Diplomarbeit zum Thema

Charakterisierung von Quantenlogiken durch numerische Ereignisse

Alexandra Elisabeth Bergmayr

Matrikelnummer: 01225525

Betreuer: Univ. Prof. Dr. Dietmar Dorninger

Technische Universität Wien

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

Wintersemester 2020 - Sommersemester 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Inhalt **1**

2 Die Logik der Quantenmechanik **2**
2.1 Der propositionale Kalkül der klassischen Physik . . . 2
2.2 Der propositionale Kalkül für nicht-klassische Systeme . . . 5
2.3 Von Neumanns Suche nach dem logischen Kalkül der Quantenmechanik . . . 7
2.4 Die Logik des Hilbertraum-Verbandes . . . 9
2.5 Mackeys axiomatische Quantenmechanik . . . 13
2.6 Interpretation der quantenlogischen Strukturen . . . 16
2.7 Unterscheidung von klassischen und quantenmechanischen Systemen anhand ihrer Logiken . . . 18
2.8 Korrelationsunterschiede in der klassischen und der quantenmechanischen Physik 21

3 Algebraischer Hintergrund **24**
3.1 Grundlegende Begriffe und Zusammenhänge . . . 24
3.2 Kommutierende Elemente . . . 36
3.3 Orthomodulare posets und Verbände . . . 41
3.4 Boolesche orthomodulare posets . . . 43
3.5 Boolesche Algebren . . . 45
3.6 Konkrete Quantenlogiken . . . 50
3.7 Klassische Korrelationsfunktionen und Bell-Wertungen . . . 52

4 Mathematische Charakterisierung von Quantenlogiken auf Grundlage von numerischen Ereignissen **53**
4.1 Spezielle Mengen von S-Wahrscheinlichkeiten . . . 53
4.2 Ereignissysteme . . . 65
4.3 Grundlegende Resultate zu Algebren von numerischen Ereignissen . . . 69
4.3.1 Wichtige Begriffe im Kontext von numerischen Ereignissen . . . 69
4.3.2 Eigenschaften von Algebren von numerischen Ereignissen . . . 71
4.3.3 Zusammenhang zwischen Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten und orthomodularen posets und Folgerungen daraus . . . 75
4.4 GFEs und Algebren von numerischen Ereignissen . . . 84
4.4.1 Von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten erzeugte GFEs und Algebren von numerischen Ereignissen . . . 84
4.4.2 Von allgemeinen S-Wahrscheinlichkeiten erzeugte GFEs und Algebren von numerischen Ereignissen . . . 92
4.4.3 Konkrete GFEs, Algebren von numerischen Ereignissen und Ereignissysteme . . . 96
4.5 Klassische S-Wahrscheinlichkeiten . . . 101
4.5.1 Resultate für verbandsgeordnete Algebren von numerischen Ereignisse . . 101
4.5.2 Bedingungen für (Boolesche) Teilmengen von Algebren von numerischen Ereignissen . . . 102

4.5.3 Charakterisierung von klassischen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Bell-artigen Ungleichungen . . . 107
4.5.4 Charakteristische Bedingungen für Algebren von numerischen Ereignissen, Boolesche Algebren zu bilden . . . 116

5 Beispiele aus der Physik **129**
5.1 Stern-Gerlach-Versuch für Spin-Messungen . . . 129
5.2 Verletzung der Distributivgesetze durch Spin-Messungen . . . 131
5.3 Photonen, die einen Polarisationsfilter durchqueren . . . 132
5.4 Verletzung Bell-artiger Ungleichungen . . . 133

6 Fazit und Ausblick **134**

Abbildungsverzeichnis **136**

Primärquellen **137**

Sekundärquellen **142**

1 Inhalt

John von Neumann und Garrett Birkhoff haben durch die Untersuchung der logischen Struktur von quantenmechanischen Systemen, welche sie als die *Logik der Quantenmechanik* bezeichnet haben, den Grundstein für nämliche gelegt und den Anstoß zur weiteren Analyse sogenannter *Quantenlogiken* - als welche man in der axiomatischen Quantenmechanik meist (σ-)orthomodulare (nicht notwendigerweise verbandsgeordnete) posets betrachtet - gegeben.
Handelt es sich bei einer mit einem physikalischen System assoziierten Logik um eine Boolesche Algebra, dann hat man Grund zur Annahme, dass man es mit einem klassischen System zu tun hat.

Ist S eine Menge von Zuständen eines physikalischen Systems, dann definieren die Wahrscheinlichkeiten $p(s)$[1] des Eintretens eines Ereignisses, wenn das System in unterschiedlichen Zuständen $s \in S$ ist, eine Funktion von S nach $[0,1]$, welche man S-Wahrscheinlichkeit nennt. Ordnet man eine Menge P von S-Wahrscheinlichkeiten bezüglich der Ordnung von Funktionen, schließt die konstanten Funktionen 0 und 1 mit ein und definiert $p' := 1 - p$ für jedes $p \in P$, dann erhält man ein beschränktes poset von S-Wahrscheinlichkeiten mit einer antitonen Involution.
Gegeben eine solche Menge $P \subseteq [0,1]^S$ von durch Messungen erhaltenen S-Wahrscheinlichkeiten, stellt sich die Frage, welche Art von (Quanten-)Logik durch diese induziert wird. Insbesondere ist von Interesse, zu wissen, ob man mit einer klassischen oder quantenmechanischen Situation zu tun hat.
Wir zeigen, dass man Antworten darauf finden kann, indem man die relationale und algebraische Struktur von P studiert. In vielen Fällen handelt es sich bei P um ein orthomodulares poset, das häufig sogar verbandsgeordnet ist. Besondere Beispiele dafür sind etwa die aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannte σ-Algebra und der sogenannte Hilbert-Verband.

Wir untersuchen Mengen von S-Wahrscheinlichkeiten hinsichtlich ihrer Struktur, klären Fragen über Relationen zwischen unterschiedlichen Klassen von S-Wahrscheinlichkeiten, geben algebraische Repräsentationen an und charakterisieren auf verschiedene Weisen die für die Erkennung eines klassischen Systems wesentliche Eigenschaft, dass zwei S-Wahrscheinlichkeiten miteinander kommutieren.
Im Speziellen identifizieren und studieren wir sogenannte GFEs und Algebren von numerischen Ereignissen, unter ihnen auch die bekannteren konkreten Logiken.
Darüber hinaus lernen wir eine Familie von aus Korrelationswahrscheinlichkeiten zusammengesetzten Ungleichungen kennen, deren Erfüllung eine notwendige Bedingung für die Klassik eines Systems darstellt.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [12, 4, 25, 26, 19, 29, 35, 32])

[1] Die Zahl $p(s)$ kann man sich als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man den Wert einer beobachtbaren physikalischen Größe in einer bestimmten Teilmenge der reellen Zahlen vorfindet, wenn sich das System, mit dem die Größe assoziiert ist, im Zustand $s \in S$ befindet, vorstellen.

2 Die Logik der Quantenmechanik

2.1 Der propositionale Kalkül der klassischen Physik

In der klassischen Physik gibt es für jedes physikalische System **S** einen mit ihm assoziierten Raum $\mathcal{S}$, welchen man den *Phasenraum von* **S** nennt. Die möglichen Zustände[1] des Systems (zu einem bestimmten Zeitpunkt) stehen in eineindeutiger Korrespondenz mit den Punkten von $\mathcal{S}$. *Observablen*[2] werden durch reellwertige Funktionen auf $\mathcal{S}$ repräsentiert. Ist f eine solche Funktion, die mit einer bestimmten Observablen korrespondiert, dann wird der Wert $f(s)$ für jedes $s \in S$ als der Wert dieser Observablen, wenn das System im Zustand s ist, interpretiert. Dieses Konzept ist für jedes klassische System sinnvoll.

Propositionen sind elementare Aussagen über ein System. Sie sind von der Form, „das System hat eine bestimmte Eigenschaft". Aus dem Grund spricht man anstatt von *Propositionen* auch oft von *Eigenschaften* oder *(Ja-Nein-)Fragen*.

Die allgemeinste Aussage dieser Art ist, ob der Wert einer bestimmten Observablen in einer bestimmten reellen Zahlenmenge E liegt. Wenn die Observable durch eine Funktion f auf $\mathcal{S}$ repräsentiert wird, dann ist eine solche Proposition äquivalent zu der Aussage, dass der Zustand des Systems in der Menge $f^{-1}(E)$ des Raumes $\mathcal{S}$ ist.

Das bedeutet, die physikalisch bedeutsamen Aussagen, die über das System gemacht werden können, stehen in Korrespondenz mit Teilmengen von $\mathcal{S}$. Anders ausgedrückt, wird jede Proposition mit den Punkten jener Menge aus der Borel-σ-Algebra[3] des Phasenraumes, welche den Zuständen des physikalischen Systems, in welchen sich bei Messungen die Proposition als wahr herausstellt, entsprechen, identifiziert. [4]

Jede solche Teilmenge A des Phasenraumes korrespondiert eineindeutig mit einer charakteristischen Funktion χ_A, die auf A den Wert 1 hat und sonst den Wert 0. Der Schnitt zweier charakteristischer Funktionen ist ihr Produkt und entspricht der charakteristischen Funktion zum mengentheoretischen Schnitt der assoziierten Teilmengen. Die Vereinigung zweier charak-

[1] Einen Zustand (sowohl eines klassischen als auch eines quantenmechanischen Systems) kann man als das Resultat einer Menge von experimentellen Verfahren, die verwendet werden, um das physikalische System zu isolieren und zu präparieren, auffassen. Der Begriff des Zustands beschreibt dann all jene Attribute des Systems, die in dem Sinne zufällig sind, dass sie in verschiedenen Situationen unterschiedlich sein und sich mit der Zeit verändern können. Permanente Attribute hingegen fallen unter den Begriff des physikalischen Systems selbst. Insbesondere sagt man, dass sich zwei Systeme in demselben physikalischen Zustand befinden, wenn die Erwartungswerte aller diese beiden Systeme betreffenden Observablen übereinstimmen.

[2] Observablen sind messbare Größen wie zum Beispiel Energie, Position und Momentum. Synonym zum Begriff der Observablen wird auch der Ausdruck *physikalische Größe* verwendet.

[3] Eine σ-Algebra ist als ein Mengensystem, das heißt, eine Menge von Teilmengen einer Grundmenge, das die Grundmenge enthält und abgeschlossen bezüglich der Bildung von Komplementen und abzählbaren Vereinigungen ist, definiert. Jede σ-Algebra ist eine (σ-)vollständige Boolesche Algebra (siehe Definition 3.15, S.32), das bedeutet, eine Boolesche Algebra, in der zu jeder abzählbaren Teilmenge von Elementen das Supremum existiert. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen jedoch nicht.
Eine Borel-σ-Algebra ist die von einem aus offenen Mengen bestehenden Mengensystem erzeugte σ-Algebra. Für Details sei beispielsweise auf [66] verwiesen.

[4] Diese Definition impliziert, dass zwei Propositionen, die derselben Teilmenge von $\mathcal{S}$ entsprechen, miteinander identifiziert werden.

teristischer Funktionen ist ihre Summe abzüglich ihrem Schnitt bzw., äquivalent dazu, das Komplement des Schnittes der Komplemente. Das bedeutet, sie entspricht der mengentheoretischen Vereinigung der zugehörigen Teilmengen des Phasenraumes. Das Komplement der charakteristischen Funktion einer Menge A entspricht der charakteristischen Funktion des mengentheoretische Komplements $A^c = \Omega \backslash A$.
In der klassischen Mechanik korrespondieren also die logischen Operationen UND, ODER und Komplementbildung genau mit den mengentheoretischen Operationen im Phasenraum. Daher erfüllen diese Vorschriften auch alle Eigenschaften der klassischen Aussagenlogik und der Mengentheorie, darunter die Idempotenz, Kommutativität, Assoziativität, Distributivität und das Absorptionsgesetz.
Darüber hinaus lässt sich die mengentheoretische Inklusion mit der logischen Implikation identifizieren. Also sind Propositionen durch die mengentheoretische Inklusion geordnet, $P \leq Q :\Leftrightarrow P \subseteq Q$[5], wodurch $P \subseteq Q$ als die logische Implikation $P \Rightarrow Q$ aufgefasst werden kann. Das heißt, wann immer das physikalische System in einem Zustand ist, in dem die Proposition P sicher wahr ist, ist auch die Proposition Q in diesem Zustand sicher wahr, und die Wahrscheinlichkeit, dass Q in einem Zustand wahr ist, ist niemals kleiner als jene, dass P in diesem Zustand wahr ist.

Mathematisch ausgedrückt bedeuten die bisherigen Ausführungen, dass im Hintergrund des klassischen Systems eine Boolesche Algebra[6] von Teilmengen des Phasenraums steht, deren Elemente Aussagen über das physikalische System repräsentieren, also eine Boolesche Algebra von Propositionen. Diese Boolesche Algebra nennt man den *propositionalen Kalkül* bzw. die *Logik* des Systems.
Aufgrund dessen kann man für ein klassisches physikalisches System aus zwei dieses System betreffenden Propositionen P, Q durch Anwendung der logischen Konnektive neue Propositionen bilden, die ebenfalls sinnvolle Aussagen über das System darstellen. Insbesondere kann durch Verwendung der Konjunktion die Proposition „P und Q“, durch Verwendung der Disjunktion die Proposition „P oder Q“ und durch Verwendung der Negation die Proposition „Nicht-P“ gebildet werden.
Befindet sich beispielsweise eine Münze in einer Box und kann entweder *Kopf* oder *Zahl* zeigen, dann ist entweder die Münze in der Box und zeigt *Kopf* oder die Münze ist in der Box und zeigt *Zahl*.
Wichtig ist auch die Tatsache, dass man auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ des Phasenraumes den Zustandsbegriff verallgemeinern und sogenannte probabilistische Zustände mit einschließen kann, indem man Zustände als spezielle Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße auf S definiert.[7] Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Proposition P in einem bestimmten (probabilistischen) Zustand wahr ist, erhält man dann als Bild unter dem entsprechenden Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß.
Im klassischen Fall dient eine Boolesche Algebra nämlich nicht nur als propositionaler Kalkül, sondern auch als Ereignissystem eines Wahrscheinlichkeitsraumes. Genauer, ist in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie ein Wahrscheinlichkeitsraum ein Tripel (Ω, Σ, μ), wobei Ω eine (nichtleere) Menge, welche als *Ergebnismenge* bezeichnet wird und deren Elemente mit den möglichen Ergebnissen von Zufallsexperimenten korrespondieren, Σ eine als *Ereignisraum* oder *Ereignisalgebra* bezeichnete σ-Algebra von Teilmengen von Ω, also insbesondere eine (σ-vollständige) Boolesche Algebra, deren Elemente die *(Zufalls-)Ereignisse* repräsentieren, und μ

[5] Wir bezeichnen hier sowohl die Propositionen selbst als auch ihre korrespondierenden Elemente des Phasenraumes mit P und Q.
[6] siehe Definition 3.15, S.32
[7] Für Ausführungen dazu sei beispielsweise auf [66] und [80] verwiesen.

ein (abzählbar additives) Wahrscheinlichkeitsmaß[8] ist, sodass $\mu(A)$ für $A \in \Sigma$ die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses A angibt. (vgl.[106],[103])
Eine *Zufallsvariable* ist eine messbare[9] Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Bezeichnet man die Klasse der Borelmengen von $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann wird für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und eine Zufallsvariable f das Ereignis, dass f einen Wert in B hat, durch $f^{-1}(B)$ repräsentiert und $\mu(f^{-1}(B))$ ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses. Die auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ durch $\mu_f(B) := \mu(\{x \in \Omega | f(x) \in B\})$ definierte Funktion μ_f wird als *Verteilung von f* bezeichnet.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [80, 4, 66, 74, 44, 64, 43, 53, 12, 69],[99],[97])

[8]Ein (abzählbar additives bzw. σ-additives) Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine Abbildung $\mu : \Sigma \to [0, 1]$, die $\mu(\Omega) = 1$ erfüllt und die für jede abzählbare Folge paarweise disjunkter Elemente von Σ additiv ist, das heißt, $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ für paarweise disjunkte $A_i \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$.
[9]Dass $f : (\Omega, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, bedeutet, dass für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt, $f^{-1}(B) \in \Sigma$.

2.2 Der propositionale Kalkül für nicht-klassische Systeme

Wie wir gesehen haben, ist die Logik der klassischen Mechanik eine Boolesche Algebra, nämlich die Boolesche Algebra aller Borelmengen des Phasenraumes. Genügt ein System **S** hingegen nicht den Gesetzen der klassischen Mechanik, dann lässt sich mit ihm im Allgemeinen kein Phasenraum assoziieren, weil Ort und Impuls, durch welche die klassischen Zustände festgelegt werden, für nicht klassische (bzw. Quanten-) Systeme nicht simultan messbar sind. Es ist dennoch sinnvoll, die Gesamtheit von experimentell verifizierbaren Aussagen, welche über das System gemacht werden können, zu betrachten. Auch im nicht-klassischen Fall sollen solche Propositionen als Teilmengen eines geeigneten Phasenraum-Analogons aufgefasst werden.
Identifiziert man logisch äquivalente Aussagen miteinander, bildet die Menge der dadurch entstehenden Äquivalenzklassen - welche Birkhoff und von Neumann als „physikalische Eigenschaften" auffassen - und betrachtet eine Übersetzung der logischen Implikation auf dieser Menge, so erhält man ein poset[10].
Stellt man sicher, dass dieser Kalkül auch die trivialen Propositionen beinhaltet, also jene, die immer wahr ist - etwa, dass das betrachtete physikalische System existiert - und jene, die immer falsch ist - etwa, dass das zugrundeliegende physikalische System nicht existiert - dann hat man es mit einem beschränkten poset[11] zu tun.
Auf beschränkten posets kann man eine unäre Operation definieren, die mit der Negation von Propositionen identifiziert wird, nämlich die der (Ortho-)Komplementbildung[12]. In Anbetracht des klassischen Falles scheint es legitim, als Postulat zu fordern, dass der Übergang von einer experimentellen Proposition P zu ihrem Komplement P' eine Orthogonalisierung bildet und P impliziert, dass P' absurd ist.
Das entstehende orthokomplementäre poset wird in Analogie zum klassischen Fall meist als die *Logik* von **S** bezeichnet. Die für quantenmechanische Systeme wesentliche Annahme ist, dass in dieser Logik die Distributivgesetze [13] nicht immer erfüllt sind, nämlich dann nicht, wenn man es mit nicht kompatiblen Observablen zu tun hat.
In der Quantenmechanik kann bekanntlich der Akt der Messung einer Observablen A das System in solch einer Weise verändern, dass eine Messung einer Observablen B, die der Messung von A unmittelbar folgt, nicht mit einer Messung von B, die einer Messung von A unmittelbar vorhergeht, übereinstimmt. Vielmehr, wird die Veränderung des Resultats der Messung von B von unvorhersehbarer Natur sein. Observablen, bei denen dies der Fall ist, die also nicht (in allen Zuständen) gleichzeitig scharf messbar sind, bezeichnet man als miteinander *inkompatibel*.
Zum Beispiel hat ein Elektron einen Spin, der quantisiert ist und der entlang jeder Richtung, in der es gemessen wird, immer einen von zwei Werten annimmt, entweder „spin up" oder „spin down". Es ist jedoch unmöglich, den Spin eines Elektrons entlang zweier verschiedener räumlicher Achsen simultan zu spezifizieren, das heißt, wird zum Beispiel der Spin eines Elektrons entlang der x-Achse gemessenen, ist es nicht möglich, gleichzeitig auch den Wert des Spins entlang der y-Achse festzustellen, die physikalischen Observablen bzw. Messungen sind also inkompatibel.
Demnach ist es nicht immer möglich, der Konjunktion zweier Propositionen, die ein quantenphysikalisches System betreffen, eine Bedeutung, die sich mit der im klassischen Fall deckt, zuzuschreiben. Dieser Umstand schließt es beispielsweise aus, dass man für inkompatible A, B

[10] siehe Definition 3.1, S.24
[11] siehe Definition 3.10, S.26
[12] siehe Definition 3.11, S.26
[13] siehe Definition 3.15, S.32

der Aussage „A und B haben die Werte a und b zur Zeit t" einen Sinn zuschreibt.[14] Außerdem führt er zur Nichtgültigkeit der Distributivgesetze, welche in engem Zusammenhang mit der Tatsache, dass eine zwei quantenmechanische Aussagen betreffende Disjunktion auch dann wahr sein kann, wenn keine der beiden involvierten Aussagen wahr ist, steht. Das spiegelt etwa der Fall wieder, bei dem man es mit Zuständen betreffend ein Spin-$\frac{1}{2}$-System zu tun hat, welches eine Linearkombination der Zustände *up* (Spin $\frac{1}{2}$) und *down* (Spin $-\frac{1}{2}$) ist. Es kann sein, dass beide Propositionen, „der Zustand (entlang einer bestimmten Achse) ist *up*" und „der Zustand (entlang einer bestimmten Achse) ist *down*", keinen bestimmten Wahrheitswert haben, aber die Disjunktion der beiden Propositionen, „der Zustand (entlang einer bestimmten Achse) ist *up* oder *down*", ist eine Tautologie.
Ist ein Spin-$\frac{1}{2}$-System beispielsweise so polarisiert, dass Messungen entlang der x-Achse stets Spin *up* liefern, der Spin entlang der y-Achse aber unbestimmt - also mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit entweder *up* oder *down* - ist, dann ist die Aussage „der Spin ist entlang der x-Achse *up* und der Spin ist entlang der y-Achse entweder *up* oder *down*" wahr. Geht man nun wie im klassischen Fall von den Konjunktionen „der Spin entlang der x-Achse ist *up* und der Spin entlang der y-Achse ist *up* " und „der Spin entlang der x-Achse ist *up* und der Spin entlang der y-Achse ist *down*" aus und wendet wie im klassischen Fall das Distributivgesetz darauf an, dann erhält man, dass entweder die erste oder die zweite der beiden Aussagen wahr sein muss, was jedoch nicht stimmt, da sich beiden Aussagen kein Wahrheitswert zuschreiben lässt.[15] Daher kann das Distributivgesetz für quantenphysikalische Aussagen nicht gültig sein.

In der axiomatischen Entwicklung der Logik der Quantenmechanik lassen sich auf relativ einfache Weise plausible Axiome finden, die sicherstellen, dass die Quantenlogik der Propositionen die Struktur eines orthomodularen posets[16] hat. Für die Axiomatisierung gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die historisch erste, welche wir in Abschnitt 2.5[17] ein wenig näher betrachten werden, geht auf George Whitelaw Mackey zurück. Häufig - und auch bei Mackey - werden weitere Axiome festgelegt, die sicherstellen, dass die Logik isomorph zum Hilbert-Verband, welchen wir in Abschnitt 2.4[18] kennenlernen werden, ist.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [80, 15, 76, 4, 58, 70, 47, 12, 83, 48, 43, 2, 36, 33, 69])

[14] Andererseits schließt er nicht die Möglichkeit von sinnvollen Aussagen der Form „zur Zeit t sind Messungen von A und B statistisch verteilt mit den Wahrscheinlichkeitsmaßen α und β" aus, weil eine statistische Verteilung dadurch bestimmt wird, dass man Messungen an einem Sample durchführt, das eine große Anzahl von Nachbildungen des Systems enthält und man für die Bestimmung von α und β unterschiedliche Samples verwenden kann. So hat das sogenannte Heisenbergsche Unschärfeprinzip etwa Max Born dazu veranlasst, die Quantentheorie als eine stochastische Theorie zu sehen. Darauf soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden, das Problem einer geeigneten Interpretation wird jedoch in Abschnitt 2.6, S.16, noch einmal aufgegriffen.

[15] Die Verletzung der Distributivgesetze durch das Spin-$\frac{1}{2}$-System greifen wir in Abschnitt 5.2, S.131, noch einmal auf.

[16] siehe Definition 3.11, 26

[17] siehe S.13

[18] siehe S.9

2.3 Von Neumanns Suche nach dem logischen Kalkül der Quantenmechanik

Die Idee der Quantenlogik geht auf John von Neumanns Buch [69] aus dem Jahre 1932 zurück und ist von ihm 1936 in Kooperation mit Garrett Birkhoff in der Publikation [12] näher ausgearbeitet worden, mit dem Ziel der Erschaffung eines quantenlogischen propositionalen Kalküls. Motiviert durch die klassische Physik, welche der klassischen Aussagenlogik folgt und daher durch Boolesche Algebren beschrieben werden kann, begannen Birkhoff und von Neumann die Suche nach einem geeigneten logischen Apparat, der die Beziehungen zwischen quantenphysikalischen Aussagen widerspiegeln sollte. Dabei richteten sie ihre Aufmerksamkeit vor allem auf Verbandsstrukturen[19].

Die zentrale Frage dabei war, ob die im klassischen Fall vorliegende Dualität zwischen propositionalen Logiken und assoziierten Booleschen Algebren auch gilt, wenn Boolesche Algebren durch schwächere algebraische Strukturen, die dem mathematischen Formalismus der Quantenmechanik entspringen, ersetzt werden. Da sich Heisenbergs Matrizenmechanik und die zu ihr äquivalente Wellenmechanik Schrödingers beide in Räumen abspielen, welche kanonische Beispiele eines komplexen Hilbertraumes sind, griff von Neumann in [69] auf einen solchen für die Formalisierung der Quantenmechanik zurück. Aus diesem Grund waren es mit der des Hilbertraumes verwandte Strukturen, welche von Neumann für seinen Kalkül untersuchte. Weil außerdem eine Boolesche Algebra nicht nur als die propositionale Algebra einer klassischen Logik, sondern auch als die algebraische Struktur, welche die Zufallsereignisse einer klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie repräsentiert, aufgefasst werden kann, wollte von Neumann, dass Quantenlogik nicht nur den propositionalen Kalkül eines quantenmechanischen Systems darstelle, sondern auch als Ereignisstruktur im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie diene. Die Arbeit von Birkhoff und von Neumann war eine der ersten, die den Vorschlag machte, einen nicht-Booleschen Verband für eine solche Quantenlogik heranzuziehen.

Da von Neumann zunächst darauf bestand, dass auf dem quantenlogischen Verband eine endliche Dimensionsfunktion $d(a)$, existiere, für die $[a > b] \Rightarrow [d(a) > d(b)]$ und $d(a) + d(b) = d(a \wedge b) + d(a \vee b)$ gilt, was die Modularität[20] des Verbands nach sich zieht, widmeten von Neumann und Birkhoff ihre Aufmerksamkeit nicht, wie es naheliegend gewesen wäre, der Struktur des Hilbert-Verbands, welchen wir in Abschnitt 2.4[21] betrachten werden, sondern forderten für Quantenlogiken die Gültigkeit des modularen Gesetzes, welches eine Abschwächung des Distributivgesetzes ist.[22] Durch diese Forderung lehnten Birkhoff und von Neumann jedoch den allgemein anerkannten - und von von Neumann selbst eingeführten - Hilbertraum-Formalismus der Quantenmechanik implizit ab, weil der Verband der abgeschlossenen Teilräume eines Hilbertraumes nur dann modular ist, wenn ihm ein endlichdimensionaler Hilbertraum zugrunde liegt, man für die Beschreibung von Quantensystemen jedoch unendlichdimensionale Hilberträume benötigt.

Letztendlich schlugen Birkhoff und von Neumann in [12] vor, dass der propositionale Kalkül der Quantenmechanik die gleiche Struktur wie eine abstrakte projektive Geometrie[23] habe,

---

[19] siehe Definition 3.8, S.25

[20] Man sagt, ein Verband ist modular bzw. erfüllt das modulare Gesetz, wenn für je drei beliebige Elemente a, b, c aus dem Verband gilt, $[a \leq c] \Rightarrow [a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c]$.

[21] siehe S.9

[22] Für Details zur Dimensionsfunktion und der Modularität sei auf [74] und [12] verwiesen.

[23] Ist D ein Schiefkörper und V ein Vektorraum von endlicher Dimension $n \geq 2$ über D, dann nennt man den durch die Inklusion halbgeordneten (modularen, orthokomplementären) Verband aller linearen Teilräume von V eine projektive Geometrie (auf Englisch: (abstract) projective geometry) von V.

auch wenn sie selbst nicht gänzlich zufrieden mit diesem Vorschlag waren, sondern sich für das modulare Gesetz eine Interpretation im Sinne einfacherer phänomenologischer Eigenschaften der Quantenphysik wünschten. Jedenfalls führte Birkhoffs und von Neumanns Arbeit zu einer eingehenden Analyse projektiver Geometrien, begleitet und gefolgt von der Erforschung sogenannter stetiger Geometrien[24], von Neumann-Algebren[25] und anderer bis dahin unerforschter Objekte.
Wenig später statuierte Kôdi Husimi jedoch ein Gesetz, das einen Spezialfall des modularen Gesetzes darstellt und in beliebigen Hilberträumen gilt, das der Orthomodularität. Zudem verabschiedete sich von Neumann von seinem Verlangen nach einer endlichen Dimensionsfunktion. Dadurch wurde die Annahme der Modularität durch die der Orthomodularität ersetzt. Dennoch war von Neumann mit den Postulaten, die seiner Theorie der Quantenlogik zugrunde lagen, nach wie vor nicht gänzlich zufrieden und äußerte den Ruf nach einer Herleitung des Systems von einer Menge an intuitiven, plausiblen Axiomen ausgehend. Der Versuch einer solchen wurde erst einige Zeit später von Mackey gemacht, worauf wir in Abschnitt 2.5[26] kurz eingehen werden.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [69, 48, 15, 76, 80, 12, 60, 1, 53, 49, 47, 33, 74])

[24] Stetige Geometrien (auf Englisch: continuous geometries) haben die Struktur von vollständigen modularen orthokomplementären Verbänden.

[25] Eine Menge von beschränkten, selbstadjungierten Operatoren auf einem Hilbertraum, welche bezüglich der schwachen Operatortopologie abgeschlossen ist, heißt von Neumann-Algebra. Ihre Projektionen bilden einen vollständigen orthomodularen Verband.

[26] siehe S.13

2.4 Die Logik des Hilbertraum-Verbandes

Der theoretische Rahmen der heute als Standard anerkannten Form der Quantentheorie, der sogenannte Hilbertraum-Formalismus der Quantenmechanik, geht auf von Neumanns Abhandlung [69] aus dem Jahre 1932 zurück. Darin wird jedes quantenmechanische System mit einem (separablen, komplexen, unendlichdimensionalen) Hilbertraum H mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ assoziiert. Die möglichen Systemzustände korrespondieren mit dessen eindimensionalen Unterräumen und werden von in den jeweiligen Unterräumen liegenden Einheitsvektoren $\psi \in H$ repräsentiert.[27] Jede das System betreffende beobachtbare physikalische Größe wird durch einen selbstadjungierten (nicht notwendigerweise beschränkten) Operator A auf H dargestellt, der in gesetzmäßiger Weise auf Vektoren des Hilbertraumes wirkt. Sein Spektrum repräsentiert die möglichen Messwerte der physikalischen Größe.
Wenn man es mit einem *strikten*[28] Quantensystem zu tun hat, das heißt, mit einem Quantensystem, das keine klassischen Eigenschaften hat, gilt auch die Umkehrung, dass jeder selbstadjungierte Operator auf H eine physikalische Größe darstellt. Das bedeutet jedoch nicht, dass alle durch selbstadjungierte Operatoren repräsentierte Observablen „interessant“ sind, denn es sind nur ein paar von ihnen bei der Beschreibung (der Zustände) eines physikalischen Systems von Bedeutung, wie etwa die Energie, die Position, das Momentum oder der Spin.
Zwei Observablen sind genau dann simultan mit beliebiger Genauigkeit messbar, wenn die mit ihnen assoziierten Operatoren A, B *kommutieren*, das heißt, wenn $AB = BA$ gilt. Man bezeichnet solche Observablen auch als *komessbar*, *verträglich*, *kompatibel* oder *kommensurabel*. In endlichdimensionalen Hilberträumen ist das genau dann der Fall, wenn es einen selbstadjungierten Operator U und zwei reellwertige Funktionen f und g gibt, sodass $A = f(U)$ und $B = g(U)$ ist. Dies lässt sich in naheliegender Weise auf eine beliebige Anzahl von paarweise kommutierenden Operatoren verallgemeinern.
Laut dem Spektralsatz[29] ist jede Observable A mit einem projektionswertigen Maß P_A[30] assoziiert, das jeder reellen Borelmenge E einen Projektionsoperator $P_A(E)$[31] auf H zuordnet. Durch $\mu_{A,\psi}(E) := \langle P_A(E)\psi, \psi \rangle$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiert, das die Wahrscheinlichkeit, dass eine Observable A einen Wert in $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ hat, wenn das System in dem mit dem Einheitsvektor ψ korrespondierenden Zustand ist, angibt.

Vielmehr noch, lässt sich $P_A(E)$ als die Proposition auffassen, dass eine Messung der mit A korrespondierenden Observablen einen Wert in E liefert, wenn das System in einem bestimmten Zustand ist. Eine solche Aussage ist jeweils entweder wahr oder falsch. Allgemeiner, lässt sich jede Projektion P als zustandsabhängige Eigenschaft (bzw. Eigenschaft eines Zustandes) des Systems auffassen und die Proposition, „das System hat die Eigenschaft P (in einem bestimmten Zustand)“ formulieren.

[27] Genauer, repräsentieren Einheitsvektoren die sogenannten *reinen Zustände* und als Dichteoperatoren bezeichnete Objekte die (nicht notwendigerweise reinen) sogenannten *gemischten Zustände*. Für weitere Details dazu und für die Definition des Dichteoperators (bzw. der Dichtematrix) sei beispielsweise auf [70] verwiesen.

[28] Unter einem strikten Quantensystem verstehen wir eines, das nicht die Anwendung sogenannter Superselektionsregeln (auf Englisch: superselection rules) erfordert. Für weitere Ausführungen dazu sei beispielsweise auf [4] verwiesen.

[29] Für dieses wichtige Resultat sei beispielsweise auf [18] und [44] verwiesen.

[30] Für die genaue Definition des projektionswertigen Maßes (auf Englisch: projector-valued measure) sei auf [66] verwiesen.

[31] Die Verwendung der Begriffe des Projektionsoperators (auf Englisch: projection operator), des orthogonalen Projektionsoperators, der Projektion und der orthogonalen Projektion ist in der Literatur nicht einheitlich. Wir gebrauchen hier alle vier Ausdrücke synonym und verstehen unter Projektionsoperatoren idempotente selbstadjungierte Operatoren.

Das bedeutet, die $\{0,1\}$-wertigen Observablen können als Repräsentanten von Wahr-Falsch-Propositionen interpretiert werden. Man kann zeigen, dass alle selbstadjungierten Operatoren mit einem in $\{0,1\}$ enthaltenen Spektrum Projektionen sind. Also werden die das System betreffenden Propositionen durch Projektionsoperatoren auf dem assoziierten Hilbertraum repräsentiert. In diesem Sinne kann die Menge aller Projektionen auf H als die Logik des quantenmechanischen Systems aufgefasst werden.

Aus dem Spektralsatz folgt außerdem eine eineindeutige Korrespondenz zwischen $C(H)$, der Menge der abgeschlossenen Unterräume von H und $P(H)$, der Menge der Projektionen auf H, das bedeutet, ist P eine Projektion, dann ist ihr Wertebereich abgeschlossen, und jeder abgeschlossene Unterraum ist der Wertebereich einer eindeutig bestimmten Projektion.

Ist ψ irgendein Einheitsvektor, dann ist nun $\langle P\psi, \psi\rangle = ||P\psi||^2$ der Erwartungswert der mit P korrespondierenden Observablen in dem durch ψ repräsentierten Zustand. Da diese Observable $\{0,1\}$-wertig ist, können wir diesen erwarteten Wert als die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung der Observablen die affirmative Antwort 1 liefert, also die mit P assoziierte Proposition wahr ist, interpretieren. Insbesondere hat die affirmative Antwort genau dann Wahrscheinlichkeit 1, wenn $P\psi = \psi$ ist, das heißt, wenn ψ im Wertebereich von P liegt.

Von Neumann schließt: „Wie man sieht, ermöglicht die Beziehung zwischen den Eigenschaften eines physikalischen Systems einerseits und den Projektionsoperatoren andererseits eine Art Logikkalkül mit diesem. Nur ist dieser, gegenüber demjenigen der gewöhnlichen Logik, durch die für die Quantenmechanik charakteristische Begriffsbildung der „gleichzeitigen Entscheidbarkeit“ bereichert.“[32].

Der Hilbertraum stellt nun das quantentheoretische Analogon zum Phasenraum in der klassischen Teilchenphysik dar. Im klassischen Fall kann man in natürlicher Weise annehmen, dass die Ereignisse, die im physikalischen System auftreten können, durch Teilmengen des Phasenraumes repräsentierbar sind, was, wie wir in Abschnitt 2.1[33] dargelegt haben, zu einer Booleschen Mengenalgebra führt.

Im Unterschied dazu, sind die bloßen Teilmengen von H keine geeigneten mathematischen Repräsentanten für Quantenereignisse, sondern man muss die abgeschlossenen Teilmengen dafür heranziehen. Grund dafür ist das sogenannte Superpositionsprinzip, welches einen der wesentlichsten Unterschiede zwischen klassischer Physik und Quantenphysik darstellt. Im Gegensatz zur klassischen Mechanik repräsentiert in der Quantenmechanik nämlich jeder Einheitsvektor, der sich als Linearkombination von reinen Zuständen darstellen lässt, selbst auch wieder einen reinen Zustand. Folglich müssen auch die mathematischen Repräsentanten von Quantenereignissen unter endlichen und unendlichen Linearkombinationen abgeschlossen sein und dies wird von den abgeschlossenen Unterräumen von H erfüllt. Das bedeutet, jeder abgeschlossene lineare Unterraum eines Hilbertraumes - oder äquivalent dazu, jeder Projektionsoperator auf einen solchen- korrespondiert mit einem Quantenereignis und wird in Folge, im Einklang mit unserer vorangegangenen Ausführung, mit einer Proposition identifiziert.

Geordnet durch die mengentheoretische Inklusion, welche mit der logischen Implikation $\Rightarrow$ korrespondiert - was bedeutet, dass $p \Rightarrow q$ genau dann gilt, wenn der mit p assoziierte abgeschlossene Unterraum in dem mit q korrespondierenden enthalten ist -, bildet die Menge $C(H)$ der abgeschlossenen Teilräume von H einen Verband, in dem das Infimum zweier Elemente, welches dem logischen UND entspricht, der mengentheoretische Schnitt und das Supremum, welches als das logische ODER aufgefasst wird, die abgeschlossene lineare Hülle (und nicht wie im klassischen Fall die Vereinigung) ist.

[32] zitiert aus [69], S. 134
[33] siehe S.2

Die logische Negation einer mit einem abgeschlossenen Unterraum M assoziierten quantenmechanischen Proposition wird durch den orthogonalen abgeschlossenen Unterraum $M^\perp := \{v \in H |\, \forall u \in M : \langle v, u\rangle = 0\}$ repräsentiert. Dadurch wird $C(H)$ zu einem orthokomplementären Verband. Jedoch ist $C(H)$, da ein abgeschlossener Unterraum für gewöhnlich unendlich viele komplementäre abgeschlossene Unterräume hat, nicht eindeutig komplementiert[34] und in Folge nicht distributiv.

Äquivalent zu $C(H)$, kann man auch $P(H)$, der Menge der orthogonalen Projektionen auf H, die Struktur eines orthokomplementären Verbandes auferlegen, indem man die Halbordnung $\leq$ durch $P \leq Q :\Leftrightarrow \operatorname{ran}(P) \subseteq \operatorname{ran}(Q)$ und die Orthogonalisierung $'$ durch $P' := I - P$ (sodass also $\operatorname{ran}(P') = (\operatorname{ran}(P))^\perp$ ist) definiert. Offensichtlich hat man $P \leq Q$, wenn $PQ = QP = P$ ist. Allgemeiner gilt, dass $PQ = QP$ nach sich zieht, dass $PQ = P \wedge Q$ ist, wobei $\wedge$ das Infimum von P und Q in $P(H)$ bezeichnet. In diesem Fall ist das Supremum durch $P \vee Q = P + Q - PQ$ gegeben.

Sind P, Q zwei Projektionsoperatoren auf H, dann gilt $PQ = QP$ genau dann, wenn der Teilverband von $P(H)$, der von P, Q, P' und Q' erzeugt wird, eine Boolesche Algebra bildet, was wiederum genau dann zutrifft, wenn P und Q in einer gemeinsamen Booleschen Teilalgebra[35] von $P(H)$ liegen.

Da kommutierende Observablen als simultan messbar aufgefasst werden, sind die Elemente einer Booleschen Teilalgebra von $P(H)$ simultan testbar. Das bedeutet, für kommutierende Projektionen können wir eine klassische logische Interpretation von Schnitt, Vereinigung und Orthokomplement verfolgen.

Die Struktur $(C(H), \vee, \wedge, ^\perp, 0, 1)$ und die äquivalente Struktur $(P(H), \vee, \wedge, ', 0, 1)$, wobei H ein separabler[36] komplexer Hilbertraum unendlicher Dimension ist, werden in der Literatur als *Hilbert-Verband*, *Hilbertlogik*, *Hilbertraumlogik*, *Quanten-Propositionaler-Kalkül*, *Quantenlogik* oder *Standard-Quantenlogik* bezeichnet.

Ist H ein komplexer (nicht notwendigerweise separabler) Hilbertraum, dann sind aufgrund der eineindeutigen Korrespondenz zwischen der Menge $C(H)$ und der Menge $P(H)$ aller Projektionen auf H die jeweils zugehörigen Verbände isomorph und stellen beide Hilbert-Verbände dar. Ist $L(H)$ ein solcher Hilbert-Verband, dann ist $L(H)$ ein beschränkter, hinsichtlich seiner Orthogonalisierung[37] orthomodularer, vollständiger Verband[38], der für Dimensionen von $H \geq 2$ nicht distributiv ist.

Ist H separabel, dann ist auch $L(H)$ separabel[39] und jede maximale Teilmenge von paarweise kommutierenden Elementen von $L(H)$ bildet eine Boolesche σ-Algebra, das bedeutet, die mit den kommutierenden Elementen korrespondierenden Observablen lassen sich als einem klassischen physikalischen System angehörig interpretieren. Darüber hinaus ist $L(H)$ dann atomar[40], atomistisch[41], hat die Abdeckungseigenschaft[42], und ist irreduzibel[43].

[34] siehe Definition 3.11, S.26

[35] siehe Definition 3.15, S.32

[36] Ein Hilbertraum heißt separabel, wenn jede maximale orthonormale Teilmenge von ihm höchstens gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.

[37] siehe Definition 3.11, S.26

[38] siehe Definition 3.10, S.26

[39] Man bezeichnet ein orthokomplementäres poset als separabel, wenn jede paarweise disjunkte Teilmenge von ihm höchstens abzählbar ist.

[40] siehe Definition 3.4, S.24

[41] siehe Definition 3.7, S.25

[42] Für die Definition der Abdeckungseigenschaft (auf Englisch: covering property) sei beispielsweise auf [4] verwiesen.

[43] Das heißt, nur 0 und 1 kommutieren mit jedem Element aus $L(H)$.

Das Tripel $(H, L(H), \psi)^{44}$ bildet das quantentheoretische Gegenstück zum klassischen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, μ). Das bedeutet, Projektionsoperatoren (bzw. abgeschlossene Unterräume) übernehmen die Rolle von klassischen Ereignissen und quantentheoretische Observablen die von Zufallsvariablen. Man kann zeigen, dass die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie ein Spezialfall der Quantenwahrscheinlichkeitstheorie ist und Letztere somit als Verallgemeinerung Ersterer angesehen werden kann.
Die Bedeutung dieser von von Neumann begründeten Quantenwahrscheinlichkeitstheorie liegt darin, dass sie unterschiedliche Konzepte vereint. Die ihr zugrundeliegenden Axiome haben aber den Nachteil, dass sie ziemlich willkürlich und nicht unbedingt physikalisch begründet sind. Darum hat man eine allgemeinere Herangehensweise, basierend auf physikalisch motivierten Axiomen, gesucht. Ein Ansatz in diese Richtung ist der quantenlogische Birkhoffs und von Neumanns, welcher von Mackey und anderen weiterentwickelt worden ist. Wichtig ist, dabei stets im Hinterkopf zu behalten, dass Quantenlogik wenig mit klassischer Logik zu tun hat, sondern der Name lediglich von der Ähnlichkeit zwischen der quantenmechanisch entwickelten Struktur und der Booleschen Struktur des propositionalen Kalküls der klassischen Logik herrührt.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [18, 15, 76, 52, 50, 70, 44, 34, 77, 69, 65, 43, 58, 53, 80, 83, 45, 8, 4, 33, 66, 10])

[44]Man könnte ψ auch durch einen gemischten Zustand ersetzen.

2.5 Mackeys axiomatische Quantenmechanik

Wie wir gesehen haben, bildet der Hilbert-Verband $L(H)$ die Menge aller ein Quantensystem betreffenden Ja-Nein-Fragen. Durch ihn werden die orthogonalen Projektionsoperatoren bzw., äquivalent dazu, die abgeschlossenen Teilräume eines Hilbertraumes, direkt mit den Propositionen verknüpft. Mackey ist dieser Idee in seinem 1963 erschienen Buch [57] gefolgt, jedoch hat er darin den umgekehrten Weg beschritten und ist von der Menge L aller operationalen Aussagen, sprich, Aussagen, die als Ja-Nein-Experimente einer physikalischen Einheit getestet werden können, ausgegangen.
Schon in seinem wegweisenden Artikel [58] hat Mackey dargelegt, dass man einerseits den Apparat von von Neumanns Quantenmechanik fast gänzlich ausgehend von der Prämisse, dass die experimentellen Propositionen einen zu $P(H)$ isomorphen orthokomplementären Verband formen, rekonstruieren kann, und dass andererseits diese Prämisse selbst ganz unabhängig durch allgemeine Überlegungen, wie probabilistische Modelle des physikalischen Systems aussehen sollen, und in Folge von einer Menge von - mehr oder weniger plausiblen - Axiomen motiviert wird.

Den Grundbaustein in Mackeys Theorie bildet eine abstrakte Struktur $(\mathcal{O}, S, p)$, wobei $\mathcal{O}$ als Menge von reellwertigen Observablen zu verstehen ist und S als die Menge von Zuständen des physikalischen Systems. In der Praxis wiederholt man ein Experiment viele Male und erhält so eine statistische Verteilung der Messwerte einer Observablen A. Dies führt zur Abbildung $p : O \times S \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Menge aller Borelmengen der reellen Achse bezeichnet. Sind eine Observable A und ein Zustand s gegeben, so bildet $E \mapsto p(A, s, E)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Der Wert $p(A, s, E)$ soll als die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung der Observablen A, wenn sich das System im Zustand s befindet, ein Ergebnis in E liefert, interpretiert werden. Es ist dann $(A, s) \mapsto p_A(\cdot|s) := p(A, s, \cdot)$ eine Abbildung von $\mathcal{O} \times S$ auf die Menge von Borelwahrscheinlichkeitsmaßen[45] auf der reellen Achse, die die statistische Verteilung von Werten einer Messung der Observablen $A \in \mathcal{O}$, wenn sich das System im Zustand $s \in S$ befindet, angibt. Mackeys Axiomatisierung besteht weitestgehend aus Bedingungen an p.
Wenn zwei Observablen in jedem Zustand des Systems die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung haben, dann gibt es keine experimentelle Möglichkeit, sie voneinander zu unterscheiden, darum werden sie miteinander identifiziert. Das Gleiche gilt für zwei verschiedene Zustände, die für jede Observable dieselbe Verteilung liefern. Solche Zustände werden ebenfalls miteinander identifiziert.
Man kann das Paar $(A, E), A \in \mathcal{O}$, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, als Repräsentanten der Proposition, dass eine Messung von A einen Wert in E liefert, wenn das System in einem gegebenen Zustand ist, auffassen. Zwei solche Propositionen werden miteinander identifiziert, wenn sie in jedem Zustand die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Von besonderer Bedeutung sind daher Observablen mit höchstens zwei möglichen Werten, 0 und 1, das heißt, Observablen A, für die in jedem Zustand $s \in S$ gilt, dass $p(A, s, \{0,1\}) = 1$ ist. Solche Observablen werden bei Mackey als *Fragen* bezeichnet. Beispielsweise ist ein Detektor mit einer Frage mit zwei möglichen Ausgängen, nämlich 0, wenn nichts detektiert wird, und 1 bei Detektion, assoziiert. Eine Frage hat also entweder die affirmative Antwort (1) oder nicht (0). Eine Observable $\tilde{A}$ ist genau dann eine Frage, wenn $\tilde{A} = \chi_E(A)$ für eine Observable A und $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist, wobei χ_E die charakteristische Funktion der Menge E bezeichnet. $\tilde{A}$ hat genau

[45] Ein Borelwahrscheinlichkeitsmaß auf der reellen Achse ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$, sodass $\mu(\emptyset) = 0, \mu(\mathbb{R}) = 1$ und $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$ für alle paarweise disjunkten $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist.

dann den Wert 1, wenn A einen Wert in E annimmt und genau dann den Wert 0, wenn der Wert von A nicht in E liegt. Man kann also mit jeder Observablen A eine Familie von Ereignissen $\{\chi_E(A) : E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ assoziieren und umgekehrt legt eine solche Familie die Observable vollständig fest.

Die Menge L aller Fragen bildet Mackeys Quantenlogik. Ist $P_{A,E} := p(A, \cdot, E)$, dann legt die punktweise Halbordnung von Funktionen eine Halbordnung auf L fest und macht sie zu einem beschränkten poset mit Einselement $P_{A,\mathbb{R}}$ und Nullelement $P_{A,\emptyset}$. Definiert man $P'_{A,E} := 1 - P_{A,E} = P_{A,\mathbb{R}\setminus E}$, so bildet $(L, \leq, ')$ ein orthokomplementäres poset. Gilt $P \leq Q'$ für zwei Fragen $P, Q \in L$, so nennt man sie *orthogonal* und schreibt $P \perp Q$.
Zwei Fragen $P, Q \in L$ werden als *simultan entscheidbar* (auf Englisch: simultaneously answerable) bezeichnet, wenn $P = P_{A,E}$ und $Q = P_{A,C}$ für eine gemeinsame Observable A und $E, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist. Sind für zwei Observablen A_1, A_2 die Fragen $P_{A_1,E}, P_{A_2,C}$ für alle beliebigen Paare $E, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ simultan entscheidbar, dann nennt man sie *simultan beobachtbar*. Es stellt sich heraus, dass zwei Observablen A_1, A_2 genau dann simultan beobachtbar sind, wenn es eine Observable A und zwei Borelfunktionen[46] f und g gibt, sodass $A_1 = f(A)$ und $A_2 = g(A)$ ist. Die Bedeutung der simultanen Beobachtbarkeit und die der Kompatibilität von Observablen stimmen also überein. Folglich stellt der Begriff der simultanen Entscheidbarkeit von Propositionen eine Verfeinerung des Begriffs der Kompatibilität von Observablen dar.
Die ersten sechs der von Mackey konstituierten Axiome sind von sehr allgemeiner Natur und physikalisch plausibel. Schon sie stellen sicher, dass es sich bei L um ein σ-orthomodulares poset[47] handelt, auf dem sich Wahrscheinlichkeitsmaße als Abbildungen $\mu : L \to [0, 1]$ definieren lassen, sodass $\mu(1) = 1$ ist und für jede abzählbare paarweise orthogonale Familie von Elementen $P_i \in L$ $\mu(\bigvee_i P_i) = \sum_i \mu(P_i)$ gilt. Gegeben zwei beliebige σ-orthomodulare posets L und M, kann man auch M-wertige Maße auf L als Abbildungen $\alpha : L \to M$, die $\alpha(1_L) = 1_M$ erfüllen und für die für jede abzählbare paarweise orthogonale Familie $P_i \in L$ $\alpha(\bigvee_i P_i) = \bigvee_i \alpha(P_i)$ gilt, definieren.
Für L lässt sich feststellen, dass jeder Zustand $s \in S$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\hat{s} : L \to [0, 1]$ durch $\hat{s}(P_{A,E}) := P_{A,E}(s) = p_A(E|s)$ definiert und jede Observable $A \in \mathcal{O}$ ein L-wertiges Maß $P_A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L$ via $P_A(E) := P_{A,E}$. Mackeys sechstes Axiom stellt sicher, dass auch die Umkehrung gilt, dass es also für jedes L-wertige Maß P eine Observable A gibt, sodass $P_A(E) = P(E) \, \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist.
Essentiell ist Mackeys Erkenntnis, dass bereits seine ersten sechs Axiome - also jene, die sich auf aus physikalischer Sicht naheliegende Weise begründen lassen - implizieren, dass man mit jedem physikalischen System ein σ-orthomodulares poset assoziieren kann, sodass jede Observable mit einem L-wertigen Maß auf den reellen Borelmengen korrespondiert und jeder Zustand mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf L.[48]. L stellt also ein quantenmechanisches Substitut für den Phasenraum der klassischen Mechanik dar. Diese Analogie findet vor allem dann ihre Berechtigung, wenn man den klassischen Phasenraum aus Sicht der Booleschen Algebra all seiner Borelmengen betrachtet.
Mackeys siebtes Axiom, das sogenannte Hilbertraum-Axiom, hingegen mutet ziemlich willkürlich und nicht physikalisch begründet an. Es postuliert für Quantensysteme einen Isormophismus zwischen L und dem Verband $C(H)$ der abgeschlossenen Teilräume eines komplexen

[46]Eine Borelfunktion ist eine messbare Funktion von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
[47]siehe Definition 3.11, S.26
[48]genauer: „[...] the notion of a system $\mathcal{O}, S, p$ satisfying Axioms I through VI is equivalent to the notion of an orthocomplemented partially ordered set L together with a full strongly convex familiy of probability measures on L. [...] We call L the logic of our system.“, zitiert aus [57], S. 68

Hilbertraums. Die Akzeptanz dieses Axioms führt zum gewöhnlichen Hilbertraumformalismus der Quantenmechanik.
Später sind viele Versuche unternommen worden, auch das Hilbert-Axiom plausibel zu begründen oder die Axiome so zu modifizieren, dass sich die Isomorphie zu $L(H)$ auf natürliche Weise ergibt, beispielsweise von Maciej J. Mączyński in [60] und [61]. Erwähnenswert ist in diesem Zusammenhang auch der Artikel [47] Constantin Pirons, auf welchen fünf Axiome zurückgehen, mit denen der Struktur von $L(H)$ auf möglichst natürliche Weise möglichst nahegekommen wird. Doch anders als wünschenswert, sind auch Pirons Axiome nicht ausreichend physikalisch begründbar, sondern scheinen eher die Struktur von $L(H)$ nachzuahmen.
Eine durch Mackeys Arbeit motivierte eingehende Auseinandersetzung mit Strukturen der Form (L, S), wobei L ein σ-orthomodulares poset und S eine (stark) ordnende Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen[49] auf L ist, findet man zum Beispiel in [4]. Solche Paare werden in der Literatur der 1960er- und 1970er-Jahre meist als *Quantenlogiken* bezeichnet. Die autonome Untersuchung derartiger Strukturen führt in natürlicher Weise zu weiteren Verallgemeinerungen, beispielsweise Orthoalgebren[50] und Effektalgebren[51], welche als Abstraktionen orthomodularer posets aufgefasst werden können.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [1, 18, 61, 57, 58, 1, 39, 60, 61, 15, 76, 36, 73, 34, 58, 43, 33, 69])

[49] siehe Definition 4.7, S.65
[50] Für die Definition von Orthoalgebren (auf Englisch: orthoalgebras) sei beispielsweise auf [46] verwiesen.
[51] Für die Definition von Effektalgebren (auf Englisch: effect algebras) sei beispielsweise auf [37] verwiesen.

2.6 Interpretation der quantenlogischen Strukturen

Einer jener Aspekte der Quantentheorie, die die größte Aufmerksamkeit erlangt haben, ist die Neuheit der logischen Anschauung, welche sie bedingt.
Anders als im klassischen Fall, ermöglicht nicht einmal eine vollständige mathematische Beschreibung eines quantenphysikalischen Systems **S** die sichere Vorhersage des Resultats eines Experiments an **S**. Zwar kommen manchmal auch in der klassischen Physik Zustände vor, die Wahrscheinlichkeiten involvieren, wie etwa die Wahrscheinlichkeitsverteilung in der statistischen Mechanik. Aber das Auftreten verschiedener Möglichkeiten reflektiert in solchen Fällen nur unsere Unkenntnis über die tatsächliche Sachlage. Die statistischen Zustände korrespondieren nicht mit wirklichen Eigenschaften des Systems, sondern quantifizieren unsere Unkenntnis über jene Eigenschaften. Die davon abweichende Struktur der Quantenmechanik bedingt daher eine neue Vorstellung von Möglichkeit und Realität.
Das Konzept von Erwin Schrödingers Wahrscheinlichkeits-Wellenfunktion, welche Tendenzen beschreibt, ist etwas vollkommen Neues in der theoretischen Physik gewesen. Im Gegensatz zu klassischen Möglichkeiten, welche sich auf unser unvollständiges Wissen des tatsächlichen Sachverhalts zurückführen lassen, interagieren Quantenmöglichkeiten miteinander. Insbesondere sind die meisten Paare von **S** betreffenden physikalischen Größen inkompatibel, können also nicht gleichzeitig beobachtet werden.
Als Konsequenz des Artikels [12] Birkhoffs und von Neumanns ist eine ganze Forschungslinie hervorgegangen, der die Idee zugrunde liegt, dass, auf die gleiche Art wie die allgemeine Relativitätstheorie Einsteins nichteuklidische Geometrien in die physikalische Welt eingeführt hat, Quantenmechanik eine nicht-Boolesche Logik einführt.

Wie wir gesehen haben, wird durch den mit einem quantenmechanischen System assoziierten Hilbert-Verband eine nicht-klassische logische Struktur induziert, die ihren Ursprung in der theoretischen Physik nimmt. Akzeptiert man die theoretische Physik als eine wahrheitsgetreue Repräsentation unserer realen Erfahrung, erlangt eine solche Logik ihre Berechtigung durch die Phänomene selbst.
Jedoch besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen mathematischen Aussagen und physikalischen Aussagen in deren Verfügbarkeit. In der Mathematik geht man davon aus, dass eine einmal bewiesene Aussage die Eigenschaft der unbeschränkten Verfügbarkeit besitzt, das heißt, jederzeit Gültigkeit hat und in anderen Beweisen verwendet werden darf. In der Physik gilt diese unbeschränkte Verfügbarkeit einer Aussage nicht, weil dort der Wahrheitsgehalt einer Aussage durch Messungen (anstatt durch einen Beweis) sozusagen belegt wird.

Dieser Umstand führt zu unterschiedlichen, teils gegensätzlichen Ideen, wie diese neue Form der Logik interpretiert werden soll. Ein Beispiel dafür ist die Sichtweise in der sogenannten realistischen Quantenlogik, in der Projektionsoperatoren als Repräsentanten der Eigenschaften eines physikalischen Systems aufgefasst werden. Die Aussage, dass der Wert einer Observablen A in der Menge E liegt, wird demnach so gedeutet, dass „das System eine bestimmte kategorische Eigenschaft hat, die damit korrespondiert, dass die Observable A, unabhängig von jeder Messung, einen Wert in E hat".
Lässt man auch für Propositionen, die inkompatible Observablen betreffen, die Konjunktion und Disjunktion zu, stößt man auf das Problem, dass es unmöglich ist, diesen Quanten-Konnektiven eine wahrheitsfunktionale Interpretation zu geben. Das hat dazu geführt, dass Autoren wie David Finkelstein und Hilary Putnam argumentiert haben, dass die Quantenmechanik eine Revolution unserer Auffassung von Logik an sich erfordere, weil wir in einer nicht-klassischen

Logik leben würden. Für Putnam repräsentieren die Elemente des Hilbert-Verbandes $L(H)$ kategorische Eigenschaften, die ein Objekt hat oder eben nicht, unabhängig davon, ob wir hinschauen oder nicht. Darum müssen wir in dieser Sichtweise akzeptieren, dass die Art, auf welche physikalische Eigenschaften zusammenhängen, nicht distributiv ist. Das bedeutet, die Distributivgesetze sind nicht universell gültig, weshalb bereits Birkhoff und von Neumann darauf hingewiesen haben, dass die Distributivgesetze als das schwächste Glied der Logik erachtet werden könnten. Putnam hat diese Meinung sogar vehement vertreten, für ihn liegt unsere klassische Logik schlichtweg falsch.
Im Gegensatz dazu steht die Interpretation der sogenannten operationalen Quantenlogik. Die Aussage, dass der Wert einer Observablen A in der Menge E liegt, wird hier so gedeutet, dass „eine Messung der Observablen A einen Wert in der Menge E liefert (bzw. liefern würde, liefern wird oder geliefert hat)“. Akzeptiert man Messungen als primitiven Baustein der physikalischen Theorie und unterscheidet zwischen testbaren und untestbaren Eigenschaften, dann ist die Tatsache, dass der Hilbert-Verband eine nicht-Boolesche Logik darstellt, unbeeindruckend und hat keinen Aussagegehalt über Logik an sich. Vielmehr ist Quantenmechanik in dieser Sichtweise eine Theorie über mögliche statistische Verteilungen von Ergebnissen bestimmter Messungen und ihre nicht-klassische „Logik“ reflektiert einfach die Tatsache, dass nicht alle physikalischen Größen simultan beobachtet werden können. Daraus resultiert auch, dass die Menge der möglichen statistischen Verteilungen nicht so eingeschränkt ist wie im klassischen Fall und folglich beispielsweise die Verletzung der Bellschen Ungleichungen[52] wenig aufregend ist.

