



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

D I P L O M A R B E I T

Risikomanagement von Einlagen ohne Fälligkeit im Niedrigzinsumfeld

ausgeführt am

Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Fakultät für Mathematik und Geoinformation
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Felix Schned, BSc, BSc

Matrikelnummer: 01204485

Wien, am 16. August 2021

Kurzfassung

Die Modellierung von Bankeinlagen ohne Fälligkeit stellt, im Vergleich zur Bewertung von Verbindlichkeiten mit einer fixen Laufzeit, eine besondere Herausforderung dar. Anders als bei Krediten mit einem festgelegtem Zahlungsprofil sind die Zahlungsströme bei Einlagen ohne Fälligkeit in der Zukunft ungewiss und werden zudem von sich verändernden Marktzinssätzen beeinflusst. Eine Möglichkeit zur Modellierung solcher Einlagen ist das von Kalkbrener und Willing [13] vorgeschlagene stochastische 3-Komponenten-Modell. Das Modell basiert auf einer separaten Modellierung des Einlagenvolumens sowie der Markt- und Einlagenzinssätze. In dieser Arbeit werden verschiedene Ansätze zur Modellierung der drei Komponenten aufgezeigt und anhand einer Fallstudie verglichen. Für die Modellierung der Marktzinsen wird in der praktischen Implementierung ein einfaktorielles Vasicek-Modell verwendet. Der Einlagenzinssatz wird als lineare Funktion abhängig von den verfügbaren Marktzinssätzen modelliert, wobei aufgrund der geltenden Rechtsauslegung darauf geachtet wird, dass der Einlagenzinssatz stets positiv bleibt. Bei der Modellierung des Einlagenvolumens werden verschiedene Modelltypen vorgestellt, wobei ein Hauptaugenmerk auf dem Normalmodell von Kalkbrener und Willing [13] liegt. Als mögliche Alternative wird zudem das Lognormalmodell diskutiert. Insbesondere wird bei der Modellierung des Einlagenvolumens genauer auf die Unterschiede zwischen dem statistischen und dem risikoneutralen Maß eingegangen. Ausgehend von diesen Komponenten werden Methoden zur Handhabung des Liquiditäts- und Zinsrisikos näher beleuchtet. Für eine direkte Anwendbarkeit werden alle Funktionalitäten zu einem Kommandozeilenprogramm zusammengefasst, welches eine flexible Anwendung der Modelle erlaubt und die für das Risikomanagement relevanten Szenariobetrachtungen vereinfacht.

Abstract

Modeling bank deposits without maturity poses a particular challenge compared to the valuation of liabilities with a fixed maturity. Unlike loans with a fixed payment profile, the cash flows of deposits without maturity are uncertain in the future and are also affected by changing market interest rates. One way to model such deposits is the 3-component-model proposed by Kalkbrener and Willing [13]. The model is based on separate modeling of deposit volume as well as market and deposit interest rates. In this thesis, different approaches to modeling the three components are shown and compared using a case study. For modeling market interest rates the classical one-factor Vasicek model is used in the practical implementation. The deposit interest rate is modeled as a linear function depending on the available market interest rates, whereby care is taken to ensure that the deposit interest rate always remains positive due to current jurisdiction. In modeling the volume of deposits various types of models are presented with a main focus on the normal model of Kalkbrener and Willing [13]. The lognormal model is also discussed as a possible alternative. In particular, the differences between the statistical and the risk-neutral measure are discussed in more detail when modeling the deposit volume. Based on these components, methods for handling liquidity and interest rate risk are presented. For direct applicability, all functionalities are combined into a command line program which allows a flexible application of the models and simplifies the scenario considerations relevant for risk management.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 16. August 2021

Felix Schned

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Begriffsdefinition	2
1.2. Herausforderungen im Niedrigzinsumfeld	2
1.3. Aufbau der Arbeit	4
2. Finanzmathematische Grundlagen	6
2.1. Stochastische Analysis	6
2.2. Zinsprodukte und Zinsmodellierung	10
2.3. Short-Rate-Modelle	11
2.3.1. Affine Zinsstrukturen	12
2.3.2. Standardmodelle	13
2.3.3. Marktpreis des Risikos	16
2.4. Heath-Jarrow-Morton-Framework	17
3. Aspekte des Risikomanagements	20
3.1. Risikoarten	20
3.1.1. Zinsänderungsrisiko	20
3.1.2. Liquiditätsrisiko	21
3.2. Rechtsgrundlagen	22
3.2.1. Bundesgesetz über das Bankwesen	22
3.2.2. Kreditinstitute-Risikomanagementverordnung	24
3.2.3. Basel III Regelwerk	25
4. Stochastisches 3-Komponenten-Modell	27
4.1. Modellspezifikation	27
4.1.1. Marktzinsen	28
4.1.2. Einlagenzinsen	31
4.1.3. Einlagenvolumen	33
4.2. Risikomanagement	37
4.2.1. Liquiditätsrisikomanagement	37
4.2.2. Zinsrisikomanagement	38
5. Fallstudie zum Risikomanagement	44
5.1. Datengrundlage	44
5.2. Praktische Implementierung	45

Inhaltsverzeichnis

5.3. Angewandtes Risikomanagement	46
5.3.1. Liquiditätsrisikomanagement in der Praxis	47
5.3.2. Zinsrisikomanagement in der Praxis	51
5.4. Fazit	57
A. Anhang	59
A.1. Zusätzliche Auswertungen	59
A.2. Implementierung in Python	62
A.2.1. Modellierung der Marktzinsen	63
A.2.2. Modellierung der Einlagenzinsen	67
A.2.3. Modellierung des Einlagenvolumens	69
A.2.4. Implementierung des 3-Komponenten Modells	73
Literaturverzeichnis	76
Abbildungsverzeichnis	79
Tabellenverzeichnis	80
Quellcodeverzeichnis	81

1. Einleitung

Die wesentliche volkswirtschaftliche Funktion von Kreditinstituten liegt in der sogenannten Fristentransformation, also der Umwandlung von kurzfristigen Einlagen in langfristige Darlehen. Nach Thonabauer und Nösslinger [23] wohnt das Ausmaß dieser Fristentransformation als nicht direkt sichtbares Risiko der Bilanz einer jeden Bank inne, da Veränderungen der Marktzinssätze die Zinsspanne und den Barwert der Eigenmittel maßgeblich beeinflussen können.

Die Bilanzen von europäischen Geschäftsbanken sind wesentlich durch Kundenpositionen, die keine Fälligkeit aufweisen, beeinflusst und gleichzeitig stellen diese wichtige Liquidität bereit [6]. Eine realistische Einschätzung des damit einhergehenden Liquiditätsrisikos ist für die Kreditinstitute unerlässlich, wie die Finanzkrise des Jahres 2008 gezeigt hat. Die negativen Auswirkungen auf Kreditinstitute wurden damals durch einen Liquiditätsengpass am Interbankenmarkt deutlich verstärkt [9]. Als Konsequenz aus diesen Ereignissen fand die Früherkennung und Verhinderung von Liquiditätsproblemen im Bankensektor Eingang in die Regularien des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht [1].

Aufgrund der fehlenden vertraglich festgelegten Zahlungsströme und Maturität, gestaltet sich die Vorhersage und damit auch das Risikomanagement von Einlagen ohne Fälligkeit für die Kreditinstitute als besonders herausfordernd. Insbesondere existiert kein direkter Derivatemarkt auf welchem die Risiken solcher Einlagen gehedgt werden können, weswegen eine effektive Behandlung von Zinsänderungs- und Liquiditätsrisiken unerlässlich ist [22]. Das Zinsänderungsrisiko nimmt dabei einen immer größeren Stellenwert im Risikomanagement innerhalb der Kreditinstitute ein und findet zusehends stärkeren Eingang in die nationalen aufsichtsrechtlichen Vorgaben, wie beispielsweise das Bankwesengesetz.

1.1. Begriffsdefinition

Einlagen ohne Fälligkeit können ganz generell dadurch charakterisiert werden, dass anders als etwa bei einem Kreditvertrag keine vertraglich festgelegten Zeitpunkte für Ein- und Auszahlungen existieren und der Vertrag im Wesentlichen eine unbegrenzte Laufzeit hat. Der bis zu einem bestimmten Zeitpunkt eingezahlte Betrag oder Teile davon können jederzeit vom Kunden behoben werden und zusätzliches Kapital kann laufend eingezahlt werden. Im Allgemeinen können solche Verträge relativ einfach und mit kurzen Kündigungsfristen beendet werden.

Neben der Eigenschaft der täglichen Fälligkeit spielt auch der variable Zinssatz, dem solche Einlagen unterliegen, eine wichtige Rolle. Dieser Zinssatz kann in den meisten Fällen kurzfristig vom Kreditinstitut nach oben oder unten angepasst werden. Insbesondere bedeuten steigende Zinsen, dass solche Einlagen für den Kunden an Wert verlieren und ein Wechsel zu anderen Anlagen, die eine höhere Rendite abwerfen, wahrscheinlicher wird. Hutchinson und Pennacchi [11] haben gezeigt, dass die Anpassung an veränderte Marktzinsen einer gewissen Asymmetrie unterliegt. Steigende Marktzinssätze werden nicht vollständig und mit einer gewissen Verzögerung an die Kunden weitergegeben, bei fallenden Zinssätzen ist die Anpassungsgeschwindigkeit jedoch höher.

Wichtige Beispiele für Einlagen ohne Fälligkeit sind Girokonten, Sparkonten und Sichteinlagen. Historisch gesehen waren die Einlagenzinsen niedriger als die Marktzinsen, weswegen diese Art von Einlagen nach Jarrow und van Deventer [12] einen positiven Wert für Kreditinstitute darstellen.

1.2. Herausforderungen im Niedrigzinsumfeld

In Abbildung 1.1 sind die historischen Euribor Raten¹ der letzten zwanzig Jahre auf täglicher Basis dargestellt. Der Euribor bezeichnet den durchschnittlichen Zinssatz, zu dem europäische Banken bereit sind einander Anleihen in Euro zu gewähren. Die verschiedenen Euribor Zinssätze werden häufig als Referenzzinssatz bei variabel verzinslichen Anleihen und Swaps verwendet, wodurch diese eine dementsprechend große Bedeutung in der Eurozone aufweisen.

¹<https://www.emmi-benchmarks.eu/euribor-org/euribor-rates.html>

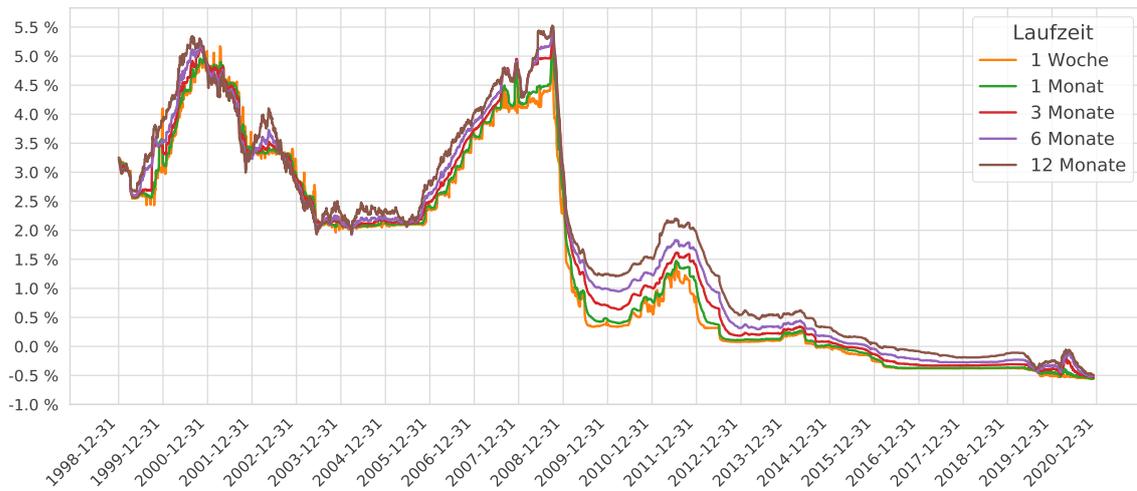


Abbildung 1.1.: Tägliche Daten für Euribor Raten mit Laufzeiten von einer Woche bis zu einem Jahr von Anfang 1999 bis Ende 2020. Bereitgestellt durch das European Money Market Institute (EMMI).

Auswirkungen auf Kreditinstitute

In den letzten Jahren sind aufgrund des anhaltenden Niedrigzinsumfelds neue Herausforderungen in den Bereichen Profitabilität und Risikomanagement auf die Kreditinstitute zugekommen. Insbesondere der Nettozinsertrag war für Banken ein wesentlicher Gewinntreiber, der in den letzten Jahren durch die sinkenden Zinsmargen an Bedeutung verloren hat [16]. Die niedrigen Zinssätze wirken sich negativ auf die Rentabilität eines Kreditinstituts aus und führen gleichzeitig zu einer erhöhten Risikobereitschaft, da nunmehr für gleiche Erträge risikoreichere Geschäfte eingegangen werden müssen, um die sinkenden Zinssätze zu kompensieren.

Kerbl und Sigmund [14] argumentieren, dass die Veränderung von positiven zu negativen Zinssätzen einen Strukturwandel mit sich bringt, da kurzfristige Vermögenswerte zwar in den negativen Bereich folgen können, Spareinlagen jedoch nicht. Wenn Kreditinstitute die überschüssige Liquidität bei der Zentralbank hinterlegen und diese mit einem negativen Zinssatz belastet wird, kann dieser nicht unmittelbar an Kunden weitergegeben werden. Wie in Abbildung 1.1 ersichtlich, sind die Marktzinsen für die angeführten Laufzeiten schon seit dem Jahr 2016 negativ, da jedoch die Einlagenzinsen in Österreich in fast allen Fällen nicht negativ sein müssen, ergibt sich eine Diskrepanz zu Ungunsten der Kreditinstitute. Für Kreditinstitute entsteht dadurch

die Situation, dass das Entgegennehmen von Einlagen und Investieren derselben zu kurzfristigen Marktzinsen insgesamt gesehen ein schlechtes Geschäft darstellt.

Implikationen für die Modellierung

Neben den bereits angesprochenen Herausforderungen stellt das Niedrigzinsumfeld neue Anforderungen an die Modellierung von Liquiditäts- und Zinsänderungsrisiken. Eine realistische Modellierung der Entwicklung von Einlagen ohne Fälligkeit ist zentral für deren Risikomanagement, da keine Benchmarkwerte für die Branche oder Standardmodelle mit vorgegebenen Parametern existieren. In Anlehnung an Kerbl und Sigmund [14] müssen insbesondere Extrapolationen an den Übergängen von positiven zu negativen Zinsregimen kritisch hinterfragt werden.

Generell gilt, dass die zukünftige Entwicklung schwieriger zu modellieren ist, wenn die Zinssätze für eine lange Zeit auf Null gesetzt sind und dass das gewählte Modell genug Flexibilität aufweisen muss, um auch in Phasen von steigenden Zinsen das Marktgeschehen realistisch replizieren zu können. Nach Liviello [16] erhöht sich außerdem in Zeiten von anhaltenden Niedrigzinsen die Fluktuation im Einlagenvolumen von Konten ohne Fälligkeit, woraus sich ebenfalls negative Konsequenzen für die Vorhersagekraft der Modelle ergeben können.

1.3. Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 wird auf die theoretischen Grundlagen, die in dieser Arbeit benötigt werden, und auf die wichtigsten Aspekte der Modellierung von Zinsraten eingegangen. Zudem wird explizit auf die Unterschiede bei der Modellierung mit dem statistischen Maß und dem risikoneutralen Maß eingegangen, die vor allem für das praktische Risikomanagement von Relevanz sind. Auf die qualitativen Aspekte des Risikomanagements sowie relevante rechtliche Grundlagen wird in Kapitel 3 eingegangen, wobei vor allem das Zinsänderungs- und Liquiditätsrisiko näher beleuchtet werden, da diese die grundlegenden Risikokonstrukte sind, die sich auf die Modellierung auswirken. Zusätzlich werden mit dem Bundesgesetz über das Bankwesen und der Kreditinstitute-Risikomanagementverordnung der rechtliche Regelungsrahmen vorgestellt und einige wichtige Paragraphen näher beleuchtet. In Kapitel 4 wird ein stochastisches 3-Komponenten-Modell zur Modellierung von Bankeinlagen ohne

1. Einleitung

Fälligkeit vorgestellt. Zur Modellierung der beobachteten Marktzinsen wird ein ein-faktorielles Short-Rate-Modell herangezogen. Die Einlagenzinsen werden mit einer deterministischen Funktion modelliert, die die Marktzinsen als Input erhält. Neben diesen beiden Zinskonstrukten muss ebenfalls das Volumen der Einlagen modelliert werden. Eine Möglichkeit besteht darin, das Volumen als Summe einer deterministischen linearen Funktion und eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses darzustellen. Bei der Modellierung des Einlagenvolumens wird ebenfalls genauer auf die Unterschiede zwischen dem statistischen und dem risikoneutralen Maß eingegangen. Abschließend werden Methoden für das praktische Risikomanagement von Liquiditäts- und Zinsänderungsrisiken auf Basis dieser drei Komponenten näher beschrieben. In Kapitel 5 werden die Ansätze aus dem letzten Kapitel aufgegriffen und deren Eignung in der Praxis anhand einer Fallstudie evaluiert.

2. Finanzmathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Grundlagen der stochastischen Analysis und Zinstheorie, die im Laufe der Arbeit verwendet werden, vorgestellt. Die Grundlagen der stochastischen Analysis orientieren sich dabei an Vorlesungsunterlagen der TU Wien zur stochastischen Analysis [21]. Die Notation zu den gängigen Modellen der Zinstheorie basiert auf den Werken von Björk [2] und Filipovic [4].

2.1. Stochastische Analysis

Es bezeichne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, der die üblichen Bedingungen der Vollständigkeit und Rechtsstetigkeit erfüllt und auf dem eine d -dimensionale \mathbb{F} -adaptierte Brownsche Bewegung existiert. Mit Vollständigkeit ist gemeint, dass \mathcal{F}_0 alle Nullmengen enthält und Rechtsstetigkeit bedeutet, dass $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$ für alle $t \geq 0$.

Definition 2.1 (Brownsche Bewegung). Ein stochastischer Prozess $W = (W(t))_{t \geq 0}$ mit Werten in \mathbb{R}^d auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ wird d -dimensionale Brownsche Bewegung (bezüglich der Filtration \mathbb{F} und dem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}) genannt, falls folgende Bedingungen gelten:

- a) Es gilt $W(0) = 0$ \mathbb{P} -f.s.,
- b) $W(t)$ ist \mathcal{F}_t -messbar, also W ist \mathbb{F} -adaptiert,
- c) Unabhängigkeit der Inkremente: $W(t) - W(s)$ ist unabhängig \mathcal{F}_s für alle $s < t$,
- d) Normalverteilung der Inkremente: $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$,
- e) W hat fast sicher stetige Pfade.

Für die Definition des stochastischen Integral werden die folgenden Begriffe der Martingaltheorie benötigt.

Definition 2.2 (Stoppzeit). Sei $T \subseteq \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ein Intervall. Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \rightarrow T$ wird Stoppzeit genannt, wenn $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \in T$.

Definition 2.3 (Martingal). Ein Martingal ist ein integrierbarer, \mathbb{F} -adaptierter Prozess $M = (M(t))_{t \geq 0}$ mit Werten in \mathbb{R}^d , wenn die Martingalbedingung

$$M(s) = \mathbb{E}[M(t) | \mathcal{F}_s] \quad \text{f.s. für alle } s \leq t$$

erfüllt ist.

Definition 2.4 (Lokales Martingal). Ein stochastischer Prozess M wird lokales Martingal genannt, falls eine aufsteigende Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (lokalisierende Folge genannt) existiert, sodass $M(t \wedge \tau_n)$ ein Martingal ist für alle τ_n und $\tau_n \nearrow \infty$ gilt.

Stochastisches Integral

Für die Definition des stochastischen Integral werden vorab die beiden folgenden Bezeichnungen eingeführt. Mit \mathcal{L}^2 bzw. \mathcal{L} wird die Menge der \mathbb{R}^d -wertigen progressiven Prozesse $h = (h_1, \dots, h_d)$ bezeichnet, die

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty \|h(s)\|^2 ds \right] < \infty,$$

respektive

$$\int_0^t \|h(s)\|^2 ds < \infty, \quad \text{für alle } t > 0$$

erfüllen.

Definition 2.5 (Stochastisches Integral). Für jedes $h \in \mathcal{L}$ kann das stochastische Integral

$$(h \cdot W)_t = \int_0^t h(s) dW(s) = \sum_{i=1}^d \int_0^t h_i(s) dW_i(s),$$

mit den folgenden Eigenschaften definiert werden:

- a) Der Prozess $h \cdot W$ ist ein stetiges lokales Martingal.

b) Linearität: $(\lambda g + h) \cdot W = \lambda(g \cdot W) + h \cdot W$ für $g, h \in \mathcal{L}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Für jede Stoppzeit τ gilt:

$$\int_0^{t \wedge \tau} h(s) dW(s) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} h(s) dW(s), \quad \text{für alle } t > 0.$$

d) Wenn $h \in \mathcal{L}^2$, dann ist $h \cdot W$ ein Martingal und die Itô-Isometrie gilt:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^\infty h(s) dW(s) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \|h(s)\|^2 ds \right].$$

e) Dominierte Konvergenz: Wenn $(h_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{L}$ eine Folge mit punktwisem Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ ist und $|h_n| \leq k$ für eine endliche Konstante k , dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} |(h_n \cdot W)_s| = 0 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit für alle } t > 0.$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die stochastischen Integranden Zeilenvektoren sind und die Brownsche Bewegung als Integrator ein Spaltenvektor. Mit dieser Konvention kann auf die Verwendung von Transpositionen in den stochastischen Integralen verzichtet werden.

Bemerkung 2.6. Ein Itô-Prozess ist die Summe von einem absolut stetigen Driftterm und einem lokalen Martingal der Form

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t \rho(s) dW(s), \quad (2.1)$$

wobei $\rho \in \mathcal{L}$ und a ein progressiv messbarer Prozess ist, der $\int_0^t |a(s)| ds < \infty$ für alle $t > 0$ erfüllt.

Stochastische Differentialgleichungen

Seien $b : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ progressiv messbare Funktionen. Sei ξ ein beliebiger \mathcal{F}_0 -messbarer Anfangswert. Ein Prozess X wird die

Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX(t) &= b(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t), \\ X(0) &= \xi, \end{aligned}$$

mit Anfangswert ξ genannt, falls X ein Itô-Prozess ist, der

$$X(t) = \xi + \int_0^t b(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dW(s)$$

erfüllt.

Stochastisches Exponential, Martingalmaß und Itô-Formel

Bevor mit der Itô-Formel (Satz 2.9) und dem Satz von Girsanov (Satz 2.10) die zentralen Resultate dieses Abschnitts vorgestellt werden, werden die Definitionen des quadratischen Variationsprozesses und des stochastischen Exponentials eingeführt.

Definition 2.7 (Quadratische Variation und Kovariation). Angenommen X ist ein Itô-Prozess wie in (2.1) und Y ist ebenfalls ein Itô-Prozess, der dargestellt werden kann als $Y(t) = Y(0) + \int_0^t b(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW(s)$. Der Kovariationsprozess von X und Y ist definiert als

$$\langle X, Y \rangle_t := \int_0^t \rho(s) \sigma(s)^\top ds.$$

Der quadratische Variationsprozess von X ist als $\langle X, X \rangle$ definiert.

