t)$ bezeichnet werden. Das V in der Notation VR soll hierbei abermals die Verwendung zur Bewertung der Verpflichtung unterstreichen.

Damit folgt

$$L(0) = \sum_{i=1}^N \int_0^M P(0, t) {}_t\hat{p}_i^I B(i, t) dB_t.$$

Der Schätzwert für ${}_t p_i^I$ ergibt sich dann durch

$${}_t\hat{p}_i^I = \mathbb{E}[e^{-\int_0^t \hat{\mu}(i,s) ds} \mid \mathcal{F}_0] = e^{-\int_0^t \hat{\mu}(i,s) ds},$$

wobei

$$\hat{\mu}(i, s) = \epsilon^0(i, s) \hat{\mu}^{VR}(i, s).$$

Zur Berechnung der Effektivität des Hedges ist es außerdem notwendig, die Verteilung der Verpflichtung zum Zeitpunkt T zu bestimmen.

Um Konsistenz zur Bewertung zum Zeitpunkt 0 zu erhalten, ergibt sich daher

$$L(T) = \sum_{i=1}^N \int_0^T \frac{P(0, t)}{P(0, T)} {}_t p_i^I B(i, t) dB_t + \sum_{i=1}^N \int_T^M \frac{P(0, t)}{P(0, T)} {}_t\tilde{p}_i^I B(i, t) dB_t,$$

wobei hier im ersten Summanden der tatsächliche Überlebensprozess und im zweiten ein Schätzwert desselben mithilfe von rekalierten experience ratios verwendet wird. Explizit bedeutet das

$$\text{für } t \leq T : {}_t p_i^I = \mathbb{E}[e^{-\int_0^t \mu^I(i,s) ds} \mid \mathcal{F}_0]$$

$$\text{für } t > T : {}_t\tilde{p}_i^I = {}_T p_i^I \mathbb{E}[e^{-\int_T^t \tilde{\mu}^I(i,s) ds} \mid \mathcal{F}_T],$$

mit

$$\tilde{\mu}^I(i, s) = \epsilon^T(i, s) \tilde{\mu}^{VR}(i, s).$$

Dabei sei $\tilde{\mu}^{VR}(i, s)$ die projizierte Mortalitätsintensität für die Referenzpopulation unter Verwendung eines zu T verwendeten Mortalitätsmodells, welches sämtliche Informationen über die Mortalität der Population R bis zum Zeitpunkt T berücksichtigt.

4.2 Der Langlebigkeits hedge im zeitstetigen Szenario

Das Hedge-Underlying soll wie im zeitdiskreten Fall so konstruiert werden, dass es zum fest definierten Zeitpunkt T die Verpflichtung bestmöglich repliziert.

4.2.1 Das Hedginginstrument (zeitstetig)

Das Hedginginstrument bleibt hier unverändert. Es sollen zusammengefasst noch einmal die wichtigsten Eckpunkte aufgelistet werden:

- T sei die feste Maturität des Hedges.
- $X(T)$ sei das Hedge-Underlying, welches noch definiert wird.
- $H(T) = u \cdot h(X(T))$ sei der Payoff des Hedginginstruments zum Zeitpunkt T , wobei u die fiktive Quantität sei.
- $h(x) = \max\left\{0, \min\left\{\frac{x-AP}{EP-AP}, 1\right\}\right\}$ sei der Payoff eines Bull-Call-Spreads.
- $P = L(T) - H(T)$ sei der Nettowert des Portfolios.

4.2.2 Das Hedge-Underlying (zeitstetig)

Für den indexbasierten Hedge ist es auch im vorliegenden Szenario von Notwendigkeit, dass sich der Wert des Hedge-Underlyings allein auf Basis der Mortalität der Referenzpopulation berechnen lässt.

Wir führen zunächst $\tilde{L}(T)$ ein, welches den Wert der Verpflichtung abbilden und vorerst einen Platzhalter für $X(T)$ darstellen soll. Dazu sei im Folgenden für $t \leq T$

$${}_t p_i^{HR} = \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^t \epsilon^{H0}(i,s) \mu^R(i,s) ds} \mid \mathcal{F}_0\right]$$

der Überlebensprozess unter Verwendung der tatsächlichen Mortalitätsintensitäten der Referenzpopulation R und Rekalibrierung mit den im Hedge-Vertrag zum Zeitpunkt 0 festgelegten experience ratios $\epsilon^{H0}(i, s)$.

Für $t > T$ sei

$${}_t \bar{p}_i^{HR} = {}_T p_i^I \mathbb{E}\left[e^{-\int_T^t \epsilon^{H0}(i,s) \bar{\mu}^{HR}(i,s) ds} \mid \mathcal{F}_T\right].$$

Auch hier werden die zum Zeitpunkt 0 im Hedgevertrag festgelegten experience ratios verwendet, während $\bar{\mu}^{HR}(i, s)$ die projizierte Mortalitätsintensität der Referenzpopulation

unter der Berücksichtigung sämtlicher Information bis zum Zeitpunkt T sei. Diese werden durch ein zu T kalibriertes, ebenfalls bereits zum Zeitpunkt 0 im Hedgevertrag definiertes Mortalitätsmodell berechnet, welches nur auf Daten der Referenzpopulation beruhen darf.

Damit wird $\tilde{L}(T)$ definiert als:

$$\tilde{L}(T) = \sum_{i=1}^N \int_0^T \frac{P(0,t)}{P(0,T)} {}_t p_i^{HR} B(i,t) dB_t + \sum_{i=1}^M \int_T^M \frac{P(0,t)}{P(0,T)} {}_t \bar{p}_i^{HR} B(i,t) dB_t.$$

Um bestmögliche Effektivität des Hedges zu erzielen, sollte das oben erwähnte Mortalitätsmodell zur Berechnung der rekalierten Mortalitätsintensität analog zum zeitdiskreten Fall der Best Estimate zum Zeitpunkt 0 des zu T verwendeten Reservierungsmodells sein. Dies ist im Normalfall das zur Zeit 0 verwendete Reservierungsmodell.

Wir können auch in diesem Kapitel für die fiktive Quantität $u = EP - AP$ wählen. Dies entspricht wieder der intuitiven Wahl, da $\tilde{L}(T)$ so konstruiert wurde, dass die Unsicherheit der tatsächlichen Verpflichtung bestmöglich abgebildet wird.

Alternativ kann auch an dieser Stelle über u optimiert werden, was jedoch einen Verlust des intuitiven Zugangs zur Wahl $u = EP - AP$ zur Folge hätte.

Kapitel 5

Berechnung der Kapitalerleichterung anhand der Daten von Österreich und Wien

Die bisher aufgestellten Annahmen und die verschiedenen Modelle zur Berechnung der Mortalitätsintensitäten der beiden Populationen sowie deren Projektion müssen nun in mehreren aufeinanderfolgenden Schritten ausgeführt beziehungsweise verwendet werden, um letztendlich die tatsächliche Auswirkung eines oben beschriebenen Langlebigkeitshedges kalkulieren zu können. Es wird nun daher die Vorgehensweise in Form einer Aneinanderreihung der notwendigen Schritte vorgestellt, welche zur Berechnung der Kapitalerleichterung durch den platzierten Hedge notwendig ist.

Für diesen Anwendungsteil werden nun konkrete Daten benötigt. Die verwendeten Datensätze seien hier wie folgt gewählt. Die Referenzpopulation seien Frauen aus Österreich, für die individuelle Population werden Daten über Frauen aus Wien (als Teilmenge von Österreich) herangezogen. Die Wahl der Betrachtung von Frauen anstelle von Männern wurde getroffen, da diese in der vorhandenen Lektüre stark unterrepräsentiert sind und dies im Sinne einer Gleichberechtigung aufgezeigt werden soll.

Zunächst werden die Daten eingelesen. Für die Referenzpopulation (Frauen aus Österreich) werden Daten aus den Jahren 1970 bis 2019 und für die individuelle Population (Frauen aus Wien) Daten aus den Jahren 2000 bis 2019 herangezogen, welche allesamt über Statistik Austria frei beziehbar sind. Aus diesen Datensätzen werden die benötigten Parameter für das Sterblichkeitsmodell ermittelt. In dieser Ausführung wurde zur Veranschaulichung angenommen, dass sowohl die Sterblichkeit der österreichischen als auch die der Wiener Bevölkerung einem Lee Carter Modell folgen und diese beiden Modelle voneinander unabhängig sind.

