

Diplomarbeit

## Dämpfung von Brückentragwerken unter Mehrpunktanregung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grads  
Diplom-Ingenieurin  
eingereicht an der TU Wien, Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwesen

---

Diploma Thesis

## Damping of Bridge Structures under Multiple Support Excitation

Submitted in satisfaction of the requirements for the degree of  
Diplom-Ingenieurin  
of the TU Wien, Faculty of Civil and Environmental Engineering

von

**Maria Kreuzer**

Matr.Nr.: 01046491

Betreuung: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. **Rudolf Heuer**  
Institut für Tragkonstruktionen  
Forschungsbereich Baumechanik und Baudynamik  
Technische Universität Wien,  
Karlsplatz 13/249-01, 1040 Wien, Österreich

Wien, im Juni 2023

---

## Vorwort

An dieser Stelle ist es möglich Danke zu sagen, das möchte ich von Herzen tun. Ich danke meinem Diplomarbeitsbetreuer Prof. Heuer für seine stets freundliche und konstruktive Art der Hilfestellung und seine Geduld während der Erstellung dieser Arbeit. Durch seine Lehrveranstaltungen wurde mir während dem Studium der Bereich der Baudynamik nähergebracht. Ich bin froh, dass ich mich in dieser Arbeit vertieft mit dem Thema befassen durfte.

Dem Büro IBBS ZT-GmbH, das mir ein Projekt für die Diplomarbeit zur Verfügung gestellt hat.

Meinem Partner Marc, dessen Zuversicht und pragmatische Lebenseinstellung mir eine beständige Hilfe waren.

Meinen besten Freundinnen Beate und Derya, die mich seit über 20 Jahren durchs Leben begleiten.

Meiner Mutter Ingrid, für ihre stetige Ermutigung. Und ich danke meinem Vater Max, der zwar schon lange nicht mehr da ist, aber durch den ich seit meiner Kindheit einen schönen Bezug zur TU gewonnen habe – als ich meine „Kunstwerke“ zwischen die Formeln an der Tafel des Instituts für theoretische Physik zeichnen durfte.

Zuletzt möchte ich dem Institut für konstruktiven Ingenieurbau an der BOKU danken, durch dessen Lehre es mir möglich war, meine Leidenschaft für den konstruktiven Ingenieurbau zu entdecken.

Danke für Ihre und Eure Unterstützung!

## Kurzfassung

Die Modellierung und Simulation von Brückentragwerken unter seismischer Mehrpunktanregung, trägt zu einer realitätsnahen Betrachtung des Lastfalls Erdbeben bei. Speziell bei Brücken mit großen Spannweiten sollte diese Vorgehensweise daher zur Anwendung kommen. Um Schwingungen und Auslenkungen von Brückenfeldern in einem akzeptablen Maß zu halten, können passive Dämpfungselemente wie der sogenannte Tuned-Mass-Damper (TMD) adaptiert werden. Diese Arbeit behandelt eine 2-, sowie 5-feldrige Radweg- und Fußgängerbrücke aus Stahlbeton unter seismischer, sowie harmonischer Mehrpunktanregung. Die Formulierung der Mehrpunktanregung basiert auf bekannten Methoden, wobei eine Überführung in ein äquivalentes Problem mit klassischer Kraftanregung stattfindet. Anschließend wird die Wirksamkeit eines TMD für seismische, sowie harmonische Mehrpunktanregung untersucht. Dabei werden zwei unterschiedliche Parametersets des TMD einander gegenübergestellt. Außerdem wird der Einfluss einer reduzierten Strukturdämpfung auf die Auslenkungen der Brückenfelder mit und ohne TMD betrachtet.

## Abstract

The modeling and simulation of bridge structures subjected to multiple support excitation contributes to a realistic emulation of earthquake loading. This procedure should therefore be used especially for bridges with large spans. In order to keep vibration and deflection of the bridge spans within an acceptable range, passive vibration absorbers such as a tuned mass damper (TMD) can be incorporated in the design. This thesis deals with a 2- and 5-span pedestrian and cycle concretebridge subjected to seismic and harmonic multiple support excitation. The formulation of multiple support excitation is based on known methods, whereby a transcription to an equivalent problem with classical force excitation occurs. Afterwards the effectiveness of a TMD for seismic and harmonic multiple support excitation is studied. Two different parameter sets of the TMD are compared to each other. Additionally, the influence of reduced structural damping on the deflections of the bridge spans with and without TMD is considered.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Beiträge . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Basisgrößen . . . . .	3
2.1.1	Kinematik . . . . .	3
2.1.2	Kinetik . . . . .	3
2.1.3	Bewegungsgleichung . . . . .	4
2.2	Dämpfung . . . . .	5
2.2.1	Dissipation von Energie . . . . .	5
2.2.2	Lehr'sches Dämpfungsmaß $\zeta$ . . . . .	6
2.2.3	Tuned-Mass-Damper – TMD . . . . .	7
2.2.3.1	Parameter für harmonische Anregung nach Den Hartog . . . . .	7
2.2.3.2	Parameter für weißes Rauschen . . . . .	8
2.3	Mathematische Methoden . . . . .	9
2.3.1	Modalanalyse . . . . .	9
2.3.2	Newmark- $\beta$ Methode . . . . .	10
2.4	Formulierung von Mehrpunktanregung . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Radweg- und Fußgängerbrücke</b>	<b>13</b>
3.1	Allgemeines System und Geometrie . . . . .	13
3.2	2-Feld-Brückenabschnitte . . . . .	15
3.3	5-Feld-Brückenabschnitt . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Simulation der Brückentragwerke</b>	<b>16</b>
4.1	Brückendiskretisierung . . . . .	16
4.1.1	Massenmatrix . . . . .	17
4.1.2	Steifigkeitsmatrix . . . . .	17
4.1.3	Statische Kondensation . . . . .	19
4.1.4	Modalanalyse mit modaler Dämpfung . . . . .	19
4.2	Mehrpunktanregung der Brückentragwerke . . . . .	20
4.2.1	Erdbebenanregung . . . . .	20

4.2.2	Harmonische Anregung . . . . .	21
4.3	Implementierung Tuned-Mass-Damper . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>24</b>
5.1	2-Feld-Brückentragwerke . . . . .	24
5.1.1	Auslenkung unter seismischer Mehrpunktanregung . . . . .	24
5.1.1.1	Strukturdämpfung $\zeta = 5\%$ . . . . .	24
5.1.1.2	Reduzierte Strukturdämpfung $\zeta = 2\%$ . . . . .	26
5.1.2	Auslenkung unter harmonischer Mehrpunktanregung . . . . .	28
5.1.2.1	Strukturdämpfung $\zeta = 5\%$ . . . . .	28
5.1.2.2	Reduzierte Strukturdämpfung $\zeta = 2\%$ . . . . .	30
5.2	5-Feld-Brückentragwerke . . . . .	32
5.2.1	Auslenkung unter seismischer Mehrpunktanregung . . . . .	32
5.2.1.1	Strukturdämpfung $\zeta = 5\%$ . . . . .	32
5.2.1.2	Reduzierte Strukturdämpfung $\zeta = 2\%$ . . . . .	33
5.2.2	Auslenkung unter harmonischer Mehrpunktanregung . . . . .	38
5.2.2.1	Strukturdämpfung $\zeta = 5\%$ . . . . .	38
5.2.2.2	Reduzierte Strukturdämpfung $\zeta = 2\%$ . . . . .	38
5.3	Vergleich der Wirksamkeiten eines TMD . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>44</b>
<b>A</b>	<b>Matlab Funktionen und Skripte</b>	<b>50</b>
A.1	erdbebenintegration.m . . . . .	50
A.2	newmark.m . . . . .	51
A.3	TMD_DH.m . . . . .	51
A.4	TMD_WR.m . . . . .	52
A.5	brueckensimulation2feld.m . . . . .	52
A.6	brueckensimulation5feld.m . . . . .	56

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Die Anforderungen an die Genauigkeit dynamischer Berechnungen und Analysen im Bauwesen nehmen stetig zu. Zum einen aufgrund der angestrebten Maximierung von Spannweiten, Schlankheiten und Höhen von Bauwerken. Zum anderen sind auch dynamische Einwirkungen gewissen Wandlungen unterworfen, wie etwa maschinen- und fahrzeuginduzierte Schwingungen. Kriterien bezüglich des Schwingungsverhaltens von Bauwerken, sowie Sicherheiten gegenüber extremen Situationen, unter Einbeziehung der Wirtschaftlichkeit sind zu erfassen [2].

Die Bedeutung des Lastfalls Erdbeben variiert regional und nach Art des Bauwerks. Bei schwingungsfähigen Konstruktionen, wie es etwa viele Brücken und Hochhäuser sind, ist die geographisch entsprechende Erdbebenanregung jedenfalls in die Nachweisführung miteinzubeziehen.

Im Zuge der Erdbebenanalyse von Brücken mit großen Spannweiten ist zudem eine Betrachtung unter Mehrpunktanregung sinnvoll. Dabei erreicht die seismische Bodenbeschleunigung die Brückenpfeilerachsen zeitversetzt. Diese Zeitdifferenz im Modell abzubilden, kann eine realitätsnähere Betrachtung ermöglichen und ist mit bekannten Methoden umsetzbar [16, 9].

Seismische Erdbebenanregung kann in horizontale und vertikale Komponenten unterteilt werden, wobei im Hochbau aufgrund großer vertikaler Massen die Anregung in dieser Richtung meist vernachlässigbar ist. Im Brückenbau hingegen, wo die Biegesteifigkeit des Überbaus in vertikaler Richtung oft geringer als in horizontaler Richtung ist, sollte sich auch der vertikalen Komponente gewidmet werden. Die vertikale Erdbebenanregung kann dabei in einer ähnlichen Größenordnung liegen wie die horizontale, wie beispielsweise das Erdbeben von Christchurch im Februar 2011 gezeigt hat [17].

Nun kann sich bei einer Schwingungsanalyse die Erfordernis nach zusätzlicher Dämpfung einstellen, um Kriterien zu erfüllen. Dies kann neben der Einflussnahme auf Masse,

Steifigkeit und Dämpfung der Tragkonstruktion selbst, auch durch Adaptierung eigener Dämpfungselemente erreicht werden. Diese sind sowohl bei Neubauten als auch bei Bestandsbauten einsetzbar. Mit Hilfe eines Tuned-Mass-Dampers (TMD) kann auf diese Weise die dynamische Antwort eines Bauwerks, etwa auf Erdbebenanregung, reduziert werden. Von entscheidender Bedeutung für die Wirksamkeit sind dabei die anregungs- und konstruktionsspezifischen Parameter des TMD [13, 15].

## 1.2 Beiträge

In [3] hat sich D. Watzl mit einer diskretisierten 2-feldrigen Stahlbrücke unter horizontaler und vertikaler Mehrpunktanregung zweier Erdbeben (El Centro 1940 und Christchurch 2011) auseinandergesetzt. Es wurden die mathematischen Methoden der Modalanalyse und des Newmark –  $\beta$  Verfahrens für die Berechnung unter Mehrpunktanregung erweitert und gegenübergestellt. Die Ergebnisse wurden außerdem mit jenen Verfahrens nach Eurocode 8 verglichen.

In vorliegender Arbeit wird die Wirkung eines TMD auf den Überbau einer 2-feldrigen, sowie einer 5-feldrigen Stahlbetonbrücke unter Mehrpunktanregung durch die vertikale Bodenbeschleunigung eines Erdbebens, sowie einer harmonischen Anregung untersucht. Dabei wird die Wirksamkeit zweier Parametersets eines TMD analysiert. Zusätzlich wird dem Effekt einer Verringerung der Strukturdämpfung nachgegangen.

Das folgende Kapitel 2 beschäftigt sich mit den Grundlagen, die zum Verständnis der Arbeit erforderlich sind. In Kapitel 3 wird jene Brücke vorgestellt, die in Kapitel 4 simuliert wird. Die Ergebnisse der Simulation werden in Kapitel 5 aufbereitet und analysiert. In Kapitel 6 wird die Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick gegeben. Die verwendeten Programmcodes befinden sich im Anhang.

Es wurden folgende EDV-Programme verwendet:

- Matlab für Simulation und Erstellung der Diagramme
- Lyx für die Erstellung der schriftlichen Arbeit
- Inkscape für Grafiken

# Kapitel 2

## Theorie

Dieses Kapitel fasst die in dieser Arbeit verwendeten theoretischen Grundlagen zusammen. Sofern nicht anders angegeben basieren die Ausführungen auf [2, 16, 10].

### 2.1 Basisgrößen

#### 2.1.1 Kinematik

Ein Ortsvektor beschreibt die Lage eines Punktes im Raum und wird in dieser Arbeit im Einklang mit der Literatur mit  $u$  bezeichnet. Die Änderung des Ortes nach der Zeit ist die Geschwindigkeit  $v$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{u},$$

deren zeitliche Änderung wiederum ist die Beschleunigung  $a$

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{u}.$$

Zeitliche Ableitungen werden in dieser Arbeit, wie in der Literatur üblich, mit hochgestelltem Punkt bezeichnet. Die negative Beschleunigung wird auch Verzögerung genannt. Die Kinematik nutzt diese Größen um die Bewegung von Körpern, ohne deren Ursachen zu beschreiben. Diese werden wiederum in der Kinetik beschrieben.

#### 2.1.2 Kinetik

Die Kraft wird mit  $P$  bezeichnet und ergibt sich über das Newton'sche Gesetz zu Masse multipliziert mit der Beschleunigung

$$P = ma = m\ddot{u}.$$

Es benötigt also eine Geschwindigkeitsänderung von Masse um eine Kraft zu erzeugen bzw. löst eine Kraft eine Geschwindigkeitsänderung von Masse aus.

Aus der Definition der Kraft wird auch die Trägheitskraft ermittelt. Wenn eine Masse  $m$  mit  $\ddot{u}$  beschleunigt wird, so entsteht eine Kraft. Diese wird jener Kraft gegenübergestellt, welche auf die Masse einwirkt und deren Geschwindigkeitsänderung erst bewirkt. Dieser Zusammenhang zwischen Bewegungsgrößen und Massen(-verteilungen) wird Kinematik genannt.

### 2.1.3 Bewegungsgleichung

Eine Bewegungsgleichung ist eine mathematische Beschreibung von Bewegung, meist in Form einer Differentialgleichung. Der Einmassenschwinger, oder auch Einfreiheitsgradschwinger, verkörpert dabei die einfachste Form.

Die vollständige Bewegungsgleichung eines Einmassenschwingers mit der Masse  $m$ , der Dämpferkonstante  $c$ , der Steifigkeit  $k$  und einer äußeren Anregung wird im Falle einer Kraftanregung  $p(t)$  angeschrieben zu

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

und im Falle von Weganregung, etwa durch Erdbeben mit der Bodenbeschleunigung  $\ddot{u}_g$ , zu

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g.$$

Hier ist die Anregung proportional zur Schwingermasse  $m$  selbst.

In Abbildung 2.1 sind diese beiden Fälle einer Anregung auf einen Einmassenschwinger anhand eines masselosen Rahmens mit konzentrierter Masse (engl. lumped mass)  $m$ , Rahmensteifigkeit  $k$  und einem viskosen Dämpfungselement dargestellt.

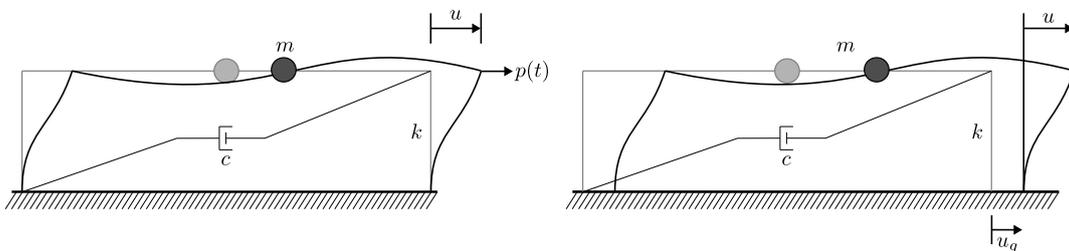


Abbildung 2.1: Masseloser Rahmen mit konzentrierter Masse  $m$ , Rahmensteifigkeit  $k$  und viskosem Dämpfer unter Kraftanregung (links) bzw. Weganregung (rechts)

Im Falle einer freien Schwingung ist die Anregung 0, die Bewegungsgleichung heißt dann homogen und lautet

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0.$$

Ist auch die Dämpfung 0, spricht man von einer freien, ungedämpften Schwingung, welche durch

$$m\ddot{u} + ku = 0,$$

beschrieben wird.

Um dynamisches Systemverhaltens beschreiben zu können, ist die Kenntnis über Eigenkreisfrequenz  $\omega$  bzw. Eigenfrequenz  $f$  unerlässlich. Dabei gilt im Falle des Einmassenschwingers

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad \text{und} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ [Hz]}.$$

Die Anzahl der Eigenfrequenzen bzw. Eigenkreisfrequenzen eines Systems entspricht der Anzahl seiner Freiheitsgrade. Bei Mehrfreiheitsgradschwingern gibt es damit mehr als eine Eigenfrequenz, wobei die erste bzw. niedrigste als Grundfrequenz bezeichnet wird. Zu jeder Eigenfrequenz gibt es eine korrespondierende Eigen(schwingungs)form.

Erfährt ein System eine äußere Anregung, so kann diese harmonisch stattfinden, etwa in Form eines  $\sin(\omega t)$ , oder allgemeiner Natur sein. Resonanz findet statt, wenn Anregungsfrequenz mit einer Eigenfrequenz des angeregten Systems zusammentrifft, was etwa bei harmonischer Anregung der Fall sein kann. Weißes Rauschen ist eine weitere spezielle Anregung, in diesem Fall werden alle Frequenzen gleichermaßen erfasst.

Die Lösung einer freien, ungedämpften Bewegungsgleichung wird über eine Ansatzfunktion mit Anfangsbedingungen erreicht. Für harmonische Anregung wird ein zusätzlicher Partikuläranatz benötigt. Unter allgemeiner Anregung hingegen lassen sich Lösungen nurmehr durch mathematische Methoden, wie dem Duhamelintegral oder der Newmark- $\beta$  Methode, siehe Abschnitt 2.3.2, finden.

Für die Herleitung einer Bewegungsgleichung gibt es mehrere Möglichkeiten, etwa Impuls- und Drallsatz oder mittels dem Lagrange Formalismus. Hierfür wird auf die Literatur [2, 16, 10] verwiesen. Jedenfalls müssen reale Systeme auf eine endliche Anzahl an Freiheitsgraden diskretisiert werden, um ihre Bewegungsgleichung zu erhalten, ähnlich wie es in Abbildung 2.1 mit dem Rahmen als Einmassenschwinger geschieht. Andernfalls wäre das Lösen partieller Differentialgleichungen, etwa mit der Methode der Finiten Elemente (FEM), notwendig,

In der Regel können reale Systeme durch Mehrmassenschwinger bzw. Mehrfreiheitsgradschwinger, mit Kopplungen in Steifigkeits-  $\mathbf{K}$  und Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$ , modelliert werden, worauf in Abschnitt 2.3.1 näher eingegangen wird. Die Thematik der Dämpfung wird im folgenden Abschnitt 2.2 behandelt.

## 2.2 Dämpfung

### 2.2.1 Dissipation von Energie

Energie ist in realen Systemen stets auch Umwandlungen unterworfen. Wird etwa an einer Masse Arbeit verrichtet, d.h. Energie zugeführt, so kann ein Teil dieser Energie,

etwa durch Reibung, dissipieren. Man spricht von Dissipation wenn die Umwandlung von Energie einem Verlust gleichkommt, beispielsweise wenn durch Reibung mechanische Energie in Wärme umgewandelt wird. Energie kann zwar nicht verloren gehen, sie erfüllt aber nicht mehr den ursprünglichen Zweck [2].

Alle Mechanismen, die Energie dissipieren, werden unter dem Begriff Dämpfung zusammengefasst. Erfährt etwa ein System kontinuierliche, gleichbleibende Kraftanregung, so ist es genau dann in gleichförmiger Bewegung, wenn die eingebrachte Energie gleich der dissipierten Energie ist, wenn also Gleichgewicht zwischen diesen Energien herrscht. Bei periodischer Kraftanregung würde sich in diesem Fall ein stationärer Schwingungszustand einstellen.

### 2.2.2 Lehr'sches Dämpfungsmaß $\zeta$

Die Dämpfung ist bei komplexen Systemen, wie sie im Bauwesen meist der Fall sind, nicht eindeutig zu bestimmen und muss daher aus Erfahrungen und Versuchen abgeleitet werden. Reibungsvorgänge im verwendeten Baustoff spielen ebenso eine Rolle, wie jene im Untergrund und bei deren Interaktion. Auch die Art der Bauteilverbindungen und das statische System beeinflussen die Dämpfung eines Bauwerks.

In der Bewegungsgleichung aus Abschnitt 2.1.3 findet sich die Dämpfungskraft als geschwindigkeitsproportionaler Term  $c\dot{u}$  mit der Dämpferkonstante  $c$ . Dieser Term fasst dabei alle Dämpfungsvorgänge zusammen und wird als (äquivalente) viskose Dämpfung bezeichnet [2].

