



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

D I P L O M A R B E I T

# Verallgemeinerte Panjer Rekursionen

ausgeführt am

Institut für

Stochastik und Wirtschaftsmathematik

TU Wien

unter der Anleitung von

**Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits**

durch

**Jan Hofbauer BSc.**

Matrikelnummer: 11775783

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Kombinatorik</b>	<b>6</b>
1.1	Wahrscheinlichkeitstheorie . . . . .	6
1.2	Kombinatorik . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Eine Einführung in die Schadenmodellierung</b>	<b>10</b>
2.1	Modellierung der Einzelschäden . . . . .	11
2.1.1	Die Gammaverteilung . . . . .	11
2.1.2	Die Exponentialverteilung . . . . .	11
2.1.3	Die Weibullverteilung . . . . .	12
2.1.4	Die Paretoverteilung . . . . .	12
2.2	Modellierung der Schadenanzahl . . . . .	13
2.2.1	Die Poissonverteilung . . . . .	13
2.2.2	Die Binomialverteilung . . . . .	13
2.2.3	Die negative Binomialverteilung . . . . .	14
2.2.4	Die geometrische Verteilung . . . . .	15
2.3	Der Gesamtschaden . . . . .	15
2.3.1	Das individuelle Modell . . . . .	15
2.3.2	Das kollektive Modell . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Die Panjer Rekursion</b>	<b>18</b>
3.1	Die $(a, b, 0)$ -Klasse . . . . .	19
3.1.1	Die Poissonverteilung . . . . .	19
3.1.2	Die Binomialverteilung . . . . .	19
3.1.3	Die negative Binomialverteilung . . . . .	20
3.2	Diskreter Fall . . . . .	23
3.3	Stetiger Fall . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Eine Erweiterung der Panjer-Klasse</b>	<b>28</b>
4.1	Der Spezialfall $k=1$ . . . . .	29
4.1.1	Herleitung einer Rekursion . . . . .	30
4.2	Der Spezialfall $k=2$ . . . . .	34
4.2.1	Herleitung einer Rekursion . . . . .	36
4.3	Der allgemeine Fall . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Vergleich der Rekursionen</b>	<b>46</b>
5.1	Laufzeitvergleich . . . . .	47
5.2	Numerische Stabilität . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Eine weitere Methode zur Berechnung der Gesamtschadenverteilung</b>	<b>51</b>

<b>7</b>	<b>Anwendung in der Risiko- und Ruintheorie</b>	<b>54</b>
7.1	Grundlagen der Risiko- und Ruintheorie . . . . .	54
7.2	Direkte Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit . . . . .	56
<b>8</b>	<b>Conclusio</b>	<b>59</b>

# Eidesstattliche Erklärung und Einverständniserklärung zur Plagiatsprüfung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Ich nehme zur Kenntnis, dass die vorgelegte Arbeit mit geeigneten und dem derzeitigen Stand der Technik entsprechenden Mitteln (Plagiat-Erkennungssoftware) elektronisch-technisch überprüft wird. Dies stellt einerseits sicher, dass bei der Erstellung der vorgelegten Arbeit die hohen Qualitätsvorgaben im Rahmen der ausgegebenen der an der TU Wien geltenden Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis – „Code of Conduct“ (Mitteilungsblatt 2007, 26. Stück, Nr. 257 idgF.) an der TU Wien eingehalten wurden. Zum anderen werden durch einen Abgleich mit anderen studentischen Abschlussarbeiten Verletzungen meines persönlichen Urheberrechts vermieden.

Wien, am 11. Juli 2023

---

Jan Hofbauer

# Abstract

Particularly in non-life insurance, the collective model is often used for claims modeling of a cohort of insurance policies. In the collective model, both the number and the amount of claims are assumed to be random. Consequently, to determine the total claims distribution, the convolutions of the individual claims' distribution are required, the calculations of which can be very complex and computationally expensive. However, under certain conditions for the distributions of the number of claims and the distribution of individual claims, it is possible to recursively determine the probability function or density function of the total claims.

Since the well-known Panjer recursion can only be used if the number of claims is poisson, binomial or negative binomial distributed, it is the goal of this diploma thesis to present, test and compare further recursions for the determination of the total claim distribution.

The first chapter of this diploma thesis summarizes the most important basics of probability theory and combinatorics. The second chapter serves as an introduction to claims modeling. Subsequently, the third chapter describes the aforementioned Panjer recursion. Chapters 4 and 5 deal with generalized Panjer recursions. While in the fourth chapter three further recursions for the determination of the total claims distribution are presented, these recursions are compared in chapter 5 regarding their running time and numerical stability. In chapter 6, another method for the calculation of the total claims distribution is presented. Finally, chapter 7 summarizes the basics of risk and ruin theory and uses one of the recursions presented in chapter 4 to derive a recursive method for calculating ruin probabilities.

# Zusammenfassung

Vor allem in der Schadenversicherung findet bei der Schadenmodellierung einer Kohorte von Versicherungspolizzen oftmals das kollektive Modell Anwendung. Im kollektiven Modell werden sowohl die Anzahl als auch die Höhe der Schäden als zufällig angenommen. Zur Bestimmung der Gesamtschadenverteilung werden infolgedessen die Faltungen der Einzelschadenverteilung benötigt, deren Berechnungen sehr komplex und rechenaufwändig sein können. Erfüllen die Schadenanzahlverteilung sowie die Einzelschadenverteilung bestimmten Voraussetzungen, ist es allerdings möglich, die Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Dichtefunktion des Gesamtschaden rekursiv zu bestimmen.

Da die bekannte Panjer Rekursion nur eingesetzt werden kann, wenn die Schadenanzahl poisson-, binomial- oder negativ binomialverteilt ist, ist es das Ziel dieser Arbeit weitere Rekursionen zur Bestimmung der Gesamtschadenverteilung vorzustellen, zu testen und miteinander zu vergleichen.

Im ersten Kapitel dieser Diplomarbeit werden die wichtigsten Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Kombinatorik zusammengefasst. Das zweite Kapitel dient zur Einführung in die Schadenmodellierung. Anschließend wird im dritten Kapitel die bereits erwähnte Panjer Rekursion beschrieben. Die Kapiteln 4 und 5 beschäftigen sich mit den verallgemeinerten Panjer Rekursionen. Während im vierten Kapitel zunächst drei weitere Rekursionen zur Bestimmung der Gesamtschadenverteilung vorgestellt werden, werden diese Rekursionen im Kapitel 5 hinsichtlich ihrer Laufzeit und numerischen Stabilität verglichen. Im Kapitel 6 wird eine weitere Methode zur Berechnung der Gesamtschadenverteilung vorgestellt. Abschließend werden im Kapitel 7 die Grundlagen der Risiko- und Ruintheorie zusammengefasst und mithilfe einer der in Kapitel 4 vorgestellten Rekursionen eine rekursive Methode zur Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeiten hergeleitet.

# 1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Kombinatorik

In diesem Kapitel werden die in dieser Arbeit verwendeten Begriffe beziehungsweise Sätze aus den Gebieten der Wahrscheinlichkeitstheorie und Kombinatorik kurz erläutert. Dieses Kapitel basiert auf (Gurker 2018) und (Schmidt 2009).

## 1.1 Wahrscheinlichkeitstheorie

Es sei  $\Omega$  die Menge aller möglichen Ereignisse.

**Definition 1.1.1** ( $\sigma$ -Algebra).  $\mathcal{F}$  sei eine Menge von Teilmengen von  $\Omega$ . Wir nennen  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ , wenn

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $F \in \mathcal{F} \implies F^c \in \mathcal{F}$
- Für alle Folgen  $F_1, F_2, \dots$  von Mengen aus  $\mathcal{F}$  gilt:  $\bigcup_{x=1}^{\infty} F_x \in \mathcal{F}$ .

**Definition 1.1.2** (Wahrscheinlichkeitsmaß).  $\mathcal{F}$  sei eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ . Eine reellwertige Funktion  $\mathbb{P}$  auf  $\mathcal{F}$  heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn:

- $\forall F \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(F) \geq 0$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Für alle Folgen  $F_1, F_2, \dots$  von Mengen aus  $\mathcal{F}$  mit  $F_i \cap F_j = \emptyset, i \neq j$ , gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i).$$

**Definition 1.1.3** (Bedingte Wahrscheinlichkeit). Die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A$  gegeben Ereignis  $B$  mit  $\mathbb{P}(B) > 0$  ist definiert durch

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

**Proposition 1.1.1.** *Es sei  $B_1, B_2, \dots$  eine Partition von  $\Omega$ . Dann gilt für alle Ereignisse  $A$*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

**Definition 1.1.4** (Zufallsvariable). Eine Zufallsvariable ist eine reellwertige Funktion auf der Menge  $\Omega$ ,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Für eine Zufallsvariable  $X$  definieren wir nun die Menge  $\mathcal{D} := \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$  und nennen sie den Wertebereich der Zufallsvariablen.

**Definition 1.1.5** (Verteilungsfunktion). Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen  $X$  ist die Funktion  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

**Definition 1.1.6** (Diskrete Verteilung). Eine Zufallsvariable  $X$  heißt diskret beziehungsweise hat eine diskrete Verteilung, wenn ihr Wertebereich  $D$  entweder endlich oder abzählbar ist.

**Definition 1.1.7** (Wahrscheinlichkeitsfunktion). Für eine diskrete Zufallsvariable  $X$  ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion für  $x \in \mathcal{D}$  gegeben durch

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x).$$

**Definition 1.1.8** (Stetige Verteilung). Eine Zufallsvariable  $X$  hat eine stetige Verteilung, wenn die Verteilungsfunktion  $F_X$  stetig ist. In diesem Fall nennen wir  $X$  eine stetige Zufallsvariable.

**Bemerkung 1.1.1.** Für eine stetige Zufallsvariable  $X$  gilt, dass

$$\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Existiert für die stetige Zufallsvariable  $X$  eine Funktion  $f_X$ , sodass

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt,$$

nennen wir  $X$  absolutstetig und die Funktion  $f_X$  die Dichte von  $X$ .

**Definition 1.1.9** (Erwartungswert). Für eine Zufallsvariable  $X$  und eine Funktion  $g$  ist der Erwartungswert von  $Y = g(X)$  wie folgt definiert:

$$\mathbb{E}[Y] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx & , X \text{ stetig} \\ \sum_x g(x) p_X(x) & , X \text{ diskret} \end{cases}$$

**Bemerkung 1.1.2.** Für zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  und die Konstanten  $a$  und  $b$  gilt

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a \mathbb{E}[X] + b \mathbb{E}[Y].$$

**Bemerkung 1.1.3.** Der Erwartungswert eines Zufallsvektors  $X = (X_1, X_2)$  ist definiert als

$$\mathbb{E}[X] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \mathbb{E}[X_2] \end{pmatrix}.$$

**Definition 1.1.10** (Varianz). Die Varianz einer Zufallsvariablen  $X$  mit endlichem Erwartungswert ist definiert als:

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2],$$

falls dieser Ausdruck endlich ist.

**Bemerkung 1.1.4.** Mithilfe der Linearität des Erwartungswerts ist es leicht zu sehen, dass

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

**Definition 1.1.11** (Momentenerzeugende Funktion). Existiert für die Zufallsvariable  $X$  ein  $h > 0$ , sodass  $\mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$  für  $t \in (-h, h)$ , ist die momentenerzeugende Funktion von  $X$  gegeben durch

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}], \quad t \in (-h, h).$$

**Bemerkung 1.1.5.** Falls für zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  die momentenerzeugenden Funktionen  $M_X$  beziehungsweise  $M_Y$  auf einem offenen Intervall um die 0 existieren, gilt

$$F_X(z) = F_Y(z) \quad \forall z \in \mathbb{R} \iff \exists h > 0 : M_X(t) = M_Y(t) \quad \forall t \in (-h, h).$$

**Bemerkung 1.1.6.** Die Existenz der momentenerzeugenden Funktion  $M_X(t)$  auf einem offenen Intervall um die 0 impliziert, dass  $M_X(t)$  an der Stelle  $t = 0$  beliebig oft differenzierbar ist. In diesem Fall gilt für  $r \geq 1$ :

$$M_X^{(r)}(0) = \mathbb{E}[X^r].$$

**Definition 1.1.12** (Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion). Für eine diskrete Zufallsvariable  $X$  mit Werten in  $\mathbb{N}_0$  wird die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion wie folgt definiert:

$$m_X(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{x=0}^{\infty} t^x p_X(x), \quad t \in [0, 1].$$

**Bemerkung 1.1.7.** Für  $t \in [-1, 1]$  gilt:

$$\sum_{x=0}^{\infty} |t^x| p_X(x) \leq \sum_{x=0}^{\infty} p_X(x) = 1.$$

Diese Ungleichung impliziert, dass die Potenzreihe auf dem Intervall  $[-1, 1]$  konvergiert. (vgl. Schmidt 2009: 97)

**Bemerkung 1.1.8.** Wie der Name schon verrät, können mithilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten wie folgt bestimmt werden:

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{m_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

(vgl. Klugman/Panjer/Willmot 2004: 73)

**Definition 1.1.13** (Kumulierte Verteilungsfunktion). Die kumulierte Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist gegeben durch

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Bemerkung 1.1.9.** Existiert eine Funktion  $f_{X,Y}$ , sodass für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) \, du \, dv ,$$

nennen wir  $f_{X,Y}$  die gemeinsame Dichtefunktion von  $X$  und  $Y$ .

**Definition 1.1.14** (Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion). Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von zwei diskreten Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist gegeben durch

$$p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

**Definition 1.1.15** (Bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion).  $X$  und  $Y$  seien zwei diskrete Zufallsvariablen mit den Wahrscheinlichkeitsfunktionen  $p_X$  bzw.  $p_Y$ , sowie der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_{X,Y}$ . Dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $X$  gegeben  $Y = y$  definiert durch

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}.$$

**Definition 1.1.16** (Bedingte Erwartung).  $X$  und  $Y$  seien zwei stetige Zufallsvariablen mit den Dichten  $f_X$  und  $f_Y$ , sowie der gemeinsamen Dichtefunktion  $f_{X,Y}$ . Dann ist die bedingte Dichtefunktion von  $X$  gegeben  $Y = y$  definiert durch

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Die bedingte Erwartung von  $X$  gegeben  $Y = y$  ist gegeben durch

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx.$$

**Definition 1.1.17** (Bedingte Varianz). Die bedingte Varianz von  $X$  gegeben  $Y = y$  ist definiert durch

$$\mathbb{V}[X|Y = y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Y = y])^2|Y = y].$$

**Bemerkung 1.1.10.** Es gilt

$$\mathbb{V}[X|Y = y] = \mathbb{E}[X^2|Y = y] - (\mathbb{E}[X|Y = y])^2.$$

**Proposition 1.1.2** (Gesetz der totalen Erwartung). Für zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$$

**Proposition 1.1.3** (Gesetz der totalen Varianz).  $X$  und  $Y$  seien zwei Zufallsvariablen, sodass  $\mathbb{V}[X]$  existiert. Dann gilt:

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{V}[X|Y]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[X|Y]]$$

**Definition 1.1.18** (Unabhängigkeit).  $X$  und  $Y$  seien zwei Zufallsvariablen mit den Dichten  $f_X$  und  $f_Y$  sowie der gemeinsamen Dichtefunktion  $f_{X,Y}$  im stetigen Fall bzw. mit den Wahrscheinlichkeitsfunktionen  $p_X$  und  $p_Y$  sowie der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_{X,Y}$  im diskreten Fall.  $X$  und  $Y$  heißen unabhängig genau dann, wenn  $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  im stetigen Fall bzw.  $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$  im diskreten Fall gilt.

## 1.2 Kombinatorik

**Definition 1.2.1** (Fakultät). Für  $n \in \mathbb{N}_0$  definieren wir die  $n$ -te Fakultät als

$$n! = \prod_{i=0}^{n-1} (n - i).$$

**Bemerkung 1.2.1.** Die  $n$ -te Fakultät gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt  $n$  Objekte anzuordnen.

**Definition 1.2.2** (Binomialkoeffizient). Der Binomialkoeffizient  $n$  über  $k$  für  $n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$  ist gegeben durch

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n - i}{k - i}.$$

**Bemerkung 1.2.2.** Mithilfe des Binomialkoeffizienten kann die Anzahl der Möglichkeiten bestimmt werden,  $k$  von  $n$  Objekten auszuwählen.

**Bemerkung 1.2.3.** Für  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt für den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & , k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

**Bemerkung 1.2.4.** Der Binomialkoeffizient hat die folgenden Eigenschaften, wenn wiederum  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= 1 \\ \binom{n}{1} &= n \\ \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}. \end{aligned}$$

**Satz 1.2.1** (Binomischer Lehrsatz). Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt die Gleichung

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

## 2 Eine Einführung in die Schadenmodellierung

Dieses Kapitel soll einen Überblick über die Grundlagen der Schadenmodellierung bieten. Hierbei wurde der Fokus auf die Schadenversicherung gelegt. Bei einer Schadenversicherung wird bei Eintritt eines Versicherungsfalles der tatsächlich entstandene Schaden bezahlt. Die Zahlungen sind dabei aber durch eine vereinbarte Versicherungssumme nach oben beschränkt. (vgl. SVV) Beispiele für Schadenversicherungen wären unter anderem Haftpflicht-, Feuer-, Unfall-

oder Rechtsschutzversicherungen. (vgl. bpb) Da bei der Modellierung des Gesamtschadens sowohl die Höhe als auch die Anzahl der Schäden stets getrennt voneinander betrachtet werden (vgl. Tse 2009: 4), beschäftigen wir uns zunächst mit möglichen Verteilungen der Einzelschäden beziehungsweise der Schadenanzahl und führen diese beiden Zufallsgrößen anschließend im kollektiven Modell zusammen.

## 2.1 Modellierung der Einzelschäden

Da bei Schadenversicherungen die Versicherungsleistungen keine deterministischen Größen sind, ist eine Modellierung der Schäden als Zufallsvariable notwendig. (vgl. Helbig et al 1987: 36) Im Allgemeinen werden hierfür nichtnegative stetige Zufallsvariablen betrachtet. Zu den am häufigsten verwendeten Verteilungen zur Modellierung zählen unter anderem die Exponential-, Gamma-, Weibull- und Paretoverteilungen. (vgl. Tse 2009: 41) In diesem Abschnitt werden nun die Eigenschaften dieser Verteilungen kurz beschrieben.

### 2.1.1 Die Gammaverteilung

Eine Zufallsvariable  $X$ , deren Dichte gegeben ist durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Gamma-verteilt mit dem Formparameter  $\alpha > 0$  und dem Skalenparameter  $\beta > 0$ . Wir schreiben  $X \sim Gam(\alpha, \beta)$ . Die Gammafunktion ist für  $\alpha > 0$  wie folgt als Integral definiert:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Die momentenerzeugende Funktion von  $X \sim Gam(\alpha, \beta)$  ist für  $t < \frac{1}{\beta}$  gegeben durch

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = (1 - \beta t)^{-\alpha}.$$

Für den Erwartungswert und die Varianz von  $X$  erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \alpha\beta \\ \mathbb{V}[X] &= \alpha\beta^2. \end{aligned}$$

(vgl. Gurker 2018: 122 f.)

### 2.1.2 Die Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist der Spezialfall der Gammaverteilung, wenn der Formparameter  $\alpha = 1$  ist. Die Dichte von  $X \sim Exp(\beta)$  ist daher gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die momentenerzeugende Funktion beziehungsweise den Erwartungswert und die Varianz gilt:

$$M_X(t) = \frac{1}{1 - \beta t}, \quad t < \frac{1}{\beta}$$

$$\mathbb{E}[X] = \beta$$

$$\mathbb{V}[X] = \beta^2.$$

(vgl. Gurker 2018: 124 f.)

### 2.1.3 Die Weibullverteilung

Die Zufallsvariable  $X$  besitzt eine Weibullverteilung mit dem Formparameter  $\alpha > 0$  und dem Skalenparameter  $\lambda > 0$ , wenn ihre Dichte für  $x \geq 0$  gegeben ist durch

$$f_X(x) = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha\right].$$

Es wird die Notation  $X \sim \mathcal{W}(\alpha, \lambda)$  verwendet. Der Erwartungswert beziehungsweise die Varianz von  $X$  sind

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\mathbb{V}[X] = \lambda^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - (\mathbb{E}[X])^2,$$

wobei  $\Gamma(\cdot)$  wieder die Gammafunktion bezeichnet.

Ist der Skalenparameter  $\lambda = 1$ , spricht man von der Standard-Weibullverteilung. (vgl. Tse 2009: 51)

### 2.1.4 Die Paretoverteilung

Besitzt die Zufallsvariable  $X$  die Dichte

$$f_X(x) = \frac{\alpha \gamma^\alpha}{(x + \gamma)^{\alpha+1}}, \quad x \geq 0$$

so ist  $X$  Pareto-verteilt mit den Parametern  $\alpha > 0$  und  $\gamma > 0$ . In diesem Fall notiert man  $X \sim \mathcal{P}(\alpha, \gamma)$ . Für eine Pareto-verteilte Zufallsvariable existieren zwar die  $k$ -ten Momente für  $k < \alpha$ , die momentenerzeugende Funktion jedoch nicht. Der Erwartungswert und die Varianz sind für  $\alpha > 2$  gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\gamma}{\alpha - 1}$$

$$\mathbb{V}[X] = \frac{\alpha \gamma^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}.$$

(vgl. Tse 2009: 51 f.)

## 2.2 Modellierung der Schadenanzahl

Die Schadenanzahl stellt neben den Schadenhöhen die zweite wichtige Variable bei der Modellierung des Gesamtschadens dar und wird mithilfe einer nichtnegativen diskreten Zufallsvariable modelliert. Beliebte Verteilungen hierfür sind unter anderem die Binomial-, beziehungsweise negative Binomialverteilung, die geometrische Verteilung oder aber auch die Poisson-verteilung. (vgl. Tse 2009: 3-6) Wie auch bei den Einzelschäden, wird nun im Folgenden ein kurzer Überblick dieser Verteilungen gegeben.

