



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN



AUTOMATION & CONTROL INSTITUTE
INSTITUT FÜR AUTOMATISIERUNGS-
& REGELUNGSTECHNIK

Nichtlineare modellprädiktive Regelung eines Wagen-Pendel-Systems

DIPLOMARBEIT

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs (Dipl.-Ing.)

unter der Leitung von

Univ.-Prof. Dr. techn. A. Kugi
Dr. techn. A. Deutschmann-Olek

eingereicht an der

Technischen Universität Wien
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

von

Daniel Götz
Matrikelnummer 0926640

Kittsee, im August 2021

Gruppe für komplexe dynamische Systeme

A-1040 Wien, Gußhausstr. 27–29, Internet: <https://www.acin.tuwien.ac.at>

Vorwort

Die vorliegende Arbeit mit dem Thema Nichtlineare modellprädiktive Regelung eines Wagen-Pendel-Systems entstand am Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Dr.techn. Andreas Deutschmann-Olek für die ausgezeichnete Betreuung meiner Arbeit und Minh Nhat Vu für die Unterstützung bei der Implementierung auf dSPACE. Darüber hinaus möchte ich mich bei Herrn Univ.-Prof. Dr.techn. Andreas Kugi und allen Institutsangehörigen für ihr hervorragendes Engagement im Bereich der Lehre und die sehr gute Gestaltung der Lehrunterlagen bedanken.

Des Weiteren möchte ich mich an dieser Stelle noch bei meinen Eltern bedanken die mir das Studium finanziert haben und mich dabei immer unterstützt haben. Ihnen widme ich daher diese Arbeit.

Kittsee, im August 2021

Abstract

The present diploma thesis deals with the development and implementation of nonlinear model predictive control algorithms for a pendulum on a moveable cart. Since this cart-pendulum system exhibits nonlinear and potentially unstable dynamics with state and input constraints, swinging up the pendulum is a particularly challenging benchmark task in control theory. As the model predictive controller will be implemented on real-time hardware, close attention is paid to numerical effort and computation time of the developed algorithms, respectively.

A central part of model predictive control is to derive an accurate mathematical model of the cart-pendulum system. The formulation of the underlying optimal control problem is another crucial task. It can be shown that under some assumptions closed-loop stability can be guaranteed by including terminal costs and a terminal constraint in the formulation of the optimal control problem. In order to numerically solve the optimal control problem a gradient-based augmented Lagrangian approach is used. As will be shown in this thesis, this approach has some weak spots for the combination of long prediction horizons with unstable operating points and therefore special emphasis is placed on how to overcome them.

To confirm the theoretical and simulative results and to verify the performance of the developed model predictive controller, the algorithm is implemented on a DSPACE-MicroLabBox and experiments on the laboratory setup are conducted for validation.

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Entwicklung und Implementierung einer nichtlinearen modellprädiktiven Regelung für ein Pendel auf einem beweglichen Schlitten. Da dieses Wagen-Pendel-System neben einer nichtlinearen Dynamik auch Zustands- und Stellgrößenbeschränkungen besitzt, gilt insbesondere das Aufschwingen des Pendels als ein herausforderndes Benchmark-Beispiel der Regelungstechnik. Um den entwickelten Regler auf einer Echtzeithardware implementieren zu können, wird besonderes Augenmerk auf den numerischen Aufwand bzw. die Berechnungszeit der entwickelten Algorithmen gelegt.

Ein Grundbestandteil der modellprädiktiven Regelung ist ein hinreichend genaues mathematisches Modell des Wagen-Pendel-Systems. Die Formulierung des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems ist ein weiterer zentraler Punkt. Es kann gezeigt werden, dass unter gewissen Voraussetzungen die Stabilität des geschlossenen Regelkreises garantiert werden kann, wenn in der Formulierung des Optimalsteuerungsproblems ein Endkostenterm und eine Endbeschränkung inkludiert werden. Für die numerische Lösung des Optimalsteuerungsproblems wird die Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode verwendet. Wie in dieser Arbeit gezeigt wird, birgt dieses Verfahren in Kombination mit langen Prädiktionshorizonten und instabilen Arbeitspunkten einige Schwachstellen in sich, deren Beseitigung besonderer Aufmerksamkeit bedarf.

Um die theoretischen Ergebnisse zu bestätigen und die Performance des entwickelten modellprädiktiven Reglers zu verifizieren, wurde dieser auf einer DSPACE-MicroLabBox implementiert und in Experimenten am Versuchsaufbau validiert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Modellierung	3
2.1	Mechanischer Aufbau	3
2.2	Bewegungsgleichungen	4
3	Modellprädiktive Regelung	9
3.1	Historische Entwicklung	9
3.2	Grundidee	10
3.3	Formulierung des Optimalsteuerungsproblems	13
3.3.1	Optimalsteuerungsproblem mit vorgeschriebenem Endzustand . . .	16
3.3.2	Optimalsteuerungsproblem mit vorgeschriebenem Endgebiet und Endkostenterm	17
	Allgemeine Herleitung der Methode	19
	Berechnung des Endkostenterms und des Endgebietes für das Wagen- Pendel-System	24
3.4	Lösung des Optimalsteuerungsproblems	30
4	Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode	32
4.1	Motivation und Grundidee	32
4.2	Erweiterte Lagrange-Formulierung des Optimalsteuerungsproblems	42
4.3	Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode	48
4.3.1	Gradienten-Projektionsmethode	49
4.3.2	Wahl der Schrittweite	51
	Quadratische Interpolation	53
	Explizite Liniensuche	55
4.3.3	Aktualisierung der Lagrange-Multiplikatoren und Strafparameter .	59
4.3.4	Konvergenzkriterium	61
4.4	GELM für das Wagen-Pendel-System	61
4.5	Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems	67
4.5.1	Volldiskretisierung	69
4.5.2	Unterlagertes lineares Zustandsregelgesetz	73
4.6	Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems	75
5	Modellprädiktive Regelung des Wagen-Pendel-Systems	82
5.1	Beobachterkonzept	82
5.1.1	Einfaches realisierbares Differenziationsfilter	82
5.1.2	Sliding-mode Differenziationsfilter	83
5.1.3	Extended Kalman-Filter	85

5.1.4	Vergleich der Beobachterkonzepte	85
5.2	Trajektorienverschiebung	87
5.3	Sicherheitsfunktion der Schrittweitensteuerung	87
5.4	Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems	89
5.5	Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems	90
6	Zusammenfassung	101
A	Numerik	103
A.1	Zeitdiskretisierung von zeitkontinuierlichen Größen	103
A.2	Auswertung des Kostenfunctionals	104
A.3	Vorwärts-Integration der Systemdynamik	106
A.4	Rückwärts-Integration der adjungierten Dynamik	107
B	Volldiskretisierung	110
C	Jacobimatrizen des um den linearen Zustandsregler erweiterten Entwurfsmodells	113

Abbildungsverzeichnis

2.1	Wagen-Pendel-System	3
3.1	Grundprinzip der modellprädiktiven Regelung	11
3.2	Geometrische Interpretation des Endgebietes	26
4.1	Grundprinzip der quadratischen Interpolation, optimale Schrittweite $\alpha^* = \bar{\alpha}^*$	54
4.2	Grundprinzip der quadratischen Interpolation, optimale Schrittweite $\alpha^* = \alpha_1$	55
4.3	Grundidee der expliziten Liniensuche	56
4.4	Aufschwingvorgang des Wagen-Pendel-Systems	70
4.5	Aufschwingvorgang bei einer 2°-Auslenkung aus der oberen Ruhelage . . .	71
4.6	Aufschwingvorgang bei einer 2°-Auslenkung aus der oberen Ruhelage mit verkürzten Prädiktionshorizonten	72
4.7	Aufschwingvorgang bei einer 2°-Auslenkung aus der oberen Ruhelage mittels Volldiskretisierung	74
4.8	Aufschwingvorgang des Wagen-Pendel-Systems mit unterlagertem Zu- standsregler	76
4.9	Aufschwingvorgang mit unterlagertem Zustandsregler bei einer 2°-Auslenkung aus der oberen Ruhelage	77
4.10	Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems	79
4.11	Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems bei einer 2°-Auslenkung aus der zu erreichenden unteren Ruhelage	80
4.12	Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems bei einer 2°-Auslenkung aus der zu erreichenden unteren Ruhelage und verlängertem Prädiktionshorizont	81
5.1	Blockschaltbild des Beobachterkonzepts basierend auf Differenzationsfilter	84
5.2	Blockschaltbild des Extended Kalman-Filters	85
5.3	Vergleich der Beobachtungsfehler der jeweiligen Beobachterkonzepte . . .	86
5.4	Prinzip der Trajektorienverschiebung	88
5.5	Blockschaltbild zum Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems	89
5.6	Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems 1/2 (Simulation)	92
5.7	Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems 2/2 (Simulation)	93
5.8	Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems 1/2 (Messung)	94
5.9	Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems 2/2 (Messung)	95
5.10	Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems 1/2 (Simulation)	97
5.11	Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems 2/2 (Simulation)	98
5.12	Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems 1/2 (Messung)	99
5.13	Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems 2/2 (Messung)	100

A.1	Äquidistante Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals	103
A.2	Veranschaulichung der Trapezregel	104
A.3	Veranschaulichung der Simpsonregel	105
A.4	Zusammensetzung des Gesamtfehlers eines Verfahrens mit $p = 1$	108
B.1	Veranschaulichung der Volldiskretisierung	111

Tabellenverzeichnis

2.1	Parameter des Wagen-Pendel-Systems	4
2.2	Auflösung des Winkels φ_1 bzw. der Schlittenposition s	4
3.1	Anzahl der MPC-Anwendungen und Verteilung auf Anwendungssektoren	10
3.2	Vorgehensweise zur Bestimmung des Endkostenterms und des Endgebietes	23
3.3	Vorgehensweise zur Bestimmung von α_T	28
4.1	Lage des optimalen Punktes $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ des alternativen Optimierungsproblems (4.4), zugehörige Verletzung der Beschränkung $g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$ der ursprünglichen Optimierungsaufgabe (4.3), Konditionszahl κ_k der Hessematrix (4.7), der Term $c_k g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$ sowie die Strafparameter c_k in Abhängigkeit des Iterationsindex k	34
4.2	Lage des optimalen Punktes $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ des alternativen Optimierungsproblems (4.16), zugehörige Verletzung der Beschränkung $g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$ der ursprünglichen Optimierungsaufgabe (4.3), Konditionszahl κ_k der Hessematrix (4.19), die Strafparameter c_k sowie die Schätzung des Lagrange-Multiplikators $\bar{\lambda}^k$ in Abhängigkeit des Iterationsindex k	37
4.3	Iterative Annäherung der erweiterten Lagrange-Methode an den Sattelpunkt (4.34) der Optimierungsaufgabe (4.3)	41
4.4	Gemeinsame Parameter des Optimalsteuerungsproblems (4.117) bzw. der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode	67
4.5	Zusätzlich zu Tabelle 4.4 benötigte Parameter des Optimalsteuerungsproblems (4.117) bzw. der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode zum Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems	68
4.6	Parameter des Optimalsteuerungsproblems (4.117) bzw. der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode für das seitliche Versetzen des Wagen-Pendel-Systems	75
5.1	Parameter der Beobachterkonzepte	87
5.2	Parameter des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems (3.48) sowie jene der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode zum Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems	91
5.3	Parameter des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems (3.48) sowie jene der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode für das seitliche Versetzen des Wagen-Pendel-Systems	96

1 Einleitung

Das Wagen-Pendel-System, bestehend aus einem horizontal verfahrbaren Schlitten und einem drehbar daran befestigten Pendelstück, ist ein allseits bekanntes Benchmark-Beispiel in der Regelungstechnik. Typische Regelungsziele sind die Stabilisierung der oberen/unteren Ruhelage, das seitliche Versetzen sowie das Auf- und Abschwingen des Pendels. In der vorliegenden Arbeit sollen diese Aufgaben mithilfe einer nichtlinearen modellprädiktiven Regelung bewerkstelligt werden.

Die modellprädiktive Regelung (im Englischen als *model predictive control (MPC)* oder *receding horizon control (RHC)* bezeichnet) ist eine modellbasierte Regelungsstrategie. Daher ist ein möglichst exaktes mathematisches Modell des zu regelnden Systems Grundvoraussetzung für die Funktionsfähigkeit einer MPC. Eine modellprädiktive Regelung arbeitet nach folgendem Grundprinzip. Zu Beginn jedes Abtastschrittes wird auf Basis des aktuell gemessenen bzw. beobachteten Zustands des Systems eine optimale Eingangstrajektorie durch Lösen eines unterlagerten Optimalsteuerungsproblems (im Englischen als *optimal control problem (OCP)* bezeichnet) mit finitem Zeithorizont berechnet. Anschließend wird lediglich der erste Teil der vorherberechneten Eingangstrajektorie als Stellgröße auf das System aufgeschaltet bis im darauf folgenden Abtastschritt wieder der Systemzustand erfasst wird und sich die Vorgehensweise wiederholt. Es erfolgt also eine sukzessive Optimierung der Stellgröße um das vorgegebene Regelungsziel bestmöglich zu erreichen. Einer der wesentlichen Vorzüge von modellprädiktiven Regelungen ist ihre Anwendbarkeit für nichtlineare Systeme die Eingangs- und Zustandsbeschränkungen unterliegen. Zusätzlich ermöglicht eine MPC die korrekte Reaktion auf messbare externe Störungen sowie die Änderung von Regelungszielen während der Laufzeit. Die größte Herausforderung liegt in der *echtzeitfähigen Lösung* des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems, weshalb je nach Systemdynamik effiziente Algorithmen und Programmierung sowie der Einsatz von leistungsfähigen Rechnern notwendig sind. Aus diesem Grund war das Einsatzgebiet von modellprädiktiven Reglern in der Vergangenheit auf Prozesse mit langsamen Dynamiken beschränkt. Erst durch die Entwicklung von immer leistungsstärkeren Rechnern erweiterte sich der Einsatzbereich dieser Regelungsmethode auch auf Systeme mit entsprechend schnellen Dynamiken, wie beispielsweise das Wagen-Pendel-System.

Diese Arbeit gliedert sich in sechs Kapitel. Nach der Einleitung wird in Kapitel 2 der mechanische Aufbau des Wagen-Pendel-Systems beschrieben und anschließend die dynamischen Bewegungsgleichungen hergeleitet. Weiters werden in diesem Kapitel auch die um die Ruhelagen linearisierten Systeme berechnet. In Kapitel 3 wird auf Grundlegendes zu modellprädiktiven Regelungen eingegangen sowie zwei Möglichkeiten zur Formulierung des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems vorgestellt. Die verschiedenen Methoden zur Lösung der Optimalsteuerungsprobleme beenden dieses Kapitel. Kapitel 4

befasst sich mit einer detaillierten Beschreibung der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode. Insbesondere soll auf die Schwierigkeiten, die mit diesem Verfahren einhergehen, eingegangen und deren Lösung im Detail beschrieben werden. In Kapitel 5 wird auf spezielle Implementierungsdetails der modellprädiktiven Regelung eingegangen und die Simulationsergebnisse sowohl aus MATLAB/SIMULINK als auch anhand des realen Versuchsaufbaus gezeigt. Im letzten Kapitel erfolgt eine abschließende Zusammenfassung der Arbeit.

2 Mathematische Modellierung

Nach einer kurzen Beschreibung des mechanischen Aufbaus des Wagen-Pendel-Systems befasst sich dieses Kapitel mit der Herleitung der dynamischen Bewegungsgleichungen. Die hier gewählte Formulierung beruht auf den sogenannten *Euler-Lagrange Gleichungen* [1], welche eine systematische Berechnung der Bewegungsgleichungen auf Basis der kinetischen und potenziellen Energie des Starrkörpersystems erlauben. Da für spätere Betrachtungen die um die Ruhelagen des Wagen-Pendel-Systems linearisierte Dynamik benötigt wird, werden diese zum Abschluss des Kapitels betrachtet.

2.1 Mechanischer Aufbau

Der prinzipielle mechanische Aufbau des Wagen-Pendel-Systems ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

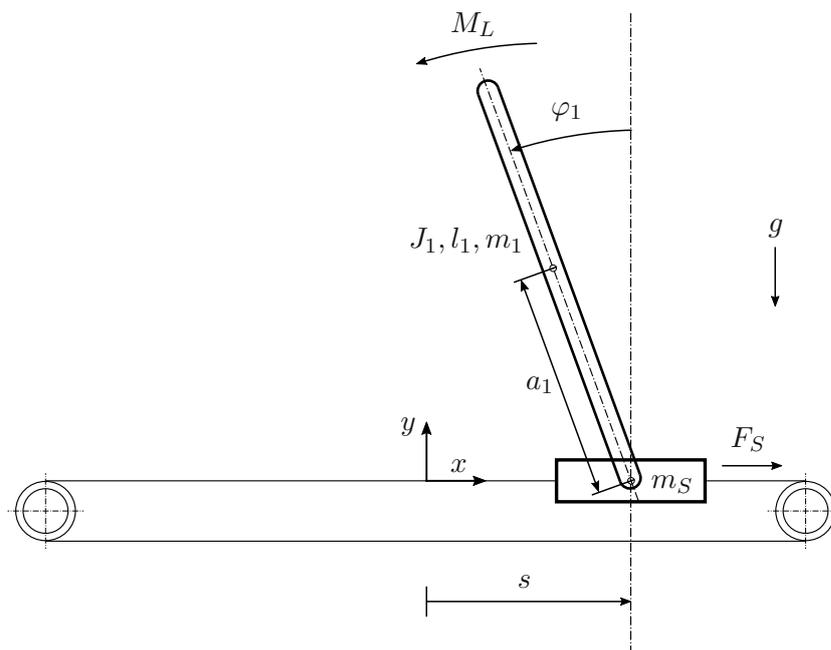


Abbildung 2.1: Wagen-Pendel-System

Es besteht aus einem horizontal verfahrbaren Schlitten der Masse m_S und einem drehbar daran befestigten Pendelstück. Das Pendelstück wird dabei als Starrkörper der Länge l_1 , Masse m_1 , Abstand vom Drehpunkt zum Schwerpunkt a_1 und Trägheitsmoment J_1

bezüglich des Schwerpunktes betrachtet. Die im Drehpunkt auftretenden drehwinkelgeschwindigkeitsproportionalen Reibungsverluste werden durch den Reibkoeffizienten d_1 berücksichtigt. Die Werte der Parameter wurden aus [2] und [3] übernommen und sind in Tabelle 2.1 aufgelistet. Als Aktor des Versuchsaufbaus dient ein Synchronmotor welcher über einen Riemen den Schlitten antreibt und so die Umfangskraft F_S als Stellgröße auf den Schlitten ausübt. Als Störgröße sei ein externes Lastmoment M_L , welches direkt auf das Pendel wirkt, angenommen. Die Auslenkung φ_1 des Pendels wird mithilfe eines im Drehgelenk befindlichen Inkrementaldrehgebers gemessen. Ein weiterer Inkrementaldrehgeber am Synchronmotor ermöglicht die Messung der Schlittenposition s . Die Auflösungen der Drehgeber sind in Tabelle 2.2 angegeben. Für weitere Details des Mess- und Regelungssystems des Versuchsaufbaus sowie die integrierten Sicherheitsfunktionen sei auf [4] verwiesen.

Parameter	Wert
Länge des Pendelstücks l_1	0.991 m
Masse des Pendelstücks m_1	0.3553 kg
Abstand vom Drehpunkt zum Schwerpunkt a_1	0.42 m
Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes J_1	0.0361 kg m ²
Reibkoeffizient d_1	0.005 N m s
Masse des Schlittens m_S	0.2 kg

Tabelle 2.1: Parameter des Wagen-Pendel-Systems

Beschreibung	Wert
Winkelauflösung	$7.670 \cdot 10^{-4}$ rad
Wegauflösung	$6.836 \cdot 10^{-5}$ m

Tabelle 2.2: Auflösung des Winkels φ_1 bzw. der Schlittenposition s

2.2 Bewegungsgleichungen

Eine Grundvoraussetzung für die spätere Funktionsfähigkeit eines modellprädiktiven Reglers ist eine möglichst exakte mathematische Beschreibung des Verhaltens des zu regelnden Systems. Da es sich beim Wagen-Pendel-System um ein Starrkörpersystem handelt, eignen sich zur Herleitung der Bewegungsgleichungen die sogenannten *Euler-Lagrange Gleichungen*. Diese erlauben eine systematische Beschreibung des Systemverhaltens auf Basis der kinetischen und potenziellen Energie des Systems. Für weitere Details der Herleitung sei auf [1] verwiesen.

Die Euler-Lagrange Gleichungen in vollständiger Form lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = \tau_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Es ergeben sich somit n gewöhnliche Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, die die Bewegung des Systems beschreiben. Die *Lagrange-Funktion* $L = T - V$, welche sich aus der Differenz von kinetischer Energie T und potenzieller Energie V zusammensetzt, ist dabei abhängig von den *generalisierten Koordinaten* q_j und deren Zeitableitungen den *generalisierten Geschwindigkeiten* \dot{q}_j . Mithilfe der sogenannten *Rayleighschen Dissipationsfunktion* R können die den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j proportionalen Reibungskräfte ausgedrückt werden. τ_j beschreibt sämtliche externe generalisierte Kräfte.

Das Wagen-Pendel-System besitzt unter Berücksichtigung von holonomen Zwangsbedingungen in der Ebene $n = 2$ Freiheitsgrade in Form der Schlittenposition s und des Drehwinkels φ_1 , siehe Abbildung 2.1. Da es mit der Umfangskraft F_S lediglich einen Aktor gibt, spricht man in diesem Zusammenhang auch von einem sogenannten *unteraktuierten* mechanischen System mit *Unteraktuierungsgrad* eins. Zur übersichtlicheren Darstellung und besseren Lesbarkeit werden hier und im Folgenden die Funktionsargumente nur an jenen Stellen explizit angegeben, an denen sie dem Verständnis dienen. Damit ergeben sich die generalisierten Koordinaten zu

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & s \end{bmatrix}^T. \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet φ_1 den Winkel zwischen der vertikalen Achse und dem Pendelstück, wobei dieser gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird. Die Schlittenposition s gibt die horizontale Verschiebung des Schlittens gegenüber dem Ursprung des (x, y) -Koordinatensystems an. Die generalisierten Geschwindigkeiten folgen aus der zeitlichen Ableitung der generalisierten Koordinaten (2.2) zu

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \omega_1 & v \end{bmatrix}^T. \quad (2.3)$$

Für die nachfolgende Berechnung der Energien werden in einem ersten Schritt die Ortsvektoren \mathbf{p}_S und \mathbf{p}_P vom Ursprung des (x, y) -Koordinatensystems zum Schwerpunkt des Schlittens sowie zum Schwerpunkt des Pendelstücks berechnet. Diese ergeben sich zu

$$\mathbf{p}_S = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_P = \begin{bmatrix} s - a_1 \sin \varphi_1 \\ a_1 \cos \varphi_1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Die entsprechenden Geschwindigkeiten \mathbf{v}_S und \mathbf{v}_P der Schwerpunkte folgen durch zeitliche Differentiation von (2.4) zu

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_P = \begin{bmatrix} v - a_1 \omega_1 \cos \varphi_1 \\ -a_1 \omega_1 \sin \varphi_1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Die kinetische Energie des Schlittens besitzt lediglich einen translatorischen Anteil

$$T_S = \frac{1}{2} m_S \mathbf{v}_S^T \mathbf{v}_S, \quad (2.6)$$

während das Pendelstück sowohl einen translatorischen als auch einen rotatorischen Anteil besitzt

$$T_P = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_P^T \mathbf{v}_P + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2. \quad (2.7)$$

Damit folgt für die kinetische Energie des Systems

$$T = T_S + T_P = \frac{1}{2} m_S \mathbf{v}_S^T \mathbf{v}_S + \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_P^T \mathbf{v}_P + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 . \quad (2.8)$$

Da sich der Schlitten nur entlang der x -Achse bewegt, beinhaltet die potenzielle Energie des Systems zufolge des Schwerfeldes in negativer y -Richtung lediglich einen Anteil für das Pendelstück und ergibt sich zu

$$V = m_1 a_1 g (\cos \varphi_1 + 1) , \quad (2.9)$$

wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Die im Drehgelenk auftretende drehwinkelgeschwindigkeitsproportionale Reibung wird in der Rayleighschen Dissipationsfunktion in der Form

$$R = \frac{1}{2} d_1 \omega_1^2 \quad (2.10)$$

berücksichtigt, während die Reibung des Schlittens vernachlässigt wird. Als externe generalisierte Kräfte werden die Umfangskraft F_S (Stellgröße) und das Lastmoment M_L (Störgröße) betrachtet

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} M_L & F_S \end{bmatrix}^T . \quad (2.11)$$

Setzt man nun die Gleichungen (2.8)-(2.11) in die Euler-Lagrange Gleichungen (2.1) ein, so erhält man die Bewegungsgleichungen des Wagen-Pendel-Systems in der Form

$$\left(J_1 + m_1 a_1^2 \right) \ddot{\varphi}_1 - m_1 a_1 g \sin \varphi_1 - m_1 a_1 \ddot{s} \cos \varphi_1 + d_1 \dot{\varphi}_1 = M_L , \quad (2.12a)$$

$$a_1 m_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 - m_1 a_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + (m_S + m_1) \ddot{s} = F_S . \quad (2.12b)$$

Der verwendete Synchronmotor zum Verfahren des Schlittens wird von einem unterlagerten Drehzahlregler geregelt. Dies ist besonders vorteilhaft aufgrund der vorhandenen starken Haftreibung im Riemenantrieb. Deshalb ist es möglich, im überlagerten Regelkreis direkt die Schlittengeschwindigkeit \dot{s} vorzugeben. Die Schlittendynamik und die Rückwirkung des Pendelstücks auf den Schlitten können daher für die Modellierung vernachlässigt und die Schlittenbeschleunigung \ddot{s} als neue Stellgröße u gewählt werden. Dadurch vereinfachen sich die Differenzialgleichungen (2.12) zu

$$\left(J_1 + m_1 a_1^2 \right) \ddot{\varphi}_1 - m_1 a_1 g \sin \varphi_1 - m_1 a_1 u \cos \varphi_1 + d_1 \dot{\varphi}_1 = M_L , \quad (2.13a)$$

$$\ddot{s} = u . \quad (2.13b)$$

Um das implizite Differenzialgleichungssystem zweiter Ordnung auf ein System expliziter Differenzialgleichungen erster Ordnung der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ zu überführen, wird der Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \omega_1 & s & v \end{bmatrix}^T \quad (2.14)$$

eingeführt. Das nichtlineare Modell des Wagen-Pendel-Systems mit vernachlässigter Schlittendynamik in Zustandsraumdarstellung ergibt sich damit zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{s} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, M_L) = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \frac{m_1 a_1 g \sin \varphi_1 + m_1 a_1 u \cos \varphi_1 - d_1 \omega_1 + M_L}{J_1 + m_1 a_1^2} \\ v \\ u \end{bmatrix} . \quad (2.15)$$

Zur Bestimmung der Ruhelagen des Systems (2.15) werden die Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R, M_{L,R}) = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

ermittelt. Diese ergeben sich zu

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} \varphi_{1,R} \\ \omega_{1,R} \\ s_R \\ v_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,R} \\ 0 \\ s_R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_R = 0, \quad M_{L,R} = -m_1 a_1 g \sin \varphi_{1,R}, \quad (2.17)$$

womit das Wagen-Pendel-System (2.15) unendlich viele Ruhelagen aufweist. Durch Vorgabe von $M_{L,R} = 0$ und einer Schlittenposition s_R sowie Einschränkung des Winkels $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ folgen zwei elementare Ruhelagen zu

$$\text{obere Ruhelage: } \mathbf{x}_{R,o} = [0 \quad 0 \quad s_R \quad 0]^T, \quad u_{R,o} = 0, \quad M_{L,R,o} = 0, \quad (2.18a)$$

$$\text{untere Ruhelage: } \mathbf{x}_{R,u} = [\pi \quad 0 \quad s_R \quad 0]^T, \quad u_{R,u} = 0, \quad M_{L,R,u} = 0. \quad (2.18b)$$

In den nachfolgenden Kapitel werden die um die Ruhelagen (2.18) linearisierten Systeme benötigt. Betrachtet man nur kleine Auslenkungen des nichtlinearen Systems (2.15) aus den Ruhelagen (2.18), also

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R + \Delta \mathbf{x}(t), \quad (2.19a)$$

$$u(t) = u_R + \Delta u(t), \quad (2.19b)$$

$$M_L(t) = M_{L,R} + \Delta M_L(t), \quad (2.19c)$$

so lassen sich mit

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, M_L) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R, M_L=M_{L,R}}, \quad (2.20a)$$

$$\mathbf{b} = \left. \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, M_L) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R, M_L=M_{L,R}}, \quad (2.20b)$$

$$\mathbf{b}_d = \left. \frac{\partial}{\partial M_L} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, M_L) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R, M_L=M_{L,R}}, \quad (2.20c)$$

die linearisierten Systeme in der Form

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \Delta u + \mathbf{b}_d \Delta M_L \quad (2.21)$$

anschreiben, wobei der Anteil $\mathbf{b}_d \Delta M_L$ in (2.21) zufolge der StörgöÙe für die entsprechenden Betrachtungen keine Rolle spielt und somit ab hier vernachlässigt wird. Mit (2.20) und (2.15) ergeben sich die System- und Eingangsmatrix des um die obere Ruhelage (2.18a) linearisierten Systems zu

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m_1 a_1 g}{J_1 + m_1 a_1^2} & -\frac{d_1}{J_1 + m_1 a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_1 a_1}{J_1 + m_1 a_1^2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Analog dazu folgt für die untere Ruhelage (2.18b)

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{m_1 a_1 g}{J_1 + m_1 a_1^2} & -\frac{d_1}{J_1 + m_1 a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{m_1 a_1}{J_1 + m_1 a_1^2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Die Berechnung der Eigenwerte der Dynamikmatrix \mathbf{A}_o des um die obere Ruhelage (2.18a) linearisierten Systems (2.22) mit den Parametern aus Tabelle 2.1 liefert

$$\lambda_1 = 3.8245, \quad \lambda_2 = -3.8752, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0. \quad (2.24)$$

Somit handelt es sich bei der oberen Ruhelage (2.18a) erwartungsgemäß um eine (im Sinne von Lyapunov) instabile Ruhelage des Wagen-Pendel-Systems. Die Eigenwerte der Dynamikmatrix \mathbf{A}_u des um die untere Ruhelage (2.18b) linearisierten Systems (2.23) mit den Parametern aus Tabelle 2.1 lauten

$$\lambda_1 = -0.0253 + \text{I}3.8497, \quad \lambda_2 = -0.0253 - \text{I}3.8497, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 0, \quad (2.25)$$

womit es sich streng mathematisch genommen auch bei der unteren Ruhelage (2.18b) um eine (im Sinne von Lyapunov) instabile Ruhelage des Wagen-Pendel-Systems handelt. Gilt jedoch $u(t) = 0$ und $\omega_1(t_0) = 0, s(t_0) = s_R, v(t_0) = 0$ so folgt $v(t) = 0, s(t) = s_R$ und es gilt $\forall \varphi_1(t_0) \in (0, 2\pi)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{R,u} = [\pi \quad 0 \quad s_R \quad 0]^T, \quad (2.26)$$

womit man in einem anwendungsbezogenen Rahmen bei der unteren Ruhelage (2.18b) durchaus von einer asymptotisch stabilen Ruhelage sprechen kann. Die Aussage (2.26) lässt sich mathematisch sehr einfach mithilfe der *Lyapunov-Theorie* [5] beweisen. Die Gesamtenergie E des Wagen-Pendel-Systems setzt sich in diesem Fall lediglich aus der kinetischen Energie (2.7) und der potenziellen Energie (2.9) des Pendelstücks in der Form

$$E = E(\varphi_1, \omega_1) = T_P|_{v=0} + V = \frac{1}{2} \left(J_1 + m_1 a_1^2 \right) \omega_1^2 + m_1 a_1 g (1 + \cos \varphi_1) \quad (2.27)$$

zusammen. Für die im System gespeicherte Energie $E(\varphi_1, \omega_1)$ gilt somit $\forall t, E(t) \geq 0$, wobei *nur* für die untere Ruhelage (2.18b) $E = 0$ gilt. Somit stellt die Gesamtenergie (2.27) einen geeigneten Kandidaten für eine Lyapunovfunktion dar. Die zeitliche Ableitung der Energie folgt mit (2.15) nach einigen Rechenschritten zu

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_1(t), \omega_1(t)) = \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial E}{\partial \omega_1} \dot{\omega}_1 = -d_1 \omega_1^2. \quad (2.28)$$

Die im System gespeicherte Energie nimmt also aufgrund der Energiedissipation im Drehgelenk immer ab, außer für $\omega_1 = 0$ bleibt sie gleich, was den Umkehrpunkten des Pendelstücks entspricht. Setzt man $\omega_1 = 0$ in (2.15) ein, dann erkennt man, dass das Pendel nicht in den Umkehrpunkten verharrt (mit Ausnahme des Punktes $\varphi_1 = \pi, \omega_1 = 0$) und mit dem *Invarianzprinzip von Krassovskii-LaSalle* die asymptotische Stabilität der unteren Ruhelage (2.18b) folgt.

3 Modellprädiktive Regelung

In diesem Kapitel wird zunächst auf die historische Entwicklung von modellprädiktiven Regelungen und ihre Einsatzgebiete eingegangen bevor die Grundidee dieser Regelungsstrategie mitsamt ihrer Vor- und Nachteile behandelt wird. Anschließend werden zwei Möglichkeiten zur Formulierung des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems vorgestellt. Die unterschiedlichen Methoden zur Lösung von Optimalsteuerungsaufgaben bilden den Abschluss dieses Kapitels.

3.1 Historische Entwicklung

Die ersten modellprädiktiven Regelungen im großindustriellen Maßstab wurden Mitte der 70er Jahre im Raffineriesektor und in der Petrochemie¹, wo ausreichend Zeit und genügend Rechenleistung vorhanden ist, eingesetzt. In den darauffolgenden Jahren wurden die Entwicklungen im Feld der modellprädiktiven Regelungen vor allem durch in der Industrie tätige Regelungstechniker vorangetrieben, ehe diese auch im akademischen Bereich Einzug hielten. Den Verlauf der Gesamtanzahl der in der Prozessindustrie eingesetzten modellprädiktiven Regelungen in den Jahren 1995 bis 2005 sowie ihre Verteilung auf Anwendungsgebiete zeigt Tabelle 3.1, wobei die Zahlen aus [6] entnommen wurden. Daraus ist zu erkennen, dass sich die Gesamtanzahl der Anwendungen etwa alle fünf Jahre verdoppelt und auch zunehmend nicht-traditionelle Anwendungsgebiete erschlossen werden. So ist z. B. der Anteil der Anwendungen im Raffinerie- und Petrochemiesektor von etwa 80% im Jahr 1995 auf etwa 59% im Jahr 2005 gesunken, wohingegen die absolute Anzahl an eingesetzten modellprädiktiven Regelungen natürlich auch in diesem Bereich stark angestiegen ist. Keine andere fortgeschrittene Regelungsstrategie hat in der Prozessindustrie eine solche Erfolgsgeschichte aufzuweisen [7]. Im Raffinerie- und Petrochemiesektor ist der Einsatz von modellprädiktiven Reglern heutzutage weltweit de facto Standard und führt zu monetären Einsparungen, die je nach Größe der Anlage mehrere Millionen Euro pro Jahr betragen können [8]. Da bei diesem Regelungsverfahren wiederholt eine mitunter sehr rechenintensive Online-Optimierung ausgeführt wird, war der Einsatzbereich lange Zeit auf relativ träge/langsame Prozesse, so wie jene der Prozessindustrie mit typischen Reglerab-tastzeiten im Bereich von einigen Sekunden bis Minuten, beschränkt. Mit der Entwicklung von immer leistungsstärkeren Rechnern und neuen effizienteren Optimierungsalgorithmen fällt diese Beschränkung allmählich, sodass modellprädiktive Regelungen heutzutage auch für hochdynamische Prozesse mit Reglerab-tastzeiten im Sub-Millisekundenbereich eingesetzt werden. In [9] wird bspw. von einer MPC zur Dämpfung der ersten fünf Moden eines Biegebalkens berichtet, welche mit einer Reglerfrequenz von bis zu 25kHz arbeitet. In [10] wird eine modellprädiktive Regelung, welche mit einer Reglerfrequenz von 25kHz arbeitet,

¹Herstellung von chemischen Produkten aus Erdöl und Erdgas.

zur Regelung der x-y-Bühne eines Atomkraftmikroskops eingesetzt. In [11] verwenden die Autoren eine MPC mit einer Reglerfrequenz von 10kHz zur Regelung eines Piezoaktuators.

	1995	1999	2005
Raffinerien	67.2%	55.7%	49.2%
Petrochemie	13.0%	15.3%	9.9%
Chemie	8.5%	4.6%	15.6%
Papier und Zellstoff	2.0%	1.9%	3.8%
Polymer	k.A.	1.1%	6.3%
Luft und Gas Utilities	k.A.	1.6%	5.9%
Nahrungsgüter	0.5%	1.5%	3.5%
Bergbau und Metallurgie	0.7%	1.0%	1.5%
Kraftwerke	k.A.	k.A.	0.2%
Industrieöfen	1.9%	1.1%	k.A.
Zement	k.A.	k.A.	1.3%
Andere	4.2%	16.1%	2.7%
Gesamtanzahl	2233	4635	9456

Tabelle 3.1: Anzahl der MPC-Anwendungen und Verteilung auf Anwendungssektoren

3.2 Grundidee

Industrielle Prozesse stehen in der heutigen Zeit unter enormen Wettbewerbsdruck. Die Anforderungen an die Qualität der erzeugten Produkte steigen bei gleichzeitigem Verlangen nach möglichst minimalem Energieverbrauch bei der Herstellung und Maximierung des Gewinns. Darüber hinaus weisen viele Prozesse einen ausgeprägten Mehrgrößencharakter auf und sind stets bestimmten Beschränkungen unterworfen und Störungen ausgesetzt. Um diesen Herausforderungen der modernen Industrie gerecht zu werden, wurde das Konzept der modellprädiktiven Regelung entwickelt. Dabei handelt es sich um ein modellbasiertes Regelungsverfahren, welches sich dadurch auszeichnet, dass ein mathematisches Modell für die Beschreibung des dynamischen Verhaltens der zu regelnden Strecke nicht nur in der Reglersynthese, sondern explizit auch im laufenden Betrieb der Regelung benutzt wird. Ein möglichst exaktes Modell bildet somit das Rückgrat einer jeden MPC-Anwendung und die Regelgüte ist entscheidend von der Modellgüte abhängig. Die prinzipielle Funktionsweise einer modellprädiktiven Regelung sei anhand von Abbildung 3.1 für zwei aufeinander folgende Abtastschritte näher erläutert. Dabei wurde der Einfachheit halber von einem Eingrößensystem (SISO-System) erster Ordnung mit einem skalaren Eingang $u(t)$ und einem skalaren Zustand $x(t)$ ausgegangen. Ziel der Regelung ist es mithilfe der Stellgröße $u(t)$ den Zustand $x(t)$ auf einen vorgegebenen, konstanten Referenzwert x^* zu führen. Das MPC-Gesetz für die MPC-Iteration k wird zum Zeitpunkt t_k ausgeführt indem ein unterlagertes Optimalsteuerungsproblem mit dem aktuell gemessenen bzw. beobachteten Zustand x_k als Anfangswert gelöst wird. Die Formulierung des Optimalsteuerungspro-

blems erfolgt für einen Zeithorizont der zum aktuellen Zeitpunkt t_k beginnt und zum Zeitpunkt $t_k + T$ endet. Dieser Zeithorizont T wird auch als *Prädiktionshorizont* $[t_k, t_k + T]$ (Englisch: *prediction horizon*) bezeichnet, wobei $T > 0$ gilt. Um die Formulierung des Optimalsteuerungsproblems einfach zu halten, wird für den Prädiktionshorizont eine lokale Zeitachse $\tau \in [0, T]$ verwendet, wobei am aktuellen Zeitpunkt t_k gilt $\tau = 0$. Durch die Berücksichtigung des mathematischen Modells der Regelstrecke in der Formulierung des Optimalsteuerungsproblems ist der Regler in der Lage ein Stück weit „in die Zukunft zu schauen“, d. h. eine Vorhersage (Prädiktion) für das zukünftige Verhalten des Systems zu treffen. Er kennt somit die Auswirkungen der Stellgröße und kann auf anbahnende Verletzungen der Beschränkungen von Zustands- und/oder Ausgangsgrößen reagieren. Auch Beschränkungen der Eingangsgrößen werden in der Formulierung des OCP berücksichtigt, bspw. in Form von sogenannten *Box-Beschränkungen* (Englisch: *box-constraints*) $u(t) \in [u_{\min}, u_{\max}]$. Zwei verschiedene Möglichkeiten zur Formulierung dieses Optimalsteuerungsproblems werden im nächsten Abschnitt vorgestellt. Die Lösung des OCP in der MPC-Iteration k besteht aus einer für den Prädiktionshorizont $[t_k, t_k + T]$ optimalen Eingangstrajektorie $u_k^*(t)$ und einer zugehörigen prädizierten Zustandstrajektorie $x_k^*(t)$. Die soeben geplante Stellgröße $u_k^*(t)$ wird nun nicht im gesamten Prädiktionshorizont $[t_k, t_k + T]$ auf das zu regelnde System aufgeschaltet sondern nur im ersten Abschnitt $[t_k, t_k + T_c]$ desselben. Dieser Zeithorizont T_c mit $0 < T_c \leq T$ wird als *Steuerungshorizont* (Englisch: *control horizon*) bezeichnet, da auf diesem Intervall der Regelkreis *open* ist.

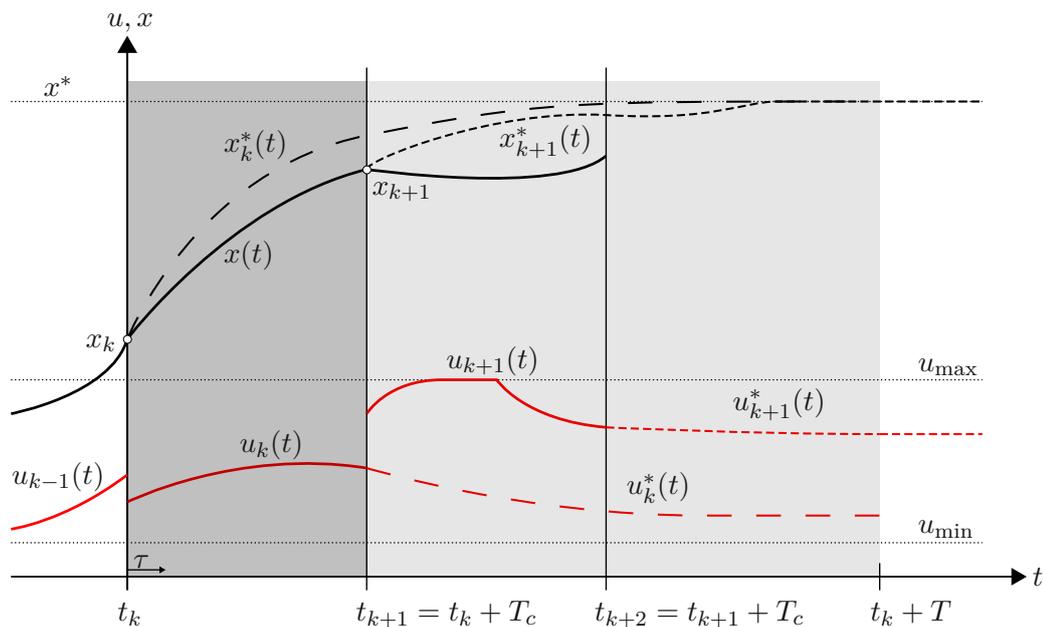


Abbildung 3.1: Grundprinzip der modellprädiktiven Regelung

In Abbildung 3.1 unterscheidet sich die tatsächliche Zustandstrajektorie $x(t)$ des Systems im Intervall $[t_k, t_k + T_c]$ von der zuletzt prädizierten Zustandstrajektorie $x_k^*(t)$. Diese Abweichungen resultieren aus Modellfehlern und/oder unbekanntem Störungen die auf das System einwirken. Im Intervall $[t_k + T_c, t_k + T]$ findet man solche Abweichungen dagegen

immer, also auch für das ungestörte, nominelle System. Dies ist damit zu begründen, dass in zwei aufeinanderfolgenden Abtastschritten t_k und t_{k+1} jeweils zwei verschiedene Optimalsteuerungsprobleme mit unterschiedlichen Horizonten gelöst werden und somit das *Optimalitätsprinzip nach Bellman* [12] keine Anwendung findet. Am Ende des Steuerungshorizonts $t_{k+1} = t_k + T_c$ wird das MPC-Gesetz für die MPC-Iteration $(k + 1)$ mit nun verschobenen Horizonten und dem neuen gemessenen bzw. beobachteten Anfangswert x_{k+1} erneut ausgeführt. Dieses Prinzip wird als „Prinzip des gleitenden Horizonts“ bezeichnet und ermöglicht einerseits die schnelle Reaktion auf externe (nicht messbare) Störungen und berücksichtigt andererseits die stets vorhandene Nichtübereinstimmung des Prozessmodells mit dem tatsächlichen realen Prozess. Der Regelkreis ist somit größtenteils offen und wird nur zu diskreten Zeitpunkten $t_k, k = 1, 2, \dots$ geschlossen, wodurch der Steuerungshorizont T_c der Reglerabtastzeit der modellprädiktiven Regelung entspricht.

Aufgrund der oben erläuterten Arbeitsweise einer modellprädiktiven Regelung ergeben sich folgende Vorzüge, wobei Teile daraus aus [7] und [13] entnommen wurden:

- Die meisten verfahrenstechnischen Prozesse verfügen mit Stelleinrichtungen wie Pumpen, Ventile, Motoren etc. über mehrere Eingangsgrößen und besitzen mit Temperaturen, Drücken, Durchflüssen, Füllständen etc. mehrere Ausgangsgrößen. Sie stellen somit ein Mehrgrößensystem (MIMO-System) dar. Dabei beeinflusst jede der manipulierbaren Stellgrößen mehr als eine Ausgangsgröße und umgekehrt existieren für die Einflussnahme auf einen Ausgang mehrere Eingänge. Der traditionelle Versuch solche Systeme bzw. ganze Anlagenteile mittels einer dezentralen PID-Regelung zu regeln, ist mit zunehmender Komplexität der Anlagen und Prozesse nicht zielführend, sodass der Einsatz eines Mehrgrößenreglers erforderlich wird. Da es sich bei der modellprädiktiven Regelung um einen *relativ allgemeinen Ansatz* handelt, lässt sich dieser ohne viel Aufwand vom Eingrößen- auf den Mehrgrößenfall übertragen. Sie eignet sich weiters zur Regelung von Strecken mit nichtlinearer, komplizierter Dynamik (Systeme mit Totzeit- oder Allpassverhalten). Selbst für SISO-Systeme ohne Beschränkungen lassen sich durch den Einsatz von modellprädiktiven Regelungen verglichen mit konventionellen PID-Regelungen wesentlich höhere Regelgüten erzielen.
- Die Stell-, Zustands- sowie die zu regelnden Ausgangsgrößen der Prozessindustrie sind im Allgemeinen stets bestimmten Beschränkungen unterworfen. Als Beispiel seien hier Maximalspannungen, Maximalbeschleunigungen und Maximalkräfte sowie maximale Stoff- und Energieströme in Rohrleitungen oder maximale Füllstände in Behältern genannt. Der optimale Arbeitspunkt einer verfahrenstechnischen Anlage liegt dabei häufig auf oder dicht an den Beschränkungen des Prozesses. Andererseits dürfen solche Beschränkungen oftmals nicht verletzt, also über- bzw. unterschritten werden, da der Prozess dann ins Stocken geraten würde oder schlimmstenfalls ein katastrophales Ereignis wie die Zerstörung der Anlage oder Anlageteilen zur Folge hätte. Das Konzept der modellprädiktiven Regelung ist nach heutigem Stand das einzige Regelungsverfahren, in dem *Beschränkungen von Eingangs-, Zustands- und/oder Ausgangsgrößen* systematisch und explizit berücksichtigt werden.

