Diplomarbeit

Beulverhalten von Platten unter Induktionsheizung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

Diploma Thesis

Buckling Behavior of Plates under Induction Heating

submitted in satisfaction of the requirements for the degree of
Diplom-Ingenieur

of the TU Wien, Faculty of Mechanical and Industrial Engineering

von

Stefan Ramsauer, BSc

Matrikelnummer: 11730873

unter der Anleitung und Betreuung von

Univ.Prof. Mag. Dr. **Yury Vetyukov**
Institut für Mechanik und Mechatronik
Forschungsbereich Mechanik fester Körper
Technische Universität Wien
Getreidemarkt 9/E325, 1060 Wien, Österreich

Assistant Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. **Florian Toth**
Institut für Mechanik und Mechatronik
Forschungsbereich Messtechnik und Aktorik
Technische Universität Wien
Getreidemarkt 9/E325, 1060 Wien, Österreich

Wien, im März 2024

Stefan Ramsauer, BSc

Diese Arbeit wurde von Berndorf Band GmbH im Rahmen des FFG Bridge Projekts „Induction-Buckling“ (FFG Projektnummer: FO999903663) unterstützt.

Ich nehme zur Kenntnis, dass ich zur Drucklegung dieser Arbeit nur mit Bewilligung der Prüfungskommission berechtigt bin.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.
Das Thema dieser Arbeit wurde von mir bisher weder im In- noch Ausland einem_r Beurteiler_in zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Arbeit stimmt mit der von den Begutachter_innen beurteilten Arbeit überein.
Ich nehme zur Kenntnis, dass die vorgelegte Arbeit mit geeigneten und dem derzeitigen Stand der Technik entsprechenden Mitteln (Plagiat-Erkennungssoftware) elektronisch-technisch überprüft wird. Dies stellt einerseits sicher, dass bei der Erstellung der vorgelegten Arbeit die hohen Qualitätsvorgaben im Rahmen der geltenden Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis „Code of Conduct“ an der TU Wien eingehalten wurden. Zum anderen werden durch einen Abgleich mit anderen studentischen Abschlussarbeiten Verletzungen meines persönlichen Urheberrechts vermieden.

Wien, im März 2024 Stefan Ramsauer, BSc

Kurzfassung

Das Ziel der vorliegenden Abschlussarbeit ist es, den Beuleintritt und die initiale Beulform von Blechbändern vorherzusagen, die thermisch wie mechanisch belastet werden. Den Hintergrund bilden vielen industrielle Prozesse, bei denen lange Bleche zum Einsatz kommen, die zu einer Schleife zusammengeschweißt und über Umlenktrommeln geführt werden. Zwecks Aufbereitung, aber auch beim späteren Einsatz werden die Bänder lokal erhitzt. Auf energieeffiziente Weise geschieht dies durch Induktion von Wirbelströmen. Neben den thermischen Spannungen zufolge des ungleichmäßigen Aufheizens sind die Bleche auch einer Vorspannung durch die besagten Trommeln ausgesetzt. Mithilfe eines Ritz-Ansatzes und der linearen Beulanalyse soll das Zusammenspiel beider Belastungen beim Beulen untersucht werden.

Nacheinander werden zwei Temperaturverteilungen behandelt, die Extremfälle der mitunter sehr komplexen realen Verläufe darstellen. Im ersten Lastfall möge die Temperatur ausschließlich von der Breitenkoordinate abhängen und im zweiten lediglich von der Längskoordinate. Um Extremfälle realer Szenarien handelt es sich insofern, als sprungartige Verteilungen angenommen werden. Jedenfalls sind die gewählten Temperaturfelder gemeinsam mit der vorgegebenen Längskraft für den Spannungszustand des Bleches in seiner ebenen Konfiguration verantwortlich. Im ersten Lastfall wird dieser Spannungszustand analytisch beschrieben, während im zweiten die Simulationsergebnisse der Software ABAQUS zu Hilfe genommen werden.