### 2.2.1 Die Poissonverteilung

Besitzt die Zufallsvariable  $N$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p_N(n) = \mathbb{P}(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots$$

so sagen wir, dass  $N$  Poisson-verteilt ist mit dem Parameter  $\lambda > 0$  und schreiben dafür  $N \sim P(\lambda)$ . Für den Erwartungswert, die Varianz sowie die momentenerzeugende bzw. wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N] &= \lambda \\ \mathbb{V}[N] &= \lambda \\ M_N(t) &= \mathbb{E}[e^{tN}] = e^{\lambda(e^t - 1)}, t \in \mathbb{R} \\ m_N(t) &= e^{\lambda(t-1)}. \end{aligned}$$

(vgl. Gurker 2018: 111 f., Schmidt 2009: 97)

Die Poissonverteilung besitzt eine Eigenschaft, die sehr nützlich bei der Modellierung von Risiken ist. Nimmt man an, dass die Anzahl der Schäden über einen bestimmten Zeitraum Poisson-verteilt ist und dass die Schäden in  $m$  Klassen (z.B. mithilfe der Klassifizierung nach der Schadenhöhe) unterteilt werden können, ist die Anzahl der Schäden über einer bestimmten Grenze wieder Poisson-verteilt, jedoch mit einem neuen Parameter. (vgl. Klugman/Panjer/Willmot 2004: 74)

### 2.2.2 Die Binomialverteilung

Die Zufallsvariable  $N$  heißt binomialverteilt mit den Parametern  $m \in \mathbb{N}$  und  $p \in (0, 1)$ , in Kurzschreibweise  $N \sim B(m, p)$ , wenn sie die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion besitzt:

$$p_N(n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}, \text{ für } n = 0, 1, \dots, m.$$

Für die momentenerzeugende sowie wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion, den Erwartungswert und die Varianz erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N] &= mp \\ \mathbb{V}[N] &= mp(1-p) \\ M_N(t) &= [(1-p) + pe^t]^m, \quad t \in \mathbb{R} \\ m_N(t) &= [(1-p) + pt]^m.\end{aligned}$$

(vgl. Gurker 2018: 102 f., Schmidt 2009: 97)

Da  $p < 1$  ist, ist bei der Binomialverteilung die Varianz stets kleiner als der Erwartungswert. Daher ist es sinnvoll die Binomialverteilung anstelle der Poissonverteilung für die Modellierung der Schadenanzahl zu verwenden, wenn die beobachtete Stichprobenvarianz kleiner als das beobachtete arithmetische Mittel ist. (vgl. Klugman/Panjer/Willmot 2004: 79)

### 2.2.3 Die negative Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer negativ-binomialverteilten Zufallsvariable  $N$  mit den Parametern  $r > 0$  und  $p \in (0, 1)$ , in Kurzschreibweise  $N \sim NB(r, p)$ , ist gegeben durch

$$p_N(n) = \binom{r+n-1}{n} p^r (1-p)^n, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wie man leicht überprüfen kann, gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N] &= \frac{r(1-p)}{p} \\ \mathbb{V}[N] &= \frac{r(1-p)}{p^2} \\ M_N(t) &= \left( \frac{p}{1 - (1-p)e^t} \right)^r, \quad t < -\ln(1-p) \\ m_N(t) &= \left( \frac{p}{1 - (1-p)t} \right)^r, \quad t < \frac{1}{1-p}.\end{aligned}$$

(vgl. Bowers et al 1986: 323, Schmidt 2009: 97)

Übersteigt die Varianz den Erwartungswert ist es ratsam die negative Binomialverteilung anstelle der Poissonverteilung zur Modellierung zu verwenden. (vgl. Klugman/Panjer/Willmot 2004: 77)

## 2.2.4 Die geometrische Verteilung

Die geometrische Verteilung ist ein Spezialfall der negativen Binomialverteilung ( $r = 1$ ). Somit erhält man

$$\begin{aligned}
 p_N(n) &= p(1-p)^n, \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots \\
 \mathbb{E}[N] &= \frac{1-p}{p} \\
 \mathbb{V}[N] &= \frac{1-p}{p^2} \\
 M_N(t) &= \frac{p}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\ln(1-p).
 \end{aligned}$$

(vgl. Gurker 2018: 107)

## 2.3 Der Gesamtschaden

Im Folgenden wird eine Kohorte von Versicherungspolizzen über einen bestimmten Zeitraum betrachtet. Das Ziel besteht nun darin, den Gesamtschaden  $S$  dieser Kohorte zu modellieren. Dafür kann entweder das individuelle oder das kollektive Modell verwendet werden. (vgl. Klugman/Panjer/Willmot 2004: 135 f.)

### 2.3.1 Das individuelle Modell

Beim individuellen Modell wird der Schaden jeder einzelnen Polizza betrachtet. Die Zufallsvariable  $X_i$  beschreibt dabei den Schaden der  $i$ -ten Polizza. Bei einer Kohorte von  $n$  Polizzen ist der Gesamtschaden also durch

$$S = \sum_{i=1}^n X_i$$

gegeben. Es wird vorausgesetzt, dass die Schäden  $X_i$  für  $i = 1, \dots, n$  voneinander unabhängig sind. Falls  $X_1, \dots, X_n$  zusätzlich auch identisch verteilt sind, erhält man sofort die folgenden Ausdrücke für den Erwartungswert beziehungsweise die Varianz des Gesamtschadens

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[S] &= n \mathbb{E}[X_1] \\
 \mathbb{V}[S] &= n \mathbb{V}[X_1].
 \end{aligned}$$

Wenn eine sehr große Anzahl von Polizzen betrachtet wird, kann in diesem Fall die Verteilung von  $S$  mithilfe des Zentralen Grenzwertsatzes approximiert werden und es gilt

$$\mathbb{P}(S \leq s) \approx \Phi\left(\frac{s - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathbb{V}[S]}}\right).$$

Um die exakte Verteilung des Gesamtschadens zu bestimmen, wird die Faltung der unabhängigen nichtnegativen stetigen Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  betrachtet. Die Faltung der Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  mit den Dichten  $f_1$  und  $f_2$  ist definiert als

$$f^{*2}(x) = f_{X_1+X_2}(x) = \int_0^x f_1(x-y)f_2(y)dy = \int_0^x f_2(x-y)f_1(y)dy.$$

Die Dichte des Gesamtschadens kann nun rekursiv berechnet werden:

$$f^{*n}(x) = f_{X_1+\dots+X_n}(x) = \int_0^x f^{*(n-1)}(x-y)f_n(y)dy = \int_0^x f_n(x-y)f^{*(n-1)}(y)dy.$$

(vgl. Tse 2009: 87-94)

### 2.3.2 Das kollektive Modell

Beim kollektiven Modell werden nur die tatsächlichen Zahlungen beziehungsweise Schäden betrachtet und anschließend aufsummiert. (vgl. Klugman/Panjer/Willmot 2004: 135) Da sowohl die Anzahl als auch die Höhe der Schäden nicht deterministisch sind, besitzt der Gesamtschaden  $S$  im kollektiven Modell eine zusammengesetzte Wahrscheinlichkeitsverteilung (vgl. Tse 2009: 87) und ist durch die folgende Zufallssumme gegeben:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Hierbei beschreibt die Zufallsvariable  $N$  die Schadenanzahl und  $X_i$  die Höhe des  $i$ -ten Schadens. (vgl. Bowers et al 1986: 317) Falls  $N = 0$  ist, wird  $S = 0$  gesetzt. (vgl. Klugman/Panjer/Willmot 2004: 135)

Die Verteilung von  $S$  heißt

- zusammengesetzte Poissonverteilung, falls  $N$  Poisson-verteilt ist.
- zusammengesetzte (negative) Binomialverteilung, falls  $N$  einer (negativen) Binomialverteilung folgt. (vgl. Bowers et al 1986: 317 f.)

Beim kollektiven Modell werden grundsätzlich die folgenden Unabhängigkeitsannahmen getroffen:

- Die Schäden  $X_1, X_2, \dots$  sind unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen.
- Bedingt auf  $N = n$ , hängt die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  nicht von  $n$  ab.
- Die Verteilung der Schadenanzahl  $N$  hängt nicht von der Höhe der Schäden  $X_1, X_2, \dots$  ab. (vgl. Klugman/Panjer/Willmot 2004: 135)

Mithilfe dieser Annahmen können nun leicht der Erwartungswert, die Varianz sowie die momentenerzeugende bzw. wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von  $S$  bestimmt werden:

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|N]] = \mathbb{E}[N \mathbb{E}[X_1]] = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X_1]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[S] &= \mathbb{E}[\mathbb{V}[S|N]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[S|N]] = \\ &= \mathbb{E}[N \mathbb{V}[X_1]] + \mathbb{V}[N \mathbb{E}[X_1]] = \\ &= \mathbb{E}[N] \mathbb{V}[X_1] + (\mathbb{E}[X_1])^2 \mathbb{V}[N] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathbb{E}[e^{tS}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{tS}|N]] = \\ &= \mathbb{E}[M_{X_1}(t)^N] = \mathbb{E}[e^{N \log(M_{X_1}(t))}] = \\ &= M_N(\log(M_{X_1}(t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_S(t) &= \mathbb{E}[t^S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[t^S|N]] = \\ &= \mathbb{E}[m_{X_1}(t)^N] = m_N(m_{X_1}(t)). \end{aligned}$$

(vgl. Bowers et al 1986: 319)

Verwendet man für die Anzahl der Schäden die Poissonverteilung, die Binomialverteilung oder die negative Binomialverteilung, erhält man damit nun die folgenden Ausdrücke

- $N \sim P(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= \lambda \mathbb{E}[X_1] \\ \mathbb{V}[S] &= \lambda (\mathbb{V}[X_1] + (\mathbb{E}[X_1])^2) \\ M_S(t) &= e^{\lambda(M_{X_1}(t)-1)} \\ m_S(t) &= e^{\lambda(m_{X_1}(t)-1)} \end{aligned}$$

- $N \sim B(m, p)$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= mp \mathbb{E}[X_1] \\ \mathbb{V}[S] &= mp \mathbb{V}[X_1] + mp(1-p) (\mathbb{E}[X_1])^2 = \\ &= mp \mathbb{V}[X_1] + mp(1-p) (\mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{V}[X_1]) = \\ &= mp ((1-p) \mathbb{E}[X_1^2] + p \mathbb{V}[X_1]) \\ M_S(t) &= [(1-p) + p M_{X_1}(t)]^m \\ m_S(t) &= [(1-p) + p m_{X_1}(t)]^m \end{aligned}$$

- $N \sim NB(r, p)$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= \frac{r(1-p)}{p} \mathbb{E}[X_1] \\ \mathbb{V}[S] &= \frac{r(1-p)}{p} \mathbb{V}[X_1] + \frac{r(1-p)}{p^2} (\mathbb{E}[X_1])^2 = \\ &= \frac{r(1-p)}{p} [\mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}[X_1])^2] + \frac{r(1-p)}{p^2} (\mathbb{E}[X_1])^2 = \\ &= \frac{r(1-p)}{p} \mathbb{E}[X_1^2] + \frac{r(1-p)^2}{p^2} (\mathbb{E}[X_1])^2 \\ M_S(t) &= \left( \frac{p}{1 - (1-p)M_{X_1}(t)} \right)^r \\ m_S(t) &= \left( \frac{p}{1 - (1-p)m_{X_1}(t)} \right)^r.\end{aligned}$$

Wir sind nun an der Verteilungsfunktion beziehungsweise der Dichte des Gesamtschadens  $S$  interessiert:

$$\begin{aligned}F_S(x) &= \mathbb{P}(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S \leq x | N = n) \mathbb{P}(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq x) \mathbb{P}(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{X_1}^{*n}(x) \mathbb{P}[N = n].\end{aligned}$$

Für die Dichte von  $S$  erhält man nun durch Ableiten:

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{X_1}^{*n}(x) \mathbb{P}[N = n].$$

(vgl. Bowers et al 1986: 319-323, Klugman/Panjer/Willmot 2004: 140 f., Schmidt 2009: 156)

Da zur Bestimmung der Verteilungsfunktion beziehungsweise der Dichte von  $S$  die Faltungen der Verteilung der Einzelschäden benötigt werden, ist es praktisch eine Verteilung zu verwenden, deren Faltungen relativ leicht per Formel oder numerisch bestimmt werden können. (vgl. Bowers et al 1986: 325) Falls dies jedoch nicht möglich ist, kann die Berechnung sehr komplex und rechenaufwändig werden. Im nächsten Kapitel werden wir uns deshalb mit der Panjer Rekursion beschäftigen. Mit dieser ist es möglich, die Dichte von  $S$  zu bestimmen, wenn sowohl die Schadenanzahl  $N$  als auch die Einzelschäden  $(X_i)$  bestimmte Bedingungen erfüllen. (vgl. Tse 2009: 97 f.)

### 3 Die Panjer Rekursion

Im folgenden Kapitel wird zunächst die  $(a, b, 0)$ -Klasse definiert und anschließend die bekannte Panjer Rekursion zur Bestimmung der Gesamtschadenverteilung, sowohl im diskreten als auch

im stetigen Fall vorgestellt. Die Schadenanzahl wird dabei mithilfe der Zufallsvariable  $N$  modelliert, wobei für den Ausdruck  $\mathbb{P}(N = n)$  die Notation  $p_n$  verwendet wird. Das Kapitel basiert auf (Dickson 2017), (Panjer 1981) und (Schmidt 2009).

### 3.1 Die $(a, b, 0)$ -Klasse

**Definition 3.1.1.** Eine diskrete Verteilung befindet sich in der  $(a, b, 0)$ -Klasse, wenn reellwertige Konstanten  $a$  und  $b$  existieren, sodass die Wahrscheinlichkeitsfunktion die Rekursion

$$p_n = p_{n-1} \left( a + \frac{b}{n} \right)$$

für  $n \geq 1$  erfüllt.

In der  $(a, b, 0)$ -Klasse, auch Panjer-Klasse genannt, sind die folgenden Verteilungen enthalten.

#### 3.1.1 Die Poissonverteilung

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poissonverteilung mit Parameter  $\lambda$  gilt

$$p_n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \underbrace{\frac{\lambda^{n-1} e^{-\lambda}}{(n-1)!}}_{=p_{n-1}} \frac{\lambda}{n}.$$

Mit  $a = 0$  und  $b = \lambda$  erfüllt daher die Poissonverteilung die Rekursion.

#### 3.1.2 Die Binomialverteilung

Für  $N \sim B(m, q)$  gilt

$$\begin{aligned} p_n &= \binom{m}{n} q^n (1-q)^{m-n} = \\ &= \frac{m!}{(m-n)!n!} q^n (1-q)^{m-n} = \\ &= \underbrace{\frac{m!}{[m-(n-1)]!(n-1)!}}_{=\binom{m}{m-(n-1)}} \frac{m-(n-1)}{n} q^{n-1} (1-q)^{m-(n-1)} \frac{q}{1-q} = \\ &= \underbrace{\binom{m}{m-(n-1)}}_{=p_{n-1}} q^{n-1} (1-q)^{m-(n-1)} \frac{m-(n-1)}{n} \frac{q}{1-q} = \\ &= p_{n-1} \left( \frac{m+1}{n} - 1 \right) \frac{q}{1-q} = \\ &= p_{n-1} \left( -\frac{q}{1-q} + \frac{\frac{(m+1)q}{1-q}}{n} \right). \end{aligned}$$

### 3.1.3 Die negative Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der negativen Binomialverteilung mit den Parametern  $r$  und  $q$  erfüllt

$$\begin{aligned}
 p_n &= \binom{r+n-1}{n} q^r (1-q)^n = \\
 &= \frac{(r+n-1)!}{n!(r-1)!} q^r (1-q)^n = \\
 &= \underbrace{\frac{[r+(n-1)-1]!}{(n-1)!(r-1)!}}_{= \binom{r+(n-1)-1}{n-1}} \frac{r+n-1}{n} q^r (1-q)^{n-1} (1-q) = \\
 &= \underbrace{\binom{r+(n-1)-1}{n-1}}_{= p_{n-1}} q^r (1-q)^{n-1} \frac{r+n-1}{n} (1-q) = \\
 &= p_{n-1} \left( \frac{r-1}{n} + 1 \right) (1-q) = \\
 &= p_{n-1} \left( 1 - q + \frac{(r-1)(1-q)}{n} \right).
 \end{aligned}$$

Falls  $r$  keine natürliche Zahl ist, ist die Fakultät als Gammafunktion zu interpretieren.

Verteilung	a	b
$P(\lambda)$	0	$\lambda$
$B(m, q)$	$-\frac{q}{1-q}$	$\frac{(m+1)q}{1-q}$
$NB(r, q)$	$1 - q$	$(r-1)(1-q)$

Quelle: in Anlehnung an Dickson, 2017, S.67

Tabelle 1: Werte von a und b

**Satz 3.1.1.** *Die gerade genannten Verteilungen sind die einzigen nichttrivialen Verteilungen, die in der Panjer-Klasse enthalten sind.*

**Beweis:** Aufgrund des ersten Schrittes der Rekursion  $p_1 = p_0(a+b)$  muss  $a+b \geq 0$  gelten, da wir ansonsten für  $p_1$  einen negativen Wert erhalten würden. Des Weiteren muss  $p_0 > 0$  sein, da ansonsten die Gleichung  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$  nicht erfüllt sein kann. Wir betrachten nun die folgenden Fälle:

- **1.Fall:**  $a + b = 0$   
In diesem Fall gilt  $p_n = 0$  für  $n \geq 1$ . Daher muss  $p_0$  gleich 1 sein und wir erhalten die bei 0 degenerierte triviale Verteilung.
- **2.Fall:**  $a = 0 \wedge b \neq 0$   
Die Rekursion lautet in diesem Fall  $p_n = p_{n-1} \frac{b}{n}$  für  $n \geq 1$ . Dies liefert uns einerseits mit

der selben Argumentation wie oben  $b \geq 0$  und andererseits

$$p_n = \frac{b}{n} \frac{b}{n-1} \dots \frac{b}{2} b p_0 = \frac{b^n}{n!} p_0.$$

Damit folgt nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}}_{=e^b} = p_0 e^b.$$

Da die Gleichung  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$  erfüllt sein muss, gilt  $p_0 = e^{-b}$  und wir erhalten die Poissonverteilung mit Parameter  $b$ .

• **3.Fall:**  $a > 0 \wedge a \neq -b$

Es gilt

$$\begin{aligned} p_n &= \left(a + \frac{b}{n}\right) \left(a + \frac{b}{n-1}\right) \dots \left(a + \frac{b}{2}\right) (a+b) p_0 = \\ &= \frac{na+b}{n} \frac{(n-1)a+b}{n-1} \dots \frac{2a+b}{2} (a+b) p_0 = \\ &= \frac{a^n}{n!} \left(n + \frac{b}{a}\right) \left(n-1 + \frac{b}{a}\right) \dots \left(2 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{b}{a}\right) p_0. \end{aligned}$$

Mithilfe der Substitution  $\alpha := 1 + \frac{b}{a}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{a^n}{n!} (n-1+\alpha)(n-2+\alpha) \dots (1+\alpha) \alpha p_0 = \\ &= \underbrace{\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha+n-1-i}{n-i}}_{=\binom{\alpha+n-1}{n}} a^n p_0 = \\ &= \binom{\alpha+n-1}{n} a^n p_0. \end{aligned}$$

Da, wie schon erläutert,  $p_0 > 0$  sein muss und  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$  gilt, können wir voraussetzen, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < 1$  ist. Das Quotientenkriterium liefert uns absolute Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ , wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_n}{p_{n-1}} \right| < 1$  gilt. Da sich die Verteilung in der Panjer-Klasse befindet, erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_n}{p_{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a + \frac{b}{n} \right| = \left| a + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \right| = |a| \stackrel{!}{<} 1.$$

Da wir voraussetzen, dass  $a > 0$  ist, reduziert sich der Fall nun also zu  $0 < a < 1$ .

Wie schon in Kapitel 2.2.3 beschrieben, ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer negativ-binomialverteilten Zufallsvariablen mit Parametern  $r$  und  $q$  gegeben durch

$$p_n = \binom{r+n-1}{n} q^r (1-q)^n.$$

Mithilfe von  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$  erhalten wir nun die Gleichung

$$q^r \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} (1-q)^n = 1 - \underbrace{q^r}_{=p_0}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n = p_0 + p_0 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha+n-1}{n} a^n}_{=\frac{1-(1-a)^\alpha}{(1-a)^\alpha}} = \\ &= p_0 \left( 1 + \frac{1-(1-a)^\alpha}{(1-a)^\alpha} \right) = p_0 \frac{1}{(1-a)^\alpha}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also  $p_0 = (1-a)^\alpha$  und damit eine negative Binomialverteilung mit Parametern  $1-a$  und  $\alpha = 1 + \frac{b}{a}$ , wobei  $0 < a < 1$  gilt.

• **4.Fall:**  $a + b > 0 \wedge a < 0$

Klarerweise muss  $b > 0$  sein. Aufgrund der Voraussetzung  $a < 0$  muss es ein hinreichend kleines  $m \in \mathbb{N}$  geben, sodass  $a + \frac{b}{m+1} = 0$  gilt.

Angenommen es existiert kein solches  $m \in \mathbb{N}$ :

Da  $\frac{b}{n}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $\frac{b}{n} < -a$  gilt. Die getroffene Annahme würde nun aber  $p_n < 0$  für alle  $n \geq N$  implizieren.

Also muss ein solches  $m \in \mathbb{N}$  existieren. Diese Tatsache impliziert nun  $p_n = 0$  für  $n \geq m+1$ .

Wie bereits beim 3. Fall gesehen, gilt

$$p_n = \frac{a^n}{n!} \left( n + \frac{b}{a} \right) \left( n - 1 + \frac{b}{a} \right) \dots \left( 2 + \frac{b}{a} \right) \left( 1 + \frac{b}{a} \right) p_0.$$

Darauf wenden wir nun  $m = -\left(1 + \frac{b}{a}\right)$  an und erhalten

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{a^n}{n!} (-m+n-1)(-m+n-2)\dots(-m+1)(-m)p_0 = \\ &= (-1)^n \frac{a^n}{n!} (m-n+1)(m-n+2)\dots(m-1)mp_0 = \\ &= (-a)^n \underbrace{\frac{m!}{n!(m-n)!}}_{=\binom{m}{n}} p_0 = \\ &= (-a)^n \binom{m}{n} p_0. \end{aligned}$$

Mithilfe von  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$  gilt daher

$$p_0 + p_0 \sum_{n=1}^m \binom{m}{n} (-a)^n = p_0 \sum_{n=1}^m \binom{m}{n} (-a)^n = 1.$$

Für  $p := \frac{a}{a-1}$  gilt  $0 < p < 1$  und wir können die letzte Gleichung wie folgt schreiben:

$$p_0 \sum_{n=1}^m \binom{m}{n} p^n (1-p)^{-n} = 1.$$

Mithilfe des Binomischen Lehrsatzes erhalten wir nun  $p_0 = (1-p)^m$  und damit eine Binomialverteilung mit Parametern  $m$  und  $\frac{a}{a-1}$ .