- Da modellprädiktive Regler über ein mathematisches Modell des realen Systems verfügen, können sie vorausschauend arbeiten, d. h. bereits zu einem frühen Zeitpunkt auf sich anbahnende Verletzungen der Beschränkungen reagieren. Darüber hinaus lassen sich *bekannte zukünftige Ereignisse* wie *Störungen* oder *Verläufe von Sollgrößen* auf systematische Art und Weise berücksichtigen.
- Die Methode der modellprädiktiven Regelung weist eine relativ gute *Übertragbarkeit* auf. Ist der Regelungsalgorithmus einmal entwickelt und implementiert, so lässt er sich ohne viel Aufwand auch auf andere Systeme übertragen.

Aufgrund dieser Tatsachen zählt die modellprädiktive Regelung zu den leistungsfähigsten Verfahren der modernen Regelungstechnik. Demgegenüber stehen folgende Schwierigkeiten, die mit der Entwicklung und Implementierung einer modellprädiktiven Regelung einhergehen:

- Für die Realisierung einer modellprädiktiven Regelung wird in jedem Abtastschritt die Lösung eines unterlagerten Optimalsteuerungsproblems benötigt. Dies führt zu einem *hohen Rechenaufwand*.
- Die optimierten Stellgrößen können erst dann an das zu regelnde System ausgegeben werden, wenn der Optimierungsprozess abgeschlossen ist, d. h. die Lösung des Optimalsteuerungsproblems hat grundsätzlich in *Echtzeit* zu erfolgen. Dies erfordert, je nach Komplexität und Ordnung der zu regelnden Strecke, sowohl einen *effizienten Optimierungsalgorithmus* als auch den Einsatz von *leistungsstarken Rechnern*.
- Die erstmalige Entwicklung und Implementierung einer modellprädiktiven Regelung ist, wie in dieser Arbeit festgestellt wurde, mit *hohem Aufwand* verbunden.
- Der *Nachweis der Stabilität* des geschlossenen Regelkreises ist nur sehr schwierig zu erbringen und wie in [13] gezeigt wird auch nur für das nominelle, ungestörte System unter der Voraussetzung verschiedener Annahmen bezüglich der Systemdynamik und des Kostenfunktionalen mit vertretbarem mathematischen Aufwand möglich.

3.3 Formulierung des Optimalsteuerungsproblems

Damit ein modellprädiktiver Regler in jedem Abtastschritt t_k , $k = 1, 2, \dots$ eine geeignete, optimale Stellgröße $\mathbf{u}_k^*(t)$ für den Prädiktionshorizont $t \in [t_k, t_k + T]$ auswählen kann, wird ein unterlagertes Optimalsteuerungsproblem formuliert. Die Gestaltung dieser *dynamischen Optimierungsaufgabe* hängt im Wesentlichen von den Zielen der Regelung ab und bestimmt das resultierende Reglerverhalten sowie die Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Die Formulierung dieses unterlagerten OCP ist daher ein zentraler Punkt bei der Entwicklung von modellprädiktiven Regelungen. Um die Notation einfach zu halten, wird fortan für Größen im Optimalsteuerungsproblem stets die lokale Zeitachse τ anstatt der absoluten Zeit t verwendet womit sich der Prädiktionshorizont zu $\tau \in [0, T]$ ergibt. Weiters werden zur Unterscheidung von den tatsächlich am realen System auftretenden Trajektorien $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{x}(t)$ die jeweiligen Größen im Optimalsteuerungsproblem der MPC-Iteration

k (mit dem Startzeitpunkt t_k) mit dem Index k gekennzeichnet. Dementsprechend folgt die generelle Struktur des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems für ein nichtlineares, zeitinvariantes System in Zustandsraumdarstellung zu

$$\min_{\mathbf{u}_k(\cdot)} J(\mathbf{u}_k(\tau); \mathbf{x}_{k,0}) = \varphi(\mathbf{x}_k(T)) + \int_0^T l(\mathbf{x}_k(\tau), \mathbf{u}_k(\tau)) d\tau \quad (3.1a)$$

$$\text{u.B.v. } \dot{\mathbf{x}}_k(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(\tau), \mathbf{u}_k(\tau)) \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_{k,0} \quad (3.1c)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_k(\tau)) = \mathbf{0}, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (3.1d)$$

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{x}_k(T)) = \mathbf{0} \quad (3.1e)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k(\tau)) \leq \mathbf{0}, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (3.1f)$$

$$\mathbf{h}_T(\mathbf{x}_k(T)) \leq \mathbf{0} \quad (3.1g)$$

$$\mathbf{u}_k(\tau) \in [\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max}], \quad \forall \tau \in [0, T]. \quad (3.1h)$$

Das zu minimierende, skalare Kostenfunktional (3.1a) setzt sich im Allgemeinen aus der Summe eines Endkostenterms (Englisch: *terminal costs*) $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und eines integralen Kostenterms (Englisch: *integral costs*) $l: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ zusammen, wobei $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ die Eingangsgröße und $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ den Zustand des Systems darstellen. In der gängigen Literatur wird der Endkostenterm auch als *Mayer-Term*, der integrale Kostenterm als *Lagrange-Term* und die Summe der beiden als *Bolza-Term* bezeichnet. Die Minimierung des Kostenfunktionals $J(\mathbf{u}_k(\tau); \mathbf{x}_{k,0})$ wird bezüglich der Stellgröße \mathbf{u}_k ausgeführt und unterliegt dabei sowohl der Systemdynamik (3.1b) mit $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ als auch den Anfangsbedingungen (3.1c). Der Anfangszustand $\mathbf{x}_{k,0}$ entspricht dabei dem zum Abtastzeitpunkt t_k gemessenen bzw. beobachteten Zustand des realen Systems womit $\mathbf{x}_{k,0} = \mathbf{x}(t_k)$ gilt. Weiters sind häufig Gleichungs- und Ungleichungsbeschränkungen der Form (3.1d) und (3.1f) mit $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$ und $\mathbf{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$ anzutreffen. Endgleichungsbeschränkungen der Form (3.1e) mit $\mathbf{g}_T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N_{gT}}$ werden bspw. genutzt um einen gewünschten Zustand \mathbf{x}_{des} zur Endzeit T zu erreichen. Soll hingegen lediglich eine Endregion bzw. ein Endgebiet zum Endzeitpunkt T erreicht werden, so eignen sich dafür Endungleichungsbeschränkungen der Form (3.1g) mit $\mathbf{h}_T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N_{hT}}$. In der Literatur werden (3.1d) und (3.1f) auch als *Pfadbeschränkungen* bzw. (3.1e) und (3.1g) als *Punktbeschränkungen* bezeichnet. Mit (3.1h) werden die im Allgemeinen stets vorhandenen Beschränkungen der Stellgröße in Form von Box-Beschränkungen berücksichtigt. Die Aufgabe der dynamischen Optimierung besteht nun darin, eine Stellgröße $\mathbf{u}_k(\tau), \tau \in [0, T]$ so zu finden, dass sie zusammen mit der Zustandstrajektorie $\mathbf{x}_k(\tau), \tau \in [0, T]$ des zugehörigen dynamischen Systems (3.1b) mit dem Anfangszustand (3.1c) alle Beschränkungen (3.1d)-(3.1h) erfüllt und gleichzeitig das Kostenfunktional (3.1a) minimiert. Die Lösung des Optimalsteuerungsproblems (3.1) ist nur in den einfachsten Fällen analytisch möglich, weshalb man im Allgemeinen stets auf numerische Verfahren zurückgreifen muss.

Eine in der Regelungstechnik oft gestellte Aufgabe besteht darin, ein nichtlineares, zeitinvariantes System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.2)$$

mit dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand \mathbf{x}_0 in endlicher Zeit T in eine gewünschte Ruhelage $(\mathbf{x}_{\text{des}}, \mathbf{u}_{\text{des}})$ mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{des}}, \mathbf{u}_{\text{des}}) = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

zu überführen. Auch das Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems kann als so ein Vorgang betrachtet werden, bei dem ausgehend von der unteren Ruhelage

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{R,u} = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.4)$$

in endlicher Zeit T die obere Ruhelage

$$\mathbf{x}_{\text{des}} = \mathbf{x}_{R,o} = \mathbf{0}, u_{\text{des}} = u_R = 0 \quad (3.5)$$

erreicht werden soll. Typischerweise werden dann sowohl der Endkostenterm $\varphi(\mathbf{x}(T))$ als auch der integrale Kostenterm $l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$ als *positiv definite Funktionen* der Form

$$\varphi(\mathbf{x}(T)) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T(T) \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}(T) \quad (3.6a)$$

$$l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}(\tau) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}(\tau) \quad (3.6b)$$

mit

$$\Delta \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}_{\text{des}} \quad (3.7a)$$

$$\Delta \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_{\text{des}} \quad (3.7b)$$

gewählt, wobei hier, wie auch an manch anderen Stellen im Folgenden dieses Abschnitts, auf die explizite Angabe der Indizes k zur Kennzeichnung der Größen im Optimalsteuerungsproblem verzichtet wurde. Die Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ werden dabei in der Regel als symmetrische, positiv definite Matrizen angesetzt. Wählt man die Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} , \mathbf{R} und \mathbf{P} als positiv definite Diagonalmatrizen, so lassen sich mit den jeweiligen Einträgen die einzelnen Verläufe von Zustands- und Eingangsgrößen getrennt voneinander gewichten. Das Kostenfunktional (3.1a) bewertet damit im Allgemeinen zwei Aspekte der Regelgüte: mithilfe der Matrix \mathbf{Q} die Regeldifferenzen $(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{des}})$ und mithilfe von \mathbf{R} den erforderlichen Stellaufwand $(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_{\text{des}})$. Die Minimierung hat dabei zur Folge, dass versucht wird, sowohl die Regelabweichungen als auch den erforderliche Stellaufwand möglichst klein zu halten. Da diese beiden Vorgaben im Allgemeinen im Widerspruch zueinander stehen, kann durch die entsprechende Wahl der Gewichtungsmatrizen die Art der Kompromisslösung beeinflusst werden. Eine Erhöhung der Einträge in \mathbf{Q} führt zwar zu geringeren Regeldifferenzen, dies aber auf Kosten der Stellgrößen. Soll der Fokus jedoch auf eine Minimierung des Stellgrößenbedarfs gelegt werden, so sind die Einträge in \mathbf{R} zu erhöhen.

Als Entwurfsmodell (3.1b) für die modellprädiktive Regelung des Wagen-Pendel-Systems aus Abbildung 2.1 wird die Zustandsraumdarstellung (2.15) ohne Berücksichtigung der

nicht messbaren Störung, d. h. $M_L(t) = 0$, verwendet. Da der Verfahrenweg s sowie die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung u des Schlittens den Beschränkungen

$$s_{\min} \leq s(\tau) \leq s_{\max}, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (3.8a)$$

$$v_{\min} \leq v(\tau) \leq v_{\max}, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (3.8b)$$

$$u_{\min} \leq u(\tau) \leq u_{\max}, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (3.8c)$$

mit $s_{\min}, s_{\max}, v_{\min}, v_{\max}, u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}$ unterliegen, wobei $|s_{\min}| = |s_{\max}|, |v_{\min}| = |v_{\max}|$ und $|u_{\min}| = |u_{\max}|$ gelten, ergeben sich die Ungleichungsbeschränkungen (3.1f) und Box-Beschränkungen (3.1h) des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems (3.1) zu

$$h_1(\mathbf{x}(\tau)) = s(\tau) - s_{\max} \leq 0 \quad (3.9a)$$

$$h_2(\mathbf{x}(\tau)) = s_{\min} - s(\tau) \leq 0 \quad (3.9b)$$

$$h_3(\mathbf{x}(\tau)) = v(\tau) - v_{\max} \leq 0 \quad (3.9c)$$

$$h_4(\mathbf{x}(\tau)) = v_{\min} - v(\tau) \leq 0 \quad (3.9d)$$

$$u \in [u_{\min}, u_{\max}] . \quad (3.9e)$$

In den folgenden zwei Abschnitten werden zwei mögliche Formulierungen des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems (3.1) vorgestellt, die zu einer asymptotisch stabilen Ruhelage $(\mathbf{x}_{\text{des}}, \mathbf{u}_{\text{des}})$ im geschlossenen Regelkreis führen. Dabei wurde stets angenommen, dass für die zu erreichende Ruhelage $\mathbf{x}_{\text{des}} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{u}_{\text{des}} = \mathbf{0}$ gilt. Dies stellt jedoch keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Gilt nämlich $\mathbf{x}_{\text{des}} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{u}_{\text{des}} \neq \mathbf{0}$, dann kann man durch die einfache Zustands- und Eingangstransformation $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{des}}$ bzw. $\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_{\text{des}}$ immer erreichen, dass in den transformierten Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{des}} = \mathbf{0}$ und $\tilde{\mathbf{u}}_{\text{des}} = \mathbf{0}$ gilt.

3.3.1 Optimalsteuerungsproblem mit vorgeschriebenem Endzustand

Eine sehr einfache Möglichkeit zur Formulierung des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems (3.1) damit die zu erreichende Ruhelage

$$(\mathbf{x}_{\text{des}}, \mathbf{u}_{\text{des}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad (3.10)$$

des geregelten Systems asymptotisch stabil ist, besteht darin, den Zustand am Ende des Prädiktionshorizonts zum Zeitpunkt $\tau = T$ in Form von Endgleichungsbeschränkungen (3.1e)

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{x}_k(T)) = \mathbf{x}_k(T) = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

fest vorzugeben. Auf die Angabe eines Endkostenterms $\varphi(\mathbf{x}_k(T))$ im Kostenfunktional (3.1a) kann somit verzichtet werden. Für die Entwicklung einer modellprädiktiven Regelung zum Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems folgt mit den Beschränkungen (3.9) das

unterlagerte Optimalsteuerungsproblem (3.1) damit zu

$$\min_{u_k(\cdot)} J(u_k(\tau); \mathbf{x}_{k,0}) = \frac{1}{2} \int_0^T (\mathbf{x}_k^T(\tau) \mathbf{Q} \mathbf{x}_k(\tau) + R u_k^2(\tau)) d\tau \quad (3.12a)$$

$$\text{u.B.v. } \dot{\mathbf{x}}_k(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(\tau), u_k(\tau)) \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_{k,0} \quad (3.12c)$$

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{x}_k(T)) = \mathbf{x}_k(T) = \mathbf{0} \quad (3.12d)$$

$$h_1(\mathbf{x}_k(\tau)) = s_k(\tau) - s_{\max} \leq 0, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (3.12e)$$

$$h_2(\mathbf{x}_k(\tau)) = s_{\min} - s_k(\tau) \leq 0, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (3.12f)$$

$$h_3(\mathbf{x}_k(\tau)) = v_k(\tau) - v_{\max} \leq 0, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (3.12g)$$

$$h_4(\mathbf{x}_k(\tau)) = v_{\min} - v_k(\tau) \leq 0, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (3.12h)$$

$$u_k(\tau) \in [u_{\min}, u_{\max}], \quad \forall \tau \in [0, T]. \quad (3.12i)$$

Die Endgleichungsbeschränkungen (3.12d) erzwingen, dass der prädierte Zustand $\mathbf{x}_k^*(T)$ am Ende des Prädiktionshorizonts exakt im Ursprung liegt. Zu beachten dabei ist, dass dies lediglich für den prädierten Zustand gilt. Die tatsächliche Zustandstrajektorie $\mathbf{x}(t)$ des realen Systems nähert sich der oberen Ruhelage (3.5) nur asymptotisch. Für den Stabilitätsnachweis dieser Methode sei auf [13] verwiesen. Die Vorgabe eines exakt zu erreichenden Endzustandes erschwert jedoch die Lösung des Optimalsteuerungsproblems (3.12) und führt damit zu einem sehr hohen Rechenaufwand. Da die Lösung der Optimierungsaufgabe in Echtzeit zu erfolgen hat, ist diese Methode vor allem für nichtlineare Systeme, die kurze Reglerabstastzeiten erfordern, nur bedingt geeignet. Aus diesem Grund wird im nächsten Abschnitt auf die explizite Vorgabe eines exakt zu erreichenden Endzustandes verzichtet und anstelle dessen lediglich ein zu erreichendes Endgebiet vorgeschrieben.

3.3.2 Optimalsteuerungsproblem mit vorgeschriebenem Endgebiet und Endkostenterm

Um den Rechenaufwand des numerischen Optimierungsverfahrens zur Lösung des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems zu verringern, wurde in [14] eine Methode vorgestellt, welche die restriktiven Endgleichungsbeschränkungen (3.12d) aus Abschnitt 3.3.1 durch Einführung eines Endgebietes auflockert und dennoch zu einer asymptotischen Stabilität des geschlossenen Regelkreises führt. Das zu minimierende Kostenfunktional (3.1a) setzt sich bei dieser Methode aus der Summe eines integralen Kostenterms

$$l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{Q} \mathbf{x}(\tau) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{R} \mathbf{u}(\tau) \quad (3.13)$$

und eines Endkostenterms

$$\varphi(\mathbf{x}(T)) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{P} \mathbf{x}(T) \quad (3.14)$$

mit den symmetrischen, positiv definiten Matrizen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zusammen². Anstelle der Endgleichungsbeschränkungen (3.12d) wird nun ein zu

²Wie bereits im letzten Abschnitt erwähnt, gilt für die zu erreichende Ruhelage $(\mathbf{x}_{\text{des}}, \mathbf{u}_{\text{des}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

erreichendes Endgebiet \mathcal{X}_T in Form einer Endungleichungsbeschränkung

$$h_T(\mathbf{x}(T)) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{P} \mathbf{x}(T) - \alpha_T \leq 0 \quad (3.15)$$

mit $\alpha_T \in \mathbb{R}_{>0}$ eingeführt, womit für das Endgebiet

$$\mathcal{X}_T = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \alpha_T \right\}, \quad \{\mathbf{0}\} \subseteq \mathcal{X}_T \subseteq \mathbb{R}^n \quad (3.16)$$

gilt. Die Endungleichungsbedingung (3.15) erzwingt, dass der prädizierte Zustand am Ende des Prädiktionshorizonts innerhalb des Endgebietes \mathcal{X}_T aus (3.16) liegt, also $\mathbf{x}^*(T) \in \mathcal{X}_T$ gilt. Die Einträge der Gewichtungsmatrix \mathbf{P} werden dabei so gewählt, dass der Endkostenterm (3.14) eine obere Schranke für den integralen Kostenterm (3.13) in der gesamten Zukunft des mit einem (fiktiven) lokalen linearen Zustandsregelgesetz

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{K} \mathbf{x}(\tau) \quad (3.17)$$

geregelt Systems ist, d.h.

$$\varphi(\mathbf{x}(T)) \geq \int_T^\infty l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{K} \mathbf{x}(\tau)) d\tau \quad (3.18)$$

sofern $\mathbf{x}(T) \in \mathcal{X}_T$ gilt. Aus diesem Grund wird dieser Ansatz auch häufig als *MPC mit quasi-unendlichem Prädiktionshorizont* bezeichnet. Die Konstante α_T wird so gewählt, dass \mathcal{X}_T eine *positiv invariante Menge*³ des mit dem linearen Zustandsregelgesetz (3.17) geregelten Systems ist. Wie in [14] gezeigt wird, folgt daraus die asymptotische Stabilität der Ruhelage ($\mathbf{x}_{\text{des}}, \mathbf{u}_{\text{des}}$) im geschlossenen Regelkreis. Man beachte, dass das Zustandsregelgesetz (3.17) nicht implementiert wird und es somit, unabhängig davon ob der Anfangszustand $\mathbf{x}_{k,0}$ der MPC-Iteration k in (3.1c) innerhalb oder außerhalb des zu erreichenden Endgebietes liegt, zu keinem Zeitpunkt zu einer Umschaltung zwischen dem modellprädiktiven Regler und dem linearen Zustandsregler kommt. Dieser wird lediglich zur Berechnung der Gewichtungsmatrix \mathbf{P} des Endkostenterms (3.14) und zur Ermittlung des Parameters α_T des Endgebietes (3.15) benötigt, woher die Bezeichnung fiktiv herrührt. Ein Vorteil dieser Methode besteht darin, dass die Berechnung der notwendigen Größen *offline* erfolgt und somit kein zusätzlicher Rechenaufwand während der Laufzeit der modellprädiktiven Regelung aufkommt.

Im Folgenden werden die Berechnungsvorschriften für \mathbf{P} und α_T systematisch hergeleitet ehe sie für die Formulierung des Optimalsteuerungsproblems des Wagen-Pendel-Systems angewendet werden.

³Für die Definition einer positiv invarianten Menge sei auf [5] verwiesen.

Allgemeine Herleitung der Methode

Ausgangspunkt der Betrachtungen sei das Optimalsteuerungsproblem

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot)} J(\mathbf{u}(\tau); \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(T) \mathbf{P} \mathbf{x}(T) + \int_0^T \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{Q} \mathbf{x}(\tau) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{R} \mathbf{u}(\tau) \right) d\tau \quad (3.19a)$$

$$\text{u.B.v. } \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \quad (3.19b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.19c)$$

$$\mathbf{x}(T) \in \mathcal{X}_T \quad (3.19d)$$

$$\mathbf{u}(\tau) \in \mathcal{U}, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (3.19e)$$

mit dem Endkostenterm aus (3.14), dem integralen Kostenterm aus (3.13), der Systemdynamik (3.19b) samt zugehörigem Anfangszustand (3.19c), dem Endgebiet \mathcal{X}_T aus (3.16) sowie der kompakten und konvexen Menge⁴ \mathcal{U} der zulässigen Eingänge, für die

$$\{\mathbf{0}\} \subset \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \quad (3.20)$$

gilt. Zu Beginn wird das um die zu erreichende Ruhelage $(\mathbf{x}_{\text{des}}, \mathbf{u}_{\text{des}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ linearisierte System⁵

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (3.21)$$

von (3.19b) mit

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}, \mathbf{u}=\mathbf{0}}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}, \mathbf{u}=\mathbf{0}} \quad (3.22)$$

betrachtet. Ist das linearisierte System (3.21) *vollständig erreichbar*, so lässt sich dafür mithilfe der *Formel von Ackermann* ein klassischer linearer Zustandsregler entwerfen [16]. Dieser Entwurf wird auch als *Polvorgabe im Zustandsraum* bezeichnet, da die Eigenwerte der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises

$$\mathbf{A}_g = \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K} \quad (3.23)$$

beliebig platziert werden können. Ist das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{B}) aus (3.21) lediglich *stabilisierbar*, so lässt sich ein LQR-Regler [12] (im Englischen als *Linear Quadratic Regulator* bezeichnet), welcher in der Literatur häufig auch *stationärer Riccati-Regler* genannt wird, entwickeln. In beiden Fällen hat das Zustandsregelgesetz die Form

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \mathbf{x}(t) \quad (3.24)$$

mit der Reglerverstärkungsmatrix $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und es folgt für alle Eigenwerte λ_i , $i = 1, \dots, n$, der Dynamikmatrix \mathbf{A}_g des geschlossenen Kreises (3.23)

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0. \quad (3.25)$$

⁴Für die Definition einer kompakten und konvexen Menge sei auf [15] verwiesen.

⁵Da die Linearisierung um die Ruhelage $(\mathbf{x}_{\text{des}}, \mathbf{u}_{\text{des}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ erfolgt, gilt in weiterer Folge $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}$ und $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Die Matrix \mathbf{A}_g ist somit eine sogenannte *Hurwitz-Matrix*. Wie nachfolgend noch gezeigt wird, ergibt sich die Gewichtungsmatrix \mathbf{P} des Endkostenterms des Kostenfunktional (3.19a) als Lösung der sogenannten *Lyapunov-Gleichung*

$$(\mathbf{A}_g + \kappa \mathbf{E})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_g + \kappa \mathbf{E}) = -\mathbf{Q}^* \quad (3.26)$$

mit der Dynamikmatrix $\mathbf{A}_g \in \mathbb{R}^{n \times n}$ des geschlossenen Kreises (3.23), der Einheitsmatrix $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, der Matrix $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie der Konstanten $\kappa \in [0, \infty)$ welche die Bedingung $\kappa < -\lambda_{\max}(\mathbf{A}_g)$ erfüllt. Wie in [17] bewiesen wird, hat die Lyapunov-Gleichung (3.26) *genau dann* eine eindeutige, symmetrische und positiv definite Lösung \mathbf{P} , wenn $(\mathbf{A}_g + \kappa \mathbf{E})$ eine Hurwitz-Matrix und \mathbf{Q}^* eine positiv definite Matrix ist. Da sowohl \mathbf{Q} als auch \mathbf{R} als symmetrische, positiv definite Matrizen angesetzt werden, ist in weiterer Folge auch die Matrix \mathbf{Q}^* symmetrisch und positiv definit. Weiters haben für $\kappa \in [0, -\lambda_{\max}(\mathbf{A}_g))$ alle Eigenwerte der Matrix $(\mathbf{A}_g + \kappa \mathbf{E})$ einen negativen Realteil. Somit liefert (3.26) eine eindeutige, symmetrische und positiv definite Lösung \mathbf{P} . In weiterer Folge wird das zu erreichende Endgebiet \mathcal{X}_T so gewählt, dass es eine positiv invariante Menge des mit dem Zustandsregelgesetz (3.24) geregelten Systems (3.19b) darstellt. Da die Stellgröße $\mathbf{u}(\tau)$ zu jedem Zeitpunkt τ zulässig sein muss, wird in einem ersten Schritt ein möglichst großes Endgebiet \mathcal{X}_{T1} mit $\mathcal{X}_T \subseteq \mathcal{X}_{T1}$ in der Form

$$\mathcal{X}_{T1} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \alpha_{T1} \right\} \quad (3.27)$$

mit einem möglichst großem $\alpha_{T1} \in \mathbb{R}_{>0}$ so konstruiert, dass

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{x} \in \mathcal{U}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{T1} \quad (3.28)$$

gilt. Da $\alpha_T \in (0, \alpha_{T1}]$ gilt, wird folglich die Eingangsbeschränkung (3.19e) im Endgebiet \mathcal{X}_T durch den Zustandsregler (3.24) eingehalten. Um nun zu zeigen, dass \mathcal{X}_T tatsächlich eine positiv invariante Menge des mit dem linearen Zustandsregelgesetz geregelten Systems ist und die Abschätzung (3.18) gültig ist, wird die Zeitableitung des Endkostenterms $\varphi(\mathbf{x}(\tau))$ entlang einer Trajektorie des mit dem Zustandsregler (3.24) geregelten Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{K} \mathbf{x}) \quad (3.29)$$

näher betrachtet. Die zeitliche Differentiation des Endkostenterms ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(\mathbf{x}(\tau)) &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{P} \mathbf{x}(\tau) \right) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T(\tau) \mathbf{P} \mathbf{x}(\tau) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}(\tau) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{K} \mathbf{x}(\tau)) \mathbf{P} \mathbf{x}(\tau) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{K} \mathbf{x}(\tau)). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Durch Einführen des sogenannten *Linearisierungsfehlers* $\phi(\mathbf{x})$ in der Form⁶

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{K} \mathbf{x}) - \mathbf{A}_g \mathbf{x} \quad (3.31)$$

⁶An der Ruhelage $\mathbf{x}_{\text{des}} = \mathbf{0}$ gilt somit $\phi(\mathbf{x}_{\text{des}}) = \mathbf{0}$. Man beachte jedoch, dass es außer der Ruhelage $\mathbf{x}_{\text{des}} = \mathbf{0}$ noch weitere Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gibt, an denen $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ gilt.

mit der Dynamikmatrix \mathbf{A}_g des geschlossenen Kreises (3.23) folgt für (3.30)

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(\mathbf{x}(\tau)) &= \frac{1}{2} \left(\phi(\mathbf{x}(\tau)) + \mathbf{A}_g \mathbf{x}(\tau) \right)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(\tau) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{P} \left(\phi(\mathbf{x}(\tau)) + \mathbf{A}_g \mathbf{x}(\tau) \right) \\ &= \frac{1}{2} \phi^T(\mathbf{x}(\tau)) \mathbf{P} \mathbf{x}(\tau) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{A}_g^T \mathbf{P} \mathbf{x}(\tau) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{P} \phi(\mathbf{x}(\tau)) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{P} \mathbf{A}_g \mathbf{x}(\tau) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \left(\mathbf{A}_g^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_g \right) \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{P} \phi(\mathbf{x}(\tau)) .\end{aligned}\quad (3.32)$$

Für eine Abschätzung des Terms $\mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{P} \phi(\mathbf{x}(\tau))$ von (3.32) wird in weiterer Folge die sogenannte *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* [5] in der Form

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} \leq \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.33)$$

die Eigenwertabschätzung für quadratische Formen von symmetrisch, positiv definiten Matrizen $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ [5] in der Darstellung

$$\|\mathbf{w}\|_2^2 \leq \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{T} \mathbf{w}}{\lambda_{\min}(\mathbf{T})}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.34)$$

sowie die Ungleichung [5]

$$\|\mathbf{T} \mathbf{w}\|_2 \leq \|\mathbf{T}\|_{i,2} \|\mathbf{w}\|_2, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.35)$$

mit der *induzierten Matrixnorm* $\|\mathbf{T}\|_{i,2}$ verwendet. Mit (3.33) und (3.35) folgt

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \phi(\mathbf{x}) \leq \left\| \mathbf{x}^T \mathbf{P} \right\|_2 \|\phi(\mathbf{x})\|_2 \leq \|\mathbf{P}\|_{i,2} \|\mathbf{x}\|_2^2 \frac{\|\phi(\mathbf{x})\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}. \quad (3.36)$$

Durch Einführung der Konstanten $L_\phi \in \mathbb{R}_{>0}$ in der Form

$$L_\phi := \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_T, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\phi(\mathbf{x})\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \quad (3.37)$$

und mithilfe von (3.34) lässt sich (3.36) weiter abschätzen zu

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \phi(\mathbf{x}) \leq \|\mathbf{P}\|_{i,2} L_\phi \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \frac{\|\mathbf{P}\|_{i,2} L_\phi}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (3.38)$$

Der Parameter $\alpha_T \in (0, \alpha_{T1}]$ wird dabei so gewählt, dass im Endgebiet \mathcal{X}_T

$$L_\phi = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_T, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\phi(\mathbf{x})\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq \frac{\kappa \lambda_{\min}(\mathbf{P})}{\|\mathbf{P}\|_{i,2}} \quad (3.39)$$

gilt. Dadurch lässt sich (3.38) weiter vereinfachen zu

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \phi(\mathbf{x}) \leq \kappa \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (3.40)$$

Setzt man nun die Ungleichung (3.40) in (3.32) ein, so folgt

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x}(\tau)) \leq \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) (\mathbf{A}_g^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_g) \mathbf{x}(\tau) + \kappa \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{P} \mathbf{x}(\tau) \quad (3.41)$$

und durch eine weitere Vereinfachung erhält man

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x}(\tau)) \leq \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) ((\mathbf{A}_g + \kappa \mathbf{E})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_g + \kappa \mathbf{E})) \mathbf{x}(\tau). \quad (3.42)$$

Mit der bereits erwähnten Lyapunov-Gleichung (3.26) folgt für (3.42) schlussendlich

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x}(\tau)) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{P} \mathbf{x}(\tau) \right) \leq -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{Q}^* \mathbf{x}(\tau) \quad (3.43)$$

mit den symmetrischen, positiv definiten Matrizen \mathbf{P} und \mathbf{Q}^* . Damit wurde gezeigt, dass für jede Trajektorie $\mathbf{x}(\tau)$ welche im Endgebiet \mathcal{X}_T startet und fortan mit dem linearen Zustandsregler $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{K} \mathbf{x}(\tau)$ geregelt wird, der Endkostenterm φ eine Lyapunovfunktion darstellt, deren Zeitableitung negativ definit ist. Damit folgt:

- Die Trajektorie $\mathbf{x}(\tau)$ verharrt für alle Zeiten im Endgebiet \mathcal{X}_T .
- Die Trajektorie $\mathbf{x}(\tau)$ konvergiert in die zu erreichende Ruhelage $(\mathbf{x}_{\text{des}}, \mathbf{u}_{\text{des}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Dies lässt sich sehr anschaulich geometrisch interpretieren. Da die Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit ist, sind die Höhenlinien der Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = c \quad (3.44)$$

mit der Konstanten $c \in \mathbb{R}_{>0}$ n -dimensionale Ellipsoide mit dem Ursprung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als Mittelpunkt, wobei deren Achsen mit den Richtungen der n paarweise orthogonalen Eigenvektoren der Matrix \mathbf{P} zusammenfallen und deren Längen invers proportional zum jeweiligen positiv reellen Eigenwert sind [15]. Die Ungleichung (3.43) besagt nun, dass sich die Ellipsoide mit fortlaufender Zeit τ immer weiter zusammenziehen, bis sie für $\tau \rightarrow \infty$ lediglich den Ursprung $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{des}} = \mathbf{0}$ enthalten. Um nun weiters zu zeigen, dass für $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T \in \mathcal{X}_T$ der Endkostenterm (3.14) tatsächlich eine obere Schranke für den integralen Kostenterm (3.13) in der gesamten Zukunft des mit dem linearen Zustandsregelgesetz $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{K} \mathbf{x}(\tau)$ geregelten Systems ist, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{x}_T^T \mathbf{P} \mathbf{x}_T &\geq \int_T^\infty \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{Q} \mathbf{x}(\tau) + \frac{1}{2} (\mathbf{K} \mathbf{x}(\tau))^T \mathbf{R} (\mathbf{K} \mathbf{x}(\tau)) d\tau \\ &= \int_T^\infty \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x}(\tau) d\tau \\ &= \int_T^\infty \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{Q}^* \mathbf{x}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.45)$$

gilt, wird lediglich die Ungleichung (3.43) von $\tau = T$ bis $\tau = \infty$ aufintegriert, woraus unmittelbar (3.45) folgt.

-
- Schritt 1.** Freie Wahl der symmetrischen und positiv definiten Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} als Diagonalmatrizen zur Beeinflussung der Regelgüte.
- Schritt 2.** Linearisierung des zu regelnden Systems um die zu erreichende Ruhelage $(\mathbf{x}_{\text{des}}, \mathbf{u}_{\text{des}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ und anschließende Berechnung des linearen Zustandsregelgesetzes $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$, so dass die Dynamikmatrix \mathbf{A}_g des geschlossenen Kreises asymptotisch stabil ist.
- Schritt 3.** Wahl von $\kappa \in [0, \infty)$, so dass die Bedingung $\kappa < -\lambda_{\max}(\mathbf{A}_g)$ erfüllt ist.
- Schritt 4.** Berechnung der symmetrischen, positiv definiten Matrix \mathbf{P} als Lösung der Lyapunov-Gleichung (3.26).
- Schritt 5.** Bestimmung eines größtmöglichen $\alpha_{T1} \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass (3.28) mit (3.27) erfüllt ist.
- Schritt 6.** Bestimmung eines größtmöglichen $\alpha_T \in (0, \alpha_{T1}]$, entweder so, dass die Ungleichung (3.39) erfüllt ist, oder alternativ dazu durch wiederholtes Lösen der Optimierungsaufgabe (3.47).
-

Tabelle 3.2: Vorgehensweise zur Bestimmung des Endkostenterms und des Endgebietes

Die soeben beschriebene Vorgehensweise zur Offline-Bestimmung der Matrix \mathbf{P} des Endkostenterms (3.14) und der Konstanten α_T des Endgebietes (3.15) bzw. (3.16) ist in Tabelle 3.2 nochmals zusammengefasst. Die Bestimmung von α_{T1} in **Schritt 5** im Falle eines skalaren Eingangs $u \in \mathbb{R}$ wird im nachfolgenden Abschnitt gezeigt. Für einen mehrdimensionalen Eingang $u \in \mathbb{R}^m$, $m > 1$ sei auf [18] verwiesen. Ein Problem, welches bei der Ermittlung von α_T in **Schritt 6** auftreten kann, ist, dass aufgrund typischerweise kleiner Werte von $\lambda_{\min}(\mathbf{P})/\|\mathbf{P}\|_{i,2}$ die Ungleichung (3.39) bei manchen dynamischen Systemen nur für sehr kleine Endgebiete \mathcal{X}_T gültig ist. Dies erhöht jedoch den Rechenaufwand und erschwert somit die Lösung des Optimalsteuerungsproblems. Um nun ein größeres Endgebiet \mathcal{X}_T zu erhalten, wird versucht, anstelle der Ungleichung (3.39) die weniger konservative Bedingung (3.40) in der Form

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \phi(\mathbf{x}) - \kappa \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_T \quad (3.46)$$

zu erfüllen. Dies lässt sich sehr einfach durch wiederholtes Lösen des *beschränkten, statischen Optimierungsproblems*

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \phi(\mathbf{x}) - \kappa \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (3.47a)$$

$$\text{u.B.v. } h(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \alpha_T \quad (3.47b)$$

bewerkstelligen, wobei α_T ausgehend von α_{T1} solange sukzessive reduziert wird, bis der optimale Kostenfunktionswert $f(\mathbf{x}^*)$ des Optimierungsproblems (3.47) kleiner oder gleich Null ist. Dabei ist zu beachten, dass die Lösung des Optimierungsproblems (3.47) im

Allgemeinen einen hohen numerischen Rechenaufwand erfordert, da hier nach dem *globalen* Maximum \mathbf{x}^* innerhalb des Endgebietes \mathcal{X}_T gesucht wird. Die Verwendung von bekannten Verfahren aus dem Bereich der beschränkten statischen Optimierung, welche typischerweise stets *lokale* Maxima liefern, ist hier somit ungeeignet, da die Bedingung (3.46) innerhalb des gesamten Endgebietes \mathcal{X}_T gültig sein muss.

Für die Entwicklung einer modellprädiktiven Regelung zum Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems folgt mit den Berechnungsvorschriften aus Tabelle 3.2 das unterlagerte Optimalsteuerungsproblem (3.1) damit zu

$$\begin{aligned} \min_{u_k(\cdot)} \quad & J(u_k(\tau); \mathbf{x}_{k,0}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T(T) \mathbf{P} \mathbf{x}_k(T) + \frac{1}{2} \int_0^T \left(\mathbf{x}_k^T(\tau) \mathbf{Q} \mathbf{x}_k(\tau) + R u_k^2(\tau) \right) d\tau \quad (3.48a) \\ \text{u.B.v.} \quad & \dot{\mathbf{x}}_k(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(\tau), u_k(\tau)) \quad (3.48b) \\ & \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_{k,0} \quad (3.48c) \\ & h_T(\mathbf{x}_k(T)) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T(T) \mathbf{P} \mathbf{x}_k(T) - \alpha_T \leq 0 \quad (3.48d) \\ & h_1(\mathbf{x}_k(\tau)) = s_k(\tau) - s_{\max} \leq 0 \quad (3.48e) \\ & h_2(\mathbf{x}_k(\tau)) = s_{\min} - s_k(\tau) \leq 0 \quad (3.48f) \\ & h_3(\mathbf{x}_k(\tau)) = v_k(\tau) - v_{\max} \leq 0 \quad (3.48g) \\ & h_4(\mathbf{x}_k(\tau)) = v_{\min} - v_k(\tau) \leq 0 \quad (3.48h) \\ & u_k(\tau) \in [u_{\min}, u_{\max}] . \quad (3.48i) \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass das numerische Optimierungsverfahren zum Zeitpunkt $t = 0$ eine *zulässige Lösung* des Optimalsteuerungsproblems (3.48) liefert folgt unter der Annahme eines hinreichend kleinen Steuerungshorizonts T_c die asymptotische Stabilität der oberen Ruhelage (3.5). Dabei bezeichnet man eine (nicht notwendigerweise optimale) Lösung von (3.48) als zulässig, wenn sie sämtliche Beschränkungen einhält und der Wert des Kostenfunktional beschränkt ist. Die asymptotische Stabilität der zu erreichenden Ruhelage ist somit nicht an die Optimalität der Lösung gebunden. Für einen detaillierten Stabilitätsnachweis sei hier auf [13, 14] verwiesen.

Berechnung des Endkostenterms und des Endgebietes für das Wagen-Pendel-System

In diesem Abschnitt werden die Berechnungsvorschriften aus Tabelle 3.2 für die Bestimmung der Matrix \mathbf{P} des Endkostenterms (3.14) und der Konstanten α_T des Endgebietes (3.15) systematisch angewendet. Dabei ist zu beachten, dass für jede Ruhelage eine separate Berechnung der Parameter (\mathbf{P} , α_T) notwendig ist. Dabei werden fortan Größen, welche sich auf die obere Ruhelage

$$\mathbf{x}_{R,o} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad u_{R,o} = 0 \quad (3.49)$$

beziehen, mit dem Index ‘o’, und jene, die sich auf die untere Ruhelage

$$\mathbf{x}_{R,u} = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad u_{R,u} = 0 \quad (3.50)$$

beziehen, mit dem Index ‘u’ gekennzeichnet. Es sei hier nochmals wiederholt, dass das Wagen-Pendel-System $n = 4$ Zustände und $m = 1$ Eingänge besitzt. Wie Simulationen in Kapitel 4 zeigen werden, haben sich die Diagonalmatrizen

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad R = 0.05 \quad (3.51)$$

als Gewichtungsmatrizen für den Zustand \mathbf{x} bzw. den Eingang u als sinnvoll erwiesen. Um eine Form der optimalen Zustandsregelung zu erhalten, wurde als linearer Zustandsregler $u = \mathbf{k}^T \mathbf{x}$ ein LQR gewählt. Mithilfe des MATLAB-Befehls⁷ `lqr` folgt für den Rückführvektor \mathbf{k}_o^T für das um die obere Ruhelage (3.49) linearisierte System (2.22)

$$\mathbf{k}_o^T = [-59.236 \quad -15.568 \quad 10 \quad 10.088] \quad (3.52)$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_{1,2,o} = -1.957 \pm 12.009i, \quad \lambda_{3,o} = -2.774, \quad \lambda_{4,o} = -6.796 \quad (3.53)$$

der Dynamikmatrix $\mathbf{A}_{g,o}$ des geschlossenen Kreises. Da $\lambda_{\max}(\mathbf{A}_{g,o}) = -1.957$ wird in weiterer Folge $\kappa_o = 1$ gewählt, womit die Bedingung $\kappa_o < -\lambda_{\max}(\mathbf{A}_{g,o})$ erfüllt ist. Mithilfe des MATLAB-Befehls `lyap` ergibt sich damit die eindeutige, symmetrische und positiv definite Lösung der Lyapunov-Gleichung (3.26) zu

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} 82.861 & 20.640 & -30.055 & -23.130 \\ 20.640 & 5.237 & -7.666 & -5.861 \\ -30.055 & -7.666 & 15.734 & 9.508 \\ -23.130 & -5.861 & 9.508 & 6.967 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Im nächsten Schritt wird ein möglichst großes Endgebiet $\mathcal{X}_{T1,o}$ in der Form

$$\mathcal{X}_{T1,o} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P}_o \mathbf{x} \leq \alpha_{T1,o} \right\} \quad (3.55)$$

mit einem möglichst großem $\alpha_{T1,o} \in \mathbb{R}_{>0}$ gesucht, so dass $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{T1,o}$ die Stellgrößenbeschränkungen

$$u_{\min} \leq u = \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \leq u_{\max} \quad (3.56)$$

erfüllt sind, wobei für das Wagen-Pendel-System $|u_{\min}| = |u_{\max}|$ gilt. Die Konstruktion des Endgebietes $\mathcal{X}_{T1,o}$ lässt sich sehr anschaulich geometrisch interpretieren. Dabei stellen die Eingangsbeschränkungen (3.56) zwei Hyperflächen⁸ im \mathbb{R}^n dar, welche den zulässigen Bereich für das Zustandsregelgesetz $u = \mathbf{k}_o^T \mathbf{x}$

$$\mathcal{U}_o = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid u_{\min} \leq \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \leq u_{\max} \} \quad (3.57)$$

begrenzen. Wie im letzten Abschnitt bereits erwähnt wurde, entspricht dem Endgebiet (3.55) das Innere mitsamt dem Rand eines n -dimensionalen Ellipsoids mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 3.2 skizziert, wobei zur einfacheren

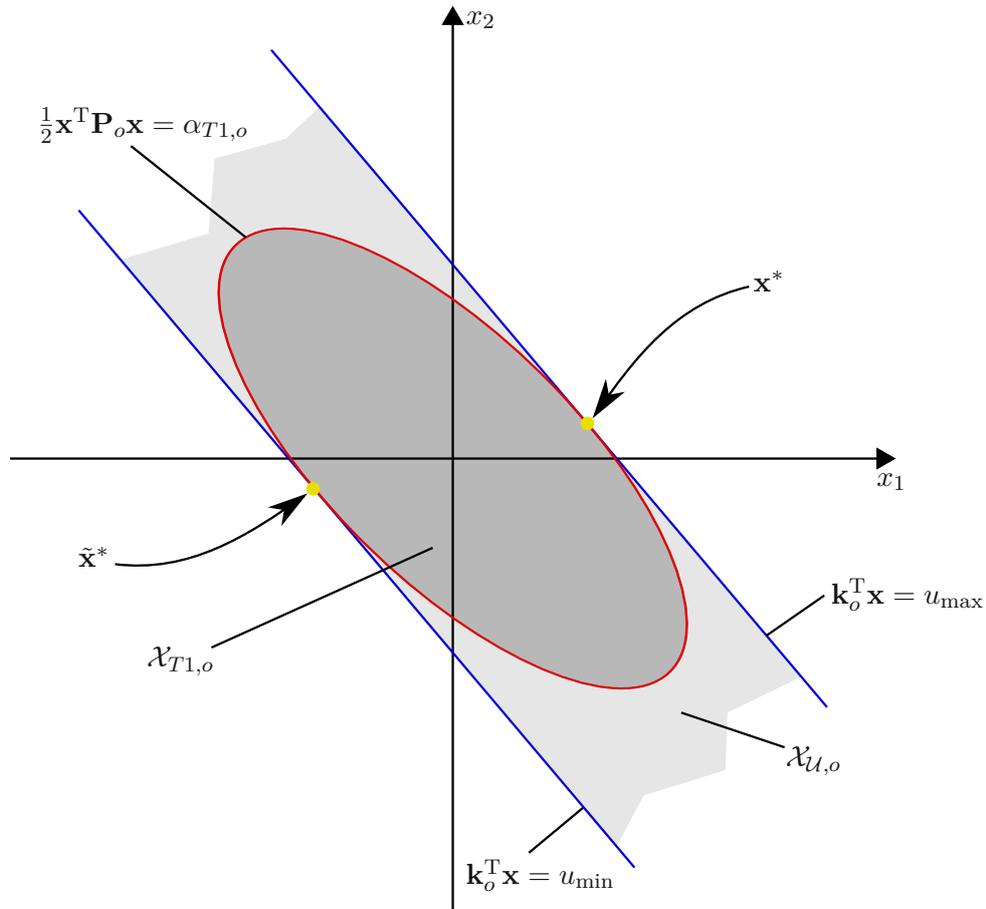


Abbildung 3.2: Geometrische Interpretation des Endgebietes

Darstellung von einem 2-dimensionalen Zustandsraum ausgegangen wurde. Das größtmögliche Endgebiet $\mathcal{X}_{T1,o}$ kann nun mithilfe des Punktes \mathbf{x}^* gefunden werden. An diesem Punkt gilt $\mathbf{k}_o^T \mathbf{x}^* = u_{\max}$. Der Menge $\mathcal{X}_{T1,o}$ entspricht somit der kleinstmögliche Ellipsoid für den es genau einen Schnittpunkt zwischen seinem Rand und der Hyperfläche $\mathbf{k}_o^T \mathbf{x} = u_{\max}$ gibt. Aus diesem Grund lässt sich das größtmögliche Endgebiet $\mathcal{X}_{T1,o}$ durch Lösen des beschränkten, statischen Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P}_o \mathbf{x} \quad (3.58a)$$

$$\text{u.B.v. } g(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} - u_{\max} = 0 \quad (3.58b)$$

ermitteln, wobei der optimale Kostenfunktionswert $f(\mathbf{x}^*)$ dem Parameter $\alpha_{T1,o}$ entspricht, also

$$\alpha_{T1,o} = f(\mathbf{x}^*) \quad (3.59)$$

⁷Der MATLAB-Befehl `lqr` liefert zusätzlich zu der Verstärkungsmatrix \mathbf{k}^T auch die Eigenwerte $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ der Dynamikmatrix \mathbf{A}_g des geschlossenen Kreises (3.23).

