

Diplomarbeit

Einfluss des nichtlinearen Schotteroberbauverhaltens auf die horizontale Gleis-Tragwerk Interaktion zur dynamischen Beurteilung von Eisenbahnbrücken

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grads

Diplom-Ingenieur

eingereicht an der TU Wien, Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwesen

Diploma Thesis

Influence of the nonlinear behavior of ballasted track on the longitudinal track-bridge interaction for dynamic assessment of railway bridges

submitted in satisfaction of the requirements for the degree

Diplom-Ingenieur

of the TU Wien, Faculty of Civil and Environmental Engineering

Alessio Cocci, BSc

Matr.Nr.: 01631796

Betreuung: Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. **Josef Fink**
Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. **Andreas Stollwitzer**
Institut für Tragkonstruktionen
Forschungsbereich Stahlbau
Technische Universität Wien
Karlsplatz 13, 1040 Wien, Österreich

Wien, im Juni 2023



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Danksagung

Hiermit möchte ich die Gelegenheit nutzen, um all jenen Personen zu danken, die mir während meines Studiums und bei der Verfassung dieser Arbeit geholfen haben.

Ein besonderer Dank ergeht an Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. *Josef Fink*, der den Studierenden die Instrumente vermittelt, um den roten Faden zwischen Theorie und Praxis zu erkennen und zu nutzen.

Natürlich gilt ein aufrichtiger Dank Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. *Andreas Stollwitzer*, der im Rahmen zahlreicher Besprechungen eine unschätzbare Unterstützung geleistet hat und das Ruder im Griff gehalten hat, um die Arbeit immer auf dem richtigen Kurs zu halten.

Zu guter Letzt dürfen meine Eltern, *Cinzia* und *Gianluca*, sowie meine zajka, *Marina*, nicht fehlen, denn ohne sie wäre mein Studium nicht möglich gewesen.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Kurzfassung

Die realistische Prognose der Schwingungsantwort von Eisenbahnbrücken, die sich aus der dynamischen Anregung infolge Zugüberfahrten ergibt, ist eine grundlegende Aufgabe des konstruktiven Ingenieurbaus beim Ausbau und der Instandhaltung von Eisenbahnstrecken. Insbesondere unter Hochgeschwindigkeitsverkehr können einfeldrige Brücken mit geringen bis mittleren Spannweiten von Resonanzeffekten betroffen sein, die zu einer unerwünschten Amplifizierung der Schwingungsamplituden bzw. Beschleunigungen führen können. Dies führt oft zu notwendigen kostenintensiven Messungen, resultierend aus einer unwirtschaftlichen bzw. konservativen Beurteilung von Bestandsbrücken. Die rechnerisch ermittelten dynamischen Parameter, wie die Biegeeigenfrequenz und das Lehr'sche Dämpfungsmaß, welche die Brücke in dynamischer Hinsicht charakterisieren, weisen jedoch häufig eine Diskrepanz zu den an bestehenden Tragwerken durchgeführten Schwingungsmessungen auf. In dieser Hinsicht besteht Forschungsbedarf, um zuverlässige Eingangsparameter und mechanische Modelle für die Ingenieurpraxis zu generieren.

Die horizontale Interaktion zwischen Gleis und Tragwerk beeinflusst die Ergebnisse von dynamischen Analysen maßgeblich. Am Institut für Tragkonstruktionen/Forschungsbereich Stahlbau der TU Wien wurde das reale Verhalten anhand einer Großversuchsanlage erforscht. Hierbei wurden nichtlineare Eigenschaften des Schotteroberbaus identifiziert, die in dynamischen Berechnungen Berücksichtigung finden sollten. Die Nichtlinearität des horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion zeigt sich durch eine überdominante Amplitudenabhängigkeit der Steifigkeit, wobei eine Steifigkeitsbnahme im Schotteroberbau bei höheren horizontalen Relativverschiebungen zwischen Gleisrost und Tragwerk festgestellt wird. Die Dämpfung des Schotteroberbaus hingegen ist von einer Frequenzabhängigkeit geprägt, wobei die ebenfalls messtechnisch identifizierten Dämpfungskennwerte insgesamt drei Energiedissipationsmechanismen zugeordnet sind.

In dieser Arbeit werden die maßgebenden Steifigkeits- und Dämpfungsbeiträge des Schotteroberbaus zur Systemsteifigkeit und -dämpfung in Rechenmodelle implementiert. Dabei liegt der Schwerpunkt auf dem Koppelbalkenmodell, das aus zwei Euler-Bernoulli Balken besteht, jeweils einer für das Tragwerk und einer für die Schiene. Diese Balken sind durch eine horizontale kontinuierliche Feder-Dämpfer Kopplung miteinander verbunden, die die Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften des Schotteroberbaus repräsentiert. Es wird zudem angenommen, dass beide Balken vertikal starr gekoppelt sind und daher eine identische Biegelinie aufweisen.

Des Weiteren werden Korrekturfaktoren formuliert, um die Nichtlinearität zu berücksichtigen, selbst wenn lineare Systemparameter verwendet werden, ohne auf computergestützte Methoden zurückgreifen zu müssen. Mithilfe dieser Korrekturfaktoren werden die Schotterfedersteifigkeit im Feldbereich und die Vorlandsteifigkeit im Vorlandbereich angepasst. Bei der Ermittlung der ersten Biegeeigenfrequenz hat die Erhöhung der Modellierungstiefe nur einen geringen Einfluss auf die Ergebnisse. Die Berücksichtigung der Nichtlinearitäten und des Vorlandbereichs des Schotteroberbaus führt jedoch zu zuverlässigeren Dämpfungsmaßen, wobei die Ergebnisse das gemessene Verhalten von Bestandsbrücken deutlich genauer reproduzieren.

Ein weiterer essenzieller Aspekt bei der umfassenden Modellierung von Eisenbahnbrücken liegt in der Berücksichtigung des Einflusses der Vorlandbereiche vor und nach der Brücke bei der

Bestimmung der dynamischen Parameter. Sofern keine Schienenauszugvorrichtung vorhanden ist, unterliegt auch der Schotteroberbau im Vorlandbereich einer dynamischen Anregung, was einen bedeutenden Beitrag zur Masse und Steifigkeit des gesamten Brückensystems darstellt. Die Vorlandbereiche werden bis zu einer bestimmten Länge über den Auflagerbereich hinaus als Einmassenschwingersysteme mit einer Ersatzmasse und -steifigkeit mitmodelliert, die mit dem Brückensystem gekoppelt sind. Die Erfassung der Vorlanddämpfung erfolgt in Verbindung mit den Dämpfungsmechanismen im Brückenbereich durch Energiebetrachtungen, um eine quantitative Abschätzung zu ermöglichen.

Als wesentliches Ergebnis dieser Arbeit werden Bestimmungsgleichungen für die dynamischen Parameter Biegeeigenfrequenz und Lehr'sches Dämpfungsmaß des Brückensystems abgeleitet. Dabei werden das nichtlineare Stoffverhalten des Schotteroberbaus und des Vorlandbereichs berücksichtigt. Die Evaluierung und Verifizierung des rechnerischen Ansatzes zeigt eine deutliche Übereinstimmung mit den dynamischen Parametern realer Eisenbahnbrücken, welche aus Messdaten identifiziert wurden. Dies stellt einen Fortschritt im Forschungskontext dar, der darauf abzielt, die Abweichung zwischen den gemessenen Werten und den berechneten Ergebnissen zu reduzieren und alternative Ansätze zu den konservativen normativen Vorgaben bereitzustellen. Dadurch wird eine präzisere Bewertung von Bestandsbrücken ermöglicht und gleichzeitig eine nachhaltigere Dimensionierung zukünftiger Eisenbahnbrücken angestrebt.

Abstract

Accurate prediction of vibration response of railway bridges resulting from the dynamic excitation due to train crossings is a fundamental task of structural engineering in the development and maintenance of railway lines. Single-span bridges with small to medium spans can be affected by these resonance effects, especially during high-speed traffic. These effects lead to an undesired amplification of vibration amplitudes or accelerations requiring necessary cost-intensive measurements and assessment of existing railway bridges. However, calculations of simulated dynamic parameters characterizing the bridge, such as natural bending frequency and damping ratio, show a discrepancy with the measurements on existing structures. In this respect, research is needed to generate reliable input parameters and mechanical models for engineering practice and dynamic assessment.

The horizontal interaction between the track and the supporting structure influences the results of the dynamic analyses significantly. Therefore, the nonlinear behavior of the ballast superstructure observed at the Institut of Structural Engineering / Research Unit of Steel Structures of the TU Wien based on a special large-scale test facility should be considered as a bouncing point of the research and calculations of this phenomena. The nonlinearity is manifested by an overdominant displacement amplitude dependence of the stiffness, with a stiffness decrease in the ballast superstructure being observed at higher relative horizontal displacements between the track and the supporting structure. The damping of the ballast superstructure, on the other hand, is characterized by a frequency dependence, with the damping characteristics, also identified by measurement, being assigned to a total of three energy dissipation mechanisms.

In this work, the governing stiffness and damping contributions of the ballast superstructure to the system stiffness and damping are implemented in computational models. The focus is on the coupling beam model, which consists of two Euler-Bernoulli beams, one for the structure and one for the rail, connected by a horizontal continuous spring-damper coupling representing the stiffness and damping characteristics of the ballast superstructure. It is also assumed that both beams are rigidly coupled vertically and therefore have an identical bending line.

Furthermore, correction factors are formulated to consider nonlinearities even when linear system parameters are used without resorting to computer-aided methods. With these correction factors, the ballast spring stiffness in the bridge span and the embankment stiffness can be adjusted. When determining the first natural bending frequency, increasing the modeling depth only has a minor influence on the results. However, taking into account the nonlinearities and the embankment before and after the bridge leads to more reliable damping measurements, with the modeled results reproducing the measured behavior of existing bridges much more accurately.

Another essential aspect in the comprehensive modeling of railway bridges is the consideration of the influence of the embankment areas before and after the bridge when determining the dynamic parameters. If a breather switch device is present, the ballast superstructure in the embankment is also subject to dynamic excitation, which represents a significant contribution to the mass and stiffness of the entire bridge system. The embankment areas are co-modeled up to a certain length beyond the support area as single-mass vibration systems with an equivalent mass and

stiffness coupled to the bridge system. Embankment damping is captured in conjunction with the damping mechanisms in the bridge area using energy considerations to provide a quantitative estimate.

The main result of this thesis is the derivation of equations for the dynamic parameters fundamental frequency and damping ratio of the bridge system. The nonlinear material behavior of the ballast superstructure and the foreland area are considered in the calculations. The evaluation and verification of the computational approach shows a clear correlation with the parameters of real railway bridges, which were identified from measured data. This represents a step in the research context aimed at reducing the discrepancy between measured values and calculated results and provides alternative approaches to the conservative normative specifications. This will enable a more accurate assessment of existing bridges and at the same time aim at a more sustainable dimensioning of future railway bridges.

Sommario

Prevedere la risposta alle vibrazioni dei ponti ferroviari derivante dall'eccitazione dinamica dovuta al transito dei treni è un compito fondamentale dell'ingegneria strutturale per lo sviluppo e la manutenzione delle linee ferroviarie. Soprattutto nelle tratte ad alta velocità, i ponti a campata singola con luci medio-piccole possono essere interessati da effetti di risonanza, con il rischio di un'amplificazione indesiderata delle ampiezze di vibrazione o delle accelerazioni. Ciò ha come conseguenza il ricorso a costose misurazioni in-loco per la valutazione dei ponti ferroviari esistenti. I parametri dinamici, come la frequenza propria flessionale e i valori di smorzamento, che caratterizzano il ponte determinati mediante calcolo mostrano talvolta una discrepanza con le misure delle vibrazioni effettuate su strutture esistenti. A questo proposito, è necessaria la ricerca per identificare parametri di input e modelli meccanici affidabili per la pratica ingegneristica.

L'interazione orizzontale tra il binario e la struttura portante influenza in modo significativo i risultati delle analisi dinamiche. Pertanto, è necessario tenere conto del comportamento non lineare della sovrastruttura in ballast osservato presso l'Istituto di Ingegneria Strutturale/Dipartimento di Costruzioni in Acciaio del TU Wien con l'ausilio di un impianto di prova su larga scala. La non linearità è caratterizzata da una dipendenza dominante dall'ampiezza degli spostamenti per quanto riguarda la rigidità, per cui si riscontra una diminuzione della rigidità della sovrastruttura con ballast con l'aumento di spostamenti relativi orizzontali tra il binario e la struttura portante. Lo smorzamento della sovrastruttura con ballast, invece, è caratterizzato da una dipendenza dalla frequenza di risonanza del ponte e i valori caratteristici dello smorzamento, anch'essi identificati mediante misurazione, sono assegnati a un totale di tre meccanismi di dissipazione di energia.

In questa tesi, i contributi decisivi alla rigidità e allo smorzamento del sistema complessivo del ponte derivanti dalla rigidità e smorzamento della sovrastruttura con ballast sono implementati in modelli di calcolo. L'attenzione si concentra sul modello ad aste collegate, che consiste in due travi di Eulero-Bernoulli, una per la struttura portante e l'altra per il binario, collegate da un accoppiamento continuo orizzontale molla-smorzatore a rappresentare le proprietà di rigidità e smorzamento della sovrastruttura. Si ipotizza inoltre che entrambe le travi siano rigidamente accoppiate in verticale e che abbiano quindi una identica linea elastica.

Inoltre, vengono formulati fattori di correzione per tener conto della non linearità nonostante l'utilizzo di parametri di sistema lineari, senza dover ricorrere all'ausilio del computer. Con questi fattori di correzione è possibile modificare la rigidità della massicciata nella campata del ponte e della banchina. Nel determinare la prima frequenza naturale di flessione, l'aumento della precisione del modello utilizzato influisce solo in minima parte sui risultati. Tuttavia, tenendo conto delle non linearità della sovrastruttura con ballast e dell'area di banchina, si ottengono valori di smorzamento più affidabili, con risultati che riproducono in modo più accurato il comportamento misurato presso ponti esistenti.

Un altro aspetto essenziale per una modellazione completa dei ponti ferroviari è la considerazione dell'influenza delle aree di banchina antistanti e successive al ponte nella determinazione dei parametri dinamici. In assenza di giunti di dilatazione sui binari, anche la sovrastruttura

con ballast nella banchina è soggetta a eccitazione dinamica, il che rappresenta un contributo significativo alla massa e alla rigidità dell'intero sistema oscillante del ponte. Le aree di banchina sono co-modellate fino a una certa lunghezza oltre l'area d'appoggio come oscillatori semplici con massa e rigidità equivalenti, che sono accoppiati al ponte. Lo smorzamento della banchina si ottiene, insieme ai restanti meccanismi di smorzamento del ponte, mediante considerazioni energetiche, al fine di consentire una stima quantitativa.

Il risultato principale di questa tesi è la derivazione di equazioni per la determinazione della frequenza fondamentale del ponte e del fattore di smorzamento tenendo conto del comportamento non lineare della massicciata della sovrastruttura e dell'area di banchina. La valutazione e la verifica di questo approccio mostrano una chiara conformità con i parametri di ponti ferroviari reali, identificati con misurazioni. Ciò rappresenta un passo avanti nel contesto di ricerca volto a ridurre la discrepanza tra i valori misurati e i risultati di calcolo e a fornire approcci alternativi alle conservative specifiche normative. Questo consente una valutazione più precisa dei ponti esistenti e mira allo stesso tempo a un dimensionamento più sostenibile dei futuri ponti ferroviari.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	13
1.1	Motivation	13
1.2	Dynamik von Eisenbahnbrücken	13
1.3	Ziele und Aufbau der Arbeit	19
2	Oberbausotter im Eisenbahnbau	21
2.1	Mechanische Eigenschaften	21
2.2	Stand der Forschung: Großversuchsanlage der TU Wien	22
2.3	Steifigkeitseigenschaften des Schotteroberbaus	25
2.4	Energiedissipation im Schotteroberbau	26
2.5	Masse des Schotters	28
2.6	Fazit	28
3	Mechanisches Modell für Brücke und Vorland	29
3.1	Brückensystem	29
3.1.1	Euler-Bernoulli-Balken	29
3.1.2	Koppelbalken mit horizontal starr gelagertem Oberbaubalken	30
3.1.3	Koppelbalken mit horizontal nachgiebig gelagertem Oberbaubalken	35
3.1.4	Iterative Ermittlung der Auflagerreaktionen des nachgiebig gelagerten Koppelbalkens	38
3.1.5	Iteration: Ermittlung der horizontalen Auflagerreaktionen	44
3.2	Vorlandsystem	47
3.2.1	Vorlandsystem als ungedämpftes Einfreiheitsgradsystem	47
3.2.2	Rechenbeispiel - Vorlandsystem	49
3.2.3	Vorlandsteifigkeit mit dem Kraftgrößenverfahren	50
3.2.4	Vorlandsteifigkeit mit der Differentialgleichung des zentrisch belasteten Dehnstabs	52
3.2.5	Vergleich der Methoden zur Bestimmung der Vorlandsteifigkeit	54
3.3	Gesamtsystem - Koppelbalkenmodell mit Vorland	56
3.4	Zusammenfassung und Vergleich der Modelle mit linearen Systemparametern	60
4	Berücksichtigung der strukturellen Nichtlinearität des Längsverschiebewiderstandes	68
4.1	Rechnerische Berücksichtigung des nichtlinearen Verhaltens des Schotters in der Ersatzfedersteifigkeit des Vorlandbereichs	68
4.2	Korrekturfaktor: Nichtlinearität der Schottersteifigkeit für das Vorlandmodell	73
4.3	Rechnerische Berücksichtigung des nichtlinearen Verhaltens des Schotters im Brückenbereich	74
4.4	Korrekturfaktor: Nichtlinearität der Schottersteifigkeit für das Koppelbalkenmodell	75
4.5	Rechenbeispiele	77
4.6	Implementierung der Berechnungsmethode zur Erfassung des nichtlinearen Längsverschiebewiderstandes in MATLAB	82
4.6.1	Beispiel zur Programmerläuterung	83
4.6.2	Verifizierung mittels FE-Modell	88

5	Dämpfung	91
5.1	Theoretischer Hintergrund: Formulierung der Bewegungsgleichungen eines gedämpften Systems	92
5.2	Dämpfung im Vorlandmodell	94
5.3	Dämpfungsquantifizierung im Gesamtsystem für Brücke und Vorland	98
5.3.1	Dämpfung infolge horizontaler Gleis-Tragwerk Interaktion	98
5.3.2	Energieanteile im Tragwerk, Schotteroberbau und Vorland	100
5.3.3	Energiebilanz - Ermittlung des Lehr'schen Dämpfungsmaßes des Gesamtsystems	103
5.4	Vergleich zwischen Messung und Rechnung	105
6	Schlussfolgerungen und Ausblick	116
A	MATLAB Programm	128

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Seit der Eröffnung der ersten Eisenbahnstrecke Stockton - Darlington im Jahr 1825 nimmt das System Eisenbahn einen der ersten Plätze im Bereich Mobilität und Verkehr ein. Trotz seiner jahrhundertealten Geschichte und dem Aufkommen des motorisierten Individualverkehrs nimmt die Relevanz des Eisenbahnwesens noch immer zu. Aufgrund der in der öffentlichen Debatte mit zunehmender Intensität vorkommenden Themen wie Nachhaltigkeit und Klimaneutralität hat sich die Europäische Union Etappenziele zur Reduktion der Treibhausgasemissionen gesetzt. Dem Eisenbahnverkehr wird dabei eine entscheidende Rolle zugewiesen, um diese Ziele erreichen zu können. Im Jahr 2020 hat die EU Kommission das Green Deal Paket verabschiedet, das unter anderem darauf abzielt, das Volumen des Hochgeschwindigkeitsbahnverkehrs bis 2030 zu verdoppeln und jenes des Schienengüterverkehrs um 30 % zu steigern. Der intermodale Schienen- und Schiffsverkehr soll dabei in der Lage sein in einen gleichberechtigten Wettbewerb mit dem Straßenverkehr zu treten [18]. Im Hinblick auf die Tendenz zu ansteigenden Streckengeschwindigkeiten sowie einer Steigerung des Verkehrsvolumens ist die Fortentwicklung der Forschung zur effizienten Dimensionierung, Berechnung und Instandhaltung aller Bauwerke, welche Teil des Eisenbahnsystems sind, von großer Bedeutung. Brückenbauwerke als neuralgische Punkte der Eisenbahninfrastruktur kommt dabei eine Schlüsselrolle zu. Über 6000 Bestandsbrücken, meist mit kleinen bis mittleren Spannweiten (< 35 m), sind allein im österreichischen Bahnnetz zu finden. Insbesondere bei Hochgeschwindigkeitsverkehr erweisen sich diese Brücken als besonders schwingungsanfällig, was sowohl ihre Gebrauchstauglichkeit als auch ihre Tragfähigkeit und den Fahrkomfort beeinträchtigen kann. Die daraus resultierenden potentiellen Schäden am Tragwerk sowie die Reduktion des Fahrkomforts bei übermäßigen Schwingungen können zu einem Verlust an Wettbewerbsfähigkeit und Attraktivität des gesamten Eisenbahnsystems führen. Hinsichtlich einer zuverlässigen und realitätsnahen Schwingungsprognose besteht nach derzeitigem Stand noch erheblicher Forschungsbedarf was die Modellbildung von Eisenbahnbrücken betrifft. Die Problemstellung einer genaueren, aber zugleich einfach anwendbaren, mechanischen Modellierung zur Erfassung des dynamischen Verhaltens von Eisenbahnbrücken bildet das Leitmotiv der vorliegenden Diplomarbeit. Ein wesentlicher Aspekt ist vor allem die Berücksichtigung des Einflusses des Schotteroberbaues und des Vorlandbereichs auf die Schwingungsantwort von Eisenbahnbrücken hinsichtlich auftretender Resonanzeffekte infolge Zugüberfahrt.

1.2 Dynamik von Eisenbahnbrücken

Aufgrund des hohen Verhältnisses zwischen Belastung zufolge Achslasten und Brückeneigengewicht wurde bereits im achtzehnten Jahrhundert erkannt, dass Eisenbahnbrücken besonders hohen dynamischen Beanspruchungen ausgesetzt sind. Der Zugang zur Nachweisführung ist dabei, die Schnittgrößen und Verformungen zufolge Verkehrslasten mit baustatischen Methoden zu ermitteln und diese schließlich mit einem dynamischen Beiwert φ_{dyn} zu erhöhen [27, S. 1176].

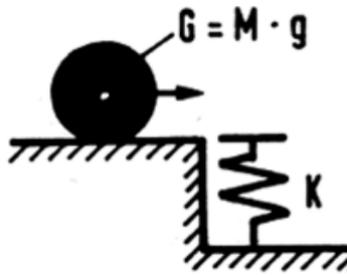


Abb. 1.1: Stoßartig belastete Feder (Quelle: [27], S. 1177, Abb.20.1)

Eine beliebige dynamische Schnittgröße am bewegten System S_{dyn} kann somit direkt aus ihrem statischen Gegenstück S_{stat} unter Verwendung des dynamischen Beiwertes ermittelt werden:

$$S_{dyn} = \varphi_{dyn} S_{stat} \quad (1.1)$$

Im Gegensatz zur Statik tritt die Zeit als entscheidende Variable in der Dynamik auf. Die Achslasten eines Zuges sind durch ihre instationäre Natur gekennzeichnet: bei einer Zugüberfahrt treffen die ersten Achslasten die Brücke stoßartig und ändern danach ihren Angriffspunkt bis zum Ende des Vorgangs. Die einfachste Möglichkeit, diesen Prozess zu beschreiben, ist durch eine stoßartig belastete Feder [27]. Wenn eine Masse an einer Wegfeder K plötzlich aufgehängt wird, (siehe Abbildung 1.1), wird in der Feder folgende Formänderungsenergie U gespeichert:

$$U = \frac{1}{2} K u_{dyn}^2 \quad (1.2)$$

wobei u_{dyn} die Auslenkung der Feder im dynamischen Fall darstellt. Die von der Gewichtskraft G verrichtete Arbeit \mathcal{A} lautet dabei:

$$\mathcal{A} = G u_{dyn} \quad (1.3)$$

Wenn u_{st} als statische Auslenkung definiert wird, beträgt die Gewichtskraft G im statischen Fall nach dem Hook'schen Gesetz $G = K u_{st}$. Aufgrund der Energieerhaltung muss die Formänderungsenergie der von der Gewichtskraft verrichteten Arbeit entsprechen. Daraus ergibt sich der Stoßfaktor φ_{dyn} unter Berücksichtigung der Gleichungen (1.2) und (1.3) zu:

$$K u_{st} u_{dyn} = \frac{1}{2} K u_{dyn}^2 \rightarrow u_{st} = \frac{1}{2} u_{dyn} \rightarrow \varphi_{dyn} = 2 \quad (1.4)$$

Am Beispiel einer Einfeldträgerbrücke, wenn die Feldmitte als Referenzstelle betrachtet wird, entfaltet sich die Belastung aus jeder Achslast bis zum Erreichen des Feldmittelpunktes allmählich und sinkt danach, bis die Last den Brückenbereich verlässt. Bei größeren Stützweiten verliert diese dynamische Vergrößerung aufgrund der plötzlichen, stoßartigen, Lastaufbringung an Bedeutung, mit $\varphi_{dyn} \rightarrow 1$. Bei einer dynamischen Berechnung gemäß EN 1990/A1 [24] darf der Spitzenwert der Beschleunigung aufgrund der Auswirkungen des Schienenverkehrs, um Gleisinstabilitäten zu vermeiden, $3,5 \text{ m/s}^2$ nicht überschreiten. Angesichts der Rigorosität dieser Anforderung wird auf nationaler Ebene gemäß ÖNORM B 4008-2 für Bestandsbrücken ein Grenzwert von 6 m/s^2 festgelegt. Nach der ÖBB *Richtlinie für die dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken* [30, S. 8] darf bei Streckengeschwindigkeiten unter 120 km/h auf eine dynamische Berechnung verzichtet werden. Für höhere Geschwindigkeiten kann für folgende Konstruktionstypen und Stützweiten vereinfachend nachgewiesen werden, dass unter Einhaltung einer Grenzschlankheit λ_{gr} , die Maximalbeschleunigung unter $3,5 \text{ m/s}^2$ bleibt:

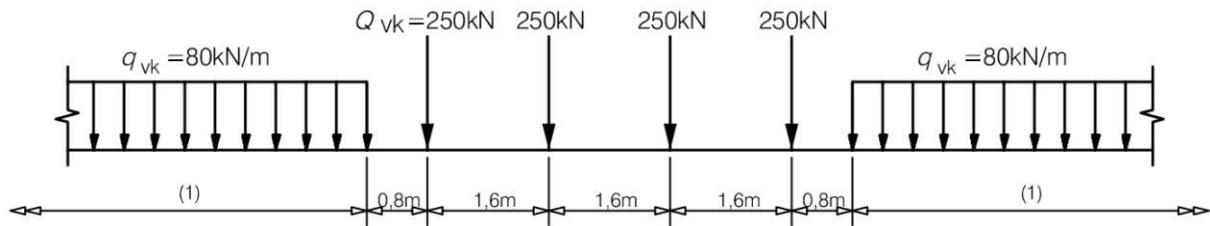


Abb. 1.2: Lastmodell 71 für Regelverkehr auf Hauptstrecken [26, S. 66]

- Plattentragwerke, eingleisig, Stützweitenbereich 5,0 - 15,0 m
- Rahmenbauwerke, eingleisig, Lichtweitenbereich 2,5 - 10,0 m
- WiB-Tragwerke, eingleisig, Stützweitenbereich ab 5,0 m

Die Schlankheit λ_{gr} errechnet sich als Verhältnis der lichte Weite L_i zu Tragwerkstärke D und die Grenzschlankheit kann aus Grenzkurven in den ÖBB *Planungsgrundsätze für Eisenbahnbrücken* [28] entnommen werden:

$$\lambda_{gr} = \frac{L_i}{D} \quad (1.5)$$

Falls keine dynamische Berechnung erforderlich ist, werden die Verkehrslasten und deren dynamische Effekte nach der geltenden Normung EN 1991-2 [26] durch statische Aufbringung von Lastmodellen mit einem dynamischen Beiwert Φ erfasst. Die Lastmodelle LM71 bzw. SW/0 für den Regelverkehr und SW/2 für den Schwerverkehr stellen eine Reihe von Einzel- und Gleichlasten dar, wie in Abbildung 1.2 am Beispiel des LM71 dargestellt. Die Lastmodelle werden für eine dynamische Berechnung mit dem dynamischen Beiwert Φ erhöht. Für sorgfältig instand gehaltene Gleise ergibt sich Φ nach EN 1991-2 [26, S. 78] zu:

$$\Phi = \frac{1,44}{\sqrt{L_\Phi} - 0,2} + 0,82 \quad (1.6)$$

wobei L_Φ die maßgebende Länge darstellt. Diese entspricht der Stützweite L im Fall eines Einfeldträgers. Der Beiwert Φ berücksichtigt zwar die stoßartige Anregung des überfahrenden Zuges, erfasst aber keine Resonanzeffekte, da dieser die Lasten pauschal erhöht, ohne Einbeziehung der Schwingungsfrequenzen im dynamischen Fall. Aufgrund der regelmäßigen Längen der Wagen fahren die Achslasten mit einem gewissen Takt auf die Brücke. Dies entspricht näherungsweise einer harmonischen Anregung, die durch eine Wiederkehrperiode und somit eine Erregerfrequenz beschrieben werden kann. Wenn die Länge über Puffer (kurz: $L_{üP}$, siehe Abbildung 1.3) als Maß der Regelmäßigkeit der Lasten herangezogen wird, ergibt sich die Erregerfrequenz f_{err} in Abhängigkeit der Zuggeschwindigkeit v_{zug} zu [27, S. 1187]:

$$f_{err} = \frac{v_{zug}}{L_{üP}} i \quad (1.7)$$

mit $i = 1, 2, 3, 4$.

i bildet höhere Resonanzfrequenzen ab, die durch einen überfahrenden Zug angeregt werden können. Das ist der Fall, wenn die Brücke beispielsweise zwei volle Schwingperioden ($i = 2$) um die Gleichgewichtslage durchläuft, bevor das nächste Drehgestell ankommt und die Brücke erneut bei ihrer maximalen Auslenkung anregt. Innerhalb dieser zusätzlichen Schwingperioden wird Energie dissipiert, was dazu führt, dass diese höheren Resonanzfrequenzen im Regelfall nicht maßgebend sind. Die im Resonanzfall auftretenden Schwingungsamplituden sind für $i = 1$ am

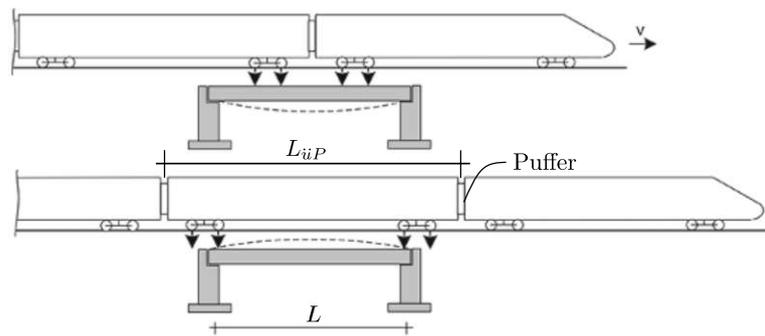


Abb. 1.3: Resonanzfall: Zugüberfahrt auf einer Einfeldträgerbrücke mit $L \approx L_{\text{üP}}$ (Quelle: [27], S. 1187, Abb.20.13, überarbeitet)

größten und reduzieren sich mit Erhöhung von i . Bei höheren Eigenfrequenzen ($i > 4$) ist der Resonanzeffekt nicht mehr relevant und kann daher gemäß EN 1991-2 [26] vernachlässigt werden. Die harmonische Anregung zufolge Verkehrslasten wird besonders markant, wenn die Spannweite der Brücke geringer ist als die Länge über Puffer ($L \leq L_{\text{üP}}$). In diesem Fall bilden sich vollständige Be- und Entlastungssequenzen, die im Fall des Übereinstimmens mit der Grundfrequenz der Brücke zu einer erheblichen Vergrößerung der Schwingungsantwort führen können.

Wie in Gleichung 1.7 ersichtlich, verschiebt die Zuggeschwindigkeit die kritische Frequenz in Richtung höherer Frequenzen, was dem Bereich der Grundfrequenzen der wesentlich steiferen Brücken mit kleiner Spannweite entspricht. Aus diesem Grund liegt der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit auf einfeldrigen Brücken mit geringer Spannweite. Außerdem werden nur eingleisige Brückentragwerke untersucht, weil die Eigenschwingungsformen i.d.R. den Biegeeigenformen entsprechen. Bei einer Erweiterung auf zweigleisige Konstruktionen treten meist nicht vernachlässigbare Torsionsschwingungen auf. Laut dem ÖBB Regelwerk *Richtlinie für die dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken* [30, S. 68] können die Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften des Oberbaues bei Brücken mit kleinen Stützweiten in die Berechnung eingeführt werden. Die Umsetzung soll mit den im ERRI-Report [9] identifizierten Kennwerten erfolgen, die zu rein vertikal orientierten Modellen zugehörig sind. Durch die Vernachlässigung der horizontalen Gleis-Tragwerk-Interaktion führen diese Kennwerte trotz der Komplexität der zugrunde gelegten Modelle in der Regel zu unrealistischen Prognosen des Schwingverhaltens. In der Praxis wird daher auf Trägerroste oder FE-Berechnungen zurückgegriffen. Hiermit zeigt sich die Notwendigkeit von standardisierten, einfachen aber realitätsnahen Ingenieurmodellen, die die gesamte Konstruktion inklusive der komplexen Wechselwirkung zwischen Oberbau, Tragwerk und Vorland abbilden.

Ein weiterer Punkt zur korrekten Dimensionierung einer Eisenbahnbrücke und Evaluierung deren Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit ist die Erfassung der Dämpfung. Diese ist durch den Kennwert c bzw. das Lehr'sche Dämpfungsmaß ζ charakterisiert. Bei gegebener Masse M und Steifigkeit K eines Einmassenschwingers gilt folgender Zusammenhang:

$$\zeta = \frac{K}{2\sqrt{M}c} \quad (1.8)$$

Die Bedeutung des Lehr'sches Dämpfungsmaßes ζ kann im Fall der freien Schwingung wie folgt erläutert werden [7, S. 48].

- $\zeta < 1$ bzw. $c < c_{krit}$ unterkritische Dämpfung: das System schwingt um seine Gleichgewichtslage mit einer progressiven Abnahme der Amplitude.
- $\zeta = 1$ bzw. $c = c_{krit}$ kritische Dämpfung: Grenze zwischen oszillierender und nicht oszillierender Bewegung. Das ausgelenkte System kehrt ohne Schwingung zu seiner Gleichgewichtslage zurück.
- $\zeta > 1$ bzw. $c > c_{krit}$ überkritische Dämpfung das System kehrt mit einer kleineren Rate zu seiner Gleichgewichtslage zurück.

Das Lehr'sche Dämpfungsmaß wird in % der kritischen Dämpfung angegeben. In den meisten Anwendungen im Bauwesen ist $\zeta < 0,1$. Bei Eisenbahnbrücken gilt ebenfalls $\zeta < 0,15$, wobei die Messungen praktisch immer Dämpfungsmaße ergeben, die über den als konservativ einzustufenden normativen Vorgaben liegen [32, S. 6]. Laut der aktuell geltenden EN 1991-2 [26] sind die Dämpfungsmaße je nach Konstruktionsart, sofern keine Messdaten zur Verfügung stehen, anzuwenden, siehe Tabelle 1.1. Diese Kennwerte stellen die untere Grenze der in der Realität zu erwartenden Dämpfung dar, was einer äußerst konservativen Auslegung entspricht.

Tab. 1.1: Bei der Bemessung anzuwendende Dämpfungskennwerte nach EN 1991-2 [25, Tab. 6.6]

Brückentyp	ζ unterer Grenzwert der kritischen Dämpfung [%]	
	Spannweite $L < 20$ m	Spannweite $L \geq 20$ m
Stahl und Verbund	$\zeta = 0,5 + 0,125(20 - L)$	$\zeta = 0,5$
Spannbeton	$\zeta = 1,0 + 0,07(20 - L)$	$\zeta = 1,0$
Walzträger in Beton und Stahlbeton	$\zeta = 1,5 + 0,07(20 - L)$	$\zeta = 1,5$

Bei Spannweiten $L < 30$ m kann nach EN 1991-2 [26] noch eine Zusatzdämpfung $\Delta\zeta$ je nach Brückenlänge zur Berücksichtigung der Wechselwirkung Fahrzeug/Brückenmasse berücksichtigt werden. Anhand der Simulation einer Zugüberfahrt in Abbildung 1.4 kann sehr rasch erkannt werden, dass die Dämpfung einen gravierenden Einfluss auf die berechneten Schwingungsamplituden hat. Vor allem bei Stahlbrücken ist eine genauere Abschätzung des Dämpfungswertes aufgrund deren verhältnismäßig kleinen dissipativen Energieverlusten notwendig. Die Simulation in Abbildung 1.4 zeigt exemplarisch die maximale Beschleunigung in Feldmitte einer stählernen Einfeldträgerbrücke in Abhängigkeit von der Zuggeschwindigkeit. Hierbei wurde von einem einfach gelagerten Euler-Bernoulli-Biegebalken ausgegangen, der mit den Achslasten eines ICE 3 mit konstanter Geschwindigkeit überfahren wird (Moving Load Model). Der schubstarre Biegebalken hat eine Massenbelegung von $\mu = 6967$ kg/m, eine Länge von $L = 16,1$ m und eine gesamte Biegesteifigkeit von $EI = 7,03 \cdot 10^9$ Nm². Einsetzen des unteren Grenzwertes von $\zeta = 0,5 + 0,125(20 - L) = 0,99\%$ nach Tabelle 1.1 ergibt durchaus hohe Beschleunigungen, die aufgrund der normativen Vorgaben nach EN 1990/A1 [24] bzw. B 4008-2 [22] der Einhaltung von Spitzenbeschleunigung unter $3,5$ m/s² für Neubauten bzw. $6,0$ m/s² für Bestand zu Baumaßnahmen oder Betriebseinschränkungen führen. Eine genauere Bestimmung der Lage der Resonanzspitzen, und somit der Brückeneigenfrequenzen, ist ebenso von grundlegender Bedeutung, um die auftretenden Schwingungsamplituden vorherzusagen. Dabei spielt der Einfluss des Schotteroberbaus und der horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion eine entscheidende Rolle, was einen klaren Forschungsbedarf hinsichtlich der genauen Bestimmung zuverlässiger Eingangsparameter für dynamische Berechnungen zeigt. Eine Vernachlässigung des Beitrags des Schotteroberbaus

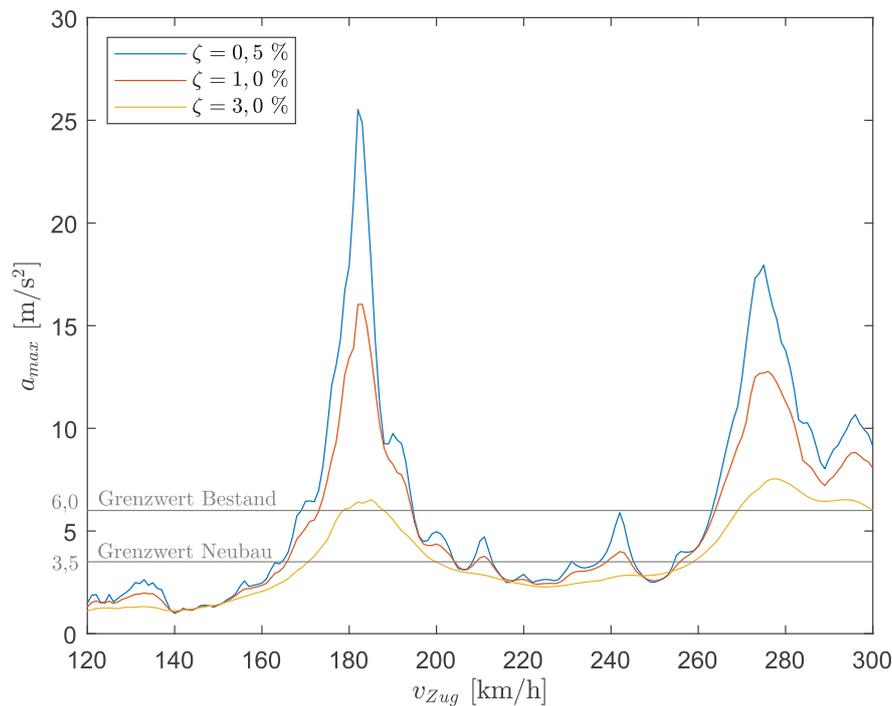


Abb. 1.4: Zugüberfahrt ICE 3 auf einer Einfeldträgerbrücke mit $L = 16,1$ m, $EI = 7,03 \cdot 10^9$ Nm², $\mu = 6967$ kg/m, als einfach gelagerter Euler-Bernoulli-Balken modelliert

und des Vorlandbereichs erweist sich daher in der Praxis als unverzichtbar. Insbesondere bei Stahlbrücken mit kleiner Spannweite, aufgrund der erhöhten Schwingungsanfälligkeit, sind die Ergebnisse unter Berücksichtigung der Angaben nach EN 1991-2 [26] sehr konservativ und führen meistens zu einer unwirtschaftlichen Dimensionierung des Tragwerks in der Planungsphase oder zu Betriebseinschränkungen im Bestand, wie beispielsweise zur Reduktion der Streckengeschwindigkeit. Das hat zur Folge, dass Messungen am Tragwerk notwendig sind, um plausible Informationen hinsichtlich des Schwingverhaltens und der dynamischen Parameter (Eigenfrequenz und Dämpfung) zu erhalten. Zu diesem Zweck hat sich in der bisherigen Forschung erwiesen, dass aufgrund dessen ausgesprochen relevanten Dissipationsvermögen, der Schotteroberbau vor allem bei der dynamischen Beurteilung von Eisenbahnbrücken Berücksichtigung finden soll. In dieser Arbeit wird daher ein breites Spektrum an Ingenieurmodellen für das Brückensystem mit unterschiedlichen Modellierungstiefe untersucht.

1.3 Ziele und Aufbau der Arbeit

Diese Diplomarbeit stellt einen Beitrag im Kontext der umfangreichen Forschung zur Modellbildung von Eisenbahnbrücken am Institut für Tragkonstruktionen/Forschungsbereich Stahlbau der TU Wien dar. Hierbei liegt der Fokus vorwiegend auf der horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion des Schotteroberbaues, sowie auf den Möglichkeiten zur Implementierung der versuchstechnisch ermittelten nichtlinearen Stoffgesetze des Oberbauschotters. Die bestehenden Rechenmodelle, angefangen von dem einfachen Biegebalken bis hin zum komplexeren Koppelbalken, werden im Rahmen dieser Arbeit um die angrenzenden Vorlandbereiche vor und nach der Brücke erweitert. Anders ausgedrückt widmet sich diese Arbeit der Verfeinerung der Modellbildung für Eisenbahnbrücken, insbesondere betreffend des Einflusses der Vorlandbereiche. Diese werden in [3] und [6] zu einer linearen Feder zusammengefasst, wodurch der Einfluss auf die Systemsteifigkeit identifizierbar wird, nicht allerdings auf die Systemdämpfung. Hierbei zeigt sich daher Forschungsbedarf. Das Hauptziel besteht in der Verringerung der Abweichung zwischen rechnerischer Vorhersage der Brückenschwingungen und an realen Brücken tatsächlich gemessenen Schwingverhalten bei Zugüberfahrt. In dieser Hinsicht lassen sich unter anderem folgende Forschungsfragen formulieren, welche im Rahmen der Arbeit beantwortet werden:

- Wie kann die Wirkung des Vorlandbereiches auf das Schwingverhalten der Brücke in Rechenmodelle integriert werden?
- Welche Länge des Vorlandbereichs sollte in der Berechnung mindestens angesetzt werden, und welchen Einfluss hat sie auf die Ergebnisse?
- Leistet das Vorland einen relevanten Beitrag zur Systemsteifigkeit bzw. -dämpfung?
- Lässt sich eine Definition zur rechnerischen Ermittlung des gesamten Dämpfungswertes ζ_{ges} für das System, bestehend aus Tragwerk ζ_{TW} , Schotteroberbau $\Delta\zeta_{OB}$ und Vorland $\Delta\zeta_{vor}$ folgendermaßen formulieren?

$$\zeta_{ges} = \zeta_{TW} + \Delta\zeta_{OB} + \Delta\zeta_{vor}$$
- Wie kann das in der bisherigen Forschung beobachtete nichtlineare Stoffverhalten des Oberbauschotters in dynamischen Berechnungen Berücksichtigung finden?
- Können Korrekturfaktoren zur Miteinbeziehung der Nichtlinearitäten bei Verwendung von linearen Systemeigenschaften formuliert werden?
- Wie wirkt sich eine unterschiedliche Modellierungstiefe in den Ergebnissen auf die Grundfrequenz und die Dämpfung aus?

In der vorliegenden Diplomarbeit werden zunächst einfache Ingenieurmodelle für einfeldrige Eisenbahnbrücken vorgestellt und mit jedem Kapitel wird der Komplexitätsgrad, und somit die Genauigkeit, schrittweise erhöht. Nach einer Einführung des mechanischen Verhaltens des Oberbauschotters im Hinblick auf das nichtlineare Stoffverhalten und auf die Dämpfungseigenschaften in Kapitel 2, wird in Kapitel 3 ein ebenes Ingenieurmodell zur Beschreibung des Schwingverhaltens von Einfeldträgerbrücken vorgestellt. Dieses Modell ergibt sich wiederum aus der Zusammensetzung zweier Systeme: ein Koppelbalkenmodell für den Brückenbereich, bestehend aus durch eine horizontale Federkopplung verbundenen Tragwerksbalken und Oberbaubalken (Schiene, Schwelle und Schotter) und ein Vorlandmodell für den Vorlandbereich, bestehend aus einem horizontal gebetteten Dehnstab. Durch die Ermittlung einer Ersatzmasse und -steifigkeit kann das Vorlandsystem in das Koppelbalkenmodell zu einem Gesamtmodell, Brücke und Vorland,

kombiniert werden. In Kapitel 4 werden die mechanischen Modelle zusätzlich um das nichtlineare Verhalten des Oberbauschotters ergänzt. Die Nichtlinearität hat einen maßgebenden Einfluss auf die Ergebnisse und wird zunächst computerunterstützt in der Berechnung berücksichtigt. Abschließend werden Korrekturfaktoren zur Erfassung des nichtlinearen Verhaltens im Brücken- und Vorlandbereich hergeleitet. Als letzter Schritt werden in Kapitel 5 die in Kapitel 3 hergeleiteten Modelle um die Dämpfung erweitert und anhand einer Energieäquivalenz ein Dämpfungswert in Form des Lehr'schen Dämpfungsmaß ζ für das Gesamtsystem ermittelt. Dieser semianalytische Dämpfungswert beinhaltet, neben der Grunddämpfung des Tragwerks, noch die Dissipationsbeiträge aus dem Schotteroberbau. Bisher konnte das Lehr'sche Dämpfungsmaß ζ mangels genauerer Kenntnis über die in Eisenbahnbrücken wirkenden Energiedissipations- bzw. Dämpfungsmechanismen ausschließlich durch Messungen realitätsnah bestimmt werden. Durch die Anwendung der Bestimmungsgleichung nach *Stollwitzer et al.* [34] ist es jedoch erstmals möglich, die Dämpfung rechnerisch zu erfassen und quantitativ in einer der Realität entsprechenden Größenordnung zu bestimmen. Die in der vorliegenden Arbeit hergeleitete Erweiterung dieser Methode mit Berücksichtigung der nichtlinearen Gleis-Tragwerk Interaktion und des Vorlands eröffnet neue Möglichkeiten zur präziseren Charakterisierung der Dämpfungseigenschaften. Diese Fortentwicklung trägt wesentlich zur verbesserten Analyse des dynamischen Verhaltens des Brückensystems unter der dynamischen Belastung durch überfahrende Züge bei.

Kapitel 2

Oberbauschotter im Eisenbahnbau

2.1 Mechanische Eigenschaften

Der Hauptzweck des Schotteroberbaues liegt in der Ableitung der Achslasten vom Gleisrost in den Unterbau [17]. In Österreich richtet sich der eingesetzte Gleisschotter nach dem Regelwerk der ÖBB-Infrastruktur AG *Herstellung und Lieferung von Oberbauschotter der Körnung I und II* [15], welches nach folgenden Kategorien unterscheidet:

- Gleisschotter K1 (Körnung I): 31,5/63 mm
- Gleisschotter K2 (Körnung II): 16/31,5 mm

Im Normalfall wird die Lieferkörnung I herangezogen, die die Kriterien der Kategorie D hinsichtlich Korngrößenverteilung nach EN 13450 [23] erfüllt. Lieferkörnung II findet aus Arbeitssicherheitsgründen zur besseren Betretbarkeit des Gleisbereichs Anwendung [19]. In Bezug auf die rechnerische Beschreibung des Schotterkörpers wurde zunächst das Kurbelviereckmodell von *Kirchhofer* eingeführt [16]. Hierbei wird die Komplexität des dynamischen Verhaltens des Schotteroberbaues hinsichtlich des Dämpfungs- und Steifigkeitsbeitrags zur Brückenschwingung auf Feder- und Dämpferelemente zurückgeführt. Dies hat den großen Vorteil, dass sämtliche mechanischen Eigenschaften lediglich durch die Parameter k_b und c_b (b aus dem Englischen *ballast*) beschrieben werden können, was außerdem eine „einfache“ Implementierung der inneren Reibung des Schotteroberbaues in FE-Berechnung ermöglicht. In diesem Zweiparametermodell, auch bekannt als Kelvin-Voigt Modell [14, S. 16], sind Feder k_b und Dämpfer c_b parallel geschaltet und linear. Das ebene Kurbelmodell beruht auf einem diskreten Viereckelement in reinem Schubzustand, was einem rein horizontal wirkenden Mechanismus entspricht. Dieses besteht aus gelenkig verbundenen Starrstäben mit einer dazwischenliegenden Druckdiagonale, siehe Abbildung 2.1. Die Größe des Vierecks ist durch den Schwellenabstand d und die Höhe zwischen Schienenachse und Schotterbettunterkante h_s definiert. Die Druckdiagonale besteht aus einem

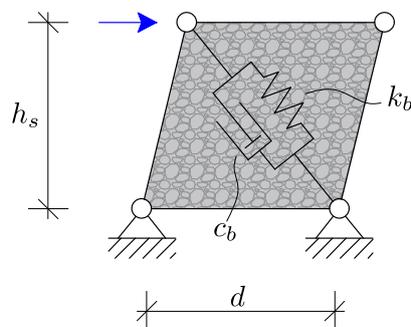


Abb. 2.1: Kurbelviereck (Quelle: [12], S. 5, Abb. 2.1, überarbeitet)

Feder- und Dämpferelement und repräsentiert die mechanischen Eigenschaften des Schotters. Da Schotter per Definition nicht bindig ist, können die inneren Kräfte nur über Kontakt abgetragen werden. Das hat zur Folge, dass die Diagonale immer so angeordnet werden muss, dass diese nur Druckspannungen ausgesetzt wird. Aus der Bedingung der reinen Schubdeformation resultiert, dass die vertikale Relativverschiebung verschwinden muss. In einer praktischen Anwendung muss daher die Biegelinie des Tragwerks w_{TW} , jener des Schienenrostes w_{II} entsprechen (starre vertikale Kopplung) [12, S. 5]:

$$w_{TW} = w_{II} \quad (2.1)$$

2.2 Stand der Forschung: Großversuchsanlage der TU Wien

Zur Erforschung des dynamischen Verhaltens des Oberbauschotters wurde am Institut für Tragkonstruktionen/Forschungsbereich Stahlbau der TU Wien eine Versuchsanlage entwickelt (Abbildung 2.2), welche in der Lage ist, die dynamischen Eigenschaften des vom Tragwerk isolierten Schotteroberbaus zu erforschen. Die Versuchsanlage nach *Hackl* [11] reproduziert den typischen Querschnitt einer stählernen Trogbrücke. Diese besteht aus zwei Hauptträgern (geschweißte I-Träger), elf Querträgern im Regelabstand von 750 mm und dem Deckblech. Wie in Abbildung 2.2 ersichtlich, ist der Stahlrog an einem Ende auf einem Betonsockel über eine Lagerachse in Querrichtung an zwei Punkten fest gelagert, dies lässt nur eine Verdrehung $\eta(t)$ zu, und hält die Konstruktion gegen Horizontal- und Vertikalverschiebungen. Die zweite Lagerachse, die für das statische Gleichgewicht erforderlich ist, besteht aus zwei Federlagern unter den Hauptträgern. Die Veränderung der Position und der Anzahl an Federn pro Lager (Steifigkeit) ermöglicht die Steuerung der Resonanzfrequenz der Versuchsanlage, wobei ein Spektrum zwischen 3 bis 9 Hz abgedeckt werden kann. Der Stahlrog ist mit einem Schotteroberbau gemäß ÖBB Regelplanung mit 55 cm Schotterbett, neun besohlenen Betonschwellen im Abstand von 600 mm und zwei UIC 60 Schienen ausgestattet. Zur Erfassung der statischen Lasten aus einem Radsatz eines überfahrenden

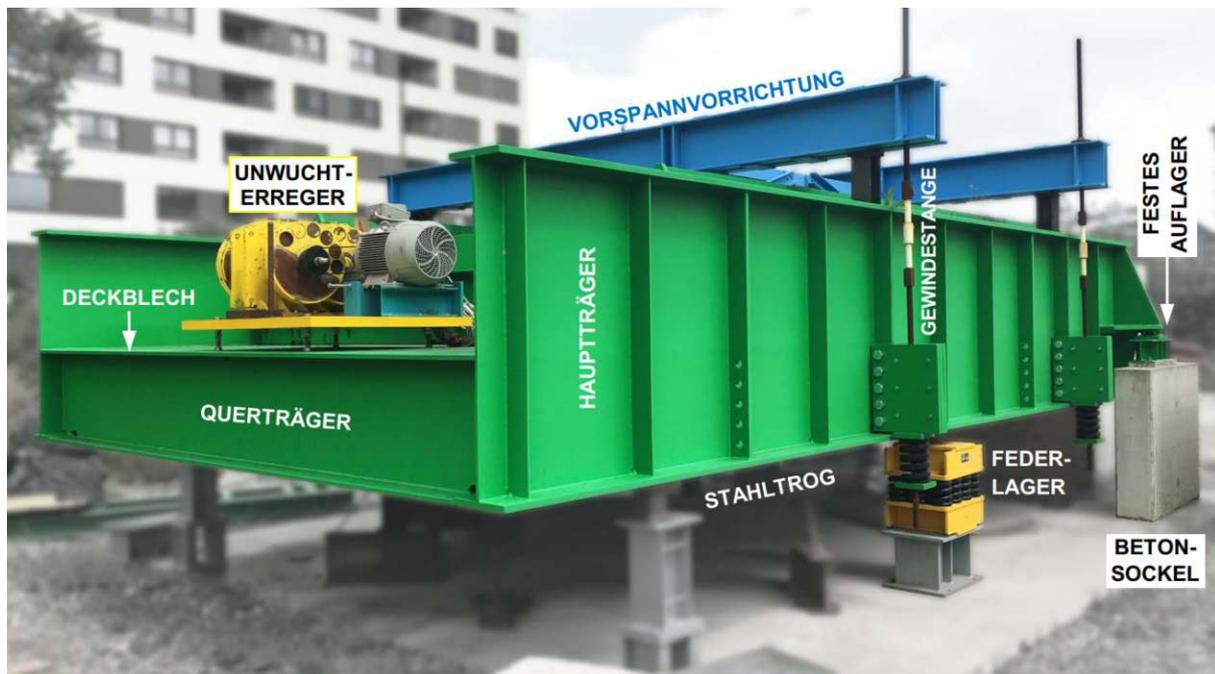


Abb. 2.2: Großversuchsanlage nach *Hackl* (Quelle: [35], S. 23, Abb. 2.1)

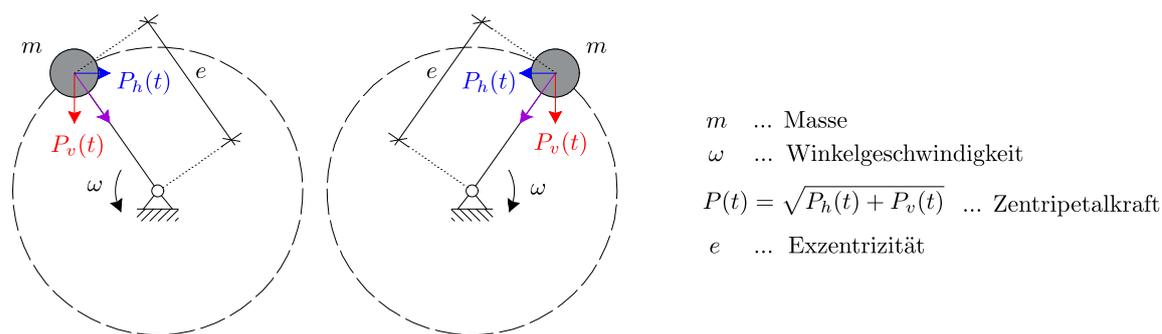


Abb. 2.3: Funktionsprinzip eines Unwuchterregers

Zuges wurde eine Vorspannvorrichtung vorgesehen (blaue Konstruktion in Abbildung 2.2). Dabei handelt es sich um eine mit dem Stahltrog über vier Gewindestangen starr verbundene Stahlkonstruktion, die die Schienen an vier Punkten mit jeweils 125 kN belasten kann [32, S. 24]. Zur dynamischen Anregung wird ein Unwuchterreger verwendet, der gezielt eine rein vertikale, harmonische Kraftanregung erzeugen kann. Ein Unwuchterreger ist ein Gerät mit zwei gegenläufig rotierenden Unwuchtmassen. Weist das Drehmoment immer den gleichen Betrag auf, so wird lediglich eine vertikale Kraftresultierende $2P_v(t)$ induziert, da sich die horizontalen Anteile $P_h(t)$ der Zentripetalkraft gegenseitig aufheben, siehe Abbildung 2.3. Die Anregung führt zu einer Starrkörperrotation des Stahltrogs um den festen Auflagerpunkt, die durch den Drehwinkel $\eta(t)$ beschrieben wird. Der Gleisrost (Schienen und Schwellen) ist durch eine Stahlkonstruktion an eine Lagerwand starr gekoppelt, wodurch er in horizontaler Richtung bei vertikaler Anregung gehalten wird. Aufgrund der Halterung des Gleisrostes gegen Horizontalverschiebungen und des Schwerlinienabstandes zwischen Gleisrost und Tragwerk (Stahltrog) ergibt sich theoretisch die rein horizontale Bewegungskinematik, die das oben eingeführte Kurbelviereck charakterisiert. Im Rahmen von Untersuchungen hat sich allerdings gezeigt, dass diese Annahme hinsichtlich der exklusiven horizontalen Energiedissipation nicht zutreffend ist [32, S. 45]. Es wurden dabei drei Dämpfungsmechanismen im Schotteroberbau identifiziert. Energiedissipation findet einerseits in der horizontalen Relativverschiebung zwischen Gleisrost und Schotterbett statt, andererseits in der vertikalen Relativverschiebung zwischen Gleisrost und Tragwerk und darüber hinaus in der vertikalen Absolutverschiebung des Oberbaues.

