Diplomarbeit

Stackelberg-Duopol mit Asymmetrischen Annahmen über den Versichertenbestand

ausgeführt am

Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dr.in rer.nat. Julia Eisenberg

durch

Nikolas Zykan, BSc.
Matrikelnummer: 01527215

Wien, am 8.5.2023

Kurzfassung

In dieser Arbeit betrachten wir das sogenannte Stackelberg-Duopol. Dieses ist in unserem Kontext ein gewisses Spiel zwischen einem Rückversicherer und einem Erstversicherer. Wir finden explizite Lösungen zu zwei verschiedenen Stackelberg-Duopol Spielen. Dabei lassen wir bei dem ersten Spiel nicht nur zu, dass die beiden Spieler verschiedene Verteilungsannahmen über den Schaden haben, sondern sogar dass der Rückversicherer die genaue Verteilungsannahme des Erstversicherers nicht kennt. Stattdessen weiß der Rückversicherer nur, dass die Verteilung des Erstversicherers aus einem Kontinuum von Verteilungen stammt. Auf diesem Kontinuum erklärt der Rückversicherer eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Beim zweiten Spiel kennt der Rückversicherer die Schadensverteilung des Erstversicherers, die jedoch dennoch von seiner eigenen verschieden sein darf.

Für jedes der beiden Spiele betrachten wir Beispiele mit spezifischen Verteilungsannahmen.

Abstract

In this thesis, we consider the so-called Stackelberg-Duopoly. In our context, this is a special class of game with a reinsurer and an insurer as players. We find explicit solutions to two different Stackelberg-Duopoly games. For the first game, we allow not only that the players have differing assumptions about the distribution of the claim size, but also that the reinsurer does not know the exact assumptions of the insurer. The reinsurer only knows that the claim distribution that the insurer uses comes from a continuum of distributions. The reinsurer can define a probability distribution on this continuum.

For the second game, the players know each other's assumptions about the claim distribution. However, these assumptions may not coincide.

For each game we illustrate the obtained results by examples, where we make explicit assumptions about the claim distributions.

Danksagung

Zu Beginn möchte ich mich bei meiner Betreuerin, Associate Prof. Dr.in rer.nat. Julia Eisenberg für ihre vielen hilfreichen Vorschläge und ihre Zeit bedanken.

Meiner lieben Schwester Viktoria und meinem Bruder Julian danke ich für ihre unermüdliche Motivationsarbeit. Bei meinen Eltern Georg und Petra bedanke ich mich für alles mögliche; Hier vor allem für ihre Unterstützung auch, aber nicht nur, finanzieller Natur. Meiner Freundin Yasmin danke ich unter anderem für ihr Verständnis für meine phasenweise Wortkargheit. Zuletzt möchte ich mich bei meiner Großmutter Hanna, die mich von klein auf versucht hat für Mathematik zu begeistern, bedanken.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 8.5.2023

Nikolas Zykan

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Versicherungen sind ein wichtiges Werkzeug im Umgang mit Risiken, sowohl für Einzelpersonen als auch für Unternehmen. Auch Versicherungsunternehmen nehmen aus vielfältigen Gründen Versicherungsschutz für ihr Versicherungsportfolio in Anspruch. In diesem Fall spricht man von Rückversicherung.

In der Literatur wird meistens das Prämienkalkulationsprinzip des Rückversicherers als gegeben angenommen. Basierend darauf wird dann eine nach einem geeignetem Kriterium optimale Rückversicherungsform für den Erstversicherer bestimmt. Um beide Parteien, den Rückversicherer und dem Erstversicherer, als gleichberechtigt ansehen zu können, liegt es nahe den Prozess des Rückversicherns als Spiel mit zwei Spielern zu betrachten. Der Rückversicherer bestimmt das für ihn optimale Prämienkalkulationsprinzip, und der Erstversicherer bestimmt die für ihn optimale Rückversicherungsform. Hierbei ist der Begriff der Optimalität noch festzulegen. Der sich so ergebende Rückversicherungsvertrag ist also, in noch zu spezifizierendem Sinne, optimal für beide Vertragsparteien.

Eine Klasse von Spielen, die sich für die Modellierung dieser Situation eignet, ist die der Stackelberg-Spiele. Hier gibt es einen sogenannten Leader, und einen Follower. Der Leader kann zuerst seine Strategie wählen, der Follower muss diese als gegeben hinnehmen, und muss unter diesen Vorraussetzungen seine eigene optimale Strategie bestimmen. In diesem Kontext ist der Rückversicherer immer der Leader. Das wird dadurch gerechtfertigt, dass es weltweit ca. 200 Rückversicherer gibt, wohingegen alleine in Deutschland ein vielfaches an Versicherungen operieren. Daher haben Rückversicherungen eine gewisse Macht bei der Preisfestlegung.

Wir merken an, dass in der relevanten Literatur die Begriffe der Stackelberg-Lösung und der Bowley-Lösung synonym verwendet werden.

In [Chan und Gerber 1985] wird eine Lösung des Stackelberg-Spiels zwischen Rückversicherer und Erstversicherer gefunden, unter den Annahmen dass beide Spieler ihren erwarteten Nutzen maximieren wollen. Die Prämie wird als $\pi(X) = \mathbb{E}(PX)$, wobei X der zufällige Schaden und P eine sogenannte „Pricing-Density“ ist, berechnet. Der Rückversicherer bestimmt P. In [Cheung, Yam und Zhang 2019] wird eine Lösung des Stackelberg-Spiel unter den Annahmen, dass der Erstversicherer ein Risikomaß seines Verlusts minimieren will, gefunden. Der Rückversicherer optimiert in diesem Paper sein erwartetes Vermögen. Die Prämie wird nach einem allgemeinen Verzerrungsprinzip, siehe Teilabschnitt 2.3.2, berechnet. Der Rückversicherer bestimmt die Verzerrungsfunktion h.

Allen obigen Papers ist gemein, dass der Rückversicherer und der Erstversicherer die gleiche Schadensverteilung verwenden. In [Boonen und Zhang 2022] wird das Stackelberg-Spiel unter den Annahmen wie in [Cheung, Yam und Zhang 2019] betrachtet. Es wird jedoch bereits zugelassen, dass der Rückversicherer eine andere Schadensverteilung verwendet als der Erstversicherer. Die gewonnene Lösung wird dann auf Beispiele mit exponentialverteilten Schäden angewandt. Den Aufbau des Spiels aus diesem Paper beschreiben wir in

Bemerkung 3.2 detaillierter.

In unserer Arbeit lassen wir nun ein Kontinuum an Schadensverteilungen für den Erstversicherer zu, auf dem der Rückversicherer eine Wahrscheinlichkeitsverteilung erklärt. Beide Spieler wollen ihr erwartetes Vermögen maximieren, und die Prämie wird mit einem Proportional-Hazard Prinzip, siehe Teilabschnitt 2.3.2, berechnet. Wir finden eine allgemeine Lösung des Spiels, und betrachten ein Beispiel, welches wir numerisch mit R lösen.

Wir lösen auch ein zweites Spiel, jedoch mit vollständiger Information. Für dieses betrachten wir Beispiele mit vielfältigeren Schadensverteilungen, wie etwa einer Weibullverteilung. Wir werden für dieses Spiel als optimale Versicherungsform unter anderem auch die klassische Excess-of-Loss Rückversicherung $I(t) = (t - c)_+$ erhalten, siehe Teilabschnitt 3.6.2.

Die allgemeinen Lösungen des Erstversicherer-Problems die wir erhalten ähneln den Lösungen in [Cheung, Yam und Zhang 2019] und [Boonen und Zhang 2022]. Das liegt daran, dass unser Optimalitätskriterium für den Erstversicherer ein Spezialfall des Optimalitätskriteriums in diesen Papers ist.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel führen wir grundlegende Definitionen und Ergebnisse an, die wir im nächsten Kapitel verwenden. Für einige Begriffe geben wir auch Beispiele. Das Kapitel ist nach Themengebieten unterteilt.

2.1 Wahrscheinlichkeitstheorie

Wir arbeiten mit Zufallsvariablen und ihren Verteilungen. Der spezifische Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ auf dem unsere Zufallsvariablen definiert sind, ist für unsere Arbeit nicht wichtig. Wir interessieren uns nur für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Wertebereiche unserer Zufallsvariablen. In diesem Abschnitt folgen wir hauptsächlich der Darstellung im Lehrbuch [Schilling 2017], aber auch der Darstellung im Lehrbuch [Klenke 2012].

Definition 2.1. *Ein Messraum ist ein Tupel $(\Omega, \mathcal{F})$, wobei Ω eine Menge ist, und $\mathcal{F}$ eine Sigma-Algebra auf Ω. Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist ein Messraum, auf dem ein Wahrscheinlichkeitsmaß P definiert ist.*

Definition 2.2. *Eine Abbildung f zwischen zwei Messräumen $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ heißt messbar, wenn für alle Elemente von $\mathcal{F}_2$ ihr Urbild unter f ein Element von $\mathcal{F}_1$ ist. Also $A \in \mathcal{F}_2 \implies f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$.*

Definition 2.3. *Eine Abbildung $X : (\Omega_1, \mathcal{F}_1, P) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ von einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen Messraum heißt Zufallsvariable, wenn sie messbar ist.*

Definition 2.4. *Sei $X : (\Omega_1, \mathcal{F}_1, P) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ eine Zufallsvariable. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X von X ist als $P_X(A) := P(X \in A) := P(X^{-1}(A))$ definiert, wobei $A \in \mathcal{F}_2$. Man schreibt das als $X \sim P_X$, und sagt dass X nach P_X verteilt ist. Es ist weiters $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_X)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.*

Wir betrachten in dieser Arbeit ausschließlich reelle Zufallsvariablen.

Definition 2.5. *Eine reelle Zufallsvariable ist eine Zufallsvariable $X : (\Omega_1, \mathcal{F}_1, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra auf den reellen Zahlen ist.*

Definition 2.6. *Der Erwartungswert einer reellen Zufallsvariable $X : (\Omega_1, \mathcal{F}_1, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist $\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X \, dP$.*

Proposition 2.7. *Der Erwartungswert einer reellen Zufallsvariable X existiert genau dann, wenn X integrierbar ist, also $\int_\Omega |X| \, dP < \infty$.*

Beweis. Siehe [Schilling 2015, S.48]. □

Noch spezifischer verwenden wir nur Zufallsvariablen mit einer Dichte.

Definition 2.8. *Die reelle Zufallsvariable X hat eine Wahrscheinlichkeitsdichte f_X, wenn für die messbare Funktion $f_X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to ([0,\infty), \mathcal{B}_{[0,\infty)})$ mit $\int_0^\infty f_X(x)\,dx = 1$ gilt, dass $P_X(A) = \int_A f_X(x)\,dx$ für alle $A \in \mathcal{B}$. Man schreibt diesen Zusammenhang als $X \sim f_X(x)dx$.*

Für solche Zufallsvariablen erhält man eine handlichere Formel für den Erwartungswert.

Proposition 2.9. *Die reelle Zufallsvariable X habe die Dichte f_X. Es sei $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine messbare Funktion. Dann ist $g(X)$ als Komposition messbarer Funktionen wieder eine Zufallsvariable. Für den Erwartungswert gilt: $\mathbb{E}(g(X)) = \int_0^\infty g(x) f_X(x)\,dx$. Insbesondere gilt, mit $g = id_{\mathbb{R}}$, dass $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty x f_X(x)\,dx$.*

Beweis. Siehe [Schilling 2017, S.5]. □

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen ist auch durch eine Verteilugnsfunktion charakterisierbar.

Definition 2.10. *Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ ist eine Verteilungsfunktion, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften hat.*

- *F ist monoton wachsend.*
- $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ *und* $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$.
- *F ist rechtsseitig stetig.*

Proposition 2.11. *Sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ gegeben. Dann ist $F(t) := P((-\infty, t])$ eine Verteilungsfunktion.*

Beweis. Siehe [Schilling 2017, S.55]. □

Definition 2.12. *Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine reelle Zufallsvariable. Dann ist $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Verteilungsfunktion von X ist definiert als $F_X(t) := P_X((-\infty, t]) = P(X \le t)$.*

Jede reelle Zufallsvariable besitzt eine Verteilungsfunktion. Umgekehrt existiert zu jeder Verteilungsfunktion F eine reelle Zufallsvariable mit F als Verteilungsfunktion, also $F = F_X$, siehe [Schilling 2017, S.56].

Eine weitere wichtige von der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen abgeleitete Funktion ist die Überlebensfunktion.

Definition 2.13. *Die Überlebensfunktion S_X einer reellen Zufallsvariable X ist definiert als $S_X(t) := 1 - F_X(t)$.*

Die Überlebensfunktion liefert uns eine weitere Möglichkeit zur Berechnung des Erwartungswertes, wie wir im nächsten Kapitel in Abschnitt 3.2 zeigen.

In Abschnitt 2.3 werden wir spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschreiben und spezifischere Begriffe, die für die Versicherungsmathematik wichtig sind, einführen.

2.2 Spieltheorie

In diesem Abschnitt führen wir die spieltheoretischen Begriffe ein, die wir benötigen. Wir folgen hauptsächlich dem Lehrbuch [Kanzow und Schwartz 2018]. Für den Begriff des Stackelberg-Spiels folgen wir der Monographie [Fudenberg und Tirole 1991].

Wir definieren allgemein den Begriff eines Spiels.

Definition 2.14. *Ein N-Personen-Spiel, geschrieben als $\{X_i, \nu_i\}_{\nu=1,...,N}$, besteht aus den folgenden Daten:*

- *Es gibt eine Menge $\{1, ..., N\}$ von Spielern,*
- *Jeder Spieler $i \in \{1, ..., N\}$ hat eine Strategiemenge X_i, $i = 1, ..., N$,*
- *Jeder Spieler $i \in \{1, ..., N\}$ hat eine Auszahlungsfunktion bzw. Nutzenfunktion $\nu_i : X_1 \times ... \times X_N \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., N$.*

Bemerkung 2.15. Man beachte, dass in dieser allgemeinen Definition nicht spezifiziert wird, was das Ziel der Spieler ist, und ob die Spieler eine Strategiemenge oder eine Auszahlungsfunktion eines anderen Spielers kennen. Weiters können die Strategiemengen Teilmengen der reellen Zahlen sein, müssen es aber nicht. Es kann auch eine Strategiemenge eine Menge von Funktionen sein.

Eine Möglichkeit, Spiele zu klassifizieren, ist es, sie in simultane und sequentielle Spiele einzuteilen. Bei simultanen Spielen wählen alle Spieler ihre Strategien $x_i \in X_i$ gleichzeitig aus. Dabei kennt kein Spieler die Strategie eines anderen Spielers. Bei sequentiellen Spielen gibt es eine zeitliche Reihenfolge der Spielzüge. Bei 2-Personen-Spielen kann man die Spieler als Leader und Follower klassifizeren.

Ein Beispiel für ein simultanes Spiel ist das Schere-Stein-Papier Spiel, welches wir [Kanzow und Schwartz 2018] entnehmen.

Beispiel 2.16. Das typische Schere-Stein-Papier-Spiel besteht aus zwei Spielern, 1 und 2. Die Strategiemengen sind $X_1 = X_2 = \{\text{Schere, Stein, Papier}\}$. Die Auszahlungsfunktionen sind zum Beispiel als $\nu_1(\{\text{Schere, Stein}\}) = -1 = -\nu_2(\{\text{Schere, Stein}\})$, $\nu_1(\{\text{Papier, Schere}\}) = 1 = -\nu_2(\{\text{Papier, Schere}\})$, $\nu_1(\{\text{Papier, Papier}\}) = 0 = \nu_2(\{\text{Papier, Papier}\})$ etc. definierbar. Für jeden Sieg bekommt der Gewinner also 1 Maßeinheit, etwa eine Münze, vom Verlierer, und bei Unentschieden bekommt kein Spieler etwas. Das Ziel jedes der beiden Spieler ist die Maximierung seiner Auszahlungsfunktion. Es gibt keine Strategie, die garantiert zum Sieg führt.

Ein Beispiel für ein sequentielles Spiel ist das Stackelberg-Spiel, mit welchem wir uns in dieser Arbeit beschäftigen. Es ist sogar ein Leader-Follower-Spiel.

Definition 2.17. *Ein Stackelberg-Spiel, oder Stackelberg-Duopol besteht aus*

- *Zwei Spielern, die wir L und F nennen,*
- *Zwei Strategiemengen X_L und X_F,*

- *Zwei Nutzenfunktionen $\nu_L, \nu_F : X_L \times X_F \to \mathbb{R}$, und das Ziel beider Spieler ist die Maximierung ihrer jeweiligen Nutzenfunktion.*

Der Spieler L wählt zuerst seine Strategie $x_L \in X_L$, der Spieler F beobachtet diese, und wählt basierend darauf seine Strategie $\alpha(x_L) \in X_F$. Hier ist $\alpha : X_L \to X_F$ eine Abbildung.

