DIPLOMARBEIT

Gebrochene Potenzen nicht-negativer linearer Relationen

ausgeführt am Institut für

Analysis and Scientific Computing

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ. Prof.Dipl.-Ing. Dr.techn.
Michael Kaltenbäck

durch

Manuel Erler

Wien, 19. Oktober 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Schon Leibniz bekundete 1695 in einem Brief an de L'Hospital seine Neugier an der Erweiterung des Ableitungsgrades auf nicht ganzzahlige Exponenten.
Zeitgemäßer interessieren wir uns für Potenzen linearer Relationen auf Banachräumen, widmen uns also der Zuweisung von linearen Relationen A^α zu linearen Relationen A und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

- $A^1 = A$,
- $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$,
- $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$,
- $\sigma(A^\alpha) = \sigma(A)^\alpha$,

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Im Jahr 1960 definierte Balakrishnan sogenannte nicht-negative Operatoren und schilderte einen Weg, jene mit α aus der rechten Halbebene zu potenzieren.
1972 präsentierte Hirsch [5] einen Funktionalkalkül für nicht-negative Operatoren und Funktionen aus $\mathcal{T}_+$, welcher das Bilden von Potenzen mit Exponenten $\alpha \in (0,1)$ ermöglichte. Diese Situation verallgemeinert Alaarabiou [1] auf den Fall linearer Relationen.
McIntosh konstruierte 1986 einen Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren, um damit gebrochenen Potenzen einheitlich für beliebige komplexe Exponenten zu definieren; siehe [11].
In [3] wird zur Definition gebrochener Potenzen der Funktionalkalkül von Hirsch ausgebaut. Dieser Zugang ermöglicht das Potenzieren linearer Relationen [4] und behält auch auf lokalkonvexen Räumen seine Gültigkeit, da er auf den Begriff der Sektoriellität verzichtet.

In dieser Arbeit wird zur Definition gebrochener Potenzen ein Funktionalkalkül für Stieltjes-Funktionen und nicht-negative lineare Relationen entwickelt. Dabei wird im wesentlichen [3] und [2] verwendet, um die Zwischenräume in [4] zu füllen.

2 Lineare Relationen

Im Zuge der Konstruktion des Funktionalkalküls würde man gerne „$\frac{A}{I+tA}$“ für lineare Relationen A integrieren. Dieses Kapitel formalisiert dieses Vorhaben.

2.1 Grundlagen und Relationenkalkül

Wir wollen zunächst einige Grundbegriffe über lineare Relationen anführen, wozu wir X, Y, Z als Vektorräume über $\mathbb{C}$ annehmen.

Definition 2.1.1 Unter einer linearen Relation zwischen X und Y versteht man einen linearen Unterraum A von $X \times Y$, wofür wir auch $A \leq X \times Y$ schreiben.

Definition 2.1.2 Für eine lineare Relation A zwischen X und Y und $M \subseteq X$ sind folgende Teilmengen definiert.

- $\mathrm{dom}(A) = \{u \in X \mid \exists v \in Y : (u, v) \in A\}$,
- $\mathrm{ran}(A) = \{v \in Y \mid \exists u \in X : (u, v) \in A\}$,
- $\ker(A) = \{u \in X \mid (u, 0) \in A\}$,
- $\mathrm{mul}(A) = \{v \in Y \mid (0, v) \in A\}$.
- $AM = \{w \in Y \mid \exists u \in M : (u, w) \in A\}$

Lemma 2.1.3 Für eine lineare Relation A und $(u, v) \in A$ gilt

$$A\{u\} = v + \mathrm{mul}(A).$$

Beweis: Für $w \in A\{u\}$ gilt $(0, w - v) = (u, w) - (u, v) \in A$, also $w - v \in \mathrm{mul}(A)$. Daraus folgt $A\{u\} \subseteq v + \mathrm{mul}(A)$.
Umgekehrt sei $w \in \mathrm{mul}(A)$. Aus $(u, v + w) = (u, v) + (0, w) \in A$ folgt $v + w \in A\{u\}$, womit auch $v + \mathrm{mul}(A) \subseteq A\{u\}$. □

Bemerkung 2.1.4 Eine lineare Relation B ist aufgrund von Lemma 2.1.3 genau dann der Graph eines linearen Operators mit Definitionsbereich $\mathrm{dom}(B)$, wenn $\mathrm{mul}(B) = \{0\}$. Dieser wird ebenfalls mit B bezeichnet. In dem Fall gilt für $(u, v) \in B$ offenbar $B\{u\} = \{v\} = \{Bu\}$, was klassisch in der Form $v = Bu$ geschrieben wird.

Definition 2.1.5 Für lineare Relationen $A, B \leq X \times Y$, $C \leq Y \times Z$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir die linearen Relationen

- $A + B := \{(u, v + w) \in X \times Y \mid (u, v) \in A, (u, w) \in B\}$,
- $zA := \{(u, zv) \in X \times Y \mid (u, v) \in A\}$,
- $CA := \{(u, w) \in X \times Z \mid \exists v \text{ mit } (v, w) \in C, (u, v) \in A\}$,
- $A^{-1} := \{(u, v) \in Y \times X \mid (v, u) \in A\}$.

Fakta 2.1.6 Unmittelbar aus der Definition erhalten wir $(A^{-1})^{-1} = A$, $A + B = B + A$, $(A+B)+C = A+(B+C)$ und $z(A+B) = zA+zB$, für lineare Relationen $A, B, C \leq X \times Y$ und $z \in \mathbb{C}$.

Lemma 2.1.7 Für einen weiteren Vektorraum W, lineare Relation $A, B \leq X \times Y$, $C \leq Y \times Z$, $D \leq W \times X$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

1. $(A + B)D \subseteq AD + BD$, wobei Gleichheit zutrifft, falls $\mathrm{mul}(D) \subseteq \ker(B)$.
2. $C(A + B) \supseteq CA + CB$,
3. $z(CA) = (zC)A = C(zA)$,
4. $(CA)^{-1} = A^{-1}C^{-1}$,
5. $(CA)D = C(AD)$.

Beweis:

1. Für $(u, v) \in (A+B)D$ gibt es $w \in X$ und $v_1, v_2 \in Y$ mit $(u, w) \in D$, $v = v_1+v_2$, $(w, v_1) \in A$ und $(w, v_2) \in B$, womit $(u, v_1) \in AD, (u, v_2) \in BD$ und schließlich $(u, v) = (u, v_1 + v_2) \in AD + BD$.

   Im Fall $\mathrm{mul}(D) \subseteq \ker(B)$ gibt es zu $(u, v) \in AD + BD$ $w_1, w_2 \in D\{u\}$ und $v_1, v_2 \in Y$ mit $v = v_1 + v_2$, $(w_1, v_1) \in A$ und $(w_2, v_2) \in B$. Nach Lemma 2.1.3 gilt $w_1 \in D\{u\} = w_2 + \mathrm{mul}(D)$ und folglich $w_1 - w_2 \in \mathrm{mul}(D) \subseteq \ker(B)$, womit $(w_1 - w_2, 0) \in B$ und $(w_1, v_2) = (w_2, v_2) + (w_1 - w_2, 0) \in B$. Daraus erhalten wir $(w_1, v) = (w_1, v_1 + v_2) \in A + B$ und schließlich $(u, v) \in (A + B)D$.

2. Zu $(u, v) \in CA + CB$ gibt es $v_1, v_2 \in Z$ mit $v = v_1 + v_2$, $(u, v_1) \in CA$ und $(u, v_2) \in CB$. Weiters existieren $w_1, w_2 \in X$ mit $(u, w_1) \in A$, $(w_1, v_1) \in C$, $(u, w_2) \in B$ und $(w_2, v_2) \in C$. Damit gilt $(u, w_1+w_2) \in A+B$, $(w_1+w_2, v_1+v_2) \in C$ und $(u, v) = (u, v_1+v_2) \in C(A+B)$.

3. Für $(u, v) \in z(CA)$ gilt $(u, z^{-1}v) \in CA$. Also existiert ein $w \in Y$ mit $(u, w) \in A$ und $(w, z^{-1}v) \in C$. Daraus folgt $(w, v) \in zC$ und $(u, v) \in (zC)A$.

   Zu $(u, v) \in (zC)A$ existiert ein $w \in Y$ mit $(u, w) \in A$ und $(w, v) \in zC$. Daraus folgt $(w, z^{-1}v) \in C$, $(zw, v) = z(w, z^{-1}v) \in C$ und $(u, zw) \in zA$, weshalb $(u, v) \in C(zA)$.

   Aus $(u, v) \in C(zA)$ folgt $(u, w) \in zA$ und $(w, v) \in C$ für ein $w \in Y$. Also gilt $(u, z^{-1}w) \in A$

und $(z^{-1}w, z^{-1}v) = z^{-1}(w,v) \in C$, womit $(u, z^{-1}v) \in CA$ und $(u,v) \in z(CA)$.

4. $(u,v) \in (CA)^{-1}$ bedeutet $(v,u) \in CA$. Also existiert ein $w \in Y$ mit $(v,w) \in A$ und $(w,u) \in C$ beziehungsweise $(w,v) \in A^{-1}$ und $(u,w) \in C^{-1}$, wodurch $(u,v) \in A^{-1}C^{-1}$.

   Aus der eben bewiesenen Inklusion angewandt auf die linearen Relationen A^{-1}, C^{-1} und Fakta 2.1.6 folgt $(A^{-1}C^{-1})^{-1} \subseteq (C^{-1})^{-1}(A^{-1})^{-1} = CA$. Invertieren ergibt $A^{-1}C^{-1} = ((A^{-1}C^{-1})^{-1})^{-1} \subseteq (CA)^{-1}$.

5. Zu $(u,v) \in (CA)D$ existiert ein $w \in X$ mit $(u,w) \in D$ und $(w,v) \in CA$, folglich auch ein $\widetilde{w} \in Y$ mit $(w, \widetilde{w}) \in A$ und $(\widetilde{w}, v) \in C$. Damit gilt $(u, \widetilde{w}) \in BD$ und weiters $(u,v) \in C(AD)$.

   Die andere Inklusion kann entweder analog oder wie folgt eingesehen werden. Zuerst wird die bereits gezeigte Inklusion auf die linearen Relationen D^{-1}, A^{-1}, C^{-1} angewandt, um $(D^{-1}A^{-1})C^{-1} \subseteq D^{-1}(A^{-1}C^{-1})$ zu erhalten. Durch Invertieren folgt

$$\begin{aligned} C(AD) &= C(D^{-1}A^{-1})^{-1} = [(D^{-1}A^{-1})C^{-1}]^{-1} \\ &\subseteq [D^{-1}(A^{-1}C^{-1})]^{-1} = (A^{-1}C^{-1})^{-1}D = (CA)D \end{aligned}$$

   aus Fakta 2.1.6 und Punkt 4.

□

Bemerkung 2.1.8 Mit den Vorraussetzungen aus Lemma 2.1.7 gelten im Fall $A \subseteq B$ auch $AD \subseteq BD$, $CA \subseteq CB$, $A^{-1} \subseteq B^{-1}$, $zA \subseteq zB$, sowie $\operatorname{dom}(A) \subseteq \operatorname{dom}(B)$, $\operatorname{ran}(A) \subseteq \operatorname{ran}(B)$, $\ker(A) \subseteq \ker(B)$, und $\operatorname{mul}(A) \subseteq \operatorname{mul}(B)$.

Unmittelbar aus den Definitionen erhalten wir folgendes Resulat.

Lemma 2.1.9 Seien $A, B \leq X \times Y$, $C \leq Y \times Z$ lineare Relationen und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt

1. $\operatorname{dom}(A+B) = \operatorname{dom}(A) \cap \operatorname{dom}(B)$, $\operatorname{mul}(A+B) = \operatorname{mul}(A) + \operatorname{mul}(B)$,

2. $\operatorname{dom}(zA) = \operatorname{dom}(A)$, $\operatorname{ran}(zA) = \operatorname{ran}(A)$, $\ker(zA) = \ker(A)$, $\operatorname{mul}(zA) = \operatorname{mul}(A)$,

3. $\ker(CA) \supseteq \ker(A)$, $\operatorname{mul}(CA) \supseteq \operatorname{mul}(C)$,

4. $\operatorname{dom}(CA) = \{u \in X \mid \exists v \in \operatorname{dom}(C) : (u,v) \in A\} \subseteq \operatorname{dom}(A)$ und falls A ein linearer Operator ist, $\operatorname{dom}(CA) = \{u \in \operatorname{dom}(A) \mid Au \in \operatorname{dom}(C)\}$,

5. $\operatorname{dom}\big(A^{-1}\big) = \operatorname{ran}(A)$, $\operatorname{ran}\big(A^{-1}\big) = \operatorname{dom}(A)$, $\ker\big(A^{-1}\big) = \operatorname{mul}(A)$, $\operatorname{mul}\big(A^{-1}\big) = \ker(A)$.

Lemma 2.1.10 Seien $A \leq X \times Y$, $C \leq Y \times Z$ lineare Relationen.

1. Aus $\operatorname{mul}(A) \cap \operatorname{dom}(C) \subseteq \ker(C)$ folgt $\operatorname{mul}(CA) = \operatorname{mul}(C)$,

2. und im Fall $\operatorname{ran}(A) \subseteq \operatorname{dom}(C)$ gilt $\operatorname{dom}(CA) = \operatorname{dom}(A)$.

Beweis: Laut Lemma 2.1.9 3. gilt $\operatorname{mul}(CA) \supseteq \operatorname{mul}(C)$. Zu $(0,v) \in CA$ existiert $w \in Y$ mit $(w,v) \in C$ und $(0,w) \in A$, also $w \in \operatorname{mul}(A) \cap \operatorname{dom}(C) \subseteq \ker(C)$, weshalb $(0,v) = (w,v) - (w,0) \in$

C, das heißt $v \in \mathrm{mul}(C)$.

Nach Lemma 2.1.9 4. haben wir $\mathrm{dom}(CA) \subseteq \mathrm{dom}(A)$. Für $(u, w) \in A$ gilt $w \in \mathrm{ran}(A) \subseteq \mathrm{dom}(C)$, weshalb $(w, v) \in C$ und infolge $(u, v) \in CA$ für ein $v \in Z$, also $u \in \mathrm{dom}(CA)$. $\square$

Fakta 2.1.11 Seien $D \leq W \times X$, $A, B \leq X \times Y$, $C \leq Y \times Z$ mit $\mathrm{mul}(C) = \mathrm{mul}(D) = \{0\}$.

1. Für $u \in \mathrm{dom}(A)$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\lambda(A\{u\}) = (\lambda A)\{u\} = A\{\lambda u\}$.
2. Zu $u_1, u_2 \in \mathrm{dom}(A)$ gibt es $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in A$ und aus Lemma 2.1.3 erhalten wir
$$A\{u_1 + u_2\} = (v_1 + v_2) + \mathrm{mul}(A) = (v_1 + \mathrm{mul}(A)) + (v_2 + \mathrm{mul}(A)) = A\{u_1\} + A\{u_2\}.$$
3. Für $u \in \mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B)$ gilt
$$(A + B)\{u\} = \{v \mid (u, v) \in A + B\} = \{v_1 + v_2 \mid (u, v_1) \in A,\ (u, v_2) \in B\} = A\{u\} + B\{u\}.$$
4. Für $u \in \mathrm{dom}(AD)$ gilt $(AD)\{u\} = \{v \mid (u, v) \in AD\} = \{v \mid (Du, v) \in A\} = A\{Du\}$.
5. Für $u \in \mathrm{dom}(CA)$ erhalten wir
$$\begin{aligned}(CA)\{u\} &= \{v \mid (u, v) \in CA\} = \{Cw \mid (u, w) \in A,\ w \in \mathrm{dom}(C)\}\\ &= \{Cw \mid w \in A\{u\} \cap \mathrm{dom}(C)\} = C(A\{u\} \cap \mathrm{dom}(C)).\end{aligned}$$
6. Wegen $(u, v) \in A \Leftrightarrow v \in A\{u\}$ ist $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(B)$ zusammen mit $A\{u\} \subseteq B\{u\}$, $u \in \mathrm{dom}(A)$, äquivalent zu $A \subseteq B$.
7. Für $A \subseteq B$ mit $\mathrm{mul}(A) \supseteq \mathrm{mul}(B)$ und $u \in \mathrm{dom}(A)$ gibt es $v \in X$ mit $(u, v) \in A \subseteq B$, weshalb $B\{u\} = v + \mathrm{mul}(B) \subseteq v + \mathrm{mul}(A) = A\{u\}$. Zusammen mit Punkt 6 ergibt sich $A\{u\} = B\{u\}$.
8. Für $A \subseteq B$ mit $\mathrm{mul}(A) \supseteq \mathrm{mul}(B)$ und $\mathrm{dom}(A) \supseteq \mathrm{dom}(B)$ gilt $A\{u\} = B\{u\}$ für alle $u \in \mathrm{dom}(A)$, insbesondere für alle $u \in \mathrm{dom}(B)$. Aus 6. folgt $A \supseteq B$, weshalb $A = B$.
9. Falls $B \subseteq A$ und $\ker(C) \supseteq \mathrm{mul}(A)$ folgt $\mathrm{mul}(CA) = \mathrm{mul}(CB) = \{0\}$ aus Lemma 2.1.10 1. Wegen Bemerkung 2.1.8. gilt $CB \subseteq CA$, weshalb $(CA)u = (CB)u$, $u \in \mathrm{dom}(CB)$, nach Punkt 7. und Bemerkung 2.1.4.

Bemerkung 2.1.12 Seien V, W zwei weitere Vektorräume. Lineare Abbildungen $\tau : X \times Y \to V \times W$ lassen sich übersichtlich in Blockoperatorform darstellen. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned}\tau_{11} &:= \pi_V \circ \tau \circ \iota_X : X \to V, & \tau_{12} &:= \pi_V \circ \tau \circ \iota_Y : Y \to V,\\ \tau_{21} &:= \pi_W \circ \tau \circ \iota_X : X \to W, & \tau_{22} &:= \pi_W \circ \tau \circ \iota_Y : Y \to W,\end{aligned}$$

wobei $\pi_V : V \times W \to V,\ (v, w) \mapsto v$, $\pi_W : V \times W \to W,\ (v, w) \mapsto w$, $\iota_X : X \to X \times Y,\ x \mapsto (x, 0)$ und $\iota_Y : Y \to X \times Y,\ y \mapsto (0, y)$.

Werden die Elemente von $X \times Y$ und $V \times W$ als Spaltenvektoren angeschrieben, so wirkt τ wie eine Matrix-Vektor-Multiplikation:

$$\tau(x,y) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11}(x) + \tau_{12}(y) \\ \tau_{21}(x) + \tau_{22}(y) \end{pmatrix}, \ (x,y) \in X \times Y.$$

Definition 2.1.13 Eine lineare Relationen A zwischen topologischen Vektorräumen X und Y heißt abgeschlossen, wenn sie als Teilmenge von $X \times Y$ bezüglich der Produkttopologie abgeschlossen ist.

Bemerkung 2.1.14 Seien X, Y, V, W topologische Vektorräume und $X \times Y, V \times W$ jeweils mit der Produkttopologie versehen. Ein lineares $\tau : X \times Y \to V \times W$ ist bekannterweise genau dann stetig, wenn $\pi_V \circ \tau$ und $\pi_W \circ \tau$ stetig sind.
Aus $id_{X\times Y} = \iota_X \circ \pi_X + \iota_Y \circ \pi_Y$ folgt

$$\pi_V \circ \tau = \pi_V \circ \tau \circ \iota_X \circ \pi_X + \pi_V \circ \tau \circ \iota_Y \circ \pi_Y = \tau_{11} \circ \pi_X + \tau_{12} \circ \pi_Y$$

und entsprechend $\pi_W \circ \tau = \tau_{21} \circ \pi_X + \tau_{22} \circ \pi_Y$. Damit ist die Stetigkeit von τ auch äquivalent zu jener von $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}$.

Ist τ invertierbar mit einer stetigen Inversen, dann ist τ ein Homöomorphismus. Also gilt $\tau(\overline{A}) = \overline{\tau(A)}$ für $A \subseteq X \times Y$. Insbesondere ist $\tau(A)$ genau dann abgeschlossen, wenn A es ist.

Bemerkung 2.1.15 Für einen linearen Operator $B : X \to Y$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren

$$\tau_z : \begin{cases} X \times Y & \to X \times Y \\ (u,v) & \mapsto (u, zv) \end{cases},$$

$$\tau_{X \rightleftarrows Y} : \begin{cases} X \times Y & \to Y \times X \\ (u,v) & \mapsto (v,u) \end{cases} \quad \text{und} \quad \tau_B : \begin{cases} X \times Y & \to X \times Y \\ (u,v) & \mapsto (u, Bu + v) \end{cases}$$

bijektive Abbildungen mit den Inversen $\tau_{z^{-1}}, \tau_{Y \rightleftarrows X}, \tau_{-B}$.

Für eine lineare Relation $A \leq X \times Y$ gilt $\tau_z(A) = zA, \tau_{X \rightleftarrows Y}(A) = A^{-1}, \tau_B(A) = A + B$.

Für topologische Vektorräume X, Y und stetiges B sind $\tau_z, \tau_{X \rightleftarrows Y}, \tau_B$ nach Bemerkung 2.1.14 Homöomorphismen.

Lemma 2.1.16 Für eine lineare und abgeschlossene Relation A zwischen den topologischen Vekorräumen X und Y, einen stetigen linearen Operator $B : X \to Y$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind auch $A + B, zA$ und A^{-1} abgeschlossen. Für lineares und stetiges $D : X \to X$ ist AD abgeschlossen.

Beweis: Nach Bemerkung 2.1.15 und Bemerkung 2.1.14 sind $A+B, zA$ und A^{-1} abgeschlossen.

Sei $((x_k, y_k))_{k\in K}$ ein Netz in AD mit $\lim_{k\in K}(x_k, y_k) = (x, y)$. Dann gilt $(Dx_k, y_k) \in A$ für alle $k \in K$. Da A abgeschlossen und D stetig ist, liegt der Grenzwert $(Dx, y) = \lim_{k\in K}(Dx_k, y_k)$ in A, womit $(x, y) \in AD$. □

Definition 2.1.17 Für eine Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert

$$\tau_M : (u,v) \mapsto (du + cv, bu + av)$$

eine Abbildung von X^2 nach X^2 mit Blockoperatorform $\left(\begin{smallmatrix} dI & cI \\ bI & aI \end{smallmatrix}\right)$, wobei $I : X \to X$ die Identität auf X bezeichnet.

Mit A ist klarerweise auch $\tau_M(A)$ eine lineare Relation auf X.

Fakta 2.1.18 Sei $A \leq X^2$ und $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

1. Für $M, N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ überprüft man leicht, dass $\tau_{NM} = \tau_N \circ \tau_M, \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = I_X$ und folglich für invertierbare M auch $\tau_{M^{-1}} = (\tau_M)^{-1}$.
2. Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so gilt $\tau_{\lambda M}(A) = \lambda \tau_M(A) = \tau_M(A)$.
3. Für $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(A) = A^{-1}$, $\tau_{\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \lambda A$ und $\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \mu I + A$. Statt $\mu I + A$ schreibt man oft $\mu + A$. Insbesondere folgt mit dieser Schreibweise aus Punkt 1
$$\mu + \lambda A = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A), \tag{2.1}$$
$$(A - \mu)^{-1} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{smallmatrix}\right)}(A), \tag{2.2}$$
$$I + (\lambda - \mu)(A - \lambda)^{-1} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} (\lambda-\mu) & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\mu \\ 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right)}(A), \tag{2.3}$$
$$\mu + \lambda(A - \nu)^{-1} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\mu \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \mu & t-\nu\mu \\ 1 & -\nu \end{smallmatrix}\right)}(A), \tag{2.4}$$
$$(I + \lambda A)^{-1} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A), \tag{2.5}$$
$$\frac{1}{\lambda}\Big(I - (I + \lambda A)^{-1}\Big) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A). \tag{2.6}$$
4. Für einen tologischen Vektorraum X und $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist τ_M nach Bemerkung 2.1.14 stetig. Falls M invertierbar ist, ist auch $(\tau_M)^{-1} = \tau_{M^{-1}}$ stetig. Damit gilt
$$\tau_M(\overline{A}) = \overline{\tau_M(A)} \tag{2.7}$$
für $A \leq X \times X$. Insbesondere ist $\tau_M(A)$ genau dann abgeschlossen, wenn A es ist.

Lemma 2.1.19 Für $A \leq X \times X$ und Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ e & f \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gilt

$$\begin{aligned} \tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ e & f \end{smallmatrix}\right)}(A) &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ e & f \end{smallmatrix}\right)}(A) \boxplus (\ker\Big(\tau_{\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ e & f \end{smallmatrix}\right)}(A)\Big) \times \{0\}), \\ &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ e & f \end{smallmatrix}\right)}(A) \boxplus (\{0\} \times \operatorname{mul}\Big(\tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(A)\Big)), \end{aligned}$$

wobei $\boxplus$ die Summe zweier linearer Unterräume von X^2 bezeichnet.

Beweis: Für $(x,y) \in \tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ e & f \end{smallmatrix}\right)}(A)$ existert $(u,v) \in A$ mit $x = fu + ev$ und $y = bu + av$. Dann liegt $(x, du + cv)$ in $\tau_{\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ e & f \end{smallmatrix}\right)}(A)$ und $(du + cv, y)$ in $\tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(A)$, also $(x,y) \in \tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ e & f \end{smallmatrix}\right)}(A)$.

Damit folgt $\tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ e & f \end{smallmatrix}\right)}(A) \boxplus \left(\{0\} \times \operatorname{mul}\left(\tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(A)\right)\right) \subseteq \tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ e & f \end{smallmatrix}\right)}(A)$ aus Lemma 2.1.9 3.

Gilt umgekehrt $(x, y) \in \tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ e & f \end{smallmatrix}\right)}(A)$, so existiert ein $w \in X$ mit $(x, w) \in \tau_{\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ e & f \end{smallmatrix}\right)}(A)$ und $(w, y) \in \tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(A)$. Nach Definition 2.1.17 gibt es $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in A$ mit $x = fu_1 + ev_1$, $y = bu_2 + av_2$ und $w = du_1 + cv_1 = du_2 + cv_2$. Also liegt

$$(0, b(u_2 - u_1) + a(v_2 - v_1)) = (du_2 + cv_2, bu_2 + av_2) - (du_1 + cv_1, bu_1 + av_1)$$

in $\tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(A)$ und

$$\begin{aligned} (x, y) &= (fu_1 + ev_1, bu_2 + av_2) \\ &= (fu_1 + ev_1, bu_1 + av_1) + (0, b(u_2 - u_1) + a(v_2 - v_1)) \end{aligned}$$

in $\tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ e & f \end{smallmatrix}\right)}(A) \boxplus \left(\{0\} \times \operatorname{mul}\left(\tau_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}(A)\right)\right)$.

Die zweite Gleichung zeigt man genauso. □

Lemma 2.1.20 Für lineare Relationen A und B auf X mit $\operatorname{dom}(A) = X$ und $\operatorname{mul}(A) = \{0\}$ ist $A^{-1} = B$ äquivalent zu $AB \subseteq I \subseteq BA$.
Gilt zusätzlich $\operatorname{mul}(A^{-1}) = \ker(A) = \{0\}$, so folgt $I = A^{-1}A$. Gilt zusätzlich $\operatorname{dom}(A^{-1}) = \operatorname{ran}(A) = X$, so folgt $AA^{-1} = I$.

Beweis: Aus Lemma 2.1.19 erhalten wir

$$AA^{-1} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(A) \boxplus (\{0\} \times \operatorname{mul}(A)) = I|_{\operatorname{ran}(A)} \subseteq I$$

und $A^{-1}A = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = I|_{\operatorname{dom}(A)} \boxplus (\ker(A) \times \{0\}) \supseteq I$.

Jedes B mit $AB \subseteq I \subseteq BA$ muss wegen $B = IB \subseteq A^{-1}AB \subseteq A^{-1}I = A^{-1}$ und $A^{-1} = IA^{-1} \subseteq BAA^{-1} = BI = B$ mit A^{-1} übereinstimmen.

Falls A^{-1} ein linearer Operator ist, gilt $A^{-1}A = I \boxplus (\ker(A) \times \{0\}) = I$. Im Fall $\operatorname{ran}(A) = X$ folgt $AA^{-1} = I|_{\operatorname{ran}(A)} = I$. □

Von nun an sei X ein Banachraum.

Folgendes Resultat ist eine einfache Konsequenz aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (siehe [14] Satz 4.4.2) und aus der Tatsache, dass für ein beschränktes $B : M \to Y$ mit einem Teilraum M von X die Projektion $\pi_X|_B$ auf die erste Komponente bijektiv und in beide Richtungen stetig ist.

Lemma 2.1.21 Für einen Banachraum Y ist eine abgeschlossene lineare Relation $A \leq X \times Y$ genau dann ein beschränkter linearer Operator von $\operatorname{dom}(A)$ nach Y, wenn $\operatorname{mul}(A) = \{0\}$ und $\operatorname{dom}(A)$ abgeschlossen ist.

Definition 2.1.22 Die Menge der beschränkten linearen Operatoren auf X wird mit $\mathfrak{L}_b(X)$

bezeichnet. Auf $\mathfrak{L}_b(X)$ ist durch $\|A\| := \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ eine Norm definiert, welche Operatornorm genannt wird.

Definition 2.1.23 Für eine lineare Relation $A \leq X \times X$ bezeichnet $\rho(A)$ die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $(A-\lambda)^{-1} \in \mathfrak{L}_b(X)$, wobei $(A-\infty)^{-1} := A$ und $\operatorname{ran}(A-\infty) = \operatorname{dom}(A)$. Ihr Komplement bildet das Spektrum $\sigma(A) := (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \rho(A)$.

Lemma 2.1.24 Jede Relation A mit $\rho(A) \neq \emptyset$ ist abgeschlossen.

Beweis: Für $\lambda \in \rho(A)$ ist $(A-\lambda)^{-1} \in \mathfrak{L}_b(X)$ nach Lemma 2.1.21 abgeschlossen. Nach (2.7) ist mit $\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right)}(A) = (A-\lambda)^{-1}$ auch A abgeschlossen. $\square$

Bemerkung 2.1.25 Für eine invertierbare Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ definiert

$$\phi_M(z) := \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

eine Möbius Transformation. Die Abbildung ϕ_M ist bekannterweise eine Bijektion von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf sich, wobei man $\phi_M(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}$ und $\phi_M(-\frac{\delta}{\gamma}) = \infty$ setzt.
Ist $N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ebenfalls invertierbar, so gilt $\phi_M \circ \phi_N = \phi_{MN}$ und $\phi_M^{-1} = \phi_{M^{-1}}$.

Bemerkung 2.1.26 Sei $PSL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/Z(GL_2(\mathbb{C}))$ wobei $GL_2(\mathbb{C}) = GL(\mathbb{C}^2)$ die Gruppe invertierbarer linearer Abbildungen von $\mathbb{C}^2$ auf $\mathbb{C}^2$ bezeichnet und $Z(GL_2(\mathbb{C})) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) : z \in \mathbb{C}\right\}$.

Die Elemente $\left[\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right]_{Z(GL_2(\mathbb{C}))}, \left[\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right]_{Z(GL_2(\mathbb{C}))}$ und $\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right]_{Z(GL_2(\mathbb{C}))}$ erzeugen $PSL_2(\mathbb{C})$, weil

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = c\left(\begin{smallmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \frac{ad-bc}{c^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{C})$ mit $c \neq 0$, und

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = d\left(\begin{smallmatrix} 1 & \frac{a}{d} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \frac{b}{d} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{C})$, wobei wegen $0 \neq \det A = ad$ sicher $d \neq 0$.

Die Abbildungen $PSL_2(\mathbb{C}) \to GL(X^2)$, $M \mapsto \tau_M$, und $PSL_2(\mathbb{C}) \to S_{\mathbb{C}\cup\{\infty\}}$, $M \mapsto \phi_M$, bilden injektive Gruppenhomomorphismen, wobei $S_{\mathbb{C}\cup\{\infty\}}$ die Menge aller Bijektionen auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bezeichnet.

Beispiel 2.1.27 Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $w \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{c}{d}\right\}$ gilt

$$\tau_M(wI) = \{(du + cv, bu + av) \mid (u,v) \in wI\} = \{(du + cwu, bu + awu) \mid u \in X\} = \phi_M(w)I.$$

Proposition 2.1.28 Für eine invertierbare Matrix $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $A \leq X \times X$ gibt es Konstanten $s, t \in \mathbb{C}$ mit $t \neq 0$ derart, dass

$$(\tau_M(A) - \phi_M(\lambda))^{-1} = t(A-\lambda)^{-1} + sI.$$

Beweis: Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Wir nehmen zuerst $\lambda \neq -\frac{d}{c}$, oder äquivalent dazu $\phi_M(\lambda) \neq \infty$ an. Dann folgt

$$(\tau_M(A) - \phi_M(\lambda))^{-1} = \left(\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \phi_M(\lambda) \end{smallmatrix}\right)} \circ \tau_M\right)(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ a - c\phi_M(\lambda) & b - d\phi_M(\lambda) \end{smallmatrix}\right)}(A) \tag{2.8}$$

aus Fakta 2.1.18 1.

Im Fall $\lambda \neq \infty$, oder äquivalent $\phi_M(\lambda) \neq \frac{a}{c}$ gilt dabei $a - c\phi_M(\lambda) \neq 0$. Aus (2.8), Fakta 2.1.18 2. und (2.4) erhalten wir

$$\begin{aligned}(\tau_M(A) - \phi_M(\lambda))^{-1} &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \frac{c}{a - c\phi_M(\lambda)} & \frac{d}{a - c\phi_M(\lambda)} \\ \frac{a - c\phi_M(\lambda)}{a - c\phi_M(\lambda)} & \frac{b - d\phi_M(\lambda)}{a - c\phi_M(\lambda)} \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \frac{c}{a - c\phi_M(\lambda)} & \frac{d}{a - c\phi_M(\lambda)} \\ 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right)}(A) \\ &= t(A - \lambda)^{-1} + sI,\end{aligned}$$

wobei $s = \frac{c}{a - c\phi_M(\lambda)}, t = c\lambda + \frac{c}{a - c\phi_M(\lambda)} = \frac{ad - bc}{(a - c\phi_M(\lambda))^2}$. Wegen $\det M \neq 0$ gilt dabei $t \neq 0$.

Im Fall $\lambda \neq -\frac{d}{c}, \lambda = \infty$, also $\phi_M(\lambda) \neq \infty, \phi_M(\lambda) = \frac{a}{c}$ gilt $c \neq 0$. Aus (2.8), Fakta 2.1.18 2. und (2.1) folgt wegen $\det M \neq 0$

$$\begin{aligned}(\tau_M(A) - \phi_M(\lambda))^{-1} &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix} c & d \\ 0 & b - \frac{a}{c}d \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \frac{c^2}{bc - ad} & \frac{cd}{bc - ad} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) \\ &= tA + sI = t(A - \lambda)^{-1} + sI,\end{aligned}$$

wobei $s = \frac{cd}{bc - ad}, t = \frac{c^2}{bc - ad} \neq 0$.

Im Fall $\lambda = -\frac{d}{c}$, beziehungsweise $\phi_M(\lambda) = \infty$, und $c \neq 0$, folgt aus Fakta 2.1.18 2. und (2.4)

$$(\tau_M(A) - \phi_M(\lambda))^{-1} = \tau_M(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{c} & \frac{b}{c} \\ 1 & \frac{d}{c} \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} s & t - \lambda s \\ 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right)}(A) = t(A - \lambda)^{-1} + sI$$

wobei $s = \frac{a}{c}, t = \lambda\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{bc - ad}{c^2} \neq 0$.

Im Fall $\lambda = -\frac{d}{c}$, beziehungsweise $\phi_M(\lambda) = \infty$, und $c = 0$ schließen wir von $0 \neq \det M = ad - bc = ad$ auf $d \neq 0$ und $a \neq 0$. Wegen Fakta 2.1.18 2. und (2.1) gilt

$$\begin{aligned}(\tau_M(A) - \phi_M(\lambda))^{-1} &= \tau_M(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{d} & \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} t & s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) \\ &= tA + sI = t(A - \lambda)^{-1} + sI,\end{aligned}$$

wobei $s = \frac{b}{d}, t = \frac{a}{d} \neq 0$. □

Proposition 2.1.29 Ist $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine invertierbare Matrix und $A \leq X \times X$, so gilt $\sigma(\tau_M(A)) = \phi_M(\sigma(A))$ und $\rho(\tau_M(A)) = \phi_M(\rho(A))$.

Beweis: Für $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ liegt $(\tau_M(A) - \phi_M(\lambda))^{-1}$ nach Proposition 2.1.28 genau dann in $\mathfrak{L}_b(X)$, wenn $(A - \lambda)^{-1} \in \mathfrak{L}_b(X)$, also $\rho(\tau_M(A)) = \phi_M(\rho(A))$.

Da $\phi_M : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bijektiv ist und $\sigma(\tau_M(A)) = (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \rho(\tau_M(A))$ gilt, erhalten wir $\sigma(\tau_M(A)) = \phi_M(\sigma(A))$. □

2.2 Nicht-negative lineare Relationen

In diesem Abschnitt wird die Menge der linearen Relationen, für welche der Funktionalkalkül angewandt und in Folge gebrochene Potenzen definiert werden können, eingeführt.

Definition 2.2.1 Für ein Netz $(A_k)_{k\in K}$ in $\mathfrak{L}_b(X)$ meint $\lim_{k\in K} A_k$ den Grenzwert bezüglich der Operatornorm.
Ein Netz $(A_k)_{k\in K}$ linearer Operatoren konvergiert stark gegen einen linearen Operator A, falls $\lim_{k\in K}(A_k x) = Ax$ für alle $x \in \mathrm{dom}(A)$.

Bemerkung 2.2.2 Wenn ein Netz $(A_k)_{k\in K}$ in $\mathfrak{L}_b(X)$ bezüglich der Operatornorm konvergiert, dann konvergiert es auch stark gegen den selben Grenzwert.

Definition 2.2.3 Eine lineare Relation A auf X heißt nicht-negativ, wenn $\rho(A) \supseteq (-\infty, 0)$ und $\sup_{t>0}\big\|t(t+A)^{-1}\big\| =: M(A) < +\infty$. Die Menge aller nicht-negativen linearen Relationen auf X wird mit $\mathcal{M}$ bezeichnet.

Bemerkung 2.2.4 Offenbar gilt $M(A) = \sup_{t>0}\big\|(I + \frac{1}{t}A)^{-1}\big\| = \sup_{t>0}\big\|(I + tA)^{-1}\big\|$.

Bemerkung 2.2.5 Im Fall $A = \{0\} \times X$ gilt $\rho(A) = \mathbb{C}$ und $(I + tA)^{-1} = A^{-1} = X \times \{0\}$ für $t \neq 0$, womit $A \in \mathcal{M}$ und $M(A) = 0$. Sei $A \in \mathcal{M} \setminus \{\{0\} \times X\}$. Die Annahme $\mathrm{dom}(A) = \{0\}$ steht dann wegen $\mathrm{ran}(t + A) = \mathrm{dom}\big((t + A)^{-1}\big) = X$, also $t + A = \{0\} \times X$ im Widerspruch zu $A \neq \{0\}\times X$. Für $u \in \mathrm{dom}(A)\setminus\{0\}$ existiert ein $v \in X$ mit $(u, v) \in A$. Aus $(I + tA)^{-1}(u+tv) = u$ folgt

$$\Big\|u - (I + tA)^{-1}u\Big\| = t\Big\|(I + tA)^{-1}v\Big\| \leq tM(A)\|v\|$$

und daraus $\|u\| = \lim_{t\searrow 0}\big\|(I + tA)^{-1}u\big\| \leq \|u\| \sup_{t>0}\big\|(I + tA)^{-1}\big\| = \|u\|M(A)$, womit $M(A) \geq 1$.

Beispiel 2.2.6

- Für den Erzeuger $A \leq X \times X$ einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe gilt $-A \in \mathcal{M}$; siehe etwa [6] Korollar 5.3.3.
- Falls $B \subseteq X \times X$ eine akkretive Relation ist, es also zu $(u, v) \in B$ mit $\|u\| = 1$ ein $x' \in X'$ gibt, welches $\|u\| = \|x'\| = x'(u) = 1$ und $\mathrm{Re}(x') \geq 0$ erfüllt, und zusätzlich $\mathrm{ran}(B + \lambda) = X$ für zumindest ein $\lambda > 0$ gilt, so liegt $-B$ nach [6] Lemma 5.4.4 in $\mathcal{M}$.

Lemma 2.2.7 Für A aus $\mathcal{M}$ und $t > 0$ liegen auch tA, $A + t$ und A^{-1} in $\mathcal{M}$.

Beweis: Aus Proposition 2.1.29 folgt $\rho(tA) = \rho(\tau_{\left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}(A)) = t\rho(A) \supseteq t(-\infty, 0) = (-\infty, 0)$.

Wegen

$$M(tA) = \sup_{s>0} \left\| (I + stA)^{-1} \right\| = \sup_{s>0} \left\| (I + sA)^{-1} \right\| = M(A)$$

liegt tA in $\mathcal{M}$.

Aus $\rho(A + t) = \rho(\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A)) = \rho(A) + t \supseteq (-\infty, 0) + t = (-\infty, t) \supseteq (-\infty, 0)$ und

$$\begin{aligned} \left\| (I + s(A + t))^{-1} \right\| &= \left\| (I + st + sA)^{-1} \right\| = \frac{1}{1 + st} \left\| (I + \frac{s}{1 + st} A)^{-1} \right\| \leq \frac{M(A)}{1 + st} \\ &\leq M(A) \end{aligned}$$

für $s > 0$ folgt $A + t \in \mathcal{M}$.

Schließlich gilt $\rho(A^{-1}) = \rho(\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(A)) = \rho(A)^{-1} \supseteq (-\infty, 0)^{-1} = (-\infty, 0)$. Für $s > 0$ erhalten wir gemäß Fakta 2.1.18

$$\begin{aligned} \left(I + sA^{-1}\right)^{-1} &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} s & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & s \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s} & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) \\ &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{s} & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = I - \left(I + \frac{1}{s} A\right)^{-1} \end{aligned}$$

und damit

$$\left\| \left(I + sA^{-1}\right)^{-1} \right\| \leq 1 + \left\| \left(I + \frac{1}{s} A\right)^{-1} \right\| = 1 + M(A),$$

weshalb $A^{-1} \in \mathcal{M}$. $\square$

Zusätzlich zur Resolvente definieren wir noch die Yosida-Approximation, welche im Beweis vom Satz von Hille-Yoshida [6] Satz 5.3.2 eine zentrale Rolle spielt.

Definition 2.2.8 Für eine lineare Relation A und $t > 0$ definieren wir (siehe (2.5),(2.6))

$$\begin{aligned} J_t^A &:= \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = (I + tA)^{-1}, \ J_0^A := I, \\ A_t &:= \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \frac{1}{t}\left(I - (I + tA)^{-1}\right), \ A_0 := A. \end{aligned}$$

Lemma 2.2.9 Für $A \in \mathcal{M}$ und $t > 0$ sind die linearen Operatoren $(t + A)^{-1}, J_t^A, A_t$ beschränkt und genügen folgenden Abschätzungen

1. $\left\| (t + A)^{-1} \right\| \leq \frac{M(A)}{t}$,
2. $\|J_t^A\| \leq M(A)$,
3. $\|A_t\| \leq \frac{M(A)+1}{t}$.

Weiters gilt $\operatorname{ran}(J_t^A) = \operatorname{dom}(A)$.

Beweis: Nach Definition 2.2.3 gilt $t\|(t+A)^{-1}\| = \|t(t+A)^{-1}\| \leq M(A)$ und gemäß Bemerkung 2.2.4 $\|J_t^A\| = \|(I+tA)^{-1}\| \leq M(A)$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $t\|A_t\| = \|tA_t\| = \|I - J_t^A\| \leq 1 + M(A)$.

Weiters gilt $\operatorname{ran}\Big((I+tA)^{-1}\Big) = \operatorname{dom}(I+tA) = \operatorname{dom}(A)$. $\square$

Lemma 2.2.10 Für $A \in \mathcal{M}$ und $t > 0$ gilt $J_t^A A \subseteq A_t \subseteq AJ_t^A$, weshalb auch $\operatorname{ran}(A_t) \subseteq \operatorname{ran}(A)$. Falls A ein linearer Operator ist, so gilt $A_t = AJ_t^A$, und im Fall $A \in \mathfrak{L}_b(X)$ zudem $J_t^A A = A_t$.

Beweis: Laut Lemma 2.1.20 gilt $J_t^A(I+tA) \subseteq I \subseteq (I+tA)J_t^A$. Infolge schließen wir mit Lemma 2.1.7 auf $I \subseteq (I+tA)J_t^A \subseteq J_t^A + tAJ_t^A$ und $I \supseteq J_t^A(I+tA) \supseteq J_t^A + tJ_t^A A$. Daraus folgt $J_t^A A \subseteq A_t = t^{-1}(I - J_t^A) \subseteq AJ_t^A$.

Falls A ein linearer Operator ist, so gilt $\operatorname{mul}(I+tA) = \ker(J_t^A) = \{0\}$ und folglich $I = (I+tA)J_t^A$ wegen Lemma 2.1.20, womit $A_t = AJ_t^A$ nach Lemma 2.1.7 1. und 3. Für $A \in \mathfrak{L}_b(X)$ folgt $J_t^A A = A_t$ aus $J_t^A(I+tA) = I$. $\square$

Lemma 2.2.11 Für $A \in \mathcal{M}$ und $s, t \geq 0$ gilt $(A_s)_t = A_{s+t}$ und $J_s^A J_t^{A_s} = J_{s+t}^A$.

Beweis: Mit Fakta 2.1.18 1. schließt man auf

$$(A_s)_t = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ s+t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = A_{s+t},$$

für $s, t > 0$. Zudem gilt $(A_s)_0 = A_s = A_{s+0}$, $(A_0)_t = A_t = A_{0+t}$ und $(A_0)_0 = A = A_{0+0}$.

Für $s, t > 0$ erhalten wir aus Fakta 2.1.18 1. und Lemma 2.1.19

$$J_s^A J_t^{A_s} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix} s & 1 \\ s+t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ s+t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = J_{s+t}^A.$$

Des Weiteren haben wir $J_s^A J_0^{A_s} = J_s^A I = J_{s+0}^A$, $J_0^A J_t^{A_0} = IJ_t^A = J_{0+t}^A$ und $J_0^A J_0^{A_0} = I = J_{0+0}^A$. $\square$

Satz 2.2.12 Für $s, t \in (0, +\infty)$ und $A \in \mathcal{M}$ gelten folgende Aussagen.

1. $(t+A)^{-1} - (s+A)^{-1} = (s-t)(t+A)^{-1}(s+A)^{-1}$,
2. $J_t^A - J_s^A = (s-t)J_t^A A_s$,
3. $A_t - A_s = (s-t)A_t A_s$.

Beweis: Für $s = t$ sind die Aussagen offenbar richtig. Gelte also $s \neq t$.

1. Aus Fakta 2.1.18 und Lemma 2.1.19 folgt

$$\begin{aligned}(t+A)^{-1}(I+(t-s)(s+A)^{-1}) &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&t\end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix}t-s&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&s\end{smallmatrix}\right)}(A)\\ &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&t\end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&t\\1&s\end{smallmatrix}\right)}(A)\\ &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&s\end{smallmatrix}\right)}(A) = (s+A)^{-1}.\end{aligned}$$

2. Aus Fakta 2.1.18 und Lemma 2.1.19 folgt

$$\begin{aligned}J_t^A(I+(t-s)A_s) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix}t-s&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\s&1\end{smallmatrix}\right)}(A) &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix}t&1\\s&1\end{smallmatrix}\right)}(A)\\ = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\s&1\end{smallmatrix}\right)}(A) = J_s^A.&\end{aligned}$$

3. Analog zum vorherigen Punkt gilt

$$\begin{aligned}A_t(I+(t-s)A_s) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix}t-s&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\s&1\end{smallmatrix}\right)}(A) &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix}t&1\\s&1\end{smallmatrix}\right)}(A)\\ = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\s&1\end{smallmatrix}\right)}(A) = A_s.&\end{aligned}$$

□

Korollar 2.2.13 Für $s,t \in (0,+\infty)$ und $A \in \mathcal{M}$ kommutieren $(s+A)^{-1}, (t+A)^{-1}$, J_t^A, J_s^A, A_t, A_s paarweise und es gilt $J_s^A A_t = A_s J_t^A$.

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz 2.2.12 bzw. durch direktes Nachrechnen. □

Korollar 2.2.14 Ist $A \in \mathcal{M}$, so sind die Funktionen

1. $(0,+\infty) \to \mathfrak{L}_b(X),\ t \mapsto (t+A)^{-1}$,
2. $(0,+\infty) \to \mathfrak{L}_b(X),\ t \mapsto A_t$,
3. $(0,+\infty) \to \mathfrak{L}_b(X),\ t \mapsto J_t^A$,

stetig bezüglich der von der Operatornorm erzeugten Topologie.

Beweis: Für $s,t > 0$ gilt wegen Satz 2.2.12 und Lemma 2.2.9

$$\begin{aligned}\left\|(t+A)^{-1}-(s+A)^{-1}\right\| &= |s-t|\left\|(t+A)^{-1}(s+A)^{-1}\right\|\\ &\le |s-t|\frac{M(A)}{t}\frac{M(A)}{s} = \left|\frac{1}{s}-\frac{1}{t}\right|M(A)^2,\\ \|J_t^A - J_s^A\| &= |s-t|\|J_t^A A_s\| \le \left|\frac{1}{s}-\frac{1}{t}\right|M(A)[M(A)+1],\\ \|A_t - A_s\| &= |s-t|\|A_t A_s\| \le \left|\frac{1}{s}-\frac{1}{t}\right|[M(A)+1]^2.\end{aligned}$$

□

Satz 2.2.15 Für $t \in (0, +\infty)$ und $A, B \in \mathcal{M}$ mit $\mathrm{mul}(A) = \mathrm{mul}(B)$ und $\mathrm{dom}(A) = \mathrm{dom}(B)$ gelten folgende Aussagen.

1. $(t + A)^{-1} - (t + B)^{-1} = (t + A)^{-1}(B - A)(t + B)^{-1}$,
2. $J_t^A - J_t^B = tJ_t^A(B - A)J_t^B$,
3. $A_t - B_t = J_t^B(B - A)J_t^A$.

Beweis: Wegen Lemma 2.1.7 2. gilt

$$\begin{aligned}(t + A)^{-1}[B - A] &= (t + A)^{-1}[(t + B) - (t + A)] \\ &\supseteq (t + A)^{-1}(t + B) - (t + A)^{-1}(t + A).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Aus $\ker\Big((t + A)^{-1}\Big) = \mathrm{mul}(A) = \mathrm{mul}(A) + \mathrm{mul}(B) \supseteq \mathrm{mul}(B - A)$ folgt

$$\mathrm{mul}\Big((t + A)^{-1}[B - A]\Big) = \{0\}.$$

Wegen $\mathrm{dom}(A) = \mathrm{dom}(B) = \mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B)$ und folglich

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}\Big((t + A)^{-1}[B - A]\Big) &= \mathrm{dom}(B) \cap \mathrm{dom}(A) \\ &= \mathrm{dom}\Big((t + A)^{-1}(t + B) - (t + A)^{-1}(t + A)\Big)\end{aligned}$$

gilt Gleichheit in (2.9).

Aus Lemma 2.1.19 folgen

$$\begin{aligned}(t + A)^{-1}(t + A) &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & t\end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}(A) \boxplus (\{0\} \times \{0\}) = I|_{\mathrm{dom}(A)}, \\ (t + A)(t + A)^{-1} &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & t\end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 1 & t\end{smallmatrix}\right)}(A) \boxplus (\{0\} \times \mathrm{mul}(t + A)) \\ &= I|_{\mathrm{dom}\left((t+A)^{-1}\right)} \boxplus (\{0\} \times \mathrm{mul}(A)) = I \boxplus (\{0\} \times \mathrm{mul}(B)) \\ &= (t + B)(t + B)^{-1}, \\ I|_{\mathrm{dom}(A)}(t + A)^{-1} &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & t\end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & t\end{smallmatrix}\right)}(A) \boxplus (\{0\} \times \{0\}) = (t + A)^{-1}.\end{aligned}$$

Daraus sowie aus der oben gezeigten Gleichheit in (2.9) folgt mit Lemma 2.1.7 1.

$$\begin{aligned}&(t + A)^{-1}[B - A](t + B)^{-1} \\ &\quad\subseteq (t + A)^{-1}(t + B)(t + B)^{-1} - (t + A)^{-1}(t + A)(t + B)^{-1} \\ &\quad= (t + A)^{-1}(t + A)(t + A)^{-1} - I|_{\mathrm{dom}(A)}(t + B)^{-1} \\ &\quad= I|_{\mathrm{dom}(A)}(t + A)^{-1} - I|_{\mathrm{dom}(B)}(t + B)^{-1} \\ &\quad= (t + A)^{-1} - (t + B)^{-1}\end{aligned} \tag{2.10}$$

Wegen $\operatorname{ran}\Big((t+B)^{-1}\Big) = \operatorname{dom}(A) = \operatorname{dom}(B-A)$ gilt

$$\operatorname{dom}\Big((t+A)^{-1}[B-A](t+B)^{-1}\Big) = X.$$

Da $(t+A)^{-1} - (t+B)^{-1}$ ein beschränkter linearer Operator ist, gilt Gleichheit in (2.10).

Wegen $J_t^A = t^{-1}\big(t^{-1}+A\big)^{-1}$ gilt

$$\begin{aligned} J_t^A - J_t^B &= t^{-1}[\big(t^{-1}+A\big)^{-1} - \big(t^{-1}+B\big)^{-1}] \\ &= t^{-1}\big(t^{-1}+A\big)^{-1}[B-A]\big(t^{-1}+B\big)^{-1} = tJ_t^A[B-A]J_t^B. \end{aligned}$$

Schließlich folgt

$$\begin{aligned} A_t - B_t = t^{-1}[(I-J_t^A) - (I-J_t^B)] &= t^{-1}[J_t^B - J_t^A] = t^{-1}tJ_t^B[A-B]J_t^A \\ &= J_t^B[A-B]J_t^A, \end{aligned}$$

aus $A_t = t^{-1}(1-J_t^A)$. □

Lemma 2.2.16 Für $s,t \in (0,+\infty)$ und $A \in \mathcal{M}$ gilt $J_s^{A_t} = \frac{1}{s+t}(t + sJ_{s+t}^A)$, $\lim_{r\searrow 0} J_s^{A_r} = J_s^A$ und $A_t \in \mathfrak{L}_b(X) \cap \mathcal{M}$ mit $M(A_t) \leq \max\{1, M(A)\}$.

Beweis: Aus Fakta 2.1.18 folgt

$$\begin{aligned} J_s^{A_t} &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A_t) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} t & 1 \\ s+t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{s+t} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} s & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ s+t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) \\ &= \frac{1}{s+t}(t + sJ_{s+t}^A). \end{aligned}$$

Wegen Korollar 2.2.14 und

$$\begin{aligned} \big\|J_s^{A_t} - J_s^A\big\| &= \left\|\frac{1}{s+t}(t+sJ_{s+t}^A) - J_s^A\right\| = \left\|\frac{t}{s+t} + (1 - \frac{t}{s+t})J_{s+t}^A - J_s^A\right\| \\ &= \left\|\frac{t}{s+t}(I - J_{s+t}^A) + J_{s+t}^A - J_s^A\right\| \leq t\|A_{s+t}\| + \big\|J_{s+t}^A - J_s^A\big\| \\ &\leq \frac{t}{s+t}(1 + M(A)) + \big\|J_{s+t}^A - J_s^A\big\|, \end{aligned}$$

gilt $\lim_{r\searrow 0} J_s^{A_r} = J_s^A$. Für $z < 0$ gilt

$$\phi^{-1}_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(z) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}}(z) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(z) = z(1-tz)^{-1} < 0,$$

weshalb $\rho(A_t) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\rho(A)) \supseteq \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}((-\infty,0)) \supseteq (-\infty,0)$ gemäß Proposition 2.1.29. Mit Bemerkung 2.2.4 und Bemerkung 2.2.5 folgt

$$M(A_t) = \sup_{s>0}\big\|J_s^{A_t}\big\| = \sup_{s>0}\frac{1}{s+t}\big\|t + sJ_{s+t}^A\big\| \leq \sup_{s>0}\frac{t+sM(A)}{s+t} \leq \max\{1, M(A)\}.$$

Also liegt A_t in $\mathcal{M}$. □

Lemma 2.2.17 Für $A \in \mathcal{M}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\overline{\operatorname{dom}(A)} = \left\{ u \in X : \lim_{t \searrow 0} J_t^A u = u \right\} = \overline{\operatorname{dom}(A^n)}$$

sowie $\operatorname{mul}(A) \cap \overline{\operatorname{dom}(A)} = \{0\}$.

Beweis: Offenbar gilt $\overline{\operatorname{dom}(A)} \supseteq \overline{\operatorname{dom}(A^n)}$.

Für $u \in X$ mit $\lim_{t \searrow 0} J_t^A u = u$ gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{t \searrow 0} (J_t^A)^n u &= \lim_{t \searrow 0} \Big(\sum_{j=2}^{n} [(J_t^A)^j u - (J_t^A)^{j-1} u] + J_t^A u \Big) \\
&= \sum_{j=2}^{n} \lim_{t \searrow 0} (J_t^A)^{j-1} [J_t^A u - u] + \lim_{t \searrow 0} J_t^A u = u,
\end{aligned}$$

weil $\big\| (J_t^A)^{j-1} [J_t^A u - u] \big\| \leq M(A)^{j-1} \big\| J_t^A u - u \big\| \to 0$ für $t \to 0$.
Man sieht leicht, dass $\operatorname{dom}((s + tA)^n) \supseteq \operatorname{dom}(A^n)$ für alle $t > 0, s \in \mathbb{C}$. Somit gilt auch

$$\operatorname{dom}((s + tA)^n) \subseteq \operatorname{dom}\left([\frac{1}{t}(s + tA) - \frac{s}{t}]^n \right) = \operatorname{dom}(A^n),$$

also Gleichheit. Wir erhalten $\operatorname{ran}\big((J_t^A)^n\big) = \operatorname{ran}((I + tA)^{-n}) = \operatorname{dom}((I + tA)^n) = \operatorname{dom}(A^n)$ und folglich $u \in \overline{\operatorname{dom}(A^n)}$.

Zu $u \in \operatorname{dom}(A)$ gibt es ein $(u, v) \in A$, wodurch $(u + tv, u) \in J_t^A$, also $u - J_t^A u = t J_t^A v$. Wegen

$$\big\| u - J_t^A u \big\| = t \big\| J_t^A v \big\| \leq t M(A) \|v\|$$

folgt $\lim_{t \searrow 0} J_t^A u = u$. Für $u \in \overline{\operatorname{dom}(A)}$ gibt es eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\operatorname{dom}(A)$ mit $\lim_{\to \infty} k u_k = u$. Also gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|u - u_k\| < \frac{\epsilon}{2(M(A)+1)}$ für alle $k \geq k_0$. Gilt $(u_{k_0}, v_{k_0}) \in A$, so erhalten wir für $t \leq \frac{\epsilon}{2M(A)\|v_{k_0}\|}$

$$\begin{aligned}
\big\| J_t^A u - u \big\| &\leq \big\| J_t^A u - J_t^A u_{k_0} \big\| + \big\| J_t^A u_{k_0} - u_{k_0} \big\| + \|u_{k_0} - u\| \\
&\leq \big\| J_t^A \big\| \|u - u_{k_0}\| + t M(A) \|v_{k_0}\| + \|u_{k_0} - u\| \\
&\leq (M(A) + 1) \|u - u_{k_0}\| + t M(A) \|v_{k_0}\| < \epsilon,
\end{aligned}$$

womit $\lim_{t \searrow 0} J_t^A u = u$.

Aus $\ker\big(J_t^A\big) = \operatorname{mul}(A)$ folgt $J_t^A(\operatorname{mul}(A)) = \{0\}$, also $u = \lim_{t \searrow 0} J_t^A u = 0$ für $u \in \operatorname{mul}(A) \cap \overline{\operatorname{dom}(A)}$. ☐

Bemerkung 2.2.18 Für $A \in \mathcal{M}$ folgt unmittelbar aus Lemma 2.2.17, dass mit $\overline{\operatorname{dom}(A)} = X$ auch $\operatorname{mul}(A) = \{0\}$ und wegen Lemma 2.2.7, dass $\overline{\operatorname{ran}(A)} = X$ auch $\ker(A) = \{0\}$ bedeutet.