⁸Im \mathbb{R}^2 stellen Hyperflächen Geraden dar, im \mathbb{R}^3 entsprechen sie Ebenen.

gilt. Es sei hier noch der Vollständigkeit halber erwähnt, dass man anstelle der Gleichungsbeschränkung (3.58b) auch

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} - u_{\min} = 0 \quad (3.60)$$

verwenden könnte. Damit würde man zwar einen anderen optimalen Punkt $\tilde{\mathbf{x}}^* \neq \mathbf{x}^*$ als Lösung des Optimierungsproblems (3.58) erhalten, der optimale Kostenfunktionswert bleibt aber aufgrund von $|u_{\min}| = |u_{\max}|$ unverändert, womit

$$f(\mathbf{x}^*) = f(\tilde{\mathbf{x}}^*) = \alpha_{T1,o} \quad (3.61)$$

gilt. Für den Fall, dass $|u_{\min}| \neq |u_{\max}|$ gilt, ist in der Gleichungsbeschränkung (3.58b) jene Grenze der Eingangsbeschränkungen einzusetzen, welche den kleineren Absolutbetrag aufweist. Mit der *Lagrangefunktion*⁹

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}) , \quad (3.62)$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ als *Lagrange-Multiplikator* bezeichnet wird, lassen sich die *notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung* für das beschränkte, statische Optimierungsproblem (3.58) mit einer Gleichungsbeschränkung in der Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} L \right)^T (\mathbf{x}^*, \lambda^*) = (\nabla f)(\mathbf{x}^*) + (\nabla g)(\mathbf{x}^*) \lambda^* = \mathbf{0} \quad (3.63a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} L \right)^T (\mathbf{x}^*, \lambda^*) = g(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (3.63b)$$

angeben. Dabei wird vorausgesetzt, dass \mathbf{x}^* ein sogenannter *regulärer Punkt* ist¹⁰. Mit der Kostenfunktion (3.58a) und der Gleichungsbeschränkung (3.58b) folgt

$$(\nabla f)(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_o \mathbf{x} , \quad (\nabla g)(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_o . \quad (3.64)$$

Damit ist jeder Punkt \mathbf{x} ein regulärer Punkt und die Optimalitätsbedingungen (3.63) für das Optimierungsproblem (3.58) lauten

$$\mathbf{P}_o \mathbf{x}^* + \mathbf{k}_o \lambda^* = \mathbf{0} \quad (3.65a)$$

$$\mathbf{k}_o^T \mathbf{x}^* - u_{\max} = 0 , \quad (3.65b)$$

welche sich sehr einfach analytisch lösen lassen. Aus (3.65a) folgt¹¹

$$\mathbf{x}^* = -\lambda^* \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{k}_o . \quad (3.66)$$

Setzt man nun (3.66) in (3.65b) ein, so erhält man

$$\lambda^* = -\frac{u_{\max}}{\mathbf{k}_o^T \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{k}_o} \quad (3.67)$$

⁹Nicht zu verwechseln mit der Lagrangefunktion zur Herleitung der Bewegungsgleichungen aus Abschnitt 2.2. Der Begriff Lagrangefunktion hat somit in der Optimierung ($L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$) eine andere Bedeutung als in der Mechanik ($L = T - V$).

¹⁰Ein zulässiger Punkt \mathbf{x} wird als regulär bezeichnet, wenn die Gradientenvektoren $(\nabla g_i)(\mathbf{x})$ linear unabhängig sind, d. h. die sogenannte *linear independence constraint qualification (LICQ)* erfüllen.

¹¹Jede symmetrische und positiv definite Matrix \mathbf{P}_o ist invertierbar und ihre Inverse \mathbf{P}_o^{-1} ist ebenfalls symmetrisch und positiv definit.

wodurch wiederum mit (3.66) unmittelbar die optimale Lösung zu

$$\mathbf{x}^* = \frac{u_{\max}}{\mathbf{k}_o^T \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{k}_o} \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{k}_o \quad (3.68)$$

folgt. Die *hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung* für das Optimierungsproblem (3.58) lautet

$$\mathbf{d}^T (\nabla^2 L)(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \left((\nabla^2 f)(\mathbf{x}^*) + \lambda^* (\nabla^2 g)(\mathbf{x}^*) \right) \mathbf{d} > 0 \quad (3.69)$$

für alle $\mathbf{d} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}^*} \mathcal{X}$, $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ und $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\mathbf{x}) = 0\}$. Dabei wird mit $\mathcal{T}_{\mathbf{x}^*} \mathcal{X}$ der $(n - 1)$ -dimensionale Tangentialraum am Punkt \mathbf{x}^* bezeichnet. Mit

$$(\nabla^2 f)(\mathbf{x}^*) = \mathbf{P}_o \quad (3.70a)$$

$$(\nabla^2 g)(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (3.70b)$$

folgt

$$(\nabla^2 L)(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{P}_o . \quad (3.71)$$

Da die Matrix \mathbf{P}_o symmetrisch und positiv definit ist, ist die Bedingung (3.69) für alle $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ erfüllt, womit keine Berechnung des Tangentialraums $\mathcal{T}_{\mathbf{x}^*} \mathcal{X}$ notwendig ist. Der Punkt \mathbf{x}^* aus (3.68) ist daher ein *striktes globales Minimum* der Optimierungsaufgabe (3.58). Der Parameter $\alpha_{T1,o}$ für das größtmögliche Endgebiet $\mathcal{X}_{T1,o}$ folgt schlussendlich mit (3.59) und (3.68) zu

$$\alpha_{T1,o} = \frac{1}{2} \frac{u_{\max}^2}{\mathbf{k}_o^T \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{k}_o} = 1.301 . \quad (3.72)$$

Anschließend lässt sich der Parameter $\alpha_{T,o}$ durch Lösen des Optimierungsproblems (3.47) bestimmen. Dazu stehen die MATLAB-Befehle `GlobalSearch` und `MultiStart`, welche Teil der *Global Optimization Toolbox* sind, zur Verfügung. Die prinzipielle Vorgehensweise zur Bestimmung von α_T ist in Tabelle 3.3 zusammengefasst. Mit den Berechnungsvor-

Schritt 1.	Setze $\alpha_T = \alpha_{T1}$
Schritt 2.	Suche den optimalen Punkt \mathbf{x}^* durch Lösen des Optimierungsproblems (3.47)
Schritt 3.	Ermittle den optimalen Kostenfunktionswert $f(\mathbf{x}^*)$. Wenn dieser größer als null ist, setze $\alpha_T \leftarrow \beta \alpha_T$ mit $\beta \in (0, 1)$ und gehe zurück zu Schritt 2.

Tabelle 3.3: Vorgehensweise zur Bestimmung von α_T

schriften aus Tabelle 3.3, der Wahl $\beta = 0.9$ und unter Verwendung von `MultiStart` folgt schlussendlich

$$\alpha_{T,o} = 0.230 . \quad (3.73)$$

Da in dieser Arbeit das Prinzip der modellprädiktiven Regelung neben dem Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems auch für das seitliche Versetzen, bei dem ausgehend vom Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \pi & 0 & -s_x & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.74)$$

in endlicher Zeit T die untere Ruhelage

$$\mathbf{x}_{\text{des}} = \mathbf{x}_{R,u} = \begin{bmatrix} \pi & 0 & s_x & 0 \end{bmatrix}^T, \quad u_{\text{des}} = u_{R,u} = 0 \quad (3.75)$$

mit $s_x \in (0, s_{\text{max}})$ erreicht werden soll, angewendet wird, werden die obigen Berechnungen im Folgenden für die untere Ruhelage (3.75) durchgeführt. Um die Berechnungsvorschriften aus Tabelle 3.2 verwenden zu können, wurde das Entwurfsmodell¹² einer Koordinatentransformation mit $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{R,u}$ bzw. $\tilde{u} = u - u_{R,u}$ unterworfen. Das transformierte System ergibt sich damit zu

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \frac{-m_1 a_1 g \sin \tilde{x}_1 - m_1 a_1 \tilde{u} \cos \tilde{x}_1 - d_1 \tilde{x}_2}{J_1 + m_1 a_1^2} \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{u} \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Der unteren Ruhelage (3.75) des Entwurfsmodells entspricht nun die Ruhelage $(\tilde{\mathbf{x}}_R, \tilde{u}_R) = (\mathbf{0}, 0)$ des transformierten Systems (3.76), welche sich wie gefordert im Ursprung befindet. Der Endkostenterm φ sowie der integrale Kostenterm l des Kostenfunktional (3.48a) lauten hierfür

$$\varphi(\tilde{\mathbf{x}}_k(T)) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T(T) \mathbf{P}_u \tilde{\mathbf{x}}_k(T) \quad (3.77a)$$

$$l(\tilde{\mathbf{x}}_k(\tau), \tilde{u}_k(\tau)) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T(\tau) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_k(\tau) + \frac{1}{2} R \tilde{u}_k^2(\tau), \quad (3.77b)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{x}}_k(\tau) = \mathbf{x}_k(\tau) - \mathbf{x}_{R,u} \quad (3.78a)$$

$$\tilde{u}_k(\tau) = u_k(\tau) - u_{R,u} \quad (3.78b)$$

und den Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} und R von (3.51) für den Zustand $\tilde{\mathbf{x}}$ bzw. den Eingang \tilde{u} . Die Endungleichungsbeschränkung (3.48d) folgt demnach zu

$$h_T(\tilde{\mathbf{x}}_k(T)) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_k^T(T) \mathbf{P}_u \tilde{\mathbf{x}}_k(T) \leq \alpha_{T,u}, \quad (3.79)$$

während die restlichen Beschränkungen von (3.48) unverändert bleiben. Der Rückführvektor \mathbf{k}_u^T des linearen Zustandsregelgesetzes $\tilde{u} = \mathbf{k}_u^T \tilde{\mathbf{x}}$ für das um die untere Ruhelage (3.75) linearisierte System (2.23) folgt unter Verwendung von \mathbf{lqr} zu

$$\mathbf{k}_u^T = \begin{bmatrix} 11.472 & 1.446 & -10 & -6.662 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

¹²Zur Erinnerung sei hier nochmals erwähnt, dass das Entwurfsmodell den Gleichungen (2.15) mit $M_L(t) = 0$ entspricht.

mit den Eigenwerten

$$\lambda_{1,2,u} = -1.322 \pm \text{I}2.595, \quad \lambda_{3,4,u} = -3.126 \pm \text{I}2.774 \quad (3.81)$$

der Dynamikmatrix $\mathbf{A}_{g,u}$ des geschlossenen Kreises. Damit folgt $\kappa_u = 1$ und die Gewichtungsmatrix für den Endkostenterm (3.77a) bzw. die Endungleichungsbeschränkung (3.79) ergibt sich mithilfe von `lyap` zu

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} 24.269 & -2.202 & -6.113 & -8.619 \\ -2.202 & 1.263 & 4.215 & 2.393 \\ -6.113 & 4.215 & 18.988 & 8.767 \\ -8.619 & 2.393 & 8.767 & 6.002 \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

Der Parameter $\alpha_{T1,u}$ folgt mit (3.72) zu

$$\alpha_{T1,u} = \frac{1}{2} \frac{u_{\max}^2}{\mathbf{k}_u^T \mathbf{P}_u^{-1} \mathbf{k}_u} = 2.574, \quad (3.83)$$

womit mithilfe von `MultiStart`

$$\alpha_{T,u} = 2.085 \quad (3.84)$$

folgt.

3.4 Lösung des Optimalsteuerungsproblems

Die Lösung der dynamischen Optimierungsaufgabe (3.1) stellt, wie bereits erwähnt, die zentrale Herausforderung bei der echtzeitfähigen Implementierung einer modellprädiktiven Regelung dar und lässt sich nur für wenige Spezialfälle analytisch angeben, womit man im Allgemeinen stets auf numerische Optimierungsverfahren angewiesen ist. Dabei unterscheidet man grundsätzlich zwischen *direkten* und *indirekten* Verfahren.

Bei direkten Methoden wird mithilfe einer Parametrierung der Eingangstrajektorie $u(\tau)$ an diskreten Stützpunkten im Intervall $[0, T]$ die zeitkontinuierliche, dynamische Optimierungsaufgabe (3.1) in ein finit-dimensionales, beschränktes, statisches Optimierungsproblem der Form

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^o} J(\mathbf{z}) \quad (3.85a)$$

$$\text{u.B.v. } \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (3.85b)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{0}, \quad (3.85c)$$

mit der Kostenfunktion $J: \mathbb{R}^o \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und den Gleichungs- und Ungleichungsbeschränkungen $\mathbf{g}: \mathbb{R}^o \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$ bzw. $\mathbf{h}: \mathbb{R}^o \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$ überführt. Die Optimierungsaufgabe (3.85) lässt sich anschließend mit bekannten numerischen Verfahren aus dem Bereich der statischen Optimierung¹³ lösen. Dabei haben sowohl die gewählte Schrittweite der Diskretisierung

¹³Einige davon sind bspw. in [15] zu finden.

(Abstand der Stützpunkte) als auch die Art der Parametrierung der Stellgröße einen direkten Einfluss auf die Genauigkeit des Verfahrens sowie auf die Dimension der resultierenden Optimierungsaufgabe (3.85) und des damit einhergehenden Rechenaufwandes. Prinzipiell wird dabei zwischen der Methode der *Volldiskretisierung* und der Methode der *Unterlagerten Zeitintegration* unterschieden [13]. Eine nähere Erläuterung der Transformation der dynamischen Optimierungsaufgabe (3.1) in ein statisches Optimierungsproblem der Form (3.85) mithilfe der Volldiskretisierung findet sich in Kapitel B. Die Vorteile von direkten Verfahren sind, dass Zustandsbeschränkungen leichter zu berücksichtigen sind, die Herleitung der Optimalitätsbedingungen nicht notwendig ist sowie ihr oftmals größerer Konvergenzbereich, da keine Startschätzungen der adjungierten Zustände notwendig sind [19].

Im Vergleich dazu werden bei indirekten Verfahren zunächst die zeitkontinuierlichen Optimalitätsbedingungen des Optimalsteuerungsproblems (3.1) mithilfe der Variationsrechnung und dem Minimumsprinzip nach Pontryagin [15] hergeleitet und anschließend das so erhaltene Zwei-Punkt-Randwertproblem gelöst. Indirekte Verfahren liefern somit eine Einsicht in die Struktur der optimalen Lösung und der Verlauf des adjungierten Zustands kann für eine Sensitivitätsanalyse sowie zum Reglerentwurf verwendet werden [19]. Eine bekannte, indirekte Methode zur Lösung von (3.1) ist die sogenannte *Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode*, welche auch den Schwerpunkt dieser Arbeit darstellt und im nächsten Kapitel detailliert behandelt wird.

4 Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Vorstellung der *Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode (GELM)* zur Lösung des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems, wobei sich die Ausführungen an [20] orientieren. Bei der GELM handelt es sich um ein indirektes Verfahren welches sich für den Einsatz in modellprädiktiven Regelungen mit Reglerabtastzeiten im Millisekundenbereich eignet und eine effiziente Implementierung auf Echtzeithardware erlaubt. Die erweiterte Lagrange-Methode kann sowohl für die Lösung von statischen als auch dynamischen Optimierungsaufgaben verwendet werden. Der erste Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich mit den grundlegenden Ideen und Eigenschaften dieser Methode, welche sich sehr anschaulich anhand eines einfachen statischen Optimierungsproblems demonstrieren lassen.

4.1 Motivation und Grundidee

Eine weit verbreitete Vorgehensweise im Bereich der Optimierung ist es, das ursprüngliche Optimierungsproblem durch ein neu konstruiertes, alternatives Optimierungsproblem zu ersetzen, welches sich einfacher lösen lässt und/oder eine numerisch effizientere Implementierung erlaubt.

Bei der sogenannten *Quadratischen Bestrafungsmethode* (Englisch: *Quadratic Penalty Method*) wird beispielsweise das gleichungsbeschränkte Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad (4.1a)$$

$$\text{u.B.v. } g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, N_g \quad (4.1b)$$

mit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch eine Folge von unbeschränkten Optimierungsproblemen der Form

$$\min_{\bar{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^n} Q_k(\bar{\mathbf{x}}_k; c_k) = f(\bar{\mathbf{x}}_k) + \frac{c_k}{2} \sum_{i=1}^{N_g} g_i^2(\bar{\mathbf{x}}_k) \quad (4.2)$$

mit sukzessive größer werdendem Strafparameter $c_{k+1} > c_k > 0$ ersetzt. Dabei wird mit $k = 0, 1, \dots$ der Iterationsindex bezeichnet. Da das neu konstruierte Optimierungsproblem (4.2) keine Beschränkungen mehr aufweist, können zur Lösung die bekannten Verfahren aus dem Bereich der unbeschränkten, statischen Optimierung verwendet werden. Die zu minimierende quadratische Straffunktion $Q_k(\bar{\mathbf{x}}_k; c_k)$ des alternativen Optimierungsproblems

(4.2) setzt sich dabei aus der Summe der Kostenfunktion (4.1a) des beschränkten Optimierungsproblems und einem zusätzlichen Strafterm für die Beschränkungen (4.1b) zusammen. Der quadratische Strafterm $\frac{c_k}{2} \sum_{i=1}^{N_g} g_i^2(\bar{\mathbf{x}}_k)$ ist positiv, falls an einem Punkt $\bar{\mathbf{x}}_k$ eine Verletzung der Beschränkungen (4.1b) vorliegt, oder exakt null, falls am entsprechenden Punkt alle Beschränkungen erfüllt sind. Mit größer werdendem Strafparameter c_k werden somit Beschränkungsverletzungen zunehmend stärker bestraft, weshalb man erwarten kann, dass das Minimum $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ des alternativen Problems (4.2) mit zunehmendem Iterationsindex k immer näher an der zulässigen Menge $\mathcal{X} = \{\bar{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\bar{\mathbf{x}}_k) = 0, i = 1, \dots, N_g\}$ des ursprünglichen Optimierungsproblems (4.1) zu liegen kommt. Zur Veranschaulichung dieses Prinzips wird das gleichungsbeschränkte Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \quad (4.3a)$$

$$\text{u.B.v. } g(\mathbf{x}) = -2x_1 + x_2 = 0 \quad (4.3b)$$

betrachtet. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass der Punkt $\mathbf{x}^* = [0.8 \ 1.6]^T$ mit dem Lagrange-Multiplikator $\lambda^* = -1.2$ dem strikt globalen Minimum $f(\mathbf{x}^*) = 1.8$ der Optimierungsaufgabe (4.3) entspricht. Das zu (4.3) alternative Optimierungsproblem im Iterationsschritt k ergibt sich demnach in der Form

$$\min_{\bar{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^2} Q_k(\bar{\mathbf{x}}_k; c_k) = (\bar{x}_{k,1} - 2)^2 + (\bar{x}_{k,2} - 1)^2 + \frac{c_k}{2} (-2\bar{x}_{k,1} + \bar{x}_{k,2})^2. \quad (4.4)$$

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für (4.4) lauten

$$(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_k} Q_k)(\bar{\mathbf{x}}_k^*; c_k) = \begin{bmatrix} \bar{x}_{k,1}^*(2 + 4c_k) + \bar{x}_{k,2}^*(-2c_k) - 4 \\ \bar{x}_{k,1}^*(-2c_k) + \bar{x}_{k,2}^*(2 + c_k) - 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.5)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert für ein vorgegebenes c_k den optimalen Punkt

$$\bar{\mathbf{x}}_k^* = \begin{bmatrix} \frac{4(c_k+1)}{5c_k+2} & \frac{2(4c_k+1)}{5c_k+2} \end{bmatrix}^T. \quad (4.6)$$

Da sich die Eigenwerte der Hessematrix

$$\left(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{x}}_k}^2 Q_k \right) (\bar{\mathbf{x}}_k^*; c_k) = \begin{bmatrix} 2 + 4c_k & -2c_k \\ -2c_k & 2 + c_k \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

zu $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 2 + 5c_k$ ergeben, folgt für $c_k > 0$ die positive Definitheit der Hessematrix womit der optimale Punkt $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ von (4.6) dem strikt globalen Minimum der quadratischen Straffunktion $Q_k(\bar{\mathbf{x}}_k; c_k)$ entspricht. Die Lage des Optimums $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ des alternativen Optimierungsproblems (4.4), die entsprechende Verletzung der Beschränkung $g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$ der ursprünglichen Optimierungsaufgabe (4.3), die Konditionszahl der Hessematrix $\kappa_k = \text{cond}\left(\left(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{x}}_k}^2 Q_k\right)(\bar{\mathbf{x}}_k^*; c_k)\right)$, der Term $c_k g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$ sowie die Strafparameter c_k in Abhängigkeit des Iterationsindex k sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst, wobei für die Folge der Strafparameter $\{c_k\} = 5^k, k = 0, 1, 2, \dots$ verwendet wurde. Tabelle 4.1 liefert die folgenden wichtigen Erkenntnisse:

k	c_k	$\bar{\mathbf{x}}_k^*$	$g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$	κ_k	$c_k g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$
0	1	$[1.1429 \quad 1.4286]^T$	-0.8571	3.50	-0.8571
1	5	$[0.8889 \quad 1.5556]^T$	-0.2222	13.50	-1.1111
2	25	$[0.8189 \quad 1.5906]^T$	-0.0472	63.50	-1.1811
3	125	$[0.8038 \quad 1.5981]^T$	-0.0096	313.50	-1.1962
4	625	$[0.8008 \quad 1.5996]^T$	-0.0019	1563.50	-1.1992
5	3125	$[0.8002 \quad 1.5999]^T$	-0.0004	7813.50	-1.1998
6	15625	$[0.8000 \quad 1.6000]^T$	-0.0001	39063.50	-1.2000

Tabelle 4.1: Lage des optimalen Punktes $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ des alternativen Optimierungsproblems (4.4), zugehörige Verletzung der Beschränkung $g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$ der ursprünglichen Optimierungsaufgabe (4.3), Konditionszahl κ_k der Hessematrix (4.7), der Term $c_k g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$ sowie die Strafparameter c_k in Abhängigkeit des Iterationsindex k

- Die Lösung $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ des alternativen Optimierungsproblems (4.4) nähert sich mit größer werdendem Strafparameter c_k der Lösung \mathbf{x}^* des ursprünglichen Optimierungsproblems (4.3) und im Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{x}}_k^* = \mathbf{x}^*$.
- Für größer werdende Strafparameter c_k ist die Hessematrix $(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_k}^2 Q_k)(\bar{\mathbf{x}}_k^*; c_k)$ zunehmend schlechter konditioniert, was den Einsatz vieler bekannter Verfahren aus dem Bereich der unbeschränkten, statischen Optimierung wesentlich erschwert. Dies stellt den wesentlichen Nachteil dieser Methode dar.
- Der Term $c_k g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$ nähert sich mit größer werdendem Strafparameter c_k dem Lagrange-Multiplikator λ^* der ursprünglichen Optimierungsaufgabe (4.3) und im Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k g(\bar{\mathbf{x}}_k^*) = \lambda^*$.

Der Pseudocode für die quadratische Bestrafungsmethode ist in Algorithmus 1 skizziert¹. Die Einführung der nichtnegativen Folge $\{\tau_k\}$ in Algorithmus 1 bewirkt, dass mit zunehmendem Iterationsindex k die Minimierung umso genauer durchgeführt wird. Für weitere Details und Konvergenzeigenschaften dieser Methode sei auf [21, 22] verwiesen.

Die *erweiterte Lagrange-Methode* (Englisch: *augmented Lagrangian method* oder *method of multipliers*) steht nun in enger Beziehung zu der soeben erläuterten quadratischen Bestrafungsmethode und zeichnet sich dadurch aus, dass zusätzlich zum quadratischen Strafterm eine Schätzung des Lagrange-Multiplikators $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^{N_g}$ des ursprünglichen Optimierungsproblems in der Kostenfunktion des alternativen Optimierungsproblems

¹Da die Syntax der bekannten Programmiersprachen wie MATLAB oder C bzw. C++ in englischer Sprache definiert ist, werden die Pseudocodes in dieser Dokumentation ebenso allesamt in Englisch formuliert.

Algorithm 1: Quadratic Penalty Method**Initialization**

- Choose initial penalty parameter $c_0 > 0$ and starting point $\bar{\mathbf{x}}_0^s$
- Choose a nonnegative sequence $\{\tau_k\}$ with $\tau_{k+1} < \tau_k$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = 0$
- Choose tolerance $\epsilon > 0$

for $k = 0$ **to** k_{\max} **do**

- Find an approximate minimum $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ of $Q_k(\bar{\mathbf{x}}_k; c_k)$, starting at $\bar{\mathbf{x}}_k^s$ and terminating when $\|(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_k} Q_k)(\bar{\mathbf{x}}_k^*; c_k)\|_2 < \tau_k$

- **if** $\sum_{i=1}^{N_g} g_i^2(\bar{\mathbf{x}}_k^*) < \epsilon$ **then**

- | **stop** with approximate solution $\bar{\mathbf{x}}_k^*$

end if

- Update penalty parameter $c_{k+1} > c_k$

- Update starting point $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^s$ (e.g. $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^s = \bar{\mathbf{x}}_k^*$)

end for

inkludiert wird, wodurch die Kondition der Hessematrix deutlich verbessert wird. Wie man anhand von Tabelle 4.1 weiters erkennt, erfüllt die Lösung $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ nicht exakt die Gleichungsbeschränkung $g(\bar{\mathbf{x}}_k^*) = 0$, sondern es gilt die Abschätzung [21]

$$g(\bar{\mathbf{x}}_k^*) \approx \frac{\lambda^*}{c_k}. \quad (4.8)$$

Es stellt sich nun die Frage, auf welche Weise man die quadratische Straffunktion $Q_k(\bar{\mathbf{x}}_k; c_k)$ von (4.2) erweitern muss, damit die zugehörige Lösung $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ die Gleichungsbeschränkungen $g_i(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$, $i = 1, \dots, N_g$ von (4.1b) mit besserer Genauigkeit erfüllt, auch für niedrige Werte des Strafparameters c_k . Die erweiterte Lagrange-Methode bewerkstelligt auch dies durch die Inklusion einer Schätzung des Lagrange-Multiplikators in der zu minimierenden Kostenfunktion, womit sich das ursprüngliche Optimierungsproblem (4.1) durch eine Sequenz von Optimierungsproblemen der Form

$$\min_{\bar{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^n} L_{A,k}(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^k; c_k) = f(\bar{\mathbf{x}}_k) + \sum_{i=1}^{N_g} \bar{\lambda}_i^k g_i(\bar{\mathbf{x}}_k) + \frac{c_k}{2} \sum_{i=1}^{N_g} g_i^2(\bar{\mathbf{x}}_k) \quad (4.9)$$

mit der sogenannten *erweiterten Lagrange-Funktion* (Englisch: *augmented Lagrangian function*) $L_{A,k}(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^k; c_k)$ ersetzen lässt, wobei $k = 0, 1, \dots$ wieder den Iterationsindex kennzeichnet. Durch einen Vergleich mit der bereits bekannten (Standard) Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_g} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \quad (4.10)$$

erkennt man, dass sich die erweiterte Lagrange-Funktion lediglich durch das Vorhandensein des quadratischen Strafterms unterscheidet. In diesem Sinne kann $L_{A,k}(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^k; c_k)$ als Kombination der (Standard) Lagrange-Funktion (4.10) mit der quadratischen Straffunktion

(4.2) interpretiert werden. Für einen vorgegebenen Strafparameter $c_k > 0$ und der Schätzung $\bar{\lambda}^k$ des Lagrange-Multiplikators lauten die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für (4.9)

$$(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_k} L_{A,k})(\bar{\mathbf{x}}_k^*, \bar{\lambda}^k; c_k) = (\nabla f)(\bar{\mathbf{x}}_k^*) + \sum_{i=1}^{N_g} [\bar{\lambda}_i^k + c_k g_i(\bar{\mathbf{x}}_k^*)] (\nabla g_i)(\bar{\mathbf{x}}_k^*) = \mathbf{0} . \quad (4.11)$$

Ein Vergleich von (4.11) mit den notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung von (4.1), welche sich mit der Lagrange-Funktion (4.10) zu

$$(\nabla_{\mathbf{x}} L)(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = (\nabla f)(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{N_g} \lambda_i^* (\nabla g_i)(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

ergeben, liefert den Zusammenhang

$$\lambda_i^* \approx \bar{\lambda}_i^k + c_k g_i(\bar{\mathbf{x}}_k^*) , \quad i = 1, \dots, N_g , \quad (4.13)$$

bzw.

$$g_i(\bar{\mathbf{x}}_k^*) \approx \frac{\lambda_i^* - \bar{\lambda}_i^k}{c_k} , \quad i = 1, \dots, N_g . \quad (4.14)$$

Aus der Abschätzung (4.14) der erweiterten Lagrange-Methode ist zu erkennen, dass für eine hinreichend gute Schätzung des Lagrange-Multiplikators, d. h. $\bar{\lambda}_i^k \approx \lambda_i^*$, $i = 1, \dots, N_g$, die Gleichungsbeschränkungen $g_i(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$, $i = 1, \dots, N_g$ mit wesentlich besserer Genauigkeit erfüllt sind, verglichen zur Abschätzung (4.8) der quadratischen Bestrafungsmethode. Neben dem Strafparameter c_k verfügt die erweiterte Lagrange-Methode mithilfe der Schätzung $\bar{\lambda}^k$ des Lagrange-Multiplikators über eine zusätzliche Möglichkeit die Genauigkeit der Lösung $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ zu verbessern. Darüber hinaus liefert (4.13) eine Berechnungsvorschrift zur Verbesserung der aktuellen Schätzung $\bar{\lambda}^k$ des Lagrange-Multiplikators in der Form

$$\bar{\lambda}_i^{k+1} = \bar{\lambda}_i^k + c_k g_i(\bar{\mathbf{x}}_k^*) , \quad i = 1, \dots, N_g . \quad (4.15)$$

Um die Vorteile der erweiterten Lagrange-Methode gegenüber der quadratischen Bestrafungsmethode zu demonstrieren, wird wieder die einfache Optimierungsaufgabe (4.3) betrachtet. Als Folge der Strafparameter wird wie zuvor $\{c_k\} = 5^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ verwendet. Die Aktualisierung der Schätzung des Lagrange-Multiplikators erfolgt mit der Berechnungsvorschrift (4.15), wobei $\bar{\lambda}^0 = 0$ gewählt wurde. Damit lautet das alternative Optimierungsproblem im Iterationsschritt k analog zu (4.9)

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^2} \quad L_{A,k}(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\lambda}^k; c_k) &= (\bar{x}_{k,1} - 2)^2 + (\bar{x}_{k,2} - 1)^2 + \bar{\lambda}^k (-2\bar{x}_{k,1} + \bar{x}_{k,2}) \\ &\quad + \frac{c_k}{2} (-2\bar{x}_{k,1} + \bar{x}_{k,2})^2 . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung folgen mit (4.11) zu

$$(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_k} L_{A,k})(\bar{\mathbf{x}}_k^*, \bar{\lambda}^k; c_k) = \begin{bmatrix} \bar{x}_{k,1}^* (2 + 4c_k) + \bar{x}_{k,2}^* (-2c_k) - 2\bar{\lambda}^k - 4 \\ \bar{x}_{k,1}^* (-2c_k) + \bar{x}_{k,2}^* (2 + c_k) + \bar{\lambda}^k - 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} . \quad (4.17)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet

$$\bar{\mathbf{x}}_k^* = \left[\frac{4c_k + 2\bar{\lambda}^k + 4}{5c_k + 2} \quad \frac{8c_k - \bar{\lambda}^k + 2}{5c_k + 2} \right]^T. \quad (4.18)$$

Die Eigenwerte der Hessematrix

$$\left(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_k \bar{\lambda}_k}^2 L_{A,k} \right) (\bar{\mathbf{x}}_k^*, \bar{\lambda}_k^*; c_k) = \begin{bmatrix} 2 + 4c_k & -2c_k \\ -2c_k & 2 + c_k \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

folgen zu $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 2 + 5c_k$, womit für $c_k > 0$ die Hessematrix positiv definit ist und die Lösung (4.18) dem strikt globalen Minimum der erweiterten Lagrange-Funktion $L_{A,k}(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\lambda}^k; c_k)$ entspricht. Die Lage dieses Optimums $\bar{\mathbf{x}}_k^*$, die entsprechende Verletzung der Beschränkung $g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$ der ursprünglichen Optimierungsaufgabe (4.3), die Konditionszahl der Hessematrix $\kappa_k = \text{cond} \left(\left(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_k \bar{\lambda}_k}^2 L_{A,k} \right) (\bar{\mathbf{x}}_k^*, \bar{\lambda}_k^*; c_k) \right)$, die Strafparameter c_k sowie die Schätzung des Lagrange-Multiplikators $\bar{\lambda}^k$ in Abhängigkeit des Iterationsindex k ist in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Vergleicht man nun Tabelle 4.1 mit Tabelle 4.2, so stellt

k	c_k	$\bar{\lambda}^k$	$\bar{\mathbf{x}}_k^*$	$g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$	κ_k
0	1	0	$\begin{bmatrix} 1.1429 & 1.4286 \end{bmatrix}^T$	-0.8571	3.50
1	5	-0.8571	$\begin{bmatrix} 0.8254 & 1.5873 \end{bmatrix}^T$	-0.0635	13.50
2	25	-1.1746	$\begin{bmatrix} 0.8004 & 1.5998 \end{bmatrix}^T$	-0.0010	63.50
3	125	-1.1996	$\begin{bmatrix} 0.8000 & 1.6000 \end{bmatrix}^T$	-0.0000	313.50

Tabelle 4.2: Lage des optimalen Punktes $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ des alternativen Optimierungsproblems (4.16), zugehörige Verletzung der Beschränkung $g(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$ der ursprünglichen Optimierungsaufgabe (4.3), Konditionszahl κ_k der Hessematrix (4.19), die Strafparameter c_k sowie die Schätzung des Lagrange-Multiplikators $\bar{\lambda}^k$ in Abhängigkeit des Iterationsindex k

man fest, dass zur Erreichung der gleichen Genauigkeit der Lösung $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.6 \end{bmatrix}^T$ mit $\lambda^* = -1.2$ die erweiterte Lagrange-Methode wesentlich weniger Iterationen benötigt als die quadratische Bestrafungsmethode. Weiters ist die Verbesserung hinsichtlich der Kondition der Hessematrix zu erkennen. Zur Lösung eines beschränkten, statischen Optimierungsproblems eignet sich somit aus dem Blickwinkel der Numerik die erweiterte Lagrange-Methode wesentlich besser als die quadratische Bestrafungsmethode. Der Pseudocode der erweiterten Lagrange-Methode ist in Algorithmus 2 skizziert. Für weitere Details und Konvergenzeigenschaften dieser Methode sei auf [21, 22] verwiesen.

Eine alternative Möglichkeit zur Motivation der erweiterten Lagrange-Methode liefert die sogenannte *Dualitätstheorie* (Englisch: *Duality* oder *Duality principle*) [19, 21]. Im Sinne dieser Theorie wird das ursprüngliche Optimierungsproblem (4.1), welches in weiterer Folge

Algorithm 2: Augmented Lagrangian Method**Initialization**

- Choose initial penalty parameter $c_0 > 0$ and starting points $\bar{\mathbf{x}}_0^s$ and $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^0$
- Choose a nonnegative sequence $\{\tau_k\}$ with $\tau_{k+1} < \tau_k$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = 0$
- Choose tolerance $\epsilon > 0$

for $k = 0$ **to** k_{\max} **do**

- Find an approximate minimum $\bar{\mathbf{x}}_k^*$ of $L_{A,k}(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^k; c_k)$, starting at $\bar{\mathbf{x}}_k^s$ and terminating when $\|(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_k} L_{A,k})(\bar{\mathbf{x}}_k^*, \bar{\boldsymbol{\lambda}}^k; c_k)\|_2 < \tau_k$
- **if** $\sum_{i=1}^{N_g} g_i^2(\bar{\mathbf{x}}_k^*) < \epsilon$ **then**
 - | **stop** with approximate solution $\bar{\mathbf{x}}_k^*$
- **end if**
- Update Lagrange multiplier $\bar{\lambda}_i^{k+1} = \bar{\lambda}_i^k + c_k g_i(\bar{\mathbf{x}}_k^*)$, $i = 1, \dots, N_g$
- Update penalty parameter $c_{k+1} \geq c_k$
- Update starting point $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^s$ (e.g. $\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^s = \bar{\mathbf{x}}_k^*$)

end for

als *primales Problem* (Englisch: *primal problem*) bezeichnet wird, durch das sogenannte *duale Problem* (Englisch: *dual problem*) in der Form

$$\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N_g}} \theta(\boldsymbol{\lambda}) \quad (4.20)$$

ersetzt, wobei mit $\theta : \mathbb{R}^{N_g} \rightarrow \mathbb{R}$ die *duale Funktion*

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} L_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}; c) \quad (4.21)$$

mit der erweiterten Lagrange-Funktion $L_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}; c)$ von (4.9) bezeichnet wird. Dies ermöglicht die kompakte Formulierung des dualen Problems (4.20) in der Form eines *Maximierungs-Minimierungs-Problems* (*Max-Min-Problem*)

$$\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N_g}} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} L_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}; c) . \quad (4.22)$$

Da das Max-Min-Problem (4.22) im Vergleich zum ursprünglichen Optimierungsproblem (4.1) keine Beschränkungen mehr aufweist, lässt sich (4.22) oftmals einfacher lösen als (4.1). Die Formulierung des ursprünglichen Optimierungsproblems (4.1) in der Form (4.22) wird auch als *erweiterte Lagrange-Formulierung* (Englisch: *augmented Lagrangian formulation*) von (4.1) bezeichnet. Dabei wird nach dem größten Minimum der erweiterten Lagrange-Funktion gesucht. Im Sinne der Dualitätstheorie werden die Variablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ des primalen Problems (4.1) als *primale Variablen* (Englisch: *primal variables*) und die Variablen $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N_g}$ des dualen Problems (4.20) als *duale Variablen* (Englisch: *dual variables*) bezeichnet. Es stellt sich nun die Frage nach dem Zusammenhang der Lösung \mathbf{x}^* des primalen Problems (4.1) mit der Lösung $\boldsymbol{\lambda}^*$ des dualen Problems (4.20). Wie

in [19] gezeigt wird, folgt für einen primalen optimalen Punkt \mathbf{x}^* , dass jeder Lagrange-Multiplikator $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$, welcher am Punkt \mathbf{x}^* die *Karush-Kuhn-Tucker (KKT) notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung* [15] erfüllt, auch eine Lösung des dualen Problems ist, also $\boldsymbol{\lambda}^* = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ folgt. Im Sinne der Dualitätstheorie ist insbesondere die Kehrfrage von Interesse, nämlich wann sichergestellt ist, dass eine dual optimale Lösung von (4.20) auch eine optimale Lösung des primalen Problems (4.1) ist. Dabei kann für jeden zulässigen primalen Punkt $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, N_g\}$ und jeden zulässigen dualen Punkt $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{R}^{N_g}$ aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \theta(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) &= \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} L_A(\mathbf{x}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}; c) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_g} \tilde{\lambda}_i g_i(\mathbf{x}) + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^{N_g} g_i^2(\mathbf{x}) \\ &\leq f(\tilde{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{N_g} \tilde{\lambda}_i \underbrace{g_i(\tilde{\mathbf{x}})}_{=0} + \frac{c}{2} \sum_{i=1}^{N_g} \underbrace{g_i^2(\tilde{\mathbf{x}})}_{=0} \\ &= f(\tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

die Ungleichung

$$\theta(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \leq f(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (4.24)$$

gefolgt werden. Die Bedingung (4.24) wird als *schwache Dualität* (Englisch: *weak duality*) bezeichnet und besagt insbesondere, dass das Maximum $\theta(\boldsymbol{\lambda}^*)$ der dualen Funktion stets eine untere Schranke für den optimalen Kostenfunktionswert $f(\mathbf{x}^*)$ des primalen Problems ist, also

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}^*) \leq f(\mathbf{x}^*) \quad (4.25)$$

gilt. Die Differenz $f(\mathbf{x}^*) - \theta(\boldsymbol{\lambda}^*)$ wird als *Dualitätslücke* (Englisch: *duality gap*) bezeichnet. Wenn

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}^*) = f(\mathbf{x}^*) \quad (4.26)$$

gilt, so existiert keine Dualitätslücke und man spricht von *starker Dualität* (Englisch: *strong duality*). Der Nachweis starker Dualität gestaltet sich im Allgemeinen sehr schwierig und beruht auf Konvexitätseigenschaften des primalen Problems. Ein Ansatz dazu findet sich bspw. in [19]. Falls nun \mathbf{x}^* eine primal optimale Lösung von (4.1) und $\boldsymbol{\lambda}^*$ eine dual optimale Lösung von (4.20) ist und starke Dualität vorliegt, dann erfüllt die erweiterte Lagrange-Funktion $L_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}; c)$ die sogenannte *Sattelpunktbedingung* (Englisch: *saddle point condition*)

$$L_A(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}; c) \leq L_A(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*; c) \leq L_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*; c), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N_g}. \quad (4.27)$$

Umgekehrt gilt ebenfalls: wenn \mathbf{x}^* und $\boldsymbol{\lambda}^*$ die Sattelpunktbedingung (4.27) erfüllen, dann ist \mathbf{x}^* primal optimal, $\boldsymbol{\lambda}^*$ ist dual optimal und die Dualitätslücke ist null [19]. Die Sattelpunktbedingung (4.27) besagt, dass eine primal-dual optimale Lösung \mathbf{x}^* und $\boldsymbol{\lambda}^*$ die erweiterte Lagrange-Funktion bezüglich der primalen Variablen minimiert und bezüglich der dualen Variablen maximiert. Unter Annahme starker Dualität, kann nun von der Lösung $\boldsymbol{\lambda}^*$ des dualen Problems auf die Lösung \mathbf{x}^* des primalen Problems geschlossen

werden, indem zunächst λ^* durch Lösung von (4.20) bestimmt wird und anschließend unter Ausnutzung der Sattelpunktbedingung

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} L_A(\mathbf{x}, \lambda^*; c) \quad (4.28)$$

folgt. Diese Vorgehensweise soll nun anhand des einfachen Optimierungsproblems (4.3) demonstriert werden. Die erweiterte Lagrange-Funktion lautet hierfür

$$L_A(\mathbf{x}, \lambda; c) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + \lambda(-2x_1 + x_2) + \frac{c}{2}(-2x_1 + x_2)^2 \quad (4.29)$$

und die duale Funktion folgt analog zu (4.21) zu

$$\begin{aligned} \theta(\lambda) &= \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} L_A(\mathbf{x}, \lambda; c) \\ &= \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + \lambda(-2x_1 + x_2) + \frac{c}{2}(-2x_1 + x_2)^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Wie bereits zuvor gezeigt (siehe (4.18)) folgt für ein gegebenes $c \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dass der Punkt

$$x_1^* = \frac{4c + 2\lambda + 4}{5c + 2}, \quad x_2^* = \frac{8c - \lambda + 2}{5c + 2} \quad (4.31)$$

dem strikt globalen Minimum der erweiterten Lagrange-Funktion entspricht. Damit ergibt sich die duale Funktion (4.30) zu

$$\theta(\lambda) = \frac{-5\lambda^2 + 18c - 12\lambda}{10c + 4} \quad (4.32)$$

und das duale Problem (4.20) lautet

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}} \theta(\lambda) = \frac{-5\lambda^2 + 18c - 12\lambda}{10c + 4}. \quad (4.33)$$

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass das strikt globale Maximum der dualen Funktion zu $\lambda^* = -1.2$ folgt, womit sich der optimale Kostenfunktionswert des dualen Problems zu $\theta(\lambda^*) = 1.8$ ergibt. Ein Vergleich mit dem optimalen Kostenfunktionswert $f(\mathbf{x}^*) = 1.8$ des primalen Problems (4.3) zeigt, dass die Dualitätslücke null ist und die Sattelpunktbedingung (4.27) Gültigkeit hat. Damit folgt durch Einsetzen von $\lambda^* = -1.2$ in (4.31) der optimale Punkt zu $\mathbf{x}^* = [0.8 \quad 1.6]^T$, dem bereits bekannten strikt globalen Minimum der ursprünglichen Optimierungsaufgabe (4.3). Mit dem Sattelpunkt

$$\left(\mathbf{x}^* = [0.8 \quad 1.6]^T, \lambda^* = -1.2 \right) \quad (4.34)$$

der erweiterten Lagrange-Funktion folgt $L_A(\mathbf{x}^*, \lambda^*; c) = 1.8$. Die erweiterte Lagrange-Methode in Algorithmus 2 löst nun das Max-Min-Problem (4.22) indem die Maximierungs- und Minimierungsschritte in einem sequentiellen Vorgehen kombiniert werden, womit eine iterative Annäherung an den Sattelpunkt $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ der erweiterten Lagrange-Funktion

k	c_k	$\bar{\lambda}^k$	$\bar{\mathbf{x}}_k^*$	$L_A(\bar{\mathbf{x}}_k^*, \bar{\lambda}^k; c_k)$
0	1	0	$\begin{bmatrix} 1.1429 & 1.4286 \end{bmatrix}^T$	1.2857
1	5	-0.8571	$\begin{bmatrix} 0.8254 & 1.5873 \end{bmatrix}^T$	1.7891
2	25	-1.1746	$\begin{bmatrix} 0.8004 & 1.5998 \end{bmatrix}^T$	1.8000
3	125	-1.1996	$\begin{bmatrix} 0.8000 & 1.6000 \end{bmatrix}^T$	1.8000

Tabelle 4.3: Iterative Annäherung der erweiterten Lagrange-Methode an den Sattelpunkt (4.34) der Optimierungsaufgabe (4.3)

erfolgt. In Tabelle 4.3 wird nun als Erweiterung von Tabelle 4.2 diese iterative Annäherung an den Sattelpunkt (4.34) der Optimierungsaufgabe (4.3) gezeigt, indem in jedem Iterationsschritt die erweiterte Lagrange-Funktion $L_A(\bar{\mathbf{x}}_k^*, \bar{\lambda}^k; c_k)$ ausgewertet wurde. Die Erweiterung der Lagrange-Funktion um den quadratischen Strafterm bringt numerische Vorteile mit sich und wirkt sich zudem positiv auf die Dualität des Problems aus [19, 20]. In [23] wird weiters gezeigt, dass für hinreichend große Strafparameter $c > 0$ starke Dualität auch für nicht-konvexe Problemstellungen erreicht werden kann. Für die Lösung des inneren Minimierungsproblems von (4.22) können, wie bereits zuvor erwähnt, die bekannten Verfahren aus der unbeschränkten, statischen Optimierung verwendet werden, während das äußere Maximierungsproblem von (4.22) mit der *Methode des steilsten Aufstiegs* (Englisch: *deepest ascent method*) gelöst wird. Die Richtung des steilsten Aufstiegs erfolgt zu

$$(\nabla_{\bar{\lambda}} L_{A,k})(\bar{\mathbf{x}}_k^*, \bar{\lambda}^k; c_k) = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}_k^*), \quad (4.35)$$

womit sich mit der Schrittweite $\alpha_k \in \mathbb{R}_{>0}$ die Aktualisierungsvorschrift für die dualen Variablen $\bar{\lambda}$ zu

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \alpha_k \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}_k^*) \quad (4.36)$$

ergibt. Die Schrittweitensteuerung kann allerdings nicht mit einer Liniensuche erfolgen, da die erweiterte Lagrange-Funktion $L_A(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}; c)$ linear bezüglich $\boldsymbol{\lambda}$ und aus diesem Grund kein Maximumpunkt im Endlichen existiert. Der Zusammenhang von (4.11) mit (4.12) motiviert jedoch zur Verwendung des Strafparameters als Schrittweite, also $\alpha_k = c_k$. Damit folgt (4.36) zu

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\lambda}^k + c_k \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}_k^*). \quad (4.37)$$

Dies entspricht exakt der schon bekannten Aktualisierungsvorschrift (4.15).

Die nachfolgenden Abschnitte befassen sich mit der Herleitung der erweiterten Lagrange-Formulierung eines Optimalsteuerungsproblems bevor die grundlegende Vorgehensweise aus Algorithmus 2 zur Lösung des dualen Problems angewendet wird.