Als nächstes legen wir fest, was wir unter einer Lösung eines solchen Spiels verstehen.

Definition 2.18. *Die Stackelberg-Lösung oder das Stackelberg-Gleichgewicht eines Stackelberg -Spiels wird bezeichnet als $(x_L^*, \alpha(x_L^*))$. Hierbei bestimmt der Spieler L zunächst das Funktional α derart, dass für jede Wahl von x_L die Strategie $\alpha(x_L)$ optimal für den Spieler F ist, also $(x_L, \alpha(x_L))$ die Nutzenfunktion ν_F maximiert. Dann wählt der Spieler L eine Strategie $x_L^* \in X_L$ derart, dass $(x_L^*, \alpha(x_L^*))$ seine Nutzenfunktion ν_L maximiert. Der Spieler F beobachtet die Strategie x_L^*, und wählt basierend auf dieser die für ihn optimale Strategie $x_F^* = \alpha(x_L)$.*

Bemerkung 2.19. Für die Bestimmung der Lösung eines Stackelberg-Spiels ist es notwendig, dass der Spieler L ausreichende Information hat, um das Funktional α zu bestimmen. Es muss also sowohl die Strategiemenge X_F als auch die Nutzenfunktion ν_F dem Spieler L bekannt sein. Der Spieler F muss hingegen gar nichts über den Spieler L wissen. Er muss nur die Wahl der Strategie x_L beobachten können.

2.3 Versicherungsmathematik

2.3.1 Allgemeines

Versicherungen existieren wegen der Nachfrage nach Schutz vor unvorhersehbaren potentiell finanziell ruinösen Ereignissen. Der Versicherer verpflichtet sich, im Austausch gegen eine einmalige Prämienzahlung, oder laufende Prämienzahlungen, dem Versicherten bei Eintritt eines im vertraglich bestimmten Ereignisses eine Entschädigungsleistung zu zahlen.

Wir konzentrieren uns auf die Sachversicherung. Diese umfasst alle Schadensereignisse, die nicht auf Lebensrisiken wie Leben und Tod, oder biometrischen Risiken wie Krankheit basieren. Sowohl der Zeitpunkt eines Schadens, als auch die Höhe sind zufällig. Hingegen ist in der Lebensversicherung zwar der Zeitpunkt des Schadens zufällig, die Höhe der Versicherungssumme jedoch meistens im Vorhinein festgelegt. Schadenshöhen in der Sachversicherung werden durch positive reelle Zufallsvariablen modelliert.

Wir führen Beispiele für Verteilungen an, die als Schadenshöhenverteilung verwendet werden können. Eigenschaften wie den Erwartungswert und die Verteilungsfunktion entnehmen wir dem Lehrbuch [Schmidli 2017] und formulieren diese als Propositionen. In der anschließenden Betrachtung des Verhaltens des rechten Verteilungsrandes folgen wir dem Lehrbuch [Foss, Korshunov und Zachary 2013].

Definition 2.20. *Eine positive reelle Zufallsvariable X heisst exponentialverteilt, wenn X die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x) = \mu e^{-\mu x}$, $x > 0$, mit $\mu \in (0, \infty)$ hat. Man schreibt in diesem Fall auch $X \sim \mathbf{Exp}(\mu)$.*

Proposition 2.21. *Es ist $X \sim \mathbf{Exp}(\mu)$ genau dann, wenn die Verteilungsfunktion $F_X(t) = 1 - e^{-\mu t}$, $x > 0$ ist. Für den Erwartungswert gilt dann $\mathbb{E}(X) = 1/\mu$.*

Als eine Verallgemeinerung der Exponentialverteilung kann man die Weibullverteilung betrachten.

Definition 2.22. *Eine positive reelle Zufallsvariable X heißt weibullverteilt, wenn X die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x) = kl(lx)^{k-1}e^{-(lx)^k}$, $x > 0$, hat, wobei $k, l \in (0, \infty)$. Man schreibt in diesem Fall $X \sim$ **Weibull**(l, k).*

Bemerkung 2.23. Für $k = 1$ ist die **Weibull**$(l, 1)$-Verteilung eine **Exp**(l)-Verteilung, wie man durch Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichten sieht.

Proposition 2.24. *Es ist $X \sim$ **Weibull**(l, k) genau dann, wenn die Verteilungsfunktion $F_X(t) = 1 - e^{-(lt)^k}$, $x > 0$ ist.*

Die dritte Verteilung die wir vorstellen ist die Paretoverteilung.

Definition 2.25. *Eine positive reelle Zufallsvariable X heißt Paretoverteilt, wenn X die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x) = (\alpha/m) \cdot (x/m)^{-\alpha-1}$, $x \geq m$, hat, wobei $\alpha, m \in (0, \infty)$. Man schreibt in diesem Fall $X \sim$ **Pareto**(m, α).*

Proposition 2.26. *Es ist $X \sim$ **Pareto**(m, α) genau dann, wenn die Verteilungsfunktion $F_X(t) = 1 - (t/m)^{-\alpha}$, $x \geq m$, ist.*

Bemerkung 2.27. Es ist in der Versicherungsmathematik auch üblich, die sogenannte verschobene Paretoverteilung zu betrachten. Eine solche entsteht, wenn man eine **Pareto**$(1, \alpha)$ Paretoverteilung aus der obigen Definition verschiebt, damit der Träger ihrer Verteilungsfunktion nicht $[1, \infty)$, sondern $(0, \infty)$ ist. Die Überlebensfunktion einer verschoben- Paretoverteilten Zufallsvariable X ist dann $S_X(t) = (1 + t)^{-\alpha}$, $t \geq 0$.

Das Verhalten am rechten Verteilungsrand einer Zufallsvariable X, also der Menge $\{X > M\}$ für eine fixe (große) Zahl $M \in \mathbb{R}^+$, ist wichtig für die Sachversicherung. Es kommt mitunter zu sehr großen Schäden, etwa wegen Erdbeben oder Hurricanes, und für diese ist es besonders wichtig, die Wahrscheinlichkeit gut einzuschätzen, um entsprechende finanzielle Vorkehrungen zu treffen. Dazu gehört etwa auch, Rückversicherungsschutz zu beanspruchen.

Beispiel 2.28. Sei $X \sim$ **Exp**(0.5) und $Y \sim$ **Pareto**$(1, 2)$. Dann ist $\mathbb{E}(X) = 2 = \mathbb{E}(Y)$. Allerdings ist $P(X > 15) = S_X(15) = 0.0005$, aber $P(Y > 15) = S_Y(15) = 0.0044$. Es ist die Wahrscheinlichkeit für Schäden, die größer als 15 sind also fast 9-mal so hoch, wenn man eine Paretoverteilung mit selbem Erwartungswert statt einer Exponentialverteilung betrachtet. In diesem Sinne ist ein Schaden, der nach einer Paretoverteilung verteilt ist, viel riskanter.

Wir führen die folgenden drei Möglichkeiten zur Kategorisierung von Randverhalten an. Dabei verwenden wir die gängigen englischsprachigen Benennungen.

Definition 2.29. *Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X heißt heavy-tailed, wenn $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \infty$ für alle $\lambda > 0$. Sie heißt light-tailed, wenn es ein $\lambda > 0$ gibt, so dass $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) < \infty$*

Das ist äquivalent dazu, dass die Überlebensfunktion $S_X(t)$ für $t \to \infty$ langsamer gegen 0 konvergiert als jede Exponentialfunktion $e^{\lambda t}$ gegen ∞ konvergiert.

Proposition 2.30. *Die Verteilung von X ist heavy-tailed genau dann, wenn* $\lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} S_X(t) \to \infty$, *für alle $\lambda > 0$.*

Beweis. Siehe [Foss, Korshunov und Zachary 2013, S.8]. □

Der nächste Begriff ist der der long-tailed Verteilung.

Definition 2.31. *Die Verteilung der Zufallsvariable X heißt long-tailed, wenn $S_X(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für jedes fixe $s > 0$ gilt, dass $\lim_{t\to\infty} S_X(t+s)/S_X(t) = 1$.*

Das ist äquivalent dazu, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable, falls sie einen hohen Wert überschreitet, einen beliebigen noch höheren Wert überschreitet, gegen 1 konvergiert.

Proposition 2.32. *Die Verteilung von X ist long-tailed genau dann, wenn für jedes fixe $s > 0$ gilt, dass $\lim_{t\to\infty} P(X > t + s \mid X > t) = 1$.*

Beweis. Siehe [Foss, Korshunov und Zachary 2013, S.21]. □

Der letzte Begriff ist der der subexponentiellen Verteilung.

Definition 2.33. *Die Verteilung der positiven reellen Zufallsvariable X heißt subexponentiell, wenn mit $\tilde{X}$, einer unabhängigen Kopie von X, gilt:*
$\lim_{t\to\infty} P(X + \tilde{X} > t)/P(\max(X, \tilde{X}) > t) = 1$.

Die Interpretation dieser Definition ist, dass die Summe $X + \tilde{X}$ einen hohen Wert t tendenziell nur dann überschreitet, wenn bereits einer der beiden Summanden den Wert t überschreitet.

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den gerade eingeführten Begriffen.

Proposition 2.34. *Es gelten die folgenden Implikationen für eine positive reelle Zufallsvariable: X subexponentiell $\implies$ X long-tailed, und X long-tailed $\implies$ X heavy-tailed. Die Umkehrungen gelten jedoch nicht. Die Menge der subexponentiellen Verteilungen ist eine echte Teilmenge der long-tailed Verteilungen. Die Menge der long-tailed Verteilungen ist eine echte Teilmenge der heavy-tailed Verteilungen.*

Beweis. Siehe [Foss, Korshunov und Zachary 2013, S.19], [Foss, Korshunov und Zachary 2013, S.44] und [Foss, Korshunov und Zachary 2013, S.62]. □

Wir ordnen noch die drei oben vorgestellten Verteilungen ihrer Kategorie zu.

Proposition 2.35. *Sei $X \sim$ **Exp**(μ). Dann ist X light-tailed. Insbesondere ist X auch weder long-tailed noch subexponentiell.*

*Sei $X \sim$ **Weibull**(l, k). Dann ist X subexponentiell genau dann, wenn $k < 1$. Insbesondere ist X dann auch long-tailed und heavy-tailed. Für $k \geq 1$ ist X hingegen light-tailed.*

*Sei $X \sim$ **Pareto**(m, α). Dann ist X subexponentiell, und folglich auch long-tailed sowie heavy-tailed.*

Beweis. Für $X \sim$ **Exp**(μ) ist $\lim_{t\to\infty} S_X(t)e^{\mu t} = 1$, und daher ist X nicht heavy-tailed. Für die Behauptungen zu $X \sim$ **Weibull**(l, k) und $X \sim$ **Pareto**(m, α) siehe [Foss, Korshunov und Zachary 2013, Abschnitt 3.5]. □

2.3.2 Prämienkalkulation

In diesem Teilabschnitt stellen wir einige Prämienkalkulationsprinzipien vor, und beschreiben wünschenswerte Eigenschaften. Wir folgen dem Lehrbuch [Denuit, Dhaene, Goovaerts und Kaas 2009], den Lecture Notes [Wüthrich 2023], und für das Proportional-Hazard Prinzip dem Paper [Wang 1995]

Die Prämie ist der Betrag, den der Versicherte der Versicherung zahlen muss, damit diese ein bestimmtes Risiko versichert. In der Sachversicherung ist die Prämie, im Gegensatz zur Lebensversicherung, wo periodische Prämienzahlungen üblich sind, häufig als Einmalzahlung zu leisten. Die Prämie ist ein Funktional der Schadensverteilung, welche die Versicherung dem Risiko unterstellt. Sei X die Schadenshöhe, dann wird die Prämie als $\pi = \pi(X)$ geschrieben. Der Wertebereich ist $[0, \infty)$.

Es sollte die Prämie mindestens so groß wie der erwartete Schaden sein, $\pi(X) \geq \mathbb{E}(X)$. Umgekehrt sollte sie nicht allzu groß sein, es sollte $\pi(X) \leq \inf\{x : F_X(x) = 1\}$ gelten. Wir bemerken jedoch, dass diese Forderung sehr großzügig ist, und diese obere Grenze so gut wie nie ausgereizt wird. Wenn der Schaden um einen fixen Betrag c vergrößert wird, sollte die Prämie das widerspiegeln, also $\pi(X + c) = \pi(X) + c$. Praktisch ist es auch, wenn Prämien für zwei Schäden subadditiv sind, also $\pi(X)+\pi(Y) \geq \pi(X+Y)$. Andernfalls gäbe einen Anreiz für den Versicherten, sein Risiko in zwei Risiken zu teilen und jeweils separat versichern zu lassen.

- Das einfachste Prinzip ist das Nettoprämienprinzip. Dieses ist $\pi(X) = \mathbb{E}(X)$. Dieses ignoriert aber wichtige Eigenschaften der Schadensverteilung, etwa die Varianz oder den rechten Verteilungsrand.

- Das Erwartungswertprinzip hat ähnliche Probleme, aber es liefert immerhin eine höhere Prämie als das Nettoprämienprinzip. Es lautet $\pi(X) = (1 + \alpha)\mathbb{E}(X)$ mit einem $\alpha > 0$.

- Das Varianzprinzip berücksichtigt die Varianz der Verteilung. Es ist definiert als $\pi(X) = \mathbb{E}(X) + \alpha \mathrm{Var}(X)$ mit einem $\alpha > 0$.

- Ein Prinzip, welches den rechten Verteilungsrand des Schadens miteinbezieht ist das Esscherprinzip. Dieses ist $\pi(X) = \mathbb{E}(Xe^{hX})/\mathbb{E}(e^{hX})$ für ein $h > 0$. Die Esscherprämie kann als Nettoprämie des transformierten Schadens $Y = Xe^{hX}/\mathbb{E}(e^{hX})$ gesehen werden. Durch diese Transformation werden die großen Werte von X vergrößert, und die kleinen Werte verkleinert. Es gilt, falls die Esscherprämie existiert und endlich ist, dass $\pi_{\text{Esscher}}(X) > \mathbb{E}(X)$. Diese Prämie existiert jedoch nur für light-tailed Schäden.

- Eine Klasse von Prinzipien, welche auch Verteilungseigenschaften berücksichtigt, aber im Gegensatz zum Esscherprinzip auch für viele heavy-tailed Verteilungen eine endliche Prämie liefern, sind die Verzerrungsprinzipien. Es wird die Überlebensfunktion S_X mit einer Verzerrungsfunktion h verzerrt. Eine Verzerrungsfunktion ist eine konkave, stetige, monoton wachsende Funktion $h : [0, 1] \to [0, 1]$ mit $h(0) = 0$ und $h(1) = 1$. Wegen der Konkavität gilt $h(t) \geq t$ für $0 \leq t \leq 1$. Es gilt sogar bereits die strikte Ungleichung für alle $0 \leq t \leq 1$, falls es ein $0 \leq t_0 \leq 1$ gibt, für das die Ungleichung strikt ist. Eine Verzerrungsprämie ist definiert als $\pi(X) = \int_0^\infty h(S_X(t))\,dt$. Es gilt

$\pi(X) > \mathbb{E}(X)$. Eine größere Risikoaversion des Versicherers kommt durch die Wahl eines größeren h zum Ausdruck.

Die einzigen der bisher vorgestellten Prämienprinzipien, die alle unsere vorher eingeführten wünschenswerten Eigenschaften besitzen, sind das Nettoprämienprinzip und das Esscherprinzip.

Ein Prämienprinzip aus der Klasse der Verzerrungsprinzipien ist das Proportional-Hazard Prinzip. Hierfür wird $h(t) = t^{\theta}$ mit einem $0 < \theta \leq 1$ gewählt. Es ist also $\pi(X) = \int_0^{\infty} S_X(t)^{\theta}\, dt$. Das Proportional-Hazard Prinzip erfüllt alle obigen wünschenswerten Eigenschaften. Wir werden im nächsten Kapitel dieses Prinzip verwenden.

2.3.3 Rückversicherung

Wir folgen in diesem Teilabschnitt hauptsächlich dem Lehrbuch [Deelstra und Plantin 2014].

Ein Rückversicherungsvertrag ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien, in dem sich eine Partei (der Rückversicherer) verpflichtet, die zweite Partei (den Erstversicherer) für spezifizierte Teile des für sie entstandenen Schadens zu entschädigen. Als Gegenleistung zahlt der Erstversicherer dem Rückversicherer eine Rückversicherungsprämie. Rückversicherungsverträge in der Sachversicherung laufen üblicherweise ein Jahr lang. Die Inanspruchnahme von Rückversicherung kann das Risikoprofil von Versicherungen verbessern, oder ihre Geschäftsergebnisse stabilisieren, da sie eine zufällige Zahlung gegen eine fixe Zahlung austauschen.

