



**INSTITUT FÜR  
ENERGIETECHNIK  
UND THERMODYNAMIK**  
Institute of Energy Systems and Thermodynamics

Diplomarbeit

Numerical simulation of the flow in an impulse turbine cascade at supersonic flow

# **Numerische Simulation der Strömung in einem Gleichdruckturbinengitter bei Überschallströmung**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs

unter der Leitung von

**Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Reinhard Willinger**

und

**Univ.Ass. Dipl.-Ing. Christoph Öttl, BSc**

E302 - Institut für Energietechnik und Thermodynamik

eingereicht an der

Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften  
der Technischen Universität Wien

von

**Clemens Kroiss, BSc**

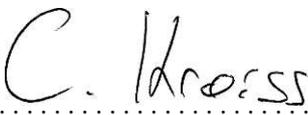
Matr.Nr. 01429054

10. August 2021

# Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen, sind als solche kenntlich gemacht. Das Thema dieser Arbeit wurde von mir bisher weder im In- noch Ausland einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Arbeit stimmt mit der von den Begutachterinnen/Begutachtern beurteilten Arbeit überein.

Weiden am See, August 2021

  
.....  
(Clemens Kroiss, BSc)

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während meiner gesamten Bildungslaufbahn und während der Anfertigung dieser Diplomarbeit unterstützt und motiviert haben.

Zuerst gebührt mein Dank Herrn *Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Reinhard Willinger*, der meine Diplomarbeit ermöglicht, betreut und begutachtet hat. Für die hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken. Das Engagement von Herrn *Prof. Willinger* als Lehrender für den Fachbereich der thermischen Turbomaschinen hat mich in den letzten Jahren überaus begeistert.

Ebenfalls möchte ich mich bei Herrn *Univ.Ass. Dipl.-Ing. Christoph Öttl, BSc* bedanken, der mir zur richtigen Anwendung der verwendeten Software wertvolle Tipps gegeben hat.

Außerdem möchte ich mich bei meiner Mutter, bei meinem Vater, bei meiner Familie und bei meinem Freund Kurt bedanken, die mir mein Studium und meinen gesamten Bildungsweg durch ihre finanzielle Unterstützung ermöglicht haben.

Für die großzügige emotionale Unterstützung bedanke ich mich besonders bei meiner Mutter, bei meiner Partnerin Anna und bei meinem Freund Hans, der mir auch bei fachlichen Fragen immer zur Verfügung gestanden hat.

# Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der numerischen Simulation der Strömung in einem Gleichdruckturbinengitter mittels *CFD*. Hauptaugenmerk liegt auf der Untersuchung des Mach-Zahl-Einflusses auf das Turbinengitter. Anfänglich wurde eine Literaturrecherche durchgeführt, um zu verstehen, welche Faktoren bei supersonischen Bedingungen eine wichtige Rolle spielen. Teil der Arbeit war es zusätzlich, ein simples, theoretisches Modell mittels Potentialtheorie zu entwickeln, um die Strömungsverhältnisse einfach und schnell abschätzen zu können. Bei der Geometrie handelt es sich um ein symmetrisches Gleichdruckgitter mit spitzen Kanten und einem Reaktionsgrad von  $R_k = 0$ . Die Mach-Zahl der Anströmung liegt bei den simulierten Fällen in einem Bereich von  $Ma_1 = 0,2$  bis 2. Als Strömungsmedium wird überhitzter Dampf, modelliert als ideales Gas, verwendet. Im Ergebnisteil werden die Ergebnisse aus den *CFD*-Simulationen und jene der Potentialtheorie miteinander, aber auch mit theoretischen und experimentellen Ergebnissen aus facheinschlägiger Literatur verglichen und bewertet. Grundsätzlich zeigt sich eine gute Übereinstimmung der *CFD*-Ergebnisse mit den Ergebnissen der Potentialtheorie. Da die Potentialtheorie keine viskosen Effekte berücksichtigt, kommt es zu leichten Abweichungen im Wandbereich. Die Strömungsgeschwindigkeit erreicht erstmals die Schallgeschwindigkeit bei  $Ma_1 = 0,71$ . Ab einer Anström-Mach-Zahl von  $Ma_1 = 1$  nehmen Kompressibilitätseinflüsse stark an Gewicht zu, welche sich durch Verdichtungsstöße und Expansionen bemerkbar machen. Im Weiteren werden wichtige Strömungsgrößen analysiert und verglichen. Qualitativ können ähnliche Verläufe beobachtet werden. Durch die spezielle Geometrie und das Auftreten von gasdynamischen Effekten ist es schwierig, die erhaltenen Ergebnisse quantitativ zu vergleichen. Mit dieser Arbeit wurden jedoch erste Schritte gesetzt, die zur besseren Verständlichkeit der Thematik beitragen.

# Abstract

This thesis deals with the numerical simulation of the flow in an impulse turbine cascade using *CFD*. The main focus is on the investigation of the Mach number influence on the flow. Initially, a literature review was carried out to understand, which factors play an important role at supersonic conditions. Part of the work was also to develop a simple, theoretical model using the potential theory, in order to be able to estimate the flow conditions quickly and easily. The geometry is a symmetrical impulse turbine cascade with sharp edges and a degree of reaction of  $R_k = 0$ . In the simulated cases, the Mach number of the incident flow is in a range of  $Ma_1 = 0.2$  to 2. Superheated steam, modeled as an ideal gas, is used as flow medium. In the results section, the results from the *CFD* simulations and those from the potential theory are compared and evaluated with one another, but also with theoretical and experimental results from relevant literature. Basically, there is a good agreement of the *CFD* results with the results of the potential theory. Since the potential theory does not take viscous effects into account, there are slight deviations near the walls. The flow velocity reaches the speed of sound for the first time at  $Ma_1 = 0.71$ . From an incident Mach number of  $Ma_1 = 1$ , compressibility influences increase significantly in weight, which become noticeable through compression shocks and expansion. In addition, important flow parameters are analyzed and compared. Qualitatively, similar characteristics can be observed. Due to the special geometry and the occurrence of gas dynamic effects, it is difficult to quantitatively compare the results obtained. With this work, however, first steps have been taken that contribute to a better understanding of the topic.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Eidesstattliche Erklärung</b>	<b>I</b>
<b>Danksagung</b>	<b>II</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>VII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Ziel der Arbeit . . . . .	4
<b>2 Einführende Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1 Gasdynamik . . . . .	6
2.1.1 Allgemeines . . . . .	6
2.1.2 Verdichtung von Überschallströmungen . . . . .	7
2.1.3 Expansion von Überschallströmungen . . . . .	10
2.2 Turbinengitter bei Überschallbedingungen . . . . .	11
2.2.1 Kompressibilitätseinfluss auf die Gitterströmung . . . . .	11
2.2.2 Schaufelgestaltung bei Überschallgleichdruckgittern . . . . .	20
<b>3 Potentialwirbel-Modell</b>	<b>26</b>

<b>4 Modellierung und numerische Simulation</b>	<b>39</b>
4.1 Allgemeines . . . . .	39
4.2 Geometrie und Rechenetz . . . . .	39
4.2.1 Netzunabhängigkeitsstudie . . . . .	42
4.2.2 Netzqualität . . . . .	46
4.2.3 Adaptive Rechenetzanpassung . . . . .	48
4.3 Strömungsmedium . . . . .	48
4.4 Turbulenzmodellierung . . . . .	50
4.5 Numerik . . . . .	52
4.6 Anfangsbedingungen . . . . .	54
4.7 Randbedingungen . . . . .	54
4.8 Konvergenz der Lösung . . . . .	55
4.9 Zusammenfassung der Einstellungen in <i>ANSYS Fluent</i> . . . . .	57
<b>5 Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>58</b>
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>73</b>
<b>Literatur</b>	<b>77</b>
<b>A Konturzeichnungen</b>	<b>79</b>
<b>B Tabellarische Zusammenfassung der <i>CFD</i>-Daten</b>	<b>85</b>

# Symbolverzeichnis

## Abkürzungen

A-Rad	Aktionsrad
CFD	Computational Fluid Dynamics
DS	Druckseite
MUSCL	Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes
SS	Saugseite
SST	Shear Stress Transport
TVD	Total Variation Diminishing

## Lateinische Symbole

$A$	Fläche, Querschnitt	$m^2$
$a$	Mündungsweite	$m$
$a$	Schallgeschwindigkeit	$m/s$
$a$	spezifische Arbeit	$J/kg$
$b$	axiale Sehnenlänge	$m$
$C$	Variable für die Strahlablenkung nach <i>Gretler</i>	1
$c$	absolute Strömungsgeschwindigkeit	$m/s$
$c_p$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck	$J/(kg\cdot K)$
$c_w$	Widerstandsbeiwert	1
$D_H$	hydraulischer Durchmesser	$m$
$e$	relativer Fehler	1
$F_M$	Faktor für Breiten-zu-Teilung-Verhältnis	1
$g$	Erdgravitation	$m/s^2$
$GCI_{fine}$	fine-grid convergence index	1
$h$	repräsentative Zellengröße	$m$
$h$	spezifische Enthalpie	$J/kg$

$I_t$	turbulente Intensität, Turbulenzgrad	1
$K$	Drallkonstante	$\text{m}^2/\text{s}$
$k$	Steigung	1
$k$	turbulente kinetische Energie	$\text{m}^2/\text{s}^2$
$K^*$	dimensionslose Drallkonstante	1
$L$	Zellenanzahl an den Rändern	1
$l$	Schaufellänge	m
$L_t$	turbulentes Längenmaß	m
$M$	molare Masse	$\text{g}/\text{mol}$
$\dot{m}$	Massenstrom	$\text{kg}/\text{s}$
$Ma$	Mach-Zahl	1
$Ma_{is}$	isentropie Mach-Zahl	1
$N$	Zellenanzahl	1
$p$	Ordnung des Verfahrens	1
$p$	statischer Druck	Pa
$p_t$	Totaldruck, Staudruck	Pa
$R$	spezielle Gaskonstante	$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
$r$	Radius	m
$r$	Verfeinerungsfaktor	1
$Re$	Reynolds-Zahl	1
$R_k$	Reaktionsgrad	1
$S$	effektive Temperatur, Sutherland-Konstante	K
$s$	Vorderkantendicke	m
$s$	spezifische Entropie	$\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
$T$	statische Temperatur	K
$t$	Gitterteilung	m
$u$	Umfangsgeschwindigkeit	$\text{m}/\text{s}$
$u_\tau$	Wandschubspannungsgeschwindigkeit	$\text{m}/\text{s}$
$v$	allgemeine Geschwindigkeit	$\text{m}/\text{s}$
$w$	relative Strömungsgeschwindigkeit	$\text{m}/\text{s}$
$x$	Koordinate	m
$x^*$	dimensionslose Koordinate	1
$y$	Koordinate	m
$y$	Wandabstand	m
$y^+$	dimensionsloser Wandabstand	1

### Griechische Symbole

$\alpha$	absoluter Strömungswinkel	°
$\beta$	Stoßwinkel	°
$\beta$	relativer Strömungswinkel	°
$\chi$	bezogene Kanalhöhe	1
$\Delta$	Differenz	-
$\delta$	Grenzschichtdicke, Verdrängungsdicke	m
$\delta$	Winkel der Strahlablenkung	°
$\epsilon$	Differenz der globalen Größen für die Netzstudie	-
$\kappa$	Isentropenexponent	1
$\lambda$	Arbeitszahl	1
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	W/(m-K)
$\mu$	dynamische Viskosität	Pa-s
$\nu$	Prandtl-Meyer-Funktion	1
$\nu$	kinematische Viskosität	m <sup>2</sup> /s
$\omega$	spezifische Dissipationsrate	1/s
$\phi$	Potentialfunktion	m <sup>2</sup> /s
$\phi$	globale Größe für die Netzstudie	-
$\psi_T$	aerodynamische Belastungszahl, Zweifel-Koeffizient	1
$\rho$	Dichte	kg/m <sup>3</sup>
$\tau_w$	Wandschubspannung	Pa
$\theta$	Ablenkung	1
$\xi$	dimensionsloser Radius	1
$\zeta_{t2}$	Totaldruckverlustbeiwert	1

### Vektoren und Tensoren

$\nabla$	Nabla-Operator	1/m
$\underline{\underline{D}}$	Dehnratentensor	1/s
$\vec{\omega}$	Wirbelstärke, Vortizität	1/s
$\vec{c}$	Vektor der absoluten Strömungsgeschwindigkeit	m/s
$\vec{u}$	Vektor der Umfangsgeschwindigkeit	m/s
$\vec{v}$	Vektor einer allgemeinen Geschwindigkeit	m/s
$\vec{w}$	Vektor der relativen Strömungsgeschwindigkeit	m/s

### Exponenten

/	Leitrad	
---	---------	--

$l$	erste Ableitung nach $Ma_1$
//	Laufrad
//	zweite Ableitung nach $Ma_1$
*	Taylorreihennäherung
*	kritischer Wert
+	komplementärer Winkel
21	Größe zwischen Netz 1 und Netz 2
32	Größe zwischen Netz 2 und Netz 3
krit	kritischer Wert

### Indizes

1	Eintritt
1	vor dem Stoß
2	Austritt
2	nach dem Stoß
21	Größe zwischen Netz 1 und Netz 2
32	Größe zwischen Netz 2 und Netz 3
a	geschätzter Wert
$b$	auf die axiale Sehnenlänge bezogen
$D_H$	auf den hydraulischen Durchmesser bezogen
DS	Druckseite
ext	extrapolierter Wert
fein	feines Netz
grob	grobes Netz
ist	ist-Wert
krit	kritischer Wert
m	Meridional Komponente, Axialkomponente
m	Metallkomponente
m	mittlerer Wert
max	Maximum
min	Minimum
n	Normalkomponente
opt	optimaler Wert
ref	Referenzwert
SS	Saugseite
t	Tangentialkomponente

## Symbolverzeichnis

---

t	Totalzustand, Ruhezustand
u	Umfangskomponente
x	Axialkomponente, Meridionalkomponente

### Sonstige Symbole

$\partial$	partielle Ableitung
$d$	Ableitung

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

In allen Bereichen der Energiegewinnung war es schon immer ein Ziel möglichst viel Energie aus einer möglichst kleinen Maschine zu gewinnen, also eine hohe Leistungsdichte zu erreichen, so auch im Bereich der thermischen Turbomaschinen. Gleichdruckdampfturbinen werden heute oft als Regelstufe für große Industriedampfturbinen, aber auch alleinstehend als dezentrale Energiequelle zur Erzeugung elektrischer Energie oder zum Antrieb weiterer Maschinen eingesetzt. Bei Gleichdruckturbinen ist, wie der Name schon vermuten lässt, der statische Druck vor und nach der Laufreihe (nahezu) gleich groß. Das gesamte Enthalpiegefälle, welches zur Verfügung steht, wird in der Leitreihe abgearbeitet. Das Verhältnis aus Lauf- radgefälle  $\Delta h''$  und Stufengefälle (Leitradgefälle  $\Delta h'$  plus Lauf- radgefälle) wird als Reaktionsgrad

$$R_k = \frac{\Delta h''}{\Delta h' + \Delta h''} \quad (1.1)$$

bezeichnet. Da bei Gleichdruckturbinen das Strömungsmedium nur in der Leitreihe beschleunigt und in der Laufreihe lediglich umgelenkt wird, liegt der Reaktionsgrad nahe Null. Im Grenzfall ist dieser gleich Null. Ein Reaktionsgrad von  $R_k = 0$  am mittleren Durchmesser der Turbine würde jedoch zu einem negativen Reaktionsgrad an der Nabe führen. Daher wird in der Mittelschnittrechnung in der Regel ein leicht positiver Reaktionsgrad vorgegeben. Wirft man einen Blick auf ein Ge-

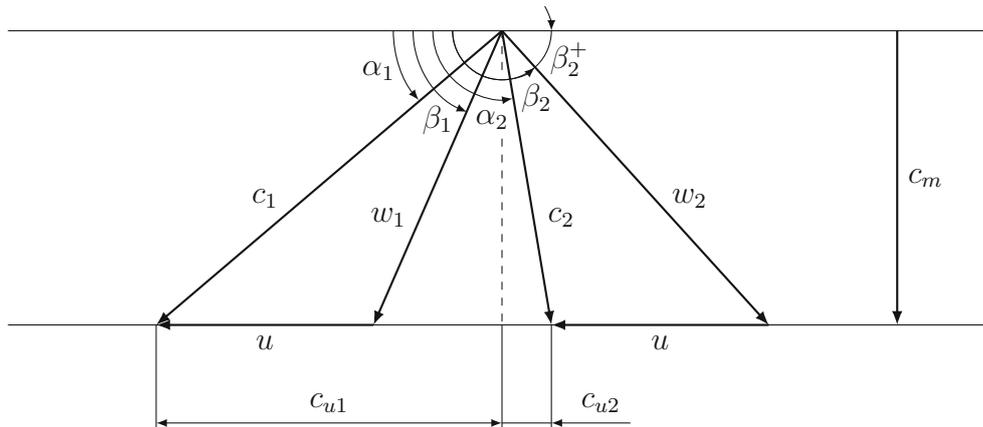


Abbildung 1.1: Darstellung eines Geschwindigkeitsplans.

schwindigkeitsdreieck mit konstanter meridionaler Geschwindigkeit  $c_{m1} = c_{m2} = c_m$  und konstanter Umfangsgeschwindigkeit  $u_1 = u_2 = u$ , wie in Abb. 1.1 dargestellt, erkennt man, dass die vektorielle Absolutgeschwindigkeit

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{w} \quad (1.2)$$

der vektoriellen Addition der Umfangsgeschwindigkeit  $u$  und der Relativgeschwindigkeit  $w$  entspricht. Die Euler'sche Impulsmomentengleichung

$$a_u = u (c_{u1} - c_{u2}) \quad (1.3)$$

gibt die spezifische Umfangsarbeit  $a_u$ , gebildet mit den Umfangskomponenten der Absolutgeschwindigkeiten, an. Daraus kann weiter die sog. Arbeitszahl

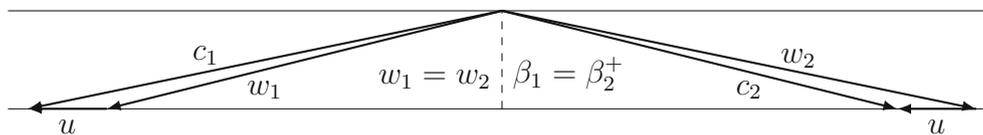
$$\lambda = \frac{a_u}{u^2} = \frac{c_{u1} - c_{u2}}{u} \quad (1.4)$$

definiert werden. Die Forderung einer hohen Arbeitszahl ist somit direkt mit einer Erhöhung der absoluten Strömungsgeschwindigkeiten im Turbinenschaufelgitter verbunden. Da die Umfangsgeschwindigkeit aus Festigkeitsgründen begrenzt ist, muss daher, wie in Gl. (1.2) zu erkennen, ebenfalls die Relativgeschwindigkeit steigen. Lokale Überschallbereiche in der Strömung treten jedoch auch bereits am Austritt von Überdruckgittern auf. Der Spezialfall, der hier behandelt werden soll, ist durch eine Überschallanströmung des Gitters charakterisiert. Das bedeutet, dass

die relative Eintritts-Mach-Zahl

$$Ma_1 = \frac{w_1}{a_1}, \quad (1.5)$$

gebildet mit der Relativgeschwindigkeit  $w_1$  und der Schallgeschwindigkeit  $a_1$  am Eintritt, größer als Eins ist. Abhängig vom Eintrittswinkel kann diese bei Gleichdruckturbinen einen Wert von bis zu ca.  $Ma_1 = 2,5$  erreichen. Als Konsequenz führt dies zu spitzen bzw. flachen Geschwindigkeitsdreiecken und eine drallfreie Abströmung ( $\alpha_2 = 90^\circ$ ) kann nicht gewährleistet werden, wie in Abb. 1.2 erkennbar. Bei einem Reaktionsgrad von  $R_k = 0$  und einer Arbeitszahl von  $\lambda = 2$  wäre eine drallfreie Abströmung sichergestellt. Erhöht sich jedoch die Arbeitszahl, kommt es gleichzeitig zu einer Vergrößerung des Abströmwinkels  $\alpha_2$ . Wie in [1] beschrieben, befindet sich bei einer Gleichdruckstufe, oder auch Aktionsrad (A-Rad) genannt, ein Maximum des Umfangswirkungsgrades bei ca.  $u/c_1 = 0,5$ . Dieser Wert kann jedoch bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten nicht eingehalten werden. Zusammengefasst kann gesagt werden, dass bei Gleichdruckturbinen mit Überschallanströmung der Zuströmwinkel  $\alpha_1$  möglichst klein und somit die Arbeitszahl möglichst groß gestaltet werden soll, aber dadurch eine drallbehaftete Abströmung und damit eine Abnahme des Wirkungsgrades in Kauf genommen wird.



**Abbildung 1.2:** Geschwindigkeitsplan für ein Gleichdruckgitter mit Reaktionsgrad  $R_k = 0$  bei großen Strömungsgeschwindigkeiten.

Vor nicht all zu langer Zeit ist ein Unternehmen, welches sich auch mit dezentraler Energieversorgung beschäftigt, an Herrn *Prof. Willinger* herangetreten. Dieses Unternehmen hatte sich von einem Ingenieurbüro eine Kleindampfturbine nach dem Gleichdruckprinzip berechnen und konstruieren lassen. Jedoch stellte sich letztendlich heraus, dass die Turbine nicht die vorgegebene Leistung erbrachte. Herr *Prof. Willinger* nahm sich dieses Problems an und rechnete bei gegebener Geometrie und gegebenen Randbedingungen die Turbine überschlägig nach. Um die Arbeitszahl groß zu gestalten, wurde auch diese Turbine mit einer Überschallanströmung betrieben. Bei solch einer Art von Anströmung ist es jedoch von großer Bedeutung,

wichtige konstruktive Vorgaben einzuhalten, welche von dem Ingenieurbüro nicht berücksichtigt wurden. Die Turbine wurde konstruktiv für Unterschallbedingungen ausgelegt, was augenscheinlich zu einem Leistungseinbruch führte. Das Verhältnis aus axialer Sehnenlänge und Gitterteilung  $b/t$  wurde bei der besagten Turbine nach dem sog. Zweifel-Kriterium

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{opt} = \frac{2 \sin(2\beta_1)}{\psi_T}, \quad (1.6)$$

siehe [26], gewählt. Diese Form des Kriteriums gilt jedoch ausschließlich für Gleichdruckgitter. Bei  $\psi_T = 0,8$  wird zusätzlich die sog. Briling'sche Bedingung

$$\frac{r_m}{a} = 2, \quad (1.7)$$

siehe [21], erfüllt, welche das Verhältnis des mittleren Strömungsradius  $r_m$  zur Mündungsweite  $a$  angibt. Dieses Kriterium liefert einen optimalen Wert von  $b/t$  in Abhängigkeit des Zuströmwinkels und der aerodynamischen Belastungszahl oder des Zweifel-Koeffizienten  $\psi_T$ . Das Verhältnis ist bei  $\psi_T = 0,8$  dahingehend optimal, da hier die Profilverluste, welche sich aus den Reibungsverlusten und Ablösungsverlusten zusammensetzen, minimal werden. Diese Bedingung verliert jedoch ihre Gültigkeit bei Überschallverhältnissen. Des Weiteren treten bei hohen Mach-Zahlen aufgrund von steigenden Kompressibilitätseinflüssen gasdynamische Effekte auf, welche sich maßgeblich auf die Verluste im Gitter auswirken.

Das Versagen der besagten Turbine gilt als Hauptmotivation für diese Arbeit. Was konstruktiv bei einer Überschallanströmung von Gleichdruckturbinengittern beachtet werden muss, wird später in Abschn. 2.2 diskutiert.

## 1.2 Ziel der Arbeit

In der Vergangenheit hatte sich bis jetzt niemand im Forschungsbereich der thermischen Turbomaschinen an der TU Wien wirklich intensiv mit Überschallanströmungen von Turbinengittern beschäftigt. Daher soll zu Beginn eine Literaturrecherche zu diesem Thema durchgeführt werden, um zu verstehen, welche Faktoren dabei eine wichtige Rolle spielen. In dieser Arbeit gilt es aber auch herauszufinden, welche Effekte zu einem Leistungseinbruch der besagten Turbine geführt haben. Es soll da-

her ein geometrisch vergleichbares Turbinengitter herangezogen werden, an dem der Mach-Zahl-Einfluss untersucht werden soll. Die Strömungsfelder sollen numerisch mittels *Computational Fluid Dynamics (CFD)* berechnet werden. Das Anwenden von *CFD* auf Gleichdruckturbinengitter mit einer Eintritts-Mach-Zahl von  $Ma_1 > 1$  gilt ebenfalls als Debüt am Institut. Ziel ist es somit ganz bewusst die Strömung in einer für Überschallbedingungen nicht geeigneten Gleichdruckbeschaufelung zu simulieren, um die negativen Einflüsse besser einschätzen zu können. Dabei soll ein Eintritts-Mach-Zahl-Bereich von  $Ma_1 = 0,2$  bis 2 abgedeckt werden. Eine weitere Aufgabe besteht darin, eine einfache, theoretische Berechnungsmethode auf Basis einer Potentialströmung zu entwickeln, mit der schnell und unkompliziert Aussagen über die Strömungsverhältnisse getroffen werden können. Schlussendlich sollen die Ergebnisse aus den *CFD*-Simulationen bewerten werden und mit den Ergebnissen der Potentialtheorie und jenen aus der Literatur verglichen werden.

# Kapitel 2

## Einführende Grundlagen

### 2.1 Gasdynamik

#### 2.1.1 Allgemeines

In diesem Kapitel sollen nur kurz die wichtigsten Aspekte der Gasdynamik zusammengefasst werden, welche für diese Arbeit relevant sind. Es handelt sich daher eher um allgemeine Informationen. Genauer findet man in facheinschlägiger Literatur, z.B. in [22], woraus auch die folgenden Themen inhaltlich übernommen wurden. Der Kompressibilitätseinfluss eines strömenden Mediums wird größer, je näher die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  an der Schallgeschwindigkeit  $a$  des Mediums liegt. Um quantifizieren zu können, ob eine Über- oder Unterschallströmung vorliegt, wird oft die sog. Mach-Zahl

$$Ma = \frac{v}{a} \quad (2.1)$$

herangezogen, welche das Verhältnis aus Strömungs- und Schallgeschwindigkeit beschreibt. Demnach liegt bei  $Ma < 1$  eine Unterschallströmung (subsonisch) und bei  $Ma > 1$  eine Überschallströmung (supersonisch) vor. Im Grenzfall  $Ma = 1$  deckt sich die Strömungsgeschwindigkeit gerade mit der Schallgeschwindigkeit. Dieser Zustand wird auch als transsonische Strömung bezeichnet. Mit der Annahme einer isentropen Zustandsänderung und eines idealen Gases kann der Zusammenhang

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\kappa RT} \quad (2.2)$$

für die Schallgeschwindigkeit gefunden werden. Für ein gegebenes Medium, mit dem Isentropenexponenten  $\kappa$  und der speziellen Gaskonstante  $R$ , ist demnach die Schallgeschwindigkeit lediglich von der Wurzel der statischen Temperatur  $T$  abhängig.

### 2.1.2 Verdichtung von Überschallströmungen

Verdichtungsstöße entstehen, wenn eine Überschallströmung plötzlich verzögert wird oder der Gegendruck der Strömung zu hoch ansteigt. Diese Voraussetzungen gelten allerdings auch bei einem ruhenden Medium, durch das ein Gegenstand mit Überschallgeschwindigkeit bewegt wird, wie man es z.B. bei Überschallflugzeugen oder einem abgefeuerten Projektil kennt. Längs einer Wegstrecke von nur wenigen mittleren freien Weglängen der Moleküle ist ein Druckanstieg und eine Geschwindigkeitsabsenkung zu beobachten. Die Änderung des Strömungsfelds ist praktisch unstetig. Man kann zwischen einem senkrechten und einem schiefen Verdichtungsstoß unterscheiden.

#### Senkrechter Verdichtungsstoß

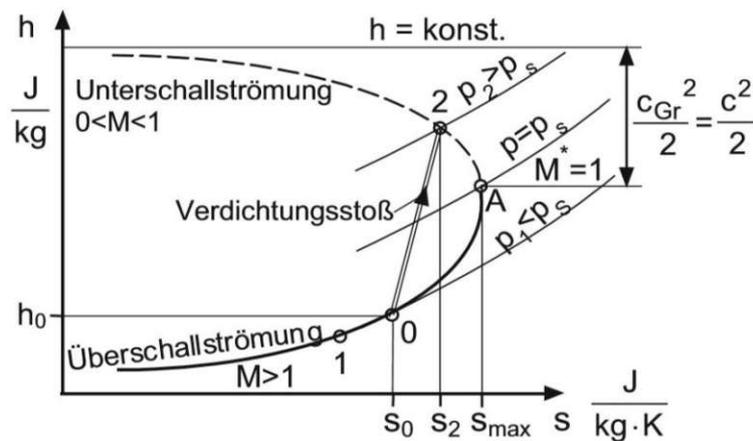
Beim senkrechten oder geraden Verdichtungsstoß ist eine eindimensionale Betrachtungsweise ausreichend. Man stelle sich eine Rohrströmung mit konstantem Querschnitt  $A$  vor, für welche die Massenbilanz

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho v = \text{konst.} \quad (2.3)$$

gilt. Diese kann durch eine konstante Dichte und eine konstante Geschwindigkeit erfüllt werden. Es existiert jedoch noch eine weitere Lösung mit sinkender Dichte und steigender Geschwindigkeit. Differenziert man Gl. (2.3) und formt diese auf

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} \quad (2.4)$$

um, so erkennt man, dass eine Absenkung der Dichte zu einer Geschwindigkeits-erhöhung führt, die maximal bis hin zur Schallgeschwindigkeit vollzogen werden kann. Dieser Zustand (Punkt A) ist in Abb. 2.1 in einer sog. Fanno-Kurve im  $h$ - $s$ -Diagramm dargestellt. Der obere Ast gilt für Unterschallströmung und der untere Ast für Überschallströmung. Der Druck kann nicht unter  $p = p_s$  im Punkt A abgesenkt werden, da das mit einer Entropieabnahme verbunden wäre und diese nicht dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik genügen würde. Liegt eine Überschallströmung am unteren Ast (Zustand 0) vor, so sinkt die Geschwindigkeit ab und der Druck steigt maximal bis zum Punkt A an. Eine weitere kontinuierliche Druckerhöhung ist nicht mehr möglich. Es ist jedoch möglich durch einen Verdichtungsstoß unter Entropiezunahme sprunghaft auf den oberen Ast der Fanno-Kurve (Zustand 2) zu gelangen. Die Strömung hat somit eine Änderung von Überschallströmung  $Ma > 1$  auf Unterschallströmung  $Ma < 1$  durchlaufen. Eine Stromlinie verändert dabei nicht ihre Richtung.