Neben den philosophischen Diskussionen über die Interpretation von Quantenlogik sorgt auch der Begriff selbst häufig für Verwirrung. Seit seinem Aufkommen wird er nicht nur für viele verschiedene algebraische Systeme verwendet, sondern auch für deduktive Systeme und als Bezeichnung unterschiedlicher Forschungslinien. Selbst innerhalb ein und desselben Gebiets erfolgt seine Verwendung nicht einheitlich. Diese Mehrdeutigkeit der Terminologie macht es mitunter schwierig, Resultate verschiedener Autoren zu vergleichen.
Werden unter Quantenlogiken (spezielle) orthomodulare posets verstanden, dann hat dies zudem den Nachteil, dass die klassische Logik als Boolesche Algebra einen Spezialfall einer Quantenlogik bildet, meist anders als beabsichtigt. Um diesem Irrtum vorzubeugen, bezeichnet man manchmal nicht-distributive orthomodulare posets auch als *strikte* (auf Englisch: strict) Quantenlogiken.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [12, 76, 53, 74, 18, 7, 83, 1, 83, 34, 48])

[52] siehe Abschnitt 2.8, S.21

2.7 Unterscheidung von klassischen und quantenmechanischen Systemen anhand ihrer Logiken

Anknüpfend an Mackeys Arbeit, haben unter anderen Stanley P. Gudder sowie Enrico G. Beltrametti und Gianni Cassinelli in ihrem Buch [4] eine allgemeinere Herangehensweise, die auf einer Abstraktion der Hilbertraumstrukturen basiert, verfolgt.
Dieser liegt zugrunde, dass im Allgemeinen jedes physikalische System eine Klasse von Dupeln $(\mathcal{E}, S)$ bestimmt, wobei $\mathcal{E}$ die Ereignisse, die in einem bestimmten System eintreten können, beinhaltet und S die Zustände, die ein durch die Theorie beschriebenes physikalisches System einnehmen kann. Die dabei grundlegende Fragestellung ist, welche abstrakten Bedingungen man für das Paar $(\mathcal{E}, S)$ legitimerweise verlangen kann. Im Fall der Quantentheorie führt das Hilbertraummodell zu den Forderungen, dass $\mathcal{E}$ eine möglichst gute Abstraktion des Hilbert-Verbandes ist und S ein bestmögliches Analogon der Dichteoperatoren im Hilbertraum, da diese die möglichen Zustände des physikalischen Systems repräsentieren. In Folge soll jeder Zustand ein Wahrscheinlichkeitsmaß bestimmen, das jedem Ereignis aus $\mathcal{E}$ einen Wert im Intervall $[0, 1]$ zuordnet.
Eine solche Herangehensweise führt zu zwei wesentlichen Schwierigkeiten, nämlich einerseits, ob es möglich ist, durch abstrakte Forderungen an das Paar $(\mathcal{E}, S)$ das Verhalten der konkret zugrundeliegenden Hilbertraum-Objekte einzufangen, und andererseits, inwieweit das Hilbertraummodell überhaupt zwingend sein soll.
Das erste Problem ist von Solèr durch den Beweis eines geeigneten Repräsentationstheorems, das notwendige und hinreichende Bedingungen an ein Ereignisse-Zustände-Paar $(\mathcal{E}, \mathcal{S})$, unter welchen $\mathcal{E}$ isomorph zu einem Hilbert-Verband ist, beinhaltet, gelöst worden.
Die zweite Frage hat zur Untersuchung immer allgemeinerer algebraischer Strukturen geführt. Im Rahmen dieser ist etwa die Forderung der Verbandsstruktur von Quantenlogiken als nicht haltbar betrachtet worden, da der Konjunktion zweier Propositionen, die nicht kompatible Größen betreffen, keine Bedeutung zugeschrieben werden kann, zumal diese Größen nicht gleichzeitig gemessen werden können. Dies hat zur Folge gehabt, dass man die Voraussetzung der Verbandsordnung aufgegeben und stattdessen σ-orthomodulare posets als Quantenlogiken betrachtet hat. Besteht ein solches poset nur aus endlich vielen Elementen, reduziert sich die Bedingung der σ-Orthovollständigkeit[53] auf eine in der Definition von orthomodularen posets ohnehin enthaltene Bedingung[54]. Darum nehmen üblicherweise orthomodulare posets die Rolle einer Quantenlogik ein. Diese Haltung verfolgen wir auch in der vorliegenden Arbeit, in der wir uns fast ausschließlich mit endlichen Strukturen befassen, weil diese für die Praxis von größerer Relevanz sind als unendliche, auch wenn sich die meisten Resultate in naheliegender Weise auf unendliche posets verallgemeinern ließen.

Wie wir gesehen haben, wird in den Herangehensweisen an die Grundlagen der Quantenmechanik der Begriff des Ereignisses oft als primitive Zutat genommen und die logische Struktur von Ereignissen ist von vornherein gegeben oder wird axiomatisch angenommen, wie bei der Definition eines propositionalen quantenlogischen Kalküls. Es scheint aber der realen Erfahrung näherzukommen, wenn man die Aufmerksamkeit auf die gemessenen Wahrscheinlichkeiten gegebener Beobachtungen in unterschiedlichen Zuständen eines physikalischen Systems richtet und dann erst von diesen Wahrscheinlichkeiten ausgehend die logische Struktur der Ereignisse, welche in der Beschreibung des physikalischen Systems auftreten, ableitet. Diese Haltung führt

[53] siehe die Fußnote in Punkt (iv) von Definition 3.11, S.26
[54] siehe Bedingung (iv) in Definition 3.11, S.26

zum Problem der Entscheidung, ob empirisch gefundene Wahrscheinlichkeiten klassischer oder nichtklassischer Natur sind.
Dadurch motiviert, haben Beltrametti und Mączyński 1991 den Begriff der S-Wahrscheinlichkeit eingeführt, mit dem Ziel, einen Zugang zur Quantenmechanik zu ermöglichen, bei welchem es nicht notwendig ist, über die Struktur der Ereignisse eines physikalischen Experiments von vornherein Bescheid zu wissen.

Ist S eine Menge von Zuständen eines physikalischen Systems und $p(s)$ die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines bestimmten Ereignisses, wenn das System im Zustand $s \in S$ ist, und betrachtet man $p(s)$ für alle $s \in S$, so erhält man eine Funktion von S nach $[0, 1]$, welche *S-Wahrscheinlichkeit*[55] genannt wird.
S-Wahrscheinlichkeiten stehen in enger Verbindung mit Mackeys Ansatz der axiomatischen Quantenmechanik. Wie wir gesehen haben, betrachtet Mackey eine Funktion $p : \mathcal{O} \times \mathcal{S} \times \mathcal{B} \to [0, 1]$. Fixiert man ein Paar $(A, E) \in \mathcal{O} \times \mathcal{B}$, dann erhält man eine Abbildung $p(A, \cdot, E) : \mathcal{S} \to [0, 1]$, die jedem Zustand $s \in \mathcal{S}$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass der Wert der Observablen A in E liegt, zuordnet.
Eine Menge solcher S-Wahrscheinlichkeiten kann in natürlicher Weise durch die Ordnung $\leq$ von Funktionen geordnet werden und erweist sich häufig als ein spezielles orthomodulares poset, nämlich als eine sogenannte *Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten*[56]. Dieser Umstand legt die Idee nahe, auch Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten als Quantenlogiken zu betrachten. Eine formelle Rechtfertigung dafür werden insbesondere Sätze 4.13[57] und 4.15[58] liefern, welche zeigen, dass eine Menge von S-Wahrscheinlichkeiten, die eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten bildet, die Struktur der assoziierten Ereignisse bestimmt. Genauer, kann laut letztgenanntem Satz jede Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten als der Wertebereich eines vollständigen Wahrscheinlichkeitsmaßes[59] auf einem Ereignissystem[60], aufgefasst werden. Ist Letzteres klassisch, dann lässt sich, wie wir in Satz 4.72[61] sehen werden, zeigen, dass die assoziierte Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten eine Boolesche Algebra ist, und umgekehrt, dass Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten, die Boolesche Algebren bilden, die Wertebereiche von klassischen Ereignissystemen sind. Darum ist es wesentlich, die Frage zu klären, unter welchen Bedingungen eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten eine Boolesche Algebra ist.

Neben den Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten spielen die Klassen der *GFEs*[62] und *konkreten Logiken*[63] eine besonders wichtige Rolle. Letztere basieren auf S-Wahrscheinlichkeiten, die nur die Werte 0 und 1 annehmen können und somit mit Propositionen über das System, welche in einem Zustand immer wahr oder immer falsch sind, korrespondieren. Wir charakterisieren sie unter verschiedenen Annahmen und verallgemeinern dabei gewonnene Resultate, welche eine Möglichkeit zur Unterscheidung zwischen klassischen und potentiell quantenmechanischen Situationen bieten, auf den Fall beliebiger S-Wahrscheinlichkeiten.
Allgemeiner, geben wir Charakterisierungen an, wann S-Wahrscheinlichkeiten speziellen Strukturen oder sogar Booleschen Algebren angehören. Der Schluss, ob es sich um ein klassisches oder

[55] siehe Definition 4.1, S.53
[56] siehe Definition 4.5, S.55
[57] siehe S.75
[58] siehe S.80
[59] siehe Definition 4.7, S.65
[60] siehe Definition 4.6, S.65
[61] siehe S.117
[62] siehe Definition 4.5, S.55
[63] siehe Definition 3.21, S.50

nichtklassisches (Quanten-)System handelt, wird dadurch von den beobachteten Wahrscheinlichkeiten hergeleitet. Zu diesem Zweck studieren wir Mengen von S-Wahrscheinlichkeiten im Hinblick auf die Addition und den Vergleich von Funktionen der Messdaten und charakterisieren bestimmte Klassen von S-Wahrscheinlichkeiten und setzen sie zueinander in Verbindung. Jedoch schauen wir uns nicht nur an, welche Strukturen von vorliegenden Messwahrscheinlichkeiten erzeugt werden, sondern auch, ob vorhandene S-Wahrscheinlichkeiten unter Hinzunahme weiterer möglicher Messungen eine Boolesche Algebra bilden oder in eine solche eingebettet werden können.
Da in der Praxis üblicherweise nur endlich viele Messdaten vorliegen, konzentrieren wir uns bei unseren Untersuchungen vorwiegend auf (endliche) orthomodulare posets (anstatt auf σ-orthomodulare posets) und endliche Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten.
Eine weitere Möglichkeit zur Unterscheidung zwischen klassischen und nicht-klassischen - also höchstwahrscheinlich quantenmechanischen - Systemen besteht in der Überprüfung der Verletzung bestimmter Ungleichungen. Diese Vorgehensweise motivieren wir im nächsten Abschnitt und verallgemeinern wir später.
Abschließend wenden wir einige Erkenntnisse auf wohlbekannte Beispiele aus der physikalischen Praxis an.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [15, 76, 39, 25, 9, 23, 28, 31, 30, 21, 29, 32, 26, 20, 43])

2.8 Korrelationsunterschiede in der klassischen und der quantenmechanischen Physik

„Bell's Theorem“ sowie „Bellsche Ungleichung“ und „CHSH-Ungleichung“[64] sind Sammelnamen für eine Familie von Resultaten[65], die alle wahrscheinlichkeitstheoretische Vorhersagen über die Ergebnisse von (räumlich getrennten) Experimenten betreffen. Diese Vorhersagen werden unter der Prämisse getroffen, dass das betrachtete physikalische System den Prinzipien der klassischen Physik[66] und seine Korrelationen den klassischen Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie genügen.
Jedoch lassen sich Experimente an quantenphysikalischen Systemen so gestalten, dass die hergeleiteten Vorhersagen sowohl von den zugehörigen entsprechend dem mathematischen Formalismus der Quantenmechanik berechneten Korrelationen als auch von real durchgeführten quantenphysikalischen Experimenten verletzt werden. Das bedeutet, wird mindestens eine der vorhergesagten Ungleichungen verletzt, so kann man es nicht mit einem klassischen System zu tun haben, sondern man kann davon ausgehen, dass den gemessenen Wahrscheinlichkeiten Quantenphänomene zugrunde liegen.
Tatsächlich sind in ähnlicher Weise schon lange vor der Entstehung der Quantenmechanik Ungleichungen aus Korrelationswahrscheinlichkeiten hergeleitet worden, die für die klassische Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandt auf Aussagen, die den Gesetzen der klassischen Logik genügen, stets erfüllt sind und dazu dienen, fehlerhafte (bzw. nichtklassische) Datensätze von Wahrscheinlichkeiten zu erkennen. So findet man beispielsweise schon 1862 in der Arbeit [14] von George Boole die Ungleichungen $p_{23} + p_{13} - p_{12} \leq 1, p_{13} + p_{12} - p_{23} \leq 1, p_{12} + p_{23} - p_{13} \leq 1$, wobei die $p_{ij}, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$ die Korrelationswahrscheinlichkeiten je zweier Ereignisse A_i, A_j bezeichnen, als „conditions of possible experience in the data“.[67]

Um eine genauere Vorstellung der den Bell-Ungleichungen zugrunde liegenden Idee und ihrer praktischen Relevanz zu gewinnen, wird im Folgenden eine auf Eugene Paul Wigner zurückgehenden Variante[68] der Herleitung von Bell-Ungleichungen und der Verletzung derer durch quantenphysikalische Systeme erläutert.
Man betrachtet ein aus Paaren von Teilchen bestehendes System. An jedem der beiden Teilchen können drei verschiedene Messungen M_x, M_y und M_z durchgeführt werden, für welche jeweils zwei entgegengesetzte Ergebnisse, $+_x$ und $-_x$, $+_y$ und $-_y$ bzw. $+_z$ und $-_z$ möglich sind. Die Teilchenpaare haben die Eigenschaft, dass man, wenn man an einem Teilchen, zum Beispiel A, Messung M_i, $i \in \{x, y, z\}$ durchführt, sicher sein kann, bei Durchführung der Messung M_i am anderen Teilchen, etwa B, das entgegengesetzte Ergebnis zu erhalten.
Nun ist eine Quelle von $N(\in \mathbb{N})$ Paaren solcher Teilchen gegeben und im Einklang mit dem klassischen Fall wird angenommen, dass deren Art jeweils schon vor der Messung festgelegt ist,

[64] Auf die auf J. Clauser, M. Horne, A. Shimony und R. Holt zurückgehende CHSH-Ungleichung soll in der vorliegenden Arbeit nicht speziell eingegangen werden; es sei stattdessen auf [16] verwiesen.
[65] Für die Bell-Ungleichung in ihrer ursprünglichen Form sei auf [3] verwiesen. Unter anderem in [71] wird unter dem Begriff „Bell-Ungleichungen“ jedoch auch ein System von vier Ungleichungen verstanden, das einen Spezialfall von in der vorliegenden Arbeit als „verallgemeinerte Bell-Ungleichungen“ betitelten Ungleichungen darstellt.
[66] Unter den Prinzipien der klassischen Physik sind hier das der Vollständigkeit, das der Realität und das der Lokalität gemeint.
[67] Die Originalversion der erwähnten Ungleichungen aus [14] hat dort auf Seite 231 die Form $p \geq q + r - 1,\ q \geq r + p - 1,\ r \geq p + q - 1$, wobei p, q, r Korrelationswahrscheinlichkeiten darstellen.
[68] Die hier angeführte Darstellung geht auf [82] zurück und folgt den in [51], [81] und [66] vorgestellten Versionen.

das heißt, die Quelle produziert Teilchenpaare acht möglicher Gattungen, nämlich

$$\begin{aligned}
&1.: (A_{(+_x,+_y,+_z)}, B_{(-_x,-_y,-_z)}),\ 2.: (A_{(+_x,+_y,-_z)}, B_{(-_x,-_y,+_z)}),\\
&3.: (A_{(+_x,-_y,+_z)}, B_{(-_x,+_y,-_z)}),\ 4.: (A_{(-_x,+_y,+_z)}, B_{(+_x,-_y,-_z)}),\\
&5.: (A_{(+_x,-_y,-_z)}, B_{(-_x,+_y,+_z)}),\ 6.: (A_{(-_x,+_y,-_z)}, B_{(+_x,-_y,+_z)}),\\
&7.: (A_{(-_x,-_y,+_z)}, B_{(+_x,+_y,-_z)}),\ 8.: (A_{(-_x,-_y,-_z)}, B_{(+_x,+_y,+_z)}),
\end{aligned}$$

wobei das erste dieser Paare N_1-Mal, das zweite N_2-Mal usw. vorkommt und $\sum_{i=1}^{8} N_i = N$ ist. Angenommen, man führt an einem Paar nun an Teilchen A Messung M_x und an Teilchen B Messung M_y durch und erhält die Ergebnisse $+_x$ und $+_y$. Dann kann das gemessene Paar nur die Form $(A_{(+_x,-_y,+_z)}, B_{(-_x,+_y,-_z)})$ oder $(A_{(+_x,-_y,-_z)}, B_{(-_x,+_y,+_z)})$ haben, das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit $p(+_x,+_y)$, ein Paar zu finden, das bei Messung M_x an A das Ergebnis $+_x$ und bei Messung M_y an B das Ergebnis $+_y$ liefert, beträgt $p(+_x,+_y) = \frac{N_3+N_5}{N}$. Mit derselben Begründung erhält man in analoger Notation $p(+_x,+_z) = \frac{N_2+N_5}{N}$ und $p(+_z,+_y) = \frac{N_3+N_7}{N}$.
Da die N_i, $i = 1,\ldots,8$ nichtnegativ sind, gilt zudem die Ungleichung $N_3 + N_5 \leq (N_2 + N_5) + (N_3 + N_7)$, woraus $p(+_x,+_y) \leq p(+_x,+_z) + p(+_z,+_y)$ folgt. Für klassische Systeme mit klassischen Korrelationswahrscheinlichkeiten müssen Ungleichungen dieser Art somit stets erfüllt sein.

Betrachtet man nun jedoch ein geeignetes quantenphysikalisches Szenario, so stellt man fest, dass diese Ungleichung verletzt werden kann. Nimmt man etwa ein Spin-$\frac{1}{2}$-System bestehend aus zwei Teilchen, die sich im Singulett-Zustand befinden, das heißt, Teilchenpaare, deren einzelne Teilchen entlang jeder beliebigen Richtung jeweils entweder Spin $\frac{1}{2}$ oder Spin $-\frac{1}{2}$ haben, wobei für jedes Paar der Gesamtspin 0 ist, man also aus der Messung des Spins $\frac{1}{2}$ bzw. $-\frac{1}{2}$ am einen Teilchen entlang einer bestimmten Achse mit Sicherheit darauf schließen kann, dass das andere Teilchen entlang derselben Achse Spin $-\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{2}$ hat, und wählt man als Messungen M_x, M_y, M_z die Spinmessungen entlang dreier Achsen x, y, z, so ergibt sich nach den Gesetzen der Physik[69] für die Wahrscheinlichkeit $p(+_x,+_y)$, dass die Spinmessung am einen Teilchen (welches sich nach links bewegt, weshalb wir es „linkes Teilchen“ nennen) entlang der x-Achse $\frac{1}{2}$ liefert und die Messung am anderen Teilchen (welches sich nach rechts bewegt, weshalb wir es „rechtes Teilchen“ nennen) entlang der y-Achse ebenfalls Spin $\frac{1}{2}$ zeigt, $p(+_x,+_y) = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta_{xy}}{2})$, wobei θ_{xy} die Größe des Winkels zwischen der x- und der y-Achse ist.
Für die Wahrscheinlichkeit $p(+_x,+_z)$ bzw. $p(+_z,+_y)$, dass die Messung des ersten Teilchens entlang der x-Achse Spin $\frac{1}{2}$ und die des zweiten Teilchens entlang der z-Achse Spin $\frac{1}{2}$ bzw. die Messung des ersten Teilchen entlang der z-Achse Spin $\frac{1}{2}$ und die des zweiten Teilchens entlang der y-Achse ebenfalls Spin $\frac{1}{2}$ ergibt, erhält man $p(+_x,+_z) = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta_{xz}}{2})$ bzw. $p(+_z,+_y) = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta_{zy}}{2})$, wobei θ_{xz} bzw. θ_{zy} die Größe des Winkels zwischen der x- und der z-Achse bzw. der z- und der y-Achse ist.
Setzt man diese Wahrscheinlichkeiten in die zuvor hergeleitete Bell-Ungleichung

$$p(+_x,+_y) \leq p(+_x,+_z) + p(+_z,+_y)$$

ein, ergibt sich $\sin^2(\frac{\theta_{xy}}{2}) \leq \sin^2(\frac{\theta_{xz}}{2}) + \sin^2(\frac{\theta_{zy}}{2})$.
Für eine Wahl der drei Achsen x, y, z, bei der $\theta_{xy} = \frac{\pi}{2}$ und $\theta_{xz} = \theta_{zy} = 2\varphi$ gilt, lautet die Ungleichung $\frac{1}{4} \leq \sin^2(\varphi)$ und wird beispielsweise für $\varphi = \frac{7\pi}{48}$ verletzt, woran man erkennt, dass es sich bei dem zugrundeliegenden physikalischen System um ein nichtklassisches (aber nicht zwingend quantenphysikalisches) handeln muss.

[69]Für Details zur Berechnungsformel sei beispielsweise auf [71] verwiesen.

Diese Idee aufgreifend, werden wir weitere Bell-(artige)-Ungleichungen, das heißt, die Korrelationswahrscheinlichkeiten betreffende Bedingungen für die Klassik eines Systems, in Abschnitt 4.5.3[70] kennenlernen.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [67, 76, 84, 82, 51, 81, 66, 14, 16, 3, 71, 6])

[70]siehe S.107

3 Algebraischer Hintergrund

Dieses Kapitel dient der Präsentation relevanter rein mathematischer Inhalte, die für die Theorie der Quantenlogik und die Charakterisierung von numerischen Ereignissen benötigt werden.

3.1 Grundlegende Begriffe und Zusammenhänge

Zunächst führen wir wesentliche Definitionen ein, die uns die gesamte Arbeit hindurch begleiten werden, und veranschaulichen sie anhand einfacher Beispiele. Besonders wichtig sind dabei die Begriffe des (booleschen) orthomodularen posets und der Booleschen Algebra.

Definition 3.1. ([10],[53]) Eine binäre Relation $\leq$ auf einer nichtleeren Menge X heißt *Halbordnung* auf X, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
Das geordnete Paar $(X, \leq)$, oder kürzer X, nennt man *halbgeordnete Menge* (auf Englisch: partially ordered set), abgekürzt *poset*.[1]
Bildet man eine Teilmenge $Y \subseteq X$ und schränkt die für X definierte Ordnung auf Y ein, so erhält man ein sogenanntes *Teilposet*.

Definition 3.2. ([10],[53])Zwei Elemente x, y einer halbgeordneten Menge X heißen *vergleichbar*, wenn entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt. Zwei Elemente, die nicht vergleichbar sind, heißen *nicht vergleichbar* oder *unvergleichbar*.

Definition 3.3. ([20],[38]) Ist $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge mit kleinstem Element 0, dann ist ein *Atom* als ein Element $a \in X$, sodass $0 < a$ ist und $[0 < x \leq a] \Rightarrow x = a$ gilt, definiert.

Definition 3.4. ([19],[54],[59]) Eine halbgeordnete Menge $(X, \leq)$ mit einem kleinsten Element 0 heißt *atomar* (auf Englisch: atomic), wenn es für jedes $b \in X \backslash \{0\}$ ein Atom $a \in X$ gibt, sodass $a \leq b$ ist.

Proposition 3.1. *Jedes endliche poset, das mehr als ein Element umfasst und ein kleinstes Element* 0 *hat, ist atomar.*

Beweis. Sei X ein endliches poset mit kleinstem Element 0. Wir haben zu zeigen, dass dann jedes von 0 verschiedene Element entweder ein Atom ist oder größer als ein Atom ist.
Sei $a \in X$, $a \neq 0$. Ist a ein Atom, so sind wir fertig. Ist a kein Atom, dann muss es, da $a > 0$ ist, ein Element $c_1 \in X$ geben, das $a > c_1 > 0$ erfüllt. Ist c_1 ein Atom, so sind wir fertig. Ist c_1 kein Atom, dann muss es, da $c_1 > 0$ ist, ein Element $c_2 \in X$ geben, das $a > c_1 > c_2 > 0$ erfüllt. Ist c_2 ein Atom, so sind wir fertig. Ist c_2 kein Atom, so führt man die begonnene Argumentation so lange fort, bis man ein Atom b erreicht, das $a > c_1 > c_2 > \ldots > b > 0$ erfüllt. Da X endlich ist, ist das nach endlich vielen Argumentationsschritten der Fall. □

[1] Da wir in der vorliegenden Arbeit häufig halbgeordnete Mengen diskutieren und dieser Begriff recht langatmig ist, verwenden wir, um den Lesefluss zu erleichtern und häufige Wortwiederholungen zu vermeiden, auch das englische Akronym „poset“.

Beispiel 3.1. Es gibt unendliche posets mit einem kleinsten Element, die nicht atomar sind. Ein Beispiel dafür ist die in der üblichen Weise geordnete Menge der nichtnegativen reellen Zahlen, denn diese hat keine Atome.

Definition 3.5. ([92],[38])Eine Menge von paarweise verschiedenen Elementen einer Halbordnung, die alle paarweise vergleichbar sind, bezeichnet man als *Kette* und eine Menge von paarweise verschiedenen Elementen einer Halbordung, die alle paarweise unvergleichbar sind, nennt man *Antikette*. Die *Länge* einer endlichen Kette ist als die Anzahl der Elemente in der Kette minus Eins definiert, das heißt, eine aus n Elementen bestehende Kette hat Länge $n-1$.

Definition 3.6. ([10],[25],[30])Für eine Teilmenge M einer halbgeordneten Menge X nennt man ein Element $s \in X$, das $m \leq s \ \forall m \in M$ und $[m \leq t \ \forall m \in M] \Rightarrow s \leq t$ erfüllt, das *Supremum* von M.
Das dual dazu durch $m \geq i \ \forall m \in M$ und $[m \geq t \ \forall m \in M] \Rightarrow i \geq t$ definierte Element i heißt *Infimum* von M.
Existiert das Supremum von ganz X, so nennt man es *größtes Element* von X, und existiert das Infimum von ganz X, so spricht man vom *kleinsten Element* von X.
Zwei verschiedene Elemente $x, y \in X$, deren Infimum 0 ist, bezeichnet man als *disjunkt*.

Definition 3.7. ([40],[4],[53]) Eine halbgeordnete Menge $(X, \leq)$ mit kleinstem Element 0 heißt *atomistisch* (auf Englisch: atomistic), wenn jedes Element aus X das Supremum der Atome, welche kleiner oder gleich ihm selbst sind, ist.

Bemerkung 3.1. Aus der Definition von atomistischen posets folgt unmittelbar, dass jedes atomistische poset auch atomar ist.

Definition 3.8. ([10]) Ein *Verband* (auf Englisch: lattice) ist eine algebraische Struktur $(V, \vee, \wedge)$ (abgekürzt, V), bestehend aus einer Menge V und zwei binären Operationen $\vee$ und $\wedge$, sodass für alle $u, v, w \in V$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Kommutativität: $u \vee v = v \vee u$, $u \wedge v = v \wedge u$

(ii) Assoziativität: $(u \vee v) \vee w = u \vee (v \vee w)$, $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$

(iii) $u \wedge (u \vee v) = u$, $u \vee (u \wedge v) = u$

Bemerkung 3.2. ([10])Verbände lassen sich auch als Ordnungsstrukturen definieren. Insbesondere ist jeder Verband ein poset. Der Zusammenhang ist folgendermaßen gegeben:
Die auf einem Verband $(V, \vee, \wedge)$ durch $u \leq v :\Leftrightarrow u \wedge v = u$ definierte binäre Relation ist eine Halbordnung, die mit den Operationen $\wedge, \vee$ kompatibel ist, das heißt, es gilt $[u \leq v, w \leq z] \Rightarrow [u \wedge w \leq v \wedge z, u \vee w \leq v \vee z]$, und $(V, \leq)$ bildet eine halbgeordnete Menge.
Umgekehrt gilt, dass eine halbgeordnete Menge $(V, \leq)$ einen Verband $(V, \vee, \wedge)$ bildet, wenn für jedes Paar von Elementen (und somit für alle endlichen Teilmengen $U \subseteq V$) Suprema und Infima existieren.
Die *Länge* eines endlichen Verbandes ist als die Länge der längsten Kette in diesem Verband definiert.

Definition 3.9. Zur Darstellung von posets und Verbänden verwendet man sogenannte *Hasse-Diagramme*. Dabei wird für jedes Element des posets ein Punkt gezeichnet, wobei ein Punkt b im Diagramm oberhalb eines Punktes a zu finden ist, wenn im poset $a < b$ gilt. Gibt es für ein solches Paar (a, b) kein Element, das in der Ordnung zwischen a und b liegt, so werden a und b durch eine Linie verbunden.

Definition 3.10. ([10]) Hat in einer halbgeordneten Menge V sogar jede beliebige, also nicht notwendigerweise endliche, Teilmenge ein Supremum und ein Infimum, dann bezeichnet man den korrespondierenden Verband V als *vollständig*.
Hat ein Verband (bzw. ein poset) V ein größtes Element $1 := \bigvee_{v \in V} V$ und ein kleinstes Element $0 := \bigwedge_{v \in V} V$, so spricht man von einem *beschränkten* Verband (bzw. poset) und schreibt dafür $(V, \vee, \wedge, 0, 1)$.

Definition 3.11. ([20],[7],[35],[53],[10],[25],[39],[55],[23],[11]) Eine *orthokomplementäre halbgeordnete Menge*, abgekürzt *orthoposet*[2], $(X, \leq, ', 0, 1)$ bzw. kürzer $(X, \leq, ')$ oder X, ist eine beschränkte halbgeordnete Menge $(X, \leq)$ mit kleinstem Element 0, größtem Element 1 und einer unären Operation $'$, genannt *Orthokomplementbildung* (auf Englisch: orthocomplementation) oder *Orthogonalisierung*, die für alle $x, y \in X$ folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $x \leq y \Rightarrow y' \leq x'$

(ii) $(x')' = x$

(iii) Das Supremum $x \vee x'$ und das Infimum $x \wedge x'$ existieren in X und es gilt $x \vee x' = 1$ und $x \wedge x' = 0$.

Eine unäre Operation $'$ auf einem poset X, welche die ersten beiden der obigen Bedingungen erfüllt, wird *antitone Involution* genannt.

Gegeben ein orthoposet $(X, \leq, ')$, wird $x' \in X$ als das *Orthokomplement* (auf Englisch: orthocomplement) von $x \in X$ bezeichnet.
Weiters nennt man für jedes $x \in X$ jedes $y \in X$, für das $x \leq y'$, $x \wedge y = 0$ und $x \vee y = 1$ gilt, *orthogonales Komplement*[3] (auf Englisch: orthogonal complement) von x.
Ein orthoposet X heißt *eindeutig orthokomplementiert*, wenn für jedes $x \in X$ das Element x' sein einziges orthogonales Komplement ist.

Allgemeiner, heißt jedes Element x eines beschränkten posets X, für das es ein $y \in X$ gibt, sodass $x \wedge y = 0$ und $x \vee y = 1$ ist, *komplementiert* (auf Englisch: complemented) und man bezeichnet y als das *Komplement* von x.
Sind in einem beschränkten poset alle Elemente komplementiert, so spricht man von einem *komplementierten poset*.
Hat zudem jedes Element genau ein Komplement, so handelt es sich um ein *eindeutig komplementiertes* (auf Englisch: uniquely complemented) poset.
Eine unäre Operation ^{c} auf einem komplementierten poset, die jedes Element auf eines seiner Komplemente abbildet, nennt man *Komplementbildung*.
Ist auf einem beschränkten poset $(P, \leq, 0, 1)$ eine Komplementbildung ^{c} definiert, so nennt man $(P, \leq, ^c, 0, 1)$ *komplementär*.

Gilt in einem poset mit antitoner Involution $(X, ')$ für zwei Elemente $x, y \in X$, dass $x \leq y'$ ist, so sagt man, x ist *orthogonal* zu y, in Zeichen $x \perp y$. Drei Elemente $x, y, z \in X$, die paarweise orthogonal sind, nennt man *orthogonales Tripel*, *orthogonales Dreieck* oder nur *Dreieck* und schreibt dafür $\Delta(x, y, z)$.

[2]Manche Autoren verstehen unter orthoposets nicht nur orthokomplementäre, sondern orthomodulare posets, beispielsweise in [55], [9] und [54].

[3]Die Definition der Begriffe Orthokomplement und orthogonales Komplement sowie (ortho-)komplementär und (ortho-)komplementiert ist in der Literatur nicht einheitlich.

Ein orthoposet, welches ein Verband $(V, \vee, \wedge)$ ist, nennt man *orthokomplementären Verband*, abgekürzt *Orthoverband*, und schreibt für ihn $(V, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ oder kürzer $(V, \vee, \wedge, ')$ oder nur V.
Erfüllt ein orthoposet zusätzlich, dass

(iv) $x \perp y$ die Existenz des Supremums $x \vee y$ in X impliziert[4], und dass das

(v) *orthomodulare Gesetz*: $[x \leq y] \Rightarrow [y = x \vee (x' \wedge y)]$ gilt,

so spricht man von einem *orthomodularen poset*[5]
Sind Bedingungen $(i) - (iv)$ erfüllt, aber nicht notwendigerweise (v), so wird X als $\perp$-*poset* bezeichnet.
Bildet eine orthomodulare halbgeordnete Menge einen Verband, dann nennt man diesen *orthomodularen Verband*.

Bemerkung 3.3. Aus der dritten Bedingung in Definition 3.11[6] folgt insbesondere, dass Orthogonalisierungen auf nichttrivialen posets keine Fixpunkte haben können: Angenommen, es gibt ein Element $x \in X$, sodass $x = x'$ ist. Dann muss $x = x \vee x' = 1$ und $x = x \wedge x' = 0$, also $1 = x = 0$ sein.
Daraus folgt in Kombination mit der zweiten Bedingung aus Definition 3.11 speziell auch, dass jedes nichttriviale endliche orthokomplementäre poset stets aus einer geraden Anzahl von Elementen besteht.
Zudem gilt wegen der dritten Bedingung in der Definition, dass in jedem orthokomplementären poset für alle Elemente $x \in X \backslash \{0, 1\}$ stets x und x' unvergleichbar sind, weil sonst $x \wedge x' = 0$ und $x \vee x' = 1$ nicht erfüllt sind.

Beispiel 3.2. (vgl.[53])Der Verband in Abbildung 3.1[7], welcher aufgrund seiner Form *Diamant-Verband* (auf Englisch: diamond lattice) genannt wird, mit der in der Abbildung definierten unären Operation $'$ ist nicht orthokomplementär, denn $'$ ist keine zulässige Orthogonalisierung, weil y einen Fixpunkt bildet, was, wie in Bemerkung 3.3[8] festgestellt, jedoch nicht möglich ist. Auf dem Verband lässt sich keine Orthogonalisierung wohldefinieren. Diese Feststellung ist wichtig, weil man ihn sonst fälschlicherweise für orthomodular halten könnte, da die in der Abbildung definierte Operation $'$ das orthomodulare Gesetz erfüllt.

Beispiel 3.3. Der in Abbildung 3.2[9] dargestellte Verband, welcher *Pentagon*-Verband (auf Englisch: pentagon lattice) genannt wird, ist nicht eindeutig komplementiert, da sowohl u als auch v ein Komplement von w darstellen. Wie der Diamant-Verband, lässt sich auch auf dem Pentagon-Verband keine Orthogonalisierung wohldefinieren. Auch hier ist diese Feststellung wichtig, weil man ihn mit der durch $u' := v, v' := u, w = w'$ definierten antitonen Involution, da diese das orthomodulare Gesetz erfüllt, fälschlicherweise für einen orthomodularen Verband halten könnte. Es genügt jedoch die Feststellung, dass der Pentagon-Verband aus einer ungeraden Anzahl von Elementen besteht, um infolge der Überlegungen in Bemerkung 3.3[10] zu erkennen, dass er nicht orthokomplementär und daher auch nicht orthomodular sein kann.

[4]Existiert in einem orthoposet das Supremum für jede abzählbare Teilmenge paarweise orthogonaler Elemente, so bezeichnet man das poset als σ-*orthovollständig*
[5]Ein σ-orthovollständiges orthomodulares poset bezeichnet man als σ-orthomodulares poset.
[6]siehe S.26
[7]siehe S.28
[8]siehe S.27
[9]siehe S.28
[10]siehe S.27

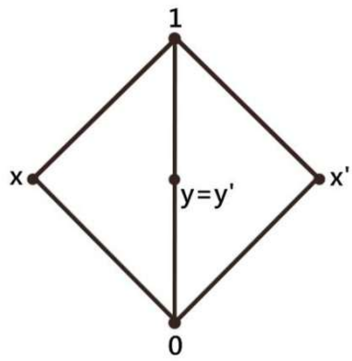

Abbildung 3.1: Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.2, S.27: Die auf dem Verband definierte unäre Operation $'$ ist keine zulässige Orthogonalisierung.

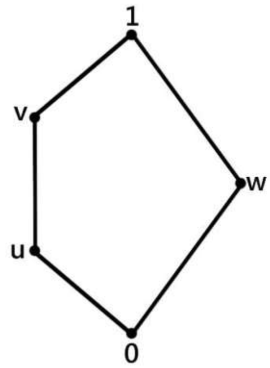

Abbildung 3.2: Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.3, S.27: Die Abbildung zeigt den Pentagon-Verband, auf welchem sich keine Orthogonalisierung definieren lässt.

Bemerkung 3.4. Per Definition existiert in orthokomplementären posets zu jedem Element mindestens ein orthogonales Komplement, nämlich das Orthokomplement, welches wiederum ein Komplement darstellt. Darum sind orthokomplementäre posets stets komplementär, also auch komplementiert. Insbesondere existiert in jedem eindeutig komplementierten beschränkten poset zu jedem Element höchstens ein orthogonales Komplement, und es gibt genau eine antitone Involution auf dem poset, die eine Orthogonalisierung auf ihm bildet.

Bemerkung 3.5. Da in Verbänden zu jedem Paar von Elementen, also im Speziellen auch für je zwei orthogonale Elemente, ein Supremum existiert, ist jeder orthokomplementäre Verband immer auch ein $\perp$-poset. Allerdings ist nicht jeder orthokomplementäre Verband zwingend orthomodular.

Definition 3.12. ([39],[54],[55]) Erfüllt eine Teilmenge Y einer orthomodularen halbgeordneten Menge X, dass für alle $x, y \in X$

(i) $x \in Y \Rightarrow x' \in Y$ und

(ii) $[x, y \in Y,\ x \perp y] \Rightarrow x \vee y \in Y$

gilt, dann nennt man $(Y, \leq, ')$ ein *orthomodulares Teilposet* (auf Englisch: orthomodular subposet [11].).

[11] Manche Autoren verwenden dafür den Begriff sub-orthoposet, beispielsweise in [54] und [55]

Bemerkung 3.6. Die Feststellung, dass aus den beiden Bedingungen in Definition 3.12[12] folgt, dass eine Teilmenge Y eines orthomodularen posets, die jene erfüllt, selbst ein orthomodulares poset bildet, rechtfertigt die Definition des orthomodularen Teilposets.

Beispiel 3.4. Betrachtet man die Menge $\{0, a, b, c, d, 1\}$ und ordnet sie so, dass das entstehende poset sich aus den beiden Ketten $0 < a < c < 1$ und $0 < b < d < 1$, welche nur an den Punkten 0 und 1 zusammenhängen, zusammensetzt, so erhält man einen beschränkten Verband mit der einzig möglichen Orthogonalisierung $0' = 1, a' = d, b' = c$, in dem zwar die orthogonalen Komplemente eindeutig sind, aber nicht die Komplemente, weil mitunter sowohl a' als auch b ein Komplement von a darstellt. Der orthokomplementäre Verband ist in Abbildung 3.3[13] abgebildet.

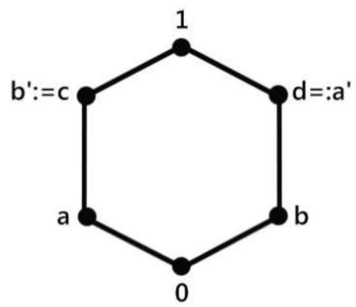

Abbildung 3.3: Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.4, S.29: Die Abbildung zeigt einen Verband mit nur einer möglichen Orthogonalisierung, der nicht eindeutig komplementiert ist.

Beispiel 3.5. Das einfachste Beispiel eines posets, das keinen Verband darstellt, ist eine Menge von zwei unvergleichbaren Elementen.
Ein anderes Beispiel ist das Mengensystem $X := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\},\ a \neq b$, geordnet durch die mengentheoretische Inklusion. Darin haben a und b zwar ein Infimum, nämlich $\emptyset$, aber kein Supremum.
Ein weiteres Beispiel ist das durch das Hasse-Diagramm in Abbildung 3.4[14] repräsentierte beschränkte poset. Darin haben c und d kein Infimum und a und b kein Supremum. Außerdem lässt sich auf dem poset keine Orthogonalisierung definieren. Insbesondere ist keines der Elemente a, b, c und d komplementiert. Ein konkretes Beispiel für ein solches poset ist etwa die Menge $\{1, 2, 3, 12, 18, 216\}$, geordnet durch die Teilbarkeitsrelation.

Beispiel 3.6. Der in Beispiel 3.4[15] betrachtete orthokomplementäre Verband ist nicht orthomodular, weil beispielsweise $a \leq b'$, aber $b' \neq a \vee (a' \wedge b') = a \vee 0 = a$ ist, wie man am Hasse-Diagramm in Abbildung 3.3[16] sofort erkennt.

Definition 3.13. ([32],[10]) Den Verband der Länge zwei, der aus kleinstem Element $0 = 1'$, größtem Element $1 = 0'$, $n \geq 1$ paarweise unvergleichbaren Elementen $v_1, \ldots, v_n$ und deren

[12]siehe S.28
[13]siehe S.29
[14]siehe S.30
[15]siehe S.29
[16]siehe S.29

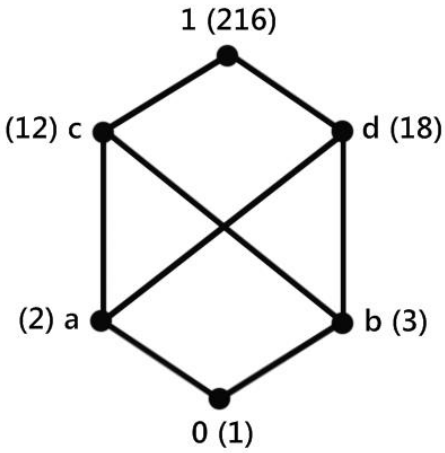

Abbildung 3.4: Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.5, S.29: Die Abbildung zeigt ein poset, das keinen Verband bildet.

n sowohl mit ihnen als auch untereinander paarweise unvergleichbaren Orthokomplementen $v_1', \ldots, v_n'$ besteht, bezeichnet man mit MO_n. Außer 0 und 1 sind alle Elemente von MO_n Atome. Das Hasse-Diagramm zu dem Verband ist in Abbildung 3.5[17] zu sehen.

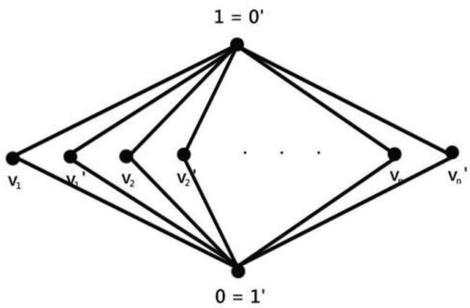

Abbildung 3.5: Hasse-Diagramm zu Definition 3.13, S.29: Die Abbildung zeigt den Verband MO_n, $n \geq 1$.

Bemerkung 3.7. ([55],[53],[10],[42]) Ist X ein orthoposet und $A \subseteq X$, dann liegt $A' := \{a' \in X : a \in A\}$ ebenfalls in X und die Gesetze von de Morgan sind gültig, das heißt, es ist $(\bigvee A)' = \bigwedge A'$, $(\bigwedge A)' = \bigvee A'$, also existiert $\bigvee A$ in X genau dann, wenn $\bigwedge A'$ existiert.
Aus dem Grund lässt sich das orthomodulare Gesetz auch in der äquivalenten Form $[x \leq y] \Rightarrow [y = x \vee (x \vee y')']$ formulieren und es genügt, in der dritten Bedingung nur entweder die Existenz von $x \vee x'$ und $x \vee x' = 1$ oder die Existenz von $x \wedge x'$ und $x \wedge x' = 0$ zu fordern.

Beispiel 3.7. (vgl.[10], [41])Das in Abbildung 3.6[18] dargestellte poset, welches *Janowitz-poset* bzw. J_{18} genannt wird, ist zwar orthomodular (wie etwa in [41] bewiesen wird), aber kein Verband, denn a und e haben die drei gemeinsamen oberen Schranken c', g' und 1, aber c' und g' sind unvergleichbar, weshalb a und e kein gemeinsames Supremum haben.

[17] siehe S.30
[18] siehe S.31

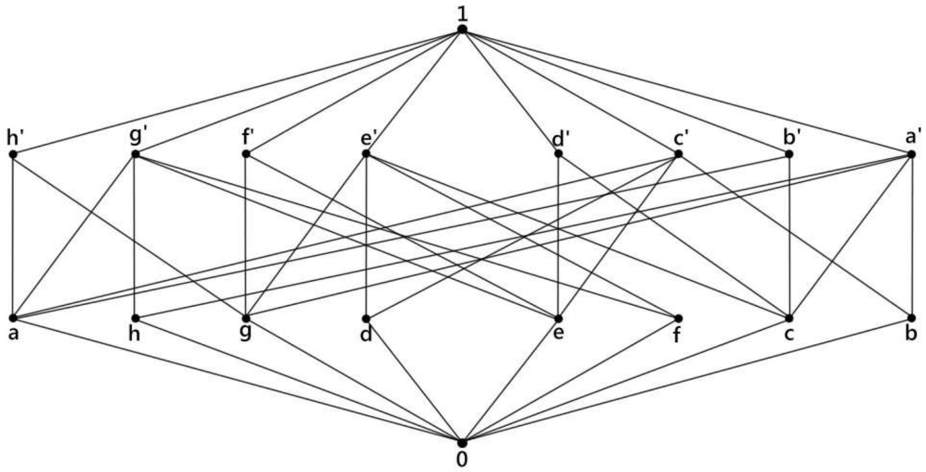

Abbildung 3.6: Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.7, S.30: Das Janowitz-poset ist orthomodular, aber kein Verband.

Proposition 3.2. *(vgl.[55])Ist* $(X, \leq, ')$ *ein* $\perp$*-poset, dann ist die vierte Bedingung in Definition 3.11*[19] *äquivalent dazu, dass mit jeder endlichen Folge von paarweise orthogonalen Elementen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *auch deren Supremum* $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ *in* X *enthalten ist.*

Beweis. (vgl.[55]) Für $n = 2$ gilt die Behauptung per Definition.
Angenommen, für jede Folge von $n \in \mathbb{N}$ paarweise orthogonalen Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ liegt auch das Supremum $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ in X. Sei nun $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ eine Folge von $n+1$ paarweise orthogonalen Elementen aus X. Dann haben wir wegen $x_1 \perp x_2 \Rightarrow \exists x_1 \vee x_2 \in X$ und $x_1, x_2 \leq x_i' \; \forall i \in \{3, \ldots, n{+}1\}$, dass $x_1 \vee x_2 \leq x_i' \; \forall i \in \{3, \ldots, n{+}1\}$ ist. Also bilden $x_1 \vee x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n+1}$ eine Folge von n paarweise orthogonalen Elementen aus X und somit existiert auch $\bigvee_{i=1}^{n+1} x_i = (x_1 \vee x_2) \vee \bigvee_{i=3}^{n+1} x_i$ in X. □

Bemerkung 3.8. ([31],[55],[53])Wie man aus der Definition direkt folgert, ist ein $\perp$-poset genau dann ein orthomodulares poset, wenn gilt, $[x \leq y,\, x' \wedge y = 0] \Rightarrow x = y$.
Insbesondere enthält jedes $\perp$-poset mit $x, y \in X$, $x \leq y$ auch $x \vee (x' \wedge y)$, denn $x \leq y \Rightarrow x \perp y' \Rightarrow x \vee y' \in X \Rightarrow (x \vee y')' = x' \wedge y \in X$ und $x \leq x \vee y' = (x' \wedge y)'$.

Proposition 3.3. *([25], [63],[54]) Ein beschränktes poset* X *mit einer antitonen Involution* $'$ *ist genau dann orthokomplementär, wenn aus der Orthogonalität zweier Elemente deren Disjunktheit folgt, also, wenn gilt:* $\forall x, y \in X: \; x \perp y \Rightarrow x \wedge y = 0$.

Beweis. ([63],[25]) Sei X orthokomplementär und seien $x, y, z \in X$, sodass $x \perp y$, $z \leq x$, $z \leq y$ ist. Dann gilt $[z \leq x,\, x \leq y'] \Rightarrow y \leq z'$ und $[z \leq y,\, y \leq z'] \Rightarrow z \leq z' \Rightarrow z = z \wedge z \leq z \wedge z' = 0 \Rightarrow z = 0$. Also ist 0 die einzige untere Schranke von x und y.
Gilt umgekehrt, dass Orthogonalität Disjunktheit impliziert, dann ist jedes Element $x \in X$ orthokomplementär, weil $x \leq x \Rightarrow x \perp x' \Rightarrow x \wedge x' = 0$ gilt. □

Bemerkung 3.9. Aus Proposition 3.3[20] folgt insbesondere die wichtige Tatsache, dass in orthokomplementären posets zwei orthogonale Elemente stets auch disjunkt sind.

Dass hingegen die Umkehrung $x \wedge y = 0 \Rightarrow x \perp y$ nicht in jedem orthokomplementären poset gilt, motiviert folgende Definition.

[19]siehe S.26
[20]siehe S.31

Definition 3.14. ([20],[39],[55],[23],[54],[79],[28]) Ein poset X mit einer antitonen Involution[21] heißt *boolesch*, wenn die Disjunktheit zweier Elemente deren Orthogonalität impliziert, das heißt, wenn

$$\forall x, y \in X : \; x \wedge y = 0 \; \Rightarrow \; x \perp y$$

gilt.
Ebenso nennt man ein Teilposet $Y \subseteq X$, versehen mit der Einschränkung der für X definierten antitonen Involution auf Y *boolesch*, wenn für seine Elemente obige Implikation erfüllt ist.

Bemerkung 3.10. Da in orthokomplementären posets die Orthogonalität zweier Elemente stets auch ihre Disjunktheit nach sich zieht, gilt für jedes boolesche orthokomplementäre poset X, und daher insbesondere auch für jedes boolesche orthomodulare poset:

$$\forall x, y \in X : \; x \wedge y = 0 \; \Leftrightarrow \; x \perp y. \tag{3.1}$$

Insbesondere sind die Atome boolescher orthoposets aufgrund der aus ihrer Definition folgenden Disjunktheit stets paarweise orthogonal.

Mit klassischen Systemen werden Boolesche Algebren assoziiert, welche folgendermaßen definiert sind.

Definition 3.15. ([11],[4],[22],[7]) Eine *Boolesche Algebra*, auch *Boolescher Verband* genannt, ist ein komplementärer *distributiver* Verband $(B, \vee, \wedge, ^c, 0, 1)$, das heißt, ein Verband $(B, \vee, \wedge)$ mit kleinstem Element 0, größtem Element 1 und einer Komplementbildung ^{c}[22], in dem alle Elemente a, b, c die Distributivgesetze

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

erfüllen.
Ein orthokomplementäres (Teil-)poset B eines orthokomplementären posets X wird *Boolesche (Teil-)Algebra* genannt, wenn für je zwei Elemente $a, b \in B$ das Infimum $a \wedge b$ und das Supremum $a \vee b$ in X existieren und in B liegen, für jedes $a \in B$ auch a' in B liegt und $(B, \vee, \wedge)$ distributiv ist, das heißt, wenn B aus Verbandssicht eine Boolesche Algebra bildet.
Die von einer Menge von Elementen aus X *erzeugte Boolesche (Teil-)Algebra* von X ist als die kleinste Boolesche Teilalgebra von X, welche diese Elemente umfasst, definiert.
Ist eine endliche Teilmenge eines orthoposets in einer Booleschen Teilalgebra von ihm enthalten, so bezeichnet man jene Teilmenge als *Boolesch*.

Bemerkung 3.11. (vgl.[86]) Jede Teilalgebra einer Booleschen Algebra B, das heißt, jede Teilmenge von B, die 0, 1 und mit jedem Element $x \in B$ auch dessen (eindeutiges)[23] Komplement $x^c \in B$ enthält und für je zwei in ihr liegende Elemente auch deren Infimum und Supremum umfasst, bildet selbst auch eine Boolesche Algebra.
Ebenso bildet der Schnitt zweier Boolescher Teilalgebren stets auch eine Boolesche Teilalgebra.

[21] Bei einigen Autoren wird der Begriff boolesch nur für orthokomplementäre posets bzw. orthomodulare posets definiert, zum Beispiel in [79], [55] und [20].
[22] Wie wir in Proposition 3.27, S.45, sehen werden, stellt die Komplementbildung auf einer Booleschen Algebra B auch eine Orthogonalisierung auf B dar.
[23] Komplementäre distributive Verbände sind eindeutig komplementiert. Insbesondere sind folglich die jeweiligen Komplemente auch die einzig möglichen Orthokomplemente. (vgl.[89])

Bemerkung 3.12. Wie man an der Definition der Booleschen Teilalgebra B eines orthokomplementären posets X erkennt, entsprechen das Infimum und das Supremum zweier in ihr enthaltener Elemente dem Infimum und dem Supremum in X und sind somit unabhängig von B definiert.

Beispiel 3.8. Der in Abbildung 3.5[24] dargestellte Verband $MO_n, n \geq 2$ ist ein orthomodularer und trivialerweise atomistischer (nicht eindeutig) orthokomplementärer Verband, der nicht distributiv und somit keine Boolesche Algebra ist. Das orthomodulare Gesetz ist trivialerweise erfüllt, da die $2n$ Elemente $v_1, v_1', \ldots, v_n, v_n'$ jeweils nur mit 0 und 1 vergleichbar sind. Jedoch ist zum Beispiel das Tripel v_1, v_1', v_2 nicht distributiv, denn es ist $(v_1 \wedge v_1') \vee v_2 = 0 \vee v_2 = v_2$, aber $(v_1 \vee v_2) \wedge (v_1' \vee v_2) = 1 \vee 1 = 1 \neq v_n$.
Dass es sich bei MO_n, $n \geq 2$ um keinen distributiven Verband handeln kann, erkennt man mit der Feststellung in Fußnote 23[25] auch daran, dass in komplementären distributiven Verbänden die Komplemente eindeutig sind, was in $MO_n, n \geq 2$ allerdings nicht der Fall ist, weil jedes Element $2n - 1$ Komplemente hat.
Außerdem ist MO_n nicht boolesch, weil beispielsweise zwar $v_1 \wedge v_2 = 0$, aber $v_1 \not\leq v_2$ ist.
Für $n = 1$ stellt MO_n jedoch die vierelementige Boolesche Algebra dar.

Beispiel 3.9. Das in Abbildung 3.7[26] dargestellte poset bildet mit der darin definierten antitonen Involution $'$ ein orthoposet. Es handelt sich allerdings nicht um ein $\perp$-poset, weil beispielsweise c und d zwar orthogonal sind, aber kein gemeinsames Supremum haben. Folglich ist das orthoposet auch nicht orthomodular und kein Verband.
Zudem ist es, wie in der Abbildung sofort ersichtlich, nicht eindeutig komplementiert und nicht einmal eindeutig orthokomplementiert (weil beispielsweise sowohl c als auch d orthogonale Komplemente von a sind), jedoch ist die abgebildete antitone Involution die einzig mögliche Orthogonalisierung: Bezeichnet man die fünf Elemente unmittelbar unterhalb 1 von links nach rechts mit f, g, h, i und j, so ist h das einzig mögliche Orthokomplement von c, weil nur für h erfüllt ist, dass $h \wedge c = 0$ und $h \vee c = 1$ ist, das heißt, $h =: c'$. Für a sind f, i und j aus dem gleichen Grund die einzigen in Frage kommenden Orthokomplemente. Setzt man nun $a' := f$, dann ist $b \leq a'$, daher muss zwingend $b' := g$ sein, damit auch $a \leq b'$ erfüllt ist. Jedoch ist dann $b \wedge b' = b \wedge g = b \neq 0$, also ist diese Orthogonalisierung nicht möglich. Wählt man stattdessen $a' := i$, dann ist $d \leq a'$, weshalb $g =: d'$ sein muss, woraus folgt, dass nur $j =: b'$ sein kann. Dadurch ergibt sich $f =: e'$, weshalb $b \leq e'$ ist. Umgekehrt gilt aber nicht $e \leq b'$, darum ist auch das keine mögliche Orthogonalisierung. Somit kommt als Orthokomplement von a nur mehr $j =: a'$ in Frage, was in Folge genau die in Abbildung 3.7 dargestellte Orthokomplementbildung liefert, welche somit die einzige ist.

Beispiel 3.10. Abbildung 3.8[27] zeigt das Hasse-Diagramm eines nicht eindeutig orthokomplementierten und daher auch nicht eindeutig komplementierten $\perp$-posets. Drei weitere Darstellungen der Orthogonalisierung sind in Abbildung 3.9[28] zu sehen. Die vier verschiedenen Hasse-Diagramme legen die gleiche Halbordnung der Elemente $0, a, a', b, b', c, c', d, d'$ und 1 fest, sind also äquivalent.
Das $\perp$-poset ist nicht orthomodular, weil beispielsweise zwar $a \leq c'$, aber $a \vee (a' \wedge c') = a \vee 0 = a \neq c'$ ist.

[24]siehe S.30
[25]siehe S.32
[26]siehe S.34
[27]siehe S.34
[28]siehe S.35

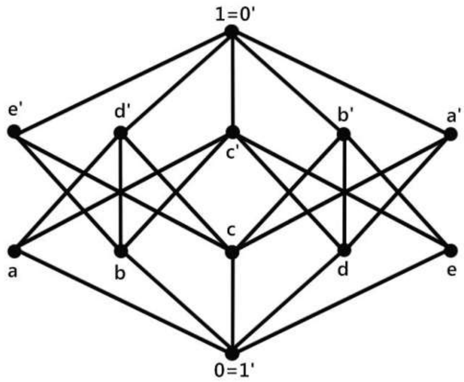

Abbildung 3.7: Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.9, S.33: Die Abbildung zeigt ein orthoposet, welches kein $\perp$-poset und somit auch nicht orthomodular und kein Verband ist.

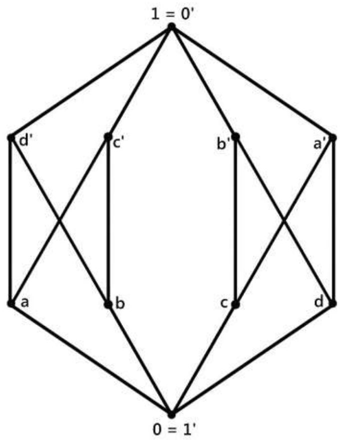

Abbildung 3.8: Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.10, S.33: Abgebildet ist ein nicht orthomodulares $\perp$-poset, welches keinen Verband bildet.

Eine besondere Bedeutung wird Satz 4.13[29] haben, der besagt, dass bestimmte Mengen von Messwahrscheinlichkeiten als spezielle orthomodulare posets aufgefasst werden können, weil sie isomorph zueinander sind. Auch die Einbettung von Mengen von gemessenen Wahrscheinlichkeiten in Boolesche Algebren nimmt eine wesentliche Stellung ein. Darum präzisieren wir, was wir unter Einbettungen und Isomorphismen verstehen:

Definition 3.16. ([53][10][7][55])Eine Abbildung h von einer halbgeordneten Menge $(X, \leq)$ in eine andere halbgeordnete Menge $(Y, \leq)$ heißt *(Ordnungs-)Homomorphismus*, wenn sie ordnungserhaltend ist, und heißt *(Ordnungs-)Einbettung*, wenn sie injektiv ist und $\forall\, x, y \in X$: $x \leq y \Leftrightarrow h(x) \leq h(y)$ gilt.
Eine bijektive Ordnungs-Einbettung wird *(Ordnungs-)Isomorphismus* genannt.
Ein *(Verbands-)Homomorphismus* ist eine Abbildung zwischen zwei Verbänden, welche mit den Suprema und Infima verträglich ist.
Eine *(Verbands-)Einbettung* bzw. ein *(Verbands-)Isomorphismus* ist ein injektiver bzw. bijektiver Verbands-Homomorphismus.
Für beschränkte posets und Verbände wird zusätzlich gefordert, dass ein *Homomorphismus* das

[29]siehe S.75

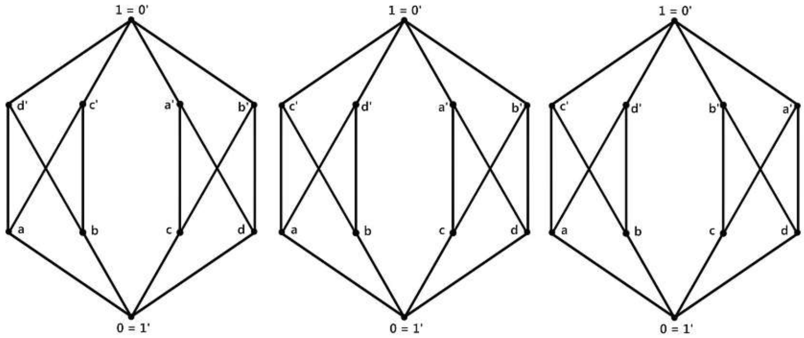

Abbildung 3.9: Hasse-Diagramme zu Beispiel 3.10, S.33: Die Abbildung zeigt zu der in 3.8, S.34, alternative Darstellungen.

Nullelement auf das Nullelement und das Einselement auf das Einselement abbildet.
Ein *(orthoposet-)*Homomorphismus, eine *(orthoposet-)*Einbettung bzw. ein *(orthoposet-)*Isomorphismus ist ein Ordnungs-Homomorphismus, eine Ordnungs-Einbettung bzw. ein Ordnungs-Isomorphismus von einem orthoposet in ein anderes orthoposet, der, die bzw. der zusätzlich verträglich mit der Orthogonalisierung ist.
Analog dazu, ist ein *(Orthoverbands-)*Homomorphismus, eine *(Orthoverbands-)*Einbettung bzw. ein *(Orthoverbands-)*Isomorphismus ein Verbands-Homomorphismus, eine Verbands-Einbettung bzw. ein Verbands-Isomorphismus von einem orthokomplementären Verband in einen anderen orthokomplementären Verband, der, die bzw. der zusätzlich verträglich mit der Orthogonalisierung ist.