Für die Ausführung wurde das Programm R gewählt. Der den hier beschriebenen Ergebnissen entsprechende Code ist im Anhang zu finden.

Für die weiteren Ausführungen seien folgende Annahmen festgelegt:

- Da die Sterblichkeitsdaten bis zum Jahr 2019 vorliegen, entspricht dieses Jahr dem Zeitpunkt 0.
- Vom Zeitpunkt 0 weg beträgt die Laufzeit des Hedges 10 Jahre, die Maturität sei daher $T = 10$.
- Der letztmögliche Zeitpunkt einer Rentenzahlung sei 30 Jahre nach der Maturität des Hedges, dies entspricht dem Jahr 2059.
- Die Verpflichtung sei eine Rentenleistung von je einer Geldeinheit, nachschüssig auszahlbar an eine Gruppe von Versicherungsnehmerinnen, deren Alterszusammensetzung wie folgt gegeben sei. Betrachtet werden je eine Frau jeden Alters von 50 bis inklusive 80 Jahren.
- Es sei ein fixer Zinssatz von 2 % für die Bewertung zum Zeitpunkt T gewählt, das heißt $P(0, t) = 1,02^{-t}$ und $\frac{P(0,t)}{P(0,T)} = 1,02^{T-t}$ für alle t mit $0 \leq t \leq T + 30$.
- Die vertraglich vereinbarten experience ratios für den Hedge seien direkt aus den Rohdaten der Sterbetafeln definiert. Da wir im kleineren Datenset (Frauen aus Wien) lediglich Daten für die 20 Jahre von 2000 bis 2019 zur Verfügung haben, bilden wir den Durchschnitt über ebendiese Jahre

$$\epsilon^H(x) = \frac{1}{20} \sum_{t=0}^{19} \epsilon(x, -t)$$

Da das Jahr 2019 dem Zeitpunkt 0 entspricht, ist dementsprechend mit $t = -19$ der Datensatz des Jahres 2000 gemeint.

5.1 Lee Carter Modell für Österreich

Mithilfe der in R bereits zur Verfügung stehenden Funktion zur Erstellung eines Lee Carter Modells mit geeignetem Input können die Daten der österreichischen Frauen verarbeitet werden. Neben den bereits erwähnten Daten werden zudem Verläufe über die Populationsgröße benötigt. Diese können über die Human Mortality Database (abgekürzt HMD) bezogen werden (HMD. Human Mortality Database., 2022).³ Somit können die benötigten Parameter $A(x)$, $B(x)$ und $K(t)$ ermittelt werden. Diese sind in Figur 5.1 sowie 5.2 abgebildet.

³Ebenso wie die Statistik Austria Daten sind die Daten der HMD nach Erstellung eines Accounts frei zugänglich.

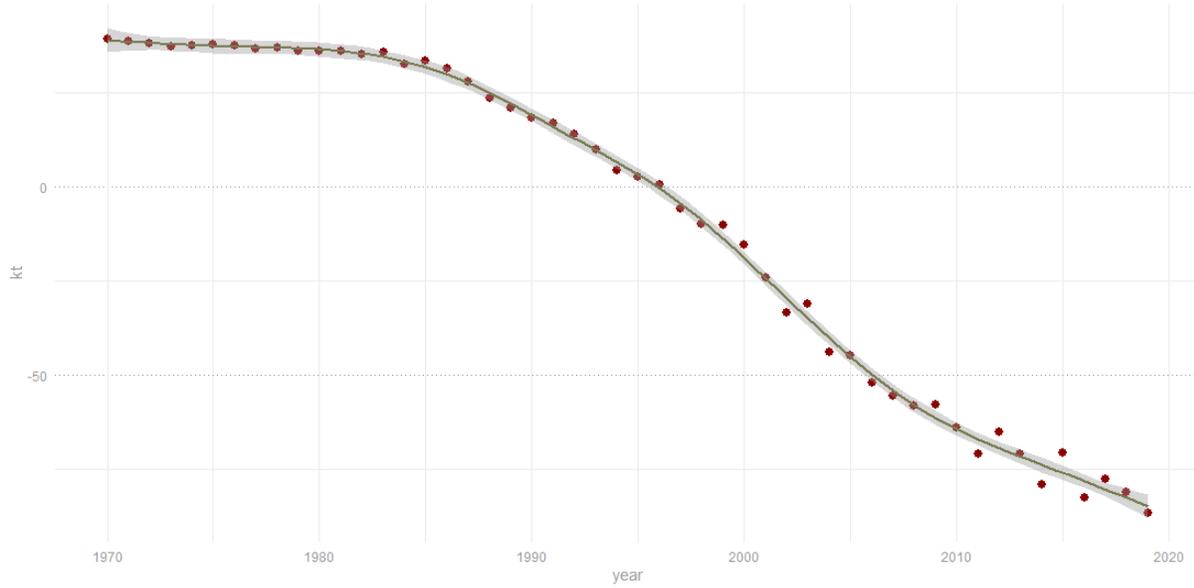


Abbildung 5.1: $K(t)$ im Lee Carter Modell für österreichische Frauen.

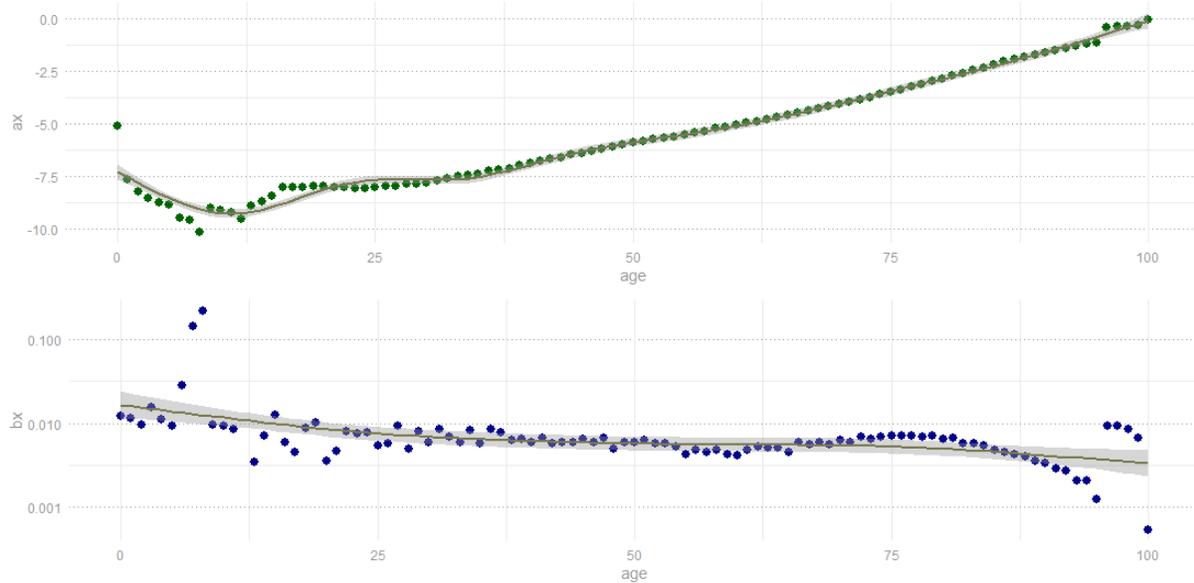


Abbildung 5.2: $A(x)$ (oben) und $B(x)$ (unten) im Lee Carter Modell für österreichische Frauen.

Zur Veranschaulichung ist durch die graue Linie in den Plots eine Glättung der Werte dargestellt, der hellgraue Schatten zeigt ein Konfidenzintervall.

In Abbildung 5.1 sieht man schön, wie $K(t)$ mit größerem t fallen, da für spätere Geburtsjahre eine Sterblichkeitsverbesserung zu erwarten ist.

