

Mathematische Modellierung und optimale Abstützung eines Großraummanipulators

DIPLOMARBEIT

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs (Dipl.-Ing.)

unter der Leitung von
Associate Prof. Dr.-Ing. W. Kemmetmüller
Dipl.-Ing. M. Meiringer

eingereicht an der
Technischen Universität Wien
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

von
Valentin Platzgummer
Matrikelnummer 1328008

Wien, im Mai 2020

Vorwort

Als ich mich am Anfang meines Studiums für ein Ferialpraktikum bewarb, stand in meinem Motivationsschreiben der Satz: Mein Studium ist für mich wie eine aufregende Entdeckungsreise, auf der man ständig Neues lernt. Diese Einstellung hat mich für den Rest meines Studiums begleitet. Es hat mir vielen Spaß bereitet verschiedene Facetten der Elektrotechnik kennenzulernen. Ich bin sehr dankbar, dass ich diese Gelegenheit hatte.

Diese Diplomarbeit markiert die letzte Etappe dieser Reise. Mit ihrer Vollendung beginnt ein neuer Abschnitt in meinem Leben. Meinen Entdeckergeist will ich auch weiterhin behalten.

Wien, im Mai 2020

Abstract

This work addresses the optimal support of a truck-mounted concrete pump, which is a vehicle that has a foldable boom and is used to deliver concrete at a construction site. The truck-mounted concrete pump is supplied with concrete by a concrete mixer truck. In order to guarantee stability of the machine during the pumping process, the vehicle is lifted by four supports. The state of the art is to control the leveling process of the concrete pump manually and is done by an operator. The aim of this work is to develop a concept for an automated leveling. The main focus is on time efficiency and improving the stability.

In order to accomplish this task, a computationally efficient elastic model of the truck-mounted concrete pump is developed, which is able to reflect the real leveling process with sufficient accuracy. Various leveling methods are then analyzed using this model.

The model analysis shows that maximum stability can be achieved by balancing the outrigger reaction forces. Based on this result, a control concept is designed to carry out the leveling process and balance the reaction forces. The automation of this process saves a lot of time compared to manual leveling. The results of the work show that a manual leveling of the vehicle does not necessarily lead to optimal stability. The control concept presented in this work, allows to control the outrigger reaction forces in addition to the z -position and the orientation of the vehicle. Simulation results prove that with this control strategy a fast and optimal automatic leveling of the concrete pump is achieved.

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit wird die optimale Abstützung einer Autobetonpumpe betrachtet. Es handelt sich um ein Fahrzeug, welches einen faltbaren Mast besitzt und zur Lieferung von Beton an eine Baustelle benutzt wird. Die Autobetonpumpe wird von einem Fahrmischer mit Beton versorgt. Um die Standsicherheit der Maschine während des Pumpvorgangs zu garantieren, wird das Fahrzeug mit vier Stützen hochgehoben und ausgerichtet. Der Stand der Technik ist, dass ein Bediener diesen Abstützvorgang manuell vornimmt. Ziel dieser Arbeit ist es ein Konzept zur automatisierten Abstützung zu erarbeiten. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Zeiteffizienz und der Verbesserung der Standfestigkeit.

Um diese Aufgabe zu bewältigen, wird als Erstes ein recheneffizientes, elastisches Modell der Autobetonpumpe erarbeitet, welches in der Lage ist den Abstützvorgang mit hinreichender Genauigkeit abzubilden. Anhand dieses Modells werden anschließend verschiedene Abstützmethode analysiert.

Aus der Modellanalyse ergibt sich, dass die maximale Standfestigkeit durch Balancieren der Stützkräfte erreicht werden kann. Mit dieser Erkenntnis wird ein Regelkreis entworfen, der den Abstützvorgang durchführt und dabei die Stützkräfte ausgleicht. Die Automatisierung dieses Prozesses bringt im Vergleich zur manuellen Abstützung eine deutliche Zeitersparnis. Die Ergebnisse der Arbeit zeigen weiterhin, dass ein manuelles, waagerechtes Abstützen des Fahrzeugs nicht notwendigerweise zu optimaler Standfestigkeit führt. Der eingesetzte Regelkreis, welcher neben der Höhe und der Orientierung des Fahrzeugs auch die Stützkräfte regelt, erlaubt es nun auch die optimale Standfestigkeit zu erreichen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation der Arbeit	1
1.2	Literaturstudie	1
1.3	Ziel der Arbeit	3
2	Mathematische Modellierung	4
2.1	Modellannahmen und Modellstruktur	4
2.2	Herleitung der Systemgleichungen	6
2.2.1	Starrkörper	7
2.2.2	Euler-Bernoulli Balkenelement	9
2.2.3	Das Variationsprinzip	11
2.2.4	Benennung von wichtigen Elementen und Punkten des Fahrzeugs .	13
2.2.5	Modellierung des Bodenkontakts	18
2.2.6	Stütze 1	20
2.2.7	Achse 2	23
2.2.8	Behandlung der Knoten im Fahrzeugchassis	24
2.2.9	Gelände	25
2.2.10	Mast	25
2.3	Systemgleichungen	26
2.3.1	Jacobimatrizen	28
2.3.2	Generalisierte Verschiebungen	32
2.4	Lösung der Systemgleichungen	36
2.4.1	Vom Systemzustand abgeleitete Größen	37
2.5	Simulationen	37
3	Optimale Stützlänge	41
3.1	Simulationen	43
3.2	Schlussfolgerung	53
4	Regelungskonzept	54
4.1	Starrkörpermodell	54
4.2	Fehlerregelung	57
4.3	Vorsteuerung und Trajektoriengenerator	62
4.4	Rauschen und Signalkonditionierung	63
4.5	Blockschaltbild	63
4.6	Simulationen	64
4.7	Schlussfolgerung	81
5	Zusammenfassung	82

A Euler-Bernoulli Steifigkeitsmatrix	83
B Simulationsparameter	89
B.1 Modell	89
B.1.1 Steifigkeitsmatrizen	89
B.1.2 Rotationsmatrizen	89
B.1.3 Maße der Maschine	90
Vollabstützung	91
Rechtsabstützung	91
Frontabstützung	92
B.2 Regelung	92
B.2.1 Maße des Starrkörpermodells	92
Vollabstützung	92
Rechtsabstützung	92
Frontabstützung	93
B.2.2 Reglerparameter	93

Abbildungsverzeichnis

1.1	Darstellung einer Autobetonpumpe.	2
2.1	Überführung des Fahrzeugs in ein Starrkörper-Balkenmodell.	5
2.2	Ausrichtung des Balkenkoordinatensystems.	9
2.3	Positions- und Orientierungsvektoren der Starrkörper.	15
2.4	Wichtige Punkte des Fahrzeugs.	16
2.5	Elastische Elemente und zugehörige Steifigkeitsmatrizen.	17
2.6	Modellierung des Bodens: Beziehung zwischen Kraft und Verschiebung. . .	19
2.7	Skizze zur Berechnung der verallgemeinerten Balkenverschiebung.	21
2.8	Schematische Darstellung verschiedener Abstützkonfigurationen.	37
2.9	Simulation der Vollabstützung.	38
2.10	Torsion des Grundrahmens.	39
3.1	Lösung der Optimierungsaufgabe für die Vollabstützung bei hartem Boden. . .	44
3.2	Lösung der Optimierungsaufgabe für die Vollabstützung bei weichem Boden. . .	45
3.3	Lösung der Optimierungsaufgabe für die Rechtsabstützung bei hartem Boden. . .	47
3.4	Lösung der Optimierungsaufgabe für die Frontabstützung bei hartem Boden. . .	48
3.5	Lösung der Optimierungsaufgabe während des Ausfahrvorgangs des Masts.	50
3.6	Auswirkung des schwingenden Masts auf die Stabilität der Maschine.	52
4.1	Schematische Darstellung des Starrkörpermodells.	55
4.2	Analyse von d_f für die Rechtsabstützung.	60
4.3	Blockschaltbild des Regelkreises.	64
4.4	Verhalten des Regelkreises bei Vollabstützung und hartem Untergrund.	66
4.5	Verhalten des Regelkreises bei Rechtsabstützung und hartem Untergrund.	68
4.6	Verhalten des Regelkreises bei Frontabstützung und hartem Untergrund.	69
4.7	Verhalten des Regelkreises bei Rechtsabstützung und weichem Untergrund.	71
4.8	Verhalten des Regelkreises bei Rechtsabstützung, weichem Untergrund und ausgefahretem Mast.	72
4.9	Verhalten des Regelkreises bei Rechtsabstützung und weichem Untergrund, mit 50 % des nominalen $P_{f,d}$ -Werts.	74
4.10	Verhalten des Regelkreises bei Rechtsabstützung und weichem Untergrund, mit 150 % des nominalen $P_{f,d}$ -Werts.	75
4.11	Verhalten des Regelkreises bei Gelände mit unterschiedlicher Nachgiebigkeit.	77
4.12	Verhalten des Regelkreises bei $v_{vst} = 4.8 \text{ cm/s}$	78
4.13	Verhalten des Regelkreises unter dem Einfluss von Messrauschen.	80

Tabellenverzeichnis

4.1	Gelände und Auskragungslängen zu Abbildung 4.13.	79
B.1	Maße der Achsen, Federn und Reifen.	91
B.2	Reglerparameter.	93

1 Einleitung

1.1 Motivation der Arbeit

Die vorliegende Arbeit behandelt die optimale Abstützung von Nutzfahrzeugen. Beispielhaft wird eine Autobetonpumpe betrachtet, siehe Abbildung 1.1. Es handelt sich dabei um ein drei-achsiges Fahrzeug mit einem Gesamtgewicht von etwa 25 t. Zur Stabilisierung während des Arbeitsvorgangs (Betonförderung) besitzt es vier Stützen, die das Fahrzeug so weit anheben, dass alle sechs Reifen den Bodenkontakt verlieren. Der Stand der Technik ist die Stützen manuell auszufahren. Dabei strebt der Bediener eine gewisse Höhe und Orientierung (Roll- und Nickwinkel) des Fahrzeugs an, welche mithilfe von Augenmaß und Wasserwaagen überprüft wird. Nach Vorschrift muss der Bediener die Stützen, welche bewegt werden, sehen können. Während eines Abstützvorgangs muss er deshalb mehrmals zwischen den zwei Bedienelementen, welche auf gegenüberliegenden Fahrzeugseiten montiert sind, wechseln. Zudem ist es nicht ungewöhnlich, dass jede der Stützen einzeln ausgefahren wird. Dies kann im Extremfall zu hoher Belastung einzelner Stützen führen, was bei der Konstruktion der Maschine berücksichtigt werden muss. Würden die Stützen gleichmäßig ausgefahren, ließen sich solche Situationen vermeiden. Eine Fragestellung dieser Arbeit ist deshalb, wie der Aufstellvorgang möglichst schonend und zeitsparend automatisiert werden kann.

Es wurde beobachtet, dass bei gegebener Höhe, waagrecht (Roll- und Nickwinkel gleich Null) abgestützte Maschinen nicht immer gleich stabil stehen. Bei Vorgabe des Tripels Höhe, Roll- und Nickwinkel, lassen sich aus kinematischer Sicht die Zylinderpositionen von drei der vier Stützen eindeutig berechnen. Es besteht somit ein Freiheitsgrad. Es sollte also möglich sein, die Standfestigkeit der Maschine zu beeinflussen, ohne Höhe und Orientierung zu ändern. Weitere Fragestellungen im Hinblick auf eine optimale Abstützung sind: „Kann man die Maschine auch schlecht abstützen?“ bzw. „Wie leicht lässt sich die Maschine durch manuelles Abstützen in eine Lage mit schlechter Standfestigkeit bringen?“ Diese Fragestellungen sollen ebenfalls in dieser Arbeit betrachtet werden.

1.2 Literaturstudie

Bei den klassischen Ansätzen werden die Stützzylinder meist mit voller Geschwindigkeit ausgefahren, bis eine gewünschte Höhe erreicht ist und das Fahrzeug waagrecht steht. Ist das Gelände geneigt, uneben oder verschieden nachgiebig, kann diese Strategie zu einer ungleichmäßigen Verteilung der Stützkräfte führen. Dies ist möglich, da die Maschine grundsätzlich auf bloß drei Stützen stehen kann. Befinden sich z. B. drei der Stützen über Asphalt und die vierte über Erdboden, kann es dazu kommen, dass die letzte Stütze aufgrund der größeren Bodennachgiebigkeit schwächer belastet wird. In [1] und [2] finden

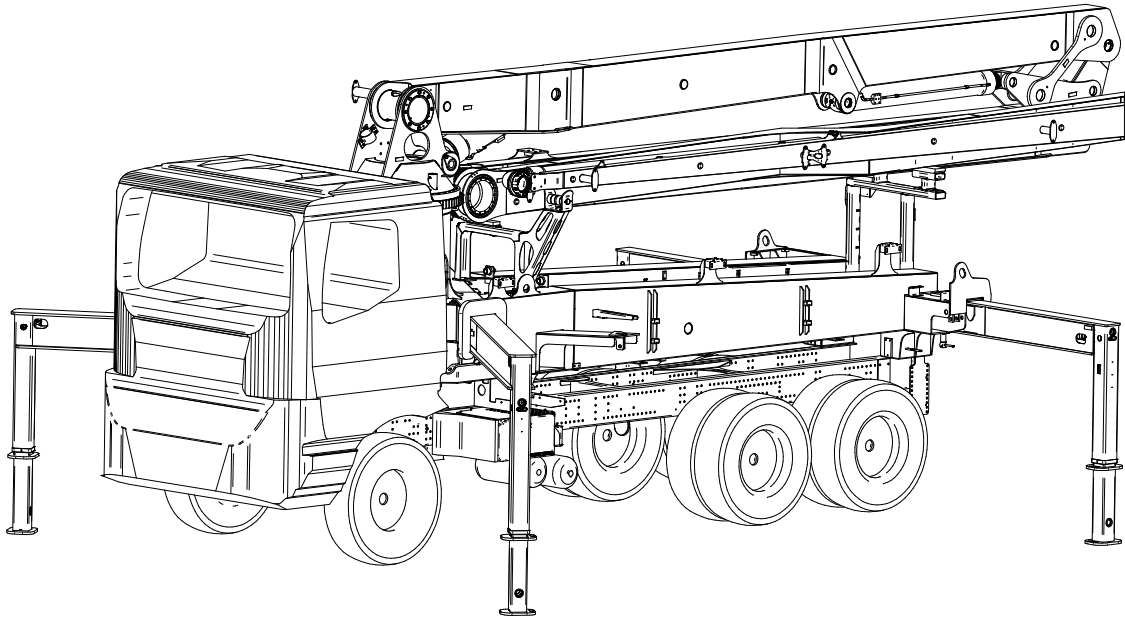


Abbildung 1.1: Darstellung einer Autobetonpumpe.

sich Verbesserungsvorschläge. In diesen Arbeiten wird mit einem Lagesensor und auf Basis eines kinematischen Modells die Differenz zwischen gewünschter und tatsächlicher Zylinderposition berechnet. Proportional zu dieser Differenz wird die Zylindergeschwindigkeit vorgegeben. Dies führt nicht nur zu einer besseren Kraftverteilung, sondern auch zu erhöhter Regelgenauigkeit. Dennoch wird in diesen beiden Arbeiten der im vorherigen Abschnitt erwähnte Freiheitsgrad (bei der Wahl der Zylinderpositionen bzw. Stütz­längen) nicht gezielt ausgenutzt und nur durch eine Heuristik erreicht.

Zum Thema „Verbesserung der Standfestigkeit“ liefert [3] einen Beitrag. Hier wird versucht das Fahrzeuggewicht möglichst ausgeglichen auf alle vier Stützen aufzuteilen. Aus statischen Überlegungen (Kraft- und Momentenbilanz) lassen sich drei Gleichungen für die vier Stützkräfte ableiten. Das Gleichungssystem, mit dem Vektor der Stützkräfte als Unbekannte, ist also unterbestimmt. Die Autoren schlagen vor die Norm dieses Vektors zu minimieren. Dadurch lässt sich eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems finden (linke pseudoinverse Matrix). Die Standfestigkeit soll erhöht werden, indem man die tatsächlich auftretenden Stützkräfte auf den besagten Vektor regelt. Es ist aus folgendem Grund sinnvoll die Norm des Vektors zu minimieren: Da die Summe der Stützkräfte konstant (Gewichtskraft) ist und sie immer gleiches Vorzeichen haben, wird die 2-Norm dann minimal, wenn die Stützkräfte so ausgeglichen wie möglich sind (Kraft- und Momentenbilanz muss immer eingehalten werden). Dieser Ansatz scheint sehr sinnvoll. Allerdings geht aus der Arbeit kein vollständiges Regelungskonzept hervor. Es ist nicht klar geschildert, wie die geforderten Stützkräfte bei einer realen Maschine erreicht werden sollen.

Bei der Berechnung der Stützkräfte liefert [4] nützliche Hilfestellungen. Hier wird ein mobiler Kran betrachtet. In einer Simulation lässt man den ausgefahrenen Mast langsam um die vertikale Achse rotieren. Verglichen wird dabei ein statisches und ein dynamisches

Modell (berechnet mithilfe der Simulationssoftware Adams, Mehrkörpersimulation). Dabei wird gezeigt, dass das statische Modell in Bezug auf die Stützkräfte eine hinreichend genaue Näherung des dynamischen Modells darstellt.

In [5] wird ein FEM-Modell einer Autobetonpumpe vorgestellt, mit welchem unter anderem die Stützkräfte ermittelt werden. Das Modell ist allerdings sehr rechenintensiv.

Im Patent [6] wird eine Vorrichtung beschrieben, welche die Torsion im Chassis des abgestützten Fahrzeugs minimieren soll. Dabei werden Lagesensoren (an Front und Heck) verwendet und die gemessenen Winkel, mithilfe der Stützzylinder, aneinander angeglichen. Diese Methode weist eine gewisse Ähnlichkeit zu jener in [3] (Ausgleich der Stützkräfte) auf. Tritt entlang der Fahrzeugachse (Front-Heck) nämlich eine Torsion des Chassis auf, so müssen Stützen gegenüberliegender Fahrzeugseiten unterschiedlich stark belastet sein. Umgekehrt lässt sich vermuten, dass minimale Torsion bei ausgeglichenen Stützkräften auftritt. Da diese Methode relativ einfach praktisch umsetzbar ist, lohnt es sich zu untersuchen, ob sie äquivalent mit jener in [3] ist.

In der Literatur finden sich allerlei Werke zur Modellierung elastischer Strukturen. Im Buch [7] wird z. B. die Modellierung von Balken behandelt, wobei auch Balkensysteme betrachtet werden. Zur Beschreibung von Verformungen werden dabei Steifigkeitsmatrizen verwendet. Ein ähnliches, erst vor Kurzem erschienenes Werk ist [8]. Darin geht es um die Analyse von elastischen Strukturen mithilfe der Methode der finiten Elemente (FEM). Ein auch sehr hilfreiches Werk ist [9], welches die Modellierung von mikromechanischen Sensoren behandelt. Auch hier findet sich die Modellierung elastischer Strukturen mit Steifigkeitsmatrizen wieder. Dabei bildet das Werk eine gute Einführung mit Bezug auf die Grundlagen der Kontinuumsmechanik.

1.3 Ziel der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es ein Regelungskonzept zur automatischen Abstützung einer Autobetonpumpe zu erarbeiten. Dabei soll der Abstützvorgang möglichst wenig Zeit in Anspruch nehmen und die Standfestigkeit der Maschine verbessert werden.

Als erster Schritt dieser Arbeit wird ein mathematisches Modell der Autobetonpumpe hergeleitet. Dieses soll in der Lage sein den Abstützvorgang und die Stützkräfte, abhängig von der Mastlage, wiederzugeben sowie elastische Verformungen von tragenden Elementen zu berücksichtigen. Anhand des Modells sollen dann verschiedene Regelungsansätze erarbeitet bzw. verglichen werden. Abschließend wird ein vollständiges Regelungskonzept entwickelt.

2 Mathematische Modellierung

Im Folgenden wird das mathematische Modell der Maschine hergeleitet. Angestrebt wird ein möglichst recheneffizientes und somit auch niedrig-dimensionales Modell. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, finden sich in der Literatur Modelle verschiedener Komplexität (von Kraft- und Momentenbilanz bis hin zu FEM Modellen). Das im Weiteren dargestellte Modell soll einen Kompromiss zwischen Rechenaufwand und Genauigkeit bilden. Mechanisch besonders steife Teile werden als Starrkörper modelliert, weniger steife Elemente der Maschine (z. B. Stützbeine) oder Elemente mit Federcharakter (z. B. Fahrwerksfedern) werden als elastisch betrachtet. Außerdem wird ein statisches Modell angestrebt, da auftretende Beschleunigungskräfte im Verhältnis zu den statischen Kräften klein sind. Dieser Ansatz hat sich, wie erwähnt, bereits in [4] als sinnvoll erwiesen.

Das Modell soll in der Lage sein den Vorgang der Abstützung zu simulieren, d. h. von der Parkposition zum abgestützten Arbeitszustand. Dabei sollen verschiedene Szenarien betrachtet werden können. Von Interesse ist z. B. der Einsatz des Fahrzeugs auf unebenem Boden. Des Weiteren herrscht auf Baustellen oft Platzmangel, womit die Stützbeine (horizontal) nicht zur Gänze ausgefahren werden können. Es entstehen somit unsymmetrische Abstützsituationen. Auch dies soll simuliert werden können. Die Stützkräfte werden unter anderem von der Konfiguration und der Ausrichtung des Masts beeinflusst. Deshalb muss das Modell dies berücksichtigen. Da bei unsymmetrischer Abstützung eine Torsion des Fahrzeugs auftreten kann, wird bei der Modellierung auch darauf Rücksicht genommen.

Im Wesentlichen soll das Modell in der Lage sein die Abstützhöhe, den Roll-, den Nickwinkel des Fahrzeugs, die Verschiebungen zufolge elastischer Deformationen, die Verzerrungsenergien und die Stützkräfte wiederzugeben. Dabei bilden die variablen Stützbeinlängen (sowohl horizontal als auch vertikal), der Geländeverlauf sowie die Konfiguration und Ausrichtung des Masts Eingangsgrößen des Systems.

2.1 Modellannahmen und Modellstruktur

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie das Fahrzeug in Starrkörper und elastische Elemente unterteilt wird. In Abbildung 2.1 ist dies schematisch dargestellt. Aus zeichnerischen Gründen wurde in dieser Abbildung die Fahrzeugkabine und der Mast weggelassen (vgl. Abbildung 1.1). Der Übersichtlichkeit wegen, wurden nicht alle Starrkörper eingetragen, nämlich bei Überlappungen, siehe z. B. hintere und vordere Stützbeine. Dennoch sollte sich aus der Kombination beider Ansichten ein klares Bild ergeben.

Die Seitenansicht des Fahrzeugs zeigt den Grundrahmen. Er dient als Träger des Fahrzeugs im abgestützten Zustand. An ihm ist auch der Mast angebracht. Der Grundrahmen besteht aus dem Drehschemel, dem Heck (beides Starrkörper, blau umrahmt) und den Balken G_1 und G_2 (rot umrahmt), welche die beiden Starrkörper elastisch miteinander verbinden. Obwohl die Balken G_1 und G_2 sehr viel massiver als die Stützbeine sind und

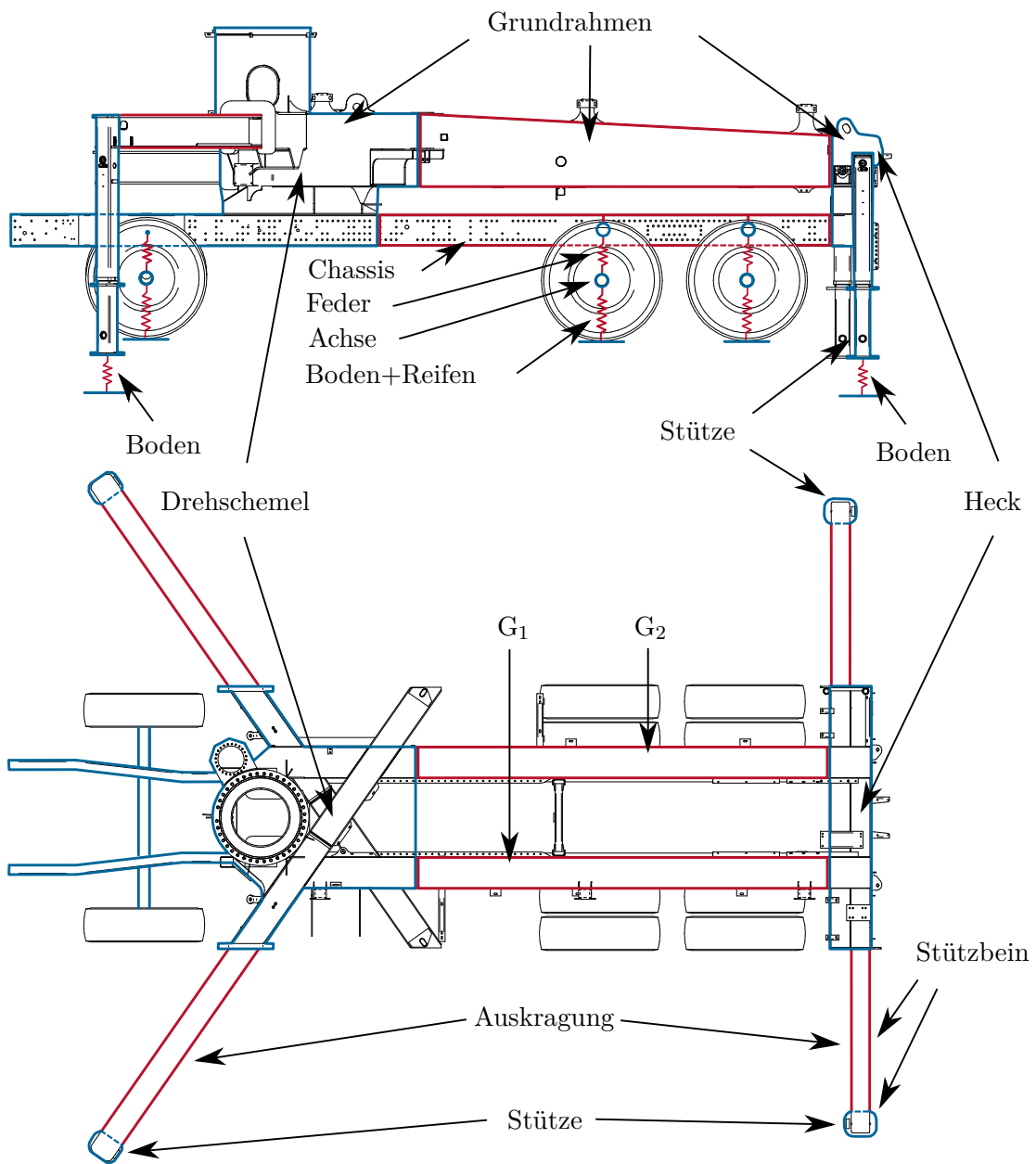


Abbildung 2.1: Überführung des Fahrzeugs in ein Starrkörper-Balkenmodell. Starrkörper sind blau, elastische Element (Balken, Federn) sind rot dargestellt.

maßgebliche Verformungen vorwiegend dort auftreten, wurde auf die Modellierung von G_1 und G_2 als elastische Balken nicht verzichtet. Wäre der gesamte Grundrahmen nämlich als Starrkörper ausgeführt, so könnte das Modell z. B. keine Torsion um die Längsachse des Fahrzeugs abbilden. Eine solche Situation stellt sich z. B. ein, falls auf unebenem Untergrund abgestützt wird bzw. Stützen unsymmetrisch ausgefahren werden.

Die Draufsicht zeigt alle vier Stützbeine. Ein Stützbein besteht aus der Auskragung

(horizontaler Teil) und der Stütze (vertikaler Teil). Die Auskragungen werden im Gegensatz zu den Stützen als Balken modelliert. Da die maximale Hangneigung, bei der die Maschine noch abgestützt werden darf, etwa 3° beträgt, ist dies zulässig. Die horizontalen Kräfte, welche auf die Stützen wirken, sind deshalb stets klein. Außerdem ist die Stauchung der Stützen bei Belastung im Vergleich zu der Biegung der Auskragungen klein. Bodenkontakte werden, wie in der Zeichnung angedeutet, durch Federn modelliert.

Da die Maschine zu Beginn des Abstützvorgangs auf den Reifen steht (Stützen unbelastet), ist auch die Modellierung des Fahrwerks und der Reifen vonnöten. Die Achsen, welche Starrkörper bilden, sind mit dem Chassis über Federn verbunden. Diese befinden sich an den Achsenden nahe den Reifen. Die Reifen selbst werden gemeinsam mit der Bodennachgiebigkeit durch Federn dargestellt. Der Teil des Chassis, welcher zwischen dem Drehschemel und dem Heck liegt, wird ebenfalls elastisch modelliert. Um den Kraftübertrag zwischen Fahrwerksfedern und Chassis berücksichtigen zu können, muss das Chassis bei den Montagepunkten der Federn (im mathematischen Sinne) aufgetrennt und ein Knoten eingefügt werden. Dies ist in Abbildung 2.1 durch blaue Kreise dargestellt. Die Achsen sind ebenfalls durch blaue Kreise gekennzeichnet, sie stellen aber keine Knoten (ohne geometrische Ausdehnung) dar, sondern symbolisieren die zylindrische Form der Achsen (vgl. Draufsicht, vordere Achse). Wie aus der Seitenansicht erkennbar ist, wurde das Fahrwerk der vorderen Achse anders dargestellt. Bei dieser Achse wird das Chassis nicht aufgetrennt, sondern ist Teil des Drehschemel Starrkörpers und kein Balken. Diese Vorgehensweise wurde gewählt, da keine Daten über die Gewichtsverteilung der Fahrerkabine vorhanden sind. Es wäre damit nicht sinnvoll die Krafteinwirkung der Feder zu berücksichtigen, aber das Gewicht der Fahrerkabine zu vernachlässigen. Außerdem wird davon ausgegangen, dass eine eventuell auftretende Verformung dieses Bereichs keinen bzw. vernachlässigbaren Einfluss auf die Standsicherheit der Gesamtkonstruktion hat.

Das Gesamtgewicht des Fahrzeugs wird auf die Starrkörper verteilt. Dabei wird die Aufteilung so gewählt, dass der tatsächliche Fahrzeugschwerpunkt richtig wiedergegeben wird. Um den Einfluss des Masts zu berücksichtigen, ist eine Kraft- und ein Momentenvektor als Eingangsgröße des Modells vorgesehen, welche auf den Drehschemel wirken. Die Kraft und das Moment werden dabei aus dem Gewicht und dem Schwerpunkt des Masts bestimmt und sind von dessen Konfiguration abhängig.

2.2 Herleitung der Systemgleichungen

Da nun die Aufteilung des Fahrzeugs in Starrkörper und elastische Elemente definiert ist, können die Systemgleichungen hergeleitet werden. Dabei wird das Variationsprinzip [10, 11] verwendet. Dieses besagt im Wesentlichen, dass die Variation der kinetischen und potenziellen Energie eines Systems gleich der extern aufgebrachten Kräften sein muss. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass ein physikalisches System immer ein Energieminimum anstrebt. Die im Weiteren beschriebenen Systemgleichungen besitzen keine Zeitabhängigkeit (statisches Modell). Die kinetische Energie wird dabei vernachlässigt und verschwindet aus der Variationsrechnung. Übrig bleibt nur die potenzielle Energie, welche in Verzerrungsenergie¹ und potenzielle Energie zufolge der Erdbeschleunigung unterteilt

¹in den Balken und Federn gespeicherte potenzielle Energie

wird. Da die Systemgleichungen recht umfangreich sind, soll die Herleitung anhand mehrerer Teilkomponenten illustriert werden. Am Ende wird die gesamte Systemgleichung angeführt. Einleitend folgt die mathematische Beschreibung der Starrkörper, der Balken und des Variationsprinzips. Außerdem wird noch genauer auf die Bezeichnung wichtiger Elemente und Punkte des Fahrzeugs eingegangen.

2.2.1 Starrkörper

Im Weiteren gilt, sofern nicht explizit anders angegeben, dass alle Starrkörper 6 Freiheitsgrade haben. Die Freiheitsgrade werden bezüglich eines Referenzkoordinatensystems angegeben [12], welches mit dem Index 0 gekennzeichnet wird. Sein Ursprung befindet sich unter der Stütze vorne links. Jedem Starrkörper wird außerdem ein körperfestes Koordinatensystem zugeordnet, das mit dem Index des Starrkörpers gekennzeichnet wird². Die Freiheitsgrade eines Starrkörpers lassen sich durch die Position und die Orientierung des körperfesten Koordinatensystems bezüglich dem Referenzkoordinatensystem beschreiben. Betrachtet man z. B. den Drehschemel (Index D), so wird seine Position durch

$$\mathbf{r}_D^0 = \begin{bmatrix} r_{x,D}^0 & r_{y,D}^0 & r_{z,D}^0 \end{bmatrix}^T \quad (2.1)$$

notiert. Dabei sind $r_{x,D}^0$, $r_{y,D}^0$ und $r_{z,D}^0$ die Komponenten in x -, y - und z -Richtung ausgedrückt im Referenzkoordinatensystem. Die Orientierung des Drehschemels wird mit

$$\boldsymbol{\psi}_D^0 = \begin{bmatrix} \psi_{x,D}^0 & \psi_{y,D}^0 & \psi_{z,D}^0 \end{bmatrix}^T \quad (2.2)$$

angegeben. Dabei entsprechen $\psi_{x,D}^0$, $\psi_{y,D}^0$ und $\psi_{z,D}^0$ dem Roll-, Nick- und Gierwinkel bezüglich dem Referenzkoordinatensystem. Im Weiteren wird festgelegt, dass die Position und die Orientierung eines Starrkörpers, sofern nicht anders angegeben, im Referenzkoordinatensystem angegeben wird. Um die Notation zu vereinfachen, kann somit das Superskript 0 weggelassen werden. Außerdem ist es für spätere Betrachtungen nützlich die Position und die Orientierung zu einem sechs-dimensionalen Vektor der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} zusammenzufassen. Damit kann z. B. die Position und die Orientierung des Drehschemels wie folgt beschrieben werden

$$\mathbf{q}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_D^T & \boldsymbol{\psi}_D^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} r_{x,D} & r_{y,D} & r_{z,D} & \psi_{x,D} & \psi_{y,D} & \psi_{z,D} \end{bmatrix}^T. \quad (2.3)$$

Man beachte, dass das Superskript T (nicht kursiv) einer Transposition der Vektoren, und nicht der Angabe eines Koordinatensystems entspricht.

Um Vektoren zwischen verschiedenen Koordinatensystemen zu transformieren werden Rotationsmatrizen verwendet [12]. Diese haben folgende Form

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{R}_z(\psi_z)\mathbf{R}_y(\psi_y)\mathbf{R}_x(\psi_x), \quad (2.4)$$

²Bei der Darstellung vektorieller Größen wird der Index des jeweiligen Bezugssystems als Superskript angegeben.

mit

$$\mathbf{R}_x(\psi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi_x) & -\sin(\psi_x) \\ 0 & \sin(\psi_x) & \cos(\psi_x) \end{bmatrix} \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{R}_y(\psi_y) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_y) & 0 & \sin(\psi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\psi_y) & 0 & \cos(\psi_y) \end{bmatrix} \quad (2.5b)$$

$$\mathbf{R}_z(\psi_z) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_z) & -\sin(\psi_z) & 0 \\ \sin(\psi_z) & \cos(\psi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5c)$$

Als Beispiel soll der Positionsvektor des Hecks \mathbf{r}_H vom Referenz- ins Drehschemelkoordinatensystem transformiert werden

$$\mathbf{r}_H^D = \mathbf{R}_D^0(\mathbf{r}_H - \mathbf{r}_D). \quad (2.6)$$

Dabei ist \mathbf{r}_H^D der Vektor \mathbf{r}_H dargestellt im Drehschemelkoordinatensystem, $\mathbf{R}_D^0 = \mathbf{R}^T(\psi_D)$ ist die Rotationsmatrix vom Referenz- ins Drehschemelkoordinatensystem und \mathbf{r}_D die Position des Drehschemelkoordinatensystems bezüglich dem Referenzkoordinatensystem. Umgekehrt gilt

$$\mathbf{r}_H = \mathbf{r}_D + \mathbf{R}_0^D \mathbf{r}_H^D \quad (2.7)$$

mit $\mathbf{R}_0^D = (\mathbf{R}_D^0)^{-1} = (\mathbf{R}_D^0)^T$ (vgl. [12]).

Zusätzlich wird noch der Kraftvektor

$$\mathbf{f} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T \quad (2.8)$$

und der Momentenvektor

$$\mathbf{m} = [M_x \quad M_y \quad M_z]^T \quad (2.9)$$

definiert. Dabei sind F_x , F_y und F_z bzw. M_x , M_y und M_z die Komponenten des Kraftvektors bzw. Momentenvektors in x -, y - und z -Richtung bzw. um die x -, y - und z -Achse. Diese werden ebenfalls zu einem sechs-dimensionalen Vektor der generalisierten Kraft

$$\boldsymbol{\tau} = [\mathbf{f}^T \quad \mathbf{m}^T]^T = [F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z]^T \quad (2.10)$$

zusammengefasst. Zu jedem Kraft- bzw. Momentenvektor gehört natürlich auch ein Angriffspunkt. Kräfte, welche im Ursprung eines Körperkoordinatensystems angreifen, werden mit dem Subskript des Starrkörpers gekennzeichnet. Die generalisierte Kraft, welche auf den Drehschemel wirkt, wird so z. B. mit $\boldsymbol{\tau}_D$ bezeichnet. Ohne weitere Angabe eines Koordinatensystems gilt auch hier wieder, dass es sich um einen Vektor im Referenzkoordinatensystem handelt.

2.2.2 Euler-Bernoulli Balkenelement

Im Folgenden wird auf die mathematische Beschreibung eines Euler-Bernoulli Balkenelements [7, 8, 11, 13] eingegangen. Eine wesentliche Annahme der Euler-Bernoulli Balkentheorie ist, dass der Balkenquerschnitt bei einer Biegung lotrecht zur neutralen Faser bleibt. Diese Annahme ist gut für lange schmale Balken, aber auch bei geringer Verformung des Balkens, erfüllt. Eine Alternative wäre die aufwendigere Timoschenko Balkentheorie.

Jedem Balken wird ein eigenes Koordinatensystem zugeordnet, welches an seinem negativen Rand festgemacht wird (vgl. Abbildung 2.2). Dabei wird die x -Achse zur

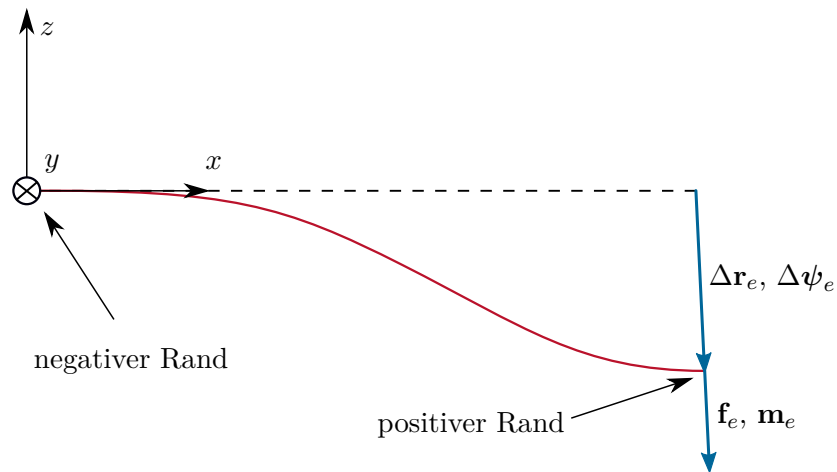


Abbildung 2.2: Ausrichtung des Balkenkoordinatensystems. Der Balken ist rot, die nicht deformierte Balkenachse strichliert dargestellt.

sogenannten Balkenachse. Man beachte, dass die Verschiebung bzw. Drehung des negativen Randes, bezüglich dem Balkenkoordinatensystem, immer Null ist. Im Weiteren ist deshalb nur der Zusammenhang zwischen der Verschiebung bzw. der Drehung und der Kraft bzw. dem Moment am positiven Rand des Balkens von Bedeutung. Die Verschiebung des positiven Randes bezüglich dem Balkenkoordinatensystem des Balkens e wird mit

$$\Delta \mathbf{r}_e = \begin{bmatrix} \Delta r_{x,e} & \Delta r_{y,e} & \Delta r_{z,e} \end{bmatrix}^T \quad (2.11)$$

bezeichnet. Dabei sind $\Delta r_{x,e}$, $\Delta r_{y,e}$ und $\Delta r_{z,e}$ die Verschiebungen des positiven Randes in x -, y - und z -Richtung des Balkenkoordinatensystems. Die Verschiebung wird immer im jeweiligen Balkenkoordinatensystem angegeben, somit kann das Superskript des Balkenkoordinatensystems weggelassen werden. Dies ist sinnvoll, da dann z. B. für die Verschiebung der Auskragung 1 $\Delta \mathbf{r}_{K_1}$ anstatt von $\Delta \mathbf{r}_{K_1}^{K_1}$ verwendet werden kann. Auf ähnliche Weise wird die Drehung des rechten Randes bezüglich dem Balkenkoordinatensystem des Balkens e mit

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_e = \begin{bmatrix} \Delta \psi_{x,e} & \Delta \psi_{y,e} & \Delta \psi_{z,e} \end{bmatrix}^T \quad (2.12)$$

beschrieben. Dabei sind $\Delta \psi_{x,e}$, $\Delta \psi_{y,e}$ und $\Delta \psi_{z,e}$ die Drehungen des rechten Randes um die x -, y - und z -Achse des Balkenkoordinatensystems. Diese beiden Vektoren werden zu

einem sechs-dimensionalen Vektor der generalisierten Verschiebung

$$\Delta \mathbf{q}_e = \left[\Delta \mathbf{r}_e^T \quad \Delta \boldsymbol{\psi}_e^T \right]^T = \left[\Delta r_{x,e} \quad \Delta r_{y,e} \quad \Delta r_{z,e} \quad \Delta \psi_{x,e} \quad \Delta \psi_{y,e} \quad \Delta \psi_{z,e} \right]^T \quad (2.13)$$

zusammengefasst.