4.2 Erweiterte Lagrange-Formulierung des Optimalsteuerungsproblems

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die generelle Struktur des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems für ein nichtlineares, zeitinvariantes System in Zustandsraumdarstellung in der Form

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot)} J(\mathbf{u}(\tau); \mathbf{x}_0) = \varphi(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad (4.38a)$$

$$\text{u.B.v. } \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \quad (4.38b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.38c)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau)) = \mathbf{0}, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (4.38d)$$

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{x}(T)) = \mathbf{0} \quad (4.38e)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(\tau)) \leq \mathbf{0}, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (4.38f)$$

$$\mathbf{h}_T(\mathbf{x}(T)) \leq \mathbf{0} \quad (4.38g)$$

$$\mathbf{u}(\tau) \in [\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max}], \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (4.38h)$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, dem Endkostenterm $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dem integralen Kostenterm $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, der Systemdynamik $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit dem Anfangszustand \mathbf{x}_0 , den Gleichungsbeschränkungen $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$, den Endgleichungsbeschränkungen $\mathbf{g}_T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N_{gT}}$, den Ungleichungsbeschränkungen $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$, den Endungleichungsbeschränkungen $\mathbf{h}_T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{N_{hT}}$ sowie den Box-Beschränkungen der Stellgröße $\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max} \in \mathbb{R}^m$.

Die Grundidee der erweiterten Lagrange-Methode besteht, wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, darin, das ursprüngliche Optimalsteuerungsproblem (4.38) durch das korrespondierende *duale Problem* zu ersetzen. Dabei werden in einem ersten Schritt sogenannte *Slack-Variablen* in der Form

$$\mathbf{v}(\tau) \in \mathbb{R}^{N_h}, \quad \mathbf{v}(\tau) \geq \mathbf{0} \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (4.39a)$$

und

$$\mathbf{v}_T \in \mathbb{R}^{N_{hT}}, \quad \mathbf{v}_T \geq \mathbf{0} \quad (4.39b)$$

eingeführt, um die Ungleichungs- und Endungleichungsbeschränkungen (4.38f) bzw. (4.38g) den Gleichungs- und Endgleichungsbeschränkungen (4.38d) bzw. (4.38e) hinzufügen zu können. Damit folgen die neuen Gleichungsbeschränkungen zu

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau)) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}(\tau)) + \mathbf{v}(\tau) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (4.40a)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_T(\mathbf{x}_T, \mathbf{v}_T) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_T(\mathbf{x}_T) \\ \mathbf{h}_T(\mathbf{x}_T) + \mathbf{v}_T \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.40b)$$

mit $\mathbf{x}_T = \mathbf{x}(T)$. Im Folgenden wird für den Ausdruck $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und einer symmetrischen und positiv definiten Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die abgekürzte Schreibweise $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}^2$

verwendet. Analog zum letzten Abschnitt lassen sich mithilfe von *Lagrange-Multiplikatoren*

$$\boldsymbol{\mu}(\tau) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_g^T(\tau) & \boldsymbol{\mu}_h^T(\tau) \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\mu}_g(\tau) \in \mathbb{R}^{N_g}, \quad \boldsymbol{\mu}_h(\tau) \in \mathbb{R}^{N_h} \quad (4.41a)$$

$$\boldsymbol{\mu}_T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{gT}^T & \boldsymbol{\mu}_{hT}^T \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\mu}_{gT} \in \mathbb{R}^{N_{gT}}, \quad \boldsymbol{\mu}_{hT} \in \mathbb{R}^{N_{hT}} \quad (4.41b)$$

und *Strafparameter*²

$$\mathbf{c}(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_g^T(\tau) & \mathbf{c}_h^T(\tau) \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{c}_g(\tau) \in \mathbb{R}^{N_g}, \quad \mathbf{c}_h(\tau) \in \mathbb{R}^{N_h} \quad (4.42a)$$

$$\mathbf{c}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{gT}^T & \mathbf{c}_{hT}^T \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{c}_{gT} \in \mathbb{R}^{N_{gT}}, \quad \mathbf{c}_{hT} \in \mathbb{R}^{N_{hT}} \quad (4.42b)$$

mit den korrespondierenden Diagonalmatrizen $\mathbf{C}(\tau) = \text{diag}(\mathbf{c}(\tau))$ und $\mathbf{C}_T = \text{diag}(\mathbf{c}_T)$ die Beschränkungen (4.40) im Kostenfunktional \tilde{J} des alternativen Optimalsteuerungsproblems inkludieren, womit

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\mu}(\tau), \boldsymbol{\mu}_T, \mathbf{c}(\tau), \mathbf{c}_T, \mathbf{v}(\tau), \mathbf{v}_T; \mathbf{x}_0) &= \tilde{\varphi}(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\mu}_T, \mathbf{c}_T, \mathbf{v}_T) \\ &+ \int_0^T \tilde{l}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\mu}(\tau), \mathbf{c}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) \, d\tau \end{aligned} \quad (4.43)$$

mit dem neuen Endkostenterm

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\mu}_T, \mathbf{c}_T, \mathbf{v}_T) = \varphi(\mathbf{x}_T) + \boldsymbol{\mu}_T^T \tilde{\mathbf{g}}_T(\mathbf{x}_T, \mathbf{v}_T) + \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}_T(\mathbf{x}_T, \mathbf{v}_T)\|_{\mathbf{C}_T}^2 \quad (4.44)$$

und dem neuen integralen Kostenterm

$$\begin{aligned} \tilde{l}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\mu}(\tau), \mathbf{c}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) &= l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) + \boldsymbol{\mu}^T(\tau) \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) \\ &+ \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}(\tau))\|_{\mathbf{C}(\tau)}^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

folgt. Für die Lagrange-Multiplikatoren (4.41) und Strafparameter (4.42) gilt dabei

$$\boldsymbol{\mu}_h(\tau) \geq \mathbf{0} \quad \forall \tau \in [0, T], \quad \boldsymbol{\mu}_{hT} \geq \mathbf{0} \quad (4.46a)$$

$$\mathbf{c}_g(\tau), \mathbf{c}_h(\tau) > \mathbf{0} \quad \forall \tau \in [0, T], \quad \mathbf{c}_{gT}, \mathbf{c}_{hT} > \mathbf{0}. \quad (4.46b)$$

Anstelle des ursprünglichen Optimalsteuerungsproblems (4.38) wird bei der erweiterten Lagrange-Methode nun das alternative Optimalsteuerungsproblem in Form des Max-Min-Problems

$$\max_{\boldsymbol{\mu}(\cdot), \boldsymbol{\mu}_T} \min_{\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot), \mathbf{v}_T} \tilde{J}(\mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\mu}(\tau), \boldsymbol{\mu}_T, \mathbf{c}(\tau), \mathbf{c}_T, \mathbf{v}(\tau), \mathbf{v}_T; \mathbf{x}_0) \quad (4.47a)$$

$$\text{u.B.v.} \quad \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \quad (4.47b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.47c)$$

$$\mathbf{v}(\tau) \geq \mathbf{0}, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (4.47d)$$

$$\mathbf{v}_T \geq \mathbf{0} \quad (4.47e)$$

$$\mathbf{u}(\tau) \in [\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max}], \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (4.47f)$$

²Im Vergleich zum Abschnitt 4.1 werden hier also Verletzungen von Beschränkungen getrennt voneinander bestraft.

gelöst.

Die Minimierung des Kostenfunktional (4.47a) bezüglich der Optimierungsvariablen \mathbf{v}_T und $\mathbf{v}(\tau)$ lässt sich nun analytisch durchführen. Für \mathbf{v}_T resultiert daraus ein beschränktes, statisches Optimierungsproblem in der Form

$$\min_{\mathbf{v}_T \in \mathbb{R}^{N_{h_T}}} f(\mathbf{v}_T) = \boldsymbol{\mu}_{h_T}^T (\mathbf{h}_T(\mathbf{x}_T) + \mathbf{v}_T) + \frac{1}{2} \|\mathbf{h}_T(\mathbf{x}_T) + \mathbf{v}_T\|_{\mathbf{C}_{h_T}}^2 \quad (4.48a)$$

$$\text{u.B.v. } \mathbf{h}(\mathbf{v}_T) = -\mathbf{v}_T \leq \mathbf{0} . \quad (4.48b)$$

Durch Ausmultiplizieren und Vernachlässigung der von \mathbf{v}_T unabhängigen Terme in der Kostenfunktion (4.48a) lässt sich das Optimierungsproblem (4.48) in der vereinfachten Form

$$\min_{\mathbf{v}_T \in \mathbb{R}^{N_{h_T}}} f(\mathbf{v}_T) = \frac{1}{2} \mathbf{v}_T^T \mathbf{C}_{h_T} \mathbf{v}_T - \mathbf{v}_T^T (-\boldsymbol{\mu}_{h_T} - \mathbf{C}_{h_T} \mathbf{h}_T(\mathbf{x}_T)) \quad (4.49a)$$

$$\text{u.B.v. } \mathbf{h}(\mathbf{v}_T) = -\mathbf{v}_T \leq \mathbf{0} \quad (4.49b)$$

angeben.

Als Vorbereitung auf die Lösung von (4.49) wird zunächst das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b} = \frac{q_1}{2} x_1^2 + \frac{q_2}{2} x_2^2 - b_1 x_1 - b_2 x_2 \quad (4.50a)$$

$$\text{u.B.v. } h_1(\mathbf{x}) = -x_1 \leq 0 \quad (4.50b)$$

$$h_2(\mathbf{x}) = -x_2 \leq 0 , \quad (4.50c)$$

mit $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$, $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2]^T$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ und einer symmetrischen, positiv definiten Diagonalmatrix $\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, q_2)$, $q_1, q_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, betrachtet, welches im 2-dimensionalen Raum äquivalent zu (4.49) ist. Mit dem Lagrange-Multiplikator $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = [\tilde{\mu}_1 \ \tilde{\mu}_2]^T$, $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2 \in \mathbb{R}$ folgen die KKT-Bedingungen für das statische Optimierungsproblem (4.50) mit reinen Ungleichungsbeschränkungen zu

$$(\nabla f)(\mathbf{x}^*) + \tilde{\mu}_1^* (\nabla h_1)(\mathbf{x}^*) + \tilde{\mu}_2^* (\nabla h_2)(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (4.51a)$$

$$h_1(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad (4.51b)$$

$$h_2(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad (4.51c)$$

$$\tilde{\mu}_1^* \geq 0 \quad (4.51d)$$

$$\tilde{\mu}_2^* \geq 0 \quad (4.51e)$$

$$\tilde{\mu}_1^* h_1(\mathbf{x}^*) + \tilde{\mu}_2^* h_2(\mathbf{x}^*) = 0 . \quad (4.51f)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass \mathbf{x}^* ein regulärer Punkt ist³. Die sogenannte *complementary slackness condition* (4.51f) hat dabei zur Folge, dass $h_j(\mathbf{x}^*) < 0$ stets $\tilde{\mu}_j^* = 0$ und $\tilde{\mu}_j^* > 0$

³Im Falle reiner Ungleichungsbeschränkungen wird ein zulässiger Punkt \mathbf{x} als regulär bezeichnet, wenn die Gradientenvektoren $(\nabla h_j)(\mathbf{x})$, $j \in J$ linear unabhängig sind. Dabei wird mit J die Indexmenge aller am Punkt \mathbf{x} aktiven Ungleichungsbeschränkungen bezeichnet. Eine Ungleichungsbeschränkung $h_i(\mathbf{x}) \leq 0$ ist aktiv an einem Punkt \mathbf{x} , wenn $h_i(\mathbf{x}) = 0$ und *inaktiv*, falls $h_i(\mathbf{x}) < 0$ ist.

stets $h_j(\mathbf{x}^*) = 0$ impliziert. Mit der Kostenfunktion (4.50a) und den Ungleichungsbeschränkungen (4.50b) bzw. (4.50c) folgen

$$(\nabla f)(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} q_1 x_1 - b_1 \\ q_2 x_2 - b_2 \end{bmatrix}, \quad (4.52a)$$

$$(\nabla h_1)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.52b)$$

$$(\nabla h_2)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (4.52c)$$

Aus (4.52b) und (4.52c) folgt, dass jeder zulässige Punkt \mathbf{x} ein regulärer Punkt ist und die KKT-Bedingungen (4.51) lauten

$$\begin{bmatrix} q_1 x_1^* - b_1 \\ q_2 x_2^* - b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\mu}_1^* + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tilde{\mu}_2^* = \mathbf{0} \quad (4.53a)$$

$$-x_1^* \leq 0 \quad (4.53b)$$

$$-x_2^* \leq 0 \quad (4.53c)$$

$$\tilde{\mu}_1^* \geq 0 \quad (4.53d)$$

$$\tilde{\mu}_2^* \geq 0 \quad (4.53e)$$

$$-x_1^* \tilde{\mu}_1^* - x_2^* \tilde{\mu}_2^* = 0. \quad (4.53f)$$

Nun können vier Fälle unterschieden werden.

- (a) Beide Ungleichungsbeschränkungen sind inaktiv, d. h.

$$h_1(\mathbf{x}^*) = -x_1^* < 0, \quad h_2(\mathbf{x}^*) = -x_2^* < 0.$$

Damit folgt $\tilde{\mu}_1^* = \tilde{\mu}_2^* = 0$ und als Lösung ergibt sich

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix}^T = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T.$$

- (b) Die Ungleichungsbeschränkung $h_1(\mathbf{x}^*)$ ist inaktiv und $h_2(\mathbf{x}^*)$ ist aktiv, d. h.

$$h_1(\mathbf{x}^*) = -x_1^* < 0, \quad h_2(\mathbf{x}^*) = -x_2^* = 0.$$

Damit folgt $\tilde{\mu}_1^* = 0$, $\tilde{\mu}_2^* \geq 0$ und als Lösung ergibt sich

$$\tilde{\mu}_2^* = -b_2, \quad \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ q_1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

- (c) Die Ungleichungsbeschränkung $h_1(\mathbf{x}^*)$ ist aktiv und $h_2(\mathbf{x}^*)$ ist inaktiv, d. h.

$$h_1(\mathbf{x}^*) = -x_1^* = 0, \quad h_2(\mathbf{x}^*) = -x_2^* < 0.$$

Damit folgt $\tilde{\mu}_1^* \geq 0$, $\tilde{\mu}_2^* = 0$ und als Lösung ergibt sich

$$\tilde{\mu}_1^* = -b_1, \quad \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}^T.$$

(d) Beide Ungleichungsbeschränkungen sind aktiv, d. h.

$$h_1(\mathbf{x}^*) = -x_1^* = 0, \quad h_2(\mathbf{x}^*) = -x_2^* = 0.$$

Damit folgt $\tilde{\mu}_1^* \geq 0$, $\tilde{\mu}_2^* \geq 0$ und als Lösung ergibt sich

$$\tilde{\mu}_1^* = -b_1, \quad \tilde{\mu}_2^* = -b_2, \quad \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

In Abhängigkeit der Parameter $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tritt nun *genau einer* der Fälle (a)-(d) auf. Für $b_1 = b_2 = 0$ ist dies Fall (d) mit der Lösung $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Eine äquivalente Schreibweise der Lösung $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ lässt sich mithilfe der vektorwertigen *max-Funktion* in der Form

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{max}\{\mathbf{0}, \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}\} \tag{4.54}$$

angeben. Dabei ist die *max-Funktion* $\mathbf{max}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ zweier Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ definiert als

$$\mathbf{max}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \mathbf{max}\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \max\{x_1, y_1\} \\ \max\{x_2, y_2\} \\ \vdots \\ \max\{x_n, y_n\} \end{bmatrix}. \tag{4.55}$$

Für $b_1 > 0, b_2 > 0$ hingegen tritt Fall (a) mit der Lösung $\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$ auf. Auch hier kann man die Lösung $\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$ in der Form (4.54) angeben. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, dass sich für sämtliche Kombinationen der Parameter $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ die Lösung des Optimierungsproblems (4.50) stets in der Form (4.54) anschreiben lässt. Die KKT hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung für das Optimierungsproblem (4.50) lautet

$$\mathbf{d}^T \left((\nabla^2 f)(\mathbf{x}^*) + \tilde{\mu}_1^* (\nabla^2 h_1)(\mathbf{x}^*) + \tilde{\mu}_2^* (\nabla^2 h_2)(\mathbf{x}^*) \right) \mathbf{d} > 0 \tag{4.56}$$

für alle $\mathbf{d} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}^*}\bar{\mathcal{X}}$, $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ und $\mathcal{T}_{\mathbf{x}^*}\bar{\mathcal{X}}$ dem Tangentialraum von $\bar{\mathcal{X}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h_j(\mathbf{x}) = 0, j \in J\}$ am Punkt \mathbf{x}^* . Dabei wird mit J wieder die Menge der Indizes aller am Punkt \mathbf{x}^* aktiven Ungleichungsbeschränkungen bezeichnet. Mit

$$(\nabla^2 f)(\mathbf{x}^*) = \mathbf{Q}, \tag{4.57a}$$

$$(\nabla^2 h_1)(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \tag{4.57b}$$

$$(\nabla^2 h_2)(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \tag{4.57c}$$

folgt, dass aufgrund der positiven Definitheit der Matrix \mathbf{Q} die Bedingung (4.56) für alle $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist und es sich bei der Lösung (4.54) somit um das strikte globale Minimum der Optimierungsaufgabe (4.50) handelt.

Mit den soeben gewonnenen Erkenntnissen folgt nun die Lösung des Optimierungsproblems (4.49) zu

$$\mathbf{v}_T^* = \mathbf{max}\left\{ \mathbf{0}, -\mathbf{C}_{h_T}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{h_T} - \mathbf{h}_T(\mathbf{x}_T) \right\}. \tag{4.58}$$

Die Minimierung des Kostenfunktional (4.47a) bezüglich der Optimierungsvariablen $\mathbf{v}(\tau)$ führt auf

$$\min_{\mathbf{v}(\cdot)} \int_0^T \left(\boldsymbol{\mu}_h^T(\tau) (\mathbf{h}(\mathbf{x}(\tau)) + \mathbf{v}(\tau)) + \frac{1}{2} \|\mathbf{h}(\mathbf{x}(\tau)) + \mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{C}_h(\tau)}^2 \right) d\tau \quad (4.59a)$$

$$\text{u.B.v.} \quad -\mathbf{v}(\tau) \leq \mathbf{0}, \quad \forall \tau \in [0, T]. \quad (4.59b)$$

Da $\mathbf{v}(\tau)$ nur innerhalb des Integrals vorkommt und unabhängig von der Systemdynamik (4.47b) ist, lässt sich die Minimierung von (4.59) bezüglich $\mathbf{v}(\tau)$ für jeden Zeitpunkt $\tau \in [0, T]$ analytisch durchführen. Dabei entsteht zu jedem Zeitpunkt ein statisches Optimierungsproblem analog zu (4.48), dessen Lösung sich analog zu (4.58) in der Form

$$\mathbf{v}^*(\tau) = \mathbf{max} \left\{ \mathbf{0}, -\mathbf{C}_h^{-1}(\tau) \boldsymbol{\mu}_h(\tau) - \mathbf{h}(\mathbf{x}(\tau)) \right\} \quad (4.60)$$

angeben lässt.

Durch Einsetzen der Lösungen (4.58) und (4.60) in (4.40a) und (4.40b) folgen die transformierten Gleichungsbeschränkungen schlussendlich zu

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(\tau), \boldsymbol{\mu}_h(\tau), \mathbf{c}_h(\tau)) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau)) \\ \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{x}(\tau), \boldsymbol{\mu}_h(\tau), \mathbf{c}_h(\tau)) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (4.61a)$$

$$\bar{\mathbf{g}}_T(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\mu}_{h_T}, \mathbf{c}_{h_T}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_T(\mathbf{x}_T) \\ \bar{\mathbf{h}}_T(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\mu}_{h_T}, \mathbf{c}_{h_T}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.61b)$$

mit den transformierten Ungleichungsbeschränkungen

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{x}(\tau), \boldsymbol{\mu}_h(\tau), \mathbf{c}_h(\tau)) &= \mathbf{max} \left\{ \mathbf{h}(\mathbf{x}(\tau)), -\mathbf{C}_h^{-1}(\tau) \boldsymbol{\mu}_h(\tau) \right\} \\ &= \mathbf{max} \left\{ \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}(\tau)) \\ h_2(\mathbf{x}(\tau)) \\ \vdots \\ h_{N_h}(\mathbf{x}(\tau)) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\mu_{h_1}(\tau)/c_{h_1}(\tau) \\ -\mu_{h_2}(\tau)/c_{h_2}(\tau) \\ \vdots \\ -\mu_{h_{N_h}}(\tau)/c_{h_{N_h}}(\tau) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.62a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{h}}_T(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\mu}_{h_T}, \mathbf{c}_{h_T}) &= \mathbf{max} \left\{ \mathbf{h}_T(\mathbf{x}_T), -\mathbf{C}_{h_T}^{-1} \boldsymbol{\mu}_{h_T} \right\} \\ &= \mathbf{max} \left\{ \begin{bmatrix} h_{T_1}(\mathbf{x}_T) \\ h_{T_2}(\mathbf{x}_T) \\ \vdots \\ h_{T_{N_{h_T}}}(\mathbf{x}_T) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\mu_{h_{T_1}}/c_{h_{T_1}} \\ -\mu_{h_{T_2}}/c_{h_{T_2}} \\ \vdots \\ -\mu_{h_{T_{N_{h_T}}}}/c_{h_{T_{N_{h_T}}}} \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (4.62b)$$

Mit (4.61a) und (4.61b) folgt aus dem Max-Min-Problem (4.47) das duale Problem zu

$$\max_{\boldsymbol{\mu}(\cdot), \boldsymbol{\mu}_T} \min_{\mathbf{u}(\cdot)} \bar{J}(\mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\mu}(\tau), \boldsymbol{\mu}_T, \mathbf{c}(\tau), \mathbf{c}_T; \mathbf{x}_0) \quad (4.63a)$$

$$\text{u.B.v.} \quad \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \quad (4.63b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.63c)$$

$$\mathbf{u}(\tau) \in [\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max}], \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (4.63d)$$

mit dem erweiterten Kostenfunktional

$$\begin{aligned} \bar{J}(\mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\mu}(\tau), \boldsymbol{\mu}_T, \mathbf{c}(\tau), \mathbf{c}_T; \mathbf{x}_0) &= \bar{\varphi}(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\mu}_T, \mathbf{c}_T) \\ &+ \int_0^T \bar{l}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\mu}(\tau), \mathbf{c}(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (4.64)$$

dem erweiterten Endkostenterm

$$\bar{\varphi}(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\mu}_T, \mathbf{c}_T) = \varphi(\mathbf{x}_T) + \boldsymbol{\mu}_T^T \bar{\mathbf{g}}_T(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\mu}_{h_T}, \mathbf{c}_{h_T}) + \frac{1}{2} \left\| \bar{\mathbf{g}}_T(\mathbf{x}_T, \boldsymbol{\mu}_{h_T}, \mathbf{c}_{h_T}) \right\|_{\mathbf{C}_T}^2 \quad (4.65)$$

und dem erweiterten integralen Kostenterm

$$\begin{aligned} \bar{l}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\mu}(\tau), \mathbf{c}(\tau)) &= l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) + \boldsymbol{\mu}^T(\tau) \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(\tau), \boldsymbol{\mu}_h(\tau), \mathbf{c}_h(\tau)) \\ &+ \frac{1}{2} \left\| \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(\tau), \boldsymbol{\mu}_h(\tau), \mathbf{c}_h(\tau)) \right\|_{\mathbf{C}(\tau)}^2. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Wie auch schon im letzten Abschnitt erwähnt wurde, wird die Formulierung des ursprünglichen Optimalsteuerungsproblems (4.38) in der Form (4.63) als erweiterte Lagrange-Formulierung bezeichnet. Das soeben hergeleitete duale Problem (4.63), bestehend aus einem inneren Minimierungsproblem und einem äußeren Maximierungsproblem, besitzt mit Ausnahme der Systemdynamik (4.63b) samt zugehörigen Anfangszustand (4.63c) lediglich die Box-Beschränkungen der Stellgröße (4.63d) als Beschränkungen und ist somit wesentlich einfacher zu lösen als das ursprüngliche Optimalsteuerungsproblem (4.38).

Wie im Abschnitt 4.1 gilt auch hier: Falls $\mathbf{u}^*(\tau)$ eine primal optimale Lösung von (4.38) ist und $(\boldsymbol{\mu}^*(\tau), \boldsymbol{\mu}_T^*)$ eine dual optimale Lösung von (4.63) ist und starke Dualität vorliegt, dann gilt die Sattelpunktbedingung

$$\bar{J}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_T, \mathbf{c}, \mathbf{c}_T; \mathbf{x}_0) \leq \bar{J}(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\mu}_T^*, \mathbf{c}, \mathbf{c}_T; \mathbf{x}_0) \leq \bar{J}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\mu}_T^*, \mathbf{c}, \mathbf{c}_T; \mathbf{x}_0). \quad (4.67)$$

Umgekehrt gilt ebenfalls: Wenn die Sattelpunktbedingung (4.67) erfüllt ist, dann ist $\mathbf{u}^*(\tau)$ primal optimal, $(\boldsymbol{\mu}^*(\tau), \boldsymbol{\mu}_T^*)$ ist dual optimal und die Dualitätslücke ist null.

Die Idee der im nächsten Abschnitt behandelten Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode besteht nun darin, anstelle des ursprünglichen Optimalsteuerungsproblems (4.38) das duale Problem (4.63) mittels einer iterativen Annäherung an den Sattelpunkt $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\mu}_T^*)$ zu lösen. Dabei wird das innere Minimierungsproblem mit einer Gradienten-Projektionsmethode und das äußere Maximierungsproblem mit der Methode des steilsten Aufstiegs gelöst.

4.3 Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode

Der Pseudocode der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange Methode, welche im Folgenden näher behandelt wird, ist in Algorithmus 3 skizziert. Zu Beginn erfolgt die Initialisierung des Algorithmus. Diese betrifft die Lagrange-Multiplikatoren und Strafparameter

$$\bar{\boldsymbol{\mu}}^1(\tau) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}^1(\tau) \\ \boldsymbol{\mu}_T^1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{c}}^1(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^1(\tau) \\ \mathbf{c}_T^1 \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

sowie die Toleranzen $\epsilon_g \in \mathbb{R}^{N_g}$, $\epsilon_{g_T} \in \mathbb{R}^{N_{g_T}}$, $\epsilon_h \in \mathbb{R}^{N_h}$, $\epsilon_{h_T} \in \mathbb{R}^{N_{h_T}}$, $\epsilon_{\text{rel},c} \in \mathbb{R}$ und $\epsilon_{\text{rel},u} \in \mathbb{R}$, welche für das Konvergenzkriterium und die Aktualisierung der Lagrange-Multiplikatoren und Strafparameter in (4.71) und (4.72) benötigt werden. In der aktuellen Lagrange-Iteration i erfolgt die Lösung des inneren Minimierungsproblems (4.69) für die aktuellen Lagrange-Multiplikatoren $\bar{\boldsymbol{\mu}}^i$ und Strafparameter $\bar{\mathbf{c}}^i$. Dafür wird die Gradienten-Projektionsmethode verwendet. Diese wird im Abschnitt 4.3.1 detailliert behandelt und liefert als Lösung die Eingangstrajektorie $\mathbf{u}^i(\tau)$ samt zugehörigem Zustandsverlauf $\mathbf{x}^i(\tau)$ sowie ein Maß η^i ihres Konvergenzverhaltens. Das nachfolgende Konvergenzkriterium der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode, welches im Abschnitt 4.3.4 erläutert wird, bewertet einerseits die Verletzung der Beschränkungen (4.70) und andererseits mithilfe von η^i auch das Konvergenzverhalten des vorangegangenen Minimierungsschritts. Ist das Konvergenzkriterium noch nicht erfüllt, so erfolgt eine Aktualisierung der Lagrange-Multiplikatoren und Strafparameter, welche im Abschnitt 4.3.3 beschrieben wird, und das Minimierungsproblem (4.69) wird erneut gelöst.

4.3.1 Gradienten-Projektionsmethode

Das Optimalsteuerungsproblem (4.69) entspricht dem inneren Minimierungsproblem der erweiterten Lagrange-Formulierung (4.63) für die aktuellen Lagrange-Multiplikatoren $\bar{\boldsymbol{\mu}}^i$ und Strafparameter $\bar{\mathbf{c}}^i$. Da außer der Systemdynamik mit zugehörigem Anfangszustand lediglich Box-Beschränkungen der Eingangsgröße auftreten, lässt sich (4.69) mithilfe der Gradienten-Projektionsmethode effizient lösen. Die Grundlage dieser Methode stellen die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für (4.69) dar, welche sich mithilfe der sogenannten *Hamiltonfunktion*

$$H(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\lambda}(\tau), \boldsymbol{\mu}^i(\tau), \mathbf{c}^i(\tau)) = \bar{l}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\mu}^i(\tau), \mathbf{c}^i(\tau)) + \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)), \quad (4.73)$$

wobei $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ als *adjungierter Zustand* (Englisch: *adjoint state*) bezeichnet wird, in der Form

$$\dot{\mathbf{x}}^*(\tau) = \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} H \right)^T (\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \boldsymbol{\lambda}^*(\tau), \boldsymbol{\mu}^i(\tau), \mathbf{c}^i(\tau)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau)) \quad (4.74a)$$

$$\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.74b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(\tau) = - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} H \right)^T (\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \boldsymbol{\lambda}^*(\tau), \boldsymbol{\mu}^i(\tau), \mathbf{c}^i(\tau)) \quad (4.74c)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^*(T) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_T} \bar{\varphi} \right)^T (\mathbf{x}_T^*, \boldsymbol{\mu}_T^i, \mathbf{c}_T^i) \quad (4.74d)$$

$$\mathbf{u}^*(\tau) = \arg \min_{\mathbf{u}(\tau) \in [\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max}]} H(\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}(\tau), \boldsymbol{\lambda}^*(\tau), \boldsymbol{\mu}^i(\tau), \mathbf{c}^i(\tau)), \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (4.74e)$$

anschreiben lassen [15]. Die notwendigen Optimalitätsbedingungen setzen sich also aus der Systemdynamik (4.74a) samt zugehörigem Anfangszustand (4.74b), der sogenannten *adjungierten Dynamik* (Englisch: *adjoint dynamics*) (4.74c) samt zugehörigem Endzustand (4.74d) sowie der Bedingung (4.74e), welche das *Minimumsprinzip von Pontryagin*

Algorithm 3: Gradient-based Augmented Lagrangian Method**Initialization**

- Choose initial multipliers $\bar{\boldsymbol{\mu}}^1$ and penalties $\bar{\mathbf{c}}^1$
- Choose tolerances $\boldsymbol{\epsilon}_g > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\epsilon}_{g_T} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\epsilon}_h > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\epsilon}_{h_T} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{rel},c} > 0$, $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{rel},u} > 0$

for $i = 1$ **to** i_{max} **do**

- Compute input $\mathbf{u}^i(\tau)$ and state $\mathbf{x}^i(\tau)$, $\tau \in [0, T]$ by solving the inner minimization problem

$$\min_{\mathbf{u}(\cdot)} \bar{J}(\mathbf{u}(\tau), \bar{\boldsymbol{\mu}}^i(\tau), \bar{\mathbf{c}}^i(\tau); \mathbf{x}_0) \quad (4.69a)$$

$$\text{u.B.v. } \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \quad (4.69b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.69c)$$

$$\mathbf{u}(\tau) \in [\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max}], \quad \forall \tau \in [0, T] \quad (4.69d)$$

- Store constraint functions

$$\mathbf{g}^i(\tau) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^i(\tau)) \quad (4.70a)$$

$$\mathbf{g}_T^i = \mathbf{g}_T(\mathbf{x}_T^i) \quad (4.70b)$$

$$\bar{\mathbf{h}}^i(\tau) = \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{x}^i(\tau), \boldsymbol{\mu}_h^i(\tau), \mathbf{c}_h^i(\tau)) \quad (4.70c)$$

$$\bar{\mathbf{h}}_T^i = \bar{\mathbf{h}}_T(\mathbf{x}_T^i, \boldsymbol{\mu}_{h_T}^i, \mathbf{c}_{h_T}^i) \quad (4.70d)$$

- **if** convergence criterion is reached **then**

| **break** with approximate solution $\mathbf{u}^i(\tau)$ and $\mathbf{x}^i(\tau)$

end if

- Update multipliers

$$\boldsymbol{\mu}_g^{i+1}(\tau) = \zeta_g(\boldsymbol{\mu}_g^i(\tau), \mathbf{c}_g^i(\tau), \mathbf{g}^i(\tau), \boldsymbol{\epsilon}_g) \quad (4.71a)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{g_T}^{i+1} = \zeta_{g_T}(\boldsymbol{\mu}_{g_T}^i, \mathbf{c}_{g_T}^i, \mathbf{g}_T^i, \boldsymbol{\epsilon}_{g_T}) \quad (4.71b)$$

$$\boldsymbol{\mu}_h^{i+1}(\tau) = \zeta_h(\boldsymbol{\mu}_h^i(\tau), \mathbf{c}_h^i(\tau), \bar{\mathbf{h}}^i(\tau), \boldsymbol{\epsilon}_h) \quad (4.71c)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{h_T}^{i+1} = \zeta_{h_T}(\boldsymbol{\mu}_{h_T}^i, \mathbf{c}_{h_T}^i, \bar{\mathbf{h}}_T^i, \boldsymbol{\epsilon}_{h_T}) \quad (4.71d)$$

- Update penalties

$$\mathbf{c}_g^{i+1}(\tau) = \xi_g(\mathbf{c}_g^i(\tau), \mathbf{g}^i(\tau), \mathbf{g}^{i-1}(\tau), \boldsymbol{\epsilon}_g) \quad (4.72a)$$

$$\mathbf{c}_{g_T}^{i+1} = \xi_{g_T}(\mathbf{c}_{g_T}^i, \mathbf{g}_T^i, \mathbf{g}_T^{i-1}, \boldsymbol{\epsilon}_{g_T}) \quad (4.72b)$$

$$\mathbf{c}_h^{i+1}(\tau) = \xi_h(\mathbf{c}_h^i(\tau), \bar{\mathbf{h}}^i(\tau), \bar{\mathbf{h}}^{i-1}(\tau), \boldsymbol{\epsilon}_h) \quad (4.72c)$$

$$\mathbf{c}_{h_T}^{i+1} = \xi_{h_T}(\mathbf{c}_{h_T}^i, \bar{\mathbf{h}}_T^i, \bar{\mathbf{h}}_T^{i-1}, \boldsymbol{\epsilon}_{h_T}) \quad (4.72d)$$

end for

Output

- Control $\mathbf{u}^i(\tau)$ and state $\mathbf{x}^i(\tau)$

berücksichtigt, zusammen. Da für das Differenzialgleichungssystem in \mathbf{x}^* der Wert zum Anfangszeitpunkt $\tau = 0$ und für das Differenzialgleichungssystem in $\boldsymbol{\lambda}^*$ der Wert zum Endzeitpunkt $\tau = T$ gegeben ist, handelt es sich bei (4.74a)-(4.74d) um ein *Zweipunkt-randwertproblem* (Englisch: *two-point boundary value problem*). Der Pseudocode der Gradienten-Projektionsmethode ist in Algorithmus 4 skizziert. Die Initialisierung der Gradienten-Projektionsmethode erfolgt durch Vorgabe einer initialen Eingangstrajektorie $\mathbf{u}^{i|1}(\tau)$, wobei $\mathbf{u}^{i|1}(\tau) = \mathbf{u}^{i-1}(\tau)$ für Lagrange-Iterationen mit Index $i \geq 2$ gilt. Nach der Berechnung der zugehörigen Zustandstrajektorie $\mathbf{x}^{i|1}(\tau)$ durch Vorwärts-Integration der Systemdynamik (4.79) wird in der Gradienten-Iteration i der Verlauf des adjungierten Zustands $\boldsymbol{\lambda}^{i|j}(\tau)$ mittels Rückwärts-Integration der adjungierten Dynamik (4.75) ermittelt. Damit kann in (4.76) der Gradient $\mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{i|j}(\tau)$ der Hamiltonfunktion bezüglich des Einganges berechnet werden bevor mittels der Liniensuche (4.77) die Schrittweite $\alpha^{i|j} > 0$ bestimmt wird. Dabei bezeichnet $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(\tau))$ die Projektionsfunktion mit welcher der Eingang $\mathbf{u}(\tau)$ in die Menge der zulässigen Eingänge (4.69d) projiziert wird. Mit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ folgt die Projektionsfunktion zu $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(\tau)) = [\psi_{\mathbf{u},1}(u_1(\tau)) \quad \psi_{\mathbf{u},2}(u_2(\tau)) \quad \dots \quad \psi_{\mathbf{u},m}(u_m(\tau))]^T$, wobei die einzelnen Komponenten in der Form

$$\psi_{\mathbf{u},i}(u_i(\tau)) = \begin{cases} u_i(\tau) & \text{falls } u_i(\tau) \in (u_{\min,i}, u_{\max,i}) \\ u_{\min,i} & \text{falls } u_i(\tau) \leq u_{\min,i} \\ u_{\max,i} & \text{falls } u_i(\tau) \geq u_{\max,i} \end{cases} \quad (4.81)$$

für $i = 1, \dots, m$ definiert werden. Anschließend erfolgt die Aktualisierung (4.78) der Eingangstrajektorie $\mathbf{u}^{i|j+1}(\tau)$ und die Berechnung der zugehörigen Zustandstrajektorie $\mathbf{x}^{i|j+1}(\tau)$. Das nachfolgende Konvergenzkriterium (4.80) bewertet mittels $\eta^{i|j+1}$ die relative Änderung der Eingangstrajektorie in der Gradienten-Iteration j . Dabei ist die L_2 -Norm einer vektorwertigen Zeitfunktion $\mathbf{x}(\tau) \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0, T]$ mit $T < \infty$ in der Form

$$\|\mathbf{x}(\tau)\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^T \mathbf{x}^T(\tau)\mathbf{x}(\tau) d\tau} \quad (4.82)$$

definiert. Falls die Gradienten-Projektionsmethode in der Iteration j konvergiert ist, d. h. $\eta^{i|j+1} \leq \epsilon_{\text{rel},c}$, oder die maximale Anzahl j_{\max} an Gradienten-Iterationen erreicht wurde, terminiert Algorithmus 4 und liefert die letzte Lösung $(\mathbf{u}^i(\tau), \mathbf{x}^i(\tau), \eta^i)$ an Algorithmus 3.

Für die Zeitdiskretisierung von zeitkontinuierlichen Größen sowie die benötigten numerischen Integrationsverfahren sei auf Anhang A verwiesen.

4.3.2 Wahl der Schrittweite

Die Schrittweitensteuerung zur Lösung des skalaren Optimierungsproblems (4.77), welches sich in der Gradienten-Iteration j der Lagrange-Iteration i auch in der Form

$$\min_{\alpha > 0} g(\alpha) = \bar{J}(\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{i|j}(\tau) - \alpha \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{i|j}(\tau)), \bar{\boldsymbol{\mu}}^i(\tau), \bar{\mathbf{c}}^i(\tau); \mathbf{x}_0) \quad (4.83)$$

darstellen lässt, ist ein zentraler Bestandteil der Gradienten-Projektionsmethode und bedarf besonderer Aufmerksamkeit.

Algorithm 4: Projected Gradient Method**Initialization**

- Choose initial input $\mathbf{u}^{i1}(\tau)$, $\tau \in [0, T]$
- Compute state $\mathbf{x}^{i1}(\tau)$, $\tau \in [0, T]$ by solving (4.79) for $j = 0$

for $j = 1$ **to** j_{\max} **do**

- Compute $\boldsymbol{\lambda}^{ij}(\tau)$ by backward integration of

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{ij}(\tau) &= -\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} H\right)^{\text{T}}\left(\mathbf{x}^{ij}(\tau), \mathbf{u}^{ij}(\tau), \boldsymbol{\lambda}^{ij}(\tau), \boldsymbol{\mu}^i(\tau), \mathbf{c}^i(\tau)\right) \\ \boldsymbol{\lambda}^{ij}(T) &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_T} \bar{\varphi}\right)^{\text{T}}\left(\mathbf{x}_T^i, \boldsymbol{\mu}_T^i, \mathbf{c}_T^i\right)\end{aligned}\quad (4.75)$$

- Compute gradient

$$\mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} H\right)^{\text{T}}\left(\mathbf{x}^{ij}(\tau), \mathbf{u}^{ij}(\tau), \boldsymbol{\lambda}^{ij}(\tau), \boldsymbol{\mu}^i(\tau), \mathbf{c}^i(\tau)\right)\quad (4.76)$$

- Compute step size α^{ij} by solving the line search problem

$$\min_{\alpha > 0} \bar{J}\left(\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}^{ij}(\tau) - \alpha \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau)\right), \bar{\boldsymbol{\mu}}^i(\tau), \bar{\mathbf{c}}^i(\tau); \mathbf{x}_0\right)\quad (4.77)$$

- Update input $\mathbf{u}^{i(j+1)}(\tau)$ according to

$$\mathbf{u}^{i(j+1)}(\tau) = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}^{ij}(\tau) - \alpha \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau)\right)\quad (4.78)$$

- Compute state $\mathbf{x}^{i(j+1)}(\tau)$ by forward integration of

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^{i(j+1)}(\tau) &= \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{i(j+1)}(\tau), \mathbf{u}^{i(j+1)}(\tau)\right) \\ \mathbf{x}^{i(j+1)}(0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\quad (4.79)$$

- Evaluate convergence criterion

$$\eta^{i(j+1)} = \frac{\left\|\mathbf{u}^{i(j+1)}(\tau) - \mathbf{u}^{ij}(\tau)\right\|_{L_2}}{\left\|\mathbf{u}^{i(j+1)}(\tau)\right\|_{L_2}}\quad (4.80)$$

- **if** $\eta^{i(j+1)} \leq \epsilon_{\text{rel},c}$ **or** $j = j_{\max}$ **then**
| **break** with approximate solution
end if

end for**Output to algorithm 3**

- Set control $\mathbf{u}^i(\tau) := \mathbf{u}^{i(j+1)}(\tau)$ and state $\mathbf{x}^i(\tau) := \mathbf{x}^{i(j+1)}(\tau)$
- Return $\eta^i := \eta^{i(j+1)}$

Quadratische Interpolation

Eine weit verbreitete Möglichkeit zur Wahl der Schrittweite α bietet eine *quadratische Interpolation* der zu minimierenden Kostenfunktion $g(\alpha)$. Dazu wird diese für drei verschiedene Schrittweiten $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ mit $\alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3)$ ausgewertet, womit man die drei Punkte $(\alpha_i, g_i = g(\alpha_i))$, $i = 1, 2, 3$ erhält, durch welche nun eine quadratische Interpolationsfunktion der Form

$$\Phi(\alpha) = p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 \quad (4.84)$$

mit $p_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2$ gelegt werden kann. Die Parameter p_j , $j = 0, 1, 2$ erhält man durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$p_0 + p_1\alpha_1 + p_2\alpha_1^2 = g_1 \quad (4.85a)$$

$$p_0 + p_1\alpha_2 + p_2\alpha_2^2 = g_2 \quad (4.85b)$$

$$p_0 + p_1\alpha_3 + p_2\alpha_3^2 = g_3 \quad (4.85c)$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich in Matrix-Schreibweise in der kompakten Form $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{g}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

darstellen. Aufgrund ihrer besonderen Struktur wird die Matrix \mathbf{A} als *Vandermonde-Matrix* und ihre Determinante

$$\det(\mathbf{A}) = (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (4.87)$$

als *Vandermonde-Determinante* bezeichnet. Aus (4.87) folgt insbesondere, dass die Vandermonde-Matrix *genau dann* regulär ist, wenn die Schrittweiten α_i , $i = 1, 2, 3$ paarweise verschiedenen sind. Unter dieser Voraussetzung folgt die eindeutige Lösung von (4.85) zu $\mathbf{p} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}$ und die quadratische Interpolationsfunktion $\Phi(\alpha)$ ergibt sich zu

$$\Phi(\alpha) = p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 = \sum_{i=1}^3 g_i \frac{\prod_{j \neq i} (\alpha - \alpha_j)}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}. \quad (4.88)$$

Die Bestimmung der Schrittweite erfolgt dann durch analytisches Lösen des Optimierungsproblems

$$\min_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_3]} \Phi(\alpha). \quad (4.89)$$

Unter Vernachlässigung der Beschränkung $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_3]$ folgt mit der notwendigen Optimalitätsbedingung erster Ordnung

$$\frac{d}{d\alpha} \Phi(\bar{\alpha}^*) = p_1 + 2p_2\bar{\alpha}^* = 0 \quad (4.90)$$

die optimale Lösung zu

$$\bar{\alpha}^* = -\frac{p_1}{2p_2} = \frac{1}{2} \frac{g_1(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) + g_2(\alpha_3^2 - \alpha_1^2) + g_3(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{g_1(\alpha_2 - \alpha_3) + g_2(\alpha_3 - \alpha_1) + g_3(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (4.91)$$

Der so berechnete Wert $\bar{\alpha}^*$ sollte nur akzeptiert werden, wenn die Interpolationsfunktion (4.88) strikt konvex ist, also die Bedingung

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\Phi(\bar{\alpha}^*) = 2p_2 > 0 \Rightarrow p_2 > 0 \quad (4.92)$$

erfüllt ist, denn nur dann entspricht $\bar{\alpha}^*$ dem strikt lokalen Minimum der Interpolationsfunktion. Sollte diese jedoch für die gewählten Schrittweiten α_i , $i = 1, 2, 3$ nicht strikt konvex sein, so muss eine andere Wahl der Schrittweiten erfolgen. Die Berücksichtigung der Beschränkung $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_3]$ erfolgt durch Projektion der Lösung $\bar{\alpha}^*$ von (4.91) auf das zulässige Gebiet $[\alpha_1, \alpha_3]$, womit sich die optimale Lösung von (4.89) zu

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_3]} \Phi(\alpha) = \begin{cases} \bar{\alpha}^* & \text{falls } \bar{\alpha}^* \in [\alpha_1, \alpha_3] \\ \alpha_1 & \text{falls } \bar{\alpha}^* < \alpha_1 \\ \alpha_3 & \text{falls } \bar{\alpha}^* > \alpha_3 \end{cases} \quad (4.93)$$

ergibt. Diese Vorgehensweise ist in Abbildung 4.1 und Abbildung 4.2 dargestellt. Falls

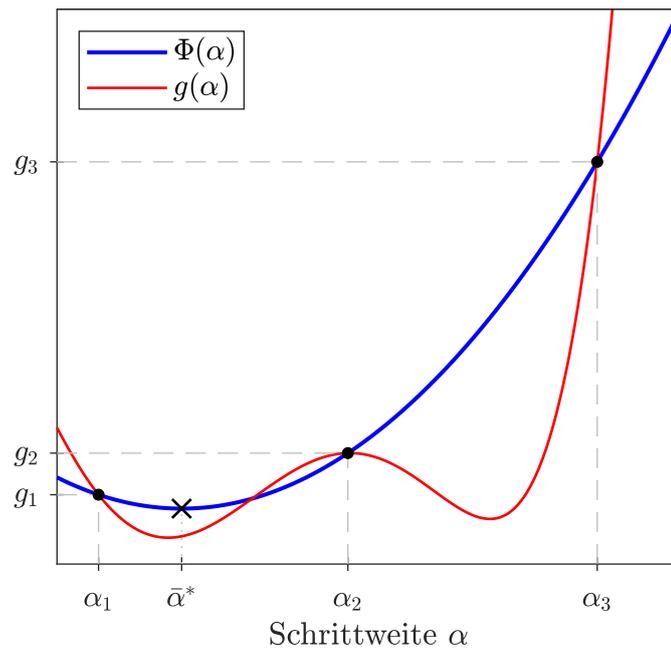


Abbildung 4.1: Grundprinzip der quadratischen Interpolation, optimale Schrittweite $\alpha^* = \bar{\alpha}^*$

die optimale Schrittweite α^* von (4.93) außerhalb der Intervallgrenzen $[\alpha_1, \alpha_3]$ oder nahe bzw. exakt an einer der Intervallgrenzen liegt, wie z. B. in Abbildung 4.2, so kann das Intervall $[\alpha_1, \alpha_3]$ für die nächste Gradienten-Iteration adaptiert werden, siehe [24]. Der wesentliche Nachteil der Methode der quadratischen Interpolation ist der hohe numerische Rechenaufwand, denn um die drei Punkte (α_i, g_i) , $i = 1, 2, 3$ zu erhalten, ist eine dreimalige

Vorwärts-Integration der Systemdynamik mit anschließender Auswertung des erweiterten Kostenfunktionals \bar{J} erforderlich.