Wir führen die folgende Notation ein:

Notation 2.36. Wir verwenden die aus dem Englischen stammende Notation für die Entschädigungsfunktion, und bezeichnen diese als $I(\cdot)$, für „Indemnity“. Der Schaden, der dem Erstversicherer bleibt wird durch die Selbstbehaltfunktion gezeigt. Diese nennen wir $R(\cdot)$, wie „Retention“.

Diese Bezeichnungen entsprechen den Bezeichnungen in der Literatur zu Stackelberg-Spielen mit Rückversicherern und Erstversicherern. Mit dem Schaden X ist dann der Zusammenhang $X = R(X) + I(X)$. Wir werden im nächsten Kapitel auf wünschenswerte Eigenschaften von Selbstbehalt- und Entschädigungsfunktionen eingehen.

Wir stellen zwei Rückversicherungsformen vor.

- Die proportionale Rückversicherung ist gegeben als $R(X) = \alpha X$, mit einem positiven $\alpha < 1$.
- Die Excess-of-Loss Rückversicherung ist definiert als $R(X) = \min(X, c)$, mit einem fixen positiven c. Der Erstversicherer muss also nur bis zu einer festen Grenze den Schaden des Risikos selber tragen, den Rest $I(X) = (X - c)_+$ übernimmt der Rückversicherer.

In der Praxis übernimmt ein Rückversicherer nicht einen unbeschränkt hohen Anteil des Schadens, sondern legt einen maximalen Betrag fest, den er dem Erstversicherer entschädigt. Den diesen Betrag übersteigenden Schaden muss der Erstversicherer wieder selbst tragen, oder er hat einen weiteren Vertrag mit einem anderen Rückversicherer, der diesen

Schadenshöhenbereich abdeckt. Man sagt auch, der Rückversicherer übernimmt nur einen Layer des Schadens.

Wir führen ein Resultat über eine bestimmte Optimalität der Excess-of-Loss Rückversicherung unter bestimmten Vorraussetzungen an.

Proposition 2.37. *Für jede Entschädigungsfunktion I mit $0 \leq I(x) \leq x$ für alle $x \geq 0$ gilt:* $\mathbb{E}(I(X)) = \mathbb{E}((X-c)_+) \implies Var(X-(X-c)_+) \leq Var(X - I(X))$.

Beweis. Siehe [Denuit, Dhaene, Goovaerts und Kaas 2009, S.11]. □

Die Excess-of-Loss Rückversicherung minimiert also die Varianz der Selbstbehaltfunktion über alle Entschädigungsfunktionen mit der selben Nettoprämie.

3 Das Stackelberg-Spiel zwischen Erstversicherer und Rückversicherer

In diesem Kapitel beschreiben wir die Vorraussetzungen unseres Stackelberg-Spiels, motivieren es, und finden eine allgemeine Lösung. Wie üblich ist zuerst die Lösung aus Sicht des Erstversicherers dran, und basierend auf dieser danach die Lösung aus Sicht des Rückversicherers. Nachdem wir eine allgemeine Lösung erhalten haben, betrachten wir ein weiteres Stackelberg-Spiel, mit einfacheren zugrundeliegenden Annahmen. Dort setzen wir vollständige Information voraus. Anschließend illustrieren wir die beiden Modelle durch Beispiele mit expliziten Verteilungsannahmen.

3.1 Aufbau des Spiels

Zuerst beschreiben wir das Spiel jeweils vom Standpunkt des Erst- und des Rückversicherers. Wir legen fest, was die jeweiligen Ziele sind, und beschreiben die vorkommenden Berechnungsmethoden. Weiters motivieren wir die Wahl unseres Modells. Zuletzt listen wir im Detail auf, was der Erstversicherer über den Rückversicherer, und was der Rückversicherer über den Erstversicherer weiß. Im Folgenden bezeichnet „EV“ den Erstversicherer, und „RV“ den Rückversicherer.

- Das Ziel des EV ist es, sein erwartetes Vermögen $\mathbb{E}(W_i)$ („i“ wie „insurer“) am Ende eines bestimmten Zeitraums zu maximieren. Das Vermögen ist

  $$W_i = w_i - R - \pi(R),$$

  wobei w_i das konstante Anfangskapital und R die Selbstbehaltfunktion des EV ist. Das Anfangskapital setzen wir oBdA[1] als $w_i = 0$ fest. Dabei darf R eine Funktion aus der Menge der zulässigen Selbstbehaltfunktionen

  $$\mathcal{A} = \{g\colon [0,\infty) \to [0,\infty) |\; g(0) = 0, 0 \leq g(x) - g(y) \leq x - y \;\forall\; y \leq x \in \mathbb{R}^+\}, \quad (3.1)$$

  die wir unten in Bemerkung 3.1 erläutern, sein. Den Schaden modelliert der EV durch die stetige Zufallsvariable X mit der Verteilungsdichte f_X. Wir setzen voraus, dass X integrierbar ist.
  Der RV informiert den EV über sein Prämienkalkulationsprinzip π und seine eigene Verteilungsannahme zum zu versichernden Schaden, den der RV durch die stetige Zufallsvariable Y modelliert. Auch Y setzen wir als integrierbar voraus. Der EV kennt also die Verteilungsdichte f_Y, und kann zu jeder beliebigen Selbstbehaltfunktion R die

[1] Für ein Anfangskapital w_i lautet das Maximierungsproblem $\max_R \mathbb{E}(w_i - R - \pi(R)) = \max_R \mathbb{E}(w_i) + \mathbb{E}(-R - \pi(R)) = w_i + \max_R \mathbb{E}(-R - \pi(R))$, und man sieht, dass w_i für die Optimierung irrelevant ist.

er wählen könnte den zugehörigen Preis $\pi(R)$ selbstständig bestimmen. Da in diesem Spiel das Optimalitätskriterium des RV keine Rolle für den EV spielt, treffen wir über die Kenntnis oder Unkenntnis desselbigen keine Annahme.

- Das Ziel des RV ist es, sein erwartetes Vermögen $\mathbb{E}(W_r)$ („r“ wie „reinsurer“) zu maximieren. Dieses ist am Ende des festgelegten Zeitraums gleich

$$W_r = \pi(R) - I.$$

Auch hier ist das Anfangskapital analog zu oben auf 0 gesetzt.
Es bezeichnet I die Entschädigungsfunktion, also formal

$$I\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ I(t) = t - R(t).$$

Wir nehmen vereinfachend an, dass I keine Obergrenze hat, und schließen somit Layer aus. Der RV verlangt dafür, dass er dem EV im Schadensfall die Auszahlung der Entschädigungsfunktion I verspricht, die Prämie $\pi(R)$ vom EV. Das verwendete Prämienkalkulationsprinzip ist

$$\pi(R) = \int_0^\infty S_{I(Y)}(t)^\theta dt = \int_0^\infty (1 - F_{I(Y)}(t))^\theta dt$$

mit der Überlebensfunktion $S_{I(Y)}$, der Verteilungsfunktion $F_{I(Y)}$ und dem Parameter $\theta \in (0, 1]$. Das ist das Proportional-Hazard Prinzip, wie wir es in Teilabschnitt 2.3.2 vorgestellt haben. Um sein erwartetes Vermögen zu maximieren kann der RV den Parameter θ wählen.
Im Gegensatz zum EV kennt er die dem Schaden zugrunde liegende Verteilungsannahme der Gegenpartei jedoch nicht. Er hat also f_X nicht zur Verfügung. **Er weiß über die Annahmen des EV nur, dass die Verteilung des Schadens X aus der Sicht des EV aus einer bestimmten Verteilungsfamilie stetiger Verteilungen $\mathcal{L}$ stammt. Diese Verteilungsfamilie habe weiters die Eigenschaft, dass sie parametrisch ist. Alle enthaltenen Verteilungen sind also eindeutig durch einen positiven reellen Parameter $\eta \in \mathbb{R}^+$ bestimmt.** Zum Beispiel könnte $\mathcal{L}$ also die Klasse der Exponentialverteilungen, der Paretoverteilungen mit fixem Skalenparameter, oder der Weibullverteilungen mit fixem Skalenparameter sein. Der genaue Verteilungsparameter η ist dem RV nicht bekannt. Stattdessen modelliert der RV diesen durch die Zufallsvariable $\tilde{\eta}$. Wir nehmen an, dass $\tilde{\eta}$ eine stetige Zufallsvariable mit positivem reellen Wertebereich ist, die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\tilde{\eta}}$ hat. Die so zustandekommende Zufallsvariable, die die Schadensverteilungsannahme des EV aus Sicht des RV modelliert, bezeichnen wir mit $\tilde{X}$. Es ist also $\tilde{X} \sim \mathcal{L}(\tilde{\eta})$. Das ist gleichbedeutend dazu, dass die die auf $\tilde{\eta}$ bedingte Verteilung von $\tilde{X}$ dem RV bekannt ist: $\tilde{X}|(\tilde{\eta} = c) \sim \mathcal{L}(c)$. Das Optimalitätskriterium, nach dem der EV seine Selbstbehaltfunktion R wählt, ist dem RV bekannt.

Wir heben noch einmal den Unterschied zwischen X und $\tilde{X}$ hervor:

  - X ist die Zufallsvariable, mit der der EV den Schaden tatsächlich modelliert.

– $\tilde{X}$ ist die Zufallsvariable, von der der RV annimmt, dass der EV diese zur Modellierung des Schadens verwendet

Bemerkung 3.1. Hier gehen wir auf die Wahl der Definition der Menge der zulässigen Selbstbehaltfunktionen $\mathcal{A}$ aus (3.1) ein und motivieren sie. Mit der Definition folgen wir unter anderem [Boonen und Zhang 2022] und [Cheung, Yam und Zhang 2019].

Sei $g \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann ist

- $g(0) = 0$, weil falls kein Schaden entsteht, dann auch keine Versicherungsleistung.
- Weiters ist g monoton wachsend, da für $x \geq y$ folgt, dass $g(x) \geq g(y)$. Ein größerer Schaden soll auch eine größere Versicherungsleistung zur Folge haben.
- Ausserdem ist auch die Entschädigungsfunktion $x - g(x)$ monoton wachsend. Mit $y = 0$ sieht man jedoch, dass immer $g(x) \leq x$, denn eine höhere Versicherungsleistung als der Schaden selber soll ausgeschlossen werden.
- Es gilt auch, dass der Anstieg der zugehörigen Versicherungsleistung niemals den Anstieg des Schadens übertrifft. Andernfalls gäbe es eventuell eine Motivation für den Erstversicherer, einen höheren Schaden als er tatsächlich war zu melden. Durch diese Definition wird das moralische Risiko engeschränkt.
- Weiters ist g Lipschitz stetig mit Lipschitz- Konstante 1. Daher sind R, und somit auch $I = t - R$ Borel-messbar, weshalb für eine reelle Zufallsvariable Z auch $I(Z)$ eine Zufallsvariable ist. Wir können also die Überlebensfunktion $S_{I(Z)}$ betrachten, wie wir es oben für die Prämienberechnung benötigen.

Wir werden im nächsten Abschnitt 3.2 schließen, dass ein Analogon zum Fundamentalsatz der Analysis für Funktionen aus $\mathcal{A}$ gilt. Zuletzt bemerken wir, dass die proportionale Rückversicherung $g(x) = \alpha x,\ 0 < \alpha < 1$ und die Excess-of-Loss Rückversicherung $g(x) = \min(x, c),\ c > 0$ in $\mathcal{A}$ enthalten sind.

Bemerkung 3.2. Optimales Rückversicherungsdesign unter asymmetrischen Verteilungsannahmen, und mit einem anderen Optimalitätskriterium als unserem wird im Paper [Boonen 2016] behandelt. Dort minimiert der Erstversicherer sein Risiko, gemessen durch ein allgemeines Verzerrungs-Risikomaß. Es besteht jedoch vollständige gegenseitige Kenntnis der Verteilungsannahmen. Im Paper [Boonen und Zhang 2022] wird ein Leader-Follower Spiel mit asymmetrischen Verteilungsannahmen und Risikominimierung als Optimalitätskriterium gelöst. Der Rückversicherer kennt dort weder die Risikoaversion, gegeben durch die Wahl der Verzerrungsfunktion, noch die Verteilungsannahme des Erstversicherers. Der Rückversicherer weiß jedoch immerhin, dass nur zwei Paare aus Verzerrungsfunktion und Verteilungsannahme möglich sind, und ordnet beiden Paaren die Wahrscheinlichkeiten p beziehungsweise $1-p$ zu. In [Boonen 2016] werden die unterschiedlichen Verteilungsannahmen durch eventuelle Informationsasymmetrie gerechtfertigt. So könnte etwa der Erstversicherer seine Annahmen auf Beobachtungen einer bestimmten Population stützen, und der Rückversicherer auf eine andere, beziehungsweise größere Population, da Rückversicherer häufig global agieren.

Unsere Arbeit kann als Erweiterung dieser Papers gesehen werden, wobei wir ein einfacheres Optimalitätskriterium für den Erstversicherer verwenden. Unsere Annahme, dass der Rückversicherer nur weiß, dass die Verteilungsannahme des Erstversicherers aus einem Kontinuum von Verteilungen stammt, und er auf dieser eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung hat, können wir wie folgt motivieren. Es besteht Informationsasymmetrie, aber es ist nicht eindeutig, zu welchem Grad. Weiters könnte der Rückversicherer vermuten, dass der Erstversicherer seinen Kalkulationen vorsichtigshalber eine riskantere Schadensverteilung zugrunde legt, als der Erstversicherer sie tatsächlich einschätzt. Das Analogon dazu in der Lebensversicherung sind die Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung. Damit können wir unser Spiel auch so interpretieren, dass der Rückversicherer die Risikoaversion des Erstversicherers einschätzen muss.

Insgesamt fassen wir zusammen, dass der Erstversicherer folgendes Problem lösen muss:

$$\max_{R\in\mathcal{A}} \mathbb{E}(W_i), \text{ wobei}$$
$$W_i = -R(X) - \pi(R), \text{ mit}$$
$$X \sim f_X(x)dx, \text{ und}$$
$$\mathcal{A} = \{g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)|\ g(0) = 0, 0 \le g(x) - g(y) \le x - y\ \forall\ y \le x \in \mathbb{R}^+\}.$$

Dabei weiß der Erstversicherer folgendes über den Rückversicherer:

$$\pi(R) = \int_0^\infty S_{I(Y)}(t)^\theta dt, \text{ mit}$$
$$Y \sim f_Y(x)dx.$$

Das Problem, das der Rückversicherer zu lösen hat lautet hingegen:

$$\max_{\theta\in(0,1]} \mathbb{E}(W_r), \text{ wobei}$$
$$W_r = \pi(R) - (Y - R(Y)), \text{ mit}$$
$$\pi(R) = \int_0^\infty S_{I(Y)}(t)^\theta dt, \text{ und}$$
$$Y \sim f_Y(x)dx.$$

Der Kenntnisstand des Rückversicherers über das Optimalitätskriterium und die Schadensverteilungsannahme des Erstversicherers ist dabei:

$$R \text{ maximiert } \mathbb{E}(W_i),$$

und

$$\tilde{X} \sim \mathcal{L}(\tilde{\eta}), \text{ wobei}$$
$$\tilde{\eta} \text{ eine positive Zufallsvariable ist, mit}$$
$$\tilde{\eta} \sim f_{\tilde{\eta}}(x)dx.$$

Wir lösen dieses Stackelberg Spiel mit Rückwärts-Induktion. Zuerst finden wir für jedes $\theta \in (0,1]$ die für den Erstversicherer optimale Rückversicherungsfunktion R^*_θ. Danach finden wir, unter Kenntnis von R^*_θ jenes θ^*, welches die für den Rückversicherer optimale einzufordernde Prämie liefert. Die Lösung dieses Spiels ist dann das Tupel

$$(R^*_{\theta^*}, \theta^*) \in \mathcal{A} \times (0,1] \text{ mit } R^* = \arg\max_R \mathbb{E}(W_i) \text{ und } \theta^* = \arg\max_\theta \mathbb{E}(W_r).$$

Bemerkung 3.3. Wir wollen auch explizit den Bogen zu Abschnitt 2.2 spannen, und unser Spiel im Kontext der dort eingeführten Bezeichnungen beschreiben. Die beiden Spieler sind der Erstversicherer EV und der Rückversicherer RV. Die Strategiemengen sind $X_{EV} = \mathcal{A}$

und $X_{RV} = (0,1]$. Die Auszahlungsfunktion des Erstversicherers ist $\nu_{EV} : X_{EV} \times X_{RV} \to \mathbb{R}$, $(g, \theta) \mapsto \mathbb{E}(-g(X) - \pi(g))$, wobei X der Schaden aus Sicht des Erstversicherers ist. Die Auszahlungsfunktion des Rückversicherers ist

$$\nu_{RV} : X_{EV} \times X_{RV} \to \mathbb{R},\ (g, \theta) \mapsto \mathbb{E}(\pi(g) - (Y - g(Y))),$$

wobei Y der Schaden aus Sicht des Rückversicherers ist. Das Ziel jedes Spielers ist die Maximierung seiner Auszahlungsfunktion. Der Rückversicherer wählt zuerst seine Strategie $\theta^* = x^*_{RV} \in X_{RV}$. Der Erstversicherer beobachtet die Wahl des Rückversicherers, und wählt daraufhin seine Strategie $R^*_{\theta^*} = x^*_{EV} \in X_{EV}$, um $\nu_{EV}(g, x^*_{RV})$ zu maximieren. Es handelt sich also tatsächlich um ein Stackelberg-Spiel nach der Definition aus dem Abschnitt 2.2 und wir suchen eine Stackelberg-Lösung nach der Definition aus dem selben Abschnitt. Die Abbildung $\alpha : X_{RV} \to X_{EV}$, die der Rückversicherer bestimmen muss, um seine optimale Strategie zu finden ist in diesem Kapitel $\alpha(\theta) = R_\theta$.

