TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

DIPLOMARBEIT

Tarifierung mit Erfolgsunabhängiger Prämienrückvergütung in der Privaten Krankenversicherung

ausgeführt am

Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dr. Julia Eisenberg

durch

Marisa Schmitz BSc.
Matrikelnummer: 01425441

Wien, am 17. Oktober 2023

Kurzfassung

In der heutigen Zeit besteht ein zunehmendes Interesse daran, immer individuellere, auf die Kund:innen zugeschnittene Versicherungsprodukte auf dem Markt anbieten zu können. Dies soll nicht nur die Möglichkeit bieten, Prämien und Versicherungssummen besser an die Inflation anzupassen, sondern auch die Wettbewerbsfähigkeit von Versicherungsunternehmen zu stärken. Ein mögliches Instrument dafür ist die erfolgsunabhängige Prämienrückvergütung, die in den letzten Jahren in Deutschland an Popularität gewonnen hat. Das Ziel dieser Bonussysteme ist, die Eigenverantwortung der Versicherungsnehmer:innen zu fördern und dadurch eine Senkung der Gesamtausgaben zu erlangen.

In dieser Arbeit wird eine neuartige Methode zur Tarifkalkulation unter Berücksichtigung erfolgsunabhängiger Prämienrückvergütung behandelt und vorgestellt. Dabei werden die erwarteten Rechnungshöhen (Kopfschäden) als Gesamtschaden nach dem kollektiven Modell der Schadenversicherung durch die Zufallsgrößen Schadenhöhe und Schadenanzahl stochastisch modelliert. Die zusätzlichen Leistungen der erfolgsunabhängigen Prämienrückvergütung können direkt in die Leistungen für die Kopfschäden einbezogen werden, wodurch die Prämienberechnung vereinfacht wird, da sie nun auf rekursiver Basis erfolgen kann. Die so entwickelte Methode bietet somit eine weitere Grundlage für die Gestaltung von Tarifen mit erfolgsunabhängiger Prämienrückvergütung an, welche sowohl den Versicherungsnehmer:innen, als auch den Versicherungsunternehmen zugutekommen kann.

Abstract

Since the insurance market experiences a growing interest in offering personalized insurance products, tailored to the customers' needs, new perspectives in how to achieve this goal have to be found. The reason roots in the wish of insurance companies to better catch the inflation in premia and sums insured, and hence to stay competitive. One potential instrument for this purpose is the *no claim bonus*, which has gained popularity in Germany in recent years. These bonus schemes are designed to promote policyholders' self-responsibility and thereby achieve a reduction in overall expenses.

This thesis introduces a novel approach for tariff calculation considering the *no claim bonus*. The expected claims are stochastically modeled as the total loss according to the collective model of insurance, using random variables for claim amount and number of claims. The *no claim bonus* benefits can now be added directly to the expected claims, simplifying the premium calulation as they can now be calculated recursively. Thus, the suggested approach provides a new foundation for designing tariffs with a *no claim bonus*, which can benefit both policyholders and insurance companies.

Danksagung

Zuerst gebührt ein besonderer Dank meiner Betreuerin Dr. Julia Eisenberg für die intensive Betreuung, die hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik während des Verfassens dieser Arbeit, ich fühlte mich bei Ihnen sehr gut aufgehoben. Des Weiteren bedanke ich mich bei Dr. Anselm Fleischmann, der mir die Bearbeitung dieser Thematik ermöglichte und mir mit praktischer Expertise zur Seite stand.

Ein weiteres, großes Danke geht an meine Korrekturleserinnen Caterina, Simone und meine Mama, die sich teilweise fachfremd große Mühen gaben, um jeden noch so kleinen Fehler ausfindig zu machen und meine Arbeit mit wertvollen Tipps abrundeten. An dieser Stelle möchte ich auch alle erwähnen, die für mich ein offenes Ohr hatten und mit Geduld, Interesse und Debatten maßgeblich halfen, sodass ich ein tieferes Verständnis für die Materie gewinnen konnte. Vielen Dank an Anna, Patrick und Georg.

Besondere Unterstützung erhielt ich von Markus, der während des gesamten Schreibprozesses hinter mir stand, in den schwierigen Phasen mich tröstete, in den guten sich mit mir freute und mir stets mit wertvollen Ratschlägen weiterhalf.

Zum Schluss möchte ich mich bei all meinen Freunden und meiner Familie: Axel, Robert und Opa bedanken. Dadurch, dass ihr mir immer zugehört, gut zugesprochen und eure Erfahrungen mit mir geteilt habt, schöpfte ich jedes Mal aufs neue Kraft, die es mir ermöglichte weiterzumachen. Auch vielen Dank euer Verständnis, wenn ich für euch keine Zeit hatte und die schönen gemeinsamen Momente mit euch, die mich für einen Zeitraum meine Diplomarbeit vergessen lassen haben.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 17. Oktober 2023

Name des Autors

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

Abkürzungen

AVÖ	Aktuarvereinigung Österreichs
BaFin	Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (Deutschland)
EW	Erwartungswert
euPR	erfolgsunabhängige Prämienrückvergütung
FMA	Finanzmarktaufsicht
GLM	General Linear Model
MAE	Mean Absolute Error
nAdL	nach Art der Lebensversicherung
nAdS	nach Art der Schadensversicherung
PKV	Private Krankenversicherung
RMSE	Root Mean Squared Error
RSS	Residual Sum of Squares
SB	Selbstbehalt
VAG	Versicherungsaufsichtsgesetz (Österreich)
VersVG	Versicherungsvertragsgesetz (Österreich)
VGAM	Vector Generalized Additive Models
VGLM	Vector Generalized Linear Models
VPI	Verbraucherpreisindex

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Dem aktuellen Jahresbericht[1] des österreichischen Versicherungsverbandes (VVO) ist zu entnehmen, dass es im Laufe der vergangenen Jahre zu einem steten Zuwachs von Abschlüssen im Bereich der privaten Krankenversicherungen gab – Tendenz steigend. Ebenso steigen daher sowohl das Prämienvolumen, als auch die ausgezahlten Leistungen immer weiter an, [49, vgl. Seite 62]
Zum Einen sind die langen Wartezeiten bei Ärzten mit Kassenverträgen, zum Anderen das generell niedrige Angebot von niedergelassenen Kassenärzten, wie auch die Möglichkeit der freien Arztwahl und die Hoffnung auf eine bessere Vorsorge im hohen Alter wichtige Faktoren zur Entscheidung für eine private Krankenversicherung. [40][42][45]

Da jede:r Versicherungsnehmer:in individuelle Bedürfnisse und Ansprüche hat, gilt es, ein sinnvolles Paket an abgedeckten Leistungen sowie eine kostengerechte Prämien zu ermitteln. Hierfür findet vor allem die Erfahrungstarifierung Anwendung, welche die individuelle Vertragshistorie von Versicherungsnehmer:innen bei der Tarifierung berücksichtigt. [46] Eine dieser zusätzlichen Leistungen bietet die erfolgsunabhängige Prämienrückvergütung, bei welcher man nach einem oder mehreren leistungsfreien Jahren einen Teil der Jahresprämie rückerstattet bekommt. Dieses System findet bereits, in ähnlicher Form, Anwendung beim Bonus-Malus-System aus der KfZ – Versicherung.

Die Prämienrückvergütung beeinflusst die Prämienhöhe, diese wiederum bestimmt die Höhe der Rückvergütung. Diese Abhängigkeit führt, zu einer aufwändigeren Prämienkalkulation und stellt eine Sonderform in der Krankenversicherung dar, [28, vgl. Seite 6].

Für die Versicherungsnehmer:innen besteht zwischen dieser Methode und jener mit Selbstbehalten nur der Unterschied, dass diese gleich zu Beginn der Versicherungsperiode schlagend werden und nicht erst im Versicherungsfall. Deswegen wird ein identisch ökonomisches Verhalten bei beiden erwartet. Betrachtet man dies aus der Sicht des Versicherungsunternehmens, ist eine erfolgsunabhängige Prämienrückvergütung mit einem Mindestschaden gleichzusetzen, [9, vgl. Seite 3 ff.].

1.1 Ziel der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es, basierend auf dem in dem Artikel „Zuastzversicherung für Krankenhauskosten mit wählbarem Selbstbehalt“, in der Zeitschrift der Deutschen Aktuarvereinigung e. V. „Der Aktuar“, Ausgabe 3 vorgestellten Modell für Selbstbehalte, eine neue Kalkulationsmethode für Krankenversicherungstarife mit erfolgsunabhängiger

[1] Jahresbericht von 2022

Prämienrückvergütung zu entwickeln. Diese Methode soll anschließend in R implementiert werden. Die Besonderheit ist, dass der Gesamtschaden nach dem kollektiven Modell der Schadenversicherung, durch das Produkt der Schadenanzahl und der Schadenhöhe als einjährige stochastische Prozesse modelliert wird.

Im Rahmen dieser Arbeit werden auch die bisherigen Kalkulationsmethoden untersucht, wie sie im Fachgrundsatz der Deutschen Aktuarsvereinigung e. V. mit dem Titel „Aktuarielle Betrachtung von Krankheitskostentarifen mit erfolgsunabhängiger Beitragsrückerstattung (euBR)" vom 23. Juni 2020 [28] veröffentlicht wurden. Dieser Vergleich wird durchgeführt, um eine Gegenüberstellung der beiden Methoden zu ermöglichen.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in vier Hauptteile mit entsprechenden Unterkapiteln.
Im ersten Abschnitt wird das Schadenzahl-Schadenhöhen-Modell vorgestellt, auf welchem diese Arbeit basiert.
Darauffolgend wird, allgemein, die private Krankenversicherung eingehender beschrieben und eine Abgrenzung zur gesetzlichen Krankenversicherung gezogen.
Anschließend folgt eine detaillierte Erläuterung der benötigten mathematischen Grundlagen, einschließlich der Risikotheorie, welche speziell in der Tarifierung in der Krankenversicherung angewandt wird. Der Fokus in diesem Abschnitt liegt vor allem auf der Schätzung der erwarteten Versicherungsleistungen, zu deren Berechnung die herkömmliche Methode und das Schadenzahl-Schadenhöhen-Modell herangezogen wird. Danach wird die Prämienkalkulation (inklusive des Leistungs- und Prämienbarwertes) präsentiert.
Im vierten Abschnitt werden Kalkulationsvarianten unter der Berücksichtigung einer erfolgsunabhängigen Prämienrückerstattung entwickelt - sowie die bisherigen Möglichkeiten erörtert und miteinander verglichen. Die Durchführung der Tarifierung wird anschließend in R- Studio durchgeführt und die gewonnenen Erkenntnisse präsentiert.
Eine Conclusio inklusive Ergebnisdarstellung sowie ein Ausblick mit weiteren Forschungsfragen runden die Arbeit ab. Im Anhang befinden sich die verwendeten Rechnungsgrundlagen im Detail.

2 Grundlagen

Im vorliegenden Grundlagenkapitel der Arbeit werden zum besseren Verständnis die wesentlichen Konzepte und Methoden beleuchtet, die im Verlauf dieser Arbeit eine maßgebliche Rolle spielen. Dies beinhaltet eine Erläuterung der Kommutationszahlen und der im Zuge dieser Arbeit verwendeten Verteilungsfunktionen. Des Weiteren erfolgt eine eingehende Darstellung von diskreten Markovketten und ihren relevanten Eigenschaften, welche im Kapitel 6 zur Anwendung kommen. Zum Abschluss dieses Kapitels werden verschiedene Regressionsmodelle vorgestellt, die eine zentrale Rolle in der praktischen Umsetzung des untersuchten Tarifmodells spielen und somit einen essenziellen Beitrag zur Erfüllung der Forschungsziele leisten.

2.1 Kommutationszahlen

Kommutationszahlen sind jene Werkzeuge, die erstmals 1785 ermöglicht haben, Barwertberechnungen ohne Summenformel darzustellen und durchzuführen. [8, vgl. Seite 79 ff.]

Zur Modellierung der Bestandsgröße werden die Ausscheideordnungen in einer anderen Notation dargestellt. Sei $\mathcal{X} := \{x_0, ..., \omega\})$ die Menge aller Alter, im folgenden bezeichnen wir mit „im Alter $x \in \mathcal{X}$" das Zeitintervall $[x, x+1)$. Seien d_x^q die erwartete Anzahl der Toten im Alter $x \in \mathcal{X}$ und d_x^w die erwartete Anzahl der Storni im Alter $x \in \mathcal{X}$. Mit

d_x	...	erwartete Anzahl der insgesamt Ausgeschiedenen im Alter $x \in \mathcal{X}$
ℓ_x	...	erwartete Anzahl der Verbliebenen im Alter $x \in \mathcal{X}$

Typischerweise startet die Anzahl der Verbliebenen im Bestand mit ℓ_{x_0}=100.000, zur Berechnung der nachfolgenden Jahre können wir die Beziehungen zwischen den Bestandszahlen nutzen.

$$\left.\begin{aligned} d_x^q &:= q_x \ell_x \\ d_x^w &:= w_x \ell_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow d_x := (q_x + w_x)\ell_x = d_x^q + d_x^w$$

Für die Anzahl der Lebenden folgt für die Bestandsänderung innerhalb eines Jahres

$$\ell_{x+1} = \ell_x - d_x = p_x \ell_x$$

beziehungsweise in größeren Zeitschritten

$$\ell_{x+t} = {}_tp_x\, \ell_x \Leftrightarrow \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} = {}_tp_x\,. \tag{2.1}$$

Definition 2.1. (Kommutationszahlen)
Die diskontierte Anzahl der im Bestand verbliebenen versicherten Personen im Alter $x \in X$ lautet

$$D_x \quad := \quad v^x \ell_x. \tag{2.2}$$

Die aufsummierte diskontierte Anzahl der im Bestand verbliebenen wird bezeichnet mit

$$N_x \quad := \quad \sum_{t=0}^{\omega - x} D_{x+t}. \tag{2.3}$$

Es gelten folgende Rekursionen

$$D_x = vp_{x-1}D_{x-1}, \;\; N_x = N_{x+1} + D_x \text{ und } U_x = U_{x+1} + O_x \tag{2.4}$$

mit den Start- und Endwerten $D_{x_0} = v^{x_0}\ell_{x_0}$ und $D_\omega = N_\omega$.

2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Für den folgenden Abschnitt definieren wir die in der Arbeit verwendeten Verteilungsfunktionen. Die Definitionen stammen aus [6], [7], [16, vgl. Seite 7 f.] und [10].

Definition 2.2 (Bernoulliverteilung)**.** *Eine diskrete Zufallsvariable heißt bernoulliverteilt $X \sim Ber(p)$, wenn sie nur die Werte 0 oder 1 annimmt und für die Wahrscheinlichkeitsfunktion mit dem Parameter $p \in [0,1]$ gilt:*

$$f(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{(1-x)}, & x = 0,1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Verteilungsfunktion gilt

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Die folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen kommen häufig zur Anwendung um die Schadenhöhe zu modellieren. Einerseits erfüllen sie die Eigenschaft heavy-tailed zu sein, andererseits bieten sie durch ihre Parameteranzahl eine höhere Flexibilität. Die rechtsseitig schweren Ausläufer der Verteilungen spiegeln Schadenereignisse gut wieder, da Versicherungsschäden oft durch seltene, extreme Ereignisse verursacht werden. Als heavy-tailed Verteilung werden jene bezeichnet, deren exponentielle Momente nicht existieren.

Definition 2.3 (Heavy-Tailed Verteilung)**.** *Eine Verteilungsfunktion F heißt heavy-tailed, genau dann wenn*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} F(dx) = \infty$$

gilt, für alle $\lambda > 0$.

Eine nichtnegative Funktion f heißt also heavy tailed, falls sie schneller wächst als eine monoton steigende exponentielle Funktion.

Definition 2.4. *Eine Funktion $f \geq 0$ heißt heavy-tailed, genau dann wenn*

$$\limsup_{x\to\infty} f(x)\mathrm{e}^{\lambda x} = \infty$$

für alle $\lambda > 0$ gilt.

Definition 2.5 (Lognormalverteilung)**.** *Eine Zufallsvariable heißt lognormalverteilt $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$ mit den Parametern $\mu \in (-\infty, \infty)$ und $\sigma > 0$ falls gilt*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\mathrm{e}^{\left(\frac{-(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)},\ x > 0.$$

Die Verteilungsfunktion hat die Darstellung

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Im Gegensatz zur Normalverteilung definiert hier μ den Skalen- und σ den Formparameter [5, vgl. Seite 9]. Für die Lognormalverteilung existieren zwar alle Momente, allerdings besitzt sie keine momentenerzeugende oder charakteristische Funktion.

Definition 2.6 (Gammaverteilung)**.** *Eine Zufallsvariable heißt gammaverteilt $X \sim Gam(\alpha, \beta)$ mit den Parametern $\alpha, \beta > 0$ falls gilt*

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha},\ x > 0.$$

Mit der Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,\ x > 0.$$

Die Verteilungsfunktion ist die verallgemeinerte Gammaverteilung.

Definition 2.7 (Weibullverteilung)**.** *Eine Zufallsvariable X folgt der Weibullverteilung $X \sim W(k, \lambda)$ mit den Parametern $k, \lambda > 0$ falls gilt*

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k},\ x > 0.$$

Für die Verteilungsfunktion gilt

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}.$$

Definition 2.8 (Paretoverteilung 2. Art oder Lomax-Verteilung)**.** *Eine Zufallsvariable X ist Pareto 2. Art verteilt $X \sim ParII(\alpha, \beta)$ mit den Parametern $\alpha, \beta > 0$ falls gilt*

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-(\alpha+1)}, \ x > 0.$$

Mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}\right).$$

2.3 Diskrete Markovketten

Markovprozesse sind spezielle stochastische Prozesse um Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten gewisser zukünftiger Ereignisse zu modellieren. Die Definitionen stammen aus [32] und [29].

Definition 2.9 (Diskrete Markovkette)**.** *Eine zeitdiskrete Markovkette ist ein stochastischer Prozess $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, welcher die Markoveigenschaft erfüllt, und einen abzählbaren Zustandsraum $\mathcal{S}$ hat.*

Ein stochastischer Prozess, dessen Folgezustand nur von dem gegenwärtigen Zustand abhängt und nicht von weiteren vergangenen Zuständen, erfüllt die Eigenschaft der „Gedächtnislosigkeit", auch *Markoveigenschaft* genannt:

$$\mathbb{P}\left[X_{n+1} = j | X_n = i, \ldots, X_0 = i_0\right] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = p_{ij}^{(n)} \tag{2.5}$$

Bemerkung 2.10. *Die folgenden Definitionen beziehen sich auf zeitdiskrete Markovketten, weswegen wir diese nur noch mit „Markovketten"bezeichnen.*

Definition 2.11 (Homogene Markovkette)**.** *Eine Markovkette heißt homogen, wenn alle Übergangswahrscheinlichkeiten stationär (zeitunabhängig) sind.*

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j | X_n = i] = p_{ij}$$

Sei $\pi_j^n := \mathbb{P}[X_n = j]$ die Zustandswahrscheinlichkeit in einem Zustand j zum Zeitpunkt n zu verweilen, dann ist $\pi^{(n)} = (\pi_0^{(n)}, \pi_1^{(n)}, \ldots)$ die dazugehörige Verteilung zur Zeit n. Die Startverteilung einer homogenen Markovkette ist $\pi^{(0)} = (\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}, \ldots)$.

Definition 2.12 (Grenzverteilung)**.** *Für eine homogene Markovkette mit einer beliebigen Startverteilung $\pi^{(0)}$ und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{n \times n}$ existiert eine Grenzverteilung $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$, falls für alle Zustände $j \in \mathcal{S}$ gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j, \text{ wobei } \pi_j \geq 0 \text{ und } \sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j = 1.$$

Definition 2.13 (Stationäre Verteilung). *Eine Markovkette besitzt eine stationäre Verteilung $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$, falls für alle Zustände $j \in \mathcal{S}$ gilt*

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i p_{ij}, \text{ mit der Nebenbedingung } \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i = 1. \tag{2.6}$$

Jede Grenzverteilung ist eine stationäre Verteilung, insbesondere ist eine stationäre Startverteilung $\pi^{(0)}$ die Grenzverteilung zu sich selbst. Das bedeutet, dass sich die Verteilung der Zustände des Systems im Laufe der Zeit stabilisiert und unabhängig vom anfänglichen Zustand eine bestimmte Verteilung annimmt. Diese stationäre Verteilung beschreibt die langfristigen Wahrscheinlichkeiten, mit denen sich das System in den verschiedenen Zuständen befindet, wenn es eine lange Zeit durchlaufen hat. Allerdings muss zu einer Startverteilung nicht immer eine Grenzverteilung existieren. Die folgenden Eigenschaften sichern die Existenz und Eindeutigkeit der Grenzverteilung einer Markovkette.

Definition 2.14 (Irreduzibilität). *Alle Zustände kommunizieren miteinander, wenn $i \to j$ und $j \to i$ gilt. Jeder Zustand kann direkt oder über eine Folge von Übergängen von einem anderen Zustand erreicht werden $i \leftrightarrow j$. Für die Übergangsmatrix P gilt $P^n_{ij} > 0, \ \forall i, j \in \mathcal{S}$.*

Definition 2.15 (Periodizität). *Die Länge der benötigten Zeitschritte, um zu einem Zustand zurückzukehren, heißt Periode d und wird definiert durch den größten gemeinsamen Teiler (ggT) der möglichen Rückkehrzeiten zu einem Startpunkt.*

$$d(i) = ggT\{m \in \mathbb{N}_0 | p_{ii}(n) > 0\}$$

Eine Markovkette heißt aperiodisch, falls für alle Zustände $d(i) = 1$ gilt, somit existiert keine festgelegte Zeit in der das System immer wieder in denselben Zustand zurückkehrt. Falls ein Zustand nicht wieder erreicht werden kann gilt $d(i) = \infty$.

Definition 2.16 (Ergodische Markovkette). *Eine irreduzible und aperiodische Markovkette heißt ergodisch.*

Wenn eine homogene Markovkette alle Eigenschaften einer ergodischen Markovkette erfüllt, dann existiert genau eine Grenzverteilung. Unter diesen Bedingungen konvergiert die Verteilung der Markovkette, unabhängig von ihrem Ausgangszustand, gegen eine eindeutige Grenzverteilung. Diese Grenzverteilung wird auch als stationäre Verteilung oder Gleichgewichtsverteilung bezeichnet und kann mittels eines Gleichungssystems berechnet werden.

2.4 Regressionsmodelle

2.4.1 Lineare Regression

Die folgenden Definitionen stammen aus [12, vgl. Seite 137].

Klassische (multi-)lineare Regressionsmodelle (*engl. Linear Models (LM)*) dienen zur Analyse der Beziehung zwischen zwei oder mehreren stetigen Variablen, einer abhängigen *Zielvariable* y und unabhängigen *erklärenden Variablen* $x_1, \ldots, x_k$. Die Linearität ergibt sich aus dem linearen Zusammenhang der erklärenden Variablen in der Regressionsfunktion:

$\mathbb{E}[y|x_1, \ldots, x_k] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k$.

Das *multilineare Regressionsmodell* für die i-te Beobachtung ist definiert durch

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \epsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Parameter $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ heißen *Regressionsparameter*, sie werden durch schon observierte Zielvariablen und den dazugehörigen erklärenden Variablen geschätzt, meist wird dafür die Methode der kleinsten Quadrate (*engl.: Residual Sum of Squares (RSS)*) angewandt. Anschließend wird mit diversen Hypothesentests und Konfidenzintervallen die Signifikanz der Einflüsse überprüft, so dass die Regressionsparameter die Beziehung zwischen den Variablen bestmöglich erklären. Der Fehlerterm ϵ repräsentiert die Abweichung der Regressionsgeraden von den tatsächlichen Beobachtungen. Für den Fehlerterm wird die Annahme getroffen, dass er normalverteilt ist $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$ mit $\sigma^2 > 0$. Dadurch werden folgende Aussagen sichergestellt:

1. Mit $\mathbb{E}[\epsilon_i] = 0$ wird ein korrektes Modell vorausgesetzt, dadurch gilt:

$$\mathbb{E}[y_i] = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j$$

2. Da weder die Varianz des Fehlerterms noch die Varianz der Zielvariablen von den erklärenden Variablen abhängig sein soll, gilt $\mathbb{V}[\epsilon_i] = \sigma^2$. Diese Annahme ist auch bekannt unter *Homoskedastizität* beziehungsweise *konstante Varianz*.

3. Die Fehlerterme sollen untereinander unkorreliert sein: $\text{cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0,\ \forall i \neq j$.

2.4.2 Verallgemeinerte Regressionsmodelle

Falls zwischen der Ziel- und erklärenden Variable ein nicht linearer Zusammenhang besteht, kann das Regressionsmodell mit einer *Zusammenhangsfunktion (engl.: linkfunction)* $g(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, angewandt auf den Erwartungswert $\mathbb{E}[y|x_1, \ldots, x_k] := \mu$, erweitert werden. Voraussetzungen an die Funktion $g(\cdot)$ sind Monotonie und Differenzierbarkeit.

Verallgemeinerte Regressionsmodelle werden beschrieben durch

$$g(\mu) = \beta_0 + f_1(x_1) + \ldots + f_k(x_k).$$

Dabei sind f_j nichtlineare, aber glatte Funktionen.

Die Funktion $g(\cdot)$ kann verschiedene Formen annehmen. Falls $g(\mu) = \log\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)$ gilt, erhalten wir das *logistische Regressionmodell* und bezeichnen $g(\cdot)$ als *Logit-Transformation*. Bei der Wahl der Identitätsfunktion von $g(\cdot) = \mu$ erhalten wir das lineare Regressionsmodell. [2, vgl. Seite 481]

2.4.3 Smoothing Splines

Splines werden durch aneinander gekettete Funktionen meist Polynomfunktionen, erzeugt. Es sind Funktion $h_m(x) : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R},\ m = 1, \dots, M$, welche die erklärenden Variablen x transformieren. Dadurch erhalten wir mit einer zu schätzenden, glatten Funktion

$$f(x) = \sum_{m=1}^{M} \beta_m h_m(x)$$

das Regressionsmodell für die $i-te$ Beobachtung:

$$y_i = f(x_i) + \epsilon_i$$

Mit der Wahl $h_m(x) = x_m$ entspricht es dem linearen Regressionsmodell. Auch hier ist es das Ziel die Funktion $f(x_i)$ zu finden

Die Komplexität des Modells wird durch eine Regulierung durch den *Strafterm* (*engl.: penalty term*) beschränkt. Das Minimierungsproblem hat die Form:

$$RSS(f, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} (y_i - f(x_i))^2 + \lambda \int f''(t)^2 dt \tag{2.7}$$

Für $\lambda = 0$ wird eine beliebige Funktion, welche jeden Datenpunkt interpoliert, gefunden. Falls $\lambda = \infty$ wird keine zweite Ableitung toleriert, weswegen die Funktion maximal Grad 1 hat. [2, vgl. Seite 483]

3 Motivation des Schadenhöhen-Schadenzahl-Modells

Im nachfolgenden Kapitel stehen die Erläuterung und die Motivation des Schadenzahl-Schadenhöhen-Modells im Vordergrund. Dieses Modell ist an die Tarifierungsmethode in der Schadenversicherung angelehnt, bei welcher der Gesamtschaden mithilfe des kollektiven Modells modelliert wird, wie in Abschnitt 5.1 näher erläutert. Um ein umfassendes Verständnis für die Anwendung des Schadenzahl-Schadenhöhen-Modells in der Krankenversicherung zu vermitteln, wird ein Exkurs in die Schadenversicherung unternommen, um die erforderlichen Schadenkennzahlen zu erläutern. Dies dient als Grundlage für die Definition der notwendigen Schadenkennzahlen, die im Rahmen des Schadenzahl-Schadenhöhen-Modells verwendet werden.

3.1 Motivation: Prämienanpassungen und ihre Problematik

Um bei ökonomischen Veränderungen trotzdem die gleiche Leistung anbieten zu können, müssen die Versicherungsunternehmen die Prämien anpassen. Ein typisches Beispiel ist hier die Erhöhung von Krankenhauskosten. Dem Versicherer obliegt das Recht eine einseitige Prämienerhöhung - unter Beachtung des Konsumentenschutzgesetzes - durchzuführen, oder den Versicherungsschutz zu ändern (z.B. durch die Einführung eines Selbstbehaltes), [51].

Faktoren, welche eine Anpassung der Prämie legitimieren, sind gesetzlich geregelt. Diese sind Veränderungen von einem vereinbarten Index (zum Beispiel der VPI), der durchschnittlichen Lebenserwartung oder der Häufigkeit der Inanspruchnahme von Leistungen. Die Faktoren beziehen sich auf das Kollektiv im Tarif und nicht auf die einzelne versicherte Person. Eine Prämienerhöhung aufgrund der Verschlechterung des Gesundheitszustandes oder des Alterns einer Person, ist unzulässig, [52].

Der versicherten Person wiederum muss das Recht auf eine Vertragsfortsetzung mit maximal gleichbleibender Prämie eingeräumt werden. In dem Falle eines Einspruchs der Versicherungsnehmer:innen gegen die Prämienerhöhung, dürfen die Versicherungsleistungen angemessen reduziert werden, [53].
Dies kann in Form einer oberen Auszahlungsgrenze, eines Selbstbehaltes oder auch einer prozentualen Leistungseinschränkung geschehen.

Das Versicherungsunternehmen ist verpflichtet, bei einem Einspruch, eigene Widerspruchstarife zu entwickeln. Das gilt bei jeder weiteren Prämienanpassung für den ursprünglichen Tarif und die bestehenden Widerspruchstarife. Für einen Tarif mit einem wählbaren Selbstbehalt müssen weitere Tarife für den Selbstbehalt entwickelt und dafür die Kopfschäden separat ermittelt werden. Daraus resultiert eine aufwändige Prämienkalkulation, die schnell an verwaltungstechnische Grenzen stößt, [19].

