



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

DISSERTATION

# Regelung von magnetgelagerten Rotoren für den Einsatz in Turbomolekularpumpen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der technischen  
Wissenschaften unter der Leitung von

o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Schrödl

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
bei der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik

von

Dipl.-Ing. Markus Hutterer, BSc

Matrikelnummer: 1225853

Dalengaße 3/9

A-2492 Eggendorf

Wien, im April 2018

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die zum Gelingen dieser Dissertation beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Schrödl für die Betreuung dieser Dissertation. Seine langjährige Unterstützung durch zahlreiche Diskussionen haben maßgeblich zum erfolgreichen Abschluss dieser Arbeit beigetragen. Vor allem für sein Vertrauen in meine Fähigkeiten und für das eigenverantwortliche Arbeitsumfeld möchte ich mich bedanken.

Für die Erstbegutachtung bedanke ich mich bei Herrn Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Thomas Wolbank.

Für die Zweitbegutachtung bedanke ich mich bei Herrn o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.sc.techn. Wolfgang Amrhein.

Mein freundschaftlicher Dank gilt meinen Arbeitskollegen am Institut Dipl.-Ing. Dr.techn. Matthias Hofer, Dipl.-Ing. Dominik Wimmer, Richard Spießberger, BSc, Dipl.-Ing. Mario Nikowitz und Andreas Brunner, BSc. Die zahlreichen Diskussionen boten stets hilfreiche Anregungen. Des Weiteren bedanke ich mich bei meinen Kollegen für das gute und freundliche Arbeitsklima. Für das Korrigieren der Arbeit bedanke ich mich nochmals bei Dipl.-Ing. Dr.techn. Matthias Hofer und Dipl.-Ing. Dominik Wimmer.

Mein ganz persönlicher Dank gilt meiner gesamten Familie für den langjährigen Rückhalt während der Studienzeit und für die abwechslungsreichen Tage im Waldviertel. Dabei bedanke ich mich ausdrücklich bei meinem Vater Ernst, meiner Mutter Margit und meinem Bruder Roland für den Rückhalt während des Studiums und der Anfertigung dieser Dissertation. Ganz besonders möchte ich mich noch für das notwendige Verständnis und die Unterstützung bei meiner Lebensgefährtin Nicole bedanken. Gerade in der Fertigstellungsphase war die gemeinsame Zeit oft sehr limitiert.

# Kurzfassung

Aktive Magnetlager werden häufig für die Lagerung rotierender Wellen eingesetzt, falls ein reibungs- und verschleißarmer Betrieb gefordert wird. Das Wegfallen nötiger Schmierstoffe begünstigt den Einsatz aktiver Magnetlager in der Beschichtungs- und Halbleitertechnik. Für diesen Einsatzzweck werden Magnetlager oftmals zur Stabilisierung von Rotoren in Turbomolekularpumpen zur Erzeugung von Vakuum eingesetzt. Diese Arbeit beschäftigt sich daher mit der Entwicklung und Analyse von Regelungsmethoden zur Stabilisierung solcher Rotoren. Die Zielsetzung liegt dabei nicht ausschließlich in der Entwicklung der bestmöglichen Regelung, sondern auch in der Berücksichtigung der Implementierbarkeit für den industriellen Einsatz. Aus diesem Grund muss neben einer guten Performance auch eine schnelle Berechnung in einem digitalen Signalprozessor garantiert sein.

Der erste Teil dieser Arbeit beschreibt die nötigen Grundlagen magnetgelagerter Rotoren. Mithilfe dieser grundlegenden Kenntnisse wird im nächsten Abschnitt die Modellierung eines Magnetlagersystems durchgeführt. Dabei wird zu Beginn ein elastisch gelagerter Rotor behandelt und dieser im Anschluss um eine magnetische Lagerung erweitert.

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf der Auslegung einer Regelung für magnetgelagerte Turbomolekularpumpen. Zu Beginn werden die Nachteile einer rein dezentralen Regelung in diesem Anwendungsbereich beschrieben. Als erster Versuch zur Entwicklung einer stabilisierenden Regelung wird die LQG-Methode verwendet. Diese Methode zieht in Kombination mit der Stabilisierung der flexiblen Eigenschaften des Rotors jedoch Probleme mit sich. Daher wird für die Regelung im gesamten Betriebsbereich eine entkoppelte Regelung, basierend auf der inversen Dynamik des Magnetlagersystems, verwendet. Mit dieser Methode werden zwei verschiedene Rotoren von Turbomolekularpumpen stabilisiert. Der wichtigste Unterschied für die Auslegung der Regelung beider Rotoren liegt in den unterschiedlichen Resonanzfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln. Im Gegensatz zum zweiten Rotor liegen beim ersten Rotor die Resonanzfrequenzen weit oberhalb der Bandbreite der Regelung. Die Performance und die Robustheit der entwickelten Regelung wird für die Anwendung an beiden Turbomolekularpumpen mit Simulationsergebnissen und experimentellen Ergebnissen verifiziert.

Die Positionsregelung alleine garantiert noch kein ausreichend gutes Laufverhalten des Rotors im gesamten Betriebsbereich. Aufgrund der mit steigender Drehzahl höher werdenden Unwuchtvibrationen ist eine Unwuchtkompensation nötig. Für den höheren Drehzahlbereich wird eine sogenannte Force-Free Regelung eingesetzt, welche die Aufgabe besitzt, den Unwuchtanteil des Sollstroms zu minimieren. Aufgrund der Verschlechterung des dynamischen Verhaltens der Force-Free Regelung für sinkende Drehzahlen, wird für diesen Drehzahlbereich eine Vibrationsregelung verwendet. Diese Vibrationsregelung besitzt im Gegensatz zur Force-Free Regelung die Aufgabe der Minimierung der Unwuchtvibration und benötigt daher vergleichsweise hohe synchrone Ströme.

Beide Kompensationsmethoden benötigen zur Berechnung entweder die aktuelle Drehzahl, oder den aktuellen Drehwinkel. Um das Magnetlager auch bei einer fehlerhaften Kommunikation zwischen Magnetlager und Motorregelung betreiben zu können, wird zusätzlich zu der Unwuchtkompensation ein Unwuchtbeobachter entwickelt. Die Robustheit und die Performance der entwickelten Unwuchtkompensation und des Unwuchtbeobachters werden mittels Simulations- und experimentellen Ergebnissen nachgewiesen.



# Abstract

Magnetic bearings are used in applications where an almost frictionless or wearless operation is required. In this context, active magnetic bearings (AMBs) are used with increased regularity. In many applications, like the semiconductor industry or the coating industry, lubricants should be avoided. Therefore, active magnetic bearings are often used in the application field of turbo molecular pumps. Thus, this thesis deals with the development and the evaluation of control structures for magnetically stabilized rotors of turbo molecular pumps. The purpose of the closed loop system lies not only in an optimal controller. Further, it should also be possible to run the developed control structure on a cost effective industrial hardware. Therefore, a short processing time of the implemented control structure is additionally required.

The first part of the thesis describes the basic equations to understand the physical background of magnetically stabilized rotors. The active magnetic bearing system is modelled based on this equation. To understand the characteristics of a high speed running rotor, the rotor is first stabilized with elastic mechanical bearings. Afterwards the elastic mechanical bearings are exchanged with active magnetic bearings.

The main focus of this thesis is the development of a control structure for the application field of turbo molecular pumps. First disadvantages of the decentralized control strategies in this application field are given. The first approach of controller design is the usage of a linear quadratic Gaussian controller for the rigid body part in combination with stabilizing filters for the flexible modes. However, this combination shows problems in the high speed range. Therefore, a decoupling approach is used in a next step. This control strategy is based on the inverse dynamic of the system. Using this decoupling method two different rotors of turbo molecular pumps are stabilized. The main difference of this two rotors lies in the frequency range of the resonance frequencies caused by the blade wheel. The performance and the robustness of the developed control strategy are verified using simulation and experimental results.

At higher speeds, vibrations caused by mass unbalance are a common problem in magnetic bearing applications. Thus, a so called unbalance compensation is necessary in some operating ranges. For the high speed range a Force-Free controller is used. The task of this structure is the minimization of the unbalance part of the current signal. The dynamic performance decreases with a decreasing angular velocity. To overcome that problem a vibration controller is used in the low speed range. In contrast to the force free controller, the vibration controller has the task to minimize the unbalance part of the position signal. Thus, the vibration controller requires high currents, which could lead to a saturation of the actuators. Both unbalance compensation structures require the actual angular velocity, or the actual rotor angle for calculation. In order to run the magnetic levitation independent of the motor controller, the unbalance controllers are extended with an unbalance observer. This unbalance observer has

the task to estimate the actual angular velocity and the actual rotor angle. The robustness and performance of the developed unbalance controller in combination with the unbalance observer are verified using simulation and experimental results.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlegende Gleichungen</b>	<b>3</b>
2.1	Das elektromagnetische Feld . . . . .	3
2.2	Grundlagen der Starrkörperkinetik . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Modellierung und Verhalten magnetgelagerter Rotoren</b>	<b>11</b>
3.1	Verhalten starrer Rotoren . . . . .	11
3.1.1	Elastisch gelagerte Rotoren . . . . .	14
3.1.2	Kritische Geschwindigkeiten . . . . .	19
3.2	Erweiterung des Federmodells um eine magnetische Lagerung . . . . .	22
3.2.1	Berechnung der resultierenden Kraft . . . . .	23
3.2.2	Systemgleichung eines magnetisch gelagerten Rotors . . . . .	26
3.3	Beschreibung magnetisch gelagerter flexibler Rotoren . . . . .	27
3.3.1	Flexibler Rotor mit kontinuierlicher Massenverteilung . . . . .	27
3.3.2	Methode der Finiten Elemente . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Stabilisierung magnetgelagerter Rotoren mittels LQ-Regler</b>	<b>33</b>
4.1	Dezentrale Regelung . . . . .	35
4.2	LQ-Regler . . . . .	38
4.3	Kompensation des gyroskopischen Effekts . . . . .	44
4.4	Kalman-Filter . . . . .	45
4.5	Stabilisierung der flexiblen Moden . . . . .	49
4.5.1	Vereinfachte Betrachtung am Zwei-Massen-Schwinger . . . . .	49
4.5.2	Stabilisierung eines Rotors mit kontinuierlicher Masseverteilung . . . . .	58
4.6	Experimentelle Ergebnisse des LQG stabilisierten Systems . . . . .	61
4.6.1	Verhalten bei sprungförmiger Belastung des Rotors . . . . .	62
4.6.2	Laufverhalten des Rotors bei einer kritischen Geschwindigkeit . . . . .	63
4.6.3	Systemverhalten bei Stillstand und drehendem Rotor . . . . .	64
4.7	Konklusion der LQG Regelung . . . . .	66

<b>5</b>	<b>Entkoppelte Regelung mit Kompensation des gyroskopischen Effekts</b>	<b>67</b>
5.1	Entkopplung mittels Ein- und Ausgangstransformation . . . . .	67
5.2	Entkopplung mittels inverser Dynamik . . . . .	69
5.3	Rotor mit hohen Eigenfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln . . . . .	72
5.3.1	Dynamisches Verhalten unter Parameterschwankung . . . . .	73
5.3.2	Der "Waterbed" -Effekt . . . . .	74
5.3.3	Forderung der Norm ISO 14839-3 . . . . .	77
5.3.4	Verhalten der $k_x$ -Kompensation unter Parameterschwankung . . . . .	80
5.3.5	Einfluss der Kompensation des gyroskopischen Effektes auf die Sensitivität des geschlossenen Regelkreises . . . . .	82
5.3.6	Einfluss eines Fehlers der Rotordrehzahl auf die Sensitivität des geschlossenen Regelkreises . . . . .	84
5.3.7	Experimentelle Ergebnisse . . . . .	89
5.4	Rotor mit geringen Eigenfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln . . . . .	95
5.4.1	Reglerstruktur . . . . .	96
5.4.2	Experimentelle Ergebnisse . . . . .	98
5.5	Konklusion der entkoppelten Regelung . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Unwuchtkompensation</b>	<b>105</b>
6.1	Unwuchtkompensation basierend auf generalisierten Notch-Filtern im gesamten Betriebsbereich einer Turbomolekularpumpe . . . . .	106
6.1.1	Unwuchtkompensation unter der Nutzung generalisierter Notch-Filter . . . . .	107
6.1.2	Auslegung und Stabilitätsanalyse der Unwuchtkompensationen . . . . .	110
6.1.3	Experimentelle Ergebnisse . . . . .	116
6.2	Unwuchtkompensation ohne explizite Messung der Drehzahl . . . . .	119
6.2.1	Entwicklung der Beobachterstruktur . . . . .	120
6.2.2	Experimentelle Ergebnisse . . . . .	124
6.3	Konklusion . . . . .	127
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>129</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

In vielen industriellen Anwendungen ist ein nahezu reibungs- und verschleißfreier Betrieb rotierender Wellen notwendig. Zur Erfüllung dieser Anforderungen werden oftmals aktive Magnetlager (engl. Active Magnetic Bearing, AMB) eingesetzt. Durch den wartungsarmen und schmierstofffreien Betrieb sind AMBs für manche Anwendungen unvermeidbar. Bei einem aktiven Magnetlagersystem werden die Kräfte zur Stabilisierung durch Elektromagnete erzeugt. Ein solches System ist jedoch im Sinne der Systemtheorie instabil und benötigt daher eine Regelung zur Stabilisierung. Mithilfe der Eigenschaften der notwendigen Regelung kann das mechanische Verhalten während des Betriebs gezielt beeinflusst werden. Diese Tatsache ermöglicht eine Optimierung des Laufverhaltens eines Rotors für den gesamten Betriebsbereich. Als Rückkoppel-Information wird meistens die Rotorposition verwendet, welche durch eine externe Sensorik zur Verfügung steht. In den letzten Jahren wurden auch sensorlose Methoden entwickelt, welche den Aktuator selbst als Sensor verwenden. Ein Beispiel einer solchen Methode ist das INFORM-Verfahren, welches in [1–5] beschrieben wird. Bei einer Turbomolekularpumpe werden meistens 5 Freiheitsgrade (engl. Degrees of Freedom, 5-DOF) des Rotors durch AMBs stabilisiert. Einzig der Drehwinkel des Rotors wird über einen separaten elektrischen Antrieb eingepreßt. Ein solches 5-DOF AMB-System wird im Allgemeinen durch ein nichtlineares Mehrgrößensystem beschrieben. Für viele industrielle Anwendungen stellt jedoch die Linearisierung der Systemgleichungen eine ausreichend gute Näherung dar. Eines der einfachsten Stabilisierungsverfahren solcher Mehrgrößensysteme (engl. Multiple Input and Multiple Output, MIMO) wird durch eine dezentrale Rückkopplung erreicht. Aufgrund einiger Nachteile, welche im Laufe dieser Arbeit näher beschrieben werden, kann diese Art der Regelung kein stabiles Schweben des Rotors für den gesamten Betriebsbereich der untersuchten Turbomolekularpumpen garantieren. Daher werden in dieser Arbeit eine entkoppelte Regelung und eine LQG-Regelung verglichen. Die grundlegend unterschiedlichen Effekte werden hierbei anhand von Simulationen beschrieben. Die Ergebnisse der Simulationen werden anschließend durch experimentelle Ergebnisse verifiziert. Die entkoppelte Regelung besitzt die Eigenschaft der Entkopplung der translatorischen und der rotatorischen Bewegungen als auch der drehzahlabhängigen Kompensation des gyroskopischen Effektes. Die Regelung wird zuerst

für einen Rotor einer Turbomolekularpumpe mit hohen Eigenfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln entworfen. Anschließend wird die entkoppelte Regelung für einen Rotor mit geringen Eigenfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln weiterentwickelt.

Die verwendeten Turbomolekularpumpen besitzen Rotoren mit einer vergleichsweise großen Unwucht. Um die Rotoren in dem vordefinierten Betriebsbereich betreiben zu können, ist daher eine sogenannte Unwuchtkompensation nötig. In diesem Zusammenhang werden in dieser Arbeit zwei verschiedene Methoden zur Unwuchtkompensation dargestellt. Die Vor- und Nachteile werden wiederum durch Simulationen analysiert und durch experimentelle Ergebnisse verifiziert. Die entwickelte Unwuchtkompensation kann ohne eine explizite Messung der Drehzahl angewendet werden. Um dies zu erreichen wird ein "speed-tracking"-Algorithmus beschrieben, welcher basierend auf den Sensorsignalen den Drehwinkel und die Winkelgeschwindigkeit des Rotors berechnet.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

Kapitel 2 beschreibt die grundlegenden Gleichungen, welche für die Modellierung eines Magnetlagersystems von Nöten sind. Dabei wird das System für die Modellierung in ein elektromagnetisches Teilsystem und ein mechanisches Teilsystem aufgespalten. In Kapitel 3 werden die grundlegenden Gleichungen auf einen magnetisch stabilisierten Rotor angewendet. Im ersten Schritt wird das physikalische Verhalten eines mechanisch stabilisierten Rotors beschrieben. Im nächsten Schritt wird das mechanische Teilsystem mit dem elektromagnetischen Teilsystem über die Impulsflussdichte verbunden. Das elastische Verhalten des Rotors wird mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente beschrieben. Kapitel 4 beschreibt die Vorteile einer vollständigen Zustandsrückführung (LQG) im Vergleich zu einer dezentralen Regelung. Kapitel 5 beschreibt die Entwicklung einer entkoppelten Regelung für einen magnetisch gelagerten Rotor für den Einsatz in Turbomolekularpumpen. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Stabilisierung eines Rotors mit hohen Eigenfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln. Im zweiten Teil wird die Reglerstruktur erweitert um auch Rotoren mit geringeren Eigenfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln stabilisieren zu können. Kapitel 6 beschreibt eine Möglichkeit der Unwuchtkompensation für Rotoren, welche schon im tiefen Drehzahlbereich zu hohe Vibration aufgrund der Rotorunwucht aufweisen. Die Unwuchtkompensation funktioniert in diesem Zusammenhang auch ohne explizite Messung der Drehzahl. Kapitel 7 fasst die Ergebnisse und Erkenntnisse dieser Arbeit zusammen.

Im Zuge der Anfertigung dieser Arbeit wurden bereits wissenschaftliche Ergebnisse in Konferenz- und Journal-Beiträgen veröffentlicht [4], [6], [7], [8], [9], [34], [36], [39].

# Kapitel 2

## Grundlegende Gleichungen

Dieses Kapitel beschreibt die physikalischen Grundlagen, welche für eine ausreichende Modellierung magnetgelagerter Rotoren nötig sind. Ziel ist nicht nur die Herleitung der Grundgleichungen, sondern auch eine genaue Betrachtung deren Aussagekraft. Die wichtigsten physikalischen Grundgleichungen in Bezug auf magnetgelagerte Rotoren stellen zum einen die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes und die daraus resultierenden Kräfte dar. Zum anderen wird die Wechselwirkung dieser Kräfte mit der Dynamik des Rotors im einfachsten Fall mit der Starrkörperkinetik beschrieben. Sind Einflüsse der flexiblen Eigenschaften der Rotoren zu erwarten (was in vielen Industrieanwendungen der Fall ist), muss die Starrkörperkinetik um die Strukturmechanik von Rotoren erweitert werden.

### 2.1 Das elektromagnetische Feld

Die nach James Clerk Maxwell benannten Maxwell Gleichungen stellen die Grundlage von elektromagnetischen Feldproblemen dar. Maxwell fusionierte bei diesen Gleichungen das Induktionsgesetz, das Gaußsche Gesetz und den Durchflutungssatz. Mit den vier partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \varrho\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}$ , der magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$ , der magnetischen Feldstärke  $\mathbf{H}$ , der elektrischen Flussdichte  $\mathbf{D}$ , der Stromdichte  $\mathbf{J}$  und der elektrischen Ladung  $\varrho$ , können elektromagnetische Felder auch für komplizierte Phänomene berechnet werden. Es sei angemerkt, dass in dieser Arbeit auf die Vektorpfeile verzichtet wird und alle mehrdimensionalen Größen fett geschrieben werden.

In ihrem Grundgerüst können die Maxwell Gleichungen in zwei Gleichungspaare aufgeteilt werden. Das erste Gleichungspaar beschreibt ausschließlich den räumlichen und zeitlichen Zusammenhang der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}$  und der magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$ . Das zweite Gleichungspaar verbindet den räumlichen und zeitlichen Zusammenhang der magnetischen Feldstärke  $\mathbf{H}$  und der elektrischen Flussdichte  $\mathbf{D}$ . Ein dynamisches System im Sinne der Feldphysik entsteht erst bei der Verknüpfung der beiden Gleichungspaare [10]. Diese Verknüpfung, welche durch die zugrundeliegenden Materialgleichungen bestimmt wird, verbindet erst die Physik mit dem mathematischen Konstrukt aus Gleichung (2.1). Den einfachsten physikalischen Zusammenhang der beiden Gleichungspaare findet man in materiefreien Feldbereichen über die lokalen Beziehungen

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (2.2)$$

mit der elektrischen Feldkonstante  $\varepsilon_0$  und der magnetischen Feldkonstante  $\mu_0$ . In weiterer Folge kann für viele Fälle auch linear isotrope elektrische Polarisierbarkeit oder Magnetisierbarkeit von Materialien vorausgesetzt werden. Die Verknüpfungsbeziehungen für solche Materialien lauten:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \mathbf{B} \quad (2.3)$$

mit der Permittivitätszahl  $\varepsilon_r$  und der Permeabilitätszahl  $\mu_r$ . In dieser Arbeit wird ausschließlich homogenes Materialverhalten berücksichtigt. Für die Kraftwirkung von Magnetlagern sind die magnetischen Feldgrößen weit wichtiger als die elektrischen. Im Inneren der Körper können daher keine wesentlichen Ladungsansammlungen, welche zu merkbaren Verschiebungsströmen oder Konventionsströmen führen, vorhanden sein. Aus diesem Grund kann ein dominant magnetisches Feldsystem vorausgesetzt werden. Für ein solches Feldsystem vereinfachen sich die Maxwell Gleichungen 2.1 zu

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die erste Gleichung beschreibt den Satz des magnetischen Hüllenflusses, die zweite Gleichung den Durchflutungssatz und die dritte Gleichung das Induktionsgesetz in lokaler Form. Für die Kraftwirkung eines magnetischen Teilsystems ist der magnetische Teil des Maxwell-Spannungstensors  $\mathbf{p}$  von Interesse [10]:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{2} B^2 \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} \right) \quad (2.5)$$

Dieser Spannungstensor beschreibt die Wechselwirkung der Impulsflussdichte des magnetischen Teilsystems mit anderen Teilsystemen. Im mechanischen Fall beschreibt  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} dA$  die Druckkraft, die an einem (kleinen) Flächenstück des Inhaltes  $dA$  und der Normalrichtung  $\mathbf{n}$



wirkt. Um eine Kraftwirkung eines Körpers aus dem Maxwell Spannungstensor zu finden, muss eine Hülle um den Körper gelegt werden. Diese Hülle muss jedoch im leeren Raum verlaufen und darf nur den betrachteten Körper einschließen. Sind diese Bedingungen erfüllt, kann die magnetische Kraftwirkung  $\mathbf{F}_m$  wie folgt berechnet werden:

$$\mathbf{F}_m = \int_{\partial V} \frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{1}{2} B^2 \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} \right) dA \quad (2.6)$$

## 2.2 Grundlagen der Starrkörperkinetik

Ein Körper kann als starr modelliert werden, wenn seine Verformung keine oder nur geringfügige Auswirkung auf seine Dynamik hat [11]. Ein Starrkörper kann zur Herleitung der physikalischen Beziehungen immer als infinitesimaler Grenzfall eines Punktmassensystems angegeben werden. Ein solches System mit  $n$  Massenpunkten besitzt im Allgemeinen  $3n$  Freiheitsgrade. Die kinematischen Zwangsbedingungen zwischen den Punktmassen reduzieren die Freiheitsgrade auf insgesamt 6 für einen allgemeinen Starrkörper. Diese Freiheitsgrade sind aus jeweils drei translatorischen und drei rotatorischen Bewegungsmöglichkeiten bezüglich eines ruhenden Inertialsystems definiert. Der Gesamtimpuls lässt sich als Grenzfall der Summe der Einzelimpulse der Punktmassen bilden.

$$\mathbf{p} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta m \rightarrow 0}} \sum_{n=1}^N \mathbf{v}_i \Delta m_i = \int \mathbf{v} dm \quad (2.7)$$

mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  und der Masse  $m$ . Durch Anwenden des Impulserhaltungssatzes

$$\dot{\mathbf{p}} = \int d\mathbf{F} dm \quad (2.8)$$

mit einer äußeren differentiellen Kraft  $d\mathbf{F}$  folgt schließlich unter Annahme einer zeitlich konstanten Masse der Schwerpunktsatz eines Starrkörpersystems.

$$m \ddot{\mathbf{r}}_S = \mathbf{F} \quad (2.9)$$

mit der Gesamtresultierenden der äußeren Kräfte  $\mathbf{F}$  und dem Ortsvektor des Schwerpunktes  $\mathbf{r}_S$ . Der Schwerpunkt eines Körpers bewegt sich, als ob die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und die resultierende Kraft in ihm angreifen würde. Die translatorische Bewegung eines Starrkörpers besitzt prinzipiell dieselbe Form wie die Kräftegleichung einer Punktmasse. Für einen allgemeinen Starrkörper mit allgemeiner Belastung reicht der Schwerpunktsatz für die Bewegung jedoch keineswegs aus. Eine allgemeine Belastung eines Starrkörpers zieht zusätzliche noch Drehmomente mit sich. Um auch die Bewegung der rotatorischen Freiheitsgrade aufgrund von Lastmomenten beschreiben zu können, wird auf den Drehimpulserhaltungssatz (Drallsatz) zurückgegriffen. Aus diesem Grund wird im Folgendem über den Drehimpuls (Drall) eines Starrkörpers im dreidimensionalen euklidischen Raum diskutiert. Der Drall  $\mathbf{L}^{(A)}$

eines körperfesten Bezugspunktes (A) eines Starrkörpers ist laut [12] folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{L}^{(A)} = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dm \quad (2.10)$$

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in allgemeiner Lage berechnet sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  für einen Körper bezüglich eines körperfesten Bezugspunktes (A) mit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(A)} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.11)$$

Der Drall (2.10) kann anschließend wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(A)} &= \int_m \mathbf{r} \times (\mathbf{v}^{(A)} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \, dm \\ &= \left[ \int_m \mathbf{r} \, dm \right] \times \mathbf{v}^{(A)} + \int_m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \, dm \end{aligned} \quad (2.12)$$

aufgrund des Massenmittelpunktes gilt  $\int_m \mathbf{r} \, dm = m\mathbf{r}^{(S/A)}$ , wobei  $r^{(S/A)}$  den Positionsvektor vom Schwerpunkt zum Bezugspunkt (A) beschreibt. Daher besteht der Zusammenhang:

$$\mathbf{L}^{(A)} = m\mathbf{r}^{(S/A)} \times \mathbf{v}^{(A)} + \underbrace{\int_m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \, dm}_{\mathbf{L}^{*(A)}} \quad (2.13)$$

Dabei stellt die Größe  $\mathbf{L}^{*(A)}$  den Drehimpuls um (A) in einem mit (A) translatorisch mitbewegten Koordinatensystem  $x^* - y^* - z^*$  dar. Die Größe  $\mathbf{L}^{*(A)}$  kann durch konstante Massenträgheitsmomente dargestellt werden, was im Allgemeinen für  $\mathbf{L}^{(A)}$  nicht möglich ist.  $\mathbf{L}^{*(A)}$  komponentenweise ausgewertet ergibt:

$$\mathbf{L}^{*(A)} = \begin{bmatrix} (y^{*2} + z^{*2})\omega_x^* - x^*y^*\omega_y^* - z^*x^*\omega_z^* \\ (z^{*2} + x^{*2})\omega_y^* - y^*z^*\omega_z^* - x^*y^*\omega_x^* \\ (x^{*2} + y^{*2})\omega_z^* - z^*x^*\omega_x^* - y^*z^*\omega_y^* \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Die einzelnen Terme von Gleichung (2.14) bei den Winkelgeschwindigkeiten sind laut [12] jeweils Massenträgheitsmomente oder Deviationsmomente. Durch Einführung des Trägheitsmatrix  $\Theta_A$

$$\Theta_A = \begin{bmatrix} \Theta_x & -\Theta_{xy} & -\Theta_{xz} \\ -\Theta_{yx} & \Theta_y & -\Theta_{yz} \\ -\Theta_{zx} & -\Theta_{zy} & \Theta_z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

kann  $\mathbf{L}^{*(A)}$  wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{L}^{*(A)} = \Theta_A \boldsymbol{\omega} \quad (2.16)$$

Um den Drallsatz für eine allgemeine Starrkörperbewegung zu bestimmen wird Gleichung (2.10) nach der Zeit abgeleitet.

$$\dot{\mathbf{L}}^{(A)} = \int_m \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} \, dm + \underbrace{\int_m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \, dm}_{\mathbf{M}^{(A)}} \quad (2.17)$$

mit dem Moment  $\mathbf{M}^{(A)} = \int_m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \, dm$  aller äußeren Kräfte um den Bezugspunkt (A). Durch Anwendung der kinematischen Grundgleichungen und einigen Rechenschritten laut [11] folgt die Drehimpulserhaltung oder der Drallsatz aus

$$\dot{\mathbf{L}}^{(A)} - m \left( \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^{(S/A)} \right) \times \mathbf{v}^{(A)} = \mathbf{M}^{(A)} \quad (2.18)$$

Wobei  $\mathbf{r}^{(S/A)}$  den Abstand vom Schwerpunkt (S) zum Bezugspunkt (A) und  $\mathbf{v}^{(A)}$  die Geschwindigkeit des körperfesten Punktes (A) darstellt. Aus Gleichung (2.18) und Gleichung (2.13) ist ersichtlich, dass es zwei Fälle gibt wo  $\mathbf{L}^{*(A)}$  direkt verwendet werden kann und nicht  $\mathbf{L}^{(A)}$  berechnet werden muss.

1. A fällt mit dem Schwerpunkt zusammen,  $\mathbf{r}^{(S/A)} = 0$
2. A ist nicht nur körperfest, sondern auch raumfest,  $\mathbf{v}^{(A)} = 0$ .

Diese Tatsache ist bei der Wahl des Koordinatensystems von großer Bedeutung, da im Allgemeinen nur in diesen Fällen konstante Trägheitsmomente im körperfesten Koordinatensystem gefunden werden können. Die nachstehenden Betrachtungen nehmen immer einen der beiden Fälle an so dass  $\mathbf{L}^{(A)} = \mathbf{L}^{*(A)}$  gilt. Eine Drehung des Koordinatensystems, kann wie von der Tensorrechnung bekannt, beschrieben werden. Da es sich um einen symmetrischen Tensor handelt können sogenannte Hauptachsenrichtungen gefunden werden, für die zumindest zwei Hauptdiagonalglieder Extremwerte annehmen. Die Berechnung der Hauptdiagonalen endet in einem kubischen Extremwertproblem. Der Drallsatz lautet in der vereinfachten Form also:

$$\dot{\mathbf{L}}^{(A)} = \mathbf{M}^{(A)} \quad (2.19)$$

Durch Ableiten des Dralls und Gleichsetzen mit dem resultierenden äußeren Drehmoment kann der Drallsatz für räumliche Bewegungen aufgestellt werden. Wie oben erwähnt, ist es von Vorteil ein körperfestes Bezugssystem zu verwenden. Die Zeitableitung eines Vektors  $\mathbf{b}$  in einem mit der Drehzahl  $\boldsymbol{\Omega}$  rotierenden Bezugssystem  $x^* - y^* - z^*$  kann aus der Starrkörper-

kinematik laut [13] folgendermaßen beschrieben werden.

$$\dot{\mathbf{b}} = (\dot{\mathbf{b}})^* + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{b} \quad (2.20)$$

Im körperfesten Fall gilt  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ . Einsetzen von Gleichung (2.16) in Gleichung (2.19) und anschließender Differentiation mit Hilfe von Gleichung (2.20) führt zu:

$$\Theta_A \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\Theta_A \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}^{(A)} \quad (2.21)$$

Der Term  $\boldsymbol{\omega} \times (\Theta_A \boldsymbol{\omega})$  stellt die mathematische Beschreibung des gyroskopischen Effekts dar, welcher für die Verkopplung der rotatorischen Bewegungen verantwortlich ist. Um eine einfache komponentenweise Darstellung von Gleichung (2.21) zu erhalten, werden die Trägheitshauptachsen zur Beschreibung verwendet. Für diesen Fall verschwinden sämtliche Deviationsmomente und die Trägheitsmatrix ist diagonal. Diese Gleichungen komponentenweise dargestellt, werden auch als Euler'sche Gleichungen bezeichnet und lauten:

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 - (\Theta_2 - \Theta_3) \omega_2 \omega_3 &= M_1^{(A)} \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 - (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_3 \omega_1 &= M_2^{(A)} \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 - (\Theta_1 - \Theta_2) \omega_1 \omega_2 &= M_3^{(A)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Sind bei einem Starrkörper die Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsverläufe bekannt oder vorgegeben, so können aus Gleichung (2.22) die resultierenden Drehmomente berechnet werden. Im zweiten Fall, indem die Drehmomente bekannt bzw. vorgegeben werden, bilden die Gleichungen (2.22) einen Satz verkoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen, welche in vielen Fällen nur numerisch gelöst werden können. In einer Menge von technischen Anwendungen sind jedoch die Bewegungsmöglichkeiten bekannten Zwangsbedingungen unterworfen. Unter manchen Voraussetzungen kann auf die Anwendung numerischer Methoden verzichtet werden, da sich die Gleichungen stark vereinfachen. Bei den Randbedingungen können theoretisch zwei Arten unterschieden werden:

1. Kinematische Randbedingungen: Bei dieser Art der Randbedingung werden Verschiebungen an den Rändern des Körpers vorgegeben. Zu dieser Form der Zwängung zählen Gelenke, starre Verbindungselemente, aber auch translatorische Bindungen wie die Bewegung auf einer Fläche oder Kurve.
2. Dynamische Randbedingungen: Bei dieser Art der Randbedingung werden Kräfte an den Rändern des Körpers vorgegeben.

Die kinematischen Randbedingungen reduzieren die Anzahl der Freiheitsgrade, wohingegen die dynamischen Randbedingungen die Anzahl der Freiheitsgrade nicht beeinflussen. Kinematische Randbedingungen sind nur ein theoretisches Hilfsmittel um mathematische Beschreibun-

gen zu vereinfachen. Ein mechanisches Lager, welches beispielsweise als kinematische Randbedingung angesehen werden kann, besitzt in der Realität immer eine finite Steifigkeit.

Auch die Annahme der Trägheitshauptachsen stellt für technische Anwendungen ein Problem dar. Zum einen ist es für reale Anwendung unmöglich das System für Trägheitshauptachsen aufzustellen. Zum anderen ändern sich die Trägheitsmomente im Betrieb. Je nach Stärke der Abweichungen der Trägheitshauptachsen oder des Schwerpunktes wird der Rotor durch verschieden starke Drehmomente oder Kräfte belastet. Es ist vom Anwendungsfall abhängig, ob die sogenannte Unwucht vernachlässigt werden kann. Die Lagerkräfte rotierender Körper werden von zwei verschiedenen Unwuchtarten hervorgerufen:

1. Statische Unwucht: Dieser Mechanismus tritt auf, wenn der Schwerpunkt der Welle nicht auf der Rotationsachse liegt. Der Rotor belastet hierbei die Achse durch transversale Kräfte. Dieses Phänomen ist aus dem Schwerpunktsatz ersichtlich.
2. Dynamische Unwucht: Wie im Drallsatz ersichtlich, kommen bei einem nicht rotations-symmetrischen Körper noch Deviationsmomente hinzu, die die Welle mit Biegemomenten belasten.

Es ist an diesem Punkt anzumerken, dass bei einem starren Körper zwei Ausgleichsmassen in zwei verschiedenen Ebenen zur Auswuchtung ausreichen. Im elastischen Fall gilt dies nicht mehr und man muss den Massenausgleich aufwendiger gestalten.

Um die Modellbildung für magnetgelagerte Rotoren zu vereinfachen, können die Euler'schen Gleichungen in ein nicht körperfestes Bezugssystem transformiert werden. Diese Idee beruht auf der Tatsache, dass die Trägheitsmomente für spezielle Fälle sogar für ein nicht körperfestes Bezugssystem konstant bleiben. Dieser spezielle Fall tritt auf wenn ein Körper um eine Hauptachse rotiert und die Trägheitsmomente um die beiden anderen Achsen gleich sind. Dazu zählen:

- Drehung rotationssymmetrischer Körper um deren Symmetrieachse
- Drehung zylindrischer Körper mit doppelt symmetrischem Querschnitt

In solchen Fällen muss jedoch zwischen der Winkelgeschwindigkeit des Koordinatensystems  $\boldsymbol{\Omega}$  und der Winkelgeschwindigkeit des Körpers  $\boldsymbol{\omega}$  unterschieden werden. In einem nicht körperfesten Koordinatensystem ( $x' - y' - z'$ ) lautet der Drallsatz:

$$\boldsymbol{\Theta}_A(\dot{\boldsymbol{\omega}})' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Theta}_A\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}^{(A)} \quad (2.23)$$

Wird Gleichung (2.23) komponentenweise ausgewertet, ergeben die Euler'schen Gleichungen um nicht körperfeste Hauptachsen.

$$\begin{aligned} \Theta_{x'}\dot{\omega}_{x'} - \Theta_{y'}\omega_{y'}\Omega_{z'} + \Theta_{z'}\omega_{z'}\Omega_{y'} &= M_{x'}^{(A)} \\ \Theta_{y'}\dot{\omega}_{y'} - \Theta_{z'}\omega_{z'}\Omega_{x'} + \Theta_{x'}\omega_{x'}\Omega_{z'} &= M_{y'}^{(A)} \\ \Theta_{z'}\dot{\omega}_{z'} - \Theta_{x'}\omega_{x'}\Omega_{y'} + \Theta_{y'}\omega_{y'}\Omega_{x'} &= M_{z'}^{(A)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die allgemeine Bewegung eines starren Körpers im dreidimensionalen euklidischen Raum im kartesischem Koordinatensystem kann durch die Kombination des Schwerpunktsatzes Gleichung (2.9) und der Euler'schen Gleichungen (2.22) beschrieben werden.

## Kapitel 3

# Modellierung und Verhalten magnetgelagerter Rotoren

Das vorhergehende Kapitel beschäftigte sich mit den physikalischen Grundlagen, welche von Nöten sind um ein Magnetlagersystem für einen starren hochdrehenden Rotor in ausreichender Modellierungstiefe beschreiben zu können. Um gewisse Effekte, welche in solchen mechanischen Systemen auftreten, zu verstehen, bedarf es einer Diskussion über einen flexibel gelagerten starren Rotor. Für reale Systeme ist es dennoch in einer Vielzahl von Anwendungen erforderlich, auch die flexiblen Eigenschaften der Rotoren zu berücksichtigen. Aus diesem Grund beschreibt dieses Kapitel im Anschluss an den starren Rotor auch die flexiblen Eigenschaften von kontinuierlichen Körpern. Für Turbomolekularpumpen ist die Berücksichtigung flexibler Rotoren in den meisten Anwendungen notwendig.

### 3.1 Verhalten starrer Rotoren

Für die Stabilisierung von Rotoren im Anwendungsbereich von Turbomolekularpumpen werden oft Magnetlager mit 5 Freiheitsgraden (5-DOF) verwendet. Abbildung 3.1 illustriert ein solches Magnetlagersystem.

Das System besteht aus zwei radialen Lagern, einem axialen Lager und 5 Positionssensoren. Die Anordnung der Aktuatoren ist so konzipiert, dass jedes radiale Lager jeweils zwei Freiheitsgrade stabilisiert. Die axiale und radiale Bewegung können laut [15] unter folgenden

Bedingungen getrennt voneinander beschrieben werden:

- Der Rotor ist rotationssymmetrisch und starr.
- Die Auslenkungen des Rotors aus der Referenzposition sind klein gegenüber der Länge des Rotors.
- Die Kräfte werden als konservativ angenommen.
- Befindet sich der Rotor in der Referenzlage, ist das raum- und körperfeste Koordinatensystem gleich und befindet sich im Schwerpunkt des Rotors.
- Die Winkelgeschwindigkeit wird als konstant oder langsam veränderlich im Vergleich zur Systemdynamik angenommen.

Um die Modellierung des magnetgelagerten Rotors nicht unnötig zu verkomplizieren, wird das Gesamtsystem in ein elektrisches und ein mechanisches Teilsystem zerlegt. Diese Teilsysteme sind über eine Impulsproduktionsrate, also global gesehen über einen Kraftvektor  $\mathbf{F}$ , verbunden. Zu Beginn dieses Kapitels wird das mechanische System, welches auf der bereits besprochenen Starrkörperkinetik beruht, beschrieben. Zur Beschreibung des mechanischen Systems wird der Schwerpunktsatz (2.9) für die translatorischen Bewegungen und die Euler'schen Gleichungen (2.24) für die rotatorischen Bewegungen verwendet. Für die mathematische Beschreibung des Rotors wird ein Koordinatensystem verwendet, welches gleich dem rotorfesten ist, sich aber nicht um die  $z$ -Achse mit dreht. Durch die Rotationssymmetrie ist  $\Theta_{x'} = \Theta_{y'} = \Theta_x$  und daher sind die Trägheitsmomente auch in diesem Koordinatensystem konstant. Der Gleichungssatz 2.24 unter den obengenannten Vereinfachungen angewendet auf

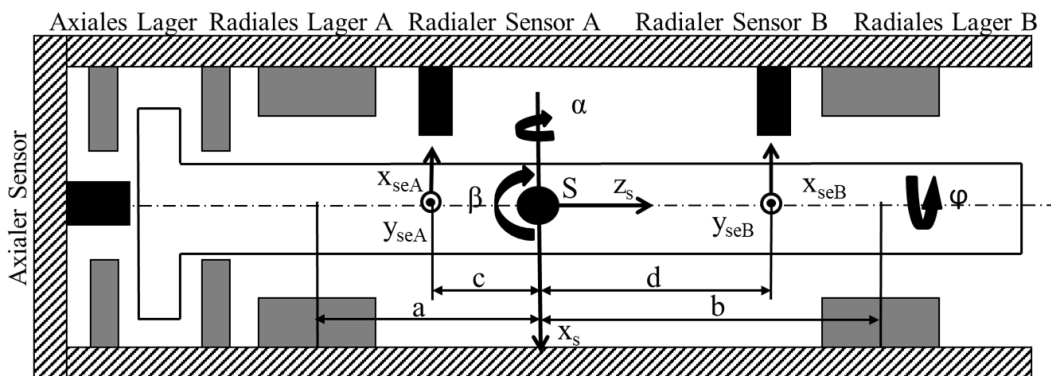


Abbildung 3.1: 5-DOF Magnetlagersystem



die Schwerpunktskoordinaten laut Abbildung 3.1 lautet:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_s &= F_{resx} \\
m\ddot{y}_s &= F_{resy} \\
m\ddot{z}_s &= F_{resz} \\
\Theta_x\ddot{\alpha} + \Theta_z\omega\dot{\beta} &= M_{resx} \\
\Theta_x\ddot{\beta} - \Theta_z\omega\dot{\alpha} &= M_{resy} \\
\Theta_z\dot{\omega} &= M_{resz}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

mit dem Winkel um die x-Achse  $\alpha$ , dem Winkel um die y-Achse  $\beta$ , der Winkelgeschwindigkeit um die z-Achse  $\omega$ , den resultierenden Kräften  $F_{resx}$ ,  $F_{resy}$ ,  $F_{resz}$  und den resultierenden Momenten  $M_{resx}$ ,  $M_{resy}$ ,  $M_{resz}$ . Da  $\omega$  mit einer Permanentmagnet-Synchronmaschine (PMSM) geregelt wird, kann diese Größe für das Magnetlagersystem als eingepreist angesehen werden. Daher wird die letzte Zeile von Gleichung (3.1) zur Beschreibung des Magnetlagers nicht berücksichtigt. Die axiale Bewegung des Rotors kann also als eine rein translatorische Bewegung unter den oben definierten Vereinfachungen angesehen werden und lautet:

$$m\ddot{z}_s = F_{resz} \tag{3.2}$$

Die radialen Bewegungsgleichungen werden durch eine Überlagerung von translatorischen und rotatorischen Bewegungen beschrieben:

$$\begin{bmatrix} \Theta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{x}_S \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{y}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Theta_z\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Theta_z\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{x}_S \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{resy} \\ F_{resx} \\ M_{resx} \\ F_{resy} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

oder in kompakter Matrix-Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\omega)\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \tag{3.4}$$

mit der Massen-Matrix  $\mathbf{M}$ , dem Positionsvektor  $\mathbf{x}$ , der Matrix des gyroskopischen Effekts  $\mathbf{G}(\omega)$  und dem Belastungsvektor  $\mathbf{F}$ . Mit Gleichung (3.4) wird die Dynamik eines rotations-symmetrischen Elements im Schwerpunktkoordinatensystem (engl. Center of Gravity, COG) beschrieben. Wobei noch keine Information der Lagerung berücksichtigt wird. Diese Eigenschaft wird über den Belastungsvektor vorgegeben. Durch die Lagerung werden im Allgemeinen nicht direkt Schwerpunktkräfte und Drehmomente aufgebracht. Der Angriffspunkt der Lagerkräfte liegt nämlich in einem gewissen Abstand vom Schwerpunkt entfernt. Diese Lagerkräfte können in ein Drehmoment in Kombination mit einer Kraft in den Schwerpunkt reduziert werden. Abbildung 3.2 zeigt beispielhaft einen freigemachten Rotor in der x-z Ebene. Werden nun die Lagerkräfte in den Schwerpunkt reduziert, ergibt sich eine resultierende

Kraft und ein resultierendes Drehmoment.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_x &= \mathbf{F}_{ax} + \mathbf{F}_{bx} \\ \mathbf{M}_y &= -a\mathbf{F}_{ax} + b\mathbf{F}_{bx}\end{aligned}\quad (3.5)$$

Die Reduzierung folgt für die y-z Ebene auf analoge Weise. Das radiale mechanische System in reduzierter Form lautet:

$$\begin{bmatrix} \Theta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{x}_S \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{y}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Theta_z\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Theta_z\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{x}_S \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -aF_{ax} + bF_{bx} \\ F_{ax} + F_{bx} \\ aF_{ay} - bF_{by} \\ F_{ay} + F_{by} \end{bmatrix}\quad (3.6)$$

Aus diesen Überlegungen wird eine Transformationsmatrix  $\mathbf{B}$  eingeführt, welche den Vektor der Lagerkräfte  $\mathbf{F}_L$  auf den Belastungsvektor des Systems  $\mathbf{F}$  transformiert.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{resy} \\ F_{resx} \\ M_{resx} \\ F_{resy} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a & b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} F_{ax} \\ F_{bx} \\ F_{ay} \\ F_{by} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_L}\quad (3.7)$$

Mit Hilfe dieser Transformation können verschiedene Arten der Rotorstabilisierung über Lagerkräfte  $\mathbf{F}_L$  vorgegeben werden.

### 3.1.1 Elastisch gelagerte Rotoren

Um rotodynamische Eigenschaften von magnetgelagerten Rotoren zu untersuchen, ist es oft von Vorteil, das Modell zu vereinfachen. Daher werden die Magnetlager gedanklich durch Fe-

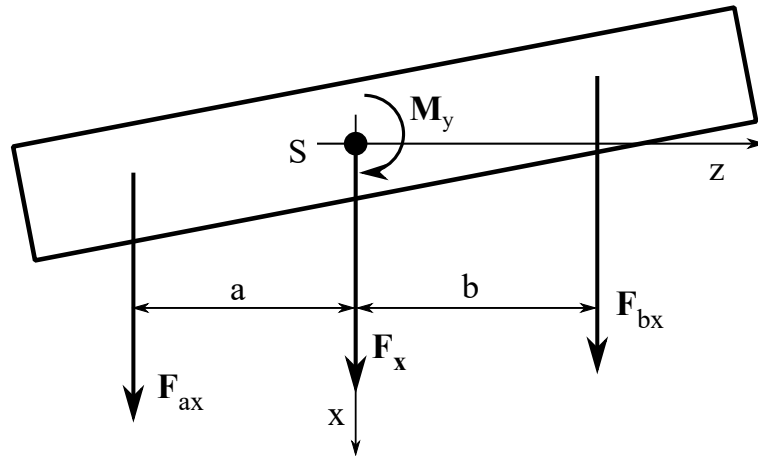


Abbildung 3.2: Reduzierung in den Schwerpunkt

dem ersetzt (Abbildung 3.3). Diese Federn werden in einer Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  berücksichtigt.

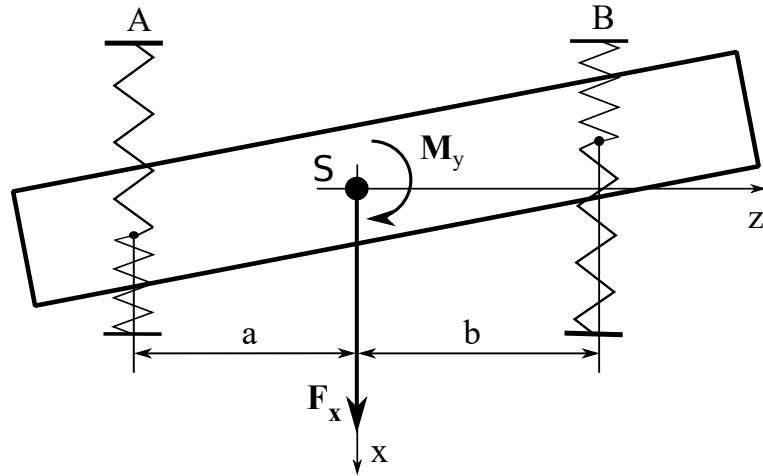


Abbildung 3.3: Elastisch gelagerter Rotor

Die Kraftwirkung einer Feder  $\mathbf{F}_F$  lässt sich mathematisch mit der Steifigkeit  $k$  beschreiben.

$$\mathbf{F}_F = -k\mathbf{s} \quad (3.8)$$

wobei  $\mathbf{s}$  die Auslenkung der Feder aus dem kraftfreien Zustand beschreibt. Die Komponente der Kraftwirkung der Feder vom Lager A in x-Richtung mit der Lagerkoordinate  $x_A$  und unter Anwendung der Kleinwinkelnäherung ist beispielsweise:

$$F_{ax} = -k_A x_A = -k_A(-a\beta + x_S) \quad (3.9)$$

Die anderen Komponenten der Kraftmatrix können völlig analog berechnet werden. Die Spaltenmatrix der Lagerkräfte  $\mathbf{F}_L$  kann mittels der Eingangstransformation  $\mathbf{B}$  wie folgt dargestellt werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{ax} \\ F_{bx} \\ F_{ay} \\ F_{by} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_L} = - \underbrace{\begin{bmatrix} k_{xa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{xb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{ya} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{yb} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} -a & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -b & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta \\ x_S \\ \alpha \\ y_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \quad (3.10)$$

Mit Gleichung (3.10) können die Kräfte an den Lagern abhängig von den COG-Koordinaten bestimmt werden. Um die Lagerkräfte für die Modellierung im COG-System zu verwenden, wird Gleichung (3.7) verwendet. Die mathematische Beschreibung eines elastisch stabilisierten Rotors lautet daher:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\omega)\dot{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{B}^T}_{\mathbf{K}_T}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

Aus der transformierten Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} k_{xa}a^2 + k_{xb}b^2 & k_{xb}b - k_{xa}a & 0 & 0 \\ k_{xb}b - k_{xa}a & k_{xb} + k_{xa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{ya}a^2 + k_{yb}b^2 & k_{ya}a - k_{yb}b \\ 0 & 0 & k_{ya}a - k_{yb}b & k_{yb} + k_{ya} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

kann auf eine Verkopplung der translatorischen und der rotatorischen Bewegung geschlossen werden. Für einen elastisch gelagerten Rotor gibt es also zwei Arten von Verkopplungen der Bewegungen. Die transformierte Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  verursacht eine konstante Verkopplung der rotatorischen und der translatorischen Bewegung in der x- und y-Ebene. Wohingegen die Matrix des gyroskopischen Effekts  $\mathbf{G}(\omega)$  eine von der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  abhängige Verkopplung der rotatorischen Bewegungen zwischen der x- und y-Ebene mit sich zieht. Abbildung 3.4 zeigt das Verhalten bei einer rein translatorischen Anregung für einen symmetrisch und einem unsymmetrisch gelagerten Rotor bei Stillstand. Der symmetrisch gelagerte Rotor besitzt die Eigenschaft, dass sich die Verkopplungen der rotatorischen und der translatorischen Bewegungen aufheben. Diese Tatsache ist auch aus Gleichung (3.12) ersichtlich. Ein symmetrisch gelagerter Rotor bedeutet in diesem Zusammenhang, dass folgende Beziehungen gelten ( $\mathbf{K}_T$  ist diagonal):

$$k_{xb}b = k_{xa}a \quad \text{und} \quad k_{yb}b = k_{ya}a \quad (3.13)$$

Beim symmetrisch gelagerten Rotor zeigt daher die Anregung der translatorischen Koordinate keinerlei Auswirkung auf die rotatorischen Bewegungen. Beim unsymmetrisch gelagerten Rotor ist dies nicht mehr der Fall und die translatorische Bewegung regt auch eine rotatorische Schwingung an. Es kann daher eine Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen beobachtet werden. Für den symmetrisch gelagerten Fall degenerieren die Schwingungen zu einer rein translatorischen und einer rein rotatorischen entkoppelten Schwingung. Aus Berechnung der Eigenfrequenzen resultieren folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} \omega_T &= \sqrt{\frac{2k_{xa}}{m}} \\ \omega_R &= \sqrt{\frac{2k_{xa}a^2}{\Theta_x}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit der Eigenfrequenz  $\omega_T$  der translatorischen Schwingung und der Eigenfrequenz  $\omega_R$  der rotatorischen Schwingung. Für den unsymmetrisch gelagerten Fall sind die Ergebnisse nicht so übersichtlich darstellbar. Beide Eigenfrequenzen hängen von der Wurzel der Steifigkeit ab. Die rotatorische Eigenfrequenz ist noch zusätzlich abhängig vom Angriffspunkt der Stabilisierung. Bei einem vordefinierten Magnetlagersystem kann für diese stark vereinfachte Modellierung zur Änderung der Eigenfrequenzen nur die Steifigkeit  $k_{xa}$  verändert werden. Diese Tatsache macht es jedoch unmöglich beide Eigenfrequenzen unabhängig voneinander zu ändern. Um

beide Eigenfrequenzen unabhängig voneinander zu verändern, ist es im Allgemeinen nötig den Rotor mit zwei unterschiedlichen Steifigkeiten zu stabilisieren. Versetzt man den Rotor zusätzlich in Drehung verkoppelt sich die x-z und y-z-Ebene abhängig von der Matrix  $\mathbf{G}(\omega)$ . Abbildung 3.5 zeigt das sogenannte Campbell-Diagramm für einen symmetrisch und einen unsymmetrisch gelagerten Rotor. Bei einem Campbell-Diagramm werden auf der Ordinatenachse die Eigenfrequenzen des stabilisierten Rotors aufgetragen und auf der Abszissenachse wird die Drehzahl bzw. die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  aufgetragen. Für den symmetrisch gelagerten Rotor verkoppeln sich ausschließlich die beiden rotatorischen Bewegungen. Daher sind ausschließlich die rotatorischen Bewegungen von der Drehzahl abhängig. Die translatorischen Bewegungen besitzen im symmetrisch gelagerten Fall hingegen keine Verkopplungsterme, was an den konstant bleibenden translatorischen Eigenfrequenzen zu erkennen ist. Bei einem unsymmetrisch gelagerten Rotor hingegen ist das nicht mehr der Fall und alle Eigenwerte sind drehzahlabhängig. Die dünne Linie im Campbell-Diagramm zeigt den sogenannten Fahrstrahl [14]. Der Fahrstrahl gibt die zur jeweiligen Drehzahl gehörige Erregungskreisfrequenz wieder. Für den Fall einer Anregung aufgrund der Unwucht des Rotors, ist die Anregung

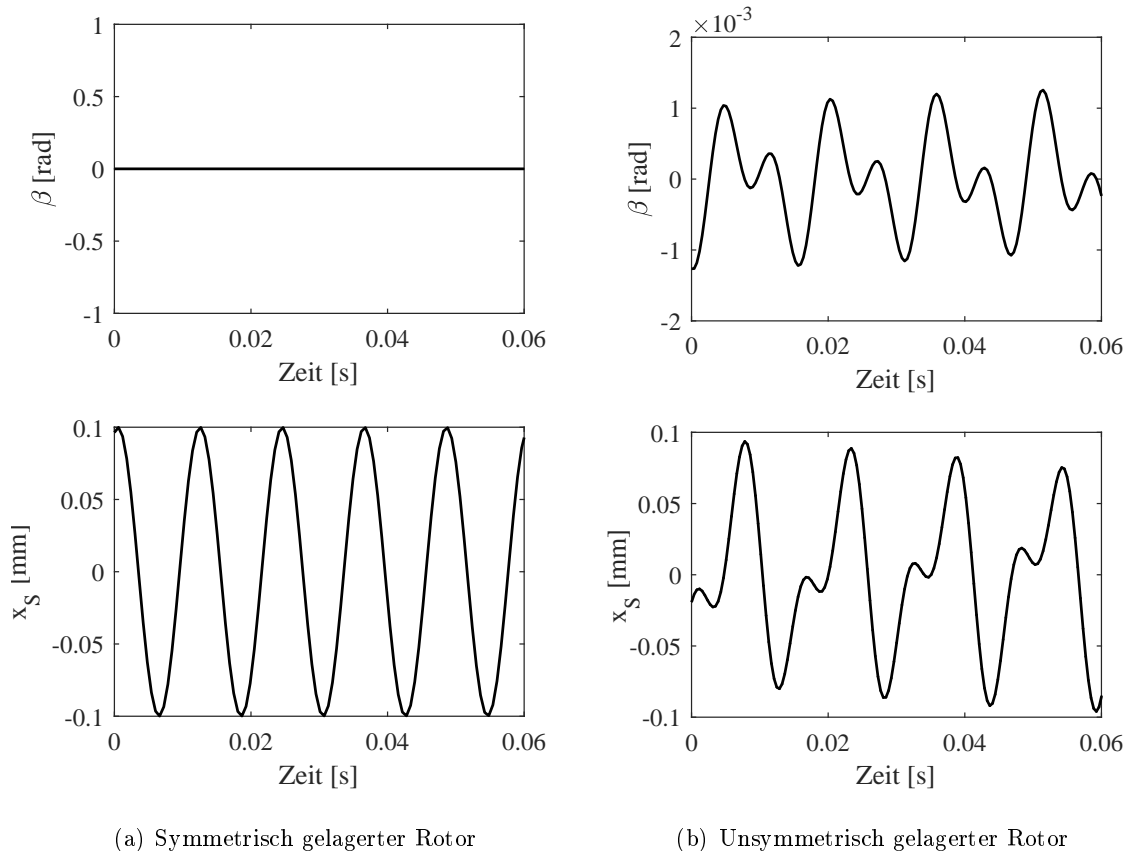


Abbildung 3.4: Verhalten der rotatorischen und der translatorischen Bewegung bei translatorischer Anregung

synchron zur Drehzahl  $\omega$ . Um die Stabilität des rotierenden Systems zu untersuchen wird das Campbell-Diagramm oft um ein Dämpfungsdiagramm erweitert. Im Fall eines durch ideale Federn stabilisierten Rotors macht ein Dämpfungsdiagramm jedoch keinen Sinn. Für ein aktiv geregeltes System ist das Dämpfungsdiagramm hingegen von essentieller Bedeutung, da für einen definierten Arbeitsbereich die Stabilität des Systems angegeben werden kann.