Bemerkung 3.4. Die Selbstbehaltfunktion R hängt vom Prämienparameter θ ab, also eigentlich ist $R = R_\theta$. Wir verzichten aber zur besseren Lesbarkeit darauf, diesen Zusammenhang konsequent so zu schreiben.

3.2 Hilfsresultate

Wir benötigen einige Hilfsresultate für die Lösungen der Optimierungsprobleme. Zuerst definieren wir den Begriff einer absolutstetigen Funktion.

Definition 3.5. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem beschränkten rellen Intervall I heißt Absolutstetig, wenn:*
$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 :\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ \{(x_i, y_i) \mid (x_i, y_i) \subset I,\ \textit{paarweise disjunkt}\}_{i=1,\ldots,n}$ *gilt* $\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon$.

Absolutstetigkeit folgt aus Lipschitzstetigkeit.

Lemma 3.6. *Jede Lipschitz-stetige Funktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ist absolutstetig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[0,\infty)$.*

Beweis. Sei $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ M-Lipschitz, also für alle x, y im Definitionsbereich gilt $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$. Wähle $\delta = \epsilon/M$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jede Menge an paarweise disjunkten Teilintervallen $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ mit summierter Länge $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| < \delta$:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)| \leq M \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < \epsilon.$$

□

Das nächste Resultat stammt aus Nielsens Monograph [Nielsen 1997] und kann als Version des Fundamentalsatzes der Analysis für fast überall diferenzierbare Funktionen gesehen werden.

Lemma 3.7. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutstetig. Dann ist f fast überall differenzierbar. Weiters gibt es eine integrierbare reellwertige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

für $x \in (a,b)$.

Beweis. siehe [Nielsen 1997, Abschnitt 20.5]. □

Wir gehen jetzt zu den zulässigen Selbstbehaltfunktionen über.

Lemma 3.8. *Sei $R \in \mathcal{A}$ eine zulässige Selbsbehaltfunktion. Dann ist R absolutstetig, fast überall differenzierbar, und es gibt ein integrierbares reellwertiges h mit $0 \leq h \leq 1$ fast überall, so dass*

$$R(t) = \int_0^t h(s)\,ds.$$

Für die entprechende Entschädigungsfunktion $I(t) = t - R(t)$ gilt dann, dass

$$I(t) = \int_0^t g(s)\,ds,$$

mit $g(s) = 1 - h(s)$.

Beweis. Aus der Definition der Menge $\mathcal{A}$ folgt direkt, dass alle ihre Elemente 1-Lipschitz stetig sind. Wegen Lemma 3.6 folgt die Absolutstetigkeit. Die Differenzierbarkeit fast überall und die Existenz von h, und als Folge davon g, folgt aus Lemma 3.7. Die Integraldarstellungen von R und I folgen aus $R(0) = I(0) = 0$. □

Wir benötigen noch Formeln, um Erwartungswerte zu berechnen.

Lemma 3.9. *Sei Z eine positive reelle Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(Z) < \infty$ und $R \in \mathcal{A}$. Seien weiters h, g wie in Lemma 3.8. Dann gelten die Gleichungen*

$$\mathbb{E}(R(Z)) = \int_0^\infty h(t) S_Z(t)\,dt,$$

$$\pi(R) = \int_0^\infty S_{I(Z)}(s)^\theta\,ds = \int_0^\infty g(s) S_Z(s)^\theta\,ds.$$

Insbesondere liefert uns die erste Gleichung eine weitere Art, den Erwartungswert einer positiven reellen Zufallsvariable zu berechnen, man wähle $R(z) = z$. Dann ergibt sich $\mathbb{E}(Z) = \int_0^\infty S_Z(t)\,dt$

Beweis. Wir formen um:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R(Z)) &= \mathbb{E}\Big(\int_0^Z h(s)\,ds\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty h(s)\mathbf{1}_{\{s\le Z\}}\,ds\Big)\\ &= \int_0^\infty h(s)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{s\le Z\}})\,ds\\ &= \int_0^\infty h(s)P(Z\ge s)\,ds\\ &= \int_0^\infty h(s)P(Z> s)\,ds\\ &= \int_0^\infty h(s)S_Z(s)\,ds.\end{aligned}$$

Die erste Gleichheit folgt aus der Anwendung von Lemma 3.8, die Gleichheit zwischen der dritten und der vierten Zeile folgt aus dem Satz von Fubini, die Gleichheit zwischen der vierten und der fünften Zeile folgt aus der allgemeinen Identität $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = P(A)$, die Gleichheit zwischen der fünften und der sechsten Zeile folgt, weil Z eine stetige Zufallsvariable ist. Für einen Beweis von $\pi(R) = \int_0^\infty g(s)S_Z(s)^\theta\,ds$ siehe Lemma 2.1. des Papers [Zhuang, Weng, Tan und Assa 2016] □

Wir verwenden ab jetzt die folgende Notation:

Notation 3.10. Wir notieren die Funktionen h und g aus Lemma 3.8 ab jetzt als $h(t) = R'(t)$ und $g(t) = I'(t)$.

Das letzte Lemma, das wir benötigen, behandelt die Berechnung des Erwartungswertes einer Funktion zweier Zufallsvariablen. Wir entnehmen es im Wesentlichen dem Lehrbuch [Schilling 2017], passen aber Details an unsere Bedürfnisse an.

Lemma 3.11. *Es seien X, Y unabhängige, positive reelle Zufallsvariable mit Verteilungsdichten f_X, f_Y, und $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ messbar. Wenn $u \ge 0$, dann gilt*

$$\mathbb{E}(u(X,Y)) = \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty u(x,Y)f_X(x)\,dx\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty u(X,y)f_Y(y)\,dy\Big).$$

Beweis. Siehe Korollar 5.9. in [Schilling 2017, Abschnitt 5] □

3.3 Optimierung für den Erstversicherer

Nun können wir die Optimierungsaufgabe lösen. Wir müssen R dermaßen bestimmen, dass $\mathbb{E}(W_i)$ maximal wird. Es ist für $R \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_i) &= \mathbb{E}(-\pi(R) - R(X)) \\
&= \mathbb{E}(-\pi(R)) - \mathbb{E}(R(X)) \\
&= -\pi(R) - \mathbb{E}(R(X)) \\
&= -\int_0^\infty S_{I(Y)}(t)^\theta dt - \int_0^\infty R'(t)S_X(t)dt \\
&= -\int_0^\infty S_Y(t)^\theta dt + \int_0^\infty R'(t)S_Y(t)^\theta dt - \int_0^\infty R'(t)S_X(t)dt.
\end{aligned}$$

Hier ist $\int_0^\infty S_Y(t)^\theta dt$ eine Konstante, und damit für die Maximierung irrelevant. Wir ignorieren diesen Term im Folgenden, und müssen daher $\int_0^\infty R'(t)S_Y(t)^\theta dt - \int_0^\infty R'(t)S_X(t)dt$ maximieren. Es ist

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty R'(t)S_Y(t)^\theta dt - \int_0^\infty R'(t)S_X(t)dt \\
&= \int_0^\infty R'(t)S_Y(t)^\theta - R'(t)S_X(t)dt \\
&= \int_0^\infty R'(t)(S_Y(t)^\theta - S_X(t))dt. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Wir haben dabei angenommen, dass alle vorkommenden Integrale existieren und endlich sind. Für die Gleichheiten haben wir das Lemma 3.9, und den Zusammenhang $I'(t) = 1 - R'(t)$ verwendet. Mithilfe des Terms (3.2) erhalten wir für die Ableitung, ähnlich zu Theorem 3.1 in [Cheung, Yam und Zhang 2019]:

Satz 3.12. *Die optimale Selbsbehaltfunktion R^* des Erstversicherers erfüllt*

$$(R^*)'(t) = \begin{cases} 1, & S_Y(t)^\theta - S_X(t) > 0, \\ 0, & S_Y(t)^\theta - S_X(t) < 0. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Für $S_Y(t)^\theta - S_X(t) = 0$ gilt $(R^*)'(t) = \kappa(t)$, wobei $\kappa \colon \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ eine beliebige Funktion sein kann.

Beweis. Weil R^* laut Vorraussetzung ein Element aus der Menge der zulässigen Selbstbehaltfunktionen $\mathcal{A}$ ist, muss $0 \leq (R^*)'(t) \leq 1$ für alle positiven reellen Zahlen t gelten. Den Integranden in (3.2) kann man maximieren, indem man

- $(R^*)'(t)$ überall dort, wo das Produkt $(R^*)'(t) \cdot (S_Y(t)^\theta - S_X(t))$ positiv ist, maximal wählt. Also für alle $t \in \mathbb{R}^+$ mit $S_Y(t)^\theta - S_X(t) > 0$ setzt man $(R^*)'(t) = 1$.
- $(R^*)'(t)$ überall dort, wo das Produkt $(R^*)'(t) \cdot (S_Y(t)^\theta - S_X(t))$ negativ ist, minimal wählt. Daher ist $(R^*)'(t) = 0$ zu setzen für alle $t \in \mathbb{R}^+$ mit $S_Y(t)^\theta - S_X(t) < 0$.

- $(R^*)'(t)$ überall dort, wo das Produkt $(R^*)'(t)\cdot(S_Y(t)^\theta - S_X(t))$ gleich Null ist, beliebig aus dem Intervall $[0,1]$ wählt. Daher kann man $(R^*)'(t) = \kappa(t)$ wählen für alle $t \in \mathbb{R}^+$ mit $S_Y(t)^\theta - S_X(t) = 0$, wobei κ entsprechend der obigen Beschreibung gewählt sei.

Mit dem auf diese Weise konstruierten $(R^*)'(t)$ wird der Integrand in (3.2) maximiert, und somit auch das entsprechende Integral. Da die Maximierung dieses Integrals äquivalent zur Maximierung des erwarteten Vermögens ist, haben wir den Satz bewiesen.

□

Daraus können wir jetzt leicht auch die eigentliche optimale Selbstbehaltfunktion R^* folgern.

Korollar 3.13. *Die optimale Selbstbehaltfunktion für unser Problem des Erstversicherers ist*

$$\begin{aligned} &R^*\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ &t \mapsto \int_0^t (R^*)'(s)ds, \end{aligned}$$

mit $(R^*)'$ wie in Satz 3.12. Mit κ wie in Satz 3.12 gilt weiters, dass

$$R^*(t) = \boldsymbol{\lambda}(\{s \in [0,t] : S_Y(s)^\theta > S_X(s)\}) + \int_0^t \kappa(s)\mathbf{1}_{\{S_Y(s)^\theta = S_X(s)\}}\,ds, \tag{3.4}$$

wobei $\boldsymbol{\lambda}$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ ist.

Beweis. Die erste Behauptung folgt sofort aus Abschnitt 3.2 und Satz 3.12. Für den Beweis der zweiten Behauptung evaluieren wir das Integral. □

Bemerkung 3.14. Für $\theta = 1$ ergibt sich die folgende Interpretation.
$S_Y(t) - S_X(t) > 0$ bedeutet, dass der Rückversicherer dem Ereignis, dass der Schaden den Wert t überschreitet, $\{\text{Schaden} > t\}$, eine größere Wahrscheinlichkeit zuschreibt als der Erstversicherer. Satz 3.12 besagt also, dass der Erstversicherer überall dort, wo der Rückversicherer eine schwerere rechte Verteilungsflanke erwartet, keine Rückversicherung dazukauft, also dort den vollen Schaden selbst übernimmt. Für diese Bereiche ist die Prämie dem Erstversicherer zu teuer, da sie basierend auf einer riskanteren Schadenverteilung als seiner eigenen kalkuliert ist. Umgekehrt kauft der Erstversicherer überall, wo er eine schwerere rechte Verteilungsflanke erwartet den größtmöglichen Rückversicherungsschutz dazu. Für diese Bereiche ist die Prämie aus Sicht des Erstversicherers günstig, weil sie basierend auf einer weniger riskanten Schadenverteilung als seiner Eigenen kalkuliert ist. Es ist insbesondere möglich, dass gar kein Rückversicherungsvertrag zustande kommt, womit wir meinen, dass der Erstversicherer keinen Schutz kauft.

3.4 Optimierung für den Rückversicherer

Es ist zu beachten, dass die optimale Selbsbehaltfunktion R aus der Sicht des Rückversicherers nicht nur von der Schadenshöhe t und dem Prämienkalkulationsparameter θ abhängt, sondern auch von $\tilde{\eta}$. Der Rückversicherer kennt den tatsächlichen Verteilungsparameter des Erstversicherers ja nicht. Es ist also eigentlich $R = R_\theta(t, \tilde{\eta}(\omega))$. Hierbei ist $\tilde{\eta}$, wie oben beschrieben eine Zufallsvariable, deren Realisation $\tilde{\eta}(\omega) \in \mathbb{R}^+$ den Parameter der Verteilung von $\tilde{X}$ festlegt. $\tilde{X}$ ist hier die Zufallsvariable mit der der Rückversicherer den Schaden aus Sicht des Erstversicherers modelliert, und somit ist formal $\tilde{X}|(\tilde{\eta} = c) \sim \mathcal{L}(c)$. Dabei kann $\mathcal{L}$ etwa die Menge der Exponentialverteilungen sein. Wir unterdrücken das Funktionsargument θ von R, wie oben auch.

Es ist erwähnenswert, dass wir im Folgenden an keiner Stelle an der unbedingten Verteilung von $\tilde{X}$ interessiert sind. Wir benötigen nur die durch die Wahl von $\mathcal{L}$ bestimmte Formel für die Verteilungsfunktion von $\tilde{X}$, die Abhängigkeit dieser Formel von dem Verteilungsparameter $\tilde{\eta}$, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\tilde{\eta}$. Insgesamt sehen wir, dass die Höhe und Wahl des Erstversicherers von R im Kontext der Optimierungsaufgabe des Rückversicherers eine Funktion von zwei Zufallsvariablen ist. Diese sind einerseits der Schaden aus Sicht des Rückversicherers Y, und anderseits $\tilde{\eta}$.

Für die Berechnung der Prämie π ist $\tilde{\eta}$ ebenfalls relevant. Denn verschiedene Realisationen von $\tilde{\eta}$ bewirken verschiedene optimale Selbstbehaltfunktionen R, und dadurch verschiedene zu berechnende Prämien. Diese Abhängigkeit lässt sich durch die Schreibweise $\pi = \pi(R(\tilde{\eta}))$ zum Ausdruck bringen. Um jedoch Konsistenz in der Notation herbeizuführen, schreiben wir $\pi = \pi(R(Y, \tilde{\eta}))$. Hierbei ist π konstant in der Variablen Y, da die tatsächliche Schadenshöhe für die Prämienberechnung irrelevant ist. Dadurch wird auch deutlich, dass die Prämie π in diesem Kontext selber eine Zufallsvariable ist, und wir sie deswegen unten nicht einfach aus dem Erwartungswert herausziehen können.

Wir notieren in diesem Abschnitt die Funktionen h und g aus Lemma 3.8 als $h(t) = \partial_t R(t, \cdot)$ und $g(t) = \partial_t I(t, \cdot)$.

Um nun das Optimierungsproblem zu lösen müssen wir ein $\theta \in (0, 1]$ bestimmen, für das $\mathbb{E}(W_r)$ maximal wird. Dafür betrachten wir zunächst $\mathbb{E}(R(Y, \tilde{\eta}))$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R(Y,\tilde{\eta})) &= \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty \partial_t R(t,\tilde{\eta}) S_Y(t)\, dt\Big) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \partial_t R(t,u) S_Y(t)\, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du,\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist weiter gleich

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (1 - \partial_t I(t,u)) S_Y(t)\, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du. \tag{3.5}$$

Die Gleichheiten folgen aus der Anwendung von Lemma 3.9, Lemma 3.11 und aus $R = t - I$. Damit gehen wir jetzt zu $\mathbb{E}(W_t) = \mathbb{E}(\pi(R(Y, \tilde{\eta})) - Y + R(Y, \tilde{\eta}))$.