3.2 Exkurs: Schadenversicherung

Für den folgenden Abschnitt werden die Definitionen aus [18, vgl. Seite 12 ff.] und [24, vgl. Seite 25] verwendet.

Die Maßkennzahlen in der Schadenversicherung werden als *Exposuremaße* oder nur *Exposure* bezeichnet. Sie kennzeichnen versicherungstechnische Risiken eines Vertrages oder eines Bestandes und ermöglichen einen Vergleich zwischen verschiedenen Verträgen und Beständen. Beispiele für Exposuremaße sind *Jahreseinheiten* (betrachtet die Bestandsgröße in genauen Zeitintervallen), die Anzahl der Verträge oder der Risiken im Bestand, die kumulierte Versicherungssumme oder die Summe der Beiträge.

Die *Zielgrößen* sind die zu modellierenden Zufallsvariablen für höchstens einjährige Versicherungsleistungen und Beitragsfestsetzungen. Für die Prämienermittlung wird der *Schadenbedarf* als Zielgröße benötigt. Weitere Zielgrößen sind die *Schadenhäufigkeit*, der Schadendurchschnitt oder der Schadensatz. Im Weiteren werden wir den Schadenbedarf und die Schadenhäufigkeit genauer betrachten.

3.2.1 Relevante Schadenkennzahlen

Schadenbedarf
Unter dem Schadenbedarf verstehen wir den benötigten Geldbetrag, um den durchschnittlichen Gesamtschaden des Kollektivs zu decken. Zur Ermittlung des Schadenbedarfs wird der Gesamtschaden eines Kollektivs benötigt, dieser wird durch die Summe des Schadenaufwandes einzelner Risiken berechnet.

$$\text{Schadenbedarf} := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Anzahl der Jahreseinheiten}} \tag{3.1}$$

Durch Erweitern des Bruchs in der Formel (3.1) ist es möglich, den Schadenbedarf in die Schadenhäufigkeit und den Schadendurchschnitt zu zerlegen.

$$\begin{aligned} \text{Schadenbedarf} &= \tfrac{\text{Anzahl der Schäden}}{\text{Anzahl der Jahreseinheiten}} \cdot \tfrac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Anzahl der Schäden}} \\ &= \text{Schadenhäufigkeit} \cdot \text{Schadendurchschnitt} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Betrachtung ist nur sinnvoll, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind, [14, vgl. Seite 6f]:

1. Vertragsunabhängigkeit: Die *Vertragsunabhängigkeit* fordert, dass die Anzahl der Schäden und die Schadenhöhe zwischen den einzelnen Verträgen im Kollektiv unabhängig voneinander sind. Abhängigkeiten würden bedeuten, dass aufgrund eines Ereignisses Krankheitskosten mehrerer Personen entstehen, zum Beispiel bei einer Epidemie. Sofern keine besonderen Umstände gegeben sind, können die geringen Abhängigkeiten vernachlässigt werden.

2. Zeitunabhängigkeit: Die *Zeitunabhängigkeit* besagt, innerhalb von disjunkten Zeitintervallen sind die Schadenhöhe sowie die Anzahl der Schäden unabhängig.

3. Homogenität: Mit der *Homogenität* wird gefordert, dass die Schadenanzahlen und die Schadenhöhen aller Personen, welche sich in einer Tarifklasse befinden, die gleiche Verteilung besitzen, siehe Abschnitt 5.1.

Falls die Verteilung der Schadenanzahl aus einer der Panjer Klassen stammt, kann auch die Panjer Rekursion zur effizienten Berechnung des Gesamtschadens angewandt werden. Die Rekursion gilt nur für wenige Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die Bekanntesten sind die Poissonverteilung, Binomialverteilung, Negativbinomialverteilung und Einpunktverteilung, [11, vgl. Seite 169 f.].

Schadenhäufigkeit
Die *Schadenhäufigkeit*, auch *Schadenfrequenz* oder *durchschnittliche Schadenanzahl* pro Vertrag, ist definiert durch

$$\text{Schadenhäufigkeit} := \frac{\text{Anzahl der Schäden}}{\text{Anzahl der Jahreseinheiten}}. \tag{3.3}$$

In der Schadenversicherung ist es ein übliches Vorgehen die Schadenfrequenz mit der Poissonverteilung zu modellieren, [14, vgl. Seite 205] .

Schadendurchschnitt
Der *Schadendurchschnitt* beziehungsweise die *durchschnittliche Schadenhöhe* ist der Mittelwert des Gesamtschadens.

$$\text{Schadendurchschnitt} := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Anzahl der Schäden}}.$$

3.3 Modellierung der Zufallsvariablen in der Krankenversicherung

In den herkömmlichen Tarifierungsmethoden in der Krankenversicherung ist die Modellierung des Gesamtschadens durch die stochastische Größen Schadenhöhe und Schadenanzahl nicht möglich. Die benötigte Voraussetzungen für die Anwendung des kollektiven Modelles, die stochastischen Unabhängigkeit zwischen der Schadenhäufigkeit H und der Schadenhöhe X, ist nicht erfüllt, [8, vgl. Seite 38].
Ein Beispiel aus der Zahnzusatzversicherung verdeutlicht diese These: Regelmäßige Behandlungen der Mundhygiene beim Zahnarzt können vorbeugend für teure Behandlungen wirken. Andererseits kann eine Diagnose bei einem Arztbesuch zu weiteren Behandlungen und damit verbundenen höheren Kosten führen.

3.3.1 Schadenhäufigkeit

Damit die Eigenschaft der Zeitunabhängigkeit gültig ist, betrachten wir nicht die Einzelschäden X_i, sondern die kumulierten Schäden am Ende eines Jahres. Das ermöglicht die Schadenfrequenz mit Hilfe einer Bernoulli Verteilung darzustellen, da eine versicherte Person entweder keinen Schaden oder mindestens einen Schaden hat, [19]

Definition 3.1 (Schadenhäufigkeit)**.** . *Die zu den kumulierten Jahresschäden zugehörige Zufallsvariable für die Schadenhäufigkeit $H_x \sim Ber(h_x)$ erfüllt*

$$\mathbb{P}[H_x > 0] = h_x \text{ und } \mathbb{P}[H_x = 0] = 1 - h_x. \tag{3.4}$$

Die Wahrscheinlichkeit h_x bedeutet mindestens einen Schaden innerhalb eines Jahres zu haben. Mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - h_x$ ist kein Schaden entstanden.

3.3.2 Schadenhöhe

Definition 3.2 (Kumulierter Jahresschaden)**.** *Der kumulierte Jahresschaden ergibt sich aus den gemeldeten Einzelschäden $X_{k,x}$ einer Person in dem Alter $[x, x+1)$*

$$\tilde{S}_x := \sum_{k=1}^{n} X_{k,x}. \tag{3.5}$$

Für die Zufallsvariable $\tilde{S}_x$ wird eine passende altersabhängige Schadenhöhenverteilung herangezogen, um danach die analytische Berechnung von Erwartungswerten der Zufallsgrößen durchzuführen. Dadurch wird die Einbindung von jährlichen Selbstbehalten und maximalen Leistungsversprechen vereinfacht.

In der Krankenversicherung werden üblicherweise viele niedrige Rechnungsbeträge eingereicht. Um die daraus resultierende rechtsschiefe Verteilung der Zufallsvariablen $\tilde{S}_x$ entsprechend modellieren zu können, sind besonders die Paretoverteilung, die Weibullverteilung oder die Gammaverteilung geeignet.
Die Berechnung der erwarteten Schadenhöhe erfolgt dann durch die Kalibrierung der Verteilungsparameter.

Definition 3.3 (Erwartete Schadenhöhe)**.** *Die erwartete Schadenhöhe einer Person wird beschrieben durch*

$$S_x = \mathbb{E}[\tilde{S}_x | H_x > 0]. \tag{3.6}$$

3.4 Vorteile des Schadenzahl-Schadenhöhen-Modells

Mit der Anwendung der Bernoulliverteilung für die Schadenzahl im Schadenzahl-Schadenhöhen-Modell, werden *Nullschäden* aus dem Bestand entfernt. Nullschäden sind Schäden, deren Aufwand null ist, und somit keine Zahlungen an die versicherte Person erfolgt sind. Sie können zu Unterbrechungen der Zeitreihen der Schadenhäufigkeit und des Schadendurchschnitt führen und dadurch einen Informationsverlust an bestimmten Zeitpunkten erzeugen, [18, vgl. Seite 34]
Das kann zur Beeinträchtigung der Analyse von langfristigen Trends, saisonalen Mustern oder zyklischen Verhaltensweisen der Zeitreihen führen. Ein Verlust der Datenqualität ist ebenso möglich, daraus resultiert ein zusätzliches Rauschen in den Daten und eine verringerte Genauigkeit des Modells. Des Weiteren haben Schadenhöhenverteilungen keine Masse

auf Null, das bedeutet es ist nicht möglich einen Schaden mit einem Aufwand von Null zu generieren.

Ein weiterer Vorteil des Schadenzahl-Schadenhöhen-Modells ergibt sich durch die vereinfachte Einrechnung von Untergrenzen (Selbstbehalten) sowie Obergrenzen (maximale Leistungsgarantien). Bei einer Prämienerhöhung ist es möglich, die Selbstbehalte individuell anzupassen, um eine gleichbleibende Prämie anzubieten. Dabei kann mit einem Minimierungsverfahren die Differenz zwischen der alten und der neuen Prämie durch Anpassung des Selbstbehaltes verringert werden.

4 Die Private Krankenversicherung

In diesem Kapitel erfolgt eine allgemeine Erklärung der Private Krankenversicherung um dem:der Leser:in ein Verständnis und umfassenden Überblick für das Versicherungsgebiet der Privaten Krankenversicherung und die ihre wesentlichen, rechtlichen Grundlagen zu vermitteln. Die Private Krankenversicherung wird in groben Zügen erläutert und dazu die Abgrenzungen zur Gesetzlichen Krankenversicherung aufgezeigt. Im Verlauf des Kapitels werden zudem verschiedene Tarife vorgestellt, um Lesern einen Einblick in die Vielfalt der verfügbaren Versicherungsprodukte zu bieten. Die Definition eines Versicherungsfalls und dessen Bedeutung in diesem Kontext wird ebenfalls erläutert.

Die gesetzliche Krankenversicherung ist in Österreich eine verpflichtende Grundversorgung und deckt 99,9% der Bevölkerung ab, [41]. Es existieren verschiedene Krankenversicherungsträger, die Zuteilung der Bevölkerung zu den Trägern erfolgt durch die Berufsständigkeit automatisch, es besteht kein Wahlrecht. Die Finanzierung erfolgt über Beiträge, welche mit einem Prozentsatz des Bruttoeinkommens (bis zu einer Höchstbeitragsgrundlage) bestimmt werden. Für die Krankenversicherungsträger besteht ein Annahmezwang.

Die private Krankenversicherung wird ergänzend zu einer gesetzlichen Krankenversicherung angeboten. Im Gegensatz zur gesetzlichen Krankenversicherung fließen in die Prämienberechnung die Faktoren Alter und Geschlecht mit ein. Das Bruttogehalt wird hier nicht berücksichtigt. Um negative Risikoselektion zu vermeiden, ist es einem Versicherungsunternehmen erlaubt, eine Person abzulehnen, falls das Risiko nicht tragbar ist. Sollte ein Versicherungsunternehmen jedes Risiko mit gleichen Bedingungen in den Bestand aufnehmen, steigen die Leistungen und es werden höhere Prämien zur Risikoabdeckung benötigt. Risikoarme Versicherungsnehmer:innen sind nicht bereit diese zu bezahlen und suchen sich ein Versicherungsunternehmen, welches Personen mit gewissen Risikofaktoren ausschließt und eine geringere Prämie anbieten kann. Im Bestand des ersten Versicherungsunternehmens verbleiben somit nur Personen, die eher hohe Kosten verursachen. Deswegen werden die erwarteten Schadenhöhen ohne Vorerkrankungen kalkuliert und erst bei der Risikoprüfung in der Prämie mit dem Risikozuschlag einbezogen.

4.1 Charakteristiken der privaten Krankenversicherung

Die Krankenversicherung weist jeweils Charakteristiken der Lebensversicherung und der Schadenversicherung auf. Mit der Schadenversicherung hat sie die zufälligen Schadenhöhen und Schadenhäufigkeiten gemein. In der Lebensversicherung ist die Höhe der Auszahlung bei Vertragsabschluss bekannt, zum Beispiel wird bei einer Ablebensversicherung bei Vertragsabschluss die Versicherungssumme vertraglich festgelegt und nur der Eintritt ist ungewiss. Die Gemeinsamkeit der Kranken- und Lebensversicherung bezieht sich auf die lange

Vertragslaufzeit, da die Verträge auf Lebenszeit abgeschlossen werden. Deswegen gleicht das in der Krankenversicherung notwendige Kapitalanlagenmanagement der Vorgehensweise in der Lebensversicherung.

Nach Art der Lebensversicherung

In Österreich müssen Krankenversicherungen nach Art der Lebensversicherungen betrieben werden, sobald die Laufzeit länger als ein Jahr ist, [47]. Das bedeutet, die Leistungen sind nach dem versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzip zu bilden, wobei eine Alterungsrückstellung (oder auch Deckungsrückstellung) gebildet werden muss.

Definition 4.1. (Äquivalenzprinzip) *Der erwartete Barwert der normierten Prämieneinnahmen $\ddot{a}_x$[1] muss dem erwarteten Barwert der zukünftigen Leistungen A_x entsprechen*

$$\ddot{a}_x \cdot P_x = A_x. \tag{4.1}$$

Ohne Betrachtung der Inflation oder anderen Einflüssen sind die Prämienraten P_x über die ganze Laufzeit hinweg konstant anzunehmen und dürfen nicht aufgrund eines individuellen Schadenfalls oder des Alterns verändert werden. Zusätzlich ist es dem Versicherungsunternehmen nicht möglich, den Vertrag aufgrund eines sich verschlechterten Zustandes des Versicherungsnehmers zu kündigen. Sind das steigende Alter und ein sich verschlechternder Gesundheitszustand positiv korreliert, steigen auch die Schadensfälle. Da dies kein Kündigungsgrund für das Versicherungsunternehmen sein darf, müssen Alterungsrückstellungen gebildet werden. Diese Art zu kalkulieren, bezeichnen wir als *Krankenversicherung nach Art der Lebensversicherung*.

Nach Art der Schadenversicherung

Dem steht die *Krankenversicherung nach Art der Schadenversicherung* gegenüber. Diese Kalkulationsvariante wird nur für Versicherungen mit einer Vertragslaufzeit von unter einem Jahr, wie zum Beispiel die Auslandsreisekrankenversicherung, angewandt. Durch die kurzen Laufzeiten verfällt die lebenslange Absicherung, was zu vereinfachten Kündigungsrechten beider Vertragsparteien führt. Somit ist es immer möglich, zu bestimmten Zeiten oder in einer Kündigungsfrist den Vertrag aufzulösen, auch von Seiten des Versicherers. Dadurch wird eine reine Bedarfsprämie, ohne Sparanteile für die Zukunft benötigt und durch das wachsende Risiko im Alter ist es dem Versicherungsunternehmen erlaubt eine Altersgrenze einzuführen, [27, vgl. Seite 1 f.].

4.2 Versicherungsfall und Leistungen

Definition 4.2. (Versicherungsfall in der Krankenversicherung) *Als Versicherungsfall, auch Schadensfall oder Leistungsfall genannt, gelten die durch Krankheit oder Unfall entstandenen Kosten für medizinisch notwendige Heilbehandlungen einer versicherten Person [23, vgl. Seite 4].*[2]

[1] Zur Erklärung der Barwertnotation wird auf [26] verwiesen.
[2] Entbindung zählt auch als Versicherungsfall.

Ein Krankenversicherungsvertrag soll die Kosten, welche bei der Wiederherstellung der Gesundheit oder zumindest bei der Linderung der Nachwirkungen anfallen, decken. Die Kosten können in einem Versicherungsfall in Form von Sachleistungen (z.B. Behandlungen), Summenleistungen (z.B. Tagegeld) oder Geldleistungen anfallen, [33, vgl. Seite 8] [35] [50]. Da die in den verschiedenen Leistungsangeboten anfallenden Kosten stark voneinander abweichen, sind die Risiken unterschiedlich zu bewerten. Damit die Risikoklassen richtig abgebildet werden, unterscheiden wir zwischen den Leistungsarten, die unsere Tarife definieren. Jedes Versicherungsunternehmen kann hier frei entscheiden, welche Leistungsarten in einem Tarif abgedeckt werden.

4.2.1 Versicherungstarife

Krankenhauskostentarif Sonderklasse

Durch den Aufenthalt entstandene Kosten werden von der Versicherung übernommen. Zusätzlich besteht eine freie Arztwahl und die Wartezeiten auf Operationstermine sind verkürzt. Es besteht die Option auf Einbett- oder Zweibettzimmer. Auch eine Annahmegarantie für Neugeborene kann in diesem Tarif enthalten sein.
Die Krankenhausaufenthaltskosten, sowie die Leistungen der Sozialversicheurngsträger für stationäre Krankenhausaufenthalte, variieren regional. Das führt zu unterschiedlichen Prämien bei gleichen Leistungen innerhalb Österreichs, [13, vgl. Seite 82].

Wahlarztversicherung

Die Wahlarztversicherung erstattet die Kosten, welche bei einer Behandlung bei Ärzten und Ärztinnen ohne einen Krankenkassenvertrag (Wahlärzten/Wahlärztinnen) anfallen. Dadurch ergibt sich eine größere Auswahl an Ärzten, eine schnellere Terminfindung und kürzere Wartezeiten bei einem Arztbesuch. Beinhaltet sind auch die Kosten für Therapien, alternativen medizinischen Behandlungen durch Heiltherapeuten oder Psychotherapien.
Des Weiteren können Medikamente oder Heilbehelfe rückerstattet werden. Meist wird nur bis zu einem im Vorhinein festgelegten Jahresbetrag beziehungsweise ein prozentualer Anteil der tatsächlichen Kosten rückerstattet, [13, vgl. Seite 83].

Zahnkostentarif

Durch Zahnbehandlungen, Zahnregulierung oder Zahnersatz entstandene Kosten werden abgedeckt. Die Tarife werden häufig mit Selbstbehalten angeboten, da sie oft hohe Prämien haben. Zusätzlich ist die jährliche Gesamtleistung nach oben beschränkt oder es wird nur ein gewisser Anteil der Kosten übernommen.

Krankenhaus- oder Rehabilitations-Taggeldversicherung

Die Taggeldversicherung wird als Gehaltsersatz bei Dienstausfall ausbezahlt. Besonders für Selbstständige dient sie als Absicherung gegen drohende Verluste bei Arbeitsunfähigkeit. Es wird ein vertraglich festgelegter Geldbetrag pro Tag ausbezahlt und ähnelt dem Charakter einer Lebensversicherung, da nur noch die Auszahlung ungewiss ist, nicht aber die Höhe. Das ist ein Sonderfall in der Krankenversicherung.

4.2.2 Schaden, Rechnungsbetrag, Versicherungsleistung

Definition 4.3. (Schaden) *Als Schaden bezeichnen wir das durch Krankheit oder Unfall entstandenes Leid der versicherten Person und die damit verbundenen Geld- und Zeiteinbußen zur Wiederherstellung der Gesundheit.*

Definition 4.4. (Rechnungsbetrag, Schadenhöhe) *Die tatsächlich angefallenen und bei der Versicherung eingereichten Rechnungen bezeichnen wir als Rechnungsbetrag oder auch Schadenhöhe und stellen wir in der weiteren Arbeit mit der Zufallsvariable X dar.*

Definition 4.5. (Erstattungsbetrag, Versicherungsleistung, Schadenzahlung) *Der Erstattungsbetrag, Vergütungsbetrag, Schadenzahlung oder Versicherungsleistung ist jener Betrag der tatsächlich an die versicherte Person ausbezahlt wird. Der Rechnungs- und der Erstattungsbetrag unterscheiden sich in Tarifen, bei denen das Versicherungsunternehmen nicht die vollen Kosten übernimmt, zum Beispiel bei Tarifen mit einem Selbstbehalt oder einer Leistungsbegrenzung. Für die bessere Unterscheidung wird in dieser Arbeit der Erstattungsbetrag mit der Zufallsvariable Y bezeichnet.*

Sofern nicht weitere Angaben gemacht werden, wird in dieser Arbeit von einer vollen Leistungserstattung ausgegangen.

5 Die Mathematik der Privaten Krankenversicherung

In diesem Kapitel werden die wesentlichen mathematischen Grundlagen für die Prämienkalkulation in der Krankenversicherung behandelt. Das Kapitel ist in mehrere Abschnitte unterteilt, die folgende Aspekte abdecken:

Grundlagen der Risikotheorie: Hier wird die theoretische Grundlage für die Prämienberechnung geschaffen. Es wird erklärt, wie eine „gerechte Prämie“, für ein Versicherungskollektiv ermittelt wird. Ebenfalls wird veranschaulicht, wie ein homogener Versicherungsbestand zustande kommt und aus welchen Gründen er von großer Relevanz ist.

Rechnungsgrundlagen: Dieser Abschnitt konzentriert sich auf die verschiedenen Parameter, die die Höhe der Versicherungsprämien beeinflussen. Dazu gehören, unter anderem, der Rechnungszins, die Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten, Selbstbehalte und andere Faktoren. Besonderes Augenmerk liegt auf den sogenannten „Kopfschäden“, die eine Eigenheit der Krankenversicherung darstellen. Diese werden genauer erläutert, indem sowohl die Definitionen als auch dazugehörigen Herleitungen der Kopfschäden sowohl nach der herkömmlichen Methode (Mittelwertbildung) als auch nach dem Schadenzahl-Schadenhöhen-Modell (Gesamtschaden nach dem Kollektiven Modell) beschrieben werden.

Prämienkalkulation nach dem Äquivalenzprinzip: Dieser Abschnitt beinhaltet die Herleitung des Prämien- und Leistungsbarwertes, und das Zustandekommen einer Nettoprämie nach dem Äquivalenzprinzip. Anschließend wird die Bruttoprämie gebildet und die verschiedenen einfließenden Kosten beschrieben.

Alterungsrückstellung: Abschließend wird die Bedeutung der Alterungsrückstellung in der Krankenversicherung detailliert erklärt. Dabei wird sowohl die Prospektive als auch die Retrospektive Form der Alterungsrückstellung behandelt, um die Wichtigkeit dieser Rückstellungen aufgrund der langfristigen Verträge in der Krankenversicherung zu verdeutlichen. Die Retrospektive Form wird, sofern nicht anders möglich, bei manchen Tarifen für die Prämienberechnung herangezogen und spielt deswegen eine wichtige Rolle in der Krankenversicherung.

Dieses Kapitel bildet eine grundlegende Basis für die anschließende Prämienkalkulation in der Krankenversicherung und gibt einen umfassenden Einblick in die mathematischen und theoretischen Grundlagen, die für die Bestimmung von Versicherungsprämien von entscheidender Bedeutung sind.

5.1 Risikotheorie in der Krankenversicherung

Versicherungen werden durch den Ausgleich im Kollektiv finanziert, bei der eine Gemeinschaft von Versicherungsnehmern die entstandenen Kosten Einzelner durch ihre Prämienzahlungen gemeinsam trägt. Die Prämienzahlungen erfolgen meist im Vorhinein, während die Höhe der zukünftigen Leistungen zu diesem Zeitpunkt ungewiss ist. Daher ist es notwendig, die Prämie zu schätzen. Dies geschieht indem der Schadenbedarf der gesamten Gruppe ermittelt wird. Weil er von verschiedenen Faktoren beeinflusst wird, kann er stark variieren. Für eine sinnvolle Prämienkalkulation ist es notwendig, den Versicherungsbestand in Gruppen mit ähnlicher Struktur zu gliedern. Dafür verwenden wir *Risikofaktoren*, Kenngrößen welche objektive und quantitative Merkmale beschreiben und die Schadenhöhe beeinflussen, zum Beispiel das Alter, das Geschlecht, Vorerkrankungen oder die versicherten Leistungen. [8, vgl. Seite 40][21, vgl. Seite 30 f.]

5.1.1 State of the art - Das individuelle Modell

Obwohl die Schadenzahl und Schadenhöhe zufällig sind, kann das kollektive Modell nicht angewendet werden, siehe 3.3. Stattdessen beschränken wir den Beobachtungszeitraum, meistens auf ein Kalenderjahr und betrachten die Gesamtjahresleistung (den Jahresschaden) einer versicherten Person i. Die Folge der Zufallsvariablen $(X_{ik})_{k=1,\dots,n_i} \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}_+)$ seien die eingereichten Rechnungsbeträge einer versicherten Person i und n_i die Anzahl der Rechnungen in einem Beobachtungszeitraum. Durch Summieren der Einzelschäden erhalten wir die Gesamtjahresleistung $X_i := \sum_{k=1}^{n_i} X_{ik}$, [24, vgl. Seite 12][8, vgl. Seite 38][21, vgl. Seite 26].

Werden mehrere Versicherungsnehmer:innen in einem homogenen Kollektiv zusammengefasst, bilden sie den Bestand B. Die Bestandsgröße bezeichnen wir mit $L = |B|$. Der Gesamtschaden $S \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}_+)$ ergibt sich durch $S = \sum_{i=1}^{L} X_i$, [24, vgl. Seite 12][21, vgl. Seite 26] [20][vgl. Seite 13].

Für die faire Prämie ist es naheliegend, den erwarteten Schaden des Bestandes als Prämie zu verlangen. Sei $P_i = \mathbb{E}[X_i]$ der erwartete Schaden pro Person, dann ergibt sich für den Bestand die Prämie

$$P = \sum_{i=1}^{L} P_i = \sum_{i=1}^{L} \mathbb{E}\left[X_i\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{L} X_i\right] = \mathbb{E}[S], \ \forall X_i \geq 0 \ f.s. \tag{5.1}$$

aus dem erwarteten Gesamtschaden des Kollektivs. Das vorletzte Gleichheitszeichen folgt aus der Linearität des Erwartungswertes.

Das Paar $\langle L, (X_i)_{i\in\{1,\dots,L\}}\rangle$ heißt *individuelles Modell*, falls die Eigenschaft der Vertragsunabhängigkeit aus Abschnitt 3.2.1 erfüllt ist. Damit dürfen die Erwartungswerte und Varianzen personenunabhängig betrachtet werden, [21, vgl. Seite 27][20, vgl. Seite 24].
Im folgenden sei X eine Zufallsvariable, welche eine für den Bestand typische Schadenhöhe repräsentiert und somit dieselbe Verteilung wie die Zufallsvariablen X_i vorweist. Sei $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X] =: \mu$ und $\mathbb{V}[X_i] = \mathbb{V}[X] =: \sigma^2$ so erhalten wir mit der Formel (5.1) folgende Aussagen:

Satz 5.1.
(i) Falls $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ und $S \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$, dann gilt $\mathbb{E}[S] = L\mu$.
(ii) Falls $X \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$ und $S \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$, dann gilt $\mathbb{V}[S] = L\sigma^2$.

Beweis.
(i) $\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{L} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{L} \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{L} \mu = L\mu$,
(ii) $\mathbb{V}[S] = \sum_{i=1}^{L} \mathbb{V}[X_i] = \sum_{i=1}^{L} \mathbb{V}[X] = \sum_{i=1}^{L} \sigma^2 = L\sigma^2$. □

Um Abweichungen zwischen den tatsächlich entstandenen Schadenhöhen und der Prämie zu messen, kommt der Variationskoeffizienten $\mathrm{vk}[S] := \frac{\sqrt{\mathbb{V}[S]}}{\mathbb{E}[S]}$ zur Anwendung.

Satz 5.2 (Variationskoeffizient)**.** *Der Variationskoeffizient für den Gesamtschaden S für einen homogenen Bestand ist*

$$\mathrm{vk}[S] = \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{vk}[X].$$

Beweis. Mit der Definition des Variationskoeffizienten $\mathrm{vk}[S] := \frac{\sqrt{\mathbb{V}[S]}}{\mathbb{E}[S]}$ gilt

$$\mathrm{vk}[S] = \frac{\sqrt{L\sigma^2}}{L\mu} = \frac{\sqrt{L}\sigma}{L\mu} = \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{vk}[X].$$

□

Der Risikoausgleich im Kollektiv bedeutet, dass mit zunehmender Größe des Bestandes der Variationskoeffizient abnimmt $\lim_{L \to \infty} \mathrm{vk}[S] = 0$. Zur Bestimmung ob die eingezahlten Prämien die Versicherungsleistungen decken, wird die Differenz betrachtet

$$S - P = \sum_{i=1}^{L} X_i - L\mu = L \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} X_i - \mu \right) \overset{!}{<} 0.$$

Eine Unterdeckung der Versicherungsleistungen, $\frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} X_i > \mu$, bedeutet den sicheren Ruin des Versicherungsunternehmens. Eine Überdeckung tritt ein, falls $\frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} X_i < \mu$ gilt. Dies könnte dazu führen, dass Kunden das Kollektiv verlassen, da sie durch die zu hohen Prämien bessere Angebote auf dem Markt finden, [21, vgl. Seite 27 f.][24, vgl. Seite 13].