Die Beziehung zwischen Kraft und Verschiebung am positiven Rand des Balkens wird mit einer symmetrischen, positiv definiten Euler-Bernoulli Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_e \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ charakterisiert

$$\boldsymbol{\tau}_e = \left[\mathbf{f}_e^T \quad \mathbf{m}_e^T \right]^T = \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{q}_e . \quad (2.14)$$

Dabei ist hier $\boldsymbol{\tau}_e$ der Vektor der verallgemeinerten Kraft am positiven Rand des Balkens e , dargestellt im Balkenkoordinatensystem. Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e wird aus folgender Beziehung gewonnen

$$\mathbf{K}_e = \int_0^l \mathbf{K}'_e(x) dx , \quad (2.15)$$

mit der Länge l des Balkens. Die Matrix $\mathbf{K}'_e(x)$ wird also über die Balkenachse x integriert. Für die Herleitung von $\mathbf{K}'_e(x)$ wird eine für die Balkentheorie übliche Notation verwendet.

Ausgangspunkt der Herleitung sind die Euler-Bernoulli Annahmen [13]

$$\check{u}_x = u_x + z\beta_y - y\beta_z \quad (2.16a)$$

$$\check{u}_y = u_y - z\beta_x \quad (2.16b)$$

$$\check{u}_z = u_z + y\beta_x \quad (2.16c)$$

wobei \check{u}_x , \check{u}_y und \check{u}_z der gesamten Verschiebung in x -, y - und z -Richtung entsprechen. Die Größen u_x , u_y und u_z entsprechen der translatorischen Verschiebung in x -, y - und z -Richtung und β_x , β_y und β_z den Drehwinkeln des Balkenquerschnitts um die x -, y - und z -Achse. Die Größen $z\beta_y$, $y\beta_z$, $z\beta_x$, sowie $y\beta_x$ lassen sich als Verschiebungen zufolge einer Drehung des Balkenquerschnitts um die Winkel β_x , β_y und β_z (mit Kleinwinkelnäherung: $\cos(\beta) \approx 1$ und $\sin(\beta) \approx \beta$) interpretieren. Die Verschiebungen und Drehungen sind Funktionen von $x \in (0, l)$, d. h. $u_x = u_x(x)$, $u_y = u_y(x)$ und $u_z = u_z(x)$ sowie $\beta_x = \beta_x(x)$, $\beta_y = \beta_y(x)$ und $\beta_z = \beta_z(x)$. Um eine Verknüpfung zu bereits bekannten Größen zu erstellen sei angemerkt, dass folgende Beziehungen gelten

$$u_x(0) = 0 , \quad u_y(0) = 0 , \quad u_z(0) = 0 , \quad (2.17a)$$

$$\beta_x(0) = 0 , \quad \beta_y(0) = 0 , \quad \beta_z(0) = 0 , \quad (2.17b)$$

$$u_x(l) = \Delta r_{x,e} , \quad u_y(l) = \Delta r_{y,e} , \quad u_z(l) = \Delta r_{z,e} , \quad (2.17c)$$

$$\beta_x(l) = \Delta \psi_{x,e} , \quad \beta_y(l) = \Delta \psi_{y,e} , \quad \beta_z(l) = \Delta \psi_{z,e} . \quad (2.17d)$$

Ausgehend von den Annahmen (2.16) können die zugehörigen Verzerrungen und somit die Verzerrungsenergie des Balkens berechnet werden. Durch geeignete Wahl von Ansatzfunktionen (auch Interpolationsfunktionen genannt) für u_x , u_y und u_z sowie β_x , β_y und β_z , lässt sich mit der Variationsrechnung die Matrix $\mathbf{K}'_e(x)$ berechnen. Da die Herleitung relativ umfangreich ist, sei auf Anhang A verwiesen.

Mit einer Steifigkeitsmatrix nach (2.15) können unter anderem die Abhängigkeit des Flächenträgheitsmoments und des Querschnitts in x -Richtung berücksichtigt werden. Somit ist auch die Beschreibung der trapezförmigen Balken G_1 bzw. G_2 möglich.

Für weitere Betrachtungen wird noch die Verzerrungsenergie Π_e des Balkens e benötigt

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{q}_e . \quad (2.18)$$

Allgemeine elastische Elemente (z. B. die Bodennachgiebigkeit) werden ebenfalls mittels einer Steifigkeitsmatrix oder einer nichtlinearen Beziehung zwischen Kraft und Verschiebung $\boldsymbol{\tau}_e(\Delta \mathbf{q}_e)$ beschrieben.

2.2.3 Das Variationsprinzip

Angewandt auf ein System von Starrkörpern und elastischen Elementen besagt das Variationsprinzip [10, 11], dass die Variation³ der gesamten kinetischen und potenziellen Energie gleich der Variation der externen Arbeit sein muss. Aus oben genannten Gründen entfällt im betrachteten System die kinetische Energie. Mathematisch kann das folgendermaßen formuliert werden

$$\delta V = \delta W_{\text{ex}} , \quad (2.19)$$

wobei V die gesamte potenzielle Energie und W_{ex} die gesamte externe Arbeit ist. Die potenzielle Energie V setzt sich hier aus der Verzerrungsenergie der elastischen Elemente Π und der potenziellen Energie zufolge der Erdbeschleunigung V_g zusammen

$$V = V_g + \Pi . \quad (2.20)$$

Biegung, Torsion etc. von elastischen Elementen werden durch die Verzerrungsenergie Π wiedergegeben. Energie, welche aufgebracht werden muss bzw. gewonnen wird, weil sich das Fahrzeug entgegen bzw. mit der Erdanziehung bewegt, werden in V_g bilanziert. Die externe Arbeit W_{ex} beschreibt die Wirkung von Kräften und Momenten, welche von außen⁴ einwirken. Ein Beispiel ist der Mast, der durch Pumpvorgänge ins Schwingen gerät und somit externe Arbeit am Drehschemel verrichtet.

Die elastischen Elemente werden im Weiteren als masselos betrachtet. Die potenzielle Energie V_g hängt also nur von der Masse der Starrkörper ab. Diese Massen werden so gewählt, dass das Fahrzeuggewicht und die Achslasten korrekt wiedergegeben werden.

Die potenzielle Energie zufolge der Gravitation lässt sich kompakt anschreiben als

$$V_g = \sum_{k \in \mathbb{I}_{\text{St}}} m_k g r_{z,k} . \quad (2.21)$$

Dabei ist \mathbb{I}_{St} die Menge aller Starrkörperindizes, m_k bzw. $r_{z,k}$ die Masse bzw. die z -Koordinate des Starrkörpers k und g die Erdbeschleunigung. Es wurde dabei angenommen, dass die Schwerkraft in negative z -Richtung wirkt. Die Variation von V_g lautet

$$\delta V_g = \sum_{k \in \mathbb{I}_{\text{St}}} m_k g \delta r_{z,k} . \quad (2.22)$$

³ Die Variation einer Größe W wird mit δW gekennzeichnet.

⁴ Hier ist alles gemeint, was nicht zum mechanischen Aufbau des Fahrzeugs gehört. Zusätzlich wird auch der Mast durch eine externe Kraft und ein externes Moment modelliert.

Die Verzerrungsenergie lässt sich durch eine Summe über alle elastischen Elemente beschreiben

$$\Pi = \sum_{e \in \mathbb{I}_E} \int_0^{\Delta \mathbf{q}_e} \boldsymbol{\tau}_e^T(\Delta \mathbf{q}) d\Delta \mathbf{q} , \quad (2.23)$$

mit \mathbb{I}_E als der Menge, welche die Indizes aller elastischen Elemente enthält. Man beachte, dass sich durch die Formulierung in (2.23) sowohl lineare als auch nichtlineare Beziehungen zwischen Kraft und Verschiebung verwenden lassen. Für lineare Beziehungen wird

$$\boldsymbol{\tau}_e(\Delta \mathbf{q}_e) = \mathbf{K}_e \Delta \mathbf{q}_e \quad (2.24)$$

verwendet. Die Variation von (2.23) lautet

$$\delta \Pi = \sum_{e \in \mathbb{I}_E} \boldsymbol{\tau}_e^T(\Delta \mathbf{q}_e) \delta \Delta \mathbf{q}_e . \quad (2.25)$$

Im Folgenden werden zwei Annahmen getroffen: Alle elastischen Elemente sind fest mit den Starrkörpern verbunden und jeder Rand eines elastischen Elements ist mit genau einem Starrkörper verbunden. Es gibt also keine Balken mit freien Rändern. Durch diese Annahmen lässt sich die verallgemeinerte Verschiebung $\Delta \mathbf{q}_e$ eines elastischen Elements $e \in \mathbb{I}_E$ durch die Starrkörperkoordinaten \mathbf{q}_k , $k \in \mathbb{I}_{St}$ ausdrücken, d. h. es gilt

$$\Delta \mathbf{q}_e = \Delta \mathbf{q}_e(\mathbf{q}_{k_{p,e}}, \mathbf{q}_{k_{n,e}}) . \quad (2.26)$$

Hierbei ist $k_{p,e}$ bzw. $k_{n,e}$ der Index des Körpers am positiven bzw. negativen Rand des Elements e . Abgeleitet von dieser Beziehung lässt sich $\delta \Pi$ als Variation von $\delta \mathbf{q}_k$, $k \in \mathbb{I}_{St}$ formulieren. Mit der Eigenschaft

$$\delta \Delta \mathbf{q}_e = \sum_{k \in \mathbb{I}_{St}} \frac{\partial \Delta \mathbf{q}_e}{\partial \mathbf{q}_k} \delta \mathbf{q}_k \quad (2.27)$$

erhält man durch Einsetzen in (2.25)

$$\delta \Pi = \sum_{k \in \mathbb{I}_{St}} \sum_{e \in \mathbb{I}_E} \boldsymbol{\tau}_e^T(\Delta \mathbf{q}) \frac{\partial \Delta \mathbf{q}_e}{\partial \mathbf{q}_k} \delta \mathbf{q}_k . \quad (2.28)$$

Man beachte, dass die Jacobimatrix $\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_e}{\partial \mathbf{q}_k}$ nach (2.26) für sehr viele Kombinationen von e und k identisch der Nullmatrix $\mathbf{0}_{6 \times 6}$ ist. Es ist deshalb sinnvoll die Indexmenge $\mathbb{I}_{E,k}$ einzuführen. Sie beinhaltet die Indizes jener Balken, welche mit dem Starrkörper k verbunden sind. Somit lässt sich (2.28) als

$$\delta \Pi = \sum_{k \in \mathbb{I}_{St}} \sum_{e \in \mathbb{I}_{E,k}} \boldsymbol{\tau}_e^T(\Delta \mathbf{q}) \frac{\partial \Delta \mathbf{q}_e}{\partial \mathbf{q}_k} \delta \mathbf{q}_k . \quad (2.29)$$

schreiben. Die Jacobimatrizen $\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_e}{\partial \mathbf{q}_k}$ mit $k \in \mathbb{I}_{St}$ und $e \in \mathbb{I}_{E,k}$ sind im Allgemeinen alle ungleich der Nullmatrix $\mathbf{0}_{6 \times 6}$.

Um Gleichung (2.19) vollständig formulieren zu können, fehlt noch die Variation der externen Arbeit. Es wird angenommen, dass jegliche Krafteinwirkung von außen über die Starrkörper stattfindet und Balken nur über ihre Ränder belastet werden. Damit lässt sich die externe Arbeit durch

$$W_{\text{ex}} = \sum_{k \in \mathbb{I}_{\text{St}}} \int_0^{\mathbf{q}_k} \boldsymbol{\tau}_k^{\text{T}}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (2.30)$$

ausdrücken. Die Variation lautet dann

$$\delta W_{\text{ex}} = \sum_{k \in \mathbb{I}_{\text{St}}} \boldsymbol{\tau}_k^{\text{T}} \delta \mathbf{q}_k . \quad (2.31)$$

Einsetzen von (2.22), (2.29) und (2.31) in (2.19) liefert nach Umsortieren der Terme

$$- \sum_{k \in \mathbb{I}_{\text{St}}} m_k g \delta r_{z,k} - \sum_{k \in \mathbb{I}_{\text{St}}} \sum_{e \in \mathbb{I}_{\text{B}_k}} \boldsymbol{\tau}_e^{\text{T}}(\Delta \mathbf{q}) \frac{\partial \Delta \mathbf{q}_e}{\partial \mathbf{q}_k} \delta \mathbf{q}_k + \sum_{k \in \mathbb{I}_{\text{St}}} \boldsymbol{\tau}_k^{\text{T}} \delta \mathbf{q}_k = 0 . \quad (2.32)$$

Der Fundamentalsatz der Variationsrechnung liefert nach einer Transposition von (2.32) für jeden Starrkörper k

$$- m_k g \mathbf{e}_{6z} - \sum_{e \in \mathbb{I}_{\text{B}_k}} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_e}{\partial \mathbf{q}_k} \right)^{\text{T}} \boldsymbol{\tau}_e + \boldsymbol{\tau}_k = \mathbf{0}_{6 \times 1} . \quad (2.33)$$

Dabei wurde

$$\mathbf{e}_{6z} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^{\text{T}} \quad (2.34)$$

benutzt.

2.2.4 Benennung von wichtigen Elementen und Punkten des Fahrzeugs

Im Folgenden werden wichtige Elemente des Fahrzeugs benannt. Zur Unterscheidung werden die Stützen, Räder, Federn etc. nummeriert. Für relevante Punkte und für die Steifigkeitsmatrizen werden Indizes vergeben. In Abbildung 2.3 sind die Positions- und Orientierungsvektoren eingetragen. Starrkörper und Knoten sind rot dargestellt, die Referenzpunkte der Starrkörper sind blau markiert. Es sei angemerkt, dass es sich bei F_{3o} bis F_{6o} um Knoten handelt, welche keine geometrische Ausdehnung besitzen. Wie weiter oben bereits angemerkt, dienen sie dazu das Chassis (mathematisch) in Teilbalken aufzuspalten. Die Vektoren mit einem B (Boden) als Subskript dienen dazu den Geländeverlauf abzubilden. Sie sind somit Eingangsgrößen des Systems. Das Referenzkoordinatensystem wird, wie in der Abbildung gezeigt, am Boden der Stütze 1 befestigt. Somit gilt $\mathbf{r}_{BS_1} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$. Die Starrkörperkoordinatensysteme befinden sich an den blau markierten Punkten. Sie sind dabei identisch zum Referenzkoordinatensystem orientiert, sofern alle Balken unbelasteten sind.

Abbildung 2.4 zeigt wichtige Punkte des Fahrzeugs. Es handelt sich hierbei immer um Balkenränder oder Federenden (Federn oder andere elastische Elemente). Man bemerke, dass hier $\mathbf{r}_{F_{1o}}$ und $\mathbf{r}_{F_{2o}}$, im Gegensatz zu $\mathbf{r}_{F_{3o}}$ bis $\mathbf{r}_{F_{6o}}$, zu finden sind. Die Punkte $\mathbf{r}_{F_{1o}}$

und \mathbf{r}_{F_2o} stellen keine Knoten (und somit auch keine unabhängigen Größen) dar, sondern werden aus der Position und der Orientierung des Drehschemels berechnet.

Abbildung 2.5 zeigt die elastischen Elemente und ihre dazugehörigen Steifigkeitsmatrizen. Da die Fahrzeugfedern im Wesentlichen nur Kräfte in z -Richtung aufnehmen können, wird die Steifigkeit der Federn durch die Skalare k_{F_i} , $i = 1, \dots, 6$ repräsentiert. Der Bodenkontakt wird durch eine nichtlineare Beziehung zwischen Kraft und Verschiebung charakterisiert, welche im nächsten Abschnitt behandelt wird.

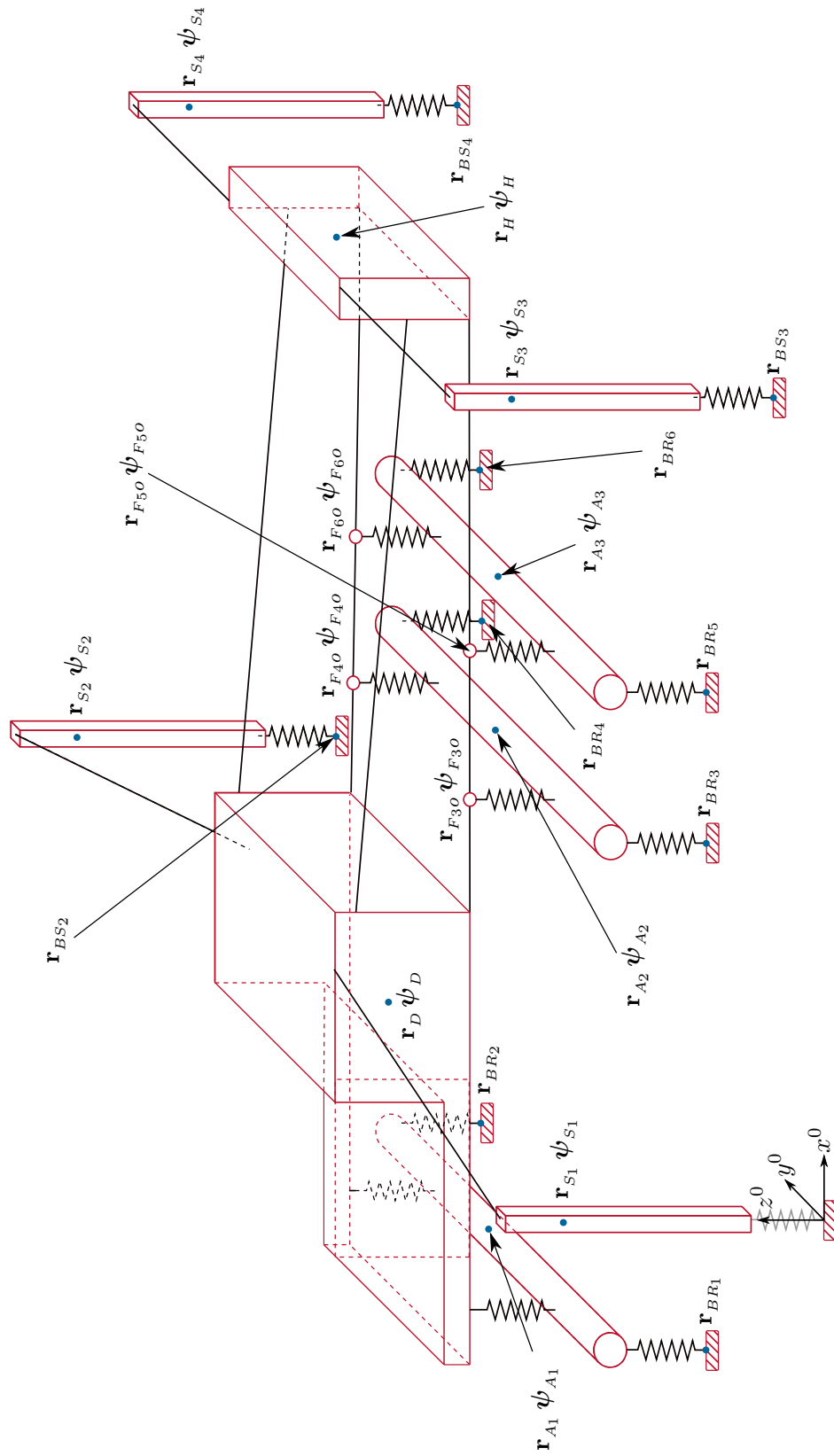


Abbildung 2.3: Positions- und Orientierungsvektoren der Starrkörper. Es werden folgende Indizes verwendet: A für Achse, B für Boden, D für Drehschemel, F für Feder, H für Heck, R für Reifen und S für Stütze.

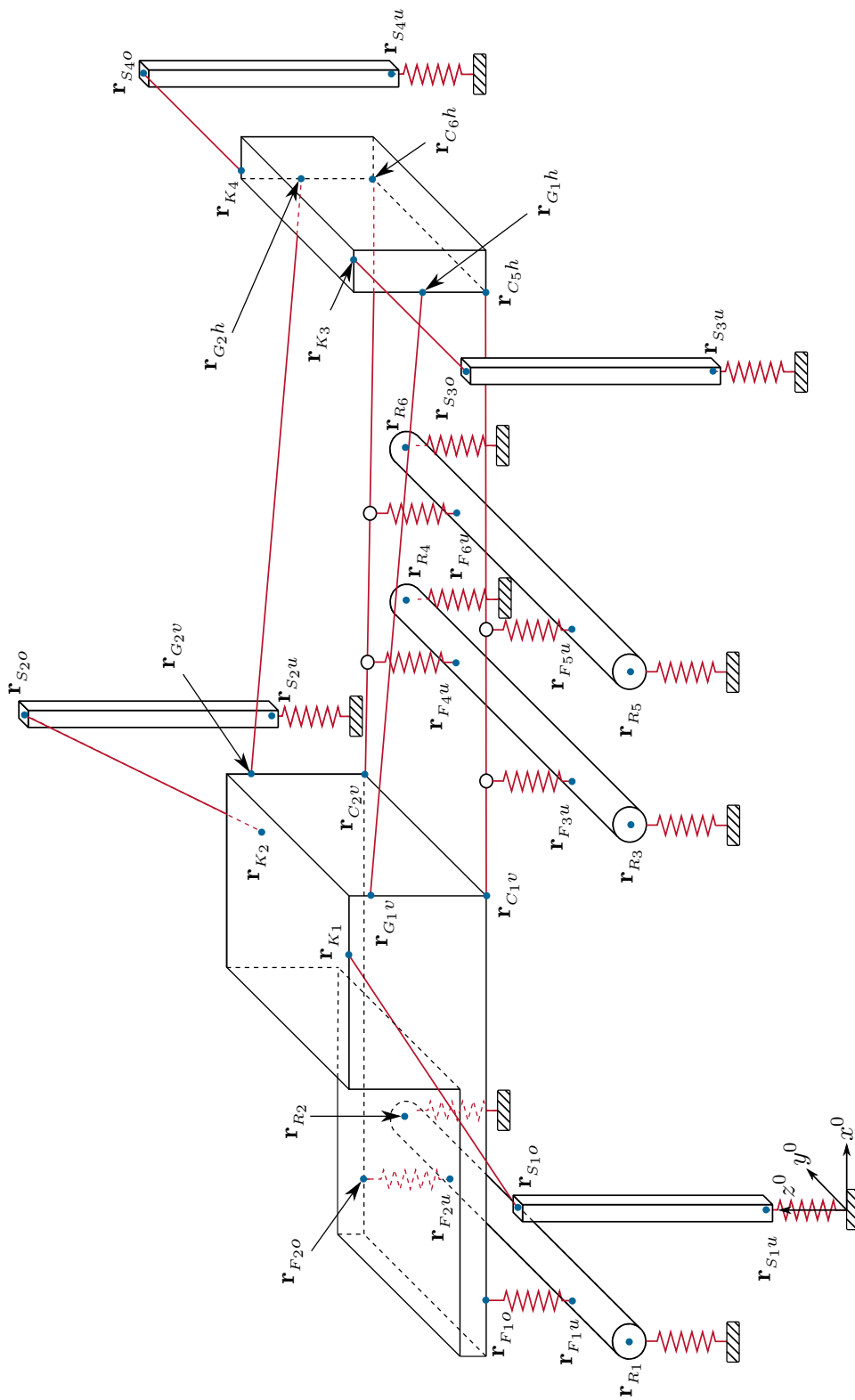


Abbildung 2.4: Wichtige Punkte des Fahrzeugs, welche im Weiteren benötigt werden. Es werden folgende Indizes verwendet: B für Boden, C für Chassis, F für Feder, G für Träger Grundrahmen, h für hinten, K für Auskrantung, o für oben, R für Reifen, S für Stütze, u für unten und v für vorne.

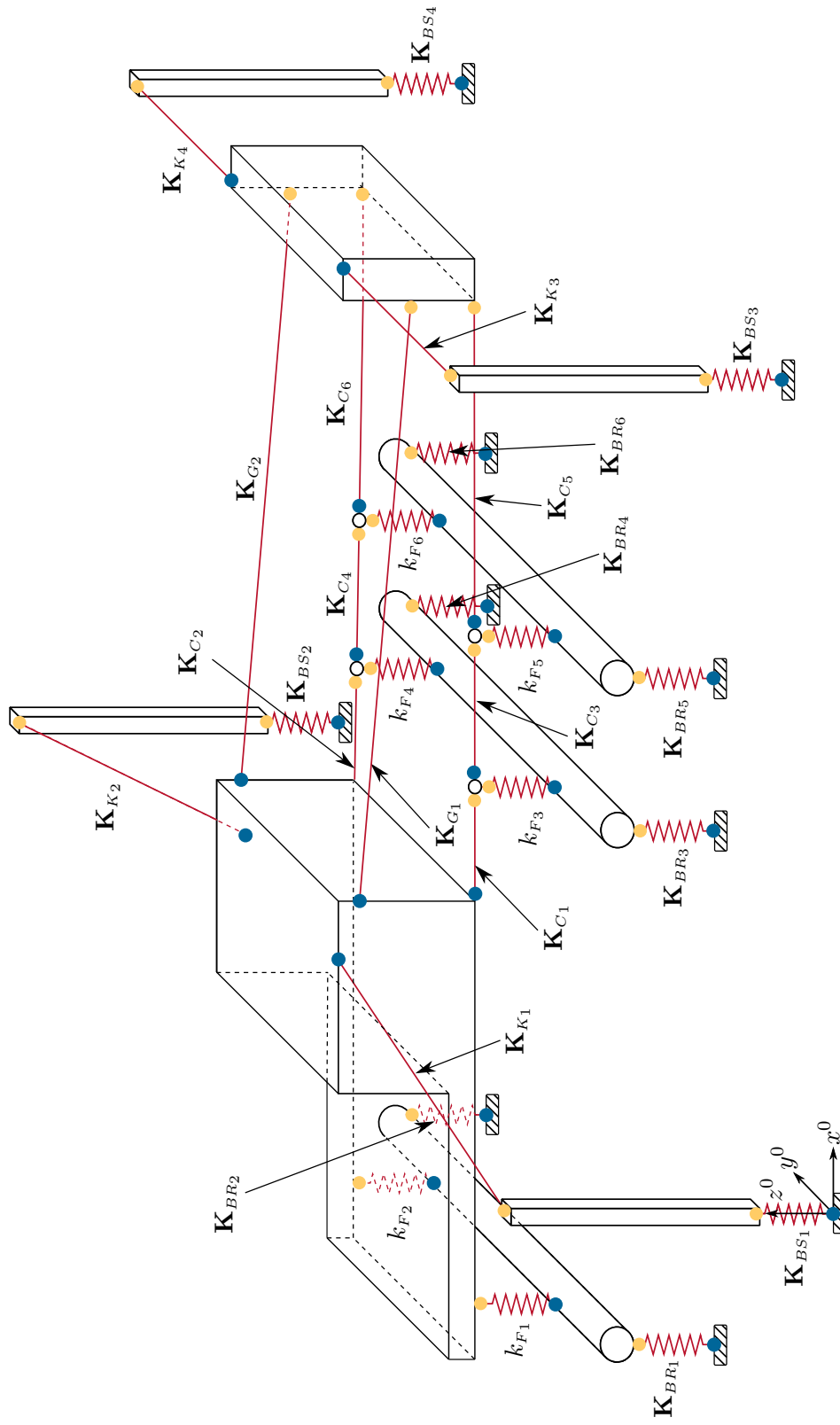


Abbildung 2.5: Elastische Elemente und zugehörige Steifigkeitsmatrizen. Positive Balkenränder sind in orange, negative in blau markiert. Es werden folgende Indizes verwendet: B für Boden, C für Chassis, F für Feder, G für Träger Grundrahmen, K für Auskrümmung, R für Reifen und S für Stütze.

2.2.5 Modellierung des Bodenkontakts

Der Vektor \mathbf{k}_{BS_1} ist wie folgt definiert

$$\mathbf{k}_{BS_1} = \left[k_{x,BS_1} \quad k_{y,BS_1} \quad k_{z,BS_1} \quad k_{\psi_x,BS_1} \quad k_{\psi_y,BS_1} \quad k_{\psi_z,BS_1} \right]^T \quad (2.35)$$

und wird zur Charakterisierung des Bodens unter der Stütze 1 verwendet. Hierbei bestimmt k_{x,BS_1} , k_{y,BS_1} bzw. k_{z,BS_1} die Nachgiebigkeit des Bodens in x -, y - bzw. z -Richtung (des Referenzkoordinatensystems) und k_{ψ_x,BS_1} , k_{ψ_y,BS_1} bzw. k_{ψ_z,BS_1} die Fähigkeit des Bodens bzw. des Stützfußes ein Moment um die x -, y - bzw. z -Achse (des Referenzkoordinatensystems) aufzunehmen. Die restlichen Vektoren \mathbf{k}_{BS_2} bis \mathbf{k}_{BS_4} sowie \mathbf{k}_{BR_1} bis \mathbf{k}_{BR_6} sind auf analoge Weise definiert, allerdings besitzen die Vektoren \mathbf{k}_{BR_1} bis \mathbf{k}_{BR_6} nur die ersten drei Komponenten k_{x,BR_i} , k_{y,BR_i} und k_{z,BR_i} mit $i = 1, \dots, 6$. Dies ist gerechtfertigt, da die Reifen kaum Momente um die x - und y -Achse aufnehmen können. Das Moment um die z -Achse, welches z. B. durch Reibung beim Lenken entsteht, wird vernachlässigt. Für die Modellierung des Bodenkontakts wurde, wie bereits erwähnt, eine nichtlineare Beziehung zwischen Kraft und Verschiebung gewählt, da bei abgehobener Stütze ($\Delta r_{z,BS_1} > 0$) keine Kraftwirkung vorhanden ist. Die Beziehung soll am Beispiel der Stütze 1 erklärt werden. Die Kraft in z -Richtung (des Referenzkoordinatensystems) hat folgende Form

$$F_{z,BS_1}(\Delta r_{z,BS_1}) = k_{z,BS_1} s(\Delta r_{z,BS_1}), \quad (2.36a)$$

mit

$$s(\Delta r_{z,BS_1}) = \begin{cases} 0 & 0 < \Delta r_{z,BS_1} \\ -\frac{1}{\Delta r_0} \left(\frac{\Delta r_{z,BS_1}}{\sqrt{2}} \right)^2 & -\Delta r_0 < \Delta r_{z,BS_1} \leq 0, \\ \frac{1}{\Delta r_0} \left(\Delta r_{z,BS_1} \Delta r_0 + \left(\frac{\Delta r_0}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) & \Delta r_{z,BS_1} \leq -\Delta r_0 \end{cases}, \quad (2.36b)$$

wobei Δr_0 eine positive Konstante ist. Man beachte, dass $\Delta r_{z,BS_1}$ bei belasteter Stütze negativ ist (vgl. Abbildung 2.5). Der Kraftverlauf F_{z,BS_1} ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Die Kraft $F_{z,BS_1}(\Delta r_{z,BS_1})$ hat für $-\Delta r_0 < \Delta r_{z,BS_1} \leq 0$ einen quadratischen und für $\Delta r_{z,BS_1} \leq -\Delta r_0$ einen linearen Verlauf. Man beachte, dass dieser stetig differenzierbar ist. Das ist von Vorteil, da (wie später gezeigt) zur Lösung der Systemgleichungen ein Gradientenverfahren verwendet wird, bei dem die Ableitung von F_{z,BS_1} berechnet werden muss. Es ist bekannt, dass unstetige Gradienten zu Konvergenzproblemen führen können.

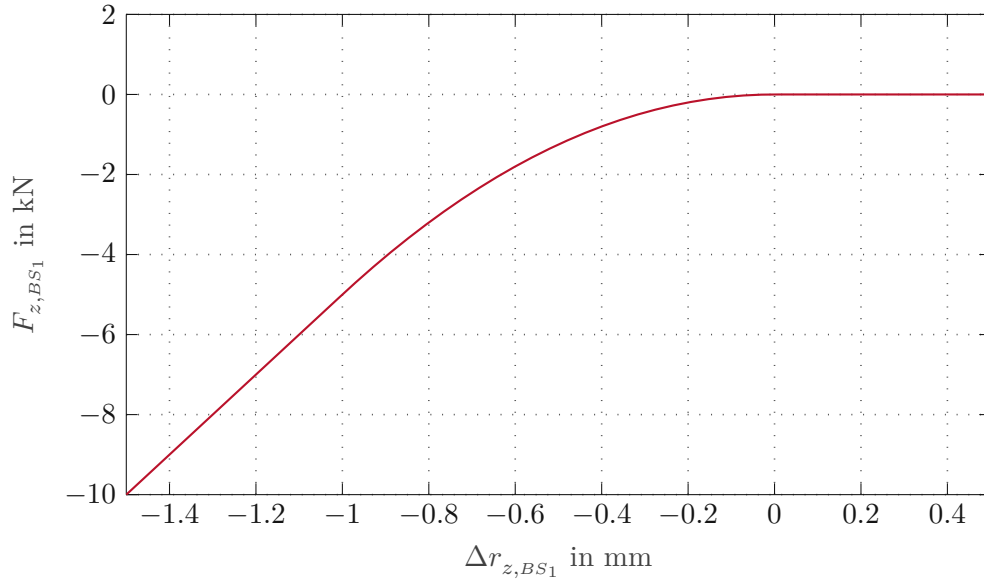


Abbildung 2.6: Modellierung des Bodens: Darstellung der Beziehung zwischen Kraft und Verschiebung für $k_{z,BS1} = 10 \text{ MN/m}$ und $\Delta r_0 = 1 \text{ mm}$.

Die restlichen Kraft- bzw. Momentenkomponenten haben folgende Form

$$F_{x,BS1} = k_{x,BS1} \Delta r_{x,BS1} \frac{s(\Delta r_{z,BS1})}{\Delta r_0} \quad (2.36c)$$

$$F_{y,BS1} = k_{y,BS1} \Delta r_{y,BS1} \frac{s(\Delta r_{z,BS1})}{\Delta r_0} \quad (2.36d)$$

$$M_{x,BS1} = k_{\psi_x,BS1} \Delta \psi_{x,BS1} \frac{s(\Delta r_{z,BS1})}{\Delta r_0} \quad (2.36e)$$

$$M_{y,BS1} = k_{\psi_y,BS1} \Delta \psi_{y,BS1} \frac{s(\Delta r_{z,BS1})}{\Delta r_0} \quad (2.36f)$$

$$M_{z,BS1} = k_{\psi_z,BS1} \Delta \psi_{z,BS1} \frac{s(\Delta r_{z,BS1})}{\Delta r_0} \quad (2.36g)$$

Hierbei wurde der Quotient $s(\Delta r_{z,BS1})/\Delta r_0$ verwendet, welcher in der Größenordnung $s(\Delta r_{z,BS1})/\Delta r_0 \approx \Delta r_{z,BS1}/\Delta r_0 \approx 1 - 10$ liegt. Eine Alternative zur Modellierung der Kräfte und Momente (2.36c) bis (2.36g) wäre die Verwendung einer Tangens hyperbolicus Funktion zur Skalierung der Bodensteifigkeit. Die Kraft $F_{x,BS1}$ könnte z. B. wie folgt definiert werden

$$F_{x,BS1} = k_{x,BS1} \left(1 - \frac{\tanh\left(\frac{\Delta r_{z,BS1}}{\Delta r_0}\right)}{2} \right) \Delta r_{x,BS1} \quad (2.37)$$

Da die Kräfte und Momente (2.36c) bis (2.36g) im Vergleich zu (2.36a) für die Abstützung von geringer Bedeutung sind, hat ihr Verlauf kaum Einfluss auf die Lösung der

Systemgleichungen. Allerdings können die Kräfte (2.36c) und (2.36d) nicht vernachlässigt werden, da die x - und y -Position des Fahrzeugs sonst nicht eindeutig definiert ist.

Die Modellierung des Bodenkontakts der übrigen Stützen und Reifen erfolgt auf analoge Weise. Dabei wurde angenommen, dass die Reifen keine Momente aufnehmen können. Deshalb werden in diesem Fall die rechten Seiten von (2.36e) bis (2.36g) durch 0 ersetzt.

Durch die Wahl der Vektoren können verschiedene Untergründe simuliert werden, z. B. Asphaltboden oder Schotteruntergrund. Die betrachtete Autobetonpumpe besitzt Kugelgelenke in den Stützfüßen (welche unter Idealannahme keine Momente übertragen). Dies kann im Modell abgebildet werden, indem k_{ψ_x,BS_i} , k_{ψ_y,BS_i} und k_{ψ_z,BS_i} zu 0 gesetzt werden.

2.2.6 Stütze 1

Die Stütze 1 ist mit der Auskrangung 1 verbunden und liegt auf dem Boden auf (falls sie belastet ist). Die Summe in (2.33) enthält somit zwei Terme. Setzt man mit Bezug auf die Stütze in (2.33) ein, so erhält man

$$-m_{S_1}g\mathbf{e}_{6z} - \left(\frac{\partial\Delta\mathbf{q}_{K_1}}{\partial\mathbf{q}_{S_1}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{K_1} - \left(\frac{\partial\Delta\mathbf{q}_{BS_1}}{\partial\mathbf{q}_{S_1}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{BS_1} = \mathbf{0}_{6\times 1}, \quad (2.38)$$

wobei m_{S_1} die Masse der Stütze 1 ist. Außerdem wurde $\boldsymbol{\tau}_{BS_1}$ aus (2.36) und

$$\boldsymbol{\tau}_{K_1} = \mathbf{K}_{K_1}(l_{K_1})\Delta\mathbf{q}_{K_1}(\mathbf{q}_D, \mathbf{q}_{S_1}) \quad (2.39)$$

verwendet. Man beachte, dass \mathbf{K}_{K_1} nach (2.15) von der Länge der Auskrangung l_{K_1} abhängt, welche eine Eingangsgröße bildet.

Die genaue Gestalt der Jacobimatrizen $\partial\Delta\mathbf{q}_{K_1}/\partial\mathbf{q}_{S_1}$ und $\partial\Delta\mathbf{q}_{BS_1}/\partial\mathbf{q}_{S_1}$ wurde bisher nicht beschrieben. Deshalb soll nun zunächst die generalisierte Verschiebung $\Delta\mathbf{q}_{K_1}$ hergeleitet werden. Die Teilvektoren $\Delta\mathbf{r}_{K_1}$ und $\Delta\boldsymbol{\psi}_{K_1}$ werden dabei getrennt betrachtet. Abbildung 2.7 zeigt schematisch den Drehschemel, die Stütze und die verformte Auskrangung. Der Verschiebungsvektor in Referenzkoordinaten lässt sich, wie folgt berechnen

$$\Delta\mathbf{r}_{K_1}^0 = \mathbf{r}_{S_1o} - \mathbf{r}_{\overline{S_1o}}. \quad (2.40)$$

Hierbei entspricht $\mathbf{r}_{\overline{S_1o}}$ dem Punkt, den \mathbf{r}_{S_1o} einnimmt, wenn die Auskrangung 1 nicht verformt ist. Die Linie über dem Subskript soll den nicht verformten Balken kennzeichnen. Die Vektoren \mathbf{r}_{S_1o} und $\mathbf{r}_{\overline{S_1o}}$ lassen sich folgendermaßen berechnen

$$\mathbf{r}_{S_1o} = \mathbf{r}_{S_1} + \mathbf{R}_0^{S_1}(\boldsymbol{\psi}_{S_1})\mathbf{r}_{S_1o}^{S_1} \quad (2.41)$$

und

$$\mathbf{r}_{\overline{S_1o}} = \mathbf{r}_D + \mathbf{R}_0^D(\boldsymbol{\psi}_D)\mathbf{r}_{\overline{S_1o}}^D(l_{K_1}). \quad (2.42)$$

Dabei ist $\mathbf{r}_{S_1o}^{S_1}$ ein konstanter Vektor, der nur von der Geometrie der Maschine abhängt⁵. Einsetzen von (2.41) und (2.42) in (2.40) und transformieren ins Balkenkoordinatensystem K_1 ergibt die gesuchte Balkenverschiebung

$$\Delta\mathbf{r}_{K_1} = \mathbf{R}_{K_1}^D \mathbf{R}_D^0(\boldsymbol{\psi}_D) \left(\mathbf{R}_0^{S_1}(\boldsymbol{\psi}_{S_1})\mathbf{r}_{S_1o}^{S_1} - \mathbf{R}_0^D(\boldsymbol{\psi}_D)\mathbf{r}_{\overline{S_1o}}^D(l_{K_1}) + \mathbf{r}_{S_1} - \mathbf{r}_D \right). \quad (2.43)$$

⁵Der Vektor $\mathbf{r}_{S_1o}^{S_1}$ hängt nicht von der Länge der Stütze l_{S_1} ab. Die Länge der Stütze wird durch den Vektor $\mathbf{r}_{S_1u}^{S_1}$ beschrieben.

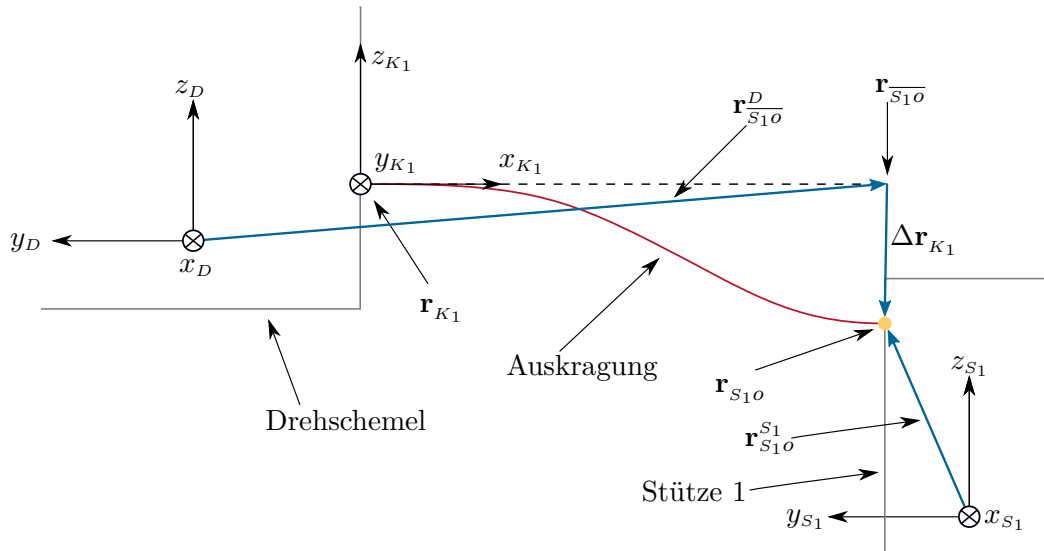


Abbildung 2.7: Skizze zur Berechnung der verallgemeinerten Balkenverschiebung. In Orange markiert ist der positive Balkenrand der Auskragung.