Bei einem starren Rotor kann zwischen 4 verschiedenen Eigenbewegungen unterschieden werden (Abbildung 3.6(a) veranschaulicht die rotatorischen Bewegungen):

- Zwei entkoppelte drehzahlunabhängige Eigenschwingungen der translatorischen Freiheitsgrade
- Eine rotatorische Eigenschwingung bei der die Eigenfrequenz mit der Drehzahl steigt. Diese Schwingung beschreibt die Nutation des Rotors. Eine Nutation ist die rotatorische Bewegung um eine  $x''$ -Achse eines mitbewegten Koordinatensystems.
- Eine rotatorische Eigenschwingung bei der die Eigenfrequenz mit der Drehzahl sinkt. Diese Schwingung beschreibt die Präzession des Rotors. Eine Präzession ist die rotatorische Bewegung des Rotors um eine ortsfeste  $z$ -Achse.

Abbildung 3.6(b) zeigt eine X-Y-Darstellung der Auslenkungen eines Lagers des Federsystems bei einer von Null verschiedenen Anfangsbedingung in der  $\beta$ -Koordinate. Im unsymmetrisch gelagerten Fall sind die rotatorischen Eigenfrequenzen mit den translatorischen Eigenfrequenzen aufgrund der Matrix  $\mathbf{K}_T$  verkopelt. Diese Verkopplung zieht eine Drehzahlabhängigkeit aller Eigenwerte mit sich.

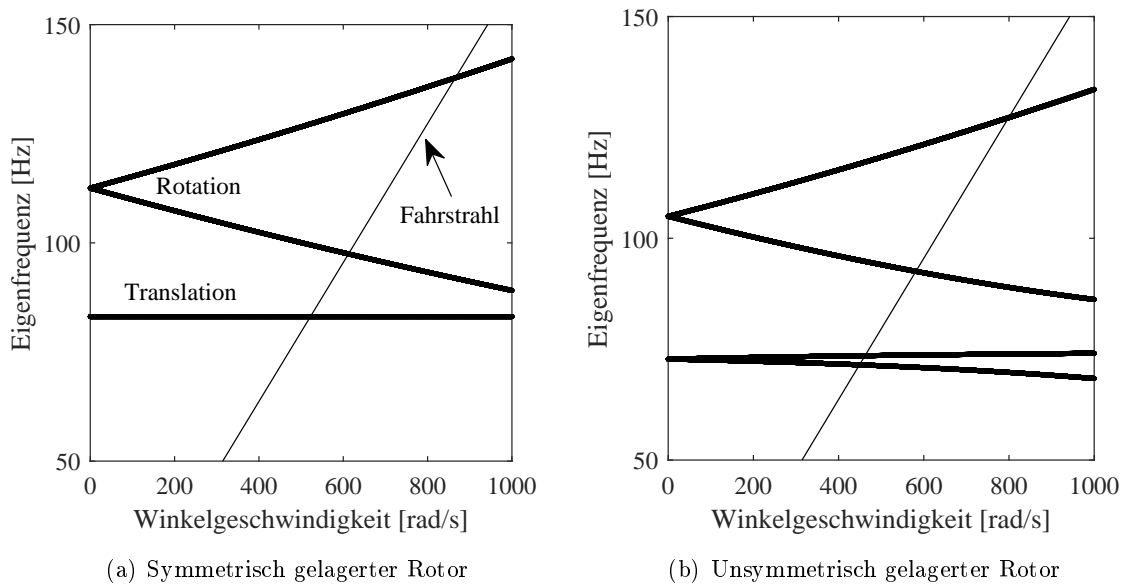


Abbildung 3.5: Campbell-Diagramm eines elastisch gelagerten Rotors

### 3.1.2 Kritische Geschwindigkeiten

Das Campbell Diagramm der Eigenfrequenzen in Kombination mit einem Dämpfungsdiagramm zeigt wo die Eigenfrequenzen liegen und wie groß deren Dämpfungen in einem definierten Drehzahlbereich sind. Die Resonanzfrequenzen unterscheiden sich im Allgemeinen von den Eigenfrequenzen. Im speziellen Fall von einem dämpfungsfreien System sind beide Frequenzen identisch. Im Fall eines schwingungsfähigen gedämpften Systems werden die Eigenwerte der Systemmatrix,  $i$  konjugiert komplexe Polpaare  $p_i = a_i \pm j\omega_i$  annehmen [16]. Die Resonanzfrequenz  $\Omega_{Res}$  ist daher nicht mehr gleich der Eigenfrequenz  $\Omega_n$  des ungedämpften Systems.

$$\begin{aligned}\Omega_{Res,i} &= \omega_i \\ \Omega_{n,i} &= \sqrt{a_i^2 + \omega_i^2}\end{aligned}\tag{3.15}$$

Im Fall einer sehr hohen Dämpfung, kann der Imaginärteil verschwinden und das System verliert die eigentlichen Resonanzüberhöhungen. Es kann also beim Campbell-Diagramm bei der Ordinatenachse zwischen Eigenfrequenzen und Resonanzfrequenzen unterschieden werden. Die Lage der Eigenfrequenzen ist wichtig um den Dämpfungsbereich bei aktiv geregelten Systemen einzustellen. Andererseits sind die Resonanzfrequenzen wichtig, um die sogenannte kritischen Geschwindigkeiten zu finden. Eine kritische Geschwindigkeit tritt auf, wenn die Frequenz einer Anregung gleich der Resonanzfrequenz eines Systems ist. Die kritischen Geschwindigkeiten sind also im Campbell-Diagramm als Schnittpunkte des Fahrstrahls mit den im Allgemeinen drehzahlabhängigen Resonanzfrequenzen ersichtlich. Die Amplitude der

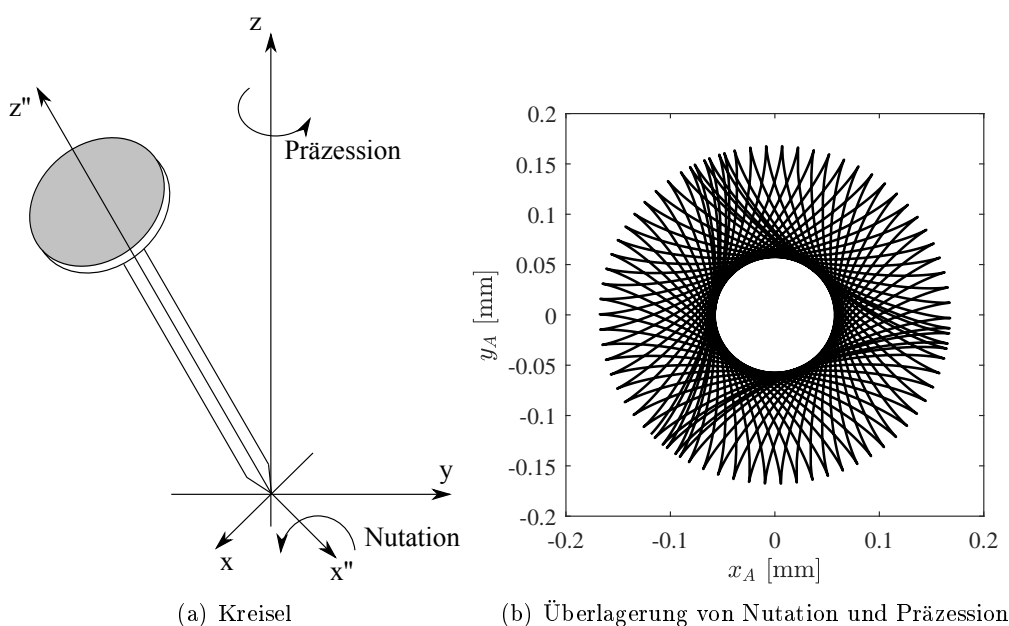


Abbildung 3.6: Verhalten eines symmetrischen drehenden Rotors

Schwingung im Bereich einer kritischen Geschwindigkeit hängt im eingeschwungenen Zustand vom Dämpfungsfaktor  $\xi$  ab. Für den ungedämpften Fall wäre die Amplitude im Resonanzpunkt unendlich groß. Mit dem Dämpfungsdiagramm können also zusätzlich zu der Stabilität auch Aussagen über die Laufeigenschaften des Rotors getroffen werden. In der Literatur gibt es verschiedene Definitionen zur Beschreibung eines dämpfenden Verhaltens. Daher werden zunächst die gängigsten Definitionen beschrieben. In der Elektrotechnik wird gerne der frequenzorientierte Gütefaktor  $Q$  verwendet. Der Wert von  $Q$  ist definiert als der Spitzenwert der Resonanzüberhöhung relativ zu der Höhe der Steifigkeits-Linie im Bode-Diagramm [17]. Der Abklingfaktor  $\delta$  beschreibt die Zeitkonstante des Abklingvorgangs. Die Lösung abhängig von  $\delta$  eines schwachgedämpften Systems mit einem Freiheitsgrad lautet:

$$u(t) = e^{-\delta t} [A \cos(\omega_s t) + B \sin(\omega_s t)] \quad (3.16)$$

mit den von den Randbedingungen abhängigen Parametern  $A$  und  $B$ , der Verschiebung  $u$  und der Kreisfrequenz der abklingenden Schwingung  $\omega_s t$ .  $\delta$  ist jedoch als Dämpfungsmaß für die Laufeigenschaften eines Rotors ungeeignet, da die Form des Einschwingverhaltens auf allgemeine Anregungen abhängig von der Eigenfrequenz ist. Bei einer Sprungantwort würde beispielsweise ein mit dem Abklingfaktor  $\delta$  gedämpftes System hoher Eigenfrequenz eine andere Form besitzen als ein System niedriger Eigenfrequenz. Von systemtheoretischer Sichtweise ist der Abklingfaktor gleich dem negativen Realteil des konjugiert komplexen Polpaares der Schwingung  $\delta_i = -a_i$ . Vergleicht man zwei Polpaare unterschiedlicher Eigenfrequenz aber gleicher Abklingkonstante  $\delta$ , so neigt das konjugiert komplexe Polpaar mit geringerer Eigenfrequenz weniger zur Schwingung als das konjugiert komplexe Polpaar höherer Eigenfrequenz. Um die Stabilitätseigenschaften und das Einschwingverhalten unabhängig von den Eigenfrequenzen darzustellen, wird der Abklingfaktor  $\delta$  auf die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems bezogen. Diese Größe ist definiert als Dämpfungsgrad oder Lehr'sches Dämpfungsmaß  $\xi$ .

$$\xi_i = \frac{\delta_i}{\Omega_{n,i}} = \frac{-a_i}{\sqrt{a_i^2 + \omega_i^2}} \quad (3.17)$$

Im Pol-Nullstellen Diagramm beschreibt  $\xi$  also den negativen Kosinus des Winkels des Polpaares. Eigenwerte konstanter Dämpfung  $\xi$  liegen auf einer Dämpfungsgeraden durch den Ursprung. Polstellen konstanter Eigenfrequenz  $\Omega_n$  liegen im Pol-Nullstellen Diagramm auf einem Kreis mit dem Radius  $\sqrt{a_i^2 + \omega_i^2}$  (Abbildung 3.7). In dieser Arbeit wird zur Beschreibung der Dämpfungseigenschaft eines Systems der Dämpfungsgrad  $\xi$  verwendet. Der große Vorteil dieser Beschreibung ist das eigenfrequenzunabhängige Einschwingverhalten für einen konstanten Dämpfungsgrad  $\xi$ . Der aperiodische Grenzfall ( $\xi = 1$ ) definiert die Grenze zwischen kriechendem Verhalten und schwingendem Verhalten. Wobei die Berechnung des Lehr'sches Dämpfungsmaßes  $\xi$  laut Gleichung (3.17) im kriechenden Fall nicht mehr gültig ist. Beim aperiodischen Grenzfall verschwindet der Imaginärteil und somit die Resonanzfrequenz. Die beiden Pole des Polpaares besitzen den selben reellen Wert. Beim kriechendem Verhalten



sind beide Pole reell und können auch durch zwei PT1 Glieder beschrieben werden. All diese Information können aus dem Dämpfungsdiagramm mit dem Dämpfungsmaß  $\xi$  entnommen werden.

Für magnetgelagerte Rotoren ist die Anregung aufgrund der Unwucht von essentieller Bedeutung. Mit Hilfe des Dämpfungsdiagramms kann zwar die Stabilität und das Dämpfungsverhalten des Rotors abgeschätzt werden, jedoch ist es mit den bisher definierten Gleichungen noch nicht möglich die Höhe der resultierenden Schwingungen aufgrund einer Rotorunwucht zu bestimmen. Eine statische Auswuchtung belastet das System durch eine Kraft. Wobei die Komponenten in einem körperfesten Koordinatensystem  $x^* - y^* - z^*$  wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} F_x^* &= m \cdot e_x^* \cdot \omega^2 \\ F_y^* &= m \cdot e_y^* \cdot \omega^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

mit den körperfesten Parametern der Exzentrizität  $e_x^*$  und  $e_y^*$ . Eine dynamische Auswuchtung belastet das System hingegen durch Momente. Die Belastungs-Gleichung kann aus dem Drallsatz bestimmt werden und lautet:

$$\begin{aligned} M_x^* &= -\Theta_{yz}^* \cdot \omega^2 \\ M_y^* &= \Theta_{zx}^* \cdot \omega^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

mit den Deviationsträgheitsmomenten  $\Theta_{yz}^*$  und  $\Theta_{zx}^*$ . Die Differentialgleichung des Systems lautet daher im nicht körperfesten Koordinatensystem:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\omega)\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mathbf{U}\mathbf{s} \quad (3.20)$$

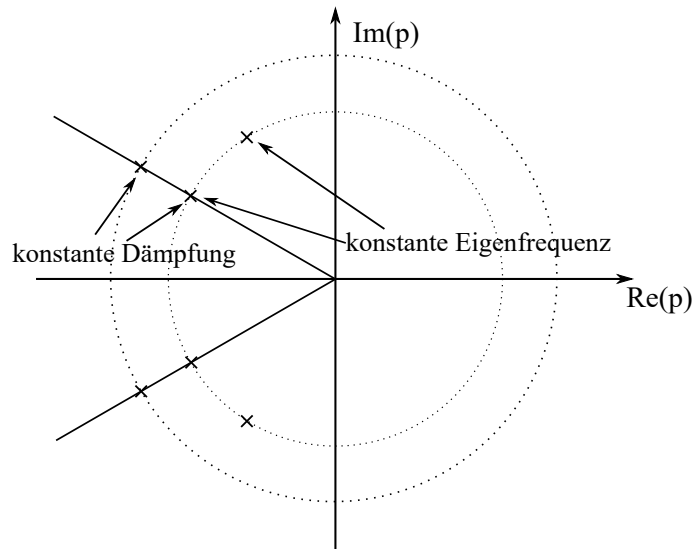


Abbildung 3.7: Verhalten der Pole eines schwingungsfähigen Systems

mit

$$\mathbf{U} = \omega^2 \begin{bmatrix} -\Theta_{yz}^* & \Theta_{zx}^* \\ -me_y^* & me_x^* \\ -\Theta_{zx}^* & -\Theta_{yz}^* \\ me_x^* & me_y^* \end{bmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Da die kritischen Geschwindigkeiten immer am Schnittpunkt zwischen dem Fahrstrahl und den Resonanzfrequenzen liegen, muss das System in diesen Bereichen für magnetgelagerte Rotoren eine ausreichend hohe Dämpfung besitzen.

## 3.2 Erweiterung des Federmodells um eine magnetische Lagerung

Die Grundgleichung starrer Rotoren (3.4) ist auch für die magnetische Lagerung gültig. Der Unterschied zwischen den Lagerungen liegt in der Berechnung des Kraftvektors  $\mathbf{F}$ . Die Erkenntnisse der rein elastischen Lagerung können größtenteils übernommen werden, da die Grundstruktur der Gleichungen auch für die magnetische Lagerung erhalten bleibt. Daher beschäftigt sich dieser Abschnitt mit der Modellierung der resultierenden Kraft, welche auf einen magnetisch gelagerten Rotor wirkt. Die Berechnung und das Verhalten der resultierenden Kräfte unterscheidet sich für die unterschiedlichen Typen der Magnetlager. Die folgende Klassifizierung beschreibt die gängigsten Magnetlagertypen [15]:

- **Erzeugung der Kraft:** Es gibt grundsätzlich zwei Arten der Krafterzeugung eines elektro-magnetischen Feldes. In diesem Zusammenhang kann zwischen Lorentz- und Reluktanz-Aktuatoren unterschieden werden. Ein Vorteil des Lorentz-Aktuators ist, dass es theoretisch keine negative Steifigkeit gibt. Daher ist eine Lorentzkraft-basierte Lagerung ideal für die Entkopplung von Schwingungen. Der Nachteil solcher Lager im Vergleich zu reluktanzbasierten Lagern ist die Notwendigkeit einer Wicklung oder eines Permanentmagneten am Rotor.
- **Aktive und passive Magnetlager:** Die klassischen aktiven Magnetlager erzeugen das Magnetfeld und somit die Kraft durch Elektromagnete. Zur Stabilisierung des Systems werden Regler eingesetzt, welche den Strom in den Spulen abhängig von der Position verändern. Passive Magnetlager nutzen für die Kraftwirkung ausschließlich Permanentmagnete. Eine Magnetlagerung, welche ausschließlich auf passive Magnetlager basiert, ist jedoch laut [18] nicht möglich. Lösung für eine teilweise passive Stabilisierung wurden in [19] und [20] beschrieben.
- **Homopolare und heteropolare Magnetlager:** Bei heteropolaren Magnetlagern ändert sich die Richtung des magnetischen Flusses in radialer Richtung abhängig vom Luftspaltwinkel. Für homopolare Strukturen bleibt die radiale Richtung des magnetischen Flusses unabhängig vom Winkel gleich. Ein Beispiel eines solchen homopolaren

Magnetlagers wird in [21] beschrieben. Der Vorteil der homopolaren Lagerung liegt in den kleineren Wirbelströmen und den kleineren Hysterese-Verlusten aufgrund der geringeren Änderung des Magnetfeldes im Vergleich zu heteropolaren Lagern.

- **Bias-Magnetisierung:** Für den Betrieb von Magnetlagern wird zumeist ein Grundfluss verwendet, welcher den magnetischen Arbeitspunkt einstellt. Die Stabilisierung des Rotors erfolgt mit einem zu regelnden Steuerfluss. Zur Erzeugung des Grundflusses gibt es mehrere Methoden. Der sogenannte "differential winding mode" verwendet eigene Spulen, durch welche Gleichstrom fließt, um den Grundfluss zu erzeugen. Der "differential driving mode" verwendet dieselben Spulen zur Erzeugung des Grundflusses und zur Erzeugung des Steuerflusses. Der Steuerstrom wird dabei dem grundflusserzeugenden Strom überlagert. Der Vorteil des "differential driving mode" liegt in der Tatsache, dass der Strom einer Spule zu Null geregelt werden kann, falls eine Kraft in die entgegengesetzte Richtung nötig ist. Diese Möglichkeit verhindert ein "Kleben" bleiben des Rotors, wie es für den "differential winding mode" der Fall sein kann. Der Grundfluss kann anstatt separater Spulen auch über Permanentmagneten erfolgen. Solche Lager werden in der Literatur als hybride Magnetlager beschrieben. Verschiedene Designs solch hybrider Magnetlager sind in [21–25] beschrieben.

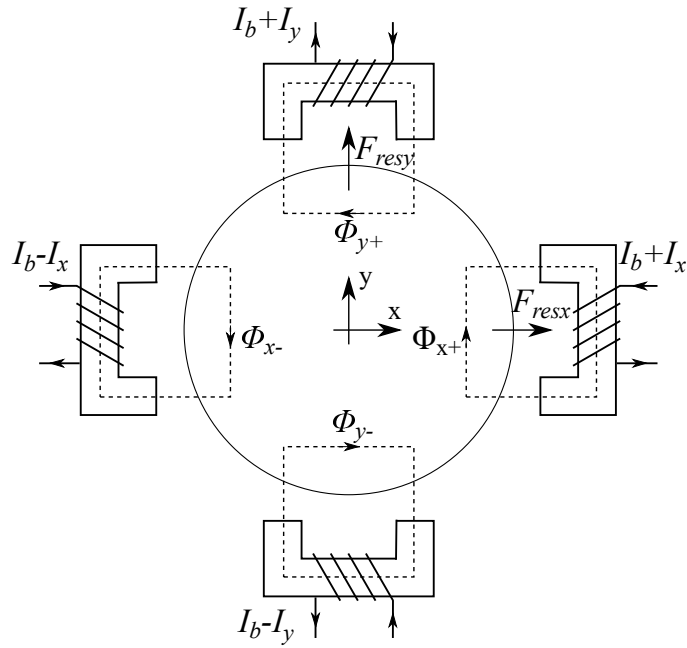
Für die Berechnung des Magnetkreises werden die flussführenden Teile aus Eisen als ideal permeabel angenommen ( $\mu_r \rightarrow \infty$ ). In dieser Arbeit werden nur aktive Reluktanz-Magnetlager betrachtet. Abbildung 3.8 stellt zwei unterschiedliche Arten der Erzeugung des Bias-Flusses dar. Beim "differential driving mode" wird der Steuerstrom der jeweiligen Spule ( $I_x$  oder  $I_y$ ) dem Biasstrom  $I_b$  überlagert. Beim "differential winding mode" wird hingegen der Grund- und Steuerfluss mit eigenen Spulen erzeugt. Für beide Fälle muss der Positionsregler des Magnetlagers nur einen Soll-Strom pro Freiheitsgrad vorgeben. Für den Stromregler ergibt sich abhängig von der Grundfluss-Methode ein Unterschied. Für den "differential driving mode" werden zwei Stromregler pro Freiheitsgrad benötigt, da zwei gegenüberliegende Spulen im Allgemeinen zwei unterschiedliche Ströme für eine stabile Regelung benötigen. Beim "differential winding mode" ist pro Freiheitsgrad jeweils nur ein Stromregler für die Steuerspulen nötig. Die Bias-Spulen können oftmals alle mit demselben Stromregler betrieben werden. Ein 5-DOF Magnetlager mit "differential driving mode" benötigt beispielsweise 10 Stromregler, wohingegen das Lager mit "differential winding mode" maximal 8 Stromregler, oder im idealen Fall gleicher Vormagnetisierung aller Lager nur 6 Stromregler benötigt.

### 3.2.1 Berechnung der resultierenden Kraft

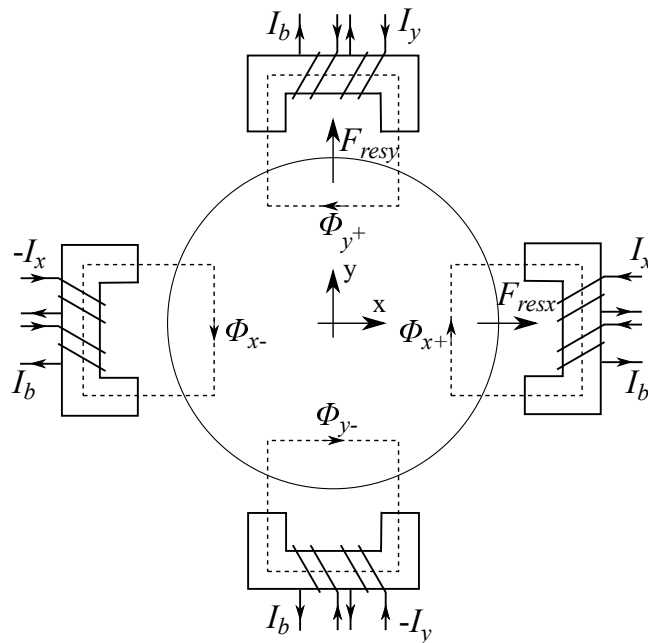
In Kapitel 2 wurde beschrieben, wie die Kraftwirkung elektromagnetischen Ursprungs an einem Körper berechnet wird. Die Gleichung der Kraft  $\mathbf{F}_m$  mit Hilfe des Maxwell-Spannungstensors  $\mathbf{p}$  lautet:

$$\mathbf{F}_m = \int \frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{1}{2} B^2 \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{BB} \right) dA \quad (3.22)$$

Für die Berechnung der Kraftwirkung eines magnetgelagerten Rotors wird in dieser Arbeit die Kollinearität des Flussvektors  $\mathbf{B}$  und des Flächennormalvektors  $\mathbf{n}$  angenommen. Des Weiteren wird die Flussdichteverteilung als zeitlich veränderliche Größe, jedoch räumlich konstant unter einem Pol, angenommen. Unter diesen vereinfachten Bedingungen berechnet sich die Kraft



(a) Differential driving mode



(b) Differential winding mode

Abbildung 3.8: Krafterzeugung bei aktiven Magnetlagern

$\mathbf{F}_p$ , welche ein Pol auf den Rotor ausübt, mit

$$\mathbf{F}_p = \frac{A_p}{2\mu_0} B^2 \mathbf{n} \quad (3.23)$$

mit der Polfläche  $A_p$ . Die Kraftberechnung (3.23) ist für die oben genannten Vereinfachungen noch allgemein gültig und daher nicht abhängig von der zugrundeliegenden Steuerart und Struktur des Magnetlagers. Mit der Berechnung der Flussdichte  $B$  im Luftspalt in Abhängigkeit vom Spulenstrom  $I$  muss jedoch auf die Geometrie und das Steuerverfahren eingegangen werden. Zur Berechnung der Flussdichte  $B$  wird der Durchflutungssatz für ein Magnetlager angewendet. Für die Geometrie laut Abbildung 3.8 berechnet sich  $B$  mit

$$B = \frac{\Theta_m}{2\delta_l} \mu_0 \quad (3.24)$$

mit der Durchflutung  $\Theta_m$  und dem Luftspalt  $\delta_l$ . Die Berechnung der Durchflutung ist abhängig von der Erzeugung des Grundflusses. Für den "differential winding mode" gilt

$$\Theta_m = N_s I_s + N_b I_b \quad (3.25)$$

mit der Windungszahl  $N_s$  der Steuerspule, der Windungszahl der Biasspule  $N_b$  und dem Steuerstrom  $I_s$ . Für den "differential driving mode" gilt hingegen

$$\Theta_m = N (I_b \pm I_s) \quad (3.26)$$

Da der Rotor der Turbomolekularpumpe in dieser Arbeit mittels "differential driving mode" stabilisiert wird, werden die folgenden Berechnungen auch hierfür angegeben. Die Berechnung für den "differential winding mode" gestaltet sich ähnlich. Durch Einsetzen von Gleichung (3.26) und Gleichung (3.24) in Gleichung (3.23) erhält man die Kraft in Abhängigkeit der Ströme und dem Luftspalt  $\delta_l$ .

$$\mathbf{F}_p = \frac{1}{4} \mu_0 N^2 A_p \frac{(I_b \pm I_s)^2}{\delta_l^2} \mathbf{n} \quad (3.27)$$

Die resultierende Kraft ergibt sich aus der vektoriellen Superposition der Kräfte an den Polen.

$$\begin{aligned} F_{Res,x} &= \frac{1}{4} \mu_0 N^2 A_p \left( \frac{(I_b + I_x)^2}{(\delta_0 - x)^2} - \frac{(I_b - I_x)^2}{(\delta_0 + x)^2} \right) \\ F_{Res,y} &= \frac{1}{4} \mu_0 N^2 A_p \left( \frac{(I_b + I_y)^2}{(\delta_0 - y)^2} - \frac{(I_b - I_y)^2}{(\delta_0 + y)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Aus Gleichung (3.28) ist ersichtlich, dass die resultierende Kraft nichtlinear vom Weg und vom Strom abhängt. Um die Theorie linearer Systeme dennoch nutzen zu können, wird die

resultierende Kraft in einem Arbeitspunkt ( $x = y = 0, I_x = I_y = 0$ ) linearisiert.

$$\begin{aligned} F_{lin,x} &= \frac{\partial F_{Res,x}}{\partial I_x} I_x + \frac{\partial F_{Res,x}}{\partial x} x = k_{i,x} I_x + k_{s,x} x \\ F_{lin,y} &= \frac{\partial F_{Res,y}}{\partial I_y} I_y + \frac{\partial F_{Res,y}}{\partial y} y = k_{i,y} I_y + k_{s,y} y \end{aligned} \quad (3.29)$$

mit

$$\begin{aligned} k_i &= k_{i,x} = k_{i,y} = \frac{\mu_0 N^2 A_p I_b}{\delta_0^2} \\ k_x &= k_{s,x} = k_{s,y} = \frac{\mu_0 N^2 A_p I_b^2}{\delta_0^3} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Aus Gleichung (3.29) ist zu erkennen, dass die resultierende Kraft eines linearisierten Magnetlagersystems der Kombination einer negativen Steifigkeit  $k_x x$  und einem stromabhängigen Anteil  $k_i I_s$  entspricht. Der Faktor  $k_i$  steigt mit höher werdendem Bias-Strom  $I_b$ . Es ist also weniger Steuerstrom nötig, wenn  $I_b$  steigt. Der Nachteil eines steigenden Bias-Stroms liegt in dem quadratischen Zusammenhang von  $I_b$  mit der negativen Steifigkeit  $k_x$ . Diese negative Steifigkeit  $k_x$  definiert die Mindestbandbreite des Regelsystems [17]. Auch der minimal mögliche Spitzenwert der Sensitivitätsfunktion wird durch eine Vergrößerung von  $k_x$  höher<sup>1</sup>.

### 3.2.2 Systemgleichung eines magnetisch gelagerten Rotors

Einsetzen von Gleichung (3.29) in Gleichung (3.4) und Transformation der Lagerkräfte in das COG-System resultiert in der Bewegungsgleichung magnetgelagerter Rotoren

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\omega)\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B} (\mathbf{K}_x \mathbf{B}^T \mathbf{x} + \mathbf{K}_i \mathbf{i}) \quad (3.31)$$

mit den Matrizen

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} k_{iAx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{iBx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{iAy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{iBy} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} k_{xAx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{xBx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{xAy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{xBx} \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_{xA} \\ i_{xB} \\ i_{yA} \\ i_{yB} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

wobei die Einträge der Stromspaltenmatrix  $\mathbf{i}$  die Ströme an dem jeweiligen Lager beschreiben. Gleichung (3.31) beschreibt das dynamische Verhalten des Magnetlagersystems. Da zur späteren Stabilisierung des Systems eine Reglerstruktur nötig ist, muss das System noch um eine Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.33)$$

<sup>1</sup>Näheres dazu wird in Kapitel 5.3.2 erläutert

mit den Matrizen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -c & 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & -d & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ y_A \\ y_B \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

erweitert werden. Wobei die Einträge der Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  die Abstände von den Sensoren zum Schwerpunkt darstellen (Abbildung 3.1). Die Einträge der Spaltenmatrix  $\mathbf{y}$  beschreiben die Positionen an den Positionssensoren. Um eine zum elastisch gelagerten Rotor ähnliche Darstellung zu erhalten, wird Gleichung (3.31) in der Literatur oftmals in folgender Form angegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\omega)\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{BK}_x\mathbf{B}^T\mathbf{x} &= \mathbf{BK}_i\mathbf{i} + \mathbf{U}s \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Bei einem Magnetlagersystem nach Gleichung (3.35) handelt es sich im Allgemeinen um ein verkoppeltes Mehrgrößensystem. Für den Reglerentwurf und anschließende Stabilitätsuntersuchungen empfiehlt sich in späterer Folge eine Darstellung im Zustandsraum.

### 3.3 Beschreibung magnetisch gelagerter flexibler Rotoren

Da die Betrachtung des starren Rotors für Industrieanwendungen oftmals nicht ausreicht, wird in diesem Kapitel die Modellierung des elastischen Systems beschrieben. Eine der einfachsten Modellierungen flexibler Rotoren ist der Lavalrotor. Für viele Anwendungen ist jedoch diese einfache Beschreibung unbrauchbar. Daher wird im Folgenden auf Rotoren mit kontinuierlicher Massenverteilung eingegangen. In dieser Arbeit wird nur ein grober Überblick über die numerische Berechnung magnetgelagerter Rotoren gegeben. Für eine tiefere Betrachtung sei auf die angegebene Literatur verwiesen.

#### 3.3.1 Flexibler Rotor mit kontinuierlicher Massenverteilung

Zur Beschreibung der Theorie flexibler Rotoren wird eine konstante Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  vorausgesetzt. Die Lager besitzen zudem lineare Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten. Es werden nur lineare Schwingungen (linear elastisches Verhalten und kleine Verschiebungen) betrachtet. Für die Berechnung eines kontinuierlichen Rotors sind die beiden am häufigsten angewendeten Balkentheorien der schubstarre (Bernoulli-Theorie) und der schubweiche Balken (Timoshenko-Theorie). Beim Bernoulli-Balken lassen sich die Verschiebung alleine durch die Querverschiebungen  $w(z, t)$  beschreiben. Der Timoshenko-Balken lässt auch Schubdeformation zu, wodurch zu den Querverschiebungen  $w(x, t)$  noch die Querschnittsneigung  $\bar{\beta}(z, t)$  hinzu kommt [16], [26]. Beim Bernoulli-Balken stehen Querschnittsflächen die vor der Deformation senkrecht auf die Balkenachse standen, auch nach der Deformation senkrecht auf die deformierte Balkenachse. Abbildung 3.9 zeigt einen Vergleich der beiden Balkentheorien.

Beim Timoshenko-Balken gibt es zusätzlich zur Verschiebung  $w(z,t)$  noch eine Schubver-

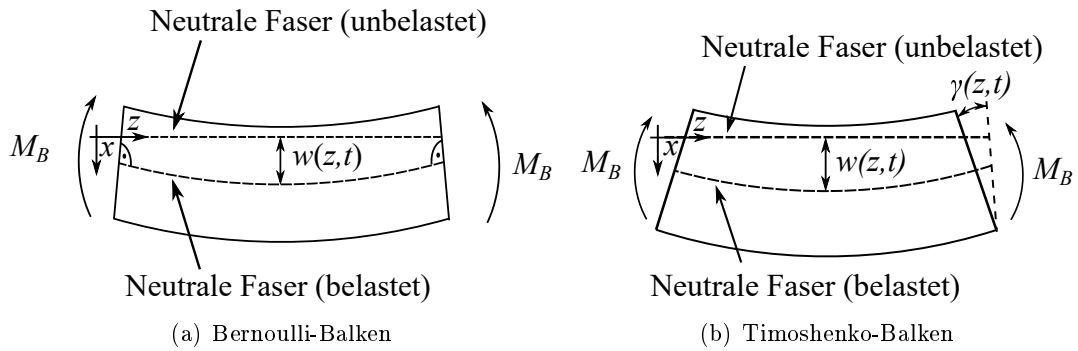


Abbildung 3.9: Unterschiede der Balkentheorien

zerrung  $\gamma(z,t)$  welche sich aus der Superposition der Querschnittsneigung  $\bar{\beta}(z,t)$  und der Tangentialneigung  $\frac{\partial w(z,t)}{\partial z}$  ergibt. Die folgende Tabelle stellt einen Vergleich der Berechnung beider Balkentheorien dar. Wobei  $\dot{}$  die Ableitung nach der Zeit und  $()'$  die Ableitung nach der Koordinate  $z$  darstellt [16].

Bernoulli-Balken	Timoshenko-Balken
Gleichgewicht	
$M'_B - Q = 0$	$M'_B - Q - d\Theta \ddot{\bar{\beta}} = 0$
$Q' - dm \ddot{w} = 0$	$Q' - dm \ddot{w} = 0$
Elastizitätsgesetz	
$M_B = B(z)\kappa$	$M_B = B(z)\kappa$
	$Q = S(z)\gamma$
Kinematik	
$\kappa = -w''$	$\kappa = \bar{\beta}'$
	$\gamma = \bar{\beta} + w'$

Hierbei beschreibt  $M_B$  das Biegemoment,  $Q$  die Querkraft,  $dm$  die Masse und  $d\Theta$  das Trägheitsmoment eines infinitesimal kleinen Volumenelementes,  $\kappa$  die Krümmung und  $B(z)$  und  $S(z)$  beschreiben lineare Materialgesetze. Im Vergleich zum Bernoulli-Balken wird beim Timoshenko-Balken auch die Trägheit der Schubverzerrung zum d'Alembertsche-Gleichgewicht hinzugezählt. Das Elastizitätsgesetz muss um eine Schubsteifigkeit erweitert werden und die Kinematik wird abgeändert.



Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Bernoulli-Balken für einen weiten Anwendungsbereich eingesetzt werden kann. Der Timoshenko-Balken ist nötig, falls die Schubverzerrung nicht mehr vernachlässigt werden kann. Dies ist vor allem bei Balken der Fall, bei welchen die Länge im Vergleich zu der Höhe klein wird und im Speziellen bei Sandwich-Strukturen. Es sei noch erwähnt, dass es bei der numerischen Berechnung des Timoshenko-Balkens zu sehr hohen Fehlern aufgrund des sogenannten "Shear-locking"-Effekts kommen kann [27]. Theorien welche auch Querkontraktionseffekte berücksichtigen [28], sind nur von geringer praktischer Bedeutung.

An einem elastischen Rotor ist der Schwerpunkt, aufgrund von mechanischen Toleranzen in der Fertigung, niemals gleich dem geometrischen Mittelpunkt. Aus diesem Grund wird der Rotor und auch die Lagerung immer durch transversale Kräfte und Momente, zufolge der Unwucht, belastet. Diese Kräfte können aus dem Prinzip von d'Alambert beschrieben werden. Nimmt man ein infinitesimal kurzes Massenelement aus dem Rotor heraus, so wirken die d'Alambert-Kräfte  $dm \ddot{x}$  und  $dm \ddot{y}$  entgegen den Beschleunigungen. Die Unwuchtkräfte an einem infinitesimal kleinen Balkenelement können laut [15] mit

$$\begin{aligned} dF_{ux} &= (e\omega^2 \cos(\omega t + \gamma_u) - \ddot{x}) dm \\ dF_{uy} &= (e\omega^2 \sin(\omega t + \gamma_u) - \ddot{y}) dm \end{aligned} \tag{3.36}$$

mit der Drehzahl  $\omega$ , dem Unwuchtwinkel  $\gamma$  und der Exzentrizität  $e$ , berechnet werden. Die sogenannte Selbstzentrierung von Rotoren ist in diesem Zusammenhang ein wichtiges Phänomen der Rotordynamik [29]. Diese Selbstzentrierung beschreibt den Effekt einer Verringerung der Wellenauslenkung und der resultierenden Kraft aufgrund der ersten Biegemode für höher werdende Drehzahlen  $\omega$  im überkritischen Betrieb des Rotors. Überkritisch bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Drehzahl  $\omega$  höher als Eigenfrequenz der ersten Biegemode ist.

### 3.3.2 Methode der Finiten Elemente

Da die analytische Berechnung des dynamischen Verhaltens eines Rotors mit kontinuierlicher Massenverteilung in vielen Fällen nicht möglich oder zu aufwendig wäre, wird in dieser Arbeit auf numerische Methoden zurückgegriffen, wie beispielsweise die Finite-Elemente-Methode (FEM). Die FEM zerlegt den Rotor in Teilsysteme. Diese Teilsysteme werden im Allgemeinen auf eine Einheitsform in ein lokales Koordinatensystem transformiert. Die zur Berechnung nötigen Ansatzfunktionen werden zum numerischen Lösen des Rand- und Anfangswertproblems für die gewählte Einheitsform aufgestellt. Anschließend werden die Teilsysteme wieder in ein globales System, unter der Einhaltung der Randbedingungen zwischen den Verbindungsknoten rücktransformiert. Das Konvergenzverhalten ist bei der FEM abhängig von der Anzahl der Elemente und von der Ordnung der Ansatzfunktionen. Für ein Balkenelement basierend auf der Bernoulli-Hypothese besitzt jedes Element eine gewisse Biegesteifigkeit  $EJ$ , eine Länge  $l$ , eine Dichte  $\rho$  und eine Exzentrizität  $e$ . Die FEM basiert auf Energiemethoden und im speziellen auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit. Für die Berechnung der virtuellen Arbeit werden sogenannte virtuelle Verschiebungen definiert, die folgende Bedingungen erfüllen [30]:

- Virtuelle Verschiebungen sind gedacht. Daher müssen sie nicht tatsächlich auftreten.
- Virtuelle Verschiebungen sind differenziell klein.
- Virtuelle Verschiebungen müssen die kinematischen Randbedingungen erfüllen.

Beim Biegebalken sind die Verschiebungen beispielsweise als translatorische Bewegung und Biegewinkel definiert. Das Prinzip der virtuellen Arbeit besagt, dass die Arbeit der inneren Kräfte gleich der Arbeit der äußeren Kräfte sein muss. Wobei  $\delta$  das Variationssymbol kennzeichnet.

$$\delta W_i = \delta W_a \quad (3.37)$$

Um die Gleichung zur Berechnung der virtuellen Arbeit eines Teilsystems aufstellen zu können, müssen Ansatzfunktionen definiert werden. Es gibt Ansatzfunktionen für zahlreich verschiedene Elemente. Wobei abhängig von den gewählten Elementen, physikalische Vereinfachungen getroffen werden. In [30] ist die Herleitung der Gleichungen eines Bernoulli- und eines Timoshenko-Balkens beschrieben. Sind die Ansatzfunktionen definiert, können die virtuellen Verschiebungen eines Elements

$$\mathbf{w}(\xi) = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{U}_B^e \quad (3.38)$$

mit der Matrix der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}(\xi)$ , der Laufkoordinate des lokalen Koordinatensystems  $\xi$  und der Spaltenmatrix der Freiheitsgrade des lokalem Elementes  $\mathbf{U}_B^e$ , angegeben werden. Abhängig von Materialgesetzen und den Verzerrungs-Verschiebungs-Bedingungen kann für die Ansatzfunktion eine lokale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^e$ , eine lokale Massenmatrix  $\mathbf{M}^e$  und ein Elementlastvektor  $\mathbf{F}^e$  angegeben werden. Sind die verschiedenen Systemmatrizen bekannt, können alle Einzelsysteme in ein globales Koordinatensystem transformiert und dort unter

Einhaltung der Rand- und Übergangsbedingungen vereint werden. Eines der Globalisierungsverfahren besteht darin, die lokalen Verschiebungen mittels Transformationsmatrizen auf die globalen Koordinaten zu transformieren und anschließend die Systemmatrizen zu addieren. Dieses Verfahren ist jedoch wegen der hohen Rechenzeit und der Speicherbelastung nur begrenzt einsetzbar. In der Literatur gibt es noch eine Vielzahl anderer Globalisierungsverfahren, auf die nicht weiter eingegangen wird. Das globale System wird durch eine globale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^G$ , welche sich aus der Steifigkeit des Rotors und der Steifigkeit der Lager zusammensetzt, einer globalen Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}^G$ , der Matrix des gyroskopischen Effekts  $\mathbf{G}(\omega)^G$ , einer globalen Massenmatrix  $\mathbf{M}^G$ , den globalen Freiheitsgrade  $\mathbf{u}^G$  und einem globalen Belastungsvektor  $\mathbf{F}^G$  definiert. Die Matrix-Differentialgleichung besitzt für den elastischen Fall folgende Form:

$$\mathbf{M}^G \ddot{\mathbf{u}}^G + (\mathbf{G}^G(\omega) + \mathbf{D}^G) \dot{\mathbf{u}}^G + \mathbf{K}^G \mathbf{u}^G = \mathbf{F}^G \quad (3.39)$$

Die Differentialgleichung eines linearen elastischen Rotors (3.39) besitzt also nach der Diskretisierung mittels der FEM dieselbe Struktur wie für den starren Fall. Für die Auslegung der Regelung eines magnetisch gelagerten Rotors sind die Spannungen und Verzerrungen des Rotors nur von geringer Bedeutung. Viel wichtiger ist die Lage der Eigenfrequenzen, die Form der Eigenschwingung und die Dämpfung der Eigenwerte der Systemmatrix. All diese Ergebnisse können aus dem Eigenwertproblem

$$\lambda^2 \mathbf{M}^G + \lambda (\mathbf{G}^G(\omega) + \mathbf{D}^G) + \mathbf{K}^G = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

berechnet werden. Aus den Eigenwerten  $\lambda$  und den Eigenvektoren  $\mathbf{v}_E$  können direkt die Eigenfrequenzen und die Eigenformen angegeben werden.

$$\tilde{\mathbf{v}}_n(t) = \mathbf{v}_{E,n} e^{\lambda_n t} \quad (3.41)$$

Anhand der Eigenwerte ist eine Stabilitätsuntersuchung aufgrund der geforderten Linearität sehr einfach möglich. Um eine Abschätzung der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit flexibler Moden zu treffen, ist die Eigenform ein wichtiges Maß. Die Eigenform wird durch die Eigenvektoren bestimmt und für die Abschätzung oftmals auf Eins normiert. Die lineare Matrix-Darstellung von (3.39) hat auch den Vorteil, dass sich die Überführung in den Zustandsraum als sehr einfach gestaltet.

Um Gleichung (3.39) für magnetgelagerte Rotoren zu verwenden, muss die Spaltenmatrix der Magnetlagerkräfte  $F_{AMB}$  in das globale Koordinatensystem der FEM transformiert werden. Dies erfolgt durch die  $(m \times n)$ -Matrix  $\mathbf{T}_A$ , wobei  $m$  die Anzahl der Freiheitsgrade aufgrund der FEM angibt und  $n$  die Anzahl linear unabhängigen Kräfte der Aktuatoren. Die Gleichung eines magnetisch gelagerten flexiblen Rotors unter Berücksichtigung der Linearisierung von Gleichung (3.29) lautet daher:

$$\mathbf{M}^G \ddot{\mathbf{u}}^G + \mathbf{G}^G(\omega) \dot{\mathbf{u}}^G - (\mathbf{T}_A \mathbf{K}_x \mathbf{T}_A^T) \mathbf{u}^G = \mathbf{F}_u^G + \mathbf{T}_A \mathbf{K}_i \mathbf{i} \quad (3.42)$$

Die Berechnung der Sensorkoordinaten erfolgt in gleicher Weise wie für einen Starrkörper mit einer Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_S$ . Um die Simulationsdauer zu reduzieren kann auch ein reduziertes Rotormodell verwendet werden. Für die Reduktion muss die Systemgleichung (3.42) auf die Modale-Form transformiert werden. In dieser Form kann die maximale Ordnung der elastischen Schwingungsmoden gewählt werden. Eine ausführliche Darstellung der Reduktion des flexiblen Rotors findet sich in [31] und [32].

## Kapitel 4

# Stabilisierung magnetgelagerter Rotoren mittels LQ-Regler

In den vorhergehenden Abschnitten wurde die mögliche Modellierung magnetisch gelagerter Rotoren beschrieben. Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Entwicklung stabilisierender Reglerstrukturen basierend auf den Erkenntnissen der Modellierung. Es werden verschiedene Reglerstrukturen beschrieben und deren Vor- und Nachteile angegeben. Wichtige Aspekte für die Entwicklung einer Regelung der verwendeten Turbomolekularpumpen sind wie folgt gegeben:

1. Das Verhältnis des polaren Trägheitsmoments ( $\Theta_p = \Theta_z$ ) zum axialen Trägheitsmoment  $\Theta_p/\Theta_x$  ist verhältnismäßig groß. Diese Tatsache zieht eine große drehzahlabhängige Aufspaltung der rotatorischen Eigenfrequenzen mit sich.
2. Die Eigenfrequenzen der Biegemoden sind groß genug, um die Stabilisierung des Starrkörpers unabhängig von flexiblen Eigenschaften zu entwickeln. Für die Stabilisierung der flexiblen Eigenschaften wird die Reglerstruktur anschließend erweitert.
3. Die Eigenfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufel dürfen nicht vernachlässigt werden. Für die verwendeten Pumpen liegen die betrachteten Eigenfrequenzen zwischen 490 Hz und 1300 Hz.
4. Die Unwucht der verwendeten Rotoren ist verhältnismäßig groß. Es ist eine spezielle Unwuchtkompensation nötig um die Nenndrehzahl zu erreichen.

Durch Punkt 2 kann die Reglerauslegung signifikant vereinfacht werden. Magnetlager erzeugen im Vergleich zu mechanischen Lagern nur eine eher weiche Stabilisierung. Daher ändern sich die flexiblen Eigenfrequenzen nicht sehr stark in Abhängigkeit der Reglerparameter. Abbildung 4.1 zeigt die vernachlässigbaren Auswirkungen unterschiedlicher Verstärkungen auf die Eigenfrequenz der Biegemoden des flexiblen Rotors. Die Referenzsteifigkeit der betrachteten Lagerung beträgt 150 N/mm. Falls die Eigenfrequenzen der flexiblen Moden bekannt sind,

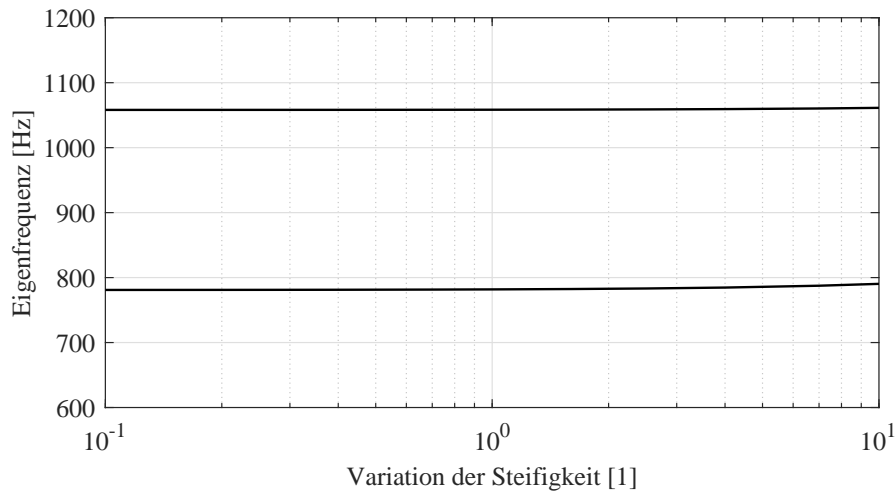


Abbildung 4.1: Steifigkeits-Variation von Lager B für die ersten Biegemoden bei einem drehenden Rotor

kann der flexible Körper durch die richtige Phasenverschiebung stabilisiert werden. Dies ist nur möglich, wenn die Starrkörper Eigenfrequenzen einen ausreichend großen Frequenzabstand zu den flexiblen Eigenfrequenzen besitzen. Ansonsten würde das Filter zur Stabilisierung des flexiblen Rotors Auswirkungen auf die Stabilität des Starrkörpers haben. Wie eine solche Stabilisierung des flexiblen Rotors funktioniert, ist in [33] und [34] beschrieben. Die Eigenfrequenzen der Biegemoden sind also nahezu unabhängig von den Reglerparametern für die vorliegenden Turbomolekularpumpen. Dennoch bleibt die starke Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von der Drehzahl aufgrund des gyroskopischen Effektes bestehen. Die Dämpfungsbandbreite der Filter muss daher ausreichend groß sein, um den Rotor im gesamten Drehzahlbereich der Anwendung stabilisieren zu können. Ist der Frequenzabstand zwischen den Eigenfrequenzen des starren Körpers zu den Eigenfrequenzen der flexiblen Moden nicht ausreichend groß, muss eine komplexere Regelung entwickelt werden. Für die Auslegung einer solchen Regelung ist meist eine Kombination der FEM mit einer dynamischen Simulation des Regelkreises nötig.



Regelkreises in der linken offenen Halbebene liegen und eine ausreichend hohe Dämpfung besitzen. Da es sich aufgrund des gyroskopischen Effektes um ein parametervariantes System handelt, müssen die Eigenwerte abhängig von der Drehzahl berechnet werden. Die Stabilitäts- und Laufeigenschaften werden mittels Campbell-Diagramm visualisiert. Der P-Anteil des Reglers muss fähig sein die negative Steifigkeit zu kompensieren. Aufgrund der Robustheit und der Laufeigenschaften wird jedoch meist ein höherer Wert verwendet. Die Höhe der negativen Steifigkeit setzt ein unteres Limit der Bandbreite des geschlossenen Regelkreises. Der D-Anteil wird anschließend abhängig vom P-Anteil eingestellt damit die Starrkörpermoden eine ausreichend hohe Dämpfung aufweisen. Für praktische Anwendungen wird das differenzierende Verhalten für höhere Frequenzen wieder abgeschaltet, um Störungen nicht unnötig zu verstärken, welche unter Umständen auch flexible Moden anregen können. Abbildung 4.3 zeigt ein beispielhaftes Campbell-Diagramm eines magnetgelagerten Rotors mit einem nicht vernachlässigbaren gyroskopischen Effekt. Das System wird hierbei mittels dezentraler Regelung stabilisiert. Die Regelung der Translations-Bewegung stellt auch für die dezentrale Regelung kein Problem dar, da diese nicht oder nur wenig von der Drehzahl abhängen. Die rotatorischen Bewegungen weisen hingegen starke drehzahlabhängige Verkopplungen auf. Die Eigenwerte der rotatorischen Bewegungen spalten sich auf. Diese Parametervarianz stellt ein Problem für hohe Drehzahlen dar, denn die minimal nötige Bandbreite des Regelkreises steigt mit der Drehzahl des Rotors an. Durch die Aufteilung der rotatorischen Bewegungen müsste der dämpfende Frequenzbereich immer größer werden. Diese Vergrößerung des dämpfenden Bereiches geht immer mit einer Anhebung der Verstärkung einher. Für praktische Anwen-

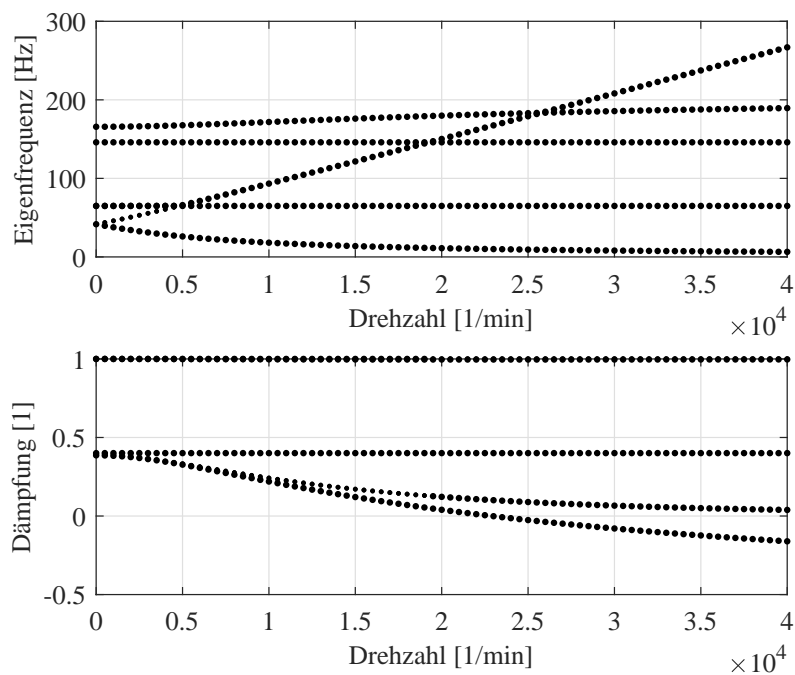


Abbildung 4.3: Campbell-Diagramm eines dezentral geregelten Magnetlagersystems



dungen kann der dämpfende Frequenzbereich nicht willkürlich groß eingestellt werden. Die limitierenden Faktoren sind die Abtastzeit, flexible Moden, Verstärkung von Rauschen und die Bandbreite von Sensoren und Aktuatoren. In Abbildung 4.3 wird das System bei einer Drehzahl von etwa  $22000 \text{ min}^{-1}$  in einen instabilen Betriebszustand übergehen, was an der negativen Dämpfung zu erkennen ist. Die beiden Eigenfrequenzen zwischen 150 Hz und 200 Hz sind sogenannte virtuelle Moden. Diese virtuellen Moden sind keine mechanischen Eigenfrequenzen, sondern resultieren aus den Filtern und Reglern, welche für die Stabilisierung des Systems verwendet werden.

In [14] wird gezeigt, dass der gyroskopische Effekt alleine keine Instabilität hervorrufen kann. Der wahre Grund ist die drehzahlabhängige Änderung der Eigenmoden in Abhängigkeit des gyroskopischen Effekts in Verbindung mit der örtlich verschiedenen Sensor- und Aktorplatzierung. Durch diese Änderung entstehen unterschiedliche Phasenverschiebungen zwischen dem Aktor und dem Sensor, welche die Polpaare in die rechte Halb-Ebene ziehen können. Ein weiterer Instabilitätsgrund ist die Tatsache, dass eine Regelung mit steigender Frequenz die dämpfende Eigenschaft verliert, oder diese aufgrund zu hoher Verstärkungen ab einer gewissen Frequenz vorsätzlich abgeschaltet wird. Für stark unterschiedliche und große Eigenfrequenzen der Starrkörpermoden ist daher eine Stabilisierung mittels dezentraler Reglerstruktur äußerst schwierig.

Um die Kopplung der translatorischen und der rotatorischen Bewegungen aufzuheben, kann eine Ein-Ausgangs-Transformation laut [15] eingeführt werden. Diese einfache Koordinatentransformation löst jedoch nicht das Problem der Aufspaltung der Eigenwerte aufgrund des gyroskopischen Effektes. Jedoch wird die Auslegung der Regelung im Vergleich zur dezentralen Regelung vereinfacht. In [34], [38] und [39] wurden Methoden entwickelt um den Einfluss des gyroskopischen Effekts zu reduzieren, oder sogar zu eliminieren. Im Gegensatz zu [38] wird in [34] und [39] ein Kalman-Filter zur Schätzung der Geschwindigkeiten verwendet. In [40] und [41] werden moderne Regelungskonzepte wie beispielsweise die  $H_\infty$ - oder die  $\mu$ -synthesis-Regelung verwendet. Viele industriell eingesetzte Magnetlager basieren dennoch auf konventionellen PID-Reglern, aufgrund der intuitiven Entwurfs-Prozedur und den physikalisch interpretierbaren Parametern. In [42], [43] und [44] wird die Reglerauslegung um das nichtlineare Verhalten von Magnetlagern erweitert. Durch die hohe Rechenzeit und der oft ausreichend hohen Linearität von industriellen Magnetlagern wird diese Art der Regelung in dieser Arbeit jedoch nicht berücksichtigt.