Definition 2.2.19 Ist A eine lineare Relation, so definieren wir $A_D := A \cap \Big(\overline{\operatorname{dom}(A)} \times \overline{\operatorname{dom}(A)} \Big)$.

Fakta 2.2.20 Sei $A \in \mathcal{M}$.

1. Aus Lemma 2.2.17 folgt $\mathrm{mul}(A_D) = \mathrm{mul}(A) \cap \overline{\mathrm{dom}(A)} = \{0\}$. Also ist A_D ein linearer Operator mit Definitionsbereich $\mathrm{dom}(A_D) \subseteq \mathrm{dom}(A)$ und $\mathrm{ran}(A_D) = \mathrm{ran}(A) \cap \overline{\mathrm{dom}(A)}$.

2. Da $u + v$ für $(u, v) \in A$ genau dann in $\overline{\mathrm{dom}(A)} = \overline{\mathrm{dom}(I + A)}$ liegt, wenn $v \in \overline{\mathrm{dom}(A)}$, erhalten wir

$$(I + A)_D = \Big\{(u, u + v) \mid (u, v) \in A,\ u + v \in \overline{\mathrm{dom}(A)}\Big\} = I + A_D.$$

Lemma 2.2.21 Für $A \in \mathcal{M}$ und $\lambda > 0$ liegen $(\lambda+A_D)^{-1} = (\lambda+A)^{-1}|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}$, $J_\lambda^{A_D} = J_\lambda^A|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}$ und $(A_D)_\lambda = A_\lambda|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}$ in $\mathfrak{L}_b(\overline{\mathrm{dom}(A)})$.

Beweis: Aus $A_D \subseteq A$ folgt $(\lambda + A_D)^{-1} \subseteq (\lambda + A)^{-1} \in \mathfrak{L}_b(X)$.

Wegen $\mathrm{ran}\big((\lambda + A)^{-1}\big) \subseteq \overline{\mathrm{dom}(A)}$ gilt

$$\begin{aligned}(\lambda + A_D)^{-1} &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & \lambda\end{smallmatrix}\right)}(A_D) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & \lambda\end{smallmatrix}\right)}(A) \cap \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & \lambda\end{smallmatrix}\right)}\Big(\overline{\mathrm{dom}(A)} \times \overline{\mathrm{dom}(A)}\Big)\\ &= (\lambda + A)^{-1} \cap \Big(\overline{\mathrm{dom}(A)} \times \overline{\mathrm{dom}(A)}\Big) = (\lambda + A)^{-1}|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}},\end{aligned}$$

weshalb $(\lambda + A_D)^{-1} \in \mathfrak{L}_b(\overline{\mathrm{dom}(A)})$.

Daraus folgt $J_\lambda^A|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}} = (I + \lambda A)^{-1}|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}} = \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\lambda} + A)^{-1}|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}} = \frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\lambda} + A_D)^{-1} = J_\lambda^{A_D}$ und $A_\lambda|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}} = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda^A)|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}} = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda^{A_D}) = (A_D)_\lambda$; siehe Definition 2.2.8. □

Bemerkung 2.2.22 Für $A \in \mathcal{M}$ und $u \in \overline{\mathrm{dom}(A)}$ gilt $(I + A)^{-1}u = (I + A_D)^{-1}u \in \mathrm{ran}\big((I + A_D)^{-1}\big) = \mathrm{dom}(A_D)$.

Lemma 2.2.23 Für $A \in \mathcal{M}$ ist A_D ein dicht definierter, nicht-negativer linearer Operator auf dem Banachraum $\overline{\mathrm{dom}(A)} = \overline{\mathrm{dom}(A_D)}$.

Beweis: Wegen Fakta 2.2.20 1. ist A_D ein linearer Operator auf $\overline{\mathrm{dom}(A)}$.

Für $u \in \overline{\mathrm{dom}(A)}$ gilt $\lim_{\lambda\searrow 0} J_\lambda^{A_D} u = \lim_{\lambda\searrow 0} J_\lambda^A u = u$ nach Lemma 2.2.21 und Lemma 2.2.17. Aus $\mathrm{ran}\Big(J_\lambda^{A_D}\Big) = \mathrm{dom}(A_D)$ folgt $u \in \overline{\mathrm{dom}(A_D)}$. Wegen $\mathrm{dom}(A_D) \subseteq \mathrm{dom}(A) \subseteq \overline{\mathrm{dom}(A)}$ haben wir auch $\overline{\mathrm{dom}(A)} = \overline{\mathrm{dom}(A_D)}$.

Laut Lemma 2.2.21 gilt $(\lambda + A_D)^{-1} \in \mathfrak{L}_b(\overline{\mathrm{dom}(A)})$, $\lambda > 0$, weshalb $(-\infty, 0) \subseteq \rho(A_D)$. Für $u \in \overline{\mathrm{dom}(A)}$ und $\lambda > 0$ erhält man $\big\|\lambda(\lambda + A_D)^{-1}u\big\| = \big\|\lambda(\lambda + A)^{-1}u\big\| \leq M(A)\|u\|$ und damit

$$\big\|\lambda(\lambda + A_D)^{-1}\big\| = \sup_{u \in \overline{\mathrm{dom}(A)}} \frac{\big\|\lambda(\lambda + A_D)^{-1}u\big\|}{\|u\|} \leq M(A).$$

Also ist auch A_D nicht-negativ. □

2.3 lim inf

Sei X ein Banachraum. In diesem Abschnitt wird ein durch Kuratowski (siehe [10] § 29.) verbreiteter Konvergenzbegriff für Netze linearer Relationen eingeführt. Dieser wird in Definition 4.2.3 verwendet, um den Funktionalkalkül von $\mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$ auf Relationen aus $\mathcal{M}$ zu erweitern.

Definition 2.3.1 Sei $(K, \preceq)$ eine gerichtete Menge und $(B_k)_{k\in K}$ ein Netz linearer Relationen auf X. Wir definieren $\liminf_{k\in K} B_k$ als die Menge aller $(u, v) \in X \times X$, für die ein Netz $((u_k, v_k))_{k\in K}$ aus $X \times X$ existiert mit $(u_k, v_k) \in B_k, k \in K$, und $\lim_{k\in K}(u_k, v_k) = (u, v)$.

Lemma 2.3.2 Für eine gerichtete Menge $(K, \preceq)$ und ein Netz linearer Relationen $(B_k)_{k\in K}$ ist auch $\liminf_{k\in K} B_k$ eine lineare Relation.

Beweis: Für $(u, v), (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \liminf_{k\in K} B_k$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, gibt es Netze $(u_k, v_k)_{k\in K}, (\widetilde{u}_k, \widetilde{v}_k)_{k\in K}$ mit $(u_k, v_k), (\widetilde{u}_k, \widetilde{v}_k) \in B_k$, $k \in K$, $\lim_{k\in K}(u_k, v_k) = (u, v)$ und $\lim_{k\in K}(\widetilde{u}_k, \widetilde{v}_k) = (\widetilde{u}, \widetilde{v})$. Damit konvergiert $(u_k+\alpha\widetilde{u}_k, v_k+\alpha\widetilde{v}_k) = (u_k, v_k)+\alpha(\widetilde{u}_k, \widetilde{v}_k) \in B_k$ gegen $(u+\alpha\widetilde{u}, v+\alpha\widetilde{v}) = (u, v)+\alpha(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, weshalb $(u, v) + \alpha(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \liminf_{k\in K} B_k$. □

Lemma 2.3.3 Sei $(K, \preceq)$ eine gerichtete Menge, B eine lineare Relation und $(B_k)_{k\in K}$ ein Netz linearer Relationen. Dann gilt

1. $B \subseteq \liminf_{k\in K} B_k \subseteq \overline{B}$, falls $B = B_k$ für $k \in K$ mit Gleichheit im Fall $(K, \preceq) = (\mathbb{N}, \leq)$ oder $(K, \preceq) = ((0, +\infty), \geq)$, also $\liminf_{\epsilon\to 0} B_\epsilon = \overline{B}$.

2. Für ein konvergentes Netz $(t_k)_{k\in K}$ in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{k\in K} t_k \neq 0$ gilt $\liminf_{k\in K}(t_k B_k) = (\lim_{k\in K} t_k)(\liminf_{k\in K} B_k)$,

3. $(\liminf_{k\in K} B_k)^{-1} = \liminf_{k\in K}(B_k)^{-1}$.

Beweis:

1. Aus $(u, v) \in B$ folgt $(u, v) = \lim_{k\in K}(u_k, v_k) \in \liminf_{k\in K} B$, wobei $(u_k, v_k) := (u, v)$, $k \in K$. Für $(u, v) = \lim_{k\in K}(u_k, v_k) \in \liminf_{k\in K} B$ mit $(u_k, v_k) \in B$ ist der Grenzwert (u, v) im Abschluss $\overline{B}$ enthalten. Da jedes $(u, v) \in \overline{B}$ Grenzwert einer Folge $((u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ aus B ist, gilt $(u, v) = \lim_{n\in\mathbb{N}}(u_n, v_n) \in \liminf_{n\in\mathbb{N}} B$.
   Wir definieren ein Netz $(u_\epsilon, v_\epsilon)_{\epsilon\in(0,+\infty)}$ durch $(u_\epsilon, v_\epsilon) := (u_1, v_1)$, $\epsilon \in (1, +\infty)$ und $(u_\epsilon, v_\epsilon) := (u_n, v_n)$, $\epsilon \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], n \in \mathbb{N}$.
   Zu $\delta > 0$ gibt es ein $j_\delta \in \mathbb{N}$ mit $\|(u_j, v_j) - (u, v)\| < \delta$, $j \geq j_\delta$. Für $\epsilon \leq \epsilon_\delta := \frac{1}{j_\delta}$ existiert eine natürliche Zahl $j \geq j_\delta$ mit $\epsilon \in (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]$, weshalb $\|(u_\epsilon, v_\epsilon) - (u, v)\| = \|(u_j, v_j) - (u, v)\| < \delta$ nach Konstruktion von $(u_\epsilon, v_\epsilon)_{\epsilon\in(0,+\infty)}$.
   Damit erhält man $\lim_{\epsilon\searrow 0}(u_\epsilon, v_\epsilon) = \lim_{\epsilon\in(0,+\infty)}(u_\epsilon, v_\epsilon) = (u, v)$ aus [7] Definition 5.5.2, womit $(u, v) \in \liminf_{\epsilon\searrow 0} B$.

2. Ist $(u, w) = \lim_{k\in K}(u_k, w_k) \in \liminf_{k\in K}(t_k B_k)$ mit $(u_k, w_k) \in t_k B_k$ und $t := \lim_{k\in K} t_k$, so gibt es v_k mit $(u_k, v_k) \in B_k$ und $w_k = t_k v_k$. $t \neq 0$ impliziert die Existenz eines $k_0 \in K$ so, dass für alle $k \succeq k_0$ immer $t_k \neq 0$.
   Aus $\lim_{k\in K} v_k = \lim_{k\succeq k_0}(t_k^{-1} w_k) = t^{-1} w$ folgt $(u, t^{-1}w) \in \liminf_{k\in K} B_k$. Also gilt $(u, w) \in$

$t \liminf_{k\in K} B_k$.

Für die andere Inklusion sei $(u, tv) \in t \liminf_{k\in K} B_k$. Dann existiert ein Netz $((u_k, v_k))_{k\in K}$ mit $(u, v) = \lim_{k\in K}(u_k, v_k)$ und $(u_k, v_k) \in B_k, k \in K$. Damit gilt $(u, tv) = \lim_{k\in K}(u_k, t_k v_k) \in \liminf_{k\in K}(t_k B_k)$.

3. Für $(u, v) \in (\liminf_{k\in K} B_k)^{-1}$ ist $(v, u) = \lim_{k\in K}(v_k, u_k) \in \liminf_{k\in K} B_k$ mit $(v_k, u_k) \in B_k, k \in K$. Äquivalent dazu gilt $(u_k, v_k) \in (B_k)^{-1}, k \in K$ und $(u, v) = \lim_{k\in K}(u_k, v_k)$, also $(u, v) \in \liminf_{k\in K}(B_k)^{-1}$.

$\square$

Lemma 2.3.4 Sei $(K, \preceq)$ eine gerichtete Menge. Für eine Netz beschränkter linearer Operatoren $(B_k)_{k\in K}$ mit $\sup_{k\in K}\|B_k\| < +\infty$ gelten folgende Aussagen.

1. $\liminf_{k\in K} B_k$ ist ein linearer Operator.

2. $(B_k)_{k\in K}$ konvergieren stark gegen $\liminf_{k\in K} B_k$, also gilt
$$(u, \lim_{k\in K}(B_k u)) \in \liminf_{k\in K} B_k$$
für alle $u \in \mathrm{dom}(\liminf_{k\in K} B_k)$.

3. Für ein bezüglich der Operatornorm konvergentes Netz $(D_k)_{k\in K}$ beschränkter linearer Operatoren gilt $\liminf_{k\in K} D_k = \lim_{k\in K} D_k$.

4. Ist $(C_k)_{k\in K}$ ein Netz linearer Relationen, so erhalten wir
$$\liminf_{k\in K}(B_k + C_k) \supseteq \liminf_{k\in K} B_k + \liminf_{k\in K} C_k,$$
und im Fall $\mathrm{dom}(\liminf_{k\in K}(B_k + C_k)) \subseteq \mathrm{dom}(\liminf_{k\in K} B_k)$ Gleichheit.

5. Für Netze linearer Relationen $(C_k)_{k\in K}, (D_k)_{k\in K}$ und ein Netz $(B_k)_{k\in K}$ in $\mathfrak{L}_b(X)$ mit $D_k = C_k + B_k$, $k \in K$, und $\lim_{k\in K}\|B_k\| = 0$ gilt $\liminf_{k\in K} D_k = \liminf_{k\in K} C_k$.

6. Für Netze linearer Relationen $(C_k)_{k\in K}, (D_k)_{k\in K}$ mit $D_k - C_k \in \mathfrak{L}_b(X)$ für alle $k \in K$ und $\lim_{k\in K}\|D_k - C_k\| = 0$ gilt $\liminf_{k\in K} D_k = \liminf_{k\in K} C_k$.

Beweis:

1. Für $v \in \mathrm{mul}(\liminf_{k\in K} B_k)$ existiert ein Netz $(u_k)_{k\in K}$ mit $\lim_{k\in K} u_k = 0$ und $\lim_{k\in K} B_k u_k = v$. Aus
$$\|B_k u_k\| \leq \|B_k\|\|u_k\| \leq (\sup_{k\in K}\|B_k\|)\|u_k\|$$
folgt $v = 0$.

2. Für $u \in \mathrm{dom}(\liminf_{k\in K} B_k)$ gibt es ein Netz $(u_k)_{k\in K}$ in X mit $\lim_{k\in K} u_k = u$ und $\lim_{k\in K} B_k u_k = (\liminf_{k\in K} B_k)u$. Aus
$$\left\|B_k u - (\liminf_{k\in K} B_k)u\right\| \leq (\sup_{k\in K}\|B_k\|)\|u_k - u\| + \left\|B_k u_k - (\liminf_{k\in K} B_k)u\right\|$$

folgt $\lim_{k\in K}(B_k u) = (\liminf_{k\in K} B_k)u$.

3. Wegen $\|D_k u - (\lim_{l\in K} D_l)u\| \leq \|D_k - \lim_{l\in K} D_l\|\|u\|$, $k \in K$, konvergiert $(D_k u)_{k\in K}$ für $u \in X$ gegen $(\lim_{l\in K} D_l)u$. Damit liegt $(u, (\lim_{k\in K} D_k)u)$ in $\liminf_{k\in K} D_k$. Folglich gilt $\lim_{k\in K} D_k \subseteq \liminf_{k\in K} D_k$ und daher $\operatorname{dom}(\liminf_{k\in K} D_k) = X$.
Wegen der Stetigkeit der Operatornorm konvergiert $(\|D_k\|)_{k\in K}$ in $[0, +\infty)$. Infolge existiert laut [7] Fakta 5.3.5 3. ein $j \in K$ mit $\sup_{k\in K_{\succeq j}}\|D_k\| < +\infty$, wobei $K_{\succeq j} := \{k \in K : j \preceq k\}$. Offenbar gilt $\liminf_{k\in K} D_k = \liminf_{k\in K_{\succeq j}} D_k$, wobei das wegen des ersten Punktes ein linearer Operator ist. Insbesondere gilt $\liminf_{k\in K} D_k = \lim_{k\in K} D_k$.

4. $\supseteq$: Sei $(u, x) = (u, v + w) \in \liminf_{k\in K} B_k + \liminf_{k\in K} C_k$, also $(u, v) = \lim_{k\in K}(u_k, v_k) \in \liminf_{k\in K} B_k$ und $(u, w) = \lim_{k\in K}(\widetilde{u}_k, w_k) \in \liminf_{k\in K} C_k$. Wegen $\|B_k\widetilde{u}_k - B_k u_k\| \leq (\sup_{l\in K}\|B_l\|)\|\widetilde{u}_k - u_k\|$ gilt

$$\lim_{k\in K}(B_k\widetilde{u}_k + w_k) = \lim_{k\in K}(B_k\widetilde{u}_k - B_k u_k) + \lim_{k\in K}(B_k u_k) + \lim_{k\in K} w_k = v + w,$$

womit $(u, v + w) = \lim_{k\in K}(\widetilde{u}_k, B_k\widetilde{u}_k + w_k) \in \liminf_{k\in K}(B_k + C_k)$.

$\subseteq$: Gelte $(u, x) = \lim_{k\in K}(u_k, x_k) \in \liminf_{k\in K}(B_k + C_k)$ mit $(u_k, x_k) = (u_k, v_k + w_k) \in B_k + C_k$, wobei $(u_k, v_k) \in B_k, (u_k, w_k) \in C_k$. Wegen des 2. Punktes und wegen $\|B_k u_k - B_k u\| \leq \sup_{l\in K}\|B_l\|\|u_k - u\|$ gilt

$$v := \lim_{k\in K} v_k = \lim_{k\in K}(B_k u_k) = \lim_{k\in K}(B_k u) = (\liminf_{k\in K} B_k)u,$$

und damit $(u, v) \in \liminf_{k\in K} B_k$.
Aus $\lim_{k\in K} w_k = \lim_{k\in K}(x_k - v_k) = x - v$ folgt $(u, x - v) \in \liminf C_k$, und daraus $(u, x) \in \liminf_{k\in K} B_k + \liminf_{k\in K} C_k$.

5. Aus 3. folgt $\liminf_{k\in K} B_k = \lim_{k\in K} B_k = 0$, also insbesondere $\operatorname{dom}(\liminf_{k\in K} B_k) = X$, weshalb

$$\liminf_{k\in K} D_k = \liminf_{k\in K}(C_k + B_k) = \liminf_{k\in K} C_k + \liminf_{k\in K} B_k = \liminf_{k\in K} C_k$$

nach Punkt 4.

6. Nach Lemma 2.1.9 gilt $\{0\} = \operatorname{mul}(D_k - C_k) = \operatorname{mul}(D_k) + \operatorname{mul}(C_k)$ und $X = \operatorname{dom}(D_k - C_k) = \operatorname{dom}(D_k) \cap \operatorname{dom}(C_k)$. Infolge erhält man $\operatorname{mul}(D_k) = \operatorname{mul}(C_k) = \{0\}$ und $\operatorname{dom}(D_k) = \operatorname{dom}(C_k) = X$, weshalb $D_k = (D_k - C_k) + C_k$. Damit folgt $\liminf_{k\in K} D_k = \liminf_{k\in K} C_k$ aus 5.

$\square$

Lemma 2.3.5 Für eine gerichtete Menge $(K, \preceq)$, ein Netz linearer Relationen $(C_k)_{k\in K}$ und ein Netz beschränkter linearer Operatoren $(B_k)_{k\in K}$ mit $\sup_{k\in K}\|B_k\| < +\infty$ gilt

1. $\liminf_{k\in K} B_k C_k \supseteq (\liminf_{k\in K} B_k)(\liminf_{k\in K} C_k)$.

2. Im Fall $\operatorname{dom}(\liminf_{k\in K} B_k) = X$ gilt $\liminf_{k\in K} C_k B_k \subseteq (\liminf_{k\in K} C_k)(\liminf_{k\in K} B_k)$.

Beweis:

1. Seien $(u,w) \in \liminf_{k\in K} C_k$ und $(w,v) \in \liminf_{k\in K} B_k$.
   Dann gibt es $(u_k,w_k) \in C_k$, $(\widetilde{w}_k,v_k) \in B_k$ mit $\lim_{k\in K} u_k = u, \lim_{k\in K} v_k = v$ und $\lim_{k\in K} \widetilde{w}_k = \lim_{k\in K} w_k = w$. Dann gilt $(u_k, B_k w_k) \in B_k C_k$.
   Aus $\|B_k w_k - B_k \widetilde{w}_k\| \le (\sup_{k\in K}\|B_k\|)\|w_k - \widetilde{w}_k\|$ folgt
   $$\lim_{k\in K}(B_k w_k) = \lim_{k\in K}(B_k \widetilde{w}_k) = \lim_{k\in K} v_k = v.$$
   Damit gilt $(u,v) = \lim_{k\in K}(u_k, B_k w_k) \in \liminf_{k\in K}(B_k C_k)$.

2. Sei $(u,v) = \lim_{k\in K}(u_k,v_k) \in \liminf_{k\in K} C_k B_k$ mit $(u_k,w_k) \in B_k$ und $(w_k,v_k) \in C_k$ für alle $k \in K$. Nach Lemma 2.3.4 2. konvergiert $(B_k)_{k\in K}$ stark gegen $\liminf_{k\in K} B_k$. Daher existiert $\lim_k(B_k u) = (\liminf_{k\in K} B_k)u$ für alle $u \in \liminf_{k\in K} B_k = X$. Wegen $\|B_k u_k - B_k u\| \le (\sup_{l\in K}\|B_l\|)\|u_k - u\|$, $k \in K$, gilt
   $$(\liminf_{k\in K} B_k)u = \lim_{k\in K}(B_k u) = \lim_{k\in K}(B_k u_k) = \lim_{k\in K} w_k.$$
   Daraus folgt $((\liminf_{k\in K} B_k)u, v) = \lim_{k\in K}(w_k,v_k) \in \liminf_{k\in K} C_k$ und
   $(u,v) \in (\liminf_{k\in K} C_k)(\liminf_{k\in K} B_k)$.

$\square$

Lemma 2.3.6 Für A aus $\mathcal{M}$ gilt

1. $\liminf_{t\searrow 0} A_t = A$,

2. $\liminf_{t\searrow 0} J_t^A \supseteq I|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}} \boxplus (\mathrm{mul}(A) \times \{0\})$. Dabei ist $\liminf_{t\searrow 0} J_t^A$ ein linearer Operator und starker Grenzwert von $(J_t^A)_{t>0}$.

Für $A \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$ gilt $\lim_{t\searrow 0} A_t = A$ und $\lim_{t\searrow 0} J_t^A = I$.

Beweis:

1. Sei zuerst $(u,v) \in A$. Aus $J_1^A = (I+A)^{-1} = \{(x+y,x) \mid (x,y) \in A\}$ und Lemma 2.2.16 folgt $\lim_{t\searrow 0} J_1^{A_t}(u+v) = J_1^A(u+v) = u$. Wegen Lemma 2.1.19 und Fakta 2.1.18 gilt
   $$\begin{aligned} A_t J_1^{A_t} &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix}t&1\\1+t&1\end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t+1&1\end{smallmatrix}\right)}(A) \\ &= A_{t+1}. \end{aligned}$$
   Damit folgt $\lim_{t\searrow 0} A_t J_1^{A_t}(u+v) = A_1(u+v) = v$ aus Korollar 2.2.14 und aus
   $$A_1 = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)}(A) = \{(x+y,y) \mid (x,y) \in A\}.$$
   Also konvergiert $((J_1^{A_t}(u+v), A_t J_1^{A_t}(u+v))_t)_{t>0}$ gegen (u,v) in $X \times X$, wobei $(J_1^{A_t}(u+v), A_t J_1^{A_t}(u+v)) \in A_t$.

   Für die umgekehrte Inklusion sei $(u,v) \in \liminf_{t\searrow 0} A_t$. Also gibt es ein in $X \times X$ gegen (u,v) konvergentes Netz $((u_t,v_t))_{t>0}$ mit $(u_t,v_t) \in A_t$. Gemäß Definition 2.2.8 gilt $u_t = J_1^{A_t}(I+A_t)u_t = J_1^{A_t}(u_t + A_t u_t) = J_1^{A_t}(u_t+v_t)$, wodurch $u = J_1^A(u+v)$ nach Lemma 2.2.16. Also gilt $(u+v,u) \in J_1^A$ und daher $(u,v) \in A$.

2. Für $u \in \overline{\mathrm{dom}(A)}$ folgt $\lim_{t \searrow 0} J_t^A u = u$ gemäß Lemma 2.2.17, weshalb $(u, u) = \lim_{t \searrow 0}(u, J_t^A u) \in \liminf_{t \searrow 0} J_t^A$, also $\liminf_{t \searrow 0} J_t^A \supseteq I|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}$.
Wegen Lemma 2.2.9 2. gilt $\sup_{t>0}\|J_t^A\| < +\infty$. Infolge erhalten wir $\mathrm{mul}\big(\liminf_{t \searrow 0} J_t^A\big) = 0$ und $\lim_{t \searrow 0} J_t^A u = (\liminf_{t \searrow 0} J_t^A)u$ für alle $u \in \mathrm{dom}\big(\liminf_{t \searrow 0} J_t^A\big)$ aus Lemma 2.3.4 1. und 2.
Für $u \in \mathrm{mul}(A)$ gilt $(u, 0) \in J_t^A$, $t > 0$, und folglich $(u, 0) \in \liminf_{t \searrow 0} J_t^A$, also $\liminf_{t \searrow 0} J_t^A \supseteq \mathrm{mul}(A) \times \{0\}$.

Im Fall $A \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$ folgt $A_t = J_t^A A$ aus Lemma 2.2.10 und $A = J_t^A(I + tA)A$ aus Lemma 2.1.20. Damit gilt

$$\|A_t - A\| = \big\|J_t^A[A - (I + tA)A]\big\| = t\big\|J_t^A A^2\big\| \le tM(A)\|A\|^2,$$

also $\lim_{t \searrow 0} A_t = A$.
Aus $\big\|J_t^A - I\big\| = \big\|J_t^A[I - (I + tA)]\big\| = t\big\|J_t^A A\big\| \le tM(A)\|A\|$ folgt $\lim_{t \searrow 0} J_t^A = I$. □

Beispiel 2.3.7 Für $A := (0I)^{-1} = \{0\} \times X \in \mathcal{M}$ und $t > 0$ gilt $J_t^A = 0I$ und $A_t = \frac{1}{t}I$. Mit Lemma 2.3.6 erhält man $\liminf_{t \searrow 0} 0I = 0I \supseteq I|_{\{0\}}$ und $\liminf_{t \searrow 0} \frac{1}{t}I = \{0\} \times X$.

Korollar 2.3.8 Für $A \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$ sind die Abbildungen $t \mapsto A_t, t \mapsto J_t^A$ als Abbildungen von $[0, +\infty)$ nach $\mathfrak{L}_b(X)$ stetig; vergleiche Definition 2.2.8.

Beweis: Folgt aus Korollar 2.2.14 und Lemma 2.3.6. □

3 Klassen von Funktionen

Dieses Kapitel beginnt mit der Abhandlung einiger Grundlagen komplexer Maße. Anschließend werden Stieltjes-Funktionen eingeführt und in Teilklassen unterschieden, bevor komplexe Potenzen besprochen werden.

3.1 komplexe Maße

Hier wird die Theorie aus [7] in der Situation komplexer Maße fortgeführt.

Nach der Wiederholung relevanter Grundbegriffe, werden ausgewählte Konvergenz Sätze, Maße mit Dichten, Teilmaße, Bildmaße und der Transformationssatz auf den Fall komplexer Maße übertragen.

Definition 3.1.1

1. Ein Tupel $(\Omega, \mathfrak{G})$ bestehend aus einer Grundmenge Ω und einer σ-Algebra $\mathfrak{G}$ heißt Messraum.

2. Eine Funktion f zwischen zwei Messräumen $(\Omega, \mathfrak{G})$ und $(\Omega', \mathfrak{G}')$ heißt $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$-messbar, wenn $f^{-1}(G') \in \mathfrak{G}$ für alle $G' \in \mathfrak{G}'$.

3. Für einen Messraum $(\Omega, \mathfrak{G})$ wird eine Abbildung $\mu : \mathfrak{G} \to \mathbb{C}$ mit
$$\mu(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} G_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(G_j)$$
für jede paarweise disjunkte Folge $(G_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{G}$, komplexes Maß genannt.
Ein komplexes Maß μ heißt nicht-negativ, falls $\mu(G) \geq 0$ für alle G in $\mathfrak{G}$.

4. Für einen Messraum $(\Omega, \mathfrak{G})$ und ein komplexes Maß μ nennen wir $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ einen Maßraum.

5. Die Variation $|\mu| : \mathfrak{G} \to [0, +\infty]$ eines komplexen Maßes μ ist definiert durch
$$|\mu|(G) := \sup\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(G_j)| : G_j \in \mathfrak{G}, G_j \cap G_k = \emptyset, j \neq k \in \mathbb{N}, \bigcup_{j\in\mathbb{N}} G_j = G\right\}$$
für $G \in \mathfrak{G}$.

Bemerkung 3.1.2

1. Komplexe, nicht-negative Maße im Sinne von Definition 3.1.1 sind genau die endlichen Maße in Sinne der Maßtheorie.

2. Für jedes komplexe Maß μ ist $|\mu| : \mathfrak{G} \to [0, +\infty]$ ein solches endliches Maß im Sinne der Maßtheorie, wobei $|\mu| = \mu$ im Fall, dass μ ein nicht-negatives Maß ist.

3. Die Menge aller komplexen Maße auf einem Maßraum bildet einen Vektorraum.

Definition 3.1.3 Sei X ein Hausdorff-Raum. Die Mengen aus der von den offenen Mengen in X erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{B}(X)$ werden als Borel-Mengen bezeichnet.
Sei X ein Hausdorff-Raum und $(\Omega, \mathfrak{G})$ ein Messraum. Dann heißt eine Funktion $f : \Omega \to X$ Borel-messbar oder $\mathfrak{G}$-messbar, wenn sie $\mathfrak{G}\mathfrak{B}(X)$-messbar ist.

Definition 3.1.4 Für einen Messraum $(\Omega, \mathfrak{G})$, ein nicht-negatives Maß μ und eine μ-integrierbare, komplexwertige Funktion f bezeichne $f \odot \mu$ das durch $(f \odot \mu)(G) := \int_G f \, d\mu(t)$ definierte komplexe Maß.

Definition 3.1.5 Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ Maßraum. Eine Aussage über messbare Funktionen auf Ω gilt μ-f.ü., falls sie auf dem Komplement einer $|\mu|$-Nullmenge wahr ist.

Bemerkung 3.1.6 Integrale $\mathfrak{G}$-messbarer Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nach komplexen Maßen μ werden in [8] Definition 18.3.15 und Fakta 18.3.16 eingeführt. Das Herzstück bildet die Darstellung $\mu = h \odot |\mu|$ mit $|h| = 1$ $|\mu|$-f.ü. aus [8] Korollar 18.3.14, welche die Definition

$$\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega fh \, d|\mu|$$

ermöglicht, wobei f μ-integierbar ist, falls fh $|\mu|$-integrierbar ist. Die Menge der μ-integrierbaren Funktionen wird mit $L^1(\mu)$ bezeichnet.

Definition 3.1.7 Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in L^1(\mu)$. Mit $\mu = h \odot |\mu|$ wie in Bemerkung 3.1.6 wird durch $f \odot \mu := (fh) \odot |\mu|$ ein komplexes Maß $f \odot \mu : \mathfrak{G} \to \mathbb{C}$ definiert.

Bemerkung 3.1.8 Für einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ und Funktionen $f, g \in L^1(\mu)$ mit $fg \in L^1(\mu)$ gilt $f \odot (g \odot \mu) = fg \odot \mu = g \odot (f \odot \mu)$.

Lemma 3.1.9 Für einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ und eine Funktion $f \in L^1(\mu)$ gilt $|f \odot \mu| = |f| \odot |\mu|$.

Beweis: Nach [8] Korollar 18.3.14 existiert ein $h \in L^1(\mu)$ mit $\mu = h \odot |\mu|$ und $|h| = 1$ $|\mu|$-f.ü.. Damit erhält man $|f \odot \mu| = |f \odot (h \odot |\mu|)| = |fh \odot |\mu|| = |fh| \odot |\mu| = |f| \odot |\mu|$ aus [8] Lemma 18.3.13. □

Fakta 3.1.10 Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

1. Nach [8] Fakta 14.15.2 6. ist eine messbare Funktion f genau dann aus $L^1(\mu)$, wenn $\int_\Omega |f| \, d|\mu| < \infty$, weshalb auch $L^1(\mu) = L^1(|\mu|)$.

2. Für $f \in L^1(\mu)$ folgt $\left|\int_\Omega f\, d\mu\right| = \left|\int_\Omega fh\, d|\mu|\right| \leq \int_\Omega |fh|\, d|\mu| = \int_\Omega |f|\, d|\mu|$ aus [8] Fakta 14.15.2 7.

3. Wegen der Monotonie des Integrals [8] Fakta 14.5.3 1. und dem 1. Punkt folgt für messbare Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ und $g : \Omega \to [0, +\infty)$ aus $g \in L^1(\mu)$ und $|f| \leq g$, dass $f \in L^1(\mu)$.

Lemma 3.1.11 Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n \in L^1(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ für eine $\mathfrak{G}$-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann gilt $f \in L^1(\mu)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_\Omega |f - f_n|\, d|\mu| \leq \|f - f_n\|_\infty |\mu|(\Omega) < +\infty,$$

womit $f_n - f$ und daher f in $L^1(\mu)$ liegt. Schließlich folgt aus

$$\left|\int_\Omega f\, d\mu - \int_\Omega f_n\, d\mu\right| \leq \int_\Omega |f - f_n|\, d|\mu| \leq \|f - f_n\|_\infty |\mu|(\Omega)$$

die Behauptete Konvergenz. □

Satz 3.1.12 (beschränkte Konvergenz) Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine $\mathfrak{G}$-messbare Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathfrak{G}$-messbarer Funktionen mit $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-f.ü. Gibt es ein $g \in L^1(\mu)$ mit $|f_n| \leq g$ μ-f.ü., dann gilt $f_n, f \in L^1(\mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|\, d|\mu| = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Beweis: Nach Fakta 3.1.10 3. und 1. gilt $f, f_n \in L^1(\mu) = L^1(|\mu|)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz (siehe [8] Satz 14.6.5) konvergiert $\int_\Omega |f_n - f|\, d|\mu|$ gegen 0. Damit folgt wegen Fakta 3.1.10 2. aus

$$\left|\int_\Omega f_n\, d\mu - \int_\Omega f\, d\mu\right| = \left|\int_\Omega (f_n - f)\, d\mu\right| \leq \int_\Omega |f_n - f|\, d|\mu|.$$

auch $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu$. □

Satz 3.1.13 (beschränkte Konvergenz) Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine $\mathfrak{G}$-messbare Funktion, $(K, \preceq)$ eine gerichtete Menge und $(f_k)_{k\in K}$ ein Netz $\mathfrak{G}$-messbarer Funktionen, welches eine Teilfolge hat und $f = \lim_{k\in K} f_k$ μ-f.ü. erfüllt. Gibt es ein $g \in L^1(\mu)$ mit $|f_k| \leq g$ μ-f.ü., dann gilt $f_k, f \in L^1(\mu)$ für alle $k \in K$, wobei

$$\lim_{k\in K} \int_\Omega |f_k - f|\, d|\mu| = 0 \text{ und } \lim_{k\in K} \int_\Omega f_k\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu. \tag{3.1}$$

Beweis: Nach Nach Fakta 3.1.10 3. gilt $f, f_k \in L^1(\mu)$ für alle $k \in K$.

Sei $(f_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_k)_{k\in K}$ mit $k:\mathbb{N}\to K$. Wegen [7] Lemma 5.3.7 gilt $f = \lim_{n\to\infty} f_{k(n)}$ μ-f.ü.. Wegen $\left|f_{k(n)}\right| \leq g$ μ-f.ü. folgt

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left|f_{k(n)} - f\right| d|\mu| = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_{k(n)}\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu$$

aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz (siehe Satz 3.1.12). Damit erhält man (3.1) aus [7] Lemma 5.5.1. □

Bemerkung 3.1.14 Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum, Y metrischer Raum, $g:\Omega\to[0,+\infty)$ μ-integrierbar, $f:\Omega\times Y\to\mathbb{C}$ wobei $\omega\mapsto f(\omega,y)$ $\mathfrak{G}$-messbar und $|f(\cdot,y)|\leq g$ μ-f.ü. für alle $y\in Y$ sowie $\lim_{y\to z} f(\omega,y) = f(\omega,z)$ für μ-fast alle $\omega\in\Omega$. Wegen [7] Lemma 5.5.3 sind in dieser Situation die Vorraussetzungen von Satz 3.1.13 erfüllt.

Satz 3.1.15 (monotone Konvergenz) Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge $\mathfrak{G}\mathfrak{B}(\mathbb{C})$-messbarer Funktionen mit $f_n\geq 0$, welche punktweise gegen eine Funktion $f\in L^1(\mu)$ konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu.$$

Beweis: Folgt aus Satz 3.1.12, da $|f_n| = f_n \leq f \in L^1(\mu)$. □

Definition 3.1.16 Für eine $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$-messbare Abbildung $T:\Omega\to\Omega'$ zwischen zwei Messräumen $(\Omega,\mathfrak{G})$ und $(\Omega',\mathfrak{G}')$ und ein komplexes Maß μ auf $\mathfrak{G}$ definiert $T(\mu)(G') := \mu(T^{-1}(G')), G'\in\mathfrak{G}'$ ein komplexes Maß $T(\mu)$ auf $\mathfrak{G}'$.

Lemma 3.1.17 Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega',\mathfrak{G}')$ ein Messraum. Für bijektives und $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$-messbares $T:\Omega\to\Omega'$ mit $\mathfrak{G}'\mathfrak{G}$-messbarem T^{-1} gilt $T(|\mu|) = |T(\mu)|$.

Beweis: Sei $G'\in\mathfrak{G}'$.

$$\begin{aligned}T(|\mu|)(G') &= |\mu|(T^{-1}(G'))\\ &= \sup\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}}|\mu(G_j)| : G_j\in\mathfrak{G}, \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} G_j = T^{-1}(G')\right\}\end{aligned}$$

Für $j\neq k$ ist $G_j\cap G_k=\emptyset$ äquivalent zu $T(G_j)\cap T(G_k)=\emptyset$ und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} G_j = T^{-1}(G')$ ist äquivalent zu $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} T(G_j) = T(T^{-1}(G')) = G'$, wobei

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}|\mu(G_j)| = \sum_{j\in\mathbb{N}}\left|\mu(T^{-1}(T(G_j)))\right| = \sum_{j\in\mathbb{N}}|T(\mu)(T(G_j))|.$$

Da T $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$-messbar und T^{-1} $\mathfrak{G}'\mathfrak{G}$-messbar ist, wird $\mathfrak{G}$ bijektiv auf $\mathfrak{G}'$ abgebildet und es gilt

$$\begin{aligned}T(|\mu|)(G') &= \sup\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\left|T(\mu)(G_j')\right| : G_j'\in\mathfrak{G}, \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} G_j' = G'\right\}\\ &= |T(\mu)|(G').\end{aligned}$$

□

Lemma 3.1.18 Für einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{G}, \nu)$ mit nicht-negativem ν, einen Messraum $(\Omega', \mathfrak{G}')$, eine bijektive und $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$-messbare Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ mit $\mathfrak{G}'\mathfrak{G}$-messbarem T^{-1} und eine $\mathfrak{G}'$-messbare Funktion $f : \Omega' \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_\Omega f \circ T \, d\nu = \int_{\Omega'} f \, dT(\nu),$$

wobei $f \circ T$ genau dann nach ν integrierbar ist, wenn f nach $T(\nu)$ integrierbar ist und für $g \in L^1(\nu)$ gilt

$$T(g \odot \nu) = (g \circ T^{-1}) \odot T(\nu).$$

Beweis: Die Äquivalenz der Integrierbarkeit folgt aus dem Transformationsatz für nicht-negative Maße (siehe [8] Satz 14.7.5) aus

$$\int_{\Omega'} |f| \, dT(\nu) = \int_\Omega |f| \circ T \, d\nu.$$

In dem Fall gilt

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} f \, dT(\nu) &= \int_{\Omega'} (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) \, dT(\nu) \\ &= \int_\Omega (\operatorname{Re} f \circ T + i(\operatorname{Im} f \circ T)) \, d\nu \\ &= \int_\Omega f \circ T \, d\nu.\end{aligned}$$

Also erhalten wir wegen $\mathbb{1}_{T^{-1}(G)} \circ T^{-1} = \mathbb{1}_{T(T^{-1}(G))} = \mathbb{1}_G$

$$\begin{aligned}T(g \odot \nu)(G) = (g \odot \nu)(T^{-1}(G)) &= \int_\Omega \mathbb{1}_{T^{-1}(G)} g \, d\nu \\ &= \int_\Omega (\mathbb{1}_{T^{-1}(G)} \circ T^{-1})(g \circ T^{-1}) \, dT(\nu) \\ &= \int_\Omega \mathbb{1}_G (g \circ T^{-1}) \, dT(\nu) = [(g \circ T^{-1}) \odot T(\nu)](G)\end{aligned}$$

für alle $G \in \mathfrak{G}$. □

Satz 3.1.19 (Transformationssatz) Ist $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{G}')$ ein Messraum, $T : \Omega \to \Omega'$ $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$-messbar und bijektiv mit $\mathfrak{G}'\mathfrak{G}$-messbarem T^{-1} und $f : \Omega' \to \mathbb{C}$ $\mathfrak{G}$-messbar, so gilt $f \in L^1(T(\mu))$ genau dann, wenn $f \circ T \in L^1(\mu)$. In diesem Fall gilt

$$\int_\Omega f \circ T \, d\mu = \int_{\Omega'} f \, dT(\mu) \tag{3.2}$$

Beweis: Aus Lemma 3.1.17 folgt $L^1(T(\mu)) = L^1(|T(\mu)|) = L^1(T(|\mu|))$. Nach Lemma 3.1.18 gilt $f \in L^1(T(\mu))$ genau dann, wenn $f \circ T \in L^1(|\mu|) = L^1(\mu)$.

Ist $h \in L^1(\mu)$ mit $|h| = 1$ μ-f.ü. und $\mu = h \odot |\mu|$, so folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \circ T \, d\mu &= \int_\Omega (f \circ T) h \, d|\mu| = \int_\Omega (f \circ T)(h \circ T^{-1} \circ T) \, d|\mu| \\ &= \int_\Omega [f(h \circ T^{-1})] \circ T \, d|\mu| = \int_{\Omega'} f(h \circ T^{-1}) \, dT(|\mu|) = \int_{\Omega'} f \, dT(\mu)\end{aligned}$$

aus Lemma 3.1.18. □

Korollar 3.1.20 In der Situation von Satz 3.1.19 gilt $T(f \odot \mu) = (f \circ T^{-1}) \odot T(\mu)$.

Beweis: Für $h \in L^1(\mu)$ mit $|h| = 1$ μ-f.ü. und $\mu = h \odot |\mu|$, folgt

$$\begin{aligned}T(f \odot \mu) &= T(f \odot [h \odot |\mu|]) = T(fh \odot |\mu|) = fh \circ T^{-1} \odot T(|\mu|) \\ &= (f \circ T^{-1})(h \circ T^{-1}) \odot T(|\mu|) = (f \circ T^{-1}) \odot [(h \circ T^{-1}) \odot T(|\mu|)] \\ &= (f \circ T^{-1}) \odot T(h \odot |\mu|) = f \circ T^{-1} \odot T(\mu)\end{aligned}$$

aus Bemerkung 3.1.8 und Lemma 3.1.18. □

Lemma 3.1.21 Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum, $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ und X ein Banachraum.

1. Das Mengensystem $\mathfrak{G}_\Upsilon := \{G \in \mathfrak{G} \mid G \subseteq \Upsilon\} = \mathfrak{G} \cap 2^\Upsilon$ bildet eine σ-Algebra. Im Fall eines topologischen Raumes Ω gilt $\mathfrak{B}(\Upsilon) = \mathfrak{B}(\Omega) \cap 2^\Upsilon$, wobei Υ mit der Spurtopologie versehen ist.

2. Die Einschränkung $\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}$ ist ein komplexes Maß auf $(\Upsilon, \mathfrak{G}_\Upsilon)$ mit $|\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}| = |\mu||_{\mathfrak{G}_\Upsilon}$. Für $h \in L^1(|\mu|)$ mit $\mu = h \odot |\mu|$ gilt $\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon} = h|_\Upsilon \odot |\mu||_{\mathfrak{G}_\Upsilon}$.

3. Aus der $\mathfrak{G}$-Messbarkeit von $g : \Omega \to X$, folgt die $\mathfrak{G}_\Upsilon$-Messbarkeit von $g|_\Upsilon$.

4. Eine Funktion $f : \Upsilon \to X$ ist genau dann $\mathfrak{G}_\Upsilon$-messbar, wenn $\mathbb{1}_\Upsilon f : \Omega \to X$ $\mathfrak{G}$-messbar ist.

5. Für eine messbare Funktion $f : \Upsilon \to \mathbb{C}$ ist $f \in L^1(\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon})$ äquivalent zu $f\mathbb{1}_\Upsilon \in L^1(\mu)$. In diesem Fall gilt
$$\int_\Upsilon f \, d\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon} = \int_\Omega f \mathbb{1}_\Upsilon \, d\mu. \tag{3.3}$$

Beweis:

1. Folgt aus [8] Fakta 14.7.4 1. und [8] Fakta 14.10.2 4.

2. Für $G \in \mathfrak{G}_\Upsilon$ gilt
$$\begin{aligned}\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}(G) = \mu(G) &= \int_\Omega \mathbb{1}_G h \, d|\mu| = \int_\Omega \mathbb{1}_G h|_\Upsilon \mathbb{1}_\Upsilon \, d|\mu| = \int_\Upsilon \mathbb{1}_G h|_\Upsilon \, d|\mu||_{\mathfrak{G}_\Upsilon} \\ &= (h|_\Upsilon \odot |\mu||_{\mathfrak{G}_\Upsilon})(G)\end{aligned}$$
wegen [8] (14.17). Daraus folgt $\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon} = h|_\Upsilon \odot |\mu||_{\mathfrak{G}_\Upsilon}$.

   Wegen $|h|_\Upsilon| = 1$ $\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}$-f.ü. folgt damit $|\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}| = |\mu||_{\mathfrak{G}_\Upsilon}$ aus [8] Lemma 18.3.13.

3. Die Behauptung folgt aus $(g|_\Upsilon)^{-1}(B) = g^{-1}(B) \cap \Upsilon$, $B \in \mathfrak{B}(X)$.

4. Sei $B \in \mathfrak{B}(X)$. Im Fall $0 \notin B$ gilt $(\mathbb{1}_\Upsilon f)^{-1}(B) = f^{-1}(B) \in \mathfrak{G}_\Upsilon \subseteq \mathfrak{G}$. Andernfalls folgt $(\mathbb{1}_\Upsilon f)^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cup (\Omega \setminus \Upsilon) \in \mathfrak{G}$.
Die Umkehrung folgt aus Punkt 3 mit $g = \mathbb{1}_\Upsilon f$.

5. Es gilt $f \in L^1(\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon})$ genau dann, wenn $|f| \in L^1(|\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}|) = L^1(|\mu||_{\mathfrak{G}_\Upsilon})$. Nach [8] Fakta 14.7.4 5. ist dies äquivalent zu $|f\mathbb{1}_\Upsilon| = |f|\mathbb{1}_\Upsilon \in L^1(|\mu|)$ und folglich $f\mathbb{1}_\Upsilon \in L^1(\mu)$.

   In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\mathbb{1}_\Upsilon \, d\mu &= \int_\Omega f\mathbb{1}_\Upsilon h \, d|\mu| = \int_\Omega (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) h|_\Upsilon \mathbb{1}_\Upsilon \, d|\mu| \\ &= \int_\Upsilon (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) h|_\Upsilon \, d\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon} = \int_\Upsilon f \, d\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}\end{aligned}$$

   wegen [8] (14.17) und 2.

□

Bemerkung 3.1.22 Im Folgenden wird meist auf die Einschränkung des Maßes verzichtet und für (3.3) schlicht $\int_\Upsilon f \, d\mu$ geschrieben beziehungsweise von der μ-Integrierbarkeit über Υ gesprochen.

3.2 komplexe Maße auf $\mathfrak{B}([0, +\infty))$

Beispiel 3.2.1 Wir betrachten $[0, +\infty)$ versehen mit der Euklidischen Topologie. Für $t \in [0, +\infty)$ ist $\{[t - k^{-1}, t + k^{-1}] \cap [0, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis des Umgebungsfilters von t bestehend aus kompakten Mengen. Damit ist $[0, +\infty)$ lokal-kompakt.
Die abzählbare Teilmenge $\mathbb{Q} \cap [0, +\infty)$ liegt dicht in $[0, +\infty)$ und
$\{(t - k^{-1}, t + k^{-1}) \cap [0, +\infty) \mid k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Q}\}$ bildet eine abzählbare Basis der Topologie.

Definition 3.2.2 Der Vektorraum aller komplexen Maße $\mu : \mathfrak{B}([0, +\infty)) \to \mathbb{C}$ wird mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet.

Definition 3.2.3 Sei X ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum und Z ein Banachraum.

1. $C(X, Z)$ bezeichnet die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \to Z$.

2. Für eine Funktion $f : X \to Z$ definiert $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}^X$ den Träger von f.
   Der Vektorraum $C_c(X, Z)$ besteht aus den stetigen Funktionen $f : X \to Z$ mit kompaktem Träger.

3. Im Fall $Z = \mathbb{C}$ wird anstelle von $C(X, \mathbb{C})$ auch $C(X)$ und statt $C_c(X, \mathbb{C})$ auch $C_c(X)$ gschrieben.

4. Eine Funktion $f \in C(X)$ verschwindet im Unendlichen, wenn für jede Nullumgebung U in $\mathbb{C}$ eine kompakte Teilmenge K_U von X mit $f(X \setminus K_U) \subseteq U$ existiert. Die Menge all dieser Funktionen wird mit $C_0(X)$ bezeichnet.

5. $C_b(X)$ bezeichnet die Menge aller beschränkten Funktionen aus $C(X)$.

6. Für $I \subseteq \mathbb{R}$ wird die Menge der k-mal stetig differenzierbaren beziehungsweise glatten Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ mit $C^k(I)$ beziehungsweise $C^\infty(I)$ notiert.

Bemerkung 3.2.4

1. Versehen mit der durch $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$, $f \in C_0(X)$, definierten Norm bildet $C_0(X)$ einen Banachraum.

2. Für ein komplexes Maß $\mu : \mathfrak{B}(X) \to \mathbb{C}$ gilt $C_c(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X) \subseteq L^1(\mu)$.

Bemerkung 3.2.5 (Riesz-Markov) Nach dem Satz von Riesz-Markov (siehe [8] Satz 18.4.7) und [8] Satz 14.12.5 v. ist die Abbildung $\Phi_0 : \mathfrak{M} \to C_0([0, +\infty))'$, die einem Maß $\mu \in \mathfrak{M}$ die durch

$$\Phi_0(\mu)f = \int_{[0,+\infty)} f \, d\mu, \;\; f \in C_0([0, +\infty)),$$

definierte Linearform zuweist, eine isometrische Isomorphie, wobei $\mathfrak{M}$ mit der Norm $\|\nu\| = |\nu|([0, +\infty)$ und $C_0([0, +\infty))'$ mit der Operatornorm versehen ist.

Definition 3.2.6 Für Vektorräume V und W jeweils bestehend aus Funktionen von $[0, +\infty)$ nach $\mathbb{C}$ sei das Tensorprodukt $V \otimes W$ der Vektorraum aller Linearkombinationen von Funktionen der Form

$$f \otimes g : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \mathbb{C} \;\; \text{definiert durch} \;\; (f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$$

mit $f \in V, g \in W$.

Bemerkung 3.2.7 Nach dem Satz von Stone-Weierstrass (siehe [8] Korollar 12.18.11) liegt $C_0([0, +\infty)) \otimes C_0([0, +\infty))$ dicht in $C_0([0, +\infty) \times [0, +\infty))$.

Fakta 3.2.8 Für V, W wie in Definition 3.2.6 und $f, h \in V$, $g, b \in W$

1. ist die Abbildung $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ bilinear, da $((f \otimes g) + z(h \otimes g))(s, t) = (f \otimes g)(s, t) + z(h \otimes g)(s, t) = f(s)g(t) + zh(s)g(t) = (f(s) + zh(s))g(t) = ((f + zh) \otimes g)(s, t)$ für $s, t \geq 0$ und analog $(f \otimes g) + z(f \otimes b) = f \otimes (g + zb)$.

2. haben wir $|f \otimes g|(s, t) = |f(s)g(t)| = |f(s)||g(t)| = (|f| \otimes |g|)(s, t)$,

3. gilt $((f \otimes g)(h \otimes b))(s, t) = f(s)g(t)h(s)b(t) = f(s)h(s)g(t)b(t) = (fh \otimes gb)(s, t)$ für $s, t \geq 0$.

Für Produktmaße positiver Maße sei auf [8], 14.14 verwiesen.

Definition 3.2.9 Für $\nu, \tau \in \mathfrak{M}$ gibt es nach [8] Korollar 18.3.14 Funktionen $h_\nu \in L^1(\nu), h_\tau \in L^1(\tau)$ mit $|h_\nu| = 1$ ν-f.ü., $|h_\tau| = 1$ τ-f.ü. und $\nu = h_\nu \odot |\nu|, \tau = h_\tau \odot |\tau|$. Dann definiert

$$\nu \otimes \tau := (h_\nu \otimes h_\tau) \odot (|\nu| \otimes |\tau|) \tag{3.4}$$

ein komplexes Maß auf dem Messraum $([0,+\infty) \times [0,+\infty), \mathfrak{B}([0,+\infty)) \otimes \mathfrak{B}([0,+\infty)))$.

Fakta 3.2.10

1. Da $[0,+\infty)$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, entspricht die Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{B}([0,+\infty)) \otimes \mathfrak{B}([0,+\infty))$ nach [8] Fakta 14.13.7 5, den Borel-Mengen $\mathfrak{B}([0,+\infty) \times [0,+\infty))$, womit $\nu \otimes \tau$ ein komplexes Maß auf $([0,+\infty) \times [0,+\infty), \mathfrak{B}([0,+\infty) \otimes [0,+\infty)))$ ist.

2. Seien h_ν, h_τ wie in Definition 3.2.9 und die Nullmengen $N_\nu = h_\nu^{-1}(\Theta)$ und $N_\tau = h_\tau^{-1}(\Theta)$, wobei $\Theta = \{z : |z| \neq 1\}$. Dann gilt $|h_\nu \otimes h_\tau|((\omega_1, \omega_2)) = |h_\nu(\omega_1)||h_\tau(\omega_2)| = 1$ für

$$\begin{aligned}(\omega_1, \omega_2) &\in ([0,+\infty) \setminus N_\nu) \times ([0,+\infty) \setminus N_\nu) \\ &= ([0,+\infty) \times [0,+\infty)) \setminus [([0,+\infty) \times N_\nu) \cup ([0,+\infty) \times N_\nu)],\end{aligned}$$

   wobei

$$\begin{aligned}(|\nu| \otimes |\tau|)&(([0,+\infty) \times N_\nu) \cup ([0,+\infty) \times N_\nu)) \\ &\leq (|\nu| \otimes |\tau|)([0,+\infty) \times N_\nu) + (|\nu| \otimes |\tau|)([0,+\infty) \times N_\nu)) \\ &= |\nu|([0,+\infty))|\tau|(N_\nu) + |\nu|([0,+\infty))|\tau|(N_\nu) = 0,\end{aligned}$$

   also $|h_\nu \otimes h_\tau| = 1$ $(|\nu| \otimes |\tau|)$-f.ü..

   Aus (3.4) und [8] Lemma 18.3.13 folgt $|\nu \otimes \tau| = |\nu| \otimes |\tau|$.

3. Für $f \in L^1(\nu), g \in L^1(\tau)$ gilt

$$\begin{aligned}\left| \int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} f \otimes g \, d(\nu \otimes \tau) \right| &\leq \int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} |f \otimes g| \, d|\nu \otimes \tau| \\ &= \int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} |f| \otimes |g| \, d|\nu| \otimes |\tau| \\ &= \int_{[0,+\infty)} |f| \, d|\nu| \int_{[0,+\infty)} |g| \, d|\tau| < +\infty\end{aligned}$$

   wegen Punkt 2 und dem Satz von Fubini (siehe [8] Satz 14.14.4), wodurch $L^1(\nu) \otimes L^1(\tau) \subseteq L^1(\nu \otimes \tau)$.

Lemma 3.2.11 Für $\mu \in \mathfrak{M}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sind die Funktionen $(t \mapsto \frac{1}{z+t}), (t \mapsto \frac{t}{z+t}), (t \mapsto \frac{1+t}{z+t}), (t \mapsto \frac{1}{1+zt}), (t \mapsto \frac{t}{1+zt})$ und $(t \mapsto \frac{1+t}{1+zt})$ auf $[0,+\infty)$ beschränkt und μ-integrierbar.

Beweis: Bezeichne f eine der angeführten Funktionen. Durch Division in Zähler und Nenner durch t zeigt man, dass $w := \lim_{t \to +\infty} f(t) \in \mathbb{C}$. Für $\epsilon > 0$ gibt es damit ein $c > 0$ mit $|f(t) - w| < \epsilon$. Also gilt $|f(t)| \leq |f(t) - w| + |w| \leq \epsilon + |w|$ für $t > c$. Die Funktion f ist stetig und deshalb beschränkt auf dem kompakten Intervall $[0, c]$. Also ist f beschränkt auf $[0,+\infty)$ und folglich μ-integrierbar. □

Lemma 3.2.12 Für $z, \epsilon + z > 0$, $t \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{(z+t)^n(z+t+\epsilon)} = \sum_{j=1}^{n} \epsilon^{-1}(-\epsilon)^{-(n-j)} \frac{1}{(z+t)^j} + (-\epsilon)^{-n} \frac{1}{z+t+\epsilon}.$$

Beweis: Der Ansatz $\frac{1}{(z+t)^n(z+t+\epsilon)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{(z+t)^j} + \frac{c_{n+1}}{z+t+\epsilon}$ führt auf

$$\begin{aligned}
1 &= (z+t+\epsilon)\sum_{j=1}^{n} c_j (z+t)^{n-j} + c_{n+1}(z+t)^n \\
&= (z+t)\sum_{j=1}^{n} c_j (z+t)^{n-j} + \epsilon \sum_{j=1}^{n} c_j (z+t)^{n-j} + c_{n+1}(z+t)^n \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j (z+t)^{n-j+1} + \epsilon \sum_{j=1}^{n} c_j (z+t)^{n-j} + c_{n+1}(z+t)^n \\
&= \left(c_1(z+t)^n + \sum_{j=1}^{n-1} c_{j+1}(z+t)^{n-j} \right) + \left(\epsilon \sum_{j=1}^{n-1} c_j (z+t)^{n-j} + \epsilon c_n \right) + c_{n+1}(z+t)^n \\
&= \epsilon c_n + \sum_{j=1}^{n-1} [c_{j+1} + \epsilon c_j](z+t)^{n-j} + [c_1 + c_{n+1}](z+t)^n.
\end{aligned}$$

Fasst man beide Seiten dieser Gleichung als Polynome in $z+t$ auf, so liefert ein Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\epsilon c_n &= 1, \\
c_{j+1} + \epsilon c_j &= 0, \; j = 1, ..., n-1, \\
c_1 + c_{n+1} &= 0,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \epsilon & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \epsilon & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \epsilon & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \epsilon & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\epsilon & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man überpürft leicht, dass $c_n = \frac{1}{\epsilon}, c_j = \frac{1}{\epsilon}(-\frac{1}{\epsilon})^{n-j}$, für $j = 1, ..., n-1$, und $c_{n+1} = -c_1 = -(\frac{1}{\epsilon}(-\frac{1}{\epsilon})^{n-1}) = (-\frac{1}{\epsilon})^n$ eine Lösung davon ist. □

Lemma 3.2.13 Für $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}$ derart, dass 1 ein Häufungspunkt von

$$M := \left\{ x > 0 \mid \int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{x+t} \, d\mu_1(t) = \int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{x+t} \, d\mu_2(t) \right\}$$

ist, gilt $\mu_1 = \mu_2$.