Über die Definition einer dimensionslosen Bezugsgröße, welche als Lehr'sches Dämpfungsmaß  $\zeta$ , Dämpfungsgrad oder auch Prozentsatz zur kritischen Dämpferkonstante  $c_{cr}$  bezeichnet wird, lassen sich folgende Zusammenhänge bilden

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega}.$$

Nun kann die Bewegungsgleichung eines Einmassenschwingers (siehe Abschnitt 2.1.3) umgeformt werden, indem durch die Masse  $m$  dividiert und die Beziehung  $c = 2m\omega\zeta$  eingesetzt wird. Daraus erhält man

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2u = f(t).$$

Auf diese Weise lässt sich mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß  $\zeta$  ein geschwindigkeitsproportionaler, viskoser Dämpfungsterm in die Bewegungsgleichung eines Einmassenschwingers einbauen. Bei gekoppelten Mehrmassenschwingern ist jedoch zunächst eine Entkoppelung in Einmassenschwinger vorzunehmen, wie sie in Abschnitt 2.3.1 vorgestellt wird.

Die Dämpfung eines bestimmten Systems kann gemäß Eurocode 1998 mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß  $\zeta$  anhand seines Materials eingestuft werden. Die übliche Größenordnung im Bauwesen liegt bei 0,02 bis 0,05 [6].

### 2.2.3 Tuned-Mass-Damper – TMD

Wie bereits erwähnt sind dynamische Anregungen im Bauwesen vielfältig. Kraftanregung kann etwa durch Maschinen oder Fahrzeuge erfolgen, während ein Erdbeben eine Weganregung darstellt (vergleiche Abbildung 2.1). Der zeitliche Verlauf einer Einwirkung ist von entscheidender Bedeutung. Im Bauwesen ist eine hohe Dämpfung erwünscht, da sich Systeme nur minimal bewegen dürfen. Um die Gesamtdämpfung von schwingungsfähigen Konstruktionen zu steigern und deren Schwingungsverhalten positiv zu beeinflussen, können zusätzliche Dämpfungselemente eingesetzt werden. Diese können aktiv oder passiv wirken.

Der Tuned-Mass-Damper (TMD) ist ein dynamischer Schwingungsdämpfer in Form eines Einmassenschwingers, der federelastisch an die Hauptstruktur gekoppelt ist und eine viskose Dämpfungscharakteristik aufweist. Bei Auftreten von Schwingungen in der Hauptstruktur wird der passiv wirkende Dämpfer aktiviert und soll Energie an sich ziehen. Das System wird dabei um einen Freiheitsgrad, den TMD, erweitert. Die Parameter des TMD – Masse  $m_{TMD}$ , Steifigkeit  $k_{TMD}$  und viskose Dämpfung  $c_{TMD}$  – sind ausschlaggebend für seine Effektivität und können durch theoretische Analysen, je nach System und Anregungsart, optimiert werden. Die dissipative Kapazität darf dabei nicht zu hoch sein, da eine zu starre Kopplung an die Hauptstruktur wiederum nicht wirksam ist [2, 13, 15].

In diesem Sinne gibt es nach Den Hartog [5] optimierte Parameter für harmonische Anregung. In [11] hat Korenev Parameter für die Einwirkung durch weißes Rauschen angegeben. In Kapitel 5 werden die Parameter aus 2.2.3.1 und 2.2.3.2 miteinander verglichen.

#### 2.2.3.1 Parameter für harmonische Anregung nach Den Hartog

Die folgenden Formeln enthalten die optimierten Parameter eines TMD für harmonische Anregung nach Den Hartog [5]. Ausgangspunkt für die weiteren Parameter ist das Massenverhältnis

$$\mu = \frac{m_{TMD}}{m_n},$$

welches den Prozentsatz des TMD an der zu dämpfenden Masse festlegt. Dabei bezeichnet  $m_n$  die modale Masse jenes Freiheitsgrades, an dem der TMD befestigt wird. In dieser Arbeit wird  $\mu$  zu 0,03 gewählt. Daraus lassen sich die empfohlenen Verhältnisse der Eigenfrequenzen  $\beta_{opt}$  und das Lehr'sche Dämpfungsmaß des TMD  $\zeta_{TMD}$  bestimmen zu

$$\beta_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} = 0,9709 < 1 \quad \zeta_{TMD} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} = 0,1015.$$

Nun kann  $\beta$  zur Ermittlung der Eigenkreisfrequenz des TMD  $\omega_{TMD}$  durch

$$\beta = \frac{\omega_{TMD}}{\omega_0}$$

herangezogen werden. Dabei stellt  $\omega_0$  die kleinste Eigenkreisfrequenz des Mehrmassenschwingers dar.

Anschließend kann die Steifigkeit des TMD  $k_{TMD}$  über den bekannten Zusammenhang  $\omega_{TMD} = \sqrt{\frac{k_{TMD}}{m_{TMD}}}$ , siehe Abschnitt 2.1.3, ermittelt werden. Der Eintrag  $c_{TMD}$  in der Dämpfungsmatrix des Systems ergibt sich durch Umformen der Gleichung  $\zeta_{TMD} = \frac{c_{TMD}}{2m_{TMD}\omega_{TMD}}$ . Nun können die Systemmatrizen mit den zusätzlichen Einträgen des TMD  $m_{TMD}$ ,  $k_{TMD}$  und  $c_{TMD}$  erweitert werden, siehe Abschnitt 4.3.

### 2.2.3.2 Parameter für weißes Rauschen

Weißes Rauschen hat die Eigenschaft, dass alle Frequenzen gleich stark vertreten sind. Eine gewöhnliche Erdbebenanregung kann im relevanten Frequenzbereich durch stationäres, weißes Rauschen angenähert werden, siehe Abbildung 2.2 nach [13].

Für diese Studie werden daher Parameter, angelehnt an jene nach Korenev [11] für weißes Rauschen eines gedämpften Systems, herangezogen. Das Massenverhältnis  $\mu$  wird nun, etwas größer als für harmonische Anregung, mit 5% bzw. 0,05 gewählt. Das Verhältnis der Eigenkreisfrequenzen  $\beta_{opt}$  wird zu 0,86 bestimmt und das Lehr'sche Dämpfungsmaß des TMD  $\zeta_{TMD}$  wird mit 13% festgelegt. Daraus können analog zu Abschnitt 2.2.3.1 die Parameter  $k_{TMD}$  und  $c_{TMD}$  abgeleitet werden.

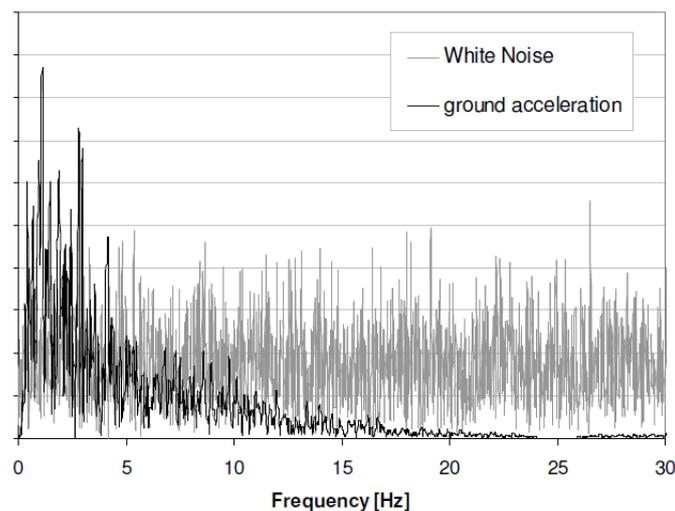


Abbildung 2.2: Frequenzgang eines stationären weißen Rauschens und einer seismischen Bodenbeschleunigung [13]

## 2.3 Mathematische Methoden

### 2.3.1 Modalanalyse

Mit Hilfe der Modalanalyse können die Eigenfrequenzen mit den zugehörigen Eigenformen eines dynamischen Systems, wie einem Mehrmassenschwinger, untersucht werden. Durch Lösen des zugehörigen Eigenwertproblems ist es dabei möglich, ein mehrdimensionales System mit  $n$  Massen zu entkoppeln, das heißt, durch  $n$  eindimensionale Systeme zu ersetzen. Die Eigenformen können dabei genutzt werden, die Freiheitsgrade zu entkoppeln, da sich das Gesamtsystem wie eine Linearkombination der entkoppelten Einmassenschwinger verhält. Wir betrachten also einen Mehrmassenschwinger der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_1(t).$$

Für die positiv definiten  $n \times n$  Matrizen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  existiert eine dazu passende Matrix  $\Phi$  die regulär, also invertierbar, ist und außerdem die folgenden Eigenschaften besitzt. Wenn  $\Phi^T$  mit  $\mathbf{M}$  und  $\Phi$  multipliziert wird, ergibt sich im orthonormierten Fall die Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}. \quad (2.1)$$

Wird  $\Phi^T$  mit  $\mathbf{K}$  und  $\Phi$  multipliziert entsteht eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen  $\text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2). \quad (2.2)$$

Dabei sind  $\omega_1, \dots, \omega_n$  die Eigenkreisfrequenzen des Mehrmassenschwingers. Um die Matrix  $\Phi$  zu erhalten, wird die nicht-triviale Lösung eines Eigenwertproblem gesucht

$$(\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \phi_k = \mathbf{0} \quad k = 1, \dots, n,$$

welche nur gefunden wird, wenn die gesamte Matrix innerhalb der Klammern singulär ist, also ihre Determinante gleich Null ist

$$\det(\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) = 0.$$

Nach Entwicklung der Determinante und Bestimmung der  $n$  Nullstellen erhält man als Lösung des Eigenwertproblems die Eigenwerte  $\omega_k$  (Eigenkreisfrequenzen), sowie die zugehörigen Eigenvektoren  $\phi_k$  (Eigenformen) des analysierten Systems. Die Eigenvektoren  $\phi_k$  sind dabei die Spalten der modalen Matrix  $\Phi$ .

Im Anschluss kann eine lineare Transformation des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}$  und seinen Ableitungen mit den in  $\Phi$  enthaltenen Linearfaktoren der Form

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{y}$$

durchgeführt werden. Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung und Multiplizieren von links mit  $\Phi^T$  erhält man wegen den Beziehungen 2.1 und 2.2  $n$  entkoppelten Gleichungen

$$\ddot{y}_k + \omega_k^2 y_k = f_2(t).$$

In die entkoppelten Einmassenschwinger kann nun, wie in Abschnitt 2.2.2 erwähnt, jeweils ein Dämpfungsterm der das Lehr'sche Dämpfungsmaß  $\zeta$  enthält, eingebracht werden. Der Aufbau der Dämpfungsmatrix ist derart, dass bei Anwendung der Modalanalyse wiederum eine Diagonalmatrix der Form

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = 2\zeta \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2).$$

entsteht. Im Anschluss kann durch Invertierung von  $\Phi$  die Rücktransformation stattfinden. Das Ergebnis ist der gekoppelte Mehrmassenschwinger mit einer Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$ , die proportional zur Steifigkeitsmatrix ist und als modale Dämpfung bezeichnet wird [2].

### 2.3.2 Newmark- $\beta$ Methode

Im Folgenden wird das Newmark- $\beta$  Verfahren nach [7] beschrieben. Es handelt sich hierbei um eine numerische Integrationsmethode, die zur Lösung der Bewegungsgleichung von Mehrfreiheitsgradschwingern eingesetzt werden kann, ohne diese über eine Transformation zu entkoppeln. Es erlaubt also die direkte Lösung von Differentialgleichungen 2. Ordnung. Im vorliegenden Fall handelt es sich um ein lineares Problem, da Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  und Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  nicht von der Verschiebung  $\mathbf{u}$  und deren Zeitableitungen abhängen und der Kraftvektor  $\mathbf{p}(t)$  nur eine Funktion der Zeit  $t$  ist. Die Bewegungsgleichung eines Mehrmassenschwingers lautet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t).$$

Mit den Anfangsbedingungen  $\mathbf{u}(t_0)$  und  $\dot{\mathbf{u}}(t_0)$  wird iterativ die Lösung zum Zeitpunkt  $t_n$  verwendet, um den gesuchten Wert zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  zu berechnen. Dabei handelt es sich um ein implizites Verfahren, da in jedem Schritt ein Gleichungssystem gelöst werden muss, um den neuen Wert zu bestimmen.

Stabilität und Genauigkeit werden durch die Wahl der Parameter  $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$  und  $0 \leq \gamma \leq 1$  gewährleistet. Übliche Werte sind  $\beta = 0,25$  und  $\gamma = 0,5$ , womit das Verfahren in die Standard Newmark Methode übergeht. In diesem Fall ist die Integrationsschrittweite  $\Delta t$  beliebig und kann in Abstimmung mit der betrachteten Systemdynamik gewählt werden, wobei das Verfahren stets stabil bleibt.

In jeder Iteration wird zuerst die Verschiebung  $\mathbf{u}_{n+1}$  durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{b}_n$$

ermittelt, wobei  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{b}_n$  durch

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{M}}{\beta(\Delta t)^2} + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t} + \mathbf{K}$$

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{p}(t_{n+1}) + \mathbf{M} \left[ \frac{\mathbf{u}_n}{\beta(\Delta t)^2} + \frac{\dot{\mathbf{u}}_n}{\beta\Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{C} \left[ \frac{\gamma\mathbf{u}_n}{\beta\Delta t} - \dot{\mathbf{u}}_n \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) - \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \right] \right]$$

berechnet werden.

Sind  $\beta$  und  $\Delta t$  als konstante Werte festgelegt, so ist auch  $\mathbf{A}$  konstant, während sich  $\mathbf{b}_n$  in jedem Iterationsschritt ändert.

Ausgehend von den damit berechneten Verschiebungen  $\mathbf{u}_{n+1}$  werden im nächsten Schritt die zugehörigen Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$  und Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$  nach

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \gamma \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\beta\Delta t} + \dot{\mathbf{u}}_n \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\beta\Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{u}}_n}{\beta\Delta t} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_n$$

ermittelt.

Für Herleitungen wird auf Literatur wie [7] verwiesen.

## 2.4 Formulierung von Mehrpunktanregung

Bei weitgespannten Brücken kann durch Erdbeben eine Mehrpunktanregung der Pfeiler stattfinden. Die erdberührenden Teile der Brücke erfahren in diesem Fall während eines Erdbebens nicht die gleiche Beschleunigung zur gleichen Zeit. Wie dieser Vorgang an einem diskretisierten Brückentragwerk modelliert werden kann, wird in Abschnitt 4.1 gezeigt.

Eine Methode Mehrpunktanregungen zu formulieren, ist diese durch mathematische Umformungen auf eine klassische Anregung zu reduzieren. Das hat den Vorteil, die üblichen Methoden zur Analyse und Simulation, etwa jene aus Abschnitt 2.3, einsetzen zu können. Nachfolgend wird diese Reduktion nach [10, 14, 4] vorgestellt.

Die Bewegungsgleichung einer Mehrpunktanregung wird durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{m}_g \\ \mathbf{m}_g^T & \mathbf{m}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^t \\ \ddot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{c}_g \\ \mathbf{c}_g^T & \mathbf{c}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^t \\ \dot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_g^T & \mathbf{k}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_g(t) \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

beschrieben. Darin beschreibt die erste Zeile den Überbau und die zweite Zeile den Unterbau einer Brücke. Der Überbau erfährt keine äußere Anregung. Die Bewegungsgrößen des Unterbaus  $\mathbf{u}_g, \dot{\mathbf{u}}_g$  und  $\ddot{\mathbf{u}}_g$  sind bekannte Größen, z.B. steht die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{u}}_g$  bei Erdbeben als gemessene Zeitreihe zur Verfügung. Die Verschiebung  $\mathbf{u}_g$ , sowie die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{u}}_g$  können durch numerische Integration aus der Beschleunigung ermittelt

werden. Gesucht sind die Bewegung des Überbaus  $\mathbf{u}^t$  und die Auflagerkraft  $\mathbf{p}_g(t)$ . Massen, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix können wie in Kapitel 4 gezeigt wird aus den Struktureigenschaften ermittelt werden. Über die Nebendiagonalelemente besteht eine Kopplung zwischen Überbau und Unterbau. Da die translatorischen Bewegungen des Überbaus im Mittelpunkt der Untersuchungen stehen, werden diese Blöcke ohne Indizes angeschrieben  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{k}$ .

Der Verschiebungsvektor kann nun in eine quasi-statische und eine dynamische Komponente aufgeteilt werden

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t(t) \\ \mathbf{u}_g(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s(t) \\ \mathbf{u}_g(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (2.4)$$

Die quasi-statische Komponente des Überbaus  $\mathbf{u}^s(t)$  ist dabei zu jedem Zeitpunkt direkt an die Bewegung des Unterbaus  $\mathbf{u}_g(t)$  geknüpft. Zur Bestimmung der dynamischen Komponente des Überbaus  $\mathbf{u}(t)$ , ist eine dynamische Analyse erforderlich. Zusammen ergeben sie die Gesamtbewegung des Überbaus  $\mathbf{u}^t(t)$ . Der Unterbau hat nur eine quasi-statische Verschiebungskomponente  $\mathbf{u}_g(t)$ .

Da die zeitlichen Ableitungen der quasi-statischen Komponenten verschwinden, folgt aus den Gleichungen 2.3 und 2.4

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_g^T & \mathbf{k}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s(t) \\ \mathbf{u}_g(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_g^s(t) \end{Bmatrix}.$$

Dabei sind  $\mathbf{p}_g^s(t)$  die Auflagerkräfte der quasi-statischen Auslenkung. Wird die erste Zeile aufgelöst und umgeformt, folgt für die quasi-statische Verschiebung des Überbaus

$$\mathbf{u}^s = \underbrace{-\mathbf{k}^{-1}\mathbf{k}_g}_{\boldsymbol{\iota}} \mathbf{u}_g. \quad (2.5)$$

Dabei wird  $\boldsymbol{\iota}$  als Einflussmatrix bezeichnet.

Für die dynamische Komponente des Überbaus  $\mathbf{u}(t)$  folgt durch Einsetzen von 2.5 und 2.4 in 2.3

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \underbrace{[-\mathbf{m}\boldsymbol{\iota} + \mathbf{m}_g]\ddot{\mathbf{u}}_g - [\mathbf{c}\boldsymbol{\iota} + \mathbf{c}_g]\dot{\mathbf{u}}_g}_{\mathbf{p}_{eff}}. \quad (2.6)$$

Der effektive Kraftvektor  $\mathbf{p}_{eff}$  kann also durch Kenntnis von  $\mathbf{u}_g$  und dessen Zeitableitungen bestimmt werden. Dadurch wird das ursprüngliche Problem der Mehrpunktanregung auf ein äquivalentes Problem mit Kraftanregung übergeführt, womit, wie anfänglich erwähnt, die gängigen Analyse- und Simulationsmethoden verwendet werden können.

## Kapitel 3

# Radweg- und Fußgängerbrücke

### 3.1 Allgemeines System und Geometrie

In diesem Kapitel wird eine Radweg- und Fußgängerbrücke vorgestellt. Die angeführten Auszüge sind den Ausschreibungsunterlagen des Projekts entnommen und werden vom ZT-Büro IBBS zur Verfügung gestellt [8].

Die gesamte Brücke besteht aus 4 voneinander statisch unabhängigen Tragwerken. Abbildung 3.1 zeigt das gesamte Bauwerk im Grundriss. Ansicht und Längenschnitt sind auf Abbildung 3.2 zu sehen.

Als Konstruktion zur Überbrückung des Flusses dient eine Hängebrücke in Stahlbauweise. Am westlichen und östlichen Ufer schließt jeweils ein 2-feldriger Durchlaufträger aus Stahlbeton an die Hängebrücke an. Auf der westlichen Seite befindet sich eine weitere Vorlandbrücke aus Stahlbeton mit 5 durchlaufenden Feldern.