5.1.2 Schadenzahl-Schadenhöhe-Modell - Das kollektive Modell

Für den folgenden Abschnitt werden die Definitionen aus [11, vgl. Seite 164] und [20, vgl. Seite 14] verwendet.
Die Zufallsvariable $N \in \mathcal{L}^0(\mathbb{N}_0)$ beschreibt die Anzahl der gemeldeten Rechnungen. Die Folge $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bezeichnet die eingereichten Rechnungshöhen. Der Gesamtschaden S ist eine Abbildung $S : \Omega \to \mathbb{R}_+$ und wird dargestellt durch

$$S := \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_i := \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N=n\}} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Ist die Folge der Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt und unabhängig von der zufälligen Schadenanzahl N, wird das Paar $\langle N, (X_i)_{i\in\mathbb{N}}\rangle$ als *kollektives Modell* bezeichnet.
Im folgenden sei eine Zufallsvariable X eine repräsentative Schadenhöhe für den Bestand, mit derselben Verteilung wie die der Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Satz 5.3 (Momente des Gesamtschadens)**.** *Es gilt:*
(i) $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]$, mit $N \in \mathcal{L}^1(\mathbb{N}_0)$ und $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$,
(ii) $\mathbb{V}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[N](\mathbb{E}[X])^2$, mit $N \in \mathcal{L}^2(\mathbb{N}_0)$ und $X \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$.

Beweis. Die Beweise für (i) und (ii) können in [11, Seite 166 f.] nachgeschlagen werden. □

5.1.3 Homogenität des Bestandes

Ein homogenes Kollektiv besteht aus Personen, die über identische Risikofaktoren verfügen. Dadurch können die erwarteten Jahresschadenhöhen zweier Personen als identisch verteilt angesehen werden. Es sollen nur Faktoren mit einem hohen Signifikanzniveau für die verursachte Jahresschadenhöhe gewählt werden. Um zu überprüfen welche das sind, stehen diverse statistische Tests zur Verfügung.[21, vgl. Seite 29f.] Dabei ist zu beachten, dass nicht zu viele Merkmale verwendet werden. Das generiert zu kleine Teilbeständen und widerspricht der Idee des Ausgleichs im Kollektiv.

Die signifikantesten Einflüsse sind das Alter, das Geschlecht und die Leistungsart. Der Einfluss des Alters ist offensichtlich, da ältere Personen höhere Kosten verursachen als Jüngere. Andere Faktoren wie Vorerkrankungen, Beruf oder Sportarten werden mit einer Risikoprüfung erfasst und können mit Risikozuschlägen als prozentualer Faktor eingerechnet werden. Nicht messbare und somit nicht einkalkulierbar Faktoren sind zum Beispiel Essgewohnheiten. Die tatsächlich zur Tarifierung verwendeten Risikomerkmale werden als Tarifmerkmale bezeichnet, [21, vgl. Seite 30]

Ein weiterer ausschlaggebender Faktor ist die Dauer der Versicherung, denn bei Neukunden müssen folgende Effekte beachtet werden, [21, vgl. Seite 42]:

- Wartezeiteffekte: Diese betreffen Neukund:innen, um zu verhindern, dass wegen einer schon bestehenden und bekannten Krankheit ein Vertrag abgeschlossen wird, und es zu einer vorzeitigen Auszahlung der Leistung kommt.
- Selektionseffekte: Diese entstehen durch eine Risikoprüfung bei Vertragsabschluss. Zu einem späteren Vertragszeitpunkt darf keine weitere Risikoprüfung verlangt werden, also gibt es nur zu Vertragsbeginn Informationen über das Risikoprofil. Über die Laufzeit hinweg verringert sich der Einfluss des Effektes.

Für die Prämienkalkulation wird ein Versicherungsbestand herangezogen, indem diese Effekte abgeklungen sind und somit keinen Einfluss mehr nehmen können.

Neben den erwarteten Gesamtschaden spielen weitere Einflussfaktoren eine entscheidende Rolle bei der Festlegung der Prämienhöhe. Diese Faktoren können entweder prämienmindernd oder -erhöhend wirken und werden im folgenden Abschnitt näher erläutert.

5.2 Rechnungsgrundlagen

Die Prämienhöhe wird durch die *Rechnungsgrundlagen* bestimmt. Das sind Parameter die das ganze Kollektiv beschreiben, aber auch Einfluss auf einzelne Verträge haben. Dazu zählen Ausscheideordnungen, Rechnungszins, Kopfschäden, Sicherheitszuschläge sowie Krankheitsdauer oder Leistungstage, welche im folgenden Abschnitt genauer erläutert werden, [21, vgl. Seite 37].

Des Weiteren wird zwischen den Rechnungsgrundlagen erster Ordnung und zweiter Ordnung unterschieden. Die Kalkulation nach erster Ordnung wird auch als *Vorsichtsprinzip* bezeichnet, da Sicherheiten miteinkalkuliert sind. Die Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung bilden den „best estimate“ (meistens der Erwartungswert) ab und haben keine impliziten Sicherheiten, [33, vgl. Seite 12].
Ein Versicherungsunternehmen soll so kalkulieren, dass eine dauerhafte Erfüllbarkeit der Leistungen möglich ist, deswegen müssen die Prämien und Rückstellungen mit dem Vorsichtsprinzip gebildet werden, [48].

Zum Schluss legen wir für die bessere Lesbarkeit der Arbeit eine in der Versicherungsmathematik typische Konvention fest.

Bemerkung 5.4. *Die Rechnungsgrundlagen werden stark von den biologischen Geschlechtern beeinflusst. Um zwischen Mann und Frau unterscheiden zu können, wird x als das Alter des Mannes und y als das Alter der Frau bezeichnet. Rechnerisch ist das Vorgehen bei beiden Geschlechtern gleich, deswegen wird nur die Notation eines Geschlechts x verwendet. Sofern nicht weitere Angaben gemacht werden, gelten jegliche Formeln für beide Geschlechter.*

Gemäß den Unisex-Richtlinien von 2012 ist es nicht zulässig, Personen aufgrund ihres Geschlechts differenziert zu behandeln. Verschiedene Ansätze zum Umsetzen dieser Richtlinien befinden sich in [21, vgl. Seite 239 ff.]. Jedes Jahr veröffentlicht die Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin) statistische Wahrscheinlichkeitsdaten welche nach den biologischen Geschlechtern berechnet werden, [39].

5.2.1 Rechnungszins

Für die notwendige Kapitalveranlagung der Alterungsrückstellung (vgl. 4.1) spielt der Rechnungszins i eine maßgebliche Rolle. Alle während der Vertragslaufzeit stattfindenden Zahlungsströme werden mit ihm bewertet, [24, vgl. Seite 65]. Der Rechnungszins bestimmt den Diskontierungsfaktor $v := \frac{1}{1+i}$, welcher für die Bewertung von zukünftigen Zahlungsströmen zum gegenwärtigen Zeitpunkt verwendet wird.

Eine Senkung des Rechnungszinses wirkt sich, bei gleichbleibenden Versicherungsleistungen, für die versicherte Person als eine Prämienerhöhung aus. Eine mögliche Konsequenz daraus sind rückläufige Verkaufszahlen. Auf der anderen Seite bedeutet ein hoher Rechnungszins für Kunden und Kundinnen höhere ausbezahlte Kapitalerträge oder eine niedrigere Prämie. Ein zu hoch angesetzter Rechnungszins kann allerdings den Versicherungsruin

zur Folge haben, da die dauerhafte Erfüllbarkeit der Versicherungsverträge nicht garantiert ist. Das Versicherungsunternehmen muss also den Rechnungszins so wählen, dass dieser dauerhaft erwirtschaftet werden kann und trotzdem konkurrenzfähig ist, [31].
Allerdings darf der Rechnungszins nicht als Index für Prämienanpassungen gewählt werden, [52].

Die Finanzmarktaufsicht (FMA) gibt in Form von Rundschreiben eine Orientierungshilfe für den Rechnungszins aus, [43]. Dieser wird immer wieder neu festgelegt, siehe Abbildung 5.1. Vor der Verringerung im Jahr 2013 blieb der Rechnungszins Jahrzehnte bei $3,0\%$. Ab 2021 war er mit $0,5\%$ bemerkenswerter Weise genauso hoch wie der Höchstrechnungszinssatz der Lebensversicherung, obwohl die Laufzeiten von Krankenversicherungen deutlich länger sind und somit höhere Kapitalerträge erzielt werden können, [31]. Einem Versicherungsunternehmen obliegt das Recht den Rechnungszins frei zu wählen, solange er nach dem Vorsichtsprinzip kalkuliert wird, [43].

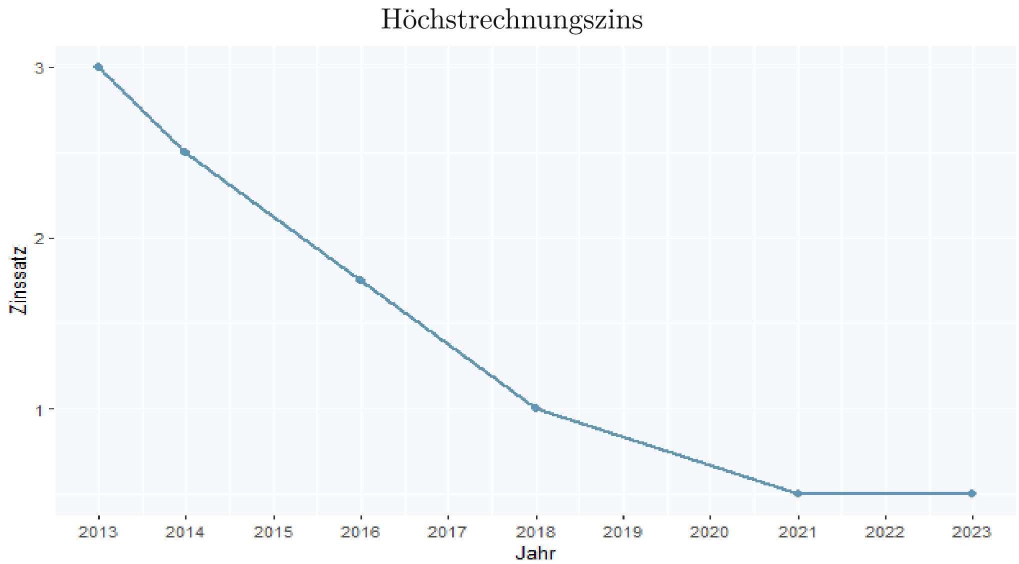

Abbildung 5.1: Der Verlauf des von der FMA empfohlener Höchstzinssatz in den Jahren von 2013 bis 2021. Die Zinssätze sind von [31].

5.2.2 Ausscheideordnungen

Die folgenden Definitionen stammen, falls nichts anderes angegeben, aus [21, vgl. Seite 73 ff.]. Eine versicherte Person kann den Bestand aus zwei Gründen verlassen. Diese sind Storno und Tod, wobei als Grund das erste eintretende Ereignis angegeben wird. Dabei gilt die Annahme, dass nicht beide Ereignisse gleichzeitig eintreten. Das Alter bei Todeseintritt oder Storno einer Person wird durch die Zufallsvariablen X_x^{Tod} oder X_x^{Storno} beschrieben, Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit q_x einer Person wird mit

$$q_x := \mathbb{P}[X_x^{\text{Tod}} < \min\{x+1, X_x^{\text{Storno}}\}] \tag{5.2}$$

bezeichnet. Die Formel (5.2) ist die Wahrscheinlichkeit im Alter x im Bestand zu sein und dann innerhalb eines Jahres zu versterben. Die (einjährige) Stornowahrscheinlichkeit w_x einer Person ist

$$w_x := \mathbb{P}[X_x^{\text{Storno}} < \min\{x+1, X_x^{\text{Tod}}\}]. \tag{5.3}$$

Die Einflüsse der Storno- und Sterbewahrscheinlichkeit auf den Bestand sind gegenläufig, wie in Abbildung 5.2 ersichtlich. Der Einfluss der Stornowahrscheinlichkeit ist über die lange Laufzeit hinweg höher als die der Sterbewahrscheinlichkeit, [33, vgl. Seite 18].

Zur Vereinfachung wird nicht zwischen Tod und Storno unterschieden. Die Zufallsvariable $X_x := \min\{X_x^{\text{Storno}}, X_x^{\text{Tod}}\}$ bezeichnet das Alter einer zum jetzigen Zeitpunkt x-jährigen Person bei Bestandsaustritt.

Abbildung 5.2: Die altersabhängige Veränderung von Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeit mit der dazugehörigen Ausscheideordnung. Die Daten für die Sterbewahrscheinlichkeiten sind aus [36] und die der Stornowahrscheinlichkeiten aus [38].

Definition 5.5. (Verbleibewahrscheinlichkeit) *Die Wahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person die nächsten k Jahre ($k \in \mathbb{N}$) im Bestand zu verweilen, ist definiert als*

$${}_kp_x := \mathbb{P}[X_x \geq x+k] \tag{5.4}$$

Die einjährige Wahrscheinlichkeit einer Person im Versicherungsbestand zu bleiben, wird in der Literatur dargestellt mit $p_x := {}_1p_x$. Als weitere Konvention gilt ${}_0p_x := 1$.
In [21, vgl. Seite 75 f.] wurden die Beziehungen zwischen den Ausscheideordnungen beschrieben.

Satz 5.6. (Verbleibewahrscheinlichkeit)
(i) $p_x = 1 - q_x - w_x$,
(ii) ${}_kp_x = {}_mp_x \cdot {}_{k-m}p_{x+m}$ *für* $m < k$.

Beweis. (i) Für den Beweis wird $p_x = \mathbb{P}[X_x \geq x + 1]$ und die Definitionen der Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten aus den Formel (5.2) und (5.3) verwendet. Anstatt $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ wird die Kurzform $\{X < x\}$ verwendet. Einsetzen von $X_x = \min\{X_x^{\text{Storno}}, X_x^{\text{Tod}}\}$ in p_x führt zu

$$p_x = \mathbb{P}[\min\{X_x^{\text{Storno}}, X_x^{\text{Tod}}\} \geq x + 1] = \mathbb{P}[\{X_x^{\text{Storno}} \geq x + 1\} \cap \{X_x^{\text{Tod}} \geq x + 1\}].$$

Wir betrachten zuerst:

$$\begin{aligned} q_x + w_x =& \mathbb{P}[X_x^{\text{Storno}} < \min\{x + 1, X_x^{\text{Tod}}\}] + \mathbb{P}[X_x^{\text{Tod}} < \min\{x + 1, X_x^{\text{Storno}}\}] \\ =& \mathbb{P}[\{X_x^{\text{Storno}} < x + 1\} \cap \{X_x^{\text{Storno}} < X_x^{\text{Tod}}\}] \\ &+ \mathbb{P}[\{X_x^{\text{Tod}} < x + 1\} \cap \{X_x^{\text{Tod}} < X_x^{\text{Storno}}\}] \end{aligned}$$

Da die beiden Ereignisse disjunkt sind, gilt die folgende Gleichheit[1]

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}[\{X_x^{\text{Storno}} < x + 1\} \cap \{X_x^{\text{Storno}} < X_x^{\text{Tod}}\} \cup \{X_x^{\text{Tod}} < x + 1\} \cap \{X_x^{\text{Tod}} < X_x^{\text{Storno}}\}] \\ &= \mathbb{P}[\{X_x^{\text{Storno}} < x + 1\} \cup \{X_x^{\text{Tod}} < x + 1\}]. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt betrachten wir $1 - q_x - w_x$.

$$\begin{aligned} 1 - q_x - w_x &= (q_x + w_x)^c \\ &= \mathbb{P}[\{X_x^{\text{Storno}} < x + 1\} \cup \{X_x^{\text{Tod}} < x + 1\}]^c \\ &= \mathbb{P}[\{X_x^{\text{Storno}} \geq x + 1\} \cap \{X_x^{\text{Tod}} \geq x + 1\}] \\ &= p_x \end{aligned}$$

(ii) Der Beweis nutzt die Beziehung ${}_kp_x = \prod_{t=0}^{k-1} p_{x+t}$, welche in [21, vgl. Seite 75] bewiesen wird.

$$\begin{aligned} {}_kp_x = \prod_{t=0}^{k-1} p_{x+t} &= \prod_{t=0}^{m-1} p_{x+t} \cdot \prod_{t=m}^{k-1} p_{x+t} \\ &= \prod_{t=0}^{m-1} p_{x+t} \cdot \prod_{t=0}^{k-m-1} p_{x+t+m} \\ &= {}_mp_x \cdot {}_{k-m}p_{x+m} \, . \end{aligned}$$

□

[1] Für zwei disjunkte Mengen A und B gilt $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$.

5.2.3 Kopfschäden - Profil und Grundkopfschaden

Die Kopfschäden sind die bedeutenste Grundlage der Prämienberechnung, zu ihrer Ermittlung werden die eingereichten Rechnungsbeträge einer Person benötigt. Damit entsprechen sie dem erwarteten Gesamtschaden aus dem Abschnitt 5.1. Im Folgenden wird ein homogenen Bestand, wie in 5.1 beschrieben, gewählt. Somit sind Wartezeit- und Selektionseffekte ausgeschlossen.

Definition 5.7 (Kopfschaden)**.** *Der Kopfschaden K_x einer versicherten Person i mit dem Alter x ist die Summe der erwarteten Versicherungsleistungen in einem Beobachtungszeitraum.*

$$K_x := \mathbb{E}[X_i] \tag{5.5}$$

Die Kopfschäden werden aufgrund der unterschiedlichen Leistungsarten jeweils für einen Tarif τ kalkuliert, siehe Abbildung 5.3.

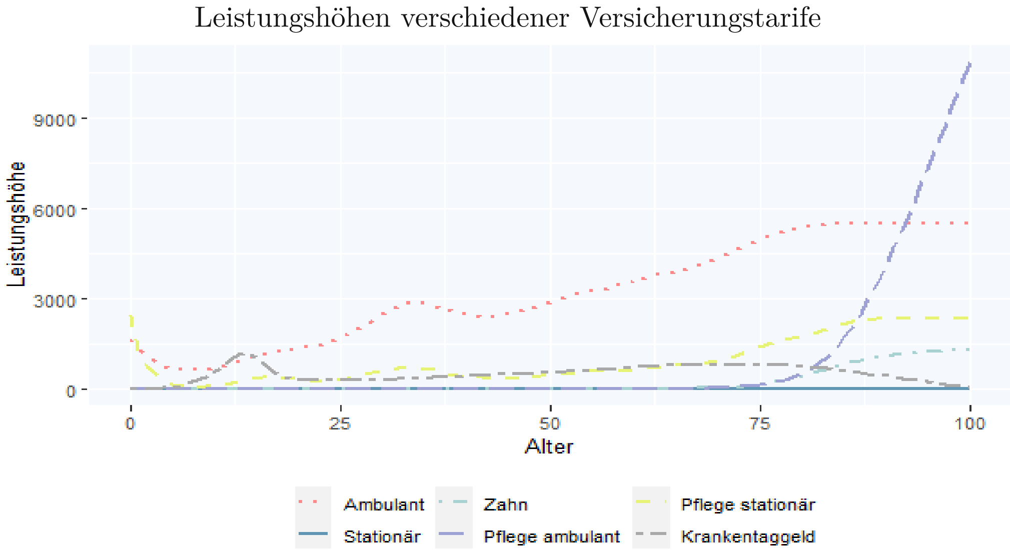

Abbildung 5.3: Abgebildet sind die verschiedenen Leistungshöhen in den Versicherungssparten, die Daten sind von [39].

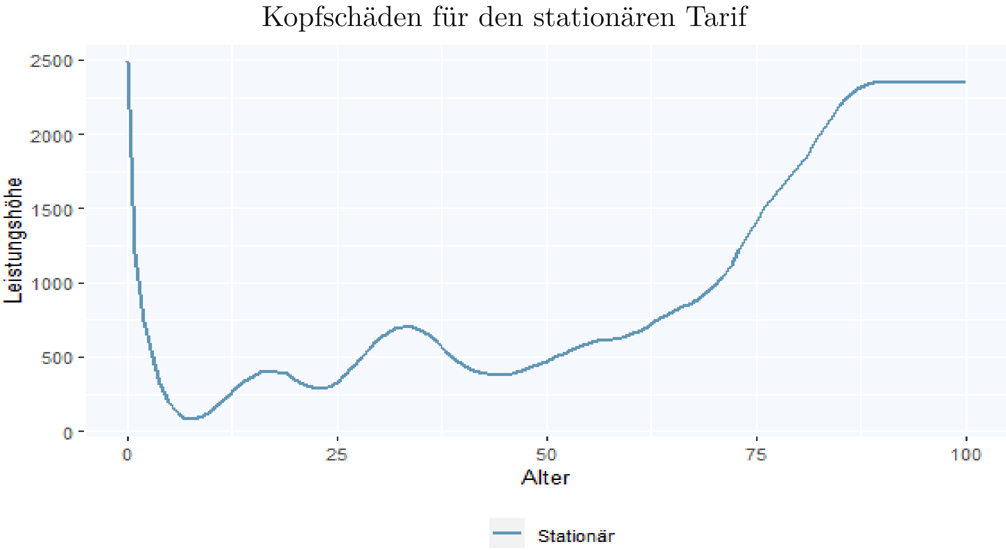

Abbildung 5.4: Abgebildet ist die Entwicklung der Versicherungsleistung in einem stationären Tarif von Abbildung 5.3.

Innerhalb eines Tarifes ist der Kopfschaden K_x^τ für gleiches Alter und häufig auch gleiches Geschlecht definiert. Solange nicht explizit eine Unterscheidung zwischen den Tarifen notwendig ist, bezeichnen wir den Kopfschaden mit K_x, .AVOEBestPracticeStandard

Definition 5.8. (Kopfschadenreihe) *Sei $\mathcal{X} := (x_0, ..., \omega)$ die Menge aller Alter. Eine Kopfschadenreihe $(K_x^\tau)_{x\in\mathcal{X}}$ bezeichnet die Folge der Kopfschäden aller Alter innerhalb eines Tarifes τ.*

Für eine Kopfschadenreihe gelten folgende Eigenschaften [4, vgl. Seite 62]:

- Die Kopfschäden der Personen in einer Tarifgruppe sind unabhängig und identisch verteilt.
- Die Folgen der Kopfschäden zwischen den Tarifgruppen sind unabhängig.

Zur besseren Darstellung der Einflussgrößen auf die Kopfschadenreihe entwickelte Friedrich Rusam in den 1930er Jahren eine Methode zur Aufspaltung der Kopfschäden. [33, vgl. Seite 87][21, vgl. Seite 44][30, vgl. Seite 60]

Definition 5.9. (Methode von Rusam) *Die Methode von Rusam teilt die Kopfschäden in einen Grundkopfschaden G (Normierungsfaktor) und in das Profil k_x:*

$$K_x(t) = G(t) \cdot k_x. \tag{5.6}$$

Das Profil k_x ist nur noch von dem versicherungstechnischen Alter abhängig und beschreibt die Relation der Kopfschäden zu den verschiedenen Altersstufen. Der Grundkopfschaden wird durch die Zeit beeinflusst und ist eine Kenngröße für die Leistungshöhe eines Tarifes. So können bei Vertragsabschluss unbekannte Kostenänderungen, wie medizinische Inflation,

leichter angepasst werden.
Eine Bestimmungsmethode für den Grundkopfschaden ist als Normierungsfaktor ein stark besetztes, fixes Alter x_0 (in der Praxis häufig $x_0 \in \{28, 40, 43, 70\}$) zu wählen [30, vgl. Seite 71]. Der Normierungsfaktor wird als *rechnungsmäßiger Grundkopfschaden* bezeichnet, es gilt

$$G^{\text{rech}} = K_{x_0} \text{ und } k_{x_0} = 1. \tag{5.7}$$

In folgendem Beispiel wird die Aussagekraft und Zusammenhänge von Profil und Grundkopfschaden verdeutlicht.

Beispiel 5.10. *Gegeben sind die Profile für eine 40-jährige Person $k_{40} = 0,745$ und für eine 75-jährige Person $k_{75} = 5,473$ und der Grundkopfschaden $G = 125,438$ €.*
Die Relation zwischen den beiden Altern ergibt sich durch $\frac{5{,}473}{0{,}745} \approx 7,45$, daraus lesen wir, dass die zu erstattenden Schadenhöhen einer 75-jährigen versicherten Person 7,45 mal so hoch ist wie die einer 40-jährigen Person.

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass häufig nur der Grundkopfschaden angepasst wird, während das Profil über einen längeren Zeitraum hinweg gleich bleibt. Die neuen Kopfschäden ergeben sich dann durch die Multiplikation des neuen Grundkopfschadens mit der Kopfschadenreihe, [30, vgl. Seite 72]. Da die Altersabhängigkeit meist einen geringen Einfluss hat, können Kopfschadenprofile über mehrere Tarife hinweg genutzt werden. Des Weiteren wird Aufwand für die Erstellung von Kopfschadenreihen reduziert, da nur der Grundkopfschaden auf das Leistungsniveau des gewünschten Tarifes angepasst wird, [21, vgl Seite 44 f.].

Der *empirische Grundkopfschaden* oder auch *Bedarfsgrundkopfschaden* wird durch den (beobachteten) Gesamtschadenbedarf S_x der Bestandsgröße L_x und einem vorgegeben (rechnungsmäßigen) Profil k_x hergeleitet. Indem die Gesamtschäden über alle Alter aufsummiert werden, ergibt sich der Gesamtschadenbedarf S. Durch Umformen der Gleichung (5.8) und Anwenden der Kopfschadenbeziehungen aus (5.6) gilt $S_x = L_x \cdot G \cdot k_x$ und

$$S = G \cdot \sum_{x_{min}}^{\omega} L_x \cdot k_x.$$

Der empirische Grundkopfschaden ist

$$G^{\text{emp}}(t) = \frac{S}{\sum_{x_{min}}^{\omega} L_x(t) \cdot k_x(t)}.$$

Herleitung der Kopfschadenreihen

Für die Herleitung der Kopfschadenreihen für bestehende oder Neutarife gibt es keine gesetzlichen Vorgaben, solange die statistischen und aktuariellen Prinzipien eingehalten werden.
Die Kopfschadenreihen werden zwischen „beobachteten oder individuellen Kopfschäden“ und „rechnungsmäßigen Kopfschäden“ unterschieden. Erstere sind zufällige Größen, welche aus

Beobachtungen von vergangen Daten ermittelt werden. Mittels Regressionsverfahren werden diese ausgeglichen um natürliche Schwankungen zu eliminieren. Das Ziel ist es, die vergangenen Werte in die Zukunft zu projizieren um die rechnungsmäßigen Kopfschäden zu erhalten. [30, vgl. Seite 74][4, vgl. Seite 64][4, vgl. Seite 50]

Als erstes werden Beobachtungswerte vergangener Jahre benötigt, in der Praxis werden meistens die letzten drei Jahre herangezogen. Sei $T := \{t_0 - m, ..., t_0 - 1, t_0\}$ die Menge der Beobachtungsjahre für eine fixe Anzahl $m \in \mathbb{N}$ und $m + 1 = |T|$. Das letzte Beobachtungsjahr ist t_0 und ist die Anzahl der vergangene Jahre, das aktuelle Jahr bezeichnen wir dann $t_0 + 1$. [24, vgl. Seite 87][21, vgl. Seite 53]

Aufgrund der Datenlage wird bei der Tarifkalkulation zwischen einem *existierenden Tarif* und *neuen Tarif* unterschieden. Bestehenden Tarife mit einem hohen Datenbestand können direkt verwendet werden. Das sind jene mit hohen Verkaufszahlen über einen langen Zeitraum hinweg. Sollte dies nicht der Fall sein, muss zu den tarifeigenen Daten auch auf *Stütztarife* zurückgegriffen werden. Das sind ähnliche Tarife, mit einem gleichartigen Leistungsspektrum. Bei einer Tarifeinführung müssen immer Stütztarife verwendet werden. Die Entscheidung, ob und welche Stütztarife verwendet werden, liegt bei der zur Kalkulation verantwortlichen Person. Die Menge der miteinbezogenen Stütztarife wird mit $\mathcal{T}$ bezeichnet, [24, vgl. Seite 90].

Für die Bestimmung des rechnungsmäßigen Grundkopfschadens wird zuerst der Bedarfsgrundkopfschaden der letzten Jahre ausgewertet und dann mittels Extrapolation in die Zukunft projiziert. Dafür stehen diverse statistische Verfahren wie die lineare oder logistische Regression zur Verfügung. [30, vgl. Seite 75][21, vgl. Seite 57 f.]