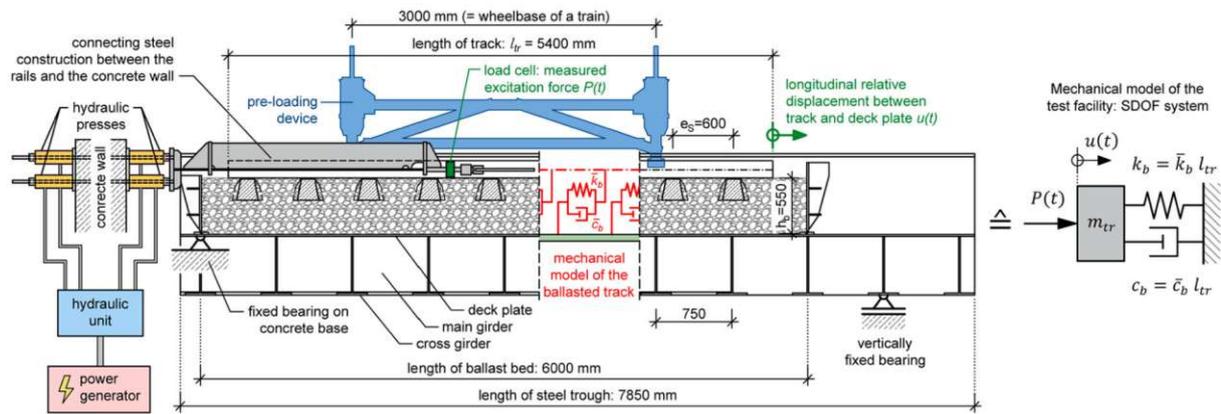


Abb. 2.4: Längsschnitt der Großversuchsanlage nach Hackl/Stollwitzer zur Erforschung der horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion (Quelle: [33], S. 4, Fig. 6)

Zur isolierten Erfassung des horizontalen Dämpfungsmechanismus wurde die Großversuchsanlage von Stollwitzer [32] adaptiert. Die wesentliche Änderung betrifft die Anregungsmethode, die nicht mehr vertikal durch den Unwuchterreger erfolgt, sondern durch horizontal angeordnete hydraulische Pressen, siehe Abbildung 2.4. Diese Pressen wurden zwischen der Lagerwand und der Kopplungskonstruktion zum Gleisrost hin angeordnet und sind in der Lage, das System frequenz- und verschiebungsgesteuert anzuregen. Die beiden Federpakete in der Versuchsanlage wurden dabei gegen feste Lager getauscht, damit der Stahltrug sowohl vertikal als auch horizontal gehalten ist. Hinsichtlich der mechanischen Modellierung wird der Kurbelviereckmechanismus in horizontal liegende Feder-Dämpfer Elemente rückgeführt. Die hiermit identifizierten Dämpfungskennwerte werden in Abschnitt 2.4 eingeführt. Der Fokus dieser Arbeit liegt in der horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion, die durch Modellierung des Oberbauschotters als kontinuierliche horizontale Bettung zwischen Gleisrost und Tragwerk bzw. Unterbau Berücksichtigung findet, siehe Abbildung 2.5

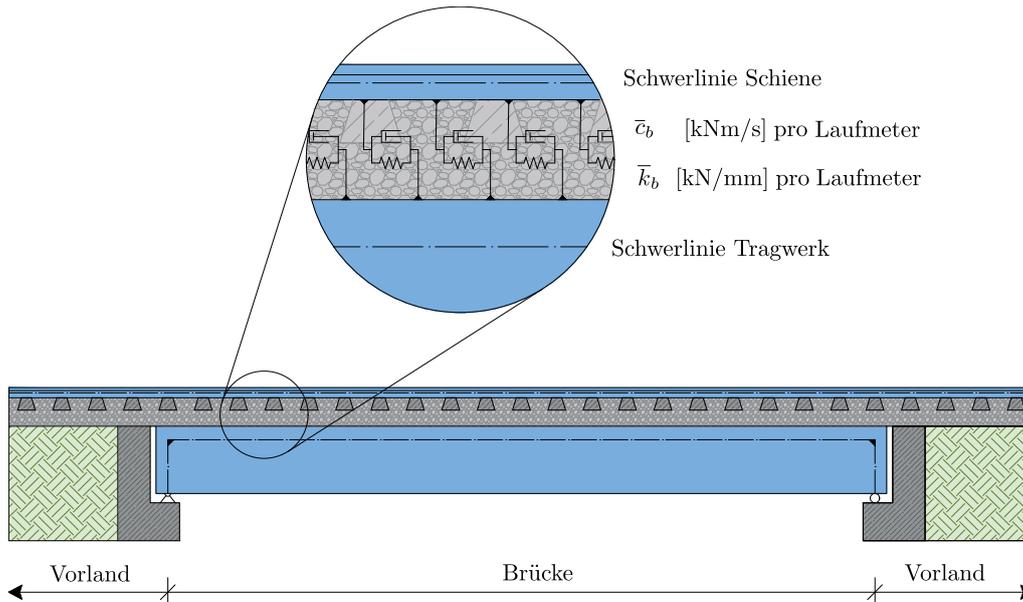


Abb. 2.5: Modellbildung der horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion (Quelle: [33], S. 2, Fig. 1)

2.3 Steifigkeitseigenschaften des Schotteroberbaus

Im Zuge von Versuchen anhand der Versuchsanlage (Abbildung 2.2) [34, S. 309] wurden Kennwerte für die bezogene Schotterfedersteifigkeit \bar{k}_b in Abhängigkeit der relativen Horizontalverschiebung zwischen Gleis und Tragwerk u ermittelt. Durch Kurvenanpassung mit logarithmischem Verlauf wurde eine Regressionsfunktion zur Beschreibung der Schotterfedersteifigkeit \bar{k}_b ermittelt:

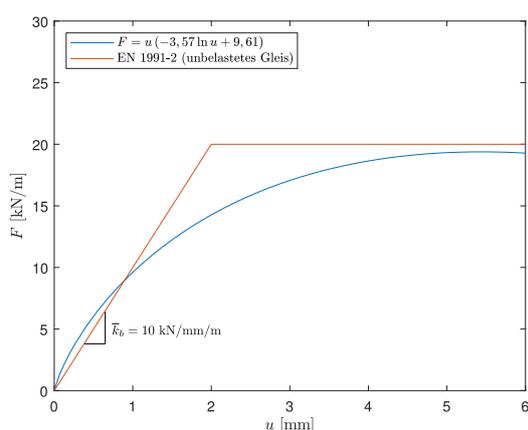
$$\bar{k}_b = -3,57 \ln(u) + 9,61 \quad (2.2)$$

In Gleichung (2.2) bezeichnet \bar{k}_b eine bezogene Größe in kN/mm Verschiebung je Laufmeter Gleis. Das Produkt des \bar{k}_b -Verlaufs mit der horizontalen Relativverschiebung u liefert den Last/Verschiebungsverlauf des Schotterkörpers, den sogenannten Längsverschiebewiderstand F :

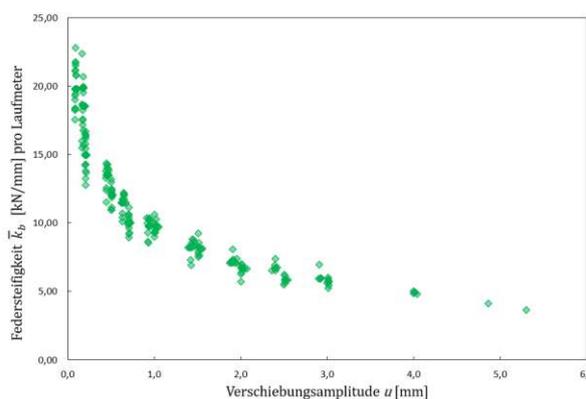
$$F = [-3,57 \ln(u) + 9,61] u \quad (2.3)$$

In der EN 1991-2 [26] wird ein bilinearer Verlauf angegeben, mit einem linear elastischen Bereich für $u \leq 2$ mm und ideal plastisch für $u > u_0 = 2$ mm, siehe Abbildung 2.6(a). Tritt also eine horizontale Relativverschiebung größer als 2 mm auf, weißt der Schotter keine Schotterfedersteifigkeit mehr auf, was die Realität nur bedingt wiedergibt. Der normativ festgelegte Wert des Verschiebewiderstandes beträgt somit $\bar{k}_b = 10$ kN/mm pro m Gleis für $u \leq 2$ mm und $\bar{k}_b = 0$ für $u > 2$ mm. Als Alternative bietet sich die Möglichkeit, den auf Messpunkten basierenden logarithmisch approximierten Schottersteifigkeitsverlauf nach Gleichung (2.2) mit einer polynomischen Kurve anzunähern, wobei die beste Übereinstimmung mit einem Polynom 8. Grades erreicht wird, siehe Abbildung 2.7(b). Polynome höherer Ordnung passen sich zwar den einzelnen Messpunkten genauer an, führen aber zu einer übermäßigen Schwankung um die Messpunkte. Dieser Effekt ist auch als Overfitting, oder Überanpassung, bekannt [5, S. 7] Das Polynom 8. Ordnung für die Schotterfedersteifigkeit \bar{k}_b (Abbildung 2.7(a)) lautet:

$$\begin{aligned} \bar{k}_b = & 0,0043 u^8 - 0,1096 u^7 + 1,1738 u^6 - 6,836 u^5 + 23,4653 u^4 - 48,2998 u^3 + \\ & + 58,7120 u^2 - 41,8486 u + 23,2707 \end{aligned} \quad (2.4)$$

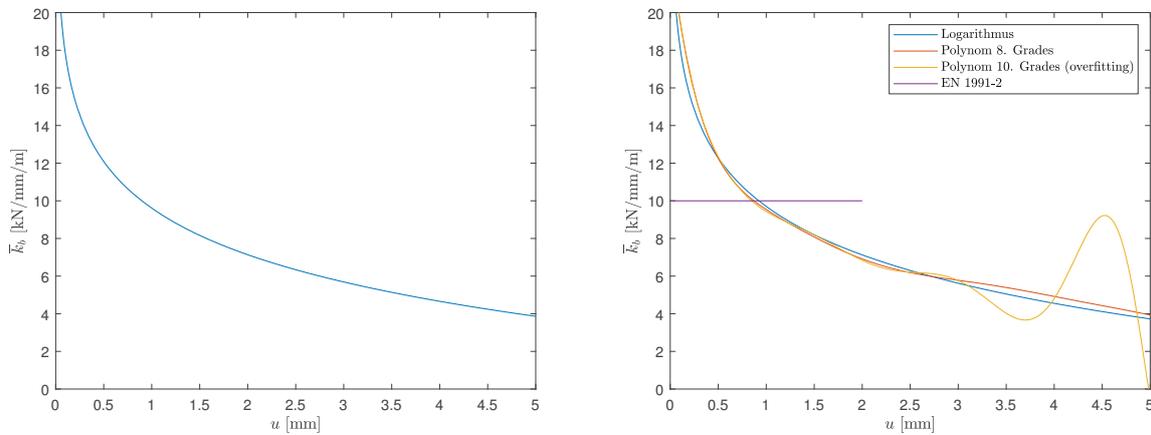


(a) Längsverschiebewiderstand:
Kraft-Verschiebungsdiagramm des
Gleis-/Tragwerkssystems



(b) gemessene Schotterfedersteifigkeit: \bar{k}_b in
Abhängigkeit der horizontalen Verschiebung u

Abb. 2.6: Definition Durchschubwiderstand und Längsverschiebewiderstand des Schotters



(a) Bezogene Schotterfedersteifigkeit \bar{k}_b nach Gl. 2.2 (b) Vergleich verschiedener Ansätze für den Längsverschiebewiderstand \bar{k}_b

Abb. 2.7: Schotterfedersteifigkeit \bar{k}_b in Abhängigkeit der horizontalen Relativverschiebung zwischen Gleisrost und Tragwerk

2.4 Energiedissipation im Schotteroberbau

Ausgehend von den Erkenntnissen von *Stollwitzer et al.* [34] wurden drei Dämpfungsmechanismen identifiziert, die sowohl frequenz- als auch beschleunigungsabhängig wirken. Diese können drei verschiedenen Bewegungskinematiken zugeordnet werden:

- **vertikale absolute Bewegungskinematik:** Absolutverschiebungen in vertikaler Richtung des Oberbaues (zugehöriger Dämpfungskennwert \bar{c}_{OB}).
- **vertikale relative Bewegungskinematik:** Relativverschiebungen in vertikaler Richtung zwischen Schiene und Tragwerk (zugehöriger Dämpfungskennwert \bar{c}_{sv}).
- **horizontale relative Bewegungskinematik:** Relativverschiebungen in horizontaler Richtung zwischen Gleisrost und Schotterbett entlang einer Gleitfläche um den Schwellenumfang (zugehöriger Dämpfungskennwert \bar{c}_b).

Abbildung 2.8 veranschaulicht die Modellbildung der drei Dissipationsmechanismen im Schotteroberbau. Diese erfolgt mittels Feder-Dämpfer Elementen (Mechanismus 1 und 2) bzw. nur Dämpferelementen (Mechanismus 3). Im Rahmen dieser Arbeit werden die Dämpfungsbeiträge der beiden vertikalen Mechanismen in einer einzigen Bewegungskinematik in vertikaler Richtung mit dem Kennwert $\bar{c}_{OB,v}$ zusammengefasst. Das diskrete Kurbelviereckmodell nach *Kirchhofer* zur Berücksichtigung der horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion (s. Abbildung 2.1) wird durch eine kontinuierliche horizontale Feder-Dämpfer-Kopplung ersetzt, wobei die Schotterfedersteifigkeit \bar{k}_{sv} vernachlässigt wird. Empirisch bestimmte Dämpfungskennwerte in kNs/m pro Laufmeter Gleis für beide Bewegungskinematiken (in horizontaler und vertikaler Richtung) sind in [34, S. 308] je nach Resonanzfrequenz f_1 angegeben, siehe Abbildung 2.9. Der den vertikalen Bewegungskinematiken zugehörige Dämpfungskennwert $\bar{c}_{OB,v}$ wird anhand einer Regression bei unterschiedlichen Beschleunigungsamplituden des Tragwerks ermittelt. Die resultierende Regressionsfunktion bleibt bis zu einer Frequenz von 4,50 Hz konstant, steigt dann im mittleren

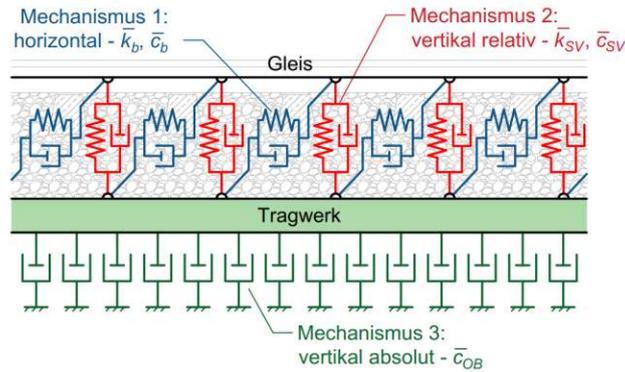


Abb. 2.8: Feder-Dämpfer-Elemente zur Beschreibung der drei Dissipationsmechanismen (Quelle [32], S. 50, Abb.5.1)

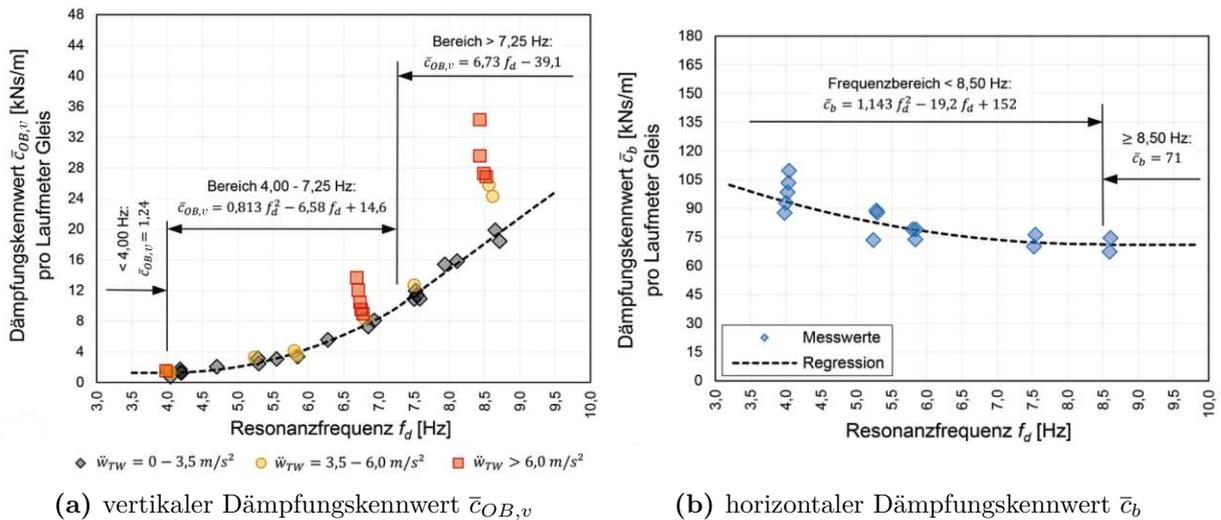


Abb. 2.9: Anhand von Messdaten ermittelte Dämpfungskennwerte in Funktion der Grundfrequenz f_1 (Quelle: [34], S.308, Bild 4)

Frequenzbereich (4,0 - 7,25 Hz) quadratisch an und weist schließlich einen linearen Verlauf auf ($f_1 \geq 7,25$ Hz). Der Dämpfungskennwert \bar{c}_b für die horizontale Bewegungskinematik zeigt eine starke Frequenzabhängigkeit. Mit steigender Resonanzfrequenz nimmt der Wert von \bar{c}_b ab. Die geringe Streuung der Messpunkte entlang der vertikalen Achse deutet darauf hin, dass eine vernachlässigbare Abhängigkeit von den Beschleunigungsamplituden besteht. Für die vertikale Bewegungskinematik gilt:

$$\bar{c}_{OB,v} = \begin{cases} 1,24 & \text{für } f_1 < 4,0 \text{ Hz} \\ 0,813 f_1^2 - 6,58 f_1 + 14,6 & \text{für } 4,0 \leq f_1 < 7,25 \text{ Hz} \\ 6,73 f_1 - 39,1 & \text{für } f_1 \geq 7,25 \text{ Hz} \end{cases} \quad (2.5)$$

für die horizontale Bewegungskinematik:

$$\bar{c}_b = \begin{cases} 1,143 f_1^2 - 19,2 f_1 + 152 & \text{für } f_1 < 8,5 \text{ Hz} \\ 71 & \text{für } f_1 \geq 8,5 \text{ Hz} \end{cases} \quad (2.6)$$

2.5 Masse des Schotters

Hinsichtlich der Massenbelegung des Oberbauschotters ist eine genaue Angabe des Schottergewichts ohne Messung unmöglich. Werte für die Schotterdichte im Einbauzustand, je nach Lagerungsdichten und Verunreinigungen, schwanken zwischen $1,7 \text{ t/m}^3$ und 2 t/m^3 [25]. In statischen Standberechnungen wird für die Rohdichte des Schotters i.A., auf der sicheren Seite, ein oberer Schätzwert $\rho_b = 2 \text{ t/m}^3$ zugrunde gelegt. Bei einer dynamischen Betrachtung ist aber eine solche Annahme nicht mehr sinnvoll, da ein größerer Wert der Dichte zu einer Verfälschung der rechnerischen Resonanzfrequenz führen kann und somit, im Fall ungünstiger Erregung des überfahrenden Zuges, zu einer Unterschätzung der auftretenden Amplituden im tatsächlichen Resonanzfall. Laut EN 1991-2 [26] sind dabei zwei Grenzfälle zu unterscheiden. Einerseits soll die Festlegung der maximalen Beschleunigung des Überbaues mit einer Minimierung der Masse erfolgen: eine Verringerung der Masse ist aufgrund der Trägheit, bei gleicher Kraftanregung, mit einer größeren Beschleunigung gekoppelt. Andererseits soll zur Ermittlung der niedrigsten Resonanzgeschwindigkeiten die Masse maximiert werden: eine Erhöhung der Masse verschiebt die Resonanzfrequenz in Richtung tieferer Frequenzen [32, S. 8]. Die Untersuchungen von *Hackl* [11] zeigen, dass die reale Schotterdichte im Bereich $1,4 - 1,5 \text{ t/m}^3$ liegt.

2.6 Fazit

In den folgenden Kapiteln werden zur Modellierung des Steifigkeitsbeitrags des Schotteroberbaues zur Systemsteifigkeit horizontal liegende Federn mit linearer Schotterfedersteifigkeit nach EN 1991-2 [26] $\bar{k}_b = 10 \text{ kN/mm}$ pro m Gleis herangezogen, welche die horizontale Gleis-Tragwerk Interaktion repräsentieren. In Kapitel 4 werden abschließend Korrekturfaktoren ermittelt, um den tatsächlichen nichtlinearen Verlauf nach Gleichung (2.2) (im Weiteren: $\bar{k}_{b,NL}$) zu berücksichtigen. Was die Trägheit und somit die Masse des Oberbaus betrifft, werden aufgrund der hohen Unsicherheit bezüglich der Schottermasse analog zu [35] drei Varianten an möglichen Schotterdichten untersucht, nämlich $\rho_{b,1} = 1400 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{b,2} = 1550 \text{ kg/m}^3$ und $\rho_{b,3} = 1700 \text{ kg/m}^3$. Des Weiteren werden in Kapitel 3 Bestimmungsgleichungen für die Biegeeigenfrequenz der Brücke hergeleitet, die wiederum zur Bestimmung der Dämpfungskennwerte \bar{c}_b für den horizontalen Dämpfungsmechanismus und $\bar{c}_{OB,v}$ für die beiden vertikalen Dämpfungsmechanismen verwendet werden können. Diese Werte werden zusammen mit den Schotterfedersteifigkeiten \bar{k}_b bzw. $k_{b,NL}$ in den Feder-Dämpfer-Elementen gemäß Abbildung 2.5 angesetzt.

Kapitel 3

Mechanisches Modell für Brücke und Vorland

Die aus mechanischer Hinsicht komplexe Beschaffenheit von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau macht es immer noch sehr aufwändig, ihr Schwingverhalten bei Zugüberfahrten realitätsnah zu prognostizieren. Die Hauptproblematik einer zuverlässigen Schwingungsprognose liegt in der Unsicherheit der verwendeten Eingangsparameter in mechanischen Modellen, insbesondere aufgrund der hohen Streuung der Kennwerte zur rechnerischen Erfassung des Schotteroberbauverhaltens und der Vielzahl an möglichen Modellbildungen. In diesem Kapitel werden zunächst verschiedene mechanische Modelle für die Brücke und für den Vorlandbereich unter Verwendung linearer Systemparameter erläutert, vgl. Kapitel 2.6. Die Betrachtung erfolgt zunächst unter Vernachlässigung der Dämpfung. Dabei wird die Grundfrequenz bzw. die erste Biegeeigenfrequenz des Systems ermittelt und abschließend mit gemessenen Frequenzen realer Tragwerke verglichen.

3.1 Brückensystem

Im Folgenden werden drei Brückenmodelle mit unterschiedlichem Detaillierungsgrad vorgestellt. Nach einer allgemeinen Einführung des einfach gelagerten Euler-Bernoulli Balkens wird auf das Koppelbalkenmodell eingegangen. Dies ermöglicht die Berücksichtigung der in Kapitel 2 erläuterten Steifigkeitseigenschaften der horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion des Schotteroberbaus. Zum Schluss wird das Koppelbalken um die Vorlandfedern erweitert, um den Steifigkeitsbeitrag der angrenzenden Vorlandbereiche zu erfassen.

3.1.1 Euler-Bernoulli-Balken

Die einfachste Methode, das Schwingungsverhalten einer einfeldrigen Brücke in einem mechanischen Modell zu beschreiben, besteht darin, einen einfach gelenkig gelagerten schubstarr Biegebalken zu verwenden. Dieser Biegebalken, auch als Euler-Bernoulli Balken bezeichnet, ist durch eine Stablänge L , eine Massenbelegung μ und Biegesteifigkeit EI charakterisiert, wird einer Belastung normal zu ihrer Stabachse ausgesetzt ist und daher auf Biegung beansprucht [13, S. 68]. Die sogenannten Euler-Bernoulli-Balken sind kontinuierliche Körper, die sich dadurch auszeichnen, dass die Abmessung entlang der Stabachse (Stablänge L) wesentlich größer ist als die restlichen Körperabmessungen und daher als schlanker Stab betrachtet werden kann (Stabtheorie), siehe Abbildung 3.1.

Aufgrund dieser Schlankheit sind die Schubdeformationen im Vergleich zu den Biegedeformationen vernachlässigbar klein. Daraus folgt, dass alle Punkte auf den Querschnitten, die im unverformten Zustand normal auf der Stabachse liegen, auch nach der Deformation orthogonal zur Stabachse bleiben (Bernoulli-Hypothese). Im Sinne einer modalen Analyse können zur Vereinfachung die ersten drei Biegeeigenformungen des Balkens berücksichtigt werden, da diese in der Regel die größte Schwingungsantwort liefern. Die Grundschwingungsform kann, bei Annahme einer sinusförmigen Biegelinie, durch einen einzigen Freiheitsgrad beschrieben werden, nämlich die Vertikalverschiebung in Feldmitte. Im ungedämpften Fall kann der Balken

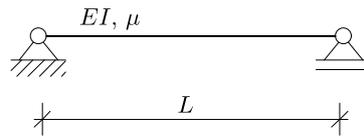


Abb. 3.1: Euler-Bernoulli-Balken

hinsichtlich des Schwingverhaltens auf ein Masse-Feder-System zurückgeführt werden, wobei die Biegeeigenform $w(x, t)$ durch Formulierung eines eingliedrigen Ritz'schen Ansatzes $w^*(x, t)$ zu einer Halbsinuswelle approximiert werden kann:

$$w(x, t) \approx w^*(x, t) = q(t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (3.1)$$

Die zugehörige Biegeeigenfrequenz lautet [2, S. 8]:

$$f_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}} \quad (3.2)$$

3.1.2 Koppelbalken mit horizontal starr gelagertem Oberbaubalken

Das Koppelbalkenmodell, wie in Abbildung 3.2 dargestellt, besteht aus einem beidseitig gelagerten Oberbaubalken mit Biegesteifigkeit EI_{II} , Massenbelegung μ_{II} und Dehnsteifigkeit EA , der mit einem Tragwerksbalken mit Biegesteifigkeit EI_{TW} und Massenbelegung μ_{TW} durch eine horizontale Federkopplung verbunden ist. Der Abstand zwischen den Schwerlinien der beiden Balken wird mit r bezeichnet. Zur Erhöhung der Modellgenauigkeit wird außerdem die Auflagerexzentrizität e_L des Brückentragwerks berücksichtigt. Mit Auflagerexzentrizität wird der vertikale Abstand zwischen der Schwerlinie des Tragwerks und dem Auflagerdrehpunkt bezeichnet, wie in Abbildung 3.4 dargestellt. Dieses Modell wurde in der Literatur [6], [34] bereits in mehreren Formen behandelt.

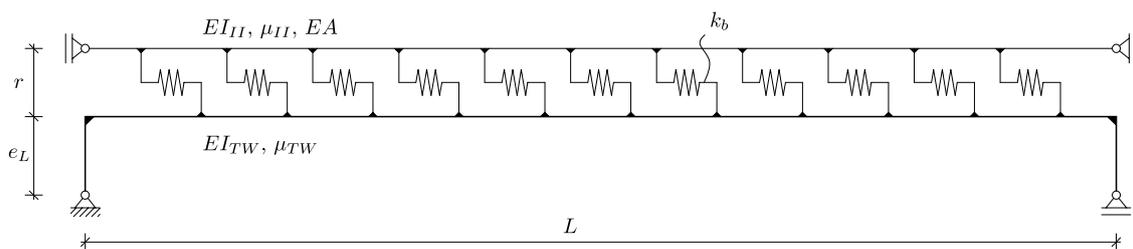


Abb. 3.2: Koppelbalken, seitlich fest gelagert

Im Rahmen der Versuche von *Hackl* wurde in [11] beobachtet, dass bei einem horizontalen Bewegungsmechanismus zwischen Gleisrost und Brückentragwerk eine Gleitfläche entlang der Schwellensohle und entlang der Stirnfläche der Schwellen identifiziert werden kann, siehe Abbildung 3.3. Der Oberbaustab besteht somit aus den Schienen, den Schwellen und dem dazwischenliegenden Schotter. Die Dehnsteifigkeit EA sowie die Biegesteifigkeit EI_{II} des Stabes entspricht jener der Schienen. Abschließend bildet die Schottermasse innerhalb der Gleitfläche, zusammen mit Schwellen und Schienen, die Massenbelegung μ_{II} des Oberbaubalkens im Koppelbalkenmodell. An dieser Stelle sei noch darauf hingewiesen, dass die vertikale Kopplung als starr angenommen

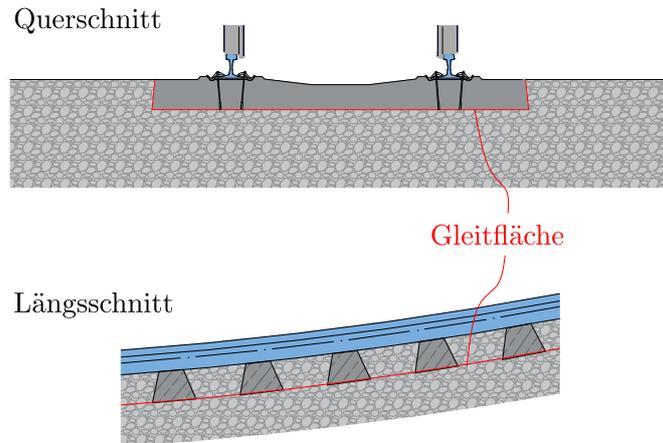


Abb. 3.3: Gleitfläche (in rot markiert) bei horizontalen Relativverschiebungen zwischen Tragwerk und Gleisrost

wird. Betrachtet man nur die Grundschiwingung, kann das System nach Abbildung 3.2 durch die Formulierung der kinetischen und potentiellen Energie in einen Einmassenschwinger mit Masse M , Dämpferkonstante C und Federsteifigkeit K überführt werden. Die zulässige Kinematik des Systems in vertikaler bzw. horizontaler Richtung wird mit den Verschiebungsfunktionen $w(x, t)$ und $u(x, t)$ beschrieben. Für kleine Rotationen $\varphi(x, t) = w'(x, t) \ll 1$ darf $u(x, t)$ direkt von der vertikalen Verschiebung im Sinne einer Linearisierung $\sin\varphi \approx \varphi$ abgeleitet werden:

$$u(x, t) = u_A(t) + u_S(x, t) = w'(x = 0, t) e_L + w'(x, t) r \quad (3.3)$$

Die Funktion $w(x, t)$ ist die Lösung der Bewegungsgleichung des ungedämpften Einmassenschwingers mit Masse M und Steifigkeit K :

$$M \ddot{w}(x, t) + K w(x, t) = f(x, t) \quad (3.4)$$

Der Term $f(x, t)$ stellt die Belastungsfunktion dar, welche im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter untersucht wird.

Aufgrund der Linearität der Bewegungsgleichung (3.4) dürfen die beiden Variablen x und t separiert werden. Die Verschiebungsfunktion wird als Produkt einer ortsabhängigen Funktion $\phi(x)$, im Englischen *shape function*, und einer zeitabhängigen Funktion $q(t)$ zerlegt, siehe Abbildung 3.5. Die erste Eigenschwingungsform eines einfach gelagerten Balkens entspricht einer Sinushalbwellen zwischen den Auflagern:

$$w(x, t) = \phi_z(x) q(t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) q(t) \quad (3.5)$$

Die horizontale Verschiebung besteht aus zwei Anteilen: einer absoluten, über die Systemlänge konstanten Horizontalverschiebung u_A aufgrund der Auflagerexzentrizität e_L des Tragwerks und

einer relativen Horizontalverschiebung $u_S(x)$ zwischen Oberbau- und Tragwerksbalken zufolge Schwerlinienabstand [34, S. 311].

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi_x(x) q(t) = [u_A + u_S(x)] q(t) = \left(e_L \frac{\pi}{L} + \frac{r \pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \right) q(t) \\ &= \frac{\pi}{L} \left(e_L + r \cos \frac{\pi x}{L} \right) q(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

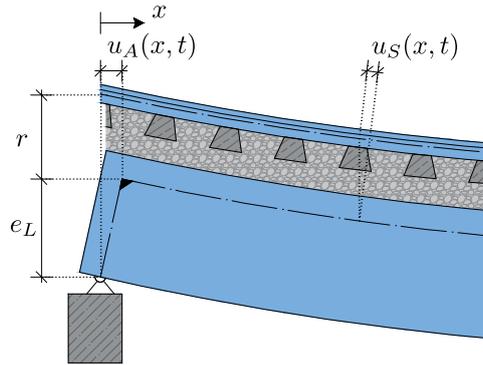


Abb. 3.4: Definition der Horizontalverschiebungsanteile u_A und u_S in der verformten Lage

Setzt man weiterhin eine freie Schwingung voraus, wird eine Sinusfunktion zur Beschreibung der Schwingung im Zeitbereich herangezogen.

$$q(t) = w_0 \sin(\Omega_1 t) \quad (3.7)$$

In Gleichung (3.7) steht w_0 für die maximale Durchbiegung in Feldmitte des Einfeldsystems und Ω_1 für die zur Grundschwingung zugehörige Eigenkreisfrequenz. Einsetzen von Gleichung (3.7) in (3.6) ergibt einen vollständigen Ausdruck für den horizontalen Verschiebungsverlauf:

$$u(x, t) = \frac{w_0 \pi}{L} \left(e_L + r \cos \frac{\pi x}{L} \right) \sin(\Omega_1 t) \quad (3.8)$$

Die kinetische Energie T im System errechnet sich somit aus der vertikalen Schwingung des Oberbau- bzw. Tragwerksbalkens und aus der absoluten Horizontalverschiebung aufgrund der Auflagerexzentrizität e_L . Die horizontale Relativverschiebung $u_S(x)$ darf hier nicht einfließen, da die Masse in einem Inertialsystem nur durch eine Absolutverschiebung in Bewegung gesetzt wird.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \mu_{TW} \dot{w}(x, t)^2 + \mu_{II} \dot{w}(x, t)^2 + \mu_{ges} \dot{u}_A(t)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \mu_{ges} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \dot{q}(t)^2 + \mu_{ges} \left(\frac{\pi e_L}{L} \right)^2 \dot{q}(t)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_{ges} L}{2} \dot{q}(t)^2 + \mu_{ges} \left(\frac{\pi e_L}{L} \right)^2 L \dot{q}(t)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\mu_{ges} \left(\frac{L}{2} + \frac{\pi^2 e_L^2}{L} \right) \right] \dot{q}(t)^2 \\ &\rightarrow M = \mu_{ges} \frac{L}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die relative Horizontalverschiebung $u_S(x)$ führt zu einer Ausdehnung bzw. Verkürzung der Federkopplung in x -Richtung. Die potentielle Energie U ergibt sich daher aus den vertikalen Anteilen infolge Durchbiegung $w(x, t)$ und aus der gesamten Relativverschiebung $u(x, t)$ zwischen den Balken:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^L EI_{TW} w''(x, t)^2 + EI_{II} w''(x, t)^2 + k_b u(x, t)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} (EI_{TW} + EI_{II}) \left[w_0^2 \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) q(t)^2 \right] + k_b \left[\left(\frac{w_0 \pi}{L} \right) \left(r \cos \frac{\pi x}{L} + e_L \right)^2 q(t)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} (EI_{TW} + EI_{II}) \left[w_0^2 \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) q(t)^2 \right] + k_b \left[\left(\frac{w_0 \pi}{L} \right) \left(r^2 \cos^2 \frac{\pi x}{L} + e_L^2 + 2r e_L \cos \frac{\pi x}{L} \right) q(t)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ EI_{ges} \frac{\pi^4}{2L^3} + k_b \left[\left(\frac{\pi}{L} \right) \left(r^2 \frac{L}{2} + e_L^2 L \right) \right] \right\} q(t)^2 \\
 &\rightarrow K = EI_{ges} \frac{\pi^4}{2L^3} + k_b \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(r^2 \frac{L}{2} + e_L^2 L \right) \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

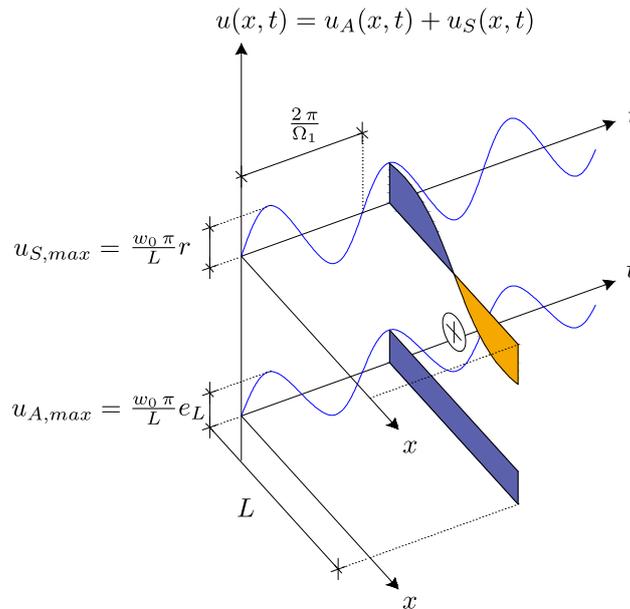


Abb. 3.5: Visualisierung der Funktion der relativen Horizontalverschiebungen $u(x, t)$ im Orts- und Zeitbereich

Das Verhältnis von Steifigkeit K (3.10) zu Masse M (3.9) lautet:

$$\begin{aligned}
 \frac{K}{M} &= \frac{EI_{ges} \frac{\pi^4}{2L^3} + k_b \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(r^2 \frac{L}{2} + e_L^2 L\right)}{\mu_{ges} \frac{L}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L}\right)^2\right]} \\
 &= \frac{\frac{2}{L} EI_{ges} \frac{\pi^4}{2L^3} + \frac{2}{L} k_b \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(r^2 \frac{L}{2} + e_L^2 L\right)}{\mu_{ges} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L}\right)^2\right]} \\
 &= \frac{EI_{ges} \frac{\pi^4}{L^4} + k_b \frac{\pi^2}{L^2} (r^2 + 2e_L^2)}{\mu_{ges} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L}\right)^2\right]} \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Die Wurzel von (3.11) entspricht der Eigenkreisfrequenz des äquivalenten Einmassenschwingers und somit der ersten Biegeeigenkreisfrequenz der Einfeldträgerbrücke [34, S. 313]:

$$\Omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_{ges} + k_b (r^2 + 2e_L^2)}{\mu_{ges} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L}\right)^2\right]}} \tag{3.12}$$

Die in diesem Koppelbalkenmodell getroffene Annahme eines seitlich fest gelagerten Oberbaubalkens, siehe Abbildung 3.2, lässt keine Horizontalverschiebungen am Auflager zu und bildet daher die Weiterführung der Schienen über die Brückenden hinaus nicht ab. Im Zuge einer Modellbildung mit erhöhtem Detaillierungsgrad werden im nächsten Abschnitt die festen Auflager durch Wegfedern in Längsrichtung ersetzt, wodurch die Nachgiebigkeit des Vorlands Berücksichtigung findet.

3.1.3 Koppelbalken mit horizontal nachgiebig gelagertem Oberbaubalken

In Abhängigkeit von Brückentyp und -länge ist es notwendig, Schienenauszüge an den Brückenden anzuordnen. Schienenauszüge sind Vorrichtungen zur Trennung der Schienen in Längsrichtung, siehe Abbildung 3.6. Diese werden zur Vermeidung von übermäßigen Zwangsspannungen zufolge Temperatur und Brems- bzw. Anfahrkräften an dem Übergang zwischen Brücken- und Vorlandbereich eingesetzt. Bei kurzen Spannweiten, kleiner als 30 m im Fall von Stahlbrücken, sind keine Schienenauszüge notwendig [21, S. 182].

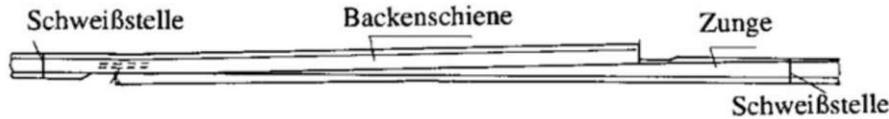
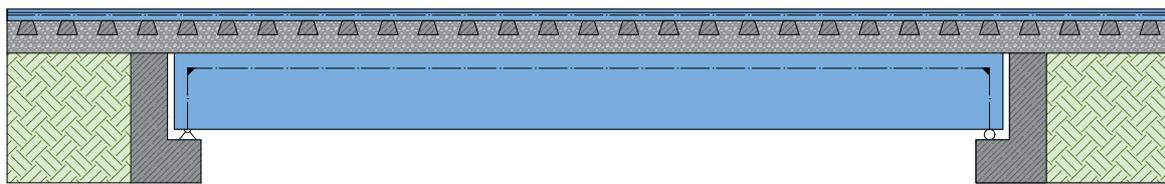


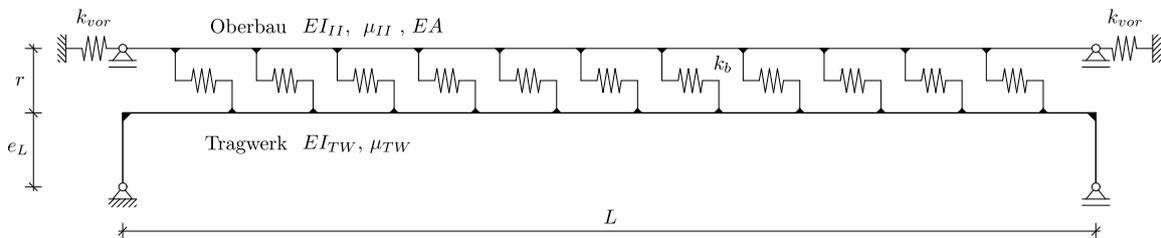
Abb. 3.6: Schienenauszugsvorrichtung (SAZ) im Grundriss [21, S. 182]

Im Fall eines Überganges ohne Schienenauszug verursacht die Kontinuität der Schienen zwischen Brücke und Vorland eine Einspannwirkung, die einen Widerstand gegen Verdrehung und gegen Längsverschiebung an der Brückenauflagerstelle leistet. Im Rahmen einer Modellerweiterung wird, zur Berücksichtigung dieser Einspannwirkung, jeweils eine Feder mit einer zu bestimmenden Federkonstanten k_{vor} an den Stabenden des Oberbaustabes angeordnet, wie in Abbildung 3.7b dargestellt. Es wird weiterhin angenommen, dass sich beide Balken mit identischer Biegelinie vertikal verformen $w_{TW}(x, t) = w_{II}(x, t)$, was einer starren vertikalen Kopplung entspricht.

Der horizontale Verschiebungsansatz in Gleichung (3.6) ist hier aufgrund der Nachgiebigkeit der horizontalen Auflager des Oberbaubalkens nicht mehr gültig. Eine Durchbiegung des Tragwerks führt nun zu einer horizontalen Verschiebung der Auflager, welche im Koppelbalkenmodell im Abschnitt 3.1.2, Abbildung 3.2 auf Null gesetzt wurde. Zur Ermittlung der Nachgiebigkeit an den Auflagern müssen zuerst die Auflagerkräfte bei vorgegebener Durchbiegung in Tragwerksmitte ermittelt werden. Berechnet man das System nach Stabtheorie erster Ordnung, unter Formulierung



(a) Einfeldrige Eisenbahnbrücke mit Schotteroberbau und Vorland



(b) Statisches System

Abb. 3.7: Überführung des Systems Brücke inkl. Vorland in einen elastisch gelagerten Koppelbalken

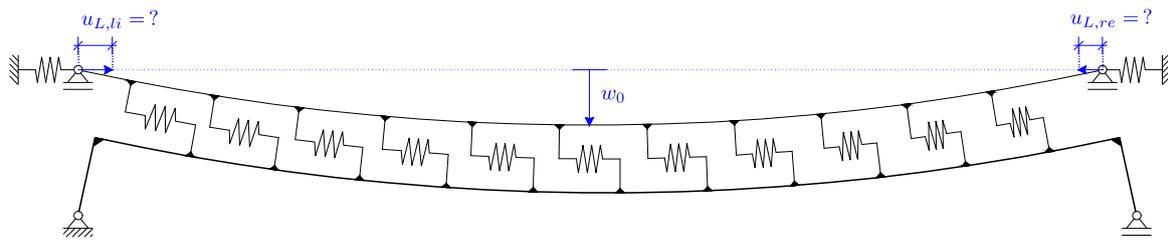


Abb. 3.8: Verformte Lage bei eingprägter Durchbiegung w_0

der Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System, beispielsweise mit einer zur Biegelinie zugehörigen sinusförmigen Ersatzlast, resultieren nur vertikale Auflagerkräfte, siehe Exkurs. Die Berechnung muss sich also auf die verformte Lage beziehen, die aber im Vorhinein unbekannt ist. Wie in Abbildung 3.8 ersichtlich, ist die Größe der Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ und $u_{L,re}$ zunächst unbekannt. Der Verschiebungsansatz für $u(x)$ aus Gleichung (3.6) ist somit nicht mehr gültig.

Anmerkung: Der Indizes "L" steht für "Lager", "re, li" für jeweils "rechts" und "links".

Exkurs: Koppelbalken mit dem Kraftgrößenverfahren nach Stabtheorie 1. Ordnung

Gegeben ist das in Abbildung 3.9 ersichtliche statische System, bestehend aus zwei Biegestäben mit Biegesteifigkeit EI und Länge L , die durch einen Starrstab ($EA = \infty$) gekoppelt sind.

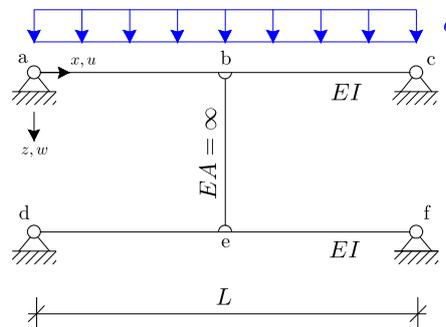


Abb. 3.9: Statisches System (Quelle: [29], S. 18, Fig.1.27, überarbeitet)

Das System ist dreifach statisch unbestimmt, da die neun Freiheitsgrade in der Ebene (drei pro Stab) durch zwölf Auflager- bzw. Verbindungswertigkeiten (2 pro festes Auflager, 2 pro Gelenk) gehalten sind. Mit „Wertigkeit“ ist hier eine Kraft bzw. ein Moment gemeint, das bei einer Verschiebung bzw. Verdrehung entlang des zugehörigen energetisch äquivalenten Freiheitsgrades induziert wird, um das Systemgleichgewicht zu gewährleisten. Das günstigste Grundsystem ergibt sich durch Entfernung des Starrstabs. Trotz Freistellung von vier Verbindungswertigkeiten (eine Translation in x - und z - Richtung pro Stabknoten) besteht lediglich eine statisch unbestimmte Unbekannte, die axiale Kraft X . Das gilt aufgrund des fachwerkartigen Charakters des Starrstabs, der keine Belastung normal zur Stabachse erfährt, sondern nur an den Stabknoten und somit lediglich einer axialen Belastung ausgesetzt ist, siehe

Abbildung 3.10:

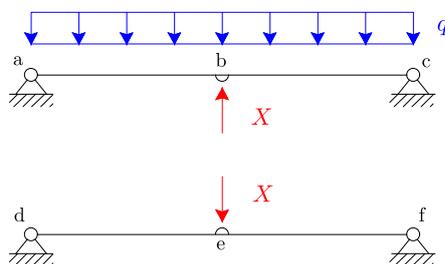


Abb. 3.10: Statisch bestimmtes Grundsystem: Entfernung des Starrstabs
(Quelle: [29], S. 19, Fig.1.29, überarbeitet)

Da der Verbindungsstab b-e dehnstarr ist, müssen die Biegelinien der beiden Biegestäbe identisch sein:

$$w_b = w_e \quad (3.13)$$

Wie in Abbildung 3.10 ersichtlich, fließt in der Durchbiegung an der Stelle „b“ w_b sowohl die Unbekannte X , als auch die äußere Belastung q ein. Die Durchbiegung an der Stelle „e“ w_e hängt hingegen nur von der Unbekannten X ab. Es gilt:

$$w_b = w_b(q) + w_b(X) \quad (3.14)$$

$$w_b = w_e(X) \quad (3.15)$$

$$\rightarrow w_e(X) = w_b(q) + w_b(X) \quad (3.16)$$

Die Formel zur Ermittlung der maximalen Durchbiegung w_{max} eines gelenkig gelagertes Einfeldträgers unter Einzellast q bzw. Gleichlast X lauten [20, S. 345]:

$$w_{max}(X) = \frac{X L^3}{48 EI} \quad (3.17)$$

$$w_{max}(q) = \frac{5 q L^4}{384 EI} \quad (3.18)$$

Einsetzen der Gleichungen (3.17) und (3.18) in (3.16) ergibt die Bestimmungsgleichung für die axiale Kraft X :

$$-\frac{X L^3}{48 EI} = -\frac{5 q L^4}{384 EI} + \frac{X L^3}{48 EI} \rightarrow X = \frac{5}{16} q L \quad (3.19)$$

Aus der Superposition der Momentenlinien (Abbildung 3.11) der beiden Biegebalken ergibt sich die Momentenlinie für das statisch unbestimmte System der gekoppelten Balken:

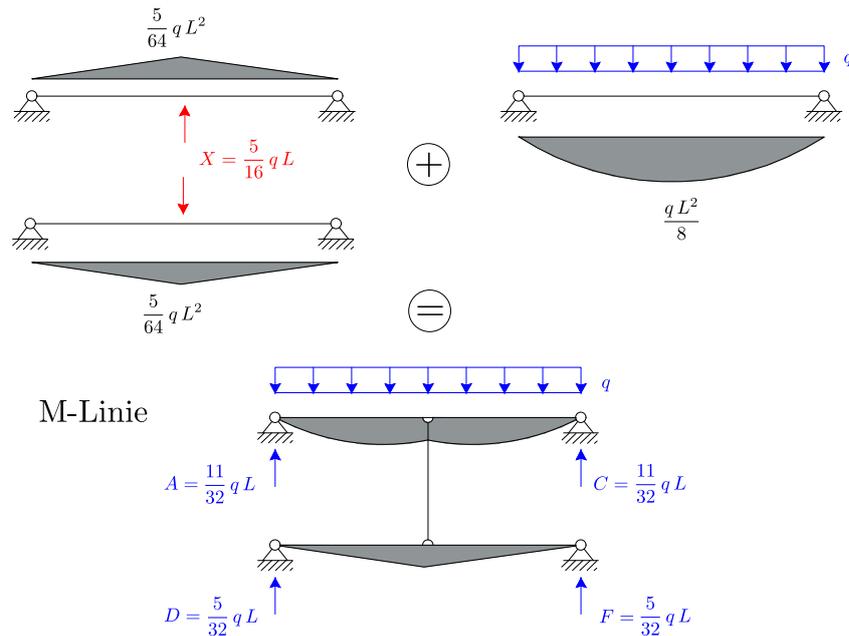


Abb. 3.11: Momentenlinie und Auflagerreaktionen (Quelle [29], S. 20, Fig.1.31, überarbeitet)

Die vertikalen Auflagerreaktionen A , C , D und F an der Stelle „a“ und „c“ ergeben sich, unter Berücksichtigung von (3.19) zu:

$$A = C = \frac{qL}{2} - \frac{X}{2} = \frac{qL}{2} - \frac{5qL}{32} = \frac{11}{32}qL \quad (3.20)$$

$$D = F = \frac{X}{2} = \frac{5qL}{32} \quad (3.21)$$

Die volle Belastung wird durch die vertikale Auflagerreaktionen abgetragen. Wie in Abbildung 3 ersichtlich, ergibt das Gleichgewicht in horizontaler Richtung ohnehin keine Kraftgröße. Es lässt sich somit beweisen, dass die Berechnung des Koppelbalkens nach Theorie 1. Ordnung keine Informationen über die horizontalen Auflagerreaktionen liefert.

3.1.4 Iterative Ermittlung der Auflagerreaktionen des nachgiebig gelagerten Koppelbalkens

Im ersten Schritt für die iterative Ermittlung der Auflagerreaktionen des nachgiebig gelagerten Koppelbalkens muss eine geometrische Imperfektion angebracht werden. Dies entspricht dem im Abschnitt 3.1.2 bereits hergeleiteten Fall des fest gelagerten Oberbaustabes. Bei einer Durchbiegung in Feldmitte der Größe w_0 ergibt sich an der Stelle der Schwerlinie über dem festen Auflager, unter Vernachlässigung der Schubdeformationen, ein Querschnittsdrehwinkel φ von:

$$\varphi(x=0, t) = \frac{\partial w(x=0, t)}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left[w_0 \sin \left(\frac{\pi \cdot 0}{L} \right) \right] \sin(\Omega_1 t) = w_0 \frac{\pi}{L} \sin(\Omega_1 t) \quad (3.22)$$

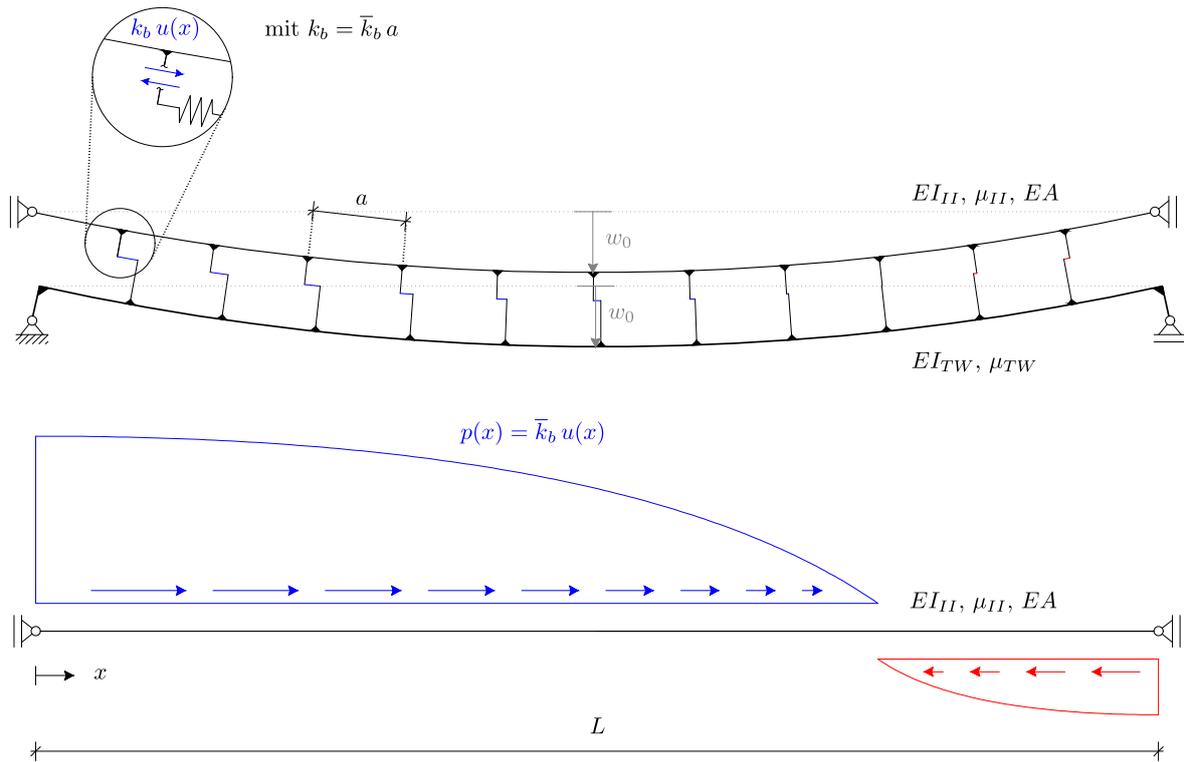


Abb. 3.12: Isolierung des fest gelagerten Oberbaustabes und Belastungsfunktion $p(x)$

Für kleine Verschiebungsableitungen $dw(x)/dx \ll 0$ kann die gekrümmte Verschiebung an der Stelle der Schwerlinie über dem Auflager durch alleinige Betrachtung des horizontalen Anteils in x -Richtung

$$u(x = 0, t) = w_0 \frac{\pi}{L} (e_L + r) \sin(\Omega_1 t) \quad (3.23)$$

linearisiert werden. Die Verschiebungsfunktionen aus den Gleichungen (3.5) und (3.6), $w(x, t)$ und $u(x, t)$, werden daher an dieser Stelle unverändert angewendet. Zur Übersichtlichkeit wird im Weiteren die Zeitvariable bei $t = n \frac{\pi}{2} (2\pi n + \pi) n \in \mathbb{Z}$ fixiert, um die Funktion $q(t) = \sin(\Omega_1 t)$ zu maximieren. Das heißt es werden die Amplituden betrachtet, unter der Voraussetzung, dass keine Phasenverschiebung zwischen den Verläufen vorhanden ist. Für $q(t) = 1$ werden die maximalen Verschiebungen im Zeitbereich erhalten. Unter Annahme einer linearen Federkonstanten pro Laufmeter \bar{k}_b für die kontinuierliche Kopplung in x -Richtung zwischen Oberbau- bzw. Tragwerkstab nach Abschnitt 2.3 ergibt sich durch die Skalierung der Verschiebungsfunktion $u(x)$ mit \bar{k}_b eine veränderliche Gleichlast $p(x)$, welche den Schienenstab belastet. Diese Belastungsfunktion $p(x)$ folgt somit dem Verlauf der hinterlegten horizontalen Relativverschiebungsfunktion $u(x)$:

$$p(x) = \bar{k}_b u(x) = \bar{k}_b \frac{w_0 \pi}{L} \left(e_L + r \cos \frac{\pi x}{L} \right) \quad (3.24)$$

Da im Sinne der Problemstellung nur die horizontalen Auflagerkräfte von Interesse sind, wird nun der Oberbaustab isoliert und nach Stabtheorie erster Ordnung weiter analysiert, siehe Abbildung 3.12. Der als Euler-Bernoulli Balken modellierte Oberbaustab ist der veränderlichen Gleichlast $p(x)$ in x -Richtung ausgesetzt. Im Rahmen einer Diskretisierung für eine Finite Elemente Berechnung muss für die Federkonstanten das Produkt der kontinuierlichen bezogenen

Federsteifigkeit \bar{k}_b mit dem Feldabstand zwischen den diskreten Federn a herangezogen werden. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass a nicht dem Schwellenabstand e_s entspricht. Je kleiner a gewählt wird, desto geringer ist der Diskretisierungsfehler. Da es sich um ein ebenes Problem handelt, weist der Stab drei Starrkörperverschiebungsfreiheitsgrade auf. An beiden Enden ist der Stab jedoch sowohl in vertikaler, als auch in horizontaler Richtung gehalten. Die kinematischen Randbedingungen lauten:

$$u(x=0) = \frac{F_{L,li}}{k_{vor}} \quad (3.25)$$

$$u(x=L) = \frac{F_{L,re}}{k_{vor}} \quad (3.26)$$

$$w(x=0) = w(x=L) = 0 \quad (3.27)$$

Die drei Freiheitsgrade werden durch vier Randbedingungen fixiert. Das statische System ist daher einfach statisch unbestimmt.