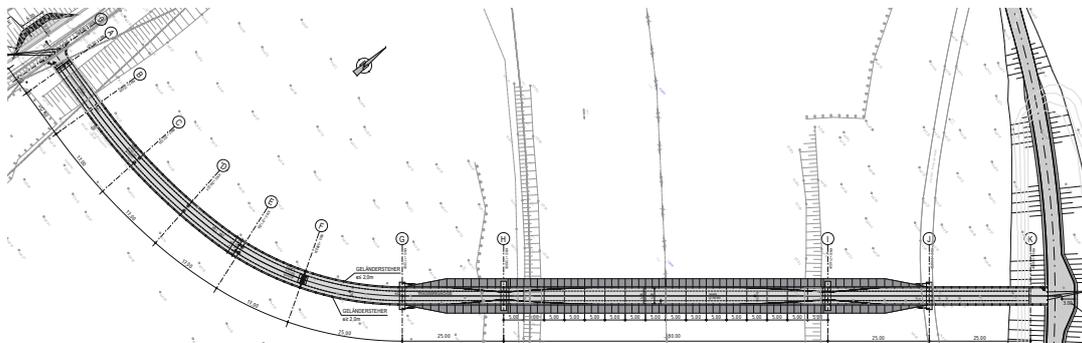


Abbildung 3.1: Radweg- und Fußgängerbrücke – Grundriss [8]

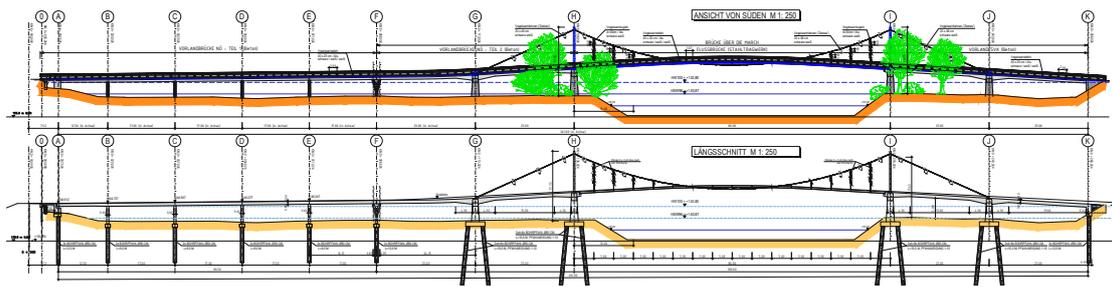


Abbildung 3.2: Radweg- und Fußgängerbrücke – Ansicht und Längenschnitt [8]

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind die, als Stahlbeton-Durchlaufträger konzipierten, Vorlandbrücken. Ihr Regelquerschnitt ist auf Abbildung 3.3 ersichtlich. In Tabelle 3.1 sind Parameter wie Querschnittswerte und Lasten für die Analyse der Tragwerke in Kapitel 4 in SI-Einheiten angegeben.

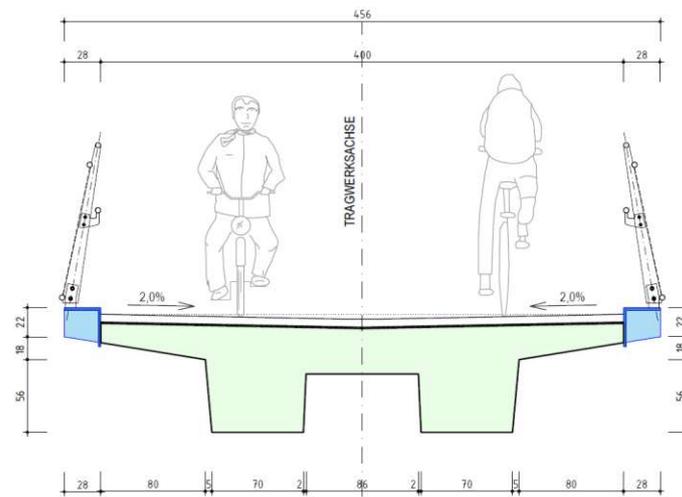


Abbildung 3.3: Regelquerschnitt der Vorlandbrücken aus Stahlbeton [8]

Bezeichnung	Kurzform	Wert	Einheit
Erdbeschleunigung	$g$	9,81	$m/s^2$
Wichte Stahlbeton	$\gamma$	25000	$N/m^3$
Querschnittsfläche	$A$	1,8443	$m^2$
Flächenträgheitsmoment um die y-Achse	$I_y$	0,1017	$m^4$
Flächenträgheitsmoment um die z-Achse	$I_z$	1,694	$m^4$
Elastizitätsmodul	$E$	33000000000	$N/m^2$
Ausbaulast	$q$	8300	$N/m$
Stützweite	$l_{feld}$	25	$m$

Tabelle 3.1: Parameter in SI-Einheiten

### 3.2 2-Feld-Brückenabschnitte

Die beiden an die Hängebrücke angrenzenden 2-Feldträger haben eine Stützweite von je 25 Meter (siehe Abbildung 3.4) und verfügen über den in Abbildung 3.3 ersichtlichen Regelquerschnitt. Die westliche der beiden Vorlandbrücke reicht von Achse F bis H und die östliche befindet sich zwischen Achse I und K. Die Tragwerke der Brückenanschnitte sind jeweils durch Fugen voneinander getrennt. Die Abspannungen der Hängebrücke sind direkt in den Mittelpfeilern der 2-Feldbrücken bei Achse G bzw. J verankert und beeinflusst deren Überbau somit nicht.

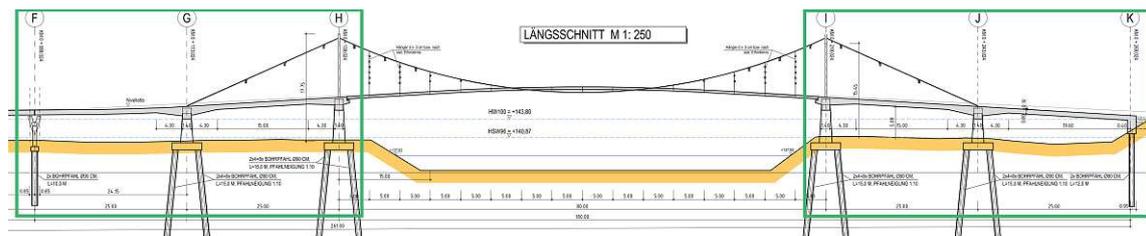


Abbildung 3.4: 2-Feld-Brückenabschnitt [8]

### 3.3 5-Feld-Brückenabschnitt

Der westlichste Brückenabschnitt besteht aus einem im Grundriss gebogenen 5-feldrigen Durchlaufträger mit einer Stützweite von 17 Meter, von Achse A bis Achse F reichend, siehe Abbildung 3.5. Da die Simulation anhand einer im Grundriss geraden Brücke erfolgt, werden Tragreserven des in Abbildung 3.3 gezeigten Querschnittes frei. Die Feldlänge kann dadurch in der Simulation auf 25 Meter erhöht werden und entspricht damit jener des angrenzenden und im vorherigen Unterpunkt behandelten 2-Feldträgers.

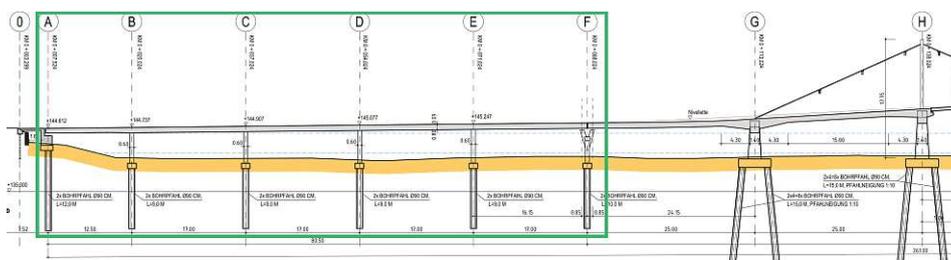


Abbildung 3.5: 5-Feld-Brückenabschnitt [8]

# Kapitel 4

## Simulation der Brückentragwerke

### 4.1 Brückendiskretisierung

Die beiden zu untersuchenden Brückentragwerke, ein 2- sowie ein 5-Feldträger, sind dem in Kapitel 3 vorgestellten Projekt entnommen. Tabelle 3.1 fasst die Parameter für die Berechnung der Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix zusammen. Erst werden die Matrizen in allgemeiner Form angeschrieben, das Einsetzen von Zahlenwerten erfolgt nur für den idealisierten 2-Feld-Brückenabschnitt. Im ersten Schritt wird die Anzahl der Freiheitsgrade, folgend mit  $FG$  bezeichnet, bestimmt. In Abbildung 4.1 ist ersichtlich, dass die Anzahl der translatorischen Freiheitsgrade  $FG_t$  und rotatorischen Freiheitsgrade  $FG_r$  gleich groß ist. Um diese zu bestimmen, werden die Auflager, auch als Unterbau bezeichnet, und die Brückenfelder, auch als Überbau bezeichnet, addiert. Den Freiheitsgraden des Unterbaus werden bei der Diskretisierung keine Massen zugeordnet. Für die Massen des Überbaus wird bei dem Durchlaufträgersystem jeweils die halbe Masse eines Feldes als Punktmasse  $m$  in Feldmitte zusammengefasst,

$$m = l \frac{A\gamma + q}{g}.$$

Der Abstand zwischen den Freiheitsgraden ist daher die halbe Stützweite, siehe Abbildung 4.1.

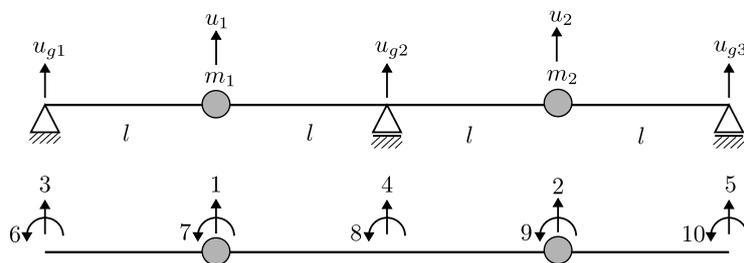


Abbildung 4.1: Freiheitsgrade eines idealisierten 2-Feldträgers

### 4.1.1 Massenmatrix

Anschließend kann die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  mit der Dimension  $FG_t \times FG_t$  erstellt werden. Die Diagonale wird mit den Massen der translatorischen Freiheitsgrade besetzt. Rotatorische Freiheitsgrade müssen nicht berücksichtigt werden, da ihr Beitrag minimal wäre und das Modell daher, wie beschrieben, nur Punktmassen berücksichtigt.

Für die weiteren Berechnungen ist es sinnvoll, jene Freiheitsgrade, denen tatsächlich eine Masse zugeordnet werden kann, in den ersten Diagonalelementen zu platzieren. Das entspricht einer Umsortierung im Vergleich zu Abbildung 4.1, da es sich um jene Freiheitsgrade mit den Punktmassen  $m_1, \dots, m_f$  in den Feldmitten handelt. Der Index  $f$  bezeichnet hier die Anzahl der Brückenfelder. Die Massen der einzelnen Freiheitsgrade sind bei den Berechnungen voneinander unabhängig, wodurch die Massenmatrix eine Diagonalmatrix ist.

Nun werden Untermatrizen definiert. Die Anzahl der Zeilen und Spalten des befüllten Teils der Diagonalmatrix entspricht der Anzahl der Brückenfelder und wird als

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_f \end{bmatrix},$$

ohne Indizes, definiert. Die restlichen Untermatrizen  $\mathbf{m}_g$ ,  $\mathbf{m}_g^T$ ,  $\mathbf{m}_{gg}$  sind Nullmatrizen, die jedoch für die weiteren Berechnungen benötigt werden, um die Massenmatrix in der Dimension  $FG_t \times FG_t$  beizubehalten. Die Nullmatrix  $\mathbf{m}_{gg}$  hat bei Durchlaufträgern eine Dimension mehr als  $\mathbf{m}$ . Damit einhergehend sind die Dimensionen von  $\mathbf{m}_g$ ,  $\mathbf{m}_g^T$ , wobei die eine die transponierte Matrix der anderen ist. Die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  ergibt sich zu

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{m}_g \\ \mathbf{m}_g^T & \mathbf{m}_{gg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

### 4.1.2 Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  hat doppelt so viele Einträge wie die Massenmatrix, da hier Rotationen berücksichtigt werden müssen. Damit ist die Dimension  $(FG_t + FG_r) \times (FG_t + FG_r)$ . Sie ist symmetrisch, aber keine Diagonalmatrix, da die Steifigkeiten der aneinander angrenzenden Freiheitsgrade miteinander gekoppelt sind. Diese Kopplungen können über Steifigkeitseinflussfaktoren  $k_{ij}$  bestimmt werden, wie sie in Abbildung 4.2 dargestellt sind. Um die Übersicht zu behalten, werden die Einträge  $k_{ij}$  der Reihe nach (Auflager-Feld-Auflager-Feld...), wie in Abbildung 4.1, in die Matrix eingetragen.

Die Steifigkeitsmatrix ist wiederum in vier Blöcke  $\mathbf{k}_{tt}$ ,  $\mathbf{k}_{tr}$ ,  $\mathbf{k}_{rt}$ ,  $\mathbf{k}_{rr}$  gegliedert, die Indizes  $t$  bzw.  $r$  stehen ebenfalls für translatorisch bzw. rotatorisch. Der erste Block  $\mathbf{k}_{tt}$

enthält die translatorischen Beziehungen, der vierte Block  $\mathbf{k}_{rr}$  enthält die rotatorischen Beziehungen der Freiheitsgrade. Beide sind symmetrisch. Die Nebendiagonalblöcke  $\mathbf{k}_{tr}$ ,  $\mathbf{k}_{rt}$  sind bis auf ihr Vorzeichen ident und behandeln die Wechselwirkung translatorisch-rotatorisch bzw. rotatorisch-translatorisch. Den rotatorischen Freiheitsgraden ist im Zuge der Idealisierung keine Masse mehr zugeordnet, da eine Punktmasse kein Massenträgheitsmoment besitzt. In der Literatur wird daher auch der Index 0 für diese masselosen Freiheitsgrade  $r$  verwendet. Der Index  $n$  steht in der folgenden Darstellung für die Anzahl der  $FG_t$  bzw.  $FG_r$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{tr} \\ \mathbf{k}_{rt} & \mathbf{k}_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{t_1,t_1} & \dots & k_{t_n,t_1} & k_{t_1,r_1} & \dots & k_{t_n,r_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{t_1,t_n} & \dots & k_{t_n,t_n} & k_{t_1,r_n} & \dots & k_{t_n,r_n} \\ k_{r_1,t_1} & \dots & k_{r_n,t_1} & k_{r_1,r_1} & \dots & k_{r_n,r_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{r_1,t_n} & \dots & k_{r_n,t_n} & k_{r_1,r_n} & \dots & k_{r_n,r_n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 & 0 & 0 & 6l & 6l & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 24 & -12 & 0 & 0 & -6l & 0 & 6l & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 24 & -12 & 0 & 0 & -6l & 0 & 6l & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 24 & -12 & 0 & 0 & -6l & 0 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 12 & 0 & 0 & 0 & -6l & -6l \\ -6l & -6l & 0 & 0 & 0 & 4l^2 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 0 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 8l^2 & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6l & 0 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 8l^2 & 2l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6l & 0 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 8l^2 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6l & -6l & 0 & 0 & 0 & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3}. \quad (4.1)$$

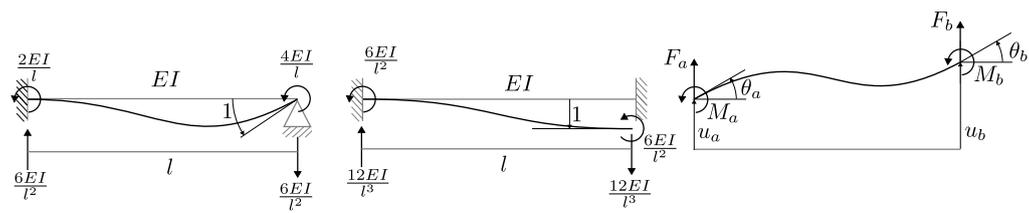


Abbildung 4.2: Kopplung der Steifigkeitseinflussfaktoren  $k_{ij}$

Um die erste Spalte des ersten Blocks  $\mathbf{k}_{tt}$  zu erhalten, wird eine Einheitsverschiebung am ersten Freiheitsgrad aufgebracht, während die anderen Freiheitsgrade festgehalten sind. Über die Steifigkeitseinflussfaktoren  $k_{ij}$  wird dann jene Kraft ausgedrückt, die notwendig ist, um dieses Verformungsbild zu halten. Der Index  $i$  bzw. die Zeile gibt die Stelle des betrachteten Knotens wieder, der Index  $j$  gibt den Freiheitsgrad mit der Verschiebung Eins und damit die Ursache wieder.

Diese Vorgangsweise lässt sich auch auf die anderen Blöcke übertragen. Analog werden Einheitsverdrehungen aufgebracht, um die jeweiligen Steifigkeitseinflussfaktoren  $k_{ij}$  zu erhalten [10]

### 4.1.3 Statische Kondensation

Ziel der Methode der statischen Kondensation ist es, jene Freiheitsgrade aus der Bewegungsgleichung zu eliminieren, denen keine Masse zugeordnet ist. Das ist möglich, da auf Freiheitsgrade ohne Massenbelegung nur statische Kräfte wirken und diese keinen Beitrag zur Bewegungsgleichung einer dynamischen Analyse liefern. Im Fall der idealisierten Brücke sind alle rotatorischen Freiheitsgrade ohne Massenbelegung.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist das vollständige Modell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \ddot{\mathbf{u}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{tr} \\ \mathbf{k}_{rt} & \mathbf{k}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_t(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Bei Erdbebenanregung findet nur ein transversaler Input auf das System statt und keine rotatorische Anregung. Durch Ausmultiplizieren der zweiten Zeile und Auflösen nach  $\mathbf{u}_r$  ergibt sich

$$\mathbf{u}_r = -\mathbf{k}_{rr}^{-1} \mathbf{k}_{rt} \mathbf{u}_t.$$

Wird dieses Ergebnis in die erste Zeile eingesetzt und  $\mathbf{u}_t$  herausgehoben so folgt

$$\mathbf{m}_t \ddot{\mathbf{u}}_t + \underbrace{(\mathbf{k}_{tt} - \mathbf{k}_{tr} \mathbf{k}_{rr}^{-1} \mathbf{k}_{rt})}_{\mathbf{k}_{tt}} \mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t(t).$$

Es ergibt sich eine Differentialgleichung die nurmehr von jenen Freiheitsgraden abhängt, denen eine Masse zugeordnet ist. Diese kann wiederum mit den Methoden aus Abschnitt 2.3 analysiert und simuliert werden.

Anschließend werden die Matrixeinträge nach Überbau und Unterbau sortiert, sodass die Blöcke die Form von Gleichung 2.3 in Abschnitt 2.4 erhalten. Damit entspricht sie auch der Form der Massenmatrix aus Abschnitt 4.1.1.

Das Ergebnis kann dann unter Verwendung der Formulierung für Mehrpunktanregung nach Abschnitt 2.4 für die Erdbebenanalyse herangezogen werden. Für die weitere Betrachtung wird also nurmehr die Differentialgleichung 2.6, welche die Bewegung des Überbaus unter Mehrpunktanregung beschreibt, verwendet.

### 4.1.4 Modalanalyse mit modaler Dämpfung

Um die Eigenfrequenzen und die Dämpfungsmatrix zu erhalten wird eine Modalanalyse, wie in Abschnitt 2.3.1 vorgestellt, durchgeführt. Mit bekannter  $\mathbf{M}$ - und  $\mathbf{K}$ -Matrix kann über den Matlabbefehl  $[V, D] = \text{eig}(M, K)$  [12] das Eigenwertproblem mit den Eigenkreisfrequenzen und zugehörigen Eigenformen gelöst werden. Die Anzahl der Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen entspricht dabei jener der Brückenfelder. Die Zahlenwerte sind in der folgenden Tabelle 4.1 angegeben.

$i =$	1	2	3	4	5
$f_{i,2}$ -Feld	1.9409	2.9343	-	-	-
$f_{i,5}$ -Feld	1.9409	2.1439	2.6405	3.2249	3.6978

Tabelle 4.1: Eigenfrequenzen  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  der Brückentragwerke

Durch die Transformation des Mehrfreiheitsgradsystems in voneinander entkoppelte Einmassenschwinger, kann nun eine modale Dämpfung mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß  $\zeta$ , siehe Abschnitt 2.2.2, in die Bewegungsgleichung eingebracht werden. Dabei wird  $\zeta$  für Stahlbeton nach EN 1998-2 Kapitel 4.1.3 (1) mit 5% angenommen [6]. Wie eingangs erwähnt, werden die Berechnungen mit einem  $\zeta$  von 2%, wie es etwa für Stahlbau empfohlen ist, wiederholt. Dieser Vorgang soll den Einfluss einer Reduktion der vorhandenen Strukturdämpfung zur Anschauung bringen.

Anschließend kann das entkoppelte System rücktransformiert und damit wieder gekoppelt werden. Das Ergebnis ist die gedämpfte Bewegungsgleichung des Überbaus mit einer Dämpfungsmatrix  $\mathbf{c}$ , proportional zur Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}$ .

## 4.2 Mehrpunktanregung der Brückentragwerke

### 4.2.1 Erdbebenanregung

Für die folgenden Untersuchungen wird das Erdbeben El Centro (CA) aus dem Jahr 1940 mit einer Magnitude von 7,1 als Anregung der Brückentragwerke durch vertikale Bodenbeschleunigung herangezogen. Die Messdaten stammen von [1], wobei die Zeitreihe eine Abtastzeit von  $\Delta t = 0,02\text{s}$  aufweist. Aus der Bodenbeschleunigung  $\ddot{\mathbf{u}}_g$  werden, durch zweimaliges Integrieren über die Zeit, Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{u}}_g$  und Verschiebung  $\mathbf{u}_g$  gewonnen. Das erfolgt in der Matlab-Funktion *erdbebenintegration* (siehe Anhang A), die auch die grafische Ausgabe in Abbildung 4.3 erzeugt.