Beweis: Die Gleichheit wird schrittweise ausgedehnt. Zunächst sei bemerkt, dass M wegen der Stetigkeit von $x \mapsto \int_{[0,+\infty)} \frac{x(1+t)}{1+xt}\, d\mu(t)$ abgeschlossen in $(0, +\infty)$ ist; siehe Proposition 3.3.3. Also liegt 1 in M.

1. Wir zeigen $\int_{[0,+\infty)} (1+t)^{-n+1}\, d\mu_1(t) = \int_{[0,+\infty)} (1+t)^{-n+1}\, d\mu_2(t)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mittels Induktion nach n.
   Für $n = 1$ gilt dies nach Vorraussetzung. Angenommen, die Aussage gilt für alle $m \leq n$. Sei $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M \setminus \{1\}$ mit $\lim_{k\to\infty} \epsilon_k = 1$. Für die Funktion $v_k : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definiert durch $v_k(t) := (1+t)^{-n+1}(\epsilon_k + t)^{-1}$, gilt laut Lemma 3.2.12 angewandt für $z = 1$ und $\epsilon = \epsilon_k - 1$

$$v_k(t) = \sum_{j=1}^{n} (1-\epsilon_k)^{-n+j}(\epsilon_k - 1)^{-1} \frac{1}{(1+t)^{j-1}} + (1-\epsilon_k)^{-n} \frac{1+t}{\epsilon_k + t}, \tag{3.5}$$

   und wegen $|v_k(t) - (1+t)^{-n}| = (1+t)^{-n+1} \frac{|\epsilon_k - 1|}{(\epsilon_k+t)(1+t)} \leq \frac{|\epsilon_k - 1|}{\epsilon_k}$, dass $\lim_{k\to\infty} v_k(t) = (1+t)^{-n}$. Aus

$$|v_k(t)| = \left|(1+t)^{-n+1}(\epsilon_k + t)^{-1}\right| = (1+t)^{-n+1}(\epsilon_k + t)^{-1} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \epsilon_k^{-1} < +\infty$$

   folgt $v_k \in L^1(\mu_l)$ für $k \in \mathbb{N}$. Aufgrund des Satzes von der beschränkten Konvergenz (siehe Satz 3.1.12) erhalten wir

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,+\infty)} v_k(t)\, d\mu_l(t) = \int_{[0,+\infty)} (1+t)^{-n}\, d\mu_l(t), \;\; l = 1, 2. \tag{3.6}$$

   Wegen der Induktions-Vorraussetzung, $\epsilon_k \in M$, der Linearität des Integrals und (3.5) gilt

$$\int_{[0,+\infty)} v_k(t)\, d\mu_1(t) = \int_{[0,+\infty)} v_k(t)\, d\mu_2(t), \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

   Mit (3.6) und (3.7) folgt $\int_{[0,+\infty)} (1+t)^{-n}\, d\mu_1(t) = \int_{[0,+\infty)} (1+t)^{-n}\, d\mu_2(t)$.

2. Die von $t \mapsto (1+t)^{-1}$ erzeugte Unteralgebra $C \leq C_0([0, +\infty))$ stimmt mit der linearen Hülle von $\left\{t \mapsto (1+t)^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ überein. Wegen der Linearität des Integrals und des ersten Beweisteiles stimmt das Integral einer Funktion aus C nach μ_1 mit jenem nach μ_2 überein.

3. Da C punktetrennend und nirgends verschwindend ist, gibt es nach dem Satz von Stone-Weierstrass (siehe [8] Korollar 12.18.11) zu $\psi \in C_0([0, +\infty))$ Funktionen $\psi_n \in C, n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{n\to\infty} \|\psi - \psi_n\|_\infty = 0$, weshalb nach Lemma 3.1.11

$$\begin{aligned} \int_{[0,+\infty)} \psi(t)\, d\mu_1(t) &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} \psi_n(t)\, d\mu_1(t) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} \psi_n(t)\, d\mu_2(t) = \int_{[0,+\infty)} \psi(t)\, d\mu_2(t) \end{aligned}$$

   aus 2. folgt.

Gemäß des Satzes von Riesz-Markov (siehe [8] Satz 18.4.7) erhalten wir $\mu_1 = \mu_2$. $\square$

Für $w \in C^1([0,+\infty))$ definiert

$$\widehat{w}(s,t) = \begin{cases} \frac{w(t)-w(s)}{t-s} & s \neq t, \\ w'(t) & s = t, \end{cases}$$

eine stetige Funktion auf $[0,+\infty)^2$.

Lemma 3.2.14 Für $f, g \in C^1([0,+\infty))$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\alpha\widehat{f} = \widehat{\alpha f}$.
2. $\widehat{f} + \widehat{g} = \widehat{f+g}$.
3. $\widehat{fg}(s,t) = \widehat{f}(s,t)g(t) + f(s)\widehat{g}(s,t)$.
4. Ist $(K, \preceq)$ eine gerichtete Menge, $f_k \in C^1([0,+\infty)), k \in K$ und $s, t \geq 0$ mit $s \neq t$, so folgt $\lim_{k\in K} \widehat{f_k}(s,t) = \widehat{f}(s,t)$ aus der punktweisen Konvergenz $\lim_{k\in K} f_k = f$.

Beweis: Für $s \neq t$ gilt

$$\begin{aligned}\widehat{f+\alpha g}(s,t) &= \frac{(f(t)+\alpha g(t)) - (f(s)+\alpha g(s))}{t-s} = \frac{f(t)-f(s)}{t-s} + \frac{\alpha(g(t)-g(s))}{t-s} \\ &= \widehat{f}(s,t) + \alpha\widehat{g}(s,t).\end{aligned}$$

In der Kombination mit der Linearität der Ableitung sind daher die ersten zwei Punkte bewiesen.

Hinsichtlich des 3. Punktes gilt für $s \neq t$

$$\begin{aligned}\widehat{fg}(s,t) &= \frac{f(t)g(t) - f(s)g(s)}{t-s} = \frac{f(t)g(t) - f(s)g(t)}{t-s} + \frac{f(s)g(t) - f(s)g(s)}{t-s} \\ &= \widehat{f}(s,t)g(t) + f(s)\widehat{g}(s,t).\end{aligned}$$

Im Fall $s = t$ folgt die Gleichheit aus der Produktregel.

Für $t \neq s$ beweist die Abschätzung

$$\left|\widehat{f_k}(s,t) - \widehat{f}(s,t)\right| \leq \left|(t-s)^{-1}\right|[|f_k(t) - f(t)| + |f_k(s) - f(s)|],$$

für alle $k \in K$, den 4. Punkt. $\square$

Bemerkung 3.2.15 Im 4. Punkt konvergieren die Ableitungen in der Diagonale im allgemeinen nicht. Zum Beispiel konvergiert die Folge $(t \mapsto \sin(tn)n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen 0 für $n \to +\infty$, während die Folge der Ableitungen $(t \mapsto \cos(tn))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Beispiel 3.2.16 Die für $x > 0$ auf $[0,+\infty)$ definierte Funktion $w_x : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $w_x(t) = \frac{1}{x+t}$, erfüllt $w_x'(t) = -w_x(t)^2 = -(w_x \otimes w_x)(t,t)$ und für verschiedene $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned}\widehat{w_x}(s,t) &= \frac{w_t - w_s}{t-s} = \frac{\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x+s}}{t-s} = \frac{\frac{(x+s)-(x+t)}{(x+t)(x+s)}}{t-s} = \frac{s-t}{(t-s)(x+t)(x+s)} \\ &= -\frac{1}{(x+t)(x+s)} = -(w_x \otimes w_x)(s,t),\end{aligned}$$

womit $w_x \otimes w_x = \widehat{w_x}$.
Für $\mu, \nu, \tau \in \mathfrak{M}$ folgt $w_x w_1^{-1} = (t \mapsto \frac{1+t}{x+t}) \in L^1(\mu), L^1(\nu), L^1(\tau)$ aus Lemma 3.2.11 und wegen Fakta 3.2.10 3. liegt $\widehat{w_x}(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) = -(w_x \otimes w_x)(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) = -(w_x w_1^{-1} \otimes w_x w_1^{-1})$ in $L^1(\nu) \otimes L^1(\tau) \subseteq L^1(\nu \otimes \tau)$, wobei $(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1})(s,t) = (1+s)(1+t)$; siehe Fakta 3.2.8 3.

Mit $w_x(t) = \frac{1}{x+t}$ für $x > 0$ und $t \in [0, +\infty)$ gilt folgendes Resultat.

Lemma 3.2.17 Für eine endliche Indexmenge I und $\nu, \tau \in \mathfrak{M}$, $\mu_i \in \mathfrak{M}, i \in I$, ist

$$E^{\nu,\tau}_{\mu_i, i \in I} = \left\{ u \in C^1([0,+\infty), \mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} u w_1^{-1} \text{ ist } \mu_i\text{-integrierbar}, i \in I, \\ \widehat{u}(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) \text{ ist } (\nu \otimes \tau)\text{-integrierbar} \end{array} \right\}$$

ein Vektorraum. Für feste $a_i \in \mathbb{C}, i \in I$, sind $L_1, L_2, L : E^{\nu,\tau}_{\mu_i, i \in I} \to \mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned} L_1(u) &:= \sum_{i \in I} a_i \int_{[0,+\infty)} u w_1^{-1} \, d\mu_i, \\ L_2(u) &:= \int_{[0,+\infty)^2} \widehat{u}(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) \, d(\nu \otimes \tau) \end{aligned}$$

und $L = L_1 + L_2$ linear. Zudem gilt $w_x \in E^{\nu,\tau}_{\mu_i, i \in I}$, wobei $L(w_x) = 0$ für alle $x > 0$ bereits $L = 0$ nach sich zieht.

Beweis: Da $\mathfrak{M}$ ein Vektorraum ist, genügt es wegen [8] Fakta 18.3.16 5. die Aussage für $|I| = 1$, also $\mu \in \mathfrak{M}$ und $a_1 = 1$ zu zeigen.

Für $u, v \in E^{\nu,\tau}_{\mu}$ und $\beta \in \mathbb{C}$ erhält man $(u + \beta v) w_1^{-1} = u w_1^{-1} + \beta v w_1^{-1} \in L^1(\mu)$ und $\widehat{(u + \beta v)}(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) = (\widehat{u} + \beta \widehat{v})(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) = \widehat{u}(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) + \beta \widehat{v}(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1})$ aus Lemma 3.2.14 1. und 2. Folglich ist $E^{\nu,\tau}_{\mu}$ ein Vektorraum.

Die Linearität von $L_1, L_2, L : E^{\nu,\tau}_{\mu} \to \mathbb{C}$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} L_1(u + \beta v) &= \int_{[0,+\infty)} (u(t) + \beta v(t))(1+t) \, d\mu(t) \\ &= \int_{[0,+\infty)} u(t)(1+t) \, d\mu(t) + \beta \int_{[0,+\infty)} v(t)(1+t) \, d\mu(t) = L_1(u) + \beta L_1(v), \\ L_2(u + \beta v) &= \int_{[0,+\infty)^2} \widehat{(u + \beta v)}(s,t)(1+t)(1+s) \, d(\nu \otimes \tau)(s,t) \\ &= \int_{[0,+\infty)^2} \widehat{u}(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) \, d(\nu \otimes \tau) + \beta \int_{[0,+\infty)^2} \widehat{v}(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) \, d(\nu \otimes \tau) \\ &= L_2(u) + \beta L_2(v). \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}L(u+\beta v) &= (L_1+L_2)(u+\beta v) = L_1(u+\beta v) + L_2(u+\beta v)\\ &= L_1(u) + \beta L_1(v) + L_2(u) + \beta L_2(v) = (L_1+L_2)(u) + \beta(L_1+L_2)(v)\\ &= L(u) + \beta L(v).\end{aligned}$$

Der folgende Beweisgang folgt einem ähnlichen Schema wie jener von Lemma 3.2.13. Es wird sukzessive nachgewiesen, dass immer größere Teilmengen von $E_\mu^{\nu,\tau}$ im Kern von L enthalten sind.
Die Punkte 1 und 2 zeigen, dass die Funktionen

$$w_x^n := (x+t)^{-n},\ x \in (0,+\infty),\ n \in \mathbb{N},$$

in $E_\mu^{\nu,\tau}$ und unter der Voraussetzung, dass $L(w_x) = 0, x \in (0,+\infty)$, sogar im Kern von L enthalten sind. In 3. wird $C_c^1([0,+\infty)) \subseteq \ker(L)$ bewiesen, bevor in 4. dargelegt wird, dass $L(u) = 0$ für alle $u \in E_\mu^{\nu,\tau}$.

1. Wir zeigen mittels Induktion $w_x^n \in E_\mu^{\nu,\tau}$ für alle $n \in \mathbb{N}, x \in (0,+\infty)$.

   Im Fall $n = 1$ gilt dies gemäß Beispiel 3.2.16. Angenommen, die Aussage gilt für alle $k \leq n$. Für $x > 0$ gilt wegen $w_x \leq \frac{1}{x}$ die Ungleichung $w_x^{n+1}w_1^{-1} = w_x w_x^n w_1^{-1} \leq \frac{1}{x} w_x^n w_1^{-1} \in L^1(\mu)$ und

   $$\begin{aligned}\left|\widehat{w_x^{n+1}}(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1})\right|(s,t) &= \left|\widehat{w_x^n w_x}(s,t)\right|(1+t)(1+s)\\ &= \left|w_x(s)\widehat{w_x^n}(s,t) + w_x^n(t)\widehat{w_x}(s,t)\right|(1+t)(1+s)\\ &\leq \Big(|w_x(s)|\left|\widehat{w_x^n}(s,t)\right| + |w_x^n(t)||\widehat{w_x}(s,t)|\Big)(1+t)(1+s)\\ &= w_x(s)\left|\widehat{w_x^n}(s,t)\right|(1+t)(1+s) + w_x^n(t)|\widehat{w_x}(s,t)|(1+t)(1+s)\\ &\leq \frac{1}{x}\left|\widehat{w_x^n}(s,t)\right|(1+t)(1+s) + \frac{1}{x^n}|\widehat{w_x}(s,t)|(1+t)(1+s)\\ &= \left(\frac{1}{x}\left|\widehat{w_x^n}\right|(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1}) + \frac{1}{x^n}|\widehat{w_x}|(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1})\right)(s,t),\ \ s,t \geq 0,\end{aligned}$$

   wobei $\frac{1}{x}\left|\widehat{w_x^n}\right|(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1}) + \frac{1}{x^n}|\widehat{w_x}|(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1}) \in L^1(\nu\otimes\tau)$, siehe Fakta 3.2.8, Lemma 3.2.14 3. und Beispiel 3.2.16. Damit erhält man $w_x^{n+1}w_1^{-1} \in L^1(\mu)$ und $\widehat{w_x^{n+1}}(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1}) \in L^1(\nu\otimes\tau)$ aus Fakta 3.1.10 3, also $w_x^{n+1} \in E_\mu^{\nu,\tau}$.

2. Unter der Annahme, dass $L(w_x) = 0,\ x \in (0,+\infty)$ zeigen wir als nächstes $L(w_x^n) = 0,\ x \in (0,+\infty)$, per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

   Der Induktionsanfang ist in den Vorraussetzungen dieses Lemmas enthalten. Gelte also $L(w_x^k) = 0,\ x \in (0,+\infty)$, für alle $k \leq n$. Für $\epsilon > 0$ liegt die Funktion $v_\epsilon : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ mit $v_\epsilon(t) = (x+t)^{-n}(x+t+\epsilon)^{-1}$ als Linearkombination

   $$v_\epsilon(t) = (x+t)^{-n}(x+t+\epsilon)^{-1} = \sum_{j=1}^{n}(-\epsilon)^{-n+j}\epsilon^{-1}\frac{1}{(x+t)^j} + (-\epsilon)^{-n}\frac{1}{x+\epsilon+t} \tag{3.8}$$

von Elemente aus dem linearen Teilraum $\ker(L)$ selbst in $\ker(L) \subseteq E_\mu^{\nu,\tau}$; siehe Lemma 3.2.12. Aus

$$\begin{aligned}\left|v_\epsilon(t) - \frac{1}{(x+t)^{n+1}}\right| &= \frac{1}{(x+t)^n}\left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x+t+\epsilon}\right) \\ &= \frac{1}{(x+t)^n}\frac{\epsilon}{(x+t)(x+t+\epsilon)} \leq \frac{\epsilon}{x^{n+2}},\end{aligned}$$

folgt $\lim_{\epsilon\searrow 0} v_\epsilon(t)(1+t) = (x+t)^{-(n+1)}(1+t) = w_x^{n+1}(t)(1+t)$ für alle $t \geq 0$. Wegen $w_x^{n+1} \in E_\mu^{\nu,\tau}$ hat man $\left|v_\epsilon w_1^{-1}\right| \leq w_x^{n+1} w_1^{-1} \in L^1(\mu)$. Also erhalten wir aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz (siehe Satz 3.1.13)

$$\lim_{\epsilon\searrow 0} L_1(v_\epsilon) = \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{[0,+\infty)} v_\epsilon(t)(1+t)\,d\mu(t) = \int_{[0,+\infty)} w_x^{n+1}(t)(1+t)\,d\mu(t) = L_1(w_x^{n+1}).$$

Nach Beispiel 3.2.16 haben wir $|\widehat{w_{x+\epsilon}}| = |-w_{x+\epsilon}\otimes w_{x+\epsilon}| = w_{x+\epsilon}\otimes w_{x+\epsilon} \leq w_x \otimes w_x = |-w_x\otimes w_x| = |\widehat{w_x}|$ und infolge

$$\begin{aligned}\left|\widehat{v_\epsilon}(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1})(s,t)\right| &= \left|\widehat{w_x^n w_{x+\epsilon}}(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1})(s,t)\right| = \left|\widehat{w_x^n w_{x+\epsilon}}(s,t)\right|(1+t)(1+s) \\ &= \left|w_{x+\epsilon}(s)\widehat{w_x^n}(s,t) + w_x^n(t)\widehat{w_{x+\epsilon}}(s,t)\right|(1+t)(1+s) \\ &\leq \Big(|w_{x+\epsilon}(s)|\left|\widehat{w_x^n}(s,t)\right| + |w_x^n(t)|\left|\widehat{w_{x+\epsilon}}(s,t)\right|\Big)(1+t)(1+s) \\ &= w_{x+\epsilon}(s)\left|\widehat{w_x^n}(s,t)\right|(1+t)(1+s) + w_x^n(t)\left|\widehat{w_{x+\epsilon}}(s,t)\right|(1+t)(1+s) \\ &\leq \frac{1}{x}\left|\widehat{w_x^n}(s,t)\right|(1+t)(1+s) + \frac{1}{x^n}|\widehat{w_x}(s,t)|(1+t)(1+s) \\ &= \left(\frac{1}{x}\left|\widehat{w_x^n}\right|(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1}) + \frac{1}{x^n}|\widehat{w_x}|(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1})\right)(s,t),\ \ s,t\geq 0,\end{aligned}$$

siehe Fakta 3.2.8, Lemma 3.2.14 3. und Beispiel 3.2.16. Wegen $w_x^n, w_x \in E_\mu^{\nu,\tau}$ gilt dabei $\frac{1}{x}\left|\widehat{w_x^n}\right|(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1}) + \frac{1}{x^n}|\widehat{w_x}|(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1}) \in L^1(\nu\otimes\tau)$. Aus Lemma 3.2.14 4. und

$$\begin{aligned}v_\epsilon' - (w_x^{n+1})' &= (w_x^n w_{x+\epsilon})' - (w_x^{n+1})' \\ &= (w_x^n)' w_{x+\epsilon} + w_x^n (w_{x+\epsilon})' - (w_x^{n+1})' \\ &= (-n)w_x^{n+1}w_{x+\epsilon} + w_x^n(-1)w_{x+\epsilon}^2 - (-n-1)w_x^{n+2} \\ &= -nw_x^{n+1}w_{x+\epsilon} - w_x^n w_{x+\epsilon}^2 + [nw_x^{n+1}w_x + w_x^n w_x^2] \\ &= nw_x^{n+1}[w_x - w_{x+\epsilon}] + w_x^n[w_x^2 - w_{x+\epsilon}^2]\end{aligned}$$

folgt $\lim_{\epsilon\searrow 0}\widehat{v_\epsilon}(s,t) = \widehat{w_x^{n+1}}(s,t)$ für $s,t\geq 0$. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\searrow 0} L_2(v_\epsilon) &= \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{[0,+\infty)^2}\widehat{v_\epsilon}(s,t)(1+t)(1+s)\,d(\nu\otimes\tau)(s,t) \\ &= \int_{[0,+\infty)^2}\widehat{w_x^{n+1}}(s,t)(1+t)(1+s)\,d(\nu\otimes\tau)(s,t) = L_2(w_x^{n+1}).\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$L(w_x^{n+1}) = L_1(w_x^{n+1}) + L_2(w_x^{n+1}) = \lim_{\epsilon \searrow 0} L_1(v_\epsilon) + \lim_{\epsilon \searrow 0} L_2(v_\epsilon) = \lim_{\epsilon \searrow 0} L(v_\epsilon) = 0.$$

Also ist die von w_x erzeugte Algebra $C_x = \operatorname{span}\{w_x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ im Kern von L enthalten.

3. $C_c^1([0,+\infty)) \subseteq \ker(L)$:

Wegen der Linearität von L genügt es, die Inklusion für reellwertige Funktionen zu zeigen. Seien $u \in C_c^1([0,+\infty),\mathbb{R}), x > 0$ und $v \in C_0([0,+\infty),\mathbb{R})$ definiert durch $v(t) := (x+t)^2 u'(t), t \geq 0$.
Die Unteralgebra C_x von $C_0([0,+\infty),\mathbb{R})$ ist wegen $w_x(t) = (x+t)^{-1} \neq (x+s)^{-1} = w_x(s)$ für ungleiche $s,t \geq 0$ punktetrennend, und wegen $w_x(t) = (x+t)^{-1} > 0$, $t \geq 0$, nirgends verschwindend. Also gibt es nach dem Satz von Stone-Weierstrass (siehe [8] Korollar 12.18.11) zu $\epsilon > 0$ ein $v_\epsilon = \sum_{j=0}^{n_\epsilon} c_j w_x^j \in C_x$ mit $|v - v_\epsilon| \leq \epsilon$ und folglich

$$\left| u'(t) - \frac{v_\epsilon(t)}{(x+t)^2} \right| \leq \frac{\epsilon}{(x+t)^2}. \tag{3.9}$$

Die Stammfunktion $u_\epsilon(t) := -\int_{(t,+\infty)} v_\epsilon(s)(x+s)^{-2}\, ds$ von $v_\epsilon w_x^2 = \sum_{j=0}^{n_\epsilon} c_j w_x^j w_x^2 = \sum_{j=0}^{n_\epsilon} c_j w_x^{j+2}$ erfüllt wegen [7] Korollar 8.4.7 für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} u_\epsilon(t) &= -\int_{(t,+\infty)} \sum_{j=0}^{n_\epsilon} c_j w_x^{j+2}(s)\, ds = \sum_{j=0}^{n_\epsilon} c_j \left(-\int_{(t,+\infty)} w_x^{j+2}(s)\, ds \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n_\epsilon} \frac{c_j}{-j-3} w_x^{j+3}(t), \end{aligned}$$

liegt also in $C_x \subseteq E_\mu^{\nu,\tau}$, wobei $\lim_{N\to+\infty} u_\epsilon(N) = 0$.

Für alle $t \geq 0$ gilt

$$-\int_{(t,+\infty)} u'(s)\, ds = -\lim_{N\to+\infty} \int_{(t,N)} u'(s)\, ds = -\lim_{N\to+\infty} [u(N) - u(t)] = u(t),$$

weil u kompakten Träger hat. Aus (3.9) folgt

$$|u_\epsilon(t) - u(t)| = \left| \int_{(t,+\infty)} \left(\frac{v_\epsilon(s)}{(x+s)^2} - u'(s) \right) ds \right| \leq \int_{(t,+\infty)} \frac{\epsilon}{(x+s)^2}\, ds = \frac{\epsilon}{x+t}. \tag{3.10}$$

Insbesondere gilt $(u_\epsilon - u)w_1^{-1} \in L^1(\mu)$. Aus $|u(t)| \leq |u_\epsilon(t)| + |u(t) - u_\epsilon(t)|, t \geq 0$, folgt $uw_1^{-1} \in L^1(\mu)$.
Seien $t, s \geq 0$ mit $s < t$. Da u und folglich u_ϵ reellwertig sind, existiert nach dem Mittelw-

ertsatz der Integralrechnung (siehe [7] Satz 8.8.1) ein $\zeta \in (s,t)$ derart, dass

$$\begin{aligned}\widehat{u}(s,t) - \widehat{u_\epsilon}(s,t) &= \frac{[u(t) - u_\epsilon(t)] - [u(s) - u_\epsilon(s)]}{t-s} \\ &= \frac{1}{t-s}\int_{[s,t]} \left(u'(r) - \frac{v_\epsilon(r)}{(x+r)^2}\right) dr \\ &= (x+\zeta)^2\left[u'(\zeta) - \frac{v_\epsilon(\zeta)}{(x+\zeta)^2}\right]\frac{1}{t-s}\int_{[s,t]} \frac{1}{(x+r)^2}\, dr \\ &= (x+\zeta)^2\left[u'(\zeta) - \frac{v_\epsilon(\zeta)}{(x+\zeta)^2}\right]\frac{1}{(x+t)(x+s)},\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Zeile aus $t - s = (x+t)(x+s)[\frac{1}{x+s} - \frac{1}{x+t}]$ ergibt. Wegen (3.9) gilt

$$\begin{aligned}|\widehat{u}(s,t) - \widehat{u_\epsilon}(s,t)| &\leq \left|(x+\zeta)^2\left[u'(\zeta) - \frac{v_\epsilon(\zeta)}{(x+\zeta)^2}\right]\frac{1}{(x+t)(x+s)}\right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{(x+t)(x+s)}\end{aligned}$$

und

$$|\widehat{u}(t,t) - \widehat{u_\epsilon}(t,t)| = |u'(t) - u_\epsilon'(t)| = \left|u'(t) - \frac{v_\epsilon(t)}{(x+t)^2}\right| \leq \frac{\epsilon}{(x+t)^2},$$

also $|\widehat{u}(s,t) - \widehat{u_\epsilon}(s,t)| \leq \frac{\epsilon}{(x+t)(x+s)} = \epsilon\widehat{w_x}(s,t)$ für $s,t \in [0,+\infty)$; siehe Beispiel 3.2.16. Aus $\widehat{w_x}(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) \in L^1(\nu \otimes \tau)$ folgt $(\widehat{u} - \widehat{u_\epsilon})(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) \in L^1(\nu \otimes \tau)$ und daher $\widehat{u}(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) = (\widehat{u} - \widehat{u_\epsilon})(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) + \widehat{u_\epsilon}(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) \in L^1(\nu \otimes \tau)$. Somit gilt $u \in E_\mu^{\nu,\tau}$.

Aus (3.10) folgt auch $\lim_{\epsilon\searrow 0} u_\epsilon(t) = u(t), t \geq 0$, und $\left|(u_\epsilon - u)w_1^{-1}\right| \leq \epsilon w_x w_1^{-1} \in L^1(\mu)$. Wegen dem Satz von der beschränkten Konvergenz gilt

$$\lim_{\epsilon\searrow 0} L_1(u_\epsilon) - L_1(u) = \lim_{\epsilon\searrow 0}\int_{[0,+\infty)} (u_\epsilon - u)w_1^{-1}\, d\mu = 0.$$

Aus

$$\begin{aligned}&\int_{[0,+\infty)}\int_{[0,+\infty)} |\widehat{u}(s,t) - \widehat{u_\epsilon}(s,t)|(1+t)(1+s)\, d|\nu|(t)\, d|\tau|(s) \\ &\qquad\leq \int_{[0,+\infty)}\int_{[0,+\infty)} \frac{\epsilon(1+t)(1+s)}{(x+t)(x+s)}\, d|\nu|(t)\, d|\tau|(s), \\ &\qquad= \epsilon\int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{x+t}\, d|\nu|(t)\int_{[0,+\infty)} \frac{1+s}{x+s}\, d|\tau|(s),\end{aligned}$$

dem Satz von Fubini (siehe [8] Satz 14.14.4), Fakta 3.2.10 2, Lemma 3.2.14 1. und 2. erhält man

$$
\begin{aligned}
|L_2(u_\epsilon)-L_2(u)| = |L_2(u_\epsilon-u)| &\le \int_{[0,+\infty)^2}\left|\widehat{(u-u_\epsilon)}(s,t)\right|(1+t)(1+s)\,d|\nu\otimes\tau|(s,t)\\
&= \int_{[0,+\infty)^2}|\widehat{u}(s,t)-\widehat{u_\epsilon}(s,t)|(1+t)(1+s)\,d(|\nu|\otimes|\tau|)(s,t)\\
&= \int_{[0,+\infty)}\int_{[0,+\infty)}|\widehat{u}(s,t)-\widehat{u_\epsilon}(s,t)|(1+t)(1+s)\,d|\nu|(t)\,d|\tau|(s)\\
&\le \epsilon\int_{[0,+\infty)}\frac{1+t}{x+t}\,d|\nu|(t)\int_{[0,+\infty)}\frac{1+s}{x+s}\,d|\tau|(s),
\end{aligned}
$$

also $\lim_{\epsilon\searrow 0} L_2(u_\epsilon) = L_2(u)$. Insgesamt erhalten wir $L(u) = \lim_{\epsilon\searrow 0} L(u_\epsilon) = 0$.

4. $E_\mu^{\nu,\tau} \subseteq \ker(L)$:

Für $u \in E_\mu^{\nu,\tau}$ gibt es nach [8] Bemerkung 15.8.9 eine Funktion $\chi \in C_c^1([0,+\infty))$ mit $\chi(t)\in[0,1], t\in[0,+\infty)$, $\chi|_{[0,1]}\equiv 1$ und $\chi|_{[2,+\infty)}\equiv 0$. Die Funktionen $\chi_n(t) := \chi(\frac{t}{n})$, $n\in\mathbb{N}$, nehmen ebenfalls nur Werte in $[0,1]$ an, erfüllen $\chi_n|_{[0,n]}\equiv 1$, $\chi_n|_{[2n,+\infty)}\equiv 0$ sowie $\lim_{n\to\infty}\chi_n(t) = 1$ und $\lim_{n\to\infty}\chi'(t) = 1$ für jedes $t\in[0,+\infty)$.

Für $u_n := u\chi_n \in C_c^1([0,+\infty)) \subseteq E_\mu^{\nu,\tau}$ und $t\ge 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$, woraus wir wegen $|u_n(t)(1+t)| \le |u(t)||\chi_n(t)|(1+t) \le |u(t)|(1+t), t\ge 0$, nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz $\lim_{n\to\infty} L_1(u_n) = L_1(u)$ erhalten.

Für $s,t\ge 0$ folgt aus Lemma 3.2.14 3.

$$\widehat{u_n}(s,t) = \widehat{u}(s,t)\chi_n(s) + \widehat{\chi_n}(s,t)u(t) = \widehat{u}(s,t)\chi_n(t) + \widehat{\chi_n}(s,t)u(s).$$

Im Fall $t>s$ existiert nach dem Mittelwertsatz (siehe [7] Satz 7.2.6) ein $\zeta\in(s,t)$ mit

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\chi_n}(s,t)| = \left|\frac{\chi(\frac{t}{n})-\chi(\frac{s}{n})}{t-s}\right| &\le |\chi'(\zeta)|\frac{1}{n} \le \frac{\zeta+1}{s+1}|\chi'(\zeta)|\\
&\le \frac{1}{s+1}\sup_{r\ge 0}[(1+r)|\chi'(r)|].
\end{aligned}
$$

Da χ' kompakten Träger hat, gilt $K := \sup_{r\ge 0}[(1+r)|\chi'(r)|] < +\infty$ und

$$|\widehat{u_n}(s,t)| = |\widehat{u}(s,t)\chi_n(s)| + |\widehat{\chi_n}(s,t)u(t)| \le |\widehat{u}(s,t)| + \frac{K}{s+1}|u(t)|.$$

Für $t<s$ führt analoge Argumentation auf $|\widehat{\chi_n}(s,t)| \le \frac{K}{t+1}$ und $|\widehat{u_n}(s,t)| \le |\widehat{u}(s,t)| + \frac{K}{t+1}|u(s)|$.
Im Fall $t=s$ gilt $|(\chi_n)'(t)| = \left|\chi'(\frac{t}{n})\frac{1}{n}\right| \le \frac{K}{t+1}$, also ebenfalls $|\widehat{u_n}(s,t)| \le |\widehat{u}(s,t)| + \frac{K}{t+1}|u(s)|$.
Wir erhalten $|\widehat{u_n}(s,t)| \le |\widehat{u}(s,t)| + \frac{K}{t+1}|u(s)| + \frac{K}{s+1}|u(t)|$ für $s,t\ge 0$, und infolge

$$\left|\widehat{u_n}(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1})\right| \le |\widehat{u}|(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1}) + K[(|u|w_1^{-1}\otimes 1) + (1\otimes|u|w_1^{-1})],$$

wobei die rechte Seite der Ungleichung in $L^1(\nu\otimes\tau)$ liegt.

Wegen Lemma 3.2.14 4. und

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{u_n}(t,t) = \lim_{n\to\infty} u_n'(t) = u'(t)\lim_{n\to\infty}\chi_n(t) + \lim_{n\to\infty}\chi_n'(t)u(t) = u'(t),$$

gilt $\lim_{n\to\infty} \widehat{u_n}(s,t) = \widehat{u}(s,t)$ für alle $s,t \geq 0$.

Aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz (siehe Satz 3.1.13) folgt $\lim_{n\to\infty} L_2(u_n) = L_2(u)$. Schließlich erhalten wir $L(u) = \lim_{n\to\infty} L(u_n) = 0$ aus dem vorherigen Punkt.

□

Lemma 3.2.18 Sei $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ ein Netz nicht-negativer Maße aus $\mathfrak{M}$ und $\nu \in \mathfrak{M}$. Falls

(V_1) $[0,+\infty) \to \mathbb{C}, t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} \phi(s)\, d\mu_t(s)$ für alle $\phi \in C_b([0,+\infty))$ ν-integrierbar ist,

so gibt es ein $\omega \in \mathfrak{M}$ mit

$$\int_{[0,+\infty)} \phi(s)\, d\omega(s) = \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} \phi(s)\, d\mu_t(s)\, d\nu(t),\ \ \phi \in C_b([0,+\infty)). \tag{3.11}$$

Falls ν nicht-negativ ist, so ist es auch ω.

Beweis: Sei ν vorerst ein nicht-negatives Maß.

1. Für die Existenz eines Maßes $\omega \in \mathfrak{M}$ mit (3.11) für $\phi \in \mathbb{C}_0([0,+\infty))$ genügt es wegen des Satzes von Riesz Markov (siehe Bemerkung 3.2.5) zu zeigen, dass

$$w : C_0([0,+\infty)) \to \mathbb{R},\ w(\phi) = \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} \phi(s)\, d\mu_t(s)\, d\nu(t),$$

in $C_0([0,+\infty))'$ liegt. Die Linearität von w folgt aus [8] Fakta 18.3.16 4. Zudem gilt für $\phi \in C_0([0,+\infty))$

$$\begin{aligned}
|w(\phi)| &= \left| \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} \phi(s)\, d\mu_t(s)\, d\nu(t) \right| \\
&\leq \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} |\phi(s)|\, d\mu_t(s)\, d\nu(t) \\
&\leq \|\phi\|_\infty \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} 1\, d\mu_t(s)\, d\nu(t).
\end{aligned}$$

Nach (V_1) gilt auch $\int_{[0,+\infty)}(1+t)\int_{[0,+\infty)} 1\, d\mu_t(s)\, d\nu(t) < +\infty$, weshalb die Linearform w stetig ist.

2. Es bleibt (3.11) nachzuweisen. Dazu seien $\phi \in C_b([0,+\infty))$ und $\chi \in C_c^\infty([0,+\infty), [0,1])$ mit $\chi|_{[0,1]} \equiv 1$; siehe [8] Bemerkung 15.8.9. Wir definieren eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_c([0,+\infty))^{\mathbb{N}}$ durch $\phi_n(t) := \chi(tn^{-1})\phi(t), t \in [0,+\infty), n \in \mathbb{N}$. Nach 1. gilt

$$\int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} \phi_n(s)\, d\mu_t(s)\, d\nu(t) = \int_{[0,+\infty)} \phi_n(s)\, d\omega(s). \tag{3.12}$$

Wir wenden auf beide Seiten von (3.12) den Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 3.1.13, an. Da ϕ_n punktweise gegen ϕ konvergiert, $|\phi_n(t)| \leq |\phi(t)|$, $t \geq 0$, und $|\phi| \in C_b([0,+\infty)) \subseteq L^1(\omega) \cap \bigcap_{t>0} L^1(\mu_t)$ gilt, folgen

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} \phi_n(s)\, d\mu_t(s) = \int_{[0,+\infty)} \phi(s)\, d\mu_t(s), t > 0, \tag{3.13}$$

und $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} \phi_n(s)\, d\omega(s) = \int_{[0,+\infty)} \phi(s)\, d\omega(s)$ aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 3.1.13.
Für die linke Seite von (3.12) gilt $\left|\int_{[0,+\infty)} \phi_n(s)\, d\mu_t(s)\right| \le \int_{[0,+\infty)} |\phi(s)|\, d\mu_t(s)$, $t \in [0,+\infty)$, (3.13) und $(t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} |\phi(s)|\, d\mu_t(s)) \in L^1(\nu)$ nach (V_1). Wieder aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 3.1.13, erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} \phi_n(s)\, d\mu_t(s)\, d\nu(t) = \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} \phi(s)\, d\mu_t(s)\, d\nu(t).$$

Damit ist das Lemma für nicht-negative Maße ν bewiesen. Für ein beliebiges Maß $\nu \in \mathfrak{M}$ gilt wegen [8] Fakta 18.3.2 5. und der Hahnzerlegung gemäß [8] Satz 18.3.4, dass $\nu = \mathrm{Re}(\nu)_+ - \mathrm{Re}(\nu)_- + i(\mathrm{Im}(\nu)_+ - \mathrm{Im}(\nu)_-)$. Somit folgt die Behauptung aus der Linearität des Integrals im Maß. □

3.3 Stieltjes-Funktionen

Definition 3.3.1 Die Menge aller Funktionen $f_{a,\mu} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ mit

$$f_{a,\mu}(z) := a + \int_{[0,+\infty)} \frac{z(1+t)}{1+tz}\, d\mu(t),$$

wobei $a \in \mathbb{C}$ und $\mu \in \mathfrak{M}$, wird mit $\mathcal{T}$ bezeichnet.
Für eine Funktion $f \in \mathcal{T}$ ohne Nullstellen sei $\widetilde{f} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\widetilde{f}(z) := (f(z^{-1}))^{-1}$. Weiters setzen wir

$$\mathcal{T}_+ := \{f_{a,\mu} \in \mathcal{T} : a \ge 0, \mu \ge 0\}, \text{ sowie}$$
$$\widetilde{\mathcal{T}} := \left\{f \in \mathcal{T} : 0 \notin f(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]),\ \widetilde{f} \in \mathcal{T}\right\} \text{ und } \mathcal{T}_0 := \left\{f \in \widetilde{\mathcal{T}} : \lim_{z \searrow 0} \widetilde{f}(z) = 0\right\}.$$

Bemerkung 3.3.2

1. Man sieht unmittelbar, dass $0 \in \mathcal{T}_+ \subseteq \mathcal{T}$ und $\mathcal{T}_0 \subseteq \widetilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$.
2. Sei $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}$. Wegen $\frac{s(1+t)}{1+ts} \le 1,\ t \ge 0,\ 0 < s \le 1$, folgt $a = \lim_{s\searrow 0} f_{a,\mu}(s)$ aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz; siehe Satz 3.1.13.
3. Ebenfalls aus Satz 3.1.13 folgt $\lim_{s\nearrow +\infty} f_{a,\mu}(s) = a + \int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t)$ falls $t \mapsto \frac{1+t}{t}$ μ-intgrierbar ist.
4. Die Einschränkung einer Funktion $f \in \mathcal{T}_+$ auf $(0, +\infty)$ ist monoton wachsend, denn für $s \le r$ und $t \ge 0$ gilt $s^{-1} + t \ge r^{-1} + t$ und damit $s(1+ts)^{-1} \le r(1+tr)^{-1}$. Zudem gilt $f(t) \ge 0$ für $t \ge 0$.

Proposition 3.3.3 Jede Funktion $f_{a,\mu}$ aus $\mathcal{T}$ ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Beweis: Sei $h \in L^1(\mu)$ mit $|h| \equiv 1$ und $\mu = h \odot |\mu|$.

Für $t \geq 0$ folgt die Analytiziät von $z \mapsto \frac{z(1+t)}{1+tz} h(t)$ auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ aus der Tatsache, dass die Division durch eine Nullstellenfreie analytische Funktion die Analytizität erhält.

Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $g(t,z) := \frac{z(1+t)}{1+tz}, t \geq 0, z \in K$. Mit $M := 2 \cdot \max\{1, \max_{z \in K} |\mathrm{Re}(\frac{1}{z})|\}$ gilt für $t \geq M$, dass $t \geq 2$, also $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{2}$.
Wegen $|w|^2 = |\mathrm{Re}(w)|^2 + |\mathrm{Im}(w)|^2 \geq |\mathrm{Re}(w)|^2$, $w \in \mathbb{C}$, gilt $|\frac{1}{z} + t| \geq |\mathrm{Re}(\frac{1}{z} + t)| = |\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) + t|$.
Aus $t \geq 2|\mathrm{Re}(\frac{1}{z})| \geq |\mathrm{Re}(\frac{1}{z})| - \mathrm{Re}(\frac{1}{z})$ folgt $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) + t \geq |\mathrm{Re}(\frac{1}{z})| > 0$, also $|\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) + t| = \mathrm{Re}(\frac{1}{z}) + t$, und $\frac{|\mathrm{Re}(\frac{1}{z})|}{t} \leq \frac{1}{2}$, also $\frac{\mathrm{Re}(\frac{1}{z})}{t} \geq -\frac{1}{2}$ und folglich $\frac{\mathrm{Re}(\frac{1}{z})}{t} + 1 \geq \frac{1}{2}$.
Daraus ergibt sich für $t \geq M$

$$|g(t,z)| = \frac{1+t}{|\frac{1}{z} + t|} \leq \frac{1+t}{\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) + t} = \frac{\frac{1}{t} + 1}{\frac{\mathrm{Re}(\frac{1}{z})}{t} + 1} \leq \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3.$$

Nach dem Satz von Tychonoff (siehe [8] Satz 12.13.2) ist $[0, M] \times K$ kompakt und so gilt $R := \max_{(t,z) \in [0,M] \times K} |g(t,z)| < +\infty$; siehe [8] Bespiel 12.12.9.
Somit erhält man $|g(t,z)| \leq \max(R, 3)$ für $t \geq 0, z \in K$.

Damit folgt die Analytiziät von $f_{a,\mu}$ aus [8] Lemma 14.15.5. und [13] Proposition 1.1.5 (i). $\square$

Bemerkung 3.3.4

1. Die Menge $\mathcal{T}$ bildet einen Vektorraum. Dabei gilt $f_{a,\mu} + \alpha f_{b,\nu} = f_{a+\alpha b, \mu + \alpha\nu}$ für $a, b, \alpha \in \mathbb{C}$ und $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$.

2. Für $f_{a,\mu} \in \widetilde{\mathcal{T}}$ und $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ erhalten wir $w f_{a,\mu} = f_{wa, w\mu} \in \widetilde{\mathcal{T}}$ wegen $\widetilde{w f_{a,\mu}} = w^{-1} \widetilde{f_{a,\mu}}$ und 1.
Im Fall $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}_0$ folgt $w f_{a,\mu} \in \mathcal{T}_0$ aus $\lim_{z \searrow 0} \widetilde{w f_{a,\mu}} = w^{-1} \lim_{z \searrow 0} \widetilde{f_{a,\mu}} = 0$.

Beispiel 3.3.5 Bezeichnen wir für $\epsilon \geq 0$ mit μ_ϵ das Punktmaß mit $\mu_\epsilon(\{\epsilon\}) = 1$, dann gilt

1. $(z \mapsto z) = f_{0,\mu_0} \in \mathcal{T}_+ \cap \mathcal{T}_0$,

2. $(z \mapsto z + \epsilon) = f_{\epsilon, \mu_0} \in \mathcal{T}_+$,

3. $(z \mapsto \frac{z(1+\epsilon)}{1+z\epsilon}) = f_{0,\mu_\epsilon} \in \mathcal{T}_+$, $(z \mapsto \frac{z}{1+z\epsilon}) = (1+\epsilon)^{-1} f_{0,\mu_\epsilon} = f_{0,(1+\epsilon)^{-1}\mu_\epsilon} \in \mathcal{T}_+$ für $\epsilon > 0$.

4. Wegen 2. und 3. gilt $(z \mapsto \frac{z}{1+z\epsilon}) \in \widetilde{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{T}_0$ und $(z \mapsto z + \epsilon) \in \mathcal{T}_0$.

5. Für $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha, a_p, A_p \geq 0, p = 1, ..., m$, gilt $(z \mapsto \alpha + \sum_{p=1}^m A_p \frac{z(1+a_p)}{1+a_p z}) = f_{\alpha,\omega} \in \mathcal{T}_+$ mit $\omega = \sum_{p=1}^m A_p \mu_{a_p}$.

Bemerkung 3.3.6 Keiner der vorgestellten Klassen ist abgeschlossen bezüglich Multiplikation. Nach Beispiel 3.4.3 1. und 3. liegen $z \mapsto z$ und $z \mapsto \frac{z}{1+z}$ in $\mathcal{T}_+$, ihr Produkt $(z \mapsto z - \frac{z}{1+z}) =$

$f_{0,\mu_0-\frac{1}{2}\mu_1}$ aber in $\mathcal{T}\setminus\mathcal{T}_+$.

Beispiel 3.3.7 Die Funktion $h(z)=z^2$ liegt nicht in $\mathcal{T}$, denn im Fall $h\in\mathcal{T}$ gäbe es ein $\nu\in\mathfrak{M}$ mit $h=f_{b,\nu}$. Wegen Bemerkung 3.3.2 2. gilt $b=\lim_{z\searrow 0}z^2=0$. Mit Beispiel 3.3.5 1. und dem Punktmaß μ_0 ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{[0,+\infty)}\frac{z(1+t)}{1+tz}\,d\nu(t)=h(z)=z^2&=\left[\int_{[0,+\infty)}\frac{z(1+t)}{1+tz}\,d\mu_0(t)\right]^2\\&=\int_{[0,+\infty)^2}\frac{z(1+t)}{1+tz}\frac{z(1+s)}{1+sz}\,d(\mu_0\otimes\mu_0)(s,t),\end{aligned}$$

also $\int_{[0,+\infty)}w_x(t)(1+t)\,d\nu(t)=-\int_{[0,+\infty)}\widehat{w_x}(s,t)(1+t)(1+s)\,d(\mu_0\otimes\mu_0)(s,t)$ für $x>0$ nach Beispiel 3.2.16. Damit liegt w_x für $x>0$ im Kern des linearen Funktionals $L(u):=\int_{[0,+\infty)}u(t)(1+t)\,d\nu(t)+\int_{[0,+\infty)^2}\widehat{u}(s,t)(1+t)(1+s)\,d(\mu_0\otimes\mu_0)(s,t)$, $u\in E_\nu^{\mu_0,\mu_0}$.

Aus Lemma 3.2.17 folgt für alle $w\in E_\nu^{\mu_0,\mu_0}$

$$\begin{aligned}w'(0)=\widehat{w}(0,0)&=\int_{[0,+\infty)}\int_{[0,+\infty)}\widehat{w}(s,t)(1+t)(1+s)\,d\mu_0(s)\,d\mu_0(t)\\&=-\int_{[0,+\infty)}w(t)(1+t)\,d\nu(t),\end{aligned}$$

weshalb speziell für $\operatorname{supp}w\subseteq(0,+\infty)$

$$\int_{[0,+\infty)}w(t)(1+t)\,d\nu(t)=-w'(0)=0. \tag{3.14}$$

Sei $K\subseteq(0,+\infty)$ kompakt und $m\in\mathbb{N}$ mit $m>\min(K)^{-1}$. Zu $n\in\mathbb{N}$ gibt es nach [8] Bemerkung 15.8.9 eine Funktion $\chi_n\in C_c^\infty([0,+\infty))$ mit $0\le\chi_n\le 1$, $\operatorname{supp}\chi_n\subseteq K+(-(n+m)^{-1},(n+m)^{-1})\subseteq(0,+\infty)$ und $\chi_n|_K=1$. Für $t\in K$ gilt $\lim_{n\to\infty}\chi_n(t)=1=\mathbb{1}_K(t)$.
Zu $t\notin K=\overline{K}$ existiert $l\in\mathbb{N}$ mit $t+(-(l+m)^{-1},(l+m)^{-1})\cap K=\emptyset$. Für alle natürlichen Zahlen $n\ge l$ folgt $t\notin K+(-(n+m)^{-1},(n+m)^{-1})\supseteq\operatorname{supp}\chi_n$, also $\chi_n(t)=0$. Insgesamt gilt $\lim_{n\to\infty}\chi_n(t)=0=\mathbb{1}_K(t)$.
Zudem haben wir $|\chi_n|\le 1$ und $(t\mapsto 1)\in L^1(\nu)$. Aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz (siehe Satz 3.1.13) folgt

$$\nu(K)=\int_{[0,+\infty)}\mathbb{1}_K\,d\nu=\int_{[0,+\infty)}\lim_{n\to\infty}\chi_n\,d\nu=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty)}\chi_n\,d\nu.$$

Die Funktionen $\chi_n w_1\in C_c^1([0,+\infty))$, $n\in\mathbb{N}$ erfüllen $\chi_n w_1 w_1^{-1}=\chi_n\in C_c([0,+\infty))\subseteq L^1(\nu)$ wegen Bemerkung 3.2.4 2. und $\widehat{\chi_n w_1}(w_1^{-1}\otimes w_1^{-1})\in L^1(\mu_{(0,0)})=L^1(\mu_0\otimes\mu_0)$, liegen also in $E_\nu^{\mu_0,\mu_0}$. Zusammen mit (3.14) gilt

$$\nu(K)=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty)}\chi_n\,d\nu=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,+\infty)}\chi_n w_1 w_1^{-1}\,d\nu=0.$$

Laut Beispiel 3.2.1 und [8] Satz 14.12.5 (v) ist das Maß ν von innen regulär. Das heißt für $C \in \mathfrak{B}((0,+\infty)) = \mathfrak{B}([0,+\infty)) \cap 2^{(0,+\infty)}$ (siehe Fakta 3.1.21) gilt $\nu(C) = \sup\{\nu(C) \mid K \subseteq C \text{ kompakt}\} = \sup\{0\} = 0$. Für $B \in \mathfrak{B}([0,+\infty))$ erhält man

$$\nu(B) = \nu(B \cap \{0\}) + \nu(B \cap (0,+\infty)) = \nu(B \cap \{0\}) = \begin{cases} \nu(\{0\}), & 0 \in B, \\ 0, & 0 \notin B, \end{cases}$$

also $\nu = \nu(\{0\})\mu_0$.

Damit gilt $z^2 = \int_{[0,+\infty)} \frac{z(1+t)}{1+tz} \nu(\{0\})\, d\mu_0(t) = \nu(\{0\})z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, was einen Widerspruch darstellt.

Korollar 3.3.8 Stimmen $f_{a_1,\mu_1}, f_{a_2,\mu_2} \in \mathcal{T}$ auf $(0,+\infty)$ überein, so gilt $a_1 = a_2$ und $\mu_1 = \mu_2$.

Beweis: Zunächst gilt $a_1 = \lim_{x \searrow 0} f_{a_1,\mu_1}(x) = \lim_{x \searrow 0} f_{a_2,\mu_2}(x) = a_2$. Wegen

$$\int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{x+t}\, d\mu_1 = f_{a_1,\mu_1}(\frac{1}{x}) - a_1 = f_{a_2,\mu_2}(\frac{1}{x}) - a_2 = \int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{x+t}\, d\mu_2$$

für alle $x > 0$ folgt auch $\mu_1 = \mu_2$; siehe Lemma 3.2.13. □

Definition 3.3.9 Eine Folge von Maßen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{M}$ konvergiert vage gegen ein Maß $\mu \in \mathfrak{M}$, wenn $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} \phi(t)\, d\mu_n(t) = \int_{[0,+\infty)} \phi(t)\, d\mu(t)$ für alle $\phi \in C_0([0,+\infty))$.

Bemerkung 3.3.10

- Der Satz von Riesz-Markov (siehe Bemerkung 3.2.5) identitfiziert $\mathfrak{M}$ mit $C_0([0,+\infty))'$ und die Topologie der vagen Konvergenz mit der schwach-*-Topologie.
  Nach [14] Bemerkung 5.0.3 (ii), und [14] Beispiel 5.0.2 macht die schwach-*-Topologie $C_0([0,+\infty))'$ zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum, die somit insbesondere Hausdorffsch ist.

- Die schwach-*-Topologie auf $C_0([0,+\infty))'$ ist nicht metrisierbar, wie sich aus folgenden Überlegungen ergibt.

  – Aus der Metrisierbarkeit der schwach-*-Topologie auf dem Dualraum eines Banachraums Y folgt die Existenz einer abzählbaren Basis von Y. Um das nachzuweisen, gehen wir folgendermaßen vor.

    Ist $d_{Y'} : Y' \times Y' \to [0,+\infty)$ eine Metrik für die schwach-*-Topologie auf Y', so bildet $U_k := \{y' \in Y' \mid d'_Y(0,y') < \frac{1}{k}\}, k \in \mathbb{N}$, eine abzählbare Nullumgebungsbasis; siehe [7] Definition 12.1.7.

    Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es nach [14] (5.3.1) $y_{k,j} \in Y, \epsilon_{k,j} > 0$, $j = 1, ..., n_k$, derart, dass

$$\begin{aligned} W_k :=& \{y' \in Y' \mid |\langle(\epsilon_{k,j})^{-1} y_{k,j}, y'\rangle| < 1, j = 1, ..., n_k\} \\ =& \{y' \in Y' \mid |\langle y_{k,j}, y'\rangle| < \epsilon_{k,j}, j = 1, ..., n_k\} \subseteq U_k, \end{aligned}$$

weshalb $\{W_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ und folglich auch $\left\{\bigcap_{j=0}^{k} W_j \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ Nullumgebungsbasen sind.

Die Abbildung $\psi : (k,j) \mapsto (\sum_{l=1}^{k-1} n_l)+j$ ist eine Bijektion von $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\{k\}\times\{1,...,n_k\})$ auf $\mathbb{N}$. Mit ihrer Hilfe definieren wir $y_m := (\epsilon_{\psi^{-1}(m)})^{-1} y_{\psi^{-1}(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, und $V_m := \{y' \in Y' \mid |\langle y_j, y'\rangle| < 1, j = 1, ..., m\}$, $m \in \mathbb{N}$.

Wegen $V_{\sum_{l=1}^{k} n_l} = \bigcap_{j=1}^{k} W_j$, $k \in \mathbb{N}$, ist $\{V_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ eine Nullumgebungsbasis der schwach-*-Topologie auf Y'.

Sei $y \in Y$ und $\iota : Y \to Y''$ mit $\iota(z) = (z' \mapsto \langle z, z'\rangle)$. Da $U := \{y' \in Y' \mid |\langle y, y'\rangle| < 1\}$ eine schwach-*-Nullumgebung ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\bigcap_{j=1}^{m} \ker \iota(y_j) \subseteq V_m \subseteq U.$$

Für $y' \in \bigcap_{j=1}^{m} \ker \iota(y_j)$ gilt $\lambda y' \in \bigcap_{j=1}^{m} \ker \iota(y_j) \subseteq U$, also $|\lambda||\langle y, y'\rangle| < 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und damit $y'(y) = 0$. Daraus folgt $\bigcap_{j=1}^{m} \ker \iota(y_j) \subseteq \ker \iota(y)$ und wegen [14] Lemma 5.3.4 liegt y in $\text{span}\{y_1, ..., y_m\}$. Also ist $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ ein abzählbares Erzeugendensystem und kann damit zu einer abzählbaren Basis verkleinert werden.

- Jeder Banachraum Y mit abzählbarer Basis $\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist endlich dimensional.

  Die endlich-dimensionalen Teilräume $Y_m := \text{span}\{b_1, ..., b_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, sind abgeschlossen und erfüllen $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} Y_m = Y$. Aus der Kontraposition der Version des Satzes von Baire aus [14] Bemerkung 4.1.3 folgt die Existenz einer natürlichen Zahl m_0 so, dass Y_{m_0} nicht-leeres Inneres hat. Da die offenen Kugeln $\left\{y \in Y \mid \|y\| < k^{-1}\right\}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Nullumgebungsbasis bilden, enthält Y_{m_0} eine von diesen. Zumal Y_{m_0} ein linearer Teilraum ist, folgt daraus schon $Y_{m_0} = Y$, also $\dim Y = m_0$.

- Der Banachraum $C_0([0, +\infty))$ ist nicht endlich-dimensional, da $\left\{t \mapsto e^{-kt} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ linear unabhängig ist.

• Schwach-*-kompakte Teilmengen von $C_0([0, +\infty))'$ versehen mit der Spurtopologie der schwach-*-Topologie sind hingegen schon metrisierbar.

  - Die Unteralgebra $\text{span}\left\{t \mapsto e^{-kt} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ von $C_0([0, +\infty))$ ist unter komplexer Konjugation abgeschlossen, nirgends-verschwindend und punktetrennend, also nach dem Satz von Stone-Weierstrass (siehe [8] Korollar 12.18.11) dicht.
    Deshalb liegt die Menge aller Linearkombinationen von $\left\{t \mapsto e^{-kt} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ mit rationalen Koeffizienten dicht in $C_0([0, +\infty))$. Folglich ist $C_0([0, +\infty))$ separabel.

  - Für einen separablen Banachraum Y ist die Spurtopolgie der schwach-*-Topologie auf eine schwach-*-kompakte Teilmenge K von Y' metrisierbar:

    Mittels der dichten Teilmenge $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von Y definieren wir die Funktionen $f_n(y') := \langle y_n, y'\rangle$, $y' \in K$, welche nach Definition der schwach-*-Topolgie schwach-*-stetig sind.
    Für $x', y' \in K$ mit $f_n(x') = f_n(y')$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $x'(y_n) = y'(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Laut [8] Lemma 12.4.8 folgt daraus bereits $x' = y'$.

Aus [8] Satz 12.15.6 folgt schließlich die Metrisierbarkeit der Spurtopologie der schwach-*-Topolgie auf K.

Lemma 3.3.11 Wenn eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n := f_{a_n,\mu_n} \in \mathcal{T}_+, n \in \mathbb{N}$, auf $(0, +\infty)$ punktweise gegen eine Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{C}$ konvergiert, so gibt es ein $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}_+$ derart, dass f die Einschränkung von $f_{a,\mu}$ auf $(0, +\infty)$ ist und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vage gegen μ konvergiert.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $v_n \in C_0([0, +\infty))'$ durch $v_n := \Phi_0(\mu_n)$; siehe Bemerkung 3.2.5. Also gilt

$$\langle \phi, v_n\rangle = \int_{[0,+\infty)} \phi(t)\, d\mu_n(t),\ \ \phi \in C_0([0, +\infty)).$$

Die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig beschränkt, da mit $c := \sup_{k\in K} f_k(1)$

$$|\langle \phi, v_n\rangle| \le \|\phi\|_\infty \int_{[0,+\infty)} 1\, d\mu_n(t) \le \|\phi\|_\infty c,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\phi \in C_0([0, +\infty))$.
Nach dem Satz von Banach-Alaoglu (siehe [14] Satz 5.5.5) ist $K_c^{C_0([0,+\infty))'}(0)$ schwach-*-kompakt, wodurch $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen [7] Proposition 12.11.2 ein schwach-*-konvergentes Teilnetz mit Grenzwert $v \in C_0([0, +\infty))'$ und folglich zumindest v als Häufungspunkt hat; siehe [7] Definition 12.2.13.

