DIPLOMARBEIT

Derivative Tarife in der Krankenversicherung

ausgeführt am

Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

durch

Mathias Kührer, BSc.
Matrikelnummer: 01426605

Wien, am 24.11.2021

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit einer besonderen Art von Tarifen aus der Krankenversicherung, genauer gesagt den derivativen Tarifen. Anhand von Optionstarifen, bei denen dem Versicherungsnehmer bestimmte vereinbarte Rechte eingeräumt werden, werden diese derivativen Tarife veranschaulicht.

Es wurden Kalkulationsmethoden von österreichischen Krankenversicherern erfragt und dargestellt. Das Markov-Modell mit der Thiele'schen Differenzengleichung, welches sich gut für Versicherungsprodukte eignet, die nach Art der Lebensversicherung kalkuliert sind, wurde angewendet, um die Methoden zu verfeinern. Es wird ein Ansatz verwendet, bei dem die Prämie von einem Rabatt abhängt und Annahmen über die Ausübungswahrscheinlichkeit der Option getroffen werden müssen.

Abstract

The presented thesis deals with a specific kind of health insurance tariffs, more precisely derivative tariffs. Those tariffs are illustrated on the basis of option tariffs, in which the policyholder is granted defined prearranged rights.

Calculation methods used by Austrian health insurers were asked for and presented. The Markov model along with Thiele's difference equation, which is well suited for insurance products that are calculated on similar to life techniques basis, was used to refine the methods. An approach is used in which the premium depends on a discount. Assumptions about the probability to exercise options must be made.

Danksagung

Zu Beginn möchte ich meinen Betreuern Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek und Dr. Anselm Fleischmann für deren Input, Geduld und Hilfe bedanken. Ich bedanke mich vielmals bei den österreichischen Krankenversicherern, die mir Ihr Vertrauen geschenkt haben, so großzügig waren und Ihre Daten zur Verfügung gestellt haben, besonders bei den handelten Personen.

Ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern DI Mathias Kührer und DI Karin Kührer-Hugo sowie den Flaschen von gestern meinen beiden Schwester[1] DI Saskia Kührer und Dr.med.univ. Heike-Marie Kührer für deren finanzielle und mentale Unterstützung. Danke!
Natürlich möchte ich mich bei all meinen Freunden bedanken, die ich im Kindergarten, in der Schule, beim Sport, auf der Uni oder sonst wo kennengelernt habe und mit denen ich viel Zeit verbringen durfte. Leider reicht der Platz nicht aus jeden einzeln zu erwähnen, aber die, die ich meine, wissen eh Bescheid. Grazie mille!

Selbstverständlich ist mir bewusst, dass man nie auslernt, jedoch lernt man das Leben nicht nur in der Schule. Somit freue ich mich auf Neues und blicke nostalgisch auf die Zeit in der Schule und auf der Uni zurück. In den Worten eines bekannten Wieners

„*Denn der Umstand ist bekannt*
Zuviel Schule macht dich krank!“
(Johann Hölzel alias FALCO)

Last but not least, I want to thank me.

[1] „Meine beiden Schwestern“ - Wanda

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 24. November 2021

Mathias Kührer

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Listings

1 Einleitung

In Österreich wird die Versicherungswirtschaft in die Lebensversicherung, die Krankenversicherung und die Schaden- und Unfallversicherung unterteilt. In dieser Arbeit behandeln wir spezielle Tarife aus der Krankenversicherung. Bei den derivativen Tarifen handelt es sich um ein Konstrukt von Tarifen.
Die Optionstarife sind einer der am häufigst verkauften Tarife dieser Art, welche dem Versicherungsnehmer das Recht einräumen, zwischen im Versicherungsvertrag festgelegten, Tarifen zu wechseln. Dabei ist der Wechsel von einem Tarif mit niedrigem Leistungsspektrum in einen Tarif mit höherem Leistungsspektrum gemeint. Der Vorteil bei diesen Tarifen ist, dass beim Wechsel das Alter bei Eintritt, und nicht das Alter bei Ausübung der Option, zur Kalkulation hergenommen wird.

Nach einer kurzen Einführung in die Krankenversicherung in Österreich werden die Grundlagen der Krankenversicherungsmathematik vorgestellt, die sehr eng mit der Lebensversicherungsmathematik verbunden sind. Dabei handelt es sich um eine Sammlung der in Praxis verwendeten Rechnungsgrundlagen und Methoden. Wir halten uns dabei größtenteils an [1] und [3].
Es werden die Kalkulationsmethoden von österreichischen Krankenversicherern vorgestellt. Im vorletzten Schritt wird das Markov-Modell eingeführt. Die wichtigste Formel ist die *Thiele'sche Differenzengleichung*

$$V_i(t) = a_i^{pre}(t) + \sum_{j \in S} p_{ij}(t) \cdot v \cdot \big(a_{ij}(t) + V_j(t+1)\big)$$

womit die Deckungsrückstellung, die Barwerte und infolgedessen die Prämie für jeden Zustand i aus dem Zustandsraum S berechnet werden kann. Die Zahlungsströme $a_i^{pre}(t)$ und $a_{ij}^{post}(t)$ und die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$ sind dementsprechend zu wählen. Das Modell bietet sich vor allem sehr für Optionstarife an, da hier der Zustandsraum 3 Zustände hat (bei den meisten Tarifen sind es nur 2 Zustände).

Die vorgestellten Kalkulationsmethoden der Optionstarife werden mit dem Markov-Modell verfeinert. Weitere Tarifmerkmale sind, dass die Prämie von einem Rabatt abhängt und

Annahmen über die Ausübungswahrscheinlichkeit getroffen werden müssen. Anhand eines durchgerechneten Beispiels wird das Modell veranschaulicht, wobei das Statistik-Programm R und Microsoft Excel verwendet werden. Der Code befindet sich im Anhang.
Um den optimalen Rabatt berechnen zu können, muss ein Optimierungsproblem gelöst werden. Dies lässt sich mit Hilfe des Markov-Modells leicht aufstellen und nach einmaliger Implementierung mit wenig Aufwand lösen.

2 Krankenversicherung in Österreich

In diesem Kapitel werden wir an die private Krankenversicherung und deren Besonderheiten heranführen. Die wichtigsten und für diese Arbeit belangvollen Richtlinien werden erwähnt und kurz erläutert. Zusätzlich verschaffen wir uns schon hier einen ersten Überblick über die mathematische Darstellung von Versicherungsverträgen. Der Vollständigkeit halber wird die gesetzliche Pflichtversicherung ebenfalls kurz erwähnt.

2.1 Private Krankenversicherung

Die Krankenversicherung ist dem Wesen nach eine Personenversicherung, die das Risiko der Kosten trägt, die durch eine Krankheit oder in Folge eines Unfalls der versicherten Person auftreten. Für den Rest dieser Arbeit ist, außer explizit angesprochen, von der privaten Krankenversicherung die Rede. Sie ist eine Vertragsversicherung und wird zwischen einem *Versicherer*, meist ein Versicherungsunternehmen, und einem *Versicherungsnehmer* abgeschlossen, wobei neben diesem, auch eine andere Person versichert sein kann, die *versicherte Person*.

Der guten Ordnung halber sei die Kategorisierung der österreichischen Versicherungswirtschaft angeführt, wobei Versicherungsunternehmen für jede der folgenden Sparten eine eigenen Bilanzabteilung im Jahresabschluss zu führen haben[1]:

- **Lebensversicherung**
- **Krankenversicherung**
- **Schaden- und Unfallversicherung**

Jede der gerade erwähnten Sparten hat besondere Merkmale und Bestimmungen. Wir behandeln hier die Krankenversicherung. Um uns einen einführenden Überblick zu verschaffen, orientieren wir uns dabei größtenteils an [1] und [12].

[1] § 140 VAG 2016

2.1.1 Versicherungsfall, Leistungen und Tarife

Wie bei jedem Versicherungsvertrag muss zuerst definiert werden, was versichert ist und wann der Versicherer zu leisten hat.

Versicherungsfall

Eine allgemeine Definition des Versicherungsfalles in der Krankenversicherung ist im Gesetz nicht geregelt. Die *Aktuarvereinigung Österreichs (AVÖ)*, genauer gesagt der Unterarbeitskreis *Krankenversicherung*, verwendet in [1] folgende Definition.

Definition 2.1. *Ein Versicherungsfall in der Krankenversicherung ist die medizinisch notwendige Heilbehandlung einer versicherten Person wegen Krankheit oder Unfall. Entbindung gilt ebenfalls als Versicherungsfall.*

Der *Versicherungsverband Österreich (VVO)* veröffentlicht unverbindliche Musterbedingungen zu den *allgemeinen Versicherungsbedingungen (AVB)*. Diese bilden einen möglichen Grundaufbau von Versicherungsverträgen und enthalten Vorschläge zur Gliederung und zum Wortlaut (z.B. Versicherungsschutz, Versicherungsdauer).

Leistungen und Tarife

Nicht jede Person will sich gegen das Gleiche versichern lassen, deswegen gibt es unterschiedliche *Leistungsarten*, die jeweils in den dafür vorgesehenen *Tarifen* versichert sind.
In das Schema der Leistungen für *ambulante* Heilbehandlungen fallen unter anderem die Wahl unter niedergelassenen, zur selbstständigen Ausübung des Berufes zugelassenen Ärzten und Dentisten.
Als Leistung für *stationäre* Heilbehandlungen versteht sich eine Heilbehandlung eines medizinisch notwendigen stationären Aufenthalts in sanitätsbehördlich genehmigten Krankenanstalten, sofern diese ständige ärztliche Anwesenheit vorsehen, über ausreichende diagnostische und therapeutische Möglichkeiten verfügen und nach dem allgemein anerkannten Stand der medizinischen Wissenschaft arbeiten [12]. Tagegeldtarife leisten das vereinbarte Tagegeld.

Im *Versicherungsvertragsgesetz (VersVG)* sind die unterschiedlichen Arten von Tarifen geregelt. Die grobe Kategorisierung der Tarife sieht wie folgt aus [8]:

- Bei der **Krankheitskostenversicherung** und der **Pflegekostenversicherung** verpflichtet sich der Versicherer die Aufwendungen für die Heilbehandlung bzw. für die Pflege zu ersetzen.

- Bei der **Krankenhaustagegeldversicherung**, bei der **Krankengeldversicherung** und bei der **Pflegegeldversicherung** muss der Versicherer das vereinbarte Tagegeld entrichten.

Angeboten werden diese Arten von Tarifen sowohl einzeln als auch als Kombination.

2.1.2 Charakter und Darstellungsart

Ein Vertrag in der Krankenversicherung wird auf die Gesundheit beziehungsweise in machen Fällen auf das Leben (z.B. Sterbegeld) einer Person abgeschlossen. Das resultiert in langen Laufzeiten, bis zu 60 Jahren und noch mehr.

Charakter

Der Gesetzgeber gibt vor, dass Krankenversicherungsverträge, die länger als ein Jahr dauern, nur lebenslänglich abgeschlossen werden dürfen (als Beispiel für nicht lebenslange Verträge sei die Reisekrankenversicherung erwähnt). Dem Versicherer ist seinerseits das Recht auf Kündigung untersagt. In manchen Ausnahmefällen wie Verletzungen der Obliegenheit oder in der Gruppen[2]- und Krankengeldversicherung[3] bleibt das Recht auf Kündigung seitens des Versicherers unberührt[4].
Beim Kündigen seitens Versicherungsnehmers geht die angesparte *Alterungsrückstellung* (in der Krankenversicherung ein Synonym für das Wort *Deckungsrückstellung*) an das Kollektiv (Ausnahme ist bei einem Wechsel in einen anderen Tarif derselben Versicherungsart nach § 178b VersVG, hier werden die aus der Vertragslaufzeit erworbenen Rechte und der Alterungsrückstellung angerechnet[5]). Aufgrund dessen ist es sehr unüblich, dass nach langer Versicherungsdauer die Krankenversicherung gekündigt beziehungsweise zu einem anderen Versicherungsunternehmen gewechselt wird. Infolgedessen sind das Klientel der Krankenversicherer vor allem junge Menschen.

Darstellungsart

Grundsätzlich können Versicherungsverträge auf folgenden zwei Arten dargestellt und kalkuliert werden [5]:

- *Nach Art der Lebensversicherung*: Hier wird so kalkuliert, dass das *versicherungsmathematische Äquivalenzprinzip* erfüllt ist. Dieses besagt, das der Barwert der Leistungen des Versicherers und der Barwert der Prämien des Versicherungsnehmers

[2] Der Versicherungsnehmer hat das Recht auf Fortsetzung in der Einzelversicherung
[3] Bei Wegfall des versicherten Risikos hat der Versicherer das Recht den Vertrag zu kündigen. Deswegen haben Tarife, die den Einkommensausfall ausgleichen sollen, in der Regel den Pensionsantritt als Vertragsende
[4] § 178i VersVG
[5] § 101 Abs. 3 VAG 2016

bei Abschluss des Vertrags gleich hoch ist. Bei dieser Art der Kalkulation wird eine Alterungsrückstellung gebildet.

- *Nach Art der Nicht-Lebensversicherung* (auch *nach Art der Schadenversicherung* genannt): Bei dieser Art wird eine reine Bedarfsprämie berechnet, ohne dass eine Alterungsrückstellung gebildet wird.

Die Krankenversicherung lässt sich nicht eindeutig zu einer dieser Arten zuordnen, sie hat Eigenschaften beider Kalkulationsarten. Gemeinsam mit der Lebensversicherung haben Krankenversicherungsverträge die lange Dauer und das Kapitalanlagemanagement. Die Höhe der Leistungen und deren Bestimmung sind der Schadenversicherungsmathematik zuzuordnen.

Die Vertragsversicherung finanziert sich über Prämien, die vom Versicherungsnehmer an den Versicherer gezahlt werden. Die Änderung der Kostenniveaus der medizinische Leistungen, die *medizinischen Inflation*, wird bei der Kalkulation der Prämie bei Vertragsabschluss nicht berücksichtigt. Mit den in Versicherungsverträgen vereinbarten *Beitragsanpassungsklauseln* (welche *Gleitpreisklauseln* sind) behält sich der Versicherer das Recht vor, nach Abschluss des Versicherungsvertrags die Prämie einseitig zu erhöhen oder den Versicherungsschutz einseitig zu ändern.
Andere Gründe für solch eine Anpassung sind im § 178f Abs 2 VersVG festgelegt. Von großer Bedeutung, und deswegen sehr erwähnenswert, ist die Regulierung, dass vom bloßen Älterwerden oder von der Verschlechterung des Gesundheitszustandes der versicherten Person keine Anpassungen vereinbart werden dürfen.

Der Gesetzgeber schreibt nun vor, dass Krankenversicherungsverträge, bei denen eine Anpassungsklausel vereinbart ist, nur nach Art der Lebensversicherung betrieben werden dürfen[6]. Die Prämie und die Alterungsrückstellung müssen auf Basis von *versicherungsmathematischen Grundlagen* berechnet werden.

2.1.3 Versicherungsprinzip und Risikofaktoren

Die Hauptaufgabe eines Versicherers ist die Übernahme von Risiken, hier die Kosten infolge einer Krankheit. Dass die Kosten nicht nur von einer einzelnen Person getragen werden, fasst man mehrere Personen zu einer Gruppe zusammen, in der Versicherung *Kollektiv* genannt. Das Grundprinzip von Versicherungen ist der *Ausgleich im Kollektiv (Versicherungsprinzip)*. Die Versicherungsnehmer $(X_k)_{k=1,\dots,n}$ zahlen an das Kollektiv Prämien ein.

[6] § 101 VAG 2016

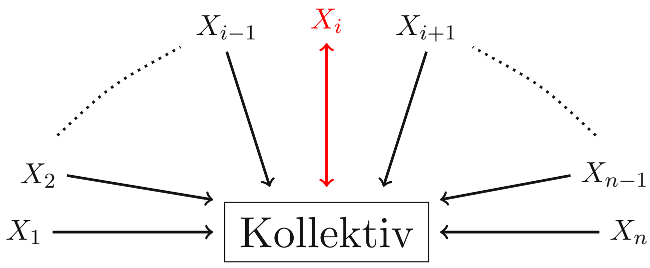

Abbildung 2.1: Versicherungsprinzip

Im Versicherungsfall einer Person X_i werden die Kosten dafür vom Kollektiv getragen. Dies ist von Vorteil, da die Prämie im Vergleich zum entstandenen Schaden sehr gering ist.

Es stellt sich die Frage, welche Personen zu einem Kollektiv zusammengefasst werden sollen. In einem Kollektiv sollen Personen sein, die ähnliche Eigenschaften haben. Um dies bei der Kalkulation zu garantieren, führen wir die *Risikofaktoren* ein, dies sind Kenngrößen wie zum Beispiel:

- Alter der versicherten Person
- Geschlecht der versicherten Person
- Leistungsart: ambulante Leistungen, stationäre Leistungen, Zahnbehandlungen
- Beruf
- Wohnort
- Subjektive Faktoren, die individuell von der versicherten Person abhängen (z.B. Rauchen, Vorerkrankungen)

Unterteilt man Personen nach all diesen Faktoren erhält man viel zu kleine Kollektive, sodass das Versicherungsprinzip nicht mehr funktionieren würde. In Österreich gibt es keine Vorschrift, welche Risikofaktoren wie zu verwenden sind. Deshalb orientieren wir uns an der in der Praxis üblich angewandten Methode und fassen Personen nach den Faktoren *Alter*, *Geschlecht* und *Leistungsart* zu jeweils *homogenen Kollektiven* zusammen.
Die anderen Risikofaktoren werden mittels *Risikozuschlägen* berücksichtigt.
Da es in der Krankenversicherung keinen allgemeinen *Kontrahierungszwang* gibt (Ausnahme sind etwa vertragliche eingeräumte Rechte wie die Kindernachversicherung), hat das Versicherungsunternehmen auch die Möglichkeit Anträge auf Versicherung anzulehnen. Diese Selektion geschieht in der Praxis mittels *Gesundheitsprüfungen*.

