



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

DIPLOMARBEIT

# Aktivseitige, risikoneutrale Modellierung in einem Versicherungsunternehmen

ausgeführt am

Institut für  
Finanz- und Versicherungsmathematik  
TU Wien

unter der Anleitung von

**Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits**  
**Dipl.-Ing. Katharina Koppensteiner**

durch

**Matthias Widman, BSc**

Matrikelnummer: 01609902

Balthasar-Kraussgasse 27

2380 Perchtoldsdorf

Perchtoldsdorf, am 18. Oktober 2021

# Abstract

This diploma thesis deals with active-side modeling methods using the Economic Scenario Generator (ESG) at Österreichische Beamtenversicherung VVaG (ÖBV) as a concrete example. The first part gives a well-founded overview of different stochastic models that can be used to model interest rate structures or stock prices. The mathematical definition of these models is given by stochastic differential equations, in the formulation of which the concept of Brownian motion plays an important role. For the modeling of interest rate structures, we compare theoretical short rate models and the LIBOR market model which is based on actual prices on the financial market. In addition, for modeling stock prices, we discuss extensions of the popular Black Scholes model, which lead to the jump-diffusion model with stochastic volatility.

In the second part of the thesis, we present an application of the mentioned models by giving a detailed description of the ESG at ÖBV. The aim of these simulations is to obtain risk-neutral scenarios. In other words, each investment must generate on average the return of the average development of the risk-free EIOPA yield curve. In order to verify the results, we then validate them ourselves using the martingale test.

# Kurzfassung

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit aktivseitigen Modellierungsmöglichkeiten am konkreten Beispiel des Economic Scenario Generators (ESG) in der Österreichischen Beamtenversicherung VVaG (ÖBV). Der erste Teil gibt einen fundierten Überblick über verschiedene stochastische Modelle, die verwendet werden können, um Zinsstrukturen oder Aktienkurse abzubilden. Die mathematische Definition dieser Modelle erfolgt über Stochastische Differentialgleichungen, bei deren Formulierung der Begriff der Brown'schen Bewegung eine bedeutende Rolle spielt. Für die Modellierung von Zinsstrukturen vergleichen wir theoretische Short-Rate Modelle und das LIBOR-Modell, das sich an tatsächlichen Preisen am Finanzmarkt orientiert. Daneben diskutieren wir zur Abbildung von Aktienkursen Erweiterungen des weit verbreiteten Black Scholes-Modells, welche zum Sprung-Diffusionsmodell mit stochastischer Volatilität führen.

Im zweiten Teil der Arbeit präsentieren wir eine Anwendung der behandelten Modelle anhand einer detailreichen Beschreibung des ESG in der ÖBV. Das Ziel dieser Simulationen ist es, risikoneutrale Szenarien zu erhalten. Das heißt, dass jedes Investment im Schnitt den Ertrag der durchschnittlichen Entwicklung der risikolosen EIOPA-Zinskurve erzielen muss. Um dies zu überprüfen, validieren wir die Ergebnisse mithilfe des Martingaltests im Anschluss noch selbstständig.

# Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlichen oder sinngemäßen entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Perchtoldsdorf, am 18. Oktober 2021



---

Matthias Widman

# Danksagung

Diese Arbeit ist in Kooperation mit der Österreichischen Beamtenversicherung (ÖBV) entstanden. An dieser Stelle möchte ich Katharina für ihre weitreichende Unterstützung danken. Du hast dich immer für mich und dieses Projekt eingesetzt und es geschafft, mir eine Diplomarbeit in Kooperation mit der ÖBV zu ermöglichen, die mich inhaltlich begeistert und die auch von der Seite des Unternehmens positive Zustimmung gefunden hat.

Ebenfalls möchte ich Professor Grandits von der TU Wien für seine Bereitschaft zur Betreuung danken.

Mein Dank geht an meine Familie und insbesondere an meine Eltern Ilse und Gerhard, die von Anfang an an mich geglaubt haben und mir nicht nur mein Studium, sondern meine gesamte Ausbildung ermöglicht haben. Ihr habt mich von klein auf ermutigt, meine Ziele zu erreichen und nicht aufzugeben, immer an mich geglaubt und mich bedingungslos unterstützt meine Träume zu verfolgen.

Außerdem möchte ich mich an dieser Stelle bei meinen langjährigen Studienkollegen und -kolleginnen — mittlerweile Freunde und Freundinnen — Marlene, Julian, Andreas, Felix, Philipp, Gregor, Lavinia, Daniel und Daniel dafür bedanken, dass ihr meine Studienzeit kurzweilig gestaltet habt. Ihr habt mir durch Motivationstiefs geholfen und auch im Distance-Learning dafür gesorgt, dass ich nie die Motivation und die Freude an diesem Studium verloren habe.

Ein weiteres Danke möchte ich allen weiteren Personen und Freunden aussprechen, die mich während des Studiums und während des Schreibprozesses dieser Arbeit unterstützt und motiviert haben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Zinsstrukturmodellierung</b>	<b>13</b>
3.1	Short-Rate Modelle . . . . .	14
3.2	LIBOR-Modell . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Aktienmodellierung</b>	<b>27</b>
4.1	Black Scholes-Modell . . . . .	28
4.2	Stochastische Volatilitätsmodelle . . . . .	32
4.3	Sprung-Diffusionsmodell . . . . .	34
4.4	Sprung-Diffusionsmodell mit Stochastischer Volatilität . . . . .	39
<b>5</b>	<b>ESG-Modellierung in der Praxis</b>	<b>42</b>
5.1	Allgemein . . . . .	43
5.2	Zinsstrukturmodellierung . . . . .	45
5.3	Index- und Immobilienmodellierung . . . . .	48
5.4	Weitere Informationen . . . . .	50
5.5	Validierung . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Fazit</b>	<b>55</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>57</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>58</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>63</b>

# 1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit widmet sich der aktivseitigen, risikoneutralen Modellierung in einem Versicherungsunternehmen. Genauer gesagt, geht es um Modelle, die in der Österreichischen Beamtenversicherung, Versicherungsverein auf Gegenseitigkeit (ÖBV), verwendet werden, um die Wertentwicklung von gehaltenen Aktien, Anleihen und Immobilien abzubilden. Ein Versicherungsunternehmen verwaltet ähnlich wie Banken große Geldsummen,<sup>1</sup> die durch Prämien eingenommen werden, um zukünftige Zahlungsverpflichtungen erfüllen zu können. Nachdem diese Zahlungen besonders bei Lebensversicherungen erst Jahre später stattfinden, werden diese Kapitalanlagen vom Versicherungsunternehmen verwaltet und in Wertpapiere, Anleihen und Grundstücke investiert. Obwohl die Entwicklung einzelner Anlageklassen dem Zufall unterliegt, hat der Anleger bzw. die Anlegerin trotzdem großes Interesse an Vorhersagen und möglichen Entwicklungen. In dieser Arbeit wollen wir eine Antwort auf die Frage geben, wie mögliche Entwicklungen modelliert werden können und wie wir die erhaltenen Resultate interpretieren können.

Zuerst widmen wir uns in Kapitel 2 mathematischen Grundlagen, die wir benötigen, um Modelle mathematisch sinnvoll formulieren zu können. Zentral ist dabei die Definition der **Brown'schen Bewegung**  $W_t$  (Definition 2.3), die das Standardwerkzeug der stochastischen Modellierung ist. Anschließend führen wir den Begriff der **Stochastischen Differentialgleichung** (Satz 2.15) ein, mit welchem wir stochastische Modelle formulieren können. Für die Grundlagen der Stochastischen Analysis stützen wir uns in erster Linie auf [33, 36].

In Kapitel 3 definieren wir den wichtigsten Begriff in Zusammenhang mit Zinsstrukturmodellierung: **Nullkuponanleihe** (Definition 3.1). Sobald wir uns Gedanken über den Preis  $P(t, T)$  einer Nullkuponanleihe machen, führt uns dies zu den Definitionen der Forward-, Spot-, und Short-Rate. Anschließend können wir die ersten Modelle formu-

---

<sup>1</sup>Der Geschäftsbericht der ÖBV für das Jahr 2020 weist in der Lebensversicherung Kapitalanlagen von 1.84 Mrd. Euro auf.

lieren. Unter anderem führen wir das Cox-Ingersoll-Ross-Modell (Modell 3.7) ein, das in erweiterter Form in Kapitel 5 wieder vorkommt und zur Modellierung von Mieteinnahmen und Dividenden verwendet wird. Während diese Modelle theoretischer Natur sind, die eine stetige Short-Rate mit festen (davor geschätzten und fix angenommenen) Parametern voraussetzen, widmen wir uns in Kapitel 3.2 dem **LIBOR-Modell** (Modell 3.13), das auf tatsächlich auf dem Finanzmarkt beobachtbaren (diskreten) Preisen beruht. Dieses Modell wird in der ÖBV auch zur Modellierung verwendet. Für dieses Kapitel ist [20] als Hauptliteratur zu nennen.

In Kapitel 4 beschäftigen wir uns mit der Modellierung von Aktien (und Immobilien). Am bekanntesten ist dabei sicherlich das Modell von Black und Scholes, das **Black Scholes-Modell** (Modell 4.3). Das Ziel des Kapitels ist es, das Modell um stochastische Volatilität und um Sprünge zu erweitern. Dadurch erhalten wir das **Sprung-Diffusionsmodell mit stochastischer Volatilität** (Modell 4.18), das später in Kapitel 5 auftaucht und dort verwendet wird, um Aktienindizes und Immobilienpreise zu modellieren. Das Modell selbst liegt in der Form einer Stochastischen Differentialgleichung (mit eindeutiger Lösung) vor. Kapitel 4 stützt sich auf [12, 35]. Dazu dienen die Primärquellen, in denen die Modelle zum ersten Mal eingeführt werden, rund um [2, 7, 24, 30] als Quelle.

Kapitel 5 dient dazu, die davor behandelten theoretischen mathematischen Modelle in der Praxis vorzustellen. Dabei beschreiben wir die Assetmodellierung in der ÖBV zum 31.12.2020. Die Modellierung selbst wird nicht von der ÖBV durchgeführt, sondern an das Unternehmen B&W Deloitte GmbH ausgelagert. In dem Kapitel beschreiben wir die Annahmen und Parameter, die gewählt werden müssen, um diese Modelle überhaupt implementieren zu können. Die Modellierung und das Modell werden als **Economic Scenario Generator**<sup>2</sup> (ESG) bezeichnet, auf welche in diesem Kapitel ebenfalls kurz eingegangen wird. Das Ziel des ESG ist es, Investments riskoneutral zu modellieren. Das heißt, dass alle Renditen im Schnitt der Rendite der riskolosen EIOPA-Zinskurve entsprechen. Anschließend führen wir eine selbstständige Validierungen durch, um zu überprüfen, ob

---

<sup>2</sup>Die beschriebenen Modelle hängen selbstverständlich stark von den verwendeten Parametern ab. Bei der Modellierung eines Aktienindex beispielsweise muss darauf geachtet werden, dass angenommene Rendite und Volatilität den Anforderungen entsprechen und zielführend sind. Beim ESG handelt es sich um eine risikoneutrale — und keine realitätsnahe — Abbildung. Dies muss bei der Wahl der Parameter berücksichtigt werden. Die Struktur des Modells bleibt von der Performanceannahme natürlich unbetroffen.



die Modelle die zu erwartenden Ergebnisse liefern und damit korrekt funktionieren. Als Test wenden wir den sogenannten **Martingalttest** an. Dieser überprüft, ob ein zu  $t = T_0$  investierter Euro auch am Ende der Laufzeit zu  $t = T_n$  diskontiert noch immer einen Euro wert ist. Dann ist nämlich keine Investmentstrategie besser als eine andere und die geforderte Risikoneutralität ist gegeben. In Kapitel 5 behandeln wir die explizite Modellierung von Deloitte für die ÖBV, weshalb die meisten Informationen auf unternehmensinternen Dokumenten beruhen oder nur eine Anwendung der vorherigen Kapitel sind. Aus diesem Grund verweisen wir hier nur auf [13].

## 2 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die wichtigsten mathematischen Definitionen und Sätze wiedergegeben, die zur Formulierung der Modelle der nachfolgenden Kapitel maßgeblich sind. Am wichtigsten ist dabei die Definition der **Brown'schen Bewegung** (engl. *Brownian Motion*, Definition 2.3), ohne welche die Modellierung stochastischer Prozesse in der Finanzwelt nicht auskommt. Damit lassen sich Stochastische Differentialgleichungen (Satz 2.15) formulieren, die in den nachfolgenden Abschnitten die verschiedenen Modelle beschreiben. Das Kapitel stützt sich auf [1, 8, 28, 33, 36].

Neben der Wiederholung der mathematischen Grundlagen der Stochastischen Analysis dient dieses Kapitel auch der Einführung einer einheitlichen Notation. Die Buchstaben  $W$  und  $V$  sind für die Brown'sche Bewegung (auch Wiener Prozess) reserviert. Die hier gegebenen Definitionen und Sätze beschränken sich auf den eindimensionalen Fall, da dies für diese Arbeit ausreichend ist. Sie lassen sich aber unkompliziert komponentenweise auf den  $d$ -dimensionalen Fall übertragen und verallgemeinern. Dafür sei aber auf die angegebene Literatur verwiesen. Alle Zufallsvariablen fassen wir praxisnahe reellwertig auf. Des weiteren nehmen wir an, dass alle verwendeten Filtrationen unsere natürlichen Annahmen erfüllen (alle Nullmengen sind bereits in  $\mathcal{F}_0$  enthalten und  $\mathbb{F}$  ist rechtsstetig).

In diesem Kapitel werden ausschließlich Ansätze wiedergegeben, die für diese Arbeit gebraucht werden und wichtig sind. Es finden sich keine genauen mathematischen Herleitungen und Beweise oder damit verwandte Themen ((Semi-) Martingaltheorie, Herleitung des Stochastischen Integrals, ...). Für ein genaueres Studium von maßtheoretischen Grundlagen oder Resultaten aus der Stochastischen Analysis sei auf [29, 36] verwiesen.

Den Anfang macht die Definition der logarithmischen Normalverteilung. Bei den meisten Ansätzen wird das modellierte Asset logarithmisch normalverteilt modelliert. Dazu gehören zum Beispiel das Black Scholes-Modell 4.3 und das Sprung-Diffusionsmodell 4.14 nach Merton.<sup>1</sup> Auf dieser Verteilung beruhen die Herleitungen der Optionsformeln

---

<sup>1</sup>Das Sprung-Diffusionsmodell ist nur dann logarithmisch normalverteilt, wenn die Sprünge eben-

in [7, 30]. Wir verzichten auch darauf, den (filtrierten) Wahrscheinlichkeitsraum in den Definitionen und Sätzen explizit anzugeben und setzen die Existenz sinngemäß voraus.

**Definition 2.1** (Logarithmische Normalverteilung). *Eine Zufallsvariable  $Y$  heißt **logarithmisch normalverteilt** (cf. [23, S. 134]), wenn sie sich als  $Y = \exp(X)$  schreiben lässt und  $X$  selbst normalverteilt ist mit Mittelwert  $\mu \in \mathbb{R}$  und Varianz  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ . Wir verwenden dann die Notation  $Y \sim \text{LogN}(\mu, \sigma^2)$ . Für  $X$  verwenden wir die Notation  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .*

**Bemerkung 2.2.** *Eine Zufallsvariable  $Y$  mit  $Y \sim \text{LogN}(\mu, \sigma^2)$  besitzt den Erwartungswert*

$$\mathbb{E}[Y] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

*Beweis.* Bemerkung 2.2 folgt direkt aus der Darstellung der Momenterzeugenden Funktion einer Normalverteilung.  $\square$

Als Nächstes geben wir die Definition einer Brown'schen Bewegung an.

**Definition 2.3** (Brown'sche Bewegung). *Ein Prozess  $W_t$  mit  $t \geq 0$ , definiert auf einem filtriertem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ , heißt (**Standard-**) **Brown'sche Bewegung**,<sup>2</sup> wenn für den Prozess  $W_t$  die nachfolgenden Eigenschaften erfüllt sind.*

- *Der Prozess startet in null  $\mathbb{P}$ -fast sicher, also  $\mathbb{P}[W_0 = 0] = 1$ .*
- *Der Prozess  $W_t$  ist  $\mathcal{F}_t$ -adaptiert für alle  $t \geq 0$ .*
- *Zukünftige Inkremente sind unabhängig vom bisherigen Verlauf der Brown'schen Bewegung, also  $(W_t - W_s)$  ist unabhängig von  $\mathcal{F}_s$  für  $0 \leq s < t$ .*
- *Die Inkremente von  $W_t$  sind stationär und normalverteilt, also  $\mathcal{L}(W_t - W_s) = \mathcal{L}(W_{t-s}) = \mathcal{N}(0, t - s)$  für  $0 \leq s < t$ .*

---

falls logarithmisch normalverteilt modelliert werden. Theoretisch lässt sich für die Verteilung der Sprunghöhe jede positive (stetige) Verteilung verwenden. Dann ist das gesamte Modell jedoch nicht mehr logarithmisch normalverteilt und die Formeln für die Optionspreise in [30] verlieren ihre Gültigkeit.

<sup>2</sup>Der Name der Brown'schen Bewegung geht auf den Botaniker Robert Brown zurück, der damit die zufällige und ruckartige (Wärme-) Bewegung von kleinen Teilchen in Flüssigkeiten bereits 1827 in [9] beschreibt. Die mathematische Formulierung erfolgt erst etwa 100 Jahre später.

- Der Prozess hat stetige Pfade, also für alle  $\omega \in \Omega$  ist die Abbildung  $t \mapsto W_t(\omega)$  stetig.<sup>3</sup>

In Beispiel 5.2 und in Abbildung 5.3 finden sich 50 verschiedene Realisationen einer Standard-Brown'schen Bewegung.

Der Startwert  $W_0$  einer Brown'schen Bewegung kann auch anders gewählt werden. Für  $W_0$  lassen sich jede Zahl  $c \in \mathbb{R}$  und jede integrierbare Zufallsvariable  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  wählen. Ist dies aber nicht näher spezifiziert und ersichtlich, gehen wir immer davon aus, dass  $\mathbb{P}[W_0 = 0] = 1$  gilt.

**Bemerkung 2.4.** Aus Definition 2.3 folgt sofort, dass eine Standard-Brown'sche Bewegung  $W_t$  normalverteilt ist mit Mittelwert null und Varianz  $t$ , da

$$\mathcal{L}(W_t) = \mathcal{L}(W_t - W_0) = \mathcal{N}(0, t), \quad t > 0$$

gilt.

Als Nächstes definieren wir einen weiteren zentralen Begriff der Stochastischen Analysis, den des Martingals.

**Definition 2.5** (Martingal). Ein Prozess  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$  auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum heißt **Martingal**, wenn

- $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$  für alle  $t \in \mathbb{R}_0^+$ .
- $M_t$  ist  $\mathcal{F}_t$ -adaptiert.
- die Martingalbedingung  $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$  ist für alle  $0 \leq s < t$  erfüllt.