Kopfschadenberechnung: state of the art - Mittelwertbildung

Als Schätzer für die Kopfschäden (5.5) kann bei einem ausreichend großen Versicherungsbestand das arithmetische Mittel des Gesamtschadens S_x herangezogen werden, [33, vgl. Seite 13].

$$K_x \approx \frac{S_x}{L_x}. \tag{5.8}$$

Dargestellt mit der Zeit- und Tarifabhängigkeit sind die Kopfschäden

$$K_x(t, \tau) = \frac{S_x(t, \tau)}{L_x(t, \tau)}.$$

Zur Vergleichbarkeit werden mit dem *Verfahren von Bahr* die Kopfschäden verschiedener Tarife $\tau \in \mathcal{T}$ durch Gewichtung auf ein Leistungsniveau gebracht. Da auch die Leistungshöhe mit den Leistungsjahren variiert, werden die Tarife über die einzelnen Perioden mit dem arithmetischen Mitteln ausgeglichen, [24, vgl. Seite 87.]

$$\bar{K}_x(\tau) = \tfrac{1}{|T|} \textstyle\sum_{t \in T} K_x(t, \tau), \quad \bar{L}_x(\tau) = \tfrac{1}{|T|} \textstyle\sum_{t \in T} L_x(t, \tau)$$

Als nächstes werden die Kopfschäden über die Tarife τ ausgeglichen, da nicht jeder Tarif zu gleichen Anteilen in der Kalkulation verwendet wird. Mit dem Verhältnisparameter λ ist es möglich die Bestandsgröße abzubilden, indem über alle Tarife und Alter aufsummiert wird

$$L = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \bar{L}_x(\tau).$$

Dann folgt für den Verhältnisparameter λ für jeden Tarif $\tau \in \mathcal{T}$

$$\lambda_\tau = \frac{\sum_{\tau \in \mathcal{T}} \bar{L}_x(\tau)}{L}, \text{ mit } \sum_{x \in \mathcal{X}} \lambda_\tau = 1.$$

Für die Skalierung im Leistungsspektrum bestimmen wir die Faktoren $\gamma_i, i = 1, ..., k$ mit $k = |\mathcal{T}|$, sodass gilt

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} \bar{L}_x(\tau_1) \cdot \gamma_1 \cdot \bar{K}_x(\tau_1) = ... = \sum_{x \in \mathcal{X}} \bar{L}_x(\tau_k) \cdot \gamma_k \cdot \bar{K}_x(\tau_k) = 1. \tag{5.9}$$

Mit Herausheben der γ_i und umformen erhalten gilt:

$$\gamma_i = \frac{1}{\sum_{x \in \mathcal{X}} \bar{L}_x(\tau_i) \cdot \bar{K}_x(\tau_i)}$$

Die *gleichgerichteten Kopfschäden* der einzelnen Tarife werden durch multiplizieren mit den Skalierungsfaktoren γ_i und der Bestandsgewichtung λ_τ gebildet, [21, vgl. Seite 56][24, vgl. Seite 88].

$$\bar{K}_x^\gamma = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \lambda_\tau \cdot \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \cdot \bar{K}_x(\tau_i).$$

Kopfschadenberechnung: Schadenhöhen-Schadenzahl-Modell

In diesem Abschnitt wird eine weitere Variante zur Berechnung der Kopfschäden, als Alternative zu der Mittelwertbildung, hergeleitet. Der Ansatz stammt aus dem im Kapitel 3 vorgestellten Schadenzahl-Schadenhöhen-Modell. Hierbei werden die Definitionen 3.1, 3.2 und 3.3 und Annahmen von diesem Modell als Grundlage genutzt.

Die Kopfschäden resultieren aus der Berechnung eines stochastischen Modells aus der Bernoulliverteilten Schadenzahl H_x und dem Jahresschaden S_x, wie in den Abschnitt 3.3.1 beschrieben.

Satz 5.11 (Erwarteter Kopfschaden)**.** *Der erwartete Kopfschaden einer Person ergibt sich durch*

$$K_x := \mathbb{E}[H_x \tilde{S}_x] = h_x S_x. \tag{5.10}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[H_x\tilde{S}_x] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[H_x\tilde{S}_x|H_x]\right] \\ &= \mathbb{E}[\tilde{S}_x|H_x=0]\cdot\mathbb{P}[H_x=0]+\mathbb{E}[\tilde{S}_x|H_x>0]\cdot\mathbb{P}[H_x>0] \\ &= (1-h_x)\cdot 0 + h_x S_x \\ &= h_x S_x\end{aligned}$$

□

5.2.4 Selbstbehalt

Durch die Einführung von Selbstbehalten wird das Risiko zwischen den Vertragsparteien, dem Versicherungsunternehmen und die Versicherungsnehmer:innen, aufgeteilt. Die Vorgehensweise bei Tarifen mit Selbstbehalten gleicht jener in der Rückversicherung. Sie sind für die Tarifierung unerlässlich, da sie für Versicherungsnehmer:innen und Versicherungsunternehmen positive Auswirkungen hat.

Selbstbehalte ermöglichen, dass Versicherungsnehmer:innen Klein- und Kleinstschäden, welche den Selbstbehalt unterschreiten, seltener oder gar nicht melden. Aus der Perspektive des Versicherungsunternehmens ergeben sich verschiedene Vorteile durch die Nichtmeldung. Es führt unter anderem zu Einsparungen in der Bestandsverwaltung, da die Verwaltungskosten reduziert werden können. Besonders profitieren davon bestimmte Versicherungsbereiche, in denen die Schadensverteilung eine Rechtsschiefe aufweist. Auch das Betrugsrisiko wird reduziert, da Kleinschäden üblicherweise seltener überprüft werden als größere Schadensfälle. [18, vgl. Seite 100 f.][1, vgl. Seite 269]

Für die Versicherungsnehmer:innen wirkt sich der Selbstbehalt in Form einer Prämienreduktion aus. Durch die Festlegung eines Selbstbehalts kann die versicherte Person die Prämie senken. Bei Risiken mit hoher Eintrittswahrscheinlichkeit verlangt das Versicherungsunternehmen normalerweise eine höhere Prämie oder lehnt das Risiko möglicherweise ganz ab. Durch die Übernahme eines Teils der Kosten über den Selbstbehalt reduziert der Versicherungsnehmer die Prämie und kann so bestimmte Risiken überhaupt versichern oder eine bezahlbare Prämie erhalten.

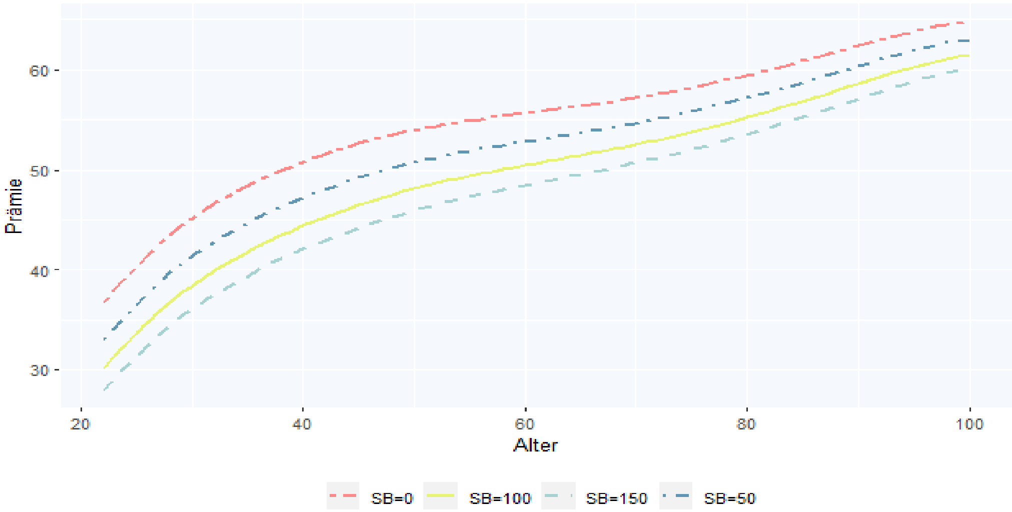

Abbildung 5.5: Die Reduktion der zu leistenden Prämie der versicherten Person mit verschiedenen Selbstbehalten (SB).

Die Versicherungsnehmer:innen können das Einsparpotenzial durch einen höheren Selbstbehalt im Vergleich zu einem Tarif mit einer höheren Prämie bewerten. Dafür wird die Anzahl der schadenfreien Jahre mit der Einsparung durch den Selbstbehalt multipliziert und mit dem Selbstbehalt in einem Schadenfall verglichen.
Ein weiterer Vorteil besteht in der Absicherung von existenzbedrohenden Risiken. Denn das wirtschaftliche Risiko wird zwischen beiden Vertragsparteien aufgeteilt. Von der versicherten Person wird dann jener Teil des Schadens übernommen, den diese auch wirtschaftlich tragen kann. In diesem Fall wird von dem oder der Versicherungsnehmer:in aus vergangenen Schadenerfahrungen eine bestimmte Schadensumme pro Jahr erwartet. Sollte diese Summe überschritten werden, kann der Rest dem Versicherungsunternehmen weitergegeben werden. [18, vgl. Seite 99 f.][1, vgl. Seite 269]

Für eine vereinfachte Notation fixieren wir das Kalenderjahr t und nehmen eine versicherten Person mit beliebigen Alter x. Als weitere Annahme gilt, dass alle Anforderungen an einen homogenen Bestand erfüllt sind, siehe Abschnitt 5.1.3. Dann bezeichnen wir

$$\begin{aligned}&\text{den} \quad \text{Rechnungsbetrag} \quad \text{mit } X_i = X \text{ und}\\&\text{den} \quad \text{Erstattungsbetrag} \quad \text{mit } Y_i = Y.\end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben, müssen diese bei Selbstbehaltstarifen unterscheiden werden. Die Versicherungsleistung entspricht nicht mehr den entstanden Kosten der versicherten Person.

Auf den folgenden Seiten werden die verschiedenen Selbstbehaltsformen vorgestellt, wobei in der weiterführenden Arbeit ein besonderes Augenmerk auf Tarifen mit absolutem Selbstbehalt liegt.

Relativer Selbstbehalt

Der relative Selbstbehalt, der oft als Prozentsatz $q \in (0,1)$ angegeben wird, legt fest, welchen Anteil des Schadens die versicherte Person selbst trägt. So müssen Versicherungsnehmer:innen einen Betrag in Höhe von qX übernehmen, während der Restbetrag von der Krankenversicherung abgedeckt wird. Dadurch ergibt sich der Erstattungsbetrag [21, vgl. Seite 46]

$$Y^q := (1-q)X.$$

Eingesetzt in die Formel (5.5) resultiert für den Kopfschaden

$$K^q = \mathbb{E}[Y^q] = \mathbb{E}[(1-q)X] = (1-q)\mathbb{E}[X].$$

Der prozentuale Selbstbehalt hat die Form einer Geraden durch den Ursprung. Die Steigung ist der Prozentsatz, wie in der Abbildung ersichtlich. Bei einem prozentualen Selbstbehalt werden Klein- und Kleinstschäden weiterhin gemeldet. Zusätzlich sind die Rechnungsbeträge nach oben hin nicht beschränkt, um unbegrenzte Leistungszahlungen zu verhindern muss eine Obergrenze eingezogen werden. [18, vgl. Seite 194]

Absoluter Selbstbehalt

Ein absoluter Selbstbehalt s ist ein im Vorhinein im Vertrag fixierter Wert, unabhängig von der Schadenhöhe. Die versicherte Person übernimmt die Kosten bis zu der Höhe des Selbstbehaltes, für entsprechende Mehrkosten haftet das Versicherungsunternehmen. In der Rückversicherung wird diese Form als *Schadenexzedentenrückversicherung* (XL) (*engl.: excess of loss*) bezeichnet. Der Erstattungsbetrag Y_i ist definiert als [21, vgl. Seite 47]

$$Y^s = \begin{cases} 0, & X \leq s \\ X-s, & X > s \end{cases} \tag{5.11}$$

oder vereinfacht dargestellt mit

$$Y^s = (X-s,0)^+.$$

Der Kopfschaden ergibt sich durch die Erwartungswertbildung, siehe Formel (5.5)

$$K^s := \mathbb{E}[(X-s,0)^+].$$

Der Kopfschaden des Erstattungsbetrag entspricht nicht einfach den, um den Selbstbehalt s reduzierten, Kopfschaden der Rechnungshöhe. Sondern die Beziehung der Kopfschäden wird durch die Verteilung der Rechnungsbeträge X beeinflusst, [21, vgl. Seite 47].

Für die Zufallsvariablen X und Y werden die passenden Verteilungsfunktionen F_X und F_Y mit den dazugehörigen Dichten f_X und f_Y angenommen.

$$X \sim F_X : \mathbb{P}[X \leq x] = F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt$$
$$Y \sim F_Y : \mathbb{P}[Y \leq x] = F_Y(x) = \int_0^x f_Y(t)dt$$

Für die Zufallsvariable Y sind die Dichten und Verteilungen für $x \leq s$ unbekannt, da diese Schäden unterhalb des Selbstbehaltes liegen und nicht gemeldet werden. Das erschwert die Modellierung der Schadenzahl und wir müssen eine Verteilungsanpassung vornehmen [18, vgl. Seite 103] [1, vgl. Seite 270]. Ein Ansatz ist es, die Schäden über dem Selbstbehalt um genau diesen zu kürzen. Im Fall $x > s$ wird ein Betrag der Höhe $x - S$ erstattet. Somit gilt für Y und $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[0 < Y \leq x] &= \mathbb{P}[s < X \leq x+s] = F_X(x+s) - F_X(s) \\
&= \int_0^{x+s} f_X(t)dt - \int_0^s f_X(t)dt \\
&= \int_s^{x+s} f_X(t)dt \\
&= \int_0^x f_X(t+s)dt \\
\Rightarrow f_Y(x) = f_X(x+s) &
\end{aligned}$$

Mit diesem Zusammenhang werden die Erwartungswerte gebildet, um die Kopfschäden zu erhalten. Mit

$$K^X = \mathbb{E}[X] = \int_s^\infty x f_X(x)dx$$

wird der Kopfschaden für den Erstattungsbetrag hergeleitet.

$$\begin{aligned}
K^Y = \mathbb{E}[Y] &= \int_0^\infty x f_Y(x)dx \\
&= \int_0^\infty x f_X(x+s)dx \\
&= \int_s^\infty (x-s) f_X(x)dx \\
&= \int_s^\infty x f_X(x)dx - s \cdot \int_s^\infty f_X(x)dx \\
&= \int_s^\infty x f_X(x)dx - s \left(\underbrace{\lim_{x\to\infty} F_X(x)}_{=1} - F_X(s) \right) \\
&= K^X - s(1 - F_X(s)) \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

Integral-Franchise

Bei einer Integral-Franchise trägt die versicherte Person die entstandenen Kosten bis zu einem festgelegten Selbstbehalt. Falls die Kosten die Grenze überschreiten, erstattet das Versicherungsunternehmen die volle Leistung. Das führt zu folgendem Erstattungsbetrag:

$$Y_i^s = \begin{cases} 0, & X_i \leq s \\ X_i, & X_i > s \end{cases}.$$

Durch diese Selbstbehaltsform wird die versicherte Person nicht zu einem schadensvermeidenden Verhalten ermutigt und wird eher versuchen Kosten oberhalb der Selbstbehaltsgrenze zu verursachen. Zudem ist es eine obere Grenze für die Kostenübernahme zu setzen. [18, vgl. Seite 105]

Die Abbildung 5.6 zeigt die Höhe des Eigenbehaltes für die versicherte Person bei den verschiedenen Selbstbehaltsformen und die Übernahme der Rechnungshöhe des Versicherungsunternehmen.

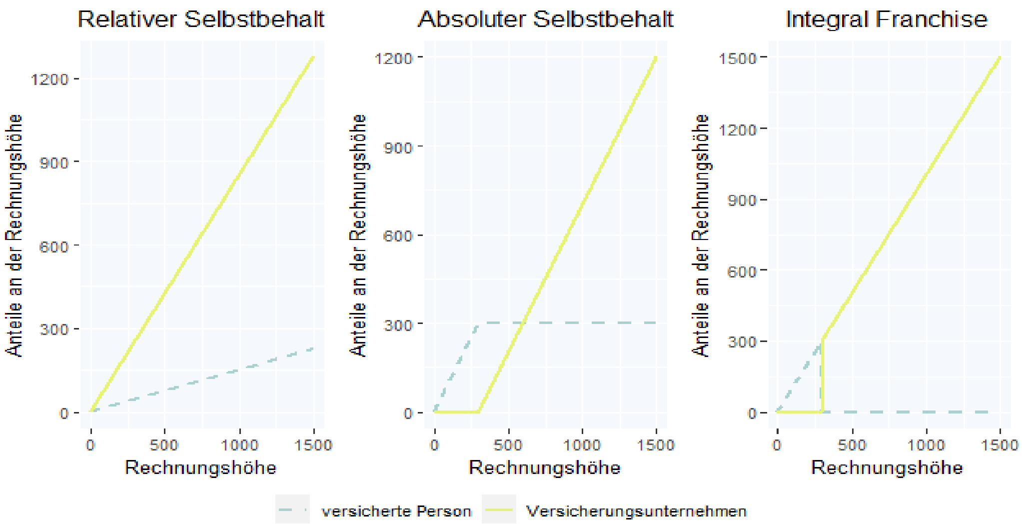

Abbildung 5.6: Abgebildet sind die jeweils von den Vertragsparteien übernommenen Anteile der Rechnungsbeträge.

Nachdem im vorherigen Abschnitt die wesentlichen Einflussfaktoren auf die Prämienhöhe eingehend beleuchtet wurden, richtet sich der Fokus im nächsten Abschnitt auf die direkte Berechnung einer Prämie - die Prämienkalkulation.

5.3 Prämienkalkulation

Die vorliegende Arbeit behandelt die Krankenversicherung nach Art der Lebensversicherung. Dessen Grundlage ist das Äquivalenzprinzip (siehe Definition 4.1). Dieses besagt, dass die erwarteten eingenommenen Prämien den erwarteten ausbezahlten Leistungen entsprechen sollen.

Mit der Zufallsvariable $Z_i(t)$ wird dargestellt, ob eine versicherte Person i zum Zeitpunkt t noch im Bestand $B(t)$ verweilt, [21, vgl. Seite 91].

$$Z_i(t) = \begin{cases} 1, & i \in B(t) \\ 0, & i \notin B(t) \end{cases}$$

Mit (5.4) gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z_i(t)=1] &= \mathbb{P}[X_x \geq x+t] = {}_tp_x \\ \mathbb{P}[Z_i(t)=0] &= \mathbb{P}[X_x < x+t] = 1 - {}_tp_x\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Für die erwarteten Zahlungen $\mathbb{E}[X_i]$[2] gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_i(t)] &= \mathbb{E}[X_i(t)|Z_i(t)] \\ &= \mathbb{E}[X_i(t)|Z_i(t)=1]\cdot\mathbb{P}[Z_i(t)=1] + \underbrace{\mathbb{E}[X_i(t)|Z_i(t)=0]}_{=0}\cdot\mathbb{P}[Z_i(t)=0] \end{aligned}$$

Der zweite Summand fällt weg, da bei einer Person nur Zahlungen anfallen, wenn die Person auch im Bestand verweilt. Mit (5.13) können wir den ersten Summanden umformen

$$\mathbb{E}[X_i(t)] = \mathbb{E}[X_i(t)|Z_i(t)=1]\cdot {}_tp_x\,. \tag{5.14}$$

5.3.1 Leistungsbarwert

Die Versicherungsleistungen werden durch den Leistungsbarwert A_x dargestellt. Kalkuliert werden die Leistungen basierend auf dem Rechnungszins, der Ausscheidewahrscheinlichkeit und den Kopfschäden. In dem vorherigen Abschnitt 5.2.3 wurden die Kopfschaden als der Erwartungswert der Versicherungsleistungen definiert. Sei X_i die Zufallsvariable der Rechnungshöhen und ${}_tp_x$ die Überlebenswahrscheinlichkeit aus der Definition 5.5, dann erhalten wir mit der Formel (5.14) den Leistungsbarwert.

Definition 5.12. (Leistungsbarwert) *Der versicherungsmathematische Barwert für die diskontierten Versicherungsleistungen einer x-jährigen Person lautet*

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \nu^t \mathbb{E}[X_i(t)] = \sum_{t=0}^{\omega-x} \nu^t\, {}_tp_x\, K_{x+t}. \tag{5.15}$$

Als Endalter wird meist $\omega = 120$ angenommen, [21, vgl. Seite 92][33, vgl. Seite 20].

In der Krankenversicherung werden spezifische Kommutationszahlen verwendet, die einen Bezug zu den Kopfschäden herstellen:

$$O_x := D_x k_x \text{ und } U_x := \sum_{t=0}^{\omega-x} O_{x+t} \tag{5.16}$$

Die Rekursion $U_x = U_{x+1} + O_x$ hat die Start- und Endwerte $D_{x_0} = v^{x_0}\ell_{x_0}$, $D_\omega = N_\omega$ und $U_\omega = O_\omega$. Eingesetzt in die Kommutationszahlen aus Abschnitt 2.1, der Spaltung des Kopfschadens in Grundkopfschaden und Profil $K_x = G \cdot k_x$ und erweitert mit v^x

[2] Die erwarteten Zahlungen entsprechen dem Zahlungsstrom in beide Richtungen, den Prämienzahlungen sowie die Leistungen an die versicherte Person.

gilt für den Leistungsbarwert folgende Darstellung.

$$\begin{aligned} A_x &\overset{(2.1)}{=} \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t K_{x+t} \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} \overset{(5.6)}{=} G \cdot \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} v^{x+t} k_{x+t} \ell_{x+t}}{v^x \ell_x} \\ &= G \cdot \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t} \cdot k_{x+t}}{D_x} = G \cdot \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} O_{x+t}}{D_x} \\ &\overset{(5.16)}{=} G \cdot \frac{U_x}{D_x}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

5.3.2 Nettoprämienbarwert

Bisher bezeichnete $X_i(t)$ die zu zahlenden Leistungen an die Versicherungsnehmer:innen. Der folgende Abschnitt betrachtet die Zahlungen einer versicherten Person an ein Versicherungsunternehmen - die Prämien. Somit bezeichnet die Zufallsvariable $X_i(t)$ die erwarteten Prämienzahlungen einer Person i zu einem Zeitpunkt t. Der erwartete Zahlungsstrom $X_i(t)$ kann nur die Werte 0 oder 1 annehmen, $\mathbb{E}[X_i(t)|Z_i(t)] = 1$. Aus der Formel (5.14) erhalten wir den Rentenbarwert.

Definition 5.13. (Rentenbarwert) *Der versicherungsmathematische Barwert für die abgezinsten Nettoprämienzahlungen einer x-jährigen versicherten Person ist*

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \nu^t \mathbb{E}[X_i(t)] = \sum_{t=0}^{\omega-x} \nu^t \, {}_t p_x \, .$$

Auch werden mit den Kommutationszahlen aus dem Abschnitt 2.1 der Nettoprämienbarwert vereinfacht dargestellt.

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \, {}_t p_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} = \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} v^{x+t} \ell_{x+t}}{v^x \ell_x} = \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t}}{v^x \ell_x} = \frac{N_x}{D_x} \tag{5.18}$$

5.3.3 Netto- und Bruttoprämie

Mit der *Nettoprämie* - auch *natürliche Prämie* oder *Risikoprämie* genannt - werden nur die erwarteten Versicherungsleistungen innerhalb einer Periode abgedeckt. Die reine Nettoprämie als tatsächliche Tarifprämie führt zu dem Ruin des Versicherungsunternehmens, da keine weiteren Kosten berücksichtigt werden. Zuschläge wie Abschluss- und Verwaltungskosten werden in die *Bruttoprämie* eingerechnet. Die Nettoprämie resultiert aus Umformung der Äquivalenzgleichung 4.1, [8, vgl. Seite 74][21, vgl. Seite 109][33, vgl. Seite 21].

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}. \tag{5.19}$$

Durch Einsetzen in die Barwertformeln (5.17) und (5.18) resultiert die Nettoprämie, dargestellt durch die Kommutationszahlen.

$$P_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{K_{x+t} \cdot D_{x+t}}{N_x} = G \cdot \frac{U_x}{N_x}. \tag{5.20}$$

Bruttoprämie

Die weiteren, für das Versicherungsunternehmen anfallenden Kosten werden mit Zuschlägen auf die Nettoprämie ausgeglichen. Mögliche Kosten sind, [33, vgl. Seiten 117 ff.][23, vgl. Seiten 21 ff.]:

- *Abschlusskosten*, dazu zählen jegliche Kosten die bei Vertragsabschluss anfallen, z.B. Maklerprovisionen.
- *Verwaltungskosten*, sind unter anderem Schadenverhütungskosten, Personalkosten, Kosten für Verwaltungssysteme und Sachkosten für den Versicherungsbetrieb
- *Sicherheitszuschlag*, dient zur Einrechnung von nicht vorhersehbaren und damit nicht einkalkulierbaren Abweichungen, dies kann durch Prämienkalkulationsprinzipien erfolgen, welche in Abschnitt 5.3.4 vorgestellt werden.
- *Zuschlag für eine erfolgsunabhängige Gewinnbeteiligung*, ist eine Form der Gewinnbeteiligung, welche nicht von dem Erfolg des Unternehmens abhängt, sondern bei Schadenfreiheit eines Vertrages ausbezahlt wird. Dies kann im Umlageverfahren - als prozentualer Zuschlag auf die Bruttozuschläge - oder innerhalb der Kopfschäden - als prozentualer Zuschlag in die Kopfschäden und damit auf die Nettoprämie - eingerechnet werden, [28, vgl. Seite 6]. Eine detailliertere Beschreibung befindet sich in Abschnitt 6.

Die Bruttoprämie wird ebenfalls nach dem Äquivalenzprinzip gebildet und beinhaltet den Sicherheitszuschlag β sowie weitere Kostenzuschläge δ auf die Nettoprämie, [33, vgl. Seite 23].

Definition 5.14. (Ungezillmerte Bruttoprämie)

$$B_x = \frac{P_x(1+\delta)}{1-\beta} \tag{5.21}$$

Krankenversicherung	1%
Sachversicherung	11%
Lebensversicherung	4%

Tabelle 5.1: Steuersätze der Versicherungssparten

Die Versicherungssteuer wird auf die Bruttoprämie gerechnet, in der Tabelle 5.1 werden die Steuersätze in den verschiedenen Versicherungssparten angeführt [44].

5.3.4 Prämienkalkulationsprinzipien

In der Kranken- und Lebensversicherung wird die Risikoprämie durch Sicherheiten in den Rechnungsgrundlagen eingerechnet, in der Schadenversicherung kommen Prämienkalkulationsprinzipien zur Anwendung. Mit ihnen soll gewährleistet werden, dass jede versicherte Person im Kollektiv, basierend auf der individuellen Schadenhöhenverteilung, auf

die gleiche und faire Weise eine Prämie zugeordnet wird. Für Versicherungsunternehmen ist es von größerer Bedeutung die Prämienkalkulationsprinzipien auf den Gesamtschaden eines Kollektivs anzuwenden, da so eine ausreichende Prämie für den Bestand und eine geeignete Aufteilung der Prämie auf die Individuen gewährleistet wird. [11, vgl. Seite 239 ff.]
Für das Schadenzahl-Schadenhöhen-Modell, welches auf dem Kollektiven Modell der Schadenversicherungen beruht, kann es von Nutzen sein, die Kopfschäden durch zusätzliche Sicherheiten mithilfe von Prämienkalkulationsprinzipien zu versehen.

Eine Abbildung $\Pi : \mathcal{L}^{\Pi} \to \mathbb{R}_{+} \cup \{\infty\}$ mit $\mathcal{L}^{\Pi} \subset \mathcal{L}^{1}(\mathbb{R}_{+})$, die jedem Schaden $X \in \mathcal{L}^{\Pi}$ einen reellen Wert zuordnet, nennen wir *Prämienkalkulationsprinzip*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Falls $X \sim F_x$, $Y \sim F_Y$ und $F_X = F_Y$, dann gilt $\Pi(X_i) = \Pi(X_j)$, $\forall X_i,\ X_j \in \mathcal{L}^{\Pi}$. Besitzen Risiken die gleiche Schadenhöhenverteilung wird die gleiche Prämie angewendet.

(ii) Es gilt $\Pi(X) \geq \mathbb{E}[X]$, $\forall X \in \mathcal{L}^{\Pi}$, der Nettoprämie wird ein nichtnegativer Sicherheitszuschlag zugeführt.

(iii) $\mathbb{P}[\{X > \Pi(X)\}] > 0$, $\forall X \in \mathcal{L}^{\Pi}$, die Schadenhöhe ist mit einer strikt positiven Wahrscheinlichkeit höher als die angesetzte Prämie. Dies wird auch *no-arbitrage Bedingung* genannt, da es dem Versicherungsunternehmen nicht möglich ist einen sicheren Gewinn zu erzielen.

Die Klasse, aller unter dem Prämienprinzip Π versicherbaren Risiken, wird mit $\mathcal{L}^{\Pi}$ bezeichnet. Falls $\Pi(X) = \infty$ gilt, bezeichnen wir das Risiko als unversicherbar.

Satz 5.15. (Eigenschaften)

(iv) Positive Homogenität: $\Pi(cX) = c\Pi(X),\ \forall c \in (0, \infty),\ \forall X \in \mathcal{L}^{\Pi}$

(v) Tanslationsinvarianz: $\Pi(c + X) = c + \Pi(X),\ \forall c \in (0, \infty),\ \forall X \in \mathcal{L}^{\Pi}$

(vi) Subadditivität: $\Pi(X_i + X_j) \leq \Pi(X_i) + \Pi(X_j),\ \forall X_i, X_j \in \mathcal{L}^{\Pi}$

(vii) Stochastische Monotonie: aus $X_i \leq X_j$ folgt $\Pi(X_i) \leq \Pi(X_j),\ \forall X_i, X_j \in \mathcal{L}^{\Pi}$

Nettoprämienprinzip: $\Pi(X) = \mathbb{E}[X]$
Die Prämie wird nach dem Äquivalenzprinzip gebildet und ist ident zur Nettoprämie, es wird kein weiterer Sicherheitszuschlag eingerechnet. Das führt zu einem sicheren Ruin des Versicherungsunternehmens, da nur die Risiken abgedeckt sind aber sonst keine weiteren Kosten berücksichtigt werden. Diese ist lediglich als untere Schranke für die Kalkulation einer angemessenen Prämie anwendbar. Die Nettoprämie erfüllt alle Eigenschaften aus Satz 5.15.

Erwartungswertprinzip: $\Pi(X) = \mathbb{E}[X](1 + \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}_{+}$
Der Parameter α wird als relativer Sicherheitszuschlag bezeichnet, der Sicherheitszuschlag

ergibt sich dann durch die Multiplikation mit der Nettoprämie $\alpha\mathbb{E}[X]$. Das Erwartungswertprinzip erfüllt nicht die Eigenschaft der Subadditivität.