Zu jedem möglichen Häufungspunkt w von $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wählen wir ein gegen w schwach-*-konvergentes Teilnetz $(v_{n(j)})_{j\in J}$; siehe [7] Lemma 12.2.15. Laut dem Satz von Riesz-Markov (siehe Bemerkung 3.2.5) und [8] Bemerkung 18.4.8 werden nicht-negativ Linearformen durch Φ_0 auf nicht-negative Maße abgebildet. Das Funktional w ist nicht-negativ, da $\langle \psi, w\rangle = \lim_{j\in J}\langle \psi, v_{n(j)}\rangle \ge 0$ für alle $\psi \in C_0([0, +\infty))$, weshalb $\Phi_0^{-1}(w)$ ein nicht-negatives endliches Maß ist. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{[0,+\infty)} \frac{m(1+t)}{(m+t)(x+t)}\, d(\Phi_0^{-1}(w))(t) &= \lim_{j\in J} \int_{[0,+\infty)} \frac{m(1+t)}{(m+t)(x+t)}\, d\mu_{n(j)}(t) \\
&= \frac{m}{m-x} \lim_{j\in J}\Big(\int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{x+t}\, d\mu_{n(j)}(t) - \int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{m+t}\, d\mu_{n(j)}(t)\Big) \\
&= \frac{m}{m-x} \lim_{j\in J}\Big([f_{n(j)}(\frac{1}{x}) - a_{n(j)}] - [f_{n(j)}(\frac{1}{m}) - a_{n(j)}]\Big) \\
&= \frac{m}{m-x}\Big(f(\frac{1}{x}) - f(\frac{1}{m})\Big).
\end{aligned}$$

Nach Bemerkung 3.3.2 4. sind die Funktionen $f_n, n \in \mathbb{N}$, und infolge f monoton wachsend und nicht-negativ, also gilt $0 \le \lim_{m\to\infty} f(m^{-1}) < +\infty$.
Die Folge $(t \mapsto \frac{m(1+t)}{(m+t)(x+t)})_{m\in\mathbb{N}}$ von Funktionen auf $[0, +\infty)$ ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen $t \mapsto \frac{1+t}{x+t}$. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}
\int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{x+t}\, d(\Phi_0^{-1}(w))(t) &= \lim_{m\to\infty} \int_{[0,+\infty)} \frac{m(1+t)}{(m+t)(x+t)}\, d(\Phi_0^{-1}(w))(t) \\
&= f(\frac{1}{x}) - \lim_{m\to\infty} f(\frac{1}{m}).
\end{aligned}$$

Da diese Gleichheit für alle Häufungspunkte von $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt, erhalten wir

$$\int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{x+t}\, d(\Phi_0^{-1}(w))(t) = \int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{x+t}\, d(\Phi_0^{-1}(v))(t)$$

für alle $x > 0$. Aus Lemma 3.2.13 folgt $\Phi_0^{-1}(w) = \Phi_0^{-1}(v)$, also $v = w$. v ist infolge der einzige Häufungspunkt von $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich der schwach-*-Topologie gegen v; siehe [7] Satz 12.11.4. Vermöge der Identifizierung aus dem Satz von Riesz-Markov (siehe [8] Satz 18.4.7) entspricht die schwach-*-Konvergenz der vagen Konvergenz.
Für das nicht-negative Maß $\mu := \Phi_0^{-1}(v)$ und $0 \le a := \lim_{m\to\infty} f(m^{-1})$ gilt

$$f_{a,\mu}(\frac{1}{x}) = a + \int_{[0,+\infty)} \frac{x^{-1}(1+t)}{1+x^{-1}t}\, d\mu(t) = a + \int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{x+t}\, d\mu(t) = a + f(\frac{1}{x}) - a,$$

also $f_{a,\mu}(x) = f(x)$ für alle $x > 0$. □

Korollar 3.3.12 Für eine Folge $(f_{a_n,\mu_n})_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{T}_+)^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_{a_n,\mu_n}(z) = f_{a,\mu}(z)$, $z > 0$, konvergiert $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vage gegen μ.

Beweis: Nach Lemma 3.3.11 gibt es $b \ge 0$ und $\nu \in \mathfrak{M}$ derart, dass $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vage gegen ν konvergiert und $f_{b,\nu}(z) = f_{a,\mu}(z)$ für jedes $z > 0$ gilt. Aus Korollar 3.3.8 erhält man $b = a$ und $\nu = \mu$. □

3.4 Mereologie

Definition 3.4.1 Mit $\mathcal{S}$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $g_{a,\mu} := f_{a,\mu} \circ g$ mit $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}$ und $g : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ definiert durch $g(z) = z^{-1}$. Zudem setzen wir $\mathcal{S}_+ := \{f \circ g : f \in \mathcal{T}_+\}$ und

$$\mathcal{S}_0 := \left\{ g_{a,\mu} \in \mathcal{S} : \mu(\{0\}) = 0, \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d|\mu|(t) < +\infty \right\}.$$

Bemerkung 3.4.2

1. Funktionen $g_{a,\mu} \in \mathcal{S}$ sind von der Gestalt

$$g_{a,\mu}(z) = f_{a,\mu}(\frac{1}{z}) = a + \int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{t+z}\, d\mu(t).$$

2. Aus Bemerkung 3.3.2 3. folgt $\lim_{z\nearrow+\infty} g_{a,\mu}(z) = a$. Falls $t \mapsto \frac{1+t}{t}$ μ-integrierbar ist, gilt $\lim_{z\searrow 0} g_{a,\mu}(z) = a + \int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t)$.

3. Für $\mu \in \mathfrak{M}$ und $(t \mapsto \frac{1+t}{t}) \in L^1(\mu) = L^1(|\mu|)$ folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (siehe Satz 3.1.15)

$$+\infty > \int_{\{0\}} \frac{1+t}{t}\, d|\mu| = \int_{\{0\}} \lim_{z\searrow 0} \frac{1+t}{t+z}\, d|\mu| = \lim_{z\searrow 0} \int_{\{0\}} \frac{1+t}{t+z}\, d|\mu| = \lim_{z\searrow 0} (\mu(\{0\})\frac{1}{z}),$$

weshalb $\mu(\{0\}) = 0$.

4. Die Menge $\mathcal{S}$ bildet einen Vektorraum, wobei $g_{a,\mu} + \alpha g_{b,\nu} = g_{a+\alpha b,\mu+\alpha\nu}$ für $a, b, \alpha \in \mathbb{C}$ und $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$ gilt.
Aus $(t \mapsto \frac{1+t}{t}) \in L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$ folgt $(t \mapsto \frac{1+t}{t}) \in L^1(\mu + \alpha\nu)$ nach [8] Fakta 18.1.16 5, also bildet $\mathcal{S}_0$ einen linearen Unterraum von $\mathcal{S}$.

Beispiel 3.4.3 Analog zu Beispiel 3.3.5 gilt für $\epsilon > 0$

1. $(z \mapsto z^{-1}) = g_{0,\mu_0} \in \mathcal{S}_+ \setminus \mathcal{S}_0$,
2. $(z \mapsto \frac{1+\epsilon z}{z}) = g_{\epsilon,\mu_0} \in \mathcal{S}_+ \setminus \mathcal{S}_0$,
3. $(z \mapsto \frac{1+\epsilon}{z+\epsilon}) = g_{0,\mu_\epsilon}$, $(z \mapsto \frac{1}{z+\epsilon}) = g_{0,(1+\epsilon)^{-1}\mu_\epsilon} \in \mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_0$.
4. Für $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha, a_p, A_p \geq 0, p = 1, ..., m$ gilt $(z \mapsto \alpha + \sum_{p=1}^{m} \frac{A_p(1+a_p)}{z+a_p}) \in \mathcal{S}_+$.

Lemma 3.4.4 $\mathcal{S}_0$ stimmt mit der Teilmenge $\{f_{b,\nu} \in \mathcal{T} \mid \nu\{0\} = 0, (t \mapsto \frac{1+t}{t}) \in L^1(\nu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))})\}$ von $\mathcal{T}$ überein.
Dabei gibt es für $g_{a,\mu} \in \mathcal{S}_0$ eine Zahl $b \in \mathbb{C}$ und ein Maß $\nu \in \mathfrak{M}$ mit $g_{a,\mu} = f_{b,\nu}$, $\nu\{0\} = 0$, $(t \mapsto \frac{1+t}{t}) \in L^1(\nu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))})$ und

$$\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t) = -\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\nu(t) = b - a.$$

Weiters ist μ genau dann nicht-negativ, wenn $-\nu$ nicht-negativ ist.

Beweis: Wir setzen $Q := \{(a,\mu) \mid \mu\{0\} = 0, (t \mapsto \frac{1+t}{t}) \in L^1(\mu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))})\}$. Mit dem Homöomorphismus $T : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $T(t) = t^{-1}$, folgt für $(a, \mu) \in Q$ aus dem Transformationsatz (siehe Satz 3.1.19) und Lemma 3.1.17

$$\begin{aligned}\int_{(0,+\infty)} t\, d|T(\mu)|(t) &= \int_{(0,+\infty)} t\, dT(|\mu|)(t) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{t}\, d|\mu|(t) \\ &\leq \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d|\mu|(t) < +\infty.\end{aligned}$$

Das erlaubt die Definition einer Abbildung $\Psi : Q \to \mathbb{C} \times \mathfrak{M}$ mit $\Psi((a,\mu)) := (b,\nu)$, wobei $b := a + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t)$ und $\nu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))} := (t \mapsto -t) \odot T(\mu), \nu(\{0\}) = 0$.

Aus dem Transformationssatz folgt

$$\begin{aligned}\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\nu(t) &= -\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t} t\, dT(\mu)(t) = -\int_{(0,+\infty)} \left(1 + \frac{1}{t}\right) d\mu(t) \\ &= -\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t),\end{aligned}$$

also $\Psi((a,\mu)) \in Q$. Für $(a,\mu) \in Q$ und $(b,\nu) := \Psi((a,\mu))$ gilt

$$\begin{aligned} b + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\nu(t) &= a + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t) + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\nu(t) \\ &= a + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t) - \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t) = a \end{aligned}$$

und wegen Bemerkung 3.1.8 und Korollar 3.1.20

$$\begin{aligned} (t \mapsto -t) \odot T(\nu) &= (t \mapsto -t) \odot T((t \mapsto -t) \odot T(\mu)) \\ &= (t \mapsto -t) \odot [(t \mapsto -\frac{1}{t}) \odot T(T(\mu))] \\ &= (t \mapsto (-t)(-\frac{1}{t})) \odot \mu = \mu, \end{aligned}$$

weshalb $\Psi^2((a,\mu)) = (a,\mu)$ und damit $\Psi^{-1} = \Psi$.

Sei $(a,\mu) \in Q$. Die μ-Integrierbarkeit von $h : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$, $h(t) = \frac{z(1+t^{-1})}{1+t^{-1}z}\frac{1}{t}$ folgt aus $|h(t)| = \left|\frac{z}{t+z}\right| \frac{1+t}{t} \leq \left\| s \mapsto \frac{z}{s+z} \right\|_\infty \frac{1+t}{t}$, $t > 0$. Wegen des Transformationssatzes gilt

$$\begin{aligned} \int_{(0,+\infty)} \frac{z(1+t^{-1})}{1+t^{-1}z} \frac{1}{t}\, d\mu(t) &= \int_{(0,+\infty)} (h \circ T^{-1} \circ T)(t)\, d\mu(t) \\ &= \int_{(0,+\infty)} (h \circ T^{-1})(t)\, dT(\mu)(t) \\ &= \int_{(0,+\infty)} \frac{z(1+t)}{1+tz} t\, dT(\mu)(t). \end{aligned}$$

Mit $(b,\nu) := \Psi((a,\mu))$ ergibt sich

$$\begin{aligned} g_{a,\mu}(z) &= a + \int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{t+z}\, d\mu(t) \\ &= a + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t) - \int_{(0,+\infty)} \frac{z(1+t^{-1})}{1+t^{-1}z} \frac{1}{t}\, d\mu(t) \\ &= a + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t) + \int_{[0,+\infty)} \frac{z(1+t)}{1+tz}\, d\nu(t) = f_{b,\nu}(z). \end{aligned}$$

Für $g_{a,\mu} \in \mathcal{S}_0$ gilt demnach $g_{a,\mu} = f_{b,\nu} \in \mathcal{T}$, wobei $(b,\nu) := \Psi((a,\mu))$, also $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{T}$. Für $f_{b,\nu} \in \mathcal{T}$ mit $(b,\nu) \in Q$ und $(a,\mu) := \Psi((b,\nu)) \in Q$ gilt $f_{b,\nu} = g_{a,\mu} \in \mathcal{S}_0$ wegen $\Psi((a,\mu)) = \Psi(\Psi((b,\nu))) = (b,\nu)$. □

Korollar 3.4.5 Für $g_{a,\mu} \in \mathcal{S}_0 \cap \mathcal{T}_+$ mit $a = 0$ gilt $g_{a,\mu} = 0$.

Beweis: Nach Lemma 3.4.4 gibt es $b \geq 0$ und ν nicht-negativ mit $g_{a,\mu} = f_{b,\nu}$ und

$$\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t) = -\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\nu(t) = b - a = b \geq 0.$$

Wegen $0 \geq -\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\nu(t)$ folgt $b = 0$ und $\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t) = 0$.

Für $B \in \mathfrak{B}([0,+\infty))$ erhält man wegen $\mu(\{0\}) = 0$ aus der Monotonie des Integrals

$$\mu(B) = \mu(\{0\}) + \mu(B \setminus \{0\}) = 0 + \int_{(0,+\infty)} \mathbb{1}_{B\setminus\{0\}}(t)\, d\mu(t) \leq \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t) = 0,$$

also $\mu = 0$ und schließlich $g_{a,\mu} = 0$. $\square$

Beispiel 3.4.6 Gemäß Lemma 3.4.4 liegen die Funktionen aus Beispiel 3.3.5 3. in $\mathcal{S}_0$.

Korollar 3.4.7 Stimmen $g_{a_1,\mu_1}, g_{a_2,\mu_2} \in \mathcal{S}$ auf $(0,+\infty)$ überein, dann gilt $a_1 = a_2$ und $\mu_1 = \mu_2$.

Beweis: Für $x > 0$ gilt $f_{a_1,\mu_1}(x) = g_{a_1,\mu_1}(\frac{1}{x}) = g_{a_2,\mu_2}(\frac{1}{x}) = f_{a_2,\mu_2}(x)$, womit die Behauptung aus Korollar 3.3.8 folgt. $\square$

Korollar 3.4.8 Wenn eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g_n := g_{a_n,\mu_n} \in \mathcal{S}_+, n \in \mathbb{N}$, auf $(0,+\infty)$ punktweise gegen eine Funktion g konvergiert, so gibt es ein $g_{a,\mu} \in \mathcal{S}_+$ derart, dass g die Einschränkung von $g_{a,\mu}$ auf $(0,+\infty)$ ist und μ_n vage gegen μ konvergiert.

Beweis: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $f_n(z) = g_n(z^{-1}), n \in \mathbb{N}$, erfüllt die Vorraussetzungen von Lemma 3.3.11. Daher existert eine nicht-negative Zahl a und ein nicht-negatives Maß $\mu \in \mathfrak{M}$ derart, dass μ_n vage gegen μ konvergiert und $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x^{-1}) = f_{a,\mu}(x^{-1}) = g_{a,\mu}(x)$ für $x > 0$. $\square$

Lemma 3.4.9 Zu einer Funktion $g : \mathbb{C}\setminus\{-c_1, ..., -c_m\} \to \mathbb{C}$, welche durch $g(z) = c + \sum_{p=1}^{m} \frac{C_p}{z+c_p}$ mit paarweise verschiedenen $c_p \geq 0$ sowie $c \geq 0, C_p > 0$ definiert ist, existiert eine Funktion $h \in \mathcal{S}_+$, die auf $(0,+\infty)$ mit $\widetilde{g}$ übereinstimmt; siehe Definition 3.3.1.

Beweis: Für $q \in \mathbb{C}[z]$ definiert durch

$$q(z) = c\prod_{p=1}^{m}(z + c_p) + \sum_{p=1}^{m} C_p \prod_{l\neq p}(z + c_l)$$

gilt $g(z) = \frac{q(z)}{\prod_{p=1}^{m}(z+c_p)}$ und $q(-c_j) = C_j \prod_{l\neq j}(c_l - c_j) \neq 0, j = 1, ..., m$.

Bezeichnet b den Grad von q, so gilt $b = m - 1$ im Fall $c = 0$ und $b = m$ anderenfalls. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra, [7] Satz 6.10.2 besitzt q gezählt nach ihrer Vielfachheit b komplexe Nullstellen. Für jede Nullstelle $z = x + iy$ gilt

$$0 = \operatorname{Im}(g(z)) = \sum_{p=1}^{m} C_p \operatorname{Im}\left(\frac{x + c_p - iy}{(x + c_p)^2 + y^2}\right) = -\sum_{p=1}^{m} C_p \frac{y}{(x + c_p)^2 + y^2}$$

und folglich $y = 0$. Also sind alle Nullstellen von q reell. Da die Ableitung

$$\frac{q'(z)\prod_{p=1}^{m}(z + c_p) - q(z)\sum_{p=1}^{m}\prod_{l\neq p}(z + c_l)}{\prod_{p=1}^{m}(z + c_p)^2} = g'(z) = -\sum_{p=1}^{m} \frac{C_p}{(z + c_p)^2} < 0$$

für $z \in \mathbb{R} \setminus \{-c_1, ..., -c_m\}$ keine Nullstellen besitzt, sind Nullstellen von q einfach und wegen $g(x) > 0$ für $x > \max_{j=1,...,m} -c_j$ alle negativ.

Bezeichnen $-\frac{1}{d_p}$ für $p = 1, ..., b$ die Nullstellen von q. Nach dem Euklidischen Algorithmus und der Partialbruchzerlegung, [7] (7.12) existieren $D_p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ein Polynom $d \in \mathbb{R}[x]$ derart, dass

$$\widetilde{g}(z) = d(z) + \sum_{p=1}^{b} \frac{D_p}{z + d_p}.$$

d ist auf Grund von

$$\lim_{z \nearrow +\infty} d(z) = \lim_{z \nearrow +\infty} \widetilde{g}(z) = \lim_{z \nearrow +\infty} \frac{1}{c + \sum_{p=1}^{m} \frac{C_p}{z^{-1} + c_p}} = \frac{1}{c + \sum_{p=1}^{m} \frac{C_p}{c_p}} \in [0, +\infty)$$

konstant. Im Fall $c_l = 0$ für ein $l \in \{1, ..., m\}$ ist diese Konstante 0, anderenfalls ist sie > 0.

Für das Residuum (siehe [13] Definition 3.5.2) gilt

$$Res_{-d_j} \widetilde{g} = \lim_{z \to -d_j} (z + d_j) \widetilde{g}(z) = \lim_{z \to -d_j} [(z + d_j) d + D_j + \sum_{p \neq j} \frac{D_p(z + d_j)}{z + d_p}] = D_j.$$

Die durch $f(z) := g(z^{-1})$ auf $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{1}{c_p} \mid c_p \neq 0,\ p = 1, ..., m \right\}$ definierte Funktion hat Nullstellen bei $-d_j, j = 1, ..., b$, wobei

$$Res_{-d_j} \widetilde{g} = Res_{-d_j} \frac{1}{f} = \lim_{z \to -d_j} (z + d_j) \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to -d_j} \frac{z - (-d_j)}{f(z) - f(-d_j)} = \frac{1}{f'(-d_j)}.$$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{1}{c_p} \mid c_p \neq 0,\ p = 1, ..., m \right\}$ ergibt sich mittels der Produktregel (siehe [13] Proposition 1.1.5)

$$f'(z) = (c + \sum_{p=1}^{m} \frac{zC_p}{1 + zc_p})' = \sum_{p=1}^{m} \frac{C_p}{(1 + c_p z)^2},$$

womit $D_j = \frac{1}{f(-d_j)} > 0$ für $j = 1, ..., b$.

Nach Beispiel 3.4.3 4. gibt es eine Funktion $h \in \mathcal{S}_+$, welche auf $(0, +\infty)$ mit $\widetilde{g}$ übereinstimmt. $\square$

Lemma 3.4.10 Für $f \in \mathcal{S}_+(\mathcal{T}_+)$ und $\lambda > 0$ liegt die durch $f_\lambda(z) := \frac{f(z)}{1 + \lambda f(z)}$ definierte Funktion $f_\lambda : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ in $\mathcal{S}_+(\mathcal{T}_+)$. Im Fall $f \neq 0$ gilt auch $\widetilde{f} \in \mathcal{S}_+(\mathcal{T}_+)$.

Beweis: Sei $f = g_{a,\mu}$ aus $\mathcal{S}_+ \setminus \{0\}$ und $z > 0$.
Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Treppenfunktion $\chi_n : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ durch

$$\chi_n := \sum_{p=0}^{2^{2n}-1} \frac{1 + p2^{-n}}{z + p2^{-n}} \mathbb{1}_{[p2^{-n}, (p+1)2^{-n})}.$$

Zu $t>0$ und $n\in\mathbb{N}$ mit $2^n>t$ gibt es wegen $\dot{\bigcup}_{p=0}^{2^{2n}-1}[p2^{-n},(p+1)2^{-n})=[0,2^n)$ eine eindeutige ganze Zahl $0\le k_n<2^{2n}$ mit $t\in[k_n2^{-n},(k_n+1)2^{-n})$ und folglich $t-k_n2^{-n}\in[0,2^{-n})$. Gemäß [7] Satz 3.3.2 gilt $\lim_{n\to\infty}k_n2^{-n}=t$.
Wegen $\chi_n(t)=\frac{1+k_n2^{-n}}{z+k_n2^{-n}}$ folgt $\lim_{n\to\infty}\chi_n(t)=\frac{1+t}{z+t}$ aus der Stetigkeit von $s\mapsto\frac{1+s}{z+s}$. Zudem gilt $\lim_{n\to\infty}\chi_n(0)=\frac{1}{z}$. Die Abschätzung

$$0\le\frac{1+s}{z+s}=1+\frac{1-z}{z+s}=1+\frac{1}{z+s}-\frac{z}{z+s}\le 1+\frac{1}{z}=\frac{z+1}{z},\ s\ge 0,$$

führt zu $\chi_n(t)=\frac{1+k_n2^{-n}}{z+k_n2^{-n}}\le\frac{z+1}{z}$ und $\chi_n(0)=\frac{1}{z}\le\frac{z+1}{z}$, weshalb mit Hilfe des Satzes von der beschränkten Konvergenz (siehe Satz 3.1.12)

$$\begin{aligned}\int_{[0,+\infty)}\frac{1+t}{z+t}\,d\mu(t)&=\int_{[0,+\infty)}\lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{2^{2n}-1}\frac{1+p2^{-n}}{z+p2^{-n}}\mathbb{1}_{[p2^{-n},(p+1)2^{-n})}(t)\,d\mu(t)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{2^{2n}-1}\frac{1+p2^{-n}}{z+p2^{-n}}\mu([p2^{-n},(p+1)2^{-n})).\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$f(z)=a+\int_{[0,+\infty)}\frac{1+t}{z+t}\,d\mu(t)=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\Big(a+\sum_{p=0}^{2^{2n}-1}\frac{(1+p2^{-n})\mu([p2^{-n},(p+1)2^{-n}))}{z+p2^{-n}}\Big)}_{g_n(z):=}.$$

Nach Lemma 3.4.9 existiert für jedes $n\in\mathbb{N}$ eine Funktion $h_n\in\mathcal{S}_+$ mit $h_n(z)=\widetilde{g_n}(z)$ und folglich

$$\lim_{n\to\infty}h_n(z)=\lim_{n\to\infty}\widetilde{g_n}(z)=\lim_{n\to\infty}g_n(z^{-1})^{-1}=f(z^{-1})^{-1}$$

für alle $z>0$. Nach Korollar 3.4.8 gibt es eine Funktion $g_{b,\nu}\in\mathcal{S}_+$ mit $g_{b,\nu}(z)=f(z^{-1})^{-1}$ oder äquivalent dazu

$$g_{b,\nu}(z)f(z^{-1})=1 \tag{3.15}$$

für alle $z>0$. Da $z\mapsto g_{b,\nu}(z)f(z^{-1})$ nach Proposition 3.3.3 analytisch ist, kann die Gleichheit (3.15) mittels des Identitätssatzes (siehe [13] Satz 3.1.4) auf $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ fortgesetzt werden. Insbesondere hat f keine Nullstellen und $\widetilde{f}=g_{b,\nu}\in\mathcal{S}_+$.

Für $f\in\mathcal{T}_+$ liegt $h:=(z\mapsto f(z^{-1}))$ in $\mathcal{S}_+$ und mit dem soeben Gezeigten $\widetilde{h}$ in $\mathcal{S}_+$, was wegen $\widetilde{h}(z)=\frac{1}{h(\frac{1}{z})}=\frac{1}{f(z)}=\widetilde{f}(z^{-1})$ offenbar $\widetilde{f}\in\mathcal{T}_+$ bedeutet.

Für $f\in\mathcal{S}_+(\mathcal{T}_+)$ gilt $f_\lambda(z)=\frac{1}{\frac{1}{f(z)}+\lambda}=(\widetilde{\widetilde{f}+\lambda})(z)$. Also folgt $f_\lambda\in\mathcal{S}_+(\mathcal{T}_+)$ aus dem gerade Gezeigten, Bemerkung 3.3.4, Bemerkung 3.4.2 4. und $(t\mapsto\lambda)\in\mathcal{S}_+(\mathcal{T}_+)$. $\square$

Aus Lemma 3.4.10 folgt unmittelbar

Korollar 3.4.11 $\mathcal{T}_+\setminus\{0\}\subseteq\widetilde{\mathcal{T}}$.

Beispiel 3.4.12 Für $f \in \mathcal{T}$ ohne Nullstellen gilt im Allgemeinen nicht $\widetilde{f} \in \mathcal{T}$. Etwa die Funktion $f = (z \mapsto \frac{1}{1+z})$ liegt in $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{T}$; siehe Lemma 3.4.4. Wegen $[\frac{1}{1+z^{-1}}]^{-1} = 1 + \frac{1}{z},\ z > 0$, existert aber $\lim_{z\searrow 0} \widetilde{f}(z)$ nicht, weshalb $\widetilde{f} \notin \mathcal{T}$.

Lemma 3.4.13 $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}_0 = \emptyset$.

Beweis: Für $g_{a,\mu} \in \mathcal{S}$ folgt aus Bemerkung 3.4.2 2.

$$\lim_{z\searrow 0} |\widetilde{g_{a,\mu}}(z)| = \lim_{z\searrow 0} \left|g_{a,\mu}(z^{-1})\right|^{-1} = (\lim_{z\nearrow +\infty} |g_{a,\mu}(z)|)^{-1} = \frac{1}{|a|} \in (0, +\infty],$$

wodurch $g_{a,\mu} \notin \mathcal{T}_0$; siehe Definition 3.3.1. □

Lemma 3.4.14 Für $f_{a,\mu} \in \widetilde{\mathcal{T}}$ mit $\mu(\{0\}) \neq 0$ gilt $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}_0$.

Beweis: Zunächst haben wir

$$\begin{aligned}\widetilde{f_{a,\mu}}(z) &= [a + \mu(\{0\})z^{-1} + \int_{(0,+\infty)} \frac{z^{-1}(1+t)}{1+tz^{-1}}\, d\mu(t)]^{-1} \\ &= z[az + \mu(\{0\}) + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{1+tz^{-1}}\, d\mu(t)]^{-1}.\end{aligned}$$

Für $t, z > 0$ gilt $\frac{1+t}{1+tz^{-1}} \leq \frac{1+t}{t} z$, und daher $\lim_{z\searrow 0} \frac{1+t}{1+tz^{-1}} = 0$. Aus $0 < t$ und $0 < z < 1$ folgt $\frac{1+t}{1+tz^{-1}} < 1$, wodurch wir

$$\lim_{z\searrow 0} \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{1+tz^{-1}}\, d\mu(t) = 0$$

aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz (siehe Satz 3.1.13) erhalten. Damit gilt

$$\lim_{z\searrow 0} [az + \mu(\{0\}) + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{1+tz^{-1}}\, d\mu(t)] = \mu(\{0\})$$

und folglich $\lim_{z\searrow 0} \widetilde{f_{a,\mu}}(z) = \lim_{z\searrow 0} z\mu(\{0\})^{-1} = 0$, also $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}_0$. □

Lemma 3.4.15 $\mathcal{T}_+ \subseteq \mathcal{S}_0 \dot\cup \mathcal{T}_0$.

Beweis: Vorweg sei bemerkt, dass $0 \in \mathcal{S}_0$. Für $f = f_{a,\mu} \in \mathcal{T}_+ \setminus \{0\}$ folgt $\widetilde{f} \in \mathcal{T}_+$ aus Lemma 3.4.10, wobei

$$\widetilde{f}(z) = [a + \mu(\{0\})\frac{1}{z} + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{z+t}\, d\mu(t)]^{-1}.$$

Im Fall $\mu(\{0\}) \neq 0$ gilt $f \in \mathcal{T}_0$ auf Grund von Lemma 3.4.14 und Korollar 3.4.11.
Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (siehe [8] Fakta 14.5.3 3.) folgt

$$\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\mu(t) = \int_{(0,+\infty)} \lim_{z\searrow 0} \frac{1+t}{z+t}\, d\mu(t) = \lim_{z\searrow 0} \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{z+t}\, d\mu(t).$$

Damit ist $(t \mapsto \frac{1+t}{t}) \in L^1(\mu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))})$ im Fall $\mu(\{0\}) = 0$ äquivalent zu

$$\lim_{z \searrow 0} \widetilde{f}(z) = \lim_{z \searrow 0} [a + \int_{(0,+\infty)} \frac{\frac{1}{z}(1+t)}{1+t\frac{1}{z}} \, d\mu(t)]^{-1} = [a + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t} \, d\mu(t)]^{-1} > 0,$$

also $f_{a,\mu} \in \mathcal{S}_0$ äquivalent zu $f_{a,\mu} \notin \mathcal{T}_0$; siehe Lemma 3.4.4. □

Korollar 3.4.16 Für $g = f_{a,\mu} \in \mathcal{T}_+ \setminus \{0\}$ und $\lambda > 0$ gilt $g_\lambda := \frac{g}{1+\lambda g} \in \mathcal{T}_+ \cap \mathcal{S}_0$ und $1 - \lambda g_\lambda \in \mathcal{S}_0$.

Beweis: Nach Lemma 3.4.10 liegt $g_\lambda = f_{a_\lambda, \mu_\lambda}$ in $\mathcal{T}_+$. Wegen $g \neq 0$ gibt es nach Korollar 3.3.8 ein $s > 0$ mit $g(s) \neq 0$, und nach Bemerkung 3.3.2 4. ist g monoton wachsend. Damit erhält man $b := \lim_{z \nearrow +\infty} g(z) > 0$, wobei

$$\lim_{z \searrow 0} \widetilde{g_\lambda}(z) = \lim_{z \nearrow +\infty} \widetilde{g_\lambda}(z^{-1}) = \lim_{z \nearrow +\infty} \frac{1 + \lambda g(z)}{g(z)} = \begin{cases} b^{-1}(1+\lambda b), & b < +\infty, \\ \lambda, & b = +\infty, \end{cases}$$

nach [7] Satz 7.2.14. Daraus folgt $g_\lambda \notin \mathcal{T}_0$, womit $g_\lambda \in \mathcal{S}_0$ gemäß Lemma 3.4.15 .

Nach Bemerkung 3.3.4. gilt $1 - \lambda g_\lambda = f_{1,0} - \lambda f_{a_\lambda, \mu_\lambda} = f_{1-a_\lambda, -\lambda\mu_\lambda} \in \mathcal{T}$. Aus $g_\lambda \in \mathcal{S}_0$ und Lemma 3.4.4 folgt $(s \mapsto \frac{1+s}{s}) \in L^1(\mu_\lambda)$ und $\mu_\lambda(\{0\}) = 0$. Wegen der Linearität des Integrals im Maß (siehe [8] Fakta 18.3.16 5.) gilt $(s \mapsto \frac{1+s}{s}) \in L^1(-\lambda\mu_\lambda)$. Zudem erhält man $(-\lambda\mu_\lambda)(\{0\}) = -\lambda\mu_\lambda(\{0\}) = (-\lambda)0 = 0$. Somit liegt $1 - \lambda g_\lambda$ wieder wegen Lemma 3.4.4 in $\mathcal{S}_0$. □

Lemma 3.4.17 Für $f \in \widetilde{\mathcal{T}}$ und $\widetilde{f} = f_{a,\mu}$ gilt $\breve{f} := (z \mapsto \frac{z}{f(z)}) \in \mathcal{T}$, genauer $\breve{f} = f_{\mu(\{0\}),\nu}$, wobei $\nu(\{0\}) = a$ und $\nu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))} = T(\mu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))})$ mit $T(t) := t^{-1}, t > 0$.

Beweis: Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gilt

$$\begin{aligned}
\breve{f}(z) = z\widetilde{f}(\frac{1}{z}) &= az + z \int_{[0,+\infty)} \frac{\frac{1}{z}}{1+t\frac{1}{z}}(1+t) \, d\mu(t) \\
&= az + \int_{[0,+\infty)} \frac{z}{t+z}(1+t) \, d\mu(t) \\
&= az + \mu(\{0\})\frac{z}{0+z} + \int_{(0,+\infty)} \frac{z}{t+z}(1+t) \, d\mu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))}(t).
\end{aligned}$$

Aus dem Transformationsatz (siehe Satz 3.1.19) folgt

$$\begin{aligned}
\int_{(0,+\infty)} \frac{z}{t+z}(1+t) \, d\mu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))}(t) &= \int_{(0,+\infty)} \frac{z}{1+\frac{1}{t}z}\frac{1}{t}(1+t) \, d\mu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))}(t) \\
&= \int_{(0,+\infty)} \frac{z}{1+tz} t \frac{(1+t)}{t} \, dT(\mu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))})(t).
\end{aligned}$$

Mit $\nu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))} := T(\mu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))})$ und $\nu(\{0\}) := a$ gilt

$$\begin{aligned}
\breve{f}(z) &= \mu(\{0\}) + a\frac{z}{1+0z} + \int_{(0,+\infty)} \frac{z}{1+tz}(1+t) \, d\nu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))}(t) \\
&= \mu(\{0\}) + \int_{[0,+\infty)} \frac{z(1+t)}{1+tz} \, d\nu(t),
\end{aligned}$$

also $\breve{f} = f_{\mu(\{0\}),\nu} \in \mathcal{T}$. □

3.5 Komposition von Stieltjes Funktionen

Dieser Abschnitt legt dar, dass die Hintereinanderausführung $f \circ g$ zweier Funktionen $f \in \mathcal{T}$ und $g \in \mathcal{T}_+$ wieder in $\mathcal{T}$ liegt. Für das Folgende seien $b \in \mathbb{C}, \nu \in \mathfrak{M}$ mit $f = f_{b,\nu}$ und $a \geq 0, \mu \in \mathfrak{M}$ nicht-negativ mit $g = f_{a,\mu}$. Mit Lemma 3.4.10 erkennen wir auch, dass $g_t = \frac{g}{1+tg} = f_{a_t,\mu_t} \in \mathcal{T}_+$, wobei $a_t = \frac{a}{1+ta}$ für alle $t \geq 0$.

Lemma 3.5.1 Für $g \in \mathcal{T}_+$ und $f \in \mathcal{T}$ sind (V_1) aus Lemma 3.2.18 und

(V_2) $[0,+\infty) \to \mathbb{C}, t \mapsto \int_{[0,+\infty)} \phi(s)\, d\mu_t(s)$ stetig für alle $\phi \in C_c([0,+\infty))$,

erfüllt.

Beweis: Für $t \geq 0$, $z > 0$, und jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,+\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_{a_{t_n},\mu_{t_n}}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(z)}{1+t_n g(z)} = \frac{g(z)}{1+tg(z)} = f_{a_t,\mu_t}(z),$$

weshalb $(\mu_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ laut Korollar 3.3.12 vage gegen μ_t konvergiert, also $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} \phi\, d\mu_{t_n} = \int_{[0,+\infty)} \phi\, d\mu_t$ für alle $\phi \in C_0$. Insbesondere ist $t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} \phi\, d\mu_t$ stetig und infolge messbar für alle $\phi \in C_0$, womit auch (V_2) zutrifft.
Nach [8] Bemerkung 15.8.9 existiert eine Funktion $\chi \in C_c^1([0,+\infty))$ mit $\chi(t) \in [0,1], t \in [0,+\infty)$, $\chi|_{[0,1]} \equiv 1$ und $\chi|_{[2,+\infty)} \equiv 0$. Für jedes $\psi \in C_b([0,+\infty))$ und $s \geq 0$ gilt $\psi(s) = \lim_{n\to\infty} \psi(t)\chi(\frac{t}{n})$ und $\left|\psi(s)\chi(\frac{s}{n})\right| \leq |\psi(s)|$, weshalb

$$\int_{[0,+\infty)} \psi\, d\mu_t = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} \psi(s)\chi(\frac{s}{n})\, d\mu_t,$$

nach Bemerkung 3.2.4 2. und dem Satz von der beschränkten Konvergenz; siehe Satz 3.1.13. Infolge von [8] Fakta 14.4.9 10. erhält man die Messbarkeit von $t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} \psi\, d\mu_t$ für alle $\psi \in C_b([0,+\infty))$.

Zudem gilt für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\left|(1+t)\int_{[0,+\infty)} \psi\, d\mu_t\right| &\leq (1+t)\int_{[0,+\infty)} |\psi(s)|\, d\mu_t(s) \leq \|\psi\|_\infty (1+t)\int_{[0,+\infty)} \frac{1+s}{1+s}\, d\mu_t(s) \\ &= \|\psi\|_\infty (g_t(1) - a_t)(1+t) = \|\psi\|_\infty \left(\frac{g(1)(1+t)}{1+tg(1)} - \frac{a(1+t)}{1+ta}\right).\end{aligned}$$

Gemäß Lemma 3.2.11 ist $(t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} \psi\, d\mu_t(s))$ ν-integrierbar, weshalb (V_1) aus Lemma 3.2.18 zutrifft. $\square$

Satz 3.5.2 Mit $g \in \mathcal{T}_+$ und $f \in \mathcal{T}$ liegt auch $f \circ g$ in $\mathcal{T}$, wobei $f \in \mathcal{T}_+$ sogar $f \circ g \in \mathcal{T}_+$ nach sich zieht.

Beweis: Aus Lemma 3.5.1 und Lemma 3.2.18 wissen wir um die Existenz eines Maßes $\omega \in \mathfrak{M}$ mit

$$\int_{[0,+\infty)} \psi\, d\omega(s) = \int_{[0,+\infty)} (1+t)\int_{[0,+\infty)} \psi\, d\mu_t(s)\, d\nu(t)$$

für $\psi \in C_b([0,+\infty))$. Laut Lemma 3.2.11 liegt $(t \mapsto \frac{z(1+t)}{1+tz})$ in $C_b([0,+\infty))$. Somit erhält man für $z > 0$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(z) = f(g(z)) = b + \int_{[0,+\infty)} \frac{g(z)(1+t)}{1+tg(z)}\, d\nu(t) &= b + \int_{[0,+\infty)} (1+t) g_t(z)\, d\nu(t) \\
&= b + \int_{[0,+\infty)} a_t(1+t)\, d\nu(t) + \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} \frac{z(1+s)}{1+sz}\, d\mu_t(s)\, d\nu(t) \\
&= f(a) + \int_{[0,+\infty)} \frac{z(1+t)}{1+tz}\, d\omega(t).
\end{aligned}
$$

Diese Gleichheit kann nach [13] Satz 3.1.4 auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ fortgesetzt werden, womit $f \circ g \in \mathcal{T}$.

Im Fall $f \in \mathcal{T}_+$ gilt $f(a) \geq 0$ und nach Lemma 3.2.18 ist mit ν auch ω nicht-negativ. $\square$

3.6 Potenzen

Bezeichnet $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so sei $Log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ ihre Umkehrfunktion $Log := (\exp|_{\mathbb{R}\times(-\pi,\pi)})^{-1}$. Wir sprechen vom Hauptzweig des Logarithmus.

Definition 3.6.1 Für $\alpha \in \mathbb{C}$ definieren wir $z^\alpha := \exp(\alpha Log(z)), z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Die Einschränkung $\exp|_{\mathbb{R}}$ ist eine Bijektion von $\mathbb{R}$ nach $(0, +\infty)$ und hat die Inverse ln. Der Hauptzweig des Logarithmus Log ist die analytische Fortsetzung von ln auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Bemerkung 3.6.2

1. Mit $e := \exp(1)$ gilt $e^\alpha = \exp(\alpha Log(\exp(1)) = \exp(\alpha), \alpha \in \mathbb{C}$.

2. Die Verwendung von z^α ist missverständlich da, aus jeder Wahl eines Zweiges, also Rechtsinversen von exp, unterschiedliche Versionen von Potenzen entspringen, die jedoch für α aus $\mathbb{N}$ übereinstimmen. Die vorliegende Wahl hat den Vorteil, auf den positiven rellen Zahlen mit den üblichen Potenzen übereinzustimmen.

3. Bezeichet $\arg := \operatorname{Im} \circ Log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to (-\pi, \pi)$ das Argument einer komplexen Zahl, so lässt sich $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ durch $z = |z|e^{i \arg(z)}$ in Polarform darstellen. Zudem gilt $e^{-i\pi} = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$.

4. Für $z, w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gilt $Log(zw) = Log(z) + Log(w)$ und folglich $(zw)^\alpha = z^\alpha w^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, falls $Log(z) + Log(w) \in \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$.

5. Für $z, w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist die Gleichheit
$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w)\overline{(z-w)} \\ &= z\overline{z} + w\overline{w} - (|z|e^{i\arg(z)}|w|e^{-i\arg(w)} + |z|e^{-i\arg(z)}|w|e^{i\arg(w)}) \\ &= z\overline{z} + w\overline{w} - |z||w|(e^{i(\arg(z)-\arg(w))} + e^{-i(\arg(z)-\arg(w))}) \\ &= |z|^2 + |w|^2 - 2|z||w|\cos(\arg(z) - \arg(w)) \end{aligned}$$
als Kosinussatz bekannt.

6. Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \alpha \in \mathbb{C}$ erhält man
$$\begin{aligned} z^\alpha &= (|z|e^{i\arg(z)})^{\operatorname{Re}(\alpha)+i\operatorname{Im}(\alpha)} = (|z|e^{i\arg(z)})^{\operatorname{Re}(\alpha)}(|z|e^{i\arg z})^{i\operatorname{Im}(\alpha)} \\ &= |z|^{\operatorname{Re}(\alpha)} e^{i\arg(z)\operatorname{Re}(\alpha)} e^{i\operatorname{Im}(\alpha)Log(z)} e^{-\arg(z)\operatorname{Im}(\alpha)} \\ &= |z|^{\operatorname{Re}(\alpha)} e^{-\arg(z)\operatorname{Im}(\alpha)} e^{i(\arg(z)\operatorname{Re}(\alpha)+\operatorname{Im}(\alpha)Log(z))}, \end{aligned}$$
und damit $|z^\alpha| = |z|^{\operatorname{Re}(\alpha)} e^{-\arg(z)\operatorname{Im}(\alpha)}$. Insbesondere gilt $|z^\alpha| = |z|^{\operatorname{Re}(\alpha)} = z^{\operatorname{Re}(\alpha)}$ für positive z.

Lemma 3.6.3 Für $\operatorname{Re}(\alpha) \in (0, 1)$ und $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gilt $(t \mapsto \frac{t^{-\alpha}}{z+t}) \in L^1(\lambda|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))})$.

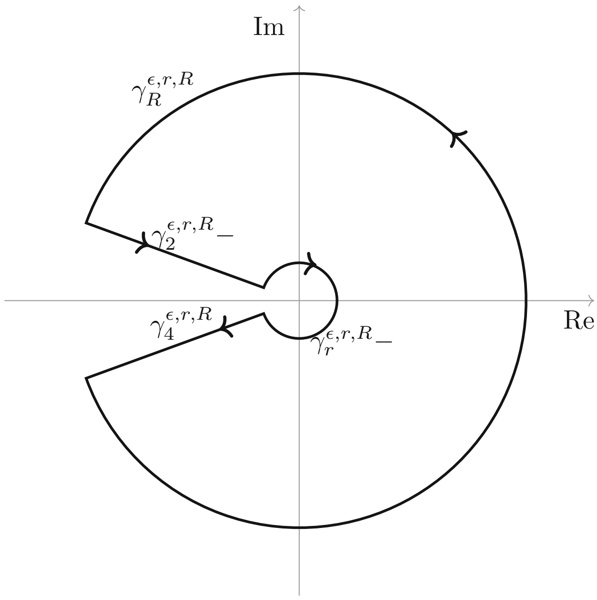
Beweis: Aus $\text{Re}(\alpha) \in (0,1)$ folgt wegen $|t^{-\alpha}| = \left|e^{-\text{Re}(\alpha)\ln(t)}\right| = t^{-\text{Re}(\alpha)}, t > 0$,

$$\int_{(0,+\infty)} \left|\frac{t^{-\alpha}}{1+t}\right| d\lambda(t) = \int_{(0,+\infty)} \frac{t^{-\text{Re}(\alpha)}}{1+t}\, dt < +\infty.$$

Damit ist $(t \mapsto \frac{t^{-\alpha}}{1+t}) \odot \lambda|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))}$ ein komplexes Maß und die Behauptung folgt wegen $\frac{t^{-\alpha}}{z+t} = \frac{1+t}{z+t}\frac{t^{-\alpha}}{1+t}, t > 0$, aus Lemma 3.2.11. $\square$

Satz 3.6.4 Für $\text{Re}(\alpha) \in (0,1)$ gilt $(z \mapsto z^\alpha) \in \mathcal{T}_0$, wobei für $\alpha \in (0,1)$ oder $\text{Re}(\alpha) = \frac{1}{2}$ auch $(z \mapsto z^\alpha) \in \mathcal{T}_+$.

Beweis: Wege und Weg-Integrale werden in [7] Kapitel 11 besprochen. Die Umkehrung eines



Weges γ wird mit $\gamma-$, und die Verknüpfung von Wegen γ_1 und γ_2 mit $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ bezeichnet. Für $\epsilon, r, R > 0$ mit $\epsilon < \pi$ und $r < R$ definieren wir den Weg

$$\gamma^{\epsilon,r,R} := (\gamma_R^{\epsilon,r,R} \circ \alpha_R) \oplus ((\gamma_2^{\epsilon,r,R}-) \circ \alpha_2) \oplus ((\gamma_r^{\epsilon,r,R}-) \circ \alpha_r) \oplus (\gamma_4^{\epsilon,r,R} \circ \alpha_4) : [0,1] \to \mathbb{C}$$

mit den monoton wachsenden Bijektionen

$$\begin{aligned}
\alpha_R &: [0, \tfrac{1}{4}] \to [\epsilon - \pi, \pi - \epsilon],\ \alpha_R(t) := (\pi - \epsilon)(8t - 1) \\
\alpha_2 &: [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}] \to [r, R],\ \alpha_2(t) := 4(R - r)t + 2r - R \\
\alpha_r &: [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}] \to [\epsilon - \pi, \pi - \epsilon],\ \alpha_r(t) := (\pi - \epsilon)(8t - 5) \\
\alpha_4 &: [\tfrac{3}{4}, 1] \to [r, R],\ \alpha_4(t) := 4(R - r)t + 4r - 3R,
\end{aligned}$$

und Wegen

$$\gamma_R^{\epsilon,r,R} : [\epsilon - \pi, \pi - \epsilon] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}, \qquad \gamma_2^{\epsilon,r,R} : [r, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto te^{i(\pi-\epsilon)},$$
$$\gamma_r^{\epsilon,r,R} : [\epsilon - \pi, \pi - \epsilon] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}, \qquad \gamma_4^{\epsilon,r,R} : [r, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto te^{-i(\pi-\epsilon)}.$$

Zudem bezeichne $U^{\epsilon,r,R}$ das von $\gamma^{\epsilon,r,R}$ umlaufene Gebiet.

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $r, R, \epsilon > 0$ mit $z \in U^{\epsilon,r,R}$, also $r < |z| < R$ und $0 < \epsilon < \pi - |\arg(z)|$. Aus der Cauchy'schen Integralformel (siehe [7] 11.6.12) folgt

$$\frac{z^\alpha}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^{\epsilon,r,R}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Nach [7] Fakta 11.2.3 1., 4. und [7] Fakta 11.1.3 2. gilt

$$\int_{\gamma^{\epsilon,r,R}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z} \, d\zeta = \int_{\gamma_R^{\epsilon,r,R}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z} \, d\zeta - \int_{\gamma_2^{\epsilon,r,R}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z} \, d\zeta - \int_{\gamma_r^{\epsilon,r,R}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z} \, d\zeta + \int_{\gamma_4^{\epsilon,r,R}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Im Folgenden wollen wir die Summanden einzeln betrachten und die Variablen r, ϵ gegen 0 und R gegen $+\infty$ gehen lassen.

- Aus Bemerkung 3.6.2 6. folgt

  $$\begin{aligned}\sup_{\epsilon-\pi \le \theta \le \pi-\epsilon} \left|(Re^{i\theta})^{\alpha-1}\right| &= \sup_{\epsilon-\pi \le \theta \le \pi-\epsilon} R^{\mathrm{Re}(\alpha)-1} e^{-\theta \, \mathrm{Im}(\alpha)} = R^{\mathrm{Re}(\alpha)-1} \sup_{\epsilon-\pi \le \theta \le \pi-\epsilon} e^{-\theta \, \mathrm{Im}(\alpha)} \\ &= R^{\mathrm{Re}(\alpha)-1} e^{(\pi-\epsilon)|\mathrm{Im}(\alpha)|} \le R^{\mathrm{Re}(\alpha)-1} e^{\pi|\mathrm{Im}(\alpha)|}.\end{aligned}$$

  Wegen Bemerkung 3.6.2 5. und $\cos(t) \le 1$, $t \in \mathbb{R}$, gilt

  $$\left|Re^{i\theta} - z\right|^2 = \left|Re^{i\theta} - |z|e^{i\arg(z)}\right|^2 = R^2 + |z|^2 - 2R|z|\cos(\theta - \arg(z)) \ge (R - |z|)^2$$

  für $\theta \in (-\pi, \pi)$ und folglich

  $$\sup_{\epsilon-\pi \le \theta \le \pi-\epsilon} \left|\frac{(Re^{i\theta})^{\alpha-1}}{Re^{i\theta} - z}\right| \le \sup_{\epsilon-\pi \le \theta \le \pi-\epsilon} \frac{\left|(Re^{i\theta})^{\alpha-1}\right|}{R - |z|} \le \frac{R^{\mathrm{Re}(\alpha)-1} e^{\pi|\mathrm{Im}(\alpha)|}}{R - |z|}.$$

  Bezeichnet $\ell(\gamma)$ die Länge eines Weges γ, so gelingt mit Hilfe von [7] (11.8) die Abschätzung

  $$\begin{aligned}\int_{\gamma_R^{\epsilon,r,R}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z} \, d\zeta &\le \ell(\gamma_R^{\epsilon,r,R}) \sup_{\epsilon-\pi \le \theta \le \pi-\epsilon} \left|\frac{\gamma_R^{\epsilon,r,R}(\theta)^{\alpha-1}}{\gamma_R^{\epsilon,r,R}(\theta) - z}\right| \\ &= 2(\pi - \epsilon) R \sup_{\epsilon-\pi \le \theta \le \pi-\epsilon} \left|\frac{(Re^{i\theta})^{\alpha-1}}{Re^{i\theta} - z}\right| \le 2\pi e^{\pi|\mathrm{Im}(\alpha)|} \frac{R^{\mathrm{Re}(\alpha)}}{R - |z|}.\end{aligned}$$

  Nach der Regel von de L'Hospital [7] Satz 7.2.14 gilt

  $$\lim_{R \to +\infty} \frac{R^{\mathrm{Re}(\alpha)}}{R - |z|} = \lim_{R \to +\infty} \frac{\mathrm{Re}(\alpha) R^{\mathrm{Re}(\alpha)-1}}{1} = 0$$

  wegen $\mathrm{Re}(\alpha) < 1$. Wir erhalten $\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R^{\epsilon,r,R}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z} \, d\zeta = 0$.

- Wie im vorherigen Punkt ergibt sich

$$\int_{\gamma_r^{\epsilon,r,R}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z}\, d\zeta \leq \ell(\gamma_r^{\epsilon,r,R}) \sup_{\epsilon-\pi\leq\theta\leq\pi-\epsilon} \left| \frac{\gamma_r^{\epsilon,r,R}(\theta)^{\alpha-1}}{\gamma_r^{\epsilon,r,R}(\theta) - z} \right| \leq 2\pi e^{\pi|\mathrm{Im}(\alpha)|} \frac{r^{\mathrm{Re}(\alpha)}}{|z| - r}.$$

  Wegen $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ gilt $\lim_{r\searrow 0} \frac{r^{\mathrm{Re}(\alpha)}}{|z|-r} = 0$, also $\lim_{r\searrow 0} \int_{\gamma_r^{\epsilon,r,R}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta-z}\, d\zeta = 0$.

- Aus [7] Satz 11.2.5 erhält man angesichts von $0 < \epsilon < \pi - |\arg z| < \pi$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2^{\epsilon,r,R}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z}\, d\zeta &= \int_{[r,R]} \frac{(se^{i(\pi-\epsilon)})^{\alpha-1}}{se^{i(\pi-\epsilon)} - z} e^{i(\pi-\epsilon)}\, ds = \int_{[r,R]} \frac{s^{\alpha-1}e^{i(\pi-\epsilon)\alpha}}{se^{i(\pi-\epsilon)} - z}\, ds \\ &= e^{i(\pi-\epsilon)\alpha} \int_{[r,R]} \frac{1+s}{se^{i(\pi-\epsilon)} - z} \frac{s^{\alpha-1}}{1+s}\, ds.\end{aligned}$$

  Wegen Lemma 3.6.3 ist $(s \mapsto \frac{s^{\alpha-1}}{1+s}) \odot \lambda|_{\mathfrak{B}([0,+\infty))}$ ein komplexes Maß. Nach Bemerkung 3.6.2 5. gilt

$$\begin{aligned}\left|se^{i(\pi-\epsilon)} - z\right|^2 &= \left|se^{i(\pi-\epsilon)}\right|^2 - 2\left|se^{i(\pi-\epsilon)}\right||z|\cos(\pi - \epsilon - \arg(z)) + |z|^2 \\ &= s^2 + 2s|z|\cos(\epsilon + \arg(z)) + |z|^2.\end{aligned}$$

  Dementsprechend wollen wir ϵ_0 so wählen, dass $\epsilon + \arg(z)$ für $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ vollständig in einer Komponente von $(-\pi, 0)\dot\cup[0, \pi)$ enthalten ist. Dies wird beispielsweise durch die Wahl $\epsilon_0 := \frac{\pi-\arg(z)}{2}$ für $\arg(z) \geq 0$ und $\epsilon_0 := -\frac{\arg(z)}{2}$ für $\arg(z) < 0$ bewerkstelligt.
  Für $\arg(z) \geq 0$, $s > 0$ und $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ gilt $\left|se^{i(\pi-\epsilon)} - z\right|^2 \geq s^2 + 2s|z|\cos(\epsilon_0 + \arg(z)) + |z|^2 = \left|se^{i(\pi-\epsilon_0)} - z\right|^2 > 0$, also

$$\left|\frac{1+s}{se^{i(\pi-\epsilon)} - z}\right| \leq \left|\frac{1+s}{se^{i(\pi-\epsilon_0)} - z}\right| = \left|\frac{1+s}{s + (-ze^{i(\epsilon_0-\pi)})}\right| = \left|\frac{1+s}{s + ze^{i\epsilon_0}}\right|,$$

  wobei $ze^{i\epsilon_0} = |z|e^{i(\arg(z)+\epsilon_0)} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Im Fall $\arg(z) < 0$ erhält man für $s > 0$ und $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ die Ungleichung $\left|se^{i(\pi-\epsilon)} - z\right|^2 \geq s^2 + 2s|z|\cos(\arg(z)) + |z|^2 = s^2 - 2s|z|\cos(\pi - \arg(z)) + |z|^2 = \left|s - |z|e^{i(\arg(z)-\pi)}\right|^2$, also

$$\left|\frac{1+s}{se^{i(\pi-\epsilon)} - z}\right| \leq \left|\frac{1+s}{s - |z|e^{i(\arg(z)-\pi)}}\right| = \left|\frac{1+s}{s + (-|z|e^{i(\arg(z)-\pi)})}\right| = \left|\frac{1+s}{s+z}\right|.$$

  Somit besitzt das Netz $(s \mapsto \frac{1+s}{se^{i(\pi-\epsilon)}-z}\mathbb{1}_{[\epsilon,\frac{1}{\epsilon}]}(s))_{0<\epsilon<\epsilon_0}$ in beiden Fällen eine nach Lemma 3.2.11 $(s \mapsto \frac{s^{\alpha-1}}{1+s}) \odot \lambda|_{\mathfrak{B}([0,+\infty))}$-integrierbare Majorante.
  Zusammen mit $\lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{1+s}{se^{i(\pi-\epsilon)}-z}\mathbb{1}_{[\epsilon,\frac{1}{\epsilon}]}(s) = -\frac{1+s}{s+z}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(s)$, $s \geq 0$, folgt

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\searrow 0} \int_{\gamma_2^{\epsilon,\epsilon,\frac{1}{\epsilon}}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z}\, d\zeta &= \lim_{\epsilon\searrow 0} e^{i(\pi-\epsilon)\alpha} \int_{[\epsilon,\frac{1}{\epsilon}]} \frac{s^{\alpha-1}}{se^{i(\pi-\epsilon)} - z}\, ds \\ &= e^{i\pi\alpha} \int_{(0,+\infty)} -\frac{s^{\alpha-1}}{s+z}\, ds \qquad (3.16)\end{aligned}$$

aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz; siehe Satz 3.1.13. Analog zeigt man

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\gamma_4^{\epsilon,\epsilon,\frac{1}{\epsilon}}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z}\, d\zeta = e^{-i\pi\alpha} \int_{(0,+\infty)} -\frac{s^{\alpha-1}}{s+z}\, ds. \tag{3.17}$$

Für die Differenz von (3.16) und (3.17) erhalten wir

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \Big(\int_{\gamma_4^{\epsilon,\epsilon,\epsilon^{-1}}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\gamma_2^{\epsilon,\epsilon,\epsilon^{-1}}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z}\, d\zeta \Big) = (e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}) \int_{(0,+\infty)} \frac{s^{\alpha-1}}{s+z}\, ds.$$

Damit gilt

$$\frac{z^\alpha}{z} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^{\epsilon,\epsilon,\epsilon^{-1}}} \frac{\zeta^{\alpha-1}}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2\pi i} \int_{(0,+\infty)} \frac{s^{\alpha-1}}{s+z}\, ds = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_{(0,+\infty)} \frac{s^{\alpha-1}}{s+z}\, ds.$$

Mittels der Transformationsformel (siehe [8] Satz 15.1.2) angewandt auf $T(t) = \frac{1}{t}$ sieht man

$$\begin{aligned} z^\alpha &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_{(0,+\infty)} s^{\alpha-1} \frac{z}{s+z}\, ds = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_{(0,+\infty)} t^{1-\alpha} \frac{z}{t^{-1}+z}\, dt \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_{(0,+\infty)} t^{-\alpha} \frac{z}{1+tz} \frac{1+t}{1+t}\, dt = \int_{(0,+\infty)} \frac{z(1+t)}{1+tz} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{t^{-\alpha}}{1+t}\, dt. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.6.3 ist ω mit $\omega|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))} := (t \mapsto \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{t^{-\alpha}}{1+t}) \odot \lambda|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))}$ und $\omega\{0\} = 0$ ein komplexes Maß auf $([0,+\infty), \mathfrak{B}([0,+\infty)))$, womit $(z \mapsto z^\alpha) = f_{0,\omega} \in \mathcal{T}$.

Wegen $\left|((z^{-1})^\alpha)^{-1}\right| = |z^\alpha| = z^{\mathrm{Re}(\alpha)}, z > 0$, gilt $(z \mapsto z^\alpha) \in \mathcal{T}_0$, da $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$.