Während die ersten beiden Bedingungen in erster Linie technische Voraussetzungen sind, stellt die Martingalbedingung sicher, dass es sich um einen „fairen“ Prozess handelt. Stellt  $M_t$  jetzt den Gewinn eines Glücksspiels oder eines Investments dar und ist die Martingalbedingung erfüllt, bedeutet das, dass man mit diesem Glücksspiel oder diesem Investment im Schnitt weder Gewinn noch Verlust macht. Natürlich bedeutet dies nicht,

<sup>3</sup>Die Existenz einer stetigen Modifikation eines Prozesses, der die geforderten Verteilungsannahmen besitzt, ist der schwierigste und komplexeste Teil beim Beweis der Existenz einer Brown'schen Bewegung und findet sich zum Beispiel in [36, Kap. 2.3].

dass der Prozess konstant ist. Lediglich der erwartete zukünftige Gewinn bzw. Verlust der nächsten Runden bzw. der nächsten Zeitintervalle ist null und vom bisherigen Verlauf unabhängig.

**Beispiel 2.6** (Martingal). *Die Brown'sche Bewegung mit der natürlichen Filtration*

$$\mathcal{F}_t := \sigma(W_s : s \leq t)$$

ist nach Definition 2.3 ein Martingal.

*Beweis.* Dafür müssen wir die drei Punkte aus Definition 2.5 überprüfen. Nachdem  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$  gilt, existiert der Erwartungswert  $\mathbb{E}[|W_t|]$  für alle  $t \in \mathbb{R}_0^+$ .

Der Prozess  $W_t$  ist selbstverständlich bezüglich der natürlichen Filtration adaptiert.

Die Martingalbedingung ist erfüllt, da zukünftige Inkremente unabhängig von vergangenen sind und daher

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s \\ &= W_s \end{aligned}$$

für  $0 \leq s < t$  gilt. □

Für die Vollständigkeit geben wir auch die Definition eines Semimartingals.

**Definition 2.7** (Semimartingal). *Ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$  heißt **Semimartingal**, wenn er sich als Summe zweier Prozesse  $M_t$  und  $F_t$*

$$X_t = M_t + F_t, \quad 0 \leq t$$

mit nachfolgenden Eigenschaften schreiben lässt:

- $M_t$  ist ein *Lokales Martingal*.<sup>4</sup>
- $F_t$  ist ein *adaptierter Prozess von beschränkter Variation* und  $F_0 = 0$ .

<sup>4</sup>Ein adaptierter, cadlag (cf. Definition 2.12) Prozess  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$  heißt **Lokales Martingal**, falls eine nichtfallende Folge von Stoppzeiten  $(\tau_n) \nearrow \infty$  existiert, sodass der gestoppte Prozess  $M_t^{\tau_n} = M_{t \wedge \tau_n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein Martingal ist.

**Definition 2.8** (Brown'sche Bewegung mit Drift). Ein Prozess  $V_t$  heißt **Brown'sche Bewegung mit Drift**, falls  $W_t$  eine Standard-Brown'sche Bewegung ist und

$$V_t = \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$$

gilt.

**Bemerkung 2.9.** Aufgrund von Symmetriegründen der Normalverteilung ist die Einschränkung auf positive  $\sigma$  in der Definition der Brown'schen Bewegung mit Drift keine wirkliche Einschränkung.

Nachfolgend geben wir ein Beispiel für mögliche Realisationen einer Brown'schen Bewegung mit Drift.

**Beispiel 2.10** (Brown'sche Bewegung mit Drift). Wir sehen in der nachfolgenden Abbildung fünf Realisationen einer Brown'schen Bewegung mit Drift ( $\mu = -1, \sigma = 0.5$ ) über das Einheitsintervall mit 1 000 äquidistant verteilten Zwischenpunkten.

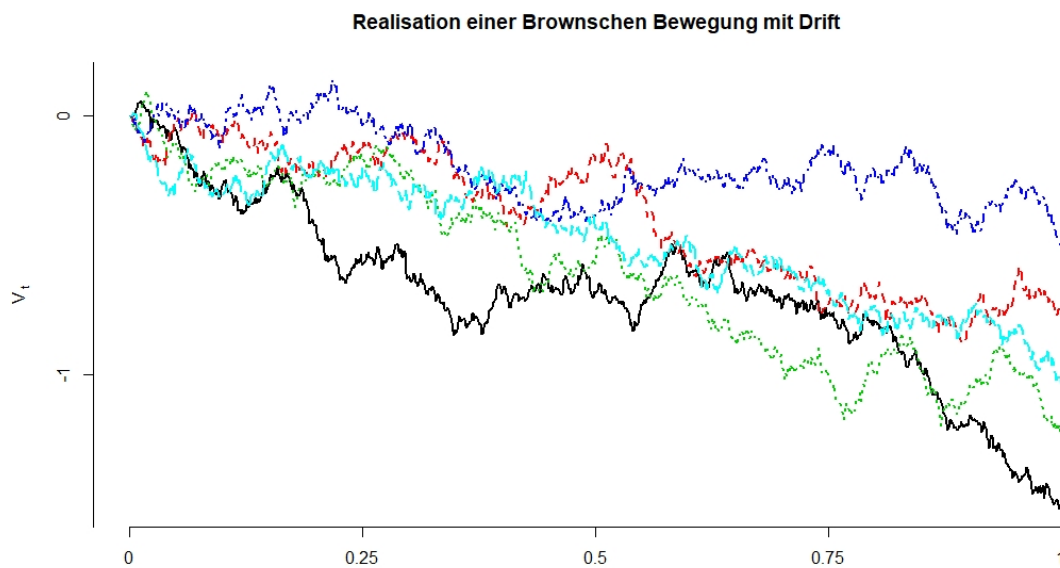


Abbildung 2.1: Realisationen einer Brown'schen Bewegung mit Drift

In Abbildung 2.1 ist der negative Trend ( $\mu = -1$ ) sehr gut ersichtlich. Im Gegensatz zur Standard-Brown'sche Bewegung, die Erwartungswert null hat und ein Martingal ist, hat die hier abgebildete Brown'schen Bewegung mit Drift Erwartungswert  $\mu t$ .

Unser eigentliches Ziel ist es, Zins- und Aktienmodelle definieren zu können (cf. Kapitel 3 und Kapitel 4). Die hier vorgestellte Brown'sche Bewegung eignet sich aufgrund der negativen Werte schlecht für ein realistisches Modell. Um positive Werte zu garantieren, könnten wir  $X_t := \exp(W_t)$  mit einer Standard-Brown'schen Bewegung  $W_t$  verwenden. Für den Erwartungswert des Prozesses  $X_t$  gilt dann

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\exp(W_t)] = e^{\frac{1}{2}t}.$$

Dieser Prozess hat keinen konstanten Erwartungswert und ist damit insbesondere kein Martingal. Beides sind aber Dinge, die für eine risikoneutrale Modellierung wünschenswert sind. Dies führt uns zur Definition des Stochastischen Exponentials.

**Definition 2.11** (Stochastisches Exponential). *Für ein stetiges Semimartingal<sup>5</sup>  $X_t$  ist das **Stochastische Exponential**  $\mathcal{E}(X)_t$  durch*

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp\left(X_t - X_0 - \frac{1}{2}[X]_t\right), \quad t \geq 0$$

gegeben. Dabei bezeichnet  $[\cdot]$  den bedingten quadratischen Variationsprozess.

Für die Brown'sche Bewegung vereinfacht sich das Stochastische Exponential zu

$$\mathcal{E}(W)_t = \exp\left(W_t - \frac{1}{2}t\right).$$

Zusätzlich ist  $\mathcal{E}(W)_t$  ein echtes Martingal mit Erwartungswert eins.

Später möchten wir auch Sprünge in den Modellen zulassen und unstetige Modelle definieren. Dazu brauchen wir den Begriff der cadlag-Stetigkeit.

**Definition 2.12** (cadlag). *Ein Prozess  $X_t$  heißt **cadlag**<sup>6</sup>, wenn seine Pfade rechtsstetig mit linksseitig existierenden Grenzwerten  $X_{t-} := \lim_{s \downarrow 0} X_{t-s}$  sind.*

<sup>5</sup>Für den unstetigen Fall sei hier auf die Stochastische Differentialgleichung in Beispiel 2.16 verwiesen.

<sup>6</sup>Das Wort *cadlag* ist ein französisches Akronym und steht für *continue à droite et limite à gauche*.

Um die explizite Lösung vieler Modelle zeigen zu können, benötigt man formal den Begriff des Ito-Prozesses und Ito's Formel, die das Verhalten stochastischer Prozesse unter einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion angibt.

**Definition 2.13** (Ito-Prozess). *Ein Prozess  $X_t$  heißt **Ito-Prozess**, falls er sich in der Form*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(X_s, s) ds + \int_0^t \beta(s, X_s) dW_s, \quad t \geq 0$$

*schreiben lässt. Dabei bezeichne  $W_t$  eine Brown'sche Bewegung und  $\alpha(X_t, t)$  und  $\beta(t, X_t)$  seien so beschaffen, dass die auftretenden Integrale existieren.*

Obiger Ito-Prozess lässt sich verkürzt auch in Differentialschreibweise und der Form

$$dX_t = \alpha(X_t, t) dt + \beta(t, X_t) dW_t, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

schreiben. Die wichtigste Anwendung folgt in den nächsten beiden Sätzen.

**Satz 2.14** (Ito). *Sei  $X_t$  ein Semimartingal und die Funktion  $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei einmal stetig im ersten und zweimal stetig im zweiten Argument differenzierbar. Dann ist  $f(t, X_t)$  wieder ein Semimartingal und es gilt*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = & f(0, X_0) + \int_0^t f_t(s, X_s) ds + \int_0^t f_x(s, X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X_s) d[X]_s^c \\ & + \sum_{0 < s \leq t} \left( f(s, X_s) - f(s, X_{s-}) - f_x(s, X_{s-}) \Delta X_s \right), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

*mit  $[\cdot]_t^c = [X]_t - \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2$ . Dabei bezeichnet  $[\cdot]_t$  wieder den quadratischen Kovariationsprozess.*

*Beweis.* Ein Beweis des Satzes findet sich in [33, S. 78 : Th. 32]. □

Für ein stetiges Semimartingal  $X_t$  und der Verwendung der Differentialschreibweise vereinfacht sich die Formel zu

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t) dt + f_x(s, X_s) dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) d[X]_t, \quad t \geq 0.$$



Lässt sich  $X_t$  als Ito-Prozess der Form  $dX_t = H_t dt + K_t dW_t$  schreiben, vereinfacht sich die Formel nochmals zu

$$df(t, X_t) = (f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)H_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)K_t^2) dt + f_x(t, X_t)K_t dW_t, \quad t \geq 0.$$

Durch diese Schreibweise und Gleichung (2.1) motiviert, kommen wir direkt zum Begriff der Stochastischen Differentialgleichung.

**Satz 2.15** (Stochastische Differentialgleichung). *Eine **Stochastische Differentialgleichung** hat die Form*

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha(t, X_t) dt + \beta(t, X_t) dW_t, \quad t \geq 0 \\ X_0 &= X_0^*. \end{aligned}$$

für einen unbekanntem Prozess  $X_t$  und bekannte progressiv-messbare Funktionen  $\alpha(\cdot, \cdot)$  und  $\beta(\cdot, \cdot)$ . Zusätzlich sei  $W_t$  eine  $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$ -Brown'sche Bewegung. Ein  $\mathbb{F}$ -adaptierter Prozess  $X_t$  heißt eine starke Lösung der Stochastischen Differentialgleichung,<sup>7</sup> falls die beiden Integrale  $\int_0^t \alpha(s, X_s) ds$  und  $\int_0^t \beta(s, X_s) dW_s$  existieren,  $X_0^*$  eine integrierbare Anfangsbedingung ist und

$$X_t = X_0^* + \int_0^t \alpha(s, X_s) ds + \int_0^t \beta(s, X_s) dW_s$$

gilt. Erfüllen die Funktionen  $\alpha(\cdot, \cdot)$  und  $\beta(\cdot, \cdot)$  außerdem die Lipschitzbedingung

$$\|\alpha(t, x) - \alpha(t, y)\| + \|\beta(t, x) - \beta(t, y)\| \leq K\|x - y\|, \quad t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

und die Wachstumsbedingung

$$\|\alpha(t, x)\|^2 + \|\beta(t, x)\|^2 \leq K^2(1 + \|x\|^2), \quad t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

existiert eine eindeutige starke Lösung der Stochastischen Differentialgleichung.

<sup>7</sup>Die starke Lösung  $X_t$  ist notwendigerweise  $\mathbb{F}$ -adaptiert und daher existiert eine Funktion  $F$ , die  $X_t = F(t, (W_s : s \leq t))$  erfüllt. Im Gegensatz dazu löst eine schwache Lösung  $\tilde{X}_t$  zwar auch die Differentialgleichung, die  $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$ -Brown'sche Bewegung ist dann aber ebenfalls Teil der Lösung und es existiert keine Funktion  $F$  mit der Eigenschaft  $\tilde{X}_t = F(t, (W_s : s \leq t))$ .

*Beweis.* Ein Beweis findet sich in [27, S. 289 : Th. 2.9]. □

In [33, 35] wird das Stochastische Exponential direkt über die eindeutige Lösung einer Stochastischen Differentialgleichung definiert.

**Beispiel 2.16** (Stochastische Differentialgleichung). *Die Lösung der (natürlichen<sup>8</sup>) Stochastischen Differentialgleichung*

$$dZ_t = Z_{t-} dX_t, \quad t \geq 0$$

mit der Anfangsbedingung  $Z_0 = 1$  (äquivalent zur Gleichung  $Z_t = 1 + \int_0^t Z_{t-} dX_t$ ) für  $t \geq 0$  wird mit dem **Stochastischen Exponential**  $Z_t = \mathcal{E}(X)_t$  bezeichnet.

Nachdem die beiden Motivationen für das Stochastische Exponential (Definition 2.11 und Beispiel 2.16) konsistent sind, erfüllt der Prozess  $\mathcal{E}(X)_t$  aus Definition 2.11 natürlich die Stochastische Differentialgleichung aus Beispiel 2.16, sofern es sich bei  $X$  um ein stetiges Semimartingal handelt.

Manchmal verwenden wir die Bezeichnung, ein zu modellierendes Asset folge einer Stochastischen Differentialgleichung. Darunter verstehen wir, dass der Prozess, der die Preisentwicklung des Assets darstellt, die eindeutige starke Lösung der Differentialgleichung ist.

---

<sup>8</sup>Damit ist das Stochastische Exponential das Äquivalent zur (deterministischen) Exponentialfunktion  $f(x) = \exp(x)$ , welche die Differentialgleichung  $f_x(x) = f(x)$  mit der Anfangsbedingung  $f(0) = 1$  löst.

## 3 Zinsstrukturmodellierung

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über gängige mathematische Modelle zur Modellierung von Zinsstrukturen.

Nach den mathematischen Grundlagen formulieren wir **Short-Rate Modelle**. In diesen Modellen wird die Short-Rate (cf. Definition 3.4) direkt durch eine Stochastische Differentialgleichung beschrieben und modelliert. Bei der Wahl des Modells muss ein realitätsnahes Modell gewählt werden. Besonders die Frage „Sind negative Zinsraten realistisch?“ ist hier von zentraler Bedeutung. Während vor zwanzig Jahren negative Zinsen noch undenkbar waren, sind sie heute (Oktober 2021) Realität. Soll die modellierte Zinsstruktur allerdings keinen Zins, sondern beispielsweise eine Dividendenzahlung darstellen, sind negative Werte natürlich unrealistisch, da bei einer Aktie in diesem Sinne keine mögliche Nachschusspflicht besteht.

Danach betrachten wir das **LIBOR-Modell** (Modell 3.13). In diesem Modell orientiert man sich an den wirklichen Preisen am Markt und verwendet diese als Grundlage der Modellierung. Diese Preise sind natürlich nur für eine endliche Menge an (Handels-) Zeitpunkten beobachtbar.<sup>1</sup> Anstelle der Short-Rate wird in diesem Modell direkt die Dynamik der Preise (LIBOR-Raten) modelliert.

Bei einer Modellierung müssen neben dem Modell auch die verwendeten Parameter festgelegt werden. Darauf gehen wir in dieser Arbeit aber nicht ein. Für das Schätzen der Parameter sei an dieser Stelle auf [20, Kap. 3] verwiesen.

Für detaillierte mathematische Hintergründe hinter den angeführten Modellen und Bezeichnungen (Health-Jarrow-Morton-Modell, Forward-Maß, ...) oder verwandte Definitionen (Swaption, Option, ...) verweisen wir ebenfalls nur auf [20].

---

<sup>1</sup>Zum Beispiel lässt sich eine 30-jährige Staatsanleihe kaufen, aber vermutlich wird es keine Staatsanleihe mit einer Laufzeit von 32 Jahren, 7 Monaten und 3 Tagen am Markt geben.

### 3.1 Short-Rate Modelle

Das Kapitel gibt zuerst ein paar allgemeine Definitionen zum Thema Zinsstrukturmodellierung. Anschließend werden wir Modelle zur theoretischen direkten Modellierung der Short-Rate vorstellen. In der Anwendung muss man sich immer der Stärken und Schwächen des verwendeten Modells bewusst sein. In diesem Fall geht es um die Frage, ob negative Werte zugelassen oder ausgeschlossen werden sollen. Das Kapitel stützt sich auf [12, 20, 25].

**Definition 3.1** (Nullkuponanleihe (NKA)). Eine **Nullkuponanleihe** (engl. Zero-Coupon Bond (ZCB)) mit dem Preis  $P(t, T)$  zum Zeitpunkt  $t$  und Fälligkeit  $T$  (mit  $t \leq T$ ) ist eine Schuldverschreibung, bei der der Käufer bzw. die Käuferin der Anleihe am Laufzeitende zum Zeitpunkt  $T$  eine Geldeinheit bekommt.

In Unterkapitel 3.1 fordern wir, dass folgende Annahmen erfüllt sind:

- kein Ausfallrisiko ( $P(T, T) = 1$ )
- alle Fälligkeiten sind handelbar ( $P(t, T)$  existiert für alle  $T \geq t$ )
- $T \mapsto P(t, T)$  ist differenzierbar ( $P_T(t, T)$  existiert)<sup>2</sup>

Damit definieren wir den Begriff der Forward-Rate, der Spot-Rate und der Short-Rate.

**Definition 3.2** (Forward-Rate und Forward-Kurve). Die **diskrete oder einfache Forward-Rate**  $F(t, T, S)$  zum Zeitpunkt  $t$  für das Intervall  $[T, S]$  ist definiert als

$$F(t, T, S) = -\frac{1}{S - T} \frac{P(t, S) - P(t, T)}{P(t, S)}, \quad t \leq T < S.$$

Die **stetige Forward-Rate** zum Zeitpunkt  $t$  für das Intervall  $[T, S]$  ist definiert als

$$R(t, T, S) = -\frac{\log P(t, S) - \log P(t, T)}{S - T}, \quad t \leq T < S.$$

<sup>2</sup>Während  $T \mapsto P(t, T)$  deterministisch und zum Zeitpunkt  $t$  bekannt ist, ist  $t \mapsto P(t, T)$  stochastisch. Aufgrund dieser stochastischen Komponente, kann mit Anleihenhandel ähnlich zum besser bekannten Aktienhandel ebenfalls ein Gewinn am Finanzmarkt erzielt werden.