2.2 Pflichtversicherung

Der Vollständigkeit halber wird eine kurzer Einblick in die gesetzliche Versicherung gewährt. Das österreichische Gesetz schreibt vor, das jeder selbstständig und unselbstständig Erwerbstätige (unter zusätzlichen Voraussetzungen wie eine bestimmte Höhe des Einkommens) pflichtversichert ist. Die private Krankenversicherung dient in fast allen Fällen als Zusatzversicherung und wird somit als Ergänzung zur gesetzlichen Krankenversicherung abgeschlossen. In den meisten Fällen ist die Pflichtversicherung eine *Sozialversicherung*, die in Österreich folgende Zweige umfasst:

- **Pensionsversicherung**
- **Krankenversicherung**
- **Unfallversicherung**
- **Arbeitslosenversicherung**

Anders als die private Vertragsversicherung wird die Sozialversicherung über Beiträge finanziert, die sich als Prozentsatz vom Einkommen (bemessen wird das Einkommen von der Geringfügigkeitsgrenze bis zur Höchstbeitragsgrundalge) der Erwerbstätigen berechnen lassen[7]. Diese teilen sich, unter anderem, bei nicht selbständigen Dienstverhältnissen der Arbeitgeber und Arbeitnehmer. Abhängig vom ausgeübten Beruf ist man in einem oder mehreren der fünf verschiedene Sozialversicherungsträger versichert: *Allgemeine Unfallversicherung (AUVA)*, die *Österreichische Gesundheitskasse (ÖGK)*, die *Pensionsversicherungsanstalt (PVA)*, die *Sozialversicherung der Selbstständigen (SVS)* und die *Versicherungsanstalt öffentlich Bediensteter, Eisenbahnen und Bergbau (BVAEB)*.
Einige Berufsgruppen (z.B. Ärzte, Ziviltechniker) haben das Recht selbst zu entscheiden, ob sie im Rahmen der Sozialversicherung oder privat bei einem Krankenversicherungsunternehmen krankenversichert sind, das sogenannte *Opting-Out*[8].

Neben der Sozialversicherung gibt es noch die *Kranken- und Fürsorgeanstalten (KFA)*, für die das Versicherungsprinzip nicht gilt. Auf diese wird hier aber nicht näher eingegangen.

[7] Werte für 2021 (jeweils monatlich): Höchstbeitragsgrundlage EUR 5.550,00
Geringfügigkeitsgrenze EUR 475,86

[8] für die anderen Zweige der Sozialversicherung gilt so ein Wahlrecht nicht

3 Grundlagen der Krankenversicherungsmathematik

Von hier an werden wir uns nur auf die private Krankenversicherung und deren Darstellung nach Art der Lebensversicherung konzentrieren. In diesem Kapitel werfen wir einen genaueren, jedoch allgemeinen Blick auf die Kalkulation und die dafür notwendigen versicherungsmathematischen Grundlagen (eine zu akkurate Sicht auf die Grundlagen würde den Umfang dieser Arbeit bei weitem sprengen). Bei diesen dargestellten Informationen handelt es sich um eine Zusammenfassung der in der Praxis verwendeten Methoden, welche für das Verständnis der Optionstarife unverzichtbar sind.

Da diese Grundlagen der *Finanzmarktaufsicht (FMA)* als Dokument vorzulegen sind, und als Ergänzung zum Geschäftsplan aufgefasst werden können, wird das Dokument der versicherungsmathematischen Grundlagen oft auch als *Geschäftsplan* bezeichnet [1]. Da die Versicherungsmathematik in engem Zusammenhang mit der Finanzmathematik steht, ist es notwendig auch auf Begriffe und Konzepte der Finanzmathematik einzugehen.
Das deutsche Pendant zur österreichischen Finanzmarktaufsicht ist die *Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin)*. Diese sei hier erwähnt, da im Vergleich zu Österreich, in Deutschland Statistiken zu einige Rechnungsgrundlagen von der BaFin veröffentlicht werden und wir solche Statistiken in dieser Arbeit verwenden werden.

Um uns den gewünschten Überblick zu verschaffen, orientieren wir uns hauptsächlich an [1] und [3]. Da zweitere Quelle eher für deutsches Recht ausgelegt ist und der Unterschied zum österreichischem Recht nicht zu bagatellisieren ist, verwenden wir auch erstere Quelle.

3.1 Rechnungsgrundlagen

Für jegliche Art von Berechnungen benötigt man bestimmte Parameter. In der Versicherungsmathematik können diese grob in zwei Kategorien eingestuft werden:

1. Parameter auf Basis des *einzelnen Versicherungsvertrages*: dies sind Kenngrößen wie das Alter oder Geschlecht der versicherten Person. Auf Ebene des einzelnen

Versicherungsvertrages werden Prämien und Rückstellungen berechnet.

2. Parameter auf Basis des *ganzen Kollektivs*: dies sind Kenngrößen wie der Rechnungszins und die Ausscheideordnung. Auf Ebene des Kollektivs werden unter anderem Gewinnbeteiligungen bestimmt.

Obwohl die Berechnungen der Prämien und Alterungsrückstellungen auf Basis einzelner Versicherungsverträge durchgeführt werden, fließen auch Kollektivparameter mit ein. Diese nennt man *Rechnungsgrundlagen*.

Bemerkung 3.1. *Da sich die Rechnungsgrundlagen oft aufgrund des Alters und des Geschlechts der versicherten Person unterscheiden, folgen wir der allgemein in der Versicherungsmathematik angewandten Konvention und schreiben für das Alter eines Mannes x und für das Alter einer Frau y.*
Rechnerisch unterscheiden sich die Formel nicht, deswegen verwenden wir, im Sinne der besseren Lesbarkeit, nur die Notation für ein Geschlecht. Wenn nicht explizit angegeben, gelten die Formeln für beide Geschlechter gleichermaßen.

Sie werden weiter in zwei Typen unterteilt. Erstere sind die *Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung*, welche dem Prinzip der Vorsicht unterliegen und somit mit ausreichend Sicherheit zu versehen sind. Der Gesetzgeber schreibt vor, dass Prämien und Rückstellung mit dieser Art von Rechnungsgrundlagen zu kalkulieren sind[1].
Neben diesen gibt es noch die *Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung*, welche dem Prinzip des besten Schätzwertes unterliegen. In dieser Arbeit richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung, welche auch im Geschäftsplan zu finden sind.

3.1.1 Rechnungszins

Der *Rechnungszins* ist ein Begriff aus der Finanzmathematik. Er wird für die Bewertung von Zahlungsplänen und der damit verbundenen Zahlungsströmen, die unter anderem nicht in der Gegenwart liegen, verwendet (siehe unten Konzept des *Barwertes*).

Definition 3.2. *Der Rechnungszins $i \in (-1, \infty)$ ist eine Kenngröße, die den Zeitwert von Zahlungsströmen beziehungsweise Kapital beschreibt. Mit dem Aufzinsungsfaktor r wird in die Zukunft verzinst*

$$r = 1 + i$$

[1] § 150 Abs. 1 VAG 2016

Im Gegensatz dazu wird mit dem Diskontierungsfaktor v *in die Vergangenheit diskontiert*

$$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{r}$$

Diese Kenngrößen werden auf jährlicher Basis angegeben. Im Gegensatz zur Kalkulation in der Lebensversicherung kommt in der Krankenversicherung kein unterjähriger Rechnungszins beziehungsweise Diskontierungsfaktor zur Anwendung.

Es gibt mehrere Möglichkeiten der Verzinsung, da dies aber nicht Hauptaugenmerkmal dieser Arbeit ist, sei hier für genauere Information auf [10] verwiesen. Wir erwähnen hier die für die Berechnung von Barwerten verwendete *exponentielle Verzinsung* (oder auch *Verzinsung mit Zinseszinsen*) und präsentieren ein einführendes Beisiel.

Beispiel 3.3. *Wir nehmen an, wir haben zum Zeitpunkt* $t = 0$ *ein Kapital in Höhe von* K_0. *Wir möchten wissen, wie hoch unser Kapital* K_n *nach einer Laufzeit von* $n \in \mathbb{N}$ *Jahren unter Verwendung der exponentiellen Verzinsung mit einem fixen Zinssatz* i *ist*

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

Für über die Laufzeit variable Zinssätze $i_1, i_2, ..., i_n$ *lässt sich diese Formel auf*

$$K_n = K_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} (1 + i_k)$$

adaptieren. Die Formeln gelten auch für Zahlungsströme.

Der Rechnungszins wirkt sich auf die Höhe der Prämien und der Deckungsrückstellung aus. Ein niedriger Zins zieht den Effekt einer hohen Prämien nach sich. Dies verringert aber die Verkaufszahlen von Versicherungsprodukten, was nicht wünschenswert ist [3].
Im Umkehrschluss verringert sich die Prämie bei hohem Rechnungszins. Neben dem unverkennbarem Vorteil, dass so mehr Versicherungsverträge verkauft werden, birgt ein hoher Zins das Risiko des Versicherungsruin in sich, da nicht garantiert werden kann, den bei der Kalkulation verwendeten Zins zu erwirtschaften. Ein nach oben offener Rechnungszins könnte von Versicherern als Wettbewerbsinstrument missbraucht werden.

Die in Österreich für die Aufsicht von Versicherungsunternehmen zuständige Behörde, die *Finanzmarktaufsichtsbehörde (FMA)*, kann mittels Verordnungen nähere Regelungen über den Inhalt, Gliederung und Art der versicherungsmathematischen Grundlagen treffen[2].

[2] § 102 Abs. 1 VAG 2016

In dem am 7.Oktober 2020 veröffentlichten Rundschreiben der FMA [7] wird empfohlen, dass bei Neuabschlüssen von Krankenversicherungsverträgen nach Art der Lebensversicherung und für neu hinzukommende Versicherte zu bestehenden Gruppenkrankenversicherungsverträgen spätestens ab Juli 2021 die Alterungsrückstellungen und Prämien mit einem Rechnungszins von höchstens $0,5\%$ („Höchstzinssatz“) zu kalkulieren sind. Das Rundschreiben dient als Orientierungshilfe und gibt die Rechtsauffassung der FMA wieder[3].
Somit gilt in Österreich für die Lebens- und Krankenversicherung der gleiche Höchstzinssatz (siehe *Versicherungsunternehmen - Höchstzinssatzverordnung (VU-HZV)* [6]).

3.1.2 Kopfschäden

Die Leistungen an eine versicherte Person (eines Risikos) innerhalb einer Periode werden als Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto X(\omega)$ modelliert. Wir betrachten dabei immer einen Personenbestand (Kollektiv), in dem sich L Personen befinden. Diese versicherten Personen haben innerhalb einer Rechnungsperiode $(n_j)_{j=1,\dots,L} \in \mathbb{N}$ Schadensfälle mit $(\xi_{j,k})_{k=1,\dots,n_j}$ Versicherungsleistungen. Die Gesamtjahresleistung einer Person j ergibt sich also wie folgt

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{n_j} \xi_{j,k}$$

Die Gesamtjahresleistung S eines ganzen Versicherungsbestandes ist dann nichts anderes als die Summe

$$S = \sum_{j=1}^{L} \xi_j$$

Die Höhe der Schäden bestimmen die Höhe der Prämie, also müssen diese in die Kalkulation miteinbezogen werden. Dies geschieht mittels sogenannter *Kopfschäden*.

Definition 3.4. *Der Kopfschaden K ist der rechnungsmäßige Erwartungswert der Versicherungsleistungen eines versicherten Risikos X innerhalb einer Rechnungsperiode*

$$K = \mathbb{E}[X]$$

Ein Schätzung für den Kopfschaden ist das Aufteilen des Gesamtschaden S eines Personenbestand auf jedes versicherte Risiko

$$\mathbb{E}[X] \approx \frac{S}{L} \tag{3.1}$$

[3]Dieses Rundschreiben stellt keine Verordnung dar.

Der Kopfschaden soll das Prinzip des Ausgleichs im Kollektiv in der Kalkulation widerspiegeln. Damit wir diesen Ausgleich erzielen können, fassen wir Risiken (Personen) mit gleichen Unterscheidungsmerkmalen zusammen, da an Personen mit ähnlichen Eigenschaften ähnlich hohe Versicherungsleistungen ausbezahlt werden (die ist natürlich eine theoretische Annahme, die für die Kalkulation der Prämie, und daher für die Praxis, unabdingbar ist). Wir kalkulieren einen Kopfschaden jeweils für einen Tarif, da hier gleiche *Leistungsarten* vorliegen. Innerhalb eines Tarifes wird der Kopfschaden für Personen gleichen Alters und Geschlechts definiert.

Definition 3.5. *Der Kopfschaden K_x ist die erwartete Versicherungsleistung einer x-jährigen Person. Die Kopfschadenreihe $(K_x)_{x \in \mathcal{A}}$ ist Reihe der Kopfschäden aller Alter für einen Tarif, wobei $\mathcal{A} = \{\alpha, \ldots, \omega\}$ die Menge der Alter beschreibt. Dabei ist α das niedrigste Alter und ω das Endalter.*

Wir haben also eine Kenngröße definiert, die die jährlichen erwarteten Versicherungsleistungen einer x-jährigen Person beschreibt. Wie in 2.1.2 erwähnt, ändern sich die Kosten von medizinischen Leistungen jährlich, womit sich die Höhe der Versicherungsleistungen auch jährlich ändert.

Bei den Kopfschäden handelt es sich um eine für die Krankenversicherungsmathematik spezifische Kenngröße, welche in der Lebensversicherungsmathematik keine Anwendung findet. Infolgedessen führen wir dieses Thema ein wenig mehr aus.

Kopfschadenprofile und Grundkopfschaden

Die zukünftige medizinische Inflation wird zwar nicht bei Abschluss der Versicherungsvertrages miteinkalkuliert, jedoch ist es von Vorteil schon in Vorhinein eine eigene Kenngröße für spätere Beitragsanpassungen zu Verfügung zu haben. Hier kommt die *Methode von Rusam* zum Einsatz. Bei diesem Modell wird der Kopfschaden K_x in zwei Faktoren aufgespalten, wobei einer nur vom Alter und der andere vom Kalenderjahr abhängt.

Definition 3.6. *Im Model von Rusam wir der Kopfschaden wie folgt aufgespalten*

$$K_x = G \cdot k_x$$

wobei der normierte Kopfschaden k_x als Profil und der Normierungsfaktor G als Grundkopfschaden bezeichnet wird.

Das Profil beschreibt die Relationen der Kopfschaden zu unterschiedlichen Altern, der Grundkopfschaden spiegelt das Leistungsniveau wider. Zur Vollständigkeit sei gesagt, dass sich das Profil ebenfalls über die Zeit ändern kann, was aber seltener der Fall ist.

Für das Normierungsalter x_0 wird häufig das Alter 28 oder 43 verwendet, so dass gilt

$$G^{\text{rech}} = K_{x_0} \text{ und } k_{x_0} = 1 \tag{3.2}$$

Der in (3.2) definierte Grundkopfschaden G^{rech} wird *rechnungsmäßiger Grundkopfschaden* genannt. Er ist zu unterscheiden vom *empirischen Kopfschaden*, der sich wie folgt berechnen lässt

$$G^{\text{emp}}(t) = \frac{\sum_{x=\alpha}^{\omega} S_x(t)}{\sum_{x=\alpha}^{\omega} \theta_x(t) \cdot k_x} \tag{3.3}$$

wobei $S_x(t)$ die Summe aller Schäden innerhalb der Periode t aller Personen des Alters x im Bestand und $\theta_x(t)$ die Anzahl aller Personen in der Periode t im Alter x beschreibt. Unter gewissen Umständen stimmen diese beiden Grundkopfschäden überein. Da die Aussagen im folgendem Theorem jeweils für eine Periode gelten, lassen wir den Index t der Periode weg.

Theorem 3.7. *Der rechnungsmäßige und empirische Grundkopfschaden stehen, abhängig von der Leistungshöhe S_x eines Personenbestands im Alter x, in folgenden Zusammenhängen:*

(i) Wurden in einer Periode gleichviel Leistungen erbracht als im Vorhinein geschätzt, so gilt $G^{emp} = G^{rech}$

(ii) Wurden in einer Periode mehr Leistungen erbracht als im Vorhinein geschätzt, so gilt $G^{emp} > G^{rech}$

(iii) Wurden in einer Periode weniger Leistungen erbracht als im Vorhinein geschätzt, so gilt $G^{emp} < G^{rech}$

Beweis. Wir führen den Beweis für (i) ganz aus, für (ii) und (iii) setzen wir dementsprechend ein.

(i) Dass die geschätzten Leistungen mit den erbrachten Leistungen (innerhalb eines Personenbestands mit gleichem Alter x) übereinstimmen, bedeutet nichts anderes, als dass eine Person (durchschnittlich) genau die Höhe vom Kopfschaden K_x als Leistung erhält. O.B.d.A nehmen wir an, dass für alle $x = \alpha, \ldots, \omega$ gilt $S_x = K_x \cdot \theta_x$. Damit folgt dann:

$$
\begin{aligned}
G^{\text{emp}} &= \frac{\sum_{x=\alpha}^{\omega} S_x}{\sum_{x=\alpha}^{\omega} k_x \cdot \theta_x} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{\sum_{x=\alpha}^{\omega} K_x \cdot \theta_x}{\sum_{x=\alpha}^{\omega} k_x \cdot \theta_x} \\
&\overset{(2)}{=} \frac{\sum_{x=\alpha}^{\omega} G^{\text{rech}} \cdot k_x \cdot \theta_x}{\sum_{x=\alpha}^{\omega} \theta_x \cdot k_x} \\
&= G^{rech} \cdot \frac{\sum_{x=\alpha}^{\omega} k_x \cdot \theta_x}{\sum_{x=\alpha}^{\omega} k_x \cdot \theta_x} \\
&= G^{\text{rech}}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

In Gleichheit (1) setzen wir die Voraussetzung ein, in Gleichheit (2) setzten wird die Definition aus (3.6) ein und erhalten die gewünschte Aussage.

(ii) Analog zu (i), nur das für alle $x = \alpha, \ldots, \omega$ gilt $S_x > K_x \cdot \theta_x$. Daraus folgt, dass in (3.4) statt dem Gleichheitszeichen in (1) ein Größer-als-Zeichen steht.

(ii) Analog zu (i), nur das für alle $x = \alpha, \ldots, \omega$ gilt $S_x < K_x \cdot \theta_x$. Daraus folgt, dass in (3.4) statt dem Gleichheitszeichen in (1) ein Kleiner-als-Zeichen steht.

□

Der Fall, dass genau die Leistungen erbracht werden, die geschätzt wurden, kommt in der Praxis nie vor. Je nach Eintreten von einem der beiden anderen Fälle und deren Intensität, sprich ob der empirische Grundkopfschaden stark vom rechnungsmäßigen Grundkopfschaden abweicht, wird bei einer Beitragsanpassung nach oben beziehungsweise nach unten angepasst.