Für $\alpha = s + it, s, t \in \mathbb{R}$, gilt $\sin(\alpha\pi) = \sin(s\pi)\cosh(t\pi) + i\cos(s\pi)\sinh(t\pi)$. Infolge haben wir $\sin(\alpha\pi) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $t = 0$ oder $s \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, wobei $\sin(\alpha\pi) \geq 0$ falls $t = 0, s \in [0,1] + 2\mathbb{Z}$ oder $s \in \frac{1}{2} + 2\mathbb{Z}$. Also gilt $(z \mapsto z^\alpha) \in \mathcal{T}_+$ im Fall $\alpha \in (0,1) \cup \mathrm{Re}^{-1}(\frac{1}{2})$. $\square$

4 Funktionalkalkül

In diesem Kapitel wird ein Funktionalkalkül für Funktionen aus $\mathcal{T}$ und Relationen aus $\mathcal{M}$ definiert und einige Eigenschaften, wie die Produktregel oder die Stabilität unter Komposition näher untersucht.

Vorerst begnügen wir uns mit Resultaten für beschränkte lineare Operatoren, wenn auch die Beweise nach Betrachtung der Definitionsbereiche auch für unbeschränkte lineare Operatoren funktionieren würden; siehe [3]. Nichtsdestotrotz werden die Berechnungen wenn möglich per Möbius-Funktionalkalkül durchgeführt.

Im Anschluss werden der Vorgangsweise aus [4] folgend die Resultate auf lineare Relationen verallgemeinert.

4.1 Maßtheorie und Banachräume

Sei in diesem Abschnitt X ein Banachraum. In [12] werden Bochnerintegrale für positive Maße definiert. Darauf aufbauend wollen wir hier Bochnerintegral für komplexe Maße einführen.

Definition 4.1.1 Ein topologischer Raum heißt separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

Definition 4.1.2 Sei $(\Omega, \mathfrak{G})$ ein Messraum. Man sagt, $f : \Omega \to X$ ist stark-messbar, falls f der punktweise Grenzwert von Treppenfunktionen der Bauart $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{G_k} x_k$ mit $G_k \in \mathfrak{G}, x_k \in X$, $k \in \{1, ..., n\}$ ist.

Ohne Beweis verwenden wir folgenden Satz, welcher beispielsweise in [12] Satz 3.4. bewiesen wird.

Satz 4.1.3 (Pettis) Für einen Messraum $(\Omega, \mathfrak{G})$ und eine Funktion $f : \Omega \to X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- f ist stark messbar.
- f ist messbar und $f(\Omega)$ seperabel.
- Die Funktionen $\omega \mapsto \langle f(\omega), x' \rangle, x' \in X'$ sind messbar und $f(\Omega)$ ist seperabel.

Lemma 4.1.4 Sei $(\Omega, \mathfrak{G})$ ein Messraum.

1. Die Menge der stark-messbaren Funktionen $\Omega \to X$ bildet einen Vektorraum.

2. Eine Funktion $h : \Omega \to \mathbb{C}$ ist genau dann messbar, wenn sie stark-messbar ist.

3. Für eine stark-messbare Funktion $f : \Omega \to X$ und eine messbares $h : \Omega \to \mathbb{C}$ ist auch hf stark-messbar.

4. Für einen Messraum $(\Omega', \mathfrak{G}')$, eine messbare Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ und ein stark-messbares $f : \Omega \to X$ ist $f \circ T$ stark-messbar.

5. Der Punktweise Grenzwert f einer Folge stark-messbarer Funktionen $f_k : \Omega \to X$, $k \in \mathbb{N}$, ist stark-messbar.

Beweis:

1. Für stark-messbare $f = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{1}_{A_{j,k}} x_{j,k}$, $g = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m_k} \mathbb{1}_{B_{j,k}}(\omega) y_{j,k}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, und $\omega \in \Omega$ gilt

$$\begin{aligned}(f + \lambda g)(\omega) = f(\omega) + \lambda g(\omega) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{1}_{A_{j,k}}(\omega) x_{j,k} + \lambda \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m_k} \mathbb{1}_{B_{j,k}}(\omega) y_{j,k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{1}_{A_{j,k}}(\omega) x_{j,k} + \sum_{j=1}^{m_k} \mathbb{1}_{B_{j,k}}(\omega)(\lambda y_{j,k}) \right),\end{aligned}$$

weshalb $f + \lambda g$ stark-messbar ist.

2. Das ist eine unmittelbare Folge aus dem Satz von Pettis; siehe [12] Satz 3.4.

3. Wegen 2. gilt $h = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{m_k} b_{l,k} \mathbb{1}_{B_{l,k}}$. Gilt auch $f = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{1}_{A_{j,k}} x_{j,k}$, so folgt

$$\begin{aligned}(hf)(\omega) = h(\omega) f(\omega) &= \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{m_k} b_{l,k} \mathbb{1}_{B_{l,k}}(\omega) \right) \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{1}_{A_{j,k}}(\omega) x_{j,k} \right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{l=1}^{m_k} b_{l,k} \mathbb{1}_{B_{l,k}}(\omega) \right) \left(\sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{1}_{A_{j,k}}(\omega) x_{j,k} \right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{\substack{l \in \{1,\dots,m_k\} \\ j \in \{1,\dots,n_k\}}} \mathbb{1}_{B_{l,k} \cap A_{j,k}}(\omega)(b_{l,k} x_{j,k}),\end{aligned}$$

folglich ist hf stark-messbar.

4. Gelte wieder $f = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{1}_{A_{j,k}} x_{j,k}$. Wegen $T^{-1}(G) \in \mathfrak{G}', G \in \mathfrak{G}$ und

$$(f \circ T)(\omega) = f(T(\omega)) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{1}_{A_{j,k}}(T(\omega)) x_{j,k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{1}_{T^{-1}(A_{j,k})}(\omega) x_{j,k}, \; \omega \in \Omega,$$

ist $f \circ T$ stark-messbar.

5. Nach dem Satz von Pettis, [12] Satz 3.4, gilt $f_k(\Omega) \subseteq \overline{D_k}$ für abzählbare $D_k \subseteq X$. Zudem sind für jedes $x' \in X'$ die komplex-wertigen Funktionen $x' \circ f_k$, $k \in \mathbb{N}$, und daher auch ihr

punktweiser Grenzwert $x' \circ f$ messbar; siehe [8] Fakta 14.4.9 10.
Wegen $f_k(\Omega) \subseteq \overline{D_k}$, $k \in \mathbb{N}$, erhält man

$$f(\Omega) \subseteq \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f_k(\Omega)} \subseteq \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{D_k}} \subseteq \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k}.$$

Wieder nach dem Satz von Pettis ist f stark-messbar.

□

Bemerkung 4.1.5 Sei $g : \Omega \to X$ eine stark-messbare Funktion. Mit Hilfe des Satzes von Pettis (siehe [12] Satz 3.4) und [12] Lemma 3.8 kann auf die Messbarkeit von $\|g\| : \Omega \to [0, +\infty)$ geschlossen werden. Für ein nicht-negatives Maß ν ist g laut Definition 4.8 in [12] genau dann ν-integrierbar, wenn $\|g\| \in L^1(\mu)$, also $\int_\Omega \|g\| \, d\nu < +\infty$. Das Integral $\int_\Omega g \, d\nu$ ist gemäß Definition 4.8 in [12] definiert.

Definition 4.1.6 Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to X$ eine stark-messbare Funktion. Für ein nicht-negatives Maß ν und $h \in L^1(\nu)$ mit $\mu = h \odot \nu$ heißt f μ-integrierbar, falls hf ν-integrierbar. In diesem Fall definiert

$$\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega hf \, d\nu \in X$$

das Integral von f nach μ.
Die Menge der μ-integrierbaren Funktionen $\Omega \to X$ wird mit $L^1(\mu, X)$ bezeichnet.

Bemerkung 4.1.7 Für ein komplexes Maß μ gilt $L^1(\mu) = L^1(\mu, \mathbb{C})$ wegen Fakta 3.1.10 1. Nach [12] Satz 4.7 stimmt das Bochner-Integral mit dem Lebesgue-Integral (siehe Bemerkung 3.1.6) für Funktionen aus $L^1(\mu)$ überein.

Lemma 4.1.8 Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to X$ eine stark-messbare Funktion.

1. Definition 4.1.6 hängt nur von μ ab, ist also unabhängig von ν und h.

2. Es gilt $f \in L^1(\mu, X)$ genau dann wenn $\int_\Omega \|f\| \, d|\mu| < +\infty$, also $\|f\| \in L^1(|\mu|)$. Insbesondere haben wir $L^1(\mu, X) = L^1(|\mu|, X)$.

3. Falls $\|f\| \le g$ μ-f.ü. für $g : \Omega \to [0, +\infty)$ aus $L^1(\mu)$, so gilt $f \in L^1(\mu, X)$.

4. Für $f \in L^1(\mu, X)$ und $T \in \mathfrak{L}_b(X, Y)$ ist auch $T \circ f$ integrierbar, wobei $\int_\Omega T(f(\omega)) \, d\mu(\omega) = T(\int_\Omega f(\omega) \, d\mu(\omega))$. Insbesondere gilt

$$\langle \int_\Omega f(\omega) \, d\mu(\omega), x' \rangle = \int_\Omega \langle f(\omega), x' \rangle \, d\mu(\omega) \tag{4.1}$$

für alle $x' \in X'$.

Speziell gilt für $g \in L^1(\mu, \mathfrak{L}_b(X))$ und x aus X

$$\int_\Omega g(\omega) \, d\mu(\omega) x = \int_\Omega g(\omega) x \, d\mu(\omega)$$

und für $S \in \mathfrak{L}_b(X)$
$$S \int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega Sg(\omega)\, d\mu(\omega).$$

5. Für $y \in X$ und $g \in L^1(\mu)$ gilt $(\omega \mapsto g(\omega)y) \in L^1(\mu, X)$, wobei
$$\int_\Omega g(\omega)\, d\mu(\omega) y = \int_\Omega g(\omega) y\, d\mu(\omega). \tag{4.2}$$

6. Für $f \in L^1(\mu, X)$ gilt $\left\|\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)\right\| \leq \int_\Omega \|f(\omega)\|\, d|\mu|(\omega)$.

7. Die Abbildung $(f, \mu) \mapsto \int_\Omega f\, d\mu$ ist in beiden Argumenten linear.

Beweis: Sei $\widetilde{\nu}$ ein nicht-negatives Maß und $\widetilde{h} \in L^1(\widetilde{\nu})$ mit $\widetilde{h} \odot \widetilde{\nu} = \mu = h \odot \nu$. Für $x' \in X'$ und $f \in L^1(\mu, X)$ folgt
$$\langle \int_\Omega hf\, d\nu, x' \rangle = \int_\Omega \langle hf, x' \rangle\, d\nu = \int_\Omega \langle f, x' \rangle h\, d\nu = \int_\Omega \langle f, x' \rangle \widetilde{h}\, d\widetilde{\nu} = \langle \int_\Omega \widetilde{h} f\, d\widetilde{\nu}, x' \rangle$$
und damit 1. aus [12] Satz 4.7.

Nach [8] Korollar 18.3.14 existiert ein $h \in L^1(\mu)$ mit $|h| = 1$ μ-f.ü. und $\mu = h \odot |\mu|$. Der 2. Punkt folgt wegen
$$\int_\Omega \|hf\|\, d|\mu| = \int_\Omega \|f\|\, d|\mu|$$
aus Bemerkung 4.1.5.

Für $N \in \mathfrak{G}$ mit $\mu(N) = 0$ und $f(\omega) \leq g(\omega)$, $\omega \in \Omega \setminus N$ gilt
$$\int_\Omega \|f\|\, d|\mu| = \int_\Omega \|f\| \mathbb{1}_{\Omega \setminus N}\, d|\mu| \leq \int_\Omega g \mathbb{1}_{\Omega \setminus N}\, d|\mu| = \int_\Omega g\, d|\mu| < +\infty$$
wegen [8] Fakta 14.5.3 1. und [8] Fakta 14.6.2 7. Also folgt der 3. Punkt aus Punkt 2.

Hinsichtlich des 4. Punktes folgt
$$\begin{aligned}\int_\Omega T \circ f\, d\mu &= \int_\Omega T(f(\omega))h(\omega)\, d\nu(\omega) = \int_\Omega T(f(\omega)h(\omega))\, d\nu(\omega) \\ &= T(\int_\Omega f(\omega)h(\omega)\, d\nu(\omega)) = T(\int_\Omega f\, d\mu)\end{aligned}$$
aus [12] Lemma 5.1. Die restlichen Behauptungen ergeben sich jeweils durch die Wahl $T = x'$, $T = (A \mapsto Ax)$ beziehungsweise $T = (A \mapsto SA)$.

Den 5. Punkt erhält man aus 4. mit $T = (z \mapsto zy)$ und Bemerkung 4.1.7.

Für $h \in L^1(\mu)$ mit $|h| = 1$ und $\mu = h \odot |\mu|$ gilt
$$\begin{aligned}\left\|\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)\right\| &= \left\|\int_\Omega h(\omega)f(\omega)\, d|\mu|(\omega)\right\| \leq \int_\Omega \|h(\omega)f(\omega)\|\, d|\mu|(\omega) \\ &= \int_\Omega \|f(\omega)\|\, d|\mu|(\omega).\end{aligned}$$

aus [12] Satz 4.1. Damit ist der 6. Punkt bewiesen.

Für die Linearität im ersten Argument seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ und $f_1, f_2 \in L^1(\mu)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\langle \int_\Omega \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \, d\mu, x' \rangle &\overset{3.}{=} \int_\Omega \langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x' \rangle \, d\mu = \int_\Omega \alpha_1 \langle f_1, x' \rangle + \alpha_2 \langle f_2, x' \rangle \, d\mu \\ &= \alpha_1 \int_\Omega \langle f_1, x' \rangle \, d\mu + \alpha_2 \int_\Omega \langle f_2, x' \rangle \, d\mu \\ &\overset{3.}{=} \alpha_1 \langle \int_\Omega f_1 \, d\mu, x' \rangle + \alpha_2 \langle \int_\Omega f_2 \, d\mu, x' \rangle \\ &= \langle \alpha_1 \int_\Omega f_1 \, d\mu + \alpha_2 \int_\Omega f_2 \, d\mu, x' \rangle\end{aligned}$$

aus [8] Fakta 16.2.9 4. Damit gilt $\int_\Omega \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \, d\mu = \alpha_1 \int_\Omega f_1 \, d\mu + \alpha_2 \int_\Omega f_2 \, d\mu$ wegen [14] Korollar 5.2.7.

Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ und μ_1, μ_2 komplexe Maße auf $(\Omega, \mathfrak{G})$. Aus [8] (18.13) folgt

$$|\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2| \leq |\alpha_1 \mu_1| + |\alpha_2 \mu_2| \leq |\alpha_1||\mu_1| + |\alpha_2||\mu_2|,$$

und daher $L^1(\mu_1) \cap L^1(\mu_2) \subseteq L^1(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2)$. Für $f \in L^1(\mu_1) \cap L^1(\mu_2)$ und $x' \in X'$ folgt

$$\begin{aligned}\langle \int_\Omega f \, d(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2), x' \rangle &\overset{3.}{=} \int_\Omega \langle f, x' \rangle \, d(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) \\ &= \alpha_1 \int_\Omega \langle f, x' \rangle \, d\mu_1 + \alpha_2 \int_\Omega \langle f, x' \rangle \, d\mu_2 \\ &\overset{3.}{=} \alpha_1 \langle \int_\Omega f \, d\mu_1, x' \rangle + \alpha_2 \langle \int_\Omega f \, d\mu_2, x' \rangle \\ &= \langle \alpha_1 \int_\Omega f \, d\mu_1 + \alpha_2 \int_\Omega f \, d\mu_2, x' \rangle\end{aligned}$$

aus [8] Fakta 16.2.9 5. Damit gilt $\int_\Omega f \, d(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) = \alpha_1 \int_\Omega f \, d\mu_1 + \alpha_2 \int_\Omega f \, d\mu_2$ wegen [14] Korollar 5.2.7. □

Lemma 4.1.9 Ist $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum, $(h : \Omega \to \mathfrak{L}_b(X)) \in L^1(\mu, \mathfrak{L}_b(X))$ und $D \in \mathfrak{L}_b(X)$ mit $Dh(\omega) = h(\omega)D$ für fast alle $\omega \in \Omega$, so gilt

$$D \int_\Omega h(\omega) \, d\mu(\omega) = \int_\Omega h(\omega) \, d\mu(\omega) D.$$

Beweis: Für $u \in X$ gilt

$$D \int_\Omega h(\omega) \, d\mu(\omega) u = \int_\Omega Dh(\omega) u \, d\mu(\omega) = \int_\Omega h(\omega) D u \, d\mu(\omega) = \int_\Omega h(\omega) \, d\mu(\omega) D u$$

wegen Lemma 4.1.8 4. □

Satz 4.1.10 (beschränkte Konvergenz) Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein Banachraum, $(K, \preceq)$ eine gerichtete Menge und $(f_k)_{k \in K}$ ein Netz stark-messbarer Funktionen $f_k : \Omega \to X$, welches

μ-f.ü. gegen eine stark-messbare Funktion f konvergiert und eine Teilfolge enthält.
Ferner sei $g \in L^1(\mu)$ mit der Abschätzung $\|f_k\| \leq g$ μ-f.ü. für alle $k \in K$.
Dann gilt $f, f_k \in L^1(\mu, X)$ für alle $k \in K$, wobei

$$\lim_{k\in K} \int_\Omega f_k \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu. \tag{4.3}$$

Beweis: Aus Lemma 4.1.8 3. folgt $f, f_k \in L^1(\mu, X)$, $k \in K$. Nach des Satzes von Pettis (siehe [12] Satz 3.4) sind die Funktionen $\omega \mapsto \langle f(\omega), x'\rangle$ und $\omega \mapsto \langle f_k(\omega), x'\rangle$ für alle $k \in K$ und jedes $x' \in X'$ messbar. Aufgrund der Stetigkeit von x' ergibt sich $\lim_{k\in K}\langle f_k, x'\rangle = \langle f, x'\rangle$ μ-f.ü. Weiters gilt $|\langle f_k, x'\rangle| \leq \|f_k\|\|x'\| \ \leq g\|x'\|$ μ-f.ü. für alle $k \in K$.
Wegen des klassischen Satzes von der beschränkten Konvergenz (siehe Satz 3.1.13) liegen $\omega \mapsto \langle f(\omega), x'\rangle$ sowie $\omega \mapsto \langle f_k(\omega), x'\rangle$ für alle $k \in K$ in $L^1(\mu)$. Dabei gilt

$$\begin{aligned}\langle \lim_{k\in K} \int_\Omega f_k \, d\mu, x'\rangle &= \lim_{k\in K}\langle \int_\Omega f_k \, d\mu, x'\rangle = \lim_{k\in K}\int_\Omega \langle f_k, x'\rangle \, d\mu = \int_\Omega \langle f, x'\rangle \, d\mu \\ &= \langle \int_\Omega f \, d\mu, x'\rangle\end{aligned}$$

für alle $x' \in X'$; siehe Lemma 4.1.8 4. Also folgt (4.3) aus [14] Korollar 5.2.7 (i). □

Satz 4.1.11 (Transformationssatz) Ist $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{G}')$ ein Messraum, X ein Banachraum, $T : \Omega \to \Omega'$ $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$-messbar und bijektiv mit $\mathfrak{G}'\mathfrak{G}$-messbarem T^{-1} und $f : \Omega' \to X$, so gilt $f \in L^1(T(\mu), X)$ genau dann, wenn $f \circ T \in L^1(\mu, X)$, wobei in diesem Fall

$$\int_\Omega f \circ T \, d\mu = \int_{\Omega'} f \, dT(\mu). \tag{4.4}$$

Beweis: Auf Grund von Lemma 4.1.4 4. ist $f \circ T$ genau dann stark-messbar, wenn $f = (f \circ T) \circ T^{-1}$ stark-messbar ist. Überdies ist $(\omega \mapsto \|f(\omega)\|) \in L^1(T(\mu))$ wegen Satz 3.1.19 äquivalent zu $\|f \circ T\| \in L^1(\mu)$. Infolge ist f nach Lemma 4.1.8 2. genau dann $T(\mu)$-integrierbar, wenn $f \circ T$ μ-integrierbar ist.
In diesem Fall folgt aus Lemma 4.1.8 4. und Satz 3.1.19

$$\begin{aligned}\langle \int_\Omega f \circ T \, d\mu, x'\rangle &= \int_\Omega \langle (f \circ T)(\omega), x'\rangle \, d\mu(\omega) = \int_{\Omega'} \langle f(\omega), x'\rangle \, dT(\mu)(\omega) \\ &= \langle \int_{\Omega'} f \, dT(\mu), x'\rangle\end{aligned}$$

für alle $x' \in X'$. Also erhalten wir (4.4) aus [14] Korollar 5.2.7 (i). □

Lemma 4.1.12 Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum, $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ und X ein Banachraum. Eine Funktion $f : \Upsilon \to X$ ist genau dann stark-messbar, wenn $\mathbb{1}_\Upsilon f$ stark-messbar ist. Überdies ist $f \in L^1(\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}, X)$ äquivalent zu $\mathbb{1}_\Upsilon f \in L^1(\mu, X)$. In diesem Fall gilt

$$\int_\Upsilon f \, d\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon} = \int_\Omega \mathbb{1}_\Upsilon f \, d\mu. \tag{4.5}$$

Beweis: Die Funktionen f und $\mathbb{1}_\Upsilon f$ sind punktweiser Grenzwert der selben Folge von Treppenfunktionen.

Nach Lemma 4.1.8 2. gilt $f \in L^1(\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}, X)$ genau dann, wenn $\|f\| \in L^1(\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon})$. Wegen Lemma 3.1.21 5. ist dies äquivalent zu $\|\mathbb{1}_\Upsilon f\| = \|f\|\mathbb{1}_\Upsilon \in L^1(\mu)$, und damit zu $\mathbb{1}_\Upsilon f \in L^1(\mu, X)$.

Für $x \in X'$ gilt

$$\begin{aligned}\langle \int_\Omega \mathbb{1}_\Upsilon f \, d\mu(t), x' \rangle &= \int_\Omega \langle \mathbb{1}_\Upsilon(\omega) f(\omega), x' \rangle \, d\mu(\omega) = \int_\Omega \langle f(\omega), x' \rangle \mathbb{1}_\Upsilon(\omega) \, d\mu(\omega) \\ &= \int_\Upsilon \langle f(\omega), x' \rangle \, d\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}(\omega) = \langle \int_\Upsilon f \, d\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}, x' \rangle\end{aligned}$$

wegen Lemma 4.1.8 4. und (3.3). Damit folgt (4.5) aus [14] Korollar 5.2.7 (i). □

Lemma 4.1.13 Sei $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum, $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ und X ein Banachraum. Eine Funktion $f : \Omega \to X$ ist genau dann stark-messbare, wenn $f|_\Upsilon$ und $f|_{\Omega\setminus\Upsilon}$ stark-messbar sind.
In diesem Fall liegt f genau dann in $L^1(\mu, X)$, wenn $f|_\Upsilon \in L^1(\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}, X)$ und $f|_{\Omega\setminus\Upsilon} \in L^1(\mu|_{\mathfrak{G}_{\Omega\setminus\Upsilon}}, X)$. Dabei gilt

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Upsilon f|_\Upsilon \, d\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon} + \int_{\Omega\setminus\Upsilon} f|_{\Omega\setminus\Upsilon} \, d\mu|_{\mathfrak{G}_{\Omega\setminus\Upsilon}}.$$

Beweis: Mit f sind auch $\mathbb{1}_\Upsilon f|_\Upsilon = \mathbb{1}_\Upsilon f$ und $\mathbb{1}_{\Omega\setminus\Upsilon} f|_{\Omega\setminus\Upsilon} = \mathbb{1}_{\Omega\setminus\Upsilon} f$ stark-messbar und somit auch $f|_\Upsilon$ und $f|_{\Omega\setminus\Upsilon}$; siehe Lemma 4.1.12.
Seien umgekehrt $f|_\Upsilon$ und $f|_{\Omega\setminus\Upsilon}$ stark-messbar und folglich $\mathbb{1}_\Upsilon f|_\Upsilon$ und $\mathbb{1}_{\Omega\setminus\Upsilon} f|_{\Omega\setminus\Upsilon}$ stark-messbar. Nach Lemma 4.1.4 1. ist es auch $f = (\mathbb{1}_\Upsilon + \mathbb{1}_{\Omega\setminus\Upsilon})f = \mathbb{1}_\Upsilon f + \mathbb{1}_{\Omega\setminus\Upsilon} f = \mathbb{1}_\Upsilon f|_\Upsilon + \mathbb{1}_{\Omega\setminus\Upsilon} f|_{\Omega\setminus\Upsilon}$.

Für $f|_\Upsilon \in L^1(\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}, X)$ und $f|_{\Omega\setminus\Upsilon} \in L^1(\mu|_{\mathfrak{G}_{\Omega\setminus\Upsilon}}, X)$ liegen $\mathbb{1}_\Upsilon f|_\Upsilon$ und $\mathbb{1}_{\Omega\setminus\Upsilon} f|_{\Omega\setminus\Upsilon}$ wegen Lemma 4.1.12 in $L^1(\mu, X)$, weshalb $f = \mathbb{1}_\Upsilon f|_\Upsilon + \mathbb{1}_{\Omega\setminus\Upsilon} f|_{\Omega\setminus\Upsilon} \in L^1(\mu, X)$.

Für die Umkehrung sei $f \in L^1(\mu, X)$. Infolge von Lemma 4.1.8 2. liegt $\|f\|$ in $L^1(\mu)$. Wegen $\|\mathbb{1}_\Upsilon f|_\Upsilon\| \leq \|f\|$ und Lemma 4.1.8 3. gilt $\mathbb{1}_\Upsilon f|_\Upsilon \in L^1(\mu, X)$. Aus Lemma 4.1.12 folgt damit $f|_\Upsilon \in L^1(\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon}, X)$. Auf die selbe Weise verifiziert man $f|_{\Omega\setminus\Upsilon} \in L^1(\mu|_{\mathfrak{G}_{\Omega\setminus\Upsilon}}, X)$.

In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \, d\mu &= \int_\Omega (\mathbb{1}_\Upsilon + \mathbb{1}_{\Omega\setminus\Upsilon}) f \, d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_\Upsilon \, d\mu f|_\Upsilon + \int_\Omega \mathbb{1}_{\Omega\setminus\Upsilon} f|_{\Omega\setminus\Upsilon} \, d\mu \\ &= \int_\Upsilon f|_\Upsilon \, d\mu|_{\mathfrak{G}_\Upsilon} + \int_{\Omega\setminus\Upsilon} f|_{\Omega\setminus\Upsilon} \, d\mu|_{\mathfrak{G}_{\Omega\setminus\Upsilon}},\end{aligned}$$

nach Lemma 4.1.8 7. und (4.5). □

Bemerkung 4.1.14 Für jedes $t \geq 0$ definieren wir eine Abbildung $\iota_t : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ durch $\iota_t(s) = (s, t)$. Nach [8] Satz 14.13.1 ist ι_t $\mathfrak{B}([0, +\infty))\mathfrak{B}([0, +\infty) \times [0, +\infty))$-messbar, weshalb die Schnitte $\iota_t^{-1}(B) = \{s \mid (s, t) \in B\}$, $t \geq 0$ von Mengen $B \in \mathfrak{B}([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ in $\mathfrak{B}([0, +\infty))$ liegen. Für $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to X$ und $s, t \geq 0$ gilt $(f \circ \iota_t)(s) = f(s, t)$.

Proposition 4.1.15 Ist $(\Omega, \mathfrak{G}, \mu)$ ein Maßraum und eine Funktion $f \in L^1(\mu, X)$, so gilt

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) \in \overline{\operatorname{span}(f(\Omega))}.$$

Beweis: Mittels [14] Satz 5.3.8 erhält man $\overline{\operatorname{span}(f(\Omega))}^{\sigma(X,X')} = \overline{\operatorname{span}(f(\Omega))}$. Damit liegt $x \in X$ nach [14] Satz 5.4.7 genau dann in $\overline{\operatorname{span}(f(\Omega))}$, wenn $\langle x, y' \rangle = 0$ für alle $y' \in f(\Omega)^\perp := \{y' \in X' \mid \langle f(\omega), y' \rangle = 0,\, \omega \in \Omega\}$.
Für $y' \in f(\Omega)^\perp$ folgt $\langle \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega), y' \rangle = \int_\Omega \langle f(\omega), y' \rangle\, d\mu(\omega) = 0$ aus Lemma 4.1.8 4. $\square$

Satz 4.1.16 (Fubini) Seien $\nu, \tau \in \mathfrak{M}$. Aus $f \in L^1(\nu \otimes \tau, X)$ folgt

$$\begin{aligned} &(s \mapsto f(s,t)) \in L^1(\nu, X) \text{ für } \tau\text{-fast alle } t \in [0, +\infty), \\ &\left(t \mapsto \int_{[0,+\infty)} \|f(s,t)\|\, d|\nu|(s)\right) \in L^1(\tau, X) \end{aligned} \tag{4.6}$$

und

$$\begin{aligned} &(t \mapsto f(s,t)) \in L^1(\tau, X) \text{ für } \nu\text{-fast alle } s \in [0, +\infty), \\ &\left(s \mapsto \int_{[0,+\infty)} \|f(s,t)\|\, d|\tau|(t)\right) \in L^1(\nu, X). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Zudem gilt

$$\int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} f\, d(\nu \otimes \tau) = \int_{[0,+\infty)\setminus N} \int_{[0,+\infty)} f\, d\tau\, d\nu = \int_{[0,+\infty)\setminus L} \int_{[0,+\infty)} f\, d\nu\, d\tau. \tag{4.8}$$

mit den Nullmengen L, N gemäß (4.6) respektive (4.7).

Beweis: Nach Lemma 4.1.4 4. und Bemerkung 4.1.14 ist $(s \mapsto f(s,t)) = f \circ \iota_t$ für alle $t \geq 0$ stark-messbar.

Damit folgen (4.6) und (4.7) aus Lemma 4.1.8 2. und dem Satz von Fubini (siehe [8] Satz 14.14.4) angewandt auf $\|f\| \in L^1(|\nu \otimes \tau|) = L^1(|\nu| \otimes |\tau|)$; siehe Fakta 3.2.10 2.

Sei ν vorerst ein positives Maß. Für jedes $x' \in X'$ betrachten wir die Abbildung $g : [0, +\infty) \setminus L \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \langle \int_{[0,+\infty)} f \circ \iota_t\, d\nu, x' \rangle$. Wegen $f \circ \iota_t \in L^1(\nu, X)$, $t \in [0, +\infty) \setminus L$ erhält man $\langle \int_{[0,+\infty)} f \circ \iota_t\, d\nu, x' \rangle = \int_{[0,+\infty)} (x' \circ f)(s,t)\, d\nu(s)$ aus Lemma 4.1.8 4. Da $\operatorname{Re}(x' \circ f)^+$ in $L^1(\nu \otimes \tau) = L^1(|\nu \otimes \tau|) = L^1(\nu \otimes |\tau|)$ liegt und $\nu([0, +\infty)), |\tau|([0, +\infty)) < +\infty$ gilt, folgt die Messbarkeit von $(t \mapsto \int_{[0,+\infty)} \operatorname{Re}(x' \circ f)^+(s,t)\, d\nu(s)) = \operatorname{Re}(g)^+$ aus [8] Korollar 14.14.3. Analog erhält man die Messbarkeit von $\operatorname{Re}(g)^-$, $\operatorname{Im}(g)^+$ und $\operatorname{Im}(g)^-$, womit sich g als messbar herausstellt.

Laut Proposition 4.1.15 gilt

$$\int_{[0,+\infty)} f \circ \iota_t\, d\nu \in \overline{\operatorname{span}((f \circ \iota_t)([0, +\infty)))} \subseteq \overline{\operatorname{span}\left(f([0, +\infty) \times [0, +\infty))\right)}$$

für alle $t \in [0, +\infty) \setminus L$. Wegen [12] Lemma 3.3 (iii) und (i) hat $t \mapsto \int_{[0,+\infty)} f \circ \iota_t\, d\nu$ folglich separables Bild. Nach dem Satz von Pettis ist $t \mapsto \int_{[0,+\infty)} f \circ \iota_t\, d\nu$ stark-messbar.

Für beliebiges $\nu \in \mathfrak{M}$ erhält man mit $h \in L^1(\nu)$, $\nu = h_\nu \odot |\nu|$

$$\begin{aligned}\int_{[0,+\infty)} f \circ \iota_t \, d\nu &= \int_{[0,+\infty)} (f \circ \iota_t) h_\nu \, d|\nu| \\ &= \int_{[0,+\infty)} (f \circ \iota_t)\big(\mathrm{Re}(h_\nu)^+ - \mathrm{Re}(h_\nu)^- + i[\mathrm{Im}(h_\nu)^+ - \mathrm{Im}(h_\nu)^-]\big) \, d|\nu|\end{aligned}$$

Da $\mathrm{Re}(h_\nu)^+ \odot |\nu|, \mathrm{Re}(h_\nu)^- \odot |\nu|, \mathrm{Im}(h_\nu)^+ \odot |\nu|, \mathrm{Im}(h_\nu)^- \odot |\nu|$ positive Maße bilden, ergibt sich die starke-Messbarkeit von $[0,+\infty) \setminus L \to X$, $t \mapsto \int_{[0,+\infty)} f(s,t) \, d\nu(s)$ aus Lemma 4.1.8 7. und Lemma 4.1.4 1.

Zu $\nu, \tau \in \mathfrak{M}$ gibt es nach [8] Korollar 18.3.14 Funktionen $h_\nu \in L^1(\nu), h_\tau \in L^1(\tau)$ mit $|h_\nu| = 1$ ν-f.ü., $|h_\tau| = 1$ τ-f.ü. und $\nu = h_\nu \odot |\nu|, \tau = h_\tau \odot |\tau|$. Für $x' \in X'$ folgt aus Lemma 4.1.8 4. und Definition 3.2.9

$$\begin{aligned}\langle \int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} f \, d(\nu \otimes \tau), x' \rangle &= \int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} \langle f(s,t), x' \rangle \, d(\nu \otimes \tau)(s,t) \\ &= \int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} \langle f(s,t), x' \rangle (h_\nu \otimes h_\tau)(s,t) \, d(|\nu| \otimes |\tau|)(s,t)\end{aligned}$$

Wegen Lemma 4.1.8 7. und wegen des Satzes von Fubini (siehe [8] Satz 14.14.4) angewandt auf $(s,t) \mapsto \mathrm{Re}(\langle f(s,t), x' \rangle (h_\nu \otimes h_\tau)(s,t))$ und $(s,t) \mapsto \mathrm{Im}(\langle f(s,t), x' \rangle (h_\nu \otimes h_\tau)(s,t))$ gilt

$$\begin{aligned}&\int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} \langle f(s,t), x' \rangle (h_\nu \otimes h_\tau)(s,t) \, d(|\nu| \otimes |\tau|)(s,t) \\ &\qquad = \int_{[0,+\infty)\setminus L} \int_{[0,+\infty)} \langle f(s,t), x' \rangle h_\nu(s) \, d|\nu|(s) h_\tau(t) \, d(|\tau|)(t).\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.1.8 4. ergibt sich

$$\begin{aligned}&\int_{[0,+\infty)\setminus L} \int_{[0,+\infty)} \langle f(s,t), x' \rangle h_\nu(s) \, d|\nu|(s) h_\tau(t) \, d|\tau|(t) \\ &\qquad = \int_{[0,+\infty)\setminus L} \int_{[0,+\infty)} \langle f(s,t), x' \rangle \, d\nu(s) \, d\tau(t) \\ &\qquad = \langle \int_{[0,+\infty)\setminus L} \int_{[0,+\infty)} f \, d\nu \, d\tau, x' \rangle.\end{aligned}$$

Damit folgt (4.8) aus [14] Korollar 5.2.7 (i). □

Korollar 4.1.17 Ist Ω ein separabler topologischer Hausdorff-Raum und $f : \Omega \to X$ eine stetige Abbildung, so ist f stark-messbar. Dabei gilt $f \in L^1(\mu, X)$, falls $\mathrm{supp}(f)$ kompakt ist, also $C_c(\Omega, X) \subseteq L^1(\mu, X)$.

Beweis: Die Funktion f ist stetig und damit auch $\mathfrak{B}(\Omega)\mathfrak{B}(X)$-messbar. Mit Ω ist nach [7] Satz 12.3.6 (iv) auch $f(\Omega)$ separabel. Also folgt aus dem Satz von Pettis (siehe [12] Satz 3.4), dass f stark-messbar ist.
Da stetige Funktionen auf Kompakta beschränkt sind, gilt

$$\int_\Omega \|f(\omega)\| \, d|\mu|(\omega) \leq \sup_{\omega \in \mathrm{supp}(f)} \|f(\omega)\| |\mu|(\mathrm{supp}(f)) < +\infty.$$

Aus Lemma 4.1.8 2. folgt $f \in L^1(\mu, X)$. $\square$

Wir wollen daran erinnern, dass für $A \in \mathcal{M}$ und $t > 0$ gemäß Definition 2.2.8 durch $J_t^A = (I+tA)^{-1}$ und $A_t = \frac{1}{t}(I-(I+\lambda A)^{-1})$ Operatoren aus $\mathfrak{L}_b(X)$ definiert sind; siehe Lemma 2.2.9.

Lemma 4.1.18 Für $A \in \mathcal{M}$ und $\mu \in \mathfrak{M}$ gelten folgende Aussagen.

1. Die Funktionen $t \mapsto (1+t)(t+A)^{-1}$ und $t \mapsto (1+t)A_t$ sind für jedes $\delta > 0$ über $(\delta, +\infty)$ μ-integrierbar.
2. Die Funktion $[0,+\infty) \to \mathfrak{L}_b(X),\ t \mapsto (1+t)J_t^A$ ist auf allen beschränkten messbaren Teilmengen von $[0,+\infty)$ μ-integrierbar.
3. Falls zusätzlich $A \in \mathfrak{L}_b(X)$, so ist $[0,+\infty) \to \mathfrak{L}_b(X),\ t \mapsto (1+t)A_t$ μ-integrierbar.
4. Für $u \in \mathrm{dom}(A)$ ist die Funktion $(0,+\infty) \to X,\ t \mapsto (1+t)A_t u$ μ-integrierbar.
5. Falls $t \mapsto (1+t)t^{-1}$ auf $(0,+\infty)$ μ-integrierbar ist, sind $t \mapsto (1+t)(t+A)^{-1}$ und $t \mapsto (1+t)A_t$ auf $(0,+\infty)$ μ-integrierbar.

Beweis:

1. Für $\delta > 0$ sind nach Lemma 2.2.14 $t \mapsto (1+t)(t+A)^{-1}$ und $t \mapsto (1+t)A_t$ stetig auf $(\delta,+\infty)$ und wegen Korollar 4.1.17 stark-messbar. Gemäß Lemma 2.2.9 und Lemma 3.1.21 2. gilt
$$\begin{aligned}\int_{(\delta,+\infty)} (1+t)\|A_t\|\, d\big|\mu|_{\mathfrak{B}((\delta,+\infty))}\big|(t) &\le \int_{(\delta,+\infty)} \frac{1+t}{t}[1+M(A)]\, d|\mu||_{\mathfrak{B}((\delta,+\infty))}(t)\\ &\le \frac{1+\delta}{\delta}[1+M(A)]|\mu|((\delta,+\infty)) < +\infty.\end{aligned}$$
Infolge ist $t \to (1+t)A_t$ nach Lemma 4.1.8 2. auf $(\delta,+\infty)$ μ-integrierbar.
Die μ-Integrierbarkeit auf $(\delta,+\infty)$ von $t \to (1+t)(t+A)^{-1}$ folgt aus
$$\int_{(\delta,+\infty)} \left\|(1+t)(t+A)^{-1}\right\| d\big|\mu|_{\mathfrak{B}((\delta,+\infty))}\big|(t) \le \frac{1+\delta}{\delta} M(A)|\mu|((\delta,+\infty)) < +\infty.$$

2. Sei K eine beschränkte messbare Teilmenge von $[0,+\infty)$. Laut Korollar 2.2.14 ist die Funktion $K \setminus \{0\} \to \mathfrak{L}_b(X),\ t \mapsto (1+t)J_t^A$ stetig, weshalb diese Funktion nach Korollar 4.1.17 stark-messbar ist. Gemäß Lemma 2.2.9 ist sie auch beschränkt, womit sie in $L^1(\mu|_{\mathfrak{B}(K\setminus\{0\})}, \mathfrak{L}_b(X))$ liegt.
Für $0 \in K$ ist $\{0\} \to \mathfrak{L}_b(X),\ t \mapsto (1+t)J_t^A$ aus $L^1(\mu|_{\mathfrak{B}(\{0\})}, \mathfrak{L}_b(X))$. Nach Lemma 4.1.13 ist $K \to \mathfrak{L}_b(X),\ t \mapsto (1+t)J_t^A$ stark-messbar und ein Element von $L^1(\mu|_{\mathfrak{B}(K)}, \mathfrak{L}_b(X))$.

3. Für $A \in \mathfrak{L}_b(X)$ ist $[0,+\infty) \to \mathfrak{L}_b(X),\ t \mapsto (1+t)A_t$ wegen Lemma 2.3.6 und Lemma 2.2.14 stetig, also nach Korollar 4.1.17 stark-messbar. Nach Korollar 4.1.17 ist $[0,1] \to \mathfrak{L}_b(X),\ t \mapsto (1+t)A_t$ ein Element von $L^1(\mu|_{\mathfrak{B}([0,1])}, \mathfrak{L}_b(X))$. Wegen Punkt 1 gehört $(1,+\infty) \to \mathfrak{L}_b(X),\ t \mapsto (1+t)A_t$ zu $L^1(\mu|_{\mathfrak{B}((1,+\infty))}, \mathfrak{L}_b(X))$. Laut Lemma 4.1.13 liegt damit $[0,+\infty) \to \mathfrak{L}_b(X),\ t \mapsto (1+t)A_t$ in $L^1(\mu, \mathfrak{L}_b(X))$.

4. Wegen $\|A_t u - A_s u\| \le \|A_t - A_s\|\|u\|$, $s, t > 0$, und Lemma 2.2.14 ist die Funktion $(0,+\infty) \to \mathfrak{L}_b(X)$, $t \mapsto (1+t)A_t u$ stetig, also stark-messbar nach Korollar 4.1.17.

   Für $u \in \operatorname{dom}(A)$ gilt auf Grund des 2. Punktes und Lemma 2.2.10

$$\begin{aligned}\int_{(0,1]} \|(1+t)A_t u\| \, d\big|\mu|_{\mathfrak{B}((0,1])}\big|(t) &= \int_{(0,1]} \big\|J_t^A Au\big\|(1+t)\, d\big|\mu|_{\mathfrak{B}((0,1])}\big|(t) \\ &\le \int_{(0,1]} \big\|J_t^A\big\|(1+t)\, d\big|\mu|_{\mathfrak{B}((0,1])}\big|(t)\|Au\| < +\infty\end{aligned}$$

   und wegen des 1. Punktes

$$\begin{aligned}\int_{(1,+\infty)} \|(1+t)A_t u\| \, d\big|\mu|_{\mathfrak{B}((1,+\infty))}\big|(t) &= \int_{(1,+\infty)} \|A_t\|\|u\|(1+t)\, d\big|\mu|_{\mathfrak{B}((1,+\infty))}\big|(t) \\ &\le \int_{(1,+\infty)} \|A_t\|(1+t)\, d\big|\mu|_{\mathfrak{B}((1,+\infty))}\big|(t)\|u\| < +\infty.\end{aligned}$$

   Aus Lemma 4.1.8 2. erhält man $(t \mapsto (1+t)A_t u) \in L^1(\mu|_{\mathfrak{B}((0,1])}, X)$ und $(t \mapsto (1+t)A_t u) \in L^1(\mu|_{\mathfrak{B}((1,+\infty))}, X)$. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 4.1.13.

5. Wegen Korollar 2.2.14 und Korollar 4.1.17 sind $t \mapsto (1+t)(t+A)^{-1}$ und $t \mapsto (1+t)A_t$ stark-messbar. Aus

$$\begin{aligned}\int_{(0,+\infty)} \|A_t(1+t)\| \, d\big|\mu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))}\big|(t) &\le \int_{(0,+\infty)} \|A_t\|(1+t)\, d\big|\mu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))}\big|(t) \\ &\le \int_{(0,+\infty)} \frac{1+M(A)}{t}(1+t)\, d\big|\mu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))}\big|(t) < +\infty,\end{aligned}$$

   folgt $(t \to (1+t)A_t) \in L^1(\mu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))}, \mathfrak{L}_b(X))$ nach Lemma 4.1.8 2. Die μ-Integrierbarkeit von $t \to (1+t)(t+A)^{-1}$ auf $(0,+\infty)$ folgt in analoger Weise.

□

Lemma 4.1.19 Sei $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ ein Netz nicht-negativer Maße aus $\mathfrak{M}$ und $\nu \in \mathfrak{M}$. Falls

(V_1) $[0,+\infty) \to \mathbb{C}, t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} \phi(s)\, d\mu_t(s)$ für alle $\phi \in C_b([0,+\infty))$ ν-integrierbar ist,

so gibt es nach Lemma 3.2.18 ein $\omega \in \mathfrak{M}$ mit (3.11), welches nicht-negativ ist, falls ν es ist.

Ist zudem

(V_2) $[0,+\infty) \to \mathbb{C}, t \mapsto \int_{[0,+\infty)} \phi(s)\, d\mu_t(s)$ stetig für alle $\phi \in C_c([0,+\infty))$,

X ein Banachraum und $h \in C([0,+\infty), X)$ mit

(V_3) $\|h\| \in L^1(\mu_t)$ für alle $t \ge 0$,

(V_4) $t \mapsto \int_{[0,+\infty)} h(s)\, d\mu_t(s)$ stark-messbar,

(V_5) $(t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} \|h(s)\|\, d\mu_t(s)) \in L^1(\nu)$, dann gilt $h \in L^1(\omega, X)$ und

$$\int_{[0,+\infty)} h(s)\, d\omega(s) = \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} h(s)\, d\mu_t(s)\, d\nu(t). \tag{4.9}$$

Beweis: Sei ν vorerst ein nicht-negatives Maß.

1. Sei zuerst $h \in C_c([0,+\infty), X)$. Nach Korollar 4.1.17 ist h bezüglich jedem Maß aus $\mathfrak{M}$ integrierbar.

   Für $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine offene Überdeckung von $\operatorname{supp} h$ durch Intervalle $V_{p,k}, 1 \leq p \leq m_k$ der Länge k^{-1}. Nach [8] Lemma 15.8.8 existieren eine Zerlegung der Eins $\chi_{p,k} \in C_c([0,+\infty), [0,1])$ mit $\operatorname{supp} \chi_{p,k} \subseteq V_{p,k}, 1 \leq p \leq m_k$, $\sum_{p=1}^{m_k} \chi_{p,k}(t) \leq 1$, $t \in [0,+\infty)$, und $\sum_{p=1}^{m_k} \chi_{p,k}(t) = 1$, $t \in \operatorname{supp} h$. Fixieren wir für $1 \leq p \leq m_k$ Punkte $t_{p,k} \in V_{p,k}$, so wird durch $g_k(t) := \sum_{p=1}^{m_k} \chi_{p,k}(t) h(t_{p,k})$, $t \geq 0$, eine Funktion $g_k \in C_c([0,+\infty), X)$ definiert.

   Die so konstruierte Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen h. In der Tat gibt es zu $\epsilon > 0$ wegen der nach [7] Satz 6.3.3 gleichmäßigen Stetigkeit von h ein N mit $\|h(t) - h(s)\| < \epsilon$ für alle $s, t \in [0,+\infty)$, $|t-s| < \frac{1}{N}$, wodurch

   $$\|g_k(t) - h(t)\| \leq \sum_{p=1}^{m_k} \chi_{p,k}(t) \|h(t_{p,k}) - h(t)\| \leq \epsilon,\ k \geq N,$$

   weil $|t - t_{p,k}| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{N}$ im Fall $\chi_{p,k}(t) > 0$.

   Wegen

   $$\begin{aligned} \left\| \int_{[0,+\infty)} g_k\, d\mu_t - \int_{[0,+\infty)} h\, d\mu_t \right\| &\leq \int_{[0,+\infty)} \|g_k(t) - h(t)\|\, d\mu_t \\ &\leq \sup_{t\geq 0} \|g_k(t) - h(t)\| \mu_t([0,+\infty)) \end{aligned}$$

   erhalten wir $\lim_{k\to\infty} \int_{[0,+\infty)} g_k\, d\mu_t = \int_{[0,+\infty)} h\, d\mu_t$ für alle $t \geq 0$. Auf die gleiche Weise zeigt man

   $$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,+\infty)} g_k\, d\omega = \int_{[0,+\infty)} h\, d\omega. \tag{4.10}$$

   Weil die Funktionen $t \mapsto \int_{[0,+\infty)} \chi_{p,k}(s)\, d\mu_t(s), 1 \leq p \leq m_k, k \in \mathbb{N}$, gemäß (V_2) stetig sind, sind es auch $t \mapsto \int_{[0,+\infty)} g_k(s)\, d\mu_t(s) \in X, k \in \mathbb{N}$, und infolge stark-messbar; siehe Korollar 4.1.17. Zudem ist $t \mapsto (1+t) \int_{[0,+\infty)} h(s)\, d\mu_t(s)$ nach (V_4) stark-messbar.
   Weiters gilt $\sup_{r\geq 0} \|h(r)\| < +\infty$, weil $\operatorname{supp} h$ kompakt ist, womit

$(t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} \sup_{r\geq 0}\|h(r)\|\, d\mu_t(s)) \in L^1(\nu)$ gemäß (V_1). Zudem erhält man

$$\left\|\int_{[0,+\infty)} g_k\, d\mu_t\right\| \leq \int_{[0,+\infty)} \sum_{p=1}^{m_k} \|h(t_{p,k})\|\chi_{p,k}(s)\, d\mu_t(s)$$
$$\leq \int_{[0,+\infty)} \sup_{r\geq 0}\|h(r)\| \sum_{p=1}^{m_k} \chi_{p,k}(s)\, d\mu_t(s)$$
$$\leq \int_{[0,+\infty)} \sup_{r\geq 0}\|h(r)\|\, d\mu_t(s).$$

Also gilt $(t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} h(s)\, d\mu_t(s)) \in L^1(\nu, X)$ und es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} g_k(s)\, d\mu_t(s)\, d\nu(t)$$
$$= \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} h(s)\, d\mu_t(s)\, d\nu(t) \tag{4.11}$$

aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 4.1.10. Andererseits gilt wegen (3.11)

$$\int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} g_k(s)\, d\mu_t(s)\, d\nu(t)$$
$$= \sum_{p=1}^{m_k} \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} \chi_{p,k}(s)\, d\mu_t(s)\, d\nu(t) h(t_{p,k})$$
$$= \sum_{p=1}^{m_k} \int_{[0,+\infty)} \chi_{p,k}(s)\, d\omega(s) h(t_{p,k}) = \int_{[0,+\infty)} g_k(s)\, d\omega(s).$$

Für $k \to \infty$ folgt mit (4.11) und (4.10) die Behauptung (4.9) für Funktionen h mit kompaktem Träger.

2. Im allgemeinen Fall $h \in C([0,+\infty), X)$ sei $\chi \in C_c^\infty([0,+\infty), [0,1])$ eine monoton fallende Funktion mit $\chi|_{[0,1]} \equiv 1$. Für die durch $h_n(t) := \chi(tn^{-1})h(t), t \in [0,+\infty), n \in \mathbb{N}$, definierte Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_c([0,+\infty), X)^{\mathbb{N}}$ ist $(t \mapsto \|h_n(t)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $C_c([0,+\infty))$.

   Wir haben in 1. gezeigt, dass für alle $t \in [0,+\infty)$ die Funktion $t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} h_n\, d\mu_t$ stark-messbar und ν-integrierbar ist, wobei
$$\int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} h_n(s)\, d\mu_t(s)\, d\nu(t) = \int_{[0,+\infty)} h_n(s)\, d\omega(s). \tag{4.12}$$

   Die Funktion $t \mapsto \|h_n\| = \left\|\chi(tn^{-1})h(t)\right\| = \|h(t)\|\chi(tn^{-1})$ liegt in $C_c([0,+\infty)) \subseteq C_b([0,+\infty))$, weshalb gemäß (3.11)
$$\int_{[0,+\infty)} \int_{[0,+\infty)} \|h_n(s)\|\, d\mu_t(s)(1+t)\, d\nu(t) = \int_{[0,+\infty)} \|h_n(s)\|\, d\omega(s).$$

Gemäß (V_3) und (V_5) gilt $\|h\| \in L^1(\mu_t)$, $t \geq 0$, und $(t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} \|h(s)\| \, d\mu_t(s)) \in L^1(\nu)$. Also folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (siehe [8] Fakta 14.5.3 3.)

$$\int_{[0,+\infty)} \|h(s)\| \, d\omega(s) = \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} \|h(s)\| \, d\mu_t(s) \, d\nu(t) < +\infty,$$

weshalb $\|h\| \in L^1(\omega)$, also $h \in L^1(\omega, X)$; siehe Lemma 4.1.8 2.

Wir wollen schließlich auf beide Seiten von (4.12) den Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 4.1.10, anwenden. Da h_n punktweise gegen h konvergiert, $\|h_n(t)\| \leq \|h(t)\|$, $t \geq 0$, und $\|h\| \in L^1(\omega) \cap \bigcap_{t>0} L^1(\mu_t)$ gilt, folgen

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} h_n(s) \, d\mu_t(s) = \int_{[0,+\infty)} h(s) \, d\mu_t(s), t > 0, \tag{4.13}$$

und $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} h_n(s) \, d\omega(s) = \int_{[0,+\infty)} h(s) \, d\omega(s)$ aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 4.1.10.
Für die linke Seite von (4.12) gilt $\left\| \int_{[0,+\infty)} h_n(s) \, d\mu_t(s) \right\| \leq \int_{[0,+\infty)} \|h(s)\| \, d\mu_t(s)$, $t \in [0, +\infty)$, (4.13) und $(t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} \|h(s)\| \, d\mu_t(s)) \in L^1(\nu)$ nach (V_5). Wegen (V_4) ist $(t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} h(s) \, d\mu_t(s))$ stark-messbar, womit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} h_n(s) \, d\mu_t(s) \, d\nu(t)$$
$$= \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} h(s) \, d\mu_t(s) \, d\nu(t),$$

wieder nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 4.1.10.

Damit ist das Lemma für nicht-negative Maße ν bewiesen. Für ein beliebiges Maß $\nu \in \mathfrak{M}$ gilt wegen [8] Fakta 18.3.2 5. und der Hahnzerlegung gemäß [8] Satz 18.3.4, dass $\nu = \mathrm{Re}(\nu)_+ - \mathrm{Re}(\nu)_- + i(\mathrm{Im}(\nu)_+ - \mathrm{Im}(\nu)_-)$. Somit folgt die Behauptung nach Lemma 4.1.8 7. aus der Linearität des Integrals im Maß. $\square$

4.2 Definition

Es sei daran erinnert, dass nach Korollar 3.3.8 die Abbildung $(a, \mu) \mapsto f_{a,\mu}$ eine Bijektion von $\mathbb{C} \times \mathfrak{M}$ nach $\mathcal{T}$ ist und dass (4.14) existiert; siehe Lemma 4.1.18 3.

Definition 4.2.1 Für $f \in \mathcal{T}$ und $A \in \mathfrak{L}_b(X) \cap \mathcal{M}$ setzen wir

$$\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f) := aI + \int_{[0,+\infty)} (1+t) A_t \, d\mu(t) \in \mathfrak{L}_b(X), \tag{4.14}$$

wobei $a \in \mathbb{C}, \mu \in \mathfrak{M}$ mit $f = f_{a,\mu}$.

Bemerkung 4.2.2 Für $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}$, $A \in \mathfrak{L}_b(X) \cap \mathcal{M}$ und $\delta > 0$ gilt

$$\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f_{a,\mu}) := aI + \int_{(\delta,+\infty)} (1+t) A_t \, d\mu(t) + A \int_{[0,\delta)} (1+t) J_t^A \, d\mu(t)$$

nach Lemma 2.2.10, Lemma 4.1.13 und Lemma 4.1.8 4.

Definition 4.2.3 Für $f \in \mathcal{T}, A \in \mathcal{M}$ definieren wir

$$\mathcal{H}_A(f) := \liminf_{\lambda \searrow 0} \mathcal{H}_{A_\lambda}^{\mathfrak{L}_b}(f).$$

Beispiel 4.2.4 Sei $A \in \mathcal{M}$ und μ_0 das Punktmaß mit $\mu_0(\{0\}) = 1$. Wir wenden den Funktionalkalkül auf Funktionen aus Beispiel 3.3.5 an.

1. Für $w \in \mathbb{C}$ und $(z \mapsto w) = f_{w,0} \in \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{T}$ gilt wegen Lemma 2.3.3 1.

$$\mathcal{H}_A((z \mapsto w)) = \liminf_{\lambda \searrow 0} \mathcal{H}_{A_\lambda}^{\mathfrak{L}_b}(f_{w,0}) = \liminf_{\lambda \searrow 0} (wI) = wI.$$

2. Auf Grund von $(z \mapsto z) = f_{0,\mu_0} \in \mathcal{T}_+ \cap \mathcal{T}_0$ folgt

$$\mathcal{H}_A((z \mapsto z)) = \liminf_{\lambda \searrow 0} \mathcal{H}_{A_\lambda}^{\mathfrak{L}_b}(f_{0,\mu_0}) = \liminf_{\lambda \searrow 0} \int_{[0,+\infty)} (1+t)(A_\lambda)_t \, d\mu_0 = \liminf_{\lambda \searrow 0} A_\lambda = A$$

aus Lemma 2.3.6.

3. Für $\epsilon > 0$ und $(z \mapsto z + \epsilon) = f_{\epsilon,\mu_0} \in \mathcal{T}_0$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A((z \mapsto z+\epsilon)) &= \liminf_{\lambda \searrow 0} \mathcal{H}_{A_\lambda}^{\mathfrak{L}_b}(f_{\epsilon,\mu_0}) = \liminf_{\lambda \searrow 0} \left(\epsilon I + \int_{[0,+\infty)} (1+t)(A_\lambda)_t \, d\mu_0 \right) \\ &= \liminf_{\lambda \searrow 0} (\epsilon I) + \liminf_{\lambda \searrow 0} A_\lambda = \epsilon I + A \end{aligned}$$

aus Lemma 2.3.6, Lemma 2.3.3 1. und Lemma 2.3.4 4.

Lemma 4.2.5 Für $A \in \mathcal{M}$ und $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}$ gilt

$$\mathcal{H}_A(f_{a,\mu}) = aI + \liminf_{\lambda \searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t)A_{t+\lambda}\, d\mu(t) + \int_{(1,+\infty)} (1+t)A_t\, d\mu(t).$$

Beweis: Zuerst folgt

$$\mathcal{H}_A(f_{a,\mu}) = \liminf_{\lambda \searrow 0} \mathcal{H}_{A_\lambda}^{\mathfrak{L}_b}(f_{a,\mu}) = aI + \liminf_{\lambda \searrow 0} \int_{[0,+\infty)} (1+t)(A_\lambda)_t\, d\mu(t)$$

aus Lemma 2.3.4 4. und Lemma 2.3.3 1.

Wegen Lemma 2.2.9 gilt

$$\|(1+t)A_{t+\lambda}\| \leq (M(A)+1)\frac{1+t}{t} \leq (M(A)+1)2 \tag{4.15}$$

für $t > 1, \lambda > 0$. Damit erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda>0} \left\| \int_{(1,+\infty)} (1+t)A_{\lambda+t}\, d\mu(t) \right\| &\leq \sup_{\lambda>0} \int_{(1,+\infty)} \|(1+t)A_{\lambda+t}\|\, d|\mu|(t) \\ &\leq (M(A)+1)2|\mu|((1,+\infty)) < +\infty\end{aligned}$$

aus Lemma 4.1.8 6. Überdies folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A(f_{a,\mu}) &= aI + \liminf_{\lambda \searrow 0} \int_{[0,+\infty)} (1+t)(A_\lambda)_t\, d\mu(t) = aI + \liminf_{\lambda \searrow 0} \int_{[0,+\infty)} (1+t)A_{\lambda+t}\, d\mu(t) \\ &= aI + \liminf_{\lambda \searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t)A_{\lambda+t}\, d\mu(t) + \liminf_{\lambda \searrow 0} \int_{(1,+\infty)} (1+t)A_{\lambda+t}\, d\mu(t)\end{aligned}$$

aus Lemma 2.3.4 4. und Lemma 2.2.11.