Im nächsten Schritt wird mithilfe eines Ritz-Ansatzes die Gestalt des Durchbiegungsfeldes angenommen. Gemäß der linearen Beulanalyse werden dann die Verzerrungsenergie sowie anschließend die Steifigkeitsmatrix berechnet. Dieser kommt im Rahmen des vorliegenden Stabilitätsproblems besondere Bedeutung zu und ist allen voran von der Längskraft und der thermischen Belastung abhängig. Die kritische Temperaturdifferenz ergibt sich gemeinsam mit der Beulform aus einem verallgemeinerten Eigenwertproblem, das von den Anteilen der Steifigkeitsmatrix handelt. Weil der Ritz-Ansatz stets auch Parameter beinhaltet, in denen er nichtlinear ist, muss zum Abschluss der Berechnungen jeweils eine Minimierungsaufgabe gelöst werden.

Der erste Lastfall ähnelt Problemen, für die in der Literatur bereits Lösungen vorliegen. In Anlehnung an diese wird deshalb ein Ansatz gewählt, der in Längsrichtung sinusförmig ist. Es lassen sich sodann die kritische Temperaturdifferenz und auch die Beulwellenzahl in Abhängigkeit der Vorspannung angeben. Weiters wird der Einfluss der erhitzten Breite sowie der Blechdicke untersucht. Die zusätzlich durchgeführten Simulationen in ABAQUS liefern sehr gut übereinstimmende Ergebnisse, sodass die grundsätzliche Vorgehensweise und vor allem auch die Annahme über die Beulformen verifiziert sind. Die wesentliche Erkenntnis beim ersten Lastfall ist der Anstieg der Beulwellenzahl mit zunehmender Längskraft.

Beim Längs-Temperaturgradienten sind die Beulformen komplexer, weswegen ein allgemeinerer Ansatz verwendet wird. Schließlich werden damit einige konkrete Kombinationen von Blechdicke und Längskraft untersucht. Der relative Fehler der kritischen Temperaturdifferenz gegenüber den Ergebnissen aus ABAQUS beläuft sich dabei auf 7 bis 45%. Der Ansatz funktioniert also dem Grunde nach gut, ist aber wohl ausbaufähig. Etwaige Verbesserungsvorschläge betreffen neben den Polynomgraden auch die Unterschiedlichkeit der Abfallraten, mit denen die Beulformen nach vorne und hinten zurückgehen. Jedenfalls geht aus den Untersuchungen klar hervor, dass sich bei dünnerem Blech zunehmend mehr Wellen ausbilden, die der Länge nach parallel verlaufen.

Abstract

The aim of this master's thesis is to predict the buckling occurance and shape for metal belts, which are loaded thermally and mechanically. This topic is of interest for many industrial processes relying on long, loop-shaped metal sheets being held and driven by rolls. For preparation and usage purposes these belts need to be heated locally. The induction of eddy currents allows for an energy efficient way to achieve that. The resulting non-uniform temperature distribution causes thermal stresses. An additional mechanical stress state is imposed by the rolls, which may tighten the belt quite intensely. Using a Ritz ansatz and performing a linear buckling analysis, this thesis particularly examines the combined effect of both kinds of loading.

Concerning the temperature field, two different load patterns are investigated, each being a limit case of real and therefore more complex distributions. For the first case, the temperature is assumed to only depend on the width coordinate, whereas for the second case it shall only vary in longitudinal direction. Both represent limit cases of reality in the sense, that the considered temperature fields are discontinuous. Along with the imposed pretension, they are responsible for the stress state of the plane configuration. Concerning the first scenario, analytic expressions are provided to describe this stress state. For the second case however, results from the application ABAQUS need to help out.