Zur Ermittlung der Auflagerkräfte eines beidseitig elastisch gelagerten Stabes mit Länge L und Dehnsteifigkeit EA , wie in Abbildung 3.13 dargestellt, kann aufgrund des geringen Grades der statischen Unbestimmtheit (=1) das Kraftgrößenverfahren herangezogen werden. Um die vier unbekanntes Lagergrößen (zwei horizontale Auflagerreaktionen $F_{L,li}$, $F_{L,re}$ und zwei vertikale Auflagerreaktionen $V_{L,li}$, $V_{L,re}$) bestimmen zu können, sind die drei zur Verfügung stehenden Gleichungen, die Gleichgewichtsbedingungen, nicht ausreichend [10, S.183]. Gesucht ist also eine weitere Gleichung, die sogenannte Verformungs- oder Formänderungsbedingung. Es wird zuerst eine Lagerbindung aufgelöst, beispielsweise durch Entfernung der rechten Feder k_{vor} , und dadurch ein statisch bestimmtes Grundsystem ermittelt. Die freigesetzte Auflagerreaktion wird gleich Null gesetzt. Nach Aufbringung der Belastung $p(x)$ auf das statisch bestimmte Grundsystem (Zustand 0) werden die Zustandslinie der Normalkraft $N_0(x)$ und die horizontalen Auflagerreaktionen $F_{L,li,0}$, $F_{L,re,0}$ im Grundsystem ermittelt:

$$\begin{aligned} N_0(x) &= \int_0^L p(x) dx - \int p(x) dx \\ &= \int_0^L k_b u(x) dx - \int k_b u(x) dx \\ &= w_0 \frac{\pi}{L} k_b \left\{ \int_0^L \left[e_L + r \cos \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right] dx + \int \left[e_L + r \cos \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right] dx \right\} \\ &= w_0 \frac{\pi}{L} k_b \left\{ \left[e_L x + \frac{r L}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right]_0^L + e_L x + \frac{r L}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) + C \right\} \\ &= w_0 \frac{\pi}{L} k_b \left\{ \left[e_L L + \frac{r L}{\pi} \sin \left(\frac{\pi L}{L} \right) - e_L \cdot 0 + \frac{r L}{\pi} \sin \left(\frac{\pi \cdot 0}{L} \right) \right] + e_L x + \frac{r L}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) + C \right\} \\ &= w_0 \frac{\pi}{L} k_b \left[e_L L + e_L x + \frac{r L}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) + C \right] \\ &= w_0 \pi k_b e_L - w_0 \frac{\pi}{L} k_b \left[e_L x + \frac{r L}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) + w_0 \frac{\pi}{L} k_b C \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die Integrationskonstante C in (3.28) kann durch Anpassung von $N_0(x)$ an die Randbedingung bei $x = L$ (3.25) ermittelt werden:

$$\begin{aligned} N_0(x=L) = 0 &= w_0 \pi k_b e_L - w_0 \frac{\pi}{L} k_b \left[e_L L + \frac{r L}{\pi} \sin \left(\frac{\pi L}{L} \right) \right] + w_0 \frac{\pi}{L} k_b C \\ 0 &= w_0 \pi k_b e_L - w_0 \pi k_b e_L + w_0 \frac{\pi}{L} k_b C \\ &\rightarrow C = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Einsetzen von (3.29) in (3.28) ergibt den Ausdruck für $N_0(x)$:

$$N_0(x) = w_0 \pi k_b \left[e_L - \frac{e_L x}{L} - \frac{r}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right] \quad (3.30)$$

Nun wird die äußere Belastung $p(x)$ entfernt und eine virtuelle Kraft der Größe „1“ in x -Richtung an der Stelle der freigesetzten Bindung gesetzt, siehe Abbildung 3.13 Die Normalkraft im Zustand 1 ist somit über die gesamte Länge konstant:

$$N_1 = 1 \quad (3.31)$$

Die Formänderungsbedingung am realen System lautet:

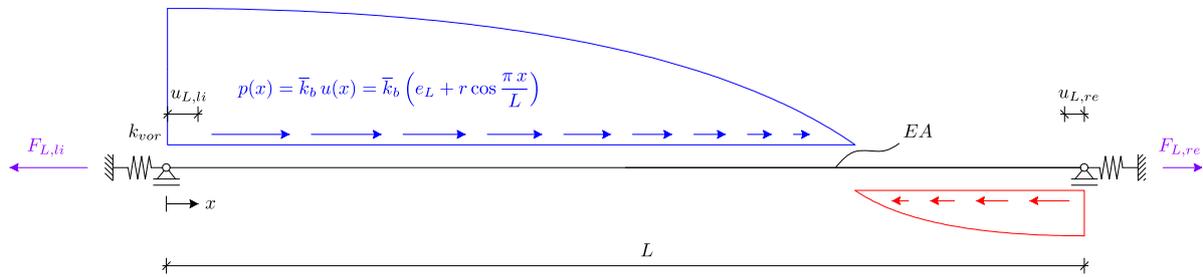
$$u(x=L) = \frac{F_{L,rc,0}}{k_{vor}} \quad (3.32)$$

Die Summe der Weggrößen aus der äußeren Belastung δ_{10} und der Auflagerverschiebung $\delta_{11} \cdot F$ bei der gelösten Bindung muss die Formänderungsbedingung (3.32) erfüllen [10, S. 187]. Die Nachgiebigkeiten δ_{ij} werden mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte berechnet. Aufgrund der elastischen Lagerung setzt sich die Nachgiebigkeit δ_{10} im Zustand 0 aus einem Anteil $\delta_{10,Stab}$ zufolge Stablängsverzerrung und einem Anteil $\delta_{10,Feder}$ zufolge Federweg am Auflager zusammen:

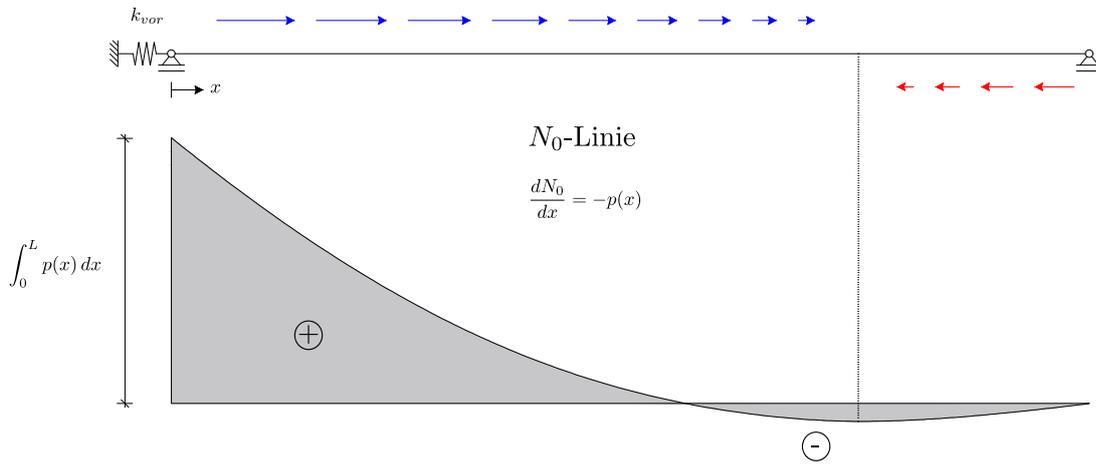
$$\delta_{10} = \delta_{10,Stab} + \delta_{10,Feder} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \delta_{10,Stab} &= \int_0^L \frac{N_0(x) N_1}{EA} dx \\ &= \frac{w_0 \pi k_b}{EA} \int_0^L \left[e_L - \frac{e_L x}{L} - \frac{r}{\pi} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &= \frac{w_0 \pi k_b}{EA} \left[e_L x - \frac{e_L x^2}{2L} + \frac{r L}{\pi^2} \cos \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right]_0^L \\ &= \frac{w_0 \pi k_b}{EA} \left[\left(e_L L - \frac{e_L L}{2} + \frac{r L}{\pi^2} \cos \pi \right) - \left(0 - 0 + \frac{r L}{\pi^2} \cos 0 \right) \right] \\ &= \frac{w_0 \pi k_b}{EA} \left[\left(e_L L - \frac{e_L L}{2} - \frac{r L}{\pi^2} - \frac{r L}{\pi^2} \right) \right] \\ &= \frac{w_0 \pi k_b L}{EA} \left(\frac{e_L}{2} - \frac{2r}{\pi^2} \right) = \frac{w_0 \pi k_b L}{2EA} \left(e_L - \frac{4r}{\pi^2} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\delta_{10,Feder} = \frac{N_0(x=0)}{k_{vor}} = \frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}} \quad (3.35)$$



Zustand 0



Zustand 1

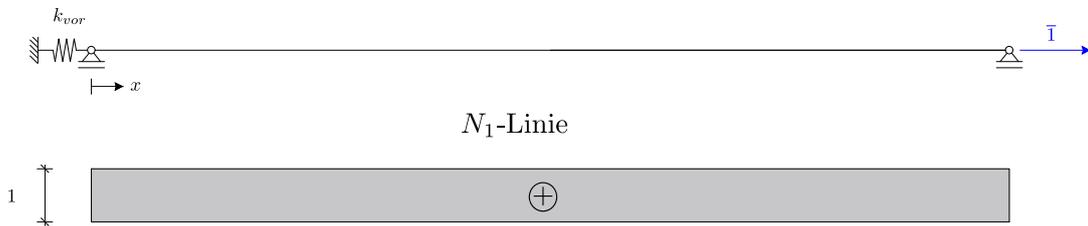


Abb. 3.13: Kraftgrößenverfahren mit Entfernung der Feder am rechten Stabende: statisch bestimmtes Grundsystem (Zustand 0) und virtuelles System (Zustand 1) mit zugehörigen Normalkraftverläufen

Die Summe von Gleichung (3.34) und Gleichung (3.35) ergibt die Nachgiebigkeit δ_{10} an der Stelle $x = 0$ für das statisch bestimmte Grundsystem unter äußerer Belastung (Zustand 0):

$$\delta_{10} = \frac{w_0 \pi k_b L}{2EA} \left(e_L - \frac{4r}{\pi^2} \right) + \frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}} \quad (3.36)$$

Analog dazu errechnet sich die Nachgiebigkeit δ_{11} im Zustand 1:

$$\delta_{11} = \int_0^L \frac{N_1^2}{EA} dx + \frac{N_1}{k_{vor}} = \frac{L}{EA} + \frac{1}{k_{vor}} \quad (3.37)$$

Die gesuchte Auflagerkraft $F_{L,re,0}$ und die Auflagerverschiebung $u(x = L)$ ergibt sich somit zu:

$$F_{L,re} = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11} + \frac{1}{k_{vor}}} \quad (3.38)$$

Einsetzen von (3.36) und (3.37) in (3.38) liefert die rechte Auflagerverschiebung $u_{L,re,0}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} u_{L,re,0} &= \frac{-\frac{w_0 \pi k_b L}{2EA} \left(e_L - \frac{4r}{\pi^2} \right) - \frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}}}{\frac{k_{vor} L}{EA} + 2} \\ &= \frac{-\frac{w_0 \pi k_b L}{2EA} \left(e_L - \frac{4r}{\pi^2} \right) - \frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}}}{\frac{k_{vor} L + 2EA}{EA}} \\ &= -w_0 \pi k_b \left[\frac{L}{2EA} \left(e_L - \frac{4r}{\pi^2} + \frac{e_L}{k_{vor}} \right) \right] \frac{EA}{k_{vor} L + 2EA} \\ &= -w_0 \pi k_b \left[\frac{L EA}{2EA (k_{vor} L + 2EA)} \left(e_L - \frac{4r}{\pi^2} \right) + \frac{e_L EA}{k_{vor}^2 L + 2EA k_{vor}} \right] \\ &= -w_0 \pi k_b \left[\frac{L e_L}{2k_{vor} L + 4EA} - \frac{4L r}{2k_{vor} L \pi^2 + 4EA \pi^2} + \frac{e_L EA}{k_{vor}^2 L + 2EA k_{vor}} \right] \\ &= -w_0 \pi k_b \left[\frac{L e_L}{2k_{vor} L + 4EA} - \frac{4L r}{\pi (2k_{vor} L + 4EA)} + \frac{e_L EA}{0,5k_{vor} (2k_{vor} L + 4EA)} \right] \\ &= \frac{-w_0 \pi k_b L}{2(k_{vor} L + 2EA)} \left(e_L + \frac{4r}{\pi^2} - \frac{2e_L EA}{L k_{vor}} \right) \\ &= \frac{w_0 \pi k_b L e_L}{2(k_{vor} L + 2EA)} \left(\frac{4r}{\pi^2 e_L} - \frac{2EA}{L k_{vor}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Anmerkung: Der Index "0" steht für den fest gelagerten Fall, welcher dem 0-ten Iterationsschritt entspricht.

Aus der Superposition der Ergebnisse im Zustand 0 und Zustand 1 folgt die linke Auflagerverschiebung $u_{L,li,0}$ zu:

$$\begin{aligned} u_{L,li,0} &= \frac{F_{L,li}}{k_{vor}} = \frac{F_{L,re} + N_0(x=0)}{k_{vor}} = \frac{u_{L,re} + N_0(x=0)}{k_{vor}} \\ &= u_{L,re,0} + \frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.1.5 Iteration: Ermittlung der horizontalen Auflagerreaktionen

In Abbildung 3.8 wird ersichtlich, dass wenn das elastische Auflager auf der linken Seite nachgibt, die horizontale Relativverschiebung $u(x=0)$ zwischen Rahmenecke und Gelenk kleiner wird. Die horizontale Relativverschiebung ist direkt proportional zur Belastung $p(x)$ auf dem Oberbaustab, siehe Gleichung (3.24). Eine Reduktion von $p(x)$ ruft geringere Auflagerkräfte und somit auch geringere Auflagerverschiebungen hervor. Im Rahmen einer iterativen Berechnung muss also die im Vorhinein unbekannte Belastungsfunktion $p(x)$ verringert werden. Da $p(x)$ allerdings in den Ausdrücken für die Auflagerverschiebungen (3.40) und (3.39) nicht explizit vorkommt, kann dies durch eine Verringerung der Auflagerexzentrizität e_L oder des Schwerlinienabstands r zwischen Oberbau- und Tragwerkstab erfolgen. Wird die Auflagerexzentrizität e_L modifiziert, wie in Abbildung 3.14 dargestellt, ergibt sich die erste Ersatzauflagerexzentrizität $e_{L,1}$ zu:

$$e_{L,1} = e_L - \frac{u_{L,li,0} L}{w_0 \pi} \quad (3.41)$$

Nach Gleichung (3.40) kann nun eine neue Auflagerverschiebung $u_{L,li,1}$ mit $e_{L,1}$ ermittelt werden:

$$u_{L,li,1} = u_{L,re,1} + \frac{w_0 \pi k_b e_{L,1}}{k_{vor}} \quad (3.42)$$

Die zum ersten Iterationsschritt zugehörige Auflagerverschiebung $u_{L,0}$ führt im ersten Iterationsschritt zu einer Unterschätzung der daraus folgenden Auflagerexzentrizität $e_{L,1}$. Dementsprechend ist die daraus resultierende Auflagerverschiebung $u_{L,1}$ auch kleiner als die tatsächliche. Damit die Lösung konvergiert, muss die Auflagerexzentrizität im zweiten Iterationsschritt $e_{L,2}$ daher wieder ansteigen. Wie in Gleichung (3.41) ersichtlich, besteht zwischen Auflagerexzentrizität e_L und Horizontalverschiebung u_L eine lineare, aber monoton fallende Beziehung: Eine Vergrößerung von u_L führt zu einer Verringerung von $e_{L,1}$. Die aus $e_{L,1}$ resultierende Verschiebung $u_{L,1}$ führt wiederum zu einem Anstieg der Auflagerexzentrizität $e_{L,2}$ und so weiter, siehe Abbildung 3.14. Aufgrund der Linearität ist die absolute Zuwachsrate zwischen den einzelnen Iterationsschritten konstant. Das Endergebnis ergibt sich aus der Auflagerverschiebung für den fest gelagerten Fall $u_{L,0}$ und der Summe der Inkremente mit Berücksichtigung des Vorzeichens.

$$u_L = u_{L,0} + \Delta u_{L,1} + \Delta u_{L,2} + \Delta u_{L,3} + \dots \quad (3.43)$$

Jedes Inkrement kann aus dem Vorhergehenden ermittelt werden [20, S. 343]:

$$\Delta u_{L,n+1} = \frac{\Delta u_{L,n}^2}{\Delta u_{L,n-1}} \quad (3.44)$$

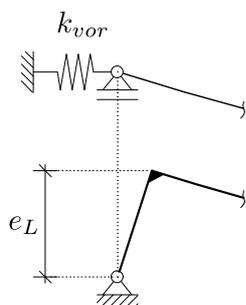
Einsetzen der Inkremente (3.44) in (3.43) und Ausklammern von $u_{L,0}$ ergibt:

$$u_L = \left[1 + \left(\frac{\Delta u_{L,1}}{u_{L,0}} \right) + \left(\frac{\Delta u_{L,1}}{u_{L,0}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta u_{L,1}}{u_{L,0}} \right)^3 + \dots \right] \quad (3.45)$$

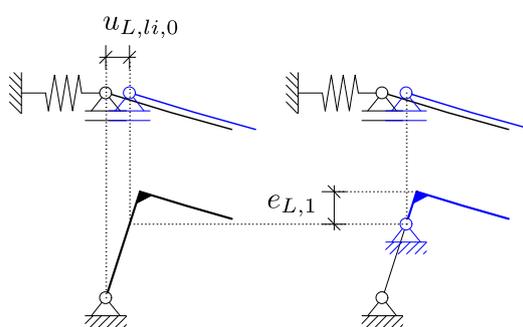
Das Vorzeichen der Inkremente wechselt mit jedem Schritt $n+1$. Um das Risiko von Rechenfehlern zu reduzieren, bietet es sich an, nur die Beträge der Inkremente zu betrachten und das negative Vorzeichen herauszufiltern:

$$u_L = \left[1 + \left(-\frac{\Delta u_{L,1}}{u_{L,0}} \right) + \left(-\frac{\Delta u_{L,1}}{u_{L,0}} \right)^2 + \left(-\frac{\Delta u_{L,1}}{u_{L,0}} \right)^3 + \dots \right] \quad (3.46)$$

Imperfektion

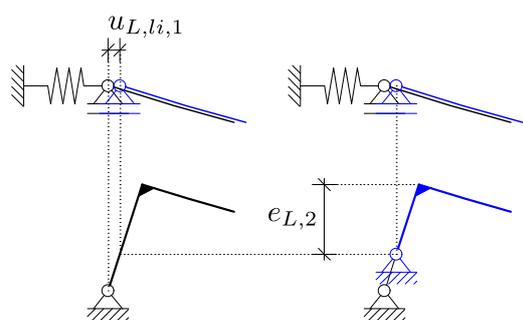


$$u_{L,li,0} = \frac{w_0 \pi k_b L e_L}{2 (k_{vor} L + 2 EA)} \left(\frac{4r}{\pi^2 e_L} - \frac{2 EA}{L k_{vor}} - 1 \right) + \frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}}$$



1. Iterationsschritt

$$u_{L,li,1} = \frac{w_0 \pi k_b L e_{L,1}}{2 (k_{vor} L + 2 EA)} \left(\frac{4r}{\pi^2 e_{L,1}} - \frac{2 EA}{L k_{vor}} - 1 \right) + \frac{w_0 \pi k_b e_{L,1}}{k_{vor}}$$



2. Iterationsschritt

$$u_{L,li,2} = \dots$$

Abb. 3.14: Iterationsverfahren zur Ermittlung der linken Auflagerverschiebung $u_{L,li}$

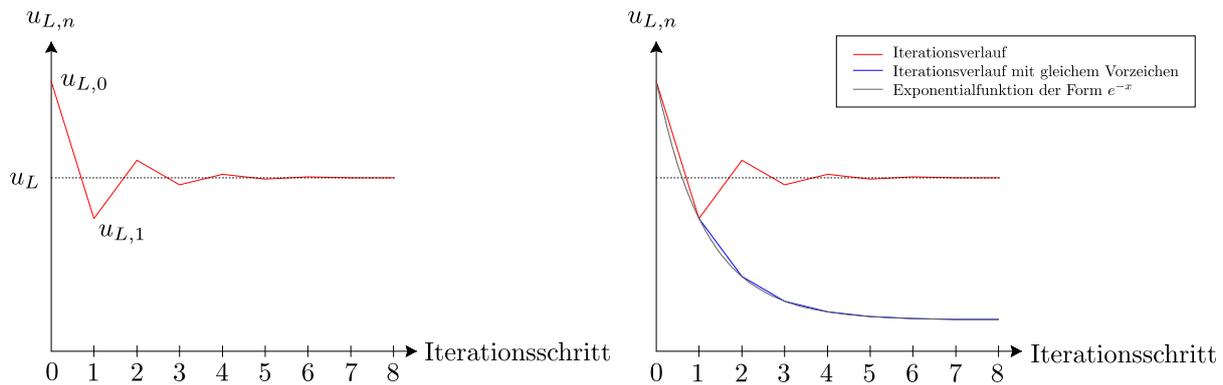


Abb. 3.15: Beispielverlauf der Iteration einer Auflagerverschiebung u_L (links) und Beweis der konstanten Zuwachsrates (rechts)

Es ist aus Gleichung (3.46) zu erkennen, dass es sich um eine alternierende geometrische Reihe handelt, vom Typ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-a)^n \quad (3.47)$$

Die Reihe nach Gleichung (3.47) konvergiert für $|a| < 1$. Aus Gleichung (3.47) und Gleichung (3.46) folgt eine geschlossene Formel zur genauen Ermittlung der Auflagerverschiebung u_L :

$$u_L = u_{L,0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\Delta u_{L,1}}{u_{L,0}} \right)^n = u_{L,0} \frac{1}{1 + \frac{\Delta u_L}{u_{L,0}}} \quad (3.48)$$

mit:

$$\Delta u_L = |u_{L,1} - u_{L,0}| \quad (3.49)$$

Es handelt sich hierbei um eine alternierende geometrische Reihe, welche exponentiell gegen u_L konvergiert. Wie in Abbildung 3.15 ersichtlich, kann der Beweis der konstanten Zuwachsrates grafisch erfolgen. Die Neigung (= Rate oder Wachstumsfaktor) wird stets abklingend dargestellt, bzw. mit gleichem Vorzeichen. Der Verlauf der geometrischen Reihe, in blau, entspricht also einer diskreten Form des exponentiellen Abklingens. Die Exponentialfunktion, in grau dargestellt, zeichnet sich durch die Konstanz ihrer Ableitung $\frac{de^x}{dx} = e^x$ aus.

Gleichung (3.48) zur Ermittlung der Auflagerverschiebung für das Koppelbalkenmodell mit elastisch gelagertem Oberbaubalken setzt lediglich die Berechnung der Auflagerkraft für das fest gelagerte System $u_{L,0}$ und des ersten Inkrements Δu_L (nur ein Iterationsschritt) voraus, um das genaue Ergebnis zu erhalten. Dies führt zu einer erheblichen Verbesserung der Recheneffizienz:

$$u_{L,li} = u_{L,li,0} \frac{1}{1 + \frac{\Delta u_{L,li}}{u_{L,li,0}}} \quad (3.50)$$

$$u_{L,re} = u_{L,re,0} \frac{1}{1 + \frac{\Delta u_{L,re}}{u_{L,re,0}}} \quad (3.51)$$

Die Ermittlung der Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ und $u_{L,re}$ bzw. die Ermittlung der Auflagerreaktionen $F_{L,li}$ und $F_{L,re}$ ist in weiterer Folge von grundlegender Bedeutung. Um die Vorlandbereiche berücksichtigen zu können, müssen die Schienenkräfte am Übergang zur Brücke bekannt sein

(im nächsten Kapitel 3.2 ausführlich beschrieben). Die Schienenkräfte entsprechen hierbei den Auflagerkräften $F_{L,li}$ und $F_{L,re}$. In Kapitel 4 wird außerdem das Koppelbalkenmodell um das nichtlineare Verhalten der Schotterfedersteifigkeit \bar{k}_b ergänzt. Die Bestimmung der nichtlinearen Vorlandsteifigkeiten $k_{vor,NL}$ setzt ebenfalls die Eingabe der Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ und $u_{L,re}$ voraus, siehe Kapitel 4.1.

3.2 Vorlandsystem

Das Vorlandsystem im Dammbereich kann als horizontal gebetteter Dehnstab mit Länge L_{vor} modelliert werden. Da es sich um die Fortführung des Oberbaubalkens aus dem Feldbereich handelt, vgl. Abschnitt 3.1.2, kann dieser erneut als Stab bestehend aus Schienen, Schwellen und dem dazwischen liegenden Schotter idealisiert werden. Wie in Abbildung 3.16(b) dargestellt, ist der Stab hier mit dem Untergrund durch eine kontinuierliche, horizontale Federbettung verbunden, die den Längsverschiebewiderstand des Schotters wiedergibt.

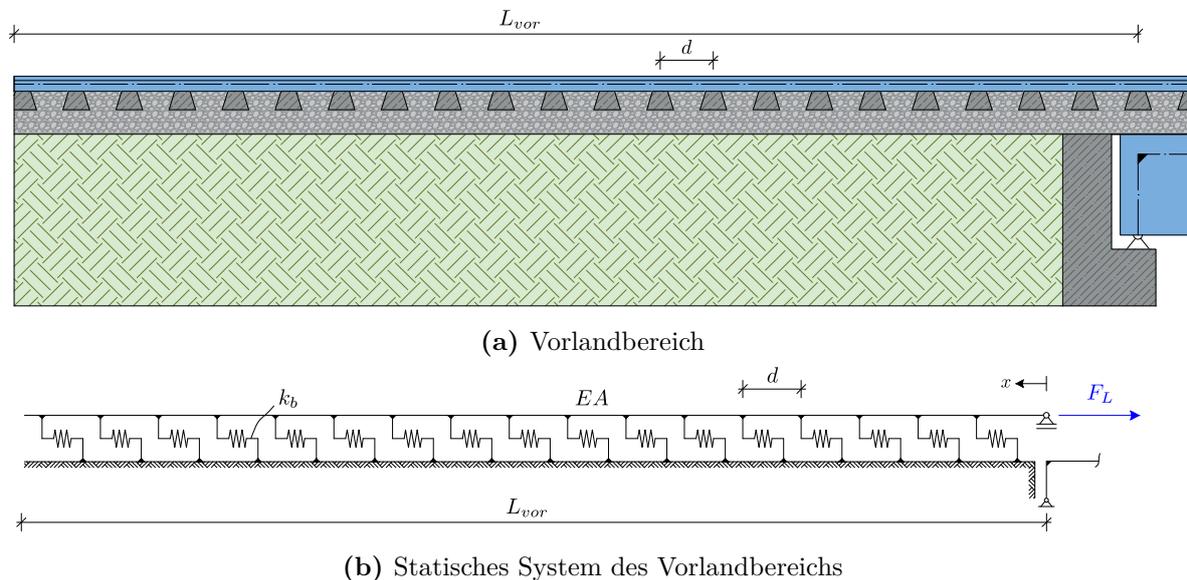


Abb. 3.16: Modellbildung des Vorlandbereichs

Die Längsverschiebung in x -Richtung stellt den einzigen Freiheitsgrad des Systems dar. Das Vorland kann somit als System mit einem Freiheitsgrad betrachtet werden. Die Wahl der erforderlichen Vorlandlänge L_{vor} ist von der Methode zur Behandlung des statischen Systems abhängig und wird in den weiteren Unterkapiteln ausführlich diskutiert.

3.2.1 Vorlandsystem als ungedämpftes Einfreiheitsgradsystem

Die Längsverschiebung ist am Übergang zwischen Brücke und Dammbereich maximal und klingt mit zunehmendem Abstand vom Auflager ab. Aufgrund der günstigen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen hinsichtlich Differential- bzw. Integralrechnung wird ein Ritz'scher Ansatz für die zur Grundschwingungsform zugehörige Horizontalverformung $u^*(x, t)$ mithilfe einer Sinus-Funktion formuliert:

$$u(x, t) \cong u^*(x, t) = q(t) \phi(x) = q(t) \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2 L_{vor}} \right) \quad (3.52)$$

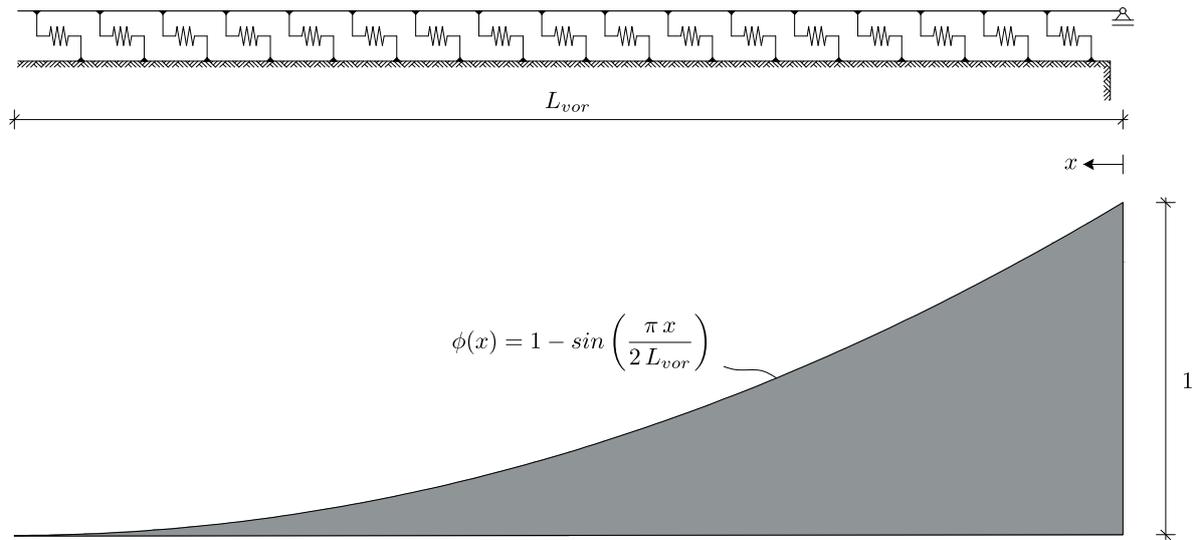


Abb. 3.17: Ritz'scher Ansatz: Eigenschwingungsform des Vorlandsystems

Die Zeitfunktion $q(t)$ in Gleichung (3.17) hängt von der Anregung ab. Bei der Betrachtung eines Gesamtsystems bestehend aus Brücke und Vorland lautet $q(t)$:

$$q(t) = \sin(\Omega_1 t) \quad (3.53)$$

wobei Ω_1 die Biegeeigenkreisfrequenz des Gesamtsystems darstellt. In Abschnitt 3.3 wird das Gesamtsystem ausführlich behandelt. Zur Überführung des Vorlandsystems in einen kinetisch und steifigkeitsäquivalenten Einmassenschwinger müssen zunächst die Ersatzmasse M_{vor}^* und die Ersatzsteifigkeit K_{vor}^* , analog zu Abschnitt 3.1.2, ermittelt werden. Die Ersatzmasse M_{vor}^* resultiert aus der Formulierung der kinetischen Energie T des beweglichen Systems:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho A \int_0^{L_{vor}} \dot{u}^*(x, t)^2 dx & (3.54) \\ &= \frac{1}{2} \rho A \dot{q}(t)^2 \int_0^{L_{vor}} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2 L_{vor}}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho A \dot{q}(t)^2 \left[\frac{-L_{vor} \sin \left(\frac{\pi x}{L_{vor}}\right) + 8 L_{vor} \cos \left(\frac{\pi x}{2 L_{vor}}\right) + 3 \pi x}{2 \pi} \right]_0^{L_{vor}} \\ &= \frac{1}{2} \rho A \dot{q}(t)^2 \left(\frac{3 \pi L_{vor}}{2 \pi} - \frac{8 L_{vor}}{2 \pi} \right) \\ &\rightarrow M_{vor}^* = \frac{1}{2} \rho A L_{vor} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) & (3.55) \end{aligned}$$

Durch Integration des Quadrats der Längsverzerrungen $\varepsilon = \frac{du(x)}{dx}$ über die Vorlandlänge kann die potentielle Energie aufgrund der Stablängenänderung ermittelt werden. Des Weiteren resultiert der Ausdruck für die Ersatzsteifigkeit infolge Längsverzerrungen $K_{vor,\varepsilon}^*$ im System:

$$U = \frac{1}{2} EA \int_0^{L_{vor}} \varepsilon^2 dx = \int_0^{L_{vor}} \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (3.56)$$

Ausgehend von (3.52) errechnet sich die Verschiebungsableitung $u'(x)$ zu:

$$u'(x) = q(t) \frac{\pi}{2L} \cos \frac{\pi x}{2L} \quad (3.57)$$

Einsetzen von (3.57) in (3.56) liefert:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &= \frac{1}{2} EA q(t)^2 \frac{\pi^2}{4L^2} \int_0^{L_{vor}} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{2L_{vor}} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} EA q(t)^2 \frac{\pi^2}{4L_{vor}^2} \left[\frac{L_{vor} \sin \frac{\pi x}{L_{vor}} + \pi x}{2\pi} \right]_0^L \\ &= \frac{1}{2} EA q(t)^2 \frac{\pi^2}{4L_{vor}^2} \left(\frac{L_{vor}}{2} - 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} EA \frac{\pi^2}{4L_{vor}^2} \frac{L_{vor}}{2} q(t)^2 \\ &\rightarrow K_{vor,\varepsilon}^* = EA \frac{\pi^2}{8L_{vor}} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Bei einer Systemverformung ist die Federbettung ebenfalls in der Lage, elastische Energie zu speichern und diese dann wieder in Form von mechanischer Arbeit abzugeben. Zur vollständigen Erfassung der potentiellen Energie U muss daher noch ein Anteil K_{vor,\bar{k}_b}^* für die Bettung \bar{k}_b formuliert werden:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \bar{k}_b \int_0^{L_{vor}} u(x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \bar{k}_b q(t)^2 \int_0^{L_{vor}} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2L_{vor}} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \bar{k}_b L_{vor} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) q(t)^2 \\ &\rightarrow K_{vor,\bar{k}_b}^* = \bar{k}_b L_{vor} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die Ersatzsteifigkeit setzt sich somit aus zwei Anteilen zusammen: $K_{vor,\varepsilon}^*$ und K_{vor,\bar{k}_b}^* . Aufsummieren der beiden Energieanteile aus Gleichung (3.60) und Gleichung (3.59) ergibt die Ersatzsteifigkeit K_{vor}^* für das gesamte Vorlandsystem:

$$K_{vor}^* = K_{vor,\varepsilon}^* + K_{vor,\bar{k}_b}^* = EA \frac{\pi^2}{8L_{vor}} + \bar{k}_b L_{vor} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \quad (3.61)$$

3.2.2 Rechenbeispiel - Vorlandsystem

Zur Quantifizierung und Überprüfung der im letzten Abschnitt ermittelten mechanischen Parameter M_{vor}^* , K_{vor}^* und C_{vor}^* wird an dieser Stelle ein Beispiel für eine Vorlandlänge von $L_{vor} = 40$ m gezeigt. Die Bestimmung der Ersatzmasse nach Gleichung (3.55) erfordert zunächst eine Abschätzung der Massenbelegung μ_{vor} . Zwei UIC 60 (60 E 1) Schienen wiegen je 60 kg/m mit einer Dehnsteifigkeit von $EA = 3220$ MN [21, S. 155]. Mit einem Schwellenabstand $d = 60$ cm und unter Annahme einer Spannbetonschwelle des Typs B70 [1] mit Masse $m_{B70} = 328$ kg ergibt sich eine Massenbelegung der Schwellen von $\mu_{B70} = 328/0,6 = 546,7$ kg/m. Der in Bewegung gesetzte Schotteranteil wird abschließend durch Abziehen des Schwellenvolumens vom Gesamtvolumen

innerhalb der Gleitfläche ermittelt. Die Schotterdichte wird mit $\rho_b = 1500 \text{ kg/m}^3$ angenommen, siehe Kapitel 2.

$$\mu_{vor} = \mu_{UIC60} + \mu_{B70} + \rho_b \left(A_{B70} - \frac{V_{B70}}{d} \right) \quad (3.62)$$

$$= 60,34 + 546,7 + 1500 \left(0,21 \cdot 2,60 - \frac{0,123}{0,6} \right) = 1179 \text{ kg/m} \quad (3.63)$$

Die Ersatzmasse M_{vor}^* und Ersatzsteifigkeit K_{vor}^* betragen laut Gleichung (3.55):

$$M_{vor}^* = 1179 \cdot 40 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) = 10694 \text{ kg}$$

$$K_{vor}^* = 3220000 \frac{\pi^2}{8 \cdot 40} + 10000 \cdot 40 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) = 190017 \text{ kN/m} \cong 190,0 \text{ kN/mm}$$

Die Eigenfrequenz des isolierten Vorlands als Masse-Feder-Modell lautet:

$$f_{vor} = \frac{\Omega_{vor}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{190 \cdot 10^6}{10694}} = 21,2 \text{ Hz} \quad (3.64)$$

3.2.3 Vorlandsteifigkeit mit dem Kraftgrößenverfahren

In Abschnitt 3.2.1 wurde, ausgehend von einem trigonometrischen Verschiebungsansatz des Gleisrostes, ein Ausdruck für die Ersatzfedersteifigkeit des Vorlandbereichs K_{vor}^* formuliert, siehe Gleichung (3.61). Dieser ist lediglich von der Dehnsteifigkeit der Schienen EA , von dem linearen Längsverschiebewiderstand mit Schotterfedersteifigkeit \bar{k}_b und von der gewählten Vorlandlänge L_{vor} abhängig. Für eine quantitative Ermittlung der Vorlandsteifigkeit (im Weiteren: k_{vor}) muss zunächst eine passende Vorlandlänge gesucht werden. Im Folgenden wird das Kraftgrößenverfahren herangezogen, um das statische System in Abbildung 3.16(b) zu untersuchen und einen Verlauf der Längsverschiebung zu berechnen.

In [3] und [4] wird von *Bigelow et al.* eine mögliche Vorgehensweise zur Ermittlung einer linearen Ersatzfedersteifigkeit k_{vor} vorgestellt. Es wird dabei von der bilinearen Federcharakteristik nach EN 1991-2 [26, S. 104] ausgegangen, siehe Kapitel 2.3, Abbildung 2.7(a). Das statische System besteht wiederum aus einem horizontal gebetteten Dehnstab, mit einer horizontalen Kopplung aus diskreten Federn im Schwellenabstand d , welche die horizontale Schubsteifigkeit des Schotterkörpers in der Gleitebene darstellt, siehe Abbildung 3.18. Hinsichtlich des Rechenaufwands hat die Annahme eines bilinearen Kraft-Verschiebungsverlaufes den großen Vorteil, dass die Federsteifigkeit für Relativverschiebungen u_0 am Auflager kleiner als 2 mm konstant ist. Unabhängig von der eingepprägten Horizontalverschiebung antworten also alle Vorlandfedern mit der gleichen Steifigkeit. Der Einfluss der Auflagerverschiebung bzw. der Auflagerkraft am Übergang zwischen Brücke und Dammbereich klingt mit dem Abstand vom Auflager ab, weil jede Feder einen gewissen Anteil der Normalkraft F_L aufnimmt und in den Boden abträgt. Durch alleinige Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma H = 0$ in x -Richtung kann die Aufteilung der Normalkraft in den Federn nicht ermittelt werden.

Bei Diskretisierung der Vorlandlänge L_{vor} mit n Federn handelt es sich um ein $(n - 1)$ -fach statisch unbestimmtes System. Mit dem Kraftgrößenverfahren können die Federkräfte und der Horizontalverschiebungsverlauf $u(x)$ analytisch ermittelt werden. Hinsichtlich der Auswahl des statisch bestimmten Grundsystems bieten sich verschiedene Varianten an. In *Bigelow et al.* [3] wird nur die letzte Feder n im Grundsystem gelassen - **Variante A**. Alternativ dazu kann nur die

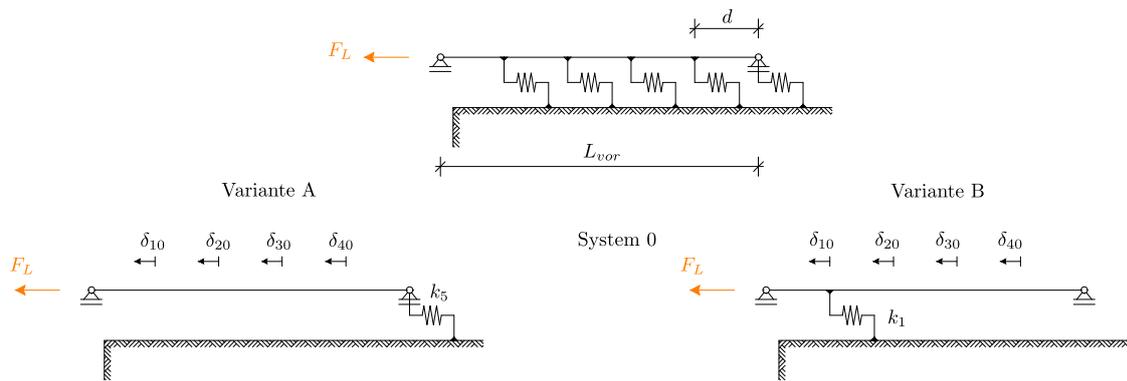


Abb. 3.18: Vorlandsystem mit 5 Federelementen. Statisch bestimmtes Grundsystem Variante A (Bigelow et al. [3]) und Variante B

erste Feder in unmittelbarer Auflagernähe gelassen werden - **Variante B**, siehe Abbildung 3.18. Für jede weitere Feder i muss ein getrenntes statisch bestimmtes System betrachtet werden. Mit Ausnahme des Grundsystems „0“ wird eine virtuelle horizontale Einzelkraft $\bar{F}_i = 1$ N an die i -te Feder aufgebracht. Hierbei ist anzumerken, dass zur korrekten Erfassung der Nachgiebigkeiten δ_{ij} die Einheitskraft \bar{F}_i nicht direkt auf den Dehnstab, sondern auf die hängende Feder j wirken muss. Die Nachgiebigkeiten ergeben sich einerseits aus der Dehnung der Feder des Grundsystems und der j -ten Feder, andererseits aus der Stabdehnung. Die einzelnen Federkräfte x_i werden durch das folgende lineare Gleichungssystem bestimmt:

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ & & \delta_{33} & \dots & \delta_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \text{symm.} & & & & \delta_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \\ -\delta_{30} \\ \vdots \\ -\delta_{n0} \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

Variante A: Wenn, wie im Modell von Bigelow et al. [3], das statisch bestimmte Grundsystem mit Beibehaltung der letzten Feder n gewählt wird, ergeben sich folgende Nachgiebigkeiten:

$$\delta_{ii} = \frac{(m - i) d}{EA} + \frac{2}{k_b} \quad (3.66)$$

$$\delta_{ij} = \frac{(n - \max(i, j)) d}{EA} + \frac{1}{k_b} \quad (3.67)$$

$$\delta_{i0} = \frac{-F(n - i) d}{EA} + \frac{F_L}{k_b} \quad (3.68)$$

Variante B: Die Auswahl der ersten Feder $i = 1$ für das Grundsystem führt zu einer einfacheren Formulierung der Nachgiebigkeiten:

$$\delta_{ii} = \frac{i d}{EA} + \frac{2}{k_b} \quad (3.69)$$

$$\delta_{ij} = \frac{\min(i, j) d}{EA} + \frac{1}{k_b} \quad (3.70)$$

$$\delta_{i0} = -\frac{F_L}{k_b} \quad (3.71)$$

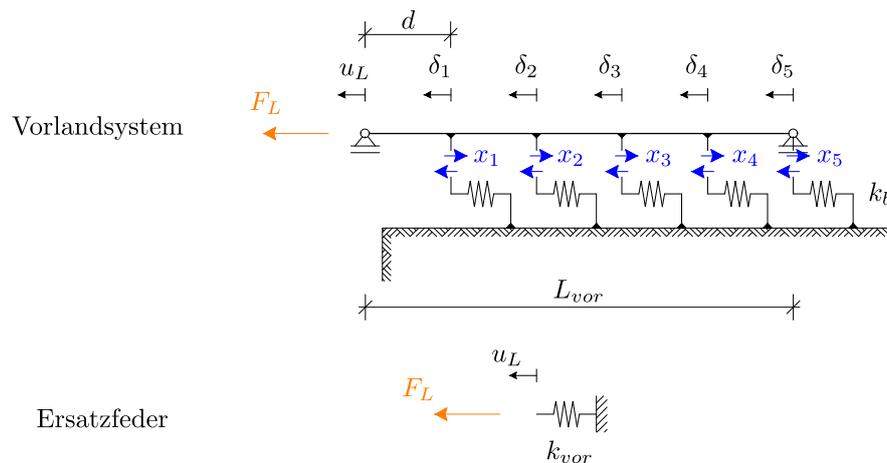


Abb. 3.19: Exemplarische Definition der Ersatzfeder für ein Vorlandssystem mit $n = 5$ und linearem Längsverschiebewiderstand

Aufgrund der Diskretisierung des Systems in n Felder ist der bezogene Längsverschiebewiderstand \bar{k}_b mit dem Schwellenabstand d zu skalieren $k_b = d \bar{k}_b$. Aus den Federkräften x_i in Gleichung (3.65) resultieren die Verschiebungen δ_i an jedem Freiheitsgrad i :

$$\delta_i = \frac{x_i}{k_b} \quad (3.72)$$

Die Auflagerverschiebung u_L am Übergang zwischen Brücke und Dammbereich (siehe Abbildung 3.19) errechnet sich aus der Summe der Verschiebung δ_i und der Stabdehnung im ersten, auflagenahen Feld:

$$u_L = \frac{x_1}{k_b} + \frac{F_L d}{EA} \quad (3.73)$$

Aus dem Vergleich des Verhältnisses zwischen Auflagerkraft und Auflagerverschiebung mit dem linearen Federgesetz ergibt sich somit die Ersatzsteifigkeit k_{vor} des Vorlands zu:

$$k_{vor} = \frac{F_L}{u_L} \quad (3.74)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Definition in Gleichung (3.74) nur unter Zugrundelegung eines linearen Längsverschiebewiderstands gilt. Nach EN 1991-2 [26] entspricht dies einer Schotterfedersteifigkeit von $\bar{k}_b = 10 \text{ kN/mm}$ pro m Gleis und einer maximalen Horizontalverschiebung zwischen Gleisrost und Untergrund von $u = 2 \text{ mm}$.

3.2.4 Vorlandsteifigkeit mit der Differentialgleichung des zentrisch belasteten Dehnstabs

Brandstetter hat in [6, S. 152-153] eine Formel zur Ermittlung der linearen Vorlandsteifigkeit k_{vor} hergeleitet. Dies erfolgt ohne auf das etwas umständliche Kraftgrößenverfahren zurückzugreifen. Durch Aufstellen des horizontalen Kräftegleichgewichts für ein infinitesimales Gleiselement ergibt sich die Differentialgleichung der Vorlandverschiebung:

$$u''(x) - \frac{\bar{k}_b}{EA} u(x) = 0 \quad (3.75)$$

Es handelt sich um eine lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Eine Funktion deren Ableitung unverändert bleibt, ist die Exponentialfunktion. Mithilfe des Exponentialansatzes $u(x) = C e^{\lambda x}$ ergibt sich somit die charakteristische Gleichung zu:

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= C e^{\lambda x} \\ u''(x) &= C \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned} \right\} \rightarrow C \lambda^2 e^{\lambda x} EA - \bar{k}_b C e^{\lambda x} = 0 \rightarrow \lambda^2 = \frac{\bar{k}_b}{EA} \quad (3.76)$$

Die gesuchte Verschiebungsfunktion $u(x)$ und deren Ableitungen müssen die Randbedingungen an den zwei Randstellen erfüllen:

$$u(x=0) = \frac{F_L}{k_{vor}} \quad (3.77)$$

$$u(x=\infty) = 0 \quad (3.78)$$

Anpassung der Randbedingungen an der Stelle $x=0$ liefert:

$$u(x=0) = \frac{F_L}{k_{vor}} = C \quad (3.79)$$

Unter Berücksichtigung der konstitutiven Beziehung der linearen Elastizitätstheorie für die Längsanteile lautet die erste Ableitung von Gleichung (3.76):

$$u'(x=0) = C \lambda e^{\lambda x} = \frac{F_L}{EA} \quad (3.80)$$

Einsetzen von λ nach Gleichung (3.76) in Gleichung (3.80) ergibt:

$$C \sqrt{\frac{\bar{k}_b}{EA}} e^0 = \frac{F_L}{EA} \rightarrow C = \frac{F_L}{EA} \sqrt{\frac{EA}{\bar{k}_b}} \quad (3.81)$$

Vergleich von Gleichung (3.79) und Gleichung (3.81) liefert:

$$k_{vor} = \sqrt{\bar{k}_b EA} \quad (3.82)$$

Bei Annahme einer linearen Schotterfedersteifigkeit $\bar{k}_b = 10 \text{ kN/mm}$ pro m Gleis kann die Vorlandsteifigkeit k_{vor} sehr leicht mit Gleichung (3.82) abgeschätzt werden. Der größte Vorteil gegenüber der Lösung nach *Bigelow et al.* [3] liegt darin, dass die Vorlandsteifigkeit k_{vor} unabhängig von der berücksichtigten Vorlandlänge L_{vor} ermittelt werden kann. Treten jedoch Relativverschiebungen u zwischen Gleisrost und Tragwerk größer als 2 mm auf, so ist \bar{k}_b gemäß EN 1991-2 [26] gleich Null, wie in Abbildung 2.6(a) dargestellt. Dies bedeutet, dass die Auswertung von Gleichung (3.82) nicht mehr möglich ist. In Kapitel 4 wird daher ein Ansatz hergeleitet, um die Vorlandsteifigkeit bei einem nichtlinearen Schotterfedersteifigkeitsverlauf nach Gleichung (2.2) (Kapitel 2) zu ermitteln.

3.2.5 Vergleich der Methoden zur Bestimmung der Vorlandsteifigkeit

In den vorherigen Kapiteln 3.2.1 bis 3.2.4 wurden drei verschiedene Alternativen zur rechnerischen Bestimmung der Vorlandsteifigkeit k_{vor} hergeleitet. Zuerst wurde K_{vor}^* durch Formulierung der potentiellen Energie T eines steifigkeitsäquivalenten Einmassenschwingers unter Annahme eines trigonometrischen Ritz'schen Ansatzes ermittelt. In Abschnitt 3.2.3 wurde k_{vor} durch Berechnung der Auflagerverschiebung mit dem Kraftgrößenverfahren an einem aus n Federelementen bestehenden diskreten Vorlandsystem berechnet. Abschließend wurde aus der analytischen Lösung der Differentialgleichung des Dehnstabes eine weitere Formel für k_{vor} hergeleitet, siehe Abschnitt 3.2.4. Im Zuge der Diskretisierung des Vorlandsystems laut Abbildung 3.16(b), spiegelt sich eine größere Vorlandlänge in einer höheren Anzahl an Federn wider. Die rechnerisch angesetzte Vorlandlänge L_{vor} hat daher einen entscheidenden Einfluss auf den Wert k_{vor} . Eine Auswertung der Vorlandsteifigkeit mit Variation der berücksichtigten Vorlandlänge zeigt deutlich, dass k_{vor} ab einer Vorlandlänge von rund $L_{vor} = 40$ m konstant bleibt, siehe Abbildung 3.20. Eine Vorlandlänge von $L_{vor} = 90$ m mit einem Schwellenabstand von $d = 0,6$ m führt zu 150 Federn im diskreten System für das Kraftgrößenverfahren. Bei Betrachtung eines linearen Längsverschiebewiderstandes \bar{k}_b nach EN 1991-2 [26], ist die Vorlandsteifigkeit k_{vor} mittels Kraftgrößenverfahren, analog zur Lösung mit der Differentialgleichung des Dehnstabes, von der Schienenkraft am Auflager F_L unabhängig.

Zusammenfassend wurden in den Abschnitten 3.2.1, 3.2.3 und 3.2.4 die folgenden drei Varianten gezeigt, um die Vorlandsteifigkeit K_{vor}^* bzw. k_{vor} für einen linearen Schotterfedersteifigkeitsverlauf \bar{k}_b (nach EN 1991-2 [26], $k_b = 10$ kN/mm pro m Gleis für $u < 2$ mm, siehe Abbildung 2.6(a)) zu ermitteln:

- Formulierung der potentiellen Energie T eines steifigkeitsäquivalenten Einmassenschwingers unter Annahme eines trigonometrischen Ritz'schen Ansatzes:

$$K_{vor}^*(L_{vor} = 40 \text{ m}) = 190,017 \text{ kN/mm}$$
 (s. Abschnitt 3.2.2)
- Kraftgrößenverfahren:

$$k_{vor}(n = 150, L_{vor} = 90 \text{ m}, EA = 3220 \text{ MN}, \bar{k}_b = 10 \text{ kN/mm/m}) = 179,444 \text{ kN/mm}$$
- Differentialgleichung des Dehnstabes:

$$k_{vor} = \sqrt{10 \cdot 3220} = 179,403 \text{ kN/mm}$$

Die Formulierung der Vorlandsteifigkeit K_{vor}^* auf Basis eines kinetisch- und steifigkeitsäquivalenten Masse-Feder-Systems offenbart im Vergleich zu den anderen Varianten abweichende Ergebnisse. Die Approximation mit einem trigonometrischen Ansatz und Vorlandlänge $L_{vor} = 40$ m stellt eine grobe Abschätzung des realen Vorlandverschiebungsverlaufs dar und erweist sich daher für Bemessungen als ungeeignet. Der große Vorteil liegt allerdings in seiner sehr einfachen mathematischen Formulierung. Zur Bestimmung des Beitrags des Vorlandbereichs auf die Systemsteifigkeit und -dämpfung bzw. zur Herleitung der Bestimmungsgleichungen für die Resonanzfrequenz und das Dämpfungsmaß des Gesamtsystems Brücke und Vorland wird dieser Ritz'sche Ansatz weiterhin in den nächsten Kapiteln herangezogen.

Die Lösung mit dem Kraftgrößenverfahren nach *Bigelow et al.* [3] führt mit einem Diskretisierungsfehler von $(179,444 - 179,403)/179,403 = 0,023$ % nahezu zu identischen Ergebnissen wie die direkte Lösung der Differentialgleichung nach *Brandstetter* [3]. Der Diskretisierungsfehler entsteht aus der Überführung der kontinuierlichen horizontalen Bettung \bar{k}_b in eine aus n Federn bestehenden diskreten Bettung k_b . Unter Zugrundelegung einer linearen Federcharakteristik für den Schotteroberbau sind also die Lösungen nach *Bigelow et al.* und *Brandstetter*, unter Berücksichtigung einer ausreichenden Vorlandlänge ($L_{vor} \approx 90$ m), gleichwertig. Im Rahmen einer

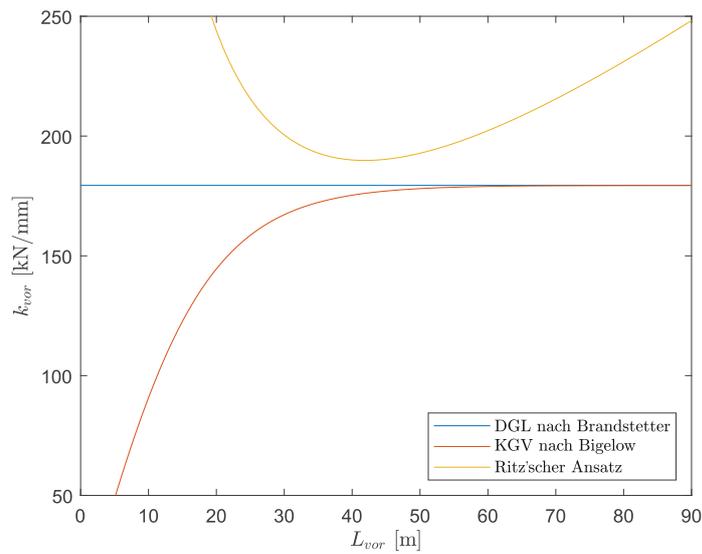


Abb. 3.20: Vorlandsteifigkeit k_{vor} in Abhängigkeit der berücksichtigten Vorlandlänge L_{vor}

Erweiterung zur Miteinbeziehung des nichtlinearen Stoffverhaltens des Schotters erweist sich die Lösung nach *Brandstetter* aufgrund der Nichtlinearität der Differentialgleichung des Dehnstabs als unpraktikabel. Daher wird im Weiteren auf das Kraftgrößenverfahren nach *Bigelow et al.* zurückgegriffen, wobei jeder diskreten Feder im Vorland eine nichtlineare Federcharakteristik zugewiesen wird.