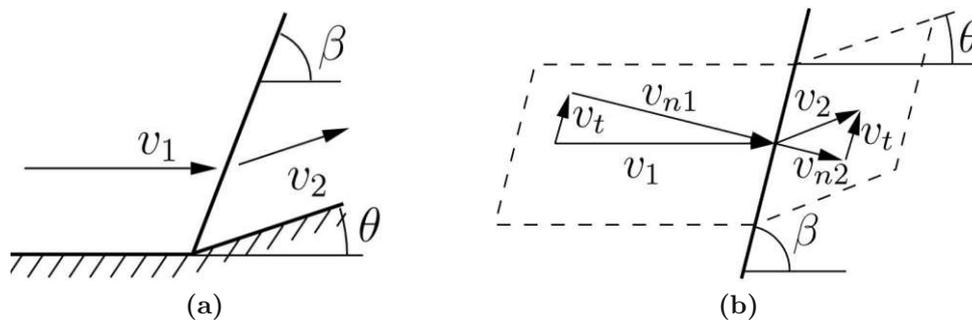


**Abbildung 2.1:** Fanno-Kurve einer adiabaten reibungsbehafteten Strömung, siehe [22].

Mit der Kontinuitäts-, Energie- und Isentropengleichung lassen sich analytische Gleichungen herleiten, welche die Zustände von z.B. Druck, Geschwindigkeit und Temperatur vor und nach dem Stoß in Verbindung setzen. Diese werden hier nicht angeführt, können jedoch aus facheinschlägiger Literatur, z.B. aus [22], entnommen werden. Es kann auch gezeigt werden, dass die Entropiezunahme nur vom Strömungsmedium selbst und von der Mach-Zahl vor dem Stoß abhängig ist. Je größer die Mach-Zahl vor dem Stoß, desto größer auch der Entropiezuwachs und somit die Verluste.

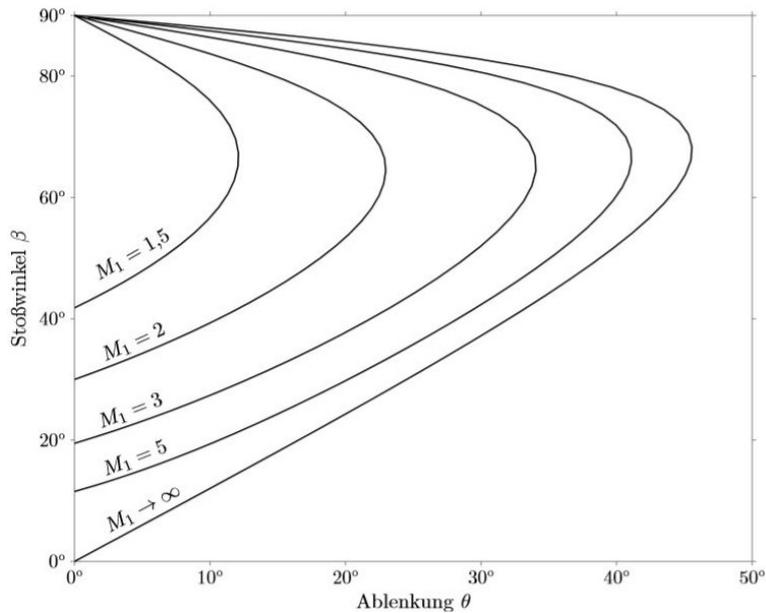
## Schiefer Verdichtungsstoß

Beim schiefen oder schrägen Verdichtungsstoß ist eine eindimensionale Betrachtung nicht mehr möglich. Dieser entsteht nämlich bei einer Umlenkung der Strömung über eine konkave Wand bzw. Rampe, wie in Abb. 2.2a dargestellt. Wie man Abb. 2.2b entnehmen kann, erfährt nur die zur Stoßfront normal stehende Komponente der Geschwindigkeit eine Änderung. Die tangentielle Komponente verbleibt unverändert. Im Gegensatz zum geraden Verdichtungsstoß, kommt es beim schiefen Stoß zu einer Richtungsänderung der Stromlinie zur Stoßfront hin. Die Gleichungen des senkrechten Stoßes können dahingehend erweitert werden, dass nun nur die Normalkomponente der Geschwindigkeit einen geraden Stoß durchläuft. Das bedeutet aber auch, dass nach einem schiefen Verdichtungsstoß trotzdem noch Überschallbedingungen vorliegen können. Lediglich die Normalkomponente der Mach-Zahl sinkt unter Eins. Der Betrag der Mach-Zahl nach dem Stoß ist jedenfalls kleiner als jener vor dem Stoß.



**Abbildung 2.2:** Schiefer Verdichtungsstoß an einer konkaven Ecke (a) und die dazugehörigen Geschwindigkeitskomponenten (b), siehe [11].

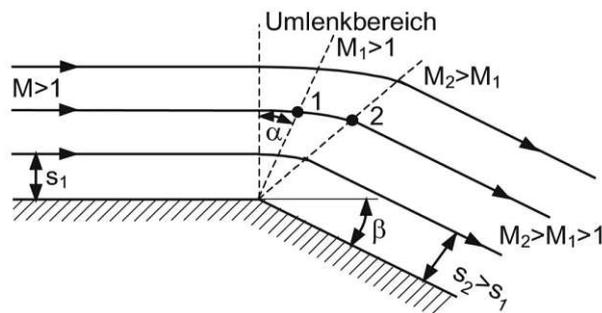
Der Stoßwinkel hängt nach Abb. 2.3 von der Ablenkung  $\theta$  und der Mach-Zahl vor dem Stoß ab. Damit lässt sich die Richtungsänderung der Stromlinie bestimmen. Wird die Strömung nicht um eine scharfe, sondern um eine runde Kante stufenweise abgelenkt, kommt es zu einem sog. Stoßfächer. Eine Abfolge von kleinen Verdichtungsstößen vollzieht die Richtungsänderung der Strömung. Grundsätzlich treten beim schiefen Verdichtungsstoß höhere Verluste als beim senkrechten Stoß auf.



**Abbildung 2.3:** Zusammenhang zwischen Stoßwinkel, Ablenkung und Mach-Zahl vor dem Stoß, siehe [11].

### 2.1.3 Expansion von Überschallströmungen

Eine Expansion der Überschallströmung entsteht, im Gegensatz zum schiefen Verdichtungsstoß, bei der Umströmung einer konvexen Kante, wie in Abb. 2.4 dargestellt. Hinter der Kante wird der Druck abgesenkt und die Strömung beschleunigt.



**Abbildung 2.4:** Prandtl-Meyer-Expansion an einer konvexen Ecke, siehe [22].

Die Mach-Zahl nach der Expansion ist somit größer als jene vor der Expansion. Die Parallelströmung vor der Ecke wird wieder in eine Parallelströmung nach der Ecke umgelenkt, jedoch vergrößert sich der Abstand der Stromlinien zur Wand. Die beiden Überschallbereiche werden mit einem sektorförmigen Umlenkbereich verbunden.

Von der Ecke geht strahlenförmig ein sog. Expansions- oder Verdünnungsfächer aus, der von den gestrichelten Mach'schen Linien begrenzt wird. Die Stromlinien werden von einer Mach'schen Linie immer im selben Winkel geschnitten. Das bedeutet, dass entlang einer Mach'schen Linie der Gaszustand gleich ist. Wird die Strömung nicht um eine scharfkantige, sondern um eine kontinuierlich konvex gekrümmte Wand umgelenkt, vollzieht eine Reihe von kleinen Expansionen die Richtungsänderung der Strömung.

Die dazugehörige Theorie wurde 1908 von *Ludwig Prandtl* und *Theodor Meyer* entwickelt. Daher wird diese Art von Expansion auch Prandtl-Meyer-Expansion oder Prandtl-Meyer-Eckenströmung bezeichnet. Aus dieser Theorie geht die Prandtl-Meyer-Funktion

$$\nu(Ma) = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \arctan \left[ \sqrt{\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}} (Ma^2 - 1) \right] - \arctan \left( \sqrt{Ma^2 - 1} \right) \quad (2.5)$$

hervor, aus der sich die Ablenkung der Strömung

$$\theta = \nu(Ma_2) - \nu(Ma_1) \quad (2.6)$$

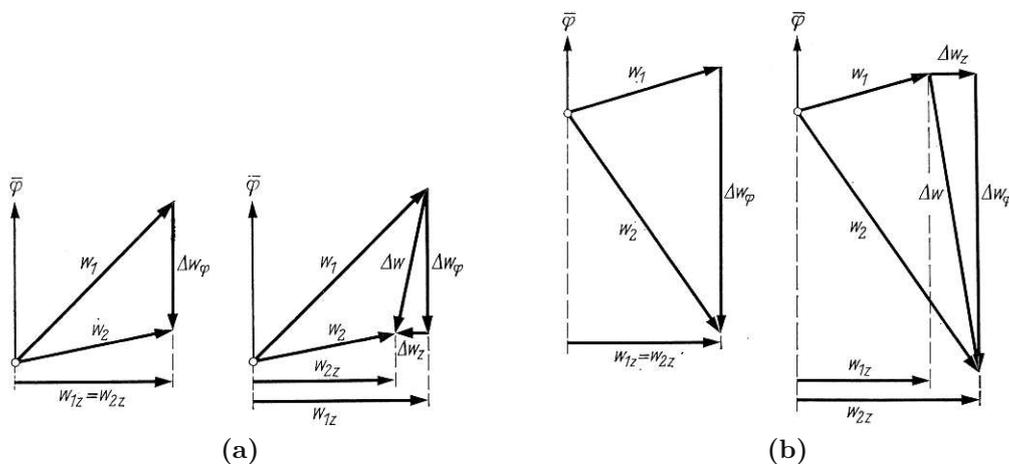
ermitteln lässt. Die Expansion einer Überschallströmung verläuft stetig und somit isentrop.

## 2.2 Turbinengitter bei Überschallbedingungen

### 2.2.1 Kompressibilitätseinfluss auf die Gitterströmung

Wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten allgemein beschrieben, wird die Kompressibilität eines Strömungsmediums dann von großer Bedeutung, wenn die Strömungsgeschwindigkeit der Schallschallgeschwindigkeit des Mediums nahe kommt. Für eine lokale Mach-Zahl von  $Ma = 0,3$  kann für Wasserdampf ( $\kappa = 4/3$ ) unter Annahme eines idealen Gases und einer isentropen Zustandsänderung gezeigt werden, dass die spezifische Dichteänderung  $(1 - \rho/\rho_t) \cdot 100 \% = 4,6 \%$  und die spezifische Druckänderung  $(1 - p/p_t) \cdot 100 \% = 6,1 \%$  beträgt. Im *CFD*-Bereich wird

oft eine Faustregel herangezogen, welche besagt, dass ab einer spez. Dichteänderung von 5 % die Kompressibilitätseinflüsse nicht mehr vernachlässigt werden können. Es ist somit zwischen einer Dichte vor dem Gitter  $\rho_1$  und einer Dichte nach dem Gitter  $\rho_2$  zu unterscheiden. Durch das Auftreten von Dichteunterschieden im Strömungsfeld, kommt es, unter Einhaltung der Kontinuitätsgleichung, zu einer Änderung der Strömungsgeschwindigkeit. Welchen Einfluss gasdynamische Effekte auf eine Schaufelgitterströmung haben können, soll in diesem Abschnitt diskutiert werden. Dabei wird auch speziell auf Gleichdruckturbinengitter Bezug genommen.

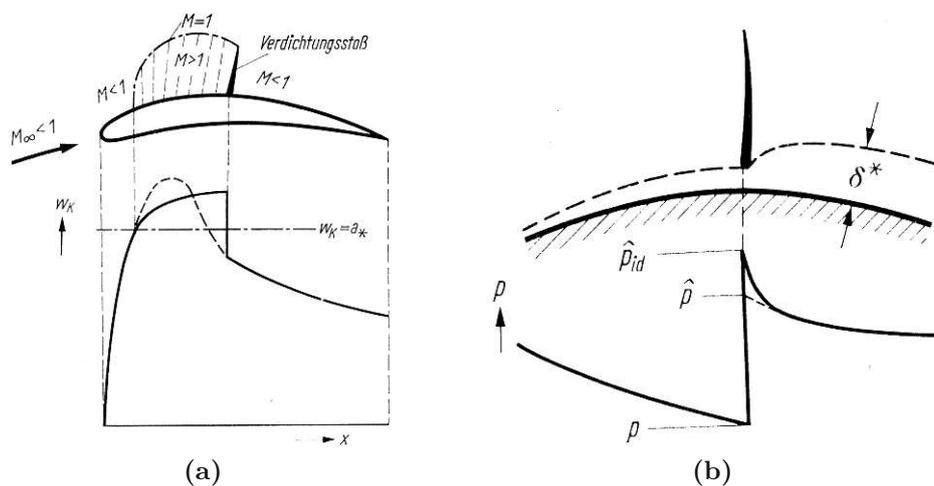


**Abbildung 2.5:** Geschwindigkeitsdreiecke eines Schaufelgitters bei Verzögerung (a) und bei Beschleunigung (b) im inkompressiblen bzw. kompressiblen Fall, siehe [17].

Die Geschwindigkeitsdreiecke in Abb. 2.5 zeigen den Vergleich einer kompressiblen und inkompressiblen Gitterströmung. Die durch die Kompressibilität des Mediums hervorgerufene Geschwindigkeitsänderung  $\Delta w_z$  ist deutlich zu erkennen. In [17] sind die Beziehungen zwischen Eintritts- und Austrittsgrößen einer kompressiblen reibungsbehafteten Gitterströmung tabellarisch angeführt. Wird also ein Körper angeströmt, kommt es an Stellen mit beschleunigter Strömung zu einer Dichteabnahme, wodurch der Volumenstrom ansteigt. Als Konsequenz muss die örtliche Geschwindigkeit ansteigen, um die Massenbilanz zu erfüllen, wobei Umgekehrtes für eine örtlich verzögerte Strömung gilt. Auch die kompressible Bernoulli-Gleichung zeigt, dass Kompressibilitätseffekte zusätzlich die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Druck beeinflussen.

Für ein Schaufelgitter existieren grundsätzlich zwei charakteristische Anström-Mach-Zahlen: Die kritische Mach-Zahl und die Sperr-Mach-Zahl. Die kritische

Anström-Mach-Zahl ist dann erreicht, sobald erstmals eine lokale Mach-Zahl von  $Ma = 1$  auftritt. Diese tritt an jener Stelle auf, an der die größte Übergeschwindigkeit herrscht. Unter dieser Mach-Zahl liegt eine reine subsonische Strömung vor und es treten keine Verdichtungen oder Expansionen auf. Daher können die Strömungsverhältnisse aus der inkompressiblen Theorie abgeleitet werden. Eine Verkleinerung des Strömungsquerschnitts zieht somit stets eine Geschwindigkeitszunahme nach sich. Ab der kritischen Mach-Zahl treten örtliche Überschallgebiete auf, welche durch einen geraden Verdichtungsstoß abgeschlossen werden, wie in Abb. 2.6a dargestellt. Durch den unstetigen Anstieg des Drucks und der Absenkung der Geschwindigkeit, ergeben sich bedeutend veränderte Verhältnisse bezogen auf subsonische Bedingungen. Die Stoßbedingung des senkrechten Stoßes gibt die Lage des Verdichtungsstoßes so vor, dass dahinter wieder unterkritische Bedingungen herrschen. Man spricht von einer transsonischen Durchströmung.

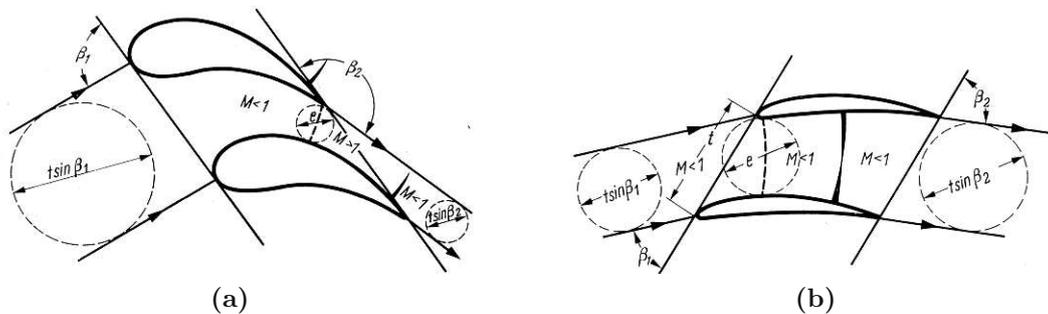


**Abbildung 2.6:** (a): Überschallfeld einer transsonischen Umströmung eines Profils (oben) und die dazugehörige Konturgeschwindigkeit mit und ohne Berücksichtigung des Überschallfeldes (unten); (b): Verdickung der Wandgrenzschicht nach dem Stoß (oben) und der dazugehörige Druckverlauf an der Wand mit verminderten Druckgradienten (unten), siehe [17].

Aus Experimenten geht hervor, dass der Druckgradient beim senkrechten Stoß in der Praxis schwächer ausfällt, als von den Stoßgleichungen vorhergesagt wird. Dieser Umstand ist auf die Interaktion des Stoßes mit der Wandgrenzschicht zurückzuführen, wie in Abb. 2.6b zu erkennen. Durch den unstetigen Druckanstieg kommt es ebenfalls zu einer Erhöhung der Verdrängungsdicke  $\delta$ . Im Extremfall ist

es sogar möglich, dass sich die Grenzschicht dadurch vollständig von der Wand ablöst, wodurch es zu einem drastischen Anstieg der Verluste kommt.

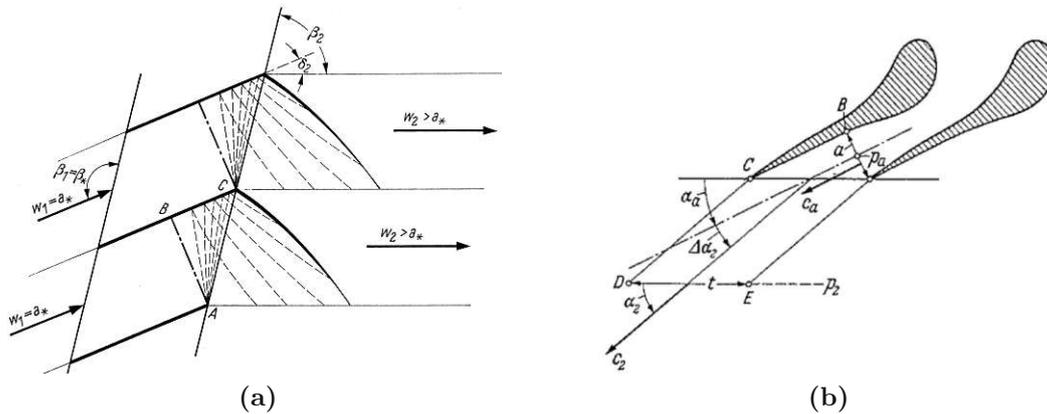
Die Sperr-Mach-Zahl ist dann erreicht, wenn am engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit herrscht und somit eine Machzahl von  $Ma = 1$  gegeben ist. Bei Verzögerungsgittern ist dies innerhalb des Schaufelkanals und bei Beschleunigungsgitter am Austritt an der Profilhinterkante der Fall, siehe Abb. 2.7. An jener Stelle bildet sich ein Verdichtungsstoß über die gesamte Kanalhöhe und es erfolgt die Rückkehr in den Unterschall. Durch weiteres Absenken des Gegendrucks hinter dem Gitter, ist keine Erhöhung des Massenstroms mehr möglich. Der Kanal „sperrt“. Der Massenstrom kann lediglich durch eine Zunahme des Drucks vor dem Gitter erhöht werden. Dabei kann jedoch die Mach-Zahl am engsten Querschnitt nicht größer als Eins werden. Die Sperr-Mach-Zahl ist somit die maximal mögliche Anström-Machzahl.



**Abbildung 2.7:** Überkritische Durchströmung eines Beschleunigungsgitters (a) und eines Verzögerungsgitters (b), siehe [17].

Will man die Abströmgeschwindigkeit nach dem Sperren des Kanals, durch weiteres Absenken des Gegendrucks, weiterhin erhöhen, ist eine Anpassung des Abströmwinkels zur Gitternormalen hin nötig. Eine Möglichkeit ist die Geometrie des Profils zu ändern, wie es bei der sog. Laval-Düse der Fall ist. Durch ihren konvergent-divergenten Strömungsquerschnitt kann die Strömungsgeschwindigkeit über die Schallgeschwindigkeit hinaus beschleunigt werden. Im Gegensatz zum unterkritischen Bereich, führt im Überschallbereich eine Querschnittserweiterung bekanntlich zu einer Geschwindigkeitszunahme. Ist an dem konvergenten Teil keine divergente Profilierung angeschlossen, kommt es zu einer Überschallexpansion. Wenn der Gegendruck hinter dem Gitter allerdings ungleich dem Druck der Überschallexpansion ist, kommt es am Austritt zu einer Nachexpansion bzw. Nachverdichtung über schräge Verdichtungsstöße. Aus Kontinuitätsgründen und durch die Periodizitätsbedingung im Schaufelgitter, versucht die Strömung nun selbst ihren

Strömungsquerschnitt zu erweitern, was eine Veränderung des Abströmwinkels  $\beta_2$  nach sich zieht. Man spricht von der sog. Strahlablenkung mit dem Winkel  $\delta_2$ . Die Strömungsgeschwindigkeit kann also nur durch eine Umlenkung der Strömung um eine Ecke (Prandtl-Meyer-Eckenströmung) erhöht werden, wie in Abb. 2.8a dargestellt.

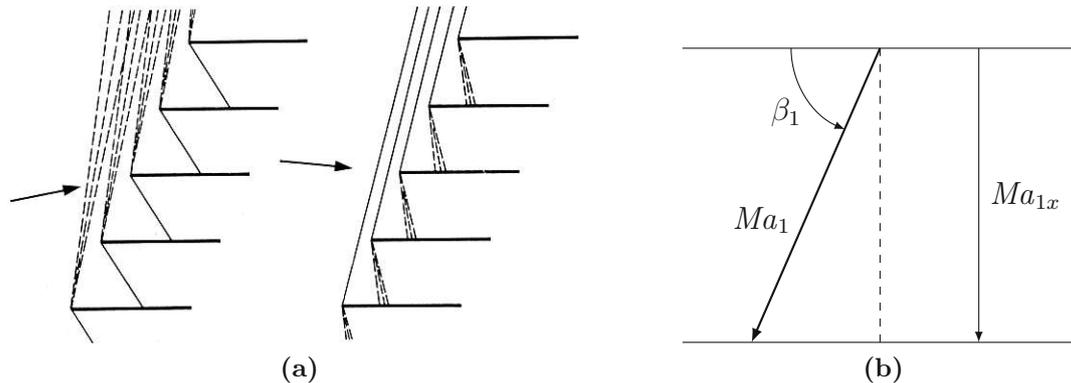


**Abbildung 2.8:** Strahlablenkung bei überkritischem Druckverhältnis allgemein mit Schalldurchgangslinie (---) und Mach'schen Linien (- -) (a), siehe [17], und bei einer Laval-Düse mit  $\Delta\alpha_2 = \delta_2$  (b), siehe [23].

Außerdem kann dieser Effekt auch bei Laval-Düsen eintreten, wenn diese mit einem kleineren Druckverhältnis  $p_2/p_{t1}$  als jenes am Auslegungspunkt betrieben werden, wie in Abb. 2.8b zu sehen. Allgemein kann Strahlablenkung bei Beschleunigungsgittern aber laut [23] auch bei Gleichdruckgittern auftreten.

Bei einer Gleichdruckstufe mit Reaktionsgrad  $R_k = 0$  und geometrisch, konstantem Strömungsquerschnitt im Kanal existiert am Auslegungspunkt demnach auch keine Sperr-Mach-Zahl. Bei Fehlanströmung ist eine Versperrung des Kanals dennoch möglich. Für solch ein Gitter sind daher noch zwei weitere ausgezeichnete Anström-Mach-Zahlen von Bedeutung: Wenn die Anström-Mach-Zahl  $Ma_1 = 1$  und wenn die axiale Anström-Mach-Zahl  $Ma_{1x} = 1$ . Liegt  $Ma_1$  über Eins, treten an konvexen Oberflächen Expansionen und an konkaven Profilierungen Verdichtungsstöße auf. Man spricht von einer Überschallgitterströmung. Wird die Anströmgeschwindigkeit weiter erhöht, nimmt die axiale Anström-Mach-Zahl  $Ma_{1x}$  bald den Wert Eins an. In diesem Fall wird die stromaufwärtige Strömung nicht mehr von der stromabwärtigen Strömung beeinflusst. Störungen können sich somit nur noch stromabwärts fortpflanzen. Man muss also grundsätzlich zwischen diesen zwei Fällen unterscheiden. Welche Auswirkungen diese beiden Strömungssituationen

auf eine Gitterströmung haben, soll im Folgenden diskutiert werden. Eine Überschallanströmung mit  $1 \leq Ma_1 < Ma_{1x} = 1$  muss immer der im englischsprachigen Raum bezeichneten „*unique incidence*“-Regel genügen. Diese Regel besagt, dass in dem angegebenen Bereich die Anström-Mach-Zahl und der Anströmwinkel nicht frei voneinander, unabhängig gewählt werden können. Zur Veranschaulichung dient das Beispiel der unendlich dünnen, ebenen Platte in Abb. 2.9a.



**Abbildung 2.9:** Supersonische Anströmung eines Plattengitters (a) mit positivem (links) und negativem Anstellwinkel (rechts) mit Stoßlinien (–) und Mach’schen Linien (– –), siehe [17] und ein Geschwindigkeitsdreieck (b), dargestellt mit Mach-Zahlen, zur Bestimmung von Gl. (2.8).

Da die Thematik in [17] gut beschrieben ist, wird sie hier wörtlich zitiert:

„Bei einem Zustrom mit positivem Anstellwinkel läuft ein Expansionsfächer von der saugseitigen Eintrittskante in die Zuströmung und bewirkt, dass die Axialgeschwindigkeit vor dem Gitter erhöht wird, bis die Strömung in Richtung der ebenen Platte zuströmt. Wird ein Zustrom mit negativem Anstellwinkel angenommen, so geht von jeder Eintrittskante ein Verdichtungsstoß stromabwärts in die Zuströmung, wodurch die Axialgeschwindigkeit der Zuströmung vermindert wird. Es ist also nur eine Zuströmung möglich, die wirkungsfrei in Richtung der ebenen Platten das Gitter durchströmt. Für die Profilvergitterströmung bedeutet das nun, dass Zuström-Mach-Zahl und Zuströmrichtung nicht mehr frei wählbar, sondern miteinander fest gekoppelt sind. Entscheidend für die Richtung, die die Zuströmung bei gegebener Zuström-Mach-Zahl haben muss, ist die Mach’sche Welle, welche von der Profilsaugseite ausgehend auf die Profilnase des darüberliegenden Profils trifft. Alle stromaufwärts gelegenen Wellen müssen sich gerade mit dem schrägen Verdichtungsstoß vor dem Profil gegenseitig auslöschen. Das ist annähernd der Fall, wenn die Strömung im Verdichtungsstoß und im Expansionsgebiet entgegengesetzt

gleiche Ablenkung erleidet. Die erforderliche Zuströmrichtung ist damit identisch mit der Neigung der Profilkontur an der Stelle der Saugseite, von der die Mach'sche Linie zu Profilnase des Nachbarprofils ausgeht. Mit zunehmender Mach-Zahl muss also die Zuströmung steiler zur Gitterfront erfolgen, d.h., der Zuströmwinkel muss abnehmen. Die gesamte Druckseite des Profils besitzt Unterschallströmung und hat keinen Einfluss auf die Strömung stromaufwärts und damit auf die erforderliche Zuströmrichtung.“

Weitere Erklärungen der „*unique incidence*“-Regel findet man in [8], [9] und [16]. Durch die Periodizitätsbedingung wirkt sich eine Zuströmrichtung abweichend von der Richtung parallel zur Platte somit auf das gesamte Strömungsfeld vor dem Gitter aus. Sobald eine axiale Anström-Mach-Zahl von  $Ma_{1x} = 1$  und größer erreicht wird, können Anström-Mach-Zahl und Anströmwinkel wieder unabhängig von einander gewählt werden.

Betrachtet man die „*unique incidence*“-Regel im eindimensionalen Fall, kann man sich zwei aufs Gitter treffende Stromlinien (Abb. 2.10 blau) vorstellen, welche den Massenstrom für einen Strömungskanal begrenzen. Der auf die Länge der Schaufeln  $l$  bezogene Massenstrom

$$\frac{\dot{m}}{l} = \rho_1 c_1 t \sin(\beta_1) = \rho_{1'} c_{1'} t \overbrace{\sin(\beta_{1m})}^a \quad (2.7)$$

zwischen den Stromlinien (Zustand 1) und im Kanal (Zustand 1'), muss aus Kontinuitätsgründen konstant bleiben. Nimmt man zusätzlich an, dass sich die Mach-Zahl an der Stelle 1 und 1' nicht ändert, also  $Ma_1 = Ma_{1'}$  und somit auch  $\rho_1 = \rho_{1'}$ , muss die Fläche an diesen beiden Stellen ebenfalls dieselbe sein. Die einzige Möglichkeit die Massenbilanz unter diesen Bedingungen zu erfüllen, ist, wenn der Zuströmwinkel dem Metallwinkel der Schaufel entspricht, also  $\beta_1 = \beta_{1m}$  gilt. Eine Gleichdruckschaufel mit unendlich dünner Vorderkanten und gerader Saugseite am Eintritt kann somit im Bereich von  $1 \leq Ma_1 < Ma_{1x} = 1$  nur mit dem Metallwinkel der Schaufel angeströmt werden. Dies entspricht den gleichen Gegebenheiten wie bei einer unendlich dünnen, ebenen Platte, da die Druckseite der Schaufel in dem Modell in keinsten Weise berücksichtigt wird.