Herleitung von Kopfschäden

Für die Bestimmung des Kopfschadens, stellt sich vorerst die Frage nach *aussagekräftigen Daten*. Sind diese vorhanden ist des weiteren zu beachten, ob man für einen bereits im Sortiment existierenden Tarif oder einen neu eingeführten Tarif kalkuliert:

- **Existierender Tarif:** Hier ist weiter zu unterscheiden in:
  - Tarife, für die aussagekräftigen Daten vorhanden sind, sprich Tarife die schon *lange* und *oft* genug verkauft worden sind. In diesem Fall werden für die Herleitung nur tarifeigene Daten verwendet; und
  - Tarife, für die keine aussagekräftigen Daten vorhanden sind. Hier werden für die Herleitung neben den tarifeigenen Daten auch Daten von ähnlichen Tarifen (sogenannte *Stütztarifen*) verwendet.

- **Neuer Tarif**: Da es bei der Neueinführung eines Tarifs grundsätzlich keine tarifeigenen Daten aus der Vergangenheit geben kann, muss in jedem Fall auf Stütztarife zurückgegriffen werden.

  Falls keine Stütztarife existieren, sind andere einschlägig statische Daten zu verwenden. Diesen Fall wollen wir in der dieser Arbeit aber nicht weiter beleuchten.

Der Term *ähnliche Tarife* bezieht sich auf Tarife mit gleichem oder kaum zu unterscheidendem Leistungsspektrum. Die Beurteilung, ob und welche Stütztarife verwendet werden, obliegt der Person, die den Tarif kalkuliert.

Wie schon erwähnt ist einer der großen Vorteile der *Methode von Rusam*, dass es eine eigene Kenngröße für die Leistungshöhe gibt. Deswegen orientieren wir uns bei der Herleitung an *Profilen* und *Grundkopfschäden* und betrachten diese getrennt.

Herleitung des rechnungsmäßigen Profils

Die Grundlage zur Herleitung des rechnungsmäßigen Profils bilden die Kopfschäden der Vergangenheit. Für diese benötigen wir die *Schäden* und die *Anzahl der Personen* im Bestand. Bei den Schäden sei vereinfacht angenommen, dass es sich tatsächlich nur um die Schäden handelt, andere Einflussgrößen wie etwa *Risiko-* und *Sicherheitszuschläge* oder *einmalige Sonderausgaben* werden hier nicht berücksichtigt. In der Praxis sind diese natürlich noch einzuberechnen, es handelt sich aber im Allgemeinen nur um additive Konstanten, die vor der Kalkulation abgezogen werden müssen.
Für die weitere Darstellung wiederholen beziehungsweise führen wir neue Notationen ein, die sich im Nachhinein noch erweitert werden wird:

- $\mathcal{T}$: Die Menge aller Tarife τ, die für die Kalkulation benötigt werden, sprich die Menge aller Stütztarife (der zu kalkulierende Tarif *kann*, aber *muss nicht* enthalten sein). Insgesamt betrachten wir $|\mathcal{T}| = n$ verschieden Tarife.

- T: Die Menge aller Jahre t, die in die Kalkulation einbezogen werden. Als Beispiel betrachten wir jeweils die letzten 4 Jahre, so dass $T := \{t_0 - 3, t_0 - 2, t_0 - 1, t_0\}$.

- $S_x(t, \tau)$: Schaden aller x-jährigen Personen des Tarifs τ in der Periode t

- $L_x(t, \tau)$: Anzahl aller x-jährigen Personen des Tarifs τ in der Periode t

- $K_x(t, \tau)$: Kopfschaden einer x-jährigen Personen des Tarifs τ in der Periode t. Dieser lässt sich auf die gleiche Art wie in (3.1) berechnen:

$$K_x(t,\tau) = \frac{S_x(t,\tau)}{L_x(t,\tau)}$$

In der Praxis werden oft *Altersgruppen* (z.B. 5 Jahre) gebildet. Auf diese wollen wir aber nicht weiter eingehen, da das folgende Verfahren analog angewendet werden kann.

Zu Beginn nehmen wir uns jeden Tarif einzeln vor und gleichen über die Perioden aus. Dazu bestimmen wir die *arithmetischen Mitteln* $K_x^\mu(\tau)$ der Kopfschäden, $L_x^\mu(\tau)$ der Anzahl der Personen und $S_x^\mu(\tau)$ der Schäden für jedes Alter x und jeden Tarif τ

$$K_x^\mu(\tau) = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T} K_x(t,\tau)$$
$$L_x^\mu(\tau) = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T} L_x(t,\tau)$$
$$S_x^\mu(\tau) = \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T} S_x(t,\tau)$$

Da es in der Praxis oft vorkommt, dass es ab einem bestimmten Alter nicht mehr genügend Personen im Bestand gibt, wird ab dem Alter g gruppiert, sodass die hohen Alter alle den gleichen Kopfschaden haben. Wir erhalten die *ausgeglichenen Kopfschäden*

$$\tilde{K}_x^\mu(\tau) = \begin{cases} K_x^\mu(\tau) & \text{, für } x < g \\ \frac{\sum_{x=g}^{\omega} S_x^\mu(\tau)}{\sum_{x=g}^{\omega} L_x^\mu(\tau)} & \text{, für } x \geq g \end{cases}$$

Wir erhalten also über die Periode t und in schwach besetzten Altern $x \geq g$ ausgeglichene Kopfschäden $\tilde{K}_x^\mu(\tau)$. Analog geht man bei Beständen vor, bei denen die niedrigen Alter schwach besetzt sind.

Im nächsten Schritt wollen wir über die Tarife τ ausgleichen. Dabei ist zu beachten, dass nicht jeder Tarif gleich stark „vertreten“ ist. Wir brauchen also ein Verhältnis wie oft welcher Tarif verkauft wurde. Dazu bilden wir einen Modellbestand indem wir über alle Alter, über alle Tarife und über beide Parameter summieren

$$
\begin{aligned}
L^{\Sigma}(\tau) &= \sum_{x=\alpha}^{\omega} L_x^{\mu}(\tau) \\
L_x^{\Sigma} &= \sum_{\tau\in\mathcal{T}} L_x^{\mu}(\tau) \\
L^{\Sigma} &= \sum_{\tau\in\mathcal{T}} L^{\Sigma}(\tau)
\end{aligned}
$$

Die Gewichtung pro Tarif $\tau \in \mathcal{T}$ ist dann nichts anderes als

$$\lambda_\tau = \frac{L^{\Sigma}(\tau)}{L^{\Sigma}}$$

Insgesamt muss gelten $\sum_{\tau\in\mathcal{T}} \lambda_\tau = 1$.

Da nicht jeder Stütztarif genau dasselbe Leistungsspektrum hat, müssen wir die Kopfschäden $\tilde{K}_x^{\mu}(\tau)$, bevor wir sie mit λ_τ gewichten, noch umskalieren. Dies geschieht mit dem *Verfahren von Bahr*, woraus wir die *gleichgerichteten Kopfschäden* erhalten.
Dafür müssen wir die Faktoren $\gamma_i, i = 1, \dots, n$ für alle Tarife $\tau_1, \dots, \tau_n$, bestimmen, sodass insgesamt gilt

$$\sum_{x=\alpha}^{\omega} L_x^{\mu}(\tau_1) \cdot \gamma_1 \cdot \tilde{K}_x^{\mu}(\tau_1) = \cdots = \sum_{x=x_0}^{\omega} L_x^{\mu}(\tau_n) \cdot \gamma_n \cdot \tilde{K}_x^{\mu}(\tau_n) \tag{3.5}$$

Da in den jeweiligen Summen die Faktoren $\gamma_i, i = 1, \dots, n$ nicht vom Summenindizes abhängen, ziehen wir diese aus den Summen heraus. Damit die Gleichheiten in (3.5) erfüllt sind, setzen wir für die Faktoren $\gamma_i, i = 1, \dots, n$ einfach die Reziprokwerte ein

$$\gamma_i = \frac{1}{\sum_{x=x_0}^{\omega} L_x^{\mu}(\tau_i) \cdot \tilde{K}_x^{\mu}(\tau_i)}$$

Wir haben unsere Faktoren zum Umskalieren der Kopfschäden gefunden und erhalten somit als Resultat für jeden Tarif $\tau_1, \dots, \tau_n$ die gleichgerichteten Kopfschäden

$$\tilde{K}_x^{\gamma}(\tau_i) = \gamma_i \cdot \tilde{K}_x^{\mu}(\tau_i) \tag{3.6}$$

Es sei erwähnt, dass die Faktoren $\gamma_i, i = 1, \dots, n$ beliebig faktorisiert sind, sodass die Kopfschäden $\tilde{K}_x^{\gamma}(\tau)$ aus (3.6) nicht ohne weiteres Faktorisieren in der Kalkulation verwendet werden können. Das ist hier aber nicht weiter schlimm, da wir uns sowieso nur auf die Profile konzentrieren.

Schlussendlich wollen wir, wie schon oben angesprochen, zwischen den Tarifen ausgleichen und nach Bestandsgröße gewichten. Wir erhalten für jedes Alter x unsere *gewichteten, gleichgerichteten Kopfschäden*

$$\tilde{K}_x^\gamma = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \lambda_\tau \cdot \tilde{K}_x^\gamma(\tau)$$

Die Werte $(\tilde{K}_x^\gamma)_{x\in\mathcal{A}}$ enthalten Schwankungen zwischen den Altern. In der Praxis üblich, werden diese noch mittels Ausgleichsverfahren, wie die *Regression*, geglättet. Diese werden wir aber nicht näher untersuchen und sagen, dass $\tilde{K}_x^\gamma$ unsere Kopfschäden sind.

Im letzten Schritt wollen wir aus den Kopfschäden die Profile ableiten. Dabei gehen wir wie in (3.2) vor und berechnen

$$\tilde{k}_x^\gamma = \frac{\tilde{K}_x^\gamma}{\tilde{K}_{x_0}^\gamma}$$

Wir haben uns die Profil $(\tilde{k}_x^\gamma)_{x\in\mathcal{A}}$ hergeleitet und widmen uns weiter dem Grundkopfschaden.

Herleitung des rechnungsmäßigen Grundkopfschadens

Im Unterschied zu den gerade hergeleiteten Profilen sollte der *rechnungsmäßige Grundkopfschaden* nicht einfach als Wert $\tilde{K}_{x_0}^\gamma$ der Vergangenheit angenommen werden. Erstens aufgrund der Willkür der Faktorisierung der Faktoren $\gamma_i, i = 1, \ldots, n$ und zweitens weil die Entwicklung der medizinischen Kosten nicht berücksichtigt wird.
Der rechnungsmäßige Grundkopfschaden kann durch statische Verfahren, wie zum Beispiel durch *Mittelwertbildung* oder *Extrapolation* der Kopfschäden der vergangenen Jahre, ermittelt werden. Die Werte der Vergangenheit bestimmen wir dabei genau wie in (3.3). Als Beispiel der Extrapolation sei die *lineare* oder *logistische Regression* erwähnt.

3.1.3 Ausscheideordnung und Verbleibewahrscheinlichkeit

Die *Ausscheideordnung* ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person den Bestand verlässt. In der Krankenversicherung kann das auf zwei Arten geschehen, wobei wir erneut den Zeithorizont von einem Jahr betrachten:

- **Sterbewahrscheinlichkeit**: ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige Person innerhalb eines Jahres verstirbt. Sie wird üblich mit q_x bezeichnet.
- **Stornowahrscheinlichkeit**: ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige Person innerhalb eines Jahres den Versicherungsvertrag kündigt. Sie wird üblich mit w_x

bezeichnet.

- **Verbleibewahrscheinlichkeit**: ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige Person innerhalb eines Jahres im Bestand verbleibt. Sie wird bezeichnet mit p_x.

Wie bei den Kopfschäden sind die Unterscheidungsmerkmal das Alter und das Geschlecht. Zusätzlich hängt die Stornowahrscheinlichkeit noch von anderen Faktoren ab.
Da in beiden Fällen des Ausscheidens von Wahrscheinlichkeiten die Rede ist, werden sowohl der *Tod* als auch das *Storno* als Zufallsvariable modelliert. Das ermöglicht uns die Verteilung dieser Zufallsvariablen genauer zu untersuchen. Wir schließen den Fall aus, dass beides gleichzeitig eintreten kann und definieren das Ausscheiden als das Ereignis, welches zuerst eintritt.

Das Alter bei Tod einer Person wird als die Zufallsvariable $X_x^{\text{Tod}} : \Omega \to \mathcal{A}, \omega \mapsto X_x^{\text{Tod}}(\omega)$ und das Alter bei Storno einer Person wird als die Zufallsvariable $X_x^{\text{Storno}} : \Omega \to \mathcal{A}, \omega \mapsto X_x^{\text{Tod}}(\omega)$ modelliert.

Sterbewahrscheinlichkeit

Die erste Möglichkeit den Bestand zu Verlassen ist der *Tod*. Zu Beginn definieren wir die Sterbewahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von Alter und Geschlecht.

Definition 3.8. *Die Sterbewahrscheinlichkeit q_x einer x-jährigen Person innerhalb eines Jahres zu sterben ist definiert als*

$$q_x = \mathbb{P}[X_x^{Tod} < \min\{x+1, X_x^{Storno}\}]$$

Die Sterbewahrscheinlichkeiten für alle Alter und Geschlechter werden zusammengefasst *Periodentafel* genannt. Hängen diese Wahrscheinlichkeit noch weiter vom Geburtsjahr ab, so nennt man diese *Generationentafeln*. Da es in der Krankenversicherung ein Anpassungsrecht gibt, das bei Änderung der Lebenserwartung (§ 178f Abs 2 Z 1 VersVG) eine Anpassung der Prämie vorsieht, ist die Verwendung von Generationentafeln nicht üblich.

Hier in dieser Arbeit werden wir uns nicht auf die Herleitung von Sterbetafeln konzentrieren. Das hat einerseits den Grund, dass es den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde und andererseits ist dies kein rein krankenversicherungsspezifisches Thema, sondern in erste Linie eines der Lebensversicherung.
Es sei dennoch kurz erwähnt, wie wir eine Sterbetafel erhalten können. Die erste Möglichkeit ist diese aus dem eigenen Bestand und angemessen statischen Methoden herzuleiten. Eine

andere Möglichkeit ist diese aus externer Quelle zu beziehen, wie etwa *Bundesanstalten für Statistik* oder *Rückversicherern*.

Stornowahrscheinlichkeit

Die andere Möglichkeit, der in der Krankenversicherung eine größere Bedeutung zugeschrieben wird, den Bestand zu verlassen ist das *Storno*. Zu Beginn definieren wir die Stornowahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von Alter und Geschlecht.

Definition 3.9. *Die Stornowahrscheinlichkeit w_x einer x-jährigen Person innerhalb eines Jahres zu stornieren ist definiert als*

$$w_x = \mathbb{P}[X_x^{Storno} < \min\{x+1, X_x^{Tod}\}]$$

Die Stornowahrscheinlichkeiten für alle Alter und Geschlechter werden zusammengefasst *Stornotafel* genannt.
Diese Art des Ausscheidens ist zu berücksichtigen, da Produkte der Krankenversicherung in der Regel keinen *Rückkauf* durch den Kunden erlauben. Ein Ausnahme dieser Regelung betreffen Tarifwechsel innerhalb derselben Versicherungsart[4] (siehe 2.1.1) beim selben Versicherungsunternehmen. Bei dieser Art von Tarifwechsel erfolgt eine Anrechnung der aus der Vertragslaufzeit erworbenen Rechte. Diese Ausnahme muss in der Herleitung der Stornotafeln berücksichtigt werden.
Ein mögliche Herleitung dieser Rechnungsgrundlage ist die *logistische Regression*.

Verbleibewahrscheinlichkeit

Das Pendant zum Ausscheiden aus dem Bestand, ist das *Verbleiben*. Wir definieren die Verbleibewahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von Alter und Geschlecht, allerdings nicht nur für ein Jahr, sondern gleich für $k \in \mathbb{N}$ Jahre.

Definition 3.10. *Die Verbleibewahrscheinlichkeit ${}_kp_x$ einer x-jährigen Person innerhalb der nächsten $k \in \mathbb{N}$ Jahre den Bestand nicht zu verlassen ist definiert als*

$${}_kp_x = \mathbb{P}[\min\{X_x^{Tod}, X_x^{Storno}\} > x + k]$$

Wir halten uns an die Konvention in der Versicherungsmathematik und lassen den Index k weg falls es sich um eine einjährige Wahrscheinlichkeit handelt und schreiben nur $p_x := {}_1p_x$.
Es werden die wichtigste Rechenregeln für die Verbleibewahrscheinlichkeit erwähnt, jedoch ohne den Beweis auszuführen.

[4] § 101 Z3 VAG 2016

Theorem 3.11. *Es gelten folgende Zusammenhänge:*

(i) $p_x = 1 - q_x - w_x$

(ii) ${}_kp_x = \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}$

(iii) ${}_kp_x = {}_mp_x \cdot {}_{k-m}p_{x+m}$ *für* $m < k$

Beweis. Für die Beweise wird auf [3] verwiesen. □

In folgender Grafik sind beispielhaft einjährige Storno- und Sterbewahrscheinlichkeiten abgebildet. Die für die Grafik verwendeten Zahlen befinden sich im Anhang 7.1.

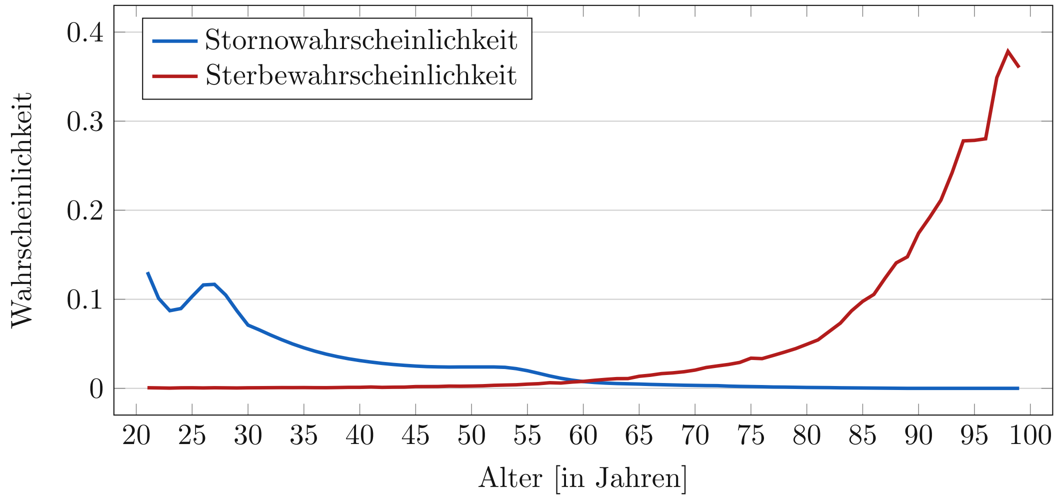

Abbildung 3.1: Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten

In der Grafik ist gut zu erkennen, dass dem Ausscheiden durch Storno in jungen Jahren ein weitaus höhere Bedeutung als durch Tod zuzuordnen ist. Mit steigendem Alter scheiden Personen überwiegend durch Sterben aus dem Bestand aus.