Die Wahl der zeitlichen Differenz der Erdbebenanregung zwischen benachbarten Brückenpfeilern wird, unter Berücksichtigung der Spannweiten, mit einer Sekunde gewählt. Die Gesamtdauer der Anregung wird um diese zeitliche Differenz, multipliziert mit der Anzahl der Brückenfelder, verlängert. Die Simulation wird außerdem bis 4 Sekunden nach der letzten Anregung weitergeführt.

Mittels dem Newmark- $\beta$  Verfahren, das in Abschnitt 2.3.2 beschrieben ist, wird die Differentialgleichung 2.6 für  $\mathbf{p}_{eff}$  numerisch integriert, um eine Lösung für die dynamischen Auslenkungen  $\mathbf{u}$  der Brückenfelder zu erhalten. Dabei wird  $\mathbf{p}_{eff}$  aus der Erdbebenbeschleunigung  $\ddot{\mathbf{u}}_g$ , wie in Gleichung 2.6 beschrieben, berechnet. Dies geschieht mit Hilfe der im Anhang A angegebenen Matlab-Funktion *newmark*. Aufgrund der Proportionalität zwischen  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{c}$  fällt der Teil der Gleichung 2.6, der die Dämpfungsmatrix enthält, weg. Außerdem sind die Massen des Unterbaus gleich Null, daher bleibt

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_g = \mathbf{p}_{eff}(t).$$

Aus dieser Analyse werden die dynamischen Verschiebungen des Überbaus  $\mathbf{u}$  ausgegeben.

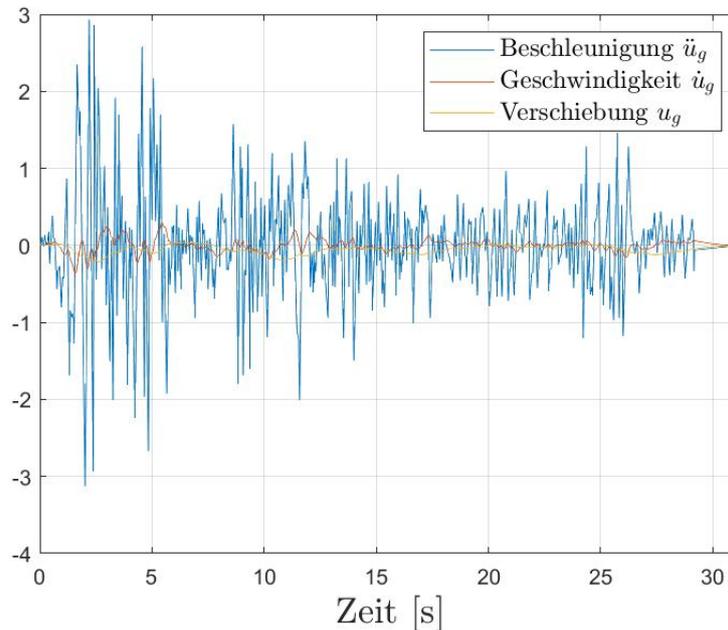


Abbildung 4.3: Beschleunigung  $\ddot{u}_g$ , Geschwindigkeit  $\dot{u}_g$ , Verschiebung  $u_g$  des Erdbebens

#### 4.2.2 Harmonische Anregung

Nun wird eine harmonische Anregung gewählt, um die Wirksamkeit der TMD-Parameter zu evaluieren. Dafür wird ein Sinus  $\sin(\omega_{min}t)$  mit der Grundfrequenz  $\omega_{min}$  der jeweiligen Brücke gewählt. Da diese Anregung eine Resonanzfrequenz der Brücke trifft, sollten die Auslenkungen besonders groß und der TMD besonders effizient sein. Die Anregung erfolgt ebenfalls als Mehrpunktanregung mit der gleichen zeitlichen Differenz von einer Sekunde zwischen benachbarten Brückenfeilern.

### 4.3 Implementierung Tuned-Mass-Damper

Bei einem Tuned-Mass-Damper TMD handelt es sich, wie in Abschnitt 2.2.3 beschrieben, um einen Einmassenschwinger. Das Dämpfungselement wird in dieser Studie an einem der Brückenfelder angebracht. Beim 2-Feld-Brückenabschnitt wird die Feldmitte des zweiten Feldes gewählt, siehe Abbildung 4.4. Beim 5-Feld-Brückenabschnitt befindet sich der TMD in Feldmitte des dritten Feldes, siehe Abbildung 4.5.

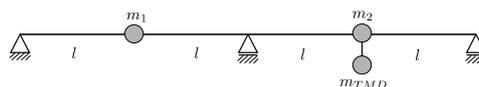


Abbildung 4.4: Positionierung des TMD an 2-Feld-Brückenabschnitt

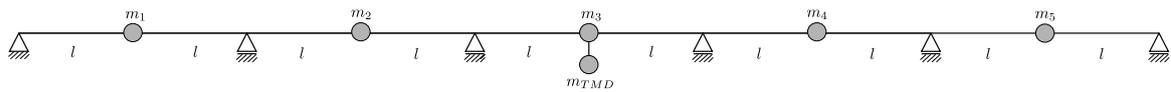


Abbildung 4.5: Positionierung des TMD an 5-Feld-Brückenabschnitt

Der TMD repräsentiert einen zusätzlichen Freiheitsgrad, daher werden Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix angepasst. Abbildung 4.6 zeigt die Kopplungen zwischen TMD und Brückenfeld. Um die folgenden Darstellungen überschaubar zu halten, wird die Adaptierung des TMD nur anhand eines 2-Feldträgers konkret angeschrieben.

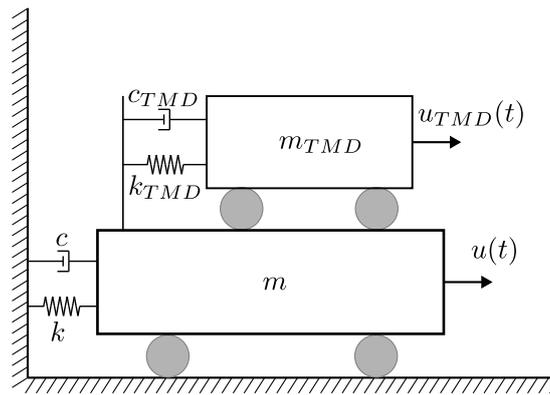


Abbildung 4.6: Kopplungen eines TMD an einer Masse

Die Ermittlung von TMD-Masse  $m_{TMD}$ , TMD-Steifigkeit  $k_{TMD}$  und TMD-Dämpfungs-konstante  $c_{TMD}$  wurde bereits in den Abschnitten 2.2.3.1 und 2.2.3.2 vorgestellt. Diese Formulierungen werden für das jeweilige Parameterset des TMD über die Matlab-Funktionen  $TMD\_DH$  bzw.  $TMD\_WR$  generiert, siehe Anhang A. Erstere liefert die TMD-Parameter nach Den Hartog für eine harmonische Anregung und zweitere jene Parameter für Anregung durch weißes Rauschen, angelehnt an Korenev.

Anschließend können die Matrizen angepasst werden und erhalten dabei einen zusätzlichen translatorischen Freiheitsgrad. Der rotatorische Freiheitsgrad des TMD kann vernachlässigt werden.

Der Verschiebungsvektor und seine Ableitungen erhalten ebenfalls einen neuen Freiheitsgrad und damit eine zusätzliche Zeile, wobei die Verschiebung des TMD, wie auch schon die Verschiebungen der bisherigen Freiheitsgrade, Absolutverschiebungen sind. Die neue translatorische Massenmatrix  $\mathbf{m}_{TMD}$  enthält damit weiterhin keine Kopplungen und bleibt eine Diagonalmatrix, da die Trägheitskraft einer Masse nur von ihrer Absolutbeschleunigung abhängt

$$\mathbf{m}_{TMD} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_{TMD} \end{bmatrix}.$$

Für die neue Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{TMD}$  wird ebenfalls ein translatorischer Freiheitsgrad in die Steifigkeitsmatrix der gesamten Brücke aus 4.1 hinzugefügt. Im Sinne der Überschaubarkeit geschieht dies an der sechsten Stelle. Die Einträge jener Brückenfeldmasse, an welcher der TMD angebracht ist, erfahren eine zusätzliche Kopplung. In diesem Fall ist das zweite Brückenfeld und damit der vierte Freiheitsgrad der Matrix

$$\mathbf{K}_{TMD} = \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 6l & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 24 & -12 & 0 & 0 & 0 & -6l & 0 & 6l & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 24 & -12 & 0 & 0 & 0 & -6l & 0 & 6l & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 24 + k_{TMD} & -12 & -k_{TMD} & 0 & 0 & -6l & 0 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6l & -6l \\ 0 & 0 & 0 & -k_{TMD} & 0 & k_{TMD} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6l & -6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 4l^2 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 0 & -6l & 0 & 0 & 0 & 2l^2 & 8l^2 & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6l & 0 & -6l & 0 & 0 & 0 & 2l^2 & 8l^2 & 2l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6l & 0 & -6l & 0 & 0 & 0 & 2l^2 & 8l^2 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6l & -6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3}$$

anzupassen. Damit entsteht eine Kopplung in der Diagonale und in den Nebendiagonalelementen, da die Federkraft von der Relativverschiebung der Massen abhängt, siehe Abbildung 4.6. Dann kann wiederum eine statische Kondensation, wie sie in Abschnitt 4.1.3 beschrieben wurde, durchgeführt werden. In der kondensierten Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{k}}_{tt}$  ist nun auch der TMD enthalten. Nachdem die Umsortierung der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{TMD}$  nach Über- und Unterbau abgeschlossen ist, kann die neue Einflussmatrix  $\boldsymbol{\iota}$  berechnet werden.

Die Kopplungen in der neuen modalen Dämpfungsmatrix  $\mathbf{c}_{TMD}$  sind analog zu jenen der Steifigkeitsmatrix, da die Dämpfungskraft sich mit der Relativgeschwindigkeit ändert

$$\mathbf{c}_{TMD} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} + c_{TMD} & -c_{TMD} \\ 0 & -c_{TMD} & c_{TMD} \end{bmatrix}.$$

Die Berechnung des effektiven Kraftvektors  $\mathbf{p}_{eff}$  und die Brückensimulation erfolgt nun mit den neuen Größen wie in Abschnitt 4.2 beschrieben.

Ergebnisse in Form von dynamischen Auslenkungen der einzelnen Brückenfelder ohne bzw. mit TMD sind im folgenden Kapitel 5 abgebildet.

# Kapitel 5

## Ergebnisse

Anhand der in Kapitel 3 vorgestellten Brückenabschnitte werden Erdbeben- und harmonische Mehrpunktanregung aus Abschnitt 4.2 mit den in Abschnitt 2.2.3 angeführten TMD-Parametern analysiert. Abgebildet wird die dynamische Auslenkung der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_n$ .

Wie in Abschnitt 4.1.4 erwähnt, werden die Berechnungen sowohl mit einem  $\zeta$  von 5% nach Norm für Stahlbetonbrücken als auch mit einem  $\zeta$  von 2%, wie es etwa für Stahlbau empfohlen wird, durchgeführt. Dieser Vorgang soll den Einfluss der vorhandenen Strukturdämpfung zur Anschauung bringen.

Die Ergebnisse zur Mehrpunktanregung durch Erdbeben sind in den Abschnitten 5.1.1 und 5.2.1 abgebildet. Jene unter harmonischer Anregung sind in den Abschnitten 5.1.2 und 5.2.2 zu sehen.

### 5.1 2-Feld-Brückentragwerke

Die Achsen  $u_1$  und  $u_2$  in den Abbildungen 5.1 bis 5.8 beschreiben die dynamischen Auslenkungen der beiden Brückenfelder des 2-Feldträgers. Der TMD ist, wie in Abbildung 4.4 skizziert, am zweiten Feld befestigt.

#### 5.1.1 Auslenkung unter seismischer Mehrpunktanregung

##### 5.1.1.1 Strukturdämpfung $\zeta = 5\%$

Die Auslenkung – Zeit Diagramme in 5.1 und 5.2 zeigen das Verhalten des Überbaus mit einer Strukturdämpfung von 5% unter seismischer Mehrpunktanregung. Der blaue Graph gibt die Auslenkungen der Brückenfelder ohne TMD wieder. In Grafik 5.1 ist in Orange die Wirkung des TMD mit Parametern für harmonische Anregung nach Den Hartog abgebildet (DH). Grafik 5.2 zeigt in Orange die Wirkung des TMD für weißes Rauschen, angelehnt an Korenev (WR).

Die maximalen Auslenkungen beider Brückenfelder haben eine Größenordnung von 2 bis 2,5cm. Mit dem in Grafik 5.2 verwendeten Parameterset WR werden die großen

Peaks in den ersten etwa 7 Sekunden etwas mehr reduziert als mit dem Parameterset DH aus Grafik 5.1.

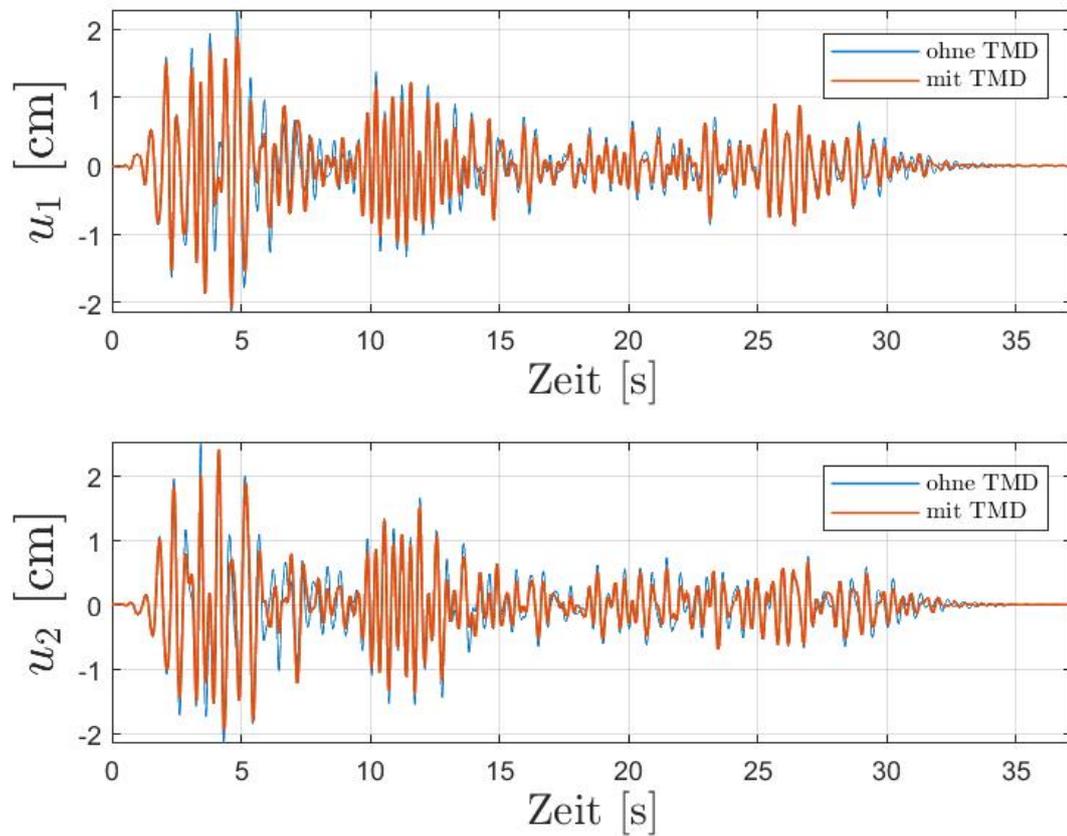


Abbildung 5.1: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  und  $u_2$  unter Erdbebenanregung –  $\zeta = 5\%$  – TMD nach Den Hartog (DH)

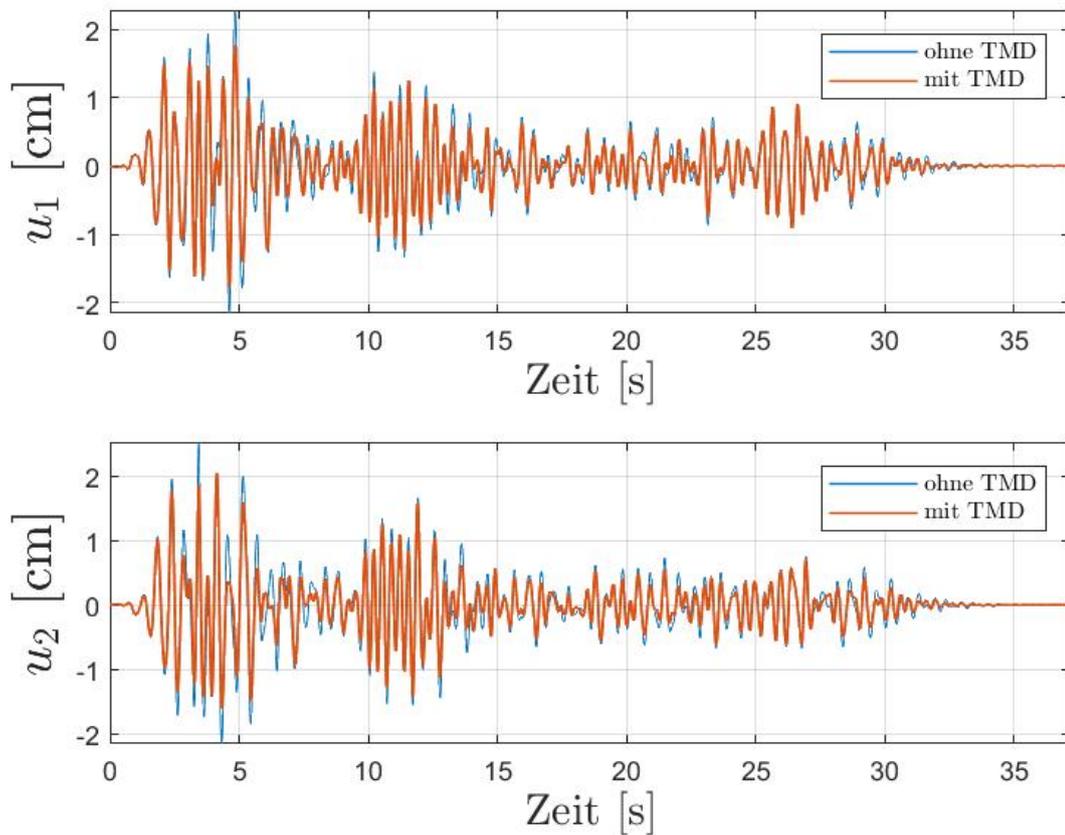


Abbildung 5.2: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  und  $u_2$  unter Erdbeben-anregung –  $\zeta = 5\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR)

#### 5.1.1.2 Reduzierte Strukturdämpfung $\zeta = 2\%$

Die Auslenkung – Zeit Diagramme in 5.3 und 5.4 zeigen nun das Verhalten des Überbaus mit einer reduzierten Strukturdämpfung von 2%. Der blaue Graph gibt wiederum die Auslenkungen der Brückenfelder ohne TMD wieder, während in Orange die Graphen mit TMD darstellt sind. Dabei ist das Parameterset DH in Grafik 5.3 und das Parameterset WR in Grafik 5.4 abgebildet.

Mit reduzierter Strukturdämpfung haben sich die maximalen Auslenkungen beider Brückenfelder auf etwa 3 bis 3,5cm erhöht. Mit dem in Grafik 5.4 verwendeten Parameterset WR zeigen die großen Peaks in den ersten etwa 7 Sekunden wiederum eine etwas deutlichere Reduktion als mit dem Parameterset DH aus Grafik 5.3.

Die Auslenkungen mit TMD haben sich durch die verringerte Strukturdämpfung etwa im gleichen Maße erhöht, wie die Auslenkungen ohne TMD. Qualitativ ist demnach keine Verbesserung in der Wirksamkeit eines TMDs zu erkennen.