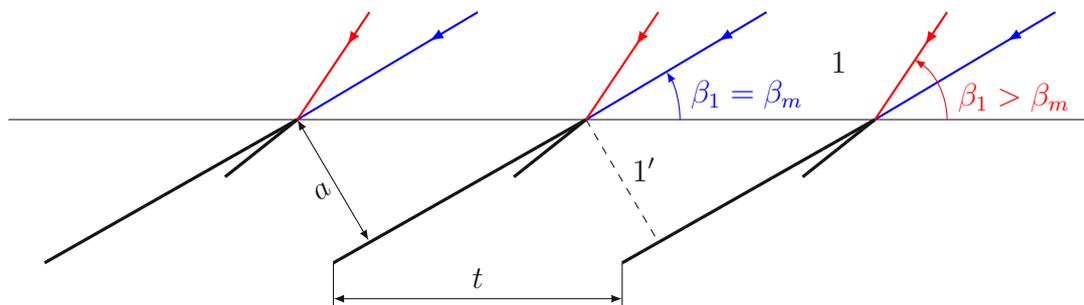
In Abb. 2.9b ist ein Teil eines Geschwindigkeitsdreiecks dargestellt. Daraus lässt sich sofort die Beziehung

$$\sin(\beta_1) = \frac{Ma_{1x}}{Ma_1} \stackrel{Ma_{1x}=1}{=} \frac{1}{Ma_1} \quad (2.8)$$

zwischen dem Anströmwinkel, der Anström-Mach-Zahl und der axialen Anström-Mach-Zahl ableiten. Setzt man die axiale Anström-Mach-Zahl gleich Eins und stellt Gl. (2.8) auf

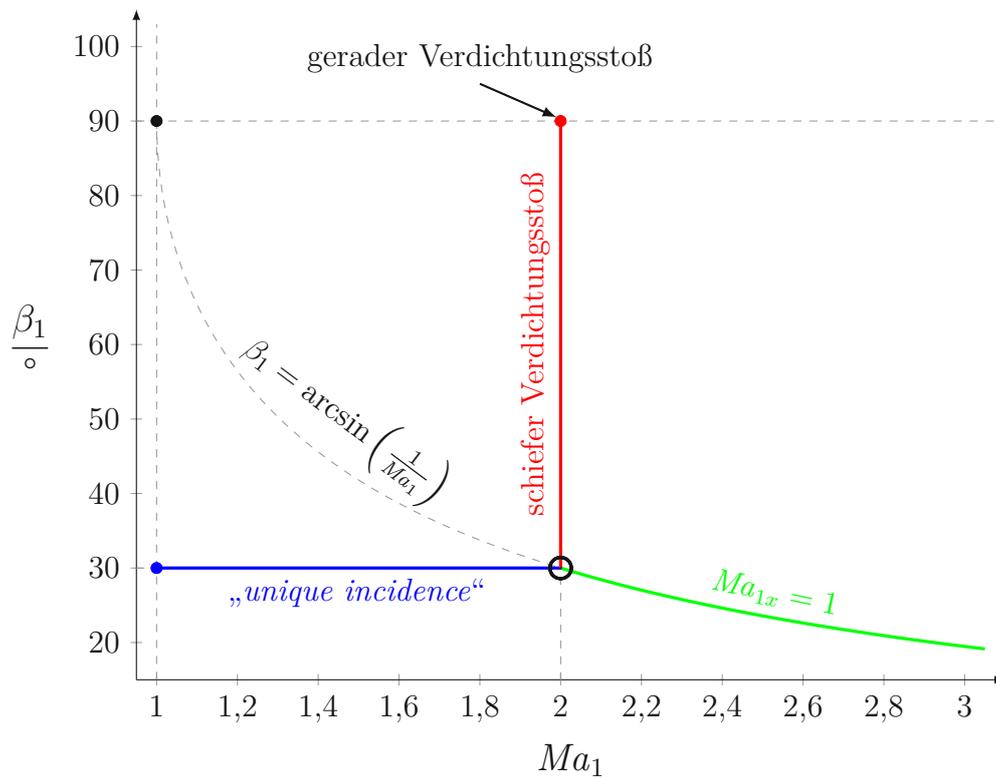
$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{1}{Ma_1}\right) \quad (2.9)$$

um, so erhält man eine Begrenzungskurve für axiale Überschallbedingungen.



**Abbildung 2.10:** Supersonische Anströmung eines Gleichdruckgitters mit blauen ( $\beta_1 = \beta_{1m}$ ) und roten ( $\beta_1 > \beta_{1m}$ ) Stromlinien.

Abbildung 2.11 zeigt die Abhängigkeit des Zuströmwinkels von der Anström-Mach-Zahl. Gleichung (2.9) ist als grüne Begrenzungslinie dargestellt. Bei einem Metallwinkel von z.B.  $\beta_{1m} = 30^\circ = \beta_1$  wird die grüne Linie von der blauen „unique incidence“-Linie bei  $Ma_1 = 2$  geschnitten. Bis zu diesem Punkt ist nur ein spezieller Zuströmwinkel möglich. Oberhalb der grünen Kurve ist der Zuströmwinkel und die Anström-Mach-Zahl wieder unabhängig voneinander wählbar. Der Bereich oberhalb der grünen Linie wird zusätzlich durch die rote Linie begrenzt. Erhöht man bei  $Ma_1 = 2$  den Zuströmwinkel über den Metallwinkel hinaus, wie in Abb. 2.10 rot dargestellt, bildet sich zunächst ein schiefer Verdichtungsstoß, was dann zu einer zweidimensionalen Betrachtung führt. Bei weiterer Steigerung bis zum Extremfall  $\beta_1 = 90^\circ$  formt sich ein gerader Stoß. Die rote Begrenzungslinie wurde hier der Einfachheit halber als senkrechte Linie angenommen. Aus [10] kann entnommen werden, dass diese bei einer ebenen Platte leicht gekrümmt ist. Wie und warum diese Kurve gekrümmt ist, soll hier nicht weiter verfolgt werden und würde auch



**Abbildung 2.11:** Abhängigkeit des Zuströmwinkels von der Anström-Mach-Zahl und Veranschaulichung der unterschiedlichen Betriebszustände bei Überschallanströmung.

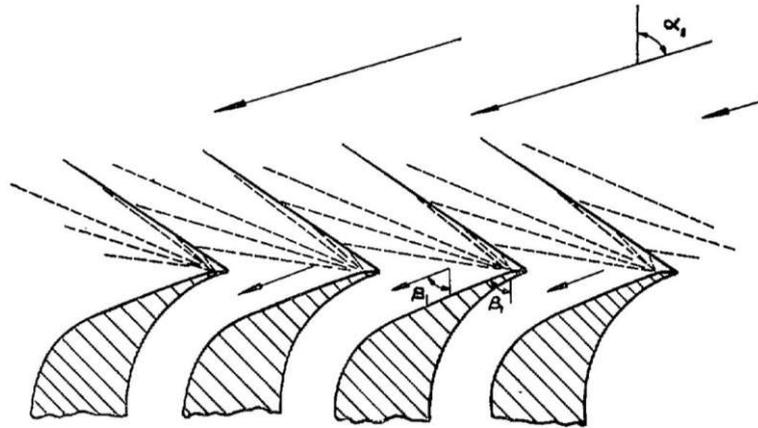
zu weit führen.

In der Realität können Turbinenschaufeln jedoch nicht mit unendlich dünner Vorderkante ausgeführt werden. Eine endliche Vorderkantendicke  $s$  wirkt sich auf den Verlauf der „unique incidence“-Linie aus. Wie auch bei Verdichtergittern mit konkaver Saugseite, weicht der einzig mögliche Strömungswinkel dann vom Metallwinkel ab und die „unique incidence“-Linie ist keine waagrechte Kurve mehr. In [19] wurde eine Methode entwickelt, um den Einfluss der Vorderkante basierend auf der Prandtl-Meyer-Funktion zu berücksichtigen. Es kann

$$\nu(\alpha_1 - \beta_1) = [t \sin(\beta_1) - s] - t \cos(\alpha_1) \quad (2.10)$$

zur Bestimmung des möglichen Zuströmwinkels herangezogen werden, wobei die Strömungswinkel wie in Abb. 2.12 definiert werden. Durch die Expansion an der

keilförmigen Vorderkante ändert sich der mögliche Zuströmwinkel.



**Abbildung 2.12:** Supersonische Anströmung eines Gleichdruckgitters mit endlicher Vorderkantendicke mit Stoßlinien (—) und Mach'schen Linien (- -) und Definition der Strömungswinkel für Gl. (2.10), siehe [19].

### 2.2.2 Schaufelgestaltung bei Überschallgleichdruckgittern

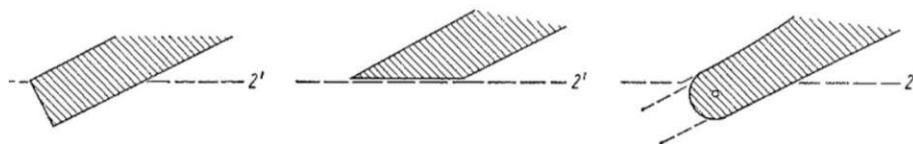
Die mathematische Beschreibung einer Strömung, bei der sowohl subsonische als auch supersonische Verhältnisse vorliegen, ist äußerst kompliziert. Im Unterschallbereich handelt es sich um elliptische, partielle Differentialgleichungen, wohingegen bei Überschallströmung ein hyperbolischer Typ vorliegt. Die Berechnung eines Strömungsfelds, in dem ausschließlich Überschallbedingungen herrschen, wird somit deutlich vereinfacht. Die Schaufeln eines Überschallgitters sind so auszulegen, dass möglichst keine Verdichtungsstöße bzw. Verdünnungswellen auftreten, da von diesen hohe Verluste ausgehen. An der Profilkontur entstehen dadurch Druckspitzen, welche eine negative Auswirkung auf die abgegebene Arbeit der Turbine hervorrufen. Durch eine richtige Gestaltung des Strömungskanals ist es jedoch möglich, dass sich die Verdichtungsstöße und die Verdünnungswellen gegenseitig auslöschen. Das „Verfolgen“ der Strömung kann mit der sog. Methode der Charakteristiken, oder auch Charakteristiken-Verfahren genannt, erfolgen. Eine hyperbolische, partielle Differentialgleichung bietet Charakteristiken als Lösungen. Entlang diesen Charakteristiken kann das Problem auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückgeführt werden. Im Gitterkanal erfährt die Strömung verschiedene Richtungsänderungen. Mit dem Charakteristiken-Verfahren werden diese und die davon ausgehenden Stöße bzw. Wellen verfolgt und die gegenseitigen Interaktionen beobachtet. Sieht man von

Reibungseinflüssen ab, werden die Stöße und Wellen an den Wänden mit gleicher Intensität vor und nach dem Auftreffen reflektiert. Der Ein- und Ausfallswinkel bleibt ebenfalls gleich.

Die geometrische Form des Strömungskanals soll, wie in [5] beschrieben, den folgenden Anforderungen genügen:

- kleine Verluste am Ein- und Austritt
- keine Verdichtungsstöße und Expansionswellen im Strömungskanal
- keine Grenzschichtablösung durch Stöße
- kleinstmögliche Reibungsverluste

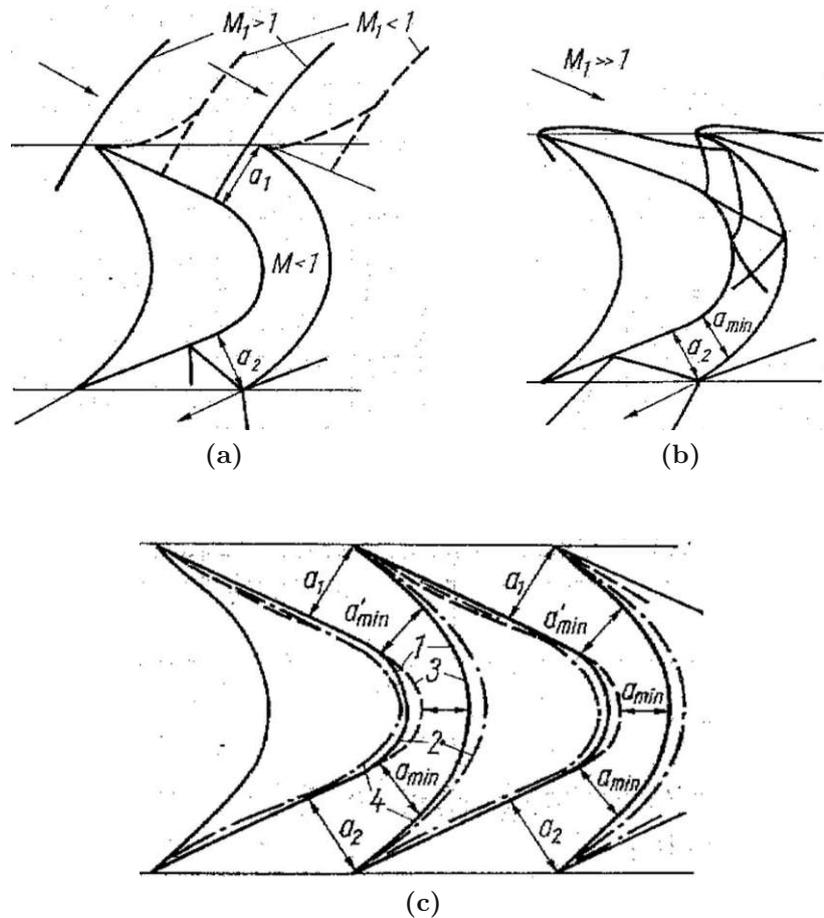
In einem Bereich von  $Ma_{1krit} < Ma_1 < 1,1$  kann man von einer Verzögerung der Strömung durch einen Stoß gerader Form am Eintritt, wie in Abb. 2.13a zu erkennen, ausgehen. Bei kleiner Überschallanströmung mit  $1 < Ma_1 < 1,3$  kommt es nur zu geringen Verlusten, da die Wandgrenzschicht noch nicht ablöst, wie es auch in [7] beschrieben wird. Der Strömungskanal ist meist stetig verengt und die Profilverder- und -hinterkante zugespitzt ausgeführt. Grundsätzlich ist das Ziel eine Schaufel für Überschallbedingungen so schlank wie möglich zu gestalten. Die Kanten am Ein- und Austritt sollten am besten unendlich dünn ausgeführt werden. Da das fertigungstechnisch leider nicht möglich ist, werden verschiedene Ausführungen verwendet, wie in Abb. 2.14 dargestellt.



**Abbildung 2.14:** Verschiedene Ausführungen einer Schaufelkante mit endlicher Dicke, siehe [23].

Dadurch entstehen unweigerlich Kopfwellen vor dem Eintritt, welche abhängig von der Vorderkante und der Kanalprofilierung sind. Die genannten Profile werden nach der Kanalmethod, welche in [5] beschrieben ist, entwickelt.

Wird die Eintritts-Mach-Zahl auf  $Ma_1 > 1,1$  erhöht, liegt kein gerader Stoß am Eintritt mehr vor, siehe Abb. 2.13b. Die Strömungsverhältnisse werden durch andere Methoden organisiert gestaltet. Bei Überschallgittern wird die Geschwindigkeit

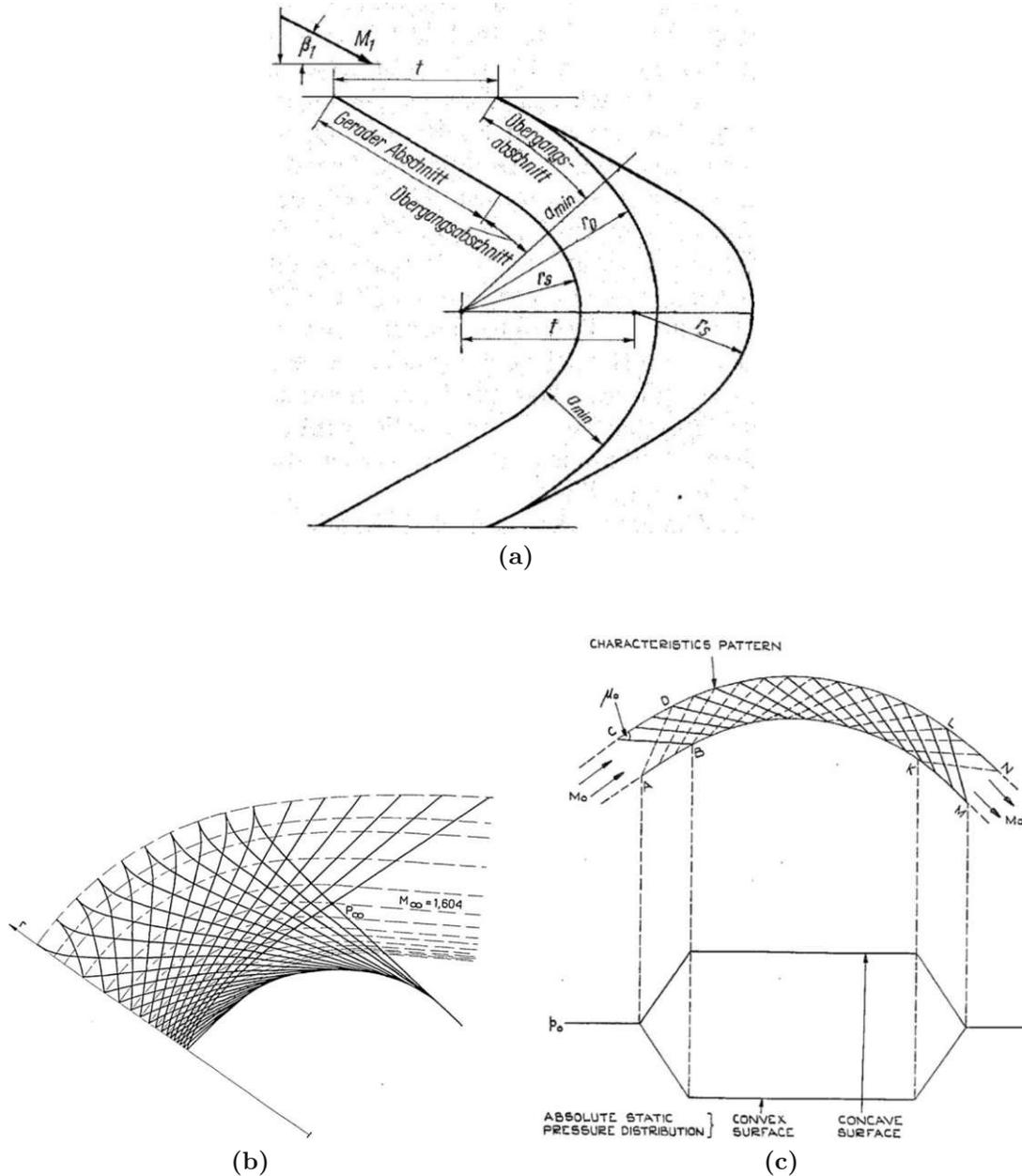


**Abbildung 2.13:** Gleichdruckgitter im transsonischen (a) und im supersonischen (b) Bereich. Verschiedene Kanalformen (c); Formen 1,3,4: konvergent/divergent, Form 2: konstanter Querschnitt, siehe [5].

hinter dem Eintrittsstoß konstant gehalten. Dies erfolgt durch eine geradlinige Saugseitenprofilierung. Die weitere Gestaltung des Kanals kann konvergent/divergent oder mit konstantem Querschnitt erfolgen. Die Saugseite im Austrittsbereich kann sowohl geradlinig als auch konvex gestaltet werden. In Abb. 2.13c werden verschiedene Kanalformen gezeigt, welche alle Vor- und Nachteile aufweisen.

Bei reiner Überschallströmung ist die Wahl der saug- und druckseitigen Krümmung der Kanalwände von entscheidender Bedeutung, da das Schaufelgitter stoßfrei durchströmt werden soll. Man kann davon ausgehen, dass die Stromlinien im Schaufelkanal eines Gleichdruckgitters eine Schar konzentrischer Kreisbögen darstellen, wie später in Kap. 3 beschrieben wird. Ein Entwurf von Klaus Oswatitsch aus dem Jahr 1956 beruht genau auf dieser Annahme. Seine Überlegungen sind ausführlich

in [13] und [14] beschrieben. Im Folgenden werden die wichtigsten Punkte, welche zur Profilierung nach *Oswatitsch* berücksichtigt werden müssen, zusammengefasst.

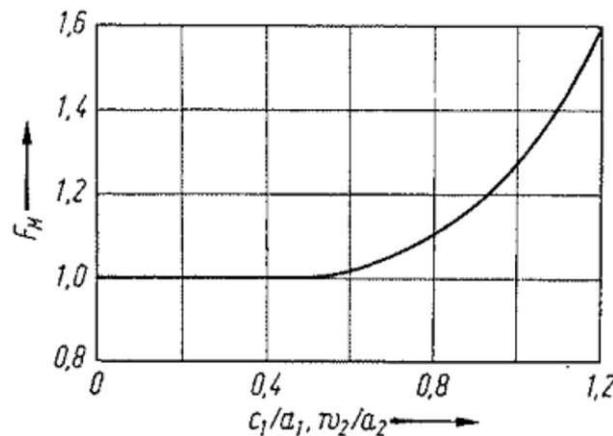


**Abbildung 2.15:** Geometrie des Gitters von *Oswatitsch* (a), siehe [5] und Konstruktion des Übergangsabschnitts mit der Charakteristiken-Methode für  $Ma_1 = 1,604$  (b), siehe [14] und gewünschte Druckverteilung entlang der Kanalwände, siehe [20].

Es wird eine unendlich dünne Vorderkante und  $\beta_1 = \beta_{1m}$  vorausgesetzt. Ziel ist es, die ankommende Parallelströmung in einen Potentialwirbel umzulenken und

diesen dann wieder in eine Parallelströmung überzuführen. Die Gestaltung soll möglichst einfach aus Geraden und Kreisbögen erfolgen. An jener Stelle, an der die Gerade und der Kreisbogen aufeinandertreffen, gäbe es jedoch einen Knick bzw. eine starke Krümmungsänderung, welche zu Stößen bzw. Expansionswellen führen würden. Aus diesem Grund wurde von *Oswatitsch* ein Übergangsabschnitt zwischen Gerade und Kreisbogen eingeführt, wie in Abb. 2.15a zu sehen. Dieser soll den Übergang von Parallelströmung zu Wirbelströmung stoß- und wellenfrei realisieren. Abbildung 2.15b zeigt die Konstruktion des Übergangsabschnitts mit der schon angesprochenen Charakteristiken-Methode, sodass sich die von der Druckseite ausgehenden Verdichtungsstöße mit den saugseitigen Verdünnungswellen gegenseitig auslöschen. Somit ist das entworfene Gitter nur genau für eine Anström-Mach-Zahl und einen Anströmwinkel zu verwenden, was auch als Nachteil angesehen werden kann. Die erwünschte Profildruckverteilung ist in 2.15c dargestellt. An den Übergangsabschnitten soll der Druck linear ab- bzw. zunehmen, je nachdem, ob man sich an der Saug- bzw. Druckseite befindet. Entlang des Kreisbogensegments soll ein konstanter Druck herrschen.

Grundsätzlich sind Überschallgitter sehr empfindlich auf Fehlanströmung, welche schnell zu hohen Verlusten führt. Für eine praktisch anwendbare Profilierung mit endlicher Vorderkantendicke findet man in [5] weitere Entwurfsrichtlinien.



**Abbildung 2.16:** Faktor  $F_M$  zur Bestimmung des Breiten-zu-Teilung-Verhältnisses bei hohen Mach-Zahlen, siehe [5].

Eine weitere wichtige konstruktive Maßnahme für supersonisch durchströmte Gitter wird in [12] angeführt. Gitter dieser Art sollen demnach möglichst enger geteilt werden. Als Vorgabe wird ein Breiten-zu-Teilung-Verhältnis von  $b/t = 2,5$  bis  $3,3$  angegeben, wobei im Gegensatz das Zweifel-Kriterium unter Anwendung der Bri-

ling'sche Bedingung in einem Zuströmwinkel-Bereich von  $\beta_1 = 20^\circ$  bis  $30^\circ$  für subsonische Strömungen  $b/t = 1,6$  bis  $2,2$  vorgibt. In [5] wird diesbezüglich ebenfalls ein Vorschlag gemacht, nachdem

$$\frac{b}{t} = F_M \left( \frac{b}{t} \right)_{Ma=0} \quad (2.11)$$

zu setzen ist, wobei  $F_M$  aus Abb. 2.16 zu bestimmen ist.

# Kapitel 3

## Potentialwirbel-Modell

Im Laufschaufelgitter einer Gleichdruckturbine mit Reaktionsgrad  $R_k = 0$  wird die Strömung weder beschleunigt noch verzögert, sondern lediglich umgelenkt, da sich der Strömungsquerschnitt nicht verändert. Das gesamte Enthalpiegefälle wird in der Leitreihe umgesetzt. Aus diesem Grund kann, wie in [23] beschrieben, die Strömung in einem Gleichdruckgitter durch einen Potentialwirbel angenähert werden. Eine Potentialströmung liegt dann vor, wenn die Vortizität oder Wirbelstärke

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = \vec{0} \quad (3.1)$$

eines Strömungsfelds  $\vec{v}$  den Nullvektor ergibt, also das Strömungsfeld rotationsfrei ist. Damit kann

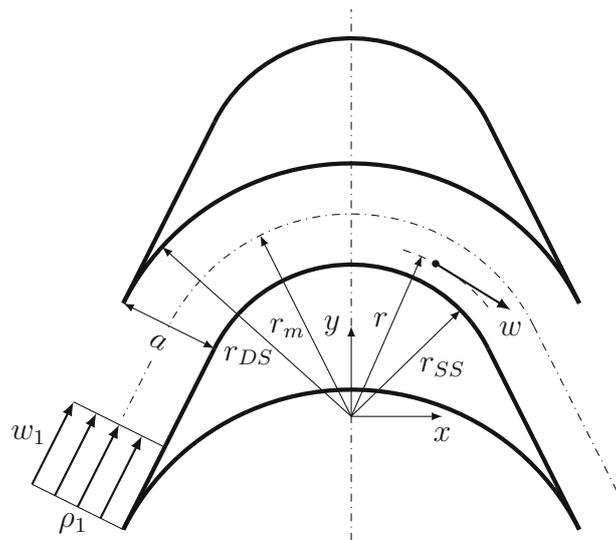
$$\vec{v} = \nabla\phi \quad (3.2)$$

durch den Gradienten einer skalaren Funktion des Ortes  $\phi$  ausgedrückt werden. Die Viskosität des Fluids und die damit verbundenen Reibungseinflüsse werden nicht berücksichtigt. Diese Gegebenheit stellt bereits einen großen Unterschied zu den realen Strömungsverhältnissen dar.

Das Potentialwirbel-Modell

$$rw = K \quad (3.3)$$

besagt, dass das Produkt aus Radius und Geschwindigkeit konstant bleibt. Die Drallkonstante  $K$  ist dabei so anzupassen, dass unter Berücksichtigung der Dichtevariation mit  $w$  der geforderte Massenstrom durchgesetzt wird. Wie in Abb. 3.1 dargestellt, wird die Turbinenschaufel mit der konstanten, relativen Zuströmgeschwindigkeit  $w_1$  und der Eintrittsdichte  $\rho_1$  angeströmt. Als Strömungsquerschnitt dient die Mündungsweite  $a$ . Am Radius  $r$  befindet sich ein Fluidteilchen mit der lokalen Geschwindigkeit  $w$ .



**Abbildung 3.1:** Grafik zur Veranschaulichung des Potentialwirbel-Modells.

In Abb. 3.2 werden zur Veranschaulichung die thermodynamischen Zustände des Potentialwirbels im  $T$ - $s$ -Diagramm dargestellt. Zwischen den Zuständen der Saug- und Druckseite der Turbinenschaufel liegt der Zustand der Anströmung. Addiert man zu den jeweiligen Zuständen die dynamische Temperatur, gelangt man zum Totalzustand.

Im Weiteren stellt sich die Frage, wie die Drallkonstante  $K$  in Abhängigkeit von der Eintritts-Mach-Zahl  $Ma_1$  bestimmt werden kann. Zu Beginn wird dazu die Massenbilanz

$$\rho_1 w_1 a = \int_{r_{SS}}^{r_{DS}} \rho w dr \quad (3.4)$$

angeschrieben. Integriert wird vom Radius der Saugseite  $r_{SS}$  bis zum Radius der

Druckseite  $r_{DS}$ . Eine Division durch die linke Seite

$$1 = \int_{r_{SS}}^{r_{DS}} \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right) \frac{w}{w_1 a} dr \quad (3.5)$$

liefert die auf den Eintrittszustand bezogene Dichteveriation  $\rho/\rho_1$ .

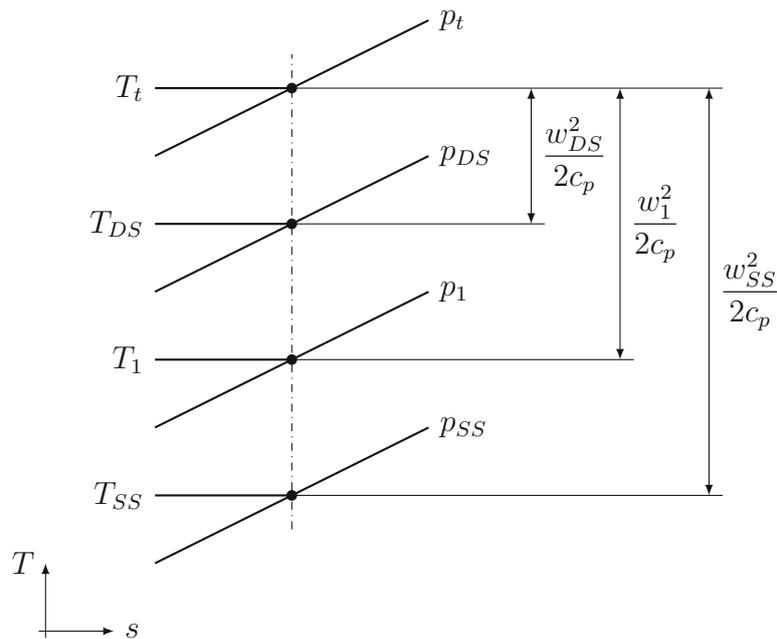


Abbildung 3.2: Zustände des Potentialwirbels im  $T$ - $s$ -Diagramm.

Für die Geschwindigkeit  $w$  wird nun das Potentialwirbel-Modell (3.3)

$$1 = \int_{r_{SS}}^{r_{DS}} \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right) \frac{w}{w_1 a} dr = \int_{r_{SS}}^{r_{DS}} \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right) \left( \frac{K}{w_1 a} \right) \frac{dr}{r} = \int_{r_{SS}}^{r_{DS}} \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right) K^* \frac{dr}{r} \quad (3.6)$$

eingesetzt. Zusätzlich wurde eine dimensionslose Drallkonstante

$$K^* = \frac{K}{w_1 a} \quad (3.7)$$

eingeführt. Die Dichteänderung

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left( \frac{T}{T_1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (3.8)$$

wird als isentrope Zustandsänderung eines idealen Gases angenommen. Im nächsten Schritt wird der Energiesatz für einen allgemeinen Zustand

$$T_t - T = \frac{w^2}{2c_p} \quad (3.9)$$

und für den Eintrittszustand

$$T_t - T_1 = \frac{w_1^2}{2c_p} \quad (3.10)$$

angeschrieben. Diese Zusammenhänge lassen sich auch aus Abb. 3.2 ablesen. Nun werden die Energiesätze in Gl. (3.8)

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left( \frac{T_t - \frac{w^2}{2c_p}}{T_t - \frac{w_1^2}{2c_p}} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \left( \frac{\frac{T_t}{T_1} - \frac{w^2}{2c_p T_1}}{\frac{T_t}{T_1} - \frac{w_1^2}{2c_p T_1}} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (3.11)$$

eingesetzt und mit  $1/T_1$  im Nenner und Zähler erweitert.