3.2 Prämien- und Leistungsbarwert

Im vorherigen Unterkapitel haben wir die Rechnungsgrundlagen präsentiert, die wir für die Kalkulation eines Krankenversicherungstarifs benötigen. Hier in diesem Kapitel werden wir mit den vorgestellten Rechnungsgrundlagen erstmals rechnen.
Basis für die Tarifierung eines Tarifs nach Art der Lebensversicherung ist das *Äquivalenzprinzip*. Dieses besagt, dass der *Barwert der Leistungen* und der *Barwert der Prämien* zu Vertragsabschluss gleich sein müssen. Ausgenommen davon sind die in 2.1.2 erwähnten Beitragsanpassungsklauseln oder Änderungen der Rechnungsgrundlagen, welche nicht in die Berechnung

des Barwerts mit einfließen.

Wichtige Kennzeichen für die Kalkulation sind *Zahlungsströme* und deren Bewertung. Zur Vereinfachung betrachten wir nur die folgenden zwei Arten:

- **Prämien**: Zahlungsströme von Versicherungsnehmern an den Versicherer
- **Leistungen**: Zahlungsströme vom Versicherer an den Versicherungsnehmer

Ein weiteres Beispiel für Zahlungsströme ist etwa die *Gewinnbeteiligung*, die uns in dieser Arbeit nicht weiter beschäftigen wird.
Um das Äquivalenzprinzip einzuhalten, müssen wir alle Zahlungsströme zum Zeitpunkt des Vertragsabschluss bewerten, wir definieren den *Barwert*.

Definition 3.12. *Der Barwert von Zahlungsströmen ist die Summe einer Folge von Zahlungsströmen zu einem bestimmten Zeitpunkt unter Berücksichtigung des Zeitwerts des Geldes und der Wahrscheinlichkeit, ob die Zahlungen stattfinden.*

Da wir zu Beginn des Vertrags bewerten, liegen alle Zahlungsströme in der Zukunft. Der Zeitwert des Geldes fließt mittels Rechnungszins in die Kalkulation mit ein. Die Wahrscheinlichkeit, ob Zahlungen überhaupt stattfinden, fließt mittels der Ausscheideordnungen mit ein.
Um die Bewertung dieser Zahlungsströme nicht allzu zeitaufwendig und kompliziert zu gestalten, nehmen wir weiter folgende Vereinfachungen an:

- Prämien werden zu Beginn einer Periode (Jahr) gezahlt, sofern der Versicherungsnehmer noch im Bestand ist. Es werden also nur *vorschüssige* Zahlungen betrachtet.
- Leistungen werden ebenfalls zu Beginn einer Periode gezahlt. Das mag auf den ersten Blick etwas merkwürdig erscheinen, da man die Leistungen einer Periode nicht kennt. Dies ist nicht weiter schlimm, da wir mit tabellierten Erwartungswerten (Kopfschäden) arbeiten.
- Da wir das Ausscheiden einer Person nicht genau vorhersehen können, wir aber keine Zeitpunkte in der Unendlichkeit betrachten wollen, beachten wir nur Zeitpunkte bis zum *Endalter* ω.

Die Zahlungsströme einer x-jährigen Person finden also zu den Zeitpunkten $\{0, 1, \ldots, \omega - x\}$ statt. Wir betrachten die Bewertung der unterschiedlichen Arten der Zahlungsströme getrennt.

Leistungsbarwert

Wir widmen uns zuerst den Zahlungsströmen vom Versicherer an den Versicherungsnehmer. Leistungen werden erbracht, wenn der Versicherungsfall eintritt. *Wann* und *ob* dieser eintritt ist unklar, und wenn er eintritt, ist nicht klar *wie viel* der Versicherer leisten muss. Die Zufälligkeiten werden alle im Kopfschaden zusammen gefasst. Für die Berechnung des Barwerts benötigt man zusätzlich noch die Anzahl der im Bestand befindlichen Personen, abhängig vom Alter.

Definition 3.13. *Es sei l_x die Anzahl der x-jährigen Personen im Bestand. Diese lassen sich für die Alter $\{x_0 + 1, \ldots, \omega\}$ anhand folgender Rekursion berechnen*

$$l_{x+1} = l_x \cdot p_x$$

mit der Randbedingung $l_{x_0} = 1$. Der Wert dieser Randbedingung kann beliebig gewählt werden, jedoch hat diese Wahl den Vorteil, dass $l_{x+k} = {}_k p_x$.

Zusätzlich führen wir noch die in der Versicherungsmathematik bekannten und oft noch verwendeten *Kommutationszahlen* ein, auch wenn sie aufgrund des Fortschritts der Technik nicht mehr notwendig wären.

Definition 3.14. *Die diskontierte Zahl der Lebenden des Alters x und die Summe dieser werden in der Lebens- und Krankenversicherungsmathematik verwendet*

$$D_x = l_x \cdot v^x$$
$$N_x = \sum_{j=0}^{\omega - x} D_{x+j}$$

Setzen wir für l_x die Definition ein, so sehen wir sofort das folgende Rekursion gilt

$$\begin{aligned} D_{x+1} &= l_{x+1} \cdot v^{x+1} \\ &= l_x \cdot p_x \cdot v^x \cdot v \\ &= D_x \cdot p_x \cdot v \end{aligned}$$

Wie für den Kopfschaden gilt für den *Leistungsbartwert* A_x, dass dieser vom Alter, vom Geschlecht und von der Leistungsart abhängt, und für eine einzelne Person dargestellt wird.

Es soll folgendes gelten

$$
\begin{aligned}
l_x \cdot A_x &= \sum_{j=0}^{\omega-x} l_{x+j} \cdot K_{x+j} \cdot v^j \qquad (3.7)\\
l_x \cdot v^x \cdot A_x &= \sum_{j=0}^{\omega-x} l_{x+j} \cdot K_{x+j} \cdot v^{x+j}\\
A_x &= \frac{\sum_{j=0}^{\omega-x} l_{x+j} \cdot K_{x+j} \cdot v^{x+j}}{l_x \cdot v^x}
\end{aligned}
$$

Die Summe der Barwerte für einen Personenbestand muss den abgezinsten Leistungen des Versicherers, unter Berücksichtigung der Ausscheideordnung, entsprechen. Wir setzen die oben definierten Kommutationszahlen ein und definieren.

Definition 3.15. *Der Leistungsbarwert einer x-jährigen Person lässt sich wie folgt darstellen*

$$A_x = \frac{\sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} \cdot K_{x+j}}{D_x} \qquad (3.8)$$

Wir haben nun eine Kennzahl, die den Wert der Leistungen des Versicherers zum Vertragsabschluss beschreibt, alle nötigen Information beinhaltet und leicht zu bestimmen ist.

Prämienbarwert

Wir widmen uns der zweiten Art der Zahlungsströme, die der Versicherungsnehmer an den Versicherer zahlt. Streng genommen, betrachten wir hier den *Prämienbarwert* der Prämie in Höhe von 1. Dieser *Prämienbarwertfaktor* besagt wie oft der Versicherungsnehmer, unter Berücksichtigung des Rechnungszins und der Ausscheideordnung, noch die Prämie zahlen wird. Im nächsten Unterkapitel sehen wir uns den tatsächlichen Prämienbarwert an, der bei Vertragsabschluss gleich hoch sein muss wie der Leistungsbarwert.
Analog wird dabei wieder der Zeitwert des Geldes und die Wahrscheinlichkeit, ob der Versicherungsnehmer noch im Bestand ist, berücksichtigt. Wir summieren die Zahlungen bis zum Endalter ω und erhalten den Prämienbarwertfaktor für eine x-jährige Person:

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_x &= 1 + 1 \cdot p_x \cdot v + 1 \cdot {}_2p_x \cdot v^2 + \cdots + 1 \cdot {}_{\omega-x}p_x \cdot v^{\omega-x}\\
&= \sum_{j=0}^{\omega-x} {}_jp_x \cdot v^j
\end{aligned}
$$

Im Analogon gilt für den Prämienbarwertfaktor die Gleichheit in (3.7). Das sehen wir ganz leicht indem wir für $l_x = 1$ (unter Berücksichtigung der Gleichheit von Definition (3.13)), $\ddot{a}_x$ statt A_x und $K_{x+j} = 1$ für alle $j = 0, \ldots, \omega - x$ einsetzen. Wir definieren von Hinzunahmen der Kommutationszahlen den Prämienbarwertfaktor.

Definition 3.16. *Der Prämienbarwertfaktor einer x-jährigen Person lässt sich wie folgt darstellen*

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \tag{3.9}$$

Natürlich zahlt nicht jeder Versicherungsnehmer eine Prämie der Höhe 1, sondern die Prämie P_x. Durch einfaches Multiplizieren erhalten wir den tatsächliche *Prämienbarwert*

$$P_x \cdot \ddot{a}_x$$

Auch wenn Kommutationszahlen für die Berechnungen nicht mehr notwendig wären, liefern sie dennoch eine kompakte und übersichtliche Darstellung der Barwerte.
Wir stellen für den Leistungs- und Prämienbarwert noch nützliche Rekursionen da, die wir in den folgenden Kapitel benötigen werde.

Theorem 3.17. *Es gelten folgende Rekursionen:*

(i) $A_x = K_x + v \cdot p_x A_{x+1}$ *mit* $A_\omega = K_\omega$

(ii) $\ddot{a}_x = 1 + v \cdot p_x \ddot{a}_{x+1}$ *mit* $\ddot{a}_\omega = 1$

Beweis. (i) Wir setzten ein in die Definition von A_x:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} \cdot K_{x+j}}{D_x} \\ &= \frac{D_x \cdot K_x}{D_x} + \frac{\sum_{j=1}^{\omega-x} D_{x+j} \cdot K_{x+j}}{D_x} \\ &\overset{(1)}{=} K_x + \frac{\sum_{j=0}^{\omega-(x+1)} D_{(x+1)+j} \cdot K_{(x+1)+j}}{D_{x+1} \cdot \frac{1}{p_x \cdot v}} \\ &= K_x + v \cdot p_x \cdot \frac{\sum_{j=0}^{\omega-(x+1)} D_{(x+1)+j} \cdot K_{(x+1)+j}}{D_{x+1}} \\ &= K_x + v \cdot p_x \cdot A_{x+1} \end{aligned}$$

wobei wir im Nenner bei (1) die Rekursion $D_{x+1} = D_x \cdot p_x \cdot v$ verwendet haben.

(ii) Diese Gleichheit folgt analog aus (i) mit den selben Begründungen, die wir bei (3.9) verwendet haben.

□

Die gerade bewiesenen Rekursionen werden später bei unserem alternativen Model noch eine bedeutende Rolle bei Beiweisen spielen.

Exkurs in die Lebensversicherungsmathematik

Die Krankenversicherungsmathematik ist eng mit der Lebensversicherungsmathematik verbunden. Bei der Modellierung von Tarifen aus der Krankenversicherung werden unter anderem Barwerte aus der Lebensversicherungsmathematik angewendet, sowie hier bei einem der Beispieltarife im nächsten Kapitel.
Wir stellen den Barwert einer *Erlebensversicherung* da, bei dem der Versicherungsnehmer die versprochene Leistung erhält, wenn dieser einen bestimmten Zeitraum überlebt. Der Einfachheit halber stellen wir diesen nur mit Kommutationszahlen da.

Definition 3.18. *Der Barwert einer n-jährigen Erlebensversicherung einer Person mit Eintrittsalter x lässt sich wie folgt berechnen*

$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

Zusätzlichen stellen wir noch den *Prämienbarwertfaktor einer n-jährigen Versicherung* da. Analog wie beim unendlichen, repräsentiert er die Anzahl wie oft der Versicherungsnehmer bis zum Vertragsende noch die Prämie zahlen wird.

Definition 3.19. *Der Prämienbarwertfaktor einer n-jährigen Versicherung einer Person mit Eintrittsalter x lässt sich wie folgt berechnen*

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} $$

Diese Definition ist analog zu der aus (3.9) mit dem Unterschied, dass man nur die Personen bis zum Alter $x+n$ betrachtet.

3.3 Allgemeine Berechnung der Prämie

Die *Prämien* sind die Zahlungen, die der Versicherungsnehmer an den Versicherer zahlen muss, um Versicherungsschutz zu genießen. Eine Versicherung soll für den Versicherungsnehmer leistbar sein. Würden wir als Prämien die durchschnittlich erwarteten Leistungen (Kopfschäden) ansetzen, die ein Versicherer innerhalb einer Periode an einen Versicherungsnehmer leistet, würde das sehr niedrige Prämien für junge Personen und sehr hohe Prämien für ältere Personen bedeuten. Ziel ist ein über die ganze Versicherungsdauer gleichbleibende Prämie (Ausnahmen siehe 2.1.2), diese wird mit dem Äquivalenzprinzip erreicht:

Definition 3.20. *(Äquivalenzprinzip) Die Prämie P_x ist so zu kalkulieren, dass der Prämienbarwert und der Leistungsbarwert bei Vertragsabschluss übereinstimmen, es soll also gelten*

$$P_x \cdot \ddot{a}_x = A_x \tag{3.10}$$

oder umgeformt

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Die Prämie P_x ist also nichts anderes als der Quotient des Leistungsbarwerts und des Prämienbarwertfaktors. Intuitiv, die Summe aller zukünftigen Leistungen werden durch die Anzahl der Jahre dividiert wird, für die der Versicherungsnehmer noch Prämien zahlen wird.

Nettoprämie

Die nach dem Äquivalenzprinzip berechnete Pärmie berücksichtigt ausschließlich die Leistungen ohne *Kosten*, ohne *Versicherungssteuern* und ohne *Zu-* und *Abschläge*. Sie wird *versicherungsmathematische Nettoprämie* genannt und lässt sich wie folgt berechnen.

Bemerkung 3.21. *Setzen wir in (3.10) für die Barwerte die Formeln aus (3.8) und (3.9) ein, formen um und kürzen, erhalten wir für die versicherungsmathematische Nettoprämie folgende Formel*

$$P_x = \frac{\sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} \cdot K_{x+j}}{N_x} \tag{3.11}$$

Unter der Berücksichtigung der Methode von Rusam, können wir die Nettoprämie auch in folgender, nützlichen Darstellung angeben

$$P_x = G \cdot \frac{\sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} \cdot k_{x+j}}{N_x}$$

Diese Darstellung zeigt, dass wir (bis auf die Leistungshöhe) mit gleichbleibenden Rechnungsgrundlagen rechnen können. Dies ist von großen Vorteil, da sich manche Tarife nur im Leistungsniveau (Grundkopfschaden) und nicht in der Relation des Alters (Profil) unterscheiden. Zusätzlich bedeutet das für Prämienanpassungen einen geringeren Aufwand, da oft nur aufgrund der medizinische Inflation angepasst wird, sprich aufgrund der Leistungshöhe.

$$p_x^n = \frac{\sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} \cdot k_{x+j}}{N_x}$$

Hier stellen den rechten Teil obiger Formel gesondert da und nennen diesen Teil *normierte Prämie*.

Bruttoprämie

Bei der Nettoprämie handelt es sich nicht um die Prämie, die tatsächlich vom Versicherungsnehmer zu entrichten ist. Der Beitrag, den der Versicherungsnehmer zahlen muss, nennen wir *Bruttoprämie*. Neben den Leistungen des Versicherer beinhaltet sie noch folgendes:

- *Abschlusskosten*: mit dieser Art der Kosten berücksichtigen wir die Provision, die z.B. ein Makler für seine Geschäftsaufbringung erhält. Sie werden meistens als Prozentsatz der Bruttoprämie angegeben
- *Verwaltungskosten*: hierbei sind in der Regel Schadenregulierungskosten, Schadenverhütungskosten, Kosten für Verwaltungssysteme, Personalkosten und andere diverse Sachkosten für den Versicherungsbetrieb gemeint.
- *Sicherheitszuschlag* s: Natürlich werden nicht immer an den Versicherungsnehmer genau die vorhergesagten Leistungen erbracht. Abweichungen, die nicht einkalkuliert sind und Kosten, die nicht vorhersehbar sind werden mit diesem Zuschlag abgedeckt.
- *Fixkosten* FK: manchmal werden Kosten nicht prozentual, sonder absolut angegeben.

Es gibt noch weitere Zuschläge und Kosten, wie zum Beispiel den *Zuschlag für erfolgsunabhängige Gewinnbeitilgung*, uns geht es hier aber um das Prinzip der Bruttoprämie, für das die genannte Zuschläge und Kosten ausreichen. Wir fassen alle prozentualen Kosten als *Margin* m zusammen. Schlussendlich erhalten wir die Bruttoprämie

$$B_x = \frac{P_x \cdot (1+s)}{1-m} + FK \tag{3.12}$$

Auf diese Bruttoprämie ist noch die Versicherungssteuer (bei Krankenversicherungsverträgen in Höhe von 1%) hinzuzurechnen. Wir haben nun die Prämienhöhe bestimmt, die der Versicherungsnehmer tatsächlich bezahlen muss. Die Terme *Brutto* und *Netto* sind nicht vereinheitlicht, da manche Versicherungsunternehmen in der Praxis die Bedeutung dieser vertauschen.

In folgender Tabelle sind Nettoprämien für Männer mit den Eintrittsaltern $25, 35, 45, 55$ und 65 angegeben. Die für die Berechnung verwendeten Rechnungsgrundlagen befinden sich im Anhang 7.1.

Tabelle 3.1: Prämie für unterschiedliche Eintrittsalter

Eintrittsalter	jährliche Nettoprämie
25	674,43
35	967,07
45	1.357,29
55	1.894,33
65	2.582,55

In der Tabelle sehen wir, dass die Prämie mit steigendem Eintrittsalter sehr stark ansteigt. Dies ist ein weiterer Begründung dafür, dass das Klientel von Krankenversicherern vor allem junge Leute sind.