Varianzprinzip: $\Pi(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha\mathbb{V}[X],\ \alpha \in \mathbb{R}_+$
Der Sicherheitszuschlag ergibt sich aus dem Teil $\alpha\mathbb{V}[X]$, welcher stochastisch starke Auswirkungen auf die Prämie durch das Quadrat in der Varianz hat. Das Varianzprinzip ist durch den nichtnegativen relativen Sicherheitsaufschlag größer als das Nettoprämienprinzip und erfüllt die Eigenschaft Translationsinvarianz.

Standardabweichungsprinzip: $\Pi(X) = \mathbb{E}[X] + \alpha\sqrt{\mathbb{V}[X]},\ \alpha \in \mathbb{R}_+$
Der Sicherheitszuschlag $\sqrt{\mathbb{V}[X]}$ ist in diesem Prinzip eindimensional $\alpha\mathbb{V}[X]$. Das Standardabweichungsprinzip erfüllt die gleichen Eigenschaften wie das Varianzprinzip und ist zusätzlich auch positiv homogen.

Exponentialprinzip: $\Pi(x) = \frac{1}{\alpha}\log\mathbb{E}[e^{\alpha X}],\ \alpha \in \mathbb{R}_+$
Die Grenzwerte bilden die Prämienschranken. Für $\alpha \to 0$ ist die Nettoprämie erfüllt, der Maximalschaden ergibt sich für $\alpha \to \infty$.

5.4 Die Alterungsrückstellung

Häufig werden Krankenversicherungsverträge in jungen Jahren lebenslänglich abgeschlossen. Da mit dem Alter eine Verschlechterung des Gesundheitszustandes einhergehen kann, können die Arztkosten steigen. Daraus resultieren steigende Kopfschäden mit zunehmenden Alter, welche die Prämie maßgeblich beeinflussen. Um ältere Personen vor nicht leistbaren Beitragszahlungen zu schützen soll die Prämie über die Vertragslaufzeit unverändert bleiben[3], siehe 4.1. Damit die langfristige Finanzierbarkeit der Versicherungsleistungen gewährleistet werden kann, wird in jungen Jahren eine höhere Prämie verlangt, welche mögliche Verluste im hohen Alter ausgleichen soll. Der entstandene Überschuss wird verzinst und der *Alterungsrückstellung* zugeführt, die dazu dient, die Leistungen über die gesamte Laufzeit auszugleichen. Die Prämie steigt mit wachsendem Eintrittsalter, da die Ansparphase verkürzt ist. In der Abbildung 5.7 ist der Kostenverlauf (die rote Linie) dargestellt. Dieser steigt über die Jahre, bei einem früheren Eintrittsalter wird die Prämie geringer angesetzt. Bei einem späteren Eintrittsalter wird der Schnittpunkt zwischen Prämie und Kostenkurve nach hinten verschoben. Die Versicherungsnehmer:innen geraten somit erst später in den Genuss der Leistungen.

[3] Diese Aussage ist gültig, solange keine Anpassungsgründe nach §178f VersVG vorliegen, die Auswirkungen auf die Prämienhöhe haben.

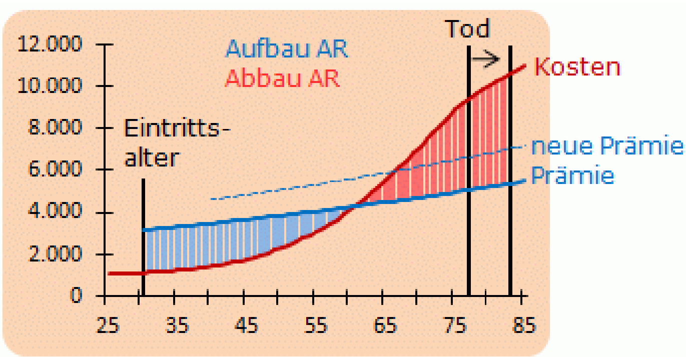

Abbildung 5.7: Verlauf einer Alterungsrückstellung mit einem Prämienvergleich abhängig von dem Eintrittsalter [37].

5.4.1 Die Prospektive Altersrückstellung

Definition 5.16 (Prospektive Altersrückstellung)**.** *Sei eine versicherte Person mit dem Alter x dem Bestand beigetreten. Dann ist die prospektive Alterungsrückstellung nach m Jahren definiert als [21, vgl. Seite 153]*

$$_mV_x = A_{x+m} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+m} \text{ oder } {}_mV_x = (P_{x+m} - P_x) \cdot \ddot{a}_{x+m}. \tag{5.22}$$

In der prospektiven Darstellung liegt der Fokus auf der Gegenüberstellung der erwarteten Leistungen zu den erwarteten Einnahmen. Die Alterungsrückstellung resultiert aus der Differenz der Barwerte, [23, vgl. Seite 30].

5.4.2 Die Retrospektive Altersrückstellung

Mit der *retrospektiven Altersrückstellung* wird die Verwendung der bis zu dem Zeitpunkt m gezahlten Prämien untersucht. Zur Gegenüberstellung werden die bisherigen rechnerischen Prämieneinnahmen und die aufgewendeten rechnerischen Versicherungsleistungen verwendet, [23, vgl. Seite 31].

Definition 5.17. Retrospektive Altersrückstellung

$$_mV_x = \sum_{t=0}^{m-1} \frac{D_{x+t}}{D_{x+m}} \cdot (P_x - K_{x+t}) \tag{5.23}$$

Durch Umformen und Einsetzen der Prospektiven Altersrückstellung folgt die Darstellung der Retropesktiven Altersrückstellung.

Beweis. Wir starten mit der prospektiven Darstellung und setzen für A_{x+m} und $\ddot{a}_{x+m}$ die Darstellungen der Kommutationszahlen aus (5.17) und (5.18) ein.

$$\begin{aligned}
{}_mV_x &= A_{x+m} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+m} \\
&= \sum_{t=0}^{\omega-(x+m)} \frac{D_{x+m+t}}{D_{x+m}} \cdot K_{x+t+m} - P_x \cdot \sum_{t=0}^{\omega-(x+m)} \frac{D_{x+t+m}}{D_{x+m}} \\
&= \sum_{t=0}^{\omega-x-m} \frac{D_{x+m+t}}{D_{x+m}} \cdot (K_{x+t+m} - P_x)
\end{aligned}$$

Durch einen Indexshift von $t = 0 \to t = m$ und $\omega - x - m \to \omega - x$ und dem Aufteilen der Summe gilt:

$$= \sum_{t=m}^{\omega-x} \frac{D_{x+t}}{D_{x+m}} \cdot (K_{x+t} - P_x) = \frac{D_x}{D_x} \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+t}}{D_{x+m}} (K_{x+t} - P_x) - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{D_{x+t}}{D_{x+m}} (K_{x+t} - P_x)$$

Durch Ausmultiplizieren der Klammern im ersten Term resultieren die Barwerte aus den Formeln (5.17) und (5.18).

$$\begin{aligned} &= \frac{D_x}{D_{x+m}} \left(\underbrace{\sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+t}}{D_x} K_{x+t}}_{A_x} - \underbrace{\sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+t}}{D_x}}_{\ddot{a}_x} \frac{A_x}{\ddot{a}_x} \right) - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{D_{x+t}}{D_{x+m}} (K_{x+t} - P_x) \\ &= \frac{D_x}{D_{x+m}} \underbrace{(A_x - A_x)}_{0} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{D_{x+t}}{D_{x+m}} (K_{x+t} - P_x) = \sum_{t=0}^{m-1} \frac{D_{x+t}}{D_{x+m}} (P_x - K_{x+t}) \end{aligned}$$

$\square$

5.4.3 Die Zuführung zur Altersrückstellung

Durch Umformen der prospektiven Darstellung ist es möglich die verschiedenen Verwendungszwecke der Prämie aufzuschlüsseln und eine Differenz der aufeinanderfolgenden Altersrückstellungen zu betrachten. Wir starten mit der Darstellungsform von der Formel der prospektiven Alterungsrückstellung (5.22).

$$_mV_x = \underbrace{K_{x+m} + v \cdot p_{x+m} \cdot A_{x+m+1}}_{=A_{x+m}} - P_x \cdot \underbrace{(1 + v \cdot p_{x+m} \cdot \ddot{a}_{x+m+1})}_{=\ddot{a}_{x+m}} \tag{5.24}$$

Durch Ausmultiplizieren der Klammer und herausheben von vp_{x+m} führt zu

$$\begin{aligned} &= K_{x+m} + vp_{x+m} A_{x+m+1} - P_x - P_x v p_{x+m} \ddot{a}_{x+m+1} \\ &= K_{x+m} + vp_{x+m} \underbrace{(A_{x+m+1} - P_x \ddot{a}_{x+m+1})}_{= {}_{m+1}V_x} - P_x. \end{aligned}$$

Mit Satz 5.6 (i) gilt $p_x = 1 - q_x - w_x$

$$_mV_x = K_{x+m} + v(1 - q_{x+m} - w_{x+m}) \, {}_{m+1}V_x - P_x.$$

Durch umformen nach P_x erhalten wir die genaue Prämienzusammensetzung.

$$P_x = \underbrace{(v \cdot {}_{m+1}V_x - {}_mV_x)}_{\text{Sparprämie}} + \underbrace{K_{x+m}}_{\text{natürliche Risikoprämie}} - \underbrace{v \cdot (q_{x+m} + w_{x+m}) \cdot {}_{m+1}V_x}_{\text{Vererbungsanteil}} \tag{5.25}$$

Die *Sparprämie* wird für den Aufbau der Deckungsrückstellung verwendet, die *Risikoprämie* deckt die erwarteten Leistungen im m-ten Versicherungsjahr und die *Vererbung* resultiert aus dem Bestandsaustritt einer versicherten Person. Treten mehr Versicherungsnehmer:innen aus dem Bestand aus, wirkt sich das beitragsmindernd auf das Kollektiv aus. Durch den Verlauf der Ausscheideordnungen wächst der Vererbungsanteil mit einem höheren Alter an, siehe Abbildung 5.2. Die steigenden Kopfschäden werden durch die steigende Risikoprämie repräsentiert. Die Sparprämie kann durch die Differenz der Nettoprämie und der Risikoprämie (inklusive Vererbungsanteil) dargestellt werden. Unter der Bedingung der gleichbleibenden Prämienraten, resultiert die über die Vertragslaufzeit hinweg fallende Sparprämie. [23, vgl. Seite 34]

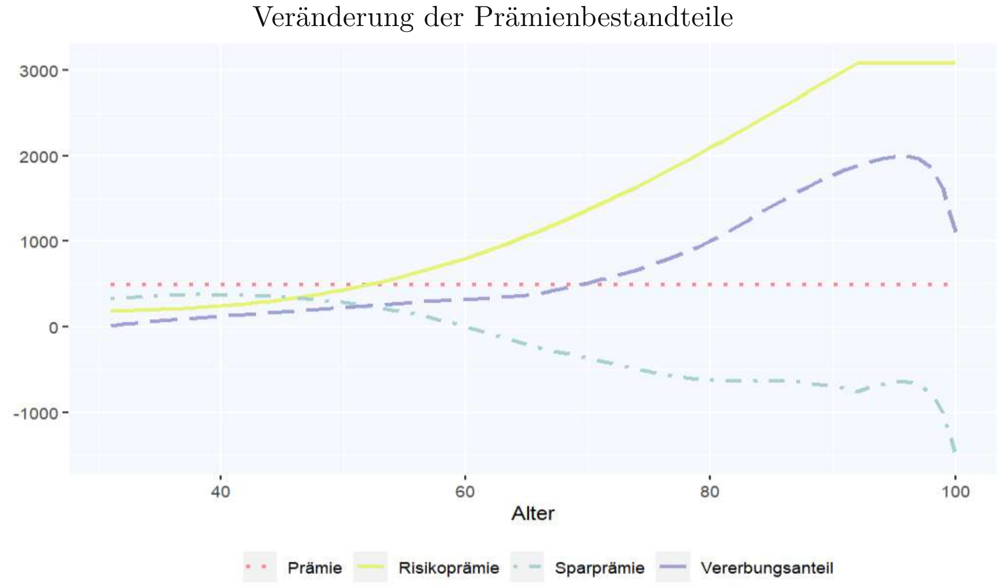

Abbildung 5.8: Die altersabhängige Veränderung der Prämie, Sparprämie, Risikoprämie und des Vererbungsanteils. Die Werte sind aus [23, vgl. Seite 37].

Zusammenfassend liefert dieses Kapitel einen grundlegenden Einblick in das rechtliche und mathematische Fundament für die Prämienkalkulation in der Krankenversicherung. Insbesondere wurde die neue Berechnungsmethode der Kopfschäden nach dem Schadenzahl-Schadenhöhen-Modell in dem Abschnitt 5.2.3 vorgestellt. Im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit wird die Tarifierung speziell für Versicherungstarife mit erfolgsunabhängiger Prämienrückvergütung ausführlich behandelt, wobei auf die im vorhergehenden Kapitel vermittelten Grundlagen zurückgegriffen wird.

6 Tarifierung mit Erfolgsunabhängiger Prämienrückvergütung

Dieses Kapitel widmet sich einer speziellen Tarifart in der Krankenversicherung - den Tarifen mit erfolgsunabhängiger Prämienrückvergütung. Es beginnt mit einer ausführlichen Erklärung des Konzepts der Prämienrückvergütung, sowohl im erfolgsabhängigen als auch im erfolgsunabhängigen Kontext, und beleuchtet die verschiedenen Formen, die diese annehmen kann. Anschließend werden die Besonderheiten und die damit verbundene Problematik der erfolgsunabhängigen Prämienrückvergütung erläutert.

Um zu modellieren, ob beziehungsweise wann eine versicherte Person eine Prämienrückvergütung in Anspruch nimmt, werden Übergangswahrscheinlichkeiten und ihre Zustandsverteilungen benötigt. Diese werden in einem eigenen Abschnitt behandelt, wobei auch der spezielle Fall - eine Rückerstattung nach einem schadenfreien Jahr - als Vereinfachung betrachtet wird.

Im weiteren Verlauf erfolgt eine detaillierte Erklärung, wie Prämienrückvergütungen bisher im deutschsprachigen Raum - für den oben genannten Spezialfall - berechnet wurden. Anschließend wird die Rückvergütung im Kontext des Schadenzahl-Schadenhöhen-Modells aus dem vorherigen Kapitel weiterentwickelt. Hierbei wird ein Algorithmus zur Berechnung der Prämien vorgestellt, und es wird ein Ausblick auf die Weiterentwicklung für mehrere schadenfreie Jahre gegeben, unter Einbeziehung der Thielschen Differenzengleichung.

Zum Abschluss dieses Kapitels werden die Vor- und Nachteile eines Tarifes mit einer Prämienückvergütung sowohl für die versicherten Personen als auch für das Versicherungsunternehmen umfassend beleuchtet. Dies ermöglicht eine ganzheitliche Betrachtung dieser besonderen Tarifart in der Krankenversicherung.

6.1 Erfolgsunabhängige Prämienrückvergütung

Neben den Zahlungen im Versicherungsfall an den oder die Versicherungsnehmer:in haftet das Versicherungsunternehmen auch für andere vereinbarte Leistungen. Zu diesen gehört die Prämienrückvergütung, welche auch als Prämienrückerstattung oder -rückgewähr bezeichnet wird. Bei einer Prämienrückvergütung erstattet das Versicherungsunternehmen - in Form von Geld - Teile der Prämie zurück. Unterschieden wird zwischen der *erfolgsabhängigen* und *erfolgsunabhängigen Prämienrückerstattung*.

Die erfolgsabhängige Prämienrückvergütung, welche im folgenden nicht weiter betrachtet behandeln, entsteht durch eine sehr vorsichtige Prämienkalkulation, welche zu einem

Gewinn - auch Überschuss genannt - für das Versicherungsunternehmen führt. Mit der erfolgsabhängigen Prämienrückerstattung sollen zu hoch angesetzte Prämien im Nachhinein korrigiert werden. Sie wird auch als Gewinnbeteiligung bezeichnet, da sie abhängig von dem Überschuss des Versicherungsunternehmen ist. Die häufigste Anwendung findet die Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer:innen in der Lebensversicherung, [25, vgl. Seite 208 f.].

Die erfolgsunabhängige Prämienrückvergütung (euPR) ist die vertragliche Zusage, im Falle der Schadenfreiheit der versicherten Person in einer bestimmten Periode einen vorher festgelegten Betrag auszubezahlen. Die Auszahlung ist unabhängig von dem erzielten Gewinn des Versicherungsnehmers, da die Leistung durch einen zusätzlichen Prämienanteil finanziert wird, [25, vgl. Seite 207]. In dem weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit werden die Auszahlung nach einem leistungsfreien Jahr betrachtet, somit hat die Auszahlung der Prämienrückvergütung die Form:

$$\text{euPR-Leistung} = \begin{cases} 0 & \text{, Leistung in dem Jahr eingereicht} \\ \frac{\beta}{12} \cdot \text{Jahresbruttoprämie} & \text{, Leistungsfreiheit in diesem Jahr} \end{cases} \tag{6.1}$$

Der Parameter $\beta \in \{1, \ldots, 6\}$ gibt die Anzahl der rückerstatteten Prämienzahlungen an. Den Faktor $\alpha = \frac{\beta}{12}$ bezeichnen wir als den *Auszahlungsfaktor* und $\alpha \cdot$ Jahresbruttoprämie als die *Auszahlungsrate*.

Die erfolgsunabhängige Prämienrückerstattung entspricht für versicherte Personen im Wesentlichen einem individuellen und absoluten Selbstbehalt. Im Unterschied zur Selbstbeteiligung wird die Prämienrückvergütung direkt in die Prämie mit eingepreist, und ist vergleichbar mit einer Selbstbeteiligung, welche vorsorglich vor Eintritt eines Leistungsfalles bezahlt, aber bei nicht Verwendung zurückerstattet wird.

Das Konzept der Rückerstattung ähnelt dem Bonus-Malus-System aus der KfZ-Unfallversicherung, bei dem unfallvermeidendes Verhalten durch niedrigere Prämien belohnt wird. Diesen Anreiz soll auch die Prämienrückvergütung bieten und somit die Eigenverantwortung der Versicherungsnehmer:innen fördern. [25, vgl. Seite 6] Versicherten Personen wird ein rationales Verhalten unterstellt, sodass Rechnungsbeträge erst vor der Auszahlung eingereicht werden, falls die entstandenen Kosten die Rückvergütung übersteigen. Dieses Verhalten ähnelt dem Verhalten welches bei einer Rückversicherung stattfindet, [3, vgl. Seite 372].

Weitere Varianten der erfolgsunabhängigen Prämienrückvergütungen sind:

1. Eine allgemeinere Gestaltung besteht darin, die Prämienrückvergütung erst nach einer bestimmten Anzahl schadenfreier Jahre m zu gewähren. In diesem Fall gestaltet sich die Entscheidung für versicherte Personen, ob sie die Prämienrückvergütung in Anspruch nehmen, komplexer. Besonders in den ersten Jahren ist zu erwarten, dass vermehrt Schadensmeldungen eingehen, da die entstandenen Kosten nicht unmittelbar mit der Rückvergütung assoziiert werden. Im weiteren Verlauf lässt dieser Trend nach.

2. Zusätzlich zur Option keiner Rückzahlung oder einer konstanten Rückzahlungsrate (für mehrere Jahre) besteht auch die Möglichkeit, den Auszahlungsfaktor für jedes schadenfreie Jahr schrittweise zu erhöhen. Allerdings sollte diese Steigerung auf maximal m Jahre begrenzt sein. Für alle weiteren schadenfreien Jahre bleibt die Auszahlungsrate konstant. Dadurch wird der bereits erwähnte Effekt, dass in den ersten Jahren eine erhöhte Häufigkeit von Schadensfällen auftritt, abgeschwächt.

in diesem Fall ist der Auszahlungsfaktor für die Auswahl des Modells entscheidend. Steht der Auszahlungsfaktor $\alpha(j)$ in Abhängigkeit zu der Anazhl der schadenfreien Jahre j, so entspricht das Modell der ersten Variante. Dadurch wird der Auszahlungsfaktor alljährlich erhöht - bis zu dem Maximum m, [15, vgl. Seite 53]. Bei der zweiten Variante gilt jedoch die Fallunterscheidung:

$$\alpha = \begin{cases} 0, & j < m \\ \frac{\beta}{12}, & j = m. \end{cases} \tag{6.2}$$

Zusätzlich zu den verschiedenen Ausprägungen der erfolgsunabhängigen Prämienrückvergütung hat das Versicherungsunternehmen die Möglichkeit, weitere Bedingungen für eine Rückerstattung festzulegen, [28, vgl. Seite 10].

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird hauptsächlich die Prämienrückgewähr bei einem schadenfreien Jahr Variante behandeln, die gleichzeitig einen Spezialfall - mit der Wahl von , mit $m12$ - der beiden anderen Formen darstellt. Um jedoch ein umfassendes Verständnis für die Tarifierung mit erfolgsunabhängiger Prämienrückvergütung zu erlangen, wird im Abschnitt 6.3.1 zuerst die allgemeine Herangehensweise und daraufhin der speziellen Fall für $m = 1$ untersucht.

6.2 Problematik und Besonderheiten der Kalkulation

Wie in der Formel (6.1) ersichtlich ist, ist die Prämienrückvergütung abhängig von der Prämie. Auf der anderen Seite beeinflusst sowohl die Höhe der Krankheitskosten als auch die Prämienrückvergütung die Höhe der Prämie.

Folglich sollte die Prämienhöhe auch bei der Prämienkalkulation berücksichtigt werden. Dies führt zu einer Individualisierung der Prämien. In der Regel liegen keine ausreichende Daten über den individuellen Versicherungsverlauf vor. Deshalb müssen Vereinfachungen für die Beitragskalkulation vorgenommen werden. Daraus resultiert eine Individualisierung der Prämienkalkulation und gehört zur *Erfahrungstarifierung*, die bei Tarifierung von einzelnen Risiken in einem inhomogenen Bestand angewandt wird. Hier fließen in die Prämienkalkulation über die Leistungshistorie des gesamten Bestandes auch die individuellen Versicherungsverläufe einer versicherten Person mit ein. [46]

Die Kalkulation von Tarifen gestaltet sich umfangreicher, da die herkömmliche Methode der Mittelwertbildung nicht anwendbar ist. Stattdessen werden Schadenhöhenverteilungen der

Rechnungsbeträge ermittelt. Darüber hinaus werden die Kopfschäden für Krankheitskosten und die Prämienrückerstattung separat gebildet. Falls ein Versicherungsunternehmen sich für eine Rückerstattung abhängig von mehreren leistungsfreien Jahren entscheidet, sind zusätzliche Schätzungen für Zustands- und Übergangswahrscheinlichkeiten erforderlich, wie im Abschnitt 6.3.1 erläutert. Abschließend sei darauf hingewiesen, dass in der Praxis bisher angewandte Kalkulationsmethoden ein Iterationsverfahren verwenden, welches aufwendig und in der Krankenversicherung unüblich ist.

6.3 Tarifierung - state of the art

In [3] und [28] wird eine Methode vorgestellt, Tarife mit der erfolgsunabhängigen Prämienrückvergütung zu kalkulieren. Dabei werden zwei Ansätze betrachtet: einerseits die Kalkulation der Rückvergütung innerhalb der Kopfschäden oder andererseits als Kostenzuschlag auf die Prämie.
Bei beiden Möglichkeiten müssen jeweils die zu erwarteten Rechnungsbeträge als auch die Auszahlung der Prämienrückvergütung separat modelliert werden, sowie die Zustandsverteilungen geschätzt werden. Bei der Berechnung der Prämie wird ein Iterationsverfahren angewendet. Aufgrund der komplexen Berechnung kann nicht die genaue Prämie verwendet werden. Stattdessen muss in jedem Iterationsschritt eine durchschnittliche Prämienrate herangezogen werden.

In den folgenden Unterkapiteln wird die schrittweise Vorgehensweise zur Prämienberechnung beschrieben, wobei diese in jedem Iterationsschritt erneut durchgeführt werden muss.

6.3.1 Zustands- und Übergangswahrscheinlichkeiten

Im folgenden Abschnitt werden die Definitionen aus [3, vgl. Seite 373 ff.] verwendet.
Eine sinnvolle Methode zur Darstellung der Wahrscheinlichkeit, eine Versicherungsleistung in Anspruch zu nehmen, bieten diskrete Markovketten, wie im folgenden Abschnitt erörtert wird, [29, vgl. Seite 383][17, vgl. Seite 17].
Die Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten ist bei einem mehrjährigen Rückvergütungsmodell unerlässlich. Die Ausprägung der Rückerstattung (siehe Abschnitt 6.1) hat nur Auswirkungen auf den Auszahlungsfaktor, aber nicht auf die Vorgehensweise für die Ermittlungen der Übergangs- und Zustandswahrscheinlichkeiten.

Die Anzahl der benötigten beziehungsweise maximalen leistungsfreien Jahre m für eine Rückvergütung werden vom Versicherungsunternehmen bestimmt. Es gilt die Forderung $m < \infty$.
Die Anzahl der leistungsfreien Jahre am Ende des Jahres t in denen sich eine versicherte Person befinden kann ist die Zufallsvariable $Z(t)$. Bei Versicherungsbeginn gilt $Z(t-1) = 0$,

sonst $Z(t) = j,\ j \in S$.

$$Z(t-1) = \begin{cases} 0, & j = 0 \\ j, & 0 < j < m \\ m, & j \geq m. \end{cases} \tag{6.3}$$

Daraus resultiert ein endlicher Zustandsraum $S = \{0, \ldots, m\}$ und die Voraussetzungen für eine diskrete Markovkette mit $m+1$ Zuständen sind gegeben, siehe 2.9. Die Markoveigenschaft ist unter der Annahme erfüllt, dass die Anzahl der leistungsfreien Jahre die Höhe der Kopfschäden, sowie die Leistungsart (die Erstattung von Rechnungsbeträgen oder eine Rückvergütung) nur von dem Betrachtungszeitpunkt Anfang des Jahres t abhängt und nicht weitere Informationen über die Zustände Einfluss haben.

Gemäß der Annahme, dass das Auswertungsjahr keinen Einfluss auf die Höhe der Kopfschäden hat, können die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t),\ i,j \in S$ als stationär angenommen werden. Daraus resultiert eine homogene Markovkette mit $p_{ij}(t) = p_{ij}$.

Die Einträge in der Übergangsmatrix P sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten c_i eine Rückvergütung in Anspruch zu nehmen und setzt sich nach folgenden Regeln zusammen: Eine Rückvergütung wird in Anspruch genommen, falls $\mathbb{P}[S_x = 0] = c_i$.

1. Die Wahrscheinlichkeit eine Prämienrückvergütung auszubezahlen ist $p_{(i-1)\ i} = c_i$.
2. Die Wahrscheinlichkeit die Erstattung der Rechnungsbeträge in Anspruch zu nehmen ist $p_{(i-1)\ 0} = 1 - c_i$.
3. Die Anzahl der für die Prämienrückerstattung verwendeten Jahre ist beschränkt durch ein Maximum m: $\mathbb{P}[Z(t)|Z(t-1) = m] = \mathbb{P}[Z(t)|Z(t-1) = m-1]$. Infolgedessen gilt $p_{mm} = c_m$ und $p_{m0} = 1 - c_m$.
4. Es ist nicht möglich auf einmal mehrere Jahre zu überspringen: $p_{ij} = 0, \forall j \neq i+1$.
5. Solange nicht die maximale Anzahl der leistungsfreien Monate erreicht wird, ist es nicht möglich in dem gleichen Zustand zu verweilen $p_{ii} = 0$.

Daraus resultiert eine Übergangsmatrix der Form :

$$P = (p_{ij})_{(m+1)\times(m+1)} = \begin{pmatrix} 1-c_1 & c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1-c_2 & 0 & c_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1-c_m & 0 & 0 & \ldots & c_m \end{pmatrix}$$

Zur besseren Verständnis ist die Übergangsmatrix in der Abbildung 6.1 grafisch dargestellt.

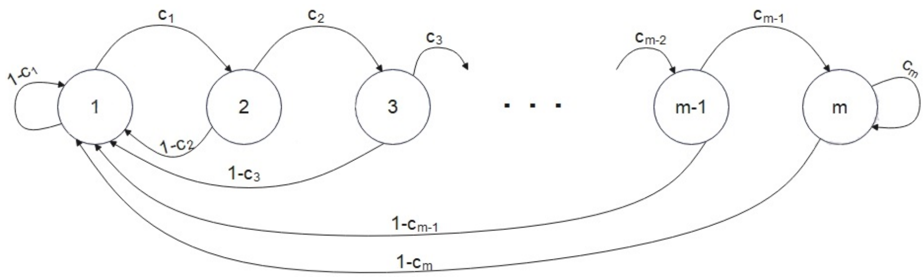

Abbildung 6.1: Die Abbildung zeigt die Übergangswahrschinlichkeiten der m verschiedenen Zustände als Markovkette.

Die, zu den Übergangswahrscheinlichkeiten dazugehörigen, *Zustandsverteilungen* sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsvariablen $Z(t)$ in einer Zeitperiode. Die Zustandswahrscheinlichkeiten berechnen sich wie in Formel (2.6). Die Zustandsmatrix ist regulär, da alle Einträge strikt positiv sind. In diesem Falle ist die Markovkette irreduzibel und aperiodisch, somit existiert nach Definition (2.16) eine eindeutige Grenzverteilung, gegen die die Verteilungen der Markovkette konvergiert.