Aus Abbildung 5.2 ist aus den $A(x)$ das übliche Verhalten der Sterbewahrscheinlichkeiten erkennbar:

- Im Kindesalter sinkt die Sterbewahrscheinlichkeit, bevor sie für Pubertierende wieder steigt.
- Ein kurzes Absinken der Sterbewahrscheinlichkeit in den frühen Zwanzigern (unter anderem nach Abklingen von riskantem Verhalten während der Pubertät) ist erkennbar. Dieser Effekt spiegelt sich in den verwendeten Daten der weiblichen Bevölkerung weniger wider als bei vergleichbaren Daten für die männliche Bevölkerung.
- Zuletzt steigt die Sterbewahrscheinlichkeit mit fortschreitendem Alter kontinuierlich an.

Wie zu erwarten, fallen auch die $B(x)$ mit wachsendem Alter, da für höhere Alter die Auswirkungen der zeitabhängigen Komponente $K(t)$ kleiner werden. Ausreißer für niedrige und hohe Alter lassen sich durch eine geringe Datendichte in diesen Altern erklären.

5.2 Lee Carter Modell für Wien

Analog zur Vorgehensweise für die österreichische Frauenpopulation werden auch für das Lee Carter Modell für Wien die Parameter $A(x)$, $B(x)$ und $K(t)$ bestimmt, die in den Figuren 5.3 und 5.4 ersichtlich sind. Anhand der Grafiken ist sofort die schlechtere Datenlage der Wiener Frauenpopulation ersichtlich.

Nachdem die für das Lee Carter Modell benötigten Daten über den Verlauf der Populationsgröße für die Wiener Frauenpopulation nicht vorhanden sind, wurde die für Österreich verwendete Datei an dieser Stelle mit dem Faktor 0,21646 gekürzt (dies entspricht dem Verhältnis von der Wiener zur österreichischen Frauenbevölkerung, auf Basis von Daten der Statistik Austria aus dem Jahr 2020).

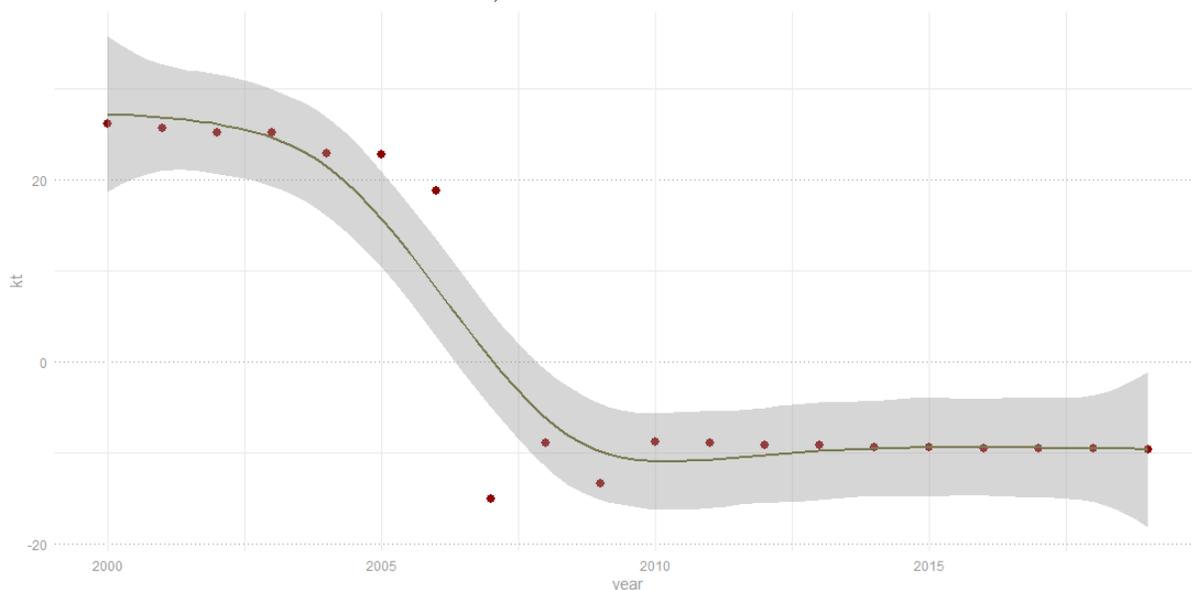


Abbildung 5.3: $K(t)$ im Lee Carter Modell für Wiener Frauen.

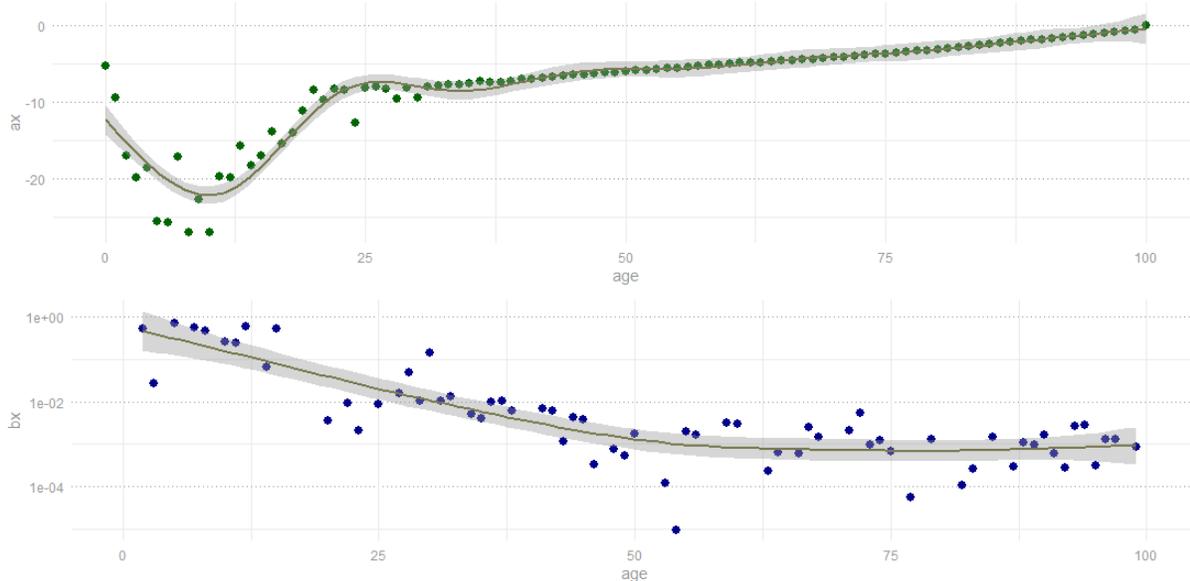


Abbildung 5.4: $A(x)$ (oben) und $B(x)$ (unten) im Lee Carter Modell für Wiener Frauen.

Die Interpretation der Abbildungen 5.3 und 5.4 decken sich mit jenen der Abbildungen 5.1 und 5.2.

Obwohl die einzelnen Datenpunkte eine höhere Streuung aufweisen, lassen sich durch die geglätteten Linien dieselben Trends wie für die österreichischen Daten ablesen.

5.3 Erzeugung einer Simulation

Da zur Bewertung des hier betrachteten Hedges auch Werte zum Zeitpunkt T benötigt werden, müssen anhand der aus den Sterblichkeitsdaten erstellten Modelle Simulationen erzeugt werden, um die Verpflichtung zu Zeitpunkten in der Zukunft bewerten zu können.

Zur Erzeugung einer einzelnen Simulation sind dabei folgende Schritte vonnöten:

- 1) Für alle Zeitpunkte $t = 1, \dots, 10$ und Alter $x = 50, \dots, 80$ werden die Sterberaten $m^{\ddot{O}}(x, t)$ und $m^W(x, t)$ aus den erstellten Lee Carter Modellen benötigt. Dabei stehen die Indizes \ddot{O} für die österreichische Frauenpopulation und W für die Wiener Frauenpopulation.
- 2) Mithilfe dieser Sterberaten berechnen wir die Mortalitätsraten über die Formel $q^i(x, t) = 1 - e^{-m^i(x, t)}$ für $i = W, \ddot{O}$.
Daraus erhalten wir die experience ratios

$$\epsilon(x, t) = \frac{q^W(x, t)}{q^{\ddot{O}}(x, t)}$$

und errechnen aus diesen die Mittelwerte über die Jahre 2020 ($t = 1$) bis 2029 ($t = T$)

$$\epsilon^T(x) = \frac{1}{10} \sum_{t=1}^{10} \epsilon(x, t).$$

Diese $\epsilon^T(x)$ werden im weiteren Verlauf zur Evaluierung der Verpflichtung zum Zeitpunkt $T = 10$ benötigt.