Bemerkung 3.13. Die Tatsache, dass Ordnungs-Homomorphismen die Suprema und Infima (wenn diese existieren) nicht erhalten müssen, führt dazu, dass beispielsweise nicht jeder Ordnungs-Homomorphismus zwischen zwei Verbänden immer auch ein Verbands-Homomorphismus ist. Hat man es mit Ordnungs-Isomorphismen zu tun, dann ist dies jedoch sehr wohl der Fall. Außerdem hat sie zur Folge, dass es bei spezielleren (ortho-)poset-Strukturen oftmals nicht ausreicht, für Homomorphismen nur die Ordnungserhaltung (und Verträglichkeit mit der Orthogonalisierung) zu fordern, um der jeweiligen Struktur gerecht zu werden. Darum werden beispielsweise in [55] Homomorphismen zwischen zwei booleschen orthomodularen posets nicht einfach als orthoposet-Homomorphismen definiert, sondern es wird zusätzlich gefordert, dass zudem $[x, y \in X, x \wedge y = 0] \Rightarrow [\exists h(x) \vee h(y) \in Y$ und $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)]$ gilt.
Wir halten uns mit dieser Unterscheidung aber nicht weiter auf, weil wir es nur mit Resultaten zu tun haben werden, für die beide Definitionen zusammenfallen (da bijektive Homomorphismen zwischen booleschen orthomodularen posets im Sinne von [55] mit orthoposet-Isomorphismen im Sinne von Definition 3.16[30] übereinstimmen).

[30]siehe S.34

3.2 Kommutierende Elemente

Von großer Relevanz wird bei der Charakterisierung von numerischen Ereignissen das Kommutieren von Elementen sein, welches einen Hinweis auf deren Klassik liefern kann, wie wir in Anbetracht der in Abschnitt 2.4[31] festgestellten Tatsache, dass simultan messbare Observablen mit kommutierenden Operatoren assoziiert sind, bereits erahnen können.[32] In der Literatur wird der Begriff des Kommutierens nicht einheitlich verwendet, weshalb wir nachfolgend unterschiedliche Zugänge zu ihm in Einklang bringen.

Definition 3.17. ([5][53][13][25][10]) Seien u, v zwei Elemente eines orthokomplementären Verbandes V. Dann sagt man u *kommutiert* mit v und schreibt uCv, wenn $u = (u \wedge v) \vee (u \wedge v')$ erfüllt wird.
Gehören zwei Elemente u, v einem orthoposet an, dann fordert man in der Definition von uCv zusätzlich noch, dass $u \wedge v$, $u \wedge v'$ und $(u \wedge v) \vee (u \wedge v')$ überhaupt existieren.

Bemerkung 3.14. (vgl.[53])Offensichtlich gilt stets $xC0$ und $1Cx$.
Wichtig ist, zu beachten, dass aus xCy weder yCx noch $x = (x \vee y) \wedge (x \vee y')$ folgt.

Letztere Feststellung wirft die Frage auf, wann die Kommutativität eine symmetrische Relation ist. Aufschluss darüber gibt folgender Satz.

Satz 3.4. *([10]) Für jeden orthokomplementären Verband V sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) V ist orthomodular.

(b) Die Kommutativität ist eine symmetrische Relation, das heißt, $\forall u, v \in V : \ uCv \ \Leftrightarrow \ vCu$.

(c) $uCv \ \Rightarrow \ u'Cv$

Beweis. Für den Beweis sei auf [10] verwiesen. □

Lemma 3.5. *([59]) In einem orthomodularen Verband V gilt:*

$$[u_1Cv, \ u_2Cv] \Rightarrow [(u_1 \vee u_2)Cv, \ (u_1 \wedge u_2)Cv].$$

Allgemeiner gilt für jede Familie von Elementen $\{u_i \in V : \ i \in I \neq \emptyset\}$, dass man mit $u_iCv \, \forall i \in I$ auch $\bigvee_{i \in I} u_iCv$ und $\bigwedge_{i \in I} u_iCv$ hat, wenn die darin vorkommenden Elemente existieren.

Beweis. (vgl.[59]) Da die zweite Behauptung die erste als Spezialfall umfasst, genügt es, die allgemeinere Aussage zu zeigen.
Angenommen, es gilt $u_iCv \, \forall i \in I$. Wenn $\bigvee_{i \in I} u_i$ existiert, dann gilt wegen der Orthomodularität von V für jedes $j \in I$, dass $u_j = (u_j \wedge v) \vee (u_j \wedge v') \leq (\bigvee_{i \in I} u_i \wedge v) \vee (\bigvee_{i \in I} u_i \wedge v')$ ist, woraus wegen $\bigvee_{i \in I} u_i \leq (\bigvee_{i \in I} u_i \wedge v) \vee (\bigvee_{i \in I} u_i \wedge v') \leq \bigvee_{i \in I} u_i$ folgt, $\bigvee_{i \in I} u_iCv$.
Wenn $\bigwedge_{i \in I} u_i$ existiert, gilt $\bigvee_{i \in I} u_i' = (\bigwedge_{i \in I} u_i)'$. Aus $u_iCv \, \forall i \in I$ erhält man mit Satz 3.4[33] $u_i'Cv \, \forall i \in I$, und mit gerade Bewiesenem $\bigvee_{i \in I} u_i'Cv$, also $(\bigwedge_{i \in I} u_i)'Cv$, woraus mit dem letzten Punkt in Satz 3.4 $\bigwedge_{i \in I} u_iCv$ folgt. □

[31] siehe S.9
[32] Ist ein orthomodulares poset mit einem physikalischen System assoziiert, dann kommutieren zwei Elemente des posets genau dann (im Sinne der in diesem Abschnitt eingeführten Definitionen), wenn die korrespondierenden physikalischen Größen bzw. Ereignisse kompatibel bzw. simultan beobachtbar sind. (vgl.[39])
[33] siehe S.36

Satz 3.6. [34]*([10][4][42])Seien u, v, w drei Elemente eines orthomodularen Verbandes. Wenn mindestens eines dieser drei Elemente mit den anderen beiden kommutiert, dann erfüllen die drei Elemente die Distributivgesetze, das heißt, (u, v, w) bildet ein sogenanntes* distributives *Tripel.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [10] verwiesen. □

Satz 3.7. *([10]) Seien c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ Elemente eines orthomodularen Verbandes. Dann ist der von $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ erzeugte orthokomplementäre Teilverband genau dann eine Boolesche Algebra, wenn $c_i C c_j \, \forall 1 \leq i, j \leq n$.*

Beweis. (vgl.[10]) „$\Rightarrow$“: Sind c_i, c_j, $1 \leq i, j \leq n$ Elemente einer Booleschen Algebra, dann folgt $c_i = c_i \wedge (c_j \vee c_j') = (c_i \wedge c_j) \vee (c_i \wedge c_j')$, also $c_i C c_j$, unter Anwendung des Distributivgesetzes.
„$\Leftarrow$“: Gilt umgekehrt $c_i C c_j \, \forall 1 \leq i, j \leq n$, dann erhält man unter Verwendung von Lemma 3.5[35], Satz 3.4[36] und Satz 3.6[37], dass je drei beliebige Elemente des von $\{c_1, \ldots, c_n\}$ erzeugten orthokomplementären Teilverbandes die Distributivgesetze erfüllen und der erzeugte Teilverband somit eine Boolesche Algebra bildet. □

Definition 3.18. Im Kontext von orthokomplementären posets $(X, \leq, ')$ sagt man, zwei Elemente $x, y \in X$, für die ein orthogonales Tripel $\Delta(z_1, z, z_2)$ existiert, sodass $x = z_1 \vee z$, $y = z_2 \vee z$ ist, *werden durch ein (orthogonales) Dreieck geteilt.*[38]

Folgendes Korollar ist insofern von großer Bedeutung, als dass es bei der Charakterisierung von orthomodularen posets als Boolesche Algebren häufig zum Einsatz kommt, beispielsweise in den Beweisen der Sätze 3.35[39] und 4.70[40]. Dafür muss man nur zeigen, dass das orthomodulare poset unter bestimmten Bedingungen verbandsgeordnet ist und das Korollar anwenden.

Korollar 3.8. *([7],[10]) Wenn in einem orthomodularen Verband je zwei beliebige Elemente durch ein orthogonales Dreieck geteilt werden, dann bildet dieser eine Boolesche Algebra.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 3.7[41]. □

Bemerkung 3.15. (vgl.[4]) In Satz 3.7[42] ist die Voraussetzung, dass man es mit einem Verband zu tun hat, essentiell, denn die Aussage gilt nicht für orthomodulare posets. Grund dafür ist, dass in orthomodularen posets aus xCy, yCz, xCz nicht unbedingt $(x \vee y)Cz$ folgt, anders als in orthomodularen Verbänden, wie wir in Lemma 3.5[43] gesehen haben.
Wir erhalten aber eine Abschwächung des Resultats aus Satz 3.7 für orthomodulare posets, wenn wir es nur mit zwei kommutierenden Elementen zu tun haben, wie aus Kombination der nachstehenden Sätze 3.9[44] und 3.11[45] folgt.

[34] In der Literatur ist Satz 3.6, S.37, unter dem Namen „Foulis-Holland Theorem“ bekannt. Das Besondere an seiner Aussage ist, dass sie nicht voraussetzt, dass alle drei Elemente paarweise kommutieren.
[35] siehe S.36
[36] siehe S.36
[37] siehe S.37
[38] Manchmal wird ein durch ein orthogonales Dreieck geteiltes Paar von Elementen eines orthokomplementären posets auch *kompatibel* genannt, zum Beispiel in [7] und [10].
[39] siehe S.49
[40] siehe S.116
[41] siehe S.37
[42] siehe S.37
[43] siehe S.36
[44] siehe S.38
[45] siehe S.38

Satz 3.9. *([10],[4]) Ist $(X, \leq, ')$ ein orthomodulares poset und sind $x, y \in X$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) xCy

(b) Es gibt ein orthogonales Tripel $\Delta(z_1, z, z_2) \in X$, sodass $x = z_1 \vee z$ und $y = z_2 \vee z$ ist.

(c) yCx

Beweis. Für den Beweis sei auf [10] verwiesen. □

Beispiel 3.11. An Satz 3.9[46] erkennt man, dass zwei orthogonale Elemente x, y stets kommutieren, weil $(x, y, 0)$ ein orthogonales Tripel bildet, welches die zweite Bedingung in Satz 3.9 erfüllt.

Satz 3.10. *([4]) Sind x, y zwei kommutierende Elemente eines orthomodularen posets, dann ist das orthogonale Tripel $\Delta(z_1, z, z_2)$, welches sie teilt, eindeutig als $z_1 = x \wedge y'$, $z_2 = x' \wedge y$, $z = x \wedge y$ bestimmt.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [4] verwiesen. □

Satz 3.11. *([4]) In einem orthomodularen poset werden zwei Elemente genau dann durch ein orthogonales Dreieck geteilt, wenn sie eine Boolesche Teilalgebra erzeugen.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [4] verwiesen. □

Bemerkung 3.16. Äquivalent dazu, dass zwei Elemente eine Boolesche Teilalgebra erzeugen, ist, dass die beiden Elemente in einer Booleschen Teilalgebra enthalten sind: Erzeugen zwei Elemente eine Boolesche Teilalgebra, dann sind sie offensichtlich in einer solchen enthalten. Umgekehrt ist die von zwei Elementen erzeugte Boolesche Algebra definiert als der Schnitt aller diese Elemente enthaltenden Teilalgebren und wenn es mindestens eine sie enthaltende Boolesche Teilalgebra gibt, ist dieser Schnitt jedenfalls nicht leer.

Die Tatsache, dass in einem orthomodularen poset laut Satz 3.9[47] zwei Elemente genau dann miteinander kommutieren (und ihre Kommutativität symmetrisch ist), wenn sie durch ein orthogonales Dreieck geteilt werden, und das wiederum laut Satz 3.11[48] genau dann der Fall ist, wenn sie eine Boolesche Teilalgebra erzeugen, was laut Bemerkung 3.16[49] äquivalent dazu ist, dass sie in einer Booleschen Teilalgebra enthalten sind, zeigt, dass folgende in der Literatur für orthomodulare posets häufig verwendete Definition der Kommutativität für solche posets äquivalent zu der in Definition 3.17[50] ist:

Definition 3.19. ([39]) Man sagt, zwei Elemente x, y eines orthomodularen posets X *kommutieren* und schreibt xCy (oder äquivalent yCx), wenn es eine Boolesche Teilalgebra $B \subseteq X$ gibt, in der x und y enthalten sind.[51]

[46] siehe S.38
[47] siehe S.38
[48] siehe S.38
[49] siehe S.38
[50] siehe S.36
[51] Im Kontext von Quantenlogiken wird das Kommutieren von zwei Elementen eines orthomodularen posets auch manchmal darüber, dass die beiden Elemente durch ein orthogonales Dreieck geteilt werden, definiert, zum Beispiel in [4]. Wie Satz 3.9, S.38, gezeigt hat, ist diese Definition äquivalent zu der hier angeführten.

Von dieser Form der Kommutativität wird vor allem bei der Beschäftigung mit Algebren von numerischen Ereignissen, welche sich als spezielle orthomodulare posets auffassen lassen, häufig Gebrauch gemacht werden.

Da der Fall, dass zwei Elemente eines orthomodularen posets miteinander kommutieren, von derart großer Bedeutung ist, halten wir die als äquivalent erwiesenen Bedingungen noch einmal extra fest und betrachten wichtige Eigenschaften der Kommutationsrelation in orthomodularen posets.

Korollar 3.12. *Sind X ein orthomodulares poset und $x, y \in X$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) $x \wedge y$, $x \wedge y'$ *und* $(x \wedge y) \vee (x \wedge y')$ *existieren in* X *und* $x = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$

(b) $y \wedge x$, $y \wedge x'$ *und* $(y \wedge x) \vee (y \wedge x')$ *existieren in* X *und* $y = (y \wedge x) \vee (y \wedge x')$

(c) x *und* y *werden durch ein orthogonales Dreieck geteilt*

(d) x *und* y *erzeugen eine Boolesche Teilalgebra von* X

Ist eine der Bedingungen erfüllt, so sagen wir, dass x und y miteinander kommutieren *und schreiben xCy.*

Satz 3.13. *([39],[27])Sei $(X, \leq, ')$ ein orthomodulares poset und $x, y, z \in X$. Dann hat die Relation des Kommutierens folgende Eigenschaften:*

(a) $xCy \Rightarrow yCx$,

(b) $xCy \Rightarrow xCy'$,

(c) $x \leq y \Rightarrow xCy$,

(d) $[xCy, yCz, x \wedge yCz] \Rightarrow xCy \wedge z$,

(e) $xCy \Rightarrow \exists x \wedge y \in X$,

(f) $[xCy, x \wedge y = 0] \Rightarrow x \perp y$

Diese Eigenschaften sind sogar charakteristisch für die Relation des Kommutierens, das heißt, jede binäre Relation R, die man in obigen Eigenschaften an Stelle von C einsetzen kann, ohne die Gültigkeit auch nur einer Eigenschaft zu verlieren, erfüllt $xRy \Leftrightarrow xCy$.

Beweis. Für den Beweis sei auf [39] verwiesen. □

Bemerkung 3.17. (vgl.[4]) Aus Satz 3.13[52] folgt unmittelbar, dass, wenn x, y kommutierende Elemente eines orthomodularen posets X sind, auch $x \vee y, x \wedge y, x' \vee y, x' \wedge y, x \vee y', x \wedge y', x' \vee y'$ und $x' \wedge y'$ in X existieren. (Alternativ wird die Existenz dieser Elemente auch direkt dadurch sichergestellt, dass zwei kommutierende Elemente laut Satz 3.11[53] eine Boolesche Teilalgebra von X erzeugen.)

Beispiel 3.12. Zwei vergleichbare Elemente kommutieren stets, wie der dritte Punkt in Satz 3.13[54] zeigt.

[52]siehe S.39
[53]siehe S.38
[54]siehe S.39

Ist das betrachtete orthomodulare poset boolesch, so gilt auch die Umkehrung des vorletzten Punktes in Satz 3.13[55]:

Satz 3.14. *([39]) Für je zwei Elemente x, y eines booleschen orthomodularen posets X sind folgende beiden Bedingungen äquivalent:*

(a) xCy

(b) $x \wedge y$ *existiert in* X

Beweis. Für den Beweis sei auf [39] verwiesen. □

Wie bereits erwähnt, benötigt man stärkere Voraussetzungen, um Satz 3.7[56] auf nicht verbandsgeordnete orthomodulare posets übertragen zu können. Folgendes Resultat gibt Aufschluss darüber.

Satz 3.15. *([22]) Ist X ein orthomodulares poset, $n > 1$ und $A \subseteq X$ eine n-elementige Teilmenge, dann sind folgende beiden Bedingungen äquivalent:*

(a) Der von A erzeugte orthokomplementäre Teilverband von X ist eine Boolesche Algebra.

(b) $\forall B, D \subsetneq A,\ |B| = |D| = k \in \mathbb{N}$: $\quad (\bigwedge B)\, C\, (\bigwedge D)$

Beweis. Für den Beweis sei auf [22] verwiesen. □

[55]siehe S.39
[56]siehe S.37

3.3 Orthomodulare posets und Verbände

Da orthomodulare posets und Verbände im Gebiet der Quantenlogik, wie wir in den Abschnitten 2.4[57], 2.5[58] und 2.7[59] bereits gesehen haben, eine besondere Stellung einnehmen, betrachten wir im Folgenden wichtige sie betreffende Resultate, von denen wir später Gebrauch machen werden.

Satz 3.16. *([31]) Sei $(X, \leq, ', 0, 1)$ ein orthomodulares poset. Dann ist X genau dann ein (orthomodularer) Verband, wenn es für alle $u, v \in X$ ein eindeutiges $w \in X$ gibt, sodass $u, v \leq w$ und $(u' \wedge w) \wedge (v' \wedge w) = 0$ ist.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [31] verwiesen. □

Proposition 3.17. *([10])Ein orthokomplementärer Verband ist genau dann orthomodular, wenn er eindeutig orthokomplementiert ist.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [10] verwiesen. □

Satz 3.18. *([10]) Ein orthokomplementärer Verband ist genau dann orthomodular, wenn er keinen Teilverband, der isomorph zu dem in Abbildung 3.10[60] dargestellten Verband ist, enthält.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [10] verwiesen. □

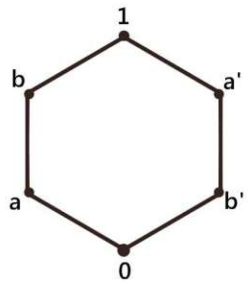

Abbildung 3.10: Hasse-Diagramm zu Satz 3.18, S.41: Ein orthokomplementärer Verband ist genau dann orthomodular, wenn er keinen Teilverband enthält, der isomorph zu dem hier dargestellten ist.

Proposition 3.19. *([59]) Ist V ein orthomodularer Verband und sind $u, v \in V$, dann gilt:*

$$u \perp v \Leftrightarrow [u \wedge v = 0,\ uCv]$$

Beweis. (vgl.[59]) „$\Rightarrow$“: $u \perp v$ impliziert, da V als orthomodularer Verband orthokomplementär ist, laut Proposition 3.3[61], dass $u \wedge v = 0$ ist. Wegen $u \perp v \Leftrightarrow u \leq v'$ gilt auch $u \wedge v' = u$, also erhält man mit dem orthomodularen Gesetz $v' = (u \wedge v') \vee (u' \wedge v')$, das heißt, $v'Cu$, woraus mit Satz 3.13[62] uCv folgt.
„$\Leftarrow$“: Die Behauptung gilt laut dem letzten Punkt in Satz 3.13, weil V als orthomodularer Verband auch ein orthomodulares poset ist. Der Vollständigkeit halber beweisen wir hier die Aussage dennoch: Ist $u \wedge v = 0$ und gilt uCv, dann folgt $u = (u \wedge v) \vee (u \wedge v') = (u \wedge v') \leq v'$, also $u \perp v$. □

[57]siehe S.9
[58]siehe S.13
[59]siehe S.18
[60]siehe S.41
[61]siehe S.31
[62]siehe S.39

Satz 3.20. *(vgl.[4],[40]) Jeder atomare orthomodulare Verband ist atomistisch.*[63]

Beweis. (vgl.[4]) Sei V ein atomarer orthomodularer Verband und $a \in V$, $a \neq 0$. Sei B die Menge aller Atome, die kleiner oder gleich a sind und $b := \bigvee B$. Da V atomar ist, ist B nichtleer und da V ein Verband ist, existiert b in V. Da $c \leq a \forall c \in B$ ist, ist $a \geq b$. Angenommen, es ist $a \neq b$, also $a > b$. Dann folgt aus der Orthomodularität, dass $a \wedge b' > 0$ ist. Da V atomar ist, gibt es somit ein Atom $d \in V$, das $0 < d \leq a \wedge b'$ erfüllt, das bedeutet, es ist $d \leq a$, aber $d \nleq b$, im Widerspruch zur Definition von b. Also muss $a = b$ sein. □

Für ein endliches orthomodulares poset sind die Forderungen, dass es atomar ist und dass es sich um einen Verband handelt, nicht notwendig, um sicherzustellen, dass es atomistisch ist:

Satz 3.21. *Jedes endliche orthomodulare poset X ist atomistisch.*

Beweis. Als orthomodulares poset besitzt X ein Nullelement und ist daher als endliches poset mit Nullelement laut Proposition 3.1[64] atomar.
Angenommen, X ist nicht atomistisch, das heißt, es gibt Elemente in X, welche sich nicht als das Supremum von Atomen darstellen lassen. Sei $x \in X$ ein minimales solches Element. Dann ist x weder 0, weil 0 das Supremum der leeren Menge von Atomen ist, noch ein Atom, also muss es, da X atomar ist, ein Atom a mit $a < x$ geben. Wegen der Orthomodularität von X ist $x = a \vee (a' \wedge x)$.
Klarerweise ist $a' \wedge x \leq x$. Angenommen, es ist $a' \wedge x = x$. Dann ist $0 = (a \wedge a') \wedge x = a \wedge (a' \wedge x) = a \wedge x = a$, im Widerspruch dazu, dass $a > 0$ ist. Also muss $a' \wedge x < x$ sein. Da x minimal gewählt war, ist $a' \wedge x$ somit als Supremum von Atomen darstellbar. Bildet man das Supremum des Supremums dieser Atome und a, so gleicht dieses x, im Widerspruch dazu, dass x nicht als Supremum von Atomen darstellbar ist. Also muss X atomistisch sein. □

[63] Insbesondere werden in der Literatur vereinzelt atomistische orthomodulare Verbände sogar als atomare orthomodulare Verbände definiert.
[64] siehe S.24

3.4 Boolesche orthomodulare posets

Die booleschen orthomodularen posets sind den Booleschen Algebren strukturell schon sehr nahe, weshalb sie bei der Charakterisierung der Klassik von physikalischen Systemen von großer Bedeutung sind. Darum stellen wir in diesem Abschnitt einige wichtige sie betreffende Resultate vor.

Definition 3.20. ([30]) Ein orthokomplementäres poset X heißt *infimum-getreu* (auf Englisch: infimum faithful), wenn für alle $x, y \in X$ gilt, dass die Existenz von $x \wedge y \in X$ impliziert, und somit äquivalent dazu ist, dass $\{x, y\}$ eine Boolesche Teilalgebra von X erzeugt [65].

Korollar 3.22. *Jedes orthomodulare poset ist genau dann boolesch, wenn es infimum-getreu ist.* [66]

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei X ein boolesches orthomodulares poset. Dann gilt laut Satz 3.14[67], $xCy \Leftrightarrow \exists x \wedge y$ in X, also insbesondere $\exists x \wedge y$ in $X \Rightarrow xCy$. Laut Korollar 3.12[68] ist xCy äquivalent dazu, dass x und y eine Boolesche Teilalgebra von X erzeugen, das bedeutet, X ist infimum-getreu.
„$\Leftarrow$“: Ist X ein infimum-getreues orthomodulares poset und existiert $x \wedge y$ in X, dann gilt xCy. Hat man nun $x \wedge y = 0$, dann folgt wegen xCy laut dem letzten Punkt in Satz 3.13[69], dass x und y orthogonal sind, also X boolesch ist. □

Satz 3.23. *([55]) Ist $(X, \leq, ')$ ein boolesches orthomodulares poset, dann gilt:*

(a) $\forall x, y \in X : \; [z \leq x, z \leq y, x \wedge y \wedge z' = 0] \Leftrightarrow z = x \vee y$

(b) Sind $x, y \in X$ und existiert eines der Elemente $x \wedge y, x \wedge y', x' \wedge y, x' \wedge y', x \vee y, x' \vee y, x \vee y', x' \vee y'$ in X, so existieren auch alle anderen dieser Elemente.

(c) Sind $x, y \in X$ und existiert $x \vee y$ in X, dann gilt $x' \wedge (x \vee y) = x' \wedge y$.

(d) Sind $x, y, z \in X$, dann gilt: Wenn $(x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ und $x \vee y$ existieren, dann existieren auch $(x \vee y) \wedge z$ in X und es gilt das Distributivgesetz $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.

Beweis. Für den Beweis sei auf [55] verwiesen. □

Bemerkung 3.18. ([55]) Der vierte Punkt in Satz 3.23[70] lässt sich in naheliegender Weise verallgemeinern: Ist $(X, \leq, ')$ ein boolesches orthomodulares poset, sind $x_1, \ldots, x_n, y \in X$ und existiert sowohl $\bigvee_{i=1}^n (x_i \wedge y)$ als auch $\bigvee_{i=1}^n x_i$ in X, dann existiert auch $\bigvee_{i=1}^n x_i \wedge y$ und es ist $\bigvee_{i=1}^n x_i \wedge y = \bigvee_{i=1}^n (x_i \wedge y)$.

Korollar 3.24. *([55]) Sei $(X, \leq, ')$ ein boolesches orthomodulares poset und seien $x, y \in X$. Wenn $x \vee y$ in X existiert, dann gilt*

(a) $x = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$, *das heißt,* xCy,

(b) $x \vee y = (x \wedge y') \vee (x \wedge y) \vee (x' \wedge y)$.

[65] In der Literatur findet man oft auch andere Definitionen des Begriffs, zum Beispiel in [23]. Für orthomodulare posets, für welche wir den Begriff betrachten werden, fallen diese Definitionen jedoch zusammen.
[66] Aus dem Grund werden infimum-getreue orthomodulare posets in der Literatur manchmal als orthomodulare posets, welche boolesch sind, definiert, zum Beispiel in [68].
[67] siehe S.40
[68] siehe S.39
[69] siehe S.39
[70] siehe S.43

Beweis. (vgl.[55]) Da $x \vee y$ existiert, ist nach Satz 3.23[71] auch $x \wedge y' \in X$. Wegen $x \wedge y \perp x \wedge y'$ existiert auch $(x \wedge y) \vee (x \wedge y')$ und gleicht laut Satz 3.23 $x \wedge (y \vee y') = x \wedge 1 = x$.
Für die zweite Aussage stellen wir fest, dass nach Satz 3.23 auch $x \wedge y', x \wedge y$ und $x' \wedge y$ existieren und dass sie paarweise orthogonal sind, sodass auch ihr Supremum existiert und nach Satz 3.23 $(x \wedge y') \vee (x \wedge y) \vee (x' \wedge y) = (x \wedge y') \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge y) \vee (x' \wedge y) = (x \wedge (y' \vee y)) \vee ((x \vee x') \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (1 \wedge y) = x \vee y$ ist. □

Bemerkung 3.19. Wendet man auf vorangegangenes Korollar Satz 3.23[72] und die Gesetze von de Morgan an, so sieht man, dass für ein boolesches orthomodulares poset X aus $x, y, x \vee y \in X$ auch $x = (x \vee y) \wedge (x \vee y')$ und $x \wedge y = (x \vee y') \wedge (x \vee y) \wedge (x' \vee y)$ folgt.

Von besonderer Bedeutung sind orthomodulare posets, die sich durch Mengen repräsentieren lassen. Wie folgender Satz zeigt, ist dies für jedes boolesche orthomodulare poset der Fall.

Satz 3.25. *([55]) Jedes boolesche orthomodulare poset* $(X, \leq, ')$ *ist isomorph zu einem booleschen orthomodularen poset* $(\mathscr{M}, \subseteq, ^c, \emptyset, M)$*, wobei* $\mathscr{M}$ *ein Mengensystem von Teilmengen einer Menge* M *ist, das folgende Eigenschaften hat:*

(a) $\emptyset \in \mathscr{M}$,

(b) $\forall A \in \mathscr{M} : A^c = M \backslash A \in \mathscr{M}$,

(c) $\forall A, B \in \mathscr{M} : A \wedge_{\mathscr{M}} B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$,

(d) $\forall A, B \in \mathscr{M} : A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \cup B \in \mathscr{M}$,

wobei $\wedge_{\mathscr{M}}$ *das Infimum in* $\mathscr{M}$ *bezeichnet.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [55] verwiesen. □

Wegen Satz 3.25[73] lässt sich insbesondere jedes boolesche orthomodulare poset als konkrete Quantenlogik, welche in Definition 3.22[74] noch eingeführt wird, auffassen. Diese Tatsache verdeutlicht die Priorität boolescher orthomodularer posets im Bereich der Quantenlogik.

Nachstehendes Resultat illustriert, wie nahe die Struktur von booleschen orthomodularen posets der von Booleschen Algebren ist.

Satz 3.26. *([54]) Jedes endliche boolesche orthomodulare poset ist eine Boolesche Algebra.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [54] verwiesen. □

[71] siehe S.43
[72] siehe S.43
[73] siehe S.44
[74] siehe S.50

3.5 Boolesche Algebren

Da die Klassik des Systems naheliegt, wenn sich ein mit einem physikalischen System assoziiertes orthomodulares poset als Boolesche Algebra erweist, ist auch eine Untersuchung der Struktur von Booleschen Algebren und deren sie von (booleschen) orthomodularen posets und Verbänden abgrenzenden Eigenschaften von enormem Interesse.

Proposition 3.27. [75] *Jede Boolesche Algebra* $(B, \leq, ^c, 0, 1)$ *hat folgende Eigenschaften (wobei hier* ^{c} *die Komplementbildung bezeichnet):*

(a) Jedes Element hat genau ein Komplement.

(b) Seien $a, b \in B$*, dann gilt:* $a \wedge b = 0 \Leftrightarrow a \leq b^c$.

(c) Die Komplementbildung auf B *bildet eine Orthogonalisierung auf* B *und macht* B *zu einem eindeutig orthokomplementierten Verband* $(B, \leq, ^c, 0, 1)$.

(d) Die Disjunktheit zweier Elemente ist äquivalent zu deren Orthogonalität (bezüglich der im vorangegangenen Punkt definierten Orthogonalisierung).

(e) Der (hinsichtlich der im dritten Punkt definierten Orthogonalisierung) orthokomplementäre Verband $(B, \leq, ^c, 0, 1)$ *ist orthomodular.*

Beweis. (a) Angenommen, $a \in B$ hat zwei Komplemente $x, y \in B$, das heißt, $a \wedge x = 0 = a \wedge y$ und $a \vee x = 1 = a \vee y$. Dann erhält man unter Verwendung der Distributivgesetze $x = x \wedge (a \vee x) = x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee (x \wedge y) = (y \wedge a) \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge y = (a \vee y) \wedge y = y$, also $x = y$.

(b) „$\Leftarrow$“: Sind $a, b \in B$ und ist $a \leq b^c$, dann gilt $a \wedge b \ \leq \ b^c \wedge b = 0$.
„$\Rightarrow$“: Ist $a \wedge b = 0$, dann folgt $a = a \wedge 1 = a \wedge (b \vee b^c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^c) = 0 \vee (a \wedge b^c) = a \wedge b^c$, also $a \leq b^c$.

(c) Wir müssen prüfen, dass die Abbildung $a \mapsto a^c$ alle drei Bedingungen aus Definition 3.11[76] erfüllt:
Da B laut dem ersten Punkt eindeutig komplementiert ist, gilt

$$\forall b \in B: \ (b^c)^c = b, \ b \vee b^c = 1, \ b \wedge b^c = 0.$$

Unter Verwendung des zweiten Punkts erhalten wir

$$\forall a, b \in B: \ a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b^c = 0 \Leftrightarrow b^c \wedge a = 0 \Leftrightarrow b^c \leq a^c.$$

(d) Die Aussage folgt aus Kombination des zweiten und dritten Punktes.

(e) Da B ein Verband ist, existiert natürlich für je zwei orthogonale Elemente deren Supremum. Zu zeigen ist also nur die Gültigkeit des orthomodularen Gesetzes. Diese folgt unter Verwendung der Distributivität von B:

$$\forall a, b \in B, \ a \leq b: \ a \vee (a^c \wedge b) = (a \vee a^c) \wedge (a \vee b) = 1 \wedge (a \vee b) = b.$$

□

[75] Die ersten beiden der in dieser Proposition präsentierten Resultate gehen auf [11] zurück.
[76] siehe S.26

Bemerkung 3.20. An Proposition 3.27[77] erkennt man insbesondere, dass Boolesche Algebren boolesch sind und dass das orthomodulare Gesetz eine Abschwächung des Distributivgesetzes darstellt.

Die in Proposition 3.27[78] angeführten Eigenschaften charakterisieren Boolesche Algebren sogar unter den orthokomplementären Verbänden, wie die folgenden beiden Sätze zeigen.

Satz 3.28. *([10],[11]) Jeder orthokomplementäre (und insbesondere auch jeder orthomodulare) Verband bildet genau dann eine Boolesche Algebra, wenn er eindeutig komplementiert ist.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [53] verwiesen. □

Satz 3.29. *([78],[53]) Jeder orthokomplementäre (und insbesondere auch jeder orthomodulare) Verband bildet genau dann eine Boolesche Algebra, wenn er boolesch ist.*

Beweis. Zu zeigen ist nur die Richtung $\Leftarrow$, da wir die Implikation $\Rightarrow$ bereits aus 3.27[79] wissen. Sei also $(V, \leq, ', 0, 1)$ ein boolescher orthokomplementärer Verband. Wir zeigen, dass dieser eindeutig komplementiert ist:
Seien $u, v \in V$, u ein Komplement von v. Dann gilt $u \wedge v = 0$ und wegen $u \vee v = 1$ auch $u' \wedge v' = 0$. Da V boolesch ist, folgt daraus, $u \leq v'$ und $u' \leq v$ und aus Letzterem $v' \leq u$, also insgesamt $u = v'$, das heißt, v' ist das einzige Komplement von v und somit bildet V nach Satz 3.28[80] eine Boolesche Algebra. □

In Satz 3.29[81] ist die Voraussetzung, dass man es mit einem orthokomplementären Verband und nicht nur mit einem orthoposet zu tun hat, essentiell. Ein Beispiel eines (unendlichen) booleschen orthomodularen posets, das keine Boolesche Algebra bildet, ist etwa in [54] zu finden.

Satz 3.30. *([10],[17]) Ein orthomodularer Verband mit kleinstem Element* 0 *und größtem Element* 1 *bildet genau dann eine Boolesche Algebra, wenn er weder einen Teilverband mit* 0 *und* 1*, der isomorph zum Pentagon-Verband aus Abbildung 3.2[82] ist, noch einen Verband, der isomorph zum Diamant-Verband in Abbildung 3.1[83] ist, enthält.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [10] verwiesen. □

Beispiel 3.13. ([75]) Wie man durch Nachprüfen der Boolesche Algebren definierenden Eigenschaften leicht sieht, bildet jedes Mengensystem $\mathcal{M}$ von Teilmengen einer Menge M, das folgende Bedingungen erfüllt, wobei $\cup$ den mengentheoretischen Schnitt und $\cap$ die mengentheoretische Vereinigung bezeichnet, eine Boolesche Algebra:

(i) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$

(ii) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$

(iii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow M \backslash A = A^c \in \mathcal{M}$

[77] siehe S.45
[78] siehe S.45
[79] siehe S.45
[80] siehe S.46
[81] siehe S.46
[82] siehe S.28
[83] siehe S.28

Dabei entspricht in $\mathcal{M}$ das Infimum bzw. das Supremum zweier Elemente ihrem Schnitt bzw. ihrer Vereinigung.
Da die erste Bedingung mittels der Gesetze von de Morgan, welche für die mengentheoretischen Operationen erfüllt sind, zusammen mit der dritten Bedingung aus der zweiten folgt und umgekehrt die zweite zusammen mit der dritten aus der ersten, genügt es, nur eine der beiden ersten Eigenschaften zu fordern.

Beispiel 3.14. Die Potenzmenge 2^M einer beliebigen endlichen Menge M bildet, versehen mit den mengentheoretischen Operationen, eine Boolesche Algebra mit Nullelement $\emptyset$ und Einselement M. Dies erkennt man sofort daran, dass jene die Bedingungen aus Beispiel 3.13[84] erfüllt. Insbesondere ist jede endliche Boolesche Algebra isomorph zur Potenzmenge einer endlichen Menge, wie wir im Rahmen von Proposition 3.31[85] beweisen werden.

Proposition 3.31. *(vgl.[102]) Für jede endliche Boolesche Algebra gibt es eine endliche Menge M, zu deren Potenzmenge 2^M, versehen mit den mengentheoretischen Operationen $\cup, \cap$ und ^{c}, sie isomorph ist.*

Beweis. (vgl.[85])Dass jede endliche Potenzmenge eine endliche Booleschen Algebra bildet, ist bereits in Beispiel 3.14[86] festgestellt worden.
Sei nun $(B, \leq, ', 0, 1)$ eine Boolesche Algebra, A die Menge aller ihrer Atome, und $a \in B$. Wir zeigen, dass B atomistisch ist, also $a = \bigvee\{d \in A : d \leq a\} =: c$ ist. Da a für jedes Element der Menge $\{d \in A : d \leq a\}$ ein Supremum darstellt, muss $a \geq c$ sein.
Angenommen, es ist $a \neq c$, also $a > c$. Dann folgt $a \wedge c' \neq 0$, denn wäre $a \wedge c' = 0$, dann würde $a' = a' \vee 0 = a' \vee (a \wedge c') = (a' \vee a) \wedge (a' \vee c') = 1 \wedge (a' \vee c') = a' \vee c'$ und daraus $a = a \wedge c$, also $a \leq c$ folgen, im Widerspruch zur Annahme, dass $a > c$ ist.
Wegen $a \wedge c' > 0$ muss es, da B als endliches poset mit kleinstem Element laut Proposition 3.1[87] atomar ist, ein Atom b geben, welches $b \leq a \wedge c'$, also auch $b \leq c'$, erfüllt. Andererseits ist aber auch $b \leq c$, weil b in der Menge $\{d \in A : d \leq a\}$ liegt. Daraus folgt $b \leq (c \wedge c') = 0$, also $b = 0$, im Widerspruch dazu, dass b ein Atom ist. Deshalb muss $a = c$ sein.
Das bedeutet, B ist atomistisch, sodass jedes Element durch die Menge der Atome welche kleiner (oder gleich) ihm selbst sind, charakterisiert wird, weshalb durch $f : B \to 2^A$, $f(a) = \{d \in A : d \leq a\}$ eine Bijektion festgelegt wird. Da diese ordnungs- und komplementerhaltend ist, handelt es sich um einen Isomorphismus zwischen den Booleschen Algebren B und 2^A. □

Korollar 3.32.

(1) Jede endliche Boolesche Algebra besteht aus 2^n, $n \in \mathbb{N}$ Elementen, wobei n genau der Anzahl der Atome der jeweiligen Booleschen Algebra entspricht.

(2) Jede endliche Boolesche Algebra ist atomistisch.

Beweis. Die Behauptungen folgen aus Proposition 3.31[88] und deren Beweis. Die zweite Aussage folgt alternativ auch aus Satz 3.20[89] und der Tatsache, dass jede endliche Boolesche Algebra als endliches poset mit Nullelement atomar und als distributiver orthokomplementärer Verband auch ein orthomodularer Verband ist. □

[84] siehe S.46
[85] siehe S.47
[86] siehe S.47
[87] siehe S.24
[88] siehe S.47
[89] siehe S.42

Satz 3.33. *([19]) Eine orthomodulare halbgeordnete Menge $(X, \leq, ', 0, 1)$ ist genau dann eine endliche Boolesche Algebra, wenn ihre Atome folgende Bedingungen erfüllen:*

(a) X hat endlich viele Atome.

(b) Die Atome von X sind paarweise orthogonal.

(c) X ist atomar.

Beweis. (vgl.[19]) „$\Rightarrow$“: Ist X eine endliche Boolesche Algebra, kann diese nur endlich viele Atome haben. Da zwei verschiedene Atome stets disjunkt sind, folgt aus Proposition 3.27[90], dass die Atome einer Booleschen Algebra stets paarweise orthogonal sind. Als endliche halbgeordnete Menge mit Nullelement ist X zudem atomar.
„$\Leftarrow$“: Sei umgekehrt X eine orthomodulare halbgeordnete Menge, die die drei Bedingungen erfüllt und sei A die Menge aller Atome von X. Laut der ersten Bedingung ist X endlich.
Seien $f: X \to 2^A, a \mapsto \{b \in A : b \leq a\}$ und $g: 2^A \to X, B \mapsto \bigvee B$. Dann sind f und g wohldefiniert und ordnungserhaltend. (Letztgenanntes Supremum existiert stets, da laut Voraussetzung die Atome paarweise orthogonal sind und wegen der Orthomodularität von X die Orthogonalität endlich vieler Elemente die Existenz ihres gemeinsamen Supremums impliziert.)
g ist die Umkehrfunktion von f: Sei $a \in X$, dann ist $g(f(a)) = \bigvee\{b \in A : b \leq a\} \leq a$. Angenommen, es ist $g(f(a)) < a$. Dann folgt aus der Orthomodularität von X, dass $a = g(f(a)) \vee ((g(f(a)))' \wedge a)$ ist, also $(g(f(a)))' \wedge a > 0$ sein muss. Wegen der dritten Bedingung existiert dann ein Atom $c \in A$, sodass $c \leq (g(f(a)))' \wedge a$ ist. Dann ist aber $c \leq (g(f(a)))'$ und wegen $c \leq a$ liegt c in $\{b \in A : b \leq a\}$, sodass auch $c \leq g(f(a))$ ist, woraus $c \leq g(f(a)) \wedge (g(f(a)))' = 0$, also $c = 0$ folgt, im Widerspruch dazu, dass c ein Atom ist. Deshalb kann nur $g(f(a)) = a$ sein.
f ist die Umkehrfunktion von g: Sei $C \in 2^A$. Dann ist $f(g(C)) = \{b \in A : b \leq \bigvee C\} \supseteq C$. Angenommen, es ist $f(g(C)) \neq C$. Dann gibt es ein $c \in A$, sodass $c \leq \bigvee C$, aber $c \notin C$ ist. Laut der zweiten Bedingung ist c orthogonal zu allen Elementen aus C und daher $c \leq \bigwedge\{d' : d \in C\} = (\bigvee C)'$, woraus wiederum $c \leq \bigvee C \wedge (\bigvee C)' = 0$ folgt, also $c = 0$, im Widerspruch dazu, dass $c \in A$ ist. Somit muss $f(g(C)) = C$ gelten.
Dies zeigt, dass f und g zueinander inverse Isomorphismen zwischen $(X, \leq)$ und $(2^A, \subseteq)$ sind. Da letztere Struktur eine Boolesche Algebra ist, muss auch erstere eine solche sein. $\square$

Aus Korollar 3.8[91] und Korollar 3.12[92] erhält man unmittelbar folgende Charakterisierungen von Booleschen Algebren unter orthomodularen Verbänden:

Korollar 3.34. *([10]) Ein orthomodularer Verband ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

(a) Je zwei beliebige Elemente kommutieren miteinander.

(b) Je zwei beliebige Elemente werden durch ein Dreieck geteilt.

(c) Je zwei beliebige Elemente erzeugen eine Boolesche Teilalgebra.

Zudem hat man für nicht zwingend verbandsgeordnete orthomodulare posets nachfolgende charakteristische Bedingungen, welche sie zu Booleschen Algebren machen.

[90] siehe S.45
[91] siehe S.37
[92] siehe S.39

Satz 3.35. *([31]) Ist* $(X, \leq, ', 0, 1)$ *ein orthomodulares poset, dann ist* X *genau dann eine Boolesche Algebra, wenn es für alle* $x, y \in X$ *zueinander orthogonale Elemente* $w, z \in X$ *gibt, sodass* $x \perp w$, $y \perp z$, $x \vee w = y \vee z$ *ist. Die Elemente* w, z *sind dann eindeutig bestimmt.*

Beweis. (vgl.[31]) „$\Rightarrow$“: Ist X eine Boolesche Algebra, sind $x, y \in X$ und definiert man $w := x' \wedge y$ und $z := x \wedge y'$, dann gilt $w \perp z$, $x \perp w$, $y \perp z$ und $x \vee w = x \vee (x' \wedge y) = x \vee y = y \vee x = y \vee (x \wedge y') = y \vee z$.
„$\Leftarrow$“: Betrachtet man $x', y' \in X$, dann gibt es nach Voraussetzung zueinander orthogonale Elemente $w, z \in X$, sodass $x' \perp w$, $y' \perp z$ und $x' \vee w = y' \vee z$ ist. Sei nun $v := x \wedge w' = y \wedge z'$. Da $w \perp v$ und $z \perp v$ ist und in orthomodularen posets per Definition das Supremum zweier orthogonaler Elemente stets existiert, gibt es auch $w \vee v$ und $z \vee v$ sowie in Folge $w' \wedge v'$ und $z' \wedge v'$ in X.
Wegen des orthomodularen Gesetzes gilt $w' \wedge v' = w' \wedge (x' \vee w) = x'$ und $z' \wedge v' = z' \wedge (y' \vee z) = y'$. Durch Komplementbildung folgt, dass w, z und v ein orthogonales Tripel bilden, das x und y teilt. Zudem gilt $x \vee y = (w \vee v) \vee (z \vee v) = (w \vee z) \vee v \in X$, das bedeutet, da x und y beliebig waren, dass X ein verbandsgeordnetes orthomodulares poset ist, in dem je zwei Elemente durch ein orthogonales Dreieck geteilt werden. Mit Korollar 3.8[93] folgt, dass es sich bei X um eine Boolesche Algebra handelt.
Nun bleibt noch die behauptete Eindeutigkeit zu zeigen. Sei also X eine Boolesche Algebra und seien $w, z \in X$, sodass $w \perp z$, $x \perp w$, $y \perp z$ ist und $x \vee w = y \vee z$ gilt. Dann folgt $w = x' \wedge w = x' \wedge w \wedge z' = x' \wedge (x \vee w) \wedge z' = x' \wedge (y \vee z) \wedge z' = x' \wedge y \wedge z' = x' \wedge y$ und analog dazu erhält man, dass z eindeutig als $z = x \wedge y'$ bestimmt ist. □

[93] siehe S.37

3.6 Konkrete Quantenlogiken

Wie wir in Satz 3.25[94] gesehen haben, lassen sich boolesche orthomodulare posets durch Mengensysteme mit bestimmten Eigenschaften repräsentieren. Sie stellen somit einen Spezialfall sogenannter konkreter Quantenlogiken dar, welche wir in diesem Abschnitt betrachten wollen.

Definition 3.21. ([30],[23],[72],[68]) Ein (orthomodulares) orthoposet, das durch Mengen repräsentierbar ist, nennt man *konkret* bzw. *konkrete (Quanten-)Logik* (auf Englisch: concrete logic), genauer:
Ist ein orthoposet isomorph zu einer Menge von durch mengentheoretische Inklusion geordneten Mengen, sodass das Supremum orthogonaler Elemente mit der Vereinigung von disjunkten Mengen korrespondiert, dann sagt man, es ist *konkret*.

Oftmals verwendet man aber auch für die eine konkrete (Quanten-)Logik repräsentierenden Mengen selbigen Begriff, der anhand von für das durch diese gebildete Mengensystem charakteristische Eigenschaften wie folgt definiert wird.

Definition 3.22. ([23],[28]) Als *konkrete (Quanten-)Logik*[95] bezeichnet man ein Paar (Ω, Δ), bestehend aus einer nichtleeren Menge Ω und einem Mengensystem $\Delta \subseteq 2^{\Omega}$, sodass

(i) $\emptyset \in \Delta$,

(ii) $A \in \Delta \Rightarrow \Omega \backslash A = A^c \in \Delta$,

(iii) $[A, B \in \Delta,\ A \cap B = \emptyset] \Rightarrow A \cup B \in \Delta$

gilt, wobei $\cap$ bzw. $\cup$ den mengentheoretischen Schnitt bzw. die mengentheoretische Vereinigung bezeichnet.
Ein *Zustand* s auf einer konkreten (Quanten-)Logik (Ω, Δ) ist definiert als eine Abbildung $s : \Delta \to [0, 1]$, sodass $s(\Omega) = 1$ und $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ für alle $A, B \in \Delta$ mit $A \cap B = \emptyset$ ist.

Beispiel 3.15. Das in Satz 3.25[96] betrachtete Mengensystem ist offensichtlich eine konkrete Logik, daher ist jedes boolesche orthomodulare poset konkret.

Bemerkung 3.21. ([25],[68]) Wie oberhalb bereits erwähnt, bildet jede konkrete Logik mit der mengentheoretischen Halbordnung und dem mengentheoretischen Komplement ein orthomodulares poset $(\Delta, \subseteq, ^c, \emptyset, \Omega)$.
Insbesondere folgt aus den definierenden Eigenschaften, dass eine konkrete Logik (im Sinne von Definition 3.22[97] genau dann eine Boolesche Algebra ist, wenn sie für je zwei beliebige (nicht notwendigerweise disjunkte) Elemente deren Supremum enthält, wie man an Beispiel 3.13[98] erkennt.

Bemerkung 3.22. (vgl.[29]) Die dritte Bedingung impliziert, dass auch die Vereinigung eines Tripels von paarweise disjunkten Mengen einer konkreten Logik (Ω, Δ) in dieser Logik enthalten ist, das heißt, $\forall A, B, C \in \Delta :\ [\emptyset = A \cap B = A \cap C = B \cap C] \Rightarrow A \cup B \cup C \in \Delta$.

[94] siehe S.44
[95] Manchmal wird für ein solches Mengensystem der Begriff G-System verwendet, zum Beispiel in [29].
[96] siehe S.44
[97] siehe S.50
[98] siehe S.46

Außerdem gilt offensichtlich $A, B, A \cup B \in \Delta \Rightarrow A \cup B = A \vee B$ und $A, B, A \cap B \in \Delta \Rightarrow A \cap B = A \wedge B$, wobei $\wedge$ bzw. $\vee$ das Infimum bzw. Supremum in $(\Delta, \subseteq)$ bezeichnet und $\subseteq$ die mengentheoretische Inklusion.

Bemerkung 3.23. Wie man anhand der Definition sofort sieht, bildet für jede nichtleere Menge M das Paar $(M, 2^M)$, eine konkrete Logik. Mit Proposition 3.31[99] erkennt man daran, dass endliche Boolesche Algebren konkret sind.

Im Gegensatz zu klassischen Logiken, also Booleschen Algebren, welche stets als konkrete Logiken aufgefasst werden können, sind Quantenlogiken nicht immer konkret, deshalb sind entsprechende Charakterisierungen, wie etwa jene, die wir in Proposition 4.43[100] kennenlernen werden, nützlich.

[99] siehe S.47
[100] siehe S.100

3.7 Klassische Korrelationsfunktionen und Bell-Wertungen

In Abschnitt 2.8[101] haben wir bereits eine Form der Bell-Ungleichungen, welche über Linearkombinationen von Korrelationswahrscheinlichkeiten Bedingungen für die Klassik eines Systems darstellen, kennengelernt. Bei der Konstruktion allgemeinerer Klassen derartiger Ungleichungen werden wir die im Folgenden eingeführten Begriffe gebrauchen.

Definition 3.23. ([6],[32]) Sei $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ eine endliche Boolesche Algebra und sei p ein (endlich additives) Wahrscheinlichkeitsmaß[102] auf B. Sei $\eta : 2^{\{1,\dots,n\}} \to \mathbb{R}$, $\eta(\emptyset) := 0$. Für jede solche Funktion ist eine sogenannte *Korrelationsfunktion* p_η definiert[103]:

$$p_\eta : B^n \to \mathbb{R},\ p_\eta(B_1, \dots, B_n) := \sum_{S \subseteq \{1,\dots,n\}} \eta(S) p\left(\bigwedge_{i \in S} B_i\right).$$

Sie wird die *von η erzeugte Korrelationsfunktion* genannt.
Im Zusammenhang mit Korrelationsfunktionen bezeichnet man eine Ungleichung der Form

$$0 \leq p_\eta(B_1, \dots, B_n) \leq 1,\ B_1, \dots, B_n \in B$$

als eine *(von η erzeugte) Bell-artige Ungleichung* (auf Englisch: Bell-type inequality).
Erfüllt die Funktion η die Bedingung

$$\forall M \in 2^{\{1,\dots,n\}} :\ 0 \leq \sum_{J \subseteq M} \eta(J) \leq 1,$$

so nennt man sie eine *Bell-Wertung* (auf Englisch: Bell valuation) auf $2^{\{1,\dots,n\}}$.
$\mathbf{B}_n$ bezeichne die Menge aller Bell-Wertungen auf $2^{\{1,\dots,n\}}$[104].

Wie wir sehen werden, lassen sich Bell-Wertungen aus sogenannten elementaren Bell-Wertungen, welche folgendermaßen definiert sind, gewinnen:

Definition 3.24. ([32]) Sei $n \in \mathbb{N}, I \in 2^{\{1,\dots,n\}}$. Eine Funktion $\eta_I :\ 2^{\{1,\dots,n\}} \to \mathbb{R}$[105],

$$\eta_I(J) := \begin{cases} (-1)^{\{J \setminus I\}}, & J \supseteq I \neq \emptyset \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt *elementare Bell-Wertung* (auf Englisch: elementary Bell valuation) auf $2^{\{1,\dots,n\}}$.

Bemerkung 3.24. ([6]) Die Korrelationsfunktion kann als Linearkombination von Wahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_n$ und gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten $p_{ij} := p(A_i \wedge A_j), p_{ijk} := p(A_i \wedge A_j \wedge A_k), \dots, p_{1\dots n} := p(A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ von 2, 3, ..., n Ereignissen aufgefasst werden.

[101] siehe S.21
[102] Das heißt, p ist eine Abbildung $p : B \to [0, 1]$, sodass $p(1) = 1$ ist und für paarweise disjunkte Elemente $B_1, \dots, B_m \in B :\ p(\bigvee_{i=1}^m B_i) = \sum_{i=1}^m p(B_i)$ gilt.
[103] In [32] findet man anstatt $p(\bigwedge_{i\in S} B_i)$ den Ausdruck $\bigwedge_{i\in S} p_i$, welcher im klassischen Fall jedoch mit ersterem übereinstimmt.
[104] In [32] wird für Bell-Wertungen $\emptyset$ aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen.
[105] In [32] wird $\emptyset$ aus dem Definitionsbereich ausgenommen und η_I nur für $I \neq \emptyset$ definiert.

4 Mathematische Charakterisierung von Quantenlogiken auf Grundlage von numerischen Ereignissen

Wie in Kapitel 2[1] erörtert, betrachtet man in der axiomatischen Quantenmechanik meist (spezielle) orthomodulare halbgeordnete Mengen als „Quantenlogiken", die das Verhalten eines physikalischen Systems bestimmen. Handelt es sich bei einer Quantenlogik um eine Boolesche Algebra, kann man davon ausgehen, dass das assoziierte System klassisch ist. Analog zum Fall Boolescher Algebren klassischer Wahrscheinlichkeitsräume, lassen sich auch die Elemente von Quantenlogiken als Ereignisse auffassen, was zum Begriff der Ereignissysteme führt.

Für den Rest der vorliegenden Arbeit bezeichne S stets eine (beliebig große) nichtleere Menge, die die Menge aller physikalischen Zustände eines physikalischen Systems **S** repräsentiert.

4.1 Spezielle Mengen von S-Wahrscheinlichkeiten

In diesem Abschnitt betrachten wir Strukturen, die mit quantenmechanischen Systemen assoziiert werden können und in der Literatur häufig als Quantenlogiken dienen, und deren Beziehung zueinander, wobei den im Folgenden eingeführten GFEs und Algebren von numerischen Ereignissen die größte Bedeutung zukommt.

Definition 4.1. ([7],[20],[24],[5],[8],[21],[30],[9],[76],[107]) Eine Funktion $p \in [0,1]^S$, das heißt, $p : S \to [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, wird *$S$-Wahrscheinlichkeit* oder *mehrdimensionale Wahrscheinlichkeit* genannt. Ist die Wertemenge von p auf $\{0,1\}$ beschränkt, dann nennt man p *zweiwertig*[2].
Ist $|S| = 1$, so stimmt der Begriff der S-Wahrscheinlichkeit mit dem üblichen Wahrscheinlichkeitsbegriff.
Eine *Eigenschaft* von **S** kann durch die Familie $(p(s), s \in S)$ von Wahrscheinlichkeiten, diese Eigenschaft zu haben, charakterisiert werden.

Die S-Wahrscheinlichkeiten 0 und 1 repräsentieren (die Wahrscheinlichkeiten für) das unmögliche und das sichere Ereignis und $1 - p$ (die Wahrscheinlichkeit für) das zu $p \in [0,1]^S$ komplementäre Ereignis, das heißt, das Ereignis, das genau dann eintritt, wenn p nicht eintritt.
Der Begriff der S-Wahrscheinlichkeit wird dadurch motiviert, dass $p \in P \subseteq [0,1]^S$ in der Praxis durch die Wahrscheinlichkeiten $p(s)$, dass ein Ereignis für ein physikalisches System, welches in unterschiedlichen Zuständen $s \in S$ beobachtet wird, eintritt, festgelegt wird. Das bedeutet, eine S-Wahrscheinlichkeit wird physikalisch als eine Menge (bzw. ein Vektor) von Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten eines bestimmten experimentellen Ereignisses, wenn das physikalische System jeweils in unterschiedlichen Zuständen ist, interpretiert, und S wird als die Menge dieser verschiedenen Zustände verstanden.

[1]siehe S.2
[2]In der Literatur sind neben dem Begriff der zweiwertigen (S)-Wahrscheinlichkeit auch die Ausdrücke *Valuation*, *dispersionsfreier Zustand* und *Wahrheitsbelegung* (auf Englisch: truth assignment) gängig.

Bemerkung 4.1. ([7],[20],[24],[5],[8],[21],[9],[107]) Ist S n-elementig, dann kann die S-Wahrscheinlichkeit p mit einem Vektor in $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden. Aus diesem Grund nennt man p dann auch eine *n-dimensionale Wahrscheinlichkeit* oder *n-wertige Wahrscheinlichkeit*.
Sind p und q zwei S-Wahrscheinlichkeiten, so bezeichnet $p+q$ bzw. $p-q$ ihre punktweise definierte Summe bzw. Differenz. Im Allgemeinen sind Summe und Differenz nicht unbedingt selbst S-Wahrscheinlichkeiten. Ist jedoch $p \in [0,1]^S$, so folgt per Definition, dass auch $1-p \in [0,1]^S$ ist, weshalb auf $[0,1]^S$ die antitone Operation $p' := 1-p$ wohldefiniert ist.

Definition 4.2. ([24],[7],[32],[9],[28],[23],[29]) Sei $P \subseteq [0,1]^S$. Da die Funktionen in P reellwertig sind, wird P mit der punktweise definierten Halbordnung von Funktionen, $p \leq q :\Leftrightarrow p(s) \leq q(s)\ \forall s \in S$, zu einer halbgeordneten Menge.
0 bzw. 1 bezeichnet in diesem Zusammenhang die konstante Funktion auf S, die nur die Werte 0 bzw. 1 annehmen kann, also das kleinste bzw. das größte Element aus $[0,1]^S$.
$(P, \leq, ')$ bezeichnet soeben definiertes poset zusammen mit der durch $p' := 1-p$ definierten antitonen Involution $'$.
Man schreibt $p < q$ für $p,q \in P$, wenn $p \leq q$ und $p(s) < q(s)$ für mindestens ein $s \in S$ ist. Analog dazu ist $p > q$ definiert.
Erfüllt eine S-Wahrscheinlichkeit $p \neq 0,1$, dass weder $p \leq p'$ noch $p' \leq p$ ist, so nennt man p *eigentlich* (auf Englisch: proper) oder *variierend* (auf Englisch: varying). [3]
Auch die Elemente 0 und 1 sind per Definition eigentlich.
Stellt $'$ auf dem poset $(P, \leq)$ von S-Wahrscheinlichkeiten eine Komplementbildung dar, das heißt, gilt für jedes $p \in P$, dass $p \wedge p' = 0$ und $p \vee p' = 1$ ist, dann nennt man P *komplementär*.

Beispiel 4.1. Für $|S| = 1$ sind 0 und 1 die einzigen eigentlichen S-Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel 4.2. $(P, \leq, ')$, $P \subseteq [0,1]^S$ ist zwar ein poset mit antitoner Involution, aber nicht zwingend orthokomplementär, auch nicht, wenn man fordert, dass 0 und 1 in P enthalten sind: Zum Beispiel gilt für $P := \{(0,0), (0.1,0.3), (0.9,0.7), (1,1)\}$, dass $(0.1,0.3)' = (0.9,0.7)$ und $(0.9,0.7)' = (0.1,0.3)$ ist, aber $(0.1,0.3) \wedge (0.9,0.7) = (0.1,0.3) \neq (0,0)$ und $(0.1,0.3) \vee (0.9,0.7) = (0.9,0.7) \neq (1,1)$.
Dies wird offensichtlich, indem man feststellt, dass es sich bei dem poset um eine Kette der Länge 3 handelt und man sich bewusst macht, dass es für Ketten der Länge $n \geq 2$ keine Orthogonalisierungen geben kann, weil zu den Elementen ungleich 0 und 1 keine Komplemente existieren. Das zu $(P, \leq, ')$ gehörige Hasse-Diagramm ist in Abbildung 4.1[4] zu sehen.

Die in Kapitel 3[5] eingeführten Definitionen übertragen sich in naheliegender Weise auf posets von S-Wahrscheinlichkeiten. Insbesondere verwenden wir folgende Bezeichnungen.

Definition 4.3. ([24],[20],[7],[8],[21],[23],[9]) Zwei Elemente $p,q \in P \subseteq [0,1]^S$ heißen *disjunkt*, wenn in P gilt, dass $p \wedge q = 0$ ist.
Zwei Elemente $p,q \in P$, für die $p+q \leq 1$ gilt, werden als *orthogonal* bezeichnet, in Zeichen $p \perp q$.
Drei Elemente $p,q,r \in P$, für die $p \perp q \perp r \perp p$ erfüllt ist, heißen *orthogonales Tripel* (p,q,r) von $(P, \leq, ')$. Gebräuchlich sind daneben auch die Bezeichnungen *orthogonales Dreieck* und *Dreieck* $\Delta(p,q,r)$.
Allgemeiner, heißt eine Menge $O \subseteq P$ *orthogonal*, wenn $p \perp q\ \forall p,q \in O$, $p \neq q$ gilt.
Man sagt, $p,q \in P$ werden *durch ein Dreieck geteilt*, wenn es in P ein orthogonales Tripel $\Delta(r,s,t)$ gibt, sodass $p = r+s$ und $q = s+t$ ist.