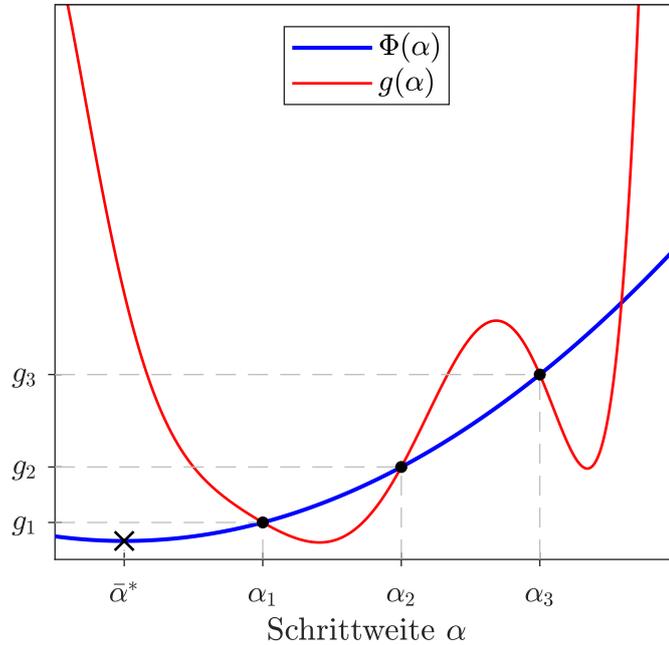


Abbildung 4.2: Grundprinzip der quadratischen Interpolation, optimale Schrittweite $\alpha^* = \alpha_1$

Explizite Liniensuche

Eine aus Sicht des Rechenaufwandes günstigere Möglichkeit zur Bestimmung der Schrittweite wird in [25] vorgestellt und in [26] für den Fall eines Optimalsteuerungsproblems adaptiert. Die Grundidee dieser *expliziten Liniensuche* besteht darin, die Schrittweite $\alpha^{i|j}$ so zu wählen, dass die Differenz zweier aufeinanderfolgender Eingangstrajektorien $\tilde{\mathbf{u}}^{i|j}(\tau)$ und $\mathbf{u}^{i|j+1}(\tau)$ minimiert wird, wobei angenommen wird, dass in beiden Gradienten-Iterationen j und $j + 1$ die gleiche Schrittweite α gewählt wird und die Eingangsbeschränkungen (4.69d) vernachlässigt werden. Es gilt also⁴

$$\tilde{\mathbf{u}}^{i|j}(\tau) = \mathbf{u}^{i|j-1}(\tau) - \alpha \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{i|j-1}(\tau) \quad (4.94a)$$

$$\mathbf{u}^{i|j+1}(\tau) = \mathbf{u}^{i|j}(\tau) - \alpha \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{i|j}(\tau) . \quad (4.94b)$$

⁴Es sei angemerkt, dass es notwendig ist die Eingangstrajektorie $\tilde{\mathbf{u}}^{i|j}(\tau)$ in (4.94a) mit dem Tilde-Zeichen zu notieren, da $\mathbf{u}^{i|j}(\tau) = \mathbf{u}^{i|j-1}(\tau) - \alpha^{i|j-1} \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{i|j-1}(\tau)$ gilt.

Mit (4.94) folgt die optimale Schrittweite zu

$$\begin{aligned}\alpha^{ij} &= \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\| \mathbf{u}^{ij+1}(\tau) - \tilde{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right\|_{L_2}^2 \\ &= \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\| \mathbf{u}^{ij}(\tau) - \mathbf{u}^{ij-1}(\tau) - \alpha \left(\mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) - \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij-1}(\tau) \right) \right\|_{L_2}^2\end{aligned}\quad (4.95)$$

und mit

$$\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) := \mathbf{u}^{ij}(\tau) - \mathbf{u}^{ij-1}(\tau), \quad (4.96a)$$

$$\Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) := \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) - \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij-1}(\tau) \quad (4.96b)$$

erhält man weiters

$$\alpha^{ij} = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\| \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) - \alpha \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right\|_{L_2}^2. \quad (4.97)$$

Diese Vorgehensweise ist in Abbildung 4.3 für den Fall eines skalaren Eingangs skizziert.

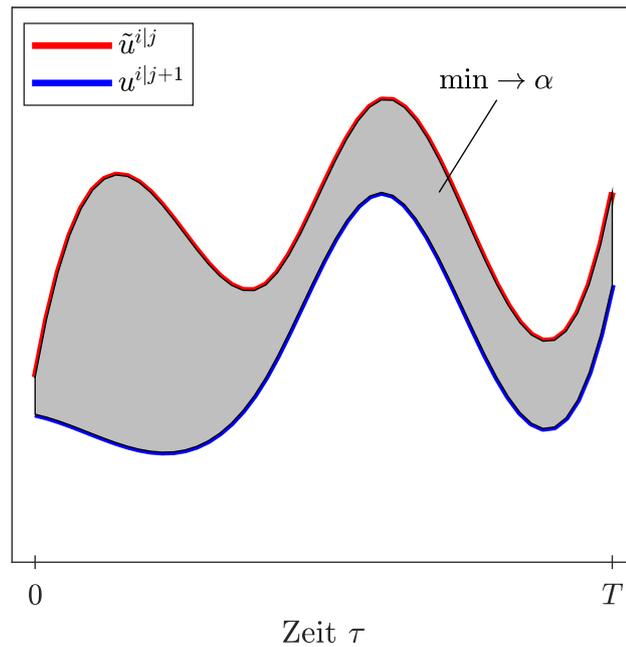


Abbildung 4.3: Grundidee der expliziten Liniensuche

Mit

$$\begin{aligned}
 g(\alpha) &:= \left\| \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) - \alpha \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right\|_{L_2}^2 \\
 &= \int_0^T \left(\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) - \alpha \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right)^T \left(\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) - \alpha \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right) d\tau \\
 &= \int_0^T \left(\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) \right)^T \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) d\tau + \alpha^2 \int_0^T \left(\Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right)^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau \\
 &\quad - 2\alpha \int_0^T \left(\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) \right)^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

folgt die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung für das Minimum α^{ij} von (4.97) zu

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\alpha} g(\alpha^{ij}) &= 2\alpha^{ij} \int_0^T \left(\Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right)^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau - 2 \int_0^T \left(\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) \right)^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.99}$$

woraus

$$\alpha^{ij} = \frac{\int_0^T \left(\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) \right)^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau}{\int_0^T \left(\Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right)^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau} \tag{4.100}$$

folgt. Die hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung lautet

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} g(\alpha^{ij}) = 2 \int_0^T \left(\Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right)^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau > 0 . \tag{4.101}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \neq \mathbf{0}$ gilt, folgt mit (4.101), dass die Schrittweite α^{ij} von (4.100) dem strikt globalen Minimum der Kostenfunktion $g(\alpha)$ von (4.98) entspricht.

Eine zu (4.100) alternative Berechnungsvorschrift der Schrittweite erhält man durch eine Umformulierung der Kostenfunktion (4.98) in der Form

$$g(\alpha) = \left\| \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) - \alpha \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right\|_{L_2}^2 = \alpha^2 \left\| \frac{1}{\alpha} \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) - \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right\|_{L_2}^2 =: \alpha^2 \bar{g}(\alpha) . \tag{4.102}$$

Die Bestimmung der Schrittweite erfolgt dann zu

$$\alpha^{ij} = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \bar{g}(\alpha) . \tag{4.103}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 \bar{g}(\alpha) &= \left\| \frac{1}{\alpha} \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) - \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right\|_{L_2}^2 \\
 &= \frac{1}{\alpha^2} \int_0^T \left(\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) \right)^T \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) d\tau + \int_0^T \left(\Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) \right)^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau \\
 &\quad - \frac{2}{\alpha} \int_0^T \left(\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) \right)^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{4.104}$$

folgt die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung für das Minimum α^{ij} von (4.103) zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \bar{g}(\alpha^{ij}) &= -\frac{2}{(\alpha^{ij})^3} \int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) d\tau + \frac{2}{(\alpha^{ij})^2} \int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau \\ &= -\frac{2}{(\alpha^{ij})^2} \left[\frac{1}{\alpha^{ij}} \int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) d\tau - \int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.105)$$

woraus

$$\alpha^{ij} = \frac{\int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) d\tau}{\int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau} \quad (4.106)$$

folgt. Die hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung lautet

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\alpha^2} \bar{g}(\alpha^{ij}) &= \frac{6}{(\alpha^{ij})^4} \int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) d\tau - \frac{4}{(\alpha^{ij})^3} \int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau \\ &= \frac{2}{(\alpha^{ij})^4} \left[3 \int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) d\tau - 2\alpha^{ij} \int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau \right] \\ &> 0. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Daraus folgt die Bedingung

$$3 \int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) d\tau - 2\alpha^{ij} \int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{d}_{\mathbf{u}}^{ij}(\tau) d\tau > 0. \quad (4.108)$$

Setzt man nun (4.106) in (4.108) ein, so folgt

$$\int_0^T (\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau))^T \Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) d\tau > 0. \quad (4.109)$$

Unter der Voraussetzung, dass $\Delta \mathbf{u}^{ij}(\tau) \neq \mathbf{0}$ gilt, folgt mit (4.109), dass die Schrittweite α^{ij} von (4.106) dem strikt globalen Minimum der Kostenfunktion $\bar{g}(\alpha)$ von (4.104) entspricht.

Ein Problem, welches bei der Anwendung der Berechnungsvorschriften (4.100) bzw. (4.106) auftritt, besteht darin, dass diese negative Werte für α^{ij} liefern, falls die zu minimierende Kostenfunktion $g(\alpha)$ bzw. $\bar{g}(\alpha)$ nicht (lokal) konvex ist [20]. Falls dieser Fall eintritt, kann als Schrittweite entweder eine fest vorgegebene Schrittweite, also $\alpha^{ij} = \alpha_{\text{init}}$ mit $\alpha_{\text{init}} \in \mathbb{R}_{>0}$, oder eine *Ersatzstrategie* (Englisch: *fallback strategy*), also $\alpha^{ij} = \alpha_{\text{fb}}$ mit

$$\alpha_{\text{fb}} = \frac{1}{100} \min_{k \in \{1, \dots, m\}} \left\{ \frac{u_{\max, k} - u_{\min, k}}{\max_{\tau \in [0, T]} |d_{\mathbf{u}, k}^{ij}(\tau)|} \right\} \quad (4.110)$$

verwendet werden [20].

Abschließend verbleibt noch die Frage nach der Wahl der Schrittweite in der ersten Gradienten-Iteration $j = 1$ der ersten Lagrange-Iteration $i = 1$. Auch hier kann entweder $\alpha^{1|1} = \alpha_{\text{init}}$ oder $\alpha^{1|1} = \alpha_{\text{fb}}$ verwendet werden.

4.3.3 Aktualisierung der Lagrange-Multiplikatoren und Strafparameter

Die Aktualisierung der Lagrange-Multiplikatoren (4.71) in Algorithmus 3 erfolgt wie auch schon im Abschnitt 4.1 in Richtung des steilsten Aufstiegs, wobei die Strafparameter als Schrittweite dienen. Damit folgt die Aktualisierungsvorschrift für den Lagrange-Multiplikator μ_g^i einer skalaren Gleichungsbeschränkung $g^i(\tau) = g^i(\mathbf{x}^i(\tau))$ zu

$$\mu_g^{i+1} = \zeta_g(\mu_g^i, c_g^i, g^i, \epsilon_g) = \begin{cases} \mu_g^i + c_g^i g^i & \text{falls } |g^i| > \epsilon_g \wedge \eta^i \leq \epsilon_{\text{rel},u} \\ \mu_g^i & \text{sonst .} \end{cases} \quad (4.111)$$

Die Vorschrift (4.111) verzichtet also auf eine Aktualisierung des Lagrange-Multiplikators μ_g^i falls die Gleichungsbeschränkung hinreichend genau erfüllt wurde und/oder das Gradienten-Projektionsverfahren aus Algorithmus 4 nicht ausreichend konvergiert ist, was mithilfe von η^i und $\epsilon_{\text{rel},u}$ überprüft wird. Man beachte, dass in (4.111) für den Parameter $\epsilon_{\text{rel},u}$ ein viel größerer Wert benutzt wird als für den Parameter $\epsilon_{\text{rel},c}$ im Konvergenzkriterium der Gradienten-Projektionsmethode in Algorithmus 4, also $\epsilon_{\text{rel},u} \gg \epsilon_{\text{rel},c}$ gilt. Dadurch wird sichergestellt, dass eine Aktualisierung der Lagrange-Multiplikatoren auch dann noch erfolgt, falls die Gradienten-Projektionsmethode nicht bis zur vorgegebenen Genauigkeit $\epsilon_{\text{rel},c}$ konvergiert ist. Diese Situation tritt vor allem bei der Realisierung von echtzeitfähigen modellprädiktiven Regelungen auf, bei welchen die maximale Anzahl an Gradienten-Iterationen (und Lagrange-Iterationen) typischerweise sehr stark limitiert ist. Weiters wird der Lagrange-Multiplikator μ_g^{i+1} durch $\mu_{\text{max}} \in \mathbb{R}_{>0}$ in der Form $\mu_g^{i+1} \in [-\mu_{\text{max}}, \mu_{\text{max}}]$ beschränkt, um unbeschränktes Anwachsen/Absinken zu verhindern und numerische Probleme zu vermeiden.

Auf ähnliche Weise folgt die Aktualisierungsvorschrift für den Lagrange-Multiplikator μ_h^i einer skalaren Ungleichungsbeschränkung $\bar{h}^i(\tau) = \bar{h}^i(\mathbf{x}^i(\tau), \mu_h^i, c_h^i)$ zu

$$\mu_h^{i+1} = \zeta_h(\mu_h^i, c_h^i, \bar{h}^i, \epsilon_h) = \begin{cases} \mu_h^i + c_h^i \bar{h}^i & \text{falls } (\bar{h}^i > \epsilon_h \wedge \eta^i \leq \epsilon_{\text{rel},u}) \vee \bar{h}^i < 0 \\ \mu_h^i & \text{sonst .} \end{cases} \quad (4.112)$$

Die Bedingung $\bar{h}^i < 0$ in (4.112) stellt sicher, dass der Lagrange-Multiplikator μ_h^i verringert wird falls die Ungleichungsbeschränkung inaktiv ist. Weiters ist μ_h^{i+1} durch $\mu_h^{i+1} \leq \mu_{\text{max}}$ nach oben hin beschränkt.

Für die Aktualisierung der Strafparameter (4.72) in Algorithmus 3 wird in [20] eine Adaptionstrategie vorgeschlagen, welche die Entwicklung der Beschränkungen innerhalb der letzten zwei Lagrange-Iterationen bewertet und auf Basis dieser Bewertung die Strafparameter aktualisiert. Damit folgt die Aktualisierungsvorschrift für den Strafparameter

c_g^i einer skalaren Gleichungsbeschränkung g^i zu

$$c_g^{i+1} = \xi_g(c_g^i, g^i, g^{i-1}, \epsilon_g) = \begin{cases} \beta_{\text{in}} c_g^i & \text{falls } |g^i| \geq \gamma_{\text{in}} |g^{i-1}| \wedge |g^i| > \epsilon_g \wedge \eta_i \leq \epsilon_{\text{rel},u} \\ \beta_{\text{de}} c_g^i & \text{falls } |g^i| \leq \gamma_{\text{de}} \epsilon_g \\ c_g^i & \text{sonst .} \end{cases} \quad (4.113)$$

Der Strafparameter c_g^i wird also um den Faktor $\beta_{\text{in}} > 1$ erhöht, falls das Gradienten-Projektionsverfahren ausreichend konvergiert ist, d. h. $\eta_i \leq \epsilon_{\text{rel},u}$, und die Entwicklung der Beschränkung innerhalb der letzten zwei Lagrange-Iterationen nicht zufriedenstellend war, was mithilfe von $\gamma_{\text{in}} \in (0, 1]$ bewertet wird. Falls die Verletzung der Beschränkung innerhalb einer vorgegebenen Toleranz mit $\gamma_{\text{de}} \in (0, 1)$ liegt, so wird der Strafparameter um den Faktor $\beta_{\text{de}} \in (0, 1)$ reduziert.

Für den Strafparameter c_h^i einer skalaren Ungleichungsbeschränkung \bar{h}_i folgt auf ähnliche Weise

$$c_h^{i+1} = \xi_h(c_h^i, \bar{h}^i, \bar{h}^{i-1}, \epsilon_h) = \begin{cases} \beta_{\text{in}} c_h^i & \text{falls } \bar{h}^i \geq \gamma_{\text{in}} \bar{h}^{i-1} \wedge \bar{h}^i > \epsilon_h \wedge \eta_i \leq \epsilon_{\text{rel},u} \\ \beta_{\text{de}} c_h^i & \text{falls } \bar{h}^i \leq \gamma_{\text{de}} \epsilon_h \\ c_h^i & \text{sonst .} \end{cases} \quad (4.114)$$

Analog zur Aktualisierung der Lagrange-Multiplikatoren werden alle Strafparameter mit c_{max} nach oben hin und mit c_{min} nach unten hin beschränkt, wobei $c_{\text{max}} \gg c_{\text{min}} > 0$ gilt. Damit wird einerseits unbeschränktes Wachstum der Strafparameter verhindert und andererseits das Rechnen mit vernachlässigbar kleinen Strafparametern vermieden.

Die Aktualisierungsvorschriften für die Lagrange-Multiplikatoren $\mu_{g_T}^i$ bzw. $\mu_{h_T}^i$ und Strafparameter $c_{g_T}^i$ bzw. $c_{h_T}^i$ einer skalaren Endgleichungs- bzw. Endungleichungsbeschränkung erfolgen vollkommen analog zu (4.111) bzw. (4.112) und (4.113) bzw. (4.114).

Es ist zu beachten, dass die Aktualisierung der Strafparameter (4.72) von den Beschränkungen $\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^{i-1}, \mathbf{g}_T^i, \mathbf{g}_T^{i-1}, \bar{\mathbf{h}}^i, \bar{\mathbf{h}}^{i-1}, \bar{\mathbf{h}}_T^i, \bar{\mathbf{h}}_T^{i-1}$ der letzten beiden Lagrange-Iterationen abhängig ist. Für die Verwendung von Algorithmus 3 zur Realisierung einer modell-prädiktiven Regelung können in der MPC-Iteration k in der jeweils ersten Lagrange-Iteration $i = 1$ die Beschränkungen $\mathbf{g}^0, \mathbf{g}_T^0, \bar{\mathbf{h}}^0, \bar{\mathbf{h}}_T^0$ mit den korrespondierenden, um einen Steuerungshorizont verschobenen Beschränkungen der Lösung des Optimalsteuerungsproblems in der vorangegangenen MPC-Iteration $k - 1$ initialisiert werden. Ansonsten kann $\mathbf{g}^0 = \mathbf{0}, \mathbf{g}_T^0 = \mathbf{0}, \bar{\mathbf{h}}^0 = \mathbf{0}, \bar{\mathbf{h}}_T^0 = \mathbf{0}$ verwendet werden.

Mit den Vorschriften (4.111)-(4.114) sind somit die vektorwertigen Funktionen

$$\zeta_g \in \mathbb{R}^{N_g}, \zeta_{g_T} \in \mathbb{R}^{N_{g_T}}, \zeta_h \in \mathbb{R}^{N_h}, \zeta_{h_T} \in \mathbb{R}^{N_{h_T}} \text{ von (4.71)}$$

bzw.

$$\xi_g \in \mathbb{R}^{N_g}, \xi_{g_T} \in \mathbb{R}^{N_{g_T}}, \xi_h \in \mathbb{R}^{N_h}, \xi_{h_T} \in \mathbb{R}^{N_{h_T}} \text{ von (4.72)}$$

definiert.

Abschließend soll noch angemerkt werden, dass sämtliche Zeitfunktionen in zeitdiskreter Form mit N_{hor} Abtastpunkten vorliegen (siehe Anhang A), womit die Aktualisierungsvorschriften (4.111)-(4.114) zu jedem Abtastzeitpunkt τ_k , $k = 0, \dots, N_{\text{hor}} - 1$ separat ausgeführt werden müssen.

4.3.4 Konvergenzkriterium

Das Konvergenzkriterium in Algorithmus 3 bewertet einerseits das Konvergenzverhalten des inneren Minimierungsproblems, welches mit Algorithmus 4 gelöst wird, und andererseits die Erfüllung der Beschränkungen (4.70). Um die Echtzeitfähigkeit sicherzustellen, wird innerhalb von modellprädiktiven Regelungen für gewöhnlich auf das Konvergenzkriterium verzichtet und anstelle dessen eine feste Anzahl i_{max} und j_{max} für die Lagrange-Iterationen und Gradienten-Iterationen vorgegeben. Steht jedoch ausreichend Rechenzeit zur Verfügung, so konvergiert Algorithmus 3 wenn Algorithmus 4 konvergiert ist, also

$$\eta^i \leq \epsilon_{\text{rel},c} \quad (4.115a)$$

und gleichzeitig die Beschränkungen (4.70) im Sinne einer vorgegeben Genauigkeit erfüllt sind, also

$$\begin{bmatrix} |\mathbf{g}_T^i| \\ |\mathbf{h}_T^i| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \epsilon_{g_T} \\ \epsilon_{h_T} \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \begin{bmatrix} |\mathbf{g}^i(\tau)| \\ |\mathbf{h}^i(\tau)| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \epsilon_g \\ \epsilon_h \end{bmatrix} \quad \forall \tau \in [0, T], \quad (4.115b)$$

wobei mit der Notation $|\cdot|$ der komponentenweise Absolutbetrag bezeichnet wird, also

$$|\mathbf{g}_T^i| = \left[|g_{T_1}^i| \quad |g_{T_2}^i| \quad \dots \quad |g_{T_{N_{gT}}}^i| \right]^T. \quad (4.116)$$

4.4 Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode für das Wagen-Pendel-System

Die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode soll nun verwendet werden um das Optimalsteuerungsproblem, welches sich für sämtliche Versuche am Wagen-Pendel-System in der Form (vergleiche (3.48))

$$\min_{u(\cdot)} J(u(\tau); \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_T^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_T + \frac{1}{2} \int_0^T \left(\Delta \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}(\tau) + R \Delta u^2(\tau) \right) d\tau \quad (4.117a)$$

$$\text{u.B.v. } \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau)) \quad (4.117b)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.117c)$$

$$h_1(\mathbf{x}(\tau)) = s(\tau) - s_{\text{max}} \leq 0 \quad (4.117d)$$

$$h_2(\mathbf{x}(\tau)) = s_{\text{min}} - s(\tau) \leq 0 \quad (4.117e)$$

$$h_3(\mathbf{x}(\tau)) = v(\tau) - v_{\text{max}} \leq 0 \quad (4.117f)$$

$$h_4(\mathbf{x}(\tau)) = v_{\text{min}} - v(\tau) \leq 0 \quad (4.117g)$$

$$h_{T_1}(\mathbf{x}_T) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_T^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_T - \alpha_T \leq 0 \quad (4.117h)$$

$$u(\tau) \in [u_{\min}, u_{\max}] \quad (4.117i)$$

mit

$$\Delta \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}_{\text{des}}, \quad \mathbf{x}(\tau) \in \mathbb{R}^4 \quad (4.118a)$$

$$\Delta u(\tau) = u(\tau) - u_{\text{des}}, \quad u(\tau) \in \mathbb{R}, \quad (4.118b)$$

dem Entwurfsmodell (vergleiche (2.15))

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{s} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \frac{m_1 a_1 g \sin \varphi_1 + m_1 a_1 u \cos \varphi_1 - d_1 \omega_1}{J_1 + m_1 a_1^2} \\ v \\ u \end{bmatrix}, \quad (4.119)$$

und den symmetrischen, positiv definiten Gewichtungsmatrizen

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad R \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (4.120)$$

darstellen lässt, numerisch zu lösen.

Mit (4.117d)-(4.117h) folgen die transformierten Ungleichungsbeschränkungen (vergleiche (4.62)) zu

$$\bar{h}_1(\mathbf{x}(\tau), \mu_{h_1}(\tau), c_{h_1}(\tau)) = \max \left\{ h_1(\mathbf{x}(\tau)), -\frac{\mu_{h_1}(\tau)}{c_{h_1}(\tau)} \right\} \quad (4.121a)$$

$$\bar{h}_2(\mathbf{x}(\tau), \mu_{h_2}(\tau), c_{h_2}(\tau)) = \max \left\{ h_2(\mathbf{x}(\tau)), -\frac{\mu_{h_2}(\tau)}{c_{h_2}(\tau)} \right\} \quad (4.121b)$$

$$\bar{h}_3(\mathbf{x}(\tau), \mu_{h_3}(\tau), c_{h_3}(\tau)) = \max \left\{ h_3(\mathbf{x}(\tau)), -\frac{\mu_{h_3}(\tau)}{c_{h_3}(\tau)} \right\} \quad (4.121c)$$

$$\bar{h}_4(\mathbf{x}(\tau), \mu_{h_4}(\tau), c_{h_4}(\tau)) = \max \left\{ h_4(\mathbf{x}(\tau)), -\frac{\mu_{h_4}(\tau)}{c_{h_4}(\tau)} \right\} \quad (4.121d)$$

$$\bar{h}_{T_1}(\mathbf{x}_T, \mu_{h_{T_1}}, c_{h_{T_1}}) = \max \left\{ h_{T_1}(\mathbf{x}_T), -\frac{\mu_{h_{T_1}}}{c_{h_{T_1}}} \right\}. \quad (4.121e)$$

Um eine kompakte Notation zu ermöglichen, wird im Folgenden auf die explizite Angabe der Zeitabhängigkeit von Zeitfunktionen verzichtet. Mit (4.121) folgen damit der erweiterte Endkostenterm (vergleiche (4.65)) zu

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\mathbf{x}_T, \mu_{h_{T_1}}, c_{h_{T_1}}) &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_T^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_T \\ &\quad + \mu_{h_{T_1}} \bar{h}_{T_1}(\mathbf{x}_T, \mu_{h_{T_1}}, c_{h_{T_1}}) + \frac{1}{2} c_{h_{T_1}} \bar{h}_{T_1}^2(\mathbf{x}_T, \mu_{h_{T_1}}, c_{h_{T_1}}) \end{aligned} \quad (4.122)$$

und der erweiterte integrale Kostenterm (vergleiche (4.66)) zu

$$\begin{aligned}\bar{l}(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{c}_h) &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} R \Delta u^2 \\ &+ \mu_{h_1} \bar{h}_1(\mathbf{x}, \mu_{h_1}, c_{h_1}) + \frac{1}{2} c_{h_1} \bar{h}_1^2(\mathbf{x}, \mu_{h_1}, c_{h_1}) \\ &+ \mu_{h_2} \bar{h}_2(\mathbf{x}, \mu_{h_2}, c_{h_2}) + \frac{1}{2} c_{h_2} \bar{h}_2^2(\mathbf{x}, \mu_{h_2}, c_{h_2}) \\ &+ \mu_{h_3} \bar{h}_3(\mathbf{x}, \mu_{h_3}, c_{h_3}) + \frac{1}{2} c_{h_3} \bar{h}_3^2(\mathbf{x}, \mu_{h_3}, c_{h_3}) \\ &+ \mu_{h_4} \bar{h}_4(\mathbf{x}, \mu_{h_4}, c_{h_4}) + \frac{1}{2} c_{h_4} \bar{h}_4^2(\mathbf{x}, \mu_{h_4}, c_{h_4}) .\end{aligned}\quad (4.123)$$

Mit dem erweiterten integralen Kostenterm (4.123), dem adjungierten Zustand $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^4$ und dem Entwurfsmodell (4.119) folgt die Hamiltonfunktion zu

$$H(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{c}_h) = \bar{l}(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{c}_h) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) . \quad (4.124)$$

Für die Rückwärts-Integration der adjungierten Dynamik in (4.75) wird die partielle Ableitung der Hamiltonfunktion H von (4.124) bezüglich des Zustands \mathbf{x} benötigt, welche sich in der Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} H \right)^T (\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{c}_h) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{l} \right)^T (\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{c}_h) + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)) \right)^T \quad (4.125)$$

ergibt. Für den ersten Term von (4.125) folgt mit (4.123) weiters

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{l} \right)^T (\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{c}_h) &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} \right) \right)^T \\ &+ \mu_{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_1 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_1}, c_{h_1}) + \frac{c_{h_1}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_1^2 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_1}, c_{h_1}) \\ &+ \mu_{h_2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_2 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_2}, c_{h_2}) + \frac{c_{h_2}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_2^2 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_2}, c_{h_2}) \\ &+ \mu_{h_3} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_3 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_3}, c_{h_3}) + \frac{c_{h_3}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_3^2 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_3}, c_{h_3}) \\ &+ \mu_{h_4} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_4 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_4}, c_{h_4}) + \frac{c_{h_4}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_4^2 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_4}, c_{h_4}) .\end{aligned}\quad (4.126)$$

Die einzelnen Terme in (4.126) folgen mit (4.121a)-(4.121d) bzw. (4.117d)-(4.117g) und der Gewichtungsmatrix \mathbf{Q} zu

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} \right) \right)^T = \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \Delta x_1 \\ q_2 \Delta x_2 \\ q_3 \Delta x_3 \\ q_4 \Delta x_4 \end{bmatrix} , \quad (4.127a)$$

$$\begin{aligned} \mu_{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_1 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_1}, c_{h_1}) &= \mu_{h_1} \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h_1 \right)^T & \text{falls } h_1(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_1}}{c_{h_1}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \mu_{h_1} \begin{cases} [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T & \text{falls } h_1(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_1}}{c_{h_1}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.127b)$$

$$\begin{aligned} \mu_{h_2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_2 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_2}, c_{h_2}) &= \mu_{h_2} \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h_2 \right)^T & \text{falls } h_2(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_2}}{c_{h_2}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \mu_{h_2} \begin{cases} [0 \ 0 \ -1 \ 0]^T & \text{falls } h_2(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_2}}{c_{h_2}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.127c)$$

$$\begin{aligned} \mu_{h_3} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_3 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_3}, c_{h_3}) &= \mu_{h_3} \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h_3 \right)^T & \text{falls } h_3(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_3}}{c_{h_3}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \mu_{h_3} \begin{cases} [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T & \text{falls } h_3(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_3}}{c_{h_3}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.127d)$$

$$\begin{aligned} \mu_{h_4} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_4 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_4}, c_{h_4}) &= \mu_{h_4} \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h_4 \right)^T & \text{falls } h_4(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_4}}{c_{h_4}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \mu_{h_4} \begin{cases} [0 \ 0 \ 0 \ -1]^T & \text{falls } h_4(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_4}}{c_{h_4}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.127e)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{h_1}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_1^2 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_1}, c_{h_1}) &= c_{h_1} \begin{cases} h_1(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h_1 \right)^T & \text{falls } h_1(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_1}}{c_{h_1}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= c_{h_1} \begin{cases} [0 \ 0 \ s - s_{\max} \ 0]^T & \text{falls } h_1(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_1}}{c_{h_1}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.127f)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{h_2}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_2^2 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_2}, c_{h_2}) &= c_{h_2} \begin{cases} h_2(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h_2 \right)^T & \text{falls } h_2(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_2}}{c_{h_2}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= c_{h_2} \begin{cases} [0 \ 0 \ s - s_{\min} \ 0]^T & \text{falls } h_2(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_2}}{c_{h_2}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.127g)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{h_3}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_3^2 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_3}, c_{h_3}) &= c_{h_3} \begin{cases} h_3(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h_3 \right)^T & \text{falls } h_3(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_3}}{c_{h_3}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= c_{h_3} \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v - v_{\max} \end{bmatrix}^T & \text{falls } h_3(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_3}}{c_{h_3}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}, \quad (4.127h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{h_4}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \bar{h}_4^2 \right)^T (\mathbf{x}, \mu_{h_4}, c_{h_4}) &= c_{h_4} \begin{cases} h_4(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h_4 \right)^T & \text{falls } h_4(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_4}}{c_{h_4}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= c_{h_4} \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & v - v_{\min} \end{bmatrix}^T & \text{falls } h_4(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_4}}{c_{h_4}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.127i) \end{aligned}$$

Der zweite Term von (4.125) lässt sich mit (4.119) weiter vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \right) \right)^T &= \left(\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \right)^T = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \right)^T \boldsymbol{\lambda} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m_1 g a_1 \cos(\varphi_1) - m_1 a_1 \sin(\varphi_1) u}{J_1 + m_1 a_1^2} & \frac{-d_1}{J_1 + m_1 a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_2 \frac{m_1 g a_1 \cos(\varphi_1) - m_1 a_1 \sin(\varphi_1) u}{J_1 + m_1 a_1^2} \\ \lambda_1 - \lambda_2 \frac{d_1}{J_1 + m_1 a_1^2} \\ 0 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (4.128) \end{aligned}$$

Für die Berechnung des Endwerts $\boldsymbol{\lambda}(T)$ der adjungierten Dynamik (4.75) wird die partielle Ableitung des erweiterten Endkostenterms $\bar{\varphi}$ von (4.122) bezüglich des Endzustands \mathbf{x}_T benötigt, welche sich zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_T} \bar{\varphi} \right)^T (\mathbf{x}_T, \mu_{h_{T_1}}, c_{h_{T_1}}) &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_T} \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_T^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_T \right) \right)^T \\ &\quad + \mu_{h_{T_1}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_T} \bar{h}_{T_1} \right)^T (\mathbf{x}_T, \mu_{h_{T_1}}, c_{h_{T_1}}) \\ &\quad + \frac{c_{h_{T_1}}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_T} \bar{h}_{T_1}^2 \right)^T (\mathbf{x}_T, \mu_{h_{T_1}}, c_{h_{T_1}}) \quad (4.129) \end{aligned}$$

ergibt. Die einzelnen Terme in (4.129) folgen mit (4.121e) bzw. (4.117h) und der Gewichtungsmatrix \mathbf{P} zu

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_T} \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_T^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_T \right) \right)^T = \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_T, \quad (4.130a)$$

$$\begin{aligned} \mu_{h_{T_1}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_T} \bar{h}_{T_1} \right)^T (\mathbf{x}_T, \mu_{h_{T_1}}, c_{h_{T_1}}) &= \mu_{h_{T_1}} \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_T} h_{T_1} \right)^T & \text{falls } h_{T_1}(\mathbf{x}_T) \geq -\frac{\mu_{h_{T_1}}}{c_{h_{T_1}}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \mu_{h_{T_1}} \begin{cases} \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_T & \text{falls } h_1(\mathbf{x}) \geq -\frac{\mu_{h_1}}{c_{h_1}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.130b)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_{h_{T_1}}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_T} \bar{h}_{T_1}^2 \right)^T (\mathbf{x}_T, \mu_{h_{T_1}}, c_{h_{T_1}}) &= c_{h_{T_1}} \begin{cases} h_{T_1}(\mathbf{x}_T) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_T} h_{T_1} \right)^T & \text{falls } h_{T_1}(\mathbf{x}_T) \geq -\frac{\mu_{h_{T_1}}}{c_{h_{T_1}}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= c_{h_{T_1}} \begin{cases} \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_T^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_T - \alpha_T \right) \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_T & \text{falls } h_{T_1}(\mathbf{x}_T) \geq -\frac{\mu_{h_{T_1}}}{c_{h_{T_1}}} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.130c)$$

Weiters wird für die Berechnung des Gradienten in (4.76) die partielle Ableitung der Hamiltonfunktion H von (4.124) bezüglich des Eingangs u benötigt, welche sich zu

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} H \right)^T (\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{c}_h) = \left(\frac{\partial}{\partial u} \bar{l} \right)^T (\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{c}_h) + \left(\frac{\partial}{\partial u} (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)) \right)^T \quad (4.131)$$

ergibt. Für den ersten Term in (4.131) folgt mit (4.123) und der Gewichtungsmatrix R

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} \bar{l} \right)^T (\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{c}_h) = R \Delta u \quad (4.132)$$

während sich der zweite Term von (4.131) mit (4.119) zu

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial u} (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)) \right)^T &= \left(\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \right)^T = \left(\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \right)^T \boldsymbol{\lambda} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_1 a_1 \cos(\varphi_1)}{J_1 + m_1 a_1^2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \\ &= \lambda_2 \frac{m_1 a_1 \cos(\varphi_1)}{J_1 + m_1 a_1^2} + \lambda_4 \end{aligned} \quad (4.133)$$

vereinfachen lässt.

Für sämtliche in den folgenden Abschnitten durchgeführte Versuche am Wagen-Pendel-System, in denen das Optimalsteuerungsproblem (4.117) mit der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode gelöst wird, erfolgt die Initialisierung von Algorithmus 3

mit

$$\mu_{h_1}^1(\tau) = 0, \quad \mu_{h_2}^1(\tau) = 0, \quad \mu_{h_3}^1(\tau) = 0, \quad \mu_{h_4}^1(\tau) = 0, \quad \mu_{h_{T_1}}^1 = 0 \quad (4.134a)$$

$$c_{h_1}^1(\tau) = c_{\min}, \quad c_{h_2}^1(\tau) = c_{\min}, \quad c_{h_3}^1(\tau) = c_{\min}, \quad c_{h_4}^1(\tau) = c_{\min}, \quad c_{h_{T_1}}^1 = c_{\min} \quad (4.134b)$$

$$\bar{h}_1^0(\tau) = 0, \quad \bar{h}_2^0(\tau) = 0, \quad \bar{h}_3^0(\tau) = 0, \quad \bar{h}_4^0(\tau) = 0, \quad \bar{h}_{T_1}^0 = 0 \quad (4.134c)$$

$$\epsilon_{h_1} = 10^{-4}, \quad \epsilon_{h_2} = 10^{-4}, \quad \epsilon_{h_3} = 10^{-4}, \quad \epsilon_{h_4} = 10^{-4}, \quad \epsilon_{h_{T_1}} = 10^{-4} \quad (4.134d)$$

$$\epsilon_{\text{rel},c} = 10^{-9}, \quad \epsilon_{\text{rel},u} = 10^{-2}. \quad (4.134e)$$

Die Vorwärts-Integration der Systemdynamik (4.79) sowie die Rückwärts-Integration der adjungierten Dynamik (4.75) erfolgen mit dem expliziten Heun-Verfahren (A.11) bzw. (A.16) und als Schrittweitensteuerung wird die explizite Liniensuche (4.100) verwendet. Die Auswertung des Kostenfunktional J bzw. \bar{J} erfolgt mit der Trapezregel (A.5). Jene Parameter des Optimalsteuerungsproblems (4.117) und der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode, welche sämtliche Versuche am Wagen-Pendel-System gemeinsam haben, sind in Tabelle 4.4 aufgelistet.

Parameter	Wert
Sollwert des Eingangs u_{des}	0 m/s ²
Obere Schranke des Eingangs u_{max}	22 m/s ²
Untere Schranke des Eingangs u_{min}	-22 m/s ²
Obere Schranke der Position s_{max}	0.7 m
Untere Schranke der Position s_{min}	-0.7 m
Obere Schranke der Geschwindigkeit v_{max}	2 m/s
Untere Schranke der Geschwindigkeit v_{min}	-2 m/s
Obere Schranke der Lagrange-Multiplikatoren μ_{max}	10 ⁶
Obere Schranke der Strafparameter c_{max}	10 ⁶
Erhöhungsfaktor der Strafparameter β_{in}	1.05
Verringerungsfaktor der Strafparameter β_{de}	0.95
Bewertungsfaktor der Strafparameter γ_{in}	1
Toleranzfaktor der Strafparameter γ_{de}	0.1
Gewichtungsmatrix \mathbf{Q}	diag(1, 0.5, 5, 0.05)
Gewichtungsfaktor R	0.05
Initiale Eingangstrajektorie $u^{ 1}(\tau)$	0

Tabelle 4.4: Gemeinsame Parameter des Optimalsteuerungsproblems (4.117) bzw. der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode

4.5 Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems

Die zusätzlich zu Tabelle 4.4 festzulegenden Parameter des Optimalsteuerungsproblems (4.117) und jene der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode zum Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems sind in Tabelle 4.5 zusammengefasst. Zusätzlich wurde, falls

Parameter	Wert
Anfangszustand \mathbf{x}_0	$[\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$
Sollwert des Zustands \mathbf{x}_{des}	$[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
Prädiktionshorizont T	3.5 s
Anzahl an Abtastpunkten N_{hor}	351
Gewichtungsmatrix \mathbf{P}	\mathbf{P}_o von (3.54)
Endgebietskonstante α_T	0.02
Maximalanzahl der Lagrange-Iterationen i_{max}	500
Maximalanzahl der Gradienten-Iterationen j_{max}	500
Untere Schranke der Strafparameter c_{min}	500

Tabelle 4.5: Zusätzlich zu Tabelle 4.4 benötigte Parameter des Optimalsteuerungsproblems (4.117) bzw. der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode zum Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems

die Berechnung der Schrittweite $\alpha^{i|j}$ in (4.100) einen negativen Wert liefert, $\alpha^{i|j} = 10^{-8}$ gewählt und die Schrittweite in der ersten Gradienten-Iteration $j = 1$ der ersten Lagrange-Iteration $i = 1$ ebenfalls zu $\alpha^{1|1} = 10^{-8}$ festgelegt.

Die Lösung des Optimalsteuerungsproblems (4.117) für die Parameter von Tabelle 4.4 bzw. Tabelle 4.5 in Form der Eingangs- und Zustandstrajektorie $u(\tau)$ bzw. $\mathbf{x}(\tau)$ sowie der Verläufe der Beschränkungen (4.117d)-(4.117h) ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Dabei wurde das Konvergenzkriterium nach 17 Lagrange-Iterationen erfüllt und der Wert des Kostenfunktional (4.117a) ergibt sich zu $J \approx 20.19$.

Wird nun anstelle von $\mathbf{x}_0 = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$ der Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = [2\frac{\pi}{180} \ 0 \ 0 \ 0]^T$ verwendet, welcher einer 2° -Auslenkung des Wagen-Pendel-Systems aus der oberen Ruhelage entspricht, so ist die Lösung des Optimalsteuerungsproblems in Abbildung 4.5 dargestellt. Das Konvergenzkriterium wurde dabei nach 10 Lagrange-Iterationen erfüllt und der zugehörige Wert des Kostenfunktional folgt zu $J \approx 22.22$. Anhand der Trajektorien in Abbildung 4.5 und des im Vergleich zum Aufschwingen vergrößerten Werts des Kostenfunktional ist klar ersichtlich, dass es sich hierbei nicht um eine optimale Lösung des Optimalsteuerungsproblems (4.117) handeln kann. Eine optimale Lösung würde nämlich, wie ein linearer Zustandsregler, lediglich den Versatz des Wagen-Pendel-Systems korrigieren und nicht wie in Abbildung 4.5 dargestellt das Wagen-Pendel-System zunächst abschwngen und die untere Ruhelage passieren lassen ehe es wieder zum Auschwngen gebracht wird. Der Grund hierfür liegt darin, dass die initiale Eingangstrajektorie $u^{1|1}(\tau) = 0$ nicht im Einzugsgebiet der optimalen Lösung, welche lediglich den Versatz ausregeln würde, liegt. Wie Simulationsstudien also nahelegen, weist die Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode für die Kombination von langen Prädiktionshorizonten mit Anfangszuständen, welche in unmittelbarer Nähe der zu erreichenden *instabilen* (oberen)

Ruhelage liegen, erhebliche Probleme auf. Um zu demonstrieren, dass für entsprechend kurze Prädiktionshorizonte diese Schwierigkeiten nicht auftreten, wird Abbildung 4.6 betrachtet. Dabei wurde der Prädiktionshorizont auf $T = 1\text{s}$ mit $N_{\text{hor}} = 101$ verkürzt und zu den Zeitpunkten $t_i = iT$, $i = 0, 1, 2$ je ein Optimalsteuerungsproblem OCP_i , $i = 0, 1, 2$ gelöst. Bezeichnet man mit $(u_{\text{OCP}_i}(\tau), \mathbf{x}_{\text{OCP}_i}(\tau))$ die entsprechende Lösung des i -ten Optimalsteuerungsproblems, so lassen sich die entsprechenden Anfangszustände der drei Optimalsteuerungsprobleme in der Form

$$\text{OCP}_0 : \mathbf{x}_{0,\text{OCP}_0} = \left[2 \frac{\pi}{180} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T, \quad (4.135a)$$

$$\text{OCP}_1 : \mathbf{x}_{0,\text{OCP}_1} = \mathbf{x}_{\text{OCP}_0}(T), \quad (4.135b)$$

$$\text{OCP}_2 : \mathbf{x}_{0,\text{OCP}_2} = \mathbf{x}_{\text{OCP}_1}(T) \quad (4.135c)$$

angeben. Diese Vorgehensweise entspricht, unter der Annahme des nominellen, ungestörten Systems (4.119) und einer exakten Zustandsmessung, dem Konzept einer modellprädiktiven Regelung bei welcher der Prädiktions- und Steuerungshorizont die gleiche Länge T besitzen. Die in Abbildung 4.6 dargestellten, zusammengesetzten Trajektorien ergeben sich somit zu

$$u(t) = \begin{cases} u_{\text{OCP}_0}(t) & \text{falls } 0 \leq t < t_1 \\ u_{\text{OCP}_1}(t - t_1) & \text{falls } t_1 \leq t < t_2 \\ u_{\text{OCP}_0}(t - t_2) & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.136)$$

bzw.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}_{\text{OCP}_0}(t) & \text{falls } 0 \leq t < t_1 \\ \mathbf{x}_{\text{OCP}_1}(t - t_1) & \text{falls } t_1 \leq t < t_2 \\ \mathbf{x}_{\text{OCP}_0}(t - t_2) & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.137)$$

Dabei wurde das Konvergenzkriterium der drei Optimalsteuerungsprobleme nach je einer Lagrange-Iteration erfüllt und das Kostenfunktional (der zusammengesetzten Trajektorien) folgt zu $J \approx 0.015$. Im Abschnitt 4.6, in welchem das seitliche Versetzen des Wagen-Pendel-Systems betrachtet wird, wird weiters gezeigt, dass für Anfangszustände, die in der Nähe der zu erreichenden *stabilen* (unteren) Ruhelage liegen, die oben genannten Schwierigkeiten nicht auftreten, unabhängig vom gewählten Prädiktionshorizont, siehe Abbildung 4.12.

Um zusätzlich zu zeigen, dass die Schwierigkeiten beim Einsatz der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode für lange Prädiktionshorizonte und instabile Ruhelagen nicht der speziellen Formulierung (4.117) des Optimalsteuerungsproblems geschuldet sind, wird (4.117) im Folgenden mit der Methode der *Volldiskretisierung*, einer direkten Methode, gelöst.