- 3) Die Rohdaten der österreichischen Frauenpopulation werden um die aus Punkt 1) erzeugten Daten erweitert. Aus dem so neu entstehenden Datensatz wird nun abermals ein Lee Carter Modell erstellt, welches aufgrund der Datenerweiterung von jenem aus den Rohdaten erstellten Modell abweicht. Da für die Umsetzung wieder ein Exposure benötigt wird, wird an dieser Stelle jedoch vereinfachend dasselbe verwendet, da von der Prämisse ausgegangen wird, das für die jeweiligen Altersklassen annähernd viele Personen ab- und zugehen.
- 4) Nun wird Punkt 1) wiederholt, diesmal mittels des Lee Carter Modells aus Punkt 3) für die um die Simulationen erweiterte österreichische Frauenbevölkerung. Wir berechnen also die Sterberaten $\tilde{m}^{\ddot{O}}(x, t)$ neu und beziehen dabei die Erfahrungen der vergangenen 10 Jahre mit ein. Hier sei $t = 1, \dots, 30$ gewählt (d.h. wir gehen von einem spätestmöglichen Auszahlungszeitpunkt im Jahr 2059 aus). Analog werden die zugehörigen Mortalitätsraten mit $\tilde{q}(x, t)$ bezeichnet.
- 5) An dieser Stelle haben wir nun alle benötigten Daten beisammen, um die Verpflichtung zu Zeit $T = 10$ auszuwerten. Mit den oben festgelegten Bedingungen erhalten wir also

$$L(T) = L(10) = \sum_{x=50}^{80} \sum_{t=1}^{10} 1,02^{10-t} \cdot S^W(x, t) \cdot 1 + \sum_{x=50}^{80} \sum_{t=11}^{30} 1,02^{10-t} \cdot \tilde{S}^W(x, t) \cdot 1,$$

wobei die Überlebenswahrscheinlichkeiten wie folgt gegeben sind:

$$\text{für } t \leq 10 : S^W(x, t) = \prod_{y=1}^t (1 - \epsilon(x, y)q^{\ddot{O}}(x, y)),$$

$$\text{für } t > 10 : \tilde{S}^W(x, t) = S^P(x, t) \prod_{y=T+1}^t (1 - \epsilon^T(x)\tilde{q}^{\ddot{O}}(x, y)).$$

Dabei wird für $t \leq T$ die Mortalitätsrate aus den Rohdaten und für $t > T$ jene aus dem erweiterten Modell verwendet. Für die Bewertung zukünftiger Zahlungsströme wollen wir also die zum Zeitpunkt $T = 10$ vorhandene Information miteinbeziehen.

- 6) Nun spezifizieren wir das Hedge-Underlying. Die benötigten experience ratios seien, wie bereits oben festgelegt, $\epsilon^H(x)$. Damit errechnet sich das Hedge-Underlying als

$$\tilde{L}(T) = \tilde{L}(10) = \sum_{x=50}^{80} \sum_{t=1}^{10} 1,02^{10-t} S^{HW}(i, t) \cdot 1 + \sum_{x=50}^{80} \sum_{t=11}^{30} 1,02^{10-t} \tilde{S}^{HW}(i, t) \cdot 1.$$

Das H in der Notation soll hierbei die Verwendung der Überlebenswahrscheinlichkeit in Verbindung des Hedges hervorheben. Diese sind definiert durch

$$\text{für } t \leq 10 : S^{HW}(x, t) = \prod_{y=1}^t (1 - \epsilon^H(x) q^{\ddot{O}}(x, y)),$$

$$\text{für } t > 10 : \tilde{S}^{HW}(x, t) = S^P(x, t) \prod_{y=T+1}^t (1 - \epsilon^H(x) \tilde{q}^{\ddot{O}}(x, y)).$$

Analog der Berechnung des Wertes der Verpflichtung zum Zeitpunkt $T = 10$ handelt es sich in der Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeit für $t \leq 10$ um die Mortalitätsrate aus den Rohdaten, während für $t > 10$ wieder jene aus dem erweiterten Modell verwendet werden soll. Das gewählte zukünftige Sterblichkeitsmodell für den Hedge soll also dem bereits in 4) erstellten entsprechen.

Mit der Durchführung der Schritte 1) bis 6) lässt sich eine einzelne Simulation der Größen $L(10)$ und $\tilde{L}(10)$ durchführen.

5.4 Ergebnisse

Für das hier betrachtete Beispiel wurde für die weitere Bearbeitung eine Anzahl von 5.000 Simulationen gewählt. Nun kann für jede einzelne Simulation der Payoff des Hedges berechnet werden. Dafür seien $AP = 200$ und $EP = 700$ und mit der Wahl $u = EP - AP$ erhalten wir für die fiktive Quantität $u = 500$.

Somit gilt für den Bull-Call-Spread im speziellen Fall für eine einzelne Simulation $\tilde{L}(10)$:

$$H(10) = 500 \cdot \max\left\{0, \min\left\{\frac{\tilde{L}(10) - 200}{500}, 1\right\}\right\}.$$

Der Nettowert des Portfolios P ergibt sich im weiteren Schritt dann aus $P(10) = L(10) - H(10)$ für die jeweils betrachtete Simulation.

In den folgenden Abbildungen 5.5 und 5.6 sind die Werte für die Größen $L(10)$, $H(10)$ und $P(10)$ dargestellt.

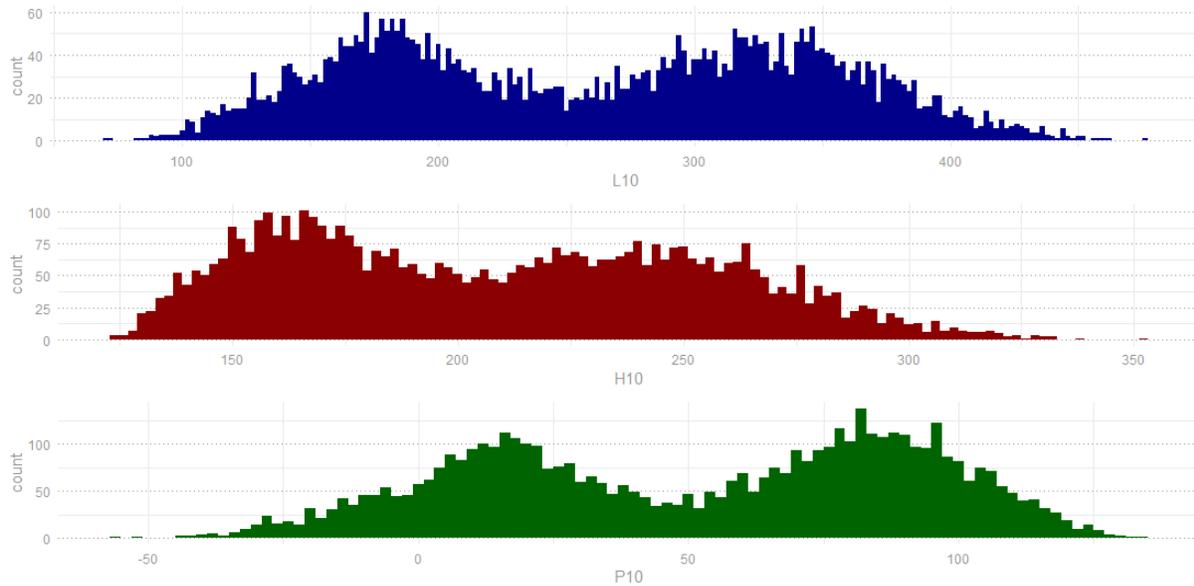


Abbildung 5.5: Histogramm der Größen $L(10)$, $H(10)$ und $P(10)$ für 5.000 Simulationen.