Für das ideale Gas ist die Schallgeschwindigkeit, wie schon in Abschn. 2.1.1 beschrieben, mit Gl. (2.2)

$$a = \sqrt{\kappa RT}$$

bestimmt. Des Weiteren muss

$$\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \quad (3.12)$$

und

$$\frac{w^2}{2c_p T} = \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \quad (3.13)$$

gelten. Gleichungen (3.12) und (3.13) werden nun in Gl. (3.11)

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2 - \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2 \frac{w^2 a^2}{w_1^2 a^2}}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2 - \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (3.14)$$

eingesetzt. Der Nenner kann somit gestrichen werden. Weitere Vereinfachungen, das Einsetzen des Potentialwirbel-Modells (3.3) unter Verwendung von Gl. (3.7) und die Einführung eines dimensionslosen Radius

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad (3.15)$$

ergeben die endgültige Form

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_1} &= \left\{ 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2 \left[ 1 - \underbrace{\left( \frac{K}{w_1 a} \right)^2}_{K^*} \underbrace{\left( \frac{a}{r} \right)^2}_{\frac{1}{\xi}} \right] \right\}^{\frac{1}{\kappa-1}} \\ &= \left[ 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2 \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

der Dichtänderung. Diese Gleichung ist jetzt jedoch nicht mehr vom Radius  $r$ , sondern vom dimensionslosen Radius  $\xi$  abhängig. Aus diesem Grund müssen die Integrationsgrenzen der Massenbilanz (3.5) angepasst werden. Dabei ist das Ziel die Grenzen so zu wählen, dass diese nur noch von der aerodynamischen Belastungszahl  $\psi_T$  abhängig sind. Es kann gezeigt werden, dass

$$\frac{r_m}{a} = \frac{2}{\psi_T} - \frac{1}{2} \quad (3.17)$$

gilt, wobei  $r_m$  den mittleren Radius des Schaufelgitters darstellt, wie in Abb. 3.1 zu erkennen. Damit kann die neue obere

$$\frac{r_{SS}}{a} = \frac{r_m - \frac{a}{2}}{a} = \frac{r_m}{a} - \frac{1}{2} = \frac{2}{\psi_T} - 1 \quad (3.18)$$

und untere

$$\frac{r_{DS}}{a} = \frac{r_m + \frac{a}{2}}{a} = \frac{r_m}{a} + \frac{1}{2} = \frac{2}{\psi_T} \quad (3.19)$$

Integrationsgrenze angeschrieben werden. Ergänzt man die ursprüngliche Massenbilanz um die Gl. (3.16), (3.18) und (3.19) erhält man

$$1 = \int_{\frac{2}{\psi_T} - 1}^{\frac{2}{\psi_T}} \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}} K^* \frac{d\xi}{\xi} \quad (3.20)$$

als eine Bestimmungsgleichung für die dimensionslose Drallkonstante  $K^*$ . Diese ist eine Funktion der Geometrie  $\psi_T$ , des Strömungsmediums ( $\kappa$ ) und der Eintritts-Mach-Zahl  $Ma_1$ . Gleichung (3.20) kann allerdings nur numerisch gelöst werden. Die numerische Lösung wird später präsentiert.

Durch eine Taylorreihenentwicklung

$$\left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^* (\xi, 0) = \underbrace{\left( \frac{\rho}{\rho_1} \right) (0)}_{=1} + \underbrace{\left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)' (0)}_{=0} Ma_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)'' (0) Ma_1^2 \quad (3.21)$$

der Dichteänderung (3.16)

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

kann jedoch eine Näherung  $(\rho/\rho_1)^*$  gewonnen werden. Dabei wird für sehr kleine Mach-Zahlen  $Ma_1 \ll 1$  um  $Ma_1 = 0$  entwickelt. Da die erste Ableitung der Dichteänderung wegfällt, wird die Taylorreihenentwicklung erst nach dem dritten Glied

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)'' (0) = \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \frac{Ma_1^2}{2} \quad (3.22)$$

abgebrochen. Damit folgt die Näherung

$$\left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^* = 1 + \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \frac{Ma_1^2}{2} \quad (3.23)$$

der Dichteveriation. Setzt man diese nun in die Massenbilanz ein, erhält man wieder eine Bestimmungsgleichung

$$1 = \int_{\frac{2}{\psi_t}-1}^{\frac{2}{\psi_t}} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \frac{Ma_1^2}{2} \right] K^* \frac{d\xi}{\xi} \quad (3.24)$$

für  $K^*$  bzw.  $Ma_1$ . Dieses Integral lässt sich jedoch relativ leicht analytisch auswerten. Durch Integrieren und umstellen der Gl. (3.24) erhält man

$$Ma_1 = \sqrt{\frac{2 \left[ 1 - K^* \ln \left( \frac{2}{2 - \psi_T} \right) \right]}{K^* \ln \left( \frac{2}{2 - \psi_T} \right) - \frac{K^{*3} \psi_T^3}{8} \frac{(4 - \psi_T)}{(2 - \psi_T)^2}}} \quad (3.25)$$

als Näherung der Eintritts-Mach-Zahl.

Des Weiteren können auch Grenzfälle der Gl. (3.20) untersucht werden. Wie in etwa der Fall, wenn  $Ma_1$  gegen Null geht. Damit vereinfacht sich das Integral

$$1 = \int_{\frac{2}{\psi_t}-1}^{\frac{2}{\psi_t}} K^* \frac{d\xi}{\xi} = K^* \left[ \ln \left( \frac{2}{\psi_T} \right) - \ln \left( \frac{2}{\psi_T} - 1 \right) \right] \quad (3.26)$$

maßgeblich und kann analytisch gelöst werden. Auffällig ist, dass die dimensionslose Drallkonstante

$$K^* (Ma_1 \rightarrow 0, \psi_T) = \frac{1}{\ln \left( \frac{2}{2 - \psi_T} \right)} \stackrel{\psi_T=0,8}{\underset{=}{\downarrow}} 1,9576 \quad (3.27)$$

jetzt nur noch von  $\psi_T$  und somit lediglich von der Geometrie abhängig ist, hier auch für  $\psi_T = 0,8$  ausgewertet. Ein weiterer interessanter Grenzfall ist, wenn  $Ma_1$  gegen unendlich geht. Dazu müssen mit Gl. (3.20) die Umformungen (3.28) bis (3.30)

$$1 = \int_{\frac{2}{\psi_t}-1}^{\frac{2}{\psi_t}} \left\{ Ma_1^2 \left[ \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\kappa-1}{2} \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{\kappa-1}} K^* \frac{d\xi}{\xi} \quad (3.28)$$

$$1 = Ma_1^{\frac{2}{\kappa-1}} \int_{\frac{2}{\psi_t}-1}^{\frac{2}{\psi_t}} \left[ \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\kappa-1}{2} \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} K^* \frac{d\xi}{\xi} \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{Ma_1^{\frac{2}{\kappa-1}}} = \int_{\frac{2}{\psi_t}-1}^{\frac{2}{\psi_t}} \left[ \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\kappa-1}{2} \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} K^* \frac{d\xi}{\xi} \quad (3.30)$$

ausgeführt werden. Lässt man nun in Gl. (3.30) die Eintritts-Mach-Zahl gegen unendlich gehen, führt dies zu

$$0 = \int_{\frac{2}{\psi_t}-1}^{\frac{2}{\psi_t}} \left[ \frac{\kappa-1}{2} \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} K^* \frac{d\xi}{\xi}, \quad (3.31)$$

wobei diese Gleichung auch nur numerisch lösbar ist. Nach numerischem Lösen ist hier die dimensionslose Drallkonstante  $K^*$  für Wasserdampf ( $\kappa = 4/3$ )

$$K^* \left( Ma_1 \rightarrow \infty, \kappa = \frac{4}{3}, \psi_T = 0,8 \right) = 1,8637 \quad (3.32)$$

und für Luft ( $\kappa = 7/5$ )

$$K^* \left( Ma_1 \rightarrow \infty, \kappa = \frac{7}{5}, \psi_T = 0,8 \right) = 1,851 \quad (3.33)$$

bei  $\psi_T = 0,8$  ausgewertet. Die Werte unterscheiden sich nur geringfügig. Das Strömungsmedium Luft ist deswegen auch interessant, da mit diesem sehr häufig experimentelle Versuche an Turbinengittern durchgeführt werden.

Im nächsten Schritt stellt sich die Frage, bei welcher kritischen Eintritts-Mach-Zahl  $Ma_{1,SS}^{krit}$  erstmals Schallgeschwindigkeit an der Saugseite der Schaufel, d.h. eine lokale Mach-Zahl von  $Ma_{SS} = 1$ , auftritt. Ausgangspunkt dafür ist die Definition der dimensionslosen Drallkonstante

$$K^* = \frac{K}{w_1 a}$$

aus Gl. (3.7). Für die Drallkonstante  $K$  wird das Potentialwirbel-Modell (3.3) an der Saugseite

$$K_{SS}^* = \frac{w_{SS} r_{SS}}{w_1 a} \quad (3.34)$$

eingesetzt. Im nächsten Schritt wird wieder der Zusammenhang (3.18)

$$K_{SS}^* = \frac{w_{SS}}{w_1} \left( \frac{2}{\psi_T} - 1 \right) \quad (3.35)$$

verwendet, um einen Bezug zu  $\psi_T$  herzustellen. Der Zähler und Nennen wird nun mit dem Kehrwert der Schallgeschwindigkeit am Eintritt  $1/a_1 = 1/\sqrt{\kappa RT_1}$

$$K_{SS}^* = \frac{\frac{w_{SS}}{\sqrt{\kappa RT_1}}}{\frac{w_1}{\sqrt{\kappa RT_1}}} \left( \frac{2}{\psi_T} - 1 \right) \quad (3.36)$$

erweitert. Im Zähler wird jetzt mit  $\sqrt{T_{SS}/T_{SS}}$

$$K_{SS,krit}^* = \frac{\overbrace{w_{SS}}^{=Ma_{SS}=1}}{\sqrt{\kappa RT_{SS}}} \sqrt{\frac{T_{SS}}{T_1}} \left( \frac{2}{\psi_T} - 1 \right) \quad (3.37)$$

multipliziert. Zieht man nun  $T_{SS}$  in die linke Wurzel, entsteht ein Ausdruck, welcher der lokalen Mach-Zahl an der Saugseite entspricht. Dieser soll in dieser Herleitung definitionsgemäß Eins sein. Der Term im Nenner stellt die Eintritts-Mach-Zahl dar. Anschließend wird der Zähler mit  $\sqrt{T_t/T_1}$

$$K_{SS,krit}^* = \frac{\sqrt{\frac{T_{SS}}{T_t} \frac{T_t}{T_1}}}{Ma_1} \left( \frac{2}{\psi_T} - 1 \right) \quad (3.38)$$

multipliziert. Mit dem Zusammenhang (3.12) kann dadurch die Gleichung

$$K_{SS,krit}^* = \frac{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2}}{Ma_1 \sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \underbrace{Ma_{SS}^2}_{=1}}} \left( \frac{2}{\psi_T} - 1 \right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2}{\frac{\kappa + 1}{2} Ma_1^2}} \left( \frac{2}{\psi_T} - 1 \right) \quad (3.39)$$

nochmals vereinfacht werden. Schlussendlich ergibt sich daraus die Bestimmungsgleichung für die kritische, dimensionslose Drallkonstante an der Saugseite

$$K_{SS,krit}^* = \left( \frac{2}{\psi_T} - 1 \right) \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1} \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}}, \quad (3.40)$$

abhängig von der Eintritts-Mach-Zahl  $Ma_1$ . Das gleiche Prozedere kann natürlich auch ausgeführt werden, um zu ermitteln, bei welcher Eintritts-Mach-Zahl erstmals Schallgeschwindigkeit an der Druckseite

$$K_{DS}^* = \frac{w_{DS}}{w_1} \frac{r_{DS}}{a} = \frac{w_{DS}}{w_1} \frac{2}{\psi_T} \quad (3.41)$$

auftritt. Im Endergebnis

$$K_{DS,krit}^* = \frac{2}{\psi_T} \sqrt{\frac{2}{\kappa+1} \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \quad (3.42)$$

bleibt der Wurzelausdruck gleich und es ändert sich nur der geometriebezogene Term mit  $\psi_T$ .

Schlussendlich sollen die gewonnenen Erkenntnisse aus diesem Kapitel nochmals zusammengefasst werden:

Mit Gl. (3.20)

$$1 = \int_{\frac{2}{\psi_t}-1}^{\frac{2}{\psi_t}} \left[ 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2 \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} K^* \frac{d\xi}{\xi}$$

ist es möglich,  $K^*$ , abhängig von der Eintritts-Mach-Zahl  $Ma_1$ , so zu bestimmen, dass die Massenbilanz erfüllt ist. Da diese Gleichung nur numerisch lösbar ist, wurde zusätzlich eine Taylorreihenentwicklung der Dichteveriation für kleine Eintritts-Mach-Zahl durchgeführt, um eine Näherung zu erhalten. Die Eintritts-Mach-Zahl kann näherungsweise mit Gl. (3.25)

$$Ma_1 = \sqrt{\frac{2 \left[ 1 - K^* \ln \left( \frac{2}{2 - \psi_T} \right) \right]}{K^* \ln \left( \frac{2}{2 - \psi_T} \right) - \frac{K^{*3} \psi_T^3}{8} \frac{(4 - \psi_T)}{(2 - \psi_T)^2}}}$$

bestimmt werden. Zusätzlich wurden kritische Werte für  $K^*$  gefunden, bei denen erstmals Schallgeschwindigkeit an der Saug- bzw. Druckseite der Schaufel auftritt, siehe Gl. (3.40) und (3.42). Die Lösung von Gleichung (3.20) und die anderen drei Zusammenhänge sind in Abb. 3.3 für Wasserdampf ( $\kappa = 4/3$ ) und Luft ( $\kappa = 7/5$ ) dargestellt. Die durch die Taylorreihenentwicklung approximierte Lösung stellt ebenfalls eine gute Näherung im Unterschallbereich dar. Eine der anfänglichen Fragen war, bei welcher Eintritts-Mach-Zahl erstmals Schallgeschwindigkeit an der Saug- bzw. Druckseite der Schaufel auftritt. Diese Frage ist mit den Schnittpunkten der kritischen Fälle mit den blauen Linien zu beantworten. Die kritische Eintritts-Mach-Zahl an der Saugseite beträgt ca.  $Ma_{1,SS}^{krit} = 0,71$  und jene der Druckseite ca.  $Ma_{1,DS}^{krit} = 1,4$ . Diese Werte werden durch grau gestrichelte, vertikale Linien

gekennzeichnet. Die grau punktierte, horizontale Linie gibt den Grenzfall  $Ma_1$  gegen unendlich an. Da die Werte für Wasserdampf und Luft sehr dicht aneinanderliegen, wird nur eine Linie dargestellt. Auch der Grenzfall  $Ma_1$  gegen Null wird in der numerischen Lösung richtig wiedergegeben. Im Bereich zwischen  $Ma_{1,SS}^{krit}$  und  $Ma_{1,DS}^{krit}$  darf das Potentialwirbel-Modell nicht angewandt werden, da eine Mischung aus Unter- und Überschallströmung vorliegt. Ab  $Ma_{1,DS}^{krit}$  liegen im gesamten Strömungsfeld Überschallbedingungen vor. Grundsätzlich weichen die Kurven der beiden Medien nur geringfügig voneinander ab.

Mit diesen Ergebnissen ist es nun möglich den Geschwindigkeitsverlauf

$$\frac{w}{w_1} = \frac{K^*}{\xi}, \quad (3.43)$$

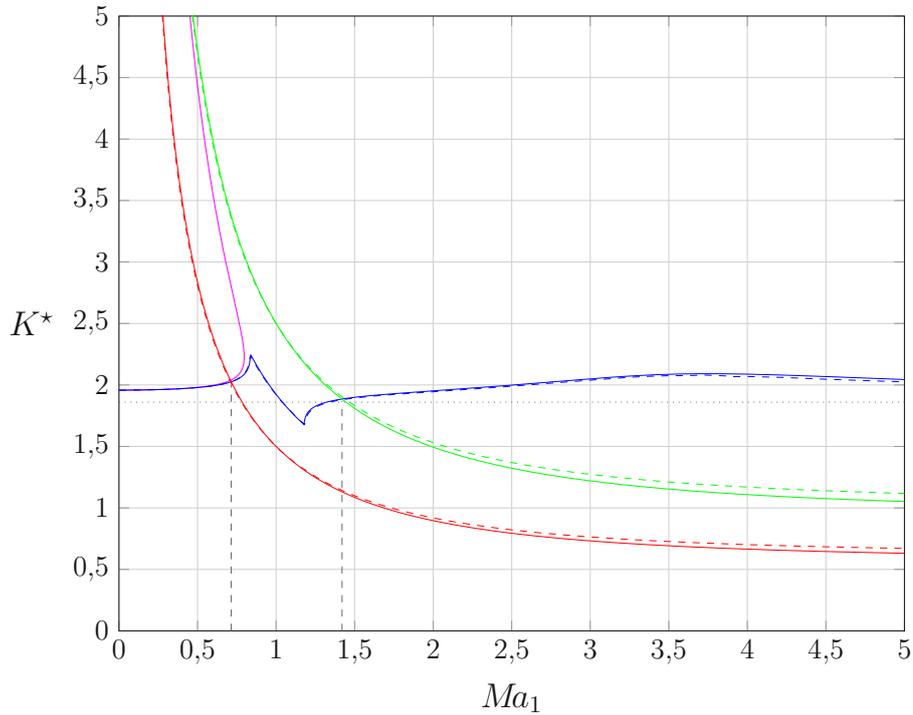
den Temperaturverlauf

$$\frac{T}{T_1} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \quad (3.44)$$

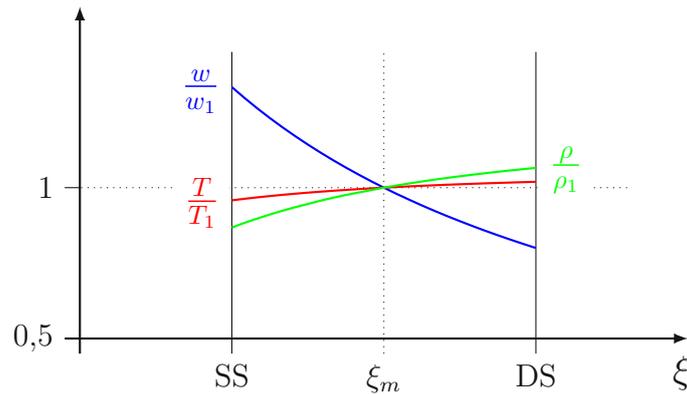
und den Dichteverlauf (3.16)

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 \left( 1 - \frac{K^{*2}}{\xi^2} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

im Strömungskanal zu berechnen. Diese Verläufe sind in Abb. 3.4 beispielhaft für eine Eintritts-Mach-Zahl von  $Ma_1 = 0,6$  über den dimensionslosen Radius  $\xi$  dargestellt. Wie zu erwarten war, ist die Geschwindigkeit an der Saugseite größer, als jene an der Druckseite. Umgekehrt ist es jedoch bei der Temperatur und Dichte. All diese Ergebnisse werden später in Kap. 5 mit den Ergebnissen der *CFD*-Simulationen verglichen und bewertet.



**Abbildung 3.3:** Ergebnisse des Potentialwirbel-Modells mit  $\psi_t = 0,8$  für  $K^*$  numerisch und mit Taylorreihennäherung gelöst. Ebenso ist der kritische Fall der Saugseite  $K_{SS,krit}^*$  und jener der Druckseite  $K_{DS,krit}^*$  aufgetragen. Verläufe mit durchgezogener Linie stehen für Wasserdampf ( $\kappa = 4/3$ ) und mit gestrichelter Linie für Luft ( $\kappa = 7/5$ ).



**Abbildung 3.4:** Änderung der Geschwindigkeit, der Temperatur und der Dichte über den dimensionslosen Radius  $\xi$  von der Saug- zur Druckseite für Wasserdampf ( $\kappa = 4/3$ ) und  $\psi_t = 0,8$  bei  $Ma_1 = 0,6$  nach dem Potentialwirbel-Modell.

# Kapitel 4

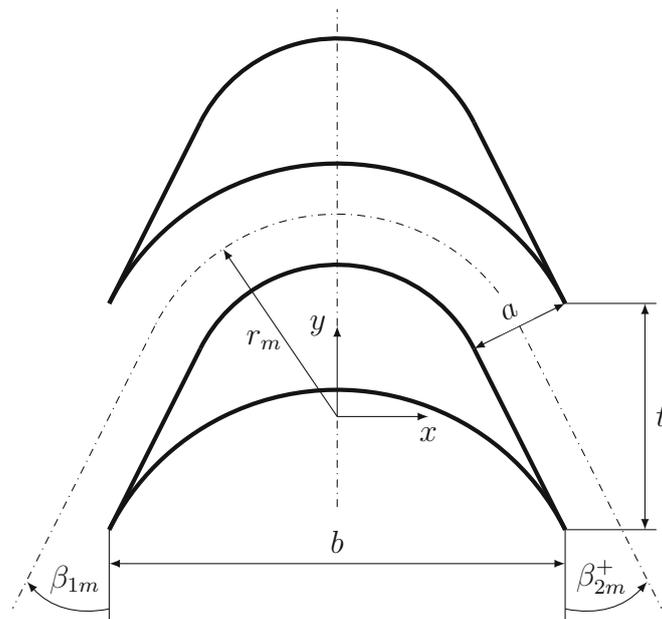
## Modellierung und numerische Simulation

### 4.1 Allgemeines

In den folgenden Abschnitten werden alle Schritte und Einstellungen, welche für das Lösen der Strömungsprobleme notwendig waren, beschrieben. Als Simulationssoftware wurde der Navier-Stokes-Löser *ANSYS Fluent 2020 R2* verwendet, welcher auf Basis der Finiten-Volumen-Methode arbeitet. Tabelle 4.4 in Abschn. 4.9 zeigt eine Übersicht und Zusammenfassung der getätigten Einstellungen. Als Ergebnisse werden im zeitlichen Mittel stationäre Strömungen erwartet. Es werden daher nicht die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen gelöst, sondern im ingenieurmäßigen Sinn nur die *RANS*-Gleichungen („*Reynolds-averaged Navier–Stokes equations*“). Die Erdgravitation  $g$  wurde bei der Modellierung nicht berücksichtigt.

### 4.2 Geometrie und Rechennetz

In dieser Arbeit wurden verschiedene Strömungsfälle in einem Gleichdruckturbinengitter mit spitzer Vorder- und Hinterkante und Reaktionsgrad  $R_k = 0$  simuliert. Die Geometrie der Schaufeln ist in Abb. 4.1 dargestellt. Die Strömungsverhältnisse in Turbomaschinen sind hochgradig dreidimensional und instationär. Um zu einer zweidimensionalen und stationären Betrachtung zu gelangen, werden die am



**Abbildung 4.1:** Geometrie des verwendeten Schaufelgitters.

Umfang gleichmäßig verteilten Schaufeln mit einer koaxialen Zylindermantelfläche bzw. einer sog. rotationssymmetrischen Stromfläche erster Art am mittleren Radius der Turbine geschnitten. Diese Mantelfläche wird dann in die Ebene abgerollt. Dabei erhält man eine periodische Anordnung unendlich vieler Profilschnitte mit der Gitterteilung  $t$  längs einer Geraden. Diese Anordnung wird auch als gerades Schaufelgitter bezeichnet. Die Bedingungen unter welchen Voraussetzungen dies zulässig ist, werden in [17] erklärt. Zusätzlich wird auch angenommen, dass die Meridiankontur der Turbine so gestaltet ist, dass die meridionale Geschwindigkeit am Eintritt  $c_{m1}$  gleich groß jener am Austritt  $c_{m2}$  ist. Dadurch, dass Stromflächen erster Art bei dreidimensionalen Strömungsverhältnissen aufgrund von Sekundärströmungen verwundene Flächen und nicht Zylindermantelflächen sind, stellt diese Betrachtung bereits eine Approximation der Strömung dar.

Das Gitter weist, wie schon in Kap. 1 besprochen, eine aerodynamische Belastungszahl von

$$\psi_T = 2 \sin(2\beta_1) \frac{t}{b} = 0,8 \quad (4.1)$$

auf. Bei einer Gitterteilung von  $t = 10 \text{ mm}$  und einer axialen Sehnenlänge von  $b = 20 \text{ mm}$  ergibt sich somit ein Eintrittswinkel von  $\beta_1 = 26,6^\circ$ . Die Mündungsweite

$$a = t \sin(\beta_1) = 4,47 \text{ mm} \quad (4.2)$$

und der mittlere Radius

$$r_m = a \left( \frac{2}{\psi_T} - \frac{1}{2} \right) = 8,94 \text{ mm}. \quad (4.3)$$

lassen sich direkt aus den gegebenen Abmessungen berechnen. Der Austrittswinkel  $\beta_2^+$  ist bei einem Gitter mit  $R_k = 0$  gleich dem Eintrittswinkel  $\beta_1$ . Dies trifft allerdings nur in der Theorie zu. Wie man später in Kap. 5 sehen wird, weichen in der Praxis die Strömungswinkel  $\beta_1$  und  $\beta_2^+$  von den Metallwinkeln  $\beta_{1m}$  und  $\beta_{2m}^+$  in der Regel ab. Dadurch kommt es auch zu einer geringfügigen Veränderung des Reaktionsgrades.

Grundsätzlich gibt es nun zwei Möglichkeiten das Simulationsgebiet zu vernetzen. Die erste Möglichkeit wäre ein sog. Umströmigitter, bei dem die Strömung um eine gesamte Schaufel simuliert wird. Dort besteht jedoch der Nachteil, dass sich im Strömungskanal zwischen den Schaufeln ein künstlicher, periodischer Rand befindet. Unter Umständen kann das auch zu unphysikalischen Ergebnissen führen. Aus diesem Grund wurde bei den hier durchgeführten Simulationen ein sog. Durchströmigitter verwendet. Wie in Abb. 4.2 dargestellt, wird hier lediglich die Strömung zwischen zwei benachbarten Schaufeln berechnet. Mit dieser Methode fallen die künstlichen Ränder weg, da der Strömungskanal jetzt von zwei Wänden, der Druckseite und der Saugseite, begrenzt wird. Das Simulationsgebiet ist um die y-Achse symmetrisch angeordnet. Auf der linken Seite befindet sich der Strömungseintritt und auf der rechten Seite der Strömungsausritt. Die periodischen Ränder sind notwendig, um die Strömung so zu simulieren, wie sie auch bei realen Verhältnissen vorkommen würde. Fluid, welches z.B. aus einem oberen, periodischen Rand hinausfließt, fließt mit gleicher Richtung, Geschwindigkeit und gleichem thermodynamischen Zustand wieder in den unteren, periodischen Rand hinein. Damit ist eine Periodizitätsbedingung gewährleistet. Diese Bedingung herrscht sowohl vor als auch nach der Schaufel. Die strichpunktierten Linien in Abb. 4.2 stellen das Simulationsgebiet gedacht periodisch fortgesetzt dar. Um Einflüsse der Ein- und Austrittsbedingungen im relevanten Strömungsgebiet klein zu halten, wurden der Ein- und Austritt auf eine Distanz von  $b = 20 \text{ mm}$  ausgehend von der Schaufelkante gelegt. Die Vernetzung des Simulationsgebiets wurde mit dem

in *ANSYS Workbench* zur Verfügung stehenden Vernetzter durchgeführt. Dabei wurde auf ein blockstrukturiertes Gitter gesetzt. In Abb. 4.2 sind die Blöcke 1 bis 5 (B1-B5), welche mit punktierten Linien begrenzt werden, zu erkennen. An den periodischen Ränder muss sowohl die Verteilung als auch die Anzahl der Zellen übereinstimmen.

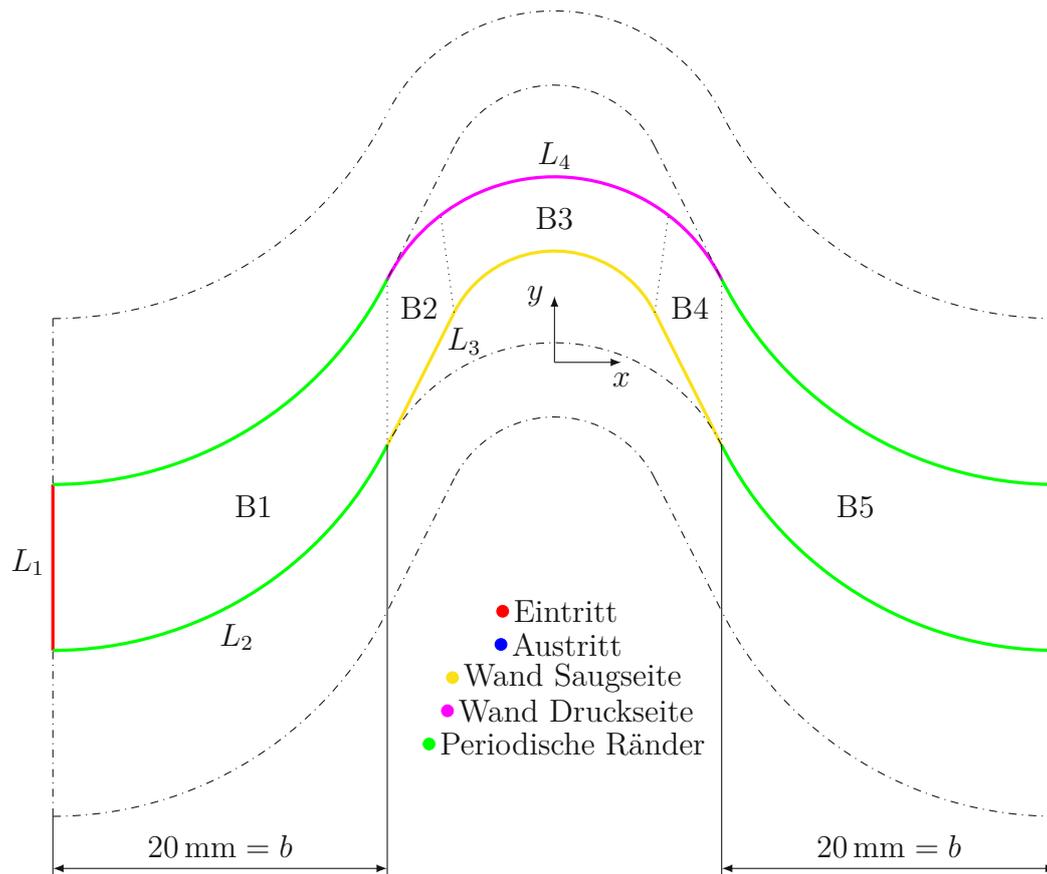


Abbildung 4.2: Geometrie des Simulationsgebiets.

### 4.2.1 Netzunabhängigkeitsstudie

Durch die verschiedenen Möglichkeiten das Simulationsgebiet zu vernetzen, ist es unerlässlich eine Netzabhängigkeit der Lösung auszuschließen. Dabei geht es darum das Netz so fein wie nötig, aber auch so grob wie möglich zu gestalten. Bei einem zu groben Netz können möglicherweise Strömungseffekte nicht richtig oder auch gar nicht aufgelöst werden. Ein zu feines Netz geht mit einem unnötig hohen

Rechenaufwand einher. Die sog. Richardson-Extrapolation bietet ein Werkzeug, um den Diskretisierungsfehler beurteilen zu können. Eine ausführliche Beschreibung dieses Verfahrens ist in [4] nachzulesen. Dazu müssen drei verschiedene Netze mit unterschiedlicher Feinheit erstellt werden. Die repräsentative Zellengröße  $h$  wird im zweidimensionalen Fall mit

$$h = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta A_i)} \quad (4.4)$$

berechnet. Dabei stellt  $N$  die Zellenanzahl und  $\Delta A_i$  die  $i$ -te Zellenfläche dar. Bei einer fixen Geometrie des Simulationsgebiets ändert sich die Summe über die Teilflächen jedoch nicht. Wichtig ist auch, dass die Bedingung

$$r = \frac{h_{grob}}{h_{fein}} > 1,3 \quad (4.5)$$

für den Verfeinerungsfaktor  $r$  eingehalten wird. Das bedeutet, dass die Zellengröße des groben Netzes mindestens 1,3-mal so groß sein muss, wie die des nächst feineren Netzes. Der Faktor von 1,3 basiert auf empirischen Erfahrungen. Die Ordnung des Verfahrens  $p$  wird mit

$$p = \frac{\left| \ln \left| \frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{21}} \right| \right|}{\ln(r_{21})} \quad (4.6)$$

bestimmt, wobei

$$\epsilon_{21} = \phi_2 - \phi_1 \quad (4.7)$$

und

$$\epsilon_{32} = \phi_3 - \phi_2 \quad (4.8)$$

die Differenz der Lösung  $\phi$  zwischen den jeweiligen Netzen darstellt. Für  $\phi$  werden oft globale Größen herangezogen. Im nächsten Schritt werden die extrapolierten Werte

$$\phi_{ext}^{21} = \frac{r_{21}^p \phi_1 - \phi_2}{r_{21}^p - 1}, \quad (4.9)$$

der geschätzte relative Fehler

$$e_a^{21} = \left| \frac{\phi_1 - \phi_2}{\phi_1} \right|, \quad (4.10)$$

der extrapolierte relative Fehler

$$e_{ext}^{21} = \left| \frac{\phi_{ext}^{21} - \phi_1}{\phi_{ext}^{21}} \right| \quad (4.11)$$

und der sog. „*fine-grid convergence index*“

$$GCI_{fine}^{21} = \frac{1,25e_a^{21}}{r_{21}^p - 1} \quad (4.12)$$

berechnet. Das gleiche Prozedere wird auch für den Index bzw. Exponenten 32 durchgeführt.