3.3 Gesamtsystem - Koppelbalkenmodell mit Vorland

Bisher wurde ein Koppelbalkenmodell eingeführt, um den Brückenbereich hinsichtlich seines dynamischen Verhaltens rechnerisch zu erfassen. Darüber hinaus wurde ein Vorlandssystem vorgeschlagen, welches die nachgiebige Wirkung der Schienen im Dammbereich vor und nach der Brücke berücksichtigt. Nun werden beide Bestandteile in ein gemeinsames Modell, bestehend aus Brücke und Vorland, zusammengefasst. In den vorherigen Abschnitten wurden aus den beiden Modellen für die jeweilige Grundschwingung Masse-Feder-Systeme formuliert. Eine Durchbiegung in Feldmitte w_0 ruft eine Horizontalverschiebung im Dammbereich des Vorlandkörpers entlang der in Abbildung 3.3 beschriebenen Gleitfläche hervor, welche mit zunehmendem Abstand vom Auflager, aufgrund der Schottersteifigkeit, abklingt. Es wird daher angenommen, dass die Verschiebung der Vorlandmasse von der Durchbiegung des Tragwerks direkt abhängig ist und bildet somit keinen unabhängigen Freiheitsgrad aus. Zur korrekten Modellbildung dürfen aus diesem Grund die beiden Einmassenschwinger für Brücke und Vorland nicht als Zweimassenschwinger (mit zwei unabhängigen Freiheitsgraden) angeschlossen werden. Die Vorlandmasse ist, wie in Abbildung 3.21 dargestellt, an die Schienen im Brückenbereich gekoppelt und bewegt sich horizontal im Einklang mit dem Oberbau der Brücke. Aus der Erweiterung der Formulierung der kinetischen Energie des Koppelbalkenmodells in Gleichung (3.9) um den Beitrag aus der in Bewegung gesetzten Vorlandmassen M_{vor}^* folgt die äquivalente Ersatzmasse für die Grundschwingung des Gesamtsystems. Die Kinematik der Vorlandmassen kann mit den Federwegen s_k (betragsmäßig identisch mit den Auflagerverschiebungen u_L) zusammengefasst werden, als Produkt der jeweiligen horizontalen Auflagerverschiebung u_L mit der Zeitverlaufsfunktion $q(t)$:

$$s_k = u_L q(t) = u_L \sin(\Omega_1 t) \quad (3.83)$$

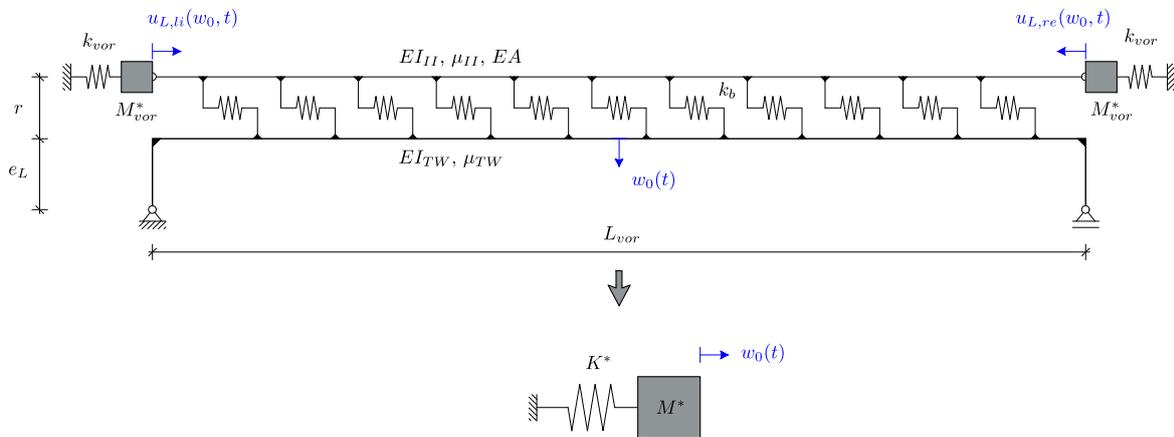


Abb. 3.21: Überführung des Gesamtsystems, Brücke samt Vorlandbereichen, in ein Masse-Feder-System mit Freiheitsgrad w_0 , Masse M^* und Steifigkeit K^*

Unter Berücksichtigung der in Kapitel 3.1.5 ermittelten Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ und $u_{L,re}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_0^L \mu_{TW} \dot{w}(x,t)^2 + \mu_{II} \dot{w}(x,t)^2 + \mu_{ges} \dot{u}_A(t)^2 dx + \frac{1}{2} M_{vor}^* \dot{s}_{k,li}^2 + \frac{1}{2} M_{vor}^* \dot{s}_{k,re}^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \mu_{ges} w_0^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \dot{q}(t)^2 + \mu_{ges} \left(\frac{\pi e_L w_0}{L} \right)^2 \dot{q}(t)^2 dx + \frac{1}{2} M_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) q(t)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_{ges} L w_0^2}{2} \dot{q}(t)^2 + \mu_{ges} \left(\frac{\pi e_L w_0}{L} \right)^2 L \dot{q}(t)^2 + M_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) q(t)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\mu_{ges} w_0^2 \left(\frac{L}{2} + \frac{\pi^2 e_L^2}{L} \right) + M_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) \right] \dot{q}(t)^2 \\
&\rightarrow M^* = \mu_{ges} \frac{w_0^2 L}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L} \right)^2 \right] + M_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) \tag{3.84}
\end{aligned}$$

Die potentielle Energie U wird durch Erweiterung des Ausdruckes in Gleichung (3.10) um den Vorlandterm ergänzt:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_0^L EI_{TW} w''(x,t)^2 + EI_{II} w''(x,t)^2 + k_b u(x,t)^2 dx + \frac{1}{2} K_{vor}^* s_{k,li}^2 + \frac{1}{2} K_{vor}^* s_{k,re}^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L (EI_{TW} + EI_{II}) \left[w_0^2 \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) q(t)^2 \right] + k_b \left[\left(\frac{w_0 \pi}{L} \right)^2 \left(r \cos \frac{\pi x}{L} + e_L \right)^2 q(t)^2 \right] dx + \\
&\quad + \frac{1}{2} K_{vor}^* (u_{L,re}^2 + u_{L,li}^2) q(t)^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L (EI_{TW} + EI_{II}) \left[w_0^2 \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) q(t)^2 \right] + k_b \left[\left(\frac{w_0 \pi}{L} \right)^2 \left(r^2 \cos^2 \frac{\pi x}{L} + e_L^2 + 2r e_L \cos \frac{\pi x}{L} \right) q(t)^2 \right] \\
&\quad dx + \frac{1}{2} K_{vor}^* (u_{L,re}^2 + u_{L,li}^2) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ EI_{ges} \frac{w_0^2 \pi^4}{2L^3} + k_b \left[\left(\frac{w_0 \pi}{L} \right)^2 \left(r^2 \frac{L}{2} + e_L^2 L \right) \right] + K_{vor}^* (u_{L,re}^2 + u_{L,li}^2) \right\} q(t)^2 \\
&\rightarrow K^* = EI_{ges} \frac{w_0^2 \pi^4}{2L^3} + k_b \left(\frac{w_0 \pi}{L} \right)^2 \left(r^2 \frac{L}{2} + e_L^2 L \right) + K_{vor}^* (u_{L,re}^2 + u_{L,li}^2) \tag{3.85}
\end{aligned}$$

Da die Auflagerverschiebungen im Allgemeinen viel kleiner als die Felddurchbiegung sind (bei $L \gg e_L, r$), $u_{L,li}; u_{L,re} \ll 1$, können die Auflagerverschiebungen ohne Iteration laut Gleichungen (3.40) und (3.39) $u_{L,li,0}$ und $u_{L,re,0}$, zur Abschätzung bzw. zur Ermöglichung einer Handrechnung, herangezogen werden. Die in Gleichung (3.84) und (3.85) auftretende Summe der Quadrate der horizontalen Auflagerverschiebungen $u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2 \approx u_{L,li,0}^2 + u_{L,re,0}^2$ können unter Berücksichtigung folgender Abkürzungen:

$$\alpha = w_0 \pi k_b e_L \tag{3.86}$$

$$\beta = \frac{4r}{\pi^2 e_L} - \frac{2EA}{L k_{vor}} - 1 \tag{3.87}$$

$$\gamma = k_{vor} L + 2EA \tag{3.88}$$

in einen einfachen Ausdruck umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2 &\approx u_{L,li,0}^2 + u_{L,re,0}^2 \\
&= \left(\frac{\alpha L}{2\gamma}\right)^2 \beta^2 + \left(\frac{\alpha L}{2\gamma}\right)^2 \beta^2 + \left(\frac{\alpha}{k_{vor}}\right)^2 + 2\frac{\alpha L}{2\gamma} \beta \frac{\alpha}{k_{vor}} \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{2}\alpha L}{2\gamma}\right)^2 \beta^2 + \left(\frac{\alpha}{k_{vor}}\right)^2 + \frac{\alpha^2 L \beta}{\gamma k_{vor}} \\
&= \alpha^2 \left[\left(\frac{\sqrt{2}L\beta}{2\gamma}\right)^2 + \left(\frac{1}{k_{vor}}\right)^2 + \frac{\beta L}{\gamma k_{vor}} \right] \\
&= \alpha^2 \left(\frac{2L^2 k_{vor}^2 \beta^2 + 4\gamma^2}{4\gamma^2 k_{vor}^2} + \frac{\beta L}{\gamma k_{vor}} \right) \\
&= \alpha^2 \left[2\left(\frac{\beta L k_{vor}}{2\gamma k_{vor}}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma k_{vor}}\right)^2 + \frac{\beta L}{\gamma k_{vor}} \right] \\
&= \left(\frac{\alpha}{\gamma k_{vor}}\right)^2 \left[\frac{1}{2}(\beta L k_{vor})^2 + \gamma^2 + \gamma \beta L k_{vor} \right] \tag{3.89}
\end{aligned}$$

Rückeinsetzen der Abkürzungen (3.86), (3.87), (3.88) in (3.89) ergibt:

$$\begin{aligned}
u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2 &= \frac{(w_0 \pi k_b e_L)^2}{[(k_{vor} L + 2EA)k_{vor}]^2} \left[\frac{L^2 k_{vor}^2}{2} \left(\frac{4r}{\pi^2 e_L} - \frac{2EA}{L k_{vor}} - 1 \right)^2 + k_{vor}^2 L^2 + 4(EA)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 4EA k_{vor} L + (k_{vor} L + 2EA) L k_{vor} \left(\frac{4r}{\pi^2 e_L} - \frac{2EA}{L k_{vor}} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{(w_0 \pi k_b e_L)^2}{[(k_{vor} L + 2EA)k_{vor}]^2} \left[\frac{L^2 k_{vor}^2}{2} \left(\frac{4r}{\pi^2 e_L} - \frac{2EA}{L k_{vor}} - 1 \right)^2 + k_{vor}^2 L^2 + 4(EA)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 4EA k_{vor} L + (k_{vor} L)^2 \frac{4r}{\pi^2 e_L} - \frac{2EA}{k_{vor} L} - (k_{vor} L)^2 + 2EA k_{vor} L \frac{4r}{\pi^2 e_L} - \right. \\
&\quad \left. - 4(EA)^2 - 2EA k_{vor} L \right] \\
&= \frac{(w_0 \pi k_b e_L)^2}{[(k_{vor} L + 2EA)k_{vor}]^2} \left[\frac{L^2 k_{vor}^2}{2} \left(\frac{4r}{\pi^2 e_L} - \frac{2EA}{L k_{vor}} - 1 \right)^2 + \frac{4r}{\pi^2 e_L} (k_{vor}^2 L^2 + 2EA k_{vor} L) \right] \\
&= \frac{(w_0 \pi k_b e_L)^2}{[(k_{vor} L + 2EA)k_{vor}]^2} \left\{ \frac{L^2 k_{vor}^2}{2} \left[\left(\frac{4r}{\pi e_L} \right)^2 + \left(\frac{2EA}{L k_{vor}} \right)^2 + 1 - \frac{16EA r}{L k_{vor} \pi^2 e_L} - \frac{8r}{\pi^2 e_L} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{4EA}{L k_{vor}} \right] \right\} + \frac{4r k_{vor}^2 L^2}{\pi^2 e_L} + \frac{2EA k_{vor} L 4r}{\pi^2 e_L} \\
&= \frac{(w_0 \pi k_b e_L)^2}{[(k_{vor} L + 2EA)k_{vor}]^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{4r L k_{vor}}{\pi^2 e_L} \right)^2 + 2(EA)^2 + \frac{1}{2}(L k_{vor})^2 + 2EA L k_{vor} \right] \\
&= \frac{(w_0 \pi k_b e_L)^2}{[(k_{vor} L + 2EA)k_{vor}]^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{4r L k_{vor}}{\pi^2 e_L} \right)^2 + \left(\sqrt{2}EA + \frac{L k_{vor}}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] \\
&= \frac{(w_0 \pi k_b e_L)^2}{[(k_{vor} L + 2EA)k_{vor}]^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{4r L k_{vor}}{\pi^2 e_L} \right)^2 + \frac{1}{2}(2EA + L k_{vor})^2 \right] \\
&= (w_0 \pi k_b e_L)^2 \left[\left(\frac{4r L}{\pi^2 e_L} \right)^2 \frac{1}{2(k_{vor} L + 2EA)^2} + \frac{1}{2k_{vor}^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (w_0 \pi k_b e_L)^2 \left[\left(\frac{4 r L}{\pi^2 e_L} \right)^2 \frac{1}{(k_{vor} L + 2 EA)^2} + \frac{1}{k_{vor}^2} \right] \\
\rightarrow u_{L,li,0}^2 + u_{L,re,0}^2 &= \left[\frac{\sqrt{8} w_0 k_b r L}{\pi (k_{vor} L + 2 EA)} \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}} \right)^2 \quad (3.90)
\end{aligned}$$

Zur ersten Abschätzung können die Ersatzmasse M^* und die Ersatzsteifigkeit K^* des Gesamtsystems angesichts der Gleichungen (3.84), (3.85) und (3.90) in erster Näherung wie folgt ermittelt werden:

$$M^* \approx \mu_{ges} \frac{w_0^2 L}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L} \right)^2 \right] + M_{vor}^* \left\{ \left[\frac{\sqrt{8} w_0 k_b r L}{\pi (k_{vor} L + 2 EA)} \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}} \right)^2 \right\} \quad (3.91)$$

$$K^* \approx EI_{ges} \frac{w_0^2 \pi^4}{2L^3} + k_b \left(\frac{w_0 \pi}{L} \right)^2 \left(r^2 \frac{L}{2} + e_L^2 L \right) + K_{vor}^* \left\{ \left[\frac{\sqrt{8} w_0 k_b r L}{\pi (k_{vor} L + 2 EA)} \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}} \right)^2 \right\} \quad (3.92)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass aus dem Verzicht auf die in Abschnitt 3.1.5 eingeführte Iteration bei der Ermittlung der horizontalen Auflagerverschiebungen ein Fehler entsteht, was zu einer Überschätzung der Letzteren und somit zu einer generellen Aufweichung des Systems führt. Dieser Fehler ist allerdings aufgrund der Größe der hervorgerufenen Auflagerverschiebungen im Vergleich zu den Durchbiegungen im Feldbereich nicht ausschlaggebend. Die Wurzel des Verhältnisses von Ersatzsteifigkeit K^* und Ersatzmasse M^* entspricht der Eigenkreisfrequenz des Gesamtsystems (Brücke und Vorland):

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{EI_{ges} \pi^4 w_0^2}{2L^3} + k_b \frac{\pi^2 w_0^2}{L^2} \left(\frac{r^2 L}{2} + e_L^2 L \right) + k_{vor} (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2)}{\mu_{ges} \frac{L w_0^2}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L} \right)^2 \right] + M_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2)} \quad (3.93)$$

Gleichung (3.93) ist eine Bestimmungsgleichung für die Biegeeigenkreisfrequenz eines Koppelbalkens mit horizontaler Federkopplung k_b unter Berücksichtigung der anschließenden Vorlandbereiche mit Ersatzmasse M_{vor}^* und K_{vor}^* . Die Lösung erfordert die Berechnung der Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ und $u_{L,re}$, die im Abschnitt 3.1.4 und 3.1.5 ausführlich behandelt wurde.

3.4 Zusammenfassung und Vergleich der Modelle mit linearen Systemparametern

In Abschnitt 3.3 wurde die rechnerische Ermittlung der erste Biegeeigenfrequenz Ω_1 bzw. f_1 einer einfeldrigen Eisenbahnbrücke mit Berücksichtigung der anschließenden Vorlandbereiche (Gesamtmodell) vorgestellt. Um einen Vergleich zu schaffen wird an dieser Stelle das Gesamtmodell mit einfacheren Modellen verglichen, die sich durch ihre Modellierungstiefe unterscheiden, siehe Abbildung 3.22.

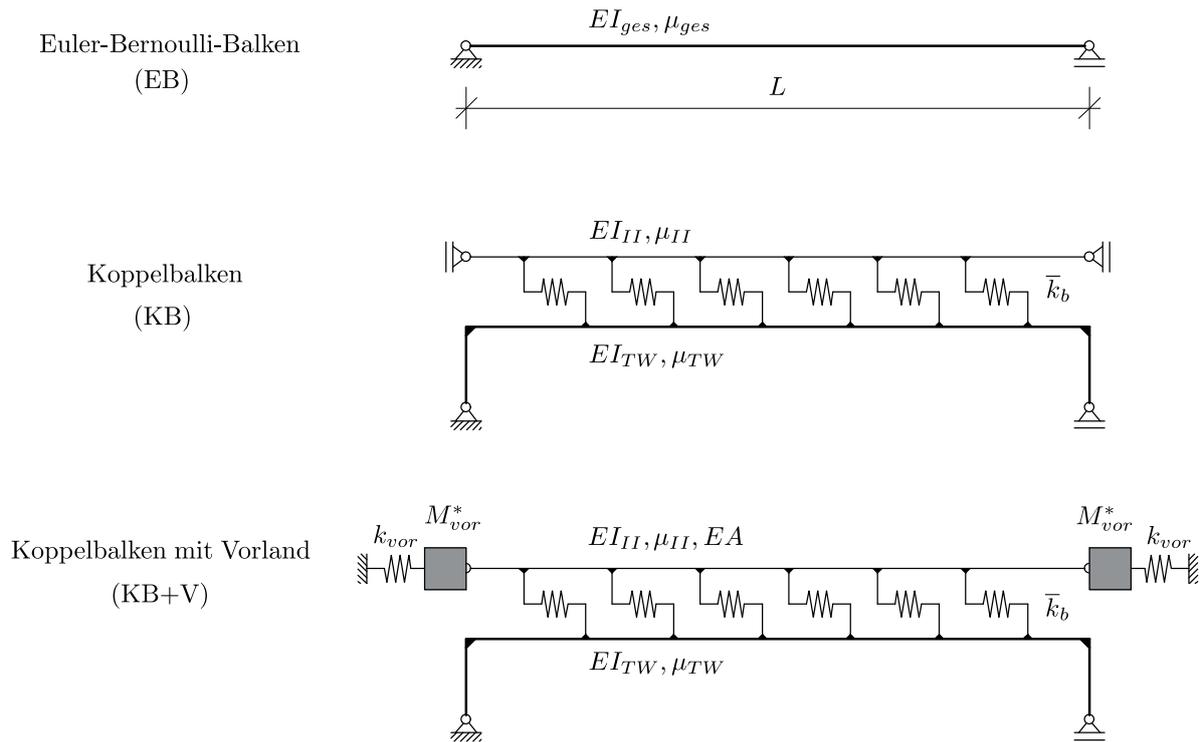


Abb. 3.22: Modellbildung einer Eisenbahnbrücke: Euler-Bernoulli Balken (EB), Koppelbalken (KB) und Gesamtsystem (KB+V)

In [35] werden die Biegeeigenfrequenzen f_1 und Dämpfungswerte ζ für 13 Eisenbahnbrücken mit unterschiedlicher Geometrie, Biegesteifigkeit EI_{ges} und Massenbelegung μ_{ges} anhand von zwei verschiedenen Anregungsmethoden aus Messdaten identifiziert. In Tabelle 3.1 sind die Tragwerksdaten sowie die gemessenen Biegeeigenfrequenzen f_1 angeführt. Die dynamischen Parameter Ω_1 und ζ wurden einerseits anhand des Ausschlagverhaltens nach Zugüberfahrt (ASZ) identifiziert, andererseits durch eine frequenzgesteuerte harmonischen Anregung mithilfe von Unwuchterregern (Krafterregte Schwingungsanregung: KSA). Aufgrund der hohen Reproduzierbarkeit der Antwort zufolge KSA, sind die damit ermittelten Messdaten als plausibler zu klassifizieren [35, S. 451]. Es sei angemerkt, dass in Tabelle 3.1 nur die Biegeeigenfrequenzen f_1 Messwerte sind. Aufgrund der großen Streuung bei der Bestimmung der Schotterdichten ρ_b , wurden in Tabelle 3.1 drei Varianten für die Massenbelegung eingeführt. $\mu_{ges,1}$ resultiert aus einer Schotterdichte von $\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$, $\mu_{ges,2}$ aus $\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$ und $\mu_{ges,3}$ aus $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$.

Tab. 3.1: Tragwerksdaten und identifizierte Biegeeigenfrequenzen [35, Tab.452]

Tragwerk	Geometrie			Biegesteifigkeit [Nm ²] EI_{ges}	Massenbelegung			ASZ	KSA
	[m]	[m]	[m]		[kg/m]	[kg/m]	[kg/m]	[Hz]	[Hz]
	L	e_L	r		$\mu_{ges,1}$	$\mu_{ges,2}$	$\mu_{ges,3}$	f_1	f_1
TW1	4,50	0,09	0,78	$3,018 \cdot 10^8$	8543	8846	9148	14,39	13,30
TW2	11,00	0,33	0,98	$4,183 \cdot 10^9$	6665	7075	7484	9,10	-
TW3	12,57	0,41	1,01	$8,653 \cdot 10^9$	8152	8621	9091	9,40	-
TW4	15,40	0,73	0,95	$1,781 \cdot 10^{10}$	7718	8127	8536	9,55	-
TW5	15,47	0,64	1,19	$1,691 \cdot 10^{10}$	8056	8544	9031	9,10	-
TW6	16,10	0,80	0,92	$7,032 \cdot 10^9$	6629	6967	7306	6,29	5,75
TW7	16,10	0,80	0,92	$7,032 \cdot 10^9$	5879	6217	6556	6,46	-
TW8	17,50	0,82	1,02	$2,141 \cdot 10^{10}$	7927	8343	8760	8,32	-
TW9	33,30	1,72	1,37	$4,341 \cdot 10^{10}$	6902	7240	7578	4,40	3,44
TW10	16,00	0,55	0,73	$1,211 \cdot 10^{10}$	7306	7733	8159	-	6,28
TW11	16,00	0,63	0,69	$9,292 \cdot 10^9$	7801	8246	8691	-	6,10
TW12	16,50	0,63	0,69	$9,292 \cdot 10^9$	7944	8399	8854	-	5,62
TW13	21,36	1,18	1,01	$2,521 \cdot 10^{10}$	8305	8676	9046	-	5,71

Im Weiteren erfolgt die beispielhafte Ermittlung der ersten Biegeeigenfrequenz am Beispiel von Tragwerk 6 (TW6) aus Tabelle 3.1 für die drei in 3.22 eingeführten Modelle unter Annahmen einer Massenbelegung $\mu_{ges,2}$:

- Euler-Bernoulli-Balken (Gleichung (3.2)):

$$f_{1,EB} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{7,032 \cdot 10^9}{6967 \cdot 16,1^4}} = 6,09 \text{ Hz} \quad (3.94)$$

- Koppelbalken (Gleichung (3.12)):

$$f_{1,KB} = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI_{ges} + k_b (r^2 + 2e_L^2)}{\mu_{ges} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L} \right)^2 \right]}} = \frac{\pi}{2 \cdot 16,1^2} \sqrt{\frac{7,032 \cdot 10^9 + 10 \cdot 10^6 (0,92^2 + 2 \cdot 0,8^2)}{6967 \left[1 + 2 \left(\frac{\pi \cdot 0,8}{16,1} \right)^2 \right]}} = 6,18 \text{ Hz} \quad (3.95)$$

- Koppelbalken und Vorland (Gleichung (3.93)):

Die Parameter M_{vor}^* und k_{vor} des Masse-Feder-Systems für das Vorland wurden in Abschnitt 3.2.2 bzw. 3.2.5 ermittelt:

$$M_{vor}^* = 10694 \text{ kg (s. Abschnitt 3.2.2)}$$

$$k_{vor} = 179,403 \text{ N/mm (s. Abschnitt 3.2.5)}$$

Das Quadrat der Auflagerverschiebungen bei einer Durchbiegung in Feldmitte $w_0 = L/1000 = 0,0161 \text{ m}$ ergibt sich zu:

$$u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2 \approx u_{L,li,0}^2 + u_{L,re,0}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\sqrt{8} w_0 k_b r L}{\pi (k_{vor} L + 2 EA)} \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}} \right)^2 = \\
&= \left[\frac{\sqrt{8} \cdot 0,0161 \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 0,78 \cdot 16,1}{\pi (179,403 \cdot 10^6 \cdot 16,1 + 2 \cdot 3220 \cdot 10^6)} \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{0,0161 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 0,8}{179,403 \cdot 10^6} \right)^2 \\
&= 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \quad (3.96)
\end{aligned}$$

Die Ersatzmasse M_{ges}^* , Ersatzsteifigkeit K_{ges}^* des kinetisch- und steifigkeitsäquivalenten Einmassenschwingers und Eigenfrequenz f_1 ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
M_{ges}^* &\approx \mu_{ges} \frac{L w_0^2}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L} \right)^2 \right] + M_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) = \\
&= 6967 \cdot \frac{16,1 \cdot 0,0161^2}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi \cdot 0,8}{16,1} \right)^2 \right] + 10694 \cdot 2,6 \cdot 10^{-6} = 15,27 \text{ kg} \quad (3.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ges}^* &\approx EI_{ges} \frac{\pi^4 w_0^2}{2L^3} + k_b \left(\frac{\pi w_0}{L} \right)^2 \left(r^2 \frac{L}{2} + e_L^2 L \right) + k_{vor} (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) = \\
&= 7,03 \cdot 10^9 \frac{\pi^4 \cdot 0,0161^2}{2 \cdot 16,1^3} + 10 \cdot 10^6 \left(\frac{\pi \cdot 0,0161}{16,1} \right)^2 \left(0,92^2 \frac{16,1}{2} + 0,8^2 \cdot 16,1 \right) + \\
&+ 179,403 \cdot 10^6 \cdot 2,6 \cdot 10^{-6} = 2,3430 \cdot 10^4 \text{ N/m} \quad (3.98)
\end{aligned}$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{K_{ges}^*}{M_{ges}^*}} = \sqrt{\frac{2,3430 \cdot 10^4}{15,27}} = 39,17 \text{ rad/s} \rightarrow f_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi} = 6,23 \text{ Hz} \quad (3.99)$$

Die errechnete Biegeeigenfrequenz f_1 ist bei Zugrundelegung linearer Systemparameter (\bar{k}_b bzw. k_{vor}) unabhängig von der gewählten Durchbiegung. In Tabellen 3.2, 3.3 und 3.4 ist der Vergleich der mit Euler-Bernoulli-Balken (EB), Koppelbalken (KB) und dem Gesamtsystem (KB+V) ermittelten Eigenfrequenzen f_1 und der infolge von KSA und ASZ gemessenen Eigenfrequenzen f_1 für alle 13 Tragwerke angegeben.

Tab. 3.2: Vergleich Messung und Rechnung für die erste Biegeeigenfrequenz f_1 unter Verwendung des Euler-Bernoulli Balkens (EB), Koppelbalkens (KB) und Gesamtsystems (KB+V) mit einer Schotterdichte von $\rho_{b,1} = 1400 \text{ kg/m}^3$

Tragwerk-Nr.	$\rho = 1400$ [kg/m ³]			Abweichung Rechnung - Messung						Messdaten	
	EB [Hz]	KB [Hz]	KB+V [Hz]	Δ (EB) [%]	Δ (KB) [%]	Δ (KB+V) [%]	Δ (EB) [%]	Δ (KB) [%]	Δ (KB+V) [%]	ASZ [Hz]	KSA [Hz]
TW1	14,58	14,83	14,83	1,32	3,04	3,05	9,62	11,49	11,49	14,39	13,3
TW2	10,28	10,79	10,38	13,01	18,62	14,03	-	-	-	9,1	-
TW3	10,24	10,26	10,27	8,96	9,18	9,27	-	-	-	9,4	-
TW4	10,06	9,98	10,00	5,36	4,46	4,71	-	-	-	9,55	-
TW5	9,51	9,50	9,52	4,51	4,42	4,63	-	-	-	9,1	-
TW6	6,24	6,33	6,39	-0,77	0,67	1,59	8,55	10,13	11,13	6,29	5,75
TW7	6,63	6,72	6,78	2,60	4,09	5,03	-	-	-	6,46	-
TW8	8,43	8,39	8,43	1,32	0,89	1,29	-	-	-	8,32	-
TW9	3,55	3,80	4,01	-19,26	-13,73	-8,84	3,28	10,34	16,60	4,4	3,44
TW10	7,90	7,90	7,92	-	-	-	25,81	25,87	26,18	-	6,28
TW11	6,70	6,71	6,74	-	-	-	9,79	10,04	10,52	-	6,1
TW12	6,24	6,27	6,30	-	-	-	11,04	11,52	12,06	-	5,62
TW13	6,00	6,03	6,10	-	-	-	5,06	5,53	6,91	-	5,71
				$ \Delta _{\phi}$ (EB)	$ \Delta _{\phi}$ (KB)	$ \Delta _{\phi}$ (KB+V)	$ \Delta _{\phi}$ (EB)	$ \Delta _{\phi}$ (KB)	$ \Delta _{\phi}$ (KB+V)		
				6,35	6,57	5,83	10,45	12,13	13,56		

Tab. 3.3: Vergleich Messung und Rechnung für die erste Biegeeigenfrequenz f_1 unter Verwendung des Euler-Bernoulli Balkens (EB), Koppelbalkens (KB) und Gesamtsystems (KB+V) mit einer Schotterdichte von $\rho_{b,1} = 1550 \text{ kg/m}^3$

Tragwerk-Nr.	$\rho = 1550$ [kg/m ³]			Abweichung Rechnung - Messung						Messdaten	
	EB [Hz]	KB [Hz]	KB+V [Hz]	Δ (EB) [%]	Δ (KB) [%]	Δ (KB+V) [%]	Δ (EB) [%]	Δ (KB) [%]	Δ (KB+V) [%]	ASZ [Hz]	KSA [Hz]
TW1	14,33	14,57	14,57	-0,43	1,26	1,26	7,73	9,56	9,56	14,39	13,3
TW2	9,98	10,06	10,07	9,69	10,59	10,67	-	-	-	9,1	-
TW3	9,96	9,98	9,99	5,96	6,17	6,26	-	-	-	9,4	-
TW4	9,81	9,72	9,75	2,68	1,80	2,04	-	-	-	9,55	-
TW5	9,23	9,23	9,25	1,48	1,39	1,60	-	-	-	9,1	-
TW6	6,09	6,18	6,23	-3,20	-1,80	-0,90	5,89	7,42	8,41	6,29	5,75
TW7	6,45	6,54	6,60	-0,23	1,22	2,14	-	-	-	6,46	-
TW8	8,22	8,18	8,21	-1,24	-1,65	-1,26	-	-	-	8,32	-
TW9	3,47	3,71	3,92	-21,17	-15,77	-10,99	0,83	7,74	13,85	4,4	3,44
TW10	7,68	7,68	7,70	-	-	-	22,28	22,35	22,65	-	6,28
TW11	6,51	6,53	6,56	-	-	-	6,78	7,03	7,50	-	6,1
TW12	6,07	6,10	6,12	-	-	-	7,99	8,46	8,98	-	5,62
TW13	5,87	5,90	5,97	-	-	-	2,79	3,25	4,60	-	5,71
				$ \Delta _{\phi}$ (EB)	$ \Delta _{\phi}$ (KB)	$ \Delta _{\phi}$ (KB+V)	$ \Delta _{\phi}$ (EB)	$ \Delta _{\phi}$ (KB)	$ \Delta _{\phi}$ (KB+V)		
				5,12	4,63	4,13	7,76	9,40	10,79		

Tab. 3.4: Vergleich Messung und Rechnung für die erste Biegeeigenfrequenz f_1 unter Verwendung des Euler-Bernoulli Balkens (EB), Koppelbalkens (KB) und Gesamtsystems (KB+V) mit einer Schotterdichte von $\rho_{b,1} = 1700 \text{ kg/m}^3$

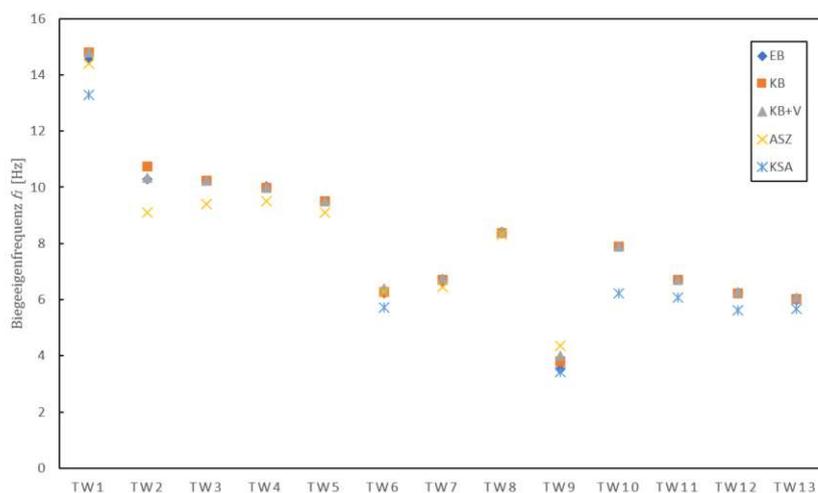
Tragwerk-Nr.	$\rho = 1700$ [kg/m ³]			Abweichung Rechnung - Messung						Messdaten	
	EB [Hz]	KB [Hz]	KB+V [Hz]	Δ (EB) [%]	Δ (KB) [%]	Δ (KB+V) [%]	Δ (EB) [%]	Δ (KB) [%]	Δ (KB+V) [%]	ASZ [Hz]	KSA [Hz]
TW1	14,09	14,33	14,33	-2,09	-0,42	-0,42	5,94	7,74	7,74	14,39	13,3
TW2	9,71	9,78	9,79	6,65	7,52	7,61	-	-	-	9,1	-
TW3	9,70	9,72	9,73	3,18	3,39	3,48	-	-	-	9,4	-
TW4	9,57	9,49	9,51	0,19	-0,67	-0,43	-	-	-	9,55	-
TW5	8,98	8,97	8,99	-1,30	-1,38	-1,17	-	-	-	9,1	-
TW6	5,95	6,03	6,09	-5,48	-4,10	-3,22	3,40	4,90	5,87	6,29	5,75
TW7	6,28	6,37	6,43	-2,84	-1,43	-0,53	-	-	-	6,46	-
TW8	8,02	7,99	8,02	-3,62	-4,02	-3,64	-	-	-	8,32	-
TW9	3,39	3,62	3,83	-22,94	-17,67	-12,99	-1,44	5,31	11,29	4,4	3,44
TW10	7,48	7,48	7,50	-	-	-	19,05	19,11	19,41	-	6,28
TW11	6,34	6,36	6,39	-	-	-	4,01	4,26	4,71	-	6,1
TW12	5,91	5,94	5,97	-	-	-	5,18	5,63	6,15	-	5,62
TW13	5,75	5,77	5,85	-	-	-	0,66	1,11	2,45	-	5,71
				$ \Delta _{\phi}$ (EB)	$ \Delta _{\phi}$ (KB)	$ \Delta _{\phi}$ (KB+V)	$ \Delta _{\phi}$ (EB)	$ \Delta _{\phi}$ (KB)	$ \Delta _{\phi}$ (KB+V)		
				5,36	4,51	3,72	5,67	6,87	8,23		

Abbildung 3.23 zeigt eine Auswertung für alle in Tabelle 3.1 eingeführten Tragwerke. Hierbei ist zu erkennen, dass mit den vorgestellten Modellen eine durchaus zufriedenstellende Ermittlung der ersten Biegeeigenfrequenz f_1 möglich ist. Die aus den drei verschiedenen Rechenmodellen resultierenden Werte für f_1 sind allerdings kaum voneinander zu unterscheiden. Dies ist auf die ausgesprochen hohe Biegesteifigkeit und Massenbelegung des Tragwerks zurückzuführen, die gegenüber den Beiträgen des Vorlands und der horizontalen Gleis-Tragwerk-Interaktion dominant sind, siehe Gleichungen (3.97) bzw. (3.98). Die minimale Abweichung zwischen Rechenwerten und Messdaten wird mit der Annahme einer Schotterdichte von $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$ erreicht. Mit einer durchschnittlichen Abweichung von 5,1 % ergibt das Gesamtmodell (KB+V) die beste Übereinstimmung mit den Messdaten basierend auf der ASZ-Anregungsmethode. Aus dem Euler-Bernoulli Balkenmodell resultiert hingegen eine durchschnittliche Abweichung von 5,9 %. Es kann daher festgestellt werden, dass zur Abschätzung der Grundfrequenz die Schottersteifigkeit sowie das Vorland keinen relevanten Einfluss auf die Eigenfrequenz des Brückensystems hat. Wie in den Gleichungen (3.98) und (3.97) ersichtlich, ergibt sich der Beitrag der Vorlandbereiche aus dem Produkt der Vorlandmasse M_{vor}^* bzw. -steifigkeit k_{vor} mit der Summe der Quadrate der

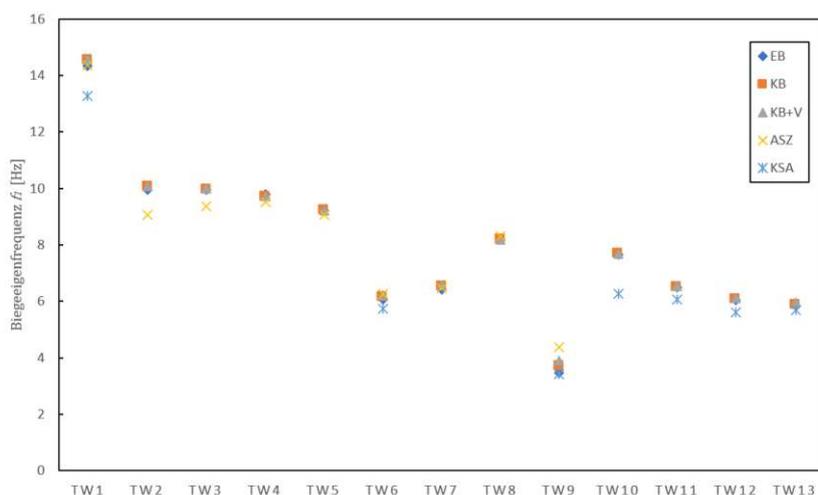
Auflagerverschiebungen ($u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2$), siehe Gleichung (3.96). Eine Felddurchbiegung von $w_0 = 1$ m induziert systembedingt Auflagerverschiebungen u_L , die kleiner als eins sind, wie beispielsweise $u_L = 0,1$ m. Das Quadrieren einer Zahl < 1 ergibt Werte viel kleiner als eins, $u_L^2 \ll 1$. Das hat zur Folge, dass der Einfluss der Vorlandterme minimiert wird. Aus demselben Grund hat die Wahl der Durchbiegung in Feldmitte w_0 bei der Ermittlung der Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ und $u_{L,re}$ keine relevante Bedeutung für die rechnerische Biegeeigenfrequenz, wie in Abbildung 3.23 ersichtlich. Die prozentuelle Abweichung Δf_1 zwischen den rechnerischen Ergebnissen aus den verschiedenen Modellen und Messung $f_{1,M}$ wird nach folgender Gleichung ermittelt:

$$\Delta f = \frac{f_1 - f_{1,M}}{f_{1,M}} 100 \quad (3.100)$$

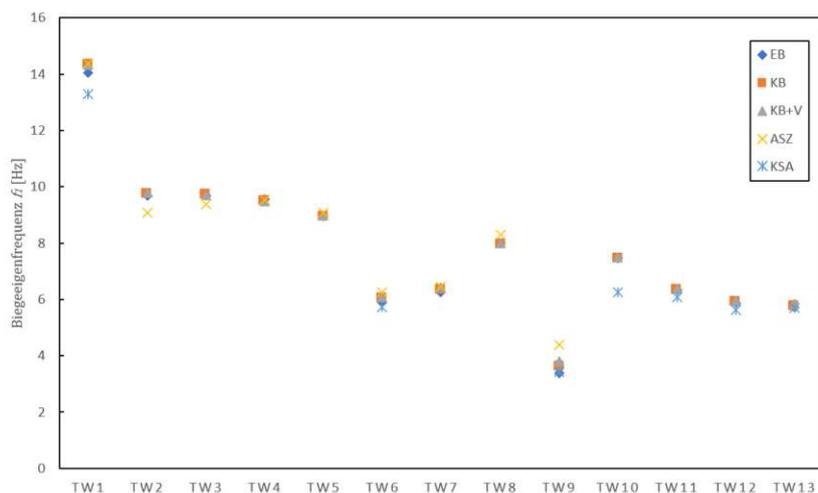
Aus der grafischen Darstellung dieser Abweichungen Δf (siehe Abbildung 3.25) ist erkennbar, dass das Modell des Euler-Bernoulli Balkens zur Abschätzung der ersten Biegeeigenfrequenz f_1 als vollkommen ausreichend erweist. Tragwerk 9 ist aufgrund seiner großen Spannweite von $L = 33$ m ein Sonderfall. Hierbei zeigt sich eine deutliche Abweichung Δf zwischen den berechneten und gemessenen Werten, die auf die hohe Auflagerexzentrizität $e_L = 1,72$ m und somit auf eine Überschätzung der postulierten Massenbewegungen zurückzuführen ist.



(a) $\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$



(b) $\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$



(c) $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$

Abb. 3.23: Biegeeigenfrequenz f_1 aus Messungen (ASZ/KSA) und Rechenmodellen (Euler-Bernoulli Balken, Koppelbalken, Koppelbalken + Vorland) unter Zugrundelegung verschiedener Schotterdichten ρ_b

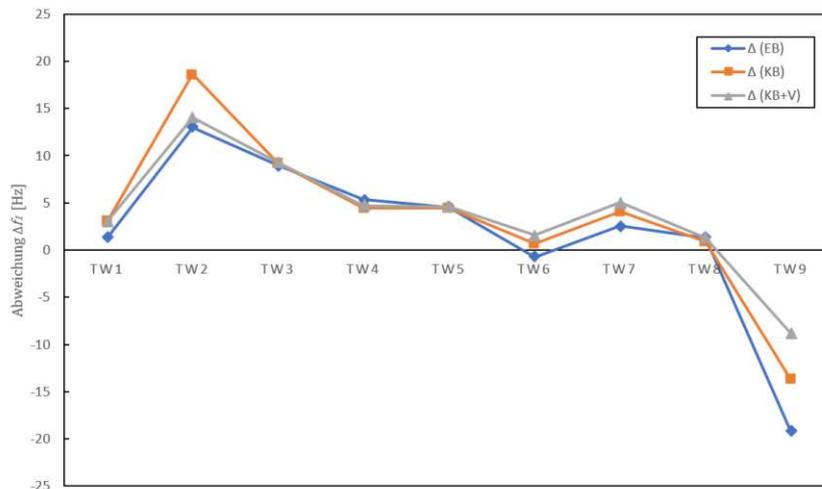
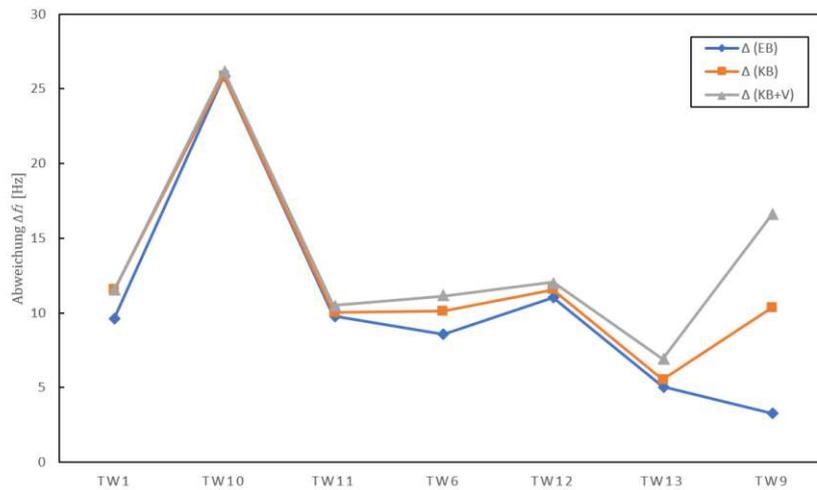
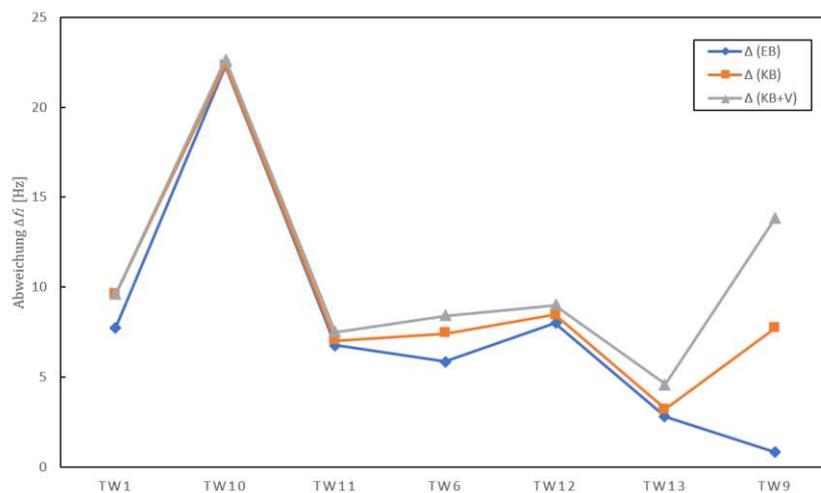
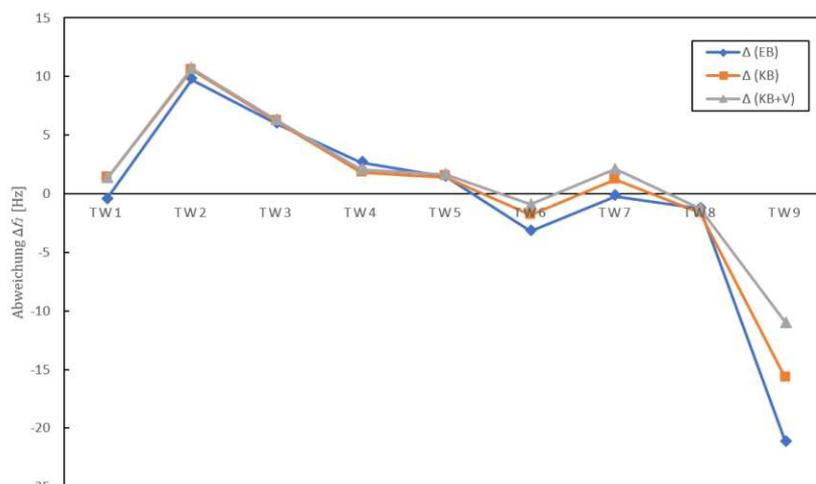
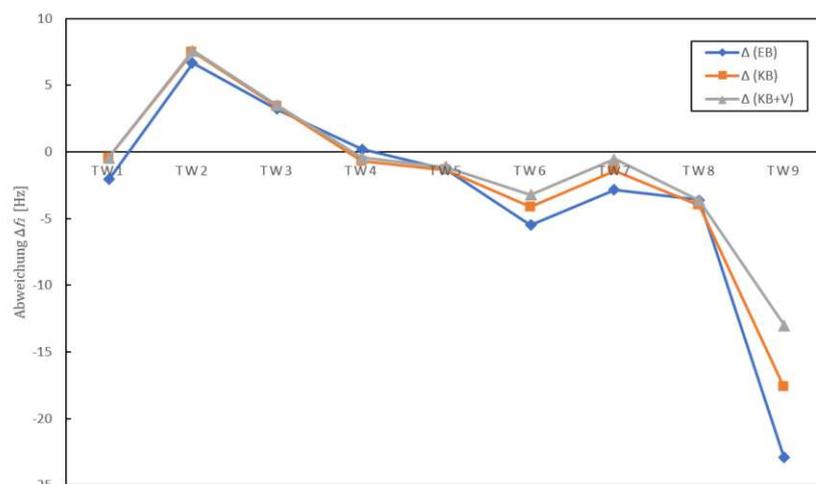
(a) $\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$ - Anregungsmethode: ASZ(b) $\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$ - Anregungsmethode: KSA(c) $\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$ - Anregungsmethode: ASZ

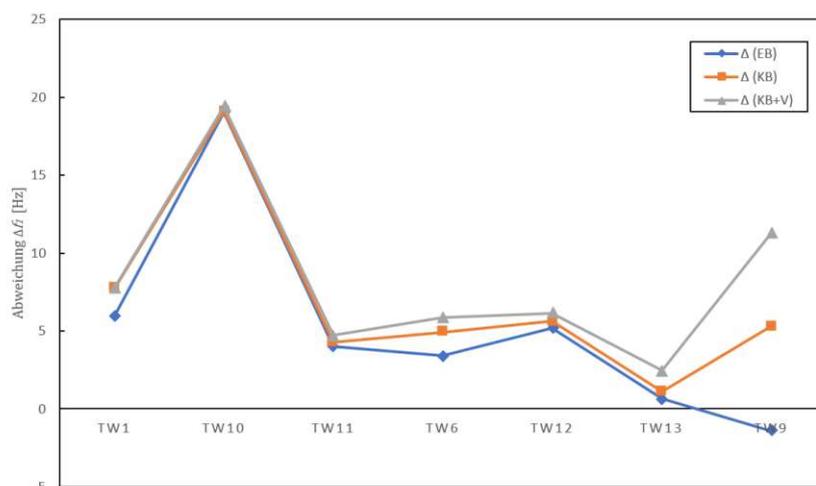
Abb. 3.24: Abweichung der Biegeeigenfrequenz f_1 aus Messungen (ASZ/KSA) und Rechenmodellen (Euler-Bernoulli Balken, Koppelbalken, Koppelbalken + Vorland) unter Zugründelegung verschiedener Schotterdichten ρ_b - Teil 1



(a) $\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$ - Anregungsmethode: KSA



(b) $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$ - Anregungsmethode: ASZ



(c) $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$ - Anregungsmethode: KSA

Abb. 3.25: Abweichung der Biegeeigenfrequenz f_1 aus Messungen (ASZ/KSA) und Rechenmodellen (Euler-Bernoulli Balken, Koppelbalken, Koppelbalken + Vorland) unter Zugrundelegung verschiedener Schotterdichten ρ_b - Teil 2

Kapitel 4

Berücksichtigung der strukturellen Nichtlinearität des Längsverschiebewiderstandes

In Kapitel 3 wurde jeweils ein Modell zur rechnerischen Erfassung des Brückenbereichs und des Vorlands mit linearen Federsteifigkeiten vorgestellt. Bei der Erforschung der zur Gleis-Tragwerk Interaktion zugehörigen dynamischen Kennwerte des Oberbauschotters \bar{c}_b und \bar{k}_b haben sich Nichtlinearitäten im Materialverhalten gezeigt. Eine zunehmende relative Horizontalverschiebung u führt zu einer Abnahme der Steifigkeit $\bar{k}_{b,NL}$ [32, S. 37]. Die Annahme eines lineares Verhaltens entspricht somit nicht der Realität. Zur Erhöhung der Genauigkeit der Ergebnisse, wird in diesem Kapitel das tatsächliche nichtlineare Verbundverhalten des Schotters zwischen Gleisrost und Tragwerk bzw. Untergrund erfasst und in das Vorlandmodell (vgl. Abschnitt 4.1), sowie in das Koppelbalkenmodell, siehe Abschnitt 4.3, durch Eingabe nichtlinearer Federkennwerte implementiert.

4.1 Rechnerische Berücksichtigung des nichtlinearen Verhaltens des Schotters in der Ersatzfedersteifigkeit des Vorlandbereichs

Wie bereits in Kapitel 2.3 erläutert, ist die tatsächliche Schotterfedersteifigkeit \bar{k}_b nichtlinear und hängt von der horizontalen Relativverschiebung u zwischen Gleisrost und Tragwerk bzw. Untergrund ab. Die Annahme einer linearen Steifigkeit führt deshalb zu einer Verfälschung der Ergebnisse. Als Grundlage wird hierbei wiederum das Modell von *Bigelow et al.* [3] des horizontal gebetteten Dehnstabes mit Dehnsteifigkeit EA und Schwellenabstand d (=Abstand der diskreten Federelemente) verwendet. Zur Lösung des Systems muss erneut auf das Kraftgrößenverfahren zurückgegriffen werden. Wenn die Auswahl für das statisch bestimmte Grundsystem auf die erste Feder fällt, wie bei Variante B in Abbildung 4.1, müssen die Formeln (3.71) wie folgt modifiziert werden:

$$\delta_{ii} = \frac{i d}{EA} + \frac{1}{k_{b,1}} + \frac{1}{k_{b,i}} \quad (4.1)$$

$$\delta_{ij} = \frac{\min(i, j) d}{EA} + \frac{1}{k_{b,1}} \quad (4.2)$$

$$\delta_{i0} = -\frac{F}{k_{b,1}} \quad (4.3)$$

Die Herausforderung bei der Einführung nichtlinearer Federsteifigkeiten besteht darin, die Unbekannten $k_{b,1}(u_1)$ vom ersten Feld und $k_{b,i}(u_i)$ vom i -ten Feld in Abhängigkeit der im Vorhinein unbekanntem Horizontalverschiebung der jeweiligen Feder zu ermitteln. Dies kann iterativ erfolgen: Da alle Federsteifigkeiten als Unbekannte erscheinen, wird als erster Schritt ein Vektor mit linearen, über die Länge konstanten Steifigkeiten aufgebaut. Als Anfangswert für

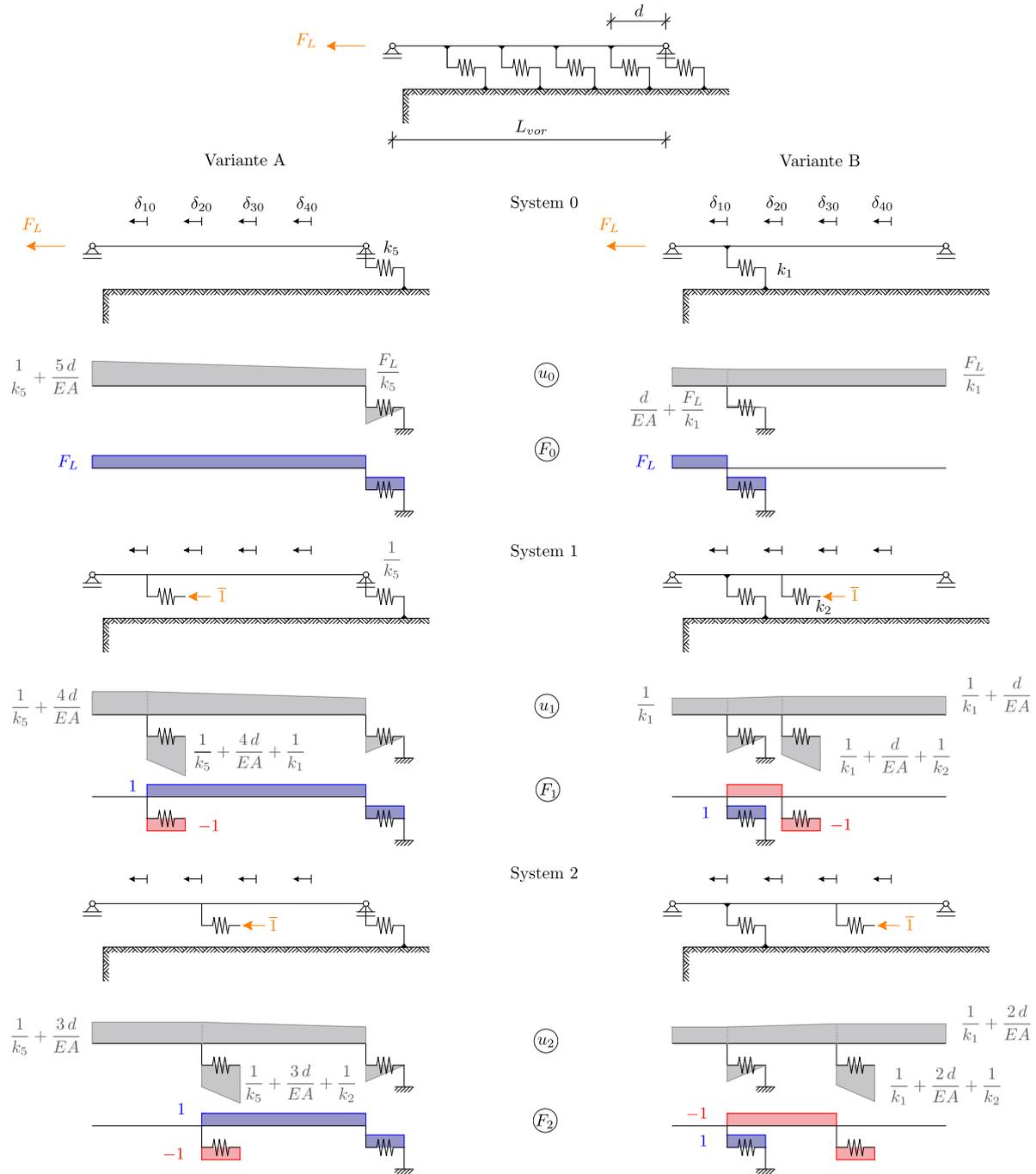


Abb. 4.1: Kraftgrößenverfahren für das Vorlandsystem: Nachgiebigkeiten δ_{ii} und δ_{ij} bei nichtlinearer Federsteifigkeiten

$k_{b,i}$ kann die lineare Steifigkeit nach EN 1991-2 [26] $\bar{k}_b = 10$ kN/mm pro Laufmeter mit einem Schwellenabstand von $d = 0,6$ m ($k_{b,i} = \bar{k}_b d = 10 \cdot 0,6 = 6$ kN/mm) herangezogen werden:

$$\vec{k}_b = [k_{b,1} \ k_{b,2} \ k_{b,3} \ \dots \ k_{b,m}]^T = [6 \ 6 \ 6 \ \dots \ 6]^T \quad (4.4)$$

Anpassung der Nachgiebigkeiten:

$$\delta_{ii} = \frac{i d}{EA} + \frac{1}{k_b(1)} + \frac{1}{k_b(i)} \quad (4.5)$$

Die Nachgiebigkeit δ_{22} an der Stelle $i = 2$ des virtuellen Systems $j = 2$ ergibt sich beispielsweise zu:

$$\delta_{22} = \frac{2 d}{EA} + \frac{1}{k_b(1)} + \frac{1}{k_b(2)} \quad (4.6)$$

Die einzelnen Federkräfte x_i lauten:

$$x_1 = F_L - \sum_{i=2}^m x_i \quad (4.7)$$

$$x_i = -\frac{\delta_{i0}}{\delta_{ij}} \quad \text{für } i = 2, \dots, m \quad (4.8)$$

wobei F_L (Index L steht für „Lager“) die Schienenkraft im Auflagerbereich bzw. am Übergang zwischen Brücke und Vorland beschreibt. Die Verschiebung am Übergang zwischen Brücke und Vorland errechnet sich aus:

$$u_L = \frac{x_1}{k_{b,1}} + \frac{F_L d}{EA} \quad (4.9)$$

Mit der Auflagerverschiebung u_L kann nun eine Ersatzsteifigkeit k_{vor} für das gesamte Vorlandsystem identifiziert werden:

$$k_{vor} = \frac{F_L}{u_L} \quad (4.10)$$

Die Vorlandsteifigkeit k_{vor} nach Gleichung (4.10) wurde mit linearen Schotterfedersteifigkeiten berechnet. Um Iterieren zu können, muss ein neuer Federsteifigkeitsvektor, ausgehend von den Verschiebungen an jedem Freiheitsgrad i , definiert werden:

$$\vec{\delta} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \\ k_{b,1} & k_{b,2} & k_{b,3} & \dots & k_{b,m} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

mit

$$\delta_i = \frac{x_i}{k_{b,i}} \quad (4.12)$$

In Abhängigkeit der gewählten Steifigkeitsfunktion werden hier neue Federsteifigkeiten für den nächsten Iterationsschritt ermittelt und in einen Vektor zusammengefasst:

$$\vec{k}_b = [k_{b,1} \ k_{b,2} \ k_{b,3} \ \dots \ k_{b,m}]^T \quad (4.13)$$

Wenn beispielsweise der logarithmische Steifigkeitsverlauf nach Gleichung (2.2) herangezogen wird, ergibt sich:

$$k_{b,i} = (-3,57 \ln \delta_i + 9,61) d \quad (4.14)$$

Es handelt sich hierbei um eine einheitsbehaftete Größe in kN/mm. Die Verschiebungen δ_i und der Schwellenabstand d müssen daher in mm eingegeben werden. Durch Einsetzen des neuen

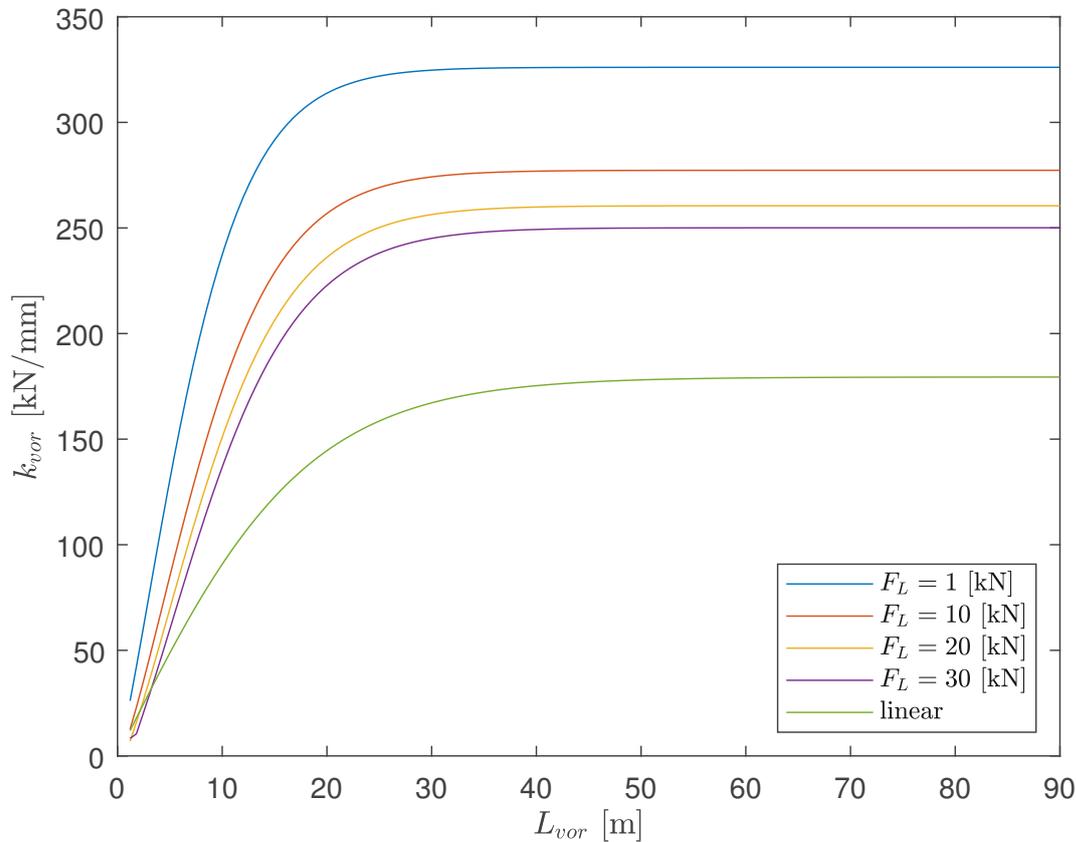


Abb. 4.2: Nichtlineare Vorlandsteifigkeit k_{vor} in Funktion der rechnerisch berücksichtigten Vorlandlänge L_{vor} für ausgewählte Schienenkräfte (MATLAB-script `vorlang.m`, im Anhang) und Vorlandsteifigkeit mit linearem Längsverschiebewiderstand

Steifigkeitsvektors \vec{k}_b nach Gleichung (4.13) in Gleichung (4.4) beginnt der iterative Prozess. Die Berechnung wird abgeschlossen, sobald die Differenz zwischen dem neuen und dem im vorhergehenden Iterationsschritt ermittelten Steifigkeitsvektor \vec{k}_b unter der definierten Toleranz von beispielsweise 1 % landet.