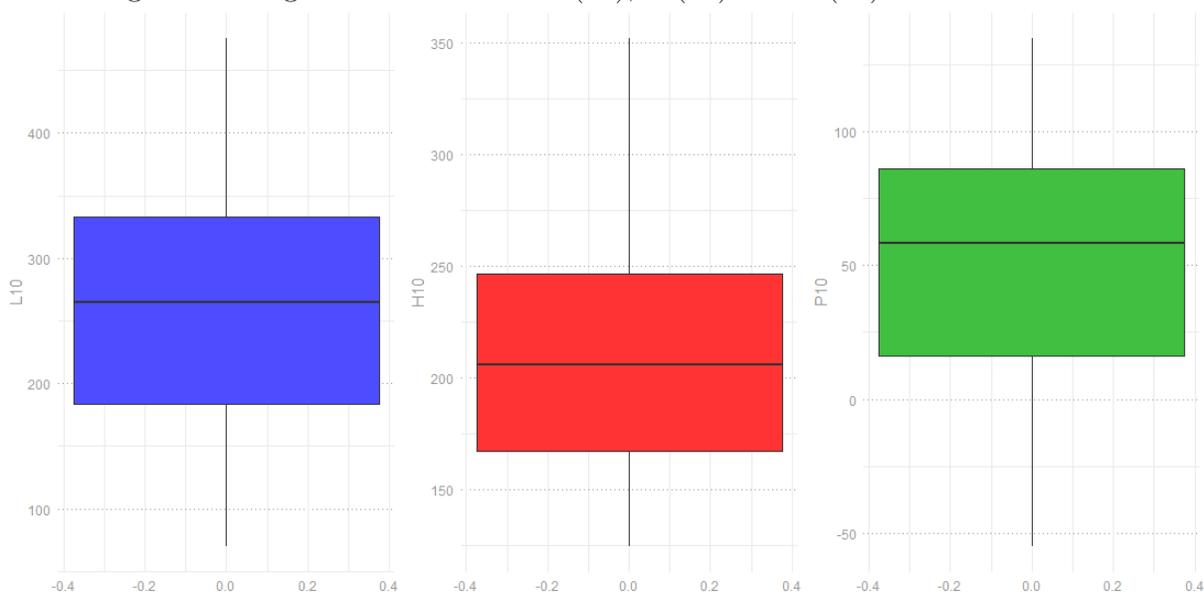


Abbildung 5.6: Boxplot der Größen $L(10)$, $H(10)$ und $P(10)$ für 5.000 Simulationen.

Aus dem Histogramm in Abbildung 5.5 erkennt man, dass der Wert der Verpflichtung $L(10)$ breiter gestreut ist als der Wert des Hedge Outputs $H(10)$, wenngleich die Spanne der Werte der Verpflichtung größer ist.

Zusätzlich kann man in den Boxplots in Abbildung 5.6 erkennen, dass die Abweichung vom Median sowohl nach oben als auch nach unten in ähnlicher Höhe erfolgt und die Ergebnisdatsätze somit relativ symmetrisch sind.

Die Eigenschaften von $L(10)$ und $H(10)$ übertragen sich direkt auf $P(10)$, da diese Werte aus Differenzbildung von $L(10)$ und $H(10)$ errechnet werden.

Nun können wir mithilfe der empirischen Verteilungen der Größen $L(10)$ beziehungsweise $P(10)$ die Values at Risk berechnen und damit sowohl die Kapitalanforderung C , als auch die Kapitalanforderung mit Hedge \tilde{C} und als Differenz aus den beiden Werten die Kapitalerleichterung E .

Aus den verwendeten Daten sowie Modellen und unter der Berücksichtigung aller angeführten Annahmen und Bedingungen erhält man folgende Werte für diese Größen (in Geldeinheiten):

- $C = 111,667$
- $\tilde{C} = 49,67633$
- $E = 61,99071$

Der positive Wert für E bedeutet daher, dass im angeführten speziellen Beispiel mit Verwendung der Daten österreichischer und Wiener Frauen in der Simulation eine tatsächliche Kapitalerleichterung durch Platzieren des konstruierten indexbasierten Hedges erfolgt.

Kapitel 6

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde eine Möglichkeit, sich gegen das Risiko Langlebigkeit abzusichern, vorgestellt. Zuerst wurde anhand des Papers “Basis Risk in Index-Based Longevity Hedges: A Guide for Longevity Hedgers” von Cairns und El Boukfaoui, 2021 ein indexbasierter Hedge im zeitdiskreten Szenario beschrieben. Dazu wurde (sowohl im Zeitdiskreten, als auch im Zeitstetigen) ein Bull-Call-Spread gewählt.

Diese Theorie wurde in Kapitel 4 unter Zuhilfenahme von stochastischer Mortalitätsintensität zudem um einen Zugang zur Durchführung im zeitstetigen Setting erweitert.

Abschließend konnte in Kapitel 5 anhand von Echtdateien der Statistik Austria über die weibliche Bevölkerung von Österreich und von Wien als Teilmenge von Österreich auch numerisch gezeigt werden, dass unter bestimmten getroffenen (im Kapitel genauer ausgeführten) Annahmen eine positive Kapitalerleichterung in der Kapitalanforderung zu erreichen ist.

Anhang A

R Code

```
library(readxl)
library(dplyr)
library(ggplot2)
library(stats)
library(demography)
library(tidyr)
library(readr)
library(StMoMo)
library(forecast)
library(tictoc)
library(PerformanceAnalytics)
library(gridExtra)
library(HDInterval)
```

```
# 1. Daten importieren -----
```

```
#Aufteilung in 2 Gruppen notwendig, weil die Struktur der Statistik
#Austria Daten fuer bestimmte Jahre anders aussieht
```

```
v <- 2002:2019
v_char <- as.character(v)
```

```
v2 <- 1970:2001
v_char2 <- as.character(v2)
```

```
#Daten fuer Oesterreich gesamt
link1 <- "C:/Users/melan/Desktop/Diplomarbeit/R/
jaehrliche_sterbetafel_n_1947_bis_2019__fuer_oesterreich.xlsx"
```

```

#Daten fuer Wien
link2 <- "C:/Users/melan/Desktop/Diplomarbeit/R/
jaehrliche_sterbetafeln_1970_bis_2019_fuer_wien.xlsx"

#Funktion fuer Struktur 2002-2019
datenladen <- function(link,v_char){
  dat2<- data.frame()
  for (i in v_char) {
    dat <- read_excel(link,
                      sheet = i,
                      col_types = c("numeric",
                                    "skip", "skip", "skip", "skip", "skip",
                                    "skip", "numeric", "skip", "skip",
                                    "skip", "skip", "skip", "skip", "skip",
                                    "skip", "skip", "skip", "skip", "skip"),
                      skip = 5)
    dat <- dat %>% mutate(jahr=as.numeric(i))

    dat2 <- dat2 %>% bind_rows(dat)
  }
  return(dat2)
}

#Funktion fuer Struktur vor 2002
datenladen2 <- function(link,v_char){
  dat2<- data.frame()
  for (i in v_char) {
    dat <- read_excel(link,
                      sheet = i,
                      col_types = c("numeric",
                                    "skip", "skip", "skip", "skip", "skip",
                                    "skip", "numeric", "skip", "skip",
                                    "skip", "skip", "skip", "skip"),
                      skip = 10)
    dat <- dat %>% mutate(jahr=as.numeric(i))

    dat2 <- dat2 %>% bind_rows(dat)
  }
  return(dat2)
}

dat_aut_2002_2019<- datenladen(link1,v_char)
dat_aut_1970_2001 <- datenladen2(link1,v_char2)