Dabei ist $\mathbf{R}_{K_1}^D$ eine konstante Rotationsmatrix, die nur von der Geometrie des Fahrzeugs abhängt.

Um die Winkelkomponente $\Delta\psi_{K_1}$ der generalisierten Balkenverschiebung zu berechnen, wird ein zweites Balkenkoordinatensystem eingeführt, welches am positiven Rand der Auskragung festgemacht ist. Dieses wird mit dem Skript K_1' gekennzeichnet. Parametriert man eine Rotationsmatrix \mathbf{R} mit dem Vektor $\Delta\psi_{K_1}$ so entspricht diese der Transformationsmatrix vom positiven Rand K_1' zum negativen Rand K_1 , welche sich zu

$$\mathbf{R}(\Delta\psi_{K_1}) = \mathbf{R}_{K_1}^{K_1'} = \mathbf{R}_{K_1}^D \mathbf{R}_D^0(\psi_D) \mathbf{R}_0^{S_1}(\psi_{S_1}) \mathbf{R}_{S_1}^{K_1'} \quad (2.44)$$

ergibt. Da die Matrizen $\mathbf{R}_{S_1}^{K_1'}$ und $\mathbf{R}_{K_1}^D$ konstant sind, hängt $\Delta\psi_{K_1}$ nur von ψ_D und ψ_{S_1} ab. Der Vektor $\Delta\psi_{K_1}$ muss also aus der Matrix $\mathbf{R}_{K_1}^{K_1'}$, durch das Lösen des inversen Problems, berechnet werden. Dies macht weitere Ableitungen sehr aufwendig und ist außerdem nicht nötig, da die Relativwinkel zwischen den Starrkörpern, und somit die Komponenten von $\Delta\psi_{K_1}$, beim betrachteten Problem stets klein sind. Deshalb kann eine Kleinwinkelnäherung verwendet werden. Es wird folgende Approximation gemacht [9]

$$\Delta\psi_{K_1} \approx \mathbf{R}_{K_1}^D (\psi_{S_1} - \psi_D) , \quad (2.45)$$

mit

$$\mathbf{R}_{K_1}^D = \mathbf{R}_{S_1}^{K_1'} . \quad (2.46)$$

Dabei gilt letztere Gleichung, da die Körperkoordinatensysteme bei unbelasteter Maschine am Referenzkoordinatensystem ausgerichtet sind. Der generalisierte Verschiebungsvektor $\Delta\mathbf{q}_{K_1}$ ist somit bekannt und die gesuchten Jacobimatrizien können berechnet werden. Zunächst wird $\partial\Delta\mathbf{q}_{K_1}/\partial\mathbf{q}_{S_1}$ hergeleitet. Alle weiteren für die Systemgleichungen benötigten

Jacobimatrizen lassen sich auf analoge Weise berechnen. Durch Ableiten ergibt sich

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{K_1}}{\partial \mathbf{r}_{S_1}} = \mathbf{R}_{K_1}^D \mathbf{R}_D^0, \quad (2.47a)$$

$$\frac{\partial \Delta \psi_{K_1}}{\partial \mathbf{r}_{S_1}} = \mathbf{0}_{3 \times 3}, \quad (2.47b)$$

$$\frac{\partial \Delta \psi_{K_1}}{\partial \psi_{S_1}} = \mathbf{R}_{K_1}^D. \quad (2.47c)$$

Die Berechnung von $\partial \Delta \mathbf{r}_{K_1} / \partial \psi_{S_1}$ ist weniger trivial, da die Rotationsmatrizen abgeleitet werden müssen. Es werden folgende Operatoren definiert

$$\mathbf{\Lambda}(\psi, \mathbf{r}) = \frac{\partial \mathbf{R}(\psi) \mathbf{r}}{\partial \psi} \quad (2.48)$$

und

$$\mathbf{\Lambda}_T(\psi, \mathbf{r}) = \frac{\partial \mathbf{R}^T(\psi) \mathbf{r}}{\partial \psi}. \quad (2.49)$$

Damit lässt sich Folgendes anschreiben

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{K_1}}{\partial \psi_{S_1}} = \mathbf{R}_{K_1}^D \mathbf{R}_D^0 \mathbf{\Lambda}(\psi_{S_1}, \mathbf{r}_{S_1}^{S_1 o}), \quad (2.50)$$

wobei $\mathbf{R}_0^{S_1} = \mathbf{R}(\psi_{S_1})$ verwendet wurde. Die gesuchte Jacobimatrix lautet somit

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K_1}}{\partial \mathbf{q}_{S_1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{K_1}}{\partial \mathbf{r}_{S_1}} & \frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{K_1}}{\partial \psi_{S_1}} \\ \frac{\partial \Delta \psi_{K_1}}{\partial \mathbf{r}_{S_1}} & \frac{\partial \Delta \psi_{K_1}}{\partial \psi_{S_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{K_1}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{R}_{K_1}^D \mathbf{R}_D^0 \mathbf{\Lambda}(\psi_{S_1}, \mathbf{r}_{S_1}^{S_1 o}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{K_1}^D \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Der Gradient $\partial \Delta \mathbf{q}_{BS_1} / \partial \mathbf{q}_{S_1}$ lässt sich ähnlich berechnen. Wie bereits angemerkt, hängt $\mathbf{r}_{S_1}^{S_1 u}$ (vgl. Abbildung 2.4) von l_{S_1} ab. Der Vektor wird wie folgt definiert

$$\mathbf{r}_{S_1}^{S_1 u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_{S_1} \end{bmatrix}^T. \quad (2.52)$$

Die Stützlänge l_{S_1} entspricht somit (wenn man Verformungen vernachlässigt) der z -Position der Stütze 1⁶.

Damit ist die Stütze 1 vollständig charakterisiert. Die Gleichungen für die restlichen Stützen 2 bis 4 lassen sich durch Anpassen der Indizes in (2.38) gewinnen.

⁶Die Starrkörperkoordinatensysteme wurden dabei so gelegt, dass das Drehschemelkoordinatensystem und die Koordinatensysteme der Stützen (ohne Belastung) auf selber Höhe (z -Position) liegen. In Abbildung 2.7 ist dies aus zeichnerischen Gründen vernachlässigt.

2.2.7 Achse 2

Die Herleitung der folgenden Gleichungen weicht etwas von dem vorherigen Schema ab. Dies liegt daran, dass die Achse 2 nur die Freiheitsgrade r_{z,A_2} und ψ_{x,A_2} besitzt. Die Komponenten r_{x,A_2} , r_{y,A_2} und ψ_{z,A_2} werden aus dem Mittelwert der Knoten F_{3o} und F_{4o} berechnet. D. h.

$$r_{x,A_2} = \frac{1}{2} \left(r_{x,F_{3o}} + r_{x,F_{4o}} \right), \quad (2.53a)$$

$$r_{y,A_2} = \frac{1}{2} \left(r_{y,F_{3o}} + r_{y,F_{4o}} \right), \quad (2.53b)$$

$$\psi_{z,A_2} = \frac{1}{2} \left(\psi_{z,F_{3o}} + \psi_{z,F_{4o}} \right). \quad (2.53c)$$

Der Winkel ψ_{y,A_2} wird zu Null gesetzt

$$\psi_{y,A_2} = 0. \quad (2.53d)$$

Da die Achse 2 mit der Feder 3 und dem Reifen 3 sowie der Feder 4 und dem Reifen 4 verbunden ist, werden folgend die Komponenten $\Delta r_{z,F_3}$, $\Delta r_{z,F_4}$, $\Delta r_{z,BR_3}$ und $\Delta r_{z,BR_4}$ hergeleitet. Die Verschiebung der Feder in z -Richtung ergibt sich zu (vgl. Abbildung 2.4)

$$\Delta r_{z,F_3} = r_{z,F_{3o}} - r_{z,F_{3u}} - l_{F_3}, \quad (2.54)$$

mit

$$r_{z,F_{3u}} = r_{z,A_2} + \sin(\psi_{x,A_2}) r_{y,F_{3u}}^{A_2}. \quad (2.55)$$

Dabei ist l_{F_3} die nominale Länge der Feder 3 und $r_{y,F_{3u}}^{A_2}$ die (konstante) y -Komponente des Vektors $\mathbf{r}_{F_{3u}}$ im Koordinatensystem der Achse 2. Es wurde vereinfachend angenommen, dass alle Komponenten von $\mathbf{r}_{F_{3u}}^{A_2}$ außer der y -Komponente gleich Null sind. Für die Berechnung von (2.54) wurde außerdem angenommen, dass die Vektoren $\mathbf{r}_{F_{3o}}$ und $\mathbf{r}_{F_{3u}}$ dieselbe x - und y -Komponente aufweisen. Dies ist durch die Gleichungen (2.53) gerechtfertigt. Hier wurde bewusst auf eine Kleinwinkelnäherung verzichtet, da es sich bei ψ_{x,A_2} nicht um einen Relativwinkel zwischen zwei Starrkörpern handelt.

Für die Verschiebung des Reifens 3 (inklusive Boden) in z -Richtung ergibt sich folgende Beziehung (vgl. Abbildung 2.4)

$$\Delta r_{z,BR_3} = r_{z,R_3} - r_{z,BR_3} - \frac{1}{2} d_{R_3} \quad (2.56)$$

mit

$$r_{z,R_3} = r_{z,A_2} + \sin(\psi_{x,A_2}) r_{y,R_3}^{A_2} \quad (2.57)$$

und dem nominalen Durchmesser des Reifens 3 d_{R_3} . Hier sind alle Komponenten von $\mathbf{r}_{R_3}^{A_2}$ außer $r_{y,R_3}^{A_2}$ aus rein konstruktiven Gründen gleich Null. Die Verschiebungen $\Delta r_{z,F_4}$ und $\Delta r_{z,BR_4}$ können durch Anpassen der Indizes in (2.54) bis (2.57) erhalten werden.

Mit

$$\mathbf{q}_{A_2} = \begin{bmatrix} r_{z,A_2} \\ \psi_{x,A_2} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

ergibt sich für die Achse 2 durch Anpassen von (2.33)

$$\begin{aligned} -m_{A_2}g \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,F_3}}{\partial \mathbf{q}_{A_2}} \right)^T F_{z,F_3} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,F_4}}{\partial \mathbf{q}_{A_2}} \right)^T F_{z,F_4} \\ - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,BR_3}}{\partial \mathbf{q}_{A_2}} \right)^T F_{z,BR_3} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,BR_4}}{\partial \mathbf{q}_{A_2}} \right)^T F_{z,BR_4} = \mathbf{0}_{2 \times 1} . \end{aligned} \quad (2.59)$$

Dabei wurde

$$F_{z,F_i} = k_{F_i} \Delta r_{z,F_i}, \quad i = 3, 4 \quad (2.60)$$

und die Masse der Achse 2 m_{A_2} verwendet. Die Kräfte F_{z,BR_i} , $i = 1, 2$ wurden wie in Abschnitt 2.2.5 beschrieben, hergeleitet und außerdem wurde angenommen, dass keine externe Kraft auf die Achse wirkt.

In (2.59) fehlen die Skalare k_{x,BR_3} und k_{y,BR_3} , welche die Nachgiebigkeit der Reifen bzw. des Bodens in der xy -Ebene (des Referenzkoordinatensystems) widerspiegeln. Nach Gleichungen (2.53) ist die xy -Position der Achse vollständig durch \mathbf{r}_{F_3O} und \mathbf{r}_{F_4O} definiert. Deshalb wird der Einfluss dieser Kräfte nicht durch die Gleichung der Achse abgedeckt und erst im nächsten Abschnitt behandelt.

Um die Gleichung für die Achse 3 zu erhalten, müssen bloß die Indizes angepasst werden. Die Achse 1 unterscheidet sich, da die Punkte \mathbf{r}_{F_1O} und \mathbf{r}_{F_2O} keine Knoten darstellen. Nach Anpassen der Indizes werden die Gleichungen (2.53) (in diesem Fall) mit

$$\mathbf{r}_{F_iO} = \mathbf{r}_D + \mathbf{R}_0^D \mathbf{r}_{F_iO}^D, \quad i = 1, 2 \quad (2.61a)$$

ergänzt, bzw. (2.53c) durch

$$\psi_{z,A_1} = \psi_{z,D} \quad (2.61b)$$

ersetzt. Es sei angemerkt, dass die Vektoren $\mathbf{r}_{F_iO}^D$, $i = 1, 2$ konstant sind und nur von der Geometrie der Maschine abhängen.

2.2.8 Behandlung der Knoten im Fahrzeugchassis

Um die Krafteinwirkung der Fahrwerksfedern auf das Fahrzeugchassis zu modellieren, wird das Chassis aufgetrennt. An den Trennstellen werden die Knoten F_iO , $i = 3, \dots, 6$ eingefügt (vgl. Abbildung 2.3). Im Folgenden wird die Gleichung für den Knoten F_3O hergeleitet. Dieser Knoten ist mit den Chassisteilen 1 und 3, sowie mit der Feder 3 verbunden (vgl. Abbildung 2.5). Außerdem besteht nach (2.53) eine virtuelle Verbindung mit dem Gelände. Da \mathbf{r}_{xy,A_2} nach (2.53) von \mathbf{r}_{F_3O} abhängt, beeinflusst \mathbf{r}_{F_3O} sowohl $\Delta \mathbf{r}_{xy,BR_3}$ als auch $\Delta \mathbf{r}_{xy,BR_4}$. Durch Vergleichen mit Abbildung 2.3 bis Abbildung 2.5 ergibt sich ähnlich wie bei der Achse 2

$$\Delta \mathbf{r}_{xy,BR_3} = \mathbf{r}_{xy,R_3} - \mathbf{r}_{xy,BR_3}, \quad (2.62a)$$

mit

$$\mathbf{r}_{xy,R_3} = \mathbf{r}_{xy,A_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\psi_{x,A_2}) r_{y,R_3}^{A_2} \end{bmatrix} \quad (2.62b)$$

und \mathbf{r}_{xy,A_2} aus (2.53a) und (2.53b). Hierbei bildet die x - und y -Position des Bodens unter dem Reifen 3 \mathbf{r}_{xy,BR_3} eine Eingangsgröße. Der Vektor $\Delta\mathbf{r}_{xy,BR_4}$ lässt sich auf analoge Weise berechnen.

Somit ergibt sich durch Anpassen von (2.33) für den Knoten F_{3o}

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_1}}{\partial \mathbf{q}_{F_{3o}}} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_1} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_3}}{\partial \mathbf{q}_{F_{3o}}} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_3} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy,BR_3}}{\partial \mathbf{q}_{F_{3o}}} \right)^T \mathbf{f}_{xy,BR_3} \\ & - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy,BR_4}}{\partial \mathbf{q}_{F_{3o}}} \right)^T \mathbf{f}_{xy,BR_4} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,F_3}}{\partial \mathbf{q}_{F_{3o}}} \right)^T F_{z,F_3} = \mathbf{0}_{6 \times 1} . \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dabei wurde von (2.60) und (2.54) sowie

$$\boldsymbol{\tau}_{C_i} = \mathbf{K}_{C_i} \Delta \mathbf{q}_{C_i}, \quad i = 1, 3, \quad (2.64a)$$

$$\mathbf{f}_{xy,BR_i} = \begin{bmatrix} F_{x,BR_i} & F_{y,BR_i} \end{bmatrix}^T, \quad i = 3, 4 \quad (2.64b)$$

Gebrauch gemacht. Die Vektoren \mathbf{f}_{xy,BR_i} , $i = 3, 4$ wurden wieder, wie in Abschnitt 2.2.5 beschrieben, hergeleitet. Der Knoten F_{3o} besitzt keine Masse und es wirken auch keine externen Kräfte auf ihn. Deshalb entfallen die entsprechenden Terme in (2.63). Da sich die Herleitung von $\Delta \mathbf{q}_{C_1}$ und $\Delta \mathbf{q}_{C_3}$ analog, wie in Abschnitt 2.2.6 verhält, wird nicht noch einmal darauf eingegangen. Die Gleichungen der restlichen Knoten können auf ähnliche Weise hergeleitet werden.

2.2.9 Gelände

Die z -Komponenten der Vektoren $\mathbf{r}_{BS_2}, \dots, \mathbf{r}_{BS_4}$ ($\mathbf{r}_{BS_1} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$, Ursprung des Referenzkoordinatensystems) und $\mathbf{r}_{BR_1}, \dots, \mathbf{r}_{BR_6}$ werden, falls nicht anders angegeben zu Null gesetzt. Die übrigen Komponenten erhalten ihre Werte aus den Projektionen der korrespondierenden Starrkörper auf die xy -Ebene des Referenzkoordinatensystems. Dabei wird angenommen, dass die Winkel der Starrkörper um die x - und y -Achse Null sind. D. h. die x - und y -Koordinaten von \mathbf{r}_{BS_1} werden z. B. aus der Projektion von \mathbf{r}_{S_1} auf die xy -Ebene (Referenzkoordinatensystem) ermittelt.

2.2.10 Mast

Der Mast wird als Starrkörper modelliert. Er erhält ein eigenes Koordinatensystem, dessen x -Achse in die Längsrichtung des ersten Mastelements weist. Die y -Achse wird so ausgerichtet, dass sie (bei Transportstellung des Masts) mit der y -Achse des Drehschemels zusammenfällt. Der Mast ist durch zwei Freiheitsgrade charakterisiert, nämlich $\psi_{y,M}$ und $\psi_{z,M}$. Dies sind die Winkel zwischen dem Mast- und dem Drehschemelkoordinatensystem. Wie bereits angedeutet, wirkt der Mast auf das Modell in Form einer externen Kraft bzw. eines Moments. Der Kraftvektor ist wie folgt definiert

$$\mathbf{f}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_M g \end{bmatrix}^T. \quad (2.65)$$

Der Momentenvektor lautet

$$\mathbf{m}_D = (\mathbf{R}_0^D(\mathbf{r}_M^D + \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}_M)\mathbf{r}_{MSP}^M)) \times \mathbf{f}_D . \quad (2.66)$$

Dabei ist m_M die Masse des Masts, \mathbf{r}_M^D die Position des Mastkoordinatensystems, dargestellt im Drehschemelkoordinatensystem, \mathbf{r}_{MSP}^M der Schwerpunkt des Masts im Mastkoordinatensystem und \times entspricht dem Kreuzprodukt. Außerdem wurde

$$\boldsymbol{\psi}_M = \begin{bmatrix} 0 & \psi_{y,M} & \psi_{z,M} \end{bmatrix}^T \quad (2.67)$$

verwendet. Im Weiteren werden zwei Mastschwerpunkte benötigt, nämlich $\mathbf{r}_{MSP,t}^M$ und $\mathbf{r}_{MSP,a}^M$, welche dem Schwerpunkt des Masts in der Transportstellung und dem Schwerpunkt bei vollständig ausgefahrenem Mast entsprechen.

Für nachfolgende Betrachtungen wird noch die Gesamtmasse des Fahrzeugs

$$m_{Fz} = m_D + m_H + m_{S_1} + m_{S_2} + m_{S_3} + m_{S_4} + m_{A_1} + m_{A_2} + m_{A_3} + m_M \quad (2.68)$$

definiert. Dabei ist m_H die Masse des Hecks.

2.3 Systemgleichungen

Die Schritte zur Herleitung der Systemgleichungen wurden in den letzten Abschnitten skizziert. Nun sollen die Systemgleichungen präsentiert werden. Die nachfolgenden Formeln (2.69) zeigen die Gleichungen der Starrkörper und die dazugehörigen Jacobimatrizien ((2.70) bis (2.82)). Damit die generalisierten Balkenkräfte berechnet werden können, finden sich im Folgenden auch die generalisierten Balkenverschiebungen ((2.83) bis (2.88)).

Drehschemel

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{G_1}}{\partial \mathbf{q}_D} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{G_1} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{G_2}}{\partial \mathbf{q}_D} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{G_2} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_1}}{\partial \mathbf{q}_D} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_1} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_2}}{\partial \mathbf{q}_D} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_2} \\ & - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K_1}}{\partial \mathbf{q}_D} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{K_1} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K_2}}{\partial \mathbf{q}_D} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{K_2} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy,BR_1}}{\partial \mathbf{q}_D} \right)^T \mathbf{f}_{xy,BR_1} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy,BR_2}}{\partial \mathbf{q}_D} \right)^T \mathbf{f}_{xy,BR_2} \\ & - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,F_1}}{\partial \mathbf{q}_D} \right)^T F_{z,F_1} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,F_2}}{\partial \mathbf{q}_D} \right)^T F_{z,F_2} - m_D g \mathbf{e}_{6z} + \boldsymbol{\tau}_D = \mathbf{0}_{6 \times 1} . \end{aligned} \quad (2.69a)$$

Heck

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{G_1}}{\partial \mathbf{q}_H} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{G_1} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{G_2}}{\partial \mathbf{q}_H} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{G_2} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_5}}{\partial \mathbf{q}_H} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_5} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_6}}{\partial \mathbf{q}_H} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_6} \\ & - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K_3}}{\partial \mathbf{q}_H} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{K_3} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K_4}}{\partial \mathbf{q}_H} \right)^T \boldsymbol{\tau}_{K_4} - m_H g \mathbf{e}_{6z} + \boldsymbol{\tau}_H = \mathbf{0}_{6 \times 1} . \end{aligned} \quad (2.69b)$$

Stütze 1

$$-\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K_1}}{\partial \mathbf{q}_{S_1}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{K_1} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{BS_1}}{\partial \mathbf{q}_{S_1}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{BS_1} - m_{S_1} g \mathbf{e}_{6z} = \mathbf{0}_{6 \times 1} . \quad (2.69c)$$

Stütze 2

$$-\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K_2}}{\partial \mathbf{q}_{S_2}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{K_2} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{BS_2}}{\partial \mathbf{q}_{S_2}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{BS_2} - m_{S_2} g \mathbf{e}_{6z} = \mathbf{0}_{6 \times 1} . \quad (2.69d)$$

Stütze 3

$$-\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K_3}}{\partial \mathbf{q}_{S_3}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{K_3} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{BS_3}}{\partial \mathbf{q}_{S_3}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{BS_3} - m_{S_3} g \mathbf{e}_{6z} = \mathbf{0}_{6 \times 1} . \quad (2.69e)$$

Stütze 4

$$-\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K_4}}{\partial \mathbf{q}_{S_4}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{K_4} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{BS_4}}{\partial \mathbf{q}_{S_4}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{BS_4} - m_{S_4} g \mathbf{e}_{6z} = \mathbf{0}_{6 \times 1} . \quad (2.69f)$$

Knoten F_{3o}

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_1}}{\partial \mathbf{q}_{F_{3o}}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_1} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_3}}{\partial \mathbf{q}_{F_{3o}}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_3} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR_3}}{\partial \mathbf{q}_{F_{3o}}}\right)^T \mathbf{f}_{xy, BR_3} \\ & - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR_4}}{\partial \mathbf{q}_{F_{3o}}}\right)^T \mathbf{f}_{xy, BR_4} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z, F_3}}{\partial \mathbf{q}_{F_{3o}}}\right)^T F_{z, F_3} = \mathbf{0}_{6 \times 1} . \end{aligned} \quad (2.69g)$$

Knoten F_{4o}

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_2}}{\partial \mathbf{q}_{F_{4o}}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_2} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_4}}{\partial \mathbf{q}_{F_{4o}}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_4} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR_3}}{\partial \mathbf{q}_{F_{4o}}}\right)^T \mathbf{f}_{xy, BR_3} \\ & - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR_4}}{\partial \mathbf{q}_{F_{4o}}}\right)^T \mathbf{f}_{xy, BR_4} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z, F_4}}{\partial \mathbf{q}_{F_{4o}}}\right)^T F_{z, F_4} = \mathbf{0}_{6 \times 1} . \end{aligned} \quad (2.69h)$$

Knoten F_{5o}

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_3}}{\partial \mathbf{q}_{F_{5o}}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_3} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_5}}{\partial \mathbf{q}_{F_{5o}}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_5} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR_5}}{\partial \mathbf{q}_{F_{5o}}}\right)^T \mathbf{f}_{xy, BR_5} \\ & - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR_6}}{\partial \mathbf{q}_{F_{5o}}}\right)^T \mathbf{f}_{xy, BR_6} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z, F_5}}{\partial \mathbf{q}_{F_{5o}}}\right)^T F_{z, F_5} = \mathbf{0}_{6 \times 1} . \end{aligned} \quad (2.69i)$$

Knoten F_{6o}

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_4}}{\partial \mathbf{q}_{F_{6o}}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_4} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C_6}}{\partial \mathbf{q}_{F_{6o}}}\right)^T \boldsymbol{\tau}_{C_6} - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR_5}}{\partial \mathbf{q}_{F_{6o}}}\right)^T \mathbf{f}_{xy, BR_5} \\ & - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR_6}}{\partial \mathbf{q}_{F_{6o}}}\right)^T \mathbf{f}_{xy, BR_6} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z, F_6}}{\partial \mathbf{q}_{F_{6o}}}\right)^T F_{z, F_6} = \mathbf{0}_{6 \times 1} . \end{aligned} \quad (2.69j)$$

Achse 1

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,F1}}{\partial \mathbf{q}_{A1}} \right)^T F_{z,F1} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,F2}}{\partial \mathbf{q}_{A1}} \right)^T F_{z,F2} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,BR1}}{\partial \mathbf{q}_{A1}} \right)^T F_{z,BR1} \\
& - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,BR2}}{\partial \mathbf{q}_{A1}} \right)^T F_{z,BR2} - m_{A1} g \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}_{2 \times 1}.
\end{aligned} \tag{2.69k}$$

Achse 2

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,F3}}{\partial \mathbf{q}_{A2}} \right)^T F_{z,F3} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,F4}}{\partial \mathbf{q}_{A2}} \right)^T F_{z,F4} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,BR3}}{\partial \mathbf{q}_{A2}} \right)^T F_{z,BR3} \\
& - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,BR4}}{\partial \mathbf{q}_{A2}} \right)^T F_{z,BR4} - m_{A2} g \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}_{2 \times 1}.
\end{aligned} \tag{2.69l}$$

Achse 3

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,F5}}{\partial \mathbf{q}_{A3}} \right)^T F_{z,F5} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,F6}}{\partial \mathbf{q}_{A3}} \right)^T F_{z,F6} - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,BR5}}{\partial \mathbf{q}_{A3}} \right)^T F_{z,BR5} \\
& - \left(\frac{\partial \Delta r_{z,BR6}}{\partial \mathbf{q}_{A3}} \right)^T F_{z,BR6} - m_{A3} g \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}_{2 \times 1}.
\end{aligned} \tag{2.69m}$$

2.3.1 Jacobimatrizen

Drehschemel

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{G1}}{\partial \mathbf{q}_D} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{G1}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{R}_{G1}^D \mathbf{\Lambda}_T(\boldsymbol{\psi}_D, \mathbf{R}_0^H \mathbf{r}_{G1}^H + \mathbf{r}_H - \mathbf{r}_D) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_{G1}^D \end{bmatrix}, \tag{2.70a}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{G2}}{\partial \mathbf{q}_D} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{G2}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{R}_{G2}^D \mathbf{\Lambda}_T(\boldsymbol{\psi}_D, \mathbf{R}_0^H \mathbf{r}_{G2}^H + \mathbf{r}_H - \mathbf{r}_D) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_{G2}^D \end{bmatrix}, \tag{2.70b}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C1}}{\partial \mathbf{q}_D} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{C1}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{R}_{C1}^D \mathbf{\Lambda}_T(\boldsymbol{\psi}_D, \mathbf{r}_{F3o} - \mathbf{r}_D) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_{C1}^D \end{bmatrix}, \tag{2.70c}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C2}}{\partial \mathbf{q}_D} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{C2}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{R}_{C2}^D \mathbf{\Lambda}_T(\boldsymbol{\psi}_D, \mathbf{r}_{F4o} - \mathbf{r}_D) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_{C2}^D \end{bmatrix}, \tag{2.70d}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K1}}{\partial \mathbf{q}_D} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{K1}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{R}_{K1}^D \mathbf{\Lambda}_T(\boldsymbol{\psi}_D, \mathbf{R}_0^{S1} \mathbf{r}_{S1o} + \mathbf{r}_{S1} - \mathbf{r}_D) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_{K1}^D \end{bmatrix}, \tag{2.70e}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K2}}{\partial \mathbf{q}_D} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{K2}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{R}_{K2}^D \mathbf{\Lambda}_T(\boldsymbol{\psi}_D, \mathbf{R}_0^{S2} \mathbf{r}_{S2o} + \mathbf{r}_{S2} - \mathbf{r}_D) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_{K2}^D \end{bmatrix}, \tag{2.70f}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy,BR1}}{\partial \mathbf{q}_D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda_1(\boldsymbol{\psi}_D, (\mathbf{r}_{F1o}^D + \mathbf{r}_{F2o}^D)/2) \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_2(\boldsymbol{\psi}_D, (\mathbf{r}_{F1o}^D + \mathbf{r}_{F2o}^D)/2) \end{bmatrix}, \tag{2.70g}$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR2}}{\partial \mathbf{q}_D} = \frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR1}}{\partial \mathbf{q}_D}, \quad (2.70h)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, F1}}{\partial \mathbf{q}_D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda_3(\psi_D, \mathbf{r}_{F1o}^D) \end{bmatrix}, \quad (2.70i)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, F2}}{\partial \mathbf{q}_D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda_3(\psi_D, \mathbf{r}_{F2o}^D) \end{bmatrix}. \quad (2.70j)$$

Dabei ist $\lambda_i(\psi, \mathbf{r})$ die i -te Zeile von $\Lambda(\psi, \mathbf{r})$.

Heck

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{G1}}{\partial \mathbf{q}_H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{G1}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{R}_{G1}^D \mathbf{R}_D^0 \Lambda(\psi_H, \mathbf{r}_{G1h}^H) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{G1}^D \end{bmatrix}, \quad (2.71a)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{G2}}{\partial \mathbf{q}_H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{G2}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{R}_{G2}^D \mathbf{R}_D^0 \Lambda(\psi_H, \mathbf{r}_{G2h}^H) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{G2}^D \end{bmatrix}, \quad (2.71b)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C5}}{\partial \mathbf{q}_H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{C5}^{F5o} \mathbf{R}_{F5o}^0 & \mathbf{R}_{C5}^{F5o} \mathbf{R}_{F5o}^0 \Lambda(\psi_H, \mathbf{r}_{C5h}^H) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{C5}^{F5o} \end{bmatrix}, \quad (2.71c)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C6}}{\partial \mathbf{q}_H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{C6}^{F6o} \mathbf{R}_{F6o}^0 & \mathbf{R}_{C6}^{F6o} \mathbf{R}_{F6o}^0 \Lambda(\psi_H, \mathbf{r}_{C6h}^H) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{C6}^{F6o} \end{bmatrix}, \quad (2.71d)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K3}}{\partial \mathbf{q}_H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{K3}^H \mathbf{R}_H^0 & \mathbf{R}_{K3}^H \Lambda_T(\psi_H, \mathbf{R}_0^{S3} \mathbf{r}_{S3o}^{S3} + \mathbf{r}_{S3} - \mathbf{r}_H) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_{K3}^H \end{bmatrix}, \quad (2.71e)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K4}}{\partial \mathbf{q}_H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{K4}^H \mathbf{R}_H^0 & \mathbf{R}_{K4}^H \Lambda_T(\psi_H, \mathbf{R}_0^{S4} \mathbf{r}_{S4o}^{S4} + \mathbf{r}_{S4} - \mathbf{r}_H) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_{K4}^H \end{bmatrix}. \quad (2.71f)$$

Stütze 1

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K1}}{\partial \mathbf{q}_{S1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{K1}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{R}_{K1}^D \mathbf{R}_D^0 \Lambda(\psi_{S1}, \mathbf{r}_{S1o}^{S1}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{K1}^D \end{bmatrix}, \quad (2.72a)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{BS1}}{\partial \mathbf{q}_{S1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \Lambda(\psi_{S1}, \mathbf{r}_{S1u}^{S1}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (2.72b)$$

Dabei ist $\mathbf{E}_{3 \times 3}$ die Einheitsmatrix der Dimension 3×3 .

Stütze 2

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K2}}{\partial \mathbf{q}_{S2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{K2}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{R}_{K2}^D \mathbf{R}_D^0 \Lambda(\psi_{S2}, \mathbf{r}_{S2o}^{S2}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{K2}^D \end{bmatrix}, \quad (2.73a)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{BS2}}{\partial \mathbf{q}_{S2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \Lambda(\psi_{S2}, \mathbf{r}_{S2u}^{S2}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (2.73b)$$

Stütze 3

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K3}}{\partial \mathbf{q}_{S3}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{K3}^H \mathbf{R}_H^0 & \mathbf{R}_{K3}^H \mathbf{R}_H^0 \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\psi}_{S3}, \mathbf{r}_{S3}^{S3}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{K3}^H \end{bmatrix}, \quad (2.74a)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{BS3}}{\partial \mathbf{q}_{S3}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\psi}_{S3}, \mathbf{r}_{S3}^{S3u}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (2.74b)$$

Stütze 4

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{K4}}{\partial \mathbf{q}_{S4}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{K4}^H \mathbf{R}_H^0 & \mathbf{R}_{K4}^H \mathbf{R}_H^0 \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\psi}_{S4}, \mathbf{r}_{S4}^{S4}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{K4}^H \end{bmatrix}, \quad (2.75a)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{BS4}}{\partial \mathbf{q}_{S4}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} & \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\psi}_{S4}, \mathbf{r}_{S4}^{S4u}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (2.75b)$$

Knoten F_{3o}

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C1}}{\partial \mathbf{q}_{F3o}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{C1}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{C1}^D \end{bmatrix}, \quad (2.76a)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C3}}{\partial \mathbf{q}_{F3o}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{C3}^{F3o} \mathbf{R}_{F3o}^0 & \mathbf{R}_{C3}^{F3o} \boldsymbol{\Lambda}_T(\boldsymbol{\psi}_{F3o}, \mathbf{r}_{F5o} - \mathbf{r}_{F3o}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_{C3}^{F3o} \end{bmatrix}, \quad (2.76b)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR3}}{\partial \mathbf{q}_{F3o}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.76c)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR4}}{\partial \mathbf{q}_{F3o}} = \frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR3}}{\partial \mathbf{q}_{F3o}}, \quad (2.76d)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, F3}}{\partial \mathbf{q}_{F3o}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.76e)$$

Knoten F_{4o}

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C2}}{\partial \mathbf{q}_{F4o}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{C2}^D \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{C2}^D \end{bmatrix}, \quad (2.77a)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C4}}{\partial \mathbf{q}_{F4o}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{C4}^{F4o} \mathbf{R}_{F4o}^0 & \mathbf{R}_{C4}^{F4o} \boldsymbol{\Lambda}_T(\boldsymbol{\psi}_{F4o}, \mathbf{r}_{F6o} - \mathbf{r}_{F4o}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_{C4}^{F4o} \end{bmatrix}, \quad (2.77b)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR4}}{\partial \mathbf{q}_{F4o}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.77c)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR3}}{\partial \mathbf{q}_{F4o}} = \frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR4}}{\partial \mathbf{q}_{F4o}}, \quad (2.77d)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, F4}}{\partial \mathbf{q}_{F4o}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.77e)$$

Knoten F_{5o}

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C3}}{\partial \mathbf{q}_{F5o}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{C3}^{F3o} \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{C3}^{F3o} \end{bmatrix}, \quad (2.78a)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C5}}{\partial \mathbf{q}_{F5o}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{C5}^{F5o} \mathbf{R}_{F5o}^0 & \mathbf{R}_{C5}^{F5o} \Lambda_T \left(\psi_{F5o}, \mathbf{R}_H^0 \mathbf{r}_{C5h}^H + \mathbf{r}_H - \mathbf{r}_{F5o} \right) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_{C5}^{F5o} \end{bmatrix}, \quad (2.78b)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR5}}{\partial \mathbf{q}_{F5o}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.78c)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR6}}{\partial \mathbf{q}_{F5o}} = \frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR5}}{\partial \mathbf{q}_{F5o}}, \quad (2.78d)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, F5}}{\partial \mathbf{q}_{F5o}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.78e)$$

Knoten F_{6o}

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C4}}{\partial \mathbf{q}_{F6o}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{C4}^{F4o} \mathbf{R}_D^0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{C4}^{F4o} \end{bmatrix}, \quad (2.79a)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{q}_{C6}}{\partial \mathbf{q}_{F6o}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{C6}^{F6o} \mathbf{R}_{F6o}^0 & \mathbf{R}_{C6}^{F6o} \Lambda_T \left(\psi_{F6o}, \mathbf{R}_H^0 \mathbf{r}_{C6h}^H + \mathbf{r}_H - \mathbf{r}_{F6o} \right) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathbf{R}_{C6}^{F6o} \end{bmatrix}, \quad (2.79b)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR6}}{\partial \mathbf{q}_{F6o}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.79c)$$

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR5}}{\partial \mathbf{q}_{F6o}} = \frac{\partial \Delta \mathbf{r}_{xy, BR6}}{\partial \mathbf{q}_{F6o}}, \quad (2.79d)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, F6}}{\partial \mathbf{q}_{F6o}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.79e)$$

Achse 1

$$\frac{\partial \Delta r_{z, F1}}{\partial \mathbf{q}_{A1}} = \begin{bmatrix} -1 & -\cos(\psi_{x, A1}) r_{y, F1}^{A1} \end{bmatrix}, \quad (2.80a)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, F2}}{\partial \mathbf{q}_{A1}} = \begin{bmatrix} -1 & -\cos(\psi_{x, A1}) r_{y, F2}^{A1} \end{bmatrix}, \quad (2.80b)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, BR1}}{\partial \mathbf{q}_{A1}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\psi_{x, A1}) r_{y, R1}^{A1} \end{bmatrix}, \quad (2.80c)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, BR2}}{\partial \mathbf{q}_{A1}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\psi_{x, A1}) r_{y, R2}^{A1} \end{bmatrix}. \quad (2.80d)$$

Achse 2

$$\frac{\partial \Delta r_{z, F3}}{\partial \mathbf{q}_{A2}} = \begin{bmatrix} -1 & -\cos(\psi_{x, A2}) r_{y, F3}^{A2} \end{bmatrix}, \quad (2.81a)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, F4}}{\partial \mathbf{q}_{A2}} = \begin{bmatrix} -1 & -\cos(\psi_{x, A2}) r_{y, F4}^{A2} \end{bmatrix}, \quad (2.81b)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, BR3}}{\partial \mathbf{q}_{A2}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\psi_{x, A2}) r_{y, R3}^{A2} \end{bmatrix}, \quad (2.81c)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, BR4}}{\partial \mathbf{q}_{A2}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\psi_{x, A2}) r_{y, R4}^{A2} \end{bmatrix}. \quad (2.81d)$$

Achse 3

$$\frac{\partial \Delta r_{z, F5}}{\partial \mathbf{q}_{A3}} = \begin{bmatrix} -1 & -\cos(\psi_{x, A3}) r_{y, F5}^{A3} \end{bmatrix}, \quad (2.82a)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, F6}}{\partial \mathbf{q}_{A3}} = \begin{bmatrix} -1 & -\cos(\psi_{x, A3}) r_{y, F6}^{A3} \end{bmatrix}, \quad (2.82b)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, BR5}}{\partial \mathbf{q}_{A3}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\psi_{x, A3}) r_{y, R5}^{A3} \end{bmatrix}, \quad (2.82c)$$

$$\frac{\partial \Delta r_{z, BR6}}{\partial \mathbf{q}_{A3}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\psi_{x, A3}) r_{y, R6}^{A3} \end{bmatrix}. \quad (2.82d)$$

Alle nicht genannten Jacobimatrizen entsprechen der Nullmatrix.

2.3.2 Generalisierte Verschiebungen

Damit die generalisierten Balkenkräfte berechnet werden können, sollen hier noch die Vektoren $\Delta \mathbf{r}$ und $\Delta \boldsymbol{\psi}$ angegeben werden.