## 4.2 LQ-Regler

Um das Problem der dezentralen Regelung für hochgyroscopische Rotoren zu lösen, können optimale Mehrgrößenregler verwendet werden. In [45] wird die Entwicklung eines LQ-Reglers für ein 5-DOF Magnetlager beschrieben. In diesem Abschnitt wird der LQ (Linear Quadratic)-Regler um ein Kalman-Filter zur Beobachtung der Geschwindigkeiten erweitert. Die resultierende Struktur (Kombination aus LQR und Kalman-Filter) wird in der Literatur auch als LQG (Linear Quadratic Gaussian)-Regler bezeichnet. Es wird sich in diesem Abschnitt zeigen, dass der starre Rotor zwar stabilisiert werden kann. Für die Regelung des flexiblen Rotors in Kombination mit Stabilisierungsfilttern gestaltet sich das Auffinden einer ausreichend guten Lösung jedoch als schwierig. Daher wird der Einsatz von LQG-Reglern zwar beschrieben, zum Erreichen der Nenndrehzahl wird jedoch in den nachfolgenden Kapiteln eine andere Möglichkeit zur Stabilisierung des Rotors verwendet.

Die LQ-Methode wird oft für Problemstellungen angewendet, wo die klassische Regelungstechnik versagt oder zu aufwendig wird. Das sind vor allem stark verkoppelte Mehrgrößensysteme. Der Grundgedanke einer LQ-Regelung ist das Berechnen einer optimalen Lösung eines quadratischen Gütefunktional [46], [47]. Dem Entwurf liegt das lineare zeitdiskrete Zustandsraummodell des Magnetlagersystems zugrunde.

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{z}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{z}_k\end{aligned}\tag{4.3}$$

Gleichung (4.3) wird aus dem zeitkontinuierlichen Zustandsraummodell berechnet. Das zeitkontinuierliche Zustandsraummodell kann aus der Systemgleichung des magnetisch stabilisierten Rotors Gleichung (3.35) angegeben werden und lautet:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}_z\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_z\mathbf{z}\end{aligned}\tag{4.4}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}_x\mathbf{B}^T & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}(\omega) \end{bmatrix} & \mathbf{B}_z &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_z &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \mathbf{z} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{4.5}$$

mit der 4x4 Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  und der 4x4 Nullmatrix  $\mathbf{0}$ . Das Ziel einer LQ-Regelung ist nun das Auffinden einer Steuerfolge  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  die das Gütefunktional

$$J(z_0) = \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{z}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{z}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + 2\mathbf{u}_k^T \mathbf{N} \mathbf{z}_k) + \mathbf{z}_N^T \mathbf{S} \mathbf{z}_N\tag{4.6}$$

für geeignete Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{S}$  minimiert. Mithilfe der Gewichtungsmatrizen kann das Verhalten des geschlossenen Regelkreises gezielt beeinflusst werden. Mit den Einträgen der Matrix  $\mathbf{R}$  kann die erforderliche Stellgröße und mit den Einträgen der Matrix  $\mathbf{Q}$  kann das Verhalten der Zustände beeinflusst werden. Durch große Einträge der Matrix  $\mathbf{R}$ , verkleinert sich die erforderliche Stellgröße. Für große Einträge der Matrix  $\mathbf{Q}$  wird ein schnelles Abklingen nach Null des jeweiligen Zustandes erreicht, wobei dies eine höhere Stellgröße mit sich ziehen kann. Die eindeutige Lösung des Gütefunktional (4.6) ist durch das Regelgesetz

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K}_{opt,k} \mathbf{z}_k \quad (4.7)$$

mit

$$\mathbf{K}_{opt,k} = -(\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Gamma})^{-1} (\mathbf{N} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Phi}) \quad (4.8)$$

und

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{Q} + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Phi}) - (\mathbf{N} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Phi})^T (\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Gamma})^{-1} (\mathbf{N} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{\Phi}) \quad (4.9)$$

gegeben. Bei Gleichung (4.9) handelt es sich um eine diskrete Riccati-Gleichung, welche jedoch rückwärts läuft. Für die Implementierung in ein Echtzeitsystem müsste daher der Endzeitpunkt  $N$  bekannt sein und die Matrizen  $\mathbf{K}_k$  bzw.  $\mathbf{P}_k$  müssen vorweg berechnet werden. Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung der stationären Lösung der Riccati-Gleichung. Durch Verwendung des stationären Wertes  $\mathbf{P}_s$  wird das Regelgesetz zeit-invariant. Damit hat der stationäre LQ-Regler mit der stationären Verstärkung  $\mathbf{K}_s$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= \mathbf{K}_s \mathbf{z}_k \\ \mathbf{K}_s &= -(\mathbf{R} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_s \mathbf{\Gamma})^{-1} (\mathbf{N} + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{P}_s \mathbf{\Phi}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

die Struktur eines klassischen zeit-invarianten Zustandsreglers [48]. Die stationäre Lösung der Riccati-Gleichung besitzt die Eigenschaft, dass sämtliche Eigenwerte von  $(\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{K}_s)$  im offenen Inneren des Einheitskreises liegen, wenn nachfolgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Das Paar  $(\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Gamma})$  ist stabilisierbar
2. Das Paar  $(\mathbf{C}_j, \mathbf{\Phi})$  mit

$$0 \leq \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N}^T \\ \mathbf{N} & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_j^T \\ \mathbf{D}_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_j & \mathbf{D}_j \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

ist detektierbar.

Im Vergleich zur klassischen Zustandsregelung wo vollständige Erreichbarkeit gefordert ist, wird bei der LQ-Regelung nur die Erreichbarkeit der instabilen Eigenwerte gefordert. In [49] wird angedeutet, dass die Stabilisierung mittels LQ-Regelung sensitiv auf Parameterschwankungen ist. Um die Robustheit der LQ-Regelung zu verbessern kann die System-Gleichung des Magnetlager-Systems für den Optimierungsprozess abgeändert werden. Durch die abgeänderte

System-Gleichung

$$\mathbf{z}_{k+1} = \tilde{\Phi} \mathbf{z}_k + \tilde{\Gamma} \mathbf{u}_k \quad (4.12)$$

mit

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{r} \Phi \quad \text{und} \quad \tilde{\Gamma} = \frac{1}{r} \Gamma \quad r \in ]0, 1] \quad (4.13)$$

erreicht man, dass die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $(\Phi + \Gamma \mathbf{K}_s)$  nicht nur im Inneren des Einheitskreises, sondern im Inneren eines Kreises mit dem Radius  $r$  zu liegen kommen. Da in der Praxis aufgrund von unsymmetrischen magnetischen oder mechanischen Eigenschaften immer konstante nicht modellierte Fehler in Magnetlagersystemen auftreten, sollte die LQ-Regelungen um einen integrierenden Anteil erweitert werden. Es ist zwar möglich einen klassischen I-Regler in Kombination mit dem LQ-Regler zu verwenden. Aufgrund der garantierten Stabilität der LQ-Methode, wird jedoch der I-Anteil zu der Optimierungsaufgabe hinzugefügt. Durch die Erweiterung mit der Berechnungsvorschrift des I-Anteils und dem Führungssignal  $\mathbf{r}_k$

$$\mathbf{z}_{i,k+1} = \mathbf{z}_{i,k} + (\mathbf{r}_k - \mathbf{C}_z \mathbf{z}_k) \quad (4.14)$$

folgt für die Zustandsraumgleichung des Gesamtsystems:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{k+1} \\ \mathbf{z}_{i,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_z & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{i,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{r}_k \quad (4.15)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_z \mathbf{z}_k$$

Bei der resultierenden Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}_s$  werden im Allgemeinen auch Querkopplungen der einzelnen I-Anteile vorhanden sein. Diese Tatsache steigert den Stabilitätsbereich im Vergleich zu klassischen dezentralen I-Reglern.

Die für die nachfolgenden Simulationen verwendete magnetgelagerte Turbomolekularpumpe besitzt die in Tabelle 4.1 angegebenen Parameter. Ein beispielhafter Rotor einer Turbomolekularpumpe ist in Abbildung 4.4 ersichtlich. Die schwarzen Flächen stellen entweder die Messflächen der Sensoren oder die Angriffsflächen der Magnetlager dar. Die Eigenfrequenzen der Schaufeln werden in dieser Arbeit nicht numerisch berechnet, da dies in Kombination mit der Regelung zu einer unbrauchbar hohen Rechenzeit führt. Die Eigenfrequenzen der Schaufeln werden daher über experimentelle Verfahren bestimmt. Da die Steifigkeit der Magnetlager klein im Vergleich zu den flexiblen Moden ist, werden sich die Eigenfrequenzen der Schaufeln kaum in Abhängigkeit der Reglerparameter ändern. Wie man im nächsten Abschnitt sehen wird, können die flexiblen Moden der Schaufeln jedoch erhebliche Probleme verursachen. Die Biegeschwingungen des Rotors können durch eine FEM-Simulation des freien Rotors berechnet werden. In diesem Zusammenhang zeigt Abbildung 4.5 ein Campbell-Diagramm des freien Rotors der Tubomolekularpumpe 1. Die Simulation wurde mit schubweichen Balkenelementen (Timoshenko-Balken) durchgeführt. Die rückwärtsdrehende erste Biegemode liegt bei Nenn-drehzahl im Bereich von 700 Hz. Da die Eigenfrequenz der ersten Biegemoden eher gering ist, muss diese bei der Reglerauslegung berücksichtigt werden. Die zweiten Biegemoden wei-

Polares Trägheitsmoment	$\Theta_z$	0.0082 kg m <sup>2</sup>
Axiales Trägheitsmoment	$\Theta_x$	0.0236 kg m <sup>2</sup>
Masse des Rotors	$m$	4.6 kg
Mechanischer Luftspalt	$\delta_G$	165 $\mu$ m
Negative Steifigkeit Lager A	$k_{xA}$	32000 N/m
Negative Steifigkeit Lager B	$k_{xB}$	70000 N/m
Kraft/Strom Faktor Lager A	$k_{iA}$	24 N/A
Kraft/Strom Faktor Lager B	$k_{iB}$	63 N/A
Lager-COG-Abstand	$a$	92.2 mm
Lager-COG-Abstand	$b$	-17.8 mm
Sensor-COG-Abstand	$c$	119.2 mm
Sensor-COG-Abstand	$d$	2.2 mm
Nenn Drehzahl	$n_n$	40000 min <sup>-1</sup>

Tabelle 4.1: System-Parameter der Turbomolekularpumpe 1

sen hingegen einen hohen Frequenzabstand zu den Starrkörpermoden auf, welche im Bereich zwischen 20 Hz und 400 Hz liegen.

Abbildung 4.6 zeigt ein Campbell-Diagramm eines mittels LQ-Methode stabilisierten Magnetlagers. Diese Performance-Analyse ist natürlich nur theoretisch möglich, da für reale Sys-

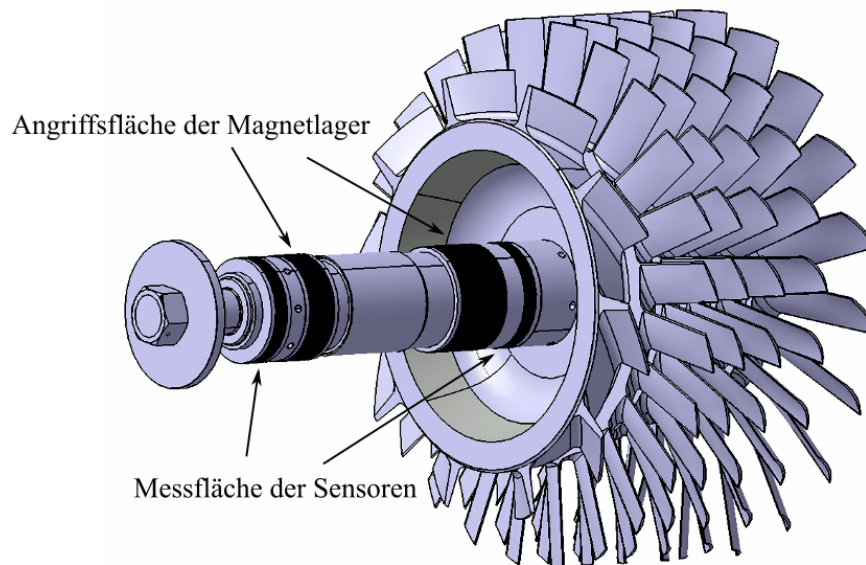


Abbildung 4.4: Darstellung eines Rotors von Turbomolekularpumpen

teme immer ein Beobachter oder eine numerische Differentiation nötig ist, um alle Zustände des Systems zu erhalten. Diese Zustandsberechnung wirkt sich zusätzlich auf die Dynamik

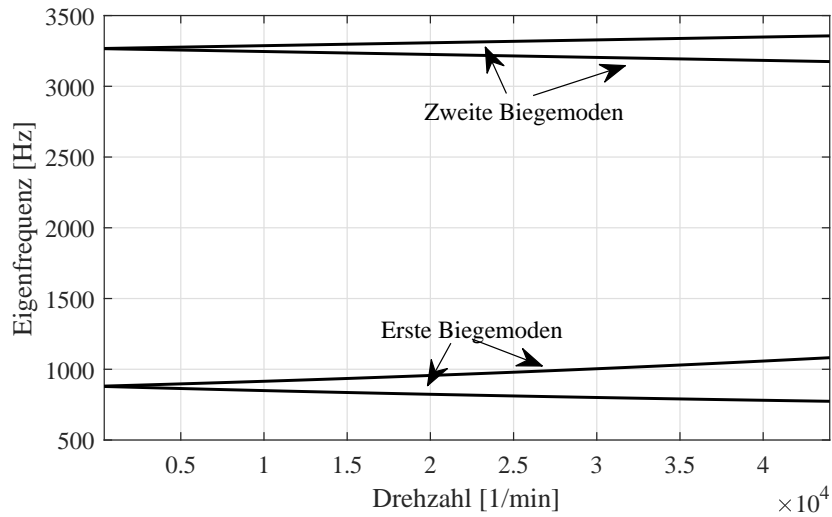
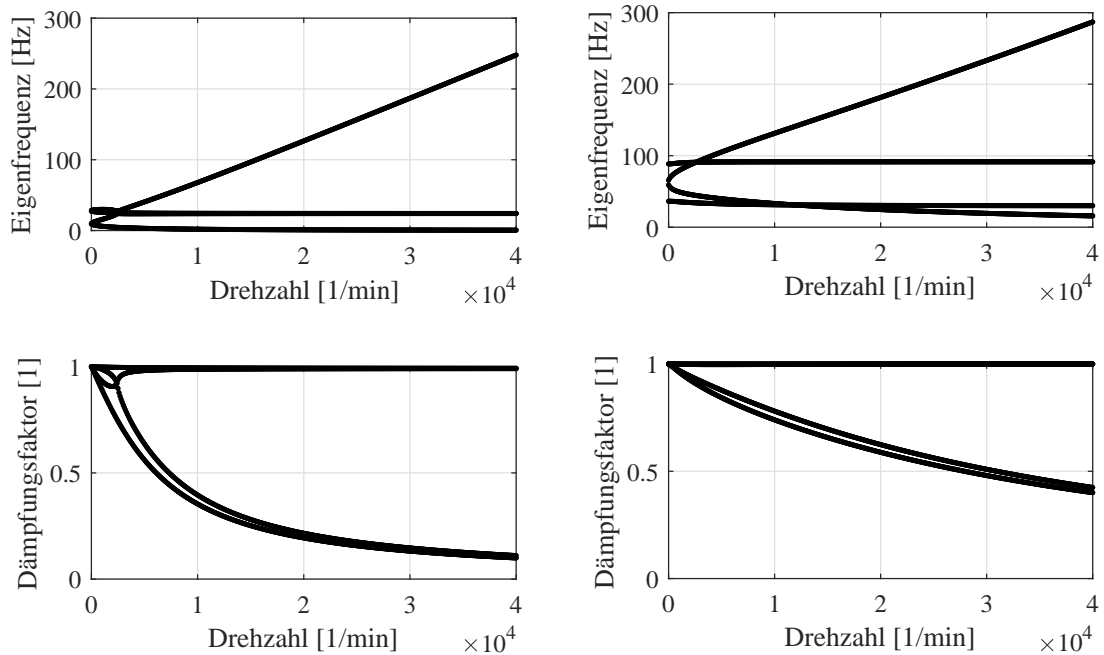


Abbildung 4.5: Campbell-Diagramm der flexiblen Moden der Turbomekularpumpe 1



(a) LQR mit  $r = 1$

(b) LQR mit  $r = 0.98$

Abbildung 4.6: Campbell-Diagramm eines LQ geregelten Magnetlagersystems ohne "gain-scheduling" mit  $r = 1$  und  $r = 0.98$

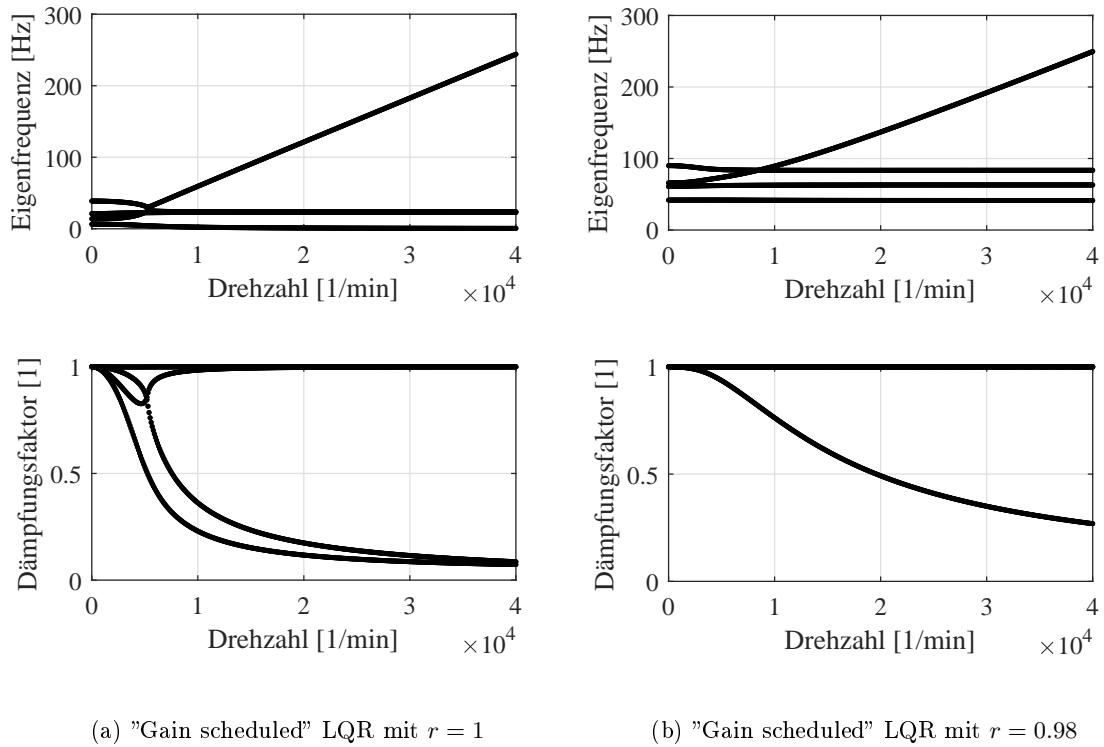


Abbildung 4.7: Campbell-Diagramm eines "gain scheduled" LQ geregelten Magnetlagersystems

des geschlossenen Systems aus. Da es sich bei den Simulationen um ein rein LQR stabilisiertes System handelt, fehlen auch die nötigen Filter, welche für die Stabilisierung eines realen Systems nötig sind. Der LQ-Regler wurde für den Stillstand entworfen. Die Änderung der Drehzahl kann daher als Modell-Fehler aufgefasst werden. Wie aus Abbildung 4.6(a) ersichtlich, zeigt der geschlossene Regelkreis für hohe Drehzahlen nur mehr einen geringen Dämpfungsfaktor für gewisse Eigenmoden. Der Rotor zeigt also in diesem Betriebsbereich verstärkt schwingungsfähiges Verhalten, was im Bereich einer kritischen Geschwindigkeit nicht zulässig ist. Wird der Parameter  $r$  aus Gleichung (4.12) und (4.13) verwendet, kann die Robustheit und somit auch die Dämpfung signifikant erhöht werden (Abbildung 4.6(b)). Eine Verkleinerung von  $r$  führt zusätzlich zu einer Steifigkeitserhöhung des geschlossenen Regelkreises. Diese höhere Steifigkeit wirkt sich für den tiefen Drehzahlbereich als positiv auf das Systemverhalten aus, da hierfür langsame Eigenschwingungen vermieden werden. Für den hohen Drehzahlbereich erfordert die Steifigkeitserhöhung eine höhere Bandbreite des Systems, da die Nutation-Eigenfrequenz zunimmt. In der Literatur [45], [50] wird zur Verbesserung der Systemeigenschaften die Verwendung eines drehzahlabhängigen LQ-Reglers ("gain scheduled" LQR) beschrieben. Wie aus Abbildung 4.7 ersichtlich, ist für die Anwendung einer solchen drehzahlabhängigen Regelung keine merkliche Verbesserung ersichtlich. Ein Problem das bei den LQ-Reglern generell auftritt, ist die starke Erhöhung der Nutation-Eigenfrequenz in Ab-

hängigkeit von der Drehzahl. Diese Vergrößerung der Eigenfrequenz zieht eine Erhöhung der nötigen Bandbreite mit sich, was zu einer Verstärkung des Mess- und Prozessrauschens führt.

### 4.3 Kompensation des gyroskopischen Effekts

Um die Bandbreite der Regelung zu reduzieren und somit den Frequenzabstand zwischen Starrkörpermoden und Biegemoden zu vergrößern, kann eine Reduktion bis hin zu einer Kompensation des gyroskopischen Effekts erreicht werden. Der hohe Frequenzabstand zwischen dem Starrkörper und den Biegemoden ist erforderlich, falls die Stabilisierung der flexiblen Eigenschaften mit getrennten Filtern erfolgen soll. In dieser Arbeit wird ausschließlich der gyroskopische Effekt für den starren Fall mit einer geeigneten Reglerstruktur beeinflusst. Abbildung 4.8 zeigt das Blockschaltbild des LQG-Regelkreises<sup>1</sup>. Das Kalman-Filter besitzt hierbei die Aufgabe die Zustände der Regelstrecke zu schätzen. Der LQ-Regler in Kombination mit der parametervarianten Kompensation stabilisiert das System mit Hilfe der geschätzten Zustände. Die Stabilisierung der flexiblen Moden besteht aus dezentralen IIR-Filtern zweiter Ordnung, welche in Abschnitt 4.5 näher erläutert werden. Aus der Grundgleichung der Magnetlagerung (3.35) ist ersichtlich, dass das Regelgesetz

$$\mathbf{i} = (\mathbf{BK}_i)^{-1} (\mathbf{G}(\omega)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{v}) \quad (4.16)$$

mit dem virtuellen Eingang  $\mathbf{v}$  und unter Vernachlässigung der Unwucht auf ein zeit-invariantes System

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{BK}_x\mathbf{B}^T\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.17)$$

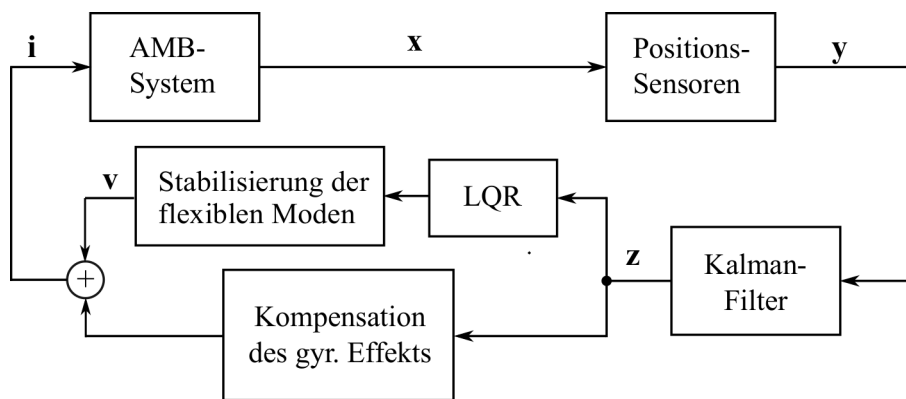


Abbildung 4.8: Blockschaltbild der LQG Regelung

<sup>1</sup>In dieser Arbeit wird bei den Blockschaltbildern kein Soll-Ist-Vergleich angegeben, da die Referenzwerte der Positionen immer Null betragen.



führt. Der LQ-Regler wird nun für den virtuellen Eingang  $\mathbf{v}$  entworfen. In [49] wird beschrieben, dass die Kompensation des gesamten gyroskopischen Effekts eine schlechte Robustheit des geschlossenen Regelkreises mit sich zieht. Daher wird Gleichung (4.16) um einen Faktor  $c_g$  erweitert.

$$\mathbf{i} = (\mathbf{BK}_i)^{-1} (c_g \mathbf{G}(\omega) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{v}) \quad c_g \in [0, 1] \quad (4.18)$$

Mit Hilfe des Terms  $c_g$  kann in späterer Folge das Sensitivitätsverhalten des geschlossenen Regelkreises verbessert werden. Vorteilhaft bei dieser Art der Regelung ist, dass sich die Eigenfrequenzen der Nutations- und der Präzessionssmoden abhängig vom Faktor  $c_g$  mehr oder weniger stark ändern. Durch diese Tatsache kann die Bandbreite der Positionsregelung verkleinert und der Frequenzabstand zu den Biegemoden erhöht werden.

## 4.4 Kalman-Filter

Der Nachteil rein LQ-geregelter Systeme liegt in der Notwendigkeit der Kenntnis aller Zustände. Diese Forderung zieht einen hohen Sensoraufwand mit sich, welcher die Wirtschaftlichkeit des Gesamtsystems verringert. Daher wird oftmals auf Teile der Sensorik verzichtet und stattdessen ein Zustandsbeobachter verwendet. Bei der magnetischen Lagerung sind das oftmals die Geschwindigkeitsmessungen des Rotors. Bevor mit der Entwicklung des Beobachters begonnen wird, muss das System auf die Beobachtbarkeit geprüft werden. Im Falle des Kalman-Filters reicht die Detektierbarkeit des Systems aus. Da es sich bei einem 5-DOF Magnetlager um ein verkoppeltes Mehrgrößensystem handelt, besitzt die klassische Methode der Polplatzierung laut der Formel von Ackermann [51] keine eindeutige Lösung. Die vorhandenen Freiheitsgrade des überbestimmten Gleichungssystems werden in [52] zugunsten der Robustheit verwendet, was in einer Optimierungsaufgabe mündet. Da sich die Wahl der Lage der Pole bei Mehrgrößensystemen als eher schwierig gestaltet, wird in dieser Arbeit das stationäre Kalman-Filter zur Detektierung der Zustände verwendet. Das für den Beobachterentwurf zugrundeliegende erweiterte System besitzt die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{\Phi} \mathbf{z}_k + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_k + \mathbf{G} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{z}_k + \mathbf{H} \mathbf{w}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (4.19)$$

mit der Prozessstörung  $\mathbf{w}_k$ , dem Messrauschen  $\mathbf{v}_k$  sowie den Matrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$ . Den stochastischen Größen  $\mathbf{w}_k$  und  $\mathbf{v}_k$  sind folgende Beziehungen vorausgesetzt [53].

$$\begin{aligned} E(\mathbf{v}_k) &= \mathbf{0} & E(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T) &= \hat{\mathbf{R}} \delta_{kj} \\ E(\mathbf{w}_k) &= \mathbf{0} & E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T) &= \hat{\mathbf{Q}} \delta_{kj} \\ & & E(\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.20)$$

mit  $\hat{\mathbf{Q}} \geq 0$ ,  $\hat{\mathbf{R}} \geq 0$  sowie  $\mathbf{H} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{H}^T + \hat{\mathbf{R}} > 0$  und dem Kroneckersymbol  $\delta_{kj}$ . Die Prozessstörung und das Messrauschen sind zudem mit dem Anfangswert  $\mathbf{z}_0$  nicht korreliert. Unter diesen

Bedingungen errechnet sich die optimale Schätzung mit der Iterationsvorschrift nach [46]:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{z}}_k + \Gamma \mathbf{u}_k + \hat{\mathbf{K}}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{z}}_k) \quad (4.21)$$

mit

$$\hat{\mathbf{K}}_k = \Phi \mathbf{P}_k \mathbf{C}^T \left( \mathbf{C} \mathbf{P}_k \mathbf{C}^T + \mathbf{H} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{H}^T + \hat{\mathbf{R}} \right)^{-1} \quad (4.22)$$

und

$$\mathbf{P}_{k+1} = \Phi \mathbf{P}_k \Phi^T + \mathbf{G} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{G}^T - \Phi \mathbf{P}_k \mathbf{C}^T \left( \mathbf{C} \mathbf{P}_k \mathbf{C}^T + \mathbf{H} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{H}^T + \hat{\mathbf{R}} \right)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_k \Phi^T \quad (4.23)$$

Wie beim LQ-Regler handelt es sich auch bei Gleichung (4.23) um eine diskrete Riccati-Gleichung, welche aber im Vergleich zum LQ-Regler vorwärts läuft. Um das Kalman-Filter als LTI-System (linear zeit-invariantes System) zu implementieren, wird wie beim LQ-Regler der stationäre Wert der Kovarianz des Schätzfehlers  $\mathbf{P}_s$  verwendet, welcher sich nach unendlich langer Zeit einstellen würde. Die Beobacherverstärkung errechnet sich anschließend mit

$$\hat{\mathbf{K}}_s = \Phi \mathbf{P}_s \mathbf{C}^T \left( \mathbf{C} \mathbf{P}_s \mathbf{C}^T + \mathbf{H} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{H}^T + \hat{\mathbf{R}} \right)^{-1} \quad (4.24)$$

mit der Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung  $\mathbf{P}_s$ . Durch die konstante Beobacherverstärkung  $\hat{\mathbf{K}}_s$  erhält das Kalman-Filter die Form eines LTI-Luenberger-Beobachters. Aus der algebraischen Riccati-Gleichung resultiert für das System  $(\Phi - \hat{\mathbf{K}}_s \mathbf{C})$  eine stabilisierende Lösung, wenn folgende Bedingung erfüllt sind.

1. Das Paar  $(\mathbf{C}, \Phi)$  ist detektierbar
2. Das Paar  $(\Phi, \mathbf{G} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{G}^T)$  ist stabilisierbar
3. Die Matrix  $\mathbf{H} \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{H}^T + \hat{\mathbf{R}}$  ist positiv definit

Im Vergleich zum klassischen Luenberger-Beobachter wo eine vollständige Beobachtbarkeit des Systems gefordert ist, wird beim stationären Kalman-Filter nur die Beobachtbarkeit der instabilen Eigenwerte benötigt. Für die Stabilisierung eines LQG geregelten Systems ist also nur die Erreichbarkeit und die Beobachtbarkeit der instabilen Eigenwerte nötig. Die Dynamik der Schätzung kann wie beim LQ-Regler durch Gewichtungsmatrizen verändert werden. Im Fall des Kalman-Filters ist das die Kovarianzmatrix  $\hat{\mathbf{Q}}$  der Prozessstörung  $\mathbf{w}$  und der Kovarianzmatrix  $\hat{\mathbf{R}}$  des Messrauschens  $\mathbf{v}$ . Die Wahl für  $\hat{\mathbf{R}}$  kann auf den Rauscheigenschaften der Sensorik beruhen. Weniger zuverlässige Messungen werden in der Hauptdiagonale von  $\hat{\mathbf{R}}$  groß im Vergleich zu den anderen Elementen der Hauptdiagonale gewählt. Für die Kovarianzmatrix  $\hat{\mathbf{Q}}$  gelten diese Annahmen im Allgemeinen nicht, da die Wahl von einem sehr kleinen  $\hat{\mathbf{Q}}$  die Bedingung (2) nicht erfüllt und die algebraische Riccati-Gleichung im Allgemeinen nicht zu einer stabilisierenden Lösung führt. Die Zustandsraumgleichung des LQG stabilisierten

Systems besitzt demnach folgende Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \Phi \mathbf{z}_k + \Gamma \mathbf{K}_s \hat{\mathbf{z}}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_{k+1} &= \Phi \hat{\mathbf{z}}_k + \Gamma \mathbf{K}_s \hat{\mathbf{z}}_k + \hat{\mathbf{K}}_s \mathbf{C} (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k) \end{aligned} \quad (4.25)$$

oder mit nur einem Zustandsvektor

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{k+1} \\ \hat{\mathbf{z}}_{k+1} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \mathbf{K}_s \\ \hat{\mathbf{K}}_s \mathbf{C} & \Phi - \hat{\mathbf{K}}_s \mathbf{C} + \Gamma \mathbf{K}_s \end{bmatrix}}_{\Phi_{\text{LQG}}} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Mit der Zustandsraumgleichung (4.26) kann das Campbell-Diagramm des LQG stabilisierten Systems berechnet werden (Abbildung 4.9). Beim LQG geregeltem System sind natürlich mehr Eigenwerte vorhanden als beim LQR stabilisierten System. Da das Kalman-Filter eine Abbildung der Regelstrecke mit einem erweiterten Stabilisierungsterm ist, weisen auch hier die Eigenwerte der radialen Bewegung eine starke Drehzahlabhängigkeit auf. Die optimale Lösung welche die Varianz minimiert, verschlechtert das Dämpfungsverhalten der Beobachterdynamik mit steigender Drehzahl. Führt diese schwache Dämpfung des Beobachters zu

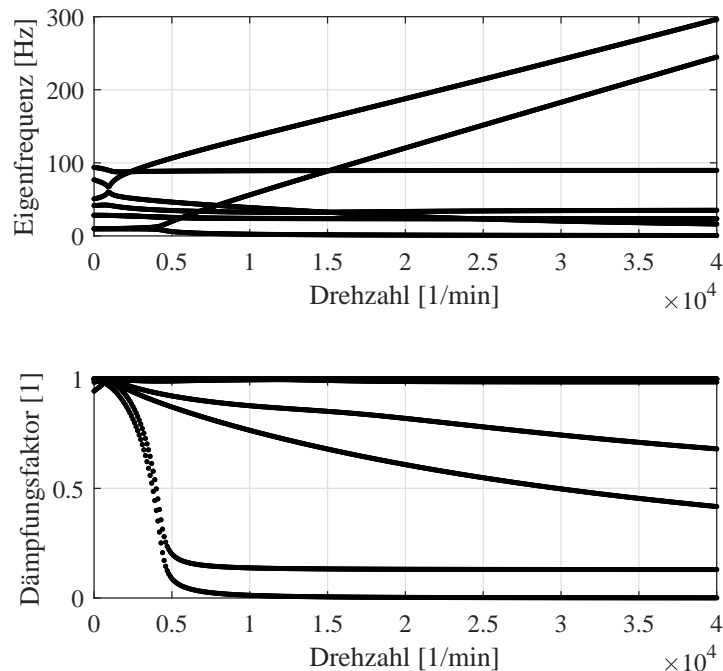


Abbildung 4.9: Campbell-Diagramm eines LQG geregelten Magnetlagersystems ohne Kompensation des gyroskopischen Effekts

Problemen, muss auf andere Berechnungsverfahren zurückgegriffen werden, wie beispielsweise die Polplatzierungsmethode von [52]. Wird die Regelung um die Kompensation des gyroscopischen Effektes erweitert (Abbildung 4.8), erhält man folgende Zustandsraumgleichung.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{k+1} \\ \hat{\mathbf{z}}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_{komp} \\ \hat{\mathbf{K}}_s \mathbf{C} & \Phi - \hat{\mathbf{K}}_s \mathbf{C} + \Gamma \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_{komp} \end{bmatrix}}_{\Phi_{LQG}} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix}$$

mit

$$\mathbf{K}_{komp} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c_g \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Das Campbell-Diagramm des LQG stabilisierten Systems mit Kompensation des gyroscopischen Effektes ist in Abbildung 4.10 zu sehen. Im Unterschied zum System ohne Kompensation weist das kompensierte System nur mehr zwei drehzahlabhängige Eigenfrequenzen auf. Dies resultiert aus der Tatsache, dass zwar der gyroscopische Effekt für das geregelte System kompensiert wird, das Kalman-Filter schätzt jedoch die Zustände des nicht kompensierten Systems. Das Kalman-Filter für das kompensierte System zu entwickeln stellt in diesem Zu-

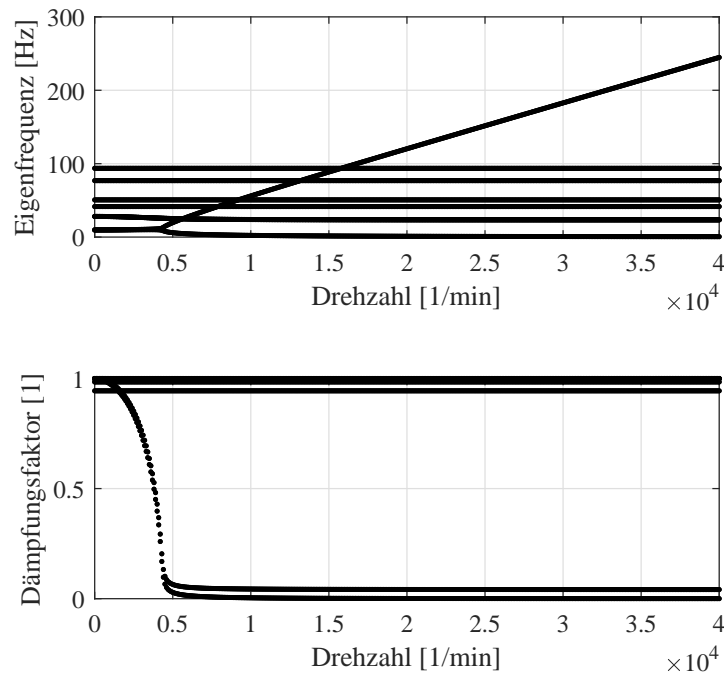


Abbildung 4.10: Campbell-Diagramm eines LQG geregelten Magnetlagersystems mit Kompensation des gyroscopischen Effektes

sammenhang keine sinnvolle Lösung dar, da ja die geschätzten Zustände die Kompensation erst möglich machen. Die Zustände aus einer numerischen Differentiation zu berechnen stellt für das experimentelle Magnetlagersystem auch keine brauchbare Lösung dar, da die Verstärkung des Messrauschens in Kombination mit den Biegemoden der Welle und der Eigenschwingungen aufgrund der Turbinenschaufeln zu einem schlechten Laufverhalten des Rotors führen würde.

## 4.5 Stabilisierung der flexiblen Moden

Die vorhergehenden Unterabschnitte der Regelung beschäftigten sich mit der Stabilisierung eines ideal starren Rotors. Diese Vereinfachung reicht jedoch in vielen Fällen nicht aus. In Abbildung 4.1 wurde gezeigt, dass die schwache Steifigkeit magnetgelagerter Rotoren von Turbomolekularpumpen nur einen geringen Einfluss auf die Eigenwerte der Biegemoden besitzt. Diese schwache Steifigkeit muss bei Magnetlagersystemen nicht immer der Fall sein. Bei Anwendungen in der Fertigungsindustrie kann es durchaus vorkommen, dass die Steifigkeiten der Magnetlagerung sehr hohe Werte annehmen und somit der Einfluss der Magnetlagersteifigkeit auf die Eigenfrequenzen der Biegemoden erhöht wird.

### 4.5.1 Vereinfachte Betrachtung am Zwei-Massen-Schwinger

Um die Auswirkung der Magnetlagersteifigkeit auf das Verhalten des elastischen Rotors zu zeigen, wird das Magnetlagersystem vereinfacht als Zwei-Massen-Schwinger dargestellt (Abbildung 4.11). Die Steifigkeit  $k_m$  beschreibt die Steifigkeit des Magnetlagers, die Steifigkeit  $k$  beschreibt die mechanische Steifigkeit des Rotors und die Massen  $m_1$  und  $m_2$  beschreiben die Massen einer möglichen Diskretisierung. Diese Vereinfachung ist vorteilhaft, da für diese Struktur die Eigenwerte noch in überschaubarer Größe analytisch angegeben werden können. Für den Grenzwert des starren Falls ( $k \rightarrow \infty$ ) sollte man für die Eigenfrequenz

$$\omega_{starr} = \sqrt{\frac{k_m}{m_1 + m_2}} \quad (4.29)$$

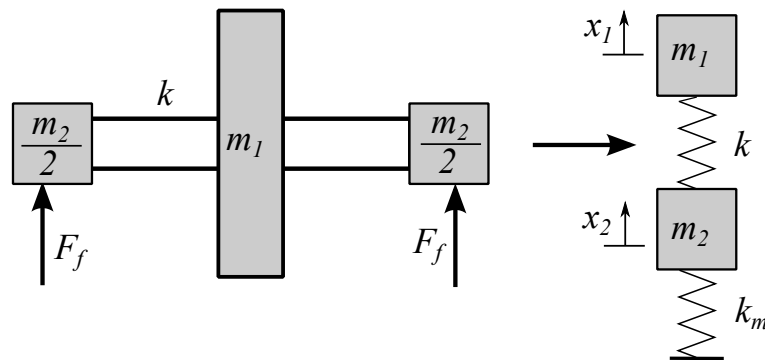


Abbildung 4.11: Vereinfachung des magnetisch gelagerten Rotors

erhalten. Die Systemgleichung des Zwei-Massenschwingers lautet:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) - k_m x_2 \\ m_1 \ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die Eigenwerte der Systemgleichung (4.30) sind gegeben durch:

$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{m_1(k+k_m) + m_2k}{2m_1m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1(k+k_m) + m_2k}{2m_1m_2}\right)^2 - \frac{kk_m}{m_1m_2}} \quad (4.31)$$

Mit einer Vergrößerung des Unterschiedes von  $k_m$  und  $k$  verringert sich die Verkopplung von  $\lambda_1^2$  und  $\lambda_2^2$ . Um dies zu zeigen, betrachtet man Gleichung (4.31) für den Fall eines positiven Vorzeichens vor der Wurzel und für ( $k \rightarrow \infty$ ). Der erste Term kann wie folgt erweitert werden.

$$\frac{m_1(k+k_m) + m_2k}{2m_1m_2} \frac{1}{kk_m} = \frac{m_1 \frac{(k+k_m)}{kk_m} + \frac{m_2}{k_m}}{\frac{2m_1m_2}{kk_m}} \quad (4.32)$$

Wenn die Steifigkeit  $k$  gegen unendlich geht, gilt bei einer seriellen Anordnung von Steifigkeiten:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+k_m)}{kk_m} = \frac{1}{k_m} \quad (4.33)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (4.33) berechnet sich der Grenzwert von Gleichung (4.31) mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{k(m_1+m_2)}{2m_1m_2} + \sqrt{\left(\frac{k(m_1+m_2)}{2m_1m_2}\right)^2 - \frac{kk_m}{m_1m_2}} \right) \quad (4.34)$$

Gleichung (4.34) besitzt die Form

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( -ak + \sqrt{a^2k^2 - bk} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{-b}{a + \sqrt{a^2 - \frac{b}{k}}} \right) \quad (4.35)$$

Den Term rechts erhält man durch Erweiterung mit Hilfe der dritten binomischen Formel. Mit dieser Form kann der Grenzwert einfach berechnet werden und lautet

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{-b}{a + \sqrt{a^2 - \frac{b}{k}}} \right) = -\frac{b}{2a} = -\frac{k_m}{(m_1+m_2)} \quad (4.36)$$

Wenn die Steifigkeit von Rotoren also groß gegenüber der Steifigkeit von der magnetischen Lagerung ist, kann ein  $\lambda^2$  näherungsweise aus der Starrkörpergleichung bestimmt werden. Der

zweite Extremfall  $k_m \rightarrow 0$  würde bedeuten, dass der Eigenwert mit positivem Vorzeichen vor der Wurzel Null wird. Für das Quadrat des zweiten Eigenwertes  $\lambda_2^2$  mit negativem Vorzeichen vor der Wurzel, lauten die Grenzwerte wie folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_2^2 &= \infty \\ \lim_{k_m \rightarrow 0} \lambda_2^2 &= \frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Der zweite Eigenwert  $\lambda_2$  kann unabhängig von  $k_m$  angegeben werden, falls  $k_m$  hinreichend klein ist. Diese vereinfachten Betrachtungen eines Zwei-Massen-Schwingers zeigen also, dass die Aufteilung für eine Stabilisierung des Starrkörpers und der flexiblen Eigenschaften nur erfolgen sollte, falls die Steifigkeit des Magnetlagers hinreichend klein gegenüber der Steifigkeit des Rotors ist. Ist dies nicht der Fall, so muss der Regler mit Hilfe eines flexiblen Modells ausgelegt werden. Die Vernachlässigbarkeit der Einflüsse der Steifigkeiten muss für reale Rotoren meist mit der FEM abgeschätzt werden (Abbildung 4.1). Die oberen Betrachtungen geben zwar die Abhängigkeit für zwei extreme Grenzwerte an, jedoch ist nicht klar ab welchem Verhältnis der beiden Steifigkeiten  $v_k = k/k_m$  die Vereinfachung anwendbar ist. Für den Zwei-Massen-Schwinger wird daher der relative Fehler der Näherungswerte der Eigenwerte dargestellt. Für den Fall von  $\lambda_1^2$  hat der relative Fehler  $f_{rel, starr}$  folgende Form:

$$f_{rel, starr} = 1 - (dv_k + c) + \sqrt{(dv_k + c)^2 - ev_k} \quad (4.38)$$

und für den flexiblen Eigenwert  $\lambda_2^2$  ergibt sich der relative Fehler  $f_{rel, flex}$  mit:

$$f_{rel, flex} = 1 - \left( f v_k^{-1} + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{\left( f v_k^{-1} + \frac{1}{2} \right)^2 - g v_k^{-1}} \quad (4.39)$$

Die Koeffizienten  $d$ ,  $c$ ,  $e$ ,  $f$  und  $g$  sind von den Massen  $m_1$  und  $m_2$  abhängig. Daher ist von der in Abbildung 4.12 dargestellten Funktion des relativen Fehlers nur die Form von allgemeiner Bedeutung, da sich die exakte Funktion abhängig von den Massen ändert. Man kann also bei beiden Eigenfrequenzen ein schnelles Abklingen des relativen Fehlers mit steigendem Steifigkeitsverhältnis  $v_k$  erkennen. Da ein magnetgelagerter flexibler Rotor in stark vereinfachter Form als rotierender Zwei-Massen-Schwinger dargestellt werden kann, ist es möglich den Fehler aufgrund der Vernachlässigung jeweils einer Steifigkeit abzuschätzen. Ist eine Vernachlässigung möglich, hat dies den großen Vorteil, dass man zuerst eine Regelung für den starren Rotor entwickeln kann. Diese Regelung wird anschließend um mögliche Filter erweitert, welche die flexiblen Eigenschaften des Rotors stabilisieren. Beide Strukturen können meist getrennt voneinander entwickelt werden, falls die Dynamiken der Filter oder Regler einen ausreichend großen Frequenzabstand besitzen. Ein weiterer wichtiger Unterschied bei den Eigenwerten besteht darin, dass die flexiblen Eigenwerte (positives  $k$  vorausgesetzt) immer auf der Imaginär-Achse liegen, egal ob  $k_m$  positiv oder negativ ist. Die Eigenwerte des

Starrkörpers liegen abhängig von  $k_m$  entweder auf der Real-Achse oder Imaginär-Achse. Um dies zu zeigen, schreibt man Gleichung (4.31) als  $k_m$ -abhängige Funktion:

$$\lambda_{1,2}^2 = - \left( \underbrace{a_1 + a_2 k_m}_{f_{f1}(k_m)} \mp \underbrace{\sqrt{(a_1 + a_2 k_m)^2 - a_3 k_m}}_{f_{f2}(k_m)} \right) \quad (4.40)$$

Die Gleichung mit dem positiven Vorzeichen vor der Wurzel beschreibt den flexiblen Eigenwert. Da der Wert  $a_2$  immer positiv ist, beschreibt die quadratische Gleichung unter der Wurzel eine Parabel, welche nach oben geöffnet ist. Das Minimum der quadratischen Funktion befindet sich bei  $k_m = k^2/(m_2 m_1)$  und dieser Wert ist immer positiv. Daher muss die untere Schranke von  $f_{f2}(k_m)$  immer positiv sein und das Quadrat des Eigenwertes  $\lambda_{1,2}^2$  ist immer reell. Die Funktion  $f_{f1}(k_m)$  beschreibt eine lineare Funktion mit der Steigung  $1/(2m_2)$ . Durch zweimaliges Ableiten der Funktion  $f_{f2}(k_m)$  können Aussagen über die Monotonie getroffen werden.

$$\begin{aligned} \frac{df_{f2}(k_m)}{dk_m} &= \frac{1}{2} \frac{2a_2^2 k_m + 2a_1 a_2 - a_3}{\sqrt{a_2^2 k_m^2 + 2a_1 a_2 k_m + a_1^2 - a_3 k_m}} \\ \frac{d^2 f_{f2}(k_m)}{dk_m^2} &= \frac{1}{4} \frac{a_3 (4a_1 a_2 - a_3)}{(a_2^2 k_m^2 + 2a_1 a_2 k_m + a_1^2 - a_3 k_m)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Da die zweite Ableitung  $d^2 f_{f2}(k_m)/dk_m^2$  keine Nullstellen besitzt, muss die erste Ableitung  $df_{f2}(k_m)/dk_m$  monoton sein. Die zweite Ableitung  $d^2 f_{f2}(k_m)/dk_m^2$  ist zudem noch positiv

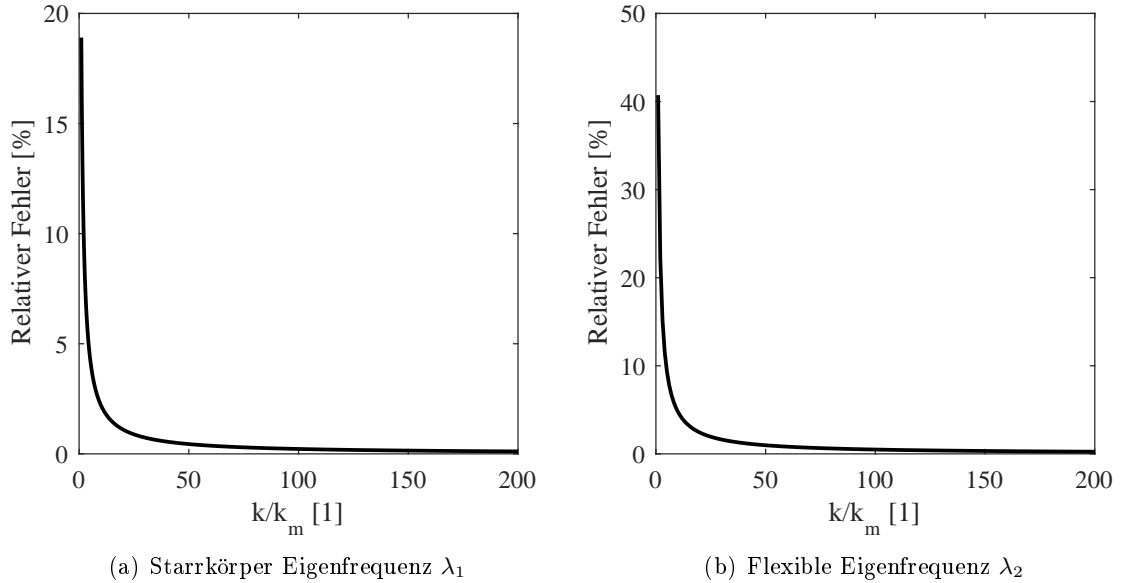


Abbildung 4.12: Relativer Fehler der näherungsweise Berechnung der Eigenwerte



definit, daher kann bei der ersten Ableitung  $df_{f_2}(k_m)/dk_m$  auf eine monoton steigende Funktion geschlossen werden. Ist die Steigung beim Grenzwert  $k_m \rightarrow -\infty$  der Funktion  $f_{f_2}(k_m)$  größer oder gleich dem Wert  $-a_2$ , so ist aufgrund der monoton steigenden ersten Ableitung  $df_{f_2}(k_m)/dk_m$  auch die Gesamtfunktion  $f_{f_1}(k_m) + f_{f_2}(k_m)$  monoton steigend, da folgendes gilt:

$$\frac{df_{f_1}(k_m) + f_{f_2}(k_m)}{dk_m} = a_2 + \frac{df_{f_2}(k_m)}{dk_m} \quad (4.42)$$

Der Grenzwert von  $df_{f_2}(k_m)/dk_m$  ergibt:

$$\lim_{k_m \rightarrow -\infty} \frac{df_{f_2}(k_m)}{dk_m} = \lim_{k_m \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2a_2^2 k_m + 2a_1 a_2 - a_3)^2}{a_2^2 k_m^2 + 2a_1 a_2 k_m + a_1^2 - a_3 k_m}} = \pm a_2 \quad (4.43)$$

Daher kann auf eine monoton steigende Gesamtfunktion  $f_{f_1}(k_m) + f_{f_2}(k_m)$  geschlossen werden. Da die Gesamtfunktion  $f_{f_1}(k_m) + f_{f_2}(k_m)$  monoton steigend sein muss, kann mit dem Grenzwert  $k_m \rightarrow -\infty$  der Gesamtfunktion gezeigt werden, ob die Funktion für  $k_m \in \mathbb{R}$  immer positive Werte annimmt. Der Grenzwert der Gesamtfunktion (4.40) berechnet sich unter Zuhilfenahme der dritten binomischen Formel mit:

$$\lim_{k_m \rightarrow -\infty} f_{f_1} + f_{f_2} = \lim_{k_m \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\frac{a_1 + a_2 k_m}{-a_3 k_m} - \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2 k_m}{-a_3 k_m}\right)^2 - \frac{1}{a_3 k_m}}} = \frac{k}{m_1} \quad (4.44)$$

Da die untere Schranke der Summenfunktion  $f_{f_1}(k_m) + f_{f_2}(k_m)$  immer positiv ist, ist der flexible Eigenwert  $\lambda_f = \sqrt{-(f_{f_1}(k_m) + f_{f_2}(k_m))}$  immer konjugiert komplex, egal welche Werte die magnetische Steifigkeit  $k_m$  annimmt. Diese Tatsache ist für die Stabilisierung der flexiblen Moden von großer Bedeutung, da die Verstärkung des Reglers im Bereich der flexiblen Moden verringert werden kann. Die Eigenwerte der Starrkörpermoden  $\lambda_f = \sqrt{-(f_{f_1}(k_m) - f_{f_2}(k_m))}$  sind hingegen abhängig von der negativen Steifigkeit  $k_x$  der Magnetlager und der Verstärkung des Reglers konjugiert komplex oder reell.

Die Stabilisierung der Starrkörpermoden kann, wie in den vorhergehenden Abschnitten beschrieben wurde, erfolgen. Für die Stabilisierung der Biegemoden bedarf es jedoch einer anderen Methodik. Ob ein Regler auf eine Biegemode stabilisierend wirkt, hängt maßgeblich von der Phasenverschiebung des Rückkoppelzweiges im Bereich der Eigenfrequenz der Biegemode ab. Eine ideale Steifigkeit ist mit aktiven Systemen aufgrund von Bandbreiten-Beschränkungen und der Abtastzeit von digitalen System unmöglich zu realisieren. Daher sollte eine positive Steifigkeit immer nur für einen gewissen Frequenzbereich gefordert werden. Eine Regelung wirkt auf eine flexible Eigenfrequenz dämpfend, wenn das Argument der Übertragungsfunktion  $\arg\{G_r(j\omega)\}$  in einem gewissen Wertebereich liegt. Mit

$$G_r(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{x_a(j\omega)} \quad (4.45)$$

wobei  $F(j\omega)$  die Kraft des Aktuators und  $x_a(j\omega)$  die Position beim Aktuator beschreibt. Da der Sensor in vielen Anwendungen nicht beim Aktuator angebracht ist, ist auch eine mögliche Phasenverschiebung zwischen der Position des Aktuators und der Position des Sensors zu berücksichtigen. Um dies zu zeigen betrachtet man den Zwei-Massenschwinger von Abbildung 4.11, welcher mit den Sensoren  $S_1$  und  $S_2$ , einer Strukturdämpfung  $d$  und einer Krafteinwirkung aufgrund eines Aktuators  $F_A$  erweitert wurde. Die Steifigkeit  $k_m$  ist aufgrund der Eigenschaften der Reluktanzkraft negativ. Abbildung 4.13 zeigt eine mögliche Darstellung

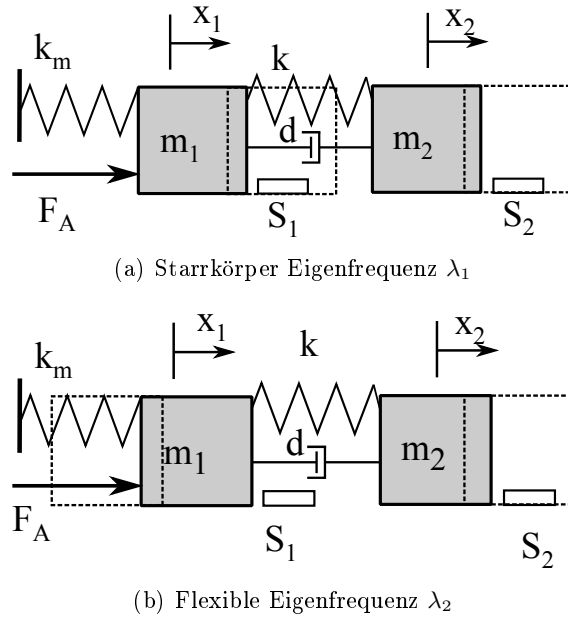
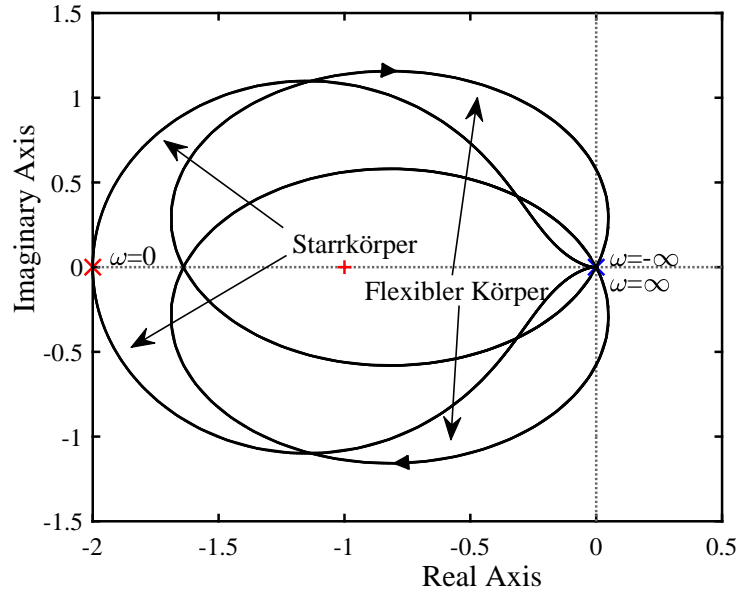


Abbildung 4.13: Darstellung der Eigenformen des Zwei-Massen-Schwingers

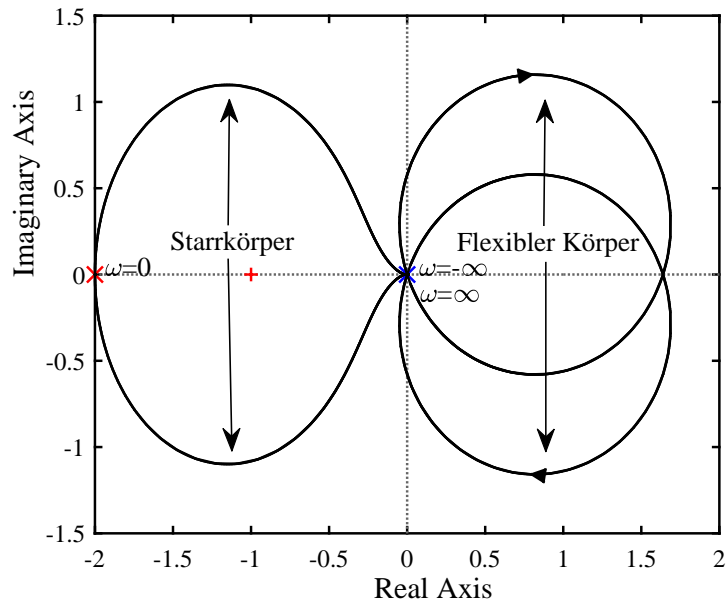
der Eigenformen der Schwingungen des Zwei-Massen-Schwingers. Man kann erkennen, dass die Massen für eine Eigenfrequenz in Phase und für die andere gegenphasig schwingen. Die gleichphasige Bewegung beschreibt die Eigenform der Starrkörper-Eigenfrequenz und die gegenphasige Bewegung die Eigenform der flexiblen Eigenfrequenz. Für die Reglerauslegung ist diese zusätzliche Phasenverschiebung zu berücksichtigen. Eine Rückkopplung einer auf dem Sensor  $S_1$  ausgelegten Regelung würde durch die Verwendung des Sensors  $S_2$  für die Starrkörpermode zwar dämpfend wirken, für die flexible Mode jedoch destabilisierend. Da die Eigenwerte der Biegemoden immer konjugiert komplex und daher grenzstabil sind, kann die Verstärkung des Reglers in diesem Bereich beliebig klein sein. Zur Stabilisierung ist die Phasendrehung des Reglersystems von großer Bedeutung. Um den Effekt einer Phasendrehung im Bereich der Biegemode zu zeigen, betrachte man Abbildung 4.14. Wobei Abbildung 4.14.a den Nyquistplot des offenen Regelkreises eines magnetgelagerten Zwei-Massen-Schwingers bei der Rückkopplung mittels dem Sensor  $S_1$  und Abbildung 4.14.b den Nyquistplot bei der Rückkopplung mittels dem Sensor  $S_2$  darstellt. Beide Systeme sind mit demselben PID Regler stabilisiert und eine Phasenverschiebung aufgrund der Abtastzeit eines DSPs (digitalen

Signalprozessor) (10 kHz) wurde berücksichtigt.