Es ist

$$\mathbb{E}(\pi(R(Y,\tilde{\eta})) - Y + R(Y,\tilde{\eta})) = \mathbb{E}(\pi(R(Y,\tilde{\eta})) + R(Y,\tilde{\eta})) - \mathbb{E}(Y).$$

Da Y fix ist, und der Rückversicherer den Erwartungswert seiner eigenen Schadensverteilung kennt, ist $\mathbb{E}(Y)$ für die Maximierung nicht relevant. Daher können wir $\mathbb{E}(Y)$ aus den weiteren Betrachtungen weglassen. Wir wollen also $\mathbb{E}(\pi(R(Y,\tilde{\eta})) + R(Y,\tilde{\eta}))$ maximieren.

Es ist

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\pi(R(Y,\tilde{\eta})) + R(Y,\tilde{\eta})) = \mathbb{E}(\pi(R(Y,\tilde{\eta}))) + \mathbb{E}(R(Y,\tilde{\eta}))\\
&= \mathbb{E}\big(\int_0^\infty \partial_t I(t,\tilde{\eta}) S_Y(t)^\theta \, dt\big) + \mathbb{E}(R(Y,\tilde{\eta}))\\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \partial_t I(t,u) S_Y(t)^\theta \, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du + \int_0^\infty \int_0^\infty (1 - \partial_t I(t,u)) S_Y(t)\, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du\\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \partial_t I(t,u) S_Y(t)^\theta \, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du + \int_0^\infty \int_0^\infty S_Y(t) - \partial_t I(t,u) S_Y(t)\, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du\\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \partial_t I(t,u) S_Y(t)^\theta \, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du + \int_0^\infty \int_0^\infty S_Y(t)\, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du\\
&- \int_0^\infty \int_0^\infty \partial_t I(t,u) S_Y(t)\, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du.
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\int_0^\infty \int_0^\infty S_Y(t)$ eine konstante Zahl, und zwar einfach der Erwartungswert von Y, und für die Optimierung daher nicht relevant. Daher ignorieren wir diesen Term, und betrachten nur mehr

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \partial_t I(t,u) S_Y(t)^\theta \, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du - \int_0^\infty \int_0^\infty \partial_t I(t,u) S_Y(t)\, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du.$$

Diesen Ausdruck formen wir um:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty \partial_t I(t,u) S_Y(t)^\theta \, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du - \int_0^\infty \int_0^\infty \partial_t I(t,u) S_Y(t)\, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du\\
&= \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \partial_t I(t,u) S_Y(t)^\theta \, dt - \int_0^\infty \partial_t I(t,u) S_Y(t)\, dt\Big) f_{\tilde{\eta}}(u)\, du\\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \partial_t I(t,u) (S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Wir haben dabei angenommen, dass alle vorkommenden Integrale existieren und endlich sind. Die Gleichheiten folgen hierbei durch Einsetzen der Definition von π, der Gleichung in (3.5), der Tatsache dass $\tilde{\eta}$ eine Dichte hat und der Linearität des (Doppel)Integrals.

Bemerkung 3.15. Wir sehen, dass die Optimierungsaufgabe des Rückversicherers äquivalent dazu ist, den Ausdruck in (3.6) nach θ zu maximieren. Dabei weiß der Rückversicherer noch zusätzlich, dass $\partial_t R$ von der Form $\mathbf{1}_{\{S_Y(t)^\theta - S_{\tilde{X}}(t)>0\}}$ ist, siehe Satz 3.12. Da X aus einer parametrischen Verteilungsfamilie $\mathcal{L}$ stammt, und die Verteilung daher eindeutig durch den Parameter, in unserem Fall oben in (3.6) ist das u, festgelegt ist, können wir die Notation folgendermaßen anpassen: Es ist $\partial_t R$ von der Form $\mathbf{1}_{\{S_Y(t)^\theta - S_u(t)>0\}}$. Da $\partial_t I = 1 - \partial_t R$ ist, kann man schließen, dass $\partial_t I$ von der Form $\mathbf{1}_{\{S_Y(t)^\theta - S_u(t)>0\}^\complement}$ ist, wobei $A^\complement$ das mengentheoretische Komplement einer Menge A ist. Da $\{S_Y(t)^\theta - S_u(t) > 0\}^\complement = \{S_Y(t)^\theta - S_u(t) \leq 0\}$ ist, kann man zusammenfassen, dass

$$\partial_t I(t, u) = \mathbf{1}_{\{S_Y(t)^\theta - S_u(t) \leq 0\}} \tag{3.7}$$

ist.

Bemerkung 3.16. Wenn man zusätzlich eine spezielle Annahme über die Verteilungsfamilie $\mathcal{L}$ macht, z.B. dass $\mathcal{L} = \{F_X \,|\, \text{X ist exponentialverteilt}\}$, dann kann man $\{S_Y(t)^\theta - S_u(t) \leq 0\}$ in gewissen Fällen so umformen, dass in der Ungleichung t gar nicht mehr vorkommt. Die Ungleichung hängt dann nur mehr von θ und u ab. Es ist in weiterer Folge möglich, $\partial_t I$ aus dem inneren Integral in (3.6) herauszuziehen, und stattdessen die damit assoziierte Ungleichung direkt in den Integrationsbereich des äußeren Integrals einzubauen. Dadurch kann man den Ausdruck in (3.6) dann auch bequem explizit berechnen, und einfacher bezüglich θ maximieren.

Wir können zusammenfassen: Mit $I^* = t - R^*$ ist die Lösung unseres Leader- Follower Spiels mit assymetrischen Verteilungsannahmen

$$\Big(\underbrace{\int_0^t \mathbf{1}_{\{S_Y(t)^{\theta^*} - S_X(t)>0\}} dt}_{R^*_{\theta^*}(t)},\ \underbrace{\arg\max_{\theta\in(0,1]} \int_0^\infty \int_0^\infty \partial_t I^*(t,u)(S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\, dt\, f_{\tilde{\eta}}(u)\, du}_{\theta^*}\Big). \tag{3.8}$$

3.5 Ein Spiel mit vollständiger Information

In diesem Kapitel wollen wir ein Spiel mit ein wenig anderen Bedingungen beschreiben und seine Lösung angeben. Innerhalb dieses Spiels werden wir weiter unten in den Beispielen die Einschränkung, dass der Rückversicherer und der Erstversicherer eine Verteilung aus der selben Verteilungsfamilie für den Schaden verwenden, aufheben können.

Es soll keine Unsicherheit mehr bestehen, der Rückversicherer kennt also die Verteilung von X, und es kommt kein $\tilde{\eta}$ mehr vor. Alles andere bleibt unverändert, und daher ist das Spiel beschrieben durch:

- Beide Spieler haben das Ziel, ihr erwartetes Vermögen zu maximieren.
- Zugelassen sind Selbstbehaltfunktionen aus der Menge $\mathcal{A}$, gegeben in (3.1).
- Die Prämie π wird mit dem Proportional-Hazard Prinzip berechnet, gegeben in Teilabschnitt 2.3.2.

- Der Erstversicherer glaubt, der Schaden hat die Verteilungsdichte f_X, und der Rückversicherer kennt f_X. Der Rückversicherer glaubt, der Schaden hat die Verteilungsdichte f_Y, und der Erstversicherer kennt f_Y.

Wenn man die Argumentation in Abschnitt 3.3 bei der Herleitung der optimalen Selbstbehaltfunktion noch einmal durchgeht, sieht man, dass $\tilde{\eta}$ in die Lösung des Erstversicherer-Problems nicht eingeflossen ist. An der Lösung R^* ändert sich durch unsere Vereinfachung in diesem Abschnitt also nichts.

Für das Rückversicherer- Problem betrachten wir $\mathbb{E}(W_r) = \mathbb{E}(\pi(R)+R(Y))$. Man beachte, dass hier, im Gegensatz zu Abschnitt 3.4 die Prämie π keine Zufallsvariable ist, und wir sie deshalb aus dem Erwartungswert herausziehen können.

Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\pi(R) + R(Y)) &= \pi(R) + \mathbb{E}(R(Y))\\ &= \int_0^\infty I'(t)S_Y(t)^\theta\,dt + \int_0^\infty R'(t)S_Y(t)\,dt\\ &= \int_0^\infty I'(t)S_Y(t)^\theta\,dt + \int_0^\infty S_Y(t)\,dt - \int_0^\infty I'(t)S_Y(t)\,dt.\end{aligned}$$

Die reelle Zahl $\int_0^\infty S_Y(t)\,dt$ können wir für die Optimierungsaufgabe ignorieren, und rechnen weiter

$$\int_0^\infty I'(t)S_Y(t)^\theta\,dt - \int_0^\infty I'(t)S_Y(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty I'(t)(S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt. \tag{3.9}$$

Die Gleichheiten kann man analog den Gleichheiten oben, die zum Ausdruck in (3.6) hingeführt haben, begründen. Man beachte die Ähnlichkeit des hier erhaltenen Ausdrucks zu jenem in (3.6). Der Unterschied ist, dass hier nicht mehr zusätzlich über die Verteilung von $\tilde{\eta}$ gemittelt werden muss. Dies erleichtert die explizite Berechnung von Lösungen, wenn X und Y nicht aus der gleichen Verteilungsfamilie stammen, erheblich. Im nächsten Abschnitt werden wir diesen Vorteil nutzen. Für das vereinfachte Spiel dieses Abschnitts können wir, mit $I^*(t) = t - R^*$, die Lösung angeben:

$$\Big(\underbrace{\int_0^t \mathbf{1}_{\{S_Y(t)^{\theta^*} - S_X(t) > 0\}} dt}_{R^*_{\theta^*}(t)},\ \underbrace{\arg\max_{\theta\in(0,1]} \int_0^\infty (I^*)'(t)(S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt}_{\theta^*}\Big). \tag{3.10}$$

3.6 Beispiele

In diesem Abschnitt treffen wir spezifische Verteilungsannahmen über X, Y, und im ersten Teilabschnitt auch über $\tilde{X}|\tilde{\eta}$ und $\tilde{\eta}$. Unter diesen Annahmen suchen wir explizite Lösungen des Spiels. Wir wiederholen: X ist die tatsächliche Schadenverteilung aus Sicht des Erstversicherers, Y ist die Schadenverteilung aus Sicht des Rückversicherers, $\tilde{X}|\tilde{\eta}$ ist die die Verteilung, mit der der Rückversicherer die Schadenmodellierung des Erstversicherers modelliert, und $\tilde{\eta}$ ist der zufällige Strukturparameter.

Im ersten Teilabschnitt behandeln wir das erste Spiel, mit der Lösung (3.8), in den weiteren Teilabschnitten das zweite Spiel, mit der Lösung (3.10). Wir werden sehen, dass die Form der Rückversicherung davon abhängt, ob die Überlebensfunktionen der beiden Parteien sich schneiden, oder nicht. Falls sie sich nicht schneiden, bedeutet das, dass eine Partei den Schaden durchwegs als riskanter bewertet als die zweite Partei. Falls sie sich doch schneiden, wechselt die Risikoeinschätzung ab einer gewissen Höhe.

3.6.1 Exp - Exp - {Exp} - beliebig

Es ist in diesem Beispiel

$$\begin{aligned} X &\sim \mathbf{Exp}(\lambda), \\ Y &\sim \mathbf{Exp}(\mu), \\ \tilde{X}|(\tilde{\eta} = c) &\sim \mathbf{Exp}(c), \\ \tilde{\eta} &\sim f_{\tilde{\eta}}(x)dx. \end{aligned}$$

Hierbei sind λ, μ positive reelle Zahlen und $f_{\tilde{\eta}}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte mit Träger in den positiven reellen Zahlen.

Wir führen für diesen Abschnitt die folgende Notation ein, wobei das $\mathcal{O}$ von „optimal" kommt, und nichts mit dem Landau-Symbol zu tun hat.

Notation 3.17. Wir notieren den nach θ zu maximierenden Ausdruck in (3.6) als $\mathcal{O}(\theta)$.

Wir werden sehen, dass die optimale Selbstbehaltfunktion $R^*(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\lambda > \mu\theta^*\}}\, dt$ ist. Falls der Erstversicherer also einen Rückversicherungsschutz kauft, dann die volle Rückversicherung $I(t) = t$.

Wir bestimmen zuerst den optimalen Prämienkalkulationsparameter θ^*. Die Überlebensfunktion einer exponentialverteilten Zufallsvariable $Z \sim \mathbf{Exp}(\alpha)$ ist $S_Z(t) = e^{-\alpha t}$. Wir bemerken, dass alle in (3.6) vorkommenden Integrale existieren und endlich sind, denn es ist

$$\int_0^\infty S_Y(t)^\theta = \int_0^\infty e^{-\mu\theta t}\, dt = \int_0^\infty S_W(t)\, dt = \mathbb{E}(W) = \frac{1}{\mu\theta} \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist W eine beliebige $\mathbf{Exp}(\mu\theta)$-verteilte Zufallsvariable.

Wir betrachten zunächst die Ableitung der Entschädigungsfunktion, $\partial_t I(t,u)$. Diese ist, wie oben für (3.7) begründet, von der Form $\mathbf{1}_{\{S_Y(t)^\theta - S_u(t) \leq 0\}}$. Es ist jetzt

$$S_Y(t)^\theta - S_u(t) \leq 0 \iff e^{-\mu\theta t} \leq e^{-ut} \iff ut \leq \mu\theta t \iff u \leq \mu\theta.$$

Es ist also $\partial_t I(t,u) = \mathbf{1}_{\{u \leq \mu\theta\}}$. Dieser Ausdruck hängt nicht mehr von t ab. Wir können nun das in (3.8) vorkommende Doppelintegral auswerten.

Es ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(\theta) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \partial_t I(t,u)(S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt\, f_{\tilde\eta}(u)\,du \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{u \leq \mu\theta\}}(S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt\, f_{\tilde\eta}(u)\,du \\
&= \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{u \leq \mu\theta\}} \int_0^\infty (S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt\, f_{\tilde\eta}(u)\,du \\
&= \int_0^{\mu\theta} \int_0^\infty (S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt\, f_{\tilde\eta}(u)\,du \\
&= \int_0^\infty (S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt \cdot \int_0^{\mu\theta} f_{\tilde\eta}(u)\,du
\end{aligned}$$

Dies lässt sich durch Auswertung des Integrals und mithilfe der Definition einer Wahrscheinlichkeitsdichte weiter vereinfachen zu:

$$\left(\frac{1}{\mu\theta} - \frac{1}{\mu}\right) \cdot \mathbb{P}(\tilde\eta \leq \mu\theta). \tag{3.11}$$

Die Gleichheiten folgen aus der Linearität des Integrals. Man beachte, dass wir so vorgehen konnten, wie in Bemerkung 3.16 beschrieben.

Bemerkung 3.18. Der erste Faktor in (3.11) wird immer größer, je kleiner θ wird, und geht gegen ∞ für $\theta \to 0$. Der zweite Faktor wird immer kleiner, je kleiner θ wird, und geht gegen 0 für $\theta \to \infty$.

Den ersten Faktor kann man als den Profit, den der Rückversicherer macht, falls ein Rückversicherungsvertrag zustande kommt, interpretieren. Den zweiten Faktor kann man als die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt ein Rückversicherungsvertrag zustande kommt, interpretieren. Denn, wir erinnern an Satz 3.12, der Erstversicherer nimmt nur dann eine Rückversicherung, die nicht identisch 0 ist, wenn $S_Y(t)^\theta \leq S_X(t)$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass $\lambda \leq \mu\theta$. Da der Rückversicherer das ihm unbekannte λ mittels $\tilde\eta$ modelliert, entspricht diese Bedingung genau $\mathbb{P}(\tilde\eta \leq \mu\theta)$. Hierbei verwenden wir die Ausdrucksweise, dass ein Rückversicherungsvertrag zustande kommt, falls der Erstversicherer einen Rückversicherungsschutz kauft, der nicht identisch 0 ist.

Der Rückversicherer muss also die einander gegenläufigen Faktoren „Profit aus Vertrag“ und „Wahrscheinlichkeit des Vertragsabschlusses“ ausbalancieren.

Um das optimale θ^* zu finden, müssen wir also den Ausdruck in (3.11) nach θ maximieren. Bis jetzt hatten wir uns noch auf keine Verteilung für $\tilde{\eta}$ festgelegt. Wir wählen hierfür eine Weibull-Verteilung. Die Verteilungsklasse der Weibullverteilungen umfasst auch Verteilungen, die der Normalverteilung ähnlich sehen, mit dem Vorteil, dass ihr Träger nur die positiven reellen Zahlen sind. Für $Z \sim \mathbf{Weibull}(l,k)$ ist

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-(lz)^k} & z \geq 0, \\ 0 & z < 0. \end{cases}$$

Der Ausdruck in (3.11) wird dann zu

$$\mathcal{O}(\theta) = \big(\frac{1}{\mu\theta} - \frac{1}{\mu}\big) \cdot \big(1 - e^{-(l\mu\theta)^k}\big).$$

Wenn man diesen aber nach θ ableitet, und die Ableitung gleich Null setzt, um eine Extremstelle zu finden, führt das auf eine transzendente Gleichung der Form $f(e^{g(\theta)}, \theta) = 0$, mit Polynomen f und g. Eine geschlossene, explizite Lösung ist daher also nicht zu erwarten. Wir werden für verschiedene μ, l und k- Werte Näherungslösungen für θ^* mittels der Software R bestimmen.