[3]Häufig, beispielsweise in [29], findet man für eigentliche S-Wahrscheinlichkeiten auch folgende äquivalente Definition: $[p \leq \frac{1}{2}$ oder $p \geq \frac{1}{2}] \Rightarrow p \in \{0,1\}$.
[4]siehe S.55
[5]siehe S.24

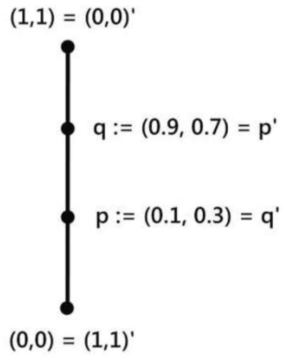

Abbildung 4.1: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.2, S.**??**: Die Abbildung zeigt ein poset von S-Wahrscheinlichkeiten, welches eine Kette der Länge 3 bildet.

Definition 4.4. ([32]) Sei P eine beliebige Menge von S-Wahrscheinlichkeiten und $P_n = \{p_1, \ldots, p_n\}$ eine Menge von paarweise verschiedenen eigentlichen S-Wahrscheinlichkeiten aus P. Dann nennt man p_i, p_j, $i < j$ *korreliert* (in P), wenn das Element $p_{ij} := p_i \wedge p_j$ in P existiert. Ebenso nennt man p_i, p_j, p_k, $i < j < k$ *korreliert* (in P), wenn das Element $p_{ijk} := p_i \wedge p_j \wedge p_k$ in P existiert. Diese Definitionen lassen sich auf Mengen von $n > 3$ paarweise verschiedenen eigentlichen S-Wahrscheinlichkeiten in naheliegender Weise verallgemeinern.

Aus Gründen des Realitätsbezugs ist man bei der Beschäftigung mit Quantenlogiken nicht an beliebigen Mengen von S-Wahrscheinlichkeiten interessiert, sondern beschränkt sich auf solche Mengen $P \subseteq [0,1]^S$, die nachfolgende Eigenschaften haben, wobei $+$ und $-$ wie bereits erwähnt als die Addition und Subtraktion von reellen Funktionen zu verstehen sind, je nach Kontext aber auch die Addition und Subtraktion von Zahlen bezeichnen können.

Definition 4.5. ([24],[8],[5],[21],[26],[31],[27],[25],[30],[29],[23],[28]) Erfüllt $P \subseteq [0,1]^S$ die Bedingungen

(i) $0 \in P$

(ii) $p \in P \Rightarrow p' := 1 - p \in P$

(iii) $[p, q \in P,\ p \perp q] \Rightarrow p + q \in P$,

dann nennt man P ein *GFE* (auf Englisch: generalized field of events). [6]
Erfüllt P zusätzlich zu obigen drei Bedingungen auch

(iv) $[p, q, r \in P, p \perp q \perp r \perp p] \Rightarrow p + q + r \leq 1$,

so sind für das poset mit antitoner Involution $(P, \leq, ')$, oder kürzer, für P, die Bezeichnungen *Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten*, *Algebra von numerischen Ereignissen* und *Raum von numerischen Ereignissen* gebräuchlich, wobei $\leq$ die in Definition 4.2[7] eingeführte natürliche Halbordnung auf der Menge der S-Wahrscheinlichkeiten bezeichnet. Jedes Element von P stellt ein sogenanntes *numerisches Ereignis* dar.
Eine Menge P von S-Wahrscheinlichkeiten, die die ersten beiden der obigen Bedingungen erfüllt und zusätzlich die Eigenschaft

[6]Da die geforderten Eigenschaften für $P = [0,1]^S$ erfüllt sind, ist die Menge aller GFEs jedenfalls nicht leer.
[7]siehe S.54

(iii') $[p, q \in P,\ p \wedge q = 0] \Rightarrow p + q \in P$

hat, nennt man *spezifisch*,
erfüllt sie stattdessen als dritte Bedingung

(iii") $[p, q, r \in P, p \perp q \perp r, p \wedge r = 0] \Rightarrow p + q + r \leq 1,$

dann nennt man sie *schwach strukturiert*, und genügt sie der stärkeren Bedingung

(iii"') $[p, q, r \in P,\ p \perp q \perp r,\ p \wedge r = 0] \Rightarrow p + q + r \in P,$

dann bezeichnet man sie als *strukturiert*.
Das kleinste GFE, das eine Menge $P \subseteq [0, 1]^S$ enthält, das heißt, den Schnitt aller P enthaltenden GFEs, nennt man das *von P erzeugte GFE*. Analog dazu bezeichnet man die kleinste Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, die $P \subseteq [0, 1]^S$ enthält, wenn eine solche existiert, als die *von P erzeugte Algebra von numerischen Ereignissen*.

Bemerkung 4.2. ([5],[27],[30],[29]) Die vierte Bedingung in Definition 4.5[8] lässt sich dadurch motivieren, dass in klassischen Ereignisräumen - also, wie in Abschnitt 2.1[9] ausgeführt, σ-Algebren, in denen Ereignisse durch Mengen repräsentiert und mengentheoretisch geordnet werden - für paarweise orthogonale Tripel A, B, C von Ereignissen gilt, dass $A \subseteq (B^c \cap C^c) = (B \cup C)^c$ ist, was für die zu A, B bzw. C gehörigen Wahrscheinlichkeitsfunktionen p, q bzw. r bedeutet, $p \leq 1 - (q + r)$.

Bildet eine Menge von S-Wahrscheinlichkeiten ein GFE, das keine Algebra von numerischen Ereignissen ist, kann dies ein Hinweis darauf sein, dass die S-Wahrscheinlichkeiten nicht ausreichend sind, um die Struktur der Ereignisse, die dem Experiment zugrunde liegen, zu bestimmen.

Beispiel 4.3. (vgl.[19]) An Definition 4.5[10] erkennt man sofort, dass jede Menge $P \subseteq [0, 1]^S$, die die ersten beiden Bedingungen erfüllt, und für die $(P \backslash \{0, 1\}, \leq)$ eine Antikette ist, eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten bildet, weil die dritte und vierte Bedingung in dem Fall trivialerweise erfüllt sind, zumal es keine orthogonalen Elemente gibt, wenn alle Elemente außer 0 und 1 paarweise unvergleichbar sind. Insbesondere bildet demnach eine zu MO_n (versehen mit der in der zweiten Bedingung definierten Orthogonalisierung) isomorphe Menge $P \subseteq [0, 1]^S$ eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten.

Bemerkung 4.3. ([24],[20],[19],[26]) Eine zu der in Definition 4.5[11] angeführten äquivalente Definition für Algebren von numerischen Ereignissen erhält man, wenn die dritte und vierte Bedingung gemeinsam durch die Bedingung

(v) $[p, q, r \in P, p \perp q \perp r \perp p] \Rightarrow p + q + r \in P$

ersetzt werden.

GFEs und daher auch Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten besitzen einige wichtige Eigenschaften, von denen wir häufig Gebrauch machen:

Proposition 4.1. *([21]) Für jedes GFE P gilt:*

(a) $\forall p, q \in P :\ p \leq q \Rightarrow q - p \in P$

---
[8] siehe S.55
[9] siehe S.2
[10] siehe S.55
[11] siehe S.55

(b) *Existiert mit $p, q \in P$ auch $p \vee q \in P$, dann gilt im Allgemeinen $p \vee q \not\leq p + q$, wobei die Summe unabhängig von ihrer Existenz in P gebildet wird.*

(c) *Sind alle Elemente von P eigentlich, das heißt, gilt für alle $p \in P \backslash \{0, 1\}$, dass p und $p' = 1 - p$ unvergleichbar sind, dann ist $'$ eine Orthogonalisierung.*

(d) *P ist genau dann eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, wenn*

$$\forall p, q \in P : \ p \perp q \Rightarrow p + q = p \vee q$$

gilt.

Beweis. (vgl.[21])

(a) $p \leq q \Leftrightarrow p \perp q' \Rightarrow p + q' = p + (1 - q) \in P \Rightarrow (p + (1 - q))' = q - p \in P$

(b) Betrachte $P = \{(0, 0), p := (\frac{1}{5}, \frac{4}{5}), p', q := (\frac{1}{10}, \frac{9}{10}), q', (1, 1)\}$[12]. Dann ist $p \vee q = (1, 1)$, aber $p + q = (\frac{3}{10}, \frac{17}{10}) \not\geq (1, 1)$.

(c) Seien $p, q \in P$. Wir prüfen die Orthogonalisierungen definierenden Eigenschaften aus Definition 3.11[13] für $'$ nach:

 (i) $p \leq q \Rightarrow q' = 1 - q \leq 1 - p = p'$

 (ii) $(p')' = 1 - (1 - p) = p$

 (iii) Sind p und p' unvergleichbar, dann ist $p \vee p' = 1$, denn ist $q \in P$, sodass $q \geq p, p'$ ist, dann folgt $q' \leq p \leq q$, weshalb wegen der vorausgesetzten Unvergleichbarkeit $q = 1$ sein muss. Analog dazu erhält man, dass $p \wedge p' = 0$ ist.

(d) „$\Rightarrow$“: Siehe Satz 4.13[14].
„$\Leftarrow$“: Zu zeigen ist, dass mit jedem orthogonalen Tripel auch dessen Summe in P liegt. Ist also $\Delta(p, q, r)$ ein orthogonales Tripel in P, dann ist nach Voraussetzung $p \vee q = p + q \in P$. Wegen $r \perp p, q \Leftrightarrow r \leq p', q'$, ist auch $r \leq p' \wedge q' = (p \vee q)'$, also $r \perp (p \vee q)$, woraus nach Voraussetzung auch $r + p + q = r + (p \vee q) = r \vee (p \vee q) \in P$ folgt.

□

Bemerkung 4.4. Am letzten Punkt in Proposition 4.1[15] erkennt man insbesondere, dass jedes GFE, dessen Elemente alle zweiwertig sind, eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten bildet. Wir werden dieses Resultat im Rahmen von Satz 4.26[16] auch noch präziser beweisen.

Bemerkung 4.5. ([30]) Jeder physikalische Zustand $s \in S$ einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P kann mit der Abbildung $m_s : [0, 1]^S \to [0, 1]$, $m_s(p) := p(s) \forall p \in P$ identifiziert werden, wie in Bemerkung 4.13[17] und Satz 4.13[18] dargelegt.

[12] Dieses GFE ist in Abbildung 4.5, S.62, dargestellt.
[13] siehe S.26
[14] siehe S.75
[15] siehe S.56
[16] siehe S.84
[17] siehe S.67
[18] siehe S.75

Bemerkung 4.6. (vgl.[23]) Jede Menge von S-Wahrscheinlichkeiten P, die den ersten beiden Anforderungen von Definition 4.5[19] gerecht wird, erfüllt die Gesetze von de Morgan, und zwar in dem Sinne, dass für $p, q \in P$, wenn $p \vee q \in P$ ist, dann auch $p' \wedge q'$ in P existiert und $(p \vee q)' = p' \wedge q'$ ist und wenn $p \wedge q \in P$ ist, dann auch $p' \vee q'$ in P existiert und $(p \wedge q)' = p' \vee q'$ ist, weil $'$ eine antitone Involution darstellt. Das bedeutet insbesondere, dass in jedem GFE und in jeder Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten sowie in jedem spezifischen, in jedem schwach strukturierten und in jedem strukturierten poset die Gesetze von de Morgan gültig sind.

Bemerkung 4.7. [20] Anhand der Definitionen erkennt man sofort, dass jede strukturierte halbgeordnete Menge von S-Wahrscheinlichkeiten sowohl schwach strukturiert, ein GFE als auch spezifisch ist.
Für Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten gilt auch die Umkehrung, dass Spezifität die Strukturiertheit nach sich zieht:
Ist ein Raum von numerischen Ereignissen $\tilde{P}$ spezifisch und sind $p, q, r \in \tilde{P}$, sodass $p \perp q \perp r$, $p \wedge r = 0$ ist, dann ist $p + r \in \tilde{P}$, weshalb $p + r \leq 1$, also $p \perp r$ sein muss, das heißt, $\Delta(p, q, r)$ ist ein orthogonales Tripel, woraus $p + q + r \in \tilde{P}$ folgt.
Zudem ist für Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten auch die Eigenschaft, schwach strukturiert zu sein, äquivalent dazu, strukturiert zu sein, weil jedes Tripel p, q, r mit $p \perp q \perp r$, $p \wedge r = 0$ einer schwach strukturierten Menge von S-Wahrscheinlichkeiten P^* wegen $p + r \leq 1$ ein orthogonales Tripel bildet und somit in P^* enthalten ist, wenn P^* eine Algebra von numerischen Ereignissen ist.
Ist P eine spezifische Menge und betrachtet man deren Definition, so sieht man, da aufgrund der Spezifität $[p, q \in P,\, p \wedge q = 0] \Rightarrow p + q \in P$ gilt, und $p + q$ nur in P liegen kann, wenn $p + q \leq 1$, also $p \perp q$, ist, dass auch $[p, q \in P,\, p \wedge q = 0] \Rightarrow p \perp q$ gilt, und dass somit jede spezifische Menge von S-Wahrscheinlichkeiten boolesch ist.
Die Umkehrung gilt im Allgemeinen zwar nicht, wie etwa Beispiel 4.4[21] zeigt, allerdings gilt sie in GFEs, weil für je zwei orthogonale Elemente deren Summe auch in dem GFE enthalten ist. Das heißt, jedes GFE ist genau dann boolesch, wenn es spezifisch ist. Insbesondere ist also auch jede Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten genau dann boolesch, wenn sie spezifisch (bzw. äquivalent dazu, (schwach) strukturiert) ist.
Ebenso erkennt man, wenn man in der Definition von schwach strukturierten posets von S-Wahrscheinlichkeiten $q = 0$ setzt, dass schwach strukturierte Mengen, und genauso strukturierte Mengen, stets boolesch sind.
Darüber hinaus ist jedes strukturierte poset von S-Wahrscheinlichkeiten genau dann eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, wenn es komplementär ist:
Ist $\overline{P}$ ein komplementäres strukturiertes poset von S-Wahrscheinlichkeiten, und $\Delta(p, q, r) \in \overline{P}$, dann ist wegen $r \leq p'$ und $p' \wedge p = 0$ auch $r \wedge p = 0$, woraus wegen der Strukturiertheit $p + q + r \in \overline{P}$ folgt. Ist $\overline{P}$ hingegen eine strukturierte Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, dann ist $\overline{P}$, wie wir in Satz 4.13[22] sehen werden, orthomodular und somit auch komplementär.
Zudem ist, wie weiter oben festgestellt, jede Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten genau dann (schwach) strukturiert (bzw. äquivalent, spezifisch), wenn sie boolesch ist.
Also sind die komplementären strukturierten posets von S-Wahrscheinlichkeiten genau die booleschen Algebren von numerischen Ereignissen.[23]

---

[19] siehe S.55
[20] Ein paar der in dieser Bemerkung dargelegten Aussagen sind auch in [25] zu finden.
[21] siehe S.58
[22] siehe S.75
[23] Aufgrund der Ähnlichkeit der Begriffe sei vor der Gefahr der Verwechslung von booleschen Algebren von numerischen Ereignissen mit Booleschen Algebren gewarnt: Erstere sind Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 4.4. $P = \{(0,0), (\frac{2}{6}, \frac{4}{6}), (\frac{4}{6}, \frac{2}{6}), (\frac{3}{6}, \frac{1}{6}), (\frac{3}{6}, \frac{5}{6}), (1,1)\}$ ist ein poset von S-Wahrscheinlichkeiten, das die ersten beiden Bedingungen aus Definitionen 4.5[24] erfüllt und einen Verband bildet. Die einzigen beiden Elemente (außer 0), die disjunkt zueinander sind, sind $(\frac{2}{6}, \frac{4}{6})$ und $(\frac{3}{6}, \frac{1}{6})$. Da $(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}) \leq (\frac{3}{6}, \frac{5}{6}) = (\frac{3}{6}, \frac{1}{6})'$ ist, sind alle disjunkten Elemente in P auch orthogonal zueinander, das heißt, P ist boolesch. P ist allerdings nicht spezifisch, weil $(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}) + (\frac{3}{6}, \frac{1}{6}) = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6}) \notin P$ ist. Da ein GFE laut Bemerkung 4.7[25] genau dann boolesch ist, wenn es spezifisch ist, kann es sich bei P um kein solches handeln, was man alternativ auch daran sieht, dass $(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}) \perp (\frac{3}{6}, \frac{1}{6})$ ist, aber $(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}) + (\frac{3}{6}, \frac{1}{6})$ nicht in P liegt.
Insbesondere bildet $'$ keine Orthogonalisierung auf P, weil $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}) \wedge (\frac{1}{2}, \frac{1}{6})' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}) \neq (0,0)$ ist.
Das Hasse-Diagramm von P ist in Abbildung 4.2[26] dargestellt.

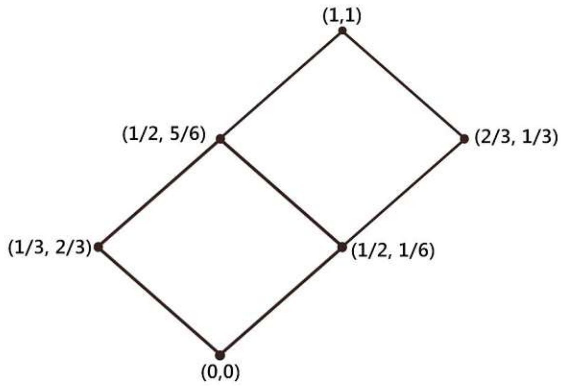

Abbildung 4.2: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.4, S.58: Die Abbildung zeigt eine Menge von S-Wahrscheinlichkeiten, welche boolesch ist, aber nicht spezifisch.

Beispiel 4.5. Die fünfelementige Menge $P = \{0, x, \frac{1}{2}, x', 1\}$ bildet für jedes Element $x \in \mathbb{R}$, das $0 < x < \frac{1}{2}$ erfüllt, ein schwach strukturiertes poset. Strukturiert ist P jedoch nur im Falle $x = \frac{1}{4}$:
Offensichtlich ist $0 \in P$ und für $p \in P$ auch $p' \in P$. Sind $p, q, r \in P$, sodass $p \perp q \perp r$ und $p \wedge r = 0$ ist, dann muss p oder r (oder beide) 0 sein. O.B.d.A. sei $r = 0$. Dann gilt wegen der Orthogonalität von p und q, dass $p + q + r = p + q \leq 1$ ist, was die schwache Strukturiertheit von P zeigt.
Für die Strukturiertheit muss allerdings $p + q \in P$ sein. Ist eines der beiden Elemente p, q gleich 1, dann ist das andere 0 und somit die Summe in P enthalten. Ist eines der beiden Elemente 0, dann ist ebenfalls die Summe jedenfalls in P enthalten. Sind $p, q \notin \{0, 1\}$, dann bleiben nur folgende Kombinationen, die $p \perp q$ erfüllen, übrig:
$p = q = x$; $p = x, q = x'$; $p = x, q = \frac{1}{2}$; $p = q = \frac{1}{2}$; $p = \frac{1}{2}, q = x$; $p = x', q = x$;
Sie erfordern in Folge, damit P strukturiert ist, dass $2x \in P$, $x + x' \in P$ bzw. $x + \frac{1}{2} \in P$ ist. Das einzige Element aus dem Intervall $(0, \frac{1}{2})$, das jede dieser drei Bedingungen erfüllt, ist $x = \frac{1}{4}$.
Selbst im Fall $P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ handelt es sich jedoch nicht um eine Algebra von numerischen Ereignissen, weil beispielsweise $\Delta(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein orthogonales Tripel, aber $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \notin P$ ist.
Das zu P gehörige Hasse-Diagramm ist in Abbildung 4.3[27] zu sehen.

(im Sinne von Definition 4.5, S.55), welche boolesch (im Sinne von Definition 3.14, S.32) sind. Es handelt sich bei ihnen jedoch nicht zwingend um Boolesche Algebren (im Sinne von Definition 3.15, S.32).

[24] siehe S.55
[25] siehe S.58
[26] siehe S.59
[27] siehe S.60

Abbildung 4.3: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.5, S.59: Das poset ist schwach strukturiert und genau dann strukturiert, wenn $x = \frac{1}{4}$ ist.

Die wichtigsten Resultate aus Bemerkung 4.7[28] halten wir nun noch gesondert fest:

Proposition 4.2.

(1) Für jede Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P gilt:
P ist boolesch $\Leftrightarrow$ P ist spezifisch $\Leftrightarrow$ P ist schwach strukturiert $\Leftrightarrow$ P ist strukturiert.

(2) Die komplementären strukturierten posets von S-Wahrscheinlichkeiten sind genau die booleschen (bzw. äquivalent dazu, infimum-getreuen[29]) Räume von numerischen Ereignissen.

(3) Jede strukturierte Menge von S-Wahrscheinlichkeiten ist schwach strukturiert, spezifisch und bildet ein GFE.

Beweis. Der Beweis der Aussagen ist in Bemerkung 4.7[30] enthalten. □

Korollar 4.3. *(vgl.[25],[28])*

(1) Jene Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten, welche nicht (schwach) strukturiert (bzw. äquivalent, nicht spezifisch) sind, sind genau die nicht-booleschen Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten.

(2) Ein strukturiertes poset von S-Wahrscheinlichkeiten bildet genau dann eine Algebra von numerischen Ereignissen (welche dann automatisch boolesch ist), wenn es komplementär ist.

(3) Jedes strukturierte poset von S-Wahrscheinlichkeiten, das nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, ist eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten.

Beweis. (vgl.[25])

(1) Die Aussage folgt aus der ersten in Proposition 4.2[31].

(2) „$\Leftarrow$“: Laut der zweiten Aussage in Proposition 4.2 ist jedes strukturierte poset von S-Wahrscheinlichkeiten, welches zudem komplementär ist, eine boolesche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten.

[28] siehe S.58
[29] Diese Äquivalenz werden wir in Satz 4.20, S.82, sehen.
[30] siehe S.58
[31] siehe S.60

„⇒“: Wie wir in Satz 4.13[32] noch sehen werden, ist jede Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten orthomodular, also auch orthokomplementär und insbesondere komplementär. Somit ist jedes strukturierte poset komplementär, wenn es eine Algebra von numerischen Ereignissen bildet.

(3) Die Aussage folgt aus der im zweiten Punkt in Kombination mit Proposition 3.3[33], wenn man feststellt, dass in strukturierten posets von S-Wahrscheinlichkeiten, deren Elemente nur die Werte 0 und 1 annehmen können, die Orthogonalität zweier Elemente nach sich zieht, dass deren Infimum 0 ist, weshalb solche posets stets auch komplementär sind.

□

Beispiel 4.6. Die Menge von S-Wahrscheinlichkeiten $P := \{(0.0), (0.1, 0.3), (0.5, 0.5), (0.9, 0.7), (1, 1)\}$ bildet kein GFE, weil zwar $(0.1, 0.3)$ und $(0.5, 0.5)$ Elemente von P sind und $(0.1, 0.3) + (0.5, 0.5) = (0.6, 0.8) < 1$ ist, aber $(0.6, 0.8)$ nicht in P liegt.
Da in P kein Paar von Elementen, das nicht $(0, 0)$ enthält, disjunkt ist, bildet P trivialerweise eine spezifische Menge von S-Wahrscheinlichkeiten.
Zudem handelt es sich um eine schwach strukturierte Menge, aber nicht um eine strukturierte, weil zwar $(0.1, 0.3) \perp (0.5, 0.5) \perp (0, 0)$, $(0.1, 0.3) \wedge (0, 0) = (0, 0)$ und $(0.1, 0.3) + (0.5, 0.5) + (0, 0) = (0.6, 0.8) \leq (1, 1)$ aber $(0.6, 0.8) \notin P$ ist.
Abbildung 4.4[34] zeigt das Hasse-Diagramm zu P. Es handelt sich dabei um eine Kette der Länge 4.

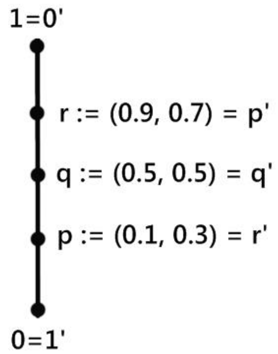

Abbildung 4.4: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.6, S.61: Die Abbildung zeigt ein poset von S-Wahrscheinlichkeiten, welches kein GFE bildet.

Beispiel 4.7. Die Menge $P = \{(0, 0), (0.2, 0.8), (0.8, 0.2), (0.1, 0.9), (0.9, 0.1), (1, 1)\}$ ist ein GFE und sogar eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten (wie man durch Überprüfung der erforderlichen Eigenschaften sofort sieht, wir aber in Beispiel 4.37[35] auch noch anders begründen werden).
Da zwar $(0.2, 0.8) \wedge (0.1, 0.9) = (0, 0)$, aber $(0.2, 0.8) + (0.1, 0.9) = (0.3, 1.7) \notin P$ ist, ist P nicht spezifisch.
Wegen $(0.2, 0.8) \perp (0, 0) \perp (0.1, 0.9)$, $(0.2, 0.8) \wedge (0.1, 0.9) = (0, 0)$ und $(0.3, 1.7) \not\leq (1, 1)$ ist P nicht schwach strukturiert und daher auch nicht strukturiert.

[32]siehe S.75
[33]siehe S.31
[34]siehe S.61
[35]siehe S.92

Im Hinblick auf Proposition 4.2[36], hätte man auch feststellen können, dass P ein nicht boolescher Raum von numerischen Ereignissen ist, indem man beispielsweise beobachtet, dass $(0.2, 0.8) \wedge (0.1, 0.9) = (0, 0)$, aber $(0.2, 0.8) \not\perp (0.1, 0.9)$ ist, um daraus zu schließen, dass P nicht strukturiert, nicht schwach strukturiert und nicht spezifisch sein kann.
Das Hasse-Diagramm zu P ist in Abbildung 4.5[37] zu sehen. An ihm erkennt man sofort, dass P den Verband MO_2 bildet.

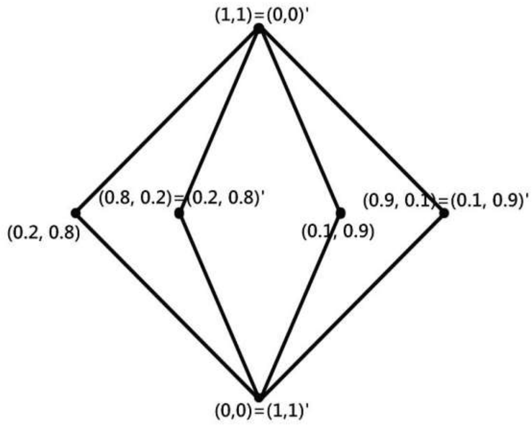

Abbildung 4.5: Hasse-Diagramm zu Beispielen 4.7, S.61, 4.37, S.92, und 4.54, S.103: Die Abbildung zeigt eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, welche nicht schwach strukturiert ist.

Beispiel 4.8. Sei $P := \{(0,0), (0.2, 0.4), (0.8, 0.6), (0.5, 0.5), (0.7, 0.9), (0.3, 0.1), (1,1)\}$ das in Abbildung 4.6[38] dargestellte poset von S-Wahrscheinlichkeiten. Dann erfüllt P alle Bedingungen, um ein GFE zu sein.
Außerdem ist P strukturiert, was man leicht erkennt, indem man feststellt, dass das einzige nichttriviale disjunkte Paar von Elementen aus $(0.2, 0.4) =: p$ und $(0.3, 0.1) =: r$ besteht und $p + (0,0) + r \in P$, $p + p + r \in P$, $p + (0.5, 0.5) + r \in P$, $p + r + r \in P$, $p \perp p' \not\perp r, p \not\perp r' \perp r, p \not\perp (1,1) \not\perp r$ ist.
Das strukturierte GFE P bildet jedoch keine Algebra von numerischen Ereignissen, wie man unter Verwendung des zweiten Punktes aus Korollar 4.3[39] sofort daran erkennt, dass die Elemente $(0.5, 0.5), p'$ und r' jeweils kein Komplement haben, P also eine nicht komplementäre strukturierte Menge von S-Wahrscheinlichkeiten ist.

Beispiel 4.9. Die Menge von S-Wahrscheinlichkeiten $P = \{(0,0,0,0), p := (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0), q := (\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}), r := (0, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}), s := (1, 0, \frac{1}{4}, 0), t := (0, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}), p', q', r', s', t', (1,1,1,1)\}$, deren Hasse-Diagramm in Abbildung 4.7[40] dargestellt ist, ist (nicht eindeutig) komplementiert, denn für jedes $x \in P$ bildet x' ein Komplement, aber beispielsweise sind sowohl p' als auch s' Komplemente von p.
P bildet eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten: Offensichtlich sind $0 \in P$ und $x \in P \Rightarrow x' \in P$ erfüllt. Die einzigen nicht trivialen orthogonalen Tripel sind (p, q, r), $(p, q, 0)$, $(q, r, 0)$, $(p, r, 0)$, (r, s, t), $(r, s, 0)$, $(s, t, 0)$ und $(r, t, 0)$. Wegen $p + q + r = r + s + t = (1,1,1,1), p + q =$

[36] siehe S.60
[37] siehe S.62
[38] siehe S.63
[39] siehe S.60
[40] siehe S.63

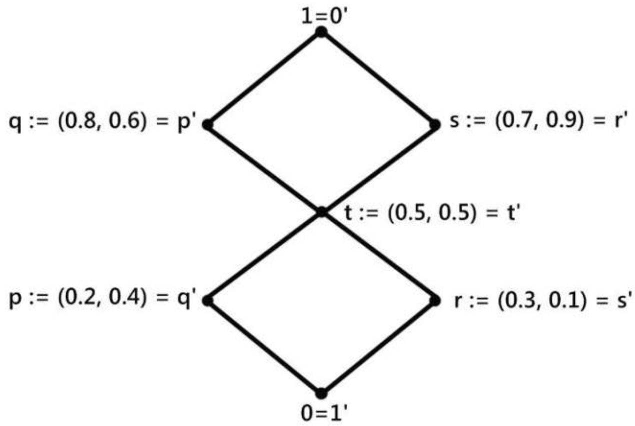

Abbildung 4.6: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.8, S.62: Die Abbildung zeigt ein strukturiertes GFE, welches keine Algebra von numerischen Ereignissen bildet.

$s+t=r', q+r=p', p+r=q', r+s=t'$ und $r+t=s'$ liegen deren Summen alle in P, weshalb P ein Raum von numerischen Ereignissen ist.
Um die Frage zu klären, ob P boolesch ist, kann man die Beobachtung treffen, dass $p \wedge s = 0$, aber $p \not\perp s$ ist.
Alternativ dazu, kann man feststellen, dass $p \perp r \perp s$ und $p \perp s = 0$, aber $p+r+s \nleq (1,1,1,1)$ ist, es sich also um ein komplementäres nicht strukturiertes poset handelt, sodass P der zweiten Aussage in Proposition 4.2[41] zufolge keine boolesche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten sein kann.

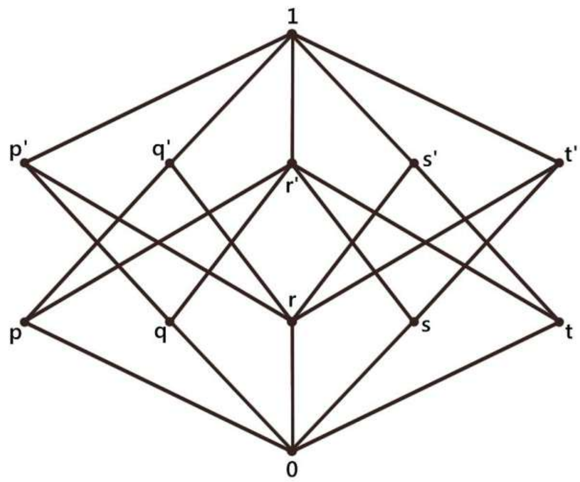

Abbildung 4.7: Hasse-Diagramm zu Beispielen 4.9, S.62, 4.10, S.63, 4.16, S.69, 4.53, S.102, 4.56, S.104, und 4.71, S.125: Die Abbildung zeigt einen nicht booleschen Raum von numerischen Ereignissen, der also insbesondere keine Boolesche Algebra ist.

Beispiel 4.10. Die Menge von S-Wahrscheinlichkeiten $P = \{(0,0,0,0), p := (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}), q := (\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}), r := (\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}), s := (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}), t := (\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}), p', q', r', s', t', (1,1,1,1)\}$ bildet keine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, aber ihr Hasse-Diagramm entspricht dem in Abbildung

[41] siehe S.60

4.7[42] der Algebra von numerischen Ereignissen aus Beispiel 4.9[43]:
Beispielsweise bildet (p, q, r) ein orthogonales Tripel, aber $p + q + r > (1, 1, 1, 1)$, also ist $p + q + r \notin P$ und die Bedingung, um ein Raum von numerischen Ereignissen sein zu können, ist nicht erfüllt.
P bildet nicht einmal ein GFE, weil $p \perp q$, aber $p + q = (\frac{3}{5}, 1, \frac{4}{5}, 1) \notin P$ ist. Zudem ist P weder boolesch (wegen $p \wedge s = 0$, $p \not\leq s$), daher auch nicht spezifisch, noch schwach strukturiert (wegen $p \perp q \perp r$, $p \wedge r = 0$, aber $p + q + r \not\leq 1$), daher auch nicht strukturiert.

Hat man es nicht mit beliebigen S-Wahrscheinlichkeiten zu tun, sondern nur mit eigentlichen, so gelten folgende Resultate, welche sich leicht zeigen lassen:

Satz 4.4. *(vgl.[23])*

(1) Jede spezifische Menge von variierenden S-Wahrscheinlichkeiten ist komplementär und bildet ein orthoposet.

(2) In jeder spezifischen Menge von variierenden S-Wahrscheinlichkeiten ist die Disjunktheit zweier Elemente äquivalent zu deren Orthogonalität.

(3) Die spezifischen Menge von variierenden S-Wahrscheinlichkeiten sind genau die komplementären booleschen GFEs.

(4) Die spezifischen Mengen von variierenden S-Wahrscheinlichkeiten sind genau die booleschen Räume von numerischen Ereignissen.

Beweis. Für den Beweis sei auf [23] verwiesen. □

Wie bereits erwähnt, kann jedes orthomodulare poset als Quantenlogik dienen, meist sind es jedoch Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten - welche, wie Satz 4.13[44] zeigen wird, spezielle orthomodulare posets bilden -, die dafür herangezogen werden, insbesondere solche, die orthomodulare Verbände bilden, was sehr häufig der Fall ist.
Der Raum von numerischen Ereignissen hat genau dann die Struktur einer Booleschen Algebra, wenn die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten klassischen physikalischen Messungen entspringen.
Bildet eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten keine Boolesche Algebra, so kann man also davon ausgehen, es mit einem nicht klassischen - sondern höchstwahrscheinlich quantenmechanischen - System zu tun zu haben. Ist ein vorliegendes GFE jedoch nicht einmal ein Raum von numerischen Ereignissen, kann dies darauf hinweisen, dass man noch nicht genug S-Wahrscheinlichkeiten betrachtet oder dass die vorliegenden Messwahrscheinlichkeiten nicht geeignet sind, um die Struktur der dem Experiment zugrundeliegenden physikalischen Ereignisse zu bestimmen. (vgl.[26],[30],[19],[5],[29],[24],[5],[20],[7],[8])

[42] siehe S.63
[43] siehe S.62
[44] siehe S.75

4.2 Ereignissysteme

Wie in Abschnitten 2.5[45] und 2.7[46] dargelegt, haben Paare $(\mathcal{E}, S)$ von Ereignissen und Zuständen eine gravierende Rolle in der Entwicklung des Gebiets der Quantenlogik gespielt. Da man dabei stets mit orthomodularen posets zu tun hat, werden (quantenmechanische) Ereignissysteme häufig als solche definiert, so auch im Folgenden.
Von enormer Bedeutung ist vor allem ihr Zusammenhang zu Algebren von numerischen Ereignissen, welchen wir in Satz 4.13[47] kennenlernen werden.

Definition 4.6. ([7],[9],[28]) Unter einem *Ereignissystem* versteht man ein 5-Tupel $(L, \leq, ', 0, 1)$, abgekürzt L, bestehend aus einer Menge L, einer Halbordnung $\leq$ auf L, und einer Orthokomplementbildung $' : L \to L, a \mapsto a'$, das eine orthomodulare halbgeordnete Menge bildet. Die Elemente von L heißen *Ereignisse*.
Ein *klassisches Ereignissystem* ist ein Ereignissystem, das eine Boolesche Algebra, das heißt, einen distributiven komplementären Verband, bildet.

Sowohl orthomodulare posets, orthomodulare Verbände und konkrete Quantenlogiken als auch Boolesche Algebren können als (spezielle) Ereignissysteme aufgefasst werden.

Beispiel 4.11. ([7])Ist M eine nichtleere Menge, so bildet $(2^M, \subseteq, ^c)$, wobei 2^M die Potenzmenge von M bezeichnet, $\subseteq$ die mengentheoretische Inklusion und ^{c} das mengentheoretische Komplement, ein klassisches Ereignissystem, wie in Anbetracht von Beispiel 3.14[48] klar ist.

Beispiel 4.12. ([7],[10])Ist H ein separabler Hilbertraum über $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder den Quaternionen, so bildet die Menge $L(H)$ aller abgeschlossenen Unterräume von H zusammen mit der mengentheoretischen Inklusion und der Orthogonalraumbildung ein Ereignissystem, welches nicht klassisch ist, wie in Abschnitt 2.4[49] bereits ausgeführt.

Definition 4.7. ([7],[19],[63],[9],[4],[62]) Sei $(L, \leq, ', 0, 1)$ ein Ereignissystem und S eine nichtleere Menge.

1. Dann ist ein *S-Wahrscheinlichkeitsmaß* auf L als eine Abbildung $p : L \to [0,1]^S$ definiert, die folgende Eigenschaften hat:
   (i) $p(0) = 0$, $p(1) = 1$
   (ii) $p(a') = 1 - p(a)\ \forall a \in L$
   (iii) $p(a_1 \vee a_2 \vee \ldots a_n) = p(a_1) + p(a_2) + \ldots + p(a_n)$, wenn $a_i \leq a_j'$ ($\Leftrightarrow$: $a_i \perp a_j$) für $i \neq j$[50]
   Falls S einelementig ist, nennt man ein S-Wahrscheinlichkeitsmaß p auch einen *Zustand*.
2. Sei p ein S-Wahrscheinlichkeitsmaß auf L. Dann wird dieses als *vollständig* (auf Englisch: complete) bezeichnet, wenn für alle $a, b \in L$ gilt, $a \leq b \Leftrightarrow p(a) \leq p(b)$.

[45] siehe S.13
[46] siehe S.18
[47] siehe S.75
[48] siehe S.47
[49] siehe S.9
[50] Betrachtet man bewusst den Fall unendlich vieler Ereignisse, so beschäftigt man sich nicht mit bloß orthomodularen, sondern σ-orthomodularen posets. In dem Fall kann man die dritte Bedingung in der Definition des S-Wahrscheinlichkeitsmaßes auf abzählbare Mengen ausdehnen und man erhält die gewöhnliche Terminologie für Wahrscheinlichkeitsmaße. Darum könnte die gesamte Theorie auch für σ-orthomodulare posets und σ-Maße formuliert werden. Weil für die Praxis aber eigentlich nur der Fall von endlichen Mengen von Ereignissen und S-Wahrscheinlichkeiten und deren klassische oder nicht-klassische Einordnung von Relevanz ist, genügt meist die schwächere Definition. (vgl.[7])

3. Motiviert durch den Zustandsbegriff für S-Wahrscheinlichkeitsmaße im Falle einelementiger S, bezeichnet man auch jede Abbildung $m : L \to [0,1]$, die die drei von S-Wahrscheinlichkeitsmaßen verlangten Eigenschaften hat, als *Zustand* auf L.
   Allgemeiner nennt man eine Abbildung $m : L \to [0,1]$ auf einer halbgeordneten Menge $(L, \leq)$, die $a \leq b \Rightarrow m(a) \leq m(b)$ erfüllt, einen *Zustand* auf L.

4. Eine Menge M von Zuständen auf einem poset $(L, \leq)$ wird als *voll* (auf Englisch: full) oder *ordnend* (auf Englisch: ordering) bezeichnet, wenn gilt: $\forall a, b \in L : [m(a) \leq m(b) \forall m \in M] \Rightarrow [a \leq b]$.
   Existiert auf einem poset L eine volle Menge von Zuständen, so sagt man, L *erlaubt eine volle Menge von Zuständen* (auf Englisch: admits a full set of states).
   Man nennt M *stark ordnend* (auf Englisch: strongly ordering) oder *ordnungsbestimmend* (auf Englisch: order determining), wenn gilt: $\forall a, b \in L : [a \not\leq b \Rightarrow \exists m \in M : m(a) = 1, m(b) \neq 1]$.[51]
   Wenn gilt, $\forall a, b \in L : [a \neq b \Rightarrow \exists m \in M : \ m(a) \neq m(b)]$, so bezeichnet man M als *punkttrennend*.

5. Einen Zustand, der nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, nennt man *zweiwertig* (auf Englisch: two-valued).

6. Ist $(L, \leq)$ ein poset und M eine volle Menge von Zuständen $m : L \to [0,1]$, dann erhält man die *Dualmenge* M^* als die Menge aller Funktionen $a^* : M \to [0,1]$, definiert durch $a^*(m) := m(a) \forall m \in M$.

Bemerkung 4.8. Manchmal wird in der Definition von S-Wahrscheinlichkeitsmaß bzw. Zustand anstatt $p(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n) = p(a_1) + p(a_2) + \ldots + p(a_n)$ für jede Folge von n paarweise orthogonalen Elementen aus L nur $p(a_1 \vee a_2) = p(a_1) + p(a_2)$ für orthogonale $a_1, a_2 \in P$ gefordert. Diese Definition ist allerdings äquivalent, denn auch aus ihr folgt die Gültigkeit der Bedingung für $n \geq 3$ Elemente:
Angenommen, für jede Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von n paarweise orthogonalen Elemente aus L gilt $p\left(\bigvee_{i=1}^n a_i\right) = p(a_1) + \ldots + p(a_n)$. Sei nun $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ eine beliebige Folge von $n+1$ paarweise orthogonalen Elementen aus L. Da $a_1 \perp a_2$ ist, ist $a_1 \vee a_2 \in L$ und für jedes $i \in \{3, 4, \ldots, n+1\}$ ist wegen $a_1 \leq a_i'$, $a_2 \leq a_i'$ auch $a_1 \vee a_2 \leq a_i'$ und somit $a_1 \vee a_2 \perp a_i$. Darum ist $a_1 \vee a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ eine Folge von n paarweise orthogonalen Elementen und mit der Induktionsvoraussetzung folgt $p\left(\bigvee_{i=1}^{n+1} a_i\right) = p\left((a_1 \vee a_2) \vee \bigvee_{i=3}^{n+1} a_i\right) = p(a_1 \vee a_2) + p(a_3) + p(a_4) + \ldots + p(a_{n+1}) = p(a_1) + p(a_2) + \ldots + p(a_{n+1})$.

Bemerkung 4.9. (vgl.[7]) Wichtig ist in der Definition von Vollständigkeit vor allem die Implikation
$p(a) \leq p(b) \Rightarrow a \leq b$, da die andere Richtung ohnehin für jedes S-Wahrscheinlichkeitsmaß p erfüllt ist, wie man unter Verwendung der Tatsache, dass L orthomodular ist und somit das Supremum zweier orthogonaler Elemente stets auch in L liegt und das orthomodulare Gesetz gilt, leicht sieht:
$a, b \in L$, $a \leq b \Rightarrow a \perp b' \Rightarrow a \vee b' \in L$ und $a \leq (a \vee b') \Rightarrow a \perp (a \vee b')'$, woraus unter Verwendung der Orthomodularität von L sodann $p(b) = p(a \vee (a \vee b')') = p(a) + p((a \vee b')') \geq p(a)$ folgt.

Bemerkung 4.10. Da, wie analog zu der Ausführung in Bemerkung 4.9[52] zu sehen, für jeden

[51]Der Begriff „ordnungsbestimmend“ wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet. So wird zum Beispiel in [43] unter einer ordnungsbestimmenden Menge von Zuständen das verstanden, was wir in der vorliegenden Arbeit eine volle Menge von Zuständen nennen.
[52]siehe S.66

Zustand m auf einem Ereignissystem $(L, \leq, ')$ erfüllt ist, dass $a \leq b \Rightarrow m(a) \leq m(b)\, \forall a, b \in L$ gilt, stellt m auch einen Zustand auf dem poset $(L, \leq)$ dar.

Beispiel 4.13. Offensichtlich lässt sich für jedes vollständige S-Wahrscheinlichkeitsmaß aus den Komponentenfunktionen seines Wertebereichs eine volle Menge von Zuständen bilden. Umgekehrt kann man basierend auf jeder vollen Menge von Zuständen ein vollständiges S-Wahrscheinlichkeitsmaß definieren.

Bemerkung 4.11. (vgl.[62]) Wie man leicht erkennt, ist die Bedingung an eine Menge von Zuständen, stark ordnend zu sein, stärker, als voll zu sein, und letztere wiederum impliziert, dass die Menge punkttrennend ist. Für zweiwertige Zustände sind die drei Eigenschaften äquivalent.

Beispiel 4.14. Jedes Ereignissystem, das eine Boolesche Algebra ist, erlaubt eine volle Menge von Zuständen.
(Diese Tatsache folgt aus Satz 4.21[53], welchen wir später noch kennenlernen werden. Für einen direkten Beweis sei auf [62] verwiesen.)

Beispiel 4.15. ([53]) Der Hilbert-Verband erlaubt eine volle Menge von Zuständen.

Bemerkung 4.12. (vgl.[63]) Während die Zustände $m \in M$ im Sinne von Definition 4.7[54] insofern von den Ereignissen eines Ereignissystems L abhängen, als dass sie jedem $a \in L$ die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens, wenn das System in dem jeweiligen mit m korrespondierenden physikalischen Zustand ist, zuordnen, korrespondieren die Elemente $a^* \in M^*$ mit den Ereignissen $a \in L$ und hängen von den Zuständen $m \in M$ ab. Für eine volle Menge von Zuständen M^* ist die Struktur von $(M^*, \leq, ')$ sogar repräsentativ für die von $(L, \leq, ')$:
Die Dualmenge M^* einer vollen Menge von Zuständen M ist durch die natürliche Ordnung von Funktionen geordnet, das heißt, $a^* \leq b^* :\Leftrightarrow a^*(m) \leq b^*(m)\, \forall m \in M$.
Da M voll ist, gilt $a^* \leq b^* \Leftrightarrow a^*(m) \leq b^*(m)\, \forall m \in M \Leftrightarrow m(a) \leq m(b)\, \forall m \in M \Leftrightarrow a \leq b$, darum ist durch $a \mapsto a^*$ ein Isomorphismus von $(L, \leq)$ nach $(M^*, \leq)$ gegeben. Zudem werden Orthokomplemente erhalten, denn es gilt $\forall m \in M : (a^*(m))' = (m(a))' = (1 - m(a)) = m(a') = (a')^*(m)$, es handelt sich bei $a \mapsto a^*$ also sogar um einen Isomorphismus von $(L, \leq, ')$ nach $(M^*, \leq, ')$.
Die Repräsentation von L durch die Dualmenge M^* ist nützlich, weil für jedes Element $m \in M$ durch die Abbildung $M^* \to [0,1]$, $a^* \mapsto a^*(m) =: \varphi^m(a^*)$ ein Zustand φ^m auf M^* definiert wird, was insbesondere den Zusammenhang zu Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten herstellt, wie Satz 4.13[55] zeigen wird.

Die Ähnlichkeit von S-Wahrscheinlichkeiten und S-Wahrscheinlichkeitsmaßen kann im ersten Moment zu Verwirrung führen, deshalb ist es nützlich, die physikalische Interpretation im Hinterkopf zu behalten:

Bemerkung 4.13. (vgl.[7],[9]) Per Definition ordnet ein S-Wahrscheinlichkeitsmaß p auf L den Ereignissen aus L S-Wahrscheinlichkeiten zu. Für $a \in L$, $s \in S$ ist somit $p(a)$ eine S-Wahrscheinlichkeit und $p(a)(s)$ die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis a eintritt, wenn das physikalische System **S** im physikalischen Zustand s ist.
Für festgehaltenes $s \in S$ erhält man aus dem S-Wahrscheinlichkeitsmaß bzw. Zustand $p : L \to [0,1]^{\{s\}}$ im Sinne des ersten Punktes von Definition 4.7[56] durch die Abbildung $m_s : L \to [0,1]$, $a \mapsto p(a)(s) =: m_s(a)$ einen Zustand im Sinne von Punkt drei der Definition.

Der erste Teil vorangegangener Bemerkung, welcher besagt, dass die Bilder von S-Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Ereignissystemen S-Wahrscheinlichkeiten sind, wirft die Frage auf, wann

[53] siehe S.82
[54] siehe S.65
[55] siehe S.75
[56] siehe S.65

sich umgekehrt eine gegebene Menge von S-Wahrscheinlichkeiten als Bild eines S-Wahrscheinlichkeitsmaßes auffassen lässt. Dies führt zu folgender Definition:

Definition 4.8. ([7],[9]) Man sagt, dass eine Menge P von S-Wahrscheinlichkeiten *repräsentierbar* ist, wenn es ein Ereignissystem L und ein S-Wahrscheinlichkeitsmaß m auf L gibt, sodass $P \subseteq \{m(a) : a \in L\}$ ist.
Die Einbettung $\varphi : P \to \{m(a) : a \in L\}$ bzw. das Tripel (L, m, φ) nennt man *Repräsentation für* P.
Eine Menge von S-Wahrscheinlichkeiten P heißt *klassisch repräsentierbar* oder einfach *klassisch*, wenn es eine Repräsentation (L, m, φ) für P gibt, in der L ein klassisches Ereignissystem, also eine Boolesche Algebra, ist.

Bemerkung 4.14. ([7],[9]) Die Einbettung φ in Definition 4.8[57] ist ordnungs- und komplementerhaltend und bildet somit einen orthoposet-Isomorphismus. Das zeigt insbesondere, dass S-Wahrscheinlichkeiten intrinsisch die relationale Struktur zwischen den von ihnen beschriebenen Objekten widerspiegeln.

Wie wir sehen werden[58], sind die klassisch repräsentierbaren S-Wahrscheinlichkeiten genau die numerischen Ereignisse, welche in einer Booleschen Algebra enthalten sind. Die klassische Repräsentierbarkeit bietet jedoch einen Zugang zur Charakterisierung von klassischen Wahrscheinlichkeiten, welcher nicht explizit von der Struktur von numerischen Ereignissen Gebrauch macht. Insofern stellt die klassische Repräsentierbarkeit das Pendant zur Booleschen Charakterisierung dar. (vgl.[7])

[57] siehe S.68
[58] Die Feststellung folgt direkt aus Kombination der Sätze 4.72, S.117, und 4.70, S.116.

4.3 Grundlegende Resultate zu Algebren von numerischen Ereignissen

4.3.1 Wichtige Begriffe im Kontext von numerischen Ereignissen

Für Algebren von numerischen Ereignissen führen wir zu den in Kapitel 3[59] kennengelernten analoge Definitionen ein. Betrachtet man Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten als orthomodulare posets, was, wie wir in Satz 4.13[60] sehen werden, möglich ist, so fallen nachfolgende Definitionen mit den bereits eingeführten zusammen.

Definition 4.9. ([32],[27],[8]) Sei P eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten. Eine Teilmenge $B \subseteq P$ von numerischen Ereignissen heißt *Boolesche Teilalgebra von* P, wenn für alle $p, q \in B$ das Supremum $p \vee q$ und das Infimum $p \wedge q$ in P existieren und auch in B liegen, mit jedem $p \in B$ auch $p' = 1 - p$ zu B gehört, und $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ eine Boolesche Algebra ist.
Eine mindestens zweielementige Teilmenge X einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P heißt *Boolesch* (auf Englisch: Boolean)[61], wenn es eine Boolesche Teilalgebra von P gibt, die X enthält.
Ist X eine Menge von $n \geq 2$ paarweise verschiedenen (eigentlichen) S-Wahrscheinlichkeiten, dann sagt man, X ist *einbettbar* in einen Raum von numerischen Ereignissen P, wenn X ordnungsisomorph zu einer Teilmenge von P ist.
Eine Menge von mindestens zwei S-Wahrscheinlichkeiten, die in eine Boolesche Teilalgebra eines Raumes von numerischen Ereignissen P einbettbar ist, nennt man *Boolesch einbettbar* oder auch einfach *Boolesch*.

Bemerkung 4.15. (vgl.[7]) Wie in Bemerkung 3.12[62] bereits hervorgehoben, sind das Infimum und das Supremum zweier Elemente einer Booleschen Teilalgebra einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten unabhängig von dieser Teilalgebra und haben somit eine universelle Bedeutung. Außerdem gelten in Booleschen Teilalgebren die Distributivgesetze für jedes Tripel von Elementen. Das führt dazu, dass man in Booleschen Teilalgebren von numerischen Ereignissen die Konjunktion $p \wedge q$ bzw. die Disjunktion $p \vee q$ zweier S-Wahrscheinlichkeiten p, q wie im klassischen Fall als die (Wahrscheinlichkeiten der) Ereignisse „p und q“ bzw. „p oder q“ interpretieren kann. Das Gleiche gilt für die Negation p', welcher die Bedeutung „nicht p“ zugeschrieben wird.

Beispiel 4.16. Die Menge von eigentlichen S-Wahrscheinlichkeiten aus Beispiel 4.10[63] ist einbettbar in die Algebra von numerischen Ereignissen aus Beispiel 4.9[64], wie man sofort daran erkennt, dass die jeweiligen Hasse-Diagramme übereinstimmen, nämlich dem in Abbildung 4.7[65] entsprechen.

Um bei der Trennung von klassischen Logiken und Quantenlogiken von der Theorie der Räume von numerischen Ereignissen Gebrauch machen zu können, interessieren wir uns dafür, wann gegebene S-Wahrscheinlichkeiten als Elemente eines Raumes von numerischen Ereignissen aufgefasst werden können, darum wird uns die Definition der Einbettbarkeit nützlich sein.

[59] siehe S.24
[60] siehe S.75
[61] Die hier definierten Booleschen Teilmengen und die booleschen (im Sinne von infimum-getreuen) Teilmengen stimmen begrifflich zwar bis auf die Groß- bzw. Kleinschreibung überein, sind aber mathematisch nicht äquivalent.
[62] siehe S.33
[63] siehe S.63
[64] siehe S.62
[65] siehe S.63

Ist eine Menge von S-Wahrscheinlichkeiten zudem sogar Boolesch, so deutet das darauf hin, dass man es mit einem klassischen physikalischen System zu tun hat. Ist sie es hingegen nicht, so kann man davon ausgehen, dass ein quantenmechanisches System vorliegt. (vgl.[32])

Definition 4.10. ([32],[27])Man sagt, zwei Elemente p, q einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P *kommutieren* und schreibt $p\,C\,q$, wenn $\{p, q\}$ eine Boolesche Teilalgebra von P erzeugt, das heißt, wenn $\{p, q\}$ Boolesch ist.

Bemerkung 4.16. Wie schon für orthomodulare posets festgestellt, kommutieren zwei vergleichbare Elemente einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten stets.

Nachfolgend werden wir im Zusammenhang mit der Relation des Kommutierens zudem folgende Schreibweisen gebrauchen:

Definition 4.11. ([27]) Seien p, r, s, t, q, a, b Elemente einer Algebra von numerischen Ereignissen. Dann verwenden wir folgende Notationen:

1. $p\,C(a)\,q \;:\Leftrightarrow\; a \le p \le a + q \le 1$
2. $p\,C(b, a)\,q \;:\Leftrightarrow\; [p \perp b \perp a \perp q,\ a \le p,\ b \le q,\ p + b = a + q\,(= p \vee b = a \vee q)]$
3. $p\,C(r, s, t)\,q \;:\Leftrightarrow\; [r \perp s \perp t \perp r,\ p = r + s\,(= r \vee s),\ q = s + t\,(= s \vee t)]$

Bemerkung 4.17. Offensichtlich bedeutet $p\,C(r, s, t)\,q$ genau, dass p und q durch das orthogonale Dreieck $\Delta(r, s, t)$ geteilt werden.

Beispiel 4.17. Wir betrachten die in Abbildung 4.8[66] dargestellte Algebra von numerischen Ereignissen - dass P eine solche ist, sieht man zum Beispiel mit der noch folgenden Proposition 4.28[67] - $P = \{0, p, q, r, s, p', q', r', s', 1\}$, wobei $p = (1, 0, 0), q = (0, 1, 0), r = (0, 0, 1)$ und $s = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ sei. Für diese gilt etwa $q'\,C(p)\,r$, $q'\,C(0, p)\,r$ sowie $q'\,C(p, r, 0)\,r$ und umgekehrt $r\,C(0)\,q'$, $r\,C(p, 0)\,q'$ und $r\,C(0, r, p)\,q'$. Jedoch gibt es beispielsweise kein Element $x \in P$, das $s\,C(x)\,r$ erfüllt, weil die einzigen beiden Elemente x, die $x \le s$ erfüllen, 0 und s sind, aber $s + r \not\le 1$ und $s \not\le 0 + r$ ist.

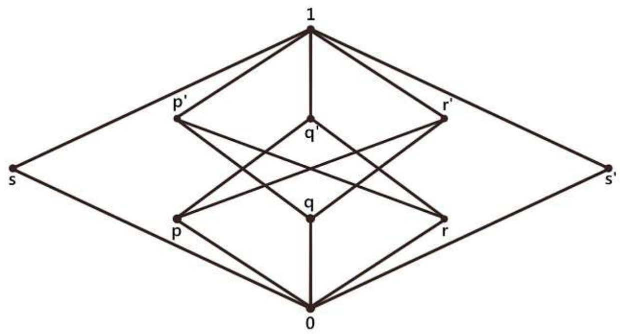

Abbildung 4.8: Hasse-Diagramm der Algebra von numerischen Ereignissen P aus Beispielen 4.17, S.70, 4.52, S.101, 4.55, S.104, 4.57, S.105, 4.62, S.116, und 4.69, S.124: Unter anderem mit Korollar 4.79[69] sieht man, dass P keine Boolesche Algebra ist.

[66]siehe S.70
[67]siehe S.84

4.3.2 Eigenschaften von Algebren von numerischen Ereignissen

Da unser Hauptziel ist, notwendige und hinreichende Bedingungen anzugeben, wann es sich bei Algebren von numerischen Ereignissen um Boolesche Algebren handelt, untersuchen wir zunächst Eigenschaften von Algebren von numerischen Ereignissen und deren Elementen. Zumal Boolesche Algebren laut Satz 3.7[70] Verbände sind, in denen je zwei Elementen miteinander kommutieren, sind für uns die Relation des Kommutierens und die Eigenschaft der Verbandsgeordnetheit von besonderem Interesse.
Darüber hinaus lernen wir eine Darstellung von Elementen einer endlichen Algebra von numerischen Ereignissen als Summe von Atomen kennen, mit deren Hilfe wir später eine Charakterisierung für Boolesche Algebren angeben können.

Bemerkung 4.18. (vgl.[8],[5],[63],[25],[32],[20]) Ist P eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, dann kann für $p, q \in P$ das Supremum $p \vee q$ in $(P, \leq)$ existieren, während aber $p + q \not\leq 1$ ist.
Wie Satz 4.13[71] zeigen wird, gilt jedoch für jede Algebra von numerischen Ereignissen P, dass mit jeder endlichen Folge von paarweise orthogonalen Elementen auch deren Summe darin enthalten ist und dem Supremum dieser Elemente gleicht, das heißt,
$[p_1, \ldots, p_n \in P,\ p_i \perp p_j,\ 1 \leq i \neq j \leq n] \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} p_i = p_1 + \ldots + p_n \in P.$
Sind p, q Elemente einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P, sodass $p \leq q$ gilt, dann ist, wie wir aus Proposition 4.1[72] wissen, $q - p \in P$ und wie wir im Beweis von Satz 4.13 sehen werden, gilt $q - p = q \wedge p'$.
Außerdem gilt für numerische Ereignisse, dass deren Orthogonalität auch deren Disjunktheit impliziert, da es sich bei Algebren von numerischen Ereignissen, wie wir in Satz 4.13 sehen werden, um spezielle orthomodulare posets handelt, in denen diese Implikation, wie in Bemerkung 3.9[73] festgestellt, erfüllt wird.
Weiters enthält jede Algebra von numerischen Ereignissen P für $u \in [0,1]^S$ mit $p \in P$ und $p - u \in P$ stets auch u, denn sind $p \in P$ und $q := p - u \in P$, dann ist $q \leq p$ und daher $p - q = u \in P$.

Folgende Proposition liefert eine alternative Definition von Algebren von numerischen Ereignissen.

Proposition 4.5. *([20]) $P \subseteq [0,1]^S$ ist genau dann eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $1 \in P$

(b) $[p, q \in P,\ p \leq q] \Rightarrow q - p \in P$

(c) $[(p, q, r)$ *ist ein orthogonales Tripel* $] \Rightarrow [p + q + r \leq 1]$

Beweis. Für den Beweis sei auf [20] verwiesen. □

Proposition 4.6. *([20],[32],[29])Numerische Ereignisse sind stets variierend, das heißt, ist $P \subseteq [0,1]^S$ eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten und $p \in P \backslash \{0,1\}$, dann kann weder $p \leq \frac{1}{2}$ noch $p \geq \frac{1}{2}$ sein.*

Beweis. (vgl.[29]) Angenommen, für das numerische Ereignis p einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten gilt $p \leq \frac{1}{2}$. Dann ist (p, p, p') ein orthogonales Tripel und somit $p + p + p' \leq 1$,

[70] siehe S.37
[71] siehe S.75
[72] siehe S.56
[73] siehe S.31

weshalb $p = 0$ sein muss. Analog sieht man, dass für $p \geq \frac{1}{2}$ stets $p = 1$ sein muss.
Alternativ erhält man die Behauptung auch aus der später noch bewiesenen Tatsache, dass Algebren von numerischen Ereignissen spezielle orthokomplementäre posets sind, in Verbindung mit der letzten Feststellung in Bemerkung 3.3[74]. □

Bemerkung 4.19. Proposition 4.6[75] lässt sich nicht auf GFEs verallgemeinern: Die Elemente von GFEs sind im Allgemeinen nicht zwingend variierend, wie wir etwa in Beispiel 4.8[76] gesehen haben.