Laut dem Nyquistkriterium [54] führt eine offene Kette  $\Sigma_0$  mit der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  genau dann auf einen stabilen Regelkreis, wenn die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  für  $\omega = -\infty \dots +\infty$



(a) Rückkopplung mittels  $x_1$



(b) Rückkopplung mittels  $x_2$

Abbildung 4.14: Nyquist-Plot des magnetgelagerten Zwei-Massen-Schwingers

den Punkt  $-1 + j0$  der komplexen Ebene  $n^+$ -mal gegen den Uhrzeigersinn umschließt. Dabei bezeichnet  $n^+$  die Anzahl der Pole von  $G_0(s)$  mit positivem Realteil.

Der magnetgelagerte 2-Massen-Schwinger besitzt aufgrund der negativen Steifigkeit genau einen Pol mit positivem Real-Teil daher gilt  $n^+ = 1$ . Bei der Rückkopplung von  $x_1$  wird der Nyquistpunkt durch die Ortskurve des Starrkörpers schon einmal gegen den Uhrzeigersinn eingeschlossen und wäre somit stabil. Jedoch schließt die zusätzliche Amplitudenerhöhung aufgrund der flexiblen Resonanz den Nyquistpunkt ein weiteres Mal für die jeweils positive und negative Resonanzfrequenz ein. Der Nyquistpunkt wird also einmal gegen den Uhrzeigersinn und zweimal im Uhrzeigersinn eingeschlossen. Durch diese Einkreisungen aufgrund der Ortskurve im Bereich der flexiblen Resonanzen wird das System destabilisiert. Bei der Rückkopplung von  $x_2$  hilft die zusätzliche Phasenverschiebung aufgrund der Sensorposition im Bereich der ersten Biegemode, denn durch diese zusätzliche Phasenverschiebung schließt sich die Ortskurve im flexiblen Bereich größtenteils in der rechten Halbebene und umschlingt daher nicht den Nyquistpunkt. Die Stabilität ist also durch das einmalige Umschließen der Ortskurve im Frequenzbereich der Starrkörper-Resonanz gegeben. Dieses Wissen kann nun für die Stabilisierung der Rückkopplung von  $x_1$  genutzt werden, indem man den PID-Regler einfach mit einem Tiefpassfilter zweiter Ordnung erweitert (Abbildung 4.15).

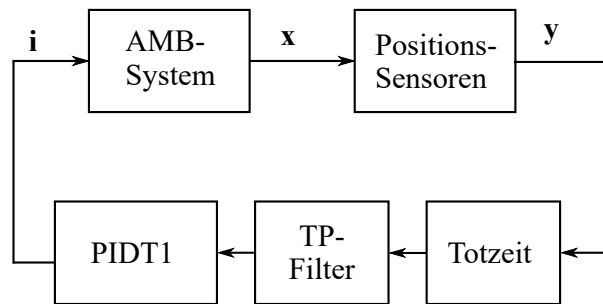
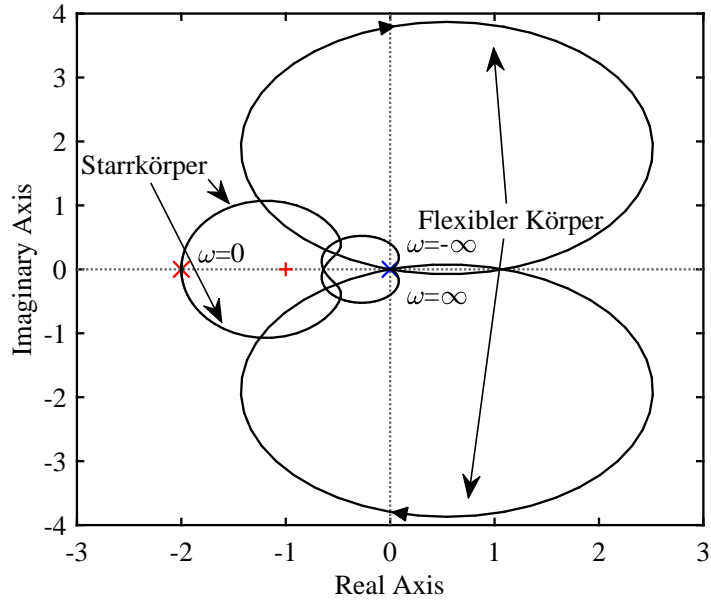


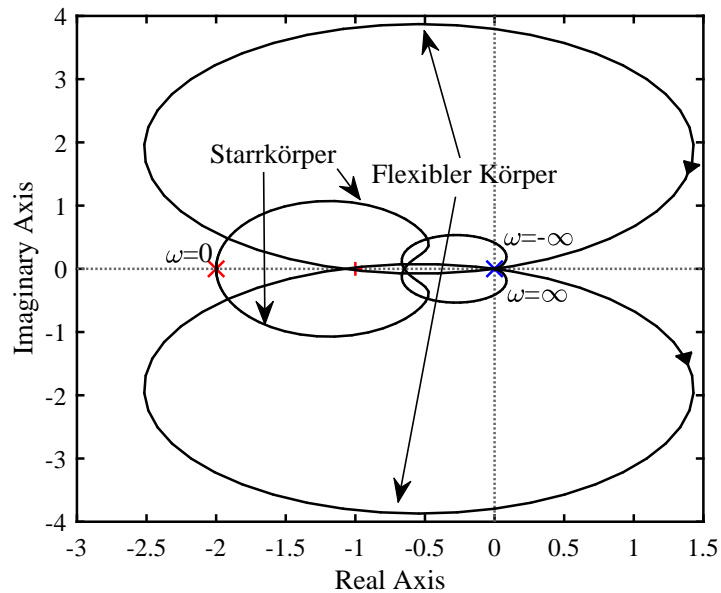
Abbildung 4.15: Stabilisierung des magnetgelagerten Zwei-Massen-Schwingers

Durch diese Erweiterung erhält man eine zusätzliche Phasenverschiebung um die Rückkopplung von  $x_1$  zu stabilisieren. Ein weiterer Vorteil liegt in der Abschwächung der Verstärkung um  $-40$  dB/Dekade. Diese Abschwächung dient in späterer Folge auch dazu um Moden höherer Ordnung zu stabilisieren. Denn aufgrund der Strukturdämpfung mechanischer Systeme kann die Ortskurve für sehr kleine Verstärkungen niemals den Nyquistpunkt erreichen. Auch die Unterdrückung des Sensorrauschens aufgrund der verringerten Verstärkung der geschlossenen Regelschleife wirkt sich vorteilhaft auf das Laufverhalten des Rotors aus. Abbildung 4.16 zeigt die Ortskurve der offenen Regelschleife des mittels Tiefpass-Filters stabilisierten Systems. Man kann erkennen, dass der Verlauf der Ortskurve (Abbildung 4.16.a) im Bereich der flexiblen Frequenz zu einem großen Teil in die rechte Halbebene verschoben wurde. Aus diesem Grund schließt der "flexible Kreis" den Nyquistpunkt nicht ein. Die Stabilität ist daher durch den Umlauf im Bereich der Starrkörper-Eigenfrequenz gegeben. Koppelt

man mit derselben Regelung den Ausgang  $x_2$  zurück (Abbildung 4.16.b), so ist das System instabil. Der Nyquistpunkt wird gerade noch im Frequenzbereich der flexiblen Eigenfrequenz



(a) Rückkopplung mittels  $x_1$



(b) Rückkopplung mittels  $x_2$

Abbildung 4.16: Nyquist-Plot des magnetgelagerten Zwei-Massen-Schwingers mit erweiterter Tiefpassfilter

umschlungen. Würde die Strukturdämpfung höher werden, oder die Verstärkung des Regelkreises verringert, wäre das System wiederum stabil. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass in dem Bereich der Biegemoden in dem der Betrag der offenen Regelschleife noch ausreichend hoch für eine Destabilisierung ist, die Phasenverschiebung eine sehr wichtige Rolle einnimmt. Für Moden höherer Ordnung, kann die Stabilitätsuntersuchung oftmals vernachlässigt werden, da der Betrag der offenen Regelschleife  $G_0(j\omega)$  für hohe Frequenzen sehr kleine Werte annimmt.

#### 4.5.2 Stabilisierung eines Rotors mit kontinuierlicher Masseverteilung

Die Theorie vom Zwei-Massen-Schwinger kann direkt für das 5-DOF Magnetlagersystems angewendet und gegebenenfalls erweitert werden. Oftmals liegen gar keine oder nur die beiden ersten Biegemoden in einem Frequenzbereich, in welchem die Phasenlage berücksichtigt werden muss. Abbildung 4.17 zeigt die Eigenformen der ersten 4 Biegemoden des Rotors von Abbildung 4.4, wobei immer nur die der Drehrichtung entgegengesetzt drehende Eigenform dargestellt ist. Da sich die Nullstellen der Eigenform mit der Ordnung der Biegemode

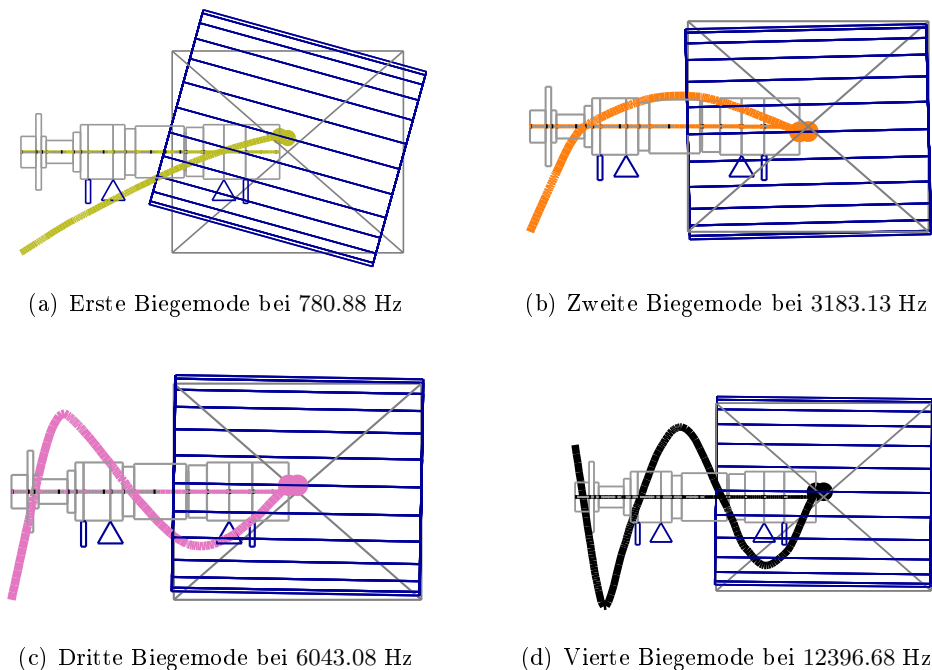


Abbildung 4.17: Eigenformen der ersten 4 Biegemoden (nur die der Drehrichtung entgegengesetzt drehenden Eigenformen sind dargestellt)

erhöhen, wird es für höher werdende Reglerbandbreiten immer komplizierter alle Biegemoden zu stabilisieren. Für die Regelung des vorhandenen Rotors reicht jedoch eine Bandbreite des PID-Reglers von 250 Hz vollkommen aus. Aus diesem Grund ist nur die Phasenlage des Reglers bei den beiden ersten Biegemoden wichtig. Bei den anderen Biegemoden ist der

Betrag der offenen Regelschleife genügend klein, sodass es zu keiner destabilisierenden Wirkung kommt. Um zu klären, ab wann Biegemoden vernachlässigt werden können, bedarf es meistens einer experimentellen Untersuchung des zu stabilisierenden Systems. Um die Reglerauslegung im Bereich der Biegemoden einfacher zu gestalten, wird das Entwurfskriterium laut [33] verwendet. Dieses Kriterium besagt, dass das Argument der offenen Übertragungsfunktion  $\arg\{G_r(j\omega)\}$  aus Gleichung (4.45) im Frequenzbereich von flexiblen Eigenschwingungen im Wertebereich  $[0, \pi]$  liegen sollte (Abbildung 4.18). Für den stabilen Bereich ist also die

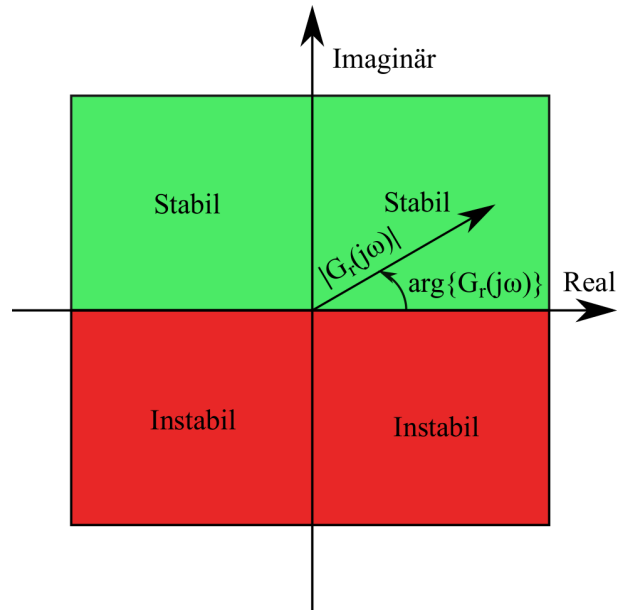


Abbildung 4.18: Stabilisierende Bereiche für flexible Moden der Regler-Übertragungsfunktion  $\arg\{G_r(j\omega)\}$

Projektion des Zeigers  $\arg\{G_r(j\omega)\}$  auf die Imaginär-Achse immer positiv und wirkt daher dämpfend. Um eine stabilisierende Reglerstruktur für den vorhandenen Rotor zu erhalten, reicht ein einfacher Tiefpassfilter zweiter Ordnung alleine nicht aus. Der Grund liegt in einem zu kleinen Frequenzabstand zwischen der Bandbreite des PID-Reglers und den ersten Biegemoden. Daher würde die Reglerstruktur destabilisierend wirken. Der Frequenzabstand der Phasendrehung kann zwar durch eine Verringerung des Dämpfungsfaktors des Tiefpassfilters verkleinert werden, jedoch geht diese Verringerung der Dämpfung mit einer unzulässig hohen Resonanzüberhöhung einher. Zur Lösung des Problems wird das System mit einem Lead-Lag Filter erweitert, welcher die Eigenschaft besitzt, die Phase lokal anzuheben bzw. abzusenken. Der Block "Stabilisierung der flexiblen Moden" aus Abbildung 4.8 hat daher folgende

dezentrale Übertragungsfunktion:

$$\begin{bmatrix} y_{f,1} \\ y_{f,2} \\ \vdots \\ y_{f,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{f,11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{f,22}(s) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & G_{f,nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

mit

$$G_{f,11}(s) = G_{f,22}(s) = \cdots = G_{f,nn}(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{2D_f s}{\omega_f} + \frac{s^2}{\omega_f^2}}}_{\text{Tiefpassfilter}} \cdot \underbrace{\frac{1 + \frac{2D_n s}{\omega_{fn}} + \frac{s^2}{\omega_{fn}^2}}{1 + \frac{2D_d s}{\omega_{fd}} + \frac{s^2}{\omega_{fd}^2}}}_{\text{Lead-Lag-Filter}} \quad (4.47)$$

Diese beiden Filter sollten so ausgelegt sein, dass die Phasenverschiebung des PID-Reglers im Starrkörper-Frequenzbereich kaum beeinflusst wird. Dennoch muss die Phasenverschiebung im Bereich der Biegemode im stabilen Bereich liegen. Man könnte zwar auch die Biegemode mit einer positiven Phasenverschiebung stabilisieren, jedoch resultiert dies, aufgrund der hohen nötigen Bandbreite des differenzierenden Anteils und der damit verbundenen hohen Verstärkung, in einem schlechten Laufverhalten des Rotors. Laut Abbildung 4.5, sollte also die Phase im Bereich zwischen ca. 600 Hz und 1100 Hz eine Phasenverschiebung im stabilen Bereich besitzen. Abbildung 4.19 zeigt ein mögliches Bode-Diagramm eines Filters zur Stabilisierung der Biegemoden. Für die zweite Biegemode ist die Verstärkung der Übertragungsfunktion der offenen Regelschleife hinreichend klein, sodass keine weiteren Maßnahmen zur Stabilisierung getroffen werden müssen. Es sei jedoch angemerkt, dass die Stabilisierung laut [33] nur eine Hilfe zur Auslegung ist. Die Stabilität des MIMO-Systems muss dadurch nicht zwingend gewährleistet sein. Daher ist es nötig, die Stabilität des flexiblen Rotors entweder über das Campbell-Diagramm oder über die Wurzelortskurve nachzuweisen. Durch die parametervariante Eigenschaft des Systems, ändern sich auch die Eigenvektoren. Diese Tatsache kann in Kombination mit der möglichen Phasenverschiebung zwischen Sensor und Aktuator zu Problemen führen, da sich die Eigenformen abhängig von der Drehzahl ändern können. Es sollte also für die Auslegung der Regelung garantiert werden, dass relevante Eigenformen keinen Null-Durchgang zwischen Sensor und Aktuator für den gesamten Drehzahlbereich des Rotors aufweisen. Relevante Eigenform bedeutet in diesem Zusammenhang, dass das zugehörige Polpaar das System im praktischen Sinne destabilisieren könnte. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Stabilisierung des Starrkörper und der flexiblen Eigenschaften zwar getrennt voneinander entwickelt werden können, jedoch ist es notwendig die Stabilität des Gesamtsystems zu überprüfen.



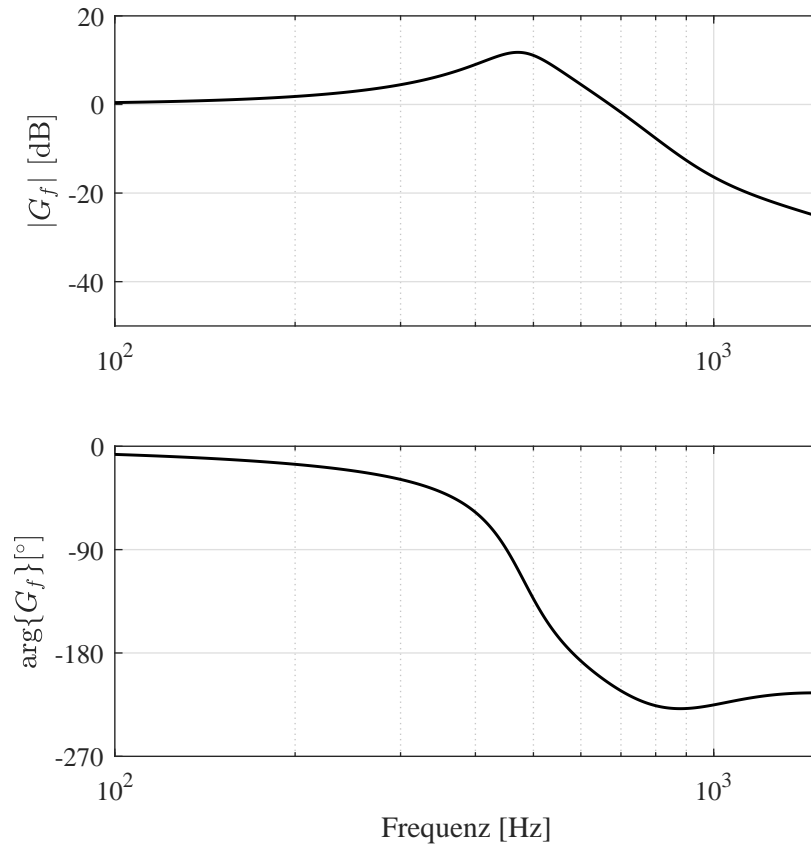


Abbildung 4.19: Bode Diagramm eines Filters zur Stabilisierung der ersten Biegemode

## 4.6 Experimentelle Ergebnisse des LQG stabilisierten Systems

Dieser Unterabschnitt dient zur Verifikation des entwickelten Reglers basierend auf der LQG-Methode in Kombination mit Filtern zur Stabilisierung der ersten Biegemode. Daher wird die LQG-Methode in drei Experimenten mit einer dezentralen Regelung verglichen. Der zu regelnde Rotor wurde bereits in Abbildung 4.4 und die zugehörigen Daten des Magnetlagersystems in Tabelle 4.1 gezeigt. Die Positionssensoren sind induktive Sensoren, welche mit einem 50 kHz Sinussignal angeregt werden. Die Reglerstruktur wurde in einem DSP (TMS320F28335) implementiert.

Es werden drei verschiedene experimentelle Untersuchungen durchgeführt:

- Verhalten bei einer sprungförmigen Belastung des Rotors
- Verhalten bei einer kritischen Geschwindigkeit des Starrkörpers
- Systemverhalten bei Stillstand und drehendem Rotor

Bei jeder Untersuchung wird das LQG-geregelte und gyroskopisch kompensierte System mit dem Verhalten eines dezentral geregelten Systems verglichen.

### 4.6.1 Verhalten bei sprungförmiger Belastung des Rotors

Um das Einschwingverhalten des geregelten Systems zu analysieren, wurden die Freiheitsgrade des Magnetlagersystems mit einer sprungförmigen Kraft belastet. Diese sprungförmige Belastung wird dem Sollstrom überlagert. Über die Kraft/Strom-Faktoren  $k_i$  stellt sich dann die gewünschte Kraft  $F_i$  ein. Für mechanische Systeme wird oft nur eine impulsförmige Belastung als Testsignal verwendet. Um jedoch auch die Performance der integrierenden Anteile der Regler zu testen, wurde eine sprungförmige Belastung verwendet. Zur Kraftaufbringung wurde dem Sollstrom des Reglers ein sprungförmiger Anteil überlagert. Für das Lager A wurde eine Kraft von  $12\text{ N}$  und für das Lager B von  $26.5\text{ N}$  verwendet. Um auch die Auswirkungen der radialen Verkopplungen zu berücksichtigen, wurde der Rotor in x- und y-Richtung belastet. Nur das axiale Lager wurde nicht angeregt. Die Güte der Annäherung an einen Sprung hängt natürlich von der Dynamik der Stromregler ab. Da die Starrkörperresonanzen im Bereich  $50 - 100\text{ Hz}$  liegen, kann die Dynamik des Stromreglers für die Erzeugung der Belastung vernachlässigt werden. Für die Stabilisierung der Biegemoden werden ohnehin die gleichen Filter verwendet und sind daher für die Betrachtung des Performance-Unterschieds nicht von Bedeutung.

Abbildung 4.20 zeigt das Einschwingverhalten bei einer sprungförmigen Belastung des Rotors im Stillstand. Die Auslenkungen liegen zum Zeitpunkt  $0\text{ s}$  bei allen Sensoren bei ca.

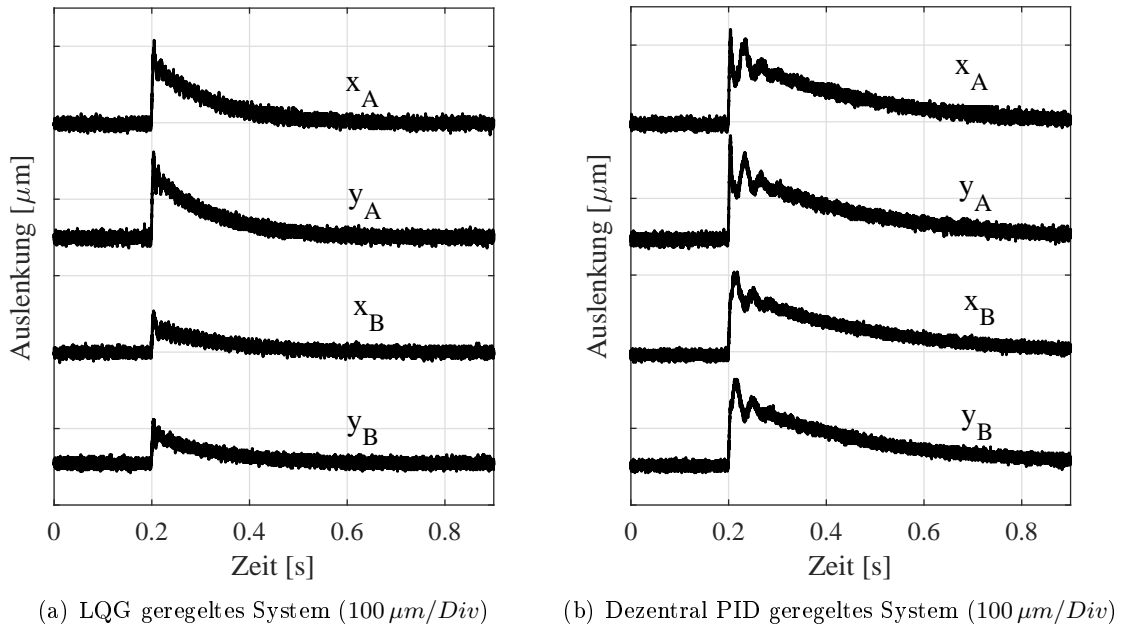


Abbildung 4.20: Sprungantwort des LQG und dezentral PID geregeltem System im Stillstand

$0\ \mu\text{m}$ . Aufgrund der Anschaulichkeit der Abbildung wurde nur eine Ordinatenachse verwendet, was einen Offset aufgrund der Darstellung mit sich zieht. Das Einschwingverhalten des

LQG-geregelten Systems neigt weniger stark zum Schwingen als das des dezentralen PID Reglers. Auch die Sprunghöhe bei den Sensoren des Lagers B sind beim LQG geregeltem Systems kleiner. Es sei jedoch angemerkt, dass die Sprunghöhe durch die Steifigkeit verändert werden kann. Der Grund für das bessere Verhalten des LQG-Reglers liegt in der Tatsache, dass bei der Auslegung alle Verkopplungen berücksichtigt wurden. Bei der Auslegung des dezentralen Reglers werden im Gegensatz nur die Diagonal-Elemente der Übertragungsmatrix berücksichtigt. Bei dem LQG-Regler werden sogar verkoppelte integrierende Anteile verwendet, sodass ein konstanter Fehler bei einem Sensor Auswirkungen auf alle Aktuatoren hat.

#### 4.6.2 Laufverhalten des Rotors bei einer kritischen Geschwindigkeit

Das Verhalten bei kritischen Geschwindigkeiten stellt eine wichtige Charakteristik bei magnetgelagerten Rotoren dar. Die stationäre Schwingungsamplitude ist abhängig vom Dämpfungsfaktor des für die Schwingung verantwortlichen Polpaares. Die verwendete kritische Geschwindigkeit wurde experimentell bestimmt und liegt beim LQG stabilisierten System bei  $3600 \text{ min}^{-1}$  und beim dezentralen System bei  $3900 \text{ min}^{-1}$ . Abbildung 4.21 zeigt die Auswertung der Positionssensoren bei der kritischen Geschwindigkeit für den LQG und den dezentral PID stabilisierten Rotor. Die Amplitude vom Lager B ist kleiner mit dem dezentralen PID

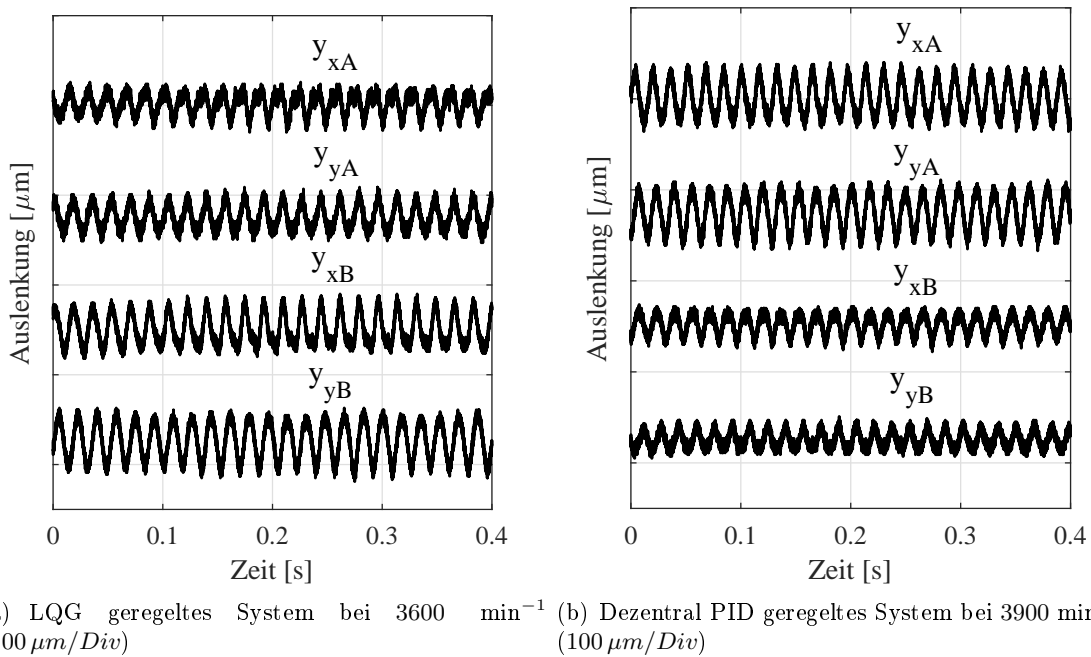


Abbildung 4.21: Laufverhalten bei kritischen Geschwindigkeiten beim LQG und dezentral PID geregeltem System

Regler. Beim Lager A ist genau das Gegenteil der Fall. Die Laufeigenschaften weisen bei beiden Regelstrategie keine großen Unterschiede auf. Es sei jedoch angemerkt, dass das Auf-

finden von ausreichend guten Reglereinstellungen für den LQG-Regler einfacher ist als für den dezentralen Regler. Der Grund liegt in den Verkopplungen der translatorischen mit den rotatorischen Bewegungen. Diese Verkopplungen sind natürlich auch im LQG geregelten System vorhanden, jedoch verwendet man hier Gewichtungsmatrizen um das Verhalten des geschlossenen Regelkreises zu verändern. Für höhere Drehzahlen wäre ein Vergleich nicht sinnvoll, da der dezentrale Regler aufgrund des höher werdenden gyroskopischen Effekts instabil werden würde.

### 4.6.3 Systemverhalten bei Stillstand und drehendem Rotor

Um das Magnetlager-System mittels LTI-Regelung optimal zu stabilisieren, ist es wichtig, dass sich das Systemverhalten während des Betriebs nur hinreichend wenig ändert. Für ein stark veränderliches Systemverhalten muss die Regelung sehr robust ausgelegt werden und die Auslegung würde daher immer mehr Beschränkungen unterliegen. Um die Änderungen des Systemverhaltens zu identifizieren, werden die sogenannten Compliance-Funktionen ausgewertet. Die Compliance-Funktionen ist gleich der Übertragungsfunktion mit einer Anregung in der Kraft und der Messung einer Auslenkung oder eines Winkels. Im vorliegenden Fall wird einfach die Auslenkung bei einem Sensor verwendet. Abbildung 4.22 zeigt die Compliance-Funktion des LQG geregeltem Systems und Abbildung 4.23 die Compliance-Funktion des dezentral PID geregelten Systems.

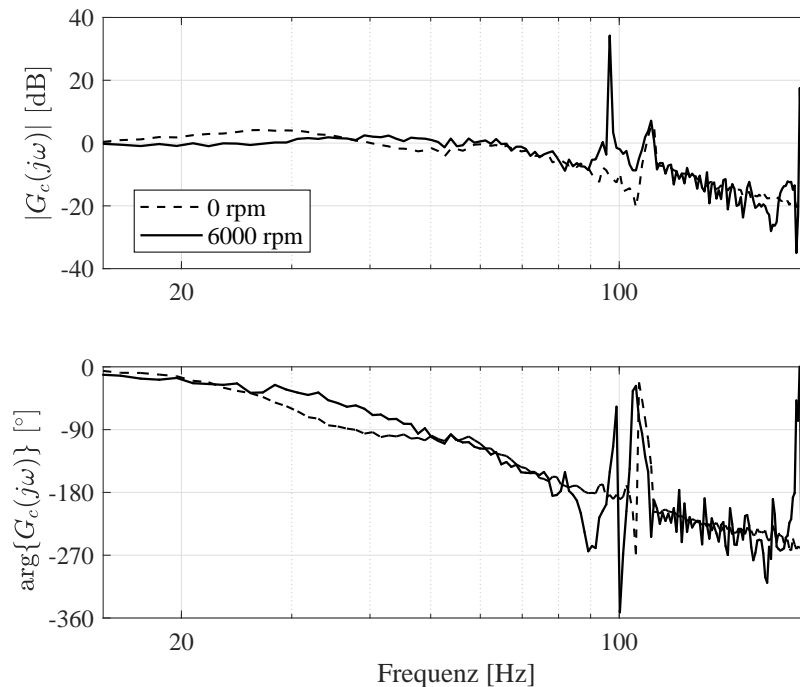


Abbildung 4.22: Compliance-Funktion des LQG geregelten Systems

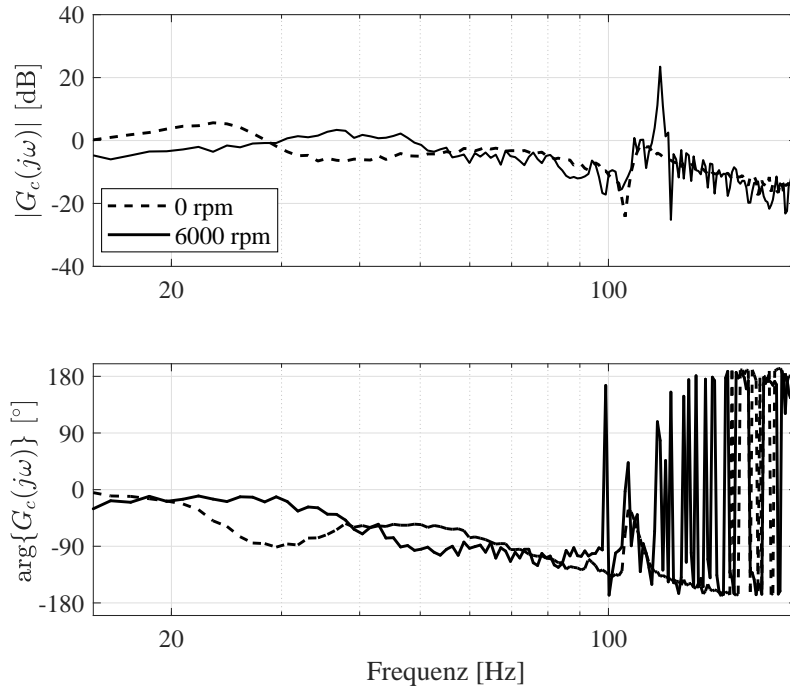


Abbildung 4.23: Compliance-Funktion des dezentral PID geregelten Systems

Beide Transferfunktionen wurden bei Stillstand und bei 6000 rpm gemessen. Für die Messung wurde der Rotor mittels eines Sweep-Signal angeregt und anschließend die Position gemessen. Die Übertragungsfunktion  $G_c(j\omega)$  kann anschließend über die Fast-Fourier-Transformation (FFT)

$$G_c(j\omega) = \frac{\text{FFT}(y_S)}{\text{FFT}(I_A)} \quad (4.48)$$

mit dem Strom eines Aktuators  $I_A$  und dem Positionssignal eines Sensors  $y_S$ , berechnet werden. Im vorliegenden Fall wird der Aktuator  $x_B$  und der Sensor  $x_B$  verwendet. Für eine mechanisch richtige Compliance-Funktion müsste der Betrag des Ergebnisses der FFT noch um den Faktor  $k_i$  verringert werden. In dieser Arbeit wird jedoch die Nachgiebigkeit in Abhängigkeit des Stromes analysiert. Eigentlich gibt es für ein MIMO-System eine Matrix von Übertragungsfunktionen. Um die Verbesserung aufgrund der Kompensation des gyroskopischen Effekts zu zeigen, wurde exemplarisch ein Diagonalelement aus der Übertragungsmatrix dargestellt. Aufgrund des mechanischen Verhaltens fällt der Betrag ab einer definierten Knickfrequenz mit  $-40$  dB/Dek ab. Um auch für höhere Frequenzen noch ein brauchbares Nutzsignal zu erhalten, wird daher ein Sweep-Signal mit steigender Amplitude für höhere Frequenzen verwendet. Die Compliance-Funktion weist für das LQG geregelte System aufgrund der Kompensation des gyroskopischen Effektes für beide Drehzahlen ähnliches Verhalten auf. Der Peak bei ca. 100 Hz resultiert aus der Unwucht. Da bei der Auswertung der Übertragungsfunktion zusätzlich der Frequenzanteil der Unwucht am Positionssensor gemessen wird,

ist die Höhe dieses Peaks nicht von Bedeutung. Im Gegensatz zum LQG geregeltem System weist das Systemverhalten des dezentral-PID geregelten Systems starke Unterschiede für Stillstand und  $6000 \text{ min}^{-1}$  auf. Da nur die Diagonalelemente der Übertragungsfunktion verwendet werden, ist das System durch den gyroskopischen Effekt parametervariant.

## 4.7 Konklusion der LQG Regelung

In diesem Abschnitt wurde ein LQG-Regler für die Stabilisierung eines magnetgelagerten Rotors verwendet. Um der Parametervarianz des gyroskopischen Effekts entgegen zu wirken, wurde eine Kompensationsstrategie entwickelt. Dadurch ist es möglich einen LTI-Regler für den gesamten Drehzahlbereich des kompensierten Systems zu entwickeln. Das resultierende System wurde mit einer dezentralen PID Regelung verglichen. Die experimentellen Ergebnisse zeigten ein verbessertes Einschwingverhalten bei einer sprungförmigen Belastung. Der Grund liegt in der Ausnutzung der Kopplungsterme des Magnetlagersystems. Des Weiteren wurde das Systemverhalten bei Stillstand und höherer Drehzahl verglichen. Hierbei wurde festgestellt, dass das LQG geregelte System kaum Unterschiede für beide Drehzahlen besitzt. Hingegen ist für das dezentral PID-geregelte System ein anderes Verhalten für beide Drehzahlen erkennbar. Dies dient als Nachweis für die Funktion der Kompensationsstrategie des gyroskopischen Effektes im Bereich der Starrkörpermoden. Für die flexiblen Moden ist eine solche Kompensation nicht so einfach möglich. Der Grund liegt in der oftmals geringen Abhängigkeit der flexiblen Eigenfrequenzen von den Reglerparametern. Die Wahl der Gewichtungsmatrizen zur Berechnung des LQ-Regelgesetzes alleine ist zur Stabilisierung des Systems eher mit wenig Aufwand verbunden. Kommt jedoch die Kompensation des gyroskopischen Effekts hinzu, gestaltet sich die Wahl der Gewichtungsmatrizen als eher schwierig. Die geschätzten Zustände werden nämlich für die Kompensation und für die Regelung verwendet. Die nötige Bandbreite der Kompensation steigt mit der Drehzahl an. Jedoch darf die Bandbreite des Kalman-Filters nicht zu hoch sein um die flexiblen Moden nicht zu beeinflussen. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die LQG-Regelung in Kombination mit den Filtern zur Stabilisierung der Biegemoden und der Kompensation des gyroskopischen Effektes nicht so einfach einzustellen ist. Nichtmodellerte Effekte wie beispielsweise die Eigenfrequenzen des Schaufelrades können Probleme mit der Stabilisierung mit sich führen. Denn anders als bei einem PID-Regler ist es beim LQG-geregelten System schwieriger die Dämpfung oder Steifigkeit in einem gewissen Frequenzbereich zu ändern. Aus den in diesem Abschnitt beschriebenen Gründen wurde die Regelung mittels der LQG-Methode nicht weiterverfolgt.

## Kapitel 5

# Entkoppelte Regelung mit Kompensation des gyroskopischen Effekts

Die LQG-Regelung mit erweiterter Kompensation des gyroskopischen Effektes zeigt ein sehr gutes Verhalten für den starren Rotor. In Kombination mit den Filtern für die Stabilisierung der flexiblen Moden, gestaltet sich das Einstellen der Parameter für ein stabiles System jedoch als nicht trivial. Des Weiteren ist die Rechenzeit aufgrund der vollständigen Zustandsrückführung und Zustandsbeobachtung in Kombination mit einer parametervarianten Kompensation vergleichsweise hoch. In diesem Unterabschnitt wird daher eine Reglerstruktur entwickelt, mit der es möglich ist, den Starrkörper mit PID-Reglern zu stabilisieren und dennoch die Nachteile der dezentralen Regelung zu eliminieren. Die Kombination von PID-Reglern mit Stabilisierungsfiltern stellt keine Probleme dar, da die Bandbreite der PID-Regler definiert eingestellt werden können. Es wird eine dezentrale PID-Regelung für ein kompensiertes LTI-System entwickelt. Die Kompensierung basiert dabei auf der sogenannten Methode der inversen Dynamik ("Computed Torque") [55]. Eine andere Herangehensweise wäre ein "gain-scheduling" der PID-Regler. Doch diese Methode vermindert, wie auch ein "gain-scheduling" des LQ-Reglers, den Frequenzabstand zwischen den Eigenfrequenzen des flexiblen Körpers und des Starrkörpers.

### 5.1 Entkopplung mittels Ein- und Ausgangstransformation

Um die Verkopplungen aufgrund der Eingangstransformation der Lagerkräfte mittels der Matrix  $\mathbf{B}$  und der Ausgangstransformation der Zustände auf die Sensorkoordinaten mittels der Matrix  $\mathbf{C}$  zu kompensieren, wird jeweils eine Ein- und Ausgangstransformation durchgeführt [15], [56]. Die Transformationsmatrizen unterliegen der Bedingung, dass die Matrix  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{BK}_i$  invertierbar sind. Die Eingangstransformation der Regelung besitzt die Aufgabe die Verkopplung aufgrund der Matrix  $\mathbf{C}$  aufzuheben. Ein mögliche Entkopplungsmatrix  $\mathbf{T}_{in}$  ist

daher gegeben durch

$$\mathbf{T}_{in} = \mathbf{C}^{-1} \quad (5.1)$$

Mittels dieser Transformation kann die PID-Regelung in den COG-Koordinaten ausgelegt werden. Es wird also keine Regelung für die vier Sensorsignale ausgelegt, sondern für zwei translatorische und zwei rotatorische Bewegungen. Die P-Faktoren haben daher die physikalische Bedeutung, entweder einer translatorischen Feder oder einer Drehfeder. Die Ausgänge der Positionsregelung müssten dennoch Ströme in den Lagerkoordinaten vorgeben. Mittels der Ausgangstransformation

$$\mathbf{T}_{out} = (\mathbf{B}\mathbf{K}_i)^{-1} \quad (5.2)$$

können die Ausgänge der PID-Regelung als Kräfte und Momente aufgefasst werden (Abbildung 5.1). Durch Einsetzen der Ein- und Ausgangstransformation in die Grundgleichung der

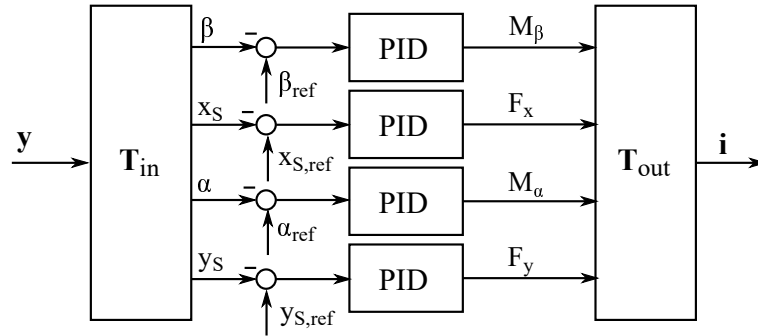


Abbildung 5.1: Blockschaltbild der Ein- Ausgangstransformation

magnetischen Lagerung (3.35) erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\omega)\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\mathbf{K}_x\mathbf{B}^T\mathbf{x} &= \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.3)$$

mit

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} M_\beta \\ F_{xS} \\ M_\alpha \\ F_{yS} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

wobei  $M_\beta$  und  $M_\alpha$  die Momente und  $F_{xS}$  und  $F_{yS}$  die Kräfte im COG-System beschreiben. Die Spaltenmatrix  $\boldsymbol{\tau}$  wird für ein geschlossenes Regelsystem durch den transformierten Ausgang

$$\mathbf{y}_T = \mathbf{T}_{in}\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (5.5)$$

wie folgt berechnet:

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{x}(s) \quad (5.6)$$



wobei  $\mathbf{R}(s)$  die Übertragungsmatrix der angewendeten Regelung darstellt. In dem vorliegenden Fall ist das eine dezentrale PID-Regelung. Die Filterung zur Stabilisierung der flexiblen Eigenschaften des Rotors wird auch für das transformierte System entwickelt. Die Entkopplung durch die Matrizen  $\mathbf{T}_{in}$  und  $\mathbf{T}_{out}$  beschreiben statische Entkopplungen. Die Elemente der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_{in}$  sind nur von der Geometrie des Magnetlager-Aufbaus und der Massenverteilung des Rotors abhängig (Abstände der Sensoren zum Schwerpunkt). Da diese Daten aus der Konstruktion üblicherweise hinreichend genau bekannt sind, wird eine solche Transformation robust sein. Auch die Änderung von  $\mathbf{T}_{in}$  während des Betriebs können meistens vernachlässigt werden. Bei der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_{out}$  hängen die Elemente zusätzlich noch von den Kraft/Strom-Faktoren  $k_{iA}$  und  $k_{iB}$  ab. Diese Kraft/Strom-Faktoren sind jedoch lediglich mathematische Näherungen aufgrund der Linearisierung der Kraftwirkung von Magnetlagern. Daher können sich diese Faktoren unter dem Betrieb der Pumpe verändern. Um die Auswirkungen der Änderung von  $k_{iA}$  und  $k_{iB}$  abzuschätzen, wird die Matrix  $\mathbf{T}_{out}$  elementweise berechnet.

$$\mathbf{T}_{out} = \frac{1}{(a+b)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{k_{iA}} & \frac{b}{k_{iA}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_{iB}} & \frac{a}{k_{iB}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_{iA}} & \frac{b}{k_{iA}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{k_{iB}} & \frac{a}{k_{iB}} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

In der Matrix  $\mathbf{T}_{out}$  ist also pro Zeile immer nur  $k_{iA}$  oder  $k_{iB}$  vorhanden. Das bedeutet, dass ein Fehler von  $k_{iA}$  oder  $k_{iB}$  mit einem Fehler in der P-Verstärkung der Regler aufgefasst werden kann. Deswegen ist es oftmals sinnvoll die Forderung der Norm ISO 14839-3 [60] auch für eine Variation der Verstärkung um einen definierten Bereich zu erfüllen.

## 5.2 Entkopplung mittels inverser Dynamik

Die Ein- und Ausgangstransformation mittels den Matrizen  $\mathbf{T}_{in}$  und  $\mathbf{T}_{out}$  eliminiert ausschließlich die Verkopplungen aufgrund der Matrix  $\mathbf{C}$  und der Matrix  $\mathbf{BK}_i$ . Aus Gleichung (5.3) ist jedoch ersichtlich, dass noch ein Kopplungsterm aufgrund der negativen Steifigkeit  $\mathbf{BK}_x \mathbf{B}^T \mathbf{x}$  vorhanden ist. Das Eliminieren dieses Terms wird in der Literatur oft  $k_x$ -Kompensation genannt. Die parametervariante Kopplung aufgrund des gyroskopischen Effektes kann wie in Abschnitt 4.3 beschrieben, kompensiert werden. Das Regelgesetz zur vollständigen Entkopplung lautet:

$$\mathbf{i} = \mathbf{T}_{out} (\mathbf{G}(\omega) \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{BK}_x \mathbf{B}^T \mathbf{x} + \mathbf{Mv}) \quad (5.8)$$

mit dem virtuellen Eingang  $\mathbf{v}$ . Da die Matrix  $\mathbf{M}$  eine Diagonalmatrix darstellt, können deren Einträge auch gleich in den P-Anteilen der Regler berücksichtigt werden. Die dezentrale PID-Regelung wird in diesem Fall für den virtuellen Eingang  $\mathbf{v}$  entwickelt. Das Gesamtsystem mit



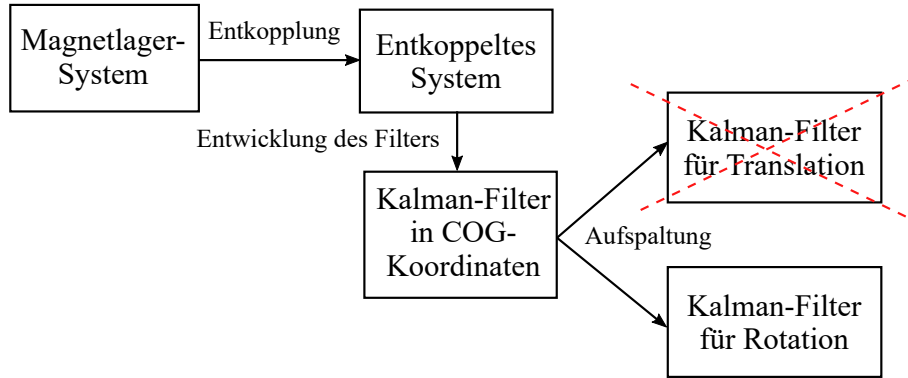


Abbildung 5.3: Entkopplung des Kalman-Filters

Weglassen der  $k_x$ -Kompensation noch ein brauchbares dynamisches Verhalten des Magnetlagersystems. Um die Implementierung des Kalman-Filters zu erleichtern, wird die Gleichung des Kalman-Filters

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{z}}_k + \Gamma \mathbf{u}_k + \hat{\mathbf{K}}_s (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{z}}_k) \quad (5.11)$$

in folgende Form gebracht:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_s & \Gamma & \Phi - \hat{\mathbf{K}}_s \mathbf{C} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{kal}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{u}_k \\ \hat{\mathbf{z}}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_{kal}} \quad (5.12)$$

Mit Gleichung (5.12) ist es nun möglich, das Kalman-Filter mit nur einer Matrixmultiplikation im DSP zu implementieren. Da nur die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\alpha}$  und  $\dot{\beta}$  zur parametervarianten Kompensation benötigt werden, kann das Kalman-Filter, wie in Abbildung 5.3 ersichtlich, vereinfacht werden. Gleichung (5.12) lautet nach der Aufspaltung:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{k+1} \\ \hat{\alpha}_{k+1} \\ \dot{\hat{\beta}}_{k+1} \\ \dot{\hat{\alpha}}_{k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_{d,k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{sd} & \Gamma_d & \Phi_d - \hat{\mathbf{K}}_{sd} \mathbf{C}_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{d,kal}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ M_\beta \\ M_\alpha \\ \hat{\beta}_k \\ \hat{\alpha}_k \\ \dot{\hat{\beta}}_k \\ \dot{\hat{\alpha}}_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}_{d,kal}} \quad (5.13)$$

wobei der Index  $d$  für das entkoppelte rotatorische System steht. Durch diese simple Transformation und Aufspaltung kann die Rechenzeit des Kalman-Filters um einen Faktor 4 verringert

	Kalman-Filter 1	Kalman-Filter 2	Kalman-Filter 3
Drehzahlbereich	0 – 15000 min <sup>-1</sup>	15000 – 30000 min <sup>-1</sup>	30000 – 40000 min <sup>-1</sup>
Auslegedrehzahl	0 min <sup>-1</sup>	15000 min <sup>-1</sup>	30000 min <sup>-1</sup>

Tabelle 5.1: Drehzahlbereiche der einzelnen Kalman-Filter

werden. Das Kalman-Filter des Gesamtsystems wird mittels einer  $(8 \times 16)$ -Matrix  $\mathbf{A}_{kal}$  berechnet. Für das entkoppelte Kalman-Filter zur Berechnung der radialen Bewegung reicht eine  $(4 \times 8)$ -Matrix  $\mathbf{A}_{d,kal}$  aus. Die Kopplung der x- und der y-Ebene bleibt jedoch durch den drehzahlabhängigen gyroskopischen Effekt erhalten. Eine Entkopplung dieser beiden Ebenen für die Berechnung des Kalman-Filters wäre nur im Stillstand möglich. Für praktischen Anwendungen kann die Vernachlässigung des gyroskopischen Effektes auch für niedrige Drehzahlen oder schlanke Rotoren erfolgen. Da es sich um ein parametervariantes System handelt, könnte theoretisch ein sogenannter "Extended" Kalman-Filter verwendet werden. Aufgrund der zu hohen Rechenzeit wird dennoch ein LTI-Kalman-Filter verwendet, bei welchem die Parameter abhängig von der Drehzahl verändert werden. Tabelle 5.1 zeigt die Drehzahlbereiche der verschiedenen LTI-Kalman-Filtern der Turbomolekularpumpe 1. Die untere Spalte beschreibt die Drehzahl für die das Kalman-Filter ausgelegt wurde. Die Auslegedrehzahl ist immer gleich der minimalen Drehzahl des jeweiligen Bereiches. In der Simulation hat sich gezeigt, dass ein Drehzahlfehler, bei dem die Drehzahl geringer ist als die Auslegedrehzahl, schneller zur Destabilisierung führt als anders herum<sup>1</sup>. Die Einflüsse von Parameterschwankungen sind für die inverse Dynamik nicht mehr so einfach abzuschätzen, wie für die Ein- und Ausgangstransformation. Für die  $k_x$ -Kompensation ist die Berechnung der COG-Koordinaten  $\mathbf{x}$  selbst von der Matrix  $\mathbf{K}_i$  abhängig. Durch die Berechnung der Kompensation ist der Fehler also abhängig von der Kombination von  $\mathbf{K}_i$  und  $\mathbf{K}_x$ . Die Robustheit der gyroskopischen Kompensation hängt stark von der Dynamik des Kalman-Filters ab. Das Ersetzen des Kalman-Filters durch differenzierende (D-)Regler ist aufgrund der Erhöhung des Signalrauschens nicht zielführend. Durch die hohe Verstärkung die ein D-Regler mit sich zieht, können flexible Moden destabilisiert werden. Zur Betrachtung der Robustheit des Magnetlagersystems werden daher die Sensitivitätsfunktionen herangezogen.

### 5.3 Rotor mit hohen Eigenfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln

Zur Betrachtung des dynamischen Verhaltens eines Magnetlagersystems wird in diesem Abschnitt der Rotor der Turbomolekularpumpe 1 herangezogen (Parameter aus Tabelle 4.1). Die Eigenfrequenzen der ersten Biegemode und des Schaufelrades sind in Abbildung 5.4 ersichtlich. Zur Regelung wird die entkoppelte Regelung laut Abbildung 5.2 herangezogen. Da die

<sup>1</sup>Näheres dazu wird in Kapitel 5.3.6 erläutert

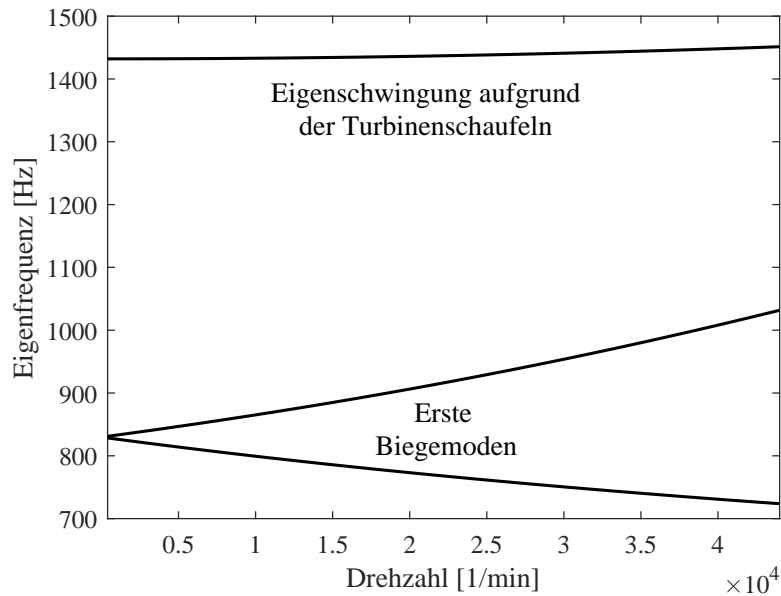


Abbildung 5.4: Gemessene Eigenfrequenzen des Rotors der Turbomolekularpumpe 1

Eigenfrequenz aufgrund des Schaufelrades eher hoch ist, kann die Stabilisierung durch Vermindern des Betrages der offenen Regelschleife erfolgen. Falls die Abschwächung aufgrund der dezentralen Tiefpassfilterung zu schwach ist, kann das Reglersystem einfach durch ein zweites Tiefpassfilter, welches eine etwas höhere Bandbreite als die Eigenfrequenz der Biegemode besitzt, erweitert werden.