Satz 6.1. *Für die Zustandswahrscheinlichkeiten* $\pi_j^{(n)} = \mathbb{P}[X_n = j]$ *existiert eine stationäre Grenzverteilung* $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$, *welche für* $c_m < 1$ *eindeutig lösbar ist, mit*

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \tfrac{1}{C}, \\ \pi_j &= \tfrac{1}{C} \cdot \textstyle\prod_{i=1}^{j} c_i, \text{ für } j \in \{1, \dots, m-1\}, \\ \pi_m &= \tfrac{1}{C\cdot(1-c_m)} \cdot \textstyle\prod_{i=1}^{m} c_i \text{ mit } C = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \prod_{k=1}^{i} c_k + \tfrac{1}{1-c_m} \prod_{k=1}^{m} c_k. \end{aligned}$$

Beweis. Mit der Nebenbedingung aus dem Satz 2.13 gilt die Gleichung:

$$\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_{m-1} + \pi_m = 1 \tag{6.4}$$

Aus der Gleichung (2.6) resultiert ein $(m+1)$-dimensionales Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (1-c_1)\cdot\pi_0 + (1-c_2)\cdot\pi_1 + \dots + (1-c_{m-1})\cdot\pi_{m-1} + (1-c_m)\cdot\pi_m \\ \pi_1 &= c_1 \cdot \pi_0 \\ \pi_2 &= c_2 \cdot \pi_1 = c_1 \cdot c_2 \cdot \pi_0 \\ \vdots & \quad \vdots \\ \pi_{m-1} &= c_{m-1} \cdot \pi_{m-2} = c_1 \cdot c_2 \cdot \ \cdots \ \cdot c_{m-1} \cdot \pi_0 \\ \pi_m &= c_m \cdot \pi_{m-1} + c_m \cdot \pi_m = c_1 \cdot c_2 \cdot \ \cdots \ \cdot c_{m-1} \cdot c_m \cdot \pi_0 + c_m \cdot \pi_m \end{aligned}$$

Durch Umformen können die π_m explizit durch π_0 ausgedrückt werden,

$$\pi_m = \frac{c_1 \cdot c_2 \cdot \ \cdots \ \cdot c_{m-1} \cdot c_m \cdot \pi_0}{1 - c_m}.$$

Eingesetzt in die Nebenbedingung 6.4 und mit formen nach π_0 gilt

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + c_1 \cdot \pi_0 + \ldots + c_1 \cdot c_2 \cdot \ \cdots \ \cdot c_{m-1} \cdot \pi_0 + \frac{c_1 \cdot c_2 \cdot \ \cdots \ \cdot c_{m-1} \cdot c_m \cdot \pi_0}{1-c_m}}.$$

Durch Einsetzten von π_0 in alle anderen Terme folgt die erwünschte Darstellung. □

Die Wahrscheinlichkeiten c_i werden durch Schätzwerte aus den Statistiken gewonnen. Für eine Erstkalkulation können die Schätzwerte aus der Inanspruchnahme der verschiedenen Versicherungsleistungen aus der Schadenhöhenverteilung entnommen werden, [28, vgl. Seite 6].

Für den Fall einer Auszahlung nach einem Jahr ohne eine Krankenkostenerstattung ist $m = 1$, dann existieren nur die Zustände $Z(t-1) = 0$ oder $Z(t-1) = 1$. Daraus resultiert eine 2×2-dimensionale Übergangsmatrix der Form :

$$P = (p_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1-c_1 & c_1 \\ 1-c_1 & c_1 \end{pmatrix}$$

Die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten sind nach Satz 6.1

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \tfrac{1}{c_1}, \\ \pi_1 &= \tfrac{c_1}{(1-c_1)\cdot c_1} = \tfrac{1}{1-c_1}. \end{aligned}$$

6.3.2 Versicherungsleistung

Zu den Versicherungsleistungen zählt neben der Erstattung der eingereichten Rechnungsbeträge nun auch die Prämienrückvergütung.

Definition 6.2. (Leistungsbetrag)
Der tatsächliche Leistungsbetrag Y_t für eine versicherte Person setzt sich zusammen aus den Leistungen aus den Rechnungshöhen $Y^K(t)$ und den Kosten für die Prämienrückvergütung $Y^{euPR}(t)$.

$$Y(t) = \max\{Y^K(t), Y^{euPR}(t)\} \tag{6.5}$$

Die Zustände für eine Prämienrückvergütung bei keinem Schadenfall sind:

$$Z(t) = \begin{cases} 1 & , Y^{\mathrm{K}}(t) \leq Y^{\mathrm{euPR}}(t) \\ 0 & , Y^{\mathrm{K}}(t) > Y^{\mathrm{euPR}}(t) \end{cases} \tag{6.6}$$

Übersteigen die entstandenen Kosten die Rückvergütungsanteile, reicht die versicherte Person die Rechnungen bei der Versicherung ein und der Zustand wechselt wieder auf 0. Die Kopfschäden errechnen sich durch Erwartungswertbildung wie in Formel (5.5):

$$\mathbb{E}[Y(t)] = \mathbb{E}[Y(t)|Z(t)=1] \cdot \mathbb{P}[Z(t)=1] + \mathbb{E}[Y(t)|Z(t)=0] \cdot \mathbb{P}[Z(t)=0]$$

Der erste Summand stellt die Kopfschäden für die erfolgsunabhängige Prämienrückvergütung dar, der zweite steht für die Rechnungsbeträge.

Kopfschäden für die Rechnungsbeträge

Die Zufallsvariable $Y^{\mathrm{K}}(t)$ ist der Erstattungsbetrag der gemeldeten Rechnungshöhen und s der absolute Selbstbehalt. Sollte $s \neq 0$ sein, wird der Selbstbehalt von der Prämienrückvergütung abgezogen. Als Grundlage werden Rechnungsbeträge Y^{Basis} aus einem Basistarif genommen. Die zufälligen Leistungsbeträge ergeben sich wie in Formel (5.11) mit

$$Y^{\mathrm{K}}(t) = \max\{Y^{\mathrm{Basis}}(t) - s, 0\}. \tag{6.7}$$

Der Zustand $\{Z(t) = 0\}$ bedeutet dass in diesem Jahr Rechnungsbeträge eingereicht wurden. Durch Anwenden der totalen Wahrscheinlichkeit und mit der Umformung $\mathbb{P}[Z(t) = 0] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z(t)=0\}}\right]$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y(t)|Z(t)=0\right] \cdot \mathbb{P}[Z(t)=0] =& \mathbb{E}\left[Y^{K}(t) \cdot \mathbb{1}_{\{Z(t)=0\}}\right] \\
=& \mathbb{E}\left[Y^{\mathrm{K}}(t) \cdot \mathbb{1}_{\{Z(t)=0\}} | Z(t-1)=0\right] \cdot \mathbb{P}[Z(t-1)=0] \\
+& \mathbb{E}\left[Y^{\mathrm{K}}(t) \cdot \mathbb{1}_{\{Z(t)=0\}} | Z(t-1)=1\right] \cdot \mathbb{P}[Z(t-1)=1]
\end{aligned}$$

Als Modellvoraussetzung nehmen wir an, dass die Leistungen für die Kostenentschädigung $Y^{K}(t)$ stochastisch unabhängig von der Anzahl der schadenfreien Jahre $Z(t-1)$ zu Beginn des Jahres t[1], sowie von der Monatsprämie P_x. Es gilt folgende Äquivalenz, nach Formel (6.7): $\{Z(t) = 0\} = \{Y^{\mathrm{Basis}}(t) \geq s + P_x \cdot \alpha\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y(t)|Z(t)=0\right] \cdot \mathbb{P}[Z(t)=0] = & \mathbb{E}\left[(Y^{\mathrm{Basis}}(t) - s) \cdot \mathbb{1}_{\{Y^{Basis}(t) \geq s + P_x \cdot \alpha\}}\right] \cdot \pi_0^{(t-1)} \\
+ & \mathbb{E}\left[(Y^{\mathrm{Basis}}(t) - s) \cdot \mathbb{1}_{\{Y^{Basis}(t) \geq s + P_x \cdot \alpha\}}\right] \cdot \pi_1^{(t-1)} =: K_x^{\mathrm{K}}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Kopfschäden für die erfolgsunabhängige Prämienrückvergütung

Die Versicherungsleistung bei einer Prämienrückvergütung berechnet sich mit

$$Y^{\mathrm{euPR}} = \alpha \cdot P_x.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[Y(t)|Z(t)=1\right] \cdot \mathbb{P}[Z(t)=1] \\
=& \mathbb{E}\left[Y^{\mathrm{euPR}} | Z(t)=1\right] \cdot \pi_1^{(t)} \\
=& P_x \cdot \alpha \cdot \pi_1^{(t)} =: K_x^{\mathrm{euPR}}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

[1] Es ist anzunehmen, dass Personen, die als „gesünder“ gelten, eher dazu neigen, sich für einen Tarif mit Rückerstattung zu entscheiden, da man davon ausgeht, dass ihre Krankheitskosten niedriger sind und sie daher höhere Rückerstattungen erhalten. Unter der Annahme rationalen Verhaltens wird erwartet, dass Personen mit chronischen Erkrankungen eher einen Standardtarif bevorzugen.

6.3.3 Prämienberechnung

Die Leistungen für die Prämienrückgewähr werden entweder durch einen absoluten oder prozentualen Beitragszuschlag oder als zusätzliche Leistung in den Kopfschäden eingerechnet. Die Unterschiede zeigen sich in der Berechnung der Alterungsrückstellung, bei einem Beitragszuschlag erfolgt diese unabhängig von den gezahlten Prämienrückvergütungen. Mit fortschreitendem Alter verringert sich die Inanspruchnahme der Rückgewährleistung, und die Kopfschäden bleiben konstant oder nehmen ab. Infolgedessen ist die Alterungsrückstellung als zusätzliche Leistung geringer als bei der Zuschlagsvariante, in der eine Reduktion des Beitragszuschlages ab einem Grenzalter möglich ist. [28, vgl. Seite 8]

Aufgrund der komplizierten Berechnung wird anstatt der individuellen, exakten Prämie die mittlere Monatsprämie als Schätzwert verwendet. Sei $P^{\text{ges}}(x)$ die Summe aller tatsächlich zu zahlender Monatsprämien. Um die individuelle Prämie in eine Tarifprämie umzurechnen, wird die Funktion $g(x) = \frac{P^{\text{ges}}(x)}{L_x \cdot P_x}$ herangezogen. Die gemittelte Monatsprämie ist $M(x) = g(x) \cdot B_x$, eingesetzt in die Formel für die Kopfschäden (6.8) und (6.9), erhalten wir $\hat{K}^{\text{K}}$ und $\hat{K}^{\text{euPR}}$.

Kalkulation als altersabhängiger Prämienzuschlag

Die Kopfschäden der Prämienrückerstattung werden in einen Beitragszuschlag für die Kopfschäden der Rechnungsbeträge umgerechnet. Dabei unterscheiden wir zwischen einem absoluten und dem prozentualen Zuschlag. Es ist nicht legitim in diesen Prämienanteil weitere Kostenzuschläge einzurechnen, da nur die Ausgaben für die Rückvergütungsleistung gedeckt werden sollen. [3, vgl. Seite 386]

Die Zuschläge sind folgendermaßen definiert:

1. absoluter Beitragszuschlag: $\delta^a = \frac{\sum_{x=x_0}^{\omega} L_x \cdot \hat{K}_x^{\text{euPR}}}{12 \cdot \sum_{x=x_0}^{\omega} L_x}$.
2. proportionaler Beitragszuschlag: $\delta^p = \frac{\sum_{x=x_0}^{\omega} L_x \cdot \hat{K}_x^{\text{euPR}}}{\sum_{x=x_0}^{\omega} L_x \cdot M_x}$.

In der Prämienberechnung wird zunächst die Nettoprämie ausschließlich auf Grundlage der Krankenhausleistungen ermittelt. Danach werden die Zuschläge folgendermaßen eingerechnet: $P_x^a = P_x^K + \delta^a$ und $P_x^p = P_x^L(1 + \delta^p)$.

Kalkulation als separate Versicherungsleistung

In dieser Variante werden die Kopfschäden des Basistarifes übernommen und nur die zusätzliche Leistung durch einen Zuschlag gedeckt. Dieser Zuschlag ist vom Eintrittsalter und erreichten Alter der versicherten Person abhängig ${}_m\delta_{x_0} := K_{x_0+m,x_0} - K_{x_0+m}^{Basis}$. Um die Dimension zu reduzieren und den Zuschlag nur mehr abhängig vom Eintrittsalter ist definieren wir

$$\delta_{x_0} = \frac{\sum_{x=x_0}^{\omega} d_{x_0+m} \cdot {}_m\delta_{x_0}}{\sum_{x=x_0}^{\omega} d_{x_0+m}}.$$

Mit $d_x = q_x + w_x$ werde die Ausscheideordnungen bezeichnet. Die Kopfschäden des Tarifes sind $K_x = K_x^K + \delta_{x_0}$. Die Prämienberechnung erfolgt über die Barwerte (5.17) und (5.18):

$$P_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{(K_{x+t} + \delta_{x_0}) \cdot D_{x+t}}{N_x}$$

6.3.4 Iterationsverfahren

Bei beiden Kalkulationsvarianten sind die Kopfschäden der Prämienrückvergütung eine von der Monatsprämie abhängige Funktion:

$$K_x = \varphi(P_x).$$

Die Prämie ist abhängig von den Kopfschäden: $P_x = \psi(K_x)$, eingesetzt für die Kopfschäden: $P_x = \psi(\varphi(P_x))$. Daraus resultiert: die Prämie ist der Fixpunkt für die implizite Funktion $\zeta : \varphi \circ \psi : P_x = \zeta(P_x)$. Der Fixpunktsatz von Banach bietet nicht nur die notwendigen Voraussetzungen für die Existenz einer Lösung, sondern stellt auch einen Lösungsansatz für implizite Funktionen zur Verfügung.

Satz 6.3 (Fixpunktsatz von Banach)**.** *Sei $\tilde{X}$ eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes (X, d). Sei $\kappa \in [0, 1)$ und $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ eine kontrahierende Abbildung, das heißt*

$$d(f(x), f(x')) \leq \kappa d(x, x'),\ \forall x, x' \in \tilde{X}.$$

Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt $x^* \in \tilde{X}$ von f, das heißt $x^* = f(x^*)$, und für jeden Startpunkt $x_0 \in \tilde{X}$ konvergiert die Folge $x_{n+1} = f(x_n)$ gegen den Fixpunkt x^*.

Beweis. Ein Beweis befindet sich in [22, vgl. Seite 103]. □

Die Startwerte werden aus einem Tarif mit statistisch aussagekräftigen Bestandsdaten gewonnen. Anhand der Kopfschäden für die erwartete Rechnungsbeträge K_x^{K} und die Relation zwischen Zahlbeitrag und Tarifbeitrag $g(x)$ wird die Prämie $P_x^{(0)}$ für den Zieltarif kalkuliert. Sofern die Ausscheideordnungen und sonstigen Zuschläge des Basistarifs mit denen des Zieltarifs übereinstimmen, können die Prämien des Basistarifs als Startwerte herangezogen werden.

Zur Überprüfung der Voraussetzungen für den Fixpunktsatz von Banach beschränken erfolgt eine Einschränkung auf die Nettoprämie. Diese berechnen wir jeweils im nächsten Schritt rekursiv. Ausgehend von der Prämie $P_x^{(n)}$ wird die Schätzung der Leistungen für die Prämienrückerstattungen vorgenommen. Daraufhin werden die weiteren Nettoprämien $P_x^{(n+1)}$ berechnet. Anhand dieses Vorgehens ist es möglich zu zeigen, dass die Funktion ζ, unabhängig von der Wahl der Startvektoren, kontrahierend ist und das Verfahren mit geometrischer Geschwindigkeit gegen den gesuchten Betrag konvergiert. Als Abbruchkriterium gilt:

$$\max\{|P^{(n+1)}(x) - P^{(n)}(x)| : x \in \mathcal{X}\} < \epsilon,\ \text{für } \epsilon > 0$$

Die praktische Anwendung des Iterationsverfahrens führt in der Regel innerhalb von höchstens 10 Iterationsschritten zu einer Lösung.

Für jeden weiteren Iterationsschritt sind die vorherigen Prämienraten P_x^n bekannt. In jedem Durchgang müssen wir die gemittelte Monatsprämie M_x berechnet, die Übergangswahrscheinlichkeiten geschätzt, die Zuschläge ermitteln und die erforderlichen Kopfschäden bestimmen, um anschließend die Prämie zu berechnen. [3, vgl. Seite 388 f.]

6.4 Tarifierung - Schadenhöhen-Schadenzahl-Modell

Das Kernstück dieser Arbeit besteht in der Weiterentwicklung des im Kapitel 3 präsentierten Schadenzahl-Schadenhöhen-Modells und der dazugehörigen Kopfschäden gemäß Satz 5.11, um eine Prämienkalkulation mit erfolgsunabhängiger Prämienrückvergütung durchzuführen. Zunächst wird der einfachste Fall, nämlich die Rückerstattung innerhalb eines schadenfreien Jahres (siehe 6.1), abgeleitet, und anschließend ein effizienter Algorithmus zur Umsetzung vorgestellt. Anschließend erfolgt die Erweiterung zu einem mehrjährigen Modell mithilfe der Thiel'schen Differenzengleichung.

In dem Schadenhöhen-Schadenzahl-Modell für einjährige Prämienrückvergütungen, ist es möglich die Zuschläge direkt in die Kopfschäden miteinzukalkulieren. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind die Schadenhäufigkeiten aus Definition 3.4. Wie erweitern die Formel aus Satz (5.10). Bei keinem Schadeneintritt $\mathbb{P}[H_x = 0] = 1 - h_x$ wird am Ende des Jahres der Betrag $\alpha \cdot P_x$ an die Versicherungsnehmer:innen ausbezahlt.

Die Prämienkalkulation beschränken wir hier der Einfachheit halber auf die Nettoprämie, die Bruttoprämie besteht wie in Formel 5.14 nur aus einem mulitplikativen Faktor, welcher bei der Kalkulation rausgekürzt wird.

Satz 6.4 (Kopfschaden bei Prämienrückvergütung)**.** *Der Kopfschaden mit einer einjährigen erfolgsunabhängigen Prämienrückvergütung einer Person ergibt sich durch*

$$K_x = (1 - h_x) \cdot \alpha P_x + h_x S_x. \tag{6.10}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H_x \tilde{S}_x] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[H_x \tilde{S}_x | H_x]\right] \\
&= \mathbb{E}[\tilde{S}_x | H_x = 0] \cdot \mathbb{P}[H_x = 0] + \mathbb{E}[\tilde{S}_x | H_x > 0] \cdot \mathbb{P}[H_x > 0] \\
&= \mathbb{E}\left[\alpha \cdot P_x \cdot \mathbb{1}_{\{H_x = 0\}}\right] + \mathbb{E}\left[\tilde{S}_x \cdot \mathbb{1}_{\{H_x > 0\}}\right] \\
&= (1 - h_x) \cdot \alpha P_x + h_x S_x.
\end{aligned}$$

□

Für die Prämienkalkulation wird der Kopfschaden in die Formel (5.20) eingesetzt:

$$\begin{aligned} P_x &= \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{K_{x+t} \cdot D_{x+t}}{N_x} \\ &= \frac{1}{N_x} \sum_{t=0}^{\omega-x} ((1-h_{x+t}) \cdot \alpha P_{x+t} + h_{x+t} S_{x+t}) \cdot D_{x+t} \end{aligned} \tag{6.11}$$

Diese Darstellung ermöglicht eine rekursive Berechnung der Prämie, indem $x = \omega$ als Startwert gesetzt wird. Die Prämie für das Alter ω ist durch Umformen dann direkt zu berechnen:

$$P_\omega = \frac{K_\omega \cdot D_\omega}{N_\omega} = \frac{1}{N_\omega}((1-h_\omega) \cdot \alpha P_\omega + h_\omega S_\omega) \cdot D_\omega = \frac{\frac{D_\omega}{N_\omega} h_\omega S_\omega}{1-(1-h_\omega)\alpha \frac{D_\omega}{N_\omega}}$$

Durch Einsetzten in die Formel aus Satz 6.4 resultieren die dazugehörigen Kopfschäden.

$$K_\omega = \frac{D_\omega}{N_\omega}(1-h_\omega)\alpha \frac{h_\omega S_\omega}{\frac{N_\omega}{D_\omega} - (1-h_\omega)\alpha + h_\omega S_\omega}$$

Die Prämie, sowie die Kopfschäden für die verbleibenden Alter können rekursiv aus den zuvor berechneten Werten ermittelt werden. Die Durchführung dieser rekursiven Berechnung ist im Algorithmus 1 beschrieben.

Algorithm 1: Prämienkalkulation

Data:
D, N ... Vector of commutation values
α ... no claim bonus
h ... Vector of claim probability
S ... Vector of claim size
Result: P ... Vector of premium
begin
  $K_{x+1} \longleftarrow 0$
  $interim_{x+1} \longleftarrow 0$
  for $x \in \{\omega, ..., x_0\}$ **do**
    $P_x \longleftarrow \left(1 - \frac{(1-h_x) \cdot D_x \cdot \alpha}{N_x}\right)^{-1} \cdot \left(interim_{x+1} + \frac{h_x \cdot S_x \cdot D_x}{N_x}\right)$
    $K_x \longleftarrow K_{x+1} + ((1-h_x) \cdot \alpha \cdot P_x + h_x + S_x)$
    $interim_x \longleftarrow interim_{x+1} + ((1-h_x)\alpha \cdot P_x + h_x \cdot S_x) \cdot D_x$
  end
end

Der in Satz 6.4 beschriebene Kopfschaden sowie die Formel (6.11) berücksichtigen jeweils die Nettojahresprämie in der Rückerstattung. Dies geschieht aufgrund der Tatsache, dass sich die zusätzlichen Kosten, wie in Definition 5.14 erläutert, als multiplikative, konstante Faktoren auf beiden Seiten aufheben und somit in der Berechnung nicht berücksichtigt werden.

Eine andere Möglichkeit zur rekursiven Berechnung der Prämie erfolgt mithilfe der Thielschen Differenzengleichung. Die Zahlungsströme zu Jahresbeginn $a_i^{Pre}(t)$, umfassen die eingenommenen Prämien abzüglich der erwarteten Schadensbeträge. Hingegen werden die Zahlungen am Ende des Jahres $a_{ij}^{Post}(t)$, im Falle der Schadenfreiheit rückerstattet. Dieser Ansatz berücksichtigt einen Zustandswechsel am Jahresende.

Definition 6.5 (Thielsche Differenzengleichung)**.** *Für eine zeitdiskrete Markovkette kann das Deckungskapital als Rekursion, abhängig von den Zahlungsströmen $a_i^{Pre}(t)$, $a_{ij}^{Post}(t)$, dem Diskontierungsfaktor $v(t)$, sowie den Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$ berechnet werden.*

$$V_i^+(t) = a_i^{Pre}(t) + \frac{v(t+1)}{v(t)} \sum_{j \in S} p_{ij}(t, t+1)(a_{ij}^{Post}(t) + V_j^+(t+1)), \; \forall i, j \in S$$

Die Thielsche Differenzengleichung ermöglicht es, Prämienrückerstattungen nach mehreren schadenfreien Jahren zu berücksichtigen. Der Zustandsraum S wird gemäß der Formel (6.3) definiert, wobei wir berücksichtigen, dass eine Person aus dem Bestand ausgetreten ist, was wir mit „-1“ kennzeichnen.:

$$S = \{\underbrace{-1}_{\dagger}, \underbrace{0, \ldots, m}_{*}\}$$

Die möglichen Auszahlungen am Jahresende sind die rückvergüteten Bruttoprämien[2] und erfolgen ausschließlich, wenn die versicherte Person keine anderen Versicherungsleistungen in Anspruch genommen hat.

$$a_{ij}^{Post}(t) = \begin{cases} 0 & , j = -1, 0, \\ \alpha(j) \cdot B_x & , 1 \geq j = i+1 \leq m \\ \alpha(m) \cdot B_x & , j = i+1 > m \\ 0 & , sonst. \end{cases}$$

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten[3] gilt:

$$p_{ij}(t, t+1) = \begin{cases} 1 - p_{x+t} & , j = -1, \\ p_{x+t} \cdot h_{x+t} & , j = 0 \\ p_{x+t} \cdot (1 - h_{x+t}) & , j \leq m \end{cases}$$

Das Deckungskapital muss bei Vertragsabschluss Null sein, als Randbedingung kann also $V_0(0) = 0$ gewählt und dadurch die Prämie explizit berechnet werden.

Durch die direkte Berechnung der Prämie entfällt die Notwendigkeit ein Iterationsverfahren durchführen zu müssen, der Rechenaufwand sowie die Komplexität der Kalkulation

[2]In diesem Fall wird die Bruttoprämie in die Kalkulation miteinbezogen, da sich die zusätzlichen Kosten nicht rauskürzen.

[3]Unter p_{x+t} verstehen wir die einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten gemäß Satz 5.6.

reduzieren sich.
Zusätzlich ist zu erwarten, dass die Prämienkalkulation genauere Ergebnisse liefert, da keine gemittelte Monatsprämie verwendet werden muss. Daraus resultiert eine genauere Kostenschätzungen, was sowohl dem Versicherungsunternehmen als auch für den versicherten Personen von Vorteil ist, da genauere Prämien die Fairness und Transparenz des Versicherungsprozesses fördern.

Um ein umfassendes Verständnis für erfolgsunabhängige Prämienrückvergütungen zu entwickeln, werfen wir im nächsten Abschnitt einen Blick auf die Auswirkungen, die sich sowohl für das Versicherungsunternehmen als auch für die Versicherungsnehmer:innen ergeben.

6.5 Auswirkungen der erfolgsunabhängigen Prämienrückvergütungen

Die erfolgsunabhängige Prämienrückvergütung hat ähnliche Auswirkungen wie die Anwendung eines Selbstbehaltes. Es kann angenommen werden, dass eine versicherte Person ein vergleichbares ökonomisches Verhalten aufweist, unabhängig davon, ob sie beispielsweise einen Selbstbehalt von 500€ hat oder eine Rückerstattung von 500€ bei einem schadenfreien Verlauf erhält. Dies führt zu ähnlichen Vor- und Nachteilen in beiden Fällen.

6.5.1 Vorteile

Prämienrückvergütungen können als eine Art „vorab gezahlter Selbstbehalt“ betrachtet werden. Dies bedeutet, dass eine versicherte Person ihren Selbstbehalt bereits in kleinen Raten im Voraus beglichen hat und sich daher keine Gedanken darüber machen muss, zusätzliche Beträge bei der Inanspruchnahme ärztlicher Leistungen aufzubringen.

Zusätlich kann die Prämienrückvergütung Versicherungsnehmer:innen dazu motivieren, ihr individuelles Risikoverhalten zu verbessern, da sie Reize setzt, Schäden zu vermeiden. Gleichzeitig trägt sie dazu bei, die Verwaltungskosten des Versicherungsunternehmens zu reduzieren, da seltener Bagatellschäden gemeldet werden. [25, vgl. Seite 207].

Eine individuelle Risiken besser bewertet und kann für Versicherungsnehmer:innen individuelle Preisgestaltungen ermöglichen. Das bietet einen Anreiz eher eine Versicherung abzuschließen, besonders für junge Versicherungsnehmer:innen, welche erst im hohen Alter mit gehäuften Krankheitskosten rechnen.

6.5.2 Nachteile

Solche Tarifmodelle mit einer Rückvergütung können betrügerisches Verhalten begünstigen, beispielsweise indem Arztkosten innerhalb der Familie nur auf eine Person abgerechnet werden.[9, vgl. Seite 5]
Auch eine Umverteilung auf die gesetzliche Krankenkasse kann begünstigt werden, wenn versicherte Personen eine Leistungsreduktion einer Prämienückvergütung vorziehen. Stattdessen kann es aber auch zur Vermeidung von Arztbesuchen zu führen um Kostenrückerstat-

tung zu erhalten. Dies kann jedoch in darauffolgenden Jahren zu höheren Gesundheitskosten führen, da Erkrankungen möglicherweise übersehen werden, wenn Untersuchungen ausbleiben.

Darüber hinaus ist es denkbar, dass eine versicherte Person, wenn die Rechnung bereits die Rückerstattungsgrenze überschreitet, dazu neigt, häufiger zum Arzt zu gehen, um notwendige Untersuchungen vorzuziehen.

7 Implementierung in R

Dieses Kapitel widmet sich der praktischen Umsetzung des in Abschnitt 6.4 vorgestellten Algorithmus (Algorithmus 1) und führt dessen Implementierung in R durch. Hierbei greifen wir auf vorhandene Bestandsdaten zurück, um Schadenhöhen und Schadenzahlen zu schätzen, welche als Grundlage für die Berechnung der Prämie dienen. Die spezifischen Rechnungsgrundlagen, die für die Prämienkalkulation verwendet wurden, sind im Anhang 9 aufgeführt.

7.1 Datengrundlage und -aufbereitung

Die Datengrundlage für die Prämienkalkulation, welche in diesem Kapitel durchgeführt wird, besteht aus einer sorgfältig anonymisierten und randomisierten Bestandshistorie einer österreichischen Versicherung, die Daten aus mehreren Jahren und verschiedenen Tarifen umfasst. Diese umfangreichen Datensätze enthalten sowohl Leistungs- als auch Bestandsdaten. Zur Vorbereitung für unsere Untersuchung wurden sie zunächst in SQL verarbeitet und anschließend in R einer Randomisierung unterzogen.