Wir diskutieren nun, wie der Rückversicherer die Verteilung von $\tilde{\eta}$, also k und l wählen könnte. Eine naheliegende Erwartung an $\tilde{\eta}$ ist, dass seine Realisierungen eher in der Nähe von, und eher symmetrisch um den Parameter μ des Rückversicherers liegen. Das spiegelt die Erwartung, dass sich λ nicht stark von μ unterscheidet, wieder. Man kann das zum Beispiel bewerkstelligen, indem man l in der Nähe von μ^{-1}, und k hoch wählt. Wir wollen uns im Folgenden auf $k = 1.5, 3, 5, 7$ konzentrieren. Für $k = 3$ hat die zugehörige Verteilunggsdichte schon eine frei erkennbare relativ gute Symmetrie, wie in Abbildung 3.1 erkennbar ist.

Wir einigen uns darauf, l_k jeweils so zu wählen, dass $F_{Weibull}(z = \mu, l_k, k) \approx 0.5$, wobei $F_{Weibull}(\cdot, l_k, k)$ die Verteilungsfunktion einer $\mathbf{Weibull}(l_k, k)$-verteilten Zufallsvariable sei. Es soll also etwa gleichwahrscheinlich sein, dass der wahre Parameter λ des Erstversicherers größer ist als der der Parameter μ des Rückversicherers und dass er kleiner ist.

Es wird also im Folgenden jeweils zunächst ein μ gewählt, und mit diesem werden mehrere Werte von k tabelliert. Für jeden Wert von k listen wir l_k, den optimalen Prämienkalkulationsparameter θ^*, das mit diesem θ^* erwartete Vermögen, und die Wahrscheinlichkeit, dass der Vertrag zustande kommt auf. In Abbildung 3.1 unten veranschaulichen wir θ^*, $\mathcal{O}(\theta)$ und die entsprechenden Weibull- Verteilungsdichten. Dort ist zu erkennen, dass die Funktionen $\mathcal{O}(\theta)$ allesamt globale Maxima haben, und es deshalb eindeutige Lösungen θ^* gibt.

- $\mu = 3$. Wir betrachten $\tilde{\eta} \sim \mathbf{Weibull}(l_k, k)$, und erhalten, auf vier Nachkommastellen gerundet

k	l_k	θ^*	$\mathcal{O}(\theta^*)$	$\mathbb{P}(\tilde{\eta} \leq \mu\theta^*)$
1.5	0.26	0.2915	0.0924	0.1141
3	0.3	0.6275	0.0388	0.1963
5	0.3	0.7755	0.0197	0.2044
7	0.32	0.8320	0.0182	0.2716

Tabelle 3.1: Optimale Prämienparameter für Exp-Exp mit Weibull-Strukturverteilungen und $\mu = 3$

Wir beobachten in der ersten Spalte, dass mit wachsendem k in der Tat l_k gegen μ^{-1} tendiert. In der zweiten Spalte sehen wir, dass mit wachsendem k (und l_k) das optimale θ^* wächst. In der dritten Spalte sehen wir, dass das erwartete Vermögen mit wachsendem k immer kleiner wird. In der vierten Spalte sehen wir, dass hingegen die Wahrscheinlichkeit auf Vertragsabschluss mit k wächst.

- $\mu = 1$. Wir betrachten $\tilde{\eta} \sim \mathbf{Weibull}(l_k, k)$. Dann ergibt sich

k	l_k	θ^*	$\mathcal{O}(\theta^*)$	$\mathbb{P}(\tilde{\eta} \leq \mu\theta^*)$
1.5	0.8	0.294	0.2588	0.1078
3	0.9	0.6335	0.0978	0.1691
5	0.94	0.7775	0.0538	0.1882
7	0.96	0.84	0.0378	0.1988

Tabelle 3.2: Optimale Prämienparameter für Exp-Exp mit Weibull-Strukturverteilungen und $\mu = 1$

- $\mu = 0.5$. Wir betrachten wieder $\tilde{\eta} \sim \mathbf{Weibull}(l_k, k)$. Es ergibt sich

k	l_k	θ^*	$\mathcal{O}(\theta^*)$	$\mathbb{P}(\tilde{\eta} \leq \mu\theta^*)$
1.5	1.58	0.2945	0.5085	0.1061
3	1.78	0.6345	0.1898	0.1647
5	1.88	0.7775	0.1077	0.1882
7	1.92	0.84	0.0757	0.1988

Tabelle 3.3: Optimale Prämienparameter für Exp-Exp mit Weibull-Strukturverteilungen und $\mu = 0.5$

- $\mu = 0.25$. Wir betrachten $\tilde{\eta} \sim \mathbf{Weibull}(l_k, k)$, und erhalten

k	l_k	θ^*	$\mathcal{O}(\theta^*)$	$\mathbb{P}(\tilde{\eta} \leq \mu\theta^*)$
1.5	3.16	0.2945	1.0171	0.1061
3	3.56	0.6345	0.3797	0.1647
5	3.74	0.778	0.2103	0.1842
7	3.82	0.8405	0.1466	0.1931

Tabelle 3.4: Optimale Prämienparameter für Exp-Exp mit Weibull-Strukturverteilungen und $\mu = 0.25$

Die Beobachtungen, die wir für $\mu = 3$ hatten, können auch auf die anderen μ- Werte übertragen werden. Die Tabellen haben gemeinsam, dass die Wahrscheinlichkeit auf Vertragsabschluss immer recht niedrig ist, im besten Fall nämlich 0.2716.

Wir wenden uns jetzt noch der optimalen Selbstbehaltfunktion R^* des Erstversicherers zu. Diese ist für alle μ, θ^*, für die $\mu\theta^* \geq \lambda$ gilt identisch 0. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so kauft der Erstversicherer die Entschädigungsfunktion $I^*(t) = t$ vom Rückversicherer. Zum Beispiel für $\mu = 0.5$ und $k = 5$ entnehmen wir der entsprechenden obigen Tabelle, dass $\theta^* = 0.7775$. Falls jetzt $\lambda \leq 0.5 \cdot 0.7775 = 0.3887$ ist, so gilt für alle positiven reellen t: $I^*(t) = t$. Ansonsten kauft er keine Rückversicherung für dieses Schadensrisiko.

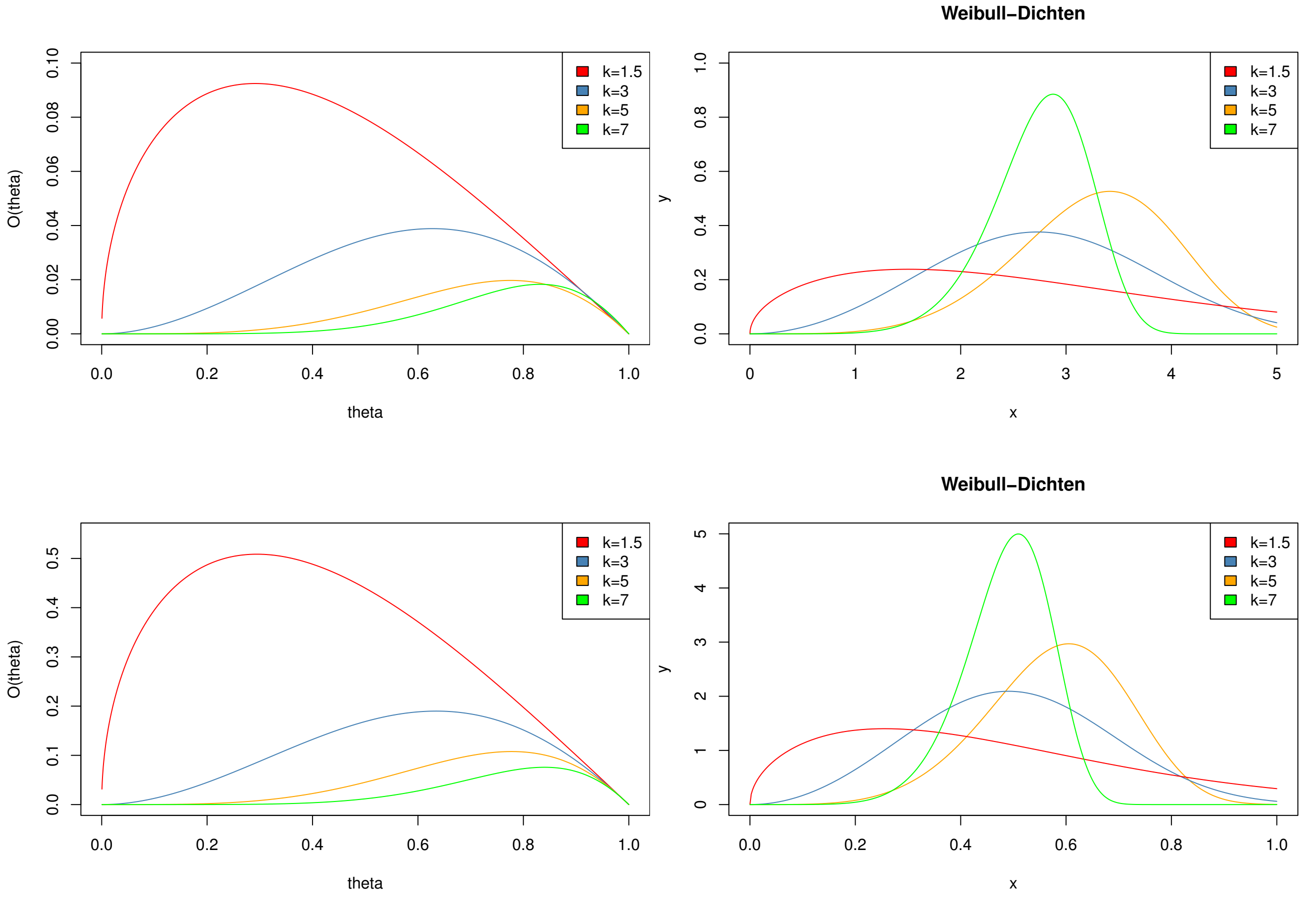

Abbildung 3.1: In der oberen Zeile $\mu = 3$, in der unteren Zeile $\mu = 0.5$. Links jeweils die Funktion $\mathcal{O}(\theta)$ und rechts die entsprechenden **Weibull**(l_k, k)-Dichten.

In Abbildung 3.1 erkennen wir, dass die Funktionen $\mathcal{O}(\theta)$ eindeutige globale Maxima haben. Weiters erkennen wir, dass mit wachsendem k die Dichtefunktion der **Weibull**(l_k, k)-Verteilung symmetrischer um $x = \mu$ wird.

3.6.2 Weibull - Exp

Wir legen unseren Berechnungen nun das einfachere Spiel aus Abschnitt 3.5 zugrunde. Die Zufallsvariable $\tilde{\eta}$ entfällt also, und es wird auch die Lösung vielfältigerer Schadensverteilungsannahmen - Kombinationen möglich. In diesem Teilabschnitt legen wir fest:

$$X \sim \mathbf{Weibull}(l, k) \text{ und}$$

$$Y \sim \mathbf{Exp}(\mu).$$

Dann sind die Überlebensfunktionen gegeben durch $S_X(t) = e^{-(tl)^k}$ und $S_Y(t) = e^{-\mu t}$. Für diesen und den nächsten Teilabschnitt belegen wir $\mathcal{O}(\theta)$ neu.

Notation 3.19. Wir notieren den zu maximierenden Ausdruck in (3.9) als $\mathcal{O}(\theta)$

Wir werden drei Fälle unterscheiden, nämlich $k < 1$, $k > 1$ und $k = 1$. Für $k < 1$ ist die Weibull- Verteilung Heavy-Tailed. Für $k = 1$ degeneriert sie zur $\mathbf{Exp}(l)$-Verteilung. Wir werden sehen, dass für $k < 1$ die optimale Rückversicherung eine klassische Excess-of-Loss Rückversicherung ist.

Wir beginnen mit dem Fall $k > 1$: Um θ^* zu finden ist es laut der Lösung (3.10) notwendig $\mathcal{O}(\theta) = \int_0^\infty I'(t)(S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt$ zu maximieren. Dabei ist $I'(t) = \mathbf{1}_{\{S_Y(t)^\theta \leq S_X(t)\}}$. Wir formen äquivalent um:

$$S_Y(t)^\theta \leq S_X(t) \iff e^{-\mu\theta t} \leq e^{-(tl)^k} \iff (tl)^k \leq \mu\theta t \iff t^{k-1}l^k \leq \mu\theta$$

$$\iff t^{k-1} \leq \frac{\mu\theta}{l^k} \iff t \leq \left(\frac{\mu\theta}{l^k}\right)^{\frac{1}{k-1}} := f(\theta).$$

Die zweite Äquivalenz folgt aus der Monotonie der Exponentialfunktion, die dritte aus der Nichtnegativität von t, und die erhaltene Schranke für t nennen wir $f(\theta)$. Wir folgern dass $I'(t) = \mathbf{1}_{\{t \leq f(\theta)\}}$, und $\mathcal{O}(\theta)$ wird zu $\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{t \leq f(\theta)\}}(S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt$. Wir rechnen weiter

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(\theta) &= \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{t \leq f(\theta)\}}(S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt \\
&= \int_0^{f(\theta)} (S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt \\
&= \int_0^{f(\theta)} S_Y(t)^\theta\,dt - \int_0^{f(\theta)} S_Y(t)\,dt \\
&= \int_0^{f(\theta)} e^{-\mu\theta t}\,dt - \int_0^{f(\theta)} e^{-\mu t}\,dt \\
&= \frac{1}{\mu\theta} - \frac{1}{\mu\theta}e^{-\mu\theta f(\theta)} - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}e^{-\mu f(\theta)}.
\end{aligned}$$

Die Gleichheiten folgen durch Einbau der Indikatorfunktion in die Integrationsgrenze, der Linearität des Integrals, und der Endlichkeit und Existenz desselben. In dieser Form können wir die Funktion $\mathcal{O}(\theta)$ mit R grafisch darstellen und numerisch einen Näherungswert für ihr Maximum bestimmen.

Bevor wir das machen, lösen wir aber noch das Erstversicherer-Problem. Wir nehmen an, dass es eine eindeutige Lösung θ^* des Rückversicherer-Problems gibt. Gemäß der Lösung (3.10) ist die optimale Selbstbehaltfunktion gegeben durch $R^*(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{S_Y(s)^{\theta^*} > S_X(s)\}}\, ds$. Analog zu oben können wir sehen, dass die Ungleichung $S_Y(s)^{\theta^*} > S_X(s)$ äquivalent zur Ungleichung $s > f(\theta^*)$ ist. Wir erhalten also

$$R^*(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{s > f(\theta^*)\}}\, ds = \begin{cases} 0 & t \leq f(\theta^*), \\ t - f(\theta^*) & t > f(\theta^*). \end{cases}$$

Kompakter geschrieben haben wir $R^*(t) = (t - f(\theta^*))_+$. Daraus folgt direkt auch die optimale Entschädigungsfunktion $I^*(t) = \min(t, f(\theta^*))$. Dies ist genau die Umkehrung der klassischen Excess-of-Loss Rückversicherung, für die $R_{XL}(t) = \min(t, c)$ und $I_{XL}(t) = (t - c)_+$ mit einer positiven Konstante c ist. In unserem Spiel mit $k > 1$ möchte der Erstversicherer also lieber den linken Verteilungsrand des Schadensrisikos rückversichern. Das kann man so interpretieren, dass der Erstversicherer eher kleinere Schäden erwartet, und für kleine Schäden der Preis für Rückversicherungsschutz akzeptabel ist. Für größere Schäden hingegen passt der Glaube an ihren Eintritt mit dem Preis für Rückversicherungsschutz nicht mehr zusammen. In diesem Zusammenhang erinnern wir daran, dass **Weibull**(l, k)-Verteilungen für $k > 1$ Light-Tailed sind, und sogar leichteren rechten Verteilungsrand als Exponentialverteilungen haben.

Wir geben für einige Werte von k, l, μ mit der Programmiersprache R ermittelte Näherungswerte für θ^*, $f(\theta^*)$ und die sich ergebenden optimalen Selbstbehaltfunktionen an.