### 5.3.1 Dynamisches Verhalten unter Parameterschwankung

Um das dynamische Verhalten unter Parameterschwankung zu beschreiben, werden die Compliance-Funktionen und die Sensitivitätsfunktionen verwendet. Die Compliance-Funktion wurde schon in Abschnitt 4.6 beschrieben. Um die Definition der Übertragungsmatrizen näher zu erläutern, wird der Standardregelkreis nach Abbildung 5.5 verwendet. Wobei  $\mathbf{R}(s)$  die Über-

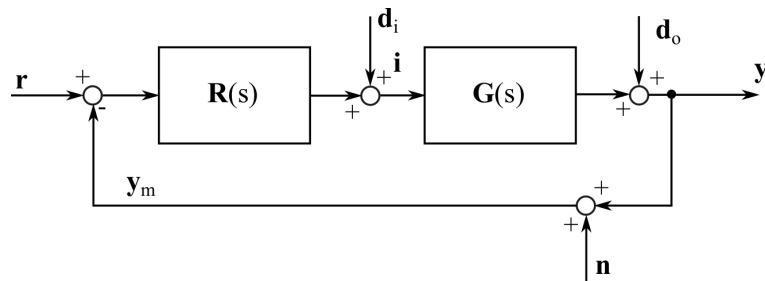


Abbildung 5.5: Standardregelkreis bei negativer Rückführung

tragungsmatrix des Reglers,  $\mathbf{G}(s)$  die Übertragungsmatrix der Strecke,  $\mathbf{y}_m$  den gemessenen

Ausgang mit überlagertem Messrauschen  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{d}_i$  die Eingangsstörung,  $\mathbf{d}_o$  die Ausgangsstörung und  $\mathbf{r}$  das Führungssignal darstellt. Die Übertragungsmatrix der Compliance-Funktionen wäre unter Vernachlässigung des Messrauschens  $\mathbf{n}$  folgendermaßen definiert.

$$\mathbf{G}_c(s) = \frac{\mathbf{y}_m(s)}{\mathbf{d}_i(s)} = \mathbf{G}(s) (\mathbf{E} + \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s))^{-1} \quad (5.14)$$

Für die Sensitivität des Regelkreises muss im MIMO-Fall zwischen der Eingangs  $\mathbf{S}_i(s)$  und der Ausgangssensitivität  $\mathbf{S}_o(s)$  unterschieden werden, da bei der Matrixmultiplikation  $\mathbf{R}(s)\mathbf{G}(s)$  bzw.  $\mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s)$  die Reihenfolge von Bedeutung ist. Die Sensitivitätsfunktionen lauten:

$$\mathbf{S}_i(s) = \frac{\mathbf{i}(s)}{\mathbf{d}_i(s)} = (\mathbf{E} + \mathbf{R}(s)\mathbf{G}(s))^{-1} \quad \mathbf{S}_o(s) = \frac{\mathbf{y}(s)}{\mathbf{d}_o(s)} = (\mathbf{E} + \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s))^{-1} \quad (5.15)$$

Um die Norm ISO 14839-3 zu erfüllen, ist nur die Ausgangssensitivität  $\mathbf{S}_o(s)$  von Bedeutung. Im SISO-Fall ist die Reihenfolge der Multiplikation von  $R(s)G(s)$  willkürlich, daher gilt für den SISO-Fall  $S_i = S_o$ . Die Sensitivitätsfunktionen sind für die Robustheitsanalyse von großer Bedeutung, da der kleinste Abstand der offenen Regelschleife im SISO Fall  $R(s)G(s)$  zum Nyquistpunkt, dem inversen Wert des Maximums der Sensitivitätsfunktion  $M_S = \max(S(s))$  entspricht. Oft werden als Kriterium für die Performance einer Regelung der Amplitudenrand (engl. gain margin,  $GM$ ), oder die Phasenreserve (engl. phase margin,  $PM$ ) herangezogen. Diese beiden Werte hängen laut [56] mit  $M_S$  wie folgt zusammen:

$$GM \geq \frac{M_S}{M_S - 1} \quad PM \geq 2 \arcsin \left( \frac{1}{2M_S} \right) \geq \frac{1}{M_S} \text{ [rad]} \quad (5.16)$$

Besitzt also eine Regelstruktur einen gewissen Wert  $M_S$ , so kann daraus der Minimalwert des Amplitudenrandes und der Phasenreserve garantiert werden. Der Grund warum oftmals  $M_S$  zur Performance-Messung des geschlossenen Regelkreises verwendet wird, ist die einfache messtechnische Auswertung.

### 5.3.2 Der "Waterbed" -Effekt

Dieser Unterabschnitt beschreibt eine Limitierung der Robustheit anhand der Sensitivitätsfunktion. Eine Sensitivitätsfunktion eines Ein-Massenschwingers ist in Abbildung 5.6 exemplarisch dargestellt. Man kann erkennen, dass das Maximum von  $|S|$  größer als 0 dB ist. Da der Phasengang der Sensitivitätsfunktion für die Robustheit des Systems nicht von großer Bedeutung ist, wird nur der Betragsgang visualisiert. Es wird sich zeigen, dass das Maximum von  $|S|$  immer größer als 0 dB ist. Der sogenannte "Waterbed" -Effekt besagt, dass eine Senkung des Betrages der Sensitivität in einem gewissen Frequenzbereich zu einer Erhöhung des Betrages der Sensitivität in einem anderen Frequenzbereich führt. Der Name "Waterbed" -Effekt kommt aus der Analogie des Verhaltens eines Wasserbettes. Es muss also immer ein "Trade-Off" zwischen der Reduktion und der daraus resultierenden Erhöhung in einem anderen

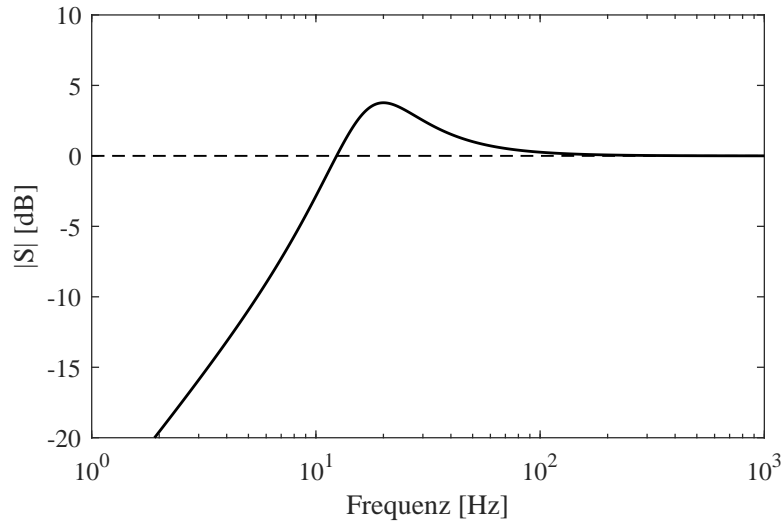


Abbildung 5.6: Abbildung des Betrages der Sensitivitätsfunktion eines mittels PI geregelten Ein-Massenschwingers

Frequenzbereich getroffen werden. Dieser "Trade-Off" ist laut [56] für zwei Fälle wichtig:

1.  $R(s)G(s)$  hat mindestens um zwei Polstellen mehr als Nullstellen ("Bode-Sensitivity"-Integral oder erste "Waterbed"-Formel)
2.  $R(s)G(s)$  besitzt Nullstellen in der rechten offenen Halbebene ("Weighted-Sensitivity"-Integral oder zweite "Waterbed"-Formel)

Für reale Reglersysteme wird die Bedingung (1) aufgrund der Einführung von Aktuator- und Sensor-Dynamiken immer erfüllt sein.

**Theorem 1** ("Bode-Sensitivity"-Integral (Erste "Waterbed"-Formel)). *Für eine rationale offene Systemübertragungsfunktion  $R(s)G(s)$  wird angenommen, dass sie zwei Polstellen mehr als Nullstellen besitzt. Des Weiteren besitzt die Systemübertragungsfunktion  $R(s)G(s)$ ,  $N_p$  Polstellen in der rechten offenen Halbebene an den Stellen  $p_i$ . Für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises muss dann folgende Bedingung gelten:*

$$\int_0^{\infty} \ln|S(j\omega)|d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \operatorname{Re}(p_i) \quad (5.17)$$

wobei  $\operatorname{Re}(p_i)$  den Realteil von  $p_i$  beschreibt.

Für den Beweis wird auf [57] und [58] verwiesen. Für den Fall einer stabilen offenen Regelstrecke gilt demnach:

$$\int_0^{\infty} \ln|S(j\omega)|d\omega = 0 \quad (5.18)$$

Die Fläche der reduzierten Sensitivität ( $\ln|S(j\omega)|$  ist negativ) muss also gleich der Fläche der verstärkten Sensitivität ( $\ln|S(j\omega)|$  ist positiv) sein. Diese Tatsache zeigt, dass ein Erhöhen der Bandbreite des Integral-Reglers eine Erhöhung des Spitzenwertes der Sensitivitätsfunktion mit sich zieht. Wie aus Gleichung (5.17) ersichtlich, wird der minimal mögliche Spitzenwert der Sensitivitätsfunktion durch den Realteil instabiler Pole der offenen Systemübertragungsfunktion  $R(s)G(s)$  erhöht. Die Erhöhung ist proportional der Summe der Realteile der instabilen Pole. Für instabile Strecken und realistische Bandbreiten, stellt der Wert  $\pi \sum_{i=1}^{N_p} \text{Re}(p_i)$  eine wichtige Limitierung dar. Daher kann vor der eigentlichen Reglerauslegung aufgrund der Streckeneigenschaften abgeschätzt werden, ob das System gut oder schlecht stabilisierbar ist. Ergibt diese Analyse eine schlechte Stabilisierbarkeit, so muss das Magnetlagersystem selbst abgeändert werden. Besitzt die offene Systemübertragungsfunktion  $R(s)G(s)$  zudem noch eine Nullstelle in der rechten offenen Halbebene, gilt folgendes Theorem:

**Theorem 2** ("Weighted-Sensitivity"-Integral (Zweite "Waterbed"- Formel)). *Angenommen die Systemübertragungsfunktion  $R(s)G(s)$  besitzt eine reelle Nullstelle  $z$  oder ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar  $z = x \pm jy$  und hat zudem noch  $N_p$  Pole  $p_i$  in der rechten offenen Halbebene.  $\bar{p}_i$  beschreibt den konjugiert komplexen Wert von  $p_i$ . Für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises muss dann folgende Bedingung gelten:*

$$\int_0^{\infty} \ln|S(j\omega)| \cdot w(z, \omega) d\omega = \pi \ln \sum_{i=1}^{N_p} \left| \frac{p_i + z}{\bar{p}_i - z} \right| \quad (5.19)$$

wobei  $\text{Re}(p_i)$  den Realteil von  $p_i$  beschreibt. Ist die Nullstelle reell gilt:

$$w(z, \omega) = \frac{2}{z} \frac{1}{1 + (\omega/z)^2} \quad (5.20)$$

Sind die Nullstellen konjugiert komplex gilt ( $z = x \pm jy$ )

$$w(z, \omega) = \frac{x}{x^2 + (y - \omega)^2} + \frac{x}{x^2 + (y + \omega)^2} \quad (5.21)$$

Aus Theorem 2 ist ersichtlich, dass ein geringer Abstand zwischen Polstellen und Nullstellen in der rechten Halbebene aufgrund des Terms

$$\pi \ln \sum_{i=1}^{N_p} \left| \frac{p_i + z}{\bar{p}_i - z} \right| \quad (5.22)$$

zu hohen Werten von  $M_S$  führen. Ein weiterer Nachteil besteht in der stark abfallenden Wirkung des Integrals von  $\ln|S(j\omega)|$  auf Grund der Gewichtung  $w(z, \omega)$  für Frequenzen  $\omega > z$ . Da ein instabiler Pol eine gewisse Mindestbandbreite mit sich zieht, eine Nullstelle in der rechten Halbebene jedoch die Maximalbandbreite beschränkt, kann für die praktischen Stabilisierbarkeit eines Systems laut [56] die Näherung  $|p| < 0.25|z|$  getroffen werden. Für vollaktuierte



5-DOF Magnetlagersysteme tauchen keine Nullstellen in der rechten Halbebene auf. Für den Fall einer Unteraktuation sollte jedoch die Zustandsraumgleichung auf Nullstellen in der rechten Halbebene untersucht werden. Die Höhe des Wertes von  $\pi \sum_{i=1}^{N_p} \text{Re}(p_i)$  wird bei einem Magnetlagersystem durch eine Vergrößerung der negativen Steifigkeit erhöht. Die negative Steifigkeit hat also nicht nur einen negativen Einfluss auf die minimal nötige Bandbreite, auch die praktische Stabilisierbarkeit wird mit einer Erhöhung verringert. In [58] und [59] werden Erweiterungen des "Waterbed"-Effektes auf Mehrgrößensysteme mit Hilfe der Determinante oder der Singulärwerte der Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}(j\omega)$  angegeben. Die Erweiterung mit Hilfe der Determinante lautet:

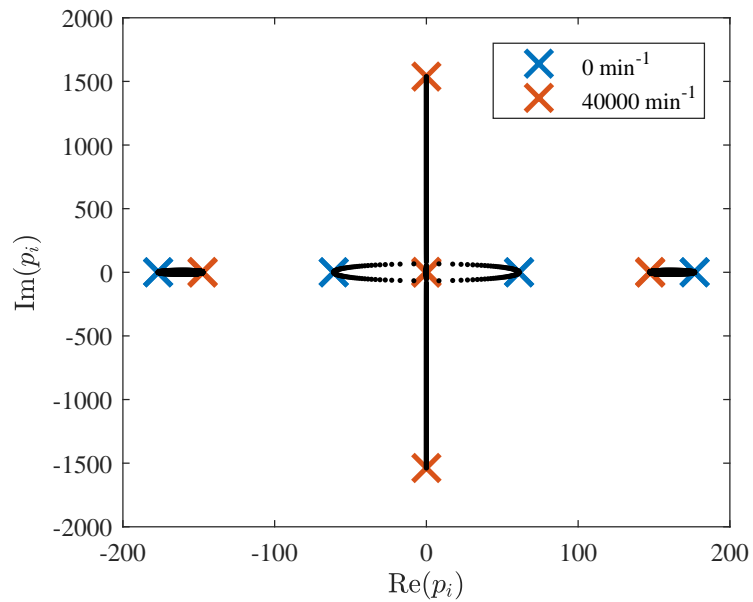
$$\int_0^{\infty} \ln |\det(\mathbf{S}(j\omega))| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{N_p} \text{Re}(p_i) \quad (5.23)$$

Die Limitierung der Sensitivität ist also für den MIMO-Fall durch den Betrag der Determinante von  $\mathbf{S}(j\omega)$  definiert und nicht durch die einzelnen Funktionen der Matrix. Es kann daher möglich sein, dass durch eine Verkopplung die Spitzen der Sensitivitätsfunktionen im Vergleich zu einem entkoppelten System verringert werden können. Diese Tatsache ist für die Stabilisierung im hohen Drehzahlbereich vorteilhaft.

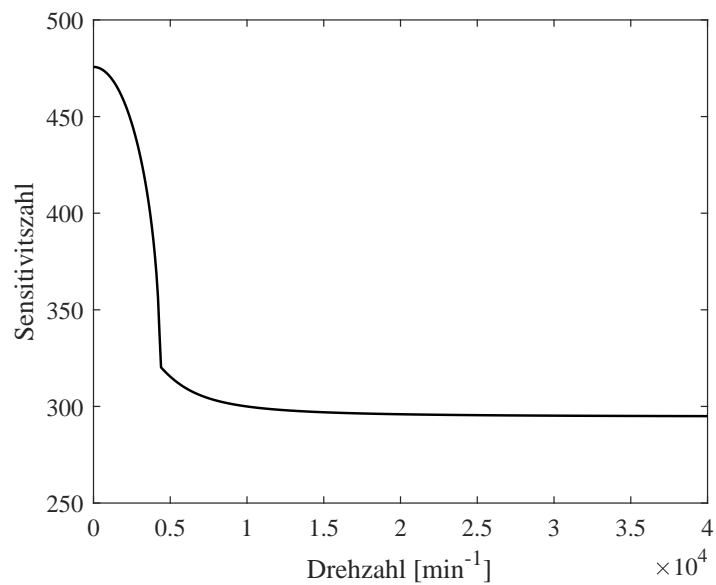
Um das Sensitivitätsverhalten magnetgelagerter Turbomolekularpumpen zu analysieren, wird eine Wurzelortskurve abhängig von der Drehzahl dargestellt (Abbildung 5.7(a)). Für die nachfolgenden Betrachtungen wird der Wert  $\pi \sum_{i=1}^{N_p} \text{Re}(p_i)$  als Sensitivitätszahl bezeichnet. Durch den drehzahlabhängigen gyroskopischen Effekt wird eine gewisse Anzahl der Eigenwerte zu der Imaginärachse hingezogen. Wird die Drehzahl weiter erhöht, resultieren, aus den bei niedrigen Drehzahlen realen Eigenwerten, konjugiert komplexe Polpaare. Diese Eigenwertpaare sind für höhere Drehzahlen grenzstabil und haben keinen negativen Einfluss mehr auf den "Waterbed"-Effekt. Es verbleiben zwar auch für höhere Drehzahlen Eigenwerte in der rechten Halbebene. Der Realteil dieser Eigenwerte nimmt jedoch mit steigender Drehzahl ab. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass sich der gyroskopische Effekt positiv auf die theoretische Stabilisierbarkeit des Magnetlagersystems auswirkt. Zur Verdeutlichung dieses Effekts wird in Abbildung 5.7(b) die Sensitivitätszahl abhängig von der Drehzahl dargestellt. Zu Beginn ist eine starke Änderung zu erkennen. Diese starke Änderung ist durch die Eigenwerte bedingt, welche auf die Imaginärachse gezogen werden. Liegen diese Eigenwerte einmal auf der Imaginärachse, so hat eine weitere Drehzahlerhöhung keinen Einfluss mehr auf die Realteile dieser Eigenwerte. Die schwache Verminderung der Sensitivitätszahl ist dann nur mehr von den verbleibenden Eigenwerten in der rechten Halbebene abhängig.

### 5.3.3 Forderung der Norm ISO 14839-3

Um eine qualitative Aussage über die Robustheit der magnetischen Lagerung zu erhalten, wird im ISO Standard 14839 Teil 3 [60] der Spitzenwert der Sensitivitätsfunktion als Robustheitsmaß eingeführt. Die Angaben der Messvariablen beziehen sich auf Abbildung 5.8. Für



(a) Wurzelortskurve abhängig von der Rotordrehzahl



(b) Sensitivitätszahl abhängig von der Rotordrehzahl

Abbildung 5.7: Drehzahlabhängiges Sensitivitätsverhalten der Turbomolekularpumpe 1 (AMB-System ohne Regelung)

die Messung der Sensitivitätsfunktion wird durch den Controller ein Sweep-Signal  $\mathbf{r}_s$  dem Sensorwert  $\mathbf{y}$  überlagert. Die Elemente der Sensitivitätsmatrix  $S_{i,k}$  berechnen sich dann aus

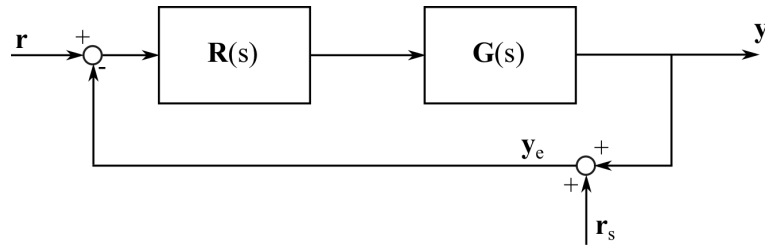


Abbildung 5.8: Auswertung der Sensitivitätsfunktion

dem gestörten Sensorsignalen  $y_{e,i}$  und  $r_{s,k}$  wie folgt:

$$S_{i,k}(j\omega) = \frac{\text{FFT}(y_{e,i})}{\text{FFT}(r_{s,k})} \quad (5.24)$$

Für die Klassifizierung der magnetischen Lagerung werden in der ISO 14839-3 nur die Diagonalelemente der Sensitivitätsmatrix herangezogen. Für den Fall der entkoppelten Regelung werden die Sensitivitätsfunktionen nicht direkt für die Sensorwerte, sondern für die transformierten Sensorwerte  $\mathbf{y} = [\beta, x_S, \alpha, y_S]^T$  ausgewertet. In dieser Arbeit werden im Gegensatz zur ISO 14839-3 zur Klassifizierung der magnetischen Lagerung alle Elemente der Sensitivitätsmatrix verwendet. Denn gerade für eine entkoppelte Regelung kann es vorkommen, dass für hohe Drehzahlen die Sensitivität der Kopplung der rotatorischen Bewegungen große Werte annimmt. Der Stabilitätsindex  $G_{s,max}$  nach ISO 14839-3 ist definiert als der größte Wert aller gemessenen Diagonalelemente der Sensitivitätsmatrix. In dieser Arbeit wird jedoch  $G_{s,max}$  als Maximum der gesamten Sensitivitätsmatrix definiert<sup>2</sup>.

$$G_{s,max} = \max[\mathbf{S}(j\omega)] \quad (5.25)$$

Die Grenzen der Stabilitätszonen sind in Tabelle 5.2 ersichtlich.

Zonengrenzen	Höchste Sens-Spitze [dB]	Höchste Sens-Spitze [1]
A/B	9.5 dB	3
B/C	12 dB	4
C/D	14 dB	5

Tabelle 5.2: Grenzen der Stabilitätszonen eines magnetgelagerten Rotors

Die Zonen sind wie folgt definiert:

- Zone A: Die Sensitivität neuer Magnetlagersysteme fällt in diesen Bereich.

<sup>2</sup>Es sei jedoch angemerkt, dass die Auswertung der verkoppelten Sensitivitätsfunktionen, welche unterschiedliche physikalische Einheiten in Ein- und Ausgang haben, eine geringere Aussagekraft besitzen, da deren Höhe von der Normierung der einzelnen Größen abhängt. Will man Sie dennoch anwenden, sollten die Werte auf den maximal möglichen Ausgang bezogen werden.

- Zone B: Magnetlagersysteme in diesem Bereich gelten als ausreichend robust für langzeitlaufende Rotoren.
- Zone C: Magnetlagersysteme in diesem Bereich gelten als nicht ausreichend robust für langzeitlaufende Rotoren. Normalerweise werden solche Rotoren nur für eine limitierte Zeit betrieben.
- Zone D: Magnetlagersystem in diesem Bereich gelten als nicht robust und können Schäden im Anwendungsbereich verursachen.

In dieser Arbeit gilt die Forderung, dass  $G_{s,max}$  in der Zone A liegen soll. Das Verhalten der Sensitivitätsfunktionen unter Parameterschwankungen sollte zusätzlich zu den Forderungen der Norm ISO 14839-3 untersucht werden.

### 5.3.4 Verhalten der $k_x$ -Kompensation unter Parameterschwankung

In diesem Unterabschnitt wird das dynamische Verhalten der Kompensation der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_x$  unter Parameterschwankung analysiert. Da der Modellierungsfehler der negativen Steifigkeiten  $k_x$  große Werte annehmen kann, wird das dynamische Verhalten unter der Variation der Einträge von  $\mathbf{K}_x$  angegeben. Analysen an den eingesetzten Magnetlagersystemen haben gezeigt, dass die Änderung der negativen Steifigkeit  $k_x$  durchaus  $\pm 10\%$  des nominellen Wertes betragen kann. Eine wichtige Eigenschaft der  $k_x$ -Kompensation ist die Entkopplung der rotatorischen und translatorischen Bewegungen. Um die Effektivität der Entkopplung unter Parametervariation zu evaluieren, wird die Verstärkung der verkoppelten Compliance-Funktion zwischen rotatorischen und translatorischer Bewegung simuliert (Abbildung 5.9). Dabei wird für das Anrege- und Eingangssignal der Eintrag  $M_\beta$  des transformierten Einganges  $\boldsymbol{\tau}$  verwendet. Die Ausgangsmessung ist definiert durch den Eintrag  $x_s$  des transformierten Sensorsignals  $\mathbf{y}_T$ . Abbildung 5.9 zeigt, dass die Kompensation mit einem Fehler von 10 % kaum eine Verkopplung besitzt. Vergleicht man die verkoppelten Transferfunktionen miteinander, so erkennt man, dass selbst bei einem Fehler von 50 % der Maximalwert um etwa einen Faktor 3 kleiner ist, als ohne Kompensation. Die entkoppelnde Wirkung der  $k_x$ -Kompensation, bleibt also auch bei höheren Modellfehlern erhalten.

Um auch die Robustheit der entkoppelten Regelung zu verifizieren, werden die Sensitivitätsfunktionen unter Parametervariation analysiert. Abbildung 5.10 zeigt die simulierten Sensitivitätsfunktionen der rotatorischen Bewegungen unter Variation der Steifigkeit  $k_x$  und unter anisotropem Verhalten der Magnetlager. Der erste Index von  $S$  zeigt dabei den gemessenen Freiheitsgrad und der zweite Index den Freiheitsgrad an welchem das System angeregt wird ( $x$  bzw.  $y$  repräsentieren dabei die translatorischen Schwerpunktkoordinaten). Um eine Anisotropie zu simulieren wurden die  $k_i$ - und  $k_x$ -Einträge der Systemmatrizen in  $x$ -Richtung um den Faktor 1.1 erhöht. Die linke obere und die rechte untere Transferfunktion zeigen jeweils die symmetrischen Einträge der Transfermatrix und die beiden anderen die verkoppelten Funktionen. Aus den Sensitivitätsfunktionen erkennt man, dass die Robustheit des

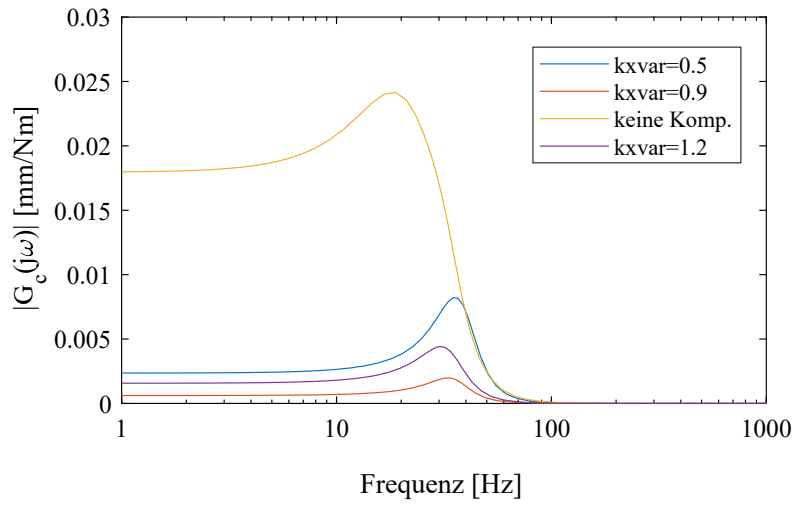


Abbildung 5.9: Betrag der verkoppelten Compliance-Funktion  $|G_c(j\omega)|$  der rotatorischen und der translatorischen Bewegung bei Stillstand und Variation von  $k_x$

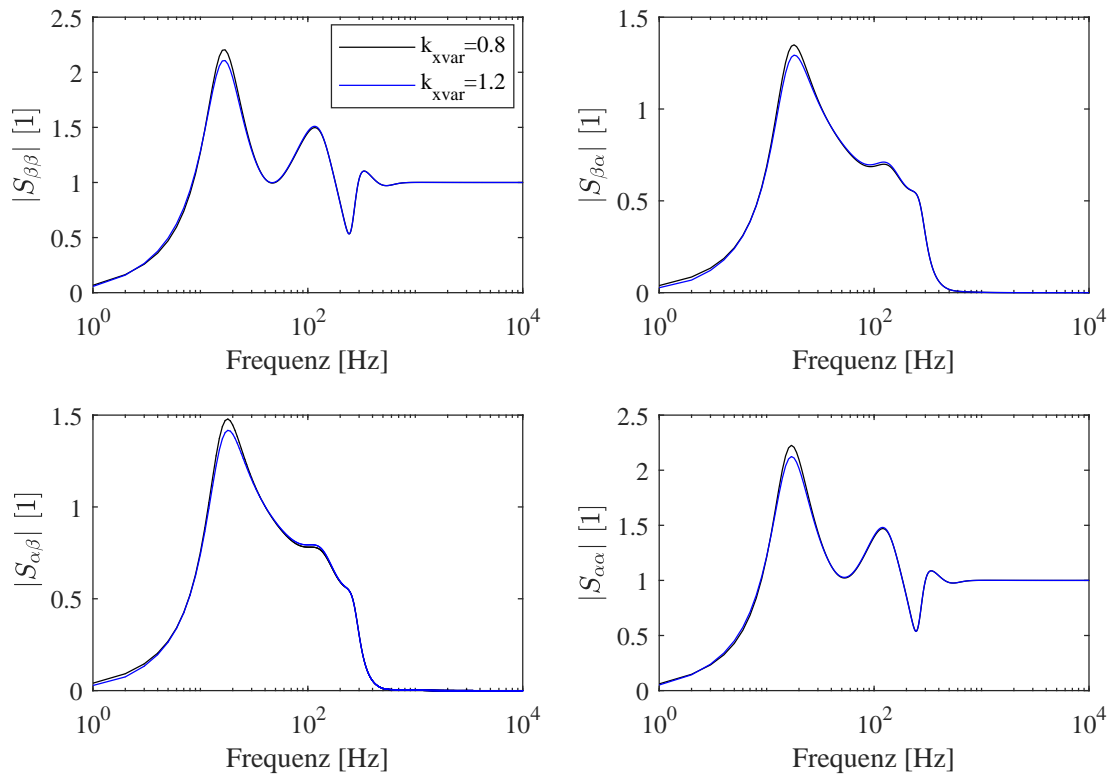


Abbildung 5.10: Simulierte Sensitivitätsfunktionen der rotatorischen Bewegungen unter Variation der negativen Steifigkeit  $k_x$  und anisotropem Verhalten der Magnetlager bei  $40000 \text{ min}^{-1}$

Systems auch unter einer  $k_x$ -Schwankung von  $\pm 20\%$  noch gegeben ist. Das Magnetlagersystem erreicht in diesem Parameterbereich Zone A laut ISO 14839-3. Bei Nenndrehzahl können jedoch die verkoppelten Transferfunktionen nicht mehr vernachlässigt werden, da das Maximum der Funktion durchaus kritische Werte annehmen kann. Auch die Sensitivitätsfunktionen

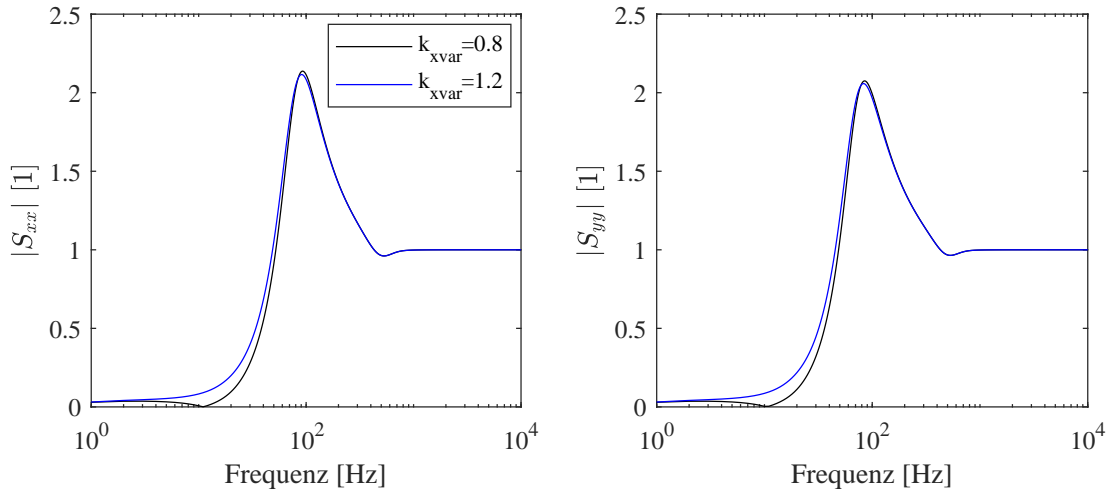


Abbildung 5.11: Simulierte symmetrische Elemente der Sensitivitätsmatrix der translatorischen Bewegungen unter Variation der negativen Steifigkeit  $k_x$  und anisotropem Verhalten der Magnetlager bei Nenndrehzahl

der translatorischen Bewegungen (Abbildung 5.11) erfüllen unter der definierten Parameterschwankung die Norm. Alle anderen Sensitivitätsfunktionen der Sensitivitätsmatrix sind bei dieser Art der Stabilisierung vernachlässigbar klein. Da sich die Sensitivitätsfunktion unter den Parameterschwankungen der negativen Steifigkeit  $k_x$  nur hinreichend wenig ändern, kann das stabilisierte System als robust gegen einen Modellierungsfehler der negativen Steifigkeiten  $k_x$  angesehen werden.

### 5.3.5 Einfluss der Kompensation des gyroskopischen Effektes auf die Sensitivität des geschlossenen Regelkreises

Um eine robuste Regelung auslegen zu können, ist die Kenntnis des Einflusses der Gewichtungsmatrizen des Kalman-Filters auf die Sensitivitätsfunktion von essentieller Bedeutung. Abbildung 5.12 zeigt daher die Sensitivitätsfunktionen der rotatorischen Bewegungen in Abhängigkeit von der Gewichtung der Prozessstörung  $\hat{\mathbf{Q}}$  und der Höhe des Kompensationsfaktors  $c_g$ . Die Gewichtungsmatrix wurden wie folgt gewählt<sup>3</sup>:

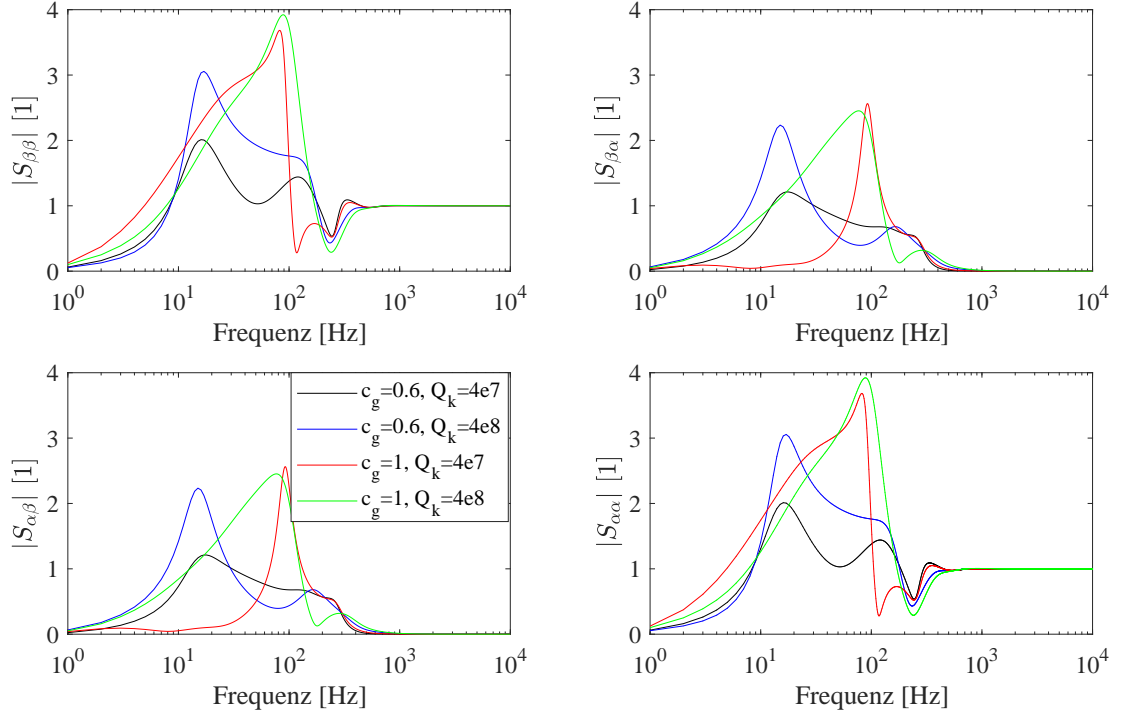


Abbildung 5.12: Simulierte Sensitivitätsfunktionen der rotatorischen Bewegungen unter Variation von des Kompensationsfaktors  $c_g$  und  $Q_k$  bei  $40000 \text{ min}^{-1}$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{Q}} = Q_k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

In den Ergebnissen der Simulation ist ein starker Einfluss des Parameters  $c_g$  zu erkennen. Eine vollständige Kompensation des gyroskopischen Effektes des starren Körpers, würde also zu einem wenig robusten System führen. Verringert man die Höhe der Kompensation ( $c_g = 0.6$ ), kann  $G_{s,max}$  deutlich verringert werden.  $c_g$  kann jedoch nicht beliebig verringert werden, da die Aufspaltung der rotatorischen Eigenwerte immer größer werden würde. Für den Fall eines zu kleinen Wertes  $c_g$ , wäre eine unnötig hohe Bandbreite des Reglers, oder eine geringe Dämpfung einer Eigenschwingung die Folge. Diese geringe Dämpfung würde wieder eine Erhöhung von  $G_{s,max}$  mit sich ziehen. Es muss also ein gewisser Trade-off zwischen der Robustheit und der nötigen Bandbreite gefunden werden. Der Gewichtungsfaktor der Prozessstörung  $Q_k$  besitzt auch einen großen Einfluss auf die Sensitivitätsfunktion des geschlossenen Regelkreises. Aus Abbildung 5.12 kann auf eine Vergrößerung von  $G_{s,max}$  bei größer werdenden  $Q_k$  geschlos-

<sup>3</sup>Die Einheiten in den Elementen der Gewichtungsmatrizen wurden aufgrund einer besseren Übersicht weggelassen

sen werden. Dies kann nicht auf den gesamten Bereich von  $Q_k$  verallgemeinert werden. Ein zu kleiner Faktor  $Q_k$  würde einem Szenario mit nur geringer Prozessstörung  $\mathbf{w}$  entsprechen. Es kann also nicht schnell genug auf eine nicht modellierte Störung reagiert werden. Diese Tatsachen können zu kleinen Dämpfungen und einer schlechten Kompensation des gyroskopischen Effektes und daher zur Destabilisierung des magnetgelagerten Rotors führen. Aus den Ergebnissen der Simulation ist auch der wichtige Einfluss der verkoppelten Sensitivitätsfunktionen ersichtlich, da die Verstärkungen relevante Höhen annehmen können. In [39] wurde ein Szenario gezeigt, in welchem eine verkoppelte Sensitivitätsfunktion höher als die diagonalen Sensitivitätsfunktionen ist.

### 5.3.6 Einfluss eines Fehlers der Rotordrehzahl auf die Sensitivität des geschlossenen Regelkreises

Für die Zustandsschätzung werden statt eines "Extended"-Kalman-Filters mehrere LTI-Kalman-Filter für verschiedenen Drehzahlbereiche verwendet. Diese Tatsache hat einen Modellierungsfehler des Beobachters zur Folge. Um eine Abschätzung des Einflusses dieses Fehlers auf die Stabilität und die Robustheit des geschlossenen Regelkreises zu erhalten, wird die Sensitivitätsfunktion für verschiedene Drehzahlfehler visualisiert (Abbildung 5.13). Das System erfüllt die geforderte Robustheit für einen positiven Fehler  $e_n = n_r - n_k$  von  $10000 \text{ min}^{-1}$ . Wobei  $n_r$  die Rotordrehzahl und  $n_k$  die Auslegedrehzahl des Kalmanfilters beschreibt. Die Robustheit wird für einen positiven Fehler sogar besser, da sich  $G_{s,max}$  verringert. Der Grund für diese Verringerung liegt in der Phasenverschiebung des geschätzten Geschwindigkeitsvektors  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}$  gegenüber dem realen Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{x}}$ . Um diesen Effekt erklären zu können, wird zunächst der Einfluss der verkoppelten Steifigkeiten auf die Dämpfung der Nutations- und Präzessions-Eigenschwingungen analysiert.

In [61] und [62] wird eine stabilisierende Wirkung von Reglern in den Querkopplungen analysiert. Eine positive Quersteifigkeit wirkt dabei dämpfend auf die Nutations-Eigenschwingung, aber destabilisierend auf die Präzessions-Eigenschwingung. Um diese Tatsache genauer zu analysieren, werden die Eigenwerte eines mittels Feder und Dämpfer stabilisierten rotatorischen Teilsystem in Abhängigkeit der verkoppelten Steifigkeit  $k_q$  visualisiert (Abbildung 5.14). Die Steifigkeit  $k_q$  wird dabei im Regelgesetz wie folgt verwendet:

$$\mathbf{f}_{kq}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(s) \quad (5.27)$$

$$\mathbf{v}(s) = \mathbf{f}_{kq}(s) + \mathbf{R}(s)\mathbf{x}(s)$$

wobei  $\mathbf{R}(s)$  die Übertragungsfunktion der dezentralen PID-Regelung beschreibt und  $\mathbf{v}$  den Eingang des entkoppelten Systems. Man kann erkennen, dass eine positive Steifigkeit dämpf-



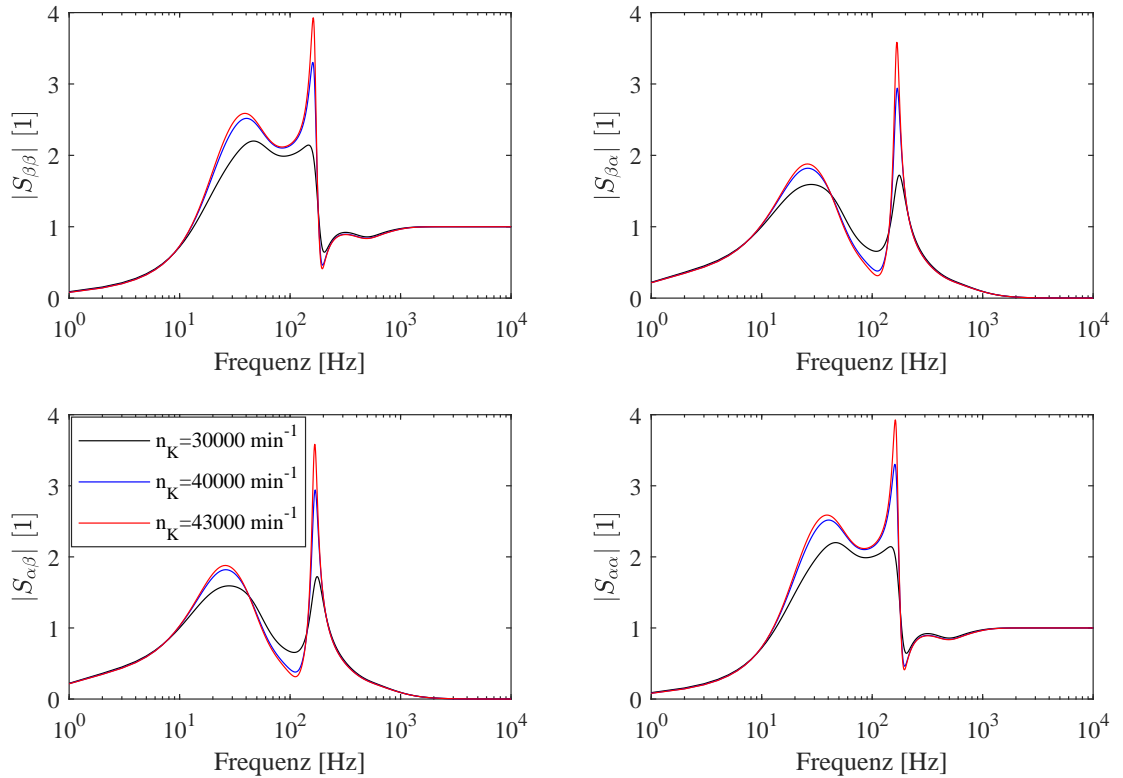


Abbildung 5.13: Simulierte Sensitivitätsfunktionen der rotatorischen Bewegungen unter Variation der Auslegungsdrehzahl  $n_k$  bei einer Rotordrehzahl von  $40000 \text{min}^{-1}$

fend auf die Nutationsbewegung aber destabilisierend auf die Präzessionsbewegung wirkt. Für eine negative Quersteifigkeit gilt das Gegenteil. Da jedoch der Frequenzabstand der Nutations- und Präzessions-Eigenfrequenzen für höher werdende Drehzahlen zunimmt, können Übertragungsfunktionen realisiert werden, welche für beide Eigenschwingungen dämpfend wirken. Eine mögliche Realisierung ist in Abbildung 5.15 ersichtlich. Mithilfe von  $k_{pr}$  und  $k_{nut}$  können die Präzessions-Eigenschwingung und die Nutations-Eigenschwingung, für hohe Drehzahlen und unter der Voraussetzung einer ausreichenden Filterung, getrennt voneinander beeinflusst werden.

Für das vorhandene Magnetlagersystem ist eine solche Quersteifigkeit nicht eingesetzt, da die Robustheit für einen stabilen Betrieb auch ohne Quersteifigkeiten ausreichend groß ist. Der gezeigte Effekt aus Abbildung 5.14 ist dennoch wichtig, um die Erhöhung der Robustheit durch einen Drehzahlfehler des Kalman-Filters zu verstehen. Abbildung 5.16 zeigt den Fehler der Schätzung im Frequenzbereich für den Zustand  $\dot{\beta}$ . Für die Berechnung des Schätzfehlers

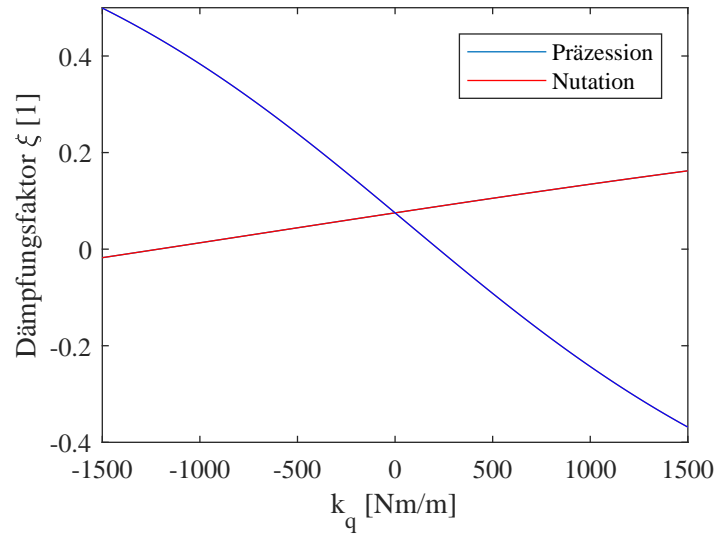


Abbildung 5.14: Dämpfungsfaktor  $\xi$  in Abhängigkeit der verkoppelten Quersteifigkeit der rotatorischen Eigenschwingungen

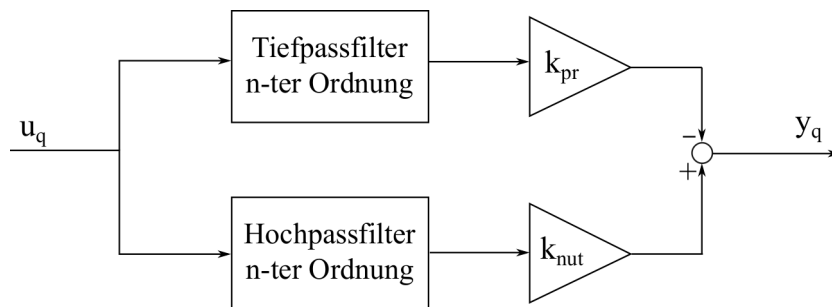


Abbildung 5.15: Mögliche Regelung zur Verbesserung der Sensitivitätsfunktion durch das Aufschalten von verkoppelten Quersteifigkeiten  $k_q$

wird eine Anregung im Strom angenommen und der Fehler

$$e_{sch} = \frac{\text{FFT}(\hat{\beta})}{\text{FFT}(\dot{\beta})} \quad (5.28)$$

visualisiert. Man erkennt, dass alle zwei Kalman-Filter einen Fehler im Betragsgang für tiefere Frequenzen besitzen. Für die Auslegedrehzahl von  $43000 \text{ min}^{-1}$  kann der Fehler sogar größere Werte als 1 annehmen, was zu einer zu starken Kompensation des gyroskopischen Effektes führen kann. An den Phasenverschiebungen ist zu erkennen, dass bei einer Auslegedrehzahl von  $30000 \text{ min}^{-1}$  nur ein Schnittpunkt mit der  $0^\circ$ -Linie im dargestellten Frequenzbereich existiert, wohingegen für den Fall einer Auslegedrehzahl von  $43000 \text{ min}^{-1}$  zwei Schnittpunkte vorhanden sind. Bei einer idealen Schätzung der Zustände hätte die Kompensation des

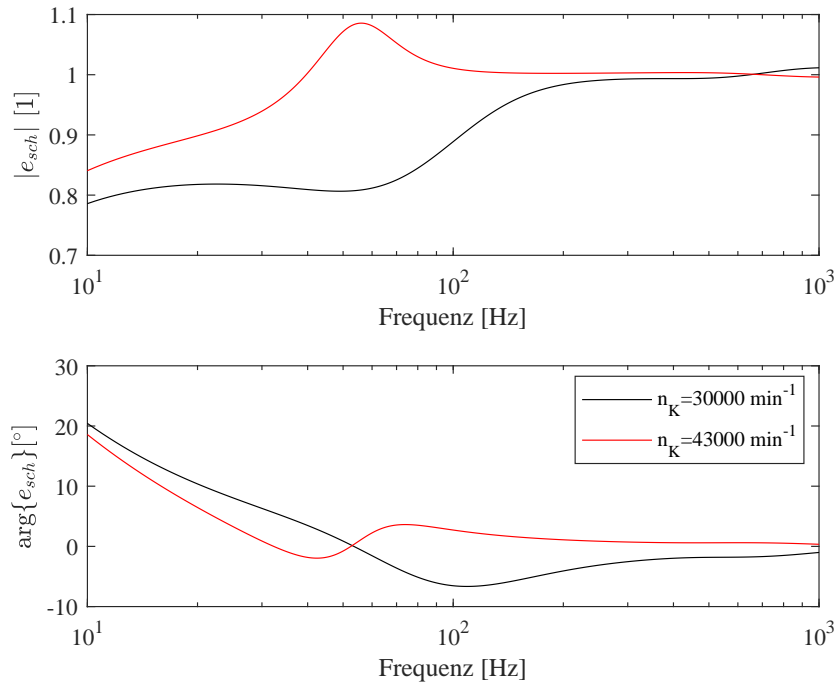


Abbildung 5.16: Simulierter Fehler der Winkelgeschwindigkeitsschätzung  $\dot{\beta}$  bei  $40000 \text{ min}^{-1}$  für zwei verschiedene Auslegedrehzahlen des Kalman-Filters

gyroskopischen Effektes nur geschwindigkeits-proportionale Anteile und diese hätten zu den zugehörigen Positionssignalen einen Phasenwinkel von  $90^\circ$ . Die Kompensationsterme des gyroskopischen Effektes wären also schiefsymmetrische Anteile der Dämpfungsmatrix. Durch eine nicht ideale Schätzung entsteht, wie oben gezeigt, eine Phasenverschiebung zwischen Schätzung und den wahren Zuständen. Die Phasenverschiebung der Geschwindigkeiten zu den zugehörigen Positionssignalen sind als Zeitzeiger in Abbildung 5.17 ersichtlich. Bei einer negativen Phasenverschiebung von  $\arg\{e_{sch}\}$  hat die Kompensation des gyroskopischen Effektes zusätzliche Anteile, welche das Verhalten einer positiven Quersteifigkeit  $k_q$  widerspiegeln. Eine positive Phasenverschiebung von  $\arg\{e_{sch}\}$  spiegelt daher das Verhalten einer negativen Quersteifigkeit  $k_q$  wieder. Für eine Auslegedrehzahl welche kleiner als die reale Drehzahl ist, besitzt das System für tiefe Frequenzen eine positive Phasenverschiebung und für hohe Frequenzen eine negative. Daher profitieren sowohl die Präzessions-Eigenschwingung als auch die Nutations-Eigenschwingung von der Phasenverschiebung zwischen dem geschätztem und den wahren Zuständen. Für den Fall einer zu hohen Auslegedrehzahl ändert sich die Phasenverschiebung und das Laufverhalten sowie die Robustheit des Systems verschlechtern sich. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass ein Schätzfehler nicht zu einer Verschlechterung des Systemverhaltens führen muss. Beim vorhanden System kann ein unvermeidbarer Schätzfehler sogar für eine Verbesserung der Robustheit herangezogen werden.

Abbildung 5.18 zeigt den Vergleich zwischen der verwendeten Kompensation mit Hilfe

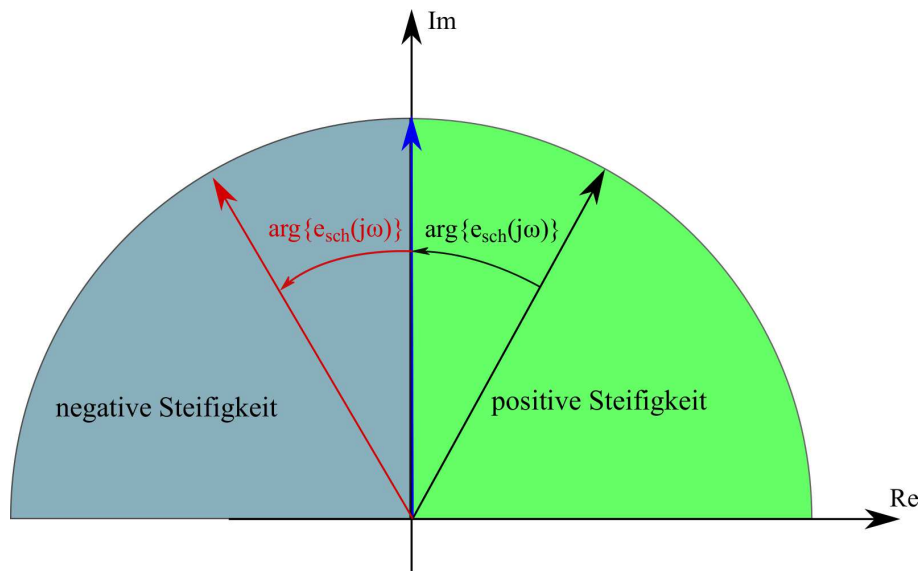


Abbildung 5.17: Zusammenhang zwischen der Quersteifigkeit  $k_q$  und  $\arg\{e_{sch}\}$

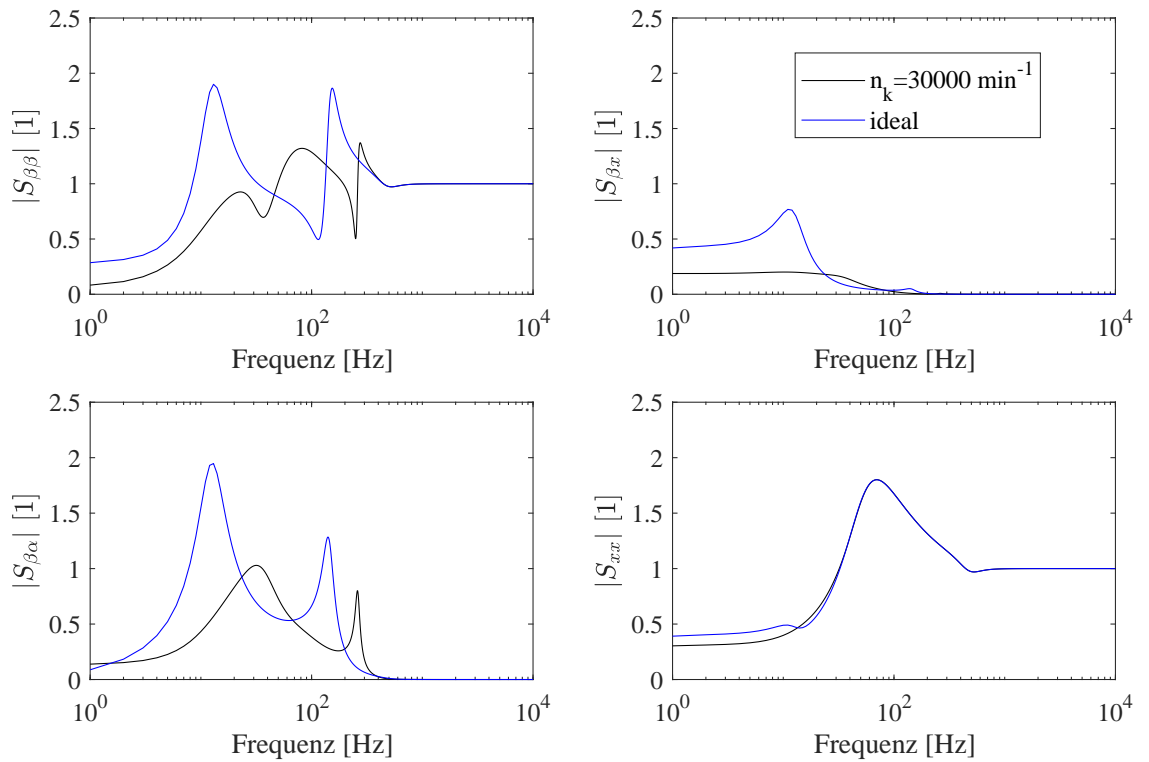


Abbildung 5.18: Vergleich der Sensitivitätsfunktionen zwischen einer Kompensation mit idealer Messung und einer Kompensation mittels geschätzter Zustände

der geschätzten Zustände und einer Kompensation mit Hilfe ideal gemessener Geschwindigkeiten. Ideal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die aus der Simulation berechneten Zustände direkt für die Berechnung der Kompensationssignale verwendet wurden. Der Kompensationsfaktor  $c_g$  bleibt jedoch gleich. Die Abbildung stellt die direkte rotatorische Sensitivitätsfunktion, die verkoppelte Sensitivitätsfunktion zwischen rotatorischer und translatorischer Bewegung, die verkoppelte Sensitivitätsfunktion zwischen den beiden rotatorischen Bewegungen und eine direkte translatorische Sensitivitätsfunktion dar. Es ist zu erkennen, dass bei einer geeigneten Wahl der Kalman-Parameter die Sensitivität sogar besser ist, als eine Kompensation mit einer idealen Messung der Geschwindigkeiten. Bei der verkoppelten Sensitivitätsfunktion ist der Absolutwert nur bedingt für eine Sensitivitätsaussage geeignet, da dieser von den Normierungen der Winkelkoordinaten und der Abstände abhängt. Der Grund für diese Verbesserung, kann wie oben beschrieben, in der Quersteifigkeit gefunden werden. Ein anderer Aspekt um die Verbesserung zu beschreiben liegt in dem unteren Limit der Sensitivitätsfunktionen, welche aus der Determinante von  $\mathbf{S}(j\omega)$  gegeben ist. Daher können Verkopplungen helfen, die Sensitivitätsspitze der einzelnen Sensitivitätsfunktionen zu verkleinern. Eine vollständige Entkopplung resultiert im Falle von Magnetlagern also nicht immer in einer robusteren Regelung.