4.5.1 Volldiskretisierung

Für die Grundlagen der Volldiskretisierung sei auf Anhang B verwiesen. Die mithilfe der Volldiskretisierung erhaltene Lösung des Optimalsteuerungsproblems (4.117) in Form der Eingangs- und Zustandstrajektorie für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \left[2 \frac{\pi}{180} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$ und unter Verwendung der dafür benötigten Parameter aus Tabelle 4.4 bzw. Tabelle 4.5 ist in

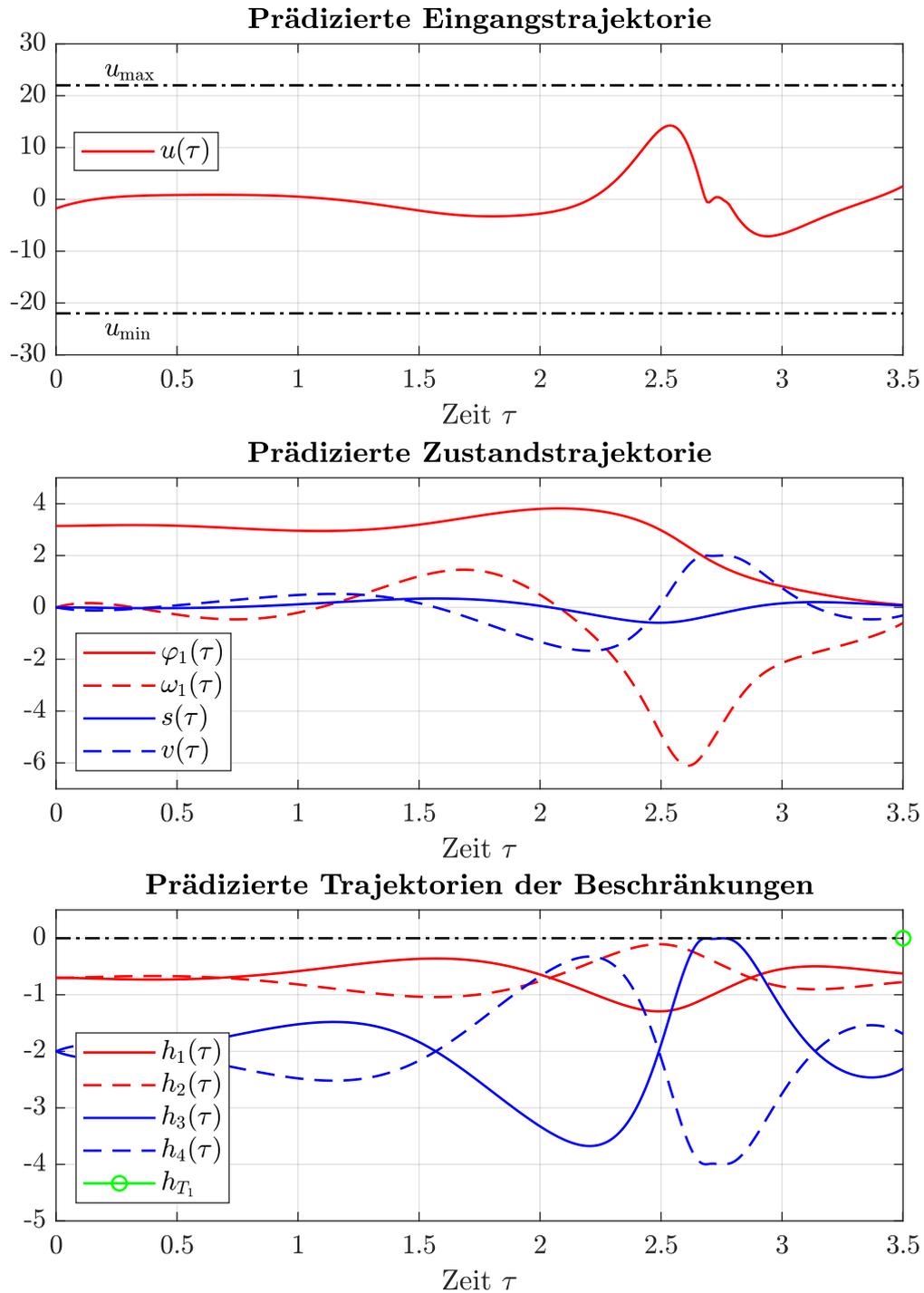
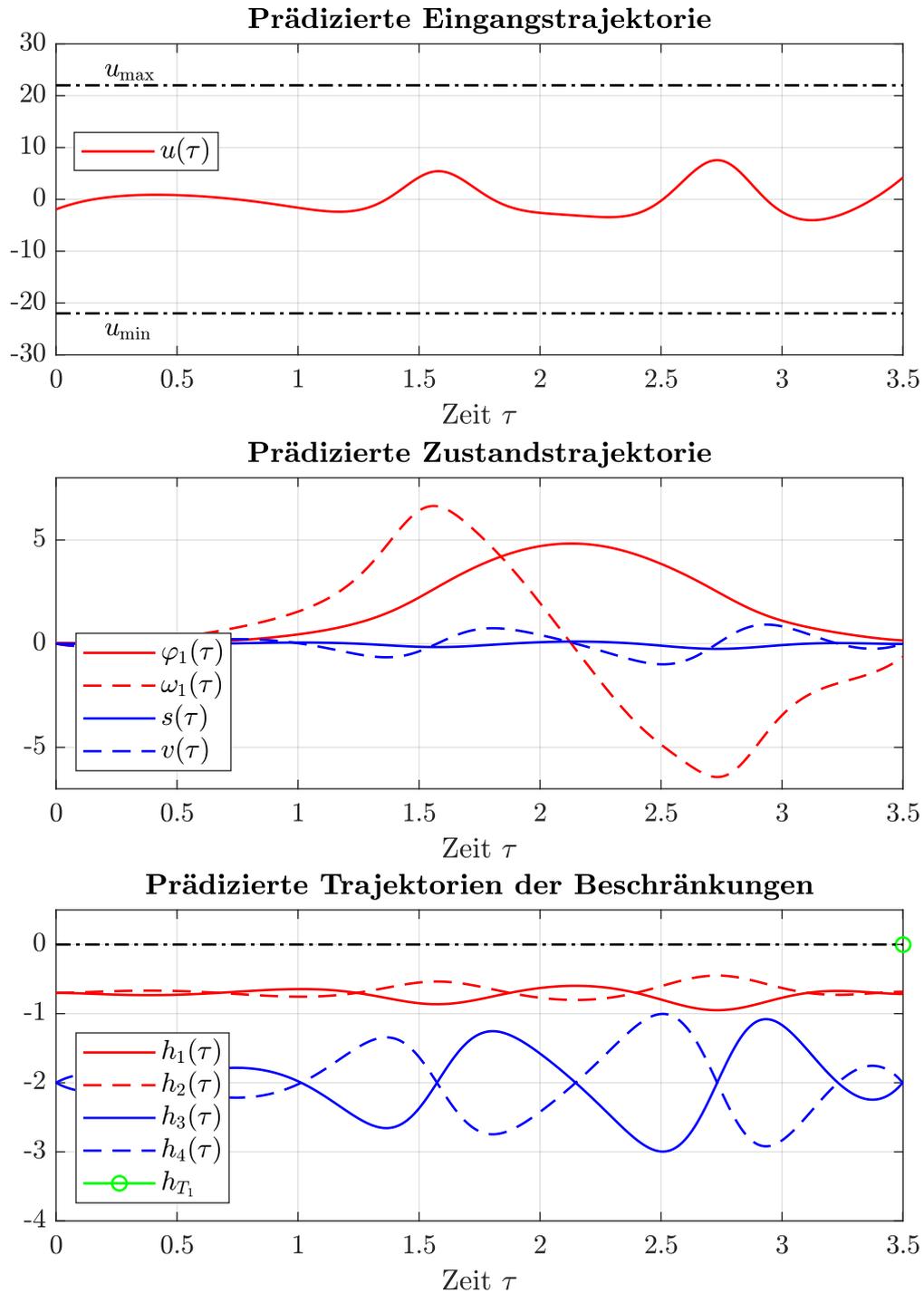


Abbildung 4.4: Aufschwingvorgang des Wagen-Pendel-Systems

Abbildung 4.5: Aufschwingvorgang bei einer 2° -Auslenkung aus der oberen Ruhelage

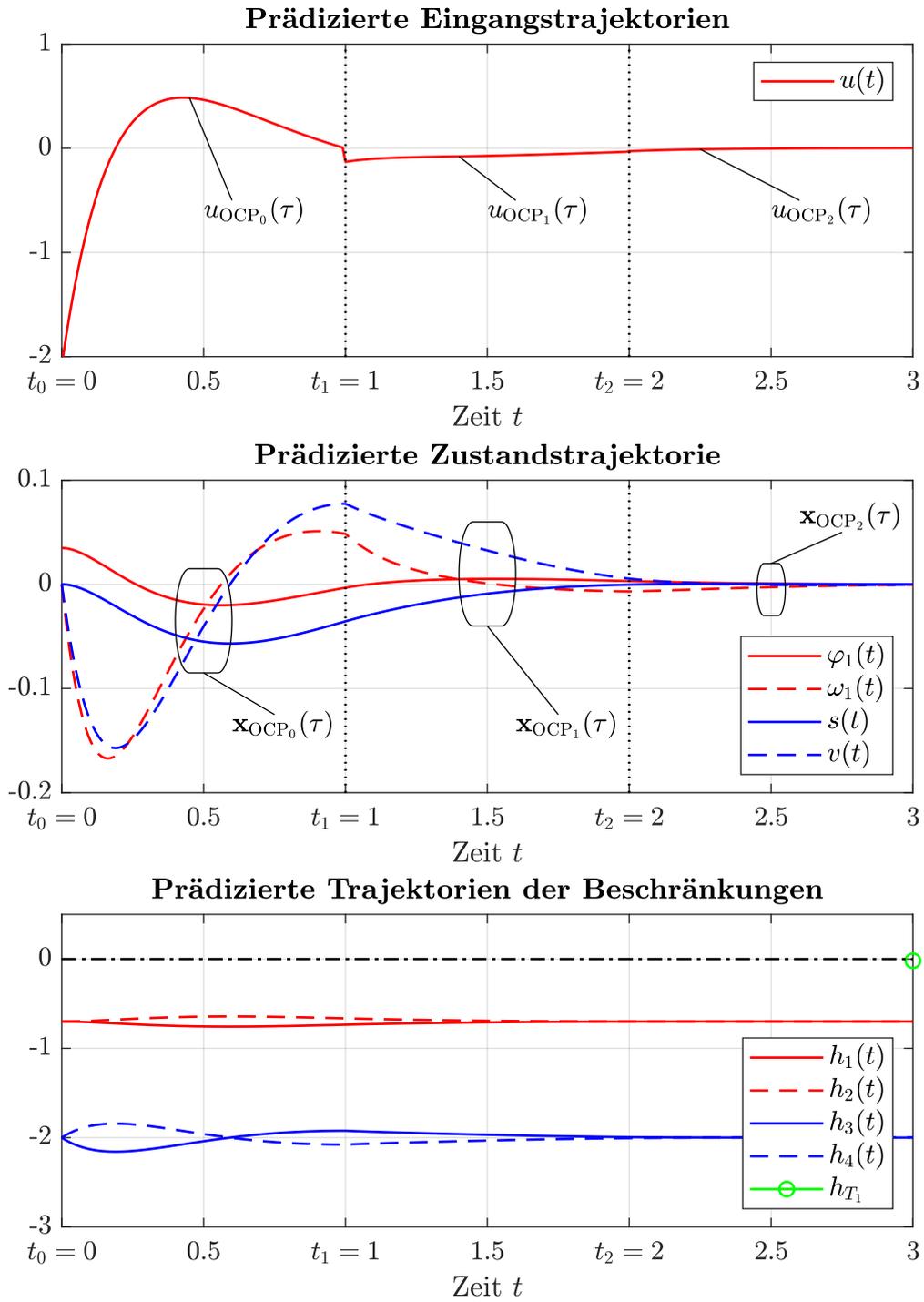


Abbildung 4.6: Aufschwingvorgang bei einer 2°-Auslenkung aus der oberen Ruhelage mit verkürzten Prädiktionshorizonten

Abbildung 4.7 dargestellt. Der zugehörige Wert der Kostenfunktion ergibt sich dabei zu $J_s \approx 0.015$.

4.5.2 Unterlagertes lineares Zustandsregelgesetz

Eine Möglichkeit die Schwierigkeiten der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode, welche bei Verwendung eines langen Prädiktionshorizonts in Kombination mit instabilen Ruhelagen auftreten, in den Griff zu bekommen, besteht in der Erweiterung des Entwurfsmodells (4.119) um ein lineares Zustandsregelgesetz der Form

$$\tilde{u}_{ZR} = \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \quad (4.138)$$

mit dem Rückführvektor $\mathbf{k}_o^T = [k_{o,1} \ k_{o,2} \ k_{o,3} \ k_{o,4}]$ von (3.52). Damit der lineare Zustandsregler lediglich im Bereich der oberen (instabilen) Ruhelage aktiviert wird, ist eine Skalierung des Zustandsregelgesetzes (4.138) mit einem Vorfaktor $\alpha(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ notwendig. Für Zustände \mathbf{x} , welche in unmittelbarer Nähe der oberen Ruhelage liegen, soll also $\alpha(\mathbf{x}) \approx 1$ gelten, während überall sonst $\alpha(\mathbf{x}) \approx 0$ gelten soll. Darüber hinaus sollte der Vorfaktor $\alpha(\mathbf{x})$ stetig differenzierbar bezüglich \mathbf{x} sein. Dies motiviert den durch die Methode „Versuch und Irrtum“ gefundenen Ansatz

$$\alpha(\mathbf{x}) = e^{-(\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x})^2} . \quad (4.139)$$

Damit folgt der unterlagerte lineare Zustandsregler zu

$$u_{ZR} = \alpha(\mathbf{x})\tilde{u}_{ZR} = \alpha(\mathbf{x})\mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \quad (4.140)$$

und das erweiterte Entwurfsmodell lautet

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{s} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, u_{MPC}) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(\mathbf{x}, u_{MPC}) \\ \tilde{f}_2(\mathbf{x}, u_{MPC}) \\ \tilde{f}_3(\mathbf{x}, u_{MPC}) \\ \tilde{f}_4(\mathbf{x}, u_{MPC}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \frac{m_1 a_1 g \sin \varphi_1 + m_1 a_1 (u_{MPC} + u_{ZR}) \cos \varphi_1 - d_1 \omega_1}{J_1 + m_1 a_1^2} \\ v \\ u_{MPC} + u_{ZR} \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (4.141)$$

Der (Gesamt)Eingang u setzt sich also additiv aus dem linearen Zustandsregelgesetz u_{ZR} und einem Teil u_{MPC} , welcher mithilfe der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode durch Lösen des Optimalsteuerungsproblems (4.117) numerisch berechnet wird, zusammen. Dazu wird in (4.117) lediglich das Entwurfsmodell (4.119) durch das erweiterte Entwurfsmodell (4.141) ersetzt, womit sich auch die Jacobimatrizen bezüglich des Zustands \mathbf{x} und des Eingangs u_{MPC} verändern (siehe Kapitel C).

Die Lösung des Optimalsteuerungsproblems (4.117) mit dem erweiterten Entwurfsmodell (4.141) als Systemdynamik und den Parametern von Tabelle 4.4 bzw. Tabelle 4.5

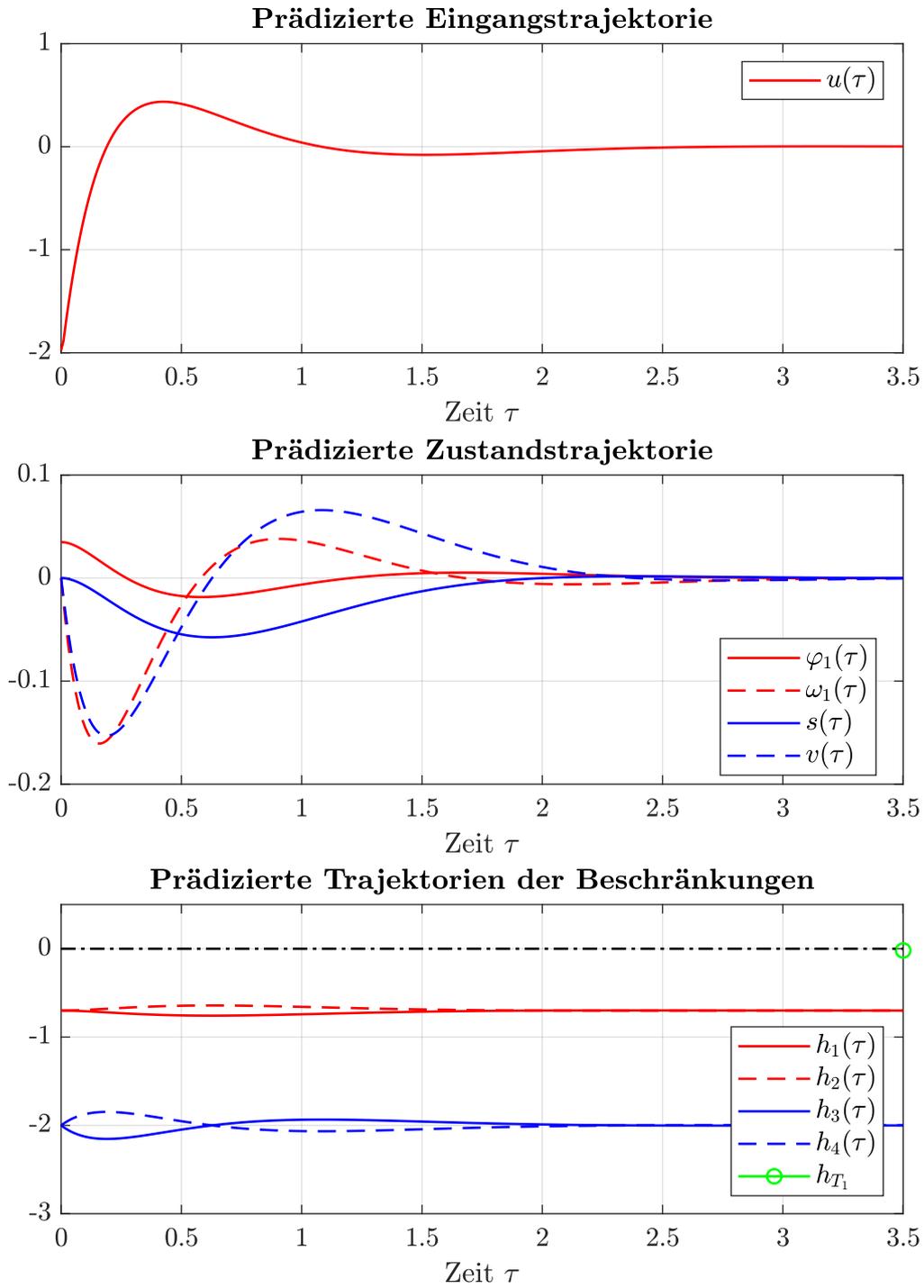


Abbildung 4.7: Aufschwingvorgang bei einer 2^o-Auslenkung aus der oberen Ruhelage mittels Volldiskretisierung

ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Dabei konvergiert die Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode nach 17 Lagrange-Iterationen und der Wert des Kostenfunktional beträgt $J \approx 20.11$. Dies entspricht weitestgehend der bereits bekannten Lösung aus Abbildung 4.4.

Wird der Anfangszustand zu $\mathbf{x}_0 = \left[2\frac{\pi}{180} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right]^T$ gewählt, so zeigt Abbildung 4.9 die entsprechende Lösung. Das Konvergenzkriterium wird hierbei schon nach einer Lagrange-Iteration erfüllt und für den Wert des Kostenfunktional folgt $J \approx 0.007$. Diese Resultate entsprechen mit guter Übereinstimmung jenen aus Abbildung 4.7. Durch einen Vergleich von Abbildung 4.9 mit Abbildung 4.5 wird deutlich, dass das Problem des langen Prädiktionshorizonts mit instabilen Ruhelagen durch die Berücksichtigung des unterlagerten, linearen Zustandsreglers behoben wurde.

4.6 Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems

Die zusätzlich zu Tabelle 4.4 benötigten Parameter für das seitliche Versetzen des Wagen-Pendel-Systems sind in Tabelle 4.6 zusammengefasst. Die Schrittweitensteuerung erfolgt

Parameter	Wert
Anfangszustand \mathbf{x}_0	$\left[\pi \quad 0 \quad -0.45 \quad 0\right]^T$
Sollwert des Zustands \mathbf{x}_{des}	$\left[\pi \quad 0 \quad 0.45 \quad 0\right]^T$
Prädiktionshorizont T	2.5 s
Anzahl an Abtastpunkten N_{hor}	251
Gewichtungsmatrix \mathbf{P}	\mathbf{P}_u von (3.82)
Endgebietskonstante α_T	0.003
Maximalanzahl der Lagrange-Iterationen i_{max}	300
Maximalanzahl der Gradienten-Iterationen j_{max}	300
Untere Schranke der Strafparameter c_{min}	1500

Tabelle 4.6: Parameter des Optimalsteuerungsproblems (4.117) bzw. der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode für das seitliche Versetzen des Wagen-Pendel-Systems

dabei analog zu jener für das Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems, siehe Abschnitt 4.5. Als Systemdynamik (4.117b) wird wiederum das Entwurfsmodell (4.119) verwendet.

Die Lösung des Optimalsteuerungsproblems (4.117) ist in Abbildung 4.10 dargestellt. Das Konvergenzkriterium der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode wurde dabei nach 2 Lagrange-Iterationen erfüllt und der zugehörige Wert des Kostenfunktional beträgt $J \approx 1.35$.

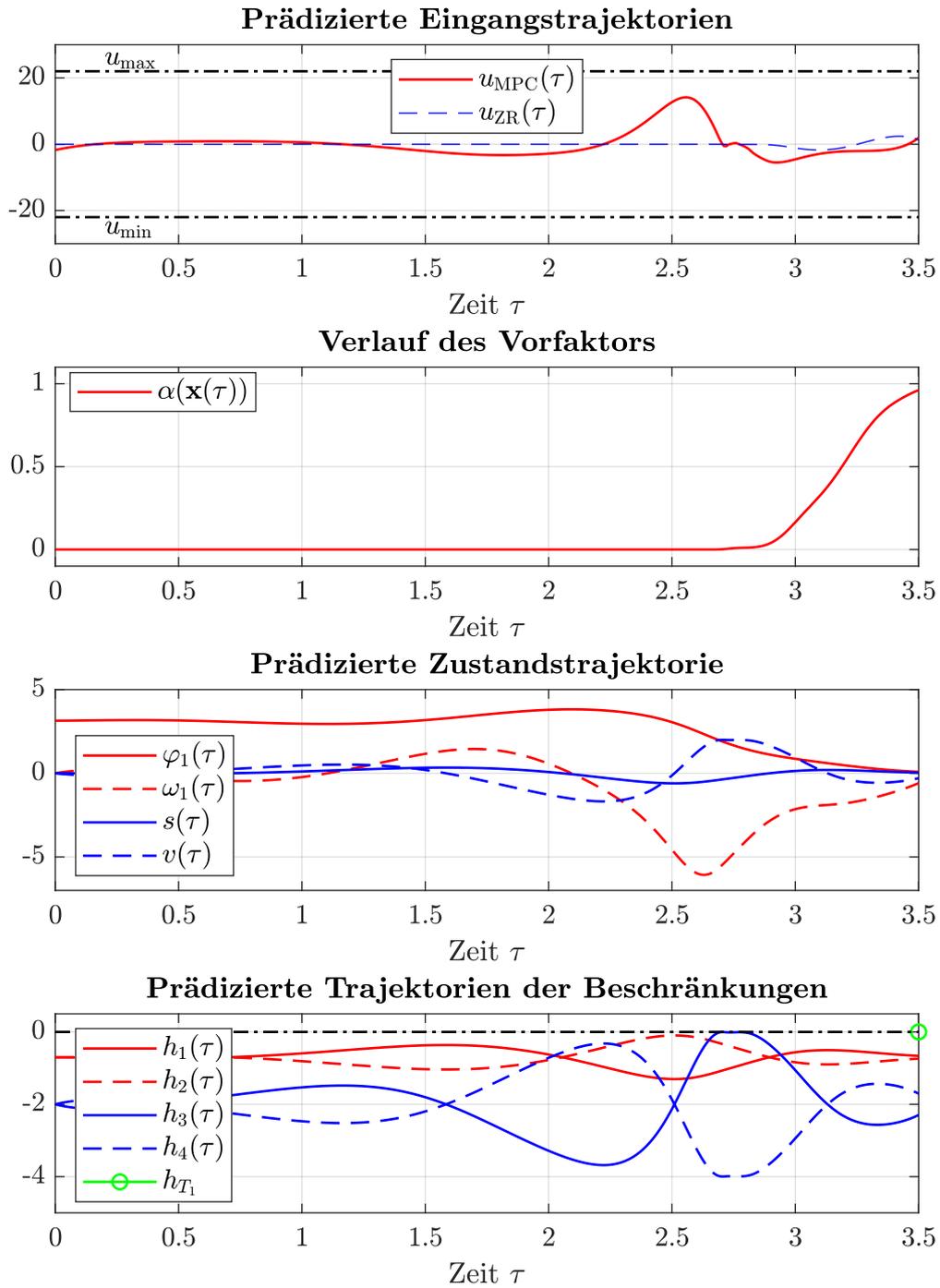


Abbildung 4.8: Aufschwingvorgang des Wagen-Pendel-Systems mit unterlagertem Zustandsregler

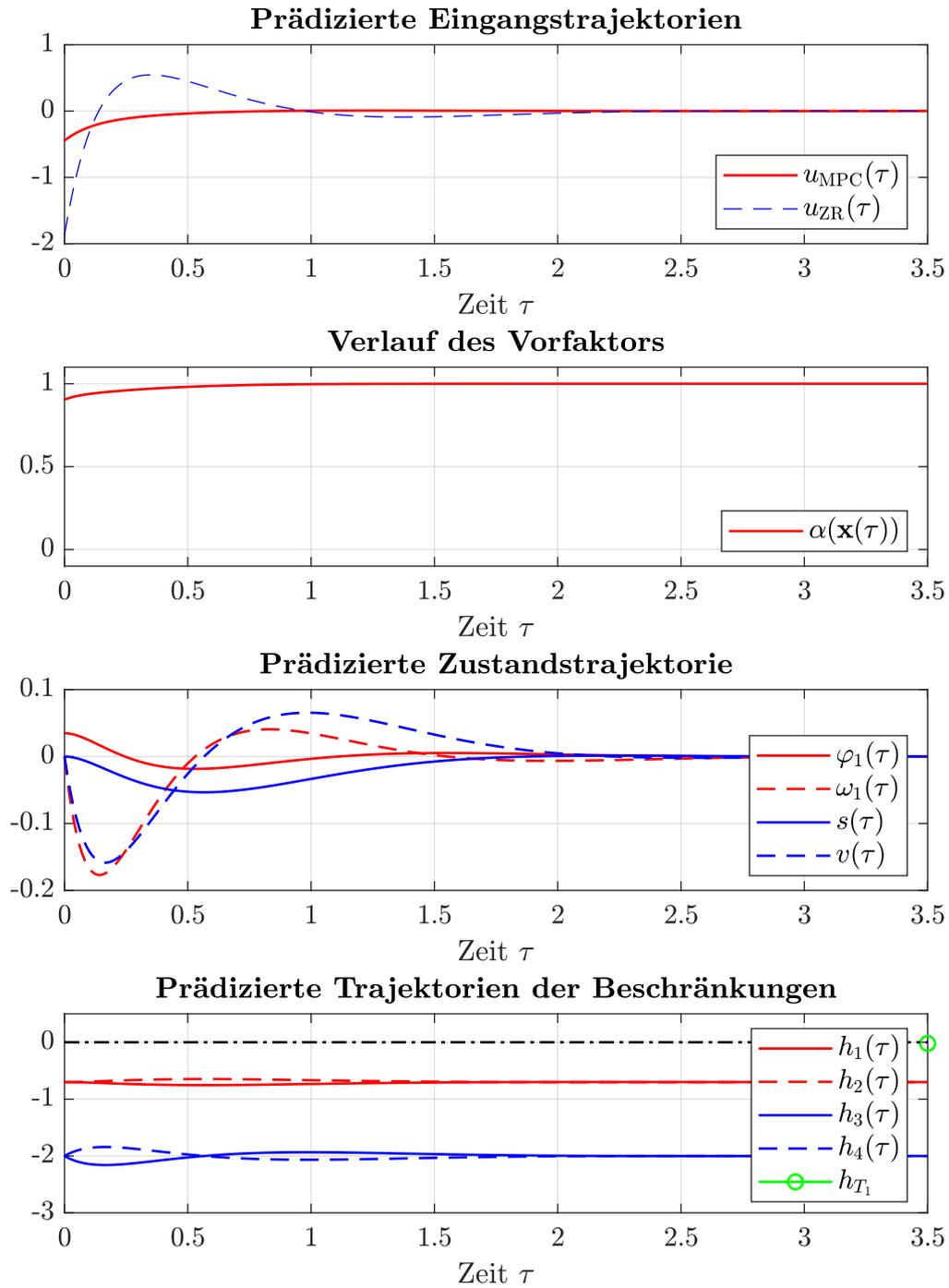


Abbildung 4.9: Aufschwingvorgang mit unterlagertem Zustandsregler bei einer 2° -Auslenkung aus der oberen Ruhelage

Wird nun als Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \left[178 \frac{\pi}{180} \quad 0 \quad 0.45 \quad 0\right]^T$ verwendet, was einer 2° -Auslenkung des Wagen-Pendel-Systems aus der zu erreichenden unteren Ruhelage entspricht, so ist die Lösung des Optimalsteuerungsproblems in Abbildung 4.11 dargestellt. Dabei konvergierte die Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode nach einer Lagrange-Iteration und der Wert des Kostenfunktional folgt zu $J \approx 0.0022$.

Nun soll gezeigt werden, dass im Falle von stabilen Ruhelagen, lange Prädiktionshorizonte keine negativen Auswirkungen auf die mit der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode berechnete Lösung des Optimalsteuerungsproblems (4.117) haben. Dazu wird wiederum $\mathbf{x}_0 = \left[178 \frac{\pi}{180} \quad 0 \quad 0.45 \quad 0\right]^T$ als Anfangszustand gewählt, der Prädiktionshorizont auf $T = 3.5\text{s}$ verlängert und die Anzahl der Abtastpunkte zu $N_{\text{hor}} = 351$ festgelegt. Die restlichen Parameter sind analog zu jener in Tabelle 4.6. Die Lösung des Optimalsteuerungsproblem für diesen Fall zeigt Abbildung 4.12. Dabei wurde das Konvergenzkriterium wieder nach einer Lagrange-Iteration erfüllt und der Wert des Kostenfunktional beträgt $J \approx 0.0022$.

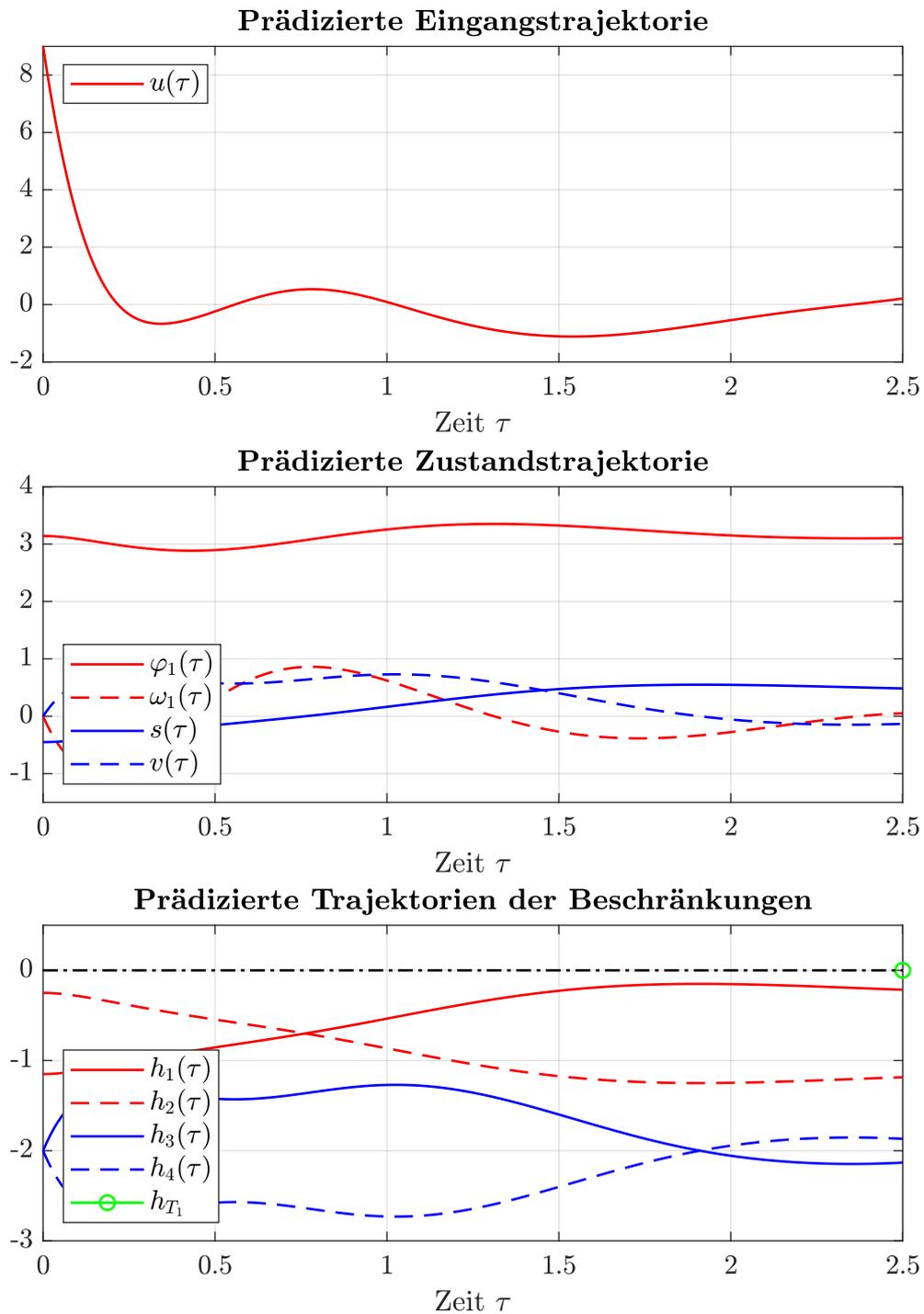


Abbildung 4.10: Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems

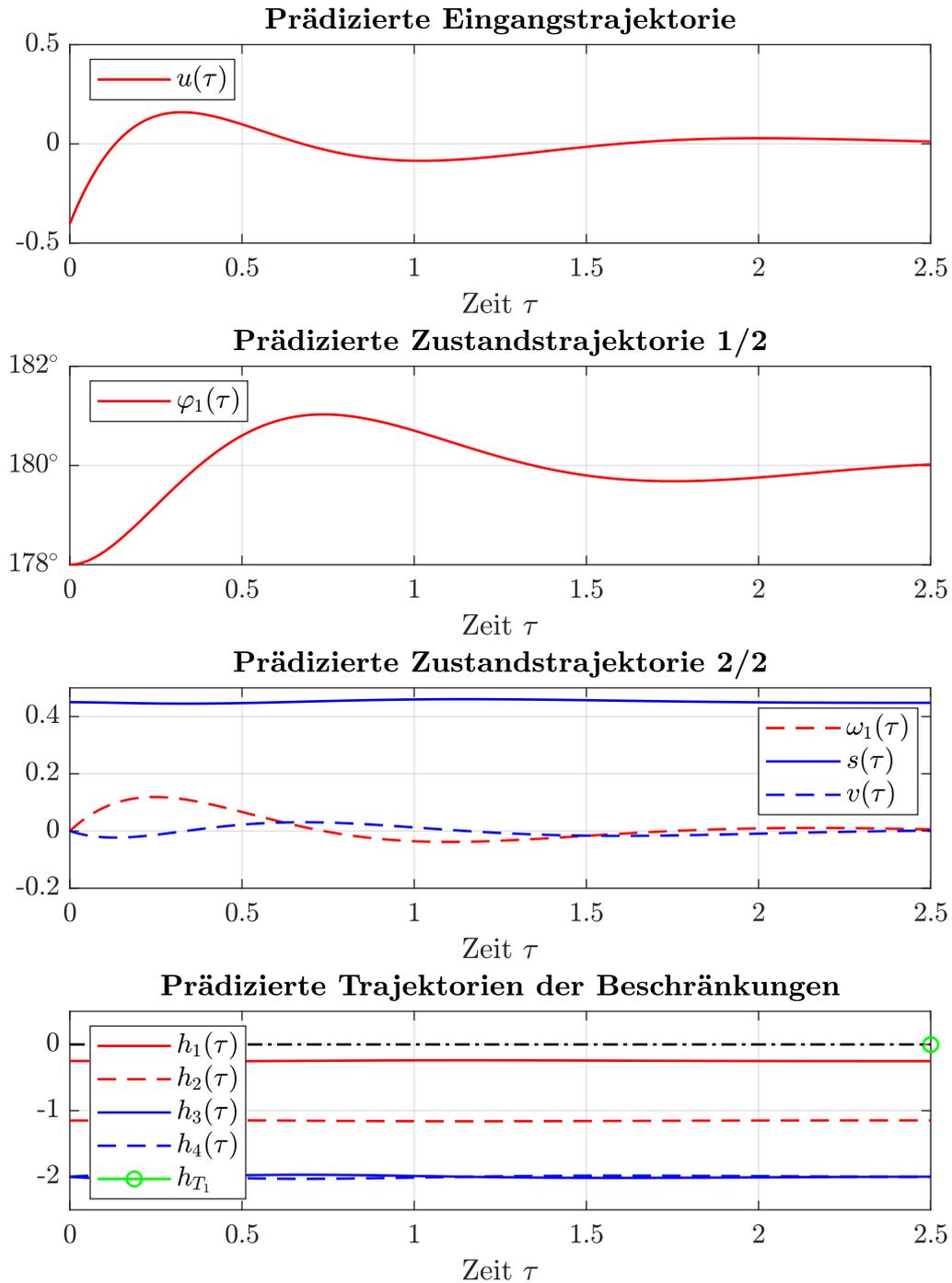


Abbildung 4.11: Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems bei einer 2° -Auslenkung aus der zu erreichenden unteren Ruhelage

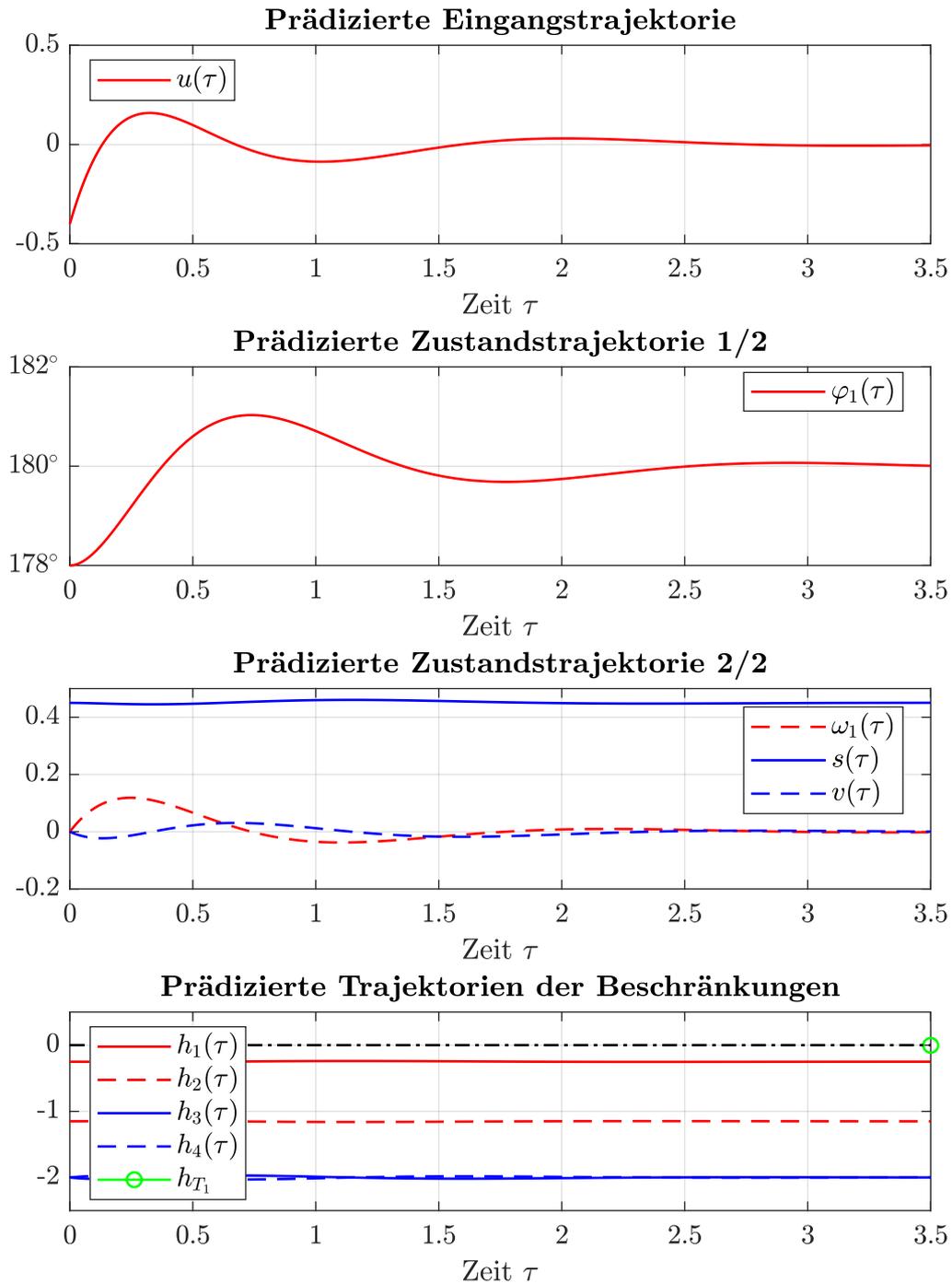


Abbildung 4.12: Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems bei einer 2° -Auslenkung aus der zu erreichenden unteren Ruhelage und verlängertem Prädiktionshorizont

5 Modellprädiktive Regelung des Wagen-Pendel-Systems

In diesem Kapitel wird die Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode, welche im letzten Kapitel detailliert behandelt wurde, zur wiederholten numerischen Lösung des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems (3.1) bzw. (4.117) eingesetzt. Für die Realisierung einer modellprädiktiven Regelung ist neben einem numerischen Optimierungsverfahren auch die Erfassung des Systemzustands $\mathbf{x} = [\varphi_1 \quad \omega_1 \quad s \quad v]^T$ zu den diskreten Abtastzeitpunkten t_k , $k = 0, 1, \dots$ notwendig, weshalb der erste Abschnitt dieses Kapitels dem Beobachterkonzept gewidmet wird. Anschließend wird kurz auf die Trajektorienverschiebung, welche für die Initialisierung der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode benötigt wird, eingegangen und die in dieser Arbeit eingesetzte Sicherheitsfunktion für die Schrittweitensteuerung beschrieben. Zum Abschluss dieses Kapitels werden die simulativen und experimentellen Ergebnisse der modellprädiktiven Regelung für das Aufschwingen und das seitliche Versetzen des Wagen-Pendel-Systems gezeigt.

5.1 Beobachterkonzept

Wie bereits im Abschnitt 2.1 erwähnt, erfolgt die Messung des Drehwinkels φ_1 sowie der Schlittenposition s mittels Inkrementaldrehgeber womit sich die Ausgangsgleichungen des Entwurfmodells (4.119) zu

$$y_1(t) = \varphi_1(t) + \eta_{\varphi_1}(t) , \quad (5.1a)$$

$$y_2(t) = s(t) + \eta_s(t) \quad (5.1b)$$

ergeben. Dabei bezeichnen η_{φ_1} bzw. η_s das aufgrund der finiten Quantisierung (siehe Tabelle 2.2) stets vorhandene hochfrequente Sensorrauschen. Für die Schätzung der nicht messbaren Zustandsgrößen in Form der Drehwinkelgeschwindigkeit ω_1 und der translatorischen Geschwindigkeit des Wagens v ist die Entwicklung eines geeigneten Beobachterkonzepts notwendig.

5.1.1 Einfaches realisierbares Differenziationsfilter

Eine einfache Möglichkeit um aus der Kenntnis von y_1 bzw. y_2 die Geschwindigkeiten ω_1 bzw. v zu schätzen, besteht in der Verwendung von Ableitungsfilter 1. Ordnung, denn es gilt

$$\omega_1(t) = \frac{d}{dt}\varphi_1(t) \approx \frac{d}{dt}y_1(t) , \quad (5.2a)$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) \approx \frac{d}{dt}y_2(t) \quad (5.2b)$$

womit für die geschätzten Verläufe der Zustandsgrößen

$$\hat{\varphi}_1(t) = y_1(t) , \quad (5.3a)$$

$$\hat{\omega}_1(t) = \frac{d}{dt}y_1(t) , \quad (5.3b)$$

$$\hat{s}(t) = y_2(t) , \quad (5.3c)$$

$$\hat{v}(t) = \frac{d}{dt}y_2(t) \quad (5.3d)$$

folgt. Da die s-Übertragungsfunktion eines idealen Differenzierers in der Form

$$G(s) = s \quad (5.4)$$

nicht realisierbar ist [16], wird für ein realisierbares Ableitungsfilter die s-Übertragungsfunktion

$$G_R(s) = \frac{s}{1 + sT_R} = s \frac{1}{1 + sT_R} \quad (5.5)$$

mit $T_R \in \mathbb{R}_{>0}$ verwendet. Dies entspricht der Serienschaltung eines idealen Differenzierers mit einem nachfolgenden Tiefpassfilter. Dabei ist die Wahl der Zeitkonstanten T_R und damit einhergehend die Knickfrequenz $\omega_k = \frac{1}{T_R}$ des Tiefpassfilters von entscheidender Bedeutung. Bei der Betrachtung des Bode-Diagramms von (5.5) wird klar ersichtlich: Wählt man die Zeitkonstante T_R zu klein, was einer sehr großen Knickfrequenz ω_k entspricht, dann wird auch das hochfrequente Rauschen des Sensors entsprechend verstärkt wodurch das Ausgangssignal des Differenzierers keine gute Approximation der entsprechenden Geschwindigkeit darstellt. Umgekehrt gilt: Wählt man die Zeitkonstante T_R zu groß, was einer sehr kleinen Knickfrequenz ω_k entspricht, dann ist der Einfluss des Rauschens auf das Ausgangssignal des Differenzierers zwar vernachlässigbar, jedoch fallen dann die Zeitverläufe von φ_1 bzw. s in einen Frequenzbereich, in welchem (5.5) kein (exaktes) differenzierendes Verhalten aufweist. In der praktischen Anwendung erfolgt die Wahl von T_R meist nach der Methode „Versuch und Irrtum“. Da die Ableitungsfilter auf der DSPACE-MicroLabBox implementiert werden, wird die entsprechende zeitdiskrete z-Übertragungsfunktion von (5.5) benötigt. Diese folgt mit der Abtastzeit T_a zu

$$G(z) = \frac{1}{T_R} \frac{z - 1}{z - e^{-\frac{T_a}{T_R}}} . \quad (5.6)$$

Das Blockschaltbild dieses Beobachterkonzepts ist in Abbildung 5.1 dargestellt, wobei sich die beiden Ableitungsfilter $G_{\varphi_1}(z)$ und $G_s(z)$ nur durch die Wahl von T_R unterscheiden.

5.1.2 Sliding-mode Differenziationsfilter

Eine zu den obigen Ausführungen alternative Möglichkeit der Zustandsschätzung besteht in der Verwendung eines sogenannten *Sliding-mode Differenziationsfilters*, welches in der Literatur auch häufig als *robustes exaktes Differenziationsfilter* bezeichnet wird. Einen guten Überblick über die grundlegenden Ideen und Herangehensweisen der Sliding-mode Theorie bietet [27]. Darin wird auch die zeitkontinuierliche Realisierung eines Sliding-mode Filters beschrieben. Für die Entwicklung eines zeitdiskreten Sliding-mode Filters,

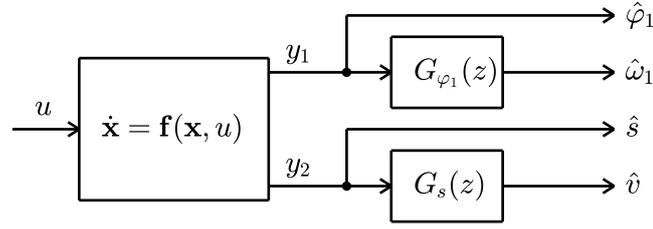


Abbildung 5.1: Blockschaltbild des Beobachterkonzepts basierend auf Differenziationsfilter

welches im Folgenden exemplarisch zur Schätzung der Winkelgeschwindigkeit ω_1 angegeben wird, sei auf [28] verwiesen. Damit folgt mit der Abtastzeit T_a das (lineare, zeitvariante) Abtastsystem des Sliding-mode Filters zu

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{x}}_k + \boldsymbol{\lambda}(y_{1,k})(y_{1,k} - \hat{x}_{1,k}), \quad \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0} \quad (5.7a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \quad (5.7b)$$

mit dem zwei-dimensionalen Zustand $\hat{\mathbf{x}}_k = [\hat{x}_{1,k} \quad \hat{x}_{2,k}]^T$, der Dynamikmatrix

$$\mathbf{\Phi} = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_a\right) = \begin{bmatrix} 1 & T_a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

und dem Eingang $y_{1,k}$. Dabei bezeichnet $y_{1,k}$ die Auswertung von (5.1a) zum Zeitpunkt kT_a . Der Eingangsvektor folgt zu

$$\boldsymbol{\lambda}(y_{1,k}) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{\Phi}, y_{1,k}, \hat{x}_{1,k}) \mathbf{S}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

mit

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_1^T \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

wobei $\mathbf{e}_1^T = [0 \quad 1]$ gilt. Die Matrix $\boldsymbol{\chi}$ ist dabei wie folgt zu wählen

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{\Phi}, y_{1,k}, \hat{x}_{1,k}) = \left(\mathbf{\Phi} - e^{pT_a} |y_{1,k} - \hat{x}_{1,k}|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{E} \right)^2, \quad (5.11)$$

wobei mit \mathbf{E} die 2-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet wird. Die Wahl von p in Form der Pole $p_1 = p_2 = p$ erfolgt auch hier mittels „Versuch und Irrtum“. Der Ausgang $\hat{\mathbf{y}}_k$ des Sliding-mode Filters (5.7) liefert dann eine Approximation der ersten Zeitableitung des Eingangs $y_{1,k}$. Das Blockschaltbild dieser Methode entspricht jenem von Abbildung 5.1 mit dem einzigen Unterschied, dass die beiden Ableitungsfiler $G_{\varphi_1}(z)$ und $G_s(z)$ durch SMF_{φ_1} und SMF_s ersetzt werden. Die beiden Sliding-mode Filter SMF_{φ_1} und SMF_s unterscheiden sich nur durch die Wahl des Parameters p .