$k = \cdot, l = \cdot, \mu = \cdot$	θ^*	$f(\theta^*)$	$R^*(t)$
1.5, 0.5, 0.5	0.7625	1.1628	$(t - 1.1628)_+$
2, 0.5, 0.5	0.61	1.22	$(t - 1.22)_+$
2, 1, 0.25	0.6625	0.1656	$(t - 0.1656)_+$
1.2, 2, 1	0.91	0.0097	$(t - 0.0097)_+$

Tabelle 3.5: Optimale Prämienparameter und Selbstbehaltfunktionen für Weibull-Exp im light-tail Fall.

Wir zeigen die Funktionsgraphen von $\mathcal{O}(\theta)$ in Abbildung 3.2.

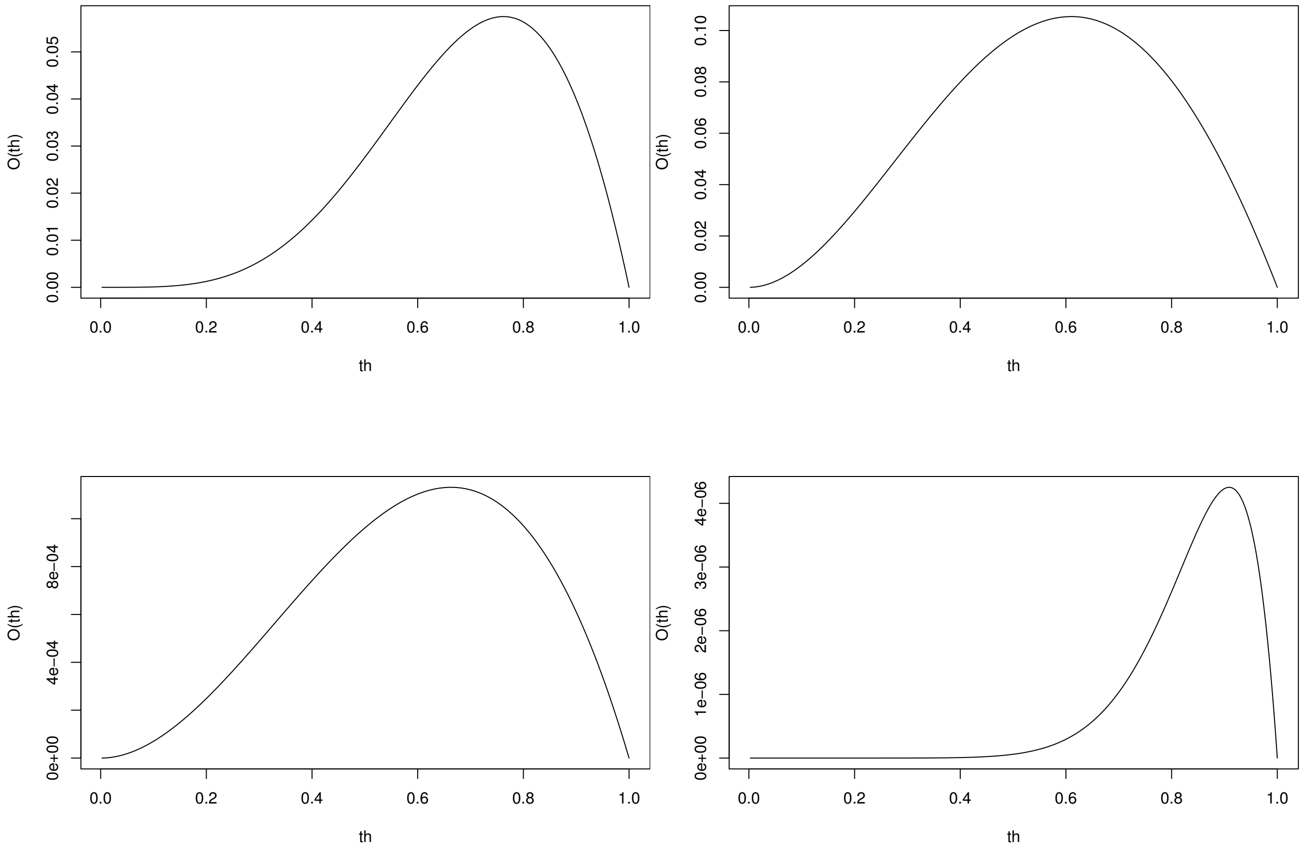

Abbildung 3.2: Funktionsgraphen von $\mathcal{O}(\theta)$, mit Parametern $(k, l, \mu) = (1.5, 0.5, 0.5), (2, 0.5, 0.5), (2, 1, 0.25), (1.2, 2, 1)$ in der Reihenfolge von links nach rechts.

In Abbildung 3.2 erkennen wir, dass die Optimalitätsfunktionen jeweils genau ein globales Maximum haben. Daher war unsere Vorgehensweise bei der Bestimmung der optimalen Selbstbehaltfunktion gerechtfertigt.

Wir gehen zum Fall $k < 1$ über, die Weibullverteilung ist nun also heavy-tailed. Wir formen wieder die Ungleichung $S_Y(t)^\theta \leq S_X(t)$ um

$$S_Y(t)^\theta \leq S_X(t) \iff e^{-\mu\theta t} \leq e^{-(tl)^k} \iff (tl)^k \leq \mu\theta t$$

$$\iff l^k \leq \mu\theta t^{1-k} \iff g(\theta) := \left(\frac{l^k}{\mu\theta}\right)^{\frac{1}{1-k}} \leq t$$

Die Äquivalenzen lassen sich analog zum Fall $k > 1$ rechtfertigen. Wir folgern, dass $I'(t) = \mathbf{1}_{\{g(\theta) \leq t\}}$ ist, und berechnen weiter $\mathcal{O}(\theta)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}(\theta) &= \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{g(\theta)\le t\}} (S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\, dt \\
&= \int_{g(\theta)}^\infty (S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\, dt \\
&= \int_{g(\theta)}^\infty S_Y(t)^\theta\, dt - \int_{g(\theta)}^\infty S_Y(t)\, dt \\
&= \int_{g(\theta)}^\infty e^{-\mu\theta t}\, dt - \int_{g(\theta)}^\infty e^{-\mu t}\, dt \\
&= \frac{1}{\mu\theta} e^{-\mu\theta g(\theta)} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu g(\theta)}.
\end{aligned}
$$

Die Gleichheiten lassen sich analog zum Fall $k > 1$ rechtfertigen. Bevor wir einige Zahlenwerte einsetzen, lösen wir wieder das Erstversicherer-Problem. Die optimale Selbsbehaltfunktion ist $R^*(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{S_Y(s)^{\theta^*} > S_X(s)\}}\, ds$. Die Ungleichung $S_Y(s)^{\theta^*} > S_X(s)$ ist äquivalent zu $g(\theta^*) > t$. Wir erhalten also

$$
R^*(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{g(\theta^*)>s\}}\, ds = \begin{cases} t & t \le g(\theta^*), \\ g(\theta^*) & t > g(\theta^*). \end{cases}
$$

Kompakter lässt sich das schreiben als $R^*(t) = \min(t, g(\theta^*))$. Die entsprechende Entschädigungsfunktion ist $I^* = (t - g(\theta^*))_+$. Für $k < 1$ erhalten wir also, dass die optimale Rückversicherung eine Excess-of-Loss Rückversicherung ist. Wir geben wieder für einige Werte von k, l, μ mit R ermittelte Näherungswerte für θ^*, $g(\theta^*)$ und die sich ergebenden optimalen Selbstbehaltfunktionen an.

$k = \cdot, l = \cdot, \mu = \cdot$	θ^*	$f(\theta^*)$	$R^*(t)$
0.5, 0.5, 0.5	0.55	2.4151	$\min(t, 2.4151)$
0.5, 1.5, 0.3	0.8675	20.1263	$\min(t, 20.1263)$
0.8, 2, 2	0.845	0.8012	$\min(t, 0.8012)$
0.25, 2.5, 3	0.031	0.3557	$\min(t, 0.3557)$

Tabelle 3.6: Optimale Prämienparameter und Selbstbehaltfunktionen für Weibull-Exp im heavy-tail Fall.

In Abbildung 3.3 erkennen wir wieder, dass die Optimalitätsfunktionen $\mathcal{O}(\theta)$ jeweils ein globales Maximum haben.

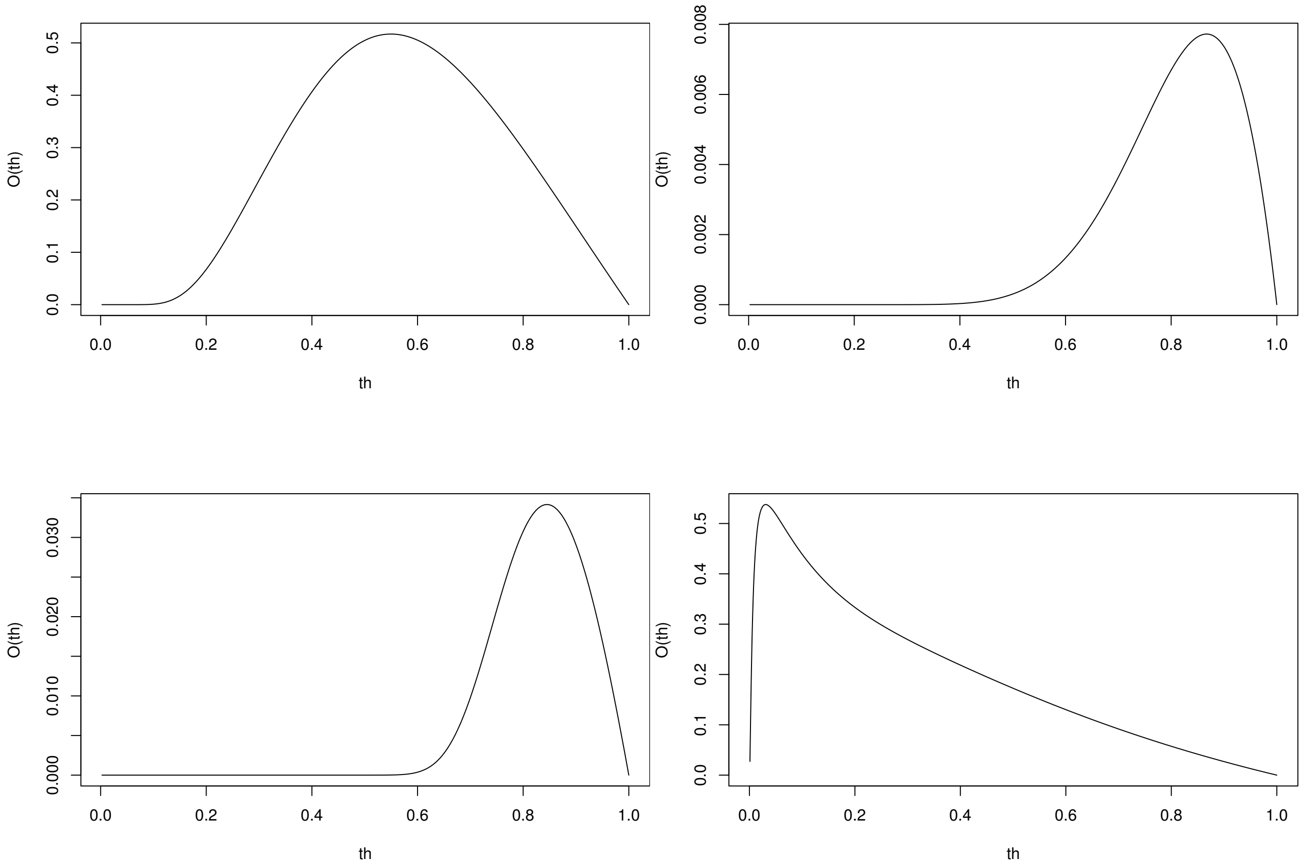

Abbildung 3.3: Funktionsgraphen von $\mathcal{O}(\theta)$, mit Parametern $(k, l, \mu) = (0.5, 0.5, 0.5), (0.5, 1.5, 0.3), (0.8, 2, 2), (0.25, 2.5, 3)$ in der Reihenfolge von links nach rechts.

Wir visualisieren als nächstes auch die Überlebensfunktionen von X und Y, für den Fall $k < 1$, und deren gegenseitige Lage, für die k, l, μ wie in der obigen Tabelle. Die Verteilung von X ist in diesem Fall heavy-tailed.

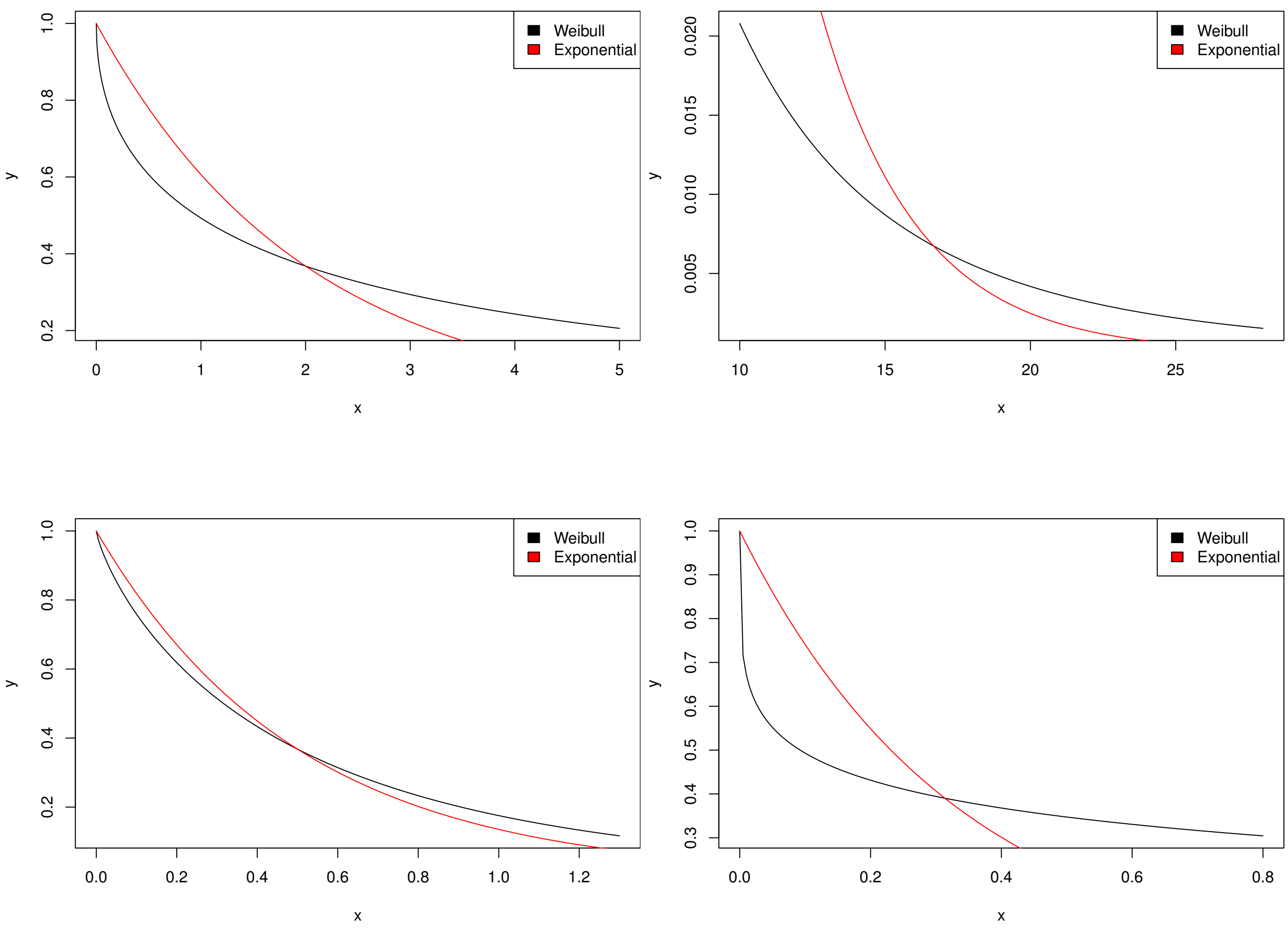

Abbildung 3.4: Überlebensfunktionen S_X, S_Y mit Parametern $(k, l, \mu) = (0.5, 0.5, 0.5), (0.5, 1.5, 0.3), (0.8, 2, 2), (0.25, 2.5, 3)$ in der Reihenfolge von links nach rechts.

Der Abbildung 3.4 ist zu entnehmen, dass die Überlebensfunktionen sich nur einmal schneiden, wie wir oben bereits algebraisch gezeigt haben. Da die dargestellten Weibullverteilungen alle heavy-tailed sind, ist ab dem Schnittpunkt die Überlebensfunktion von X größer als jene von Y. Die $x-$ Koordinaten der Schnittpunkte liegen weiters in der Größenordnung von $f(\theta^*)$, welches in unserem Fall $k < 1$ den Selbstbehalt des Erstversicherers darstellt. In den Selbstbehalt fließt modellbedingt nicht nur die jeweilige Einschätzung des Schadensrisikos ein, sondern auch der Preis für den Rückversicherungsschutz. Daraus resultiert die Abweichung des Selbsbehaltes vom Schnittpunkt der Überlebensfunktionen.