7.1.1 SQL

Der erste Schritt bestand darin, die Daten einer Plausibilitätsüberprüfung zu unterziehen. Es wurde sichergestellt, dass sämtliche Angaben sowohl vollständig als auch inhaltlich sinnvoll sind und keine relevanten Informationen fehlen. Falls vorhanden, erfolgte im nächsten Schritt die Zuordnung des Behandlungsbeginns zu den tarifbezogenen Leistungen.

Um Informationen über die Anzahl der versicherten Personen zu erhalten, wurde bei jedem Vertrag sich überschneidende Änderungen entfernt. Als Ergebnis konnte jeder Person genau ein durchgängig aufrechter Vertrag über die Versicherungsdauer zugeordnet werden. Negative Leistungen, sowie personenbezogene Daten (bis auf das Alter) wurden aufgrund von Plausibilitäts- und Datenschutzgründen entfernt.

Mit einem Zeitraster konnten monatliche Zeitreihen für die Anzahl und das Alter der versicherten Personen, die Schadenfrequenz sowie die Schadenhöhen erstellt werden. Durch Summieren der Schäden entstanden die Jahresschadensummen. Mögliche Trends in den Daten wurden aus Gründen der Vereinfachung nicht berücksichtigt.

7.1.2 Anonymisierung

Die Anonymisierung der Schadenhöhe und der Schadenhäufigkeit erfolgte in getrennten Schritten und auf unterschiedliche Weise.

Schadenhöhe: Die Schadenhöhen wurden durch die Anwendung eines Zufallsvektors in Kombination mit einem spezifischen Skalierungsfaktor verändert. Zur Gewährleistung der Reproduzierbarkeit wurden diese beiden Einflussfaktoren im Voraus mittels der Funktion `set.seed()` in R festgelegt. Zusätzlich wurden die Altersangaben der Rechnungsmeldungen durch das zufällige Hinzufügen oder Abziehen von Jahren gestört. Der höchste Schadenswert wurde dabei eliminiert. Im nächsten Schritt erfolgte die Entfernung zufälliger Zeilen in einer variablen Anzahl aus dem Datensatz, um jegliche Rückschlüsse zu verhindern. Eine erneute Datenabfrage stellte sicher, dass der Datensatz weiterhin sinnvolle Werte enthielt.
Darüber hinaus wird die Verteilung der Schadenhöhen in den Abbildungen 7.4 auf der y-Achse nur durch die Dichte dargestellt.

Schadenhäufigkeit: Auch bei der Schadenhäufigkeit wurden einerseits die Anzahl, der Personen im Bestand, als auch die Anzahl der gemeldeten Schäden mit beliebigen, aber festen Faktoren gestört. Um die Plausibilität der Daten zu erhalten, war es wichtig, die Störfaktoren altersabhängig zu wählen. Dafür wurden der Bestand in kleine Altersgruppen eingeteilt und das Maximum der jeweiligen Anzahlen mit einer zufälligen Prozentzahl multipliziert. Anschließend, da die Anzahl der gemeldeten Personen einer natürlichen Zahl entspricht, wurde auf- beziehungsweise abgerundet. Abschließend ermittelten wir die empirische Häufigkeit durch den Quotienten aus der Anzahl der gemeldeten Schäden und der Anzahl der versicherten Personen im Bestand und störten diese abschnittsweise mit anderen Faktoren.

7.2 Kalibrierung der Schadenanzahl

Die Ermittlung der Bernoulli-Schadenhäufigkeiten aus Formel (3.4) erfolgte durch Schätzerte, welche aus der empirischen Häufigkeit gewonnen wurden, siehe Formel (3.3):

$$\hat{\theta}_x = \frac{\text{Anzahl versicherter Personen mit Versicherungsleistung}}{\text{Anzahl der Jahreseinheiten}}$$

In der Abbildung 7.1 wird die empirische Schadenhäufigkeit dargestellt. Deutlich erkennbar ist einerseits der Anstieg der Unfallrate bei jungen Erwachsenen zwischen 15 und 23 Jahren. Andererseits steigt die Häufigkeit ab dem 25. Lebensjahr, sowohl aufgrund von Schwangerschaften als auch aufgrund der zunehmenden Anzahl versicherter Personen. Der Rückgang der Häufigkeit zwischen 85 und 100 Jahren lässt sich durch die geringe Anzahl versicherter Personen in dieser Altersgruppe erklären.

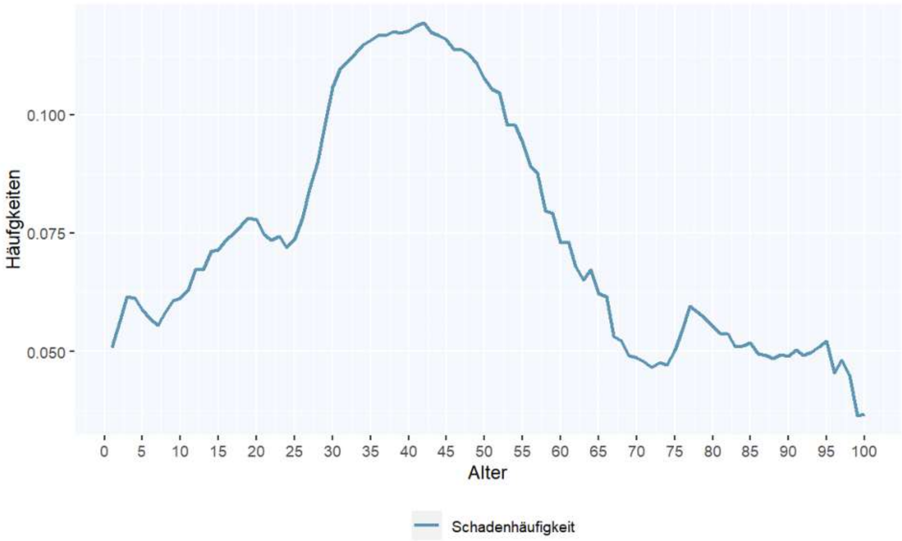

Abbildung 7.1: Die Abbildung zeigt die empirische Schadenhäufigkeit des Versicherungsbestandes.

Das Ausgleichen der Schadenhäufigkeit erfolgte durch Splines, da diese für Interpolationen besonders geeignet sind. Splines haben den Vorteil, dass Overfitting aufgrund der Wahl der Knotenpunkte sowie den Bestrafungsterm λ vermieden wird. Die Anzahl der Freiheitsgrade (*engl.: degrees of freedom (df)*) verhält sich zu λ gegenläufig, siehe Formel (2.7).

Für $\lambda \to 0$ steigen die Freiheitsgrade, und es besteht die Gefahr des Overfittings. Im Gegensatz dazu nehmen die Freiheitsgrade für $\lambda \to \infty$ ab und das Modell passt sich den Daten schlecht an. Dies wird in Abbildung 7.2 verdeutlicht.

Durch die Wahl von $\lambda = 1e - 10$ wird die Funktion an jedem einzelnen Datenpunkt angelegt, was zu einem Glätteverlust führt. Auf der rechten Seite ist mit $\lambda = 10$ eine lineare Funktion zu sehen, die kaum Datenpunkte erreicht.

```
modelFit <- ss(frequency$age,
               frequency$unfitted,
               all.knots = TRUE,
               lambda = 3e-7)

dataFrequency <- mutate(dataFrequency,
                        fitFrequency = fitted(modelFit))
```

```
Call:
ss(x = frequency$age, y = frequency$unfitted, lambda = 3e-07, all.knots =
   TRUE)
```

```

Smoothing Parameter  spar = 0.09714441   lambda = 3e-07
Equivalent Degrees of Freedom (Df) 16.20453
Penalized Criterion (RSS) 0.000446382
Generalized Cross-Validation (GCV) 6.357196e-06
```

Für die Schadenhäufigkeit ist $\lambda = 3e - 7$ eine geeignete Wahl zu sein, da sie alle lokalen Hochpunkte erfasst, ohne die Funktion zu stark anzupassen.

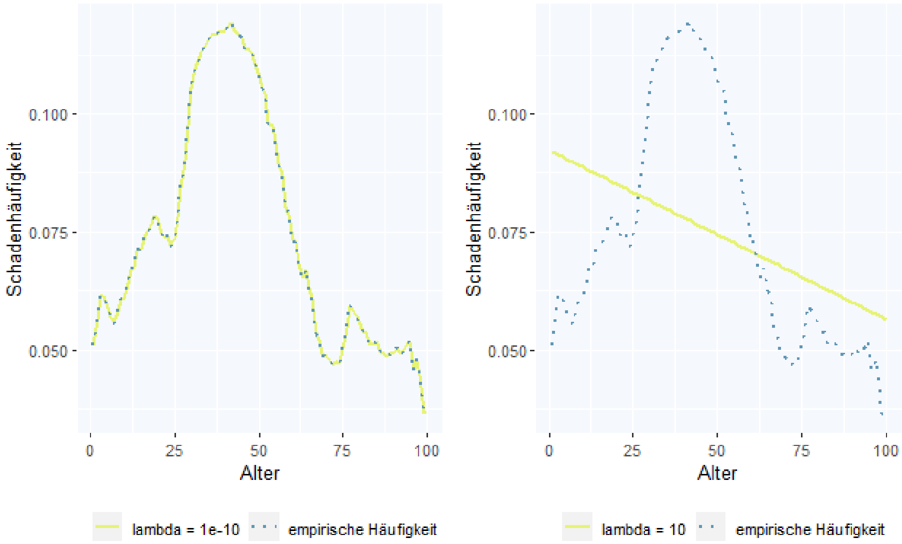

Abbildung 7.2: Ein Vergleich zwischen Overfitting (linke Abbildung) und Underfitting (rechte Abbildung) aufgrund der Wahl des penalty term λ.

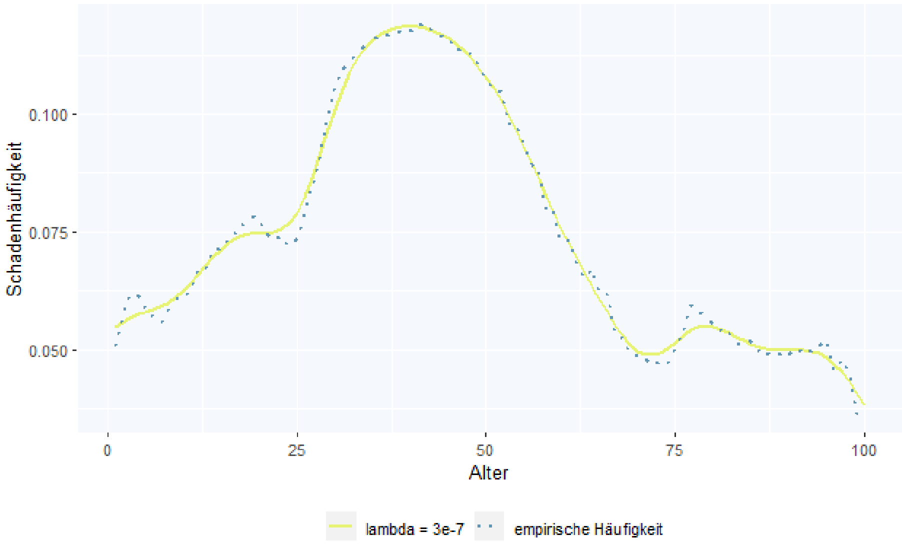

Abbildung 7.3: Die gefitteten Schadenhäufigkeiten mit $\lambda = 3e - 7$.

7.3 Kalibrierung der Rechnungshöhenverteilung

Der verwendete Datensatz hatte drei Spalten, welche jeweils das Alter, den Tarif und die Rechnungshöhe enthielt. Mit der Funktion `head()` werden die ersten Zeilen des Datensatzes ausgegeben.

	tarif	age	claim
1	B	3	2.72
2	B	4	2.59
3	D	3	2.67
4	B	3	1.34
5	B	7	1.51
6	B	1	3.23

Tabelle 7.1: Datenausschnitt

Um eine Verteilung an die vorhandenen Daten anzupassen, ist es sinnvoll, zuerst die empirischen Daten zu betrachten. Dies wurde durchgeführt, indem wir die statistischen Merkmale mithilfe der Funktion `summary()` ausgelesen haben.

Minimum	1. Quantile	Median	Mean	3. Quantile	Maximum
1,00	97,76	279,30	1002,39	761,66	222.505,06

Tabelle 7.2: Summary des Datensatz

Eine grafische Darstellung der Datenstruktur ermöglicht uns die `geom_hist()` Funktion aus dem Paket `ggplot2`. Die empirische Verteilung in der oberen Grafik in der Abbildung

7.5 zeigt die empirische Verteilung, die aufgrund der hohen Anzahl gemeldeter Klein- und Kleinstschäden eine deutliche Rechtsschiefe aufweist. Die vertikale Linie repräsentiert den Erwartungswert. Zur besseren grafischen Darstellung wurden hohe Schadenswerte durch Skalierung der x-Achse abgeschnitten. Um die Daten für eine verbesserte Interpretierbarkeit in eine andere Darstellung zu überführen, wurden sie logarithmiert, wie in der unteren Abbildung gezeigt wird.

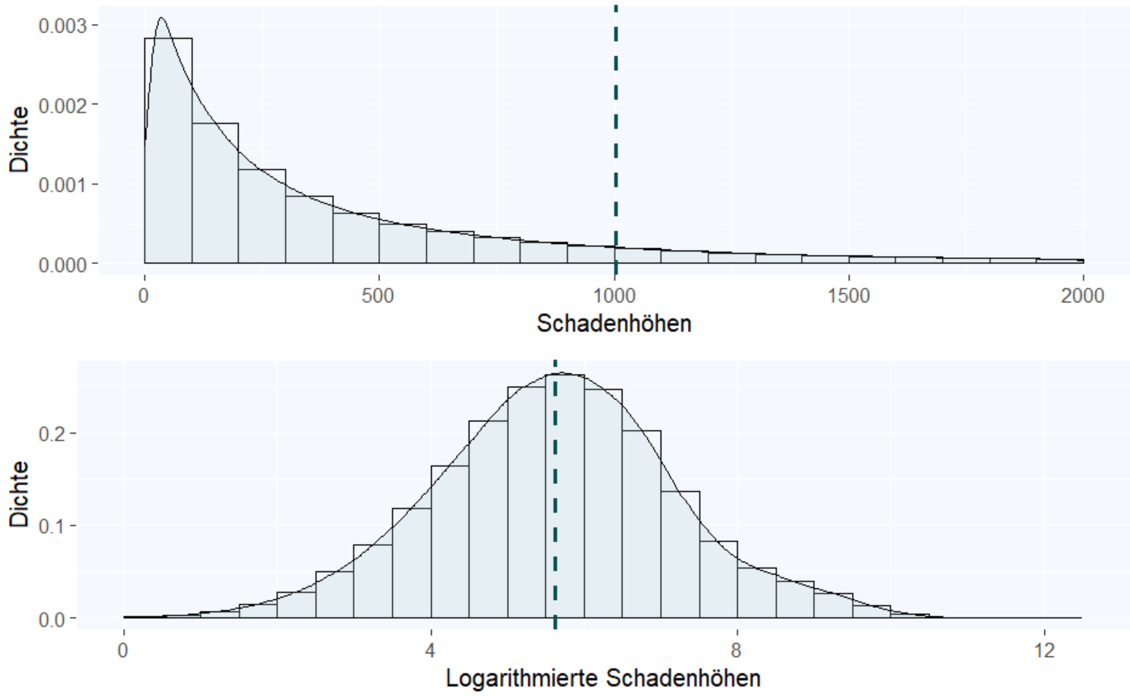

Abbildung 7.4: Histogramm der Schadenhöhen (obere Grafik) und der logarithmierten Schadenhöhen (untere Grafik).

Für das Histogramm wurde die Anzahl der Bins durch die Scott- und Sturges-Regel festgelegt.

7.3.1 Einteilung in Altersgruppen

Die Verteilung der Rechnungshöhen wurde abhängig der Altersklassen [0,20], [21,30], [31,40], [41,50], [51,60], [61,70], [71,80], 81+ betrachtet. Das Einteilen erfolgte durch die Funktion `byAgeGroup()`, indem die `indexFunction()` jedem übergebenen Alter für jede Altersklasse einen Index zwischen 1 und der maximalen Anzahl an Klassen zuordnet. Durch die Funktion `sapply()` wird jedes Alter aus dem Datensatz mit der Funktion `indexFunction()` der Altersgruppe zugewiesen und in der Spalte „ageGroupes" abgespeichert.

```
indexFunction <- function(age, ageGroupes){
  for(i in 1:length(ageGroupes)){
    if(age >= ageGroupes[[i]][1] && age <= ageGroupes[[i]][2]){
      return(i) }  }  }

byAgeGroup <- function(df, ageGroupes){

  return(df %>%
           mutate(ageGroup = sapply(age, indexFunction, ageGroupes =
               ageGroupes)))
}

ageGroupes <- list(c(0,20),  c(21,30), c(31,40), c(41,50),
                   c(51,60), c(61,70), c(71,80), c(81,max(data[["age"]])))

data <- byAgeGroup(data, ageGroupes=ageGroupes)
```

7.3.2 Anpassen der Verteilungen

Für jede Altersgruppe wurde mittels der `vglm`-Funktion aus dem Paket `VGAM` (*engl.: Vector Generalized Linear Models*) Verteilungen an die Parameter angepasst. Das Paket ist auf die Schätzung und Analyse von GLMs spezialisiert und bietet eine Vielzahl von Verteilungsfamilien und Link-Funktionen. Die Funktion `vglm()` unterstützt ein breiteres Spektrum an Verteilungsfamilien, als die Funktionen `glm()`, `vgam()` oder `fitdistr()` aus dem Paket `MASS`, [34, vgl. Seite 13].

Als mögliche Verteilungen wurde die Gamma-, Weibull- und Pareto-Verteilung gefittet und miteinander grafisch, siehe Abbildung 7.5, und durch den Root Mean Squared RMSE und Mean Absolut Error (MAE) verglichen, siehe Tabelle 7.3. Die Kalibrierung erfolgte für jedes Alter mit einer Schleife, welche die Ergebnisse in eine Liste speicherte.

```
numberOfAgeGroups <- length(G)
result <- list()

for(currentAge in 1:numberOfAgeGroups){
  df <- data %>% filter(ageGroup==currentAge)
  expectedValue <- round(mean(df$claim),digits=4)

  # Verteilung fitting
  fitWeibull <- vglm(claim~1, family=weibullR, data=df) # Weibull
  fitPareto <- vglm(claim~1, family=paretoII, data=df) # Pareto
  fitGamma <- vglm(claim~1, family= gamma2, data = df) # Gamma
  fitLognormal <- vglm(claim ~ 1, family=lognormal, data = df) #
      Lognormalverteilung

 result [[current_age]] <- list(
      "df" = df,
      "emp_EW" = expectedValue,
      "pareto" = list(
      "model" = fitPareto,
      "scale" = as.double(coef(fitPareto)[1]),
```

```
        "shape" = as.double(coef(fitPareto)[2])
      ),
        "lognormal" = list(
        "model" = fitLognormal,
        "scale" = coef(fitLognormal)[1],
        "shape" = exp(coef(fitLognormal)[2])
      ),
        "weibull" = list(
        "model" = fitWeibull,
        "scale" = as.double(coef(fitWeibull)[1]),
        "shape" = as.double(coef(fitWeibull)[2])
      ),
        "gamma" = list(
        "model" = fitGamma,
        "scale" = as.double(exp(coef(fitGamma)[1])/exp(coef(fitGamma)[2])),
        "shape" = as.double(coef(fitGamma)[2])
      )
    )
}
```

Die ermittelten Shape und Scale Parameter ermöglichten einen grafischen Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichten zu der empirischen Dichte. Wie in der Abbildung 7.5 ersichtlich ist, fitten stets die Lognormal- und Paretoverteilung am besten an die empirischen Daten.

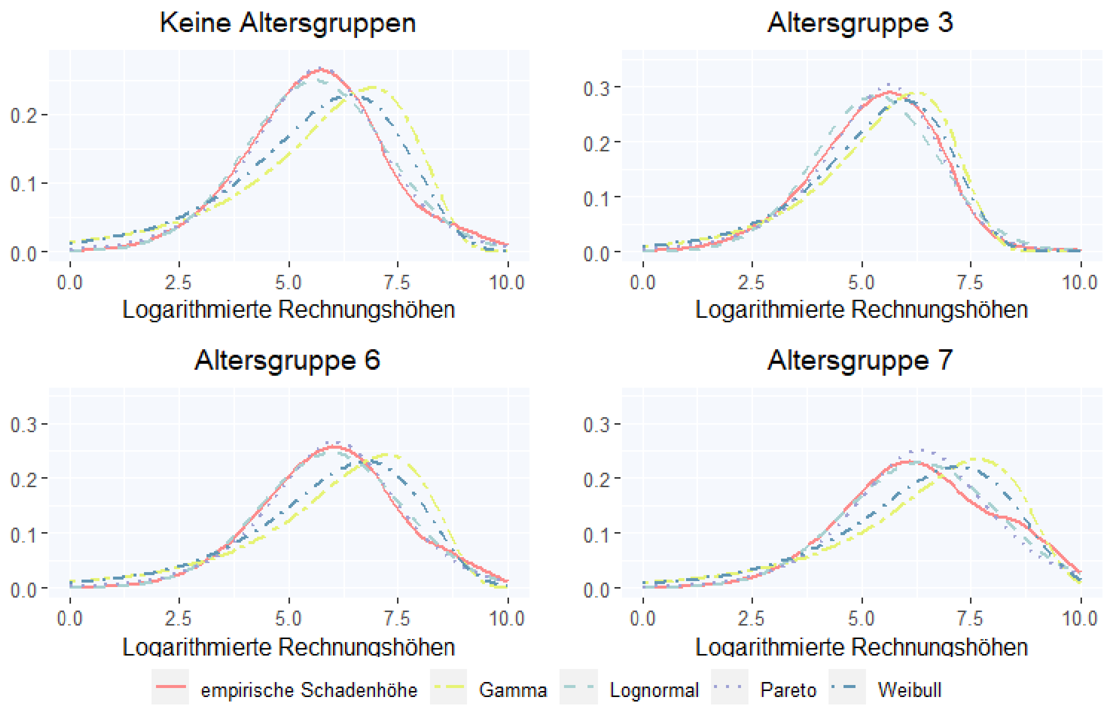

Abbildung 7.5: Die gefitteten Wahrscheinlichkeitsdichten der Schadenhöhe im Vergleich zu der logarithmierten empirischen Dichtefunktion.

Dies wird ebenfalls deutlich, wenn wir den Root Mean Squared Error (RMSE) und den Mean Absolute Error (MAE) vergleichen. In der Tabelle 7.3 wird beispielhaft die Fehleranalyse für die Wahrscheinlichkeitsdichten ohne Altersgruppen dargestellt. Die Pareto- und Lognormalverteilungen zeigen in jeder Altersgruppe die besten Ergebnisse, wobei die Lognormalverteilung stets die bessere Anpassung ist.
Diese Erkenntnis wird zusätzlich durch die Grafik in Abbildung 7.4 gestützt, da die logarithmierten Daten einer Normalverteilung ähneln. Deswegen im folgenden nur noch die Pareto- sowie die Lognormalverteilung behandelt.

Verteilung	Root.Mean.Squared.Error	Mean.Absolut.Error
Lognormal	0.057717	0.047587
Gamma	0.095321	0.074278
Pareto	0.061838	0.050047
Weibull	0.082154	0.064483

Tabelle 7.3: Fehler der gefitteten Wahrscheinlichkeitsdichten ohne Altersgruppen.

Exkurs:

Eine weitere Methode zur Schätzung der Schadenhöhe besteht darin, zunächst den Kopfschaden gemäß der allgemeinen Methode, wie in Formel (5.8), zu kalkulieren. Alternativ können bereits bestehende Kopfschäden aus bestehenden Tarifen herangezogen werden. Das ist insbesondere bei einer Tarifanpassung eine typische Vorgehensweise. Um die, für das Schadenzahl-Schadenhöhen-Modell benötigten, erwarteten Schadenhöhen zu ermitteln, ist es notwendig, die Schadenhäufigkeiten zu bestimmen und diese von den Kopfschäden herauszurechnen. Auf diese Weise werden die erwarteten Schadenhöhen erzeugt und mit statistischen Methoden die Schätzer für die Verteilungsparameter bestimmt.

7.3.3 Ausgleichen der Verteilungsparameter

Im nächsten Schritt wurden die Parameter der Verteilungen altersabhängig mithilfe von Splines ausgeglichen, wie bereits in Abschnitt 7.2 beschrieben. Die Entscheidung fiel auf Splines, um die stark abflachenden Randwerte gut nachzubilden.

```
lognormal <- data.frame(age = integer(),
                        scale = numeric(),
                        shape = numeric())


# Lognormal Werte zuordnen
for(current_age in 0:max(data[["age"]])){
  lognormal[current_age,1] <- current_age
  lognormal[current_age,2] <- by_agegroup[[index_fun(current_age, G)]]$
      Lognormal$scale
  lognormal[current_age,3] <- by_agegroup[[index_fun(current_age, G)]]$
      Lognormal$shape
}

```

```r

# Lognormal
lognormalFitScale <- ss(lognormal$age, lognormal$scale, df= 5)
lognormalFitShape <- ss(lognormal$age, lognormal$shape, df= 5)
lognormal <- mutate(lognormal,
                    scaleFit = fitted(lognormalFitScale),
                    shapeFit = fitted(lognormalFitShape))
```

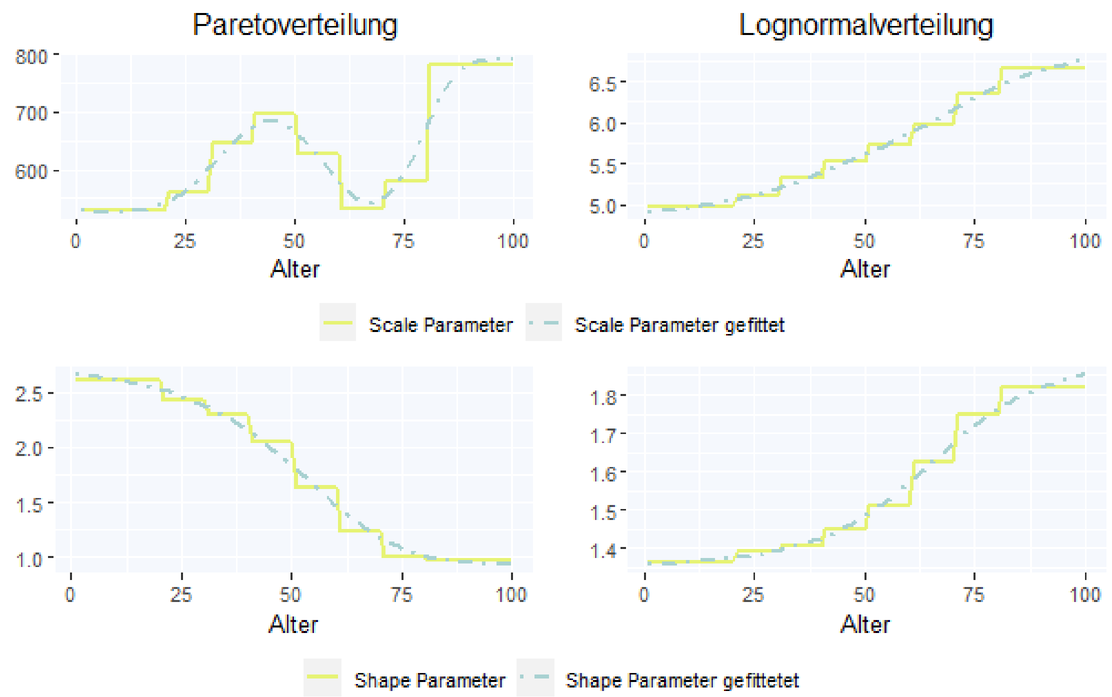

Abbildung 7.6: Parameter der Verteilungen gefittet

Anhand der gefitteten Parameter wurden die Erwartungswerte, und somit die erwarteten Schadenhöhen (siehe 3.3), berechnet. Hierfür wurden vorab für die Lognormal- und Paretoverteilungen die Funktion $xf(x)$ implementiert.
Dies sind die Funktionen `expectedValueLognormalFun()` und `expectedValueParetoFun()`. Die Integration dieser Funktionen, um den Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$ zu erhalten, erfolgte in der Funktion `integration()` mithilfe der aus R implementierten Funktion `integrate()`.

Ebenfalls im Voraus wurden nur die Dichtefunktionen $f(x)$ in den Funktionen `distributionLognormalFun()` und `distributionParetoFun()` definiert, um im späteren Schritt durch Integration die Verteilungsfunktionen zu erhalten.

Mit der Funktion `integration()` wurde die Formel (5.11) implementiert, wobei hier die möglichen Selbstbehalte direkt von den Rechnungshöhen abgezogen wurden.