Definition 2.8 (Stochastisches Exponential). Sei X ein Itô-Prozess wie in (2.1), dann bezeichnet $\mathcal{E}(X)$ das stochastische Exponential von X und ist wie folgt definiert

$$\mathcal{E}_t(X) = \exp \left(X(t) - \frac{1}{2} \langle X, X \rangle_t \right). \quad (2.2)$$

Satz 2.9 (Itô-Formel). Sei X ein Itô-Prozess und $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, dann ist $f(X)$ wieder ein Itô-Prozess und es gilt

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f(X(s))}{\partial x_i} dX_i(s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f(X(s))}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X_i, X_j \rangle_s.$$

In kompakter Differentialschreibweise mit den Zeitpunkten als Index lautet die

Itô-Formel wie folgt

$$df(X_t) = \nabla f(X_t) \cdot dX_t + \frac{1}{2} \nabla^2 f(X_t) \cdot d\langle X, X \rangle_t,$$

wobei in diesem Fall mit dem Punkt nicht das stochastische Integral, sondern das Skalarprodukt gemeint ist.

Satz 2.10 (Satz von Girsanov). *Sei $\gamma \in \mathcal{L}$ sodass das stochastische Exponential $\mathcal{E}(\gamma \cdot W)$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist mit $\mathcal{E}_\infty(\gamma \cdot W) > 0$. Dann wird durch*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_\infty(\gamma \cdot W) \quad (2.3)$$

ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ definiert und der Prozess

$$W^{\mathbb{Q}}(t) = W(t) - \int_0^t \gamma(s)^\top ds$$

ist eine Brownsche Bewegung bezüglich \mathbb{Q} .

2.2. Zinsprodukte und Zinsmodellierung

Neben den eingangs bereits erwähnten Werken wird in diesem Abschnitt auch das umfassende Werk von Brigo und Mercurio [3] verwendet.

Nullkuponanleihen

Eine Anleihe ist eine verbrieft Form eines Kredits. Anleihen sind die primären Finanzinstrumente auf dem Markt, auf dem der Zeitwert des Geldes gehandelt wird. Eine Nullkuponanleihe ist ein Vertrag, der dem Inhaber die Zahlung einer Geldeinheit zum Fälligkeitszeitpunkt T garantiert. Der t -Wert einer Geldeinheit zur Zeit $T \geq t$ wird durch eine Nullkuponanleihe mit Maturität T , auch T -Bonds genannt, ausgedrückt und als $P(t, T)$ geschrieben. Es wird davon ausgegangen, dass für alle $T > 0$ ein liquider Markt für T -Bonds existiert. Zudem wird angenommen, dass $P(T, T) = 1$ und $P(t, T)$ differenzierbar ist in T für alle T .

Zinsswaps

Bei einem Zinsswap tauschen zwei Parteien Zinszahlungen untereinander aus. Typischerweise werden Zahlungen mit einem fixen Zinssatz gegen Zahlungen mit einem variablen Zinssatz getauscht.

Definition 2.11 (Payer-Zinsswap). Ein rückwirkend abgerechneter Payer-Zinsswap wird spezifiziert durch folgende Parameter: eine festgelegte Anzahl an zukünftigen Zeitpunkten $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ mit $t_i - t_{i-1} = \Delta$, wobei t_m die Fälligkeit des Swaps ist, eine fixe Rate K und einen Nominalwert N . Die Zahlungen finden zu den Zeitpunkten t_1, \dots, t_m statt (nicht zu t_0). Zum Zeitpunkt t_i gilt für den Besitzer des Vertrags, dass er

- 1) einen fixen Wert $KN\Delta$ zahlen muss und
- 2) einen variablen Wert $NF(t_{i-1}, t_i)\Delta$ erhält.

Dabei bezeichne $F(t_{i-1}, t_i)$ den vorherrschenden einfachen Marktzinssatz, der beispielsweise die LIBOR Rate sein kann.

Der oben definierte Swap stellt die Standardform eines Swaps dar und wird oft als *Plain Vanilla Swap* bezeichnet, wobei bei dieser Bezeichnung vor allem der Austausch von fixen und variablen Zinszahlungsströmen gemeint ist. Eine mögliche Abweichung von der obigen Standardform wäre der Austausch von variablen Zinssätzen auf beiden Seiten, wodurch ein sogenannter exotischer Zinsswap entsteht.

2.3. Short-Rate-Modelle

An dieser Stelle werden einige prominente Beispiele für Short-Rate-Modelle vorgestellt, welche ebenfalls bei der Modellierung der Marktzinsen in Kapitel 4 relevant sind. Für die Klasse der einfaktoriellen Modelle werden das Vasicek-Modell sowie als flexible Erweiterung davon das Hull-White-Modell vorgestellt. Unter den Voraussetzungen aus Kapitel 2.1 sei W eine d -dimensionale Brownsche Bewegung unter dem statistischen Maß \mathbb{P} .

Annahme 2.12. Folgende Annahmen werden für diesen Abschnitt getroffen:

a) Die Short-Rate (*Momentanzinssatz*) folgt einem Itô-Prozess der Form

$$dr(t) = \mu(t, r(t)) dt + \sigma(t, r(t)) dW(t),$$

und $B(t) = e^{\int_0^t r(s) ds}$ beschreibt die zeitliche Entwicklung des Geldmarktkontos.

b) Arbitragefreiheit: Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß \mathbb{Q} , sodass der diskontierte Bondpreisprozess $P(t, T)/B(t)$ für $t \leq T$ ein \mathbb{Q} -Martingal ist und $P(T, T) = 1$ für alle $T > 0$ gilt.

Mit $W^{\mathbb{Q}}(t) = W(t) - \int_0^t \lambda(s)^\top ds$ wird die Girsanov transformierte Brownsche Bewegung unter \mathbb{Q} bezeichnet. Unter den obigen Annahmen kann der Short-Rate-Prozess unter dem äquivalenten Martingalmaß wie folgt dargestellt werden

$$dr(t) = (\mu(t, r(t)) + \sigma(t, r(t))\lambda(t)^\top) dt + \sigma(t, r(t)) dW^{\mathbb{Q}}(t).$$

2.3.1. Affine Zinsstrukturen

Insbesondere Short-Rate-Modelle, die eine geschlossene Formel für die Bondpreise zulassen, sind einfach handzuhaben. Wenn die Bondpreise von der Form

$$F(t, r; T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r}$$

sind, wobei $A(t, T)$ und $B(t, T)$ glatte Funktionen sind, spricht man davon, dass eine affine Zinsstruktur (ATS) vorhanden ist.

Satz 2.13 (Charakterisierung der ATS). *Ein Short-Rate-Modell der Form*

$$dr(t) = b(t, r(t)) dt + \sigma(t, r(t)) dW(t)$$

hat genau dann eine ATS, wenn der Diffusionsterm und der Driffterm folgende Darstellung besitzen

$$\sigma^2(t, r) = a(t) + \alpha(t)r \quad \text{und} \quad b(t, r) = b(t) + \beta(t)r,$$

für stetige Funktionen α, β, a, b . Die Funktionen A und B erfüllen für alle $t \leq T$ die

gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_t A(t, T) &= \frac{1}{2}a(t)B^2(t, T) - b(t)B(t, T), & A(T, T) &= 0, \\ \partial_t B(t, T) &= \frac{1}{2}\alpha(t)B^2(t, T) - \beta(t)B(t, T) - 1, & B(T, T) &= 0.\end{aligned}$$

2.3.2. Standardmodelle

Alle Modelle, die in diesem Unterabschnitt vorgestellt werden, besitzen eine ATS.

Vasicek-Modell

Im Vasicek-Modell wird die Annahme getroffen, dass sich die Short-Rate unter dem statistischen Maß wie ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit konstanten Koeffizienten verhält. Mit der passenden Wahl von λ folgt die Short-Rate auch unter dem risikoneutralen Maß einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit konstanten Koeffizienten. Das einfaktorielles Vasicek-Modell ist durch die Wahl der Short-Rate-Dynamik (unter einem äquivalenten Martingalmaß \mathbb{Q}) als

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t)) dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad (2.4)$$

mit reellen, positiven Konstanten κ, θ, σ und einer eindimensionalen Brownschen Bewegung gegeben.

Um die explizite Lösung von Gleichung (2.4) zu bestimmen, werden beide Seiten mit $e^{\kappa t}$ multipliziert und anschließend integriert.

$$\begin{aligned}dr(t) + \kappa r(t) dt &= \kappa\theta dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t) \\ e^{\kappa t}(dr(t) + \kappa r(t) dt) &= e^{\kappa t}(\kappa\theta ds + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(s)) \\ \underbrace{e^{\kappa t} dr(t) + e^{\kappa t} \kappa r(t) dt}_{=d(e^{\kappa t} r(t))} &= e^{\kappa t}(\kappa\theta dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t)) \\ \int_0^t d(e^{\kappa s} r(s)) &= \int_0^t e^{\kappa s} \kappa\theta ds + \int_0^t e^{\kappa s} \sigma dW^{\mathbb{Q}}(s) \\ e^{\kappa t} r(t) - r(0) &= \kappa\theta \frac{e^{\kappa t} - 1}{\kappa} + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} dW^{\mathbb{Q}}(s).\end{aligned}$$

Durch Umformen und Multiplikation mit $e^{-\kappa t}$ kann die Lösung geschrieben werden

als

$$r(t) = r(0)e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW^{\mathbb{Q}}(s).$$

Daraus folgt insbesondere, dass $r(t)$ ein Gaußscher Prozess ist. Da der Integralterm aufgrund der Brownschen Bewegung den Erwartungswert Null hat, folgt für den Erwartungswert von $r(t)$, dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(t)] = r(0)e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}).$$

Die Varianz kann mit Hilfe der Itô-Isometrie und des Steinerschen Verschiebungssatzes berechnet werden

$$\begin{aligned} \text{Var}[r(t)] &= \text{Var}\left[\sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW^{\mathbb{Q}}(s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW^{\mathbb{Q}}(s)\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW^{\mathbb{Q}}(s)\right]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\sigma^2 \int_0^t e^{-2\kappa(t-s)} ds\right] \\ &= \sigma^2 \int_0^t e^{-2\kappa(t-s)} ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}). \end{aligned}$$

Dementsprechend kann in diesem Modell die Short-Rate auch negativ werden, was lange Zeit als Kritikpunkt hervorgebracht wurde. Durch die seit einigen Jahren anhaltenden Negativzinsen wurde diese Kritik aber deutlich abgeschwächt und die Eigenschaft eine negative Short-Rate modellieren zu können, ist immer wichtiger geworden. Die Parameter des Vasicek-Modells lassen folgende Interpretation zu:

- a) Durch θ wird das Gleichgewichtsniveau des Prozesses (*Mean Reversion Level*) beschrieben.
- b) Der Parameter κ stellt die Geschwindigkeit der Mean Reversion dar, also die Stärke der Anziehungskraft von θ .
- c) Die Schwankungsbreite der Zuwächse wird durch σ beschrieben und gibt die Stärke des Einflusses des Zufalls, der durch W charakterisiert ist, an.

Ho-Lee-Modell

Das Ho-Lee-Modell hat die Form

$$dr(t) = \theta(t) dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t). \quad (2.5)$$

Die Lösung des Ho-Lee-Modells kann mit Hilfe der beobachteten Forward-Rate, die mit $f(0, t)$ bezeichnet wird, explizit angegeben werden und lautet

$$r(t) = r(0) + \int_0^t \theta(s) ds + \sigma W^{\mathbb{Q}}(t) = f(0, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 + \sigma W^{\mathbb{Q}}(t).$$

Das Ho-Lee-Modell erzeugt eine symmetrische Verteilung der zukünftigen Zinssätze, weswegen auch hier negative Zinssätze möglich sind. Anders als das Vasicek-Modell ist das Ho-Lee-Modell ein Beispiel für ein Short-Rate-Modell, welches nicht die Eigenschaft der Mittelwertrückkehr besitzt.

Hull-White-Modell

Ausgehend von der Überlegung, dass beim Vasicek-Modell zu wenig freie Parameter vorhanden sind, um eine gegebene initiale Zinsstrukturkurve durch die Wahl von drei Parametern perfekt zu treffen, werden die freien Parameter im Hull-White-Modell durch zeitabhängige Funktionen ersetzt, wodurch quasi eine unendliche Anzahl von Parametern eingeführt wird. Aus Gleichung (2.4) wird somit

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t)) dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad (2.6)$$

dabei sind $a, \sigma > 0$ Konstanten, die entsprechend der Volatilitätsstruktur gewählt werden und $\theta(t)$ eine zeitabhängige Funktion, die so gewählt ist, dass die heutigen Nullkuponanleihenpreise getroffen werden. Durch Anwendung der Itô-Formel erhält man die Lösung des Hull-White-Modells aus (2.6) als

$$r(t) = r(0)e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} \theta(s) ds + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW^{\mathbb{Q}}(s).$$

2.3.3. Marktpreis des Risikos

In Anlehnung an Wilmott [26] wird in diesem Unterabschnitt eine einfache Methode zur Bestimmung des Marktpreises des Risikos vorgestellt. Da der Short-Rate-Prozess keine Informationen über den Marktpreis des Risikos enthält, muss auf Zinsderivate zurückgegriffen werden, die anzeigen, wie das Risiko durch den Markt bewertet wird. Insbesondere das kurze Ende der Ertragskurve (Yield Curve) von Nullkuponanleihen kann für Informationen über den Marktpreis des Risikos herangezogen werden.

Für die nachfolgende Überlegung wird ein Modell der Form

$$dr(t) = u(r)dt + \sigma dW(t)$$

betrachtet. Wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben, hat der Bondpreis in einem Modell mit ATS folgende Darstellung

$$F(t, r; T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r}.$$

Durch Taylorentwicklung der Bondpreise zur Zeit $t = T$, was dem kurzen Ende der Zinsstrukturkurve entspricht, folgt nach Wilmott [26], dass

$$F(t, r; T) \sim 1 - r(T - t) + \frac{1}{2}(T - t)^2(r^2 - u + \lambda\sigma) + \dots, \quad \text{für } t \rightarrow T,$$

und damit

$$-\frac{\log F}{T - t} \sim r + \frac{1}{2}(u - \lambda\sigma)(T - t) + \dots, \quad \text{für } t \rightarrow T.$$

Am kurzen Ende der Zinsstrukturkurve entspricht die Steigung somit $(u - \lambda\sigma)/2$. Auf Basis von historischen Daten kann damit der Marktpreis des Risikos λ empirisch bestimmt werden.

Für eine detailliertere Ausführung des obigen Ansatzes sei auf das Buch von Wilmott [26] verwiesen, welches noch weitere Aspekte behandelt, die bei der Schätzung des Marktpreises des Risikos relevant sind, jedoch nicht Hauptthema dieser Arbeit sind und im Folgenden nicht weiter diskutiert werden.

2.4. Heath-Jarrow-Morton-Framework

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen zur Modellierung der Forward-Kurve ausgehend von der Heath-Jarrow-Morton-Methodologie (kurz: HJM) vorgestellt. Angenommen es sind zwei stochastische Prozesse wie folgt gegeben. Ein \mathbb{R} -wertiger Prozess α und ein \mathbb{R}^d -wertiger Prozess σ , die folgende Bedingungen erfüllen:

- a) α, σ sind progressiv messbar,
- b) $\int_0^T \int_0^T |\alpha(s, t)| ds < \infty$ für alle T ,
- c) $\sup_{s, t \leq T} \|\sigma(s, t)\| < \infty$ für alle T .

Für eine gegebene integrierbare Forward-Kurve $T \mapsto f(0, T)$ wird angenommen, dass die Dynamik des Forward-Rate-Prozesses $f(\cdot, T)$ einem Itô-Prozess folgt

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dW(s), \quad t \leq T. \quad (2.7)$$

Die Integrale in (2.7) sind aufgrund der obigen Annahmen wohldefiniert und die einzigen Einschränkungen ergeben sich durch die Annahme von stetigen Pfaden für die Forward-Rate und der endlichen Anzahl an Zufallseinflüssen W_1, \dots, W_d . Die Short-Rate ist unter diesen Bedingungen gegeben durch

$$r(t) := f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t) ds + \int_0^t \sigma(s, t) dW(s),$$

die Preise der Nullkuponanleihen ergeben sich als

$$P(t, T) := \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right), \quad (2.8)$$

und der Wert eines Geldmarkt Kontos, der ebenfalls wohldefiniert ist, ergibt sich als

$$B(t) := \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right).$$

Bemerkung 2.14. Der HJM-Ansatz ist kein bestimmtes Modell, wie etwa das Vasicek-Modell, sondern vielmehr ein Rahmen, der für die Analyse von Zinsmodellen verwendet werden kann. Jedes Short-Rate-Modell kann äquivalent in Forward-Rate

Begriffen formuliert werden. Zudem ist für jedes Forward-Rate-Modell der arbitragefreie Preis eines T -Claims X gegeben durch

$$\Pi(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[X \cdot \exp \left(- \int_0^T r(s) ds \right) \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{X}{B(T)} \right].$$

Satz 2.15 (HJM-Driftbedingung). *Unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} müssen die Prozesse α und σ aus (2.10) die folgende Beziehung erfüllen*

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s)^\top ds. \quad (2.9)$$

Die \mathbb{Q} -Dynamik der Forward-Rate hat für $t \leq T$ die Form

$$f(t, T) = f(0, T) + \underbrace{\int_0^t \left(\sigma(s, T) \int_s^T \sigma(s, u)^\top du \right) ds}_{\text{HJM Drift}} + \int_0^t \sigma(s, T) dW^{\mathbb{Q}}(s). \quad (2.10)$$

Wenn also die Forward-Rate-Dynamik unter \mathbb{Q} spezifiziert ist, kann die Volatilitätsstruktur frei gewählt werden, die Driftparameter sind dadurch eindeutig bestimmt.

Beispiel 2.16 (Verwendung des HJM-Frameworks). Die Verwendung der HJM-Methodologie ist durch die nachfolgenden Schritte charakterisiert:

- 1) Festlegung der Volatilitäten $\sigma(t, T)$ nach eigener Wahl.
- 2) Die Driftparameter sind nun bestimmbar mit Formel (2.9).
- 3) Die am Markt gegebene Forward-Kurve $T \mapsto f(0, T)$ kann beobachtet werden.
- 4) Durch Integration erhält man die in Formel (2.10) spezifizierte Forward-Rate.
- 5) Anschließend können die Preise der Nullkuponanleihen mit Formel (2.8) berechnet werden.
- 6) Mit Hilfe der obigen Resultate können nun die Preise von Derivaten berechnet werden.

Gaußsches HJM-Modell

Eine einfache Wahl für die Volatilität $\sigma(t, T)$ stellt die konstante Funktion dar, also $\sigma(t, T) \equiv \sigma$ für ein $\sigma > 0$. Einsetzen in den Driftprozess aus Formel (2.9) liefert

$$\alpha(t, T) = \sigma \int_t^T \sigma ds = \sigma^2(T - t),$$

und damit lautet die Forward-Rate aus (2.10) wie folgt

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \sigma^2(T - s) ds + \int_0^t \sigma dW^{\mathbb{Q}}(s) = f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{1}{2}t\right) + \sigma W^{\mathbb{Q}}(t).$$

Für die Short-Rate erhält man schließlich

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma W^{\mathbb{Q}}(t),$$

was genau der Lösung des Ho-Lee-Modells entspricht, welches in Gleichung (2.5) definiert wurde.

3. Aspekte des Risikomanagements

In diesem Kapitel wird auf die geltenden rechtlichen Bestimmungen eingegangen, die bei der Ausgestaltung von Konditionen für Einlagen ohne Fälligkeit berücksichtigt werden müssen und daher Einfluss auf die praktische Modellierung ausüben. Darüber hinaus wird ausgehend von Matz und Neu [17] sowie Hartl, Sarin und Markwardt [7] näher auf verschiedene Aspekte des Risikomanagements in der Realität eingegangen.

3.1. Risikoarten

Im Allgemeinen unterscheiden Banken innerhalb des Risikomanagements zwischen dem Zinsänderungsrisiko und dem Liquiditätsrisiko. In der Praxis sind Messung und Steuerung des Liquiditätsrisikos dabei typischerweise in einer eigenständigen und unabhängigen Risikofunktion angesiedelt. Die Messung und Überwachung des Zinsänderungsrisikos obliegt ebenfalls häufig dieser Risikofunktion.

3.1.1. Zinsänderungsrisiko

Das Zinsänderungsrisiko ist das Risiko, dass die Rentabilität der Bank beeinträchtigt werden könnte, weil die Bank entweder unterschiedliche Zinslaufzeiten oder unterschiedliche Referenzzinssätze für Aktiva und Passiva ausweist. Nach Thonabauer und Nösslinger [23] können die beiden wesentlichen Effekte von Zinsänderungen auf die Ertrags- und Risikosituation eines Kreditinstituts und dessen finanziellen Erfolg wie folgt eingeteilt werden:

- a) Einkommenseffekt: Beeinflussung des Nettozinsertrags durch eine Veränderung der Zinsstrukturkurve. Ebenso können nicht-zinssensitive Ergebnisbestandteile, wie beispielsweise Provisionserträge negativ betroffen sein, wenn diese indirekt von der zukünftigen Zinsentwicklung abhängig sind. Eine Abschätzung der

potentiellen Einkommenseffekte infolge von Marktzinsveränderungen ist daher unerlässlich.

- b) Barwerteffekt: Quantifizierung der Auswirkungen von Zinsänderungen auf den Barwert zukünftiger Zahlungsströme und damit auf den Barwert des Zinsbuchs bzw. des Eigenkapitals. Der Barwert wird auf zwei Arten durch Zinsänderungen beeinflusst, einerseits durch die Veränderung der Diskontierungssätze für zukünftige Zahlungsströme und andererseits durch die Änderung der zukünftigen erwarteten Zinszahlungsströme in den Berechnungen.

3.1.2. Liquiditätsrisiko

Um das Liquiditätsrisiko besser zu verstehen, wird der Unterschied zwischen Liquidität und Liquidation genauer behandelt. Die Tatsache, dass fast alle Vermögenswerte letztendlich durch einen Verkauf in Bargeld umgewandelt werden können, um ausstehende Verpflichtungen zu begleichen, bezieht sich auf ihren Liquidationswert, nicht auf ihre Liquidität. Liquidität ist die Fähigkeit, den aktuellen und erwarteten Cashflow-Bedarf mit den vorhandenen Mitteln effizient zu decken, ohne das Tagesgeschäft zu beeinträchtigen. Neben diesen beiden Definitionen spielt auch die Solvenz, die im Wesentlichen so definiert ist, dass der Gesamtwert der Aktiva die Gesamtverbindlichkeiten übersteigt, eine wichtige Rolle. Unternehmen können demnach solvent bzw. insolvent und gleichzeitig illiquid bzw. liquid sein [25].