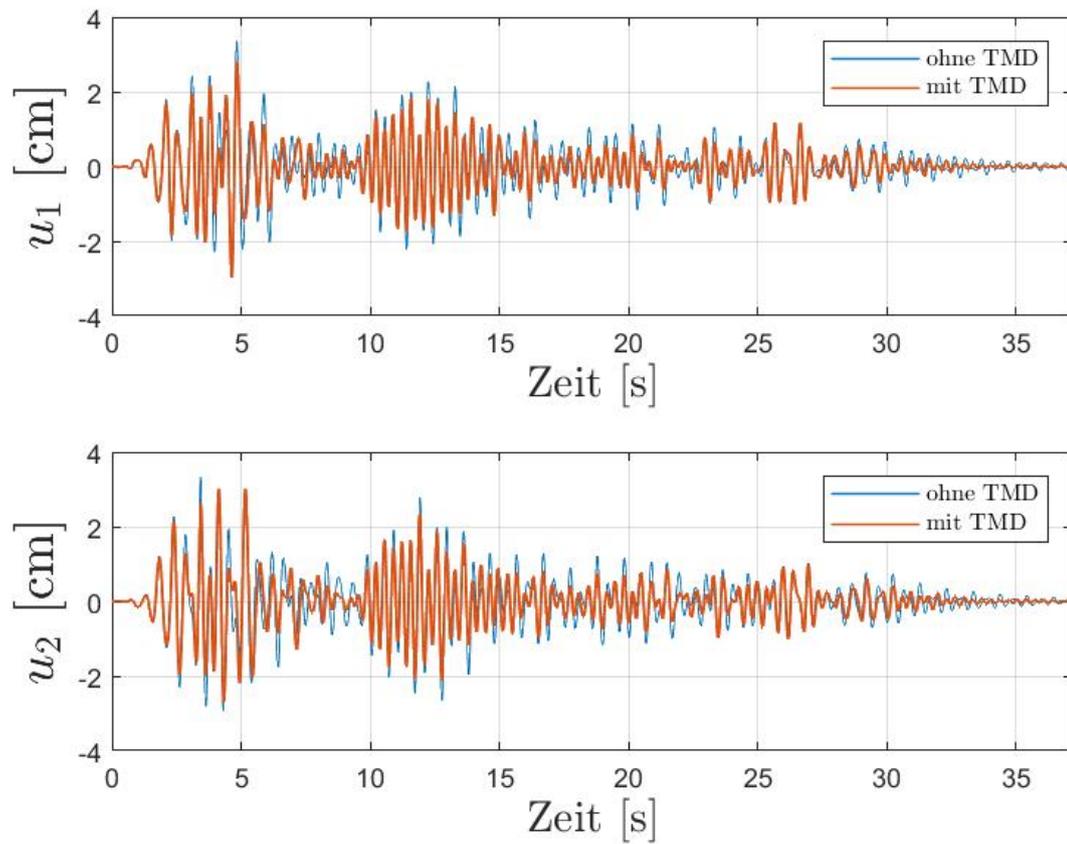


Abbildung 5.3: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  und  $u_2$  unter Erdbebenanregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD nach Den Hartog (DH)

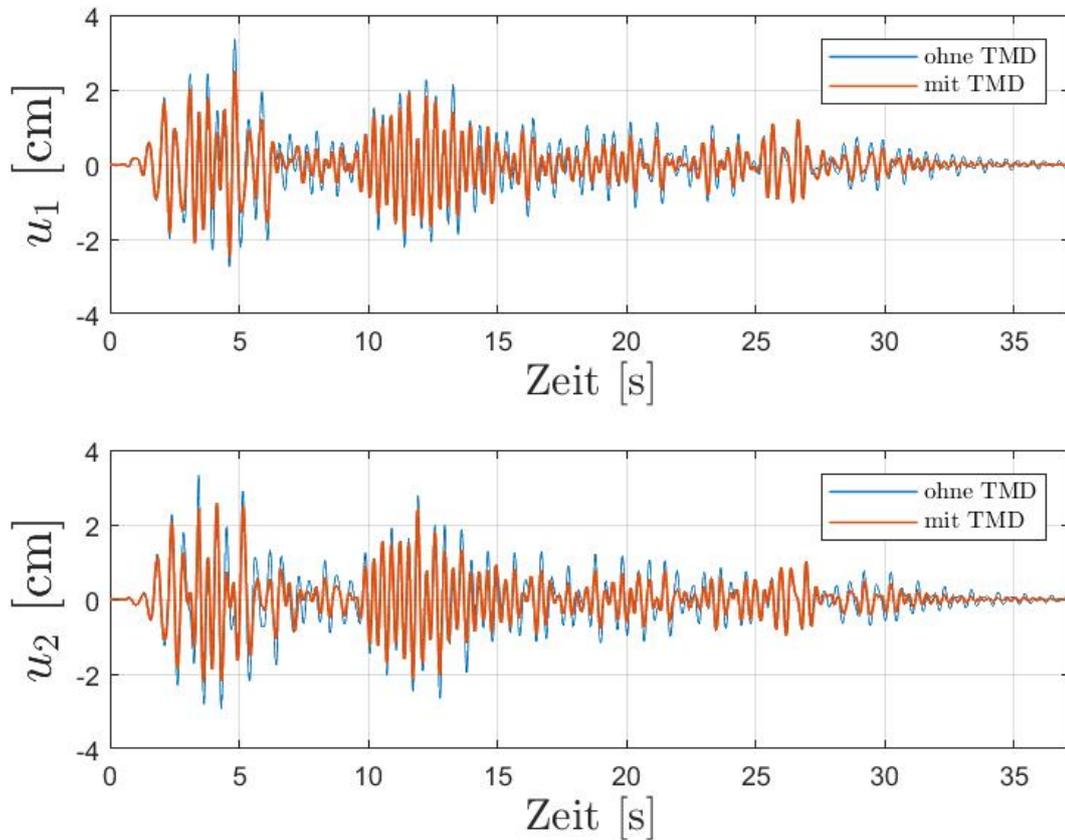


Abbildung 5.4: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  und  $u_2$  unter Erdbeben-anregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR)

## 5.1.2 Auslenkung unter harmonischer Mehrpunktanregung

### 5.1.2.1 Strukturdämpfung $\zeta = 5\%$

Die Auslenkung – Zeit Diagramme in 5.1 und 5.2 zeigen das Verhalten des Überbaus mit einer Strukturdämpfung von 5% unter harmonischer Mehrpunktanregung. Der blaue Graph gibt die Auslenkungen der Brückenfelder ohne TMD wieder. In Grafik 5.5 ist in Orange die Wirkung des TMD mit Parametern für harmonische Anregung nach Den Hartog abgebildet (DH). Grafik 5.6 zeigt in Orange die Wirkung des TMD für weißes Rauschen, angelehnt an Korenev (WR).

Die maximalen Auslenkungen des ersten Brückenfeldes haben eine Größenordnung von 1 bis 1,5cm. Jene des zweiten Feldes erreichen fast 2cm. Außerdem zeigen die Graphen im ersten Feld zu Beginn und am Ende des Signals deutliche Peaks.

Das in Grafik 5.5 verwendete TMD-Parameterset DH reduziert die Auslenkungen

beider Felder um etwas mehr als die Hälfte. Das Parameterset WR aus Grafik 5.6 zeigt eine Reduktion von etwas weniger als der Hälfte.

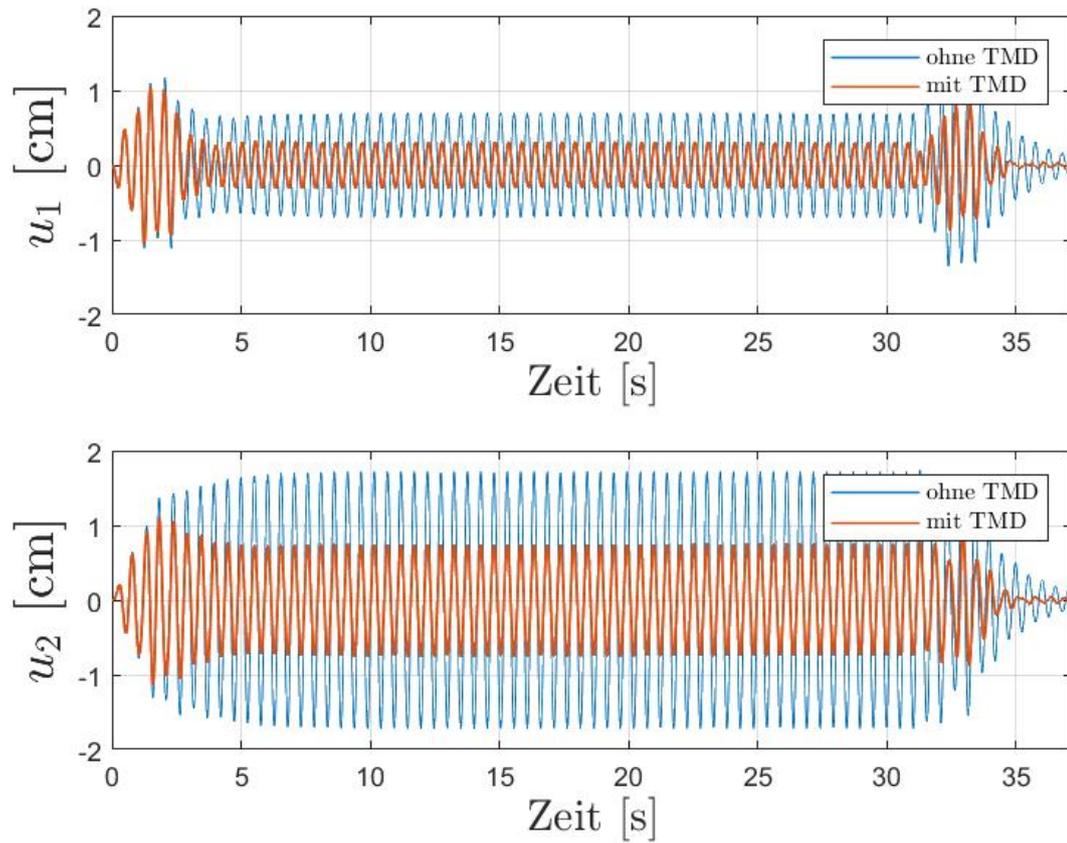


Abbildung 5.5: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  und  $u_2$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 5\%$  – TMD nach Den Hartog (DH)

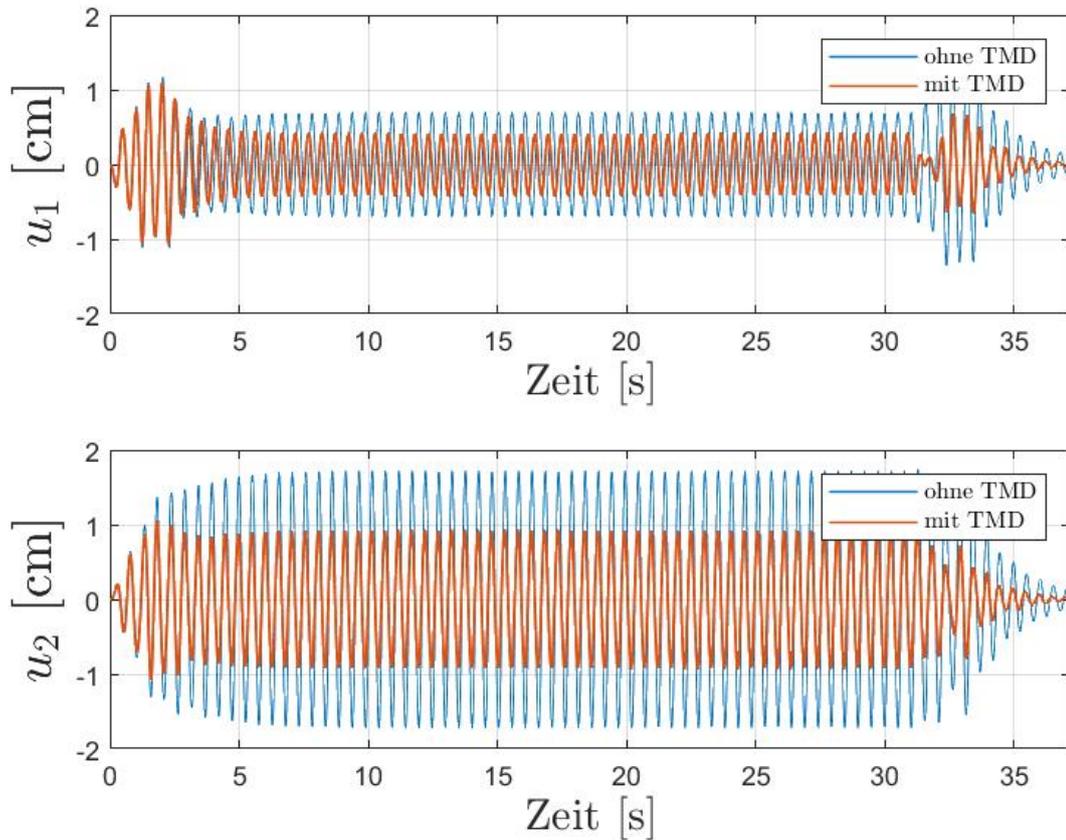


Abbildung 5.6: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  und  $u_2$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 5\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR)

### 5.1.2.2 Reduzierte Strukturdämpfung $\zeta = 2\%$

Die Auslenkung – Zeit Diagramme in 5.7 und 5.8 zeigen nun das Verhalten des Überbaus mit einer reduzierten Strukturdämpfung von 2%. Der blaue Graph gibt wiederum die Auslenkungen der Brückenfelder ohne TMD wieder, während in Orange die Graphen mit TMD darstellt sind. Dabei ist das Parameterset DH in Grafik 5.7 und das Parameterset WR in Grafik 5.8 abgebildet.

Mit reduzierter Strukturdämpfung haben sich die maximalen Auslenkungen des ersten Feldes auf etwa 2,5cm erhöht. Die Auslenkungen des zweiten Feldes sind auf etwa 3,5cm angewachsen.

Bei verringerter Strukturdämpfung zeigt sich nun eine deutlich verbesserte Effektivität des TMD. Das Verhältnis zwischen der Auslenkung ohne und mit TMD ist mit dem Parameterset DH bei etwa einem Sechstel im ersten Feld und etwa einem Viertel im zweiten Feld (siehe Grafik 5.7). Mit dem Parameterset WR ergibt sich eine etwas

geringere Reduktion von etwa einem Drittel in beiden Feldern (siehe Grafik 5.8).

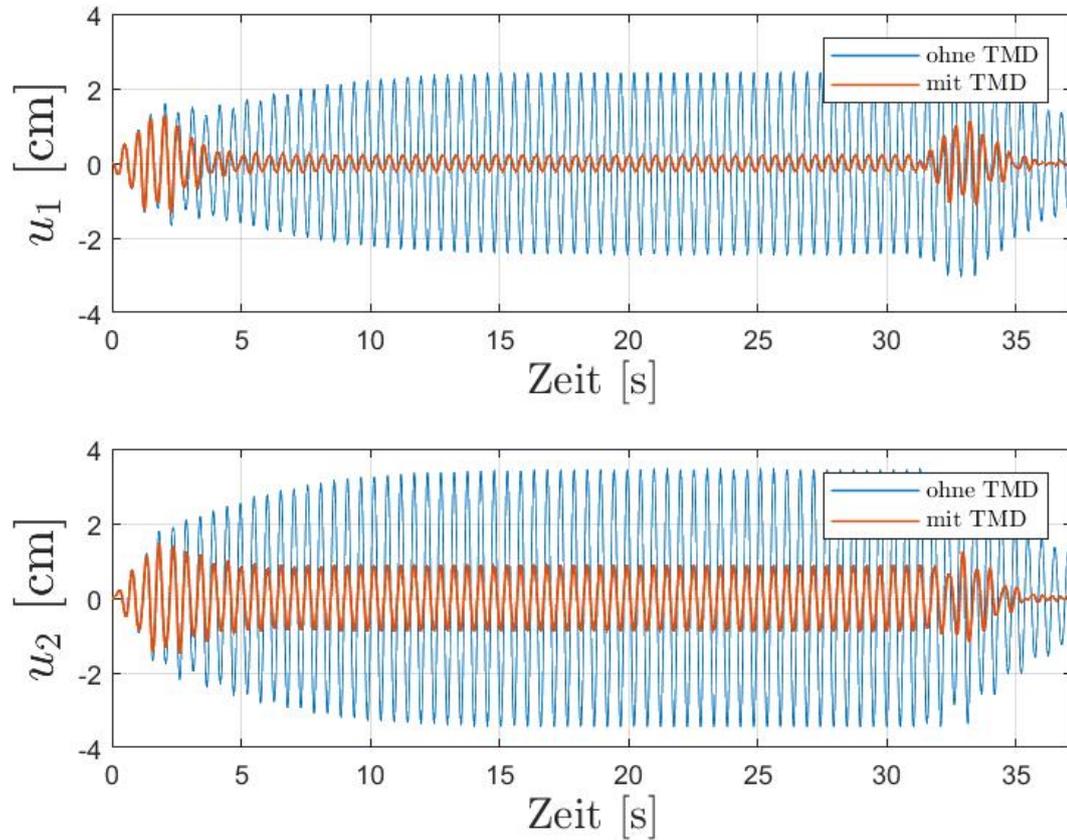


Abbildung 5.7: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  und  $u_2$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD nach Den Hartog (DH)

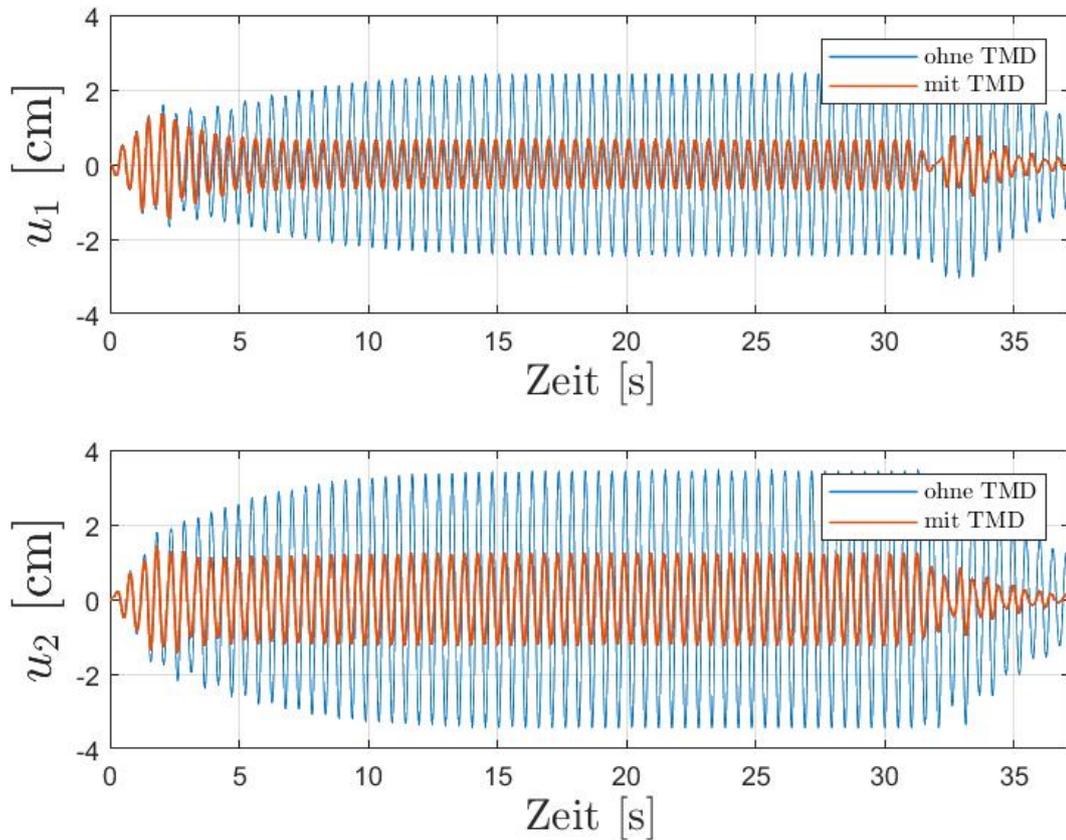


Abbildung 5.8: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  und  $u_2$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR)

## 5.2 5-Feld-Brückentragwerke

In den Diagrammen des 5-feldrigen Brückenabschnittes sind die dynamischen Auslenkungen  $u_1$  bis  $u_5$  der 5 Brückenfelder dargestellt. Der TMD ist, wie in Abbildung 4.5 skizziert, am dritten Feld befestigt.

### 5.2.1 Auslenkung unter seismischer Mehrpunktanregung

#### 5.2.1.1 Strukturdämpfung $\zeta = 5\%$

Die Auslenkung – Zeit Diagramme in 5.9 und 5.10 zeigen das Verhalten des Überbaus mit einer Strukturdämpfung von 5% unter seismischer Mehrpunktanregung. Der blaue Graph gibt die Auslenkungen der Brückenfelder ohne TMD wieder. In Grafik 5.9 ist in Orange die Wirkung des TMD mit Parametern für harmonische Anregung nach Den

Hartog abgebildet (DH). Grafik 5.10 zeigt in Orange die Wirkung des TMD für weißes Rauschen, angelehnt an Korenev (WR).

Die maximalen Auslenkungen der Brückenfelder haben eine Größenordnung von 2cm.

Bei beiden Parametersets – DH in Grafik 5.9 und WR in Grafik 5.10 – ist unter diesen Voraussetzungen kaum eine Wirkung des TMD zu erkennen. Im dritten Feld, jenes an dem der TMD angebracht ist, zeigt das Parameterset WR im Bereich der großen Peaks in den ersten etwa 7 Sekunden eine sichtbare und etwas bessere Wirkung als das Parameterset DH.