```

```

dat_aut_1970_2001 <- dat_aut_1970_2001 %>% rename(qx='q(x)')
dat_aut <- bind_rows(dat_aut_1970_2001,dat_aut_2002_2019)
dat_aut <- dat_aut %>% rename(qx_aut=qx)

#Leerzeilen, die beim Einlesen entstanden sind entfernen
dat_aut <- dat_aut %>% filter(!is.na(x))

#Wien hat durchgehend die "alte" Struktur
v3<- 2000:2019
v_char3<- as.character(v3)
dat_wien <- datenladen2(link2,v_char3)
dat_wien <- dat_wien %>% filter(!is.na(x))
dat_wien <- dat_wien %>% rename(qx_wien='q(x)')

#nun haben wir beide Datensätze schön im r studio

#beide Datensets zusammenführen

dat <- dat_aut %>% left_join(dat_wien, by=c("x","jahr"))
#Check fuer Division durch 0
check <- dat %>% filter(qx_aut==0)

# 2. Lee Carter fuer Referenzpopulation=Oesterreich -----

#Datenformat umstrukturieren
dat2 <- dat %>% select(x,jahr,qx_aut) %>% pivot_wider(names_from = jahr,
                                                    values_from = qx_aut)
dat2 <- dat2 %>% select(-x)

#Oesterreich popsize (wird fuer die Lee Carter Funktion benoetigt)
Austria_PopSize <- read_table2("Austria_PopSize.txt",
                              skip = 2)

ap <- Austria_PopSize %>% select(-Total, -Male)
ap <- ap %>% filter(Year %in% 1970:2019, Age %in% 0:100)

ap2 <- ap %>% pivot_wider(names_from = Year, values_from = Female)
ap2 <- ap2 %>% select(-Age)

```

```

#Umwandeln der qx auf mx vor Anwendung von Lee Carter

dat4 <- -log(1-dat2)
dat4[dat4==Inf]<- 1
dat4[is.na(dat4)]<-1
dat4[dat4==0]<- 10^(-16)

#dat4 : hier sind die Werte die mx aus dem paper-> leecart2

dat_demog2 <- demogdata(data=as.matrix(dat4),
                        pop= ap2,
                        ages=0:100,
                        years = 1970:2019,
                        type="mortality",
                        label="Austria",
                        name="female")

#lca erzeugt Lee Carter Modell
leecart2 <- lca(dat_demog2,series = "female")

#Test Parameter
leecart2$ax
leecart2$bx
leecart2$kt

#Plotten der Parameter des Lee Carter fuer Oesterreich

#kt
df <- data.frame(year=leecart2$year, kt=leecart2$kt)
ggplot(df, aes(year,kt)) +
  geom_point(size=2.5, color='darkred') +
  geom_smooth(method='gam', color='#7a7a52')

#ax und bx
mytheme <- theme_minimal() +
  theme(
    legend.position = "none",
    axis.ticks = element_blank(),
    axis.title = element_text(color = "grey60"),
    axis.text = element_text(color = "grey60"),
    #panel.background = element_rect(fill = "#fce8f1"),
    # Set the panel gridlines major y values
    panel.grid.major.y = element_line(
      # Set the color to grey60

```

```

    color = "grey60",
    # Set the size to 0.25
    size = 0.25,
    # Set the linetype to dotted
    linetype = "dotted"
  )
)
theme_set(mytheme)

df2 <- data.frame(age=leecart2$age, ax=leecart2$ax, bx=leecart2$bx)
p1 <- ggplot(df2, aes(age,ax)) +
  geom_point(size=2.5, color='darkgreen') +
  geom_smooth(method='gam', color='#7a7a52')
#log, damit besser sichtbar
p2 <- ggplot(df2, aes(age,bx)) +
  geom_point(size=2.5, color='darkblue') +
  scale_y_log10() +
  geom_smooth(method='gam', color='#7a7a52')

grid.arrange(p1,p2,ncol=1, nrow=2)

```

```

# 3. Lee Carter fuer individuelle Population=Wien -----

#Datenformat umstrukturieren
dat3 <- dat %>% select(x,jahr,qx_wien) %>% pivot_wider(names_from = jahr,
                                                    values_from = qx_wien)

dat3 <- dat3 %>% select(-x)
dat3 <- dat3[,c('2000','2001','2002','2003','2004','2005',
              '2006','2007','2008','2009','2010','2011',
              '2012','2013','2014','2015','2016','2017',
              '2018','2019')]

#Wien popsize (wird fuer die Lee Carter Funktion benoetigt)

ap3 <- ap %>% mutate(Female=round(Female*0.21646,0))
ap3 <- ap3 %>% pivot_wider(names_from = Year,values_from = Female)
ap3 <- ap3 %>% select(-Age)
ap3 <- ap3 %>% select('2000':'2019')

dat5 <- -log(1-dat3)
dat5[dat5==Inf]<- 1

```

```

dat5[is.na(dat5)] <- 1
dat5[dat5==0] <- 10^(-16)

dat_demog3 <- demogdata(data=as.matrix(dat5),
                        pop= ap3,
                        ages=0:100,
                        years = 2000:2019,
                        type="mortality",
                        label="Vienna",
                        name="female")

#lca erzeugt Lee Carter Modell
leecart3 <- lca(dat_demog3, series = "female")

#Test Parameter
leecart3$ax
leecart3$bx
leecart3$kt

#Plotten der Parameter des Lee Carter fuer Wien

#kt
df_w <- data.frame(year=leecart3$year, kt=leecart3$kt)
ggplot(df_w, aes(year, kt)) +
  geom_point(size=2.5, color='darkred') +
  geom_smooth(method='gam', color='#7a7a52')

#ax und bx
df2_w <- data.frame(age=leecart3$age, ax=leecart3$ax, bx=leecart3$bx)
p3 <- ggplot(df2_w, aes(age, ax)) +
  geom_point(size=2.5, color='darkgreen') +
  geom_smooth(method='gam', color='#7a7a52')
#log, damit besser sichtbar
p4 <- ggplot(df2_w, aes(age, bx)) +
  geom_point(size=2.5, color='darkblue') +
  scale_y_log10() +
  geom_smooth(method='gam', color='#7a7a52')

grid.arrange(p3, p4, ncol=1, nrow=2)

#-----hier beginnt nun die Simulation-----

tic()
AnzSim=5000

```

```

dim_out=2*AnzSim
output <- matrix(1:dim_out, nrow=2, ncol=AnzSim)
out <- list()

for (n in 1:AnzSim){

# 4. Zeitreihenmodell fuer Perioden- und Kohorteneffekte -----

# 4.1 Random Walk fuer Lee-Carter Oesterreich

# Schaetzen von Random Walk Parameter im Lee-Carter-Modell
# Erzeugen von simulierten Werten fuer Mortalitaetsrate q im
# Lee Carter Modell mit Random walk fuer Alter x und Zeitpunkt Mat

sim_leecart <- matrix(1:1010, nrow=101, ncol=10)

for (i in 1:101){
  for (j in 1:10){
    parameter <- list(AnzSim=1,      #Anzahl der Simulationen
                      Mat=j,        #Jahre bis zur Maturitaet
                      tn=2019,
                      t0=1970,
                      x=i
                      )

    fittingLCRW<- function(leecart2,parameter){
      n=parameter$tn-parameter$t0
      h <-tail(leecart2$kt, n+1)
      dif <-diff(h)
      vLC <-mean(dif)
      varLC <-(dif-vLC)^2
      sigma0LC <- mean(varLC)
      result <-list(leecart2$ax, leecart2$bx ,leecart2$kt,
                   vLC, sigma0LC)
      names(result) <-c("ax", "bx","kt", "vLC", "sigma0LC")
      return(result)
    }

    #Hilfsfunktion
    probab <- function(ax, bx, Y){
      m <-exp(ax+bx*Y)
      q <- 1- exp(-m)
      return(q)
    }
  }
}

```

```

parameter$x_char=as.character(parameter$x)

samplingLCRW <-function(leecart2, parameter){
  a <-fittingLCRW(leecart2, parameter)
  Y<- rnorm(parameter$AnzSim,
            mean=a$kt[time(a$kt)==parameter$tn]+a$vLC*parameter$Mat,
            sd = a$sigma0LC*parameter$Mat)
  q<-probab(a$ax[parameter$x_char],a$bx[parameter$x_char], Y)
  return(q)
}
sim_leecart[i,j] <- samplingLCRW(leecart2,parameter)
}

sim_leecart
sim_leecart[is.na(sim_leecart)]<-1

# 4.2 Random Walk fuer Lee-Carter Wien

# Schaetzen von Random Walk Parameter im Lee-Carter-Modell
# Erzeugen von simulierten Werten fuer Mortalitaetsrate q im
# Lee-Carter-Modell mit Random walk fuer Alter x und Zeitpunkt Mat

sim_leecart_wien <- matrix(1:1010, nrow=101, ncol=10)

for (i in 1:101){
  for (j in 1:10){
    parameter <- list(AnzSim=1,      #Anzahl der Simulationen
                     Mat=j,        #Jahre bis zur Maturitaet
                     tn=2019,
                     t0=2000,
                     x=i
                    )

    fittingLCRW<- function(leecart3,parameter){
      n=parameter$tn-parameter$t0
      h <-tail(leecart3$kt, n+1)
      dif <-diff(h)
      vLC <-mean(dif)
      varLC <-(dif-vLC)^2
      sigma0LC <- mean(varLC)
      result <-list(leecart3$ax, leecart3$bx ,leecart3$kt, vLC,sigma0LC)
    }
  }
}