As a next step, a Ritz ansatz is chosen to assess the shape of the transverse displacement field. Following the linear buckling analysis, the strain energy and the stiffness matrix are then calculated. The latter is particularly important for the present stability problem and depends on the pretension as well as the thermal loading. The critical temperature difference along with the buckling shape result from a generalized eigenvalue problem involving all contributions to the stiffness matrix. The applied Ritz ansatz does always contain some parameters, which cause it to become nonlinear. As a consequence, a minimization task needs to be solved at the end.

The first load case is similar to problems, that are already solved in literature. Inspired by these solutions, the ansatz is therefore chosen to have sine-shape in longitudinal direction. Finally, the critical temperature difference and the number of waves can be predicted depending on the pretension. Furthermore, the influence of the heated width as well as the sheets thickness are discussed. The additionally run simulations in ABAQUS provide very well matching results, which not only verify the applied methods but also the assumptions made concerning the buckling shapes. The most substantial insight for the first load case is the increasing number of waves when elevating the pretension.

For the lenght-wise temperatur change, the buckling modes turn out to be more complex and hence require the usage of a more general ansatz. After all, a few specific combinations of belt thickness and pretension are examined. The relative error of the critical temperature difference compared to the results from ABAQUS stays within a range of 7 to 45%. Thus, the ansatz works quite well, even though there is room for improvement. Possible suggestions concern the degrees of the polynomials but also the rates of decline, which cause the buckling shapes to taper off in both length-wise directions. Concluding, the computed results clearly show, that thin sheets have a higher number of buckling waves parallel to the belts edges.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In vielen Industriebetrieben werden lange, zu einer Schleife zusammengeschweißte Blechbänder benötigt. Diese müssen vor ihrem Einsatz gerichtet und beschichtet werden. Bei dieser Aufbereitung, aber auch bei der späteren Anwendung kann es notwendig sein, das Blech zu erwärmen. Auf energieeffiziente Weise gelingt dies durch Induktionsspulen, mit denen zusätzlich die Rußbildung vermieden werden kann. Das Blechband läuft also über zwei Umlenktrommeln, während es in der Nähe der Spulen durch die induzierten Wirbelströme erwärmt wird. Das Aufheizen findet somit nicht simultan für das gesamte Band statt, sondern nur lokal. Es ergeben sich heißere und kältere Bereiche, wodurch thermische Spannungen auftreten. Werden diese zu groß, so kann Beulen eintreten, was Gegenstand der Untersuchungen dieser Abschlussarbeit ist.

Manchmal ist es wünschenswert, dass das Band nicht über seine volle Breite erhitzt wird, sondern an den Rändern kühl bleibt. Daraus wird sogleich der erste Lastfall abgeleitet, der im Rahmen dieser Arbeit behandelt werden soll. Ganz konkret soll die Temperaturverteilung nur von der Breitenrichtung des Bandes abhängen, nicht jedoch von der Längsrichtung. Der zweite Lastfall behandelt direkt die Erwärmung unter dem Induktor, die auf einem recht kurzen Längsabschnitt des Bandes stattfindet. Der Einfachheit halber wird in diesem Szenario davon ausgegangen, dass das Blech über die gesamte Breite gleichmäßig erhitzt wird.

Es sei bemerkt, dass die realen Temperaturverteilungen natürlich das Ergebnis vieler verschiedener Einflüsse sind. Zentral sind natürlich die lokale Induktion sowie der An- und Abtransport von kaltem bzw. heißem Blech aufgrund des Bandlaufes. Hinzu kommen die Wärmeleitung, der Wärmeübergang und auch der Strahlungsaustausch mit der Umgebung. Die Temperaturfelder können also sehr vielfältig sein. Der Fokus dieser Arbeit liegt jedoch auf der Vorhersage des Beuleintritts und der Beulformen. Aus diesem Grund werden sehr schlichte Temperaturverteilungen gewählt. Diese sollen in beiden oben beschriebenen Szenarien sprungförmig sein. Das widerspricht offenbar der Wärmeleitung, die in metallischen Werkstoffen bekanntermaßen recht hoch ist. Nichtsdestoweniger stellen die angenommenen Temperaturfelder interessante Grenzfälle dar. Die erhaltenen Ergebnisse können außerdem auch für andere Temperaturverteilungen als Anhaltspunkt dienen.