### 5.2.1.2 Reduzierte Strukturdämpfung $\zeta = 2\%$

Zum Vergleich zeigen die Auslenkung – Zeit Diagramme in 5.11 und 5.12 das Verhalten des Überbaus mit einer reduzierten Strukturdämpfung von 2%. Der blaue Graph gibt wiederum die Auslenkungen der Brückenfelder ohne TMD wieder, während in Orange die Graphen mit TMD dargestellt sind. Dabei ist das Parameterset DH in Grafik 5.11 und das Parameterset WR in Grafik 5.12 abgebildet.

Mit reduzierter Strukturdämpfung haben sich die maximalen Auslenkungen der Brückenfelder auf etwa 2,5cm erhöht. Mit dem in Grafik 5.4 verwendeten Parameterset WR zeigen die großen Peaks in den ersten etwa 7 Sekunden wiederum eine etwas deutlichere Reduktion als mit dem Parameterset DH aus Grafik 5.3.

Wiederum ist das dritte Feld jenes, an dem sich die Wirkung des TMD am ehesten zeigt, jedoch auf geringem Niveau.

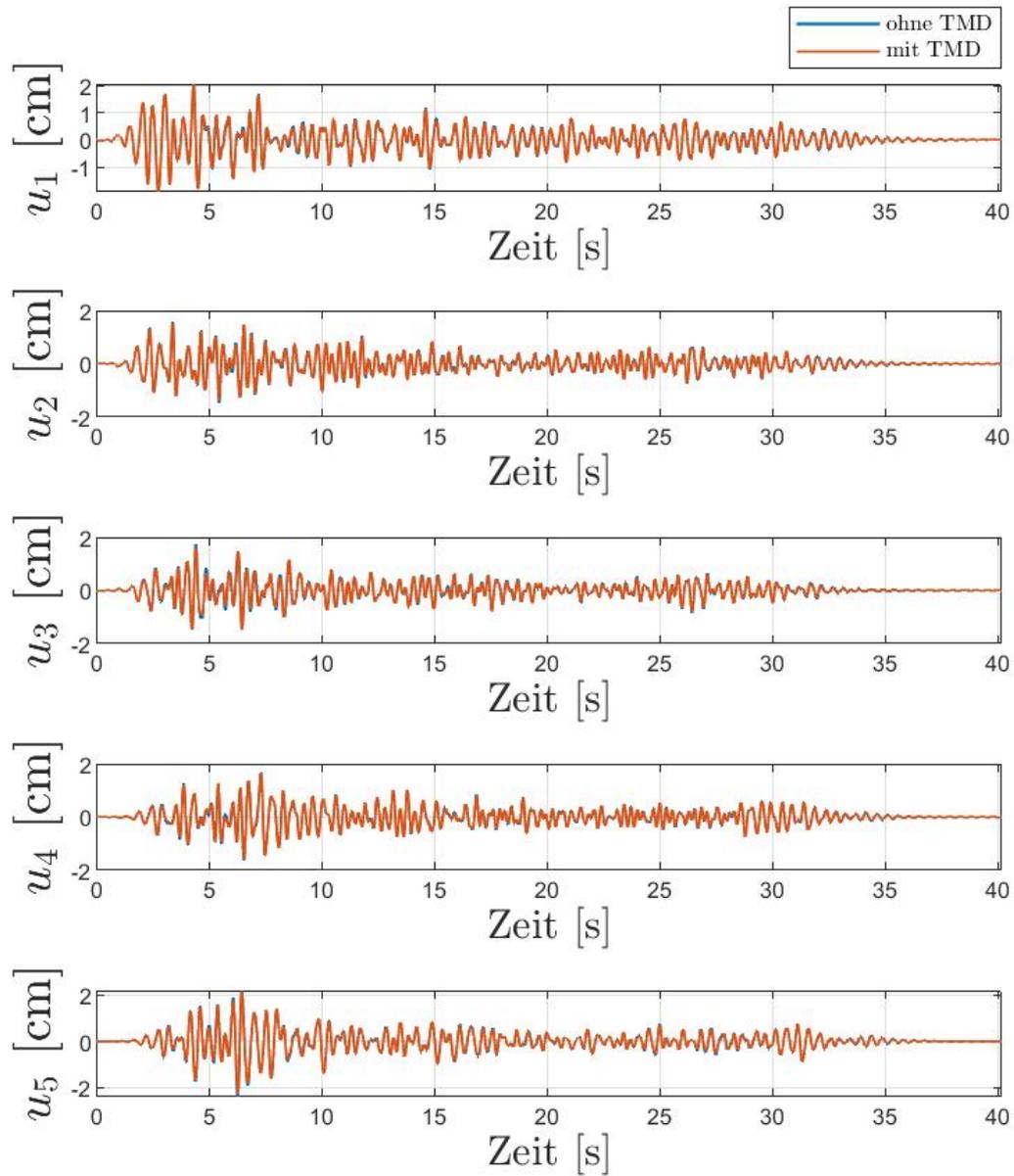


Abbildung 5.9: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter Erdbebenanregung –  $\zeta = 5\%$  – TMD nach Den Hartog (DH)

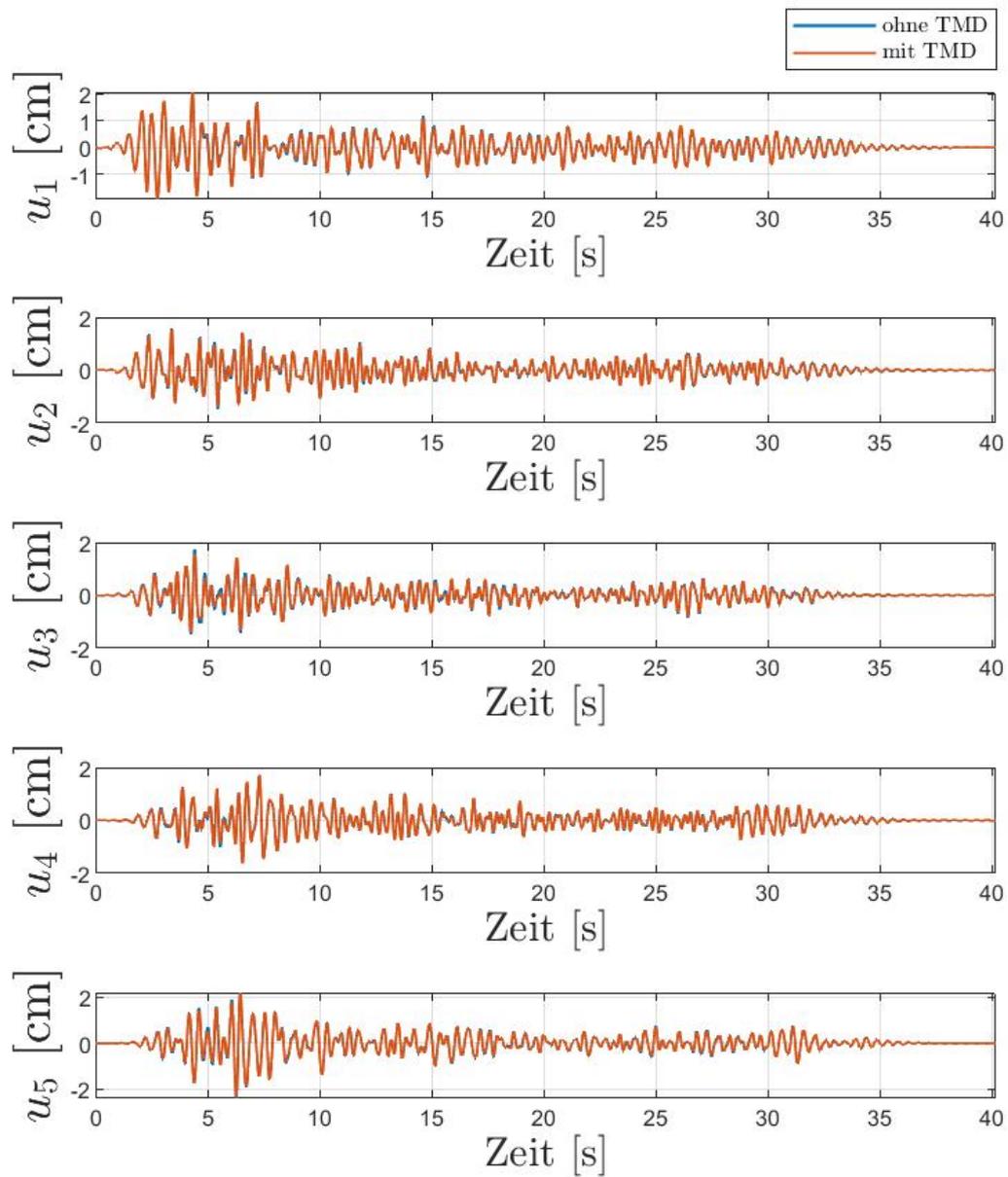


Abbildung 5.10: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter Erdbebenanregung –  $\zeta = 5\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR)

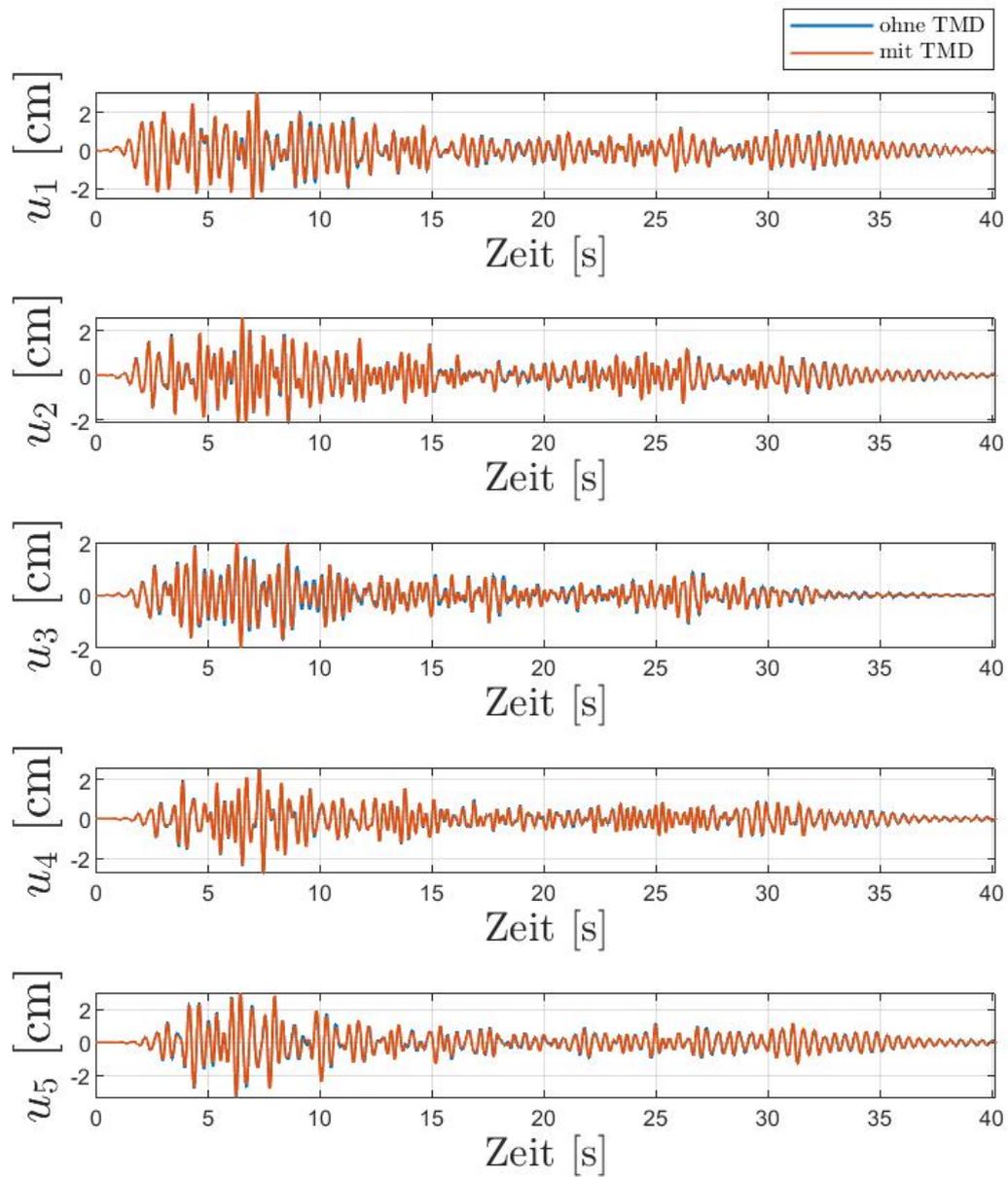


Abbildung 5.11: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter Erdbebenanregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD nach Den Hartog (DH)

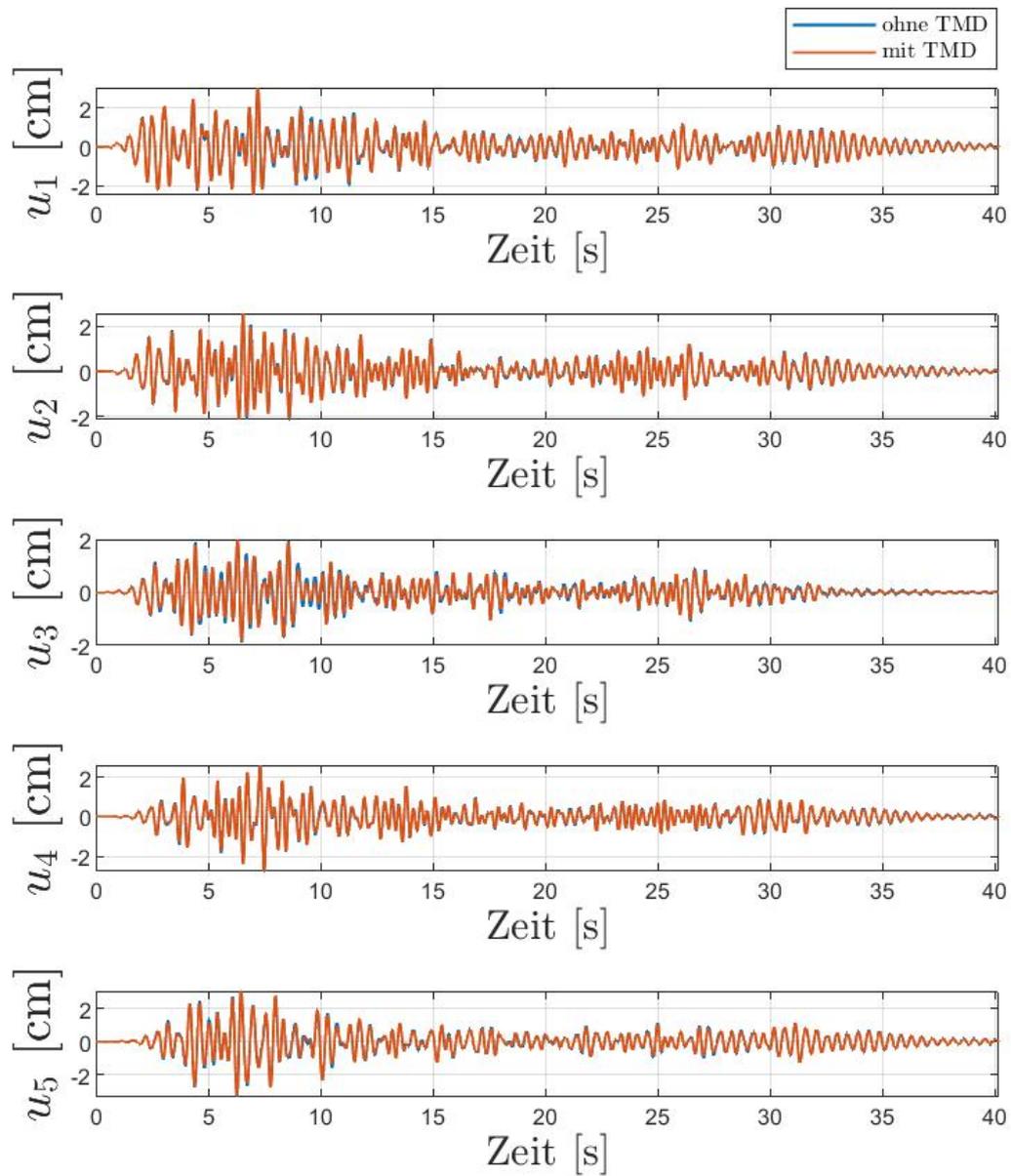


Abbildung 5.12: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter Erdbebenanregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR)

## 5.2.2 Auslenkung unter harmonischer Mehrpunktanregung

### 5.2.2.1 Strukturdämpfung $\zeta = 5\%$

Die Auslenkung – Zeit Diagramme in 5.13 und 5.14 zeigen das Verhalten des Überbaus mit einer Strukturdämpfung von 5% unter harmonischer Mehrpunktanregung. Der blaue Graph gibt die Auslenkungen der Brückenfelder ohne TMD wieder. In Grafik 5.13 ist in Orange die Wirkung des TMD mit Parametern für harmonische Anregung nach Den Hartog abgebildet (DH). Grafik 5.14 zeigt in Orange die Wirkung des TMD für weißes Rauschen, angelehnt an Korenev (WR).

Die maximalen Auslenkungen sind im ersten Brückenfeld in einer Größenordnung von 2cm. Die nachfolgenden vier Felder zeigen eine geringere Auslenkung von etwa 1cm. Bei harmonischer Anregung ist nun mit beiden TMD-Parametersets eine Wirkung vorhanden. Diese zeigt sich vorrangig im dritten und vierten Feld. Hier zeigen die in Grafik 5.14 verwendeten TMD-Parameterset WR eine Reduktion der Auslenkungen von etwa einem Drittel. Damit fällt die Reduktion etwas größer aus als mit dem Parameterset DH in Grafik 5.13.

### 5.2.2.2 Reduzierte Strukturdämpfung $\zeta = 2\%$

Zum Vergleich zeigen die Auslenkung – Zeit Diagramme in 5.15 und 5.16 das Verhalten des Überbaus mit einer reduzierten Strukturdämpfung von 2%. Der blaue Graph gibt wiederum die Auslenkungen der Brückenfelder ohne TMD wieder, während in Orange die Graphen mit TMD dargestellt sind. Dabei ist das Parameterset DH in Grafik 5.15 und das Parameterset WR in Grafik 5.16 abgebildet.

Mit reduzierter Strukturdämpfung haben sich die maximalen Auslenkungen des ersten Feldes auf etwa 2,5cm erhöht. Das fünfte Feld wird um etwa 1cm ausgelenkt. Zwischen dem ersten und letzten Feld verringert sich die Auslenkung kontinuierlich von Feld zu Feld.

Bei verringerter Strukturdämpfung zeigt sich nun eine deutlich verbesserte Effektivität des TMD. Die Reduktion zwischen der Auslenkung ohne und mit TMD ist mit dem Parameterset DH zwischen einem Drittel im ersten Feld und drei Viertel im fünften Feld (siehe Grafik 5.15). Mit dem Parameterset WR ergibt sich eine etwas geringere Reduktion von etwa einem Viertel im ersten und der Hälfte im fünften Feld (siehe Grafik 5.16).