□

### 3.2 Diskreter Fall

Für die Modellierung des Gesamtschadens wird im Folgenden nun stets das kollektive Modell verwendet und es werden die in Kapitel 2.3.2 bereits erwähnten Unabhängigkeitsannahmen getroffen. Des Weiteren seien die Einzelschäden in diesem Abschnitt diskret auf die natürlichen Zahlen verteilt und es wird die folgende Notation verwendet

$$p_n := \mathbb{P}(N = n)$$

$$f_n := \mathbb{P}(X_1 = n)$$

$$g_n := \mathbb{P}(S = n).$$

**Satz 3.2.1** (Panjer Rekursion - Diskreter Fall). *Befindet sich die Schadenanzahlverteilung in der Panjer-Klasse, so kann die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens wie folgt rekursiv berechnet werden:*

$$g_n = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{k=1}^n \left( a + \frac{bk}{n} \right) g_{n-k} f_k.$$

Falls  $f_0 = 0$  ist, gilt für den Startwert  $g_0 = p_0$ . Andernfalls ist der Startwert gegeben durch:

$$g_0 = \begin{cases} (1 - q + qf_0)^m & , N \sim B(m, q) \\ e^{\lambda(f_0-1)} & , N \sim P(\lambda) \\ \left( \frac{q}{1-(1-q)f_0} \right)^r & , N \sim NB(r, q). \end{cases}$$

**Beweis:** Wir beginnen mit der Aussage über den Startwert  $g_0$ . Mit der bereits in Abschnitt 2.3.2 gezeigten Gleichung für die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion des Gesamtschadens  $S$  gilt

$$g_0 = m_S(0) = m_n(m_X(0)) = m_N(f_0).$$

Das Einsetzen von  $f_0$  in die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen der Verteilungen liefert uns das gewünschte Ergebnis.

Um die Rekursionsformel herzuleiten, betrachten wir zunächst die Ableitung der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion von  $N$ . Da die Verteilung von  $N$  sich in der Panjer-Klasse befindet,

gilt

$$\begin{aligned}
 m'_N(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} p_n = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} p_{n-1} \left( a + \frac{b}{n} \right) = \\
 &= a \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} p_{n-1} + b \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} p_{n-1}}_{=m_N(t)} = \\
 &= a \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} p_{n-1} + b m_N(t) \\
 &\stackrel{(1)}{=} a \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) t^{n-1} p_{n-1} + a \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} p_{n-1}}_{=m_N(t)} + b m_N(t) = \\
 &= a t \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) t^{n-2} p_{n-1} + (a+b) m_N(t) = \\
 &\stackrel{(2)}{=} a t \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} p_n}_{=m'_N(t)} + (a+b) m_N(t) = \\
 &= a t m'_N(t) + (a+b) m_N(t).
 \end{aligned}$$

Bei (1) wurde die triviale Gleichung  $n = n - 1 + 1$  verwendet, bei (2) ein Index-Shift durchgeführt.

Damit bestimmen wir nun die Ableitung der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion des Gesamtschadens. Aus Abschnitt 2.3.2 wissen wir, dass die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion durch

$$m_S(t) = m_N(m_{X_1}(t))$$

gegeben ist. Mithilfe der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}
 m'_S(t) &= m'_N(m_{X_1}(t)) m'_{X_1}(t) = \\
 &= [a m_{X_1}(t) m'_N(m_{X_1}(t)) + (a+b) m_N(m_{X_1}(t))] m'_{X_1}(t) = \\
 &= a m_{X_1}(t) \underbrace{m'_N(m_{X_1}(t)) m'_{X_1}(t)}_{=m'_S(t)} + (a+b) \underbrace{m_N(m_{X_1}(t)) m'_{X_1}(t)}_{=m_S(t)} = \\
 &= a m_{X_1}(t) m'_S(t) + (a+b) m_S(t) m'_{X_1}(t).
 \end{aligned}$$

Dabei sind die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen von  $S$  beziehungsweise  $X_1$  gegeben durch

$$m_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n g_n \quad \text{und} \quad m_{X_1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k f_k.$$

Für deren Ableitungen erhalten wir die Ausdrücke

$$m'_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}g_n \quad \text{und} \quad m'_{X_1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} kt^{k-1}f_k.$$

Wir setzen diese nun in die oben hergeleitete Gleichung ein und erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}g_n = a \left( \sum_{k=0}^{\infty} t^k f_k \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1}g_n \right) + (a+b) \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n g_n \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} kt^{k-1}f_k \right).$$

Das Multiplizieren der Gleichung mit  $t$  liefert uns

$$\sum_{n=0}^{\infty} nt^n g_n = a \left( \sum_{k=0}^{\infty} t^k f_k \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} nt^n g_n \right) + (a+b) \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n g_n \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} kt^k f_k \right).$$

Um daraus eine Formel für die Punktwahrscheinlichkeiten von  $S$  zu erhalten, führen wir nun einen Koeffizientenvergleich für die Potenzen von  $t$  durch. Man sieht, dass der Koeffizient von  $t^m$  für  $m \geq 1$  auf der linken Seite der Gleichung  $mg_m$  ist. Betrachtet man zunächst das erste Produkt auf der rechten Seite, setzt sich der Koeffizient von  $t^m$  als Produkt des Koeffizienten von  $t^k$  in der ersten Summe und des Koeffizienten von  $t^{m-k}$  in der zweiten Summe für  $k = 0, 1, \dots, m$  zusammen. Somit erhalten wir für den Koeffizienten von  $t^m$  im ersten Produkt den Ausdruck

$$a \sum_{k=0}^m f_k (m-k) g_{m-k}.$$

In analoger Weise sehen wir, dass der Koeffizient von  $t^m$  im zweiten Produkt auf der rechten Seite gleich

$$(a+b) \sum_{k=0}^m k f_k g_{m-k}$$

ist. Das Gleichsetzen der Koeffizienten von der linken und rechten Seite liefert uns nun die Gleichung

$$\begin{aligned} mg_m &= a \sum_{k=0}^m f_k (m-k) g_{m-k} + (a+b) \sum_{k=0}^m k f_k g_{m-k} \\ &= a f_0 m g_m + a \sum_{k=1}^m f_k (m-k) g_{m-k} + (a+b) \sum_{k=1}^m k f_k g_{m-k}. \end{aligned}$$

Mithilfe von elementaren Umformungen erhalten wir

$$(1 - a f_0) m g_m = \sum_{k=1}^m (a(m-k) + (a+b)k) f_k g_{m-k}$$

beziehungsweise äquivalent dazu

$$g_m = \frac{1}{1 - a f_0} \sum_{k=1}^m \left( a + \frac{bk}{m} \right) f_k g_{m-k}.$$

□

**Beispiel 3.2.1.** Im Folgenden wird für alle Schadenanzahlverteilungen der Panjer-Klasse die entsprechende Rekursion für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion des Gesamtschadens angegeben. Dabei wird die häufig getroffene Annahme  $f_0 = 0$  verwendet. Mithilfe der in Abschnitt 3.1 berechneten Werte von  $a$  und  $b$  für die einzelnen Verteilungen erhalten wir für

- $N \sim P(\lambda)$ :

$$g_n = \frac{\lambda}{n} \sum_{k=1}^n k g_{n-k} f_k$$

- $N \sim B(m, q)$ :

$$g_n = \frac{q}{1-q} \sum_{k=1}^n \left( \frac{(m+1)k}{n} - 1 \right) g_{n-k} f_k$$

- $N \sim NB(r, q)$ :

$$g_n = (1-q) \sum_{k=1}^n \left( 1 + \frac{(r-1)k}{n} \right) g_{n-k} f_k$$

### 3.3 Stetiger Fall

In diesem Abschnitt seien die Einzelschäden nun stetig verteilt mit  $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) = 0$ , wobei  $f(x)$  die Dichtefunktion dieser Verteilung bezeichnet. Im Beweis des nachfolgenden Satzes werden die folgenden zwei Relationen verwendet:

- Bei der ersten Relation handelt es sich um die rekursive Definition der Faltung, die wir bereits in Abschnitt 2.3.1 gesehen haben:

$$f^{*(n+1)}(x) = \int_0^x f(y) f^{*n}(x-y) dy.$$

- Bei der zweiten Relation gehen wir von  $n+1$  unabhängigen und identisch verteilten Einzelschäden aus. Sowohl die linke als auch die rechte Seite der nachfolgenden Gleichung beschreiben den bedingten Erwartungswert eines jeden Einzelschadens, wenn die Summe dieser  $n+1$  Einzelschäden  $x$  ergibt. Somit erhalten wir

$$\int_0^x y f(y) \frac{f^{*n}(x-y)}{f^{*(n+1)}(x)} dy = \frac{x}{n+1}.$$

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Schadenanzahlverteilung verwenden wir dieselbe Notation wie auch im vorigen Abschnitt:

$$p_n := \mathbb{P}(N = n).$$

**Satz 3.3.1** (Panjer Rekursion - Stetiger Fall). *Sind die Einzelschäden stetig verteilt mit Werten in  $\mathbb{R}_+$  und befindet sich die Schadenanzahlverteilung in der Panjer-Klasse, so erfüllt die Dichte  $g(x)$  des Gesamtschadens für  $x > 0$  die folgende Integralgleichung:*

$$g(x) = p_1 f(x) + \int_0^x \left( a + \frac{by}{x} \right) f(y) g(x-y) dy.$$

**Beweis:** Für die Dichte des Gesamtschadens gilt:

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x) & , x > 0 \\ p_0 & , x = 0. \end{cases}$$

Das Einsetzen dieser Gleichung in die rechte Seite liefert uns

$$\begin{aligned} p_1 f(x) + \int_0^x \left(a + \frac{by}{x}\right) f(y) g(x-y) dy &= p_1 f(x) + \int_0^x \left(a + \frac{by}{x}\right) f(y) \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x-y) dy = \\ &= p_1 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \int_0^x \left(a + \frac{by}{x}\right) f(y) f^{*n}(x-y) dy = \\ &= p_1 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left( a \underbrace{\int_0^x f(y) f^{*n}(x-y) dy}_{\stackrel{(i)}{=} f^{*(n+1)}(x)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{b}{x} \underbrace{\int_0^x y f(y) f^{*n}(x-y) dy}_{\stackrel{(ii)}{=} f^{*(n+1)}(x) \frac{x}{n+1}} \right) = \\ &= p_1 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left( a f^{*(n+1)}(x) + f^{*(n+1)}(x) \frac{b}{n+1} \right) = \\ &= p_1 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \underbrace{\left( a + \frac{b}{n+1} \right)}_{\stackrel{(1)}{=} p_{n+1}} f^{*(n+1)}(x) = \\ &= p_1 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} f^{*(n+1)}(x) = \\ &\stackrel{(2)}{=} p_1 f(x) + \sum_{n=2}^{\infty} p_n f^{*n}(x) = \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x) = \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Dabei beziehen sich (i) und (ii) auf die jeweiligen Relationen, die zuvor erläutert wurden.

Bei (1) wurde die Voraussetzung verwendet, dass sich die Schadenanzahlverteilung in der Panjer-Klasse befindet. Bei (2) wurde ein Index-Shift durchgeführt und (3) beruht auf der Tatsache  $f(x) = f^{*1}(x)$ .  $\square$

**Beispiel 3.3.1.** In diesem Beispiel wird für alle Schadenanzahlverteilungen der Panjer-Klasse die entsprechende Rekursion für die Dichte des Gesamtschadens angegeben. Dabei verwenden wir, wie auch bei Beispiel 3.2.1, die in Abschnitt 3.1 berechneten Werte von a und b für die einzelnen Verteilungen. Somit erhalten wir für

- $N \sim P(\lambda)$ :

$$g(x) = \lambda e^{-\lambda} f(x) + \frac{\lambda}{x} \int_0^x y f(y) g(x-y) dy$$

- $N \sim B(m, q)$ :

$$\begin{aligned} g(x) &= mq(1-q)^{m-1} f(x) + \int_0^x \left( -\frac{q}{1-q} + \frac{(m+1)q}{1-q} \frac{y}{x} \right) f(y) g(x-y) dy = \\ &= \frac{q}{1-q} \left( m(1-q)^m f(x) + \int_0^x \left( \frac{(m+1)y}{x} \right) f(y) g(x-y) dy \right) \end{aligned}$$

- $N \sim NB(r, q)$ :

$$\begin{aligned} g(x) &= rq^r(1-q)f(x) + \int_0^x \left( 1-q + (r-1)(1-q)\frac{y}{x} \right) f(y)g(x-y) dy = \\ &= (1-q) \left( rq^r f(x) + \int_0^x \left( 1 + \frac{(r-1)y}{x} \right) f(y)g(x-y) dy \right). \end{aligned}$$

## 4 Eine Erweiterung der Panjer-Klasse

Das nachfolgende Kapitel basiert auf (Willmot/Panjer 1987) und (Hesselager 1994). Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, wie im diskreten Fall die Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. im stetigen Fall die Dichte des Gesamtschadens berechnet werden kann, wenn sich die Schadenanzahlverteilung in der Panjer-Klasse befindet. In diesem Kapitel betrachten wir nun Verteilungen für die Schadenanzahl, für die ein  $k \in \mathbb{N}$  existiert, sodass die Rekursion

$$p_n = \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^i}{\sum_{i=0}^k b_i n^i} p_{n-1} \quad (1)$$

für  $n \geq 1$  erfüllt wird.

Im Folgenden werden nun zunächst die Spezialfälle  $k = 1$  und  $k = 2$  und anschließend der allgemeine Fall für beliebiges  $k \in \mathbb{N}$  betrachtet. Unter der stetigen Annahme, dass die Einzelschäden diskret verteilt sind, werden für all diese Fälle entsprechende Rekursionen für die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens  $S$  hergeleitet. Dabei sollen die Rekursionen für die Spezialfälle  $k = 1$  und  $k = 2$  stets von der Form

$$g_n = h_n + \sum_{j=1}^n l_{n,j} g_{n-j} \quad (2)$$

mit entsprechenden Funktionen  $h_n$  und  $l_{n,j}$  und der Notation  $g_n = \mathbb{P}(S = n)$  sein. Der Startwert  $g_0$  ist dabei, wie bereits in Abschnitt 2.3.2 gezeigt, durch  $g_0 = m_N(f_0)$  gegeben. Für die Panjer-Rekursion in Abschnitt 3.2 würde man hierfür beispielsweise die Funktionen

$$h_n = 0 \text{ und } l_{n,j} = \frac{an + bj}{n(1 - af_0)} f_j$$

erhalten.

## 4.1 Der Spezialfall $k=1$

Vergleicht man die Rekursion (1) für den Spezialfall  $k = 1$

$$p_n = \frac{a_0 + a_1 n}{b_0 + b_1 n} p_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (3)$$

mit der Rekursion

$$p_n = \frac{an + b}{n} p_{n-1}, \quad n \geq 1$$

ist ersichtlich, dass es sich hierbei wirklich um eine Erweiterung der Panjer-Klasse handelt. Dabei kann die Rekursion (3) mithilfe der Konstanten  $\phi$ ,  $\psi$  und  $\xi$  wie folgt umgeschrieben werden:

$$p_n = \frac{\phi(n-1) + \psi}{\xi n + 1} p_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (4)$$

**Beispiel 4.1.1.** Die Rekursion für den Spezialfall  $k = 1$  wird unter anderem von den folgenden Verteilungen erfüllt:

- Waring-Verteilung:

Die Waring-Verteilung entsteht aus einer gemischten geometrischen Verteilung mit einer Beta-Mischfunktion. Infolgedessen handelt es sich um eine diskrete Verteilung mit den 2 Parametern  $\alpha > 0$  und  $\beta > 0$ , deren Wahrscheinlichkeitsfunktion für  $n \geq 0$  durch

$$p_n = \frac{B(\alpha + n, \beta + 1)}{B(\alpha, \beta)}$$

gegeben ist.  $B(., .)$  beschreibt dabei die sogenannte Betafunktion, die für  $\alpha > 0$  und  $\beta > 0$  als

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

definiert ist (vgl. Gurker 2018: 128). Aufgrund der Relation

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

zwischen der Beta- und Gammafunktion (vgl. Gurker 2018: 128), lässt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Waring-Verteilung wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \\ &\stackrel{(i)}{=} \frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\alpha + \beta)\beta}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)\Gamma(\alpha)} = \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{\alpha + n - 1}{\alpha + \beta + n} \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha + n - 1)\Gamma(\alpha + \beta)\beta}{\Gamma(\alpha + \beta + n)\Gamma(\alpha)}}_{=p_{n-1}} = \\ &= \frac{\alpha + n - 1}{\alpha + \beta + n} p_{n-1}. \end{aligned}$$

Bei (i) und (ii) wurde jeweils die Eigenschaft  $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ ,  $a > 0$ , der Gammafunktion verwendet. (vgl. Gurker 2018: 121) Mit  $a_0 = \alpha - 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $b_0 = \alpha + \beta$  und  $b_1 = 1$  bzw.  $\phi = \frac{1}{\alpha+\beta}$ ,  $\psi = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$  und  $\xi = \frac{1}{\alpha+\beta}$  erfüllt die Waring-Verteilung also die gewünschte Rekursion.

- Logarithmische Verteilung:

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der logarithmischen Verteilung mit Parameter  $0 < \theta < 1$  ist für  $n \geq 0$  gegeben durch

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{\theta^{n+1}}{(n+1) \ln(1-\theta)} = \\
 &= \frac{\theta n}{n+1} \underbrace{\frac{\theta^n}{n \ln(1-\theta)}}_{=p_{n-1}} = \\
 &= \frac{\theta n}{n+1} p_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Also ist die Rekursion für den Spezialfall  $k = 1$  mit  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = \theta$ ,  $b_0 = 1$  und  $b_1 = 1$  bzw.  $\phi = \theta$ ,  $\psi = \theta$  und  $\xi = 1$  für die logarithmische Verteilung erfüllt.

- Die Verteilungen der Panjer-Klasse:

Da es sich hierbei um eine Verallgemeinerung handelt, erfüllen alle Verteilungen, die sich in der Panjer-Klasse befinden die gewünschte Rekursion mit den in Abschnitt 3.1 bestimmten Werten für  $a$  und  $b$  als Werte für  $a_0$  bzw.  $a_1$  und  $b_0 = b_1 = 1$ .

#### 4.1.1 Herleitung einer Rekursion

Im Folgenden wird nun für jene Schadenanzahlverteilungen, die die Rekursion (1) erfüllen, mithilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen eine Rekursion für die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens im Falle von diskret verteilten Schäden hergeleitet. In Abschnitt 2.3.2 wurde bereits gezeigt, dass

$$m_S(t) = m_N(m_{X_1}(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n m_{X_1}(t)^n$$

gilt. Die Ableitung der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion  $m_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$  ist durch den Ausdruck

$$m'_N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n t^{n-1}$$

gegeben. Des Weiteren erhält man mithilfe der Kettenregel einen Ausdruck für die Ableitung der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion des Gesamtschadens:

$$m'_S(t) = m'_N(m_{X_1}(t)) m'_{X_1}(t). \tag{5}$$

Wir multiplizieren nun beide Seiten der umgeschriebenen Rekursion (4) mit  $(\xi n + 1)m_{X_1}(t)^n$  und erhalten dadurch für  $n \geq 1$  die Gleichung

$$(\xi n + 1)p_n m_{X_1}(t)^n = [\phi(n - 1) + \psi]p_{n-1} m_{X_1}(t)^n.$$

Das Summieren der rechten, als auch linken Seite über  $n \geq 1$  liefert uns die Gleichung

$$\xi \sum_{n=1}^{\infty} n p_n m_{X_1}(t)^n + \sum_{n=1}^{\infty} p_n m_{X_1}(t)^n = \phi \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1) p_{n-1} m_{X_1}(t)^n + \psi \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} m_{X_1}(t)^n.$$

Zur Vereinfachung dieser Gleichung bestimmen wir die linke bzw. rechte Seite separat voneinander:

- LHS:

$$\begin{aligned} & \xi \sum_{n=1}^{\infty} n p_n m_{X_1}(t)^n + \sum_{n=1}^{\infty} p_n m_{X_1}(t)^n = \\ &= \xi m_{X_1}(t) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n p_n m_{X_1}(t)^{n-1}}_{=m'_N(m_{X_1}(t))} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} p_n m_{X_1}(t)^n}_{=m_S(t) - p_0} = \\ &= \xi m_{X_1}(t) m'_N(m_{X_1}(t)) + m_S(t) - p_0 = \\ &\stackrel{(5)}{=} \xi m_{X_1}(t) \frac{m'_S(t)}{m'_{X_1}(t)} + m_S(t) - p_0 \end{aligned}$$

- RHS:

$$\begin{aligned} & \phi \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1) p_{n-1} m_{X_1}(t)^n + \psi \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} m_{X_1}(t)^n = \\ &\stackrel{(*)}{=} \phi \sum_{n=0}^{\infty} n p_n m_{X_1}(t)^{n+1} + \psi \sum_{n=0}^{\infty} p_n m_{X_1}(t)^{n+1} = \\ &= \phi m_{X_1}(t)^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n p_n m_{X_1}(t)^{n-1}}_{=m'_N(m_{X_1}(t))} + \psi m_{X_1}(t) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_n m_{X_1}(t)^n}_{=m_S(t)} = \\ &= \phi m_{X_1}(t)^2 m'_N(m_{X_1}(t)) + \psi m_{X_1}(t) m_S(t) = \\ &\stackrel{(5)}{=} \phi m_{X_1}(t)^2 \frac{m'_S(t)}{m'_{X_1}(t)} + \psi m_{X_1}(t) m_S(t) \end{aligned}$$

Bei (\*) wurde bei beiden Summen ein Index-Shift durchgeführt.