Grundrahmen

$$\Delta \mathbf{r}_{G1} = \mathbf{R}_{G1}^D \mathbf{R}_D^0 \left(\mathbf{R}_0^H \mathbf{r}_{G1h}^H - \mathbf{R}_0^D \mathbf{r}_{G1h}^D + \mathbf{r}_H - \mathbf{r}_D \right), \quad (2.83a)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{G1} = \mathbf{R}_{G1}^D (\boldsymbol{\psi}_H - \boldsymbol{\psi}_D), \quad (2.83b)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{G2} = \mathbf{R}_{G2}^D \mathbf{R}_D^0 \left(\mathbf{R}_0^H \mathbf{r}_{G2h}^H - \mathbf{R}_0^D \mathbf{r}_{G2h}^D + \mathbf{r}_H - \mathbf{r}_D \right), \quad (2.83c)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{G2} = \mathbf{R}_{G2}^D (\boldsymbol{\psi}_H - \boldsymbol{\psi}_D). \quad (2.83d)$$

Chassis

$$\Delta \mathbf{r}_{C_1} = \mathbf{R}_{C_1}^D \mathbf{R}_D^0 \left(-\mathbf{R}_0^D \mathbf{r}_{F_3o}^D + \mathbf{r}_{F_3o} - \mathbf{r}_D \right), \quad (2.84a)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{C_1} = \mathbf{R}_{C_1}^D (\boldsymbol{\psi}_{F_3o} - \boldsymbol{\psi}_D), \quad (2.84b)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{C_2} = \mathbf{R}_{C_2}^D \mathbf{R}_D^0 \left(-\mathbf{R}_0^D \mathbf{r}_{F_4o}^D + \mathbf{r}_{F_4o} - \mathbf{r}_D \right), \quad (2.84c)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{C_2} = \mathbf{R}_{C_2}^D (\boldsymbol{\psi}_{F_4o} - \boldsymbol{\psi}_D), \quad (2.84d)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{C_3} = \mathbf{R}_{C_3}^{F_3o} \mathbf{R}_{F_3o}^0 \left(-\mathbf{R}_0^{F_3o} \mathbf{r}_{F_5o}^{F_3o} + \mathbf{r}_{F_5o} - \mathbf{r}_{F_3o} \right), \quad (2.84e)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{C_3} = \mathbf{R}_{C_3}^{F_3o} (\boldsymbol{\psi}_{F_5o} - \boldsymbol{\psi}_{F_3o}), \quad (2.84f)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{C_4} = \mathbf{R}_{C_4}^{F_4o} \mathbf{R}_{F_4o}^0 \left(-\mathbf{R}_0^{F_4o} \mathbf{r}_{F_6o}^{F_4o} + \mathbf{r}_{F_6o} - \mathbf{r}_{F_4o} \right), \quad (2.84g)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{C_4} = \mathbf{R}_{C_4}^{F_4o} (\boldsymbol{\psi}_{F_6o} - \boldsymbol{\psi}_{F_4o}), \quad (2.84h)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{C_5} = \mathbf{R}_{C_5}^{F_5o} \mathbf{R}_{F_5o}^0 \left(\mathbf{R}_0^H \mathbf{r}_{C_5h}^H - \mathbf{R}_0^{F_5o} \mathbf{r}_{C_5h}^{F_5o} + \mathbf{r}_H - \mathbf{r}_{F_5o} \right), \quad (2.84i)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{C_5} = \mathbf{R}_{C_5}^{F_5o} (\boldsymbol{\psi}_H - \boldsymbol{\psi}_{F_5o}), \quad (2.84j)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{C_6} = \mathbf{R}_{C_6}^{F_6o} \mathbf{R}_{F_6o}^0 \left(\mathbf{R}_0^H \mathbf{r}_{C_6h}^H - \mathbf{R}_0^{F_6o} \mathbf{r}_{C_6h}^{F_6o} + \mathbf{r}_H - \mathbf{r}_{F_6o} \right), \quad (2.84k)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{C_6} = \mathbf{R}_{C_6}^{F_6o} (\boldsymbol{\psi}_H - \boldsymbol{\psi}_{F_6o}). \quad (2.84l)$$

Auskragungen

$$\Delta \mathbf{r}_{K_1} = \mathbf{R}_{K_1}^D \mathbf{R}_D^0 \left(\mathbf{R}_0^{S_1} \mathbf{r}_{S_1o}^{S_1} - \mathbf{R}_0^D \mathbf{r}_{S_1o}^D + \mathbf{r}_{S_1} - \mathbf{r}_D \right), \quad (2.85a)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{K_1} = \mathbf{R}_{K_1}^D (\boldsymbol{\psi}_{S_1} - \boldsymbol{\psi}_D), \quad (2.85b)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{K_2} = \mathbf{R}_{K_2}^D \mathbf{R}_D^0 \left(\mathbf{R}_0^{S_2} \mathbf{r}_{S_2o}^{S_2} - \mathbf{R}_0^D \mathbf{r}_{S_2o}^D + \mathbf{r}_{S_2} - \mathbf{r}_D \right), \quad (2.85c)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{K_2} = \mathbf{R}_{K_2}^D (\boldsymbol{\psi}_{S_2} - \boldsymbol{\psi}_D), \quad (2.85d)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{K_3} = \mathbf{R}_{K_3}^H \mathbf{R}_H^0 \left(\mathbf{R}_0^{S_3} \mathbf{r}_{S_3o}^{S_3} - \mathbf{R}_0^H \mathbf{r}_{S_3o}^H + \mathbf{r}_{S_3} - \mathbf{r}_H \right), \quad (2.85e)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{K_3} = \mathbf{R}_{K_3}^H (\boldsymbol{\psi}_{S_3} - \boldsymbol{\psi}_H), \quad (2.85f)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{K_4} = \mathbf{R}_{K_4}^H \mathbf{R}_H^0 \left(\mathbf{R}_0^{S_4} \mathbf{r}_{S_4o}^{S_4} - \mathbf{R}_0^H \mathbf{r}_{S_4o}^H + \mathbf{r}_{S_4} - \mathbf{r}_H \right), \quad (2.85g)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{K_4} = \mathbf{R}_{K_4}^H (\boldsymbol{\psi}_{S_4} - \boldsymbol{\psi}_H). \quad (2.85h)$$

Boden unter den Stützen

$$\Delta \mathbf{r}_{BS_1} = \mathbf{R}_0^{S_1} \mathbf{r}_{S_1u}^{S_1} + \mathbf{r}_{S_1} - \mathbf{r}_{BS_1}, \quad (2.86a)$$

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{BS_1} = \boldsymbol{\psi}_{S_1}, \quad (2.86b)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{BS_2} = \mathbf{R}_0^{S_2} \mathbf{r}_{S_2 u} + \mathbf{r}_{S_2} - \mathbf{r}_{BS_2} , \quad (2.86c)$$

$$\Delta \psi_{BS_2} = \psi_{S_2} , \quad (2.86d)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{BS_3} = \mathbf{R}_0^{S_3} \mathbf{r}_{S_3 u} + \mathbf{r}_{S_3} - \mathbf{r}_{BS_3} , \quad (2.86e)$$

$$\Delta \psi_{BS_3} = \psi_{S_3} , \quad (2.86f)$$

$$\Delta \mathbf{r}_{BS_4} = \mathbf{R}_0^{S_4} \mathbf{r}_{S_4 u} + \mathbf{r}_{S_4} - \mathbf{r}_{BS_4} , \quad (2.86g)$$

$$\Delta \psi_{BS_4} = \psi_{S_4} . \quad (2.86h)$$

Feder 1

$$\Delta r_{z,F_1} = r_{z,F_1 o} - r_{z,F_1 u} - l_{F_1} , \quad (2.87a)$$

mit

$$\mathbf{r}_{F_1 o} = \mathbf{r}_D + \mathbf{R}_0^D \mathbf{r}_{F_1 o}^D , \quad (2.87b)$$

$$r_{z,F_1 u} = r_{z,A_1} + \sin(\psi_{x,A_1}) r_{y,F_1 u}^{A_1} . \quad (2.87c)$$

Feder 2

$$\Delta r_{z,F_2} = r_{z,F_2 o} - r_{z,F_2 u} - l_{F_2} , \quad (2.87d)$$

mit

$$\mathbf{r}_{F_2 o} = \mathbf{r}_D + \mathbf{R}_0^D \mathbf{r}_{F_2 o}^D , \quad (2.87e)$$

$$r_{z,F_2 u} = r_{z,A_1} + \sin(\psi_{x,A_1}) r_{y,F_2 u}^{A_1} . \quad (2.87f)$$

Feder 3

$$\Delta r_{z,F_3} = r_{z,F_3 o} - r_{z,F_3 u} - l_{F_3} , \quad (2.87g)$$

mit

$$r_{z,F_3 u} = r_{z,A_2} + \sin(\psi_{x,A_2}) r_{y,F_3 u}^{A_2} . \quad (2.87h)$$

Hier und bei den nachfolgenden Gleichungen (der Federn) fehlen die Positionen der oberen Federenden ($\mathbf{r}_{F_3 o}, \dots, \mathbf{r}_{F_6 o}$), da diese unabhängige Größen darstellen, welche durch Lösen der Systemgleichungen ermittelt werden.

Feder 4

$$\Delta r_{z,F_4} = r_{z,F_4 o} - r_{z,F_4 u} - l_{F_4} , \quad (2.87i)$$

mit

$$r_{z,F_4 u} = r_{z,A_2} + \sin(\psi_{x,A_2}) r_{y,F_4 u}^{A_2} . \quad (2.87j)$$

Feder 5

$$\Delta r_{z,F_5} = r_{z,F_5 o} - r_{z,F_5 u} - l_{F_5} , \quad (2.87k)$$

mit

$$r_{z,F_5 u} = r_{z,A_3} + \sin(\psi_{x,A_3}) r_{y,F_5 u}^{A_3} . \quad (2.87l)$$

Feder 6

$$\Delta r_{z,F_6} = r_{z,F_6 o} - r_{z,F_6 u} - l_{F_6} , \quad (2.87m)$$

mit

$$r_{z,F_6 u} = r_{z,A_3} + \sin(\psi_{x,A_3}) r_{y,F_6 u}^{A_3} . \quad (2.87n)$$

Boden unter dem Reifen 1

$$\Delta \mathbf{r}_{BR1} = \left[r_{x,R1} - r_{x,BR1} \quad r_{y,R1} - r_{y,BR1} \quad r_{z,R1} - r_{z,BR1} - \frac{1}{2}d_{R1} \right]^T, \quad (2.88a)$$

mit

$$\mathbf{r}_{R1} = \mathbf{r}_{A1} + \left[0 \quad \cos(\psi_{x,A1})r_{y,R1}^{A1} \quad \sin(\psi_{x,A1})r_{y,R1}^{A1} \right]^T, \quad (2.88b)$$

$$\mathbf{r}_{A1} = \left[\frac{1}{2}(r_{x,F1o} + r_{x,F2o}) \quad \frac{1}{2}(r_{y,F1o} + r_{y,F2o}) \quad r_{z,A1} \right]^T, \quad (2.88c)$$

$$\mathbf{r}_{F1o} = \mathbf{r}_D + \mathbf{R}_0^D \mathbf{r}_{F1o}^D, \quad (2.88d)$$

$$\mathbf{r}_{F2o} = \mathbf{r}_D + \mathbf{R}_0^D \mathbf{r}_{F2o}^D. \quad (2.88e)$$

Boden unter dem Reifen 2

$$\Delta \mathbf{r}_{BR2} = \left[r_{x,R2} - r_{x,BR2} \quad r_{y,R2} - r_{y,BR2} \quad r_{z,R2} - r_{z,BR2} - \frac{1}{2}d_{R2} \right]^T, \quad (2.88f)$$

mit

$$\mathbf{r}_{R2} = \mathbf{r}_{A1} + \left[0 \quad \cos(\psi_{x,A1})r_{y,R2}^{A1} \quad \sin(\psi_{x,A1})r_{y,R2}^{A1} \right]^T, \quad (2.88g)$$

Boden unter dem Reifen 3

$$\Delta \mathbf{r}_{BR3} = \left[r_{x,R3} - r_{x,BR3} \quad r_{y,R3} - r_{y,BR3} \quad r_{z,R3} - r_{z,BR3} - \frac{1}{2}d_{R3} \right]^T, \quad (2.88h)$$

mit

$$\mathbf{r}_{R3} = \mathbf{r}_{A2} + \left[0 \quad \cos(\psi_{x,A2})r_{y,R3}^{A2} \quad \sin(\psi_{x,A2})r_{y,R3}^{A2} \right]^T, \quad (2.88i)$$

$$\mathbf{r}_{A2} = \left[\frac{1}{2}(r_{x,F3o} + r_{x,F4o}) \quad \frac{1}{2}(r_{y,F3o} + r_{y,F4o}) \quad r_{z,A2} \right]^T. \quad (2.88j)$$

Boden unter dem Reifen 4

$$\Delta \mathbf{r}_{BR4} = \left[r_{x,R4} - r_{x,BR4} \quad r_{y,R4} - r_{y,BR4} \quad r_{z,R4} - r_{z,BR4} - \frac{1}{2}d_{R4} \right]^T, \quad (2.88k)$$

mit

$$\mathbf{r}_{R4} = \mathbf{r}_{A2} + \left[0 \quad \cos(\psi_{x,A2})r_{y,R4}^{A2} \quad \sin(\psi_{x,A2})r_{y,R4}^{A2} \right]^T. \quad (2.88l)$$

Boden unter dem Reifen 5

$$\Delta \mathbf{r}_{BR5} = \left[r_{x,R5} - r_{x,BR5} \quad r_{y,R5} - r_{y,BR5} \quad r_{z,R5} - r_{z,BR5} - \frac{1}{2}d_{R5} \right]^T, \quad (2.88m)$$

mit

$$\mathbf{r}_{R5} = \mathbf{r}_{A3} + \left[0 \quad \cos(\psi_{x,A3})r_{y,R5}^{A3} \quad \sin(\psi_{x,A3})r_{y,R5}^{A3} \right]^T, \quad (2.88n)$$

$$\mathbf{r}_{A3} = \left[\frac{1}{2}(r_{x,F5o} + r_{x,F6o}) \quad \frac{1}{2}(r_{y,F5o} + r_{y,F6o}) \quad r_{z,A3} \right]^T. \quad (2.88o)$$

Boden unter dem Reifen 6

$$\Delta \mathbf{r}_{BR6} = \left[r_{x,R6} - r_{x,BR6} \quad r_{y,R6} - r_{y,BR6} \quad r_{z,R6} - r_{z,BR6} - \frac{1}{2}d_{R6} \right]^T, \quad (2.88p)$$

mit

$$\mathbf{r}_{R6} = \mathbf{r}_{A3} + \left[0 \quad \cos(\psi_{x,A3})r_{y,R6}^{A3} \quad \sin(\psi_{x,A3})r_{y,R6}^{A3} \right]^T. \quad (2.88q)$$

2.4 Lösung der Systemgleichungen

Die Systemgleichungen (2.69) stellen ein mehrdimensionales nichtlineares Gleichungssystem dar, welches in die Form

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}_{66 \times 1} \quad (2.89)$$

gebracht werden kann. Dabei wurde

$$\mathbf{x} = [\mathbf{q}_D \quad \mathbf{q}_H \quad \mathbf{q}_{S_1} \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{S_4} \quad \mathbf{q}_{F_{3o}} \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{F_{6o}} \quad \mathbf{q}_{A_1} \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{A_3}]^T \quad (2.90)$$

und

$$\mathbf{u} = [\mathbf{l}_S \quad \mathbf{l}_K \quad \psi_{y,M} \quad \psi_{z,M} \quad \mathbf{r}_{MSP}^M \quad \mathbf{r}_{BS_2} \quad \cdots \quad \mathbf{r}_{BS_4} \quad \mathbf{r}_{BR_1} \quad \cdots \quad \mathbf{r}_{BR_6}]^T, \quad (2.91)$$

mit

$$\mathbf{l}_S = [l_{S_1} \quad l_{S_2} \quad l_{S_3} \quad l_{S_4}]^T, \quad (2.92)$$

und

$$\mathbf{l}_K = [l_{K_1} \quad l_{K_2} \quad l_{K_3} \quad l_{K_4}]^T. \quad (2.93)$$

verwendet. Der Vektor \mathbf{x} wird als Systemzustand und \mathbf{u} als der Vektor der Eingangsgrößen bezeichnet. Außerdem wird \mathbf{l}_S bzw. \mathbf{l}_K als Vektor der Stützlängen bzw. als Vektor der Auskragungslängen bezeichnet. Das System hat eine Dimension von 66 ($6 \times 10 + 2 \times 3$, vgl. (2.90)). Die Funktion $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ hängt von verschiedenen Parametern, wie z. B. der Nachgiebigkeit des Bodens ab. Aufgrund der großen Anzahl von Parametern wird darauf verzichtet diese explizit in der Notation festzuhalten. Die verwendeten Parameter werden deshalb für jede Simulationen beschrieben.

Die generalisierten Koordinaten der Starrkörper bzw. der Vektor \mathbf{x} stellen die Unbekannten dar. Eine Lösung von (2.89) wird mit

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{u}) \quad (2.94)$$

bezeichnet.

Die Funktion $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{u})$ kann auf analytische Weise nur schwer bzw. gar nicht ermittelt werden. Deswegen werden im Weiteren numerische Methoden verwendet. Die Gleichung (2.89) kann z. B. mit der MATLAB Funktion `fsolve` gelöst werden. Für die folgenden Simulationen wurde, falls nicht anders angegeben, der `trust-region-dogleg`-Algorithmus verwendet, welcher ein Gradientenverfahren darstellt. Standardmäßig wird der Gradient numerisch berechnet. Um die Rechenzeit zu verkürzen, wurde der Gradient analytisch mithilfe des Softwarepakets CasADi berechnet und dem `trust-region-dogleg`-Algorithmus bereitgestellt. CasADi generiert dabei C-Code, welcher mit dem MATLAB Befehl `mex` in eine MATLAB kompatible MEX-Datei umgewandelt werden muss.

Für weitere Betrachtungen wird noch der Vektor der Stützzylindergeschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_S = [v_{S_1} \quad v_{S_2} \quad v_{S_3} \quad v_{S_4}]^T = \frac{d\mathbf{l}_S}{dt}, \quad (2.95)$$

mit den Zylindergeschwindigkeiten der Stützen 1 bis 4 v_{S_1}, \dots, v_{S_4} benötigt.

2.4.1 Vom Systemzustand abgeleitete Größen

Im Weiteren sind auch vom Systemzustand ableitbare Größen von Interesse. Darunter fallen z. B. die Verzerrungsenergie des Grundrahmens oder die Stützkräfte. Die Verzerrungsenergie des Grundrahmens $\Pi_G = \Pi_G(\mathbf{x}_u) = \Pi_{G_1}(\mathbf{x}_u) + \Pi_{G_2}(\mathbf{x}_u)$ erhält man durch Berechnen der generalisierten Verschiebung des Grundrahmens (2.83) und Einsetzen in die Formel für die Verzerrungsenergie eines Balkens (2.18).

Die Stützkräfte werden zu einem Vektor

$$\mathbf{f}_s = [F_{S_1} \quad F_{S_2} \quad F_{S_3} \quad F_{S_4}]^T = [-F_{z,BS_1} \quad -F_{z,BS_2} \quad -F_{z,BS_3} \quad -F_{z,BS_4}]^T \quad (2.96)$$

zusammengefasst. Das negative Vorzeichen wurde dabei gewählt, damit $F_{S_1}, \dots, F_{S_4} \geq 0$ gilt. Ähnlich wie bei der Verzerrungsenergie lassen sich die Komponenten von \mathbf{f}_s durch Berechnen der generalisierten Verschiebung (2.86) und des in Abschnitt 2.2.5 (vgl. (2.36)) erläuterten Vorgangs berechnen. Die Reaktionskräfte in den Reifen lassen sich auf analoge Weise ermitteln.

2.5 Simulationen

Am Anfang dieses Kapitels wurden verschiedene Forderungen an das Modell gestellt, darunter z. B. die Darstellung des gesamten Abstützvorgangs von der Park- zur Arbeitsposition und die Wiedergabe der Torsion des Grundrahmens. Diese Szenarien sollen nun betrachtet werden. Aufgrund einer Vertraulichkeitsvereinbarung wurden die Stützkräfte im Weiteren mit einer Kraft F_n normiert.

Für die Simulation des Abstützvorgangs werden folgende Parameter verwendet: Die Maschine wird auf ebenem, harten Boden (siehe (B.1b), Stützen sinken ca. 1 mm ein) in der Vollabstützung (vgl. Abbildung 2.8) abgestützt. Der Mast befindet sich dabei stets in seiner Transportstellung (Schwerpunkt $\mathbf{r}_{MSP,t}^M$). Abbildung 2.9 zeigt die Ergebnisse der Simulation. Alle Stützen wurden gleich ausgefahren, deshalb genügt die Angabe einer einzigen Stützlänge l_s . Da manche Reaktionskräfte fast denselben Verlauf aufweisen (z. B. F_{S_1} und F_{S_2}) wurde deren Summe dargestellt. Außerdem ist auch die Gewichtskraft m_{Fzg}

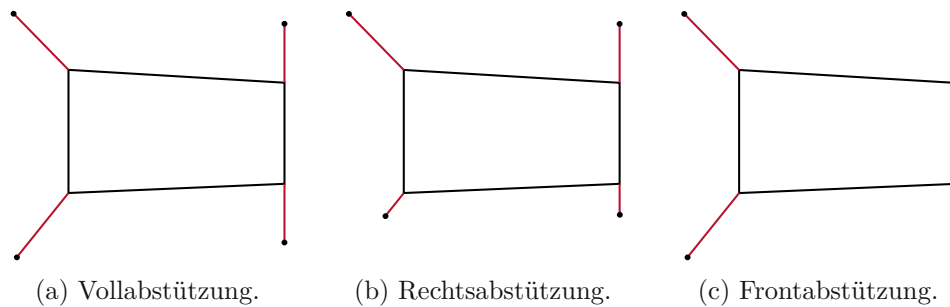


Abbildung 2.8: Schematische Darstellung verschiedener Abstützkonfigurationen. Links befindet sich die Front, rechts das Heck. Es gilt: $\mathbf{I}_K = [2.3 \quad 2.3 \quad 1.6 \quad 1.6]^T \text{m}$ bei Vollabstützung, $\mathbf{I}_K = [0.3 \quad 2.3 \quad 0.3 \quad 1.6]^T \text{m}$ bei Rechtsabstützung und $\mathbf{I}_K = [2.3 \quad 2.3 \quad 0.3 \quad 0.3]^T \text{m}$ bei Frontabstützung.

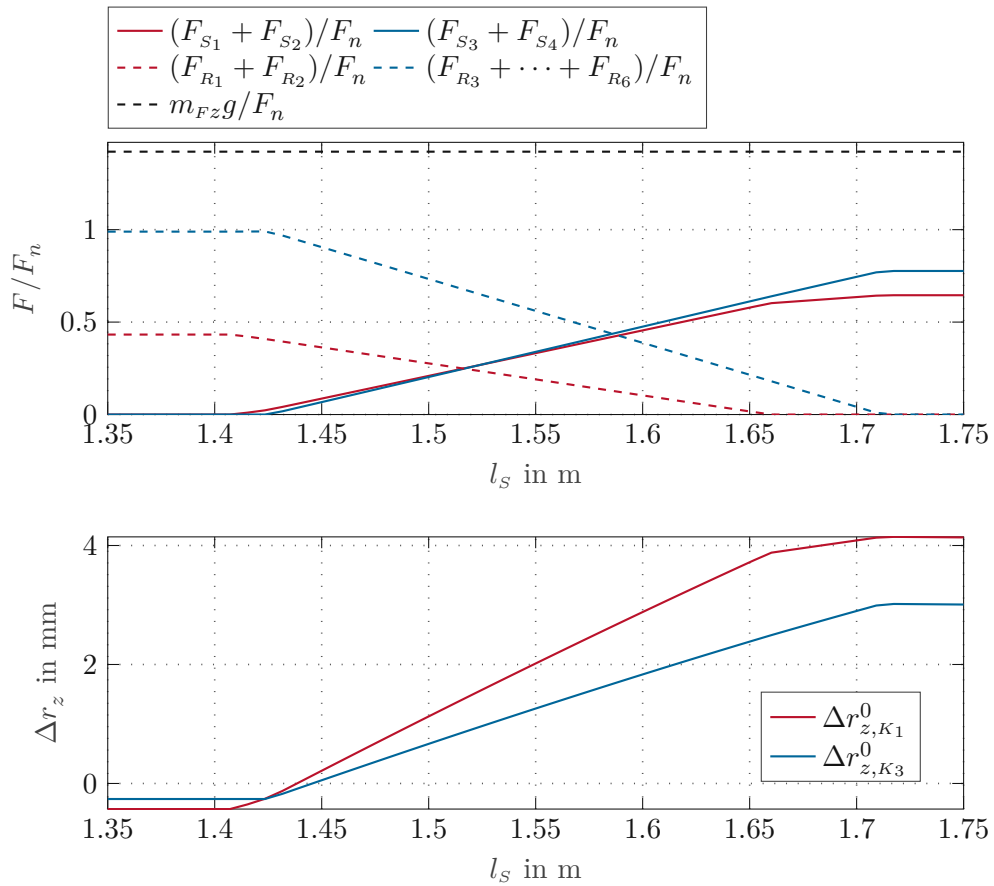


Abbildung 2.9: Simulation der Vollabstützung: Reaktionskräfte in den Reifen und Stützen (obere Abbildung) sowie Verschiebungen der Auskragungen (untere Abbildung).

eingetragen. Da Auskragung 1 und 2 bzw. 3 und 4 annähernd dieselben Verschiebungen aufweisen, ist jeweils nur eine dargestellt. Man beachte, dass die Verschiebungen in das Referenzkoordinatensystem transformiert wurden. Es ist zu erkennen, dass anfänglich nur die Reifen belastet sind. Ein großer Teil des Fahrzeuggewichts wird von der mittleren und hinteren Achse getragen. Die vordere Achse trägt etwas weniger als ein Drittel der Last. Sobald die Stützen den Boden erreichen, beginnt der Kraftwechsel zwischen Reifen und Stützen (Knicke in den Kraftverläufen). Am Ende des Vorgangs tragen die Stützen das volle Gewicht. Die Summe aller Reaktionskräfte (Reifen und Stützen) entspricht während des gesamten Verlaufs der Gewichtskraft $m_{Fz}g$. In der unteren Grafik sind die Verschiebungen der Auskragungen 1 und 3 zu sehen. Am Anfang, bei fehlender Belastung der Stützen, hängen diese aufgrund des Eigengewichts leicht nach unten durch (negatives Vorzeichen). Mit zunehmender Krafteinwirkung wandern die positiven Ränder (vgl. Abbildung 2.5) nach oben, bis ein Maximum erreicht wird. Man beachte, dass die Verformung der Auskragung 1 bzw. 2 höher als jene der Auskragung 3 bzw. 4 ist, obwohl die korrespondierende Stützkraft geringer ist. Dies liegt daran, dass die Auskragung 1 bzw.

2 deutlich länger ist ($l_{K_1} = 2.3 \text{ m} > l_{K_3} = 1.8 \text{ m}$). Diese Simulation zeigt somit, dass das Modell sowohl die Reaktionskräfte in den Reifen und Stützen, als auch die Verformungen der Auskragungen während eines Abstützvorgangs sinnvoll wiedergibt.

Weiters wird die Torsion des Grundrahmens betrachtet. Die Rahmenbedingungen sind dieselben wie bei der vorhergehenden Simulation. Der Unterschied besteht darin, dass das Fahrzeug schon vollständig abgehoben hat und ein Zeitverlauf des Stützlängenvektors $\mathbf{l}_s(t)$ eingepreigt wird, der zu einer Torsion des Grundrahmens führt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 2.10 dargestellt. Damit Π_G und $\mathbf{f}_s^T \mathbf{f}_s$ miteinander verglichen werden können,

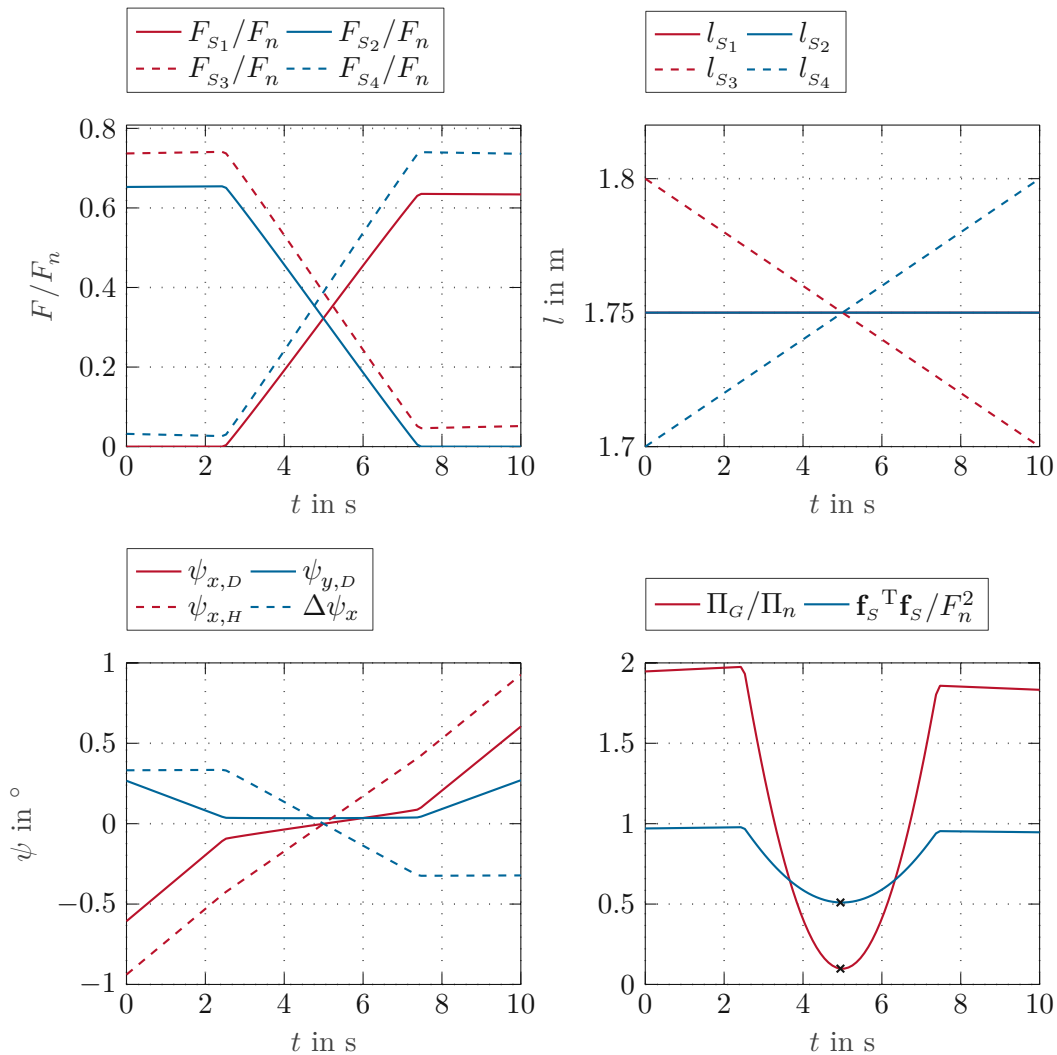


Abbildung 2.10: Torsion des Grundrahmens: Dargestellt sind (zeilenweise von links nach rechts) die Stützkräfte, die Stützlängen, der Winkel des Drehschemels (um die x -Achse und y -Achse), des Hecks (um die x -Achse) und die Differenz $\Delta\psi_x = \psi_{x,D} - \psi_{x,H}$ sowie die Verzerrungsenergie des Grundrahmens Π_G und die quadratische Summe der Stützkräfte $\mathbf{f}_s^T \mathbf{f}_s$.

wurde Π_G mit $\Pi_n = 0.5 \text{ kJ}$ normiert. Dieser Wert wurde so gewählt, dass die normierte Größe (auch bei nachfolgenden Simulationen) in der Größenordnung von 1 liegt. Die hinteren Stützen werden in der Simulation so manipuliert, dass sich das Heck mit einer positiven Rate um die x -Achse (des Referenzkoordinatensystems) dreht. Man sieht, dass sich der Differenzwinkel $\Delta\psi_x$ (zwischen Drehschemel und Heck) im Bereich, in dem alle Stützen belastet werden, linear ändert. Er erreicht einen minimalen Betrag bei $t = 5 \text{ s}$. Zu diesem Zeitpunkt hat der Vektor der Stütztlängen etwa den Wert $\mathbf{l}_s = 1.75 [1 \ 1 \ 1]^T \text{ m}$. Erwartungsgemäß tritt hier die minimale Verzerrungsenergie auf. Wie bereits in der Einleitung vermutet, tritt das Minimum von $\mathbf{f}_s^T \mathbf{f}_s$ an derselben Stelle auf. Generell weisen die beiden Größen Π_G und $\mathbf{f}_s^T \mathbf{f}_s$ sehr ähnliche Verläufe auf. Ob dies für weitere Szenarien, wie z. B. andere Abstützkonfigurationen, weicherer Boden oder verschiedene Mastkonfigurationen ebenfalls gegeben ist, zeigt diese Simulation nicht. Demnach ist auch noch unklar, ob Π_G oder $\mathbf{f}_s^T \mathbf{f}_s$ die geeigneten Größen sind um optimale Stütztlängen zu bestimmen. Diese Fragestellung soll im nächsten Kapitel beantwortet werden.

3 Optimale Stützlänge

In diesem Kapitel werden optimale Stützlängen für verschiedene Szenarien ermittelt. In der Einleitung dieser Arbeit wurde ein manueller Abstützvorgang beschrieben. Es wurde erwähnt, dass der Bediener für die Maschine eine gewisse Abstützhöhe und eine gewisse Orientierung des Fahrzeugs (Roll- und Nickwinkel meist 0° , maximal $\pm 3^\circ$) einstellt.

Aus Abstützhöhe und Orientierung des Fahrzeugs (drei Freiheitsgrade) lässt sich aufgrund von kinematischen Überlegungen ein lineares Gleichungssystem ableiten, das bei der Bestimmung der Stützkkräfte einen Freiheitsgrad lässt (vier Stützlängen \rightarrow insgesamt vier Freiheitsgrade). Dieser Freiheitsgrad soll benützt werden, um die Verzerrungsenergie im Grundrahmen Π_G bzw. die quadratische Summe der Stützkkräfte $\mathbf{f}_S^T \mathbf{f}_S$ zu minimieren. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, führt eine Minimierung von $\mathbf{f}_S^T \mathbf{f}_S$ zu einem Ausgleich der Stützkkräfte. Diese Methode tendiert also dazu unbelastete Stützen zu vermeiden. Ähnlich wie bei einem wackeligen Tische, unter dessen Bein man ein Stück gefaltetes Papier legt, soll dies die Standfestigkeit verbessern. Wie gezeigt wurde, besteht zwischen Π_G und $\mathbf{f}_S^T \mathbf{f}_S$ (vgl. Abbildung 2.10) eine gewisse Korrelation. Deshalb scheint als alternative Formulierung auch die Minimierung der Verzerrungsenergie Π_G sinnvoll.

Diese Problemstellung lässt sich mathematisch durch eine Optimierungsaufgabe [14] formulieren. Es handelt sich dabei um ein nichtlineares Problem mit Gleichungs- und Ungleichungsbeschränkungen. Die gewünschte Abstützhöhe und Orientierung des Fahrzeugs werden dabei als Gleichungsbeschränkung formuliert. Die Kostenfunktion wird durch die Verzerrungsenergie des Grundrahmens Π_G bzw. die quadratische Summe der Stützkkräfte $\mathbf{f}_S^T \mathbf{f}_S$ gebildet. Im Weiteren wird die Kostenfunktion Π_G bzw. $\mathbf{f}_S^T \mathbf{f}_S$ mit P_Π bzw. P_f bezeichnet. Man beachte, dass sich die Kostenfunktionen P_Π und P_f nach Abschnitt 2.4.1 durch den Vektor der Stützlängen \mathbf{l}_S parametrieren lassen.

Bei der Lösung des Optimierungsproblems hat sich gezeigt, dass vor allem die Modellierung des Bodenkontakts großen Einfluss auf die Konvergenz hat. Man betrachte ein Szenario, indem der optimale Stützlängenvektor \mathbf{l}_S dazu führt, dass $F_{z,BS1} \approx 0$. Dies kann z. B. passieren, wenn der Mast vollständig ausgefahren wird. In diesem Szenario kann es während des Iterationsvorgangs der Optimierung (wegen einer zu großen Schrittgrößenwahl) dazu kommen, dass die Stütze 1 abhebt ($\Delta r_{z,BS1} > 0$). Nach (2.36) gilt für diesen Bereich $dF_{z,BS1}/d\Delta r_{z,BS1} = 0$, was bei der Verwendung eines Gradientenverfahrens zur Folge hat, dass der Lösungsalgorithmus die Länge der Stütze 1 nicht mehr ändert. Es hat

sich deshalb bewährt für die Optimierung $s(\Delta r_{z,BS1})$ aus (2.36) durch

$$\tilde{s}(\Delta r_{z,BS1}) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta r_0} \left(\Delta r_{z,BS1} \Delta r_0 - \left(\frac{\Delta r_0}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) & \Delta r_0 \geq \Delta r_{z,BS1} \\ \frac{1}{\Delta r_0} \left(\frac{\Delta r_{z,BS1}}{\sqrt{2}} \right)^2 & 0 < \Delta r_{z,BS1} < \Delta r_0 \\ -\frac{1}{\Delta r_0} \left(\frac{\Delta r_{z,BS1}}{\sqrt{2}} \right)^2 & -\Delta r_0 < \Delta r_{z,BS1} \leq 0 \\ \frac{1}{\Delta r_0} \left(\Delta r_{z,BS1} \Delta r_0 + \left(\frac{\Delta r_0}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) & \Delta r_{z,BS1} \leq -\Delta r_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

zu ersetzen. Man beachte, dass \tilde{s} eine ungerade Funktion ist, welche für $\Delta r_{z,BS1} \leq 0$ mit s übereinstimmt. Die Ableitung von \tilde{s} nach $\Delta r_{z,BS1}$ ist für $\Delta r_{z,BS1} \in \mathbb{R} \setminus 0$ ungleich Null.

Da alle Stützen am Boden bleiben sollen, wird außerdem $\mathbf{f}_S \geq \mathbf{0}_{4 \times 1}$ gefordert. Damit lässt sich die Optimierungsaufgabe wie folgt anschreiben

$$\min_{\mathbf{l}_S \in \mathbb{B}} P(\mathbf{l}_S) \quad (3.2a)$$

$$\text{u.B.v. } \mathbf{p}_{\text{eq}}(\mathbf{l}_S) = \mathbf{0} , \quad (3.2b)$$

$$\mathbf{p}_{\text{neq}}(\mathbf{l}_S) \leq \mathbf{0} , \quad (3.2c)$$

mit

$$\mathbb{B} = \{\mathbf{l}_S \in \mathbb{R}^4 : l_{S,\min} < l_{S_k} < l_{S,\max}, k = 1, \dots, 4\}, \quad (3.2d)$$

$$\mathbf{p}_{\text{eq}}(\mathbf{l}_S) = \begin{bmatrix} r_z(\mathbf{l}_S) - r_{z,d} \\ \psi_x(\mathbf{l}_S) - \psi_{x,d} \\ \psi_y(\mathbf{l}_S) - \psi_{y,d} \end{bmatrix}, \quad (3.2e)$$

und

$$\mathbf{p}_{\text{neq}}(\mathbf{l}_S) = -\mathbf{f}_S(\mathbf{l}_S) . \quad (3.2f)$$

Dabei wird für die Kostenfunktion $P(\mathbf{l}_S)$ entweder $P_{\Pi}(\mathbf{l}_S)$ oder $P_f(\mathbf{l}_S)$ verwendet. Die Größen r_z , ψ_x und ψ_y (bzw. $r_{z,d}$, $\psi_{x,d}$ und $\psi_{y,d}$) entsprechen der (gewünschten) Abstützhöhe, dem (gewünschten) Roll- und dem (gewünschten) Nickwinkel des Fahrzeugs, d. h. des Drehschemels. Dies ist sinnvoll, da für Pumpvorgänge vor allem die Position und die Orientierung des Masts von Interesse sind. Natürlich lässt sich durch eine Koordinatentransformation auch jeder andere Punkt (z. B. das Heck) des Fahrzeugs auf gewünschte Werte bringen, ohne dass am Formalismus etwas geändert werden muss. Im Weiteren werden Größen die mit $P = P_{\Pi}$ ermittelt wurden mit einem Index Π versehen, während Größen die mit $P = P_f$ ermittelt wurden mit f gekennzeichnet werden. Falls dies nicht möglich ist, oder zu Verwirrung führen könnte, wird $|_{P_{\Pi}}$ bzw. $|_{P_f}$ verwendet. Zur Lösung von (3.2) wurde die MATLAB Funktion `fmincon` unter Verwendung des `sqp`-Algorithmus eingesetzt.

Im nächsten Abschnitt soll nun ermittelt werden, ob die Minimierung von P_{Π} bzw. P_f zur selben Lösung führt und ob die Größen generell dazu geeignet sind, um eine möglichst standfeste Abstützung zu finden.

3.1 Simulationen

Eine möglichst standfeste Abstützung ist gerade während des Pumpvorgangs wünschenswert. Deshalb wird zunächst folgendes Szenario betrachtet: Der Mast befindet sich in vollständig ausgefahrener Konfiguration (Schwerpunkt $\mathbf{r}_{MSP,a}^M$). Außerdem ist $\psi_{y,M} = 0^\circ$ und $\psi_{z,M}$ wird zwischen 0° und 180° in 2° Schritten variiert¹. Zunächst wird die Vollabstützung und harter, ebener Boden betrachtet. Zudem wird im Weiteren $r_{z,d} = 1.75$ m, $\psi_{x,d} = 0^\circ$ und $\psi_{y,d} = 0^\circ$ verwendet. Das Optimierungsproblem (3.2) wurde bei folgender Simulation für jeden der 91 Winkelschritte gelöst. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.1 zu sehen. Um P_f und P_{Π} in die gleiche Größenordnung zu bringen, wurden sie normiert. Bei den Stützkräften ist unabhängig von P_{Π} oder P_f folgender Trend zu erkennen: Für $\psi_{z,M}$ nahe 0° liegt das meiste Gewicht auf den hinteren Stützen. Mit steigendem Winkel verlagert sich das Gewicht langsam auf die rechten Stützen, bis es schließlich bei $\psi_{z,M} = 180^\circ$ zum Großteil auf den vorderen Stützen zu liegen kommt. Dies lässt sich durch statische Überlegungen begründen.

Betrachtet man das Ergebnis der Optimierung (zweite Abbildung), so sieht man, dass die Lösungen $\mathbf{l}_{S,f}$ und $\mathbf{l}_{S,\Pi}$ bei den Winkeln $\psi_{z,M} = 0^\circ$ und $\psi_{z,M} = 180^\circ$ zusammenfallen. Dies korrespondiert mit den Ergebnissen im vorhergehenden Kapitel (siehe Abbildung 2.10). Wie in der unteren Abbildung zu sehen ist, liefern die beiden Optimierungen bezüglich P_f über einen großen Bereich sehr ähnlich Ergebnisse. Unterschiede treten bei starker Torsion des Grundrahmens auf. Die Minimierung der Verzerrungsenergie führt dazu, dass der Differenzwinkel $\psi_{x,D} - \psi_{x,H}$ minimiert wird. Dies ist zu erkennen, da in weiten Bereichen $l_{S3,\Pi} \approx l_{S4,\Pi}$ gilt. Somit ist $\psi_{x,H} \approx \psi_{x,D} = 0$, wobei $\psi_{x,D} = 0$ wegen (3.2e) gilt. Das Angleichen von $\psi_{x,D}$ an $\psi_{x,H}$ gelingt allerdings nur, wenn alle vier Stützen belastet werden. Die Optimierung von P_f verhält sich anders. Sie neigt dazu den Grundrahmen stärker zu tordieren, um möglichst alle Stützen zu belasten.

Qualitativ ändern sich die Ergebnisse bei weichem Untergrund mit den Parametern aus (B.1a) kaum, wie die Abbildung 3.2 zeigt. Die Stützkräfte und die Verzerrung bleiben nahezu identisch. Lediglich die Stützlängen erhöhen sich, was durch das tiefere Einsinken in den Boden hervorgerufen wird.

¹Man beachte, dass $\psi_{z,M} = 180^\circ$ in der realen Anwendung nicht möglich ist, da der vollständig ausgefahrene Mast bereits bei einem kleineren Winkel in die Fahrerkabine eindringen würde. Für die Simulation ist der höhere Wertebereich dennoch interessant.