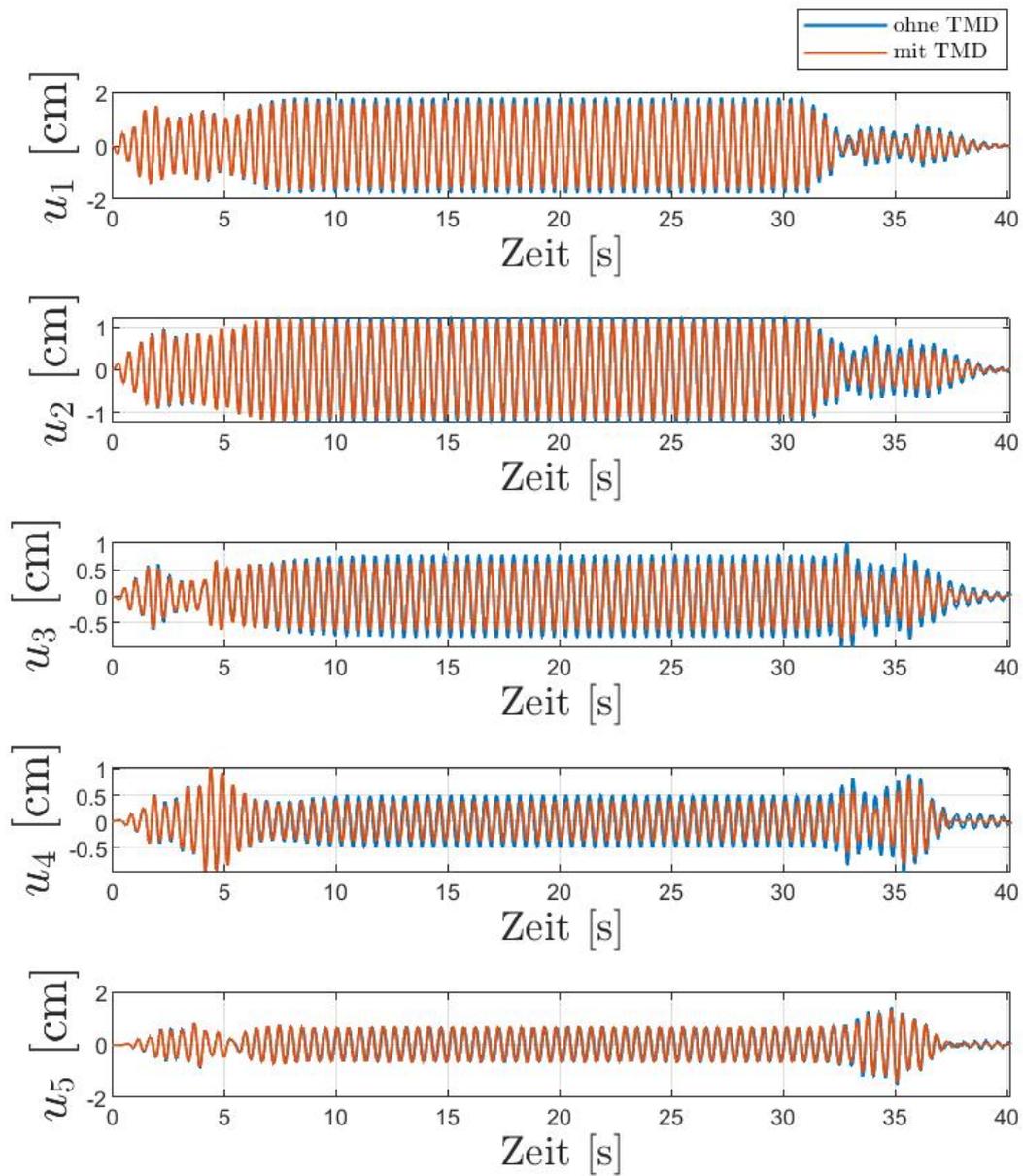


Abbildung 5.13: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 5\%$  – TMD nach Den Hartog (DH)

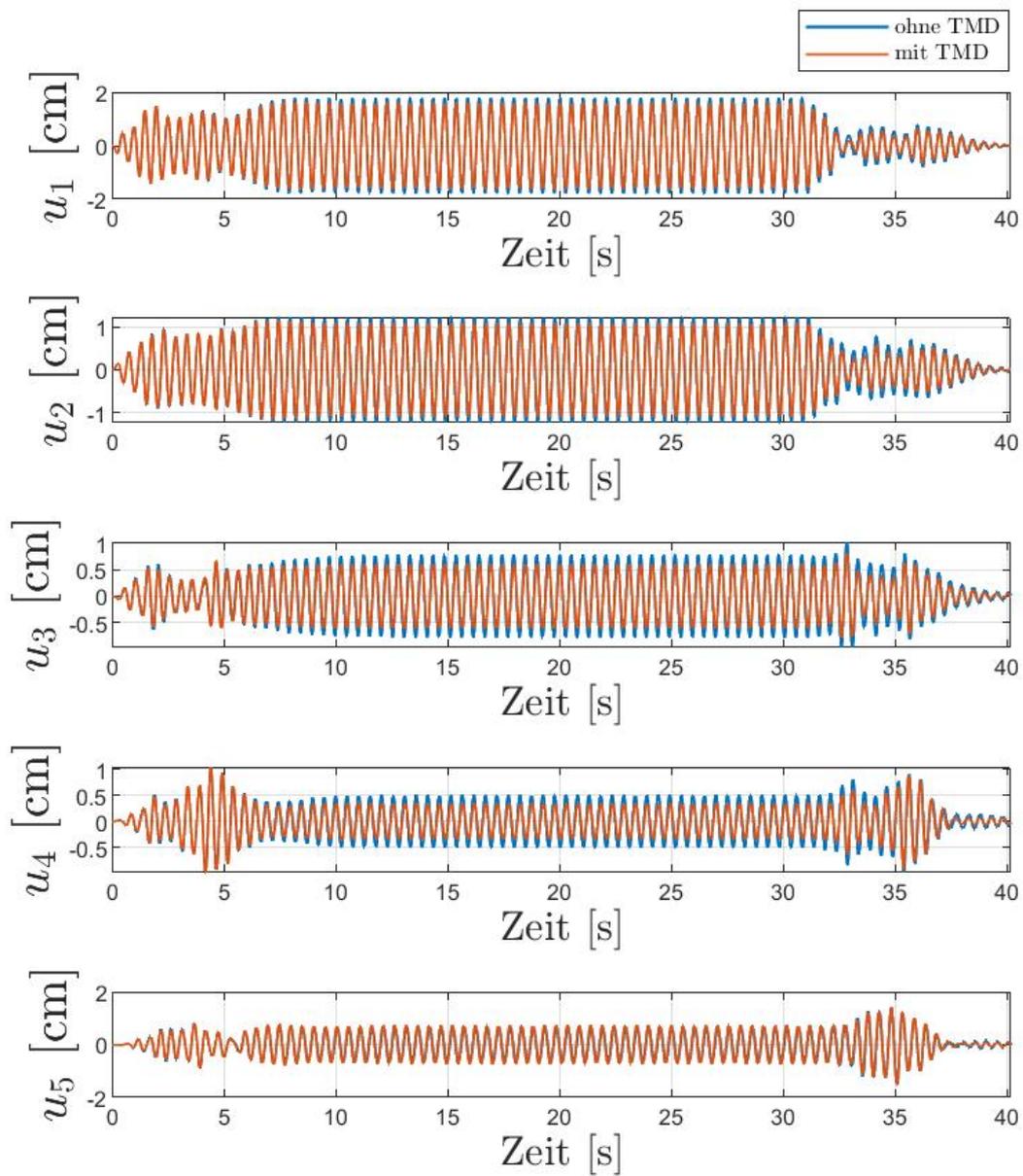


Abbildung 5.14: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 5\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR)

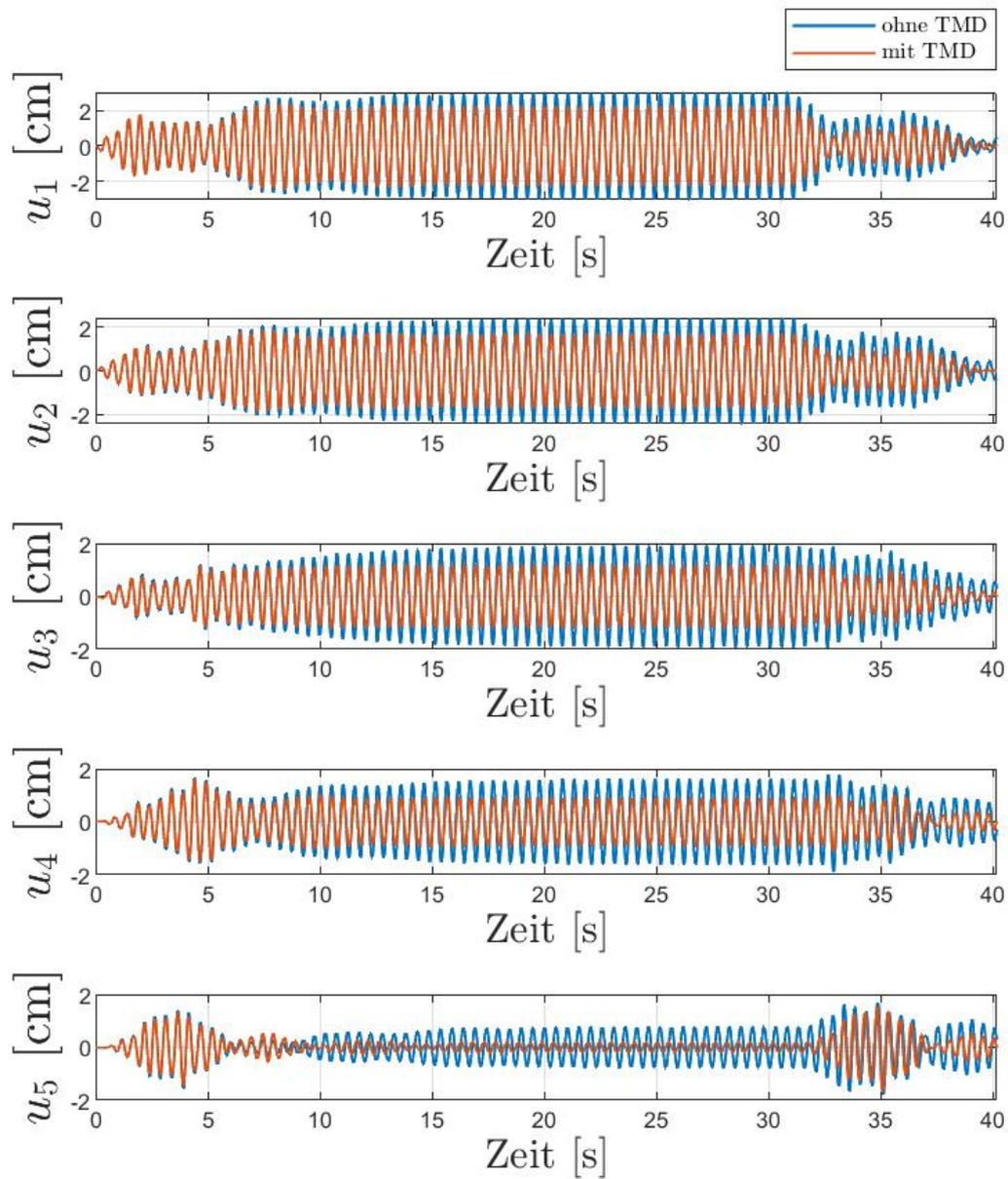


Abbildung 5.15: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD nach Den Hartog (DH)

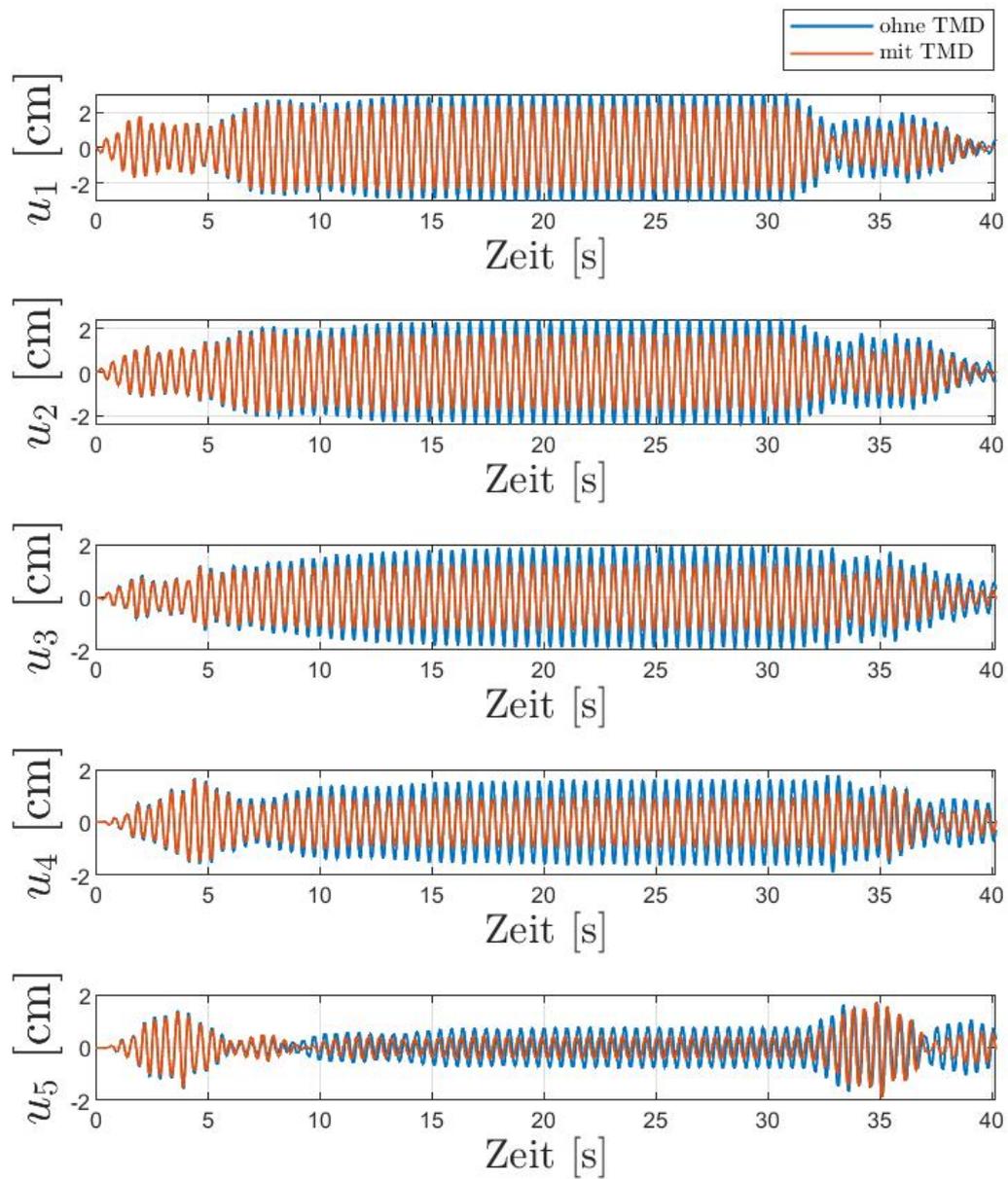


Abbildung 5.16: Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR)

### 5.3 Vergleich der Wirksamkeiten eines TMD

Bei harmonischer Anregung bringen die TMD-Parameter nach Den Hartog die gewünschten Ergebnisse und eine Reduktion der dynamischen Auslenkungen. Unter seismischer Anregung wurde in dieser Studie keine deutliche Reduktion der Auslenkungen erzielt. Es findet jedoch bei beiden Parametersets eine leichte Reduktion der Auslenkungen statt. Das Parameterset für weißes Rauschen, angelehnt an Korenev, reduziert große Peaks etwas effizienter, im Vergleich zu den TMD-Parametern nach Den Hartog.

Durch die Verringerung der Strukturdämpfung von 5% auf 2% vergrößern sich erwartungsgemäß die dynamischen Auslenkungen ohne TMD. Bei harmonischer Anregung ist klar zu erkennen, dass, bei der reduzierten Strukturdämpfung, eine effektivere TMD-Wirkung auftritt. Das Verhältnis der Auslenkungen ohne und mit TMD wird größer. Bei Erdbebenanregung ist dieser Zusammenhang nicht eindeutig, da auch die Auslenkungen mit TMD in etwa proportional zu jenen ohne TMD zunehmen.

Bei den Ergebnissen des 5-Feldträgers zeigt sich teils eine deutlich geringere Wirkung des TMD als bei dem 2-Feldträger. Eine mögliche Erklärung dafür ist, dass es mehr als einen TMD über die Brückenlänge benötigt, um Effekte zu erzielen. Diese Arbeit fokussiert sich jedoch auf die Wirkung eines passiven Dämpfungselements.

## Kapitel 6

# Zusammenfassung und Ausblick

In vorliegender Arbeit wurde das Ziel einer realitätsnahen Simulation des Lastfalls Erdbeben an Brückentragwerken verfolgt, indem Mehrpunktanregung der einzelnen Brückeneulerachsen berücksichtigt wurde. Die Simulationen haben gezeigt, dass die Adaptierung eines passiven Dämpfungselements in Form eines Tuned-Mass-Dampers auch bei Mehrpunktanregung eine Reduktion der Auslenkung der Brückenfelder bewirken kann. Bei harmonischer Anregung fällt die Reduktion der Auslenkungen erwartungsgemäß deutlicher aus als bei seismischer Anregung. Doch auch unter Erdbebenanregung konnte eine teilweise Reduktion der Auslenkungen erzielt werden. Einflussfaktoren für die Wirksamkeit des TMDs sind sowohl die vorhandene Strukturdämpfung als auch die Parametrierung des passiven Schwingungsdämpfers. Optimierungsschritte für die Wahl der TMD-Parameter für unterschiedliche Brückentragwerke unter Erdbeben-Mehrpunktanregung können weitere Erkenntnisse bringen. In Hinblick auf mehrfeldrige Tragwerke kann die Wirkung zusätzlicher TMDs untersucht werden.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Masseloser Rahmen mit konzentrierter Masse $m$ , Rahmensteifigkeit $k$ und viskosem Dämpfer unter Kraftanregung (links) bzw. Weganregung (rechts)	4
2.2	Frequenzgang eines stationären weißen Rauschens und einer seismischen Bodenbeschleunigung [13]	8
3.1	Radweg- und Fußgängerbrücke – Grundriss [8]	13
3.2	Radweg- und Fußgängerbrücke – Ansicht und Längenschnitt [8]	14
3.3	Regelquerschnitt der Vorlandbrücken aus Stahlbeton [8]	14
3.4	2-Feld-Brückenabschnitt [8]	15
3.5	5-Feld-Brückenabschnitt [8]	15
4.1	Freiheitsgrade eines idealisierten 2-Feldträgers	16
4.2	Kopplung der Steifigkeitseinflussfaktoren $k_{ij}$	18
4.3	Beschleunigung $\ddot{\mathbf{u}}_g$ , Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{u}}_g$ , Verschiebung $\mathbf{u}_g$ des Erdbebens	21
4.4	Positionierung des TMD an 2-Feld-Brückenabschnitt	21
4.5	Positionierung des TMD an 5-Feld-Brückenabschnitt	22
4.6	Kopplungen eines TMD an einer Masse	22
5.1	Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder $u_1$ und $u_2$ unter Erdbebenanregung – $\zeta = 5\%$ – TMD nach Den Hartog (DH)	25
5.2	Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder $u_1$ und $u_2$ unter Erdbebenanregung – $\zeta = 5\%$ – TMD für weißes Rauschen (WR)	26
5.3	Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder $u_1$ und $u_2$ unter Erdbebenanregung – $\zeta = 2\%$ – TMD nach Den Hartog (DH)	27
5.4	Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder $u_1$ und $u_2$ unter Erdbebenanregung – $\zeta = 2\%$ – TMD für weißes Rauschen (WR)	28
5.5	Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder $u_1$ und $u_2$ unter harmonischer Anregung – $\zeta = 5\%$ – TMD nach Den Hartog (DH)	29
5.6	Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder $u_1$ und $u_2$ unter harmonischer Anregung – $\zeta = 5\%$ – TMD für weißes Rauschen (WR)	30
5.7	Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder $u_1$ und $u_2$ unter harmonischer Anregung – $\zeta = 2\%$ – TMD nach Den Hartog (DH)	31

5.8 Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  und  $u_2$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR) . . . . . 32

5.9 Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter Erdbebenanregung –  $\zeta = 5\%$  – TMD nach Den Hartog (DH) . . . . . 34

5.10 Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter Erdbebenanregung –  $\zeta = 5\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR) . . . . . 35

5.11 Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter Erdbebenanregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD nach Den Hartog (DH) . . . . . 36

5.12 Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter Erdbebenanregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR) . . . . . 37

5.13 Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 5\%$  – TMD nach Den Hartog (DH) . . . . . 39

5.14 Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 5\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR) . . . . . 40

5.15 Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD nach Den Hartog (DH) . . . . . 41

5.16 Dynamische Auslenkungen der Brückenfelder  $u_1$  bis  $u_5$  unter harmonischer Anregung –  $\zeta = 2\%$  – TMD für weißes Rauschen (WR) . . . . . 42

# Tabellenverzeichnis

3.1	Parameter in SI-Einheiten . . . . .	14
4.1	Eigenfrequenzen $f_i$ , $i = 1, \dots, n$ der Brückentragwerke . . . . .	20

# Literaturverzeichnis

- [1] El centro earthquake page. url: <http://www.vibrationdata.com/elcentro.htm>. Accessed: 2023-02-12.
- [2] Petersen Christian and Werkle Horst. *Dynamik der Baukonstruktionen*. Springer Vieweg, 2 edition, 2017.
- [3] Watzl Daniel. *Eisenbahnbrücken unter seismischer Mehrpunkterregung – Anwendungsgrenzen und Vergleich von Softwarelösungen*. Diplomarbeit, Technische Universität Wien, 2015.
- [4] Tushar Kanti Datta. *Seismic analysis of structures*. John Wiley & Sons, 2010.
- [5] J.P. Den Hartog. *Mechanical Vibrations*. Civil, Mechanical and Other Engineering Series. Dover Publications, 1985.
- [6] EN1998-2. *Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben: Brücken*. 1998.
- [7] Lindfield George and Penny John. *Numerical Methods:Using MATLAB*. Elsevier Inc., 4 edition, 2019.
- [8] Ibbs ZT GmbH. *Ausschreibungsprojekt: Fussgänger- und Radwegbrücke über die March*. Ibbs ZT GmbH, 2018.
- [9] R. Heuer and D. Watzl. *On Multiple Support Excitation Analysis of Bridges*, pages 137–144. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [10] Chopra Anil K. *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Pearson, 5 edition, 2020.
- [11] Boris G. Korenev and Leonid M. Reznikov. *Dynamik Vibration Absorbers: Theory and Technical Applications*. John Wiley and Sons Ltd, 1 edition, 1993.
- [12] Matlab. *Matlab: Dokumentation*. Mathworks, 2022.
- [13] Christian Meinhardt, Daniel Siepe, and Peter Nawrotzki. Passive damping devices for earthquake protection of bridges and buildings. *Seismic Isolation and Protection Systems*, 2(1):35–55, 2011.