Die **momentane Forward-Rate** ist durch

$$f(t, T) := \lim_{S \downarrow T} R(t, T, S) = -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T), \quad t \leq T$$

gegeben.<sup>3</sup> Die **Forward-Kurve** zum Zeitpunkt  $t$  ist durch  $T \mapsto f(t, T)$  gegeben.

**Definition 3.3** (Spot-Rate). Die **diskrete oder einfache Spot-Rate**  $F(t, T)$  zum Zeitpunkt  $t$  für das Intervall  $[t, T]$  ist definiert als

$$F(t, T) := F(t, t, T) = -\frac{1}{T-t} \frac{P(t, T) - 1}{P(t, T)}, \quad t \leq T.$$

Die **stetige Spot-Rate**  $R(t, T)$  zum Zeitpunkt  $t$  für das Intervall  $[t, T]$  ist definiert als

$$R(t, T) := R(t, t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T-t}, \quad t \leq T.$$

**Definition 3.4** (Short-Rate). Die **Short-Rate**  $r(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  ist definiert als  $r(t) := f(t, t)$ .

Oft verwenden wir auch die Bezeichnung  $r_t$  für  $r(t)$ . Ein risikoloses Bankkonto folgt daher der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dB_t &= r_t B_t dt, \quad t \geq 0 \\ B_0 &= B_0^* \end{aligned}$$

mit einem positiven Startwert  $B_0^*$ . Für  $B_0^* = 1$  gilt  $B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$ .

Das Ziel ist es nun, diese Short-Rate zu modellieren.<sup>4</sup> Dazu wollen wir hier gar nicht zu tief in die Materie eintauchen und keine Arbitrage-theorie behandeln. Ein Maßwechsel sei bereits berücksichtigt. Wir geben direkt Modelle zur Modellierung an. Das erste Modell ist das Vasicek-Modell.

**Modell 3.5** (Vasicek-Modell). Im **Vasicek-Modell** folgt die Short-Rate der Differen-

<sup>3</sup>Äquivalent dazu ist  $P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u) du\right)$ .

<sup>4</sup>Eine Modellierung der Forward-Rate findet sich nicht in dieser Arbeit. Dazu möchten wir zum Beispiel auf [20, Kap. 6] verweisen, wo sich eine genaue Beschreibung des HJM-Modells findet.

tialgleichung

$$\begin{aligned} dr_t &= (b + \beta r_t) dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0 \\ r_0 &= r_0^*. \end{aligned}$$

Der Startwert  $r_0^*$  sei ebenso bekannt wie die Modellparameter  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  und  $b \in \mathbb{R}_0^+$ . Die explizite Lösung des Modells ist durch

$$r_t = r_0^* e^{\beta t} + \frac{b}{\beta} (e^{\beta t} - 1) + \sigma e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} dW_s, \quad t \geq 0$$

gegeben.

Für das Vasicek-Modell geben wir nachfolgend einen genauen Beweis für die Form, Existenz und Eindeutigkeit der expliziten Lösung. Bei allen nachfolgenden Modellen kann man auf diese Art und Weise vorgehen, wenn man die Gestalt und Eindeutigkeit beweisen möchte.

*Beweis.* Zuerst wollen wir nachrechnen, dass die explizite Lösung tatsächlich die Stochastische Differentialgleichung in Modell 3.5 erfüllt. Offensichtlich gilt  $r_0 = r_0^*$ , womit die Anfangsbedingung erfüllt ist.

Als Nächstes definieren wir

$$\begin{aligned} X_t &:= e^{-\beta t} r_t \\ &= r_0^* + \frac{b}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\beta s} dW_s \\ &= r_0^* + b \int_0^t e^{-\beta s} ds + \sigma \int_0^t e^{-\beta s} dW_s. \end{aligned}$$

In Differentialform ist das äquivalent zu

$$dX_t = b e^{-\beta t} dt + \sigma e^{-\beta t} dW_t.$$

Außerdem gilt mit Ito's Formel 2.14 und mit  $f(t, x) = x \exp(\beta t)$

$$\begin{aligned} dr_t &= df(t, X_t) \\ &= f_t(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) d[X]_t \\ &= \beta e^{\beta t} X_t dt + e^{\beta t} dX_t + 0 \\ &= \beta r_t dt + e^{\beta t} (b e^{-\beta t} dt + \sigma e^{-\beta t} dW_t) \\ &= (b + \beta r_t) dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die angegebene Lösung auch tatsächlich die Stochastische Differentialgleichung löst.

Als nächstes überprüfen wir die Lipschitz- und Wachstumsbedingung aus Satz 2.15. Im Vasicek-Modell gilt unter Verwendung der Notation aus Satz 2.15

$$\begin{aligned} \alpha(t, x) &= b + \beta x \\ \beta(t, x) &= \sigma. \end{aligned}$$

Als stetige Funktionen sind  $\alpha(\cdot, \cdot)$  und  $\beta(\cdot, \cdot)$  progressiv-messbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \|(b + \beta x) - (b + \beta y)\| + \|\sigma - \sigma\| &= \|\beta(x - y)\| \\ &= |\beta| \|x - y\| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|b + \beta x\|^2 + \|\sigma\|^2 &= b^2 + 2b\beta x + \beta^2 x^2 + \sigma^2 \\ &= \left( \frac{b^2}{1+x^2} + \frac{2b\beta x}{1+x^2} + \frac{\beta^2 x^2}{1+x^2} + \frac{\sigma^2}{1+x^2} \right) (1+x^2) \\ &\leq (b^2 + |b\beta| + \beta^2 + \sigma^2) (1+x^2). \end{aligned}$$

Mit der Wahl  $K := \max\{|b|, b^2 + |b\beta| + \beta^2 + \sigma^2\}$  folgt die Eindeutigkeit (und Existenz) damit aus Satz 2.15. □

**Bemerkung 3.6.** Das Vasicek-Modell 3.5 ist normalverteilt<sup>5</sup> (cf. [45]) mit

$$r_t \sim \mathcal{N}\left(r_0^* e^{\beta t} + \frac{b}{\beta}(e^{\beta t} - 1), \frac{\sigma^2}{2\beta}(e^{2\beta t} - 1)\right).$$

Aufgrund der Normalverteilung lässt das Vasicek-Modell 3.5 somit auch eine negative Short-Rate zu.

Alternativ dazu lässt das nachfolgende Cox-Ingersoll-Ross-Modell 3.7 nur nichtnegative Werte für die Short-Rate zu.

**Modell 3.7** (Cox-Ingersoll-Ross (CIR)). Im **Cox-Ingersoll-Ross-Modell** folgt die Short-Rate der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dr_t &= (b + \beta r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t, \quad t \geq 0 \\ r_0 &= r_0^*. \end{aligned}$$

Der nichtnegative Startwert  $r_0^* \in \mathbb{R}_0^+$  sei ebenso bekannt wie die weiteren Modellparameter  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  und  $b \in \mathbb{R}_0^+$ . Die explizite Lösung des Modells ist durch

$$r_t = r_0^* e^{\beta t} + \frac{b}{\beta}(e^{\beta t} - 1) + \sigma e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} \sqrt{r_s} dW_s, \quad t \geq 0$$

gegeben.

*Beweis.* Um zu zeigen, dass die gegebene Lösung die Stochastische Differentialgleichung erfüllt, gehen wir analog zum Beweis vom Vasicek-Modell 3.5 vor. Abermals definieren wir

$$\begin{aligned} X_t &:= e^{-\beta t} r_t \\ &= r_0^* + \frac{b}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\beta s} \sqrt{r_s} dW_s \\ &= r_0^* + b \int_0^t e^{-\beta s} ds + \sigma \int_0^t e^{-\beta s} \sqrt{r_s} dW_s. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Für  $\beta < 0$  konvergiert diese Normalverteilung für  $t \rightarrow \infty$  natürlich gegen  $\mathcal{N}(b/|\beta|, \sigma^2/(2|\beta|))$ .



Äquivalent dazu können wir auch

$$dX_t = be^{-\beta t} dt + \sigma e^{-\beta t} \sqrt{r_t} dW_t$$

schreiben. Mit Ito's Formel 2.14 und  $f(t, x) = x \exp(\beta t)$  gilt abermals

$$\begin{aligned} dr_t &= df(t, X_t) \\ &= f_t(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) d[X]_t \\ &= \beta e^{\beta t} X_t dt + e^{\beta t} dX_t + 0 \\ &= \beta r_t dt + e^{\beta t} (be^{-\beta t} dt + \sigma e^{-\beta t} \sqrt{r_t} dW_t) \\ &= (b + \beta r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Für die Eindeutigkeit möchten wir wieder die Lipschitz- (und Wachstums-) Bedingung aus Satz 2.15 überprüfen. Hier bekommen wir ein Problem mit der Wurzelfunktion, weshalb wir für den Beweis der Eindeutigkeit nach [27, S. 291 : Prop. 2.13] vorgehen. Diese Wachstumsbedingungen sind klarerweise erfüllt, womit die Eindeutigkeit folgt.  $\square$

Gilt in diesem Modell  $2b \geq \sigma^2$ , ist die Wahrscheinlichkeit für  $r_t > 0$  gleich eins. Ist die Ungleichung nicht erfüllt, kann es vorkommen, dass der Short-Rate Prozess  $r_t$  null wird.

**Bemerkung 3.8.** *Das Cox-Ingersoll-Ross-Modell 3.7 ist ein räumlich und zeitlich transformierter Besselprozess<sup>6</sup> (cf. [10]) mit*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r_t] &= -\frac{b}{\beta} + e^{\beta t} \left( r_0^* + \frac{b}{\beta} \right) \\ \mathbb{V}[r_t] &= -r_0^* \frac{\sigma^2}{\beta} e^{\beta t} (1 - e^{\beta t}) + \frac{b\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{\beta t})^2. \end{aligned}$$

Damit eine Visualisierung der Theorie leichter fällt, wollen wir zu ausgewählten Modellen verschiedene mögliche Realisationen als Beispiel anführen. Eine Anleitung zur Simulation und Implementierung von stochastischen Prozessen und den vorgestellten Modellen findet sich beispielsweise in [21].

<sup>6</sup>Für  $\beta < 0$  konvergiert diese Verteilung für  $t \rightarrow \infty$  gegen einen Besselprozess mit Erwartungswert  $b/|\beta|$  und Varianz  $b\sigma^2/(2\beta^2)$ .

**Beispiel 3.9** (Cox-Ingersoll-Ross). *Nachfolgend sind fünf Realisationen im Cox-Ingersoll-Ross-Modell 3.7 mit den Parameter  $r_0^* = 1.8, b = 0.5, \beta = -0.3$  und  $\sigma = 0.6$  zu sehen. Auf der  $x$ -Achse ist  $t \in [0, 5]$  mit 1 000 äquidistant verteilten Zwischenpunkten abgebildet.*

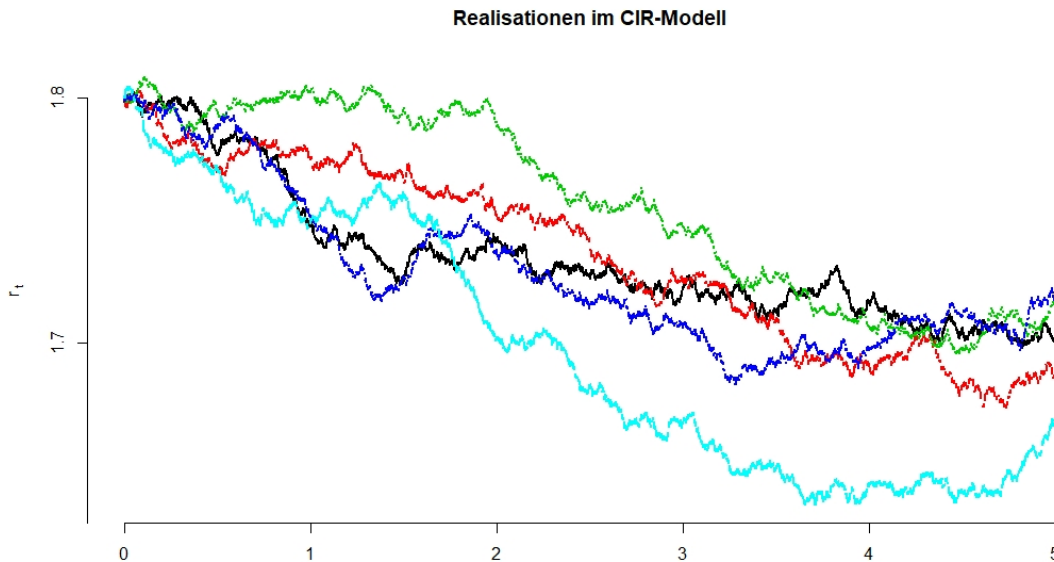


Abbildung 3.1: Realisationen im Cox-Ingersoll-Ross-Modell 3.7

**Bemerkung 3.10.** *Für die beiden beschriebenen Modelle (Vasicek-Modell 3.5 und Cox-Ingersoll-Ross-Modell 3.7) gilt: Ist der Parameter  $\beta < 0$ , hat das Modell einen Mean-Reversing-Effekt.<sup>7</sup> Der Term  $(b + \beta r_t)$  lässt sich dann mit  $\tilde{\beta} = -\beta > 0$  zu  $\tilde{\beta}(b/\tilde{\beta} - r_t)$  umformen. Dabei ist das Gleichgewichtsniveau durch  $b/\tilde{\beta}$  gegeben und  $\tilde{\beta}$  gibt die Mean-Reversing-Geschwindigkeit an.*

In Abbildung 3.1 sehen wir, wie die Short-Rate gegen den Gleichgewichtswert  $b/|\beta| = 5/3$  strebt.

Eine Erweiterung bilden die **Hull-White-Modelle**. In diesen Modellen folgt die Short-Rate der Stochastischen Differentialgleichung aus dem Vasicek-Modell 3.5 bzw. dem Cox-Ingersoll-Ross-Modell 3.7 mit der Erweiterung, dass die Parameter  $b, \beta$  und

<sup>7</sup>Das Vasicek-Modell 3.5 ist für  $\beta < 0$  ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (cf. [44]).

$\sigma$  ebenfalls zeitabhängig sein dürfen. Die Parameter werden also durch die Funktionen  $b(t)$ ,  $\beta(t)$  und  $\sigma(t)$  ersetzt. Das verleiht den Modellen mehr Flexibilität auf der einen Seite und fordert allerdings gleichzeitig das Schätzen ganzer Parameterfunktionen anstelle einzelner Parameter auf der anderen Seite.

## 3.2 LIBOR–Modell

In diesem Unterkapitel widmen wir uns dem **LIBOR–Modell**.<sup>8</sup> Das LIBOR–Modell verwendet zur Modellierung keine theoretische Short-Rate  $r(t)$ , sondern verwendet direkt am Markt beobachtbare Preise von Nullkuponanleihen  $P(t, T)$ . Die können in der Realität allerdings im Gegensatz zu unserer Annahme nicht zu jeder Zeit für alle Fälligkeiten  $T$  gehandelt werden. Ausgehend von diesen zum Zeitpunkt  $t$  bekannten Preisen  $P(t, T_i)$  für zukünftige Fälligkeiten  $T_i$  mit  $i \in \{0, \dots, n\}$  modellieren wir jetzt die Preise direkt.

Unter dem LIBOR versteht man den durchschnittlichen Zinssatz, zu dem sich internationale Großbanken gegenseitig Kredite gewähren. Er ist auch Grundlage und ein wichtiger Referenzzinssatz für alle weiteren ermittelten Kreditzinssätze am Markt.

Als Referenz für dieses Kapitel dienen [12, 20, 25].

**Definition 3.11** (Forward-LIBOR-Rate). *Der Wert der **Forward-LIBOR-Rate** zum Zeitpunkt  $t \leq T_{i-1} < T_i$  für das Zeitintervall  $[T_{i-1}, T_i]$  ist durch (cf. Definition 3.2)*

$$\begin{aligned} L_t^i &:= F(t, T_{i-1}, T_i) \\ &= \frac{1}{\delta_i} \frac{P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)}{P(t, T_i)} \end{aligned}$$

mit  $\delta_i = T_i - T_{i-1}$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  gegeben.

**Bemerkung 3.12** (Vorzeichen der LIBOR-Rate). *Während ältere Literatur die LIBOR-Rate noch als strikt positiv ansieht, müssen wir uns mittlerweile auch über mögliche negative LIBOR-Raten Gedanken machen. Dies ist genau dann der Fall, wenn*

$$P(t, T_i) > P(t, T_{i-1})$$

<sup>8</sup>Das Wort *LIBOR* ist eine englische Abkürzung und steht für *London Interbank Offered Rate*.

gilt. Übersetzt heißt das, dass eine Nullkuponanleihe mit kürzerer Laufzeit günstiger ist als eine Nullkuponanleihe mit längerer Laufzeit.<sup>9</sup>

Es ist nicht von Vorteil, die Short-Rate logarithmisch normalverteilt zu modellieren, da dies eine Explosion des Bankkontos zur Folge hätte. Bei der Forward-LIBOR-Rate ist diese Gefahr nicht gegeben, weshalb eine logarithmisch normalverteilte Modellierung naheliegend ist, sofern man von rein positiven Forward-LIBOR-Raten ausgeht. Dies führt zum folgenden Modell.

**Modell 3.13** (LIBOR-Modell). Im **LIBOR-Modell** wird die Forward-LIBOR-Rate mit der nachfolgenden Differentialgleichung modelliert

$$dL_t^i = L_t^i \lambda_t^i dW_t^i.$$

Dabei bezeichne  $W_t^i$  wieder eine Brown'sche Bewegung<sup>10</sup> und  $\lambda_t^i$  eine beschränkte und deterministische Funktion.

*Beweis.* Die eindeutige Existenz einer Lösung folgt mit Satz 2.15, wobei für  $i = \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}\alpha(t, x) &= 0 \\ \beta(t, x) &= \lambda_t^i x\end{aligned}$$

und nach Voraussetzung  $\|\lambda_t^i\|_\infty < \infty$  gilt. Damit ist das Modell mathematisch sauber formuliert.  $\square$

**Definition 3.14** (Caplet und Cap). Ein **Caplet** zum Niveau  $\nu \in \mathbb{R}$  ist ein Vertrag, der dem Käufer zum Zeitpunkt  $T_{i^*}$  die Zahlung

$$\max\{(T_{i^*} - T_{i^*-1})(F(T_{i^*-1}, T_{i^*}) - \nu), 0\}$$

<sup>9</sup>Eine Antwort auf die Frage, wieso negative Raten möglich und von der Zentralbank gewollt sind, findet sich in [39].

<sup>10</sup>Hier bezeichnet  $W_t^i$  eine Brown'sche Bewegung unter dem entsprechendem Forward-Maß  $\mathbb{Q}^{T_i}$  mit Numéraire  $P(t, T_i)$ . Eine genaue Theorie der entsprechenden Maßwechsel ist allerdings nicht Gegenstand dieser Arbeit und wird beispielsweise in [20, Kap. 7] allgemein und in [20, Kap. 11.2] für das LIBOR-Modell im Speziellen behandelt.

garantiert. Ein **Cap** zum Niveau  $\nu \in \mathbb{R}$  ist eine Zusammenfassung mehrerer Caplets zu einem Vertrag und liefert dem Käufer zu jedem Zeitpunkt  $T_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , die Zahlung

$$\max\{(T_i - T_{i-1})(F(T_{i-1}, T_i) - \nu), 0\}.$$

Der Käufer bzw. die Käuferin kann sich damit gegen einen Zinsanstieg schützen.