Wegen (4.15) und Korollar 2.2.14 erhält man

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \int_{(1,+\infty)} (1+t)A_{t+\lambda}\, d\mu(t) = \int_{(1,+\infty)} \lim_{\lambda \searrow 0} (1+t)A_{t+\lambda}\, d\mu(t) = \int_{(1+,\infty)} (1+t)A_t\, d\mu(t).$$

aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 4.1.10. Nach Lemma 2.3.4 3. stimmt das mit $\liminf_{\lambda \searrow 0} \int_{(1,+\infty)} A_{\lambda+t}(1+t)\, d\mu(t)$ überein. Daher gilt

$$\mathcal{H}_A(f_{a,\mu}) = aI + \liminf_{\lambda \searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t)A_{t+\lambda}\, d\mu(t) + \int_{(1,+\infty)} (1+t)A_t\, d\mu(t).$$

□

Lemma 4.2.6 Für $A \in \mathfrak{L}_b(X) \cap \mathcal{M}$ und $f \in \mathcal{T}$ gilt $\mathcal{H}_A(f) = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)$.

Beweis: Wegen Korollar 2.2.14 und Lemma 2.3.6 gilt $\lim_{\lambda \searrow 0}(1+t)A_{t+\lambda} = (1+t)A_t$, $t \in [0,1]$. Zudem folgt $\|(1+t)A_{t+\lambda}\| = (1+t)\left\|AJ_{t+\lambda}^A\right\| \leq \|A\|M(A)(1+t)$, $t \in [0,1]$, aus Lemma 2.2.10

und Lemma 2.2.9. Damit erhält man ($f = f_{a,\mu}$)

$$\begin{aligned}\liminf_{\lambda\searrow 0}\int_{[0,1]}(1+t)A_{\lambda+t}\,d\mu(t) &= \lim_{\lambda\searrow 0}\int_{[0,1]}(1+t)A_{\lambda+t}\,d\mu(t)\\ &= \int_{[0,1]}\lim_{\lambda\searrow 0}(1+t)A_{\lambda+t}\,d\mu(t) = \int_{[0,1]}(1+t)A_t\,d\mu(t)\end{aligned}$$

aus Lemma 2.3.4 3. und dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 4.1.10. Die Behauptung folgt schließlich aus Lemma 4.2.5 und Lemma 4.1.13. □

Lemma 4.2.7 Für $A \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$, $f_{a,\mu}$ und $s > 0$ kommutieren $(s+A)^{-1}, J_s^A, A_s$ mit $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f_{a,\mu})$.

Beweis: Sei $s > 0$. Aus Lemma 2.2.10 folgt $(s+A)^{-1}A = \frac{1}{s}J^A_{\frac{1}{s}}A = \frac{1}{s}AJ^A_{\frac{1}{s}} = A(s+A)^{-1}$, $J_s^A A = AJ_s^A$ und $A_sA = AJ_s^AA = AA_s$.

Mit $D \in \left\{(s+A)^{-1}, J_s^A, A_s\right\}$ gilt

$$\begin{aligned}D\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f_{a,\mu}) &= D\left(aI + \int_{[0,+\infty)}(1+t)A_t\,d\mu(t)\right) = aD + D\int_{[0,+\infty)}(1+t)A_t\,d\mu(t)\\ &= aD + \int_{[0,+\infty)}(1+t)A_t\,d\mu(t)D = \left(aI + \int_{[0,+\infty)}(1+t)A_t\,d\mu(t)\right)D = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f_{a,\mu})D\end{aligned}$$

wegen Korollar 2.2.13 und Lemma 4.1.9. □

Bemerkung 4.2.8 Für $A \in \mathfrak{L}_b(X) \cap \mathcal{M}$ ist die Abbildung $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b} : \mathcal{T} \to \mathfrak{L}_b(X)$ linear; siehe Lemma 4.1.8 7. und Bemerkung 3.3.4.

Für $A \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{T}$ und $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ gilt $wf \in \mathcal{T}$. Aus der Linearität von $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}$ und Lemma 2.3.3 3. erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A(wf) &= \liminf_{\lambda\searrow 0}\mathcal{H}_{A_\lambda}(wf) = \liminf_{\lambda\searrow 0}(w\mathcal{H}_{A_\lambda}(f))\\ &= w\liminf_{\lambda\searrow 0}\mathcal{H}_{A_\lambda}(f) = w\mathcal{H}_A(f).\end{aligned}$$

Lemma 4.2.9 Für $f \in \mathcal{S}_0$ und $A \in \mathcal{M}$ liegt $\mathcal{H}_A(f)$ in $\mathfrak{L}_b(X)$ und lässt sich schreiben als

$$\mathcal{H}_A(f) = aI + \int_{(0,+\infty)}(1+t)(t+A)^{-1}\,d\mu(t) = bI + \int_{(0,+\infty)}(1+t)A_t\,d\nu(t),$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$ wie in Lemma 3.4.4.

Beweis: Nach Lemma 4.1.18 5. ist $(0,+\infty) \to \mathfrak{L}_b(X), t \mapsto (1+t)(t+A)^{-1}$ ν-integrierbar und $(0,+\infty) \to \mathfrak{L}_b(X), t \mapsto (1+t)A_t$ μ-integrierbar.

Aufgrund von Lemma 3.4.4 haben wir $f = g_{a,\mu} = f_{b,\nu}$ mit $\nu = (t \mapsto -t) \odot T(\mu)$ auf $(0, +\infty)$, wobei $T(t) = \frac{1}{t}$, $\nu(\{0\}) = 0$.

Aus Korollar 2.2.14 folgt $\lim_{\lambda \searrow 0} A_{t+\lambda} = A_t$, $t > 0$. Wegen Lemma 2.2.9 gilt $(1+t)\|A_{t+\lambda}\| \leq M(A)\frac{1+t}{t+\lambda} \leq M(A)\frac{1+t}{t}$, $t > 0$ und $(t \mapsto \frac{1+t}{t}) \in L^1(\nu|_{\mathfrak{B}((0,+\infty))})$ nach Lemma 3.4.4. Damit erhält man aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz (siehe Satz 4.1.10) und Lemma 2.3.4 4.

$$\liminf_{\lambda \searrow 0} \int_{(0,+\infty)} (1+t)A_{t+\lambda}\, d\nu(t) = \lim_{\lambda \searrow 0} \int_{(0,+\infty)} (1+t)A_{t+\lambda}\, d\nu(t) = \int_{(0,+\infty)} (1+t)A_t\, d\nu(t),$$

weshalb

$$\mathcal{H}_A(f) = bI + \liminf_{\lambda \searrow 0} \int_{[0,+\infty)} (1+t)A_{t+\lambda}\, d\nu(t) = bI + \int_{(0,+\infty)} (1+t)A_t\, d\nu(t)$$

ein beschränkter linearer Operator ist.

Nach Lemma 4.1.8 5. und Lemma 3.4.4 gilt

$$\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t} I\, d\nu(t) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d\nu(t) I = (a-b)I.$$

Zudem erhält man aus dem Transformationsatz, Satz 4.1.11,

$$\begin{aligned}\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t^2}\left(\frac{1}{t} + A\right)^{-1} d\nu(t) &= \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t^2} t \left(\frac{1}{t} + A\right)^{-1} dT(\mu(t)) \\ &= \int_{(0,+\infty)} (1+t)(t+A)^{-1}\, d\mu(t).\end{aligned}$$

Schließlich folgt wegen $A_t = \frac{1}{t}I - \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t} + A\right)^{-1}$, $t > 0$, (siehe Definition 2.2.8)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A(f) &= bI + \int_{(0,+\infty)} (1+t)A_t\, d\nu(t) \\ &= bI - \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t} I\, d\nu(t) - \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t^2}\left(\frac{1}{t} + A\right)^{-1} d\nu(t) \\ &= aI + \int_{(0,+\infty)} (1+t)(t+A)^{-1}\, d\mu(t)\end{aligned}$$

aus Lemma 4.1.13. □

Lemma 4.2.10 Für eine gerichtete Menge $(K, \preceq)$ die Teilfolgen erlaubt, ein Netz $(B_k)_{k \in K}$ aus $\mathcal{M}$ mit $\sup_{k \in K} M(B_k) < +\infty$, $\liminf_{k \in K} B_k \in \mathcal{M}$ und $g_{a,\mu} \in \mathcal{S}_0$ gilt

$$\mathcal{H}_{\liminf_{k \in K} B_k}(g_{a,\mu}) = \liminf_{k \in K} \mathcal{H}_{B_k}(g_{a,\mu}).$$

Beweis: Nach Lemma 2.3.3 3. und Lemma 2.3.4 4. haben wir

$$\liminf_{k \in K}(t + B_k)^{-1} = \left(\liminf_{k \in K}(t + B_k)\right)^{-1} = \left(t + \liminf_{k \in K} B_k\right)^{-1}$$

und folglich $\liminf_{k\in K}(t+B_k)^{-1} \in \mathfrak{L}_b(X)$ wegen $\liminf_{k\in K} B_k \in \mathcal{M}$ für $t > 0$.

Angesichts von $\sup_{k\in K}\left\|(t+B_k)^{-1}\right\| \leq [\sup_{k\in K} M(B_k)]\frac{1}{t}$ erhält man

$$\lim_{k\in K}((t+B_k)^{-1}x) = \left(t + \liminf_{k\in K} B_k\right)^{-1} x$$

aus Lemma 2.3.4 2. für alle $x \in X, t > 0$.
Wegen $\left\|(1+t)(t+B_k)^{-1}x\right\| \leq [\sup_{k\in K} M(B_k)]\|x\|\frac{1+t}{t}$, $t > 0, k \in K$, und $(t \mapsto \frac{1+t}{t}) \in L^1(\mu)$ folgt für alle $x \in X$

$$\begin{aligned}\lim_{k\in K}\left(\int_{(0,+\infty)}(1+t)(t+B_k)^{-1}\,d\mu(t)x\right) &= \lim_{k\in K}\int_{(0,+\infty)}(1+t)(t+B_k)^{-1}x\,d\mu(t)\\ &= \int_{(0,+\infty)}(1+t)\lim_{k\in K}((t+B_k)^{-1}x)\,d\mu(t)\\ &= \int_{(0,+\infty)}(1+t)\left(t+\liminf_{k\in K} B_k\right)^{-1} x\,d\mu(t)\\ &= \int_{(0,+\infty)}(1+t)\left(t+\liminf_{k\in K} B_k\right)^{-1} d\mu(t)x.\end{aligned}$$

aus Lemma 4.1.8 4. und dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 4.1.10. Wegen Lemma 4.1.8 6 gilt

$$\begin{aligned}\sup_{k\in K}\left\|\int_{(0,+\infty)}(1+t)(t+B_k)^{-1}\,d\mu(t)\right\| &\leq \sup_{k\in K}\int_{(0,+\infty)}(1+t)\left\|(t+B_k)^{-1}\right\|\,d|\mu|(t)\\ &\leq [\sup_{k\in K} M(B_k)]\int_{(0,+\infty)}\frac{1+t}{t}\,d|\mu|(t) < +\infty\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\left(\liminf_{k\in K}\int_{(0,+\infty)}(1+t)(t+B_k)^{-1}\,d\mu(t)\right)x &= \lim_{k\in K}\left(\int_{(0,+\infty)}(1+t)(t+B_k)^{-1}\,d\mu(t)x\right)\\ &= \int_{(0,+\infty)}(1+t)\left(t+\liminf_{k\in K} B_k\right)^{-1} d\mu(t)x\end{aligned}$$

für alle $x \in X$, aufgrund von Lemma 2.3.4 2. Damit folgt

$$\begin{aligned}\liminf_{k\in K}\mathcal{H}_{B_k}(g_{a,\mu}) &= \liminf_{k\in K} aI + \liminf_{k\in K}\int_{(0,+\infty)}(1+t)(t+B_k)^{-1}\,d\mu(t)\\ &= aI + \int_{(0,+\infty)}(1+t)\left(t+\liminf_{k\in K} B_k\right)^{-1} d\mu(t) = \mathcal{H}_{\liminf_{k\in K} B_k}(g_{a,\mu}).\end{aligned}$$

aus Lemma 4.2.9, Lemma 2.3.4 4. sowie Lemma 2.3.3 1. $\square$

Beispiel 4.2.11

1. Für $w \in \mathbb{C} \setminus (0,+\infty)$ gilt $wI \in \mathcal{M}$ wegen $(wI - zI)^{-1} = -\frac{1}{w-z} I$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{w\}$, also $\rho(wI) \supseteq \mathbb{C} \setminus \{w\}$ und $t\|(wI+tI)^{-1}\| = \left|\frac{t}{w+t}\right| \leq \sup_{t>0}\left|\frac{t}{w+t}\right| < +\infty$, $t>0$, gemäß Lemma 3.2.11.
   Aus Beispiel 2.1.27 folgt $(wI)_t = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{smallmatrix}\right)}(wI) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{smallmatrix}\right)}(w)I = \frac{w}{1+tw} I$, weshalb für $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}$ nach Lemma 4.2.6 und Lemma 4.1.8 5.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{wI}(f_{a,\mu}) = \mathcal{H}_{wI}^{\mathfrak{L}_b}(f_{a,\mu}) &= aI + \int_{[0,+\infty)} (1+t)(wI)_t \, d\mu(t) \\ &= aI + \int_{[0,+\infty)} \frac{w(1+t)}{1+tw} \, d\mu(t) I = f_{a,\mu}(w) I,\end{aligned}$$

   wobei wir im Fall $w = 0$ $f_{a,\mu}(0)$ als a auffassen wollen.

2. Ist $A = \{0\} \times X \in \mathcal{M}$ wie in Bemerkung 2.2.5 und Beispiel 2.3.7, so gilt $J_t^A = (1+tA)^{-1} = A^{-1} = 0I$ und $A_t = \frac{1}{t}(I - J_t^A) = \frac{1}{t} I$.
   Für $f_{a,\mu} \in \mathcal{S}_0$ haben wir $b = a + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t} \, d\mu(t) \in \mathbb{C}$ wegen Lemma 3.4.4, weshalb

$$\mathcal{H}_A(f_{a,\mu}) = aI + \int_{(0,+\infty)} (1+t) A_t \, d\mu(t) = aI + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t} I \, d\mu(t) = bI$$

   nach Lemma 4.2.9.

3. Für $\epsilon > 0$ und $(z \mapsto (z+\epsilon)^{-1}) = g_{0,(1+\epsilon)^{-1}\mu_\epsilon} \in \mathcal{S}_0$ aus Beispiel 3.4.3 3. gilt nach Lemma 4.2.9

$$\mathcal{H}_A((z \mapsto (z+\epsilon)^{-1})) = \int_{[0,+\infty)} \frac{1+t}{1+\epsilon} (t+A)^{-1} \, d\mu_\epsilon = (\epsilon + A)^{-1}.$$

4. Seien $A \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{T}$ und $g \in \mathcal{S}_0$. Laut Bemerkung 3.3.4 1. liegt $f+g$ in $\mathcal{T}$. Wegen Bemerkung 4.2.8, Lemma 4.2.9 und Lemma 2.3.4 4. gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A(f+g) &= \liminf_{\lambda \searrow 0} \mathcal{H}_{A_\lambda}(f+g) = \liminf_{\lambda \searrow 0} (\mathcal{H}_{A_\lambda}(f) + \mathcal{H}_{A_\lambda}(g)) \\ &= \liminf_{\lambda \searrow 0} \mathcal{H}_{A_\lambda}(f) + \liminf_{\lambda \searrow 0} \mathcal{H}_{A_\lambda}(g) = \mathcal{H}_A(f) + \mathcal{H}_A(g).\end{aligned}$$

   Speziell erhalten wir für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\mathcal{H}_A((z \mapsto f(z) + w)) = \mathcal{H}_A(f) + wI \text{ und } \mathcal{H}_A((z \mapsto z + w)) = A + wI$$

   aus Beispiel 4.2.4 1. und 2.

4.3 Funktionalkalkül für beschränkte lineare Operatoren

4.3.1 Produktregel

Mit Hilfe von Lemma 3.2.17 wird für $A \in \mathfrak{L}_b(X) \cap \mathcal{M}$ und Funktionen $f, g \in \mathcal{T}$, deren Produkt wieder in $\mathcal{T}$ liegt, $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g) = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(fg)$ bewiesen.

Satz 4.3.1 (Produktregel für beschränkte lineare Operatoren) Für $f, g, h := fg \in \mathcal{T}$ und $A \in \mathfrak{L}_b(X) \cap \mathcal{M}$ gilt $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g) = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(h)$.

Beweis: Seien $a_1, a_2, c \in \mathbb{C}$, $\mu_1, \mu_2, \nu \in \mathfrak{M}$ mit $f = f_{a_1,\mu_1}$, $g = f_{a_2,\mu_2}$ und $h = f_{c,\nu}$. Aus Bemerkung 3.3.2 2. erhält man

$$c = \lim_{s \searrow 0} f_{c,\nu}(s) = \lim_{s \searrow 0}[f_{a_1,\mu_1}(s) f_{a_2,\mu_2}(s)] = [\lim_{s \searrow 0} f_{a_1,\mu_1}(s)][\lim_{s \searrow 0} f_{a_2,\mu_2}(s)] = a_1 a_2.$$

Wegen $(t \mapsto (1+t)A_t) \in L^1(\mu_j, \mathfrak{L}_b(X)), j \in \{1,2\}$, Lemma 4.1.8 2. und der Submultiplikativität der Operatornorm folgt $((s,t) \mapsto (1+t)(1+s)\|A_t A_s\|) \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ aus Fakta 3.2.10 3, womit $((s,t) \mapsto (1+t)(1+s)A_t A_s) \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2, \mathfrak{L}_b(X))$ gilt.

Aus dem Satz von Fubini, Satz 4.1.16 folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g) &= (a_1 + \int_{[0,+\infty)} (1+t)A_t \, d\mu_1(t))(a_2 + \int_{[0,+\infty)} (1+t)A_t \, d\mu_2(t)) \\
&= a_1 a_2 + a_1 \int_{[0,+\infty)} (1+t)A_t \, d\mu_2(t) + a_2 \int_{[0,+\infty)} (1+t)A_t \, d\mu_1(t) \\
&\quad + \int_{[0,+\infty)^2} (1+t)(1+s)A_t A_s \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(s,t).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Für $x \in X$ gilt laut [14] Korollar 5.2.7 (i) $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)x = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(h)x$ genau dann, wenn $\langle \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)x, \psi \rangle = \langle \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(h)x, \psi \rangle$ für alle $\psi \in X'$.

Wir definieren eine Funktion ϕ_ψ auf $[0, +\infty)$ durch $\phi_\psi(t) := \langle A_t x, \psi \rangle$. Wegen Satz 2.2.12 gilt für $s, t \geq 0$ mit $t \neq s$

$$\frac{\langle A_t x, \psi \rangle - \langle A_s x, \psi \rangle}{t - s} = \langle \frac{1}{t-s}(A_t - A_s)x, \psi \rangle = \langle A_t A_s x, \psi \rangle. \tag{4.17}$$

Aus Satz 2.3.6 und Proposition 2.2.14 erhält man

$$\phi'_\psi(t) = \lim_{s \to t, s \neq t} \langle A_t A_s x, \psi \rangle = \langle \lim_{s \to t, s \neq t} A_t A_s x, \psi \rangle = \langle A_t A_t x, \psi \rangle \tag{4.18}$$

und zusammen mit $\|A_t x - A_s x\| \leq \|A_t - A_s\| \|x\|$, $s, t \geq 0$, $t \neq s$ die Stetigkeit von ϕ'_ψ, also $\phi_\psi \in C^1([0, +\infty))$.
Wegen (4.17) und (4.18) gilt $\widehat{\phi_\psi} = \langle A_t A_s x, \psi \rangle (w_1^{-1} \otimes w_1^{-1})$.
Aus $(t \mapsto (1+t)A_t) \in L^1(\mu, \mathfrak{L}_b(X))$, $\mu \in \{\mu_1, \mu_2, \nu\}$ und $((s,t) \mapsto (1+t)(1+s)A_t A_s) \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2, \mathfrak{L}_b(X))$ folgt $\phi_\psi w_1^{-1} \in L^1(\mu)$, $\mu \in \{\mu_1, \mu_2, \nu\}$ beziehungsweise $\widehat{\phi_\psi}(w_1^{-1} \otimes w_1^{-1}) \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ wegen Lemma 4.1.8 4, womit auch $\phi_\psi \in E^{\mu_1,\mu_2}_{\mu_1,\mu_2,\nu}$.

Auf Grund von (4.16) kann $\langle \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)x - \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(h)x, \psi \rangle$ wegen Lemma 4.1.8 4. mit

$$\begin{aligned}
L_1(\phi_\psi) &= a_1 \int_{[0,+\infty)} \phi_\psi(t)(1+t) \, d\mu_2(t) + a_2 \int_{[0,+\infty)} \phi_\psi(t)(1+t) \, d\mu_1(t) \\
&\quad - \int_{[0,+\infty)} \phi_\psi(t)(1+t) \, d\nu(t) \\
L_2(\phi_\psi) &= \int_{[0,+\infty)^2} \widehat{\phi_\psi}(s,t)(1+t)(1+s) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(s,t)
\end{aligned}$$

und $L = L_1 + L_2$ als $L(\phi_\psi)$ geschreiben werden. Also gilt $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)x = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(h)x$ genau dann, wenn $L(\phi_\psi) = 0$ für alle $\psi \in X'$.

Für alle $z > 0$ gilt

$$L(t \mapsto \frac{1}{t+z}) = a_1(g(\frac{1}{z}) - a_2) + a_2(f(\frac{1}{z}) - a_1) - (h(\frac{1}{z}) - a_1 a_2) + (g(\frac{1}{z}) - a_2)(f(\frac{1}{z}) - a_1) = 0,$$

weshalb mit Lemma 3.2.17 auf $L = 0$ geschlossen werden kann. Insbesondere gilt $L(\phi_\psi) = 0$ und damit $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)x = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(h)x$ für alle $x \in X$. □

Für $g \in \mathcal{T}_+$ und $\lambda > 0$ erinnern wir an die Funktion $g_\lambda = \frac{g}{1+\lambda g} = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)} \circ g \in \mathcal{T}_+$ aus Lemma 3.4.10 und die lineare Relation $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)_\lambda = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)}\left(\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)\right)$ aus Definition 2.2.8.

Korollar 4.3.2 Für $g \in \mathcal{T}_+$ und $A \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$ gilt $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g) \in \mathcal{M}$ mit $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g_\lambda) = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)_\lambda$, $\lambda > 0$, und $M(\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)) \leq M(A)$.

Beweis: Sei $\lambda > 0$. Wegen Korollar 3.4.16 gilt g_λ, $1 - \lambda g_\lambda \in \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{T}$. Aus $[1 + \lambda g][1 - \lambda g_\lambda] = 1$ folgt $[I - \lambda \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g_\lambda)][I + \lambda \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)] = I = [I + \lambda \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)][I - \lambda \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g_\lambda)]$ wegen Satz 4.3.1, Beispiel 4.2.4 1. und Bemerkung 4.2.8. Wir erhalten

$$\frac{1}{\lambda}\left(\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g) + \frac{1}{\lambda}\right)^{-1} = [I + \lambda \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)]^{-1} = I - \lambda \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g_\lambda) \in \mathfrak{L}_b(X), \tag{4.19}$$

weshalb $\rho(\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)) \supseteq (-\infty, 0)$.

Auf Grund von $g \in \mathcal{T}_+$ gilt $g = f_{a,\mu}$ für ein nicht-negatives Maß μ und $a \geq 0$. Laut Korollar 3.4.16 gilt $g_\lambda \in \mathcal{S}_0 \cap \mathcal{T}_+$. Nach Lemma 3.4.4 gibt es nicht-negative Maße $\mu_\lambda, -\nu_\lambda \in \mathfrak{M}$ und $a_\lambda, b_\lambda \geq 0$ derart, dass $g_\lambda = f_{a_\lambda,\mu_\lambda} = g_{b_\lambda,\nu_\lambda}$. Wegen Bemerkung 3.3.2 2. gilt $a_\lambda = \lim_{z \searrow 0} g_\lambda(z) = \lim_{z \searrow 0} \frac{g(z)}{1+\lambda g(z)} = \frac{a}{1+\lambda a}$. Aus Lemma 4.2.9 folgt

$$[I + \lambda \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)]^{-1} = I - \lambda \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g_\lambda) = (1 - \lambda b_\lambda)I - \lambda \int_{(0,+\infty)} (1+s)(s+A)^{-1}\, d\nu_\lambda(s). \tag{4.20}$$

Aus Bemerkung 3.3.2 2. und Bemerkung 3.4.2 2. erhält man

$$a_\lambda = \lim_{z \searrow 0} f_{a_\lambda,\mu_\lambda}(z) = \lim_{z \searrow 0} g_{b_\lambda,\nu_\lambda}(z) = b_\lambda + \int_{[0,+\infty)} \frac{1+s}{s}\, d\nu_\lambda(s)$$

und $b_\lambda = \lim_{z \nearrow +\infty} g_\lambda(z)$.
Wegen $g_\lambda(s) = \frac{g(s)}{1+\lambda g(s)} \leq \frac{1}{\lambda}$, $s > 0$, gilt $\lambda b_\lambda = \lambda[\lim_{z \nearrow +\infty} g_\lambda(z)] \leq 1$. Zusammen mit $M(A) \geq 1$ nach Bemerkung 2.2.5, Lemma 2.2.9 und $|\nu_\lambda| = -\nu_\lambda$ kann die Norm von (4.20) folgendermaßen

abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}\left\|[I+\lambda\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)]^{-1}\right\| &\leq |1-\lambda b_\lambda| + \lambda\int_{(0,+\infty)}\left\|(s+A)^{-1}\right\|(1+s)\,d|\nu_\lambda|(s)\\ &= 1-\lambda b_\lambda - \lambda\int_{(0,+\infty)}\left\|(s+A)^{-1}\right\|(1+s)\,d\nu_\lambda(s)\\ &\leq 1-\lambda b_\lambda - \lambda M(A)\int_{(0,+\infty)}\frac{1+s}{s}\,d\nu_\lambda(s)\\ &\leq M(A)(1-\lambda b_\lambda+\lambda b_\lambda-\lambda a_\lambda)\\ &= M(A)(1-\lambda a_\lambda) = M(A)(1+\lambda a)^{-1}\leq M(A).\end{aligned}$$

Nach Bemerkung 2.2.4 erhalten wir $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)\in\mathcal{M}$.

Aus der ersten Gleichheit in (4.20) folgt $\lambda\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g_\lambda) = I - I + \lambda\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g_\lambda) = I-(I-\lambda\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g_\lambda)) = I-[I+\lambda\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)]^{-1}$ und weiters $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g_\lambda) = \lambda^{-1}(I-[I+\lambda\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)]^{-1}) = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)_\lambda$; siehe Definition 2.2.8. □

4.3.2 Inverse

Für $f\in\widetilde{\mathcal{T}}$ und $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ liegen $\breve{f}(z)=\frac{z}{f(z)}$ und $\widetilde{f}(z)=\frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ auch in $\mathcal{T}$; siehe Definition 3.3.1 und Lemma 3.4.17.

Satz 4.3.3 Für $f\in\widetilde{\mathcal{T}}$ und $A\in\mathfrak{L}_b(X)$ gilt

1. $\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(\breve{f}) = \mathcal{H}_A(\breve{f})\mathcal{H}_A(f) = A$.

2. Im Fall $0\in\rho(A)$ gilt zudem $\mathcal{H}_A(f)^{-1} = \mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f})$.

Beweis:

1. Wir haben $f(z)\breve{f}(z) = \breve{f}(z)f(z) = z = f_{0,\mu_0}(z)$; siehe Beispiel 3.3.5 1. Damit folgen $\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(\breve{f}) = \mathcal{H}_A(f_{0,\mu_0}) = A$ und $\mathcal{H}_A(\breve{f})\mathcal{H}_A(f) = A$ aus Lemma 3.4.17, Satz 4.3.1 und Beispiel 4.2.4 2.

2. Für $t\geq 0$ folgt aus Lemma 2.1.19

$$A^{-1}A_t = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)}(A)\tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(A).$$

Wegen Fakta 2.1.18 gilt

$$\tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&t\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&t\end{smallmatrix}\right)}(A^{-1}) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&t\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\\frac{1}{t}&1\end{smallmatrix}\right)}(A^{-1}) = \frac{1}{t}(A^{-1})_{\frac{1}{t}}.$$

Damit erhält man im Fall $0 \in \rho(A)$ mit a, μ und ν wie in Lemma 3.4.17

$$\begin{aligned} A^{-1} \int_{(0,+\infty)} (1+t) A_t \, d\nu|_{(0,+\infty)}(t) &= \int_{(0,+\infty)} (1+t) A^{-1} A_t \, d\nu|_{(0,+\infty)}(t) \\ &= \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t} (A^{-1})_{\frac{1}{t}} \, d\nu|_{(0,+\infty)}(t) \end{aligned}$$

aus Lemma 4.1.8 4. und weiters wegen $T(\mu|_{(0,+\infty)}) = \nu|_{(0,+\infty)}$ mit $T(t) = \frac{1}{t}$

$$\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t} (A^{-1})_{\frac{1}{t}} \, d\nu|_{(0,+\infty)}(t) = \int_{(0,+\infty)} (1+t)(A^{-1})_t \, d\mu|_{(0,+\infty)}(t)$$

aus dem Transformationsatz, Satz 4.1.11. Schließlich gilt wegen Lemma 4.1.13

$$\begin{aligned} A^{-1} \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(\check{f}) &= \mu(\{0\}) A^{-1} + A^{-1} \int_{[0,+\infty)} (1+t) A_t \, d\nu(t) \\ &= \mu(\{0\}) A^{-1} + \nu(\{0\}) A^{-1} A + A^{-1} \int_{(0,+\infty)} (1+t) A_t \, d\nu|_{(0,+\infty)}(t) \\ &= \nu(\{0\}) I + \mu(\{0\}) A^{-1} + \int_{(0,+\infty)} (1+t)(A^{-1})_t \, d\mu|_{(0,+\infty)}(t) \\ &= aI + \int_{[0,+\infty)} (1+t)(A^{-1})_t \, d\mu(t) = \mathcal{H}_{A^{-1}}^{\mathfrak{L}_b}(\widetilde{f}). \end{aligned}$$

Aus dem 1. Punkt erhalten wir $A^{-1}\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(\check{f})\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f) = A^{-1}A = I$ und $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(\check{f})A^{-1} = AA^{-1} = I$, weshalb $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)^{-1} = A^{-1}\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(\check{f}) = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(\check{f})A^{-1}$; siehe [14] Bemerkung 6.3.5 2. Damit gilt $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)^{-1} = \mathcal{H}_{A^{-1}}^{\mathfrak{L}_b}(\widetilde{f})$.

□

4.3.3 Stabilität unter Komposition

Für Funktionen $f \in \mathcal{T}, g \in \mathcal{T}_+$ wurde in Satz 3.5.2 gezeigt, dass $f \circ g \in \mathcal{T}$. Hier wollen wir mittels Lemma 4.1.19 die Gleichung $\mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)}(f) = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f \circ g)$ für beschränkte lineare Operatoren $A \in \mathcal{M}$ nachweisen.

Satz 4.3.4 Für $g \in \mathcal{T}_+$, $f \in \mathcal{T}$ und $A \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$ gilt

$$\mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)}(f) = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f \circ g). \tag{4.21}$$

Beweis: Falls g eine Nullstelle hat, so folgt $g = 0$ aus Korollar 3.4.11. Für $f \in \mathcal{T}$ verwenden wir hier die Schreibweise $f(0) := \lim_{z \searrow 0} f(z)$; siehe Bemerkung 3.3.2 2. Wegen $(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(0) = f_{f(0),0}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ folgt dann aus Beispiel 4.2.11 1. und Beispiel 4.2.4 1.

$$\mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)}(f) = \mathcal{H}_{0I}^{\mathfrak{L}_b}(f) = f(0)I = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f_{f(0),0}) = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f \circ g).$$

Im Fall, dass g keine Nullstellen hat, seien $b \in \mathbb{C}, \nu \in \mathfrak{M}$ mit $f = f_{b,\nu}$ und $a \geq 0, \mu \in \mathfrak{M}$ nichtnegativ mit $g = f_{a,\mu}$. Aus Lemma 3.4.10 erhalten wir $g_t = \frac{g}{1+tg} = f_{a_t,\mu_t} \in \mathcal{T}_+$, wobei $a_t = \frac{a}{1+ta}$ für alle $t \geq 0$.

Nach 3.5.2 gilt $f \circ g \in \mathcal{T}$, wobei $f \circ g \in \mathcal{T}_+$ falls $f \in \mathcal{T}_+$.

Wegen Korollar 4.3.2 sind $\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f \circ g)$ und $\mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)}(f)$ wohldefiniert. Gemäß Lemma 4.1.8 5. und Korollar 4.3.2 gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)}(f) &= bI + \int_{[0,+\infty)} (1+t)\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)_t \, d\nu(t) = bI + \int_{[0,+\infty)} (1+t)\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g_t) \, d\nu(t) \\
&= bI + \int_{[0,+\infty)} \frac{a(1+t)}{1+at} \, d\nu(t) I + \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} (1+s)A_s \, d\mu_t(s) \, d\nu(t) \\
&= f(a)I + \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} (1+s)A_s \, d\mu_t(s) \, d\nu(t),
\end{aligned}$$

sowie

$$\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f \circ g) = f(a)I + \int_{[0,+\infty)} (1+t)A_t \, d\omega(t).$$

Damit ist (4.21) äquivalent zu $\int_{[0,+\infty)} h(s) \, d\omega(s) = \int_{[0,+\infty)} (1+t) \int_{[0,+\infty)} h(s) \, d\mu_t(s) \, d\nu(t)$, wobei $h(s) := (1+s)A_s$ für $s > 0$ und $h(0) := A$. Wegen Korollar 2.3.8 ist h stetig. Laut Lemma 3.5.1 treffen (V_1) und (V_2) zu. Folglich bleiben nur die restlichen Vorraussetzungen von Lemma 4.1.19 für $h : [0, +\infty) \to \mathfrak{L}_b(X)$ nachzuweisen:

(V_3) Für alle $s \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\|h(s)\| = \|(1+s)A_s\| &= \left\|AJ_s^A + sA_s\right\| \leq \|A\|\left\|J_s^A\right\| + s\|A_s\| \\
&\leq \|A\|M(A) + s\frac{(M(A)+1)}{s} = \|A\|M(A) + (M(A)+1) \\
&= (\|A\|+1)M(A) + 1
\end{aligned}$$

gemäß Lemma 2.2.10 und Lemma 2.2.9. Folglich ist $s \mapsto \|h(s)\|$ μ_t-integrierbar für alle $t > 0$.

(V_4) Wegen Korollar 4.3.2 gilt $\int_{[0,+\infty)} h(s) \, d\mu_t(s) = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g_t) - a_t I = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(g)_t - \frac{a}{1+ta} I$. Nach Korollar 2.3.8 ist $t \mapsto \int_{[0,+\infty)} h(s) \, d\mu_t(s)$ dann Differenz stetiger Funktionen und damit selbst stetig, also auch stark-messbar; siehe Korollar 4.1.17.

(V_5) Wegen

$$\begin{aligned}
(1+t)\int_{[0,+\infty)} \|h(s)\| \, d\mu_t(s) &\leq [(\|A\|+1)M(A)+1](g_t(1) - a_t)(1+t) \\
&= [(\|A\|+1)M(A)+1]\left(\frac{g_t(1)(1+t)}{1+g_t(1)t} - \frac{a(1+t)}{1+at}\right)
\end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$ und Lemma 3.2.11 ist $t \mapsto (1+t)\int_{[0,+\infty)} \|h(s)\| \, d\mu_t(s)$ ν-integrierbar.

□

4.4 Funktionalkalkül für lineare Relationen

4.4.1 Grundlegende Eigenschaften

Für $A \in \mathcal{M}$ und $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}$ wurde die lineare Relation $\mathcal{H}_A(f_{a,\mu}) := \liminf_{\lambda\searrow 0} \mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{A_\lambda}(f_{a,\mu})$ in Definition 4.2.3 eingeführt und in Lemma 4.2.5 gezeigt, dass

$$\mathcal{H}_A(f_{a,\mu}) = aI + \liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t)A_{t+\lambda}\, d\mu(t) + \int_{(1,+\infty)} (1+t)A_t\, d\mu(t).$$

Wir wollen hier die unterschiedlichen Konstruktionen heranziehen, um die in Definition 2.1.2 mit $\mathcal{H}_A(f_{a,\mu})$ assoziierten Unterräumen näher zu beschreiben, und unterschiedliche Möglichkeiten erarbeiten, um $\mathcal{H}_A(f_{a,\mu})$ zu approximieren.

Lemma 4.4.1 Für $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}$ und $A \in \mathcal{M}$ gilt $\mathcal{H}_A(f_{a,\mu}) = \liminf_{\lambda\searrow 0} \mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{A_\lambda+\lambda}(f_{a,\mu})$.

Beweis: Nach Lemma 2.2.16 und Lemma 2.2.7 liegt $A_\lambda + \lambda$ in $\mathcal{M}$ für alle $\lambda > 0$. Aus Satz 2.2.12 1. folgt für $t \geq 0, \lambda > 0$,

$$\begin{aligned} J_t^{A_\lambda} - J_t^{A_\lambda+\lambda} &= t^{-1}[\big(t^{-1} + A_\lambda\big)^{-1} - \big(t^{-1} + \lambda + A_\lambda\big)^{-1}] \\ &= t^{-1}(t^{-1} + \lambda - t^{-1})\big(t^{-1} + A_\lambda\big)^{-1}\left(\frac{1+t\lambda}{t} + A_\lambda\right)^{-1} \\ &= \lambda\frac{t}{1+t\lambda} J^{A_\lambda}_{t^{-1}} J^{A_\lambda}_{\frac{1+t\lambda}{t}}. \end{aligned}$$

und daraus $(A_\lambda + \lambda)_t - (A_\lambda)_t = t^{-1}[J_t^{A_\lambda} - J_t^{A_\lambda+\lambda}] = \frac{\lambda}{1+t\lambda} J^{A_\lambda}_{t^{-1}} J^{A_\lambda}_{\frac{1+t\lambda}{t}}$. Wegen

$$\begin{aligned} \left\| \int_{[0,+\infty)} (1+t)[(A_\lambda+\lambda)_t - (A_\lambda)_t]\, d\mu(t) \right\| &\leq \int_{[0,+\infty)} (1+t)\|(A_\lambda+\lambda)_t - (A_\lambda)_t\|\, d|\mu|(t) \\ &\leq (M(A)+1)^2 \int_{[0,+\infty)} \frac{\lambda(1+t)}{1+t\lambda}\, d|\mu|(t) \\ &= (M(A)+1)^2 f_{0,|\mu|}(\lambda) \end{aligned}$$

für $\lambda > 0$ und Bemerkung 3.3.2 2. gilt

$$\lim_{\lambda\searrow 0} \left(\int_{[0,+\infty)} (1+t)(A_\lambda+\lambda)_t\, d\mu(t) - \int_{[0,+\infty)} (1+t)(A_\lambda)_t\, d\mu(t) \right) = 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A(f_{a,\mu}) &= \liminf_{\lambda\searrow 0} \mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{A_\lambda}(f_{a,\mu}) = \liminf_{\lambda\searrow 0}(aI + \int_{[0,+\infty)} (1+t)(A_\lambda)_t\, d\mu(t)) \\ &= aI + \liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{[0,+\infty)} (1+t)(A_\lambda)_t\, d\mu(t) = aI + \liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{[0,+\infty)} (1+t)(A_\lambda+\lambda)_t\, d\mu(t) \\ &= \liminf_{\lambda\searrow 0} \mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{A_\lambda+\lambda}(f_{a,\mu}). \end{aligned}$$

aus Lemma 2.3.4 6., Lemma 2.3.3 1. und Lemma 2.3.4 4. □

Proposition 4.4.2 Für $A \in \mathcal{M}$ und $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}$ gilt $\operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f_{a,\mu})) \subseteq \operatorname{mul}(A)$.

Beweis: Zu $(0,v) \in \mathcal{H}_A(f_{a,\mu}) = aI + \liminf_{s\searrow 0} \int_{[0,+\infty)} (1+t)A_{s+t}\, d\mu(t)$ existiert ein Netz $(u_s)_{s>0}$ in X mit $\lim_{s\searrow 0}\|u_s\| = 0$ und $\lim_{s\searrow 0}\left(\int_{[0,+\infty)}(1+t)A_{s+t}\, d\mu(t) u_s\right) = v$.
Aus Korollar 2.2.13 und Lemma 2.2.9 folgt $\left\|J_1^A A_{s+t}\right\| = \left\|A_1 J_{s+t}^A\right\| \le (M(A)+1)M(A)$ für $t \ge 0$ und $s > 0$, womit

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} \left\|J_1^A A_{s+t}\right\|(1+t)\, d|\mu|(t) &\le M(A)(M(A)+1)\int_{[0,1]}(1+t)\, d|\mu|(t)\\ &\le M(A)(M(A)+1)2|\mu|([0,1]).\end{aligned}$$

Wegen der nach Lemma 2.2.9 geltenden Abschätzung $\left\|J_1^A A_{s+t}\right\| \le M(A)\frac{M(A)+1}{s+t} \le M(A)(M(A)+1)\frac{1}{t}$, $t \ge 0$, gilt auch

$$\begin{aligned}\int_{(1,+\infty)} \left\|J_1^A A_{s+t}\right\|(1+t)\, d|\mu|(t) &\le M(A)(M(A)+1)\int_{(1,+\infty)} \frac{1+t}{t}\, d|\mu|(t)\\ &\le M(A)(M(A)+1)2|\mu|((1,+\infty)).\end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 4.1.8 4. und 6. ergibt sich

$$\begin{aligned}\left\|J_1^A \int_{[0,+\infty)}(1+t)A_{s+t}\, d\mu(t)u_s\right\| &\le \left\|\int_{[0,+\infty)}(1+t)J_1^A A_{s+t}\, d\mu(t)\right\|\|u_s\|\\ &\le M(A)(M(A)+1)2|\mu|([0,+\infty))\|u_s\|.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$J_1^A v = J_1^A\left(\lim_{s\searrow 0}\left(\int_{[0,+\infty)}(1+t)A_{s+t}\, d\mu(t)u_s\right)\right) = \lim_{s\searrow 0}\left(J_1^A\int_{[0,+\infty)}(1+t)A_{s+t}\, d\mu(t)u_s\right) = 0,$$

also $(v,0) \in J_1^A = (I+A)^{-1}$, womit gilt $(0,v) \in A$. □

Es sei an Lemma 2.1.3 erinnert, wo wir gesehen haben, dass für $A \le X \times X$ und $(u,v) \in A$ immer $A\{u\} = \{w \in X \mid (u,w) \in A)\} = v + \operatorname{mul}(A)$.

Lemma 4.4.3 Für $A \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{T}$, $t > 0$, $D \in \left\{(t+A)^{-1}, J_t^A\right\}$ und $u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f))$ gilt

$$(\mathcal{H}_A(f)D)\{u\} = (D\mathcal{H}_A(f))u + \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f)).$$

Beweis: Sei $(u,v) = \lim_{\lambda\searrow 0}(u_\lambda, \mathcal{H}_{A_\lambda}^{\mathfrak{L}_b}(f)u_\lambda) \in \liminf_{\lambda\searrow 0}\mathcal{H}_{A_\lambda}^{\mathfrak{L}_b}(f) = \mathcal{H}_A(f)$. Da $(t+A)^{-1}$ und $\mathcal{H}_{A_\lambda}^{\mathfrak{L}_b}(f)$ gemäß Lemma 4.2.7 kommutieren, gilt

$$\begin{aligned}((t+A)^{-1}u, (t+A)^{-1}v) &= \lim_{\lambda\searrow 0}((t+A)^{-1}u_\lambda, (t+A)^{-1}\mathcal{H}_{A_\lambda}^{\mathfrak{L}_b}(f)u_\lambda)\\ &= \lim_{\lambda\searrow 0}((t+A)^{-1}u_\lambda, \mathcal{H}_{A_\lambda}^{\mathfrak{L}_b}(f)(t+A)^{-1}u_\lambda) \in \mathcal{H}_A(f).\end{aligned}$$

Aus Lemma 2.1.3 und Fakta 2.1.11 4. folgt

$$\mathcal{H}_A(f)(t+A)^{-1}\{u\} = \mathcal{H}_A(f)\Big\{(t+A)^{-1}u\Big\} = (t+A)^{-1}v + \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f)).$$

Wegen Proposition 4.4.2 gilt $\ker\Big((t+A)^{-1}\Big) = \operatorname{mul}((t+A)) = \operatorname{mul}(A) \supseteq \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f))$ und mit $\mathcal{H}_A(f)\{u\} = v + \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f))$ und Fakta 2.1.11 5. sieht man, dass die Singletons

$$\begin{aligned}\Big\{\Big((t+A)^{-1}\mathcal{H}_A(f)\Big)u\Big\} &= \Big((t+A)^{-1}\mathcal{H}_A(f)\Big)\{u\} = (t+A)^{-1}(\mathcal{H}_A(f)\{u\}) \\ &= (t+A)^{-1}(v + \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f))) = \Big\{(t+A)^{-1}v\Big\}\end{aligned}$$

übereinstimmen.

Mit $\mathcal{H}_A(f)J_t^A = \mathcal{H}_A(f)(\frac{1}{t}(\frac{1}{t}+A)^{-1}) = \frac{1}{t}\mathcal{H}_A(f)(\frac{1}{t}+A)^{-1}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_A(f)J_t^A)\{u\} &= \left(\frac{1}{t}\mathcal{H}_A(f)\left(\frac{1}{t}+A\right)^{-1}\right)\{u\} = \frac{1}{t}\left(\mathcal{H}_A(f)\left(\frac{1}{t}+A\right)^{-1}\right)\{u\} \\ &= \frac{1}{t}\left(\left(\left(\frac{1}{t}+A\right)^{-1}\mathcal{H}_A(f)\right)u + \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f))\right) = \left(J_t^A\mathcal{H}_A(f)\right)u + \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f))\end{aligned}$$

wegen Fakta 2.1.11 1. $\square$

Definition 4.4.4 Für $A \in \mathcal{M}$ und $f \in \mathcal{T}$ definieren wir die lineare Relation W_f^A mit $\operatorname{dom}\Big(W_f^A\Big) = \operatorname{dom}(A)$ durch

$$W_f^A\{u\} := au + \int_{(0,+\infty)} (1+t)A_t u \, d\mu(t) + \mu(\{0\})A\{u\}, \;\; u \in \operatorname{dom}(A),$$

wobei $a \in \mathbb{C}$ und $\mu \in \mathfrak{M}$ mit $f = f_{a,\mu}$.

Bemerkung 4.4.5 Sei $A \in \mathcal{M}$ und $f \in \mathcal{T}$.

1. Nach Lemma 4.1.18 4. ist W_f^A wohldefiniert.

2. Wegen $\operatorname{mul}\Big(W_f^A\Big) = W_f^A\{0\} = \mu(\{0\})A\{0\} = \mu(\{0\})\operatorname{mul}(A)$ ist W_f^A genau dann ein linearer Operator, wenn $\operatorname{mul}(A) = \{0\}$ oder $\mu(\{0\}) = 0$. Im Fall $\mu(\{0\}) \neq 0$ gilt $\operatorname{mul}\Big(W_f^A\Big) = \operatorname{mul}(A)$.

Lemma 4.4.6 Für $A \in \mathcal{M}$, $f_{a,\mu}$, $s > 0$ und $D \in \Big\{(s+A)^{-1}, J_s^A, A_s\Big\}$ gilt $DW_f^A \subseteq W_f^A D$.

Beweis: Aus Lemma 2.2.10 folgt $(s+A)^{-1}A = \frac{1}{s}J_{\frac{1}{s}}^A A \subseteq \frac{1}{s}AJ_{\frac{1}{s}}^A = A(s+A)^{-1}$, $J_s^A A \subseteq AJ_s^A$ und $A_s A \subseteq AJ_s^A A \subseteq AA_s$. Für $u \in \operatorname{dom}\Big(DW_f^A\Big) = \operatorname{dom}(A)$ gilt daher $D(A\{u\}) = (DA)\{u\} \subseteq$

$(AD)\{u\} = A\{Du\}$ wegen Fakta 2.1.11. und

$$D \int_{(0,+\infty)} (1+t)A_t u \, d\mu(t) = \int_{(0,+\infty)} (1+t)DA_t u \, d\mu(t) = \int_{(0,+\infty)} (1+t)A_t Du \, d\mu(t)$$

wegen Lemma 4.1.8 4. und Korollar 2.2.13. Aus Fakta 2.1.11 4. erhält man

$$\begin{aligned}(DW_f^A)\{u\} &= D(W_f^A\{u\}) = D\left(au + \int_{(0,+\infty)} (1+t)A_t u \, d\mu(t) + \mu(\{0\})A\{u\}\right) \\ &= D(au) + D\int_{(0,+\infty)} (1+t)A_t u \, d\mu(t) + \mu(\{0\})D(A\{u\}) \\ &\subseteq aDu + \int_{(0,+\infty)} (1+t)A_t Du \, d\mu(t) + \mu(\{0\})A\{Du\} = W_f^A\{Du\},\end{aligned}$$

und folglich die Behauptung aus Fakta 2.1.11 6. □

Proposition 4.4.7 Für $A \in \mathcal{M}$ und $f \in \mathcal{T}$ gilt

$$W_f^A \subseteq \mathcal{H}_A(f) \subseteq (I+A)W_f^A(I+A)^{-1}, \tag{4.22}$$

womit insbesondere $\mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{H}_A(f))$.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{C}, \mu \in \mathfrak{M}$ mit $f = f_{a,\mu}$. Zu $(u,w) \in W_f^A$ existiert ein $v \in X$ mit $(u,v) \in A$ und $w = au + \int_{(0,+\infty)}(1+t)A_t u \, d\mu(t) + \mu(\{0\})v$. Wegen Lemma 2.2.10 und Fakta 2.1.11 gilt $\{A_t u\} = A_t\{u\} = (J_t^A A)\{u\} = J_t^A(A\{u\})$, also $A_t u = J_t^A v$ und daher

$$w = au + \int_{(1,+\infty)} (1+t)A_t u \, d\mu(t) + \int_{(0,1]} (1+t)J_t^A v \, d\mu(t) + \mu(\{0\})v.$$

Nach Lemma 2.2.16 gilt $\lim_{s\searrow 0} J_1^{A_s}(u+v) = J_1^A(u+v) = (I+A)^{-1}(u+v) = u$ und wegen Korollar 2.2.14 $\lim_{s\searrow 0} A_{t+s}J_1^{A_s}(u+v) = A_t u = J_t^A v, t > 0$. Für $s > 0$ erhält man aus Korollar 2.2.13

$$\left\|A_{t+s}J_1^{A_s}\right\| = \left\|(A_s)_t J_1^{A_s}\right\| = \left\|J_t^{A_s}(A_s)_1\right\| = \left\|J_t^{A_s}A_{s+1}\right\| \leq M(A_s)\frac{M(A)+1}{s+1} \leq (M(A)+1)^2.$$

Da $t \mapsto (M(A)+1)^2(1+t)$ auf $(0,1]$ μ-integrierbar ist, folgt aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz (siehe Satz 4.1.10)

$$\lim_{s\searrow 0} \int_{(0,1]} (1+t)A_{t+s}J_1^{A_s}(u+v) \, d\mu(t) = \int_{(0,1]} (1+t)J_t^A v \, d\mu(t).$$

Also gilt $(u, \int_{(0,1]}(1+t)J_t^A v \, d\mu(t) + \mu(\{0\})v) \in \liminf_{s\searrow 0} \int_{[0,1]}(1+t)A_{t+s} \, d\mu(t)$. Damit folgt $(u,w) \in aI + \int_{(1,+\infty)}(1+t)A_t \, d\mu(t) + \liminf_{s\searrow 0}\int_{[0,1]}(1+t)A_{t+s} \, d\mu(t) = \mathcal{H}_A(f)$ aus Lemma 4.2.5.

Für den Beweis der zweiten Inklusion in (4.22) sei $(u,w) \in \mathcal{H}_A(f)$. Mit $v := (I+A)^{-1}w$ gilt $(w,v) \in (I+A)^{-1}$ also $(v,w) \in (I+A)$. Aus Proposition 4.4.2, Bemerkung 4.4.5 2. und Lemma 2.1.10 1. erhalten wir $\mathrm{mul}\left(W_f^A(I+A)^{-1}\right) = \mathrm{mul}(A) \supseteq \mathrm{mul}(\mathcal{H}_A(f)) \supseteq \mathrm{mul}(\mathcal{H}_A(f)(I+A)^{-1})$, und die erste Inklusion in (4.22) liefert $W_f^A(I+A)^{-1} \subseteq \mathcal{H}_A(f)(I+A)^{-1}$. Wegen Fakta 2.1.11 7. und Lemma 4.4.3 ergibt sich

$$\big(W_f^A(I+A)^{-1}\big)\{u\} = \big(\mathcal{H}_A(f)(I+A)^{-1}\big)\{u\} = (I+A)^{-1}w + \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f)).$$

Daraus erhält man $v \in \Big(W_f^A(I+A)^{-1}\Big)\{u\}$, also $(u,v) \in W_f^A(I+A)^{-1}$, weshalb $(u,w) \in (I+A)W_f^A(I+A)^{-1}$. $\square$

Bemerkung 4.4.8 Für $A \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$ und $f \in \mathcal{T}$ erhalten wir $W_f^A \subseteq \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)$ aus (4.22). Also folgt $\{0\} \subseteq \operatorname{mul}\Big(W_f^A\Big) \subseteq \operatorname{mul}\Big(\mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)\Big) = \{0\}$ und $\operatorname{dom}\Big(W_f^A\Big) = \operatorname{dom}(A) = X$, weshalb $W_f^A = \mathcal{H}_A^{\mathfrak{L}_b}(f)$ nach Fakta 2.1.11 8.

Korollar 4.4.9 Sei $f_{a,\mu} \in \mathcal{T}$ und $A \in \mathcal{M}$. Für $a = 0$ gilt $\operatorname{ran}(\mathcal{H}_A(f_{0,\mu})) \subseteq \overline{\operatorname{ran}(A)}$ und im Fall $\mu(\{0\}) \neq 0$ die Gleichheit $\operatorname{mul}(A) = \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f_{a,\mu}))$.

Beweis: Für $(u,w) \in \mathcal{H}_A(f_{0,\mu}) = \liminf_{s\searrow 0} \mathcal{H}_{A_s}^{\mathfrak{L}_b}(f_{0,\mu})$ gibt es ein Netz $(u_s)_{s\geq 0}$ mit $\lim_{s\searrow 0} u_s = u$ und $\lim_{s\searrow 0} \mathcal{H}_{A_s}^{\mathfrak{L}_b}(f_{0,\mu})u_s = w$. Wegen Lemma 2.2.10 und Lemma 4.1.8 4. liegt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{A_s}^{\mathfrak{L}_b}(f_{0,\mu})u_s &= 0u_s + \int_{[0,+\infty)} (1+t)(A_s)_t u_s\, d\mu(t) = \int_{[0,+\infty)} (1+t)A_s J_t^{A_s} u_s\, d\mu(t)\\ &= A_s \int_{[0,+\infty)} (1+t)J_t^{A_s} u_s\, d\mu(t)\end{aligned}$$

für alle $s > 0$ in $\operatorname{ran}(A_s) \subseteq \operatorname{ran}(A)$, womit w in $\overline{\operatorname{ran}(A)}$.

Im Fall $\mu(\{0\}) \neq 0$ folgt $\operatorname{mul}(A) = \operatorname{mul}\big(W_{f_{a,\mu}}(A)\big) \subseteq \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f_{a,\mu}))$ aus Bemerkung 4.4.5 2. und (4.22). Die andere Inklusion wurde in Proposition 4.4.2 bewiesen. $\square$

4.4.2 Intermezzo Inverse

Bevor Satz 4.3.3 auf lineare Relationen aus $\mathcal{M}$ ausgedehnt wird, wollen wir daran erinnern, wie $\widetilde{f}(z) := \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ für Funktionen $f \in \mathcal{T}$ ohne Nullstellen und

$$\widetilde{\mathcal{T}} := \Big\{ f \in \mathcal{T} \mid 0 \notin f(\mathbb{C} \setminus (-\infty,0]),\ \widetilde{f} \in \mathcal{T} \Big\}$$

in Definition 3.3.1 eingeführt wurden.

Satz 4.4.10 Für $f \in \widetilde{\mathcal{T}}$ und $A \in \mathcal{M}$ gilt $\mathcal{H}_A(f)^{-1} = \mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f})$.

Beweis: Nach Lemma 2.2.16 und Lemma 2.2.7 gilt $A_s + sI \in \mathfrak{L}_b(X) \cap \mathcal{M}$ für $s > 0$ und $0 \in \rho(A_s + sI)$.

Aus Satz 4.3.3 folgt $\mathcal{H}_{A_s+sI}^{\mathfrak{L}_b}(f)^{-1} = \mathcal{H}_{(A_s+sI)^{-1}}^{\mathfrak{L}_b}(\widetilde{f})$ für alle $s > 0$. Zusammen mit Lemma 4.4.1 und Lemma 2.3.3 3. ergibt sich

$$\mathcal{H}_A(f)^{-1} = \liminf_{s\searrow 0} \mathcal{H}_{A_s+sI}^{\mathfrak{L}_b}(f)^{-1} = \liminf_{s\searrow 0} \mathcal{H}_{(A_s+sI)^{-1}}^{\mathfrak{L}_b}(\widetilde{f}). \tag{4.23}$$

Wegen Fakta 2.1.18 1. gilt

$$
\begin{aligned}
((A_s+s)^{-1})_t &= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&s\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\s&1\end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}s&1\\s(s+t)+1&s+t\end{smallmatrix}\right)}(A) \\
&= \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&s+t\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&s\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\s+\frac{1}{t+s}&1\end{smallmatrix}\right)}(A) = \frac{1}{s+t}(I-\frac{1}{s+t}A_{s+\frac{1}{s+t}}),
\end{aligned}
$$

und

$$
J_{t+s}^{A^{-1}} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\s+t&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&s+t\end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&s+t\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\\frac{1}{s+t}&1\end{smallmatrix}\right)}(A) = \frac{1}{s+t}A_{\frac{1}{s+t}}, \tag{4.24}
$$

für alle $s,t>0$. Mit Satz 2.2.12 folgt

$$
\begin{aligned}
((A_s+sI)^{-1})_t - (A^{-1})_{s+t} &= \frac{1}{s+t}(I-\frac{1}{s+t}A_{s+\frac{1}{s+t}}) - \frac{1}{s+t}(I-J_{t+s}^{A^{-1}}) \\
&= \frac{1}{(s+t)^2}A_{s+\frac{1}{s+t}} - \frac{1}{s+t}J_{t+s}^{A^{-1}} \\
&\overset{(4.24)}{=} \frac{1}{(s+t)^2}(A_{s+\frac{1}{s+t}} - A_{\frac{1}{s+t}}) \\
&= \frac{1}{(s+t)^2}(s+\frac{1}{s+t}-\frac{1}{s+t})A_{s+\frac{1}{s+t}}A_{\frac{1}{s+t}}
\end{aligned}
$$

und damit wegen Lemma 2.2.9

$$
\begin{aligned}
\left\|((A_s+sI)^{-1})_t-(A^{-1})_{s+t}\right\| &= \frac{s}{(s+t)^2}\left\|A_{s+\frac{1}{s+t}}A_{\frac{1}{s+t}}\right\| \leq \frac{s}{(s+t)^2}\frac{(s+t)^2}{1+s^2+st}(M(A)+1)^2 \\
&\leq \frac{s}{1+st}(M(A)+1)^2.
\end{aligned}
$$

Seien $a\in\mathbb{C},\mu\in\mathfrak{M}$ mit $\widetilde{f}=f_{a,\mu}$. Für $s>0$ konvergiert

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{(A_s+sI)^{-1}}(\widetilde{f})-\mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{(A^{-1})_s}(\widetilde{f})\right\| &\leq \int_{[0,+\infty)}\left\|((A_s+s)^{-1})_t-(A^{-1})_{s+t}\right\|(1+t)\,d|\mu|(t) \\
&\leq (M(A)+1)^2\int_{[0,+\infty)}\frac{s(1+t)}{1+st}\,d|\mu|(t) = (M(A)+1)^2 f_{0,|\mu|}(s),
\end{aligned}
$$

wegen Bemerkung 3.3.2 2. für $s\to 0$ gegen 0. Aus Lemma 2.3.4 6. folgt

$$
\liminf_{s\searrow 0}\mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{(A_s+sI)^{-1}}(\widetilde{f}) = \liminf_{s\searrow 0}\mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}_{(A^{-1})_s}(\widetilde{f}) = \mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f}). \tag{4.25}
$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich nun aus (4.23) und (4.25). □

Korollar 4.4.11 Für $A\in\mathcal{M}$, $f\in\widetilde{\mathcal{T}}$ gilt $\ker(\mathcal{H}_A(f))\subseteq\ker(A)$ und $\operatorname{ran}(A)\subseteq\operatorname{ran}(\mathcal{H}_A(f))$.