3.4 Allgemeine Berechnung der Deckungsrückstellung

Wie schon oben erwähnt sind in den meisten Kalkulationen die Kopfschäden stark vom Alter der versicherten Person abhängig. Da wir in Abschnitt 3.3 eine über die Zeit konstante Prämie P_x kalkuliert haben, jedoch die Kopfschäden $K_x, K_{x+1}, \dots, K_\omega$ nicht konstant sind, wird je nach Zeitpunkt zu viel beziehungsweise zu wenig Prämie gezahlt.
Für Kopfschadenreihen mit Kopfschäden, die mit dem Alter steigen, gilt, dass bis zu einem Zeitpunkt t_0 mehr Prämie gezahlt wird, als Leistungen erbracht werden und ab dem Zeitpunkt t_0 genau das Gegenteil. Es gilt somit $P_x \geq K_{x+t}$ für alle $t = 0, \dots, t_0$ und $P_x < K_{x+t}$ für alle $t > t_0$. Die in den jungen Jahren „überschüssig“ gezahlte Prämie wird rückgestellt und rechnungsmäßig verzinst. Die Alterungsrückstellung wird für jeden Versicherungsnehmer einzeln berechnet. Veränderungen der Rechnungsgrundlagen werden hier nicht berücksichtigt.

Prospektive Darstellung der Alterungsrückstellung

Die Äquivalenz der zukünftig erwarteten Prämieneinnahmen und der zukünftig erwarteten Leistungen muss auch nach Vertragsabschluss gewährleistet sein. Der Unterschied zum Vertragsbeginn ist, dass Zahlungen bereits stattgefunden haben und nicht gleich viel geleistet wurde, wie Prämien bezahlten wurden. Es soll zu jedem Zeitpunkt gelten

Die Summe des Barwerts der zukünftigen Prämien und der nach m Jahren angesparten Alterungsrückstellung muss gleich hoch wie der Barwert der zukünftigen Leistungen sein.

Wir bezeichnen mit ${}_mV_x$ die Alterungsrückstellung einer im Alter x eingetretenen Person nach m Jahren. Formelmäßig wird obige Äquivalenz wie folgt dargestellt

$$A_{x+m} = P_x \cdot \ddot{a}_{x+m} + {}_mV_x \tag{3.13}$$

Unter der Verwendung der Formel aus (3.10) für das Alter $x+m$ in Verbindung mit einfachem Umformen und Herausheben erhalten wir die *prospektive Darstellung der Alterungsrückstellung*

$${}_mV_x = (P_{x+m} - P_x) \cdot \ddot{a}_{x+m} \tag{3.14}$$

In dieser Methode der Berechnung der Alterungsrückstellung werden die zu erwartenden Leistungen der zu erwartenden Prämien gegenübergestellt, deswegen auch *prospektiv*. Dies ist die häufiger verwendete, weil praktikablere, Formel zu Berechnung der Alterungsrückstellung. Im Sinne der Vollständigkeit und da später auch noch eine weitere Methode verwendet wird, stellen wir diese auch vor.

Retrospektive Darstellung der Alterungsrückstellung

Die zweite Methode zur Berechnung der Alterungsrückstellung untersucht die Verwendung der bisher gezahlten Prämien und Leistungen, deswegen auch *retrospektiv*. Es werden die rechnungsmäßigen Prämien P_x den rechnungsmäßigen Leistungen K_x gegenübergestellt. Da sich der Bestand l_x aufgrund der Ausscheideordnungen bis zum Alter $x+m$ auf die Größe l_{x+m} verringert, muss auch nur für so viele Personen Rückstellung gebildet werden. Wir betrachten alle Zahlungen bis zum Zeitpunkt m, welche wir natürlich aufzinsen müssen, wobei wir die Bezeichnung ${}_mV_x^{(r)}$ für die retrospektive Darstellung verwenden.

$$\begin{aligned}
l_{x+m} \cdot {}_mV_x^{(r)} &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{v^{m-j}} \cdot l_{x+j} \cdot (P_x - K_{x+j}) && \Big| \cdot v^{x+m} \\
D_{x+m} \cdot {}_mV_x^{(r)} &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{v^{x+m}}{v^{m-j}} \cdot l_{x+j} \cdot (P_x - K_{x+j}) && \Big| : D^{x+m} \\
{}_mV_x^{(r)} &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_{x+j}}{D_{x+m}} \cdot P_x - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_{x+j}}{D_{x+m}} \cdot K_{x+j} && \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Wir erhalten die *retrospektive Darstellung der Alterungsrückstellung*. Da diese Darstellung weniger übersichtlich und aufwendiger zu implementieren ist, wird diese Formel eher seltener verwendet.

Wir wollen noch zeigen, dass beide Darstellungen dasselbe Ergebnis liefern. Sowohl für die erste und die zweite Summe aus (3.15) gilt jeweils, dass sie über die Differenz zweier weitere Summen über andere Indizes gebildet werden kann, sprich das gilt

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{D_{x+j}}{D_{x+m}} \cdot ... = \sum_{j=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+j}}{D_{x+m}} \cdot ... - \sum_{j=m}^{\omega-x} \frac{D_{x+j}}{D_{x+m}} \cdot ...$$

Wir ersetzen die Summen aus (3.15) und erkennen die Formel für den Leistungsbarwert aus (3.8) und (3.9). Im Sinne der besseren Übersicht ordnen wir die Summen in anderer Reihenfolge an

$$\begin{aligned}
{}_mV_x^{(r)} &= A_{x+m} - P_x \cdot \ddot{a}_x + \sum_{j=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+j}}{D_{x+m}} \cdot P_x - \sum_{j=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+j}}{D_{x+m}} \cdot K_{x+j} \\
&= A_{x+m} - P_x \cdot \ddot{a}_x + \frac{N_x \cdot P_x - \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j} \cdot K_{x+j}}{D_{x+m}} \\
&\overset{(3.11)}{=} A_{x+m} - P_x \cdot \ddot{a}_x \\
&= {}_mV_x
\end{aligned}$$

Bei dieser Umformung haben wir im dritten Schritt im Zähler des Bruchs die Formel zur Berechnung der Prämie P_x eingesetzt und sehen, dass der dritte Summand 0 wird. Wir haben gezeigt, dass die beiden Darstellungen im Ergebnis übereinstimmen [1].

Die zu den im vorherigen Unterkapitel angeführten Prämien (siehe Tabelle 3.1) passenden Alterungsrückstellungsverläufe werden in folgender Graphik dargestellt.

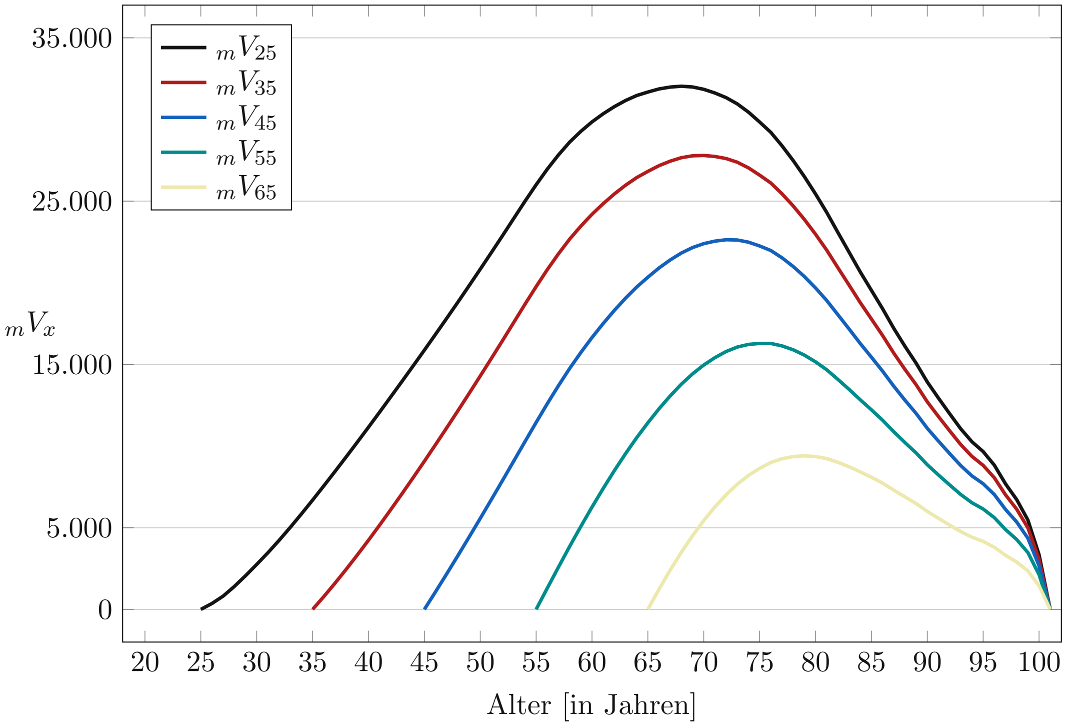

Abbildung 3.2: Verlauf der Alterungsrückstellung

Die Grafik zeigt den Verlauf der Alterungsrückstellung für einen stationären Tarif zu unterschiedlichen Eintrittsaltern. Für Personen mit höherem Eintrittsalter muss gesamt weniger rückgestellt werden, da die Personen einerseits kürzer im Bestand sind und anderseits höhere Prämien bezahlen. Zum Endalter ist die Deckungsrückstellung immer 0.

3.5 Zerlegungsformeln

In diesem Unterkapitel behandeln wir die Zuführung zur Deckungsrückstellung innerhalb einer Periode und infolgedessen die Zerlegung der Prämien in ihre Bestandteile. Wesentliche Gründe für die Bedeutung der Zerlegung der Prämie sind einerseits die Kalkulationsart der über die ganze Vertragslaufzeit konstanten Prämie P_x und die im Alter ansteigenden Kopfschäden $(K_x)_{x\in\mathcal{A}}$.

Bei der Herleitung verwenden wir die prospektive Darstellung der Alterungsrückstellung aus (3.13) und die Rekursion der Barwerte aus Theorem 3.17

$$\begin{aligned}
{}_{m+1}V_x - {}_mV_x &= A_{x+m+1} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+m+1} - {}_mV_x \\
&= \frac{(A_{x+m} - K_{x+m}) \cdot (1+i)}{p_{x+m}} - \frac{(\ddot{a}_{x+m} - 1) \cdot (1+i)}{p_{x+m}} \cdot P_x - {}_mV_x \\
&= \frac{(A_{x+m} - \ddot{a}_{x+m}) \cdot (1+i)}{p_{x+m}} + \frac{(P_x - K_{x+m}) \cdot (1+i)}{p_{x+m}} \cdot P_x - {}_mV_x \\
&= \frac{V_{x+m} \cdot (1+i)}{p_{x+m}} + \frac{(P_x - K_{x+m}) \cdot (1+i)}{p_{x+m}} - {}_mV_x
\end{aligned}$$

Wir setzen in die Definition $p_x = 1 - q_x - w_x$ ein, multiplizieren damit und formen um

$$\begin{aligned}
(1 - q_{x+m} - w_{x+m}) \cdot ({}_{m+1}V_x - {}_mV_x) &= {}_mV_x \cdot (1+i) + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+i) \\
&\quad - (1 - w_{x+m} - q_{x+m}) \cdot {}_mV_x \\
(1 - q_{x+m} - w_{x+m}) \cdot ({}_{m+1}V_x - {}_mV_x) &= {}_mV_x \cdot i + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+i) \\
&\quad - (-w_{x+m} - q_{x+m}) \cdot {}_mV_x \\
{}_{m+1}V_x - {}_mV_x &= {}_mV_x \cdot i + (P_x - K_{x+m}) \cdot (1+i) \\
&\quad + (w_{x+m} + q_{x+m}) \cdot {}_{m+1}V_x
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Wir erhalten als Ergebnis die jährliche Zuführung zur Alterungsrückstellung. In den ersten Jahren wird Rückstellung angespart, sprich ist die Zuführung positiv, wohingegen in älteren Jahren die Rückstellung wieder aufgelöst wird.

Aus dieser Formel erhalten wir durch einfaches Umformen eine weiteres für die Praxis wichtiges Ergebnis, nämlich die Zerlegung der Prämie

$$P_x = \underbrace{({}_{m+1}V_x \cdot v - {}_mV_x)}_{1.} + \underbrace{K_{x+m}}_{2.} + \underbrace{v \cdot (w_{x+m} + q_{x+m}) \cdot {}_{m+1}V_x}_{3.} \tag{3.17}$$

wobei die Summanden folgenden Bezeichnung haben

1. **Sparprämie**: ist der Teil der Prämie, der für die Zuführung zur Alterungsrückstellung dient

2. **Risikoprämie**: ist der Teil der Prämie, der für die erwartenden Leistungen verwendet wird

3. **Vererbung**: ist der Teil der Prämie, der durch das Ausscheiden von Personen aus dem Bestand entsteht

Bei allen Herleitungen wurde hier immer die Nettoprämie betrachtet. Beim Verwenden der

Bruttoprämie kommt noch ein Teil hinzu, die *Kostenprämie*, welche für diese Arbeit nicht von Bedeutung ist. Wir haben nun das für unsere weiteren Betrachtungen nötige Wissen und gehen über zu den derivativen Tarifen.

4 Darstellung von derivativen Tarife

In diesem Kapitel werden wir eine spezielle Art von Tarifen behandeln, die *derivativen Tarife*. Wir wollen hier den Term *Derivat* nicht im Sinne eines Finanzinstrument verstehen. Wir wollen auf die Übersetzung aus dem Italienischen (italienisch *derivare* „ableiten“) hindeuten. Es sind also Tarife damit gemeint, die nicht nur aus einem Tarif „bestehen“, sondern vielmehr aus einem Konstrukt von Tarifen.
Wir werden einen der am häufig verkauften Arten von derivativen Tarifen kennenlernen und deren verschiedene Kalkulationsmethoden betrachten. Die präsentierten Tarife haben nicht alle das gleiche Leistungsspektrum, was die Vergleichbarkeit erschwert. Da ein Marktvergleich sowieso nicht Ziel der Arbeit ist, sondern die Modellierungsansätze verfeinert werden sollen, ist das unterschiedliche Leistungsspektrum nicht von Bedeutung.

Die in diesem Kapitel (und teils auch im nächsten Kapitel) verwendeten Berechnungsarten wurden von österreichischen Krankenversicherern zur Verfügung gestellt, bei denen ich mich hier an dieser Stelle nochmals bedanken möchte. In dieser Arbeit wurden keine personenbezogenen Daten verwendet.
Die unterschiedlichen Modellierungsansätze werden codiert und im Sinne der Einfachheit verallgemeinert. Ebenso betrachten wir nur die Nettoprämie, sprich ohne Berücksichtigung von Kosten, Steuern oder Sicherheitszuschlägen. Außerdem wird nicht nach Geschlechtern differenziert.

4.1 Optionstarife

In diesem Unterkapitel stellen wir die sogenannten *Optionstarife* vor. Dies sind Tarife die von zwei Tarifen abhängen und dem Versicherungsnehmer ein Optionsrecht einräumen (die *Option*). Bei der allgemeinen Definition einer Option halten wir uns an die Definition der *deutsche Aktuarvereinigung (DAV)*, welche in einem ihrer Fachgrundsätze [4] zu finden ist.

Definition 4.1. *Mit einer Option bezeichnen wir die Vereinbarung eines Rechts des Versicherungsnehmers auf Änderung seines vertraglichen Anspruches, ohne dass nachträglich*

- *ein Risikozuschlag,*

- *ein Leistungsausschluss und*
- *ein neues Ableisten von Wartezeiten*

vereinbart werden kann. Dieses Recht ist in der Regel an bestimmte Voraussetzungen geknüpft.

Es gibt unterschiedlichste Arten von Optionen, wie zum Beispiel die *kleine* und *große Anwartschaft* oder die *Krankheitskostenversicherung mit der Option auf Wechsel in einen höherwertigen Versicherungsschutz*, welche wir in diesem Unterkapitel genauer untersuchen. Beim Tarif vor Ausüben der Option ist die Rede von Tarifen mit niedrigem Leistungsspektrum (*Sonderklasse nach Unfall*). Diese Art von Tarifen leistet die Krankenhaus- und Operationskosten nach einem Unfall (unter anderem auch Kostenersatz für Transportkosten oder bestimmten schweren Erkrankungen). Unfälle und schwere Krankheiten kommen vergleichsweise selten vor, sodass der Versicherungsfall weniger oft eintritt. Infolgedessen sind dies auch Tarife mit geringen Kopfschäden und somit geringer Prämien.
Nach Ausübung der Option wird auf einen Tarif mit höherem Leistungsspektrum umgestellt (*Sonderklasse*), die generell (nicht nur nach einem Unfall) Krankenhaus- und Operationskosten leisten. Da bei solchen Tarifen der Versicherungsfall eher häufiger eintritt und diese mit höheren Kosten verbunden sind, handelt es sich hierbei um teurere Tarife[1].
Je nach der Regelung im Tarif, ob Personen zum letztmöglichen Ausübungszeitpunkt alle auf den Tarif mit hohem Leistungsspektrum umgestellt werden oder dann im Tarif mit niedrigem Leistungsspektrum verbleiben, werden letztere Tarif mit oder ohne Rückstellungsbildung kalkuliert, sprich $P_x = K_x$ oder $P_x > K_x$.

Schließt man nun einen Optionstarif ab, gilt bis zum Ausüben der Option der Tarif Sonderklasse nach Unfall. Wir nehmen an, dass nach Ausüben der Option der Versicherungsnehmer vollen Schutz im Sinne eines Vollkostentarifs erhält. Gleichbedeutend mit dem Term *ausüben*, verwenden wir die Terme *umsteigen* und *aktivieren*.
Ein großer Vorteil von Tarifen mit Umsteigeoption ist, dass für den Versicherungsnehmer nach Ausübung der Option, nicht das Alter bei Umstieg als Eintrittalter für die Kalkulation der Prämie im Vollkostentarif hergenommen wird, sondern das Alter bei Abschluss des Optionstarifs.

4.1.1 Kalkulationsmethode A

Wir betrachten die erste Kalkulationsmethode A von Optionstarifen. Bevor wir auf die Darstellung eingehen, spezifizieren wir die Notation der Prämie und erweitern um einige Kenngrößen:

[1] Diese Beschreibungen der Tarife ist sehr allgemein gehalten; was genau wann geleistet wird, steht im Versicherungsvertrag.