Wie bereits erwähnt, werden die Bänder über Umlenktrommeln geführt. Diese spannen das Band nicht zuletzt, um das Durchhängen auf ein vertretbares Maß zu senken. Die Längsspannungen, die dadurch im Blech hervorgerufen werden, können erheblich sein und müssen deshalb in die Betrachtungen aufgenommen werden. In der ebenen Konfiguration soll für das Band wie gewöhnlich die lineare Elastizitätstheorie zum Einsatz kommen. Der Spannungszustand des ebenen Bandes setzt sich also additiv aus jenem zufolge der Längskraft und jenem zufolge der Temperaturdifferenz zusammen. Diese Aufteilung erweist sich im Zuge der Arbeit immer wieder als sinnvoll und wird sich bis in die Endergebnisse erstrecken. Schließlich soll und kann auch die Frage beantwortet werden, welchen Einfluss die Vorspannung auf die kritische Temperaturdifferenz und die Beulform hat.

Mit thermischen Spannungen in dünnen Blechen hat sich bereits eine Reihe von Wissenschaftler_innen auseinander gesetzt. So haben etwa Heldensfels und Roberts [1] theoretische und experimentelle Ergebnisse zu den Spannungen in einer länglichen, rechteckigen Platte gesammelt, welche entlang ihrer Mittellinie beheizt und an den Rändern gekühlt ist. Dadurch ergibt sich eine über die Breite dreieckige Temperaturverteilung. Oben und unten ist die Platte isoliert, sodass die Temperatur über die Dicke des Bleches einheitlich ist. Die Platte ist derart gelagert, dass sich ihre Ränder in der Ebene ungehemmt bewegen dürfen. Etwaiges Beulen wird aber bewusst unterbunden. Abseits der Stirnflächen sind die Längsspannungen der Platte erwartungsgemäß ebenso dreiecksförmig verteilt. In der Mitte treten Druckspannungen auf, während die Ränder unter Zug stehen.

Die hier behandelten Stahlbänder sind in der Regel nicht derart isoliert wie die Platte im Experiment von Heldenfels und Roberts. Die Temperatur ist in der Realität also sehr wohl auch eine Funktion der Dickenkoordinate. Im Hinblick auf die Durchbiegung des Bandes spielt dann natürlich auch ein etwaiges Temperaturmoment eine bedeutende Rolle. Zu betonen ist allerdings, dass die dreidimensionalen Verformungen zufolge eines solchen Moments kein Stabilitätsproblem darstellen. Zusätzlich sei bemerkt, dass das Temperaturmoment ohnehin verschwindet, wenn die Temperaturverteilung symmetrisch bezüglich der Mittelfläche ist. Für alle weiteren Betrachtungen in dieser Arbeit wird schließlich angenommen, dass die Temperatur über die Dicke einheitlich ist. Was die Längsspannungen betrifft, ist für den ersten Lastfall übrigens ein ähnliches Bild zu erwarten wie jenes, das sich im geschilderten Experiment von Heldenfels und Roberts gezeigt hat.

Auch das Beulen von Platten wurde in der Vergangenheit bereits anhand vieler Szenarien untersucht. Timoshenko und Gere [2, S. 340-360] gehen unter anderem von einer rechteckigen Platte aus, die in der ebenen Konfiguration unter reiner Druckspannung steht. Für die Beulform nehmen die beiden Forscher sinusförmige Wellen in Längs- wie in Breitenrichtung an. Thornton greift dieses Beispiel in [3] auf und bemerkt, dass sich für die ungebeulte Platte der gleiche Spannungszustand einstellt, wenn diese gleichmäßig erhitzt und an all ihren Rändern festgehalten wird. So ist er in der Lage, einen analytischen Ausdruck für die Beultemperatur zu jeder derart darstellbaren Beulform anzugeben. Als kritisch erweist sich jene Temperaturerhöhung, die der geringsten Beulwellenzahl angehört. Die Platte weist dabei gerade eine Sinushalbwelle in Längs- und eine in Breitenrichtung auf.