Beweis: Wegen Satz 4.4.10 und Proposition 4.4.2 folgt

$$
\ker(\mathcal{H}_A(f)) = \operatorname{mul}\big(\mathcal{H}_A(f)^{-1}\big) = \operatorname{mul}\Big(\mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f})\Big) \subseteq \operatorname{mul}\big(A^{-1}\big) = \ker(A)
$$

und aus Satz 4.4.10 in Kombination mit Proposition 4.4.7

$$\operatorname{ran}(\mathcal{H}_A(f)) = \operatorname{dom}\big(\mathcal{H}_A(f)^{-1}\big) = \operatorname{dom}\Big(\mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f})\Big) \supseteq \operatorname{dom}\big(A^{-1}\big) = \operatorname{ran}(A).$$

$\square$

Korollar 4.4.12 Für $A \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{T}_0 = \Big\{f \in \widetilde{\mathcal{T}} : \lim_{z\searrow 0} \widetilde{f}(z) = 0\Big\}$ gilt $\operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)) \subseteq \overline{\operatorname{dom}(A)}$.

Beweis: Aus Lemma 2.1.9 5. und Satz 4.4.10 erhalten wir

$$\operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)) = \operatorname{ran}\big(\mathcal{H}_A(f)^{-1}\big) = \operatorname{ran}\Big(\mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f})\Big).$$

Wegen $f \in \mathcal{T}_0$ und Bemerkung 3.3.2 2. gilt $f_{a,\mu} := \widetilde{f} \in \mathcal{T}$ und $a = \lim_{z\searrow 0} \widetilde{f}(z) = 0$, weshalb

$$\operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)) = \operatorname{ran}\Big(\mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f})\Big) \subseteq \overline{\operatorname{ran}(A^{-1})} = \overline{\operatorname{dom}(A)}$$

nach Korollar 4.4.9. $\square$

Beispiel 4.4.13

1. In Fortführung von Beispiel 4.2.11 2. gilt für $A = \{0\} \times X$ und $f \in \widetilde{\mathcal{T}}$ wegen Satz 4.4.10 und Beispiel 4.2.11 1.

$$\mathcal{H}_A(f) = (\mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f}))^{-1} = (\mathcal{H}_{0I}(\widetilde{f}))^{-1} = ((\lim_{z\searrow 0} \widetilde{f}(z))I)^{-1}.$$

   Insbesondere erhalten wir $\mathcal{H}_A(f) = ((\lim_{z\searrow 0} \widetilde{f}(z))I)^{-1} = (0I)^{-1} = A$ für $f \in \mathcal{T}_0 \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}$; siehe Definition 3.3.1.

2. Für $A \in \mathcal{M}$ und die Funktion $f \in \mathcal{S}_0$ mit $f(z) = \frac{z}{1+\epsilon z}$ aus Beispiel 3.3.5 3. gilt $\widetilde{f}(z) = z + \epsilon$, weshalb

$$\mathcal{H}_A(f) = (\mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f}))^{-1} = (A^{-1} + \epsilon I)^{-1} = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}(A) = \tau_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{smallmatrix}\right)}(A) = A_\epsilon$$

   nach Beispiel 4.2.4 3. und Satz 4.4.10.

4.4.3 Weitere Eigenschaften

Satz 4.4.14 Sei $A \in \mathcal{M}$, $f = f_{a,\mu} \in \mathcal{T}$ mit $\mu(\{0\}) = 0$ oder $f \in \widetilde{\mathcal{T}}$. Für alle $\epsilon > 0$ ist dann

$$F_\epsilon^{A,f} := \int_{[0,+\infty)} \frac{\epsilon(1+t)}{1+\epsilon t} J_t^A J_{\frac{t}{1+\epsilon t}}^A \, d\mu(t)$$

ein beschränkter linearer Operator mit $\lim_{\epsilon\searrow 0} \big\|F_\epsilon^{A,f}\big\| = 0$, $\mathcal{H}_{A+\epsilon}(f) = \mathcal{H}_A(f) + F_\epsilon^{A,f}$ und folglich $\overline{\mathcal{H}_A(f)} = \liminf_{\epsilon\searrow 0} \mathcal{H}_{A+\epsilon}(f)$.

Beweis: Wir halten $\epsilon > 0$ zunächst fest. Für $t, \lambda \geq 0$ setzen wir $P_\lambda(t) := \frac{\epsilon}{1+\epsilon(\lambda+t)} J^A_{\lambda+t} J^A_{\frac{\lambda+t}{1+\epsilon(\lambda+t)}}$ und erkennen aus Satz 2.2.12 für $t, \lambda \geq 0$ mit $t + \lambda > 0$

$$\begin{aligned} P_\lambda(t) &= (t+\lambda)^{-2}\epsilon\big((t+\lambda)^{-1} + A\big)^{-1}\big((t+\lambda)^{-1} + \epsilon + A\big)^{-1} \\ &= (t+\lambda)^{-2}[\big((t+\lambda)^{-1} + \epsilon + A\big)^{-1} - \big((t+\lambda)^{-1} + A\big)^{-1}] \\ &= (t+\lambda)^{-1} J^{A+\epsilon}_{t+\lambda} - (t+\lambda)^{-1} J^A_{t+\lambda} = (A+\epsilon)_{t+\lambda} - A_{t+\lambda}. \end{aligned}$$

Zudem gilt $\|P_\lambda(t)\| \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon(\lambda+t)} M(A)^2 = M(A)^2 \frac{\epsilon}{1+\epsilon t}$. Nach Satz 2.2.14 gilt $\lim_{\lambda \searrow 0} P_\lambda(t) = \lim_{\lambda\searrow 0}[(A+\epsilon)_{t+\lambda} - A_{t+\lambda}] = (A+\epsilon)_t - A_t = P_0(t)$ für alle $t > 0$. Wegen $(t \mapsto M(A)^2 \frac{\epsilon(1+t)}{1+\epsilon t}) \in L^1(\mu)$ ist $F^{A,f}_\epsilon = \int_{[0,+\infty)} (1+t) P_0(t)\, d\mu(t)$ ein beschränkter Operator. Aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz (siehe Satz 4.1.10) und Lemma 2.3.4 3. erhalten wir

$$\liminf_{\lambda \searrow 0} \int_{(0,1]} (1+t) P_\lambda(t)\, d\mu(t) = \int_{(0,1]} (1+t) P_0(t)\, d\mu(t). \tag{4.26}$$

Als nächstes wollen wir

$$\begin{aligned} \liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t)(A+\epsilon)_{\lambda+t}\, d\mu(t) = \mu(\{0\})\epsilon I + \int_{(0,1]} (1+t) P_0(t)\, d\mu(t) \\ + \liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t) A_{\lambda+t}\, d\mu(t) \end{aligned} \tag{4.27}$$

zeigen. Für $\mu(\{0\}) = 0$ folgt dies wegen

$$\begin{aligned} \left\| \int_{(0,1]} (1+t) P_\lambda(t)\, d\mu(t) \right\| &\leq \int_{(0,1]} (1+t) \|P_\lambda(t)\|\, d|\mu|(t) \leq M(A)^2 \int_{(0,1]} \frac{\epsilon(1+t)}{1+\epsilon t}\, d|\mu|(t) \\ &= M(A)^2 f_{0,|\mu|}(\epsilon) \end{aligned} \tag{4.28}$$

und

$$\liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{(0,1]} (1+t)(A+\epsilon)_{\lambda+t}\, d\mu(t) = \liminf_{\lambda\searrow 0} \left(\int_{(0,1]} (1+t) P_\lambda(t)\, d\mu(t) + \int_{(0,1]} (1+t) A_{\lambda+t}\, d\mu(t) \right)$$

aus Lemma 2.3.4 4 und (4.26).

Im Fall $f \in \widetilde{\mathcal{T}}$ mit $\mu(\{0\}) \neq 0$ folgt $f \in \mathcal{T}_0$ aus Lemma 3.4.14. Zu $u \in \overline{\operatorname{dom}(A)}$ wählen wir $(u_\lambda)_{\lambda>0}$ aus $\operatorname{dom}(A)$ mit $\lim_{\lambda\searrow 0} u_\lambda = u$. Für $\lambda > 0$ gilt wegen Lemma 2.2.17

$$\begin{aligned} \left\| J^A_\lambda J^A_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}} u_\lambda - u \right\| &\leq \left\| J^A_\lambda J^A_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}} (u_\lambda - u) \right\| + \left\| J^A_\lambda (J^A_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}} u - u) \right\| + \left\| J^A_\lambda u - u \right\| \\ &\leq M(A)^2 \|u_\lambda - u\| + M(A) \left\| J^A_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}} u - u \right\| + \left\| J^A_\lambda u - u \right\| \to^{\lambda\to 0+} 0, \end{aligned}$$

also $\lim_{\lambda\searrow 0} J^A_\lambda J^A_{\lambda(1+\epsilon\lambda)^{-1}} u_\lambda = u$, womit $(u,u) \in \liminf_{\lambda\searrow 0} \big(J^A_\lambda J^A_{\lambda(1+\epsilon\lambda)^{-1}} \big)$. Also folgt

$$\liminf_{\lambda\searrow 0} P_\lambda(0) = \liminf_{\lambda\searrow 0} \left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon\lambda} J^A_\lambda J^A_{\lambda(1+\epsilon\lambda)^{-1}} \right) = \lim_{\lambda\searrow 0} \frac{\epsilon}{1+\epsilon\lambda} \liminf_{\lambda\searrow 0} \big(J^A_\lambda J^A_{\lambda(1+\epsilon\lambda)^{-1}} \big) \supseteq \epsilon I|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}}$$

aus Lemma 2.3.3 2. Wegen $\left\| J_\lambda^A J_{\lambda(1+\epsilon\lambda)^{-1}}^A \right\| \leq M(A)^2$ erhalten wir $\mathrm{mul}(\liminf_{\lambda\searrow 0} P_\lambda(0)) = \{0\}$ aus Lemma 2.3.4 1. und folglich $(\liminf_{\lambda\searrow 0} P_\lambda(0))|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}} = \epsilon I|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}$.
Zudem gelten

$$\mathrm{dom}\left(\liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t) A_{\lambda+t}\, d\mu(t)\right) = \mathrm{dom}(\mathcal{H}_A(f)) \subseteq \overline{\mathrm{dom}(A)}, \tag{4.29}$$

$$\mathrm{dom}\left(\liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t)(A+\epsilon)_{\lambda+t}\, d\mu(t)\right) = \mathrm{dom}(\mathcal{H}_{A+\epsilon}(f)) \subseteq \overline{\mathrm{dom}(A+\epsilon)} = \overline{\mathrm{dom}(A)}, \tag{4.30}$$

wegen Korollar 4.4.12 und Lemma 4.2.5. Wegen (4.29) und Lemma 2.3.3 2. folgt

$$\liminf_{\lambda\searrow 0} \mu(\{0\}) P_\lambda(0) + \liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t) A_{\lambda+t}\, d\mu(t) = \mu(\{0\})\epsilon I + \liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t) A_{\lambda+t}\, d\mu(t).$$

Aus

$$\|\mu(\{0\}) P_\lambda(0)\| = \mu(\{0\}) \left\| \frac{\epsilon}{1+\epsilon\lambda} J_\lambda^A J_{\frac{\lambda}{1+\epsilon\lambda}}^A \right\| \leq \mu(\{0\})\epsilon M(A)^2$$

zusammen mit (4.28) und (4.30) erhalten wir aus Lemma 2.3.4 4. und (4.26)

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t)(A+\epsilon)_{\lambda+t}\, d\mu(t) \\
&= \liminf_{\lambda\searrow 0} \left[\mu(\{0\}) P_\lambda(0) + \int_{(0,1]} (1+t) P_\lambda(t)\, d\mu(t) + \int_{[0,1]} (1+t) A_{\lambda+t}\, d\mu(t)\right] \\
&= \mu(\{0\})\epsilon I + \int_{(0,1]} (1+t) P_0(t)\, d\mu(t) + \liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t) A_{\lambda+t}\, d\mu(t),
\end{aligned}$$

und es gilt auch in diesem Fall (4.27).

Wegen $P_0(0) = \epsilon I$ folgt aus Lemma 4.2.5

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{A+\epsilon}(f) &= aI + \int_{(1,+\infty)} (1+t)(A+\epsilon)_t\, d\mu(t) + \liminf_{\lambda\searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t)(A+\epsilon)_{\lambda+t}\, d\mu(t) \\
&= \mathcal{H}_A(f) + \int_{[0,+\infty)} (1+t) P_0(t)\, d\mu(t).
\end{aligned}$$

$F_\epsilon^{A,f} = \int_{[0,+\infty)} (1+t) P_0(t)\, d\mu(t)$ genügt der Abschätzung

$$\left\|F_\epsilon^{A,f}\right\| \leq M(A)^2 \int_{[0,+\infty)} \frac{\epsilon(1+t)}{1+\epsilon t}\, d\mu(t) = M(A)^2 f_{0,|\mu|}(\epsilon) \tag{4.31}$$

und laut Bemerkung 3.3.2 2. gilt $\lim_{\epsilon\searrow 0} \left\|F_\epsilon^{A,f}\right\| = 0$.
Damit folgt $\overline{\mathcal{H}_A(f)} = \liminf_{\epsilon\searrow 0} \mathcal{H}_A(f) = \liminf_{\epsilon\searrow 0} (\mathcal{H}_A(f) + F_\epsilon^{A,f}) = \liminf_{\epsilon\searrow 0} \mathcal{H}_{A+\epsilon}(f)$ aus Lemma 2.3.3 1. und Lemma 2.3.4 5. □

Korollar 4.4.15 Für $A \in \mathcal{M}$ und $f \in \widetilde{\mathcal{T}}$ ist $\mathcal{H}_A(f)$ abgeschlossen und es gilt $\mathcal{H}_A(f) = \liminf_{\epsilon\searrow 0} \mathcal{H}_{A+\epsilon}(f)$.

Beweis: Nach Satz 4.4.10 hat $\mathcal{H}_{A+I}(f)$ die Inverse $\mathcal{H}_{(A+I)^{-1}}(\widetilde{f}) \in \mathfrak{L}_b(X)$. Da diese lineare Relation in $\mathfrak{L}_b(X)$ liegt und folglich abgeschlossen ist, ist auch $\mathcal{H}_{A+I}(f)$ abgeschlossen. Wegen Satz 4.4.14 und Lemma 2.1.16 ist schließlich auch $\mathcal{H}_A(f) = \mathcal{H}_{A+I}(f) - F_1$ abgeschlossen. $\square$

Lemma 4.4.16 Für $u \in X$, $A \in \mathcal{M}$, $f = f_{b,\nu} \in \mathcal{S}_0$ und $F_1^{A,f}$ aus Satz 4.4.14 gilt

$$F_1^{A,f} u = \int_{[0,+\infty)} J_t^A J_{\frac{t}{1+t}}^A \, d\nu(t) u \in \operatorname{dom}(A).$$

Beweis: Aus Korollar 2.2.13 folgt für $s > 0$

$$\begin{aligned} A_s \int_{(0,+\infty)} J_t^A J_{\frac{t}{1+t}}^A \, d\nu(t) &= \int_{(0,+\infty)} A_s J_t^A J_{\frac{t}{1+t}}^A \, d\nu(t) \\ &= \int_{(0,+\infty)} J_s^A A_t J_{\frac{t}{1+t}}^A \, d\nu(t) \\ &= J_s^A \int_{(0,+\infty)} A_t J_{\frac{t}{1+t}}^A \, d\nu(t). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Dabei ist der Integrand in (4.32) nach Korollar 2.2.14 stetig und auf Grund von $\left\| A_t J_{\frac{t}{1+t}}^A \right\| = \left\| J_t^A A_{\frac{t}{1+t}} \right\| \leq M(M+1)\frac{1+t}{t}$ und Lemma 3.4.4 ν-integrierbar.

Wegen $\operatorname{ran}\Big(\int_{(0,+\infty)} A_t J_{\frac{t}{1+t}}^A \, d\nu(t)\Big) = \operatorname{ran}\Big(\int_{(0,+\infty)} J_{\frac{t}{1+t}}^A A_t \, d\nu(t)\Big) \subseteq \overline{\operatorname{dom}(A)}$ folgt aus (4.32) wegen Lemma 2.2.17

$$\lim_{s \searrow 0} A_s \int_{(0,+\infty)} J_t^A J_{\frac{t}{1+t}}^A \, d\nu(t) u = \int_{(0,+\infty)} A_t J_{\frac{t}{1+t}}^A \, d\nu(t) u.$$

Gemäß Lemma 2.3.6 gilt

$$\int_{(0,+\infty)} J_t^A J_{\frac{t}{1+t}}^A \, d\nu(t) u \in \operatorname{dom}\Big(\liminf_{s \searrow 0} A_s\Big) = \operatorname{dom}(A).$$

$\square$

Definition 4.4.17 Für $A \in \mathcal{M}$ und $f \in \mathcal{T}$ definieren wir S_f^A und T_f^A durch

$$S_f^A := aI + \int_{(1,+\infty)} (1+t) A_t \, d\mu(t), \quad T_f^A := \int_{[0,1]} (1+t) J_t^A \, d\mu(t),$$

wobei $a \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathfrak{M}$ mit $f = f_{a,\mu}$.

Bemerkung 4.4.18 Sei $A \in \mathcal{M}$ und $f \in \mathcal{T}$.

1. Nach Lemma 4.1.18 1. und 2. sind S_f^A und T_f^A wohldefinierte lineare beschränkte Operatoren.

2. Die lineare Relation $S_f^A + AT_f^A$ erfüllt $\operatorname{dom}\left(S_f^A + AT_f^A\right) = \left\{u \in X : T_f^A u \in \operatorname{dom}(A)\right\}$ und $\operatorname{mul}\left(S_f^A + AT_f^A\right) = \operatorname{mul}(A)$.

3. Wegen Lemma 2.1.16 ist $S_f^A + AT_f^A$ abgeschlossen.

4. Wegen Korollar 2.2.13 und Lemma 4.1.9 kommutieren S_f^A und T_f^A jeweils mit $(s+A)^{-1}$, J_s^A und A_s für $s > 0$.

Im Rest dieses Abschnitts werden S_f^A, T_f^A beziehungsweise W_f^A aus Definition 4.4.4 verwendet, um eine äußerst dienliche Darstellungen von $\mathcal{H}_A(f)$ in Korollar 4.4.19 und Satz 4.4.22 herzuleiten.

Korollar 4.4.19 Für einen linearen Operator $A \in \mathcal{M}$ und $f \in \widetilde{\mathcal{T}}$ gilt

$$\mathcal{H}_A(f) = (I + A)W_f^A(I + A)^{-1} = S_f^A + AT_f^A. \tag{4.33}$$

Im Fall $\overline{\operatorname{dom}(A)} = X$ gilt auch $\mathcal{H}_A(f) = \overline{W_f^A}$.

Beweis: Sei $f = f_{a,\mu}$. Als Erstes widmen wir uns der zweiten Gleichheit in (4.33). Für $u \in X$ folgt aus Korollar 2.2.13, Lemma 2.2.10 und Fakta 4.1.8 4.

$$\begin{aligned} A\int_{(0,1]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)(I+A)^{-1}u &= A\int_{(0,1]}(1+t)J_t^AJ_1^Au\,d\mu(t) = A\int_{(0,1]}(1+t)J_1^AJ_t^Au\,d\mu(t) \\ &= AJ_1^A\int_{(0,1]}(1+t)J_t^Au\,d\mu(t) = A_1\int_{(0,1]}(1+t)J_t^Au\,d\mu(t) \\ &= \int_{(0,1]}(1+t)A_1J_t^Au\,d\mu(t) = \int_{(0,1]}(1+t)AJ_1^AJ_t^Au\,d\mu(t) \\ &= \int_{(0,1]}(1+t)AJ_t^AJ_1^Au\,d\mu(t) \\ &= \int_{(0,1]}(1+t)A_t\,d\mu(t)(I+A)^{-1}u. \end{aligned}$$

Wegen $(I + A)^{-1}u \in \operatorname{dom}(A)$ erhält man aus Lemma 2.2.17,

$$\begin{aligned} AT_f^A(I+A)^{-1}u &= A\left(\mu(\{0\})(I+A)^{-1}u + \int_{(0,1]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)(I+A)^{-1}u\right) \\ &= \mu(\{0\})A(I+A)^{-1}u + \int_{(0,1]}(1+t)A_t\,d\mu(t)(I+A)^{-1}u. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} W_f^A(I+A)^{-1}u = (S_f^A + AT_f^A)(I+A)^{-1}u &= (S_f^A - T_f^A + T_f^A + AT_f^A)(I+A)^{-1}u \\ &= (S_f^A - T_f^A)(I+A)^{-1}u + (I+A)T_f^A(I+A)^{-1}u. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 4.4.18 4. kommutiert $(I + A)^{-1}$ mit S_f^A und T_f^A und aus Lemma 2.1.20 folgt $W_f^A(I + A)^{-1}u = (I + A)^{-1}(S_f^A - T_f^A)u + T_f^A u$. Damit gilt $W_f^A(I + A)^{-1}u \in \operatorname{dom}(A)$ genau dann, wenn $T_f^A u \in \mathrm{dom}(A)$ und folglich erhält man

$$\begin{aligned}(I+A)W_f^A(I+A)^{-1} &= (I+A)\big((I+A)^{-1}(S_f^A - T_f^A) + T_f^A\big)\\ &= S_f^A - T_f^A + (I+A)T_f^A = S_f^A - T_f^A + T_f^A + AT_f^A\\ &= S_f^A + AT_f^A\end{aligned}$$

aus Lemma 2.1.7 2. und 1. sowie Lemma 2.1.20.

Die Inklusion $\subseteq$ der ersten Gleichheit in (4.33) wurde bereits in Proposition 4.4.7 bewiesen. Daher bleibt noch zu zeigen, dass jedes $u \in X$ mit $v := W_f^A(I+A)^{-1}u \in \mathrm{dom}(A)$ in $\mathrm{dom}(\mathcal{H}_A(f))$ liegt.

- Im Fall $0 \in \rho(A)$, also $A^{-1} \in \mathfrak{L}_b(X)$ gilt gemäß Satz 4.4.10 $\mathcal{H}_A(f)^{-1} = \mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f})^{-1} \in \mathfrak{L}_b(X)$. Wegen Proposition 4.4.7 haben wir $\mathrm{ran}\big((I+A)^{-1}\big) = \mathrm{dom}(A) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{H}_A(f))$ und infolge von Lemma 2.1.20 $(I+A)^{-1}u = \mathcal{H}_A(f)^{-1}\mathcal{H}_A(f)(I+A)^{-1}u$.
  Nach Lemma 2.1.20 gilt $(I+A)^{-1}(I+A) \subseteq I$ und wegen Proposition 4.4.7 erhält man mit $w := (I+A)v$

  $$\begin{aligned}\mathcal{H}_A(f)(I+A)^{-1}u = W_f^A(I+A)^{-1}u &= (I+A)^{-1}(I+A)W_f^A(I+A)^{-1}u\\ &= (I+A)^{-1}(I+A)v = (I+A)^{-1}w.\end{aligned}$$

  Wegen (4.24) und Lemma 4.2.7 vertauschen die beschränkten linearen Operatoren $(I+A)^{-1} = J_1^A = (A^{-1})_1$ und $\mathcal{H}_A(f)^{-1} = \mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f})$, weshalb

  $$(I+A)^{-1}u = \mathcal{H}_A(f)^{-1}\mathcal{H}_A(f)(I+A)^{-1}u = \mathcal{H}_A(f)^{-1}(I+A)^{-1}w = (I+A)^{-1}\mathcal{H}_A(f)^{-1}w.$$

  Damit gilt $(I+A)^{-1}[\mathcal{H}_A(f)^{-1}w - u] = 0$. Aus $\ker\big((I+A)^{-1}\big) = \mathrm{mul}(A) = \{0\}$ folgt $u = \mathcal{H}_A(f)^{-1}w \in \mathrm{dom}(\mathcal{H}_A(f))$ mit $\mathcal{H}_A(f)u = w$.

- Für einen beliebigen linearen Operator $A \in \mathcal{M}$ gilt wegen Satz 2.2.12 und Lemma 4.4.6

  $$\begin{aligned}v - W_f^A(2+A)^{-1}u &= W_f^A[(I+A)^{-1} - (2+A)^{-1}]u\\ &= -W_f^A(2+A)^{-1}(I+A)^{-1}u\\ &= -(2+A)^{-1}W_f^A(I+A)^{-1}u,\end{aligned}$$

  womit $v - W_f^A(2+A)^{-1}u \in \mathrm{ran}\big((2+A)^{-1}\big) = \mathrm{dom}(A)$. Wegen $v \in \mathrm{dom}(A)$ liegt auch $W_f^A(2+A)^{-1}u$ in $\mathrm{dom}(A)$. Gemäß Satz 4.4.14 und Proposition 4.4.7 gilt

  $$\begin{aligned}W_f^{A+I}(2+A)^{-1}u = \mathcal{H}_{I+A}(f)(2+A)^{-1}u &= \Big(\mathcal{H}_A(f) + F_1^{A,f}\Big)(2+A)^{-1}u\\ &= \mathcal{H}_A(f)(2+A)^{-1}u + F_1^{A,f}(2+A)^{-1}u\\ &= W_f^A(2+A)^{-1}u + F_1^{A,f}(2+A)^{-1}u.\end{aligned}$$

  Nach Korollar 2.2.13, Lemma 4.1.9 und wegen $F_1^{A,f} = \int_{[0,+\infty)} J_t^A J_{\frac{t}{1+t}}^A \, d\mu(t)$ gilt

  $$F_1^{A,f}(2+A)^{-1} = (2+A)^{-1}F_1^{A,f}$$

  und folglich $F_1^{A,f}(2+A)^{-1}u \in \mathrm{dom}(A)$. Daraus ergibt sich $W_f^{A+I}(2+A)^{-1}u \in \mathrm{dom}(A)$. Wegen $-1 \in \rho(A)$ beziehungsweise $0 \in \rho(I+A)$ folgt aus dem vorangehenden Fall und Satz 4.4.14

  $$u \in \mathrm{dom}(\mathcal{H}_{I+A}(f)) = \mathrm{dom}\Big(\mathcal{H}_A(f) + F_1^{A,f}\Big) = \mathrm{dom}(\mathcal{H}_A(f)).$$

Im Fall $\overline{\mathrm{dom}(A)} = X$ sei $s > 0$ und $u \in \mathrm{dom}(\mathcal{H}_A(f))$, was nach (4.33) $u \in X$ mit $T_f^A u \in \mathrm{dom}(A)$ bedeutet.
Laut Bemerkung 4.4.18 4. vertauschen T_f^A und S_f^A mit J_s^A. Wegen $T_f^A u \in \mathrm{dom}(A)$ folgt $AT_f^A J_s^A u = AJ_s^A T_f^A u = J_s^A AT_f^A u$ aus Lemma 2.2.10.
Nach Proposition 4.4.7 gilt $W_f^A \subseteq \mathcal{H}_A(f) = S_f^A + AT_f^A$ und damit

$$W_f^A J_s^A u = (S_f^A + AT_f^A) J_s^A u = J_s^A (S_f^A + AT_f^A) u,$$

also $(J_s^A u, J_s^A (S_f^A + AT_f^A) u) \in W_f^A$.
Wegen $\overline{\mathrm{dom}(A)} = X$ folgt aus Lemma 2.2.17, dass $\lim_{s \searrow 0} J_s^A u = u$ und $\lim_{s \searrow 0} J_s^A (S_f^A + AT_f^A) u = (S_f^A + AT_f^A) u$.
Damit liegt $(u, (S_f^A + AT_f^A) u)$ nach Lemma 2.3.3 1. in $\liminf_{s \searrow 0} W_f^A = \overline{W_f^A}$, also $\mathcal{H}_A(f) = S_f^A + AT_f^A \subseteq \overline{W_f^A}$. Laut Proposition 4.4.15 ist $\mathcal{H}_A(f)$ abgeschlossen. Damit folgt $\mathcal{H}_A(f) = \overline{W_f^A}$ aus der ersten Inklusion in Proposition 4.4.7. □

Bemerkung 4.4.20 Nach Korollar 4.4.19 stimmt der hier definierte Funktionalkalkül für lineare Operatoren aus $\mathcal{M}$ mit dem aus [3] überein.

Für eine lineare Relation A wurde $A_D = A \cap \left(\overline{\mathrm{dom}(A)} \times \overline{\mathrm{dom}(A)}\right)$ in Definition 2.2.19 eingeführt.

Korollar 4.4.21 Für $A \in \mathcal{M}$ und $f = f_{a,\mu} \in \mathcal{T}_0$ gilt $\mathcal{H}_{A_D}(f) = \mathcal{H}_A(f)_D$. Im Fall $\mu(\{0\}) = 0$ haben wir $\mathrm{mul}\left(\overline{W_f^A}\right) = \{0\}$ und $\overline{W_f^A} = \mathcal{H}_A(f)_D$.

Beweis: Aus Korollar 4.4.12 und Proposition 4.4.7 folgt $\overline{\mathrm{dom}(\mathcal{H}_A(f))} = \overline{\mathrm{dom}(A)}$. Da A_D nach Lemma 2.2.23 einen dicht definierten linearen Opertor auf dem Banachraum $\overline{\mathrm{dom}(A)}$ bildet, folgt aus Korollar 4.4.19, dass

$$\mathcal{H}_{A_D}(f) = \overline{W_f^{A_D}} \leq \overline{\mathrm{dom}(A)} \times \overline{\mathrm{dom}(A)}. \tag{4.34}$$

Da wegen Bemerkung 4.4.5 2. und Lemma 2.2.21 für $u \in \mathrm{dom}(A_D)$

$$\begin{aligned} W_f^{A_D} u &= au + \int_{(0,+\infty)} (1+t)(A_D)_t u \, d\mu(t) + \mu(\{0\}) A_D u \qquad (4.35) \\ &\in au + \int_{(0,+\infty)} (1+t) A_t u \, d\mu(t) + \mu(\{0\}) A\{u\} = W_f^A \{u\}, \end{aligned}$$

gilt $W_f^{A_D} \subseteq W_f^A \subseteq \mathcal{H}_A(f)$ gemäß Proposition 4.4.7. Laut Korollar 4.4.15 ist $\mathcal{H}_A(f)$ abgeschlossen, woraus sich $\overline{W_f^{A_D}} \subseteq \mathcal{H}_A(f)$ ergibt und wegen (4.34)

$$\mathcal{H}_{A_D}(f) = \overline{W_f^{A_D}} \subseteq \mathcal{H}_A(f)_D. \tag{4.36}$$

Umgekehrt sei $(u, v) \in \mathcal{H}_A(f)_D$. Auf Grund von $\mathcal{H}_A(f)_D \subseteq \mathcal{H}_A(f)$ und Proposition 4.4.2 gilt $\mathrm{mul}(\mathcal{H}_{A_D}(f)) \subseteq \mathrm{mul}(A_D) = \{0\}$. Also erhalten wir $\mathcal{H}_{A_D}(f) J_s^{A_D} u = J_s^{A_D} \mathcal{H}_{A_D}(f) u$ aus Lemma 4.4.3. Wegen Lemma 4.4.2 und Lemma 2.2.17 gilt $\mathrm{mul}(\mathcal{H}_A(f)_D) = \mathrm{mul}(\mathcal{H}_A(f)) \cap \overline{\mathrm{dom}(\mathcal{H}_A(f))} \subseteq \mathrm{mul}(A) \cap \overline{\mathrm{dom}(A)} = \{0\}$, weshalb $\mathcal{H}_A(f)_D u = v$ gemäß Lemma 2.1.3.

Da u und $\mathcal{H}_A(f)_D u$ in $\overline{\mathrm{dom}(A)}$ liegen, gilt $J_s^{A_D} u = J_s^A u$ und $J_s^{A_D}\mathcal{H}_A(f)_D u = J_s^A \mathcal{H}_A(f)_D u$ nach Lemma 2.2.21. Folglich erhält man

$$\begin{aligned} W_f^{A_D} J_s^A u &= \mathcal{H}_{A_D}(f) J_s^A u = \mathcal{H}_{A_D}(f) J_s^{A_D} u = J_s^{A_D}\mathcal{H}_{A_D}(f) u = J_s^{A_D}\mathcal{H}_A(f)_D u \\ &= J_s^A \mathcal{H}_A(f)_D u = J_s^A v \end{aligned}$$

für alle $s > 0$. Damit gilt $(u, v) = \lim_{s\searrow 0}(J_s^A u, W_f^{A_D} J_s^A u) \in \liminf_{s\searrow 0} W_f^{A_D} = \overline{W_f^{A_D}}$ wegen Lemma 2.3.3 1. und Lemma 2.3.6. Also gilt

$$\overline{W_f^{A_D}} \supseteq \mathcal{H}_A(f)_D, \tag{4.37}$$

woraus sich wegen (4.36) $\mathcal{H}_{A_D}(f) = \mathcal{H}_A(f)_D$ ergibt.

Im Fall $\mu(\{0\}) = 0$ gilt für $u \in \mathrm{dom}(A)$

$$\begin{aligned} W_f^A u &= au + \int_{(0,+\infty)} A_t u(1+t)\, d\mu(t) = au + \int_{(0,+\infty)} (A_D)_t u(1+t)\, d\mu(t) \\ &= \mathcal{H}_{A_D}(f) u = \mathcal{H}_A(f)_D u. \end{aligned}$$

und damit $W_f^A \subseteq \mathcal{H}_A(f)_D$. Nach Korollar 4.4.15 ist $\mathcal{H}_A(f)_D = \mathcal{H}_{A_D}(f)$ abgeschlossen und es gilt $\overline{W_f^A} \subseteq \overline{\mathcal{H}_A(f)_D} = \mathcal{H}_A(f)_D$.
Aus (4.35) und (4.37) folgt $\overline{W_f^A} \supseteq \overline{W_f^{A_D}} \supseteq \mathcal{H}_A(f)_D$. □

Satz 4.4.22 Für $A \in \mathcal{M}$ und $f \in \mathcal{T}_0$ gilt $\mathrm{mul}(A) = \mathrm{mul}(\mathcal{H}_A(f))$ und

$$\mathcal{H}_A(f) = (I + A) W_f^{A_D} (I + A_D)^{-1} = S_f^A + A T_f^A|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}. \tag{4.38}$$

Beweis: In Proposition 4.4.2 wurde $\mathrm{mul}(\mathcal{H}_A(f)) \subseteq \mathrm{mul}(A)$ bewiesen. Für die umgekehrte Inklusion sei $(0, v) \in A$ und $\widetilde{f} = f_{0,\widetilde{\mu}}$. Aus $v \in \mathrm{mul}(A) = \mathrm{mul}(I + tA) = \ker\big(J_t^A\big)$ folgt $J_t^A v = 0$ für alle $t > 0$ und damit $A_1 v = (I - J_1^A)v = v - J_1^A v = v$. Nach Lemma 2.2.14 gilt $\lim_{s\searrow 0} A_{s+1} v = A_1 v = v$ und mit (4.24)

$$\lim_{s\searrow 0} (A^{-1})_{s+t} A_{s+1} v = \lim_{s\searrow 0} \frac{1}{s+t} J^A_{\frac{1}{s+t}} A_{s+1} v = \frac{1}{t} J^A_{\frac{1}{t}} A_1 v = \frac{1}{t} J^A_{\frac{1}{t}} v = 0.$$

Nach Korollar 2.2.13 gilt $(A^{-1})_{s+t} A_{s+1} = \frac{1}{s+t} J^A_{\frac{1}{s+t}} A_{s+1} = \frac{1}{s+t} A_{\frac{1}{s+t}} J^A_{s+1}$ und gemäß Lemma 2.2.9

$$\big\|(A^{-1})_{s+t} A_{s+1} v\big\| \leq \frac{1}{s+t}(M(A)+1)(s+t)M(A)\|v\| = (M(A)+1)M(A)\|v\|$$

für alle $s, t > 0$. Da $t \mapsto (M(A)+1)M(A)\|v\|(1+t)$ auf $[0,1]$ μ-integrierbar ist, folgt

$$(v, 0) = \lim_{s\searrow 0}(A_{s+1} v, \int_{[0,1]} (1+t)(A^{-1})_{s+t} A_{s+1} v\, d\widetilde{\mu}(t))$$

aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 4.1.10. Damit ist $(v, 0)$ ein Element von $\liminf_{s\searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t)(A^{-1})_{s+t}\, d\widetilde{\mu}(t)$.
Wegen $\widetilde{f}(0) = 0$ und $\int_{(1,+\infty)} (1+t)(A^{-1})_t\, d\widetilde{\mu}(t) v = \int_{(1,+\infty)} (1+t)t^{-1} J^A_{t^{-1}} v\, d\widetilde{\mu}(t) = 0$ erhält man $(v, 0) \in \mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f}) = \mathcal{H}_A(f)^{-1}$ aus Lemma 4.2.5 und Satz 4.4.10. Daraus folgt $(0, v) \in \mathcal{H}_A(f)$.

Der Beweis der ersten Identität in (4.38) verläuft ähnlich wie in Korollar 4.4.19.
Nach Proposition 4.4.7 gilt $\mathcal{H}_A(f) \subseteq (I+A)W_f^A(I+A)^{-1}$ und $(I+A)W_f^A \subseteq (I+A)\mathcal{H}_A(f)$. Für $u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f))$ gilt $u \in \overline{\operatorname{dom}(A)}$ wegen Lemma 4.4.12 und infolge von Lemma 2.2.21 $(I+A)^{-1}u = (I+A)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}}^{-1}u = (I+A_D)^{-1}u$. Aus Fakta 2.1.11 4. und 6. erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A(f)\{u\} &\subseteq \big((I+A)W_f^A(I+A)^{-1}\big)\{u\} = \big((I+A)W_f^A\big)\big\{(I+A)^{-1}u\big\}\\ &= \big((I+A)W_f^A\big)\big\{(I+A_D)^{-1}u\big\} \subseteq ((I+A)\mathcal{H}_A(f))\big\{(I+A_D)^{-1}u\big\}.\end{aligned}$$

Wegen Proposition 4.4.7 haben wir $\mathcal{H}_A(f) \supseteq \mathcal{H}_A(f)_D = \mathcal{H}_{A_D}(f) \supseteq W_f^{A_D}$, also $(I+A)\mathcal{H}_A(f) \supseteq (I+A)W_f^{A_D}$. Aus Lemma 2.2.17 erhält man $\operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f)) \cap \operatorname{dom}(I+A) \subseteq \operatorname{mul}(A) \cap \overline{\operatorname{dom}(A)} = \{0\}$, aus Bemerkung 4.4.5 2. und Fakta 2.2.20 1. $\operatorname{mul}\Big(W_f^{A_D}\Big) = \{0\}$, und infolge von Lemma 2.1.10 1. $\operatorname{mul}((I+A)\mathcal{H}_A(f)) = \operatorname{mul}(I+A) = \operatorname{mul}\Big((I+A)W_f^{A_D}\Big)$. Wegen Korollar 4.4.21 gilt $(I+A_D)^{-1}u \in \operatorname{ran}\big((I+A_D)^{-1}\big) = \operatorname{dom}(A_D) = \operatorname{dom}\Big(W_f^{A_D}\Big)$, und wegen Proposition 4.4.7 und Lemma 4.4.3 $W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}u = \mathcal{H}_{A_D}(f)(I+A_D)^{-1}u = (I+A_D)^{-1}\mathcal{H}_{A_D}(f)u$, womit $(I+A_D)^{-1}u \in \operatorname{dom}\Big((I+A)W_f^{A_D}\Big)$. Fakta 2.1.11 7. liefert

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A(f)\{u\} &\subseteq ((I+A)\mathcal{H}_A(f))\big\{(I+A_D)^{-1}u\big\} = \Big((I+A)W_f^{A_D}\Big)\big\{(I+A_D)^{-1}u\big\}\\ &= \Big((I+A)W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}\Big)\{u\},\end{aligned}$$

weshalb $\mathcal{H}_A(f) \subseteq (I+A)W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}$ laut Fakta 2.1.11 6.
Wegen $\operatorname{mul}\Big(W_f^{A_D}\Big) = \operatorname{mul}(A_D) = \{0\}$ und Lemma 2.1.10 1. gilt

$$\operatorname{mul}\Big((I+A)W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}\Big) = \operatorname{mul}(A) = \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f)).$$

Für die erste Gleichheit in (4.38) genügt es daher zu zeigen, dass jedes $u \in \overline{\operatorname{dom}(A)} = \overline{\operatorname{dom}((I+A_D)^{-1})}$ (siehe Lemma 2.2.23) mit $v := W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}u \in \operatorname{dom}(A)$ auch in $\operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f))$ liegt.

- Angenommen $0 \in \rho(A)$, also $A^{-1} \in \mathfrak{L}_b(X)$ und damit $\mathcal{H}_A(f)^{-1} = \mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f}) \in \mathfrak{L}_b(X)$; siehe Satz 4.4.10. Aus $(I+A_D)^{-1}u \in \operatorname{dom}(A_D)$, Korollar 4.4.21, Proposition 4.4.7 und Fakta 2.1.11 erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A(f)\big\{(I+A)^{-1}u\big\} &= \mathcal{H}_A(f)\big\{(I+A_D)^{-1}u\big\} \supseteq \mathcal{H}_A(f)_D\big\{(I+A_D)^{-1}u\big\}\\ &= \mathcal{H}_{A_D}(f)\big\{(I+A_D)^{-1}u\big\} = W_f^{A_D}\big\{(I+A_D)^{-1}u\big\}\\ &= \Big\{W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}u\Big\} = \{v\}.\end{aligned}$$

  Es gilt $\{v\} = \big((I+A)^{-1}(I+A)\big)\{v\} = (I+A)^{-1}\{(I+A)v\} = \big\{(I+A)^{-1}w\big\}$ für $w \in (I+A)\{v\}$, womit

$$\begin{aligned}\big\{(I+A)^{-1}u\big\} &= \big(\mathcal{H}_A(f)^{-1}\mathcal{H}_A(f)\big)\big\{(I+A)^{-1}u\big\} = \mathcal{H}_A(f)^{-1}\big(\mathcal{H}_A(f)\big\{(I+A)^{-1}u\big\}\big)\\ &\supseteq \mathcal{H}_A(f)^{-1}\{v\} = \mathcal{H}_A(f)^{-1}\big\{(I+A)^{-1}w\big\} = \big\{\mathcal{H}_A(f)^{-1}(I+A)^{-1}w\big\}.\end{aligned}$$

Da beiden Seiten Mengen der Mächtigkeit 1 sind, gilt hier Gleichheit. Wegen $\mathcal{H}_A(f)^{-1} = \mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f})$, $(I+A)^{-1} = (A^{-1})_t$ und Lemma 4.2.7 haben wir $(I+A)^{-1}u = \mathcal{H}_A(f)^{-1}(I+A)^{-1}w = (I+A)^{-1}\mathcal{H}_A(f)^{-1}w$, weshalb $(I+A)^{-1}[\mathcal{H}_A(f)^{-1}w - u] = 0$.

Wegen $\mathcal{H}_A(f)^{-1}w \in \operatorname{ran}\big(\mathcal{H}_A(f)^{-1}\big) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)) \subseteq \overline{\operatorname{dom}(A)}$, $\ker\big((I+A)^{-1}\big) = \operatorname{mul}(A)$ und Lemma 2.2.17 erhält man

$$\mathcal{H}_A(f)^{-1}w - u \in \overline{\operatorname{dom}(A)} \cap \operatorname{mul}(A) = \{0\}.$$

Daraus folgt $\mathcal{H}_A(f)^{-1}w = u$, also $(u,w) \in \mathcal{H}_A(f)$.

- Sei A eine beliebige lineare Relation aus $\mathcal{M}$. Wegen Satz 2.2.12 und Lemma 4.4.6 gilt

$$\begin{aligned} v - W_f^{A_D}(2+A_D)^{-1}u &= W_f^{A_D}[(A_D+I)^{-1} - (2+A_D)^{-1}]u \\ &= -W_f^{A_D}(A_D+2)^{-1}(I+A_D)^{-1}u \\ &= -(2+A_D)^{-1}W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}u, \end{aligned}$$

womit $v - W_f^{A_D}(2+A_D)^{-1}u \in \operatorname{ran}\big((2+A_D)^{-1}\big) = \operatorname{dom}(A_D) \subseteq \operatorname{dom}(A)$. Wegen $v \in \operatorname{dom}(A)$ liegt auch $W_f^{A_D}(2+A_D)^{-1}u$ in $\operatorname{dom}(A)$.
Laut Satz 4.4.14 und Proposition 4.4.7 gilt

$$\begin{aligned} W_f^{I+A_D}(2+A_D)^{-1}u = \mathcal{H}_{I+A_D}(f)(2+A_D)^{-1}u &= \Big(\mathcal{H}_{A_D}(f) + F_1^{A_D,f}\Big)(2+A_D)^{-1}u \\ &= \mathcal{H}_{A_D}(f)(2+A_D)^{-1}u + F_1^{A_D,f}(2+A_D)^{-1}u \\ &= W_f^{A_D}(2+A_D)^{-1}u + F_1^{A_D,f}(2+A_D)^{-1}u. \end{aligned}$$

Nach Korollar 2.2.13, Lemma 4.1.9 und wegen $F_1^{A_D,f} = \int_{[0,+\infty)} J_t^{A_D} J_{\frac{t}{1+t}}^{A_D}\, d\mu(t)$ gilt

$$F_1^{A_D,f}(2+A_D)^{-1} = (2+A_D)^{-1}F_1^{A_D,f}$$

und folglich $F_1^{A_D,f}(2+A_D)^{-1}u \in \operatorname{dom}(A)$, weshalb $W_f^{(I+A)_D}(I+(I+A)_D)^{-1}u = W_f^{I+A_D}(2+A_D)^{-1}u \in \operatorname{dom}(A)$ nach Fakta 2.2.20 2.
Wegen $-1 \in \rho(A)$ beziehungsweise $0 \in \rho(I+A)$ folgt aus dem vorherigen Fall und Satz 4.4.14

$$u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{A+I}(f)) = \operatorname{dom}\Big(\mathcal{H}_A(f) + F_1^{A,f}\Big) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)).$$

Für die zweite Identität in (4.38) sei $f = f_{a,\mu}$ und $u \in \overline{\operatorname{dom}(A)} = \overline{\operatorname{dom}(A_D)}$; siehe Lemma 2.2.23. Wegen Proposition 4.4.7 und Korollar 4.4.19 gilt

$$W_f^{A_D} \subseteq \mathcal{H}_{A_D}(f) = aI + \int_{(1,+\infty)} (1+t)(A_D)_t\, d\mu(t) + A_D \int_{[0,1]} (1+t)J_t^{A_D}\, d\mu(t).$$

Aus Lemma 2.2.21 und Lemma 4.1.8 4. folgt

$$\left(aI + \int_{(1,+\infty)} (1+t)(A_D)_t\, d\mu(t)\right)u = \left(aI + \int_{(1,+\infty)} (1+t)A_t\, d\mu(t)\right)u = S_f^A u$$

und $\int_{[0,1]}(1+t)J_t^{A_D}\,d\mu(t)u = \int_{[0,1]}(1+t)J_t^{A}\,d\mu(t)u = T_f^A u$, weshalb

$$\begin{aligned}W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}u &= (S_f^A + A_D T_f^A)(I+A)^{-1}u\\ &= S_f^A(I+A)^{-1}u + A_D T_f^A(I+A)^{-1}u.\end{aligned}$$

Da S_f^A und T_f^A mit $(I+A)^{-1}$ kommutieren, gilt

$$\begin{aligned}W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}u &= (I+A)^{-1}S_f^A u + A_D(I+A)^{-1}T_f^A u\\ &= (I+A)^{-1}S_f^A u - (I+A)^{-1}T_f^A u\\ &\quad + (I+A)^{-1}T_f^A u + A_D(I+A)^{-1}T_f^A u\\ &= (I+A)^{-1}(S_f^A u - T_f^A u) + (I+A_D)(I+A)^{-1}T_f^A u.\end{aligned}$$

Aus Lemma 2.2.9 und Proposition 4.1.15 folgt $T_f^A u = \int_{[0,1)}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)u \in \overline{\mathrm{dom}(A)}$. Nach Lemma 2.1.20 und Lemma 2.2.21 gilt $(I+A_D)(I+A)^{-1}|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}} = (I+A_D)(I+A_D)^{-1} = I|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}$ und damit $T_f^A u = (I+A_D)(I+A)^{-1}T_f^A u$. Wir erhalten

$$W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}u = (I+A)^{-1}[S_f^A u - T_f^A u] + T_f^A u.$$

Wegen $(I+A)^{-1}[S_f^A u - T_f^A u] \in \mathrm{dom}(A)$ liegt $T_f^A u$ genau dann in $\mathrm{dom}(A)$, wenn $W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}u \in \mathrm{dom}(A)$, also

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}\Big(S_f^A + AT_f^A|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}\Big) &= \mathrm{dom}\Big(AT_f^A|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}\Big) = \Big\{w \in \overline{\mathrm{dom}(A)} \mid T_f^A w \in \mathrm{dom}(A)\Big\}\\ &= \mathrm{dom}\Big((I+A)W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}\Big) \cap \overline{\mathrm{dom}(A)}.\end{aligned}$$

Aus Korollar 4.4.12 folgt $\mathrm{dom}\Big((I+A)W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}\Big) = \mathrm{dom}(\mathcal{H}_A(f)) \subseteq \overline{\mathrm{dom}(A)}$, weshalb

$$\mathrm{dom}\Big((I+A)W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}\Big) = \mathrm{dom}\Big(S_f^A + AT_f^A|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}\Big).$$

Für $u \in \mathrm{dom}\Big(S_f^A + AT_f^A|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}\Big)$ folgt wegen Lemma 4.4.3, Beispiel 4.2.4 3. und Fakta 2.1.11 5.

$$\begin{aligned}(I+A)\{(I+A)^{-1}[S_f^A u - T_f^A u]\} &= \big((I+A)(I+A)^{-1}\big)\{S_f^A u - T_f^A u\}\\ &= \big((I+A)^{-1}(I+A)\big)(S_f^A u - T_f^A u) + \mathrm{mul}(A)\\ &= S_f^A u - T_f^A u + \mathrm{mul}(A) = \{S_f^A u - T_f^A u\} + \mathrm{mul}(A)\end{aligned}$$

und infolge Lemma 2.1.3, $T_f^A u = T_f^A|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}u$ und Fakta 2.1.11 2. und 3.

$$\begin{aligned}\Big((I+A)W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}\Big)\{u\} &= (I+A)\Big\{W_f^{A_D}(I+A_D)^{-1}u\Big\}\\ &= (I+A)\{(I+A)^{-1}[S_f^A u - T_f^A u] + T_f^A u\}\\ &= (I+A)\{(I+A)^{-1}[S_f^A u - T_f^A u]\} + (I+A)\{T_f^A u\}\\ &= \{S_f^A u - T_f^A u\} + \{T_f^A u\} + A\Big\{T_f^A|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}}u\Big\}\\ &= (S_f^A + AT_f^A|_{\overline{\mathrm{dom}(A)}})\{u\}.\end{aligned}$$

Damit erhält man (4.38) aus Fakta 2.1.11 6. □

Bemerkung 4.4.23 Sei $A \in \mathcal{M}$ und $f = f_{a,\mu} \in \mathcal{T}_0$. Aus $\mathcal{H}_A(f) = (I+A)W_f^{A_D}(I+A)^{-1}$ folgt $\operatorname{mul}(A) = \ker\big((I+A)^{-1}\big) \subseteq \operatorname{dom}\Big((I+A)W_f^{A_D}(I+A)^{-1}\Big) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)) \subseteq \overline{\operatorname{dom}(A)}$ und damit $\operatorname{mul}(A) = \{0\}$; siehe Lemma 2.2.17

Im Fall $\mu(\{0\}) \neq 0$ gilt jedoch $\mathcal{H}_A(f) = S_f^A + AT_f^A$. Dazu betrachte $u \in \operatorname{dom}\Big(AT_f^A\Big) = \Big\{w \in X \mid T_f^A w \in \operatorname{dom}(A)\Big\}$. Mit Lemma 4.1.13 erhält man

$$T_f^A u = \mu\{0\}u + \int_{(0,1]} (1+t)J_t^A \, d\mu(t)u \in \operatorname{dom}(A) \subseteq \overline{\operatorname{dom}(A)},$$

weshalb u nach Proposition 4.1.15 in $\overline{\operatorname{dom}(A)}$ liegt. Also gilt $\operatorname{dom}\Big(AT_f^A\Big) \subseteq \overline{\operatorname{dom}(A)}$ und folglich $AT_f^A = AT_f^A|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}}$, da $AT_f^A \supseteq AT_f^A|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}}$ und $\operatorname{mul}\Big(AT_f^A\Big) = \operatorname{mul}(A) = \operatorname{mul}\Big(AT_f^A|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}}\Big)$; siehe Bemerkung 2.1.8. und 8.

Korollar 4.4.24 Für $A \in \mathcal{M}$, $f \in \mathcal{T}_0$ und $\delta > 0$ gilt

$$\mathcal{H}_A(f) = aI + \int_{(\delta,+\infty)} (1+t)A_t \, d\mu(t) + A \int_{[0,\delta]} (1+t)J_t^A \, d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}}. \tag{4.39}$$

Beweis:

- Für $0 < r < s < +\infty$ ergibt sich $A_t = A_{t-r+r} = (A_{t-r})_r = A_r J_{t-r}^{A_r}, t \in [r,s]$ aus Lemma 2.2.11 und Lemma 2.2.10. Zusammen mit Lemma 2.2.11, Lemma 4.1.8 4. und Lemma 2.2.10 erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{(r,s]} (1+t)A_t \, d\mu(t) &= \int_{(r,s]} (1+t)A_r J_{t-r}^{A_r} \, d\mu(t) = A_r \int_{(r,s]} (1+t)J_{t-r}^{A_r} \, d\mu(t) \\ &\subseteq AJ_r^A \int_{(r,s]} (1+t)J_{t-r}^{A_r} \, d\mu(t) = A \int_{(r,s]} (1+t)J_r^A J_{t-r}^{A_r} \, d\mu(t) \\ &= A \int_{(r,s]} (1+t)J_t^A \, d\mu(t). \end{aligned} \tag{4.40}$$

  Wegen Bemerkung 2.1.8 folgt $\operatorname{dom}\Big(A \int_{(r,s]} (1+t)J_t^A \, d\mu(t)\Big) = X$.

- Der Fall $\delta = 1$ war Inhalt von Satz 4.4.22. Für $\delta > 1$ gilt $[0,1] = [0,\delta] \setminus (1,\delta]$, $(1,+\infty) = (\delta,+\infty) \dot\cup (1,\delta]$, und im Fall $\delta < 1$ haben wir $[0,1] = [0,\delta] \dot\cup (\delta,1]$, $(1,+\infty) = (\delta,+\infty) \setminus (\delta,1]$. Um einer Fallunterscheidung zu entgehen, definieren wir $q := \mathbb{1}_{(1,+\infty)}(\delta)$ und

$$Q := \begin{cases} (1,\delta], & \delta > 1, \\ (\delta,1], & \delta < 1. \end{cases}$$

Nach Lemma 4.1.13 und Lemma 2.1.7 2. gilt

$$
\begin{aligned}
A\int_{[0,1]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t) &= A\bigg(\int_{[0,\delta]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)+(-1)^q\int_Q(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg)\\
&\supseteq A\int_{[0,\delta]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)+(-1)^qA\int_Q(1+t)J_t^A\,d\mu(t) \qquad (4.41)
\end{aligned}
$$

und wegen Bemerkung 2.1.8 und Lemma 2.1.9 1.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dom}\bigg(A\int_{[0,1]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg) &\supseteq \operatorname{dom}\bigg(A\int_{[0,\delta]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)+(-1)^qA\int_Q(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg)\\
&= \operatorname{dom}\bigg(A\int_{[0,\delta]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg)\cap\operatorname{dom}\bigg(A\int_Q(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg)\\
&= \operatorname{dom}\bigg(A\int_{[0,\delta]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg)\cap X\\
&= \operatorname{dom}\bigg(A\int_{[0,\delta]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg).
\end{aligned}
$$

Analog erhalten wir

$$
\begin{aligned}
A\int_{[0,\delta]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t) &= A\bigg(\int_{[0,1]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)-(-1)^q\int_Q(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg)\\
&\supseteq A\int_{[0,1]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)-(-1)^qA\int_Q(1+t)J_t^A\,d\mu(t)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dom}\bigg(A\int_{[0,\delta]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg) &\supseteq \operatorname{dom}\bigg(A\int_{[0,1]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)-(-1)^qA\int_Q(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg)\\
&= \operatorname{dom}\bigg(A\int_{[0,1]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg)\cap\operatorname{dom}\bigg(A\int_Q(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg)\\
&= \operatorname{dom}\bigg(A\int_{[0,1]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg)\cap X\\
&= \operatorname{dom}\bigg(A\int_{[0,1]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\operatorname{dom}\bigg(A\int_{[0,1]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg)=\operatorname{dom}\bigg(A\int_{[0,\delta]}(1+t)J_t^A\,d\mu(t)\bigg). \qquad (4.42)
$$

- Wegen Lemma 4.1.13 gilt

$$\begin{aligned}S_f^A &= aI + \int_{(1,+\infty)} (1+t)A_t\, d\mu(t) \\ &= aI + \int_{(\delta,+\infty)} (1+t)A_t\, d\mu(t) - (-1)^q \int_Q (1+t)A_t\, d\mu(t)\end{aligned}$$

und mit (4.41) und (4.40)

$$\begin{aligned}T_f^A &= A \int_{[0,1]} (1+t)J_t^A\, d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}} \\ &\supseteq A \int_{[0,\delta]} (1+t)J_t^A\, d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}} + (-1)^q A \int_Q (1+t)J_t^A\, d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}} \\ &\supseteq A \int_{[0,\delta]} (1+t)J_t^A\, d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}} + (-1)^q \int_Q (1+t)A_t\, d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}} \\ &= A \int_{[0,\delta]} (1+t)J_t^A\, d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}} + (-1)^q \int_Q (1+t)A_t\, d\mu(t).\end{aligned}$$

Satz 4.4.22 liefert

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_A(f) &= S_f^A + AT_f^A \\ &\supseteq aI + \int_{(\delta,+\infty)} (1+t)A_t\, d\mu(t) + A \int_{[0,\delta]} (1+t)J_t^A\, d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}}. \qquad (4.43)\end{aligned}$$

- Nach (4.42) stimmen die Definitionsbereiche beider Seiten von (4.43) überein. Schließlich gilt wegen Satz 4.4.22

$$\begin{aligned}\operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f)) &= \operatorname{mul}(A) \\ &= \operatorname{mul}\Big(aI + \int_{(\delta,+\infty)} (1+t)A_t\, d\mu(t) + A \int_{[0,\delta]} (1+t)J_t^A\, d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}}\Big)\end{aligned}$$

und damit Gleichheit in (4.43); siehe Fakta 2.1.11 8.

□

Korollar 4.4.25 Für $A \in \mathcal{M}$ und $f \in \widetilde{\mathcal{T}}$ mit $\lim_{z\searrow 0} f(z) = 0$ gilt $\ker(\mathcal{H}_A(f)) = \ker(A)$.