- P_x^{Voll}: die Prämie des Tarifs Sonderklasse (Vollkostentarifs)
- P_x^{Unfall}: die Prämie des Tarifs Sonderklasse nach Unfall
- P_x^{Option}: die Prämie für das Recht der Option
- $P_x^{\text{Derivat}} = P_x^{\text{Unfall}} + P_x^{\text{Option}}$: die Prämie, die vor Ausüben der Option bezahlt werden muss
- $\mathcal{M}$: die Menge aller Alter x in denen der Versicherungsnehmer eintreten kann.
- $\mathcal{U}$: die Menge aller Alter u in denen der Versicherungsnehmer die Option ausüben kann.
- o_u^{roh}: Wahrscheinlichkeit, dass eine u-jährige Person die Option ausübt. Personen, die die Option bereits ausgeführt haben, können diese natürlich nur einmal ausführen, also erhalten wir als tatsächliche Ausübungswahrscheinlichkeit o_u

$$o_u = o_u^{\text{roh}} \cdot \prod_{j=x_0}^{u-1} (1 - o_j^{\text{roh}})$$

Die Prämien P_x^{Voll} und P_x^{Unfall} der einzelnen Tarife werden nach den gleichen Bestimmungen wie in Kapitel 3.3 berechnet, dabei sind die entsprechenden Rechnungsgrundlagen zu verwenden. Analog verstehen wir unter dem Zusatz zu einer andere Kenngröße, die zum Tarif zugehörige Kenngröße (zum Beispiel ist mit D_x^{Unfall} die diskontierte Zahl der Lebenden zum Tarif Sonderklasse nach Unfall gemeint)
Die Summe von P_x^{Unfall} und P_x^{Option} ist dann die tatsächliche vom Versicherungsnehmer zu zahlende Prämie. Der Versicherer kann die Zeitpunkte $\mathcal{U}$ vorgeben, in denen der Versicherungsnehmer die Option ausüben kann.

Bei der Berechnung der Prämie orientieren wir uns an der allgemeinen Form der Prämie, die wir schon in (3.11) kennengelernt haben, also

$$P_x^{\text{Option}} = \frac{\sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j}^{\text{Option}} \cdot K_{x+j}^{\text{Option}}}{N_x^{\text{Option}}}$$

Bei dieser Formel stellt sich die Frage nach dem Kopfschaden K_x^{Option}, sprich welche Leistungen muss der Versicherer durchschnittlich erbringen.
Steigt der Versicherungnehmer mit Eintrittalter $x_0 \in \mathcal{M}$ im Alter $u \in \mathcal{U}$ um, so braucht der Versicherer bei Umstieg die Deckungsrückstellung ${}_{u-x_0}V_{x_0}^{Voll}$. Natürlich steigt nicht

in jedem Alter $u \in \mathcal{U}$ jeder Versicherungsnehmer um, der Umstieg geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von o_u. Somit erhalten wir unserem spezifischen Kopfschaden

$$K_x^{\text{Option}} = o_x \cdot {}_{u-x}V_x^{\text{Voll}}$$

Wir setzen den Kopfschaden ein. Dabei verändern wir die Indizes der Summe, da nur über die Alter summiert werden muss, in denen umgestiegen werden kann (bei den übrigen Alter aus $\mathcal{M} \setminus \mathcal{U}$ sind die Summanden gleich 0). Aufgrund der Wahl des Kopfschadens sind die Kommutationszahlen des Tarifs Sonderklasse einzusetzen

$$P_x^{\text{Option}} = \frac{\sum_{u \in \mathcal{U}} D_u^{\text{Voll}} \cdot o_u \cdot {}_{u-x}V_x^{\text{Voll}}}{N_x^{\text{Voll}}}$$

Der Vorteil dieser Kalkulationsmethode ist einfache Handhabung und Implementierung. Der Nachteil ist, dass man Annahmen über die Wahrscheinlichkeit der Optionsausübung treffen muss, was sich bei erstmaliger Kalkulation als schwierig herausstellen kann.
Die Deckungsrückstellung wird mit der schon bekannten Formel aus (3.14) berechnet.

4.1.2 Kalkulationsmethode B

Wir betrachten die zweite Kalkulationsmethode B von Optionstarifen. Wir verwenden hier die gleichen Notationen, wie die der Kalkulationsmethode A, bis auf die Ausnahme:

- $\mathcal{W}_x$: Die Menge der Anzahl der Jahre bis zum Ausüben der Option in Abhängigkeit vom Eintrittsalter x. Damit ersetzen wir im Vergleich zur Kalkulationsmethode A die Menge $\mathcal{U}$.

Erneut gilt wieder, dass nach dem Aktivieren der Option nach $w \in \mathcal{W}_x$ Jahren vom Versicherungnehmer mit Eintrittalter x, der Versicherer bei Umstieg die Alterungsrückstellung ${}_{x+w}V_x^{Voll}$ benötigt. Anders als beim ersten Modellierungsansatz wählen wir hier einen Ansatz, bei dem wir keine Annahme über die Verteilung der Ausübung der Option treffen. Das hat den unverkennbaren Vorteil, dass man diese nicht braucht, jedoch auch den Nachteil von mehr Aufwand.
Wir rufen uns den Barwert einer w-jährigen Erlebensversicherung und den Prämienbarwert einer w-jährigen Versicherung in Erinnerung. Analog zur Prämienberechnung aus (3.11),

berechnen wir die Höhe der Prämie einer Erlebensversicherung mit Versicherungssumme 1

$$\begin{aligned} {}_wP_x^{\text{Erleben}} &= \frac{{}_wE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{w}|}} \\ &= \frac{D_{x+w}}{D_x} \cdot \frac{D_x}{N_x - N_{x+w}} \\ &= \frac{D_{x+w}}{N_x - N_{x+w}} \end{aligned}$$

Diese Versicherung würde einer Person mit Eintrittsalter x nach w Jahren ein Versicherungssumme der Höhe 1 ausbezahlen. Dies ist gleichbedeutend, dass eine Person mit Alter x eintritt und w Jahre im Bestand verbleibt, sprich nach w Jahren die Option ausübt und dann die „Versicherungssumme“ 1 erhält.
Nun brauchen wir nicht die „Versicherungssumme“ der Höhe 1, sondern der Höhe der Deckungsrückstellung des Vollkostentarifs, womit sich die Prämie wie folgt berechnen lässt

$${}_wP_x^{\text{Option}} = \frac{D_{x+w}^{\text{Unfall}}}{N_x^{\text{Unfall}} - N_{x+w}^{\text{Unfall}}} \cdot {}_{x+w}V_x^{\text{Voll}}$$

Diese Prämie ist nun auch vom Zeitpunkt der Umstellung abhängig. Wir addieren den Teil der Prämien für den Tarif Sonderklasse nach Unfall und dividieren durch die Prämie für den Vollkostentarif

$${}_w\rho_x = \frac{{}_wP_x^{\text{Option}} + P_x^{\text{Unfall}}}{P_x^{\text{Voll}}}$$

Wir führen die Berechnung für jedes mögliche Eintrittsalter $x \in \mathcal{M}$ und jede dazugehörige Anzahl an Jahren $w \in \mathcal{W}_x$, nach denen der Versicherungsnehmer die Option ausüben kann, durch. Der Faktor ${}_w\rho_x$ beschreibt das Verhältnis der Prämie für den Optionstarif zur Prämien des Vollkostentarifs, abhängig vom Eintrittalter $x \in \mathcal{M}$ und der dazugehörigen Anzahl an Jahren $w \in \mathcal{W}_x$, nach denen der Versicherungsnehmer die Option ausüben kann. Das Problem, welches wir bei diesem Kalkulationsansatz haben, ist, dass wir davon ausgehen, dass eine Person mit Eintrittsalter x sicher nach w Jahren die Option ausüben wird. Dies widerspricht aber den Modellvoraussetzungen beziehungsweise der Definition der Option, dass ein Versicherungsnehmer den Zeitpunkt wählen kann, zu dem er die Option ausführt. Deshalb betrachten wir nicht Prämie selbst, sondern das Verhältnis zur Prämie des Vollkostentarifs und mitteln über alle x und w, sodass wir den Durchschnitt erhalten

$$\rho = \frac{\sum_{x\in\mathcal{M}} \sum_{w\in\mathcal{W}_x} {}_w\rho_x}{\sum_{x\in\mathcal{M}} |\mathcal{W}_x|}$$

Als Ergebnis erhalten wir einen durchschnittlichen Prozentsatz ρ der Prämie des Vollkostentarifs, gemittelt über alle Eintrittsalter $x \in \mathcal{M}$ und alle möglichen Ausübungszeitpunkte $w \in \mathcal{W}_x$. Wir erhalten also insgesamt unsere Prämie vor der Optionsausübung

$$P_x^{\text{Derivat}} = \rho \cdot P_x^{Voll}$$

Wir haben nun eine Prämie bestimmt, ohne auf die Verteilung der Aktivierung der Option angewiesen zu sein. Erneut wird die Deckungsrückstellung mit der schon bekannten Formel aus (3.14) berechnet.

4.1.3 Kalkulationsmethode C

Wir betrachten die dritte Kalkulationsmethode C von Optionstarifen. Wie auch schon zuvor verwenden wir im Sinne der Kontinuität die gleiche Notation wie bei Kalkulationsmethode A mit der Erweiterung:

- F: ein fixer Sparbetrag, welcher nach anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik berechnet wurde.

Im Gegensatz zu den ersten beiden Kalkulationsansätzen wird hier bei der Berechnung der Prämie P_x^{Derivat} die Alterungsrückstellung ${}_{x+w}V_x^{\text{Voll}}$ nicht verwendet. Auch wenn hier bei diesem Kalkulationsansatz nicht auf Rechnungsgrundlagen eines anderen Tarifs zurückgegriffen wird (und wir uns somit eigentlich außerhalb des Umfangs dieser Arbeit aufhalten), möchten wir diese Art der Kalkulation dennoch ausführen, um möglichst viele Arten von Tarifierungen aufzuzeigen.

Bei dieser Kalkulationsmethode greifen wir auf die Zerlegungsformel für die Prämie (3.17) zurück, sodass sich die Prämie wie folgt berechnen lässt

$$P_x^{\text{Derivat}} = K + Z + S_x$$

wobei K der Kopfschaden ist, der über die Zeit konstant bleibt, Z sind Zuschläge für etwaige andere Leistungen wie zum Beispiel Kostenersatz für Transport oder Rehabilitation, und S_x die Sparprämie darstellt. Diese lässt sich mittels folgender Formel berechnen

$$S_x = \frac{(\frac{x}{5} - 3)^2 + 3 \cdot (\frac{x}{5} - 3)}{4} + F$$

wobei hier F ein fixer Sparbetrag unabhängig vom Alter ist. Die bei der Kalkulation verwendeten Rechnungsgrößen, z.B. für den Zuschlag Z, bedarf es weiterer Information zur richtigen Berechnung dieser Größen.

Für die Berechnung der Deckungsrückstellung wird die Zerlegungsformel aus (3.16) verwendet.

Wir sehen, alles in allem gibt es unterschiedlichste Herangehensweisen Optionstarife zu kalkulieren. Wir wollen nun im nächsten Schritt all diese Methoden vereinheitlichen und verfeinern.

5 Alternative Modellierung mittels Markov-Modell

Im vorherigen Kapitel haben wir *derivative Tarife* definiert und unterschiedliche Darstellungsarten von Optionstarifen kennengelernt. Jetzt wollen wir in einem allgemeinen Versicherungsmodell diese Darstellungsarten verfeinern. Wir wählen das *Markov-Modell*, das sich sehr gut für die Kalkulation von Versicherungsprodukten, die nach Art der Lebensversicherung kalkuliert sind, eignet. Dazu führen wir zuerst die *Markov-Ketten* ein und stellen die wichtigsten Ergebnisse vor. Wir halten uns dabei größtenteils an [9].

5.1 Grundlagen

In diesem Unterkapitel wollen wir das *Markov-Modell* einführen, bevor wir es auf die oben vorgestellten Tarife anwenden. Dafür definieren wir grundlegende Begriffe und präsentieren die *Thiele'sche Differenzengleichung*.

Markov-Kette

Wie wir schon wissen sind essentielle Kennzeichen eines jeden Versicherungsprodukts die Zahlungsströme. Untrennbar damit verbunden sind die Zeitpunkte, zu denen diese Zahlungsströme stattfinden. Welche Zahlungen wann und ob stattfinden, hängt davon ab in welchen Zustand sich die Person befindet.

Definition 5.1. *Der Zustandsraum S ist die Menge aller Zustände i, in denen sich der Versicherungsnehmer befinden kann. S sei eine endliche Menge.*

Eine versicherte Person ist also zu jedem Zeitpunkt $t \in T$ in einem Zustand $i \in S$. Ein Beispiel für einen Zustandsraum wäre $S = \{*, \dagger\}$, mit den Zuständen *lebendig* $(*)$ und *tot* $(\dagger)$. In welchem Zustand sich der Versicherungsnehmer tatsächlich befindet, wird als *stochastischer Prozess* modelliert.

Definition 5.2. *Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ein Messraum $(S, \mathcal{S})$ und eine Indexmenge T. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in T}$ ist dann ein Familie von*

Zufallsvariablen $X_t(\omega)$, sprich folgende Abbildung

$$X : \Omega \times T \rightarrow S, (\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$$

Dabei sei S der Zustandsraum, T die Menge aller Zeitpunkte und $X_t(\omega)$ der Zustand, in dem sich die versicherte Person ω zum Zeitpunkt t befindet.

Es sei wiederholt, dass der Zeithorizont bei Krankenversicherungsverträgen ein Jahr ist. Wir betrachten also ein *zeit-diskretes Modell* mit der endlichen Menge $T = \{x_0, ..., \tilde{\omega}\}$. Zu Beginn und Ende jeder Periode ist der Versicherungsnehmer in einem Zustand.
Als nächstes stellen wir uns die Frage welche Zahlungsströme stattfinden. Zahlungen werden entweder beim Verbleiben im Zustand i oder beim Wechsel von Zustand i nach Zustand j fällig.

- $a_i^{pre}(t)$: Zahlungen, die stattfinden, wenn sich die Person zum Zeitpunkt t im Zustand i befindet.
- $a_{ij}^{post}(t)$: Zahlungen, die stattfinden, wenn die Person von Zustand i kommt und zum Zeitpunkt t in den Zustand j wechselt.

Wir halten uns an unsere Annahme aus 3.2 und setzen $a_{ij}^{post}(t) = 0$ für alle $i, j \in S$, da wir in unserem Modell alle Zahlungen als vorschüssig, zu Beginn einer Periode, betrachten. Zur Vollständigkeit seien die Zahlungen bei Zustandswechsel dennoch angegeben.
Auch wenn wir nur Zahlungen beim Verbleiben in einem Zustand i betrachten, ist es trotzdem unabdinglich, Information über den Zustandswechsel zu haben. Da wir das Verbleiben beziehungsweise das Wechseln eines Zustandes als Zufallsvariable definiert haben, steht uns deren Wahrscheinlichkeitsverteilung zu Verfügung.

Definition 5.3. *Sei $X = (X_t)_{t \in T}$ ein stochastischer Prozess über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum S und Zeitmenge T. Den Prozess nennt man Markov-Kette, falls für alle $n \geq 1$*

$$t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n+1} \in T \text{ und } i_1, i_2, ..., i_{n+1} \in S$$

mit

$$\mathbb{P}[X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, ..., X_{t_n} = i_n] > 0$$

das Folgenden gilt:

$$\mathbb{P}[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_k} = i_k \forall k \leq n] = \mathbb{P}[X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n]$$

Bei dieser Definition verwenden wir die bedingte Wahrscheinlichkeit, weil der Wechsel in einen Zustand j davon abhängt aus welchem Zustand i gewechselt wird. Bei einer Markov-Kette hängen die Wahrscheinlichkeiten nur vom letzten Zustand ab, also von dem Zustand aus dem die Person wechselt. Der Weg, auf dem die Person in diesen Zustand gekommen ist, ist für den nächsten Wechsel nicht von Bedeutung. Die Zukunft hängt also nur von der Gegenwart und nicht von der Vergangenheit ab.
Für die weitere Modellierung definieren wir die sogenannten *Übergangswahrscheinlichkeit* innerhalb eines gewissen Zeitraums von einem in den anderen Zustand zu wechseln.

Definition 5.4. *Es $X = (X_t)_{t \in T}$ eine Markov-Kette über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum S, mit der Mächtigkeit $|S| = m$ und Zeitmenge T. Die Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand $i \in S$ zum Zeitpunkt $s \in T$ in den Zustand $j \in S$ zum Zeitpunkt $t \in T$ zu wechseln definieren wir wie folgt:*

$$p_{ij}(s,t) = \mathbb{P}[X_t = j | X_s = i]$$

Wir fassen die Übergangswahrscheinlichkeiten zusammen und definieren die $m \times m$ Übergangsmatrix:

$$P(s,t) = \begin{pmatrix} p_{11}(s,t) & p_{12}(s,t) & \cdots & p_{1m}(s,t) \\ p_{21}(s,t) & p_{22}(s,t) & \cdots & p_{2m}(s,t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}(s,t) & p_{m2}(s,t) & \cdots & p_{mm}(s,t) \end{pmatrix}$$

Analog wie oben passen wir diese Definition an den Zeithorizont an und führen die einjährigen Übergangswahrscheinlichkeiten ein

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}[X_{t+1} = j | X_t = i]$$

Da sich eine Person zu jedem Zeitpunkt in einem Zustand befindet, muss für alle $t \in T$ gelten

$$\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$$

Für das bereits oben angeführte Beispiel $S = \{*, \dagger\}$ ist die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{**}(x)$ nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit p_x einer x-jährigen Person innerhalb eines Jahres im Bestand zu verbleiben.

Thiele'sche Differenzengleichung

Das für die Praxis bedeutendste Ergebnis aus dem Studium der Markov-Ketten ist die *Thiele'sche Differenzengleichung*. Sie ist ein mächtiges Hilfsmittel für die Berechnung der Barwerte, der Deckungsrückstellung und der zu zahlenden Prämie. Es sei wieder v der Diskontierungsfaktor.

Theorem 5.5. *Für das zeit-diskrete Versicherungsmodell gilt folgende Rekursion für die Deckungsrückstellung $V_i(t)$ eines Zustands $i \in S$ zum Zeitpunkt $t \in T$*

$$V_i(t) = a_i^{pre}(t) + \sum_{j \in S} p_{ij}(t) \cdot v \cdot \big(a_{ij}(t) + V_j(t+1)\big) \tag{5.1}$$

mit der Randbedingung $V_i(\tilde{\omega}) = 0$ für alle $i \in S$.

Beweis. Die in der Krankenversicherung üblich verwendeten Formel für Berechnung der Deckungsrückstellung einer Person mit Eintrittsalter x zum Alter $x+m$

$$_mV_x = A_{x+m} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+m}.$$

soll mit der Thiele'schen Differenzengleichung übereinstimmen. Wir treffen für den Beweis o.B.d.A die vereinfachende Annahme, dass der Zustandsraum nur zwei Zustände hat, also $S = \{*, \dagger\}$. Die Markov-Kette $X = (X_t)_{t \in T}$ beschreibt wieder den Zustand der Person. Im aktiven Zustand $*$ bezahlt der Versicherungsnehmer Prämien und der Versicherer erbringt Leistungen, im ausgeschiedenen Zustand $\dagger$ erfolgen keine Zahlungen.
Wir führen den Beweis mittels *vollständiger Induktion* rückwärts:

Induktionsanfang:
Im Endalter $\tilde{\omega}$ ist die Deckungsrückstellung in jedem Fall 0, also gilt trivialerweise für alle Zustände $i \in S$

$$_{\tilde{\omega}-x}V_x = V_i(\tilde{\omega}) = 0$$

Induktionsbehauptung:
Wir nehmen an, dass die Äquivalenz der Formel für das Alter $m+1$ gilt, also

$$_{m+1}V_x = V_*(m+1)$$

Für den Zustand $\dagger$ ist Rückstellung nicht nur am Ende, sondern immer 0, da für eine ausgeschieden Person keine Deckungsrückstellung zu bilden ist.