Mit der Black-76-Formel (cf. [6]) lässt sich ein fairer Preis für ein Cap zum Niveau  $\nu \in \mathbb{R}^+$  im LIBOR-Modell 3.13 angeben.<sup>11</sup>

Implizit geben die Forward-LIBOR-Raten auch die Dynamik des Bankkontos vor. Für dieses gilt mit diesem Modell

$$B_{T_0} = 1$$

$$B_{T_i} = \prod_{k=1}^i (1 + \delta_k L_{T_{k-1}}^i), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Zusätzlich lassen sich die Preise von Nullkuponanleihen auch explizit mit der Forward-LIBOR-Rate angeben. Umgeformt gilt nämlich in Abhängigkeit der Forward-LIBOR-Raten  $L_t^i$

$$P(T_{k-j}, T_k) = \prod_{i=k-j+1}^k \frac{1}{1 + \delta_i L_{T_{k-j}}^i}, \quad k \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k\}$$

$$P(T_0, T_k) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 + \delta_i L_{T_0}^i}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

*Beweis.* Für die vollständige Induktion verweisen wir auf [12, S. 209 : Prop. 2.76].  $\square$

Um die Modellierung und Entwicklung der LIBOR-Raten

$$dL_t^i = L_t^i \lambda_t^i dW_t^i$$

in der Praxis (cf. Kapitel 5.2) auch tatsächlich durchführen zu können, benötigen wir die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Brown'schen Bewegungen  $W_t^j$ , die im

<sup>11</sup>Die Bewertung ist aufgrund der additiven Eigenschaft von Caplets trotz der verschiedenen zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaße recht einfach gegeben.

Allgemeinen nicht unabhängig sind.

**Satz 3.15.** Für den Zusammenhang der Brown'schen Bewegungen im LIBOR-Modell gilt

$$dW_t^j = \begin{cases} dW_t^m - \sum_{k=j+1}^m \frac{\delta_k L_t^k}{1+\delta_k L_t^k} \lambda_t^k \rho_{jk} dt, & j < m \\ dW_t^m, & j = m \\ dW_t^m + \sum_{k=m+1}^j \frac{\delta_k L_t^k}{1+\delta_k L_t^k} \lambda_t^k \rho_{jk} dt, & j > m \end{cases} \quad (3.1)$$

für  $1 \leq j, m \leq n$  und (bekannte) Korrelationen  $\rho_{jk}$ .

Vorschläge zum Bestimmen dieser Korrelationen  $\rho_{jk}$  finden sich beispielsweise in [37, Kap. 2].

*Beweis.* Wir möchten eine Beweisskizze für Gleichung (3.1) geben. Die mathematischen Hintergründe und Details finden sich in [12, S. 211 : Prop. 2.78], [20, S. 201 : Lemma 11.1] und [32]. Gilt  $m = n$  können wir das Forward-Maß  $\mathbb{Q}^{T_n}$  als Ausgangspunkt nehmen und betrachten nachfolgende (postulierte) Entwicklung des Modells

$$dL_t^i = L_t^i (\mu(t, L_t) dt + (\lambda_t^i)^\top dW_t^n), \quad t \geq 0,$$

wobei  $\lambda_t^i$  und  $W_t^n$  hier  $k$ -dimensional aufgefasst werden müssen. Es gilt, den Drift  $\mu$  zu bestimmen. Für den Maßwechsel gilt mit  $Z_0^{i,i-1} = 1$

$$\begin{aligned} Z_t^{i,i-1} &:= \frac{d\mathbb{Q}^{T_{i-1}}}{d\mathbb{Q}^{T_i}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{P(t, T_{i-1})P(0, T_i)}{P(t, T_i)P(0, T_{i-1})} \\ &= \underbrace{\frac{P(0, T_i)}{P(0, T_{i-1})}}_{=: c_i} (1 + \delta_i L_t^i) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} dZ_t^{i,i-1} &= c_i \delta_i dL_t^i \\ &= c_i \delta_i L_t^i (\lambda_t^i)^\top dW_t^i \\ &= Z_t^{i,i-1} \frac{\delta_i L_t^i}{1 + \delta_i L_t^i} (\lambda_t^i)^\top dW_t^i. \end{aligned}$$

Aus der Girsanovtransformation (cf. [33, S. 133 : Th. 26]) folgt schließlich der Zusammenhang

$$dW_t^i = \frac{\delta_i L_t^i}{1 + \delta_i L_t^i} \lambda_t^i dt + dW_t^{i-1}.$$

Die endgültige Aussage von Satz 3.15 folgt per Induktion und für den Fall  $m = n$  ist die Funktion  $\mu$  durch

$$\mu(t, L_t) = - \sum_{k=i+1}^n \frac{\delta_k L_t^k}{1 + \delta_k L_t^k} (\lambda_t^k)^\top \lambda_t^i$$

gegeben.<sup>12</sup> □

Mit Stand heute (Oktober 2021) sind negative Forward-LIBOR-Raten alltäglich geworden. Aus diesem Grund muss Bemerkung 3.12 berücksichtigt werden, da die Stochastische Differentialgleichung des LIBOR-Modells 3.13 nur mit (positiven) logarithmisch normalverteilten Raten funktioniert. Um dieses Problem zu umgehen, definieren wir zuerst eine vorher festgelegte Zinsuntergrenze  $s^i$  für die Forward-Rate (cf. [34, Kap. 11]). Diese Zinsuntergrenze wird vom Benutzer bzw. von der Benutzerin vorgegeben und hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned} s^i &= s^{T_i} = s_{T_i} \\ &= (AT_i + B) \exp(-CT_i) + D. \end{aligned}$$

Die Parameter  $A, B, C$  und  $D$  sind konstant und werden vorgegeben.<sup>13</sup> Nun wandeln wir das LIBOR-Modell 3.13 zu einem LIBOR-Modell mit Shift ab (cf. [17, 46]).

**Modell 3.16** (LIBOR-Modell mit Shift). *Das **LIBOR-Modell mit Shift** ist eine Weiterentwicklung des LIBOR-Modells 3.13. Dabei folgt die Forward-LIBOR-Rate der Stochastischen Differentialgleichung*

$$dL_t^i = (L_t^i + \alpha^i) \lambda_t^i dW_t^i.$$

<sup>12</sup>Aus dieser expliziten Darstellung folgt auch die Existenz des mehrdimensionalen Ansatzes.

<sup>13</sup>Die festen Parameter  $A, B, C$  und  $D$  müssen ebenfalls wieder aus historischen Daten geschätzt werden. Eine Anleitung dazu findet sich in [34].

Der Shift  $\alpha^i$  sorgt hier dafür, die mögliche negative LIBOR-Rate auszugleichen.

Als naheliegende Wahl verwenden wir  $\alpha^i = -s_i$ .

Alternativ kann der Shift  $\alpha^i$  auch kleiner als Null sein, wenn das Modell einen positiven Mindestzins besitzt, der ausgeglichen werden soll. Der Leser bzw. die Leserin denke an folgendes Beispiel: Unsere Rate  $\overline{L}_t^i$  beschreibe jetzt nicht die LIBOR-Rate, sondern tatsächliche Mietrenditen, die wir modellieren wollen. Alle gesammelten und beobachteten Daten ergeben eine Rendite von mindestens 5%. Hier kann es sinnvoll sein, nicht  $\overline{L}_t^i$  zu modellieren, sondern

$$d\overline{L}_t^i = (\overline{L}_t^i + \overline{\alpha}^i)\lambda_t^i dW_t^i$$

mit negativem  $\overline{\alpha}^i$  zu verwenden. Dieses Beispiel ist nur als mögliche Anwendung zu sehen. Es soll eine einfache Begründung liefern, weshalb negative Shifts genauso ihre Berechtigung haben.

Wir verwenden in Kapitel 5 allerdings für Mieten und Dividenden ein Cox-Ingersoll-Ross-Hull-White-Modell (cf. (5.2)) und kein LIBOR-Modell mit Shift.



## 4 Aktienmodellierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den unterschiedlichen Möglichkeiten, die verwendet werden können, um den Wert eines Vermögenswerts zu modellieren und das Ziel des Kapitels ist es, einen strukturierten Überblick über diese Modelle zu geben. Der Basiswert, der von Interesse ist, kann der Wert eines Grundstücks, eines Rohstoffs (Gold, Silber, Kaffee, ...) oder einer Aktie sein. Der im Volksmund prominenteste Vertreter ist sicherlich der Aktienpreis, auf den wir uns auch in dieser Arbeit primär konzentrieren. Trotzdem soll im Hinterkopf behalten werden, dass nicht nur Aktienkurse mit den behandelten Modellen abgebildet werden (können). Der Kurs einer Aktie, eines Index oder einer Immobilie zum Zeitpunkt  $t$  wird in dieser Arbeit einheitlich mit  $S_t$  bezeichnet. Ohne näher darauf einzugehen, verlangen wir implizit die realitätsnahe Annahme, dass der Preis nie negativ wird.<sup>1</sup> Es finden sich nachfolgend also nur Modelle, die  $S_t \geq 0$  garantieren.

Das Kapitel soll den Anwendern einen Überblick über verschiedene Modelle, deren Unterschiede und deren Komplexität geben. Es behandelt keine mathematischen Herleitungen und auch keine Maßwechsel und damit verwandte Themen (Arbitrage, (äquivalentes) Martingalmaß, Fundamental Theorem of Asset Pricing, Vollständigkeit, Optionen, Optionspreisformeln, ...). Für eine genauere Theorie hinter den Modellen sei auf [12, 27, 35, 40] verwiesen. Das Kapitel liefert auch keine Anleitung fürs Schätzen der verwendeten Parameter. Hierfür sei auf [5, 11] verwiesen.

Den Anfang bilden stetige Modelle. Als Erstes behandeln wir das **Black Scholes–Modell** (BSM) 4.3. In diesem Modell folgt der Aktienpreis einer Geometrischen Brown’schen Bewegung (engl. *Geometric Brownian Motion* (GBM)). Im Black Scholes–Modell ist die Volatilität des Basiswerts über die Zeit konstant. Eine natürliche Erweiterung sind

---

<sup>1</sup>Teilweise tritt in der Praxis das Phänomen auf, dass Rohstoffpreise negativ werden können (cf. [38]). Dieses Phänomen werden wir hier ignorieren, da das eigentliche Interesse der Arbeit dem Aktien- und Immobilienmarkt gilt. Bei diesen Werten ist dieses Phänomen nicht realistisch.

Modelle, bei denen die Volatilität — ähnlich zur realen Welt — nicht konstant verläuft, sondern sich ebenfalls verändert. Die Erweiterungen des Black Scholes–Modell in diese Richtung sind **Stochastische Volatilitätsmodelle** 4.7 (engl. *Stochastic Volatility–Models* (SVM)). Hier ist das Heston–Modell 4.8 als prominenter Vertreter zu nennen. Eine andere Abwandlung des Black Scholes–Modells führt zu Modellen, die auch Sprünge des Kurses zulassen. Ein **Sprung-Diffusionsmodell** 4.14 (engl. *Jump-Diffusion–Model* (JDM)) ist natürlich nicht mehr stetig. Im allgemeinen Konsens wird gefordert, dass diese Modelle zumindest cadlag Pfade besitzen. Das letzte und komplexeste Modell enthält beide Erweiterungen. Das **Stochastische Volatilitätsmodell mit Sprüngen** 4.18 (engl. *Stochastic Volatility and Jump-Diffusion–Model* (SVJD)) kommt der Realität am nächsten. Die Volatilität des Prozesses ist zeitabhängig und die einzelnen Pfade dürfen Sprünge beinhalten.

## 4.1 Black Scholes–Modell

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem prominentesten und grundlegendsten stochastischen Modell für Aktienkurse, das sich in der Literatur und in der Lehre findet. Der Preis wird mit einer Geometrischen Brown’schen Bewegung modelliert. Auch in der mit dem Nobelpreis ausgezeichneten Black Scholes–Formel (cf. [7]) folgt der Basiswert einer Geometrischen Brown’schen Bewegung. Die wiedergegebene Theorie findet sich in [28, 35, 41, 42].

**Definition 4.1** (Geometrische Brown’sche Bewegung (GBM)). *Durch das Stochastische Exponential einer Brown’schen Bewegung mit Drift  $V_t$  wird eine **Geometrische Brown’sche Bewegung** definiert.*

$$\begin{aligned} X_t &:= X_0^* \mathcal{E}(V)_t = X_0^* \mathcal{E}(mt + sW)_t \\ &= X_0^* \exp\left(\left(m - \frac{s^2}{2}\right)t + sW_t\right), \quad t \geq 0, m \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

*Sie erfüllt die Stochastische Differentialgleichung*

$$\begin{aligned} dX_t &= mX_t dt + sX_t dW_t, \quad t \geq 0 \\ X_0 &= X_0^*. \end{aligned}$$

*Beweis.* Obige Stochastische Differentialgleichung erfüllt mit

$$\begin{aligned}\alpha(t, x) &= mx \\ \beta(t, x) &= sx\end{aligned}$$

die Lipschitz- und die Wachstumsbedingung aus Satz 2.15. Damit sind Existenz und Eindeutigkeit garantiert.

Als nächstes wenden wir Ito's Formel 2.14 auf  $f(t, X_t) = \log(X_t)$  an. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned}d(\log(X_t)) &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2X_t^2} d[X_t] \\ &= \frac{1}{X_t} (mX_t dt + sX_t dW_t) - \frac{1}{2X_t^2} s^2 X_t^2 dt \\ &= \left(m - \frac{s^2}{2}\right) dt + s dW_t, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die formulierte Behauptung, wonach die oben definierte Geometrische Brown'sche Bewegung die Stochastische Differentialgleichung löst, stimmt.  $\square$

**Bemerkung 4.2.** *Eine Geometrische Brown'sche Bewegung ist stetig, da eine Brown'sche Bewegung stetig ist und die Exponentialfunktion ebenfalls stetig ist.*

Damit lässt sich sofort das erste Aktienmodell definieren.

**Modell 4.3** (Black Scholes–Modell). *Im **Black Scholes–Modell** folgt der Aktienpreis einer Geometrischen Brown'schen Bewegung und damit der Stochastischen Differentialgleichung*

$$\begin{aligned}dS_t &= S_t (\mu dt + \sigma dW_t) \quad t \geq 0 \\ S_0 &= S_0^*.\end{aligned}$$

*Dabei bezeichne  $W_t$  eine Standard–Brown'sche Bewegung. Die Konstante  $\mu \in \mathbb{R}$  wird **Drift** und die Konstante  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  wird **Volatilität** genannt. Die explizite eindeutige*

Lösung der Stochastischen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$S_t = S_0^* \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \quad t \geq 0$$

für einen positiven Startwert  $S_0^*$ .

Alternativ folgt die Lösung der Stochastischen Differentialgleichung direkt mithilfe der Theorie Stochastischer Differentialgleichungen und Beispiel 2.16. Die Lösung ist dann wieder einfach durch das Stochastische Exponential gegeben.

**Bemerkung 4.4.** Für  $\mu = 0$  ist der Prozess  $S_t$  ein Martingal. Ist der Drift positiv, hat die Aktie einen steigenden Trend. Wenn der Drift negativ ist, tendiert die Aktie im Erwartungswert zu fallen.

**Bemerkung 4.5.** Das Black Scholes–Modell 4.3 ist logarithmisch normalverteilt mit

$$\frac{S_t}{S_0} \sim \text{LogN}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$$

und für alle  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n$  sind

$$\frac{S_{t_1}}{S_{t_0}}, \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}, \dots, \frac{S_{t_n}}{S_{t_{n-1}}}$$

unabhängig.

*Beweis.* Die Verteilungseigenschaft in Bemerkung 4.5 folgt aus Definition 2.1 und Bemerkung 2.2. Die Unabhängigkeitseigenschaft folgt aus Definition 2.3.  $\square$

Die Eigenschaften in Bemerkung 4.5 sind in zweierlei Hinsicht angenehm und nützlich, offenbaren aber gerade in der ersten Eigenschaft auch eine Schwäche (cf. [43]). Die Verteilungsannahme ist praktisch, da sich damit relativ einfach Optionspreisformeln herleiten lassen (cf. [7], [30]). Auf der anderen Seite sind die logarithmischen Returns von Aktien am Finanzmarkt nicht normalverteilt. Die Ränder sind bei den beobachtbaren Daten deutlich dicker und haben mehr Masse als bei einer Normalverteilung. Das heißt, dass starke Anstiege und Abfälle der Kurse systematisch unterschätzt werden. Aufgrund der einfachen Handhabung sind Black Scholes–Modelle und ihre Formeln aber trotzdem noch weit verbreitet.

Die Unabhängigkeitseigenschaft ist wünschenswert, da sich damit einerseits bedingte Verteilungen leichter ausrechnen lassen und Kursentwicklungen durchaus unabhängig von der Vergangenheit sein sollen. Trends sollten im Parameter  $\mu$  enthalten sein.

Um dieses Modell in der Praxis zu verwenden, muss man die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  schätzen. Hier offenbart das Modell aber auch eine weitere Schwäche. Eine zeitkonstante Volatilität ist in beobachteten Finanzdaten ebenfalls nicht realistisch.

**Beispiel 4.6** (Black Scholes–Modell). *Nachstehend finden sich fünf verschiedene Realisationen einer Geometrischen Brown’schen Bewegung ( $S_0 = 1, \mu = 1, \sigma^2 = 0.6$ ) über das Einheitsintervall mit 1000 äquidistant verteilten Zwischenpunkten.*

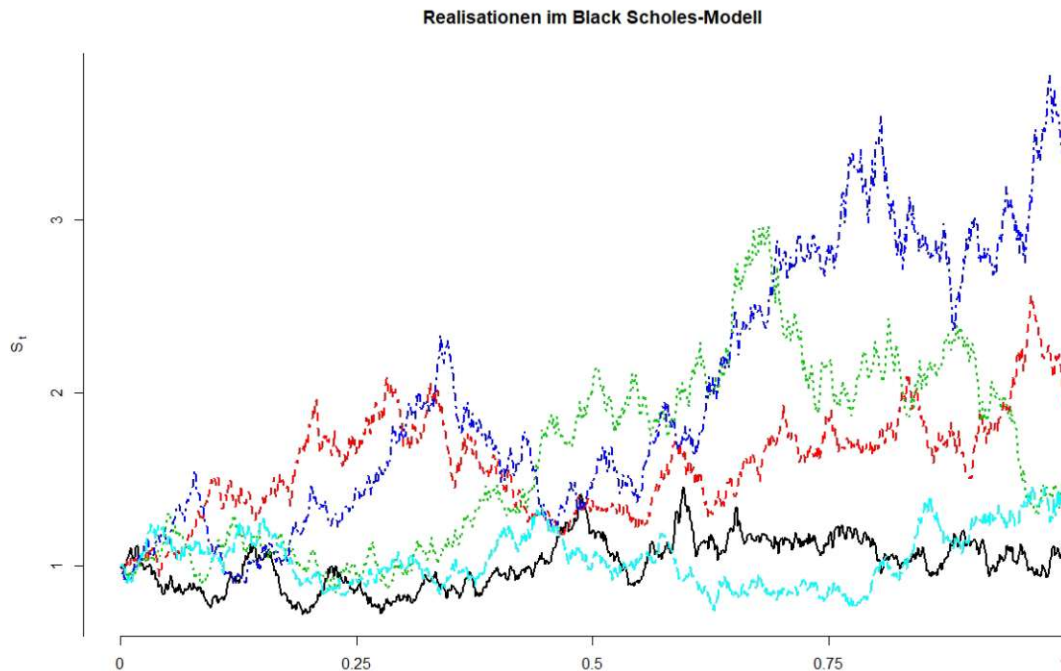


Abbildung 4.1: Realisationen im Black Scholes–Modell 4.3

In Abbildung 4.1 sehen wir fünf verschiedene Pfade einer Geometrischen Brown’schen Bewegung, die möglichen Kursverläufen im Black Scholes–Modell entsprechen können.