Beispiel 4.18. Keine Algebra von numerischen Ereignissen kann die Form des in Abbildung 3.2[77] dargestellten orthomodularen Pentagon-Verbands aus Beispiel 3.3[78] haben, weil unter jeder antitone Involution auf ihm (die Bezeichnung aus der Abbildung verwendend) $w' := w$ sein müsste und sie daher ein nicht variierendes Element umfassen würde.

Beispiel 4.19. (vgl.[28]) Die Menge $P = \{(0,0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0), (0,1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1,0), (\frac{1}{2}, 1), (1, \frac{1}{2}), (1,1)\}$ bildet zwar ein GFE und ist, wie man an dem in Abbildung 4.9[79] dargestellten Hasse-Diagramm sofort erkennt, sogar verbandsgeordnet, allerdings handelt es sich bei ihr um keine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, wie man in Anbetracht von Proposition 4.6[80] daran erkennt, dass P fünf Elemente umfasst, welche nicht eigentlich sind.

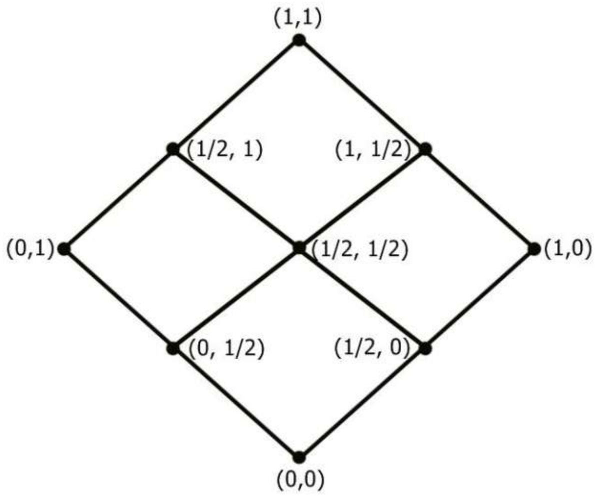

Abbildung 4.9: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.19, S.72: Das GFE umfasst nicht eigentliche Elemente und kann daher keine Algebra von numerischen Ereignissen sein.

Bemerkung 4.20. ([20]) Aus Proposition 4.6[81] folgt sofort, dass für $|S| = 1$ die einzige Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten die zweielementige Boolesche Algebra, die nur aus den konstanten Funktionen 0 und 1 besteht, ist.

In der Praxis kann man in der Regel durch das Hinzufügen zusätzlicher experimenteller Messwahrscheinlichkeiten in bislang noch nicht betrachteten Zuständen und damit einhergehender

74 siehe S.27
75 siehe S.71
76 siehe S.62
77 siehe S.28
78 siehe S.27
79 siehe S.72
80 siehe S.71
81 siehe S.71

Vergrößerung der Mächtigkeit der Zustandsmenge S und der Dimension der mehrdimensionalen Wahrscheinlichkeiten aus nicht variierenden S-Wahrscheinlichkeiten variierende machen, für die es in Folge sinnvoll ist, zu prüfen, ob sie in eine Algebra von numerischen Ereignissen einbettbar oder gar Boolesch sind.

Beispiel 4.20. Liegen für $|S| = 2$ die gemessenen S-Wahrscheinlichkeiten $p_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $p_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $p_3 = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$, $p_4 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ vor, so handelt es sich bei ihnen offensichtlich um nicht variierende. Führt man jedoch Messungen in einem dritten physikalischen Zustand s_3 durch, mit deren Ergebnissen die vier Wahrscheinlichkeiten zu den dreidimensionalen Wahrscheinlichkeiten $p_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $p_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $p_3 = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $p_4 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ erweitert werden können, hat man es mit eigentlichen $(S \cup \{s_3\})$-Wahrscheinlichkeiten zu tun.

Folgendes Lemma gibt Aufschluss über den Zusammenhang der in Definition 4.11[82] eingeführten Bezeichnungen.

Lemma 4.7. *([27]) Ist P eine Algebra von numerischen Ereignissen und seien $p, q, r, s, t, a, b \in P$, dann gilt:*

(a) $p\,C(r, s, t)\,q \Rightarrow p\,C(r)\,q$,

(b) $p\,C(r, s, t)\,q \Rightarrow p\,C(t, r)\,q$,

(c) $p\,C(a)\,q \Rightarrow p\,C((a + q) - p, a)\,q$,

(d) $p\,C(b, a)\,q \Rightarrow p\,C(a)\,q$

(e) $p\,C(a)\,q \Rightarrow p\,C(a, p - a, (a + q) - p)\,q$,

(f) $p\,C(b, a)\,q \Rightarrow p\,C(a, p - a, b)\,q$

Beweis. Für den Beweis sei auf [27] verwiesen. □

Wie die Bezeichnungen schon suggerieren, bedeutet für zwei numerische Ereignisse p, q einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P sowohl die Existenz eines geeigneten $a \in P$, für das $p\,C(a)\,q$ gilt, als auch die Existenz von $b, d \in P$, für die $p\,C(b, d)\,q$ erfüllt ist, dass p und q miteinander kommutieren, wie folgender Satz bestätigt.

Satz 4.8. *(vgl.[27]) Sind p, q zwei S-Wahrscheinlichkeiten einer Algebra von numerischen Ereignissen P, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) $p\,C\,q$, *das heißt,* $\{p, q\}$ *erzeugt eine Boolesche Teilalgebra von* P

(b) $\exists\, a \in P :\ p\,C(a)\,q$,

(c) $\exists\, b, a \in P :\ p\,C(b, a)\,q$,

(d) p *und* q *werden durch ein orthogonales Dreieck geteilt, das heißt,* $\exists\, \Delta(r, s, t) \in P :$ $p\,C(r, s, t)\,q$

Beweis. Die Äquivalenz der Bedingungen folgt sofort aus Lemma 4.7[83] und dem später noch angeführten Satz 4.59[84]. □

---
[82] siehe S.70
[83] siehe S.73
[84] siehe S.108

Für Räume von zweiwertigen numerischen Ereignissen lässt sich besonders einfach feststellen, wann zwei Elemente miteinander kommutieren:

Lemma 4.9. *(vgl.[32]) Sei P eine Algebra von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten und seien $p, q, a, b \in P$. Für $r, u \in P$ bezeichne $\widetilde{\min}\{r, u\}$ das komponentenweise Minimum von r und u. Dann gilt: $p\,C(a)\,q \Leftrightarrow a = p \wedge q' = \widetilde{\min}\{p, q'\}$ bzw. $p\,C(b)\,q' \Leftrightarrow b = p \wedge q = \widetilde{\min}\{p, q\}$.*

Beweis. Unter Beachtung der vier möglichen Wertebelegungen von $(p(s), q(s))$ für $s \in S$ folgen die Behauptungen direkt aus $p\,C(a)\,q \Leftrightarrow a \leq p \leq a + q \leq 1$. □

Für allgemeinere Algebren von numerischen Ereignissen hat man folgende Bedingung zur Überprüfung der Kommutativität zweier Elemente.

Satz 4.10. *([30]) Ist $(P, \leq, ')$ eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten und sind $p, q \in P$, dann kommutieren p und q genau dann, wenn $p \wedge q'$ in P existiert und $p - q \leq p \wedge q'$ ist.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [30] verwiesen. □

Da eine Algebra von numerischen Ereignissen nur eine Boolesche Algebra sein kann, wenn je zwei Elemente kommutieren, liefert Satz 4.10[85] ein Verfahren zur Überprüfung, ob die vorliegenden (experimentell ermittelten) S-Wahrscheinlichkeiten einem klassischen physikalischen System entstammen können, und zwar kontrolliert man für alle Paare von Elementen, ob die Bedingung im Satz erfüllt ist. Findet man ein Paar, für das dies nicht zutrifft, so kann es sich um keine Boolesche Algebra handeln. Nachteilig ist dabei jedoch, dass dies die Kenntnis der Infima sämtlicher Paare von Elementen erfordert, welche nicht immer einfach zu bestimmen sind.

Satz 4.11. *([30]) Ist P eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, dann ist $(P, \leq)$ genau dann ein Verband, wenn gilt: $\forall p, q \in P\, \exists!\, r \in P : \ |\{x \in P : \ p \leq x \leq r\} \cap \{x \in P : \ q \leq x \leq r\}| = 1$.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [30] verwiesen. □

Zumal jede Boolesche Algebra verbandsgeordnet ist, liefert Satz 4.11[86] eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für einen Raum von numerischen Ereignissen, eine Boolesche Algebra sein zu können.

Von folgender Eigenschaft von Algebren von numerischen Ereignissen, die ihre Elemente als die Summe einer geeigneten orthogonalen Teilmenge von Atomen charakterisiert, werden wir später noch Gebrauch machen.

Satz 4.12. *([20]) Ist P eine endliche Algebra von numerischen Ereignissen und bezeichnet A_p die Menge aller Atome, welche kleiner oder gleich $p \in P$ sind, dann gilt für jede beliebige maximale orthogonale Teilmenge $O_p \subseteq A_p$, dass $p = \sum_{a \in O_p} a$ ist.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [20] verwiesen. □

Beispiel 4.21. (vgl.[26],[32],[19],[20], [21],[8],[7],[9],[43]) In vielen Fällen ist eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten nicht nur ein poset, sondern sogar ein Verband. So kann zum Beispiel der Hilbert-Verband als eine Algebra von numerischen Ereignissen aufgefasst werden, welche einen orthomodularen Verband bildet:

[85]siehe S.74
[86]siehe S.74

Sei H ein Hilbertraum, $P(H)$ die Menge der Projektionsoperatoren auf H, $S(H)$ die Menge von eindimensionalen Unterräumen von H (die die reinen Zustände des physikalischen Systems repräsentiert), und für jedes $s \in S(H)$ sei v_s ein beliebiger Einheitsvektor in s.
Dann ist die Menge von Funktionen $L_H := \{p|\, S(H) \to [0,1],\, s \mapsto \langle Av_s, v_s\rangle : A \in P(H)\}$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das innere Produkt in H denotiert, eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, die isomorph zu $C(H)$, dem Verband der abgeschlossenen Unterräume von H, ist.
Wie in Abschnitt 2.4[87] ausgeführt, bildet die Menge $P(H)$ selbst ebenfalls einen orthomodularen Verband, und es gibt eine eineindeutige Korrespondenz zwischen L_H und $P(H)$: $p_1 \leq p_2$ gilt genau dann in L, wenn $P_1 \leq P_2$ in $P(H)$ ist, und die algebraischen Operationen (Addition und Subtraktion) in L_H korrespondieren mit den entsprechenden algebraischen Operationen in $P(H)$. Dadurch können wir die numerischen Ereignissen in L_H mit den korrespondierenden Projektoren in $P(H)$ identifizieren.
Wir können also festhalten, dass die Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten L_H isomorph zum in Abschnitt 2.4 kennengelernten Hilbert-Verband ist.

4.3.3 Zusammenhang zwischen Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten und orthomodularen posets und Folgerungen daraus

Von enormer Bedeutung bei der Beschäftigung mit Quantenlogiken ist nachstehender, auf die Arbeit [63] zurückgehender, Satz, der folgende algebraische Charakterisierung für Räume von numerischen Ereignissen liefert:
Eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten ist eine orthomodulare halbgeordnete Menge, die eine volle Menge von Zuständen erlaubt, und umgekehrt ist jede orthomodulare halbgeordnete Menge, die eine volle Menge von Zuständen erlaubt, isomorph zu einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten.
Da diese Korrespondenz in der Theorie der Charakterisierung von Quantenlogiken eine immense Priorität hat, werden wir sie nun beweisen.

Satz 4.13. *([63],[53],[20],[8],[5],[26]) + bzw. − bezeichne je nach Kontext die Addition bzw. Subtraktion von reellen Funktionen oder Zahlen.*

(a) Ist $(P, \leq, ')$ eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, dann ist P ein orthomodulares poset und $[p_1, p_2, \ldots, p_n \in P,\, p_i \perp p_j,\, i \neq j] \Rightarrow \exists \bigvee_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n \in P$.
Jedes $s \in S$ induziert einen Zustand m_s auf $(P, \leq, ')$, definiert durch $\forall p \in P : m_s(p) := p(s)$, und die Menge $\{m_s : s \in S\}$ von Zuständen ist voll.

(b) Ist umgekehrt $(L, \leq, ')$ ein orthomodulares poset mit einer vollen Menge M von Zuständen $m : L \to [0,1]$, $a \mapsto m(a)$, dann bildet die Dualmenge[88] M^* von M eine Algebra von M-Wahrscheinlichkeiten $(M^*, \leq, ')$ (wobei $'$ wie üblich als die Zuordnung $(a^*)' := 1 - a^*$ zu verstehen ist) und ist isomorph zu $(L, \leq, ')$, wobei der Isomorphismus von L nach M^* durch $a \mapsto a^*$, $a^*(m) := m(a)\, \forall m \in M$ gegeben ist.

Beweis. (vgl.[63])

(a) Zunächst beweisen wir, dass $(P, \leq, ')$ ein $\perp$-poset bildet. Dafür zeigen wir, dass die ersten vier Bedingungen in Definition 3.11[89] erfüllt sind:

[87] siehe S.9
[88] Für den Begriff der Dualmenge sei an Definition 4.7, Punkt sechs, S.65, erinnert.
[89] siehe S.26

(i) $p \leq q \Rightarrow q' \leq p'$:
$p \leq q \Rightarrow [q' = 1 - q \leq 1 - p = p'] \; \forall p, q \in P$

(ii) $p'' = p$:
$p'' = 1 - (p') = 1 - (1 - p) = p \; \forall p \in P$

Seien $p, q, r \in P$, $p \perp q$ und $p, q \leq r$. Dann bilden p, q, r' ein orthogonales Tripel, weshalb $p + q + r' \in P$ ist. Deshalb muss $p + q + r' \leq 1$ sein, was $p + q \leq r$ nach sich zieht und $p + q = p \vee q$ beweist.
Analog seien $p, q, r \in P$, $p \perp q'$ und $r \leq p', q$. Dann bilden p, q', r ein orthogonales Tripel, weshalb $p + q' + r \in P$ ist. Deshalb muss $p + q' + r \leq 1$ sein, was $p + q' \leq r'$, also $r \leq 1 - (p + (1 - q)) = 1 - ((1 - p') + (1 - q)) = 1 - 1 + p' - 1 + q = q + (1 - p) - 1 = q - p$ nach sich zieht und zeigt, dass $p' \wedge q = q - p$ ist. Dieses Infimum liegt in P, weil $p \perp q'$ impliziert, dass $p + q' \in P$ und deshalb auch $p' \wedge q = q - p = 1 - p - 1 + q = (p + (1 - q))' = (p + q')' \in P$ ist.

(iii) $1 = p \vee p' \in P,\ 0 = p \wedge p' \in P$:
$\forall p \in P:\ p' \in P,\ p \perp p',\ 1 = p + p' \in P$, darum folgt mit gerade Gezeigtem:
$p \vee p' = p + p' = 1 \in P$ und $p \wedge p' = p' - p' = 0 \in P$

(iv) $p \perp q \Rightarrow p \vee q \in P$:
Wie unterhalb des Beweises von (ii) gezeigt, gilt: $\forall p, q \in P:\ \ p \perp q \Rightarrow p \vee q = p + q \in P$

Die zuletzt gezeigte Aussage verallgemeinern wir mittels Induktion für jede Folge von $n > 2$ paarweise orthogonalen Elementen aus P, um $[p_1, \ldots, p_n \in P,\ p_i \perp p_j,\ i \neq j] \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} p_i = p_1 + \ldots + p_n$ zu beweisen:
Angenommen, für jede Folge $p_1, p_2, \ldots, p_n$ von n paarweise orthogonalen numerischen Ereignissen gilt $\bigvee_{i=1}^{n} p_i = p_1 + \ldots + p_n \in P$. Sei nun $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ eine beliebige Folge von paarweise orthogonalen Elementen aus P. Da $p_1 \perp p_2$ ist, ist $q := p_1 + p_2 \in P$ und für jedes $i \in \{3, 4, \ldots, n+1\}$ ist (p_1, p_2, p_i) ein orthogonales Tripel. Darum ist $p_1 + p_2 + p_i \in P$, also $q + p_i \leq 1$. Somit ist $q, p_3, p_4, \ldots, p_{n+1}$ eine Folge von n paarweise orthogonalen numerischen Ereignissen und mit der Induktionsvoraussetzung folgt $\bigvee_{i=1}^{n+1} p_i = q \vee \bigvee_{i=3}^{n+1} = q + p_3 + p_4 + \ldots + p_{n+1} = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n+1} \in P$.
Nun beweisen wir, dass die Algebra von numerischen Ereignissen orthomodular ist, indem wir die Gültigkeit des orthomodularen Gesetzes begründen:

(v) $p \leq q \Rightarrow q = p \vee (p' \wedge q)$:
Seien $p, q \in P$, $p \leq q$. Dann ist $p \perp q'$ und, wie weiter oben gezeigt, $p' \wedge q \in P$ und $p' \wedge q = (p + q')' = (p \vee q')' = q - p$. Da $p \leq (p \vee q')$ und somit $p \perp (p \vee q')'$ ist, ist $p \vee (p' \wedge q) = p \vee (p \vee q')' = p + q - p = q$.

Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass jedes $s \in S$ einen Zustand auf dem Ereignissystem $(P, \leq, ')$ definiert und die Menge aller dieser Zustände voll ist. Sei also $s \in S$ und m_s definiert durch $m_s(p) := p(s) \,\forall p \in P$. Da $p \in [0,1]^S$ ist, ist $m_s \in [0,1]^P$ und es gilt:

(i) $m_s(0) = 0(s) = 0,\ m_s(1) = 1(s) = 1$,

(ii) $m_s(p') = p'(s) = (1 - p)(s) = 1 - p(s) = 1 - m_s(p) \,\forall p \in P$,

(iii) $m_s(p_1 \vee \ldots \vee p_n) = m_s(p_1 + \ldots + p_n) = (p_1 + \ldots + p_n)(s) = p_1(s) + \ldots + p_n(s) = m_s(p_1) + \ldots + m_s(p_n)$ für jede Folge von paarweise orthogonalen Elementen $p_1, \ldots, p_n \in P$

Also wird für jedes $s \in S$ durch m_s tatsächlich ein Zustand auf P definiert.
Angenommen, es gibt $p, q \in P$, sodass $m_s(p) \leq m_s(q) \,\forall m_s \in \{m_r : r \in S\}$ ist. Dann ist

$p(s) \leq q(s) \, \forall s \in S$ und somit per Definition $p \leq q$. Das bedeutet, die Menge der Zustände $\{m_s : s \in S\}$ ist voll.

(b) Sei $(L, \leq, ')$ ein orthomodulares poset mit einer vollen Menge M von Zuständen und sei M^* die Dualmenge von M. Wir zeigen, dass M^* die ersten beiden Bedingungen aus Definition 4.5[90] und die Bedingung aus Bemerkung 4.3[91] erfüllt:

(i) $0 \in M^*$:
Per Definition von Zuständen gilt $m(0) = 0 \, \forall m \in M$, darum liegt die Nullfunktion in M^*.

(ii) $a^* \in M^* \Rightarrow (a^*)' = 1 - a^* \in M^*$:
Für jedes $a \in L$ ist $a^*(m) = m(a) \, \forall m \in M$ und wir haben $m \in M \Rightarrow 1 - m \in M$ und $a \in L \Rightarrow a' \in L$, zudem gilt $(a')^*(m) = m(a') = 1 - m(a) = 1 - a^*(m) = (1 - a^*)(m)$, also ist mit jedem $a^* \in M^*$ auch $(a^*)' = (1 - a^*) = (a')^* \in M^*$.

(v) $[a^*, b^*, c^* \in M^*,\ a^* + b^* \leq 1, b^* + c^* \leq 1, a^* + c^* \leq 1] \Rightarrow a^* + b^* + c^* \in M^*$:
Da M eine volle Menge von Zuständen ist, ist $\forall a_1, a_2 \in L : \ a_1 \perp a_2 \Leftrightarrow m(a_1) + m(a_2) \leq 1 \forall m \in M$ und wegen $a_1^* + a_2^* \leq 1 \Leftrightarrow m(a_1) + m(a_2) \leq 1 \forall m \in M$ ist auch $a_1 \perp a_2 \Leftrightarrow a_1^* + a_2^* \leq 1$. Sind nun a^*, b^*, c^* wie in der Voraussetzung, dann ist $a \perp b \perp c \perp a$ für $a, b, c \in L$. Wegen der Orthomodularität von L ist auch $a \vee b \vee c \in L$ und wir haben $\forall m \in M : \ m(a \vee b \vee c) = m(a_1) + m(a_2) + m(a_3) = a_1^*(m) + a_2^*(m) + a_3^*(m) = (a_1 + a_2 + a_3)^*(m)$, das heißt, $(a_1^* + a_2^* + a_3^*) = (a_1 \vee a_2 \vee a_3)^* \in M^*$.

Also bildet $(M^*, \leq, ')$ eine Algebra von M-Wahrscheinlichkeiten und ist, wie in Bemerkung 4.12[92] festgestellt, isomorph zu $(L, \leq, ')$, das heißt, jedes orthomodulare poset, das eine volle Menge von Zuständen erlaubt, ist isomorph zu einer Algebra von numerischen Ereignissen.

□

Beispiel 4.22. Wir betrachten ein beliebiges orthomodulares poset von der in Abbildung 4.7[93] dargestellten Form. Es erlaubt keine volle Menge von Zuständen, deren Dualmenge die Menge von S-Wahrscheinlichkeiten aus Beispiel 4.10[94] bildet.
Das erkennt man einerseits daran, dass die dortige Menge von S-Wahrscheinlichkeiten kein Raum von numerischen Ereignissen ist, und andererseits daran, dass die durch jene S-Wahrscheinlichkeiten vermittels $\forall p \in P : \ m_s(p) := p(s), \ s \in S$ festgelegten Funktionen keine Zustände wohldefinieren, weil etwa $p \perp r$, aber $m_{s_1}(p \vee r) = m_{s_1}(q') = \frac{3}{5} \neq \frac{4}{5} = m_{s_1}(p) + m_{s_1}(r)$ ist.
Das betrachtete orthomodulare poset erlaubt aber an sich sehr wohl volle Mengen von Zuständen, weil etwa die S-Wahrscheinlichkeiten der Algebra von numerischen Ereignissen aus Beispiel 4.9[95] eine solche Menge von Zuständen auf ihm induzieren.

Beispiel 4.23. Das in Abbildung 4.10[96] dargestellte orthomodulare poset bildet keinen Verband (weil es zum Beispiel kein Supremum von a und d gibt) und erlaubt keine volle Menge von Zuständen. Vielmehr noch, lassen sich auf dem poset überhaupt keine Zustände definieren.
(Für den Beweis letztgenannter Feststellung sei auf [41] verwiesen.)

[90] siehe S.55
[91] siehe S.56
[92] siehe S.67
[93] siehe S.63
[94] siehe S.63
[95] siehe S.62
[96] siehe S.78

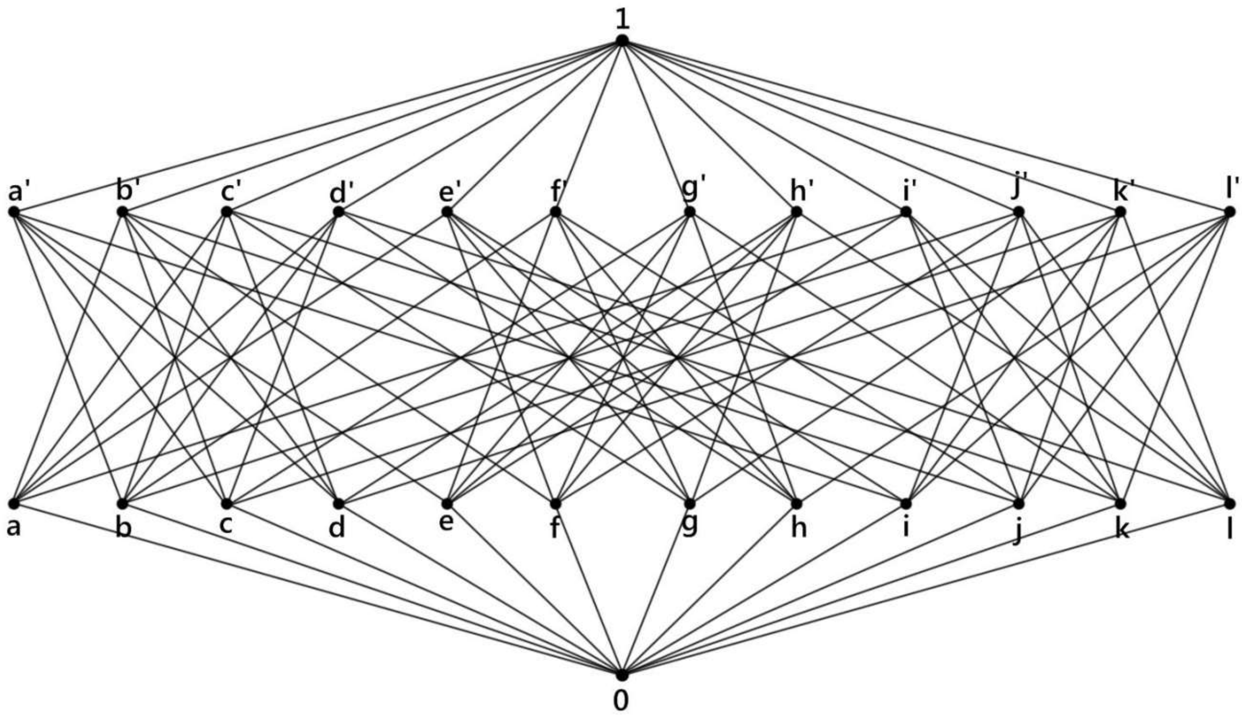

Abbildung 4.10: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.23, S.77: Die Abbildung zeigt ein orthomodulares poset, auf welchem sich keine Zustände definieren lassen.

Korollar 4.14. *([63],[28],[53])*

(1) Ein Ereignissystem L erlaubt genau dann eine volle Menge M von Zuständen, wenn es als eine Algebra von M-Wahrscheinlichkeiten repräsentiert werden kann.

(2) Jedes orthoposet, das eine volle Menge von Zuständen erlaubt, ist orthomodular.

(3) Bis auf Isomorphie sind die Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten genau die orthomodularen posets, welche eine volle Menge von Zuständen erlauben.[97]

Beweis. Die erste und dritte Behauptung folgen aus Satz 4.13[98] und die zweite aus dessen Beweis und der Definition einer vollen Menge von Zuständen. □

Da ein Ereignissystem per Definition ein orthomodulares poset ist, ist nach Korollar 4.14[99] jedes Ereignissystem, das eine volle Menge von Zuständen erlaubt, isomorph zu einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten.
Allerdings erlaubt nicht jedes orthomodulare poset und nicht einmal jeder orthomodulare Verband eine volle Menge von Zuständen. Jene, die eine solche Zustandsmenge erlauben, sind daher von großer Bedeutung bei der Charakterisierung von Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten und Booleschen Algebren.

[97] Erweitert man die Definition von Räumen von numerischen Ereignissen P, Definition 4.5, S.55, um die Bedingung, dass für jede Folge von paarweise orthogonalen S-Wahrscheinlichkeiten ihre Summe in P liegt, dann ist ein solcher *σ-Raum von numerischen Ereignissen* isomorph zu einem σ-orthomodularen poset mit einer vollen Menge von Zuständen.

[98] siehe S.75

[99] siehe S.78

Beispiel 4.24. (vgl.[10]) Der in Abbildung 4.11[100] dargestellte Verband, bezeichnet mit G_{32}, ist ein orthomodularer Verband, der allerdings keine volle Menge von Zuständen erlaubt:
Angenommen, es gibt eine volle Menge von Zuständen M auf dem Verband. Sei $m \in M$. Da $\Delta(a,b,c)$ ein orthogonales Tripel bildet und $a \vee b \vee c = 1$ ist, folgt $1 = m(1) = m(a \vee b \vee c) = m(a) + m(b) + m(c)$.
Auf gleiche Weise ergeben sich $m(e) + m(f) + m(g) = 1$, $m(g) + m(h) + m(i) = 1$, $m(k) + m(l) + m(a) = 1$, $m(d) + m(r) + m(j) = 1$ und $m(r) + m(s) + m(t) = 1$.
Summiert man die linke und die rechte Seite der Gleichungen auf, erhält man

$$\begin{aligned}6 &= 2m(a) + m(b) + m(c) + m(d) + m(e) + m(f) + 2m(g) + m(h) + m(i) + m(j) + m(k) \\ &\quad + m(l) + 2m(r) + m(s) + m(t) \\ &= 2(m(a) + m(g) + m(r)) + (m(i) + m(j) + m(k)) + (m(c) + m(d) + m(e)) \\ &\quad + (m(f) + m(t) + m(l)) + (m(b) + m(s) + m(h)) \\ &= 2(m(a) + m(g) + m(r)) + 4,\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit daraus folgt, dass auch $\Delta(c,d,e), \Delta(i,j,k), \Delta(f,t,l)$ und $\Delta(b,s,h)$ orthogonale Tripel sind.
Somit ergibt sich $m(a) + m(g) + m(r) = 1$. Dies liefert $m(a) = 1 - m(g) - m(r) \leq 1 - m(g) = m(g')$. Da $m \in M$ beliebig war, gilt $m(a) \leq m(g') \, \forall m \in M$, woraus, wenn M voll wäre, $a \leq g'$ folgen würde, was jedoch in dem Verband nicht zutrifft. Daher kann er keine volle Menge von Zuständen erlauben.
Mit Satz 4.13[101] folgt daraus, dass es keine Algebra von numerischen Ereignissen gibt, welche zu ihm isomorph ist.

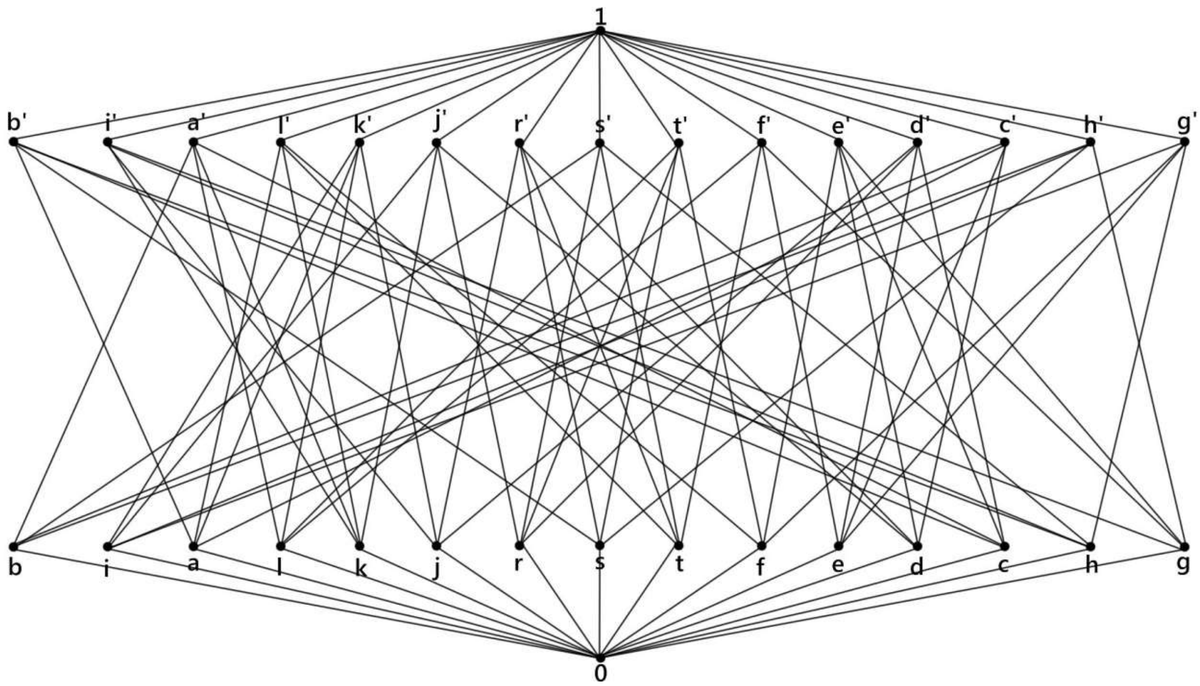

Abbildung 4.11: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.24, S.79: Die Abbildung zeigt den Verband G_{32}, welcher orthomodular ist, aber keine volle Menge von Zuständen erlaubt.

[100] siehe S.79
[101] siehe S.75

Beispiel 4.25. Wir betrachten die Menge von S-Wahrscheinlichkeiten $P = \{(0,0,0,0,0,0), p := (\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{2},1,0,0), q := (\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2},0,1,0), r := (\frac{5}{8},\frac{5}{8},0,0,0,1), s := (1,0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{2}), t := (0,1,0,\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2}), u := (0,0,1,\frac{5}{8},\frac{5}{8},0), p', q', r', s', t', u', (1,1,1,1,1,1)\}$.
Wie man durch Überprüfung der ein GFE definierenden Eigenschaften leicht sieht, handelt es sich dabei um ein solches.
Um die Frage zu klären, ob es sich bei dem GFE um eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten handelt, muss man nicht die Eigenschaft nachprüfen, dass mit jedem orthogonalen Tripel auch dessen Summe in P enthalten ist, sondern kann sein Hasse-Diagramm betrachten, welches in Abbildung 4.12[102] zu sehen ist, und Gebrauch von Satz 3.18[103] und Korollar 4.14[104] machen.
Wie man am Hasse-Diagramm erkennt, ist der von der Menge von Elementen $\{0, r, q', s, t', 1\}$ gebildete Teilverband isomorph zu dem in Abbildung 3.10[105] dargestellten, weshalb P laut Satz 3.18[106] nicht orthomodular und somit Korollar 4.14[107] zufolge keine Algebra von numerischen Ereignissen sein kann.

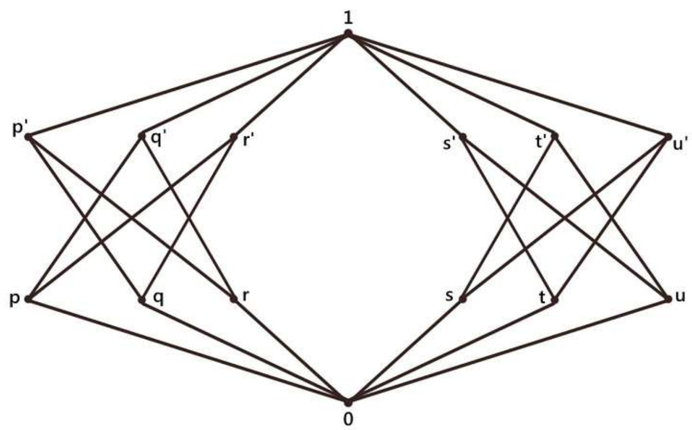

Abbildung 4.12: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.25, S.79: Dieses GFE ist nicht orthomodular und somit keine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, weil es einen zu dem in Abbildung 3.10[109] dargestellten isomorphen Teilverband enthält.

In Anbetracht von Bemerkung 4.13[110] wenig überraschend, gibt es eine zu der in Satz 4.13[111] analoge Charakterisierung von Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten, die in [7] unabhängig von dieser bewiesen worden ist, welche anstatt einer vollen Menge von Zuständen ein vollständiges S-Wahrscheinlichkeitsmaß erfordert und orthomodulare posets vom Standpunkt der Ereignissysteme aus betrachtet:

Satz 4.15. *(vgl.[7],[9]) Ist P eine Menge von S-Wahrscheinlichkeiten, dann sind folgende beiden Bedingungen äquivalent:*

(a) P ist repräsentierbar als der Wertebereich eines vollständigen S-Wahrscheinlichkeitsmaßes auf einem Ereignissystem L,

[102]siehe S.80
[103]siehe S.41
[104]siehe S.78
[105]siehe S.41
[106]siehe S.41
[107]siehe S.78
[110]siehe S.67
[111]siehe S.75

(b) P bildet eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten.

Beweis. Für den Beweis sei auf [7] verwiesen. □

Satz 4.15[112] zeigt, dass Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten relationale Strukturen konstituieren, die als die Wertebereiche von Ereignissystemen unter vollständigen S-Wahrscheinlichkeitsmaßen identifiziert und dadurch gerechtfertigt als Quantenlogiken betrachtet werden können. Da eine Menge von S-Wahrscheinlichkeiten, die keinen Raum von numerischen Ereignissen bildet, Satz 4.15 zufolge nicht die Struktur der den Messungen zugrundeliegenden Ereignissen bestimmt, sind die zugehörigen Zustände S, in denen die Experimente durchgeführt werden, nicht ausreichend oder ungeeignet für die Charakterisierung von Quanten- und klassischen Systemen.
Insbesondere folgt aus Korollar 4.14[113] bzw. Satz 4.15[114], dass die in Kapitel 3[115] kennengelernten Resultate für orthomodulare posets auch für Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten gelten.

Satz 4.16. *([27]) In jeder Algebra von numerischen Ereignissen folgen für $p, q \in P$ mit $p\,C\,q$ folgende Eigenschaften:*

(a) $q\,C\,p$, $p\,C\,q'$, $p'\,C\,q$, $p'\,C\,q'$,

(b) $p \wedge q$, $p' \wedge q$, $p \wedge q'$, $p' \wedge q'$ existieren in P,

(c) $p \vee q$, $p' \vee q$, $p \vee q'$, $p' \vee q'$ existieren in P

Beweis. Das Resultat folgt daraus, dass sich Algebren von numerischen Ereignissen laut Satz 4.13[116] als orthomodulare posets auffassen lassen, auf welche Satz 3.13[117] angewendet werden kann, unter Verwendung der Gesetze von de Morgan. □

Satz 4.17. *([30]) Ist $(P, \leq, ')$ eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten und sind $p, q \in P$, dann kommutieren p und q genau dann, wenn $p \vee q, p \wedge q$ und $p' \wedge q$ in P existieren und $(p \vee q) + (p \wedge q) = p + q$ ist.*

Beweis. (vgl.[30]) Da $(P, \leq, ')$ als Algebra von numerischen Ereignissen laut Satz 4.13[118] ein orthomodulares poset ist, ist darin die Kommutativität im Sinne von Definition 3.17[119] äquivalent zu der im Sinne von 3.19[120].
Wenn p und q kommutieren, folgt unter Verwendung der Tatsache, dass $p \wedge q \leq q$ und deshalb $q-(p\wedge q) = (q\wedge(p'\vee q'))$ ist, $p+q-(p\wedge q) = p+(q\wedge(p'\vee q')) = p+(q\wedge p') = p\vee(q\wedge p') = p\vee q$.
Sind umgekehrt die geforderten Bedingungen erfüllt, dann ist $(p \vee q) - p = q \wedge (p \wedge q)' \leq q$ und somit $(p \vee q) - p = ((p \vee q) \wedge p') \wedge q \in P$.
Damit sehen wir, dass $p' \wedge q = (p \vee q) - p$ ist, weil $p' \wedge q \leq (p' \wedge q) \wedge q \leq (p' \wedge (p \vee q)) \wedge q \leq p' \wedge q$ gilt. Daraus ergibt sich $p = (p \vee q) - (p' \wedge q) = (p \vee q) \wedge (p \vee q')$.
Durch Anwendung der Gesetze von de Morgan und Satz 4.16[121] erhält man daraus pCq.
Aus der Feststellung zu Beginn des Beweises folgt, dass dies bedeutet, dass p und q kommutieren. □

[112] siehe S.80
[113] siehe S.78
[114] siehe S.80
[115] siehe S.24
[116] siehe S.75
[117] siehe S.39
[118] siehe S.75
[119] siehe S.36
[120] siehe S.38
[121] siehe S.81

Aus Kombination von Korollar 4.14[122] und Satz 3.16[123] folgt folgende Charakterisierung von Verbänden unter den Algebren von numerischen Ereignissen.

Korollar 4.18. *([31],[21]) Ist* $(P, \leq, ', 0, 1)$ *eine Algebra von numerischen Ereignissen, dann ist diese genau dann ein (orthomodularer) Verband, wenn für alle* $p, q \in P$ *genau ein Element* $r \in P$, $r \geq p, q$ *existiert, welches* $(r - p) \wedge (r - q) = 0$ *erfüllt.*

Beweis. (vgl.[31]) Laut Korollar 4.14[124] lassen sich Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten als orthomodulare posets auffassen. Auf diese ist Satz 3.16[125] anwendbar, woraus unter Verwendung von Bemerkung 4.18[126] die behaupteten Aussagen folgen. □

Korollar 4.19. *Jede Algebra von* S*-Wahrscheinlichkeiten, welche einen atomaren Verband bildet, ist atomistisch, das heißt, jedes ihrer Elemente lässt sich als das Supremum der Atome, welche kleiner oder gleich diesem Element sind, darstellen.*

Beweis. Die Aussage folgt unter Verwendung der Tatsache, dass jede Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten laut Satz 4.13[127] ein orthomodulares poset bildet, aus Satz 3.20[128]. □

Bemerkung 4.21. Es gibt (unendliche, nicht verbandsgeordnete) atomare Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten, welche nicht atomistisch sind. So wird beispielsweise in [40] ein orthomodulares poset mit einer vollen Menge von Zuständen angegeben, welches nicht atomistisch ist.

Bemerkung 4.22. Da jede endliche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten als endliches poset mit kleinstem Element 0 atomar ist, ist Korollar 4.19[129] zufolge jede endliche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, welche einen Verband bildet, atomistisch. Aus Kombination von Satz 3.21[130] und Korollar 4.14[131] folgt jedoch bereits, dass die Forderung, dass eine endliche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten einen Verband bildet, nicht notwendig ist, um ihre Atomizität sicherzustellen. Darum ist Korollar 4.19 nur für den Fall unendlicher Algebren von numerischen Ereignissen interessant, auf welchen in der vorliegenden Arbeit aber nicht weiter eingegangen werden soll, da er für die Praxis, in der üblicherweise nur endlich viele Messergebnisse vorliegen, nicht relevant ist.

Satz 4.20. *(vgl.[30]) Eine Algebra von numerischen Ereignissen* P *ist genau dann boolesch (und bildet somit laut Proposition 4.2*[132] *ein komplementäres strukturiertes poset), wenn sie infimum-getreu ist.*

Beweis. Die Aussage folgt aus Kombination der Sätze 4.13[133] und 3.22[134]. □

Satz 4.21. *([63],[39]) Jedes boolesche orthomodulare poset erlaubt eine volle Menge von zweiwertigen Zuständen.*

[122] siehe S.78
[123] siehe S.41
[124] siehe S.78
[125] siehe S.41
[126] siehe S.71
[127] siehe S.75
[128] siehe S.42
[129] siehe S.82
[130] siehe S.42
[131] siehe S.78
[132] siehe S.60
[133] siehe S.75
[134] siehe S.43

Beweis. Für den Beweis sei auf [63] verwiesen. □

Dank Korollar 4.14[135] und Satz 4.21[136] ist somit jedes boolesche orthomodulare poset als eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten auffassbar, welche wiederum ebenfalls boolesch ist, wie in folgendem Satz präzisiert. Dafür sei daran erinnert, dass in jeder Algebra von numerischen Ereignissen $p \perp q \Leftrightarrow p \leq q' \Leftrightarrow p + q \leq 1$ gilt.

Satz 4.22. *(vgl.[63])*

(1) Jedes boolesche orthomodulare poset ist isomorph zu einer Algebra von numerischen Ereignissen $(P, \leq, ')$, die zusätzlich für alle $p, q \in P$ die Bedingung

$$[(r \leq p,\, r \leq q) \Rightarrow r = 0] \Rightarrow p + q \leq 1$$

erfüllt.

(2) Umgekehrt bildet jede Algebra von numerischen Ereignissen genau dann ein boolesches orthomodulares poset, wenn sie obige Bedingung erfüllt.

Beweis. Für den Beweis der ersten Aussage sei auf [63] verwiesen. Die zweite Behauptung gilt per Definition, weil sich Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten laut Korollar 4.14[137] als orthomodulare posets auffassen lassen. □

Bemerkung 4.23. (vgl.[20]) Vorangegangener Satz besagt insbesondere, dass eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten genau dann ein boolesches orthomodulares poset ist, wenn gilt, dass die Disjunktheit von $p, q \in P$ impliziert, dass $p + q$ eine S-Wahrscheinlichkeit ist.

Satz 4.23. *([28])Bis auf Isomorphie sind die komplementären strukturierten posets von S-Wahrscheinlichkeiten genau die booleschen orthomodularen posets, die eine volle Menge von Zuständen erlauben.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der zweiten Aussage in Proposition 4.3[138] in Kombination mit der dritten Aussage in Korollar 4.14[139] und dem Beweis von Satz 4.13[140]; für Details sei auf [28] verwiesen. □

Proposition 4.24. *Jede boolesche Algebra von numerischen Ereignissen ist konkret.*

Beweis. Jede boolesche Algebra von numerischen Ereignissen lässt sich laut Satz 4.22[141] als boolesches orthomodulares poset auffassen und jedes solche ist laut Satz 3.25[142] bzw. Beispiel 3.15[143] konkret. □

[135] siehe S.78
[136] siehe S.82
[137] siehe S.78
[138] siehe S.60
[139] siehe S.78
[140] siehe S.75
[141] siehe S.83
[142] siehe S.44
[143] siehe S.50

4.4 GFEs und Algebren von numerischen Ereignissen

4.4.1 Von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten erzeugte GFEs und Algebren von numerischen Ereignissen

In diesem und dem nächsten Abschnitt konzentrieren wir uns auf die Frage, welche Struktur von bereits erhaltenen Messungen erzeugt wird, ohne auf die Möglichkeit der Durchführung weiterer Messungen zurückzugreifen, wobei wir uns zunächst auf zweiwertige S-Wahrscheinlichkeiten beschränken.

Für zweiwertige GFEs lässt sich das Infimum zweier Elemente praktischerweise häufig mit wenig Aufwand bestimmen, wobei im Folgenden wie üblich pq das komponentenweise Produkt zweier S-Wahrscheinlichkeiten p, q bezeichne:

Proposition 4.25. *([29])Können zwei Elemente p, q eines GFEs nur die Werte 0 und 1 annehmen und ist pq Element des GFEs, dann gilt $p \wedge q = pq$.*

Beweis. Betrachtet man die n-dimensionalen Wahrscheinlichkeiten p, q als Vektoren, und ist für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die i-te Stelle von p oder q (oder von beiden) gleich 0, dann muss auch die i-te Stelle von $p \wedge q$ gleich 0 sein. Ist jedoch sowohl die i-te Stelle von p als auch die i-te Stelle von q gleich 1, dann muss auch die i-te Stelle von $p \wedge q$ gleich 1 sein. Diese beiden Eigenschaften werden genau von pq erfüllt. □

Satz 4.26. *([21],[29],[28]) Wenn die Elemente eines GFEs nur die Werte 0 und 1 annehmen können, dann bildet jenes eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten.*

Beweis. Seien p, q und r drei paarweise orthogonale n-dimensionale Wahrscheinlichkeiten eines GFEs, die nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Ist $p \perp q$, dann ist $p \leq (1-q)$, also nimmt die Funktion p an jeder Stelle, an der q den Wert 1 annimmt, den Wert 0 an, weshalb $p+q \leq 1$ und somit Element von P ist. Da $p \leq (1-r)$ und $q \leq (1-r)$ ist, muss sowohl p als auch q an jeder Stelle, an der r den Funktionswert 1 hat, den Wert 0 annehmen. Dies gilt somit auch für $p+q$, woraus $p+q+r = (p+q)+r \leq 1$ folgt, weshalb auch $p+q+r \in P$ ist. Die Bedingung, welche ein GFE zu einer Algebra von numerischen Ereignissen macht, ist also erfüllt. □

Wegen Satz 4.26[144] in Kombination mit Korollar 4.14[145] lassen sich GFEs, deren Elemente nur die Werte 0 und 1 annehmen können, auch als orthomodulare posets auffassen. Genauer, gilt:

Satz 4.27. *([28]) Bis auf Isomorphie sind die GFEs (bzw. Algebren von numerischen Ereignissen), deren Elemente nur die Werte 0 und 1 annehmen können, genau die orthomodularen posets, welche eine volle Menge von zweiwertigen Zuständen erlauben.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [28] verwiesen. □

Proposition 4.28. *(vgl.[29]) Wenn die Elemente von $P \subseteq [0,1]^S$ zweiwertig sind, das heißt, wenn $P \subseteq \{0,1\}^S$ ist, gleicht das von P erzeugte GFE[146] der von P erzeugten Algebra von numerischen Ereignissen. Dies gilt auch, wenn ein eigentliches $p \in P$ mit $0 < p(s) < 1\, \forall s \in S$ existiert und die Menge $P \backslash \{p\}$ (bzw. $P \backslash (\{p\} \cup \{p'\})$, falls p' schon in P liegt) ausschließlich aus S-Wahrscheinlichkeiten, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen können, besteht.*

[144] siehe S.84

[145] siehe S.78

[146] Für den Begriff des von einer Menge von S-Wahrscheinlichkeiten erzeugten GFEs bzw. der von einer Menge von S-Wahrscheinlichkeiten erzeugten Algebra von numerischen Ereignissen sei an Definition 4.5, S.55, erinnert.

Beweis. Die erste Behauptung folgt daraus, dass laut Satz 4.26[147] das von P erzeugte GFE auch eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten ist und umgekehrt die von P erzeugte Algebra von numerischen Ereignissen immer automatisch auch ein GFE bildet.
Die zweite Behauptung folgt daraus, dass laut der ersten Behauptung $P\backslash\{p\}$ (bzw. $P\backslash(\{p\} \cup \{p'\})$) ein GFE, welches eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten ist, erzeugt, und das Hinzufügen von p (und p') nichts daran ändert, weil p und p' sowohl miteinander als auch mit allen anderen Elementen außer 0 und 1 unvergleichbar sind und deshalb zu keinem Element (außer 0) orthogonal sein können. □

Beispiel 4.26. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ stellt $P = \{0, 1\}$, wobei 0 bzw. 1 als die konstante 0- bzw. 1-Funktion auf einer n-elementigen Zustandsmenge S aufzufassen ist, trivialerweise ein GFE dar, welches eine Algebra von n-dimensionalen zweiwertigen numerischen Ereignissen und isomorph zur zweielementigen Booleschen Algebra ist.
Ebenso bildet $P = \{0, 1\}^S$, $|S| = n$, ein GFE, bei dem es sich um eine Algebra von n-dimensionalen zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten handelt. Wie aus den Ausführungen in Beispiel 3.14[148] folgt, haben wir es auch hier mit einer Booleschen Algebra zu tun, weil $\{0, 1\}^S$ isomorph zur Potenzmenge einer n-elementigen Menge ist.

Beispiel 4.27. Laut Proposition 4.28[149] gleicht das von der Menge $P = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ erzeugte GFE der von dieser Menge erzeugten Algebra von numerischen Ereignissen. Wie man sofort sieht, setzt sich Letztere genau aus der Menge $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ zusammen und bildet eine Boolesche Algebra. Das zugehörige Hasse-Diagramm ist in Abbildung 4.13[150] dargestellt.
Fügt man die variierende S-Wahrscheinlichkeit $p := (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ hinzu, so ist das von $P \cup \{p\}$ erzeugte GFE Proposition 4.28 zufolge immer noch eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten und besteht aus den Elementen der Menge $P \cup \{p\} \cup \{p'\}$. Da die Kardinalität dieser Menge sechs ist und somit keiner Potenz von zwei gleicht, kann es sich laut der ersten Aussage in Korollar 3.32[151] jedoch nicht mehr um eine Boolesche Algebra handeln. Das entsprechende Hasse-Diagramm ist in Abbildung 4.14[152] zu sehen. Wie man sofort erkennt, ist die Algebra von numerischen Ereignissen $(P \cup \{p\} \cup \{p'\}, \leq, ')$ isomorph zum Verband MO_2.

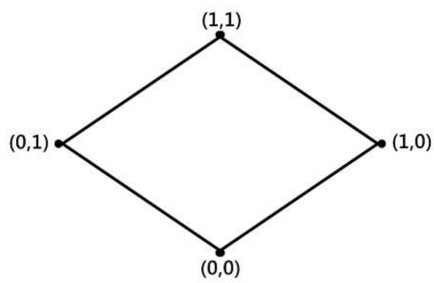

Abbildung 4.13: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.27, S.85: Das dargestellte GFE bildet eine Boolesche Algebra.

[147]siehe S.84
[148]siehe S.47
[149]siehe S.84
[150]siehe S.85
[151]siehe S.47
[152]siehe S.86

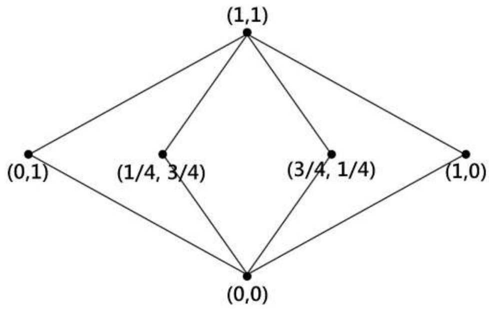

Abbildung 4.14: Hasse-Diagramm zu Beispielen 4.27, S.85, und 4.36, S.92: Das GFE ist eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, bildet aber keine Boolesche Algebra.

Proposition 4.29. *([29]) Sind $p, q : S \to \{0,1\}$ zwei zweiwertige S-Wahrscheinlichkeiten und sind die vier Elemente p, p', q, q' paarweise unvergleichbar, dann gleicht das von $\{p,q\}$ erzeugte GFE der von dieser Menge erzeugten Algebra von numerischen Ereignissen, besteht aus der Menge $\{0, p, p', q, q', 1\}$ und ist isomorph zu MO_2.*

Beweis. Dass $\{0, p, p', q, q', 1\}$ ein GFE bildet, das eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten ist, erkennt man durch direktes Nachprüfen der Bedingungen und folgt auch aus Proposition 4.28[153]. Die Isomorphie zu MO_2 ist aufgrund der Unvergleichbarkeit von p, p', q, q' offensichtlich. □

Beispiel 4.28. Die zweiwertigen vierdimensionalen Wahrscheinlichkeiten $p := (1,1,0,0), q := (0,1,0,1), p', q'$ sind paarweise unvergleichbar, daher bildet laut Proposition 4.29[154] das von $\{p,q\}$ erzeugte GFE eine Algebra von numerischen Ereignissen und ist isomorph zu MO_2.

Für nachstehende Sätze treffen wir folgende Feststellung:

Proposition 4.30. *Das von einer Menge von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten erzeugte GFE entspricht der von dieser Menge erzeugten Algebra von numerischen Ereignissen.*

Beweis. Laut Proposition 4.26[155] ist jedes GFE von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten eine Algebra von numerischen Ereignissen. Da die von einer Menge erzeugte Algebra von numerischen Ereignissen nicht kleiner sein kann als das von der Menge erzeugte GFE, muss die von einer Menge von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten erzeugte Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten mit dem von dieser Menge erzeugten GFE übereinstimmen. □

Wegen Proposition 4.30[156] stimmen in den restlichen vier Sätzen dieses Abschnitts die dortigen erzeugten GFEs mit den erzeugten Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten überein, sodass nachfolgende Resultate auch auf Letztere übertragen werden können.

Satz 4.31. *([29]) Sind $p, q : S \to \{0,1\}$ zwei zweiwertige S-Wahrscheinlichkeiten und sind (mindestens) zwei der vier Elemente p, p', q, q' miteinander vergleichbar, dann ist das von $\{p,q\}$ erzeugte GFE eine Boolesche Algebra, die höchstens acht Elemente hat.*

Beweis. Wir müssen verschiedene Fälle unterscheiden:

[153] siehe S.84
[154] siehe S.86
[155] siehe S.84
[156] siehe S.86

- Angenommen, p und p' sind vergleichbar, dann muss wegen der Zweiwertigkeit o.B.d.A. $p = 0$ und $p' = 1$ sein.
  Sind auch q und q' vergleichbar, dann gilt ebenfalls o.B.d.A. $q = 0$ und $q' = 1$, das heißt, das erzeugte GFE ist die zweielementige Boolesche Algebra, welche nur aus 0 und 1 besteht.
  Sind q und q' hingegen unvergleichbar, dann bildet das erzeugte GFE die zu MO_1 isomorphe vierelementige Boolesche Algebra.

- Der Fall, dass q und q' vergleichbar sind, wird analog zu vorangegangenem behandelt.

- Angenommen, es ist weder p mit p' noch q mit q' vergleichbar, aber p und q sind vergleichbar. O.B.d.A. ist $p \leq q$. Sei $A := p^{-1}(\{1\})$ und $B := q^{-1}(\{1\})$, dann ist $A^c := S \backslash A = (p')^{-1}(\{1\})$ und $B^c := S \backslash B = (q')^{-1}(\{1\})$ und $A \subseteq B$. An den definierenden Bedingungen für konkrete Logiken erkennt man leicht, dass die von A, B erzeugte konkrete Logik zur Menge S, welche in Abbildung 4.15[157] dargestellt ist, durch $(S, \mathcal{M} := \{\emptyset, A, B \backslash A = B \cap A^c, B^c, B, B^c \cup A, A^c, S\})$ gegeben ist.
  Wie aus dem später noch angeführten Satz 4.39[158] folgt, korrespondiert sie mit dem von $\{p, q\}$ erzeugten GFE. Da $\mathcal{M}$ eine achtelementige Boolesche Algebra bildet, handelt es sich auch bei dem GFE um eine solche.

- Die Fälle, dass weder p mit p' noch q mit q', aber p mit q' oder q mit p' oder p' mit q' vergleichbar sind, werden analog zu vorangegangenem behandelt.

$\square$

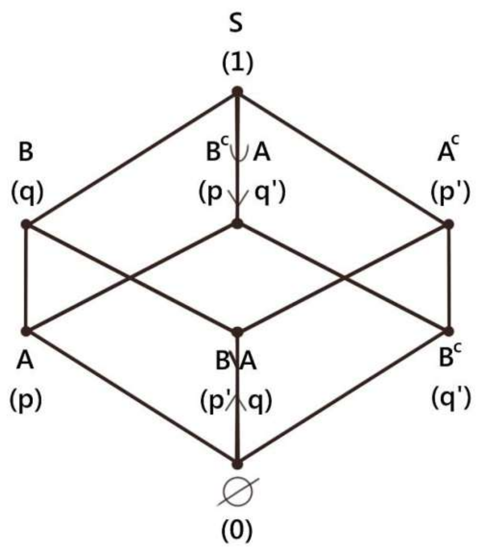

Abbildung 4.15: Hasse-Diagramm zum Beweis von Proposition 4.31, S.86: Die mit dem GFE korrespondierende konkrete Logik ist isomorph zur achtelementigen Booleschen Algebra.

Beispiel 4.29. Wir betrachten die Zustandsmenge $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ und die zwei S-Wahrscheinlichkeiten $p := (1, 0, 0)$ und $q := (1, 1, 0)$. Diese beiden erfüllen die Voraussetzungen aus Proposition 4.31[159], weil p und q zweiwertig und vergleichbar sind. Da p und q', q und p', p und p' und

[157] siehe S.87
[158] siehe S.97
[159] siehe S.86

q und q' unvergleichbar sind, ist das von $\{p, q\}$ erzeugte GFE eine achtelementige Boolesche Algebra. Aufgrund der Korrespondenz von Booleschen Algebren und Potenzmengen ist sofort klar, dass die laut dem später noch angeführten Satz 4.39[160] mit dem GFE korrespondierende konkrete Logik die Potenzmenge von S als Mengensystem hat, also $(\{s_1, s_2, s_3\}, 2^{\{s_1,s_2,s_3\}})$ ist.

Für möglicherweise größere Mengen von S-Wahrscheinlichkeiten haben wir folgende Resultate betreffend die von ihnen erzeugten GFEs:

Satz 4.32. *([29]) Seien $p_1, \ldots, p_{n-1} : S \to \{0, 1\}$, $n \geq 2$, paarweise orthogonale S-Wahrscheinlichkeiten und seien $q_i := p_i$, $i = 1, \ldots, n-1$ und $q_n := 1 - p_1 - \ldots - p_{n-1}$. Dann besteht das von $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ erzeugte GFE aus der Menge von Elementen $\{\sum_{i \in I} q_i : I \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$, wobei $\sum_{i\in\emptyset} q_i := 0$ ist, und bildet eine Boolesche Algebra mit höchstens 2^n Elementen.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [29] verwiesen. □

Beispiel 4.30. Wir betrachten eine dreielementige Zustandsmenge S und die beiden S-Wahrscheinlichkeiten $p := (1, 0, 0)$ und $q := (0, 0, 1)$. Dann sind die Voraussetzungen aus Satz 4.32[161] erfüllt und das von $\{p, q\}$ erzeugte GFE entspricht genau der achtelementigen Booleschen Algebra aus Beispiel 4.29[162].

Satz 4.33. *([29]) Seien $p_1, \ldots, p_{n-1} : S \to \{0, 1\}$, $n \geq 2$, S-Wahrscheinlichkeiten, für die $p_1 \leq \ldots \leq p_{n-1}$ gilt, und seien $p_0 := 0$ und $p_n := 1$. Dann besteht das von $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ erzeugte GFE aus der Menge von Elementen $\{\sum_{i\in I}(p_i - p_{i-1}) : I \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ (wobei die leere Summe wie üblich per Definition gleich 0 ist) und ist eine Boolesche Algebra mit höchstens 2^n Elementen.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [29] verwiesen. □

Beispiel 4.31. Wir betrachten die vierdimensionalen Wahrscheinlichkeiten $p_1 := (1, 0, 0, 0)$, $p_2 := (1, 1, 0, 0)$ und $p_3 := (1, 1, 1, 0)$. Für diese gilt $p_1 < p_2 < p_3$, darum erfüllen sie die Voraussetzungen aus Satz 4.33[163]. Das von $\{p_1, p_2, p_3\}$ erzeugte GFE ist eine sechzehnelementige Boolesche Algebra. Sein Hasse-Diagramm ist in Abbildung 4.16[164] dargestellt.

Beispiel 4.32. Sei $S := \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ die Zustandsmenge und seien $p_1 := (1, 0, 0, 0)$, $p_2 := (1, 0, 0, 1)$, $p_3 := (1, 1, 1, 1)$ vierdimensionale S-Wahrscheinlichkeiten. Offensichtlich gilt $p_1 < p_2 < p_3$ und die Elemente erfüllen die Voraussetzungen aus Satz 4.33[165]. Laut dem Satz ist das von $\{p_1, p_2, p_3\}$ erzeugte GFE eine höchstens $2^4 = 16$-elementige Boolesche Algebra. Da $p_4 = (1, 1, 1, 1)$ und somit $p_3 = p_4$ ist, wird diese Grenze jedoch nicht erreicht, sondern es handelt sich bei dem erzeugten GFE um die in Abbildung 4.17[166] dargestellte achtelementige Boolesche Algebra.