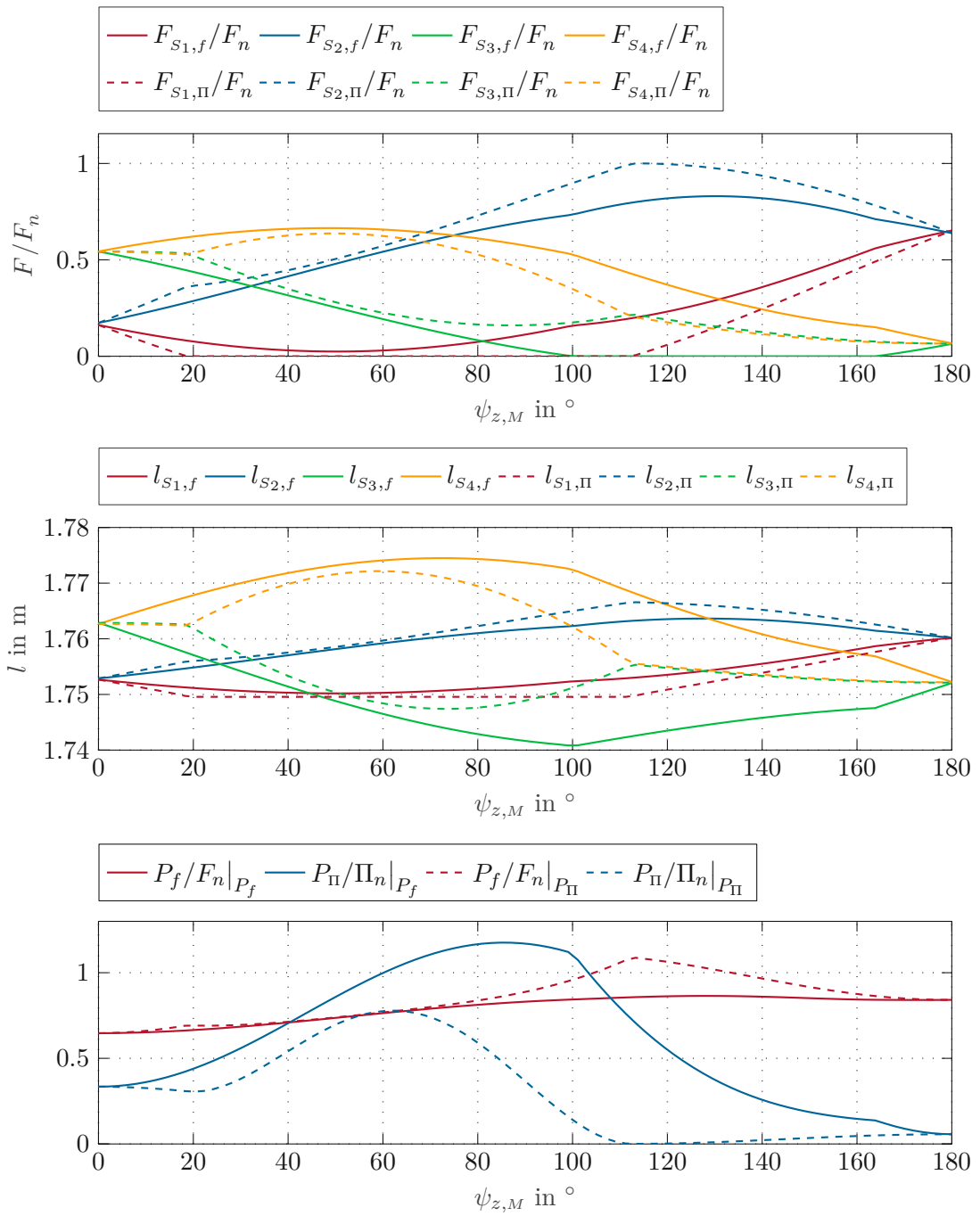


Abbildung 3.1: Lösung der Optimierungsaufgabe für die Vollabstützung bei hartem Boden: Stützkräfte, optimale Stützlängen sowie Kostenfunktionen P_f und P_{Π} .

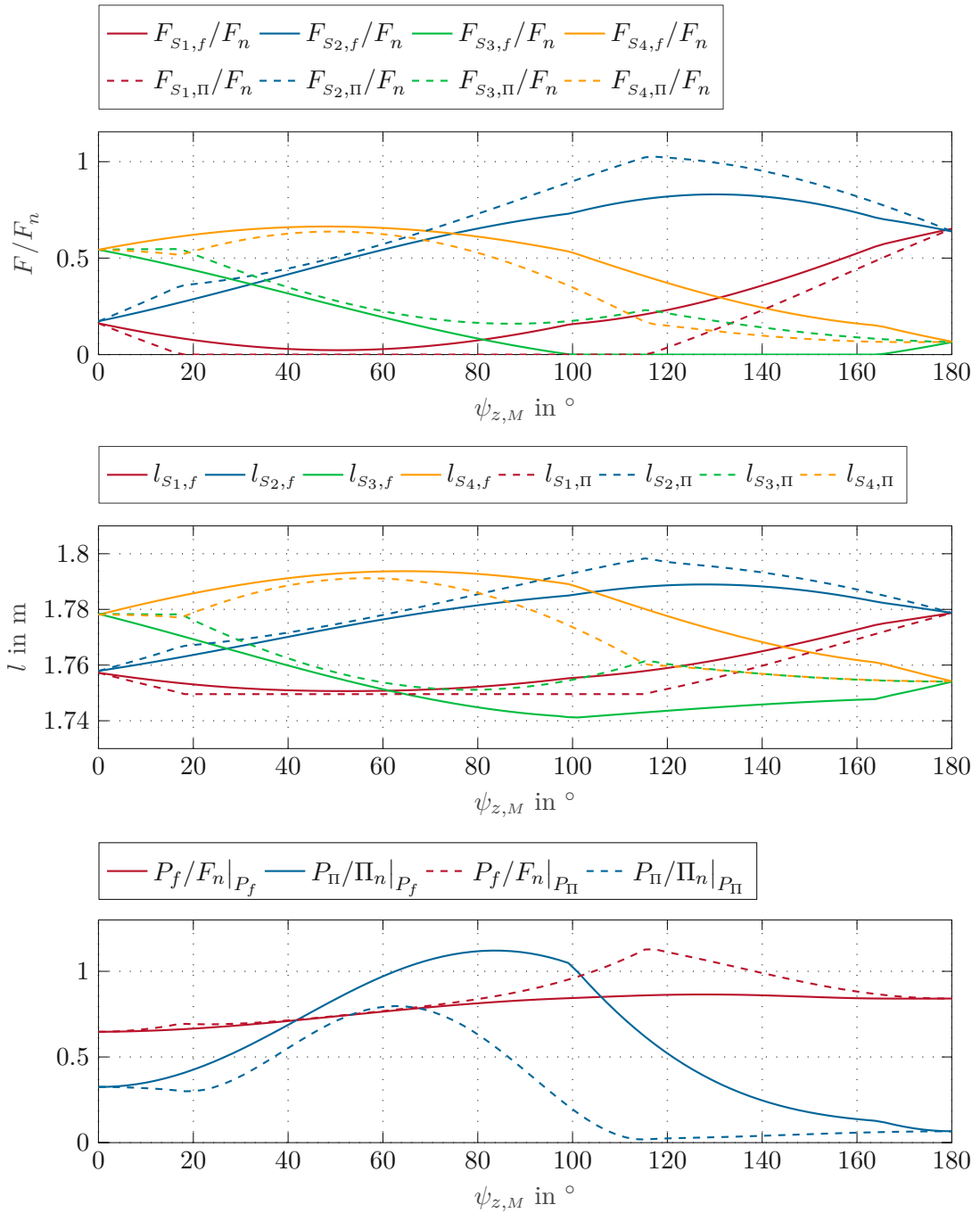


Abbildung 3.2: Lösung der Optimierungsaufgabe für die Vollabstützung bei weichem Boden: Stützkräfte, optimale Stützlängen sowie Kostenfunktionen P_f und P_{Π} .

Die Simulationsergebnisse für die Rechtsabstützung sind in Abbildung 3.3 dargestellt. Der Mast wurde in dieser Simulation nur bis $\psi_{z,M} = 130^\circ$ geschwenkt, da größere Winkel nicht mehr im Stabilitätsbereich dieser Abstützkonfiguration liegen. Hier zeigt sich bereits bei $\psi_{z,M} = 0$ ein Unterschied zwischen $\mathbf{I}_{S,f}$ und $\mathbf{I}_{S,\Pi}$. Dies liegt daran, dass die Kraftaufteilung zwischen linken und rechten Stützen bereits bei kleinem Winkel $\psi_{z,M}$ unsymmetrisch ist. Da die rechten Stützen weiter von der Längsachse des Fahrzeugs entfernt sind, müssen die korrespondierenden Reaktionskräfte kleiner als jene der linken sein. Dies bringt die linken Stützen dazu, tiefer in den Boden zu sinken.

Der Vollständigkeit halber wurde auch die Frontabstützung simuliert (siehe Abbildung 3.4). Der Mast wurde in dieser Simulation nur zwischen $\psi_{z,M} = 130^\circ$ und $\psi_{z,M} = 180^\circ$ geschwenkt, da Winkel außerhalb nicht im Stabilitätsbereich dieser Abstützkonfiguration liegen. Hier zeigt sich, dass die Minimierung von Π_G dazu führt, dass alle Stützen stets belastet sind. Die Verzerrung des Grundrahmens ist sehr niedrig, was daran liegt, dass seine Biegesteifigkeit höher als die Torsionssteifigkeit ist.

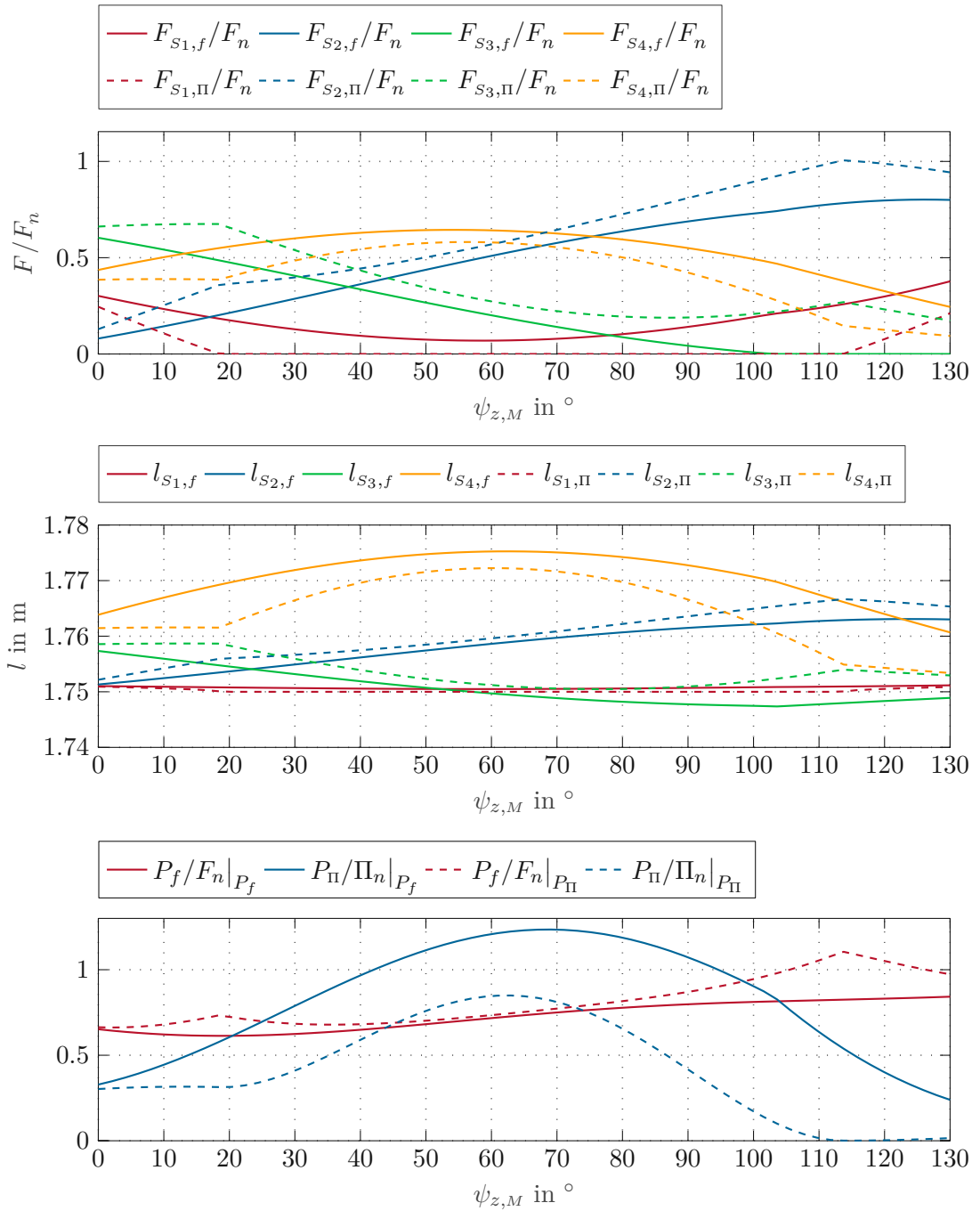


Abbildung 3.3: Lösung der Optimierungsaufgabe für die Rechtsabstützung bei hartem Boden: Stützkräfte, optimale Stützlängen sowie Kostenfunktionen P_f und P_{Π} .

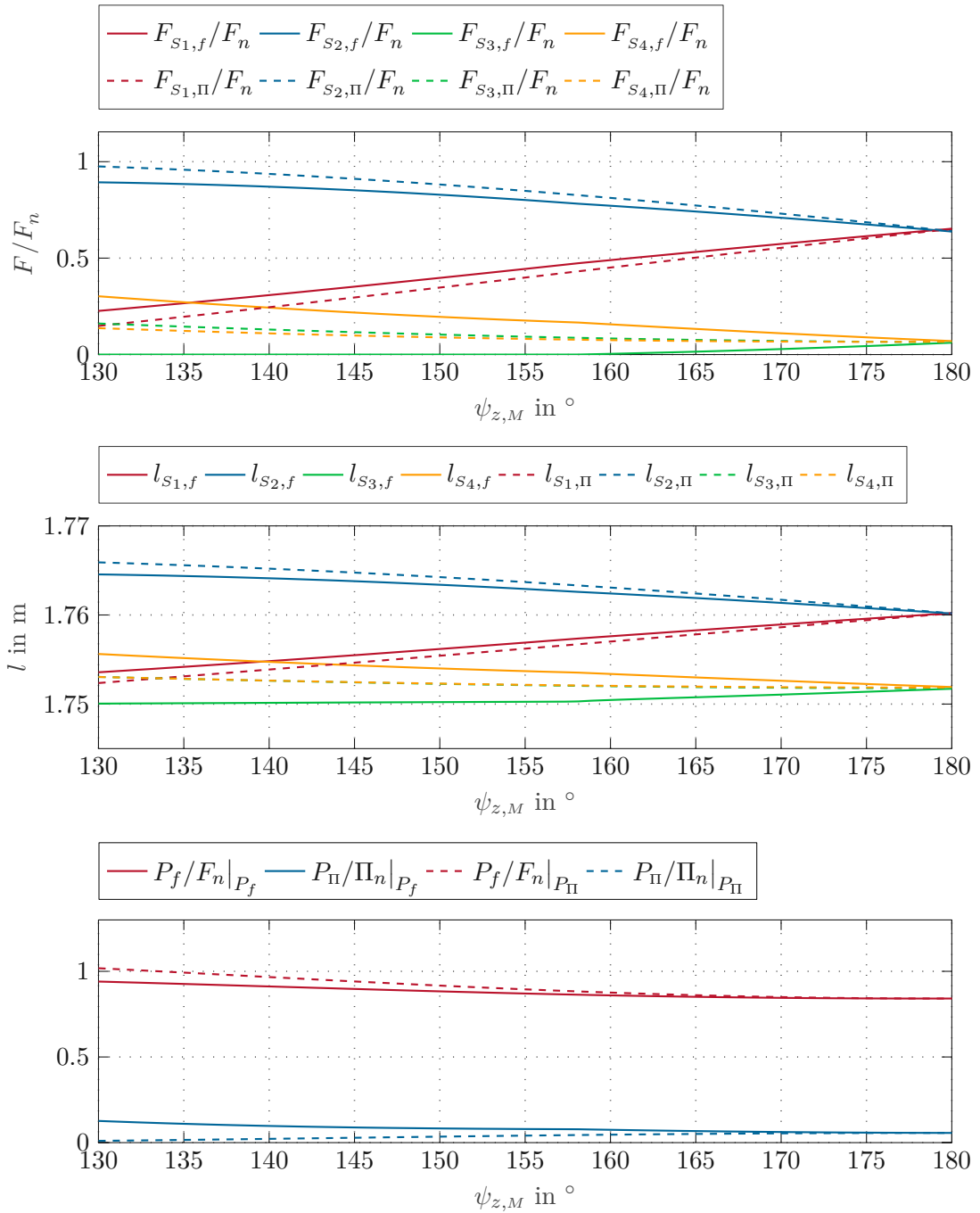


Abbildung 3.4: Lösung der Optimierungsaufgabe für die Frontabstützung bei hartem Boden: Stützkräfte, optimale Stützlängen sowie Kostenfunktionen P_f und P_Π .

Aus den gezeigten Abbildungen dieses Kapitels ist ersichtlich, dass die Minimierung von P_f zu einer besseren Aufteilung des Gewichts auf die Stützen führt. Da die Reduzierung der Verzerrung keinen Vorteil hat und nur untersucht wurde, ob eine Minimierung von P_{II} auch zu minimalem (oder zumindest kleinem) P_f führt, wird von nun an nur noch die Kraftbalancierung weiter verfolgt. Es stellt sich die Frage, um wie viel besser die optimierte Abstützung z. B. im Vergleich zur trivialen Abstützung des vorhergehenden Kapitels (vgl. Abbildung 2.9) ist. Dazu soll der Ausfahrvorgang des Masts simuliert werden. Das Fahrzeug befindet sich dabei in Vollabstützung und der Mast anfangs in seiner Transportstellung. Folgend wird der Mast vollständig ausgefahren. Dies wird durch eine Variation des Mast Schwerpunkts \mathbf{r}_{MSP}^M in der Form

$$\mathbf{r}_{MSP}^M(t) = \mathbf{r}_{MSP,t}^M \left(1 - \frac{t}{t_{\text{end}}}\right) + \mathbf{r}_{MSP,a}^M \frac{t}{t_{\text{end}}}, \quad (3.3)$$

mit der Zeit t und $t_{\text{end}} = 120$ s simuliert. Dabei ist $\mathbf{r}_{MSP,t}^M$ der Schwerpunkt des Masts in der Transportstellung und $\mathbf{r}_{MSP,a}^M$ der Schwerpunkt des Masts im ausgefahrenen Zustand. Der Mastwinkel wird außerdem entsprechend

$$\psi_{z,M}(t) = 90^\circ \frac{t}{t_{\text{end}}} \quad (3.4)$$

variiert. Der Vorgang wird in 1 s Schritten diskretisiert und P_f für jeden Zeitschritt minimiert. Der so erhaltene Verlauf von $\mathbf{l}_{S,f}(t)$ wird zusätzlich zu $\mathbf{r}_{MSP}^M(t)$ und $\psi_{z,M}(t)$ auf das Modell (aus Kapitel 2) aufgebracht und mit der trivialen Abstützung ($\mathbf{l}_S(t) = 1.75 \text{ m} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$) verglichen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.5 dargestellt. Größen der trivialen Abstützung wurden mit dem Index t gekennzeichnet. Es ist zu erkennen, dass sich das Gewicht mit fortschreitender Zeit zunehmend auf die rechten Stützen verlagert. Der optimierte Vorgang bewirkt dabei, dass alle Stützen belastet bleiben. Dies hat eine (wenn auch geringe) Auswirkung auf die Standfestigkeit der Maschine. Wie in der mittleren Abbildung zu sehen ist, treten bei der trivialen Abstützung Abweichungen zur gewünschten Orientierung auf. In der unteren Abbildung, wie auch bei den vorherigen Simulationen, zeigt sich die Tendenz, dass die Minimierung von P_f eine Erhöhung der Verzerrung bewirkt.

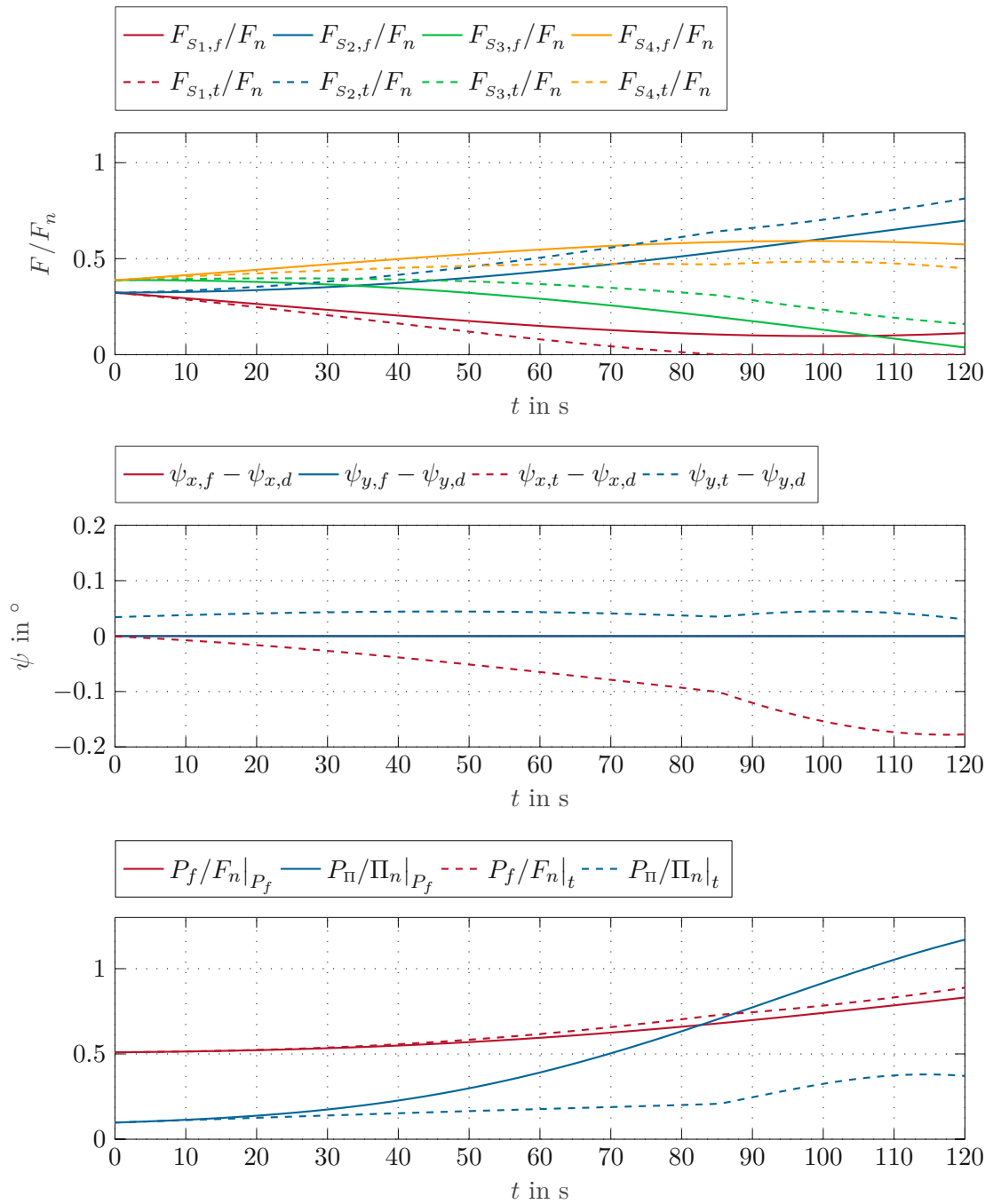


Abbildung 3.5: Lösung der Optimierungsaufgabe während des Ausfahrvorgangs des Masts: Stützkräfte, Roll- und Nickwinkel des Fahrzeugs sowie Kostenfunktionen P_f und P_{Π} . Die Abweichungen von $\psi_{x,f}$ und $\psi_{y,f}$ zu ihren gewünschten Werten ist Null, deshalb liegen die entsprechenden Kurven übereinander.

Der Vorteil der Optimierung zeigt sich insbesondere erst bei der letzten Simulation dieses Kapitels. Der Ausgangspunkt ist das Ende ($t = 120$ s) der vorhergehenden Simulation. Untersucht wird nun, wie dieser Arbeitspunkt durch eine Störung beeinflusst wird. Störungen können z. B. durch das Betonpumpen hervorgerufen werden, welche den Mast in eine Auf- und Abschwung versetzen. Für das Störmoment dieser Schwingung wird folgender Ansatz verwendet

$$M_{x,st}(t) = \hat{M}_{x,st} \sin(\omega t) . \quad (3.5)$$

Dabei ist $M_{x,st}(t)$ das Störmoment um die x -Achse des Drehschemels, $\hat{M}_{x,st} = 100$ kN m die Amplitude des Moments und $\omega = 2\pi/3$ rad/s die Kreisfrequenz der Schwingung [15]. Die Ergebnisse der Simulation sind in Abbildung 3.6 dargestellt. Die Minimierung von P_f bewirkt wieder eine gute Kraftaufteilung, was zur Folge hat, dass die Maschine im Vergleich zur trivialen Abstützung sehr standfest steht (mittlere Abbildung). Die Winkel $\psi_{x,f}$ und $\psi_{y,f}$ ändern sich im Gegensatz zu $\psi_{x,t}$ und $\psi_{y,t}$ kaum. Zwar sind die Abweichungen, welche bei der trivialen Abstützung auftreten unkritisch, dennoch besteht zwischen beiden Methoden ein maßgeblicher Unterschied. Weitere Simulationen haben gezeigt, dass sich die Stabilität der trivialen Abstützung auf weichem Untergrund erhöht. Dies liegt daran, dass die Stütze 1, welche auf hartem Boden kaum belastet wird, durch das tiefere Einsinken der Maschine mehr Gewicht aufnehmen kann. Dennoch ist die optimierte Abstützung auch in diesem Fall besser.

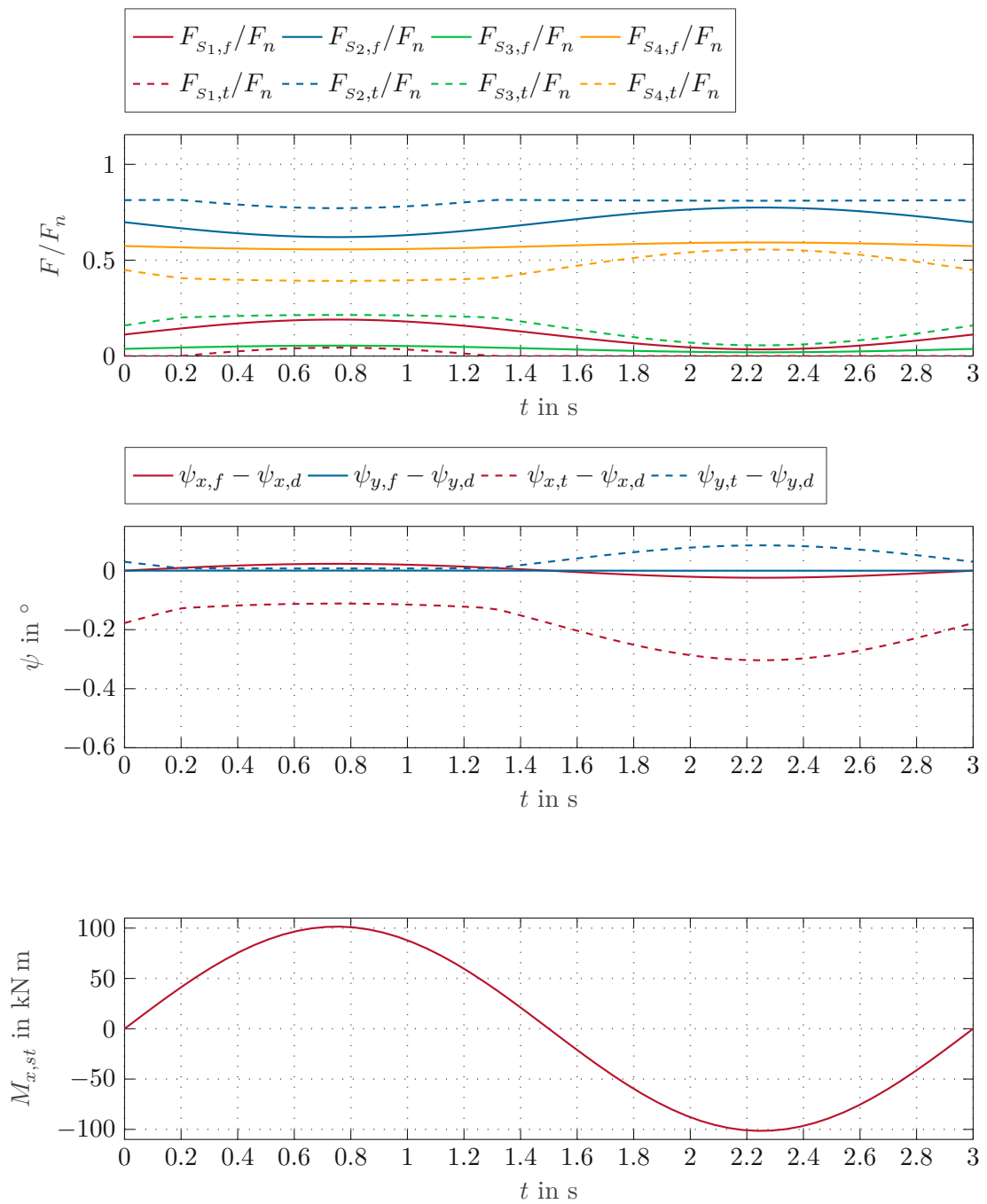


Abbildung 3.6: Auswirkung des schwingenden Masts auf die Stabilität der Maschine: Stützkräfte, Roll- und Nickwinkel des Fahrzeugs sowie Störmoment.

3.2 Schlussfolgerung

Mit den Simulationen dieses Kapitels wurde gezeigt, dass die Minimierung von P_{II} nicht zu minimalem P_f führt. Unterschiede zeigen sich bei unsymmetrischer Abstützung und dann, wenn der Schwerpunkt der Maschine weit von der Längsachse entfernt ist. Der Maschinenschwerpunkt wird dabei vor allem von der Konfiguration und der Orientierung des Masts beeinflusst.

Da die Optimierungsaufgabe sehr viel Rechenleistung benötigt, ist eine praktische Realisierung des Vorgangs wie in Abbildung 3.5, d. h. eine Optimierung während des Ausfahrens, nicht sinnvoll und zudem auch nicht erlaubt². Wie Abbildung 3.6 zeigt, ist es besonders von Vorteil P_f zu minimieren, wenn der Mast bereits ausgefahren wurde. Ein Ansatz wäre deshalb P_f nur für bestimmte Arbeitspunkte zu optimieren.

Generell besteht bei der Optimierung von P_f das Problem, dass in der Praxis eine ganze Reihe von Parametern nicht bekannt sind. Dazu gehören z. B. der Geländeverlauf und die Nachgiebigkeit des Bodens. Auch der Schwerpunkt des Fahrzeugs dürfte im Allgemeinen nicht exakt bekannt sein. Deshalb wird eine robuste Methode benötigt, welche nicht auf diese Parameter angewiesen ist. Größen, welche sehr genau ermittelt werden können, sind z. B. die Längen der Auskragungen und der Stützen. Im nächsten Kapitel soll deshalb auf Basis dieser Größen ein Regler entwickelt werden.

²Nach aktuell gültiger Norm ist die gleichzeitige Regelung von Mast und Stützen verboten.

4 Regelungskonzept

In diesem Kapitel wird ein Regelungskonzept für die Abstützung der betrachteten Autobetonpumpe vorgestellt. Zu Beginn sollen die einzelnen Komponenten des Regelkreises erklärt werden. Anschließend folgen Simulationsergebnisse zur Analyse des Systemverhaltens.

Das Regelungskonzept ist darauf ausgelegt, dass der Regler ausschließlich die Zylinder in den Stützen regelt, d. h. das horizontale Manipulieren der Stützbeine (vgl. Abbildung 2.1) übernimmt der Bediener. Um die horizontale Konfiguration auch automatisiert vorgeben zu können wäre viel mehr Information über die Umgebung (z. B. Hindernisse) nötig, was den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würde. Außerdem bestehen rechtliche Einschränkungen, wie in der Einleitung bereits angedeutet wurde. Als Rahmenbedingung wird deshalb angenommen, dass der Regler erst dann aktiviert wird, sobald die Stützbeine horizontal ausgefahren wurden und die Stützen mit einer Mindestkraft von ca. 5 kN bzw. ≈ 0.5 t belastet sind.

Es wurde eine Zwei-Freiheitsgrade-Struktur bestehend aus Fehlerregelung, Vorsteuerung und Trajektoriengenerator gewählt. Diese hat den Vorteil, dass das Führungsverhalten unabhängig vom Störverhalten eingestellt werden kann. Der Regler soll die z -Position r_z , die Orientierung ψ_x und ψ_y des Fahrzeugs sowie die quadratische Summe der Stützkräfte P_f regeln. Dabei bilden die Stützzyklindergeschwindigkeiten v_{s_1}, \dots, v_{s_4} die Stellgrößen des Reglers. Im Weiteren wird angenommen, dass der Autobetonlaster einen Regelkreis besitzt, der die Volumenströme der Stützzyklinder so regelt, dass sich die Zylindergeschwindigkeiten entsprechend v_{s_1}, \dots, v_{s_4} einstellen.

Für die Regelung wird der Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderungsrate der z -Position, der Orientierung sowie der quadratischen Summe der Stützkräfte und den Stützzyklindergeschwindigkeiten benötigt. Da die Verformung der Trägerelemente des Fahrzeugs im Vergleich zu den Fahrzeugabmessungen klein ist, wird dazu ein Starrkörpermodell hergeleitet.

4.1 Starrkörpermodell

Die Abbildung 4.1 zeigt das Starrkörpermodell in schematischer Darstellung. Der Grundrahmen, die Auskragungen und die Stützbeine werden als ein einziger Starrkörper modelliert. Der Bodenkontakt und die Steifigkeit der Auskragungen werden durch lineare Federn der Steifigkeit c abgebildet. Da angenommen wurde, dass die Stützen bei Zuschalten des Reglers bereits belastet sind, treten keine negativen Stützkräfte auf. Dies rechtfertigt die Verwendung von linearen Federn. Das Fahrwerk und die Reifen werden in diesem Modell vernachlässigt, da dafür genaue Kenntnis des Geländes ($r_{z, BR_1}, \dots, r_{z, BR_6}$) nötig wäre. Für den Reglerentwurf werden alle z -Positionen des Bodens auf Null gesetzt. Vernachlässigt man das Eindringen der Stützen in den Boden, so müssen für das Fahrzeug folgende

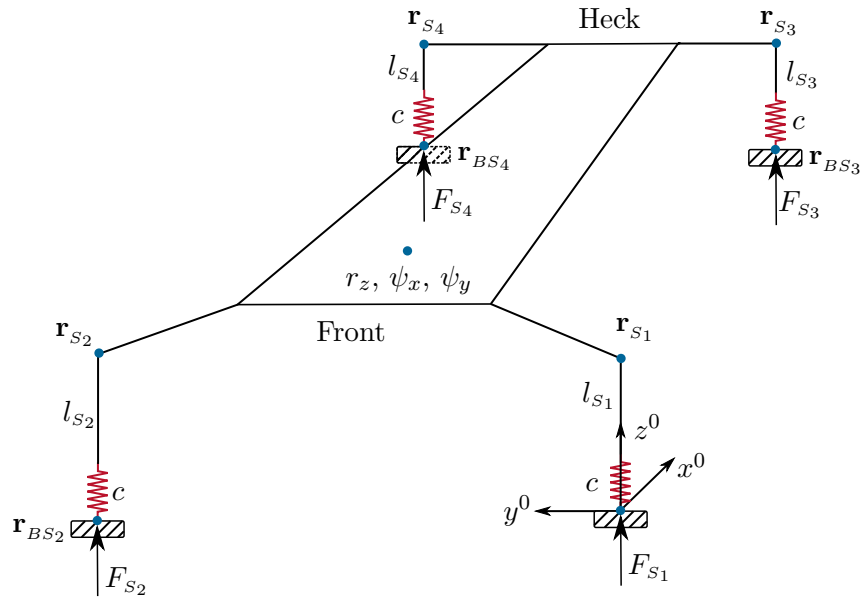


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des Starrkörpermodells. Starrkörper sind in Schwarz dargestellt, elastische Elemente in Rot. Wichtige Punkte sind in Blau markiert.

Gleichungen erfüllt sein

$$\psi_x r_{y,S_1}^D - \psi_y r_{x,S_1}^D - l_{S_1} + r_z = 0 \tag{4.1a}$$

$$\psi_x r_{y,S_2}^D - \psi_y r_{x,S_2}^D - l_{S_2} + r_z = 0 \tag{4.1b}$$

$$\psi_x r_{y,S_3}^D - \psi_y r_{x,S_3}^D - l_{S_3} + r_z = 0 \tag{4.1c}$$

$$\psi_x r_{y,S_4}^D - \psi_y r_{x,S_4}^D - l_{S_4} + r_z = 0 \tag{4.1d}$$

Dabei beschreibt r_{x,S_i}^D bzw. r_{y,S_i}^D , mit $i = 1, \dots, 4$ die x - bzw. y -Position der Stütze i im Koordinatensystem des Drehschemels. Die Skalare r_{x,S_i}^D bzw. r_{y,S_i}^D können auch negativ sein und hängen von der Geometrie des Fahrzeugs (Abstützkonfiguration) ab. Zahlenwerte sind im Abschnitt B.2.1 zu finden. In (4.1) wurde die Kleinwinkelnäherung $\sin(\psi) \approx \psi$ verwendet. Durch zeitliches Ableiten der Gleichungen (4.1) lässt sich der Vektor der Stützzylindergeschwindigkeiten durch

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{H}_I \mathbf{u}_I \tag{4.2a}$$

ausdrücken. Dabei ist

$$\mathbf{H}_I = \begin{bmatrix} 1 & r_{y,S_1}^D & -r_{x,S_1}^D \\ 1 & r_{y,S_2}^D & -r_{x,S_2}^D \\ 1 & r_{y,S_3}^D & -r_{x,S_3}^D \\ 1 & r_{y,S_4}^D & -r_{x,S_4}^D \end{bmatrix} \tag{4.2b}$$

und

$$\mathbf{u}_I = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_z & \psi_x & \psi_y \end{bmatrix}^T \tag{4.2c}$$

Die Matrix \mathbf{H}_f (I steht für Image) bildet also die z -Geschwindigkeit sowie die Roll- und die Nickrate des Fahrzeugs auf die Stützzylingergeschwindigkeiten ab.

Um eine möglichst gute Aufteilung der Stützkkräfte zu erhalten, soll ein Regler eingesetzt werden, der P_f auf sein Minimum $P_{f,d}$ regelt. Wie durch Vergleichen von Abbildung 3.1 und Abbildung 3.2 zu erkennen ist, hängt $P_{f,d}$ nicht von der Nachgiebigkeit des Untergrunds ab, womit für die Kraftregelung keine Kenntnis des Untergrunds notwendig ist. Das Minimum, hängt vor allem von der Abstützkonfiguration und der Gewichtsverteilung (besonders durch Mastkonfiguration und -position beeinflusst) ab. Um $P_{f,d}$ möglichst recheffizient zu ermitteln, wird die Methode aus [3] verwendet. Die Kernidee besteht darin, dass aufgrund der statischen Unbestimmtheit der Abstützung unendliche viele Vektoren \mathbf{f}_S existieren, die die Kräfte- und Momentenbilanz erfüllen. Man wählt nun jenen Vektor \mathbf{f}_S aus, welcher minimale 2-Norm aufweist. Für das Starrkörpermodell in Abbildung 4.1 lässt sich folgende Kräfte- und Momentenbilanz ableiten

$$r_{y,S_1}^D F_{S_1} + r_{y,S_2}^D F_{S_2} + r_{y,S_3}^D F_{S_3} + r_{y,S_4}^D F_{S_4} + M_x = 0 \quad (4.3a)$$

$$-r_{x,S_1}^D F_{S_1} - r_{x,S_2}^D F_{S_2} - r_{x,S_3}^D F_{S_3} - r_{x,S_4}^D F_{S_4} + M_y = 0 \quad (4.3b)$$

$$-F_{S_1} - F_{S_2} - F_{S_3} - F_{S_4} + m_{Fz}g = 0 . \quad (4.3c)$$

Dabei ist M_x das Moment um die x -Achse und M_y das Moment um y -Achse des Fahrzeugs. Die Momente lassen sich aus der Massenverteilung des Fahrzeugs berechnen, wobei die Masse des Drehschemels, des Hecks, der Stützen, der Achsen und des Masts berücksichtigt wird. Die Gewichtskraft zufolge der Fahrzeugmasse ist $m_{Fz}g$. Außerdem wurde wieder eine Kleinwinkelnäherung verwendet. Die Gleichungen (4.3) lassen sich auch durch

$$\mathbf{B}\mathbf{f}_S = \boldsymbol{\tau}_{Fz} \quad (4.4a)$$

mit

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -r_{y,S_1}^D & -r_{y,S_2}^D & -r_{y,S_3}^D & -r_{y,S_4}^D \\ r_{x,S_1}^D & r_{x,S_2}^D & r_{x,S_3}^D & r_{x,S_4}^D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4b)$$

und

$$\boldsymbol{\tau}_{Fz} = [M_x \quad M_y \quad m_{Fz}g]^T \quad (4.4c)$$

angeben. Das Gleichungssystem (4.4) ist unterbestimmt und somit nicht eindeutig lösbar. Es wird nun jener Vektor $\mathbf{f}_{S,d}$ gesucht, der das Gleichungssystem erfüllt und minimale 2-Norm besitzt. Das Problem lässt sich mithilfe einer Optimierungsaufgabe wie folgt definieren

$$\mathbf{f}_{S,d} = \arg \min \|\mathbf{f}_S\|_2^2 \quad (4.5a)$$

$$\text{u.B.v. } \mathbf{B}\mathbf{f}_S = \boldsymbol{\tau}_{Fz} . \quad (4.5b)$$

Die Lösung lässt sich in der Form

$$\mathbf{f}_{S,d} = \mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} \boldsymbol{\tau}_{Fz} \quad (4.6)$$

angeben. Dabei ist die Matrix $\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}$ die linke pseudoinverse Matrix von \mathbf{B} . Das Minimum von P_f lässt sich durch

$$P_{f,d} = \mathbf{f}_{s,d}^T \mathbf{f}_{s,d} \quad (4.7)$$

berechnen.