In dieser Studie wurde ein Verfeinerungsfaktor von  $r_{21} = r_{32} = r = 1,4$  verwendet. Für  $\phi$  wurde der Totaldruckverlustbeiwert

$$\zeta_{t2} = \frac{p_{t1} - p_{t2}}{p_{t1} - p_2} \quad (4.13)$$

als globale Größe gewählt, wobei  $p_{t1}$  den Totaldruck am Eintritt,  $p_{t2}$  den Totaldruck am Austritt und  $p_2$  den statischen Druck am Austritt darstellt. Es ist zu beachten, dass es sich bei der Bezugsgröße nicht um den tatsächlichen Staudruck der Abströmung  $p_{t2} - p_2$ , sondern um den zu einer verlustlosen Strömung gehörenden Abströmstaudruck  $p_{t1} - p_2$  handelt. Bei kompressiblen Strömungen ist diese Definition besser geeignet, wie es auch in [17] beschrieben wird. Die Drücke in Gl. (4.13) sind als teilungsgemittelte Drücke zu verstehen. Bei Ergebnissen aus Simulationen, aber auch z.B. aus Messungen, ist es oft notwendig an Messebenen zu mitteln. In unserem Fall wäre diese Messebene der Strömungseintritt bzw. Strömungsausritt mit der Länge der Teilung  $t$ . Im Bereich der Turbomaschinen werden für die Teilungsmittelung am häufigsten die Flächen- und die Massenmittelung eingesetzt.

Drücke werden in der Impulsbilanz mit Oberflächenintegralen beschrieben. Daher ist es naheliegend, diese flächengemittelt auszudrücken. Bei der Massenmittelung wird die betrachtete Größe mit der Massenstromdichte gewichtet, siehe [2]. Für diese Methode bieten sich z.B. Geschwindigkeiten, Temperaturen oder Winkel an.

Die hier durchgeführte Studie soll repräsentativ für alle Simulationen verschiedener Eintritts-Mach-Zahlen gelten. Bei großen Eintritts-Mach-Zahlen treten jedoch Verdichtungsstöße und Expansion auf, welche zu einer Entropieerhöhung und somit zu erhöhten Verlusten führen. Aus diesem Grund wurde für die Studie eine Eintritts-Mach-Zahl von  $Ma_1 = 0,6$  gewählt. In diesem Fall treten im gesamten Simulationsgebiet keine Überschallbedingungen auf. Die Fläche des Simulationsgebiets beträgt  $A = 528,56 \text{ mm}^2$ . Tabelle 4.1 zeigt die Daten der verwendeten Netze und die Ergebnisse der Simulationen. Es wurde darauf geachtet, dass die Werte des flächengemittelten, dimensionslosen Wandabstandes  $y^+$  der verschiedenen Netze nahezu gleich sind. Die Werte  $L_1$  bis  $L_4$  geben an, wie viele Zellen an den Rändern der Blöcke des Simulationsgebiets vorgegeben wurden. Die Zuordnung ist in Abb. 4.2 zu erkennen. Zwischen Netz 1 und Netz 2 ändert sich der Totaldruckverlustbeiwert nur noch geringfügig. Des Weiteren ist auch ein streng monoton steigender Verlauf zu erkennen, welcher zur Anwendung der Richardson-Extrapolation notwendig ist.

Netz	$N$	$h$ in $\mu\text{m}$	$r_{ist}$	$L_1/L_2/L_3/L_4$	$y^+$	$\zeta_{t2}$
1	130 500	63,6	1,4009	250/126/60/150	0,243	$7,468 \cdot 10^{-2}$
2	66 500	89,2	1,4021	190/95/35/90	0,248	$7,466 \cdot 10^{-2}$
3	33 825	125		123/75/25/75	0,241	$7,441 \cdot 10^{-2}$

**Tabelle 4.1:** Daten der verwendeten Netze und Ergebnisse aus den Simulationen.

Die berechneten Werte in Tabelle 4.2 bestätigen auch die Netzunabhängigkeit der Lösung mit den Netzen 1 und 2. Der „*fine-grid convergence index*“ liegt im sehr kleinen Prozentbereich. Aus diesen Erkenntnissen lässt sich ableiten, dass die Lösung mit dem zweiten Netz ausreichende Genauigkeit bietet. Das feinste Netz würde zu größerem Rechenaufwand bei quasi gleichen Ergebnissen führen. In Abb. 4.3 ist das verwendete Rechenetz dargestellt. Die Anzahl der Zellen an den Rändern verändert sich für die verschiedenen Simulationsfälle nicht. Lediglich die Verteilung der Zellen am Ein- und Austritt wird für den gewünschten  $y^+$ -Wert angepasst.

$\epsilon_{21}$	$-6,14 \cdot 10^{-3}$
$\epsilon_{32}$	$-2 \cdot 10^{-5}$
$p$	17
$\zeta_{t,ext}^{21}$	$8,084 \cdot 10^{-2}$
$\zeta_{t,ext}^{32}$	$7,468 \cdot 10^{-2}$
$e_a^{21}$	$7,598 \cdot 10^{-2}$
$e_a^{32}$	$2,678 \cdot 10^{-4}$
$e_{ext}^{21}$	$2,482 \cdot 10^{-4}$
$e_{ext}^{32}$	$8,751 \cdot 10^{-7}$
$GCI_{fine}^{21}$	$3,103 \cdot 10^{-4} \%$
$GCI_{fine}^{32}$	$1,094 \cdot 10^{-6} \%$

**Tabelle 4.2:** Berechnete Werte der Richardson-Extrapolation.

### 4.2.2 Netzqualität

Um eine hohe Genauigkeit der Ergebnisse zu erzielen, muss auf die Qualität des Rechnernetzes geachtet werden. Dafür stehen im verwendeten Vernetzer verschiedene Größen zur Verfügung, um die Qualität beurteilen zu können. Einen wichtigen Faktor stellt die Verzerrung oder im Englischen „*Skewness*“ dar. Ab einem Wert von 0,75 gilt eine Zelle als schlecht. Der größte Wert beim verwendeten Netz beträgt 0,72. Einige Zellen liegen dabei also an der Grenze. Aufgrund der Periodizitätsbedingung kommt es unweigerlich zu einer größeren Verzerrung in den Blöcken 2 und 4, welche nicht verhindert werden kann. Ähnlich wie bei der Verzerrung, kann auch der kleinste Winkel zwischen zwei Kanten einer Zelle herangezogen werden. Dabei sollte ein Winkel von  $20^\circ$  nicht unterschritten werden. Der kleinste Winkel im verwendeten Netz beträgt  $24^\circ$ , womit die Bedingung erfüllt ist. Eine weitere wichtige Größe ist das Seitenverhältnis, also das Verhältnis der längsten zur kürzesten Seitenlänge einer Zelle. Dieses sollte optimalerweise in der Nähe von Eins liegen. Grundsätzlich ist dieses Kriterium beim verwendeten Netz gegeben. In der Nähe des Wandbereiches müssen die Zelhöhen aufgrund der  $y^+$ -Bedingung, wie später in Abschn. 4.4 besprochen, jedoch abnehmen. Dort muss letztendlich eine Erhöhung des Seitenverhältnisses in Kauf genommen werden, welche laut [3] kein Problem darstellen sollte. Im Großen und Ganzen handelt es sich somit um ein akzeptables Rechnernetz, mit dem eine gute Genauigkeit der Ergebnisse zu erwarten ist.

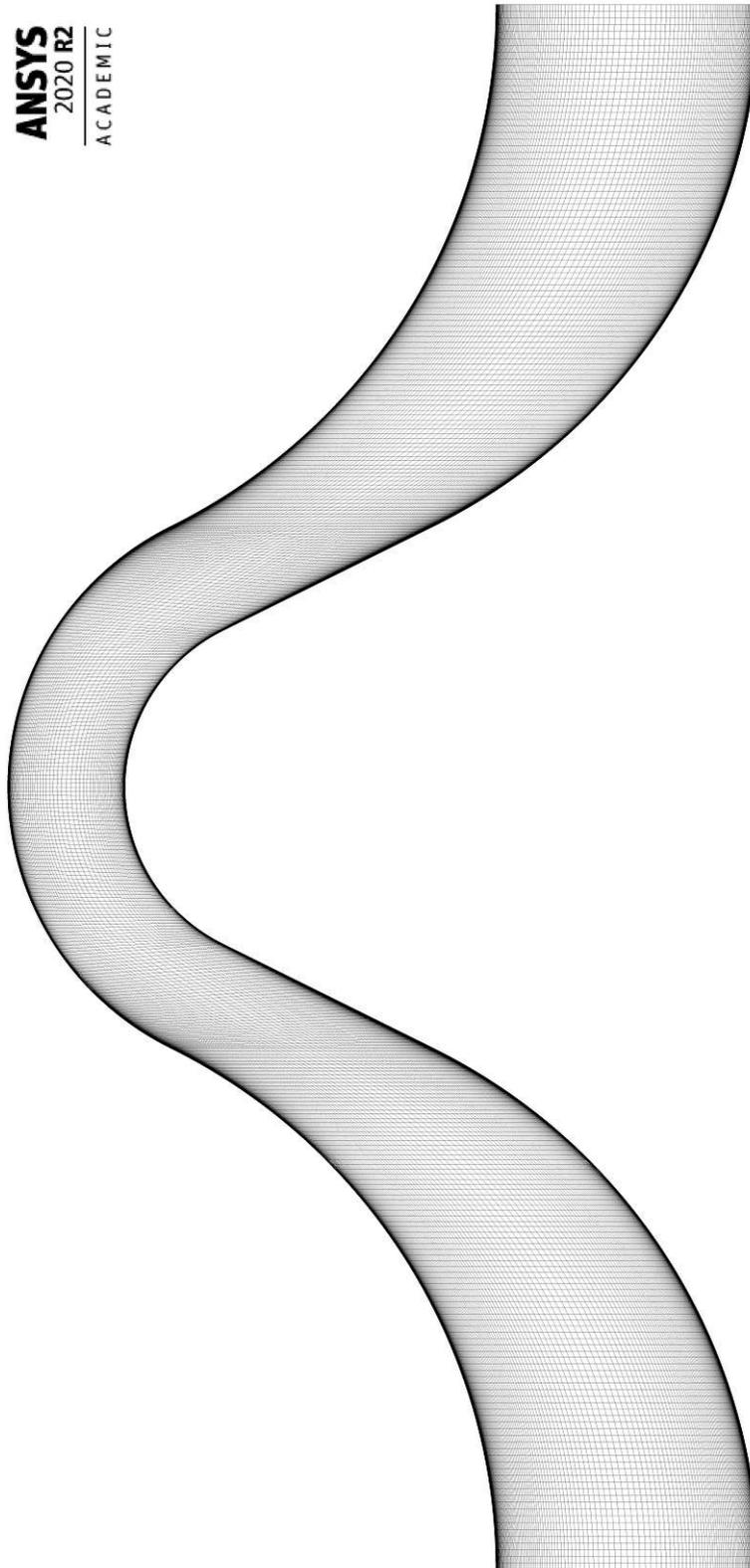


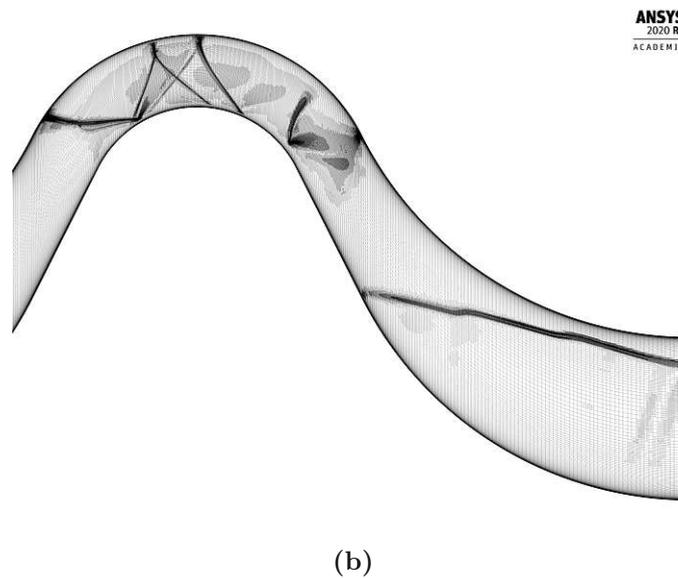
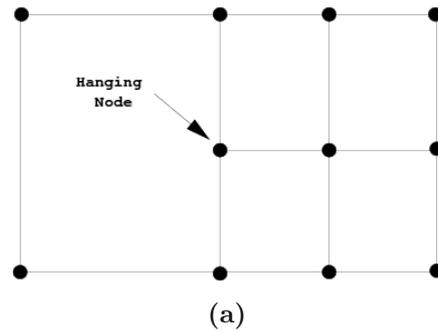
Abbildung 4.3: Gewähltes Rechenetz (Netz 2) nach der Netzstudie.

### 4.2.3 Adaptive Rechnetzanpassung

Wie schon erwähnt, treten bei höheren Eintritts-Mach-Zahlen Verdichtungsstöße und Expansionen auf. Da die Breite eines Verdichtungsstoßes ungefähr der mittleren freien Weglänge der Moleküle entspricht, bedarf es hier einer Anpassung des Rechnetzes, um Unstetigkeiten besser auflösen zu können. *ANSYS Fluent* bietet die Möglichkeit in Bereichen mit hohen Druckgradienten das Netz zu verfeinern, siehe [3]. Dabei nutzt die Software die sog. „*Hanging Node Adaption*“-Methode, siehe [2]. Das verwendete strukturierte Netz besteht nur aus rechteckigen Zellen. In diesem Fall wird eine rechteckige Zelle in vier kleinere rechteckige Zellen gespalten, wie in Abb. 4.4a erkennbar. Es entstehen somit „hängende“ Knoten an den Rändern der Zellen, welche keine Knoten aller Zellen sind, die diese Ränder miteinander teilen. Dieser Vorgang kann weitere Male wiederholt werden. In dieser Arbeit wurde diese Anpassung maximal vier Mal durchgeführt, da es dadurch zu einer erheblichen Erhöhung der Zellenanzahl kommt. Durch diese Methode kann also nicht nur der Druckgradient schärfer aufgelöst werden, sondern die Position des Verdichtungsstoßes wird zusätzlich genauer berechnet. Abbildung 4.4b zeigt beispielhaft eine druckgradientenbasierende Netzanpassung für die Simulation mit einer Eintritts-Mach-Zahl von  $Ma_1 = 1,4$ .

## 4.3 Strömungsmedium

Als Strömungsmedium wurde überhitzter Wasserdampf mit einem Isentropenexponenten von  $\kappa = 4/3$  verwendet. Die statische Temperatur am Eintritt  $T_1$  und der statische Druck am Austritt  $p_2$  wurden so gewählt, dass es global zu keiner Kondensation des Dampfes kommt. Lokal, im Strömungskanal, kann es jedoch Zustände geben, welche im Nassdampfgebiet liegen. Eine Kondensation und somit ein Phasenübergang von Wasserdampf in flüssiges Wasser wird aber in der Simulation nicht berücksichtigt. Dazu wären weitere Modelle notwendig. Die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck wurde als konstant mit  $c_p = 2090 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  angenommen. Dies entspricht dem Wert des Zustandes am Eintritt. Die spez. Wärmekapazität ist zwar von der Temperatur abhängig, jedoch kommt diese Abhängigkeit erst in hohen Temperaturbereichen bzw. bei hohen Temperaturdifferenzen, welche hier nicht vorliegen, stark zu tragen. Im Gegensatz dazu sollte die Temperaturabhängigkeit der Viskosität dennoch berücksichtigt werden. In



**Abbildung 4.4:** Aufspalten einer rechteckigen Zelle durch die „*Hanging Node* Adaption“-Methode (a), siehe [2] und Rechenetzadaption bei  $Ma_1 = 1,4$  (b).

*ANSYS Fluent* stehen dazu mehrere Möglichkeiten zur Auswahl. Für die hier durchgeführten Simulationen wurde das Gesetz von *William Sutherland* aus dem Jahr 1893 herangezogen, siehe [3]. Dieses Modell resultiert aus der kinetischen Gastheorie unter Verwendung eines idealisierten intermolekularen Wechselwirkungspotentials. Die Beschreibung der Viskositätsänderung kann mit zwei oder drei Koeffizienten erfolgen. Hier wurde der Ansatz

$$\mu = \mu_{ref} \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{ref} + S}{T + S} \quad (4.14)$$

mit drei Koeffizienten gewählt, wobei  $\mu_{ref}$  die Referenzviskosität,  $T_{ref}$  die Referenztemperatur und  $S$  die Sutherland-Konstante ist.

renztemperatur und  $S$  die sog. Sutherland-Konstante oder auch effektive Temperatur darstellt. Für die Koeffizienten wurden folgende Werte aus [24] verwendet:  $\mu_{ref} = 1,12 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ ,  $T_{ref} = 350 \text{ K}$ ,  $S = 1064 \text{ K}$ . Mit diesen Werten verspricht das Modell in einem Temperaturbereich von 280 K bis 1500 K eine maximale prozentuale Abweichung von  $\pm 3 \%$  vom realen Wert. Als thermische Zustandsgleichung wurde das ideale Gasgesetz verwendet, um auch gasdynamische Effekte, gerade bei hohen Mach-Zahlen, auflösen zu können. Bei Verwendung der idealen Gasgleichung wird in *ANSYS Fluent* automatisch die Energiegleichung aktiviert. Des Weiteren wurden für die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = 0,028813 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  und für die molare Masse  $M = 18,015 \text{ kg}/\text{kmol}$  die konstanten Standardwerte für Wasserdampf von *ANSYS Fluent* übernommen.

## 4.4 Turbulenzmodellierung

Bevor Turbulenz überhaupt modelliert werden kann bzw. soll, muss zuerst festgestellt werden, ob generell eine turbulente Strömung vorliegt. Um dies beurteilen bzw. quantifizieren zu können, wird die Reynolds-Zahl herangezogen. Liegt diese über einem kritischen Wert, kann von einer turbulenten Strömung ausgegangen werden. Im Bereich der Turbomaschinen ist es gebräuchlich die Reynolds-Zahl

$$Re_b = \frac{w_1 b}{\nu_1} \quad (4.15)$$

mit der Eintrittsgeschwindigkeit  $w_1$  und der Eintrittsviskosität  $\nu_1$  zu bilden. Als charakteristische Länge dient die axiale Sehnenlänge  $b$ . Diese Definition gilt strenggenommen jedoch nur für Turbinenschaufel mit geringer Wölbung. Daher wird oft, wie auch in [17], eine kritische Reynolds-Zahl, bei der es zu einem turbulenten Umschlag der Grenzschicht kommt, mit  $Re_{krit} = 2 \cdot 10^5$  bis  $4 \cdot 10^5$  angegeben. Diese Werte sind an die experimentellen Ergebnisse der angeströmten, ebenen Platte angelehnt. Bei stark gewölbten Gleichdruckgittern ist es demnach schwieriger eine kritische Reynolds-Zahl zu definieren. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine Kanalströmung anzunehmen und die Reynolds-Zahl

$$Re_{D_H} = \frac{w_1 D_H}{\nu_1} = \frac{w_1 \cdot 2a}{\nu_1} \quad (4.16)$$

mit dem hydraulischen Durchmesser  $D_H$  zu bilden und dann mit der kritischen Reynolds-Zahl der Rohrströmung  $Re_{krit} = 2,3 \cdot 10^3$  zu vergleichen. Der hydraulische Durchmesser entspricht in diesem Fall gleich zweimal der Mündungsweite  $a$ . Bei dem kritischen Fall der Rohrströmung wird zusätzlich angenommen, dass die Strömung bereits vollständig ausgebildet ist, was beim Auftreffen auf das Gitter nicht gewährleistet ist. Da bei der gewählten Geometrie  $2t = b$  und  $2t \approx 4a$  ist, liegen beide Definitionen größenordnungsmäßig nahe beieinander. Die kritischen Reynolds-Zahlen sind jedoch für beide Fälle unterschiedlich. Hier sieht man bereits, dass die Grenze des laminar/turbulent Umschlags theoretisch nicht scharf gegeben ist, da diese von der Modellbildung abhängt. In dieser Arbeit werden diverse Fälle mit verschiedenen Eintritts-Mach-Zahlen  $Ma_1$  und somit mit unterschiedlichen Eintrittsgeschwindigkeiten  $w_1$  behandelt. Der hier abgedeckte Reynolds-Zahl-Bereich liegt bei  $Re_{D_H} \approx Re_b = 1,5 \cdot 10^5$  bis  $1,6 \cdot 10^6$ . Vergleicht man den niedrigsten Wert mit den kritischen Reynolds-Zahlen der beiden Modelle, kann man im Falle der Rohrströmung jedenfalls von einer turbulenten Strömung ausgehen. Für den Fall mit leicht gewölbten Schaufeln liegt man knapp unter dem kritischen Wert. Da man sich bei den interessanten Überschallfällen am oberen Ende des Reynolds-Zahl-Bereichs befindet, wird dies in Kauf genommen. Der Einfluss der Reynolds-Zahl auf die späteren Ergebnisse ist durchaus gegeben, ist jedoch als relativ klein einzustufen. Grundsätzlich sinken die Profilverluste bei steigender Reynolds-Zahl. Bei normal rauen Schaufel ist der Verlauf des Widerstandsbeiwerts  $c_w$  über die Reynolds-Zahl jedoch flach.

Die Turbulenz wird in den Simulationen durch ein sog. Zweigleichungsmodell beschrieben, welches aus zwei zusätzlichen Transportgleichungen besteht. Transportiert werden die skalaren Turbulenzgrößen  $k$  und  $\omega$ , welche die turbulente kinetische Energie und die spezifische Dissipationsrate darstellen. Das  $k - \omega$ -Modell wurde ursprünglich 1988 von *David C. Wilcox* ins Leben gerufen. 1994 gab es dann eine Weiterentwicklung des Modells durch *Florian Menter*, das sog.  $k - \omega$  SST-Modell, wobei SST für „*shear stress transport*“ steht. Das  $k - \omega$  SST-Modell ist weniger empfindlich bei Anwendungen auf Strömungen außerhalb der Grenzschicht als das  $k - \omega$ -Modell. Außerdem weist es ein gutes Verhalten bei gegenläufigen Druckgradienten und eine verbesserte Ablösungsvorhersage auf, wie in [25] beschrieben. Auch im Bereich der Turbomaschinen hat sich dieses Modell schon häufig bewährt. Daher wurde es auch in den hier durchgeführten Simulationen verwendet. Das  $k - \omega$  SST-Modell ist voll wandauflösend, d.h. die erste wandnahe Zelle muss in der viskosen Unterschicht liegen. Die Höhe der ersten wandnahen Zelle  $y$  muss einer

bestimmten Bedingung genügen. Dazu wird der sog. dimensionslose Wandabstand

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad (4.17)$$

herangezogen, wobei

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (4.18)$$

für die Wandschubspannungsgeschwindigkeit und  $\tau_w$  für die Wandschubspannung steht. Der Wert von  $y^+$  sollte an jeder Position entlang aller Wände unter Eins liegen, um eine hohe Genauigkeit der Ergebnisse zu erreichen, siehe [3]. Daher wurde bei der Generierung des Rechnernetzes stets darauf geachtet, dass diese Bedingung erfüllt ist. Bei den hier durchgeführten Simulationen liegt der flächengemittelte Wert des dimensionslosen Wandabstands immer in einem Bereich von  $y^+ = 0,15$  bis  $0,25$ . Damit ist gewährleistet, dass auch die lokalen Werte entlang der Wände unter Eins liegen. Für jeden Simulationsfall mit unterschiedlicher Eintritts-Mach-Zahl musste somit das Rechnernetz angepasst werden. Zusätzlich können in *ANSYS Fluent* noch weitere Optionen für das  $k - \omega SST$ -Modell ausgewählt werden. Es wurde bei folgenden Optionen ein Häkchen gesetzt: „Compressibility Effects“, „Viscous Heating“ und „Production Limiter“, siehe [3]. Die erste Option kann die Berechnung von Scherschichten bei kompressiblen Strömungen verbessern. Die zweite Auswahl inkludiert die viskosen Dissipationsterme in die Energiegleichung. In Scherschichten wird durch Schubspannungskräfte Arbeit verrichtet, was zu einer irreversiblen Erwärmung des Fluids führt. Dieser Effekt soll mit dieser Option berücksichtigt werden. Ein Nachteil des  $k - \omega SST$  bzw. jedes Zweigleichungsmodells ist auch, dass in der Nähe von Staupunkten eine zu hohe turbulente kinetische Energie berechnet wird, was auch als Staupunkt-Anomalie bezeichnet wird. Die dritte Option soll dem entgegenwirken, wie in [2] beschrieben.

## 4.5 Numerik

Grundsätzlich können in *ANSYS Fluent* die Gleichungen auf zwei verschiedenen Wegen gelöst werden, nämlich mit einem druck- oder dichtebasierenden Löser. Bei beiden Methoden wird das Geschwindigkeitsfeld aus den Impulsgleichungen ge-

wonnen. Beim dichtebasierenden Ansatz wird die Kontinuitätsgleichung verwendet, um das Dichtefeld zu berechnen, wobei das Druckfeld dann mit der thermischen Zustandsgleichung berechnet wird. Im Gegensatz dazu wird mit der druckbasierenden Vorgangsweise das Druckfeld mit Druckkorrekturgleichungen so gelöst, um die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichungen zu erfüllen, siehe [2]. Historisch gesehen wurde der dichtebasierende Löser für Hochgeschwindigkeitsströmungen entwickelt, wobei der druckbasierende Löser eher nur für moderate Geschwindigkeiten zum Einsatz kam. Mittlerweile können beide Methoden für einen breiten Bereich von Strömungen angewandt werden. Für Strömungen, bei denen Kompressibilitätseffekte von großer Bedeutung sind, wird in [3] der dichtebasierende Löser empfohlen. Dies wurde auch versucht, jedoch kam es dabei zu folgendem Problem: Mit dem dichtebasierenden Löser war es nicht möglich, Eintritts-Mach-Zahlen von  $Ma_1 > 1$  zu erreichen. Das Druckverhältnis  $p_2/p_{t1}$  konnte beliebig niedrig abgesenkt werden, ohne eine Zunahme der Eintritts-Mach-Zahl zu beobachten. Warum es zu diesem Verhalten kommt, konnte leider nicht herausgefunden werden. Aus diesem Grund wurde in weiterer Folge der druckbasierende Löser verwendet. Mit diesem konnten ohne Probleme Überschallbedingungen am Eintritt erzeugt werden. Bei der Druck-Geschwindigkeits-Kopplung wurde jene Variante gewählt, bei der die Impulsgleichungen und die druckbasierende Kontinuitätsgleichung gekoppelt gelöst werden („*Coupled*“). Dies bringt eine deutliche Verbesserung bezüglich der Konvergenz der Lösung, wie auch in [2] beschrieben. Bei der räumlichen Diskretisierung wurde für das Schema zur Berechnung von Gradienten die Green-Gauß knotenbasierende Methode ausgewählt. Diese verspricht höhere Genauigkeit im Gegensatz zu anderen Methoden, bei jedoch erhöhtem Rechenaufwand. Die Druckgleichung wurde mit einem Verfahren zweiter Ordnung gelöst. Für alle anderen Konvektions-Diffusions-Gleichungen (Dichte, Impuls, turbulente kinetische Energie, spezifische Dissipationsrate und Energie) wurde der *MUSCL*-Algorithmus („*Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws*“) dritter Ordnung verwendet. Dieser bietet gerade bei Kompressibilitätseffekten, wie z.B. Verdichtungsstößen, bessere Stabilität und erhöhte Genauigkeit, als Methoden zweiter Ordnung. Um Oszillationen in der Umgebung von Verdichtungsstößen zu verhindern, wurde zusätzlich ab dem Auftreten von Schallgeschwindigkeit ein gradientenbegrenzender Filter *TVD* („*Total Variation Diminishing*“) verwendet. Bei Diskontinuitäten reduziert dieser die Ordnung des Verfahrens, was zu erhöhter Stabilität führt.

## 4.6 Anfangsbedingungen

Wenn man eine stationäre Lösung eines Problems erwartet, spielt es, theoretisch gesehen, keine Rolle, welche Anfangsbedingungen man wählt, vorausgesetzt es gibt nur eine stationäre Lösung. Schließlich sollte das Ergebnis immer das Gleiche sein. In der numerischen Behandlung von Gleichungen gibt es jedoch oft Anfangsbedingungen, welche besser oder auch schneller zum Ziel führen. *ANSYS Fluent* bietet deswegen die Möglichkeit einer sog. hybriden Initialisierung des Strömungsfelds, siehe [2]. Im Hintergrund wird eine Laplace-Gleichung gelöst, welche ein Geschwindigkeits- und Druckfeld generiert, die auf das komplexe Simulationsgebiet abgestimmt sind. Alle anderen Größen werden beruhend auf diesen Feldern berechnet. Für die hier durchgeführten Simulationen erwies sich diese Methode als sehr zufriedenstellend.