Darüber hinaus haben Gossard, Seide und Roberts [4] das Beulen von Platten mit der bereits beschriebenen dreieckigen Temperaturverteilung betrachtet. Wie erwähnt, kann sich diese Platte in der Ebene ungehemmt ausdehnen. Je stärker das Temperaturgefälle ist, desto größer werden die Längs-Druckspannungen in der Mitte und die entsprechenden Zugspannungen an den kalten Rändern. Die Autoren geben für diesen Lastfall schließlich eine Formel an, die den Beuleintritt vorhersagt. Die kritische Temperaturdifferenz zwischen Plattenmitte und -rand ist dabei abhängig vom Verhältnis der Seitenlängen.

Die theoretischen Teile der geschildeterten Arbeiten hatten einige Gemeinsamkeiten betreffend die zugrunde liegenden Annahmen, welche im Übrigen auch bei der vorliegenden Abschlussarbeit getroffen werden. Zunächst wird stets von isotropem, linear-elastischem Werkstoff ausgegangen. Traditionell bezeichnet E den Elastizitätsmodul, ν die Querkontraktionszahl und α den Wärmeausdehnungskoeffizienten. Alle Stoffeigenschaften seien außerdem unabhängig von der Temperatur. Des Weiteren wird der Einfluss der Schwerkraft vernachlässigt. Von großer Bedeutung ist außerdem, dass die Temperaturverteilung nicht vom Durchbiegungsfeld abhängen möge. Diese Annahme ist bei den genannten Arbeiten der Vergangenheit wohl sehr gut erfüllt. Findet die Erwärmung - wie hier allerdings - mit Induktionsspulen statt, so sind Temperatur und Verschiebung gewiss beidseitig gekoppelt. Zwecks Vereinfachung des Problems wird dennoch an der besagten Annahme festgehalten.

Die Untersuchung der Beulproblematik soll schließlich auf zweierlei Art geschehen. Im Fokus steht ein Ritz-Ansatz mit globalen Basisfunktionen. Dieser Ansatz beruht stets auf einer Vorahnung der verbeulten Konfiguration. Um sich diese zu verschaffen und Fehltritte zu vermeiden, wird die Finite-Elemente-

Methode (FEM) im Rahmen des Simulationsprogrammes ABAQUS eingesetzt. Im Nachgang können so außerdem die Rechenergebnisse exemplarisch sehr leicht bestätigt werden. Somit ist sichergestellt, dass die angenommene Beulform und die zugehörige kritische Temperaturdifferenz in guter Näherung der Realität entsprechen.

2 Theorie und Methoden

Die Rechnungen und Ergebnisse dieser Arbeit stützen sich unter anderem auf bekannte Theorien ebener Flächentragwerke, der linearen Beulanalyse und des Ritz-Ansatzes. In diesem Kapitel sollen diese Theorien kurz wiederholt und für den Einsatz im weiteren Verlauf der Arbeit vorbereitet werden.

2.1 Ebene Flächentragwerke

Es werden nun die Verformung und der Spannungszustand ebener Flächentragwerke dargelegt. Abbildung (1) zeigt ein solches Tragwerk, dessen Mittelfläche Ω besondere Bedeutung zukommt. Sie dient als Ursprung der z-Achse, deren Einheitsvektor mit $\boldsymbol{k}$ bezeichnet wird. Am Rand der Mittelfläche $\partial\Omega$ werden außerdem zwei weitere Einheitsvektoren eingeführt. Diese sind der Tangentenvektor $\boldsymbol{t}$ und der dazu normale und ebenfalls in der Ebene befindliche Vektor $\boldsymbol{\nu}$.