Induktionsannahme:
Wir setzen für die Barwerte die geltenden Rekursionen aus (3.17) ein und sehen so, dass die Formel stimmt

$$
\begin{aligned}
{}_mV_x &= K_{x+m} + v \cdot p_{x+m} \cdot A_{x+m+1} - P_x \cdot (1 + v \cdot p_{x+m} \ddot{a}_{x+m+1}) \\
&= K_{x+m} - P_x + v \cdot p_{x+m} \cdot (A_{x+m+1} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+m+1}) \\
&\overset{(1)}{=} \underbrace{K_{x+m} - P_x}_{a_i^{pre}(x+m)} + \underbrace{v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x}_{\sum_{j\in S} p_{*j}(x+m) \cdot v \cdot \left(a_{*j}(x+m) + V_j(x+m+1)\right)} \\
&= V_*(x+m)
\end{aligned}
$$

In (1) fassen wir einerseits den Kopfschaden K_{x+m} und die Prämie P_x zum Zahlungsstrom $a_i^{pre}(x+m)$ zusammen, das können wir machen, da wir in unserem Modell alle Zahlungen als vorschüssig betrachten. Andererseits setzen wir die Induktionsannahme ein und wissen, dass $p_{x+m} = p_{**}(x+m)$, $V_\dagger = 0$ und für die Zahlungen bei Zustandswechsel in jedem Fall $a_{*j}(x+m) = 0$ gilt.

□

Die Thiele'sche Differenzengleichung gilt nicht nur für den Zustandsraum $S = \{*, \dagger\}$, sondern auch für alle anderen. Den Beweis kann man unter Hinzunahme von mehr Informationen über die Zahlungsströme und Übergangswahrscheinlichkeiten analog anpassen.

Wie schon eingangs erwähnt, können wir mit der Thiele'sche Differenzengleichung auch den Leistungs- und Prämienbarwert berechnen. Infolgedessen kann so auch die Prämie berechnet werden.

Theorem 5.6. *Die Thiele'sche Differenzengleichung gilt auch für die Barwerte:*

(i) Für den Leistungsbartwert gilt

$$A_x = \sum_{j\in S} V_j^L(x) =: V^L(x)$$

wobei $V_j^L(x)$ mit der Gleichung aus Theorem 5.5 berechnet wird. Dabei ist zu beachten, dass nur die Leistungen für die Zahlungsströme eingesetzt werden.

(ii) Für den Prämienbarwertfaktor gilt

$$\ddot{a}_x = \sum_{j\in S} V_j^{P=-1}(x) =: V^{P=-1}(x)$$

wobei $V_j^{P=-1}(x)$ mit der Gleichung aus Theorem 5.5 berechnet wird. Dabei ist zu beachten, das der einzige Zahlungsstrom die Prämie in Höhe -1 ist.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zu dem Beweis von Theorem 5.5, mit dem Unterschied, dass die Rekursion getrennt für Leistungsbarwert A_x und den Prämienbarwertfaktor $\ddot{a}_x$ betrachtet wird. Beim Beweis für $\ddot{a}_x$ setzen wir zusätzlich noch $P_x = -1$ für alle $x \in \mathcal{A}$ ein. □

Wir haben somit eine Methode gefunden die Kommutationszahlen vollständig zu ersetzen und können die Prämie wie folgt berechnen

$$P_x = \frac{V^L(x)}{V^{P=-1}(x)}$$

Die üblich verwendete Methode zu Berechnung der Prämie geschieht allerdings nicht mittels gerade vorgestellter Formel, sondern durch Lösen des folgenden Optimierungsproblems, separat für jedes Eintrittsalter x_0. Dabei hängt die Deckungsrückstellung $V_i^{P_{x_0}}(x_0)$ für jeden Zustand $i \in \{*, \dagger\}$ von der Prämie P_{x_0} ab.

$$\begin{aligned} \min_{P_{x_0}} \quad & f(P_{x_0}) = V_*^{P_{x_0}}(x_0) - V_\dagger^{P_{x_0}}(x_0) && \text{Optimierungsfunktion} \\ \text{u.B.v.} \quad & V_i^{P_{x_0}}(x_0) = 0, \ \ i \in S && \text{Gleichungsbeschränkung} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Prämie P_{x_0} für jedes Eintrittsalter x_0.

Wir haben nun die wichtigsten Informationen und Erkenntnisse über das Markov-Modell aufgelistet. Im folgenden werden wir unser erlangtes Wissen auf die im vorherigen Kapitel präsentierten Beispiele von Optionstarifen anwenden.

5.2 Optionstarife

Wir widmen uns den Optionstarifen. Der erste Schritt beim Modellieren mit dem Markov-Modell ist die Auswahl des Zustandsraums S und ob es sich um *zeit-diskretes* oder *zeit-stetiges* Modell handelt. Da wir bei Krankenversicherungsverträgen auf Basis von jährlichen Intervallen agieren, handelt es sich bei uns um ein *zeit-diskretes* Modell.
Die Grafik zeigt die unterschiedlichen Zustände aus dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$ und deren Übergangswahrscheinlichkeit. In die Krankenversicherung üblich, verwendet man nicht $*$ für *aufrecht* und $\dagger$ für *tot*, da man nicht nur durch Sterben, sondern auch durch Stornieren ausscheiden kann. Im folgenden werden die Zustände genauer erläutert.

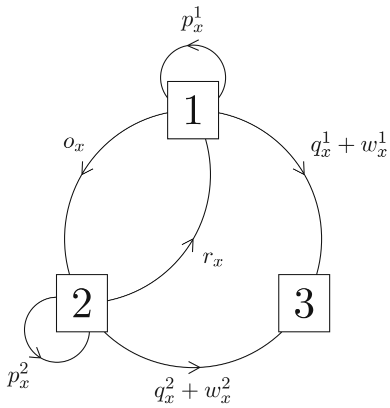

Abbildung 5.1: Zustände bei Optionstarifen

- 1: Dies ist der Zustand, in dem sich der Versicherungsnehmer befindet, *bevor* er die Option ausgeübt hat. Er erhält also den Schutz des Tarifs Sonderklasse nach Unfall.
- 2: Dies ist der Zustand, in dem sich der Versicherungsnehmer befindet, *nachdem* er die Option ausgeübt hat. Er erhält also den Schutz des Vollkostentarifs Sonderklasse.
- 3: Dies ist der Zustand *ausgeschieden*, sprich wenn der Versicherungsnehmer stirbt oder storniert.

Wir betrachten ein Markov-Modell mit 3 Zuständen. Die Erläuterung zu den Übergangswahrscheinlichkeiten sehen wir uns jetzt an.

Tabelle 5.1: Übergangswahrscheinlichkeiten bei Optionstarifen im Markov-Modell

Übergangs-wahrscheinlichkeit	klassische Rechnungsgrundlage	Erläuterung
$p_{12}(x)$	o_x	Wahrscheinlichkeit, das der Versicherungsnehmer die Option im Alter x ausübt
$p_{13}(x)$	$q_x^1 + w_x^1$	Wahrscheinlichkeit, das der Versicherungsnehmer im Alter x aus dem Bestand ausscheidet, ohne jemals die Option ausgeführt zu haben.
$p_{11}(x) =$ $1 - p_{12}(x) - p_{13}(x)$	$p_x^1 =$ $1 - o_x - q_x^1 - w_x^1$	Wahrscheinlichkeit, das der Versicherungsnehmer im Alter x im Zustand Sonderklasse nach Unfall verweilt

Tabelle 5.1: Übergangswahrscheinlichkeiten bei Optionstarifen im Markov-Modell

Übergangs-wahrscheinlichkeit	klassische Rechnungsgrundlage	Erläuterung
$p_{23}(x)$	$q_x^2 + w_x^2$	Wahrscheinlichkeit, das der Versicherungsnehmer im Alter x aus dem Bestand ausscheidet, nachdem die Option ausgeführt wurde.
$p_{21}(x)$	r_x	Wahrscheinlichkeit, das der Versicherungsnehmer im Alter x wieder in den Zustand Sonderklasse nach Unfall wechselt
$p_{22}(x) =$ $1 - p_{21}(x) - p_{23}(x)$	$p_x^2 =$ $1 - r_x - q_x^2 - w_x^2$	Wahrscheinlichkeit, das der Versicherungsnehmer im Alter x im Zustand Sonderklasse verweilt

Eine ausgeschiedene Person kann einerseits nach dem Stornieren nicht wieder zu den gleichen Konditionen eintreten beziehungsweise von den Toten auferstehen, es gilt somit $p_{33}(x) = 1$ für alle Alter $x \in \mathcal{A}$.

Für die Tarifierung definieren wir weitere Merkmale. Wir führen ein neue Notation ein und spezifizieren die für die Modellierung essentiellen Gegebenheiten:

- ξ: Das *Umstellalter*, zu dem alle sich im Tarif Sonderklasse nach Unfall befindlichen versicherten Personen in den Vollkostentarif umgestellt werden.

  Ein andere Modellierungsansatz ist, Personen, die die Option nicht ausführen nie umzustellen. Sie bleiben also im Tarif mit niedriger Leistungsstufe.

- δ_x: Der *Optionsrabatt* in Abhängigkeit vom Eintrittsalter x, den der Versicherungsnehmer auf die Prämie des Vollkostentarifs erhält.

Hier im Modellierungsansatz mit dem Markov-Modell haben wir Merkmale aus den obigen Kalkulationsmethoden hergenommen. Einerseits die *Ausübungswahrscheinlichkeiten* aus dem Ansatz in Kapitel 4.1.1 und andererseits das Merkmal aus dem Ansatz in Kapitel 4.1.2, dass die Prämie mittels *Rabatt* berechnet wird.

Weiter betrachten wir die Zahlungsströme. Wir erinnern, dass es einerseits die *Leistungen* vom Versicherer an den Versicherungsnehmer und andererseits die *Prämien* vom Versicherungsnehmer an den Versicherer gibt. Wie erwähnt, werden in der Krankenversicherung alle

Zahlungen als vorschüssig betrachtet, sodass gilt

$$a_{ij}^{post}(t) = 0 \qquad \forall i, j \in S$$

Da das Versicherungsunternehmen und nicht der Versicherungsnehmer die Rückstellungen bilden muss und die Prämien berechnet, betrachten wir alles aus Sicht des Versicherungsunternehmens. Das bedeutet, dass Zahlungseingänge ein *negatives* und Zahlungsausgänge ein *positives* Vorzeichen haben.
Für den Zustand (1) werden bis zum Umstellalter die Leistungen und Prämien des Tarifs Unfall gezahlt, danach die des Vollkostentarifs. Wir halten uns dabei wieder an die Notation aus Kapitel 4.1. Es gelten somit folgende vorschüssige Zahlungen für eine Person mit Eintrittsalter x_0

$$a_1^{pre}(x) = \begin{cases} K_x^{\text{Unfall}} - P_{x_0}^{\text{Derivat}} & \text{, für } x_0 \leq x < \xi \\ \\ K_x^{\text{Voll}} - P_{x_0}^{\text{Voll}} & \text{, für } \xi \leq x \leq \omega \end{cases}$$

Für den Zustand (2)

$$a_2^{pre}(x) = K_x^{\text{Voll}} - P_{x_0}^{\text{Voll}}$$

Im Zustand (3) gibt es keine Zahlungen.
Da wir hier einen Modellierungsansatz mit Optionsrabatt gewählt haben, ersetzen wir die Prämie des Tarifs Sonderklasse nach Unfall wie folgt

$$P_{x_0}^{\text{Derivat}} = P_{x_0}^{\text{Voll}} \cdot (1 - \delta_{x_0}) \tag{5.2}$$

Alle Kenngrößen, mit Ausnahme des Rabatts δ_x, werden mit oben angeführten Methoden berechnet.
Wie in Kapitel 4.1 erwähnt, werden Tarife mit niedriger Leistungsstufe meistens ohne Deckungsrückstellung kalkuliert, es gilt somit $K_x^{\text{Unfall}} = P_{x_0}^{\text{Unfall}}$. Wir rufen uns in Erinnerung, dass gilt

$$P_x^{\text{Derivat}} = P_x^{\text{Unfall}} + P_x^{\text{Option}}$$

Setzen wir nun (5.2) in den Zahlungsstrom $a_1^{pre}(x)$ für alle $x < \xi$ ein, setzen dies weiter in gerade präsentierte Formel und formen ein wenig um, so erhalten wir die Prämie, die der

Versicherungsnehmer für das Recht der Option zahlen muss:

$$P_{x_0}^{\text{Option}} = P_{x_0}^{\text{Derivat}} - P_{x_0}^{\text{Unfall}} = P_x^{\text{Derivat}} - K_x^{\text{Unfall}} = -a_1^{pre}(x)$$

Dies gilt klarerweise nur für die Alter x vor dem Umstellalter ξ, da Personen nach Ausübung der Option, die Option nicht mehr ausüben können.

Optionsrabatt

Wir setzen weiter beim Optionsrabatt δ_x an und überlegen uns wie dieser bestimmt werden kann. Dafür müssen wir uns überlegen welche Voraussetzungen gelten müssen und stoßen dabei auf folgenden Bedingung

$$V_1^{\delta_{x_0}}(x_0) = V_2^{\delta_{x_0}}(x_0) = V_3^{\delta_{x_0}}(x_0) = 0 \tag{5.3}$$

Die Deckungsrückstellung, in Abhängigkeit von Eintrittsalter x_0 und dem Rabatt δ_{x_0}, muss bei Eintritt der versicherten Person in den Bestand, für alle Zustände gleich 0 sein, da zu Beginn noch nichts angespart wurde. Für den Zustand 3 gilt dies immer, sprich können wir diesen außen vorlassen.
Wir formulieren das Optimierungsproblem, separat für jedes Eintrittsalter x_0.

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{\delta_{x_0} \in (0,1)} & f(\delta_{x_0}) = V_1^{\delta_{x_0}}(x_0) - V_2^{\delta_{x_0}}(x_0) & \text{Optimierungsfunktion} \\ \text{u.B.v.} & V_i^{\delta_{x_0}}(x_0) = 0, \ \ i \in S & \text{Gleichungsbeschränkung} \end{array}$$

Wir erhalten den optimalen Rabatt δ_{x_0} für jedes Eintrittsalter x_0.

Beispiel

Zur Veranschaulichung des gerade beschriebenen Markov-Modells wollen wir konkrete Berechnungen durchführen. Dabei verwenden wir die gleichen Rechnungsgrundlagen, wie schon beim obigen Beispiel (siehe Anhang 7.1). Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden berechnet wie in Tabelle 5.1 beschrieben, in Verbindung mit den Werten aus Tabelle 7.1 und Tabelle 7.2. Die folgenden Gleichheiten gelten für alle $x < \xi$:

- $p_{12}(x) = o_x$
- $p_{13}(x) = q_x - \frac{9}{10} \cdot w_x$
- $K_x^1 = K_x^{\text{Unfall}}$

Die Prämie im Tarif Sonderklasse nach Unfall ist bekanntlich niedriger, weswegen wir eine niedrigere Stornowahrscheinlichkeit annehmen.
Da wir im Modell vorausgesetzt haben, dass alle Personen im Umstellalter umgestellt werden, stimmen die Rechnungsgrundlagen für alle Alter $x \geq \xi$ überein:

- $p_{12}(x) = p_{23}(x) = q_x - w_x$
- $K_x^1 = K_x^2 = k_x \cdot G^{\text{Voll}}$

Es wurde die Berechnung wie beschrieben durchgeführt, dabei haben wir das Statistik-Programm R in Verbindung mit Microsoft Excel verwendet. Der dazu angewandte Code ist im Anhang 7.2 angeführt.
In folgender Grafik sind die Teile der Prämie, jeweils vom frühesten Eintrittalter bis zum letztmöglichen Alter in dem die Option ausgeführt werden kann, angeführt. Die Prämie ab dem Umstellalter $\xi = 45$, wurde nicht explizit angegeben, da es sich um die selbe wie in Kapitel 3.3 handelt. Anhand der Grafik können wir erneut gut sehen, dass sich die Prämien

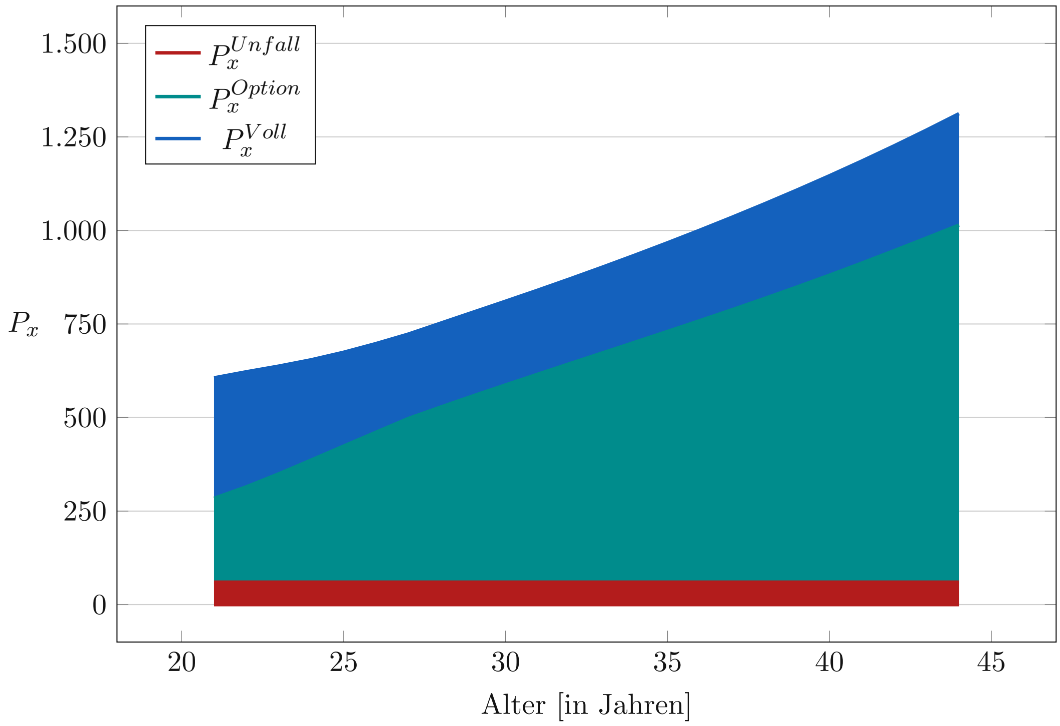

Abbildung 5.2: Verlauf der Prämien

mit steigendem Alter erhöhen. Ebenfalls sehen wir, dass der Optionsrabatt für Personen, die später einsteigen, geringer ausfällt. Das hat den Grund, da sich diese Personen eine kürzere Zeit im Tarif Unfall mit geringerem Leistungsspektrum befinden.