## 4.7 Randbedingungen

Im nächsten Schritt müssen den Rändern des Simulationsgebiets Bedingungen zugeordnet werden, um das Strömungsproblem berechnen zu können. Am Strömungseintritt wurde der Totaldruck  $p_{t1}$ , die Totaltemperatur  $T_{t1}$  und die Richtung der Strömung ( $\beta_1 = \beta_{1m}$ ) vorgegeben. Für jene Fälle, bei denen die Eintritts-Mach-Zahl  $Ma_1 > 1$  ist, ist es zusätzlich notwendig den statischen Druck  $p_1$  anzugeben, da dieser bei Überschallbedingungen nicht mehr von der stromabwärtigen Strömung zurückextrapoliert werden kann. Des Weiteren müssen Turbulenzrandbedingungen definiert werden. Im Bereich der Turbomaschinen wird dazu häufig die turbulente Intensität  $I_t$  und das turbulente Längenmaß  $L_t$  herangezogen. Die turbulente Intensität kann ohne vorhandene Messdaten lediglich abgeschätzt werden. Es besteht allerdings auch die Möglichkeit Ergebnisse aus bereits durchgeführten Simulationen zu analysieren. Ein hoher Gradient der turbulenten kinetischen Energie  $k$  am Eintritt deutet darauf hin, dass eine zu hohe turbulente Intensität gewählt wurde. Nach diesem Konzept wurde auch hier vorgegangen. Eine turbulente Intensität von  $I_t = 3\%$  erschien daher nach einigen Simulationsdurchläufen als sinnvoll. Das turbulente Längenmaß kann laut [3] mit

$$L_t = 0,07D_H = 0,07 \cdot 2a = 0,14a \quad (4.19)$$

abgeschätzt, wobei  $D_H$  den hydraulischen Durchmesser darstellt, welcher in diesem Fall zweimal der Mündungsweite entspricht. Damit ergibt sich das turbulente Längenmaß zu  $L_t = 0,63$  mm. Am Austritt wurde ein konstanter statischer Druck von  $p_2 = 2 \cdot 10^5$  Pa vorgegeben. Ziel der hier durchgeführten Simulationen war es, den Mach-Zahl-Einfluss auf das Turbinengitter zu untersuchen. Um verschiedene Eintritts-Mach-Zahlen zu erreichen, wurde daher der statische Druck am Austritt festgehalten und der Totaldruck am Eintritt erhöht, d.h. das Druckverhältnis  $p_2/p_{t1}$  abgesenkt. Da es sich um ein Gleichdruckturbinengitter handelt, wurde der statische Druck am Eintritt für die Überschallfälle gleich dem statischen Druck am Austritt gesetzt. Die Totaltemperatur wurde so angepasst, dass bei jedem Simulationsfall die statische Temperatur am Eintritt  $T_1 = 413,15$  K  $\hat{=}$  140 °C entspricht. Die Simulationen wurden bis zu einer Eintritts-Mach-Zahl von  $Ma_1 = 2$  mit einer Schrittweite von  $\Delta Ma_1 = 0,2$  durchgeführt. Diese oberer Grenze wurde gewählt, da ab einer Eintritts-Mach-Zahl von  $Ma_1 = 2,2$  die axiale Eintritts-Mach-Zahl  $Ma_{1x}$  den Wert Eins übersteigen würde. Diese Fälle sind aus ingenieurmäßiger Sicht nur selten von Bedeutung. Das Potentialwirbel-Modell in Kap. 3 hat bereits gezeigt, dass bei einer Eintritts-Mach-Zahl von ca.  $Ma_1 = 0,7$  erstmals Überschallbedingungen an der Saugseite der Schaufel auftreten sollten. Dieser kritische Fall wurde ebenso untersucht. Tabelle 4.3 zeigt die verwendeten Werte für die unterschiedlichen Fälle. Die Wände der Saug- und Druckseite wurden als undurchlässig, hydraulisch glatt und adiabat modelliert. Es soll ebenfalls die Haftbedingung gelten. Die periodischen Ränder wurden als translatorisch mit der Gitterteilung  $t$  definiert. Alle anderen Randbedingungen werden von *ANSYS Fluent* automatisch gesetzt.

## 4.8 Konvergenz der Lösung

In Abschn. 4.5 wurden bereits einige Maßnahmen besprochen um die Konvergenz der Lösung zu verbessern. Es stellt sich natürlich die Frage nach welchen Kriterien man entscheiden soll, wann eine Lösung als konvergiert gilt. In [3] wird als Richtlinie empfohlen, dass bei der druckbasierenden Lösungsmethode die skalierten Residuen der Energiegleichung unter  $10^{-6}$  und alle anderen Residuen unter  $10^{-3}$  fallen sollten. Das alleine gibt jedoch noch keine Auskunft darüber, ob eine konvergierte Lösung vorliegt. Zusätzlich wurde das Flächenintegral der Druckverteilung an den Wänden der Saug- und Druckseite über die Iterationen beobachtet. Sollte sich dieser Wert im Laufe der Iterationen einschwingen, ist dies ein weiterer Anhaltspunkt, dass

$Ma_1$	$p_{t1}$ in Pa	$p_2/p_{t1}$	$T_{t1}$ in K
0,2	205400	0,974	416
0,4	222500	0,899	423
0,6	255000	0,784	434
0,711	287000	0,697	443
0,8	364470	0,549	454
1	440000	0,455	491
1,2	510000	0,392	510
1,4	665000	0,301	539
1,6	900000	0,222	576
1,8	1200000	0,167	613
2	1600000	0,125	653

**Tabelle 4.3:** Verwendete Werte der Eintrittsrandbedingungen für die verschiedenen Strömungsfälle.

eine konvergente Lösung vorliegt. Im Unterschallbereich war es relativ einfach, die oben angeführten Kriterien zu erfüllen. Zur Berechnung wurde die pseudotransiente Option ausgewählt und die Standardwerte der Unterrelaxationsfaktoren mussten nicht verändert werden. Die pseudotransiente Unterrelaxationsmethode ist einer Art der impliziten Unterrelaxation. Die Unterrelaxation wird durch die Pseudo-Zeitschrittweite kontrolliert. Diese Methode kann zu verbesserter Konvergenz führen, siehe [3]. Ab dem Erreichen der Schallgeschwindigkeit war es eher schwierig Konvergenz zu erreichen. Im ersten Schritt wurde versucht mit der pseudotransienten Methode eine annähernd gute Lösung zu erreichen. Nach vielen Iterationen kam es zu Schwingungen der Residuen um einen bestimmten Wert, wobei die Residuen noch relativ groß waren, vor allen das der Kontinuitätsgleichung. Nach einigen Durchläufen der druckgradientenbasierenden Netzverfeinerung, wie in Abschn. 4.2.3 erklärt, konnte das Konvergenzverhalten deutlich verbessert werden. Zusätzlich wurden die Unterrelaxationsfaktoren aller Gleichungen drastisch verkleinert. Es war schlussendlich ebenfalls notwendig die pseudotransiente Unterrelaxation auszuschalten, da man ohne diese mehr Kontrolle über die Einstellungen des Löser bekommt. Zum Beispiel war es jetzt möglich durch Absenken der Courant-Zahl eine sehr langsam konvergierende Lösung nach den angeführten Kriterien zu erreichen.

## 4.9 Zusammenfassung der Einstellungen in *ANSYS Fluent*

Fluent Launcher		
Options	Double Precision	
Parallel	Solver Processes	max. 8
General		
Operating Pressure	0 Pa	
Gravity	OFF	
Solver Type	Pressure Based	
Velocity Formulation	Absolute	
Time	Steady	
2D Space	Planar	
Models		
Energy	ON	
Viscous	SST k-omega	Viscous Heating
		Compressibility Effects
		Production Limiter
Materials		
Fluid	Water Vapour	
	Density	Ideal Gas
	Specific Heat	$c_p = 2090 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
	Thermal Conductivity	$\lambda = 0,028813 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
	Viscosity	Sutherland
	Molecular Weight	$M = 18,015 \text{ kg}/\text{kmol}$
Boundary Conditions		
Inlet	Pressure Inlet	$p_{t1}$ und $T_{t1}$ siehe Tab. 4.3
	Static Pressure	$p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
	X Flow Direction	0,447
	Y Flow Direction	0,894
	Turbulent Intensity	$I_t = 3 \%$
	Turbulent Length Scale	$L_t = 0,63 \text{ mm}$
Outlet	Pressure Outlet	
	Static Pressure	$p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
Walls	Wall	no-slip, adiabatic, hydraulically smooth
Periodic	Periodic	translational with $t = 10 \text{ mm}$
Methods		
Pressure-Velocity-Coupling	Coupled	
Spartial Discretization	Gradient	Green-Gaus Node Based
	Pressure	Second Order
	Density	Third-Order MUSCL
	Momentum	Third-Order MUSCL
	Turbulent Kinetic Energy	Third-Order MUSCL
	Specific Dissipation Rate	Third-Order MUSCL
	Energy	Third-Order MUSCL
Controls	Advanced	Apply Limiter Filter ON

Tabelle 4.4: Übersicht der Einstellungen in *ANSYS Fluent*.

# Kapitel 5

## Ergebnisse und Diskussion

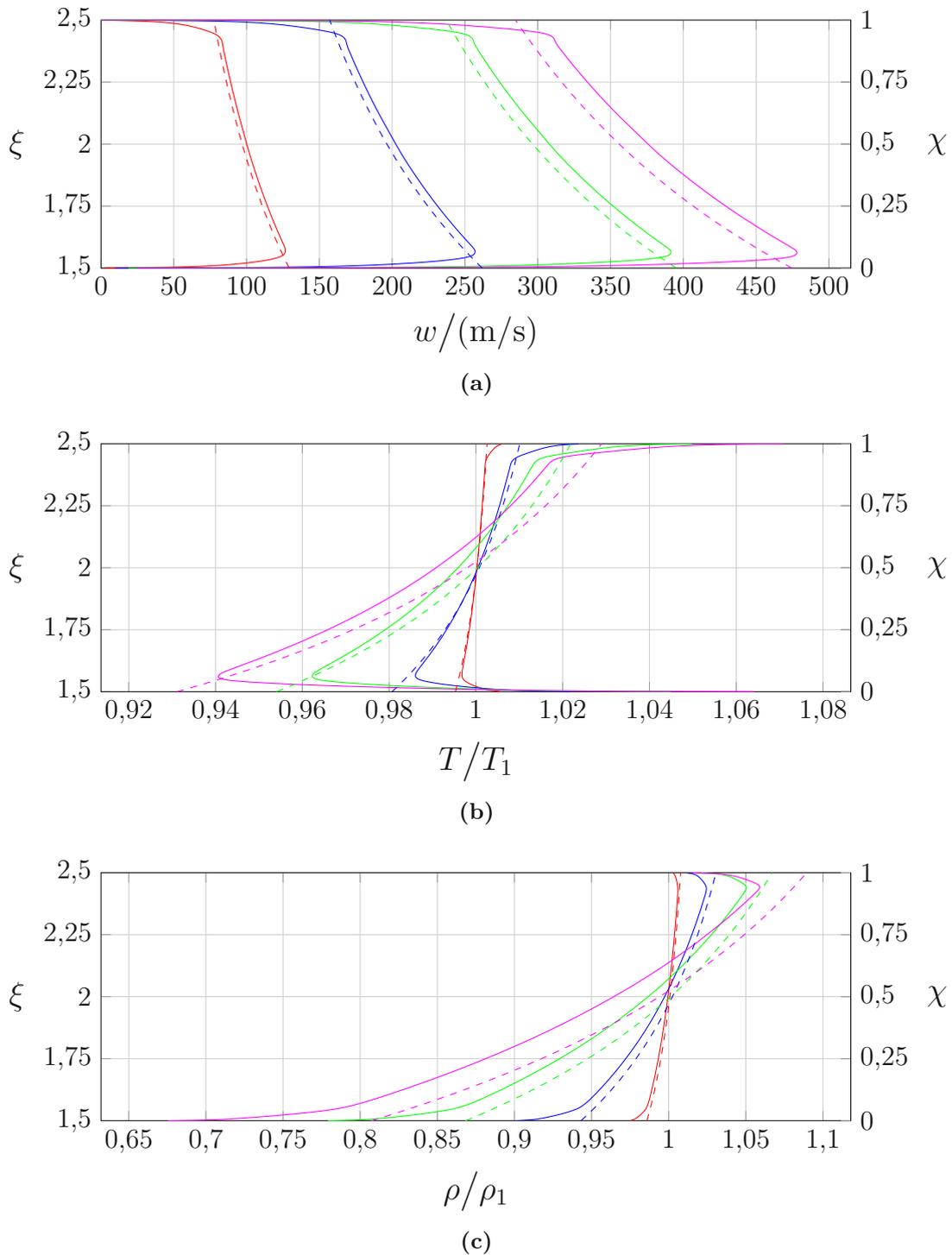
In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der *CFD*-Simulationen und jene des Potentialwirbel-Modells miteinander, aber auch mit theoretischen Ansätzen und Messergebnissen aus facheinschlägiger Literatur verglichen. Dadurch, dass die simulierte Geometrie nicht exakt mit denen in der Literatur vorkommenden Geometrien übereinstimmt, können meist nur qualitative Aussagen getroffen werden. Nichtsdestotrotz werden durch die erzielten Ergebnisse neue Erkenntnisse gewonnen, welche zum besseren Verständnis der Strömung in Überschallgleichdruckturbinengittern führen. Größen am Ein- und Austritt sind im Folgenden als teilungsgemittelt zu verstehen, wie bereits in Abschn. 4.2.1 erklärt.

Wie schon eingangs erwähnt, wurde die Strömung in einem Gleichdruckgitter simuliert, welches grundsätzlich nicht für Überschallbedingungen und schon gar nicht für eine Überschallanströmung geeignet ist. Das Potentialwirbel-Modell gilt ganz allgemein für jede Eintritts-Mach-Zahl unter der kritischen Eintritts-Mach-Zahl an der Saugseite  $Ma_{1,SS}^{krit}$  und über der kritischen Eintritts-Mach-Zahl an der Druckseite  $Ma_{1,SS}^{krit}$ , vorausgesetzt es treten keine Verdichtungsstöße bzw. Expansionswellen im Gitterkanal auf. Bei einem Gleichdruckgitter mit organisierter Strömung, wie es z.B. Klaus Oswatitsch in [13] und [14] vorgeschlagen hat, könnte man somit die Strömung aus den *CFD*-Ergebnissen mit jenen aus dem Potentialwirbel-Modell für jede Überschall-Eintritts-Mach-Zahl vergleichen. Da bei der hier simulierten Strömung Stöße und Expansionen auftreten, können die *CFD*-Ergebnisse nur bis zur kritischen Eintritts-Mach-Zahl an der Saugseite  $Ma_{1,SS}^{krit}$  mit dem Potentialwirbel-Modell verglichen werden. Dazu wurden aus den *CFD*-Ergebnissen Verläufe am Scheitel des Kreisbogensegments bei  $x = 0$  m entnommen und den Ergebnissen

des Potentialwirbel-Modells gegenübergestellt. In Abb. 5.1 sind die Profile der Geschwindigkeit (Abb. 5.1a), der Temperatur (Abb. 5.1b) und der Dichte (Abb. 5.1c) dargestellt. Diese Verläufe werden über den dimensionslosen Radius  $\xi$  und über die bezogene Kanalhöhe

$$\chi = \frac{\xi - \min(\xi)}{\max(\xi) - \min(\xi)} \quad (5.1)$$

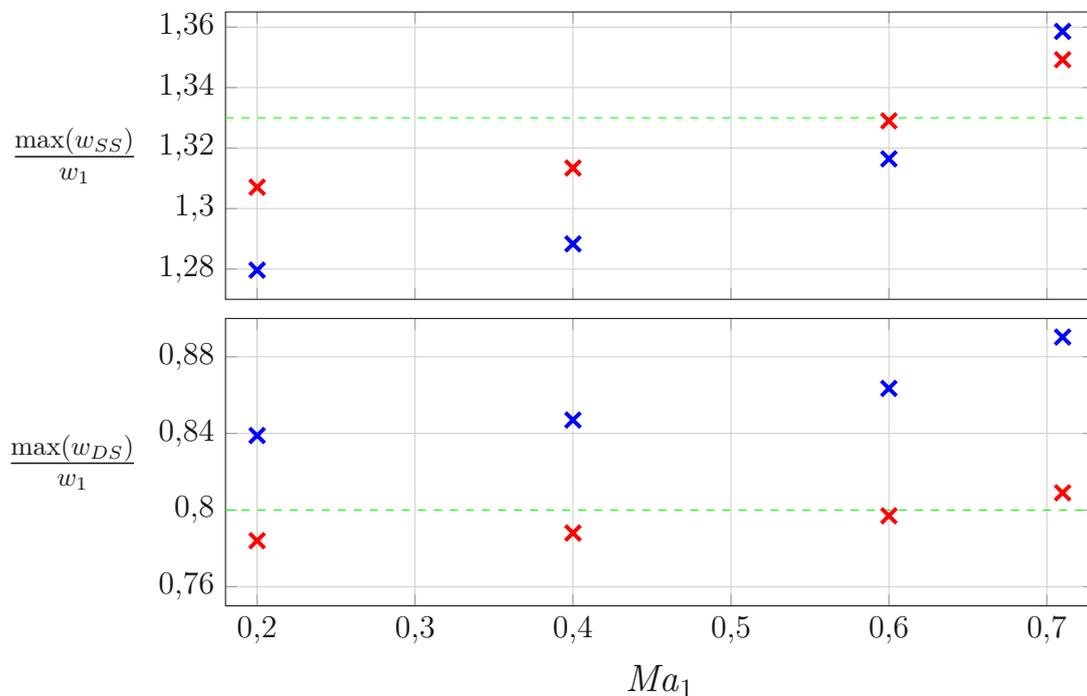
dargestellt. Dabei befindet man sich bei  $\chi = 0$  an der Saugseite und bei  $\chi = 1$  an der Druckseite der Schaufel. Bei den Geschwindigkeitsverläufen ist klar zu erkennen, dass das Potentialwirbel-Modell nur wenig von den *CFD*-Ergebnissen abweicht. Je größer die Geschwindigkeit, desto größer auch die Differenz zwischen den Verläufen. Dieses Verhalten ist gegeben, da die Potentialtheorie keine Reibungseinflüsse berücksichtigt. Bei den *CFD*-Ergebnissen ist die Grenzschichtströmung klar zu erkennen. Die eingeschlossene Fläche einer Kurve steht für den Volumenstrom im Kanal, welcher sowohl in den *CFD*-Ergebnissen als auch beim Potentialwirbel-Modell bei kleinen Dichteänderungen nahezu gleich groß sein muss. Aus diesem Grund liegen die Geschwindigkeiten des Potentialwirbel-Modells immer unter jenen der *CFD*-Ergebnisse. Die Krümmung der Kurven ist jedenfalls in beiden Fällen augenscheinlich ca. gleich groß. Ein ähnliches Verhalten ist auch bei den Temperaturverläufen zu beobachten. Bei höheren Eintritts-Mach-Zahlen weichen die Verläufe mehr voneinander ab, als bei kleineren Eintritts-Mach-Zahlen. Bei  $Ma_1 = 0,2$  und  $Ma_1 = 0,4$  liegen die Verläufe des Potentialwirbel-Modells bis zur halben Kanalhöhe links von den *CFD*-Ergebnissen, wobei sie danach rechts davon liegen. Ab  $Ma_1 = 0,6$  verbleiben diese stets auf der rechten Seite. Auffallend ist auch, dass bei  $Ma_1 = 0,6$  und  $Ma_1 = 0,71$  die Verläufe an der Saugseite weniger voneinander abweichen. Zur Druckseite hin ist eine Vergrößerung der Differenz zu beobachten. Des Weiteren ist bei den *CFD*-Ergebnissen eine ausgeprägte Steigerung der Temperatur im Wandbereich zu erkennen. Die hohen Schubspannungen verrichten im Wandbereich Arbeit, welche direkt in Wärme umgewandelt wird. Im Englischsprachigen wird dieser Effekt auch „*viscous heating*“ bezeichnet, welchen das Potentialwirbel-Modell nicht berücksichtigen kann. Beim Potentialwirbel-Modell sind im Wandbereich demnach immer kleinere Temperaturen zu erwarten. Bei den Verläufen der Dichte gewinnen die Kompressibilitätseffekte bei steigender Eintritts-Mach-Zahl deutlich an Einflussnahme. An der Saugseite ist dieser Einfluss besonders deutlich zu beobachten. Eine Dichteabnahme in den Wandgrenzschichtbereichen ist auf die erhöhte



**Abbildung 5.1:** Vergleich der Verläufe von Geschwindigkeit (a), Temperatur (b) und Dichte (c) am Scheitelpunkt über die Kanalhöhe aus den Ergebnissen der *CFD*-Simulationen (–) und des Potentialwirbel-Modells (– –) mit  $Ma_1 = 0,2/0,4/0,6/0,71$ .

Temperatur zurückzuführen. Bei den Dichteverläufen unterschätzt das Potentialwirbel-Modell die Dichte an der Saugseite, wohingegen an der Druckseite die Dichte größer als bei den *CFD*-Ergebnissen berechnet wird. Die Kurven beider Ergebnisse verlaufen, wie auch bei den Geschwindigkeitsprofilen, nahezu parallel.

In Abb. 5.2 sind die maximalen Geschwindigkeiten bei  $x = 0$  m an der Saugseite und an der Druckseite aus den *CFD*-Ergebnissen und aus dem Potentialwirbel-Modell über die Eintritts-Mach-Zahl aufgetragen. In [6] wurde der Wert für die maximale Geschwindigkeit an der Saug- und Druckseite bereits berechnet, jedoch ohne Berücksichtigung der Massenbilanz und des Kompressibilitätseinflusses. Diese Werte werden mit grün strichlierten horizontalen Linien gekennzeichnet.



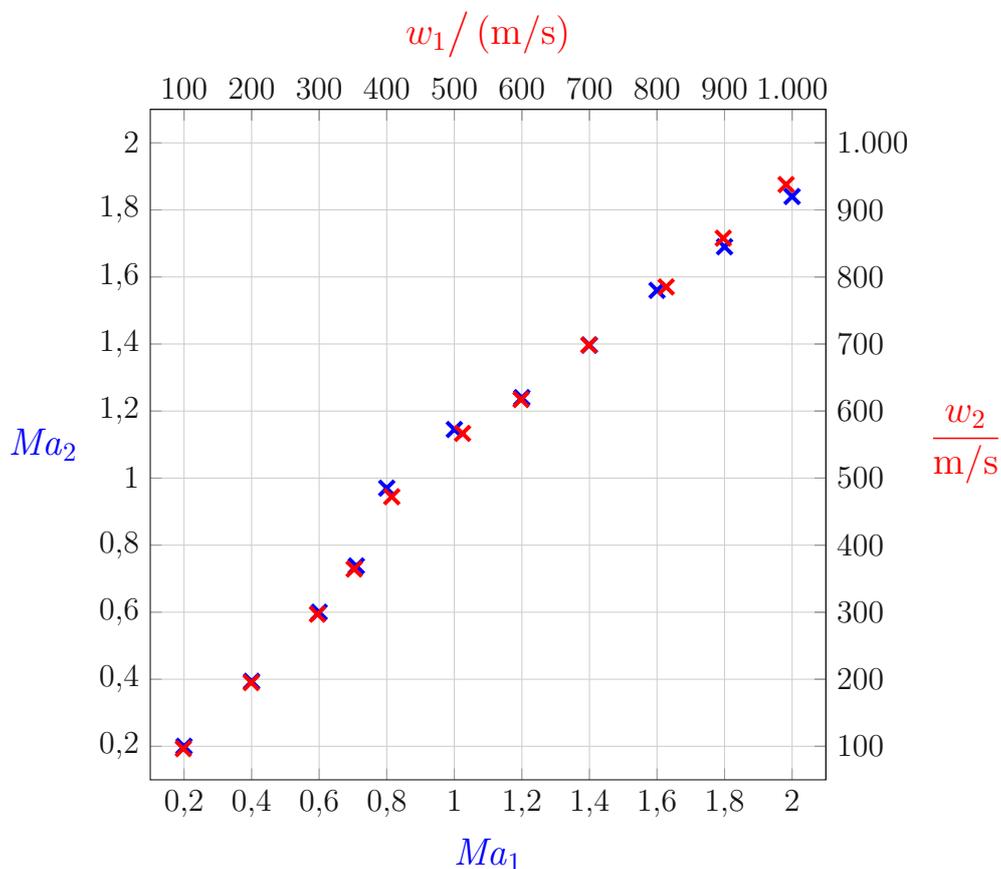
**Abbildung 5.2:** Maximale Geschwindigkeit bei  $x = 0$  m an der Saugseite (oben) und an der Druckseite (unten) aus den *CFD*-Ergebnissen (x) und aus dem Potentialwirbel-Modell (x) über die Eintritts-Mach-Zahl.

Die in [6] berechneten Werte stimmen am besten mit dem Potentialwirbel-Modell bei  $Ma_1 = 0,6$  überein. Grundsätzlich sind keine großen Abweichungen zu beobachten. An der Saugseite kommt es, bis auf den Fall mit  $Ma_1 = 0,71 = Ma_{1,SS}^{krit}$ , beim Potentialwirbel-Modell zu höheren Geschwindigkeiten als bei den *CFD*-Ergebnissen. Auf der Druckseite liegen die Geschwindigkeiten aus den *CFD*-Ergebnissen deutlich

über jenen des Potentialwirbel-Modells. Das hergeleitete Potentialwirbel-Modell bietet somit eine einfache und schnelle Berechnungsmethode, um die Strömungsverhältnisse in einem Gleichdruckgitter überschlägig abschätzen zu können.

In der weiteren Diskussion der Ergebnisse wird nicht mehr auf das Potentialwirbel-Modell Bezug genommen. Die CFD-Ergebnisse werden interpretiert und gegebenenfalls mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen.

In Abb. 5.3 werden die Eintritts- und die Austritts-Mach-Zahl und die Eintritts- und Austrittsgeschwindigkeit gegenübergestellt. Daraus können Rückschlüsse auf das globale Verhalten der Strömung im Gitter gezogen werden.

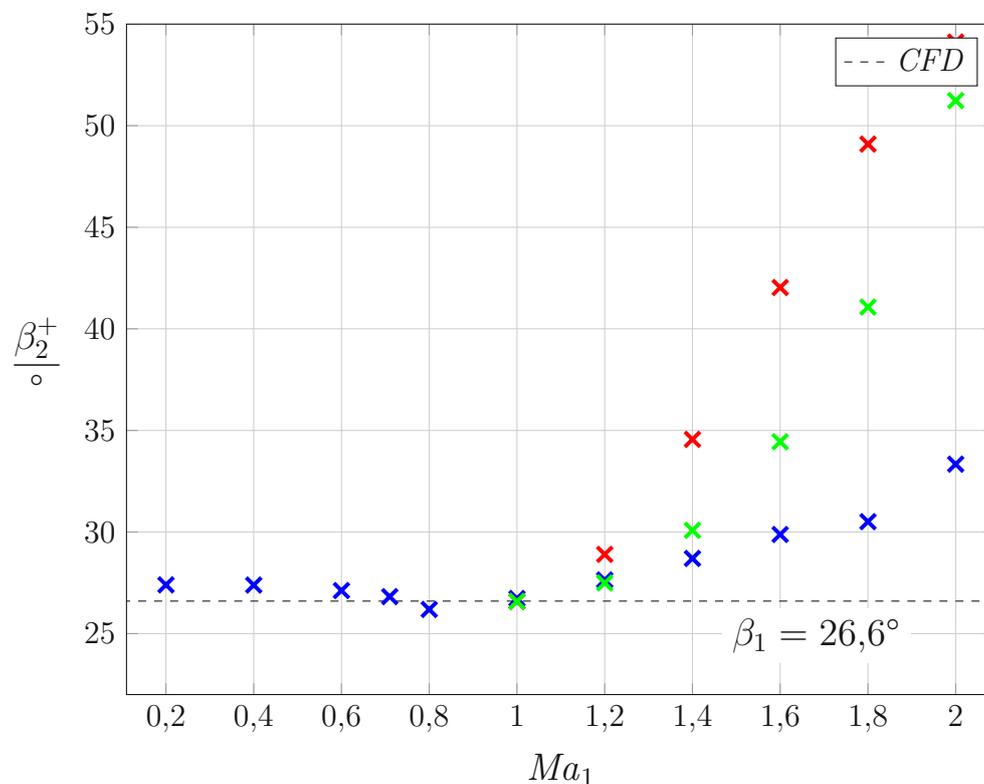


**Abbildung 5.3:** Mach-Zahlen und Geschwindigkeiten am Ein- und Austritt zur Bewertung des globalen Verhaltens der Gitterströmung.

Es sind deshalb Mach-Zahl und Geschwindigkeit aufgetragen, da die Austritts-Mach-Zahl von der Wurzel der statischen Temperatur am Austritt abhängig ist und diese bei den simulierten Fällen variieren kann. Bis zur kritischen Anström-

Mach-Zahl der Saugseite  $Ma_1 = 0,71 = Ma_{1,SS}^{krit}$  steigen sowohl die Mach-Zahlen als auch die Geschwindigkeiten linear mit einer Steigung  $k = 1$  an. Bis hier kann von einem Reaktionsgrad von ca.  $R_k = 0$  gesprochen werden. Bei den Eintritts-Mach-Zahlen  $Ma_1 = 0,8$  bis  $1,2$  liegt global gesehen eine beschleunigte Strömung vor. Bei  $Ma_1 = 1,4$  sind Mach-Zahlen und Geschwindigkeiten am Ein- bzw. Austritt wieder gleich groß. Darüber hinaus liegt wiederum eine verzögerte Strömung vor.

Das globale Verhalten hängt stark von den Konfigurationen der Verdichtungsstöße und Expansionswellen im Gitterkanal ab und kann unter anderem auch durch den Verlauf des Abströmwinkels  $\beta_2^+$  in Abb. 5.4 erklärt werden. Der Zuströmwinkel wird mit einer horizontalen gestrichelten Linie gekennzeichnet.



**Abbildung 5.4:** Abströmwinkel aus den *CFD*-Ergebnissen ( $\times$ ) und mit der Theorie der Strahlablenkung von Gretler ( $\times$ ) und Baer ( $\times$ ) über die Eintritts-Mach-Zahl.

Bei den *CFD*-Ergebnissen liegt zu Beginn eine Minderumlenkung bzgl.  $\beta_2^+$  vor, welche jedoch bis zur kritischen Eintritts-Mach-Zahl  $Ma_{1,SS}^{krit}$  abnimmt. Bei  $Ma_1 = 0,8$  kommt es zu einer Mehrumlenkung. Ab  $Ma_1 = 1$  stiegen die Abströmwinkel stark mit der Eintritts-Mach-Zahl an. In [23] wird angedeutet, dass auch die Theorie der Strahlablenkung ohne weiteres auf ein Gleichdruckgitter angewandt werden

darf. Daher wurde der Ansatz zur Strahlablenkung von *W. Gretler*

$$\beta_2^+ = \beta_1 + \arctan \left[ -\frac{1}{\kappa - 1} \frac{p_2}{p^*} \frac{1}{Ma_1^2 C} \cot(\beta_1) \right. \\ \left. + \sqrt{\left( \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p_2}{p^*} \frac{1}{Ma_1^2 C} \cot(\beta_1) \right)^2 - 1 + \frac{1}{C^2} - \frac{2}{\kappa - 1} \frac{1}{Ma_1^2 C^2} \left( \frac{p_2}{p^*} C - 1 \right)} \right] \quad (5.2)$$

mit

$$C = 1 + \frac{1}{\kappa Ma_1^2} \left( 1 - \frac{p_2}{p^*} \right) \quad (5.3)$$

und mit

$$\frac{p_2}{p^*} = \left[ \frac{\kappa + 1}{2 + (\kappa - 1) Ma_1^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (5.4)$$

und der Ansatz von *H. Baer*

$$\beta_2^+ = \arcsin \left\{ \frac{\sin(\beta_1)}{\sqrt{\left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{2}{\kappa - 1}} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_{t1}} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left( \frac{p_2}{p_{t1}} \right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa}} \right]}} \right\} \quad (5.5)$$

mit

$$\frac{p_2}{p_{t1}} = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma_1^2 \right)^{\frac{\kappa}{1 - \kappa}} \quad (5.6)$$

aus [15], ebenfalls den anderen Ergebnissen gegenübergestellt. Beide Theorien liefern bei  $Ma_1 = 1$  und  $Ma_1 = 1,2$  gute Übereinstimmung mit den *CFD*-Ergebnissen. Bei höheren Eintritts-Mach-Zahlen und somit bei kleineren Druckverhältnissen  $p_2/p_{t1}$ , steigen die Abströmwinkel stark an und weichen deutlich von den *CFD*-Ergebnissen ab. Die Theorie nach *Gretler* zeigt einen steileren Anstieg als jene von

*Baer*, wobei der Verlauf bei hohen Eintritts-Mach-Zahlen wieder leicht abflacht. Die Umlenkungseigenschaften im Überschallbereich werden durch den Effekt der Strahlablenkung demnach nicht präzise wiedergegeben.