- [14] Heuer Rudolf. *Multiple Support Random Vibrations of Beam Structures*, pages 73–81. Springer International Publishing, Cham, 2019.
- [15] John R Sladek and Richard E Klingner. Effect of tuned-mass dampers on seismic response. *Journal of structural engineering*, 109(8):2004–2009, 1983.
- [16] Clough Ray W. and Penzien Joseph. *Dynamics of Structures*. Computers & Structures, Inc., 3 edition, 2003.
- [17] Hartanto Wibowo and Sri Sritharan. Effects of vertical ground acceleration on the seismic moment demand of bridge superstructure connections. *Engineering Structures*, 253:113820, 2022.

## Anhang A

# Matlab Funktionen und Skripte

### A.1 erdbebenintegration.m

```
function [x,v] = erdbebenintegration(a,dt,draw_plot)
n=size(a,2);
x=zeros(1,n);
v=zeros(1,n);

for i=1:n-1
    v(i+1)=v(i)+a(i)*dt;
    x(i+1)=x(i)+v(i)*dt;
end

t=(0:n-1)*dt;
if draw_plot
    figure;
    plot(t,a);
    xlabel("Zeit [s]", 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 17);
    hold on;
    plot(t,v);
    plot(t,x);
    grid on;
    xlim([min(t),max(t)]);
    legend(["Beschleunigung  $\ddot{u}_g$ ", "Geschwindigkeit  $\dot{u}_g$ ", ...
           "Verschiebung  $u_g$ "], 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 12);
    hold off;
end
end
```

## A.2 newmark.m

```

function [x,v,a,peff] = newmark(ag,vg,xg,Mss,Kss,Css,iota,dt)
Msg=0;
%% Konstanten vorab berechnen
gamma=0.5;
beta=0.25;
a0 = 1 / (beta * dt^2);
a1 = 1 / (beta * dt);
a2 = 1 / (2 * beta) - 1;
a3 = gamma / (beta * dt);
a4 = 1 - gamma / beta;
a5 = dt * (1 - gamma / (2 * beta));
a6 = 1 / (2 * beta) - 1;

%% Erstellen des effektiven Kraftvektors
peff = -(Mss*iota+Msg)*ag;
n = size(ag,2);
a = zeros(size(Mss,1),n);
v = zeros(size(Mss,1),n);
x = zeros(size(Mss,1),n);

%% Newmark-Integration
A = Kss + a0*Mss + a3*Css;
a(:,1)=Mss\(peff(:,1) - Css*v(:,1) - Kss*x(:,1));

for i=1:n-1
    b = peff(:,i+1)...
        + Mss*(a0*x(:,i) + a1*v(:,i) + a2*a(:,i))...
        + Css*(a3*x(:,i) - a4*v(:,i) - a5*a(:,i));
    x(:,i+1) = A\b;
    a(:,i+1) = a0*(x(:,i+1) - x(:,i)) - a1*v(:,i) - a6*a(:,i);
    v(:,i+1) = v(:,i)+(1-gamma)*dt*a(:,i)+gamma*dt*a(:,i+1);
end
end

```

## A.3 TMD\_DH.m

```

function [m_TMD,zeta_TMD,k_TMD,w_TMD] = TMD_DH(m,w)
mu=0.03;
m_TMD=m*mu;
beta=1/(1+mu);
w_TMD=beta*w;

```

```
k_TMD=w_TMD^2*m_TMD;
zeta_TMD=sqrt(3*mu/(8*(1+mu)^3))
end
```

#### A.4 TMD\_WR.m

```
function [m_TMD,zeta_TMD,k_TMD,w_TMD] = TMD_WR(m,w)
mu=0.05;
m_TMD=m*mu;
beta=0.86;
w_TMD=beta*w;
k_TMD=w_TMD^2*m_TMD;
zeta_TMD=0.13
end
```

#### A.5 brueckensimulation2feld.m

```
% Autorin: Maria Kreuzer
clc
close all;
clear all;

%% Parameter
g=9.81;
l_feld=25;
l=l_feld/2; % m
A=1.8443; % m^2
gamma=25000; % N/m^3
G=A*gamma; % N/m 42585
mg1=G/g*l; % Eigengewicht kg
mg2=8300/g*l; % Ausbaulast kg
m=(mg1+mg2); % kg
E=33000000000; % N/m^2
Iy= 0.1017; % m^4
Iz= 1.694; % m^4
EI=E*Iy; % N/m^2
zeta=0.05; % Lehr'sches Dämpfungsmaß Stahlbeton (EN1998-2)

% Massenmatrix
FG_M=5;
M=zeros(FG_M,FG_M);
M(1,1)=m;
M(2,2)=m;
```

```

Mss= M(1:2,1:2); % s=Überbau g=Unterbau
% Steifigkeitsmatrix
K= [ 12  -12  0  0  0    6*1  6*1  0  0    0;
     -12  24  -12  0  0   -6*1  0  6*1  0  0;
      0  -12  24 -12  0    0  -6*1  0  6*1  0;
      0  0  -12  24 -12    0  0  -6*1  0  6*1;
      0  0  0  -12  12    0  0  0  -6*1 -6*1;
     6*1 -6*1  0  0  0    4*1^2 2*1^2 0  0    0;
     6*1  0  -6*1  0  0    2*1^2 8*1^2 2*1^2 0    0;
      0  6*1  0  -6*1  0    0  2*1^2 8*1^2 2*1^2 0;
      0  0  6*1  0  -6*1    0  0  2*1^2 8*1^2 2*1^2;
      0  0  0  6*1 -6*1    0  0  0  2*1^2 4*1^2 ] * EI/l^3;

%% Statische Kondensation
Ktt=K(1:5,1:5); % t=translatorisch 0=rotatorisch
Kt0=K(1:5,6:10);
K0t=K(6:10,1:5);
K00=K(6:10,6:10);
Ktt_hat=Ktt-Kt0*(K00\K0t); % kondensierte Steifigkeitsmatrix

%% Einflussmatrix berechnen
% tauschen der Zeilen und Spalten
K1=zeros(size(Ktt_hat));
K1(1,:)=Ktt_hat(2,:);
K1(2,:)=Ktt_hat(4,:);
K1(3,:)=Ktt_hat(1,:);
K1(4,:)=Ktt_hat(3,:);
K1(5,:)=Ktt_hat(5,:);
K2=zeros(size(Ktt_hat));
K2(:,1)=K1(:,2);
K2(:,2)=K1(:,4);
K2(:,3)=K1(:,1);
K2(:,4)=K1(:,3);
K2(:,5)=K1(:,5);
Kss= K2(1:2,1:2);
Ksg= K2(1:2,3:5);
Kgs= K2(3:5,1:2);
Kgg= K2(3:5,3:5);
iota = -Kss\Ksg; % Einflussmatrix
Kss=0.5*(Kss+Kss');

%% Modalanalyse und Dämpfungsmatrix
% Eigenkreisfrequenzen (Eigenwerte D) und Eigenformen (Eigenvektoren V)

```

```

[V,D] = eig(Kss, Mss);
w=sqrt(diag(D)); % Extrahieren der Diagonalelemente
freq=w/2/pi;
C_tilde=2*zeta*diag(w);
C=inv(V')*C_tilde*inv(V);
Css=C;

%% Erdbeben einlesen und integrieren
% Einlesen der Beschleunigung Elcentro
elcentro=dlmread('elcentro.txt');
% Einlesen eines Erdbebens
t=elcentro(:,1)'; % Extrahieren der Zeit (+transponieren)
a=elcentro(:,2)'; % Extrahieren der Beschleunigung (+transponieren)
dt = (t(1,2)-t(1,1));
[x,v] = erdbebenintegration(a,dt,false); % true erzeugt Graphik

% Harmonische Anregung (min(w)) überschreibt Erdbeben
a=sin(min(w)*t); v=-cos(min(w)*t)/(min(w)); x=-sin(min(w)*t)/(min(w))^2;

%% Mehrpunktanregung
vec0=zeros(1,50); % 0,02*50=1sek
vec00=zeros(1,200); % Nachlaufzeit
ag=[a vec0 vec0 vec00;
    vec0 a vec0 vec00;
    vec0 vec0 a vec00];
vg=[v vec0 vec0 vec00;
    vec0 v vec0 vec00;
    vec0 vec0 v vec00];
xg=[x vec0 vec0 vec00;
    vec0 x vec0 vec00;
    vec0 vec0 x vec00];

%% Simulation Brückendynamik
[x,v,a,peff] = newmark(ag,vg,xg,Mss,Kss,Css,iota,dt);

%% TUNED-MASS-DAMPER
[m_TMD,zeta_TMD,k_TMD,w_TMD]=...
    TMD_WR(m,min(w)); % Einstellen TMD-Parameter (DH oder WR)
c_TMD=2*zeta_TMD*w_TMD*m_TMD;

%% TMD einbauen
Mss_TMD=zeros(3,3);
Mss_TMD(1:2,1:2)=Mss;

```

```

Mss_TMD(3,3)=m_TMD;
Css_TMD=zeros(3,3);
Css_TMD(1:2,1:2)=Css;
Css_TMD(2,2)=Css(2,2)+c_TMD;
Css_TMD(3,3)=c_TMD;
Css_TMD(2,3)=-c_TMD;
Css_TMD(3,2)=-c_TMD;
K_TMD=zeros(11,11);
K_TMD(1:5,1:5)=Ktt;
K_TMD(1:5,7:11)=Kt0;
K_TMD(7:11,1:5)=K0t;
K_TMD(7:11,7:11)=K00;
K_TMD(4,4)=Ktt(4,4)+k_TMD;
K_TMD(6,6)=k_TMD;
K_TMD(4,6)=-k_TMD;
K_TMD(6,4)=-k_TMD;
Ktt_TMD=K_TMD(1:6,1:6);
Kt0_TMD=K_TMD(1:6,7:11);
K0t_TMD=K_TMD(7:11,1:6);
K00_TMD=K_TMD(7:11,7:11);
Ktt_hat_TMD=Ktt_TMD-Kt0_TMD*(K00_TMD\K0t_TMD);

%% Einflussmatrix mit TMD
K1_TMD=zeros(size(Ktt_hat_TMD));
K1_TMD(1,:)=Ktt_hat_TMD(2,:);
K1_TMD(2,:)=Ktt_hat_TMD(4,:);
K1_TMD(3,:)=Ktt_hat_TMD(6,:);
K1_TMD(4,:)=Ktt_hat_TMD(1,:);
K1_TMD(5,:)=Ktt_hat_TMD(3,:);
K1_TMD(6,:)=Ktt_hat_TMD(5,:);
K2_TMD=zeros(size(Ktt_hat_TMD));
K2_TMD(:,1)=K1_TMD(:,2);
K2_TMD(:,2)=K1_TMD(:,4);
K2_TMD(:,3)=K1_TMD(:,6);
K2_TMD(:,4)=K1_TMD(:,1);
K2_TMD(:,5)=K1_TMD(:,3);
K2_TMD(:,6)=K1_TMD(:,5);
Kss_TMD=K2_TMD(1:3,1:3);
Ksg_TMD=K2_TMD(1:3,4:6);
Kgs_TMD=K2_TMD(4:6,1:3);
Kgg_TMD=K2_TMD(4:6,4:6);
iota_TMD = -Kss_TMD\Ksg_TMD;

```

```

%% Simulation mit TMD
[x_TMD,v_TMD,a_TMD,peff_TMD] = ...
    newmark(ag , vg , xg , Mss_TMD,Kss_TMD,Css_TMD,iota_TMD , dt );

%% Resultat anzeigen
n = size(x, 2);
t=(0:n-1)*dt;
n=2;

figure;
tiledlayout(n, 1);
for i=1:n
    nexttile;
    plot(t, 100*x(i,:), 'LineWidth', 0.7);
    hold on;      plot(t, 100*x_TMD(i, :), 'LineWidth', 0.8);
    hold off;
    xlabel("Zeit [s]", 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 15);
    ylabel("$u_" + num2str(i) + "$ [cm]", 'Interpreter', 'latex', ...
        'FontSize', 18);
    legend('ohne TMD', 'mit TMD', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 8);
    xlim([min(t),max(t)]);
    ylim([-4,4]);
    grid on;
    hold on
end

```

## A.6 brueckensimulation5feld.m

```

% Autorin: Maria Kreuzer
clc
close all;
clear all;

%% Parameter
g=9.81;
l_feld=25;
l=l_feld/2; % m
A=1.8443; % m^2
gamma=25000; % N/m^3
G=A*gamma; % N/m 42585
mg1=G/g*l; % Eigengewicht kg
mg2=8300/g*l; % Ausbaulast kg
m=(mg1+mg2); % kg

```

```

E=33000000000; % N/m^2
Iy= 0.1017; % m^4
Iz= 1.694; % m^4
EI=E*Iy; % N/m^2
zeta=0.05; % Lehr'sches Dämpfungsmaß Stahlbeton (EN1998-2)

% Massenmatrix
FG_M=5;
M=zeros(FG_M,FG_M);
M(1,1)=m;
M(2,2)=m;
Mss= M(1:2,1:2); % s=Überbau g=Unterbau
% Steifigkeitsmatrix
K= [ 12  -12  0  0  0    6*1  6*1  0  0    0;
     -12  24  -12  0  0   -6*1  0  6*1  0  0;
      0  -12  24  -12  0    0  -6*1  0  6*1  0;
      0  0  -12  24  -12    0  0  -6*1  0  6*1;
      0  0  0  -12  12    0  0  0  -6*1  -6*1;
     6*1  -6*1  0  0  0    4*1^2  2*1^2  0  0  0;
     6*1  0  -6*1  0  0    2*1^2  8*1^2  2*1^2  0  0;
      0  6*1  0  -6*1  0    0  2*1^2  8*1^2  2*1^2  0;
      0  0  6*1  0  -6*1    0  0  2*1^2  8*1^2  2*1^2;
      0  0  0  6*1  -6*1    0  0  0  2*1^2  4*1^2 ] * EI/l^3;

%% Statische Kondensation
Ktt=K(1:5,1:5); % t=translatorisch 0=rotatorisch
Kt0=K(1:5,6:10);
K0t=K(6:10,1:5);
K00=K(6:10,6:10);
Ktt_hat=Ktt-Kt0*(K00\K0t); % kondensierte Steifigkeitsmatrix

%% Einflussmatrix berechnen
% tauschen der Zeilen und Spalten
K1=zeros(size(Ktt_hat));
K1(1,:)=Ktt_hat(2,:);
K1(2,:)=Ktt_hat(4,:);
K1(3,:)=Ktt_hat(1,:);
K1(4,:)=Ktt_hat(3,:);
K1(5,:)=Ktt_hat(5,:);
K2=zeros(size(Ktt_hat));
K2(:,1)=K1(:,2);
K2(:,2)=K1(:,4);
K2(:,3)=K1(:,1);

```

```

K2(:,4)=K1(:,3);
K2(:,5)=K1(:,5);
Kss= K2(1:2,1:2);
Ksg= K2(1:2,3:5);
Kgs= K2(3:5,1:2);
Kgg= K2(3:5,3:5);
iota = -Kss\Ksg; % Einflussmatrix
Kss=0.5*(Kss+Kss');

%% Modalanalyse und Dämpfungsmatrix
% Eigenkreisfrequenzen (Eigenwerte D) und Eigenformen (Eigenvektoren V)
[V,D] = eig(Kss, Mss);
w=sqrt(diag(D)); % Extrahieren der Diagonalelemente
freq=w/2/pi;
C_tilde=2*zeta*diag(w);
C=inv(V')*C_tilde*inv(V);
Css=C;

%% Erdbeben einlesen und integrieren
% Einlesen der Beschleunigung Elcentro
elcentro=dlmread('elcentro.txt'); % Einlesen eines Erdbebens
t=elcentro(:,1)'; % Extrahieren der Zeit (+transponieren)
a=elcentro(:,2)'; % Extrahieren der Beschleunigung (+transponieren)
dt = (t(1,2)-t(1,1));
[x,v] = erdbebenintegration(a,dt,false); % true erzeugt Graphik

% Harmonische Anregung (min(w)) überschreibt Erdbeben
a=sin(min(w)*t); v=-cos(min(w)*t)/(min(w)); x=-sin(min(w)*t)/(min(w))^2;

%% Mehrpunktanregung
vec0=zeros(1,50); % 0,02*50=1sek
vec00=zeros(1,200); % Nachlaufzeit
ag=[a vec0 vec0 vec00;
    vec0 a vec0 vec00;
    vec0 vec0 a vec00];
vg=[v vec0 vec0 vec00;
    vec0 v vec0 vec00;
    vec0 vec0 v vec00];
xg=[x vec0 vec0 vec00;
    vec0 x vec0 vec00;
    vec0 vec0 x vec00];

```

```

%% Simulation Brückendynamik
[x, v, a, peff] = newmark(ag, vg, xg, Mss, Kss, Css, iota, dt);

%% TUNED-MASS-DAMPER
[m_TMD, zeta_TMD, k_TMD, w_TMD] = ...
    TMD_WR(m, min(w)); % Einstellen TMD-Parameter (DH oder WR)
c_TMD=2*zeta_TMD*w_TMD*m_TMD;

%% TMD einbauen
Mss_TMD=zeros(3,3);
Mss_TMD(1:2,1:2)=Mss;
Mss_TMD(3,3)=m_TMD;
Css_TMD=zeros(3,3);

Css_TMD(1:2,1:2)=Css;
Css_TMD(2,2)=Css(2,2)+c_TMD;
Css_TMD(3,3)=c_TMD;
Css_TMD(2,3)=-c_TMD;
Css_TMD(3,2)=-c_TMD;

K_TMD=zeros(11,11);
K_TMD(1:5,1:5)=Ktt;
K_TMD(1:5,7:11)=Kt0;
K_TMD(7:11,1:5)=K0t;
K_TMD(7:11,7:11)=K00;
K_TMD(4,4)=Ktt(4,4)+k_TMD;
K_TMD(6,6)=k_TMD;
K_TMD(4,6)=-k_TMD;
K_TMD(6,4)=-k_TMD;

Ktt_TMD=K_TMD(1:6,1:6);
Kt0_TMD=K_TMD(1:6,7:11);
K0t_TMD=K_TMD(7:11,1:6);
K00_TMD=K_TMD(7:11,7:11);
Ktt_hat_TMD=Ktt_TMD-Kt0_TMD*(K00_TMD\K0t_TMD);

%% Einflussmatrix mit TMD
K1_TMD=zeros(size(Ktt_hat_TMD));
K1_TMD(1,:)=Ktt_hat_TMD(2,:);
K1_TMD(2,:)=Ktt_hat_TMD(4,:);
K1_TMD(3,:)=Ktt_hat_TMD(6,:);
K1_TMD(4,:)=Ktt_hat_TMD(1,:);
K1_TMD(5,:)=Ktt_hat_TMD(3,:);

```

```

K1_TMD(6,:) = Ktt_hat_TMD(5,:);

K2_TMD = zeros(size(Ktt_hat_TMD));
K2_TMD(:,1) = K1_TMD(:,2);
K2_TMD(:,2) = K1_TMD(:,4);
K2_TMD(:,3) = K1_TMD(:,6);
K2_TMD(:,4) = K1_TMD(:,1);
K2_TMD(:,5) = K1_TMD(:,3);
K2_TMD(:,6) = K1_TMD(:,5);

Kss_TMD = K2_TMD(1:3,1:3);
Ksg_TMD = K2_TMD(1:3,4:6);
Kgs_TMD = K2_TMD(4:6,1:3);
Kgg_TMD = K2_TMD(4:6,4:6);
iota_TMD = -Kss_TMD \ Ksg_TMD;

%% Simulation mit TMD
[x_TMD, v_TMD, a_TMD, peff_TMD] = ...
    newmark(ag, vg, xg, Mss_TMD, Kss_TMD, Css_TMD, iota_TMD, dt);
%% Resultat anzeigen
n = size(x, 2);
t = (0:n-1)*dt;
n=2; %size(x,1);

figure;
tiledlayout(n, 1);
for i=1:n
    nexttile;
    plot(t, 100*x(i,:), 'LineWidth', 0.7);
    hold on;
    plot(t, 100*x_TMD(i,:), 'LineWidth', 0.8);
    hold off;
    xlabel("Zeit [s]", 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 15);
    ylabel("$u_" + num2str(i) + "$ [cm]", 'Interpreter', 'latex', ...
        'FontSize', 18);
    legend('ohne TMD', 'mit TMD', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 8);
    xlim([min(t), max(t)]);
    ylim([-4, 4]);
    grid on;
    hold on
end

```