6 Schlussfolgerung

Wir haben in der vorgestellten Arbeit unterschiedlichste Ansätze zur Kalkulation von Optionstarifen in der Krankenversicherung kennengelernt. Wir haben die Modelle, welche in der Praxis verwendet werden, vorgestellt, welche teils ohne und teils mit Markov-Modell kalkuliert worden sind.

Bei den Modellen, ohne Verwendung von Markov-Ketten, gab es zwei Ansätze, die sowohl Rechnungsgrundladen des Tarifs mit niedriger als auch welche des Tarifs mit hohem Leistungsspektrum miteinbezogen haben.

Es wurden die Ansätze der Kalkulationsmethode mit Markov-Modell hergenommen und erweitert. Es wurden dabei Merkmale aus den Ansätze ohne Markov-Modell hergenommen, einerseits, dass die Prämie von einem *Rabatt* abhängt und andererseits, dass Annahmen über die *Ausübungswahrscheinlichkeit* getroffen werden müssen.
Es wurde ein veranschaulichendes Beispiel angeführt. Der bei diesem Beispiel verwendete Code inklusive der Rechnungsgrundlagen liegt im Anhang bei, sodass der Leser das Beispiel selbst nachvollziehen kann.

7 Anhang

7.1 Verwendete Rechnungsgrundlagen

Hier sind die versicherungsmathematischen Rechnungsgrundlagen dargestellt, die für die Berechnungen der Prämien und Alterungsrückstellung in Kapitel 3 und in Kapitel 5 verwendet worden sind.
Die Sterbetafel wurde der Seite der Statistik Austria [11] entnommen. Da in Österreich keine Daten zu Kopfschäden beziehungsweise Stornowahrscheinlichkeit veröffentlicht werden, wurde hier auf deutsche Daten zurückgegriffen, entnommen der Seite der BaFin [2]. Die Menge $\mathcal{A} = \{21, \ldots, 100\}$ beschreibt wieder die Menge der Alter. Folgende Rechnungsgrundlagen wurden verwendet.

Rechnungszins: 1%

Profil: Tarif *02_KKV_stat_N_M_MB_pn*

Grundkopfschaden: Tarif *02_KKV_stat_N_M_MB_pn*
($G^{\text{Voll}} = 254,90$ für alle $x \in \mathcal{A}$)

Stornotafel: Tarif *06_STORNO_N_M_sp* (ab Alter 90: 0%)

Sterbetafel: Männer 2019 (Endalter 100)

Die Werte der angeführte Rechnungsgrundlagen sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

Tabelle 7.1: Versicherungsmathematische Rechnungsgrundlagen

Alter x	Stornowahrscheinlichkeit w_x	Sterbewahrscheinlichkeit q_x	Profil k_x
21	0,1305	0,000673138	1,6399
22	0,101	0,000492722	1,701
23	0,0872	0,000269164	1,639
24	0,0896	0,000577105	1,5101
25	0,1032	0,000620859	1,3771
26	0,1161	0,000455811	1,2783

Tabelle 7.1: Versicherungsmathematische Rechnungsgrundlagen

Alter x	Stornowahrscheinlichkeit w_x	Sterbewahrscheinlichkeit q_x	Profil k_x
27	0,1168	0,000653721	1,0242
28	0,1048	0,000542233	0,998
29	0,0872	0,000418271	0,9713
30	0,071	0,000609116	0,9464
31	0,0657	0,000659896	0,925
32	0,06	0,000751863	0,9089
33	0,0547	0,000835939	0,8987
34	0,0498	0,000812491	0,8949
35	0,0455	0,000867778	0,8981
36	0,0417	0,000761963	0,9082
37	0,0384	0,000724946	0,9247
38	0,0356	0,00090997	0,9461
39	0,0332	0,001122334	0,9714
40	0,0312	0,00114297	1
41	0,0295	0,001503931	1,0355
42	0,028	0,001099238	1,072
43	0,0268	0,001305141	1,1193
44	0,0258	0,00138658	1,1786
45	0,025	0,001952042	1,2483
46	0,0244	0,002004841	1,3263
47	0,0241	0,002080133	1,4115
48	0,0239	0,002501959	1,5065
49	0,024	0,00240761	1,613
50	0,024	0,002578137	1,732
51	0,024	0,002829391	1,8631
52	0,024	0,00339777	2,0047
53	0,0236	0,003699567	2,1559
54	0,0221	0,003979969	2,3198
55	0,0198	0,004711219	2,5011
56	0,0169	0,005214046	2,702
57	0,0139	0,006299934	2,9242
58	0,0113	0,005948344	3,1627
59	0,0092	0,007075007	3,4174

Tabelle 7.1: Versicherungsmathematische Rechnungsgrundlagen

Alter x	Stornowahrscheinlichkeit w_x	Sterbewahrscheinlichkeit q_x	Profil k_x
60	0,0076	0,007807308	3,694
61	0,0066	0,009021738	3,9932
62	0,0059	0,010039611	4,3147
63	0,0054	0,010896224	4,656
64	0,0051	0,010970438	5,0199
65	0,0048	0,013558614	5,4089
66	0,0044	0,014760189	5,8212
67	0,0041	0,01655225	6,2527
68	0,0038	0,01735464	6,7038
69	0,0035	0,018623269	7,18
70	0,0033	0,020504007	7,6809
71	0,0031	0,023426275	8,2044
72	0,003	0,025166487	8,7408
73	0,0025	0,026841235	9,277
74	0,0022	0,029090909	9,8078
75	0,002	0,033872096	10,3324
76	0,0018	0,033365824	10,8508
77	0,0015	0,036966197	11,3628
78	0,0014	0,040677446	11,8593
79	0,0012	0,044598791	12,3334
80	0,001	0,049447351	12,7813
81	0,0009	0,054407124	13,3151
82	0,0008	0,063828051	13,7291
83	0,0006	0,073205657	14,115
84	0,0005	0,086996964	14,4722
85	0,0004	0,097674936	14,7982
86	0,0003	0,105462308	15,0892
87	0,0002	0,123646769	15,34
88	0,0001	0,140897179	15,5443
89	0	0,147687429	15,6948
90	0	0,17423884	15,7832
91	0	0,192116082	15,8006
92	0	0,211365169	15,8006

Tabelle 7.1: Versicherungsmathematische Rechnungsgrundlagen

Alter x	Stornowahrscheinlichkeit w_x	Sterbewahrscheinlichkeit q_x	Profil k_x
93	0	0,242183951	15,8006
94	0	0,277858177	15,8006
95	0	0,27844523	15,8006
96	0	0,28021707	15,8006
97	0	0,348874313	15,8006
98	0	0,378329841	15,8006
99	0	0,360282149	15,8006
100	0	1	15,8006

Hier sind die versicherungsmathematischen Rechnungsgrundlagen für den Optionstarif aufgelistet. Die Ausübungswahrscheinlichkeiten o_x und der Kopfschaden K_x^{Unfall} wurde vom Verfasser geschätzt.

Tabelle 7.2: Versicherungsmathematische Rechnungsgrundlagen

Alter x	Kopfschaden K_x^{Unfall}	Ausübungswahrscheinlichkeit o_x
21	60	0,05
22	60	0,051
23	60	0,052
24	60	0,053
25	60	0,054
26	60	0,055
27	60	0,056
28	60	0,057
29	60	0,058
30	60	0,059
31	60	0,06
32	60	0,061
33	60	0,062
34	60	0,063
35	60	0,064
36	60	0,065
37	60	0,066
38	60	0,067
39	60	0,068
40	60	0,069
41	60	0,07
42	60	0,071
43	60	0,072
44	60	0,073

7.2 Implementierung R

Hier präsentieren wir den Code, welchen wir für die Berechnungen verwendet haben. Wir haben dabei Microsoft Excel in Verbindung mit R verwendet. Aus Microsoft Excel wurden die Daten händisch aufbereitet und mit folgendem Code nach R importiert.

Listing 7.1: Einlesen von Daten

```
library(openxlsx)
setwd("C:/Users/kuehrm/Documents/02␣Masterarbeit")
wb <- loadWorkbook("Markov␣-␣Kalkulation.xlsm")
Data <- read.xlsx(xlsxFile = wb ,
   startRow = 1,
   colNames = TRUE,
   rowNames = FALSE,
   sheet = "Data",
   detectDates = TRUE)
```

Weiterführend wurden die versicherungsmathematischen Rechnungsgrundlagen mittels eigener Variablen deklariert. Dabei wurden gleich die für das Markov-Modell wichtigen Kenngrößen als Variable gespeichert.

Listing 7.2: Grundlagen

```
#Rechnungsgrundlagen
i <- 0.01
v <- 1 / (1+i)

#Grunddaten fuer Markov
ostates <- 3
vstates <- 2
begalter <-21
endalter <- 100
umstellatler <- 45
kunfall <- rep(0,endalter)
kvoll <- rep(0,endalter)
kunfall[c(begalter:endalter)] <- Data$K_Unfall
kvoll[c(begalter:endalter)] <- Data$K_Voll
```

Die Basis für alle Berechnungen im Markov-Modell liefert die *Thiele'sche Differenzengleichung* aus (5.1), wie folgt implementiert.

Listing 7.3: Thiele'sche Differenzengleichung

```
#Implentierung der Thiele'schen Differenzengleichung
thiele <- function (x, actual, states, p_ij, a_ij, a_i){
 if (ncol(p_ij) != states^2) {stop("Falsche␣Dimension␣der␣p_ij")}
 if (ncol(a_ij) != states^2) {stop("Falsche␣Dimension␣der␣a_ij")}
 if (ncol(a_i) != states) {stop("Falsche␣Dimension␣der␣a_i")}

 v_i <- matrix (0, ncol = states, nrow = endalter+1)

 for(j in (endalter):x){
  for(s in 1:states){
   ihelp <- 0
   for(t in 1:states){
    ihelp <- ihelp + v*p_ij[j,states*(s-1)+t]*(a_ij[j,states*(s-1)+t]
    + v_i[j+1,t])
   }
   v_i[j,s] <- a_i[j,s] + ihelp
   }
 }
 return(v_i[x,actual])
}
```

Im folgendem Teil des Codes werden die Grundlagen für den Vollkostentarif berechnet.

Listing 7.4: Grundlagen Vollkostentarif

```
#Vollkostentarif
p_ij_voll <- matrix(NA,nrow = endalter,ncol = vstates^2)
p_ij_voll[c(begalter:endalter),] <- matrix(c(Data$p_11,Data$p_12,
                                   Data$p_21,Data$p_22),
                                   nrow = endalter-begalter+1,
                                   ncol = vstates^2)

a_i_benefit_voll <- matrix(NA,nrow = endalter,ncol = vstates)
a_i_benefit_voll <- matrix(c(kvoll,rep(0,endalter)),
                                   nrow = endalter, ncol = vstates)

a_i_premium_voll <- matrix(NA,nrow = endalter,ncol = vstates)
a_i_premium_voll[c(begalter:endalter),]
        <- matrix(c(rep(-1, endalter-begalter+1),
                rep(0,endalter-begalter+1)),
                nrow = endalter-begalter+1,
                ncol = vstates)

a_i_voll <- function(pvoll,entry){
 aihelp <- matrix(NA,nrow = endalter,ncol = vstates)
 for(i in entry:endalter){
  aihelp[i,1] <- kvoll[i] - pvoll
  aihelp[i,2] <- 0
 }

 return(aihelp)
}

a_ij_voll <- matrix(NA,nrow = endalter,ncol = vstates^2)
a_ij_voll[c(begalter:endalter),]
        <- matrix(0, nrow = endalter-begalter+1, ncol = vstates^2)
```

Die Berechnung der Prämie des Vollkostentarifs kann einerseits über die Barwerte und andererseits mittels Optimierung durchgeführt werden, die Ergebnisse sind die gleichen.

Listing 7.5: Berechnung Vollkostentarif

```
#Paermien Vollkosten ueber Barwert
peinstieg <-matrix(NA,nrow = endalter,ncol = 1)
for(i in begalter:endalter){
 peinstieg[i,1] <- (-1)
       * thiele(i,1,vstates,p_ij_voll,a_ij_voll,a_i_benefit_voll)
       / thiele(i,1,vstates,p_ij_voll,a_ij_voll,a_i_premium_voll)
}

#Praemie Vollkosten mit Optimierung
optimize_voll <- function (pvoll,entry){
 V1 <- thiele(entry,1,vstates,p_ij_voll,
        a_ij_voll,a_i_voll(pvoll,entry))
 V2 <- thiele(entry,2,vstates,p_ij_voll,
        a_ij_voll,a_i_voll(pvoll,entry))

return(V1 - V2)

 return(V)
}

pvoll <- matrix(0,nrow = endalter,ncol = 1)
for(i in begalter:endalter){
 pvoll[i] <- uniroot(optimize_voll, c(-100000, 100000),
             tol = 0.0000000000001, entry = i)$root
}

#check
all(round(pvoll,6) == round(peinstieg,6))
```

Es werden die nötigen Variablen für den Optionstarif definiert. Für die Zahlungsströme $a_i^{pre}(t)$ ist das ein wenig aufwendiger, weil diese in Abhängigkeit des zu optimierenden Rabatts zu deklarieren sind.

Listing 7.6: Grundlagen Optionstarif

```
#Optionstarif
p_ij_option <- matrix(NA,nrow = endalter,ncol = ostates^2)
p_ij_option[c(begalter:endalter),] <-
                as.matrix(Data[,2:(ostates^2+1)])

a_i_option <- function(rabatt,entry){
 aihelp <- matrix(NA,nrow = endalter,ncol = ostates)
 for(i in begalter:(umstellatler-1)){
  aihelp[i,1] <- kunfall[i] - peinstieg[entry] * (1 - rabatt)
  aihelp[i,2] <- kvoll[i] - peinstieg[entry]
  aihelp[i,3] <- 0
 }

 for(j in umstellatler:endalter){
  aihelp[j,1] <- kvoll[j] - peinstieg[entry]
  aihelp[j,2] <- kvoll[j] - peinstieg[entry]
  aihelp[j,3] <- 0
 }
 return(aihelp)
}

a_ij_option <- matrix(NA,nrow = endalter,ncol = ostates^2)
a_ij_option[c(begalter:endalter),]
        <- matrix(0, nrow = endalter-begalter+1, ncol = ostates^2)
```

Es wird der optimale Rabatt für jedes mögliche Eintrittsalter bestimmt.

Listing 7.7: Optimierung des Optionsrabatts

```
#Optimierungsproblem

#Funktion zum Optimieren
optimize <- function (rabatt, entry){
 V1 <- thiele(entry,1,ostates,p_ij_option,
        a_ij_option,a_i_option(rabatt,entry))
 V2 <- thiele(entry,2,ostates,p_ij_option,
        a_ij_option,a_i_option(rabatt,entry))

 return(V2-V1)
}

#Optimierung pro Eintrittsalter
rabatt <- rep(0,(umstellatler-1))
for(i in begalter:(umstellatler-1)){
 rabatt[i] <- uniroot(optimize, c(-100000, 100000),
                  tol = 0.0000000000001, entry = i)$root
}

#Check vom Optionsrabatt
check <- rep(TRUE,(umstellatler-1))
for(i in begalter:(umstellatler-1)){
 check[i] <- abs(optimize(rabatt[i],i)) < 0.000000001
}
all(check)
```

Im letzten Schritt berechnen wir die finale Rückstellung für jedes Eintrittsalter x_0, jedes Alter $x_0 \leq x \in \mathcal{A}$ und jeden Zustand $i \in S$.

Listing 7.8: Berechnung Rückstellung

```
#Rueckstellung
V_i_0 <- list()
 for(i in begalter:(umstellatler-1)){
  temp <- matrix(NA,nrow = endalter,ncol = ostates)
  for(j in i:endalter){
   for(s in 1:ostates){
    temp[j,s] <- thiele(j,s,ostates,
                  p_ij_option,a_ij_option,a_i_option(rabatt[i],i))
   }
  }
 V_i_0[[i]] <- temp
}

#Auswahl der Rueckstellung: Eintrittsalter x_0, Alter x, Zustand i
V_i_0[[x_0]][x,i]
```

Literaturverzeichnis

[1] Aktuarvereinigung Österreich. *Krankenversicherung in Österreich V0.16 (noch nicht veröffentlicht)*. 2021.

[2] BaFin. *Wahrscheinlichkeitstafeln für die Krankenversicherung 2019 gemäß § 159 VAG*. 2020.

[3] T. Becker. *Mathematik der privaten Krankenversicherung*. Lehrbuch. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017. ISBN 978-3-658-16665-6. doi: 10.1007/978-3-658-16666-3.

[4] Deutsche Aktuarvereinigung e.V. *Anwartschaften und sonstige Optionen in der Privaten Krankenversicherunt*. 27.01.2021.

[5] Deutsche Aktuarvereinigung e.V. *Aktuar Aktuell - Ausgabe 48*. Dezember 2019.

[6] Finanzmarktaufsicht. *Versicherungsunternehmen-Höchstzinssatzverordnung*.

[7] Finanzmarktaufsicht. *FMA-Rundschreiben: Rechnungszins in der Krankenverischerung*. 07.10.2020.

[8] Finanzmarktaufsicht. *Bericht der FMA 2017 zur Lage der österreichischen Versicherungswirtschaft*. 2017.

[9] M. Koller. *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, 2., aktualisierte aufl. edition, 2010. ISBN 978-3-642-11251-5.

[10] K. D. Schmidt. *Versicherungsmathematik*. Springer-Lehrbuch. Berlin Springer, 2., durchges. aufl. edition, 2006. ISBN 3-540-29097-4.

[11] Statistik Austria. *Jährliche Sterbetafeln von 1947 bis 2020 für Österreich*. 2021.

[12] Versicherungsverband Österreich. *Muster der Allgemeine Versicherungsbedingungen für die Krankheitskosten- und Krankenhaus-Tagegeldversicherung*. 2016.