Im Gegensatz zu dem linearen Fall wird die nichtlineare Vorlandsteifigkeit (im Weiteren: $k_{vor,NL}$) von der Schienenkraft F_L am Auflager beeinflusst. Durch Variation der Schienenkraft lässt sich allerdings beobachten, dass die für eine genaue Ermittlung der Ersatzsteifigkeit notwendige Vorlandlänge L_{vor} immer bei rund 40 m bleibt, siehe Abbildung 4.2. Es lässt sich außerdem beobachten, dass eine Erhöhung der Kraftamplitude F_L zu einer Aufweitung des Vorlands führt. Die auf dem linearen Längsverschiebewiderstand nach EN 1991-2 [26] basierende Vorlandsteifigkeit liegt deutlich unterhalb der restlichen Verläufe. Dies impliziert, dass die Verwendung einer Vorlandsteifigkeit mit linearer Schottersteifigkeit zu einer Überschätzung der Verschiebungsamplituden führen kann. Wie in Abbildung 4.2 ersichtlich, ist die Vorlandsteifigkeit bei Verwendung der nichtlinearen Schotterfedersteifigkeiten $\bar{k}_{b,NL}$ nach Gleichung (2.2) deutlich höher als die lineare Vorlandsteifigkeit k_{vor} . Das ergibt sich daraus, dass bei der linearen Vorlandsteifigkeit k_{vor} nach *Bigelow et al.* [3] eine über die Länge konstante Schotterfedersteifigkeit \bar{k}_b verwendet wird. Bei Zugrundelegung eines nichtlinearen Schotterfedersteifigkeitsverlaufs $\bar{k}_{b,NL}$, siehe Abbildung 2.7(a), ergeben sich bei kleinen Horizontalverschiebungen u zwischen Gleisrost und Untergrund deutlich

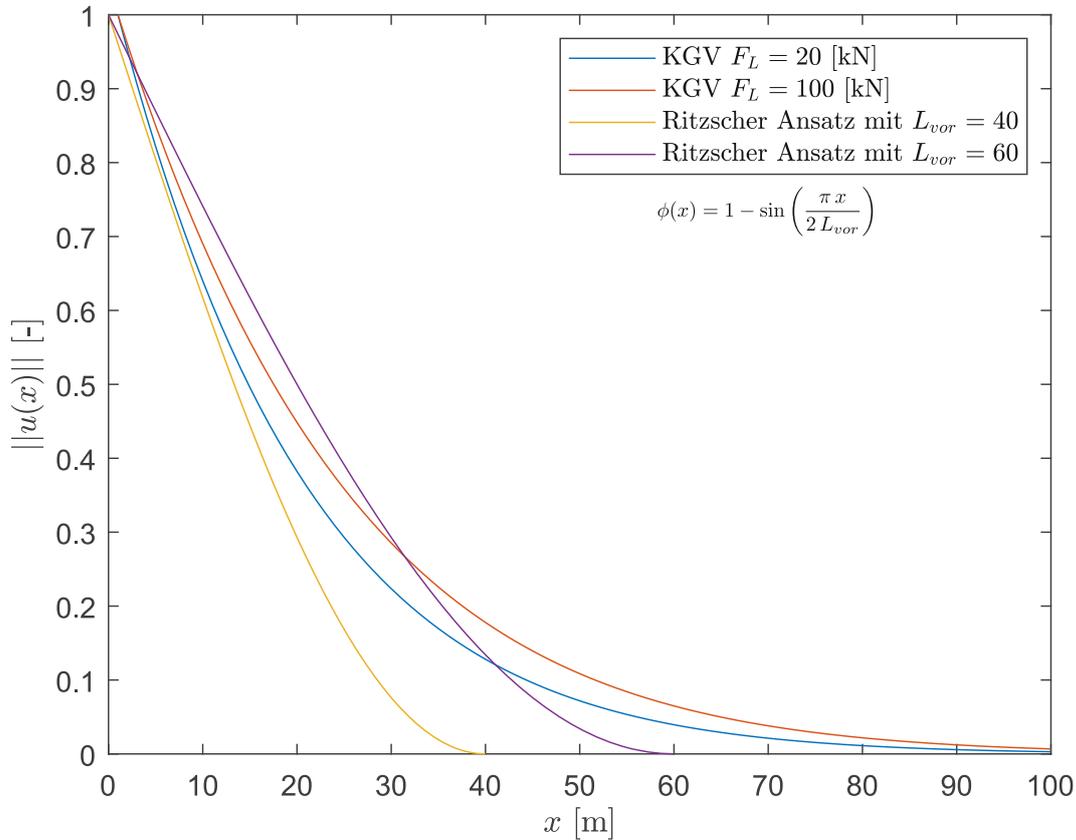


Abb. 4.3: Anpassung der Vorlandlänge L_{vor} im Ritz'schen Ansatz unter Berücksichtigung der Längsverschiebungsverläufe aus dem Kraftgrößenverfahren für $F_L = 20$ und $F_L = 100$ kN

höhere Steifigkeiten als $\bar{k}_b = 10$ kN/mm pro m Gleis gemäß EN 1991-2 [26]. Die Berücksichtigung eines realistischen Horizontalverschiebungsverlaufs $u(x)$, der über die Auflager hinaus abklingt, führt zu geringeren Horizontalverschiebungen u und somit zu höheren Schotterfedersteifigkeiten $\bar{k}_{b,NL}$, die sich in $k_{vor,NL}$ widerspiegeln.

Wenn im Zuge einer vereinfachten Analyse die Vorlandsteifigkeit durch Formulierung der potentiellen Energie eines steifigkeitsäquivalenten Einmassenschwingers ermittelt wird, kann die im Ritz'schen Ansatz (Gleichung (3.52)) auftretende Vorlandlänge L_{vor} gezielt variiert werden, um eine bessere Übereinstimmung zwischen dem approximierten und realen Längsverschiebungsverlauf zu erreichen. Wie in Abbildung 4.3 ersichtlich, führt die Annahme von $L_{vor} = 60$ m zu einer besseren Approximation der $u(x)$ -Verläufe aus dem Kraftgrößenverfahren im Vergleich zur in Kapitel 3 angenommenen Länge $L_{vor} = 40$ m.

$$L_{vor} = 60 \text{ m} \rightarrow u^*(x) = 1 - \sin\left(\frac{\pi x}{120}\right) \quad (4.15)$$

4.2 Korrekturfaktor: Nichtlinearität der Schottersteifigkeit für das Vorlandmodell

Eine Erweiterung von Gleichung (3.82) zur Berücksichtigung eines nichtlinearen, verschiebungsabhängigen Steifigkeitsverlaufs $\bar{k}_{b,NL}$ erfordert die Lösung einer Differentialgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten. Dies ist mit herkömmlichen analytischen Methoden nicht praktikabel. In der in Kapitel 4.1 vorgestellten Vorgehensweise zur iterativen Ermittlung der Vorlandsteifigkeit mit dem Kraftgrößenverfahren hängt die Berechnung, bei vordefinierter Schwellenlänge $d = 60$ cm, Schienendehnstefigkeit $EA = 3220$ MN und Vorlandlänge $L = 90$ m, lediglich von der axialen Schienenkraft am Auflager F_L ab. Aus diesem Grund kann ein Korrekturfaktor κ_V identifiziert werden, der die nichtlineare Vorlandsteifigkeit in Abhängigkeit von der Schienenkraft am Auflager liefert:

$$k_{vor,NL}(F_L) = k_{vor} \kappa_V(F_L) \quad (4.16)$$

Analog zu *Brandstetter* [6] und *Bigelow et al.* [3] wurde hier $L_{vor} = 90$ m gewählt, um eine Vorlandsteifigkeit zu ermitteln, die unabhängig von der berücksichtigten Vorlandlänge ist. Im Einklang mit dem hinterlegten Schottersteifigkeitsverlauf $\bar{k}_{b,NL}(u)$ hat der Korrekturfaktor die Form eines negativen Logarithmus:

$$\kappa_V = -0,142 \ln(F_L) + 1,8663 \quad (4.17)$$

Dieser Korrekturfaktor berücksichtigt die Amplitudenabhängigkeit des Schotteroberbaus und ist qualitativ sehr ähnlich zur Steifigkeit $\bar{k}_{b,NL}$ (vgl. Kapitel 2.3). Geringe Verschiebungsamplituden im Schotteroberbau führen zu einer steiferen Antwort des Schotters und somit der idealisierten

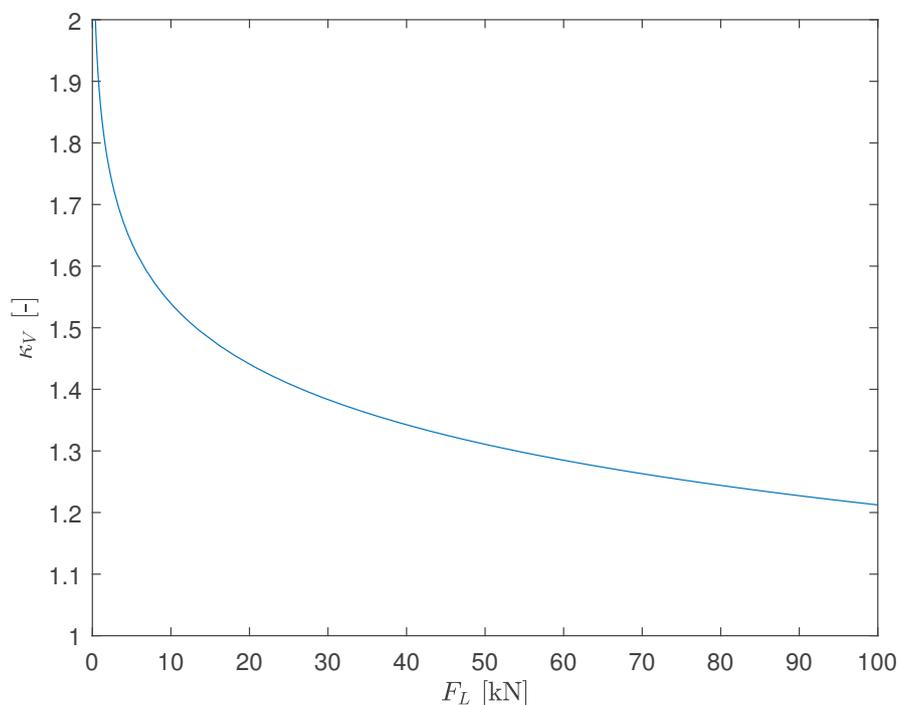


Abb. 4.4: Korrekturfaktor κ_V zur Berücksichtigung der Nichtlinearität der Schottersteifigkeit für das Vorlandmodell in Funktion der Schienenkraft am Auflager F_L

Vorlandfeder. Bei höheren Verschiebungsamplituden weist die Vorlandfeder hingegen geringere Steifigkeiten auf.

4.3 Rechnerische Berücksichtigung des nichtlinearen Verhaltens des Schotters im Brückenbereich

Die Methode zur Ermittlung der Auflagerkräfte eines Koppelbalkens durch Anbringen einer horizontalen Belastung $p(x) = \bar{k}_{b,NL} u$ auf den elastisch gelagerten Oberbaustab wurde im Kapitel 3.1.4 für den linearen Fall erläutert. Wenn das nichtlineare Verhalten des Schotters berücksichtigt wird, muss die horizontale Belastung $p(x)$ nach Gleichung (3.24) wie folgt modifiziert werden:

$$p(x) = u(x) \bar{k}_{b,NL}(u(x)) \quad (4.18)$$

Einsetzen von Gleichung (2.2) in Gleichung (4.18) ergibt:

$$p(x) = u(x) (-3,57 \ln |u(x)| + 9,61) \quad (4.19)$$

Mit Einführung der Brückenlänge L , des Schwerlinienabstands zwischen Oberbaustab und Tragwerkstab r , der Auflagerexzentrizität e_L und der maximalen Durchbiegung in Feldmitte w_0 kann die Verschiebungsfunktion nach Gleichung (3.6) herangezogen werden, was in folgender Belastung $p(x)$ resultiert:

$$p(x) = \frac{w_0 \pi}{L} \left(e_L + r \cos \frac{\pi x}{L} \right) \left[-3,57 \ln \left| \frac{w_0 \pi}{L} \left(e_L + r \cos \frac{\pi x}{L} \right) \right| + 9,61 \right] \quad (4.20)$$

Der Formelapparat nach Gleichung (3.28) bis (3.38) (Kapitel 3.1.4) bleibt weiterhin wie im linearen Fall unverändert:

$$N_0(x) = \int_0^L p(x) dx - \int p(x) dx \quad (4.21)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{10} &= \int_0^L \frac{N_0(x) N_1}{EA} dx \\ \delta_{11} &= \frac{L}{EA} + \frac{1}{k_{vor}} \end{aligned} \right\} \rightarrow F_{L,re,0} = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11} + \frac{1}{k_{vor}}}; \quad u_{L,re,0} = \frac{F_{L,re}}{k_{vor}} \quad (4.22)$$

Der wesentliche Unterschied zum linearen Fall (siehe Kapitel 3) liegt daran, dass die Integration für die Nachgiebigkeit δ_{10} in Gleichung (4.22), sowie die Ermittlung der Normalkraftlinie $N_0(x)$ im statisch bestimmten Grundsystem N_0 numerisch durchgeführt werden müssen. Zu diesem Zweck können die im Anhang eingeführten MATLAB-Funktionen `logstep.m` und `logelast.m` verwendet werden, mehr dazu in Kapitel 4.6.

4.4 Korrekturfaktor: Nichtlinearität der Schottersteifigkeit für das Koppelbalkenmodell

Analog zum Vorland kann hier ein Korrekturfaktor κ_B zur Einbeziehung des nichtlinearen Verlaufs der Schottersteifigkeit nach Gleichung (2.2) in folgender Form eingeführt werden:

$$\bar{k}_{b,NL}(u) = \bar{k}_b \kappa_B \quad (4.23)$$

wobei $\kappa_B = \kappa_B(r, e_L, w_0/L)$.

Dies sorgt für einen erhöhten Komplexitätsgrad, da der Korrekturfaktor nicht mehr von einem einzigen Parameter, sondern von folgenden vier Parametern abhängt:

- L Brückenlänge (Einfeldsystem)
- r Schwerlinienabstand
- e_L Auflagerexzentrizität
- w_0 Durchbiegung im Feldmitte zum Zeitpunkt $t = n \frac{\pi}{2}(2\pi n + \pi)$, $n \in \mathbb{Z}$

In der in Abbildung 3.13 dargestellten Lösung des Koppelbalkens führt eine Modifikation der Schottersteifigkeit zu einer Änderung der Belastungsfunktion $p(x)$ und folglich des Normalkraftverlaufs im statisch bestimmten Grundsystem $0 N_0(x)$. Die restlichen Rechenschritte und Koeffizienten werden von einer nichtlinearen Schottersteifigkeit nicht beeinflusst. Aus Gleichung (4.21) folgt, dass sich das Endergebnis bei Einsetzen einer angepassten Steifigkeit $\bar{k}_{b,NL}$ nicht ändert:

$$\int_0^L u(x) \bar{k}_b \kappa_B dx \stackrel{!}{=} \int_0^L u(x) \bar{k}_{b,NL}(u(x)) dx \quad (4.24)$$

$$\rightarrow \kappa_B = \frac{\int_0^L u(x) \bar{k}_{b,NL}(u(x)) dx}{\int_0^L u(x) \bar{k}_b dx} \quad (4.25)$$

Da der Faktor κ_B nicht von den Belastungsfunktionen selbst, sondern von ihren Integralen über die Brückenlänge abhängt, können die Variablen von vier auf drei reduziert werden. Umformung der Verschiebung $u(x)$ nach Gleichung (3.8), mit der Abkürzung $\psi = w_0/L$, ergibt:

$$u(x) = \psi \pi \left[e_L + r \cos \left(\pi \frac{\psi}{w_0} x \right) \right] \quad (4.26)$$

Die Brückenlänge, über die die Belastung integriert wird, entspricht:

$$L = \frac{w_0}{\psi} \quad (4.27)$$

Aus den Gleichungen (4.26) und (4.27) ist ersichtlich, dass der Wert von w_0 keinen Einfluss auf die Integrale in Gleichung (4.25) hat. Durch numerische Auswertung des Korrekturfaktors (4.25) kann leicht festgestellt werden, dass die Variation des Betrags von w_0 in Gleichungen (4.26) und (4.27) identische Ergebnisse für κ_B liefert. Diese Reduktion der Variablen auf drei ($\psi = w_0/L$, r und e_L) hat den wesentlichen Vorteil, dass der Korrekturfaktor κ_B als 2-dimensionale Funktion, bei Fixierung einer der drei Variablen, in aussagekräftigen Diagrammen bzw. Tabellen dargestellt werden kann. Zu diesem Zweck ist im Anhang der MATLAB-Code `parameterstudie-nichtlin.m`

vorhanden. In Abbildung 4.5 wird diese κ_B -Funktion exemplarisch für eine fixierte Auflagerexzentrizität von $e_L = 100$ cm eingeführt. Der genaue Wert des Korrekturfaktors $\kappa_B(L, r, e_L, w_0)$ kann mithilfe der MATLAB-Funktion `nichtlin-kappa.m` durch Eingabe der oben genannten Parameter ermittelt werden.

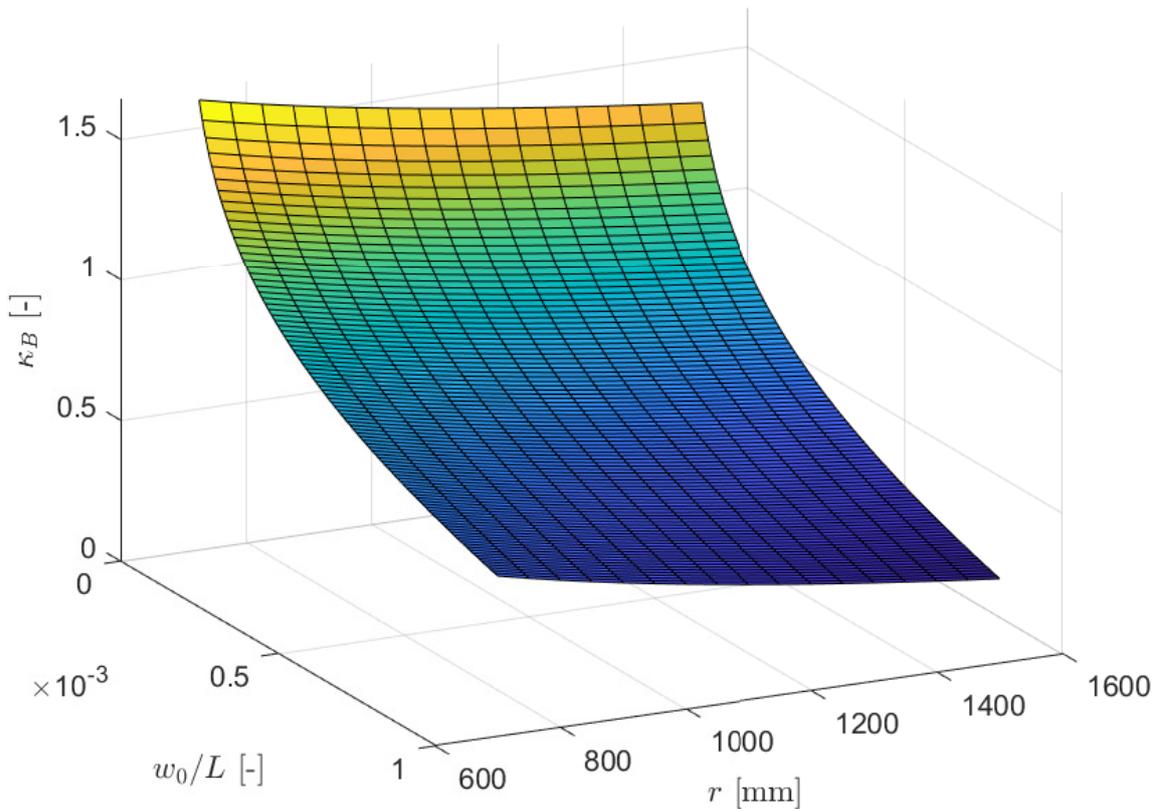


Abb. 4.5: Korrekturfaktor κ_B zur Berücksichtigung der Nichtlinearität der Schottersteifigkeit im Brückenbereich als Funktion der Schwerlinienabstand r und des Durchbiegung-Stützlänge-Verhältnisses w_0/L für eine Auflagerexzentrizität von $e_L = 100$ cm

4.5 Rechenbeispiele

An dieser Stelle wird die beispielhafte rechnerische Ermittlung der erste Biegeeigenfrequenz f_1 nach Kapitel 3.4 um die in diesem Kapitel erläuterten nichtlinearen Effekte erweitert. Dabei wird die erste Biegeeigenfrequenz von Tragwerk 6 (s. Tabelle 3.1) unter Miteinbeziehung der Korrekturfaktoren κ_B und κ_V abgeschätzt. Es wird von einer Durchbiegung $w_0 = L/1000 = 0,016$ m und einer Massenbelegung $\mu = 7306$ kg ($\rho_b = 1700$ kg/m³) ausgegangen, die in Kapitel 3 die beste Übereinstimmung mit den Messdaten geliefert hat.

Zunächst müssen die Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ und $u_{L,re}$ ermittelt werden. Dies kann mithilfe des in Kapitel 3 ausführlich erläuterten Iterationsverfahrens erfolgen:

$$\begin{aligned} u_{L,re,0} &= \frac{w_0 \pi k_b L e_L}{2(k_{vor} L + 2EA)} \left(\frac{4r}{\pi^2 e_L} - \frac{2EA}{L k_{vor}} - 1 \right) \\ &= \frac{0,016 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 16,1 \cdot 0,8}{2(179,403 \cdot 10^6 \cdot 16,1 + 2 \cdot 3220 \cdot 10^6)} \cdot \left(\frac{4 \cdot 0,92}{\pi^2 \cdot 0,8} - \frac{2 \cdot 3220 \cdot 10^6}{16,1 \cdot 179,403 \cdot 10^6} - 1 \right) = -9,60 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{L,li,0} &= u_{L,re,0} + \frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}} = \\ &= -9,65 \cdot 10^{-4} + \frac{0,016 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 0,8}{179,403 \cdot 10^6} = 1,28 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

$$e_{L,1} = e_L - \frac{u_{L,li,0} L}{w_0 \pi} = 0,8 - \frac{1,28 \cdot 10^{-3} \cdot 16,1}{0,016 \cdot \pi} = 0,39 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} u_{L,re,1} &= \frac{w_0 \pi k_b L e_{L,1}}{2(k_{vor} L + 2EA)} \left(\frac{4r}{\pi^2 e_{L,1}} - \frac{2EA}{L k_{vor}} - 1 \right) \\ &= \frac{0,016 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 16,1 \cdot 0,39}{2(179,403 \cdot 16,1 + 2 \cdot 3220 \cdot 10^6)} \cdot \left(\frac{4 \cdot 0,92}{\pi^2 \cdot 0,39} - \frac{2 \cdot 3220 \cdot 10^6}{16,1 \cdot 179,403 \cdot 10^6} - 1 \right) = -3,88 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{L,li,1} &= u_{L,re,1} + \frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}} = \\ &= -3,88 \cdot 10^{-4} + \frac{0,016 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 0,39}{179,403 \cdot 10^6} = 7,10 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

$$u_{L,re} = u_{L,re,0} \frac{1}{1 + \frac{\Delta u_{L,re}}{u_{L,re,0}}} = -9,60 \cdot 10^{-4} \frac{1}{1 + \frac{(9,60 - 3,88) \cdot 10^{-4}}{-9,60 \cdot 10^{-4}}} = 6,02 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (4.28)$$

$$u_{L,li} = u_{L,li,0} \frac{1}{1 + \frac{\Delta u_{L,li}}{u_{L,li,0}}} = 1,28 \cdot 10^{-3} \frac{1}{1 + \frac{(12,8 - 5,66) \cdot 10^{-4}}{1,28 \cdot 10^{-3}}} = 8,87 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (4.29)$$

An dieser Stelle werden die Korrekturfaktoren $\kappa_{V,li}$ bzw. $\kappa_{V,re}$ nach Gleichung (4.17) und die Vorlandsteifigkeiten $k_{vor,NL,li}$ bzw. $k_{vor,NL,re}$ nach Gleichung (4.16) ermittelt. Die Auflagerkräfte F_L müssen in [kN] eingegeben werden.

$$\begin{aligned}\kappa_{V,re} &= 0,142 \ln(F_{L,re}) + 1,886 = 0,142 \ln(k_{vor} u_{L,re}) + 1,886 \\ &= 0,142 \ln(179,403 \cdot 0,60) + 1,886 = 1,20\end{aligned}\quad (4.30)$$

$$k_{vor,NL,re} = \kappa_{V,re} k_{vor} = 1,20 \cdot 179,403 = 215,56 \text{ kN/mm} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned}\kappa_{V,li} &= 0,142 \ln(F_{L,li}) + 1,886 = 0,142 \ln(k_{vor} u_{L,li}) + 1,886 \\ &= 0,142 \ln(179,403 \cdot 0,89) + 1,886 = 1,15\end{aligned}\quad (4.32)$$

$$k_{vor,NL,li} = \kappa_{V,li} k_{vor} = 1,15 \cdot 179,403 = 205,67 \text{ kN/mm} \quad (4.33)$$

Die nichtlineare Schottersteifigkeit $\bar{k}_{b,NL}$ ergibt sich mithilfe des Korrekturfaktors κ_B (s. MATLAB-Code `nichtlin-kappa.m` im Anhang A) zu:

$$\kappa_B = 0,473 \quad (4.34)$$

$$\bar{k}_{b,NL} = \kappa_B \bar{k}_b = 0,47 \cdot 10 = 4,73 \text{ kN/mm/m} \quad (4.35)$$

Die ermittelte Steifigkeiten $\bar{k}_{b,NL}$, $k_{vor,NL,li}$, $k_{vor,NL,re}$ können nun zur Ermittlung der Biegeeigenfrequenz f_1 in die Gleichungen für die Ersatzmasse M^* nach Gleichung (3.84) und -steifigkeit K^* nach Gleichung (3.85) des Gesamtsystems Brücke inkl. Vorland eingesetzt werden. Aufgrund der Unterscheidung zwischen $k_{vor,NL,li}$ und $k_{vor,NL,re}$ muss hierbei Gleichung (3.85) leicht modifiziert werden.

$$\begin{aligned}M^* &= \mu_{ges} \frac{L w_0^2}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L} \right)^2 \right] + M_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) \\ &= 7306 \frac{16,1 \cdot 0,161^2}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi 0,8}{16,1} \right)^2 \right] + 10694 \left[(8,87 \cdot 10^{-4})^2 + (-6,02 \cdot 10^{-4})^2 \right] = 15,7419 \text{ kg}\end{aligned}\quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}K^* &= EI_{ges} \frac{\pi^4 w_0^2}{2L^3} + \bar{k}_{b,NL} \left(\frac{\pi w_0}{L} \right)^2 \left(r^2 \frac{L}{2} + e_L^2 L \right) + k_{vor,NL,re} u_{L,re}^2 + k_{vor,NL,li} u_{L,re}^2 u_{L,li}^2 \\ &= 7,03 \cdot 10^9 \frac{\pi^4 \cdot 0,161^2}{2 \cdot 16,1^3} + 4,73 \cdot 10^6 \left(\frac{\pi \cdot 0,161}{16,1} \right)^2 \left(0,92^2 \frac{16,1}{2} + 0,8^2 \cdot 16,1 \right) \\ &\quad + 188,35 \cdot 10^6 \cdot (-6,02 \cdot 10^{-4})^2 + 207,48 \cdot 10^6 \cdot (8,87 \cdot 10^{-4})^2 = 2,2428 \cdot 10^7 \text{ N/m}\end{aligned}\quad (4.37)$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{K^*}{M^*}} = \sqrt{\frac{2,2428 \cdot 10^4}{15,7419}} = 37,75 \text{ rad/s} \quad (4.38)$$

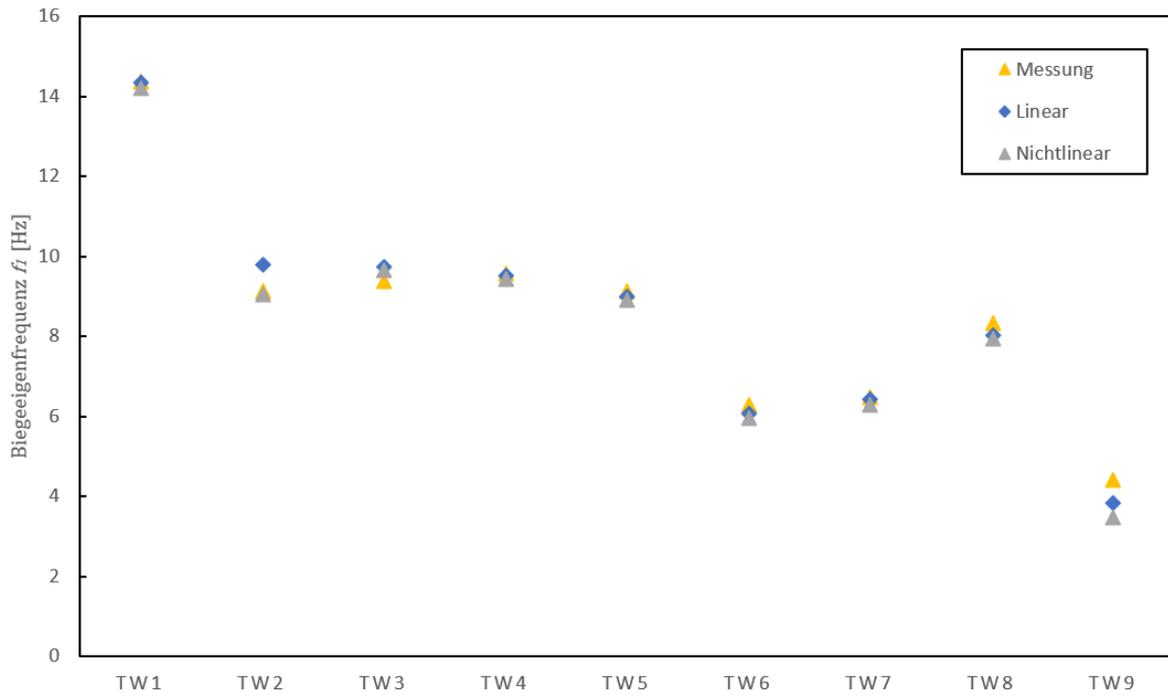
$$f_1 = \frac{37,75}{2\pi} = 6,01 \text{ Hz} \quad (4.39)$$

Dieses Ergebnis stellt eine sehr gute Übereinstimmung mit der von *Stollwitzer et al.* [35] identifizierten Biegeeigenfrequenz aus Messdaten zufolge krafterregter Schwingungsanregung (KSA) von $f_1 = 5,75 \text{ Hz}$ dar.

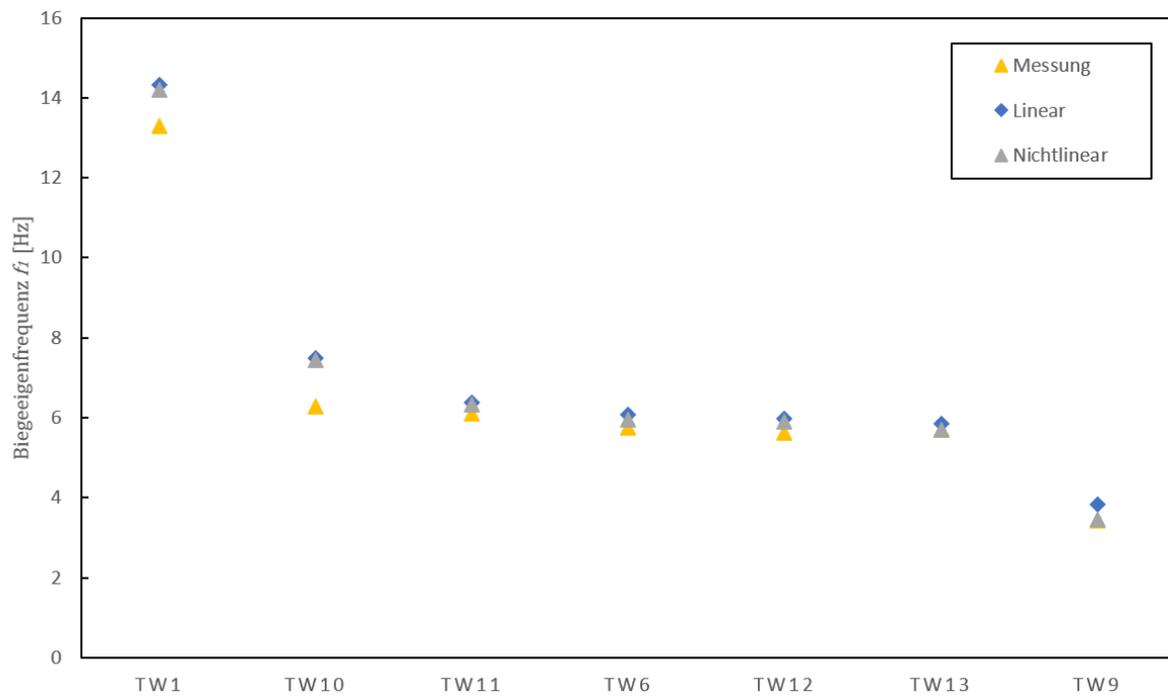
Die Auswertung der Biegeeigenfrequenzen f_1 für alle in Tabelle 3.1 eingeführten Beispielbrücken ist in Abbildung 4.6 und Tabelle 4.1 zu sehen. Hierbei wird zwischen krafterregter Schwingungsanregung (KSA) und dem Ausschlagverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ) als Anregungsmethode unterschieden. Die Berechnung mit dem linearen und nichtlinearen Verfahren liefert durchaus vergleichbare Ergebnisse. Die prozentuelle Abweichung Δf_1 der Biegeeigenfrequenz zwischen Rechnung und Messung wird analog zu Gleichung (3.100) ermittelt. Aus Abbildung 4.7 ist ersichtlich, dass die Biegeeigenfrequenzen unter Berücksichtigung der Nichtlinearitäten mittels κ_B bzw. κ_V bei der krafterregten Schwingungsanregung (KSA) deutlich besser übereinstimmen.

Tab. 4.1: Vergleich Biegeeigenfrequenz f_1 : lineare und nichtlineare Rechnung / Messung (Schotterdichte $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$)

Tragwerk-Nr.	Linear			Nichtlinear			ASZ	KSA
	f_1 [Hz]	Δ mit ASZ [%]	Δ mit KSA [%]	f_1 [Hz]	Δ mit ASZ [%]	Δ mit KSA [%]	f_1 [Hz]	f_1 [Hz]
TW1	14,33	-0,42	7,74	14,19	-1,37	6,71	14,39	13,30
TW2	9,79	7,61	-	9,01	-1,02	-	9,10	-
TW3	9,73	3,48	-	9,66	2,74	-	9,40	-
TW4	9,51	-0,43	-	9,43	-1,23	-	9,55	-
TW5	8,99	-1,17	-	8,90	-2,22	-	9,10	-
TW6	6,09	-3,22	5,87	5,94	-5,51	3,37	6,29	5,75
TW7	6,43	-0,53	-	6,27	-2,88	-	6,46	-
TW8	8,02	-3,64	-	7,93	-4,74	-	8,32	-
TW9	3,83	-12,99	11,29	3,46	-21,45	0,47	4,40	3,44
TW10	7,50	-	19,41	7,45	-	18,64	-	6,28
TW11	6,39	-	4,71	6,33	-	3,75	-	6,10
TW12	5,97	-	6,15	5,91	-	5,09	-	5,62
TW13	5,85	-	2,45	5,69	-	-0,27	-	5,71
		$ \Delta \varnothing$ 3,72	$ \Delta \varnothing$ 8,23		$ \Delta \varnothing$ 4,79	$ \Delta \varnothing$ 5,47		

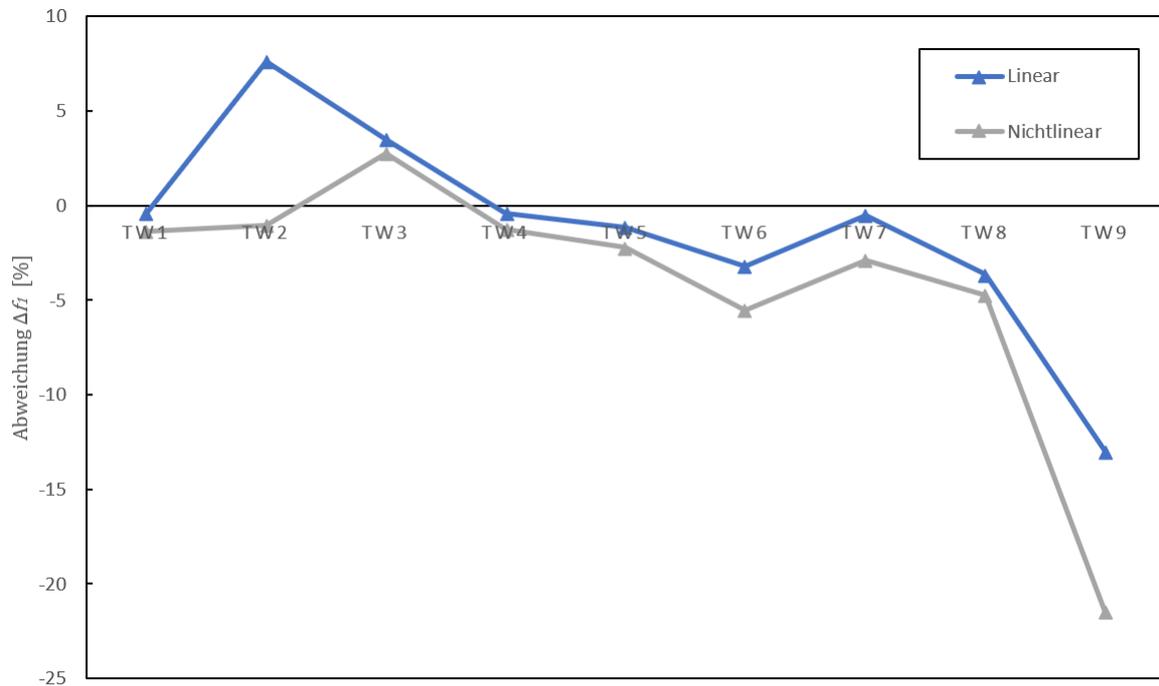


(a) Anregungsmethode: Ausschwingungsverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)

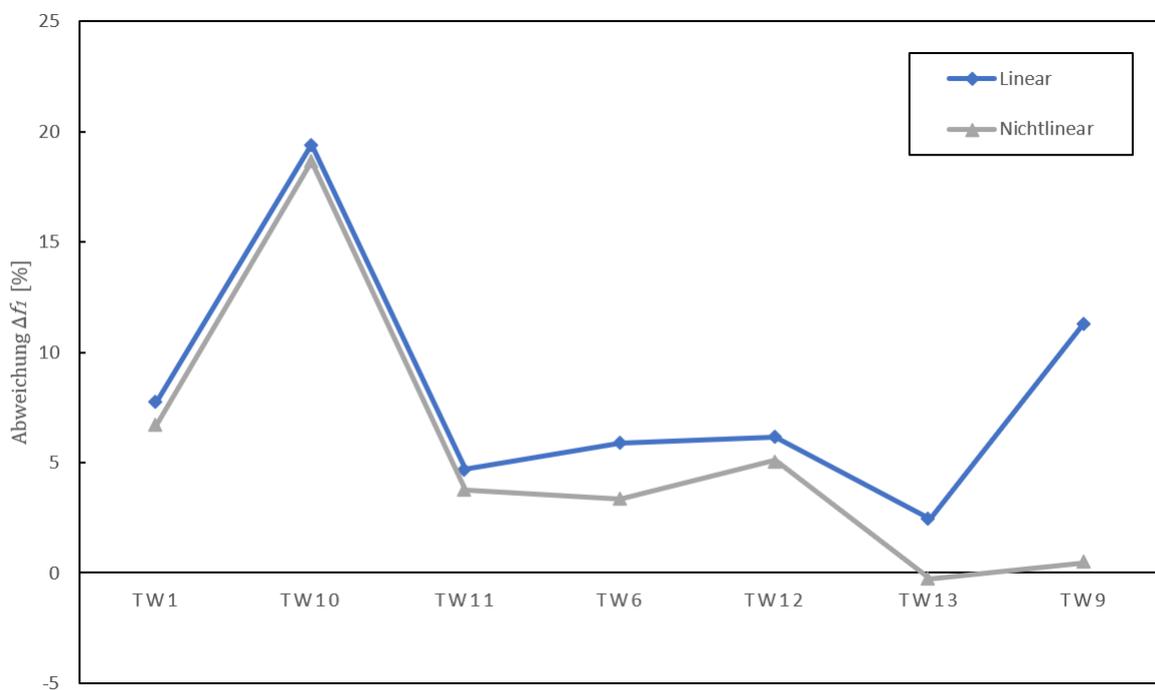


(b) Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)

Abb. 4.6: Biegeeigenfrequenz f_1 : Vergleich Messungen (ASZ/KSA), Rechenmodell mit linearer und nichtlinearer Schottersteifigkeit (Schotterdichte $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$)



(a) Anregungsmethode: Ausschlagverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)



(b) Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)

Abb. 4.7: Biegeeigenfrequenz f_1 : Prozentuelle Abweichung Messungen (ASZ/KSA) / Rechenmodell mit linearer und nichtlinearer Schottersteifigkeit (Schotterdichte $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$)

4.6 Implementierung der Berechnungsmethode zur Erfassung des nichtlinearen Längsverschiebewiderstandes in MATLAB

In [35] werden dynamische Parameter (Eigenfrequenz und Lehr'sches Dämpfungsmaß) von 13 Bestandsbrücken angegeben. Diese dienen auch hier als Referenz. Die geometrischen Eigenschaften der analysierten Tragwerke können aus Tabelle 3.1 entnommen werden. Um eine praktische Anwendung der oben eingeführten Nichtlinearität der Schottersteifigkeit zu ermöglichen, wurde die Modellbildung für den Vorland- bzw. Brückenbereich in MATLAB-scripts implementiert. Im Vorlandmodell muss zunächst die Ersatzsteifigkeit k_{vor} durch Eingabe linearer Federelemente ermittelt werden. Mit dem Kraftgrößenverfahren, siehe Abschnitt 4.1, kann ein Horizontalverschiebungsverlauf abgeleitet werden, welcher als Input für die nichtlinearen Federn herangezogen werden kann. Diese Berechnung kann mithilfe der MATLAB-Funktion `vorstep.m` durchgeführt werden. Schließlich iteriert die Funktion `vorsteif.m`, bei Eingabe einer Auflagerkraft F_L , die Ersatzsteifigkeit des Vorlandbereichs k_{vor} durch mehrmalige Wiederholung der Funktion `vorstep.m`. Für den Brückenbereich werden wiederum zwei MATLAB-Funktionen benötigt. Aufgrund der horizontal nachgiebigen Lagerungsbedingungen (Vorlandfeder k_{vor}) und somit der äußeren statischen Unbestimmtheit des Systems muss das Gleichgewicht ausgehend von der verformten Lage formuliert werden. Die hierbei notwendige Iteration mittels geometrischer Reihe, siehe Gleichung (3.48), Kapitel 3.1.5, wurde in die MATLAB-Funktion `logelast.m` inkludiert. Durch Eingabe der Brückenparameter L , r , e_L , der Vorlandsteifigkeit k_{vor} und der maximalen Durchbiegung w_0 können somit die Auflagerreaktionen ermittelt werden. Wie im Flussdiagramm (Abbildung 4.9) ersichtlich, können durch Kombination der Vorland- und Brückenseite die Vorlandsteifigkeiten k_{vor} einschließlich der zugehörigen Auflagerverschiebungen u_L iterativ ermittelt werden.

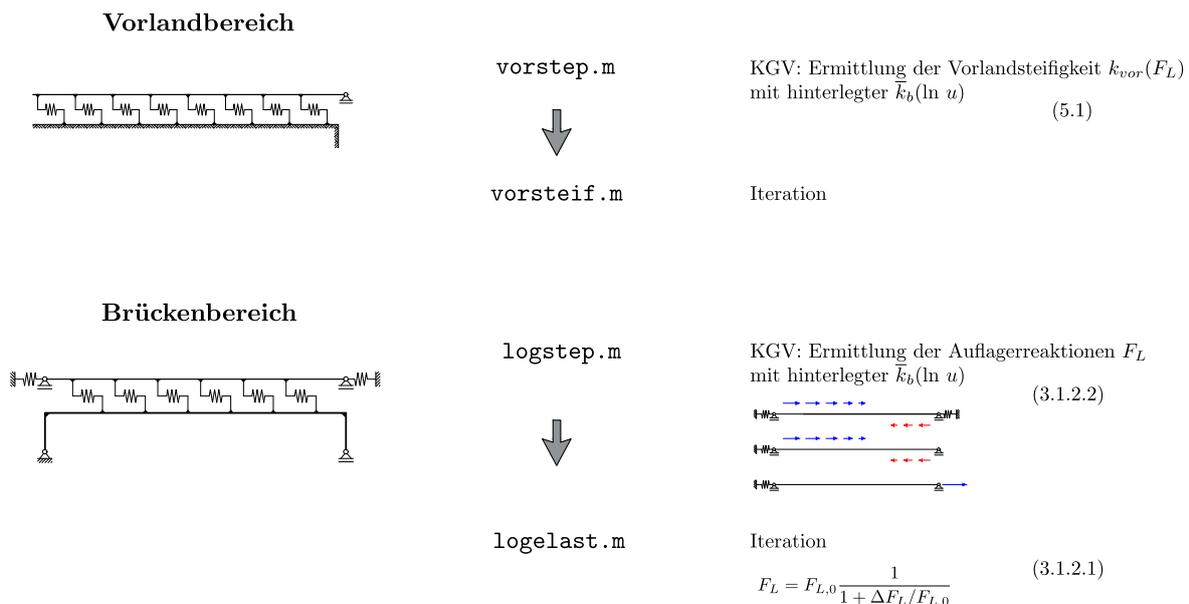


Abb. 4.8: Übersicht der MATLAB-scripts im Brücken- und Vorlandbereich

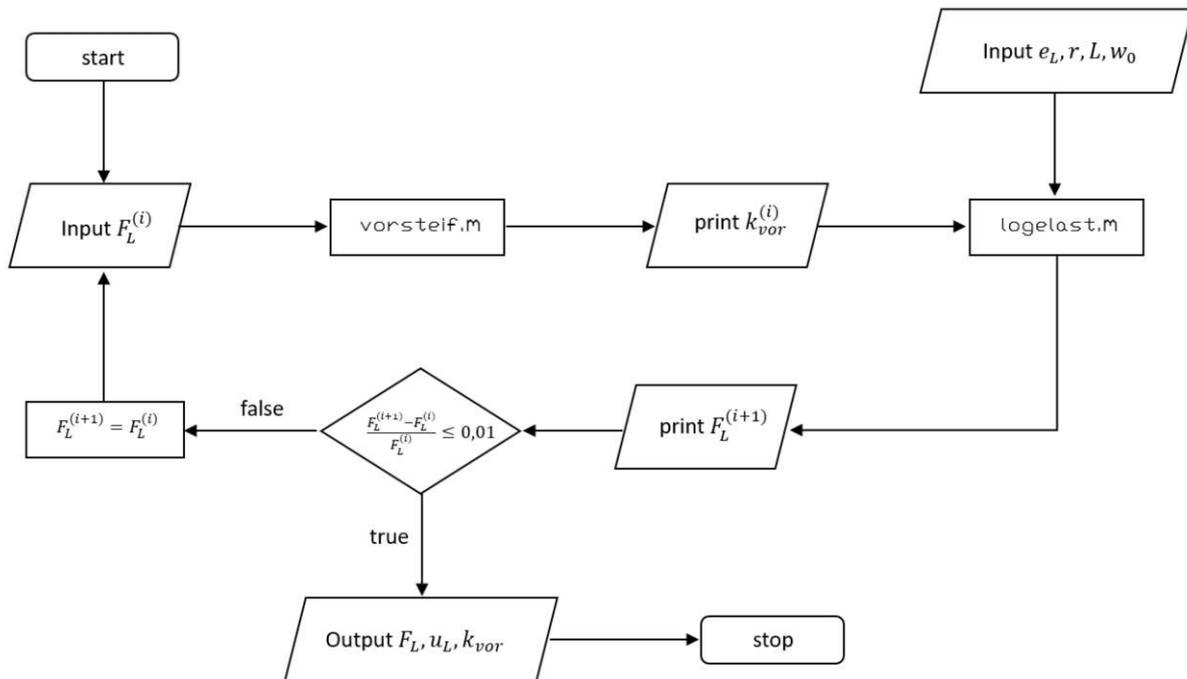
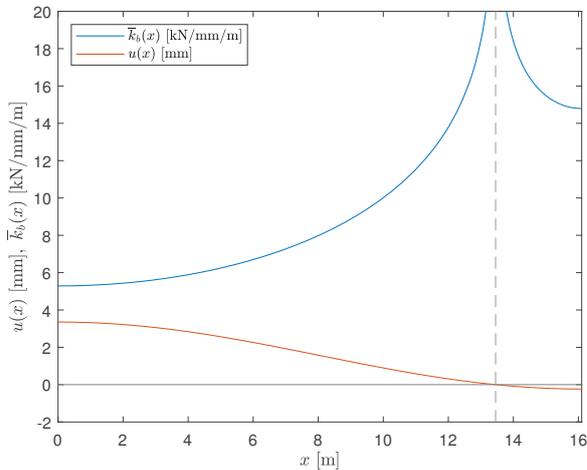


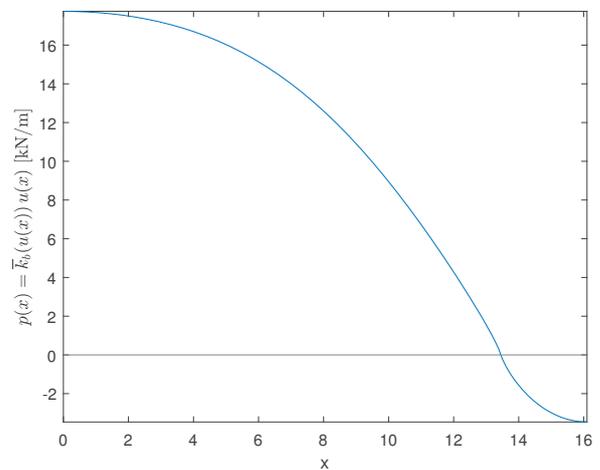
Abb. 4.9: Flussdiagramm zur Bestimmung der Vorlandsteifigkeit k_{vor}

4.6.1 Beispiel zur Programmerläuterung

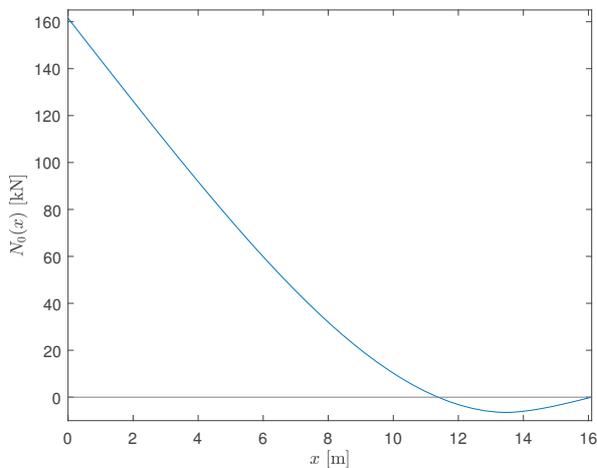
Im Weiteren werden die einzelnen Rechenschritte der Funktion `lostep.m` anhand einer Beispielbrücke erläutert. Dieses Beispiel bezieht sich auf das in Tabelle 3.1 enthaltene Tragwerk 6 (kurz: TW6) mit Länge $L = 16,1$ m, Biegesteifigkeit des Tragwerkbalkens $EI_{TW} = 7,02 \cdot 10^9$ Nm², Biegesteifigkeit der Schienen $EI_{II} = 1,28 \cdot 10^7$ Nm², Auflagerexzentrizität $e_L = 0,8$ m und Schwerlinienabstand $r = 0,92$ m. Zunächst wird die Schotterfedersteifigkeit $\bar{k}_{b,NL}$ über die Laufkoordinate x zwischen $x = 0$ und $x = L = 16,1$ m aus dem als Imperfektion eingegebenen Horizontalverschiebungsverlauf $u(x)$ gemäß Gleichung (3.6) ermittelt. Wie in Abbildung 4.10(a) dargestellt, resultiert an Stellen kleiner Horizontalverschiebungen eine höhere Steifigkeit. Anschließend wird das Produkt aus Horizontalverschiebung u und Schotterfedersteifigkeit $\bar{k}_{b,NL}$ berechnet, um die Ersatzlast $p(x)$ zu erhalten, die die Einwirkung des Schubverbunds auf den Gleisrost darstellt, siehe Abbildung 4.10(b). In Abbildung 4.10(a) ist es außerdem erkennbar, dass die Schotterfedersteifigkeit $\bar{k}_{b,NL}$ theoretisch gegen Unendlich strebt, wenn eine horizontale Relativverschiebung von $u = 0$ mm vorliegt. Dies ist auf den logarithmischen Schotterfedersteifigkeitsverlauf $\bar{k}_{b,NL}$ gemäß Gleichung (2.2) zurückzuführen. In der Realität ist die Steifigkeit jedoch endlich, daher ergibt sich eine resultierende Belastung $p(u = 0)$ von Null, siehe Abbildung 4.10(b). Wie in Abschnitt 3.1.4 ausführlich erläutert, wird nun der Schienenstab (Gleisrost) isoliert. Das zugehörige statische System besteht aus einem beidseitig elastisch gelagerten Dehnstab. Es handelt sich um ein einfach statisch unbestimmtes System, welches mit dem Kraftgrößenverfahren mit geringem Aufwand lösbar ist. Durch Entfernung der rechten Feder entsteht das statisch bestimmte Grundsystem. Da in horizontaler Richtung nur eine Halterung bleibt, fließt die gesamte Belastung in das elastische Auflager auf der linken Seite. Durch Integration von $p(x)$ ergibt sich somit die Normalkraftlinie N_0 , siehe Abbildung 4.10(c).



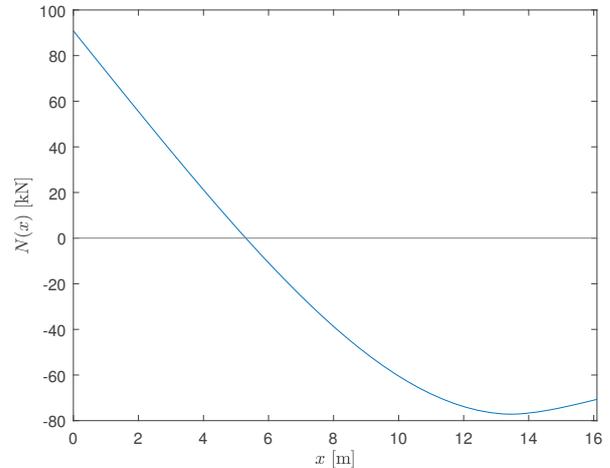
(a) Horizontale Relativverschiebung $u(x)$ zwischen Tragwerk und Gleisrost und nichtlinearer Schotterfedersteifigkeit $k(x)$ über die Brückenlänge x



(b) Horizontale Belastungsfunktion $p(x)$ auf den Oberbaustab aufgrund des Schubverbunds zwischen Oberbau und Tragwerk bei eingprägter Durchbiegung in Feldmitte w_0



(c) Normalkraftlinie am statisch bestimmten Grundsystem (System 0: einfach gelagerter Oberbaustab unter äußerer Belastung $p(x)$) im Rahmen des Kraftgrößenverfahrens N_0



(d) Normalkraftlinie des nachgiebig gelagerten Oberbaubalkens

Abb. 4.10: Visualisierung der Verläufe bei der Ermittlung der Auflagerkräfte eines Koppelbalkens am Beispiel des 0-ten Iterationsschritts für Tragwerk 6 mit `logstep.m`

Abschließend werden die Nachgiebigkeiten und damit die Auflagerkräfte $F_{L,li}$ und $F_{L,re}$ ermittelt. Die Normalkraftlinie ergibt sich aus:

$$N(x) = F_{L,li} - \int p(x) dx \quad (4.40)$$

Die Auflagerkräfte können direkt aus der Normalkraftlinie, siehe Abbildung 4.10(d), ausgelesen werden:

- $F_{L,li} = 90,823 \text{ kN}$
- $F_{L,re} = -70,672 \text{ kN}$

Es handelt sich hierbei um die Auflagerkräfte in dem 0-ten Iterationsschritt, bzw. bei Eingabe der Imperfektion in Form einer horizontalen Relativverschiebung am linken Auflager zwischen Tragwerk und Oberbaustab von:

$$u(x=0) = \varphi(x=0) e_L = \frac{w_0 \pi}{L} e_L \quad (4.41)$$

Wenn die vorhandene Vorlandsteifigkeit k_{vor} im Vorhinein nicht bekannt ist, können die MATLAB-Funktionen `sysleft.m` bzw. `sysright.m` verwendet werden, um die linken bzw. rechten Auflagerkräfte und die Vorlandsteifigkeiten zu iterieren. Im ersten Schritt rechnen diese Funktionen eine Vorlandsteifigkeit mithilfe von `vorsteif.m`, wobei ein beliebiger, positiver Initialwert der Auflagerkraft eingesetzt wird. Der ermittelte Wert der Vorlandsteifigkeit k_{vor} wird in der Funktion `logelast.m` herangezogen, um die Auflagerreaktionen und -Verschiebungen zu berechnen. Die neue Auflagerkraft wird somit wiederum in `vorsteif.m` eingegeben, um einen weiteren Iterationsschritt durchzuführen. Wie in Abbildung 4.11 dargestellt, sind `sysleft.m` bzw. `sysright.m` in der Lage, durch Variieren der Maximalverschiebung in Feldmitte w_0 , Verläufe der Auflagerkräfte F_L und Vorlandsteifigkeiten k_{vor} zu ermitteln.