Beweis: Wegen $\lim_{z\searrow 0} \widetilde{\widetilde{f}}(z) = \lim_{z\searrow 0} f(z) = 0$ liegt $\widetilde{f}$ in $\mathcal{T}_0$. Damit folgt

$$\ker(\mathcal{H}_A(f)) = \operatorname{mul}\big(\mathcal{H}_A(f)^{-1}\big) = \operatorname{mul}\Big(\mathcal{H}_{A^{-1}}(\widetilde{f})\Big) = \operatorname{mul}\big(A^{-1}\big) = \ker(A)$$

aus Satz 4.4.10 und Satz 4.4.22. □

4.4.4 Produktregel für lineare Relationen

In diesem Abschnitt wird Satz 4.3.1 auf beliebige lineare Relationen aus $\mathcal{M}$ verallgemeinert, wobei die Aussage nuancierter zu formulieren sein wird, wie folgendes Beispiel erwarten lässt.

Beispiel 4.4.26 Sei $A \in \mathcal{M}$, $(z \mapsto 1+z) \in \mathcal{T}_0$, $(z \mapsto (1+z)^{-1}) \in \mathcal{S}_0$ und $(z \mapsto (1+z)(1+z)^{-1}) = (z \mapsto 1) \in \mathcal{T}_+$; siehe Beispiel 3.3.5 2. und Beispiel 3.4.3 3. Wegen Lemma 2.1.20, Beispiel 4.2.11 3. und Beispiel 4.2.4 gilt

$$\underbrace{\mathcal{H}_A(z \mapsto (1+z)^{-1})}_{=(I+A)^{-1}}\underbrace{\mathcal{H}_A(z \mapsto 1+z)}_{=I+A} \subseteq \underbrace{\mathcal{H}_A(z \mapsto 1)}_{=I} \subseteq \underbrace{\mathcal{H}_A(z \mapsto 1+z)}_{=I+A}\underbrace{\mathcal{H}_A(z \mapsto (1+z)^{-1})}_{=(I+A)^{-1}},$$

wobei im Fall $\mathrm{mul}(A) \neq \{0\}$ die Inklusion strikt sind, weil $\mathrm{mul}(I+A) = \mathrm{mul}(A) \neq \{0\}$ und $\mathrm{dom}(I+A) = \mathrm{dom}(A) \neq X$; siehe Lemma 2.2.17.

Satz 4.4.27 (Produktregel für lineare Relationen - reduzierte Version) Sei $A \in \mathcal{M}$.

1. Für $f \in \mathcal{T}_0, g \in \widetilde{\mathcal{T}}$ und $fg \in \widetilde{\mathcal{T}}$ gilt
$$\mathcal{H}_A(fg) \subseteq \mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g), \tag{4.44}$$
wobei die Unendlichteile übereinstimmen.

2. Für $f \in \mathcal{T}_0, g \in \mathcal{T}_0 \cup (\mathcal{S}_0 \cap \widetilde{\mathcal{T}})$ und $fg \in \widetilde{\mathcal{T}}$ gilt
$$\mathcal{H}_A(fg) = \mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g). \tag{4.45}$$

3. Für $f \in \mathcal{T}, g \in \mathcal{S}_0$ und $fg \in \mathcal{T}$ gilt
$$\mathcal{H}_A(g)\mathcal{H}_A(f) \subseteq \mathcal{H}_A(fg) \subseteq \mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g). \tag{4.46}$$
Im Fall $f, g \in \mathcal{S}_0$, $fg \in \mathcal{T}$ haben wir Gleichheiten in (4.46).

4. Für $f, g \in \mathcal{T}_+ \setminus \{0\} \cap \mathcal{T}_0$ mit $fg \in \mathcal{T}_+$, gilt (4.45).

Beweis: Im Folgenden bezeichne $h := fg$. Im Fall $\epsilon > 0$ gilt $(A+\epsilon)^{-1} \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$, weshalb für $f, g, h \in \widetilde{\mathcal{T}}$ gemäß Satz 4.3.1

$$\mathcal{H}_{(A+\epsilon)^{-1}}(\widetilde{h}) = \mathcal{H}_{(A+\epsilon)^{-1}}(\widetilde{g})\mathcal{H}_{(A+\epsilon)^{-1}}(\widetilde{f}).$$

Invertieren beider Seiten ergibt nach Satz 4.4.10

$$\mathcal{H}_{A+\epsilon}(h) = \mathcal{H}_{A+\epsilon}(f)\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g). \tag{4.47}$$

1. Nach Bemerkung 3.3.2 2. haben wir $\lim_{z\searrow 0} \widetilde{g}(z) \in \mathbb{C}$, weshalb im Fall $f \in \mathcal{T}_0$, $g, h \in \widetilde{\mathcal{T}}$
$$\lim_{z\searrow 0} \widetilde{h}(z) = \lim_{z\searrow 0} \widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z) = \left(\lim_{z\searrow 0} \widetilde{f}(z)\right)\left(\lim_{z\searrow 0} \widetilde{g}(z)\right) = 0,$$
also $h \in \mathcal{T}_0$.

   Sei $(u, v) \in \mathcal{H}_A(h)$. Für $\epsilon > 0$ gilt nach Satz 4.4.14 mit $F_\epsilon^{A,h} \in \mathfrak{L}_b(X)$
$$(u, v + F_\epsilon^{A,h}u) \in \mathcal{H}_A(h) + F_\epsilon^{A,h} = \mathcal{H}_{A+\epsilon}(h) = \mathcal{H}_{A+\epsilon}(f)\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g).$$

Insbesondere gibt es ein w_ϵ derart, dass $(w_\epsilon, v + F_\epsilon^{A,h} u) \in \mathcal{H}_{A+\epsilon}(f)$ und $(u, w_\epsilon) \in \mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)$. Gemäß Korollar 4.4.12 gilt $w_\epsilon \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{A+\epsilon}(f)) \subseteq \overline{\operatorname{dom}(A)}$. Mit $F_\epsilon^{A,g} u \in \operatorname{dom}(A)$ liegt daher auch $w_\epsilon - F_\epsilon^{A,g} u$ in $\overline{\operatorname{dom}(A)}$. Wegen Satz 4.4.14 haben wir

$$w_\epsilon \in \mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)\{u\} = \big(\mathcal{H}_A(g) + F_\epsilon^{A,g}\big)\{u\} = \big\{y + F_\epsilon^{A,g} u \mid y \in \mathcal{H}_A(g)\{u\}\big\},$$

weshalb ein $y \in \mathcal{H}_A(g)\{u\}$ existiert, mit $w_\epsilon = y + F_\epsilon^{A,g} u$ und damit $w_\epsilon - F_\epsilon^{A,g} u = y \in \mathcal{H}_A(g)\{u\}$. Demnach liegen $w_\epsilon - F_\epsilon^{A,g} u$ für alle $\epsilon > 0$ im affinen Raum $\mathcal{H}_A(g)\{u\}$. Für $\delta, \epsilon > 0$ gilt wegen Proposition 4.4.2, Lemma 2.1.3 und Lemma 2.2.17

$$\big(w_\epsilon - F_\epsilon^{A,g} u\big) - \Big(w_\delta - F_\delta^{A,g} u\Big) \in \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(g)) \cap \overline{\operatorname{dom}(A)} \subseteq \operatorname{mul}(A) \cap \overline{\operatorname{dom}(A)} = \{0\}.$$

Also stimmen alle $w := w_\epsilon - F_\epsilon^{A,g} u$, $\epsilon > 0$, überein. Wir erhalten $\lim_{\epsilon \searrow 0} w_\epsilon = w + \lim_{\epsilon \searrow 0} F_\epsilon^{A,g} u = w$ und $(u, w) \in \overline{\mathcal{H}_A(g)} = \mathcal{H}_A(g)$; siehe Korollar 4.4.15.
Aus Korollar 4.4.15 folgt auch

$$(w, v) = \lim_{\epsilon \searrow 0} (w_\epsilon, v + F_\epsilon^{A,h} u) \in \liminf_{\epsilon \searrow 0} \mathcal{H}_{A+\epsilon}(f) = \mathcal{H}_A(f),$$

und deshalb $(u, v) \in \mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)$. Also gilt $\mathcal{H}_A(h) \subseteq \mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)$.

Wegen Satz 4.4.22 haben wir $\operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(h)) = \operatorname{mul}(A) = \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f))$.
Für $v \in \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g))$ existiert ein $w \in \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(g))$ mit $(w, v) \in \mathcal{H}_A(f)$. Nach Korollar 4.4.12 und Lemma 2.2.17 gilt

$$w \in \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(g)) \cap \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)) \subseteq \operatorname{mul}(A) \cap \overline{\operatorname{dom}(A)} = \{0\},$$

also $v \in \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f))$. Wir erhalten $\operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)) = \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f)) = \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(h))$.

2. Wegen 1. bleibt im Fall $f \in \mathcal{T}_0$, $g \in \mathcal{T}_0 \cup (\mathcal{S}_0 \cap \widetilde{\mathcal{T}})$, $h \in \widetilde{\mathcal{T}}$ noch $\operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(h)) \supseteq \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g))$ zu zeigen; siehe Fakta 2.1.11 8. Dazu sei $(u, v) \in \mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)$.

   Im Fall $g \in \mathcal{S}_0 \cap \widetilde{\mathcal{T}}$ gilt wegen Lemma 4.4.16 und Proposition 4.4.7 $F_1^{A,g} u \in \operatorname{dom}(A) \subseteq \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f))$ und folglich

$$\mathcal{H}_{I+A}(g)u = \mathcal{H}_A(g)u + F_1^{A,g} u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{I+A}(f)),$$

   weshalb $u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{I+A}(f)\mathcal{H}_{I+A}(g))$. Auf Grund von (4.47) und Satz 4.4.14 erhalten wir $u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{I+A}(h)) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(h))$.

   Anderenfalls gilt $(u, (I + A)^{-1} v) \in (I + A)^{-1}\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)$,
   also $(I + A)^{-1} v \in \big((I + A)^{-1}\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)\big)\{u\}$. Aus Lemma 4.4.3 erhalten wir
   $(I + A)^{-1}\mathcal{H}_A(f) \subseteq \mathcal{H}_A(f)(I + A)^{-1}$ und $(I + A)^{-1}\mathcal{H}_A(g) \subseteq \mathcal{H}_A(g)(I + A)^{-1}$, weshalb

$$(I + A)^{-1}\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g) \subseteq \mathcal{H}_A(f)(I + A)^{-1}\mathcal{H}_A(g) \subseteq \mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)(I + A)^{-1}.$$

   Wegen Fakta 2.1.11 6. gilt

$$(I + A)^{-1} v \in \big((I + A)^{-1}\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)\big)\{u\} \subseteq \big(\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)(I + A)^{-1}\big)\{u\}.$$

   Laut Proposition 4.4.7 haben wir $(I + A)^{-1} u \in \operatorname{dom}(A) \subseteq \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(h))$ und folglich wegen $\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g) \supseteq \mathcal{H}_A(h)$, $\operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)) = \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(h))$ und Fakta 2.1.11 7.

$$\begin{aligned}(I + A)^{-1} v \in \big(\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)(I + A)^{-1}\big)\{u\} &= (\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g))\big\{(I + A)^{-1} u\big\} \\ &= \mathcal{H}_A(h)\big\{(I + A)^{-1} u\big\}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$((I+A)^{-1}u,(I+A)^{-1}v) \in \mathcal{H}_A(h) \cap (\overline{\operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(h))} \times \overline{\operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(h))}) = \mathcal{H}_A(h)_D,$$

also $\mathcal{H}_A(h)_D(I+A)^{-1}u = (I+A)^{-1}v \in \operatorname{dom}(A)$.

Im Fall $g \in \mathcal{T}_0$ gilt $u \in \overline{\operatorname{dom}(A)}$ wegen Korollar 4.4.12.
Zusammen mit Korollar 4.4.21, Proposition 4.4.7 und Lemma 2.2.21 folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_A(h)_D(I+A)^{-1}u &= \mathcal{H}_{A_D}(f)(I+A)^{-1}u = W_h(A_D)(I+A)^{-1}u \\ &= W_h(A_D)(I+A_D)^{-1}u. \end{aligned}$$

Damit liegt auch $W_h(A_D)(1+A_D)^{-1}u$ in $\operatorname{dom}(A)$. Aus Satz 4.4.22 folgt $u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(h))$.

3. Wegen Satz 4.3.1 gilt $\mathcal{H}_{A_\lambda}(g)\mathcal{H}_{A_\lambda}(f) = \mathcal{H}_{A_\lambda}(h) = \mathcal{H}_{A_\lambda}(f)\mathcal{H}_{A_\lambda}(g)$, $\lambda > 0$. Seien $a \in \mathbb{C}$ und $\mu \in \mathfrak{M}$ mit $g = g_{a,\mu} \in \mathcal{S}_0$; siehe Definition 3.4.1. Für alle $\lambda > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{A_\lambda}(g)\| &\le |a| + \int_{(0,+\infty)} \left\|(t+A_\lambda)^{-1}\right\|(1+t)\,d|\mu|(t) \\ &\le |a| + \int_{(0,+\infty)} M(A_\lambda)\frac{1+t}{t}\,d|\mu|(t) \\ &\le |a| + (M(A)+1)\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\,d|\mu|(t) < +\infty. \end{aligned}$$

nach Lemma 4.2.9, Lemma 2.2.9 und Lemma 2.2.16. Auf Grund von $g \in \mathcal{S}_0$ folgt $\mathcal{H}_A(g) \in \mathfrak{L}_b(X)$ aus Lemma 4.2.9, weshalb $\operatorname{dom}(\liminf_{\lambda\searrow 0}\mathcal{H}_{A_\lambda}(g)) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(g)) = X$. Somit folgt (4.46) aus Lemma 2.3.5.

Im Fall, dass zusätzlich $f \in \mathcal{S}_0$, kann (4.46) auch mit vertauschten Rollen von f und g angewendet werden.

4. Wegen Korollar 3.4.11 und Lemma 3.4.15 gilt $\mathcal{T}_+ \setminus \{0\} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}$ und $\mathcal{T}_+ \subseteq \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{T}_0$. Für $f \in \mathcal{T}_+ \cap \mathcal{T}_0$, $g \in \mathcal{T}_+$ gilt $fg \in \mathcal{T}_0$, weil $\lim_{z\searrow 0}\widetilde{fg}(z) = \lim_{z\searrow 0}\widetilde{f}(z)\lim_{z\searrow 0}\widetilde{g}(z) = 0$. Damit folgt (4.45) aus dem 2. Punkt. Im Fall $f, g \in \mathcal{S}_0$ erhält man (4.45) gemäß 3.

Für die Abhandlung des verbleibenden Falles seien $f = f_{b,\nu} = g_{a,\mu} \in \mathcal{S}_0$ und $g \in \mathcal{T}_0$. Aus dem 3. Punkt folgt

$$\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g) \subseteq \mathcal{H}_A(h) \subseteq \mathcal{H}_A(g)\mathcal{H}_A(f).$$

Laut Lemma 4.2.9 gilt $\mathcal{H}_A(f) \in \mathfrak{L}_b(X)$. Zusammen mit Satz 4.4.22 folgt
$\operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(g)\mathcal{H}_A(f)) = \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(g)) = \operatorname{mul}(A)$. Nach Korollar 3.4.5 gilt $a \neq 0$.
Für $u \in \operatorname{mul}(A)$ folgt $\mathcal{H}_A(f)u = au + \int_{(0,+\infty)}(1+t)(t+A)^{-1}u\,d\mu(t) = au$ aus Lemma 4.2.9. Deshalb gilt

$$\operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)) = \mathcal{H}_A(f)[\operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(g))] = \mathcal{H}_A(f)[\operatorname{mul}(A)] = \operatorname{mul}(A),$$

also $\operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(g)\mathcal{H}_A(f)) = \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g))$.

Damit bleibt nur noch $\operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(g)\mathcal{H}_A(f)) \subseteq \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g))$ zu zeigen. Dazu sei $u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(g)\mathcal{H}_A(f))$, also $u \in X$ mit $\mathcal{H}_A(f)u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(g))$. Aus Satz 4.4.14 und Lemma

4.4.16 erhalten wir

$$\mathcal{H}_{A+I}(f)u = \mathcal{H}_A(f)u + \int_{(0,+\infty)} J_t^A J_{\frac{t}{1+t}}^A \, d\nu(t)u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(g)) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{A+I}(g)).$$

Nach (4.47) kommutieren $\mathcal{H}_{A+I}(f)$ und $\mathcal{H}_{A+I}(g)$.
Daraus folgt $u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{A+I}(g)\mathcal{H}_{A+I}(f)) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{A+I}(f)\mathcal{H}_{A+I}(g))$,
also $u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{A+I}(g)) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(g)) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g))$.

□

Bemerkung 4.4.28 In [4] Theorem 4.1 (i) wird die Aussage 2. aus Satz 4.4.27 etwas allgemeiner formuliert:

- Für $f \in \mathcal{T}_0, g \in \widetilde{\mathcal{T}}$ und $fg \in \widetilde{\mathcal{T}}$ gilt $\mathcal{H}_A(fg) = \mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g)$.

Dafür fehlt noch, dass im Fall $g \in \widetilde{\mathcal{T}} \setminus (\mathcal{T}_0 \cup \mathcal{S}_0)$ gezeigt wird, dass $u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)\mathcal{H}_A(g))$ die Tatsache $u \in \overline{\operatorname{dom}(A)}$ nach sich zieht. Der Nachweis davon wird in [4] nicht geführt.

Korollar 4.4.29 Für $g \in \mathcal{T}_+$ und $A \in \mathcal{M}$ gilt $\mathcal{H}_A(g) \in \mathcal{M}$, $\mathcal{H}_A(g_\lambda) = \mathcal{H}_A(g)_\lambda$ für alle $\lambda > 0$ und $M(\mathcal{H}_A(g)) \leq M(A)$.

Beweis: Wegen Bemerkung 3.3.4 gilt $(z \mapsto 1 + \lambda g(z)) \in \mathcal{T}_+$. Aus Definition 4.2.3, Bemerkung 4.2.8, Beispiel 4.2.4 1, Lemma 2.3.3 1. und 2. sowie Lemma 2.3.4 4. erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_A((z \mapsto 1 + \lambda g(z))) &= \liminf_{t \searrow 0} \mathcal{H}_{A_t}((z \mapsto 1 + \lambda g(z))) = \liminf_{t \searrow 0} (\mathcal{H}_{A_t}((z \mapsto 1)) + \lambda \mathcal{H}_{A_t}(g)) \\
&= \liminf_{t \searrow 0} (I + \lambda \mathcal{H}_{A_t}(g)) = \liminf_{t \searrow 0} I + \liminf_{t \searrow 0} (\lambda \mathcal{H}_{A_t}(g)) \\
&= I + \lambda \liminf_{t \searrow 0} \mathcal{H}_{A_t}(g) = I + \lambda \mathcal{H}_A(g).
\end{aligned}$$

Die Funktion h mit $h(z) := 1 - \lambda g_\lambda$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, liegt nach Korollar 3.4.16 in $\mathcal{S}_0$, wobei $(1 + \lambda g(z))h(z) = 1$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Daher folgt für alle $\lambda > 0$

$$\mathcal{H}_A(h)[I + \lambda \mathcal{H}_A(g)] \subseteq I \subseteq [I + \lambda \mathcal{H}_A(g)]\mathcal{H}_A(h)$$

aus Satz 4.4.27 3. Daraus ergibt sich mit Lemma 2.1.20 und Lemma 4.2.9 für alle $\lambda > 0$

$$\frac{1}{\lambda}(\frac{1}{\lambda} I + \mathcal{H}_A(g))^{-1} = (I + \lambda \mathcal{H}_A(g))^{-1} = \mathcal{H}_A(h) \in \mathfrak{L}_b(X),$$

weshalb $\rho(\mathcal{H}_A(g)) \supseteq (-\infty, 0)$.

Der Rest des Beweises verläuft genau so wie jener in Korollar 4.3.2, wobei $\mathcal{H}^{\mathfrak{L}_b}$ durch $\mathcal{H}$ ersetzt wird. □

4.4.5 Stabilität unter Komposition für lineare Relationen

In diesem Abschnitt wird eine Version von Satz 4.3.4 für lineare Relationen aus $\mathcal{M}$ formuliert.

Satz 4.4.30 Für $f \in \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{S}_0, g \in \mathcal{T}_+$ und $A \in \mathcal{M}$ gilt $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_A(g)}(f) = \mathcal{H}_A(f \circ g)$.

Beweis: Wie im Beiweis von Satz 4.3.4 verwenden wir die Schreibweise $f(0) := \lim_{z \searrow 0} f(z)$. Im Fall $g = 0$ haben wir $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_A(g)}(f) = \mathcal{H}_{0I}(f) = f(0)I$ nach Beispiel 4.2.11 1. Damit erhält man aus Satz 4.3.4, Beispiel 4.2.4 1. und Lemma 2.3.3 1.

$$\mathcal{H}_{\mathcal{H}_A(g)}(f) = \mathcal{H}_{0I}(f) = \liminf_{\lambda \searrow 0} \mathcal{H}_{0I}(f) = \liminf_{\lambda \searrow 0} \mathcal{H}_{\mathcal{H}_{A_\lambda}(g)}(f) = \liminf_{\lambda \searrow 0} \mathcal{H}_{A_\lambda}(f \circ g) = \mathcal{H}_A(f \circ g).$$

Sei $f = f_{a,\mu} \in \mathcal{T}_0$ und $g \in \mathcal{T}_+ \setminus \{0\} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}$; siehe Korollar 3.4.11. Wegen Satz 3.5.2 und Lemma 3.4.10 liegt $\widetilde{f \circ g} = \widetilde{f} \circ \widetilde{g}$ in $\mathcal{T}$, also $f \circ g \in \widetilde{\mathcal{T}}$. Wegen Satz 3.5.2 und Korollar 4.4.29 sind $\mathcal{H}_A(f \circ g)$ und $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_A(g)}(f)$ wohldefiniert.

Sei $\epsilon > 0$. Für den beschränkten linearen Operator $(A+\epsilon)^{-1}$ gilt nach (4.21) $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_{(A+\epsilon)^{-1}}(\widetilde{g})}(\widetilde{f}) = \mathcal{H}_{(A+\epsilon)^{-1}}(\widetilde{f} \circ \widetilde{g})$. Wegen Satz 4.4.10 gilt $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)}(f)^{-1} = \mathcal{H}_{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)^{-1}}(\widetilde{f}) = \mathcal{H}_{\mathcal{H}_{(A+\epsilon)^{-1}}(\widetilde{g})}(\widetilde{f})$ und $\mathcal{H}_{(A+\epsilon)^{-1}}(\widetilde{f} \circ \widetilde{g}) = \mathcal{H}_{(A+\epsilon)^{-1}}(\widetilde{f \circ g}) = \mathcal{H}_{A+\epsilon}(f \circ g)^{-1}$. Durch Invertieren folgt

$$\mathcal{H}_{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)}(f) = \mathcal{H}_{A+\epsilon}(f \circ g). \tag{4.48}$$

Aus Korollar 4.4.15 erhalten wir $\mathcal{H}_A(f \circ g) = \liminf_{\epsilon \searrow 0} \mathcal{H}_{A+\epsilon}(f \circ g)$. Für den Satz bleibt noch $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_A(g)}(f) = \liminf_{\epsilon \searrow 0} \mathcal{H}_{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)}(f)$ zu zeigen.

Für $\epsilon > 0$ gilt nach Satz 4.4.14 $\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g) = \mathcal{H}_A(g) + F_\epsilon^{A,g}$ mit $F_\epsilon^{A,g} \in \mathfrak{L}_b(X)$. Da die Definitionsbereiche und Unendlichteile von $\mathcal{H}_A(g)$ und $\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)$ übereinstimmen, folgt

$$\int_{[0,1]} (1+t)(J_t^{\mathcal{H}_A(g)} - J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)})\, d\mu(t) = \int_{[0,1]} (1+t) t J_t^{\mathcal{H}_A(g)} F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)}\, d\mu(t)$$

aus Satz 2.2.15.

Nach Lemma 2.2.16 gilt $\lim_{s \searrow 0} t J_t^{\mathcal{H}_A(g)_s} F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} = J_t^{\mathcal{H}_A(g)} - J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)}$, wobei

$$\left\| t J_t^{\mathcal{H}_A(g)_s} F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \right\| \le t M(\mathcal{H}_A(g)) \left\| F_\epsilon^{A,g} \right\| M(\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)) \le t M(A)^2 \left\| F_\epsilon^{A,g} \right\|;$$

siehe Korollar 4.4.29. Da $t \mapsto (1+t) t M(A)^2 \left\| F_\epsilon^{A,g} \right\|$ auf $[0,1]$ μ-integrierbar ist, folgt

$$\lim_{s \searrow 0} \int_{[0,1]} (1+t) t J_t^{\mathcal{H}_A(g)_s} F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)}\, d\mu(t) = \int_{[0,1]} (1+t)(J_t^{\mathcal{H}_A(g)} - J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)})\, d\mu(t) \tag{4.49}$$

aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 4.1.10.

Wegen Lemma 2.2.10 und Definition 2.2.8 folgt $\mathcal{H}_A(g)_s J_t^{\mathcal{H}_A(g)_s} = (\mathcal{H}_A(g)_s)_t = t^{-1}(I - J_t^{\mathcal{H}_A(g)_s})$ und weiters $\lim_{s \searrow 0} t \mathcal{H}_A(g)_s J_t^{\mathcal{H}_A(g)_s} = I - J_t^{\mathcal{H}_A(g)}$ aus Korollar 2.2.16. Aus

$$\begin{aligned}\left\| t \mathcal{H}_A(g)_s J_t^{\mathcal{H}_A(g)_s} F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \right\| &\le t (M(\mathcal{H}_A(g)) + 1) t^{-1} \left\| F_\epsilon^{A,g} \right\| M(\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)) \\ &\le (M(A)+1)^2 \left\| F_\epsilon^{A,g} \right\|\end{aligned}$$

zusammen mit der μ-Integrierbarkeit von $t \mapsto (1+t)(M(A)+1)^2 \| F_\epsilon^{A,g} \|$ auf $[0,1]$ folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{s \searrow 0} \mathcal{H}_A(g)_s \int_{[0,1]} (1+t) t J_t^{\mathcal{H}_A(g)_s} F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t) \\ &\qquad = \int_{[0,1]} (1+t)(I - J_t^{\mathcal{H}_A(g)}) F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t) \end{aligned} \tag{4.50}$$

aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 4.1.10.

Aus Lemma 2.3.6 und Lemma 2.1.24 erhalten wir $\liminf_{s \searrow 0} \mathcal{H}_A(g)_s = \overline{\mathcal{H}_A(g)} = \mathcal{H}_A(g)$, womit

$$\Big(\int_{[0,1]} (1+t)(J_t^{\mathcal{H}_A(g)} - J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)}) \, d\mu(t) u, \int_{[0,1]} (1+t)(I - J_t^{\mathcal{H}_A(g)}) F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t) u\Big) \in \mathcal{H}_A(g)$$

für $u \in X$ wegen (4.49) und (4.50).

Daraus und Lemma 2.1.7 2. folgt mit $D := \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(g))$

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_A(g) \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t)|_{\overline{D}} \\ &\supseteq \mathcal{H}_A(g) \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_A(g)} \, d\mu(t)|_{\overline{D}} + \mathcal{H}_A(g) \int_{[0,1]} (1+t)(J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} - J_t^{\mathcal{H}_A(g)}) \, d\mu(t)|_{\overline{D}} \\ &\supseteq \mathcal{H}_A(g) \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_A(g)} \, d\mu(t)|_{\overline{D}} - \int_{[0,1]} (1+t)(J_t^{\mathcal{H}_A(g)} - I) F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t). \end{aligned} \tag{4.51}$$

Für $u \in \overline{D}$ gilt wegen Satz 4.4.22 und Satz 4.4.14

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_A(g)} \, d\mu(t) u \in D &\Leftrightarrow u \in \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(f)) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_{A+\epsilon}(f)) \\ &\Leftrightarrow \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t) u \in D. \end{aligned}$$

Insbesondere stimmen die Definitionsbereiche der ersten und letzten Relation in (4.51) überein. Da dies nach Lemma 2.1.9 1. und Lemma 2.1.10 1. auch ihre Unendlichteile tun, gilt Gleichheit in (4.51); siehe Fakta 2.1.11 8.

Daraus und Lemma 2.1.7 1. folgt

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g) \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t)|_{\overline{D}} \\ &\qquad \subseteq \mathcal{H}_A(g) \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t)|_{\overline{D}} + F_\epsilon^{A,g} \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t) \qquad (4.52) \\ &\qquad = \mathcal{H}_A(g) \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_A(g)} \, d\mu(t)|_{\overline{D}} + \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_A(g)} F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t). \end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{dom}(\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)) = \operatorname{dom}(\mathcal{H}_A(g))$ stimmen die Definitionsbereiche beider Seiten in (4.52) überein. Aufgrund von $\operatorname{mul}(\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)) = \operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(g))$ tun dies auch ihre Unendlichteile, womit wir Gleichheit in (4.52) haben.

Aus Satz 4.4.22 und $\overline{\operatorname{dom}(A+\epsilon)} = \overline{\operatorname{dom}(A)} = \overline{D}$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)}(f) &= S_f^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} + \mathcal{H}_{A+\epsilon}(g) T_f^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)}|_{\overline{D}} \qquad (4.53)\\
&= aI + \int_{(1,+\infty)} (1+t)\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)_t \, d\mu(t) + \mathcal{H}_{A+\epsilon}(g) \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t)|_{\overline{D}}\\
&= \mathcal{H}_{\mathcal{H}_A(g)}(f) + \int_{(1,+\infty)} (1+t)(\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)_t - \mathcal{H}_A(g)_t) \, d\mu(t)\\
&\qquad + \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_A(g)} F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t).
\end{aligned}$$

Nach Korollar 4.4.29 gilt

$$\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)_t - \mathcal{H}_A(g)_t = \mathcal{H}_{A+\epsilon}(g_t) - \mathcal{H}_A(g_t) = F_\epsilon^{A,g_t},$$

mit F_ϵ^{A,g_t} wie in Satz 4.4.14. Wegen $g \in \mathcal{T}_+$ gilt $g(t) \geq 0$, $t \geq 0$ und es gibt $b \geq 0$ und ein nicht-negatives $\nu \in \mathfrak{M}$ mit $g = f_{b,\nu}$. Nach Korollar 3.4.16 gilt $g_t = f_{b_t,\nu_t} \in \mathcal{T}_+ \cap \mathcal{S}_0$ mit $\nu_t(\{0\}) = 0$, $\nu_t \geq 0$ und $b_t = \frac{b}{1+tb}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)_t - \mathcal{H}_A(g)_t\| = \left\|F_\epsilon^{A,g_t}\right\| &\leq \int_{(1,+\infty)} \frac{\epsilon(1+s)}{1+s\epsilon} \left\|J_s^A J_{\frac{s}{1+s\epsilon}}^A\right\| d\nu_t(s)\\
&\leq M(A)^2 \int_{[0,+\infty)} \frac{\epsilon(1+s)}{1+s\epsilon} \, d\nu_t(s) = M(A)^2 (g_t(\epsilon) - b_t)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{(1,+\infty)} (1+t)(\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)_t - \mathcal{H}_A(g)_t) \, d\mu(t)\right\| &\leq \int_{(1,+\infty)} (1+t)\|\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)_t - \mathcal{H}_A(g)_t\| \, d|\mu|(t)\\
&= M(A)^2 \int_{(1,+\infty)} (g_t(\epsilon) - b_t)(1+t) \, d|\mu|(t)\\
&= M(A)^2 \int_{(1,+\infty)} \frac{g(\epsilon)(1+t)}{1+tg(\epsilon)} - \frac{b(1+t)}{1+tb} \, d|\mu|(t)\\
&\leq M(A)^2 \int_{[0,+\infty)} \frac{g(\epsilon)(1+t)}{1+tg(\epsilon)} - \frac{b(1+t)}{1+tb} \, d|\mu|(t)\\
&= M(A)^2((f(g(\epsilon)) - a) - (f(b) - a))\\
&= M(A)^2(f(g(\epsilon)) - f(b)).
\end{aligned}$$

Da zudem

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_A(g)} F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t)\right\| &\leq \int_{[0,1]} (1+t) \left\|J_t^{\mathcal{H}_A(g)} F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)}\right\| d\mu(t)\\
&\leq M(A)^2 |\mu|([0,1]) 2 \left\|F_\epsilon^{A,g}\right\|,
\end{aligned}$$

erhält man infolge von Bemerkung 3.3.2 2. und Proposition 3.3.3

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \left\|\int_{(1,+\infty)} (1+t)(\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)_t - \mathcal{H}_A(g)_t) \, d\mu(t) + \int_{[0,1]} (1+t) J_t^{\mathcal{H}_A(g)} F_\epsilon^{A,g} J_t^{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)} \, d\mu(t)\right\| = 0.$$

Aus (4.53), Lemma 4.4.15, Lemma 2.3.3 1. und Lemma 2.3.4 5. folgt $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_A(g)}(f) = \overline{\mathcal{H}_{\mathcal{H}_A(g)}(f)} = \liminf_{\epsilon \searrow 0} \mathcal{H}_{\mathcal{H}_A(g)}(f) = \liminf_{\epsilon \searrow 0} \mathcal{H}_{\mathcal{H}_{A+\epsilon}(g)}(f)$.

Sei schließlich f in $\mathcal{S}_0$. Aus (4.21) folgt $\mathcal{H}_{\mathcal{H}_{A_t}(g)}(f) = \mathcal{H}_{A_t}(f \circ g)$. Da $\mathcal{H}_{A_t}(g)$ ein Netz in $\mathcal{M}$ mit $\liminf_{t \searrow 0} \mathcal{H}_{A_t}(g) = \mathcal{H}_A(g)$ ist, folgt die Behauptung aus Lemma 4.2.10. $\square$

4.4.6 Spektralabbildungssatz

Dieser Abschnitt untersucht den Zusammenhang zwischen dem Spektrum einer linearen Relation und jenem seines Bildes unter dem Funktionalkalkül.

Der weiter gefasste Spektrumsbegriff macht es möglich die Resultate aus [4] Theorem 4.4 ohne Fallunterscheidungen zu formulieren. Dafür verwenden wir für $f \in \mathcal{T}$ die Notationen $f(0) := \lim_{z \searrow 0} f(z)$ und $f(\infty) := \lim_{z \nearrow +\infty} f(z)$.

Lemma 4.4.31 Falls für Mengen P, Q, R und Abbilungen $\eta : P \to R$, $\zeta : Q \to R$ eine surjektives $\Psi : P \to Q$ mit $\eta = \zeta \circ \Psi$ existiert, gilt $\eta(P) = \zeta(Q)$.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch eine Diagrammjagt.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\eta"'] & & Q \arrow[dl, "\zeta"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Für $r \in \eta(P)$ gibt es $p \in P$ mit $\eta(p) = r$, womit $r = \eta(p) = \zeta(\Psi(p)) \in \zeta(Q)$. Sei andererseits $r \in \zeta(Q)$, also $r = \zeta(q)$ für ein $q \in Q$. Da Ψ surjektiv ist, existert ein $p \in P$ mit $\Psi(p) = q$, weshalb $r = \zeta(q) = \zeta(\Psi(p)) = \eta(p) \in \eta(P)$. $\square$

Bemerkung 4.4.32 $\mathfrak{L}_b(X)$ versehen mit der Operatornorm bildet eine Banachalgebra mit Eins I; siehe [6] Definition 1.1.1.

Für eine abgeschlossene Unteralgebra Q von $\mathfrak{L}_b(X)$ und $A \in Q$ definieren wir
$\sigma_Q(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda - A)^{-1} \notin Q\right\}$. Im Fall $Q = \mathfrak{L}_b(X)$ gilt $\sigma_Q(A) = \sigma(A)$; siehe Definition 2.1.23.

Für eine Teilmenge $D \subseteq \mathfrak{L}_b(X)$ definiert $D' := \{B \in \mathfrak{L}_b(X) : BA = AB \text{ für alle } A \in D\}$ den Kommutator und $D'' := (D')'$ den Bikommutator von D.; siehe [6] Defintion 1.2.1.

Falls D kommutativ ist, das heißt $AB = BA$, $A, B \in D$, wird in [6] Proposition 1.2.3 gezeigt, dass der Bikommutator D'' eine kommutative, abgeschlossene Unteralgebra von $\mathfrak{L}_b(X)$ bildet, wobei $D \subseteq D''$, $I \in D''$ und $\sigma_{D''}(B) = \sigma_{\mathfrak{L}_b(X)}(B)$, $B \in D''$.

Ein lineares Funktional $m : D'' \to \mathbb{C}$ heißt multiplikativ, falls $m \neq 0$ und $m(RS) = m(R)m(S)$ für alle $R, S \in D''$.
$M_{D''}$ bezeichnet die Menge aller multiplikativen Funktionale auf D'', welche alle automatisch kontraktiv sind; siehe [6] Defintion 1.3.1.

Sei $M_{D''}$ als Teilmenge des Dualraums $\mathfrak{L}_b(X)'$ mit der schwach-*-Spurtopologie versehen und $C(M_{D''})$ die Menge aller stetigen Funktionen $M_{D''} \to \mathbb{C}$. In diesem Kontext bezeichnet

$$\hat{\ } : \begin{cases} D'' & \to C(M_{D''}) \\ A & \mapsto (m \mapsto m(A)) \end{cases}$$

die Gelfandtransformation; siehe [6] Defintion 1.4.2.

Für $A \in D''$ erhalten wir aus [6] Satz 1.4.3

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathfrak{L}_b(X)}(A) = \sigma_{D''}(A) = \widehat{A}(M_{D''}) \tag{4.54}$$

Satz 4.4.33 Im Fall $f \in \mathcal{T}, A \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$ oder im Fall $f \in \mathcal{S}_0, A \in \mathcal{M}$, hat man $f(\sigma(A)) = \sigma(\mathcal{H}_A(f))$.

Beweis: Wegen Korollar 2.2.13 ist $D := \{A_t | t > 0\}$ eine kommuative Teilmenge von $\mathfrak{L}_b(X)$. Für $f = f_{a,\mu}$ kann $\mathcal{H}_A(f)$ laut Lemma 4.2.6 im Fall $A \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$, beziehungsweise Lemma 4.2.9 im Fall $f \in \mathcal{S}_0$, als $\mathcal{H}_A(f) = aI + \int_{[0,+\infty)}(1+t)A_t \, d\mu(t)$ geschreiben werden und liegt folglich in D''; siehe Proposition 4.1.15 und Bemerkung 4.4.32. Aus (4.54) erhält man

$$\sigma(\mathcal{H}_A(f)) = \sigma_{\mathfrak{L}_b(X)}(\mathcal{H}_A(f)) = \sigma_{D''}(\mathcal{H}_A(f)) = \left\{ \widehat{\mathcal{H}_A(f)}(m) \mid m \in M_{D''} \right\}. \tag{4.55}$$

Nach [6] Fakta 1.3.3 5. zusammen mit (4.1) in Lemma 4.1.8 ergibt sich

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}_A(f)}(m) = m(\mathcal{H}_A(f)) &= m(aI) + m\left(\int_{[0,+\infty)} (1+t)A_t \, d\mu(t) \right) \\ &= a + \int_{[0,+\infty)} (1+t)m(A_t) \, d\mu(t). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Wir wollen als nächstes die Wohldefiniertheit und Surjektivität der durch

$$m(A_t) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\Psi(m)), \, t > 0,$$

definierten Abbilung $\Psi : M_{D''} \to \sigma(A)$ begründen. Gemäß (4.54) und Proposition 2.1.29 gilt

$$\{m(A_t) \mid m \in M_{D''}\} = \sigma_{D''}(A_t) = \sigma_{\mathfrak{L}_b(X)}(A_t) = \sigma(A_t) = \left\{ \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A) \right\}. \tag{4.57}$$

Für $m \in M_{D''}$ und $0 < t, s < +\infty$ gibt es $\lambda, \tilde{\lambda} \in \sigma(A)$ mit $m(A_t) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\lambda) = \frac{\lambda}{1+t\lambda}$, $m(A_s) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\tilde{\lambda}) = \frac{\tilde{\lambda}}{1+s\tilde{\lambda}}$. Wegen Satz 2.2.12 gilt

$$m(A_t) - m(A_s) = m(A_t - A_s) = m((s-t)A_tA_s) = (s-t)m(A_t)m(A_s),$$

Im Fall $\lambda, \tilde{\lambda} \in \sigma(A) \setminus \{\infty\}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{(\lambda - \tilde{\lambda}) + (s-t)\lambda\tilde{\lambda}}{(1+t\lambda)(1+s\tilde{\lambda})} &= \frac{\lambda}{(1+t\lambda)} - \frac{\tilde{\lambda}}{(1+s\tilde{\lambda})} = (s-t)\frac{\lambda}{(1+t\lambda)}\frac{\tilde{\lambda}}{(1+s\tilde{\lambda})} \\ &= \frac{(s-t)\lambda\tilde{\lambda}}{(1+t\lambda)(1+s\tilde{\lambda})},\end{aligned}$$

weshalb $\lambda = \tilde{\lambda}$.
Für $\lambda = \infty$ gilt $m(A_t) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\infty) = \frac{1}{t}$. Damit folgt $\tilde{\lambda} = \infty$ durch das Freistellen von $m(A_s)$ in

$$\frac{1}{t} - m(A_s) = (s-t)\frac{1}{t}m(A_s) = \frac{s}{t}m(A_s) - m(A_s).$$

Also gibt es zu $m \in M_{D''}$ ein $\lambda \in \sigma(A)$ mit $m(A_t) = \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\lambda)$ für alle $t > 0$, wodurch die Wohldefiniertheit von Ψ erwiesen wäre. Die Surjektivität von Ψ erhält man aus (4.57) und nach Konstruktion von Ψ gilt

$$a + \int_{[0,+\infty)} m(A_t)\, d\mu(t) = a + \int_{[0,+\infty)} \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\Psi(m))\, d\mu(t)$$

für alle $m \in M_{D''}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{H}_A(f)) &= \left\{ a + \int_{[0,+\infty)} m(A_t)\, d\mu(t) \mid m \in M_{D''} \right\} \\ &= \left\{ a + \int_{[0,+\infty)} \phi_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right)}(\lambda)\, d\mu(t) \mid \lambda \in \sigma(A) \right\} = f(\sigma(A)),\end{aligned}$$

aus (4.56), (4.55) und Lemma 4.4.31. □

Korollar 4.4.34 Für $f \in \mathcal{T}_0$ und $A \in \mathcal{M}$ gilt $\mathcal{H}_A(f) \in \mathfrak{L}_b(X)$ genau dann, wenn $A \in \mathfrak{L}_b(X)$.

Beweis: Für $A \in \mathfrak{L}_b(X)$ gilt $\mathcal{H}_A(f) \in \mathfrak{L}_b(X)$ nach Lemma 4.2.6. Sei also $A \notin \mathfrak{L}_b(X)$ und damit $0 \in \sigma((I+A)^{-1})$. Mit Satz 4.4.33 schließt man auf

$$0 = \tilde{f}(0) \in \left\{ \tilde{f}(z) \mid z \in \sigma((I+A)^{-1}) \right\} = \tilde{f}(\sigma((I+A)^{-1})) = \sigma(\mathcal{H}_{(I+A)^{-1}}(\tilde{f})).$$

Zusammen mit Satz 4.4.10 ergibt sich $0 \in \sigma(\mathcal{H}_{(I+A)^{-1}}(\tilde{f})) = \sigma((\mathcal{H}_{I+A}(f))^{-1})$ und damit $\mathcal{H}_{I+A}(f) \notin \mathfrak{L}_b(X)$.
Weil es nach Satz 4.4.14 ein $F_1^{f,A} \in \mathfrak{L}_b(X)$ derart gibt, dass $\mathcal{H}_{I+A}(f) = \mathcal{H}_A(f) + F_1^{f,A}$, gilt $\mathcal{H}_A(f) \notin \mathfrak{L}_b(X)$. □

Lemma 4.4.35 Für $f \in \mathcal{T}$ und $s \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ liegt

$$r(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(s)}{z-s} & z \neq s, \\ f'(s) & z = s, \end{cases}$$

in $\mathcal{S}_0$.

Beweis: Mit $f = f_{a,\mu}$, $T : t \mapsto t^{-1}$, $\nu := t(t+s)^{-1} \odot T(\mu)$ auf $(0,+\infty)$ und $\nu(\{0\}) := 0$ folgt aus Satz 3.1.19

$$\begin{aligned} r(z) &= \frac{1}{z-s}\Big(\int_{[0,+\infty)} \Big(\frac{z}{1+tz} - \frac{s}{1+ts}\Big)(1+t)\,d\mu(t)\Big) \\ &= \mu(\{0\}) + \int_{[0,+\infty)} \frac{t}{1+tz}\frac{t^{-1}}{1+ts}(1+t)\,d\mu(t) \\ &= \mu(\{0\}) + \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{z+t^{-1}}\frac{t^{-2}}{t^{-1}+s}(1+t)\,d\mu(t) \\ &= \mu(\{0\}) + \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{z+t}\frac{t^2}{t+s}\frac{1+t}{t}\,dT(\mu)(t) \\ &= \mu(\{0\}) + \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{z+t}\,d\nu(t). \end{aligned}$$

Da $t \mapsto \left|t(t+s)^{-1}\right|$ nach Lemma 3.2.11 $T(\mu)$-integrierbar ist, liegt ν in $\mathfrak{M}$. Dabei gilt

$$\int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\,d|\nu|(t) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1+t}{t}\frac{t}{|t+s|}\,d|T(\mu)|(t) < +\infty,$$

wodurch $r = g_{\mu(\{0\}),\nu} \in \mathcal{S}_0$; siehe Definition 3.4.1. □

Satz 4.4.36 Für $f \in \mathcal{T}_0$ und $A \in \mathcal{M}$ gilt

$$f(\sigma(A)) \subseteq \sigma(\mathcal{H}_A(f)). \tag{4.58}$$

Beweis: Für $s \in \sigma(A) \setminus \{0,\infty\} \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$ haben wir in Lemma 4.4.35 gesehen, dass es ein $h \in \mathcal{S}_0$ gibt mit $f(z) - f(s) = (z-s)h(z)$. Nach Satz 4.4.27 3. und Beispiel 4.2.11 4. gilt

$$\mathcal{H}_A(h)(A-s) \subseteq \mathcal{H}_A(f) - f(s) \subseteq (A-s)\mathcal{H}_A(h). \tag{4.59}$$

Unter der Annahme $f(s) \in \rho(\mathcal{H}_A(f))$ folgt aus der ersten Inklusion in (4.59), dass $\ker(A-s) = \{0\}$ und aus der Zweiten $\operatorname{ran}(A-s) = X$. Damit gilt $(A-s)^{-1} \in \mathfrak{L}_b(X)$ im Widerspruch zu $s \in \sigma(A)$, also $f(s) \in \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{H}_A(f)) = \sigma(\mathcal{H}_A(f))$.

Seien $a \in \mathbb{C}$ und $\mu \in \mathfrak{M}$ mit $f = f_{a,\mu}$. Wir zeigen durch Kontraposition, dass mit $0 \in \sigma(A)$ auch $a = f(0) \in \sigma(\mathcal{H}_A(f))$ gilt. Für $a \in \rho(\mathcal{H}_A(f))$ und $\delta > 0$ folgt

$$\operatorname{mul}(\mathcal{H}_A(f) - a) = \ker\big((\mathcal{H}_A(f) - a)^{-1}\big) \subseteq \ker\left(\int_{(\delta,+\infty)} (1+t)A_t(\mathcal{H}_A(f) - a)^{-1}\,d\mu(t)\right)$$

aus Lemma 4.1.8 4. und Lemma 2.1.9 3. und 5. Damit erhält man aus Lemma 2.1.7 1. und Korollar 4.4.24

$$\begin{aligned} B :&= A\int_{[0,\delta]} (1+t)J_t^A\,d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}} = \mathcal{H}_A(f) - aI - \int_{(\delta,+\infty)} (1+t)A_t\,d\mu(t) \\ &= [I - \int_{(\delta,+\infty)} (1+t)A_t(\mathcal{H}_A(f) - a)^{-1}\,d\mu(t)](\mathcal{H}_A(f) - a). \end{aligned}$$

Wählen wir $\delta > 0$ so groß, dass $\left\| \int_{(\delta,+\infty)} (1+t)A_t(\mathcal{H}_A(f)-a)^{-1}\, d\mu(t) \right\| < 1$, so gilt $B^{-1} \in \mathfrak{L}_b(X)$, wodurch $X = \operatorname{dom}\big(B^{-1}\big) = \operatorname{ran}(B) \subseteq \operatorname{ran}(A) = \operatorname{dom}\big(A^{-1}\big)$.
Da A^{-1} nach Lemma 2.2.7 in $\mathcal{M}$ liegt, folgt

$$\operatorname{mul}\big(A^{-1}\big) = \operatorname{mul}\big(A^{-1}\big) \cap X = \operatorname{mul}\big(A^{-1}\big) \cap \overline{\operatorname{dom}(A^{-1})} = \{0\}$$

aus Lemma 2.2.17.
Wegen Lemma 2.1.20 gilt für $u \in X$

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}u\| &= \left\| \int_{[0,\delta]} (1+t)J_t^A\, d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}} \left(\int_{[0,\delta]} (1+t)J_t^A\, d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}} \right)^{-1} A^{-1}u \right\| \\
&= \left\| \int_{[0,\delta]} (1+t)J_t^A\, d\mu(t)|_{\overline{\operatorname{dom}(A)}} B^{-1}u \right\| \\
&= \left\| \int_{[0,\delta]} (1+t)J_t^A B^{-1}u\, d\mu(t) \right\| \leq \int_{[0,\delta]} \big\|(1+t)J_t^A B^{-1}u\big\|\, d|\mu|(t) \\
&\leq \int_{[0,\delta]} (1+t)M(A)\big\|B^{-1}\big\|\|u\|\, d|\mu|(t) \leq (1+\delta)|\mu|([0,\delta])M(A)\big\|B^{-1}\big\|\|u\| < +\infty.
\end{aligned}$$

Damit ist A^{-1} beschränkt, also $0 \in \rho(A)$.

Im Fall $\infty \in \sigma(A)$ gilt $A \notin \mathfrak{L}_b(X)$. Aus Korollar 4.4.34 folgt $\mathcal{H}_A(f) \notin \mathfrak{L}_b(X)$, was wiederum äquivalent zu $\infty \in \sigma(\mathcal{H}_A(f))$ ist. Wegen $\lim_{z\searrow 0} \widetilde{f}(z) = 0$ ergibt sich

$$f(\infty) = \lim_{z\nearrow+\infty} f(z) = \lim_{z\searrow 0} f(z^{-1}) = \lim_{z\searrow 0} [f(z^{-1})^{-1}]^{-1} = \lim_{z\searrow 0} [\widetilde{f}(z)]^{-1} = \infty,$$

womit $f(\infty) \in \sigma(\mathcal{H}_A(f))$. □

Satz 4.4.37 Für $f \in \mathcal{T}_+ \setminus \mathcal{S}_0$ und $A \in \mathcal{M}$ gilt $\sigma(\mathcal{H}_A(f)) = f(\sigma(A))$.

Beweis: Aus Proposition 2.1.29 folgt mit $\phi_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)} = (z \mapsto \frac{z}{1+tz})$

$$\phi_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(\sigma(\mathcal{H}_A(f))) = \sigma(\tau_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(\mathcal{H}_A(f))) = \sigma(\mathcal{H}_A(f)_t).$$

Nach Korollar 3.4.16 gilt $f_t = \phi_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)} \circ f \in \mathcal{S}_0$ und wegen Korollar 4.4.29 und Satz 4.4.33

$$\sigma(\mathcal{H}_A(f)_t) = \sigma(\mathcal{H}_A(f_t)) = f_t(\sigma(A)) = (\phi_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)} \circ f)(\sigma(A)).$$

Nach Anwendung der Möbiustransformation $\phi^{-1}_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)} = \phi_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\-t&1\end{smallmatrix}\right)}$ auf

$$\phi_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)}(\sigma(\mathcal{H}_A(f))) = (\phi_{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\t&1\end{smallmatrix}\right)} \circ f)(\sigma(A))$$

erhält man die Behauptung. □

5 Gebrochene Potenzen

Bemerkung 5.0.1 Aus Beispiel 3.6.4 wissen wir, dass im Fall $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ die Funktionen $p^\alpha(z) = z^\alpha$ in $\mathcal{T}_0$ liegt und sogar in $\mathcal{T}_+ \cap \mathcal{T}_0$ für relles $\alpha \in (0,1]$.

Definition 5.0.2 Für $A \in \mathcal{M}$ und $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ definieren wir $A^\alpha := \mathcal{H}_A(p^\alpha)$.

Bemerkung 5.0.3 In [4] wird A hoch α für $\operatorname{Re}\alpha > 0$ in Anlehnung an Satz 4.4.22 als $(I+A)(A_D)^\alpha(I+A_D)^{-1}$ definiert. Für $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ stimmt das mit A^α überein. Die Beweise der gewünschten Eigenschaften benötigen dann allerdings Resultate der Theorie für dicht definierte lineare Operatoren (siehe [9]), welche uns hier nicht zur Verfügung stehen.

Bemerkung 5.0.4 Für $A \in \mathfrak{L}_b(X)$ und α mit $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ stimmt A^α mit dem, klassischerweise zur Definition gebrochener Potenzen herangezogenen, Balakrishnan Operator $J^\alpha = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_{[0,+\infty)} t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}A\,dt$ überein.

Proposition 5.0.5 Für $A \in \mathcal{M}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $0 < \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta < 1$ gilt

1. A^α ist abgeschlossen,
2. $(A^\alpha)^{-1} = (A^{-1})^\alpha$,
3. $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ für $0 < \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta < 1$.
4. $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ im Fall $0 < \alpha \leq 1$,
5. $\sigma(A^\alpha) \supseteq p^\alpha(\sigma(A))$. Für $0 < \alpha \leq 1$ oder $A \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$ gilt Gleichheit.

Beweis: Wegen Korollar 4.4.15 ist A^α abgeschlossen.

Weil $\widetilde{p^\alpha} = p^\alpha$, folgt $(A^\alpha)^{-1} = (\mathcal{H}_A(p^\alpha))^{-1} = (\mathcal{H}_A(\widetilde{p^\alpha}))^{-1} = \mathcal{H}_{A^{-1}}(p^\alpha) = (A^{-1})^\alpha$ aus Satz 4.4.10.

Wegen $0 < \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta < 1$ liegt $p^\alpha p^\beta = p^{\alpha+\beta}$ in $\mathcal{T}_0$, weshalb $A^\alpha A^\beta = \mathcal{H}_A(p^\alpha)\mathcal{H}_A(p^\beta) = \mathcal{H}_A(p^{\alpha+\beta}) = A^{\alpha+\beta}$ nach Satz 4.4.27 1.

Nach Korollar 4.4.29 liegt A^α in $\mathcal{M}$ und wegen Satz 4.4.30 gilt $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$.

Die Inklusion $\sigma(A^\alpha) \supseteq p^\alpha(\sigma(A))$ folgt aus Satz 4.4.36. Im Fall $0 < \alpha \leq 1$ folgt die Gleichheit aus Satz 4.4.37 und für $A \in \mathfrak{L}_b(X)$ aus Satz 4.4.33. $\square$

Definition 5.0.6 Für $A \in \mathcal{M}$ und $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ setzen wir $A^{-\alpha} := (A^\alpha)^{-1}$.

Proposition 5.0.7 Für $A \in \mathcal{M}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $0 < (\operatorname{Re}\alpha)^2, (\operatorname{Re}\beta)^2 < 1$ gilt

1. $A^\alpha A^\beta \subseteq A^{\alpha+\beta}$ für injektive lineare Operatoren A und $0 < \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta < 1$,
2. $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ im Fall $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha^2 \leq 1$,
3. $\sigma(A^\alpha) \supseteq p^\alpha(\sigma(A))$ mit Gleichheit im Fall $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha^2 \leq 1$ oder $A \in \mathcal{M} \cap \mathfrak{L}_b(X)$.

Beweis: Die Additivität für α, β mit positivem Realteil wurde in Proposition 5.0.5 behandelt. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $0 < \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta < 1$. Aus Proposition 5.0.5 folgt $A^{-\alpha}A^{-\beta} = (A^{-1})^\alpha (A^{-1})^\beta = (A^{-1})^{\alpha+\beta} = A^{-\alpha-\beta}$.
Im Fall $\operatorname{Re}\beta - \operatorname{Re}\alpha > 0$ haben wir nach Proposition 5.0.5 3.

$$A^{-\alpha}A^\beta = A^{-\alpha}A^{\alpha-\alpha+\beta} = A^{-\alpha}A^\alpha A^{\beta-\alpha} \text{ und } A^\alpha A^{-\beta} = A^\alpha A^{-\alpha+\alpha-\beta} = A^\alpha A^{-\alpha}A^{\alpha-\beta},$$

und im Fall $\operatorname{Re}\alpha - \operatorname{Re}\beta > 0$ die Gleichheiten

$$A^{-\alpha}A^\beta = A^{-\alpha+\beta-\beta}A^\beta = A^{\beta-\alpha}A^{-\beta}A^\beta \text{ und } A^\alpha A^{-\beta} = A^{\alpha-\beta+\beta}A^{-\beta} = A^{\alpha-\beta}A^\beta A^{-\beta}.$$

Auf Grund von Lemma 2.1.19 erhalten wir $(A^{-\alpha}A^\alpha)\{u\} = u + \ker(A)$ für $u \in \operatorname{dom}(A^\alpha)$ und $(A^\alpha A^{-\alpha})\{u\} = u + \operatorname{mul}(A)$ für $u \in \operatorname{ran}(A^\alpha)$.
Falls A ein injektiver linearer Operator ist, gilt $A^{-\alpha}A^\alpha, A^\alpha A^{-\alpha} \subseteq I$ und damit in beiden Fällen $A^{-\alpha}A^\beta \subseteq A^{-\alpha+\beta}$ und $A^\alpha A^{-\beta} \subseteq A^{\alpha-\beta}$.

Für α, β mit positivem Realteil gilt

$$\begin{aligned}
&(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta},\\
&(A^\alpha)^{-\beta} = ((A^\alpha)^\beta)^{-1} = (A^{\alpha\beta})^{-1} = A^{-\alpha\beta} = A^{\alpha(-\beta)},\\
&(A^{-\alpha})^\beta = ((A^{-1})^\alpha)^\beta = ((A^\alpha)^\beta)^{-1} = (A^{\alpha\beta})^{-1} = A^{-\alpha\beta} = A^{(-\alpha)\beta},\\
&(A^{-\alpha})^{-\beta} = (((A^\alpha)^{-1})^\beta)^{-1} = (((A^\alpha)^\beta)^{-1})^{-1} = (A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta} = A^{(-\alpha)(-\beta)},
\end{aligned}$$

wegen Proposition 5.0.5 2. und 4.

Aus Proposition 5.0.5 2. und Proposition 2.1.29 folgt $\sigma(A^{-\alpha}) = \sigma((A^\alpha)^{-1}) = \sigma((A^{-1})^\alpha)$ und

$$p^{-\alpha}(\sigma(A)) = (p^\alpha \circ \phi_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)})(\sigma(A)) = p^\alpha(\phi_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)}(\sigma(A))) = p^\alpha(\sigma(A^{-1})),$$

für $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. Damit folgt 3. aus Proposition 5.0.5 5. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Alaarabiou, E. H.: *Calcul fonctionnel et puissance fractionnaire d'opérateurs linéaires multivoques non négatifs.* 1991

[2] Carracedo, C. M. ; Alix, M. S.: *An Extension of the Hirsch Symbolic Calculus.* 1998

[3] Carracedo, C. M. ; Alix, M. S.: *The Theory of Fractional Powers of Operators.* 2001

[4] Carracedo, C. M. ; Alix, M. S. ; Pastor, J. : *A Functional Calculus and Fractional Powers for Multivalued Linear Operators.* 1998

[5] Hirsch, F. : *Integrales de Resolvantes et Calcul Symbolique.* 1972

[6] Kaltenbäck, M. : *Funktionalanalysis 2.* 2014

[7] Kaltenbäck, M. : *Fundament Analysis.* 2015

[8] Kaltenbäck, M. : *Aufbau Analysis.* 2021

[9] Komatsu, H. : *Fractional Powers of Operators.* 1966

[10] Kuratowski, K. : *Topologie.* 1966

[11] Rojik, C. : *Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren.* 2001

[12] Uncovska, K. : *Ein alternativer Zugang zu Bochner-Integralen.* 2020

[13] Woracek, H. : *Komplexe Analysis.* 2015

[14] Woracek, H. ; Kaltenbäck, M. ; Blümlinger, M. : *Funktionalanalysis 1.* 2014