## 4.2 Stochastische Volatilitätsmodelle

Dieser Abschnitt verallgemeinert das Black Scholes–Modell 4.3 aus dem vorherigen Unterkapitel. Die Volatilität  $\sigma$  ist nicht mehr konstant über die Zeit, sondern selbst ebenfalls zeit- und  $\omega$ -abhängig, also stochastisch. Die Volatilität wird dabei ebenfalls durch eine Stochastische Differentialgleichung beschrieben. Die beschriebene Theorie und alle angeführten Resultate finden sich in [12, 25, 26, 35].

**Modell 4.7** (Stochastisches Volatilitätsmodell). *Allgemein nennen wir ein Modell für den Kurs eines Underlyings **Stochastisches Volatilitätsmodell**, wenn folgendes System von Stochastischen Differentialgleichungen für positive Startwerte  $S_0^*$  und  $\Sigma_0^*$  erfüllt ist*

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t (\mu dt + \sqrt{\Sigma_t} dW_t), \quad t \geq 0 \\ d\Sigma_t &= \alpha(S, \Sigma, t) dt + \eta\beta(S, \Sigma, t)\sqrt{\Sigma_t} dV_t \quad t \geq 0 \\ S_0 &= S_0^* \\ \Sigma_0 &= \Sigma_0^*. \end{aligned}$$

*An die beiden progressiv-messbaren Funktionen  $\alpha(\dots)$  und  $\beta(\dots)$  stellen wir die Anforderung, dass sie derart beschaffen seien, dass sie eine starke (nichtnegative) Lösung der Stochastischen Differentialgleichung für  $\Sigma_t$  garantieren. Zusätzlich seien  $V_t$  und  $W_t$  zwei Brown'sche Bewegungen mit Korrelation  $\rho$  mit  $|\rho| \leq 1$ . Der Parameter  $\mu$  sei eine reelle Konstante und  $\eta$  eine nichtnegative Konstante aus den reellen Zahlen.*

Im Allgemeinen lässt sich für ein Stochastisches Volatilitätsmodell keine explizite Lösung für den Preisprozess  $S_t$  angeben. Für den weiteren Verlauf der Arbeit interessiert uns lediglich ein spezieller Fall, das Heston–Modell 4.8. Das Heston–Modell ist ein Stochastisches Volatilitätsmodell mit

$$\begin{aligned} \alpha(S, \Sigma, t) &:= (\alpha - \beta\Sigma_t) \\ \beta(S, \Sigma, t) &:= 1. \end{aligned}$$

Auch für dieses Modell gibt es Formeln zur Berechnung von Optionspreisen analog zu den Black Scholes–Formeln (cf. [24]).

**Modell 4.8** (Heston–Modell). *In diesem Modell folgt der Kurs einem System von Stochastischen Differentialgleichungen mit zwei verschiedenen Brown’schen Bewegungen  $V_t$  und  $W_t$  mit konstanter Korrelation  $\rho$  mit  $|\rho| \leq 1$  und positiven Startwerten  $S_0^*$  und  $\Sigma_0^*$ , die zum Zeitpunkt  $t = 0$  bekannt seien*

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t (\mu dt + \sqrt{\Sigma_t} dW_t), \quad t \geq 0 \\ d\Sigma_t &= (\alpha - \beta\Sigma_t) dt + \eta\sqrt{\Sigma_t} dV_t, \quad t \geq 0 \\ S_0 &= S_0^* \\ \Sigma_0 &= \Sigma_0^*. \end{aligned}$$

Dieses Modell heißt für  $\mu \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_0^+, \beta \in \mathbb{R}^+$  und  $\eta \in \mathbb{R}^+$  **Heston–Modell**.

Die Differentialgleichung für den Volatilitätsprozess kennen wir bereits aus dem vorherigen Kapitel.

*Beweis.* Die Existenz und Eindeutigkeit für die Lösung der Stochastischen Differentialgleichung für  $\Sigma_t$  folgt aus dem vorherigen Kapitel (Modell 3.7). Die eindeutige Lösungs-existenz (für  $S_t$ ) wird in [12, S. 65 ff.] diskutiert. Zusätzlich sei auf [24] verwiesen.<sup>2</sup>  $\square$

**Bemerkung 4.9.** *Die Stochastische Differentialgleichung für die Volatilität wird durch ein Cox-Ingersoll-Ross–Modell (cf. Modell 3.7) beschrieben.*

Wir können Bemerkung 3.10 auf das Heston–Modell 4.8 übertragen. Wir sehen, dass aufgrund der Anforderung an  $\beta$ , das Heston–Modell 4.8 einen Mean-Reversing–Effekt besitzt. Das Gleichgewichtsniveau ist durch  $\alpha/\beta$  gegeben.

Für eine Anwendung dieses Modells müssen schon deutlich mehr Parameter im Voraus geschätzt werden. Zusätzlich braucht eine Modellierung mehr Zeit und Rechenaufwand verglichen mit dem (einfacheren) Black Scholes–Modell.

**Beispiel 4.10** (Heston–Modell). *Nachstehend finden sich fünf verschiedene Realisatio-nen im Heston–Modell mit Parametern  $S_0 = 1, \mu = 1, \Sigma_0 = 0.8, \alpha = 0.8, \beta = 1, \eta = 0.2$  und  $\rho = 0.5$  über das Einheitsintervall mit 1 000 äquidistant verteilten Zwischenpunkten. Die Modellierung erfolgt mit dem Euler-Maruyama–Verfahren (cf. [21]).*

<sup>2</sup>Das noch allgemeinere Double-Heston–Modell wird in [19] inklusive Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung diskutiert.

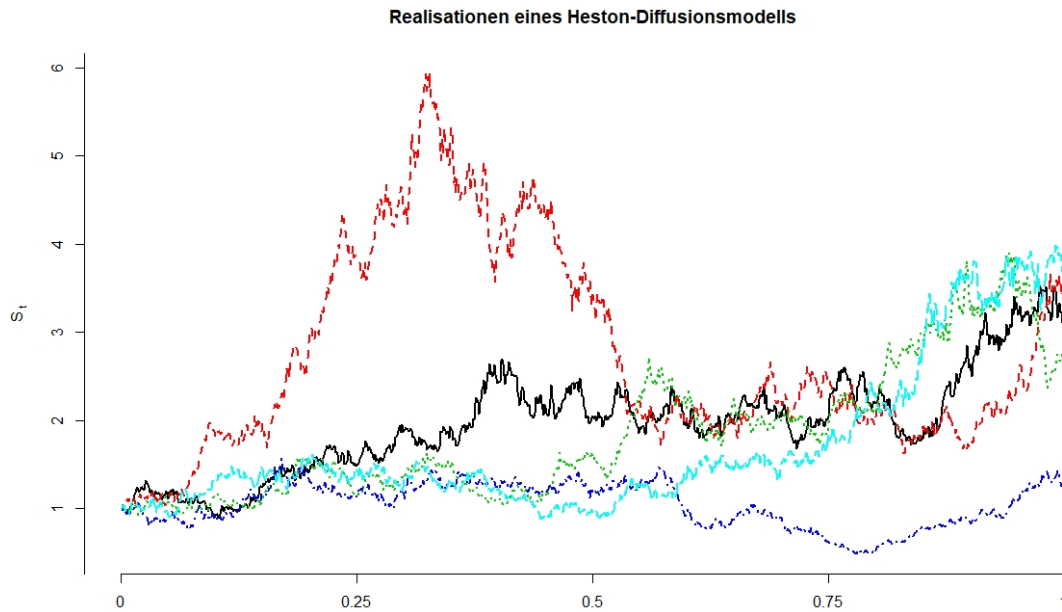


Abbildung 4.2: Realisationen im Heston-Modell 4.8

In Abbildung 4.2 erkennen wir auf den ersten Blick, dass die Ausschläge des Kurses deutlich extremer sind als in Abbildung 4.1. Ein stochastisches Volatilitätsmodell lässt höhere Ausschläge zu als das klassische Black Scholes-Modell, obwohl  $\sqrt{\Sigma_t}$  und  $\sigma$  ungefähr dieselbe Größenordnung haben. Auch wenn beide Abbildungen für fünf spezifische  $\omega_i$ s erstellt wurden, sind die abgebildeten Trajektorien typisch für diese Erweiterung. Damit kann man versuchen, die sonst unterschätzten Ränder der Verteilung auszugleichen (cf. [31]).

### 4.3 Sprung-Diffusionsmodell

In diesem Abschnitt wird eine Methode vorgestellt, das Black Scholes-Modell auf andere Art und Weise zu erweitern. Dazu dürfen Modelle auch Sprünge im Kursverlauf aufweisen. Sprungprozesse sind immer cadlag Prozesse. Dieses Unterkapitel stützt sich auf [4, 12, 25].

**Definition 4.11** (Poissonprozess). *Ein stochastischer Prozess  $N_t$  mit Startwert  $N_0 = 0$ ,*



für den alle linksseitigen Grenzwerte existieren, heißt **inhomogener Poissonprozess**, falls die Inkremente poissonverteilt sind mit

$$N_t - N_s \sim P(\Lambda^{(s,t)}), \quad 0 \leq s < t, \Lambda^{(s,t)} \in \mathbb{R}^+.$$

Sind die Inkremente für alle  $s$  und  $t$  mit  $s < t$  mit dem Parameter  $\lambda(t - s)$  verteilt, spricht man von einem (**homogenen**) **Poissonprozess** mit Poissonparameter  $\lambda > 0$ .

**Bemerkung 4.12.** Der Poissonparameter  $\lambda$  gibt die Anzahl der erwarteten Sprünge im Einheitsintervall an, da  $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$  gilt.

**Definition 4.13** (Zusammengesetzter Poissonprozess). Es sei  $N_t$  ein Poissonprozess mit Poissonparameter  $\lambda > 0$  und  $Y_i$  unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen. Alle  $Y_i$  seien zusätzlich auch von  $N_t$  unabhängig. Dann heißt der Prozess

$$X_t := \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

**Zusammengesetzter Poissonprozess.**

Damit lässt sich ein Sprungmodell definieren. Zusätzlich zu einer Geometrischen Brown'schen Bewegung kommt der sprunghafte Einfluss eines Poissonprozesses dazu.

**Modell 4.14** (Sprung-Diffusionsmodell (Merton)). In diesem Modell folgt der Referenzwert einer Geometrischen Brown'schen Bewegung mit Sprüngen und der Stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t-} ((\mu - \lambda\kappa) dt + \sigma dW_t + (Y_t - 1) dN_t) \\ &= S_{t-} (\psi dt + \sigma dW_t + (Y_t - 1) dN_t), \quad t \geq 0 \\ S_0 &= S_0^* \end{aligned}$$

mit positivem Startwert  $S_0^*$ . Dieses Modell heißt **Sprung-Diffusionsmodell**.  $W_t$  bezeichne wieder eine Standard-Brown'sche Bewegung und  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  wieder Drift und Volatilität.  $N_t$  sei ein Poissonprozess mit Poissonparameter  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Die prozentu-

ellen Sprunghöhen  $(Y_t - 1)$  seien logarithmisch normalverteilt, sodass

$$\mathbb{E}[Y_t] = 1 + \kappa$$

gilt und die Höhe des Sprungs sei unabhängig vom Poissonprozess  $N_t$  und der Brown'schen Bewegung  $W_t$ . Zusätzlich sei  $\psi := (\mu - \lambda\kappa)$  definiert. Die Lösung des Modells ist explizit durch

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\psi - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right) \prod_{i=1}^{N_t} \tilde{Y}_i$$

gegeben. Dabei gelte  $\tilde{Y}_i = Y_{t_i}$  und  $\tilde{Y}_i$  bezeichne den Wert des Sprungprozesses  $Y_t$  beim  $i$ -ten Sprungzeitpunkt, falls der Wert zu den Zeitpunkten  $t_i$  springt.

*Beweis.* Dieses Ergebnis übernehmen wir direkt von Merton, der das Modell in [30] behandelt. Die Lösung lässt sich ansonsten wieder mit Ito's Formel überprüfen. Ein zielführender Ansatz dafür findet sich unter Verwendung von [12, S. 94 : Th. 1.85] ebenda.  $\square$

Natürlich lässt sich für die Verteilung der Sprunghöhen jede positive (stetige) Verteilung verwenden. In [47] werden logarithmisch gleichverteilte Sprünge auf einem Intervall  $(a, b)$  vorgeschlagen. Wir folgen aber Merton, der in [30] logarithmisch normalverteilte Sprünge vorschlägt, mit denen er dann in einem Modell mit konstanter Volatilität Formeln für Optionspreise ähnlich zu den Black Scholes-Formeln berechnet. Eine logarithmische Normalverteilung hat nämlich zur Folge, dass das Asset  $S_t$  selbst wieder logarithmisch normalverteilt ist (cf. Modell 4.3 und [7]).

**Bemerkung 4.15.** *In dieser Arbeit beschränken wir uns auf logarithmisch normalverteilte Sprünge.*

Das Sprung-Diffusionsmodell 4.14 findet in der Praxis allerdings wenig Verwendung, da stochastische Volatilitäten deutlich realitätsnäher sind als vereinzelte Sprünge. Trotzdem geben wir ein abschließendes Beispiel.

**Beispiel 4.16** (Sprung-Diffusionsmodell). *Nachstehend finden sich fünf verschiedene Realisationen eines Sprung-Diffusionsmodells mit folgenden Parametern:  $S_0 = 1, \mu = 1,$*

$\sigma^2 = 0.6$ ,  $Y_t \sim \text{LogN}(-0.25, 0.5)$  und  $\lambda = 2$ ), berechnet über das Einheitsintervall mit 1 000 äquidistant verteilten Zwischenpunkten.

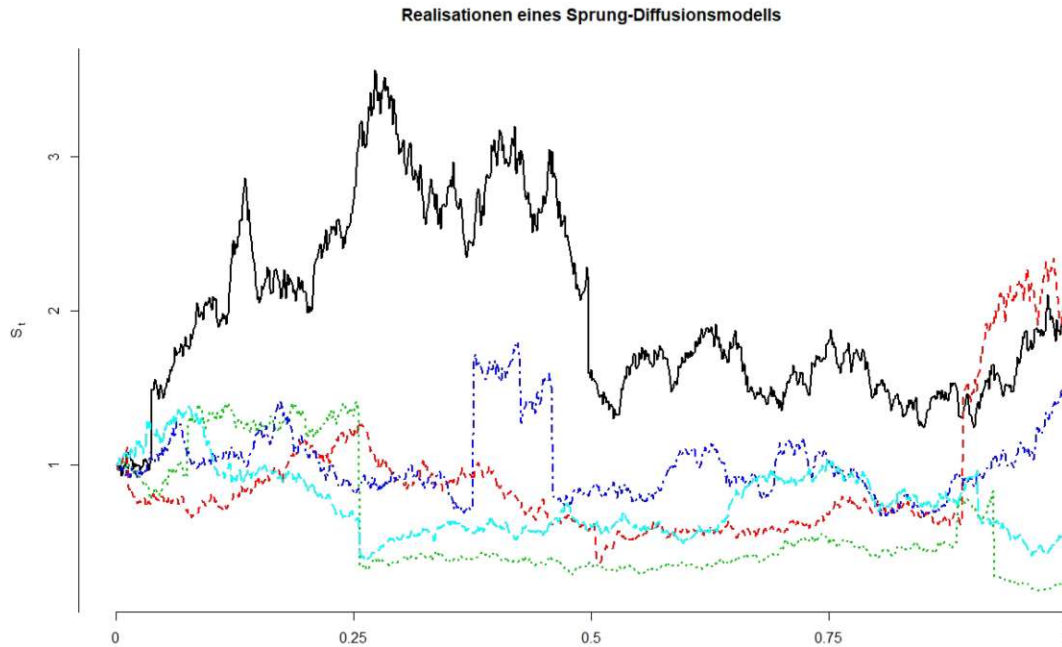


Abbildung 4.3: Realisationen im Sprung-Diffusionsmodell 4.14

In Abbildung 4.3 lassen sich in allen Kursverläufen sehr gut die Sprünge identifizieren. Da wir für die Simulation  $\lambda = 2$  gewählt haben, erwarten wir in etwa zwei Sprünge innerhalb des Intervalls  $[0, 1]$ .

Bevor wir im nächsten Kapitel beide Erweiterungen zu einem komplexen Modell kombinieren, soll nachfolgendes Beispiel 4.17 die Unterschiede der bisherigen Modelle illustrieren. Allen drei Modellen liegt dieselbe Brown'sche Bewegung  $W_t(\omega^*)$  zugrunde, damit man die Unterschiede der einzelnen Modelle mit freiem Auge besser erkennen kann.

**Beispiel 4.17** (Verschiedene Modelle). *Nachstehend findet sich eine Realisation des Black Scholes-Modells 4.3, des Heston-Modells 4.8 und des eben behandelten Sprung-Diffusionsmodells 4.14. Allen drei normierten ( $S_0 = 1$ ) Pfaden liegen dieselbe Brown'sche Bewegung  $W_t(\omega^*)$  und dieselben Annahmen zugrunde ( $\mu = 1, \sigma^2 = 0.6$  sowie  $\Sigma_0 = \alpha =$*

$0.6, \beta = 1, \eta = 0.2$  und  $\rho = 0.5$ ). Außerdem gilt  $Y_t \sim \text{LogN}(0, 0.5)$  und  $\lambda = 2$ . Abgebildet ist das Einheitsintervall mit 1000 äquidistant verteilten Zwischenpunkten.