5.1.3 Extended Kalman-Filter

Eine weitere Möglichkeit der Zustandsschätzung besteht in der Verwendung eines Extended Kalman-Filters, ein im Sinne der Regelungstheorie optimaler Beobachter. Da die für die Implementierung notwendigen Rechenschritte bereits in [15] sehr detailliert angegeben sind, wird hier darauf verzichtet und lediglich erwähnt, dass für die Berechnung des benötigten Abtastsystems das explizite Euler-Verfahren verwendet wurde und die Initialisierung des geschätzten Zustands und der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers für den Anfangszeitpunkt mit $\hat{\mathbf{x}}_0^- = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}_0^- = 1000\mathbf{E}$ erfolgte. Das Blockschaltbild dieses Beobachterkonzepts ist in Abbildung 5.2 dargestellt.

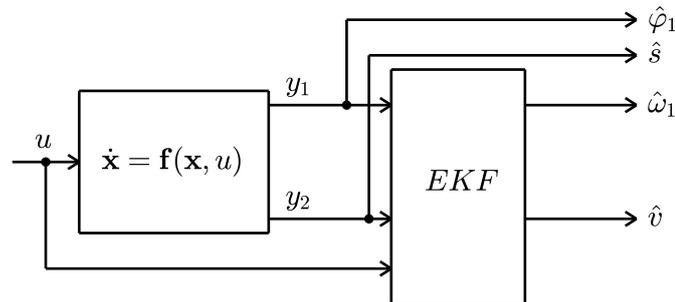


Abbildung 5.2: Blockschaltbild des Extended Kalman-Filters

5.1.4 Vergleich der Beobachterkonzepte

Ausgangspunkt für den Vergleich der drei oben beschriebenen Beobachterkonzepte ist das Entwurfsmodell (4.119) mit den Ausgangsgleichungen (5.1). Als Eingangstrajektorie $u(t)$ wurde eine Vorsteuerung gewählt, welche das Wagen-Pendel-System ausgehend vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$ in die Nähe der oberen Ruhelage $\mathbf{x}_{R,o} = \mathbf{0}$ bringt. Ab diesem Zeitpunkt wird der Eingang auf null gesetzt und das Wagen-Pendel-System kann frei ausschlagen¹. Als Abtastzeit wurde $T_a = 1\text{ms}$ gewählt und die Simulationszeit beträgt 10s. Die Parameter der jeweiligen Beobachterkonzepte wurden dabei so gewählt, dass sie die bestmögliche Approximation der zu beobachtenden Größen liefern und sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Einen Vergleich der Beobachterkonzepte anhand des Beobachtungsfehlers zeigt Abbildung 5.3. Daraus ist zu erkennen, dass das Extended Kalman-Filter aus Abschnitt 5.1.3 zwar die qualitativ besten Resultate liefert, dies aber mit einem erhöhten Rechenaufwand einhergeht. Wie verschiedene Simulationen gezeigt haben, ist die Schätzung der entsprechenden Geschwindigkeiten mittels einfacher Differenzialfilter aus Abschnitt 5.1.1 zu ungenau um die Regelungsziele zu erreichen. Das Sliding-mode Filter aus Abschnitt 5.1.2 hingegen liefert eine ausreichend genaue Schätzung, weshalb für sämtliche weitere Betrachtungen in diesem Kapitel das Sliding-mode Filter als Beobachterkonzept verwendet wurde.

¹Damit wird ein Großteil der möglich auftretbaren Dynamiken des Wagen-Pendel-Systems berücksichtigt.

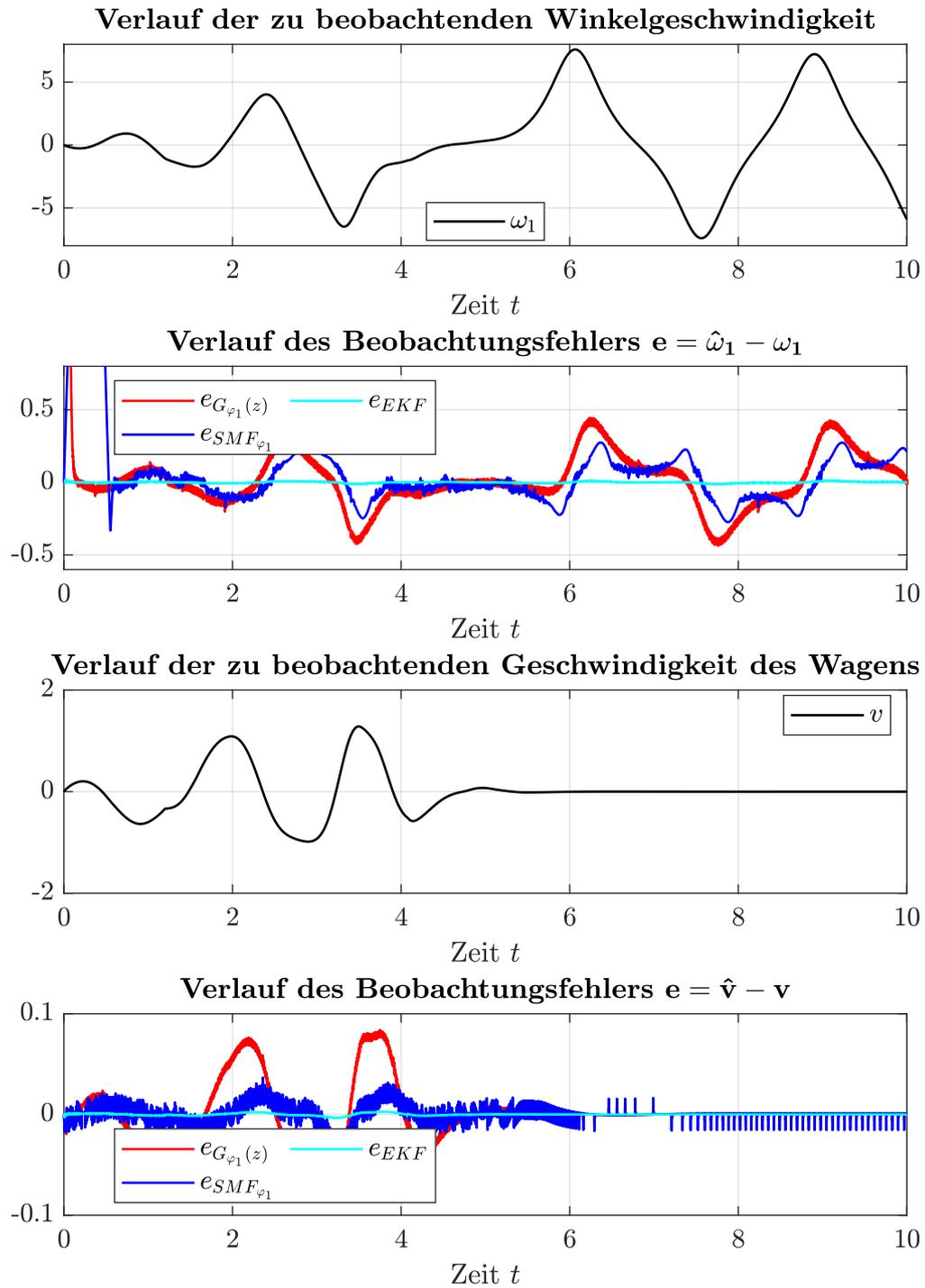


Abbildung 5.3: Vergleich der Beobachtungsfehler der jeweiligen Beobachterkonzepte

Beobachterkonzept	Parameter	Wert
$G_{\varphi_1}(z)$	Zeitkonstante	$T_R = 0.015 \text{ s}$
$G_s(z)$	Zeitkonstante	$T_R = 0.010 \text{ s}$
SMF_{φ_1}	Pole	$p = -4$
SMF_s	Pole	$p = -4$
EKF	Kovarianzmatrix des Messrauschens	$\mathbf{R} = 10^{-5} \mathbf{E}$
EKF	Kovarianzmatrix der Störung	$\mathbf{Q} = 10^{-2} \mathbf{E}$
EKF	Matrix	$\mathbf{G} = \mathbf{E}$
EKF	Matrix	$\mathbf{H} = \mathbf{0}$

Tabelle 5.1: Parameter der Beobachterkonzepte

5.2 Trajektorienverschiebung

Bei der Realisierung einer modellprädiktiven Regelung mithilfe der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode stellt sich die Frage nach der Initialisierung von Algorithmus 3 für MPC-Iterationen mit dem Index $k > 1$. Dazu wird eine (zeitliche) Trajektorienverschiebung angewendet, welche in Abbildung 5.4 anhand der Eingangstrajektorie $u(\tau)$ dargestellt ist. Dabei bezeichnet $u_k^{i_{\max}|j_{\max}}(\tau)$ die von Algorithmus 3 in der MPC-Iteration k gelieferte Lösung² des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems (3.48). Als initiale Eingangstrajektorie $u_{k+1}^{1|1}(\tau)$ für die nachfolgende MPC-Iteration $k + 1$ dient nun die um einen Steuerungshorizont T_c verschobene Lösung der MPC-Iteration k , wobei der letzte Wert der verschobenen Trajektorie konstant gehalten wird.

Die Trajektorienverschiebung zur Initialisierung von Algorithmus 3 wird neben der Eingangstrajektorie $u(\tau)$ auch auf die Verläufe der Lagrange-Multiplikatoren $\mu_{h_i}(\tau)$, $i = 1, \dots, 4$ und Strafparameter $c_{h_i}(\tau)$, $i = 1, \dots, 4$ sowie der transformierten Ungleichungsbeschränkungen $\tilde{h}_i(\tau)$, $i = 1, \dots, 4$ angewendet. Erfolgt die Schrittweitensteuerung mit der expliziten Liniensuche, so müssen auch die für (4.96) zusätzlich benötigten Trajektorien zeitlich verschoben werden.

5.3 Sicherheitsfunktion der Schrittweitensteuerung

Um den numerischen Rechenaufwand der modellprädiktiven Regelung so gering wie möglich zu halten, wird für die Schrittweitensteuerung die explizite Liniensuche (4.100) verwendet. Wie Simulationen in MATLAB/SIMULINK gezeigt haben, liefert die Berechnungsvorschrift (4.100) in einigen wenigen Gradienten-Iterationen lediglich suboptimale Schrittweiten $\alpha^{i|j}$. Suboptimal bedeutet in dieser Hinsicht, dass die mit der (suboptimalen) Schrittweite $\alpha^{i|j}$

²Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass für die Realisierung einer MPC das Konvergenzkriterium von Algorithmus 3 bzw. Algorithmus 4 deaktiviert wird, womit jede MPC-Iteration aus i_{\max} Lagrange-Iterationen zu je j_{\max} Gradienten-Iterationen besteht.

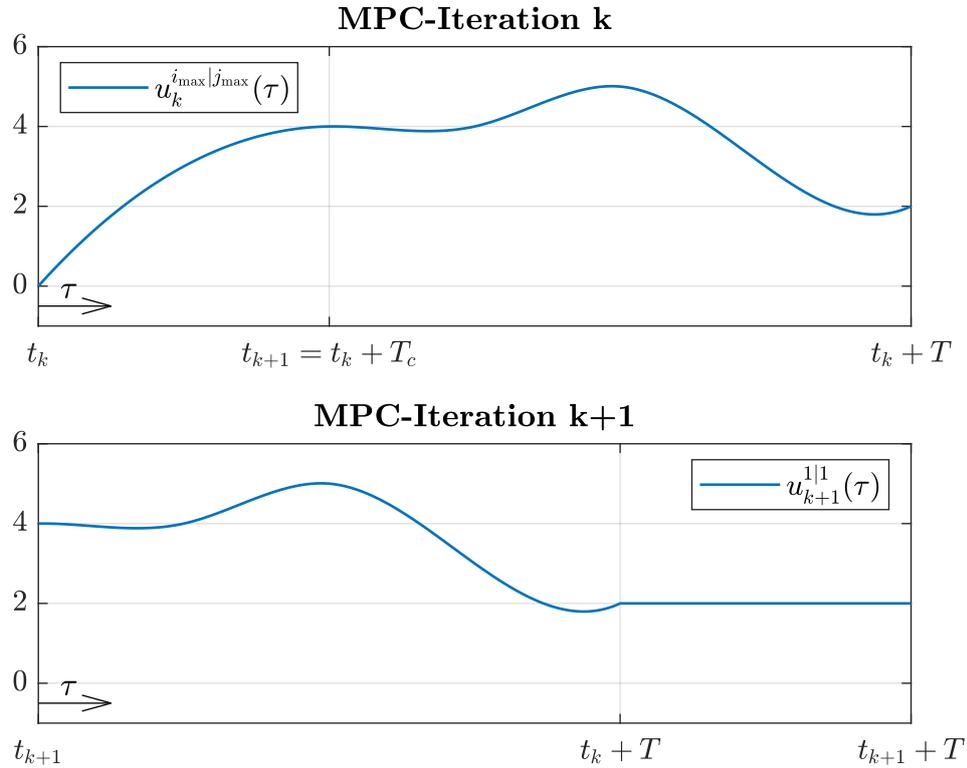


Abbildung 5.4: Prinzip der Trajektorienverschiebung

berechnete Eingangstrajektorie

$$u^{i|j+1}(\tau) = \psi_u(u^{i|j}(\tau) - \alpha^{i|j} d_u^{i|j}(\tau)) \quad (5.12)$$

auf eine Zustandstrajektorie $\mathbf{x}^{i|j+1}(\tau)$ führen würde, welche die Endungleichungsbeschränkung $h_{T_1}(\mathbf{x}_T^{i|j+1})$, verglichen mit der Endungleichungsbeschränkung $h_{T_1}(\mathbf{x}_T^{i|j})$ der zur Eingangstrajektorie $u^{i|j}(\tau)$ gehörigen Zustandstrajektorie $\mathbf{x}^{i|j}(\tau)$, erhöhen würde. Um solche Gradienten-Iterationen zu vermeiden, wurde für den Fall

$$h_{T_1}(\mathbf{x}_T^{i|j+1}) - h_{T_1}(\mathbf{x}_T^{i|j}) > \epsilon_T, \quad \epsilon_T \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (5.13)$$

also falls die Gradienten-Iteration j die Endungleichungsbeschränkung um einen Wert von größer als ϵ_T erhöht, die folgende Sicherheitsfunktion eingesetzt: Zusätzlich zur Schrittweite

$\alpha_1^{i|j}$, welche die Berechnungsvorschrift (4.100) liefert, werden als Schrittweiten

$$\alpha_2^{i|j} = \frac{1}{1000} \frac{u_{\max} - u_{\min}}{\max_{\tau \in [0, T]} |d_u^{i|j}(\tau)|} \quad (5.14a)$$

$$\alpha_3^{i|j} = 10^{-2} \alpha_2^{i|j} \quad (5.14b)$$

$$\alpha_4^{i|j} = 10^{-4} \alpha_2^{i|j} \quad (5.14c)$$

$$\alpha_5^{i|j} = 10^{-8} \alpha_2^{i|j} \quad (5.14d)$$

vorgeschlagen und jene Schrittweite $\alpha_q^{i|j}$, $q \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ausgewählt, so dass die zur Eingangstrajektorie

$$u^{i|j+1}(\tau) = \psi_u(u^{i|j}(\tau) - \alpha_q^{i|j} d_u^{i|j}(\tau)) \quad (5.15)$$

zugehörige Zustandstrajektorie $\mathbf{x}_q^{i|j+1}$ den geringsten Wert der Endungleichungsbeschränkung $h_{T_1}(\mathbf{x}_q^{i|j+1}(T))$ aufweist. Im Weiteren hat sich eine Wahl von $\epsilon_T = 2$ als günstig erwiesen.

5.4 Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems

Das Blockschaltbild zum Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems ist in Abbildung 5.5 zu sehen.

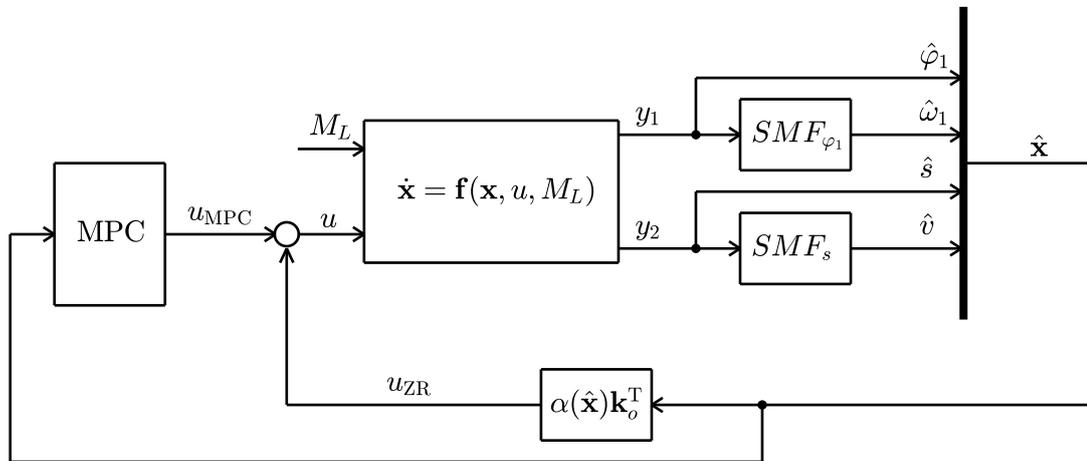


Abbildung 5.5: Blockschaltbild zum Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems

Mithilfe des externen Lastmoments M_L auf den Pendelstab soll dabei die Reaktion der modellprädiktiven Regelung auf unbekannte Störungen getestet werden. Weiters ist die additive Zusammensetzung des Eingangs u aus einem Teil u_{ZR} , welcher vom Zustandsregler geliefert wird, und einem Teil u_{MPC} , welcher die Gradienten-basierte erweiterte

Lagrange-Methode liefert, zu erkennen.

Die Initialisierung der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode erfolgt wie auch schon in Abschnitt 4.4 mithilfe von (4.134a)-(4.134d) und $\epsilon_{\text{rel},u} = 1$. Dabei werden die Konvergenzkriterien von Algorithmus 3 bzw. Algorithmus 4 deaktiviert. Die Vorwärts-Integration der Systemdynamik (4.79) sowie die Rückwärts-Integration der adjungierten Dynamik (4.75) erfolgen mit dem expliziten Heun-Verfahren (A.11) bzw. (A.16) und als Schrittweitensteuerung wird die explizite Liniensuche (4.100) verwendet. Falls die Berechnung der Schrittweite $\alpha^{i|j}$ in (4.100) einen negativen Wert liefert, wurde $\alpha^{i|j} = 10^{-8}$ gewählt und die Schrittweite der ersten Gradienten-Iteration $j = 1$ in der ersten Lagrange-Iteration $i = 1$ der ersten MPC-Iteration $k = 1$ ebenfalls zu $\alpha^{1|1} = 10^{-8}$ festgelegt. Die Auswertung des Kostenfunktional J bzw. \bar{J} erfolgt mit der Trapezregel (A.5). Die Parameter des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems (3.48) sowie jene der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

Die mit MATLAB/SIMULINK simulierten Verläufe sind in Abbildung 5.6 und Abbildung 5.7 dargestellt. Dabei ist auch die Reaktion auf externe Störungen unterschiedlicher Höhe und Dauer zu erkennen. Während kleine Auslenkungen aus der oberen Ruhelage durch den Zustandsregler ausgeglichen werden, werden entsprechend starke Auslenkungen durch die modellprädiktive Regelung ausgeglichen. Nach Implementierung der modellprädiktiven Regelung auf der DSPACE-MicroLabBox wurden die am realen Versuchsaufbau auftretenden Trajektorien gemessen, welche in Abbildung 5.8 und Abbildung 5.9 abgebildet sind und eine gute Übereinstimmung mit den simulativen Ergebnissen zeigen. Die externe Störung wurde dabei durch Schläge gegen das Pendelstück nachgeahmt. Ein erster (schwacher) Schlag gegen das Pendelstück erfolgt dabei zum Zeitpunkt $t_1 \approx 6.5\text{s}$ während das Pendelstück zum Zeitpunkt $t_2 \approx 10.2\text{s}$ einen wesentlich stärkeren Schlag ausgesetzt wurde.

5.5 Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems

Das Blockschaltbild für das seitliche Versetzen des Wagen-Pendel-Systems entspricht jenem von Abbildung 5.5 mit dem einzigen Unterschied, dass der Zustandsregler für das seitliche Versetzen deaktiviert wird, also $\mathbf{k}_o = \mathbf{0}$ gilt womit zu jedem Zeitpunkt $u_{\text{ZR}}(t) = 0$ folgt.

Die Initialisierung erfolgt dabei vollkommen analog zu Abschnitt 5.4 und auch die Integrationsverfahren bleiben unverändert. Als Schrittweitensteuerung wird ebenso die explizite Liniensuche (4.100) verwendet. Falls die Berechnung der Schrittweite $\alpha^{i|j}$ in (4.100) einen negativen Wert liefert, wurde allerdings die Ersatzstrategie von (4.110) gewählt und die Schrittweite der ersten Gradienten-Iteration $j = 1$ in der ersten Lagrange-Iteration $i = 1$ der ersten MPC-Iteration $k = 1$ zu $\alpha^{1|1} = 10^{-4}$ festgelegt. Die Parameter des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems (3.48) sowie jene der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode stimmen größtenteils mit jenen von Tabelle 5.2 überein und unterscheiden sich lediglich durch die in Tabelle 5.3 angegebenen Parameter.

Parameter	Wert
Sollwert des Eingangs u_{des}	0 m/s^2
Obere Schranke des Eingangs u_{max}	22 m/s^2
Untere Schranke des Eingangs u_{min}	-22 m/s^2
Obere Schranke der Position s_{max}	0.7 m
Untere Schranke der Position s_{min}	-0.7 m
Obere Schranke der Geschwindigkeit v_{max}	2 m/s
Untere Schranke der Geschwindigkeit v_{min}	-2 m/s
Obere Schranke der Lagrange-Multiplikatoren μ_{max}	10^6
Obere Schranke der Strafparameter c_{max}	10^6
Erhöhungsfaktor der Strafparameter β_{in}	1.05
Verringerungsfaktor der Strafparameter β_{de}	0.95
Bewertungsfaktor der Strafparameter γ_{in}	1
Toleranzfaktor der Strafparameter γ_{de}	0.1
Gewichtungsmatrix \mathbf{Q}	$\text{diag}(1, 0.5, 5, 0.05)$
Gewichtungsfaktor R	0.05
Initiale Eingangstrajektorie $u^{1 1}(\tau)$	0
Anfangszustand \mathbf{x}_0	$[\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$
Sollwert des Zustands \mathbf{x}_{des}	$[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
Prädiktionshorizont T	3.51 s
Anzahl an Abtastpunkten N_{hor}	235
Steuerungshorizont T_c	0.015 s
Gewichtungsmatrix \mathbf{P}	\mathbf{P}_o von (3.54)
Endgebietskonstante α_T	$\alpha_{T,o}$ von (3.73)
Maximalanzahl der Lagrange-Iterationen i_{max}	2
Maximalanzahl der Gradienten-Iterationen j_{max}	4
Untere Schranke der Strafparameter c_{min}	500

Tabelle 5.2: Parameter des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems (3.48) sowie jene der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode zum Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems

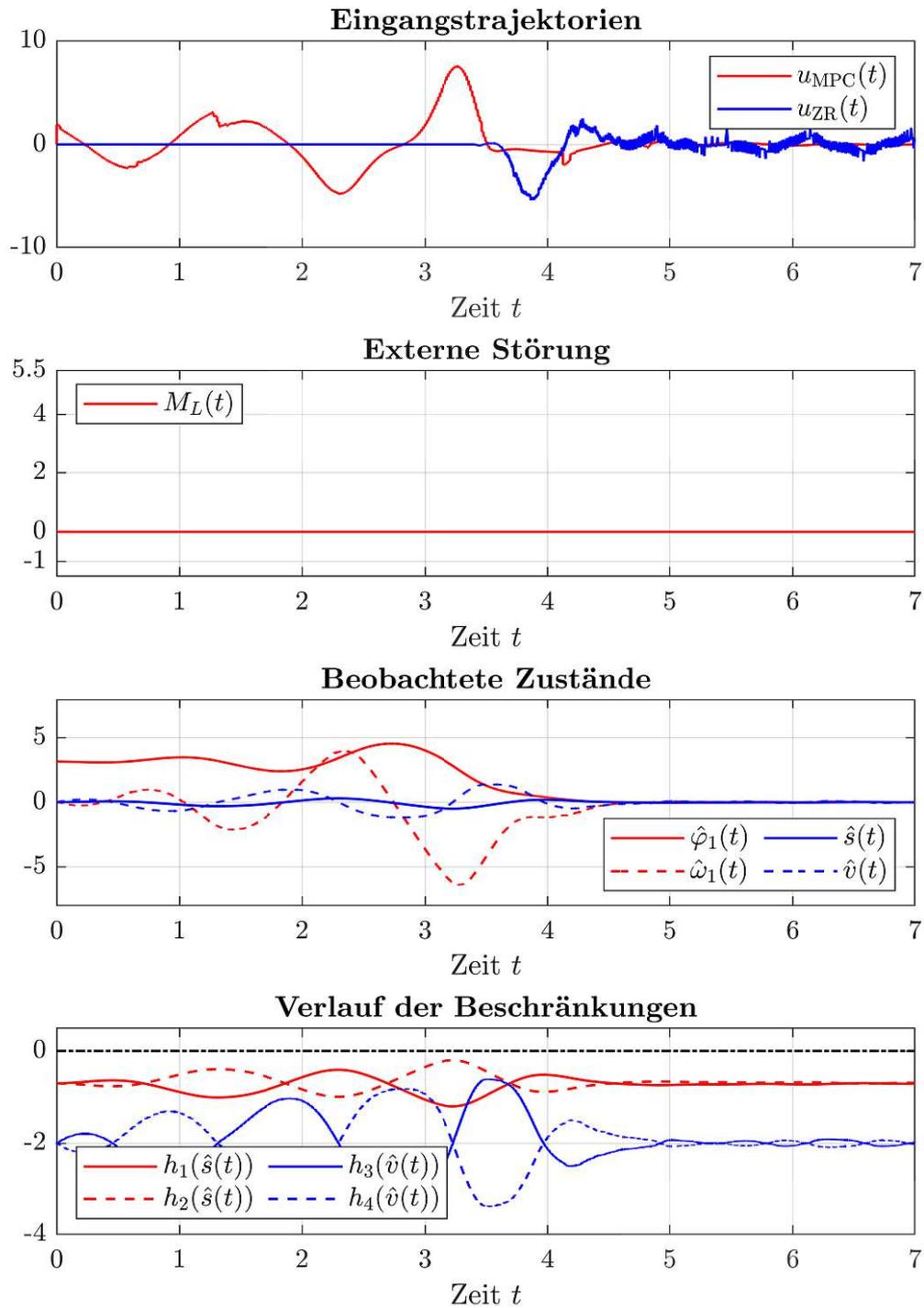


Abbildung 5.6: Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems 1/2 (Simulation)

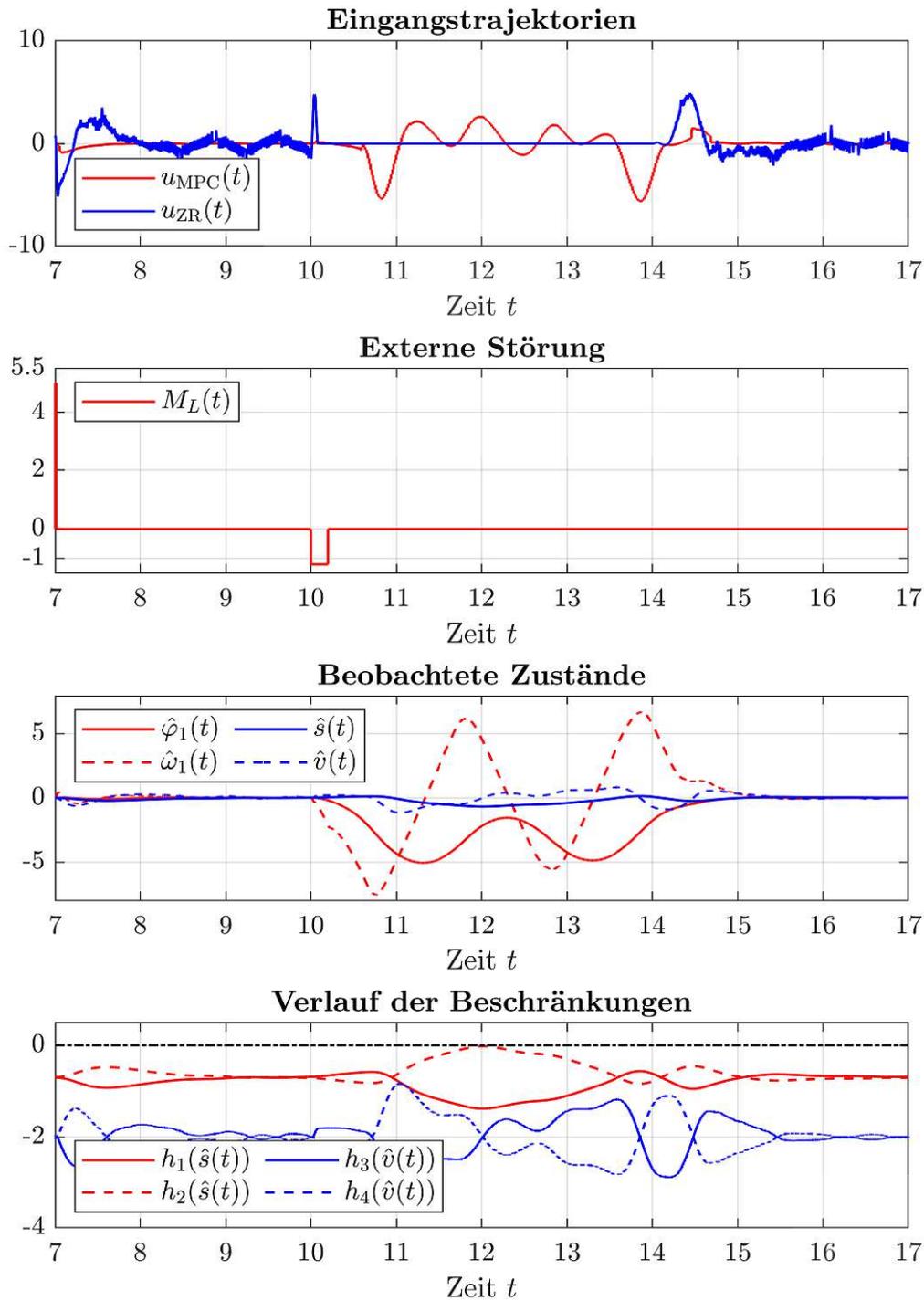


Abbildung 5.7: Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems 2/2 (Simulation)

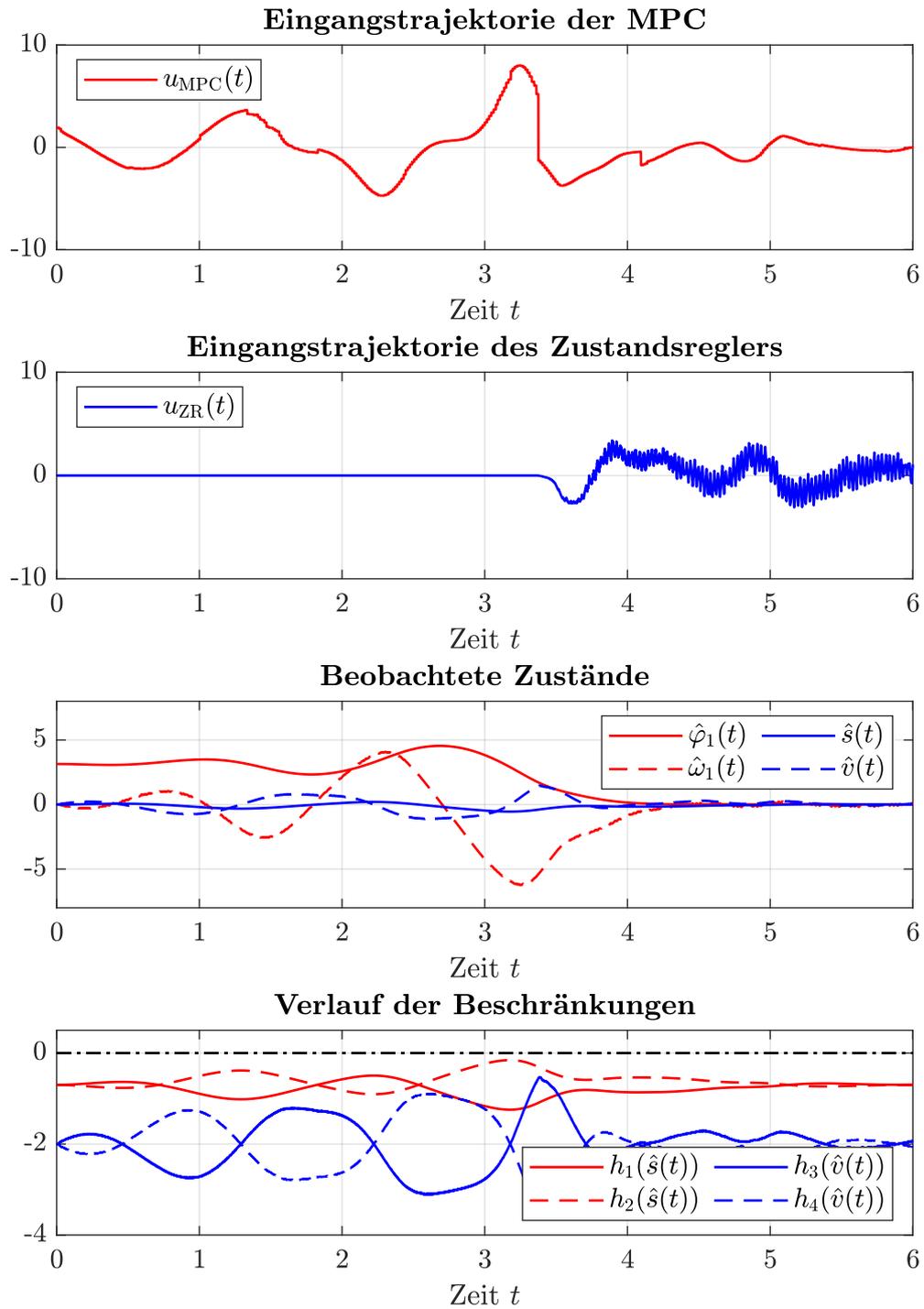


Abbildung 5.8: Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems 1/2 (Messung)

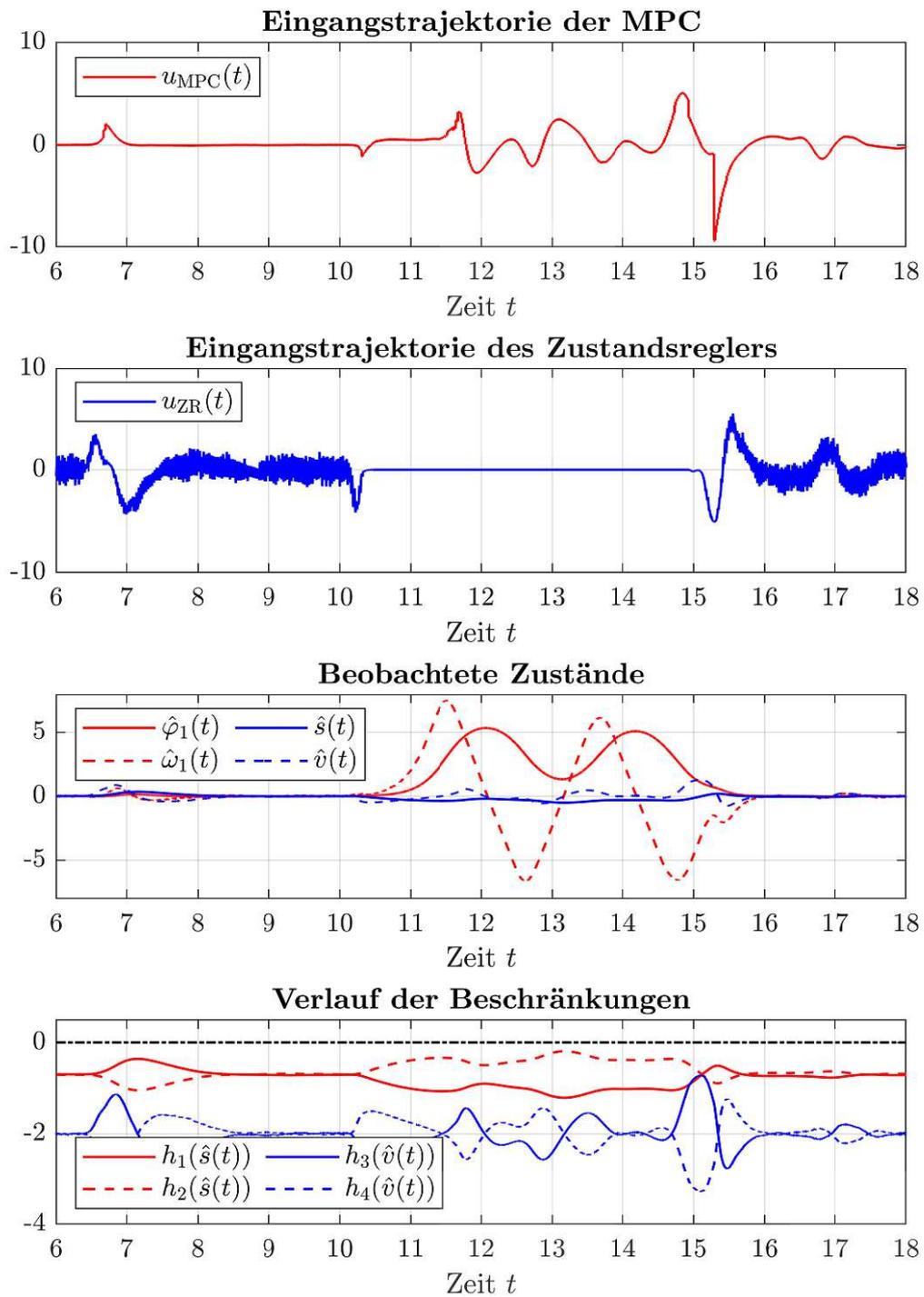


Abbildung 5.9: Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems 2/2 (Messung)

Die mit MATLAB/SIMULINK simulierten Verläufe sind in Abbildung 5.10 und Abbildung 5.11 dargestellt. Die am realen Versuchsaufbau gemessenen Trajektorien sind in Abbildung 5.12 und Abbildung 5.13 abgebildet. Auch hier ist eine gute Übereinstimmung mit den simulativen Ergebnissen sowie die gute Reaktion auf externe Störungen zu erkennen.

Parameter	Wert
Anfangszustand \mathbf{x}_0	$[\pi \ 0 \ -0.45 \ 0]^T$
Sollwert des Zustands \mathbf{x}_{des}	$[\pi \ 0 \ 0.45 \ 0]^T$
Prädiktionshorizont T	2.505 s
Anzahl an Abtastpunkten N_{hor}	168
Gewichtungsmatrix \mathbf{P}	\mathbf{P}_u von (3.82)
Endgebietskonstante α_T	$\alpha_{T,u}$ von (3.84)
Untere Schranke der Strafparameter c_{min}	1500

Tabelle 5.3: Parameter des unterlagerten Optimalsteuerungsproblems (3.48) sowie jene der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode für das seitliche Versetzen des Wagen-Pendel-Systems

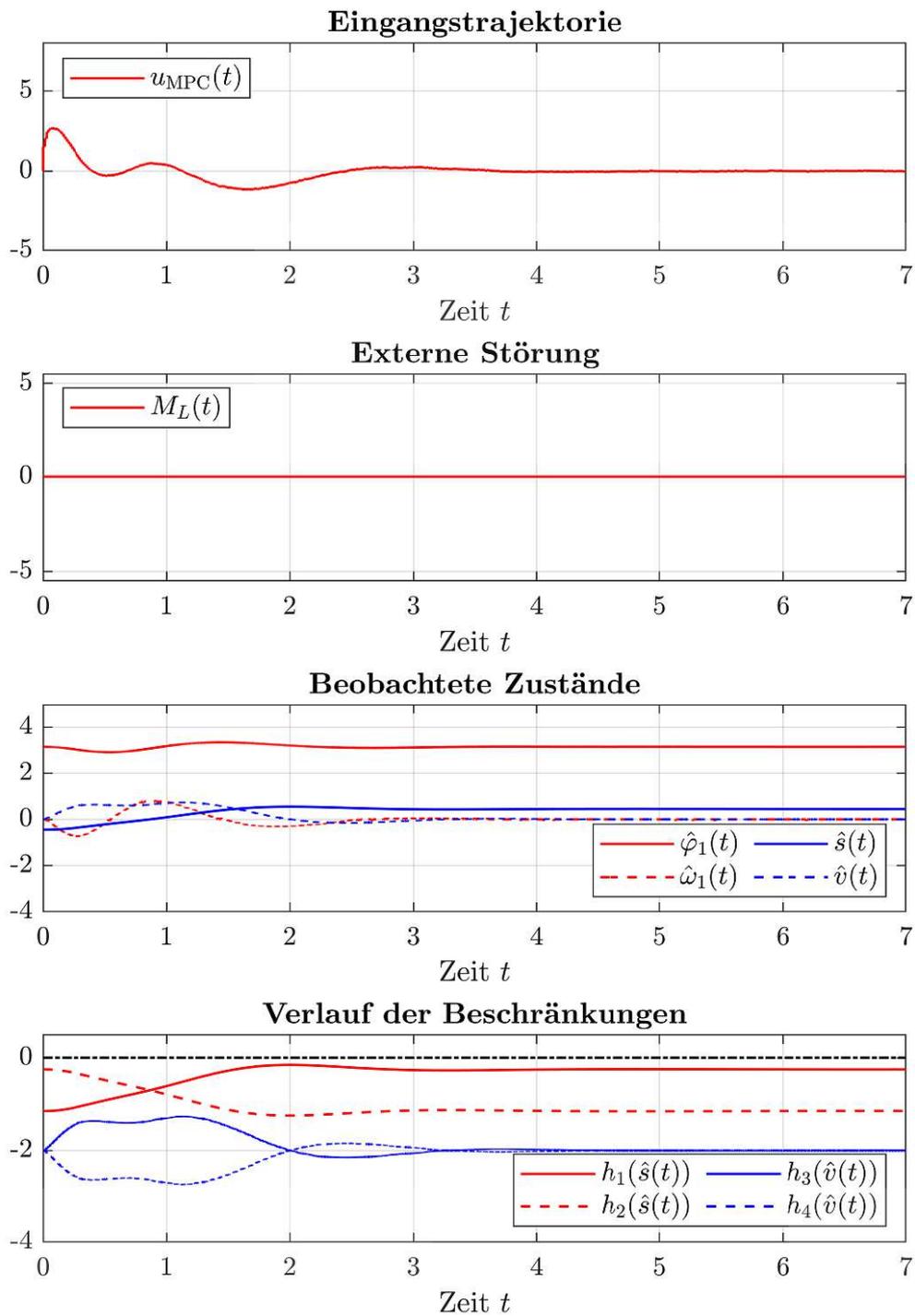


Abbildung 5.10: Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems 1/2 (Simulation)

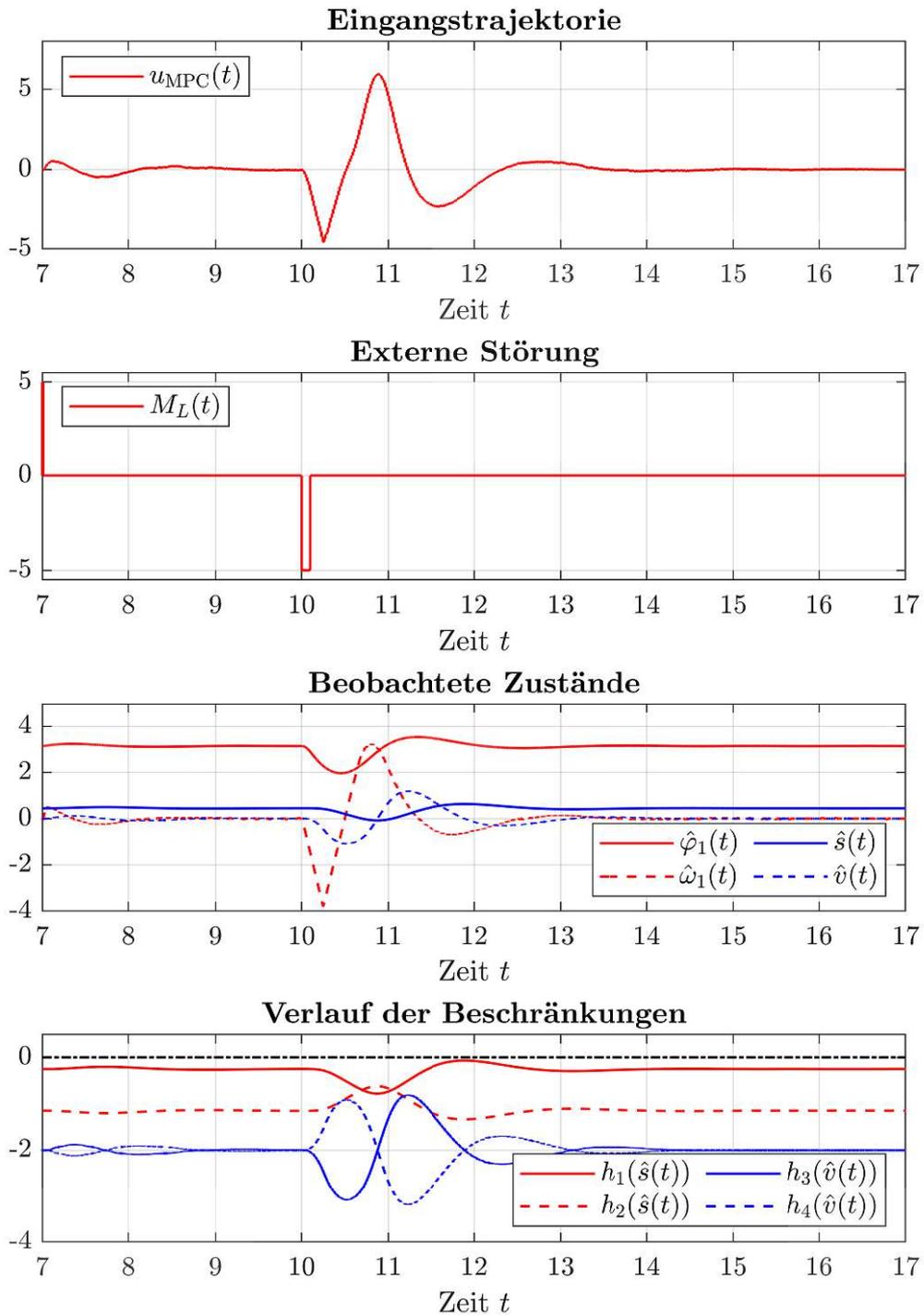


Abbildung 5.11: Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems 2/2 (Simulation)