4.2 Fehlerregelung

Diese Position und die Orientierung sowie die quadratische Summe der Stützkkräfte werden zu einem Vektor

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{Fz}^T & P_f \end{bmatrix}^T, \quad (4.8a)$$

mit dem Vektor der generalisierten Fahrzeugkoordinaten

$$\mathbf{q}_{Fz} = \begin{bmatrix} r_z & \psi_x & \psi_y \end{bmatrix}^T \quad (4.8b)$$

zusammengefasst. Außerdem wird im Folgenden die dazugehörige Trajektorie

$$\mathbf{y}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{Fz,d}^T & P_{f,d} \end{bmatrix}^T, \quad (4.9a)$$

mit der Trajektorie der Fahrzeugkoordinaten

$$\mathbf{q}_{Fz,d} = \begin{bmatrix} r_{z,d} & \psi_{x,d} & \psi_{y,d} \end{bmatrix}^T \quad (4.9b)$$

benötigt. $P_{f,d}$ ist dabei unabhängig von der Zeit und wird nach (4.7) berechnet.

Im Weiteren werden zeitlich diskretisierte Größen mit $[k]$, $k \in \mathbb{N}$ gekennzeichnet. Am Beispiel des Vektors \mathbf{u}_I nimmt dies folgende Form an

$$\mathbf{u}_I(kT_a) = \mathbf{u}_I[k], \quad (4.10)$$

wobei $T_a = 50$ ms die Abtastzeit des Reglers ist.

Die generalisierten Fahrzeugkoordinaten werden mit einem PI-Regler der Form

$$\mathbf{u}_I[k] = -\boldsymbol{\lambda}_P \mathbf{e}[k] - \boldsymbol{\lambda}_I \mathbf{e}_I[k], \quad (4.11a)$$

geregelt, wobei der Regelfehler $\mathbf{e}[k]$ und der integrale Fehler $\mathbf{e}_I[k]$ wie folgt definiert sind

$$\mathbf{e}[k] = \mathbf{q}_{Fz}[k] - \mathbf{q}_{Fz,d}[k] \quad (4.11b)$$

$$\mathbf{e}_I[k] = \mathbf{e}_I[k-1] + (\mathbf{q}_{Fz}[k-1] - \mathbf{q}_{Fz,d}[k-1])T_a = \mathbf{e}_I[k-1] + \mathbf{e}[k-1]T_a. \quad (4.11c)$$

Dabei sind $\boldsymbol{\lambda}_P$ und $\boldsymbol{\lambda}_I$ positiv definite Diagonalmatrizen, welche den Proportional- und Integralteil des Fehlerreglers definieren. Der Vektor $\mathbf{u}_I[k]$ kann als virtuelle Stellgröße verstanden werden, welche durch die Beziehung

$$\mathbf{v}_I[k] = \mathbf{H}_I \mathbf{u}_I[k] \quad (4.12)$$

auf die Stützzylingergeschwindigkeit des Positions- und Orientierungsreglers \mathbf{v}_I abgebildet wird.

Der Ausgang des Reglers (Fehlerregelung und Vorsteuerung) unterliegt einer Stellgrößenbeschränkung. Da die Fehlerregelung einen Integralteil besitzt, muss deshalb eine Anti-Windup Maßnahme getroffen werden. Diese ist notwendig, falls die Stellgrößen des Reglers v_{S_1}, \dots, v_{S_4} in die Beschränkung kommen und der Integralteil bewirken würde, dass die Stellgrößen noch weiter in die Beschränkung getrieben werden. Mit der minimalen bzw. maximalen Zylindergeschwindigkeit v_{\min} bzw. v_{\max} ist eine Anti-Windup Maßnahme deshalb notwendig, falls

$$v_{S_i}[k] < v_{\min} \wedge [\mathbf{H}_I \boldsymbol{\lambda}_I \mathbf{e}_I[k]]_i > 0, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.13a)$$

oder

$$v_{S_i}[k] > v_{\max} \wedge [\mathbf{H}_I \boldsymbol{\lambda}_I \mathbf{e}_I[k]]_i < 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4.13b)$$

Dabei ist $[\mathbf{H}_I \boldsymbol{\lambda}_I \mathbf{e}_I[k]]_i$ die i -te Zeile des Vektors $\mathbf{H}_I \boldsymbol{\lambda}_I \mathbf{e}_I[k]$. Falls die Bedingung (4.13) erfüllt ist, wird die Integration gestoppt, d. h. Gleichung (4.11c) durch

$$\mathbf{e}_I[k] = \mathbf{e}_I[k-1] \quad (4.14)$$

ersetzt.

Als Nächstes soll der Kraftregler vorgestellt werden. Dazu betrachte man die Matrix \mathbf{H}_I , welche drei Spaltenvektoren besitzt. Diese Spaltenvektoren sind linear unabhängig. Es gibt immer einen Vektor \mathbf{h}_o , der orthogonal zum Spaltenraum von \mathbf{H}_I steht, und die Bedingungen

$$\mathbf{H}_I^T \mathbf{h}_o = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (4.15a)$$

und

$$\|\mathbf{h}_o\|_2 = 1 \quad (4.15b)$$

erfüllt. Die zweite Bedingung (4.15b) wird gefordert, um die Länge des Vektors eindeutig zu definieren. Für die Vollabstützung ergeben sich

$$\mathbf{H}_I = \begin{bmatrix} 1.000 & -3.124 & 1.477 \\ 1.000 & 3.124 & 1.477 \\ 1.000 & -2.840 & -5.662 \\ 1.000 & 2.840 & -5.472 \end{bmatrix} \quad (4.16a)$$

und

$$\mathbf{h}_o = [0.469 \quad -0.483 \quad -0.516 \quad 0.530]^T \quad (4.16b)$$

Man beachte die leichte Asymmetrie der Maschine, welche eine Asymmetrie in \mathbf{h}_o verursacht. Um die Komponenten von \mathbf{h}_o zu deuten, wird eine abgestützte Betonpumpe betrachtet, bei der die Stützkräfte \mathbf{f}_S so eingestellt worden sind, dass $\mathbf{f}_S^T \mathbf{f}_S = P_{f,d}$ gilt. Prägt man nun eine Zylindergeschwindigkeit proportional zu \mathbf{h}_o ein,

$$\mathbf{v}_S = [0.469 \quad -0.483 \quad -0.516 \quad 0.530]^T v_0, \quad v_0 \in R, \quad (4.17)$$

so wird sich die z -Position und die Orientierung des Fahrzeugs kaum ändern. Der Wert P_f hingegen steigt, da er sich zu Beginn in seinem Minimum befand und die Stützen 2 und 3 entlastet werden, während Stütze 1 und 4 belastet werden. Das führt zu einer Umverteilung der Stützkräfte. Selbes Ergebnis würde erzielt, wenn man \mathbf{v}_s durch $-\mathbf{v}_s$ ersetzt. Dies wirft die Frage auf, wie man einen Vektor \mathbf{v}_s wählen muss, wenn $P_f \neq P_{f,d}$ gilt und man P_f verkleinern möchte. Im Weiteren wird deshalb die virtuelle Stellgröße u_o gesucht, welche mit nachfolgender Beziehung auf die Zylindergerwindigkeit des Kraftreglers \mathbf{v}_o abgebildet wird

$$\mathbf{v}_o[k] = \mathbf{h}_o u_o[k] . \quad (4.18)$$

Die virtuelle Stellgröße u_o soll so gewählt werden, dass sich P_f verkleinert. Dazu wird die Zeitableitung \dot{P}_f betrachtet. Es gilt

$$\dot{P}_f = \frac{d\mathbf{f}_s^T \mathbf{f}_s}{dt} = 2\mathbf{f}_s^T \dot{\mathbf{f}}_s = 2\mathbf{f}_s^T \frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial \mathbf{l}_s} \mathbf{v}_s . \quad (4.19)$$

Bleiben die Position und Orientierung des Fahrzeugs unverändert, was durch die Orthogonalitätsbedingung (4.15a) impliziert wird, so gilt

$$\frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial \mathbf{l}_s} = c\mathbf{E}, \quad (4.20)$$

mit der Nachgiebigkeit des Bodens c (vgl. Abbildung 4.1) und der Einheitsmatrix \mathbf{E} . Somit erhält man

$$\dot{P}_f = 2c\mathbf{f}_s^T \mathbf{v}_s . \quad (4.21)$$

Wählt man $\dot{P}_f = -\lambda_f(P_f[k] - P_{f,d})$ und ersetzt \mathbf{v}_s durch den Ausgang der Fehlerregelung

$$\mathbf{v}_e[k] = \mathbf{v}_I[k] + \mathbf{v}_o[k] , \quad (4.22)$$

so erhält man

$$\begin{aligned} -\lambda_f(P_f[k] - P_{f,d}) &= 2c\mathbf{f}_s^T[k] \mathbf{v}_e[k] = 2c\mathbf{f}_s^T[k] (\mathbf{v}_I[k] + \mathbf{v}_o[k]) \\ &= 2c\mathbf{f}_s^T[k] (\mathbf{H}_I \mathbf{u}_I[k] + \mathbf{h}_o u_o[k]) . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dabei ist λ_f der Proportionalteil des Kraftreglers. Aus (4.23) lässt sich die virtuelle Stellgröße zu

$$u_o[k] = \frac{1}{2c\mathbf{f}_s^T[k] \mathbf{h}_o} \left(-2c\mathbf{f}_s^T[k] \mathbf{H}_I \mathbf{u}_I[k] - \lambda_f(P_f[k] - P_{f,d}) \right) \quad (4.24)$$

berechnen. In Simulationen hat sich gezeigt, dass es günstig ist den Term $-2c\mathbf{f}_s^T[k] \mathbf{H}_I \mathbf{u}_I[k]$ mit einer Zahl $\lambda \in (0, 1)$ zu skalieren. Insbesondere hat sich gezeigt, dass die Wahl $\lambda = 0$ bereits zu guten Ergebnissen führt, weswegen nun

$$u_o[k] = -\lambda_f \frac{P_f[k] - P_{f,d}}{2c\mathbf{f}_s^T[k] \mathbf{h}_o} \quad (4.25)$$

verwendet wird. Beim Kraftregler ist ein Integralteil nicht sinnvoll, da immer $P_f \geq P_{f,d}$ gilt und somit der Integralteil nur wachsen aber nicht abnehmen kann.

Damit die virtuelle Stellgröße $u_o[k]$ beschränkt bleibt, muss sichergestellt werden, dass der Term

$$d_f[k] = \mathbf{f}_s^T[k] \mathbf{h}_o \quad (4.26)$$

ungleich Null ist. Um d_f genau zu betrachten wird zunächst das Gleichungssystem (4.4) verwendet. Jede Lösung des Gleichungssystems lässt sich in der Form

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{f}_{s,d} + \alpha \mathbf{f}_0, \quad (4.27)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und \mathbf{f}_0 als einem Vektor aus dem Nullraum von \mathbf{B} , d. h. $\mathbf{B}\mathbf{f}_0 = \mathbf{0}_{3 \times 1}$, angeben. Am Beispiel der Rechtsabstützung soll nun gezeigt werden, welche Werte d_f für die Stützkkräfte aus (4.27) annimmt. Dazu wird der Vektor \mathbf{f}_0 so gewählt, dass $\|\mathbf{f}_0\|_2 = \|\mathbf{f}_{s,d}\|_2$ gilt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass d_f die

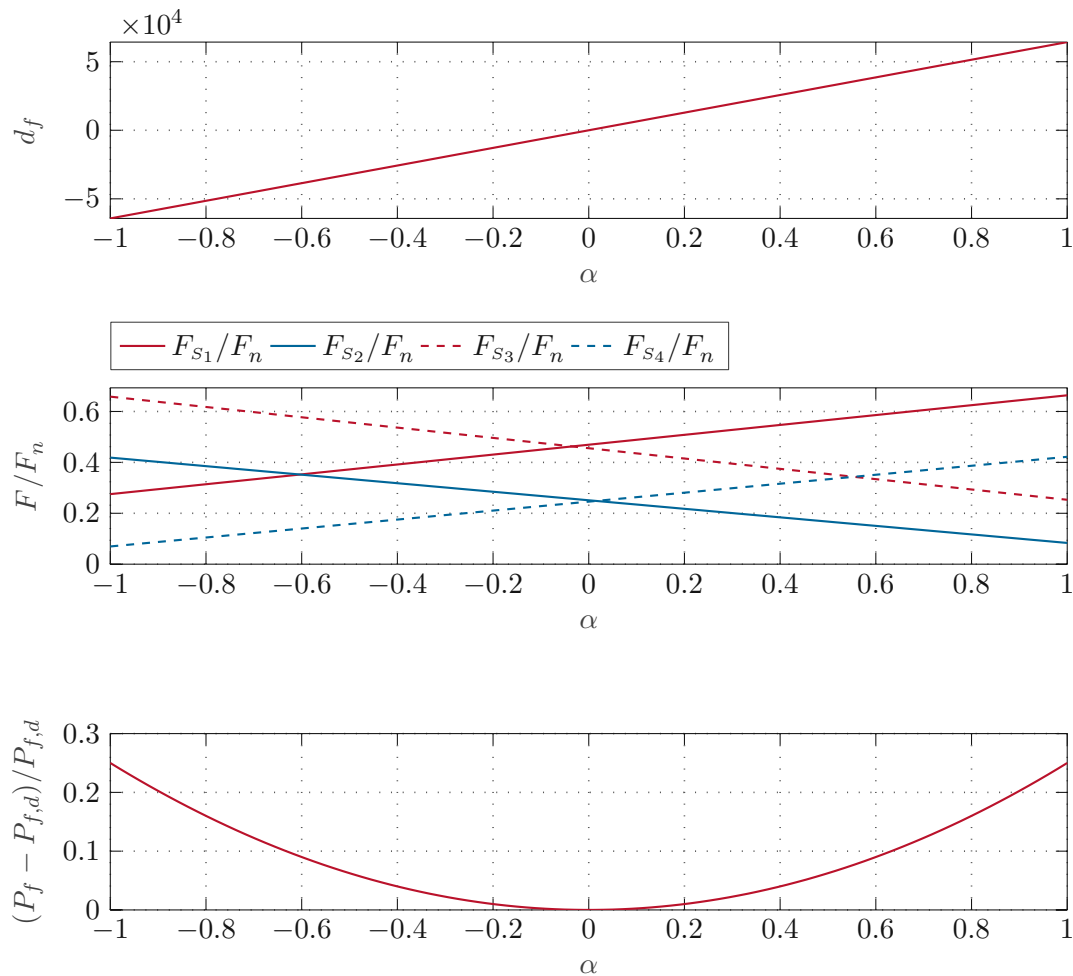


Abbildung 4.2: Analyse von d_f für die Rechtsabstützung.

Nulllinie bei $\alpha = 0$ kreuzt. Bei diesem Punkt tritt auch der minimale P_f -Wert $P_{f,d}$ auf. Wenn $P_{f,d}$ wegen eines Datenfehlers (z. B. falsche Fahrzeugmasse) zu klein geschätzt wird, erreicht $P_f - P_{f,d}$ niemals Null. Die virtuelle Stellgröße u_o nimmt dann für $d_f = 0$

einen unendlichen Wert an. Das Regelgesetz (4.25) muss deshalb angepasst werden, um dies zu vermeiden. Vorher soll allerdings noch untersucht werden was passiert, wenn das Minimum von P_f und $d_f = 0$ nicht an derselben Stelle liegen. Dies kann aufgrund von Parameterabweichungen auftreten. Im Weiteren wird angenommen, dass $d_f = 0$ bei $\alpha' < 0$ auftritt und das Minimum von P_f an der Stelle $\alpha = 0$ bleibt. Befindet sich das System anfangs im Punkt $\alpha = -1$, wird der Kraftregler dafür sorgen, dass sich der Wert von P_f reduziert und α steigt. Sobald α' überschritten wird, wechselt d_f sein Vorzeichen und \mathbf{v}_o somit seine Richtung. Da an diesem Punkt $P_f - P_{f,d} \neq 0$ gilt, ist die virtuelle Stellgröße u_o ebenfalls ungleich Null und P_f beginnt wieder zu steigen. Die Größe d_f wird darauf folgend wieder das Vorzeichen wechseln, woraus sich eine Oszillation um α' bildet.

Um derartige Oszillationen klein zuhalten und die virtuelle Stellgröße u_o für $d_f = 0$ zu beschränken wird der maximale Betrag von u_o durch

$$u_{o,\max}[k] = \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} |d_f[k]| & |d_f[k]| < \alpha_2 \\ \alpha_1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.28)$$

mit $\alpha_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ und $\alpha_2 = 2 \cdot 10^4$ festgelegt. Dabei wurden die Zahlenwerte in Simulationen ermittelt. Die virtuelle Stellgröße u_o wird also umso stärker beschränkt, je kleiner der Betrag von d_f wird. Es ist sinnvoll den Betrag von u_o mit α_1 nach oben zu beschränken, da die Komponenten von $\mathbf{v}_o[k] = \mathbf{h}_o u_o[k]$ dann bei passender Wahl von α_1 niemals die Stellgrößenbeschränkung erreichen. In den Simulationen hat sich nämlich gezeigt, dass sich P_f nicht reduziert, wenn \mathbf{v}_o eine Stellgrößenbeschränkung auslöst. Dies liegt daran, dass die Vektoren \mathbf{v}_o und \mathbf{h}_o dann nicht mehr kollinear zueinander sind.

Eine Alternative zur Beschränkung von u_o wäre eine Skalierung von λ_f in Abhängigkeit von d_f . Es hat sich allerdings gezeigt, dass dies bei großen Differenzen von $P_f - P_{f,d}$ zu starken Oszillationen führt.

Es sei noch angemerkt, dass die Beziehung

$$\mathbf{f}_{S,d}^T \mathbf{h}_o = 0 \quad (4.29)$$

immer gilt, da $\mathbf{f}_{S,d}$ orthogonal zum Nullraum von \mathbf{B} , und somit auch orthogonal zu \mathbf{h}_o ist.

Da der Wert $P_{f,d}$ nur erreicht werden kann, wenn alle Reifen den Bodenkontakt verloren haben, ist es nicht sinnvoll den Kraftregler von Anfang an laufen zu lassen. Er wird erst aktiviert, sobald die z -Position und die Orientierung des Fahrzeugs in einem gewissen Toleranzband liegen und alle Reifen abgehoben haben. Mit der z -Position $r_{z,\infty}$, dem Rollwinkel $\psi_{x,\infty}$ und dem Nickwinkel $\psi_{y,\infty}$ welches das Fahrzeug im vollständig abgestützten Zustand einnehmen soll, lässt sich diese Forderung wie folgt formulieren

$$|r_z - r_{z,\infty}| < r_{\text{tol}} \quad (4.30a)$$

$$|\psi_x - \psi_{x,\infty}| < \psi_{\text{tol}} \quad (4.30b)$$

$$|\psi_y - \psi_{y,\infty}| < \psi_{\text{tol}} \quad (4.30c)$$

$$|F_{S_1} + F_{S_2} + F_{S_3} + F_{S_4} - m_{Fz}g| < f_{\text{tol}} \quad (4.30d)$$

Dabei entsprechen die positiven Konstanten r_{tol} , ψ_{tol} und f_{tol} der z -Toleranz, der Winkeltoleranz und der Krafttoleranz. Die Positions- und Orientierungsregelung läuft weiter,

nachdem der Kraftregler aktiviert wurde. Der Kraftregler wird ausgeschaltet, sobald $(P_f - P_{f,d})/P_{f,d}$ die Toleranz P_{tol} unterschritten hat, d_f mehr als dreimal sein Vorzeichen gewechselt hat, oder der Kraftregler länger als die Zeit $t_{f,\text{max}}$ läuft. Sobald der Kraftregler wegen einem der genannten Gründe ausgeschaltet wurde, wird er nicht noch einmal aktiviert.

4.3 Vorsteuerung und Trajektoriengenerator

Um ein besseres Führungsverhalten zu erreichen, wird neben dem Fehlerregler auch eine Vorsteuerung eingesetzt. Die Vorsteuerung ergibt sich aus der diskreten Ableitung der Trajektorie $\mathbf{q}_{Fz,d}[k]$ in der Form

$$\mathbf{v}_{\text{vst}}[k] = \mathbf{H}_I \frac{\mathbf{q}_{Fz,d}[k] - \mathbf{q}_{Fz,d}[k-1]}{T_a} . \quad (4.31)$$

Wie bereits erwähnt unterliegt der Reglerausgang

$$\mathbf{v}_s[k] = \mathbf{v}_e[k] + \mathbf{v}_{\text{vst}}[k] \quad (4.32)$$

einer Stellgrößenbeschränkung. Die Komponenten des beschränkten Reglerausgangs

$$\mathbf{v}_{s,c}[k] = [v_{s_1,c}[k] \quad v_{s_2,c}[k] \quad v_{s_3,c}[k] \quad v_{s_4,c}[k]]^T \quad (4.33)$$

(c für clipped), welche auf die Strecke aufgebracht werde, haben dabei die Form

$$v_{s_i,c}[k] = \begin{cases} v_{\min} & v_{s_i}[k] < v_{\min} \\ v_{\max} & v_{s_i}[k] > v_{\max}, \quad i = 1, \dots, 4 . \\ v_{s_i}[k] & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.34)$$

Hierbei gilt für die minimale bzw. maximale Stützzylingergeschwindigkeit $v_{\min} < 0$ bzw. $v_{\max} > 0$.

Die Trajektorie $\mathbf{q}_{Fz,d}[k]$ verläuft rampenförmig von $\mathbf{q}_{Fz}[0]$ bis

$$\mathbf{q}_{Fz,\infty} = [r_{z,\infty} \quad \psi_{x,\infty} \quad \psi_{y,\infty}]^T \quad (4.35)$$

und bleibt nach dem Erreichen auf diesem Wert. Die Steigung der Rampe wird zu

$$\frac{\mathbf{q}_{Fz,d}[k] - \mathbf{q}_{Fz,d}[k-1]}{T_a} = (\mathbf{q}_{Fz,\infty} - \mathbf{q}_{Fz}[0]) \frac{v_{\text{vst}}}{\Delta l_{\text{max}}} \quad (4.36)$$

festgelegt. Für die Vorsteuerungsgeschwindigkeit v_{vst} gilt hierbei $0 < v_{\text{vst}} \leq v_{\max}$. Außerdem ist $\Delta l_{\text{max}} > 0$ der Stützlängenunterschied mit dem größten Betrag, der zwischen den beiden Fahrzeugkoordinaten $\mathbf{q}_{Fz}[0]$ und $\mathbf{q}_{Fz,\infty}$ herrscht. Die Stützlängenunterschiede lassen sich anhand des Starrkörpermodells (4.1) wie folgt berechnen

$$[\Delta l_{s_1} \quad \Delta l_{s_2} \quad \Delta l_{s_3} \quad \Delta l_{s_4}]^T = \mathbf{H}_I (\mathbf{q}_{Fz,\infty} - \mathbf{q}_{Fz}[0]) , \quad (4.37)$$

wobei $\Delta l_{s_1}, \dots, \Delta l_{s_4}$ die Stützlängenunterschiede der Stützen 1 bis 4 sind. Weiters gilt

$$\Delta l_{\text{max}} = \max(|\Delta l_{s_1}|, \dots, |\Delta l_{s_4}|) . \quad (4.38)$$

4.4 Rauschen und Signalkonditionierung

Die gemessene, nicht verrauschte Position \bar{r}_z und die Orientierung $\bar{\psi}_x, \bar{\psi}_y$ des Fahrzeugs sowie die gemessenen, nicht verrauschten Stützkräfte $\bar{\mathbf{f}}_S$ werden zu einem Vektor

$$\bar{\mathbf{x}}_{\text{red}}(t) = \left[\bar{r}_z(t) \quad \bar{\psi}_x(t) \quad \bar{\psi}_y(t) \quad \bar{\mathbf{f}}_S^T(t) \right]^T \quad (4.39)$$

zusammengefasst. Das Messrauschen wird, durch

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\text{red}}(t) = \bar{\mathbf{x}}_{\text{red}}(t) + \mathbf{d}(t) , \quad (4.40)$$

mit dem Vektor $\mathbf{d}(t)$ des Messrauschens in der Form

$$\mathbf{d}(t) = \left[d_{r_z}(t) \quad d_{\psi_x}(t) \quad d_{\psi_y}(t) \quad d_{F_{S_1}}(t) \quad \dots \quad d_{F_{S_4}}(t) \right]^T \quad (4.41)$$

charakterisiert. Im Weiteren werden die (zeitunabhängigen) Standardabweichungen von $d_{r_z}(t)$, $d_{\psi_x}(t)$, $d_{\psi_y}(t)$, sowie $d_{F_{S_1}}(t)$ bis $d_{F_{S_4}}(t)$ mit σ_r , $\sigma_{\psi_x} = \sigma_{\psi_y} = \sigma_{\psi}$ sowie $\sigma_{f_{S_i}} = \sigma_f$, $i = 1, \dots, 4$ bezeichnet. Außerdem wird angenommen, dass der Erwartungswert aller Rauschterme Null ist. Das Rauschen dient vor allem dazu, die Robustheit des Reglers zu testen. Messabweichungen, die einen Erwartungswert ungleich Null hervorrufen würden, wie z. B. Ungenauigkeiten der Kraftmessung zufolge von Reibung, werden vernachlässigt.

Um höherfrequentes Messrauschen besser zu unterdrücken wird die Abtastzeit des Filters $T_f = 10$ ms kleiner als jene des Reglers gewählt. Zur Filterung wird ein Savitzky-Golay Filter [16] eingesetzt, welches gute Filtereigenschaften bei sehr geringer Phasenverschiebung bietet. Die Kernidee des Filters besteht darin, den quadratischen Abstand zwischen einem Polynom der Ordnung N und M Messwerten zu minimieren. Die Zahl der Messungen M ist dabei ungerade. Die $N + 1$ Koeffizienten des Polynoms werden mit der Least-Squares Methode bestimmt. Sind die Koeffizienten des Polynoms bekannt, so kann die Messgröße für jeden beliebigen Zeitpunkt, der innerhalb der M Messungen liegt, durch Auswerten des Polynoms bestimmt werden. Die Filterordnung N und die Zahl der Messwerte M bestimmen die Qualität des Filters. Im Weiteren wird $N = 3$ und $M = 21$ gewählt. Die gefilterten Messwerte werden zum Vektor

$$\mathbf{x}_{\text{red}}[k] = \left[r_z[k] \quad \psi_x[k] \quad \psi_y[k] \quad F_{S_1}[k] \quad \dots \quad F_{S_4}[k] \right]^T \quad (4.42)$$

zusammengefasst. Der weiter oben verwendete Vektor $\mathbf{y}[k]$ besteht aus den Positions- und Orientierungskomponenten sowie dem P_f -Wert berechnet aus den Kraftkomponenten von $\mathbf{x}_{\text{red}}[k]$.

4.5 Blockschaltbild

Zur Veranschaulichung ist der weiter oben beschriebene Regelkreis in Abbildung 4.3 als Blockschaltbild dargestellt. In der Grafik wird farblich zwischen kontinuierlichen und diskreten Signalen unterschieden. Schwarze Linien kennzeichnen kontinuierliche Signalpfade, rot bzw. blau hingegen Signalpfade, welche diskrete Signale einer Abtastzeit von T_a

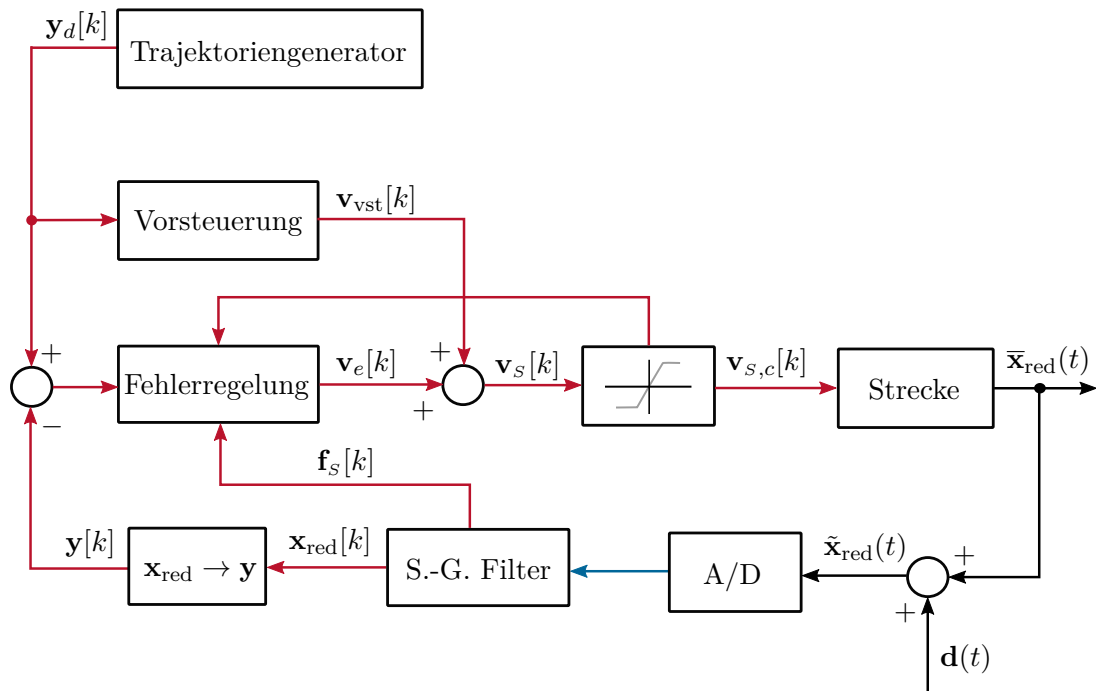


Abbildung 4.3: Blockschaltbild des Regelkreises.

bzw. T_f führen. Die Verbindung zwischen dem Beschränkungsblock und dem Fehlerregler symbolisiert, dass eine Anti-Windup Maßnahme ergriffen werden muss, sobald die Stellgrößenbeschränkung aktiviert wird. Zusätzlich benötigt der Fehlerregler zur Berechnung von $d_f[k]$ den Vektor $\mathbf{f}_s[k]$, auch dies ist im Blockschaltbild vermerkt. Der Block nach dem Savitzky-Golay Filter stellt die Berechnung von $\mathbf{y}[k]$ aus $\mathbf{x}_{\text{red}}[k]$ dar.

4.6 Simulationen

In diesem Abschnitt wird der vorgestellte Regler mithilfe von Simulationen getestet. Die verwendeten Parameter sind in Abschnitt B.2 zu finden oder werden im Weiteren angegeben. Die Strecke wird für die Simulationen durch das Modell aus Kapitel 2 ersetzt. Die Daten am Ausgang des Modells haben eine Abtastzeit von T_a und werden durch lineare Extrapolation auf eine Abtastzeit von T_f gebracht.

Nachfolgend wird der Regelkreis unter verschiedenen Bedingungen getestet. Es sollen zunächst verschiedene Untergründe und Abstützkonfigurationen untersucht werden. Dabei wird das Messrauschen vorerst vernachlässigt. Begonnen wird mit der Vollabstützung auf hartem Untergrund (Bodennachgiebigkeit nach (B.1b)). Die Maschine befindet sich auf einer schiefen Ebene, welche zum Zeitpunkt $t = 0$ s einen Roll- bzw. einen Nickwinkel des Fahrzeugs von $\psi_x \approx 4^\circ$ bzw. $\psi_y \approx -4^\circ$ verursacht¹. Da es üblich ist Holz- oder Kunststoffplatten unter die Stützen zu legen um die Standsicherheit zu verbessern, liegen

¹Die maximal zugelassene Hangneigung liegt bei 3° . Da die in der Simulation auftretende Neigung größer ist kann davon ausgegangen werden, dass der Regler auch auf flacherem Gelände funktioniert.

die z -Positionen $r_{BS_1}, \dots, r_{BS_4}$ 20 cm über der schiefen Ebene. Der Regelungsvorgang startet bei horizontal ausgefahrenen Stützbeinen und leicht belasteten Stützen. In der Simulation wurde $r_{z,\infty}$ größer gewählt, als die maximale Ausfahrposition der Zylinder zulässt. Dies ist notwendig, damit die Reifen in allen Simulationen vollständig abheben können. Dieses Szenario soll vor allem den Regelkreis testen und ist nicht unbedingt praktisch relevant. Die Zylindergeschwindigkeiten werden mit $v_{\min} = -10$ cm/s und $v_{\max} = 5$ cm/s begrenzt. Damit die Fehlerregelung Abweichungen ausgleichen kann, wird die Vorsteuerungsgeschwindigkeit $v_{\text{vst}} = 4.3$ cm/s gewählt. Die genannten Parameter und Eingangsgrößen werden, falls nicht anders angegeben, auch für nachfolgende Szenarien verwendet. Die Ergebnisse der Simulation sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Rechts oben sind die Komponenten von $\mathbf{v}_{S,c}[k]$ und in der Mitte links die dazugehörigen Stützlängen $l_S[k]$, welche sich durch Integration von $\mathbf{v}_{S,c}[k]$ ergeben, abgebildet. Unten links sind die normierten Stützkräfte $\mathbf{f}_S[k]$ dargestellt. Die z -Position $r_z[k]$ sowie der Rollwinkel $\psi_x[k]$ und der Nickwinkel $\psi_y[k]$ sind in den Abbildungen rechts oben und in der Mitte rechts dargestellt. Die z -Position und die zugehörige Trajektorie sind fast identisch. Gleiches gilt für den Roll- und den Nickwinkel. Rechts unten ist die relative Abweichung von $P_f[k]$ zum gewünschten Wert $P_{f,d}$ dargestellt. Auf die Angabe des Subskripts c (clipped) bzw. des Zeitindex $[k]$ wurde, in der Abbildung aus Platzgründen verzichtet. Aus demselben Grund wurden auch die Quotienten F_{S_i}/F_n , $i = 1, \dots, 4$ durch F_{S_i} ersetzt. Die Abbildungen mit der z -Position und der Orientierung zeigen, dass das Fahrzeug der gewünschten Trajektorie sehr gut folgt, was vor allem an der Vorsteuerung liegt. Da die Trajektorie zunächst konstante Steigung aufweist, liefert die Vorsteuerung für $t < 27$ s auch konstante Zylindergeschwindigkeiten. Man sieht, dass der Fehlerregler im Wesentlichen nur bei $t = 0$ s und $t \approx 27$ s einen Beitrag leistet. Das Starrkörpermodell stellt also eine gute Näherung dar. Auch zu sehen ist, dass die verfügbare Zylindergeschwindigkeit v_{\max} gut ausgenutzt wird. Die Zylindergeschwindigkeit v_{S_1} liegt nahe am Limit von 5 cm/s. Die anderen Zylindergeschwindigkeiten fallen kleiner aus, da das Fahrzeug gedreht werden muss. In den Zeitverläufen der Stützkräfte sind Knicke zu erkennen. Diese werden durch das Entlasten der Achsen verursacht. In der Abbildung rechts unten ist zu sehen, dass die Kombination aus Fehlerregelung und Vorsteuerung bereits zu einem sehr guten P_f -Wert führt. Bei $t \approx 27$ s erreichen die Position und Orientierung das Toleranzband. Die relative Abweichung $(P_f - P_{f,d})/P_{f,d}$ ist hier bereits kleiner als $P_{\text{tol}} = 0.1\%$. Deswegen wird der Kraftregler in diesem Fall nicht aktiviert. Zeitbereiche, in denen der Kraftregler aktiv ist, werden blau schattiert.

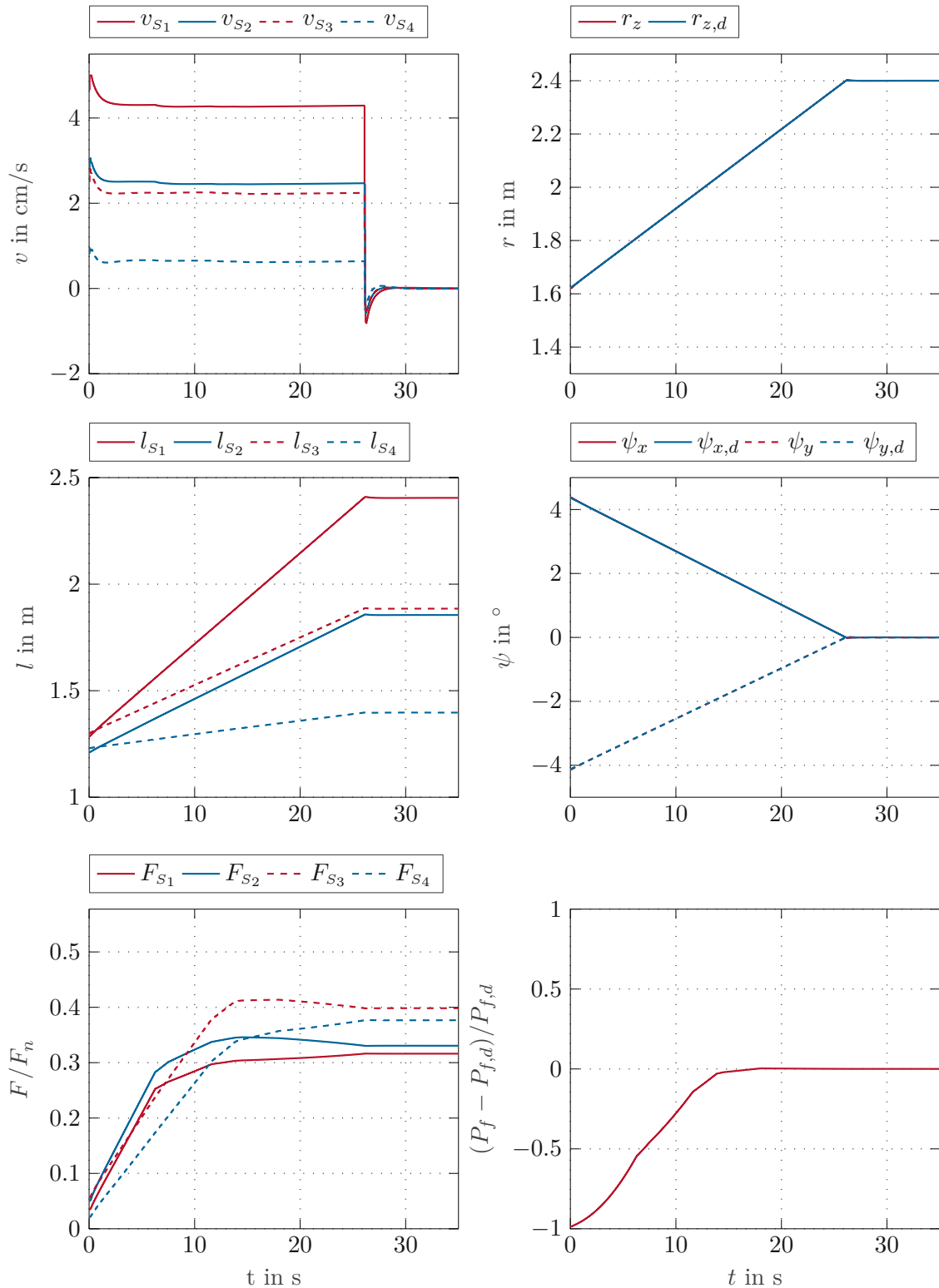


Abbildung 4.4: Verhalten des Regelkreises bei Vollabstützung und hartem Untergrund. Hier gilt $r_{z,\infty} = 2.4$ m, $\psi_{x,\infty} = 0^\circ$, $\psi_{y,\infty} = 0^\circ$ und $P_{f,d} = 19.403$ GN².

In Abbildung 4.5 und Abbildung 4.6 sind die Ergebnisse für die Rechts- und die Frontabstützung auf hartem Untergrund dargestellt. Die Ergebnisse sind qualitativ sehr ähnlich zur Vollabstützung. Bei der Rechtsabstützung wird allerdings bei $t \approx 27$ s der Kraftregler kurz aktiviert. Es ist zu erkennen, dass der Kraftregler die Stützkräfte zwischen den linken (1 und 3) und rechten (2 und 4) Stützen ausgleicht, was zu einer leichten Reduktion von P_f führt. Die Stützkräfte ändern sich dabei um einige Prozent. Die Stützlängen hingegen bleiben nahezu unverändert. Dies zeigt, dass sehr kleine Änderungen der Zylinderpositionen zu merklichen Änderungen der Stützkräfte führen. Man beachte, dass die negativen Zylindergeschwindigkeiten bei $t > 27$ s überwiegend vom Positionsregler verursacht werden, welcher ein leichtes Überschwingen von r_z ausgleicht. Dies kann man daran erkennen, dass alle Zylindergeschwindigkeiten etwa dieselbe Auslenkung von der Nulllinie aufweisen.