Zum Liquiditätsrisiko gehört zum einen das Risiko, dass ein Kreditinstitut nicht in der Lage sein könnte, Zahlungsverpflichtungen nachzukommen, wenn diese fällig werden. Zahlungsverpflichtungen umfassen erwartete und unerwartete Cashflows bzw. Sicherheitsbedarfe. Die Zahlungsverpflichtungen müssen vollständig und pünktlich erfüllt werden, ohne das tägliche Geschäftsgebaren oder die Finanzlage des Instituts zu beeinträchtigen. Besonders Vermögenswerte, die unter normalen Marktbedingungen liquide sind, können schnell illiquide werden, wenn sich die Märkte für breite Anlageklassen verschlechtern. Zum anderen ist im Liquiditätsrisiko auch das Risiko, dass die Rentabilität des Kreditinstituts beeinträchtigt werden könnte, weil sie entweder zusätzliche Mittel nur zu erhöhten Liquiditätsspreads erwerben oder Liquiditätsüberschüsse nur mit geringerer Rentabilität anlegen kann, enthalten [17].

3.2. Rechtsgrundlagen

Der Regelungsrahmen für österreichische Kreditinstitute findet sich im Bankwesengesetz (BWG). Für gewisse Geschäftsbereiche sind überdies das Investmentfondsgesetz, das Kapitalmarktgesetz und das Pfandbriefgesetz von Bedeutung. Zudem gilt für Sparkassen über das Bankwesengesetz hinaus noch das Sparkassengesetz, und für Bausparkassen das Bausparkassengesetz [27]. Für die Modellierung von Einlagen ohne Fälligkeit in der vorliegenden Arbeit sind vor allem jene rechtlichen Bestimmungen relevant, die die Ausgestaltung der Verträge beeinflussen und damit Einfluss auf die Modelle nehmen.

3.2.1. Bundesgesetz über das Bankwesen

Nach dem Beitritt Österreichs zum Europäischen Wirtschaftsraum wurde durch das BWG der EU-Rechtsstandard in das österreichische Recht übernommen und das alte Kreditwesengesetz (KWG) abgelöst.

Sonderrolle von Spareinlagen

Im BWG wird eine explizite Abgrenzung von Spareinlagen vorgenommen, insbesondere Abschnitt VII § 31 widmet sich Sparurkunden.

§ 31. (1) Spareinlagen sind Geldeinlagen bei Kreditinstituten, die nicht dem Zahlungsverkehr, sondern der Anlage dienen und als solche nur gegen die Ausfolgung von besonderen Urkunden (Sparurkunden) entgegengenommen werden dürfen. [...]

§ 31. (2) Sparurkunden dürfen ausschließlich von den zum Spareinlagengeschäft berechtigten Kreditinstituten ausgegeben werden. Nur für diese Urkunden ist es erlaubt, die Bezeichnung „Sparbuch“, „Sparbrief“ oder eine Wortverbindung, die den Bestandteil „spar“ enthält, zu führen. [...]

Das BWG enthält keine expliziten Bestimmungen zur Mindestverzinsung von Einlagen ohne Fälligkeit. Demnach könnte der Habenzins für solche Produkte durch die Kreditinstitute auf Null gesetzt werden oder eine negative Verzinsung eingeführt werden. Für diese Einlagen gilt jedoch, nach einem Urteil des Obersten Gerichtshofs

(OGH) aus dem Jahr 2009 insbesondere, dass eine Nullverzinsung nicht zulässig ist, da der Anlagecharakter dieser Produkte dadurch unterlaufen würde [24].

Eine Spareinlage habe typischerweise Vermögensbildungs- und Gewinnerzielungsfunktion; sie sind durch eine gewisse längerfristige Dauer und den Veranlagungszweck der Verzinsung gekennzeichnet. Eine mögliche Nullverzinsung widerspreche daher den elementaren und gesetzlich angelegten Zwecken einer Spareinlage. Das legitime Interesse von SparerInnen bestehe dagegen darin, für ihre Einlagen möglichst hohe Zinsen zu lukrieren und nicht etwa durch niedrige Zinsen die Liquidität der Bank zu erhöhen.

OGH 13.10.2009, 5Ob138/09v (in gekürzter Form)

Auf Einlagen, wie etwa einem Girokonto und eine Reihe anderer Einlagen ohne Fälligkeit, findet diese Judikatur keine Anwendung, weswegen eine Unterschreitung des Nullzinssatzes generell möglich wäre. Da dieses Szenario jedoch in Österreich noch keine Anwendung findet, scheint es sinnvoll den Zinssatz für Produkte ohne Fälligkeit bei der Modellierung und Implementierung so anzusetzen, dass dieser nicht negativ werden kann. Zum jetzigen Zeitpunkt gibt es kein österreichisches Kreditinstitut, welches negative Zinsen für täglich fällige Einlagen von Privatkunden verrechnet. Für einzelne Großkunden mit hohen Einlagesummen sind negative Zinssätze aber teilweise heute schon Realität und vor allem in Nachbarländern wie Deutschland, geben immer mehr Kreditinstitute die negativen Zinsen an Privatkunden weiter [15].

Risikomanagement

Das österreichische BWG beschäftigt sich im Abschnitt Allgemeine Sorgfaltspflichten mit generellen Aspekten des Risikomanagements. Insbesondere § 39 liefert erste Leitlinien zur Berücksichtigung verschiedener Risikoarten.

§ 39. (2) Die Kreditinstitute haben für die Erfassung, Beurteilung, Steuerung und Überwachung der bankgeschäftlichen und bankbetrieblichen Risiken sowie ihrer Vergütungspolitik und -praktiken über Verwaltungs-, Rechnungs- und Kontrollverfahren zu verfügen, die der Art, dem Umfang und der Komplexität der betriebenen Bankgeschäfte angemessen sind.
[...]

§ 39. (2b) Die Verfahren gemäß Abs. 2 haben insbesondere zu berücksichtigen: das Kreditrisiko und Gegenparteausfallrisiko, das Konzentrationsrisiko, das Marktrisiko, das Risiko einer übermäßigen Verschuldung, das operationelle Risiko, das Verbriefungsrisiko, das Liquiditätsrisiko, das Zinsrisiko hinsichtlich sämtlicher Geschäfte, die nicht bereits unter Z 3 erfasst werden, [...]

§ 39. (4) Die FMA hat Mindestanforderungen zum Zwecke der ordnungsgemäßen Erfassung, Steuerung, Überwachung und Begrenzung der Risikoarten gemäß Abs. 2b durch Verordnung festzulegen. [...]

Eine getrennte Behandlung von Zins- und Marktrisiko wird durch das BWG grundsätzlich vorgeschrieben, jedoch nicht weiter spezifiziert. Dieser Paragraph wird durch die *Verordnung der Finanzmarktaufsichtsbehörde (FMA) über die ordnungsgemäße Erfassung, Steuerung, Überwachung und Begrenzung der Risikoarten gemäß § 39 Abs. 2b BWG*, auch Kreditinstitute-Risikomanagementverordnung oder KI-RMV genannt, ergänzt.

3.2.2. Kreditinstitute-Risikomanagementverordnung

In dieser Verordnung findet sich folgende Begriffsbestimmung für das Marktrisiko und Zinsänderungsrisiko, die für die angesprochenen Kreditinstitute von Relevanz ist.

§ 4. Für diese Verordnung gelten folgende Begriffsbestimmungen:

[...]

8. Marktrisiko: das spezifische und allgemeine Positionsrisiko in zinsbezogenen Instrumenten, das spezifische und das allgemeine Positionsrisiko in Substanzwerten, das Risiko aus Aktienindex-Terminkontrakten, das Risiko aus Investmentfondsanteilen, die sonstigen mit Optionen verbundenen Risiken, das Warenpositionsrisiko und das Risiko aus Fremdwährungs- und Goldpositionen.
9. Zinsänderungsrisiko: das Risiko möglicher Zinsänderungen, die sich auf die im Anlagebuch erfassten Geschäfte auswirken;

Neben dieser allgemeinen Begriffsdefinition wird auf die in § 4 erwähnten Risiken in weiterer Folge detaillierter eingegangen. Das Marktrisiko wird in § 9 näher behandelt.

§ 9. (2) Kreditinstitute haben Maßnahmen bezüglich des Risikos eines Liquiditätsengpasses vorzusehen, wenn die Verkaufsposition vor der Kaufposition fällig wird.

§ 9. (3) Kreditinstitute haben sicherzustellen, dass das interne Kapital erhebliche Marktrisiken, die keiner Eigenmittelanforderung unterliegen, angemessen abdeckt.

Das Zinsänderungsrisiko bei Geschäften des Anlagebuchs wird in § 10 gesondert behandelt.

§ 10. Kreditinstitute haben über geeignete Systeme zu verfügen, um das Risiko möglicher Zinsänderungen, die sich auf die im Anlagebuch erfassten Geschäfte auswirken, ermitteln, messen, steuern, überwachen und begrenzen zu können.

Insgesamt ergeben sich aus diesen Vorschriften keine weiteren unmittelbaren Auswirkungen für die Modellierung von Einlagen ohne Fälligkeit, jedoch stellt insbesondere das Vorhandensein von adäquaten Kontrollmechanismen und Risikosteuerungselementen einen zentralen Aspekt der vorgestellten Paragraphen dar.

3.2.3. Basel III Regelwerk

Im Bericht zu internationalen und nationalen regulatorischen Rahmenbedingungen der Österreichischen Nationalbank [19] wird die Umsetzung des Basel III Regelwerks näher beleuchtet. Nach dessen Veröffentlichung legte die Europäische Kommission 2011 einen Vorschlag zur Umsetzung vor. Die Capital Requirements Regulation (CRR) und Capital Requirements Directive (CRD) sind seit Anfang 2014 von den Mitgliedsstaaten anzuwenden. Die CRR ist eine EU-Verordnung und stellt somit anwendbares Recht dar. Dementsprechend sind in diese Verordnung alle Regelungen aufgenommen worden, die sich direkt an die beaufsichtigten Institute richten. Dagegen ist die CRD eine EU-Richtlinie, welche in nationales Recht umzusetzen ist. In Österreich wurde dieser Richtlinie durch eine Änderung des BWG nachgekommen. Zur Begrenzung von Liquiditätsrisiken wurden in diesem Rahmen zwei neue

Kennzahlen eingeführt: Liquidity Coverage Ratio (LCR) und Net Stable Funding Ratio (NSFR). Eine genauere Definition der beiden Kennzahlen kann in Anlehnung an Fleer [5] wie folgt aussehen:

- a) Liquidity Coverage Ratio: Die LCR ist eine Kennzahl zur Beschränkung von idiosynkratischen Liquiditätsrisiken. Für diese Kennzahl wird ein 30-tägiges Stressszenario simuliert und anschließend das Verhältnis von hochliquiden Aktiva und Nettozahlungsmittelabfluss ermittelt. Der Bestand von hochliquiden Aktiva muss dabei stets größer sein als die Mittelabflüsse. Dadurch soll bei jedem Kreditinstitut ein ausreichender Liquiditätsbestand zur Verfügung stehen, der über einen Zeitraum von einem Monat einen Liquiditätsengpass abfedern kann.
- b) Net Stable Funding Ratio: Die NSFR ist der Quotient des verfügbaren Betrags an stabiler Refinanzierung (ASF) und des erforderlichen Betrags an stabiler Refinanzierung (RSF) über einen Zeithorizont von einem Jahr. Dieser Quotient darf einen Wert von 100% nicht unterschreiten. Zum ASF zählen stabile Refinanzierungsquellen, wie beispielsweise Eigenkapital, Vorzugsaktien und Einlagen ohne Fälligkeit bzw. Termineinlagen mit einer Restlaufzeit unter einem Jahr, wenn bestimmte Voraussetzungen erfüllt sind.

Für die Modellierung von Einlagen ohne Fälligkeit ergeben sich abseits von Leitlinien, die in den Verträgen berücksichtigt werden müssen, und allgemeinen regulatorischen Anforderungen keine weiteren Bedingungen. Es sei darauf verwiesen, dass der gewählte Modellierungsansatz ebenfalls dazu in der Lage sein muss regulatorische Stressszenarien abzubilden, weswegen eine flexible Implementierung unabdingbar ist.

4. Stochastisches 3-Komponenten-Modell

Ausgehend von Kalkbrenner und Willing [13] wird in diesem Abschnitt ein Modell zum Risikomanagement von Einlagen ohne Fälligkeit vorgestellt, welches aus drei Bausteinen besteht: den Marktzinsen, den Einlagenzinsen und dem Einlagenvolumen. Eine ähnliche Modellierung findet sich auch in Nyström [18], der ebenfalls auf Basis dieser drei Komponenten eine Bewertungsformel und einen Risikomanagementansatz entwickelt.

Mit der Notation aus Kapitel 2 bezeichne $W(t) = (W_1(t), W_2(t))$ eine zweidimensionale Brownsche Bewegung, wobei für die erste Komponente auch die Bezeichnung $\bar{W}(t) = W_1(t)$ verwendet wird. Mit \mathcal{F}_t und $\bar{\mathcal{F}}_t$ werden die jeweiligen erzeugten Filtrationen bis zum Zeitpunkt t bezeichnet. Bonds mit allen Fälligkeiten sind handelbar und deren Preisprozesse werden von \bar{W} angetrieben. Die zweite Komponente W_2 wird dazu verwendet das Volumen zu modellieren.

4.1. Modellspezifikation

Es wird ein Marktmodell in stetiger Zeit mit Zeithorizont $[0, T]$ betrachtet.

Martingalmaß

Um Arbitragemöglichkeiten auszuschließen wird die Existenz eines eindeutigen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\bar{\mathbb{Q}}$ auf $\bar{\mathcal{F}}_T$ angenommen. Dieses ist äquivalent zur Einschränkung $\bar{\mathbb{P}}$ von \mathbb{P} , wenn $\bar{\mathbb{P}}$ ein Martingalmaß für den Short-Rate-Prozess ist. Genauer gesagt, bedeutet das

$$\frac{P(t, s)}{B(t)} \text{ ist ein } \bar{\mathbb{Q}}\text{-Martingal für alle } 0 \leq s \leq T.$$

Unter Verwendung des Satzes von Girsanov (Satz 2.10) kann $\bar{\mathbb{Q}}$ durch $\bar{\mathbb{P}}$ mittels einer Girsanovtransformation charakterisiert werden. Nach Formel (2.3) hat die Dichte von $\bar{\mathbb{Q}}$ bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$ die Form

$$\bar{\eta} := \frac{d\bar{\mathbb{Q}}}{d\bar{\mathbb{P}}} = \mathcal{E}_T(\bar{\lambda} \cdot \bar{W}) = \exp\left(\int_0^T \bar{\lambda}(t) d\bar{W}(t) - \frac{1}{2} \int_0^T |\bar{\lambda}(t)|^2 dt\right), \quad (4.1)$$

wobei $\bar{\lambda} = \lambda_1(t)$ ein eindimensionaler $\bar{\mathcal{F}}_t$ -adaptierter stochastischer Prozess ist.

Bemerkung 4.1. Der Parameter $\bar{\lambda}$ spezifiziert den Unterschied zwischen dem statistischen Maß $\bar{\mathbb{P}}$ und dem Martingalmaß $\bar{\mathbb{Q}}$ und wird auch als der Marktpreis des Risikos bezeichnet. Für den Rest der Arbeit wird angenommen, dass dieser Parameter konstant ist, also $\lambda_1(t) \equiv \lambda_1$ für $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Da die Nullkuponanleihen $P(t, s)_{0 \leq t \leq s \leq T}$ an $\bar{\mathcal{F}}_T$ adaptiert sind, kann nicht jeder \mathcal{F}_T -messbare Claim mit diesen Bonds repliziert werden. Unter Verwendung von varianzminimierenden Martingalmaßen kann ein spezifisches Martingalmaß \mathbb{Q} identifiziert werden und dieses zur Preisbestimmung der Claims herangezogen werden. Für das oben eingeführte Setting kann folgende Erweiterung für $\bar{\eta}$, $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mathbb{Q}}$ vorgenommen werden. Sei $\lambda := (\lambda_1, 0)$ und definiere das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} auf \mathcal{F}_T in Anlehnung an Formel (4.1) durch

$$\eta := \exp\left(\int_0^T \lambda(t) dW(t) - \frac{1}{2} \int_0^T |\lambda(t)|^2 dt\right),$$

bezüglich der Einschränkung von \mathbb{P} auf \mathcal{F}_T .

4.1.1. Marktzinsen

Das Marktzinsmodell dient als Rahmen für die Bewertung der Cashflows von Einlagen ohne Fälligkeit, die durch Einlagenzinsen und das Einlagenvolumen spezifiziert werden. Eine Einschätzung der Entwicklung der Zinssätze in der Zukunft spielt dabei eine wichtige Rolle [13].

Vasicek-Modell für die Short-Rate

Das in Abschnitt 2.3 eingeführte Vasicek-Modell bildet die Basis der Marktzinsmodellierung. In diesem Abschnitt wird genauer auf die Dynamik unter dem statistischen

Maß und die Parameterschätzung auf Basis von historischen Daten eingegangen. Die Short-Rate-Dynamik unter dem risikoneutralen Maß für das Vasicek-Modell wurde in Formel (2.4) eingeführt und lautet

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t)) dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t).$$

Die Dynamik unter dem statistischen Maß kann als Prozess der Form

$$dr(t) = (\kappa\theta - (\kappa + \lambda\sigma)r(t)) dt + \sigma d\bar{W}(t) \quad (4.2)$$

aufgefasst werden, wobei λ ein neuer Parameter ist, der sich auf den Marktpreis des Risikos auswirkt. Insbesondere stimmen die beiden Dynamiken für $\lambda = 0$ überein, was bedeuten würde, dass es keinen Unterschied zwischen der realen und risikoneutralen Welt gibt. Die Girsanov Transformation hat dementsprechend die Form

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}_t((\lambda r) \cdot W^{\mathbb{Q}}) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 r(s)^2 ds + \int_0^t \lambda r(s) dW^{\mathbb{Q}}(s) \right).$$

Die zugrundeliegende Annahme ist, dass der Marktpreis des Risikos dargestellt werden kann als $\lambda(t) = \lambda r(t)$. Die oben getroffene Annahme, dass der Marktpreis des Risikos konstant ist, erfüllt diese Beziehung klarerweise. In der Realität muss dieser Zusammenhang nicht zwangsweise so aussehen, aber durch diese Annahme kann der Short-Rate-Prozess unter beiden Maßes explizit charakterisiert werden.

Parameterschätzung im Vasicek-Modell

Angenommen eine Zeitreihe r_0, r_1, \dots, r_n von täglichen Beobachtungen, die der Short-Rate sehr nahe kommen, ist gegeben. Die Daten sind unter dem Maß der realen Welt gesammelt worden und charakterisieren demnach den Prozess $r(t)$ unter \mathbb{P} . Eine Schätzung liefert dann die Parameter κ, λ, θ und σ für die \mathbb{P} -Dynamik. Da die Preisbestimmung von Derivaten unter dem risikoneutralen Maß vorgenommen wird, können durch eine Kalibrierung an diese Daten die Parameter κ, θ, σ der \mathbb{Q} -Dynamik bestimmt werden. Diese zwei Herangehensweisen können wie in Brigo und Mercurio [3] beschrieben, kombiniert werden, indem beispielsweise der Diffusionskoeffizient anhand historischer Daten geschätzt wird, da dieser bei einem Maßwechsel erhalten bleibt und κ, θ können durch eine Kalibrierung an die Marktpreise bestimmt werden.

Maximum-Likelihood-Schätzer Die Dynamik aus (4.2) wird mit passenden Konstanten a, b umgeschrieben zu

$$dr(t) = (b - ar(t)) dt + \sigma d\bar{W}(t). \quad (4.3)$$

Analog zu den Überlegungen beim Vasicek-Modell aus Abschnitt 2.3.2 kann die explizite Lösung durch Integration als

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} d\bar{W}(u)$$

berechnet werden. Die $\bar{\mathcal{F}}_s$ -bedingte Verteilung ist eine Normalverteilung, für die Mittelwert und Varianz gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r(t)|\bar{\mathcal{F}}_s] &= r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-s)}), \\ \text{Var}[r(t)|\bar{\mathcal{F}}_s] &= \sigma^2 \int_s^t e^{-2a(t-u)} d\bar{W}(u). \end{aligned}$$

Die folgenden Parameter werden nun geschätzt

$$\beta := \frac{b}{a}, \quad \alpha := e^{-a\delta} \quad \text{und} \quad V^2 := \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\delta}), \quad (4.4)$$

wobei mit δ der Zeitabstand zwischen zwei Beobachtungen der Zeitreihe r_0, \dots, r_n bezeichnet wird. Für den Fall von täglich beobachteten Daten wäre $\delta = 1$. Die Maximum-Likelihood-Schätzer für (4.4) sind gegeben als

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{n \sum_{i=1}^n r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n r_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n r_{i-1} \right)^2}, \\ \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \hat{\alpha} r_{i-1})}{n(1 - \hat{\alpha})}, \\ \widehat{V}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \hat{\alpha} r_{i-1} - \hat{\beta}(1 - \hat{\alpha}))^2. \end{aligned}$$

Die geschätzten Parameter enthalten die vollständige Information der Übergangswahrscheinlichkeit mit einer Schrittweite von δ für den Prozess $r(t)$ unter \mathbb{P} , wodurch die zukünftige Entwicklung des Prozesses beispielsweise auf täglicher Basis simuliert

werden kann.

Alternative Modellierung der Marktzinsen

Die Modellierung der Marktzinsen kann mit vielen verschiedenen Modellen erfolgen. In Frauendorfer und Schürle [6] kommt ein zweifaktorielles Vasicek-Modell zur Anwendung, welches im Vergleich zum klassischen einfaktoriellen Modell eine bessere Anpassung erreicht. Zudem haben 1-Faktor-Modelle den Nachteil, dass angenommen wird, dass die Momentanzinssätze für alle Laufzeiten perfekt korreliert sind [3]. Der Zinssatz für eine Woche wäre also beispielsweise mit jenem für ein Jahr zu jedem Zeitpunkt perfekt korreliert. Dieser Nachteil wird in 2-Faktor-Modellen aufgegriffen und beseitigt.

Eine zweite Alternative zur oben vorgestellten Modellierung basiert auf dem in Abschnitt 2.4 eingeführten HJM-Framework, bei dem die gesamte Forward-Kurve direkt modelliert wird. Die Short-Rate ergibt sich dann auf Basis dieser Forward-Kurve, wobei für den einfachen Fall von konstanter Volatilität in Abschnitt 2.4 eine explizite Formel hergeleitet wurde. Der Vorteil dieses Modellierungsansatzes besteht in einer besseren Anpassungsgüte an die vorhandene Zinsstrukturkurve, allerdings gestaltet sich die Kalibrierung dementsprechend aufwändiger und eine hinreichend gute Datenbasis ist unabdingbar.

4.1.2. Einlagenzinsen

Die Einlagenzinsen werden stark von den Marktzinsen beeinflusst, wobei die Zinssätze für verschiedene Einlagenarten und Laufzeiten verschieden sind [13]. Im Allgemeinen findet keine tägliche Anpassung der Kundenzinssätze an die Marktzinssätze statt und zudem werden Veränderungen nur verzögert an die Kunden weitergegeben [11].

Bemerkung 4.2. In Anlehnung an Jarrow und van Deventer [12] werden die folgenden Annahmen gesetzt. Für Banken gilt, dass diese keine Sichteinlagen kaufen, aber die Vergabe von solchen Konten stoppen können. Private Investoren hingegen sind in der Lage Sichteinlagen zu halten, aber können diese nicht leerverkaufen.