```

```

    names(result) <-c("ax", "bx","kt", "vLC", "sigma0LC")
    return(result)
}
#Hilfsfunktion
probab <- function(ax, bx, Y){
  m <-exp(ax+bx*Y)
  q <- 1- exp(-m)
  return(q)
}

parameter$x_char=as.character(parameter$x)

samplingLCRW <-function(leecart3, parameter){
  a <-fittingLCRW(leecart3, parameter)
  Y<- rnorm(parameter$AnzSim,
            mean=a$kt[time(a$kt)==parameter$tn]+a$vLC*parameter$Mat,
            sd = a$sigma0LC*parameter$Mat)
  q<-probab(a$ax[parameter$x_char],a$bx[parameter$x_char], Y )
  return(q)
}
sim_leecart_wien[i,j] <- samplingLCRW(leecart2,parameter)
}
}

sim_leecart_wien
sim_leecart_wien[is.na(sim_leecart_wien)]<-1

# 5. Lee-Carter mit erweitertem Dateninput -----
# (Erweiterung um Simulationen)

# 5.1 Oesterreich erweitertes Lee-Carter

dat4erw <- cbind(dat4,sim_leecart)
colnames(dat4erw) <- 1970:2029
dat4erw[dat4erw==Inf]<- 1
dat4erw[is.na(dat4erw)]<-1
dat4erw[dat4erw==0] <- 10^(-16)

zw <- ap2[50]
ap2_erw <- cbind(ap2,zw,zw,zw,zw,zw,zw,zw,zw,zw)

dat_demog_oe_erw <- demogdata(data=as.matrix(dat4erw),
                             pop= ap2_erw,

```

```
        ages=0:100,
        years = 1970:2029,
        type="mortality",
        label="Austria",
        name="female")

leecart2_erw <- lca(dat_demog_oe_erw,series = "female")

#plot(leecart2_erw$kt,type="p", ylab="K(t)", xlab="Jahr",
#      ylim=c(-100,70))
#plot(leecart2_erw$ax, ylab="A(x)", xlab="Alter")
#plot(leecart2_erw$bx, ylab="B(X)", xlab="Alter")

# 5.2 Wien erweitertes Lee-Carter

dat5erw <- cbind(dat5,sim_leecart_wien)
colnames(dat5erw) <- 2000:2029
dat5erw[dat5erw==Inf]<- 1
dat5erw[is.na(dat5erw)]<-1
dat5erw[dat5erw==0]<- 10(-16)

zw2 <- ap3[20]
ap3_erw <- cbind(ap3,zw2,zw2,zw2,zw2,zw2,zw2,zw2,zw2,zw2,zw2)

dat_demog_wien_erw <- demogdata(data=as.matrix(dat5erw),
                                pop= ap3_erw,
                                ages=0:100,
                                years = 2000:2029,
                                type="mortality",
                                label="Vienna",
                                name="female")

leecart3_erw <- lca(dat_demog_wien_erw,series = "female")

#plot(leecart3_erw$kt,type="p", ylab="K(t)", xlab="Jahr",
#      ylim=c(-100,70))
#plot(leecart3_erw$ax, ylab="A(x)", xlab="Alter")
#plot(leecart3_erw$bx, ylab="B(X)", xlab="Alter")

# 6. Simulieren in den erweiterten Modellen -----
# 6.1 Simulation im erweiterten Desterreich Lee-Carter Modell
```

```

sim_leecart_erw <- matrix(1:3030, nrow=101, ncol=30)

for (i in 1:101){
  for (j in 1:30){
    parameter <- list(AnzSim=1,      #Anzahl der Simulationen
                     Mat=j,        #Jahre bis zur Maturitaet
                     tn=2029,
                     t0=1970,
                     x=i
                    )

    fittingLCRW<- function(leecart2_erw,parameter){
      n=parameter$tn-parameter$t0
      h <-tail(leecart2_erw$kt, n+1)
      dif <-diff(h)
      vLC <-mean(dif)
      varLC <-(dif-vLC)^2
      sigma0LC <- mean(varLC)
      result <-list(leecart2_erw$ax, leecart2_erw$bx ,leecart2_erw$kt,
                   vLC, sigma0LC)
      names(result) <-c("ax", "bx","kt", "vLC", "sigma0LC")
      return(result)
    }
    #Hilfsfunktion
    probab <- function(ax, bx, Y){
      m <-exp(ax+bx*Y)
      q <- 1- exp(-m)
      return(q)
    }

    parameter$x_char=as.character(parameter$x)

    samplingLCRW <-function(leecart2_erw, parameter){
      a <-fittingLCRW(leecart2_erw, parameter)
      Y<- rnorm(parameter$AnzSim,
                mean=a$kt[time(a$kt)==parameter$tn]+a$vLC*parameter$Mat,
                sd = a$sigma0LC*parameter$Mat)
      q<-probab(a$ax[parameter$x_char],a$bx[parameter$x_char], Y)
      return(q)
    }
    sim_leecart_erw[i,j] <- samplingLCRW(leecart2_erw,parameter)
  }
}

```

```

sim_leecart_erw
sim_leecart_erw[is.na(sim_leecart)]<-1

# 6.2 Simulation im erweiterten Wien Lee-Carter Modell

sim_leecart_wien_erw <- matrix(1:3030, nrow=101, ncol=30)

for (i in 1:101){
  for (j in 1:30){
    parameter <- list(AnzSim=1,      #Anzahl der Simulationen
                      Mat=j,        #Jahre bis zur Maturitaet
                      tn=2029,
                      t0=1970,
                      x=i
                    )

    fittingLCRW<- function(leecart3_erw,parameter){
      n=parameter$tn-parameter$t0
      h <-tail(leecart3_erw$kt, n+1)
      dif <-diff(h)
      vLC <-mean(dif)
      varLC <-(dif-vLC)^2
      sigma0LC <- mean(varLC)
      result <-list(leecart3_erw$ax, leecart3_erw$bx, leecart3_erw$kt,
                    vLC, sigma0LC)
      names(result) <-c("ax", "bx","kt", "vLC", "sigma0LC")
      return(result)
    }
    #Hilfsfunktion
    probab <- function(ax, bx, Y){
      m <-exp(ax+bx*Y)
      q <- 1- exp(-m)
      return(q)
    }

    parameter$x_char=as.character(parameter$x)

    samplingLCRW <-function(leecart3_erw, parameter){
      a <-fittingLCRW(leecart3_erw, parameter)
      Y<- rnorm(parameter$AnzSim,
                mean=a$kt[time(a$kt)==parameter$tn]+a$vLC*parameter$Mat,
                sd = a$sigma0LC*parameter$Mat)
      q<-probab(a$ax[parameter$x_char],a$bx[parameter$x_char], Y)
      return(q)
    }
  }
}

```

```

    }
    sim_leecart_wien_erw[i,j] <- samplingLCRW(leecart3_erw,parameter)
  }
}

sim_leecart_wien_erw
sim_leecart_wien_erw[is.na(sim_leecart)]<-1

```

```

# 7. Die Verpflichtung -----

```

```

# 7.1 Ueberlebenswahrscheinlichkeit fuer t<=T

```

```

# brauche fuer die Ueb.ws. mortality rates und nicht death rates
# kann hier die Wiener Daten nehmen, da ER genau so definiert

```

```

S_P <- function(x,t){
  terme <- 1:t
  for (i in 1:t){
    terme[i] <- (1-(1-exp(-sim_leecart_wien_erw[x,i])))
  }
  return(prod(terme))
}

```

```

#Test
S_P(31,30)
S_P(90,5)
S_P(15,30)