Belastet ist das Tragwerk durch eine Flächenlast $\boldsymbol{p}_3$, welche in der Mittelfläche angreift. Wie auch viele der weiteren Größen, wird diese in einen ebenen Anteil und einen Anteil in z-Richtung gemäß $\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p} + p_z\boldsymbol{k}$ aufgeteilt. Am Rand wirken die Linienlast $\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P} + P_z\boldsymbol{k}$ und das ebene Linienmoment $\boldsymbol{M}$.

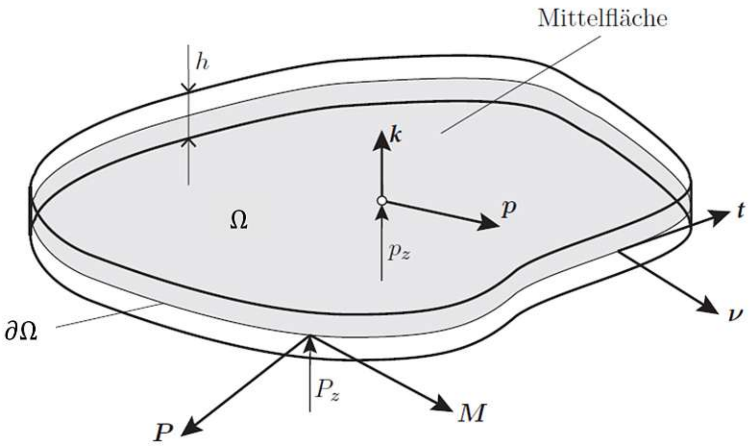


Abbildung 1: Ebenes Flächentragwerk mit hervorgehobener Mittelfläche Ω. [5], bearbeitet (Mittelfläche und Rand umbenannt)

Bevor die Verformungen und Spannungen genauer diskutiert werden, sind nun noch einige wichtige Voraussetzungen zu nennen, die den weiteren Ergebnissen zugrunde liegen [5]:

- Die Dicke h sei einheitlich und sehr viel kleiner als die sonstigen Abmessungen.
- Grundsätzlich werden die Gleichungen immer für die Mittelfläche angeschrieben.
- Die Verformungen und Verzerrungen seien klein, weswegen geometrisch lineare Theorie zum Einsatz kommt.
- Das Tragwerk sei schubstarr, es gelte also die Kirchhoffsche Hypothese.
- Punkte behalten auch bei Verformung ihren ursprünglichen Abstand zur Mittelfläche bei.
- Im Tragwerk herrsche überall ein ebener Spannungszustand, für den Spannungstensor gilt also $\boldsymbol{\sigma}_3 = \boldsymbol{\sigma}$.

Es werden nun die beiden ebenen Tensoren der Membrankräfte $\mathbf{n}$ sowie der Biege- und Torsionsmomente $\mathbf{m}$ eingeführt [5]:

$$\mathbf{n} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}z, \tag{1}$$

$$\mathbf{m} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} z \, \mathrm{d}z. \tag{2}$$

Des Weiteren bezeichne $\boldsymbol{\varepsilon}$ den ebenen Anteil des Verzerrrungstensors bei $z = 0$ und $\boldsymbol{\kappa}$ den ebenen Krümmungstensor. Bei $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist eine Aufteilung in einen elastischen und einen thermischen Beitrag gemäß

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{th} \quad \text{mit} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \alpha T \mathbf{I} \tag{4}$$

erforderlich [6]. Darin stehen T für die Abweichung von der Referenztemperatur und $\mathbf{I}$ für den ebenen Einheitstensor. Beim Krümmungstensor entfällt eine derartige Unterteilung, weil Temperaturmomente von Beginn an ausgeschlossen sind. Die Verzerrungsmaße lassen sich nun mit den Schnittgrößen in Verbindung bringen, worin A und D für die Membran- und Plattensteifigkeit stehen [5]:

$$\mathbf{n} = A\nu \mathbf{I} \, \mathrm{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + A(1-\nu)\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \tag{5}$$

$$\mathbf{m} = D\nu \mathbf{I} \, \mathrm{tr} \boldsymbol{\kappa} + D(1-\nu)\boldsymbol{\kappa}, \tag{6}$$

$$A = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \tag{7}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{8}$$