In Kalkbrener und Willing [13] werden Einlagenzinsen durch eine deterministische Funktion modelliert, die nur die Marktzinsen als stochastisches Argument erhält.

Definition 4.3 (Einlagenzinsen). Die Einlagenzinsen werden durch eine deterministische Funktion $d(t)$ modelliert, wobei die Marktzinsen als Input genommen werden. Damit ist $d(t)$ an $\overline{\mathcal{F}}_t$ adaptiert.

Bemerkung 4.4. In Jarrow und van Deventer [12] wird zusätzlich $d(t) \leq r(t)$ vorausgesetzt, um Arbitragemöglichkeiten für private Investoren auszuschließen. Angenommen es gelte $d(t) > r(t)$, dann gäbe es Arbitragemöglichkeiten für private Investoren, da diese Einlagen mit Zinssatz $d(t)$ kaufen und gleichzeitig Bonds mit Zinssatz $r(t)$ verkaufen können. Die strenge Ungleichung $d(t) < r(t)$ bietet hingegen keine Arbitragemöglichkeit, da Sichteinlagen nach Bemerkung 4.2 nicht leerverkauft werden können.

Aufgrund der Tatsache, dass die gängigen Marktzinssätze seit einiger Zeit negativ sind, die Einlagenzinsen zumindest in Österreich jedoch mit Null nach unten beschränkt sind, ist die Annahme aus der obigen Bemerkung nicht haltbar. Die wichtigsten Implikationen für die Praxis ergeben sich dadurch vor allem bei der Interpretation des Barwerts der Sichteinlagen.

Bei Nyström [18] dürfen die Einlagenzinsen beliebig modelliert werden, unter der Bedingung, dass diese als Funktion der Marktzinsen und/oder des Einlagenvolumens gegeben sind. Im Artikel wird als explizites Beispiel ein Modell vorgestellt, welches nur von den Einlagenzinsen abhängt

$$d(t) = \beta_1 r(t),$$

wobei mit $r(t)$ die Short-Rate bezeichnet wird und β_1 eine Konstante ist, die an die Daten angepasst wird. Eine naheliegende Erweiterung dieses einfachen Modells entsteht unter Hinzunahme eines konstanten Terms

$$d(t) = \beta_0 + \beta_1 r(t),$$

wobei die Konstanten β_0, β_1 auf Basis der vorhandenen Daten kalibriert werden.

Beispiel 4.5. Um den Gegebenheiten zur Verzinsung von Einlagen in Österreich Rechnung zu tragen, erscheint es sinnvoll eine Untergrenze für die Einlagenzinsen bei Null einzuführen, um die derzeit noch unübliche negative Verzinsung zu vermeiden. Auf Basis der obigen Überlegungen kann ein Modell für die Einlagenzinsen wie folgt

spezifiziert werden

$$d(t) = \max\{\beta_0 + \beta_1 r(t), 0\}, \quad (4.5)$$

mit Konstanten β_0, β_1 und der Short-Rate $r(t)$.

Um eine größere Flexibilität bei der Modellierung der Einlagenzinsen zu erreichen, kann in Anlehnung an Jarrow und van Deventer [12] die Hinzunahme weiterer Parameter sinnvoll sein. Insbesondere die Inklusion von Expertenurteilen und die Anpassung an lokale Marktgegebenheiten kann damit leichter erfolgen. Ein solches Modell ist im nächsten Beispiel beschrieben.

Beispiel 4.6. Eine alternative Möglichkeit die Einlagenzinsen zu spezifizieren ist die folgende parametrische Familie von Funktionen

$$d(t) := d(0) + \beta_0 t + \beta_1 \int_0^t r(s) ds + \beta_2 (r(t) - r(0)),$$

wobei die Parameterschätzungen für $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ die lokalen Marktcharakteristika reflektieren und darüber hinaus die historischen Werte der Short-Rate berücksichtigt werden.

4.1.3. Einlagenvolumen

Für das Einlagenvolumen wird ein zusätzlicher stochastischer Faktor verwendet, der durchaus mit dem Faktor des Marktzinsmodells korreliert sein kann.

Definition 4.7 (Einlagenvolumen). Das Einlagenvolumen wird durch einen stochastischen Prozess $V(t)$ beschrieben, der \mathcal{F}_t -adaptiert ist.

Beispiel 4.8. Ein einfaches Modell für das Einlagenvolumen nach Jarrow und van Deventer [12] nimmt einen linearen Zusammenhang zwischen dem Volumen und dem Einlagezins an und unterstellt einen konstanten Spread zwischen Marktzinsen $r(t)$ und Einlagezinsen $d(t)$, also

$$V(t) = \alpha_0 + \alpha_1 r(t),$$

und $r(t) - d(t) \equiv \beta$. Durch Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste Gleichung folgt

$$V(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \beta + \alpha_1 d(t).$$

Wie bereits bei den Einlagezinsen kann auch hier die Hinzunahme weiterer Parameter sinnvoll sein, um eine bessere Anpassungsgüte zu erreichen.

Beispiel 4.9. Das Modell aus Beispiel 4.8 kann durch die Hinzunahme weiterer Parameter generalisiert werden, um die Marktgegebenheiten besser einzufangen. Eine mögliche Erweiterung lautet

$$\log V(t) = \log V(t-1) + \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 r(t) + \alpha_3 (r(t) - r(t-1)), \quad (4.6)$$

und $d(t) = d(t-1) + \beta_0 + \beta_1 r(t) + \beta_2 (r(t) - r(t-1))$. Demnach wird das Einlagenvolumen nicht nur in Abhängigkeit vom Niveau der Marktzinsen, sondern auch von der Veränderung der Marktzinsen modelliert. Die Parameter $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$ sind so zu wählen, dass sie die lokalen Marktcharakteristika möglichst realitätsnah replizieren [12].

Die obige Erweiterung kann direkt in ein zeitstetiges Modell übertragen werden. Das Analogon zu Gleichung (4.6) lautet dann

$$d \log V(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 r(t)) dt + \alpha_3 dr(t),$$

und für die Dynamik der Einlagezinsen gilt $dd(t) = (\beta_0 + \beta_1 r(t)) dt + \beta_2 dr(t)$.

Normalmodell

Eine Alternative zu den gerade vorgestellten Möglichkeiten zur Modellierung des Einlagenvolumens stellt das Normalmodell dar, welches einen linearen Trend im Volumen unterstellt, der durch einen stochastischen Faktor beeinflusst wird. Im Normalmodell von Kalkbrener und Willing [13] ist das Einlagenvolumen $V(t)$ wie folgt definiert

$$V(t) = f(t) + X(t), \quad (4.7)$$

wobei $f(t) = a + bt$ eine deterministische lineare Funktion ist und X ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Konstanten $\mu_V, \sigma_V > 0$, der unter einer \mathbb{P} -Brownschen Bewegung \widetilde{W} definiert ist als

$$dX(t) = \mu_V X(t) dt + \sigma_V d\widetilde{W}(t). \quad (4.8)$$

Zwischen \widetilde{W} und der Brownschen Bewegung \overline{W} ist eine konstante Korrelation c_1 erlaubt, weswegen

$$\widetilde{W}(t) := c_1 W_1(t) + \sqrt{1 - c_1^2} W_2(t) \quad (4.9)$$

gesetzt wird.

Das Einlagenvolumen wird demnach als Prozess modelliert, der einem Trend folgt, der durch die Funktion f beschrieben wird und gleichzeitig zufällig um diesen herum schwankt. Da X als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess die Eigenschaft der Mittelwert-rückkehr besitzt, bleibt der generelle Trend der Funktion f erhalten.

Maßwechsel im Normalmodell Um den Volumensprozess auch unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} zu beschreiben, wird nach dem Satz von Girsanov (Satz 2.10) ein Maßwechsel in Gleichung (4.7) vorgenommen. Wenn die Definition für die Brownsche Bewegung \widetilde{W} aus (4.9) in die obige Gleichung eingesetzt wird, gilt

$$dX(t) = \mu_V X(t) dt + \sigma_V c_1 dW_1(t) + \sigma_V \sqrt{1 - c_1^2} dW_2(t),$$

und damit gilt nach Kalkbrener und Willing [13] mit einem Maßwechsel

$$dX(t) = \mu_V X(t) dt + \sigma_V c_1 (dW_1^{\mathbb{Q}}(t) - \lambda_1 dt) + \sigma_V \sqrt{1 - c_1^2} (dW_2^{\mathbb{Q}}(t) - \lambda_2 dt),$$

da in Anschluss an Bemerkung 4.1 gilt, dass $\lambda_2 = 0$ ist, erhält man

$$\begin{aligned} dX(t) &= (\mu_V X(t) dt - \sigma_V c_1 \lambda_1) dt + \sigma_V (c_1 dW_1^{\mathbb{Q}}(t) + \sqrt{1 - c_1^2} dW_2^{\mathbb{Q}}(t)) \\ dX(t) &= (-\sigma_V c_1 \lambda_1 + \mu_V X(t)) dt + \sigma_V d\widetilde{W}^{\mathbb{Q}}(t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die Verwendung des risikoneutralen Volumenprozesses wird im Abschnitt über das Management des Zinsrisikos näher diskutiert. Insbesondere in Bemerkung 4.15 wird bei der Simulation des Barwerts der Sichteinlagen auf den risikoneutralen Volumenprozess zurückgegriffen.

Schätzung der Modellparameter im Normalmodell Die Parameter a, b, μ_V, σ_V werden auf Basis einer historischen Zeitreihe von Einlagenvolumendaten v_0, \dots, v_m geschätzt. Mittels einer linearen Regression können die Parameter a und b für die zeitabhängige Trendfunktion geschätzt werden. Um μ_V und σ_V schätzen zu können,

muss die Zeitreihe der Volumendaten um den Trend bereinigt werden. Das wird durch Subtraktion von $f(t)$ erreicht, also

$$\bar{v}_i := v_i - (a + (i - m)\Delta b),$$

wobei Δ die Länge des Zeitintervalls zwischen zwei Beobachtungen v_i und v_{i+1} bezeichnet, das heißt im Falle von täglichen Beobachtungen wäre $\Delta = 1$. Im nächsten Schritt wird der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess diskretisiert durch

$$X(t + \Delta) = X(t) + \mu_V X(t)\Delta + \sigma_V \Delta \widetilde{W}(t),$$

wodurch mit Hilfe der Korrektur

$$X(t + \Delta) - X(t) - \mu_V X(t)\Delta,$$

die Volumendaten ohne Trend $(\bar{v}_0, \dots, \bar{v}_m)$ in eine Stichprobe $u = (u_1, \dots, u_m)$ von zentrierten normalverteilten Zufallsvariablen mit Varianz $\sigma_V^2 \Delta$ verwandelt werden können. Die Parameter μ_V und σ_V werden so gewählt, dass sie mit den ersten beiden Momenten übereinstimmen.

Alternativ kann die Schätzung von μ_V und σ_V mittels der Maximum-Likelihood-Methode erfolgen, was in diesem Fall äquivalent zur Kleinsten-Quadrate-Schätzung für Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse ist.

Schätzung der Korrelationsparameter Abschließend muss noch der Korrelationsparameter c_1 geschätzt werden. Mittels Hauptkomponentenanalyse (PCA) kann die Korrelation zwischen den Marktzinsen und dem Einlagenvolumen bestimmt werden. Wie in Kalkbrener und Willing [13] beschrieben, entspricht die erste Hauptkomponente dem gesuchten Korrelationsparameter.

Bemerkung 4.10. Die PCA ist ein Verfahren zur Dimensionsreduktion und kann verwendet werden, um die Komponenten der stochastischen Einflüsse, die den größten Teil der Variabilität ausmachen, zu konstruieren. Das grundlegende Prinzip hinter der PCA ist die Spektralzerlegung aus der linearen Algebra, welche besagt, dass jede reellwertige symmetrische $(n \times n)$ -Matrix Q wie folgt zerlegt werden kann

$$Q = ALA^\top,$$

wobei $L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix ist, die die nach der Größe geordneten Eigenwerte $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ enthält, und A eine orthogonale Matrix (also $A^{-1} = A^\top$) ist, deren Spalten die normalisierten Eigenvektoren enthalten.

Lognormalmodell

Ein Nachteil des Normalmodells besteht darin, dass das Einlagenvolumen negativ werden kann. Für kurze Zeiträume oder bei positiven Trends in den zugrundeliegenden Daten ist dies zumeist kein Problem, jedoch können sich über längere Zeiträume oder bei hoher Volatilität unerwünschte Effekte ergeben, wodurch die Notwendigkeit für ein Modell entstehen könnte, welches nur positive Einlagenvolumina ermöglicht. Das Lognormalmodell erfüllt diese Eigenschaft und ist von seinem grundlegenden Aufbau dem Normalmodell aus dem letzten Abschnitt sehr ähnlich. Der Volumenprozess ist jedoch nicht wie in Gleichung (4.7) definiert, sondern als

$$V(t) = e^{f(t)+X(t)}$$

mit der linearen Funktion $f(t) = a + bt$ und dem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess aus Formel (4.8). Alle im letzten Abschnitt beschriebenen Verfahren können ebenfalls auf das Lognormalmodell angewendet werden. Der einzige Unterschied besteht darin, dass vor der Parameterkalibrierung die historischen Volumina durch ihre Logarithmen ersetzt werden müssen.

4.2. Risikomanagement

Ausgehend von Erfordernissen, die in Kapitel 3 beschrieben sind, wird in diesem Abschnitt auf die wichtigsten Aspekte der Modellierung des Liquiditäts- und Zinsrisikos näher eingegangen.

4.2.1. Liquiditätsrisikomanagement

Basierend auf der Laufzeitstruktur der Liquidität (*Term Structure of Liquidity*) kann das Liquiditätsrisiko betrachtet werden. Für $0 \leq t \leq T$ sei der Minimumsprozess definiert als

$$M(t) := \min_{0 \leq s \leq t} V(s).$$

Für jedes Szenario beschreibt der Prozess M das minimale Volumen im Zeitintervall $[0, t]$ und damit das für Investitionen verfügbare Kapital in dieser Periode.

Definition 4.11 (Term Structure of Liquidity). Für $0 < p < 1$ bezeichne $\text{TSL}(t, p)$ das p -Quantil von $M(t)$. Die Funktion TSL bildet $[0, T] \times (0, 1)$ in die reellen Zahlen ab und wird die Term Structure of Liquidity genannt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass V im Zeitintervall $[0, t]$ unter das Level $\text{TSL}(t, p)$ fällt ist demnach genau p . Anders ausgedrückt ist $\text{TSL}(t, p)$ mit Wahrscheinlichkeit p genau das Kapital, welches in der Periode $[0, t]$ für Investments zur Verfügung steht.

Bemerkung 4.12. Die Term Structure of Liquidity kann für die Immunisierung eines Portfolios gegen das Liquiditätsrisiko verwendet werden. Mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen kann die Term Structure of Liquidity wie folgt simuliert werden

$$\begin{aligned} M(t) &= \min_{0 \leq s \leq t} V(s), \\ V(t) &= a + bt + X(t), \\ dX(t) &= \mu_V X(t) dt + \sigma_V d\widetilde{W}(t). \end{aligned}$$

Unter dem Maß \mathbb{P} kann eine große Anzahl von Pfaden für V simuliert und für jeden Pfad der Minimumprozess konstruiert werden. Zum Zeitpunkt t müssen die Werte der Minimumspfade der Größe nach geordnet werden, damit dann durch Auswahl des geeigneten Elements aus dieser Liste das Quantil $\text{TSL}(t, p)$ bestimmt wird.

4.2.2. Zinsrisikomanagement

Ziel dieses Abschnitts ist es ein replizierendes Bondportfolio mit fixen Fälligkeiten zu konstruieren, welches aus dem Deltaprofil der Einlagen ohne Fälligkeit abgeleitet wird. Um das Deltaprofil zu berechnen, ist eine Methode zur Preisfindung nötig, welche aus Jarrow und van Deventer [12] übernommen wird.

Bepreisung von Einlagen ohne Fälligkeit

Da der Einlagenzins normalerweise unterhalb der Marktzinsen liegt, weisen solche Einlagen einen positiven Wert für Kreditinstitute auf. Ausgehend von den Cashflows, die in Tabelle 4.1 skizziert sind, wird im Folgenden der Cashflow $C_V(t_i)$ der Sichteinlagen zur Zeit t_i definiert.

4. Stochastisches 3-Komponenten-Modell

t_0	t_1	t_2	\dots	t_{m-1}	t_m
$+V(t_0)$	$-V(t_0)d(t_0)$	$-V(t_1)d(t_1)$	\dots	$-V(t_{m-2})d(t_{m-2})$	$-V(t_{m-1})d(t_{m-1})$
	$-V(t_0)$	$-V(t_1)$	\dots	$-V(t_{m-2})$	$-V(t_{m-1})$
	$+V(t_1)$	$+V(t_2)$	\dots	$+V(t_{m-1})$	

Tabelle 4.1.: Schematische Darstellung der Cashflowkomponenten von Einlagen ohne Fälligkeit über die Zeitpunkte t_0, \dots, t_m hinweg.

Definition 4.13. Das Zeitintervall $[0, T]$ wird diskretisiert mit Schrittweite Δ und Handelszeitpunkten $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = T$, sodass $t_i - t_{i-1} = \Delta$ ist. Der Cashflow $C_V(t_i)$ zur Zeit t_i ist definiert als

$$\begin{aligned} C_V(t_0) &:= V(t_0), \\ C_V(t_i) &:= -V(t_{i-1})d(t_{i-1}) + V(t_i) - V(t_{i-1}), \quad \text{für } i = 1, \dots, m-1, \\ C_V(t_m) &:= -V(t_{m-1})d(t_{m-1}) - V(t_{m-1}). \end{aligned}$$

Aus dieser Definition ergibt sich der Barwert der Sichteinlagen zum Zeitpunkt t_0 , geschrieben als $PV(t_0)$ oder kurz PV , wie folgt

$$\begin{aligned} PV &= V(t_0) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{C_V(t_i)}{B(t_i)} \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{C_V(t_m)}{B(t_m)} \right] \\ &= V(t_0) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{-V(t_{i-1})d(t_{i-1}) + V(t_i) - V(t_{i-1})}{B(t_i)} \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{-V(t_{m-1})d(t_{m-1}) - V(t_{m-1})}{B(t_m)} \right], \end{aligned} \tag{4.11}$$

und durch Zusammenfassen der Terme ergibt sich

$$\begin{aligned} &= V(t_0) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^m \frac{V(t_{i-1})d(t_{i-1})}{B(t_i)} \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{V(t_i) - V(t_{i-1})}{B(t_i)} \right) - \frac{V(t_{m-1})}{B(t_m)} \right], \end{aligned} \tag{4.12}$$

unter Verwendung von $B(t_i) = B(t_{i-1})(1 + r(t_{i-1}))$ und $B(0) = 1$ gilt weiters

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[V(t_0) \underbrace{\frac{1 + r(t_0)}{B(t_1)}}_{=1} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{V(t_i)}{B(t_i)} - \sum_{i=1}^m \frac{V(t_{i-1})}{B(t_i)} - \sum_{i=1}^m \frac{V(t_{i-1})d(t_{i-1})}{B(t_i)} \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{V(t_0)(1 + r(t_0))}{B(t_1)} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{V(t_i)(1 + r(t_i))}{B(t_{i+1})} - \sum_{i=1}^m \frac{V(t_{i-1})}{B(t_i)} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^m \frac{V(t_{i-1})d(t_{i-1})}{B(t_i)} \right],
 \end{aligned}$$

durch Hereinziehen des ersten Terms in die Summe und einen Indexshift folgt

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^m \frac{V(t_{i-1})(1 + r(t_{i-1}))}{B(t_i)} - \sum_{i=1}^m \frac{V(t_{i-1})}{B(t_i)} - \sum_{i=1}^m \frac{V(t_{i-1})d(t_{i-1})}{B(t_i)} \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=1}^m \frac{V(t_{i-1})r(t_{i-1}) - V(t_{i-1})d(t_{i-1})}{B(t_i)} \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{V(t_i)(r(t_i) - d(t_i))}{B(t_{i+1})} \right]. \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

Der Nettobarwert in Formel (4.11) stellt die anfänglich erhaltenen Einlagen $V(t_0)$, zuzüglich aller abdiskontierten Cashflows im Laufe der Zeit dar. Durch Einsetzen der einzelnen Cashflow-Bestandteile und mit Hilfe von Formel (4.12) kann eine umfassendere Interpretation vorgenommen werden. Der Nettobarwert setzt sich aus $V(t_0)$ plus allen Änderungen der Einlagen im Laufe der Zeit, abzüglich der Rendite der Einlagen von t_{m-1} zum Zeitpunkt t_m und abzüglich des Barwerts der Gesamtkosten für die Einlagen zusammen.

Diese beiden Darstellungen ermöglichen es jedoch nicht sofort anzugeben, ob der Barwert der Sichteinlagen positiv oder negativ ist. Wenn die Annahmen aus Bemerkung 4.4 gelten, dann folgt aus Formel (4.13) und wegen $r(t) \geq d(t)$, dass der Barwert der Sichteinlagen nicht negativ ist. Falls diese Annahme verletzt sein sollte, kann dieser Barwert, bedingt durch negative Marktzinsen und nach unten hin beschränkte Einlagenzinsen, durchaus auch negativ sein.

Für den Spezialfall, dass $r(t) = d(t)$ für alle Zeitpunkte t ist, ergibt sich aus Formel (4.13), dass $PV = 0$, also der Barwert der Sichteinlagen gleich Null ist.

Bemerkung 4.14. Die Darstellung des Nettobarwerts, wie sie in Formel (4.13) angegeben ist, erlaubt folgende ökonomische Interpretation als Wert eines exotischen Zinsswaps der m Perioden andauert (vergleiche hierzu Definition 2.11). Dabei erhält der Besitzer den variablen Zinssatz $r(t_i)$ und zahlt den variablen Zinssatz $d(t_i)$ mit amortisierendem Kapital $V(t_i)$ zur Zeit t_i . Mit dieser Interpretation kann ein Hedgingansatz entwickelt werden. Es bezeichne C den Barwert der Sichteinlagenverbindlichkeit gegenüber der Bank zum Zeitpunkt t_0 , die definiert ist als

$$C(t_0) = V(t_0) - PV(t_0). \quad (4.14)$$

Dies ist also die Differenz der anfänglichen Einlagen minus deren Nettobarwert. Um die Sichteinlagenverbindlichkeit zu hedgen, kann Formel (4.14) herangezogen werden. Es müssen $V(t_0)$ Geldeinheiten in den Bond $P(t_0, t_1)$ investiert und gleichzeitig ein exotischer Zinsswap, der durch $PV(t_0)$ repräsentiert wird, leerverkauft werden.

Die obigen Ausführungen beziehen sich auf diskrete Handlungszeitpunkte, doch auch ein stetiges Analogon zu Formel (4.13) existiert, welches naheliegenderweise wie folgt aussieht

$$PV = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \frac{V(t)(r(t) - d(t))}{B(t)} dt \right]. \quad (4.15)$$

Wie bereits zuvor ist auch hier die Interpretation als exotischer Zinsswap, der den variablen Zinssatz $r(t)$ zahlt und den variablen Zinssatz $d(t)$ auf ein stochastisches Kapital $V(t)$ erhält, möglich.