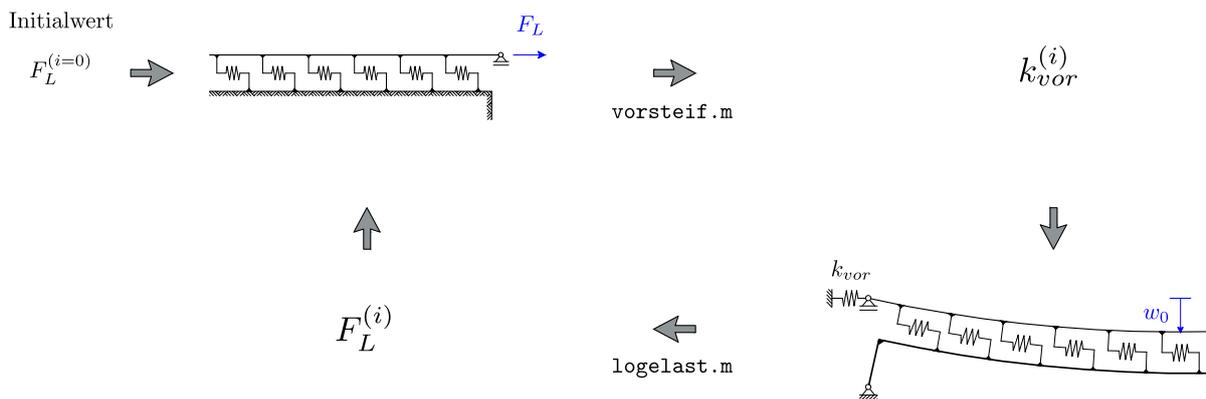


Abb. 4.11: Iterationsroutine der Auflagerkraft $F_{L,li}$ und der Vorlandsteifigkeit k_{vor}

Im Weiteren ist die Auswertung der linken Auflagerkraft F_L und der sich ergebenden Vorlandsteifigkeit k_{vor} für eine Durchbiegung w_0 von 1 bis 25 mm mit `sysleft.m` bei den in Tabelle 3.1 eingeführten Tragwerken in Abbildung 4.12 angegeben. Die rechten Auflagerkräfte folgen einem analogen Verlauf. Dabei ist erkennbar, dass bei zunehmender Länge L des Tragwerks betragsmäßig höhere Auflagerkräfte F_L auftreten und somit geringere Vorlandsteifigkeiten k_{vor} bei gleicher Durchbiegung w_0 erreicht werden. Die zugrunde liegende logarithmische Schotterfedersteifigkeit $\bar{k}_{b,NL}$, wie in Gleichung (2.2), siehe Kapitel 2.3, führt zu einer logarithmischen Abhängigkeit zwischen den Vorlandsteifigkeiten k_{vor} und der eingepprägten maximalen Durchbiegung w_0 , wie in Abbildung 4.12 dargestellt. Als Ergebnis wird die Vorlandsteifigkeit k_{vor} in Abhängigkeit der Durchbiegung in Feldmitte erhalten, unter Berücksichtigung der nichtlinearen Schottersteifigkeit $\bar{k}_{b,NL}$. Die so ermittelte Vorlandsteifigkeit kann in Verbindung mit der Schottersteifigkeit, die durch den Korrekturfaktor κ_B angepasst wurde, zur Ermittlung der Biegeeigenfrequenzen gemäß Kapitel 3.3 herangezogen werden.

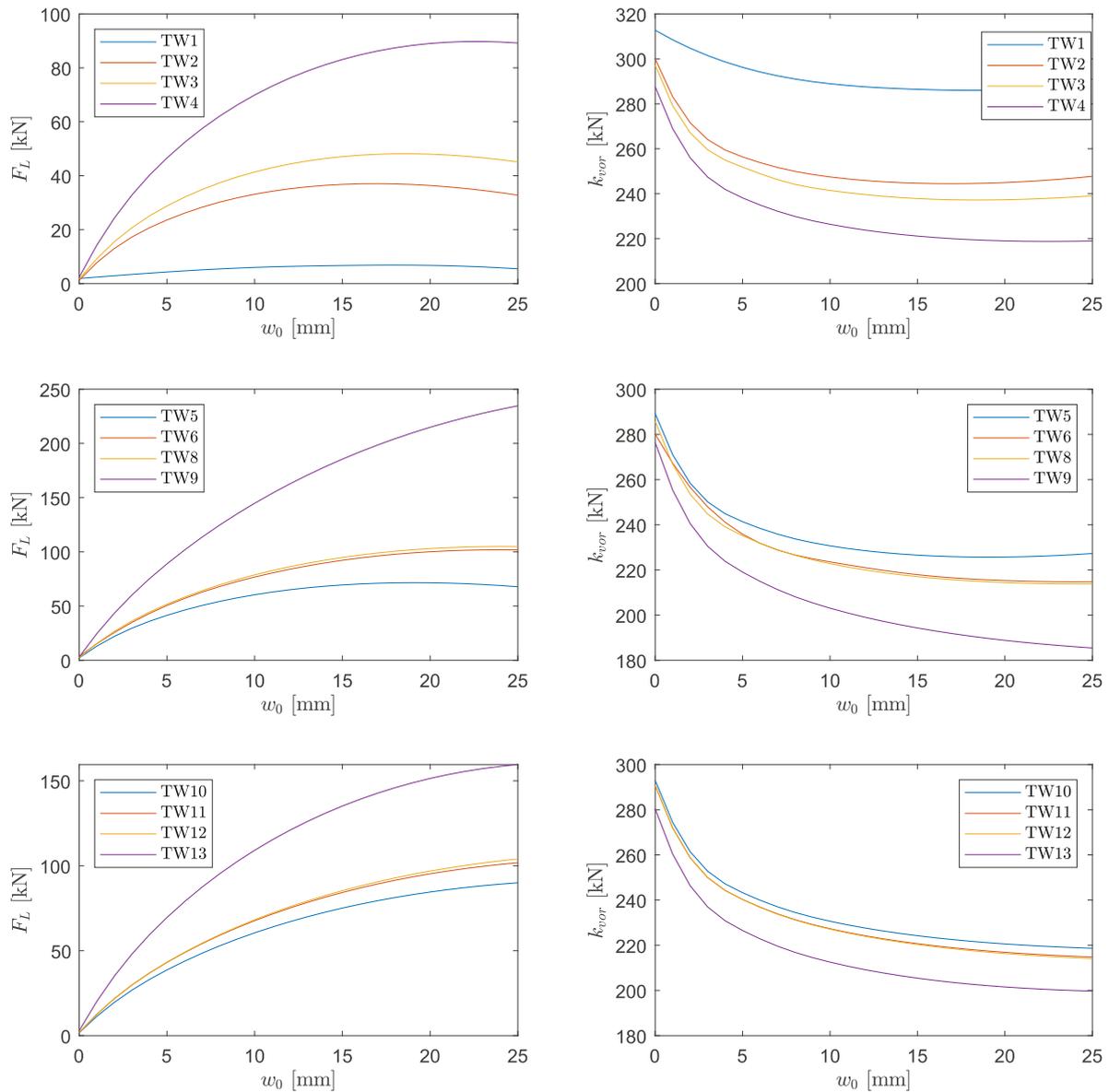


Abb. 4.12: Auswertung der linken Auflagerkraft $F_{L,li}$ und der Vorlandsteifigkeit k_{vor} für Tragwerk 1 bis 13 aus Tabelle 3.1 in Abhängigkeit der vorhandenen Durchbiegung w_0

4.6.2 Verifizierung mittels FE-Modell

Zur Verifizierung der Berechnungsmethode sowie des eingeführten MATLAB-Programms wird mit der Statiksoftware RSTAB (Dlubal) ein Finite Elemente Modell von Tragwerk 6 (siehe Tabelle 3.1) erstellt. Das Modell besteht aus zwei gekoppelten Biegeträgern, wobei der horizontale Schubverbund zwischen den Trägern durch Starrstäbe mit dazwischenliegenden horizontalen Federn erfolgt. Die Kopplung wurde in $n = 20$ Feder-elementen mit entsprechender Skalierung der bezogenen Schotterfedersteifigkeit nach Gleichung (4.42) diskretisiert.

$$k_b = \frac{n}{L} \bar{k}_{b,NL}[u(x)] = \frac{n}{L} \bar{k}_{b,NL}[u(x)] = 0,805 \bar{k}_{b,NL}[u(x)] \quad (4.42)$$

Hinsichtlich $\bar{k}_{b,NL}[u(x)]$ wurde der logarithmische Verlauf nach Gleichung (2.2) in einem Intervall zwischen 0 und 5 mm relativer Horizontalverschiebung $u(x)$ hinterlegt, siehe Kapitel 2.3. Zur Gewährleistung einer identischen Biegelinie für die beiden Biegeträger (Tragwerksbalken und Schienenbalken) wurden zusätzliche vertikale Starrstäbe eingefügt. Um den Verformungszustand allein beurteilen zu können, wurde als Vertikalbelastung eine Parabel zweiter Ordnung angesetzt. Durch eine gezielte Variation des Scheitelpunkts reproduziert die Belastung die gesuchte sinusförmige Durchbiegung mit maximaler Vertikalverschiebung in Feldmitte von $w_0 = 10$ mm mit ausreichender Genauigkeit. In Abbildung 4.14(b) ist der Verlauf der Normalkraftlinie $N(x)$ ähnlich wie in Abbildung 4.10(d) zu sehen. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass Abbildung 4.10 den nullten Iterationsschritt darstellt, weshalb es zu Abweichungen gegenüber der Normalkraftlinie aus RSTAB (Dlubal) in Abbildung 4.14(b) kommt. Des Weiteren ist die Belastungsfunktion $p(x)$ in Abbildung 4.9(b) in den Federkräften der horizontalen Kopplung zwischen Schienen und Tragwerk deutlich erkennbar, wie in Abbildung 4.14(c) dargestellt. Abschließend zeigt Abbildung 4.16, dass trotz Diskretisierung nur eine geringe Abweichung der Ergebnisse zwischen FE-Modell und MATLAB-Programm zu beobachten ist. Der Einfachheit halber wurde dabei immer dieselbe Ersatzsteifigkeit k_{vor} für beide Vorlandseiten angesetzt. Da sich jedoch die beiden Auflagerkräfte in ihrer Größe unterscheiden, ist die Vorlandsteifigkeit im Hinblick auf eine genauere Berechnung ebenfalls zwischen linkem und rechtem Auflager zu iterieren.

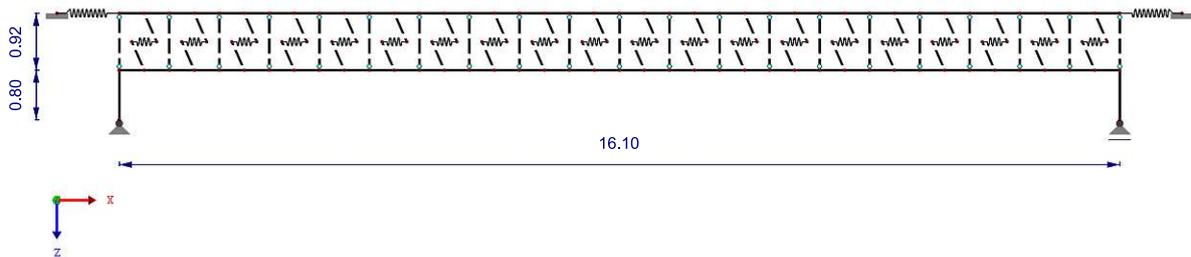
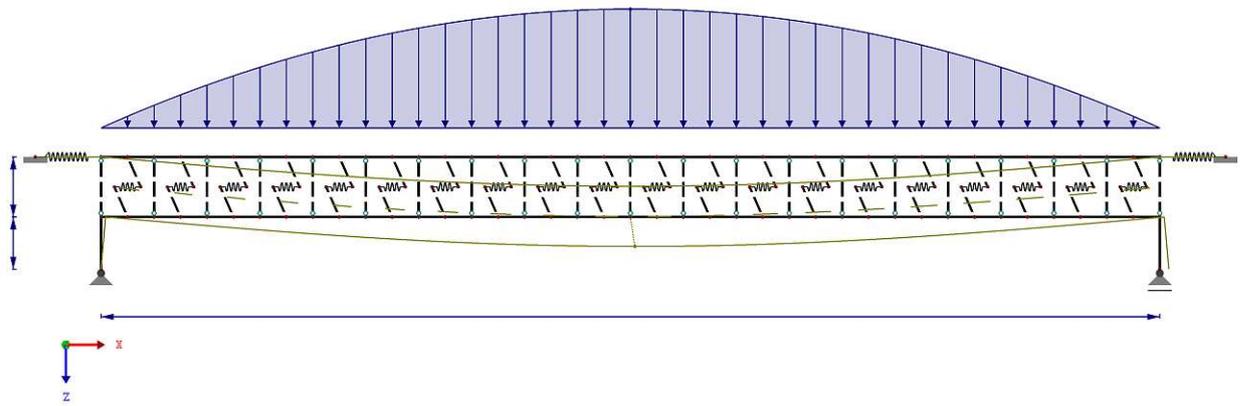
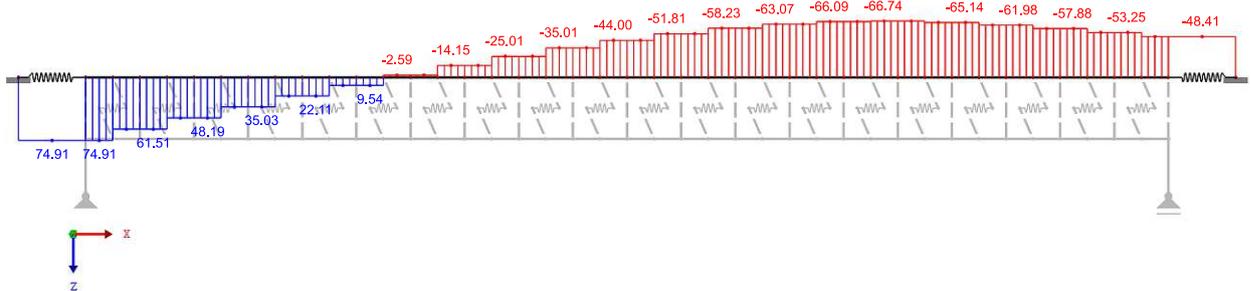


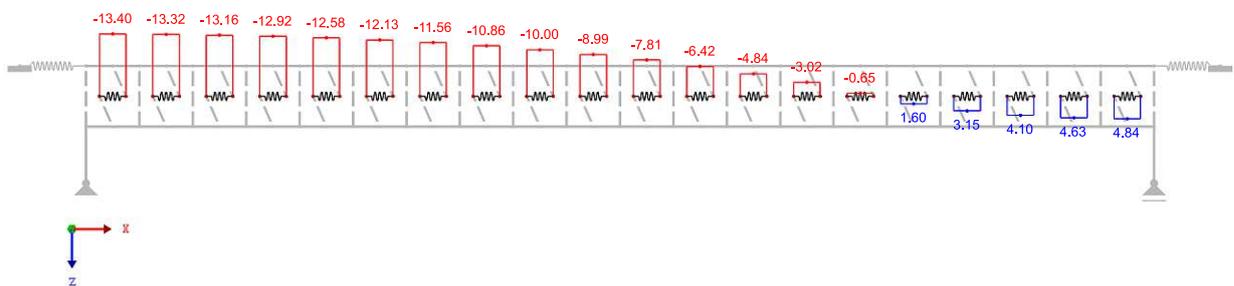
Abb. 4.13: Statisches ebenes FE-Modell



(a) Belastung und Verschiebungszustand



(b) Normalkraftlinie und Auflagerkräfte



(c) Federkräfte in der horizontalen Kopplung zwischen Schienen und Tragwerk

Abb. 4.14: Ergebnisse des FE-Modells in RSTAB Dlubal. Beispiel TW6 aus Tabelle 3.1

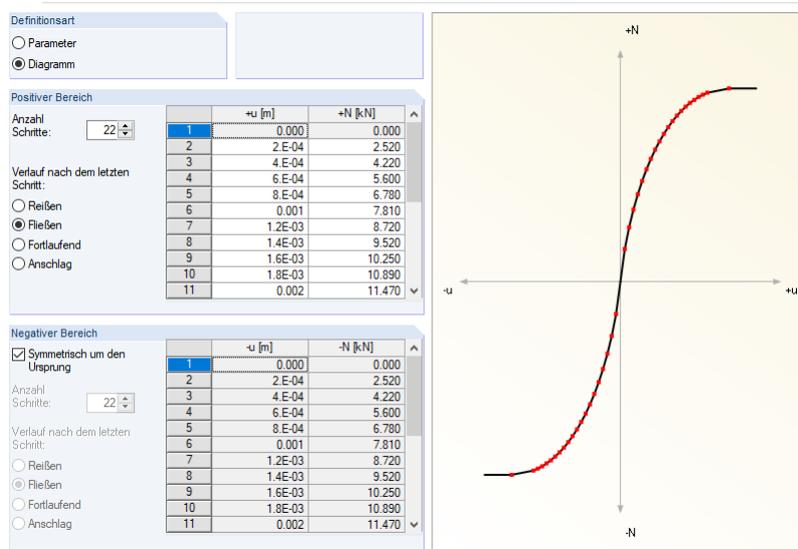


Abb. 4.15: Definition der Federcharakteristik k_b der diskreten Kopplung in RSTAB gemäß Gleichung (4.42)

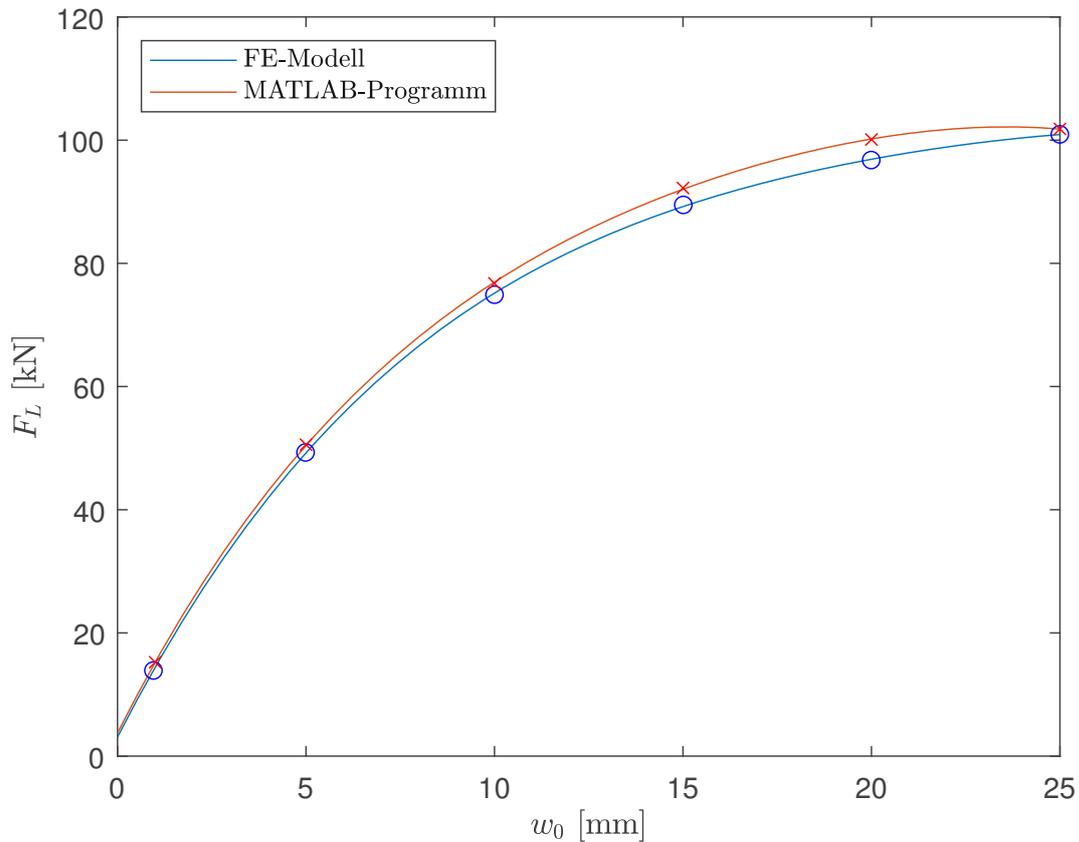


Abb. 4.16: Vergleich des $F_{L,li} - w_0$ -Verlaufs mittels FE-Modells (RStab) und MATLAB-Programms

Kapitel 5

Dämpfung

Die in Kapitel 2 vorgestellten Dissipationsmechanismen im Schotteroberbau ermöglichen eine gesonderte Erfassung des Dämpfungsbeitrags des Schotteroberbaus zur Gesamtdämpfung. Aufgrund der hohen Dämpfung des Schotters soll dieser Beitrag entsprechend berücksichtigt werden, um die Diskrepanz zwischen den Messwerten an realen Brücken und den ausgesprochen konservativen normativen Vorgaben (welche als untere Grenze der in der Realität zu erwartenden Dämpfung gelten) zu minimieren. Wie bereits in der Einführung erwähnt, hat das Lehr'sche Dämpfungsmaß einen gravierenden Einfluss auf die rechnerisch ermittelten Schwingungsamplituden, insbesondere bei Auftreten von Resonanzspitzen. *Stollwitzer* hat in [32] einen Ansatz zur rechnerischen Ermittlung des Lehr'schen Dämpfungsmaßes entwickelt. Dabei ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für ζ unter gesonderter Berücksichtigung des Tragwerks und des Schotteroberbaus, die durch einen Vergleich mit Messdaten verifiziert wurde. Das Vorgehen hierbei basiert auf dem Prinzip, dass die im Gesamtsystem dissipierte Energie $E_{d,ges}$ aus mehreren unabhängigen Anteilen besteht, die getrennt betrachtet werden können. Einerseits wird eine Komponente für die vom Tragwerk dissipierte Energie $E_{d,TW}$ identifiziert, die auch die Boden-Bauwerk-Interaktion, sowie die Lagerung einbeziehen soll. Andererseits gibt es eine Komponente für die Dissipation im Schotteroberbau $E_{d,OB}$, die sich wiederum in einen horizontalen Anteil $E_{d,OB,h}$ und einen vertikalen Anteil $E_{d,OB,v}$ separieren lässt. Analog dazu, ergibt sich das Lehr'sche Dämpfungsmaß für das Gesamtsystem aus den Beiträgen des Tragwerks ζ_{TW} und des Oberbaus $\Delta\zeta_{OB}$:

$$\zeta_{ges} = \zeta_{TW} + \Delta\zeta_{OB} \quad (5.1)$$

Unter Zugrundelegung des Koppelbalkenmodells mit der Länge L , der Biegesteifigkeit EI_{ges} , der Auflagerexzentrizität e_L , dem Schwerlinienabstand r und der Massenbelegung μ_{ges} wurde in [34] folgende Bestimmungsgleichung hergeleitet:

$$\zeta_{TW} = \zeta_{TW} + \frac{\bar{c}_{OB,v}}{2\Omega_1 \mu_{ges}} + \frac{\bar{c}_b \pi^2}{\Omega_1 \mu_{ges} L^2} \left(e_L^2 + \frac{r^2}{2} \right) \quad (5.2)$$

In konsequenter Übereinstimmung mit der in Kapitel 3 eingeführten Erweiterung des Koppelbalkenmodells um die Vorlandbereiche zur Bestimmung der Grundfrequenz, wird die obige Gleichung (5.2) zur rechnerischen Ermittlung der Gesamtdämpfung in dem vorliegenden Kapitel um den Beitrag der Vorlandbereiche $\Delta\zeta_{vor}$ erweitert. Das Ergebnis ist eine Bestimmungsgleichung der Gestalt:

$$\zeta_{ges} = \zeta_{TW} + \Delta\zeta_{OB} + \Delta\zeta_{vor} \quad (5.3)$$

5.1 Theoretischer Hintergrund: Formulierung der Bewegungsgleichungen eines gedämpften Systems

Bisher wurde der Fall eines konservativen Systems betrachtet, bei dem die mit der Bewegung assoziierte Energie im Laufe der Zeit erhalten bleibt. Wenn das Modell des Brückensystems, wie in den vorangegangenen Kapiteln, nur aus Massen und Federn besteht, werden durch den Schwingungsvorgang lediglich konservative Kräfte hervorgerufen. Definiert man die Lagrange-Funktion \mathcal{L} als Differenz der kinetischen Energie T und potentiellen Energie U

$$\mathcal{L} = T - U \quad (5.4)$$

und die generalisierten Koordinaten $q_j(t)$, so wird das Funktional von \mathcal{L} als Wirkung \mathcal{S} bezeichnet:

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt \quad \text{für } j = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

Ein mechanisches System neigt dazu, seine Wirkung \mathcal{S} zu minimieren bzw. einen Extremwert von \mathcal{S} zu erreichen. Anders ausgedrückt, die Wirkung muss stationär sein [31, S. 3]:

$$\delta\mathcal{S} = 0 \quad (5.6)$$

Dieses Prinzip ist auch als „Prinzip der minimalen Wirkung“ oder Hamilton'sches Prinzip bekannt und geht auf den irischen Physiker *William Rowan Hamilton* (1805-1865) zurück. Einsetzen von Gleichung (5.5) in (5.6) liefert:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt \quad \text{für } j = 1, \dots, n \quad (5.7)$$

Berücksichtigt man weiterhin, dass die Lagrange-Funktion \mathcal{L} nicht explizit von der Zeit abhängt $\partial\mathcal{L}/\partial t = 0$, sondern nur implizit über $q(t)$ und $\dot{q}(t)$ so ergibt sich:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta\mathcal{L}(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) \quad \text{für } j = 1, \dots, n \quad (5.8)$$

Die Variation der Lagrange-Funktion entspricht der totalen Ableitung:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \delta t \quad (5.9)$$

Das Hamilton'sche Prinzip (5.6) ergibt sich somit zu:

$$\delta\mathcal{S} = \sum_{j=1}^n \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \quad (5.10)$$

Durch partielle Integration und Berücksichtigung von $\delta q(t_1) = \delta q(t_2)$ resultiert:

$$\delta\mathcal{S} = \sum_{j=1}^n \left[\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \quad (5.11)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left[\int_{t_1}^{t_2} dt \delta q_j \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \right] \quad (5.12)$$

Gleichung (5.12) ist die Lagrange'sche Bewegungsgleichung [31]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n \quad (5.13)$$

Der Lagrange'sche Formalismus gilt nur für konservative Systeme. In der Lagrange-Funktion (5.4) können nur Kräfte erfasst werden, die von einem Potential U ableitbar sind. Ein Potential ist eine skalare Funktion, die per Definition geschwindigkeitsunabhängig ist. Wenn jedoch nicht konservative Kräfte auf das System wirken, bleibt die mechanische Energie nicht mehr erhalten und die dabei verrichtete Arbeit wird in Wärme umgewandelt. Im Spezialfall, dass die vorhandenen nicht konservativen Kräfte Q_j in einer linearen Beziehung zu den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j stehen

$$Q_j = -c_j \dot{q}_j \quad (5.14)$$

können diese ebenfalls in das Hamilton'sche Prinzip und somit in die Bewegungsgleichungen inkludiert werden, indem man eine skalare Funktion definiert, welche eine Betrachtung von generalisierten Kräften durch eine fiktive potentielle Energie \mathcal{R} ermöglicht [8]:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n k_j \dot{q}_j^2 \quad (5.15)$$

\mathcal{R} wird als Rayleigh'sche Dissipationsfunktion bezeichnet. Erweiterung der Lagrange'schen Bewegungsgleichung (5.13) um die Dissipationsfunktion \mathcal{R} führt zu:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \mathcal{R} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n \quad (5.16)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \mathcal{R} = 0 \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \mathcal{R} = 0 \quad (5.18)$$

Gleichung (5.18) beinhaltet sowohl die konservativen Kräfte zufolge der Steifigkeit und Trägheit des Systems in den potentiellen und kinetischen Energietermen als auch die nicht konservativen Dämpfungskräfte in der Rayleigh'schen Dissipationsfunktion \mathcal{R} . Setzt man Gleichung (5.15) in Gleichung (5.18) ein, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n \quad (5.19)$$

Hiermit wurde eine Methode gezeigt, um den Einfluss der nichtkonservativen Kräfte bei der Formulierung der Bewegungsgleichungen formal zu berücksichtigen. Mithilfe der Gleichungen (5.19) und (5.14) kann eine Dämpfungskonstante c ermittelt werden, die eine analytische Quantifizierung der im Rahmen der Schwingung dissipierten Energie ermöglicht. Dieser Ansatz wird im Weiteren zur Bestimmung des äquivalenten Dämpfungskennwerts C^* für die horizontale Gleis-Tragwerk Interaktion des Gesamtsystems verwendet, siehe Kapitel 5.3.1. Zu diesem Zweck muss jedoch zunächst in im nachfolgenden Kapitel 5.2 die Dämpfungskonstante C_{vor}^* für den Vorlandbereich ermittelt werden.

5.2 Dämpfung im Vorlandmodell

Die Dämpfungskonstante C_{vor}^* des äquivalenten Einmassenschwingers für das Vorlandsystem kann durch die Quantifizierung der in einer Schwingperiode T dissipierten Energie $E_{d,vor,h}$ ermittelt werden. Die Horizontalverschiebung der Schienen im Auflagerbereich muss auf der Brücken- und Vorlandseite identisch sein. Aufgrund dieser kinematischen Verträglichkeitsbedingung muss die von dem Vorlandkörper dissipierte Energie nicht in einer Schwingperiode des äquivalenten Einmassenschwingers des Vorlands integriert werden, sondern in jener des gesamten mechanischen Systems, d.h. Brückentragwerk, Oberbau und Vorland.

$$E_{d,vor,h} = \bar{c}_b \int_0^{L_{vor}} \int_0^T \dot{u}_{vor}(x,t)^2 dt dx \quad (5.20)$$

Bei einer Eigenkreisfrequenz des Gesamtsystems von Ω_1 nach Gleichung (3.93) errechnet sich die Schwingperiode T aus:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_1} \quad (5.21)$$

Angesichts des angenommenen eingliedrigen Ritz'schen Ansatzes nach Gleichung (3.52) kann das Integral in Gleichung (5.20) in jeweils ein Orts- und Zeitintegral aufgeteilt werden:

$$E_{d,vor,h} = \bar{c}_b \int_0^T \dot{q}(t)^2 dt + \int_0^{L_{vor}} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2L_{vor}}\right)^2 dx \quad (5.22)$$

Unter Annahme einer harmonischen Schwingung wird der Zeitverlauf durch eine Sinusfunktion abgebildet:

$$q(t) = \sin(\Omega_1 t) \quad (5.23)$$

Auflösen des Zeitintegrals in Gleichung (5.22) liefert:

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{q}(t)^2 dt &= \int_0^T \frac{d}{dt} \sin^2(\Omega_1 t) \\ &= \Omega_1^2 \int_0^T \cos^2(\Omega_1 t) \\ &= \Omega_1^2 \left[\frac{2\Omega_1 t + \sin(2\Omega_1 t)}{4\Omega_1} \right]_0^T \\ &= \Omega_1^2 \left[2\Omega_1 \frac{2\pi}{\Omega_1} \frac{1}{4\Omega_1} + \sin\left(2\Omega_1 \frac{2\pi}{\Omega_1}\right) \frac{1}{4\Omega_1} - 0 \right] \\ &= \Omega_1^2 \left[\frac{\pi}{\Omega_1} + \sin(4\pi) \frac{1}{4\Omega_1} \right] \\ &= \pi \Omega_1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Das Ortsintegral ergibt sich analog wie in Gleichung (3.60) zu:

$$\int_0^{L_{vor}} \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2L_{vor}}\right)^2 dx = L_{vor} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \cong 0,23 L_{vor} \quad (5.26)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (5.26) und Gleichung (5.25) resultiert die vom gedämpften Vorlandsystem in einer Schwingperiode des Gesamtsystems dissipierte Energie:

$$E_{d,vor,h} = \bar{c}_b \pi \Omega_1 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) L_{vor} \quad (5.27)$$

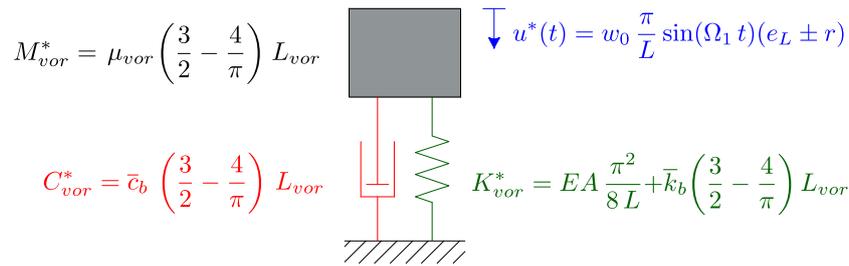


Abb. 5.1: Einmassenschwinger für den Vorlandbereich

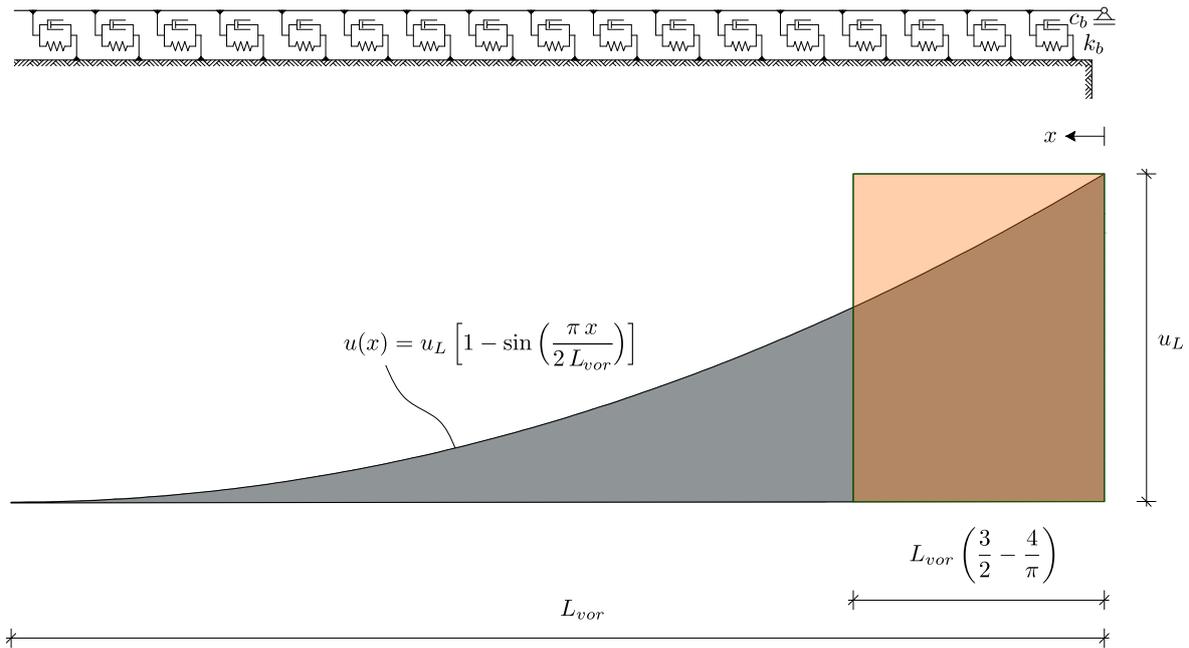


Abb. 5.2: Abminderung der Vorlandlänge L_{vor}

In der gleichen Schwingperiode T lautet die dissipierte Energie für das aus Masse M_{vor}^* , Feder K_{vor}^* und Dämpfer C_{vor}^* bestehender Einmassenschwinger (s. Abbildung 5.1):

$$E_{d,vor,h} = C_{vor}^* \pi \Omega_1 \tag{5.28}$$

wobei C_{vor}^* der Dämpfungskonstanten des äquivalenten Einmassenschwingers entspricht. Ein Koeffizientenvergleich von (5.27) und (5.28) liefert eine Bestimmungsgleichung für den Dämpfungskennwert des äquivalenten Einmassenschwingers:

$$C_{vor}^* = \bar{c}_b \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) L_{vor} \cong \bar{c}_b 0,23 L_{vor} \tag{5.29}$$

Anstatt des tatsächlichen, nichtlinear abklingenden Geschwindigkeitsverlaufs kann auf die viskosen Dämpferelemente eine konstante Geschwindigkeit innerhalb von rd. 23 % der Vorlandlänge angebracht werden (Energieäquivalenz). Wie in Abbildung 5.2 dargestellt, kann die Abminderung der Vorlandlänge physikalisch so interpretiert werden, als ob auf alle Dämpferelemente innerhalb von 23 % der Vorlandlänge, gemessen vom Auflager weg, eine konstante Geschwindigkeit aufgebracht wird. Würde man die volle Vorlandlänge heranziehen $\bar{c}_{vor} = \bar{c}_b L_{vor}$, so

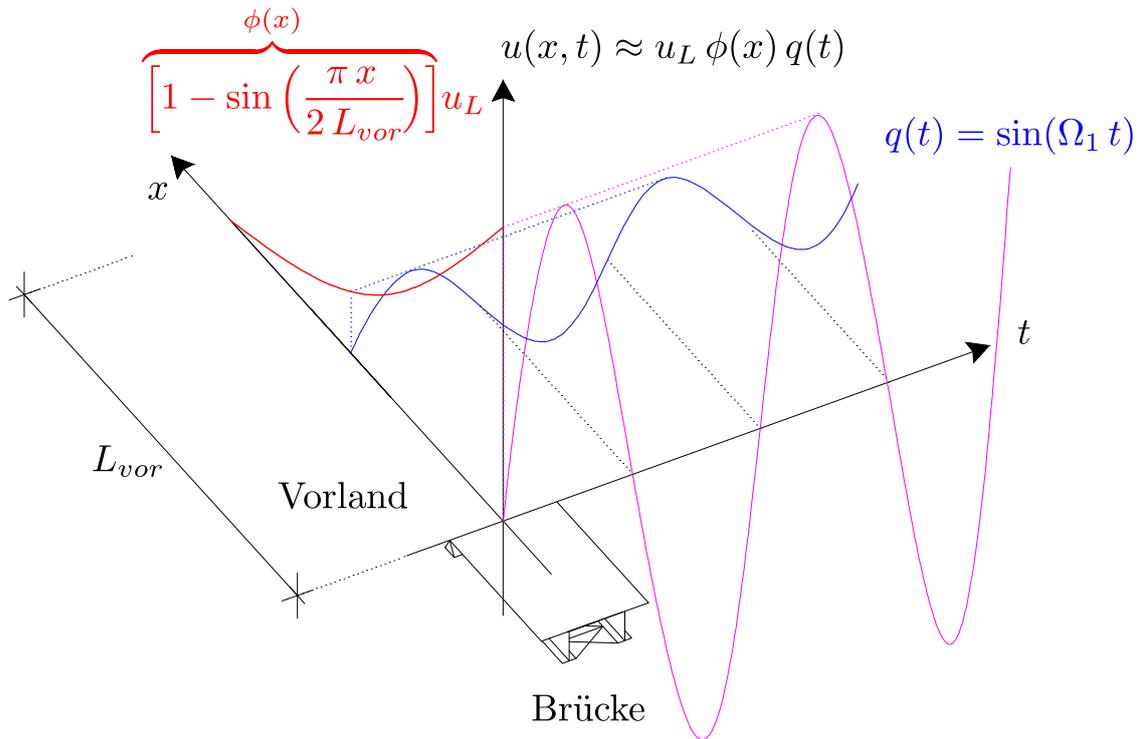


Abb. 5.3: Ansatzfunktion der von der Brückenschwingung hervorgerufenen Horizontalverschiebung $u(x, t)$ im Vorlandbereich

wäre die Verschiebung des gesamten Vorlandkörpers über die Ortskoordinate x konstant und nicht abklingend. Anzumerken ist dabei, dass die Geschwindigkeit, die die Dämpferkraft erzeugt, proportional zur Verschiebung entlang x ist. Diese darf aber nicht irrtümlich als Neigung der Verschiebungsfunktion in Abbildung 5.2 interpretiert werden. Eine vollständige Übersicht der multivariaten Verschiebungsfunktion in x und t kann wie in Abbildung 5.3 dargestellt werden. Die Schwingungsamplitude der horizontalen Relativverschiebung zwischen Untergrund und Schienen $u(x, t)$ nimmt mit zunehmendem Abstand x von der Brücke ab, bis sie bei L_{vor} verschwindet. Im Zeitbereich handelt es sich um eine Sinusschwingung.

Lehr'sches Dämpfungsmaß

Das Lehr'sche Dämpfungsmaß $\zeta_{vor,iso}$ des isolierten Vorlandsystems als Einmassenschwinger, siehe Abbildung 5.1, lautet (vgl. Gleichung (1.8)):

$$\zeta_{vor,iso} = \frac{c_{vor}^*}{2 \Omega_{vor} M_{vor}^*} = \frac{\bar{c}_b \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) L_{vor}}{2 \Omega_{vor} M_{vor}^*} \quad (5.30)$$

Wenn man beispielsweise die in Kapitel 3.2.2 ermittelten Zahlenwerte für M_{vor}^* und Ω_{vor} einsetzt und dabei den Dämpfungskennwert $\bar{c}_b = 71 \text{ kNs/m}$ nach *Stollwitzer et al.* [34] aus Gleichung (2.6) berücksichtigt, ergibt sich:

$$\zeta_{vor,iso} = \frac{71000 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) 40}{2 \cdot 133,3 \cdot 10694} = 22,6 \% \quad (5.31)$$

wobei gilt: $M_{vor}^* = 10694 \text{ kg}$

$\Omega_1 = 133,3 \text{ rad/s}$

$L_{vor} = 40 \text{ m}$

Der Wert von $\zeta_{vor,iso}$ hängt stark von der angenommenen Vorlandlänge und dem Ansatz zur Approximation des Horizontalverschiebungsverlaufes $u^*(x, t)$ im Vorlandbereich ab, der hier durch die trigonometrische Funktion $\phi(x)$ in Abbildung 5.3 dargestellt wird. Wenn die Vorlandlänge pauschal auf 90 m erhöht wird, vgl. Abschnitt 3.2.5, und eine Vorlandsteifigkeit nach Brandstetter [6] $K_{vor}^* = k_{vor} = 179,403 \text{ kN/mm}$ angenommen wird, ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_{vor}^* &= \frac{1}{2} 1179 \cdot 90 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) = 24062 \text{ kg} \\ \Omega_1 &= \sqrt{\frac{179,403 \cdot 10^6}{24062}} = 86,3 \text{ rad/s} \\ \rightarrow \zeta_{vor,iso} &= \frac{71000 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) 90}{2 \cdot 86,3 \cdot 24062} = 34,9 \% \end{aligned} \quad (5.32)$$

Trotz der großen Schwankung bzw. Unsicherheiten bei den möglichen rechnerischen Ergebnissen bleibt also der Wert von $\zeta_{vor,iso}$ verhältnismäßig hoch.

Im Rahmen der Untersuchungen von *Stollwitzer et al.* [36] zur Erforschung der dynamischen Eigenschaften der horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion wurden unter anderem Dämpfungsmaße für einen 6 m langen Abschnitt ermittelt. Dabei wurde der Schotteroberbau in einem Stahltrog bei horizontaler Gleisrostanregung mittels hydraulischen Pressen isoliert erforscht, siehe Kapitel 2. Die Versuchsanlage wurde als Einmassenschwinger idealisiert, was die Anwendung folgender Formel zur Bestimmung des Lehr'schen Dämpfungsmaßes ermöglicht [36, S. 86]:

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{f_d}{f_0} \right)^2 \right]} \quad (5.33)$$

In Gleichung (5.33) ist f_d die Resonanzfrequenz und f_0 die Eigenfrequenz des Systems. Zur Erinnerung: Die Resonanzfrequenz entspricht der Eigenfrequenz nur im ungedämpften Fall ($\zeta = 0$). Die daraus resultierenden Werte liegen in einem Bereich von 30,1-59,8 % [36, Tab.6], was die Plausibilität des oben in Gleichung (5.31) berechneten hohen Dämpfungswertes bestätigt.

5.3 Dämpfungsquantifizierung im Gesamtsystem für Brücke und Vorland

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Quantifizierung der Dissipation für das Gesamtsystem Brücke und Vorland. Nach der Ermittlung eines Dämpfungskennwerts C^* für die Dämpfung infolge horizontaler Gleis-Tragwerk Interaktion wird das Modell um die Tragwerksdämpfung und den Beitrag der vertikalen Dissipationsmechanismen erweitert.

5.3.1 Dämpfung infolge horizontaler Gleis-Tragwerk Interaktion

Die generalisierten Koordinaten q_j beschreiben die Freiheitsgrade des Systems. Im in dieser Arbeit betrachteten Fall der Brücke mit Vorland kann die gesamte Kinematik des Systems durch einen einzigen Freiheitsgrad, nämlich die Durchbiegung $w(x,t)$ und in weiterer Folge über die Durchbiegung in Feldmitte $w(x = L/2, t) = w^*$, charakterisiert werden. Der Vektor der generalisierten Koordinaten besteht also nur aus $w^* = w_0 \sin(\Omega_1 t)$. Wie in Abbildung 3.3 gezeigt, wird die Energiedissipation in der Gleitfläche aufgrund der Bewegung zwischen Gleisrost und darunterliegendem Schotterkörper (horizontale Gleis-Tragwerk Interaktion) mithilfe von viskosen Dämpferelementen berücksichtigt. Diese Dämpferelemente folgen dem Kraftgesetz in Gleichung (5.14) und können daher mit der generalisierten Kraft Q_j in Gleichung (5.19) beschrieben werden. Die Lagrange'sche Bewegungsgleichung für das Gesamtsystem als Einmassenschwinger lautet somit:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{w}^*} - \frac{\partial T}{\partial w^*} + \frac{\partial U}{\partial w^*} = Q \quad (5.34)$$

Aufgrund der Einführung der skalaren Funktion \mathcal{R} kann die Reibungskraft Q mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit ermittelt werden. Da die viskosen Dämpferelemente nur in horizontaler Richtung angeordnet werden, wird die Arbeit, der Einfachheit halber, nicht über eine virtuelle Verrückung δw^* formuliert, sondern über die virtuelle horizontale Relativverschiebung $u^*(t)$ zwischen Tragwerk bzw. Untergrund und Gleisrost. Das ist deshalb möglich, weil zwischen $u^*(t)$ und $w^*(t)$ eine lineare Abhängigkeit herrscht [34]:

$$u^*(x, t) = \frac{dw^*(x=0, t)}{dx} e_L + \frac{dw^*(x=L, t)}{dx} r \quad (5.35)$$

$$= w_0 \frac{\pi}{L} \sin(\Omega_1 t) \left[e_L + r \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \quad (5.36)$$

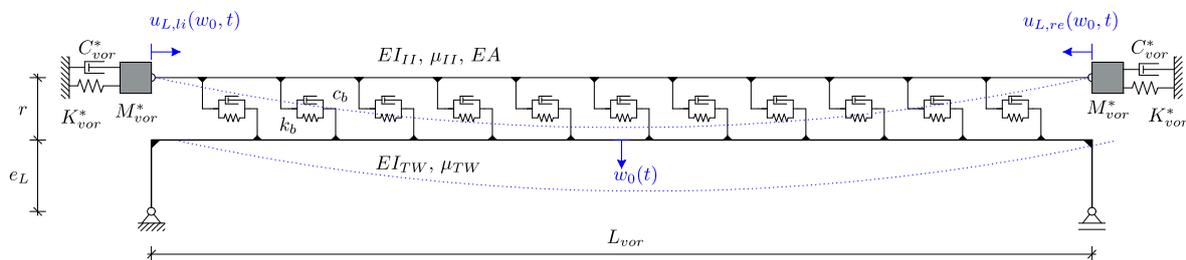


Abb. 5.4: Modell zur Ermittlung der Dämpfungskonstante zufolge horizontaler Relativverschiebung zwischen Gleisrost und Tragwerk bzw. Untergrund

Die virtuelle Arbeit $\delta\mathcal{A}$ lautet:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A} &= - \int_0^L \bar{c}_b \dot{u}(x, t) \delta u(x, t) dx - C_{vor}^* \dot{s}_{c,li}(t) \delta \dot{s}_{c,li}(t) \\
&\quad - C_{vor}^* \dot{s}_{c,re}(t) \delta \dot{s}_{c,re}(t) \stackrel{!}{=} Q(t) \delta q(t) \\
&= - \int_0^L \bar{c}_b \frac{\pi}{L} \left(e_L + r \cos \frac{\pi x}{L} \right) \dot{q}(t) \frac{\pi}{L} \left(e_L + r \cos \frac{\pi x}{L} \right) \delta q(t) dx - \\
&\quad - C_{vor}^* [u_{L,li} \dot{q}(t) u_{L,li} \delta q(t) + u_{L,re} \dot{q}(t) u_{L,re} \delta q(t)] = Q(t) \delta q(t) \\
&= - \left[\bar{c}_b \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \left(e_L + r \cos^2 \frac{\pi x}{L} \right)^2 dx + C_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) \right] \dot{q}(t) = Q(t) \\
&= - \left[\bar{c}_b \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \left(e_L^2 + r^2 \cos^2 \frac{\pi x}{L} + 2 e_L r \cos \frac{\pi x}{L} \right) dx + C_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) \right] \dot{q}(t) = Q(t) \\
&= - \left[\bar{c}_b \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(e_L^2 L - \frac{r^2 L}{2} + 2 e_L r \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L} \right) + C_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) \right] \dot{q}(t) = Q(t) \\
&= - \left[\bar{c}_b \frac{\pi^2}{L} \left(e_L^2 + \frac{r^2}{2} \right) + C_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) \right] \dot{q}(t) = Q(t) \\
&= - C^* \dot{q}(t) = Q(t)
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Der Dämpfungskennwert C^* für die horizontale Gleis-Tragwerk Interaktion ergibt sich somit zu:

$$\rightarrow C^* = \bar{c}_b \frac{\pi^2}{L} \left(e_L^2 + \frac{r^2}{2} \right) + C_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) \tag{5.38}$$

Mit diesem Dämpfungskennwert wird nur die Dämpfung aufgrund der horizontalen Kopplung der beiden Stäbe in x -Richtung und die Dämpfung im Vorlandbereich abgebildet. Mit anderen Worten fließen in C^* nur jene Dämpfungskoeffizienten ein, welche die horizontalen viskosen Dämpferelemente in Abbildung 5.4 charakterisieren und somit nur die horizontale Gleis-Tragwerk Interaktion. Im nächsten Abschnitt wird dieses Modell durch eine Energiebetrachtung um die Strukturdämpfung und die Dämpfung im Schotteroberbau aufgrund der Vertikalverschiebungen zwischen Tragwerk und Gleisrost sowie dessen Absolutverschiebungen (verbleibende zwei Energiedissipationsmechanismen) ergänzt.

5.3.2 Energieanteile im Tragwerk, Schotteroberbau und Vorland

Eine Möglichkeit zur Abschätzung der Gesamtdämpfung einer Eisenbahnbrücke mit Schotteroberbau, die mit den angrenzenden Vorland- bzw. Dammbereichen verbunden ist, besteht darin, sämtliche Energieanteile aus Tragwerk, Schotteroberbau und Vorland zu identifizieren, die während der Schwingung dissipiert werden und einen Dämpfungskennwert konsequent zu bestimmen. Eine Dämpferkraft F_d vollbringt Leistung L entlang eines Geschwindigkeitsfeldes \dot{u} [37, S. 3.4-5]

$$L = \dot{E}_d = F_d \dot{u} \quad (5.39)$$

Um die in einer Periode dissipierte Energie zu ermitteln, muss die Leistung der Dämpferkraft über die Zeit integriert werden:

$$E_d = \int_0^T \dot{E}_d dt = \int_0^T F_d \dot{u} dt \quad (5.40)$$

Wenn der Ansatz auf einem viskosen Dämpfungsmodell basiert bzw. eine lineare Abhängigkeit zwischen Dämpfungskraft und Geschwindigkeit zugrunde gelegt wird, ergibt sich:

$$E_d = \int_0^T c \dot{u}^2 dt \quad (5.41)$$

Ausgehend von den an der Großversuchsanlage, siehe Abbildung 2.4, durchgeführten Messungen [34] wurde festgestellt, dass sich die in einer Schwingperiode dissipierte mechanische Energie überwiegend aus den folgenden Anteilen zusammensetzen lässt:

1: Energiedissipation im Tragwerk $E_{d,TW}$

Das Gesamtsystem muss aus Kompatibilitätsgründen dieselbe Resonanzfrequenz wie das Brückentragwerk ohne Oberbau und Vorland aufweisen [34, S.311]. Die gesamte Biegesteifigkeit und Massenbelegung wird somit gedanklich dem Tragwerksteil zugewiesen, es gilt:

$$EI_{TW} \stackrel{!}{=} EI_{ges}; \quad \mu_{TW} \stackrel{!}{=} \mu_{ges} \quad (5.42)$$

Dies bedeutet, dass dem Tragwerksschwingungsvorgang nicht nur die im Tragwerksteil erregte Masse $M_{TW}^* = 0,5 \mu_{TW} L$ zugewiesen wird, sondern die insgesamt erregte Masse inklusive Vorlandbereich M_{ges}^* . Das Tragwerk wird als Masse-Feder-Dämpfersystem idealisiert.

$$E_{d,TW} = C_{TW}^* \int_0^T \sin^2(\Omega_1 t) dt = C_{TW}^* \pi \Omega_1^2 \quad (5.43)$$

$$E_{d,TW} \stackrel{!}{=} 2 \zeta_{TW} M^* \Omega_1^2 \pi \quad (5.44)$$

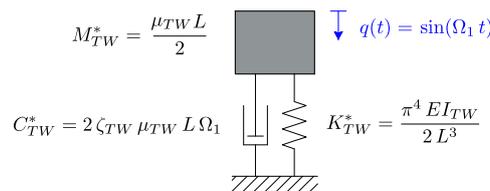


Abb. 5.5: Ersatzsystem für den Tragwerksteil: kinetisch und steifigkeitsäquivalenter Einmassenschwinger zur Erfassung der im Tragwerk dissipierten Energie $E_{d,TW}$

2: Energiedissipation infolge Vertikalbewegungen des Oberbaues $E_{d,OB,v}$

Die Modellierung der beiden in Abschnitt 2.4 eingeführten vertikalen Dämpfungsmechanismen erfolgt anhand eines masselosen einfach gelagerten Euler-Bernoulli-Balkens auf einer vertikalen Bettung viskoser Dämpferelemente mit Dämpfungskonstanten $\bar{c}_{OB,v}$ nach [34, S.308]. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Energiedissipation infolge relativer und absoluter Bewegungen in einem Dämpferelement zusammengefasst werden. Die Masse wird dem Tragwerksteil zugewiesen.

$$M_{OB,v} = \frac{1}{2} \mu_{OB} L \rightarrow M_{OB,v} = 0 \quad (5.45)$$

Der Energieanteil errechnet sich aus:

$$E_{d,OB,v} = \bar{c}_{OB,v} \int_0^T \int_0^L w_0^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \sin^2 (\Omega_1 t) dt dx = \bar{c}_{OB,v} w_0^2 \frac{L}{2} \pi \Omega_1 \quad (5.46)$$

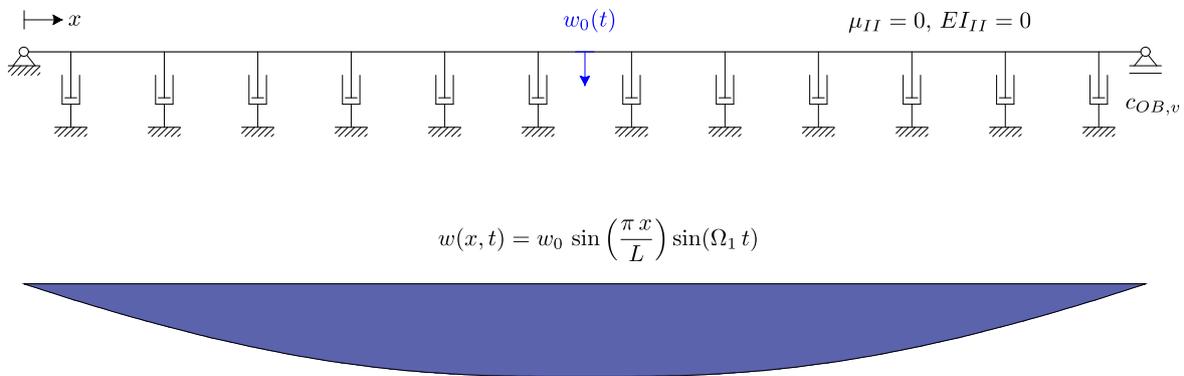


Abb. 5.6: Ersatzsystem zur Erfassung der dissipierten Energie $E_{d,OB,v}$ zufolge vertikaler Absolut- und Relativverschiebung des Oberbaues

3: Energiedissipation infolge Horizontalbewegungen des Oberbaues $E_{d,OB,h}$ und des Vorlandbereichs $E_{d,vor}$

Das horizontale Dämpfungssystem, wie im Abschnitt 5.3 beschrieben, berücksichtigt die Dämpfung, die durch die horizontale Gleis-Tragwerk Interaktion im Brückenfeld- und in den seitlichen Vorlandbereichen entsteht. Die Ersatzmasse gemäß Gleichung (3.92) wird wiederum dem Tragwerksteil zugewiesen. Die in einer Schwingperiode T dissipierte Energie $E_{d,OB,h}$ ergibt sich aus der Summe des horizontalen Dämpfungsmechanismus im Feldbereich:

$$E_{d,OB,h} = \int_0^T w_0^2 \frac{\bar{c}_b \pi^2}{L} \left(e_L^2 + \frac{r^2}{2} \right) \sin^2 (\Omega_1 t) dt = \frac{\bar{c}_b \pi^3}{L} \left(e_L^2 + \frac{r^2}{2} \right) \Omega_1 w_0^2 \quad (5.47)$$

auf welchem ein Einmassenschwinger (Vorlandbereich) pro Seite angeschlossen ist:

$$E_{d,vor} = \int_0^T C_{vor}^* \left[u_{L,li}^2(w_0) + u_{L,re}^2(w_0) \right] \sin^2 (\Omega_1 t) dt = C_{vor}^* \left[u_{L,li}^2(w_0) + u_{L,re}^2(w_0) \right] \Omega_1 \pi \quad (5.48)$$

Aufgrund der Komplexität bei der Ermittlung der Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ und $u_{L,re}$ kann an dieser Stelle auf Gleichung (3.90) zurückgegriffen werden, um eine rasche Abschätzung des Quadrats der Auflagerverschiebungen zu erhalten.

Es sei angemerkt, dass die Energie $E_{d,OB,h}$ in Gleichung (5.47) streng genommen auf einer Durchbiegungslinie basiert, die dem Brückensystem ohne Vorland entspricht. Um die dissipierte Energie $E_{d,OB,h}$ genauer zu formulieren, sollten die Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ bzw. $u_{L,re}$ gemäß Gleichung (3.50) bzw. (3.51) (siehe Abschnitt 3.1.5) iterativ ermittelt werden und folglich, sollte ein Verschiebungsansatz für den Feldbereich gewählt werden. Eine Möglichkeit besteht darin, einen trigonometrischen Ansatz zu verwenden, der die berechneten Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ bzw. $u_{L,re}$ verbindet.