Die Integration erfolgte für jedes Alter in einer Schleife, als Ergebnis erhielten wir einen Vektor mit den erwarteten Schadenhöhen für jedes Alter.

```
expectedValueLognormalFun <- function(val, shape, scale){
  1/(sqrt(2*pi)*shape)*exp(-(log(val)-scale)^2/(2*shape^2))}

expectedValueParetoFun <- function(val, shape, scale){
  ((val*shape)/scale)*(1+val/scale)^(-(shape+1))}


distributionLognormalFun <- function(val, shape, scale){
  (1/(val*sqrt(2*pi)* shape))*exp(-(log(val)-scale)^2/(2*shape^2))}

distribtutionParetoFun <- function(val, shape, scale){
  ((shape)/scale)*(1+val/scale)^(-(shape+1))}

integration <- function(endAge, expectedValueFun, distributionFun, scale,
    shape, deductible, xUpper){
  result <- rep(0, endAge)

  for (x in 1:endAge) {
    distribution <- if(deductible == 0) 0 else integrate(distributionFun,
                                                          0,
                                                          deductible,
                                                          shape=shape[x],
                                                          scale=scale[x])$
                                                              value

    result[x] <- integrate(expectedValueFun,
                           deductible,
                           xUpper,
                           shape=shape[x],
                           scale=scale[x])$value-deductible*(1-distribution)
  }
  return(result)
}


expectedValueLognormal <- integration(endAge = 100,
                                      expectedValueFun=
                                          expectedValueLognormalFun,
                                      distributionFun=
                                          distributionLognormalFun,
                                      scale=lognormal$scaleFit,
                                      shape=lognormal$shapeFit,
                                      deductible=0,
                                      xUpper=300000)


expectedValuePareto <- integration(endAge=100,
                                    expectedValueFun=expectedValueParetoFun,
```

```
                                              distributionFun=distributionParetoFun,
                                              scale=pareto$scaleFit,
                                              shape=pareto$shapeFit,
                                              deductible=50,
                                              xUpper=300000)
```

Die Abbildung 7.7 zeigt in der Stufenfunktion die erwartete Rechnungshöhe, abhängig von jeder Altersgruppe, im Vergleich zu den soeben berechneten Erwartungswerte der Verteilungsfunktionen für jedes Alter. Erneut wird die bessere Anpassung der Lognormalverteilung im Vergleich zur Paretoverteilung deutlich.

Es ist jedoch anzumerken, dass für die späteren Altersgruppen [71,80] und 81+ beide Verteilungsfunktionen von den empirischen Daten abweichen. In diesen Altersgruppen hätte möglicherweise eine andere Verteilungsfunktion oder Datentransformation besser gepasst. Jedoch tritt dieses Phänomen nur bei einer geringen Datenlage, aufgrund des kleinen Bestandes im hohen Alter auf. Daher bleibt die Lognormalverteilung trotz dieser Abweichungen eine sinnvolle Wahl.

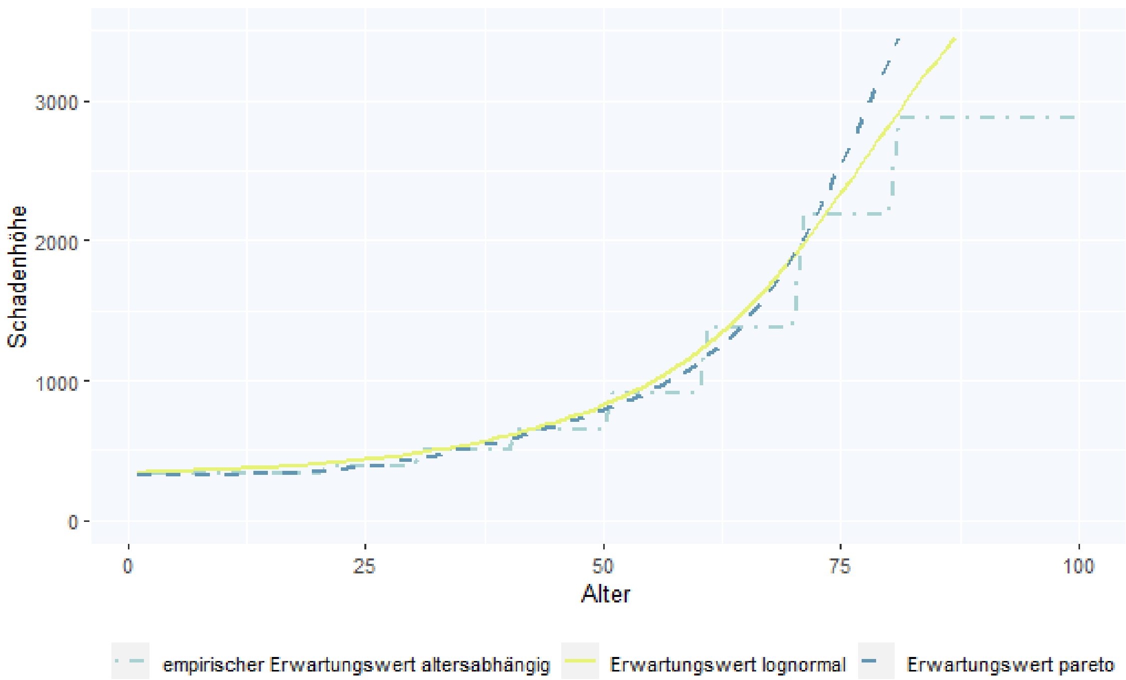

Abbildung 7.7: Die berechneten Erwartungswerte der Verteilungsfunktionen im Vergleich zu den Erwartungswerten für jede einzelne Altersgruppe.

7.4 Prämienkalkulation

Die verwendeten Ausscheideordnungen für die Prämienkalkulation und der Code für die Berechnung der Kommutationszahlen, des Renten- und Leistungsbarwertes befinden sich im Anhang 9. In einem Tarif ohne Prämienrückvergütung genügt es, die zuvor kalkulierte erwartete Schadenhöhe gemäß Abschnitt 7.3 mit der Schadenfrequenz aus Abschnitt 7.2 zu multiplizieren, wie in Formel (5.10) dargestellt. Die resultierenden Kopfschäden dienen als Rechnungsgrundlage und werden an die Funktion für die Berechnung des Leistungsbarwertes, `AxCalculation()`, übergeben.

Durch die Prämienrückvergütung steigt der Aufwand für die Berechnung der Kopfschäden, da diese von der Prämie abhängen und daher rekursiv zusammen mit der Prämie ermittelt werden.
Der Algorithmus 1 wird durch die Funktion `premiumCalculation()` implementiert und berechnet die Prämie für eine Krankenversicherung unter Berücksichtigung der Rückvergütung. Wenn der Parameter `month=0` gewählt wird, entspricht die resultierende Prämie derjenigen nach herkömmlicher Berechnung. Um eine Abnahme der Bruttoprämien in den höheren Altersstufen zu verhindern, wurde in der Funktion `PxCalculation()` aus dem Anhang 9 sowie in der Funktion `premiumCalculation()` eine konstante Prämie festgelegt.

Dadurch soll jeglicher Anreiz zur Kündigung des bestehenden Vertrags und zum Abschluss eines neuen Vertrags zu eliminiert werden. Dieser Vorgang geschieht in der `for`-Schleife, mit der Überprüfung, ab dem Alter x ob die Prämie im Alter $x+1$ niedriger ist, als die Prämie im Alter x. Tritt dieser Fall ein, wird ab diesem Zeitpunkt Prämie für das Alter x angenommen.

```r
premiumCalculation <- function(month, startAge, endAge, D, N, h, S) {
  alpha <- month/12
  P <- rep(0,endAge + 1)
  K <- rep(0,endAge + 1)
  interimResult <- rep(0,endAge + 1)

  for(x in endAge:startAge){
    P[x] <- ((interimResult[x+1] + h[x]*S[x]*D[x])/N[x])/(1-(1-h[x])*D[x]*
        alpha/N[x])
    K[x] <- K[x+1] + ((1-h[x])*alpha*P[x]+h[x]*S[x])
    interimResult[x] <- interimResult[x+1] + ((1-h[x])*alpha*P[x]+h[x]*S[x])
        *D[x]
  }

  for(x in 1:(endAge-1)) {
    if(P[x] > P[x+1]){P[x+1] = P[x]} else
    {P[x] = P[x]}
  }

  return(P[startAge:endAge])
}

premiumLognormal <- premiumCalculation(month = 0,
```

```
                                   startAge = 22,
                                   endAge = 100,
                                   D = commutationValues$Dx,
                                   N = commutationValues$Nx,
                                   h = frequency$fitted,
                                   S = expectedValueClaimSize$
                                       lognormal)
```

Die Abbildung 7.8 zeigt den berechneten Prämienverlauf für einen Tarif mit einem Einstiegsalter von 22 Jahren, für die Lognormalverteilung sowie die Paretoverteilung mit verschiedenen Rückerstattungen der Monatsprämie. Dabei wurde ein Rechnungszins von $i = 0$ angenommen.

Es wurden verschiedene Anzahlen an Rückerstattungen verglichen, dabei ist deutlich erkennbar, dass die Prämie ansteigt, sobald die Anzahl der monatlichen Rückerstattungen zunimmt.

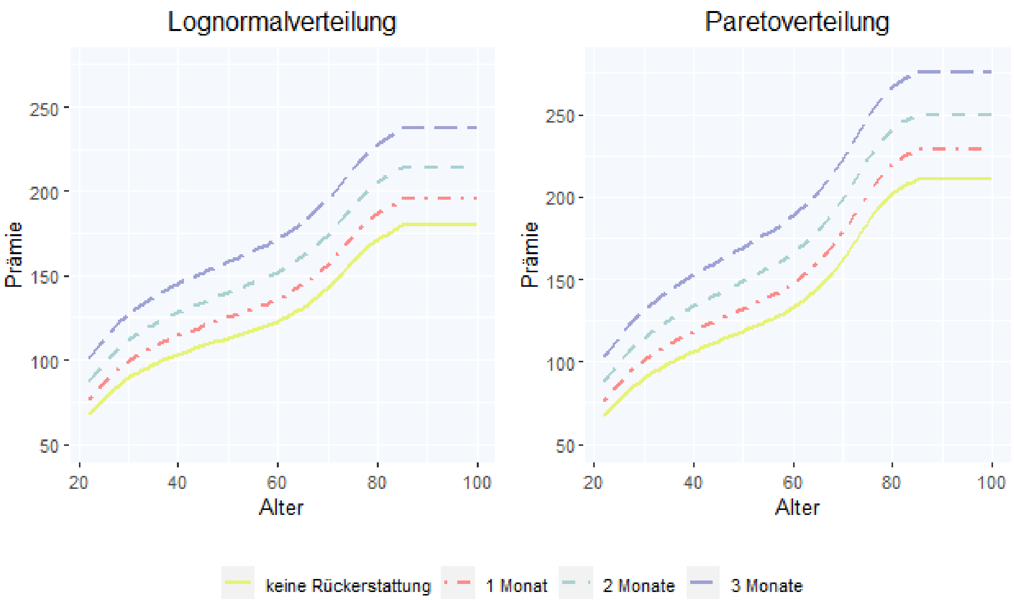

Abbildung 7.8: Prämienverläufe mit unterschiedlicher Auszahlungsrate α.

Bei Schadenfreiheit erhalten die versicherten Personen eine Rückvergütung abhängig von der Prämie. Die Darstellung der Rückvergütungen für die Verteilungsfunktionen sind in folgender Abbildung veranschaulicht.

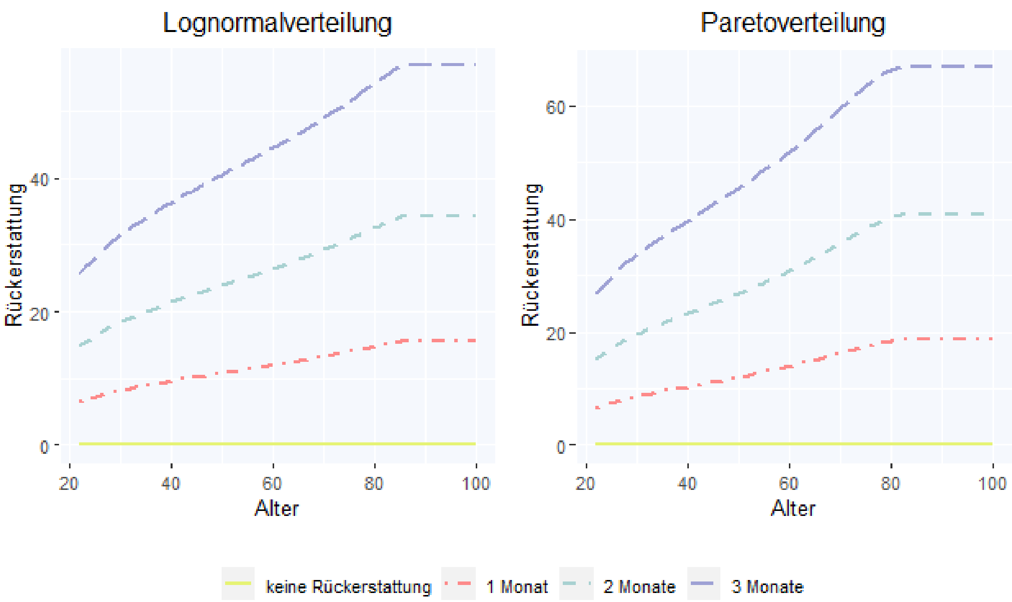

Abbildung 7.9: Die Höhe der Prämienrückvergütung bei verschiedenen Auszahlungsraten α im Vergleich.

8 Konklusion und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene Kalkulationsvarianten für die Tarifierung mit erfolgsunabhängiger Prämienrückvergütung in der Krankenversicherung vorgestellt. Die in der Praxis gängigen Verfahren verwenden zwei Ansätze: die Einrechnung der Prämienrückvergütung als Zuschlag auf die Prämie für die Rechnungsbeträge oder als Zuschlag innerhalb der Kopfschäden. Beide Varianten erfordern die Durchführung eines Iterationsverfahrens, was einen erheblichen Kalkulationsaufwand bedeutet.

Um eine alternative Methode anzubieten, wurde in dieser Arbeit das Schadenzahl-Schadenhöhen-Modell aus dem Artikel „Zusatzversicherung für Krankenhauskosten mit wählbarem Selbstbehalt“ weiterentwickelt und in RStudio implementiert. Hierfür wurden Schadenhöhen und Schadenhäufigkeiten aus einem anonymisierten Datenbestand geschätzt, um im weiteren Verlauf die Kopfschäden berechnen zu können. Dabei wurden Kalkulationsverfahren aus der Schadensversicherung angewandt. Mit Hilfe eines Algorithmus war es dann möglich, die Prämie mit verschiedenen Rückvergütungsanteilen zu berechnen.

Die vorgestellten Ergebnisse und die entwickelte Methode bieten eine vielversprechende Alternative zu den bisherigen Verfahren, da sie einen geringeren Kalkulationsaufwand erfordert. Dies könnte zu einer effizienteren und präziseren Prämienkalkulation in der Krankenversicherung führen und somit sowohl für Versicherungsunternehmen als auch für Versicherte von Nutzen sein.

Es ist zu betonen, dass diese Arbeit nicht den Anspruch erhebt, alle Aspekte dieses komplexen Themas vollständig abzudecken. Während der Bearbeitung sind weitere Fragen aufgetaucht, die für die Forschung von Relevanz sind, jedoch den Umfang dieser Arbeit sprengen würden. Im Folgenden werden einige dieser offenen Fragen aufgeführt: Diese könnten sich, zum Beispiel, auf die Auswirkungen auf das Verhalten der Versicherungnehmer:innen bei dieser Tarifform beziehen. Ein weiterer Aspekt welcher untersucht werden kann, ist ob der Anreiz zur Schadensverhütung gegeben ist und somit zu einer risikogerechten Prämie führt.

Die erfolgsunabhängige Prämienrückvergütung schafft Anreize zur Unfallverhütung und fördert die Eigenverantwortung der Versicherungsnehmer:innen, mit dem Effekt die Ausgaben für Versicherungsleistungen zu senken. Wäre es denkbar ein solches System für die gesetzliche Krankenversicherung einzuführen? Diese und weitere Fragen gilt es in künftigen Arbeiten zu klären, um sowohl für die Versicherungsnehmer:innen als auch Versicherungsunternehmen neue und optimierte Möglichkeiten zu generieren.

9 Anhang

9.1 Verwendete Rechnungsgrundlagen

Die zur Durchführung der Prämienkalkulation erforderlichen Rechnungsrundlagen sind nachfolgend aufgeführt. Die Stornowahrscheinlichkeiten basieren auf den deutschen Kopfschadendaten aus dem Jahr 2020 und wurden von der BaFin-Website [38] bezogen, da in Österreich keine entsprechenden Daten verfügbar sind. Die Sterbewahrscheinlichkeiten wurden von Statistik Austria entnommen [36].

Folgende Rechnungsgrundlagen wurden verwendet:
Rechnungszins: 0%
Stornotafeln: Tarif 06_STORNO_W_sp (ab Alter 90: 0%)
Sterbetafeln: Statistik Austria, Frauen, 2021 (Endalter 100)

Alter	Stornowahrscheinlichkeit	Sterbewahrscheinlichkeit
21	0,1313	0,0002
22	0,0992	0,0001
23	0,0905	0,0001
24	0,1035	0,0002
25	0,1276	0,0002
26	0,1453	0,0002
27	0,1431	0,0003
28	0,1236	0,0002
29	0,0994	0,0002
30	0,0813	0,0003
31	0,0686	0,0002
32	0,0620	0,0003
33	0,0589	0,0004
34	0,0561	0,0004
35	0,0554	0,0004
36	0,0508	0,0004
37	0,0469	0,0004
38	0,0435	0,0005
39	0,0405	0,0005
40	0,0380	0,0006
41	0,0358	0,0008
42	0,0340	0,0008
43	0,0324	0,0009

Alter	Stornowahrscheinlichkeit	Sterbewahrscheinlichkeit
44	0,0311	0,0008
45	0,0301	0,0011
46	0,0288	0,0010
47	0,0277	0,0012
48	0,0266	0,0014
49	0,0258	0,0014
50	0,0258	0,0017
51	0,0270	0,0015
52	0,0294	0,0023
53	0,0318	0,0023
54	0,0311	0,0024
55	0,0246	0,0024
56	0,0150	0,0027
57	0,0079	0,0029
58	0,0049	0,0034
59	0,0046	0,0037
60	0,0052	0,0045
61	0,0059	0,0053
62	0,0064	0,0056
63	0,0057	0,0057
64	0,0048	0,0063
65	0,0041	0,0080
66	0,0036	0,0080
67	0,0031	0,0094
68	0,0028	0,0095
69	0,0026	0,0108
70	0,0025	0,0120
71	0,0025	0,0132
72	0,0024	0,0161
73	0,0024	0,0179
74	0,0024	0,0182
75	0,0024	0,0196
76	0,0024	0,0237
77	0,0024	0,0257
78	0,0024	0,0269
79	0,0024	0,0306
80	0,0024	0,0358
81	0,0024	0,0389
82	0,0024	0,0465
83	0,0024	0,0502
84	0,0024	0,0613
85	0,0024	0,0709

Alter	Stornowahrscheinlichkeit	Sterbewahrscheinlichkeit
86	0,0024	0,0864
87	0,0024	0,0952
88	0,0024	0,1136
89	0,0024	0,1265
90	0,0024	0,1466
91	0,0024	0,1646
92	0,0024	0,1947
93	0,0024	0,2065
94	0,0024	0,2301
95	0,0024	0,2552
96	0,0024	0,2905
97	0,0024	0,3095
98	0,0024	0,3319
99	0,0024	0,3335
100	0,0024	0,3960

9.2 Verwendete Software und Bibliotheken

Für die Reproduzierbarkeit werden in diesem Abschnitt die Versionen der verwendeten Software, sowie der eingebundenen Bibliotheken angegeben.
Die Berechnungen erfolgten in der Software R (Version 4.2.2) in Verbindung mit R-Studio (Version 2023.06.1+524).

Bibliothek	Version
actuar	3.3.1
dplyr	1.0.10
GeneralizedHyperbolic	0.8.4
glmnet	4.1.8
gridExtra	2.3
MASS	7.3.58.1
npreg	1.0.9
splines	4.2.2
tibble	3.1.8
tidyr	1.3.0
VGAM	1.1.7

9.3 R-Code

Mit dem folgenden Code wurden Prämienkalkulationen, zum Beispiel für diverse Abbildungen, durchgeführt.

```
# Diskontierte Anzahl der im Bestand verbliebenen Personen - Dx
DxCalculation <- function(p, startAge, endAge, interest, size = 10000){
  D <- rep(0,endAge)
  D[startAge] <- size
```

```

  for (x in (startAge + 1):endAge){
    D[x] <- p[x-1]*((1/(1-interest))^(x-1))*D[x-1]
  }
  return(D)
}

# Aufsummierte diskontierte Anzahl der im Bestand verbliebenen Personen - Nx
NxCalculation <- function(D, startAge, endAge){
  N <- rep(0, endAge+1)
  age <- startAge:endAge

  for(x in rev(age)){
    N[x] <- N[x+1]+D[x]
  }

  return(N[1:endAge])
}

# Rentenbarwert ax
axCalculation <- function(N, D, startAge, endAge){
  a <- rep(0, endAge)
  age <- startAge:endAge

  for(x in age){
    a[x] <- N[x]/D[x]
  }
  return(a)
}

# Leistungsbarwert Ax
AxCalculation <- function(K, D, startAge, endAge){
  interimResult <- rep(0, endAge + 1)
  A <- rep(0, endAge)
  age <- startAge:endAge

  for(x in endAge:startAge){
    interimResult[x] <- interimResult[x+1] + K[x]*D[x]
    A[x] <- interimResult[x]/D[x]
  }
  return(A)
}

# Praemienberechnung nach dem Aequivalenzprinzip: Px=Ax/ax
PxCalculation <- function(a, A, startAge, endAge){
  P <- rep(0, endAge)
  age <- startAge:endAge

  for(x in age){
    P[x] <- A[x]/a[x]
  }
  return(P)
}
```

Literatur

[1] J. Behne. „Anmerkungen zu Tarifen mit absoluten Selbstbehalt in der Privaten Krankenversicherung“. In: *Blätter der DGVFM* 17 (1986), S. 269–277.

[2] C. J. Wild T. W. Yee. „Vector generalized additive models“. In: *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology* 58.3 (1996), S. 481–493.

[3] et al. W. Goldmann. „Krankheitskostentarife mit erfolgsunabhängiger Beitragsrückerstattung“. In: *Blätter der DGVFM* 24.2 (1999), S. 371–396.

[4] K. Th. Hess. „Ausgleichsverfahren für Kopfschaden: Bemerkungen zu einer Arbeit von Siegel“. In: *Blätter der DGVFM* 25.1 (2001), S. 61–71.

[5] S. C. Scheidt. „Die verallgemeinerte Lognormalverteilung“. Magisterarb. Universität Dortmund, 2001.

[6] S. Kotz C. Kleiber. *Statistical size distributions in economics and actuarial sciences*. John Wiley & Sons, 2003.

[7] et al. F.M. Dekking. *A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding why and how*. Bd. 488. Springer, 2005.

[8] H. Milbrodt. *Aktuarielle Methoden der deutschen Privaten Krankenversicherung*. Bd. 34. VVW GmbH, 2005.

[9] O. Riedel. „Wie wirkt eine Änderung der Beitragsrückerstattung auf die Belastung der Versicherungsnehmer in der PKV?“ In: *German Risk and Insurance Review (GRIR)* 1.1 (2005), S. 1–21.

[10] H. Pham. *Springer handbook of engineering statistics*. Bd. 49. Springer, 2006.

[11] K. D. Schmidt. *Versicherungsmathematik*. Springer-Verlag, 2006.

[12] G. B. Schaalje A. C. Rencher. *Linear models in statistics*. John Wiley & Sons, 2008.

[13] E. Eckhart. „Krankenversicherung in Österreich – Struktur, Finanzierungsprobleme und Reformansätze“. Magisterarb. Universität Wien, 2009.

[14] B. Johansson E. Ohlsson. *Non-life insurance pricing with generalized linear models*. Bd. 174. Springer, 2010.

[15] Michael Koller. *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*. Springer-Verlag, 2010.

[16] et al. S. Foss. *An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions*. Bd. 6. Springer, 2011.

[17] U. M. Stocker K-H. Waldmann. *Stochastische Modelle: Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Verlag, 2012.

[18] et al. M. Buse. *Akturaielle Tarifgestaltung in der Schaden- und Unfallversicherung.* Bd. 38. VVW GmbH, 2015.

[19] A. Fleischmann J. Hirz. „Zusatzversicherung für Krankenhauskosten mit wählbarem Selbstbehalt“. In: *Der Aktuar* 22.3 (2016), S. 130–136.

[20] et al. K. Th. Hess. *Schadenversicherungsmathematik.* Springer-Verlag, 2016.

[21] T. Becker. *Mathematik der privaten Krankenversicherung.* Springer Spektrum, 2017.

[22] O. Forster. *Analysis 2: Differentialrechnung im IRn, gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer-Verlag, 2017.

[23] K. Metzger. *Skriptum Mathematik der Krankenversicherung als Teil der Vorlesung Personenversicherung.* 2017.

[24] „Fach Versicherungsmathematik“. In: *Blätter der DGVFM* (2018).

[25] F. Wittmann. *Skriptum zur Vorlesung Versicherungwirtschaftslehre.* 2018.

[26] et al. D. CM. Dickson. *Actuarial mathematics for life contingent risks.* Cambridge University Press, 2019.

[27] „Zwei Systeme der Beitragskalkulation in der Privaten Krankenversicherung“. In: *Aktuar Aktuell, Mitteilungen der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.* 48 (2019), S. 10–11.

[28] „Aktuarielle Betrachtung von Krankheitskostentarifen mit einer vom Zahlbeitrag abhängigen erfolgsunabhängigen Beitragsrückerstattung (euBR)“. In: *Blätter der DGVFM* (2020).

[29] E. Bas. *Einführung in Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statisik und Stochastische Prozesse.* Springer, 2020.

[30] A. Lenckner. *Krankenversicherungsmathematik.* 2020.

[31] S. Reicher. *Rechnungszins in der Krankenversicherung.* Website: https://avoe.at/fma-rundschreiben-zum-rechnungszins-in-der-krankenversicherung/. [Online; zugegriffen am 08. Februar 2023]. 2021.

[32] U. Bankhofer. „Homogene Markovketten“. In: *Quantitative Unternehmensplanung: Mathematische Methoden und betriebliche Anwendungsbeispiele.* Springer, 2022.

[33] „Leitfaden Krankenversicherung nach Art der Lebensversicherung“. In: *Arbeitskreis Versicherungen* (2022). Version 1.0.

[34] C. Moler T. W. Yee. *Package „VGAM“.* Website: https://cran.r-project.org/web/packages/VGAM/VGAM.pdf. [Online; zugegriffen am 18. September 2023]. 2023.

[35] Arbeiterkammer Oberösterreich. *Private Krankenversicherung.* Website: https://ooe.arbeiterkammer.at/beratung/konsumentenschutz/versichern/Private_Krankenversicherung.html. [Online; zugegriffen am 21. März 2023].

[36] Statisitk Austria. *Sterbewahrscheinlichkeiten.* Website: https://www.statistik.at/statistiken/bevoelkerung-und-soziales/bevoelkerung/demographische-indikatoren-und-tafeln/sterbetafeln. [Online; zugegriffen am 07. Juni 2023].

[37] BaFin. *Alterungsrückstellung.* Website: http://www.pkv-selbstvergleich.de/images/AR-Tod.gif. [Online; zugegriffen am 12.Juni 2023].

[38] BaFin. *Wahrscheinlichkeitstafeln für die Krankenversicherung 2019 gemäß § 159 VAG.* Website: https://www.bafin.de/SharedDocs/Veroeffentlichungen/DE/Statistik/st_wahrscheinlichkeitstafeln_pkv_2019.html. [Online; zugegriffen am 27. August 2023].

[39] BaFin. *Wahrscheinlichkeitstafeln für die Krankenversicherung 2021 gemäß § 159 VAG.* Website: https://www.bafin.de/SharedDocs/Veroeffentlichungen/DE/Statistik/st_wahrscheinlichkeitstafeln_pkv_2021.html. [Online; zugegriffen am 27. August 2023].

[40] Bettine Pfluger. *Bereits 3,1 Millionen Österreicher sind zusatzversichert.* Website: https://www.derstandard.at/story/2000109556646/bereits-3-1-millionen-oesterreicher-sind-zusatzversichert. [Online; zugegriffen am 14. September 2023].

[41] Pflege und Konsumentenschutz Bundesministerium für Soziales Gesundheit. *Krankenversicherung.* Website: https://www.sozialministerium.at/Themen/Soziales/Sozialversicherung/Krankenversicherung.html. [Online; zugegriffen am 02. Mai 2023].

[42] Die Presse. *Fast jeder Dritte hat eine private Krankenversicherung.* Website: https://www.diepresse.com/5937352/fast-jeder-dritte-hat-eine-private-krankenversicherung. [Online; zugegriffen am 14. September 2023].

[43] Finanzmarktaufsicht. *Rundschreiben betreffend den Rechnungszins in der Krankenversicherung nach Art der Lebensversicherung.*

[44] D. Hernder. *Steuersätze Versicherungssparten.* Website: https://www.finanz.at/versicherung/versicherungssteuer/. [Online; zugegriffen am 13. Mai 2023].

[45] PRIVATpatient. *Jahresbericht „Private Krankenversicherung“.* Website: https://www.privatpatient.at/tipps-infos/l/blog/jahresbericht-private-krankenversicherung/. [Online; zugegriffen am 14. September 2023].

[46] K. D. Schmidt. *Erfahrungstarifierung.* Website: https://www.versicherungsmagazin.de/lexikon/erfahrungstarifierung-1945109.html. [Online; zugegriffen am 05. Juni 2023].

[47] §101 Satz 1 VAG.

[48] §150 Absatz 1 VAG.

[49] Verband der Versicherungsunternehmen Österreichs VVO. *Jahresbericht 2022 Datenteil.* Website: https://www.infothek-vvo.at/der-vvo-jahresbericht-2022-ist-online/. [Online; zugegriffen am 14. September 2023].

[50] §187b Absatz 1–3 VersVG.

[51] §187f Absatz 1 VersVG.

[52] §187f Absatz 2 VersVG.

[53] §187f Absatz 3 VersVG.