Die Verteilung des statischen Drucks entlang der Wände des Strömungskanals ist ebenso von großer Bedeutung, gerade auch im Hinblick auf die Arbeitsumsetzung der Turbine. Die Differenz der integralen Druckverteilung an Saug- und Druckseite ist gleichzusetzen mit der resultierenden Umfangskraft und somit direkt proportional zum Umfangsdrehmoment. Bei hohen Mach-Zahlen ist es jedoch üblich, statt der Verteilung des Druckes, die sog. isentrope Mach-Zahl anzugeben. Durch die Haftbedingung ist die Geschwindigkeit an den Wänden zwar stets Null, jedoch kann mit der Beziehung

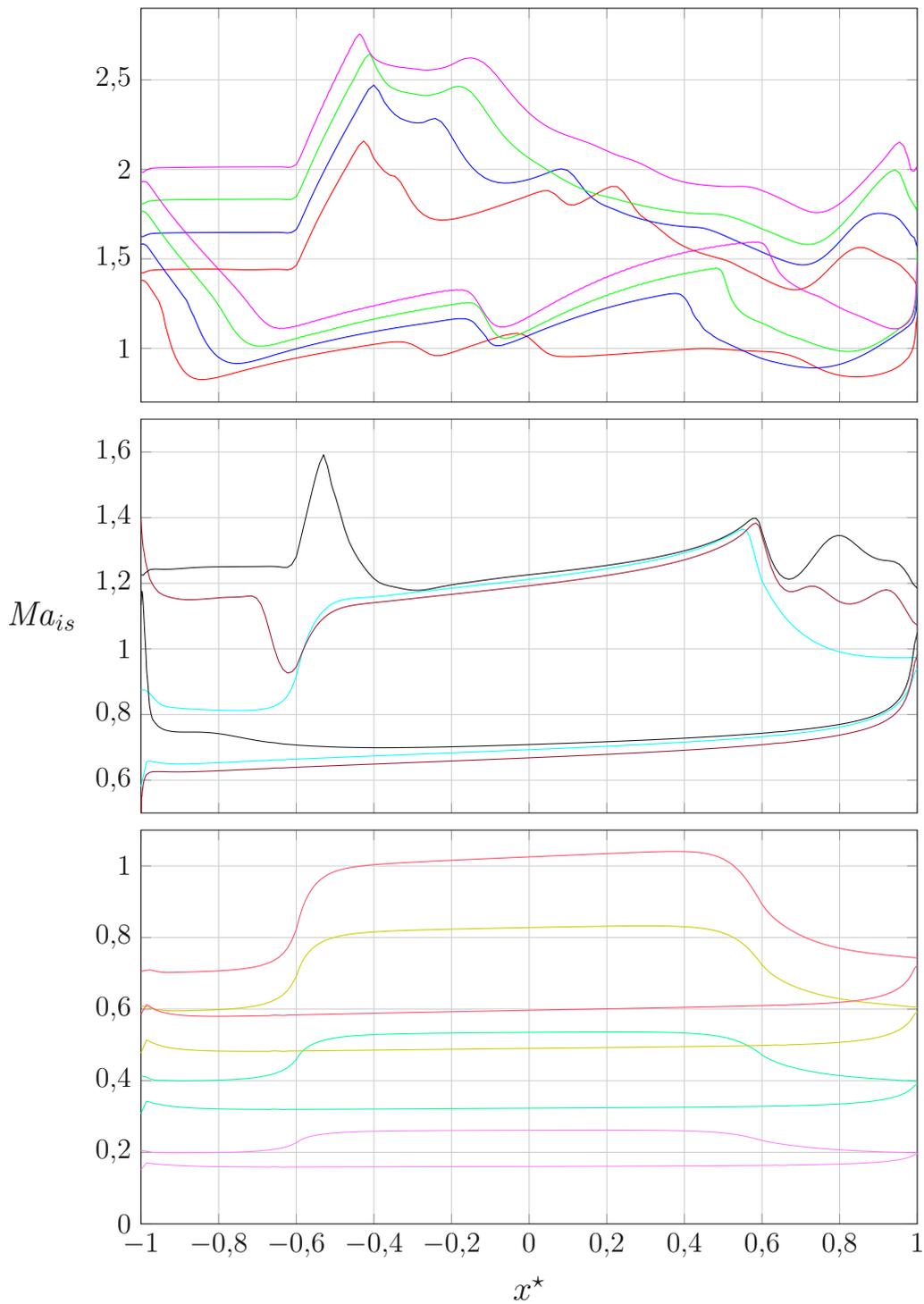
$$Ma_{is} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{p}{p_{t1}} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right]} \quad (5.7)$$

eine Mach-Zahl errechnet werden, welche außerhalb der Grenzschicht bei einer isentropen Expansion von  $p_{t1}$  auf  $p$ , auftreten würde. Die Verläufe der isentropen Mach-Zahl entlang der Kanalwände der simulierten Fälle sind in Abb. 5.5 über die dimensionslose axiale Koordinate

$$x^* = \frac{x}{b/2} \quad (5.8)$$

dargestellt. Bei  $x^* = -1$  befindet man sich an der Vorderkante und bei  $x^* = 1$  an der Hinterkante der Schaufel. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden die Verläufe in drei separate Diagramme aufgeteilt. Für eine gewisse Eintritts-Mach-Zahl ist die Kurve mit erhöhter Geschwindigkeit entlang der Saugseite der Turbinenschaufel zu verstehen. Die Kurve mit geringeren Geschwindigkeiten ist der Druckseite zuzuordnen. Eine z.B. Geschwindigkeitszunahme ist laut der Bernoulli-Gleichung, unter Vernachlässigung von Verlusttermen und der Erdgravitation, gleichbedeutend mit einer Druckabnahme und umgekehrt. Für eine bessere Verständlichkeit der Verläufe bietet es sich an, immer einen zusätzlichen Blick auf die dazugehörigen Konturzeichnungen im Anhang A zu werfen.

Bis zur kritischen Anström-Mach-Zahl der Saugseite  $Ma_1 = 0,71 = Ma_{1,SS}^{krit}$  sind glatte und kontinuierliche Verläufe und keine gasdynamischen Effekte zu beobachten, siehe Abb. 5.5 (unten). Je größer die Eintritts-Mach-Zahl, desto größer wird auch



**Abbildung 5.5:** Isentrope Mach-Zahl-Verteilung an den Kanalwänden über die dimensionslose axiale Koordinate  $x^*$  mit  $Ma_1 = 0,2/0,4/0,6/0,71/0,8/1,0/1,2/1,4/1,6/1,8/2,0$ .

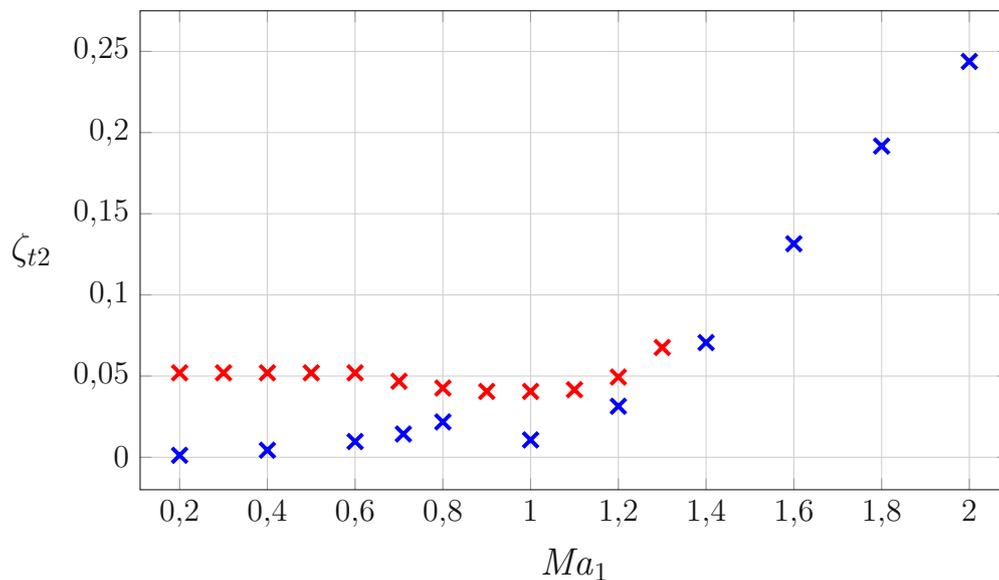
die eingeschlossene Fläche zwischen den Kurven. Bei  $Ma_1 = 1$  tritt erstmals ein Verdichtungsstoß nahezu gerader Form am flachen Stück der Saugseite auf. Beim geraden Stoß steigt der Druck an und die Geschwindigkeit sinkt in den Unterschallbereich ab, wie man es auch in Abb. 5.5 (mitte) erkennen kann. Ab einer Eintritts-Mach-Zahl von  $Ma_1 = 1,2$  bildet sich ein schiefer Verdichtungsstoß im Kanal. Die Druckseite kann als Abfolge kleiner Rampen gesehen werden, wodurch es zu einer Reihe an Verdichtungsstößen kommt. Der Übergang vom geraden Stück der Saugseite zum konvexen Kreisbogensegment bei  $x^* = -0,6$  ruft, im Sinne einer Prandtl-Meyer-Expansion, eine Beschleunigung der Strömung hervor. Im Wandbereich sinkt der Druck deshalb vor dem Stoß zunächst ab, wobei dieser nach dem Stoß wieder ansteigt. Bei einer Krümmungsänderung kommt es ganz allgemein immer zu Druckänderungen an den Kanalwänden und somit auch zu Änderungen der isentropen Mach-Zahl, wie es auch bei der Mündung des Kreisbogens in das gerade Stück bei  $x^* = 0,6$  zu beobachten ist. An der Hinterkante der Schaufel treten ebenfalls Stöße auf, welche sich in der Mach-Zahl-Verteilung bemerkbar machen. Steigert man die Eintritts-Mach-Zahl weiter, so beobachtet man quasi willkürliche Mach-Zahl-Verläufe, die von den komplizierten Stoßkonfigurationen im Kanal ausgehen. Darüber hinaus wird zusätzlich die Mach-Zahl-Verteilung an der Druckseite von den Verdichtungsstößen beeinflusst. Durch die Abfolge von Stößen wird die isentrope Mach-Zahl anfänglich kontinuierlich abgesenkt. Der Stoß an der Hinterkante nimmt deutlich an Stärke zu. Es ist unschwer zu erkennen, dass die hier gezeigten Verläufe alles andere als optimal sind. Aus diesem Grund sind Turbinengitter mit organisierter Strömung aus Verdichtungsstößen und Expansionswellen zu bevorzugen.

Bei den meisten Verläufen ist des Weiteren zu beobachten, dass an der Spitze der Vorderkante, also bei  $x^* = -1$ , der Wert der isentropen Mach-Zahl an Druck- und Saugseite nicht gleich groß ist. Der Grund dafür ist, dass hier die Daten aus dem Zentrum der Zellen und nicht jene der Zellknoten exportiert wurden. Das bewirkt jedoch keine maßgeblichen Veränderungen für die Verläufe an den Kanalwänden. Werte in Zellknoten existieren im Sinne der Finiten-Volumen-Methode eigentlich nicht. Es handelt sich dabei um interpolierte Werte der benachbarten Zellen.

Das Auftreten von gasdynamischen Effekten zieht nicht nur unkontrollierte Druckverläufe an den Kanalwänden nach sich, sondern ruft ebenso erhöhte Profilverluste hervor. In Abb. 5.6 ist der Totaldruckverlustbeiwert (Gl. (4.13))

$$\zeta_{t2} = \frac{p_{t1} - p_{t2}}{p_{t1} - p_2}$$

über die Eintritts-Mach-Zahlen als Maß für die Profilverluste aufgetragen. Im Bereich  $Ma_1 = 0,2$  bis  $0,8$  der *CFD*-Ergebnisse steigen die Verluste zunächst an, wobei diese bei  $Ma_1 = 1$  wieder leicht abfallen. Im Bereich der Überschallanströmung wachsen die Verluste rasant an. Beim Auftreten von Verdichtungsstößen erhöht sich die Entropie, womit nicht mehr von einer isentropen Zustandsänderung gesprochen werden kann. Durch die im Allgemeinen polytrop ablaufende Zustandsänderung steigen die Verluste stark an. Die erhöhten Verluste sind laut [17] ebenso ein Grund für die wachsende Minderumlenkung bei Überschallanströmung. Des Weiteren sind in Abb. 5.6 noch andere Datenpunkte aus [23] angegeben. Der qualitative Verlauf ist sehr ähnlich zu den *CFD*-Ergebnissen. Anfangs liegt ein konstanter Profilverlust vor, der dann aber auch leicht absinkt. Danach stiegen die Profilverluste wie auch bei den *CFD*-Ergebnissen an. Die Ergebnisse aus [23] beruhen auf empirischen Daten. Eine mögliche Erklärung für die erhöhten Verluste ist die endliche Hinterkantendicke bei realen Turbinenschaufeln.



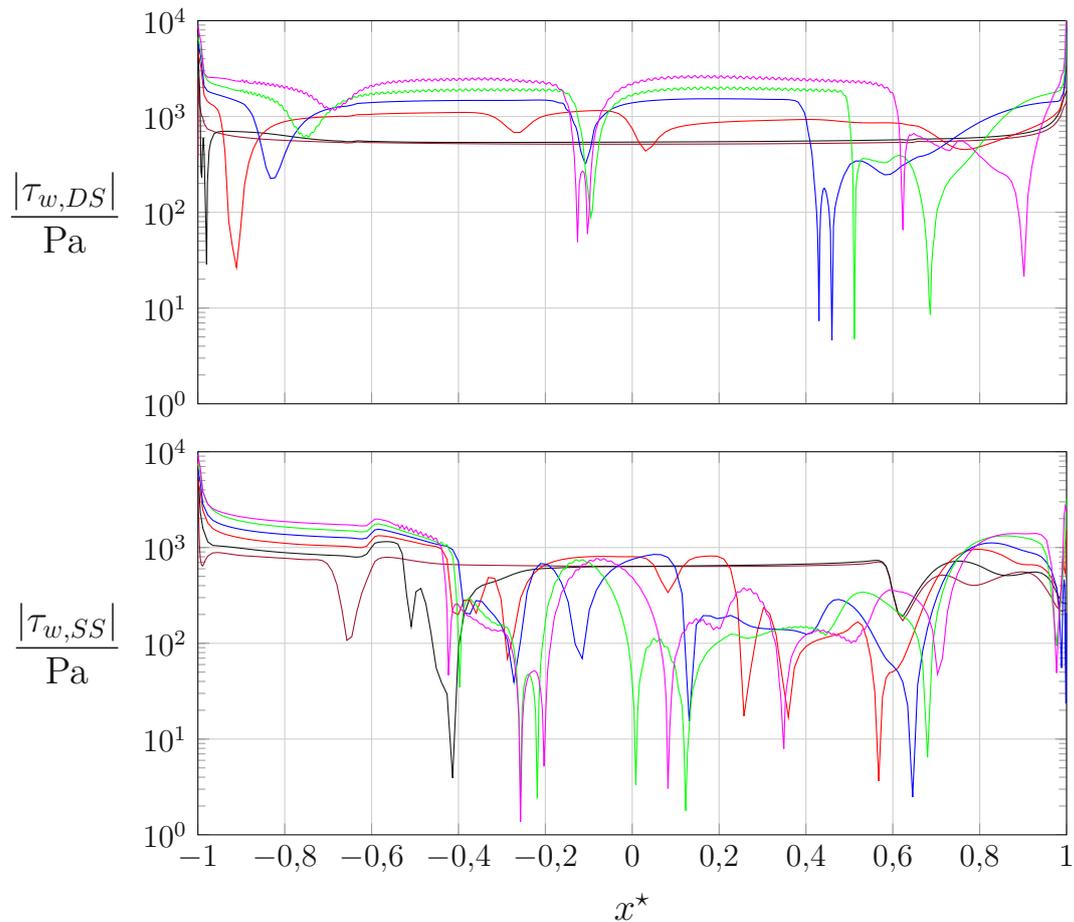
**Abbildung 5.6:** Totaldruckverlustbeiwert aus den *CFD*-Ergebnissen (×) und empirisch aus [23] (×) über die Eintritts-Mach-Zahl.

Das Ansteigen der Verluste hängt nicht nur mit den Verdichtungsstößen selbst zusammen, sondern auch mit deren Interaktion mit der Grenzschichtströmung. Wie schon in Abschn. 2.2.1 besprochen, können dabei Ablöseerscheinungen auftreten.

In den Abb. A.1h bis A.1k im Anhang A ist dieser Effekt an den dunkelblauen Bereichen an der Saugseite der Schaufel zu beobachten. Je höher die Eintritts-Mach-Zahl wird, desto größer werden die Rezirkulationsgebiete. Grundsätzlich kann eine stark verzögerte Strömung auch ohne Stöße Ablösungen bewirken, wie es z.B. in Abb. A.1e am hinteren Teil der Saugseite zu erkennen ist. Das Ablösegebiet wird bei  $Ma_1 = 1$  durch die Veränderung der Profildruckverteilung wieder kleiner, was auch den kleinen Abfall der Profilverluste erklären würde. Die Verkleinerung des Ablösegebiets wirkt sich also positiver auf die Profilverluste aus, als sich der nicht isentrope Eintrittsstoß negativ auswirkt. Gerade Stöße mit einer Mach-Zahl  $Ma < 1,3$  vor dem Stoß rufen grundsätzlich keine großen Verluste hervor. Auch bei höheren Eintritts-Mach-Zahlen kommt es zu einem starken Abfall der isentropen Mach-Zahl nach den Saugspitzen, welcher die Ablöseerscheinungen zusätzlich begünstigt. Um herauszufinden, wo Ablösungen auftreten, eignet sich ein Blick auf den Verlauf der Wandschubspannung. An gekrümmten Wänden sind die kartesischen Wandschubspannungskomponenten jedoch nicht aussagekräftig. Daher wird, auch wie in Abb. 5.7, auf den Betrag der Wandschubspannungen zurückgegriffen. Die Wandschubspannung ist dabei im logarithmischen Maßstab dargestellt. Für eine Ablösung sollte der Betrag der Wandschubspannung theoretisch gesehen gleich Null werden. Dieser Wert wird jedoch in Ergebnissen von *CFD*-Simulationen nie erreicht werden. Daher kann man bei einer Absenkung der Wandschubspannung um einige Größenordnungen eine Ablösung der Strömung annehmen. Eine kleine Absenkung der Wandschubspannung, wie z.B. an der Saugseite für  $Ma_1 = 1$  bei ca.  $x^* = -0,65$  induziert durch den Eintrittsstoß, bedeutet noch nicht, dass die Strömung dort ablöst. Jedoch kann bereits von einer Aufdickung der Grenzschicht nach dem Stoß ausgegangen werden. Bei  $Ma_1 = 1,2$  tritt erstmals eine Ablösung auf, wobei sich die Strömung danach wieder an die Wand der Saugseite anlegt. Bei weiterer Erhöhung der Eintritts-Mach-Zahl treten aufgrund der komplizierten Stoßsysteme mehrere Minima der Wandschubspannung an der Saug- aber auch an der Druckseite auf. All diese Ablösungen wirken sich negativ auf die Profilverluste aus.

Hinter dem Gitter ist das gesamte Strömungsfeld von einem Maschenschema von sich kreuzenden Verdichtungsstößen bzw. Expansionswellen durchsetzt, das praktisch einer homogenen Abströmung entspricht.

Zu guter Letzt sollen noch die Stoßkonfigurationen im Strömungskanal mit Ergebnissen aus Versuchen aus der Literatur verglichen werden. Um Verdichtungsstöße und Expansionswellen im experimentellen Versuch sichtbar zu machen, eignet sich



**Abbildung 5.7:** Wandschubspannung an der Druckseite (oben) und an der Saugseite (unten) über die dimensionslose axiale Koordinate  $x^*$  mit  $Ma_1 = 1,0/1,2/1,4/1,6/1,8/2,0$ .

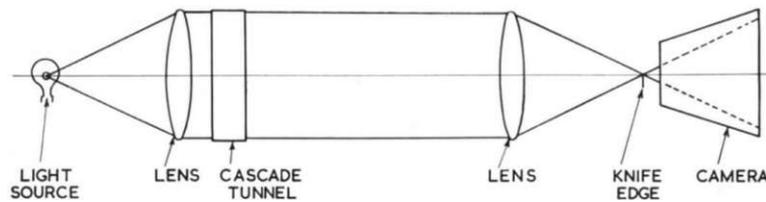
die sog. Schlierenfotografie. Diese macht sich den Umstand zunutze, dass sich der Brechungsindex eines Gases mit dessen Dichte ändert. Durch einen geeigneten Versuchsaufbau lassen sich dann auf einer Bildebene die Dichtegradienten in Graustufen darstellen, wie in Abb. 5.8 zu erkennen. Detailliertere Informationen zum Schlierenmessverfahren findet man in [22] und [18]. Obwohl das Verfahren sehr anschauliche Bilder über die Dichteverteilung in der Strömung liefert, wird es heute weitgehend durch die „Laser-2Fokus-Anemometrie“ und die „Particle-Image Velocimetry“ abgelöst.

Um gasdynamische Effekte bei *CFD*-Ergebnissen darstellen zu können, wird das sog. numerische Schlierenbild verwendet. Es kann gezeigt werden, dass die Spur des Dehnratentensors

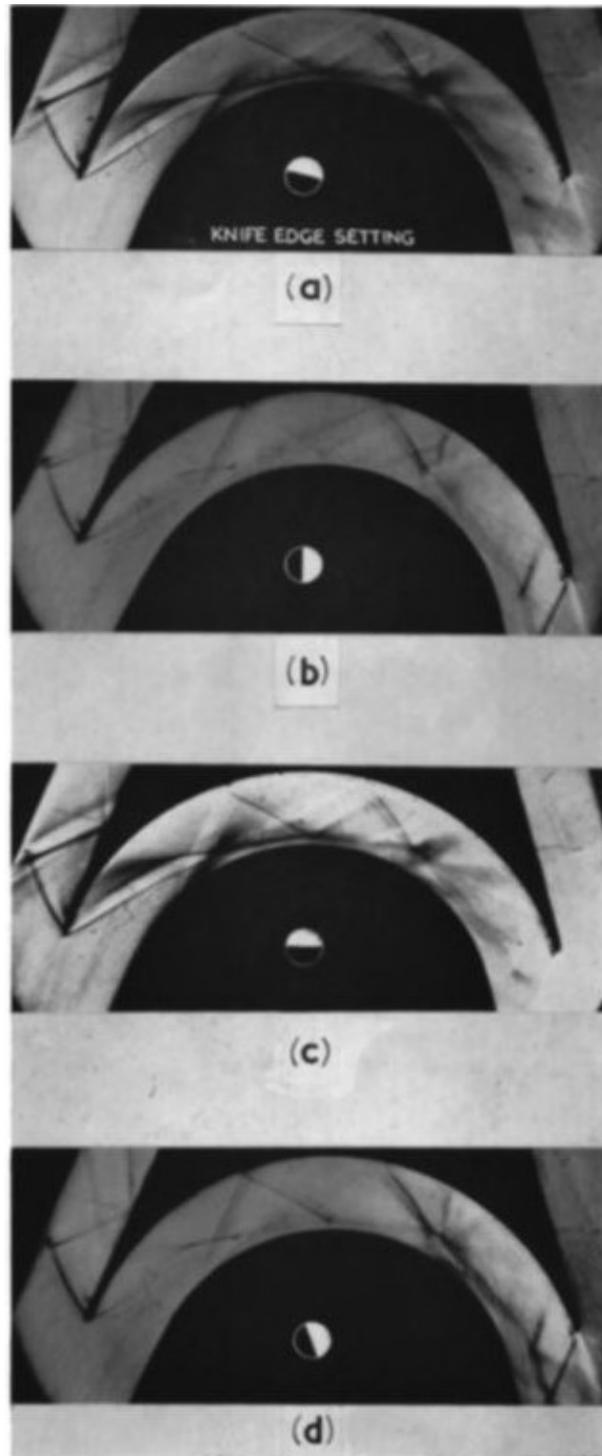
$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \left[ \nabla \vec{w} + (\nabla \vec{w})^T \right] \quad (5.9)$$

direkt von der Dichte selbst, aber auch von der Dichteänderung abhängt. Die Konturzeichnungen der Dehnrate sind in den Abb. A.3 zu sehen.

In [20] wurden Schlierenbilder bei Überschallgleichdruckturbinengittern mit  $Ma_1 = 1,9$  angefertigt, wie in Abb. 5.9 dargestellt. Es handelt sich dabei um ein ähnliches Turbinenprofil mit konstantem Kanalquerschnitt. Da der Schlieren-Versuchsaufbau nur empfindlich gegenüber Dichteänderungen normal zur Schlierenkante („*knife edge*“) ist, wurde durch unterschiedliche Einstellungen der Schlierenkante („*knife edge setting*“) der Kontrast der Bilder verändert. Die Versuchsergebnisse zeigen eine deutliche Ähnlichkeit mit jenen Ergebnissen der *CFD*-Simulationen. Der schiefe Verdichtungsstoß über die gesamte Kanalbreite am Eintritt, aber auch die Abfolge kleiner Stöße am Beginn der Druckseite sind erkennbar. In den Schlierenaufnahmen sowie in den *CFD*-Ergebnissen sind des Weiteren Verdichtungsstöße zu erkennen, welche an der Druckseite reflektiert werden. Zusammen bilden diese zwei spitz zulaufende Konturen. Die Position dieser Stoßsysteme ist in beiden Fällen jedoch, aufgrund der unterschiedlichen Geometrie, etwas voneinander abweichend. Die Stöße an der Hinterkante des Profils sind in den experimentellen Schlierenbildern nicht allzu gut erkennbar.



**Abbildung 5.8:** Schematischer Versuchsaufbau der Schlierenfotografie, siehe [20].



**Abbildung 5.9:** Schlierenaufnahmen bei  $Ma_1 = 1,9$  mit unterschiedlichen Einstellungen der Schlierenkante, siehe [20].

# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit hat sich damit beschäftigt, den Mach-Zahl-Einfluss auf Gleichdruckturbinengitter zu untersuchen. In der anfänglich erarbeiteten Literaturrecherche konnte ein guter Überblick über Gleichdruckgitter bei Überschallanströmung gewonnen werden. Auch die speziellen konstruktiven Maßnahmen, die für einen effizienten Betrieb bei solchen Bedingungen notwendig sind, wurden erörtert. Die Untersuchungen wurden mittels *CFD*, aber auch mit einem eigens entwickelten Potentialwirbel-Modell durchgeführt. Dieses Modell soll als eine einfache und schnelle Abschätzungsmethode des Strömungsfeldes bei verschiedenen Anström-Mach-Zahlen dienen. Durch geeignete Anwendung verschiedener Erhaltungsgleichungen und Ansätze konnte schlussendlich eine Bestimmungsgleichung hergeleitet werden, aus welcher durch numerisches Lösen die Verläufe von Geschwindigkeit, Temperatur und Dichte über die Kanalhöhe bestimmt werden können. Da die Potentialtheorie keine viskosen Kräfte miteinbezieht, kann der Reibungseinfluss einer realen Strömung durch dieses Modell nicht berücksichtigt werden, was eine große Näherung darstellt. Hauptaufgabe war es jedoch, die Strömung durch das Turbinengitter mittels *CFD* im Sinne von *RANS* zu simulieren. Es wurde ein Eintritts-Mach-Zahl-Bereich von  $Ma_1 = 0,2$  bis 2 abgedeckt. Ein sog. Durchströmigitter mit blockstrukturierter Vernetzung diente als Simulationsgebiet. Eine Netzabhängigkeit der Lösung konnte ausgeschlossen werden. Als Strömungsmedium diente überhitzter Wasserdampf, modelliert als ideales Gas mit konstanter spez. Wärmekapazität und Viskosität nach *Sutherland*. Die Turbulenzgrößen wurde nach dem  $k - \omega$  *SST*-Modell bestimmt. Bei höheren Eintritts-Mach-Zahlen wurde eine gradientenbasierende Netzverfeinerungsstrategie verfolgt, um gasdynamische Effekte wie z.B. Verdichtungsstöße besser auflösen zu

können.

Im Ergebnisteil wurden anfänglich die *CFD*-Ergebnisse mit jenen des Potentialwirbel-Modells verglichen. Die Profile der Geschwindigkeit, Temperatur und Dichte wurden am Scheitelpunkt des Kreisbogensegments gegenübergestellt. Ganz allgemein ließ sich eine gute Übereinstimmung beobachten. Durch das Vernachlässigen der Reibungseinflüsse ergaben sich leicht abweichende Verläufe. Das entwickelte Potentialwirbel-Modell kann somit herangezogen werden, um die Strömungsverhältnisse in einem rein umlenkenden Gitterverband mit guter Näherung vorherzusagen. Im Weiteren wurden andere wichtige Strömungsgrößen, wie der Abströmwinkel, der Profilverlust und die Mach-Zahl-Verteilung an den Kanalwänden analysiert und mit theoretischen Ansätzen und experimentellen Ergebnissen verglichen. Qualitativ konnten ähnliche Verläufe beobachtet werden. Durch die spezielle Geometrie und das Auftreten von Verdichtungsstößen und Expansionswellen ist es schwierig, die erhaltenen Ergebnisse quantitativ zu vergleichen.

Schlussendlich muss gesagt werden, dass man *CFD*-Simulationen im Sinne von *RANS* nicht als das Maß aller Dinge sehen darf. Die Ergebnisse sind immer mit Vorsicht zu betrachten, da diese eine näherungsweise Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen darstellen. Es muss somit klar sein, dass die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse nicht der realen Strömung entsprechen. Zur Validierung und Verifizierung der Ergebnisse müssten umfassende experimentelle Untersuchungen durchgeführt werden. Jedoch sollte man die Leistungsfähigkeit von numerischen Strömungssimulationen auch nicht schmälern. In vielen ingenieurmäßigen Entwicklungsphasen und Forschungsbereichen dient *CFD* als wichtiges Werkzeug, welches auch in Zukunft nicht mehr wegzudenken ist.