Offenbar sind die Membrankräfte $\mathbf{n}$ den elastischen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ proportional und arbeitskonjugiert. Gleiches gilt für die Momente $\mathbf{m}$ und die Krümmungen $\boldsymbol{\kappa}$. Die entsprechende Verzerrungsenergiedichte u_m bzw. u_b ist also eine quadratische Form in $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ respektive $\boldsymbol{\kappa}$. Die Verzerrungsenergie des ebenen Flächentragwerks kann schließlich mit

$$U = \iint_{\Omega} \left\{ \underbrace{\frac{A}{2} \left[\nu (\mathrm{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^{el})^2 + (1-\nu) \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \right]}_{u_m} + \underbrace{\frac{D}{2} \left[\nu (\mathrm{tr} \boldsymbol{\kappa})^2 + (1-\nu) \boldsymbol{\kappa} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\kappa} \right]}_{u_b} \right\} \mathrm{d}\Omega \tag{9}$$

bestimmt werden [5]. Der Begriff der Verzerrungsenergie wird auch im nächsten Kapitel einige Male fallen, doch die entsprechenden Formeln unterscheiden sich. Deshalb sei besonders an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, dass Gleichung (9) ein linearer Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Verzerrungen zugrunde liegt. Weiters können etwa mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit die Gleichgewichtsbedingungen hergeleitet werden. Es wird schließlich zwischen dem Scheiben- und dem davon entkoppelten Plattenproblem unterschieden. Ersteres wird durch die folgenden Beziehungen beschrieben [5]:

$$\Omega: \quad \nabla \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{p} = 0, \tag{10}$$

$$\partial\Omega: \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = \bar{\boldsymbol{P}}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}. \tag{12}$$

(10) gibt die Differentialgleichung im Inneren an, während (11) die statische und (12) die kinematische Randbedingung darstellen. $\boldsymbol{u}$ steht hierbei für das ebene Verschiebungsfeld und der Querstrich für einen etwaig bekannten Wert. Dabei kann komponentenweise immer nur eine der beiden Größen $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{P}$ vorgegeben werden.

Analog ist das Plattenproblem gegeben durch [5]:

$$\Omega: \quad \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{m} - p_z = 0, \tag{13}$$

$$\partial\Omega: \quad -(\nabla \cdot \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \partial_s(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{t}) = \bar{P}_z - \partial_s \bar{M}_\nu, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\bar{M}_t, \tag{15}$$

$$w = \bar{w}, \tag{16}$$

$$\partial_\nu w = -\bar{\omega}_t. \tag{17}$$

Wiederum ist (13) die Differentialgleichung im Inneren. (14), (15) stellen abermals statische und (16), (17) kinematische Randbedingungen dar. w ist dabei die Durchbiegung in z-Richtung, ω_t die Verdrehung des Plattenrandes in Tangentenrichtung und ∂_s die Richtungsableitung entlang $\boldsymbol{t}$. Auch hier gilt, dass die Vorgabe von arbeitskonjugierten Kraft- und Verschiebungsgrößen einander ausschließen.

Unter Verwendung von $\boldsymbol{\kappa} = \nabla\nabla w$ kann auch direkt ein Zusammenhang zwischen der Durchbiegung und der Flächenlast im Inneren der Platte angeschrieben werden [5]:

$$D\Delta\Delta w = p_z. \tag{18}$$

Δ steht hierin für den Laplace-Operator. Die Differentialgleichung ist somit vierter Ordnung und wird auch Plattengleichung genannt.

Eben weil das Scheiben- und das Plattenproblem in der linearen Theorie unabhängig voneinander gelöst werden können, ist es unmöglich, das Beulen des Tragwerks zu erfassen. Das nächste Kapitel greift dieses Problem auf und bietet einen Lösungsweg.