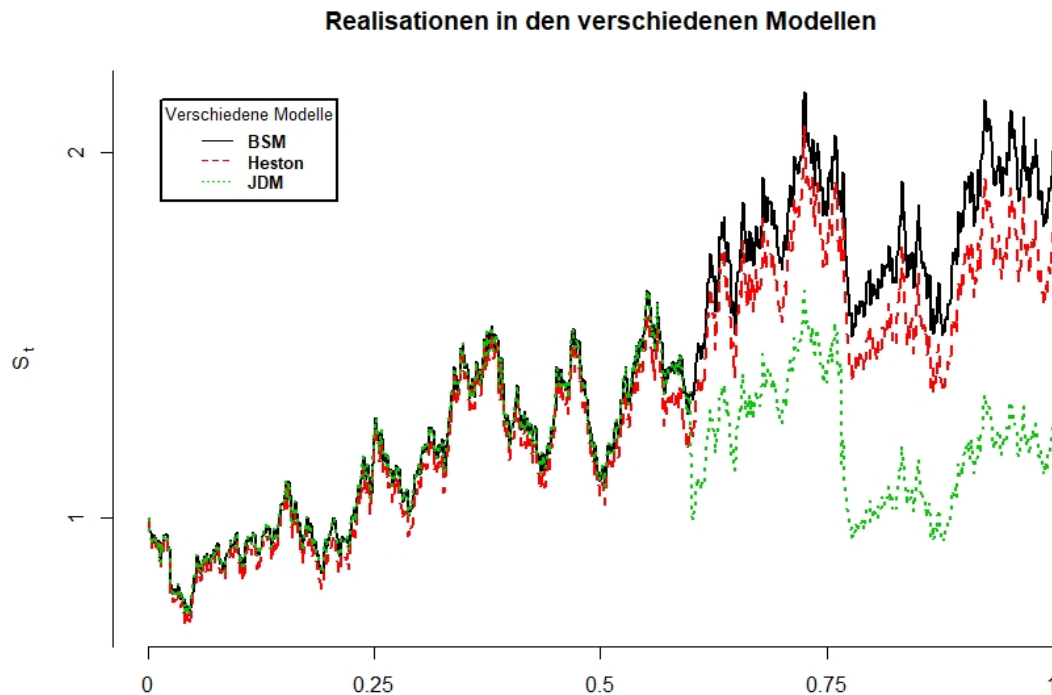


Abbildung 4.4: Realisationen verschiedener Modelle

In Abbildung 4.4 erkennt man sehr gut, dass das Black Scholes–Modell 4.3 (schwarz) und das Sprung-Diffusionsmodell 4.14 (grün) bis zum ersten Sprung annähernd gleich verlaufen. Erst nach dem ersten Sprung um  $t \approx 0.6$  unterscheiden sich die beiden Kursverläufe wesentlich. Das Heston–Modell 4.8 (rot) verläuft von Anfang an unterschiedlich, was aufgrund der stochastischen Volatilität aber auch nicht überrascht. Große Ausschläge des Heston–Modells gibt es aber nicht, da das Gleichgewichtsniveau  $\alpha/\beta$  mit  $\Sigma_0$  und  $\sigma^2$  übereinstimmt und  $\eta$  klein gewählt ist. Dementsprechend ist der Kursverlauf des Heston–Modells nicht viel volatiler als der des Black Scholes–Modells.

## 4.4 Sprung-Diffusionsmodell mit Stochastischer Volatilität

Dieser Abschnitt behandelt die letzte Erweiterung des Black Scholes-Modells 4.3. Das Stochastische Exponential, das die Bewegung des Aktienkurses wiedergeben soll, wird um Sprünge aus dem Sprung-Diffusionsmodell 4.14 und zeitabhängige und stochastische Volatilität aus dem Heston-Modell 4.8 erweitert. Damit wird versucht, die Realität bestmöglich zu modellieren. Die präsentierten Ergebnisse und Resultate stützen sich auf [2, 47].

**Modell 4.18** (Sprung-Diffusionsmodell mit stochastischer Volatilität (Bates)). *Folgt ein Prozess den Stochastischen Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned}dS_t &= S_{t-}((\mu - \lambda\kappa) dt + \sqrt{\Sigma_t} dW_t + (Y_t - 1) dN_t), \quad t \geq 0 \\d\Sigma_t &= (\alpha - \beta\Sigma_t) dt + \eta\sqrt{\Sigma_t} dV_t, \quad t \geq 0 \\S_0 &= S_0^* \\ \Sigma_0 &= \Sigma_0^*\end{aligned}$$

nennen wir das Modell **Sprung-Diffusionsmodell mit stochastischer Volatilität**. Weiters seien  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^+$  und  $\eta \in \mathbb{R}^+$  bekannte Konstanten.  $N_t$  sei ein Poissonprozess mit Poissonparameter  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Zwischen den beiden Brown'schen Bewegungen  $W_t$  und  $V_t$  gebe es eine konstante Korrelation  $\rho$  mit  $|\rho| \leq 1$ . Die beiden Brown'schen Bewegungen  $W_t$  und  $V_t$  seien unabhängig vom Prozess  $N_t$ . Zusätzlich seien die prozentuellen Sprunghöhe  $(Y_t - 1)$  selbst unabhängig von den anderen Prozessen. Mit  $\kappa$  werde wieder die erwartete prozentuelle Veränderung durch den Sprung bezeichnet, also

$$\mathbb{E}[Y_t] = 1 + \kappa.$$

Die Sprunghöhen  $Y_t$  seien logarithmisch normalverteilt.

*Beweis.* Hier führen wir die Arbeit von Bates<sup>3</sup> an, der das Modell in [2] erstmals formuliert. □

<sup>3</sup>In [2] finden sich neben der Wahrscheinlichkeitsdichte des Prozesses  $\log(S_T/S_0)$  auch Optionspreismformeln. Daneben möchten wir auf [3] verweisen, wo stochastische Volatilitätsmodelle mit Sprüngen im Allgemeinen behandelt werden.

Für die Anwendung dieses Modells muss man allerdings wieder zahlreiche Parameter schätzen und festlegen. Um eine Idee eines Pfades zu bekommen, geben wir wieder ein Beispiel für festgelegte Parameter und ein zufälliges  $\omega^* \in \Omega$ .

**Beispiel 4.19** (Sprung-Diffusionsmodell mit stochastischer Volatilität). *Nachfolgend findet sich eine Realisation im Sprung-Diffusionsmodell mit stochastischer Volatilität 4.18 über das Einheitsintervall mit 10 000 Zwischenpunkten und nachfolgenden Parametern:  $S_0 = 1, \mu = 1, \Sigma_0 = 0.6, \rho = 0.35, \alpha = 0.5, \beta = 1$  und  $\eta = 0.4$ . Daneben gelte  $\lambda = 10$  und  $Y_t \sim \text{LogN}(-0.05, 0.1)$ .*

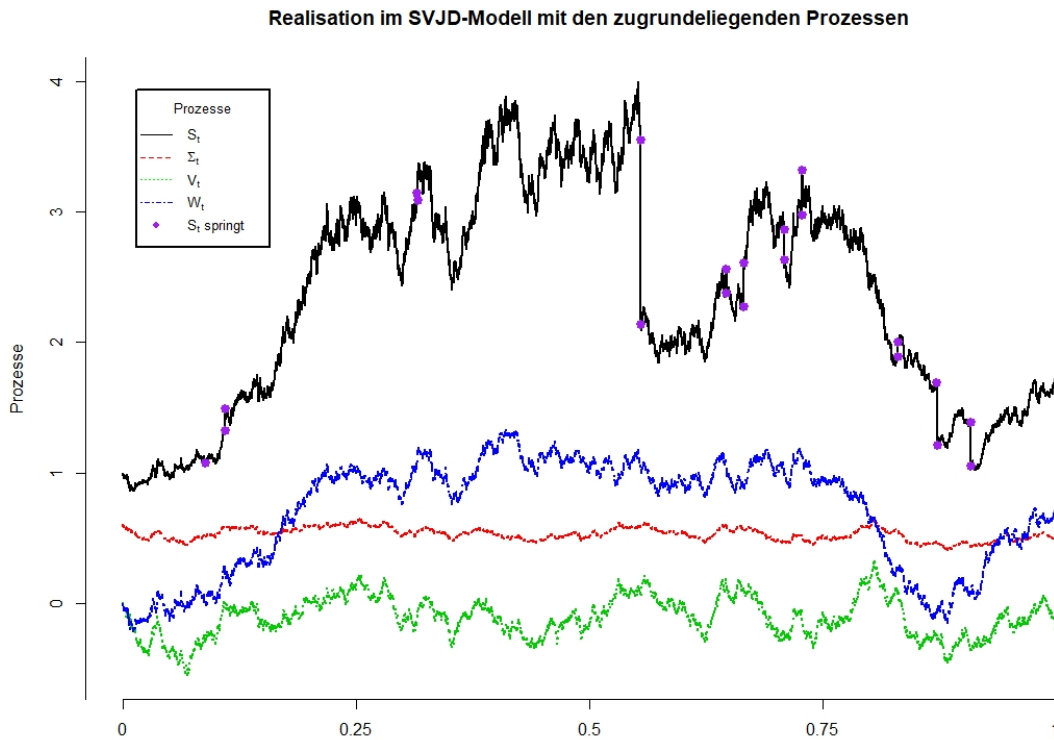


Abbildung 4.5: Realisation im Sprung-Diffusionsmodell mit stochastischer Volatilität

In Abbildung 4.5 sehen wir den Kurs des Basiswerts  $S_t$  in schwarz. Dieser weist genau elf Sprünge auf, die wir in dieser Größenordnung auch erwarten ( $\lambda = 10$ ) und die mit lila Punkten eingezeichnet sind. Außerdem lässt sich sehr gut erkennen, wie die

Brown'sche Bewegung  $W_t$  (blau) die Entwicklung des Basiswerts  $S_t$  beeinflusst. Die Volatilität schwankt nicht besonders stark und hat keine Tendenz nach oben oder unten. Das ist nicht weiter überraschend, da der Startwert nahe beim erwarteten Grenzwert der Volatilität (Gleichgewichtsniveau) liegt und  $\eta$  nicht übermäßig groß ist.

## 5 ESG–Modellierung in der Praxis

In diesem Kapitel widmen wir uns der Zinsstruktur- und Aktienmodellierung in der Praxis. Der Kern des Kapitels ist die Beschreibung eines **Economic Scenario Generators** (cf. Kapitel 5.1). Die mathematische Basis für die praktische Umsetzung findet sich in Kapitel 2 (mathematische Theorie), in Kapitel 3 (Zinsstrukturmodellierung) und in Kapitel 4 (Indexmodellierung). Nachfolgend untersuchen und beschreiben wir den Modellierungsprozess in der ÖBV.<sup>1</sup> Dieser Modellierungsprozess wird von der ÖBV nicht selbst durchgeführt, sondern an das Unternehmen Deloitte ausgelagert.<sup>2</sup> Die Ergebnisse der Berechnungen werden anschließend zur Weiterverarbeitung an die ÖBV zurückgeliefert. Deloitte berechnet für die ÖBV 1 000 verschiedene Entwicklungen von Zinskurven, Indizes, Immobilienwerten, Dividendenhöhen und Mieteinnahmen. Die Inflation wird nicht berücksichtigt und nicht abgebildet. Für die Modellierung werden die in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Methoden verwendet und die Stochastischen Differentialgleichungen mit Monte-Carlo Simulationen modelliert (cf. [21]). Diese Kalibrierung passiert einmal im Quartal. Einzelne Teile der Kalibrierung können nicht detailgenau beschrieben werden, da sie Unternehmensgeheimnisse beinhalten und daher unter Verschluss bleiben müssen. Dazu gehören insbesondere die Schätzungen der einzelnen Modellparameter. Das sind beispielsweise die Korrelationen  $\rho_{jk}$  der einzelnen Brown'schen Bewegungen und die deterministischen Volatilitätsfunktionen  $\lambda_t^i$  im LIBOR–Modell (cf. Gleichung (3.1)). Daneben gibt es keine näheren Details zur Spezifizierung der Sprunghöhe und Sprunghäufigkeit im SVJD–Modell (cf. Modell 4.18).

Während das erste Unterkapitel einen allgemeinen Überblick über den Modellierungsprozess gibt, widmen wir uns im zweiten Unterkapitel der tatsächlichen Modellierung

---

<sup>1</sup>Die *Österreichische Beamtenversicherung, Versicherungsverein auf Gegenseitigkeit* (Firmenbuchnummer: FN 86811p) sitzt in der Grillparzerstraße 11, 1016 Wien. Dipl.-Ing. B. Steiger ist die erste Ansprechpartnerin in der ÖBV betreffend dieses Modellierungsprozesses.

<sup>2</sup>Die *B&W Deloitte GmbH* (eingetragen unter: HRB 83442) sitzt am Rosenheimer Platz 4, 81669 München. Dr. E. Fink ist die für diesen Prozess zuständige Person bei Deloitte.



von Zinskurven. Das darauf folgende Unterkapitel widmet sich der Aktien- und Anleihenindexmodellierung. Immobilienwerte können im Prinzip analog zu Aktien- und Anleihenindizes modelliert werden. Dividenden und Mieteinnahmen lassen sich wie Zinsraten modellieren. Deloitte verwendet dafür ein CIR-Hull-White-Modell (cf. Gleichung (5.2)), da dies nur positive Renditen zulässt und negative Zinsen (hier: Dividenden bzw. Mieteinnahmen) daher unrealistisch sind. Das Modell für diesen Modellierungsprozess und das Ergebnis selbst werden als **Economic Scenario Generator** (ESG) bezeichnet. Hintergrundinformationen zum ESG finden sich in [13, 15]. Der Großteil in diesem Kapitel entstammt allerdings einem echten Modellierungsprozess und beruht auf unternehmensinternen Unterlagen und Daten, die nicht veröffentlicht sind und sich auch nicht im Anhang befinden dürfen.

Das Ziel von diesem Kapitel ist es, die von Deloitte durchgeführten Modellierungsprozesse kritisch zu analysieren und dem Leser bzw. der Leserin praxisnahe anhand eines Beispiels zu erklären und näherzubringen. Dazu beschreiben und beziehen wir uns nachfolgend auf die Kalibrierung vom 31.12. des Jahres 2020.

## 5.1 Allgemein

Ein **Economic Scenario Generator** (cf. [13]) hat als Hauptziel, verschiedene mögliche Kapitalmarktentwicklungen aufzuzeigen und daraus eine Verteilung abzuleiten. Die unterschiedlichen Risikofaktoren und Assetklassen sollen dabei alle erfasst und abgebildet werden. Diese unterscheiden sich natürlich von Versicherungsunternehmen zu Versicherungsunternehmen. Zusätzlich müssen auch die Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Assetklassen abgebildet werden. Der Zeithorizont ist ebenfalls unternehmensspezifisch und hängt vom versicherten Portfolio des Unternehmens ab. Hat ein Versicherungsunternehmen beispielsweise ausschließlich Verträge, die in den nächsten 15 Jahren ablaufen, macht es keinen Sinn Anleihen mit einer längeren Laufzeit zu kaufen oder überhaupt längere Laufzeiten zu simulieren, da nach 15 Jahren (ohne Berücksichtigung eines eventuellen Neugeschäfts) keine verpflichtenden Leistungen mehr fällig sein werden.

Ein weiteres Ziel des ESG ist es, risikoneutral zu modellieren (cf. Kapitel 5.5). Das heißt, dass kein Asset (keine Immobilie, keine Aktie und keine Anleihe) im Schnitt einen höheren Ertrag erzielen darf als die (modellerte) risikolose Zinskurve (siehe unten).

Dadurch ergeben sich (verstärkt durch den derzeitigen Negativzins) für den Praktiker „unrealistische“ Situationen.

**Definition 5.1** (Totalreturn). Der **Totalreturn** bezeichnet die komplette prozentuelle Wertsteigerung eines Basiswerts. Er setzt sich zusammen aus möglichen (positiven) Zahlungsströmen (Mieteinnahmen, Dividenden) und der Wertsteigerung des Underlyings. Für ein Asset  $A$  mit bekannten Preisen  $A_t$  für  $t \in \{T_0, \dots, T_n\}$  und Zahlungsströmen  $D_{T_{i+1}}$  im Intervall  $(T_i, T_{i+1}]$  lässt sich der Totalreturn für das Intervall  $(T_i, T_{i+1}]$  durch

$$TR_{T_{i+1}} := \frac{A_{T_{i+1}} - A_{T_i} + D_{T_{i+1}}}{A_{T_i}}$$

definieren und berechnen.

Möchte man beispielsweise einen Aktienindex modellieren, muss der Totalreturn des Basiswerts der risikolosen EIOPA-Verzinsung entsprechen. Nimmt man zum Beispiel eine mittlere Dividendenzahlung von 3 % an, muss die Aktie bei risikoneutraler Bewertung und einer Gesamtverzinsung von -1 % im Schnitt 4 % Wertverlust aufweisen. Dasselbe gilt für Immobilienwerte und Annahmen zu Mieteinnahmen (anstelle der Dividenden). Diese risikoneutrale Anforderung müssen wir im Hinterkopf behalten und dürfen deswegen den tatsächlichen Resultaten und deren Werten nicht zu viel Realitätsnähe zusprechen.

Die verwendeten Modelle für die Kursentwicklung (Modell 3.13 und Modell 4.18) werden durch Stochastische Differentialgleichungen beschrieben und hängen daher für jedes  $\omega_i \in \Omega$  vom spezifischen Pfad der entsprechenden Brown'schen Bewegungen  $W_t(\omega_i)$  und  $V_t(\omega_i)$  ab. Um zufriedenstellende Ergebnisse zu erzielen, werden verschiedene Pfade der Brown'schen Bewegung simuliert und Deloitte mittelt dann über die erhaltenen 1 000 verschiedene Szenarien der Monte-Carlo Simulation.

Die Risikoneutralität wird von der Europäischen Union (EU) gefordert und wird zur risikoneutralen Berechnung der Optionen und Garantien der Versicherungsnehmer und -innen herangezogen. Diese Optionen und Garantien verursachen dem Versicherungsunternehmen zukünftige Kosten, die im Best Estimate in der Solvency II-Bilanz<sup>3</sup> berücksichtigt werden müssen. Optionen und Garantien der Versicherungsnehmer und -innen sind beispielsweise

<sup>3</sup>Details zur Bilanzierung von Versicherungsunternehmen finden sich in [18].

- Optionen: Rückkauf-, Zuzahlungs- und Verrentungsoption
- Garantien: Sterbetafel- und Zinsgarantie.

Die Zinsgarantie verursacht als einzige eine nennenswerte Größe in der Solvency II-Marktwertbilanz. Infolgedessen wird der stochastische Lauf mit 1 000 unterschiedlichen Szenarien am Kapitalmarkt herangezogen, um diese Position zu ermitteln. Der Wert der Optionen und Garantien ergibt sich aus der Differenz zwischen dem gewichteten Mittelwert des Best Estimates der 1 000 Szenarien und dem Best Estimate der Certainty-Equivalent-Kurve (cf. [14, Kap. 2]).

## 5.2 Zinsstrukturmodellierung

Deloitte — und damit die ÖBV — verwendet zur Zinsstrukturmodellierung ein erweitertes LIBOR-Modell mit Shift (cf. LIBOR-Modell 3.16) und die Stochastische Differentialgleichung

$$dL_t^i = z(L_t^i - s^i)\lambda_t^i dW_t^i, \quad t \geq 0. \quad (5.1)$$

Die Funktion  $z : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  werden wir noch unten spezifizieren.

Die Startzinskurve kommt von der European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA, cf. [15]). Auf der Website der EIOPA<sup>4</sup> werden zumindest<sup>5</sup> monatlich die Spot-Rates für Nullkuponanleihen mit Jahresfälligkeiten veröffentlicht. Die Daten werden für die entsprechenden Länder jeweils mit und ohne Volatilitätsanpassung veröffentlicht. Daneben gibt es noch jeweils zwei Schockszenarien: einen Zinsschock nach oben und einen nach unten. Als Hintergrund zu den Berechnungen der EIOPA sei auf [16] verwiesen. Mit den bekannten Definitionen aus Kapitel 3.1 lassen sich die LIBOR-Raten  $L_t^i$  aus Definition 3.11 definieren.

$$L_t^i = \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \frac{P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)}{P(t, T_i)}$$

<sup>4</sup>Unter [www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures\\_en](http://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures_en) können die Daten abgerufen werden (Stand 08. Juni 2021).