Bemerkung 4.15. Um den Barwert der Sichteinlagen, wie er in Formel (4.11) beschrieben ist, zu simulieren, müssen unter dem Maß \mathbb{Q} folgende Prozesse simuliert werden:

- 1) Die Marktzinsen, beispielsweise auf Basis eines Short-Rate-Modells, die in Abschnitt 4.1.1 vorgestellt wurden.
- 2) Die Einlagenzinsen als eine deterministische Funktion in Abhängigkeit der Marktzinsen, wie in Abschnitt 4.1.2 beschrieben.
- 3) Das Geldmarktkonto als $B(t) = \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right)$.
- 4) Das Einlagenvolumen wird nach dem Normalmodell aus Abschnitt 4.1.3 als $V(t) = a + bt + X(t)$ modelliert, mit einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess X , der

definiert ist über

$$dX(t) = (-\sigma_V c_1 \lambda_1 + \mu_V X(t)) dt + \sigma_V d\widetilde{W}^{\mathbb{Q}}(t),$$

wobei $\widetilde{W}^{\mathbb{Q}}$ eine mit W_1 korrelierte Brownsche Bewegung ist. Der Korrelationskoeffizient ist als c_1 gegeben.

Konstruktion des replizierenden Portfolios

Nachdem eine Formel für die Preisfindung festgelegt wurde, kann die Berechnung der Sensitivität vorgenommen werden. Insbesondere können Deltas durch Verschieben eines Teiles der Zinskurve oder der gesamten Zinskurve berechnet werden. Das replizierende Bondportfolio wird anschließend so konstruiert, dass es dasselbe Preis- und Deltaprofil wie die Sichteinlagen hat.

Bevor die Replikationsmethodik angewandt werden kann, muss die Spezifikation des Volumenprozesses angepasst werden. Der Prozess $V(t)$ spezifiziert das zukünftige Einlagenvolumen und enthält Zuwächse durch neue Einlagen in der Periode $[0, t]$. Der Zweck des zum Zeitpunkt $t = 0$ konstruierten Anleihenportfolios besteht jedoch darin das aktuelle Einlagenvolumen zu replizieren oder abzusichern. Zukünftige Erhöhungen sollen nicht zum Zeitpunkt $t = 0$ abgesichert werden, sondern sobald die neuen Einlagen verfügbar sind. Die Konstruktion des replizierenden Portfolios muss daher auf einem Prozess basieren, der die Stabilität des aktuellen Volumens widerspiegelt, aber künftige Volumensteigerungen ignoriert. Eine natürliche Wahl ist der Prozess

$$M(t) = \min_{0 \leq s \leq t} V(s),$$

da dieser das Volumen spezifiziert, welches über die gesamte Zeitdauer $[0, t]$ zur Verfügung steht.

Bemerkung 4.16. Der Prozess $M(t)$ hat die folgenden Eigenschaften:

- a) Aufgrund des Minimums in der Definition gilt, dass $M(t)$ durch $V(t)$ dominiert wird, also $M(t) \leq V(t)$ für alle Zeitpunkte t . Zudem ist $M(t)$ monoton fallend, da das Minimum über größere Mengen höchstens kleiner werden kann, also $M(s) \geq M(t)$ für alle $s \leq t$.
- b) Insbesondere ist $M(t)$ der maximale Prozess mit dieser Eigenschaft. Falls ein

Prozess $\bar{M}(t)$ folgendes erfüllt: $\bar{M}(t) \leq V(t)$ für alle t und $\bar{M}(s) \geq \bar{M}(t)$ für alle $s \leq t$, dann gilt $\bar{M}(t) \leq M(t)$ für alle t .

Bemerkung 4.17. Die Konstruktion des replizierenden Portfolios kann wie folgt zusammengefasst werden:

- 1) Das Preis- und Deltaprofil der Sichteinlagen wird mit Formel (4.15) berechnet, wobei einerseits in Formel (4.11) und andererseits in Bemerkung 4.15 der Einlagenvolumenprozess $V(t)$ jeweils durch $M(t)$ ersetzt wird.
- 2) Das Preis- und Deltaprofil wird dann durch ein Bondportfolio repliziert.

Duration

Die Duration ist ein Maß für die Sensitivität eines Assets gegenüber einer unmittelbaren kleinen Parallelverschiebung der Zinsstruktur und kann als Kennzahl für das Zinsänderungsrisiko des Portfolios verstanden werden. Nach Hult et al. [10] kann die Duration wie folgt berechnet werden

$$D = \sum_{k=1}^n t_k \frac{c_k e^{-r_k t_k}}{\sum_{j=1}^n c_j e^{-r_j t_j}},$$

wobei für $k = 1, \dots, n$ der Cashflow zur Zeit t_k mit c_k bezeichnet wird und r_k die vorherrschende Short-Rate ist.

In Anlehnung an Henningson und Skoglund [8] wird die Duration für das Portfolio auf Basis einer Monte-Carlo-Simulation berechnet. Dazu werden nun die Cashflows aus Definition 4.13 verwendet, wobei der Volumenprozess V wie bei der Konstruktion des replizierenden Portfolios durch den Minimumprozess M ersetzt wird.

5. Fallstudie zum Risikomanagement

Der in Kapitel 4 beschriebene Ansatz eines 3-Komponenten-Modells wird in diesem Kapitel auf Basis realer Daten implementiert und dessen Eignung für das praktische Risikomanagement evaluiert.

5.1. Datengrundlage

Um eine zufriedenstellende Güte bei der Parameterschätzung zu erreichen, ist es notwendig, dass die verwendeten Daten in ausreichender Granularität über einen hinreichend langen Zeitraum zur Verfügung stehen. Alle in dieser Arbeit verwendeten Daten sind öffentlich zugänglich und werden nachfolgend kurz vorgestellt.

Marktzinsen Für die Modellierung der Short-Rate wird der Eonia (Euro OverNight Index Average) herangezogen, der auf der Homepage des EMMI publiziert wird¹. Die Daten sind seit dem Jahr 1999 auf täglicher Basis verfügbar. Der Eonia ist der eintägige Zinssatz zwischen Banken für die Eurozone. Zu diesem Zinssatz gewähren sich europäische Banken Anleihen in Euro für einen Tag, weswegen dieser auch als der eintägige Euribor interpretiert wird. Damit ist der Eonia die beste zur Verfügung stehende Approximation für einen Short-Rate-Prozess.

Einlagenzinsen Für die Einlagenzinsen werden Daten der Österreichischen Nationalbank (OENB) herangezogen, die aggregierte Daten für Zinssätze und Wechselkurse von österreichischen Finanzinstituten auf ihrer Homepage zur Verfügung stellt². Die bereitgestellten Daten werden auf monatlicher Basis von den Kreditinstituten an die OENB gemeldet und gehen bis ins Jahr 1995 zurück. Für die Analysen in dieser

¹<https://www.emmi-benchmarks.eu/euribor-eonia-org/eonia-rates.html>

²<https://www.oenb.at/Statistik/Standardisierte-Tabellen/zinssaetze-und-wechselkurse.html>

Arbeit wird der Einlagenzinssatz für Bestandskunden herangezogen, wobei zwischen privaten Haushalten und nichtfinanziellen Unternehmen unterschieden wird.

Einlagenvolumen Für das Einlagenvolumen werden ebenfalls aggregierte Daten zu den Einlagen von Monetären Finanzinstituten der OENB herangezogen³. Die bereitgestellten Daten werden auf monatlicher Basis von den Kreditinstituten an die OENB gemeldet und gehen bis ins Jahr 1998 zurück. Als Grundlage für die Analyse dienen wiederum die Daten zu den Einlagen von private Haushalten und nichtfinanziellen Unternehmen. Alle Werte werden im Folgenden in der Einheit 1.000 Mio Euro dargestellt, um eine bessere Lesbarkeit zu ermöglichen.

Nullkuponanleihen Daten zu den Yields von Nullkuponanleihen werden von der Europäischen Zentralbank auf täglicher Basis zur Verfügung gestellt und reichen bis ins Jahr 2004 zurück⁴. Auf Basis dieser Daten kann eine Schätzung für den Marktpreis des Risikos vorgenommen werden.

Für die praktische Implementierung der Fallstudie wurde auf Teile der oben erwähnten Daten zurückgegriffen. In Abbildung 5.1 sind die Zeitreihen der Marktzinssätze, der Einlagenzinsen und des Einlagenvolumens dargestellt, die für die Modellschätzung verwendet wurden.

5.2. Praktische Implementierung

Das Modell wurde in Python 3.9 [20] implementiert und die wichtigsten Quellcodes für die Berechnungen können in Anhang A.2 eingesehen werden. Die nachfolgend vorgestellten Anwendungen des 3-Komponenten-Modells wurden zu einem Kommandozeilenprogramm zusammengefasst, wodurch eine einfache Anwendung für die Zwecke des Risikomanagements möglich ist. Wichtige Parameter können durch den Benutzer direkt spezifiziert werden, wodurch die Betrachtung von verschiedenen Szenarien vereinfacht wird. Als Beispiel seien hier die Möglichkeiten zur Auswahl des Startdatums

³<https://www.oenb.at/Statistik/Standardisierte-Tabellen/OeNB-Eurosystem-Monetaerindikatoren.html>

⁴https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html

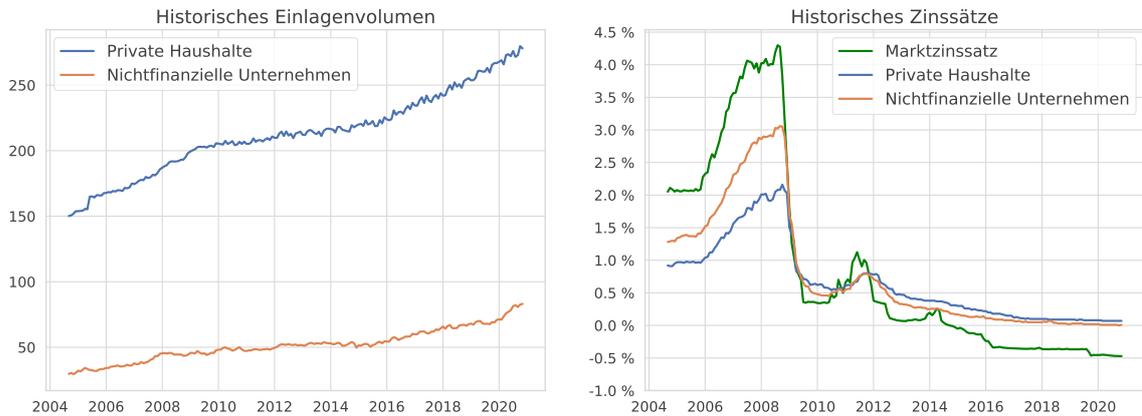


Abbildung 5.1.: Darstellung des historischen Einlagenvolumens in 1.000 Mio Euro für private Haushalte und nichtfinanzielle Unternehmen auf der linken Seite sowie die zugehörigen Markt- und Einlagenzinssätze auf der rechten Seite.

für die Parameterschätzung, die Spezifikation der Anzahl an Pfaden in der Simulation oder auch die manuelle Überschreibung von Parametern einzelner Modelle genannt. Um das Modell in der Praxis flexibel verwenden und erweitern zu können, wurde bei der Implementierung der einzelnen Komponentenmodelle auf die Definition von Schnittstellen geachtet. Exemplarisch sei auf Anhang A.2.1 verwiesen, welches den Code zur Modellierung der Short-Rate beinhaltet. Ein Short-Rate-Modell ist über seine Eigenschaft definiert, Pfade der zukünftigen Short-Rate zu simulieren und diese als Matrix zurückzugeben. Das anschließend definierte Vasicek-Modell stellt eine spezifische Implementierung dar. Durch die konsequente Definition und Verwendung von Schnittstellen, kann jederzeit ein neues Short-Rate-Modell hinzugefügt und verwendet werden.

5.3. Angewandtes Risikomanagement

In diesem Abschnitt werden, basierend auf den in Abschnitt 5.1 beschriebenen Daten, die Methoden aus Kapitel 4 an einem Beispiel präsentiert. Da alle benötigten Daten zumindest auf monatlicher Basis verfügbar sind, bilden diese die Grundlage für die nachfolgenden Simulationen. Konkret wird für die Simulation der Zeitraum der nächsten zehn Jahre mit monatlichen Vorhersagen betrachtet. Für alle nachfolgenden

Berechnungen werden jeweils 150.000 Pfade simuliert.

5.3.1. Liquiditätsrisikomanagement in der Praxis

Für das Liquiditätsrisikomanagement wird zum einen das Normalmodell und zum anderen das Lognormalmodell für das Einlagenvolumen geschätzt, welche in Quellcode A.4 implementiert sind. Im Normalmodell wird das Einlagenvolumen mittels $V(t) = f(t) + X(t)$ modelliert, im Lognormalmodell als $V(t) = \exp(f(t) + X(t))$. In beiden Fällen wird angenommen, dass

$$f(t) = a + bt \quad \text{und} \quad dX(t) = \mu_V X(t) dt + \sigma_V d\widetilde{W}(t)$$

gilt. Beide Modelle wurden sowohl für private Haushalte als auch für nichtfinanzielle Unternehmen geschätzt, um einen Vergleich zwischen zwei verschiedenen Datensätzen zu ermöglichen. Mit den errechneten Parametern wird nach Bemerkung 4.12 eine große Anzahl an Pfaden des zukünftigen Einlagenvolumens simuliert und basierend darauf die Term Structure of Liquidity berechnet. Die Ergebnisse der Parameterschätzung sind in Tabelle 5.1 dargestellt.

Modell	Typ	a	b	μ_V	σ_V
Normal	Privat	278.0270	1.7779	0.0011	2.4617
	Nichtfinanziell	83.1139	0.4499	0.0057	1.0687
Lognormal	Privat	278.0270	1.0427	0.0028	2.4172
	Nichtfinanziell	83.1139	1.0317	0.0021	1.0939

Tabelle 5.1.: Ergebnisse der Parameterschätzungen für das Normal- und Lognormalmodell des Einlagenvolumens von privaten Haushalten und nichtfinanziellen Unternehmen.

Die Ergebnisse in der obigen Tabelle legen eine sehr optimistische Entwicklung des Einlagenvolumens nahe. Eine naheliegende Erklärung ist der stark positive Trend in den zugrundeliegenden Daten, der in Abbildung 5.1 deutlich zu sehen ist. Über die letzten Jahre hinweg stieg das Einlagenvolumen relativ konstant an. Diese Entwicklung spiegelt sich dementsprechend in den Vorhersagen für die nächsten 10 Jahre wider. Der positive Trend aus den zugrundeliegenden Daten schlägt sich vor allem

in der Modellierung des Einlagenvolumens der privaten Haushalte nieder. In Abbildung 5.2 ist exemplarisch das Ergebnis der Simulation für das Normalmodell bei den nichtfinanziellen Unternehmen, mitsamt der Term Structure of Liquidity, dargestellt. Die graphischen Darstellungen der Simulationen auf Basis der anderen Modelle können Anhang A.1 entnommen werden.

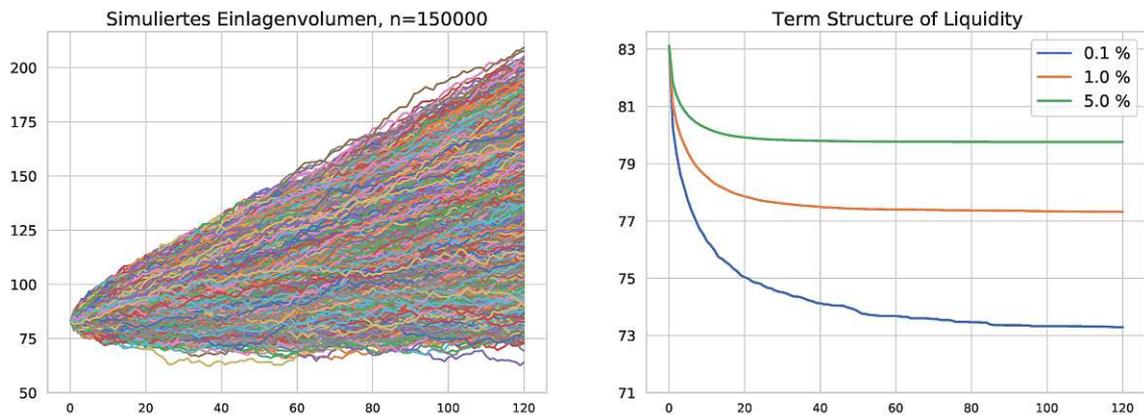


Abbildung 5.2.: Simuliertes Einlagenvolumen der nichtfinanziellen Unternehmen basierend auf dem Normalmodell für die nächsten 10 Jahre und die zugehörige Term Structure of Liquidity für verschiedene Quantile.

Wie in Abschnitt 4.2.1 aufgezeigt, kann die Term Structure of Liquidity dazu verwendet werden eine Abschätzung zu treffen, wie viel Kapital in der betrachteten Periode mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit für Investments zur Verfügung steht. Ausgehend von der obigen Grafik kann mit Hilfe des Plots auf der rechten Seite bereits eine erste Abschätzung des wahrscheinlich zur Verfügung stehenden Kapitals getroffen werden. Im Vergleich mit der Abbildung A.1 für das Normalmodell bei privaten Haushalten werden die Auswirkungen der Modellparameter auf die Term Structure of Liquidity sichtbar. Das Modell für die nichtfinanziellen Unternehmen weist einen deutlich weniger starken Drift auf als jenes für die privaten Haushalte, wie in Tabelle 5.1 ersichtlich ist. Dementsprechend fallen die Ergebnisse für die Term Structure of Liquidity bei den nichtfinanziellen Unternehmen weniger positiv aus.

Betrachtung alternativer Szenarien

Zwei wichtige Aspekte des Risikomanagements sind unter anderem die Betrachtung unterschiedlicher Szenarien und die Einschätzung der Sensitivität eines Modells ge-

genüber Parameteränderungen. Um alternative Szenarien in der Vorhersage betrachten zu können, besteht in der Applikation die Möglichkeit die Parameter b, σ_V, μ_V manuell anzupassen. Dadurch kann einerseits die Sensitivität des Modells in Bezug auf die Veränderung von einem Parameter einfach evaluiert werden und andererseits können optimistischere oder pessimistischere Szenarien simuliert werden.

Die obigen Ergebnisse der Parameterschätzung stellen einen ersten Anhaltspunkt dar. Diese müssen in Abhängigkeit der spezifischen Gegebenheiten des jeweiligen Kreditinstituts angepasst werden. Nachfolgend wird die Möglichkeit von szenariogetriebenen Veränderungen besprochen und exemplarisch der Einfluss einer weniger langen Datenreihe auf die Schätzung aufgezeigt.

Annahme eines weniger positiven Drift Terms Ein naheliegendes Stressszenario für das Modell des Einlagenvolumens besteht aus einer Abflachung des unterstellten Wachstumstrends. Nachfolgend wurden die Auswirkungen einer Halbierung des Trendparameters b auf die Schätzung der Term Structure of Liquidity betrachtet. Eine Veränderung dieser Größenordnung kann als adverses Szenario betrachtet werden. In Abbildung 5.3 wurde erneut ein Normalmodell für die nichtfinanziellen Unternehmen zur Berechnung der Term Structure of Liquidity herangezogen, jedoch wurde der Parameter $b = 0.2$ festgesetzt.

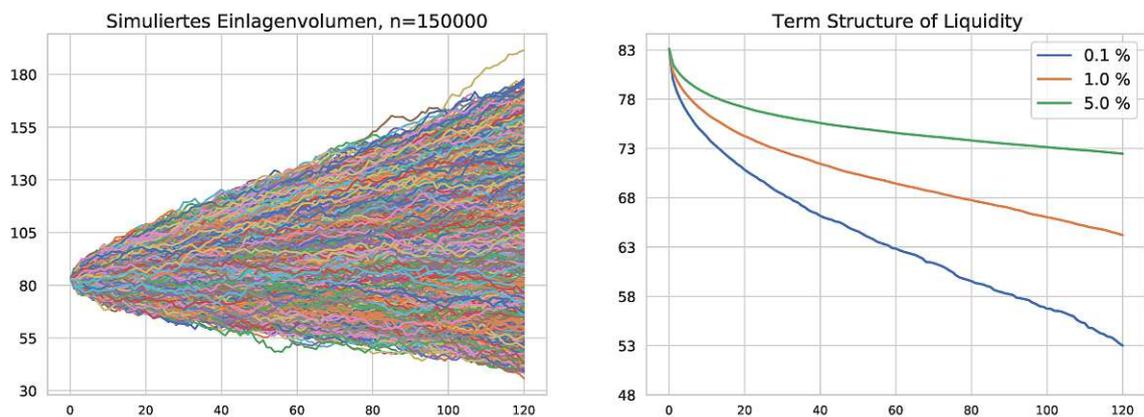


Abbildung 5.3.: Simuliertes Einlagenvolumen und die Term Structure of Liquidity im Normalmodell für nichtfinanzielle Unternehmen, wobei der Parameter $b = 0.2$ gesetzt wurde.

Annahme einer erhöhten Volatilität Nicht nur eine verlangsamte Zunahme im Volumenwachstum kann als negatives Szenario herangezogen werden, sondern auch eine erhöhte Volatilität wirkt sich negativ auf die Term Structure of Liquidity aus. In Abbildung 5.4 sind die Auswirkungen einer erhöhten Volatilität für das Normalmodell bei nichtfinanziellen Unternehmen dargestellt. Es wurde der Parameter $\sigma_V = 1.5$ für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess gewählt, die Volatilität ist also etwa um die Hälfte höher als zuvor.

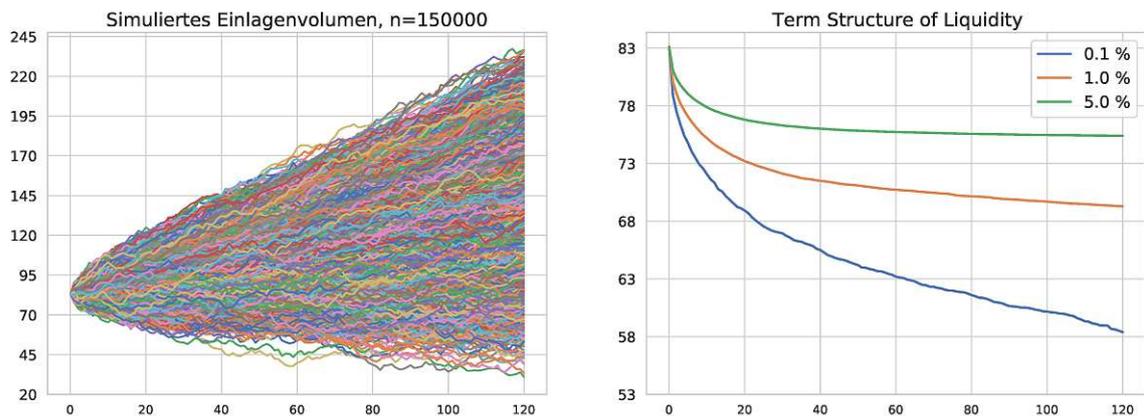


Abbildung 5.4.: Simuliertes Einlagenvolumen und die Term Structure of Liquidity im Normalmodell für nichtfinanzielle Unternehmen, wobei der Parameter $\sigma_V = 1.5$ gesetzt wurde.