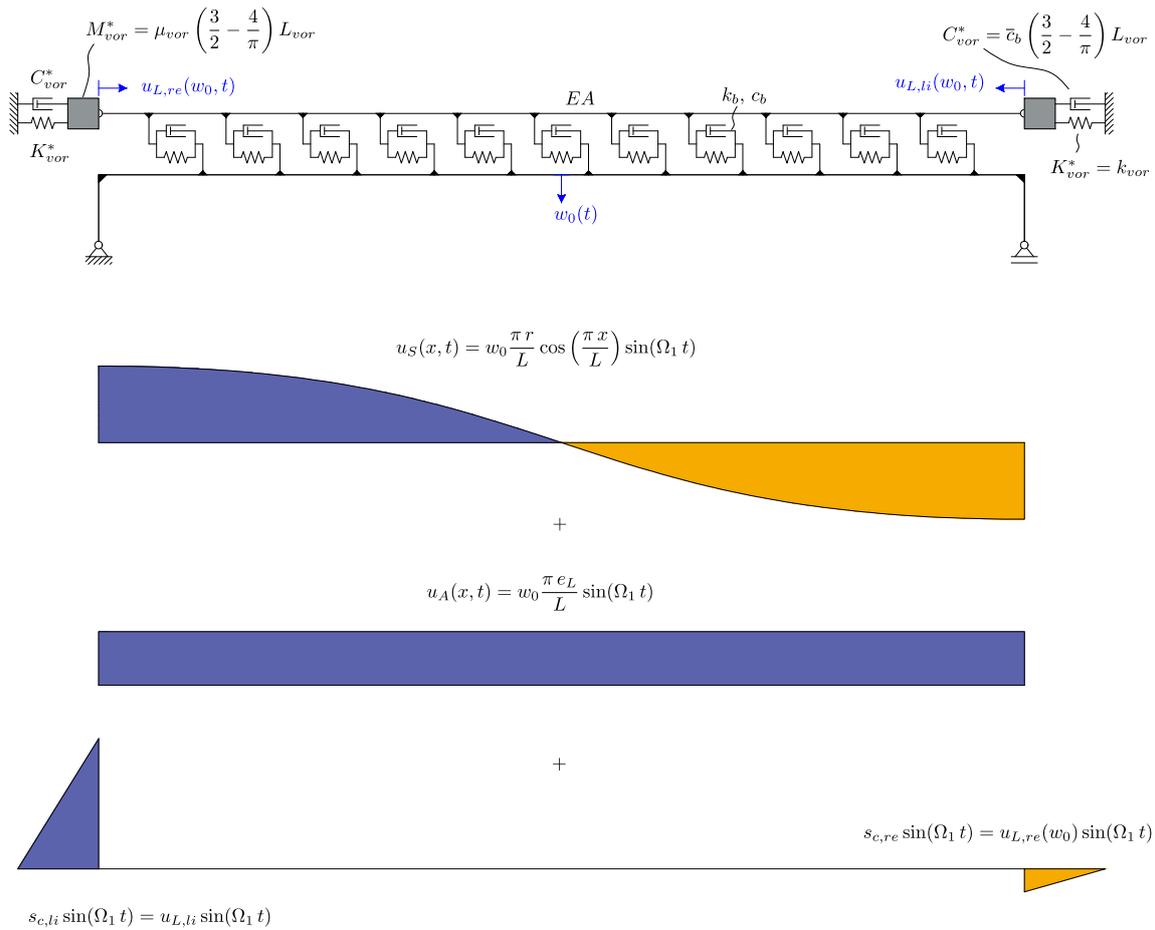


Abb. 5.7: Ersatzsystem zur Erfassung der dissipierten Energie $E_{d,OB,h}$ und $E_{d,vor}$ zufolge horizontaler Relativverschiebung zwischen Tragwerk und Gleisrost des Oberbaus jeweils im Brücken- und Vorlandbereich

5.3.3 Energiebilanz - Ermittlung des Lehr'schen Dämpfungsmaßes des Gesamtsystems

Wenn das Gesamtsystem in einen Einmassenschwinger übergeführt wird, ergibt sich die in einer Schwingperiode dissipierte Energie $E_{d,ges}$, analog zu Gleichung (5.44), wie folgt:

$$E_{d,ges} = 2 \zeta_{ges} M_{ges}^* \Omega_1^2 \pi \quad (5.49)$$

Des Weiteren setzt sich $E_{d,ges}$ aus der Summe der einzelnen Energieanteile infolge horizontalen und vertikalen Dissipationsmechanismen im Brückenbereich und Vorland zusammen. Die Energiebilanz lautet:

$$E_{d,ges} = E_{d,TW} + E_{d,OB,v} + E_{d,OB,h} + E_{d,vor} \quad (5.50)$$

Einsetzen der Gleichungen (5.44), (5.46), (5.47), (5.48) und (5.49) in Gleichung (5.50) ergibt:

$$\begin{aligned} & 2 \left\{ \mu_{ges} w_0^2 \frac{L}{2} \left(1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L} \right)^2 \right) + M_{vor}^* (w_0 k_b)^2 \left[\left(\frac{\sqrt{8} r L}{\pi(k_{vor} L + 2 EA)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi e_L}{k_{vor}} \right)^2 \right] \right\} \pi \Omega_1^2 \zeta_{ges} = \\ & = 2 \zeta_{TW} M_{ges}^* \Omega_1^2 \pi + \bar{c}_{OB,v} w_0^2 \frac{L}{2} \pi \Omega_1 + \frac{\bar{c}_b \pi^3}{L} \left(e_L^2 + \frac{r^2}{2} \right) \Omega_1 w_0^2 + \\ & + C_{vor}^* (w_0 k_b)^2 \left[\left(\frac{\sqrt{8} r L}{\pi(k_{vor} L + 2 EA)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi e_L}{k_{vor}} \right)^2 \right] \pi \Omega_1 \quad (5.51) \end{aligned}$$

Umformung nach ζ_{ges} führt zu einem Ausdruck für das Lehr'sche Dämpfungsmaß des Gesamtsystems:

$$\begin{aligned} \zeta_{ges} &= \frac{2 M_{ges}^* \Omega_1^2 \pi \zeta_{TW}}{2 M_{ges}^* \Omega_1^2 \pi} + \frac{\bar{c}_{OB,v} w_0^2 \pi \Omega_1 \frac{L}{2} + \bar{c}_b \frac{\pi^3}{L} \left(e_L^2 + \frac{r^2}{2} \right) \Omega_1 w_0^2}{2 M_{ges}^* \Omega_1^2 \pi} \\ &+ \frac{C_{vor}^* \pi \Omega_1 (w_0 k_b)^2 \left[\left(\frac{\sqrt{8} r L}{\pi(k_{vor} L + 2 EA)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi e_L}{k_{vor}} \right)^2 \right]}{2 M_{ges}^* \Omega_1^2 w_0^2 \pi} \\ \rightarrow \zeta_{ges} &= \zeta_{TW} + \frac{\overbrace{c_{OB,v} L w_0^2}^{\Delta \zeta_{OB,v}}}{4 M_{ges}^* \Omega_1} + \frac{\overbrace{\bar{c}_b \pi^2 w_0^2 \left(e_L^2 + \frac{r^2}{2} \right)}^{\Delta \zeta_{OB,h}}}{2 L M_{ges}^* \Omega_1} + \\ &+ \frac{\overbrace{C_{vor}^* k_b^2 w_0^2 \left[\left(\frac{\sqrt{8} r L}{\pi(k_{vor} L + 2 EA)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi e_L}{k_{vor}} \right)^2 \right]}^{\Delta \zeta_{vor}}}{2 M_{ges}^* \Omega_1} \quad (5.52) \end{aligned}$$

Wenn die Möglichkeit besteht, die Auflagerverschiebungen genau zu ermitteln, lautet die Formel:

$$\zeta_{ges}(w_0) = \zeta_{TW} + \frac{\overbrace{\bar{c}_{OB,v} L w_0^2}^{\Delta \zeta_{OB,v}}}{4 M_{ges}^* \Omega_1} + \frac{\overbrace{\bar{c}_b \pi^2 w_0^2 \left(e_L^2 + \frac{r^2}{2} \right)}^{\Delta \zeta_{OB,h}}}{2 L M_{ges}^* \Omega_1} + \frac{\overbrace{C_{vor}^*}_{\Delta \zeta_{vor}}}{2 M_{ges}^* \Omega_1} [u_{L,li}^2(w_0) + u_{L,re}^2(w_0)] \quad (5.53)$$

Dabei ist anzumerken, dass die Auflagerverschiebungen in Gleichung (5.53) von der maximalen Durchbiegung in Feldmitte abhängig sind. Aus diesem Grund kürzt sich w_0 nicht vollständig heraus und der Anteil des Dämpfungsmaßes ζ_{vor} bleibt von der Schwingungsamplitude abhängig. Um das Dämpfungsmaß dennoch unabhängig von der Schwingungsamplitude zu ermitteln, besteht die Möglichkeit, die Auflagerverschiebungen bei einer festgelegten maximalen Durchbiegung w_0 in Feldmitte zu berechnen, welche auf Basis einer statischen Belastung (z.B. Last eines Zuges wie in [35]) oder eines Verhältnisses Durchbiegung zu Stützweite im Kontext eines Gebrauchstauglichkeitsnachweises abgeschätzt werden kann [35, S. 314].

5.4 Vergleich zwischen Messung und Rechnung

Zur Verifizierung der hergeleiteten Gleichung (5.53) zur Ermittlung des Dämpfungsmaßes ζ_{ges} für das gesamte Brücke-Vorlandssystem werden an dieser Stelle die Ergebnisse mit den in Kapitel 3.4 bereits eingeführten Messdaten an realen Brücken aus [35, S. 452] verglichen. In Tabelle 5.1 sind die Messergebnisse der Dämpfungsmaße für die 13 Tragwerke angegeben.

Tab. 5.1: Bandbreite der identifizierten Dämpfungsparameter [35, Tab.2]

Tragwerk	Spannweite [m] L	EN 1991-2	ASZ		KSA			
		[%] ζ_{Norm}	[%] ζ_{min}	[%] ζ_{max}	[%] ζ_M	[%] ζ_{min}	[%] ζ_{max}	[%] ζ_M
TW1	4,50	2,44	2,53	7,00	4,35	3,62	4,80	4,18
TW2	11,00	1,63	1,90	5,90	3,50	-	-	-
TW3	12,57	1,43	1,70	4,60	3,00	-	-	-
TW4	15,40	1,08	2,12	3,56	2,84	-	-	-
TW5	15,47	1,07	1,50	3,90	3,10	-	-	-
TW6	16,10	0,99	1,30	4,14	2,60	-	-	2,49
TW7	16,10	0,99	1,89	4,17	2,98	-	-	-
TW8	17,50	0,81	1,76	2,61	2,19	-	-	-
TW9	33,30	0,50	0,80	1,80	1,20	-	-	1,77
TW10	16,00	1,00	-	-	-	1,86	2,21	2,05
TW11	16,00	1,00	-	-	-	1,13	1,27	1,21
TW12	16,50	0,94	-	-	-	1,24	1,40	1,33
TW13	21,36	1,50	-	-	-	1,16	1,80	1,53

Aufgrund fehlender Kenntnis der Tragwerksdämpfung muss ζ_{TW} analog zu *Stollwitzer et al.* [35] nach *Petersen* [27] abgeschätzt:

$$\zeta_{TW} = \frac{\Lambda}{2\pi} \quad (5.54)$$

Λ ist das logarithmische Dekrement und wird als „natürlicher Logarithmus des Quotienten aus zwei aufeinander folgenden Schwingungsmaxima“ bezeichnet [27, S. 373]. Bei einer Anfangsauslenkung x_0 ergibt sich eine umhüllende der Schwingung im Zeitbereich der Form:

$$x(t) = x_0 e^{-\zeta_{TW} \Omega_1 t} \quad (5.55)$$

Unter Berücksichtigung, dass zwischen zwei Schwingungsmaxima (bzw. -minima) die Zeit einer Periode T vergeht, resultiert:

$$\Lambda = \ln \frac{e^{-\zeta_{TW} \Omega_1 t}}{e^{-\zeta_{TW} \Omega_1 (t+T)}} = \ln e^{\zeta_{TW} \Omega_1 T} = \zeta_{TW} \Omega_1 T = \zeta_{TW} \Omega_1 \frac{2\pi}{\Omega_1} = 2\pi \zeta_{TW} \quad (5.56)$$

In *Petersen* [27] wird angenommen, dass das logarithmische Dekrement einer allgemeinen Baukonstruktion aus drei Dämpfungsanteilen besteht: Λ_1 berücksichtigt die Werkstoffdämpfung, Λ_2 die Bauteildämpfung in den Verbindungen und Fugen, und Λ_3 die Boden-Bauwerk-Interaktion einschließlich der Lagerung. Wie in Tabelle 5.2 ersichtlich, ergeben sich für die 13 Beispielbrücken geringe Dämpfungswerte im Bereich von rund 0,55 %. In Bezug auf die Auswahl der Durchbiegung

Tab. 5.2: Rechnerisch angesetzte Tragwerksdämpfung [35, Tab.4]

Tragwerk	Lagerung	Λ_1	Λ_2	Λ_3	ζ_{TW}
TW1	Elastomerlager	0,006	0	0,010	0,25
TW2	Elastomerlager	0,006	0,020	0,010	0,57
TW3	Elastomerlager	0,006	0,020	0,010	0,57
TW4	Elastomerlager	0,006	0,020	0,010	0,57
TW5	Elastomerlager	0,006	0,020	0,010	0,57
TW6	Topf/Kalotten/Stahl/Rollenlager	0,006	0,020	0,008	0,54
TW7	Topf/Kalotten/Stahl/Rollenlager	0,006	0,020	0,010	0,54
TW8	Elastomerlager	0,006	0,020	0,010	0,57
TW9	Topf/Kalotten/Stahl/Rollenlager	0,006	0,020	0,008	0,54
TW10	Elastomerlager	0,006	0,020	0,010	0,57
TW11	Elastomerlager	0,006	0,020	0,010	0,57
TW12	Elastomerlager	0,006	0,020	0,010	0,57
TW13	Linienkipp-/Stahl/Rollenlager	0,006	0,020	0,008	0,54

w_0 wird hier das Verformungskriterium für den Reisekomfort gemäß EN 1990/A1 [24], siehe Abbildung 5.8, zugrundegelegt. Dieses lautet:

$$w_0 = \frac{L}{\delta} \quad (5.57)$$

Hierbei steht δ für die maximale zulässige Vertikalverformung. Die Grenzwerte in Abbildung 5.8 gelten für Eisenbahnbrücken mit mindestens drei aufeinander folgenden Einfeldträgern. Da es sich hier um einfeldrige Brücken handelt, können gemäß EN 1990/A1 [24] die Werte aus Abbildung 5.8 mit 0,7 multipliziert werden. Im Folgenden wird der Dämpfungswert ζ_{ges} am Beispiel von Tragwerk 6 mit einer linearen Schotterfedersteifigkeit $\bar{k}_b = 10$ kN/mm pro m Gleis ermittelt. Abschließend werden sämtliche Ergebnisse in Abbildung 5.9 und 5.10 grafisch zusammengefasst. Für eine Streckengeschwindigkeit $V = 300$ km/h wird zur Einhaltung des Kriteriums nach EN 1990/A1 [24] ein Verhältnis $w_0/L = 1000$ angestrebt. Das Quadrat der Auflagerverschiebungen bei einer Durchbiegung in Feldmitte $w_0 = L/1000 = 0,0161$ m kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
 u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2 &\approx u_{L,li,0}^2 + u_{L,re,0}^2 \\
 &= \left[\frac{\sqrt{8} w_0 k_b r L}{\pi (k_{vor} L + 2 EA)} \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_0 \pi k_b e_L}{k_{vor}} \right)^2 = \\
 &= \left[\frac{\sqrt{8} \cdot 16,1/1000 \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 0,78 \cdot 16,1}{\pi (179,403 \cdot 10^6 \cdot 16,1 + 2 \cdot 3220 \cdot 10^6)} \right]^2 \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \cdot 16,1/1000 \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 0,8}{179,403 \cdot 10^6} \right)^2 = 2,6 \cdot 10^{-6} \quad (5.58)
 \end{aligned}$$

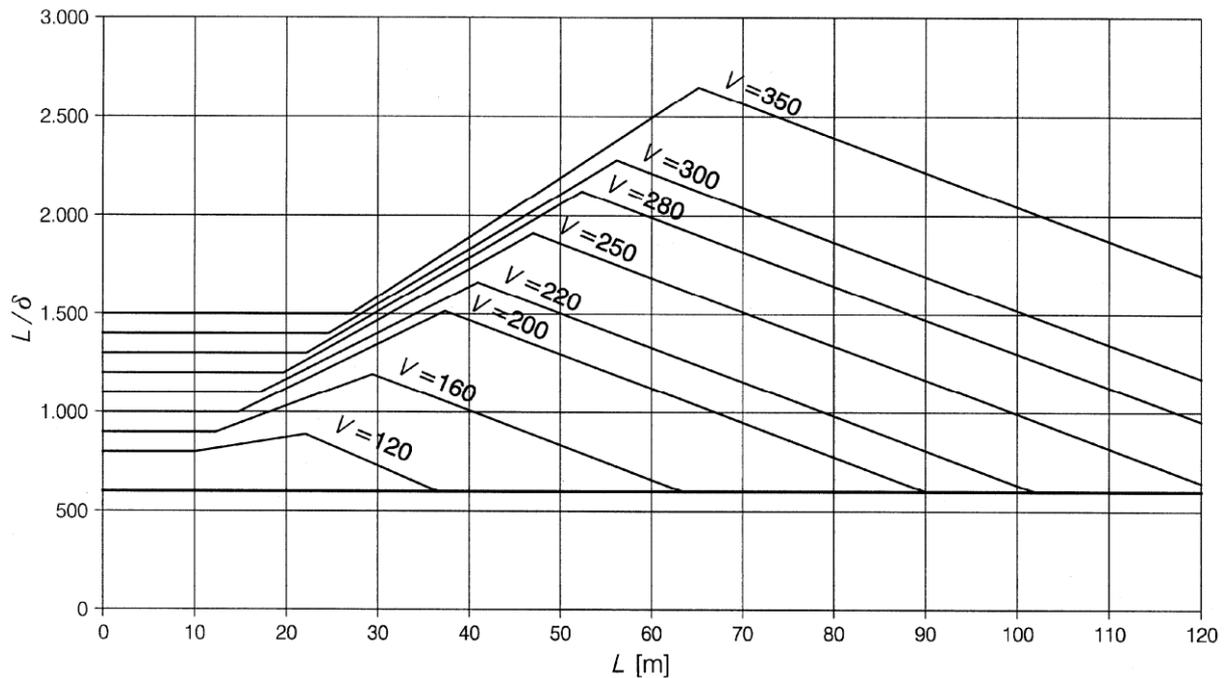


Abb. 5.8: Maximale zulässige vertikale Verformung δ für Eisenbahnbrücken mit 3 oder mehr aufeinander folgenden Einfeldträgern entsprechend einer zulässigen vertikalen Beschleunigung von $b_v = 1 \text{ m/s}^2$ in einem Wagen für die Geschwindigkeiten V [km/h] [24, Bild A.2.3]

Die Ersatzmasse M_{ges}^* bei einer Schotterdichte von $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$, die Ersatzsteifigkeit K_{ges}^* des kinetisch- und steifigkeitsäquivalenten Einmassenschwingers und die Eigenfrequenz f_1 für das Gesamtsystem lauten:

$$\begin{aligned}
 M_{ges}^* &\approx \mu_{ges} \frac{L w_0^2}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi e_L}{L} \right)^2 \right] + M_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) = \\
 &= 6967 \cdot \frac{16,1 \cdot 0,0161}{2} \left[1 + 2 \left(\frac{\pi \cdot 0,8}{16,1} \right)^2 \right] + 10694,8 \cdot 2,6 \cdot 10^{-6} = 16,02 \text{ kg} \quad (5.59)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{ges}^* &\approx EI_{ges} \frac{\pi^4 w_0^2}{2L^3} + k_b \left(\frac{\pi w_0}{L} \right)^2 \left(r^2 \frac{L}{2} + e_L^2 L \right) + K_{vor}^* (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) = \\
 &= 7,03 \cdot 10^9 \frac{\pi^4 \cdot 0,0161^2}{2 \cdot 16,1^3} + 10 \cdot 10^6 \left(\frac{\pi \cdot 0,0161}{16,1} \right)^2 \left(0,92^2 \frac{16,1}{2} + 0,8^2 \cdot 16,1 \right) + \\
 &+ 179,403 \cdot 10^6 \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} = 2,343 \cdot 10^4 \text{ N/m} \quad (5.60)
 \end{aligned}$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{K_{ges}^*}{M_{ges}^*}} = \sqrt{\frac{2,343 \cdot 10^4}{16,02}} = 38,25 \text{ rad/s} \rightarrow f_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi} = 6,09 \text{ Hz} \quad (5.61)$$

Die Dämpfungskennwerte ergeben sich nach [35] in Abhängigkeit von f_1 (siehe Abbildung 2.9) zu:

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_b &= 1,143 f_1^2 - 19,2 f_1 + 152 = \\
 &= 1,143 \cdot 6,09^2 - 19,2 \cdot 6,09 + 152 = 77,477 \text{ kNs/m} \quad (5.62)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c}_{OB,v} &= 0,813 f_1^2 - 6,58 f_1 + 14,6 = \\ &= 0,813 \cdot 6,09^2 - 6,58 \cdot 6,09 + 14,6 = 4,672 \text{ kNs/m}\end{aligned}\quad (5.63)$$

Nun können die Dämpfungsmaße für Tragwerk (ζ_{TW}), Schotteroberbau (vertikal $\Delta\zeta_{OB,v}$ und horizontal $\Delta\zeta_{OB,h}$) und Vorlandbereiche ($\Delta\zeta_{vor}$) ermittelt werden. Das rechnerische Lehr'sche Dämpfungsmaß des Gesamtsystems entspricht der Summe sämtlicher Anteile.

$$\zeta_{TW} = 0,0054 \hat{=} 0,54 \% \quad (5.64)$$

$$\Delta\zeta_{OB,v} = \frac{\bar{c}_{OB,v} L w_0^2}{4 M_{ges} \Omega_1} = \frac{4672 \cdot 16,1 \cdot 0,0161^2}{4 \cdot 16,02 \cdot 38,25} = 0,0080 \hat{=} 0,80 \% \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned}\Delta\zeta_{OB,h} &= \frac{\bar{c}_b \pi^2 w_0^2}{2 L M_{ges}^* \Omega_1} \left(e_L^2 + \frac{r^2}{2} \right) \\ &= \frac{77477 \cdot \pi^2 \cdot 0,0161^2}{2 \cdot 16,1 \cdot 16,02 \cdot 38,25} \left(0,8^2 + \frac{0,92^2}{2} \right) = 0,0107 \hat{=} 1,07 \% \end{aligned}\quad (5.66)$$

$$\Delta\zeta_{vor} = \frac{C_{vor}^*}{2 M_{ges}^* \Omega_1} (u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2) = \frac{702749,9}{2 \cdot 16,02 \cdot 38,25} \cdot 2,6 \cdot 10^{-6} = 0,0015 \hat{=} 0,15 \% \quad (5.67)$$

$$\rightarrow \zeta_{ges} = 0,0054 + 0,0080 + 0,0107 + 0,0015 = 0,0255 \hat{=} 2,55 \% \quad (5.68)$$

In Tabelle 5.3 ist die Auswertung für alle in Tabelle 3.1 angegebenen Tragwerke mit Variation der eingesetzten Massenbelegung μ angeführt. Zur besseren Übersichtlichkeit werden die Ergebnisse in Abbildung 5.9 und 5.10 grafisch dargestellt. Während bei den normativen Vorgaben (ζ_{Norm}) eine Unterschätzung des tatsächlichen gemessenen Lehr'schen Dämpfungsmaßes ζ_M zu beobachten ist, ergeben die linearen Berechnungen mit Koppelbalken inklusive Vorland leicht überschätzte Werte für ζ_{ges} als gemessen. Dabei führt die Annahme von $\rho = 1700 \text{ kg/m}^3$ zu kleineren Dämpfungswerten und reduziert somit die Diskrepanz zwischen Messung und Rechnung.

Tragwerk-Nr.	Lineare Berechnung $\rho = 1400 \text{ kg/m}^3$					Messdaten					
	ζ_{TW}	$\Delta\zeta_{\text{OB,h}}$	$\Delta\zeta_{\text{OB,v}}$	$\Delta\zeta_{\text{vor}}$	ζ_{ges}	ASZ			KSA		
	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	ζ_{min}	ζ_{max}	ζ_{M}	ζ_{min}	ζ_{max}	ζ_{M}
TW1	0,25	1,35	3,78	0,00	5,38	2,53	7,00	4,35	3,62	4,80	4,18
TW2	0,57	0,77	3,47	0,02	4,84	1,90	5,90	3,50	-	-	-
TW3	0,57	0,56	2,79	0,03	3,95	1,70	4,60	3,00	-	-	-
TW4	0,57	0,57	2,78	0,07	3,99	2,12	3,56	2,84	-	-	-
TW5	0,57	0,66	2,50	0,06	3,78	1,50	3,90	3,10	-	-	-
TW6	0,54	1,10	1,03	0,15	2,82	1,30	4,14	2,60	-	-	2,49
TW7	0,54	1,14	1,40	0,16	3,24	1,89	4,17	2,98	-	-	-
TW8	0,57	0,63	2,01	0,09	3,29	1,76	2,61	2,19	-	-	-
TW9	0,54	1,76	0,35	0,64	3,29	0,80	1,18	1,20	-	-	1,77
TW10	0,57	0,42	1,91	0,05	2,95	-	-	-	1,86	2,21	2,05
TW11	0,57	0,54	1,05	0,08	2,24	-	-	-	1,13	1,27	1,21
TW12	0,57	0,54	0,83	0,08	2,03	-	-	-	1,24	1,40	1,33
TW13	0,54	0,94	0,70	0,21	2,39	-	-	-	1,16	1,80	1,53

(a) $\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Ausschwingverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)

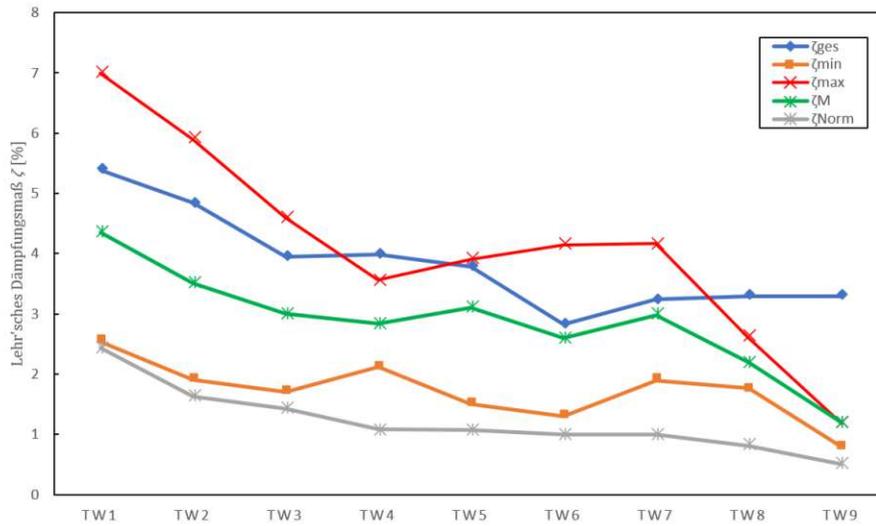
Tragwerk-Nr.	Lineare Berechnung $\rho = 1550 \text{ kg/m}^3$					Messdaten					
	ζ_{TW}	$\Delta\zeta_{\text{OB,h}}$	$\Delta\zeta_{\text{OB,v}}$	$\Delta\zeta_{\text{vor}}$	ζ_{ges}	ASZ			KSA		
	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	ζ_{min}	ζ_{max}	ζ_{M}	ζ_{min}	ζ_{max}	ζ_{M}
TW1	0,25	1,32	3,61	0,00	5,19	2,53	7,00	4,35	3,62	4,80	4,18
TW2	0,57	0,75	3,15	0,02	4,49	1,90	5,90	3,50	-	-	-
TW3	0,57	0,54	2,54	0,03	3,68	1,70	4,60	3,00	-	-	-
TW4	0,57	0,56	2,54	0,07	3,74	2,12	3,56	2,84	-	-	-
TW5	0,57	0,64	2,25	0,05	3,51	1,50	3,90	3,10	-	-	-
TW6	0,54	1,08	0,90	0,15	2,68	1,30	4,14	2,60	-	-	2,49
TW7	0,54	1,12	1,21	0,16	3,03	1,89	4,17	2,98	-	-	-
TW8	0,57	0,61	1,80	0,09	3,07	1,76	2,61	2,19	-	-	-
TW9	0,54	1,74	0,33	0,63	3,24	0,80	1,18	1,20	-	-	1,77
TW10	0,57	0,41	1,66	0,05	2,69	-	-	-	1,86	2,21	2,05
TW11	0,57	0,53	0,91	0,08	2,09	-	-	-	1,13	1,27	1,21
TW12	0,57	0,53	0,72	0,08	1,90	-	-	-	1,24	1,40	1,33
TW13	0,54	0,93	0,62	0,21	2,30	-	-	-	1,16	1,80	1,53

(b) $\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)

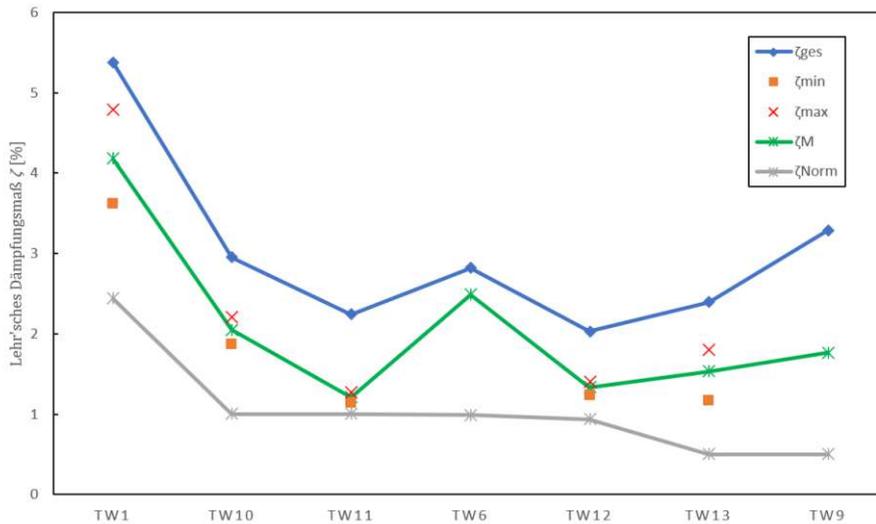
Tragwerk-Nr.	Lineare Berechnung $\rho = 1700 \text{ kg/m}^3$					Messdaten					
	ζ_{TW}	$\Delta\zeta_{\text{OB,h}}$	$\Delta\zeta_{\text{OB,v}}$	$\Delta\zeta_{\text{vor}}$	ζ_{ges}	ASZ			KSA		
	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	ζ_{min}	ζ_{max}	ζ_{M}	ζ_{min}	ζ_{max}	ζ_{M}
TW1	0,25	1,30	3,45	0,00	5,01	2,53	7,00	4,35	3,62	4,80	4,18
TW2	0,57	0,73	2,86	0,02	4,18	1,90	5,90	3,50	-	-	-
TW3	0,57	0,53	2,32	0,02	3,45	1,70	4,60	3,00	-	-	-
TW4	0,57	0,55	2,334	0,07	3,52	2,12	3,56	2,84	-	-	-
TW5	0,57	0,62	2,03	0,05	3,27	1,50	3,90	3,10	-	-	-
TW6	0,54	1,07	0,80	0,15	2,55	1,30	4,14	2,60	-	-	2,49
TW7	0,54	1,10	1,06	0,15	2,86	1,89	4,17	2,98	-	-	-
TW8	0,57	0,60	1,61	0,09	2,86	1,76	2,61	2,19	-	-	-
TW9	0,54	1,72	0,32	0,63	3,20	0,80	1,18	1,20	-	-	1,77
TW10	0,57	0,40	1,44	0,05	2,47	-	-	-	1,86	2,21	2,05
TW11	0,57	0,52	0,80	0,07	1,96	-	-	-	1,13	1,27	1,21
TW12	0,57	0,53	0,63	0,08	1,80	-	-	-	1,24	1,40	1,33
TW13	0,54	0,92	0,56	0,21	2,22	-	-	-	1,16	1,80	1,53

(c) $\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Ausschwingverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)

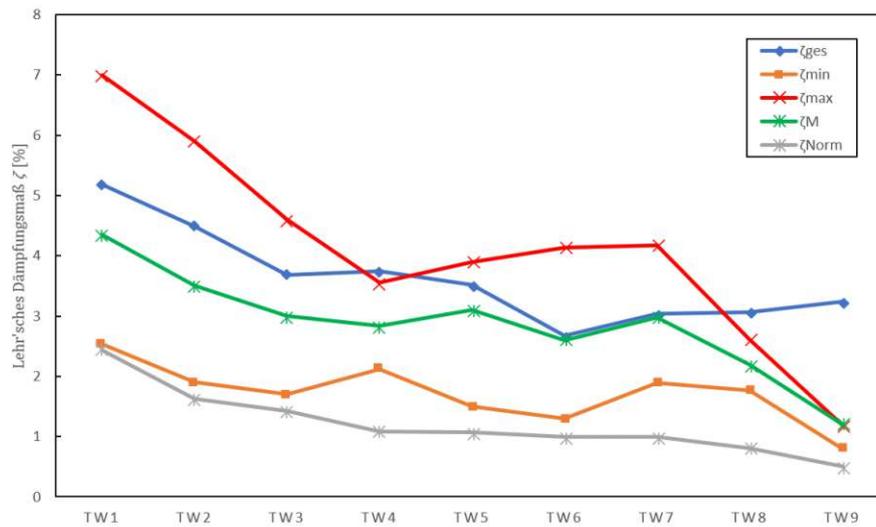
Tab. 5.3: Vergleich der Dämpfungswerte ζ Rechnung (linear) / Messung / Norm - Teil 1



(a) $\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Ausschwingverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)

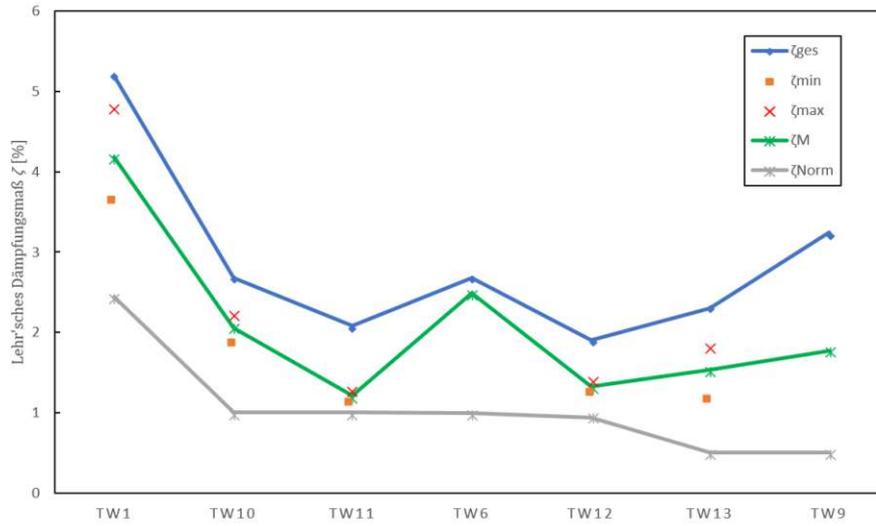


(b) $\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)

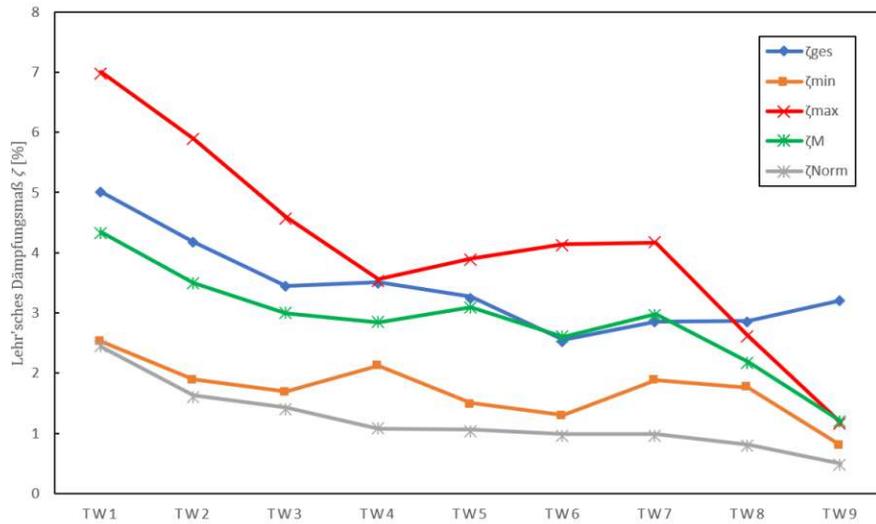


(c) $\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Ausschwingverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)

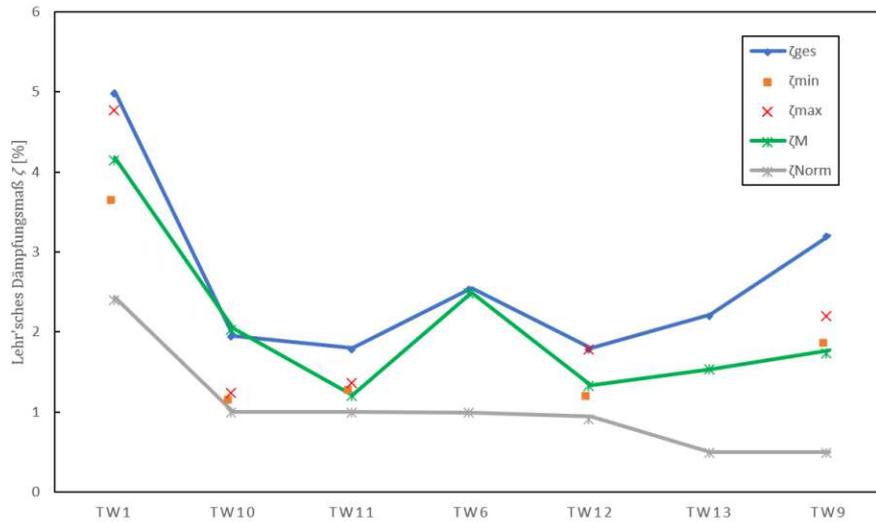
Abb. 5.9: Vergleich der Dämpfungsmaße ζ Rechnung (linear) / Messung / Norm - Teil 1



(a) $\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)



(b) $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Ausschlagverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)



(c) $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)

Abb. 5.10: Vergleich der Dämpfungsmaße ζ Rechnung (linear) / Messung / Norm - Teil 2

Mit einem etwas größeren Rechenaufwand können hier die Systemparameter, analog zu Kapitel 4, unter Berücksichtigung der Nichtlinearität des Schotters im Brücken- bzw. Vorlandbereich abgeschätzt werden. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse, unter Einbeziehung der Korrekturfaktoren κ_B und κ_V zur Modifikation der Steifigkeiten k_{vor} und \bar{k}_b , ist für $w_0 = L/1000$ in Abbildung 5.11 graphisch dargestellt. Dabei wurde von einer Schotterdicke von $\rho_b 1700 \text{ kg/m}^3$ ausgegangen, um das Gesamtdämpfungsmaß zu minimieren und somit Ergebnisse auf der sicheren Seite zu erhalten. Die genauen numerischen Werte für ζ_{ges} können der nachfolgenden Tabelle 5.4 entnommen werden.

Tab. 5.4: Vergleich der Dämpfungswerte Rechnung (linear und nichtlinear) / Messung

Tragwerk-Nr.	Nichtlineare Berechnung $\rho = 1700 \text{ kg/m}^3$									
	L [m]	el [m]	r [m]	E _{ges} [Nm]	$\mu_{ges,3}$ [kg]	KB [-]	KV _{li} [-]	KV _{re} [-]	UL _{re} [m]	UL _{li} [m]
TW1	4,50	0,09	0,78	3,02E+08	9148	0,53	1,57	1,71	1,68E-05	4,38E-05
TW2	11,00	0,33	0,98	4,18E+09	7484	0,45	1,29	1,40	1,47E-04	3,12E-04
TW3	12,57	0,41	1,01	8,65E+09	9091	0,44	1,25	1,35	2,10E-04	4,21E-04
TW4	15,40	0,73	0,95	1,78E+10	8536	0,46	1,16	1,22	5,21E-04	7,98E-04
TW5	15,47	0,64	1,19	1,69E+10	9031	0,38	1,17	1,26	3,98E-04	7,43E-04
TW6	16,10	0,80	0,92	7,03E+10	7306	0,47	1,15	1,20	6,03E-04	8,91E-04
TW7	16,10	0,80	0,92	7,03E+10	6556	0,47	1,15	1,20	6,03E-04	8,91E-04
TW8	17,50	0,82	1,02	2,14E+10	8760	0,44	1,13	1,20	6,24E-04	9,84E-04
TW9	33,30	1,72	1,37	4,34E+10	7578	0,30	0,97	1,04	1,90E-03	3,00E-03
TW10	16,00	0,55	0,73	1,21E+10	8159	0,56	1,20	1,26	3,96E-04	6,21E-04
TW11	16,00	0,63	0,69	9,29E+09	8691	0,58	1,18	1,23	4,80E-04	6,94E-04
TW12	16,50	0,63	0,69	9,29E+09	8854	0,58	1,18	1,23	4,87E-04	7,11E-04
TW13	21,36	1,18	1,01	2,52E+10	9046	0,42	1,07	1,12	1,10E-03	1,60E-03

Tragwerk-Nr.	Nichtlineare Berechnung $\rho = 1700 \text{ kg/m}^3$					Abweichung $(\zeta_{ges}-\zeta_M)/\zeta_{ges} \cdot 100$			
	ζ_{TW} [%]	$\Delta\zeta_{OB,h}$ [%]	$\Delta\zeta_{OB,v}$ [%]	$\Delta\zeta_{vor}$ [%]	ζ_{ges} [%]	ASZ		KSA	
						Δ linear [%]	Δ nichtlin. [%]	Δ linear [%]	Δ nichtlin. [%]
TW1	0,25	1,31	3,43	0,00	5,00	15,11	14,87	19,79	19,54
TW2	0,57	0,73	2,28	0,01	4,14	19,38	18,18	-	-
TW3	0,57	0,53	2,30	0,01	3,41	14,90	13,82	-	-
TW4	0,57	0,55	2,31	0,03	3,46	23,77	21,70	-	-
TW5	0,57	0,63	1,99	0,02	3,21	5,50	3,56	-	-
TW6	0,54	1,11	0,74	0,07	2,45	-1,81	-5,75	2,53	-1,59
TW7	0,54	1,14	0,98	0,07	2,73	-4,17	-8,27	-	-
TW8	0,57	0,60	1,56	0,04	2,77	30,71	26,67	-	-
TW9	0,54	1,99	0,36	0,18	3,06	166,89	154,99	80,94	72,88
TW10	0,57	0,41	1,41	0,02	2,41	-	-	20,30	17,60
TW11	0,57	0,52	0,77	0,03	1,90	-	-	61,90	57,21
TW12	0,57	0,53	0,61	0,03	1,74	-	-	35,38	31,18
TW13	0,54	0,96	0,51	0,08	2,08	-	-	45,06	36,08
						$ \Delta _{\emptyset}$	$ \Delta _{\emptyset}$	$ \Delta _{\emptyset}$	$ \Delta _{\emptyset}$
						31,36	29,76	37,99	33,73

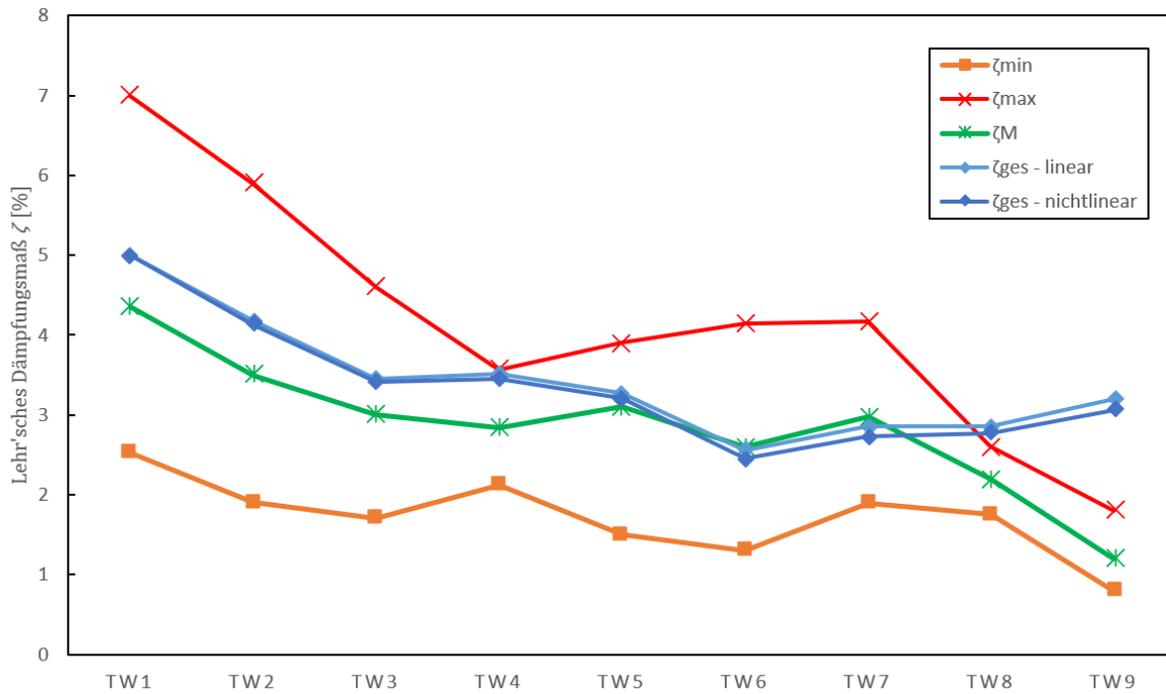
Zur Auswertung der Qualität der Ergebnisse wurde wiederum eine Abweichung Δ zwischen den rechnerischen Lehr'schen Dämpfungsmaßen ζ_{ges} mit und ohne Berücksichtigung der Nichtlinearitäten und den Mittelwerten der in [35] messtechnisch ermittelten Lehr'schen Dämpfungsmaße ζ_M verwendet, siehe Abbildung 5.12. Diese Abweichung wird in % angegeben und wie folgt berechnet:

$$\Delta = \frac{\zeta_{ges} - \zeta_M}{\zeta_M} 100 \quad (5.69)$$

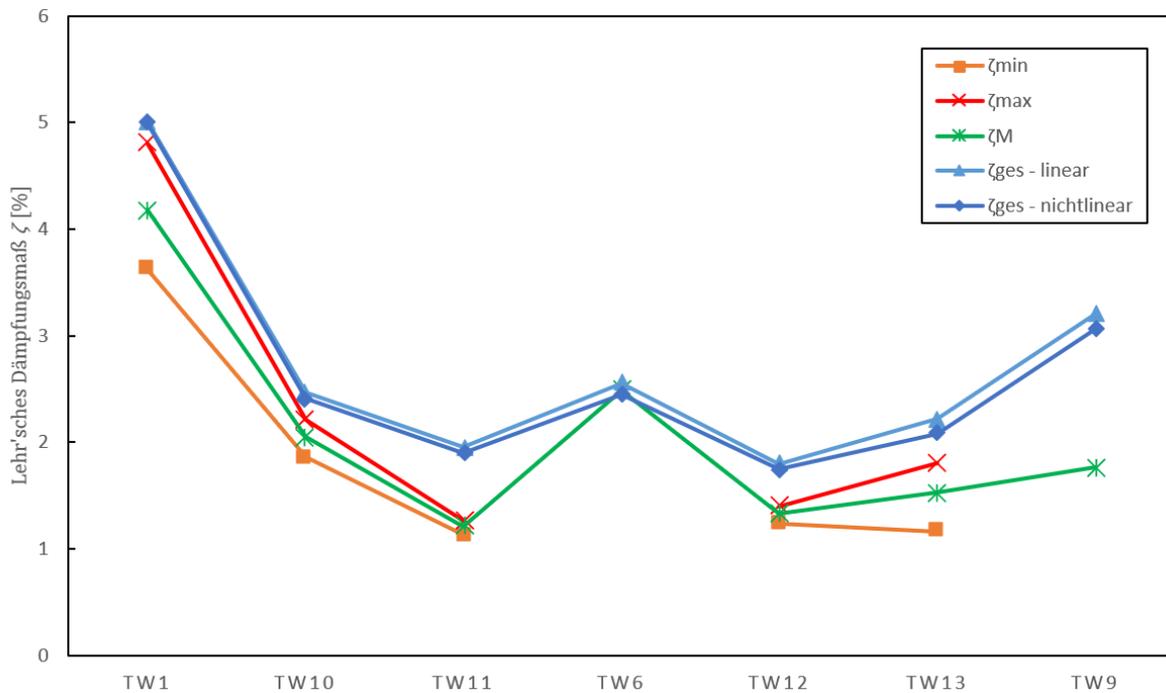
In Abbildung 5.12 ist erkennbar, dass die Berücksichtigung der Nichtlinearitäten des Schotters mittels Korrekturfaktoren ($\kappa_{V,li}$, $\kappa_{V,re}$ und κ_B) zu einer deutlichen Reduktion der Abweichung zwischen den berechneten und gemessenen Dämpfungswerten ζ_{ges} für alle Beispielbrücken führt. Bei der krafterregeten Schwingungsanregung (KSA) reduziert sich beispielsweise der Betrag der durchschnittlichen Abweichung Δ von 38 % im linearen Fall auf 34 % im nichtlinearen Fall, siehe Tabelle 5.4. Das ergibt sich daraus, dass die postulierte Ersatzsteifigkeit K_{ges}^* kleiner wird, aufgrund des Faktors κ_B . Dieser ist wie in Tabelle 5.4 dargestellt und ist immer deutlich geringer als 1, in einem Bereich zwischen 0,3 und 0,58. Dadurch wird auch die Eigenfrequenz f_1 verringert, was zu einem kleineren Dämpfungskennwert $c_{OB,v}$ für die vertikalen Mechanismen führt, siehe Gleichung (2.5) bzw. Abbildung 2.9. Somit wird $\Delta\zeta_{OB,v}$ und somit ζ_{ges} geringfügig kleiner.

Hierbei ist noch anzumerken, dass in der linearen Berechnung die Summe der Quadrate der Auflagerverschiebungen ($u_{L,li}^2 + u_{L,re}^2$) anhand von Gleichung (3.90) abgeschätzt wurde (siehe Abschnitt 3.3), während in der nichtlinearen Berechnung die Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ und $u_{L,re}$ mit dem Iterationsverfahren (siehe Abschnitt (3.1.5)) nach den Gleichungen (3.50) und (3.51) ermittelt wurden.

Bei Tragwerk 9 ist die größte Abweichung zwischen Rechnung und Messung zu beobachten. Die Annahme einer über die Länge konstanten Horizontalverschiebung u_A infolge von Auflagerexzentrizität e_L hat sich als ungeeignet erwiesen, da die postulierten Massenbewegungen in der Formulierung der kinetischen Energie T (vgl. Abschnitt 3.3) überschätzt werden. In [35] hat sich gezeigt, dass insbesondere bei Tragwerken mit großen Spannweiten (siehe TW9) die Vernachlässigung der Auflagerexzentrizität e_L zu einer Verringerung der Abweichung zwischen berechneten und gemessenen Lehr'schen Dämpfungsmaßen ζ_{ges} führen kann.

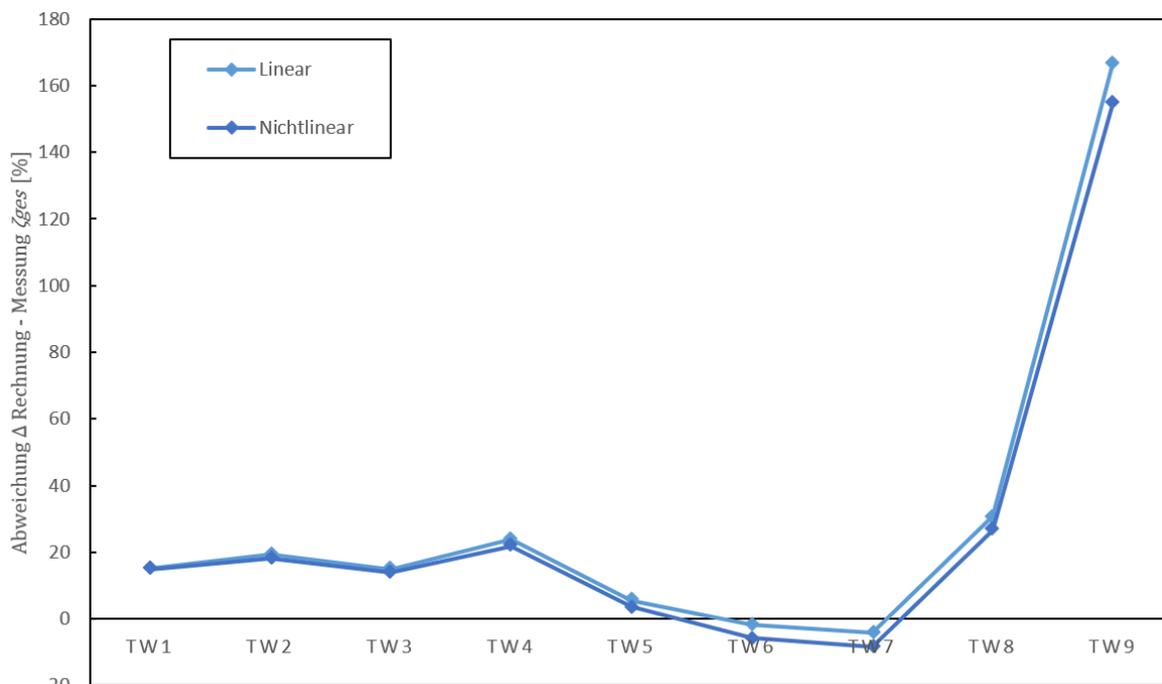


(a) Anregungsmethode: Ausschwingverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)

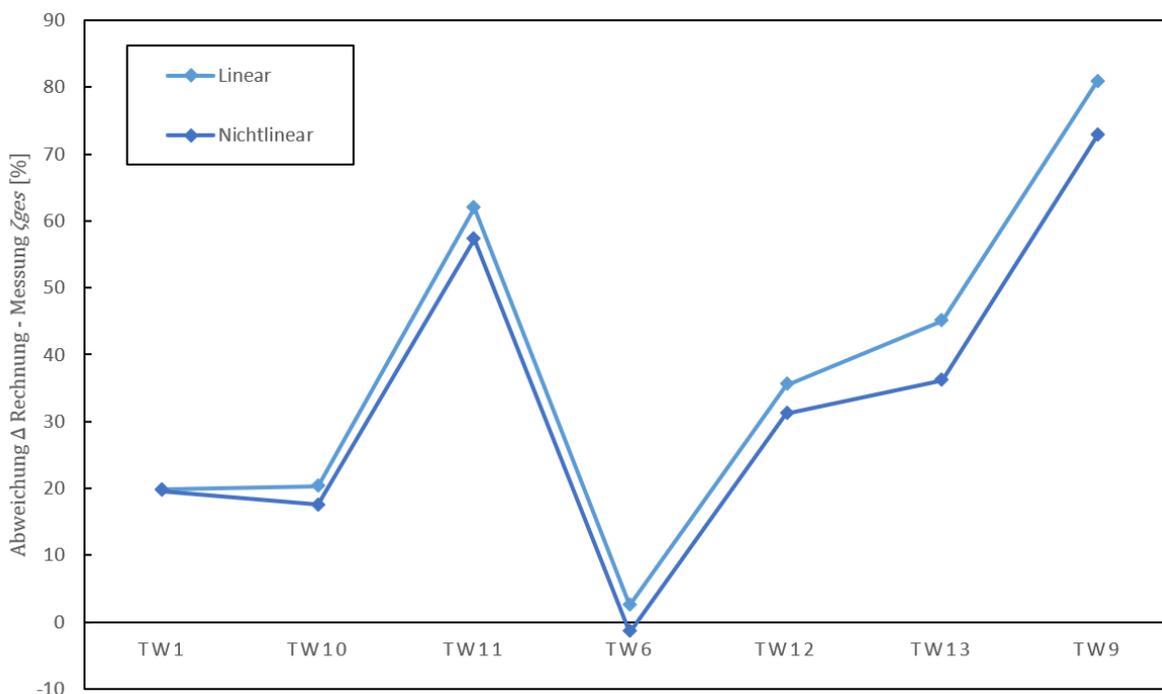


(b) Anregungsmethode: Krafterrechte Schwingungsanregung (KSA)

Abb. 5.11: Vergleich der Dämpfungsmaße ζ lineare / nichtlineare Berechnung / Messung
 $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$



(a) Anregungsmethode: Ausschlagverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)



(b) Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)

Abb. 5.12: Abweichung Δ des Dämpfungsmaßes ζ_{ges} lineare und nichtlineare Berechnung / Messung (Schotterdichte $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$)

Kapitel 6

Schlussfolgerungen und Ausblick

Die in der Einleitung formulierten Forschungsfragen bezüglich der Untersuchung und Weiterentwicklung bestehender Rechenmodelle für einfeldrige Eisenbahnbrücken mit Fokus auf die Implementierung der versuchstechnisch ermittelten nichtlinearen horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion sowie des Einflusses der Vorlandbereiche auf das Schwingverhalten der Konstruktion wurden im Rahmen dieser Arbeit ausführlich behandelt. Die Vorlandbereiche wurden als Einmassenschwinger-Systeme modelliert und anschließend in ein Gesamtsystem integriert, in dem die Brücke als Koppelbalken idealisiert wurde, siehe Kapitel 3. Hierbei wurde das im Rahmen der Versuche am Institut für Tragkonstruktionen/Forschungsbereich Stahlbau der TU Wien erforschte nichtlineare Materialgesetz der horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion des Schotteroberbaus, welches eine Reduktion der Steifigkeit mit zunehmender Horizontalverschiebung impliziert, rechnerisch erfasst und in die bestehenden Rechenmodelle implementiert.

Der Schwerpunkt lag auf dem Koppelbalkenmodell, bestehend aus zwei horizontal gekoppelten Balken, die jeweils das Tragwerk und den Gleisrost darstellen. Aufgrund der Komplexität dieses Modells wurde die nichtlineare Berechnung der dynamischen Parameter Eigenfrequenz f_1 und Lehr'sches Dämpfungsmaß ζ_{ges} zunächst computergestützt durchgeführt. Um jedoch eine einfache Berechnung zu ermöglichen, wurden in Kapitel 4 zwei Korrekturfaktoren, κ_B und κ_V , definiert, um den nichtlinearen Längsverschiebewiderstand des Schotters im Brückenbereich und im Vorland zu berücksichtigen. Während für κ_V eine geschlossene Formel identifiziert werden konnte (siehe Gleichung (4.17), Kapitel 4.2), wurde für κ_B ein Ansatz formuliert, der eine Lösung von Integralen erfordert, siehe Kapitel 4.4. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das Schwingungsverhalten im Feld von einer Vielzahl an Parametern abhängt. Im Hinblick auf zukünftige Forschung könnte eine Parameterstudie durchgeführt werden, um Zusammenhänge zu erkennen, die in die Weiterentwicklung dieses Faktors einfließen können. Für den Vorlandbereich wurde außerdem ein trigonometrischer Ritz'scher Ansatz zur Postulierung des Längsverschiebungsverlaufs gewählt und anhand dessen weitere Untersuchungen durchgeführt, siehe Gleichung (3.52). Es wäre jedoch zur Verifizierung zweckmäßig, auch andere Ansätze zu formulieren, beispielsweise Exponential- oder Potenzfunktionen, um den Beitrag des Vorlandbereichs auf die dynamischen Parameter genauer zu quantifizieren.