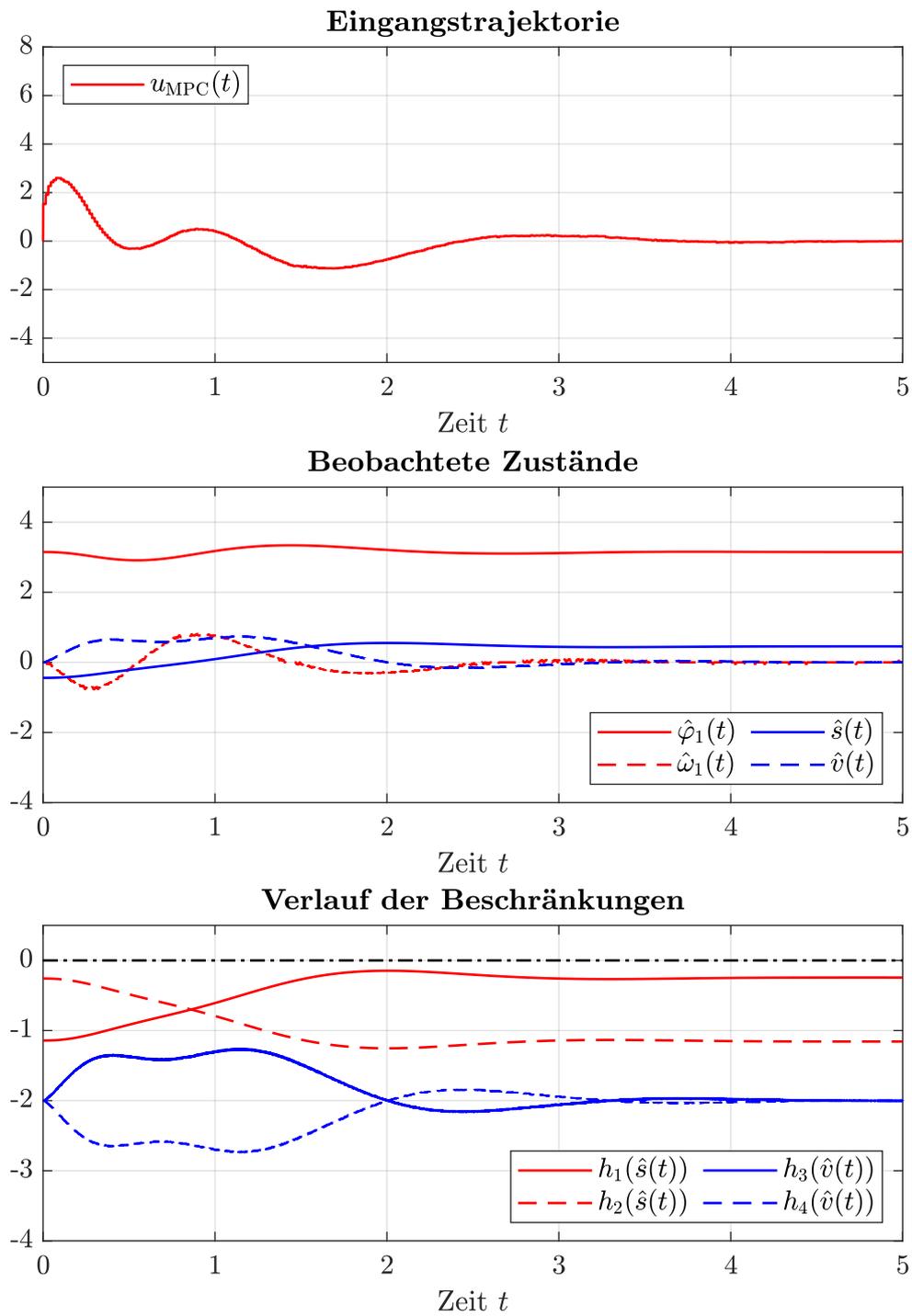


Abbildung 5.12: Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems 1/2 (Messung)

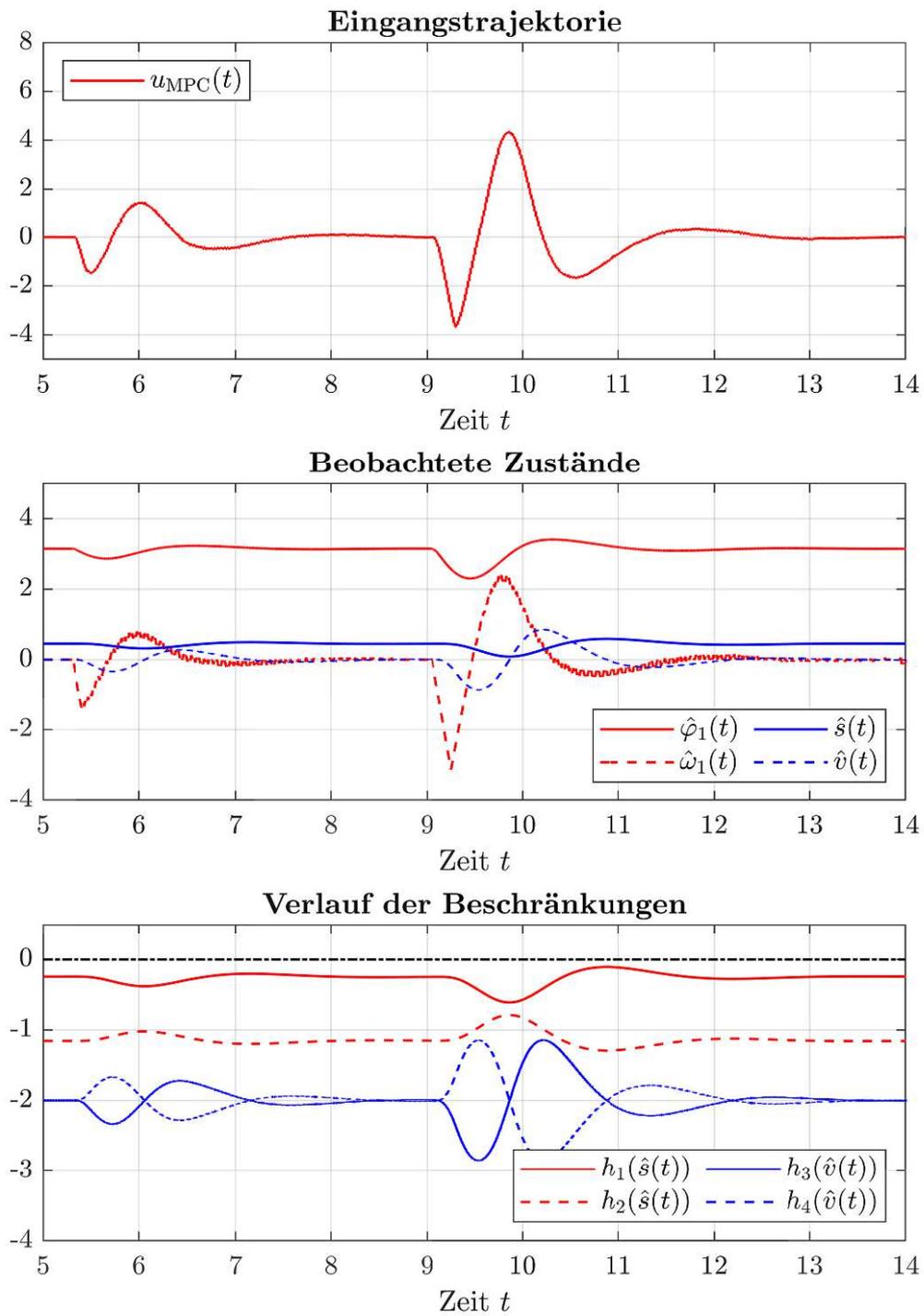


Abbildung 5.13: Seitliches Versetzen des Wagen-Pendel-Systems 2/2 (Messung)

6 Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Diplomarbeit war die Entwicklung und Implementierung einer nichtlinearen modellprädiktiven Regelung um das Aufschwingen sowie das seitliche Versetzen eines Wagen-Pendel-Systems zu bewerkstelligen. Ausgangspunkt dafür war ein hinreichend genaues mathematisches Modell des zu regelnden Systems, welches mithilfe der Euler-Lagrange Gleichungen hergeleitet wurde. In der Formulierung des in jedem MPC-Abtastschritt benötigten unterlagerten Optimalsteuerungsproblems wurde ein Endkostenterm sowie eine Endbeschränkung inkludiert, womit unter gewissen Voraussetzungen die Stabilität des geschlossenen Regelkreises garantiert werden kann. Für die numerische Lösung des Optimalsteuerungsproblems wurde die Gradienten-basierte erweiterte Lagrange-Methode verwendet, eine indirekte Methode welche sich für den Einsatz in modellprädiktiven Regelungen mit Reglerabtastzeiten im Millisekundenbereich eignet und eine effiziente Implementierung auf Echtzeit-Hardware erlaubt. Allerdings birgt dieses Verfahren einige Schwachstellen für die Kombination aus langen Prädiktionshorizonten und instabilen Arbeitspunkten. Durch die Erweiterung des mathematischen Modells um ein skaliertes lineares Zustandsregelgesetz konnten diese Probleme beseitigt werden. Um aus den Messungen der Winkelauslenkung des Pendels und der Position des Wagens die Winkelgeschwindigkeit des Pendels und die translatorische Geschwindigkeit des Wagens zu schätzen, wurden Sliding-mode Filter verwendet. Diese liefern, verglichen mit einfachen Ableitungsfiltern, eine wesentlich bessere Approximation der zu schätzenden Zustandsgrößen. Ein Extended Kalman-Filter würde zwar noch bessere Resultate generieren, dies ist allerdings mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden, weshalb dieser Ansatz der Zustandsschätzung nicht weiter verfolgt wurde. Nach erfolgreicher Simulation der entwickelten modellprädiktiven Regelung in MATLAB/SIMULINK, bei welcher auch die Reaktion der Regelung auf unbekannte externe Störungen in Form eines Lastmoments auf den Pendelstab untersucht wurde, erfolgte die Implementierung der Regelung auf einer dSPACE-MicroLabBox. Dabei wurden die einzelnen Algorithmen bzw. Parameter der Gradienten-basierten erweiterten Lagrange-Methode so gewählt, dass die zur Verfügung stehende Rechenleistung beinahe vollständig ausgenutzt wurde. Zusätzlich wurde zur Erhöhung der Robustheit eine Sicherheitsfunktion der Schrittweitensteuerung implementiert. Die anschließend am realen Versuchsaufbau durchgeführten Experimente zeigen eine gute Übereinstimmung mit den simulativen Ergebnissen. Möglichkeiten zur Verbesserung bzw. Erweiterung der in dieser Arbeit entwickelten modellprädiktiven Regelung bestehen neben der Verwendung eines Extended Kalman-Filters zur Zustandsschätzung in der Berücksichtigung von Vielfachen von 2π bei der Handhabung der Winkelauslenkung des Pendels. Wie die simulierten sowie die am realen Versuchsaufbau auftretenden Verläufe der Zustandsgrößen beim Aufschwingen des Wagen-Pendel-Systems zeigen, führt jede Auslenkung aus der oberen Ruhelage in positiver Zählrichtung des Winkels dazu, dass die modellprädiktive Regelung diese Auslenkung so korrigiert, dass das Pendel in Richtung

der negativen Zählrichtung wieder zurück in die obere Ruhelage mit dem Winkel $\varphi_1 = 0$ gebracht wird, obwohl es in diesem Fall womöglich einfacher wäre das Pendel weiter in positiver Zählrichtung in die obere Ruhelage mit dem Winkel $\varphi_1 = 2\pi$ zu bringen. Analoges gilt für Auslenkungen in negativer Zählrichtung des Winkels sowie für das seitliche Versetzen des Wagen-Pendel-Systems.

A Numerik

A.1 Zeitdiskretisierung von zeitkontinuierlichen Größen

Da die Algorithmen 3 und 4 für Simulationszwecke in MATLAB/SIMULINK und anschließend zur Verifikation in DSPACE implementiert werden, müssen sämtliche zeitkontinuierliche Größen zeitdiskretisiert werden. Dabei wird eine skalare Zeitfunktion $x(\tau)$, $\tau \in [0, T]$ an einer Anzahl von N_{hor} äquidistanten Zeitpunkten

$$\tau_k = kh, \quad k = 0, \dots, N_{\text{hor}} - 1 \quad (\text{A.1})$$

mit der Abtastzeit $h = \frac{T}{N_{\text{hor}} - 1}$ abgetastet, wobei $\tau_0 = 0$ und $\tau_{N_{\text{hor}} - 1} = T$ gilt. Die skalare Zeitfunktion kann danach als Zeilenvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_{\text{hor}}}$ in der Form

$$\mathbf{x} = [x(\tau_0) \quad x(\tau_1) \quad \dots \quad x(\tau_{N_{\text{hor}} - 1})] = [x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_{N_{\text{hor}} - 1}] \quad (\text{A.2})$$

abgespeichert werden. Diese Vorgehensweise ist in Abbildung A.1 für eine Zeitfunktion $x(\tau)$, $\tau \in [0, T]$ mit $T = 3\text{s}$, $N_{\text{hor}} = 7 \Rightarrow h = 0.5\text{s}$ dargestellt.

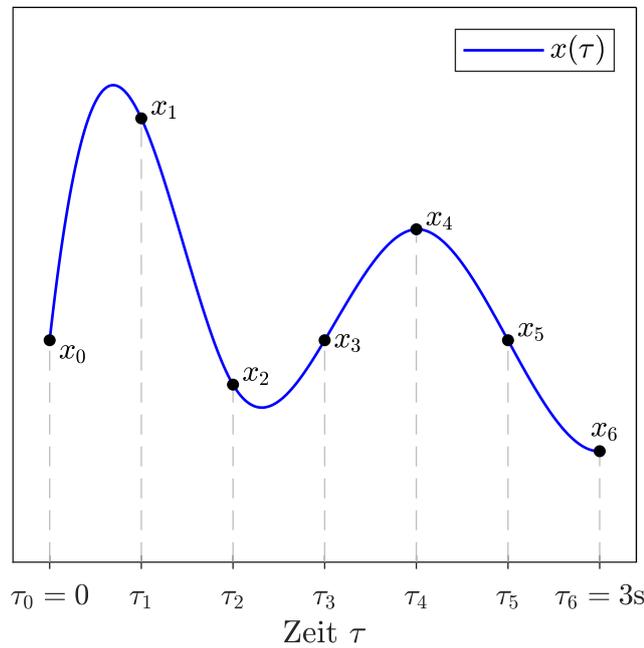


Abbildung A.1: Äquidistante Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals

A.2 Auswertung des Kostenfunktionals

Die Auswertung des Kostenfunktionals J von (4.38a) bzw. \bar{J} von (4.69a) erfolgt mittels *numerischer Integration*. Ein bekanntes Verfahren zur numerischen Approximation des Integrals

$$\int_0^T f(\tau) d\tau \quad (\text{A.3})$$

mit einer im Intervall $[0, T]$ stetigen Zeitfunktion $f(\tau)$ ist die sogenannte *Trapezregel* (Englisch: *trapezoidal rule*), bei der die Fläche unter der Kurve $f(\tau)$ im Intervall $[0, T]$ durch ein Trapez angenähert wird, siehe Abbildung A.2. Daraus folgt die Abschätzung

$$\int_0^T f(\tau) d\tau \approx \frac{T}{2} (f(0) + f(T)) . \quad (\text{A.4})$$

Um die Approximation des Integrals (A.3) zu verbessern, wird das Intervall $[0, T]$ in $N_{\text{hor}} - 1$ nebeneinanderliegende Teilintervalle der Länge $h = \frac{T}{N_{\text{hor}} - 1}$ unterteilt und für jedes Teilintervall die Trapezregel angewendet. Damit folgt die verbesserte Abschätzung des Integrals (A.3) zu

$$\int_0^T f(\tau) d\tau \approx \frac{h}{2} \left(f(0) + f(T) + 2 \sum_{i=1}^{N_{\text{hor}} - 2} f(ih) \right) . \quad (\text{A.5})$$

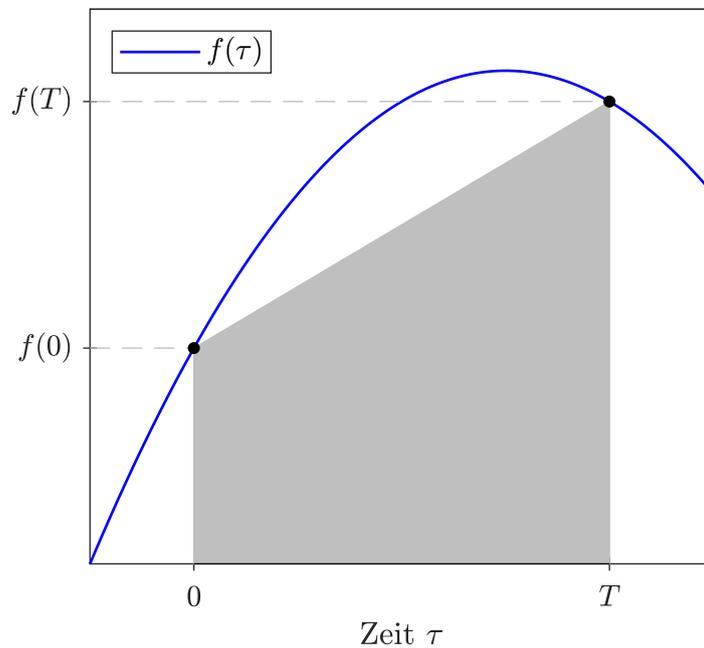


Abbildung A.2: Veranschaulichung der Trapezregel

Eine alternative Methode zur Approximation des Integrals (A.3) ist die sogenannte *Simpsonregel* (Englisch: *Simpson's rule*). Dabei wird das Intervall $[0, T]$ auf zwei Teilintervalle der Länge $\frac{T}{2}$ aufgeteilt und anschließend ein quadratisches Interpolationspolynom $P(\tau)$ durch die Punkte $(0, f(0))$, $(\frac{T}{2}, f(\frac{T}{2}))$ und $(T, f(T))$ gelegt, siehe Abbildung A.3. Die Approximation des Integrals (A.3) erfolgt dann durch analytisches Integrieren der interpolierenden Parabel womit man

$$\int_0^T f(\tau) d\tau \approx \frac{T}{6} \left(f(0) + 4f\left(\frac{T}{2}\right) + f(T) \right) \quad (\text{A.6})$$

erhält. Um die Approximation weiter zu verbessern, kann wie zuvor das Intervall $[0, T]$ in $N_{\text{hor}} - 1$ nebeneinanderliegende Teilintervalle der Länge $h = \frac{T}{N_{\text{hor}} - 1}$ unterteilt werden und anschließend für je zwei nebeneinanderliegende Teilintervalle die Simpsonregel angewendet werden. Damit erhält man

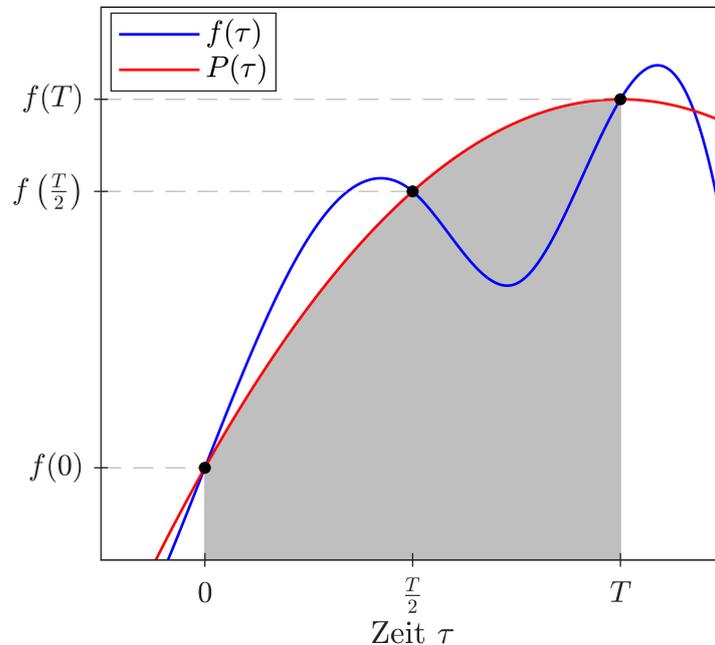


Abbildung A.3: Veranschaulichung der Simpsonregel

$$\int_0^T f(\tau) d\tau \approx \frac{h}{3} \left(f(0) + 4 \sum_{i \text{ ungerade}} f(ih) + 2 \sum_{i \text{ gerade}} f(ih) + f(T) \right), \quad 0 < i < N_{\text{hor}} - 1. \quad (\text{A.7})$$

Zu beachten ist, dass die Simpsonregel eine gerade Anzahl $N_{\text{hor}} - 1$ an Teilintervallen voraussetzt womit die Anzahl N_{hor} an Abtastzeitpunkten ungerade sein muss.

Für Fehlerabschätzungen der Trapez- und Simpsonregel sowie weiteren Details zu numerischen Integrationsverfahren sei auf [29] verwiesen.

A.3 Vorwärts-Integration der Systemdynamik

Zur Vorwärts-Integration der Systemdynamik (4.79) können die bekannten numerischen Verfahren zur Lösung eines *Anfangswertproblems* (Englisch: *initial value problem*) verwendet werden. Dazu betrachte man das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{A.8})$$

mit dem Zustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dem stetigen Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und dem Anfangszustand \mathbf{x}_0 . Ziel ist es, für eine gegebene Eingangstrajektorie $\mathbf{u}(\tau)$, $\tau \in [0, T]$ und einen bekannten Anfangszustand \mathbf{x}_0 eine hinreichend gute Approximation der Lösung $\mathbf{x}(\tau)$ von (A.8) zu erhalten. Es sei hier nochmals angemerkt, dass sämtliche zeitkontinuierliche Größen in zeitdiskreter Form mit der Abtastzeit $h = \frac{T}{N_{\text{hor}} - 1}$ vorliegen und $\mathbf{x}(\tau_k) = \mathbf{x}_k$ mit $\tau_k = kh$, $k = 0, \dots, N_{\text{hor}} - 1$ gilt.

Die bekanntesten Verfahren zur numerischen Vorwärts-Integration des Anfangswertproblems (A.8) sind:

1. Explizites Euler-Verfahren

Die Iterationsvorschrift des expliziten Euler-Verfahrens (auch als Euler-Cauchy- oder Polygonzug-Verfahren bezeichnet) lautet

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}), \quad k = 1, \dots, N_{\text{hor}} - 1 \quad (\text{A.9})$$

und besitzt die Fehlerordnung¹ $p = 1$.

2. Implizites Euler-Verfahren

Die Iterationsvorschrift des impliziten Euler-Verfahrens lautet

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad k = 1, \dots, N_{\text{hor}} - 1 \quad (\text{A.10})$$

und besitzt ebenso die Fehlerordnung $p = 1$. Da es sich um ein implizites Verfahren handelt, muss in jedem Iterationsschritt ein im Allgemeinen nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden wozu bspw. das *Newton-Verfahren* (Englisch: *Newton's method*) verwendet werden kann. Dieser Nachteil wird jedoch durch die verbesserten Stabilitätseigenschaften der impliziten Verfahren wettgemacht [29].

3. Explizites Heun-Verfahren

Die Iterationsvorschrift des expliziten Heun-Verfahrens lautet

$$\mathbf{x}_k^{[P]} = \mathbf{x}_{k-1} + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (\text{A.11a})$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \frac{h}{2} \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k^{[P]}, \mathbf{u}_k) \right), \quad k = 1, \dots, N_{\text{hor}} - 1 \quad (\text{A.11b})$$

¹Die Fehlerordnung p ist eine wichtige Kenngröße um numerische Verfahren miteinander vergleichen zu können. Sie beruht auf dem lokalen Diskretisierungsfehler $\chi = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}(\tau_k)\|_2$, wobei mit \mathbf{x}_k die numerische (näherungsweise) Lösung nach einem Iterationsschritt und mit $\mathbf{x}(\tau_k)$ die exakte Lösung des Anfangswertproblems (A.8) bezeichnet wird. Ein numerisches Verfahren besitzt die Fehlerordnung p , falls für den lokalen Diskretisierungsfehler $\chi \leq \mathcal{O}(h^p)$ gilt. Falls für ein Verfahren $\chi \leq \mathcal{O}(h)$ gilt, also $p = 1$, so bedeutet das, dass eine Halbierung der Abtastzeit h in etwa eine Halbierung des Diskretisierungsfehlers χ bewirkt. Für Verfahren mit $\chi \leq \mathcal{O}(h^2)$, also $p = 2$, bewirkt eine Halbierung der Abtastzeit eine Reduktion auf ein Viertel des Fehlers.

und besitzt die Fehlerordnung $p = 2$.

4. Implizites Trapez-Verfahren

Die Iterationsvorschrift des impliziten Trapez-Verfahrens lautet

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \frac{h}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)), \quad k = 1, \dots, N_{\text{hor}} - 1 \quad (\text{A.12})$$

und besitzt ebenso die Fehlerordnung $p = 2$.

5. Explizites Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Die Iterationsvorschrift des expliziten klassischen Runge-Kutta-Verfahrens lautet

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (\text{A.13a})$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k-1} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1, \mathbf{u}_{k-\frac{1}{2}}\right) \quad (\text{A.13b})$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k-1} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2, \mathbf{u}_{k-\frac{1}{2}}\right) \quad (\text{A.13c})$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1} + h\mathbf{k}_3, \mathbf{u}_k) \quad (\text{A.13d})$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad k = 1, \dots, N_{\text{hor}} - 1 \quad (\text{A.13e})$$

mit $\mathbf{u}_{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{u}_k)$ und besitzt die Fehlerordnung $p = 4$.

Es existieren nun zwei Möglichkeiten um die Genauigkeit der numerischen Lösung des Anfangswertproblems (A.8) zu verbessern. Man kann einerseits ein Verfahren mit einer höheren Fehlerordnung p wählen und andererseits die Abtastzeit h reduzieren, wobei beide Möglichkeiten mit einem erhöhten Rechenaufwand einhergehen. Da sich der Gesamtfehler des numerischen Verfahrens aus dem Diskretisierungsfehler des Verfahrens selbst und dem Rundungsfehler, welcher vor allem für sehr kleine Abtastzeiten verstärkt in Erscheinung tritt, zusammensetzt, ist bei der Wahl von h zu beachten, dass eine sehr kleine Abtastzeit nicht zwangsweise eine sehr genaue (numerische) Lösung impliziert, siehe Abbildung A.4. Optimal ist also jene Abtastzeit h^* , welche den Gesamtfehler minimiert.

A.4 Rückwärts-Integration der adjungierten Dynamik

Für die Rückwärts-Integration der adjungierten Dynamik (4.75) können prinzipiell die gleichen numerischen Verfahren mit den gleichen Fehlerordnungen wie zur Vorwärts-Integration der Systemdynamik verwendet werden. Es müssen lediglich die entsprechenden Iterationsvorschriften auf ein *Endwertproblem* (Englisch: *final value problem*) adaptiert werden. Ausgangspunkt sei wieder die Dynamik von (A.8), anstelle des Anfangswerts \mathbf{x}_0 ist allerdings der Endwert $\mathbf{x}_{N_{\text{hor}}-1}$ gegeben. Mit diesen Änderungen folgen die entsprechenden Verfahren zu:

1. Explizites Euler-Verfahren

Die Iterationsvorschrift des expliziten Euler-Verfahrens für die Rückwärts-Integration lautet

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1} - h\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}), \quad k = N_{\text{hor}} - 2, \dots, 0. \quad (\text{A.14})$$

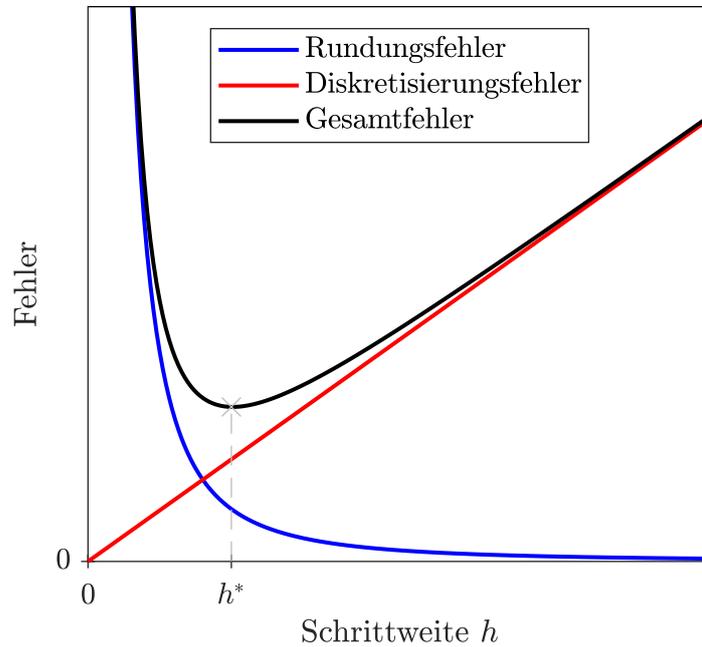


Abbildung A.4: Zusammensetzung des Gesamtfehlers eines Verfahrens mit $p = 1$

2. Implizites Euler-Verfahren

Die Iterationsvorschrift des impliziten Euler-Verfahrens für die Rückwärts-Integration lautet

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1} - h\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad k = N_{\text{hor}} - 2, \dots, 0. \quad (\text{A.15})$$

3. Explizites Heun-Verfahren

Die Iterationsvorschrift des expliziten Heun-Verfahrens für die Rückwärts-Integration lautet

$$\mathbf{x}_k^{[P]} = \mathbf{x}_{k+1} - h\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) \quad (\text{A.16a})$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \frac{h}{2} \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k^{[P]}, \mathbf{u}_k) \right), \quad k = N_{\text{hor}} - 2, \dots, 0. \quad (\text{A.16b})$$

4. Implizites Trapez-Verfahren

Die Iterationsvorschrift des impliziten Trapez-Verfahrens für die Rückwärts-Integration lautet

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \frac{h}{2} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)), \quad k = N_{\text{hor}} - 2, \dots, 0. \quad (\text{A.17})$$

5. Explizites Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Die Iterationsvorschrift des expliziten klassischen Runge-Kutta-Verfahrens für die

Rückwärts-Integration lautet

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) \quad (\text{A.18a})$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k+1} - \frac{h}{2}\mathbf{k}_1, \mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}}\right) \quad (\text{A.18b})$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k+1} - \frac{h}{2}\mathbf{k}_2, \mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}}\right) \quad (\text{A.18c})$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1} - h\mathbf{k}_3, \mathbf{u}_k) \quad (\text{A.18d})$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad k = N_{\text{hor}} - 2, \dots, 0 \quad (\text{A.18e})$$

mit $\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k)$ und wurde aus [30] entnommen.

B Volldiskretisierung

Wie schon in Kapitel 3 erwähnt, beruhen direkte Methoden auf einer Parametrierung der Eingangstrajektorie $\mathbf{u}(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, um das Optimalsteuerungsproblem (3.1) auf ein finit-dimensionales, beschränktes, statisches Optimierungsproblem der Form (3.85) zu reduzieren. Dazu wird in einem ersten Schritt das Zeitintervall $[0, T]$ in der Form

$$\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N_{\text{hor}}-1} = T \quad (\text{B.1})$$

diskretisiert, wobei für den Abstand zwischen den N_{hor} Stützpunkten

$$\tau_i - \tau_{i-1} = h = \frac{T}{N_{\text{hor}} - 1}, \quad i = 1, \dots, N_{\text{hor}} - 1 \quad (\text{B.2})$$

gilt. Die einfachste Form der Parametrierung des Eingangs \mathbf{u} besteht darin, ihn in jedem der $N_{\text{hor}} - 1$ Subintervalle $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, \dots, N_{\text{hor}} - 2$ als konstant anzusetzen, d. h.

$$\mathbf{u}(\tau) = \psi(\tau, \hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{u}_i, \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \text{ mit } \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N_{\text{hor}}-2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(N_{\text{hor}}-1)}. \quad (\text{B.3})$$

Diese Form der Parametrierung wird in der gängigen Literatur auch als *Zero-Order-Hold-Parametrierung* bezeichnet. Für die parametrisierte Eingangstrajektorie $\mathbf{u}(\tau) = \psi(\tau, \hat{\mathbf{u}})$ ergibt sich somit ein stückweise konstantes Profil in Abhängigkeit der $m(N_{\text{hor}}-1)$ Eingangsparameter $\hat{\mathbf{u}}$. Alternativ dazu können bspw. stückweise lineare Ansätze für $\psi(\tau, \hat{\mathbf{u}})$ verwendet werden, wobei die Eingangsparameter dann zu $\hat{\mathbf{u}} = [\mathbf{u}_0 \quad \mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_{N_{\text{hor}}-1}]^T \in \mathbb{R}^{mN_{\text{hor}}}$ folgen. Bei der Volldiskretisierung wird neben der Eingangstrajektorie auch das Differenzialgleichungssystem (4.117b) an den Stützpunkten (B.1) diskretisiert. Dazu können bspw. die im Abschnitt 4.3.1 vorgestellten Verfahren zur Vorwärts-Integration der Systemdynamik verwendet werden. Damit ergibt sich für einen skalaren Eingang $u(\tau)$ und einen skalaren Zustand $x(\tau)$ für $T = 5\text{s}$ und $N_{\text{hor}} = 6$ die in Abbildung B.1 dargestellte Situation.

Nach Diskretisierung der Eingangs- und Zustandsvariablen folgt für das Kostenfunktional (4.117a) unter der Voraussetzung, dass u stückweise linear angesetzt wird, und mit Verwendung der Trapezregel die Kostenfunktion J_s des statischen Optimierungsproblems

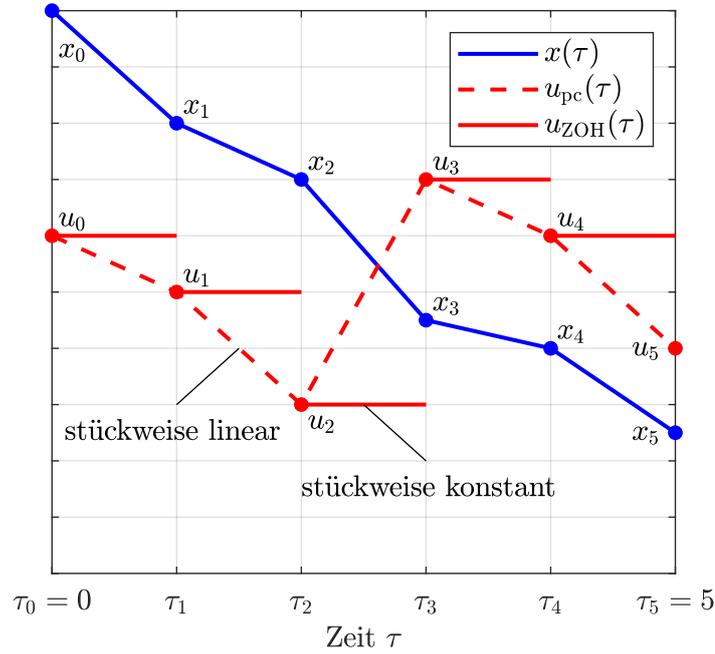


Abbildung B.1: Veranschaulichung der Volldiskretisierung

zu

$$\begin{aligned}
 J_s(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{N_{\text{hor}}-1}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_{N_{\text{hor}}-1} \\
 &+ \sum_{j=0}^{N_{\text{hor}}-2} \frac{h}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_j^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}_j + \frac{1}{2} R \Delta u_j^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{j+1}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}_{j+1} + \frac{1}{2} R \Delta u_{j+1}^2 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{N_{\text{hor}}-1}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_{N_{\text{hor}}-1} \\
 &+ \sum_{j=0}^{N_{\text{hor}}-2} \frac{h}{4} \left(\Delta \mathbf{x}_j^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}_j + R \Delta u_j^2 + \Delta \mathbf{x}_{j+1}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}_{j+1} + R \Delta u_{j+1}^2 \right) \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

wobei

$$\Delta \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{\text{des}}, \quad j = 0, \dots, N_{\text{hor}} - 1 \quad (\text{B.5a})$$

$$\Delta u_j = u_j - u_{\text{des}}, \quad j = 0, \dots, N_{\text{hor}} - 1 \quad (\text{B.5b})$$

gilt. Als Optimierungsvariablen werden dabei die diskretisierten Eingangs- und Zustandsvariablen

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N_{\text{hor}}-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_{\text{hor}}}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N_{\text{hor}}-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4N_{\text{hor}}} \quad (\text{B.6})$$

verwendet. Für die Diskretisierung des Differenzialgleichungssystems (4.117b) folgen mit dem impliziten Trapez-Verfahren (A.17) die Gleichungsbeschränkungen des statisches Optimierungsproblems zu

$$\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (\text{B.7a})$$

$$\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j - \frac{h}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_j, u_j) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{j+1}, u_{j+1})) = \mathbf{0}, \quad j = 0, \dots, N_{\text{hor}} - 2. \quad (\text{B.7b})$$

Weiters folgen aus den Zustandsbeschränkungen (4.117d)-(4.117g), der Box-Beschränkung des Eingangs (4.117i) sowie der Endungleichungsbeschränkung (4.117h) die Ungleichungsbeschränkungen des finit-dimensionalen Optimierungsproblems zu

$$\begin{bmatrix} s_{\min} \\ v_{\min} \\ u_{\min} \\ s_{\min} \\ v_{\min} \\ u_{\min} \\ \vdots \\ s_{\min} \\ v_{\min} \\ u_{\min} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,3} \\ \mathbf{x}_{0,4} \\ u_0 \\ \mathbf{x}_{1,3} \\ \mathbf{x}_{1,4} \\ u_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N_{\text{hor}}-1,3} \\ \mathbf{x}_{N_{\text{hor}}-1,4} \\ u_{N_{\text{hor}}-1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} s_{\max} \\ v_{\max} \\ u_{\max} \\ s_{\max} \\ v_{\max} \\ u_{\max} \\ \vdots \\ s_{\max} \\ v_{\max} \\ u_{\max} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8a})$$

bzw.

$$\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{N_{\text{hor}}-1}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}_{N_{\text{hor}}-1} - \alpha_T \leq 0. \quad (\text{B.8b})$$

Die Beschränkungen (B.8a) lassen sich sehr einfach auf die Form (3.85c) umformen.

Mit den Optimierungsvariablen (B.6), der zu minimierenden Kostenfunktion (B.4) sowie den Gleichungs- und Ungleichungsbeschränkungen (B.7) und (B.8) liegt nun ein beschränktes, statisches Optimierungsproblem der Form (3.85) vor, welches unter Zuhilfenahme des MATLAB-Befehls `fmincon` numerisch gelöst werden kann.

C Jacobimatrizen des um den linearen Zustandsregler erweiterten Entwurfsmodells

Mit (4.141) folgt die Jacobimatrix bezüglich des Zustands \mathbf{x} zu

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, u_{\text{MPC}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \tilde{f}_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_1} \tilde{f}_1 & \frac{\partial}{\partial s} \tilde{f}_1 & \frac{\partial}{\partial v} \tilde{f}_1 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \tilde{f}_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_1} \tilde{f}_2 & \frac{\partial}{\partial s} \tilde{f}_2 & \frac{\partial}{\partial v} \tilde{f}_2 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \tilde{f}_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_1} \tilde{f}_3 & \frac{\partial}{\partial s} \tilde{f}_3 & \frac{\partial}{\partial v} \tilde{f}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \tilde{f}_4 & \frac{\partial}{\partial \omega_1} \tilde{f}_4 & \frac{\partial}{\partial s} \tilde{f}_4 & \frac{\partial}{\partial v} \tilde{f}_4 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \tilde{f}_1 = 0, \quad (\text{C.2a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_1} \tilde{f}_1 = 1, \quad (\text{C.2b})$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{f}_1 = 0, \quad (\text{C.2c})$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \tilde{f}_1 = 0, \quad (\text{C.2d})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \tilde{f}_2 &= \frac{1}{J_1 + m_1 a_1^2} \left(m_1 a_1 g \cos(\varphi_1) - m_1 a_1 \sin(\varphi_1) \left(u_{\text{MPC}} + \alpha(\mathbf{x}) \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \right) \right. \\ &\quad \left. + m_1 a_1 \cos(\varphi_1) \left(k_{o,1} \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_1} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.2e})$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_1} \tilde{f}_2 = \frac{1}{J_1 + m_1 a_1^2} \left(m_1 a_1 \cos(\varphi_1) \left(k_{o,2} \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_1} \right) - d_1 \right), \quad (\text{C.2f})$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{f}_2 = \frac{1}{J_1 + m_1 a_1^2} \left(m_1 a_1 \cos(\varphi_1) \left(k_{o,3} \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) \right), \quad (\text{C.2g})$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \tilde{f}_2 = \frac{1}{J_1 + m_1 a_1^2} \left(m_1 a_1 \cos(\varphi_1) \left(k_{o,4} \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) \right), \quad (\text{C.2h})$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \tilde{f}_3 = 0, \quad (\text{C.2i})$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_1} \tilde{f}_3 = 0, \quad (\text{C.2j})$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{f}_3 = 0, \quad (\text{C.2k})$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \tilde{f}_3 = 1, \quad (\text{C.2l})$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \tilde{f}_4 = k_{o,1} \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_1}, \quad (\text{C.2m})$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_1} \tilde{f}_4 = k_{o,2} \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_1}, \quad (\text{C.2n})$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \tilde{f}_4 = k_{o,3} \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \quad (\text{C.2o})$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \tilde{f}_4 = k_{o,4} \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{k}_o^T \mathbf{x} \frac{\partial \alpha}{\partial v}. \quad (\text{C.2p})$$

Die in (C.2) benötigten partiellen Ableitungen des Vorfaktors $\alpha(\mathbf{x})$ folgen mit

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x}) \right)^T = e^{-(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x})^2} \left(-\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \right) \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (\text{C.3})$$

zu

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x}) \right)^T, \quad (\text{C.4a})$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x}) \right)^T, \quad (\text{C.4b})$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x}) \right)^T, \quad (\text{C.4c})$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x}) \right)^T. \quad (\text{C.4d})$$

Für die Jacobimatrix von $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, u_{\text{MPC}})$ bezüglich des Eingangs u_{MPC} folgt

$$\frac{\partial}{\partial u_{\text{MPC}}} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, u_{\text{MPC}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J_1 + m_1 a_1^2}{m_1 a_1 \cos(\varphi_1)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Literatur

- [1] A. Kugi und T. Glück, *Skriptum Fachvertiefung Automatisierungs- und Regelungstechnik*. Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien, WS 2018/2019.
- [2] M. Müller, „Modellprädiktive Regelung eines Wagen-Pendel-Systems mit Implementierung des SQP-Verfahrens“, Diplomarbeit, Technische Universität Wien, 2013.
- [3] A. Kugi, *Skriptum LU Regelungssysteme*. Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien, WS 2016/2017.
- [4] A. Eder, „Ausgangs- und eingangsbeschränkter Steuerungsentwurf für Arbeitspunktwechsel des Doppel- und Dreifachpendels“, Diplomarbeit, Technische Universität Wien, 2011.
- [5] A. Kugi, *Skriptum VO Regelungssysteme 2*. Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien, SS 2019.
- [6] R. Dittmar und B.-M. Pfeiffer, „Modellbasierte prädiktive Regelung in der industriellen Praxis (Industrial Application of Model Predictive Control)“, *at - Automatisierungstechnik*, Jg. 54, S. 590–601, Dez. 2006.
- [7] —, *Modellbasierte prädiktive Regelung: Eine Einführung für Ingenieure*. Oldenbourg Verlag München Wien, 2004.
- [8] G. Gelbert, „Adaptive und modellbasierte Regelungen zur Dämpfung von thermoakustischen Instabilitäten“, Dissertation, Technische Universität Berlin, 2014.
- [9] A. Wills, D. Bates, A. Fleming, B. Ninness und R. Moheimani, „Application of MPC to an active structure using sampling rates up to 25kHz“, in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 2005, S. 3176–3181.
- [10] R. A. Braker und L. Y. Pao, „An application of the fast gradient method to model predictive control of an atomic force microscope X-Y stage“, in *2017 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, Hawaii, USA, 2017, S. 111–116.
- [11] C.-Y. Lin und Y.-C. Liu, „Precision Tracking Control and Constraint Handling of Mechatronic Servo Systems Using Model Predictive Control“, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Jg. 17, Nr. 4, S. 593–605, 2012.
- [12] A. Kugi und W. Kemmetmüller, *Skriptum VO Regelungssysteme 1*. Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien, WS 2018/2019.
- [13] A. Kugi, T. Glück und A. Steinböck, *Skriptum VU Fortgeschrittene Methoden der nichtlinearen Regelung*. Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien, WS 2019/2020.

- [14] H. Chen und F. Allgöwer, „A Quasi-Infinite Horizon Nonlinear Model Predictive Control Scheme with Guaranteed Stability“, *Automatica*, Jg. 34, Nr. 10, S. 1205–1217, 1998.
- [15] A. Steinböck, *Skriptum VU Optimierung*. Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien, WS 2019/2020.
- [16] A. Kugi, *Skriptum VU Automatisierung*. Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien, WS 2018/2019.
- [17] L. Grüne, *Skriptum VO Mathematische Kontrolltheorie*. Mathematisches Institut der Universität Bayreuth, SS 2016.
- [18] H. Michalska und D. Mayne, „Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 38, Nr. 11, S. 1623–1633, 1993.
- [19] K. Graichen, *Skriptum Methoden der Optimierung und optimalen Steuerung*. Institut für Mess-, Regel- und Mikrotechnik der Universität Ulm, WS 2018/2019.
- [20] T. Englert, A. Völz, F. Mesmer, S. Rhein und K. Graichen, „A software framework for embedded nonlinear model predictive control using a gradient-based augmented Lagrangian approach (GRAMPC)“, *Optimization and Engineering*, Jg. 20, S. 769–809, Sep. 2019.
- [21] J. Nocedal und S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Second Edition. New York, USA: Springer, 2006.
- [22] D. P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Massachusetts, USA: Academic Press, 1982.
- [23] R. T. Rockafellar, „Augmented Lagrange Multiplier Functions and Duality in Nonconvex Programming“, *SIAM Journal on Control*, Jg. 12, Nr. 2, S. 268–285, 1974.
- [24] B. Käpernick und K. Graichen, „The gradient based nonlinear model predictive control software GRAMPC“, in *2014 European Control Conference (ECC)*, Strasbourg, France, 2014, S. 1170–1175.
- [25] J. Barzilai und J. M. Borwein, „Two-Point Step Size Gradient Methods“, *IMA Journal of Numerical Analysis*, Jg. 8, Nr. 1, S. 141–148, 1988.
- [26] B. Käpernick und K. Graichen, „Model predictive control of an overhead crane using constraint substitution“, in *2013 American Control Conference*, Washington D.C., USA, 2013, S. 3973–3978.
- [27] M. Reichhartinger, „New Perspectives of Sliding Mode Control and Observation“, Habilitationsschrift, Technische Universität Graz, 2018.
- [28] M. Reichhartinger, S. Koch, H. Niederwieser und S. Spurgeon, „The Robust Exact Differentiator Toolbox: Improved Discrete-Time Realization“, in *2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, Graz, Austria, 2018, S. 1–6.

- [29] H. R. Schwarz und N. Köckler, *Numerische Mathematik*, 6. Auflage. Wiesbaden, Deutschland: B.G. Teubner Verlag, 2006.
- [30] S. Wang, J. He, C. Wang und X. Li, „The Definition and Numerical Method of Final Value Problem and Arbitrary Value Problem“, *Computer Systems Science and Engineering*, Jg. 33, Nr. 5, S. 379–387, 2018.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit gemäß dem Code of Conduct – Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis (in der aktuellen Fassung des jeweiligen Mitteilungsblattes der TU Wien), insbesondere ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel, angefertigt wurde. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Kittsee, im August 2021

Daniel Götz