Führt man die beiden Seiten wieder zusammen, bringt  $p_0$  von der linken auf die rechte Seite und multipliziert anschließend beide Seiten mit  $m'_{X_1}(t)$ , erhält man die Gleichung

$$\xi m_{X_1}(t) m'_S(t) + m_S(t) m'_{X_1}(t) = p_0 m'_{X_1}(t) + \phi m_{X_1}(t)^2 m'_S(t) + \psi m_{X_1}(t) m_S(t) m'_{X_1}(t). \quad (6)$$

Wir definieren nun die Funktion  $Q(t) := \frac{tm'_{X_1}(t)}{m_{X_1}(t)}$  mit der Potenzreihendarstellung  $\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$ . Unter erneuter Verwendung der Notation  $f_x := \mathbb{P}(X_1 = x)$  ist laut Definition

$$m_{X_1}(t) = \sum_{x=0}^{\infty} f_x t^x.$$

Für den Zähler von  $Q(t)$  erhalten wir damit den Ausdruck

$$tm'_{X_1}(t) = \sum_{x=0}^{\infty} x f_x t^x.$$

Um die Koeffizienten  $q_n$  der Potenzreihendarstellung von  $Q(t)$  zu bestimmen, sei  $r$  der kleinste Index mit  $f_r > 0$ . Also gilt, dass  $f_x = 0$  für  $x < r$ . Damit erhalten wir die folgenden Darstellungen für  $m_{X_1}(t)$  bzw.  $tm'_{X_1}(t)$ :

$$\begin{aligned} m_{X_1}(t) &= t^r \sum_{x=0}^{\infty} f_{x+r} t^x \\ tm'_{X_1}(t) &= t^r \sum_{x=0}^{\infty} (x+r) f_{x+r} t^x. \end{aligned}$$

Nach Definition von  $Q(t)$  gilt

$$Q(t)m_{X_1}(t) = tm'_{X_1}(t)$$

bzw. äquivalent dazu

$$\left( \sum_{x=0}^{\infty} q_x t^x \right) \left( \sum_{x=0}^{\infty} f_{x+r} t^x \right) = \sum_{x=0}^{\infty} (x+r) f_{x+r} t^x.$$

Das Vergleichen der Koeffizienten von  $t^x$  auf beiden Seiten der Gleichung liefert uns eine Rekursion für  $q_x$ ,  $x \geq 0$ :

$$\begin{aligned} q_0 &= r \\ q_x &= \frac{(x+r)f_{x+r}}{f_r} - \sum_{i=1}^x \frac{f_{i+r}}{f_r} q_{x-i}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Wir widmen uns nun wieder der Gleichung (6): Multipliziert man die Gleichung mit  $\frac{t}{m_{X_1}(t)}$  erhält man die äquivalente Gleichung

$$\xi tm'_S(t) + m_S(t) \underbrace{\frac{tm'_{X_1}(t)}{m_{X_1}(t)}}_{=Q(t)} = p_0 \underbrace{\frac{tm'_{X_1}(t)}{m_{X_1}(t)}}_{=Q(t)} + \phi tm_{X_1}(t) m'_S(t) + \psi tm'_{X_1}(t) m_S(t).$$

Unter Verwendung von  $Q(t)$  lässt sich die Gleichung nun schreiben als

$$\xi [tm'_S(t)] + m_S(t)Q(t) = p_0 Q(t) + \phi m_{X_1}(t) [tm'_S(t)] + \psi [tm'_{X_1}(t)] m_S(t).$$

Um einen Koeffizientenvergleich durchführen zu können, schreiben wir nun die Gleichung mit den entsprechenden Summen der Definitionen auf:

$$\xi \sum_{n=0}^{\infty} n g_n t^n + \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n + \phi \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} n g_n t^n \right) + \psi \left( \sum_{n=0}^{\infty} n f_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n \right).$$

Da hierbei das Ergebnis des Koeffizientenvergleichs nicht klar ersichtlich ist, wird im Folgenden der Koeffizientenvergleich für die ersten 3 Potenzen durchgeführt. Dabei ist schon die allgemeine Formel für  $h_n$  und  $l_{n,j}$  aus (2) erkennbar. Wir betrachten nun die linke bzw. rechte Seite der Gleichung getrennt voneinander:

- LHS:

$$\begin{aligned} & \xi (g_1 t + 2g_2 t^2 + 3g_3 t^3 + \dots) + (g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + g_3 t^3 + \dots) (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \dots) = \\ & = g_0 q_0 + (\xi g_1 + g_0 q_1 + g_1 q_0) t + (2\xi g_2 + g_0 q_2 + g_1 q_1 + g_2 q_0) t^2 \\ & \quad + (3\xi g_3 + g_0 q_3 + g_1 q_2 + g_2 q_1 + g_3 q_0) t^3 + \dots \end{aligned}$$

- RHS

$$\begin{aligned} & p_0 (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \dots) + \phi (f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 + \dots) (g_1 t + 2g_2 t^2 + 3g_3 t^3 + \dots) \\ & \quad + \psi (f_1 t + 2f_2 t^2 + 3f_3 t^3 + \dots) (g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + g_3 t^3 + \dots) = \\ & = p_0 q_0 + (p_0 q_1 + \phi f_0 g_1 + \psi f_1 g_0) t + (p_0 q_2 + 2\phi f_0 g_2 + \phi f_1 g_1 + \psi f_1 g_1 + 2\psi f_2 g_0) t^2 \\ & \quad + (p_0 q_3 + 3\phi f_0 g_3 + 2\phi f_1 g_2 + \phi f_2 g_1 + \psi f_1 g_2 + 2\psi f_2 g_1 + 3\psi f_3 g_0) t^3 + \dots \end{aligned}$$

Wir setzen nun die Koeffizienten zu den jeweiligen Potenzen auf beiden Seiten gleich und formen die entsprechenden Gleichungen anschließend um:

- $t$ :

$$\begin{aligned} & \xi g_1 + g_0 q_1 + g_1 q_0 \stackrel{!}{=} p_0 q_1 + \phi f_0 g_1 + \psi f_1 g_0 \\ \implies g_1 & = \underbrace{\frac{p_0 q_1}{1(\xi - \phi f_0) + g_0}}_{=h_1} + \underbrace{\frac{\psi f_1 - q_1}{1(\xi - \phi f_0) + g_0} g_0}_{=l_{1,1}} \end{aligned}$$

- $t^2$ :

$$\begin{aligned} & 2\xi g_2 + g_0 q_2 + g_1 q_1 + g_2 q_0 \stackrel{!}{=} p_0 q_2 + 2\phi f_0 g_2 + \phi f_1 g_1 + \psi f_1 g_1 + 2\psi f_2 g_0 \\ \implies g_2 & = \underbrace{\frac{p_0 q_2}{2(\xi - \phi f_0) + q_0}}_{=h_2} + \underbrace{\frac{(\phi + \psi) f_1 - q_1}{2(\xi - \phi f_0) + q_0} g_1}_{=l_{2,1}} + \underbrace{\frac{2\psi f_2 - q_2}{2(\xi - \phi f_0) + q_0} g_0}_{=l_{2,2}} \end{aligned}$$

- $t^3$ :

$$\Rightarrow g_3 = \underbrace{\frac{p_0 q_3}{3(\xi - \phi f_0) + q_0}}_{=h_3} + \underbrace{\frac{(2\phi + \psi) f_1 - q_1}{3(\xi - \phi f_0) + q_0}}_{=l_{3,1}} g_2 + \underbrace{\frac{(\phi + 2\psi) f_2 - q_2}{3(\xi - \phi f_0) + q_0}}_{=l_{3,2}} g_1 + \underbrace{\frac{3\psi f_3 - q_3}{3(\xi - \phi f_0) + q_0}}_{=l_{3,3}} g_0.$$

Wir erhalten somit den folgenden Satz:

**Satz 4.1.1.** Die Funktionen  $h_n$  und  $l_{n,j}$  aus der Rekursion

$$g_n = h_n + \sum_{j=1}^n l_{n,j} g_{n-j}$$

sind im Spezialfall  $k = 1$  durch die folgenden allgemeinen Formeln gegeben:

$$h_n = \frac{p_0 q_n}{n(\xi - \phi f_0) + q_0}$$

$$l_{n,j} = \frac{[(n-j)\phi + j\psi] f_j - q_j}{n(\xi - \phi f_0) + q_0}.$$

## 4.2 Der Spezialfall $k=2$

Die Rekursion (1) für den Spezialfall  $k = 2$  ist gegeben durch

$$p_n = \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2} p_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (7)$$

Im Folgenden nehmen wir zusätzlich die Einschränkung  $b_0 = 0$  vor. In diesem Fall kann die Rekursion (7) umgeschrieben werden als

$$p_n = \frac{\phi(n-1)(n-2) + \psi(n-1) + \kappa}{n(n-1) + \xi n} p_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

**Beispiel 4.2.1.** Die folgenden Verteilungen erfüllen den Spezialfall  $k = 2$  mit  $b_0 = 0$ :

- Generalisierte Waring-Verteilung:

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der generalisierten Waring-Verteilung mit den Parametern  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  und  $\delta > 0$  ist für  $n \geq 0$  gegeben durch

$$p_n = \frac{\Gamma(\delta + n)}{\Gamma(\delta) n!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha + n) \Gamma(\beta + \delta)}{\Gamma(\alpha + \beta + \delta + n)}.$$

Mit der schon bekannten Eigenschaft der Gammafunktion  $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ ,  $a > 0$ , erfüllt die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p_n = \frac{(\delta + n - 1) \Gamma(\delta + n - 1)}{\Gamma(\delta) n(n-1)!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \frac{(\alpha + n - 1) \Gamma(\alpha + n - 1) \Gamma(\beta + \delta)}{(\alpha + \beta + \delta + n - 1) \Gamma(\alpha + \beta + \delta + n - 1)} =$$

$$= \frac{[n + (\delta - 1)][n + (\alpha - 1)]}{n[n + (\alpha + \beta + \delta - 1)]} p_{n-1}.$$

Mit  $a_0 = (\alpha - 1)(\delta - 1)$ ,  $a_1 = \alpha + \delta - 2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $b_1 = \alpha + \beta + \delta - 1$  und  $b_2 = 1$  bzw.  $\phi = 1$ ,  $\psi = \alpha + \delta + 1$ ,  $\kappa = \alpha\delta$  und  $\xi = \alpha + \beta + \delta$  erfüllt die Wahrscheinlichkeitsfunktion die gewünschte Rekursion.

- Polya-Eggenberger-Verteilung:

Die Polya-Eggenberger-Verteilung hat für  $n = 1, \dots, N$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p_n = \frac{\binom{\alpha+n-1}{n} \binom{\beta+N-n-1}{N-n}}{\binom{\alpha+\beta+N-1}{N}}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{\binom{\alpha+n-1}{n} \binom{\beta+N-n-1}{N-n}}{\binom{\alpha+\beta+N-1}{N}} = \\
 &= \frac{\frac{(\alpha+n-1)!}{n!(\alpha-1)!} \frac{(\beta+N-n-1)!}{(N-n)!(\beta-1)!}}{\frac{(\alpha+\beta+N-1)!}{N!}} = \\
 &= \frac{\frac{(\alpha+n-1)(\alpha+(n-1)-1)!}{n(n-1)!(\alpha-1)!} \frac{(N-n+1)(\beta+N-(n-1)-1)!}{(\beta+N-n)(N-(n-1))!(\beta-1)!}}{\frac{(\alpha+\beta+N-1)!}{N!}} = \\
 &= \frac{(\alpha+n-1)(N-n+1)}{n(\beta+N-n)} \underbrace{\frac{\binom{\alpha+(n-1)-1}{n-1} \binom{\beta+N-(n-1)-1}{N-(n-1)}}{\binom{\alpha+\beta+N-1}{N}}}_{=p_{n-1}} = \\
 &= \frac{[n+(\alpha-1)][n-(N+1)]}{n[n-(N+\beta)]} p_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Wir erhalten somit für  $a_0, a_1, a_2, b_1$  und  $b_2$  bzw.  $\phi, \psi, \kappa$  und  $\xi$  die folgenden Werte:

- $a_0 = -(\alpha-1)(N+1), a_1 = \alpha-N-2, a_2 = 1$
- $b_1 = -(\beta+N), b_2 = 1$
- $\phi = 1, \psi = \alpha-N+1, \kappa = -\alpha N, \xi = 1-\beta-N.$

- Hypergeometrische Verteilung:

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern  $N > 0, M \leq N$  und  $m \leq N$  ist für  $\max\{0, M+m-N\} \leq n \leq \min\{M, n\}$  gegeben durch

$$p_n = \frac{\binom{M}{n} \binom{N-M}{m-n}}{\binom{N}{m}}.$$

(vgl. Gurker 2018: 110)

Es gilt

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{\binom{M}{n} \binom{N-M}{m-n}}{\binom{N}{m}} = \\
&= \frac{M!}{n!(M-n)!} \frac{(N-M)!}{(m-n)!(N-M-(m-n))!} = \\
&= \frac{\binom{N}{m}}{\binom{N}{m}} = \\
&= \frac{(M-n+1)M!}{n(n-1)!(M-(n-1))!} \frac{(m-n+1)(N-M)!}{(N-M-(m-n))(m-(n-1))!(N-M-(m-(n-1)))!} = \\
&= \frac{(M-n+1)(m-n+1)}{n(N-M-(m-n))} \frac{M!}{(n-1)!(M-(n-1))!} \frac{(N-M)!}{(m-(n-1))!(N-M-(m-(n-1)))!} = \\
&= \frac{[n-(M+1)][n-(m+1)]}{n[n+(N-M-m)]} \underbrace{\frac{\binom{M}{n-1} \binom{N-M}{m-(n-1)}}{\binom{N}{m}}}_{=p_{n-1}} = \\
&= \frac{[n-(M+1)][n-(m+1)]}{n[n+(N-M-m)]} p_{n-1}.
\end{aligned}$$

Die hypergeometrische Verteilung erfüllt also mit  $a_0 = (M+1)(m+1)$ ,  $a_1 = -(M+m+2)$ ,  $a_2 = 1$ ,  $b_1 = N-M-m$  und  $b_2 = 1$  bzw.  $\phi = 1$ ,  $\psi = -(M+m-1)$ ,  $\kappa = Mm$  und  $\xi = N-M-m+1$  die gewünschte Rekursion.

#### 4.2.1 Herleitung einer Rekursion

Um eine Rekursion für den Spezialfall  $k = 2$  mit  $b_0 = 0$  herzuleiten, multiplizieren wir beide Seiten der umgeschriebenen Rekursion (8) mit  $[n(n-1) + \xi n] m_{X_1}(t)^n$  und erhalten für  $n \geq 1$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
n(n-1)p_n m_{X_1}(t)^n + \xi n p_n m_{X_1}(t)^n &= \phi [n(n-1) - 2(n-1)] p_{n-1} m_{X_1}(t)^n \\
&+ \psi (n-1) p_{n-1} m_{X_1}(t)^n + \kappa p_{n-1} m_{X_1}(t)^n.
\end{aligned}$$

Summieren der rechten und linken Seite über  $n \geq 1$  liefert uns

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) p_n m_{X_1}(t)^n + \xi \sum_{n=1}^{\infty} n p_n m_{X_1}(t)^n &= \phi \sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1) - 2(n-1)] p_{n-1} m_{X_1}(t)^n \\
&+ \psi \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1} m_{X_1}(t)^n + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} m_{X_1}(t)^n.
\end{aligned}$$

Wie auch im Spezialfall  $k = 1$  werden die rechte und linke Seite wieder getrennt voneinander betrachtet. Dabei werden die folgenden Resultate verwendet:

- (i)  $m_N''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) p_n t^{n-2}$
- (ii)  $m_S''(t) = m_N''(m_{X_1}(t)) [m_{X_1}'(t)]^2 + m_N'(m_{X_1}(t)) m_{X_1}''(t)$
- (iii)  $m_S'(t) = m_N'(m_{X_1}(t)) m_{X_1}'(t)$ .

• LHS:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p_n m_{X_1}(t)^n + \xi \sum_{n=1}^{\infty} n p_n m_{X_1}(t)^n = \\
 = & \underbrace{m_{X_1}(t)^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p_n m_{X_1}(t)^{n-2}}_{=m''_N(m_{X_1}(t))} + \underbrace{\xi m_{X_1}(t) \sum_{n=1}^{\infty} n p_n m_{X_1}(t)^{n-1}}_{=m'_N(m_{X_1}(t))} = \\
 = & m_{X_1}(t)^2 m''_N(m_{X_1}(t)) + \xi m_{X_1}(t) m'_N(m_{X_1}(t)) = \\
 \stackrel{(ii)}{=} & m_{X_1}(t)^2 \frac{m''_S(t)}{[m'_{X_1}(t)]^2} - m_{X_1}(t)^2 \frac{m'_N(m_{X_1}(t)) m''_{X_1}(t)}{[m'_{X_1}(t)]^2} + \xi m_{X_1}(t) m'_N(m_{X_1}(t)) = \\
 \stackrel{(iii)}{=} & m_{X_1}(t)^2 \frac{m''_S(t)}{[m'_{X_1}(t)]^2} - m_{X_1}(t)^2 \frac{m'_S(t) m''_{X_1}(t)}{[m'_{X_1}(t)]^3} + \xi m_{X_1}(t) \frac{m'_S(t)}{m'_{X_1}(t)}
 \end{aligned}$$

• RHS:

$$\begin{aligned}
 & \phi \sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1) - 2(n-1)] p_{n-1} m_{X_1}(t)^n + \psi \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n p_{n-1} m_{X_1}(t)^n \\
 & + \kappa \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} m_{X_1}(t)^n = \\
 \stackrel{(*)}{=} & \phi \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{[(n+1)n - 2n]}_{=n(n-1)} p_n m_{X_1}(t)^{n+1} + \psi \sum_{n=0}^{\infty} n p_n m_{X_1}(t)^{n+1} + \kappa \sum_{n=0}^{\infty} p_n m_{X_1}(t)^{n+1} = \\
 = & \phi m_{X_1}(t)^3 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) p_n m_{X_1}(t)^{n-2}}_{=m''_N(m_{X_1}(t))} + \psi m_{X_1}(t)^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n p_n m_{X_1}(t)^{n-1}}_{=m'_N(m_{X_1}(t))} + \kappa m_{X_1}(t) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_n m_{X_1}(t)^n}_{=m_S(t)} = \\
 = & \phi m_{X_1}(t)^3 m''_N(m_{X_1}(t)) + \psi m_{X_1}(t)^2 m'_N(m_{X_1}(t)) + \kappa m_{X_1}(t) m_S(t) = \\
 \stackrel{(ii)}{=} & \phi m_{X_1}(t)^3 \frac{m''_S(t)}{[m'_{X_1}(t)]^2} - \phi m_{X_1}(t)^3 \frac{m'_N(m_{X_1}(t)) m''_{X_1}(t)}{[m'_{X_1}(t)]^2} + \psi m_{X_1}(t)^2 m'_N(m_{X_1}(t)) \\
 & + \kappa m_{X_1}(t) m_S(t) = \\
 \stackrel{(iii)}{=} & \phi m_{X_1}(t)^3 \frac{m''_S(t)}{[m'_{X_1}(t)]^2} - \phi m_{X_1}(t)^3 \frac{m'_S(t) m''_{X_1}(t)}{[m'_{X_1}(t)]^3} + \psi m_{X_1}(t)^2 \frac{m'_S(t)}{m'_{X_1}(t)} + \kappa m_{X_1}(t) m_S(t)
 \end{aligned}$$

Bei (\*) wurde ein Index-Shift durchgeführt.

Führt man die beiden Seiten wieder zusammen und multipliziert anschließend beide Seiten mit  $\frac{[m'_{X_1}(t)]^3}{m_{X_1}(t)}$ , erhält man nun die Gleichung

$$\begin{aligned}
 & m''_S(t) m_{X_1}(t) m'_{X_1}(t) - m'_S(t) m_{X_1}(t) m''_{X_1}(t) + \xi m'_S(t) [m'_{X_1}(t)]^2 = \\
 = & \phi m''_S(t) m_{X_1}(t)^2 m'_{X_1}(t) - \phi m'_S(t) m_{X_1}(t)^2 m''_{X_1}(t) + \psi m'_S(t) m_{X_1}(t) [m'_{X_1}(t)]^2 + \kappa m_S(t) [m'_{X_1}(t)]^3.
 \end{aligned}$$

Zusätzlich zur Funktion  $Q(t)$  aus Abschnitt 4.1.1 definieren wir nun die Funktion  $R(t) = \frac{t m''_{X_1}(t)}{m'_{X_1}(t)}$  mit der Potenzreihendarstellung  $\sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n$ . Um die Koeffizienten  $r_n$  zu erhalten, verfahren wir

ähnlich wie bei der Bestimmung der Koeffizienten der Potenzreihendarstellung von  $Q(t)$ . Wir definieren  $m$  als den kleinsten Index von  $tm'_{X_1}(t) = \sum_{x=0}^{\infty} x f_x t^x$  mit  $m f_m = m \mathbb{P}(X_1 = m) > 0$ . Für  $x < m$  gilt also  $x f_x = 0$ . Mithilfe der Definition von  $m$  erhält man die folgenden Darstellungen für  $tm''_{X_1}(t)$  und  $m'_{X_1}(t)$ :

$$\begin{aligned} tm''_{X_1}(t) &= t^{m-1} \sum_{x=0}^{\infty} (x+m)(x+m-1) f_{x+m} t^x \\ m'_{X_1}(t) &= t^{m-1} \sum_{x=0}^{\infty} (x+m) f_{x+m} t^x. \end{aligned}$$

Nach Definition von  $R(t)$  und den entsprechenden Darstellungen gilt also

$$\left( \sum_{x=0}^{\infty} r_x t^x \right) \left( \sum_{x=0}^{\infty} (x+m) f_{x+m} t^x \right) = \sum_{x=0}^{\infty} (x+m)(x+m-1) f_{x+m} t^x.$$

Vergleicht man nun die Koeffizienten von  $t^x$  auf beiden Seiten der Gleichung, ergibt sich die folgende Rekursion für  $r_x$ ,  $x \geq 0$ :

$$\begin{aligned} r_0 &= m - 1 \\ r_x &= \frac{(x+m)(x+m-1)f_{x+m}}{m f_m} - \sum_{j=1}^x \frac{(j+m)f_{j+m}}{m f_m} r_{x-j}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Das Multiplizieren der oben hergeleiteten Gleichung mit  $\frac{t^2}{m_{X_1}(t)m'_{X_1}(t)}$  liefert uns nun

$$\begin{aligned} t^2 m''_S(t) - m'_S(t) \underbrace{\frac{t^2 m''_{X_1}(t)}{m'_{X_1}(t)}}_{=R(t)} + \xi m'_S(t) \underbrace{\frac{t^2 m'_{X_1}(t)}{m_{X_1}(t)}}_{=Q(t)} &= \\ = \phi t^2 m''_S(t) m_{X_1}(t) - \phi m'_S(t) m_{X_1}(t) \underbrace{\frac{t^2 m''_{X_1}(t)}{m'_{X_1}(t)}}_{=R(t)} + \psi t^2 m'_S(t) m'_{X_1}(t) + \kappa m_S(t) \underbrace{\frac{t^2 [m'_{X_1}(t)]^2}{m_{X_1}(t)}}_{=tm'_{X_1}(t)Q(t)}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Funktionen  $Q(t)$  und  $R(t)$  erhalten wir somit also die äquivalente Gleichung:

$$\begin{aligned} t^2 m''_S(t) - [tm'_S(t)] R(t) + \xi [tm'_S(t)] Q(t) &= \\ = \phi [t^2 m''_S(t)] m_{X_1}(t) - \phi [tm'_S(t)] m_{X_1}(t) R(t) + \psi [tm'_S(t)] [tm'_{X_1}(t)] + \kappa m_S(t) [tm'_{X_1}(t)] Q(t). \end{aligned}$$