Satz 4.34. *([29]) Seien $p_1, \ldots, p_n$, $n \geq 1$, zweiwertige S-Wahrscheinlichkeiten.
Dann besteht das von $\{\prod_{i\in I} p_i : I \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ erzeugte GFE aus der Menge von Elementen $\left\{\sum_{I\in T} \prod_{i\in I} p_i \prod_{i\in I^c} p'_i : T \subseteq 2^{\{1,\ldots,n\}}\right\}$, wobei $\prod_{i\in\emptyset} p_i := 1$ ist (und der leeren Summe das unmögliche Ereignis zugewiesen wird) und I^c das mengentheoretische Komplement bezüglich $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnet, und bildet eine Boolesche Algebra mit höchstens 2^{2^n} Elementen.*

160 siehe S.97
161 siehe S.88
162 siehe S.87
163 siehe S.88
164 siehe S.89
165 siehe S.88
166 siehe S.89

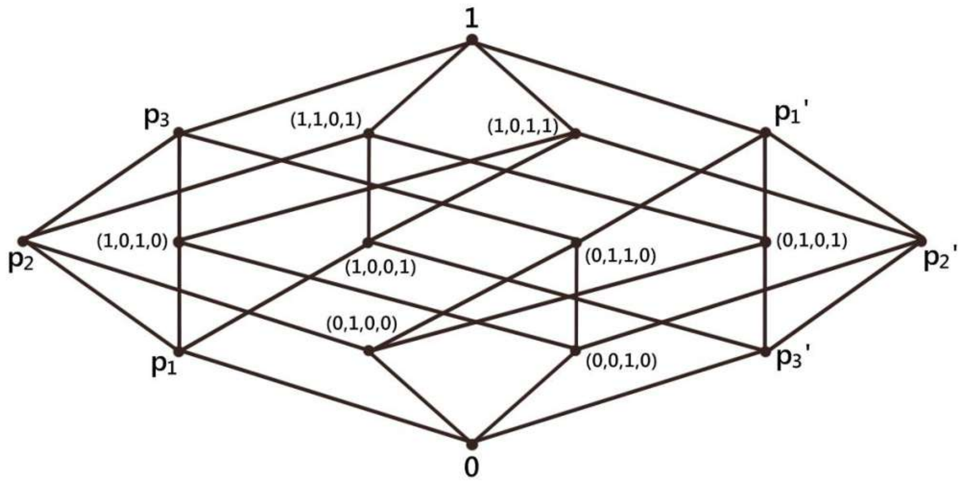

Abbildung 4.16: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.31, S.88: Das von $\{p_1, p_2, p_3\}$ erzeugte GFE bildet die hier dargestellte Boolesche Algebra.

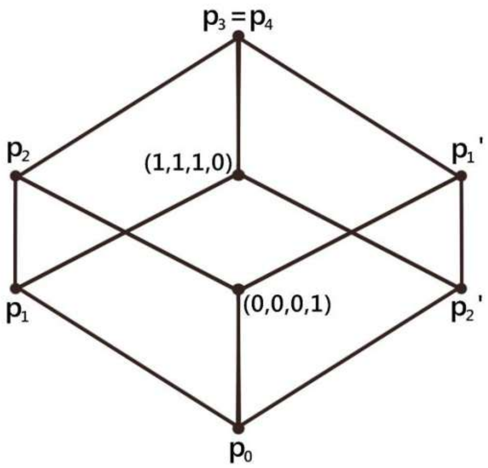

Abbildung 4.17: Hasse-Diagramm zu Beispielen 4.32, S.88, und 4.47, S.97: Das von $\{p_1, p_2, p_3\}$ erzeugte GFE bildet die hier dargestellte Boolesche Algebra.

Beweis. Für den Beweis sei auf [29] verwiesen. □

Bemerkung 4.24. In Satz 4.34[167] lässt sich die maximale Anzahl der Elemente, aus denen die Boolesche Algebra besteht, noch weiter eingrenzen: Besteht die Zustandsmenge S aus m Elementen, das heißt, ist $|S| = m$, dann gibt es 2^m paarweise verschiedene zweiwertige S-Wahrscheinlichkeiten. Darum besteht das von der Menge $\{\prod_{i \in I} p_i : I \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ erzeugte GFE aus Satz 4.34 aus höchstens $\min\{2^{2^n}, 2^m\}$ Elementen.

Beispiel 4.33. Sei $|S| = 3$ und seien p_1, p_2 die zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten $p_1 = (1, 0, 0)$, $p_2 = (0, 1, 0)$. Dann wissen wir aus Satz 4.34[168] und Bemerkung 4.24[169], dass das von der Menge $\{\prod_{i \in I} p_i : I \subseteq \{1, 2\}\}$ erzeugte GFE aus höchstens $\min\{2^{2^2}, 2^3\} = 8$ Elementen bestehen kann. Diese Grenze wird tatsächlich erreicht, denn es ist $p_1 \cdot p_2 = (0, 0, 0)$, $p_1' = (0, 1, 1)$, $p_2' = (1, 0, 1)$,

[167]siehe S.88
[168]siehe S.88
[169]siehe S.89

$p_1' \cdot p_2' = (0,0,1)$, $p_1 \cdot p_2' + p_2 \cdot p_1' = (1,1,0)$ und $p_1' \cdot p_2' + p_1 \cdot p_2' + p_2 \cdot p_1' = (1,1,1)$, das heißt, bei dem von der Menge erzeugten GFE handelt es sich um die achtelementige Boolesche Algebra, deren Hasse-Diagramm in Abbildung 4.18[170] dargestellt ist.

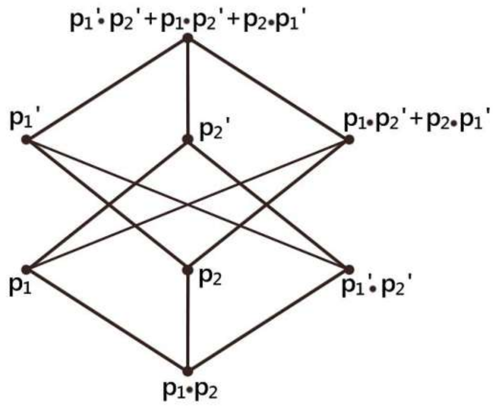

Abbildung 4.18: Hasse-Diagramm zu Beispielen 4.33, S.89, und 4.55, S.104: Die Abbildung zeigt die für $p_1 = (1,0,0)$, $p_2 = (0,1,0)$ von der Menge $\{\prod_{i\in I} p_i : I \subseteq \{1,2\}\}$ erzeugte Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel 4.34. Wie in Beispiel 4.33[171] sei $|S| = 3$ und wir betrachten wieder zwei S-Wahrscheinlichkeiten, diesmal jedoch $p_1 = (1,1,0)$ und $p_2 = (0,0,1)$. Aus jenem Beispiel wissen wir, dass das von der Menge $M := \{\prod_{i\in I} p_i : I \subseteq \{1,2\}\}$ erzeugte GFE aus höchstens acht Elementen bestehen kann.
Diese Grenze wird von dem hiesigen GFE jedoch nicht erreicht, denn wegen $0 = p_1' \cdot p_2' = p_1 \cdot p_2 = p_1' \cdot p_2' + p_1 \cdot p_2 = (0,0,0)$, $p_1 = p_2' = p_1' \cdot p_2' + p_1 \cdot p_2' + p_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot p_2' + p_1 \cdot p_2 = (1,1,0)$, $p_2 = p_1' = p_1' \cdot p_2' + p_2 \cdot p_1' + p_1 \cdot p_2 = p_2 \cdot p_1' + p_1 \cdot p_2 = (0,0,1)$, $p_1' \cdot p_2' + p_1 \cdot p_2' + p_2 \cdot p_1' = p_1 \cdot p_2' + p_2 \cdot p_1' = p_1 \cdot p_2' + p_2 \cdot p_1' + p_1 \cdot p_2 = p_1' \cdot p_2' + p_1 \cdot p_2' + p_2 \cdot p_1' + p_1 \cdot p_2 = (1,1,1)$ besteht die Menge $\{\sum_{I\in T} \prod_{i\in I} p_i \prod_{i\in I^c} p_i' : T \subseteq 2^{\{1,2\}}\}$ nur aus den vier Elementen $(0,0,0), (1,1,0), (0,0,1)$ und $(1,1,1)$, weshalb es sich bei dem von M erzeugten GFE um die vierelementige Boolesche Algebra, deren Hasse-Diagramm in Abbildung 4.19[172] dargestellt ist, handelt.

Beispiel 4.35. Sei $|S| = 5$ und seien p_1, p_2 die beiden S-Wahrscheinlichkeiten $p_1 = (1,1,0,0,0)$ und $p_2 = (1,0,0,1,1)$. Dann wissen wir aus Satz 4.34[173] und Bemerkung 4.24[174], dass das von der Menge $M := \{\prod_{i\in I} p_i : I \subseteq \{1,2\}\}$ erzeugte GFE aus der Menge von Elementen $G := \{\sum_{I\in T} \prod_{i\in I} p_i \prod_{i\in I^c} p_i' : T \subseteq 2^{\{1,2\}}\}$ besteht, welche höchstens $\min\{2^{2^2}, 2^5\} = 16$ Elemente umfasst. Um festzustellen, ob es sich bei dem GFE um eine vier-, acht- oder 16-elementige Boolesche Algebra handelt, bestimmten wir die Elemente von G:
Es ist $2^{2^{\{1,2\}}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1,2\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1,2\}\}, \{\{2\}, \{1,2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}\}$.
Der Einfachheit halber schreiben wir nun für $T \in 2^{2^{\{1,2\}}}$ statt $\sum_{I\in T} \prod_{i\in I} p_i \prod_{i\in I^c} p_i'$ kürzer $\sum_{I\in T}$. Dann ist $\sum_{I\in\emptyset} = (0,0,0,0,0)$, $\sum_{I\in\{\emptyset\}} = (0,0,1,0,0)$, $\sum_{I\in\{\{1\}\}} = (0,1,0,0,0)$, $\sum_{I\in\{\{2\}\}} = (0,0,0,1,1)$, $\sum_{I\in\{\{1,2\}\}} = (1,0,0,0,0)$, $\sum_{I\in\{\emptyset,\{1\}\}} = (0,1,1,0,0)$, $\sum_{I\in\{\emptyset,\{2\}\}} = (0,0,1,1,1)$,

[170] siehe S.90
[171] siehe S.89
[172] siehe S.91
[173] siehe S.88
[174] siehe S.89

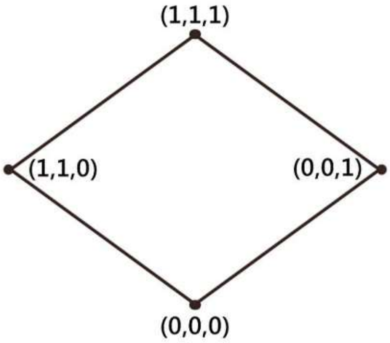

Abbildung 4.19: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.34, S.90: Die Abbildung zeigt die für $p_1 = (1,1,0)$, $p_2 = (0,0,1)$ von der Menge $\{\prod_{i \in I} p_i : I \subseteq \{1,2\}\}$ erzeugte Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten.

$\sum_{I \in \{\emptyset,\{1,2\}\}} = (1,0,1,0,0)$, $\sum_{I \in \{\emptyset,\{1\},\{2\}\}} = (0,1,1,1,1)$, $\sum_{I \in \{\emptyset,\{1\},\{1,2\}\}} = (1,1,1,0,0)$, $\sum_{I \in \{\emptyset,\{2\},\{1,2\}\}} = (1,0,1,1,1)$, $\sum_{I \in \{\{1\},\{2\}\}} = (0,1,0,1,1)$, $\sum_{I \in \{\{1\},\{1,2\}\}} = (1,1,0,0,0)$, $\sum_{I \in \{\{2\},\{1,2\}\}} = (1,0,0,1,1)$, $\sum_{I \in \{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}} = (1,1,0,1,1)$, $\sum_{I \in \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}} = (1,1,1,1,1)$, also besteht G aus 16 Elementen.
Somit handelt es sich bei dem von M erzeugten GFE um die 16-elementige Boolesche Algebra, deren Hasse-Diagramm in Abbildung 4.20[175] zu sehen ist.

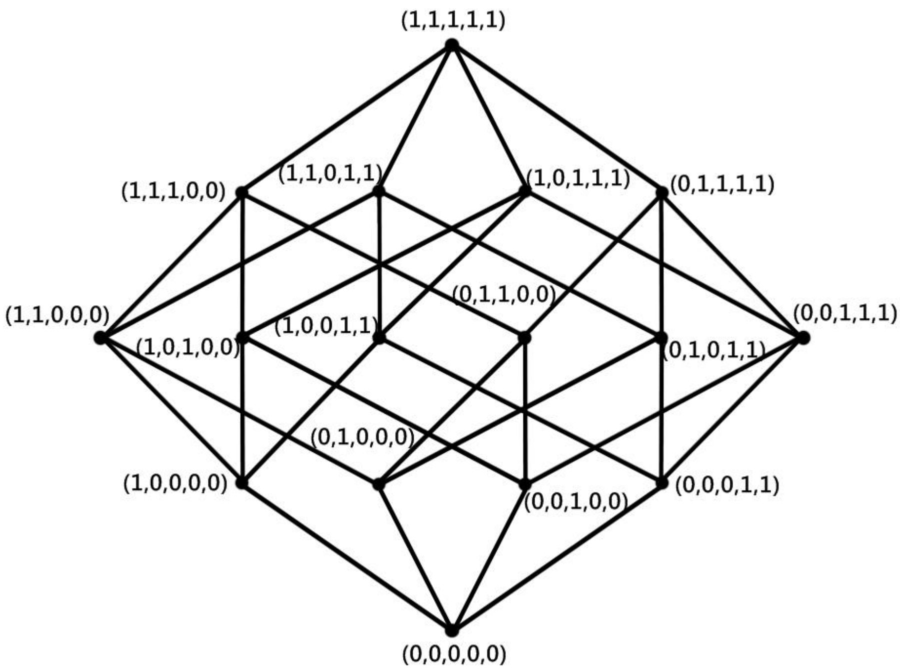

Abbildung 4.20: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.35, S.90: Die Abbildung zeigt die für $p_1 = (1,1,0,0,0)$, $p_2 = (1,0,0,1,1)$ von der Menge $\{\prod_{i \in I} p_i : I \subseteq \{1,2\}\}$ erzeugte Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten.

[175] siehe S.91

4.4.2 Von allgemeinen S-Wahrscheinlichkeiten erzeugte GFEs und Algebren von numerischen Ereignissen

In Abschnitt 4.4.1[176] haben wir uns nur Bedingungen angesehen, wann ein von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten erzeugtes GFE, das laut Satz 4.26[177] stets eine Algebra von numerischen Ereignissen ist, eine Boolesche Algebra bildet. Jene Resultate verallgemeinern wir nun auf den Fall von S-Wahrscheinlichkeiten mit beliebigen Werten in $[0,1]$. Dabei konzentrieren wir uns weiterhin nur auf die Struktur, die von bereits erhaltenen Messungen erzeugt wird, ohne Hinzunahme weiterer möglicher Messungen.

Eine Verallgemeinerung von Proposition 4.29[178] stellt folgendes Resultat dar.

Satz 4.35. *([29]) Sind $p_1, \dots, p_n : S \to [0,1]$, $n \geq 1$, von 0 und 1 verschiedene S-Wahrscheinlichkeiten und sind $p_1, \dots, p_n, p'_1, \dots, p'_n$ paarweise unvergleichbar, dann gleicht das von $\{p_1, \dots, p_n\}$ erzeugte GFE der von dieser Menge erzeugten Algebra von numerischen Ereignissen, besteht genau aus der Menge von Elementen $\{0, p_1, \dots, p_n, p'_1, \dots, p'_n, 1\}$ und ist isomorph zu MO_n.*

Beweis. (vgl.[29]) Die Behauptung folgt direkt aus der paarweisen Unvergleichbarkeit von $p_1, \dots, p_n, p'_1, \dots, p'_n$, welche zur Folge hat, dass kein Element außer 0 zu einem anderen als 0 orthogonal ist, weshalb die für GFEs bzw. die für Algebren von numerischen Ereignissen charakteristische Bedingung trivialerweise erfüllt ist. □

Beispiel 4.36. In Beispiel 4.27[179] haben wir bereits ein Exempel für eine zu MO_2 isomorphe, von paarweise unvergleichbaren Elementen erzeugte Algebra von numerischen Ereignissen, welche die Bedingungen aus Satz 4.35[180] erfüllt, diskutiert. Es ist in Abbildung 4.14[181] dargestellt.

Beispiel 4.37. Die in Beispiel 4.7[182] betrachteten S-Wahrscheinlichkeiten
$p_1 := (0.2, 0.8)$, $p_2 := (0.1, 0.9)$, $p'_1 = (0.8, 0.2)$, $p'_2 = (0.9, 0.1)$
sind paarweise unvergleichbar, weshalb das von ihnen erzeugte GFE, welches in Abbildung 4.5[183] dargestellt ist, laut Satz 4.35[184] eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten bildet und isomorph zu MO_2 ist.

Beispiel 4.38. Die n Elemente $p_j := (\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{2^{j+1}-1}{2^{j+1}})$, $1 \leq j \leq n$ sind von 0 und 1 verschieden und $p_1, p_2, \dots, p_n, p'_1, p'_2, \dots, p'_n$ sind paarweise unvergleichbar, darum ist Satz 4.35[185] anwendbar, woraus folgt, dass das von $\{p_1, \dots, p_n\}$ erzeugte GFE der von dieser Menge erzeugten Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten gleicht, genau aus der Menge $\{0, p_1, \dots, p_2, p'_1, \dots, p'_n, 1\}$ besteht und isomorph zu MO_n ist.
Das entsprechende Hasse-Diagramm ist in Abbildung 4.21[186] zu sehen.

[176] siehe S.84
[177] siehe S.84
[178] siehe S.86
[179] siehe S.85
[180] siehe S.92
[181] siehe S.86
[182] siehe S.61
[183] siehe S.62
[184] siehe S.92
[185] siehe S.92
[186] siehe S.93

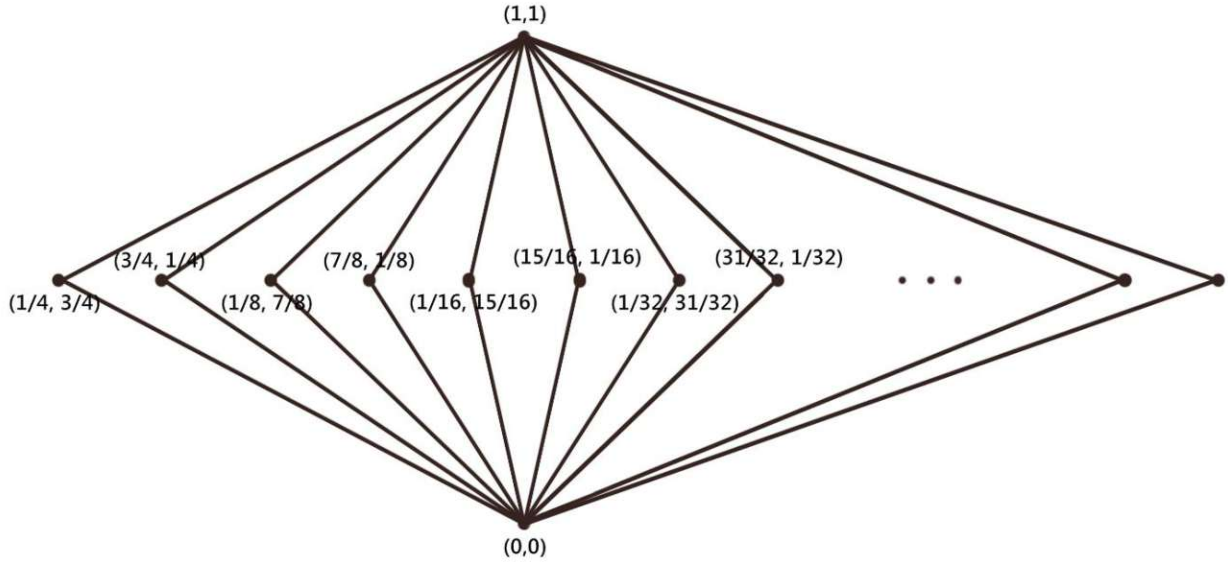

Abbildung 4.21: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.38, S.92: Die in Beispiel 4.38 betrachtete Menge von zweidimensionalen Wahrscheinlichkeiten erzeugt die abgebildete Algebra von numerischen Ereignissen.

Beispiel 4.39. Die drei Elemente $p_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1)$, $p_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ und $p_3 = (\frac{1}{5}, 1, 0)$ sind zwar von 0 und 1 verschieden und paarweise unvergleichbar, aber es ist $p_2 \leq p_1'$, daher ist Satz 4.35[187] nicht auf die Menge $\{p_1, p_2, p_3\}$ anwendbar.
Da der von der Menge $P = \{0, p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3', 1\}$ gebildete Verband, wie man am zugehörigen Hasse-Diagramm, welches in Abbildung 4.22[188] dargestellt ist, sofort sieht, einen zu dem durch das Hasse-Diagramm in Abbildung 3.10[189] verkörperten Verband isomorphen Teilverband enthält, nämlich den aus den Elementen $0, p_1, p_2, p_1', p_2', 1$ zusammengesetzten, ist $(P, \leq, ')$ laut Satz 3.18[190] nicht orthomodular und bildet daher Korollar 4.14[191] zufolge keine Algebra von numerischen Ereignissen.
Vielmehr stellt der Verband nicht einmal ein GFE dar (und entspricht folglich auch nicht dem von $\{p_1, p_2, p_3\}$ erzeugten GFE), weil beispielsweise $p_1 \perp p_2$ gilt, aber $p_1 + p_2 = (\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, 1) \notin P$ ist.

Satz 4.36. *([29]) Sind $p_1, \ldots, p_{n-1} : S \to [0,1]$, $n \geq 2$, S-Wahrscheinlichkeiten, sodass $p_1 + \ldots + p_{n-1} \leq 1$ ist und sodass $p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n := 1 - p_1 - \ldots - p_{n-1}$ alle eigentlich sind, dann ist $|S| \geq n$ und das von $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ erzeugte GFE ist gleich der von dieser Menge erzeugten Algebra von numerischen Ereignissen, besteht aus den Elementen der Menge $\left\{\sum_{i \in I} p_i : I \in 2^{\{1,\ldots,n\}}\right\}$ (wobei die leere Summe wie üblich gleich 0 ist) und ist eine 2^n-elementige Boolesche Algebra.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [29] verwiesen. □

[187] siehe S.92
[188] siehe S.94
[189] siehe S.41
[190] siehe S.41
[191] siehe S.78

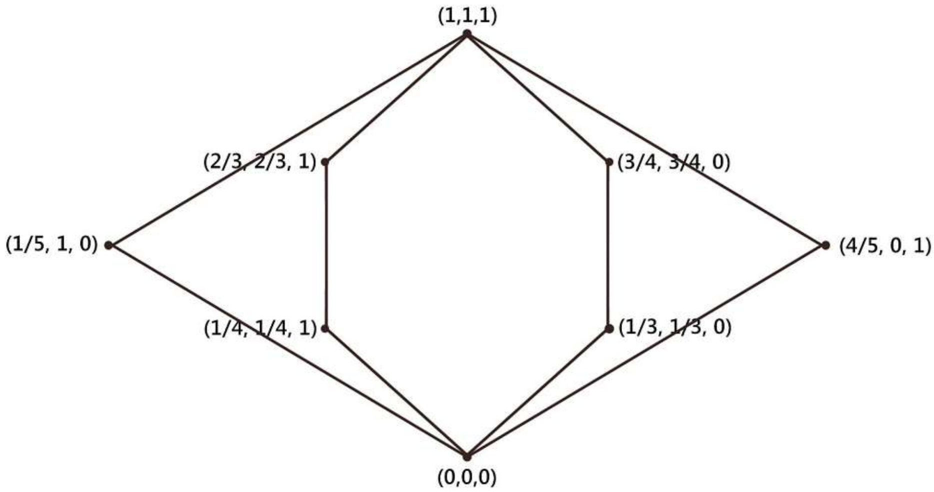

Abbildung 4.22: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.39, S.93: Der hier abgebildete Verband bildet keinen Raum von numerischen Ereignissen.

Bemerkung 4.25. (vgl.[29]) Da eine S-Wahrscheinlichkeit p_i nur dann eigentlich sein kann, wenn für mindestens ein $s \in S$ gilt, dass $p_i(s) > \frac{1}{2}$ ist, gilt für S-Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_{n-1}$, welche die Voraussetzungen aus Satz 4.36[192] erfüllen, wegen $p_1 + \ldots + p_n = 1$, dass es für jedes numerische Ereignis p_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ mindestens ein $s_i \in S$ gibt, sodass $p_i(s_i) > \frac{1}{2}$, $p_j(s_i) < \frac{1}{2} \forall j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$ ist.

Beispiel 4.40. Ist $n \geq 2$, $|S| = m \geq n$, $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ und hat man $n-1$ S-Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_{n-1}$ gegeben, sodass $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$: $p_i(s_i) = \frac{n+1}{2n}$, $p_i(s_j) = \frac{1}{2n}, j \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{i\}$ ist, dann erfüllen die n S-Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n := 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i$ die Voraussetzungen aus Satz 4.36[193], weshalb es sich bei dem von $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ erzeugten GFE um die Menge $M := \{\sum_{i \in I} p_i : I \in 2^{\{1,\ldots,n\}}\}$ handelt, welche eine Boolesche Algebra bildet.
Unter den 2^n Elementen von M sind $\binom{n-1}{j}$ Elemente, die j Zuständen den Wahrscheinlichkeitswert $\frac{n+j}{2n}$ und $m-j$ Zuständen den Wert $\frac{j}{2n}$ zuordnen und $\binom{n-1}{j}$ Elemente, die $m-n+j+1$ Zustände auf den Wert $\frac{n+j+1}{2n}$ und die restlichen $n-j-1$ Zustände auf $\frac{j+1}{2n}$, $j = 0, \ldots, n-1$, abbilden.

Beispiel 4.41. Wir betrachten das in Beispiel 4.40[194] diskutierte Exempel für den Fall $n = 3$, $m = 5$. Dann ist $p_1 = (\frac{4}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $p_2 = (\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ und $p_3 = 1 - p_1 - p_2 = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{4}{6}, \frac{4}{6})$. Das von $\{p_1, p_2\}$ erzeugte GFE entspricht laut Satz 4.36[195] der von dieser Menge erzeugten Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten und bildet eine achtelementige Boolesche Algebra.
Diese besteht aus $\binom{2}{0} = 1$ S-Wahrscheinlichkeit, die 0 Zuständen den Wert $\frac{3+0}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$ und $5 - 0 = 5$ Zuständen den Wert $\frac{0}{2 \cdot 3} = 0$ zuordnet, nämlich $\sum_{i \in \emptyset} p_i = (0, 0, 0, 0, 0)$,
$\binom{2}{1} = 2$ S-Wahrscheinlichkeiten, die 1 Zustand den Wert $\frac{3+1}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6}$ und $5 - 1 = 4$ Zuständen den Wert $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$ zuordnen, nämlich p_1 und p_2,
$\binom{2}{2} = 1$ S-Wahrscheinlichkeit, die 2 Zuständen den Wahrscheinlichkeitswert $\frac{3+2}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$ zuordnet, nämlich $p_1 + p_2 = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6})$,

[192] siehe S.93
[193] siehe S.93
[194] siehe S.94
[195] siehe S.93

$\binom{2}{0} = 1$ S-Wahrscheinlichkeit, die $5-3+0+1=3$ Zuständen den Wert $\frac{3+0+1}{2\cdot 3} = \frac{4}{6}$ und $3-0-1=2$ Zuständen den Wert $\frac{0+1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$ zuordnet, nämlich p_3,
$\binom{2}{1} = 2$ Elementen, die $5-3+1+1=4$ Zuständen den Wert $\frac{3+1+1}{2\cdot 3} = \frac{5}{6}$ und dem restlichen $3-1-1=1$ Zustand den Wert $\frac{1+1}{2\cdot 3} = \frac{2}{6}$ zuordnen, nämlich $p_1+p_3 = (\frac{5}{6}, \frac{2}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6})$ und $p_2+p_3 = (\frac{2}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6})$, und
$\binom{2}{2} = 1$ S-Wahrscheinlichkeit, die $5-3+2+1=5$ Zustände auf den Wert $\frac{3+2+1}{2\cdot 3} = 1$ und $3-2-1=0$ Zustände auf $\frac{2+1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}$ abbildet, nämlich $p_1+p_2+p_3 = (1,1,1,1,1)$.

Satz 4.37. *([29]) Sind $p_1, \ldots, p_{n-1} : S \to [0,1]$, $n \geq 2$, S-Wahrscheinlichkeiten, sodass $0 < p_1 < \ldots < p_{n-1} < 1$ ist, $p_0 := 0$[196], $p_n := 1$, und gilt $p_i - p_{i-1} \not\leq \frac{1}{2} \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, dann ist $|S| \geq n$ und das von $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ erzeugte GFE gleicht der von $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ erzeugten Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, besteht aus den Elementen der Menge $\{\sum_{i \in I}(p_i - p_{i-1}) : I \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ (wobei $\sum_{j\in\emptyset} p_j := 0$ ist) und ist eine 2^n-elementige Boolesche Algebra.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [29] verwiesen. □

Beispiel 4.42. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $|S| = m \geq n$. Wir konstruieren $n-1$ S-Wahrscheinlichkeiten, die die Voraussetzungen aus Satz 4.37[197] erfüllen.
Dafür sei $p_0 := 0$ und $p_n := 1$. Wegen $p_i > p_{i-1}$, $p_i - p_{i-1} \not\leq \frac{1}{2} \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ muss es mindestens einen Zustand $s_1 \in S$ geben, sodass $p_1(s_1) > \frac{1}{2}$ ist. Die restlichen $m-1$ Zustände können alle auf 0 abgebildet werden. Darum definieren wir $p_1 := (x_1, 0, \ldots, 0)$, wobei $\frac{1}{2} < x_1 \leq 1$ beliebig ist.
Nun soll $p_2 > p_1$ und $p_2 - p_1 \not\leq \frac{1}{2}$ sein. Darum muss $p_2(s_1) \geq x_1$ gelten und mindestens einem der restlichen $m-1$ Zustände muss unter p_2 ein beliebiger Wert x_2, sodass $\frac{1}{2} < x_2 \leq 1$ ist, zugewiesen werden. Die restlichen $m-2$ Zustände können auf 0 abgebildet werden. Für einen geeigneten Wert x_2 definieren wir daher $p_2 := (x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$. Setzen wir dieses Vorgehen fort, so erhalten wir $n-1$ m-dimensionale Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_{n-1}$, sodass $p_i := (x_1, x_2, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0)$ mit $\frac{1}{2} < x_1, \ldots, x_i \leq 1$ ist. Laut Konstruktion erfüllen diese S-Wahrscheinlichkeiten die Voraussetzungen aus Satz 4.37, weshalb das von $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ erzeugte GFE mit dem von der Menge erzeugten Raum von numerischen Ereignissen übereinstimmt und eine Boolesche Algebra, die aus den 2^n Elementen der Menge $\{\sum_{i\in I}(p_i - p_{i-1}) : I \in 2^{\{1,\ldots,n\}}\}$ besteht, bildet.

Folgendes Resultat stellt eine Verallgemeinerung von Satz 4.34[198] dar.

Satz 4.38. *([29]) Sind $p_1, \ldots, p_n : S \to [0,1]$, $n \geq 1$, S-Wahrscheinlichkeiten, sodass $\prod_{i\in I} p_i \prod_{i \in I^c} p_i' \not\leq \frac{1}{2}$ $\forall I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gilt, dann ist das von $\{\prod_{i\in I} p_i : I \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$, wobei $\prod_{i\in\emptyset} p_i := 1$ ist, erzeugte GFE gleich der von dieser Menge erzeugten Algebra von numerischen Ereignissen, besteht aus den Elementen der Menge $\left\{\sum_{I\in T} \prod_{i\in I} p_i \prod_{i\in I^c} p_i' : T \subseteq 2^{\{1,\ldots,n\}}\right\}$ (wobei die leere Summe wie üblich per Definition 0 ist) und ist eine Boolesche Algebra mit 2^{2^n} Elementen.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [29] verwiesen. □

Beispiel 4.43. Die beiden dreidimensionalen Wahrscheinlichkeiten $p_1 = (1,0,0), p_2 = (0,1,0)$, die dem in Beispiel 4.33[199] erzeugten GFE zugrunde liegen, können die Voraussetzungen aus

[196] In [29], woraus dieser Satz stammt, steht $p_0 := 1$, es sollte nach Meinung des Verfassers der vorliegenden Arbeit jedoch $p_0 := 0$ lauten.
[197] siehe S.95
[198] siehe S.88
[199] siehe S.89

Satz 4.38[200] nicht erfüllen, weil das GFE sonst $2^{2^2} = 16$ Elemente umfassen müsste, es, wie festgestellt, aber nur aus acht Elementen besteht. Tatsächlich wird beispielsweise für $J = \{1,2\} \in 2^{\{1,2\}}$ die in Satz 4.38[201] angegebene Bedingung verletzt, denn es ist $\prod_{i\in J} p_i \prod_{i\in\emptyset} p_i' = p_1 \cdot p_2 = (0,0,0) \leq \frac{1}{2}$.
Das Gleiche gilt für das in Beispiel 4.34[202] erzeugte GFE, welches gar nur vier Elemente umfasst. Auch hier verletzt das zur Indexmenge $J = \{1,2\}$ gehörige Produkt die Bedingung.

Beispiel 4.44. Das in Beispiel 4.35[203] von der Menge $\{\prod_{i\in I} p_i : I \subseteq \{1,\dots,n\}\}$, wobei $p_1 = (1,1,0,0,0)$ und $p_2 = (1,0,0,1,1)$ ist, erzeugte GFE umfasst $2^{2^2} = 16$ Elemente, weshalb es sein kann, dass für p_1, p_2 auch die Bedingung aus Satz 4.38[204] erfüllt wird. Dies ist in der Tat der Fall, denn wir haben

$$\prod_{i\in\emptyset} p_i \prod_{i\in\{1,2\}} p_i' = 1 \cdot (0,0,1,1,1) \cdot (1,0,0,1,1) = (0,0,1,0,0,) \not\leq \frac{1}{2},$$

$$\prod_{i\in\{1\}} p_i \prod_{i\in\{2\}} p_i' = (1,1,0,0,0) \cdot (0,1,1,0,0) = (0,1,0,0,0) \not\leq \frac{1}{2},$$

$$\prod_{i\in\{2\}} p_i \prod_{i\in\{1\}} p_i' = (1,0,0,1,1) \cdot (0,0,1,1,1) = (0,0,0,1,1) \not\leq \frac{1}{2},$$

$$\prod_{i\in\{1,2\}} p_i \prod_{i\in\emptyset} p_i' = (1,1,0,0,0) \cdot (1,0,0,1,1) \cdot 1 = (1,0,0,0,0) \not\leq \frac{1}{2}.$$

Beispiel 4.45. Betrachten wir die drei achtdimensionalen Wahrscheinlichkeiten
$p_1 = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5})$, $p_2 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5})$, $p_3 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5})$
und überprüfen die Bedingung aus Satz 4.38[205], so erkennen wir, dass diese erfüllt ist und somit das von $\left\{\prod_{i\in I} p_i : I \in 2^{\{1,2,3\}}\right\}$ erzeugte GFE eine $2^{2^3} = 256$-elementige Boolesche Algebra ist.

Beispiel 4.46. Das Exempel in Beispiel 4.45[206] erhält man durch folgendes Vorgehen, durch welches sich auch beliebig viele weitere Beispiele generieren lassen:
Ist S die Zustandsmenge, $|S| = m$ und $n \geq 1$ die beabsichtigte Anzahl von S-Wahrscheinlichkeiten, sodass $2^n \leq m$ ist, so bildet man die Potenzmenge $2^{\{1,\dots,n\}}$ und indiziert 2^n Zustände aus S mit den Elementen aus $2^{\{1,\dots,n\}}$. Dann definiert man $p_1, \dots, p_n$ auf diesen 2^n Zuständen nach und nach so, dass für jedes $I \in 2^{\{1,\dots,n\}}$ die Bedingung $\prod_{i\in I} p_i(s_I) \prod_{i\in I^c} p_i(s_I) > \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Das heißt, für $I = \emptyset$ werden $p_1', \dots, p_n'$ so festgelegt, dass $p_1'(s_\emptyset) \cdot \ldots \cdot p_n'(s_\emptyset) > \frac{1}{2}$ ist, für $I = \{1\}$ werden $p_1, p_2', p_3', \dots, p_n'$ so festgelegt, dass $p_1(s_{\{1\}}) \cdot p_2'(s_{\{1\}}) \cdot \ldots \cdot p_n'(s_{\{1\}}) > \frac{1}{2}$ gilt, und so weiter. Die restlichen $m - 2^n$ Zustände können von $p_1, \dots, p_n$ auf beliebige Werte aus $[0,1]$ abgebildet werden.

4.4.3 Konkrete GFEs, Algebren von numerischen Ereignissen und Ereignissysteme

Bilden GFEs bzw. Räume von numerischen Ereignissen Boolesche Algebren, dann weiß man, dass sie konkret sind, weil, wie in Bemerkung 3.23[207] festgestellt, jede Boolesche Algebra konkret

[200] siehe S.95
[201] siehe S.95
[202] siehe S.90
[203] siehe S.90
[204] siehe S.95
[205] siehe S.95
[206] siehe S.96
[207] siehe S.51

ist.
In diesem Abschnitt lernen wir allgemeinere notwendige und hinreichende Bedingungen dafür kennen, wann bestimmte Mengen von S-Wahrscheinlichkeiten konkret sind.

Satz 4.39. *(vgl.[29][208]) Sei S eine Menge von Zuständen. Dann gilt Folgendes:*

(a) Wenn $P \subseteq \{0,1\}^S$ ein GFE ist, dann ist $(S, \mathcal{M})$ mit $\mathcal{M} := \{p^{-1}(\{1\}) : p \in P\}$[209] eine konkrete Logik.

(b) Ist $(S, \mathcal{M})$ eine konkrete Logik, dann ist $\{I_A : A \in \mathcal{M}\}$ ein GFE, wobei I_A die zur Menge $A \in \mathcal{M}$ gehörige Indikatorfunktion bezeichnet.

(c) Die in den beiden vorangegangenen Punkten beschriebene Korrespondenz ist eineindeutig.

Beweis. Die Aussagen folgen direkt aus den Definitionen von GFEs und konkreten Logiken. □

Demnach ist also jedes GFE, das nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, eine konkrete Logik und vice versa.[210]

Korollar 4.40. *([24])Wenn jedes $p \in P \subseteq [0,1]^S$ nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, dann ist P genau dann eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, wenn $P = \{I_A : A \in \mathcal{M}\}$ für ein Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq 2^S$ ist und $(S, \mathcal{M})$ eine konkrete Logik bildet.*
Gilt für diese konkrete Logik zudem $A \cup B \in \mathcal{M}\ \forall A, B \in \mathcal{M}$, dann ist $(P, \leq, ')$ eine Boolesche Algebra.
($\cup$ bezeichnet hier wie gehabt die mengentheoretische Vereinigung)

Beweis. Die Charakterisierung folgt aus der Tatsache, dass laut Satz 4.26[211] die ausschließlich aus zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten bestehenden GFEs genau die Algebren von zweiwertigen numerischen Ereignissen sind, in Kombination mit Satz 4.39[212]. Die letzte Behauptung folgt aus Bemerkung 3.21[213]. □

Beispiel 4.47. Wir betrachten noch einmal die auf der Zustandsmenge $S := (s_1, s_2, s_3, s_4)$ definierten S-Wahrscheinlichkeiten $p_1 := (1,0,0,0)$, $p_2 := (1,0,0,1)$, $p_3 := (1,1,1,1)$ aus Beispiel 4.32[214].
Dort haben wir gesehen, dass das von $\{p_1, p_2, p_3\}$ erzeugte GFE P, welches in Abbildung 4.17[215] dargestellt ist, aus den acht Elementen $0, p_1, p_1', p_2, p_2', (0,0,0,1) =: q, q'$ und $p_3 = 1$ besteht.
Seien $A := \{s_1\}$, $B := \{s_2, s_3\}$ und $C := \{s_4\}$. Dann bildet laut dem ersten Punkt in Satz 4.39[216] $(S, \mathcal{M})$ mit dem Mengensystem
$\mathcal{M} := \{0^{-1}(\{1\}) = \emptyset, p_1^{-1}(\{1\}) = A, p_2'^{-1}(\{1\}) = B, q^{-1}(\{1\}) = C, p_1'^{-1}(\{1\}) = B \cup C, p_2^{-1}(\{1\}) = A \cup C, q^{-1}(\{1\}) = A \cup B, 1^{-1}(\{1\}) = S\}$
eine konkrete Logik, deren Hasse-Diagramm in Abbildung 4.23[217] dargestellt ist.

[208] In [29] wird die Aussage im ersten Punkt für $P \subseteq [0,1]^S$ getätigt. Nach Auffassung des Verfassers der vorliegenden Arbeit ist die im dritten Punkt beschriebene Korrespondenz jedoch nur für $P \subseteq \{0,1\}^S$ gültig.
[209] $p^{-1}(\{1\})$ ist die Menge aller Zustände $s \in S$, die von p auf 1 abgebildet werden.
[210] Aus diesem Grund werden GFEs von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten in der Literatur häufig als konkrete Logiken bezeichnet, beispielsweise in [21].
[211] siehe S.84
[212] siehe S.97
[213] siehe S.50
[214] siehe S.88
[215] siehe S.89
[216] siehe S.97
[217] siehe S.98

Das Mengensystem $\mathcal{M}$ lässt sich auch als die Potenzmenge von $\{s_1, s, s_4\}$, wobei s für s_2 und s_3 steht, auffassen, wie aufgrund der Tatsache, dass das diskutierte GFE eine Boolesche Algebra ist, in Anbetracht von Proposition 3.31[218] zu erwarten.
Ist umgekehrt die konkrete Logik $(S, \{\emptyset, \{s_1\}, \{s_2, s_3\}, \{s_4\}, \{s_2, s_3, s_4\}, \{s_1, s_4\}, \{s_1, s_2, s_3\}, S\})$ gegeben, definiert man $p_1 := I_{\{s_1\}}, p_2 := I_{\{s_1,s_4\}}, q := I_{\{s_4\}}$ und bildet $p_1' = I_{\{s_1\}^c} = I_{\{s_2,s_3,s_4\}}$, $p_2' = I_{\{s_1,s_3\}^c} = I_{\{s_2,s_4\}}$, $q' = I_{\{s_4\}^c} = I_{\{s_1,s_2,s_3\}}$, $0 = I_\emptyset$, $1 = I_S$, so erhält man genau die Elemente des GFEs P.

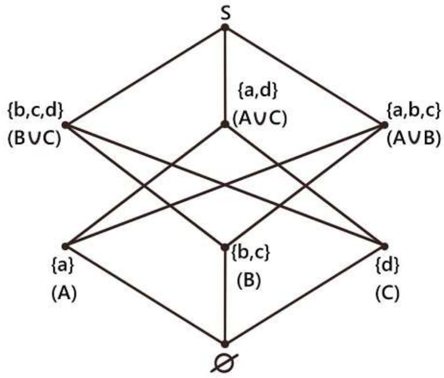

Abbildung 4.23: Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.47, S.97: Die konkrete Logik korrespondiert mit dem von der Menge von S-Wahrscheinlichkeiten $\{(1,0,0,0), (1,0,0,1)\}$ erzeugten GFE.

Korollar 4.41. *([25])Ist P ein strukturiertes poset von S-Wahrscheinlichkeiten, dessen Elemente nur die Werte* 0 *und* 1 *annehmen können, dann ist P konkret.*

Beweis. (vgl.[25]) Die Behauptung folgt daraus, dass ein strukturiertes poset P von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten trivialerweise komplementär und somit laut Proposition 4.2[219] eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten ist und als Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, deren Elemente nur die Werte 0 und 1 annehmen können, daher laut Korollar 4.40[220] konkret ist. □

In den vorangegangenen Resultaten ist die Voraussetzung, dass man es mit zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten zu tun hat, essentiell, da man andernfalls Räume von numerischen Ereignissen mitunter auch mit Hilfe von Mengen repräsentieren kann, welche keine konkreten Logiken bilden.
So hat man für Mengen von S-Wahrscheinlichkeiten, die neben den Werten 0 und 1 auch den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen können, beispielsweise folgendes Resultat:

Satz 4.42. *([24]) Wenn jedes $p \in P \subseteq [0,1]^S$ nur die Werte $0, \frac{1}{2}$ und* 1 *annehmen kann, dann handelt es sich bei P genau dann um eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, wenn $P = \{I_A + \frac{1}{2} I_B : (A,B) \in \mathcal{M}\}$ ist, wobei $\mathcal{M}$ ein Mengensystem von Tupeln von Teilmengen von S mit den folgenden Eigenschaften ist (im Rahmen derer Δ die symmetrische Differenz von Mengen bezeichnet):*

[218] siehe S.47
[219] siehe S.60
[220] siehe S.97

(a) $A \cap B = \emptyset \; \forall (A, B) \in \mathcal{M}$

(b) $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{M}$

(c) $(A, B) \in \mathcal{M} \Rightarrow (A, B)^c := (S \backslash (A \cup B), B) \in \mathcal{M}$

(d) $[(A, B), (C, D) \in \mathcal{M},\; A \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup D) = \emptyset] \Rightarrow (A \cup C \cup (B \cap D), B \Delta D) \in \mathcal{M}$

(e) $[(A, B), (C, D), (E, F) \in \mathcal{M},\; A \cap C = C \cap E = E \cap A = (A \cup C \cup E) \cap (B \cup D \cup F) = \emptyset] \Rightarrow B \cap D \cap F = \emptyset$

Beweis. Für den Beweis sei auf [24] verwiesen. □

Bemerkung 4.26. ([24]) Definiert man auf dem Mengensystem $\mathcal{M}$ aus Satz 4.42[221] eine binäre Relation $\subseteq^*$ durch $(A, B) \subseteq^* (C, D) :\Leftrightarrow [A \subseteq C,\; B \subseteq C \cup D \; \forall (A, B), (C, D) \in \mathcal{M}]$, dann ist die Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten $(P, \leq, ')$, $P \subseteq \{0, \frac{1}{2}, 1\}^S$, genau dann ein orthomodularer Verband, wenn das laut Satz 4.42[222] existente korrespondierende Mengensystem bezüglich $\subseteq^*$ einen Verband bildet und genau dann eine Boolesche Algebra, wenn $(\mathcal{M}, \subseteq^*)$ ein distributiver Verband ist.

Bemerkung 4.27. ([24]) Wie aus der Repräsentation von P in den Sätzen 4.40[223] und 4.42[224] folgt, gibt es für $|S| = 1, 2$ bzw. 3 genau 1, 2 bzw. 5 Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten $P \subseteq \{0, 1\}^S$ und genau 1, 2 bzw. 15 solche Räume von numerischen Ereignissen $P \subseteq \{0, \frac{1}{2}, 1\}^S$.

Beispiel 4.48. Für $S = \{s_1\}$ besteht die Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten $P \subseteq \{0, 1\}^S$ aus der Menge $P = \{I_\emptyset, I_{\{s_1\}}\} = \{0, 1\}$.
Für $S = \{s_1, s_2\}$ sind die beiden Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten $P_1, P_2 \subseteq \{0, 1\}^S$ gegeben durch $P_1 = \{I_\emptyset, I_{\{s_1,s_2\}}\} = \{0, 1\}$ und $P_2 = \{I_\emptyset, I_{\{s_1\}}, I_{\{s_2\}}, I_{\{s_1,s_2\}}\}$.
Für $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ sind die fünf Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten $P_i \subseteq \{0, 1\}^S$, $i = 1, \ldots, 5$ die Mengen $P_1 = \{I_\emptyset, I_{\{s_1,s_2,s_3\}}\} = \{0, 1\}$, $P_2 = \{I_\emptyset, I_{\{s_1\}}, I_{\{s_2,s_3\}}, I_{\{s_1,s_2,s_3\}}\}$, $P_3 = \{I_\emptyset, I_{\{s_2\}}, I_{\{s_1,s_3\}}, I_{\{s_1,s_2,s_3\}}\}$, $P_4 = \{I_\emptyset, I_{\{s_3\}}, I_{\{s_1,s_2\}}, I_{\{s_1,s_2,s_3\}}\}$ und $P_5 = \{I_\emptyset, I_{\{s_1\}}, I_{\{s_2\}}, I_{\{s_3\}}, I_{\{s_1,s_2\}}, I_{\{s_1,s_3\}}, I_{\{s_2,s_3\}}, I_{\{s_1,s_2,s_3\}}\}$.

Beispiel 4.49. Für $S = \{s_1\}$ ist die Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten $P \subseteq \{0, \frac{1}{2}, 1\}^S$ die Menge $P = \{I_\emptyset, I_{\{s_1\}}\} = \{0, 1\}$.
Für $S = \{s_1, s_2\}$ sind die beiden Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten $P_1, P_2 \subseteq \{0, \frac{1}{2}, 1\}^S$ gegeben durch $P_1 = \{I_{(\emptyset,\emptyset)}, I_{(\{s_1,s_2\},\emptyset)}\}$, $P_2 = \{I_{(\emptyset,\emptyset)}, I_{(\{s_1\},\emptyset)}, I_{(\{s_2\},\emptyset)}, I_{(\{s_1,s_2\},\emptyset)}\}$, ihre Elemente entsprechen also sozusagen denen im Fall von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten, wenn man nur die erste Komponente der Tupeln betrachtet.
Ein interessanteres Beispiel für eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten $P \subseteq \{0, \frac{1}{2}, 1\}^S$ für $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ ist etwa $P = \{I_{(\emptyset,\emptyset)}, I_{(\{s_1\},\{s_2\})}, I_{(\{s_3\},\{s_2\})}, I_{(\{s_1,s_2,s_3\},\emptyset)}\} = \{0, p_1, p_2, 1\}$, wobei p_1, p_2 durch $p_1(s_1) = 1, p_1(s_2) = \frac{1}{2}, p_1(s_3) = 0$ und $p_2(s_1) = 0, p_2(s_2) = \frac{1}{2}, p_2(s_3) = 1$ definiert sind.

In Anbetracht der laut Satz 4.27[225] bestehenden Korrespondenz von orthomodularen posets, die eine volle Menge von zweiwertigen Zuständen erlauben mit GFEs von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten und deren in Satz 4.39[226] angegebenen Zusammenhang mit konkreten Logiken, ist folgende Korrespondenz zwischen Ereignissystemen und konkreten Logiken nicht überraschend.

[221] siehe S.98
[222] siehe S.98
[223] siehe S.97
[224] siehe S.98
[225] siehe S.84
[226] siehe S.97

Proposition 4.43. *([68],[30],[28],[72],[43]) Sei L ein Ereignissystem (das heißt, ein (σ-)orthomodulares poset). Dann handelt es sich genau dann um eine konkrete Logik, wenn L eine ordnungsbestimmende Menge von zweiwertigen Zuständen besitzt, das heißt, wenn es für alle $a, b \in L$ mit $a \not\leq b$ einen zweiwertigen Zustand m auf L gibt, sodass $m(a) = 1$ und $m(b) = 0$ ist.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [43] verwiesen. □

Beispiel 4.50. ([72]) Der Hilbert-Verband $L(H)$ erlaubt für $\dim(H) \geq 3$ keine zweiwertigen Zustände, weshalb er dann nicht konkret sein kann.

Beispiel 4.51. (vgl.[72]) Aus Beispiel 3.15[227] folgt, dass jedes infimum-getreue (bzw. laut Korollar 3.22[228] äquivalent dazu, boolesche) Ereignissystem als boolesches orthomodulares poset eine konkrete Logik darstellt und somit Proposition 4.43[229] zufolge eine volle Menge von zweiwertigen Zuständen erlaubt.

Satz 4.44. *(vgl.[68],[72],[73]) Sei L ein Ereignissystem, bezeichnen $\mathcal{C}$ die Klasse aller konkreten orthomodularen posets, $\mathcal{C}_0$ die Klasse aller Booleschen Algebren, $\mathcal{C}_3$ die Klasse aller infimum-getreuen orthomodularen posets und seien $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ wie folgt definiert:*
$L \in \mathcal{C}_1 :\Leftrightarrow$ L ist konkret und jeder Zustand s (im Sinne von Definition 3.22[230]) auf dem repräsentierenden Mengensystem $\mathcal{A}$ ist subadditiv, das heißt, er erfüllt: $\forall A, B \in \mathcal{A} \exists C \in \mathcal{A} : C \supseteq A \cup B,\ s(C) \leq s(A) + s(B)$.
$L \in \mathcal{C}_2 :\Leftrightarrow$ L ist konkret und für je zwei A, B des repräsentierenden Mengensystems $\mathcal{A}$ gibt es eine endliche Familie $\{C_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{A}$, sodass $A \cap B = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_i$ ist.
Dann ist $\mathcal{C}_0 \subsetneq \mathcal{C}_1 \subsetneq \mathcal{C}_2 \subsetneq \mathcal{C}_3 \subsetneq \mathcal{C}$.
Im Falle, dass das Ereignissystem L einen Verband bildet, gilt $L \in \mathcal{C}_3 \Leftrightarrow L \in \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow L \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow L \in \mathcal{C}_0$.

Beweis. Für den Beweis sei auf [68] und [73] verwiesen. □

Bemerkung 4.28. (vgl.[30],[23],[78]) Satz 4.44[231] besagt insbesondere, dass, wie wir in Beispiel 3.15[232] bereits festgestellt haben, alle booleschen orthomodularen posets konkret sind. Da der Beweis dieses Resultats, welcher in [68] nachzulesen ist, die Orthomodularität gar nicht verwendet, ist sogar jedes boolesche orthoposet konkret.

Bemerkung 4.29. An Satz 4.44[233] erkennen wir eine wichtige Eigenschaft von Booleschen Algebren, die nicht von allen konkreten Logiken automatisch erfüllt wird und daher als notwendige Bedingung zur Überprüfung der Klassik eines mit einer konkreten Logik assoziierten physikalischen Systems dienen kann: Da die Klasse der Booleschen Algebren in der Klasse $\mathcal{C}_1$ enthalten ist, sind Zustände auf Booleschen Algebren stets subadditiv.

[227] siehe S.50
[228] siehe S.43
[229] siehe S.100
[230] siehe S.50
[231] siehe S.100
[232] siehe S.50
[233] siehe S.100

4.5 Klassische S-Wahrscheinlichkeiten

4.5.1 Resultate für verbandsgeordnete Algebren von numerischen Ereignisse

Da aus Satz 4.13[234] folgt, dass sich verbandsgeordnete Algebren von numerischen Ereignissen als orthomodulare Verbände auffassen lassen, sind jene den Booleschen Algebren schon sehr nahe. In diesem Abschnitt lernen wir Charakterisierungen von Booleschen Algebren unter den verbandsgeordneten Algebren von numerischen Ereignissen kennen.
Die Annahme, dass es sich bei einem quantenmechanischen System um einen verbandsgeordneten Raum von numerischen Ereignissen handelt, wird häufig getroffen, da auch die in Abschnitt 2.4[235] kennengelernte Standard-Quantenlogik einen Verband bildet.

Satz 4.45. *([20],[21])Für $|S| = 2$ sind alle Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten Verbände und die einzigen Booleschen Algebren unter ihnen sind die zwei- und die vierelementige.*
Jede Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten mit $|S| = 2$ ist isomorph zum zweielementigen Verband oder zu einem Verband MO_n, $n \in \mathbb{Z}^+$ oder MO_∞.

Beweis. Für den Beweis sei auf [20] verwiesen. □

Satz 4.46. *([21]) Eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P, die ein Verband ist, ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn $p \vee q \leq p + q\ \forall p, q \in P$ ist.*

Beweis. (vgl.[21]) Angenommen, es gilt die Voraussetzung, dass für alle $p, q \in P$ stets $p \vee q \leq p + q$ ist, wobei die Summe unabhängig davon, ob sie in P liegt, gebildet wird. Dann gilt auch $p' \vee q' \leq p' + q' \forall p, q \in P$. Da jede Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten laut Korollar 4.14[236] ein orthomodulares poset und somit, wenn sie ein Verband ist, einen orthomodularen, und insbesondere orthokomplementären, Verband bildet, folgt mit den Gesetzen von de Morgan, dass $p \wedge q \geq 1-(1-p+1-q)$, also $1 \geq p+q-p\wedge q \geq 0$ ist. Also gilt immer, wenn $p \wedge q = 0$ ist, dass $p+q \leq 1$ und somit $p \leq q'$ ist. Anders ausgedrückt, haben wir $\forall p, q \in P : p \wedge q = 0 \Rightarrow p \perp q$, also handelt es sich um einen booleschen orthokomplementären Verband und deshalb Satz 3.29[237] zufolge um eine Boolesche Algebra.
Umgekehrt gilt, wenn die Algebra von numerischen Ereignissen P eine Boolesche Algebra ist, dass für alle $p, q \in P$ das Supremum $p \vee q'$ in P existiert, $p \leq p \vee q'$ ist, und deshalb $p \perp (p' \wedge q)$ gilt, weshalb auch $p + (p' \wedge q) \in P$ ist. Das liefert unter Verwendung des Distributivgesetzes durch die Feststellung $p + q \geq p + (q \wedge p') = p \vee (q \wedge p') = (p \vee q) \wedge 1 = p \vee q$ die behauptete Ungleichung. □

Beispiel 4.52. Betrachten wir noch einmal den einen Verband bildenden Raum von numerischen Ereignissen aus Beispiel 4.17[238], welcher in Abbildung 4.8[239] dargestellt ist. Durch Anwendung von Satz 4.46[240] sehen wir, dass es sich bei ihm nicht um eine Boolesche Algebra handelt, weil beispielsweise $p \vee s = (1, 1, 1) \not\leq (\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = p + s$ ist.

[234] siehe S.75
[235] siehe S.9
[236] siehe S.78
[237] siehe S.46
[238] siehe S.70
[239] siehe S.70
[240] siehe S.101

Satz 4.47. *([30]) Sei $(P, \leq, ')$ eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, sodass $(P, \leq)$ ein Verband ist. Dann ist $(P, \leq)$ genau dann eine Boolesche Algebra, wenn gilt: $\forall p, q \in P$: $(p \vee q) + (p \wedge q) = p + q$.*

Beweis. Ist $(P, \leq, ')$ eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, welche einen Verband bildet, dann ist dieser laut Satz 4.13[241] orthomodular und Korollar 3.34[242] zufolge genau dann eine Boolesche Algebra, wenn alle Elemente paarweise kommutieren. Da in einem Verband ohnehin alle Suprema und Infima von jeweils endlich vielen Elementen existieren, folgt die behauptete Aussage direkt aus Satz 4.17[243]. □

Beispiel 4.53. Die schon in Beispiel 4.9[244] betrachtete Algebra von numerischen Ereignissen P, welche in Abbildung 4.7[245] dargestellt ist, bildet einen Verband, erfüllt aber nicht die Bedingung aus Satz 4.47[246], welche notwendig und hinreichend dafür ist, dass es sich bei P um eine Boolesche Algebra handelt, denn beispielsweise ist $(p \vee s) + (p \wedge s) = r' + 0 = (1, \frac{3}{4}, 1, \frac{1}{4}) \neq (\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 0) = p + s$.

Satz 4.48. *([30]) Ist P eine verbandsgeordnete oder endliche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, dann ist diese genau dann boolesch, wenn sie eine Boolesche Algebra bildet.*

Beweis. Die Aussage folgt aus Kombination der Sätze 4.13[247] und 3.29[248] bzw. 3.26[249]. □

4.5.2 Bedingungen für (Boolesche) Teilmengen von Algebren von numerischen Ereignissen

In der Praxis liegt oftmals nur eine kleine Menge von numerischen Ereignissen vor. Dann steht man vor dem Problem, ob die Elemente dieser Menge einen Rückschluss darauf zulassen, ob das zugrundeliegende physikalische System klassisch ist oder nicht.
Da klassische Systeme mit Booleschen Algebren assoziiert sind, kann man, wenn eine vorliegende Menge von S-Wahrscheinlichkeiten nicht Boolesch ist, davon ausgehen, dass das System, dem die numerischen Ereignisse entstammen, nicht klassisch ist.
Wie wir nachfolgend sehen werden, lässt sich die Frage, ob eine Menge von gemessenen Wahrscheinlichkeiten Boolesch einbettbar ist, beantworten, indem man weitere experimentelle Messungen durchführt und prüft, ob sich dabei bestimmte S-Wahrscheinlichkeiten ergeben, deren Existenz für klassische Systeme aufgrund der vorliegenden numerischen Ereignisse erwartet wird.

Für den Fall einer zweielementigen Teilmenge kennen wir aus Satz 4.8[250] bereits folgende Charakterisierung:

Satz 4.49. *([32],[27]) Ist P eine Algebra von numerischen Ereignissen, dann liegt $P_2 = \{p_1, p_2\} \subseteq P$ genau dann in einer Booleschen Teilalgebra von P, wenn es ein $a_{12} \in P$ gibt,*

[241] siehe S.75
[242] siehe S.48
[243] siehe S.81
[244] siehe S.62
[245] siehe S.63
[246] siehe S.102
[247] siehe S.75
[248] siehe S.46
[249] siehe S.44
[250] siehe S.73

sodass $p_1 C(a_{12}) p_2$ gilt.
Äquivalent dazu, ist P_2 genau dann in einer Booleschen Teilalgebra von P enthalten, wenn es ein orthogonales Dreieck in P gibt, welches p_1 und p_2 teilt oder, äquivalent dazu, wenn es zwei Elemente $q_1, q_2 \in P$ gibt, sodass $p_1 C(q_1, q_2) p_2$ gilt.