Sowohl die direkten Sensitivitätsfunktionen als auch die verkoppelten deuten auf ein robustes Verhalten der Regelung hin, welche die vorgegebene ISO-Norm erfüllt.

### 5.3.7 Experimentelle Ergebnisse

Um die Performance und die Robustheit der in diesem Abschnitt entwickelten Reglerstruktur zu verifizieren, wurden verschiedene Experimente an der Turbomolekularpumpe 1 durchgeführt. Das Systemverhalten wird anhand mehrerer Messungen analysiert:

- Messung der Compliance-Funktionen für verschiedene Kompensationsfaktoren  $c_g$  bei Stillstand und verschiedenen Drehzahlen der rotatorischen Bewegungen
- Messung der Sensitivitätsfunktionen für verschiedene Kompensationsfaktoren  $c_g$  bei Stillstand und verschiedenen Drehzahlen der rotatorischen Bewegungen
- Messungen der Compliance- und Sensitivitäts-Funktion bei Stillstand und einer Drehzahl von  $40000 \text{ min}^{-1}$  der translatorischen Bewegungen

#### Messung der Compliance-Funktionen für verschiedene Werte von $c_g$

Um das dynamische Verhalten des Systems auf eine Anregung des Rotors mittels einer Kraft zu analysieren, wurden Compliance-Funktionen eines rotatorischen Freiheitsgrades gemessen. Die Messungen wurden bei Stillstand und  $14000 \text{ min}^{-1}$  und für mehrere Werte von  $c_g$  durchgeführt. Diese Variationen dienten der Verifikation der Kompensationseigenschaft der entwickelten Reglerstruktur hinsichtlich des gyroskopischen Effektes (Abbildung 5.19). Im

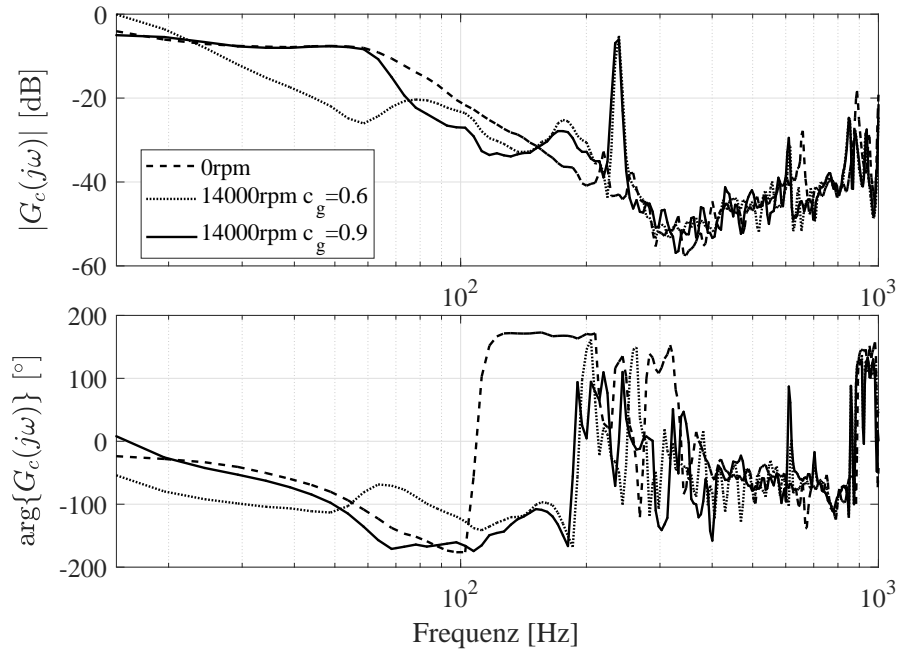


Abbildung 5.19: Rotatorische Compliance-Funktion für verschiedene Werte des Kompensationsfaktors  $c_g$  und verschiedene Drehzahlen

Frequenzbereich der Starrkörpermoden (0 – 70 Hz) besitzt das System im Stillstand und für  $14000 \text{ min}^{-1}$  bei einem  $c_g = 0.9$  eine sehr ähnliche Form der Compliance-Funktion. Die Spitze bei ungefähr 230 Hz resultiert aus der Unwuchteigenschaft des Rotors, welcher immer synchron zur Drehzahl ist. Im Gegensatz dazu, ist die Form der Compliance-Funktion bei einem Kompensationsfaktor von  $c_g = 0.6$  sehr unterschiedlich. Es sei jedoch angemerkt, dass die Güte der Kompensation nichts mit der Performance der Regelung gleichzusetzen ist. Wie in den Simulationen beschrieben, kann es sogar sein, dass ein schlechter kompensiertes System eine bessere Robustheit im Sinne der ISO 14839-3 besitzt. Bei Frequenzen oberhalb von 100 Hz nimmt auch der Unterschied zwischen dem stark kompensierten System und dem System bei Stillstand zu. Der Grund hierfür liegt in der begrenzten Bandbreite des Kalman-Filters und in nicht-modellierten Effekten wie z.B. die flexiblen Eigenschaften des Rotors und der Turbinenschaufeln. Der Grund warum die Auswirkung des Kompensationsparameters  $c_g$  nicht bei  $40000 \text{ min}^{-1}$  untersucht wurden, liegt in einer möglichen Destabilisierung des Rotors mit einem zu hohen oder zu niedrigen Kompensationsfaktor bei  $40000 \text{ min}^{-1}$ . Abbildung 5.20 zeigt die Compliance-Funktion bei einer Drehzahl von  $40000 \text{ min}^{-1}$  und einem Kompensationsfaktor  $c_g = 0.6$ . Der gyroskopische Effekt ist nur für den Starrkörper kompensiert, für die flexiblen Moden ist der gyroskopische Effekt jedoch immer noch vorhanden. Daher sind in Abbildung 5.20 auch zwei Resonanzüberhöhungen aufgrund der Biegemoden erkennbar. Die Biegeschwingung mit der geringeren Frequenz wirbelt im entgegengesetzten Drehsinn wie

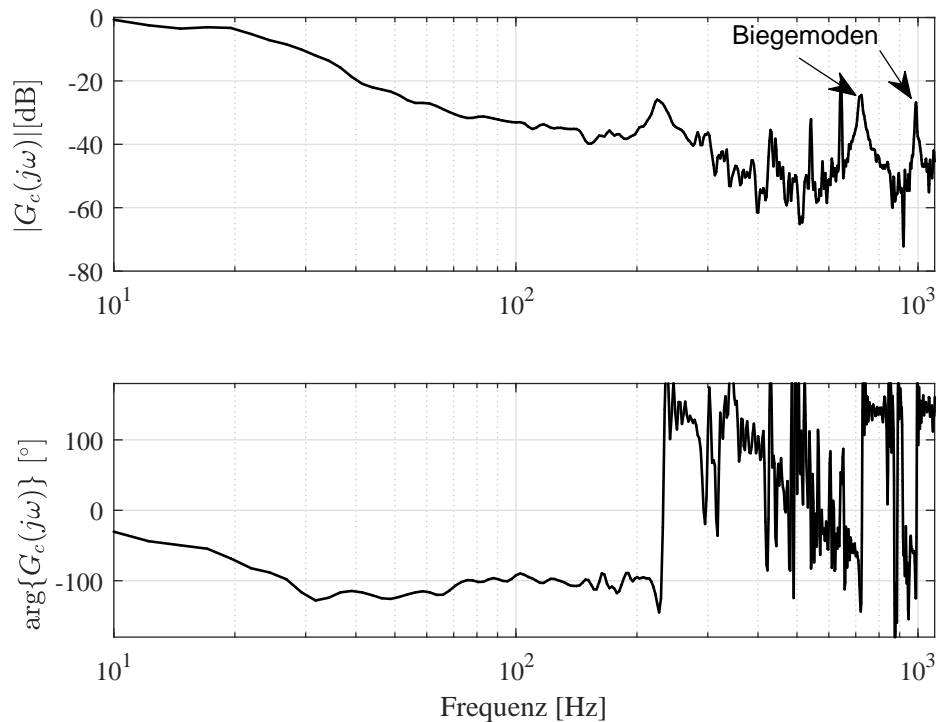


Abbildung 5.20: Rotatorische Compliance-Funktion für eine Drehzahl von  $40000 \text{ min}^{-1}$  und einem Kompensationsfaktor  $c_g = 0.6$

die Drehung des Rotors ("backward whirl"). Die Biegeschwingung mit der höheren Frequenz wirbelt mit demselben Drehsinn wie die Drehung des Rotors ("forward whirl").

### Messung der Sensitivitätsfunktionen für verschiedene Werte von $c_g$

Dieser Unterabschnitt beschäftigt sich mit der Verifikation und der Analyse der Robustheit des magnetisch gelagerten Rotors. Die Messungen sind für Stillstand und  $14000 \text{ min}^{-1}$  für mehreren Werte von  $c_g$  in Abbildung 5.21 ersichtlich. Da nur die rotatorischen Sensitivitätsfunktionen abhängig von der Drehzahl sind, werden auch nur diese bei verschiedenen Drehzahlen gemessen. Es ist zu erkennen, dass die Sensitivitätsfunktionen für Stillstand einen höheren Spitzenwert besitzt, als für eine Drehzahl von  $14000 \text{ min}^{-1}$ . Der Grund hierfür wurde bei den Simulationsergebnissen beschrieben und liegt in den Quersteifigkeiten, welche aufgrund einer nicht exakten Schätzung der Zustände resultieren. Die Robustheit des Magnetlagersystems wird, wie aus den beiden Messungen bei  $14000 \text{ min}^{-1}$  ersichtlich ist, durch eine Verringerung des Kompensationsfaktors  $c_g$  verbessert. Dieses Experiment zeigt eine Verbesserung der Sensitivität durch eine höhere Drehzahl (vgl. Abschnitt 5.3.1).

Abbildung 5.22 zeigt die direkte und die verkoppelte rotatorische Sensitivitätsfunktion des stabilisierten Rotors der Turbomolekularpumpe 1. Beide Funktionen erfüllen die ISO 14839-3. Der Spitzenwert der Sensitivitätsfunktion kann nur durch die Kombination der oben beschrie-

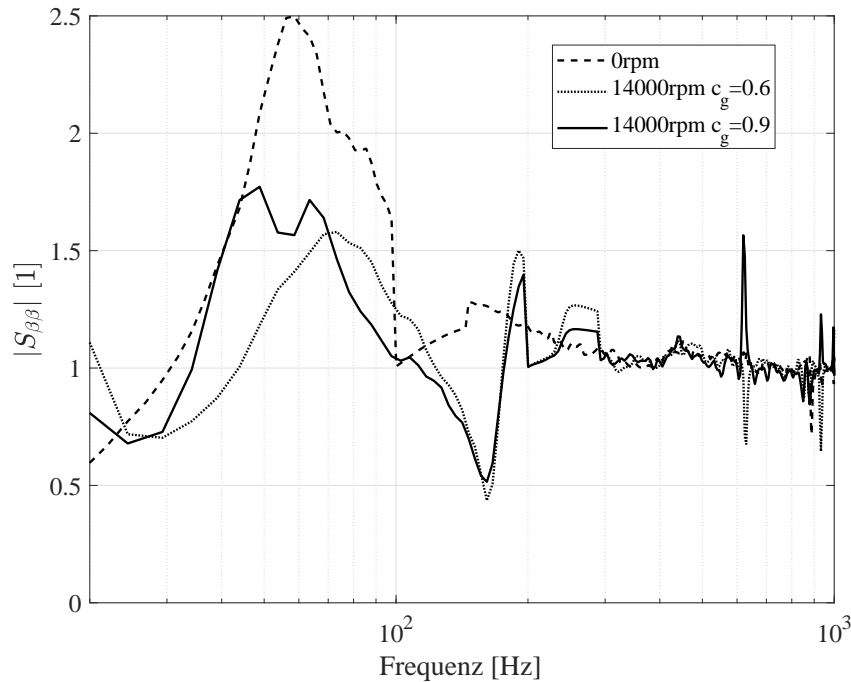


Abbildung 5.21: Rotatorische Sensitivitätsfunktion für verschiedene Werte des Kompensationsfaktors  $c_g$  und verschiedene Drehzahlen

benen Effekte auf einen solch kleinen Wert gebracht werden.

### Verhalten der translatorischen Freiheitsgrade

Bisher wurde ausschließlich das dynamische Verhalten der rotatorischen Freiheitsgrade beschrieben, da diese aufgrund des gyroskopischen Effektes komplizierter zu stabilisieren sind. Um die Robustheit und das dynamische Verhalten des geschlossenen Systems zu verifizieren, ist auch die Analyse der translatorischen Bewegungen nötig. Abbildung 5.23 zeigt daher die Compliance-Funktionen für Stillstand und einer Drehzahl von  $40000 \text{ min}^{-1}$ . Beide Funktionen zeigen annähernd gleiches Verhalten. Es ist also kaum eine Drehzahlabhängigkeit vorhanden. Diese Tatsache weist die entkoppelnde Wirkung der Reglerstruktur nach. Die Spitze bei ca.  $650 \text{ Hz}$  ist wiederum in der Unwucht des Rotors begründet. Im Gegensatz zur rotatorischen Compliance-Funktion ist kaum eine Resonanzüberhöhung aufgrund der ersten Biegemode zu sehen. Die erste Biegemode ist also für die rotatorische Bewegung besser steuerbar und beobachtbar als für die translatorische. Die Beobachtbarkeit der flexiblen Moden kann schon anhand der Eigenformen aus Abbildung 4.17 abgeschätzt werden. Da eine annähernde Drehzahlunabhängigkeit der translatorischen Bewegung durch die Messung der Compliance-Funktionen verifiziert wurde, reicht die Darstellung der Sensitivitätsfunktion bei  $40000 \text{ min}^{-1}$  aus (Abbildung 5.24). Diese Sensitivitätsfunktion weist die Erfüllung der ISO 14839-3 für die translatorischen Bewegungen nach. Die translatorischen Regler können einfach für den Still-



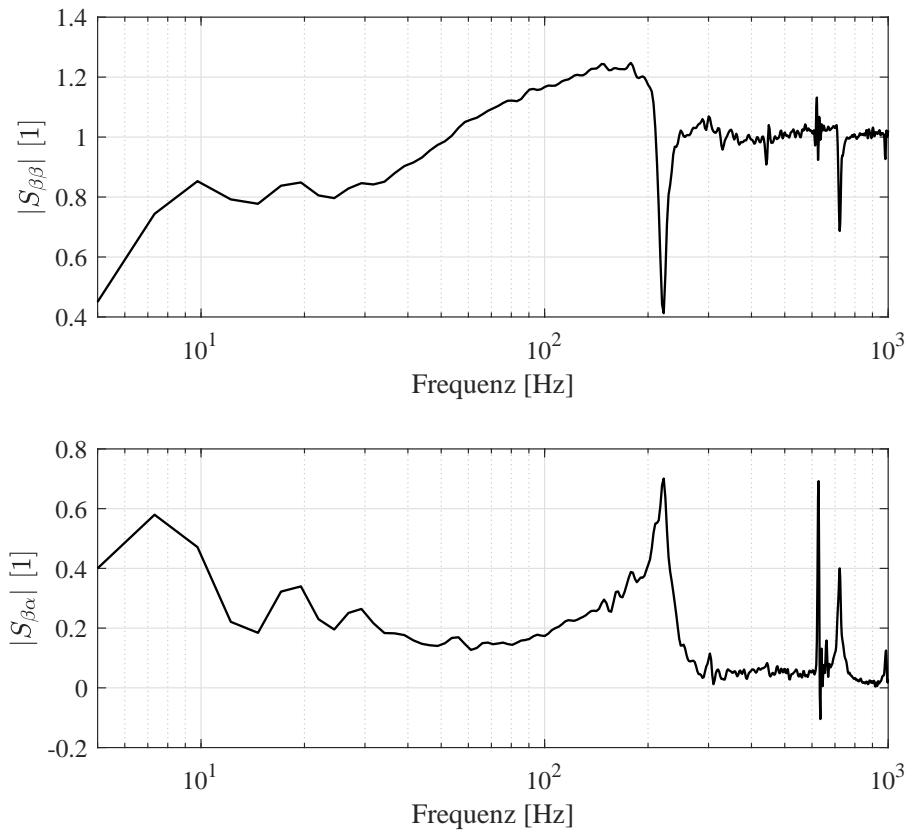


Abbildung 5.22: Rotatorische Sensitivitätsfunktionen für eine Drehzahl von  $40000 \text{ min}^{-1}$  und einem Kompensationsfaktor  $c_g = 0.6$

stand entworfen werden und benötigen aufgrund der annähernden Drehzahlunabhängigkeit keine Adaption im Betrieb der Turbomolekularpumpe.

Die in diesem Abschnitt gezeigten Messungen weisen durch die geringen Resonanzüberhöhungen der Compliance-Funktionen ein gutes Laufverhalten des Rotors nach. Des Weiteren wurde die Robustheit des Systems durch die Sensitivitätsfunktionen bestätigt.

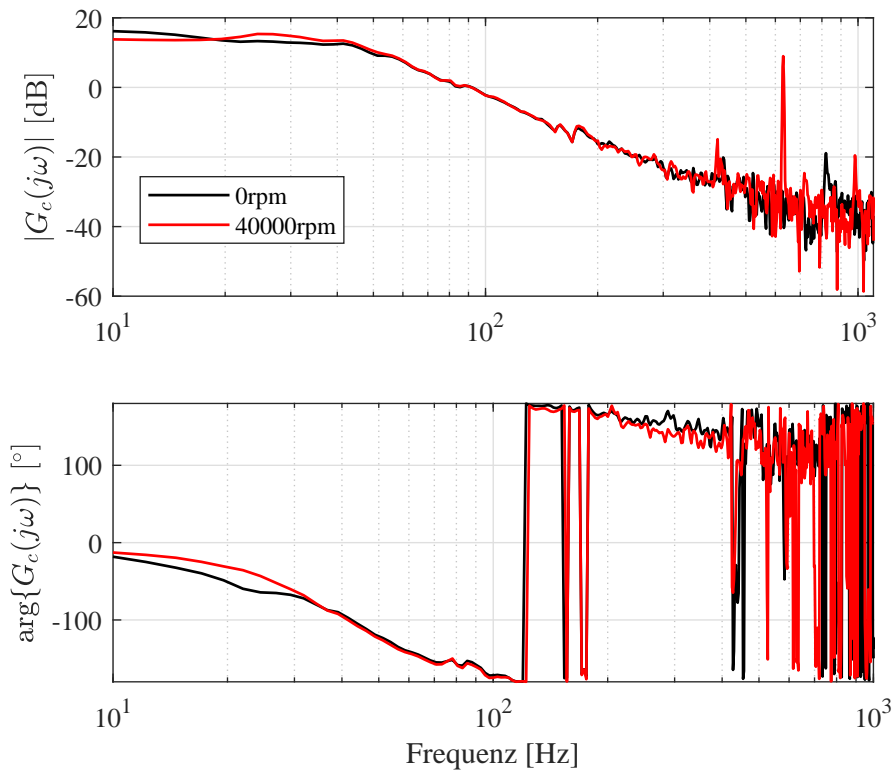


Abbildung 5.23: Vergleich der translatorischen Compliance-Funktionen für Stillstand und einer Drehzahl von  $40000 \text{ min}^{-1}$

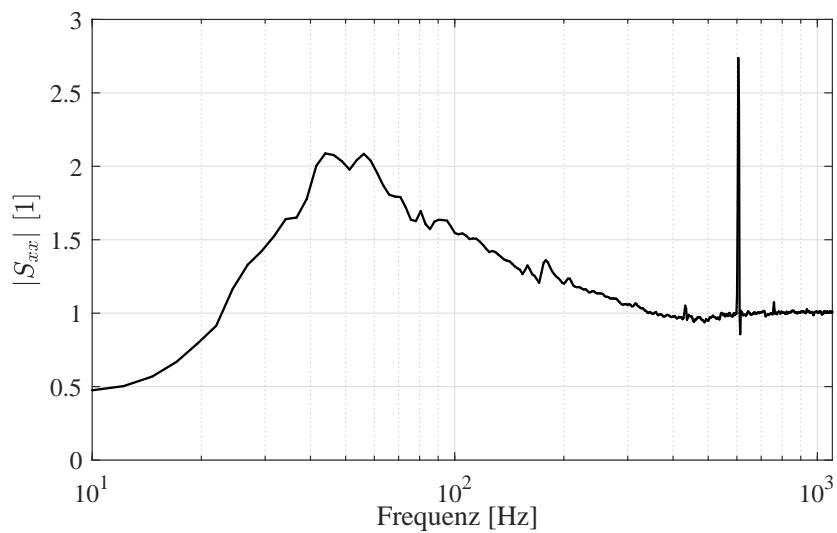


Abbildung 5.24: Translatorische Sensitivitätsfunktion für eine Drehzahl von  $40000 \text{ min}^{-1}$

## 5.4 Rotor mit geringen Eigenfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln

In diesem Abschnitt wird die Vorgehensweise der entkoppelten Regelung auf ein System mit geringen Eigenfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln (Schaufelfrequenzen) angewendet. Diese Eigenfrequenzen liegen in der Nähe der Bandbreite der Regelung. Die Daten des Rotors, welcher in diesem Abschnitt verwendet wird, sind in Tabelle 5.3 ersichtlich. Abbildung 5.25 zeigt die ersten Biegemoden und die Schaufelfrequenzen des Rotors der Turbomolekularpumpe 2. Die Nenndrehzahl dieser Pumpe beträgt  $24000 \text{ min}^{-1}$  (400 Hz). Zur Stabilisierung der ersten Biegemoden, ist wie auch bei der Pumpe 1, die richtige Phasenverschiebung in deren Frequenzbereich nötig. Da die Schaufelfrequenzen für verschiedene Rotoren des gleichen Typus fluktuieren und eine Drehzahlabhängigkeit aufweisen, wird die Region möglicher Schaufelfrequenzen mit einem roten Band markiert. Diese Schaufelfrequenzen liegen in einem Frequenzbereich, in welchem der Regler noch eine vergleichsweise hohe Verstärkung besitzt. Diese Verstärkung kann die Schaufelfrequenzen destabilisieren. Durch die aufschaukelnden Schwingungen können die Schaufeln an dem Gehäuse der Pumpe streifen, was zu einem Bruch der Schaufeln führen kann. Daher beschreibt dieses Kapitel eine mögliche Lösung, um auch den Rotor der Turbomolekularpumpe 2 zu stabilisieren.

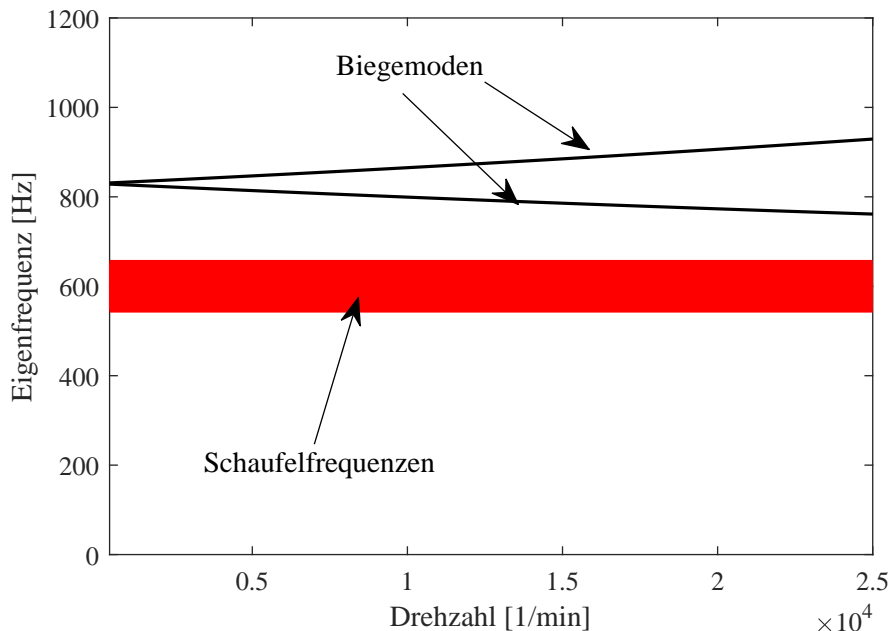


Abbildung 5.25: Campbell-Diagramm der ersten Biegemode und der Schaufelfrequenzen der Turbomolekularpumpe 2

Polares Trägheitsmoment	$\Theta_z$	0.047 kg m <sup>2</sup>
Axiales Trägheitsmoment	$\Theta_x$	0.067 kg m <sup>2</sup>
Masse des Rotors	$m$	10.2 kg
Mechanischer Luftspalt	$\delta_G$	165 $\mu$ m
Negative Steifigkeit Lager A	$k_{xA}$	70000 N/m
Negative Steifigkeit Lager B	$k_{xB}$	110000 N/m
Kraft/Strom Faktor Lager A	$k_{iA}$	53 N/A
Kraft/Strom Faktor Lager B	$k_{iB}$	96 N/A
Lager-COG-Abstand	$a$	118.3 mm
Lager-COG-Abstand	$b$	-29.3 mm
Sensor-COG-Abstand	$c$	142.3 mm
Sensor-COG-Abstand	$d$	-3.3 mm
Nenndrehzahl	$n_n$	24000 min <sup>-1</sup>

Tabelle 5.3: System-Parameter der Turbomelekularpumpe 2

#### 5.4.1 Reglerstruktur

Um die Schaufelfrequenzen nicht zu destabilisieren, muss die Verstärkung des Reglers im kritischen Frequenzbereich der Schaufelresonanzen kleine Werte annehmen. Es wäre möglich die Schwingungen der Schaufeln, wie in Abschnitt 4.5 beschrieben, mit einer Phasendrehung zu stabilisieren. Diese Stabilisierungsmethode würde jedoch die Kenntnis der Eigenformen dieser Eigenschwingungen erfordern. Garantiert man hingegen eine kleine Verstärkung im Frequenzbereich der Schaufelfrequenzen, so kann der Regler das System aufgrund einer vorhandenen Strukturdämpfung nicht destabilisieren. Ist die Verstärkung über einen größeren Frequenzbereich ausreichend klein, so ist auch eine hohe Robustheit gegenüber Parameterschwankungen gegeben. Abbildung 5.26 zeigt eine mögliche Reglerstruktur zur Stabilisierung eines Rotors mit geringen Schaufelfrequenzen. Die Reglerstruktur für das System mit geringen Schaufelfrequenzen ist fast gleich der Reglerstruktur der Turbomolekularpumpe 1. Ein Unterschied besteht jedoch im Eingang des dezentralen PID-Reglers, welcher um eine Umschaltmöglichkeit erweitert wurde. Für den Eingang der dezentralen Regelung wird entweder das abgetastete Sensorsignal direkt verwendet, oder die geschätzten COG-Koordinaten des Kalman-Filters. Der Grund für die Stabilisierung unter Verwendung der Kalman-Zustände liegt in der kleineren Verstärkung im Frequenzbereich der Schaufelfrequenzen. Um dies zu zeigen, zeigt Abbildung 5.27 die geschlossene Reglerübertragungsfunktion  $R_g(j\omega)$  für beide Schaltzustände. Zur Simulation von  $R_g(j\omega)$  wird ein Anregesignal  $r_\beta$  zum Positionssignal des transformierten Ausgangs  $\beta$  addiert und die Systemantwort am Ausgang der Reglerstruktur

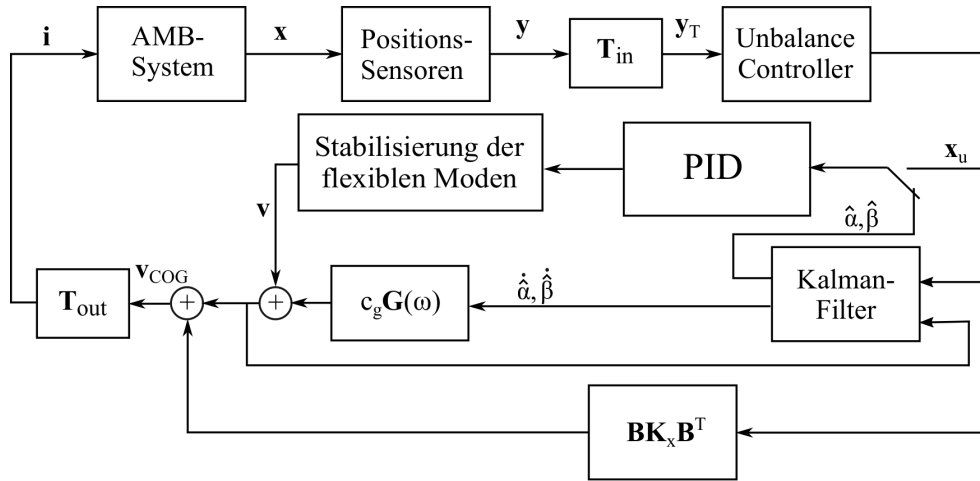


Abbildung 5.26: Blockschaltbild der entkoppelten Regelung für geringe Schaufelfrequenzen

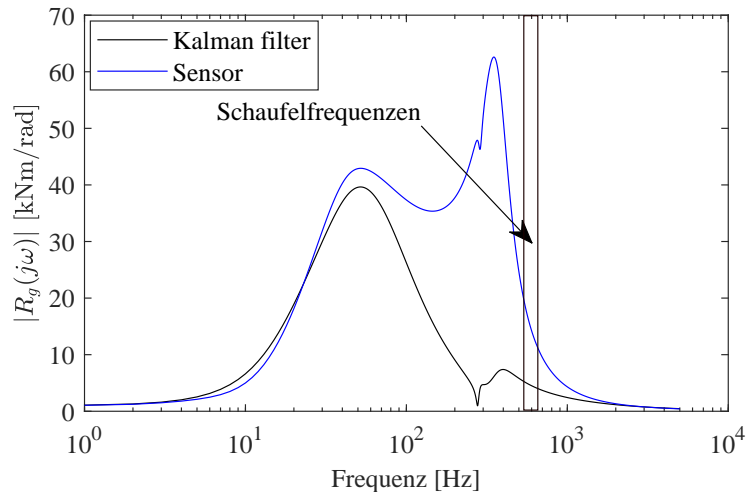


Abbildung 5.27: Geschlossene Reglerübertragungsfunktion für die  $\beta$ -Koordinate

$M_\beta$  gemessen. Daher lautet die geschlossene Reglerübertragungsfunktion  $R_g(s)$

$$R_g(j\omega) = \frac{\text{FFT}(M_\beta)}{\text{FFT}(r_\beta)} \quad (5.29)$$

Ist der Betragsgang im Frequenzbereich der Schaufelfrequenzen klein genug, kann das System aufgrund einer physikalisch bedingten Strukturdämpfung nicht destabilisiert werden. Bei der Regelung, welche das abgetastete Sensorsignal direkt als Eingang besitzt, ist die Verstärkung im Frequenzbereich der Schaufelfrequenzen um das ca. 6-fache höher als die Verstärkung mittels Kalman-Zustände. Diese Tatsache bestätigt eine mögliche stabilisierende Wirkung bei Verwendung der Kalman-Zustände für die Regelung. Wie auch bei der Kompensation des gyroskopischen Effekts, ist auch hier die Verstärkung der Reglerstruktur stark von der Wahl der Kovarianzmatrix der Prozessstörung  $\hat{\mathbf{Q}}$  und Kovarianzmatrix des Messrauschens  $\hat{\mathbf{R}}$

abhängig.

Zur Realisierung wird die Regelstruktur in einem DSP implementiert. Daher muss das Kalman-Filter und alle anderen Reglerstrukturen als Abtastsystem ausgelegt werden. Um einen weiteren Dämpfungseffekt zu erhalten, kann nun statt dem geschätzte Zustand  $\hat{\mathbf{z}}_k$  zum Zeitpunkt  $k$ , der für den nächsten Abtastschritt vorhergesagte Zustand  $\hat{\mathbf{z}}_{k+1}$  für die Regelung verwendet werden. Abbildung 5.28 zeigt die positive Phasenverschiebung von  $\hat{\beta}_{k+1}$  zum realen Signal  $\beta$ . Die Nutzung von  $\hat{\beta}_k$  würde in einer negativen Phasenverschiebung zum realen

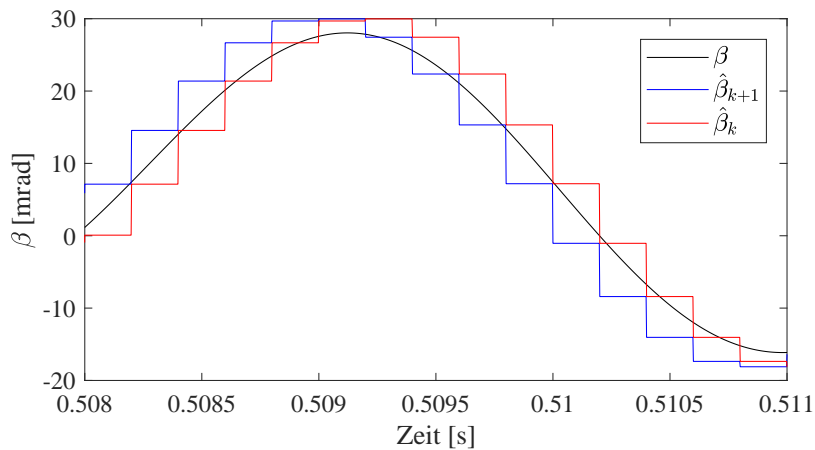


Abbildung 5.28: Vergleich des vorhergesagten Zustandes  $\hat{\beta}_{k+1}$  mit dem geschätzten Zustand  $\hat{\beta}_k$

Signal  $\beta$  resultieren. Diese negative Phasenverschiebung würde wiederum zu einer Verringerung der Dämpfung in Abhängigkeit von der Abtastzeit führen. Es ist auch ein Schätzfehler zu erkennen, da die geschätzten Zustände zu den Abtastzeitpunkten nicht immer mit dem realen Signal  $\beta$  ident sind. Wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, wird das Kalman-Filter in dieser Arbeit nur für die rotatorischen Freiheitsgrade verwendet. Ist die Dämpfung auch für die translatorischen Koordinaten zu niedrig oder ist die Verstärkung der geschlossenen Reglerübertragungsfunktion zu hoch, kann das Vorgehen der rotatorischen Koordinaten auch für die translatorischen Koordinaten angewendet werden. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass durch eine geringe Änderung der Reglerstruktur, auch eine Pumpe mit geringen Eigenfrequenzen aufgrund der Schaufelräder stabilisiert werden kann. Für die Turbomolekularpumpe 2 ist ein Kalman-Filter für das rotatorische Teilsystem ausreichend.

#### 5.4.2 Experimentelle Ergebnisse

Die Abhängigkeiten der wichtigsten Parameter einer entkoppelten Regelung wurden schon in Abschnitt 5.3.7 experimentell angegeben. Dieser Abschnitt dient zur Verifikation der Robustheit und des Laufverhaltens einer entkoppelten Regelung, angewendet an einer Turbomolekularpumpe mit geringen Resonanzfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln. In diesem Abschnitt werden daher folgende Messungen beschrieben:

- Messung eines Positionssignals und dem zugehörigen Sollstrom beim Umschalten zwischen den abgetasteten rotatorischen Sensorsignalen und den rotatorischen Kalman-Zuständen als Eingang für die entkoppelte Regelung.
- Messung der Compliance-Funktionen bei einer Drehzahl von  $24000 \text{ min}^{-1}$
- Messung der Sensitivitätsfunktionen bei einer Drehzahl von  $24000 \text{ min}^{-1}$

Der Messaufbau ist gleich zu den anderen Experimenten, welche in dieser Arbeit vorgestellt wurden. Es werden die gleichen Sensoren, wie für die Turbomolekularpumpe 1, verwendet. Eine Illustration des Magnetlagersystems ist in Abbildung 5.29 ersichtlich. Der Schwerpunkt

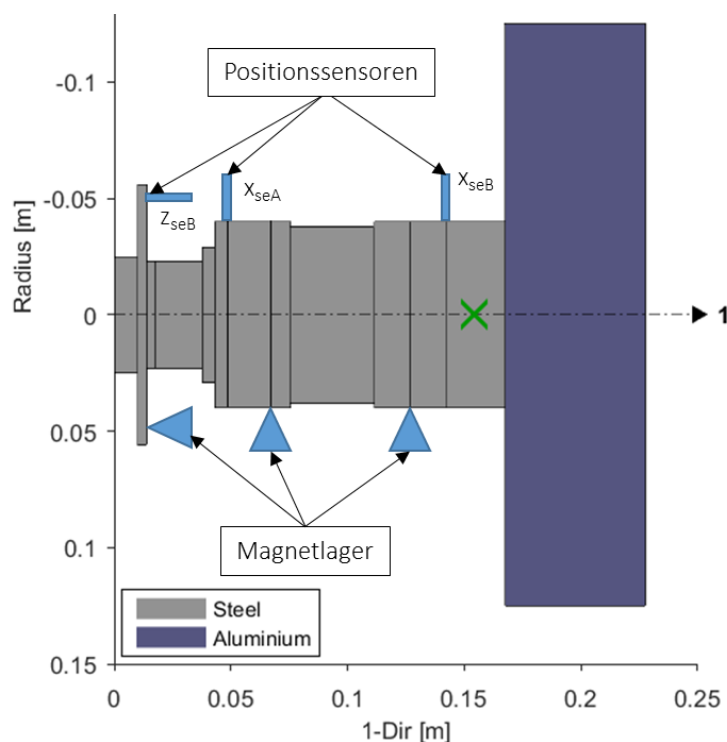


Abbildung 5.29: Geometrie, Sensor- und Aktuatorposition des Rotors der Turbomolekularpumpe 2

(grünes Kreuz) liegt nicht zwischen den Magnetlagern und auch nicht zwischen den Sensoren. Aus diesem Grund sind die Abstände  $b$  und  $d$  in Tabelle 5.3 auch negativ.

### Umschalten zwischen den Eingängen der dezentralen Regelung

Um das Laufverhalten des Rotors für beide Varianten des verwendeten Eingangs beim PID-Regler vergleichen zu können, wird das System vor und nach einem Umschaltzeitpunkt untersucht. Im Umschaltzeitpunkt wird zwischen den vorhergesagten Zuständen des Kalman-Filters und den abgetasteten Sensorwerten am Eingang des Reglers gewechselt. Für den Normal-Betrieb kann das System auch im gesamten Drehzahlbereich mit den vorhergesagten Zuständen betrieben werden. Dieser Versuch kann nicht bei Nenndrehzahl erfolgen, da das System

unter der Nutzung der abgetasteten Sensorwerte instabil wäre. Abbildung 5.30 zeigt das Verhalten vor und nach dem Umschaltzeitpunkt exemplarisch für den Sensorwert  $x_{seB}$  und den Sollstrom  $I_{xB}$ . Die Messung wurde bei einer Drehzahl von  $12000 \text{ min}^{-1}$  durchgeführt. Das

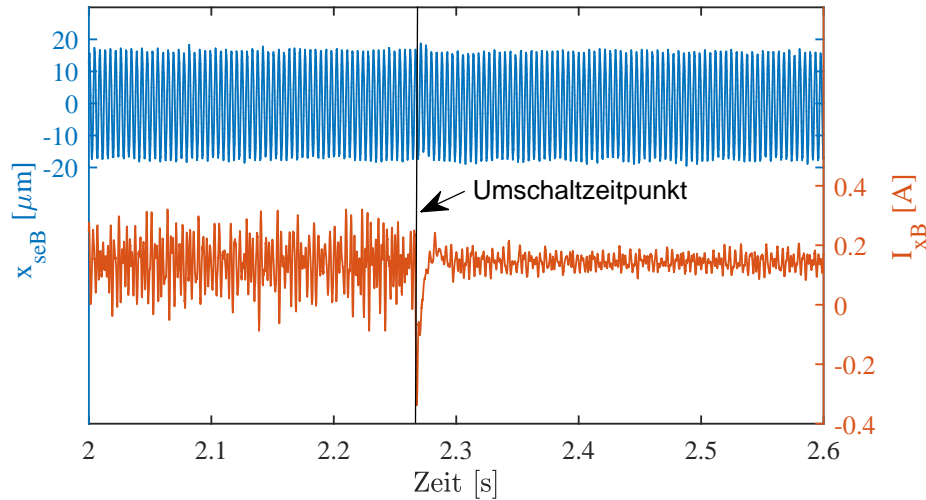


Abbildung 5.30: Umschaltzeitpunkt zwischen den vorhergesagten Zuständen und den direkt abgetasteten Werten des Sensors als Eingang für den dezentralen Positionsregler bei einer Drehzahl von  $12000 \text{ min}^{-1}$

Positionssignal zeigt näherungsweise das gleiche Verhalten vor und nach dem Umschaltzeitpunkt. Das System befindet sich in einem Betriebspunkt, in welchem die Schaufelfrequenzen noch nicht destabilisiert werden. Das Stromsignal ist vor dem Umschaltzeitpunkt jedoch deutlich höher. Daher kann das System unter direkter Verwendung der abgetasteten Sensorwerte leichter destabilisiert werden, was für höhere Drehzahlbereiche auch der Fall ist. Das bedeutet eine höher werdende Schwingung aufgrund des Betragsganges der geschlossenen Reglerübertragungsfunktion. Ist die destabilisierende Wirkung höher als die stabilisierende Wirkung der Strukturdämpfung, ist eine instabile Schwingung die Folge. Diese instabile Schwingung würde zu einem Kontakt der Turbinenschaufeln mit dem Gehäuse führen. Für den Fall der Verwendung der vorhergesagten Zustände des Kalman-Filters ist der Betragsgang im Frequenzbereich der Schaufelfrequenzen ausreichend gering. Daher kommt es zu keiner Destabilisierung des Systems im gesamten Betriebsbereich unter der Verwendung der Kalman-Filter-Zustände.

### Compliance-Funktionen bei Nenndrehzahl

Das dynamische Verhalten des Magnetlagersystems hinsichtlich der Laufeigenschaft des Rotors wird mit Hilfe der Compliance-Funktion untersucht. Abbildung 5.31 und Abbildung 5.32 zeigen die Auswertung der rotatorischen und der translatorischen Compliance-Funktion bei einer Drehzahl von  $24000 \text{ min}^{-1}$ .

Im Gegensatz zur Turbomolekularpumpe 1 ist in diesem Fall kaum eine Aufteilung der



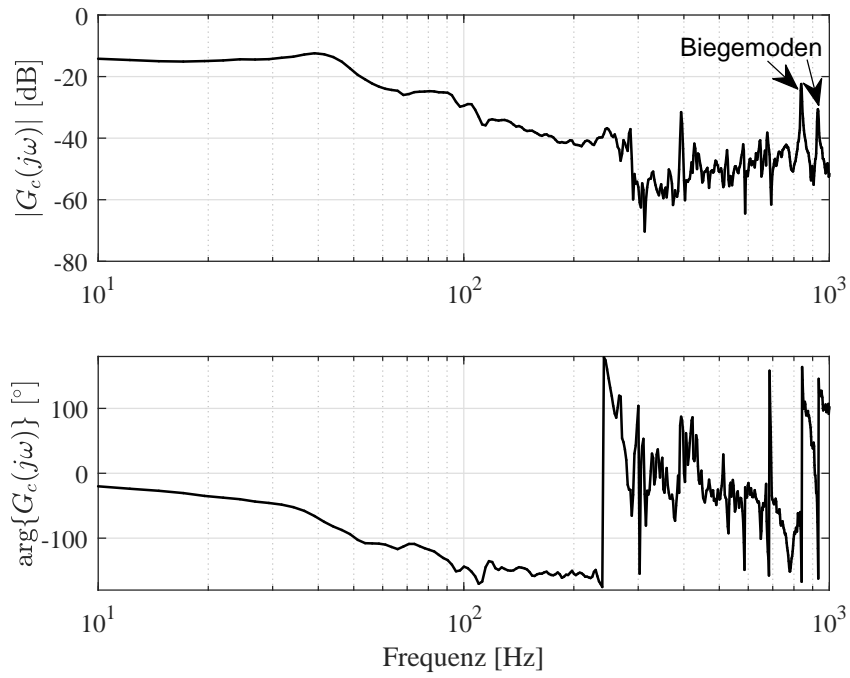


Abbildung 5.31: Rotatorische Compliance-Funktion bei einer Drehzahl von  $24000 \text{ min}^{-1}$

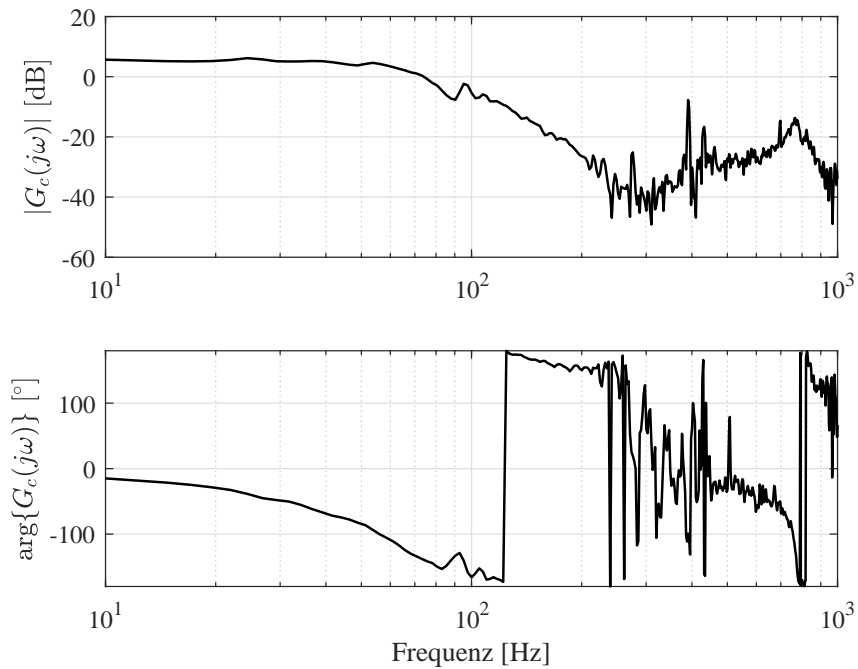


Abbildung 5.32: Translatorische Compliance-Funktion bei einer Drehzahl von  $24000 \text{ min}^{-1}$

rotatorischen Starrkörpermoden zu erkennen. Das liegt an der Tatsache, dass für die Stabilisierung ein Kompensationsfaktor von  $c_g = 0.9$  verwendet wurde. Da die Kompensation jedoch nur für den starren Körper entwickelt wurde, teilen sich die flexiblen Moden trotz eines hohen Kompensationsfaktors auf. Aufgrund der kleinen Resonanzüberhöhungen im Betriebsbereich des unterkritisch laufenden Rotors kann auf ein gutes Laufverhalten geschlossen werden. Bei der translatorischen Compliance-Funktion sind wie bei der Turbomolekularpumpe 1 keine Resonanzüberhöhungen aufgrund der ersten Biegemoden zu erkennen.

### Sensitivitätsfunktionen bei Nenndrehzahl

Um die Robustheit des magnetisch stabilisierten Rotors der Turbomolekularpumpe 2 nachzuweisen, werden, wie auch bei der Turbomolekularpumpe 1, die Sensitivitätsfunktionen gemessen. Abbildung 5.33 zeigt die direkte und die verkoppelte Sensitivitätsfunktion einer rotatorischen Bewegung und Abbildung 5.34 zeigt die Sensitivitätsfunktion einer translatorischen Bewegung.

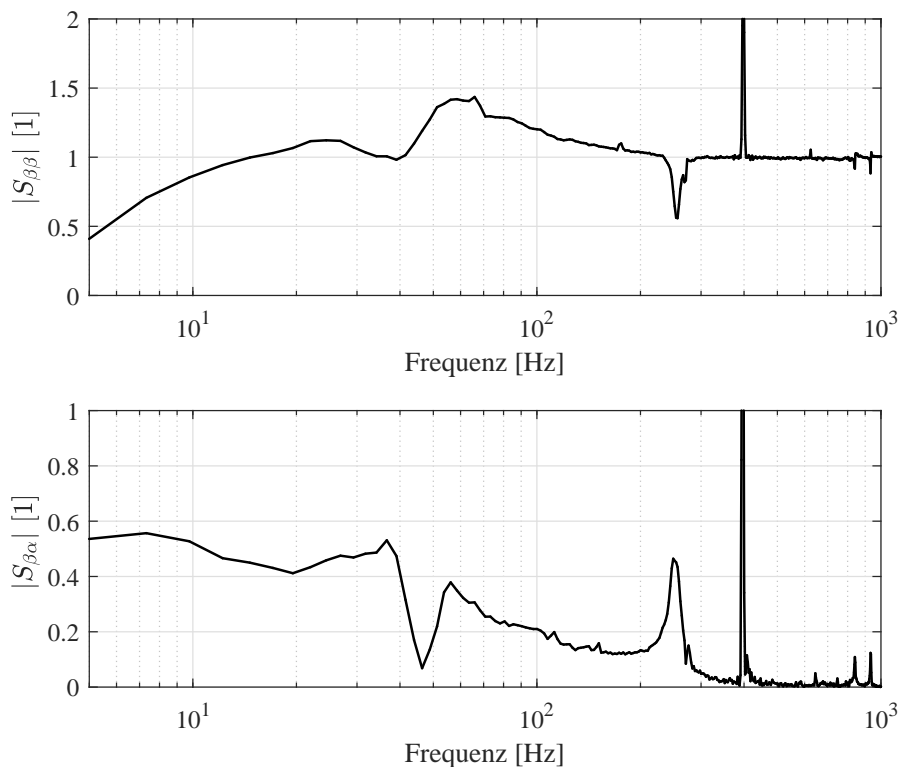


Abbildung 5.33: Rotatorische Sensitivitätsfunktionen für eine Drehzahl von  $24000 \text{ min}^{-1}$  und einem Kompensationsfaktor  $c_g = 0.9$

Alle Sensitivitätsfunktionen erfüllen die ISO 14839-3, wobei die Spitzenwerte der Sensitivitätsfunktionen ein wenig höher sind als bei der Turbomolekularpumpe 1. Dies liegt an den

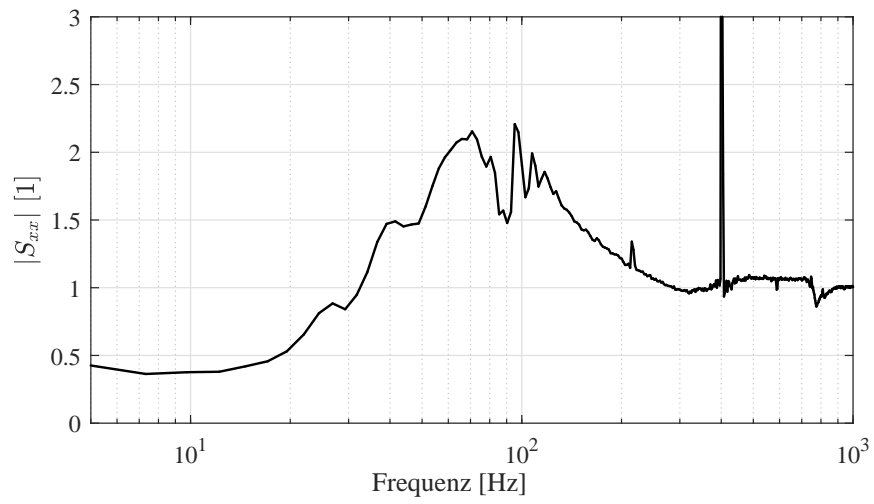


Abbildung 5.34: Translatorische-Sensitivitätsfunktion für eine Drehzahl von  $24000 \text{ min}^{-1}$

Einschränkungen der geringen Resonanzfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln.

## 5.5 Konklusion der entkoppelten Regelung

In diesem Abschnitt wurde die Stabilisierung eines magnetgelagerten Rotors mit Hilfe eines Entkopplungsansatzes beschrieben. Die Kompensationsstrategie des gyroskopischen Effekts konnte aus Abschnitt 4 übernommen werden. Für das entkoppelte System wurde eine dezentrale Regelung entwickelt, wobei der Nachteil der Destabilisierung aufgrund der Aufspaltung der rotatorischen Eigenwerte durch eine Kompensationsstrategie verhindert wird. Für diese Regelung gestaltet sich das Auffinden einer ausreichend guten Parametrierung im Vergleich zur LQG-Regelung für den flexiblen Rotor einfacher. Auch die Adaption des Systems für nicht modellierte Effekte ist für die entkoppelte Regelung durch die physikalisch basierten Parameter intuitiver. Für die Kompensation des gyroskopischen Effektes sind die Winkelgeschwindigkeiten des Zustandsvektors  $\dot{\beta}$  und  $\dot{\alpha}$  erforderlich. Diese werden mittels einem Kalman-Filter berechnet. Im Gegensatz zum LQG-geregeltem System ist es hierbei nicht nötig das ganze System abzubilden. Durch die Ausnutzung der Entkopplung konnte ein Kalman-Filter ausschließlich für das rotatorische Teilsystem entwickelt werden. Simulationen zeigten, dass eine vollständige Kompensation zu Problemen in der Robustheit des stabilisierten Systems führt. Aus diesem Grund wurde ein Parameter  $c_g$  eingeführt, welcher die Höhe der Entkopplungen bestimmt. Durch Simulationsergebnisse konnte eine starke Abhängigkeit der Robustheit von dem Parameter  $c_g$  und den Kovarianzmatrizen des Kalman-Filters nachgewiesen werden. Eine weitere Verbesserung konnte durch die Variation der Auslegedrehzahl des Kalman-Filters erreicht werden. Durch einen Drehzahlfehler des Simulationsmodells wurde eine Phasenverschiebung zwischen der realen Geschwindigkeit und der geschätzten Geschwindigkeit erreicht. Diese Phasenverschiebung bewirkt eine Steifigkeit im schiefssymmetrischen Anteil der Steifigkeitsmatrix, welche zur Minderung des Spitzenwertes der Sensitivitätsfunktion verwendet werden konnte.

Falls die Resonanzfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln nahe oder in der Bandbreite der Regelung liegen, wurde versucht, die Verstärkung des Reglers in diesem Frequenzbereich möglichst gering zu halten. Für den Fall der Turbomolekularpumpe 2 musste daher die Reglerstruktur abgeändert werden. Für die Rückkopplung der rotatorischen Regelung wurden nicht mehr die Sensorsignale, sondern die geschätzten Zustände des Kalman-Filters verwendet. Durch geschickte Wahl der Kovarianzmatrizen des Kalman-Filters konnte die Forderung einer kleinen Verstärkung im Bereich der Schaufelfrequenzen realisiert werden.

Die Performance und die Robustheit der Regelung der magnetisch stabilisierten Rotoren wurden durch experimentelle Ergebnisse verifiziert.

## Kapitel 6

# Unwuchtkompensation

In den vorhergehenden Kapiteln wurden mögliche Reglerstrukturen zur Stabilisierung einer magnetgelagerten Turbomolekularpumpe beschrieben. Das Auftreten einer möglichen Reaktionskraft aufgrund der Unwucht des Rotors wurde nicht berücksichtigt. Magnetlager nehmen in der Behandlung einer solchen Unwucht eine spezielle Rolle ein, da die mechanischen Eigenschaften gezielt beeinflusst werden können. Diese Tatsache ermöglicht die Reduzierung der Unwuchtvibrationen, welche im Betrieb auftreten. Eine Unwucht tritt auf, wenn die Trägheitshauptachse nicht gleich der Geometrieachse des Rotors ist. In den meisten Fällen ist es nicht möglich die Unwuchtvibration durch eine mechanische Auswuchtung zu eliminieren, da sich die Unwuchteigenschaften im Betrieb ändern. Mit konventionellen mechanischen Wälzlagern entstehen aufgrund der Unwucht, Reaktionskräfte, welche zu dem mechanisch gekoppelten Gehäuse der Pumpe weitergeleitet werden. Im Gegensatz dazu kann jedoch diese Vibration mit Hilfe eines speziellen Eingriffs in die Rückkopplung einer magnetischen Lagerung verringert werden. Ein solcher Eingriff wird Unwuchtkompensation genannt.

Dieses Kapitel wird in zwei Teile aufgespaltet. Der erste Teil beschreibt die Unwuchtkompensation, angewendet an einer Turbomolekularpumpe. Dabei werden zwei verschiedene Kompensationsstrategien für verschiedene Drehzahlbereiche verwendet. Beide Kompensationsstrategien basieren auf generalisierten Notch-Filtern. Die Grundlagen einer solchen Methode sind in [63] beschrieben. Diese Art der Unwuchtkompensation benötigt immer die Information der Rotordrehzahl oder des Rotorwinkels. Diese Information wird im ersten Teil dieses Abschnitts vom Motorcontroller bereitgestellt. Der zweite Teil beschäftigt sich mit einer Methode zur Unwuchtkompensation ohne die Notwendigkeit eines Informationsaustausches zwischen Motorcontroller und Magnetlager. Die Drehzahlinformation wird dabei direkt aus den Positionssignalen oder den Stromsignalen des AMB-Systems berechnet.

## 6.1 Unwuchtkompensation basierend auf generalisierten Notch-Filtern im gesamten Betriebsbereich einer Turbomolekularpumpe

Da sich dieser Abschnitt mit der Unwuchtkompensation, unter der Voraussetzung einer bekannten Drehzahlinformation beschäftigt, werden zu Beginn zwei grundlegend unterschiedliche Aufgaben verschiedener Kompensationsstrategien unterschieden:

- **Reduzierung der synchronen Lagerkräfte:** Die synchrone Reaktionskraft aufgrund der Unwucht ist näherungsweise eine quadratische Funktion abhängig von der Drehzahl [63]. Daher ist eine obere Grenze der maximal erreichbaren Drehzahl ohne eine Behandlung der Unwuchtvibrationen durch den maximal zulässigen Strom im Aktuator definiert. Dieser maximal zulässige Strom ist durch den verwendeten Drahtquerschnitt und durch die Größe der Eisenwege aufgrund einer möglichen Sättigung festgelegt. Um auch für höhere Drehzahlen keinen unnötig großen Aktuator verwenden zu müssen, ist das Ziel dieser Art der Unwuchtkompensation die Reduzierung der synchronen Reaktionskräfte aufgrund der Unwucht. Mit dieser Art der Kompensation wird also die obere Drehzahlgrenze aufgrund der auftretenden Unwuchtreaktionskräfte signifikant erhöht.
- **Reduzierung der Unwuchtvibrationen:** Ist die auftretende Unwuchtvibration höher als die maximal zulässige Auslenkung im Magnetlager, so ist eine Kompensationsmethode einzusetzen, welche die Vibration und nicht die Reaktionskraft reduziert. Dies kann beispielsweise bei Werkzeugmaschinen oder bei Rotoren von Turbomolekularpumpen mit starker Unwucht der Fall sein. Diese Art der Unwuchtkompensation benötigt eine hohe Dämpfungskraft zur Minimierung der synchronen Vibrationen. Diese Kräfte der Kompensation können zur Sättigung des Aktuators führen. Aus diesem Grund ist diese Art der Unwuchtkompensation gegensätzlich zum ersten Ansatz, da eine hohe synchrone Verstärkung des Regelkreises, anstatt einer Minimierung der synchronen Verstärkung, gefordert wird.