Die reale Strömung in Turbomaschinen ist grundsätzlich dreidimensional und hochgradig instationär. Die hier durchgeführten Simulationen wurden in einem geraden Schaufelgitter unter Annahme einer homogenen Anströmung durchgeführt. Es besteht jedoch immer eine Beeinflussung der Strömung auf den Rotor vom Stator und umgekehrt (Stator-Rotor-Interaktion). Durch die Nachlaufdüse der Düsengruppe und die Rotation des Laufrades trifft eine zeitlich veränderliche Strömung auf das Laufgitter. Noch dazu kommt, dass Gleichdruckturbinen meistens teilbeaufschlagt arbeiten. Das bedeutet, dass nur auf einem Teil des Umfangs Düsen angeordnet sind. Im Extremfall wird die Turbine lediglich mit einer Düse betrieben. Wird die Turbine zusätzlich nicht an ihrem ausgelegten Arbeitspunkt betrieben, so ist ein stoß- bzw. expansionsfreier Strömungsausstritt aus der Laval-Düse nicht

mehr möglich, was zu weiteren instationären Effekten führt.

Um nochmals auf die eingangs in der Einleitung erwähnte Turbine zurückzukommen, welche nicht die gewünschte Leistung erbrachte: Man sieht recht deutlich, dass eine Vielzahl von Gesichtspunkten Auswirkungen auf das Betriebsverhalten einer Turbine haben können. Die besagte Turbine wurde ganz klar, so wie hier, für den Unterschallbereich entworfen. Das Auftreten von gasdynamischen Effekten und die daraus resultierenden konstruktiven Vorgaben wurden nicht berücksichtigt.

Mit dieser Arbeit wurden erste Schritte gesetzt, um zu verstehen, welche Faktoren bei einer Überschallanströmung von Gleichdruckturbinen eine wichtige Rolle spielen. Durch das gezielte Anwenden eines für Überschallbedingungen nicht geeigneten Profils, konnte man die Schwächen dieses aufzeigen.

Für zukünftige Arbeiten wäre es möglich, sich mit folgenden Themen weiter auseinanderzusetzen:

- Simulation eines für Überschallanströmung geeigneten Gitters, z.B. nach *Oswatitsch*:  
Durch die spezielle Profilierung sollten keine Verdichtungsstöße bzw. Expansionswellen im Strömungskanal auftreten. Interessant wäre auch ein Gitter mit konvergentem Kanalquerschnitt, wie es in [5] vorgeschlagen wird. Vergleiche mit dem Potentialwirbel-Modell wären dann für jede beliebige Anström-Mach-Zahl möglich.
- Untersuchung des Einflusses von endlicher Vorder- und Hinterkantendicke:  
Durch eine endliche Vorderkantendicke entsteht ein abgesetzter Eintrittsstoß mit lokalem Unterschallbereich, welcher mit den Kanalwänden interagiert. Eine endliche Hinterkantendicke bewirkt höhere Verlust und mögliche instationäre Effekte in Form von periodischen Ablösungen. Sowohl der abgesetzte Stoß, als auch die periodische Ablösung (Karman'sche Wirbelstraße) lassen sich auch beim quer angeströmten Zylinder beobachten.
- Entwicklung und Optimierung eines eigenen Gleichdruckprofils mit der Charakteristiken-Methode:  
Das Profil könnte so beschaffen sein, dass es sowohl die Stöße im Strömungskanal aufhebt, als auch die Reflexion des Eintrittsstoßes an der Druckseite verhindert.

- Untersuchung des Einflusses von Fehlanströmung:  
Gerade bei Profilen mit spitzer Vorderkante wirkt sich eine Fehlanströmung ( $\beta_1 \neq \beta_{1m}$ ) stark auf das Verhalten der Strömung aus. Zusätzlich können dabei Auswirkungen der „*unique incidence*“-Regel untersucht werden.
- Simulationen für  $Ma_{1x} > 1$ :  
Bei  $Ma_{1x} > 1$  sollte laut „*unique incidence*“-Regel der Zuströmwinkel wieder unabhängig von der Eintritts-Mach-Zahl wählbar sein.
- Untersuchung des Einflusses der Stator-Rotor-Interaktion:  
Durch die Stator-Rotor-Interaktion treten instationäre Effekte in einer Turbinenstufe auf. In kommerziellen *CFD*-Softwarepaketen gibt es bereits Möglichkeiten die Interaktion zu berücksichtigen.
- Untersuchung der Auswirkung von Kondensation:  
Um möglichst viel Energie aus einer Turbine herauszuholen, wird oft global bis in das Nassdampfgebiet expandiert. Zusätzlich treten auch lokale Druckminima an der Saugseite auf, welche zu einer Kondensation des Dampfes führen. Im Nassdampfgebiet gelten grundsätzlich nicht mehr die Beziehungen eines idealen Gases. In kommerziellen *CFD*-Softwarepaketen sind Wasserdampf tafeln hinterlegt, mit denen eine Kondensation berücksichtigt werden kann. Man spricht dann von einer Mehrphasenströmung.
- Experimentelle Versuche mit Gleichdruckbeschaufelung:  
Soweit dies möglich ist, können Versuche im Windkanal vorgenommen werden und gewonnene Ergebnisse mit den *CFD*-Ergebnissen verglichen werden.

# Literatur

- [1] Angerer, D. Vergleich von zwei- und dreikränzigen Curtis-Turbinen bezüglich Gefälle und Wirkungsgrad, Bachelorarbeit, Technische Universität Wien, Institut für Energietechnik und Thermodynamik, 2013.
- [2] ANSYS Fluent Theory Guide 2021 R1, ANSYS, Inc. 2021.
- [3] ANSYS Fluent User's Guide 2021 R1, ANSYS, Inc. 2021.
- [4] Celik, I. und Karatekin, O. (1997). Numerical Experiments on Application of Richardson Extrapolation With Nonuniform Grids. *Journal of Fluids Engineering* 119, 584–590.
- [5] Dejc, M. E. und Trojanovskij, B. M., *Untersuchung und Berechnung axialer Turbinenstufen*; VEB Verlag Technik Berlin: 1973.
- [6] Hinteregger, M. G. Numerische Simulation der Strömung in einem Gleichdruckturbinengitter, Diplomarbeit, Technische Universität Wien, Institut für Energietechnik und Thermodynamik, 2011.
- [7] Hobbs, D. E. und Weingold, H. D. (1984). Development of Controlled Diffusion Airfoils for Multistage Compressor Application. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 106, 271–278.
- [8] Horlock, J. H., *Axial Flow Turbines, Fluid Mechanics and Thermodynamics*; Butterworths London: 1966.
- [9] Lakshminarayana, B., *Fluid Dynamics and Heat Transfer of Turbomachinery*; John Wiley & Sons, Ltd: 1955.
- [10] Lichtfuss, H. J. und Starken, H. (1974). Supersonic Cascade Interaction. *ASME Paper 74-GT-76*.
- [11] Loimer, T. Angewandte Fluidmechanik, Skriptum zur Vorlesung, Technische Universität Wien, Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung, 2019.

- [12] Ohlsson, G. O. (1964). Supersonic Turbines. *Journal of Engineering for Power* 86, 7–12.
- [13] Oswatitsch, K. (1955). Über die Strömung in einem Überschallgitter. *Allg. Wärmetechnik* 6, 9–11.
- [14] Oswatitsch, K. (1956). Potentialwirbel-Gitter für Überschallgeschwindigkeiten. *Z. f. Flugwissenschaften* 4, 53–58.
- [15] Perissutti, L. C. Vergleich eindimensionaler Verfahren zur Berechnung der Strahlablenkung in axialen Turbinengittern, Diplomarbeit, Technische Universität Wien, Institut für Energietechnik und Thermodynamik, 2012.
- [16] Rashid, S., Tremmel, M., Waggott, J. und Moll, R. (2006). Curtis Stage Nozzle/Rotor Aerodynamic Interaction and the Effect on Stage Performance. *Journal of Turbomachinery* 129, 551–562.
- [17] Scholz, N., *Aerodynamik der Schaufelgitter*; G. Braun Karlsruhe: 1965; Bd. 1.
- [18] Settles, G. S., *Schlieren and Shadowgraph Techniques*, 1. Ed.; Springer Berlin Heidelberg: 2001.
- [19] Startford, B. S. und Sansome, G. E. (1956). The Performance of Supersonic Turbine Nozzles. *R. & M. of Aeronautical Research Council* 3273.
- [20] Startford, B. S. und Sansome, G. E. (1960). Theory and Tunnel Tests of Rotor Blades for Supersonic Turbines. *R. & M. of Aeronautical Research Council* 3275.
- [21] Stodola, A., *Dampf- und Gasturbinen*, 6. Aufl.; Springer-Verlag Berlin Heidelberg: 1924.
- [22] Surek, D. und Stepin, S., *Technische Strömungsmechanik*, 3. Aufl.; Springer Vieweg: 2017.
- [23] Traupel, W., *Thermische Turbomaschinen, Thermodynamisch-strömungstechnische Berechnung*, 3. Aufl.; Springer-Verlag Berlin Heidelberg: 1988; Bd. 1.
- [24] White, F., *Viscous Fluid Flow*, 3. Edition; McGraw Hill: 2006.
- [25] Willinger, R. Numerische Strömungssimulation für ingenieurmäßige Anwendungen, Skriptum zur Vorlesung, Technische Universität Wien, Institut für Energietechnik und Thermodynamik, 2019.
- [26] Zweifel, O. (1945). Die Frage der optimalen Schaufelteilung bei Beschau-felungen von Turbomaschinen, insbesondere bei großer Umlenkung in den Schaufelreihen. *Brown Boveri Mitteilungen* 32, 436–444.

# Anhang A

## Konturzeichnungen

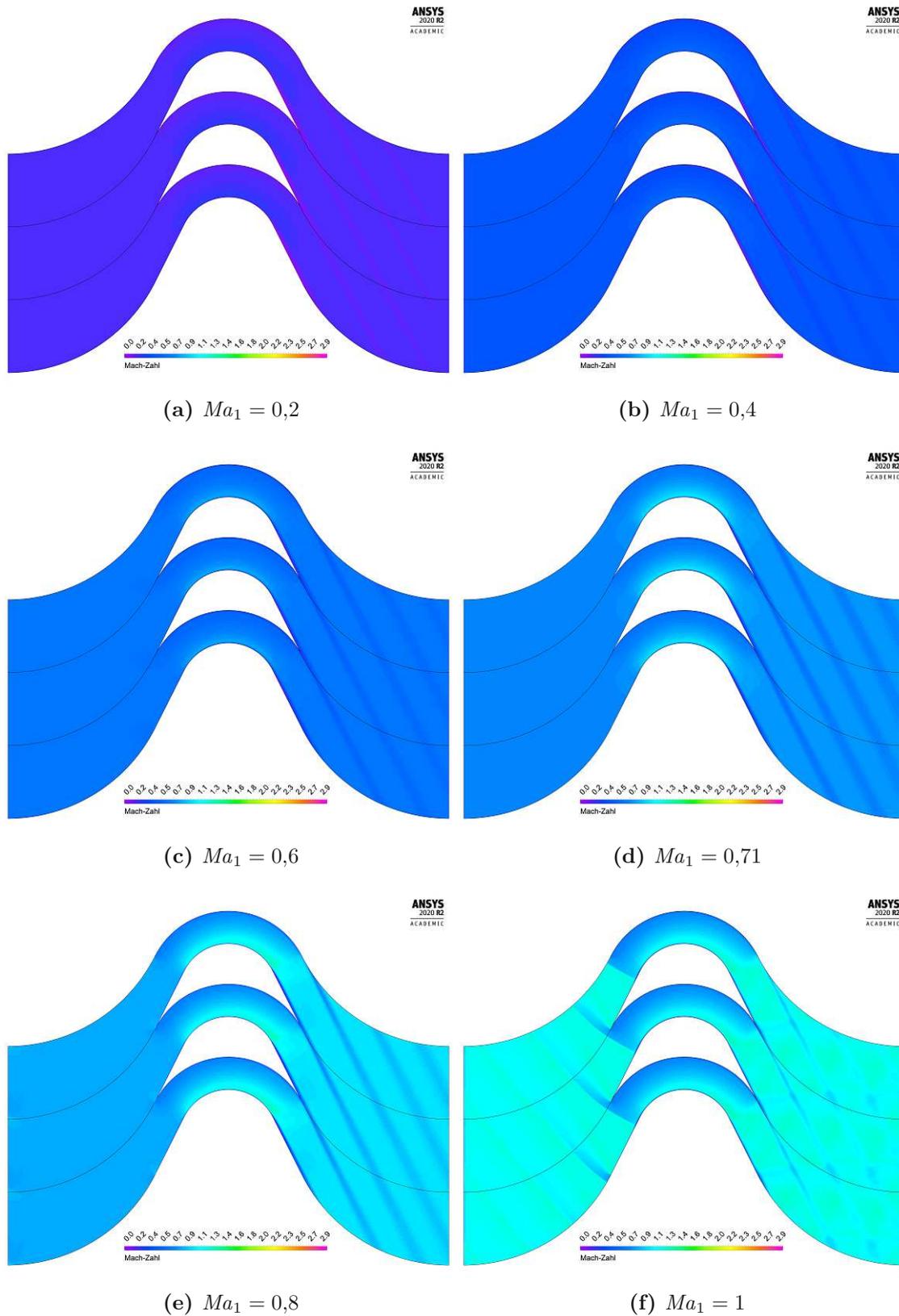


Abbildung A.1: Konturzeichnungen der lokalen Mach-Zahl der simulierten Fälle.

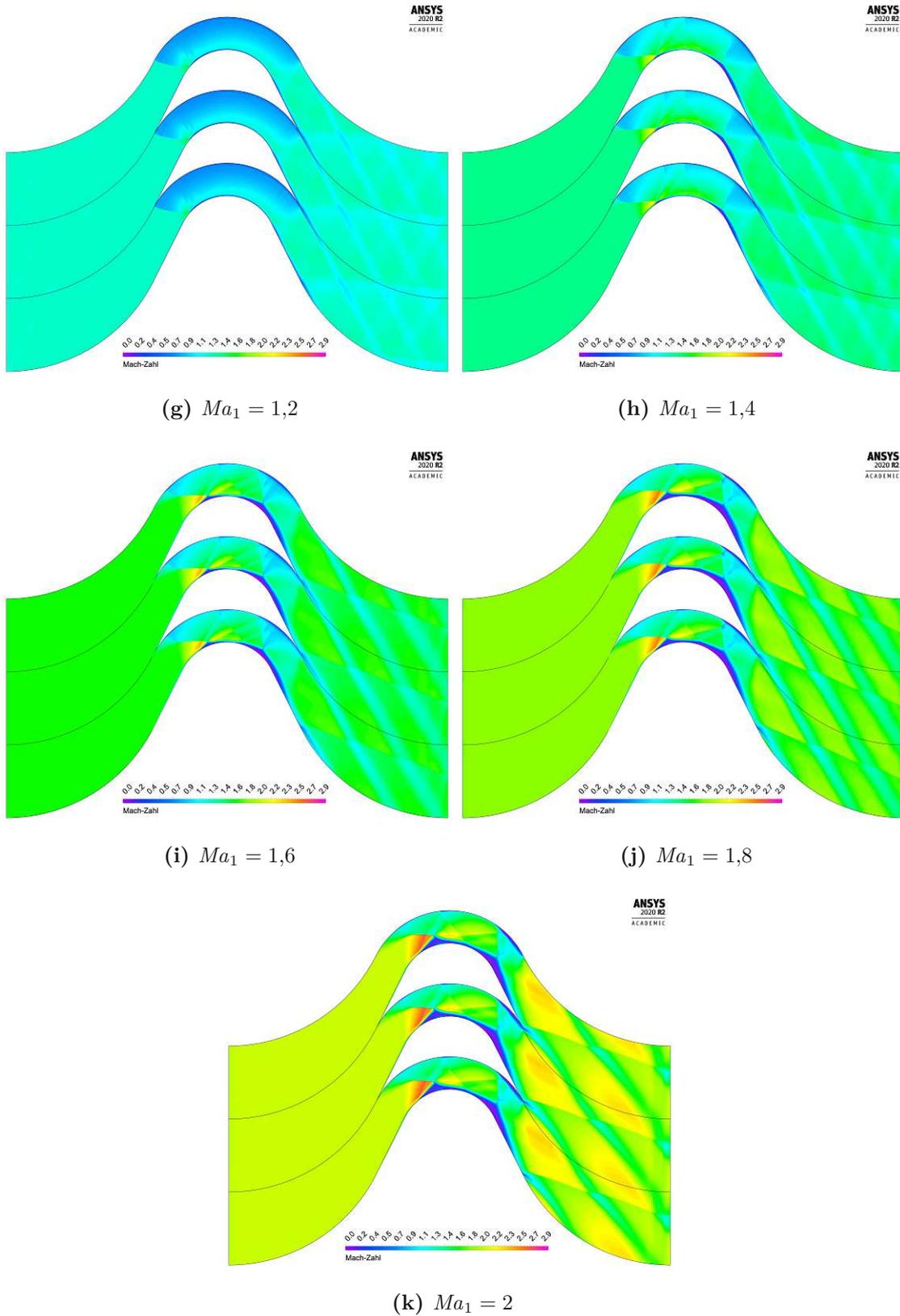


Abbildung A.1: Fortsetzung.

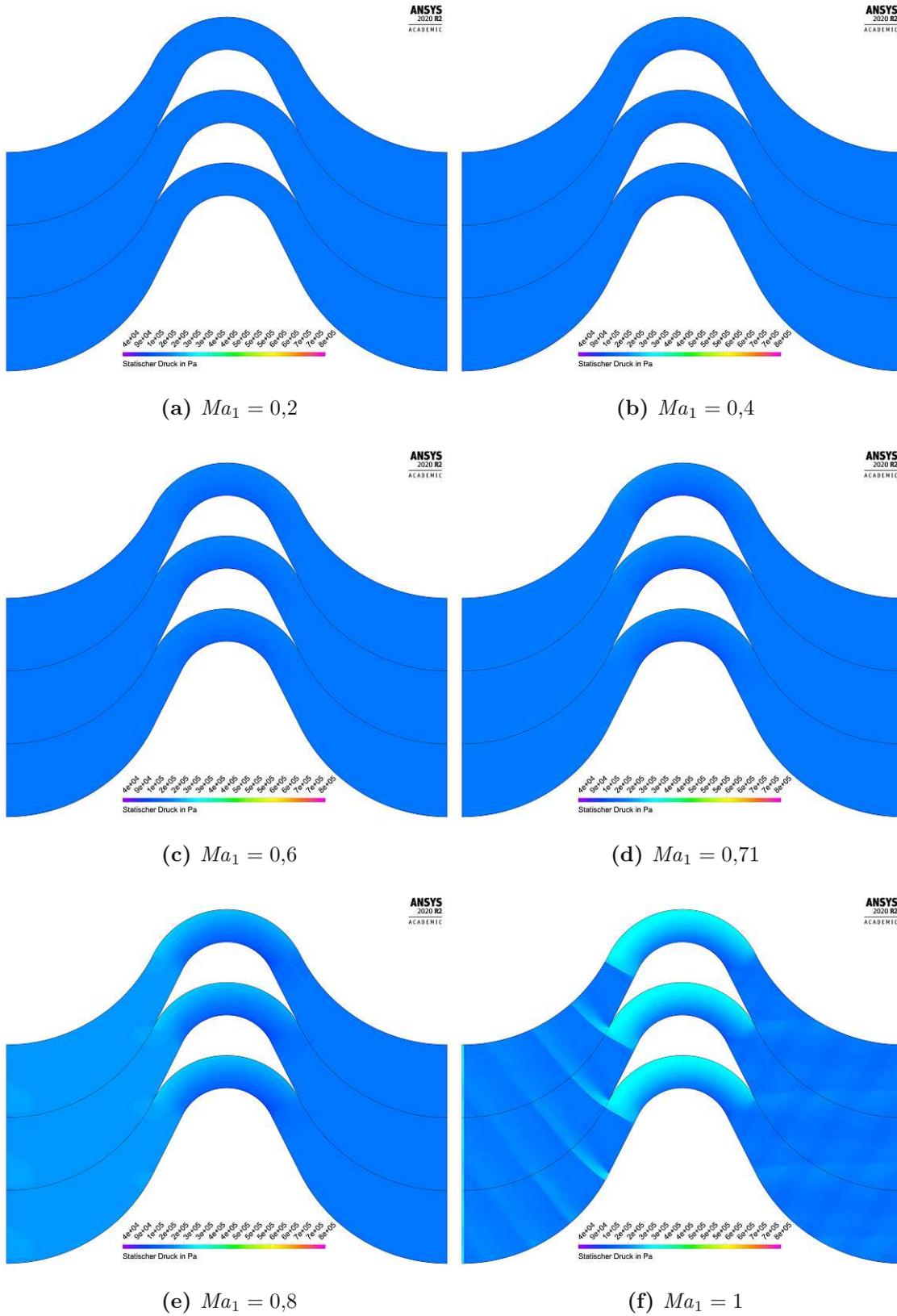


Abbildung A.2: Konturzeichnungen des statischen Drucks der simulierten Fälle.

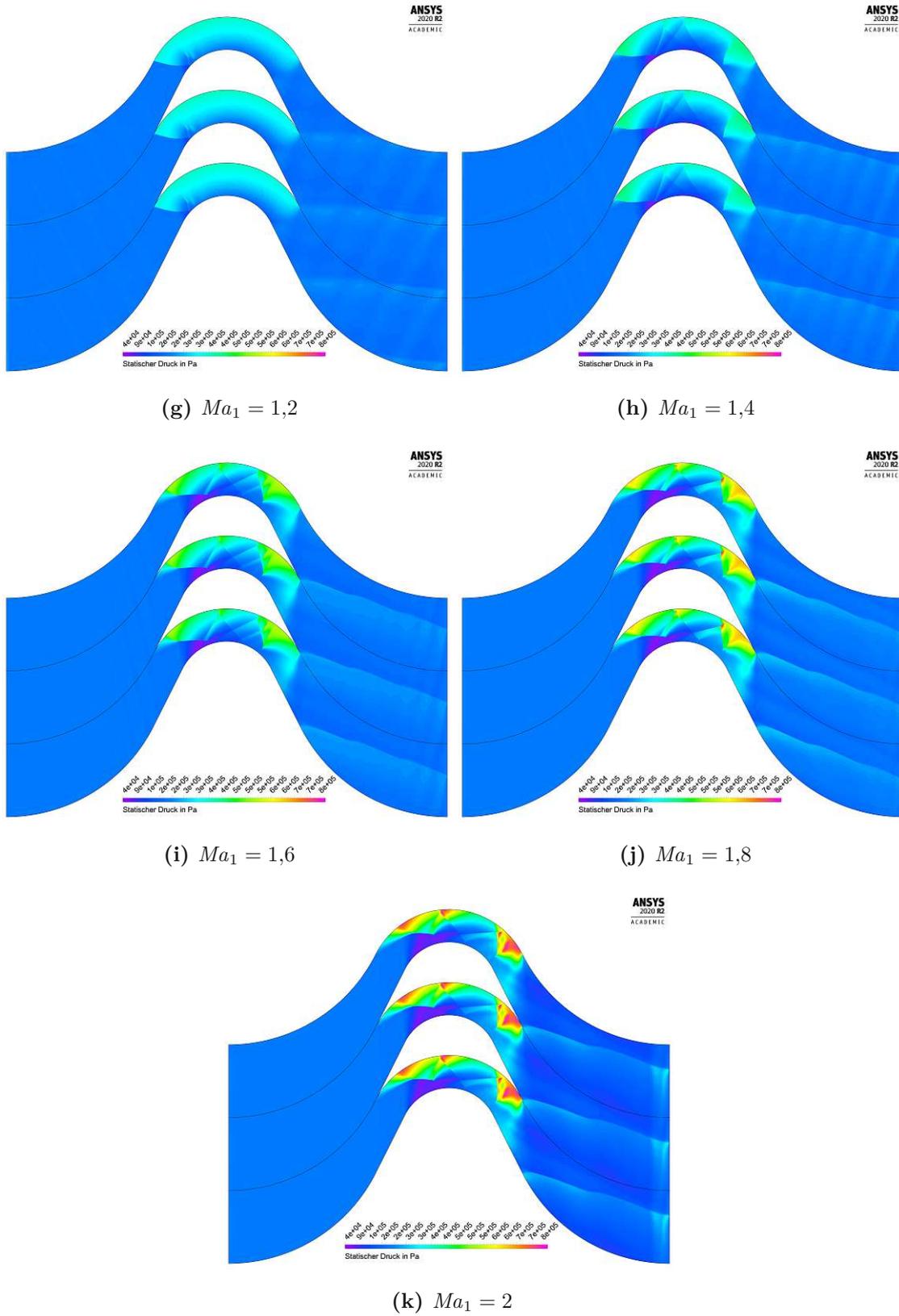


Abbildung A.2: Fortsetzung.

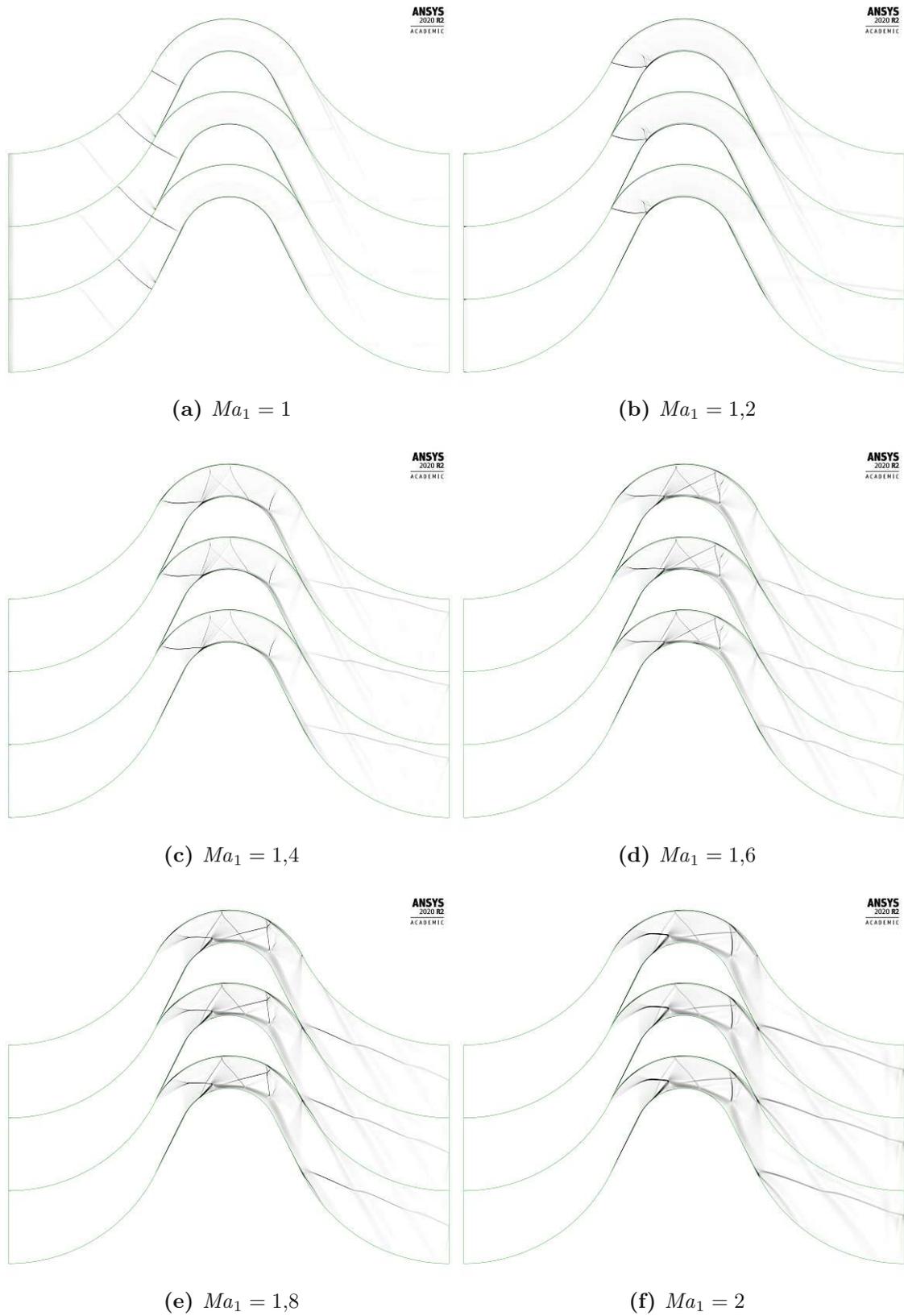


Abbildung A.3: Numerische Schlierenbilder der simulierten Fälle mit  $Ma_1 \geq 1$ .

# Anhang B

## Tabellarische Zusammenfassung der *CFD*-Daten

$Ma_1$	0,2	0,4	0,6	0,71	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$Ma_2$	0,2	0,394	0,6	0,738	0,97	1,14	1,24	1,4	1,56	1,69	1,84
$\max(Ma)$	0,256	0,523	0,808	1	1,32	1,45	1,63	2,23	2,63	2,85	2,97
$w_1$ in m/s	98,9	199	297	352	407	512	598	699	814	898	991
$w_2$ in m/s	96,4	195	297	364	472	567	617	698	785	858	938
$Re_{b1} \cdot 10^{-5}$	1,5	3,03	4,64	5,8	7,43	11,4	10,1	11,6	13,4	14,6	15,8
$Re_{b2} \cdot 10^{-5}$	1,47	2,97	4,55	5,58	7,72	8,55	9,17	10,1	11	11,7	12
$p_{t1}$ in Pa	205400	222500	255000	287000	364470	440000	510000	665000	900000	1200000	1600000
$p_{t2}$ in Pa	204912	220664	250596	280017	352181	433162	487689	603896	755334	931346	1162650
$p_2/p_{t1}$	0,974	0,899	0,784	0,697	0,549	0,455	0,392	0,301	0,222	0,167	0,125
$T_2$ in K	413	414	413	411	401	413	419	422	428	436	440
$T_{t1}$ in K	416	423	434	443	454	491	510	539	576	613	653
$\rho_1$ in kg/m <sup>3</sup>	1,05	1,05	1,07	1,1	1,26	1,59	1,2	1,17	1,14	1,14	1,11
$\rho_2$ in kg/m <sup>3</sup>	1,05	1,05	1,05	1,05	1,08	1,05	1,04	1,02	1,01	1	0,952
$\eta_1$ in Pa s · 10 <sup>5</sup>	1,38	1,38	1,37	1,38	1,38	1,43	1,42	1,41	1,39	1,4	1,39
$\eta_2$ in Pa s · 10 <sup>5</sup>	1,38	1,38	1,37	1,37	1,32	1,38	1,4	1,41	1,44	1,47	1,49
$\dot{m}$ in kg/s	0,465	0,938	1,42	1,73	2,25	2,6	2,95	3,4	3,87	4,3	4,71
$\beta_2^+$ in °	27,4	27,4	27,1	26,8	26,8	26,2	26,7	27,6	29,9	30,5	33,3
$\zeta_{t2} \cdot 10^3$	1,2	4,35	9,68	14,3	21,8	10,7	31,4	70,6	132	192	244

**Tabelle B.1:** Zusammenfassung der Randbedingungen und Ergebnisse der *CFD*-Simulationen. Bei den Ein- bzw. Austrittsgrößen handelt es sich um teilungsgemittelte Werte.