Aus dem Vergleich zwischen der Rechnung und Messung der Biegeeigenfrequenzen f_1 und der Lehr'schen Dämpfungsmaße ζ_{ges} lässt sich erkennen, dass die erhöhte Modellierungstiefe, insbesondere die Berücksichtigung des Steifigkeitsbeitrags aus dem Vorland (Kennwert: k_{vor}), der Gleis-Tragwerk Interaktion (Kennwert: \bar{k}_b) und den Nichtlinearitäten (Kennwerte: $k_{vor,NL}$ und $\bar{k}_{b,NL}$), keinen maßgeblichen Einfluss auf die Biegeeigenfrequenzen f_1 der untersuchten Eisenbahnbrücken aufweist. Dies gilt jedoch nicht für die Energiedissipation. Die Berücksichtigung des Schotteroberbaus ist bei der rechnerischen Ermittlung des Lehr'schen Dämpfungsmaßes von großer Bedeutung. Die normativ vorgeschriebenen Dämpfungsmaße sind außerdem sehr konservativ ausgelegt und führen zu unwirtschaftlichen Ergebnissen, was die Notwendigkeit von in situ Messungen schafft. Um die Diskrepanz zwischen den berechneten und gemessenen

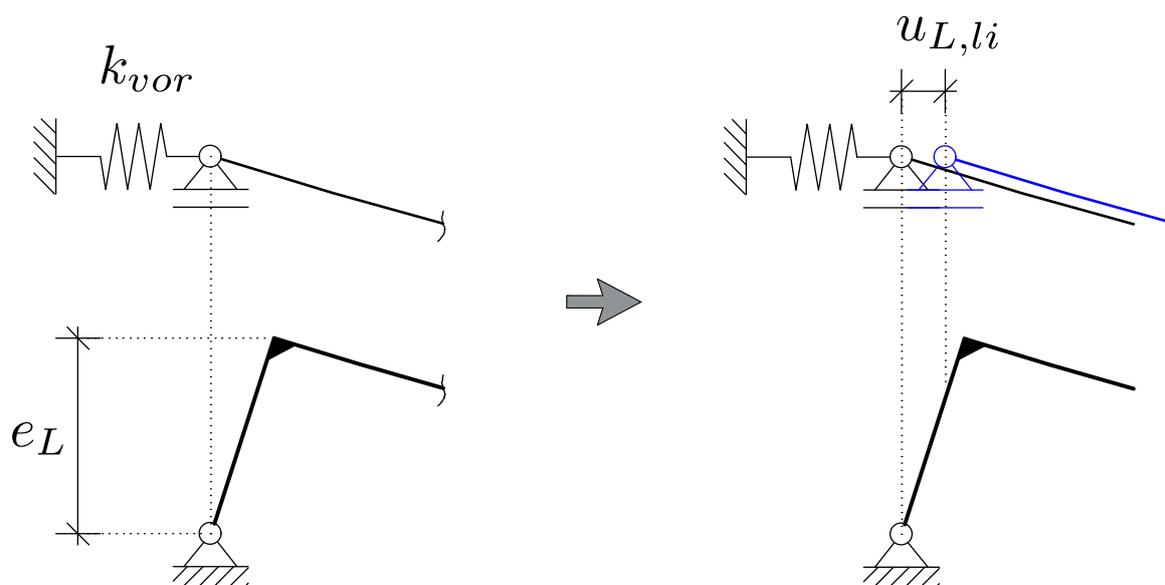


Abb. 6.1: Auflagerverschiebung $u_{L,li}$ und Einfluss der Vorlandfeder (Kennwert: k_{vor})

Werten zu minimieren, wurde von *Stollwitzer et al.* [34] eine Bestimmungsgleichung für das Gesamtdämpfungsmaß ζ_{ges} der Brücke formuliert. Letztere wurde im Rahmen dieser Arbeit um den Beitrag des Vorlandbereichs ζ_{vor} erweitert (Gleichung (5.53)). Aufgrund der Berücksichtigung von ζ_{vor} , welche von der Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ bzw. $u_{L,re}$, siehe Kapitel 3.1.4, abhängt, ist die Bestimmungsgleichung (5.53) für das Lehr'sche Dämpfungsmaß ζ_{ges} des System Brücke und Vorland von den Verschiebungsamplituden abhängig und erfordert daher einen Ansatz der Durchbiegung in Feldmitte, der anhand der Einhaltung von Verformungskriterien hinsichtlich Gebrauchstauglichkeit oder der Belastung überfahrender Zugmodelle erfolgen kann. An dieser Stelle sei noch darauf hingewiesen, dass bei der Herleitung der Bestimmungsgleichungen für die Biegeeigenfrequenz f_1 bzw. ζ_{ges} des Gesamtsystems die Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ und $u_{L,re}$ lediglich zur Bestimmung des Beitrags des Vorlandbereichs $\Delta\zeta_{vor}$ zur Systemdämpfung bzw. -steifigkeit berücksichtigt wurden. Die horizontale Relativverschiebung zwischen Gleisrost und Tragwerk berücksichtigt jedoch nur die Anteile infolge des Schwerlinienabstandes u_S und der Auflagerexzentrizität u_A , siehe Gleichung (3.6). Wie in Abbildung 6.1 ersichtlich, haben die Auflagerverschiebungen $u_{L,li}$ und $u_{L,re}$ auch einen Einfluss auf den Horizontalverschiebungsansatz $u^*(x, t)$ im Feldbereich. Dieser Einfluss muss entsprechend in der Formulierung der kinetischen Energie T (Gleichung (3.84)) und der potentiellen Energie U (Gleichung (3.85)) berücksichtigt werden, was die Ersatzmasse und -steifigkeit des kinetisch- und steifigkeitsäquivalenten Einmassenschwingers für das Gesamtsystem Brücke inklusive Vorland leicht verändert.

Die Auswertung der rechnerischen Dämpfungswerte hat gezeigt, dass die Berücksichtigung des Vorlandbereichs in Verbindung mit dem nichtlinearen Verhalten des Schotteroberbaus zu einer sehr guten Übereinstimmung zwischen Messung und Berechnung führt, insbesondere bei Brücken mit einer Spannweite von 5 bis 20 m. Bei Brücken mit kürzeren Spannweiten (unter 10 m) sind die vertikalen Dissipationsmechanismen aufgrund der geringen induzierten Horizontalverschiebungen dominant. Der Beitrag infolge horizontaler Gleis-Tragwerk Interaktion und damit der Einfluss des Vorlandbereichs erweist sich als vernachlässigbar klein. Bei größeren Spannweiten (über 30 m) trifft hingegen die Annahme einer über die Länge konstanten Horizontalverschiebung $u_A(t)$ aufgrund der Auflagerexzentrizität e_L nicht mehr zu. Insbesondere bei einer schwimmenden

Lagerung, wie einem Elastomerlager, kann diese relative Horizontalverschiebung verschwinden [35, S. 459]. Bei größeren Spannweiten besteht daher Forschungsbedarf in Bezug auf die Behandlung und mögliche Vernachlässigung der Auflagerexzentrizität. Daher sind Messungen an Tragwerken erforderlich, um die Auflagerbewegungen zu erfassen. Eine weitere Unsicherheit besteht in der Schätzung des Dämpfungsbeitrags aus dem Tragwerk (ζ_{TW}). Dieser enthält unter anderem weitere Effekte wie die Boden-Tragwerk-Interaktion, die in dieser Arbeit nicht untersucht wurden.

In Abbildung 6.2 wird eine Übersicht über die behandelten Modelle für Eisenbahnbrücken sowie die entsprechenden Bestimmungsgleichungen für die erste Biegeeigenfrequenz f_1 und das Lehr'sche Dämpfungsmaß ζ_{ges} gegeben.

Abschließend sei erwähnt, dass diese Arbeit ausschließlich einfeldrige Brücken behandelt. Die Erweiterung der hergeleiteten Modelle auf Mehrfeldsysteme oder auf Rahmentragwerke, die in der Praxis häufig vorkommen und aufgrund ihrer geringen Spannweite und Schlankheit im Hinblick auf eine zukünftige Erhöhung der Streckengeschwindigkeiten von Resonanzproblemen betroffen sein können, erfordert weitere Untersuchungen. Eine weitere grundlegende modelltechnische Erweiterung, die für die Umsetzung in der Ingenieurpraxis von Bedeutung ist, besteht darin, die Modelle nicht nur auf eingleisige Brückentragwerke zu beschränken. Angesichts der steigenden Nachfrage nach dem System Eisenbahn als nachhaltiges Verkehrsmittel und der Tendenz zum mehrgleisigen Ausbau bestehender Strecken sollten die Rechenmodelle entsprechend adaptiert werden. Im Kontext der modalen Analyse zur Erfassung des dynamischen Verhaltens von Brücken würde dies die Berücksichtigung weiterer Eigenschwingungsformen einschließlich Torsionsschwingungen erfordern.

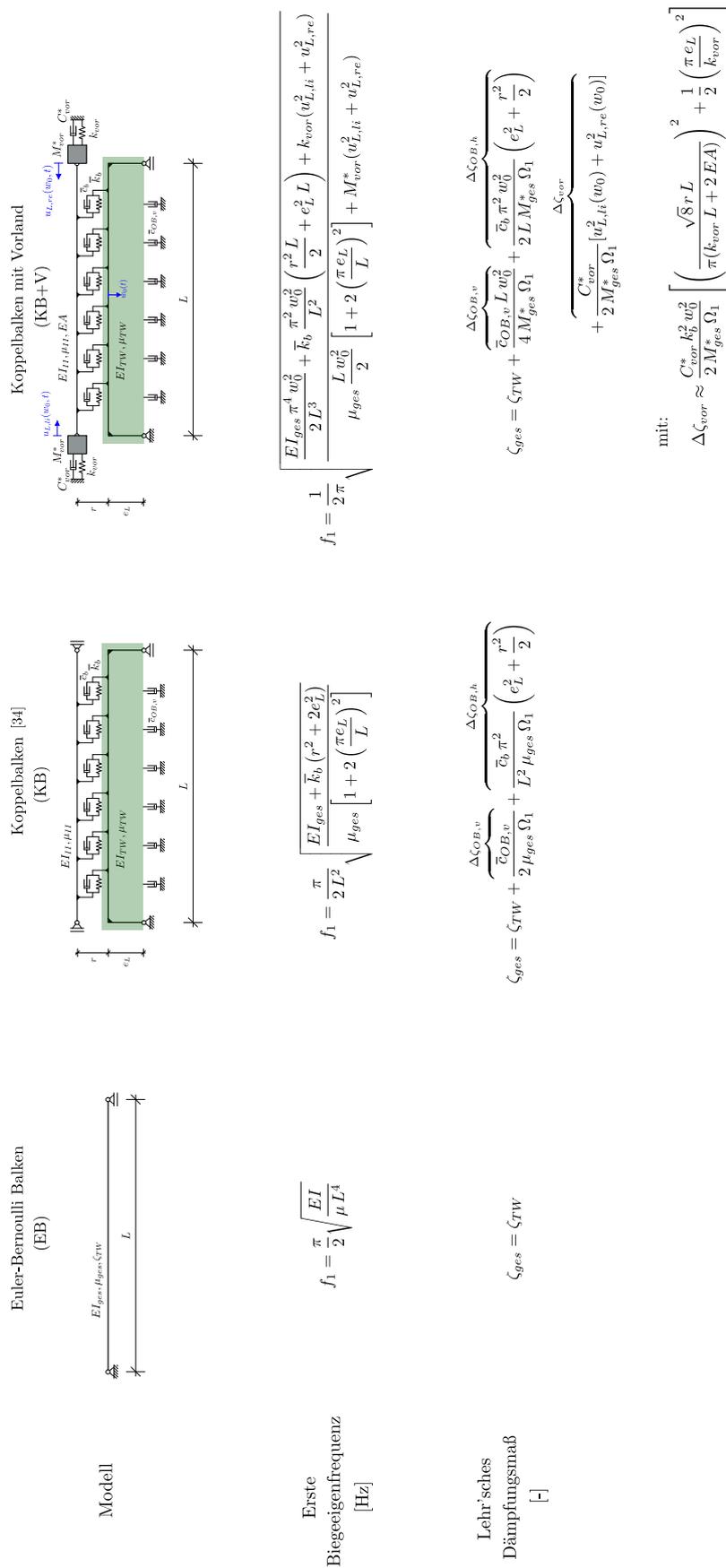


Abb. 6.2: Übersicht der Modelle und Ansätze zur Ermittlung der Biegeeigenfrequenz f_1 und des Lehr'schen Dämpfungsmaßes ζ_{ges}

Literatur

- [1] *Betonschwellen Feste Fahrbahn Fertigteiltragplatten Komponenten*. Deutsch. Berlin: Deutsche Bahn AG Beschaffung Infrastruktur, 2017.
- [2] L. Bettinelli. „Einfluss des Triebwagens auf die dynamische Tragwerksantwort von einfeldrigen Eisenbahnbrücken bei Hochgeschwindigkeitsverkehr“. Diplomarbeit. Wien: TU Wien, 2018. DOI: 10.34726/hss.2018.61228.
- [3] H. Bigelow, M. Feldmann, B. Hoffmeister und V. Zabel. „Zur Einspannwirkung von Eisenbahngleisen. Die Auswirkung auf die erste Biegeeigenfrequenz bei Einfeldträgerbrücken“. In: *Bautechnik* 93 (2016), S. 462–469. DOI: 10.1002/bate.201600006.
- [4] H. Bigelow, M. Feldmann, B. Hoffmeister und V. Zabel. „Zur Einspannwirkung von Eisenbahngleisen. Teil 2: Nichtlineare Federcharakteristiken“. In: *Bautechnik* 97 (2020), S. 74–84. DOI: 10.1002/bate.201900063.
- [5] C. M. Bishop. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. ISBN: 978-1-4939-3843-8.
- [6] G. Brandstetter. „Analyse einfacher Tragwerksmodelle zur dynamischen Berechnung von Eisenbahnbrücken mit Schwerpunkt Schotteroberbau“. Dissertation. Wien: TU Wien, 2018. DOI: 10.34726/hss.2018.60162.
- [7] A. K. Chopra. *Dynamics of Structures*. 4. Berkeley: Pearson, 2012. ISBN: 978-0-13-285803-8.
- [8] D. Cline. *Variational Principles in Classical Mechanics*. Rochester, NY: University of Rochester River Campus Libraries, 2017. ISBN: 978-0-9988372-4-6.
- [9] *D-214/RP9 Eisenbahnbrücken für Geschwindigkeiten > 200 km/h*. Deutsch. European Rail Research Institute, Sachverständigenausschuss D214, 1999.
- [10] D. Dinkler. *Grundlager der Baustatik*. 3., aktualisierte Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014. ISBN: 978-3-658-05172-3.
- [11] K. Hackl. „Entwicklung und Anwendung einer Versuchsanlage zur Untersuchung der dynamischen Eigenschaften des Schotteroberbaues auf Eisenbahnbrücken“. Dissertation. Wien: TU Wien, 2017. DOI: 10.34726/hss.2017.50541.
- [12] K. Hackl. „Entwicklung von Rechenmodellen zur Beschreibung der dynamischen Eigenschaften des Schotteroberbaues bei Eisenbahnbrücken“. Diplomarbeit. Wien: TU Wien, 2012.
- [13] C. Hellmich. *Skriptum zur Vorlesung aus Festigkeitslehre*. Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen der Technischen Universität Wien, 2020.
- [14] C. Hellmich. *Skriptum zur Vorlesung und Übung aus Ingenieurmechanik. Teil B - Übungsteil*. Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen der Technischen Universität Wien, 2021.
- [15] *Herstellung und Lieferung von Oberbauschotter der Körnung I und II sowie Gemühle*. Deutsch. ÖBB Infrastruktur AG, Juni 2020.
- [16] J. Kirchhofer. „Beitrag zur vertiefenden Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau“. Dissertation. Wien: TU Wien, 2012.

- [17] E. Klotzinger. „Der Oberbauschotter (Teil 1: Anforderungen und Beanspruchung“. In: *ETR - Eisenbahntechnische Rundschau Ausgabe 01-02/2008* - (2008), S. 34.
- [18] E. Kommission. *Strategie für nachhaltige und intelligente Mobilität: Den Verkehr in Europa auf Zukunftskurs bringen*. 2020. URL: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/TXT/HTML/?uri=CELEX:52020DC0789&from=ES> (Zugriff am 11.05.2023).
- [19] C. Kuttelwascher und M. Zuzic. „Oberbauschotter - Kompendium für Österreich“. In: *EIK - Eisenbahn Ingenieur Kalender 2013: Jahrbuch für Schienenverkehr Technik* - (2012), S. 100–126.
- [20] W. Lohse, J. Laumann und W. Christian. *Stahlbau 1*. 25., überarb. und akt. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2016. ISBN: 978-3-8348-2058-7.
- [21] R. Menius und V. Matthews. *Bahnbau und Bahninfrastruktur*. 9., überarbeitete und aktualisierte Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2017. ISBN: 978-3-658-17177-3.
- [22] *ÖNORM B 4008-2:2019: Bewertung der Tragfähigkeit bestehender Tragwerke. Teil 2: Brückenbau*. Deutsch. Wien: Austrian Standards Institute, Nov. 2019.
- [23] *ÖNORM EN 13450:2014: Gesteinskörnungen für Gleisschotter*. Deutsch. Wien: Austrian Standards Institute, Feb. 2014.
- [24] *ÖNORM EN 1990/A1:2013: Grundlager der Tragwerksplanung. Änderung 1: Anwendung bei Brücken*. Deutsch. Wien: Austrian Standards Institute, März 2013.
- [25] *ÖNORM EN 1991-1:2011: Einwirkungen auf Tragwerke. Teil 1-1: Allgemeine Einwirkungen - Wichten, Eigengewicht und Nutzlasten im Hochbau*. Deutsch. Wien: Austrian Standards Institute, Sep. 2011.
- [26] *ÖNORM EN 1991-2:2012: Einwirkungen auf Tragwerke. Teil 2: Verkehrslasten auf Brücken*. Deutsch. Wien: Austrian Standards Institute, März 2012.
- [27] C. Petersen und H. Werkle. *Dynamik der Baukonstruktionen*. 2., überarbeitete und aktualisierte Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2018. ISBN: 978-3-8348-2109-6.
- [28] *Planungsgrundsätze für Eisenbahnbrücken*. Deutsch. ÖBB Infrastruktur AG, Dez. 2018.
- [29] C. Provenzano. *Metodo delle forze per la soluzione di strutture iperstatiche*. 2010. URL: http://design.rootiers.it/strutture/sites/default/files/users/GinevraSalerno/SdC%28b%29_%28LM_PA%29/2012/I1%20metodo%20delle%20forze.pdf (Zugriff am 29.05.2023).
- [30] *Richtlinie für die dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken*. Deutsch. ÖBB Infrastruktur AG, Feb. 2011.
- [31] M. Schrapp. *Theoretische Mechanik: Lagrange Formalismus*. 2010. URL: https://www.ph.tum.de/academics/bsc/break/2010s/fk_PH0005_02_course.pdf (Zugriff am 01.05.2023).
- [32] A. Stollwitzer. „Entwicklung eines Ansatzes zur rechnerischen Bestimmung der Dämpfung von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau“. Dissertation. Wien: TU Wien, 2021. DOI: 10.34726/hss.2021.92244.
- [33] A. Stollwitzer, L. Bettinelli und J. Fink. „The longitudinal track-bridge interaction of ballasted track in railway bridges: Experimental determination of the dynamic stiffness and damping characteristics“. In: *Engineering Structures* 274 (2022), S. 1–20. DOI: 10.1016/bate.2022115115.

- [34] A. Stollwitzer und J. Fink. „Die rechnerische Bestimmung der Dämpfung von Stahl-Eisenbahnbrücken - Teil 1: Theorie“. In: *Stahlbau* 90 (2021), S. 305–315. DOI: 10.1002/bate.202100009.
- [35] A. Stollwitzer und J. Fink. „Die rechnerische Bestimmung der Dämpfung von Stahl-Eisenbahnbrücken - Teil 2: Verifizierung anhand von Bestandsbrücken“. In: *Stahlbau* 90 (2021), S. 449–462. DOI: 10.1002/bate.202100013.
- [36] A. Stollwitzer und J. Fink. *Dynamische Durchschubversuche des Gleisrost-Schotteroberbausystems zur Analyse der Gleis-Tragwerk-Interaktion*. Institut für Tragkonstruktionen der Technischen Universität Wien/Forschungsbereich Stahlbau, 2021.
- [37] J. Wandinger. *Elastodynamik 1: Dämpfungsmodelle*. 2007. URL: https://wandinger.userweb.mwn.de/LA_Elastodynamik_1/v3_4.pdf (Zugriff am 01.05.2023).

Abbildungsverzeichnis

1.1	Stoßartig belastete Feder (Quelle: [27], S. 1177, Abb.20.1)	14
1.2	Lastmodell 71 für Regelverkehr auf Hauptstrecken [26, S. 66]	15
1.3	Resonanzfall: Zugüberfahrt auf einer Einfeldträgerbrücke mit $L \approx L_{\text{üp}}$ (Quelle: [27], S. 1187, Abb.20.13, überarbeitet)	16
1.4	Zugüberfahrt ICE 3 auf einer Einfeldträgerbrücke mit $L = 16,1$ m, $EI = 7,03 \cdot 10^9$ Nm ² , $\mu = 6967$ kg/m, als einfach gelagerter Euler-Bernoulli-Balken modelliert	18
2.1	Kurbelviereck (Quelle: [12], S. 5, Abb. 2.1, überarbeitet)	21
2.2	Großversuchsanlage nach <i>Hackl</i> (Quelle: [35], S. 23, Abb. 2.1)	22
2.3	Funktionsprinzip eines Unwucherregers	23
2.4	Längsschnitt der Großversuchsanlage nach <i>Hackl/Stollwitzer</i> zur Erforschung der horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion (Quelle: [33], S. 4, Fig. 6)	24
2.5	Modellbildung der horizontalen Gleis-Tragwerk Interaktion (Quelle: [33], S. 2, Fig. 1)	24
2.6	Definition Durchschubwiderstand und Längsverschiebewiderstand des Schotters	25
a	Längsverschiebewiderstand: Kraft-Verschiebungsdiagramm des Gleis-/Tragwerkssystems	25
b	gemessene Schotterfedersteifigkeit: \bar{k}_b in Abhängigkeit der horizontalen Verschiebung u	25
2.7	Schotterfedersteifigkeit \bar{k}_b in Abhängigkeit der horizontalen Relativverschiebung zwischen Gleisrost und Tragwerk	26
a	Bezogene Schotterfedersteifigkeit \bar{k}_b nach Gl. 2.2	26
b	Vergleich verschiedener Ansätze für den Längsverschiebewiderstand \bar{k}_b	26
2.8	Feder-Dämpfer-Elemente zur Beschreibung der drei Dissipationsmechanismen (Quelle [32], S. 50, Abb.5.1)	27
2.9	Anhand von Messdaten ermittelte Dämpfungskennwerte in Funktion der Grundfrequenz f_1 (Quelle: [34], S.308, Bild 4)	27
a	vertikaler Dämpfungskennwert $\bar{c}_{OB,v}$	27
b	horizontaler Dämpfungskennwert \bar{c}_b	27
3.1	Euler-Bernoulli-Balken	30
3.2	Koppelbalken, seitlich fest gelagert	30
3.3	Gleitfläche (in rot markiert) bei horizontalen Relativverschiebungen zwischen Tragwerk und Gleisrost	31
3.4	Definition der Horizontalverschiebungsanteile u_A und u_S in der verformten Lage	32
3.5	Visualisierung der Funktion der relativen Horizontalverschiebungen $u(x, t)$ im Orts- und Zeitbereich	33
3.6	Schienenanzugsvorrichtung (SAZ) im Grundriss [21, S. 182]	35
3.7	Überführung des Systems Brücke inkl. Vorland in einen elastisch gelagerten Koppelbalken	35
a	Einfeldrige Eisenbahnbrücke mit Schotteroberbau und Vorland	35
b	Statisches System	35

3.8	Verformte Lage bei eingepprägter Durchbiegung w_0	36
3.9	Statisches System (Quelle: [29], S. 18, Fig.1.27, überarbeitet)	36
3.10	Statisch bestimmtes Grundsystem: Entfernung des Starrstabs (Quelle: [29], S. 19, Fig.1.29, überarbeitet)	37
3.11	Momentenlinie und Auflagerreaktionen (Quelle [29], S. 20, Fig.1.31, überarbeitet)	38
3.12	Isolierung des fest gelagerten Oberbaustabes und Belastungsfunktion $p(x)$	39
3.13	Kraftgrößenverfahren mit Entfernung der Feder am rechten Stabende: statisch bestimmtes Grundsystem (Zustand 0) und virtuelles System (Zustand 1) mit zugehörigen Normalkraftverläufen	42
3.14	Iterationsverfahren zur Ermittlung der linken Auflagerverschiebung $u_{L,i}$	45
3.15	Beispielverlauf der Iteration einer Auflagerverschiebung u_L (links) und Beweis der konstanten Zuwachsrate (rechts)	46
3.16	Modellbildung des Vorlandbereichs	47
a	Vorlandbereich	47
b	Statisches System des Vorlandbereichs	47
3.17	Ritz'scher Ansatz: Eigenschwingungsform des Vorlandsystems	48
3.18	Vorlandsystem mit 5 Federelementen. Statisch bestimmtes Grundsystem Variante A (<i>Bigelow et al.</i> [3]) und Variante B	51
3.19	Exemplarische Definition der Ersatzfeder für ein Vorlandsystem mit $n = 5$ und linearem Längsverschiebewiderstand	52
3.20	Vorlandsteifigkeit k_{vor} in Abhängigkeit der berücksichtigten Vorlandlänge L_{vor}	55
3.21	Überführung des Gesamtsystems, Brücke samt Vorlandbereichen, in ein Masse-Feder-System mit Freiheitsgrad w_0 , Masse M^* und Steifigkeit K^*	56
3.22	Modellbildung einer Eisenbahnbrücke: Euler-Bernoulli Balken (EB), Koppelbalken (KB) und Gesamtsystem (KB+V)	60
3.23	Biegeeigenfrequenz f_1 aus Messungen (ASZ/KSA) und Rechenmodellen (Euler-Bernoulli Balken, Koppelbalken, Koppelbalken + Vorland) unter Zugrundelegung verschiedener Schotterdichten ρ_b	65
a	$\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$	65
b	$\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$	65
c	$\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$	65
3.24	Abweichung der Biegeeigenfrequenz f_1 aus Messungen (ASZ/KSA) und Rechenmodellen (Euler-Bernoulli Balken, Koppelbalken, Koppelbalken + Vorland) unter Zugrundelegung verschiedener Schotterdichten ρ_b - Teil 1	66
a	$\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$ - Anregungsmethode: ASZ	66
b	$\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$ - Anregungsmethode: KSA	66
c	$\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$ - Anregungsmethode: ASZ	66
3.25	Abweichung der Biegeeigenfrequenz f_1 aus Messungen (ASZ/KSA) und Rechenmodellen (Euler-Bernoulli Balken, Koppelbalken, Koppelbalken + Vorland) unter Zugrundelegung verschiedener Schotterdichten ρ_b - Teil 2	67
a	$\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$ - Anregungsmethode: KSA	67
b	$\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$ - Anregungsmethode: ASZ	67
c	$\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$ - Anregungsmethode: KSA	67
4.1	Kraftgrößenverfahren für das Vorlandsystem: Nachgiebigkeiten δ_{ii} und δ_{ij} bei nichtlinearer Federsteifigkeiten	69
4.2	Nichtlineare Vorlandsteifigkeit k_{vor} in Funktion der rechnerisch berücksichtigten Vorlandlänge L_{vor} für ausgewählte Schienenkräfte (MATLAB-script <code>vorlang.m</code> , im Anhang) und Vorlandsteifigkeit mit linearem Längsverschiebewiderstand	71

4.3	Anpassung der Vorlandlänge L_{vor} im Ritz'schen Ansatz unter Berücksichtigung der Längsverschiebungsverläufe aus dem Kraftgrößenverfahren für $F_L = 20$ und $F_L = 100$ kN	72
4.4	Korrekturfaktor κ_V zur Berücksichtigung der Nichtlinearität der Schottersteifigkeit für das Vorlandmodell in Funktion der Schienenkraft am Auflager F_L	73
4.5	Korrekturfaktor κ_B zur Berücksichtigung der Nichtlinearität der Schottersteifigkeit im Brückenbereich als Funktion der Schwerlinienabstand r und des Durchbiegung-Stützlänge-Verhältnisses w_0/L für eine Auflagerexzentrizität von $e_L = 100$ cm . .	76
4.6	Biegeeigenfrequenz f_1 : Vergleich Messungen (ASZ/KSA), Rechenmodell mit linearer und nichtlinearer Schottersteifigkeit (Schotterdichte $\rho_b = 1700$ kg/m ³)	80
	a Anregungsmethode: Ausschwingungsverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)	80
	b Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)	80
4.7	Biegeeigenfrequenz f_1 : Prozentuelle Abweichung Messungen (ASZ/KSA) / Rechenmodell mit linearer und nichtlinearer Schottersteifigkeit (Schotterdichte $\rho_b = 1700$ kg/m ³)	81
	a Anregungsmethode: Ausschwingungsverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)	81
	b Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)	81
4.8	Übersicht der MATLAB-scripts im Brücken- und Vorlandbereich	82
4.9	Flussdiagramm zur Bestimmung der Vorlandsteifigkeit k_{vor}	83
4.10	Visualisierung der Verläufe bei der Ermittlung der Auflagerkräfte eines Koppelbalkens am Beispiel des 0-ten Iterationsschritts für Tragwerk 6 mit <code>logstep.m</code>	84
	a Horizontale Relativverschiebung $u(x)$ zwischen Tragwerk und Gleisrost und nichtlinearer Schotterfedersteifigkeit $k(x)$ über die Brückenlänge x	84
	b Horizontale Belastungsfunktion $p(x)$ auf den Oberbaustab aufgrund des Schubverbunds zwischen Oberbau und Tragwerk bei eingprägter Durchbiegung in Feldmitte w_0	84
	c Normalkraftlinie am statisch bestimmten Grundsystem (System 0: einfach gelagerter Oberbaustab unter äußerer Belastung $p(x)$) im Rahmen des Kraftgrößenverfahrens N_0	84
	d Normalkraftlinie des nachgiebig gelagerten Oberbaubalkens	84
4.11	Iterationsroutine der Auflagerkraft $F_{L,li}$ und der Vorlandsteifigkeit k_{vor}	85
4.12	Auswertung der linken Auflagerkraft $F_{L,li}$ und der Vorlandsteifigkeit k_{vor} für Tragwerk 1 bis 13 aus Tabelle 3.1 in Abhängigkeit der vorhandenen Durchbiegung w_0	87
4.13	Statisches ebenes FE-Modell	88
4.14	Ergebnisse des FE-Modells in RSTAB Dlubal. Beispiel TW6 aus Tabelle 3.1	89
	a Belastung und Verschiebungszustand	89
	b Normalkraftlinie und Auflagerkräfte	89
	c Federkräfte in der horizontalen Kopplung zwischen Schienen und Tragwerk	89
4.15	Definition der Federcharakteristik k_b der diskreten Kopplung in RSTAB gemäß Gleichung (4.42)	90
4.16	Vergleich des $F_{L,li} - w_0$ -Verlaufs mittels FE-Modells (RStab) und MATLAB-Programms	90
5.1	Einmassenschwinger für den Vorlandbereich	95
5.2	Abminderung der Vorlandlänge L_{vor}	95
5.3	Ansatzfunktion der von der Brückenschwingung hervorgerufenen Horizontalverschiebung $u(x, t)$ im Vorlandbereich	96

5.4	Modell zur Ermittlung der Dämpfungskonstante zufolge horizontaler Relativverschiebung zwischen Gleisrost und Tragwerk bzw. Untergrund	98
5.5	Ersatzsystem für den Tragwerkteil: kinetisch und steifigkeitsäquivalenter Einmassenschwinger zur Erfassung der im Tragwerk dissipierten Energie $E_{d,TW}$	100
5.6	Ersatzsystem zur Erfassung der dissipierten Energie $E_{d,OB,v}$ zufolge vertikaler Absolut- und Relativverschiebung des Oberbaus	101
5.7	Ersatzsystem zur Erfassung der dissipierten Energie $E_{d,OB,h}$ und $E_{d,vor}$ zufolge horizontaler Relativverschiebung zwischen Tragwerk und Gleisrost des Oberbaus jeweils im Brücken- und Vorlandbereich	102
5.8	Maximale zulässige vertikale Verformung δ für Eisenbahnbrücken mit 3 oder mehr aufeinander folgenden Einfeldträgern entsprechend einer zulässigen vertikalen Beschleunigung von $b_v = 1 \text{ m/s}^2$ in einem Wagen für die Geschwindigkeiten V [km/h] [24, Bild A.2.3]	107
5.9	Vergleich der Dämpfungsmaße ζ Rechnung (linear) / Messung / Norm - Teil 1	110
a	$\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Ausschwingverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)	110
b	$\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)	110
c	$\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Ausschwingverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)	110
5.10	Vergleich der Dämpfungsmaße ζ Rechnung (linear) / Messung / Norm - Teil 2	111
a	$\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)	111
b	$\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Ausschwingverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)	111
c	$\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)	111
5.11	Vergleich der Dämpfungsmaße ζ lineare / nichtlineare Berechnung / Messung $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$	114
a	Anregungsmethode: Ausschwingverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)	114
b	Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)	114
5.12	Abweichung Δ des Dämpfungsmaßes ζ_{ges} lineare und nichtlineare Berechnung / Messung (Schotterdichte $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$)	115
a	Anregungsmethode: Ausschwingverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)	115
b	Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)	115
6.1	Auflagerverschiebung $u_{L,li}$ und Einfluss der Vorlandfeder (Kennwert: k_{vor})	117
6.2	Übersicht der Modelle und Ansätze zur Ermittlung der Biegeeigenfrequenz f_1 und des Lehr'schen Dämpfungsmaßes ζ_{ges}	119

Tabellenverzeichnis

1.1	Bei der Bemessung anzuwendende Dämpfungskennwerte nach EN 1991-2 [25, Tab. 6.6]	17
3.1	Tragwerksdaten und identifizierte Biegeeigenfrequenzen [35, Tab.452]	61
3.2	Vergleich Messung und Rechnung für die erste Biegeeigenfrequenz f_1 unter Verwendung des Euler-Bernoulli Balkens (EB), Koppelbalkens (KB) und Gesamtsystems (KB+V) mit einer Schotterdichte von $\rho_{b,1} = 1400 \text{ kg/m}^3$	62
3.3	Vergleich Messung und Rechnung für die erste Biegeeigenfrequenz f_1 unter Verwendung des Euler-Bernoulli Balkens (EB), Koppelbalkens (KB) und Gesamtsystems (KB+V) mit einer Schotterdichte von $\rho_{b,1} = 1550 \text{ kg/m}^3$	63
3.4	Vergleich Messung und Rechnung für die erste Biegeeigenfrequenz f_1 unter Verwendung des Euler-Bernoulli Balkens (EB), Koppelbalkens (KB) und Gesamtsystems (KB+V) mit einer Schotterdichte von $\rho_{b,1} = 1700 \text{ kg/m}^3$	63
4.1	Vergleich Biegeeigenfrequenz f_1 : lineare und nichtlineare Rechnung / Messung (Schotterdichte $\rho_b = 1700 \text{ kg/m}^3$)	79
5.1	Bandbreite der identifizierten Dämpfungsparameter [35, Tab.2]	105
5.2	Rechnerisch angesetzte Tragwerksdämpfung [35, Tab.4]	106
5.3	Vergleich der Dämpfungswerte ζ Rechnung (linear) / Messung / Norm - Teil 1	109
a	$\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Ausschwingverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)	109
b	$\rho_b = 1400 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Krafterregte Schwingungsanregung (KSA)	109
c	$\rho_b = 1550 \text{ kg/m}^3$, Anregungsmethode: Ausschwingverhalten nach Zugüberfahrt (ASZ)	109
5.4	Vergleich der Dämpfungswerte Rechnung (linear und nichtlinear) / Messung	112

Anhang A

MATLAB Programm

Program Code A.1: vorstep.m

```
1 function [k,kvor] = vorstep(k,F)
2 %-----
3 %Die Funktion führt ein Iterationsschritt zur Bestimmung des
4 % nichtlinearen Verlaufs der Federsteifigkeiten im
5 % Vorlandbereich und daraus eine Ersatzsteifigkeit des
6 %Vorlands kvor
7 %
8 %Input:      k ... Federsteifigkeit in kN/mm jeder Feder in
9 %            Abstand d als Spaltenvektor (1:m,1) bei
10 %           fehlenden Angaben (=1.Iterationsschritt),
11 %           konstante Steifigkeit über die ges.
12 %           Vorlandlänge eingeben.
13 %           F ... Zugkraft am Auflager in kN zufolge
14 %           Brückendurchbiegung
15 %Output:    k ... Verlauf der Federsteifigkeiten vom
16 %           Auflager weg in kN/mm als Spaltenvektor
17 %           (1:m,1)
18 %           kvor ... Ersatzsteifigkeit einer idealisierten
19 %           Vorlandfeder in kN/mm
20 %-----
21
22 EA = 3220e03; %[kN]
23 d = 600; %Schwellenabstand [mm]
24 m = 150; %Anzahl Feder
25
26 %Absolutwert, falls F negativ eingegeben
27 F = abs(F);
28
29 n = m-1;
30
31 %Nachgiebigkeiten [mm]
32 %initialisiere dij
33 dij = zeros(n,n);
34 for i = 1: m-1
35 for j = 1:(m-1)
36 %füllt die Einträge ausserhalb der Diagonalen
```

```

37 dij(i,j) = min(i,j)*d/EA+1/k(1);
38 end
39 %füllt die Einträge innerhalb der Diagonalen
40 dij(i,i) = i*d/EA+1/k(1)+1/k(i+1);
41 end
42
43 for i = 1:n
44 di0(i,1) = -F/k(1);
45 end
46
47 %virtuelle Kräfte
48 x = -dij\di0;
49
50 %Normalkraftverlauf
51 %Ergänzung des Kraftvektors mit x1
52 x = [F-sum(x),x']';
53 for i = 1:m
54 Nres(i) = F-sum(x(1:i));
55 end
56
57 %Verschiebung am Übergang Brücke-Vorland
58 uA = x(1)/k(1)+F*d/EA/2; %[mm]
59 %Dämmlänge
60 Lvor = d * m/1000;
61
62 %Ersatzsteifigkeit des Vorlands
63 kvor = F/uA;
64
65 a = sum(x);
66
67 %Verlauf der Verschiebungen vom Auflager weg für jede Feder
68 for i = 1:m
69 di(i) = x(i)/k(i); %[mm]
70 end
71
72 %Neuer Steifigkeitsverlauf (nichtlinear) in Abhängigkeit der
73 %Verschiebungen
74 k = (-3.713 * log(di')+9.7)*d/1000; %[kN/mm]
75
76 %Spaltenvektor di (Verschiebungsverlauf)
77 di = di';
78 end

```

Program Code A.2: vorsteif.m

```

1 function [kvor] = vorsteif(F)
2 %-----

```

```

3 %Funktion zur Ermittlung der Vorlandsteifigkeit der
4 %Ersatzfeder vom Vorland mittels Iteration
5 %
6 %input:      F      ... Zugkraft am Auflager in kN/mm
7 %output:     kvor   ... Ersatzsteifigkeit des Vorland-
8 %              -feders in kN/mm
9 %-----
10
11 %Anzahl der Feder
12 m = 150;
13 %Initialwert für Steifigkeit der einzelnen Federn
14 k(1:m,1) = 6; %kN/mm
15
16 %Iteration
17 [k,kvor] = vorstep(k,F);
18 [k,kvor] = vorstep(k,F);
19 [k,kvor] = vorstep(k,F);
20 [k,kvor] = vorstep(k,F);
21 [k,kvor] = vorstep(k,F);
22 [k,kvor] = vorstep(k,F);
23 [k,kvor] = vorstep(k,F);
24 [k,kvor] = vorstep(k,F);
25 [k,kvor] = vorstep(k,F);
26 end

```

Program Code A.3: logstep.m

```

1  function [FLli,FLre,uLli,uLre,eLn] = logstep(kvor,L,r,eL,
2      eL0,w0)
3      %%-----
4      %Funktion führt ein Iterationsschritt zur Ermittlung der
5      %Auflagerkräfte/Verschiebungen des horizontal elastisch-
6      %gelagerten Koppelbalkensystems
7      %Input:  kvor   ... Ersatzsteifigkeit der Vorlandfeder
8              in
9              kN/mm
10             L     ... Feldlänge in m
11             r     ... Schwerlinienabstand TWK / Oberbau
12                  (Schiene+Schwelle+Schotter) in m
13             eL    ... Auflagerexzentrizität in m
14             w0    ... max. Durchbiegung in Feldmitte in m
15 %Output:  F_re   ... horizontale Auflagerkraft, rechts
16              in m
17             u_re  ... horizontale Auflagerverschiebung,
18                  rechts in m

```

```

18      %          F_li    ...   horizontale Auflagerkraft, links in
      m
19      %          u_li    ...   horizontale Auflagerverschiebung,
20      %                               links in m
21      %          e_Ln    ...   neue Auflagerxzentrität (Iteration
22      %                               i+1) in m
23      %-----
24
25
26      %% definiert Belastungsfunktion auf Oberbaustab
27      syms x
28      %Verlauf der Horizontalverschiebung des Tragwerks ufun
29      %und der Schotterschubsteifigkeit kbfun
30      ufun = @(x) w0 *pi/L * (eL + r * cos(pi*x/L)) ; %m
31      kbfun = @(x) -3.57 * log( abs(w0*1000 *pi/L * (eL + r *
      cos(pi*x/L))))+9.61; %u in mm! %kbfun[kN/mm/lfm]
32
33      %Verlauf des Horizontalschubs
34      ukbfun = @(x) (ufun(x)) .* kbfun(x)*1e06; %[N/lfm]
35      ukbfun_sym = w0 *pi/L * (eL + r * cos(pi*x/L)) .*(-3.57 *
      log( abs(w0*1000 *pi/L * (eL + r * cos(pi*x/L))))
      +9.61) .*1e06; %für symbolische Funktion bzw.
      indefinite Integration
36
37      %Dehnsteifigkeit Schienen
38      EA = 3220e06; %[N]
39
40      %rechnet kvor in N/mm um
41      kvor = kvor * 1000000; %[N/m]
42
43      %% Kraftgrößenverfahren
44
45      %Bestimmung der N0 Linie
46      N0intnum = integral(ukbfun,0,L);
47      N0_sym = N0intnum - int(ukbfun_sym,x); %N0 symbolic -
48      %Grund: algebraische Integration der Belast. ukbfun_sym
49
50      %Rücktransformation symbolic -> function handle
51      N0 = matlabFunction(N0_sym);
52
53      %Bestimmung N1 Linie
54      N1 = @(x) -1;
55      N1_sym = -1;
56
57      %Numerische Integration, Formulierung PvK:
58      %virtuelle Arbeit der inneren Kräfte
59      %Anzahl dx und Unterteilung der Stablänge in n-Elemente
60      n = 1000;
61      xval = linspace(0,L,n);

```

```

62
63 %Nachgiebigkeit d10
64 %Integrand Normalkraft * Verzerrung
65 d10ig = @(x) N0(x) .* N1(x) ./ EA;
66 %fischt Funktionswert an jeden dx heraus
67 G = arrayfun(d10ig,xval);
68 %rechnet die Fläche Funktionswert*dx
69 rechtecke0 = L/n * G;
70 %integriert über alle dx
71 d10_fest = sum(rechtecke0);
72 d10 = -d10_fest + N0(0)/kvor;
73
74 %Nachgiebigkeit d11
75 d11ig = @(x) N1(x) .* N1(x) ./ EA;
76 D = arrayfun(d11ig,xval);
77 rechtecke1 = L/n * D;
78 d11_fest = sum(rechtecke1);
79 d11 = d11_fest - N1(0)/kvor;
80
81 %ermittelt die unbekannte Normalkraft = Auflagerkraft
82 FLre = -d10/(d11+1/kvor); %N
83 FLli = FLre + N0(0); %N
84 %ermittelt die rechte Auflagerverschiebung
85 uLre = FLre / kvor; %m
86 uLli = FLli / kvor; %m
87 eLn = eL0 - uLli*L/w0/pi; %m
88 end

```

Program Code A.4: logelast.m

```

1 function [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0)
2 %
3 -----
4 %Funktion zur Iteration der Auflagerreaktionen/
5   Verschiebung
6 %des horizontal nachgiebig gelagerten Koppelbalkenmodells
7 %
8 %Input:  kvor    ...   Ersatzsteifigkeit der Vorlandfeder
9         in
10         kN/mm
11         L      ...   Feldlänge in m
12         r      ...   Schwerlinienabstand TWK / Oberbau
13         (Schiene+Schwelle+Schotter) in m
14         eL     ...   Auflagerexzentrizität in m
15         w0     ...   max. Durchbiegung in Feldmitte in m
16 %Output: F_re   ...   horizontale Auflagerkraft, rechts

```

```

14 %           in m
15 %       u_re ... horizontale Auflagerverschiebung,
16 %           rechts in m
17 %       F_li ... horizontale Auflagerkraft, links in
18 %           m
19 %       u_li ... horizontale Auflagerverschiebung,
20 %           links in m
21
22 [FLli0,FLre0,uLli0,uLre0,eLn1] = logstep(kvor,L,r,eL,eL,
23     w0);
24 [FLli1,FLre1,uLli1,uLre1,eLn2] = logstep(kvor,L,r,eLn1,eL
25     ,w0);
26 FLli = FLli0/(1-(FLli1-FLli0)/FLli0);
27 FLre = FLre0/(1-(FLre1-FLre0)/FLre0);
28 uLli = uLli0/(1-(uLli1-uLli0)/uLli0);
29 uLre = uLre0/(1-(uLre1-uLre0)/uLre0);
30 end

```

Program Code A.5: sysleft.m

```

1 function [FLli,kvor] = sysleft(L,r,eL,w0)
2 %%-----
3 %Iteration (Abstimmung) der linken Auflagerkraft mit der
4 %Vorlandsteifigkeit im Gesamtsystems Brücke+Vorland mit
5 %5 Iterationsschritten
6 %
7 %Input:  L      ...  Feldlänge in m
8 %       r      ...  Schwerlinienabstand TWK / Oberbau
9 %           (Schiene+Schwelle+Schotter) in m
10 %       eL     ...  Auflagerexzentrizität in m
11 %       w0     ...  max. Durchbiegung in Feldmitte in m
12 %Output: FLli  ...  horizontale Auflagerkraft, links in kN
13 %       kvor   ...  Vorlandsteifigkeit in kN/mm
14 %%-----
15
16 %Initialisiere FLli
17 F = 30; %kN
18
19 [kvor] = vorsteif(F);
20 [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0);
21
22 [kvor] = vorsteif(FLli*0.001);
23 [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0);
24

```

```

25 [kvor] = vorsteif(FLli*0.001);
26 [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0);
27
28 [kvor] = vorsteif(FLli*0.001);
29 [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0);
30
31 [kvor] = vorsteif(FLli*0.001);
32 [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0);
33
34 [kvor] = vorsteif(FLli*0.001);
35 [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0);
36 end

```

Program Code A.6: sysright.m

```

1 function [FLre,kvor] = sysright(L,r,eL,w0)
2 %%-----
3 %Iteration (Abstimmung) der linken Auflagerkraft mit der
4 %Vorlandsteifigkeit im Gesamtsystems Brücke+Vorland mit
5 %5 Iterationsschritten
6 %
7 %Input:  L      ...  Feldlänge in m
8 %        r      ...  Schwerlinienabstand TWK / Oberbau
9 %                (Schiene+Schwelle+Schotter) in m
10 %        eL     ...  Auflagerexzentrizität in m
11 %        w0     ...  max. Durchbiegung in Feldmitte in m
12 %Output: FLre   ...  horizontale Auflagerkraft, rechts in kN
13 %        kvor   ...  Vorlandsteifigkeit in kN/mm
14 %%-----
15
16 %Initialisiere FLre
17 F = 30; %kN
18
19 [kvor] = vorsteif(F);
20 [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0);
21
22 [kvor] = vorsteif(FLre*0.001);
23 [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0);
24
25 [kvor] = vorsteif(FLre*0.001);
26 [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0);
27
28 [kvor] = vorsteif(FLre*0.001);
29 [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0);
30
31 [kvor] = vorsteif(FLre*0.001);
32 [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0);

```

```

33
34 [kvor] = vorsteif(FLre*0.001);
35 [FLli,FLre,uLli,uLre] = logelast(kvor,L,r,eL,w0);
36 end

```

Program Code A.7: vorstepm.m - Erweiterung der Funktion vorstep.m mit der Möglichkeit, die Vorlandlänge (Federanzahl) zu variieren

```

1 function [k,kvor] = vorstepm(k,F,m)
2 %-----
3 %Die Funktion führt ein Iterationsschritt zur Bestimmung des
4 % nichtlinearen Verlaufs der Federsteifigkeiten im
5 % Vorlandbereich und daraus eine Ersatzsteifigkeit des
6 %Vorlands kvor mit variabler Federanzahl m
7 %
8 %Input:      k ... Federsteifigkeit in kN/mm jeder Feder in
9 %            Abstand d als Spaltenvektor (1:m,1) bei
10 %           fehlenden Angaben (=1.Iterationsschritt),
11 %           konstante Steifigkeit über die ges.
12 %           Vorlandlänge eingeben.
13 %           F ... Zugkraft am Auflager in kN zufolge
14 %           Brückendurchbiegung
15 %Output:    k ... Verlauf der Federsteifigkeiten vom
16 %           Auflager weg in kN/mm als Spaltenvektor
17 %           (1:m,1)
18 %           kvor ... Ersatzsteifigkeit einer idealisierten
19 %           Vorlandfeder in kN/mm
20 %           m ... Anzahl der Federelemente (vgl. Lvor)
21 %-----
22
23 EA = 3220e03; %Dehnsteifigkeit der Schienen [kN]
24 d = 600;     %Schwellenabstand [mm]
25
26 %Absolutwert, falls F negativ eingegeben
27 F = abs(F);
28
29 n = m-1;
30
31 %Nachgiebigkeiten [mm]
32 %initialisiere dij
33 dij = zeros(n,n);
34 for i = 1: m-1
35 for j = 1:(m-1)
36 %füllt die Einträge ausserhalb der Diagonalen
37 dij(i,j) = min(i,j)*d/EA+1/k(1);
38 end
39 %füllt die Einträge innerhalb der Diagonalen

```

```

40 dij(i,i) = i*d/EA+1/k(1)+1/k(i+1);
41 end
42
43 for i = 1:n
44 di0(i,1) = -F/k(1);
45 end
46
47 %virtuelle Kräfte
48 x = -dij\di0;
49
50 %Normalkraftverlauf
51 %Ergänzung des Kraftvektors mit x1
52 x = [F-sum(x),x']';
53 for i = 1:m
54 Nres(i) = F-sum(x(1:i));
55 end
56
57 %Verschiebung am Übergang Brücke-Vorland
58 uA = x(1)/k(1)+F*d/EA/2; %[mm]
59 %Dämmlänge
60 Lvor = d * m/1000;
61
62 %Ersatzsteifigkeit des Vorlands
63 kvor = F/uA;
64
65 a = sum(x);
66
67 %Verlauf der Verschiebungen vom Auflager weg für jede Feder
68 for i = 1:m
69 di(i) = x(i)/k(i); %[mm]
70 end
71
72 %Neuer Steifigkeitsverlauf (nichtlinear) in Abhängigkeit
73 %der Verschiebungen
74 k = (-3.713 * log(di')+9.7)*d/1000; %[kN/mm]
75
76 %Spaltenvektor di (Verschiebungsverlauf)
77 di = di';
78 end

```

Program Code A.8: vorsteifm.m - Erweiterung der Funktion vorsteif.m mit der Möglichkeit, die Vorlandlänge (Federanzahl) zu variieren

```

1 function [kvor] = vorsteifm(F,m)
2 %-----
3 %Funktion zur Ermittlung der Vorlandsteifigkeit der
4 %Ersatzfeder vom Vorland mittels Iteration

```

```

5 %
6 %input:      F      ... Zugkraft am Auflager in kN/mm
7 %output:    kvor   ... Ersatzsteifigkeit des
8 %              Vorlandfeders in kN/mm
9 %              m      ... Anzahl der Federelemente
10 %-----
11
12 %Anzahl der Feder
13 %Initialwert für Steifigkeit der einzelnen Federn
14 k(1:m,1) = 6; %[kN/mm]
15
16 %Iteration
17 [k,kvor] = vorstepm(k,F,m);
18 [k,kvor] = vorstepm(k,F,m);
19 [k,kvor] = vorstepm(k,F,m);
20 [k,kvor] = vorstepm(k,F,m);
21 [k,kvor] = vorstepm(k,F,m);
22 [k,kvor] = vorstepm(k,F,m);
23 [k,kvor] = vorstepm(k,F,m);
24 [k,kvor] = vorstepm(k,F,m);
25 [k,kvor] = vorstepm(k,F,m);
26 end

```

Program Code A.9: vorlang.m

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 %-----
6 %MATLAB-script zur Darstellung der nichtlinearen Ersatz-
7 %-federsteifigkeit kvor(F) in Abhängigkeit von der
8 %berücksichtigten Vorlandlänge Lvor
9
10 %% Eingabe
11
12 F = [1 10 20 30]; %[kN] Auflistung gewünschter Kräfte F
13 EA = 3220e06;    %[N] Dehnsteifigkeit der Schiene
14 d = 0.6;        %[m] Schwellenabstand
15 m = 2;          %Initiere Federanzahl (=min. Vorlandlänge)
16 n = 150;        %Max. Federanzahl (=max. Vorlandlänge)
17
18 %% Berechnung - lineares Gleichungssystem
19
20 %Initialisiere kvor-Vektor
21 kvor = zeros(1,numel(F));
22

```

```

23 %Initialisiere Lvor-Vektor
24 Lvor = zeros(1,n);
25
26 %Initialisiere k_Fm
27 k_Fm = zeros(numel(F),n);
28
29
30 %Schleife über alle Dammlängen
31 for ii = 1:n
32 %erstellt eine Kurve pro eingegebene Kraftamplitude
33 for e = 1:numel(F)
34
35 %Verschiebung am Schnitt, Auflagerverschiebung
36 kvor(e) = vorsteifm(F(e),m);
37
38 %Dämm-/ Vorlandlänge
39 Lvor(ii) = d * m;
40
41 e = e + 1;
42 end
43
44 %Ausfüllen einer Matrix k_Fm folgender Form:
45 %[kvor(w0_1) mit m, kvor(w0_1) bei m+1, kvor(w0_1) bei m+2..
46 % kvor(w0_2) mit m, kvor(w0_2) bei m+1, kvor(w0_2) bei m+2..
47 % kvor(w0_3) mit m, kvor(w0_3) bei m+1, kvor(w0_3) bei m+2..]
48
49 for jj = 1:numel(kvor) %Schleife über alle kvor(F)
50 %zum Ausfüllen der ii-ten Spalte der Matrix
51
52 %Ersatzsteifigkeiten für jede F und Lvor
53 k_Fm(jj,ii) = kvor(jj);
54 end
55
56 m = m + 1; %Erhöhung um 1 Feder
57 end
58
59 %% Plot
60 figure
61 plot(Lvor,k_Fm)
62 axis([0 90 0 350])
63 xlabel('$L_{vor}$ [m]', 'Interpreter', 'latex')
64 ylabel('$k_{vor}$ [kN/mm]', 'Interpreter', 'latex')
65 legend('$F_L=1$ [kN]', '$F_L=10$ [kN]', '$F_L=20$ [kN]', '$F_L=30$ [kN]', 'Interpreter', 'latex', 'Location', 'southeast')

```

Program Code A.10: nichtlin-kappa.m

```

1 function [kappaB] = nichtlin_kappa(r,eL,w0dL)
2 %-----
3 %Funktion zur Ermittlung eines Anpassungsfaktors zur
4 %Berücksichtigung der nichtlinearen Schottersteifigkeit im
5 %Brückenbereich (Einfeldträger)
6 %
7 %input:  r    ... Schwerlinienabstand Tragwerk / Schienenrost
8 %         in [mm]
9 %       eL    ... Auflagerexzentrizität in [mm]
10 %       w0dL... w0/L Verhältnis von max. Durchbiegung in
11 %              Feldmitte und Tragwerkslänge [-]
12 %output: kappaB    ... Anpassungsfaktor [-]
13 %-----
14 %% definiert Belastungsfunktion auf Oberbaustab
15 syms x
16 %Verlauf der Horizontalverschiebung des Tragwerks ufun
17 %und der Schotterschubsteifigkeit kbfun
18 ufun = @(x) w0dL * pi * (eL + r * cos(pi*x*w0dL)) ; %mm
19 kbfun = @(x) -3.57 * log( abs(w0dL * pi * (eL + r * cos(pi*x*
    w0dL))))+9.61; %kN/mm/lfm
20
21 %Verlauf des Horizontalschubs
22 ukbfun = @(x) (ufun(x)) .* kbfun(x); %[kN/lfm]
23
24 %% Anpassungsfaktor kappaB
25 %ermittelt zu w0 = 1 mm äquivalente Länge w0/w0dL in mm
26 %zur Integration
27 L = 1/w0dL;
28
29 %Integral des nichtlinearen Horizontalschubs
30 N0intnum = integral(ukbfun,0,L);
31
32 %Eingabe der lineare Schottersteifigkeit nach EC1-2
33 kb = 10; %kN/mm
34
35 %Integral des linearen Horizontalschubs
36 h = integral(ufun,0,L) * kb;
37
38 %ermittelt den Anpassungsfaktor kappaB
39 kappaB = N0intnum/h;
40
41 end

```

Program Code A.11: parameterstudie-nichtlin.m

```

1 clear
2 close all

```

```

3  clc
4  %-----
5  %script zum Plot des dimensionslosen Anpassungsfaktors zur
6  %Berücksichtigung der nichtlinearen Schottersteifigkeit
7  %im Brückenbereich (Einfeldträger):
8  %kb(lin) * kappaB = kb(nichtlin) ...
9  %z.B. 10 kN/mm * kappaB = kb(nichtlin)
10 %-----
11
12 %% Eingabe
13 %fixiert die Auflagerexzentrizität für den Plot
14 eL = 100; %[mm]
15
16 %% Plot
17 %erstellt das Meshgrid mit w0dLax und rax als Achsen
18 % w0dLax    ... Variable w0/L [-] zw. 0.0005 und 0.001
19 % rax       ... Variable r [mm] zw. 700 und 1500 mm
20 [w0dLax,rax] = meshgrid(0.00005:0.00001:0.001,700:50:1500);
21
22 %Füllt eine Matrix der Dimension von w0dLax und rax mit
23 %ausschließlich eL
24 eLax = zeros(height(rax),length(rax));
25 eLax(:) = eL;
26
27 %ermittelt den Anpassungsfaktor für die 2 Laufvariablen
28 %r und w0/L für die vorhandene Auflagerexzentrizität
29 [f1] = arrayfun(@nichtlin_kappa, rax, eLax, w0dLax);
30
31 %plottet die Oberflächen der Funktion für f
32 s = surf(w0dLax, rax, f1);
33 xlabel('$w_0/L$ [-]', 'Interpreter', 'Latex');
34 ylabel('$r$ [mm]', 'Interpreter', 'Latex');
35 zlabel('$\kappa_B$ [-]', 'Interpreter', 'Latex');
36 view([1 -0.5 0.5])

```