In beiden oben beschriebenen Szenarien liefert die Term Structure of Liquidity wie zu erwarten deutlich pessimistischere Ergebnisse als im ursprünglich geschätzten Modell. Diese Auswirkungen sind ebenfalls in Abbildung A.4 und Abbildung A.5 bei dem Modell für private Haushalte sichtbar. Für die Zwecke des Risikomanagements wird die Notwendigkeit verschiedene Szenarien betrachten zu können dadurch noch einmal unterstrichen.

Veränderung der Datengrundlage Bei der eingangs durchgeführte Parameterschätzung wurde der längst mögliche Zeitraum verwendet für den Daten zur Verfügung stehen. Obwohl ein möglichst langer Zeitraum mit vielen Datenpunkten für Schätzungen wünschenswert ist, kann es manchmal sinnvoll sein nicht die gesamte Historie zu berücksichtigen. Mögliche Ursachen hierfür sind Änderungen in den verwendeten Modellen, wodurch historische Daten womöglich nicht mehr zusammenpassen oder

ganz allgemein Qualitätsprobleme bei der Datenanlieferung. Um diese Anforderung zu berücksichtigen, kann wie bereits erwähnt, der Startzeitpunkt für die Parameterschätzung in der Applikation spezifiziert werden. Die geschätzten Parameter für das Normalmodell der nichtfinanziellen Unternehmen mit dem exemplarischen Startzeitpunkt 1. Jänner 2010 können Tabelle 5.2 entnommen werden.

Startzeitpunkt	a	b	μ_V	σ_V
01.01.2004	83.1139	1.0317	0.0021	1.0939
01.01.2010	83.1139	0.7204	0.0100	1.2032

Tabelle 5.2.: Auswirkungen von zwei unterschiedlichen Startzeitpunkten auf die Parameterschätzung im Normalmodell bei nichtfinanziellen Unternehmen.

Die Ergebnisse der Parameterschätzung fallen relativ ähnlich aus, allerdings unterstellt der Trendparameter b auf Basis des kürzeren Zeitraums sogar eine noch positivere Entwicklung im Vergleich zur Schätzung auf Basis der ganzen verfügbaren Zeitreihe.

5.3.2. Zinsrisikomanagement in der Praxis

Wie in Bemerkung 4.15 beschrieben, müssen für das Zinsrisikomanagement die Marktzinsen, die Einlagezinsen, das Geldmarktkonto und das Einlagenvolumen unter dem risikoneutralen Maß simuliert werden. Auf Basis des Eonia als Näherung für die Short-Rate wurden die Parameter für das Vasicek-Modell mit der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt, welche in Quellcode A.2 implementiert ist. Die Simulation von Pfaden der zukünftigen Short-Rate kann mit Quellcode A.1 vorgenommen werden. Die Parameter für das Vasicek-Modell $dr(t) = (a + br(t)) dt + \sigma d\bar{W}(t)$ und den Marktpreis des Risikos λ lauten

$$a = 0.0032, \quad b = -0.0001, \quad \sigma = 0.0012, \quad \lambda = -0.38866.$$

Die Modellierung der Einlagezinsen durch die affin lineare Funktion (4.5) aus Beispiel 4.5 kann mit Hilfe des Quellcodes A.3 vorgenommen werden. Mittels linearer Regression wurden die Parameter für das Modell $d(t) = \beta_0 + \beta_1 r(t)$ geschätzt, die Ergebnisse für die beiden Kontotypen können Tabelle 5.3 entnommen werden. Da die

Zinssätze für private Haushalte und nichtfinanzielle Unternehmen in der Vergangenheit eine vergleichbare Entwicklung aufweisen, fallen die Schätzungen relativ ähnlich aus.

Modell	β_0	β_1
Private Haushalte	0.0032	0.3847
Nichtfinanzielle Unternehmen	0.0025	0.6128

Tabelle 5.3.: Ergebnisse der Parameterschätzung des Einlagenzinssatzes von privaten Haushalten und nichtfinanziellen Unternehmen.

Für das Einlagenvolumen wird wiederum das Normalmodell betrachtet. Die Parameter wurden für dieses Modell bereits geschätzt und können aus Abschnitt 5.3.1 übernommen werden, allerdings müssen bei der Simulation des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses noch der Marktpreis des Risikos und der Korrelationskoeffizient berücksichtigt werden, der mit $c = -0.73391$ geschätzt wurde.

Für die Berechnung des Barwerts der Sichteinlagenverbindlichkeiten wird Formel (4.14) herangezogen, wobei der Volumenprozess durch den Minimumsprozess ersetzt wird, wie im Abschnitt zur Konstruktion des replizierenden Portfolios beschrieben wurde. Für den Barwert der Sichteinlagenverbindlichkeiten folgt damit für die privaten Haushalte

$$C(0) = V(0) - PV(0) = 278.0270 - 85.6041 = 192.4229,$$

und für die nichtfinanziellen Unternehmen

$$C(0) = V(0) - PV(0) = 83.1139 - 12.7655 = 70.3484.$$

Duration des Portfolios

Wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben, wird die Duration des Portfolios mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen berechnet. Bei der Berechnung wurden verschiedene Szenarien verwendet, deren Ergebnisse in Tabelle 5.4 dargestellt sind. Für die Laufzeit des Portfolios wurden mit 5 und 10 Jahren zwei unterschiedliche Zeithorizonte gewählt. Wie bereits bei der Betrachtung der Term Structure of Liquidity wurden die Berechnungen erneut für drei verschiedene Konfidenzniveaus durchgeführt.

Zusätzlich zu diesen Parametern wurde auch der Marktpreis des Risikos variiert. Die drei betrachteten Szenarien entsprechen dabei einmal dem ursprünglich geschätzten Wert $\lambda = -0.38866$ sowie einem Rückgang bzw. Anstieg von jeweils 50%.

Typ	λ	5 Jahre			10 Jahre		
		0.1%	1.0%	5.0%	0.1%	1.0%	5.0%
Private	-0.19	0.76	0.79	0.82	1.70	1.76	1.82
	-0.39	0.96	1.00	1.03	2.06	2.14	2.22
	-0.58	1.19	1.23	1.27	2.14	2.24	2.33
Nonfinancial	-0.19	0.69	0.73	0.77	2.13	2.35	2.54
	-0.39	1.62	1.74	1.83	2.39	2.63	2.85
	-0.58	1.74	1.86	1.97	2.79	3.00	3.18

Tabelle 5.4.: Duration des Portfolios in Jahren für private Haushalte und nichtfinanzielle Unternehmen, wenn unterschiedliche Laufzeiten (5 Jahre vs 10 Jahre), Konfidenzniveaus und Werte für λ betrachtet werden.

In Tabelle 5.4 können verschiedene Effekte beobachtet werden. Der Marktpreis des Risikos zeigt in der Simulation Auswirkungen auf die Duration, in der Form, dass für kleinere Werte von λ die Duration ansteigt. Ebenso steigt die Duration an, wenn das Konfidenzniveau geringer gewählt wird (in der Tabelle als höherer Prozentsatz dargestellt). Wenn für das Portfolio längere Laufzeiten betrachtet werden, steigt wie zu erwarten ebenfalls die Duration an.

Sensitivitätsanalyse

Wie bereits in Bemerkung 4.4 und bei der Interpretation der Formel des Nettobarwerts (4.13) festgehalten wurde, ist der Nettobarwert, unter der Voraussetzung, dass $d(t) \leq r(t)$ ist, stets positiv. Da diese Annahme bei einer Betrachtung von Einlagen ohne Fälligkeit derzeit nicht erfüllt ist, kann dieser Wert durchaus negativ sein. Ökonomisch gesehen, wäre die Annahme bzw. das Halten solcher Einlagen ein schlechtes Geschäft für das betreffende Kreditinstitut, worauf in Abschnitt 1.2 eingegangen wurde.

Um die Auswirkungen von Parameteränderungen in der risikoneutralen Simulation auf die Bestimmung des Nettobarwerts einzuschätzen, wurden alle Parameter des

Modells nacheinander variiert und die Simulation für den Nettobarwert für 150.000 Pfade erneut ausgeführt. Insgesamt wurden jeweils 100 verschiedene Werte für die Parameter μ_V, σ_V, λ eingesetzt, wobei der ursprüngliche Wert herangezogen und dieser dann systematisch nach oben und unten korrigiert wurde. Für den Korrelationsparameter c wurden 200 Werte im Intervall $[-1, 1]$ herangezogen, um die Auswirkungen des Parameters für alle möglichen Werte abschätzen zu können.

In Abbildung 5.5 ist die Sensitivität gegenüber Parameteränderung für nichtfinanzielle Unternehmen grafisch dargestellt. Der ursprüngliche Nettobarwert lag, wie oben aufgezeigt, bei $PV = 12.7655$. In Abbildung 5.6 ist die Sensitivität gegenüber Parameteränderung für das Modell bei privaten Haushalten grafisch dargestellt. Der ursprüngliche Nettobarwert lag, wie oben aufgezeigt, bei $PV = 85.6041$. In beiden Abbildungen ist deutlich zu sehen, dass der Marktpreis des Risikos eine zentrale Rolle bei der Bewertung des Nettobarwerts spielt. Für diesen starken Einfluss wird im nächsten Unterabschnitt versucht eine Erklärung zu finden. Die Parameter μ_V und σ_V sind stärker durch den Zufall beeinflusst, wobei bei steigender Volatilität der Nettobarwert tendenziell absinkt. Insgesamt gesehen fällt der Einfluss dieser Variablen auf den Nettobarwert für die betrachteten Intervalle eher gering aus.

Sensitivität gegenüber dem Marktpreis des Risikos

Die Ergebnisse des letzten Abschnitts zeigen eine deutliche Sensitivität des Normalmodells gegenüber dem Marktpreis des Risikos an. Um diese empirischen Ergebnisse zu untermauern, wird im Folgenden die Ableitung des Barwerts der Sichteinlagen PV aus Formel (4.13) nach λ betrachtet. Um die Ableitung berechnen zu können, wird zuerst die Lösung des Prozesses X aus Gleichung (4.10) benötigt. Dazu werden analog zur Vorgehensweise bei der Lösung des Vasicek Modells in Abschnitt 2.3.2 beide Seiten mit $e^{-\mu_V t}$ multipliziert und anschließend integriert. Die Lösung lautet dann

$$X(t) = X(0)e^{\mu_V t} + \frac{c\sigma_V \lambda}{\mu_V} (1 - e^{\mu_V t}) + \sigma_V \int_0^t e^{\mu_V(t-s)} d\widetilde{W}^{\mathbb{Q}}(s),$$

und für die Ableitung nach λ ergibt sich damit

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = \frac{c\sigma_V}{\mu_V} (1 - e^{\mu_V t}).$$

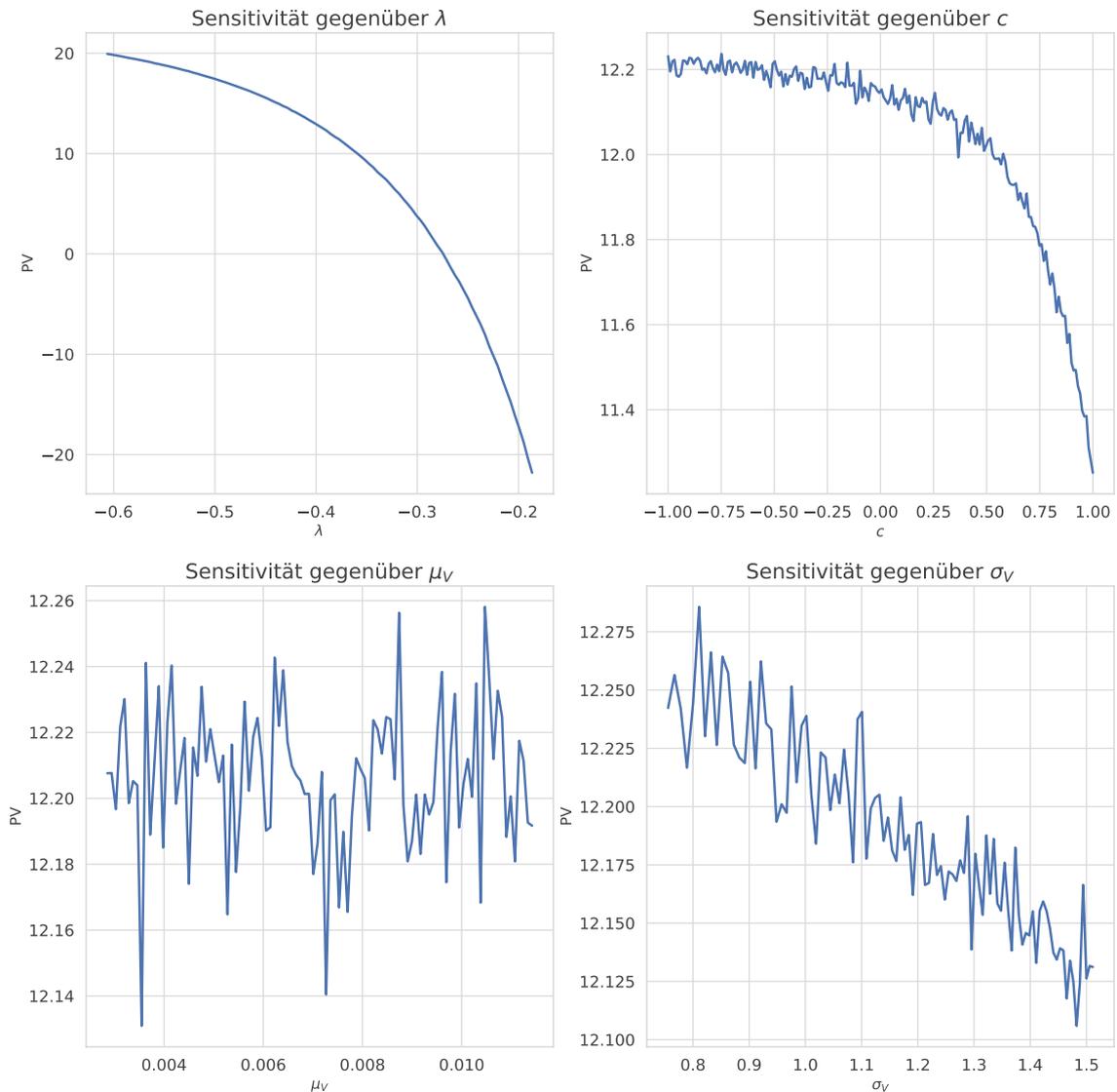


Abbildung 5.5.: Veränderungen des Nettobarwerts im Modell für nichtfinanzielle Unternehmen, wenn einzelne Parameter im Normalmodell variiert werden. Für jeden veränderten Parameter wurde der Nettobarwert auf Basis einer Simulation mit 150.000 Pfaden berechnet. Die ursprünglichen Parameter für das Normalmodell lauten wie folgt: $\mu_V = 0.0057$, $\sigma_V = 1.0687$ sowie $c = -0.7339$ und $\lambda = -0.3886$.

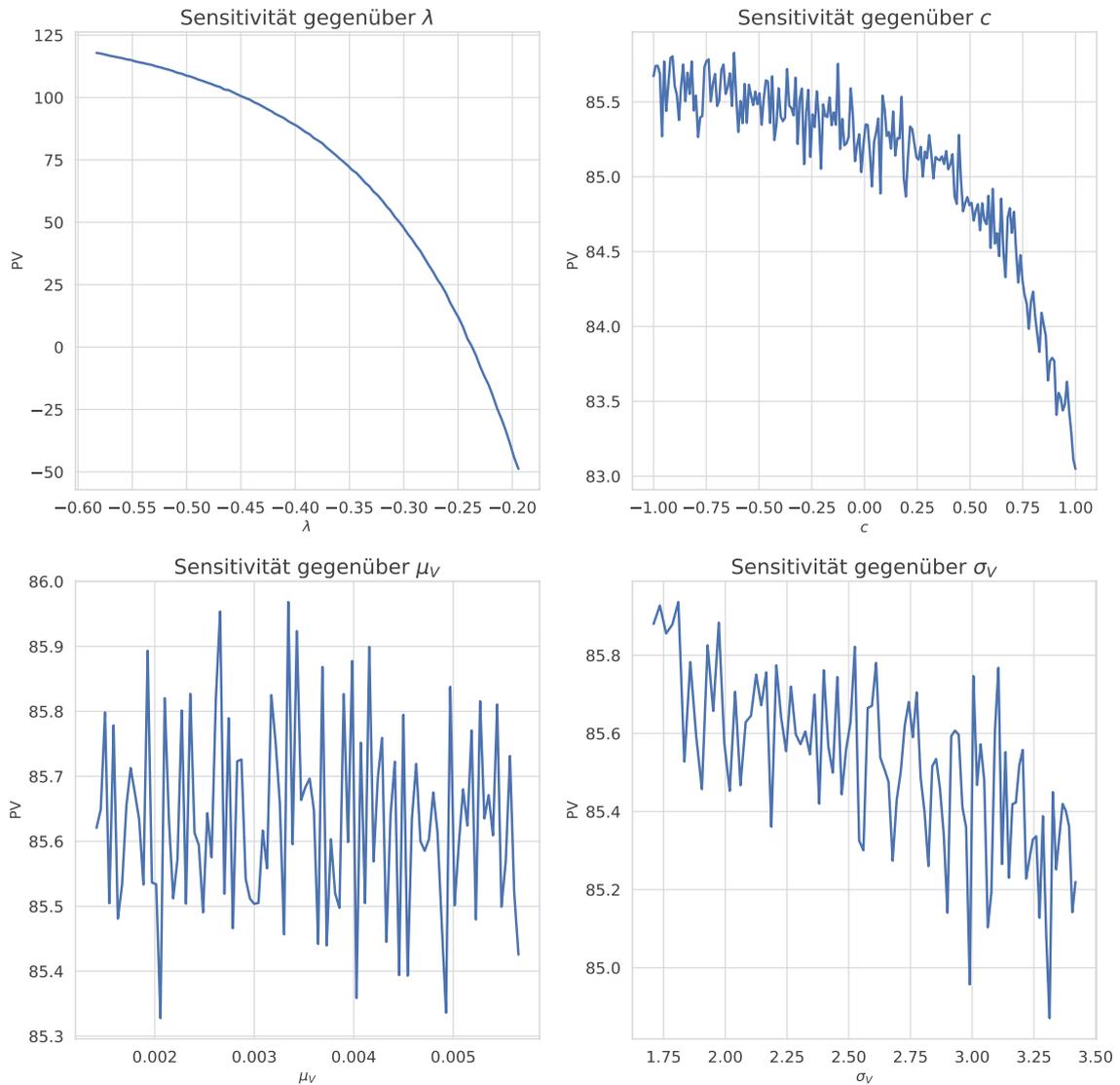


Abbildung 5.6.: Veränderungen des Nettobarwerts im Modell für private Haushalte, wenn einzelne Parameter im Normalmodell variiert werden. Für jeden veränderten Parameter wurde der Nettobarwert auf Basis einer Simulation mit 150.000 Pfaden berechnet. Die ursprünglichen Parameter für das Normalmodell lauten wie folgt: $\mu_V = 0.0011$, $\sigma_V = 2.4617$ sowie $c = -0.7339$ und $\lambda = -0.3886$.

Unter Verwendung dieses Ergebnisses erhält man für die Ableitung des Barwertes, wenn Erwartungswert und Ableitung vertauscht werden

$$\begin{aligned}\frac{\partial PV}{\partial \lambda} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{r(t_i) - d(t_i)}{B(t_{i+1})} \frac{\partial}{\partial \lambda} V(t_i) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{c\sigma_V}{\mu_V} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{r(t_i) - d(t_i)}{B(t_{i+1})} (1 - e^{\mu t_i}) \right].\end{aligned}$$

Die starke Sensitivität kann teilweise durch den Term $(c\sigma_V)/\mu_V$ erklärt werden, da die Schätzungen für μ_V sehr kleine Werte ergeben haben, womit dieser Term betragsmäßig vergleichsweise groß wird.

5.4. Fazit

In dieser Arbeit wurde ein quantitatives Modell für das Liquiditäts- und Zinsrisikomanagement von Einlagen ohne Fälligkeit vorgestellt. Darüber hinaus wurden alle Funktionalitäten in einem flexiblen Kommandozeilenprogramm vereint, welches für verschiedene Aspekte des Risikomanagements direkt verwendet werden kann. Die einzelnen Modellkomponenten können in den zugrundeliegenden Quellcodes aufgrund der konsequenten Definition von Schnittstellen flexibel erweitert werden. Für die einzelnen Komponenten wurden bekannte und weit verbreitete Modelle verwendet, die für die Zwecke des Risikomanagements nützliche Ergebnisse liefern. An einigen Stellen wurden zudem mögliche Erweiterungen angesprochen. Die Modellierung der Marktzinsen kann unter anderem durch die Verwendung von klassischen 2-Faktor-Modellen erweitert werden oder falls genügend Daten vorhanden sind, kann alternativ der HJM-Ansatz verfolgt werden. Bei den Einlagenzinsen wurde mit einem einfachen linearen Modell ein Ansatz gewählt, der eine direkte Relation zu den Marktzinsen unterstellt und zudem nach unten hin mit Null begrenzt wurde. Klarerweise müssen hier die Gegebenheiten von spezifischen Kreditinstituten stärker berücksichtigt werden, falls dieses Modell zur Anwendung kommt. Die Unterscheidung nach Kontotypen mit verschiedenen Mindestverzinsungen oder das Vorhandensein von bestimmten Bonusangeboten sollte ebenfalls in der Modellierung reflektiert werden. Eine mögliche Erweiterung wäre zudem die Berücksichtigung von Verzögerungen bei der Anpassung der Einlagenzinsen, wenn sich die Marktzinsen verändern. Für die Modellierung des

5. Fallstudie zum Risikomanagement

Einlagenvolumens wurde das Normalmodell vorgestellt und die Unterschiede unter dem statistischen Maß \mathbb{P} und dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} näher erläutert. In der Fallstudie kamen Simulationen unter beiden Maßen zur Anwendung. Mit dem Lognormalmodell wurde eine Alternative vorgestellt, die den Vorteil nicht negativer Einlagenvolumina mit sich bringt. In der vorgestellten Fallstudie spielten negative Werte keine Rolle, jedoch könnten sich durch erhöhte Volatilität oder negative Trends im Einlagenvolumen Werte nahe Null oder unter Null ergeben, die eventuell in der Modellierung nicht gewünscht sind.

A. Anhang

Aus Platzgründen wurden in Kapitel 5 nicht alle graphischen Darstellungen der Ergebnisse präsentiert. In Abschnitt A.1 sind die Abbildungen für die restlichen Modelle enthalten. Die den Berechnungen zugrundeliegenden Quellcodes können Abschnitt A.2 entnommen werden.

A.1. Zusätzliche Auswertungen

In diesem Teil des Anhangs finden sich jene Abbildungen, welche für das Liquiditätsrisikomanagement verwendet werden können, jedoch nicht im Hauptteil der Arbeit präsentiert wurden.

Normalmodell für private Haushalte

Die Simulationsergebnisse für das Normalmodell bei nichtfinanziellen Unternehmen finden sich in Kapitel 5, jene für private Haushalte können der unten stehenden Abbildung entnommen werden.