Wir werden jetzt noch den Spezialfall, dass $k = 1$, und damit beide Parteien eine Exponentialverteilungsannahme haben, betrachten. Die optimale Selbstbehaltfunktion R^* ist in diesem Fall entweder identisch der volle Schaden, oder identisch 0. Wir formen um

$$\begin{aligned}
&S_Y(t)^{\theta^*} > S_X(t) \iff e^{-\mu\theta^* t} > e^{-lt} \\
&\iff l > \mu\theta^* \\
&\iff \frac{l}{\mu} > \theta^*
\end{aligned}$$

und erhalten damit

$$R^*(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\theta^* < \frac{l}{\mu}\}}\, ds.$$

Um das optimale θ^* zu finden, nutzen wir zunächst, dass $I' = 1 - R'$, und erhalten $I'(t) = \mathbf{1}_{\{\theta \geq \frac{l}{\mu}\}}$. Damit ist die zu maximierende Funktion gegeben durch

$$\mathcal{O}(\theta) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{\theta \geq \frac{l}{\mu}\}} \cdot (e^{-\mu\theta t} - e^{-\mu t})\, dt.$$

Da $e^{-\mu\theta t} - e^{-\mu t}$ fallend in θ ist, ist es optimal θ möglichst klein zu wählen, aber $\theta \geq l/\mu$ immer noch erfüllt ist. Insbesondere muss $1 \geq l/\mu$ sein, damit es eine Lösung θ^* geben kann. Diese ist dann $\theta^* = l/\mu$. Es ergibt sich, dass $R^*(t) = 0$ ist, der Erstversicherer also die volle Rückversicherung, gegeben durch $I^*(t) = t$ erwirbt. Dies passt zu der Beobachtung, dass $l \leq \mu$ bedeutet, dass X mehr Risiko birgt als Y, in dem Sinne, dass $S_X(t) < S_Y(t)$ für alle t. Der Erstversicherer rechnet also mit wahrscheinlicheren größeren Schäden als der Rückversicherer, und sieht die Prämie für vollen Rückversicherungsschutz daher als günstig an. Falls umgekehrt $l > \mu$ ist, ist $l/\mu > 1$, und es gibt keine eindeutige Lösung θ^* des Maximierungsproblems des Rückversicherers. Es ergibt sich aber ohnehin aus der Formel für R^*, dass $R^*(t) = t$ für alle t ist, also gar keine Rückversicherung gekauft wird.

3.6.3 Pareto - Pareto

In diesem Teilabschnitt betrachten wir wieder das Spiel aus Abschnitt 3.5. Es haben sowohl der Erstversicherer als auch der Rückversicherer eine Pareto-Verteilung als Schadensverteilung. Wir legen fest, dass

$$X \sim \mathbf{Pareto}(1,k) \text{ und}$$
$$Y \sim \mathbf{Pareto}(1,l), \text{ mit } l > 1.$$

Damit sind die Überlebensfunktionen auf dem Intervall $[1,\infty)$ gegeben durch $S_X(t) = (1/t)^k$ und $S_Y(t) = (1/t)^l$. Die durch die Definition der Pareto-Verteilung bedingte Beschränkung auf $[1,\infty)$ kann man in unserem Kontext etwa dadurch erklären, dass der Erstversicherer erst eine Versicherungsleistung erbringen muss, wenn der Schaden größer als 1 ist, also der eigentliche Versicherte einen Selbstbehalt hat. Wenn man möchte, dass die Verteilung auf der gesamten positiven reellen Halbgeraden erklärt ist, kann man stattdessen die verschobene Paretoverteilung mit Überlebensfunktion $S(t) = (1/t+1)^\alpha$ betrachten.

Zunächst bestimmen wir wieder θ^*, gemäß Lösung (3.10). Wir formen äquivalent um

$$S_Y(t)^\theta \le S_X(t) \iff (\frac{1}{t})^{l\theta} \le (\frac{1}{t})^k \iff t^k \le t^{l\theta} \iff 1 \le t^{l\theta-k}$$
$$\iff 1 \le t \;\wedge\; 0 \le l\theta - k.$$

Die Äquivalenzen folgen unter anderem daraus, dass $0 \ge l\theta - k$ auf $t \le 1$ führen würde, wir aber t aus $[0,1)$ ausschließen. Wir folgern, dass $I'(t) = \mathbf{1}_{\{1\le t\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{k}{l}\le\theta\}}$ ist, und die zu optimierende Funktion $\mathcal{O}(\theta)$ wird zu $\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{1\le t\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{k}{l}\le\theta\}}(S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt$. Wir berechnen $\mathcal{O}(\theta)$ als

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(\theta) &= \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{1\le t\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\frac{k}{l}\le\theta\}}(S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt \\
&= \mathbf{1}_{\{\frac{k}{l}\le\theta\}} \cdot \int_1^\infty (S_Y(t)^\theta - S_Y(t))\,dt \\
&= \mathbf{1}_{\{\frac{k}{l}\le\theta\}} \cdot \int_1^\infty (\frac{1}{t})^{l\theta} - (\frac{1}{t})^l\,dt \\
&= \mathbf{1}_{\{\frac{k}{l}\le\theta\}} \cdot (\frac{1}{l\theta-1} - \frac{1}{l-1}).
\end{aligned}$$

Die hier vorkommenden Integrale sind genau dann endlich und existieren, wenn sowohl l als auch $l\theta$ größer als 1 sind. Es ist also θ bereits auf das Teilintervall $(\frac{1}{l}, 1]$ beschränkt.
Wir bemerken, dass es für $k/l > 1$ auf keinen Fall ein eindeutiges optimales θ^* gibt, da dann die Optimalitätsfunktion $\mathcal{O}(\theta)$ identisch gleich 0 ist. Wir schließen daher ab jetzt aus, dass $k/l > 1$, fordern also dass $l \ge k$ ist. Da $1/(l\theta-1) - 1/(l-1)$ für wachsendes θ fällt, ist es optimal, θ möglichst klein zu wählen, sodass immer noch $\theta > 1/l$ und $\theta \ge k/l$ gilt. Es lässt sich daher explizit angeben, dass $\theta^* = \max\big((1/l)+\epsilon, k/l\big)$, wobei ϵ eine „kleine" positive Zahl sein soll, die die Schärfe der Ungleichung $\theta > 1/l$ garantiert.

Wir bestimmen jetzt die optimale Selbstbehaltfunktion R^*. Hierfür formen wir die Ungleichung $S_Y(t)^{\theta^*} > S_X(t)$ äquivalent um, wobei wir diesmal von Beginn an nur $t \ge 1$ betrachten.

$$S_Y(t)^{\theta^*} > S_X(t) \iff t^k > t^{l\theta^*} \iff k > l\theta^* \iff \frac{k}{l} > \theta^*.$$

Wir erhalten, gemäß Lösung (3.10), dass $R^*(t) = \int_1^t \mathbf{1}_{\{\frac{k}{l} > \theta^*\}} \, dt$. Dieser Ausdruck ist aber identisch gleich 0, da $\theta^* = \max\big((1/l)+\epsilon, k/l\big) \leq k/l$. Der Erstversicherer kauft also die durch $I^*(t) = t - 1$ gegebene volle Rückversicherung, unabhängig von θ^*, beziehungsweise davon, wie hoch die zu zahlende Prämie genau ist. Wir beobachten, dass man $l \geq k$ so interpretieren kann, dass der Erstversicherer allen möglichen Schäden eine größere Wahrscheinlichkeit zuordnet als der Rückversicherer. Es ist nämlich $(1/t)^k = S_X(t) \geq S_Y(t) = (1/t)^l$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$. Dementsprechend ist die Prämie aus Sicht des Erstversicherers günstig.

Wäre umgekehrt $l < k$, also der Rückversicherer mit einer vorsichtigeren Schadenseinschätzung, dann hätte die Maximierungsaufgabe von $\mathcal{O}(\theta)$ keine eindeutige Lösung θ^*. Aus der Formel für R^* folgern wir aber, dass dann ohnehin $R^*(t) = t-1$ gilt. Der Erstversicherer kauft keine Rückversicherung.

3.6.4 R - Code

In diesem Teilabschnitt sammeln wir den R-Code, mit dem wir die Beispiele dieses Abschnitts numerisch behandelt haben.

Für das Beispiel im Teilabschnitt 3.6.1 haben wir zuerst die Verteilungsfunktion einer Weibull Verteilung auf dem Intervall „xran2“ definiert.

```
F<-function(x,lam,k){
1-exp(-(lam*x)^k)
}
```

Als nächstes bestimmen für jeden unserer k-Werte den entsprechenden l-Wert, und plotten die Optimalitätsfunktionen. Wir legen dafür einen zulässigen Bereich „xran3“ für l fest, und finden jenes $x \in$ xran3, sodass der Abstand von $F_{Weibull}(\mu, x, k)$ zu $1/2$ minimal wird. Diese x benennen wir „l_1“, „l_2“ , etc. Dann definieren wir die Optimalitätsfunktion $\mathcal{O}(\cdot)$ mit den erhaltenen Werten, wobei wir diese im Code „f_1“ etc. nennen.

```
stpsze=0.0005
thRang<-seq(0.0005,1,by=stpsze)
my<-3
xran3<-seq(0,7,by=0.02)
k_1<-1.5
deltawerte1<-abs(F(my,xran3,k_1)-0.5)
woistmin1<-which(deltawerte1==min(deltawerte1))
l_1<-0.02*woistmin1

f1<-function(th){
(1/(my*th)-1/my)*(1-exp(-(th*my*l_1)^k_1))
}

k_2<-3
deltawerte2<-abs(F(my,xran3,k_2)-0.5)
woistmin2<-which(deltawerte2==min(deltawerte2))
l_2<-0.02*woistmin2
```

```
f2<-function(th){
(1/(my*th)-1/my)*(1-exp(-(th*my*l_2)^k_2))
}

k_3<-5
deltawerte3<-abs(F(my,xran3,k_3)-0.5)
woistmin3<-which(deltawerte3==min(deltawerte3))
l_3<-0.02*woistmin3
f3<-function(th){
(1/(my*th)-1/my)*(1-exp(-(th*my*l_3)^k_3))
}

k_4<-7
deltawerte4<-abs(F(my,xran3,k_4)-0.5)
woistmin4<-which(deltawerte4==min(deltawerte4))
l_4<-0.02*woistmin4
f4<-function(th){
(1/(my*th)-1/my)*(1-exp(-(th*my*l_4)^k_4))
}

a1<-f1(thRang)
a2<-f2(thRang)
a3<-f3(thRang)
a4<-f4(thRang)

plot(thRang, a1, type="l",ylim=c(0,0.1),xlab="theta"
, ylab="O(theta)", col="red" )
lines(thRang,a2,col="steelblue")
lines(thRang,a3,col="orange")
lines(thRang,a4,col="green")
legend("topright",c("k=1.5" , "k=3" , "k=5","k=7")
, fill= c("red","steelblue","orange","green"))
```

Dann finden wir jene $\theta \in$ thRang, die die Optimalitätsfunktionen maximieren. Hier ist z.B. „lsg_1“ das optimale θ für den Fall $k = 1.5$ und das entsprechend bestimmte l.

```
c1<-which(a1==max(a1))
lsg_1<-c1*stpsze

c2<-which(a2==max(a2))
lsg_2<-c2*stpsze

c3<-which(a3==max(a3))
lsg_3<-c3*stpsze

c4<-which(a4==max(a4))
```

```
lsg_4<-c4*stpsze
```

Für das Beispiel in Teilabschnitt 3.6.2, mit $k > 1$ definieren wir direkt die Optimalitätsfunktion, im Code „f", und bestimmen jenen Wert aus „thRang" für den sie maximal wird.

```
mu<-1
k<-1.2
l<-2
thRang<-seq(0.0025,1,by=0.0025)

f<-function(th){
1/(mu * th) - (1/(mu*th))*exp(-mu*th*(((mu*th)/(l^k))^(1/(k-1)))) -
1/mu + (1/mu)*exp(-mu*(((mu*th)/(l^k))^(1/(k-1))))
}

a<-f(thRang)
c<-which(a==max(a))
lsg<-c*0.0025
```

Für den Fall $k < 1$ aus dem selben Teilabschnitt 3.6.2 ist der Code analog.

4 Schlussfolgerung

Wir haben in der vorliegenden Arbeit zwei in verschiedenem Ausmaß asymmetrische Stackelberg - Spiele betrachtet. Diese Spiele modellieren das Verhältnis zwischen einem Erstversicherer und einem Rückversicherer. Dabei hatten wir als Ziel jeweils die Maximierung der erwarteten Vermögen und als Prämienkalkulationsprinzip das Proportional-Hazard Prinzip. Wir haben für beide Spiele allgemeine Lösungen gefunden.

In weiterer Folge haben wir spezifische Verteilungsannahmen getroffen, und die gewonnenen allgemeinen Lösungen auf diese Situationen angewandt. So haben wir etwa, als Beispiel für das zweite Spiel angenommen, dass der Erstversicherer eine Weibullverteilung für den Schaden hat, und der Rückversicherer eine Exponentialverteilung. Für den Fall, dass die Weibullverteilung heavy-tailed ist, haben wir als optimale Rückversicherungsform die Excess-of-Loss Rückversicherung erhalten. Der Selbstbehalt war dort in der Größenordnung des Ortes auf der x-Achse, wo sich die Überlebensfunktionen der beiden Schadensverteilungen kreuzen. Wir haben in den Beispielen die Lösungen numerisch mit R berechnet. Der entsprechende R-Code liegt in einem eigenen Teilabschnitt bei.

Literatur

Boonen, Tim J. (2016). “Optimal reinsurance with heterogeneous reference probabilities”. In: *Risks* 4.3. ISSN: 2227-9091. DOI: 10.3390/risks4030026.

Boonen, Tim J. und Yiying Zhang (2022). “Bowley reinsurance with asymmetric information: a first-best solution”. In: *Scandinavian Actuarial Journal* 2022.6, S. 532–551. DOI: 10.1080/03461238.2021.1998922.

Chan, Fung-Yee und Hans U. Gerber (1985). “The reinsurer’s monopoly and the Bowley solution”. In: *ASTIN Bulletin* 15, S. 141–148. ISSN: 05150361. DOI: https://doi.org/10.2143/AST.15.2.2015025.

Cheung, Ka Chun, Sheung Chi Phillip Yam und Yiying Zhang (2019). “Risk-adjusted Bowley reinsurance under distorted probabilities”. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 86, S. 64–72. ISSN: 0167-6687. DOI: https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2019.02.006.

Deelstra, Griselda und Guillaume Plantin (2014). *Risk Theory and Reinsurance*. Springer. ISBN: 978-1-4471-5567-6.

Denuit, Michel, Jan Dhaene, Marc Goovaerts und Rob Kaas (2009). *Modern Actuarial Risk Theory*. 2. Aufl. Springer. ISBN: 978-3-642-03407-7.

Foss, Sergey, Dmitry Korshunov und Stan Zachary (2013). *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponetial Distributions*. 2. Aufl. Springer. ISBN: 978-1-4614-7100-4.

Fudenberg, Drew und Jean Tirole (1991). *Game Theory*. The MIT Press. ISBN: 978-0262061414.

Kanzow, Christian und Alexandra Schwartz (2018). *Spieltheorie*. Birkhäuser. ISBN: 978-3-319-96678-6.

Klenke, Achim (2012). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 3. Aufl. Springer Spektrum. ISBN: 978-3-642-36017-6.

Nielsen, Ole A. (1997). *An Introduction to Integration and Measure Theory*. Wiley. ISBN: 0-471-59518-7.

Schilling, Rene l. (2015). *Mass und Integral*. De Gruyter Studium. ISBN: 978-3-11-034814-9.

Schilling, Rene l. (2017). *Wahrscheinlichkeit*. De Gruyter Studium. ISBN: 978-3-11-035065-4.

Schmidli, Hanspeter (2017). *Risk Theory*. Springer. ISBN: 978-3-319-72004-3.

Wang, Shaun (1995). "Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms". In: *Insurance: Mathematics and Economics* 17.1, S. 43–54. ISSN: 0167-6687. DOI: https://doi.org/10.1016/0167-6687(95)00010-P.

Wüthrich, Mario V. (2023). *Non-Life Insurance: Mathematics & Statistics*. Version January 9, 2023. DOI: https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2319328.

Zhuang, Sheng Chao, Chengguo Weng, Ken Seng Tan und Hirbod Assa (2016). "Marginal indemnification function formulation for optimal reinsurance". In: *Insurance: Mathematics and Economics* 67, S. 65–76. ISSN: 0167-6687. DOI: https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2015.12.003.