Beweis. Die Aussagen entstammen Satz 4.8[251]. □

Beispiel 4.54. Wir betrachten noch einmal die Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P aus Beispiel 4.7[252], welche in Abbildung 4.5[253] dargestellt ist: Die Teilmenge $P_2 := \{(0.2, 0.8), (0.8, 0.2)\}$ ist laut Satz 4.49[254] Boolesch, weil $(0.2, 0.8)\, C((0.2, 0.8))\, (0.8, 0.2)$ gilt.
Die Teilmenge $\tilde{P}_2 := \{(0.2, 0.8), (0.1, 0.9)\}$ hingegen ist Satz 4.49 zufolge nicht Boolesch, denn es gibt kein Element $a \in P$, sodass $(0.2, 0.8)\, C(a)\, (0.1, 0.9)$ gilt, weil die einzigen Elemente in P, die $a + (0.1, 0.9) \leq (1, 1)$ erfüllen, die Elemente $(0, 0)$ und $(0.9, 0.1)$ sind, aber $(0, 0) + (0.1, 0.9) \ngeq (0.2, 0.8)$ und $(0.9, 0.1) \nleq (0.2, 0.8)$ ist.

Unter Verwendung von Satz 3.15[255] erhält man zu Satz 4.49[256] ähnliche Resultate für größere Teilmengen von Räumen von numerischen Ereignissen:

Satz 4.50. *([32],[27])*

(1) *Ist P eine Algebra von numerischen Ereignissen, dann ist eine dreielementige Teilmenge $P_3 = \{p_1, p_2, p_3\} \subseteq P$ genau dann in einer Booleschen Teilalgebra von P enthalten, wenn es Elemente $a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{1213} \in P$ gibt, sodass gilt:*

$$\begin{gathered} p_i C(a_{ij}) p_j,\ i, j \in \{1, 2, 3\},\ i < j, \\ (p_1 - a_{12}) C(a_{1213}) (p_i - a_{i3}),\ i \in \{1, 2\} \end{gathered} \tag{4.1}$$

(2) *Ist P eine Algebra von numerischen Ereignissen, dann ist eine vierelementige Teilmenge $P_4 = \{p_1, \ldots, p_4\} \subseteq P$ genau dann in einer Booleschen Teilalgebra von P enthalten, wenn es Elemente*
$a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}, a_{1213}, a_{1214}, a_{1314}, a_{2324}, a_{1234}, a_{1324}, a_{1423}, a_{123124}, a_{124134}, a_{134234} \in P$ gibt, welche

$$\begin{gathered} p_i C(a_{ij}) p_j,\ i, j \in \{1, 2, 3, 4\},\ i < j, \\ (p_i - a_{ij}) C(a_{ijik}) (p_i - a_{ik}),\ i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\},\ i < j < k, \\ (p_i - a_{ij}) C(a_{ijik}) (p_j - a_{jk}),\ i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\},\ i < j < k, \\ (p_1 - a_{12}) C(a_{1234}) (p_3 - a_{34}), \\ (p_1 - a_{13}) C(a_{1324}) (p_2 - a_{24}), \\ (p_1 - a_{14}) C(a_{1423}) (p_2 - a_{23}), \\ ((p_1 - a_{12}) - a_{1213}) C(a_{123124}) ((p_i - a_{ij}) - a_{iji4}),\ i, j \in \{1, 2, 3\},\ i < j, \\ ((p_1 - a_{12}) - a_{1214}) C(a_{124134}) ((p_i - a_{i3}) - a_{i3i4}),\ i \in \{1, 2\}, \\ ((p_1 - a_{13}) - a_{1314}) C(a_{134234}) ((p_2 - a_{23}) - a_{2324}) \end{gathered} \tag{4.2}$$

erfüllen.

[251] siehe S.73
[252] siehe S.61
[253] siehe S.62
[254] siehe S.102
[255] siehe S.40
[256] siehe S.102

Beweis. Für den Beweis sei auf [27] verwiesen. □

Beispiel 4.55. Wir betrachten noch einmal die Algebra von numerischen Ereignissen P aus Beispiel 4.17[257], welche in Abbildung 4.8[258] dargestellt ist: Die Teilmenge $P_3 := \{p, q, r\}$ ist Boolesch, weil sie für $p_1 := p$, $p_2 := q$, $p_3 := r$ und $a_{12} := p =: a_{13}$, $a_{23} := q$, $a_{1213} := 0$ die Voraussetzungen aus dem ersten Punkt in Satz 4.50[259] erfüllt. Eine Boolesche Teilalgebra von P, in die P_3 eingebettet werden kann, ist beispielsweise die in Abbildung 4.18[260] dargestellte. Hingegen ist die Teilmenge $\tilde{P}_3 = \{s, r, p\}$ nicht in einer Booleschen Teilalgebra von P enthalten, weil es beispielsweise kein Element $a \in P$ gibt, für welches $s\,C(a)\,r$ gilt.

Beispiel 4.56. Für die exemplarische Anwendung des zweiten Punktes in Satz 4.50[261] betrachten wir noch einmal die Algebra von numerischen Ereignissen P aus Beispiel 4.9[262], welche in Abbildung 4.7[263] dargestellt ist. Die Teilmenge $\tilde{P}_4 := \{\tilde{p}_1 := p, \tilde{p}_2 := q, \tilde{p}_3 := s, \tilde{p}_4 := t\}$ kann nicht Boolesch sein, weil es kein Element $a \in P$ gibt, für das $q\,C(a)\,s$ gilt.
Hingegen ist etwa $P_4 := \{p_1 := p, p_2 := q, p_3 := r, p_4 := r'\}$ Boolesch, weil für die Elemente $a_{12} := p, a_{13} := p, a_{14} := 0, a_{23} := q, a_{24} := 0, a_{34} := r, a_{1213} := 0, a_{1314} := 0, a_{1214} := 0,$ $a_{2324} := 0, a_{1234} := 0, a_{1324} := 0, a_{1423} := p, a_{123124} := 0, a_{124134} := 0, a_{134234} := 0$ die dafür hinreichenden Kommutationsbedingungen aus dem zweiten Teil von Satz 4.50 erfüllt sind.
Eine Boolesche Algebra, in die P_4 eingebettet werden kann, ist beispielsweise eine zu einer mit dem Hasse-Diagramm in Abbildung 4.18[264] korrespondierende isomorphe.

Für den Fall beliebig großer endlicher Teilmengen von Algebren von numerischen Ereignissen gilt sogar folgende Verallgemeinerung der Sätze 4.49[265] und 4.50[266]:

Satz 4.51. *([27]) Sei $n \geq 3$ und für $s \in \{1, \dots, n\}$ sei D_s die Menge $\{(i_1, \dots, i_s) \in \{1, \dots, n\}^s : i_1 < \dots < i_s\}$, versehen mit der lexikographischen Halbordnung $\leq$. Dann ist eine n-elementige Teilmenge $P_n = \{p_1, \dots, p_n\}$ einer Algebra von numerischen Ereignissen P genau dann in einer Booleschen Teilalgebra von P enthalten, wenn für alle $s \in \{1, \dots, n-1\}$ und alle $(i_1, \dots, i_s), (j_1, \dots, j_s) \in D_s$ mit $(i_1, \dots, i_s) < (j_1, \dots, j_s)$ ein Element $a_{i_1 \dots i_s j_1 \dots j_s} \in P$ existiert, sodass folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) Ist $s \in \{1, \dots, n-1\}$ und sind $(i_1, \dots, i_s), (j_1, \dots, j_s) \in D_s$ mit $(i_1, \dots, i_s) < (j_1, \dots, j_s)$, dann gilt:
$(p_{i_1} - a_{i_1 i_2} - a_{i_1 i_2 i_1 i_3} - \dots - a_{i_1 i_2 \dots i_{s-1} i_1 i_2 \dots i_{s-2} i_s})\,C(a_{i_1 \dots i_s j_1 \dots j_s})\,(p_{j_1} - a_{j_1 j_2} - a_{j_1 j_2 j_1 j_3} - \dots - a_{j_1 j_2 \dots j_{s-1} j_1 j_2 \dots j_{s-2} j_s})$.

(b) Ist $s \in \{2, \dots, n-1\}$ und sind $(i_1, \dots, i_s), (j_1, \dots, j_s), (k_1, \dots, k_s) \in D_s$ mit $(i_1, \dots, i_s) < (j_1, \dots, j_s), (k_1, \dots, k_s)$ und $\{j_1, \dots, j_s\} \setminus \{i_1, \dots, i_s\} = \{k_1, \dots, k_s\} \setminus \{i_1, \dots, i_s\}$, dann gilt:
$a_{i_1 \dots i_s j_1 \dots j_s} = a_{i_1 \dots i_s k_1 \dots k_s}$.

Beweis. Für den Beweis sei auf [27] verwiesen. □

---
257 siehe S.70
258 siehe S.70
259 siehe S.103
260 siehe S.90
261 siehe S.103
262 siehe S.62
263 siehe S.63
264 siehe S.90
265 siehe S.102
266 siehe S.103

Haben wir es mit einer Menge von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten zu tun, die paarweise verschieden sind, dann wissen wir aus Proposition 4.28[267] bereits, dass diese jedenfalls in eine Algebra von numerischen Ereignissen einbettbar ist. Von besonderem Interesse ist daher, ob eine solche Menge von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten auch Boolesch ist. Information darüber liefern folgende Resultate, wobei wie bereits in Lemma 4.9[268] unter $\widetilde{min}\{p_i : i \in I\}$ das komponentenweise Minimum der S-Wahrscheinlichkeiten $p_i : i \in I$, $I \neq \emptyset$ verstanden wird, das heißt, jene Funktion q, die für jedes $s \in S$ den kleinsten der Werte $p_i(s) : i \in I$ annimmt.

Satz 4.52. *([32]) Ist P eine Algebra von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten und $P_2 = \{p_1, p_2\}$ eine Menge von zwei verschiedenen Elementen aus P, dann ist P_2 genau dann Boolesch, wenn $\widetilde{\min}\{p_1, p_2\} \in P$ ist.*

Beweis. (vgl.[32]) Laut Satz 4.49[269] ist P_2 genau dann Boolesch, wenn es ein $a_{12} \in P$ gibt, sodass $p_1 C(a_{12}) p_2$ ist.
Die Aussage folgt nun mit Satz 4.16[270] und Lemma 4.9[271] vermittels $[\exists a_{12} \in P : p_1 C(a_{12}) p_2] \Leftrightarrow [\exists a \in P : p_1 C(a) p_2'] \Leftrightarrow [\exists\, p_1 \wedge p_2 \in P] \Leftrightarrow \widetilde{\min}\{p_1, p_2\} \in P$. □

Satz 4.53. *([32])Ist P eine Algebra von zweiwertigen numerischen Ereignissen und $P_3 = \{p_1, p_2, p_3\}$ eine Menge von drei paarweise verschiedenen Elementen aus P, dann ist P_3 genau dann Boolesch, wenn $\forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ gilt, dass $\widetilde{\min}\{p_i, p_j, p_k\} \in P$ ist.*

Beweis. Die Aussage lässt sich aus dem ersten Punkt in Satz 4.50[272] folgern; für Details sei auf [32] verwiesen. □

Satz 4.54. *([32]) Ist P eine Algebra von zweiwertigen numerischen Ereignissen und $P_4 = \{p_1, \ldots, p_4\}$ eine Menge von vier paarweise verschiedenen Elementen aus P, dann ist P_4 genau dann Boolesch, wenn $\forall i, j, k, m \in \{1, \ldots, 4\}$ gilt, dass $\widetilde{\min}\{p_i, p_j, p_k, p_m\} \in P$ ist.*

Beweis. Die Aussage lässt sich aus dem zweiten Punkt in Satz 4.50[273] folgern; für Details sei auf [32] verwiesen. □

Beispiel 4.57. Wir betrachten die Algebra von numerischen Ereignissen
$P := \{0, p := (1,0,0,1,0,0), q := (0,1,0,0,1,0), r := (0,0,1,0,0,1), s := (0,0,0,1,1,1), p', q', r', s', 1\}$,
deren Hasse-Diagramm wir schon aus Abbildung 4.8[274] kennen. Die Teilmenge $P_4 := \{p, q, q', r\}$ ist Boolesch, weil für $p_1 := p, p_2 := q, p_3 := q', p_4 := r$ alle Minima $\widetilde{\min}\{p_i, p_j, p_k, p_m\}\ \forall i, j, k, m \in \{1, 2, 3, 4\}$ Elemente von P sind.
Die Teilmenge $\tilde{P}_4 := \{p', q', r', s'\}$ hingegen ist nicht Boolesch, weil beispielsweise $\widetilde{\min}\{r', r', s', s'\} = (1, 1, 0, 0, 0, 0) \notin P$ ist.

Häufig weiß man jedoch noch gar nicht, ob die vorliegenden S-Wahrscheinlichkeiten überhaupt einer Algebra von numerischen Ereignissen angehören. Um dies feststellen und in Folge gegebenenfalls die vorangegangenen Resultate zur Überprüfung, ob sie einem klassischen System entstammen, anwenden zu können, benötigt man daher Bedingungen, die angeben, wann Mengen

[267] siehe S.84
[268] siehe S.74
[269] siehe S.102
[270] siehe S.81
[271] siehe S.74
[272] siehe S.103
[273] siehe S.103
[274] siehe S.70

von S-Wahrscheinlichkeiten in Algebren von numerischen Ereignissen einbettbar sind. Solche lernen wir nachfolgend kennen.

Folgende Proposition verallgemeinert die in Proposition 4.29[275] und Satz 4.31[276] für zweiwertige S-Wahrscheinlichkeiten festgestellten Resultate:

Proposition 4.55. *([32])*

(1) Ist $P_2 = \{p_1, p_2\}$ eine Menge von zwei verschiedenen eigentlichen S-Wahrscheinlichkeiten und bildet $\overline{P_2} := P_2 \cup \{p_1', p_2'\}$ eine vierelementige Antikette, dann gibt es Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten, in welche P_2 eingebettet werden kann. Die kleinste solche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten ist MO_2 und die kleinste solche Boolesche Algebra hat 16 Elemente.

(2) Ist $P_2 = \{p_1, p_2\}$ eine Menge von zwei verschiedenen eigentlichen S-Wahrscheinlichkeiten und ist $\overline{P_2}$ definiert wie im ersten Punkt, bildet jedoch keine vierelementige Antikette, sondern gilt o.B.d.A. $p_1 < p_2$, und ist $p_2 - p_1$ eigentlich, dann gibt es Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten, in welche P_2 einbettbar ist. Die kleinste solche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, die P_2 enthält und eine Boolesche Algebra bildet, umfasst acht Elemente.

Beweis. (1) Die erste Aussage folgt aus Satz 4.35[277] für $n = 2$.

(2) Die zweite Aussage ergibt sich als Spezialfall von Satz 4.37[278] (indem man in der hiesigen Voraussetzung die Rollen von p_2 und p_2' vertauscht).

□

Beispiel 4.58. Die Menge $\overline{P_2} = (P_2 := \{p_1 := (\frac{2}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}), p_2 := (\frac{7}{8}, \frac{5}{8}, \frac{2}{8})\}) \cup (P_2' := \{p_1', p_2'\})$ erfüllt die Voraussetzungen aus dem zweiten Punkt aus Proposition 4.55[279], denn p_1 und p_2 sind eigentlich, $p_1 < p_2$ und auch $p_3 := p_2 - p_1 = (\frac{5}{8}, 0, \frac{1}{8})$ ist eigentlich. Demnach ist die Existenz von Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten, in welche P_2 einbettbar ist, gesichert.
P_2 ist nicht nur einbettbar in eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, welche eine Boolesche Algebra bildet, sondern (wie angesichts Satzes 4.37[280] zu erwarten) sogar eine echte Teilmenge einer solchen. Die kleinste dieser Booleschen Algebren besteht aus der achtelementigen Menge $P := \{0\} \cup P_2 \cup P_2' \cup \{1\}$ und korrespondiert mit dem Hasse-Diagramm in Abbildung 4.27[281], wobei dort $p_1 = p$, $p_2 = q'$, $p_3 = r$ ist.

In Anbetracht von Satz 4.35[282] wird klar, dass sich der erste Punkt in Proposition 4.55[283] in naheliegender Weise auf Mengen von mehr als zwei S-Wahrscheinlichkeiten ausdehnen lässt:

Proposition 4.56. *([32])Ist $P_n = \{p_1, \ldots, p_n\}$ eine Menge von n eigentlichen, paarweise verschiedenen S-Wahrscheinlichkeiten und bilden die Elemente von $\overline{P_n} := P_n \cup \{p_1', \ldots, p_n'\}$ eine Antikette, so kann P_n in eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten eingebettet werden und die kleinste solche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, welche P_n enthält, ist MO_n.*

[275] siehe S.86
[276] siehe S.86
[277] siehe S.92
[278] siehe S.95
[279] siehe S.106
[280] siehe S.95
[281] siehe S.128
[282] siehe S.92
[283] siehe S.106

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 4.35[284]. □

Für den Fall einer zweielementigen Zustandsmenge S ist die Bedingung der Unvergleichbarkeit nicht nur hinreichend, sondern sogar notwendig für die Einbettbarkeit einer Menge von S-Wahrscheinlichkeiten, wie folgende Proposition zeigt.

Proposition 4.57. *([32])Ist $|S| = 2$, dann ist eine Menge von n eigentlichen, paarweise verschiedenen S-Wahrscheinlichkeiten, $P_n = \{p_1, \ldots, p_n\}$, genau dann in eine Algebra von numerischen Ereignissen einbettbar, wenn die Elemente von $\overline{P_n} := P_n \cup \{p'_1, \ldots, p'_n\}$ paarweise unvergleichbar sind.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [32] verwiesen. □

4.5.3 Charakterisierung von klassischen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Bell-artigen Ungleichungen

Wie wir bereits wissen, wird der Zustand eines klassischen physikalischen Systems mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer Booleschen Algebra von Ereignissen assoziiert, wogegen der Zustand eines Systems, das Quantenverhalten zeigt, mit einem S-Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem (σ-orthovollständigen) orthomodularen poset identifiziert wird, was dazu führt, dass klassische Wahrscheinlichkeiten in restriktiverer Relation zueinander stehen als quantenmechanische.
Eine Möglichkeit der Definition von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Booleschen Algebren ist, Wahrscheinlichkeitsmaße nicht direkt als normierte additive Funktionen nach $[0, 1]$ einzuführen, sondern sie als reellwertige Abbildungen auf Booleschen Algebren, die bestimmte Ungleichungen erfüllen, zu betrachten.
Daher rührt die Idee der Charakterisierung von Wahrscheinlichkeitsmaßen mittels Ungleichungen, welche für einige physikalische Anwendungen im Zusammenhang mit Experimenten, die der Bestimmung, ob ein System klassisch ist oder nicht, dienen, besonders wichtig sind.
Solche Ungleichungen haben die Form $0 \leq U \leq 1$, wobei U eine Linearkombination von Wahrscheinlichkeiten und Korrelationswahrscheinlichkeiten ist und die Koeffizienten in U alle reell sind.
Insbesondere ist man an jenen Ungleichungen interessiert, die in jeder Booleschen Algebra, für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß und für jede Auswahl von Ereignissen gültig sind.
Die wohl bekanntesten Beispiele für solche Ungleichungen als Bedingungen für die Klassik vorliegender Korrelationswahrscheinlichkeiten sind die in Abschnitt 2.8[285] besprochenen Bellschen Ungleichungen sowie die CHSH-Ungleichungen.
Der Nutzen derartiger Ungleichungen besteht darin, dass man, wenn auch nur eine der Ungleichungen von experimentell erhaltenen Wahrscheinlichkeiten verletzt wird, darauf schließen kann, dass das den Messwahrscheinlichkeiten zugrundeliegende physikalische System nicht klassisch ist.
Da (nicht klassische) quantenmechanische Systeme zwar orthomodulare posets bilden, aber keine Booleschen Algebren, sind zur Unterscheidung zwischen klassischen und (echt) quantenmechanischen Systemen besonders jene Ungleichungen von Interesse, die zwar in allen Booleschen Algebren gültig sind, aber nicht in allen orthomodularen posets.
In diesem Abschnitt verallgemeinern wir das Konzept der Bell-Ungleichungen auf eine beliebige

[284]siehe S.92
[285]siehe S.21

Anzahl von physikalischen Eigenschaften, und geben Bedingungen an, die die Klassik von Korrelationswahrscheinlichkeiten charakterisieren. Dabei bedienen wir uns der in Abschnitt 3.7[286] eingeführten Begriffe. (vgl.[56],[8], [6])

Zunächst betrachten wir eine Bell-artige Ungleichung für den Fall, dass eine Menge von korrelierten numerischen Ereignissen vorliegt.

Satz 4.58. *([32]) Sind p_1, p_2 zwei verschiedene korrelierte Elemente einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P, das heißt, $p_{12} := p_1 \wedge p_2$ existiert in P, dann ist $P_2 := \{p_1, p_2\}$ genau dann Boolesch, wenn die Bell-artige Ungleichung $0 \leq p_1 + p_2 - p_{12} \leq 1$ erfüllt ist.*

Beweis. (vgl.[32]) Dass stets $0 \leq p_1 + p_2 - p_{12}$ gilt, ist nach Definition von p_{12} klar.
„$\Rightarrow$“: Ist P_2 Boolesch, dann existiert $p_1 \wedge p_2'$ und es gilt klarerweise $0 \leq p_1 \wedge p_2' + p_2 \leq 1$. Außerdem haben wir in dem Fall $(p_1 \wedge p_2') + p_2 = (p_1 + p_2) - (p_1 - (p_1 \wedge p_2')) = (p_1 + p_2) - (p_1 \wedge (p_1' \vee p_2)) = (p_1 + p_2) - ((p_1 \wedge p_1') \vee (p_1 \wedge p_2)) = p_1 + p_2 - (p_1 \wedge p_2)$, woraus die behauptete Ungleichung folgt.
„$\Leftarrow$“: Gilt $p_1 + p_2 - p_{12} \leq 1$, dann haben wir für $p_3 := p_1 - p_{12}$ die Gültigkeit von $p_1\, C(p_3)\, p_2$, weshalb P_2 laut Satz 4.49[287] Boolesch ist. □

Setzt man nicht explizit voraus, dass p_1 und p_2 korreliert sind, so lässt sich Satz 4.58[288] auch wie folgt formulieren:

Satz 4.59. *([8],[7]) Ist P eine Algebra von numerischen Ereignissen und $P_2 = \{p_1, p_2\} \subseteq P$ eine zweielementige Teilmenge, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) P_2 *ist Boolesch.*

(b) $\exists\, q_1, q_2, q_{12} \in P : 0 \leq q_1 + q_2 + q_{12} \leq 1,$
$$q_1 + q_{12} = p_1,$$
$$q_2 + q_{12} = p_2,$$

Beweis. ([8]) Die Aussage folgt als Spezialfall von Satz 4.69[289], welcher später noch angeführt ist. □

Satz 4.58[290] lässt sich auch auf eine Menge von drei korrelierten numerischen Ereignissen ausdehnen, was zu fünf Bell-artigen Ungleichungen führt, wie folgendes Resultat zeigt.

Satz 4.60. *([32]) Sind p_1, p_2, p_3 drei Elemente einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P, die sowohl paarweise korreliert als auch gemeinsam korreliert sind, das heißt, $\exists\, p_{ij} := p_i \wedge p_j \in P\ \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i < j$ und $\exists\, p_{123} := p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \in P$, dann ist $P_3 := \{p_1, p_2, p_3\}$ genau dann Boolesch, wenn folgende Bell-artige Ungleichungen erfüllt sind:*

$$0 \leq p_i + p_j - p_{ij} \leq 1, \ \ i, j \in \{1, 2, 3\},\ i < j$$
$$0 \leq p_{12} + p_{i3} - p_{123} \leq 1, \ \ i \in \{1, 2\}$$

Beweis. Die Aussage folgt mit dem ersten Teil von Satz 4.50[291]; für Details sei auf [32] verwiesen. □

---

[286] siehe S.52
[287] siehe S.102
[288] siehe S.108
[289] siehe S.114
[290] siehe S.108
[291] siehe S.103

Verzichtet man auf die explizite Forderung, dass die Elemente der Menge von numerischen Ereignissen korreliert sind, so lässt sich Satz 4.60[292] folgendermaßen formulieren:

Satz 4.61. *([8],[7]) Ist P eine Algebra von numerischen Ereignissen und $P_3 = \{p_1, p_2, p_3\} \subseteq P$ eine dreielementige Teilmenge, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) P_3 *ist Boolesch*

(b) $\exists\, q_1, q_2, q_3, q_{12}, q_{13}, q_{23}, q_{123} \in P : $
$$\begin{aligned} &0 \leq q_1 + q_2 + q_3 + q_{12} + q_{13} + q_{23} + q_{123} \leq 1,\\ &q_1 + q_{12} + q_{13} + q_{123} = p_1,\\ &q_2 + q_{12} + q_{23} + q_{123} = p_2,\\ &q_3 + q_{13} + q_{23} + q_{123} = p_3, \end{aligned}$$

Beweis. ([8]) Die Aussage folgt als Spezialfall von Satz 4.69[293], welcher später noch angeführt ist. □

Auch folgender Satz setzt die Korreliertheit der vorliegenden S-Wahrscheinlichkeiten nicht explizit voraus, wenngleich bei seiner praktischen Verwendung Korrelationswahrscheinlichkeiten zum Einsatz kommen.

Satz 4.62. *([7],[9],[71]) Sei $K = (p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23})$ eine Menge von S-Wahrscheinlichkeiten. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) K *ist klassisch repräsentierbar*[294]

(b)
$$\begin{aligned} &0 \leq p_{ij} \leq p_i \leq 1,\ 0 \leq p_{ij} \leq p_j \leq 1, && 1 \leq i < j \leq 3,\\ &0 \leq p_i + p_j - p_{ij} \leq 1, && 1 \leq i < j \leq 3,\\ &p_1 - p_{12} - p_{13} + p_{23} \geq 0,\\ &p_2 - p_{12} - p_{23} + p_{13} \geq 0,\\ &p_3 - p_{13} - p_{23} + p_{12} \geq 0,\\ &0 \leq p_1 + p_2 + p_3 - p_{12} - p_{13} - p_{23} \leq 1 \end{aligned}$$

(c) $\exists\, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7 \in [0,1]^S$:
$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{7} q_i \leq 1,\\ &p_1 = q_1 + q_2 + q_4 + q_7,\\ &p_2 = q_2 + q_5 + q_6 + q_7,\\ &p_3 = q_3 + q_4 + q_6 + q_7,\\ &p_{12} = q_2 + q_7,\\ &p_{13} = q_4 + q_7,\\ &p_{23} = q_6 + q_7 \end{aligned}$$

Beweis. Für den Beweis sei auf [7] und [71] verwiesen. □

Die letzten vier Ungleichungen im zweiten Punkt in Satz 4.62[295] werden in der Literatur, etwa in [7] und [71], häufig auch als „Bell-Ungleichungen“ bezeichnet, obwohl die ursprüngliche Version

[292] siehe S.108
[293] siehe S.114
[294] Für den Begriff der klassischen Repräsentierbarkeit sei an Definition 4.8, S.68, erinnert.
[295] siehe S.109

der Bell-Ungleichungen eine andere Form hat.
Mit ihrer Hilfe kann man leicht feststellen, wenn ein System nicht klassisch ist:
Hat man ein Ereignissystem L mit Elementen a_1, a_2, a_3 und ein S-Wahrscheinlichkeitsmaß p auf L, sodass die Folge von Wahrscheinlichkeiten und deren paarweisen Korrelationen $K = (p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23})$, definiert durch $p_i := p(a_i), p_{ij} := p(a_i \wedge a_j)\ i = 1, 2, 3$, mindestens eine der Bell-Ungleichungen verletzt, so kann L kein klassisches Ereignissystem sein.
Dies ist beispielsweise bei der Korrelationsfolge[296] $(p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$, welche in der Praxis bei Experimenten mit Paaren von Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen beobachtet werden kann, der Fall, denn sie verletzt die letzte der Ungleichungen im zweiten Punkt von Satz 4.62[297]. Wir werden in Abschnitt 5.4[298] noch darauf zurückkommen. (vgl.[7],[9],[71])
Vorangegangene Resultate lassen sich auch auf Mengen von vier korrelierten numerischen Ereignissen ausdehnen, wie nachfolgende Sätze zeigen.

Satz 4.63. *([32]) Sind p_1, p_2, p_3, p_4 vier numerische Ereignisse einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P und sind alle Mengen, die sich aus zwei, drei und allen vier Elementen bilden lassen, korreliert, das heißt, $\exists p_{ij} := p_i \wedge p_j \in P\ \forall i, j \in \{1, \dots, 4\},\ i < j$, $\exists p_{ijk} := p_i \wedge p_j \wedge p_k \in P\ \forall i, j, k \in \{1, \dots, 4\},\ i < j < k$ und $\exists p_{1234} := p_1 \wedge \dots \wedge p_4 \in P$, dann ist $P_4 := \{p_1, \dots, p_4\}$ genau dann Boolesch, wenn folgende Bell-artige Ungleichungen erfüllt sind:*

$$
\begin{aligned}
&0 \leq p_i + p_j - p_{ij} \leq 1\ \forall i, j \in \{1, \dots, 4\},\ i < j,\\
&0 \leq p_{ij} + p_{ik} - p_{ijk} \leq 1\ \forall i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\},\ i < j < k,\\
&0 \leq p_{ij} + p_{jk} - p_{ijk} \leq 1\ \forall i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\},\ i < j < k,\\
&0 \leq p_{12} + p_{34} - p_{1234} \leq 1,\\
&0 \leq p_{13} + p_{24} - p_{1234} \leq 1,\\
&0 \leq p_{14} + p_{23} - p_{1234} \leq 1,\\
&0 \leq p_{123} + p_{ij4} - p_{1234} \leq 1\ \forall i, j \in \{1, 2, 3\},\ i < j,\\
&0 \leq p_{124} + p_{i34} - p_{1234} \leq 1\ \forall i \in \{1, 2\},\\
&0 \leq p_{134} + p_{234} - p_{1234} \leq 1
\end{aligned}
$$

Beweis. Die Aussage folgt mit dem zweiten Teil in Satz 4.50[299]; für Details sei auf [32] verwiesen. □

Ohne explizit zu fordern, dass die Elemente der Menge von numerischen Ereignissen korreliert sind, lässt sich Satz 4.63[300] wie folgt formulieren:

Satz 4.64. *([8]) Ist P eine Algebra von numerischen Ereignissen und $P_4 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \subseteq P$ eine vierelementige Teilmenge, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) P_4 ist Boolesch

(b) $\exists\, q_1, q_2, q_3, q_4, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{24}, q_{34}, q_{123}, q_{124}, q_{134}, q_{234}, q_{1234} \in P$:
$q_i + q_{ij} + q_{ik} + q_{il} + q_{ijk} + q_{ijl} + q_{ikl} + q_{ijkl} = p_i\quad \forall i,j,k,l \in \{1,2,3,4\}, i \neq j,k,l,\ j \neq k,l,\ k \neq l$,
$0 \leq q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_{12} + q_{13} + q_{14} + q_{23} + q_{24} + q_{34} + q_{123} + q_{124} + q_{134} + q_{234} + q_{1234} \leq 1$,

[296] Unter einer *Korrelationsfolge der Ordnung n* versteht man eine nicht-wachsende indizierte Folge von S-Wahrscheinlichkeiten $K = (p_T : T \subseteq \{1, \dots n\}, T \neq \emptyset)$, wobei nicht alle $T \subseteq \{1, \dots, n\}, T \neq \emptyset$ als Indizes vorkommen müssen, bzw. den Wertebereich dieser Folge. „Nicht-wachsend“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass für $T \subseteq T' \subseteq \{1, \dots, n\}$ stets $p_{T'} \leq p_T$ gilt.
[297] siehe S.109
[298] siehe S.133
[299] siehe S.103
[300] siehe S.110

Beweis. Die Aussage folgt als Spezialfall von Satz 4.69[301], welcher später noch angeführt ist. □

Eine Verallgemeinerung von Satz 4.62[302] stellt folgendes Resultat dar.

Satz 4.65. *([8]) Ist K eine nicht-wachsende indizierte Folge von S-Wahrscheinlichkeiten bzw. deren Wertebereich, das heißt, $K = (p_T : T \subseteq \{1,\ldots n\}, T \neq \emptyset)$ und gilt für $T \subseteq T' \subseteq \{1,\ldots,n\}$ stets $p_{T'} \leq p_T$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) K ist klassisch repräsentierbar,

(b) K erfüllt folgende Bell-artige Ungleichungen[303]:

$$\sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|T|-1} p_T \leq 1, \qquad 0 \leq p_T + \sum_{T \subsetneq T'} (-1)^{|T'|-|T|} p_{T'} \leq 1, \, \forall T \subseteq \{1,\ldots,n\}, \, T \neq \emptyset$$

Beweis. Für den Beweis sei auf [8] verwiesen. □

Für die praktische Anwendung ist Satz 4.65[304] nicht immer geeignet, da in der zweiten Bedingung alle möglichen Teilmengen von Indizes vorkommen, die zugehörigen Korrelationen in der Praxis aber nicht wohldefiniert sein müssen.
Ein möglicher Ausweg ist, in der zweiten Bedingung nur jene Ungleichungen zu berücksichtigen, die Korrelationswahrscheinlichkeiten betreffen, welche mit im jeweiligen physikalischen Kontext miteinander kommutierenden Eigenschaften korrespondieren und somit wohldefiniert sind.

Auf ähnliche Weise lässt sich auch mit folgendem Satz Abhilfe schaffen. Seine Bedeutung liegt darin, dass er zur Beurteilung, ob eine gegebene Ungleichung als Kriterium für die Charakterisierung von klassischen Wahrscheinlichkeiten herangezogen werden kann, dient. Dies ist nützlich, da die Anzahl der zur Charakterisierung des klassischen Falls notwendigen und hinreichenden Ungleichungen exponentiell in der Anzahl der Ereignisse wächst, weshalb es nicht praktikabel wäre, alle Ungleichungen zu berücksichtigen. (vgl.[6])

Satz 4.66. *([6],[32]) Ist $\eta : 2^{\{1,\ldots,n\}} \to \mathbb{R}, \eta(\emptyset) = 0$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) Für jede Boolesche Algebra B und jedes auf B definierte Wahrscheinlichkeitsmaß p ist für die von η erzeugte Korrelationsfunktion p_η[305] nachstehende (von η erzeugte) Bell-artige Ungleichung erfüllt:

$$\forall B_1,\ldots,B_n \in B: \; 0 \leq p_\eta(B_1,\ldots,B_n) \leq 1,$$

(b) η ist eine Bell-Wertung: $\forall S \subseteq \{1,\ldots,n\} : 0 \leq \sum_{T \subseteq S} \eta(T) \leq 1$

Beweis. Für den Beweis sei auf [6] verwiesen. □

[301] siehe S.114
[302] siehe S.109
[303] In [8], woraus dieser Satz stammt, läuft die Summe über $T' \subseteq T$, was nach Auffassung des Verfassers der vorliegenden Arbeit jedoch ein Tippfehler ist.
[304] siehe S.111
[305] Für den Begriff der Korrelationsfunktion sowie den der Bell-Wertung sei an Definition 3.23, S.52, erinnert.

Satz 4.66[306] zeigt nicht nur, dass jede Bell-Wertung im klassischen Fall die Gültigkeit von ihr erzeugter Bell-artiger Ungleichungen sicherstellt, sondern liefert in naheliegender Weise eine einfache Methode, um zu überprüfen, ob im klassischen Fall die Gültigkeit Bell-artiger Ungleichungen erwartet wird:
Sind solche Ungleichungen gegeben, so berechnet man die 2^n Summen aus der zweiten Bedingung. Liegen alle 2^n Summen im Intervall $[0, 1]$, dann werden die Bell-artigen Ungleichungen von klassischen Wahrscheinlichkeiten stets erfüllt.

Bemerkung 4.30. (vgl.[6]) Im Falle, dass die Werte von η nur in $\{-1, 0, 1\}$ liegen, wie es etwa bei den Bell-artigen-Ungleichungen der Sätze 4.58[307], 4.60[308], 4.62[309], 4.63[310] und 4.65[311] der Fall ist, vereinfacht sich die zweite Bedingung in Satz 4.66[312] zu

$$\forall S \subseteq \{1, \dots, n\} : \sum_{T \subseteq S} \eta(T) \in \{0, 1\}$$

und zur Überprüfung dieser Bedingung genügt es, zu kontrollieren, ob die Differenz der Anzahl von positiven und negativen Summanden in allen 2^n Summen jeweils 0 oder 1 ist.

Bemerkung 4.31. (vgl.[6]) In der praktischen Anwendung von Satz 4.66[313] werden in der ersten Bedingung in der Summe, welche p_η definiert, nicht alle gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten als Summanden vorkommen, weil man es bei Experimenten auch mit nicht kompatiblen Ereignissen zu tun hat, das heißt, mit Ereignissen, deren gemeinsame Wahrscheinlichkeiten nicht wohldefiniert sind, sodass etwa die Korrelationswahrscheinlichkeit p_{ij} zweier Ereignisse a_i, a_j insbesondere nicht als $p_{ij} = p(a_i \wedge a_j)$ definiert werden kann. Darum hat man es üblicherweise mit Korrelationsfunktionen zu tun, deren Koeffizienten $\eta(T)$ auf manchen $T \subseteq \{1, \dots, n\}$ den Wert 0 annehmen, sodass die zugehörigen Korrelationen in der Korrelationsfunktion wegfallen.

Wichtig ist, anzumerken, dass Satz 4.66[314] nicht als hinreichende Bedingung zur Entscheidung über die Klassik eines Systems zu verstehen ist, sondern bloß als notwendige. Um auszuschließen, dass ein System klassisch ist, reicht es nämlich aus, eine einzige von einer Bell-Wertung (und experimentell gemessenen Korrelationswahrscheinlichkeiten) erzeugte Korrelationsfunktion zu finden, die die Bell-artige Ungleichung aus der ersten Bedingung nicht erfüllt.
Nachstehendes Resultat werden wir im Folgenden noch benötigen.

Lemma 4.67. *([32]) Ist I eine nichtleere endliche Menge und 2^I die Potenzmenge von I, dann besteht die Hälfte der Mengen in 2^I aus einer geraden Anzahl von Elementen und die andere Hälfte aus einer ungeraden Anzahl von Elementen.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [32] verwiesen. □

Folgender Satz erläutert den Zusammenhang zwischen elementaren Bell-Wertungen[315] und Bell-Wertungen und ermöglicht auf einfache Weise die Konstruktion Bell-artiger Ungleichungen.

[306] siehe S.111
[307] siehe S.108
[308] siehe S.108
[309] siehe S.109
[310] siehe S.110
[311] siehe S.111
[312] siehe S.111
[313] siehe S.111
[314] siehe S.111
[315] Für den Begriff der elementaren Bell-Wertung sei an Definition 3.24, S.52, erinnert.

Satz 4.68. *(vgl.[32]) Sei $n \in \mathbb{N}$ und für jede Funktion $h : 2^{\{1,\dots,n\}} \to \mathbb{R}$, $h(\emptyset) = 0$ seien $f_h, g_h : 2^{\{1,\dots,n\}} \to \mathbb{R}$, $f_h(\emptyset) := 0 =: g_h(\emptyset)$[316], definiert durch:*

$$f_h(I) := \sum_{J \subseteq \{1,\dots,n\}} h(J) f_J(I),$$
$$g_h(I) := \sum_{J \subseteq I} h(J),$$

wobei f_J eine elementare Bell-Wertung sei.
Dann gilt:

(a) Für $f : 2^{\{1,\dots,n\}} \to \mathbb{R}$, $f(\emptyset) = 0$, ist genau dann $f \in \boldsymbol{B}_n$[317], wenn $g_f(2^{\{1,\dots,n\}}) \subseteq [0,1]$ ist.

(b) Für $g : 2^{\{1,\dots,n\}} \to \mathbb{R}$, $g(\emptyset) = 0$, ist genau dann $f_g \in \boldsymbol{B}_n$, wenn $g(2^{\{1,\dots,n\}}) \subseteq [0,1]$ ist.

(c) Jede elementare Bell-Wertung auf $2^{\{1,\dots,n\}}$ ist auch eine Bell-Wertung auf $2^{\{1,\dots,n\}}$.

Beweis. Für den Beweis sei auf [32] verwiesen. □

Der zweite Punkt in Satz 4.68[318] zeigt insbesondere, dass sich aus elementaren Bell-Wertungen mithilfe geeigneter Funktionen für die Koeffizienten ganz leicht Bell-Wertungen gewinnen lassen, wie etwa in folgendem Beispiel zu sehen.

Beispiel 4.59. (vgl.[32]) Als Folge der Sätze 4.66[319] und 4.68[320] kann man nun Bell-artige Ungleichungen, die in einem klassischen physikalischen System mit Korrelationen $p_I : I \subseteq \{1, \dots, n\}$ gültig sein müssen, zum Beispiel dadurch gewinnen, dass man die von der Summe aller elementaren Bell-Wertungen $f_I : I \subseteq \{1, \dots, n\}$ auf $2^{\{1,\dots,n\}}$ erzeugte Korrelationsfunktion betrachtet: Sie entspricht genau f_1, wobei 1 die konstante Eins-Funktion auf $2^{\{1,\dots,n\}}$ bezeichnet, und da diese trivialerweise ganz in $[0,1]$ liegt, ist f_1 dem zweiten Punkt in Satz 4.68 zufolge eine Bell-Wertung, sodass die von ihr erzeugte Korrelationsfunktion laut Satz 4.66 Bell-artige Ungleichungen generiert.
Unter Verwendung von Lemma 4.67[321] erhält man mit der Definition von elementaren Bell-Wertungen wegen

$$f_1(J) = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} f_I(J) = \sum_{I \subseteq J} f_I(J) = 0 + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq J} (-1)^{|J \setminus I|} = \sum_{K \subsetneq J} (-1)^{|K|} = -(-1)^{|J|} = (-1)^{|J|+1}$$

und $p_\emptyset = 0$ die Bell-artige Ungleichung

$$0 \leq \sum_{J \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|J|+1} p_J \leq 1$$

Für $n = 4$ lautet diese Ungleichung beispielsweise $0 \leq \sum_{i=1}^4 p_i - p_{12} - p_{13} - p_{14} - p_{23} - p_{24} - p_{34} + p_{123} + p_{124} + p_{134} + p_{234} - p_{1234} \leq 1$. Man erhält sie auch als die erste Ungleichung im zweiten Punkt von Satz 4.65[322] für $n = 4$. Wird sie verletzt, so kann man es nicht mit einem klassischen System zu tun haben.

[316] In [32] werden f, g, h, f_h und g_h nur auf $2^{\{1,\dots,n\}} \setminus \{\emptyset\}$ definiert.
[317] Wie in Definition 3.23, S.52, eingeführt, bezeichnet $\mathbf{B}_n$ die Menge aller Bell-Wertungen.
[318] siehe S.113
[319] siehe S.111
[320] siehe S.113
[321] siehe S.112
[322] siehe S.111

Wie der zweite Punkt in Satz 4.68[323] zeigt, lassen sich zahlreiche weitere Bell-Wertungen - und in Folge mit Satz 4.66[324] Bell-artige Ungleichungen - dadurch gewinnen, dass man Linearkombinationen von elementaren Bell-Wertungen mit Koeffizienten in $[0,1]$ bildet - sodass insbesondere Summanden wegfallen können - und in Folge die davon erzeugte Korrelationsfunktion betrachtet. Wird auch nur eine dieser Ungleichungen verletzt, so kann das zugrundeliegende System nicht klassisch sein. (vgl.[32])

Beispiel 4.60. (vgl.[32]) Sehen wir uns die Indexmengen der Bell-artigen Ungleichungen aus den Sätzen 4.58[325], 4.60[326] und 4.63[327] an und bezeichnen mit n die Anzahl der betrachteten Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_n$, so erkennen wir, dass die Ungleichungen alle die Form $0 \leq p_I + p_J - p_{I \cup J} \leq 1$, $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $|I| = |J|$, haben.
Das bedeutet, in jeder Ungleichung werden die Koeffizienten der Summanden jeweils durch eine Funktion $\eta : 2^{\{1,\ldots,n\}} \to \{-1, 0, 1\}$, $\eta(K) = \begin{cases} 1, & K = I \text{ oder } K = J, \\ -1, & K = I \cup J, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ festgelegt, bei der es sich wegen

$$\forall M \in 2^{\{1,\ldots,n\}} : 0 \leq \sum_{K \subseteq M} \eta(K) = \begin{cases} 0, & M \not\supseteq I, J, \\ 1, & M = I \text{ oder } M = J, \\ 1, & M \supseteq I, M \not\supseteq J \text{ oder } M \supseteq J, M \not\supseteq I, \\ 1, & M \supseteq I, J \end{cases} \leq 1$$

um eine Bell-Wertung handelt.

Aus folgender Verallgemeinerung der Sätze 4.59[328], 4.61[329] und 4.64[330] lassen sich ebenfalls Bell-artige Ungleichungen gewinnen.

Satz 4.69. *([8]) Ist P eine Algebra von numerischen Ereignissen und $P_n = \{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq P$, $n \geq 1$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) P_n ist Boolesch.

(b) Das System von n Gleichungen in den $2^n - 1$ unbekannten $x_T \in P$, welche mit den nichtleeren Mengen $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$ indiziert sind,

$$\sum_T{}^{(i)} x_T = p_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

wobei $\sum_T^{(i)}$ die Summe über alle i enthaltenden Mengen T bezeichnet, hat eine Lösung in P, sodass

$$0 \leq \sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,\ldots,n\}} x_T \leq 1$$

ist.

[323] siehe S.113
[324] siehe S.111
[325] siehe S.108
[326] siehe S.108
[327] siehe S.110
[328] siehe S.108
[329] siehe S.109
[330] siehe S.110

(c) *Es gibt* $2^n - n - 1$ *Elemente* $x_T \in P$, *indiziert mit den Teilmengen* $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $|T| > 1$, *sodass unter den Nebenbedingungen*

$$\sum_T{}^{(i)} x_T \leq p_i, i = 1, 2, \ldots, n,$$

wobei $\sum_T{}^{(i)}$ *die Summe über alle* $T \ni i, |T| > 1$, *bezeichnet, gilt:*

$$\sum_{\emptyset \neq T \subseteq \{1,\ldots,n\}} (|T| - 1) x_T \geq p_1 + p_2 + \ldots p_n - 1.$$

Beweis. Für den Beweis sei auf [8] verwiesen. □

Bemerkung 4.32. (vgl.[8]) Die Elemente x_T, $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $|T| \geq 2$, aus dem zweiten Punkt in Satz 4.69[331] stellen auch eine Lösung des Systems im dritten Punkt dar.
Umgekehrt erhält man aus einer Lösung der Ungleichungen im dritten Punkt eine Lösung für das System im zweiten Punkt, indem man die Elemente aus dem dritten Punkt für die korrespondierenden Indexmengen im zweiten Punkt übernimmt und die gesuchten Elemente mit Indexmengen der Kardinalität 1 als $x_i := p_i - \sum_{T:|T|\geq 2}^{(i)} x_T$, $i = 1, \ldots, n$ definiert.

Bemerkung 4.33. (vgl.[8]) Der Zusammenhang zwischen Satz 4.69[332] und Bell-artigen Ungleichungen ist zunächst nicht offensichtlich, da die darin vorkommenden Elemente x_T, $T \subseteq \{1, \ldots, n\}$ auf den ersten Blick nichts mit Korrelationen zu tun zu haben scheinen. Jedoch lassen sich im Falle, dass X Boolesch ist, angesichts des dritten Punkts in Satz 4.69 die Korrelationen p_T, $T \subseteq \{1, \ldots, n\}, |T| \geq 2$ konsistent als Summen über die $x_M, M \supseteq T$ definieren, was nach entsprechender Substitution Bell-artige Ungleichungen liefert. In Beispiel 4.61[333] wird dieses Vorgehen exemplarisch veranschaulicht.

Beispiel 4.61. (vgl.[8]) Wir exemplifizieren Bemerkung 4.33[334], indem wir für $n = 4$ zeigen, wie man aus Satz 4.69[335] Bell-artige Ungleichungen gewinnen kann:
Ist P_4 Boolesch, dann werden durch $p_{12} := x_{12} + x_{123} + x_{124} + x_{1234}$, $p_{13} := x_{13} + x_{123} + x_{134} + x_{1234}$, $p_{14} := x_{14} + x_{124} + x_{134} + x_{1234}$, $p_{23} := x_{23} + x_{123} + x_{234} + x_{1234}$, $p_{24} := x_{24} + x_{124} + x_{234} + x_{1234}$, $p_{34} := x_{34} + x_{134} + x_{234} + x_{1234}$, $p_{123} := x_{123} + x_{1234}$, $p_{124} := x_{124} + x_{1234}$, $p_{134} := x_{134} + x_{1234}$, $p_{234} := x_{234} + x_{1234}$, $p_{1234} := x_{1234}$ Korrelationswahrscheinlichkeiten konsistent definiert und setzt man diese in die Hauptbedingung bzw. in die Nebenbedingungen ein, so wird bzw. werden diese zu der Bell-artigen Ungleichung
$0 \leq \sum_{i=1}^4 p_i - p_{12} - p_{13} - p_{14} - p_{23} - p_{24} - p_{34} + p_{123} + p_{124} + p_{134} + p_{234} - p_{1234} \leq 1$
bzw. zu den Nebenbedingungen
$p_{12} + p_{13} + p_{14} - p_{123} - p_{124} - p_{134} + p_{1234} \leq p_1$, $p_{12} + p_{23} + p_{24} - p_{123} - p_{124} - p_{234} + p_{1234} \leq p_2$, $p_{13} + p_{23} + p_{34} - p_{123} - p_{134} - p_{234} + p_{1234} \leq p_3$, $p_{14} + p_{24} + p_{34} - p_{124} - p_{134} - p_{234} + p_{1234} \leq p_4$.
Wie man sofort erkennt, entspricht die Hauptbedingung genau der schon in Beispiel 4.59[336] für $n = 4$ hergeleiteten Ungleichung.

[331] siehe S.114
[332] siehe S.114
[333] siehe S.115
[334] siehe S.115
[335] siehe S.114
[336] siehe S.113

4.5.4 Charakteristische Bedingungen für Algebren von numerischen Ereignissen, Boolesche Algebren zu bilden

Aus Kombination der Korollar 4.14[337] und 3.8[338] folgt bereits, dass jede Algebra von numerischen Ereignissen, welche einen Verband bildet, genau dann eine Boolesche Algebra ist, wenn je zwei beliebige Elemente durch ein Dreieck geteilt werden.
Es genügt jedoch sogar, auf die Voraussetzung der Verbandsgeordnetheit, zu verzichten, weil sich jede Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, in der je zwei Elemente kommutieren, als Verband erweist, wie wir im Beweis des folgenden Satzes sehen werden.

Satz 4.70. *([62],[31]) Eine Algebra von numerischen Ereignissen P ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn je zwei Elemente aus P durch ein orthogonales Dreieck geteilt werden, das heißt, wenn $\forall p, q \in P\, \exists r, s, t \in P : \ r \perp s \perp t \perp r,\ p = r \vee t \ (= \ r + t),\ q = s \vee t \ (= \ s + t)$ gilt (bzw. äquivalent dazu, wenn je zwei Elemente eine Boolesche Algebra erzeugen).*

Beweis. (vgl.[62]) Ist $\Delta(r, t, s)$ ein orthogonales Dreieck, so gilt laut Bemerkung 4.18[339] $r \vee t = r + t$ und $s \vee t = s + t$.
„⇒“: Angenommen, P ist eine Boolesche Algebra und p, q sind zwei beliebige Elemente aus P. Dann ist $t := p \wedge q \in P$, $r := p \wedge t' \in P$ und $s := q \wedge t' \in P$ und unter Verwendung des Distributivgesetzes folgt $t \wedge r = (p \wedge q) \wedge (p \wedge (p' \vee q')) = (p \wedge q) \wedge (0 \vee (p \wedge q')) = p \wedge q \wedge q' = 0$, $t \wedge s = t \wedge q \wedge t' = 0$, $r \wedge s = (p \wedge t') \wedge (q \wedge t') = p \wedge q' \wedge q \wedge p' = 0$.
Da in Booleschen Verbänden, wie in Proposition 3.27[340] festgestellt, die Orthogonalität zweier Elemente äquivalent zu ihrer Disjunktheit ist, bilden r, s und t ein orthogonales Tripel. Mit $t = p \wedge q \leq p, q$ folgt $r \vee t = (p \wedge t') \vee t = p \vee t = p$ und analog $s \vee t = q$, also ist $\Delta(r, t, s)$ ein orthogonales Tripel, welches p und q teilt.
„⇐“: Zunächst zeigen wir, dass $(P, \leq)$ unter der Voraussetzung, dass je zwei Elemente durch ein orthogonales Dreieck geteilt werden, einen Verband bildet. Seien dafür p, q zwei beliebige Elemente aus P. Dann gibt es ein Dreieck $\Delta(r, t, s)$ mit $p = r \vee t$, $q = s \vee t$. Da die Elemente r, s, t paarweise orthogonal sind, existiert $r \vee s \vee t$ in P und es folgt $p \vee q = (r \vee t) \vee (s \vee t) = r \vee s \vee t \in P$, das heißt, das Supremum jedes beliebigen Paares von Elementen existiert in P. Mit den Gesetzen von de Morgan folgt daraus auch die Existenz der Infima, das bedeutet, P bildet - wegen Korollar 4.14[341] - einen orthomodularen Verband. Mit Satz 3.8[342] folgt daraus das gewünschte Resultat. □

Am Beweis von Satz 4.70[343] erkennen wir, dass sich das für klassische physikalische Systeme zu je zwei Wahrscheinlichkeiten p, q existierende orthogonale Dreieck $\Delta(r, t, s)$, welches sie teilt, aus der Wahrscheinlichkeit r, dass das mit p assoziierte Ereignis eintritt, aber das mit q assoziierte nicht, der Wahrscheinlichkeit s, dass das mit q assoziierte Ereignis eintritt, aber das mit p assoziierte nicht, und der Wahrscheinlichkeit t, dass sowohl das mit p als auch das mit q assoziierte Ereignis eintritt, zusammensetzt.

Beispiel 4.62. Aus Satz 4.70[344] folgt sofort, dass es sich bei der Algebra von numerischen

[337] siehe S.78
[338] siehe S.37
[339] siehe S.71
[340] siehe S.45
[341] siehe S.78
[342] siehe S.37
[343] siehe S.116
[344] siehe S.116

Ereignissen aus Beispiel 4.17[345], welche in Abbildung 4.8[346] dargestellt ist, wie schon in Beispiel 4.52[347] festgestellt, um keine Boolesche Algebra handelt, weil wir in Beispiel 4.17 gesehen haben, dass etwa die Elemente s und r nicht miteinander kommutieren, was laut Satz 4.8[348] äquivalent dazu ist, dass sie nicht durch ein orthogonales Dreieck geteilt werden.

Korollar 4.71. *Eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn gilt:* $\forall p, q \in P \, \exists a \in P: \; a \leq p \leq a + q \leq 1$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Kombination der Sätze 4.70[349] und 4.8[350]. □

Verfahren 4.63. Korollar 4.71[351] liefert folgendes Verfahren zur Überprüfung, ob es sich bei einer Algebra von numerischen Ereignissen $P \subseteq [0,1]^S$ um eine Boolesche Algebra handelt oder nicht.

Algorithm 1 Algorithmus zu Sätzen 4.70, S.116, und 4.8, S.73

```
procedure TestClassicality1(P)
    listPairs:=[]
    for all p in P, q in P do
        if (p, q) is not in listPairs then
            add (p, q) to listPairs
        end if
    end for
    for all (p, q) in listPairs do
        B:=0
        for all a in P do
            if a ≤ p and p ≤ a + q and a + q ≤ 1 then
                B:=1
                break for
            end if
        end for
        if B=0 then
            return „P is not a Boolean algebra“
        end if
    end for
    return „P is a Boolean algebra“
end procedure
```

Aus Sicht von Ereignissystemen lässt sich Satz 4.70[352] auch folgendermaßen als Spezialfall von Satz 4.15[353] formulieren:

Satz 4.72. *([7],[9]) Ist P eine Menge von S-Wahrscheinlichkeiten, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

[345]siehe S.70
[346]siehe S.70
[347]siehe S.101
[348]siehe S.73
[349]siehe S.116
[350]siehe S.73
[351]siehe S.117
[352]siehe S.116
[353]siehe S.80

(a) *P ist klassisch repräsentierbar als der Wertebereich eines vollständigen S-Wahrscheinlichkeitsmaßes auf einem klassischen Ereignissystem L,*

(b) *P bildet eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten und alle Paare von Elementen $p, q \in P$ werden durch ein orthogonales Dreieck geteilt*

Beweis. Für den Beweis sei auf [7] verwiesen. □

Satz 4.72[354] ermöglicht also ebenfalls die Entscheidung, ob es sich um ein klassisches Ereignissystem handelt. Die algebraische Struktur der Ereignisse wird dabei aber nur bis auf Isomorphie bestimmt, die verschiedenen Ereignisse werden nicht definiert. Das spiegelt die in Abschnitt 2.7[355] ausgeführte Idee wieder, das Wissen über die Struktur eines physikalischen Systems zu erlangen, indem man zunächst beobachtet und Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Zustände misst, und dann erst von den Wahrscheinlichkeiten ausgehend die logische Struktur der Ereignisse herleitet.

Aus Satz 4.70[356] bzw. Satz 4.72[357] lässt sich außerdem folgendes Korollar herleiten, welches ein weiteres simples Verfahren zur Bestimmung, ob eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten einem klassischen System entstammt oder nicht, liefert:

Korollar 4.73. *(vgl.[7][9]) Sei P eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten. Dann ist P genau dann nicht klassisch (das heißt, nicht klassisch repräsentierbar und keine Boolesche Algebra), wenn es ein Paar (p, q) von Elementen aus P gibt, sodass $[a \leq c$ und $p \leq a + c$ für $a, c \in P] \Rightarrow p - q \neq a + c - 1$.*

Beweis. ([7]) Das Korollar folgt aus Satz 4.72[358] (bzw. gleichermaßen aus Satz 4.70[359]): Wir zeigen, dass die vorausgesetzte Bedingung äquivalent dazu ist, dass es ein Paar (p, q) von Elementen aus P gibt, das nicht durch ein orthogonales Dreieck geteilt wird.
Dass nicht je zwei Elemente aus P durch ein orthogonales Dreieck geteilt werden, ist äquivalent dazu, dass es ein Paar (p, q) von Elementen aus P gibt, sodass für jedes orthogonale Dreieck $\Delta(r, t, s)$ von Elementen aus P gilt, $p = r + t \Rightarrow q \neq s + t$. Mit $a := r$ und $c := 1 - t$ gilt $t = p - r = p - a$ und (r, t, s) bildet genau dann ein Dreieck, wenn $(a, 1 - c, p - a)$ ein solches ist, das heißt, wenn $a + (p - a) \leq 1, a + (1 - c) \leq 1$ und $(p - a) + (1 - c) \leq 1$ ist, was wiederum genau dann erfüllt ist, wenn $p \leq 1$, $a \leq c$ und $p \leq (a + c)$ ist.
Weiters ist $q \neq s + t$ äquivalent zu $q \neq (p - a) + (1 - c)$, also $p - q \neq a + c - 1$. □

Verfahren 4.64. Korollar 4.73[360] liefert folgendes Verfahren zur Überprüfung, ob es sich bei einer Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten $P \subseteq [0, 1]^S$ um ein klassisches System handelt oder nicht:

Algorithm 2 Algorithmus zu Korollar 4.73, S.118

```
procedure TestClassicality2(P)
    listPairs:=[]
    listPairs2:=[]
```

[354] siehe S.117
[355] siehe S.18
[356] siehe S.116
[357] siehe S.117
[358] siehe S.117
[359] siehe S.116
[360] siehe S.118

```
    for all p in P, q in P do
        if (p, q) is not in listPairs then
            add (p, q) to listPairs
        end if
        if p ≤ q then
            if (p, q) is not in listPairs2 then
                add (p, q) to listPairs2
            end if
        end if
    end for
    for all (p, q) in listPairs do
        C:=0
        B:=0
        for all (a, c) in listPairs2 do
            if p ≤ a + c then
                C:=1
                if p − q = a + c − 1 then
                    B:=1
                    break for
                end if
            end if
        end for
        if C=0 then
            return „P is not classical“
        end if
        if B=0 then
            return „P is not classical“
        end if
    end for
    return „P is classical“
end procedure
```

Das Resultat für orthomodulare posets in Satz 3.35[361] lässt sich mit Satz 4.13[362] unmittelbar auf Algebren von numerischen Ereignissen übertragen. Man kann das Resultat allerdings auch ohne Verwendung jenen Satzes direkt beweisen:

Korollar 4.74. *([20]) Eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn gilt: $\forall p, q \in P\, \exists r, s \in P,\ r \perp p, s \perp q, r \perp s:\ p + r = q + s$.*

Beweis. (vgl.[20]) „$\Leftarrow$“: Sei $t := p + r = q + s$, dann ist $p = t - r = t \wedge r'$, also $p' = t' \vee r = t' + r$. Ebenso erhält man $q' = t' + s$. Da $t' = p' \wedge r' \leq r'$, $t' = q' \wedge s' \leq s'$ und nach Voraussetzung $r \perp s$ ist, ist $\Delta(r, t', s)$ ein orthogonales Dreieck, welches p' und q' teilt. Da p, q beliebig waren, ist dieser Umstand nach Satz 4.70[363] äquivalent dazu, dass P eine Boolesche Algebra bildet.
„$\Rightarrow$“: Ist P eine Boolesche Algebra, dann wird laut Satz 4.70 jedes Paar von Elementen durch ein orthogonales Dreieck geteilt, also gibt es für $p, q \in P$ ein Tripel $\Delta(r, t', s)$, sodass $p' = t' + r$, $q' = t' + s$ und somit wegen $t \perp r'$, $t \perp s'$ sodann $p = t \wedge r' = t - r$, $q = t \wedge s' = t - s$, also

[361] siehe S.49
[362] siehe S.75
[363] siehe S.116

$p+r=t=q+s$ ist. Wegen $r \leq p'$, $s \leq q'$ und $r \perp s$ sind auch die behaupteten Orthogonalitäten erfüllt. □

Weit wichtiger als die Zulänglichkeit der Bedingung in Korollar 4.74[364] ist deren Notwendigkeit, weil der Beweis, dass jedes Paar von Elementen die Bedingung erfüllt, sehr langwierig sein kann, es aber weitaus schneller vonstatten gehen kann, ein Paar, das die Bedingung verletzt, zu finden. Das Gleiche gilt für die nachfolgenden Charakterisierungen.

Verfahren 4.65. Korollar 4.74[365] (bzw. Satz 3.35[366]) liefert folgendes Verfahren für die Entscheidung, ob ein physikalisches System, das durch eine Algebra von numerischen Ereignissen (bzw. ein orthomodulares poset von S-Wahrscheinlichkeiten) $(P, \leq, ', 0, 1)$ repräsentiert wird, klassisch ist.