Wir gehen nun analog wie in Abschnitt 4.1.1 vor und schreiben die Gleichung mit den entsprechenden Summen der Definitionen auf, um einen Koeffizientenvergleich durchführen zu können:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) g_n t^n - \left( \sum_{n=0}^{\infty} n g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n \right) + \xi \left( \sum_{n=0}^{\infty} n g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) &= \\ = \phi \left( \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \right) - \phi \left( \sum_{n=0}^{\infty} n g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n \right) \\ + \psi \left( \sum_{n=0}^{\infty} n g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} n f_n t^n \right) + \kappa \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} n f_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right). \end{aligned}$$

Um, wie in Abschnitt 4.1.1, die Formeln für  $h_n$  und  $l_{n,k}$  aus dem Koeffizientenvergleich ersichtlich zu machen, führen wir wieder illustrativ den Koeffizientenvergleich für die ersten 3 Potenzen durch. Dafür betrachten wir die beiden Seiten der Gleichung zunächst wieder getrennt voneinander:

- LHS:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)g_n t^n - \left( \sum_{n=0}^{\infty} n g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n \right) + \xi \left( \sum_{n=0}^{\infty} n g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) = \\
&= (2g_2 t^2 + 6g_3 t^3 + \dots) - (g_1 t + 2g_2 t^2 + 3g_3 t^3) (r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + r_3 t^3 + \dots) \\
&\quad + \xi (g_1 t + 2g_2 t^2 + 3g_3 t^3 + \dots) (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \dots) = \\
&= (2g_2 t^2 + 6g_3 t^3 + \dots) - [g_1 r_0 t + (g_1 r_1 + 2g_2 r_0) t^2 + (g_1 r_2 + 2g_2 r_1 + 3g_3 r_0) t^3 + \dots] \\
&\quad + \xi [g_1 q_0 t + (g_1 q_1 + 2g_2 q_0) t^2 + (g_1 q_2 + 2g_2 q_1 + 3g_3 q_0) t^3 + \dots] = \\
&= (-g_1 r_0 + \xi g_1 q_0) t + (2g_2 - g_1 r_1 - 2g_2 r_0 + \xi g_1 q_1 + 2\xi g_2 q_0) t^2 \\
&\quad + (6g_3 - g_1 r_2 - 2g_2 r_1 - 3g_3 r_0 + \xi g_1 q_2 + 2\xi g_2 q_1 + 3\xi g_3 q_0) t^3 + \dots
\end{aligned}$$

- RHS:

$$\begin{aligned}
& \phi \left( \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \right) - \phi \left( \sum_{n=0}^{\infty} n g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n \right) \\
&+ \psi \left( \sum_{n=0}^{\infty} n g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} n f_n t^n \right) + \kappa \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} n f_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) = \\
&= \phi (2g_2 t^2 + 6g_3 t^3 + \dots) (f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 + \dots) \\
&\quad - \phi (g_1 t + 2g_2 t^2 + 3g_3 t^3 + \dots) (f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 + \dots) (r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + r_3 t^3 + \dots) \\
&\quad + \psi (g_1 t + 2g_2 t^2 + 3g_3 t^3 + \dots) (f_1 t + 2f_2 t^2 + 3f_3 t^3 + \dots) \\
&\quad + \kappa (g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + g_3 t^3 + \dots) (f_1 t + 2f_2 t^2 + 3f_3 t^3 + \dots) (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \dots) = \\
&= \phi [2g_2 f_0 t^2 + (2g_2 f_1 + 6g_3 f_0) t^3 + \dots] - \phi [g_1 f_0 r_0 t + (g_1 f_0 r_1 + g_1 f_1 r_0 + 2g_2 f_0 r_0) t^2 \\
&\quad + (g_1 f_0 r_2 + g_1 f_1 r_1 + g_1 f_2 r_0 + 2g_2 f_0 r_1 + 2g_2 f_1 r_0 + 3g_3 f_0 r_0) t^3 + \dots] \\
&\quad + \psi [g_1 f_1 t^2 + (2g_1 f_2 + 2g_2 f_1) t^3] + \kappa [g_0 f_1 q_0 t + (g_0 f_1 q_1 + 2g_0 f_2 q_0 + g_1 f_1 q_0) t^2 \\
&\quad + (g_0 f_1 q_2 + 2g_0 f_2 q_1 + 3g_0 f_3 q_0 + g_1 f_1 q_1 + 2g_1 f_2 q_0 + g_2 f_1 q_0) t^3 + \dots] = \\
&= (-\phi g_1 f_0 r_0 + \kappa g_0 f_1 q_0) t \\
&\quad + (2\phi g_2 f_0 - \phi g_1 f_0 r_1 - \phi g_1 f_1 r_0 - 2\phi g_2 f_0 r_0 + \psi g_1 f_1 + \kappa g_0 f_1 q_1 + 2\kappa g_0 f_2 q_0 + \kappa g_1 f_1 q_0) t^2 + \\
&\quad + (2\phi g_2 f_1 + 6\phi g_3 f_0 - \phi g_1 f_0 r_2 - \phi g_1 f_1 r_1 - \phi g_1 f_2 r_0 - 2\phi g_2 f_0 r_1 - 2\phi g_2 f_1 r_0 - 3\phi g_3 f_0 r_0 \\
&\quad + 2\psi g_1 f_2 + 2\psi g_2 f_1 + \kappa g_0 f_1 q_2 + 2\kappa g_0 f_2 q_1 + 3\kappa g_0 f_3 q_0 + \kappa g_1 f_1 q_1 + 2\kappa g_1 f_2 q_0 + \kappa g_2 f_1 q_0) t^3 + \dots
\end{aligned}$$

Nachdem die Gleichung wieder zusammengesetzt wurde, kann nun der Koeffizientenvergleich durchgeführt werden:

- $t$ :

$$\begin{aligned} & -g_1 r_0 + \xi g_1 q_0 \stackrel{!}{=} -\phi g_1 f_0 r_0 + \kappa g_0 f_1 q_0 \\ \implies g_1 &= \underbrace{\frac{\kappa f_1 q_0}{(-r_0)(1-\phi f_0) + \xi q_0}}_{=l_{1,1}} g_0 \end{aligned}$$

- $t^2$ :

$$\begin{aligned} 2g_2 - g_1 r_1 - 2g_2 r_0 + \xi g_1 q_1 + 2\xi g_2 q_0 & \stackrel{!}{=} 2\phi g_2 f_0 - \phi g_1 f_0 r_1 - \phi g_1 f_1 r_0 - 2\phi g_2 f_0 r_0 + \psi g_1 f_1 \\ & + \kappa g_0 f_1 q_1 + 2\kappa g_0 f_2 q_0 + \kappa g_1 f_1 q_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies g_2 &= \underbrace{\left( \frac{\kappa f_1 q_0 - \phi r_1 f_0 - \phi r_0 f_1}{2[(1-r_0)(1-\phi f_0) + \xi q_0]} + \frac{r_1 - \xi q_1 + \psi f_1}{2[(1-r_0)(1-\phi f_0) + \xi q_0]} \right)}_{=l_{2,1}} g_1 \\ &+ \underbrace{\frac{\kappa(q_1 f_1 + 2q_0 f_2)}{2[(1-r_0)(1-\phi f_0) + \xi q_0]}}_{=l_{2,2}} g_0 \end{aligned}$$

- $t^3$ :

$$\begin{aligned} 6g_3 - g_1 r_2 - 2g_2 r_1 - 3g_3 r_0 + \xi g_1 q_2 + 2\xi g_2 q_1 + 3\xi g_3 q_0 & \stackrel{!}{=} 2\phi g_2 f_1 + 6\phi g_3 f_0 - \phi g_1 f_0 r_2 - \phi g_1 f_1 r_1 \\ & - \phi g_1 f_2 r_0 - 2\phi g_2 f_0 r_1 - 2\phi g_2 f_1 r_0 \\ & - 3\phi g_3 f_0 r_0 + 2\psi g_1 f_2 + 2\psi g_2 f_1 + \kappa g_0 f_1 q_2 \\ & + 2\kappa g_0 f_2 q_1 + 3\kappa g_0 f_3 q_0 + \kappa g_1 f_1 q_1 \\ & + 2\kappa g_1 f_2 q_0 + \kappa g_2 f_1 q_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies g_3 &= \underbrace{\left( \frac{\kappa q_0 f_1 - 2\phi(r_1 f_0 + r_0 f_1)}{3[(2-r_0)(1-\phi f_0) + \xi q_0]} + \frac{2[r_1 - \xi q_1 + (\psi + \phi)f_1]}{3[(2-r_0)(1-\phi f_0) + \xi q_0]} \right)}_{=l_{3,1}} g_2 \\ &+ \underbrace{\left( \frac{\kappa(q_1 f_1 + 2q_0 f_2) - \phi(r_2 f_0 + r_1 f_1 + r_0 f_2)}{3[(2-r_0)(1-\phi f_0) + \xi q_0]} + \frac{r_2 - \xi q_2 + 2\psi f_2}{3[(2-r_0)(1-\phi f_0) + \xi q_0]} \right)}_{=l_{3,2}} g_1 \\ &+ \underbrace{\frac{\kappa(q_2 f_1 + 2q_1 f_2 + 3q_0 f_3)}{3[(2-r_0)(1-\phi f_0) + \xi q_0]}}_{=l_{3,3}} g_0. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit den folgenden Satz:

**Satz 4.2.1.** Die Funktionen  $h_n$  und  $l_{n,j}$  aus der Rekursion

$$g_n = h_n + \sum_{j=1}^n l_{n,j} g_{n-j}$$

sind im Spezialfall  $k = 2$  durch die folgenden allgemeinen Formeln gegeben:

$$h_n = 0$$

$$l_{n,j} = \frac{\kappa \sum_{i=0}^j i q_{j-i} f_i - \phi(n-j) \sum_{i=0}^j r_{j-i} f_i}{n[(n-r_0-1)(1-\phi f_0) + \xi q_0]} + \frac{(n-j)[r_j - \xi q_j + (\psi j + \phi(n-j-1)) f_j]}{n[(n-r_0-1)(1-\phi f_0) + \xi q_0]}.$$

**Bemerkung 4.2.1.** Es kann das Problem auftreten, dass der Nenner in der Formel zur Bestimmung der  $l_{n,j}$ 's gleich 0 ist und die Rekursion infolgedessen nicht verwendet werden kann. Um dies genauer zu untersuchen, betrachten wir die folgenden zwei Fälle für  $f_0$ :

- **1.Fall:**  $f_0 = 0$

Da in diesem Fall  $r = m$  und infolgedessen  $r_0 = q_0 - 1$  gilt, ist der Nenner für  $n = r(1 - \xi)$  gleich 0. Zur Bestimmung von  $g_{r(1-\xi)}$  im für uns relevanten Fall  $r(1 - \xi) \in \mathbb{N}$  führen wir eine Fallunterscheidung für  $\xi$  durch:

- **1. Unterfall:**  $\xi > 0$

Da nun  $r(1 - \xi) < r$  gilt, erhalten wir aufgrund der Definition von  $r$ , dass  $g_{r(1-\xi)} = 0$  ist.

- **2. Unterfall:**  $\xi \leq 0$

In diesem Fall muss  $g_{r(1-\xi)}$  mithilfe der bereits bekannten Formel

$$g_{r(1-\xi)} = \sum_{s=1}^{r(1-\xi)} p_s f_{r(1-\xi)}^{*s}$$

bestimmt werden, wobei hier die Notation

$$f_x^{*s} := f_{X_1 + \dots + X_s}(x) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_s = x)$$

verwendet wird. Da  $f_0 = 0$  gilt, handelt es sich hierbei um eine endliche Summe.

- **2.Fall:**  $f_0 > 0$

In diesem Fall gilt  $r = 0$  und der Nenner ist für  $n = m$  gleich 0. Nach Definition von  $m$  gilt  $g_x = 0$  für  $x = 1, \dots, m - 1$ . Wie bereits in Abschnitt 3.2 gezeigt, gilt zudem  $g_0 = m_N(f_0)$ . Um die Rekursion erst bei  $n = m + 1$  starten zu können, benötigen wir noch eine Formel für  $g_m$ . Mithilfe der Definition von  $m$  gilt

$$g_m = \sum_{s=1}^{\infty} p_s f_m^{*s} = \sum_{s=1}^{\infty} p_s \underbrace{\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_s = m)}_{=s f_0^{s-1} f_m} = f_m \underbrace{\sum_{s=1}^{\infty} s p_s f_0^{s-1}}_{=m'_N(f_0)} = f_m m'_N(f_0).$$

### 4.3 Der allgemeine Fall

Wir erinnern uns noch einmal an die allgemeine Rekursion für die Schadenanzahlverteilungen:

$$p_n = \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^i}{\sum_{i=0}^k b_i n^i} p_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Um nun eine entsprechende Rekursion für die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens herzuleiten, definieren wir für  $x \in \mathbb{N}$  zunächst den  $(k + 1)$ -dimensionalen Hilfsvektor

$$h_x = \begin{pmatrix} h_{0,x} \\ h_{1,x} \\ \vdots \\ h_{k,x} \end{pmatrix},$$

wobei es sich hierbei um jenes  $k$  aus der Rekursion handelt und die Einträge des Vektors durch

$$h_{i,x} = \sum_{n=0}^{\infty} n^i p_n f_x^{*n}.$$

gegeben sind. Damit entspricht  $g_x = \mathbb{P}(S = x)$  dem Eintrag  $h_{0,x}$ . Aufgrund der Annahme, dass die Einzelschäden unabhängig und identisch verteilt sind, gilt  $f_0^{*n} = f_0^n$  und dadurch

$$h_{i,0} = \sum_{n=0}^{\infty} n^i p_n f_0^n, \quad i = 0, \dots, k.$$

Wie auch in Abschnitt 4.1 sei  $r$  wieder der kleinste Index mit  $f_r = \mathbb{P}(X_1 = r) > 0$ . Damit gilt klarerweise  $h_{i,x} = 0$  für  $x < r$  und  $i = 0, \dots, k$ .

Im Folgenden wird nun eine Rekursion für den Vektor  $h_x$  und somit auch für die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens hergeleitet.

**Satz 4.3.1.** *Erfüllt die Schadenanzahlverteilung die obige Rekursion, so können die Vektoren  $h_x$  mithilfe der Startwerte  $h_{i,0}$  ( $i = 0, \dots, k$ ) und  $h_{i,x} = 0$  ( $x = 1, \dots, r - 1$  und  $i = 0, \dots, k$ ) wie folgt rekursiv berechnet werden:*

$$h_x = T_x^{-1} t_x, \quad x \geq \max\{r, 1\}.$$

Mit  $c_i = \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} a_j$  ist dabei die  $(k+1) \times (k+1)$ -Matrix  $T_x$  durch

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{r}{x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{r}{x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{r}{x} \\ b_0 - f_0 c_0 & b_1 - f_0 c_1 & \dots & b_{k-1} - f_0 c_{k-1} & b_k - f_0 c_k \end{pmatrix} \quad (9)$$

und die Einträge des  $(k+1)$ -dimensionalen Vektors

$$t_x = \begin{pmatrix} t_{0,x} \\ t_{1,x} \\ \vdots \\ t_{k,x} \end{pmatrix}$$

durch

$$t_{i,x} = \frac{1}{f_r} \sum_{y=1}^x f_{r+y} \left( \frac{r+y}{x} h_{i+1,x-y} + \frac{y-x}{x} h_{i,x-y} \right) \text{ für } i < k \quad (10)$$

bzw.

$$t_{k,x} = \sum_{y=\max\{r,1\}}^x f_y \sum_{i=0}^k c_i h_{i,x-y} \quad (11)$$

gegeben.

**Beweis:** Für die unabhängig und identisch verteilten Einzelschäden gilt für beliebige  $n, x \in \mathbb{N}$ :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{n+1}{x} X_{n+1} - 1 \mid X_1 + \dots + X_{n+1} = x \right] = 0$$

bzw. äquivalent dazu

$$\sum_{y=0}^x \left( \frac{n+1}{x} y - 1 \right) f_y f_{x-y}^{*n} = 0.$$

(vgl. De Pril 1985: 136)

Das Multiplizieren der erhaltenen Gleichung mit  $n^i p_n$ ,  $i < k$ , und anschließendes Summieren über  $n \geq 0$  liefert uns:

$$\sum_{y=0}^x f_y \left[ \underbrace{\frac{y}{x} \sum_{n=0}^{\infty} n^{i+1} p_n f_{x-y}^{*n}}_{=h_{i+1,x-y}} + \left( \frac{y}{x} - 1 \right) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n^i p_n f_{x-y}^{*n}}_{=h_{i,x-y}} \right] = 0.$$

Nach der Definition von  $r$  ist diese Gleichung äquivalent zu:

$$\sum_{y=r}^x f_y \left( \frac{y}{x} h_{i+1,x-y} + \frac{y-x}{x} h_{i,x-y} \right) = 0.$$

Führt man einen Index-Shift durch, erhält man

$$\sum_{y=0}^{x-r} f_{r+y} \left( \frac{r+y}{x} h_{i+1,x-r-y} + \frac{r+y-x}{x} h_{i,x-r-y} \right) = 0.$$

Wir substituieren  $x := x - r$ , ziehen den 0-ten Summanden aus der Summe heraus und multiplizieren die Gleichung mit  $\frac{x+r}{x}$ :

$$f_r \left( \frac{r}{x} h_{i+1,x} - h_{i,x} \right) + \sum_{y=1}^x f_{r+y} \left( \frac{r+y}{x} h_{i+1,x-y} + \frac{y-x}{x} h_{i,x-y} \right) = 0.$$

Das Umformen der Gleichung liefert uns

$$h_{i,x} - \frac{r}{x} h_{i+1,x} = \underbrace{\frac{1}{f_r} \sum_{y=1}^x f_{r+y} \left( \frac{r+y}{x} h_{i+1,x-y} + \frac{y-x}{x} h_{i,x-y} \right)}_{=t_{i,x}}.$$

Für  $i = 0, \dots, k - 1$  erhalten wir also

$$h_{i,x} - \frac{r}{x} h_{i+1,x} = t_{i,x}.$$

Mithilfe des Binomischen Lehrsatzes und der Definition von  $c_i$  gilt

$$\sum_{i=0}^k c_i (n-1)^i = \sum_{i=0}^k \left[ \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} a_j \right] (n-1)^i \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=0}^k a_j \underbrace{\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (n-1)^i}_{=n^j} = \sum_{j=0}^k a_j n^j,$$

wobei bei (\*) die Summen vertauscht wurden.

Da die Schadenanzahlverteilung die genannte Rekursion erfüllt, erhalten wir damit nun für  $n \geq 1$

$$p_n \sum_{i=0}^k b_i n^i = p_{n-1} \sum_{i=0}^k a_i n^i = p_{n-1} \sum_{i=0}^k c_i (n-1)^i.$$

Das Multiplizieren dieser Gleichung mit  $f_x^{*n} = \sum_{y=0}^x f_y f_{x-y}^{*(n-1)}$  und anschließendes Summieren über  $n \geq 1$  liefert uns für  $x \geq 1$  die Relation

$$\sum_{i=0}^k b_i h_{i,x} = \sum_{i=0}^k \sum_{y=0}^x f_y c_i h_{i,x-y} = \sum_{i=0}^k \left( f_0 c_i h_{i,x} + \sum_{y=1}^x f_y c_i h_{i,x-y} \right),$$

bzw. aufgrund der Definition von  $r$  äquivalent dazu

$$\sum_{i=0}^k (b_i - f_0 c_i) h_{i,x} = \underbrace{\sum_{y=\max\{r,1\}}^x f_y \sum_{i=0}^k c_i h_{i,x-y}}_{=t_{k,x}}.$$

□

**Bemerkung 4.3.1.** Bei der gerade bewiesenen Rekursion ist es durchaus sinnvoll, die Fälle  $r = 0$  und  $r > 0$  getrennt voneinander zu betrachten:

- **1.Fall:**  $r = 0$

In diesem Fall kann die Gleichung  $T_x h_x = t_x$  analytisch leicht gelöst werden und wir erhalten

$$h_{i,x} = \frac{1}{f_0} \sum_{y=1}^x f_y \left( \frac{y}{x} h_{i+1,x-y} + \frac{y-x}{x} h_{i,x-y} \right) \text{ für } i < k$$

und

$$h_{k,x} = \frac{1}{b_k - f_0 c_k} \left( \sum_{y=1}^x f_y \sum_{i=0}^k c_i h_{i,x-y} + \sum_{i=0}^{k-1} (f_0 c_i - b_i) h_{i,x} \right).$$

Die Startwerte  $h_{i,0}$  können mithilfe der Ableitungen  $m_N^{(j)}(f_0)$ ,  $j = 0, \dots, k$ , der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion bestimmt werden.

- **2.Fall:**  $r > 0$

In diesem Fall gilt nach Definition von  $r$   $f_0 = 0$ . Somit gilt  $h_{0,0} = p_0$  und  $h_{i,0} = 0$  für  $i \geq 1$ . Des Weiteren verschwinden in der letzten Zeile der Matrix  $T_x$  die Ausdrücke  $f_0 c_i$ .

**Beispiel 4.3.1.** Mithilfe der in den Beispielen 4.1.1 und 4.2.1 berechneten Werte für  $a_i$  können nun auch die Werte für  $c_i = \sum_{j=i}^k \binom{j}{i} a_j$  aus dem Satz 4.3.1 für die einzelnen Schadenanzahlverteilungen bestimmt werden:

- Waring-Verteilung mit den Parametern  $\alpha$  und  $\beta$ :

- $c_0 = a_0 + a_1 = \alpha$

- $c_1 = a_1 = 1$

- Logarithmische Verteilung mit dem Parameter  $\theta$ :

- $c_0 = a_0 + a_1 = \theta$

- $c_1 = a_1 = \theta$

- Poissonverteilung mit dem Parameter  $\lambda$ :

- $c_0 = a_0 + a_1 = \lambda$

- $c_1 = a_1 = \lambda$

- Binomialverteilung mit den Parametern  $m$  und  $q$ :

- $c_0 = a_0 + a_1 = \frac{mq}{1-q}$

- $c_1 = a_1 = \frac{(m+1)q}{1-q}$

- Negative Binomialverteilung mit den Parametern  $r$  und  $q$ :

- $c_0 = a_0 + a_1 = r(1-q)$

- $c_1 = a_1 = (r-1)(1-q)$

- Generalisierte Waring-Verteilung mit den Parametern  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\delta$ :

- $c_0 = a_0 + a_1 + a_2 = \alpha\delta$

- $c_1 = a_1 + 2a_2 = \alpha + \delta$

- $c_2 = a_2 = 1$

- Polya-Eggenberger-Verteilung mit den Parametern  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $N$ :

- $c_0 = a_0 + a_1 + a_2 = -\alpha N$

- $c_1 = a_1 + 2a_2 = \alpha - N$

$$- c_2 = a_2 = 1$$

- Hypergeometrische Verteilung mit den Parametern  $N$ ,  $M$  und  $m$ :

$$- c_0 = a_0 + a_1 + a_2 = Mm$$

$$- c_1 = a_1 + 2a_2 = -(M + m)$$

$$- c_2 = a_2 = 1.$$

## 5 Vergleich der Rekursionen

Wir wollen nun die Rekursion des allgemeinen Falls mit jenen der Spezialfälle  $k = 1$  und  $k = 2$  bezüglich ihrer Laufzeit und numerischer Stabilität vergleichen.