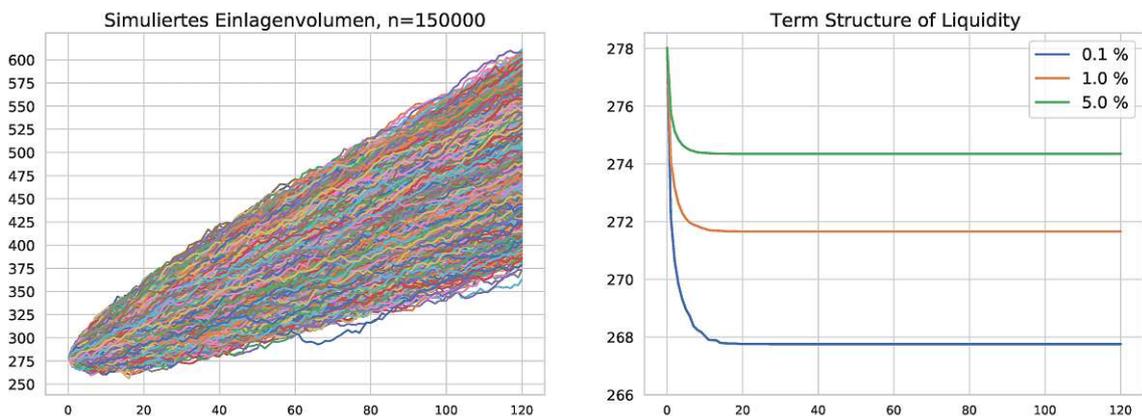


Abbildung A.1.: Simuliertes Einlagenvolumen und TSL im Normalmodell für private Haushalte.

Grafische Darstellung der Ergebnisse im Lognormalmodell

Dieser Abschnitt enthält grafische Darstellungen der Simulationsergebnisse für das Lognormalmodell, angewandt auf private Haushalte und nichtfinanzielle Unternehmen.

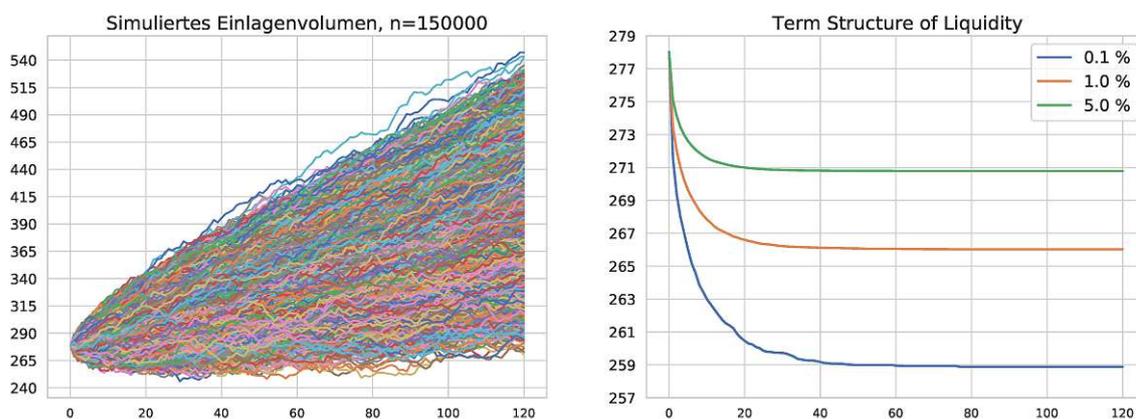


Abbildung A.2.: Simuliertes Einlagenvolumen und TSL im Lognormalmodell für private Haushalte.

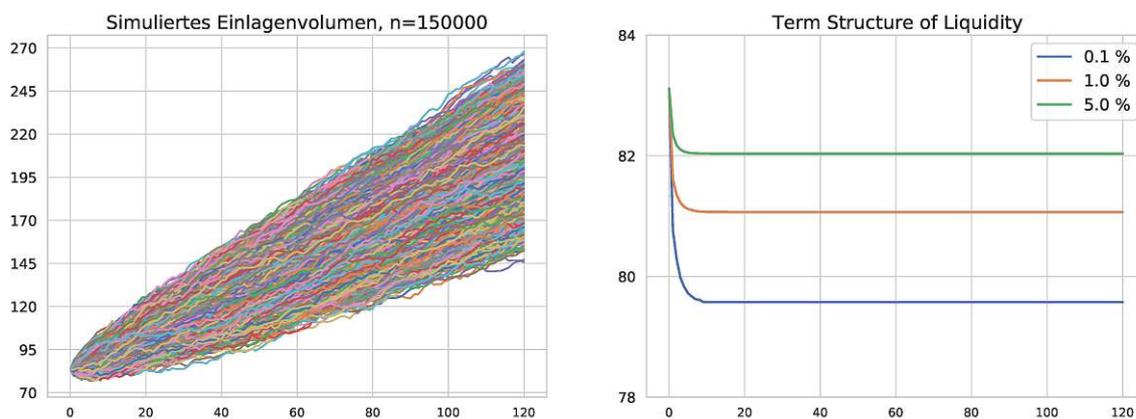


Abbildung A.3.: Simuliertes Einlagenvolumen und TSL im Lognormalmodell für nichtfinanzielle Unternehmen.

Betrachtung alternativer Szenarien im Normalmodell

Bei der Betrachtung alternativer Szenarien wurden in Kapitel 5 bereits die Ergebnisse für nichtfinanzielle Unternehmen vorgestellt. Die Auswirkungen der Szenarien für private Haushalte können den folgenden beiden Abbildungen entnommen werden. Wie bei der Betrachtung alternativer Szenarien in Abschnitt 5.3.1 wurde für die untenstehenden Abbildungen einmal der Driftterm halbiert und einmal die Volatilität um 50% erhöht.

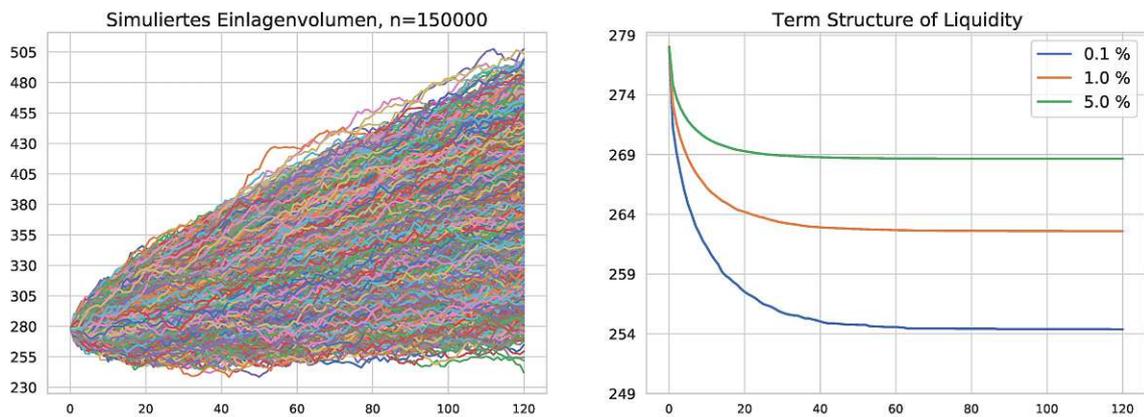


Abbildung A.4.: Simuliertes Einlagenvolumen und TSL im Normalmodell für private Haushalte. Der Parameter b wurde auf 0.85 gesetzt.

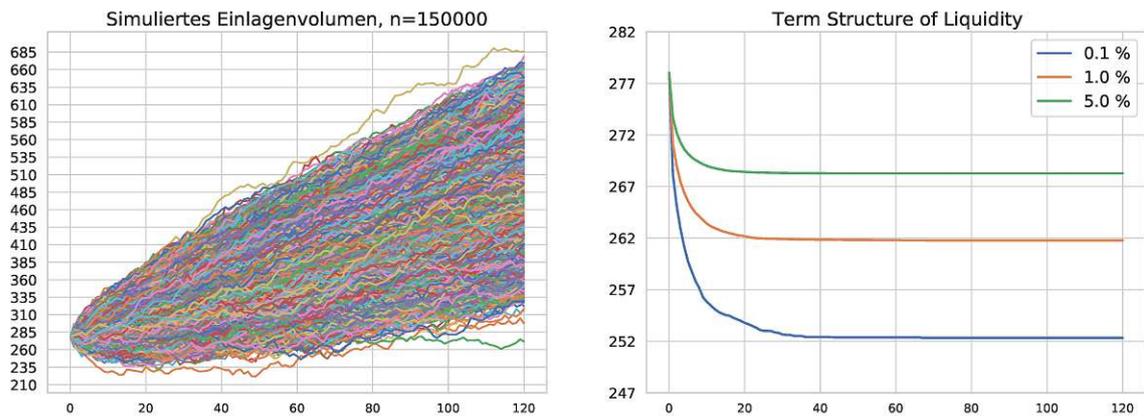


Abbildung A.5.: Simuliertes Einlagenvolumen und TSL im Normalmodell für private Haushalte. Der Parameter σ_V wurde auf 3.75 gesetzt.

A.2. Implementierung in Python

Um die nachfolgenden Quellcodes besser einordnen zu können, wird in Abbildung A.6 die Struktur des Python Moduls, auf dem das Kommandozeilenprogramm basiert, aufgezeigt.

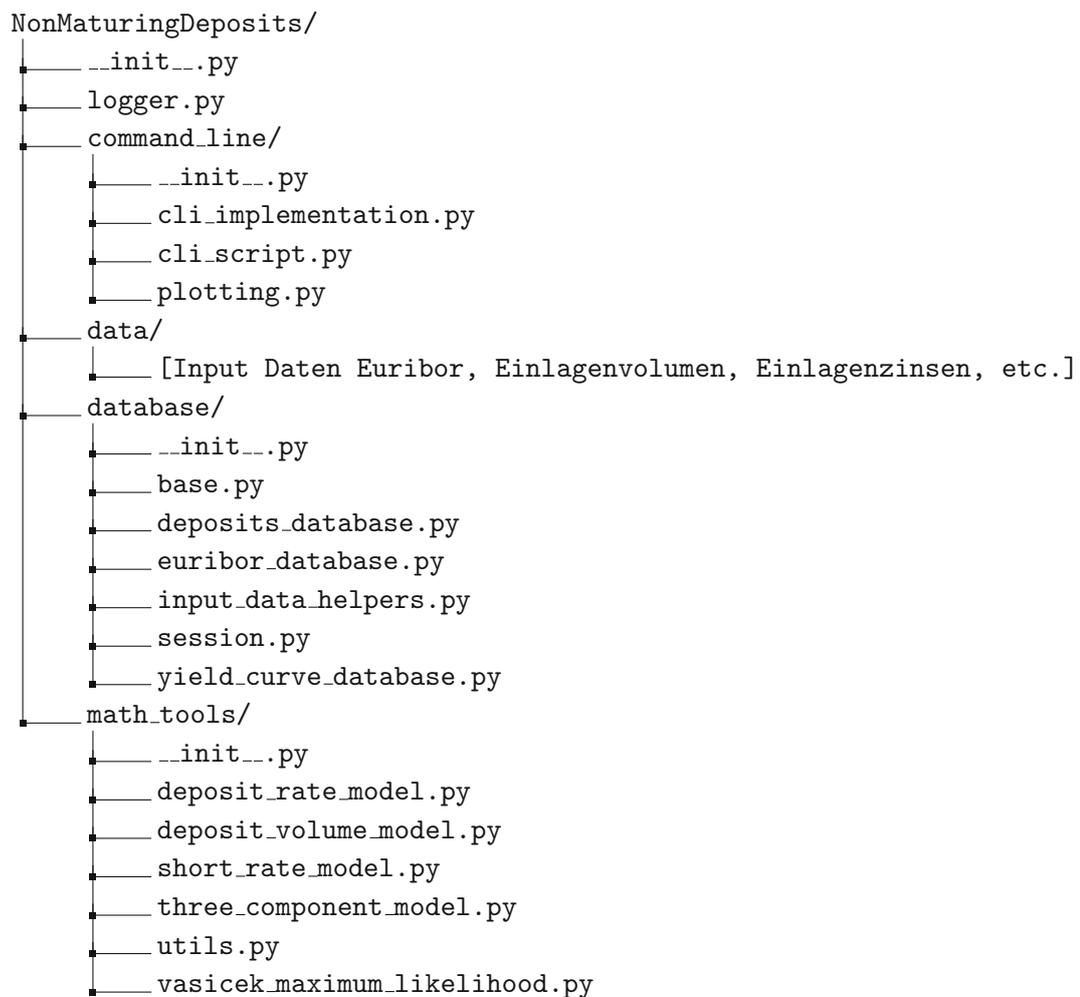


Abbildung A.6.: Darstellung der Projektstruktur im NonMaturingDeposits Python Package. Die Inputdateien wurden aus Gründen der besseren Lesbarkeit nicht einzeln aufgelistet.

A.2.1. Modellierung der Marktzinsen

Für die Maximum-Likelihood-Schätzung der Parameter im Vasicek-Modell und die darauf basierende Modellierung der Marktzinsen wurden die folgenden Quellcodes verwendet.

```

1  import numpy as np
2  from typing import Dict
3  from abc import ABC, abstractmethod
4  from NonMaturingDeposits.math_tools.vasicek_maximum_likelihood import
   ↪ VasicekParameterEstimate
5
6
7  class ShortRateModel(ABC):
8      """
9      An interface for a generic short rate model.
10     """
11     @abstractmethod
12     def simulate_short_rate_paths(self, T: float, n_paths: int) -> np.ndarray:
13         pass
14
15     @abstractmethod
16     def model_parameters_to_dict(self) -> Dict:
17         pass
18
19
20  class VasicekShortRateModel(ShortRateModel):
21     """
22     The Vasicek short rate model of the form:  $dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma$ 
   ↪  $dW(t)$ . Additionally the Brownian Motion used is stored when simulating the
   ↪ short rate path(s).
23     """
24     def __init__(self, r0: float, parameters: VasicekParameterEstimate):
25         self.r0 = r0
26         self.parameters = parameters
27         self.brownian_motion = None
28
29     def simulate_short_rate_paths(self, T: float, n_paths: int) -> np.ndarray:
30         n_steps = int((T / self.parameters.time_delta) + 1)
31         rates = self.r0 + np.zeros((n_steps, n_paths))
32         self.brownian_motion = np.random.normal(size=(n_steps, n_paths))
33         dW_term = self.parameters.sigma * np.sqrt(self.parameters.time_delta) *
   ↪ self.brownian_motion
34
35         for i in range(1, n_steps):
36             dt_term = (self.parameters.b - self.parameters.a * rates[i - 1, :])
   ↪ * self.parameters.time_delta
37             rates[i, :] = rates[i - 1, :] + dt_term + dW_term[i - 1, :]
38

```

```

39     return rates
40
41     def simulate_risk_neutral_short_rate_paths(self, T: float, n_paths: int,
42     ↪ market_price_of_risk: float) -> np.ndarray:
43         n_steps = int((T / self.parameters.time_delta) + 1)
44         rates = self.r0 + np.zeros((n_steps, n_paths))
45         self.brownian_motion = np.random.normal(size=(n_steps, n_paths))
46         dW_term = self.parameters.sigma * np.sqrt(self.parameters.time_delta) *
47         ↪ self.brownian_motion
48
49         for i in range(1, n_steps):
50             dt_term = (self.parameters.b - self.parameters.a * rates[i - 1, :]
51             ↪ - market_price_of_risk * self.parameters.sigma) *
52             ↪ self.parameters.time_delta
53             rates[i, :] = rates[i - 1, :] + dt_term + dW_term[i - 1, :]
54
55         return rates
56
57     def get_parameters(self):
58         return self.parameters.get_parameters()
59
60     def model_parameters_to_dict(self) -> Dict:
61         a, b, sigma = self.get_parameters()
62         return {'a': a, 'b': b, 'sigma': sigma}
63
64     def __str__(self):
65         return f'dr(t) = ({self.parameters.b:.5f} -
66         ↪ ({self.parameters.a:.5f})r(t))dt +
67         ↪ {self.parameters.sigma:.5f}dW(t)'

```

Quellcode A.1.: Inhalt der `short_rate_model.py` Datei mit einer Schnittstellende-
 finition für Short-Rate-Modelle und dem einfaktorischen Vasicek-
 Modell als konkrete Implementierung.

```

1  from abc import ABC, abstractmethod
2  import numpy as np
3
4
5  class VasicekMaximumLikelihoodParameters:
6      """
7      A class that contains the three maximum likelihood parameters present in
8      ↪ the Vasicek model.
9      """
10     def __init__(self, alpha: float, beta: float, variance: float):
11         self.alpha = alpha
12         self.beta = beta
13         self.variance = variance
14
15     class VasicekParameterEstimate(ABC):
16         """
17         An interface for parameter estimation in the Vasicek model of the form:
18         ↪  $dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW(t)$ . A subclass needs to implement the
19         ↪ estimate_model_parameters function that should update the three parameters
20         ↪ from this class.
21         """
22         def __init__(self):
23             self.a = None
24             self.b = None
25             self.sigma = None
26             self.time_delta = None
27
28         @abstractmethod
29         def estimate_model_parameters(self, short_rate_proxy: np.ndarray) -> None:
30             pass
31
32         def get_parameters(self):
33             return (self.a, self.b, self.sigma)
34
35         def _check_parameters(self):
36             if self.a is None or self.b is None or self.sigma is None:
37                 raise Exception(f'One or more parameters are None: a={self.a},
38                 ↪ b={self.b}, sigma={self.sigma}.')
39
40     class VasicekMaximumLikelihoodParameterEstimate(VasicekParameterEstimate):
41         """
42         Concrete implementation for a maximum likelihood parameter estimate in the
43         ↪ Vasicek model.
44         """
45         def __init__(self, short_rate_proxy: np.ndarray, time_delta: int = 1):
46             super().__init__()

```

```

43     self.time_delta = time_delta
44     self.estimate_model_parameters(short_rate_proxy)
45     self._check_parameters()
46
47     def estimate_model_parameters(self, short_rate_proxy: np.ndarray) -> None:
48         max_lik_params =
49             ↪ self._estimate_maximum_likelihood_parameters(short_rate_proxy)
50
51         # assign parameters
52         self.a = -(1 / self.time_delta) * np.log(max_lik_params.alpha)
53         self.b = max_lik_params.beta * self.a
54         self.sigma = np.sqrt((2 * self.a * max_lik_params.variance) / (1 -
55             ↪ np.exp(-2 * self.a * self.time_delta)))
56
57     def _estimate_maximum_likelihood_parameters(self, short_rate_proxy:
58         ↪ np.ndarray) -> VasicekMaximumLikelihoodParameters:
59         n = len(short_rate_proxy)
60
61         alpha_numerator = n * np.sum(short_rate_proxy[1:] *
62             ↪ short_rate_proxy[:-1]) - np.sum(short_rate_proxy[1:] *
63             ↪ np.sum(short_rate_proxy[:-1]))
64         alpha_denominator = n * np.sum(short_rate_proxy[:-1] ** 2) -
65             ↪ (np.sum(short_rate_proxy[:-1]) ** 2)
66         alpha = alpha_numerator / alpha_denominator
67         beta = np.sum(short_rate_proxy[1:] - alpha * short_rate_proxy[:-1]) /
68             ↪ (n * (1 - alpha))
69         variance = (1 / n) * np.sum((short_rate_proxy[1:] - alpha *
70             ↪ short_rate_proxy[:-1] - beta * (1 - alpha)) ** 2)
71
72         return VasicekMaximumLikelihoodParameters(alpha, beta, variance)

```

Quellcode A.2.: Inhalt der `vasicek_maximum_likelihood.py` Datei mit einer Schnittstellendefinition zur Schätzung der Parameter im Vasicek-Modell sowie der konkreten Implementierung eines Maximum-Likelihood-Schätzers.

A.2.2. Modellierung der Einlagenzinsen

Für die Modellierung der Einlagenzinsen mit einem linearen Modell und die zugehörige Parameterschätzung wurde der folgende Quellcode verwendet.

```

1  from typing import Callable, Dict
2  from abc import ABC, abstractmethod
3  import numpy as np
4  from sklearn.linear_model import LinearRegression
5
6
7  class DepositRateModel(ABC):
8      """
9      An interface for the deposit rates. A subclass needs to be able to fit a
10     ↪ deposit rate model and calculate the deposit rate based on the short rate.
11     """
12     @abstractmethod
13     def create_deposit_rate_model(self, market_rate: np.ndarray, deposit_rate:
14     ↪ np.ndarray):
15         pass
16
17     @abstractmethod
18     def calculate_deposit_rate(self, market_rate: np.ndarray) -> np.ndarray:
19         pass
20
21     @abstractmethod
22     def model_parameters_to_dict(self) -> Dict:
23         pass
24
25     class LinearDepositRate(DepositRateModel):
26         """
27         Deposit Rate model of the type  $d(t) = \beta_0 + \beta_1 * r(t)$  with a floor
28         ↪ at zero.
29         """
30         def __init__(self, market_rate: np.ndarray, deposit_rate: np.ndarray):
31             self.parameters = None
32             self.deposit_rate_model = self.create_deposit_rate_model(market_rate,
33             ↪ deposit_rate)
34
35         def create_deposit_rate_model(self, market_rate: np.ndarray, deposit_rate:
36         ↪ np.ndarray) -> Callable:
37             model = LinearRegression().fit(market_rate.reshape((-1, 1)),
38             ↪ deposit_rate)
39             self.parameters = (model.intercept_, model.coef_)
40             return lambda x: np.maximum(model.predict(x), 0.0)
41
42         def model_parameters_to_dict(self) -> Dict:
43             beta_0, beta_1 = self.parameters
44             return {'beta_0': beta_0, 'beta_1': float(beta_1)}

```

```
40 |  
41 |     def calculate_deposit_rate(self, market_rate: np.ndarray) -> np.ndarray:  
42 |         return self.deposit_rate_model(market_rate.reshape((-1, 1)))
```

Quellcode A.3.: Inhalt der `deposit_rate_model.py` Datei mit einer Schnittstellendefinition für Modelle der Einlagenzinsen und einer konkreten Implementierung für ein lineares Modell.