Algorithm 3 Algorithmus zu Korollar 4.74, S.119

```
procedure TestClassicality3(P)
    listPairs:=[ ]
    listPairs2:=[ ]
    for all p in P, q in P do
        if (p, q) is not in listPairs and (q, p) is not in listPairs then
            add (p, q) to listPairs
        end if
        if p + q ≤ 1 then
            if (p, q) is not in listPairs2 then
                add (p, q) to listPairs2
                add (q, p) to listPairs2
            end if
        end if
    end for
    for all (p, q) in listPairs do
        B:=0
        for all (r, s) in listPairs2 do
            if p + r ≤ 1 and q + s ≤ 1 and p + r = q + s then
                B:=1
                break for
            end if
        end for
        if B=0 then
            return „P is no Boolean algebra and hence not classical“
        end if
    end for
    return „P is a Boolean algebra and hence classical“
end procedure
```

Nachstehendes Resultat ist dem aus Korollar 4.74[367] sehr ähnlich und folgt der gleichen Be-

[364] siehe S.119
[365] siehe S.119
[366] siehe S.49
[367] siehe S.119

weisidee.

Korollar 4.75. *([24]) Eine Algebra P von S-Wahrscheinlichkeiten ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn für alle $p, q \in P$ Elemente $g, h \in P$ existieren, sodass $p - h \in P$, $h \perp g$ und $p + g = q + h$ ist.*

Beweis. Für den Beweis sei auf [24] verwiesen. □

Wie aus Korollar 4.74[368], lässt sich auch aus Korollar 4.75[369] auf naheliegende Weise ein Verfahren gewinnen, das zur Überprüfung der Klassik eines mit einer Algebra von numerischen Ereignissen assoziierten physikalischen Systems dienen kann:
Für $p, q \in P$ prüft man, ob es $g, h \in P$ gibt, sodass $p-h \in P$, $h \perp g$ und $p+g = q+h$ ist. Findet man ein Paar von numerischen Ereignissen (p, q) und eine Teilmenge von Zuständen $\tilde{S} \subseteq S$, sodass keine Elemente $g, h \in P$ mit $p - h \in P$, $h \perp g$ und $p(s) + q(s) = g(s) + h(s) \forall s \in \tilde{S}$ existieren, dann hat man es nicht mit einem klassischen System von numerischen Ereignissen zu tun. (vgl.[24])
Einen entsprechenden Algorithmus erhält man durch Modifikation von Zeile 18 im Verfahren 3[370], indem man die Überprüfungen $p + r \leq 1$ und $q + s \leq 1$ durch eine Berechnung von $p - s$ und Suche von $p - s$ in P ersetzt.

Beispiel 4.66. Wir wissen bereits, dass die in Beispiel 4.7[371] betrachtete Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten nicht boolesch ist und somit laut Bemerkung 3.20[372] keine Boolesche Algebra sein kann. Dies können wir jedoch auch durch Überprüfung der in Korollar 4.75[373] angegebenen Bedingung feststellen.
Betrachtet man - mit der Notation aus Korollar 4.75 - die Elemente $p := (0.2, 0.8)$ und $q := (0.8, 0.2)$, so sind $g := q$ und $h := p$ zwei Elemente, für die die Bedingung erfüllt ist, was uns keine relevante Information liefert. Wählt man hingegen die Elemente $p := (0.2, 0.8)$ und $q := (0.1, 0.9)$, dann gibt es in P kein orthogonales Paar von Elementen g, h, welches die Bedingung erfüllt.

Aus den Sätzen 3.29[374] und 4.18[375] folgt folgende Charakterisierung, wann ein boolescher Raum von numerischen Ereignissen eine Boolesche Algebra bildet:

Satz 4.76. *([20]) Ist eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P boolesch, dann ist sie genau dann eine Boolesche Algebra, wenn gilt: $\forall p, q \in P\, \exists! r \in P : r \geq p, q,\ (r - p) \wedge (r - q) = 0$.*

Beweis. „⇒“: Ist P eine boolesche Algebra von numerischen Ereignissen, die eine Boolesche Algebra bildet, dann ist P insbesondere ein Verband. Mit Satz 4.18[376] folgt, dass dieser die behauptete Bedingung erfüllt.
„⇐“: Ist P eine boolesche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, welche die im Satz angegebene Bedingung erfüllt, dann bildet P laut Satz 4.18 einen Verband und dieser Satz 3.29[377] zufolge wiederum eine Boolesche Algebra. □

[368] siehe S.119
[369] siehe S.121
[370] siehe S.120
[371] siehe S.61
[372] siehe S.46
[373] siehe S.121
[374] siehe S.46
[375] siehe S.82
[376] siehe S.82
[377] siehe S.46

Bemerkung 4.34. (vgl.[25]) Da in booleschen Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten gilt $[(r-p)\wedge(r-q)=0] \Leftrightarrow [(r\wedge p')\wedge(r\wedge q')=0] \Leftrightarrow [(r\wedge p')\perp(r\wedge q')] \Leftrightarrow [r\wedge p' \leq (r\wedge q')'] \Leftrightarrow [r-p \leq r'+q]$, lässt sich die Bedingung $(r-p)\wedge(r-q)=0$ in Satz 4.76[378] durch die Bedingung $r-p \leq r'+q$ ersetzen.

Verfahren 4.67. Zumal üblicherweise erst noch unbekannt ist, ob eine gegebene Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P boolesch ist, verwenden wir nicht nur Satz 4.76[379], um ein Verfahren zur Entscheidung zu produzieren, ob es sich bei P um eine Boolesche Algebra und somit ein klassisches System handelt oder nicht, sondern wir machen uns auch die Tatsache, dass jede Boolesche Algebra verbandsgeordnet ist, sowie Sätze 4.18[380] und 4.48[381] zunutze, was zu folgendem Algorithmus führt.

Algorithm 4 Algorithmus zu Satz 4.48, S.102

```
procedure TestClassicality4(P)
    listPairs:=[ ]
    for all p in P, q in P do
        if (p, q) is not in listPairs and (q, p) is not in listPairs then
            add (p, q) to listPairs
        end if
    end for
    for all (p, q) in listPairs do
        Z:=0
        for all r in P do
            if r ≥ p and r ≥ q then
                Z:=Z+1
                for all s in P do
                    if s ≠ 0 and s ≤ (r − p) and s ≤ (r − q) then
                        Z:=Z-1
                        break for
                    end if
                end for
            end if
        end for
        if Z≠1 then
            return „P is no lattice and hence not classical“
        end if
        D:=1
        for all r in P do
            if r ≤ p and r ≤ q and r ≠ 0 then
                D:=0
                break for
            end if
        end for
        if D=1 then
            if p + q ≰ 1 then
```

[378] siehe S.121
[379] siehe S.121
[380] siehe S.82
[381] siehe S.102

```
                return „P is not boolean and hence not classical“
            end if
        end if
    end for
    return „P is a Boolean algebra and hence classical“
end procedure
```

Korollar 4.77. *([25]) Ist P ein komplementäres strukturiertes poset von S-Wahrscheinlichkeiten, dann ist P genau dann eine Boolesche Algebra, wenn gilt: $\forall p, q \in P\ \exists! r \in P, r \geq p, q:\ r - p \leq r' + q$*

Beweis. (vgl.[25]) Laut Proposition 4.2[382] ist P als komplementäres strukturiertes poset von S-Wahrscheinlichkeiten eine boolesche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten.
Die Behauptung folgt damit aus Satz 4.76[383] in Kombination mit Bemerkung 4.34[384]. □

Korollar 4.78. *(vgl.[25]) Ist P eine boolesche Algebra von zweiwertigen numerischen Ereignissen (bzw. äquivalent, ein strukturiertes poset, dessen Elemente nur die Werte 0 und 1 annehmen können), dann hat man folgende Charakterisierungen:*

(a) P ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn gilt: $\forall p, q \in P:\ p \vee q = \widetilde{\max}\{p, q\} \in P$

(b) P ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn gilt: $\forall p, q \in P:\ p \wedge q' = \widetilde{\min}\{p, q'\} \in P$

Beweis. Die Äquivalenz von booleschen Räumen von zweiwertigen numerischen Ereignissen und strukturierten posets von zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeiten folgt aus Korollar 4.3[385].

(a) Um die erste Behauptung zu zeigen, stellen wir fest, dass die einzig mögliche zweiwertige S-Wahrscheinlichkeit r, welche die Bedingung von Korollar 4.77[386] erfüllt, das komponentenweise Maximum von p und q ist:
Dass $r \geq p, q$ ist, wird vorausgesetzt, daher gilt auch $r \geq \widetilde{\max}\{p, q\}$. Angenommen, es ist $r > \widetilde{\max}\{p, q\}$. Das bedeutet, es gibt ein $s \in S$, sodass $p(s) = q(s) = 0$, $r(s) = 1$ ist. Dann gilt jedoch $r(s) - p(s) + r(s) - q(s) = 2 \not\leq 1$ und somit wird die Bedingung $r - p \leq r' + q$ nicht erfüllt. Also muss $r = \widetilde{\max}\{p, q\}$ sein. Liegt dieses Element nun in P, dann gilt $p \vee q = \widetilde{\max}\{p, q\}$ und die Aussage folgt aus Korollar 4.77.

(b) Zum Beweis der zweiten Behauptung zeigen wir, dass es sich bei der zweiwertigen S-Wahrscheinlichkeit a, welche die Bedingung in Korollar 4.71[387] erfüllt, nur um das komponentenweise Minimum von p und q' handeln kann:
Da $a \leq p$ und $a + q \leq 1 (\Leftrightarrow a \leq q')$ gelten soll, muss $a \leq \widetilde{\min}\{p, q'\}$ sein. Angenommen, es ist $a < \widetilde{\min}\{p, q'\}$. Das heißt, es gibt einen Zustand $s \in S$, sodass $a(s) = 0, p(s) = q'(s) = 1$, also $q(s) = 0$ ist. Wegen $p(s) = 1 \not\leq 0 = a(s) + q(s)$ ist die Bedingung $p \leq a + q$ dann nicht erfüllt. Also kann nur $a = \widetilde{\min}\{p, q'\}$ sein und wenn dieses Element in P liegt, dann ist $p \wedge q' = \widetilde{\min}\{p, q'\}$ und die Aussage folgt aus Korollar 4.71.

[382] siehe S.60
[383] siehe S.121
[384] siehe S.122
[385] siehe S.60
[386] siehe S.123
[387] siehe S.117

□

Beispiel 4.68. Wir betrachten noch einmal die Algebra von numerischen Ereignissen P aus Beispiel 4.57[388]: Wie wir bereits wissen, enthält sie nicht-Boolesche Teilmengen und kann daher keine Boolesche Algebra sein. Mit Korollar 4.78[389] lässt sich dies sehr schnell feststellen, denn es ist $s \vee p = (1,1,1,1,1,1) \neq \widetilde{\max}\{s,p\} = (1,0,0,1,1,1) \notin P$.

Endliche Boolesche Algebren lassen sich unter den Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten auch über Eigenschaften der Atome charakterisieren, wie folgendes Resultat zeigt.

Korollar 4.79. *([19]) Eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P ist genau dann eine endliche Boolesche Algebra, wenn ihre Atome folgende Bedingungen erfüllen:*

(a) P hat endlich viele Atome.

(b) Die Atome von P sind paarweise orthogonal.

(c) P ist atomar.

Beweis. Wegen Satz 4.13[390] lassen sich Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten als orthomodulare posets auffassen, auf die wiederum Satz 3.33[391] anwendbar ist. □

Beispiel 4.69. Wir betrachten die Anwendung von Korollar 4.79[392] zur Entscheidung, ob es sich bei der in Abbildung 4.8[393] dargestellten Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten $P = \{0, p, q, r, s, p', q', r', s', 1\}$, wobei wie schon in Beispiel 4.17[394] $p := (1,0,0), q := (0,1,0), r := (0,0,1)$ und $s := (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ seien, um eine Boolesche Algebra handelt.
Da P fünf Atome, nämlich p, q, r, s und s', hat, ist die erste Bedingung offensichtlich erfüllt. Auch die dritte Bedingung ist erfüllt, weil P als endliches poset mit Nullelement laut Proposition 3.1[395] atomar ist. Jedoch wird die zweite Bedingung verletzt, weil s und s' weder zueinander noch zu den anderen drei Atomen orthogonal sind. Daher kann es sich um keine Boolesche Algebra handeln, wie auch in Beispiel 4.52[396] und Beispiel 4.62[397] bereits festgestellt.
Betrachtet man jedoch die Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten $\tilde{P}$ in Abbildung 4.24[398], welche aus $P \backslash (\{s\} \cup \{s'\})$ besteht, so sind die erste und dritte Bedingung natürlich weiterhin erfüllt. Sogar die zweite Bedingung wird jetzt erfüllt, weil p, q und r ein orthogonales Dreieck bilden. $\tilde{P}$ bildet also eine Boolesche Algebra und die zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeiten und korrespondierenden Ereignisse entstammen somit einem klassischen physikalischen System.

Folgender Satz charakterisiert die Booleschen Algebren unter den Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten über die Eindeutigkeit der Repräsentation von jedem Element als Summe von Atomen.

Satz 4.80. *([20]) Eine endliche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn für jedes Element $p \in P$ seine Repräsentation als Summe von Atomen eindeutig ist.*

[388]siehe S.105
[389]siehe S.123
[390]siehe S.75
[391]siehe S.48
[392]siehe S.124
[393]siehe S.70
[394]siehe S.70
[395]siehe S.24
[396]siehe S.101
[397]siehe S.116
[398]siehe S.125

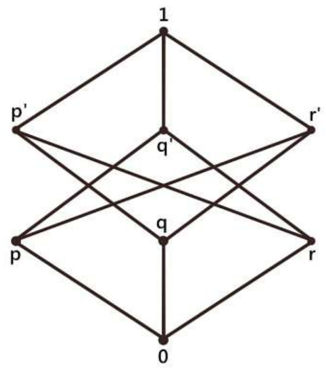

Abbildung 4.24: Hasse-Diagramm der Algebra von numerischen Ereignissen $\tilde{P}$ in Beispiel 4.69, S.124: Mit Korollar 4.79[400] sieht man, dass $\tilde{P}$ eine Boolesche Algebra ist.

Beweis. (vgl.[20]) „$\Rightarrow$": Ist die endliche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten P eine Boolesche Algebra, dann ist sie als atomarer orthomodularer Verband laut Satz 3.20[401] auch atomistisch, das heißt, jedes Element ist als Supremum von Atomen darstellbar. Da die Atome in Booleschen Algebren alle orthogonal zueinander sind, ist diese Darstellung eindeutig und das Supremum entspricht der Summe der entsprechenden Atome.
„$\Leftarrow$": Sei umgekehrt die Darstellung von $p \in P$ als Summe von Atomen eindeutig und bezeichne A die Menge aller Atome von P. Da P als endliches orthomodulares poset laut Satz 3.21[402] atomistisch ist und da 1 für jedes Atom eine obere Schranke ist, ist $1 = \bigvee_{a \in A} a$.
Infolge von Satz 4.12[403] ist das Einselement als das Supremum einer maximalen orthogonalen Teilmenge von Atomen $O \subseteq A$ darstellbar, insbesondere ist $1 = \sum_{o \in O} o$. Angenommen, es ist $O \neq A$. Dann gäbe es ein Atom $a \in A$, welches nicht in O liegt und eine maximale orthogonale Teilmenge O_a von A, welche a enthält. Somit wäre laut Satz 4.12 auch $1 = \sum_{o \in O_a} o$, aber $O \neq O_a$, im Widerspruch zur vorausgesetzten Eindeutigkeit der Repräsentation als Summe von Atomen. Also muss $O = A$ sein und es ist $\sum_{a \in A} a = 1$.
Letzteres bedeutet, dass alle Atome paarweise orthogonal sind, darum liegt die Summe jeder beliebigen Teilmenge von A in P und die Abbildung $\phi : P \to 2^A, \phi(p) = \{a \in A : a \leq p\}$ ist eine ordnungs- und komplementerhaltende Bijektion. Folglich sind $(P, \leq, ')$ und $(2^A, \subseteq, ^c)$ isomorph zueinander und da es sich bei letzterer Struktur um eine Boolesche Algebra handelt, muss auch P eine solche sein. □

Beispiel 4.70. Als Anwendung von Satz 4.80[404] betrachten wir noch einmal die Algebren von numerischen Ereignissen aus Beispiel 4.69[405]. Dort ist für P die Repräsentation als Summe von Atomen offensichtlich nicht eindeutig, denn es ist sowohl $1 = s + s'$ als auch $1 = p + q + r$. Laut Satz 4.80 handelt es sich daher um keine Boolesche Algebra.
Hingegen ist die Darstellung als Summe von Atomen für jedes Element aus $\tilde{P}$ eindeutig, wie man an Abbildung 4.24[406] sofort erkennt. Dadurch folgt laut Satz 4.80[407], dass es sich bei $\tilde{P}$ um eine Boolesche Algebra handelt.

Beispiel 4.71. Die Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten aus Beispiel 4.9[408] ist keine Boolesche

[401] siehe S.42
[402] siehe S.42
[403] siehe S.74
[404] siehe S.124
[405] siehe S.124
[406] siehe S.125
[407] siehe S.124
[408] siehe S.62

Algebra, wie man an ihrem Hasse-Diagramm in Abbildung 4.7[409] mithilfe von Satz 4.80[410] sofort vermutet und schnell nachprüft:
Offensichtlich ist P atomistisch und die Repräsentation als Summe von Atomen für p, q, s und t eindeutig. Das Element r' ist jedoch das Supremum der vier Atome p, q, s und t, wobei sowohl die Menge $\{q, r\}$ als auch die Menge $\{s, t\}$ eine maximale orthogonale Menge der Atome, welche kleiner oder gleich r' sind, bildet, woraus mit Satz 4.12[411] folgt, dass sowohl $p + q = r'$ als auch $s + t = r'$ ist. Die Repräsentation von r' als Summe von Atomen ist somit nicht eindeutig, weshalb es sich bei P laut Satz 4.80 um keine Boolesche Algebra handelt.
Alternativ kann man auch feststellen, dass P aus zwölf Elementen besteht, aber zwölf keine Potenz von zwei ist, und Korollar 3.32[412] anwenden, oder aber die Distributivgesetze nachprüfen und erkennen, dass etwa $(p \wedge t') \vee t = 0 \vee t = t \neq r' = r' \wedge 1 = (p \vee t) \wedge (t' \vee t)$ ist.
Ebenso liefert Korollar 4.79[413] Aufschluss darüber, dass der Raum von numerischen Ereignissen keine endliche Boolesche Algebra bildet, weil die Bedingung, dass alle Atome paarweise orthogonal zueinander sind, nicht erfüllt ist.

Korollar 4.81. *(vgl.[20]) Jede Algebra von numerischen Ereignissen, der höchstens vier Atome hat, ist entweder eine Boolesche Algebra oder isomorph zu MO_2.*
Genauer, ist

(a) jede Algebra von numerischen Ereignissen mit nur einem Atom isomorph zur zweielementigen Booleschen Algebra,

(b) jede Algebra von numerischen Ereignissen mit genau zwei Atomen isomorph zur vierelementigen Booleschen Algebra,

(c) jede Algebra von numerischen Ereignissen mit genau drei Atomen isomorph zur achtelementigen Booleschen Algebra und

(d) jede Algebra von numerischen Ereignissen mit genau vier Atomen genau dann isomorph zu MO_2, wenn die Atome paarweise unvergleichbar sind, und andernfalls isomorph zur sechzehnelementigen Booleschen Algebra.

Beweis. Die Aussage erhält man unter Verwendung der Sätze 4.12[414] und 4.80[415] sowie Proposition 4.6[416]; für Details sei auf den Beweis von Korollar 4.10 in [20] verwiesen, aus welchem die Aussagen folgen. □

Bemerkung 4.35. Da jede endliche Boolesche Algebra, welche aus einer bestimmten Anzahl von Elementen besteht (bzw. äquivalent, die eine bestimmte Anzahl von Atomen hat), bis auf Isomorphie eindeutig ist, und nach Korollar 4.81[417] jede endliche Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten mit einem, zwei oder drei Atomen eine Boolesche Algebra bildet, ist auch jede Algebra von numerischen Ereignissen mit einem, zwei oder drei Atomen bis auf Isomorphie eindeutig. Die Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten mit vier nicht paarweise unvergleichbaren Atomen sind aus selbigem Grund ebenfalls bis auf Isomorphie eindeutig.

[409]siehe S.63
[410]siehe S.124
[411]siehe S.74
[412]siehe S.47
[413]siehe S.124
[414]siehe S.74
[415]siehe S.124
[416]siehe S.71
[417]siehe S.126

In Abbildungen 4.25, 4.26, 4.27 und 4.28[418] sind die vier Hasse-Diagramme von diesen Räumen von numerischen Ereignissen bzw. Booleschen Algebren dargestellt.

[418] siehe S.128

Abbildung 4.25: Hasse-Diagramm zu Bemerkung 4.35, S.126: Jede zweielementige Algebra von numerischen Ereignissen ist isomorph zu dieser Booleschen Algebra.

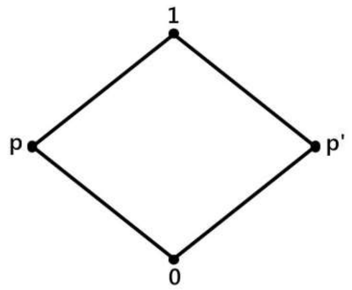

Abbildung 4.26: Hasse-Diagramm zu Bemerkung 4.35, S.126: Jede Algebra von numerischen Ereignissen mit genau zwei Atomen ist isomorph zu dieser Booleschen Algebra.

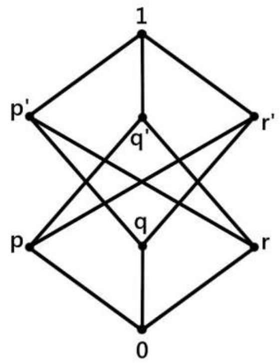

Abbildung 4.27: Hasse-Diagramm zu Bemerkung 4.35, S.126, und Beispiel 4.58, S.106: Jede Algebra von numerischen Ereignissen mit genau drei Atomen ist isomorph zu dieser Booleschen Algebra.

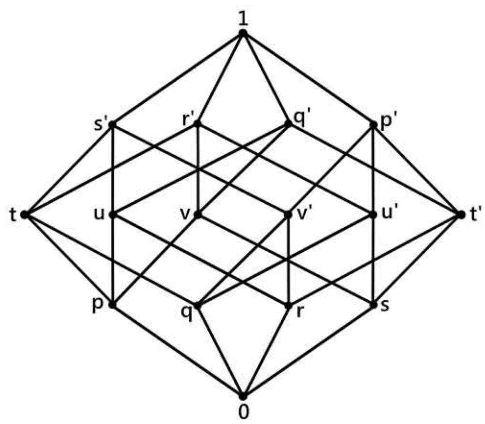

Abbildung 4.28: Hasse-Diagramm zu Bemerkung 4.35, S.126: Jede Algebra von numerischen Ereignissen mit genau vier Atomen ist isomorph zu dieser Booleschen Algebra, wenn die Atome keine Antikette bilden.

5 Beispiele aus der Physik

In diesem Kapitel beleuchten wir den klassischen oder quantenmechanischen Charakter konkreter physikalischer Experimente anhand von S-Wahrscheinlichkeiten.

5.1 Stern-Gerlach-Versuch für Spin-Messungen

Wir betrachten Elektronen[1] aus einer Elektronenquelle, die zwei Zustände haben können, nämlich „spin up“ und „spin down“: Repräsentiert man den Spin als zweidimensionalen Vektor in einem Koordinatensystem mit zueinander orthogonalen Koordinatenachsen x und y, kann man den Spin auf die x- und die y-Achse projizieren, wodurch man eine x- und eine y-Komponente des Spin-Vektors erhält, welche ihrerseits wiederum zwei Zustände hat, nämlich „spin up“ und „spin down“, in Zeichen $x\uparrow$ und $x\downarrow$ bzw. $y\uparrow$ und $y\downarrow$.
Wir nehmen an, dass der Elektronenstrahl durch drei konsekutive sogenannte Stern-Gerlach-Apparate A_1, A_2 und A_3 übertragen wird, wovon jeder eine Komponente des Strahls in zwei Komponenten aufteilt, nämlich eine mit „spin up“ und eine mit „spin down“, und dann eine der beiden Komponenten blockiert: A_1 splittet die x-Komponente in Strahlen mit $x\uparrow$ und $x\downarrow$ und blockiert den Strahl mit $x\downarrow$, A_2 spaltet die y-Komponente in $y\uparrow$ und $y\downarrow$ und blockiert $y\downarrow$, A_3 teilt die x-Komponente wieder in $x\uparrow$, $x\downarrow$ und blockiert $x\uparrow$.
Nun bezeichnen wir mit s_1 den Zustand des Elektronenstrahls zwischen der Elektronenquelle und A_1, mit s_2 den Zustand zwischen A_1 und A_2, mit s_3 den Zustand zwischen A_2 und A_3 und mit s_4 den Zustand nach A_3. Führt man Spin-Messungen durch, so würden wir erwarten, dass kein Elektronenstrahl A_3 verlässt, weil durch A_1 die Komponenten mit Spin $x\downarrow$ blockiert worden sind und A_3 jene mit Spin $x\uparrow$ aufhält.
Stattdessen beobachtet man aber, dass in dem Versuch eine Messung des Spins entlang einer Achse immer die vorhergehende Messung entlang einer anderen Achse sozusagen ungeschehen macht: Insbesondere sind in dem mit Spin $x\downarrow$ polarisierten Elektronenstrahl, welcher wider Erwarten A_3 verlässt, die Elektronen entlang der y-Achse zufällig orientiert (und nicht mit Spin $y\uparrow$, wie in Anbetracht von A_2 zu erwarten wäre).
Das bedeutet, dass der Spin entlang der x-Achse und der Spin entlang der y-Achse so in Verbindung stehen, dass die Messung des einen den Wert des anderen randomisiert, es sich bei beiden Spins also um inkompatible Größen handelt.[2]
Ist nun p die Wahrscheinlichkeit, dass der Strahl aus Elektronen mit x-Spin $x\uparrow$ und y-Spin $y\downarrow$ besteht, und q die Wahrscheinlichkeit, dass der Strahl sich aus Elektronen mit x-Spin $x\downarrow$ und y-Spin $y\downarrow$ zusammensetzt, dann erhalten wir mit der Vorrichtung $(p(s_1), p(s_2), p(s_3), p(s_4)) = (1, 1, 0, 0)$ und $(q(s_1), q(s_2), q(s_3), q(s_4)) = (1, 0, 0, 1)$.
Da $p, q, p' = (0, 0, 1, 1)$ und $q' = (0, 1, 1, 0)$ paarweise unvergleichbar sind, ist das von $\{p, q\}$ erzeugte GFE laut Proposition 4.29[3] isomorph zum Verband MO_2, wobei dessen 0- bzw. 1-

[1] In der Praxis werden Stern-Gerlach-Versuche üblicherweise an nicht geladenen Teilchen wie Atomen und Neutronen durchgeführt statt an geladenen Teilchen wie freien Elektronen.
[2] Durch diese inkompatiblen Größen werden insbesondere die Distributivgesetze verletzt, wie in Abschnitt 5.2, S.131, explizit ausgeführt.
[3] siehe S.86

Element als das Ereignis, gar nichts bzw. etwas Beliebiges zu beobachten, interpretiert werden kann. Daran erkennen wir, dass wir es nicht mit einem klassischen physikalischen System zu tun haben, sondern mit einem höchstwahrscheinlich quantenmechanischen.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [29][105])

5.2 Verletzung der Distributivgesetze durch Spin-Messungen

Wie in Abschnitt 5.1[4], betrachten wir noch einmal Spin-Messungen am Elektronenstrahl. Mit den Ausgängen einer Messung des Spins entlang der x-Achse wird ein System von Ereignissen (im Sinne einer Quantenlogik) $L(x) = \{0, x\downarrow, x\uparrow (= (x\downarrow)'), 1\}$ assoziiert und mit einer Messung des Spins entlang einer anderen Richtung $\overline{x} \neq x \bmod \pi$ ebenfalls, nämlich $L(\overline{x}) = \{0, \overline{x}\downarrow, \overline{x}\uparrow (= (\overline{x}\downarrow)'), 1\}$. Sowohl $L(x)$ als auch $L(\overline{x})$ sind isomorph zu MO_1 und daher klassisch.
Setzen wir diese beiden Systeme zusammen, so erhalten wir eine Struktur $L(x, \overline{x}) = \{0, x\downarrow, x\uparrow, \overline{x}\downarrow, \overline{x}\uparrow, 1\}$, die isomorph zu MO_2 ist, also insbesondere die Distributivgesetze verletzt und somit nicht mehr klassisch ist:
Angenommen, die Distributivgesetze sind erfüllt, dann haben wir

$$[x\downarrow \vee (\overline{x}\downarrow \wedge (\overline{x}\downarrow)') = (x\downarrow \vee \overline{x}\downarrow) \wedge (x\downarrow \vee (\overline{x}\downarrow)')] \Leftrightarrow [x\downarrow \vee 0 = 1 \wedge 1] \Leftrightarrow [x\downarrow = 1]\,. \tag{5.1}$$

Ebenso erhalten wir

$$[x\downarrow \wedge (\overline{x}\downarrow \vee (\overline{x}\downarrow)') = (x\downarrow \wedge \overline{x}\downarrow) \vee (x\downarrow \wedge (\overline{x}\downarrow)')] \Leftrightarrow [x\downarrow \wedge 1 = 0 \vee 0] \Leftrightarrow [x\downarrow = 0]\,, \tag{5.2}$$

was nicht sein kann.
Man kann auch eine endliche Anzahl n von unterschiedlichen Richtungen von Spin-Messungen korrespondierend mit n verschiedenen Orientierungen zu einem System zusammensetzen. Die resultierende propositionale Struktur ist MO_n, der Verband, der entsteht, wenn man die n vierelementigen Booleschen Algebren MO_1 an den jeweiligen 0- und 1-Elementen „zusammenklebt“[5] In der Praxis kann die Spin-Messung im Normalfall zu jedem Zeitpunkt aber nur jeweils entlang einer der Richtungen durchgeführt werden, da die Spins entlang unterschiedlicher Richtungen im Allgemeinen nicht kompatibel sind.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an der Arbeit [76])

[4] siehe S.129
[5] Mathematisch ausgedrückt, ist MO_n die sogenannte horizontale Summe von n zur vierelementigen Booleschen Algebra isomorphen Verbänden.

5.3 Photonen, die einen Polarisationsfilter durchqueren

Nun betrachten wir ein weiteres physikalisches System mit zwei Freiheitsgraden. Wir konzentrieren uns dabei auf die Zustände s_1, s_2 eines Photons, das entlang zweier orthogonaler Achsen x und y linear polarisiert sein kann und sich entlang einer orthogonal auf die von diesen Achsen aufgespannte Fläche E stehenden Achse z ausbreitet.
Die S-Wahrscheinlichkeit $(1, 0)$ kann als die Wahrscheinlichkeit des Übergangs des Photons durch einen entlang der x-Achse orientierten Polarisator aufgefasst werden, denn die Wahrscheinlichkeit der Transmission ist 1, wenn das Photon entlang der x-Achse polarisiert ist, also der Zustand s_1 ist, und 0, wenn das Photon entlang der y-Achse polarisiert ist, also der Zustand s_2 ist.
Analog dazu, kommt die S-Wahrscheinlichkeit $(0, 1)$ in diesem Beispiel von der Transmission durch einen entlang der y-Achse orientierten Polarisator. Wie üblich, interpretieren wir die trivialen S-Wahrscheinlichkeiten $(0, 0)$ und $(1, 1)$ so, dass wir gar nichts bzw. irgendetwas beobachten.
Orientiert man nun den Polarisator entlang einer neuen Achse x_δ, die man durch Rotation der x-Achse um den Winkel δ erhält, gilt laut dem physikalischen Malus-Gesetz, dass die Transmissionswahrscheinlichkeit durch diesen Polarisator $\cos^2(\delta) =: \alpha$ ist, wenn sich das System im Zustand s_1 befindet, und $1 - \cos^2(\delta) = 1 - \alpha$ ist, wenn der Zustand des Systems s_2 ist. Die korrespondierende S-Wahrscheinlichkeit ist also $(\alpha, 1 - \alpha)$. Analog dazu, ist $(1 - \alpha, \alpha)$ die S-Wahrscheinlichkeit des Ereignisses der Transmission des Photons durch einen entlang der y_δ-Achse, welche sich aus Rotation der y-Achse um den Winkel δ ergibt, orientierten Polarisator.
Führt man Messungen zu einem einzigen Winkel $\delta \neq \frac{(2n+1)\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$ durch, liefert dies nicht genug Information, um über die Klassik oder Nicht-Klassik des Systems zu entscheiden, weil wir dadurch laut Satz 4.35[6] immer eine vierelementige Boolesche Algebra erhalten, nämlich MO_1, entgegen der wohlbekannten Tatsache, dass man es mit einem quantenmechanischen System zu tun hat.
Wählt man stattdessen einen Winkel $\delta = \frac{(2n+1)\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$, hat man die S-Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, das heißt, die beiden S-Wahrscheinlichkeiten $(\alpha, 1 - \alpha)$ und $(1 - \alpha, \alpha)$ stimmen überein und wir erhalten ein GFE, das eine dreielementige Kette (und keine Algebra von numerischen Ereignissen, geschweige denn Boolesche Algebra) ist. Insbesondere lassen die S-Wahrscheinlichkeiten in diesem Fall keinen Rückschluss auf die Ausrichtung des Polarisators mehr zu, was im Einklang damit steht, dass wir bei S-Wahrscheinlichkeiten, die keine Algebren von numerischen Ereignissen bilden, davon ausgehen, dass sie oft nicht geeignet sind, um eine Aussage über die Klassik oder Nicht-Klassik des Systems zu treffen.
Darum müssen wir mindestens zwei Winkel $\delta_1, \delta_2 \neq \frac{(2n+1)\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$ in Bedacht nehmen, für die $\delta_1 \neq \delta_2 \bmod \pi$ und $\delta_1 \neq \delta_2 \bmod \frac{\pi}{2}$ gilt, was zu MO_m, $m \geq 2$ (oder theoretisch auch MO_∞) führt und die Nicht-Klassik des zugrunde liegenden Systems anzeigt.
Fügen wir Messungen zum Orientierungswinkel $\frac{(2n+1)\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$ hinzu, erhalten wir eine Menge von S-Wahrscheinlichkeiten, die zwar noch ein GFE, aber keine Algebra von numerischen Ereignissen mehr bildet, weil laut Proposition 4.6[7] keine solche die S-Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ enthalten kann.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [29, 9, 7])

[6]siehe S.92
[7]siehe S.71

5.4 Verletzung Bell-artiger Ungleichungen

Wie greifen noch einmal das Szenario aus Abschnitt 2.8[8] auf und betrachten wieder ein Spin-$\frac{1}{2}$-System bestehend aus zwei Teilchen, einem „linken " und einem „rechten", welche sich im Singulett-Zustand[9] befinden. Wir wählen als Messungen M_x, M_y, M_z die Spinmessungen entlang dreier Achsen x, y, z.

Sei a_1 das Ereignis, dass das linke Elektron entlang der x-Richtung Spin $+_x$ hat, a_2 das Ereignis, dass entweder das linke Elektron entlang der y-Achse Spin $+_y$ und/oder das rechte Elektron entlang der y-Achse Spin $-_y$ hat, und a_3 das Ereignis, dass das rechte Elektron entlang der z-Achse Spin $-_z$ hat.

Dann gilt für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse, da der Singulettzustand rotationsinvariant ist und Spin $\frac{1}{2}$ und Spin $-\frac{1}{2}$ entlang jeder Achse gleichwahrscheinlich sind, dass $p(a_1) = p(a_3) = \frac{1}{2}$ ist.

Da a_2 das Gegenereignis des Ereignisses, dass das linke Elektron entlang der y-Achse Spin $-_y$ und das rechte Elektron entlang der y-Achse Spin $+_y$ hat, ist, gilt, da der Spin des rechten Elektrons automatisch $+_y$ ist, wenn der des linken $-_y$ ist und vice versa, dass auch $p(a_2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ist. Bezeichnen wir mit θ_{xy}, θ_{xz} bzw. θ_{yz} den Winkel zwischen der x- und der y-Achse, der x- und der z-Achse bzw. der y- und der z-Achse, so erhalten wir für die Korrelationswahrscheinlichkeiten $p_{12} := p(a_1 \wedge a_2), p_{13} := p(a_1 \wedge a_3), p_{23} := p(a_2 \wedge a_3)$ mit zu der in Abschnitt 2.8[10] analoger Berechnung

$$p_{12} = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\pi + \theta_{xy}}{2}) = \frac{1}{2}\cos^2(\frac{\theta_{xy}}{2}), \qquad p_{13} = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\pi + \theta_{xz}}{2}) = \frac{1}{2}\cos^2(\frac{\theta_{xz}}{2}),$$
$$p_{23} = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\pi + \theta_{yz}}{2}) = \frac{1}{2}\cos^2(\frac{\theta_{yz}}{2}).$$

Wählt man nun die x-Achse, die y-Achse und die z-Achse koplanar so, dass der Winkel zwischen zwei Achsen jeweils $\frac{6n-2}{3}\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ beträgt, liefert das die Korrelationswahrscheinlichkeiten $p_{12} = p_{13} = p_{23} = \frac{1}{8}$.

Setzen wir die Folge von Wahrscheinlichkeiten und paarweisen Korrelationen
$K = (p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ in die letzte Ungleichung aus dem zweiten Punkt von Satz 4.62[11] ein, so erkennen wir deren Verletzung, denn es ist $0 \leq \frac{3}{2} - \frac{3}{8} = \frac{9}{8} \nleq 1$. Dies zeigt, dass K nicht klassisch repräsentierbar ist, also die Wahrscheinlichkeiten keinem klassischen System entspringen können, sondern wir es höchstwahrscheinlich mit Quantenphänomenen zu tun haben.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [71, 7, 9])

[8] siehe S.21

[9] Für den Begriff des Singulett-Zustands sei auf die Ausführungen auf S.22 verwiesen.

[10] siehe S.21

[11] siehe S.109

6 Fazit und Ausblick

Wir haben einen Einblick gewonnen, wie ausgehend von der Idee einer Quantenlogik, wie sie von Neumann eingeführt hat, und Mackeys Vorstellungen einer Axiomatisierung in den letzten Jahrzehnten Klassen von orthomodularen posets in den Fokus des Interesses gerückt sind, die relationale Strukturen von numerischen Ereignissen repräsentieren, welche in den vergangenen Jahren intensiv untersucht worden sind.
Unter den dabei gewonnenen Erkenntnissen haben wir jene betrachtet, die mittels einer Menge von in verschiedenen Zuständen S eines physikalischen Systems gemessenen Wahrscheinlichkeiten, sogenannten S-Wahrscheinlichkeiten, die Entscheidung ermöglichen, ob das zugrundeliegende System klassisch oder nicht-klassisch, also höchstwahrscheinlich quantenmechanisch, ist. Diese Unterscheidung ist zuletzt in Verbindung mit dem Design von Computerchips sehr wichtig geworden, aber ist natürlich von allgemeinem Interesse in der Quantenmechanik.
Insbesondere haben wir gesehen, dass nur durch wenige Axiome definierte Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten als orthomodulare posets mit vollen Mengen von Zuständen bzw. als der Wertebereich von vollständigen Wahrscheinlichkeitsmaßen auf orthomodularen posets aufgefasst werden können. Wesentlich ist in diesem Zusammenhang die Tatsache, dass eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten, die eine Boolesche Algebra bildet, mit einem klassischen Ereignissystem korrespondiert. Dadurch angeregt, haben wir Bedingungen kennengelernt, wann eine Algebra von S-Wahrscheinlichkeiten eine Boolesche Algebra ist oder zumindest in eine solche eingebettet werden kann. Dabei haben wir auch die Möglichkeit der Gewinnung zusätzlicher Wahrscheinlichkeiten durch weitere Messungen berücksichtigt.
Um sicherzustellen, dass eine Menge von S-Wahrscheinlichkeiten dazu geeignet ist, das ihnen zugrundeliegende physikalische System zu charakterisieren, haben wir untersucht, unter welchen Umständen es möglich ist, Mengen von empirisch gefundenen S-Wahrscheinlichkeiten als Elemente einer Algebra von numerischen Ereignissen bzw. einer noch allgemeineren relationalen Struktur, nämlich eines sogenannten GFEs, aufzufassen.
Neben der Klassifizierung des Systems vermittels der Struktur von S-Wahrscheinlichkeiten haben wir auch eine mithilfe von Bell-artigen Ungleichungen betrachtet und für beliebige Mengen von S-Wahrscheinlichkeiten Bedingungen an die Korrelationswahrscheinlichkeiten angegeben, die ihre Boolesche Einbettbarkeit charakterisieren. Zudem haben wir eine Methode diskutiert, mit der man ausgehend von elementaren Bell-Wertungen Bell-artige Ungleichungen für S-Wahrscheinlichkeiten erzeugen kann.

Unsere Ergebnisse beziehen sich weitestgehend auf beliebig große oder kleine Mengen von Zuständen. Interessant wäre noch eine weiterführende Untersuchung der Strukturen für verschiedene feste Kardinalitäten von S.
Zudem haben wir uns aufgrund der Annahme von nur endlich vielen verfügbaren Messungen überwiegend auf endliche Algebren von S-Wahrscheinlichkeiten bzw. orthomodulare posets konzentriert. Verallgemeinerungen und weitere Resultate für σ-Algebren von numerischen Ereignissen und σ-orthovollständige orthomodulare posets könnten vom theoretischen Standpunkt aus ebenfalls spannend sein. Für die meisten der kennengelernten Resultate dürfte eine solche Abstraktion in naheliegender Weise möglich sein.

Da ein quantenmechanisches System betreffende Observablen sich meist in Klassen von paarweise kompatiblen unterteilen lassen, sodass jede derartige Klasse mit einer eigenen Booleschen Algebra assoziiert ist und die Gesamtheit der Observablen mit einer direkten Summe oder ähnlichen Summenstruktur von davon, könnte man auch Charakterisierungen, wann gegebene S-Wahrscheinlichkeiten in direkte Summen oder andere Zusammensetzungen von Booleschen Algebren eingebettet werden können und welche genaue Struktur jene haben, erwägen.[1] Beispielsweise bilden die Aussagen betreffend Position oder Momentum zwei Boolesche Teilalgebren der zum physikalischen System eines Elektrons gehörigen Logik, sind aber im Allgemeinen nicht in einer gemeinsamen Booleschen Algebra enthalten.
Durch experimentelle sequentielle Messungen motiviert, wäre darüber hinaus eine Begutachtung möglicher Verallgemeinerungen der aus der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie bekannten bedingten Wahrscheinlichkeiten für Quantenlogiken interessant.

Daran merken wir, dass trotz der in den letzten Jahren gewonnenen umfangreichen Erkenntnisse im Bereich der Quantenlogik und der Charakterisierung von Quantenlogiken durch numerische Ereignisse weite Teile nach wie vor unerforscht sind. Die aktuellen Felder des Quantencomputing und der Quanteninformationstheorie, welche praktische Anwendungsmöglichkeiten für gewonnene Resultate bieten, motivieren dazu, den noch offenen Fragen und Problemstellungen weiter nachzugehen und machen die Logik der Quantenmechanik zu einem nicht nur aus theoretischer Sicht hochinteressanten Forschungsgebiet der gegenwärtigen Mathematik und Physik.

(vorangegangene Ausführungen orientieren sich an den Arbeiten [29, 32, 80, 24, 20])

[1] Für allgemeine Ausführungen betreffend zusammengesetzte Systeme sei beispielsweise auf [4] verwiesen.

Abbildungsverzeichnis

3.1 Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.2 28
3.2 Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.3 28
3.3 Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.4 29
3.4 Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.5 30
3.5 Hasse-Diagramm zu Definition 3.13 30
3.6 Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.7 31
3.7 Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.9 34
3.8 Hasse-Diagramm zu Beispiel 3.10 34
3.9 Hasse-Diagramme zu Beispiel 3.10 35
3.10 Hasse-Diagramm zu Satz 3.18 41

4.1 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.2 55
4.2 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.4 59
4.3 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.5 60
4.4 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.6 61
4.5 Hasse-Diagramm zu Beispielen 4.7, 4.37 und 4.54 62
4.6 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.8 63
4.7 Hasse-Diagramm zu Beispielen 4.9, 4.10,4.16, 4.53, 4.56 und 4.71 63
4.8 Hasse-Diagramm zu Beispielen 4.17, 4.52, 4.55, 4.57 4.62 und 4.69 70
4.9 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.19 72
4.10 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.23 78
4.11 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.24 79
4.12 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.25 80
4.13 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.27 85
4.14 Hasse-Diagramm zu Beispielen 4.27 und 4.36 86
4.15 Hasse-Diagramm zum Beweis von Proposition 4.31 87
4.16 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.31 89
4.17 Hasse-Diagramm zu Beispielen 4.32 und 4.47 89
4.18 Hasse-Diagramm zu Beispielen 4.33 und 4.55 90
4.19 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.34 91
4.20 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.35 91
4.21 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.38 93
4.22 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.39 94
4.23 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.47 98
4.24 Hasse-Diagramm zu Beispiel 4.69 125
4.25 Hasse-Diagramm zu Bemerkung 4.35 128
4.26 Hasse-Diagramm zu Bemerkung 4.35 128
4.27 Hasse-Diagramm zu Bemerkung 4.35 und Beispiel 4.58 128
4.28 Hasse-Diagramm zu Bemerkung 4.35 128

Primärquellen

[1] D. Aerts. *Operational Quantum Mechanics, Quantum Axiomatics and Quantum Structures*. 2008. URL: https://www.researchgate.net/publication/23419263_Operational_Quantum_Mechanics_Quantum_Axiomatics_and_Quantum_Structures (besucht am 13. 08. 2021).

[2] A. Becker. *What is Real?* The Unfinished Quest for the Meaning of Quantum Physics. John Murray, 2018. bezogen über audible.

[3] J. S. Bell. “On the Einstein Podolsky Rosen Paradox”. In: *Physics* 1.3 (1964), S. 195–200.

[4] E. G. Beltrametti und G. Cassinelli. *The Logic of Quantum Mechanics*. Bd. 15. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1981.

[5] E. G. Beltrametti, D. Dorninger und M. J. Mączyński. “On a chryptographical characterization of classical and nonclassical event systems”. In: *Rep. Math. Phys.* 60 (2007), S. 117–123.

[6] E. G. Beltrametti und M. J. Mączyński. “On Bell-type inequalities”. In: *Foundations of Physics* 24 (1994), S. 1153–1159.

[7] E. G. Beltrametti und M. J. Mączyński. “On a characterization of classical and nonclassical probabilities”. In: *J. Math. Phys.* 32 (1991), S. 1280–1286.

[8] E. G. Beltrametti und M. J. Mączyński. “On the characterization of probabilities: A generalization of Bell’s inequalities”. In: *J. Math. Phys.* 34 (1993), S. 4919–4929.

[9] E. G. Beltrametti und M. J. Mączyński. “Problem of Classical and Nonclassical Probabilities”. In: *International Journal of Theoretical Physics* 31.10 (1992).

[10] L. Beran. *Orthomodular Lattices*. Mathematics and Its Applications. East European series. Prag: D. Reidel Publishing Company, 1985.

[11] G. Birkhoff. *Lattice Theory*. 3. Aufl. Bd. 25. Colloquium Publications. American Mathematical Society, 1967.

[12] G. Birkhoff und J. Von Neumann. “The Logic of Quantum Mechanics”. In: *The Annals of Mathematics*. 2. Ser. 37 (1936), S. 823–843.

[13] S. Bonzio und I. Chajda. “A Note On Orthomodular Lattices”. In: *Intern. J. Theor. Phys.* 56 (2017), S. 3740–3743. URL: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s10773-016-3258-6.pdf.

[14] George Boole. “On the Theory of Probabilities”. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society* 152 (1862), S. 225–252. URL: https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1862.0015.

[15] M. L. Dalla Chiara, R. Giuntini und M. Rédei. *The Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic*. Bd. 8. Handbook of The History Of Logic. Elsevier B.V., 2007. Kap. 4.

[16] J. F. Clauser u. a. “Proposed Experiment to test Local Hidden-Variable Theories”. In: *Phys. Rev. Lett.* 23.15 (1969).

[17] P. Clavier u. a. “From Orthocomplementations to Locality”. In: *SIGMA* 17 (2021). URL: https://arxiv.org/pdf/2007.03003.pdf.

[18] B. Coecke, D. Moore und A. Wilce. *Operational Quantum Logic: An Overview*. 2001. URL: http://arxiv.org/abs/quant-ph/0008019v2.

[19] G. Dorfer, D. Dorninger und H. Länger. “On algebras of multidimensional probabilities”. In: *Math. Slovaca* 60 (2010), S. 571–582.

[20] G. Dorfer, D. Dorninger und H. Länger. “On the structure of numerical event spaces”. In: *Kybernetica* 46 (2010), S. 971–981.

[21] D. Dorninger. “On the structure of generalized fields of events”. In: *Contr. General Algebra* 20 (2012), S. 29–34.

[22] D. Dorninger und H. Länger. “A note on Boolean subsets of orthomodular posets”. In: *Italian Journal Of Pure And Applied Mathematics* 32 (2014), S. 277–282.

[23] D. Dorninger und H. Länger. *On Boolean posets of numerical events*. 2021. URL: http://arxiv.org/abs/2002.01058v1.

[24] D. Dorninger und H. Länger. “On a characterization of physical systems by spaces of numerical events”. In: *ARGESIM Report* 35 (2009), S. 601–607.

[25] D. Dorninger und H. Länger. “On bounded posets arising from quantum mechanical measurements”. In: *Intern. J. Theor. Phys.* 55 (2016), S. 4453–4461.

[26] D. Dorninger und H. Länger. *On ring-like structures of lattice-ordered numerical events*. 2021. URL: http://arxiv.org/abs/2008.04961v1.

[27] D. Dorninger und H. Länger. “Probability measurements characterizing the classicality of a physical system”. In: *Rep. Math. Phys.* 73 (2014), S. 127–135.

[28] D. Dorninger und H. Länger. “Quantum logics defined by sets of numerical events”. In: *Rep. Math. Phys.* 83 (2019), S. 243–251.

[29] D. Dorninger und H. Länger. “Quantum measurements generating structures of numerical events”. In: *JAMP* 6 (2018), S. 982–996.

[30] D. Dorninger und H. Länger. “Structural properties of algebras of S-probabilities”. In: *Math. Slovaca* 68 (2018), S. 485–490.

[31] D. Dorninger und H. Länger. “Testing for classicality of a physical system”. In: *Intern. J. Theor. Phys.* 52 (2013), S. 1141–1147.

[32] D. Dorninger, H. Länger und M. J. Mączyński. “Boolean Properties and Bell-like inequalities of numerical events”. In: *Rep. Math. Phys.* 85 (2020), S. 147–162.

[33] A. Dvurečenskij und S. Pulmannová. *New Trends in Quantum Structures*. Bd. 516. Mathematics and Its Applications. Dordrecht: Springer, 2000.

[34] T. Filk. “Grundlagen und Probleme der Quantenmechanik, Vorlesung gehalten in Freiburg”. URL: http://www.mathphys.uni-freiburg.de/physik/filk/public_html/Skripte/Texte/Quanten.pdf (besucht am 20. 08. 2021).

[35] P. D. Finch. “On Orthomodular Posets”. In: *Bull Aust Math Soc* 11 (1970), S. 57–62. URL: https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/S1446788700005978.

[36] P. D. Finch. “On the structure of quantum logic”. In: *The Journal Of Symbolic Logic* 34.2 (1969).

[37] D. J. Foulis und M. K. Bennett. “Effect Algebras and Unsharp Quantum Logics”. In: *Foundations of Physics* 24.10 (1994).

[38] R. Frankiewicz und P. Zbierski. *Hausdorff Gaps and Limits*. Bd. 132. Studies In Logic And The Foundations Of Mathematics. Niederlande: Elsevier Science B.V., 1994.

[39] R. M. Godowski. “Commutativity in orthomodular posets”. In: *Rep. Math. Phys.* 18 (1980), S. 347–351.

[40] R. J. Greechie. “A Particular non-Atomistic Orthomodular Poset”. In: *Commun. math. Phys.* 14 (1969), S. 326–328. URL: `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF01645388.pdf`.

[41] R. J. Greechie. “Orthomodular Lattices Admitting No States”. In: *Journal Of Combinatorial Theory* 10.2 (1971).

[42] R. J. Greechie. “Orthomodular Lattices”. Dissertation. University Of Florida, 1966. URL: `https://ufdc.ufl.edu/UF00097858/00001/` (besucht am 08. 07. 2021).

[43] S. P. Gudder. *Stochastic Methods in Quantum Mechanics*. North Holland series in probability and applied mathematics. Elsevier Science Ltd., 1979.

[44] B. C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Science + Business Media, 2013.

[45] K. Hannabuss. *An Introduction to Quantum Theory*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Nachdruck von 2004. New York: Oxford University Press, 1997.

[46] J. Harding u. a. *Boolean subalgebras of orthoalgebras*. Apr. 2018. URL: `https://arxiv.org/pdf/1711.03748.pdf` (besucht am 17. 09. 2021).

[47] D. Hilbert, J. von Neumann und L. Nordheim. “Über die Grundlagen der Quantenmechanik”. In: *Mathematische Annalen* 98 (März 1928), S. 1–30.

[48] R. I. G. Hughes. “Quantum Logic”. In: *Scientific American* 245.4 (1981), S. 202–213. URL: `https://www.jstor.org/stable/10.2307/24964585`.

[49] K. Husimi. “Studies on the Foundation of Quantum Mechanics”. In: *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan* 29 (1937), S. 766–789.

[50] J. Ismael. *Quantum Mechanics*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2020. URL: `https://plato.stanford.edu/entries/qm/` (besucht am 12. 03. 2021).

[51] J.J.Sakurai und J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. 2. Aufl. Addison-Wesley, 2011.

[52] J. M. Jauch. *Foundations Of Quantum Mechanis*. Addison-Wesley, 1968.

[53] G. Kalmbach. *Orthomodular Lattices*. L. M. S. Monographs. London: Academic Press, 1983.

[54] J. Klukowski. “On Boolean Orthomodular Posets”. In: *Demonstratio Math.* 8.1 (1975).

[55] J. Klukowski. “On the representation of Boolean orthomodular partially ordered sets”. In: *Demonstratio Math.* 8.4 (1975), S. 405–423.

[56] H. Länger und M. J. Mączyński. “On a characterization of probability measures on Boolean algebras and some orthomodular lattices”. In: *Math. Slovaca* 45.5 (1995), S. 455–468.

[57] G. W. Mackey. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Mineola, NY: Dover Publ., 2004.

[58] George W. Mackey. "Quantum Mechanics and Hilbert Space". In: *The American Mathematical Monthly* 64.8 (1957), S. 45–57. URL: https://www.jstor.org/stable/2308516.

[59] F. Maeda und S. Maeda. *Theory of symmetric lattices*. Bd. 173. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Springer-Verlag, 1970.

[60] M. J. Mączyński. "Boolean Properties Of Observables In Axiomatic Quantum Mechanics". In: *Rep. Math. Phys.* 2.2 (1971).

[61] M. J. Mączyński. "Hilbert Space Formalism Of Quantum Mechanics Without The Hilbert Space Axiom". In: *Rep. Math. Phys.* 3.3 (1971).

[62] M. J. Mączyński. "On some numerical characterization of Boolean algebras". In: *Colloquium Mathematicum* 27 (1973), S. 207–210.

[63] M. J. Mączyński und T. Traczyk. "A characterization of orthomodular partially ordered sets admitting a full set of states". In: *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 21 (1973), S. 3–8.

[64] P. Milne. "The Foundations of Probability and Quantum Mechanics". In: *Journal of Philosophical Logic* 22.2 (1993), S. 129–168.

[65] V. Moretti. *Fundamental Mathematical Structures of Quantum Theory*. Spectral Theory, Foundational Issues, Symmetries, Algebraic Formulation. Bd. 2. Springer, 2019.

[66] V. Moretti. *Spectral Theory and Quantum Mechanics*. Mathematical Foundations of Quantum Theories, Symmetries and Introduction to the Algebraic Formulation. 2. Aufl. Springer, 2017.

[67] W. Myrvold, M. Genovese und A. Shimony. *Bell's Theorem*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2019. URL: https://plato.stanford.edu/entries/bell-theorem/ (besucht am 12. 03. 2021).

[68] M. Navara und P. Pták. "Almost Boolean orthomodular posets". In: *J. Pure Appl. Algebra* 60 (1989), S. 105–111.

[69] J. Von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. 2. Aufl. Berlin: Springer, 1996.

[70] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 5/1*. Quantenmechanik-Grundlagen. 8. Aufl. Graduate Texts in Mathematics. Springer Spektrum, 2013.

[71] I. Pitowsky. *Quantum Probability - Quantum Logic*. Bd. 321. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 1989.

[72] P. Pták. "Concrete quantum logics". In: *Intern. J. Theor. Phys.* 39 (2000), S. 827–837.

[73] P. Pták. "Some Nearly Boolean Orthomodular Posets". In: *Proceedings Of The American Mathematical Society* 126.7 (Juli 1998), S. 2039–2046.

[74] C. de Ronde, G. Domenech und H. Freytes. *Quantum Logic in Historical and Philosophical Perspective*. Internet Encyclopedia of Philosophy. 2005. URL: https://iep.utm.edu/qu-logic/ (besucht am 27. 04. 2021).

[75] R. Sikorski. *Boolean algebras*. 2. Aufl. Bd. 25. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 1964.

[76] K. Svozil. *Quantum logic. A brief outline*. 2005. URL: http://arxiv.org/abs/quant-ph/9902042v2.

[77] K. Svozil. *Quantum logic*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Sciences. Singapur: Springer, 1998.

[78] J. Tkadlec. “A Note On Distributivity In Orthoposets”. In: *Demonstratio Math.* 24 (1991), S. 343–346. URL: `https://math.fel.cvut.cz/en/people/tkadlec/papers/anodio.pdf`.

[79] J. Tkadlec. “Properties of Boolean Orthoposets”. In: *Intern. J. Theor. Phys.* 32.10 (1993).

[80] V. S. Varadarajan. *Geometry of Quantum Theory*. 2. Aufl. New York: Springer, 2007.

[81] G. Weihs. “Ein Experiment zum Test der Bellschen Ungleichung unter Einsteinscher Lokalität”. Dissertation. Universität Wien.

[82] E.P. Wigner. “On Hidden Variables and Quantum Mechanical Probabilities”. In: *American Journal of Physics* 38 (1970).

[83] A. Wilce. *Quantum Logic and Probability Theory*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2017. URL: `https://plato.stanford.edu/entries/qt-quantlog/` (besucht am 11. 03. 2021).

[84] A. Wilce. *Supplement to Quantum Logic and Probability Theory*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2017. URL: `https://plato.stanford.edu/entries/qt-quantlog/supplement.html` (besucht am 12. 03. 2021).

Sekundärquellen

[85] *All finite boolean algebras have an even number of elements?* URL: https://math.stackexchange.com/questions/70662/all-finite-boolean-algebras-have-an-even-number-of-elements (besucht am 29. 10. 2021).

[86] *Boolean subalgebra.* URL: https://planetmath.org/booleansubalgebra (besucht am 30. 10. 2021).

[87] G. Cassinelli und P. J. Lahti. "Conditional Probability in the Quantum Theory of Measurement". In: *Il Nuovo Cimento* 108 B.1 (1993). URL: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF02874338.pdf.

[88] I. Chajda, H. Länger und J. Paskea. *Uniquely Complemented Posets.* 2018. URL: https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11083-017-9440-5 (besucht am 13. 07. 2021).

[89] *Complemented lattice.* URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Complemented_lattice (besucht am 30. 10. 2021).

[90] Michael Drieschner. "The Structure Of Quantum Mechanics: Suggestions For A Unified Physics". In: *Lecture Notes in Physics* 29 (1974), S. 250–259.

[91] O. van Gaans. *Probability measures on metric spaces.* URL: https://www.math.leidenuniv.nl/~vangaans/jancol1.pdf (besucht am 17. 09. 2021).

[92] M. Goldstern und R. Winkler. "Algebra Unterlagen zu Vorlesungen von Martin Goldstern und Reinhard Winkler gehalten an der TU Wien". 2019.

[93] Patrick Heelan. "Quantum and Classical Logic: Their Respective Roles". In: *Synthese* 21.1 (März 1970), S. 2–33.

[94] H. Länger I. Chajda. *When does a generalized Boolean quasiring become a Boolean ring?* 2018. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s00500-017-2983-y (besucht am 04. 05. 2021).

[95] M. Koutny, L. M. Kristensen und W. Penczek. *Transactions on Petri Nets and Other Models of Concurrency XIII.* Bd. 11090. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 1973.

[96] K. Landsman. *Foundations of Quantum Theory.* From Classical Concepts to Operator Algebras. Bd. 188. Fundamental Theories of Physics. Springer Open, 2017.

[97] G. Lawler. *Notes On Probability.* 2016. URL: https://www.math.uchicago.edu/~lawler/probnotes.pdf (besucht am 17. 09. 2021).

[98] *Lindenbaum-Algebra.* URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Lindenbaum-Algebra (besucht am 16. 09. 2021).

[99] *Measurable function.* URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Measurable_function (besucht am 17. 09. 2021).

[100] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 5/2.* Quantenmechanik - Methoden und Anwendungen. 8. Aufl. Springer Spektrum, 2015.

[101] C. Piron. “Axiomatique Quantique”. In: *Helvetica Physica Acta* 37 (1964), S. 439–468.

[102] *Power set*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Power_set#Properties (besucht am 29. 10. 2021).

[103] *Probability space*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_space#Random_variables (besucht am 16. 09. 2021).

[104] C. H. Randall und D. J. Foulis. “Properties and Operational Propositions in Quantum Mechanics”. In: *Foundations of Physics* 13.8 (1983).

[105] *Stern-Gerlach-Versuch*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach-Versuch (besucht am 05. 09. 2021).

[106] *Wahrscheinlichkeitsmaß*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Wahrscheinlichkeitsma%C3%9F (besucht am 16. 09. 2021).

[107] A. Wilce, Logic und Reasoning Institute at James Madison University. *A Gentle Introduction to Quantum Logic*. Video. 2014. URL: https://www.youtube.com/watch?v=63EB0eRY0-c&t=1773s (besucht am 29. 04. 2021).