Hierfür betrachten wir für die Schadenanzahlverteilung die Waring-Verteilung ( $k = 1$ ) sowie die hypergeometrische Verteilung ( $k = 2$ ). Um die Rekursionen anwenden zu können, werden jedoch noch die entsprechenden Startwerte benötigt. Der Startwert  $g_0$  der Rekursion für die Spezialfälle kann mithilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion bestimmt werden:

- Waring-Verteilung mit den Parameter  $\alpha$  und  $\beta$ :

$$g_0 = m_N(f_0) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} {}_2F_1(1, \alpha; \alpha + \beta + 1; f_0)$$

(vgl. Johnson/Kemp/Kotz 2005: 291)

- Hypergeometrische Verteilung mit den Parametern  $N$ ,  $M$  und  $m$ :

$$g_0 = m_N(f_0) = \frac{{}_2F_1(-m, -M; N - M - m + 1; f_0)}{{}_2F_1(-m, -M; N - M - m + 1; 1)}$$

(vgl. Johnson/Kemp/Kotz 2005: 251)

Die Gaußsche hypergeometrische Funktion ist dabei wie folgt definiert:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j} \frac{x^j}{j!}, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots,$$

wobei  $(a)_j = a(a+1) \cdots (a+j-1)$  das Pochhammer-Symbol bezeichnet. (vgl. Johnson/Kemp/Kotz 2005: 2, 20)

Für die Rekursion im allgemeinen Fall benötigen wir die Startwerte  $h_{i,0}$  ( $i = 0, \dots, k$ ). Falls  $f_0 = 0$  gilt, sind die Startwerte durch  $h_{0,0} = p_0$  und  $h_{i,0} = 0$  für  $i \geq 1$  gegeben. Ansonsten können die Startwerte, wie bereits in Bemerkung 4.3.1 angemerkt, mithilfe der Ableitungen  $m_N^{(j)}(f_0)$ ,  $j = 0, \dots, k$ , der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion bestimmt werden. Da

$$h_{i,0} = \sum_{n=0}^{\infty} n^i p_n f_0^n, \quad i = 0, \dots, 2$$

gilt, erhalten wir

- $h_{0,0} = m_N(f_0)$
- $h_{1,0} = f_0 m'_N(f_0)$
- $h_{2,0} = f_0^2 m''_N(f_0) + f_0 m'_N(f_0)$ .

Für die Waring-Verteilung und die hypergeometrische Verteilung sind die benötigten Ableitungen der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion gegeben durch:

- Waring-Verteilung mit den Parameter  $\alpha$  und  $\beta$ :

$$m'_N(f_0) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{\alpha}{\alpha + \beta + 1} {}_2F_1(2, \alpha + 1; \alpha + \beta + 2; f_0)$$

- Hypergeometrische Verteilung mit den Parametern  $N$ ,  $M$  und  $m$ :

$$m'_N(f_0) = \frac{Mm}{N - M - m + 1} \frac{{}_2F_1(-m + 1, -M + 1; N - M - m + 2; f_0)}{{}_2F_1(-m, -M; N - M - m + 1; 1)}$$

$$m''_N(f_0) = \frac{Mm(-M + 1)(-m + 1)}{(N - M - m + 1)(N - M - m + 2)} \frac{{}_2F_1(-m + 2, -M + 2; N - M - m + 3; f_0)}{{}_2F_1(-m, -M; N - M - m + 1; 1)}$$

(vgl. Abramowitz/Stegun 1972: 557)

## 5.1 Laufzeitvergleich

Zunächst vergleichen wir die Rekursion des allgemeinen Falls mit jenen der Spezialfälle  $k = 1$  bzw.  $k = 2$  hinsichtlich ihrer Laufzeiten.

Bei der Rekursion des allgemeinen Falls sind pro Rekursionsschritt  $(k + 1)$ -Summen der Form  $\sum_{y=1}^x f_y m_{x,y}$  mit entsprechenden Funktionen  $m_{x,y}$  notwendig. Sind  $g_0, \dots, g_{x-1}$  bekannt, so ist der Aufwand zur Bestimmung von  $g_x$  infolgedessen proportional zu  $x$ . Die Gesamtanzahl der Berechnungen, um  $g_x$  zu bestimmen, ist daher von der Größenordnung  $x^2$ . Wie auch in der Praxis gehen wir im Folgenden jedoch davon aus, dass die Einzelschadenverteilung  $f_y = \mathbb{P}(X_1 = y)$  einen endlichen Träger mit der Eigenschaft  $f_y = 0$  für  $y > y_{max}$  hat. In diesem Fall enthalten die Summen  $\sum_{y=1}^x f_y m_{x,y}$  nur maximal  $y_{max}$ -viele Summanden, die ungleich Null sind, und die Gesamtanzahl der Berechnungen für  $g_x$  ist von der Größenordnung  $x$ .

Die Rekursionen für die Spezialfälle  $k = 1$  und  $k = 2$  beinhalten zwar auch Summen der Form  $\sum_{y=1}^x$ , jedoch lassen sich diese im Falle einer Einzelschadenverteilung mit endlichem Träger nicht vereinfachen. Somit bleibt der Aufwand zur Bestimmung von  $g_x$  von der Größenordnung  $x^2$ .

Die nachfolgenden Abbildungen zeigen nun die Laufzeiten der Rekursion des allgemeinen Falls,

im Folgenden als Rekursion 3 bezeichnet, sowie der Rekursion für den Spezialfall  $k = 1$  (Rekursion 1) bzw. für den Spezialfall  $k = 2$  (Rekursion 2) als Funktion von  $x$ . Die Fälle  $r > 0$  und  $r = 0$  wurden dabei jeweils getrennt behandelt. Für den Fall  $r > 0$  wurde die Rekursion gemäß der Formel von Satz 4.3.1 programmiert. Für den Fall  $r = 0$  wurde auf die Formel der Bemerkung 4.3.1 zurückgegriffen. Als Schadenanzahlverteilung wurde für den Fall  $k = 1$  die Waring-Verteilung und für den Fall  $k = 2$  die hypergeometrische Verteilung gewählt. Die Einzelschäden folgen im Fall  $r = 0$  der Verteilung

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{50} & , y = 0, \dots, 49 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

und im Fall  $r > 0$  der Verteilung

$$f(y) = \begin{cases} 0 & , y = 0 \\ \frac{1}{49} & , y = 1, \dots, 49 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist jedoch anzumerken, dass die Laufzeit nicht von der Wahl der Schadenanzahlverteilung sowie der Wahl der Einzelschadenverteilung, mit Ausnahme von  $y_{max}$ , abhängt. Die Wahl von  $y_{max}$  hat hingegen großen Einfluss. (vgl. Hesselager 1994: 28)

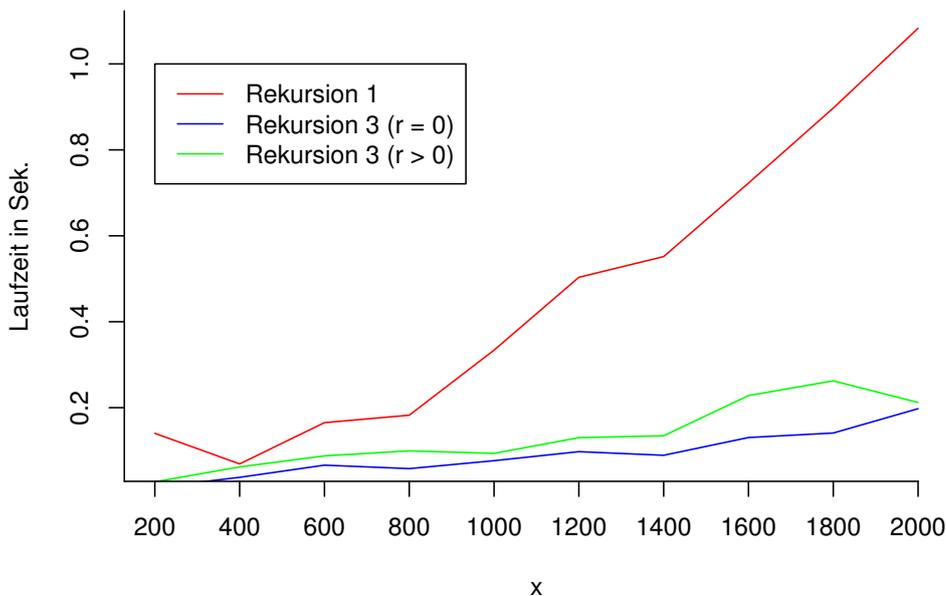


Abbildung 1: Laufzeiten zur Bestimmung von  $g_x$  für den Fall  $k = 1$  und  $y_{max} = 49$

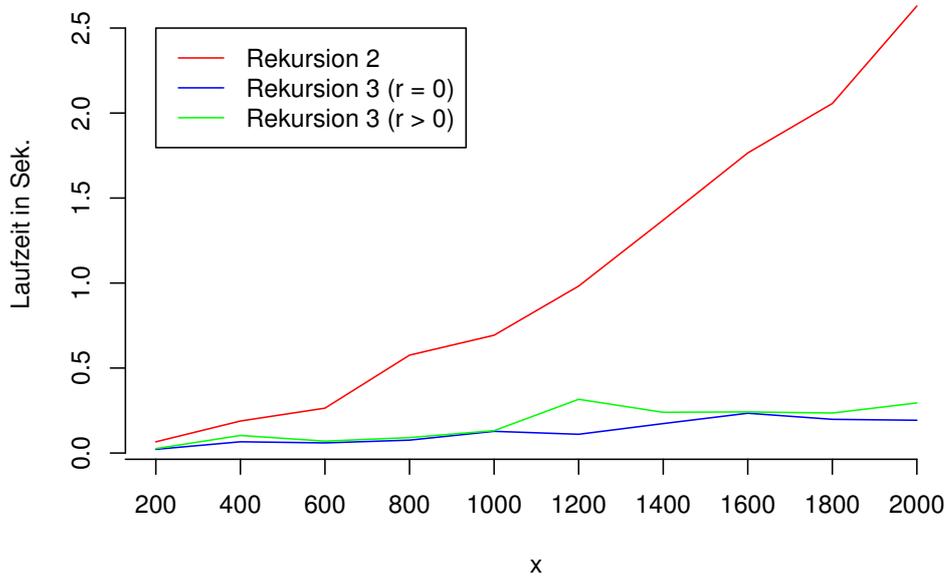


Abbildung 2: Laufzeiten zur Bestimmung von  $g_x$  für den Fall  $k = 2$  und  $y_{max} = 49$

## 5.2 Numerische Stabilität

Nach der Laufzeit widmen wir uns nun der numerischen Stabilität der Rekursionen und vergleichen die Rekursion des allgemeinen Falls mit jener des Spezialfalls  $k = 2$ . Um die Ergebnisse vergleichen zu können, betrachten wir die selben Einzelschadenverteilungen sowie die selben Parameter der Schadenanzahlverteilung wie in (Hesselager 1994):

- Fall  $r = 0$ :

$$f_1(y) = \begin{cases} \frac{1}{150} & , y = 0, \dots, 149 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{e^{-3y}}{\sum_{x=0}^{20} e^{-3x}} & , y = 0, \dots, 20 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

- Fall  $r > 0$ :

$$f_1(y) = \begin{cases} 0 & , y = 0 \\ \frac{1}{150} & , y = 1, \dots, 150 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 0 & , y = 0 \\ \frac{e^{-3(y-1)}}{\sum_{x=1}^{21} e^{-3(x-1)}} & , y = 1, \dots, 21 \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Um die numerische Stabilität zu untersuchen, betrachten wir nun verschiedene Parameterwerte für die Schadenanzahlverteilungen. Die Berechnungen wurden mit doppelter Rechengenauigkeit in R durchgeführt. Treten vor dem 99.5%-Fraktile der Gesamtschadenverteilung absurde Werte, wie etwa negative Wahrscheinlichkeiten auf, sprechen wir im Folgenden von einer numerischen Instabilität. In den nachfolgenden Tabellen für die Fälle  $k = 1$  und  $k = 2$  sind die numerischen Instabilitäten mit einem \* gekennzeichnet.

Parameter der Schadenanzahlverteilung			Einzelschadenverteilung $f_1$			Einzelschadenverteilung $f_2$		
			Rekursion 2	Rekursion 3		Rekursion 2	Rekursion 3	
N	M	m		$r = 0$	$r > 0$		$r = 0$	$r > 0$
40	10	10						
40	10	20						
40	10	30						
100	25	25	*	*				
100	25	50	*					
100	25	75	*					
200	50	50	*	*				
200	50	100	*					
200	50	150	*					

Quelle: in Anlehnung an Hesselager, 1994, S.30

Tabelle 2: Numerische Instabilitäten im Fall einer hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern  $N$ ,  $M$  und  $m$  als Schadenanzahlverteilung ( $k = 2$ ) und  $f_1$  bzw.  $f_2$  als Einzelschadenverteilung

Die Tabelle 2 zeigt, dass für die Einzelschadenverteilung  $f_2$  sowohl bei der Rekursion 2 als auch bei der Rekursion 3 keine numerischen Instabilitäten gefunden wurden. Für die Einzelschadenverteilung  $f_1$  ist die Rekursion 2 instabil, wenn der Parameter  $N$  der Schadenanzahlverteilung größer oder gleich 100 ist. Diese Instabilitäten entstehen durch Rundungsfehler bei doppelter Rechengenauigkeit. Bei der Rekursion 3 wurden für die Einzelschadenverteilung  $f_1$  nur im Fall  $r = 0$  Instabilitäten gefunden. Der Grund für diese

Instabilitäten liegt in der Formel zur Bestimmung von  $h_{k,x}$  im Fall  $r = 0$  (vgl. Bemerkung 4.3.1). Da die Formel die Subtraktion der Terme  $b_i h_{i,x}$ ,  $i = 0, \dots, k - 1$  beinhaltet, kann es zu Auslöschungen von großen positiven und kleinen negativen Werten kommen. Für die hypergeometrische Verteilung gilt  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = N - M - m$  und  $b_2 = 1$ . Man kann daher im Allgemeinen annehmen, dass die Rekursion im Fall  $r = 0$  für grosse  $N$  und kleine  $M$  sowie  $m$  Instabilitäten aufweist. (vgl. Hesselager 1994: 30 f.)

## 6 Eine weitere Methode zur Berechnung der Gesamtschadenverteilung

Im Folgenden betrachten wir eine weitere Methode, mit der die Gesamtschadenverteilung rekursiv berechnet werden kann. Wir gehen nun jedoch nicht von einer einzelnen Verteilung aus, die die Panjer-Rekursion beziehungsweise eine erweiterte Panjer-Rekursion erfüllt. Stattdessen arbeiten wir mit mehreren Schadenanzahlverteilungen, die in Relation zueinander stehen. Das Kapitel basiert auf (Gerhold/Schmock/Warnung 2010).

Wie auch im vorherigen Kapitel seien die Einzelschäden wieder diskret auf die natürlichen Zahlen verteilt. Neben dem Gesamtschaden  $S$  betrachten wir nun auch für  $i = 1, \dots, l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , die Zufallssummen  $\tilde{S}_i = X_1 + \dots + X_{\tilde{N}_i}$ , wobei  $\tilde{N}_i$ , wie auch  $N$ , nicht von der Höhe der Schäden abhängt. Es wird die folgende Notation verwendet:

$$\begin{aligned}
 p_n &:= \mathbb{P}(N = n) \\
 \tilde{p}_{i,n} &:= \mathbb{P}(\tilde{N}_i = n) \\
 g_n &:= \mathbb{P}(S = n) \\
 \tilde{g}_{i,n} &:= \mathbb{P}(\tilde{S}_i = n).
 \end{aligned}$$

**Satz 6.0.1.** Sei  $l \in \mathbb{N}$  beliebig und fest. Existieren  $k \in \mathbb{N}$  und  $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_l \in \mathbb{R}$ , sodass

- $\tilde{p}_{i,0} = \dots = \tilde{p}_{i,k+l-i-1} = 0$  für  $i = 1, \dots, \min\{l, k + l - 1\}$  und
- $p_n = \sum_{i=1}^l \left(a_i + \frac{b_i}{n}\right) \tilde{p}_{i,n-i}$  für  $n \geq k + l$

gilt, kann die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens wie folgt rekursiv berechnet werden:

$$g_n = \sum_{j=1}^{k+l-1} \mathbb{P}(S_j = n) p_j + \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^n \left(a_i + \frac{b_i j}{in}\right) \mathbb{P}(S_i = j) \tilde{g}_{i,n-j}.$$

$S_j$  ist dabei durch  $S_j = X_1 + \dots + X_j$  definiert.

**Bemerkung 6.0.1.** Der Startwert  $g_0$  ist, wie schon in Abschnitt 3.2 erläutert, durch  $g_0 = m_N(f_0)$  gegeben.

**Beweis:** Seien  $i \in \{1, \dots, l\}$  und  $n \in \mathbb{N}$  beliebig und fest. Für  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq i$  benutzen wir für  $S_m$  die Darstellung  $S_{m-i} + S_{i,m}$  mit  $S_{i,m} = X_{m-i+1} + \dots + X_m$ . Falls  $\mathbb{P}(S_m = n) > 0$  gilt, erhalten wir

$$1 = \mathbb{E} \left[ \frac{S_m}{n} \mid S_m = n \right] \stackrel{(i)}{=} \sum_{j=1}^m \mathbb{E} \left[ \frac{X_j}{n} \mid S_m = n \right] \stackrel{(ii)}{=} m \mathbb{E} \left[ \frac{X_m}{n} \mid S_m = n \right] \stackrel{(iii)}{=} m \mathbb{E} \left[ \frac{S_{i,m}}{in} \mid S_m = n \right]$$

beziehungsweise äquivalent dazu

$$\frac{1}{m} = \mathbb{E} \left[ \frac{S_{i,m}}{in} \mid S_m = n \right].$$

Bei (i) wurde die Linearität des bedingten Erwartungswerts und die Definition von  $S_m$ , bei (iii) die Definition von  $S_{i,m}$  und sowohl bei (ii) als auch (iii) die Tatsache, dass die Einzelschäden identisch verteilt sind, verwendet. Dies liefert uns wiederum die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} a_i + \frac{b_i}{m} &= a_i + b_i \mathbb{E} \left[ \frac{S_{i,m}}{in} \mid S_m = n \right] = \mathbb{E} \left[ a_i + \frac{b_i S_{i,m}}{in} \mid S_m = n \right] = \\ &= \sum_{j=0}^n \left( a_i + \frac{b_i j}{in} \right) \mathbb{P}(S_{i,m} = j \mid S_m = n). \end{aligned} \tag{12}$$

Aufgrund der Voraussetzung, dass die Einzelschäden unabhängig und identisch verteilt sind, gilt für  $m \geq 1$ :

- $S_{m-i}$  und  $S_{i,m}$  sind unabhängig voneinander.
- $S_{i,m}$  hat die gleiche Verteilung wie  $S_i$ .

Damit erhalten wir nun für die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(S_{i,m} = j, S_m = n)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{i,m} = j, S_m = n) &= \mathbb{P}(S_{i,m} = j, S_{m-i} = n - j) = \mathbb{P}(S_{i,m} = j) \mathbb{P}(S_{m-i} = n - j) \\ &= \mathbb{P}(S_i = j) \mathbb{P}(S_{m-i} = n - j). \end{aligned} \tag{13}$$

Da  $S_m$  und  $N$  unabhängig voneinander sind, können wir  $g_n$  wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} g_n &= \mathbb{P}(S = n) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(S_m = n, N = m) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(S_m = n) \underbrace{\mathbb{P}(N = m)}_{=p_m} = \\ &= \sum_{m=1}^{k+l-1} \mathbb{P}(S_m = n) p_m + \underbrace{\sum_{m=k+l}^{\infty} \mathbb{P}(S_m = n) p_m}_{=: A_n}. \end{aligned}$$

Mithilfe der Gleichungen (12) und (13) sowie der vorausgesetzten Darstellung von  $p_n$  gilt

dabei für  $A_n$ :

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{m=k+l}^{\infty} \mathbb{P}(S_m = n) p_m = \sum_{m=k+l}^{\infty} \sum_{i=1}^l \left( a_i + \frac{b_i}{m} \right) \mathbb{P}(S_m = n) \tilde{p}_{i,m-i} = \\
&\stackrel{(12)}{=} \sum_{m=k+l}^{\infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^n \left( a_i + \frac{b_i j}{in} \right) \underbrace{\mathbb{P}(S_{i,m} = j | S_m = n) \mathbb{P}(S_m = n)}_{=\mathbb{P}(S_{i,m}=j, S_m=n)} \tilde{p}_{i,m-i} = \\
&= \sum_{m=k+l}^{\infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^n \left( a_i + \frac{b_i j}{in} \right) \mathbb{P}(S_{i,m} = j, S_m = n) \tilde{p}_{i,m-i} = \\
&\stackrel{(13)}{=} \sum_{m=k+l}^{\infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^n \left( a_i + \frac{b_i j}{in} \right) \mathbb{P}(S_i = j) \mathbb{P}(S_{m-i} = n - j) \tilde{p}_{i,m-i} = \\
&= \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^n \left( a_i + \frac{b_i j}{in} \right) \mathbb{P}(S_i = j) \sum_{m=k+l}^{\infty} \mathbb{P}(S_{m-i} = n - j) \tilde{p}_{i,m-i}.
\end{aligned}$$

Da der Summenindex  $i$  nur bis  $l$  läuft und somit nach Voraussetzung  $\tilde{p}_{i,m-i} = 0$  für alle  $m < k + l$  gilt, können wir die letzte Summe entsprechend erweitern und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{m=k+l}^{\infty} \mathbb{P}(S_{m-i} = n - j) \tilde{p}_{i,m-i} &= \sum_{m=i}^{\infty} \mathbb{P}(S_{m-i} = n - j) \tilde{p}_{i,m-i} = \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_m = n - j) \underbrace{\tilde{p}_{i,m}}_{=\mathbb{P}(\tilde{N}_i=m)} = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_m = n - j) \mathbb{P}(\tilde{N}_i = m) = \\
&\stackrel{(**)}{=} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_m = n - j, \tilde{N}_i = m)}_{=\mathbb{P}(\tilde{S}_i=n-j)=\tilde{g}_{i,n-j}} = \\
&= \tilde{g}_{i,n-j}.
\end{aligned}$$

Bei (\*) wurde ein Index-Shift durchgeführt und bei (\*\*) die Unabhängigkeit von  $S_m$  und  $\tilde{N}_i$  verwendet.