<sup>5</sup>Bei besonderen Anlässen (z.B.: während der COVID-19-Pandemie) gibt es häufigere Veröffentlichungen.

Dies geschieht für das Szenario mit Volatilitätsanpassung für das Basisszenario und die Schockszenarien, da eine Modellierung für diese drei Optionen erfolgt. Für die Modellierung der LIBOR-Raten verwenden wir den Zusammenhang aus Gleichung (3.1). Um die Korrelationen  $\rho_{jk}$  zu bestimmen, verwendet Deloitte ein eigenes Verfahren, das vertraulich behandelt wird und daher nicht offengelegt werden kann. Abermals möchten wir auf [37, Kap. 2] verweisen, wo sich Vorschläge zum Bestimmen dieser Korrelationen finden.

Für die Zinsuntergrenze für den Jahresabschluss des Jahres 2020 legt das Risikomanagement der ÖBV

$$s^i = -0.02 \exp(-0.2T_i) - 0.025.$$

fest (cf. Abbildung 5.1).

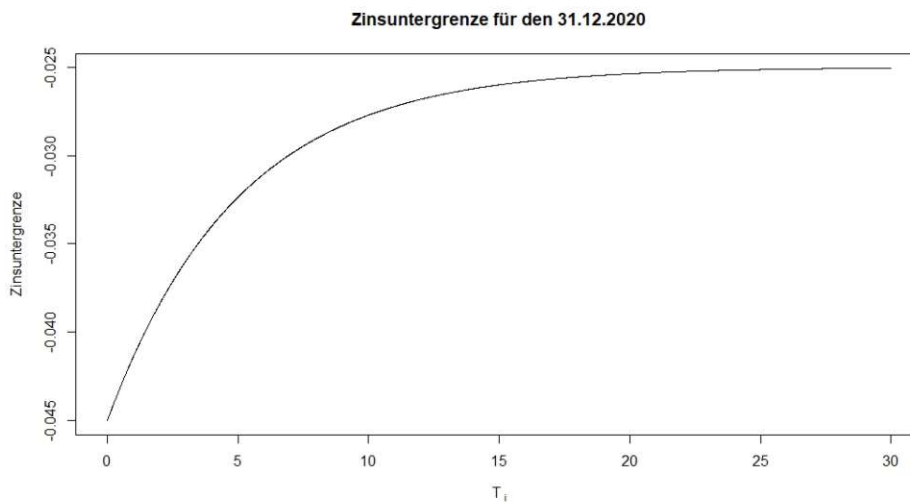


Abbildung 5.1: Zinsuntergrenze für den 31.12.2020

Es gilt noch, die Funktion  $z(\cdot)$  aus Gleichung (5.1) zu spezifizieren. Für  $z(\cdot)$  verwenden wir eine stückweise lineare, deterministische Funktion, die vom Benutzer bzw. von der Benutzerin vorgegeben wird. Das nachfolgende Modell beruht auf [22, 34] und einer internen Weiterentwicklung von Deloitte. Die Funktion  $z(\cdot)$  hat dabei die Gestalt (cf.

[22])

$$z(r_t^i - s^i) = \begin{cases} r_t^i - s^i, & r_t^i - s^i < R \\ R + b_1(r_t^i - s^i - R), & R \leq r_t^i - s^i < R + d \\ R + (b_1 - b_2)d + b_2(r_t^i - s^i - R), & R + d \leq r_t^i - s^i. \end{cases}$$

Dadurch soll das Modell noch mehr Nähe zur Praxis bekommen.

Wir merken an, dass die Funktion  $z(\cdot)$  eigentlich von deutlich mehr Parametern abhängt und implizit  $z : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$$z(x) = z(x, R, d, b_1, b_2)$$

gilt.

Die Parameter  $R, d, b_1$  und  $b_2$  werden wieder fest vorgegeben. Für die Kalibrierung vom 31.12.2020 werden die Werte  $b_1 = 0, b_2 = 0.25, R = 0.01$  und  $d = 0.06$  von Deloitte angeführt (cf. Abbildung 5.2).

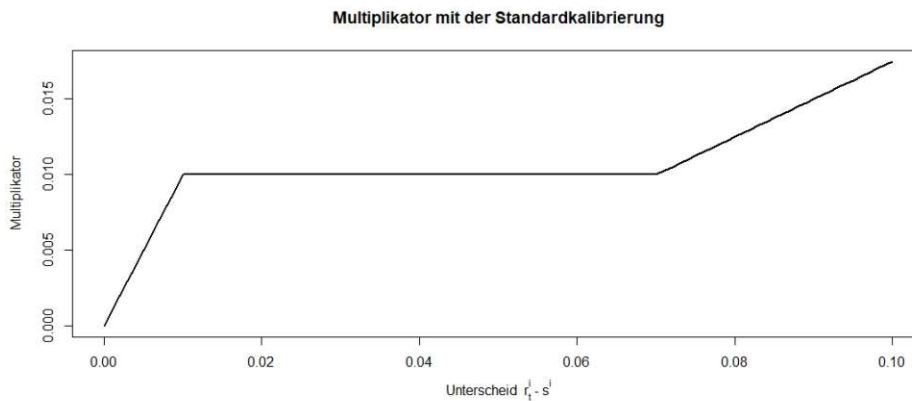


Abbildung 5.2: Multiplikator für die Volatilität im LIBOR-Modell 3.13

Die Zins-Volatilität  $\sigma_t^i = \lambda_t^i$  selbst wird anhand von *at-the-Money*-Swaptions<sup>6</sup> von Deloitte kalibriert. Mithilfe von Monte-Carlo Simulationen werden Szenarien modelliert

<sup>6</sup>Eine *at-the-Money*-Swaption bezeichnet eine Swaption, bei der die Forward-Rate und der Strike-Preis der Option gleich sind. Ansonsten spricht man von *in-the-Money* bzw. *out-of-the-Money*. Eine Swaption selbst bezeichnet eine Option, bei welcher ein fixer Zinssatz gegen einen variablen Zinssatz getauscht wird (cf. [20]).

und wir erhalten Swaption-Preise. Das Vorgehen erfolgt analog zu [17]. Dort findet sich auch eine Rechtfertigung für das approximative Vorgehen.<sup>7</sup>

Insgesamt erhalten wir damit auch für die Entwicklung der Zinsstruktur 1000 verschiedene Szenarien und Verläufe, die wir in Kapitel 5.5 zum Diskontieren verwenden.

### 5.3 Index- und Immobilienmodellierung

Die Modellierung verschiedener Indizes erfolgt ebenfalls durch Deloitte mittels eines Sprung-Diffusionsmodells mit stochastischer Volatilität (cf. Modell 4.18) und den Stochastischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \left( (\mu - \lambda\kappa) dt + \sqrt{\Sigma_t} dW_t + (Y_t - 1) dN_t \right), \quad t \geq 0 \\ d\Sigma_t &= (\alpha - \beta\Sigma_t) dt + \eta\sqrt{\Sigma_t} dV_t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Modelliert werden die nachfolgenden sechs Indizes separat:

- MSEM (Aktien Emerging Market)
- Effas (Staatsanleihen Europa)
- Effas1-3 (Staatsanleihen Europa (ein bis drei Jahre))
- SXXP (Aktien Eurozone)
- ATX (Aktien Österreich)
- MSW (Aktien weltweit)

Die aktuellen (Input-) Werte dafür kommen von Bloomberg. Die kurzfristige Volatilität wird aus den Stichtagsdaten und die langfristige Volatilität aus den historischen Zeitreihen abgeleitet. Die Gewichtung der Indizes erfolgt nach der Gewichtung der Indizes im aktuellen Portfolio der ÖBV, um den ESG möglichst genau den Anforderungen der ÖBV anzupassen und die Modellierung damit so aussagekräftig wie möglich werden zu lassen.

Die Abhängigkeiten zwischen den Indizes finden sich weiter unten in Tabelle 5.1.

<sup>7</sup>Nachdem wir uns in dieser Arbeit nicht mit Optionspreisformeln beschäftigen, verweisen wir hier nur der Vollständigkeit halber auf weiterführende Literatur.

Für die Modellierung der Sprunghäufigkeit wird von Deloitte ein Poissonprozess verwendet. Die Sprunghöhe wird mittels einer logarithmischen Normalverteilung modelliert. Die Parameter sind dabei an historische Daten angelehnt.

Für die Dividenden wird ein CIR-Hull-White-Modell verwendet. Dies hat die Form

$$\begin{aligned} dr_t &= (b_t + \beta_t r_t) dt + \sigma_t \sqrt{r_t} dW_t, \quad t \geq 0 \\ r_0 &= r_0^* \geq 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

mit  $b_t \geq 0$  für alle  $t \geq 0$  und deterministischen und bekannten Funktionen  $\beta_t$  und  $\sigma_t$ .

Die Startzinskurve der Dividendenrendite entspricht dem Maximum der risikolosen Zinskurve und null. Die Parameter werden von Deloitte in der Kalibrierung mittels Simulated Annealing ermittelt.

Um Risikoneutralität gewähren zu können, muss die mittlere Entwicklung der Indizes nach der obigen Wahl der Dividenden der Entwicklung der risikolosen EIOPA-Zinskurve abzüglich der Dividendenrendite entsprechen. Dann stimmt der erwartete Totalreturn des Index nämlich mit der risikolosen Zinskurve überein. Für die Wahl der Dividendenrendite gibt es keine allgemeine Vorgabe der Aufsicht. Manche Versicherungsunternehmen modellieren die Dividende gar nicht, andere mit der Realität entsprechenden 3%. Je nach Wahl der Dividendenhöhe muss die Performance des Basiswerts dementsprechend reduziert werden, um insgesamt Risikoneutralität zu erreichen. Wir erinnern uns, dass der mittlere Totalreturn nicht höher (und auch nicht niedriger) als eine risikolose Verzinsung mit der entwickelten EIOPA-Zinskurve sein darf.

Immobilien werden analog zu Aktien- und Anleihenindizes modelliert. Wieder verwenden wir ein SVJD-Modell (cf. Modell 4.18). Im Gegensatz zu den Indizes werden für die Immobilien interne Vorgaben der ÖBV verwendet, da die gehaltenen Immobilien der ÖBV zu spezifisch sind, um einen repräsentativen Immobilienindex am Markt als Referenzwert zu finden. Die Marktwerte der Immobilien im Besitz der ÖBV werden zumindest alle zwei Jahre von einem externen Gutachter neu bewertet. Der Marktwert aus dem Gutachten wird als Referenzwert herangezogen. Die Volatilität wird von der ÖBV fest (beispielsweise mit 8%) vorgegeben und die Mieteinnahmen werden ebenfalls mit einem CIR-Hull-White-Modell modelliert, wobei wieder die bei null Prozent abgeschnittene risikolose EIOPA-Zinskurve als Startvorgabe herangenommen wird. Für die Immobilienwertentwicklung bedeutet das wieder, dass die durchschnittliche Wert-

steigerung der risikolosen Zinskurve abzüglich Mieteinnahmen entsprechen muss, um Risikoneutralität zu gewährleisten.

## 5.4 Weitere Informationen

Die Korrelationen zwischen den einzelnen Indizes werden von der ÖBV vorgegeben und finden sich nachfolgend in Tabelle 5.1.

	Zins	Immobilien	MSEM	SXXP	ATX	MSW
Zins	1.00	0.00	0.20	0.20	0.20	0.20
Immobilien	0.00	1.00	0.75	0.75	0.75	0.75
MSEM	0.20	0.75	1.00	0.75	0.75	0.75
SXXP	0.20	0.75	0.75	1.00	0.75	0.75
ATX	0.20	0.75	0.75	0.75	1.00	0.75
MSW	0.20	0.75	0.75	0.75	0.75	1.00

Tabelle 5.1: Korrelationen zwischen den Modulen

Diese Korrelationen werden nicht jedes Mal erneut aus historischen Daten geschätzt, sondern zwischen den Indizes konstant mit 0.75 und zwischen Aktienindex und Zins konstant mit 0.2 angenommen. Die Korrelation zwischen Immobilien und Zins wird mit null angenommen.

Die Inflation wird nicht abgebildet und auch nicht berücksichtigt.

## 5.5 Validierung

Jeder Modellierungsprozess muss laufend validiert werden. In unserem Fall erfolgt die Validierung direkt durch Deloitte und wird dokumentiert auch an die ÖBV mitgeliefert, was eine selbstständige Validierung und Überprüfung ermöglicht. Im vorliegenden Fall können und müssen zwei Voraussetzungen überprüft werden.

Zuerst müssen die Ergebnisse konsistent mit den „Inputdaten“ sein. Im Speziellen heißt das,

- die Startdaten des Modells sollen den Marktdaten zum Stichtag entsprechen.



- die impliziten Volatilitäten des Modells (Aktien, Swaptions) sollen den impliziten Volatilitäten der Marktdaten entsprechen.
- die implizite durchschnittliche Rendite der Diskontfaktoren zum Zeitpunkt  $T_i$  soll der  $T_i$ -jährigen Spot-Rate entsprechen.
- die diskontierte Aktienrendite des Modells soll der vorgegebene Aktienrendite entsprechen.

Zusätzlich überprüfen wir die Arbitragefreiheit mit Martingaltests. Dazu testen wir, ob

- die diskontierte Rendite einer Constant Maturity-Handelsstrategie<sup>8</sup> ein Martingal ist.
- der diskontierte Totalreturn der Aktien, Anleihen und Immobilien ein Martingal ist.

Im Folgenden wollen wir uns der zweiten Überprüfung näher widmen und auf den Martingaltest eingehen. Der **Martingaltest** überprüft, ob die vorliegende, modellierte Zeitreihe ein Martingal ist.

In unserem Fall erwarten wir, dass es sich beim diskontierten Totalreturn unserer sechs Indizes (MSEM, Effas, Effas1-3, SXXP, ATX, Immobilien) um Martingale handelt. Das heißt, dass ein investierter Euro zum Zeitpunkt  $T_0$  am Laufzeitende  $T_n$  diskontiert durchschnittlich noch immer einem Euro entspricht. (Auch zu allen anderen Zeitpunkten  $T_i$  soll der investierte Euro diskontiert im Mittel einem Euro entsprechen.) Natürlich wird keine modellierte Trajektorie einer konstanten Eins-Linie entsprechen. Deswegen betrachten wir die 1 000 berechneten Szenarien von Deloitte und berechnen den diskontierten Mittelwert. Hier erwarten wir aber schon, dass die gemittelte Linie nicht viel von Eins abweicht. Hierzu betrachten wir das Beispiel einer Brown'schen Bewegung.

**Beispiel 5.2** (Gesetz der Großen Zahlen). *Nachfolgend finden sich 50 Realisationen einer Brown'schen Bewegung. Auch wenn für den Erwartungswert einer Brown'schen*

---

<sup>8</sup>Bei einer Constant Maturity-Handelsstrategie kauft der Investor zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Nullkuponanleihe mit Laufzeit  $T$ . Nach jedem Jahr wird die Nullkuponanleihe (Restlaufzeit:  $T - 1$  Jahre) verkauft und der Investor bzw. die Investorin kauft eine neue Nullkuponanleihe mit Laufzeit  $T$ .

## Bewegung

$$\mathbb{E}[W_t] = 0, \quad \forall t \geq 0$$

gilt, ist aufgrund der Normalverteilung ( $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ ) die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pfad  $W_t(\omega^*)$  einer Brown'schen Bewegung konstant null ist, null. Allerdings erkennen wir sogar mit bloßem Auge, dass der Mittelwert dieser 50 Realisationen in etwa null entspricht. Mathematisch gesehen, spricht man hier vom **Gesetz der Großen Zahlen**,

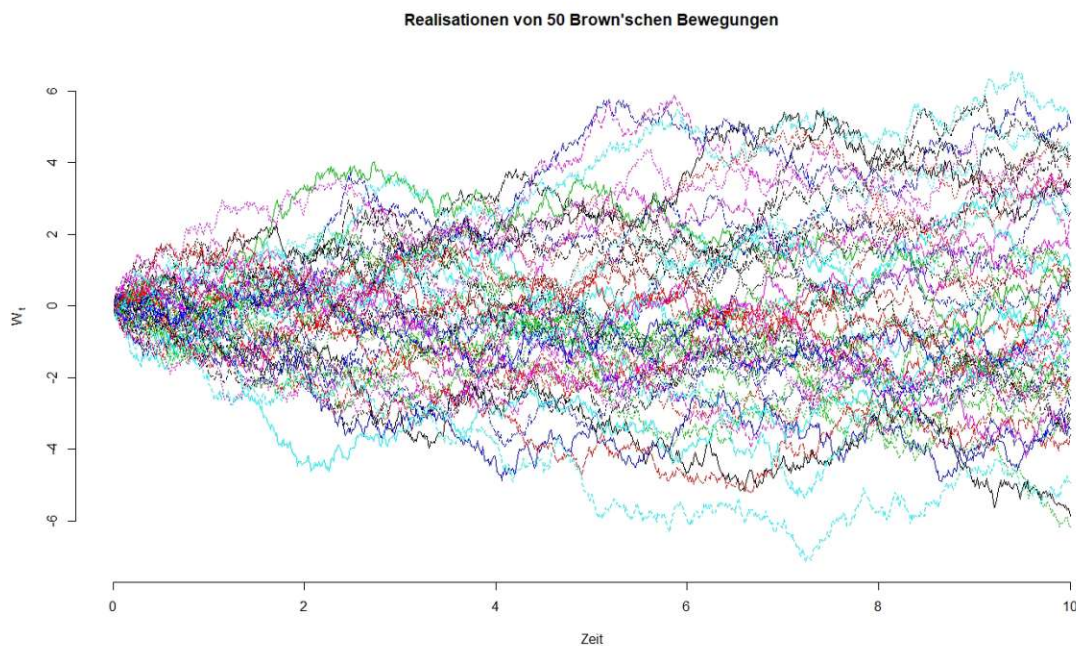


Abbildung 5.3: 50 Realisationen einer Brown'schen Bewegungen

len,<sup>9</sup> das wir uns zu Nutze machen. Im Risikomanagement und im Versicherungswesen

<sup>9</sup>Man spricht von einem **Gesetz der Großen Zahlen**, falls eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im Mittel gegen den Erwartungswert konvergieren. Es gibt mehrere Formulierungen des Satzes mit unterschiedlichen Voraussetzungen und Behauptungen. Die erhaltene Konvergenz gilt je nach Formulierung in Wahrscheinlichkeit (schwach) oder  $\mathbb{P}$ -f.s. (stark). Wir geben eine Formulierung an: Ist die Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  unabhängig und identisch verteilt, dann gilt (cf. [29, Kap. 15.3])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mathbb{E}[X_1] \quad \mathbb{P} - \text{f.s.}$$

spricht man auch vom Ausgleich im Kollektiv.

Deloitte liefert den monatlichen Totalreturn für alle 1 000 Szenarien. Damit lässt sich für jedes Szenario der genaue Pfad des Assets berechnen. Die Entwicklung bis zum  $i$ -ten Zeitpunkt  $T_i$  für das  $j$ -te Szenario ist durch

$$A_{T_i}^j = \prod_{k=1}^i (1 + TR_{T_k}^j)$$

gegeben, wenn wir mit  $TR_{T_i}^j$  den monatlichen Totalreturn für das Zeitintervall  $(T_{i-1}, T_i]$  für Szenario  $j$  mit  $1 \leq j \leq 1\,000$  bezeichnen.