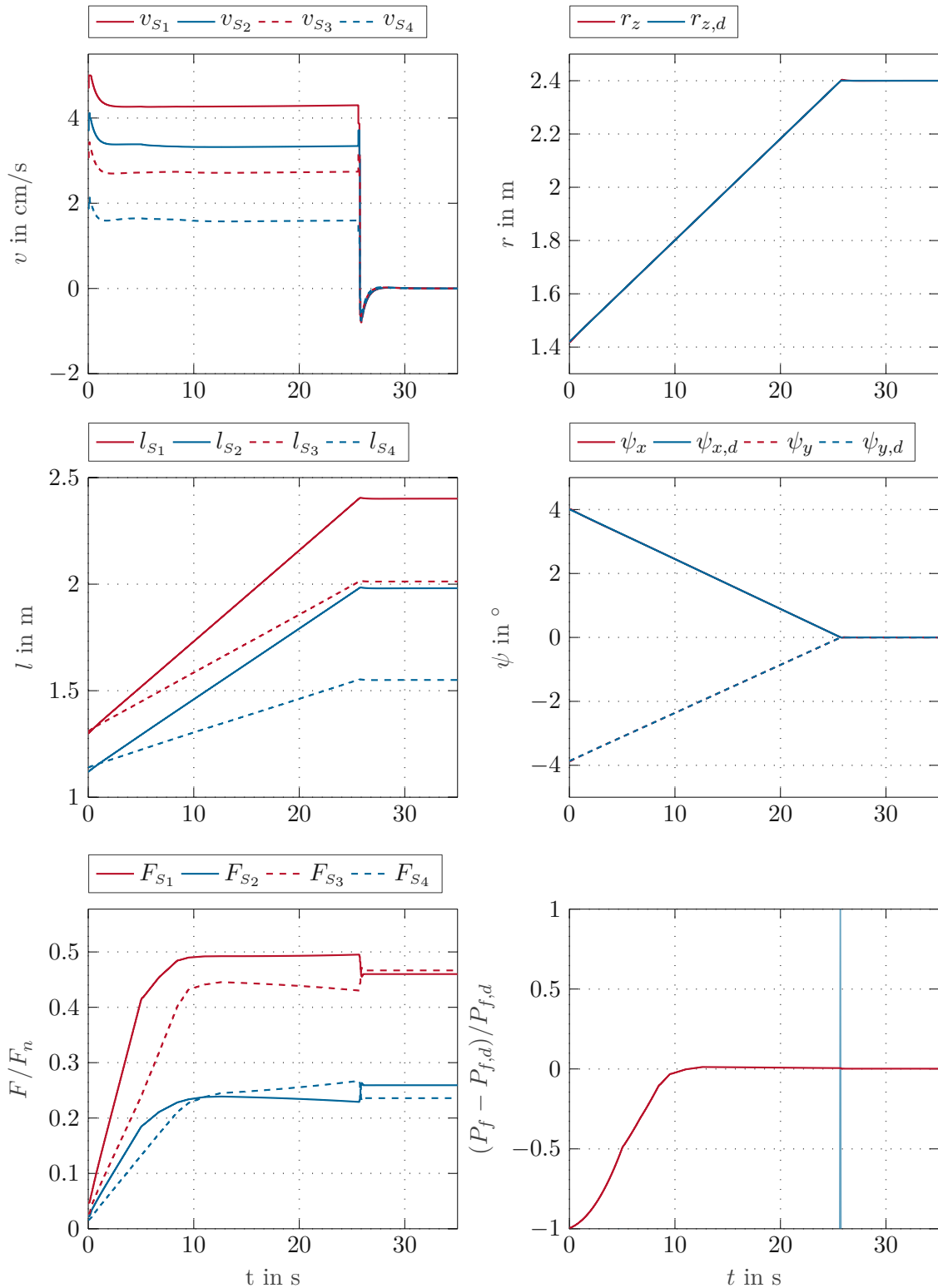


Abbildung 4.5: Verhalten des Regelkreises bei Rechtsabstützung und hartem Untergrund. Hier gilt $r_{z,\infty} = 2.4$ m, $\psi_{x,\infty} = 0^\circ$, $\psi_{y,\infty} = 0^\circ$ und $P_{f,d} = 19.556$ GN².

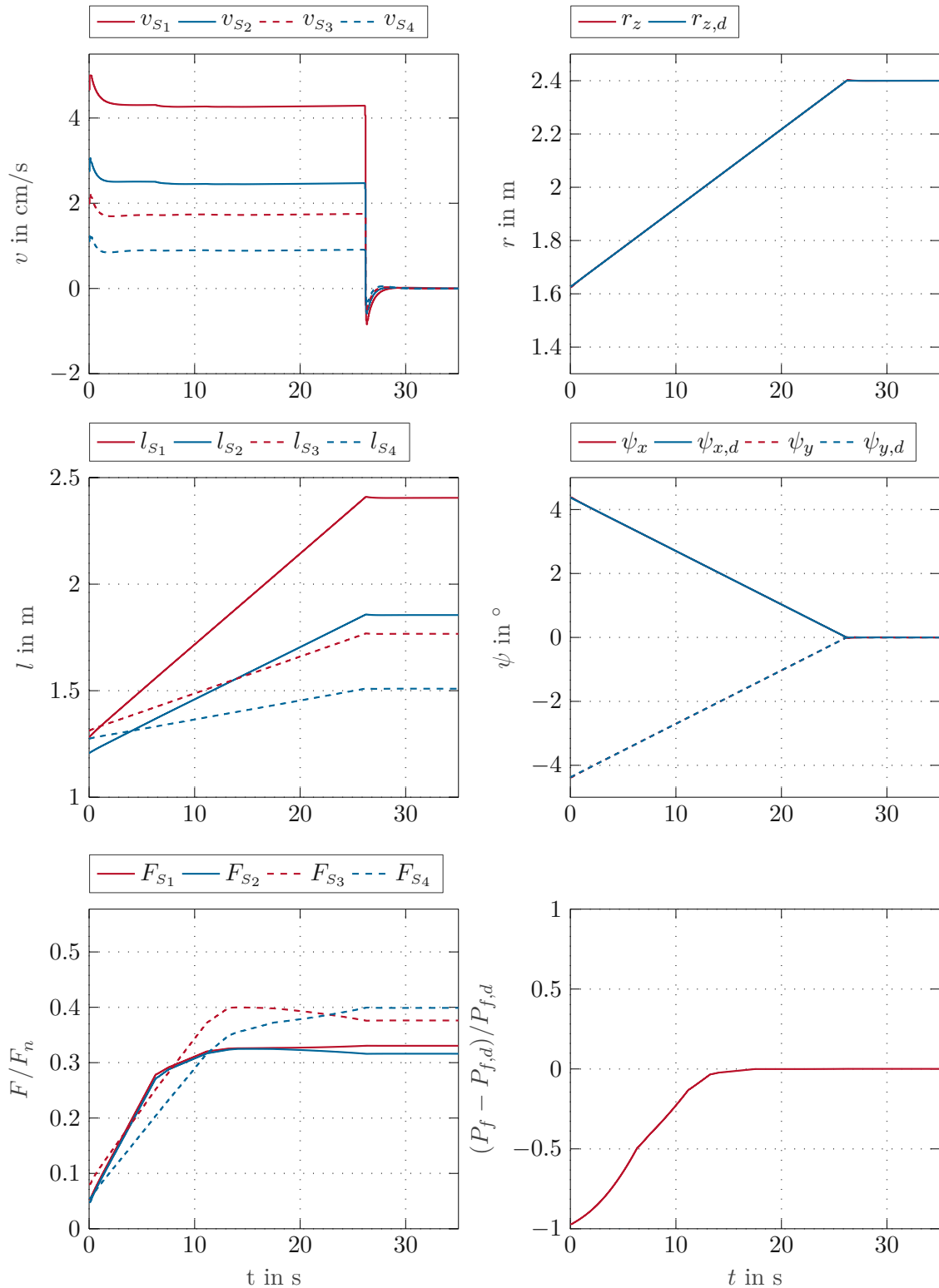


Abbildung 4.6: Verhalten des Regelkreises bei Frontabstützung und hartem Untergrund. Hier gilt $r_{z,\infty} = 2.4$ m, $\psi_{x,\infty} = 0^\circ$, $\psi_{y,\infty} = 0^\circ$ und $P_{f,d} = 19.402$ GN².

Da die Rechtsabstützung am unsymmetrischsten ist und die Kraftregelung bisher ausschließlich bei dieser Konfiguration aktiviert wurde, bildet die Regelung der Rechtsabstützung die größte Herausforderung. Es werden deshalb einige weitere Simulationen in dieser Konfiguration durchgeführt. Die Ergebnisse für die Rechtsabstützung auf weichem Boden sind Abbildung 4.7 zu sehen. Grundsätzliche unterscheiden sich die Ergebnisse der Positions- und Orientierungsregelung kaum von den vorhergehenden Simulationen. Einzig bei der Kraftregelung treten Abweichungen zum bisher gesehenen auf. P_f kann in diesem Fall das Toleranzband nicht erreichen. Der Kraftregler wird deshalb nach der Laufzeit $t_{f,\max} = 5\text{ s}$ deaktiviert. Bei der Vollabstützung auf weichem Boden zeigen sich ähnliche Ergebnisse, nur bei der Frontabstützung auf weichem Boden wurde der Kraftregler erneut nicht aktiviert. Diese beiden Simulationen sind hier nicht dargestellt, da sie kaum Neues zeigen.

Bisher hat sich gezeigt, dass die Kombination aus Fehlerregelung und Vorsteuerung zu ausgeglichenen Stützkräften führt, weswegen der Kraftregler kaum oder gar nicht aktiv war. Wie sich in Abbildung 3.5 gezeigt hat, besteht eine Korrelation zwischen P_f und der Konfiguration bzw. der Position des Masts. Deshalb wird nun folgendes Szenario betrachtet: Die Maschine befindet sich im Endzustand der letzten Simulation ($t = 35\text{ s}$). Nun wird der Regelkreis deaktiviert und der Mast (manuell) vollständig ausgefahren und $\psi_{z,M} = 90^\circ$ eingestellt. Dabei bleibt $\psi_{y,M}$ unverändert bei $\psi_{y,M} = 0^\circ$. Dieser Zustand bildet den Ausgangspunkt der nächsten Simulation. Der Regelkreis wird bei $t = 0\text{ s}$ aktiviert, d. h. zuerst operiert der Positions- und Orientierungsregler (Fehlerregelung und Vorsteuerung). Sind die entsprechenden Toleranzen erfüllt, wird schließlich auch der Kraftregler zugeschaltet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.8 zu sehen. Man erkennt, dass das Ausfahren des Masts vor allem die Orientierung des Fahrzeugs verändert hat. Der Regelkreis bringt diese innerhalb des Toleranzbandes. Darauf folgend wird der Kraftregler aktiv. Die Zylindergeschwindigkeiten zwischen $t \approx 0.5\text{ s}$ und $t \approx 0.8\text{ s}$ werden großteils vom Kraftregler verursacht. Wegen $\mathbf{v}_o[k] = \mathbf{h}_o u_o[k]$, ist dies durch Vergleichen der Zylindergeschwindigkeiten mit dem Vektor \mathbf{h}_o aus (B.8f) zu erkennen. Der Kraftregler bringt die relative Abweichung $(P_f - P_{f,d})/P_{f,d}$ von anfänglich ca. 3.5 % in das Toleranzband von 0.1 %. Die Größe P_f sinkt weiter, nachdem der Kraftregler deaktiviert wurde. Dies ist zufällig und wird durch den Orientierungsregler hervorgerufen. Die Positions- und Orientierungsregelung ist somit nicht vollständig von der Kraftregelung entkoppelt, allerdings ist die gegenseitige Beeinflussung sehr gering. Aus den Abbildungen ist auch zu erkennen, dass der Positions- und Orientierungsregler in der Lage ist die gewünschten Werte ohne Abweichung einzustellen. Der Orientierungsregler ist dabei langsamer dimensioniert als der Positionsregler. Es hat sich in Simulationen gezeigt, dass das Rauschen der Positionsmessung weniger störend als das Rauschen der Winkelmessung ist.

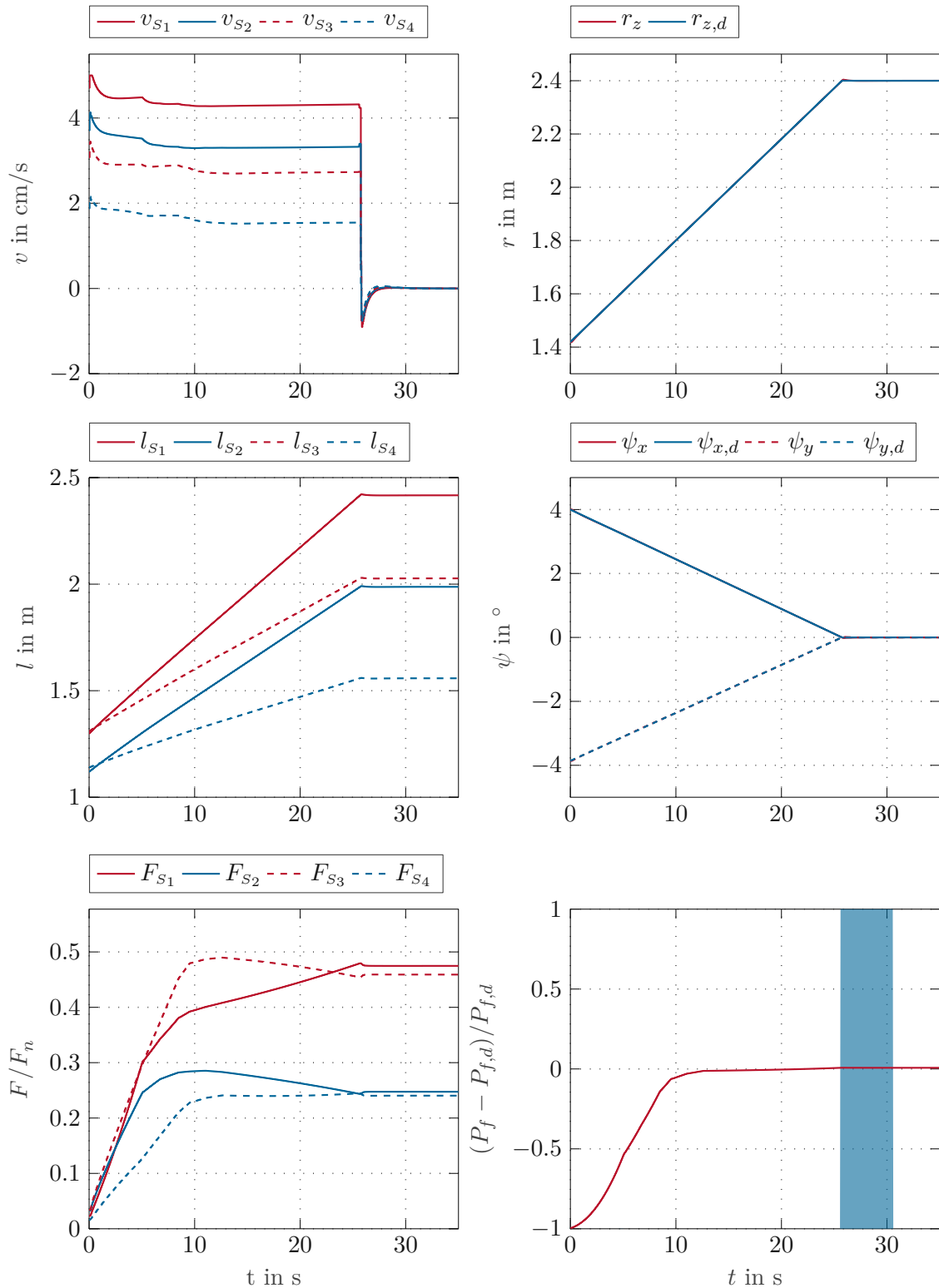


Abbildung 4.7: Verhalten des Regelkreises bei Rechtsabstützung und weichem Untergrund. Hier gilt $r_{z,\infty} = 2.4$ m, $\psi_{x,\infty} = 0^\circ$, $\psi_{y,\infty} = 0^\circ$ und $P_{f,d} = 19.556$ GN².

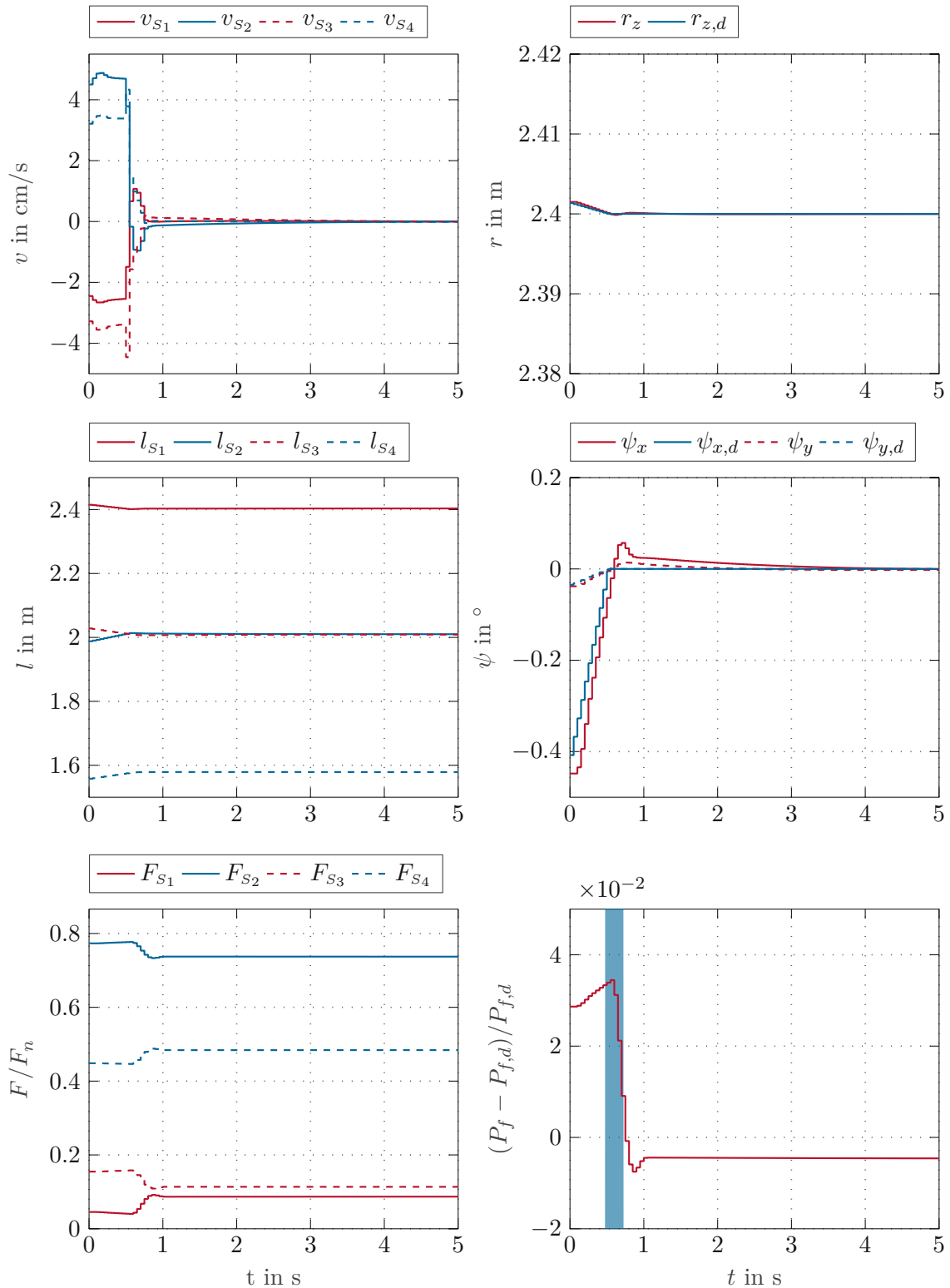


Abbildung 4.8: Verhalten des Regelkreises bei Rechtsabstützung, weichem Untergrund und ausgefahrenem Mast. Hier gilt $r_{z,\infty} = 2.4$ m, $\psi_{x,\infty} = 0^\circ$, $\psi_{y,\infty} = 0^\circ$ und $P_{f,d} = 24.059$ GN².

Aus den letzten Simulation geht noch nicht hervor wie der Regler auf große Abweichungen zwischen P_f und $P_{f,d}$ reagiert. Dazu wird $P_{f,d}$ in den zwei folgenden Simulationen durch $0.5P_{f,d}$ und $1.5P_{f,d}$ ersetzt. Abweichungen von $P_{f,d}$ zum tatsächlichen Minimum von P_f können z. B. durch eine falsch geschätzte Fahrzeugmasse bzw. Massenverteilung auftreten. Diese Abweichungen liegen allerdings im Bereich von $\pm 10\%$, womit die folgenden Simulationen Extremfälle darstellen. Da ein größeres $P_{f,d}$ als das Minimum von P_f erreicht werden kann (dies entspricht einer schlechten Aufteilung der Stützkräfte), bildet vor allem ein kleineres $P_{f,d}$ ein Problem, welches zu Oszillationen führen könnte. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.9 und Abbildung 4.10 dargestellt. Wie in Abbildung 4.9 zu sehen ist, liefert ein kleineres $P_{f,d}$ qualitativ dieselben Ergebnisse wie nominales $P_{f,d}$ (vgl. Abbildung 4.7). Dies liegt daran, dass u_o in der Nähe von $d_f = 0$ stärker beschränkt wird. Bei einer großen Differenz $P_f - P_{f,d}$ geht u_o in Beschränkung und verursacht damit nur geringe Oszillationen. Ein größeres $P_{f,d}$ (Abbildung 4.10) hingegen liefert, wie zu erwarten, eine schlechtere Aufteilung der Stützkräfte. Hier ist nochmals deutlicher zu sehen, dass selbst sehr große Änderungen der Stützkräften mit sehr geringen Änderungen der Zylinderpositionen korrespondieren. Aus den beiden Simulationen kann geschlossen werden, dass es günstiger ist das tatsächliche Minimum von P_f zu unterschätzen.

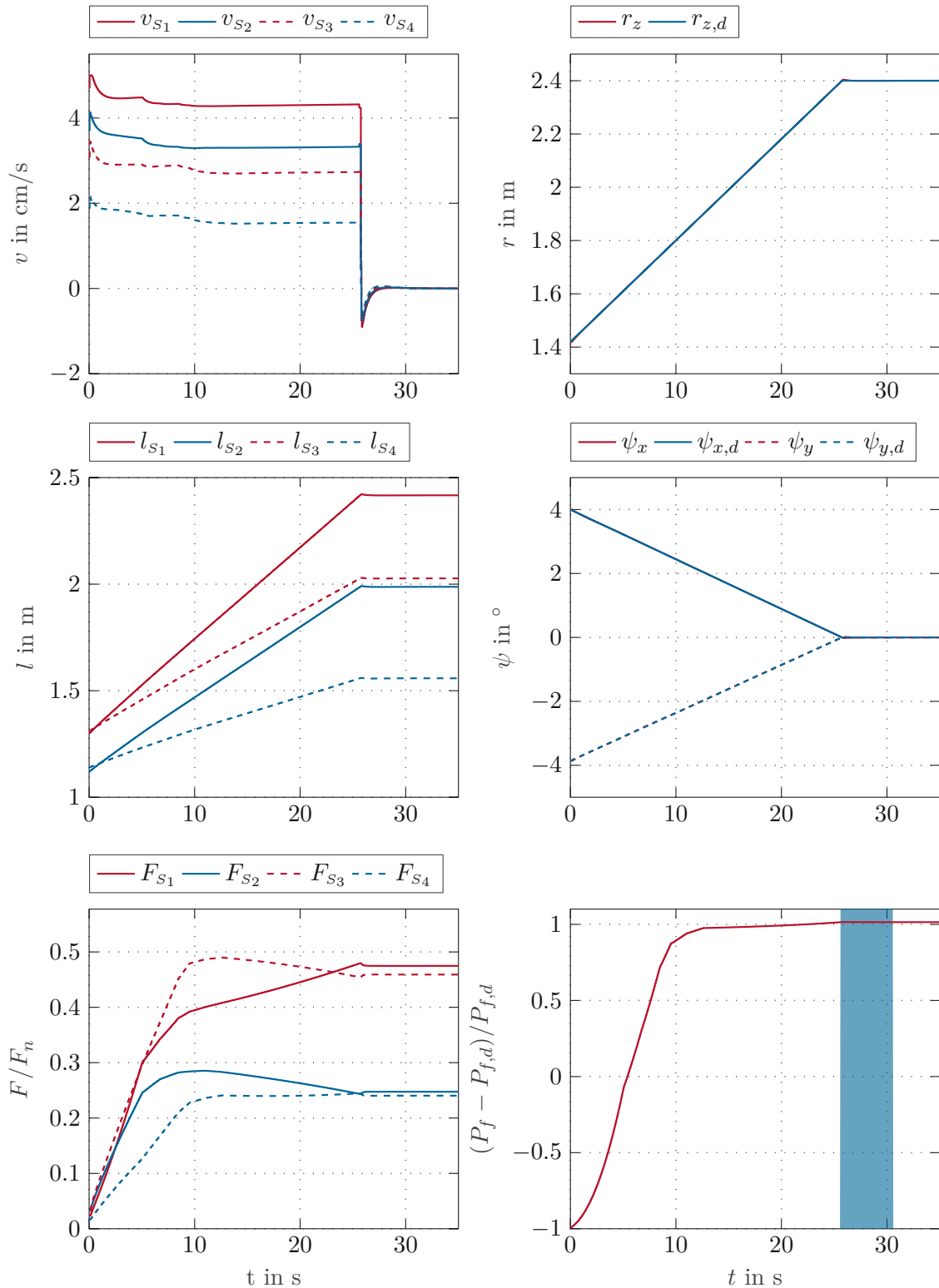


Abbildung 4.9: Verhalten des Regelkreises bei Rechtsabstützung und weichem Untergrund, mit 50% des nominalen $P_{f,d}$ -Werts. Hier gilt $r_{z,\infty} = 2.4$ m, $\psi_{x,\infty} = 0^\circ$, $\psi_{y,\infty} = 0^\circ$ und $P_{f,d} = 9.778$ GN².

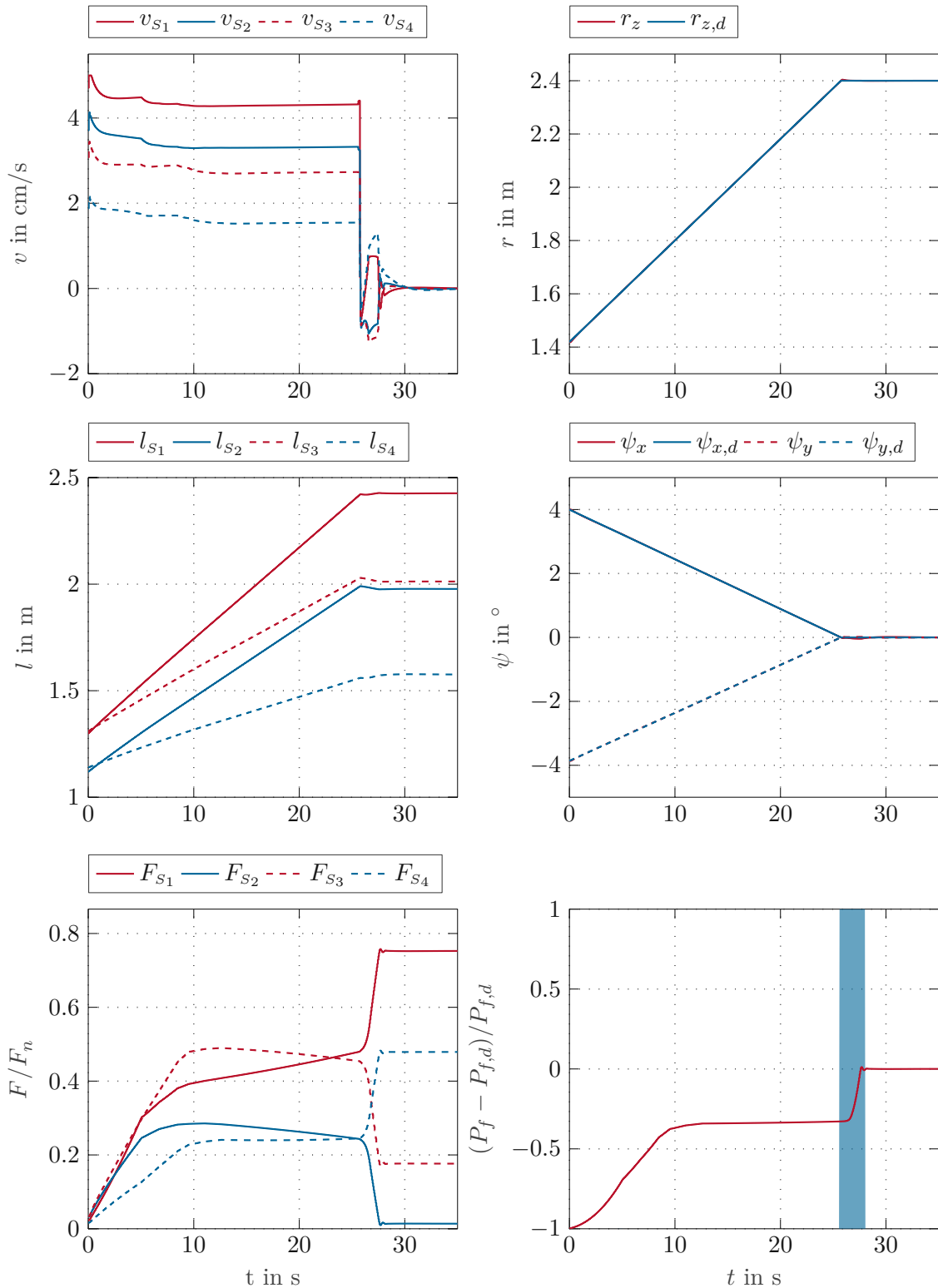


Abbildung 4.10: Verhalten des Regelkreises bei Rechtsabstützung und weichem Untergrund, mit 150% des nominalen $P_{f,d}$ -Werts. Hier gilt $r_{z,\infty} = 2.4$ m, $\psi_{x,\infty} = 0^\circ$, $\psi_{y,\infty} = 0^\circ$ und $P_{f,d} = 29.334$ GN².

Die bisherigen Simulationen zeigen, dass die Kombination von Vorsteuerung und Fehlerregelung auch ohne den Kraftregler (zumindest bei eingefahrenem Mast) zu sehr ausgeglichenen Stützkräften führt. Im Folgenden wird ein Szenario gezeigt, in dem das nicht zutrifft. Wird die Maschine wie in Abbildung 4.5 (Rechtsabstützung, harter Boden, schiefe Ebene) abgestützt, der Boden unter der hinteren rechten Stütze allerdings weicher gemacht, ändern sich die Ergebnisse leicht. Die Simulation ist in Abbildung 4.11 dargestellt. Zu sehen ist eine anfänglich größere Spreizung der Stützkräfte als in Abbildung 4.5. Zum Zeitpunkt, an dem die Position und die Orientierung des Toleranzband erreichen, weist P_f eine relative Abweichung von etwa 3% auf, welche der Kraftregler nachfolgend erfolgreich reduziert. Die Kraftregelung wird gestoppt, sobald d_f zum dritten mal sein Vorzeichen wechselt. Damit ist gezeigt, dass es auch Szenarien gibt in denen die Positions- und Orientierungsregelung alleine nicht zu einem Fehler in P_f im Promillebereich führt.

Dass sich eine schlechte Aufteilung der Stützkräfte durch nicht optimale Regelung der Zylindergeschwindigkeiten einstellt, zeigt folgende Simulation. Die Maschine befindet sich hier wieder in der Rechtsabstützung auf weichem Untergrund und schiefer Ebene. Allerdings wurde hier die Vorsteuerungsgeschwindigkeit $v_{vst} = 4.8 \text{ cm/s}$ (Erhöhung um 0.5 cm/s) verwendet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.12 dargestellt. Die Zylindergeschwindigkeit v_{s_1} bleibt deutlich länger in der Stellgrößenbeschränkung, was dazu führt, dass die Stütze 2 sehr lange schwach belastet bleibt. Dies hat zur Folge, dass zum Zeitpunkt an dem die Position und die Orientierung des Toleranzband erreichen, eine relative Abweichung zwischen P_f und $P_{f,d}$ von etwa 15% auftritt. Die Zeit, die in Summe benötigt wird, um alle Größen in ihre Toleranzbänder zu bringen, hat sich allerdings verkleinert. Wird die Vorsteuerungsgeschwindigkeit noch weiter erhöht, kann es passieren, dass einzelne Stützen während des Regelungsvorgangs den Bodenkontakt verlieren, was unerwünscht ist.

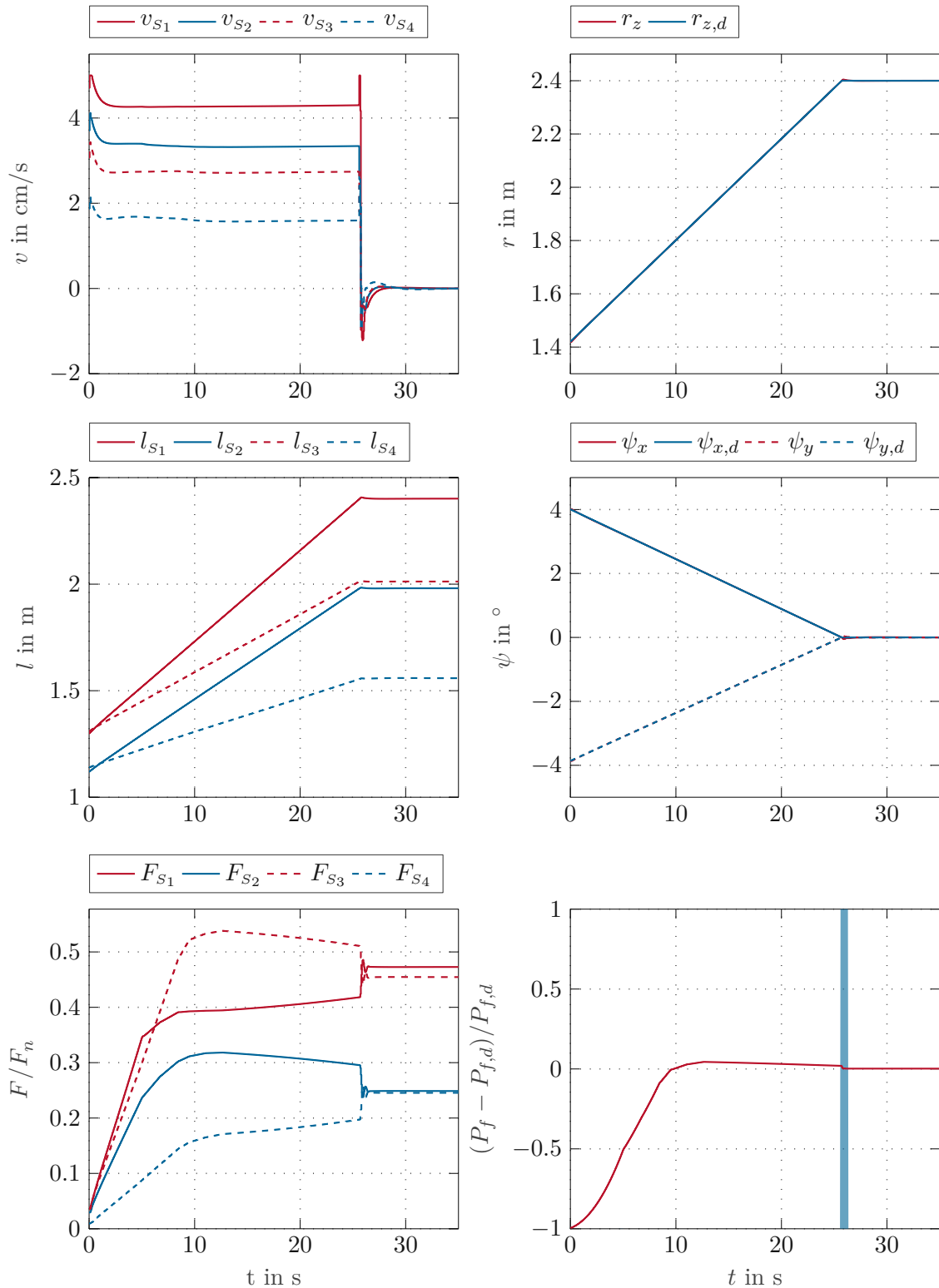


Abbildung 4.11: Verhalten des Regelkreises bei Gelände mit unterschiedlicher Nachgiebigkeit. Hier gilt $r_{z,\infty} = 2.4$ m, $\psi_{x,\infty} = 0^\circ$, $\psi_{y,\infty} = 0^\circ$ und $P_{f,d} = 19.556$ GN².

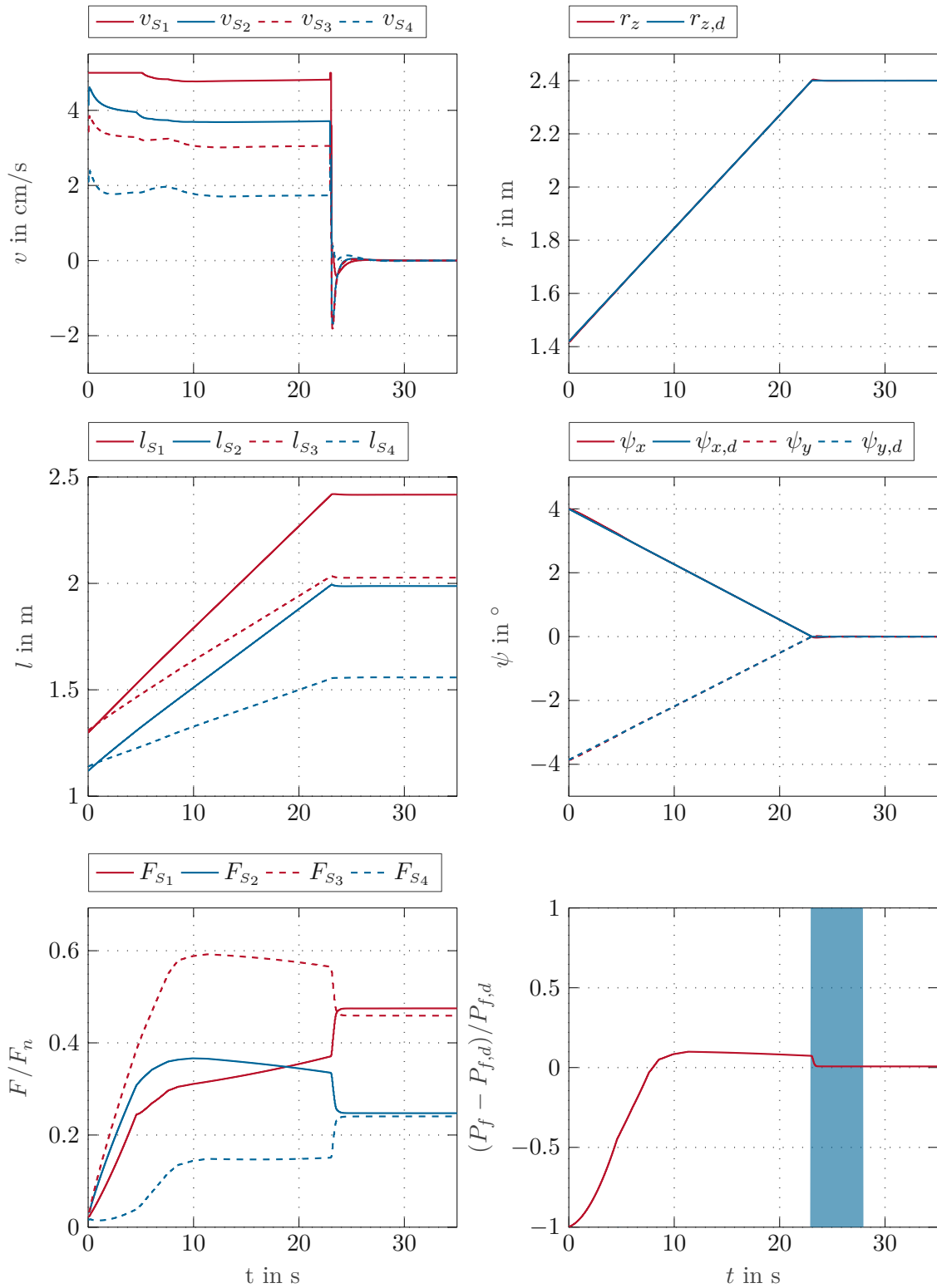


Abbildung 4.12: Verhalten des Regelkreises bei $v_{vst} = 4.8$ cm/s. Hier gilt $r_{z,\infty} = 2.4$ m, $\psi_{x,\infty} = 0^\circ$, $\psi_{y,\infty} = 0^\circ$ und $P_{f,d} = 19.556$ GN².

In der letzten Simulation wird das Messrauschen berücksichtigt. Das Gelände ist nun uneben und leicht geneigt. Weiters ist der Untergrund weich, da sich hier größere Herausforderungen bei der Kraftregelung gezeigt haben. Der gewünschte P_f -Wert wird auf 95 % des nominalen Werts gesetzt und die Auskragungslängen werden unsymmetrisch gewählt. Die verwendeten Zahlenwerte der z -Positionen des Geländes und der Auskragungslängen sind in Tabelle 4.1 zu finden. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.13 dargestellt. Es ist

r_{z,BS_1}	r_{z,BS_2}	r_{z,BS_3}	r_{z,BS_4}	r_{z,BR_1}	r_{z,BR_2}	r_{z,BR_3}	r_{z,BR_4}
0.00 m	0.30 m	-0.20 m	-0.30 m	0.00 m	-0.30 m	-0.30 m	0.05 m
r_{z,BR_5}	r_{z,BR_6}	l_{K_1}	l_{K_2}	l_{K_3}	l_{K_4}		
0.10 m	-0.40 m	0.4 m	2.3 m	1.6 m	0.5 m		

Tabelle 4.1: Gelände und Auskragungslängen zu Abbildung 4.13.

zu sehen, dass besonders die Winkelmessungen maßgeblich verrauscht sind. Das spiegelt sich in den Zylindergeschwindigkeiten wider. Durch die Integration der Zylindergeschwindigkeiten breitet sich das Rauschen allerdings kaum auf die Stützlängen aus. Auch die Kraftmessung ist aufgrund der relativ kleinen Standardabweichung σ_f wenig verrauscht, was den Kraftregler kaum beeinflusst. Der Regelkreis ist somit auch robust in Bezug auf Messrauschen.

An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass nach dem Abschluss der obigen Simulationen ein weiteres Kraftregelgesetz getestet wurde. Es hat sich gezeigt, dass das etwas einfachere Kraftregelgesetz $u_o[k] = -\lambda_f d_f[k]$, $\lambda_f = 5 \cdot 10^{-7}$ zu ähnlichen Ergebnissen führt. Bei der Verwendung dieses Gesetzes wird d_f selbst zu Null geregelt. Dies ist sinnvoll, da $d_f = 0$ und $P_f = P_{f,d}$ nach (4.29) gemeinsam auftreten.