Das Einsetzen dieses Ausdrucks in die Darstellung von  $A_n$  liefert uns

$$A_n = \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^n \left( a_i + \frac{b_i j}{in} \right) \mathbb{P}(S_i = j) \tilde{g}_{i,n-j}.$$

Insgesamt gilt nun also

$$g_n = \sum_{m=1}^{k+l-1} \mathbb{P}(S_m = n) p_m + \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^n \left( a_i + \frac{b_i j}{in} \right) \mathbb{P}(S_i = j) \tilde{g}_{i,n-j}.$$

□

## 7 Anwendung in der Risiko- und Ruintheorie

Nachdem in diesem Kapitel zunächst die grundlegenden Begriffe und mathematischen Objekte der Risiko- und Ruintheorie erläutert werden, wird anschließend mithilfe des Satzes 4.3.1 eine Methode zur rekursiven Berechnung der Wahrscheinlichkeit des sogenannten Ruins hergeleitet. Das folgende Kapitel basiert auf (Bowers et al 1986), (Panjer 1986), (Panjer 2014) und (Hesselager 1994).

### 7.1 Grundlagen der Risiko- und Ruintheorie

Wir betrachten nun die zeitliche Entwicklung des Gesamtvermögens ("Überschuss") einer Versicherung. Einfachheit halber werden dabei neben den Schäden jedoch nur die Versicherungsprämien berücksichtigt. Infolgedessen werden im nachfolgend beschriebenen Modell unter anderem sämtliche Betriebskosten sowie mögliche Gewinne beziehungsweise Verluste an den Finanzmärkten vernachlässigt. Des Weiteren wird angenommen, dass die Prämienrate über die Zeit konstant bleibt.

**Definition 7.1.1** (Überschussprozess). Der Überschussprozess  $\{U(t), t \geq 0\}$  ist gegeben durch

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0,$$

wobei mit  $S(t)$  der Gesamtschaden bis zum Zeitpunkt  $t$ , mit  $c > 0$  die konstante Prämienrate und mit  $U(0) = u$  das Anfangskapital bezeichnet wird.

**Bemerkung 7.1.1.** Für  $t \geq 0$  beschreibt  $U(t)$  also das Vermögen einer Versicherung zum Zeitpunkt  $t$ .

**Bemerkung 7.1.2.** Tritt für ein  $t > 0$  das Ereignis  $U(t) < 0$  ein, sprechen wir von Ruin.

**Definition 7.1.2** (Schadenanzahl- und Gesamtschadenprozess). Der Gesamtschadenprozess  $\{S(t), t \geq 0\}$  ist gegeben durch

$$S(t) = \begin{cases} 0 & , N(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & , \text{sonst} \end{cases},$$

wobei  $N(t)$  die Anzahl der Schäden bis zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt. Der Prozess  $\{N(t), t \geq 0\}$  wird Schadenanzahlprozess genannt.

**Bemerkung 7.1.3.** Wir setzen voraus, dass die Einzelschäden  $X_i$  einerseits unabhängig und identisch verteilt mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $h$ , der Verteilungsfunktion  $H$  und dem Erwartungswert  $\mathbb{E}[X_1] = \mu$  sowie andererseits auch unabhängig von  $N(t)$  sind.

**Bemerkung 7.1.4.** Oftmals wird die Annahme getroffen, dass es sich beim Schadenanzahlprozess um einen Poisson-Prozess oder gemischten Poisson-Prozess handelt. In diesen Fällen bezeichnet man den Gesamtschadenprozess  $S(t)$  als zusammengesetzten (gemischten) Poisson-Prozess.

**Definition 7.1.3** (Poisson-Prozess). Ein Schadenanzahlprozess heißt Poisson-Prozess mit dem Parameter  $\lambda$ , wenn die Schadenanzahl in einem beliebigen Intervall der Länge  $h > 0$  Poisson-verteilt mit dem Parameter  $\lambda h$  ist.

**Bemerkung 7.1.5.** Ein Poisson-Prozess hat die folgenden zwei Eigenschaften:

- **Die Inkremente sind unabhängig:** Für alle disjunkten Zeitintervalle  $(t_1, t_1 + h_1)$ ,  $(t_2, t_2 + h_2), \dots, (t_n, t_n + h_n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass die Inkremente  $N(t_1 + h_1) - N(t_1)$ ,  $N(t_2 + h_2) - N(t_2), \dots, N(t_n + h_n) - N(t_n)$  unabhängig voneinander sind.
- **Die Inkremente sind stationär:** Die Verteilung von  $N(t + h) - N(t)$  mit  $h < 0$  hängt nicht von  $t$  ab.

**Bemerkung 7.1.6.** Die soeben aufgeführten Eigenschaften des Poisson-Prozesses übertragen sich auf den Gesamtschadenprozess. Infolgedessen hat ein zusammengesetzter Poisson-Prozess unabhängige und stationäre Inkremente.

**Definition 7.1.4** (Gemischter Poisson-Prozess). Ein gemischter Poisson-Prozess ist eine Familie von Poisson-Prozessen mit Erwartungswerten  $\Lambda$ , wobei  $\Lambda$  eine nichtnegative Zufallsvariable ist. (vgl. McFadden 1965: 83)

**Bemerkung 7.1.7.** Der gemischte Poisson-Prozess, bedingt auf  $\Lambda = \lambda$ , ist ein Poisson-Prozess mit Parameter  $\lambda$ . (vgl. Ross 2010: 351)

**Definition 7.1.5** (Ruinzeitpunkt). Als Ruinzeitpunkt definieren wir

$$T = \min \{t \geq 0 : U(t) < 0\},$$

wobei wir  $T = \infty$  setzen, wenn der Überschussprozess  $U(t)$  für alle  $t \geq 0$  nichtnegativ ist.

**Bemerkung 7.1.8.** Um zu verhindern, dass mit Sicherheit Ruin eintritt, muss

$$ct > \mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[N(t)]\mu$$

gelten. (vgl. Eisenberg 2020)

**Definition 7.1.6** (Ruinwahrscheinlichkeit). Die Ruinwahrscheinlichkeit ist als Funktion des Anfangskapitals  $u$  gegeben durch

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty).$$

**Definition 7.1.7** (Maximaler Verlust). Der maximale Verlust der Versicherung im beschriebenen Modell wird durch die Zufallsvariable

$$L = \max_{t \geq 0} [S(t) - ct]$$

beschrieben.

**Bemerkung 7.1.9.** Die Ruinwahrscheinlichkeit kann auch mithilfe der soeben definierten Zufallsvariable ausgedrückt werden:

$$\psi(u) = \mathbb{P}(L > u).$$

## 7.2 Direkte Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit

Im folgenden Abschnitt setzen wir voraus, dass es sich beim Gesamtschadenprozess  $S(t)$  um einen zusammengesetzten gemischten Poisson-Prozess handelt und leiten mithilfe des Satzes 4.3.1 eine rekursive Methode zur Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeiten her.

Dafür betrachten wir zunächst den zusammengesetzten Poisson-Prozess  $\tilde{S}(t)$ , wobei der Schadenanzahlprozess  $\tilde{N}(t)$  durch den Poisson-Prozess  $N(t)$ , bedingt auf  $\Lambda = \lambda$ , gegeben ist. Für diesen Prozess schauen wir uns nun jene Zeitpunkte an, zu denen  $\tilde{S}(t) - ct$  neue, positive Höchststände erreicht.

Da die Inkremente des zusammengesetzten Poisson-Prozesses unabhängig und stationär sind, gilt: Nach dem Erreichen eines neuen Höchststandes gibt es eine Wahrscheinlichkeit von  $\psi(0)$ , dass dieser wieder gebrochen wird. Die Anzahl  $\tilde{N}$  der neuen Höchststände besitzt daher eine geometrische Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\mathbb{P}(\tilde{N} = n) = [1 - \psi(0)]\psi(0)^n.$$

Die Differenzen zwischen den jeweiligen alten und neuen Höchstständen werden durch die unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen  $L_i$  mit der Dichtefunktion

$$f(y) = \frac{1 - H(y)}{\mu}$$

modelliert, wobei  $H$  die Verteilungsfunktion und  $\mu$  den Erwartungswert der Einzelschäden bezeichnet. Für den maximalen Verlust  $\tilde{L}$  erhalten wir nun die folgende Darstellung als Zufallssumme:

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} L_i.$$

Betrachten wir nun wieder den ursprünglichen Prozess  $S(t)$ , gilt für den maximalen Verlust  $L$  mithilfe des gerade Gezeigten:

$$L = \sum_{i=1}^N L_i,$$

wobei  $N$  in diesem Fall einer gemischten geometrischen Verteilung folgt. Verwenden wir nun eine Beta-Mischfunktion mit Parametern  $(\alpha, \beta)$ , folgt  $N$  der Waring-Verteilung aus Beispiel 4.1.1.

Um mithilfe des Satzes 4.3.1 eine Rekursion für die Ruinwahrscheinlichkeit herleiten zu können, müssen wir nun noch die Verteilung von  $L_i$  diskretisieren. Dabei gehen wir, wie auch in den bisherigen Kapiteln, von diskret verteilten Einzelschäden aus. In diesem Fall handelt es sich bei der Dichtefunktion von  $L_i$  um eine absteigende Treppenfunktion. Für die Diskretisierung betrachten wir nun die Momente von  $L_i$ . Die Idee ist es, die Verteilung über Intervalle so zu diskretisieren, dass innerhalb jeden Intervalls eine bestimmte Anzahl von Momenten übereinstimmt.

Wir betrachten nun ein beliebiges Intervall  $[x_k, x_k + 2l]$  mit  $l > 0$  und ersetzen die totale Masse des Intervalls durch die Massen  $m_0^{(k)}$ ,  $m_1^{(k)}$  und  $m_2^{(k)}$  an den Punkten  $x_k$ ,  $x_k + l$  und  $x_k + 2l$ , sodass die folgenden 3 Gleichungen erfüllt sind:

- $m_0^{(k)} + m_1^{(k)} + m_2^{(k)} = \int_{x_k}^{x_k+2l} f(x) dx$
- $x_k m_0^{(k)} + (x_k + l) m_1^{(k)} + (x_k + 2l) m_2^{(k)} = \int_{x_k}^{x_k+2l} x f(x) dx$
- $x_k^2 m_0^{(k)} + (x_k + l)^2 m_1^{(k)} + (x_k + 2l)^2 m_2^{(k)} = \int_{x_k}^{x_k+2l} x^2 f(x) dx.$

Das jeweilige Moment auf der rechten Seite kann dabei wie folgt bestimmt werden:

Hat die Dichtefunktion von  $L_i$  in dem Intervall  $[x_k, x_k + 2l]$  die Sprungstellen  $y_1, \dots, y_n$  und setzt man  $y_0 = x_k$  und  $y_{n+1} = x_k + 2l$ , gilt für das  $r$ -te (lokale) Moment von  $L_i$

$$\int_{x_k}^{x_k+2l} x^r f(x) dx = \sum_{i=0}^n \frac{y_{i+1}^{r+1} - y_i^{r+1}}{r+1} f(y_i),$$

wobei  $f(y_i)$  gegeben ist durch

$$f(y_i) = \frac{1 - H(y_i)}{\mu} = \frac{\sum_{j=i+1}^n h(y_j) + 1 - H(x_k + 2l)}{\mu}.$$

Insgesamt bekommen wir nach dem Vertauschen der Summen und dem Durchführen von entsprechenden Vereinfachungen den folgenden Ausdruck für das  $r$ -te Moment:

$$\int_{x_k}^{x_k+2l} x^r f(x) dx = \frac{1}{\mu(r+1)} \left[ \sum_{j=1}^n h(y_j) y_j^{r+1} + [1 - H(x_k + 2l)] (x_k + 2l)^{r+1} - [1 - H(x_k)] x_k^{r+1} \right].$$

Definieren wir  $x_0 = 0$  und  $x_{k+1} = x_k + 2l$ , erhalten wir für die Wahrscheinlichkeiten  $\{\tilde{f}(x) : x = 0, 1, \dots\}$ :

- $\tilde{f}(0) = m_0^{(0)}$
- $\tilde{f}(1) = m_1^{(0)}$
- $\tilde{f}(2) = m_2^{(0)} + m_0^{(1)}$
- $\tilde{f}(3) = m_1^{(1)}$
- $\tilde{f}(4) = m_2^{(1)} + m_0^{(2)}$
- ...

Mit der diskretisierten Verteilung kann nun eine Rekursion für die Ruinwahrscheinlichkeiten hergeleitet werden. Für  $u \geq 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \psi(u+1) &= \mathbb{P}(L > u+1) = \sum_{i=u+2}^{\infty} \mathbb{P}(L=i) = \underbrace{\sum_{i=u+1}^{\infty} \mathbb{P}(L=i)}_{=\psi(u)} - \mathbb{P}(L=u+1) = \\ &= \psi(u) - \mathbb{P}(L=u+1). \end{aligned}$$

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}(L = u + 1)$  können dabei mit der Rekursion des Satzes 4.3.1 bestimmt werden. Der Startwert  $\psi(0)$  ist dabei wie folgt gegeben:

$$\psi(0) = 1 - m_N(\tilde{f}(0)).$$

Der entsprechende R-Code ist im Anhang zu finden.

## 8 Conclusio

Zur Modellierung des Gesamtschadens einer Kohorte von Versicherungspolizzen über einen bestimmten Zeitraum kann entweder das individuelle oder kollektive Modell verwendet werden. Da beim kollektiven Modell, im Gegensatz zum individuellen Modell, nicht der Schaden jeder einzelnen Polizza sondern nur die tatsächlichen Schäden betrachtet werden, wird hier auch die Anzahl der Schäden durch eine Zufallsvariable beschrieben. Dies führt dazu, dass zur Bestimmung der Gesamtschadenverteilung im Allgemeinen die Faltungen der Einzelschäden benötigt werden. Um der oftmals sehr komplexen und aufwändigen Berechnung dieser Faltungen zu entgehen, ist man daran interessiert die Gesamtschadenverteilung rekursiv zu bestimmen. Falls die Schadenanzahl poisson-, binomial- oder negativ binomialverteilt ist, gelingt dies mithilfe der Panjer Rekursion. Die in dieser Diplomarbeit beschriebenen, verallgemeinerten Panjer Rekursionen ermöglichen es auch im Falle anderer Schadenanzahlverteilungen die Gesamtschadenverteilung rekursiv zu berechnen.

Die numerischen Experimente zum Vergleich der verallgemeinerten Rekursionen aus Kapitel 4 zeigen, dass die Rekursion des allgemeinen Falls, auch als Rekursion 3 bezeichnet, deutlich effizienter ist als die Rekursionen der Spezialfälle. Damit ist gemeint, dass die Rekursion 3 einerseits einen deutlich geringeren Rechenaufwand benötigt und andererseits auch zu weniger numerischen Instabilitäten bei den betrachteten Beispielen führt. Versicherungsunternehmen sollten daher auf jeden Fall die Rekursion 3 den Rekursionen der Spezialfälle vorziehen.

Die verallgemeinerten Panjer Rekursionen finden zudem auch in der Risiko- und Ruintheorie Anwendung. Im Falle eines zusammengesetzten gemischten Prozesses können nach einer entsprechenden Diskretisierung die Ruinwahrscheinlichkeiten mithilfe der Rekursion 3 rekursiv bestimmt werden.

# Anhang

## Implementierung der Rekursionen

```
##### ---- PAKETE ---- #####

library(gamlss.dist) # fuer waring verteilung
library(hypergeo) #fuer hypergeometrische Funktion

##### ---- VERTEILUNGEN ---- #####

#pmf hypergeometrische Verteilung
pmf_hyp <- function(N,M,m,t){

  pmf_value <- (choose(M,t)*choose(N-M,m-t))/choose(N,m)

  return(pmf_value)
}

#pmf Waring Verteilung
pmf_war <- function(alpha,beta,t){

  pmf_value <- beta(alpha+t,beta+1)/beta(alpha,beta)

  return(pmf_value)
}

#pgf hypergeometrische Verteilung
pgf_hyp <- function(N,M,m,t){

  pgf_value <- Re(hypergeo(-m,-M,N-M-m+1,t, tol = 0, maxiter=2000))/
  Re(hypergeo(-m,-M,N-M-m+1,1, tol = 0, maxiter=2000))

  return(pgf_value)
}

#pgf Waring Verteilung
pgf_war <- function(alpha,beta,t){

  pgf_value <- (beta/(alpha+beta))*Re(hypergeo(1,alpha,alpha+beta+1,t,
```

```
tol = 0, maxiter=2000))

return(pgf_value)
}

#Ableitung pgf hypergeometrische Verteilung
pgf_derivative_hyp <- function(N,M,m,t){

  pgf_derivative_value <- (((M*m)/(N-M-m+1))*
                           Re(hypergeo(-m+1,-M+1,N-M-m+2,t, tol = 0,
                                         maxiter=2000))))/
  Re(hypergeo(-m,-M,N-M-m+1,1, tol = 0, maxiter=2000))

  return(pgf_derivative_value)
}

#Ableitung pgf Waring Verteilung
pgf_derivative_war <- function(alpha,beta,t){

  pgf_derivative_value <- (beta/(alpha+beta))*(alpha/(alpha+beta+1))*
  Re(hypergeo(2,alpha*1,alpha+beta+2,t, tol = 0, maxiter=2000))

  return(pgf_derivative_value)
}

#2. Ableitung pgf hypergeometrische Verteilung
pgf_2_derivative_hyp <- function(N,M,m,t){

  pgf_2_derivative_value <- (((M*m*(M-1)*(m-1))/((N-M-m+1)*(N-M-m+2)))*
                              Re(hypergeo(-m+2,-M+2,N-M-m+3,t,tol = 0,
                                             maxiter=2000)))/
  Re(hypergeo(-m,-M,N-M-m+1,1, tol = 0, maxiter=2000))

  return(pgf_2_derivative_value)
}

#### ---- REKURSION FUER SPEZIALFAELLE ---- #####

helper_rm <- function(f_y){

  # funktion berechnet die skalare r (kleinster wert, sodass f_r > 0) und m
```

```
# (kleinster wert, sodass m*f_m > 0)

r <- which(f_y > 0)[1] - 1
m <- which(f_y[-1] > 0)[1]

return(c(r, m))
}

helper_q_vec <- function(n, f_y){
  # berechne den vektor q_0,..., q_n

  # berechne r:
  r <- helper_rm(f_y = f_y)[1]

  # initialisiere vector q mit laenge n+1
  q_vec <- rep(NA, n+1)
  q_vec[1] <- r

  # beruecksichtige y_max:
  y_max <- length(f_y)-1
  x_max <- y_max - r

  #berechne q rekursiv nach Formel mithilfe von Skalarprodukt
  for(x in 1:n){
    if(x <= x_max){
      temp_q <- rev(q_vec[1:x])
      q_vec[x+1] = (x+r)*f_y[x+r+1]/f_y[r+1] - crossprod(f_y[(2+r):(x+r+1)]/
                                                           f_y[r+1],temp_q)
    } else {
      temp_q <- rev(q_vec[(x-x_max+1):x])
      q_vec[x+1] = - crossprod(f_y[(2+r):(y_max+1)]/f_y[r+1],temp_q)
    }
  }
  return(q_vec)
}

helper_r_vec <- function(n, f_y){
  # berechne m:
  m <- helper_rm(f_y = f_y)[2]

  r_vec <- rep(NA, n+1)
```

```

r_vec[1] <- m-1

# beruecksichtige y_max:
y_max <- length(f_y)-1
x_max <- y_max - m

# hilfsvariable
temp_y <- (1:x_max)+m
temp_f <- (temp_y*f_y[(2+m):(y_max+1)])/(m*f_y[m+1])

for(x in 1:n){
  if(x <= x_max){
    temp_r <- rev(r_vec[1:x])
    r_vec[x+1] <- (x+m)*(x+m-1)*f_y[x+m+1]/(m*f_y[m+1]) -
      crossprod(temp_f[1:x], temp_r)
  } else {
    temp_r <- rev(r_vec[(x-x_max+1):x])
    r_vec[x+1] = - crossprod(temp_f,temp_r)
  }
}
return(r_vec)
}

#l_{n,j} fuer Spezialfall k=1
helper_l_1 <- function(n, f_y, kappa, phi, xi, psi, q_vec){
  # erzeuge Matrix fuer l_{n,j}
  l_mat <- matrix(NA, nrow = n, ncol = n)
  y_max <- length(f_y)-1

  #befuelle Matrix l_mat
  for(rr in 1:n){
    for(cc in 1:n){
      if(cc<=y_max){
        l_mat[rr,cc] <- (((rr-cc)*phi+cc*psi)*f_y[cc+1]-q_vec[cc+1])/
          (rr*(xi-phi*f_y[1])+q_vec[1])
      } else{
        l_mat[rr,cc] <- (-q_vec[cc+1])/(rr*(xi-phi*f_y[1])+q_vec[1])
      }
    }
  }
  return(l_mat)
}

```

```

}

helper_h <- function(n, f_y, kappa, phi, xi, psi, p0, q_vec){
  #erzeuge Vektor fuer h_n
  h_vec <- rep(NA, n)
  for(rr in 1:n){
    h_vec[rr] <- (p0*q_vec[rr+1])/(rr*(xi-phi*f_y[1])+q_vec[1])
  }
  return(h_vec)
}

#l_{n,j} fuer Spezialfall k=2
helper_l_2 <- function(n, f_y, kappa, phi, xi, psi){
  # erzeuge Matrix fuer l_{n,k}
  l_mat <- matrix(NA, nrow = n, ncol = n)
  y_max <- length(f_y)-1

  # berechne r und q mit Hilfsfunktionen
  r_vec <- helper_r_vec(n, f_y)
  q_vec <- helper_q_vec(n, f_y)

  # erzeuge 2 Hilfsvektoren zur Bestimmung der beiden Summen in der Formel
  sum1 <- rep(NA, length = n)
  sum2 <- rep(NA, length = n)

  # definiere Hilfsvektor mit Eintraegen y*f(y)
  temp_f <- (0:y_max)*f_y

  rev_q <- rev(q_vec)
  rev_r <- rev(r_vec)

  # berechne sum1 und sum2
  for(k in 1:n){
    if(k <= y_max){
      temp_q <- rev_q[(n+1-k):(n+1)]
      temp_r <- rev_r[(n+1-k):(n+1)]
      sum1[k] <- crossprod(temp_q, temp_f[1:(k+1)])
      sum2[k] <- crossprod(temp_r, f_y[1:(k+1)])
    } else {
      temp_q <- rev_q[(n+1-k):(n+1+y_max-k)]
      temp_r <- rev_r[(n+1-k):(n+1+y_max-k)]
    }
  }
}