A.2.3. Modellierung des Einlagenvolumens

Für die Parameterschätzung im Normalmodell des Einlagenvolumens und die Simulation zukünftiger Einlagenvolumina wurde der folgende Quellcode verwendet.

```

1  import numpy as np
2  from abc import ABC, abstractmethod
3  from typing import Callable, List, Dict, Tuple
4  from sklearn.linear_model import LinearRegression
5
6
7  class DepositVolumeModel(ABC):
8      """
9      An interface for the deposit volume model.
10     A subclass needs to be able to create a deposit volume model, simulate
    ↪ paths and calculate the term structure of liquidity.
11     """
12     def __init__(self, volume_data: np.ndarray, time_delta: int = 1,
    ↪ overwrites: Dict[str, float] = None):
13         self.time_delta = time_delta
14         self._parameters = None
15         self.volume_model = self.create_deposit_volume_model(volume_data,
    ↪ overwrites)
16
17     @abstractmethod
18     def create_deposit_volume_model(self, volume_data: np.ndarray, overwrites:
    ↪ Dict[str, float] = None):
19         pass
20
21     @abstractmethod
22     def model_parameters_to_dict(self) -> Dict:
23         pass
24
25     def simulate_deposit_volumes(self, T: float, n_paths: int,
    ↪ correlation_parameter: float = None, brownian_motion: np.ndarray =
    ↪ None, market_price_of_risk: float = 0.0) -> np.ndarray:
26         return self.volume_model(T, n_paths, correlation_parameter,
    ↪ brownian_motion, market_price_of_risk)
27
28     def calculate_term_structure_of_liquidity(self, T: float, n_paths: int, p:
    ↪ List[float], correlation_parameter: float = None, brownian_motion:
    ↪ np.ndarray = None) -> Tuple[np.ndarray, np.ndarray]:
29         simulated_volume = self.simulate_deposit_volumes(T, n_paths,
    ↪ correlation_parameter, brownian_motion)
30         M = np.minimum.accumulate(simulated_volume)
31         TSL = np.quantile(M, q=p, axis=1)
32         return TSL.transpose(), simulated_volume
33
34     def update_deposit_volume_model(self, volume_data: np.ndarray, overwrites:
    ↪ Dict[str, float]) -> None:

```

```

35     self.volume_model = self.create_deposit_volume_model(volume_data,
36     ↪ overwrites)
37
38 class KalkbrenerVolumeModel(DepositVolumeModel):
39     def model_parameters_to_dict(self) -> Dict:
40         a, b, mu, sigma = self._parameters
41         return {'a': a, 'b': float(b), 'mu': mu, 'sigma': sigma}
42
43     def __str__(self):
44         a, b, mu, sigma = self._parameters
45         return f'Parameters: a={a:.5f}, b={float(b):.5f}, mu={mu:.5f},
46         ↪ sigma={sigma:.5f}'
47
48     def _maximum_likelihood_estimation(self, detrended_volume: np.ndarray):
49         n = len(detrended_volume)
50
51         alpha_numerator = n * np.sum(detrended_volume[1:] *
52         ↪ detrended_volume[:-1]) - np.sum(detrended_volume[1:] *
53         ↪ np.sum(detrended_volume[:-1]))
54         alpha_denominator = n * np.sum(detrended_volume[:-1] ** 2) -
55         ↪ (np.sum(detrended_volume[:-1]) ** 2)
56         alpha = alpha_numerator / alpha_denominator
57         variance = (1 / n) * np.sum((detrended_volume[1:] - alpha *
58         ↪ detrended_volume[:-1]) ** 2)
59
60         mu = -(1 / self.time_delta) * np.log(alpha)
61         sigma_square = (2 * mu * variance) / (1 - np.exp(-2 * mu))
62         return mu, sigma_square
63
64     def _simulate_ornstein_uhlenbeck_process(self, T: float, n_paths: int, mu:
65     ↪ float, sigma: float, correlation_parameter: float = None,
66     ↪ brownian_motion: np.ndarray = None, market_price_of_risk: float = 0.0)
67     ↪ -> np.ndarray:
68         n_steps = int((T / self.time_delta) + 1)
69         ou = mu + np.zeros((n_steps, n_paths))
70
71         if correlation_parameter is not None and brownian_motion is not None:
72             dW_tilde = correlation_parameter * brownian_motion + np.sqrt(1 -
73             ↪ correlation_parameter ** 2) * np.random.normal(size=(n_steps,
74             ↪ n_paths))
75             dW_term = sigma * np.sqrt(self.time_delta) * dW_tilde
76         else:
77             dW_term = sigma * np.sqrt(self.time_delta) *
78             ↪ np.random.normal(size=(n_steps, n_paths))
79
80         for i in range(1, n_steps):
81             dt_term = (market_price_of_risk * sigma * correlation_parameter +
82             ↪ mu * ou[i - 1, :]) * self.time_delta

```

```

71         ou[i, :] = ou[i - 1, :] + dt_term + dW_term[i - 1, :]
72
73     return ou
74
75
76 class NormalVolumeModel(KalkbrenerVolumeModel):
77     """
78     Fit a deposit volume model of the type
79      $V(t) = a + b*t + dX(t)$ 
80     where  $X(t)$  is an Ornstein-Uhlenbeck process.
81     """
82     def create_deposit_volume_model(self, volume_data: np.ndarray, overwrites:
83     ↪ Dict[str, float] = None) -> Callable:
84         n = len(volume_data)
85         linear_trend_model =
86         ↪ LinearRegression(fit_intercept=False).fit(np.arange(n).reshape((-1,
87         ↪ 1)), volume_data)
88         b = linear_trend_model.coef_
89         volume_detrended = volume_data - (linear_trend_model.intercept_ +
90         ↪ (np.arange(n) - n) * b)
91         mu, sigma_square =
92         ↪ self._maximum_likelihood_estimation(volume_detrended)
93
94         if overwrites is not None:
95             b = overwrites.get('b', b)
96             mu = overwrites.get('mu', mu)
97             sigma_square = overwrites.get('sigma_square', sigma_square)
98         self._parameters = (volume_data[-1], b, mu, np.sqrt(sigma_square))
99
100     def volume_model_function(T: float, n_paths: int,
101     ↪ correlation_parameter: float, brownian_motion: np.ndarray,
102     ↪ market_price_of_risk: float) -> Callable:
103         return (volume_data[-1] + b * np.repeat(np.arange(T),
104         ↪ n_paths).reshape(T, -1)) +
105         ↪ self._simulate_ornstein_uhlenbeck_process(T - 1, n_paths, mu,
106         ↪ np.sqrt(sigma_square), correlation_parameter, brownian_motion,
107         ↪ market_price_of_risk)
108
109     return volume_model_function
110
111 class LognormalVolumeModel(KalkbrenerVolumeModel):
112     """
113     Fit a deposit volume model of the type
114      $V(t) = \exp(a + b*t + dX(t))$ 
115     where  $X(t)$  is an Ornstein-Uhlenbeck process.
116     """
117     def create_deposit_volume_model(self, volume_data: np.ndarray, overwrites:
118     ↪ Dict[str, float] = None) -> Callable:

```

```

108     n = len(volume_data)
109     log_volume = np.log(volume_data)
110     linear_trend_model =
111     ↪ LinearRegression(fit_intercept=False).fit(np.arange(n).reshape((-1,
112     ↪ 1)), log_volume)
111     b = np.exp(linear_trend_model.coef_)
112     volume_detrended = volume_data - (linear_trend_model.intercept_ +
113     ↪ (np.arange(n) - n) * b)
113     mu, sigma_square =
114     ↪ self._maximum_likelihood_estimation(volume_detrended)
114
115     if overwrites is not None:
116         b = overwrites.get('b', b)
117         mu = overwrites.get('mu', mu)
118         sigma_square = overwrites.get('sigma_square', sigma_square)
119     self._parameters = (log_volume[-1], b, mu, np.sqrt(sigma_square))
120
121     def volume_model_function(T: float, n_paths: int,
122     ↪ correlation_parameter: float, brownian_motion: np.ndarray,
123     ↪ market_price_of_risk: float) -> Callable:
124         return (volume_data[-1] + b * np.repeat(np.arange(T),
125     ↪ n_paths).reshape(T, -1)) +
126     ↪ self._simulate_ornstein_uhlenbeck_process(T - 1, n_paths, mu,
127     ↪ np.sqrt(sigma_square), correlation_parameter, brownian_motion,
128     ↪ market_price_of_risk)
129
130     return volume_model_function

```

Quellcode A.4.: Inhalt der `deposit_volume_model.py` Datei mit einer Schnittstellen-
definition für Modelle des Einlagenvolumens und dem Normalmodell
sowie Lognormalmodell als konkrete Implementierungen.

A.2.4. Implementierung des 3-Komponenten Modells

Das in Kapitel 4 eingeführte 3-Komponenten-Modell wird durch eine eigene Klasse repräsentiert, in der alle Funktionalitäten der letzten Abschnitte vereint sind.

```

1  from datetime import date
2  from typing import List, Union, TextIO, Tuple, Dict
3  import json
4  import numpy as np
5  from NonMaturingDeposits.math_tools import VasicekShortRateModel,
   ↪ VasicekMaximumLikelihoodParameterEstimate, LinearDepositRate,
   ↪ NormalVolumeModel, create_dataframe_for_calculation, LognormalVolumeModel
6  from pathlib import Path
7
8
9  class ThreeComponentModel:
10     """
11     This class implements the 3-component model using a Vasicek short rate
   ↪ model, a linear deposit rate model and the Normal or Lognormal model for
   ↪ the volume.
12     """
13     def __init__(self, db_name: str, starting_date: date, type: str,
   ↪ normal_model: bool = False, volume_model_overwrites: Dict[str, float] =
   ↪ None):
14         data = create_dataframe_for_calculation(db_name, starting_date)
15         self.type = type
16         self.data = data[data['type'] == type]
17         short_rate = self.data['market_rate'].to_numpy()
18         starting_value = short_rate[-1]
19         self.short_rate_model = VasicekShortRateModel(starting_value,
   ↪ VasicekMaximumLikelihoodParameterEstimate(short_rate, 1))
20         self.deposit_rate_model =
   ↪ LinearDepositRate(self.data['market_rate'].to_numpy(),
   ↪ self.data['deposit_rate'].to_numpy())
21         if not normal_model:
22             self.deposit_volume_model =
   ↪ LognormalVolumeModel(self.data['deposit_volume'].to_numpy(),
   ↪ overwrites=volume_model_overwrites)
23         else:
24             self.deposit_volume_model =
   ↪ NormalVolumeModel(self.data['deposit_volume'].to_numpy(),
   ↪ overwrites=volume_model_overwrites)
25         self.market_price_of_risk = self._calculate_market_price_of_risk()
26         self.correlation_coefficient =
   ↪ self._calculate_correlation_coefficient()
27
28     def term_structure_of_liquidity(self, quantiles: List[float],
   ↪ time_horizon_in_years: int, n_paths: int) -> Tuple[
29         np.ndarray, np.ndarray]:
30         T = time_horizon_in_years * 12 + 1

```

```

31     self.short_rate_model.simulate_short_rate_paths(T - 1, n_paths)
32     TSL, simulated_volume =
33     ↪ self.deposit_volume_model.calculate_term_structure_of_liquidity(T,
34     ↪ n_paths, quantiles, self.correlation_coefficient,
35     ↪ self.short_rate_model.brownian_motion)
36     return TSL, simulated_volume
37
38 def calculate_present_value(self, time_horizon_in_years: int, n_paths: int)
39 ↪ -> float:
40     T = time_horizon_in_years * 12 + 1
41     short_rates_simulated =
42     ↪ self.short_rate_model.simulate_risk_neutral_short_rate_paths(T - 1,
43     ↪ n_paths, self.market_price_of_risk)
44     deposit_rates = self.deposit_rate_model.calculate_deposit_rate(
45     ↪ short_rates_simulated).reshape((-1, n_paths))
46     deposit_volume = self.deposit_volume_model.simulate_deposit_volumes(T,
47     ↪ n_paths, self.correlation_coefficient,
48     ↪ self.short_rate_model.brownian_motion, self.market_price_of_risk)
49
50     pv_num = deposit_volume[:, :-1] * (short_rates_simulated[:, :-1] -
51     ↪ deposit_rates[:, :-1])
52     pv_denom = np.exp(short_rates_simulated.cumsum(axis=0))[:, 1:]
53     present_value = (pv_num / pv_denom).sum(axis=0).mean()
54     return present_value
55
56 def calculate_present_value_with_minimum_process(self,
57 ↪ time_horizon_in_years: int, n_paths: int) -> float:
58     T = time_horizon_in_years * 12 + 1
59     short_rates_simulated =
60     ↪ self.short_rate_model.simulate_risk_neutral_short_rate_paths(
61     ↪ T - 1, n_paths, self.market_price_of_risk)
62     deposit_rates = self.deposit_rate_model.calculate_deposit_rate(
63     ↪ short_rates_simulated).reshape((-1, n_paths))
64     deposit_volume = self.deposit_volume_model.simulate_deposit_volumes(T,
65     ↪ n_paths, self.correlation_coefficient,
66     ↪ self.short_rate_model.brownian_motion, self.market_price_of_risk)
67     M = np.minimum.accumulate(deposit_volume)
68
69     pv_num = M[:, :-1] * (short_rates_simulated[:, :-1] - deposit_rates[:,
70     ↪ :-1])
71     pv_denom = np.exp(short_rates_simulated.cumsum(axis=0))[:, 1:]
72     present_value = (pv_num / pv_denom).sum(axis=0).mean()
73
74     return present_value
75
76 def _calculate_correlation_coefficient(self) -> float:
77     corr = np.corrcoef(self.data['market_rate'],
78     ↪ self.data['deposit_volume'])
79     return corr[0][1]

```

```

65
66     def _calculate_market_price_of_risk(self) -> float:
67         a, b, sigma = self.short_rate_model.get_parameters()
68         yield_slope = self.data['yield'].diff()
69         market_price_risk_series = (2 * yield_slope - b / a * (a -
        ↪ self.data['market_rate'].to_numpy())) / sigma
70         return np.mean(market_price_risk_series)
71
72     def cashflow_duration(self, quantiles: List[float], time_horizon_in_years:
        ↪ int, n_paths: int):
73         T = time_horizon_in_years * 12 + 1
74         short_rates_simulated =
        ↪ self.short_rate_model.simulate_risk_neutral_short_rate_paths(T - 1,
        ↪ n_paths, self.market_price_of_risk)
75         deposit_volume = self.deposit_volume_model.simulate_deposit_volumes(T,
        ↪ n_paths, self.correlation_coefficient,
        ↪ self.short_rate_model.brownian_motion, self.market_price_of_risk)
76         M = np.quantile(deposit_volume, q=quantiles, axis=1)
77
78         duration = np.zeros((T, len(quantiles)))
79         for i in range(T - 1):
80             pvcf_num = M[:, :] - M[:, :] * (1 + short_rates_simulated[:, i])
81             pvcf_denom = np.exp(short_rates_simulated.cumsum(axis=0))[:, i]
82             pvcf = pvcf_num / pvcf_denom
83             duration[i, :] = np.sum((1 / np.sum(pvcf)) * (1 / 12) * pvcf *
        ↪ np.arange(T), axis=1)
84
85         return np.mean(duration, axis=0)
86
87     def model_parameters_to_json(self, json_file: Union[str, TextIO, Path]):
88         volume_model_parameters = {'Deposit Volume Model':
        ↪ self.deposit_volume_model.model_parameters_to_dict()}
89         short_rate_model_parameters = {'Short Rate Model':
        ↪ self.short_rate_model.model_parameters_to_dict()}
90         deposit_rate_model_parameters = {'Deposit Rate Model':
        ↪ self.deposit_rate_model.model_parameters_to_dict()}
91         parameter_dict = {**volume_model_parameters,
        ↪ **short_rate_model_parameters, **deposit_rate_model_parameters,
92                             'Market_Price_of_Risk': self.market_price_of_risk,
93                             'Correlation_Parameter':
        ↪ self.correlation_coefficient,
94                             'Starting_Date': str(self.data['date'].min().date()),
95                             'End_Date': str(self.data['date'].max().date())}
96         with open(json_file, 'w') as file:
97             json.dump(parameter_dict, file, indent=4)

```

Quellcode A.5.: Inhalt der `three_component_model.py` Datei mit einer Klasse, die das 3-Komponenten-Modell und alle zugehörigen Funktionalitäten des Risikomanagements abbildet.

Literaturverzeichnis

- [1] Basel Committee on Banking Supervision: *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*, December 2010 (rev June 2011). <https://www.bis.org/publ/bcbs189.htm>.
- [2] Björk, T.: *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford university press, dritte Aufl., 2009.
- [3] Brigo, D. und Mercurio, F.: *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [4] Filipovic, D.: *Term-Structure Models. A Graduate Course*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [5] Fler, S.: *Leitfaden für Basel III: Funktionsweise und Auswirkung der Regulierungsinstrumente verstehen*. <http://www.vividbanking.com/regulierungstools-von-basel-iii-im-ueberblick/>, 2016. Abgerufen am: 16. Dezember 2020.
- [6] Frauendorfer, K. und Schürle, M.: *Dynamic modeling and optimization of non-maturing accounts*. Liquidity risk: Measurement and management. Singapore: John Wiley and Sons, S. 327–359, 2007.
- [7] Hartl, S., Sarin, A. und Markwardt, S.: *Survey on Deposit Modelling (A global study of current practices)*. <https://home.kpmg/cn/en/home/insights/2014/09/survey-on-deposit-modelling-o-201409.html>, 2014. KPMG AG Wirtschaftsprüfungsgesellschaft.
- [8] Henningsson, P. und Skoglund, C.: *A framework for modeling the liquidity and interest rate risk of demand deposits*. Royal Institute of Technology. Stockholm, Sweden. Master Thesis, 2016.
- [9] Hull, J.: *Risk management and financial institutions*, Bd. 733. John Wiley & Sons, 2012.
- [10] Hult, H., Lindskog, F., Hammarlid, O. und Rehn, C. J.: *Risk and portfolio analysis: Principles and methods*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [11] Hutchison, D. E. und Pennacchi, G. G.: *Measuring rents and interest rate risk in imperfect financial markets: The case of retail bank deposits*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, S. 399–417, 1996.
- [12] Jarrow, R. A. und Deventer, D. R. van: *The arbitrage-free valuation and hedging of demand deposits and credit card loans*. Journal of Banking & Finance, 22(3):249–272, 1998.
- [13] Kalkbrenner, M. und Willing, J.: *Risk management of non-maturing liabilities*. Journal of Banking & Finance, 28(7):1547–1568, 2004.
- [14] Kerbl, S. und Sigmund, M.: *Negative interest rates: Forecasting banks' profitability in a new environment*. Verfügbar unter SSRN 2901932, 2017.
- [15] Kowsmann, P.: *Banks in Germany Tell Customers to Take Deposits Elsewhere*. <https://on.wsj.com/3CHWWA5>, The Wall Street Journal. Abgerufen am: 30. Juni 2021.
- [16] Liviello, A. und Ducuroir, F.: *Assessing the consequences of low rates environment on ALM and non-maturing liabilities modelling*. Faculté des sciences économiques, sociales, politiques et de communication, 2018.
- [17] Matz, L. und Neu, P.: *Liquidity Risk Measurement and Management: A practitioner's guide to global best practices*. John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2007.
- [18] Nyström, K.: *On deposit volumes and the valuation of non-maturing liabilities*. Journal of Economic Dynamics and Control, 32(3):709–756, 2008.
- [19] Österreichische Nationalbank: *International and national regulatory frameworks*. <https://www.oenb.at/en/financial-market/banking-supervision/regulatory-frameworks.html>. Abgerufen am: 21. Dezember 2020.
- [20] Python Core Team: *Python: A dynamic, open source programming language*. Python Software Foundation, 2021. <https://www.python.org/>.
- [21] Schmock, U.: *Stochastic Analysis for Financial and Actuarial Mathematics (Lecture Notes)*. Technische Universität Wien, Dezember 2020.
- [22] Straßer, J.: *Integrated Risk Management of Non-Maturing Accounts: Practical Application and Testing of a Dynamic Replication Model*. Springer Science & Business Media, 2014.
- [23] Thonabauer, G. und Nösslinger, B.: *Leitfaden zum Management des Zinsrisikos im Bankbuch*. Österreichische Nationalbank, Hausdruckerei, 2008.

- [24] Urteil des Obersten Gerichtshofs: *OGH 13.10.2009, 5Ob138/09v*. https://www.ris.bka.gv.at/Dokument.wxe?Abfrage=Justiz&Dokumentnummer=JJT_20091013_OGH0002_00500B00138_09V0000_000.
- [25] Whelan, K.: *International Money and Banking: 3. Liquidity and Solvency*. <https://www.karlwhelan.com/IMB/part3.pdf>. School of Economics, UCD. Spring 2020.
- [26] Wilmott, P.: *Paul Wilmott On Quantitative Finance*. John Wiley & Sons Ltd, zweite Aufl., 2006.
- [27] Wurzinger, G.: *Banken*. AEIOU, Austria-Forum, das Wissensnetz. <https://austria-forum.org/af/AEIOU/Banken>. Zuletzt geändert 25. März 2016.

Abbildungsverzeichnis

1.1. Euribor Raten mit Laufzeiten von einer Woche bis zu einem Jahr von Anfang 1999 bis Ende 2020.	3
5.1. Historische Einlagenvolumen in Euro für private Haushalte und nicht-finanzielle Unternehmen mitsamt zugehöriger Markt- und Einlagenzinsätze.	46
5.2. Simuliertes Einlagenvolumen der nichtfinanziellen Unternehmen basierend auf dem Normalmodell für die nächsten 10 Jahre und die zugehörige Term Structure of Liquidity für verschiedene Quantile. . . .	48
5.3. Simuliertes Einlagenvolumen und die Term Structure of Liquidity im Normalmodell für nichtfinanzielle Unternehmen, wobei der Parameter $b = 0.2$ gesetzt wurde.	49
5.4. Simuliertes Einlagenvolumen und die Term Structure of Liquidity im Normalmodell für nichtfinanzielle Unternehmen, wobei der Parameter $\sigma_V = 1.5$ gesetzt wurde.	50
5.5. Sensitivitätsanalyse für Veränderungen des Nettobarwerts im Modell für nichtfinanzielle Unternehmen, wenn einzelne Parameter im Normalmodell variiert werden.	55
5.6. Sensitivitätsanalyse für Veränderungen des Nettobarwerts im Modell für private Haushalte, wenn einzelne Parameter im Normalmodell variiert werden.	56
A.1. Simuliertes Einlagenvolumen und TSL im Normalmodell für private Haushalte.	59
A.2. Simuliertes Einlagenvolumen und TSL im Lognormalmodell für private Haushalte.	60
A.3. Simuliertes Einlagenvolumen und TSL im Lognormalmodell für nicht-finanzielle Unternehmen.	60
A.4. Simuliertes Einlagenvolumen und TSL im Normalmodell für private Haushalte. Der Parameter b wurde auf 0.85 gesetzt.	61
A.5. Simuliertes Einlagenvolumen und TSL im Normalmodell für private Haushalte. Der Parameter σ_V wurde auf 3.75 gesetzt.	61
A.6. Aufbau des <code>NonMaturingDeposits</code> Python Packages.	62

Tabellenverzeichnis

4.1. Schematische Darstellung der Cashflowkomponenten von Einlagen ohne Fälligkeit über die Zeitpunkte t_0, \dots, t_m hinweg.	39
5.1. Ergebnisse der Parameterschätzungen für das Normal- und Lognormalmodell des Einlagenvolumens von privaten Haushalten und nichtfinanziellen Unternehmen.	47
5.2. Auswirkungen von zwei unterschiedlichen Startzeitpunkten auf die Parameterschätzung im Normalmodell bei nichtfinanziellen Unternehmen.	51
5.3. Ergebnisse der Parameterschätzung des Einlagenzinssatzes von privaten Haushalten und nichtfinanziellen Unternehmen.	52
5.4. Duration des Portfolios in Jahren für private Haushalte und nichtfinanzielle Unternehmen für unterschiedliche Laufzeiten und Konfidenzniveaus.	53

Quellcodeverzeichnis

A.1. Quellcode der <code>short_rate_model.py</code> Datei für Short-Rate-Modelle. . .	64
A.2. Quellcode der <code>vasicek_maximum_likelihood.py</code> Datei zur Schätzung der Parameter im Vasicek-Modell.	66
A.3. Quellcode der <code>deposit_rate_model.py</code> Datei für die Einlagenzinsen. .	68
A.4. Quellcode der <code>deposit_volume_model.py</code> Datei für das Einlagenvolu- men.	72
A.5. Quellcode der <code>three_component_model.py</code> Datei für das 3-Komponenten- Modell.	75