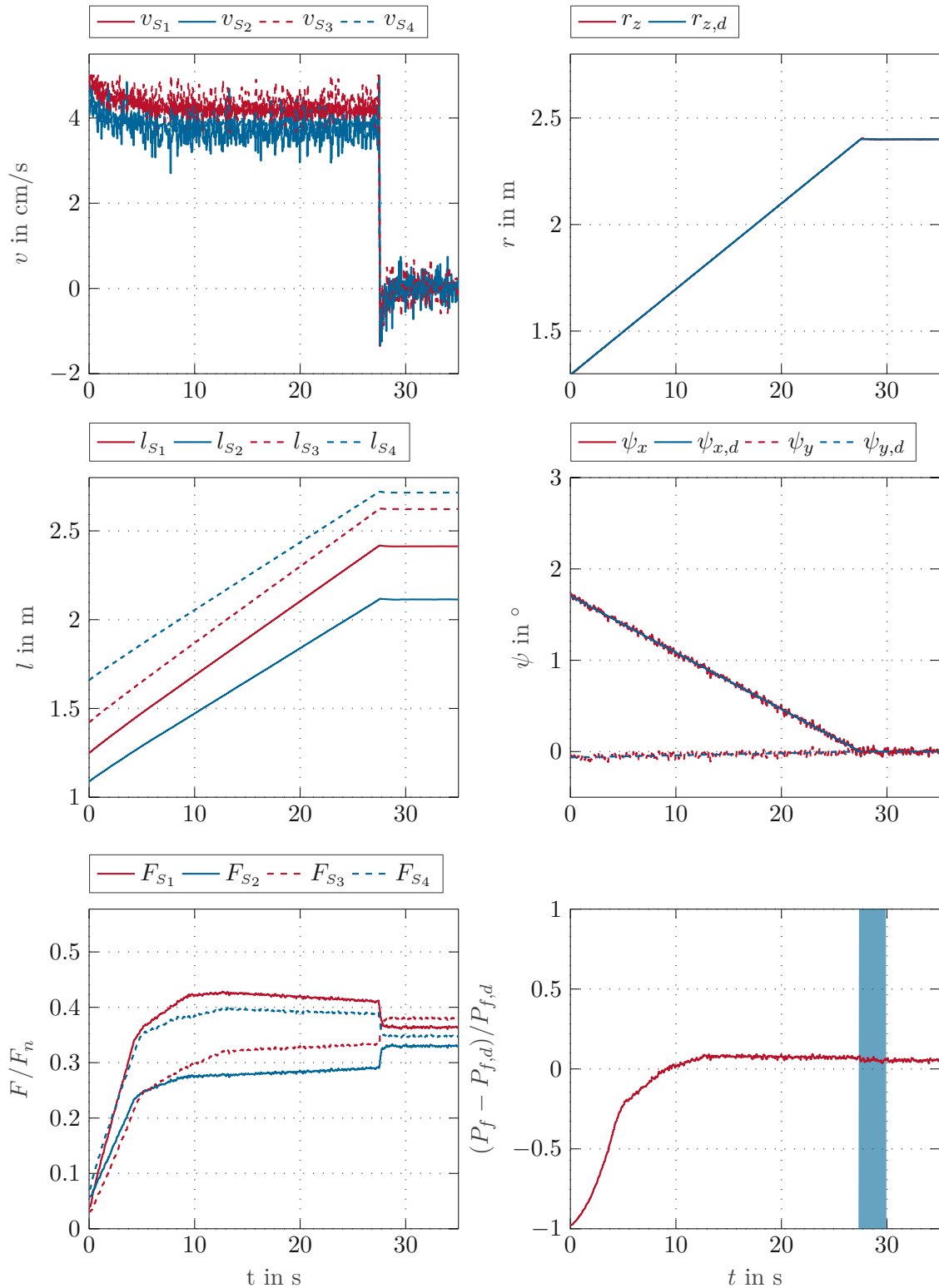


Abbildung 4.13: Verhalten des Regelkreises unter dem Einfluss von Messrauschen. Hier gilt $r_{z,\infty} = 2.4$ m, $\psi_{x,\infty} = 0^\circ$, $\psi_{y,\infty} = 0^\circ$ und $P_{f,d} = 18.578$ GN².

4.7 Schlussfolgerung

Die im letzten Abschnitt präsentierten Ergebnisse zeigen, dass der Regler die zu Beginn gestellten Anforderungen erfüllt. Verlangt wurde die Automatisierung des Abstützvorgangs mit dem Hauptaugenmerk auf Zeiteffizienz und Standfestigkeit. Es hat sich gezeigt, dass die Kombination aus Fehlerregelung und Vorsteuerung dazu führt, dass sich die Stützkräfte in sehr vielen Fällen gut auf die Stützen aufteilen. Meist ist die Abweichung von P_f zum Minimum kleiner als ein Prozent. Es wurden sogar Fälle gezeigt, in denen die Abweichung unter einem Promille lagen und der Kraftregler somit gar nicht aktiviert wurde. Steht jedoch das Fahrzeug auf einer schiefen Ebene mit unterschiedlich nachgiebigem Untergrund, so kann es zu Abweichungen von einigen Prozent kommen. Wird die Vorsteuerungsgeschwindigkeit erhöht, treten sogar Abweichungen von bis zu 15% auf. Dies legt nahe den Kraftregler einzusetzen. Wie Abbildung 3.6 zeigt, ist eine Minimierung von P_f bei ausgefahrenem Mast besonders sinnvoll. Wenn der Kraftregler erst aktiviert würde, sobald der Mast in seiner Arbeitskonfiguration ist, könnte Zeit während des Abstützvorgangs eingespart werden.

Bei der Wahl von $P_{f,d}$ hat sich gezeigt, dass Werte größer als das Minimum von P_f zu einer schlechteren Aufteilung der Stützkräfte führen. Kleinere Werte haben hingegen keine negativen Effekte. Es empfiehlt sich deshalb bei ungenau bekannten Parametern kleinere Werte für $P_{f,d}$ zu wählen.

Insgesamt liefert der Regelkreis gute Ergebnisse. Besonders die Regelung von Position und Orientierung bedeutet im Vergleich zum manuellen Abstützvorgang eine deutliche Zeitersparnis.

5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein Regelungskonzept zur optimalen Abstützung einer Autobetonpumpe entwickelt. Das Hauptaugenmerk lag darauf eine möglichst zeiteffiziente und stabile Abstützung zu realisieren. Um dieses Ziel zu erreichen wurde zunächst ein elastisches Modell des Fahrzeugs entwickelt. Dabei wurden steife Teile der Maschine durch Starrkörper und nachgiebige Teile als Euler-Bernoulli Balken modelliert. Diese Methode wurde gewählt, um ein niedrig-dimensionales und somit recheneffizientes Modell zu erhalten. Anschließend wurde gezeigt, dass das erarbeitete Modell die für diese Arbeit wichtigen Szenarien sinnvoll abbilden kann. Von Interesse sind vor allem der Abstützvorgang von der Parkposition zur abgestützten Arbeitsposition und Torsionen innerhalb des Fahrzeugrahmens, sowie die Simulation verschiedener Abstützkonfigurationen und Geländebeschaffenheiten.

Auf Basis des Modells wurde mithilfe von Simulationen untersucht, wie die Standfestigkeit des Fahrzeugs beeinflusst werden kann. Hier hat sich herausgestellt, dass das Fahrzeug wie auch schon in [3] vorgeschlagen besonders stabil steht, wenn die Stützkkräfte balanciert werden. Der größte Effekt hat sich hierbei bei ausgefahrenem Mast gezeigt.

Auf Basis dieser Analysen wurde ein Regelungskonzept entwickelt, welches den Abstützvorgang zeiteffizient durchführt und dabei eine Balancierung der Stützkkräfte erreicht. Die Grundlage für den Reglerentwurf war ein einfaches Starrkörpermodell. Durch Simulationen wurde gezeigt, dass der Regler eine sehr gute Performance und Robustheit gegenüber Messrauschen aufweist. Außerdem konnte gezeigt werden, dass waagerechtes Abstützen der Maschine wie es manuell durch einen Bediener gemacht wird nicht notwendigerweise zu balancierten Stützkraften und somit hinreichender Standfestigkeit führt. Es hat sich herausgestellt, dass kleine Änderungen in den Stützzyylinderpositionen aufgrund der hohen Fahrzeugsteifigkeit zu großen Änderungen der Stützkkräfte führen können. Es wurde anhand von zwei Abstützszenarien gezeigt, dass mit dem vorgeschlagen Kraftregler die gewünschte Balancierung der Stützkkräfte auch in schwierigen Abstützkonfigurationen erreicht werden kann.

A Steifigkeitsmatrix für ein Euler-Bernoulli Balkenelement mit sechs Freiheitsgraden

Es wird angenommen, dass die Verschiebungen entlang der Balkenachse x folgende Form annehmen [7]

$$\begin{aligned}\check{u}_x &= u_x + z\beta_y - y\beta_z, \\ \check{u}_y &= u_y - z\beta_x, \\ \check{u}_z &= u_z + y\beta_x.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Dabei sind $\check{u}_x = \check{u}_x(x, y, z)$, $\check{u}_y = \check{u}_y(x, y, z)$ und $\check{u}_z = \check{u}_z(x, y, z)$ die Verschiebungen in x -, y - und z -Richtung. Die Größen u_x , u_y und u_z entsprechen translatorischen Verschiebungen in x -, y - und z -Richtung. Die Terme $z\beta_y$, $y\beta_z$, $z\beta_x$ und $y\beta_x$ sind Verschiebungen zufolge einer Drehung des Balkenquerschnitts, mit den Drehwinkeln β_x , β_y und β_z um die x -, y - und z -Achse. Des Weiteren wird bei der Euler-Bernoulli Theorie angenommen, dass folgende Zusammenhänge gelten [13]

$$u'_y = \beta_z \tag{A.2a}$$

$$u'_z = -\beta_y. \tag{A.2b}$$

Dabei bezeichnet u' die Ableitung der Größe u nach der Ortskoordinate x , d. h. $u' = \frac{\partial u(x)}{\partial x}$. Die Annahmen (A.2) sind besonders gut für schlanke Balken oder bei geringen Verzerrungen erfüllt.

Die Komponenten des infinitesimalen Verzerrungstensors [11] lassen sich wie folgt berechnen

$$\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \check{u}_a}{\partial b} + \frac{\partial \check{u}_b}{\partial a} \right), \text{ mit } a, b \in \{x, y, z\}. \tag{A.3}$$

Daraus ergibt sich

$$\varepsilon_{xx} = u'_x + z\beta'_y - y\beta'_z \tag{A.4a}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}(u'_y - \beta_z - z\beta'_x) = -\frac{z\beta'_x}{2} \tag{A.4b}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}(u'_z + \beta_y + y\beta'_x) = \frac{y\beta'_x}{2} \tag{A.4c}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0. \tag{A.4d}$$

Mit dem Elastizitätsmodul E und dem Schubmodul G folgt aus dem Hookschen Gesetz [7]

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \tag{A.5a}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2G\varepsilon_{xy} \quad (\text{A.5b})$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2G\varepsilon_{xz} \quad (\text{A.5c})$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0. \quad (\text{A.5d})$$

Unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention lässt sich die Verzerrungsenergie wie folgt anschreiben

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_{ab} \sigma_{ab} d\mathcal{V}. \quad (\text{A.6})$$

Die Variation der Verzerrungsenergie lautet dann

$$\delta\Pi = \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ab} \delta\varepsilon_{ab} d\mathcal{V}. \quad (\text{A.7})$$

Einsetzen von (A.4) und (A.5) liefert

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_{\mathcal{V}} (\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \delta\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz} \delta\varepsilon_{xz}) d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left(\sigma_{xx} (\delta u'_x + z \delta \beta'_y - y \delta \beta'_z) - \sigma_{xy} (z \delta \beta'_x) + \sigma_{xz} (y \delta \beta'_x) \right) d\mathcal{V} \\ &= \int_0^l \left(N \delta u'_x + M_y \delta \beta'_y + M_z \delta \beta'_z + M_x \delta \beta'_x \right) dx. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

mit

$$N = \int_{\mathcal{A}} \sigma_{xx} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} E (u'_x + z \beta'_y - y \beta'_z) d\mathcal{A} = E (A u'_x + A_{yy} \beta'_y - A_3 \beta'_z) \quad (\text{A.9a})$$

$$M_y = \int_{\mathcal{A}} z \sigma_{xx} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} E z (u'_x + z \beta'_y - y \beta'_z) d\mathcal{A} = E (A_{yy} u'_x + I_{yy} \beta'_y + I_{yz} \beta'_z) \quad (\text{A.9b})$$

$$M_z = - \int_{\mathcal{A}} y \sigma_{xx} d\mathcal{A} = - \int_{\mathcal{A}} E y (u'_x + z \beta'_y - y \beta'_z) d\mathcal{A} = -E (A_{zz} u'_x - I_{yz} \beta'_y - I_{zz} \beta'_z) \quad (\text{A.9c})$$

$$M_x = \int_{\mathcal{A}} y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} \left(G (y^2 + z^2) \beta'_x \right) d\mathcal{A} = G (I_{zz} + I_{yy}) \beta'_x \quad (\text{A.9d})$$

und

$$A = \int_{\mathcal{A}} d\mathcal{A} \quad (\text{A.10a})$$

$$A_{zz} = \int_{\mathcal{A}} y d\mathcal{A} \quad (\text{A.10b})$$

$$A_{yy} = \int_{\mathcal{A}} z d\mathcal{A} \quad (\text{A.10c})$$

$$I_{zz} = \int_{\mathcal{A}} y^2 d\mathcal{A} \quad (\text{A.10d})$$

$$I_{yy} = \int_{\mathcal{A}} z^2 d\mathcal{A} \quad (\text{A.10e})$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \int_{\mathcal{A}} y z d\mathcal{A}. \quad (\text{A.10f})$$

Dabei bezeichnet N die Normalkraft (x -Richtung), M_x das Torsionsmoment um die x -Achse, M_y das Biegemoment um die y - und M_z das Biegemoment um die z -Achse. Die Größe A entspricht der Querschnittfläche des Balkens, A_{yy} bzw. A_{zz} ist das Flächenmoment erster Ordnung um die y -Achse bzw. z -Achse, I_{yy} bzw. I_{zz} ist das Flächenträgheitsmoment zweiter Ordnung um die y -Achse bzw. z -Achse und I_{yz} bzw. I_{zy} ist das biaxiale Flächenträgheitsmoment [13].

Im Weiteren wird angenommen, dass die Flächenmomente erster Ordnung und das biaxiale Flächenträgheitsmoment verschwinden. Dies ist für symmetrische Querschnitte gerechtfertigt [7]. Einsetzen der Normalkraft N und der Momente M_x , M_y und M_z in (A.8) resultiert in

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \int_0^l \left(E(Au'_x \delta u'_x + I_{yy} \beta'_y \delta \beta'_y + I_{zz} \beta'_z \delta \beta'_z) + G(I_{zz} + I_{yy}) \beta'_x \delta \beta'_x \right) dx \\ &= \int_0^l \left(E(Au'_x \delta u'_x + I_{yy} u''_z \delta u''_z + I_{zz} u''_y \delta u''_y) + G(I_{zz} + I_{yy}) \beta'_x \delta \beta'_x \right) dx.\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

Mit den Kraftbelägen F'_x , F'_y und F'_z in x -, y , und z -Richtung, sowie den Momentenbelägen M'_x , M'_y und M'_z um die x -, y , und z -Achse lässt sich die Variation der externen Arbeit, wie folgt anschreiben [7]

$$\delta W_{\text{ex}} = \int_0^l \left(F'_x \delta u_x + F'_y \delta u_y + F'_z \delta u_z + M'_x \delta \beta_x + M'_y \delta \beta_y + M'_z \delta \beta_z \right) dx \quad (\text{A.12})$$

Damit ergibt sich die Variation der Gesamtenergie zu

$$\delta W = \delta\Pi - \delta W_{\text{ex}} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Nach partieller Integration von (A.13) und Anwendung des Fundamentalsatzes der Variationsrechnung erhält man die Gleichungen des Euler-Bernoulli-Balkens [13]

$$(EAu'_x)' = -F'_x \quad (\text{A.14a})$$

$$(G(I_{zz} + I_{yy})\beta'_x)' = -M'_x \quad (\text{A.14b})$$

$$(EI_{zz}u''_y)'' = M'_y + M''_z \quad (\text{A.14c})$$

$$(EI_{yy}u''_z)'' = M'_z - M''_y. \quad (\text{A.14d})$$

Gleichung (A.13) bildet den Ausgangspunkt zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix. Dazu müssen vorerst Ansatz- oder sogenannte Interpolationsfunktionen (engl. Shape Functions) definiert werden.

Als Interpolationsfunktionen werden Polynome gewählt

$$u_x(x) = c_1 + c_2 x, \quad (\text{A.15a})$$

$$\beta_x(x) = c_3 + c_4 x, \quad (\text{A.15b})$$

$$u_y(x) = c_5 + c_6 x + c_7 x^2 + c_8 x^3, \quad (\text{A.15c})$$

$$u_z(x) = c_9 + c_{10} x + c_{11} x^2 + c_{12} x^3. \quad (\text{A.15d})$$

Die Wahl der Polynome ist darin begründet, dass sie die homogenen Euler-Bernoulli Balkengleichungen (A.14) für von x unabhängige Hilfsgrößen (A.10) erfüllen. Mit den Randbedingungen

$$u_x(0) = u_{x,0} \quad (\text{A.16a})$$

$$u_x(l) = u_{x,l} \quad (\text{A.16b})$$

$$\beta_x(0) = \beta_{x,0} \quad (\text{A.16c})$$

$$\beta_x(l) = \beta_{x,l} \quad (\text{A.16d})$$

$$u_y(0) = u_{y,0} \quad (\text{A.16e})$$

$$u_y(l) = u_{y,l} \quad (\text{A.16f})$$

$$u'_y(0) = \beta_{z,0} \quad (\text{A.16g})$$

$$u'_y(l) = \beta_{z,l} \quad (\text{A.16h})$$

$$u_z(0) = u_{z,0} \quad (\text{A.16i})$$

$$u_z(l) = u_{z,l} \quad (\text{A.16j})$$

$$u'_z(0) = -\beta_{y,0} \quad (\text{A.16k})$$

$$u'_z(l) = -\beta_{y,l} \quad (\text{A.16l})$$

lassen sich die Koeffizienten $c_i, i = 1, \dots, 12$ berechnen. Die Verschiebungen lassen sich in Vektornotation darstellen

$$u_x(x) = \mathbf{N}_{u_x} \mathbf{u}_x \quad (\text{A.17a})$$

$$\beta_x(x) = \mathbf{N}_{\beta_x} \boldsymbol{\beta}_x \quad (\text{A.17b})$$

$$u_y(x) = \mathbf{N}_{u_y} \mathbf{u}_y \quad (\text{A.17c})$$

$$u_z(x) = \mathbf{N}_{u_z} \mathbf{u}_z \quad (\text{A.17d})$$

mit

$$\mathbf{N}_{u_x} = \mathbf{N}_{\beta_x} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18a})$$

$$\mathbf{N}_{u_y} = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} & x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} & -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18b})$$

$$\mathbf{N}_{u_z} = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} & -x + 2\frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} & 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} & \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18c})$$

und

$$\mathbf{u}_x = \begin{bmatrix} u_{x,0} & u_{x,l} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.19a})$$

$$\boldsymbol{\beta}_x = \begin{bmatrix} \beta_{x,0} & \beta_{x,l} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.19b})$$

$$\mathbf{u}_y = \begin{bmatrix} u_{y,0} & \beta_{z,0} & u_{y,l} & \beta_{z,l} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.19c})$$

$$\mathbf{u}_z = \begin{bmatrix} u_{z,0} & \beta_{y,0} & u_{z,l} & \beta_{y,l} \end{bmatrix}^T. \quad (\text{A.19d})$$

Mit $u_a(x) = \mathbf{N}_{u_a}(x) \mathbf{u}_a$ gelten folgende Beziehungen

$$u'_a = (\mathbf{N}_{u_a} \mathbf{u}_a)' = \mathbf{N}'_{u_a} \mathbf{u}_a \quad (\text{A.20})$$

und

$$\delta(u_a)' = \delta(\mathbf{N}_{u_a} \mathbf{u}_a)' = \mathbf{N}'_{u_a} \delta \mathbf{u}_a. \quad (\text{A.21})$$

Setzt man (A.17) in (A.13) unter Zuhilfenahme von (A.20) und (A.21) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^l \left(EA \mathbf{u}_x^T (\mathbf{N}'_{u_x})^T \mathbf{N}'_{u_x} \delta \mathbf{u}_x + EI_{zz} \mathbf{u}_y^T (\mathbf{N}''_{u_y})^T \mathbf{N}''_{u_y} \delta \mathbf{u}_y \right. \\ &\quad \left. + EI_{yy} \mathbf{u}_z^T (\mathbf{N}''_{u_z})^T \mathbf{N}''_{u_z} \delta \mathbf{u}_z + G(I_{zz} + I_{yy}) \boldsymbol{\beta}_x^T (\mathbf{N}'_{\beta_x})^T \mathbf{N}'_{\beta_x} \delta \boldsymbol{\beta}_x \right) dx \\ &\quad - \int_0^l \left(F'_x \mathbf{N}_{u_x} \delta \mathbf{u}_x + F'_y \mathbf{N}_{u_y} \delta \mathbf{u}_y + F'_z \mathbf{N}_{u_z} \delta \mathbf{u}_z \right. \\ &\quad \left. + M'_x \mathbf{N}_{\beta_x} \delta \boldsymbol{\beta}_x + M'_y \mathbf{N}_{u_y} \delta \mathbf{u}_y + M'_z \mathbf{N}_{u_z} \delta \mathbf{u}_z \right) dx \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T \left(\int_0^l \hat{\mathbf{K}}' \hat{\mathbf{u}} dx + \int_0^l \mathbf{N} \begin{bmatrix} F'_x & F'_y & F'_z & M'_x & M'_y & M'_z \end{bmatrix}^T dx \right) \\ &= \delta \hat{\mathbf{u}}^T (\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{u}} - \hat{\boldsymbol{\tau}}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

mit

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_{x,0} & u_{y,0} & u_{z,0} & \beta_{x,0} & \beta_{y,0} & \beta_{z,0} & u_{x,l} & u_{y,l} & u_{z,l} & \beta_{x,l} & \beta_{y,l} & \beta_{z,l} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.23a})$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \int_0^l \hat{\mathbf{K}}'(x) dx = \int_0^l \hat{\mathbf{K}}' dx \quad (\text{A.23b})$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \int_0^l \mathbf{N} \begin{bmatrix} F'_x & F'_y & F'_z & M'_x & M'_y & M'_z \end{bmatrix}^T dx. \quad (\text{A.23c})$$

Der Vektor $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ wird in der Literatur als äquivalente Knotenkraft bezeichnet, da er die Kraft- und Momentenbeläge approximiert und sich gleich verhält, wie Kräfte welche an den Rändern wirken [8].

Die Elemente der Matrix $\hat{\mathbf{K}}'$ ergeben sich zu (nicht angeführte Elemente sind Null)

$$\hat{k}'_{1,1} = \hat{k}'_{7,7} = -\hat{k}'_{7,1} = -\hat{k}'_{1,7} = (A(x)/l)^2 \quad (\text{A.24a})$$

$$\hat{k}'_{2,2} = \hat{k}'_{8,8} = E(x)I_{zz}(x)h_1^2(x) \quad (\text{A.24b})$$

$$\hat{k}'_{2,6} = \hat{k}'_{6,2} = E(x)I_{zz}(x)h_1(x)h_2(x) \quad (\text{A.24c})$$

$$\hat{k}'_{2,8} = \hat{k}'_{8,2} = -E(x)I_{zz}(x)h_1(x)h_2(x) \quad (\text{A.24d})$$

$$\hat{k}'_{2,12} = \hat{k}'_{12,2} = E(x)I_{zz}(x)h_1(x)h_3(x) \quad (\text{A.24e})$$

$$\hat{k}'_{3,3} = E(x)I_{yy}(x)h_1^2(x) \quad (\text{A.24f})$$

$$\hat{k}'_{3,5} = \hat{k}'_{5,3} = -E(x)I_{yy}(x)h_1(x)h_2(x) \quad (\text{A.24g})$$

$$\hat{k}'_{3,9} = \hat{k}'_{9,3} = -E(x)I_{yy}(x)h_1^2(x) \quad (\text{A.24h})$$

$$\hat{k}'_{3,11} = \hat{k}'_{11,3} = -E(x)I_{yy}(x)h_1(x)h_3(x) \quad (\text{A.24i})$$

$$\hat{k}'_{4,4} = \hat{k}'_{10,10} = -\hat{k}'_{4,10} = -\hat{k}'_{10,4} = G(x)(I_{zz}(x) + I_{yy}(x))/l^2 \quad (\text{A.24j})$$

$$\hat{k}'_{5,5} = E(x)I_{yy}(x)h_2^2(x) \quad (\text{A.24k})$$

$$\hat{k}'_{5,9} = \hat{k}'_{9,5} = E(x)I_{yy}(x)h_1(x)h_2(x) \quad (\text{A.24l})$$

$$\hat{k}'_{5,11} = \hat{k}'_{11,5} = E(x)I_{yy}(x)h_2(x)h_3(x) \quad (\text{A.24m})$$

$$\hat{k}'_{6,6} = E(x)I_{zz}(x)h_2^2(x) \quad (\text{A.24n})$$

$$\hat{k}'_{6,8} = \hat{k}'_{8,6} = -E(x)I_{zz}(x)h_1(x)h_2(x) \quad (\text{A.24o})$$

$$\hat{k}'_{6,12} = \hat{k}'_{12,6} = E(x)I_{zz}(x)h_2(x)h_3(x) \quad (\text{A.24p})$$

$$\hat{k}'_{8,12} = \hat{k}'_{12,8} = -E(x)I_{zz}(x)h_1(x)h_3(x) \quad (\text{A.24q})$$

$$\hat{k}'_{9,9} = E(x)I_{yy}(x)h_1^2(x) \quad (\text{A.24r})$$

$$\hat{k}'_{9,11} = \hat{k}'_{11,9} = E(x)I_{yy}(x)h_1(x)h_3(x) \quad (\text{A.24s})$$

$$\hat{k}'_{11,11} = E(x)I_{yy}(x)h_3^2(x) \quad (\text{A.24t})$$

$$\hat{k}'_{12,12} = E(x)I_{zz}(x)h_3^2(x) \quad (\text{A.24u})$$

mit

$$h_1(x) = -\frac{6}{l^2} + 12\frac{x}{l^3} \quad (\text{A.25a})$$

$$h_2(x) = -\frac{4}{l} + 6\frac{x}{l^2} \quad (\text{A.25b})$$

$$h_3(x) = -\frac{2}{l} + 6\frac{x}{l^2}. \quad (\text{A.25c})$$

Im Hauptteil der Arbeit wurde angenommen, dass die Verschiebungen am negativen Rand ($x = 0$) des Balkens verschwinden, d. h. $u_x(0) = 0$, $u_y(0) = 0$, $u_z(0) = 0$, $\beta_x(0) = 0$, $\beta_y(0) = 0$, $\beta_z(0) = 0$. Durch diese Annahmen lässt sich die Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}'$ auf die Dimension 6×6 reduzieren. Man erhält somit die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}'_e , welche im Rest der Arbeit verwendet wird indem man nur das untere rechte Viertel von $\hat{\mathbf{K}}'$, d. h. $\hat{k}'_{i+6,j+6}$, $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ verwendet.

B Simulationsparameter

B.1 Modell

B.1.1 Steifigkeitsmatrizen

Boden weich:

$$\mathbf{k}_{BS_1, \dots, \mathbf{k}_{BS_4}} = 10^6 \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 5.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.1a})$$

Boden hart:

$$\mathbf{k}_{BS_1, \dots, \mathbf{k}_{BS_4}} = 10^6 \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 100.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.1b})$$

$$\mathbf{k}_{BR_1, \dots, \mathbf{k}_{BR_6}} = 10^6 \begin{bmatrix} 0.010 & 0.010 & 0.654 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.1c})$$

B.1.2 Rotationsmatrizen

$$\mathbf{R}_{G_1}^D = \mathbf{R}_{G_2}^D = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & -0.026 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.026 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2a})$$

$$\mathbf{R}_{K_1}^D = \begin{bmatrix} -0.574 & -0.819 & 0.000 \\ 0.819 & -0.574 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2b})$$

$$\mathbf{R}_{K_2}^D = \begin{bmatrix} -0.574 & 0.819 & 0.000 \\ -0.819 & -0.574 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2c})$$

$$\mathbf{R}_{C_1}^D = \mathbf{R}_{C_2}^D = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2d})$$

$$\mathbf{R}_{K_3}^H = \begin{bmatrix} 0.000 & -1.000 & 0.000 \\ 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2e})$$

$$\mathbf{R}_{K_4}^H = \begin{bmatrix} 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ -1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2f})$$

$$\mathbf{R}_{C_3}^{F_3O} = \mathbf{R}_{C_4}^{F_4O} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2g})$$

$$\mathbf{R}_{C_5}^{F_5o} = \mathbf{R}_{C_6}^{F_6o} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2h})$$

(B.2i)

B.1.3 Maße der Maschine

Alle Angaben erfolgen in Meter.

$$\mathbf{r}_{F_3o}^D = \begin{bmatrix} 3.200 & -0.409 & -0.410 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3a})$$

$$\mathbf{r}_{F_4o}^D = \begin{bmatrix} 3.200 & 0.409 & -0.410 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3b})$$

$$\mathbf{r}_{F_1o}^D = \begin{bmatrix} -1.100 & -0.422 & -0.410 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3c})$$

$$\mathbf{r}_{F_2o}^D = \begin{bmatrix} -1.100 & 0.422 & -0.410 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3d})$$

$$\mathbf{r}_{G_1h}^D = \begin{bmatrix} 5.374 & -0.520 & 0.245 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3e})$$

$$\mathbf{r}_{G_2h}^D = \begin{bmatrix} 5.374 & 0.520 & 0.245 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3f})$$

$$\mathbf{r}_{K_1}^D = \begin{bmatrix} -0.158 & -1.240 & 0.523 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3g})$$

$$\mathbf{r}_{K_2}^D = \begin{bmatrix} -0.158 & 1.240 & 0.184 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3h})$$

$$\mathbf{r}_M^D = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 2.330 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3i})$$

$$\mathbf{r}_H^D = \begin{bmatrix} 5.562 & 0.000 & 0.245 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3j})$$

$$\mathbf{r}_{G_1h}^H = \begin{bmatrix} -0.188 & -0.520 & 0.000 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3k})$$

$$\mathbf{r}_{G_2h}^H = \begin{bmatrix} -0.188 & 0.520 & 0.000 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3l})$$

$$\mathbf{r}_{C_5h}^H = \begin{bmatrix} -0.188 & -0.409 & -0.655 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3m})$$

$$\mathbf{r}_{C_6h}^H = \begin{bmatrix} -0.188 & 0.409 & -0.655 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3n})$$

$$\mathbf{r}_{K_3h}^H = \begin{bmatrix} 0.100 & -1.240 & -0.090 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3o})$$

$$\mathbf{r}_{K_4h}^H = \begin{bmatrix} -0.090 & 1.240 & -0.090 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3p})$$

$$\mathbf{r}_{S_1o}^{S_1} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.523 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3q})$$

$$\mathbf{r}_{S_2o}^{S_2} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.184 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3r})$$

$$\mathbf{r}_{S_3o}^{S_3} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.152 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3s})$$

$$\mathbf{r}_{S_4o}^{S_4} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.152 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3t})$$

$$\mathbf{r}_{S_1u}^{S_1} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & -l_{S_1} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3u})$$

$$\mathbf{r}_{S_2u}^{S_2} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & -l_{S_2} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3v})$$

$$\mathbf{r}_{S_3u}^{S_3} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & -l_{S_3} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3w})$$

$$\mathbf{r}_{S_4u}^{S_4} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & -l_{S_4} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3x})$$

$$\mathbf{r}_{F_5o}^{F_3o} = \mathbf{r}_{F_6o}^{F_4o} = \begin{bmatrix} 1.370 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3y})$$

$$\mathbf{r}_{C_5h}^{F_5o} = \mathbf{r}_{C_6h}^{F_6o} = \begin{bmatrix} 0.804 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.3z})$$

$r_{y,R_1}^{A_1}$	$r_{y,R_2}^{A_1}$	$r_{y,R_3}^{A_2}$	$r_{y,R_4}^{A_2}$	$r_{y,R_5}^{A_3}$	$r_{y,R_6}^{A_3}$	$r_{y,F_1u}^{A_1}$	$r_{y,F_2u}^{A_1}$
-1.014	1.014	-0.919	0.919	-0.919	0.919	-0.422	0.422
$r_{y,F_3u}^{A_2}$	$r_{y,F_4u}^{A_2}$	$r_{y,F_5u}^{A_3}$	$r_{y,F_6u}^{A_3}$	$l_{F_1} = l_{F_2}$	l_{F_3}, \dots, l_{F_6}	d_{R_1}, \dots, d_{R_6}	
-0.409	0.409	-0.409	0.409	0.650	0.700	1.141	

Tabelle B.1: Maße der Achsen, Federn und Reifen.

Vollabstützung

$$\mathbf{l}_K = \begin{bmatrix} 2.300 & 2.300 & 1.600 & 1.600 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.4a})$$

$$\mathbf{r}_{S_1o}^D = \begin{bmatrix} -1.477 & -3.124 & 0.523 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.4b})$$

$$\mathbf{r}_{S_2o}^D = \begin{bmatrix} -1.477 & 3.124 & 0.184 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.4c})$$

$$\mathbf{r}_{S_3o}^H = \begin{bmatrix} 0.100 & -2.840 & -0.090 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.4d})$$

$$\mathbf{r}_{S_4o}^H = \begin{bmatrix} -0.090 & 2.840 & -0.090 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.4e})$$

Rechtsabstützung

$$\mathbf{l}_K = \begin{bmatrix} 0.300 & 2.300 & 0.300 & 1.600 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.5a})$$

$$\mathbf{r}_{S_1o}^D = \begin{bmatrix} -0.330 & -1.486 & 0.523 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.5b})$$

$$\mathbf{r}_{S_2o}^D = \begin{bmatrix} -1.477 & 3.124 & 0.184 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.5c})$$

$$\mathbf{r}_{S_3o}^H = \begin{bmatrix} 0.100 & -1.540 & -0.090 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.5d})$$

$$\mathbf{r}_{S_4o}^H = \begin{bmatrix} -0.090 & 2.840 & -0.090 \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.5e})$$

Frontabstützung

$$\mathbf{l}_K = [2.300 \quad 2.300 \quad 0.300 \quad 0.300]^T \quad (\text{B.6a})$$

$$\mathbf{r}_{S_1o}^D = [-1.477 \quad -3.124 \quad 0.523]^T \quad (\text{B.6b})$$

$$\mathbf{r}_{S_2o}^D = [-1.477 \quad 3.124 \quad 0.184]^T \quad (\text{B.6c})$$

$$\mathbf{r}_{S_3o}^H = [0.100 \quad -1.540 \quad -0.090]^T \quad (\text{B.6d})$$

$$\mathbf{r}_{S_4o}^H = [-0.090 \quad 1.540 \quad -0.090]^T \quad (\text{B.6e})$$

B.2 Regelung**B.2.1 Maße des Starrkörpermodells****Vollabstützung**

$$\mathbf{r}_{S_1}^D = [-1.477 \quad -3.124 \quad 0.000]^T \quad (\text{B.7a})$$

$$\mathbf{r}_{S_2}^D = [-1.477 \quad 3.124 \quad 0.000]^T \quad (\text{B.7b})$$

$$\mathbf{r}_{S_3}^D = [5.662 \quad -2.840 \quad 0.000]^T \quad (\text{B.7c})$$

$$\mathbf{r}_{S_4}^D = [5.472 \quad 2.840 \quad 0.000]^T \quad (\text{B.7d})$$

$$\mathbf{H}_I = \begin{bmatrix} 1.000 & -3.124 & 1.477 \\ 1.000 & 3.124 & 1.477 \\ 1.000 & -2.840 & -5.662 \\ 1.000 & 2.840 & -5.472 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7e})$$

$$\mathbf{h}_o = [0.469 \quad -0.483 \quad -0.516 \quad 0.530]^T \quad (\text{B.7f})$$

Rechtsabstützung

$$\mathbf{r}_{S_1}^D = [-0.330 \quad -1.486 \quad 0.000]^T \quad (\text{B.8a})$$

$$\mathbf{r}_{S_2}^D = [-1.477 \quad 3.124 \quad 0.000]^T \quad (\text{B.8b})$$

$$\mathbf{r}_{S_3}^D = [5.662 \quad -1.540 \quad 0.000]^T \quad (\text{B.8c})$$

$$\mathbf{r}_{S_4}^D = [5.472 \quad 2.840 \quad 0.000]^T \quad (\text{B.8d})$$

$$\mathbf{H}_I = \begin{bmatrix} 1.000 & -1.486 & 0.330 \\ 1.000 & 3.124 & 1.477 \\ 1.000 & -1.540 & -5.662 \\ 1.000 & 2.840 & -5.472 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8e})$$

$$\mathbf{h}_o = [0.523 \quad -0.451 \quad -0.546 \quad 0.474]^T \quad (\text{B.8f})$$

Frontabstützung

$$\mathbf{r}_{S_1}^D = [-1.477 \quad -3.124 \quad 0.000]^T \quad (\text{B.9a})$$

$$\mathbf{r}_{S_2}^D = [-1.477 \quad 3.124 \quad 0.000]^T \quad (\text{B.9b})$$

$$\mathbf{r}_{S_3}^D = [5.662 \quad -1.540 \quad 0.000]^T \quad (\text{B.9c})$$

$$\mathbf{r}_{S_4}^D = [5.472 \quad 1.540 \quad 0.000]^T \quad (\text{B.9d})$$

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} 1.000 & -3.124 & 1.477 \\ 1.000 & 3.124 & 1.477 \\ 1.000 & -1.540 & -5.662 \\ 1.000 & 1.540 & -5.472 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9e})$$

$$\mathbf{h}_o = [0.304 \quad -0.321 \quad -0.626 \quad 0.643]^T \quad (\text{B.9f})$$

B.2.2 Reglerparameter

Parameter	Wert	Einheit	Beschreibung
c	10	MN/m	Bodensteifigkeit (Starrkörpermodell)
P_{tol}	0.1	%	relative Toleranz des K -Werts (bezüglich K_d)
r_{tol}	5	mm	z -Toleranz
ψ_{tol}	0.1	°	Winkeltoleranz
f_{tol}	10	kN	Krafttoleranz
σ_r	1	mm	Standardabweichung d_{r_z}
σ_ψ	0.05	°	Standardabweichung d_{ψ_x} und d_{ψ_y}
σ_f	0.5	kN	Standardabweichung $d_{F_{S_1}}, \dots, d_{F_{S_4}}$
v_{min}	-10	cm/s	minimale Zylindergeschwindigkeit
v_{max}	5	cm/s	maximale Zylindergeschwindigkeit
v_{vst}	4.3	cm/s	Vorsteuerungsgeschwindigkeit
T_a	50	ms	Abtastzeit des Reglers
T_f	10	ms	Abtastzeit des Filters
$t_{f,\text{max}}$	5	ms	maximale Laufzeit des Kraftreglers
M	21		Filterlänge
N	3		Filterordnung
λ_f	20		Proportionalteil des Kraftreglers

Tabelle B.2: Reglerparameter.

$$\boldsymbol{\lambda}_p = \text{diag}\left(\left[2 \quad 1 \quad 1\right]^T\right) \quad (\text{B.10a})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_I = \text{diag}\left(\left[0.8 \quad 0.4 \quad 0.4\right]^T\right) \quad (\text{B.10b})$$

Literatur

- [1] C. Lu, D. Huang, Z. Jin und Y. Huang, „The Research and Design of Auto-leveling Control System for Vehicle-borne Radar Platform Based on AVR“, in *International Conference on Mechatronics and Embedded Systems and Applications*, Beijing, China, Aug. 2006, S. 1–5.
- [2] J. Zhang, D. Huang und C. Lu, „Research on Dynamic Model and Control Strategy of Auto-Leveling System for Vehicle-Borne Platform“, in *International Conference on Mechatronics and Automation*, Harbin, China, Mai 2007, S. 973–977.
- [3] M. Wanner und K. Rupp, „Stability of mobile Manipulators“, in *The 9th International Symposium on Automation and Robotics in Construction*, Tokyo, Japan, Juni 1992, S. 787–792.
- [4] J. Qian, L. Bao, R. Yuan und X. Yang, „Modeling and Analysis of Outrigger Reaction Forces of Hydraulic Mobile Crane“, *International Journal of Engineering*, Jg. 30, Nr. 8, S. 1246–1252, Aug. 2017.
- [5] M. Neubert, „Flexible Abstütssysteme an Autobetonpumpen - Möglichkeiten und Grenzen im Baustellenbetrieb“, Putzmeister Concrete Pumps GmbH, Techn. Ber., Mai 2009.
- [6] C. A. Fiorletta und J. Richard V. Burnes, „Automated Control System for Vehicle Leveling and Elimination of Torsion in a Vehicle Chassis“, US-Pat. 6,768,936, 2004.
- [7] W. D. Pilkey, *Analysis and Design of Elastic Beams*. New York: John Wiley & Sons Inc., 2002, ISBN: 0-471-38152-7.
- [8] Z. Javanbakht und A. Öchsner, *Computational Statics Revision Course*. Cham: Springer Nature, 2018, ISBN: 978-3-319-67461-2.
- [9] M. Egretzberger, „Mathematical Modeling and Control of Micro Electromechanical Gyroscopes“, Diss., Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2010.
- [10] T. Meurer, „Regelung verteilt-parametrischer Systeme“, Skriptum, Lehrstuhl für Regelungstechnik, Christian-Albrechts-Universität Kiel, 2018.
- [11] T. Glück, W. Kemmetmüller und A. Steinböck, „Fortgeschrittene Methoden der Modellbildung“, Skriptum, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2019.
- [12] A. Kugi, „Fachvertiefung: Automatisierungs- und Regelungstechnik“, Skriptum, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2019.
- [13] Y. Luo, „An Efficient 3D Timoshenko Beam Element with Consistent Shape Functions“, *Advanced Theory Applied Mechanics*, Jg. 1, Nr. 3, S. 95–106, Apr. 2008.

- [14] A. Steinböck, „Optimierung“, Skriptum, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2019.
- [15] J. Henikl, *Regelungsstrategien für den Ausleger einer Autobetonpumpe*, A. Kugi und K. Schlacher, Hrsg., Ser. Modellierung und Regelung komplexer dynamischer Systeme. Aachen: Shaker Verlag, 2016, Bd. 30, ISBN: 978-3-8440-4541-3.
- [16] R. W. Schafer, „What is a Savitzky-Golay-Filter“, *IEEE Signal Processing Letters*, S. 111–117, 2011.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit gemäß dem Code of Conduct – Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis (in der aktuellen Fassung des jeweiligen Mitteilungsblattes der TU Wien), insbesondere ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel, angefertigt wurde. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Wien im Mai 2020

Valentin Platzgummer