```

```

    sum1[k] <- crossprod(temp_q, temp_f)
    sum2[k] <- crossprod(temp_r, f_y)
  }
}
sum1 <- sum1*kappa
sum2 <- sum2*phi

#befuelle Matrix l_mat
for(rr in 1:n){
  for(cc in 1:n){
    if(cc <= y_max){
      l_mat[rr,cc] <- (sum1[cc]-(rr-cc)*sum2[cc])/
        (rr*((rr-r_vec[1] - 1)*(1-phi*f_y[1]) + xi*q_vec[1])) +
        ((rr-cc)*(r_vec[cc+1]-xi*q_vec[cc+1])+(psi*cc +
          phi*(rr-cc-1))*f_y[cc+1]))/
        (rr*((rr-r_vec[1]-1)*(1-phi*f_y[1])+xi*q_vec[1]))
    } else {
      l_mat[rr,cc] <- (sum1[cc]-(rr-cc)*sum2[cc])/
        (rr*((rr-r_vec[1] - 1)*(1-phi*f_y[1]) + xi*q_vec[1])) +
        ((rr-cc)*(r_vec[cc+1]-xi*q_vec[cc+1]))/
        (rr*((rr-r_vec[1]-1)*(1-phi*f_y[1])+xi*q_vec[1]))
    }
  }
}
return(l_mat)
}

rekursion_panjer <- function(g0, n, f_y, kappa=0, phi, xi, psi, par1,
                             par2=0, par3=0,k){

  # intialisiere g
  g <- rep(NA, n+1)
  g[1] <- g0

  # erzeuge h, l und m
  if(k == 1){
    # berechne q mit Hilfsfunktion
    q_vec <- helper_q_vec(n, f_y)

    l <- helper_l_1(n, f_y, kappa, phi, xi, psi, q_vec)
    h <- helper_h(n, f_y, kappa, phi, xi, psi, pmf_war(par1, par2,0), q_vec)
  }
}

```

```
} else{
  l <- helper_l_2(n, f_y, kappa, phi, xi, psi)
}
m <- helper_rm(f_y)[2]

# berechne g_1,...,g_m
if(m > 1){
  g[2:m] <- rep(0,m-1)
}
if(k == 2 && f_y[1]>0){
  g[m+1] <- f_y[m+1]*pgf_derivative_hyp(par1,par2,par3,f_y[1])
  # berechne g_(m+1), ..., g_n:
  for(j in (m+1):n){
    temp_l <- l[j,1:j]
    temp_g <- rev(g[1:j])
    g[j+1] <- crossprod(temp_l, temp_g)
  }
} else{
  # berechne g_m, ..., g_n:
  for(j in m:n){
    temp_l <- l[j,1:j]
    temp_g <- rev(g[1:j])
    if(k==1){
      g[j+1] <- h[j]+crossprod(temp_l, temp_g)
    } else{
      g[j+1] <- crossprod(temp_l, temp_g)
    }
  }
}
return(g)
}
```

```
#### ----- REKURSION FUER ALLGEMEINEN FALL ----- ####
```

```
rekursion2 <- function(h0, n, f_y, b, c, k){
  # berechne skalare r und y_max:
  r <- helper_rm(f_y)[1]
  y_max <- length(f_y) - 1

  # initialisiere h
  h <- matrix(NA, nrow=k+1, ncol = n+1)
```

```

h[,1] <- h0

if(r > 1){
  h[,2:r] <- 0
}

# beginne rekursion
if(r > 0){
  t_vec <- rep(NA, k+1)
  bigT <- diag(k+1)
  bigT[k+1,] <- b

  for(cc in r:n){
    for(rr in 0:k){
      if(rr < k){
        if(cc <= y_max-r){
          temp_h <- (r+1:cc)/cc*rev(h[rr+2,1:cc])+(1:cc-cc)/
            cc*rev(h[rr+1,1:cc])
          t_vec[rr+1] <- 1/f_y[r+1]*crossprod(f_y[(r+2):(r+cc+1)], temp_h)
        } else {
          temp_h <- ((r+1):y_max)/cc*rev(h[rr+2,(cc-y_max+r+1):cc]) +
            (1:(y_max-r)-cc)/cc*rev(h[rr+1,(cc-y_max+r+1):cc])
          t_vec[rr+1] <- 1/f_y[r+1]*crossprod(f_y[(r+2):(y_max+1)], temp_h)
        }
      } else {
        if(cc <= y_max){
          temp_ch <- rev(crossprod(h[,1:(cc-r+1)],c))
          t_vec[rr+1] <- crossprod(temp_ch,f_y[(r+1):(cc+1)])
        } else {
          temp_ch <- rev(crossprod(h[, (cc-y_max+1):(cc-r+1)],c))
          t_vec[rr+1] <- crossprod(temp_ch,f_y[(r+1):(y_max+1)])
        }
      }
    }
  }

  bigT[outer(1:(k+1), 1:(k+1), function(i,j) i == j-1)] <- -r/cc
  h[,cc+1] <- solve(bigT)%*%t_vec
}
} else {
  # hilfsvariable fuer loop:
  aux1 <- f_y[1]*c[1:k]-b[1:k]
  aux2 <- 1/(b[k+1]-f_y[1]*c[k+1])

```

```
for(cc in 1:n){
  for(rr in 0:k){
    if(rr < k){
      if(cc <= y_max){
        temp_h <- (1:cc)/cc*rev(h[rr+2,1:cc]) + (1:cc-cc)/
          cc*rev(h[rr+1,1:cc])
        h[rr+1,cc+1] <- 1/f_y[1]*crossprod(f_y[2:(cc+1)], temp_h)
      } else {
        temp_h <- (1:y_max)/cc*rev(h[rr+2,(cc-y_max+1):cc]) +
          (1:y_max-cc)/cc*rev(h[rr+1,(cc-y_max+1):cc])
        h[rr+1,cc+1] <- 1/f_y[1]*crossprod(f_y[2:(y_max+1)], temp_h)
      }
    } else {
      if(cc <= y_max){
        temp_ch <- rev(crossprod(h[,1:cc],c))
        sum1 <- crossprod(temp_ch,f_y[2:(cc+1)])
      } else {
        temp_ch <- rev(crossprod(h[, (cc-y_max+1):cc],c))
        sum1 <- crossprod(temp_ch,f_y[2:(y_max+1)])
      }
      sum2 <- crossprod(aux1, h[1:k,cc+1])
      h[rr+1,cc+1] <- aux2*(sum1+sum2)
    }
  }
}
return(h[1,])
}
```

## Testing der Rekursionen

```
#### ---- Test Laufzeit ---- ####

#### ---- hypergeometrische Verteilung ---- ####

N <- 40
M <- 10
o <- 30
b <- c(0,N-M-o,1)
c <- c(M*o, -(M+o), 1)
```

```
phi <- 1
psi <- -(M+o-1)
kappa <- M*o
xi <- N-M-o+1
k <- 2

#Bsp mit r=0
f_y <- c(rep(1/50,50))

g0 <- pgf_hyp(N,M,o,f_y[1])
laufzeit_panjer_hyp <- rep(NA, 10)

h00 <- pgf_hyp(N,M,o,f_y[1])
h01 <- f_y[1]*pgf_derivative_hyp(N,M,o,f_y[1])
h02 <- (f_y[1])^(2)*pgf_2_derivative_hyp(N,M,o,f_y[1])+
  f_y[1]*pgf_derivative_hyp(N,M,o,f_y[1])
h0 <- c(h00,h01,h02)
laufzeit_hesselager_r0_hyp <- rep(NA, 10)

for (x in 1:10) {
  start <- Sys.time()
  bsp_panjer <- rekursion_panjer(g0 = g0, n = 200*x, f_y = f_y,
                                kappa = kappa,
                                phi = phi, xi = xi, psi = psi,
                                par1 = N, par2 = M, par3 = o, k=2)
  laufzeit_panjer_hyp[x] <- Sys.time() - start
}

for (x in 1:10) {
  start <- Sys.time()
  rekursion2(h0,200*x,f_y,b,c,2)
  laufzeit_hesselager_r0_hyp[x] <- Sys.time() - start
}

#Bsp mit r>0

f_y <- c(0,rep(1/49,49))
p0 <- pmf_hyp(N,M,o,0)
h0 <- c(p0,rep(0,k))
laufzeit_hesselager_r_hyp <- rep(NA, 10)
```

```
for (x in 1:10) {
  start <- Sys.time()
  rekursion2(h0,200*x,f_y,b,c,2)
  laufzeit_hesselager_r_hyp[x] <- Sys.time() - start
}

#Abbildung

x_axis <- 200*c(1:10)

plot(x_axis, laufzeit_panjer_hyp[x_axis/200],type="l", axes = FALSE,
     xlab= "x",
     ylab="Laufzeit_in_Sek.",col="red")
points(x_axis, laufzeit_hesselager_r0_hyp[x_axis/200], type= "l",
       col= "blue")
points(x_axis, laufzeit_hesselager_r_hyp[x_axis/200], type= "l",
       col= "green")
axis(1, at=seq(0,2000, by=200))
axis(2, at=seq(0,2.5, by=0.5))
legend(200,2.5, legend=c("Rekursion_2", "Rekursion_3(r=0)",
                        "Rekursion_3(r>0)"),
      col=c("red", "blue", "green"), lwd=1)

#### ---- Waring Verteilung ---- ####

alpha <- 5
beta <- 5
b <- c(alpha+beta,1)
c <- c(alpha, 1)
phi <- 1/(alpha+beta)
psi <- alpha/(alpha+beta)
xi <- 1/(alpha+beta)
k<-1

#Bsp mit r=0
f_y <- c(rep(1/50,50))

g0 <- pgf_war(alpha, beta,f_y[1])
laufzeit_panjer_war <- rep(NA, 10)

h00 <- pgf_war(alpha,beta,f_y[1])
```

```
h01 <- f_y[1]*pgf_derivative_war(alpha,beta,f_y[1])
h0 <- c(h00,h01)
laufzeit_hesselager_r0_war<- rep(NA, 10)

for (x in 1:10) {
  start <- Sys.time()
  rekursion_panjer(g0 = g0, n = 200*x, f_y = f_y, kappa = 0, phi = phi,
    xi = xi, psi = psi,
    par1 = alpha, par2 = beta, par3 = 0, k=1)
  laufzeit_panjer_war[x] <- Sys.time() - start
}

for (x in 1:10) {
  start <- Sys.time()
  rekursion2(h0,200*x,f_y,b,c,1)
  laufzeit_hesselager_r0_war[x] <- Sys.time() - start
}

#Bsp mit r>0
f_y <- c(0,rep(1/49,49))

p0 <- pmf_war(alpha,beta,0)
h0 <- c(p0,rep(0,k))
laufzeit_hesselager_r_war <- rep(NA, 10)

for (x in 1:10) {
  start <- Sys.time()
  rekursion2(h0,200*x,f_y,b,c,1)
  laufzeit_hesselager_r_war[x] <- Sys.time() - start
}

#Abbildung

x_axis <- 200*c(1:10)

plot(x_axis, laufzeit_panjer_war[x_axis/200],axes = FALSE, type="l",
  xlab= "x",
  ylab="Laufzeit in Sek.",col="red")
points(x_axis, laufzeit_hesselager_r0_war[x_axis/200], type= "l",
  col= "blue")
points(x_axis, laufzeit_hesselager_r_war[x_axis/200], type= "l",
```

```
        col= "green")
axis(1, at=seq(0,2000, by=200))
axis(2, at=seq(0,1.2, by=0.2))
legend(200, 1, legend=c("Rekursion_1", "Rekursion_3(r=0)",
                        "Rekursion_3(r>0)"),
       col=c("red", "blue", "green"), lwd=1:1)

#### ---- Test Numerische Stabilitaet ---- ####

#Bsp 1
f_y <- rep(1/150,150)

#Bsp 2
f_y <- c(0,rep(1/150,150))

#Bsp 3
f<- exp(-3*(0:20))
s<-sum(f)
f_y<-f/s

#Bsp 4
f<-c(0,exp(-3*(0:20)))
s<-sum(f)
f_y<-f/s

#### ---- hypergeometrische Verteilung ---- ####

N <- 200
M <- 50
o <- 150
b <- c(0,N-M-o,1)
c <- c(M*o, -(M+o), 1)
phi <- 1
psi <- -(M+o-1)
kappa <- M*o
xi <- N-M-o+1
k <- 2

g0 <- pgf_hyp(N,M,o,f_y[1])
panjer_k2 <- rekursion_panjer(g0 = g0, n = 5000, f_y = f_y,
                             kappa = kappa, phi = phi,
```

```
xi = xi, psi = psi,
par1 = N, par2 = M, par3 = o, k=2)

#Fall r>0
p0 <- pmf_hyp(N,M,o,0)
h0 <- c(p0,rep(0,k))

#Fall r = 0
h00 <- pgf_hyp(N,M,o,f_y[1])
h01 <- f_y[1]*pgf_derivative_hyp(N,M,o,f_y[1])
h02 <- (f_y[1])^(2)*pgf_2_derivative_hyp(N,M,o,f_y[1])+
  f_y[1]*pgf_derivative_hyp(N,M,o,f_y[1])
h0 <- c(h00,h01,h02)

hesselager_k2 <- rekursion2(h0,5000,f_y,b,c,2)

#### ---- Waring Verteilung ---- ####

alpha <- 5
beta <- 10
b <- c(alpha+beta,1)
c <- c(alpha, 1)
phi <- 1/(alpha+beta)
psi <- alpha/(alpha+beta)
xi <- 1/(alpha+beta)
k<-1

g0 <- pgf_war(alpha, beta,f_y[1])
panjer_k1 <- rekursion_panjer(g0 = g0, n = 1000, f_y = f_y,
  kappa = 0, phi = phi,
  xi = xi, psi = psi,
  par1 = alpha, par2 = beta, par3 = 0, k=1)

#Fall r>0
p0 <- pmf_war(alpha,beta,0)
h0 <- c(p0,rep(0,k))

#Fall r = 0
h00 <- pgf_war(alpha,beta,f_y[1])
h01 <- f_y[1]*pgf_derivative_war(alpha,beta,f_y[1])
h0 <- c(h00,h01)
```

```
hesselager_k1 <- rekursion2(h0,1000,f_y,b,c,1)
```

## Implementierung der Rekursion zur direkten Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit

```
#### ---- Ruinwahrscheinlichkeit direkte Berechnung ---- ####

ruin_prob <- function(f_y, n, alpha, beta, l=1){

  # annahme: f_y(x) = 0, wenn x \notin \N

  #lege Vektor fuer Ruinwahrscheinlichkeiten an
  psi <- rep(NA, n+1)

  #bestimme f_tilde

  # berechne y_max und anzahl der intervale
  y_max <- length(f_y)-1
  n_interval <- ceiling(y_max/(2*1))

  # berechne verteilungsfunktion fuer pmf f_y
  F_y <- cumsum(f_y)

  # berechne erwartungswert der einzelschaeden
  mu <- weighted.mean(0:y_max, f_y)

  # intialisierere matrix fuer massen m_i^(k), i = 1,2,3
  m_mat <- matrix(NA, nrow = 3, ncol = n_interval)

  for(k in 1:n_interval){
    index_all <- (1+((k-1)*2*1)):(1+k*2*1)

    index_end <- index_all[length(index_all)]
    index_start <- index_all[1]
    # index ohne start und ende:
    index_rest <- index_all[2:(length(index_all)-1)]
    # start- und endwert + sprungstelle:
    index_relevant <- c(index_start,
                       index_rest[which(f_y[index_rest] > 0)],
                       index_end)
```

```

n_relevant <- length(index_relevant)
f_relevant <- (1-F_y[index_relevant])/mu

# hilfsvektor fuer momente und X-matrix
moments <- rep(NA,3)
X <- matrix(NA, 3, 3)

for(r in 0:2){
  aux <- (index_relevant[2:n_relevant]-1)^(r+1) -
        (index_relevant[1:(n_relevant-1)]-1)^(r+1)
  moments[r+1] <- crossprod(f_relevant[1:(n_relevant-1)],aux)/(r+1)
  X[r+1,] <- c(index_start-1,index_start+1-1 ,index_end-1)^r
}

# loese fuer massen m_i^(k):
m_mat[,k] <- solve(X,moments)
}

# initialisiere f_tilde vektor
f_tilde <- rep(NA, 2*(n_interval-1)+3)
# f_tilde(0)
f_tilde[1] <- m_mat[1,1]
# f_tilde(1), f_tilde(3), ...
f_tilde[2*(1:((length(f_tilde)-1)/2))] <- m_mat[2,]
# f_tilde(2), f_tilde(4), ...
f_tilde[2*(1:((length(f_tilde)-2)/2))+1] <- m_mat[3,1:(n_interval-1)] +
m_mat[1,2:n_interval]
if(y_max%%2 == 0){
  f_tilde[length(f_tilde)] = m_mat[3,n_interval]
} else{
  f_tilde = f_tilde[1:(length(f_tilde)-1)]
}

#starte Rekursion zur Bestimmung der Gesamtschadenverteilung
b <- c(alpha+beta,1)
c <- c(alpha, 1)
r <- which(f_y > 0)[1] - 1
if(r > 0){
  p0 <- pmf_war(alpha,beta,0)
  h0 <- c(p0,rep(0,k))
} else{

```

```
    h00 <- pgf_war(alpha,beta,f_y[1])
    h01 <- f_y[1]*pgf_derivative_war(alpha,beta,f_y[1])
    h0 <- c(h00,h01)
  }
rekursion <- rekursion2(h0,n,f_tilde,b,c,1)

#berechne Ruin-WS rekursiv
psi[1] <- 1- pgf_war(alpha, beta,f_tilde[1])
for(i in 2:(n+1)) {
  psi[i] <- psi[i-1]- rekursion[i]
}

return(psi)
}
```

# Literatur

- [1] Abramowitz, Milton / Stegun, Irene A. (1972): *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. 8. Dover print., New York: Dover Publications.
- [2] Bowers, Newton L. / Gerber, Hans U. / Hickman, James C. / Jones, Donald A. / Nesbitt, Cecil J. (1986): *Actuarial mathematics*. 1. Auflage, Itasca Ill: The Society of Actuaries.
- [3] bpb: *Schadenversicherung*. URL: <https://www.bpb.de/kurz-knapp/lexika/lexikon-der-wirtschaft/20542/schadenversicherung/> (Letzter Zugriff am 21.6.2023).
- [4] De Pril, Nelson (1985): *Recursions for convolutions of arithmetic distributions*. ASTIN Bulletin 15, Nummer 2, 135-139.
- [5] Dickson, David C. M. (2017): *Insurance risk and ruin*. 2. Auflage, Cambridge: Cambridge University Press.
- [6] Eisenberg, Julia (2020): *Skript zur Risiko- und Ruintheorie*. Technische Universität Wien.
- [7] Gerhold, Stefan / Schmock, Uwe / Warnung, Richard (2010): *A generalization of Panjer's recursion and numerically stable risk aggregation*. Finance and Stochastics 14, Nummer 1, 81–128.
- [8] Gurker, Werner (2018): *Introduction to MATHEMATICAL STATISTICS using R*. Wien: TU Verlag.
- [9] Helbig, Manfred / Dienst, Hans-Rudolf und Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik (1987): *Beiträge zum versicherungsmathematischen Grundwissen*. Karlsruhe: Verl. Versicherungswirtschaft.
- [10] Hesselager, Ole (1994): *A recursive procedure for calculation of some compound distributions*. ASTIN Bulletin 24, Nummer 1, 19-32.
- [11] Johnson, Norman L. / Kemp, Adrienne W. / Kotz, Samuel (2005): *Univariate discrete distributions*. 3. Auflage, Hoboken, N.J.: Wiley.
- [12] Klugman, Stuart A. / Panjer, Harry H. / Willmot, Gordon E. (2004): *Loss models: from data to decisions*. 2. Auflage, Hoboken, NJ: Wiley.
- [13] McFadden, J. A. (1965): *The mixed poisson process*. Sankhya. Serie A, Vol. 27, Nr. 1, 83–92.
- [14] Panjer, Harry H. (1981): *Recursive evaluation of a family of compound distributions*. ASTIN Bulletin 12, 22-26.
- [15] Panjer, Harry H. (1986): *Direct calculation of ruin probabilities*. The Journal of Risk and Insurance 53, Nr. 3, 521–529.
- [16] Panjer, Harry H. (2014): *Discretization of distributions*. Wiley StatsRef: Statistics Reference Online. John Wiley & Sons, Ltd.
- [17] Ross, Sheldon M. (2010): *Introduction to probability models*. 10. Auflage, Amsterdam [u.a.]: Elsevier.

- [18] Schmidt, Klaus D. (2009): *Versicherungsmathematik*. 3. überarbeitete und erweiterte Auflage, Berlin: Springer.
- [19] SVV: *Glossar*. URL: <https://www.svv.ch/de/newsroom/glossar> (Letzter Zugriff am 21.6.2023).
- [20] Tse, Yiu Kuen (2009): *Nonlife actuarial models: theory, methods and evaluation*. Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press.
- [21] Willmot, Gordon E. / Panjer, Harry H. (1987): *Difference equation approaches in evaluation of compound distributions*. Insurance: Mathematics and Economics 6, 43-56.

# Abbildungsverzeichnis

1	Laufzeiten zur Bestimmung von $g_x$ für den Fall $k = 1$ und $y_{max} = 49$ . . . . .	48
2	Laufzeiten zur Bestimmung von $g_x$ für den Fall $k = 2$ und $y_{max} = 49$ . . . . .	49

# Tabellenverzeichnis

1	Werte von a und b . . . . .	20
2	Numerische Instabilitäten im Fall einer hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern $N$ , $M$ und $m$ als Schadenanzahlverteilung ( $k = 2$ ) und $f_1$ bzw. $f_2$ als Einzelschadenverteilung . . . . .	50