Unwuchtkompensationen des ersten Punktes werden oft als Force-Free Regler bezeichnet. Die Unwuchtkompensation des zweiten Punktes wird als Vibrationsregler bezeichnet.

Eine einfache Realisierung eines Force-Free Reglers ist die Verwendung eines Notch-Filters im Rückkoppelzweig [64]. Ein großer Nachteil dieser Methode ist eine mögliche Destabilisierung des geschlossenen Regelkreises aufgrund der Notch-Filter. Ein Verfahren basierend auf der Auslegung von Beobachtern löst das Problem der Destabilisierung [65]. Eine solche beobachter-basierte Kompensation benötigt jedoch ein sehr genaues Modell der Regelstrecke und ist daher wenig robust gegen Modellunsicherheiten. Ein gegensätzlicher Ansatz ist die adaptive Feedforward-Kompensation. Für diese Art der Kompensation gibt es in der Literatur eine Menge an Vorschlägen [66–71]. Der Nachteil dieser Strategien liegt in den oft sehr komplexen und nichtlinearen Adaptions-Prozessen, für welche der Nachweis der Konvergenz

nicht immer möglich ist.

In dieser Arbeit werden die Kompensationstrategien basierend auf dem generalisierten Notch-Filter von [63] entwickelt. Der verwendete Notch-Filter wird in einer anderen Form als das gewöhnliche LTI-Notch-Filter implementiert. Dieses generalisierte Notch-Filter hat im Gegensatz zum gewöhnlichen LTI-Notch-Filter keine numerischen Probleme für schmalbandige Strukturen. Die Auslegung der Notch-Filter erfolgt für das geschlossene System. Durch die Generalisierung und die Auslegung für den geschlossenen Regelkreis kann daher in einem weiten Betriebsbereich Stabilität garantiert werden. Da es sich um eine lineare Struktur handelt, kann die Stabilität mit der eleganten Stabilitätstheorie linearer Systems bewiesen werden. Das Ziel soll die Nutzung einer Unwuchtkompensation im gesamten Betriebsbereich sein.

### 6.1.1 Unwuchtkompensation unter der Nutzung generalisierter Notch-Filter

Unwuchtkompensationen haben die Aufgabe der Minimierung der synchronen Kraft (Force-Free Regler) oder der Minimierung der synchronen Vibrationen (Vibrationsregler), welche durch die Unwucht des Rotors hervorgerufen werden. Um Verwechslungen mit der Variable  $s = j\omega$  zu vermeiden, wird in diesem Kapitel die Drehzahl des Rotors mit  $\Omega$  bezeichnet.

#### Force-Free Regelung

Für die Minimierung der synchronen Lagerkraft sollte die Reglerstruktur "blind" für synchrone Oszillationen sein. Wie im vorhergehenden Unterabschnitt erwähnt, kann ein gewöhnliches LTI-Notch-Filter zu Problemen in der Stabilität führen. Daher wird ein generalisiertes Notch-Filter, welches in Abbildung 6.1 zu sehen ist, zur Force-Free Regelung verwendet. Der geschlossene Regelkreis mit  $\mathbf{C}(s)$  und  $\mathbf{G}(s)$  ohne Unwuchtkompensation wird als stabil angenommen. Ist eine Unwuchtvibration vorhanden und ist diese beobachtbar, so enthält das Sensorsignal einen synchronen Sinus-Anteil. Das Ziel des Kompensators  $\mathbf{N}_{ol}$  ist das Bereitstellen eines Signals mit der selben Amplitude, Frequenz und Phase wie der synchrone Unwuchtanteil im Sensorsignal. Dieses Signal wird anschließend über einen Rückkoppelzweig vom Sensorsignal subtrahiert. Um dieses Kompensationssignal zu erhalten, wird das Sensorsignal in zwei Teilsignale aufgespalten. Ein Signalanteil wird mit  $\sin(\Omega t)$  und der andere mit  $\cos(\Omega t)$  multipliziert. Dadurch wird die Kreisfrequenz des Sensorsignals um  $-\Omega$  verschoben. Der unwuchtabhängige Anteil ist also nach der Modulation konstant. Das modulierte Signal wird anschließend integriert und über eine weitere Modulation wird die Kreisfrequenz des Sensorsignals wieder zu ihrem ursprünglichen Wert zurückgeschoben. Das resultierende Signal wird rückgekoppelt und vom Sensorsignal abgezogen. Da die Integration zwischen den Modulationen stattfindet, wirkt die Unwucht wie eine konstante Störung. Diese konstante Störung wird durch die rückgekoppelte Integration theoretisch vollständig eliminiert. In der Praxis ist jedoch eine vollständige Eliminierung unmöglich, da der Winkel  $\Omega t$  nie exakt bekannt ist. Die Matrix-Multiplikation mit den Submatrizen  $\mathbf{T}_r$  und  $\mathbf{T}_j$  sind nötig, um ein stabiles Verhalten

für verschiedene Drehzahlbereiche zu garantieren. Der Faktor  $\varepsilon$  dient zur Einstellung des Einschwingverhaltens der Unwuchtkompensation. Dieses Modulationsverfahren kann auch durch eine Transformation in ein mit-rotierendes Koordinatensystem ersetzt werden. Laut [63] hat eine solche Transformation aber Probleme mit elliptischen Orbits aufgrund von anisotropem Verhalten der Lagerung.

### Vibrations-Regelung

Die Kompensationsstruktur im Falle einer Vibrationsregelung ist in Abbildung 6.2 ersichtlich. Der Vibrationsregler besitzt die Aufgabe eine synchrone Kraftwirkung zu der vorgegebenen Kraft des Positionsreglers  $\mathbf{C}(s)$  hinzuzufügen. Es kann also ein inverses Verhalten eines Notch-Filters verwendet werden. Gewöhnliche LTI-Notch-Filter besitzen in diesem Zusammenhang die selbe Problematik wie bei der Force-Free Regelung. Der einzige Unterschied im Vergleich zu der Force-Free Regelung ist, dass das Kompensationssignal  $\mathbf{c}_v$  nicht rückgekoppelt, sondern dem Sollstrom hinzugefügt wird.

### Übertragungsverhalten der Unwuchtkompensationen

Das Kompensationssignal  $\mathbf{c}_{ff}$  oder  $\mathbf{c}_v$  kann für beide Fälle über die Übertragungsfunktion  $\mathbf{N}_{ol}$  berechnet werden:

$$\mathbf{c}_{ff}(t) = [\sin(\Omega t) \mathbf{E} \quad \cos(\Omega t) \mathbf{E}] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_r & -\mathbf{T}_j \\ \mathbf{T}_j & \mathbf{T}_r \end{bmatrix} \cdot \int \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) \mathbf{w}(t) \\ \cos(\Omega t) \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} dt \quad (6.1)$$

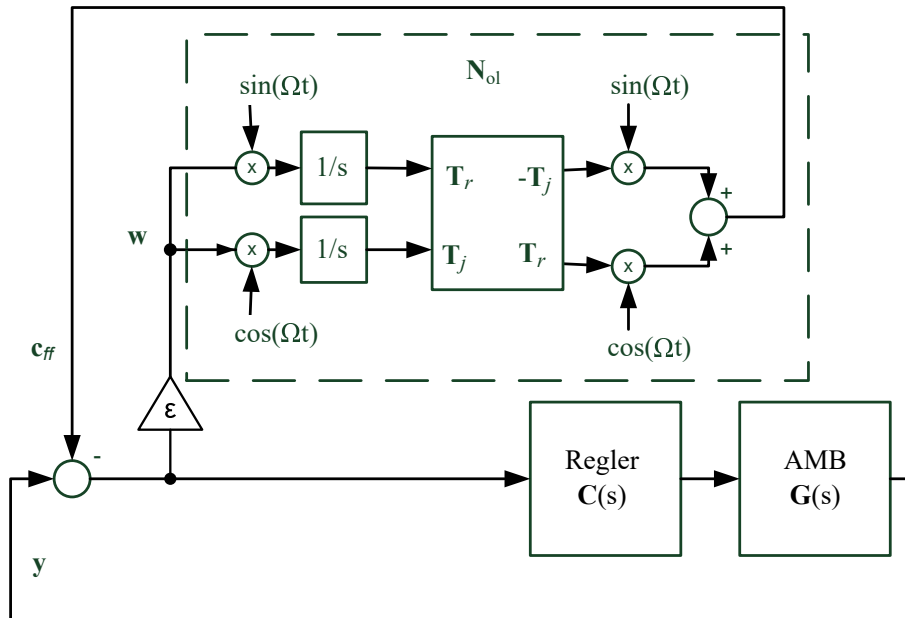


Abbildung 6.1: Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises erweitert mit einem Force-Free Regler



wobei  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix beschreibt. Die Transformation in den s-Bereich lautet [63]:

$$\mathbf{N}_{ol} = \frac{1}{s^2 + \Omega^2} (s\mathbf{T}_r - \Omega\mathbf{T}_j) \quad (6.2)$$

Aus Gleichung (6.2) kann eine inverse Notch-Charakteristik abgelesen werden, da für den Fall von  $s = j\Omega$  der Nenner Null wird. Für den Fall einer Rückkopplung erhält die geschlossene Übertragungsfunktion  $\mathbf{N}_{ff}$  der Force-Free Regelung die gewünschte Notch-Filter-Charakteristik.

$$\mathbf{N}_{ff} = (s^2 + \Omega^2) (s^2\mathbf{E} + s\varepsilon\mathbf{T}_r + (\Omega^2\mathbf{E} - \varepsilon\Omega\mathbf{T}_j))^{-1} \quad (6.3)$$

Obwohl das in [63] angegebene Notch-Filter das gleiche Ein- Ausgangsverhalten wie ein gewöhnliches LTI-Notch Filter widerspiegelt, können trotzdem im Falle der Force-Free Regelung folgende Vorteile angegeben werden:

- Falls  $\varepsilon$  im eingeschwungenen Zustand zu Null gewählt wird, repräsentiert das Filter eine ideale Feed-Forward Kompensation der Unwucht. Ein gewöhnliches LTI-Filter besitzt diese Eigenschaft nicht.
- Falls die Integratoren der Unwuchtkompensationen eingeschwungen sind, repräsentieren deren Ausgänge die Amplitude der Unwuchtvibration.
- Die praktische Implementierung hat im Gegensatz zu den gewöhnlichen LTI-Filtern kaum Diskretisierungsprobleme für schmalbandige Filter-Strukturen.

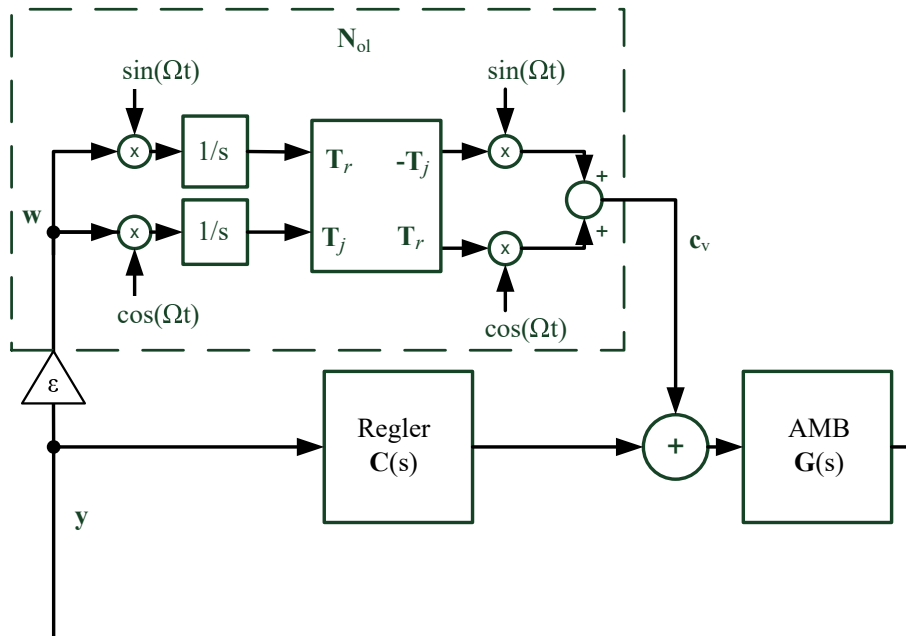


Abbildung 6.2: Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises erweitert mit einem Vibrationsregler

### 6.1.2 Auslegung und Stabilitätsanalyse der Unwuchtkompensationen

Um eine stabile und robuste Unwuchtkompensation zu erhalten, ist es nötig die Stabilitäts- und Funktionsgrenzen der beiden Filterstrukturen zu kennen. Dieses Wissen ist wichtig, um abhängig vom Betriebsbereich eine geeignete Strategie zu wählen.

#### Force-Free Regelung

Um geeignete Parameter der Unwuchtkompensation zu wählen, ist die Kenntnis der Stabilität, abhängig von den Kompensationsparametern, wichtig. Die Stabilität kann aus den Polen der Transfermatrix

$$\mathbf{T}_{ff} = [\mathbf{E} + \mathbf{S}(s)\mathbf{N}_{ol}(s)]^{-1} \quad (6.4)$$

mit der Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}(s)$  des stabilisierten Magnetlagersystems ohne Unwuchtkompensation angegeben werden. Die Pole werden über eine Minimalrealisierung der Transfermatrix  $\mathbf{T}_{ff}$  berechnet. Für ein stabiles System müssen alle Eigenwerte in der linken offenen Halbebene liegen. Diese Forderung impliziert einen positiven Dämpfungsfaktor  $\xi$  der Eigenwerte. Für ein näherungsweise entkoppeltes System reicht oft die Verwendung dezentraler Unwuchtkompensationen aus. Diese dezentrale Regelung wird aufgrund der geringeren Rechenzeit und der einfacheren Auslegung oftmals bevorzugt. Für eine solche dezentrale Implementierung besitzen die Matrizen  $\mathbf{T}_r$  und  $\mathbf{T}_j$  eine Diagonalform. Die Parameter dieser Diagonalform  $\mathbf{T}_r = \text{diag}(T_{r1}, \dots, T_{rn})$  und  $\mathbf{T}_j = \text{diag}(T_{j1}, \dots, T_{jn})$  werden, falls es aufgrund der Stabilität möglich ist, in dieser Arbeit gleich gesetzt. Zur Stabilitätsuntersuchung wird statt den Variablen  $T_{rn}$  und  $T_{jn}$  die Variable  $\alpha_{u,n}$  verwendet.

$$T_{rn} = \cos(\alpha_{u,n}) \quad T_{jn} = \sin(\alpha_{u,n}) \quad (6.5)$$

Abbildung 6.3 und Abbildung 6.4 zeigen den Dämpfungsfaktor abhängig vom Parameter  $\alpha_{u,n}$  und  $\varepsilon$  bei einer synchronen Unwuchtfrequenz  $f_{unb} = 10$  Hz und  $f_{unb} = 660$  Hz. Dabei wurde von einem der entkoppelten rotatorischen Freiheitsgrade ein Eigenwertpaar herausgenommen, welches stark von den Unwuchtparametern abhängt. Für ein ausreichend entkoppeltes System ist pro Freiheitsgrad immer ein Polpaar stark abhängig von den Parametern der Unwuchtkompensation. Aus einer Menge an durchgeführten Simulationen konnte eine Abhängigkeit der Unwuchtparameter aller Eigenwerte festgestellt werden. Für das vorliegende System war jedoch nur das betrachtete Eigenwertpaar für eine Destabilisierung aufgrund der Unwuchtkompensation verantwortlich. Die graue Ebene illustriert die Grenze von positiven zu negativen Dämpfungsfaktoren. Beide Eigenwerte haben dasselbe Verhalten für den konjugiert komplexen Fall. Wird die Dämpfung jedoch größer als 1, oder kleiner als  $-1$ , so entstehen aus dem konjugiert komplexen Polpaar zwei im Allgemeinen verschiedene reelle Eigenwerte.

Die Stabilität wird fast ausschließlich von dem Parameter  $\alpha_{u,n}$  beeinflusst. Der Parameter  $\varepsilon$  hingegen verändert die Höhe des Dämpfungsfaktors. Die Stabilität wird von  $\varepsilon$  in einem weiten Bereich jedoch kaum beeinflusst. Ab einer gewissen Höhe kann der Wert  $\varepsilon$  sehr wohl

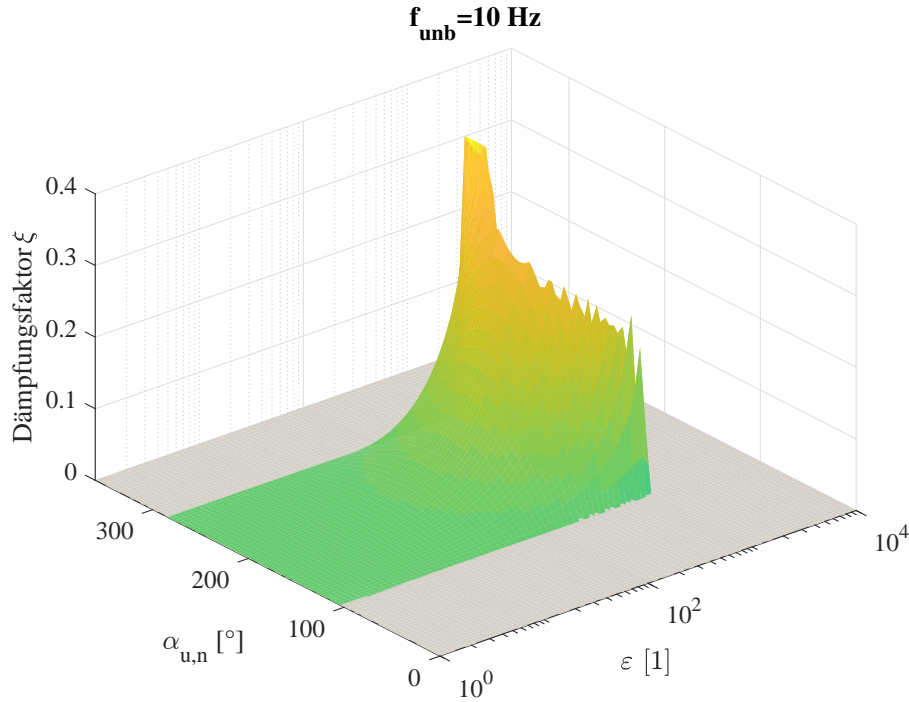


Abbildung 6.3: Dämpfungsfaktor eines für die Unwuchtkompensation signifikanten Pols abhängig von  $\alpha_{u,n}$  und  $\varepsilon$  bei  $f_{unb} = 10$  Hz

zu einer Destabilisierung des Systems führen. Würde anstatt  $\alpha_{u,n}$ ,  $T_{rn}$  und  $T_{jn}$  für die Stabilitätsuntersuchung verwendet, so wäre die Stabilität von zwei Parametern stark abhängig. Für den Fall kleiner werdender Unwuchtfrequenzen verringert sich auch der maximal mögliche Wert von  $\varepsilon$  für ein resultierendes stabiles System. Da sich für ein kleiner werdendes  $\varepsilon$  die Bandbreite verkleinert und die Konvergenz-Zeit vergrößert, besitzt diese Art der Regelung für den geringeren Drehzahlbereich ein schlechteres dynamisches Verhalten.

Da die Stabilität näherungsweise vom Parameter  $\alpha_{u,n}$  abhängt, kann der Dämpfungsfaktor des Eigenwertpaares abhängig von der synchronen Unwuchtfrequenz  $f_{unb}$  und dem Parameter  $\alpha_{u,n}$  angegeben werden (Abbildung 6.5). Um die starke Änderung des Bereiches einer positiven Dämpfung (Stabilitätsbereich) im tiefen Drehzahlbereich darzustellen wurde die  $f_{unb}$ -Achse logarithmisch skaliert. Der Stabilitätsbereich bleibt zwar im gesamten Betriebsbereich gleich, die Bandbreite der Kompensation nimmt jedoch mit geringerer Unwuchtfrequenz  $f_{unb}$  ab. Auch wenn der Eindruck erweckt wird, eine stabile Force-Free Regelung im gesamten Betriebsbereich zu erhalten, so ist die praktische Umsetzung im geringen Drehzahlbereich, aufgrund unausweichlicher Winkelfehler, schwer realisierbar. Ein kleiner Winkel bzw. Drehzahlfehler kann in diesem Fall zu einem schlechten Verhalten der Kompensation führen. Zusätzlich ist in [63] bewiesen, dass die Norm der Unwuchtviibration  $\|\mathbf{y}_u\|_2$  unter Verwendung einer Force-Free Regelung nur in Bereichen reduziert wird, wo die Verstärkung der Sensitivitätsfunktion  $\|\mathbf{S}(j\omega)\|_2$  größer als 1 ist. Für tiefe Drehzahlen ist die Verstärkung jedoch weitaus kleiner als

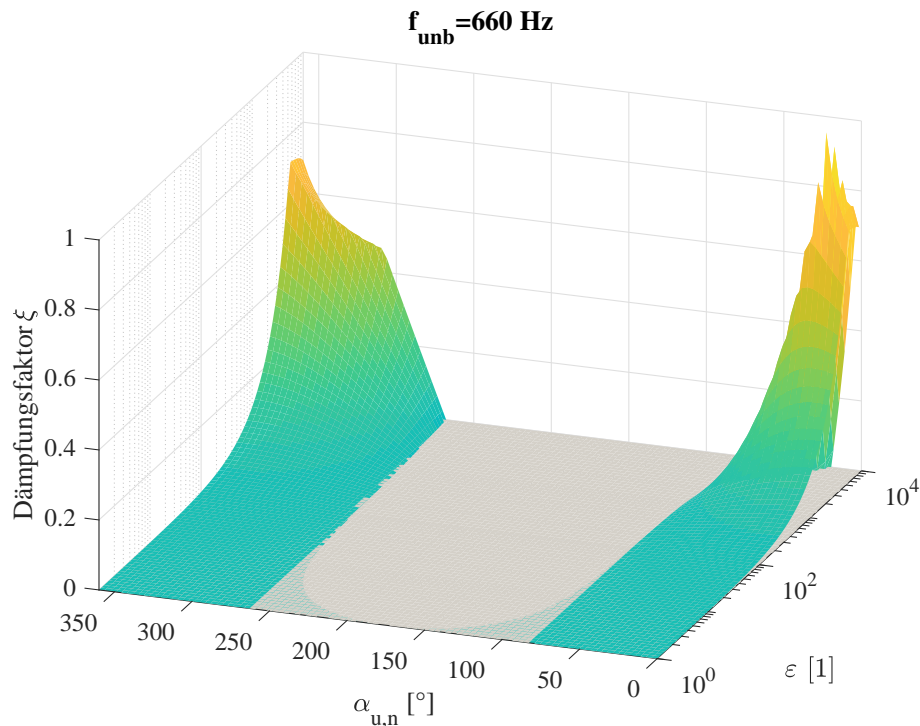


Abbildung 6.4: Dämpfungsfaktor eines für die Unwuchtkompensation signifikanten Pols abhängig von  $\alpha_{u,n}$  und  $\varepsilon$  bei  $f_{unb} = 660$  Hz

1. Im vorliegenden Fall wurde als untere Grenze der Force-Free Regelung eine Frequenz von 60 Hz verwendet. Für die Implementierung im DSP wurde der für jede Drehzahl maximale Dämpfungswert  $\xi_{max}$  verwendet. Diese resultierende Funktion der Maximalwerte wurde, um die Rechenzeit zu minimieren, stückweise linearisiert. Das Ergebnis der Auswertung der Maximalwerte und der Linearisierung ist in Abbildung 6.6 ersichtlich. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die verwendete Force-Free Methode eine einfache Implementierung im DSP zulässt und dennoch im höheren Drehzahlbereich robustes Verhalten aufweist. Für den geringen Drehzahlbereich ist diese Art der Unwuchtkompensation jedoch nicht zu bevorzugen.

### Vibrationsregelung

Für manche Applikationen von Turbomolekularpumpen ist die Unwuchtvibration im geringen Drehzahlbereich zu hoch. In diesem Bereich kann ein Force-Free Regler aber nur schwer eingesetzt werden. Daher wird im kleinen Drehzahlbereich ein Vibrationsregler eingesetzt. Der Vibrationsregler ist aufgrund der immer höheren Stromanforderung mit steigender Drehzahl durch die Aktuatorsättigung limitiert. Um die Stabilitätseigenschaften des Vibrationsreglers im geschlossenen Regelkreis eines Magnetlagersystems zu analysieren, wird die Dämpfung des signifikanten Polpaars abhängig von  $\alpha_{u,n}$  und  $\varepsilon$  bei einer synchronen Unwuchtfrequenz

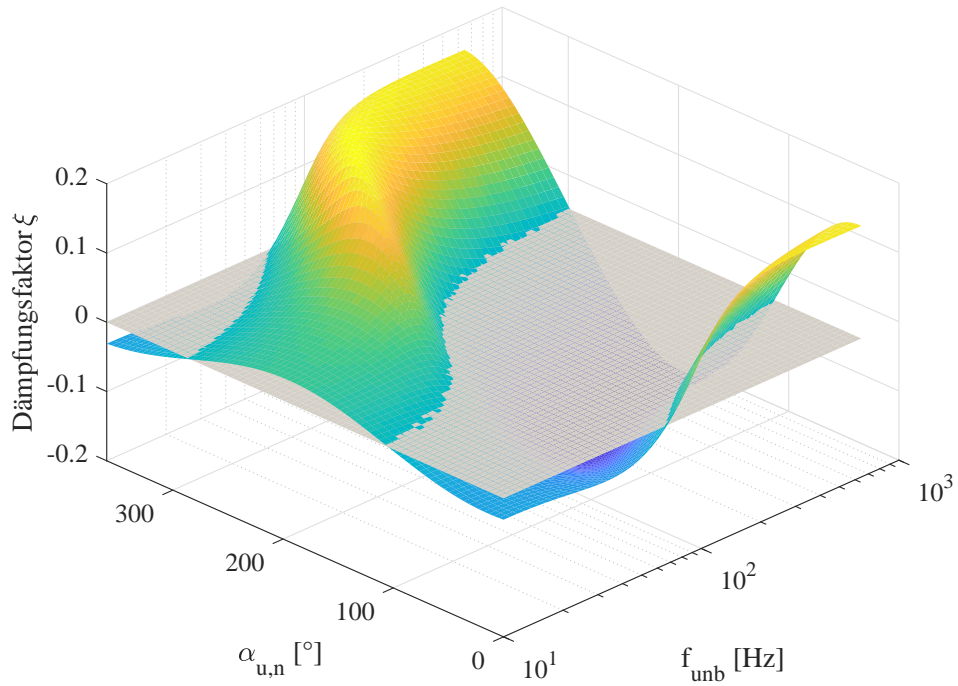


Abbildung 6.5: Dämpfungsfaktor eines für die Unwuchtkompensation signifikanten Pols abhängig von  $\alpha_{u,n}$  und  $f_{unb}$  für ein exponentiell steigendes  $\varepsilon$

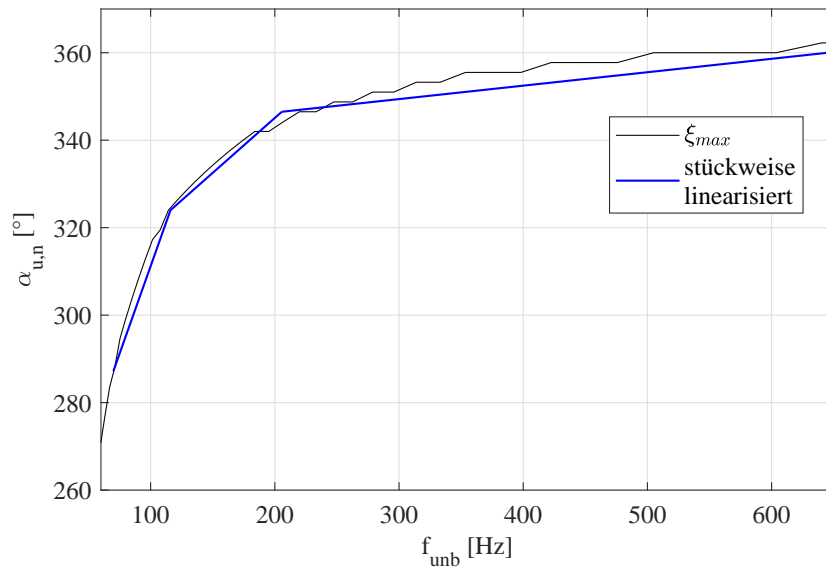


Abbildung 6.6: Linearisierung der optimalen Unwuchtparameter für  $\xi_{max}$  in Abhängigkeit der Unwuchtfrequenz  $f_{unb}$

von  $f_{unb} = 1$  Hz dargestellt (Abbildung 6.7). Die Pole können dabei aus der Minimalrealisierung der folgenden Übertragungsfunktion berechnet werden:

$$\mathbf{T}_v = [\mathbf{E} + \mathbf{G}(s) (\mathbf{C}(s) + \mathbf{N}_{ol}(s))]^{-1} \quad (6.6)$$

Um den stabilen Bereich von  $\varepsilon$  besser darstellen zu können, wird eine logarithmische Skala

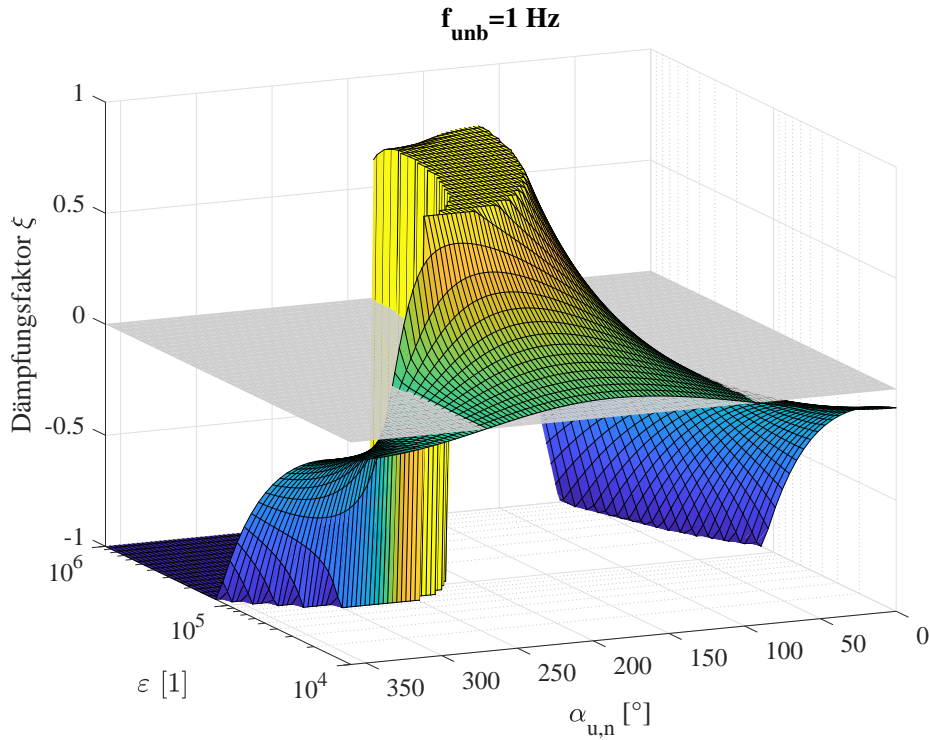


Abbildung 6.7: Dämpfungsfaktor eines für die Vibrationsregelung signifikanten Pols abhängig von  $\alpha_{u,n}$  und  $\varepsilon$  bei einer Unwuchtfrequenz von  $f_{unb} = 1$  Hz

lierung verwendet. Wie zu erkennen ist, kann der Parameter  $\varepsilon$  nicht beliebig erhöht werden, da ab einer gewissen Größe von  $\varepsilon$  der Stabilitätsbereich verringert wird. Für den Fall einer Unwuchtfrequenz  $f_{unb}$  von 1 Hz sollte die Wahl von  $\varepsilon$  nicht größer als  $\varepsilon = 10^5$  sein, um eine ausreichende Robustheit gegen Modellunsicherheiten zu gewährleisten. Abbildung 6.8 zeigt diesen Sachverhalt auch bei einer höheren Unwuchtfrequenz  $f_{unb}$  von 200 Hz. Der praktisch maximal mögliche Dämpfungsfaktor ist bei dieser höheren Unwuchtfrequenz kleiner. Der Grund hierfür liegt in dem mit  $-40$  dB/dek abfallenden Betragsgang der Regelstrecke bei höheren Frequenzen. Sieht man von der Verkleinerung des Dämpfungsfaktors ab, kann dennoch festgehalten werden, dass der Stabilitätsbereich im gesamten Drehzahlbereich ausreichen hoch ist. Diese Tatsache kann mit Abbildung 6.9 untermauert werden, welche die Abhängigkeit eines für die Vibrationsregelung signifikanten Pols abhängig von  $\alpha_{u,n}$  und  $f_{unb}$  bei linear steigendem  $\varepsilon$  darstellt. Da der Dämpfungsfaktor mit steigender synchronen Unwuchtfrequenz stark abnimmt, wird aufgrund der Darstellbarkeit auch die Achse des Dämpfungsfaktors loga-

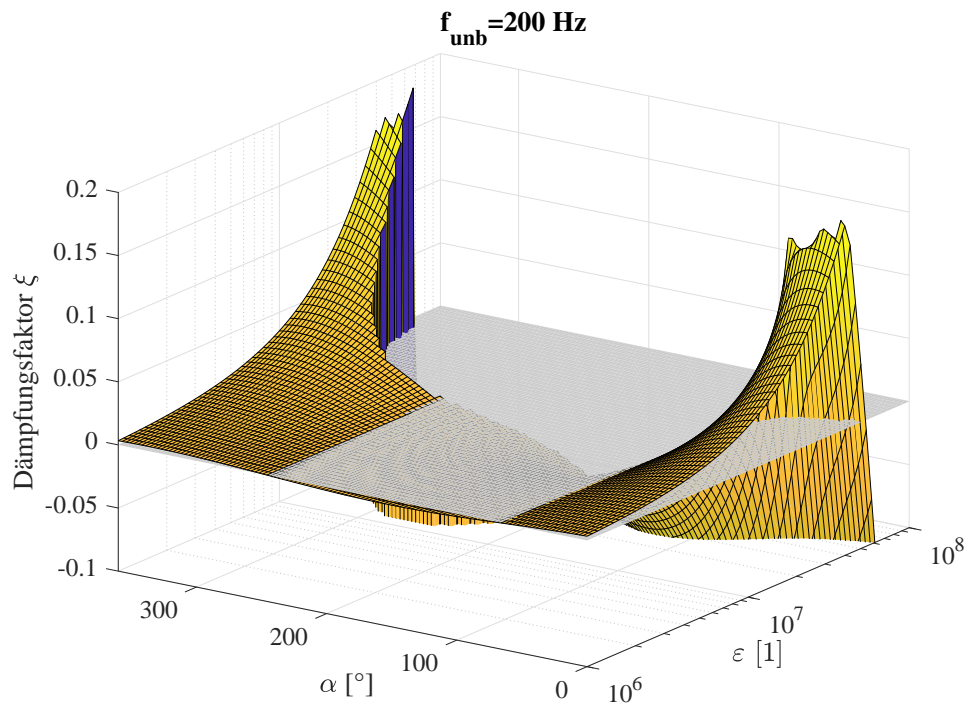


Abbildung 6.8: Dämpfungsfaktor eines für die Vibrationsregelung signifikanten Pols abhängig von  $\alpha_{u,n}$  und  $\varepsilon$  bei eine Unwuchtfrequenz von  $f_{unb} = 200$  Hz

rithmisch skaliert. Da ein Logarithmus im Bereich der negativen reellen Zahlen nicht definiert ist, werden nur positive Zahlen dargestellt. Die Stabilität wird, wie auch bei der Force-Free Regelung, hauptsächlich durch den Parameter  $\alpha_{u,n}$  beeinflusst. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass der Vibrationsregler im gesamten Drehzahlbereich ein robustes Verhalten aufweist und nur der praktisch erreichbare Dämpfungsfaktor mit steigender Unwuchtfrequenz sinkt. Die Aussage eines kleiner werdenden Dämpfungsfaktors muss jedoch nicht zwangsläufig zu einer starken Verschlechterung des Ein- Ausgangsverhaltens des Systems führen, da ja nicht bekannt ist, wie diese durch die Unwuchtkompensation erzeugten Eigenwerte auf den Ausgang wirken. Obwohl durch die Stabilitätsanalyse der Anschein erweckt wird, dass der Vibrationsregler für den gesamten Drehzahlbereich eingesetzt werden kann, ist durch die Limitierung des Maximalstromes des Aktuators dennoch eine Einschränkung gegeben. Industrielle Applikation unterliegen oftmals der Forderung den Aktuator möglichst klein zu halten. Daher wird der Vibrationsregler für höhere Drehzahlen, nur falls wirklich notwendig, eingesetzt. Für die Turbomolekularpumpe 2 nimmt beispielsweise die Unwuchtviibration schon für geringe Drehzahlen ( $n = 2200 \text{ min}^{-1}$ ) unzulässig hohe Werte an. Für diesen Drehzahlbereich ist die Performance des Force-Free Regler jedoch unzureichend. Daher wird im niedrigem Drehzahlbereich ein Vibrationsregler eingesetzt und für höhere Drehzahlen auf eine Force-Free Regelung umgeschaltet. Für die Turbomolekularpumpe 1 reicht hingegen eine Force-Free

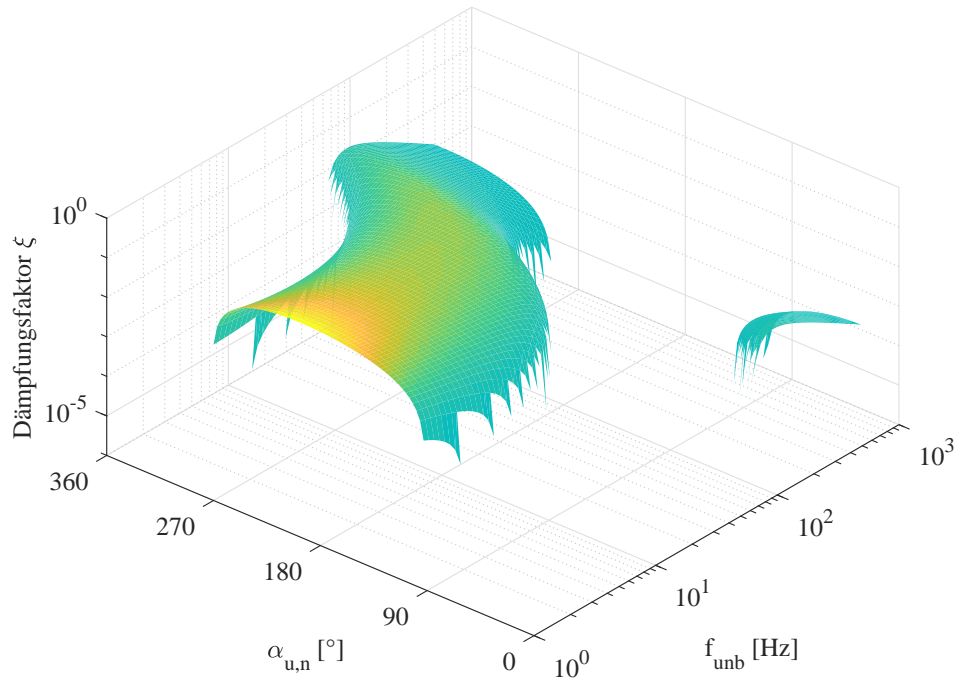


Abbildung 6.9: Dämpfungsfaktor eines für die Vibrationsregelung signifikanten Pols abhängig von  $\alpha_{u,n}$  und  $f_{unb}$  bei linear steigendem  $\varepsilon$

Regelung aus, da die Unwuchtvibrationen für niedrige Frequenzen ausreichend klein sind.

### 6.1.3 Experimentelle Ergebnisse

In diesem Unterabschnitt wird die Performance der beiden Unwuchtkompensations-Strategien mittels verschiedener Experimente verifiziert. Da die Turbomolekularpumpe 1 nur im höheren Drehzahlbereich eine Unwuchtkompensation benötigt, wird zur Verifikation beider Methoden die Turbomolekularpumpe 2 herangezogen. Der maximal zulässige Strom eines Aktuators ist auf 2 A beschränkt. Abbildung 6.10 zeigt, dass der Rotor schon für geringe Drehzahlen eine im Vergleich zum mechanischen Luftspalt ( $165 \mu\text{m}$ ) hohe Amplitude der Unwuchtvibration ( $A_{unb}$ ) besitzt (Rote Linie). Diese Unwuchtvibration wäre schon bei etwa  $3000 \text{ min}^{-1}$  unzulässig hoch. Daher muss bei tieferen Drehzahlen eine Unwuchtkompensation verwendet werden. Wie im vorhergehenden Unterabschnitt beschrieben, ist die Force-Free Regelung für solch tiefe Drehzahlen nicht geeignet. Daher wird in diesem niedrigen Drehzahlbereich ein Vibrationsregler eingesetzt. Wird eine sensorlose Unwuchtkompensation, wie im nächsten Kapitel beschrieben, verwendet, kann nicht der gesamte Unwuchtanteil kompensiert werden. Der sensorlose "Speed-tracking" Algorithmus benötigt nämlich das Unwuchtsignal für die Berechnung der Drehzahl. Um die Vibrationsregelung auch für die sensorlose Kompensation verwenden zu können, müssen daher die Integratoren durch Tiefpassfilter und einer Verstärkung ersetzt werden. Für



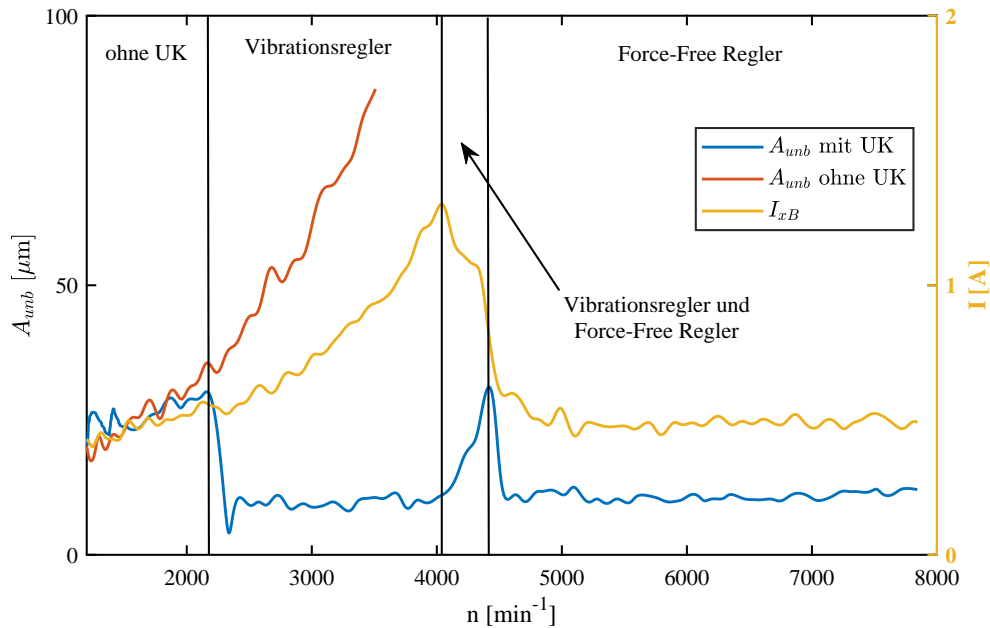


Abbildung 6.10: Unwuchtamplitude und Stromamplitude abhängig von der Drehzahl

höhere Frequenzen wird vom Vibrationsregler auf den Force-Free Regler umgeschaltet. Eine direkte Umschaltung kann das System jedoch destabilisieren. Der Grund liegt in der Konvergenzgeschwindigkeit der Force-Free Regelung. Im ersten Zeitpunkt nach dem Umschalten verhält sich das System als ob keine Unwuchtkompensation aktiv wäre. Dies kann unter Umständen zu einem mechanischen Kontakt des Rotors mit den "Touch-Down"-Lagern führen. Um dies zu vermeiden, wird die Vibrationsregelung in Kombination mit der Force-Free Regelung in einem gewissen Drehzahlbereich gemeinsam verwendet. Für höhere Drehzahlen kann der Vibrationsregler dann abgeschaltet werden. Laut Abbildung 6.10 wird die Turbomolekularpumpe 2 bis zu einer Drehzahl von  $2200 \text{ min}^{-1}$  ohne Unwuchtkompensation betrieben. Ab dieser Drehzahl wird der Vibrationsregler eingeschaltet. Die Unwuchtviibration wird zu einem durch die Regelung definierten Wert reduziert. Der Unterschied der Stromamplitude vor und nach dem Umschaltzeitpunkt ist sehr gering. Jedoch ist ein starker Anstieg des Stromes mit steigender Drehzahl zu erkennen. Deshalb wird bei einer Drehzahl von ungefähr  $4000 \text{ min}^{-1}$  der Force-Free Regler zusätzlich verwendet. Bei Drehzahlen oberhalb von  $4300 \text{ min}^{-1}$  wird der Vibrationsregler abgeschaltet und nur mehr der Force-Free Regler verwendet. Die Spitze der Unwuchtamplitude bei einer Drehzahl von ungefähr  $4300 \text{ min}^{-1}$  ist in dem Umschaltvorgang begründet und hängt von der Konvergenzgeschwindigkeit der Force-Free Regelung ab. Die Messungen zeigen, dass die Vibration aufgrund der Unwucht im gesamten Drehzahlbereich unter einem Viertel des mechanischen Luftspalts bleibt. Die Stromamplitude bleibt nach dem Einschalten der Force-Free Regelung für den gesamten Drehzahlbereich gleich und wird daher nicht bis Nenndrehzahl angegeben. Im Bereich der Force-Free Regelung ist also

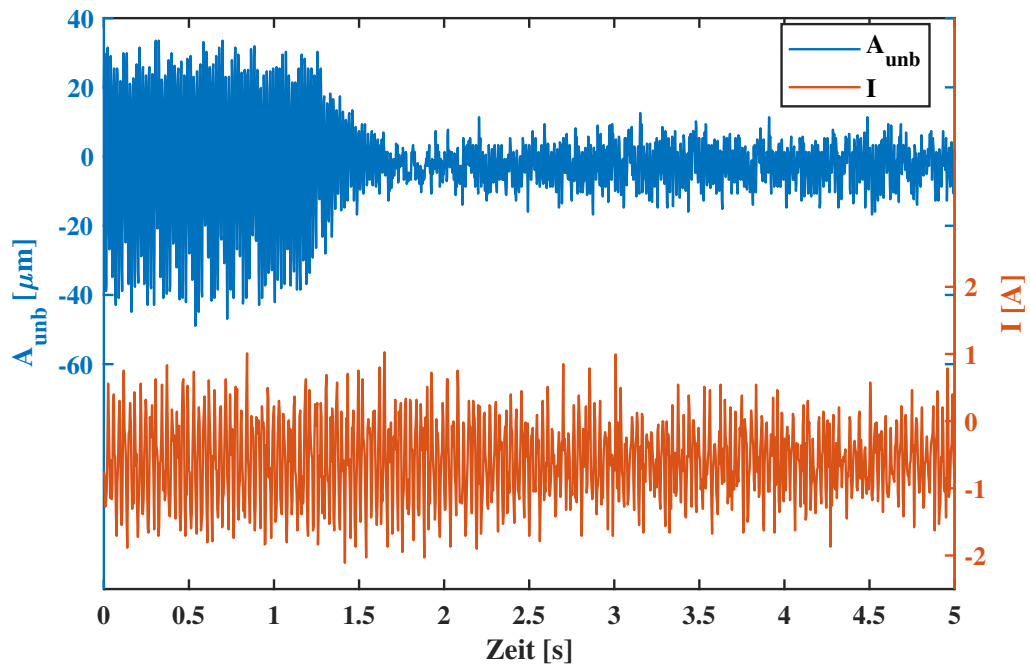


Abbildung 6.11: Einschaltvorgang des Vibrationsreglers bei  $2800 \text{ min}^{-1}$

ein vergleichsweise kleiner Orbit in Kombination mit einem geringen Strom realisierbar. Der Fall einer vollständigen Elimination der Unwucht hat im Anwendungsgebiet der Turbomolekularpumpen nur eine geringe praktische Bedeutung.

Abbildung 6.11 zeigt das Einschaltverhalten des Vibrationsreglers. Um einen größeren Unterschied vor und nach dem Einschaltvorgang zu sehen, wird die Kompensation erst bei einer Drehzahl von  $2800 \text{ min}^{-1}$  aktiviert. Die Konvergenzzeit des Vibrationsreglers beträgt in etwa  $0.3 \text{ s}$ . Um auch eine sensorlose Unwuchtkompensation verwenden zu können, wird nicht die gesamte Unwuchtvibration kompensiert. Die Amplitude des Stromes wird jedoch nach dem Einschalten des Vibrationsreglers nicht größer. Zusammenfassend kann angegeben werden, dass der Vibrationsregler im Vergleich zum nicht kompensierten System, die Unwuchtvibration ohne dem Erfordernis einer Stromerhöhung deutlich verringert. Im Vergleich zur Force-Free Regelung ist der Spulenstrom jedoch deutlich höher.

## 6.2 Unwuchtkompensation ohne explizite Messung der Drehzahl

Das vorhergehende Kapitel beschreibt die Entwicklung und die Performance-Analyse einer Unwuchtkompensation magnetgelagerter Rotoren unter Kenntnis der Drehzahl. Da ein Magnetlagersystem üblicherweise keine eigene Sensorik für die Drehzahlmessung besitzt, soll in diesem Kapitel eine Struktur (Unwuchtbeobachter) entwickelt werden, welche für eine Unwuchtkompensation keine externe Drehzahlinformation benötigt. Mit Hilfe einer solchen Struktur ist eine Regelung des Magnetlagers ohne eine Verbindung mit dem Motor-Controller, möglich. Ein weiteres Ziel der Anwendung eines Unwuchtbeobachters ist eine redundante Drehzahlinformation. Beispielsweise kann bei einer vorhandenen Kommunikation zwischen Motor- und Magnetlagerregelung (Abbildung 6.12), die Winkelinformation der Unwucht zur Regelung des elektrischen Antriebs verwendet werden, falls eine Sensorik oder eine der sensorlosen Methoden zur Motorregelung fehlerhafte Ergebnisse liefert. Bei vorhandener Kommunikation sind also

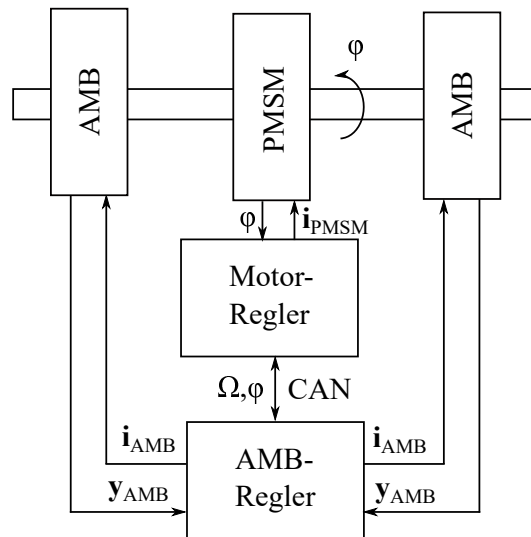


Abbildung 6.12: Kommunikation zwischen Motor-Regler und Magnetlager-Regler

zwei redundante Informationsquellen über die Lage und die Drehzahl des Rotors vorhanden. Ist keine redundante Informationsquelle nötig, kann unter Zuhilfenahme des Unwuchtbeobachters die Kommunikation zwischen Motor und Magnetlagerregler eingespart werden.

Für die Schätzung der Rotordrehzahl wird in [72] ein adaptiver Beobachter verwendet. Eine einfachere und intuitivere Strategie wird in [73] beschrieben, wo eine "Phase Locked Loop" (PLL) in Kombination mit einer Arkustangens-Berechnung zur Drehzahlschätzung verwendet wird. Ein Problem der direkten Berechnung mittels Arkustangens liegt jedoch in der Sensitivität gegen ein vorhandenes Messrauschen.

In dieser Arbeit wird eine Schätzung des Rotorwinkels und der Rotordrehzahlen aus den Werten der Positionssensoren eines 5-DOF Magnetlagers beschrieben. Für die Schätzung die-

ser beiden Werte wird ein einfacher nichtlinearer Beobachter entwickelt, wobei die Fehlerdynamik des Beobachtungsfehlers durch ein LTI-System beschrieben wird. Mit Hilfe dieser Schätzung kann der Magnetlagerregler unabhängig vom Motorregler betrieben werden. Falls eine Kommunikation zwischen Motorregelung und Magnetlagerregelung vorhanden ist, kann der geschätzte Winkel und die geschätzte Drehzahl als eine redundante Informationsquelle angesehen werden. Die Drehzahlinformation ist nicht nur für die Unwuchtkompensation nötig. Auch die Reduzierung des gyroskopischen Effektes benötigt diese Information.

### 6.2.1 Entwicklung der Beobachterstruktur

Um unabhängig von der Kommunikation mit der Motorregelung eine stabile Unwuchtkompensation zu realisieren, wird in dieser Arbeit ein Unwuchtbeobachter eingesetzt. Die Struktur des Beobachters basiert auf einem vollständigen zeitdiskreten Luenberger Beobachter mit der allgemeinen Form:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{z}}_k + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u}_k + \hat{\mathbf{K}}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}_k) \quad (6.7)$$

wobei  $\mathbf{\Phi}$  die Dynamikmatrix des Systems,  $\mathbf{\Gamma}$  die Eingangsmatrix,  $\mathbf{C}$  die Ausgangsmatrix,  $\mathbf{y}_k$  den Ausgangsvektor und  $\hat{\mathbf{z}}_k$  den geschätzten Zustandsvektor eines zeitdiskreten Systems beschreibt.  $\hat{\mathbf{K}}_k$  beschreibt die im allgemeinen nichtlineare Verstärkungsmatrix zur Stabilisierung des Beobachters. Die nichtlineare Ausgangsgleichung eines in positiver Richtung drehenden Rotors lautet:

$$\begin{aligned} x_l &= A \cos(\varphi) \\ y_l &= A \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (6.8)$$

mit der Amplitude der Unwuchtvibration  $A$ , dem Rotorwinkel  $\varphi$  und den Lagerkoordinaten  $x_l$  und  $y_l$ . Für die Schätzung der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  und des Rotorwinkels  $\varphi$  wird das Beobachtermodell

$$\begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{k+1} \\ \hat{\Omega}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_k \\ \hat{\Omega}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1\varphi,k} & k_{2\varphi,k} \\ k_{1\Omega,k} & k_{2\Omega,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{l,k} - \hat{x}_{l,k} \\ y_{l,k} - \hat{y}_{l,k} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

mit dem geschätzten Rotorwinkel  $\hat{\varphi}_k$ , der geschätzten Rotordrehzahl  $\hat{\Omega}_k$ , der Abtastzeit  $T_a$ , den geschätzten Ausgängen  $\hat{x}_{l,k}$  und  $\hat{y}_{l,k}$  und der im allgemeinen zeitvarianten Rückkoppeltermine  $k_{1\varphi,k}$ ,  $k_{2\varphi,k}$ ,  $k_{1\Omega,k}$  und  $k_{2\Omega,k}$ , herangezogen. Da dieses Modell nur die kinematischen Zusammenhänge enthält, wird keine Änderung der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  im Modell berücksichtigt. Eine Änderung von  $\Omega$  bei den vorhandenen Turbomolekularpumpen ist im Vergleich zur Systemdynamik des Magnetlagersystems hinreichend klein. Daher kann dieser Modellierungsfehler durch die Rückkoppeltermine ausreichend kompensiert werden. Dieser kinematische Beobachter besitzt den Vorteil einer schnellen Berechnung im DSP und der Unabhängigkeit von Systemparametern. Es kann also derselbe Beobachter für beide Turbomolekularpumpen, ohne eine Änderung der Parameter, eingesetzt werden. Ist die Bedingung einer kleinen Win-

kelbeschleunigung des Rotors nicht erfüllt, oder ist die Modellierung der kinetischen Eigenschaften notwendig, so muss das Modell um die dynamischen Bewegungsgleichungen erweitert werden.

Wird die Ausgangsgleichung (6.8) in die Systemgleichung (6.9) eingesetzt, resultiert ein nichtlineares Modell

$$\begin{bmatrix} e_{\varphi,k+1} \\ e_{\Omega,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\varphi,k} \\ e_{\Omega,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1\varphi,k} & k_{2\varphi,k} \\ k_{1\Omega,k} & k_{2\Omega,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\cos(\varphi_k) - \cos(\hat{\varphi}_k)) \\ A(\sin(\varphi_k) - \sin(\hat{\varphi}_k)) \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

mit einer im Allgemeinen nichtlinearen Fehlerdynamik. Bei der Herleitung wurde die Bekanntheit der Unwuchtamplitude  $A$  angenommen. Die Berechnung von  $A$  erfolgt durch Betragbildung und anschließender Tiefpassfilterung. Für nichtlineare Systeme ist es oftmals schwierig Stabilität nachzuweisen. Daher werden die Rückkoppelterme als eine Funktion der Zustände gewählt [74]. Das Ziel der Wahl der Rückkoppelterme ist eine resultierende lineare zeitinvariante Fehlerdynamik. Der erste Schritt ist eine Substitution der Variablen laut Abbildung 6.13

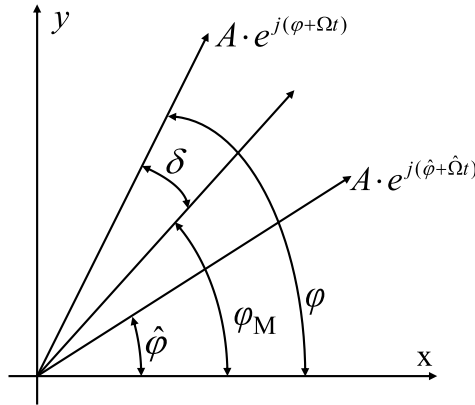


Abbildung 6.13: Grafische Darstellung der Substitution mittels  $\varphi_m$  und  $\delta$

$$\begin{aligned} \varphi_{m,k} &= \hat{\varphi}_k + \delta_k \\ \delta_k &= \frac{\varphi_k - \hat{\varphi}_k}{2} \end{aligned} \quad (6.11)$$

im Rückkoppelzweig. Der Fehler in x-Richtung lautet demnach:

$$\begin{aligned} x_{l,k} - \hat{x}_{l,k} &= A(\cos(\varphi_{m,k} + \delta_k) - \cos(\varphi_{m,k} - \delta_k)) \\ &= -2A \sin(\varphi_{m,k}) \sin(\delta_k) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Falls  $\delta_k$  als hinreichend klein angenommen werden kann, resultiert mit Hilfe der Kleinwinkelnäherung und mit  $\varphi_{m,k} \approx \varphi$  folgender Zusammenhang:

$$x_{l,k} - \hat{x}_{l,k} = -A \sin(\varphi_k)(\varphi_k - \hat{\varphi}_k) \quad (6.13)$$

Die Berechnung für die y-Richtung erfolgt auf analoge Weise:

$$y_{l,k} - \hat{y}_{l,k} = A \cos(\varphi_k)(\varphi_k - \hat{\varphi}_k) \quad (6.14)$$

Für den Fall von  $|e_\Omega| > 0$ , rotieren der geschätzte Zeitzeiger  $Ae^{j(\hat{\varphi} + \hat{\Omega}t)}$  und der reale Zeitzeiger  $Ae^{j(\varphi + \Omega t)}$  mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten. Daher ist die Annahme eines hinreichend kleinen Wertes  $\delta$  zumindest für einen gewissen Zeitbereich, der von  $|e_\Omega|$  abhängt, erfüllt. Die Parameter des Beobachters müssen also so eingestellt werden, dass ein ausreichend schnelles Konvergieren des Beobachterfehlers sichergestellt wird. Um eine einfache Auslegung des Beobachters zu erreichen sollte die resultierende Fehlerdynamik ein LTI-System beschreiben.