Zum Diskontieren verwenden wir die entsprechenden aneinandergereihten Forward-Raten. Diese entwickeln sich auch pfadabhängig und gehen aus den Spot-Rates der EIOPA für Mehr-Jahreslaufzeiten von Dezember 2020 hervor. Diese Daten finden sich auf der Website der EIOPA (cf. Kapitel 5.2). Alle unterjährigen Deflatoren werden von Deloitte ebenfalls für jedes Szenario  $1 \leq j \leq 1\,000$  mitgeliefert. Der Deflator  $D$ , der zum Diskontieren verwendet wird, hat zum Zeitpunkt  $T_i$  im Pfad  $j$  die Gestalt

$$D_{T_i}^j = \prod_{k=1}^i (1 + F^j(0, T_{k-1}, T_k)).$$

Im nächsten Schritt können wir die Performance der Aktien mit den entsprechenden Deflatoren diskontieren bevor wir im letzten Schritt schließlich den Mittelwert über alle Szenarien bilden (cf. Abbildung 5.4). Dann erhalten wir für den „Wert“ des Martingaltests zum Zeitpunkt  $T_i$

$$MT_{T_i} = \frac{1}{1\,000} \sum_{j=1}^{1\,000} D_{T_i}^j A_{T_i}^j.$$

In Abbildung 5.4 sehen wir den expliziten Martingaltest  $MT_{T_i}$  für das Zins-Basis-szenario mit Volatilitätsanpassung für alle Indizes.<sup>10</sup>

<sup>10</sup>Wir erinnern uns, dass die EIOPA Spot-Rates für ein Basisszenario mit und ohne Volatilitätsanpassung veröffentlicht. Daneben gibt es jeweils noch zwei weitere Schockszenarien: einen Zinsschock nach oben und einen nach unten. Deloitte rechnet für die ÖBV die drei Szenarien mit Volatilitätsanpassung durch.

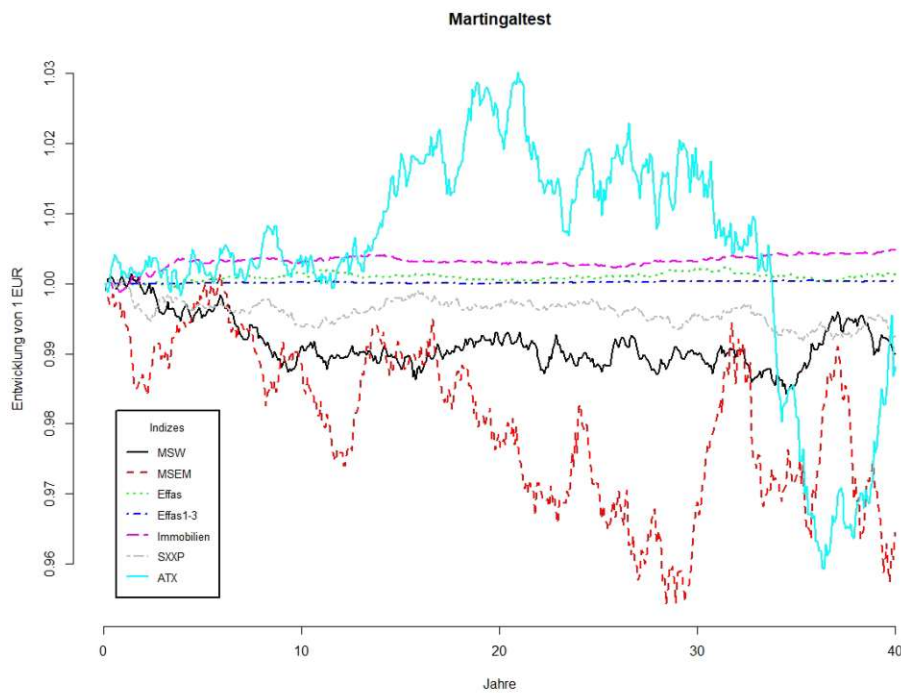


Abbildung 5.4: Ergebnis des Martingaltests

Als Erstes fällt auf, dass die Indizes für die Staatsanleihen (Effas und Effas1-3) sowie für die Immobilien deutlich weniger Fluktuation aufweisen. Dies ist nicht wirklich überraschend, da diese Investments im Allgemeinen weniger Volatilität aufweisen als Aktienindizes. Diese weisen deutlich mehr Schwankungen auf. Während der MSW und der SXXP um eins fluktuieren und die Abweichungen in etwa 1% nicht überschreiten, schlägt der MSEM und der ATX deutlich (fast 5% bzw. 3%) nach unten bzw. oben aus.

Diese Abweichungen liegen innerhalb des akzeptablen Bereichs. Es ist anzunehmen, (da wir von einer korrekten Implementierung ausgehen,) dass bei einer Erhöhung der Szenarien (beispielsweise auf 10 000), der Martingaltest näher bei eins verläuft. Dies würde aber deutlich mehr Rechenzeit kosten, weshalb wir mit dem Ergebnis zufrieden sind und eine Abweichung in dieser Größenordnung tolerieren und akzeptieren.

## 6 Zusammenfassung und Fazit

In Kapitel 2 werden mit der Brown'schen Bewegung (Definition 2.3) und der Stochastischen Differentialgleichung (Satz 2.15) die zentralen Werkzeuge eingeführt, die zum Modellieren von stochastischen Prozessen benötigt werden. Damit können wir verschiedene Modelle mathematisch sinnvoll definieren. Herausgreifen möchten wir hier zuerst das Vasicek-Modell 3.5 und das CIR-Modell 3.7. Beide Modelle werden in Kapitel 3 behandelt und kurz verglichen. Beide Modelle sind für sich gesehen mathematisch sinnvoll, explizit eindeutig lösbar und folgen (gut) bekannten und untersuchten Verteilungen. Trotzdem lässt sich keine absolute Aussage treffen, ob dieses oder jenes Modell „besser“ ist. Hier ist der Mathematiker bzw. die Mathematikerin auf externe Experten und Expertinnen angewiesen, die angesichts der Eigenschaften der formulierten Modelle mitentscheiden, welches Modell gewählt werden soll und welches Modell der expliziten Modellanforderung eher entspricht. In der ÖBV hat man sich beispielsweise gemeinsam mit Deloitte entschieden, ein LIBOR-Modell mit Shift (Modell 3.16) zur Zinsstrukturmodellierung zu wählen.

Das Black Scholes-Modell 4.3 bietet die Grundlage der Aktienmodellierung. Die logarithmisch normalverteilte Modellierung bringt viele Vorteile bezüglich der mathematischen Behandlung mit sich. So können Optionspreise und Verteilungen einfach berechnet und addiert werden.<sup>1</sup> Aber auch hier haben Experten und Expertinnen Schwächen des BSMs identifiziert. So sind die Ränder der Verteilung verglichen mit dem echten Finanzmarkt nicht schwer genug und eine zeitkonstante Volatilität ist unrealistisch. Aus diesem Grund gibt es diverse Erweiterungen des BSMs. Wir stellen am Ende von Kapitel 4 das Sprung-Diffusionsmodell mit stochastischer Volatilität 4.18 vor, das von der ÖBV und Deloitte auch tatsächlich zur Abbildung des Kapitalmarkts verwendet wird. Für eine

---

<sup>1</sup>Diesen Vorteil macht man sich auch beim LIBOR-Modell 3.13 zu Nutze. Bei der Berechnung von Swaptions können einzelne Caplet-Preise aufgrund der logarithmisch normalverteilten LIBOR-Raten einfach zum Preis eines Caps aufsummiert werden (cf. [20]).

Modellierungsanleitung verweisen wir an dieser Stelle nochmals auf [21].

In Kapitel 5 geben wir ein abschließendes Beispiel, wie die mathematische Theorie in der Praxis angewandt wird und welche Schritte es dazu bedarf. Zusätzlich erinnern wir uns daran, dass Simulationen und Modelle auch laufend überprüft und validiert werden müssen, egal wie genau und präzise die mathematische Formulierung ist. Aus diesem Grund führen wir einen Martingalttest auch noch selbstständig durch (cf. Kapitel 5.5).

Als Mathematiker bzw. Mathematikerin können wir zwar die Modellanforderung validieren und bewerten, für die Plausibilität im Bezug auf die Wirklichkeit ist es aber unabdingbar, das Gespräch mit anderen, erfahrenen Experten und Expertinnen zu suchen. Wir dürfen nie vergessen, laufend die Zweckmäßigkeit implementierter Modelle zu bewerten. Hierfür ist das Black Scholes–Modell das beste Beispiel: bei seiner Einführung ist dieser Ansatz revolutionär und nobelpreiswürdig. Es liefert nie zuvor gesehene Bewertungsmöglichkeiten für Optionen. Heute (Oktober 2021) sprechen wir schon über seine Schwächen bei der Abbildung des realen Finanzmarkts und über daraus resultierende notwendige Erweiterungen. Zum Abschluss wollen wir dem Leser bzw. der Leserin mitgeben, jedes implementierte, mathematische Modell auch mit einem Blick von außen zu betrachten und zu evaluieren. Auch wenn der Stichprobenmittelwert einer Monte-Carlo Simulation mit dem Erwartungswert des Modells übereinstimmt, sollten wir uns kurz fragen, ob dieser Erwartungswert auch mit dem Ziel des Modells (in unserem Fall ist das die von der EU geforderte „Risikoneutralität“, um Optionen und Garantien bestimmen zu können) übereinstimmt, wie das Ziel überhaupt definiert ist und ob dieses Ziel noch immer aktuell ist.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Realisationen einer Brown'schen Bewegung mit Drift . . . . .	8
3.1	Realisationen im Cox-Ingersoll-Ross-Modell . . . . .	20
4.1	Realisationen im Black Scholes-Modell . . . . .	31
4.2	Realisationen im Heston-Modell . . . . .	34
4.3	Realisationen im Sprung-Diffusionsmodell . . . . .	37
4.4	Realisationen verschiedener Modelle . . . . .	38
4.5	Realisation im Sprung-Diffusionsmodell mit stochastischer Volatilität . .	40
5.1	Zinsuntergrenze für den 31.12.2020 . . . . .	46
5.2	Multiplikator für die Volatilität im LIBOR-Modell . . . . .	47
5.3	Realisationen einer Brown'schen Bewegungen . . . . .	52
5.4	Ergebnis des Martingaltests . . . . .	54

# Literaturverzeichnis

- [1] BAIN, A. : *Introduction to Stochastic Calculus for Finance*. <http://www.chiark.greenend.org.uk/~alanb/stoc-calc.pdf>, 2008. – (online; aufgerufen 02. April 2021)
- [2] BATES, D. S.: Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. In: *The Review of Financial Studies* 9 (1996)
- [3] BAUSTIAN, F. ; MRÁZEK, M. ; POSPÍŠIL, J. ; SOBOTKA, T. : Unifying pricing formula for several stochastic volatility models with jumps. In: *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 22 (2017)
- [4] BEINERT, M. : *Kurssprünge und der Wert deutscher Aktienoptionen*. Wiesbaden : Deutscher Universitäts–Verlag, 1997
- [5] BISHWAL, J. P. N.: *Parameter Estimation in Stochastic Differential Equations*. Berlin Heidelberg : Springer, 2008
- [6] BLACK, F. : The pricing of commodity contracts. In: *Journal of Financial Economics* 3 (1976)
- [7] BLACK, F. ; SHOLES, M. : The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: *Journal of Political Economy* 90 (1973)
- [8] BREIMAN, L. : *Probability*. Philadelphia : SIAM, 1992
- [9] BROWN, R. : A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. In: *The Philosophical Magazine and Annals of Philosophy* (1828)



- [10] COX, J. C. ; INGERSOLL, J. E. ; ROSS, J. E.: A theory of the term structure of interest rates. In: *Econometrica* 53 (1985)
- [11] CRAINE, R. ; LOCHSTOER, L. A. ; SYRTVEIT, K. : Estimation of a Stochastic-Volatility Jump-Diffusion Model. In: *Revista de Analisis Economico* (2000)
- [12] DESMETTRE, S. ; KORN, R. : *Moderne Finanzmathematik – Theorie und praktische Anwendung Band 2*. Wiesbaden : Springer, 2018
- [13] DEUTSCHE AKTUARSVEREINIGUNG: *Anforderungen an einen ökonomischen Szenariogenerator*. Köln, 2017
- [14] DEUTSCHE AKTUARSVEREINIGUNG: *Optionsbewertung*. Köln, 2019
- [15] EIOPA: *EIOPA*. <https://www.eiopa.europa.eu/>, 2011–2021. – (online; aufgerufen 08. Juni 2021)
- [16] EIOPA: *Technical documentation of the methodology to derive EIOPA’s risk-free interest rate term structures*. [https://www.eiopa.europa.eu/sites/default/files/risk\\_free\\_interest\\_rate/eiopa-bos-21-250-technical-documentation\\_cl.pdf](https://www.eiopa.europa.eu/sites/default/files/risk_free_interest_rate/eiopa-bos-21-250-technical-documentation_cl.pdf), 2021. – (online; aufgerufen 08. Juni 2021)
- [17] ERRAIS, E. ; MAURI, G. ; MERCURIO, F. : Capturing the Skew in Interest Rate Derivatives: A Ahifted Lognormal LIBOR Model with Uncertain Parameters. (2004)
- [18] F. WITTMANN: *Skriptum zur Vorlesung Versicherungswirtschaftslehre*. Wien, 2016
- [19] FALLAH, S. ; MEHRDOUST, F. : On the existence and uniqueness of the solution to the double Heston model equation and valuing Lookback option. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* (2018)
- [20] FILIPOVIC, D. : *Term-Structure Models*. Berlin Heidelberg : Springer, 2009
- [21] GLASSERMANN, P. : *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York : Springer, 2004

- [22] GUILLAUME, N. de ; REBONATO, R. ; POGUDIN, A. : The Nature of the Dependence of Magnitude of Rate Moves on the Rates Levels: A Universal Relationship. In: *Quantitative Finance* (2013)
- [23] GURKER, W. : *Introduction to Mathematical Statistics using R*. Wien : TU Wien, 2018
- [24] HESTON, S. L.: A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. In: *The Review of Financial Studies* 6 (1993)
- [25] IRLE, A. : *Finanzmathematik*. Bd. 3. Wiesbaden : Springer, 2012
- [26] KAHL, C. ; JÄCKEL, P. : Not-so-complex logarithms in the Heston model. In: *Wilmott Magazine* (2005)
- [27] KARATZAS, I. ; SHREVE, S. E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. New York : Springer, 1988
- [28] KLEBANER, F. C.: *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Bd. 2. London : Imperial College Press, 2005
- [29] KUSOLITSCH, N. : *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*. Wien : Springer, 2011
- [30] MERTON, R. C.: Option Pricing when Underlying Stock Returns are discontinuous. In: *Journal of Financial Economics* 3 (1976)
- [31] MIKHAILOV, N. ; NÖGEL, U. : Heston's Stochastic Volatility Model: Implementation, Calibration, and some Extensions. In: *Wilmott* (2003)
- [32] NEKRASOV, V. : An accompaniment to a course on interest rate modeling: with discussion of Black-76, Vasicek and HJM models and a gentle introduction to the multivariate LIBOR Market Model. In: *SSRN Electronic Journal* (2013)
- [33] PROTTER, P. E.: *Stochastic Integration and Differential Equations*. Bd. 2. Berlin Heidelberg : Springer, 2004
- [34] REBONATO, R. : *Volatility and Correlation*. Chichester : Financial Engineering, 1999

- [35] RHEINLÄNDER, T. ; SEXTON, J. : *Hedging Derivates*. Singapore : World Scientific, 2011
- [36] SCHMOCK, U. : *Stochastic Analysis for Financial and Acturial Mathematics*. Wien : <https://fam.tuwien.ac.at/~schmock/notes/StochasticAnalysis.pdf>, 2021. – (online; aufgerufen 02. Mai 2021)
- [37] SCHOENMAKERS, J. : *Robust Modelling and Pricing of Derivative Products*. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2005
- [38] SHEPPARD, D. ; MCCORMICK, M. ; REVAL, A. ; BROWER, D. ; LOCKETT, H. : US oil price below zero for first time in history. In: *Financial Times* (2020). – 21. April 2020
- [39] SMITH, K. A.: Negative Interest Rates Explained: How Could They Affect You? In: *Forbes* (2020). – 18. Mai 2020
- [40] SONDERMANN, D. : *Introduction to Stochastic Calculus for Finance*. Berlin Heidelberg : Springer, 2006
- [41] STOJKOSKI, V. ; SANDEV, T. ; BASNARKOV, L. ; KOCAREV, L. ; METZLER, R. : Generalised Geometric Brownian Motion: Theory and Applications to Option Pricing. In: *entropy* (2020)
- [42] SUGANTHI, K. ; JAYALALITHA, G. : Geometric Brownian Motion in Stock Prices. In: *Journal of Physics: Conference Series* (2019)
- [43] TENENG, D. : Limitations of the Black-Scholes model. In: *International Research Journal of Finance and Economics* (2011)
- [44] UHLENBECK, G. ; ORNSTEIN, L. : On the theory of Brownian Motion. In: *Physical Review* 36 (1930)
- [45] VASICEK, O. : An equilibrium characterization of the term structure. In: *Journal of Financial Economics* 5 (1977)
- [46] WETTSCHERECK, A. : *Modellierung negativer Zinsraten mit Hilfe des Shifted Libormarkt Modell*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diplomarbeit, 2016

- [47] YAN, G. ; HANSON, F. B.: Option Pricing for a Stochastic-Volatility Jump-Diffusion Model with Log-Uniform Jump-Amplitudes. In: *Proceedings of the American Control Conference* (2006)

# Stichwortverzeichnis

- Brown'sche Bewegung, 5, 51
  - Geometrische, 28
  - mit Drift, 8
- Economic Scenario Generator, 43
- EIOPA, 45
- Forward-Kurve, 14
- Gesetz der Großen Zahlen, 52
- Ito
  - Formel, 10
  - Prozess, 10
- Martingal, 6
  - Lokales Martingal, 7
  - Martingalttest, 51
  - Semimartingal, 7
- Modell
  - Black Scholes, 29, 31, 37, 55
  - Cox-Ingersoll-Ross, 18, 19, 33, 49, 55
  - Heston, 33, 37
  - Hull-White, 20, 49
  - LIBOR, 22
  - LIBOR mit Shift, 25, 45, 55
  - Ornstein-Uhlenbeck, 20
  - Sprung-Diffusion, 35–37
  - Stochastisches Volatilitätsmodell, 32
  - SVJD, 39, 40, 48, 55
  - Vasicek, 15, 55
- Normalverteilung
  - Logarithmische, 5
- Nullkuponanleihe, 14, 23, 45
- Poisson
  - Prozess, 34
  - Zusammengesetzter Prozess, 35
- Rate
  - Forward, 14
  - Forward-LIBOR, 21
  - Short, 15
  - Spot, 15, 45
- Stetigkeit
  - cadlag, 9
- Stochastische Differentialgleichung, 11
- Stochastisches Exponential, 9, 12
- Totalreturn, 44