```

```

# 7.2 Ueberlebenswahrscheinlichkeit fuer t>T

```

```

qx_oe_erw <- 1-exp(-dat4erw)
#in dat5erw stehen mx, daher umrechnen in qx
qx_w_erw <- 1-exp(-dat5erw)

```

```

#damit Datenformat zu Wiener Daten passt
qx_oe_erwred <- qx_oe_erw[,31:60]
er_einzeln <- qx_w_erw/qx_oe_erwred
erT <- rowMeans(er_einzeln)
#plot(erT,ylim=c(0,3))

```

```

T <- 10 # setze Maturitaet auf 10
ST_P <- function(x,t){
  terme <- 1:(t-T)

```

```

    for (i in 1:(t-T)){
      terme[i] <- (1-erT[x]*qx_oe_erw[x,i+10])
    }
    return(prod(terme)*S_P(x,T))
  }

# S_P fuer t<=10 und ST_P fuer t>10
S_P(60,9)
ST_P(60,11)
ST_P(60,15)

uebws <- data.frame()
for (i in 50:80) {      # alle UebWs in einen Dataframe
  for (j in 1:30) {
    if (j<T+1) {
      uebws[i,j] <- S_P(i,j)
    }
    else uebws[i,j] <- ST_P(i,j)
  }
}

#NA Zeilen loeschen -> dim 31 x 30 (Alter x Zeit)
uebws <- uebws %>% na.omit(uebws)

#plot(1:30,uebws[5,], ylim=c(0,1))
#plot(1:31,uebws[,10], ylim=c(0,1))

# 7.3 Berechnung der Verpflichtung L(T)=L(10)

uebws2 <- uebws
for (i in 1:31){
  for (j in 1:30){
    uebws2[i,j] <- uebws2[i,j] * (1.02^(10-j)) #Maturitaet 10
  }
}

L10 <- sum(rowSums(uebws2[ , 1:10])) + sum(rowSums(uebws2[,11:30]))

# 8. Hedge Underlying -----
#brauche die experience ratios des Hedge-Vertrags
#diese seien auf Basis der Rohsterbedaten definiert

```

```

qx_oe <- 1-exp(-dat4)
qx_w <- 1-exp(-dat5)   #in dat5 stehen m $\alpha$ , daher umrechnen in qx

qx_oe_red <- qx_oe[,31:50]
erH_einzeln <- qx_w/qx_oe_red
erH <- rowMeans(erH_einzeln) #das sind die endgueltigen Hedge-ER
#plot(erH,ylim=c(0,3))

```

```

# 8.1 Hedge-Underlying Ueberlebenswahrscheinlichkeit fuer t<=T

```

```

#brauche fuer die Ueb.ws. mortality rates und nicht death rates

```

```

SH_P <- function(x,t){
  terme <- 1:t
  for (i in 1:t){
    terme[i] <- (1-erH[x]*(1-exp(-sim_leecart[x,i])))
  }
  return(prod(terme))
}
#Test
SH_P(31,10)
SH_P(90,5)
SH_P(15,9)

```

```

# 8.2 Hedge-Underlying Ueberlebenswahrscheinlichkeit fuer t>T

```

```

SHT_P <- function(x,t){
  terme <- 1:(t-T)
  for (i in 1:(t-T)){
    terme[i] <- (1-erH[x]*qx_oe[x,i+10])
  }
  return(prod(terme)*S_P(x,T))
}
#Test
SHT_P(50,20)
SHT_P(50,30)

```

```

H_ws <- data.frame()
for (i in 50:80) {   #alle Hedge UebWs in einen Dataframe
  for (j in 1:30) {
    if (j<T+1) {
      H_ws[i,j] <- SH_P(i,j)
    }
  }
}

```

```

        else H_ws[i,j] <- SHT_P(i,j)
    }
}
#NA Zeilen loeschen -> dim 31 x 30 (Alter x Zeit)
H_ws <- H_ws %>% na.omit(H_ws)

#plot(1:30,H_ws[5,], ylim=c(0,1))
#plot(1:31,H_ws[,10], ylim=c(0,1))

# 8.3 Berechnung des Hedge Underlyings  $L_{\tilde{t}}(T)=L_{\tilde{t}}(10)$ 

H_ws2 <- H_ws
for (i in 1:31){
  for (j in 1:30){
    H_ws2[i,j] <- H_ws2[i,j] * (1.02^(10-j))
  }
}

L10_tilde <- sum(rowSums(H_ws2[ , 1:10])) + sum(rowSums(H_ws2[,11:30]))

output[1,n]=L10
output[2,n]=L10_tilde

}

toc()

#-----Ende Simulation-----

out
output

# 9. Hedge Payoff -----

AP <- 200
EP <- 700
u <- EP - AP
H10 <- (1:AnzSim)

for (l in 1:AnzSim){
H10[l] <- u * max(0,min((output[2,l]-AP)/(EP-AP),1))

```

```
}
H10
P10 <- output[1,] - H10
P10

write.csv(H10, "H10.csv")
write.csv(P10, "P10.csv")
write.csv(output[1,], "L10.csv")

mean(P10)
var(P10)
plot(P10)

#Neubelegung L10 mit den Simulationen
L10 <- output[1,]

erg <- data.frame(P10, H10, L10)

pl1 <- ggplot(erg, aes(L10)) +
  geom_histogram(fill='darkblue', binwidth = 2)

box1 <- ggplot(erg, aes(L10)) +
  geom_boxplot(fill='#4d4dff') +
  coord_flip()

pl2 <- ggplot(erg, aes(P10)) +
  geom_histogram(fill='darkgreen', binwidth = 2)

box2 <- ggplot(erg, aes(P10)) +
  geom_boxplot(fill='#40bf40') +
  coord_flip()

pl3 <- ggplot(erg, aes(H10)) +
  geom_histogram(fill='darkred', binwidth = 2)

box3 <- ggplot(erg, aes(H10)) +
  geom_boxplot(fill='#ff3333') +
  coord_flip()

grid.arrange(pl1, pl3, pl2, ncol=1, nrow=3)
grid.arrange(box1, box3, box2, ncol=3, nrow=1)

#VaR Bestimmung, Konfidenzniveau 1 - alpha
find_VaR <- function(x, alpha, step_size=0.01) {
```

```
e <- ecdf(x)
s <- seq(min(x), max(x), step_size)
for (i in 1:length(s)){
  val <- e(s[i])
  if (val >= 1 - alpha) {
    return(s[i])
  }
}
}

alpha_value <- 0.1

find_VaR(P10, alpha_value)
inverseCDF(c(0.025, 1-alpha_value), ecdf(P10))
#zur Kontrolle der VaR Findung

kap <- find_VaR(L10,alpha_value) - mean(L10)
kapH <- find_VaR(P10,alpha_value) - mean(P10)

kapErl <- kap - kapH

kap
kapH
kapErl
```

Literatur

- Biagini, Francesca, Thorsten Rheinländer und Jan Widenmann (2013). “HEDGING MORTALITY CLAIMS WITH LONGEVITY BONDS”. eng. In: *ASTIN bulletin* 43.2, S. 123–157. ISSN: 0515-0361.
- Cairns, Andrew J. G. und Ghali El Boukfaoui (2021). “Basis Risk in Index-Based Longevity Hedges: A Guide for Longevity Hedgers”. eng. In: *North American actuarial journal* 25.S1, S97–S118. ISSN: 1092-0277.
- CAPTRADER (Aug. 2022). *Bull Call Spread*. URL: <https://www.captrader.com/bull-call-spread/>.
- Coughlan, Guy D. u. a. (2011). “Longevity Hedging 101: A Framework for Longevity Basis Risk Analysis and Hedge Effectiveness”. eng. In: *North American actuarial journal* 15.2, S. 150–176. ISSN: 1092-0277.
- HMD. Human Mortality Database. (Sep. 2022). *Max Planck Institute for Demographic Research (Germany), University of California, Berkeley (USA), and French Institute for Demographic Studies (France)*. URL: www.mortality.org.
- Lee, RD und LR Carter (1992). “MODELING AND FORECASTING UNITED-STATES MORTALITY”. eng. In: *Journal of the American Statistical Association* 87.419, S. 659–671. ISSN: 0162-1459.