Eine Möglichkeit wäre eine Division durch  $\sin(\varphi)$  und  $\cos(\varphi)$ . Diese Division zieht jedoch aufgrund der Nulldurchgänge der trigonometrischen Funktionen numerische Probleme mit sich. Daher wird die Linearisierung durch folgende Wahl der nichtlinearen Beobachterverstärkungen realisiert:

$$\begin{aligned} k_{1\varphi,k} &= -\frac{\tilde{k}_\varphi}{A} \sin(\varphi_k) & k_{2\varphi,k} &= \frac{\tilde{k}_{\varphi_k}}{A} \cos(\varphi) \\ k_{1\Omega,k} &= -\frac{\tilde{k}_\Omega}{A} \sin(\varphi_k) & k_{2\Omega,k} &= \frac{\tilde{k}_\Omega}{A} \cos(\varphi_k) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Setzt man diese nichtlinearen Beobachterverstärkungen in die Rückführung von Gleichung (6.9) erhält man eine lineare Gleichung:

$$\begin{bmatrix} k_{1\varphi,k} & k_{2\varphi,k} \\ k_{1\Omega,k} & k_{2\Omega,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{l,k} - \hat{x}_{l,k} \\ y_{l,k} - \hat{y}_{l,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\tilde{k}_\varphi (\varphi_k - \hat{\varphi}_k)}_{e_{\varphi,k}} \underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_1 \\ \underbrace{\tilde{k}_\Omega (\varphi_k - \hat{\varphi}_k)}_{e_{\varphi,k}} \underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_1 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Daher kann die Fehlerdynamik wie folgt angegeben werden.

$$\begin{bmatrix} e_{\varphi,k+1} \\ e_{\Omega,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\varphi,k} \\ e_{\Omega,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{k}_\varphi & \tilde{k}_\varphi \\ \tilde{k}_\Omega & \tilde{k}_\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\varphi,k} \\ e_{\varphi,k} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Die resultierende Fehlerdynamik beschreibt also ein LTI-System, für welches es einfache Methoden zur Auslegung der Rückkoppelterme gibt. Wie oben beschrieben, hängt das Konvergenzverhalten von der Differenz der geschätzten und der realen Drehzahl ab.

Die Rückkoppelterme  $\tilde{k}_\varphi$  und  $\tilde{k}_\Omega$  können beispielsweise mit einer Polplatzierungsmethode berechnet werden. In manchen Fällen ist es anschließend noch notwendig, die Parameter an das Verhalten des Messrauschens anzupassen. Da diese Struktur keine explizite Messung der Drehzahl benötigt, kann im Falle einer Kombination mit einer Unwuchtkompensation auch von einer "selfsensing" Unwuchtkompensation gesprochen werden. Die Linearisierung des Systems wurde unter der Bedingung durchgeführt, dass der Winkelfehler  $\delta_k$  nur kleine Werte annimmt.

Dies ist bei jeder Umdrehung unter der Bedingung von  $|e_\Omega| > 0$  für eine bestimmte Zeit der Fall. Der Beobachter muss daher schnell genug sein, um in diesem Zeitbereich einzuschwingen. Um das Verhalten bei verschiedenen Startbedingungen zu analysieren, wurde eine Simulation mit den Beobachterparametern  $\tilde{k}_\varphi = 0.0002$  und  $\tilde{k}_\Omega = 0.4$  durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.14 dargestellt. Bei einem Initialfehler der Drehzahl­schätzung von  $2000 \text{ min}^{-1}$

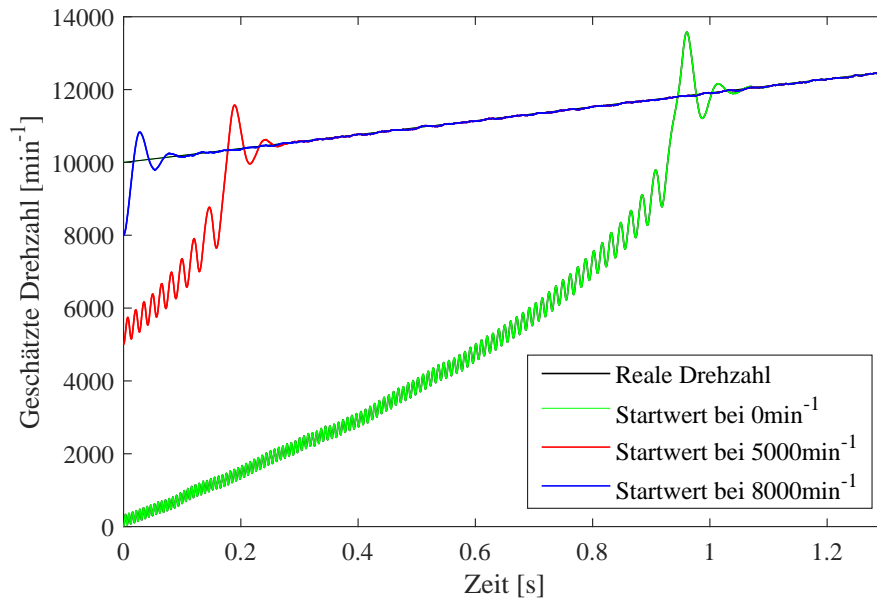


Abbildung 6.14: Simuliertes Einschwingverhalten des Unwuchtbeobachters bei verschiedenen Initialfehlern der Drehzahl­schätzung

schwingt das System ausreichend schnell ein. Der Grund für dieses gute Einschwingverhalten liegt in der ausreichend hohen Dynamik des Beobachters für diesen Initialfehler der Drehzahl. Wird der Initialfehler der Drehzahl­schätzung jedoch vergrößert, so müsste auch die Dynamik des Beobachters erhöht werden. Wird bei gleicher Dynamik des Beobachters der Initialfehler der Drehzahl­schätzung vergrößert, kann es durchaus vorkommen, dass das Einschwingverhalten des Beobachters nicht mehr ausreicht, um in dem Zeitbereich in dem  $\delta_k$  ausreichend klein ist, zu konvergieren (rote und grüne Linie). Es ist jedoch zu erkennen, dass sich der Fehler  $|e_\Omega|$  mit jedem Intervall in der ein kleines  $\delta_k$  erfüllt ist, verringert wird. Diese längere Einschwingzeit ist jedoch in Magnetlagersystemen nicht anwendbar, da das Magnetlagersystem bereits destabilisiert werden kann, bevor der Unwuchtbeobachter konvergiert. Daher ist es in industriellen Anwendungen nötig, auch unter der Anwendung einer anderen Quelle der Drehzahl­information den Startwert des Beobachters entweder zu synchronisieren, oder den Beobachter parallel mitlaufen zu lassen. In diesem Fall zeichnet sich der in diesem Abschnitt entwickelte Unwuchtbeobachter durch eine ausreichend geringe Einschwingzeit aus, falls eine andere Quelle der Drehzahl­information unvorhersehbar ausfällt.

## 6.2.2 Experimentelle Ergebnisse

Um die Funktionalität des Unwuchtbeobachters in Kombination mit der Unwuchtkompensation zu zeigen, werden beide Strukturen an der Turbomolekularpumpe 1 angewendet.

### Verhalten der Unwuchtkompensation bei Verwendung der geschätzten Drehzahl

Um die Performance der Unwuchtkompensation in Kombination mit dem Unwuchtbeobachter zu analysieren, wird die Rotorposition eines radialen Sensors und der Strom einer Spule des Magnetlagers vor und nach dem Einschaltzeitpunkt ( $6000 \text{ min}^{-1}$ ) der Force-Free Regelung gemessen (Abbildung 6.15 und Abbildung 6.16). Die Unwuchtvibration nimmt vor dem

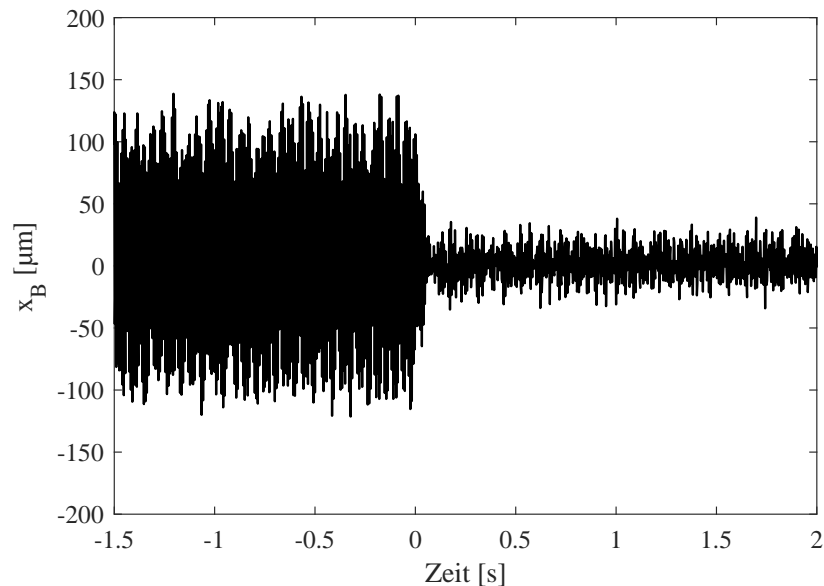


Abbildung 6.15: Gemessene Auslenkung beim Einschalten der Force-Free Regelung bei  $6000 \text{ min}^{-1}$

Einschalten der Unwuchtkompensation bereits unakzeptabel hohe Werte an. Ohne Unwuchtkompensation würde diese Vibration eine obere Grenze der Drehzahl mit sich ziehen. Durch das Einschalten der Unwuchtkompensation, wird die maximale Rotorauslenkung deutlich reduziert. Durch diese Kompensation ist das obere Limit der Drehzahl nicht mehr durch die Unwuchtvibration definiert. Die bleibende Unwuchtvibration nach dem Einschalten der Force-Free Regelung wird nicht vollständig kompensiert und hängt von den Unwuchteigenschaften des Rotors ab. Wie im vorigen Unterabschnitt angedeutet, ist die Kompensation mit Hilfe einer Vibrationsregelung zwar möglich, aufgrund des hohen resultierenden Stromes jedoch nicht zielführend im Falle von Turbomolekularpumpen. Außerdem würde der Unwuchtbeobachter bei einer vollständigen Kompensation der Unwuchtvibration nicht mehr funktionieren. Der synchrone Anteil des Stromsignals wird bei der Force-Free Regelung nahezu vollständig unterdrückt. Nach dem Einschalten der Force-Free Regelung besteht die Störung im Stromsignal



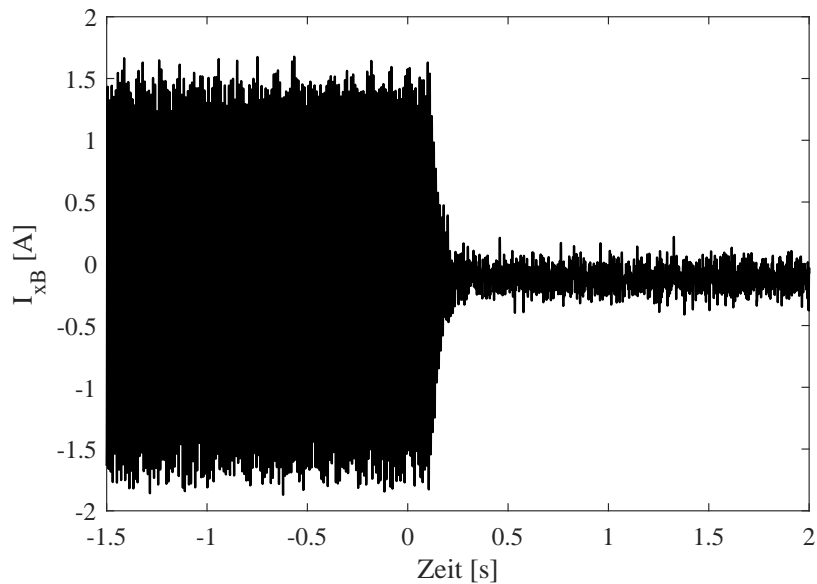


Abbildung 6.16: Strom beim Einschaltzeitpunkt der Force-Free Regelung

größtenteils aus dem durch die Regelung verstärkten Messrauschen. Eine ideale Kompensation ist auch im praktischen Fall, aufgrund kleiner Beobachtungsfehler der Winkelgeschwindigkeit bzw. des Rotorwinkels, kaum möglich.

### Vergleich der Winkelschätzungen

Die Unwuchtkompensation benötigt einen synchronen Winkel ( $\Omega t$ ) zur Berechnung der Kompensationssignale<sup>1</sup>. Beim vorliegenden System kann entweder der Winkel vom Unwuchtbeobachter verwendet werden, oder die Winkel bzw. Drehzahlinformation wird vom Motor-Regler bereitgestellt. Die verwendete PMSM besitzt keine Sensorik zur Detektion des Rotorwinkels. Aus diesem Grund wird auf sensorlose Verfahren zur Winkel bzw. Drehzahlschätzung zurückgegriffen. Für den niedrigen Drehzahlbereich wird die sogenannte INFORM-Methode verwendet. Diese Methode ist ausführlich in [75,76] beschrieben. Für höhere Drehzahlen wird, von der INFORM-Methode auf die EMK (Elektromagnetische Kraft)-Methode umgeschaltet, da die Genauigkeit der EMK-Methode mit steigender Drehzahl zunimmt [77]. Es sind also nur zwei redundante Winkelinformation vorhanden, da bei der PMSM immer nur eine Methode abhängig von der Drehzahl verwendet wird. Um dennoch einen Vergleich zwischen den geschätzten Winkeln zu erhalten, wird ein Drehzahlbereich gewählt, in dem alle drei Methoden ausreichend gut funktionieren (Abbildung 6.17). Der Vergleich der Winkelfehler hat jedoch nur für die gemessene Drehzahl eine Aussagekraft, da die Qualitäten der Methoden stark drehzahlabhängig sind. Der Winkel, welcher mittels Unwuchtbeobachter berechnet wird, besitzt im Allgemeinen einen konstanten Offset zu den geschätzten Winkeln vom Motorregler. Dieser Offset ist durch

<sup>1</sup>Konstante Winkelfehler haben keinen Einfluss auf die Qualität der Unwuchtkompensation

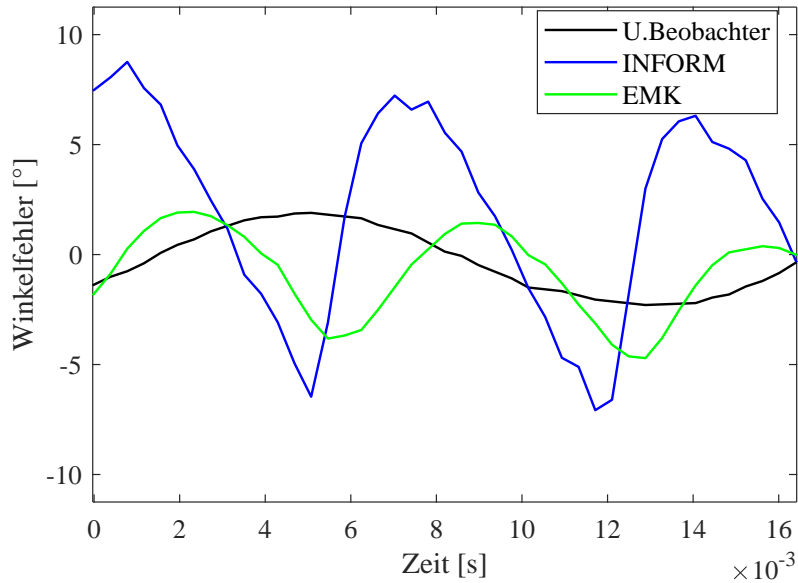


Abbildung 6.17: Vergleich der Winkelfehler bei einer Drehzahl von  $750 \text{ min}^{-1}$

die im Allgemeinen nicht kollinearen Vektoren der Unwucht und des magnetischen Flusses der PMSM gegeben. Dieser Offset benötigt keine weitere Behandlung im Falle der Unwuchtkompensation. Im Falle der feldorientierten Regelung der elektrischen Maschine muss dieser Offset identifiziert und anschließend kompensiert werden. Ist eine Kommunikation zwischen beiden Reglereinheiten vorhanden, sollte die Berechnungsmethode abhängig vom Drehzahlbereich angepasst werden. Durch Messungen in verschiedenen Drehzahlbereichen wurde eine ausreichend hohe Genauigkeit der Drehwinkel- bzw. Drehzahlschätzung im gesamten Drehzahlbereich der Turbomolekularpumpen (Stillstand wurde ausgenommen<sup>2</sup>) mittels des Unwuchtbeobachters festgestellt. Für die dargestellte Drehzahl zeigt beispielsweise die EMK-Methode und der Unwuchtbeobachter eine bessere Qualität als die INFORM-Methode.

### Umschalten zwischen den Schätzalgorithmen

Um die vorgeschlagene Struktur im Falle eines Fehlers des Motorreglers zu analysieren, wird die Drehzahlinformation bzw. Winkelinformation der Unwuchtkompensation des EMK-Modells auf die des Unwuchtbeobachters umgeschaltet (Abbildung 6.18). Im Umschaltvorgang wird die Winkelinformation für 10 ms auf null gesetzt, um die Zeit zur Detektierung eines Fehlers zu berücksichtigen. Erst nach diesen 10 ms wird die Winkelinformation vom Unwuchtbeobachter verwendet. Der Unwuchtbeobachter läuft jedoch während des gesamten Experimentes parallel mit, um ein schlechtes Einschwingen aufgrund eines zu großen Initialfehlers zu verhindern. Im linken Bereich von Abbildung 6.18 erkennt man die Positionsinformation des kompensierten

<sup>2</sup>Bei Stillstand hat die Unwucht keine durch den Unwuchtbeobachter detektierbaren Auswirkungen auf die Positionssignale.

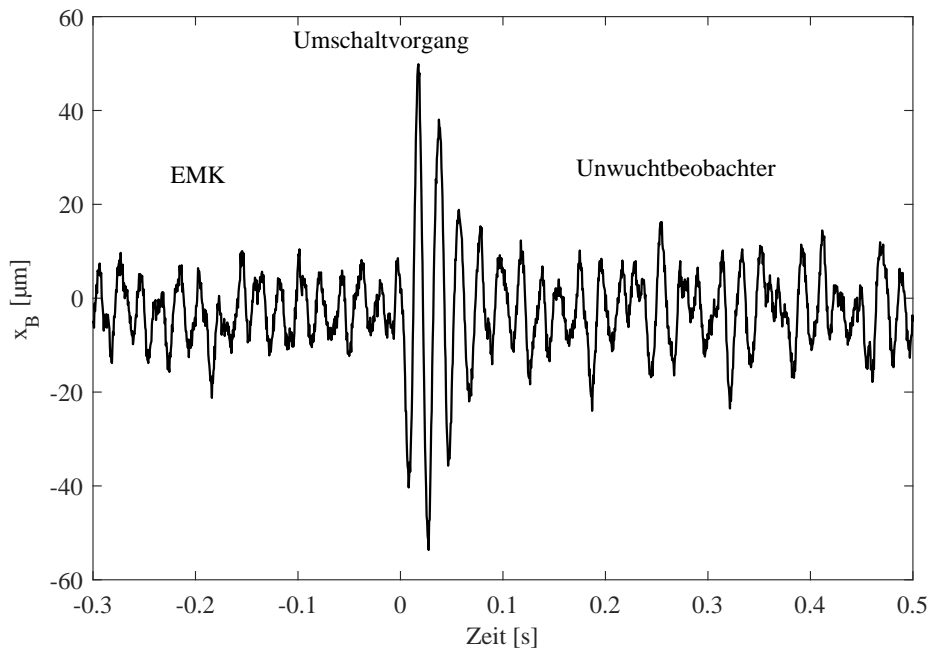


Abbildung 6.18: Umschaltvorgang zwischen zwei verschiedenen Drehzahlquellen für die Unwuchtkompensation mit einer definierten Totzeit

Systems mit Hilfe der Winkelinformation des Motorcontrollers auf Basis des EMK-Verfahrens. Im Bereich der höheren Amplituden ist keine Winkelinformation vorhanden. Nach dem Umschalten auf den Unwuchtbeobachter ist ein schnelles Abklingen der Schwingung ersichtlich. Die Kompensation zeigt zwar eine ausreichende Performance, jedoch ist eine etwas höhere Schwingungsamplitude als bei der EMK basierten Unwuchtkompensation zu erkennen.

### 6.3 Konklusion

Die Unwuchtkompensation ist ein essentieller Bestandteil magnetgelagerter Rotoren von Turbomolekularpumpen. Um diese Kompensationsmethode ausfallsicherer zu gestalten, wurde ein Unwuchtbeobachter entwickelt. Dieser besitzt die Aufgabe, eine redundante Informationsquelle der Winkelgeschwindigkeit und des Rotorwinkels bereitzustellen. Auch die Kompensation des gyroskopischen Effektes benötigt diese wichtige Information. Die Unwuchtkompensation basiert auf generalisierten Notch-Filtern und funktioniert auch im tiefen Drehzahlbereich. Um die Kompensation in einem großen Drehzahlbereich anwenden zu können, wurde eine Kombination aus einem Vibrationsregler und einem Force-Free Regler verwendet. Für beide Strukturen wurden Stabilitäts-, Robustheits-, und Performance-Analysen durchgeführt. Aus diesen Analysen konnte ein schlechteres dynamisches Verhalten der Force-Free Regelung im tieferen Drehzahlbereich nachgewiesen werden. Die Robustheit und Performance des Vibrationsreglers ist im gesamten Drehzahlbereich ausreichend hoch, jedoch steigt der geforderte

Strom des Vibrationsreglers mit der Drehzahl stark an. Eine Sättigung der Aktuatoren wäre im höheren Drehzahlbereich die Folge. Durch Ausnutzung der Vorteile beider Strukturen kann eine robuste Unwuchtkompensation im nahezu gesamten Betriebsbereich der Turbomolekularpumpen realisiert werden.

Für die Schätzung der Drehzahl bzw. des Drehwinkels wurde ein Beobachter, welcher ausschließlich die kinematischen Eigenschaften des Systems abbildet, entwickelt. Durch den Verzicht der kinetischen Zusammenhänge resultiert ein parameterunabhängiger Beobachter, welcher ohne Adaption auf verschiedenen Pumpen angewendet werden kann. Die Nichtlinearität der Fehlerdynamik wurde durch geschickte Wahl der Beobachterparameter kompensiert. Der resultierende Beobachter kann daher mit den Methoden der linearen Regelungstheorie ausgelegt werden. Experimentelle Ergebnisse zeigten, dass sowohl die Unwuchtkompensation als auch die Schätzung der Drehzahl bzw. des Drehwinkels ein ausreichend gutes Systemverhalten besitzen. Das resultierende AMB-System kann durch diese Schätzung unabhängig von der Motor-Regelung betrieben werden. Auch die Verwendung des Drehwinkels zur feldorientierten Regelung der PMSM ist bei ausreichend schneller Kommunikation möglich.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

Diese Arbeit beschreibt den Entwurf und die Analyse von Reglerstrukturen für die Stabilisierung magnetisch gelagerter Rotoren für den Einsatz in Turbomolekularpumpen. Dabei wurde festgestellt, dass eine rein dezentrale Regelung für die beiden Rotoren der verwendeten Turbomolekularpumpen, nicht zu einer ausreichend guten Lösung im gesamten Betriebsbereich führt. Die Verwendung eines LQG-Reglers führte zu Problemen in der Parametrierung. Da es sich bei einem magnetisch stabilisierten Rotor näherungsweise um ein parametervariantes lineares Mehrgrößensystem handelt, wurden zuerst die Rückkoppelparameter abhängig von der Drehzahl verändert. Diese sogenannte "gain-scheduling"-Methode führte jedoch für höher werdende Drehzahlen zu einem Anstieg der Schwingungsfähigkeit des Gesamtsystems. Daher wurde in einem weiteren Schritt die Parametervarianz durch eine geeignete Rückkopplung kompensiert. Durch den hohen Rechenaufwand des vollständigen Zustandsbeobachters und der vollständigen Zustandsrückführung ist diese Art der Regelung für den industriellen Einsatz wenig attraktiv. Da das Kalman-Filter die Bandbreite der Regelung und zugleich auch die Bandbreite der Kompensation beeinflusst, kann sich eine geeignete Wahl Gewichtungsmatrizen unter Umständen als schwierig darstellen.

Um die Nachteile der LQG-Regelung zu umgehen, wurde eine entkoppelte Regelung basierend auf der inversen Dynamik der Systemgleichung des starren Rotors entwickelt. Durch die Entkopplung der translatorischen und der rotatorischen Bewegungen war es möglich ein Kalman-Filter ausschließlich für das rotatorische Teilsystem zu entwickeln. Im Vergleich zu einem vollständigen Zustandsbeobachter benötigt die entkoppelte Form nur ein Viertel der Rechenzeit für die Berechnung der nötigen Zustände. Das dynamische Verhalten der entkoppelten Regelung für veränderliche Parameter wurde analysiert. Dabei wurde eine starke Abhängigkeit der Kovarianzmatrizen des Kalman-Filters und der Höhe der Kompensation des gyroskopischen Effektes auf die Sensitivitätsfunktionen des Systems festgestellt. Eine weitere Möglichkeit der Optimierung der Sensitivität des geschlossenen Regelkreises ist durch die Auslegedrehzahl des Kalman-Filters gegeben. Durch Anwendung dieser Erkenntnisse konnte die Sensitivität der Turbomolekularpumpe 1 weit unter die geforderte Grenze der Norm ISO 14839-3 gebracht werden. Durch kleine Änderungen der Reglerstruktur konnte auch für den

Rotor der Turbomolekularpumpe 2 eine stabile Rückführung entwickelt werden. Da die Resonanzfrequenzen aufgrund der Turbinenschaufeln der Turbomolekularpumpe 2 in der Bandbreite der Regelung liegen, soll die Verstärkung der Regelung in dem Bereich dieser Resonanzen klein sein. Diese Forderung wird durch die Verwendung der geschätzten Winkel anstatt der gemessenen Winkel erfüllt. Durch diese kleine Änderung konnte auch der Rotor der Turbomolekularpumpe 2 im gesamten Betriebsbereich stabilisiert und die Forderung der ISO 14839-3 erfüllt werden.

Aufgrund der unvermeidbaren Unwucht bei Rotoren von Turbomolekularpumpen, ist für den Betrieb im geforderten Drehzahlbereich eine Unwuchtkompensation von Nöten. Die Kompensationsstrategien basieren auf generalisierten Notch-Filtern. Für den höheren Drehzahlbereich wurde eine sogenannte Force-Free Regelung verwendet, welche die Aufgabe besitzt, den geforderten Sollstromanteil aufgrund der Unwucht zu minimieren. Die Nutzung einer Force-Free Regelung war jedoch im tiefen Drehzahlbereich, aufgrund der Verschlechterung des dynamischen Verhaltens, nicht zielführend. Da der Rotor der Turbomolekularpumpe 2 unter Umständen schon im tiefen Drehzahlbereich eine hohe Unwuchtvibration aufweist, wurde für diesen Drehzahlbereich eine sogenannte Vibrationsregelung entwickelt. Diese Vibrationsregelung minimiert nicht den Unwuchtstrom, sondern die Unwuchtvibration. Zur Berechnung der Unwuchtkompensation muss entweder die aktuelle Drehzahl oder der aktuelle Drehwinkel bekannt sein. Um das Magnetlager auch bei einer fehlerhaften Kommunikation zwischen Magnetlager und Motorregelung betreiben zu können, wurde ein Unwuchtbeobachter entwickelt. Die Aufgabe dieses Unwuchtbeobachters ist die Schätzung der Drehzahl und des Drehwinkels der Unwucht. Die Robustheit und die Performance der entwickelten Unwuchtkompensation und des Unwuchtbeobachters wurden mittels Simulations- und experimenteller Ergebnisse nachgewiesen.

# Literaturverzeichnis

- [1] M. Hofer: *Design and Sensorless Position Control of a Permanent Magnet Biased Radial Active Magnetic Bearing*, Dissertation, TU Wien, 2013.
- [2] T. Nenning, M. Hofer, M. Hutterer, M. Schrödl: *Setup with two Self-Sensing Magnetic Bearings using Differential 3-active INFORM*, 14th International Symposium on Magnetics Bearings, Linz, Austria, 2014.
- [3] M. Hofer, M. Hutterer, T. Nenning, M. Schrödl: *Improved Sensorless Control of a Modular Three Phase Radial Active Magnetic Bearing*, 14th International Symposium on Magnetics Bearings, Linz, Austria, 2014.
- [4] M. Hutterer, M. Hofer, M. Schrödl: *New Results on the Robustness of Self-Sensing Magnetic Bearings*, 15th International Symposium on Magnetics Bearings, Kitakyushu, Japan, 2016.
- [5] M. Hofer, M. Hutterer, M. Schrödl: *PCB Integrated Differential Current Slope Measurement for Position-Sensorless Controlled Radial Active Magnetic Bearings*, 15th International Symposium on Magnetics Bearings, Kitakyushu, Japan, 2016.
- [6] M. Hutterer, G. Kalteis, M. Schrödl: *Redundant unbalance compensation of an active magnetic bearing system*, Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 94, September 2017.
- [7] M. Hutterer, M. Schrödl: *Control of Active Magnetic Bearings in Turbomolecular Pumps for Rotors with Low Resonance Frequencies of the Blade Wheel*, Lubricants, 5, 26, Mai 2017.
- [8] M. Hutterer, M. Schrödl: *Unbalance compensation of a magnetically levitated rotor for the whole operating range*, IEEE International Conference on Mechatronics, Churchill, 2017
- [9] M. Hutterer, M. Hofer, M. Schrödl: *Selfsensing unbalance rejection and reduction of the gyroscopic effect for an active magnetic bearing system*, 10th Asian Control Conference (ASCC), Kota Kinabalu, 2015

- [10] A. Prechtel: *Skriptum aus Vorlesung über Elektrodynamik*, TU Wien (2010).
- [11] P. Fotiu: *Theoretische Starrkörperkinetik*, FH Wiener Neustadt, Wiener Neustadt 2010, ISBN SFHW07702.
- [12] J. Dankert: *Technische Mechanik*, Veiweg+Teubner, Wiesbaden 2011, ISBN 978-3- 8348-1375-6.
- [13] P. Fotiu: *Mechanik 3*, FH Wiener Neustadt, Wiener Neustadt 2010, ISBN SFHW07303.
- [14] P. Gasch, R. Nordmann, H. Pfützner: *Rotordynamik*, ISBN 3-540-41240-9, Springer, 2006.
- [15] G. Schweitzer, E. Maslen: *Magnetic Bearings: Theory, Design, and Application to Rotating Machinery*, ISBN 978-3-642-00496-4, Springer, 2009
- [16] P. Gasch, K. Knothe, R. Liebich: *Strukturdynamik*, ISBN 978-3-540-88976-2, Springer, 2012.
- [17] R. M. Schmidt, G. Schitter, J. Eijk: *The Design of High Performance Mechatronics*, ISBN 978-1-60750-825-0, Delft University Press, 2011.
- [18] R. Bassani: *Earnshaw (1805-1888) and Passive Magnetic Levitation*, Meccanica, vol. 41, August 2006.
- [19] A. Pröll, G. Jungmayr, E. Marth, W. Amrhein: *Design and Optimization of a Special Magnetic Levitated Drive with Unbalance Robustness*, IEEE International Conference on Power Electronics and Drive Systems, Sydney 2015.
- [20] W. Amrhein, W. Gruber, W. Bauer, M. Reisinger: *Magnetic Levitation Systems for Cost-Sensitive Applications—Some Design Aspects*, IEEE Transaction on Industry Applications, vol. 52, no. 5, September/Okttober 2016.
- [21] H. Zhu, H. Chen, Z. Xie., Y. Zhou: *Configuration and Control for AC-DC Three Degrees of Freedom Hybrid Magnetic Bearings*, Proceedings of the Tenth International Symposium on Magnetic Bearings, ISMB10, Martigny, 2006.
- [22] P. Imoberdorf, C. Zwysig, S.D. Round, J.W. Kolar: *Combined Radial-Axial Magnetic Bearing for a 1kW, 500,000 rpm Permanent Magnet Machine*, Applied Power Electronics Conference, APEC, 2007.
- [23] W. Amrhein, S. Silber: *Magnetic Bearing System*, european patent EP 1247026A0, international application WO 01/048389 A3, 05.07.2001
- [24] M. Hofer: *Design and Sensorless Position Control of a Permanent Magnet Biased Radial Active Magnetic Bearing*, Dissertation, TU Wien, 2013



- [25] T. Nenning: *Vergleich stromanstiegsbasierter Positionsmessverfahren in einem sensorlosen Magnetlagersystem*, Dissertation, TU Wien, 2015
- [26] P. Fotiu: *Mechanik 2*, FH Wiener Neustadt, Wiener Neustadt 2010, ISBN: SFHW045.
- [27] D. Braess, *Finite Elemente*, ISBN 978-3-642-34796-2, Springer, 2013.
- [28] N. G. Stephen: *Considerations on second order beam theories*, Int. J. Solids Struct, 1981.
- [29] H. Dresig, F. Holzweißig: *Maschinendynamik*, ISBN 978-3-642-29570-6, Springer, 2012.
- [30] P. Fotiu: *Finite Elemente*, FH Wiener Neustadt, Wiener Neustadt 2010, ISBN: SFHW08804.
- [31] R. Larsonneur: *Design and Control of Active Magnetic Bearing Systems for High Speed Rotation*, PhD-thesis, ETH Zürich, 1990.
- [32] D.J. Ewins: *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press, Taunton, 1992.
- [33] J. Schmied, A. Kosenkov: *Practical controller design for rotors on magnetic bearings by means of an efficient simulation tool*, 10th International Conference on Vibrations in Rotating Machines, 2000
- [34] M. Hutterer, M. Hofer, M. Schrödl: *Decoupled Control of an Active Magnetic Bearing System for a High Gyroscopic Rotor*, IEEE International Conference on Mechatronics, Nagoya, 2015
- [35] M. Hutterer: *Regelung eines aktiven Magnetlagers für einen unterkritisch laufenden Rotor*, Diplomarbeit, TU Wien.
- [36] M. Hutterer, M. Hofer, T. Nenning, M. Schrödl: *LQG Control of an Active Magnetic Bearing with a Special Method to consider the Gyroscopic Effect*, International Symposium on Magnetic Bearings , Linz, 2014.
- [37] H. Bleuler: *Decentralized Control of Magnetic Rotor Bearing Systems*, PhD-thesis, ETH Zürich, 1984.
- [38] M. Ahrens, L. Kucera, R. Larsonneur: *Performance of a Magnetically Suspended Flywheel Energy Storage Device*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 4, 1996
- [39] M. Hutterer, M. Schrödl: *Control of a Flexible Magnetic Levitated Rotor using the Computed Torque Method in Combination with Stabilizing Filters*, IEEE Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 2016
- [40] S. Nair, M. Vaidyan, M. Joy: *Generalized Design and Disturbance Analysis of Robust  $H$  infinity Control of Active Magnetic Bearings*, IEEE Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 2009

- [41] F. Lösch, C. Gähler, R. Herzog:  *$\mu$ -Synthesis Controller Design For a 3 MW Pump Running in AMBs*, IEEE Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 2009
- [42] K. Lui, R. He: *A nonlinear output feedback control method for magnetic bearing systems*, IEEE Conference on Control Applications, 2003
- [43] S. Yu, S. Wu, T. Lee: *Application of neural-fuzzy modeling and optimal fuzzy controller for nonlinear magnetic bearing systems*, IEEE Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 2003
- [44] M. S. Queiroz, D. M. Dawson: *Nonlinear Control of Active Magnetic Bearings: A Backstepping Approach*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, VOL. 4, 1996
- [45] Y. Zhuravlyov: *On LQ-Control of Magnetic Bearing*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, VOL. 8, 2000
- [46] K. J. Aström: *Computer Controlled Systems*, ISBN 978-0133148992, Prentice Hall, 1997
- [47] H. Kwakernaak: *Linear Optimal Control Systems*, ISBN 0-471-51110-2, John Wiley and Sons Inc, 1972
- [48] D. S. Naidu: *Optimal Control Systems*, ISBN 0-8493-0892-5, CRC Press LLC, 2003
- [49] M. Ahrens, L. Kucera: *Cross feedback control of a magnetic bearing system controller design considering gyroscopic effects*, Proceedings of the Third International Symposium on Magnetic Bearings, 1996
- [50] M. Ahrens: *Zur magnetischen Lagerung von Schwungrad-Energiespeichern*, Dissertation, ETH Zürich, 1996
- [51] J. Ackermann: *Abtastregelungen*, ISBN 978-3-662-05575-5, Springer, 1988
- [52] J. Kautsky, N.K. Nichols, P. van Dooren: *Robust pole assignment in linear state feedback*, International Journal of Control, VOL. 41, 1985
- [53] W. Kemmetmüller, A. Kugi: *Prozessidentifikation*, TU Wien (2013).
- [54] J. Lunze: *Regelungstechnik 1*, ISBN 978-3-642-53908-4, Springer, 2014.
- [55] J. Slotine: *Applied Nonlinear Control*, ISBN 0-13-040890-5, Prentice Hall, 1991.
- [56] S. Skogestad, I. Postlethwaite: *Multivariable Feedback Control*, ISBN 978-0-470-01168-3, John Wiley and Son Ltd, 2005.
- [57] J. Freudenberg, D. Looze: *Right Half Plane Poles and Zeros and Design Tradeoffs in Feedback Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, VOL. 6, 1985

- [58] J. Freudenberg, D. Looze: *Frequency Domain of Scalar and Multivariable Feedback Systems*, VOL. 104 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 1988
- [59] S. Boyd, C. Barrat: *Linear Controller Design — Limits of Performance*, ISBN 978-0135386873, Prentice- Hall, 1991
- [60] International Organization for Standardization: *Mechanical vibration - vibration of rotating machinery equipped with active magnetic bearings - part 3: Evaluation of stability margin*, ISO 14839-3, Geneva, 2006
- [61] L. Zhao, K. Zhang, R. Zhu, H. Zha: *Experimental research on a momentum wheel suspended by active magnetic bearings*, 8th International Symposium on Magnetic Bearings, Mito, 2002
- [62] K. Zhang, H. Zhao, L. Zhao, S. Yu: *Stability Analysis and Experimental Research of a Fly-wheel Supported by Active Magnetic Bearings*, 9th International Symposium on Magnetic Bearings, Lexington, 2004
- [63] R. Herzog, P. Bühler, C. Gähler and R. Larsonneur: *Unbalance Compensation Using Generalized Notch Filters in the Multivariable Feedback of Magnetic Bearings*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1996.
- [64] C.R. Knospe: *Stability and performance of notch filter controllers for unbalance response*, Int. Symp. Magn. Suspension Technol., NASA Langley Research Center, Hampton, VA, NASA Conf, 1991.
- [65] N.K. Rutland, P.S. Keogh, C.R. Burrows: *Comparison of controller design for attenuation of vibration in a rotor-bearing system under synchronous and transient condition*, 4th International Symposium on Magnetics Bearings, Zürich, 1994.
- [66] N. Taguchi, T. Ishimatsu, S.J. Woo and C. Gähler: *Unbalance compensation of magnetic bearings*, 20th International Conference on Control and Instrumentation, Bologna, 1994.
- [67] Z. Liu, K. Nonami, Y. Ariga: *Adaptive Unbalanced Vibration Control of Magnetic Bearing Systems with Rotational Synchronizing and Asynchronizing Harmonic Disturbance*, JSME International Journal, 2002.
- [68] Z. Kai, K. Xiaozhang: *Rotor Dynamic Balance Making Use of Adaptive Unbalance Control of Active Magnetic Bearings*, Intelligent System Design and Engineering Application, Changsha, 2010.
- [69] Q. Chen, G. Lui, B. Han: *Suppression of Imbalance Vibration in AMB-Rotor Systems Using Adaptive Frequency Estimator*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015.

- [70] T. Thang: *Adaptive Vibration Compensation Control Research on Rotor in Active Magnetic Bearing System*, International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, 2010.
- [71] T. Wei, L. Zhao: *Frequency-adaptive autobalancing control for magnetically suspended rotor with imprecise rotational speed*, IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems, 2015.
- [72] E. Vahedforough, B. Shaifi, S. Beale: *Estimation and rejection of unknown sinusoidal disturbances using a generalized adaptive forced balancing method*, IEEE American Control Conference, 2007.
- [73] W. Lee, S. Oh, D. Cheong: *Rotor unbalance compensation without angular position sensor for active magnetic bearing*, 8th International Conference on Power Electronics, 2011.
- [74] J. Adamy: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*, ISBN 978-3-642-45012-9, Springer, 2014.
- [75] M. Schrödl: *Sensorless Control of AC Machines*, VDI-Fortschrittsberichte, No. 117, 1992.
- [76] M. Schrödl: *Sensorless control of AC machines at low speed and standstill based on the INFORM method*, IEEE Industry Applications Conference, San Diego, 1996.
- [77] M. Schrödl, M. Hofer, W. Staffler: *Sensorless control of PM synchronous motors in the whole speed range including standstill using a combined INFORM/EMF model*, 13th Power Electronics and Motion Control Conference, Portoroz, 2006.

# Abbildungsverzeichnis

3.1	5-DOF Magnetlagersystem . . . . .	12
3.2	Reduzierung in den Schwerpunkt . . . . .	14
3.3	Elastisch gelagerter Rotor . . . . .	15
3.4	Verhalten der rotatorischen und der translatorischen Bewegung bei translatorischer Anregung . . . . .	17
3.5	Campbell-Diagramm eines elastisch gelagerten Rotors . . . . .	18
3.6	Verhalten eines symmetrischen drehenden Rotors . . . . .	19
3.7	Verhalten der Pole eines schwingungsfähigen Systems . . . . .	21
3.8	Krafterzeugung bei aktiven Magnetlagern . . . . .	24
3.9	Unterschiede der Balkentheorien . . . . .	28
4.1	Steifigkeits-Variation von Lager B für die ersten Biegemoden bei einem drehenden Rotor . . . . .	34
4.2	Dezentrale Regelung . . . . .	35
4.3	Campbell-Diagramm eines dezentral geregelten Magnetlagersystems . . . . .	36
4.4	Darstellung eines Rotors von Turbomolekularpumpen . . . . .	41
4.5	Campbell-Diagramm der flexiblen Moden der Turbomelekularpumpe 1 . . . . .	42
4.6	Campbell-Diagramm eines LQ geregelten Magnetlagersystems ohne "gain-scheduling" mit $r = 1$ und $r = 0.98$ . . . . .	42
4.7	Campbell-Diagramm eines "gain scheduled" LQ geregelten Magnetlagersystems . . . . .	43
4.8	Blockschaltbild der LQG Regelung . . . . .	44
4.9	Campbell-Diagramm eines LQG geregelten Magnetlagersystems ohne Kompensation des gyroskopischen Effekts . . . . .	47
4.10	Campbell-Diagramm eines LQG geregelten Magnetlagersystems mit Kompensation des gyroskopischen Effekts . . . . .	48
4.11	Vereinfachung des magnetisch gelagerten Rotors . . . . .	49
4.12	Relativer Fehler der näherungsweise Berechnung der Eigenwerte . . . . .	52
4.13	Darstellung der Eigenformen des Zwei-Massen-Schwingers . . . . .	54
4.14	Nyquist-Plot des magnetgelagerten Zwei-Massen-Schwingers . . . . .	55
4.15	Stabilisierung des magnetgelagerten Zwei-Massen-Schwingers . . . . .	56

4.16	Nyquist-Plot des magnetgelagerten Zwei-Massen-Schwingers mit erweiterten Tiefpassfilter . . . . .	57
4.17	Eigenformen der ersten 4 Biegemoden (nur die der Drehrichtung entgegengesetzt drehenden Eigenformen sind dargestellt) . . . . .	58
4.18	Stabilisierende Bereiche für flexible Moden der Regler-Übertragungsfunktion $\arg\{G_r(j\omega)\}$ . . . . .	59
4.19	Bode Diagramm eines Filters zur Stabilisierung der ersten Biegemode . . . . .	61
4.20	Sprungantwort des LQG und dezentral PID geregeltem System im Stillstand . . . . .	62
4.21	Laufverhalten bei kritischen Geschwindigkeiten beim LQG und dezentral PID geregeltem System . . . . .	63
4.22	Compliance-Funktion des LQG geregelten Systems . . . . .	64
4.23	Compliance-Funktion des dezentral PID geregelten Systems . . . . .	65
5.1	Blockschaltbild der Ein- Ausgangstransformation . . . . .	68
5.2	Blockschaltbild der entkoppelten Regelung . . . . .	70
5.3	Entkopplung des Kalman-Filters . . . . .	71
5.4	Gemessene Eigenfrequenzen des Rotors der Turbomolekularpumpe 1 . . . . .	73
5.5	Standardregelkreis bei negativer Rückführung . . . . .	73
5.6	Abbildung des Betrages der Sensitivitätsfunktion eines mittels PI geregelten Ein-Massenschwingers . . . . .	75
5.7	Drehzahlabhängiges Sensitivitätsverhalten der Turbomolekularpumpe 1 (AMB-System ohne Regelung) . . . . .	78
5.8	Auswertung der Sensitivitätsfunktion . . . . .	79
5.9	Betrag der verkoppelten Compliance-Funktion $ G_c(j\omega) $ der rotatorischen und der translatorischer Bewegung bei Stillstand und Variation von $k_x$ . . . . .	81
5.10	Simulierte Sensitivitätsfunktionen der rotatorischen Bewegungen unter Variation der negativen Steifigkeit $k_x$ und anisotropem Verhalten der Magnetlager bei $40000 \text{ min}^{-1}$ . . . . .	81
5.11	Simulierte symmetrische Elemente der Sensitivitätsmatrix der translatorischen Bewegungen unter Variation der negativen Steifigkeit $k_x$ und anisotropem Verhalten der Magnetlager bei Nenndrehzahl . . . . .	82
5.12	Simulierte Sensitivitätsfunktionen der rotatorischen Bewegungen unter Variation von des Kompensationsfaktors $c_g$ und $Q_k$ bei $40000 \text{ min}^{-1}$ . . . . .	83
5.13	Simulierte Sensitivitätsfunktionen der rotatorischen Bewegungen unter Variation der Auslegungsdrehzahl $n_k$ bei einer Rotordrehzahl von $40000 \text{ min}^{-1}$ . . . . .	85
5.14	Dämpfungsfaktor $\xi$ in Abhängigkeit der verkoppelten Quersteifigkeit der rotatorischen Eigenschwingungen . . . . .	86
5.15	Mögliche Regelung zur Verbesserung der Sensitivitätsfunktion durch das Umschalten von verkoppelten Quersteifigkeiten $k_q$ . . . . .	86

5.16	Simulierter Fehler der Winkelgeschwindigkeitsschätzung $\hat{\beta}$ bei $40000 \text{ min}^{-1}$ für zwei verschiedene Auslegedrehzahlen des Kalman-Filters . . . . .	87
5.17	Zusammenhang zwischen der Quersteifigkeit $k_q$ und $\arg\{e_{sch}\}$ . . . . .	88
5.18	Vergleich der Sensitivitätsfunktionen zwischen einer Kompensation mit idealer Messung und einer Kompensation mittels geschätzter Zustände . . . . .	88
5.19	Rotatorische Compliance-Funktion für verschiedene Werte des Kompensationsfaktors $c_g$ und verschiedene Drehzahlen . . . . .	90
5.20	Rotatorische Compliance-Funktion für eine Drehzahl von $40000 \text{ min}^{-1}$ und einem Kompensationsfaktor $c_g = 0.6$ . . . . .	91
5.21	Rotatorische Sensitivitätsfunktion für verschiedene Werte des Kompensationsfaktors $c_g$ und verschiedene Drehzahlen . . . . .	92
5.22	Rotatorische Sensitivitätsfunktionen für eine Drehzahl von $40000 \text{ min}^{-1}$ und einem Kompensationsfaktor $c_g = 0.6$ . . . . .	93
5.23	Vergleich der translatorischen Compliance-Funktionen für Stillstand und einer Drehzahl von $40000 \text{ min}^{-1}$ . . . . .	94
5.24	Translatorische Sensitivitätsfunktion für eine Drehzahl von $40000 \text{ min}^{-1}$ . . . . .	94
5.25	Campbell-Diagramm der ersten Biegemode und der Schaufelfrequenzen der Turbomolekularpumpe 2 . . . . .	95
5.26	Blockschaltbild der entkoppelten Regelung für geringe Schaufelfrequenzen . . . . .	97
5.27	Geschlossene Reglerübertragungsfunktion für die $\beta$ -Koordinate . . . . .	97
5.28	Vergleich des vorhergesagten Zustandes $\hat{\beta}_{k+1}$ mit dem geschätzten Zustand $\hat{\beta}_k$ . . . . .	98
5.29	Geometrie, Sensor- und Aktuatorposition des Rotors der Turbomolekularpumpe 2 . . . . .	99
5.30	Umschaltzeitpunkt zwischen den vorhergesagten Zuständen und den direkt abgetasteten Werten des Sensors als Eingang für den dezentralen Positionsregler bei einer Drehzahl von $12000 \text{ min}^{-1}$ . . . . .	100
5.31	Rotatorische Compliance-Funktion bei einer Drehzahl von $24000 \text{ min}^{-1}$ . . . . .	101
5.32	Translatorische Compliance-Funktion bei einer Drehzahl von $24000 \text{ min}^{-1}$ . . . . .	101
5.33	Rotatorische Sensitivitätsfunktionen für eine Drehzahl von $24000 \text{ min}^{-1}$ und einem Kompensationsfaktor $c_g = 0.9$ . . . . .	102
5.34	Translatorische-Sensitivitätsfunktion für eine Drehzahl von $24000 \text{ min}^{-1}$ . . . . .	103
6.1	Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises erweitert mit einem Force-Free Regler . . . . .	108
6.2	Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises erweitert mit einem Vibrationsregler . . . . .	109
6.3	Dämpfungsfaktor eines für die Unwuchtkompensation signifikanten Pols abhängig von $\alpha_{u,n}$ und $\varepsilon$ bei $f_{unb} = 10 \text{ Hz}$ . . . . .	111
6.4	Dämpfungsfaktor eines für die Unwuchtkompensation signifikanten Pols abhängig von $\alpha_{u,n}$ und $\varepsilon$ bei $f_{unb} = 660 \text{ Hz}$ . . . . .	112

6.5	Dämpfungsfaktor eines für die Unwuchtkompensation signifikanten Pols abhängig von $\alpha_{u,n}$ und $f_{unb}$ für ein exponentiell steigendes $\varepsilon$ . . . . .	113
6.6	Linearisierung der optimalen Unwuchtparameter für $\xi_{max}$ in Abhängigkeit der Unwuchtfrequenz $f_{unb}$ . . . . .	113
6.7	Dämpfungsfaktor eines für die Vibrationsregelung signifikanten Pols abhängig von $\alpha_{u,n}$ und $\varepsilon$ bei eine Unwuchtfrequenz von $f_{unb} = 1$ Hz . . . . .	114
6.8	Dämpfungsfaktor eines für die Vibrationsregelung signifikanten Pols abhängig von $\alpha_{u,n}$ und $\varepsilon$ bei eine Unwuchtfrequenz von $f_{unb} = 200$ Hz . . . . .	115
6.9	Dämpfungsfaktor eines für die Vibrationsregelung signifikanten Pols abhängig von $\alpha_{u,n}$ und $f_{unb}$ bei linear steigendem $\varepsilon$ . . . . .	116
6.10	Unwuchtamplitude und Stromamplitude abhängig von der Drehzahl . . . . .	117
6.11	Einschaltvorgang des Vibrationsreglers bei $2800 \text{ min}^{-1}$ . . . . .	118
6.12	Kommunikation zwischen Motor-Regler und Magnetlager-Regler . . . . .	119
6.13	Grafische Darstellung der Substitution mittels $\varphi_m$ und $\delta$ . . . . .	121
6.14	Simuliertes Einschwingverhalten des Unwuchtbeobachters bei verschiedenen Initialfehlern der Drehzahlschätzung . . . . .	123
6.15	Gemessene Auslenkung beim Einschalten der Force-Free Regelung bei $6000 \text{ min}^{-1}$	124
6.16	Strom beim Einschaltzeitpunkt der Force-Free Regelung . . . . .	125
6.17	Vergleich der Winkelfehler bei einer Drehzahl von $750 \text{ min}^{-1}$ . . . . .	126
6.18	Umschaltvorgang zwischen zwei verschiedenen Drehzahlquellen für die Unwuchtkompensation mit einer definierten Totzeit . . . . .	127



# Tabellenverzeichnis

4.1	System-Parameter der Turbomolekularpumpe 1 . . . . .	41
5.1	Drehzahlbereiche der einzelnen Kalman-Filter . . . . .	72
5.2	Grenzen der Stabilitätszonen eines magnetgelagerten Rotors . . . . .	79
5.3	System-Parameter der Turbomelekularpumpe 2 . . . . .	96

# Lebenslauf

Dipl.-Ing Markus Hutterer B.Sc.



## Persönliche Daten

Geburtsdatum: 08.01.1989  
Geburtsort: Waidhofen/Thaya  
Staatsangehörigkeit: Österreich  
Religion: Römisch-Katholisch

## Anschrift

Dalengasse 3/9  
2492 Eggendorf  
Österreich  
Telefon: +43 664 5160779  
Mail: markus.hutterer@hotmail.com

## **Ausbildung**

- 09/1995 - 06/1999 Volksschule Waldkirchen/Thaya, Österreich  
09/1999 - 06/2003 Hauptschule Dobersberg, Österreich  
09/2003 - 06/2007 Fachschule für Mikroelektronik Karlstein, Österreich  
09/2009 - 06/2012 Bachelorstudium Mechatronik,  
Fachhochschule Wiener Neustadt, Österreich  
10/2012 - 11/2014 Masterstudium Elektrotechnik,  
Technische Universität Wien, Österreich  
01/2015 - dato Doktoratsstudium Elektrotechnik,  
Technische Universität Wien, Österreich

## **Beruflicher Werdegang**

- 01/2008 - 07/2009 Techniker in der Instandhaltung,  
Eaton GmbH, Schrems, Österreich  
07/2011 - 10/2012 Forscher im Bereich der Tribologie,  
AC2T research GmbH, Wiener Neustadt, Österreich  
12/2012 - 03/2015 Projektmitarbeiter im Bereich der magnetischen Lagerung,  
TU Wien, Institut für Energiesysteme und elektrische Antriebe,  
Wien, Österreich  
03/2015 - dato Universitätsassistent,  
TU Wien, Institut für Energiesysteme und elektrische Antriebe,  
Wien, Österreich

# Publikationsliste

## Akademische Arbeiten

1. M. Hutterer: *Regelung eines aktiven Magnetlagers für einen unterkritisch laufenden Rotor*, TU Wien, Diplomarbeit 2014.

## Konferenzbeiträge mit Peer-Review-Verfahren

1. T. Nenning, M. Hofer, M. Hutterer, M. Schrödl: *Setup with two Self-Sensing Magnetic Bearings using Differential 3-active INFORM*, 14th International Symposium on Magnetism Bearings, Linz, Austria, 2014.
2. T. Nenning, M. Hofer, M. Hutterer, M. Schrödl: *Statistic Errors of Different INFORM Evaluation Methods applied to Magnetic Bearings*, 14th International Symposium on Magnetism Bearings, Linz, Austria, 2014.
3. M. Hofer, M. Hutterer, T. Nenning, M. Schrödl: *Improved Sensorless Control of a Modular Three Phase Radial Active Magnetic Bearing*, 14th International Symposium on Magnetism Bearings, Linz, Austria, 2014.
4. M. Hutterer, M. Hofer, T. Nenning, M. Schrödl: *LQG Control of an Active Magnetic Bearing with a Special Method to consider the Gyroscopic Effect*, International Symposium on Magnetic Bearings, Linz, 2014.
5. M. Hutterer, M. Hofer, M. Schrödl: *Decoupled Control of an Active Magnetic Bearing System for a High Gyroscopic Rotor*, IEEE International Conference on Mechatronics, Nagoya, 2015
6. M. Hofer, M. Hutterer, M. Schrödl: *Current Slope Measurement Strategies for Sensorless Control of a Three Phase Radial Active Magnetic Bearing*, 22nd International Conference on Magnetic Levitated Systems and Linear Drives, Rio de Janeiro, 2014.
7. M. Hutterer, M. Schrödl: *Control of a Flexible Magnetic Levitated Rotor using the Computed Torque Method in Combination with Stabilizing Filters*, IEEE Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 2016
8. M. Hutterer, M. Hofer, M. Schrödl: *New Results on the Robustness of Self-Sensing Magnetic Bearings*, 15th International Symposium on Magnetism Bearings, Kitakyushu, Japan, 2016.
9. M. Hofer, M. Hutterer, M. Schrödl: *PCB Integrated Differential Current Slope Measurement for Position-Sensorless Controlled Radial Active Magnetic Bearings*, 15th International Symposium on Magnetism Bearings, Kitakyushu, Japan, 2016.

10. M. Hofer, M. Hutterer, M. Schrödl: *Application of Soft Magnetic Composites (SMCs) in Position-Sensorless Controlled Radial Active Magnetic Bearings*, 15th International Symposium on Magnetics Bearings, Kitakyushu, Japan, 2016.
11. M. Hutterer, M. Schrödl: *Unbalance compensation of a magnetically levitated rotor for the whole operating range*, IEEE International Conference on Mechatronics, Churchill, 2017
12. M. Hutterer, M. Hofer, M. Schrödl: *Selfsensing unbalance rejection and reduction of the gyroscopic effect for an active magnetic bearing system*, 10th Asian Control Conference (ASCC), Kota Kinabalu, 2015

## **Zeitschriftenartikel**

1. M. Hutterer, G. Kalteis, M. Schrödl: *Redundant unbalance compensation of an active magnetic bearing system*, Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 94, September 2017.
2. M. Hutterer, M. Schrödl: *Control of Active Magnetic Bearings in Turbomolecular Pumps for Rotors with Low Resonance Frequencies of the Blade Wheel*, Lubricants, 5, 26, Mai 2017.