2.2 Lineare Beulanalyse

Um das Beulen eines Tragwerks zu beschreiben, braucht es geometrisch nichtlineare Theorie. Das Ziel dieser Arbeit besteht konkret in der Vorhersage der kritischen Temperaturdifferenz und der initialen Beulform, das Nachbeulverhalten soll dezidiert nicht betrachtet werden. Für diese Zwecke ist eine lineare Beulanalyse ausreichend. Es werde ein konservatives System vorausgesetzt, womit das Potential einer derart gebeulten Platte als Ausgangspunkt verwendet werden kann. Das Gesamtpotential ist

$$V = U_B + U_M + W, \tag{19}$$

wobei gemäß [7]

$$U_B = \frac{D}{2} \iint_\Omega \left[\nu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\kappa})^2 + (1-\nu)\boldsymbol{\kappa} \cdot\cdot \boldsymbol{\kappa}\right] d\Omega, \tag{20}$$

$$U_M = \frac{1}{2} \iint_\Omega \nabla w \cdot \mathbf{n} \cdot \nabla w \, d\Omega. \tag{21}$$

Für W gilt entsprechend [5]

$$W = -\int_{\Omega} p_z w \,\mathrm{d}\Omega - \iint_{\partial\Omega} (P_z w - \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{k} \cdot \nabla w)\,\mathrm{d}s. \tag{22}$$

U bezeichnet wieder die Verzerrungsenergie. Der Index B steht für den Anteil zufolge der Krümmung und Momente, während M den Anteil aufgrund der Membrankräfte gemeinsam mit der geometrisch nichtlinearen Verformung kennzeichnet. Das bedeutet, dass in der Beziehung zwischen Verschiebungen und Verzerrungen auch nichtlineare Terme Berücksichtigung finden. Dieses U_M ist maßgeblich für die Beulproblematik und nicht zu verwechseln mit dem Potential der Membrankräfte an der ebenen Verformung, wie es in Gleichung (9) auftritt. Wichtig ist auch zu bemerken, dass $\mathbf{n}$ mit den Gleichungen (10) bis (12) aus dem Spannungszustand der noch ebenen Scheibe gewonnen wird. W bezeichnet wie üblich das Potential der äußeren eingeprägten Kräfte. Für eine vollständige Problembeschreibung gehen hierin auch die Kräfte und Momente am Rand ein, womit sich anschließend die natürlichen Randbedingungen herleiten ließen.

Mit der Absicht, das Prinzip der virtuellen Arbeit anzuwenden, müssen die Variationen obiger Größen gebildet werden. Um die Übersichtlichkeit zu verbessern, wird U_B aber zunächst aufgeteilt:

$$U_B = U_{B1} + U_{B2}, \tag{23}$$

$$U_{B1} = \frac{D\nu}{2} \iint_{\Omega} \mathrm{tr}(\boldsymbol{\kappa})^2 \,\mathrm{d}\Omega, \tag{24}$$

$$U_{B2} = \frac{D(1-\nu)}{2} \iint_{\Omega} \boldsymbol{\kappa} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\kappa} \,\mathrm{d}\Omega. \tag{25}$$

Außerdem soll der Krümmungstensor substituiert werden, was auf

$$U_{B1} = \frac{D\nu}{2} \iint_{\Omega} (\Delta w)^2 \,\mathrm{d}\Omega \tag{26}$$

und

$$U_{B2} = \frac{D(1-\nu)}{2} \iint_{\Omega} (\nabla\nabla w) \cdot\cdot\, (\nabla\nabla w) \,\mathrm{d}\Omega \tag{27}$$

führt. Nun erfolgt die angekündigte Variation für U_{B1}:

$$\begin{aligned}
\delta U_{B1} &= D\nu \iint_{\Omega} \Delta w \,\delta(\Delta w) \,\mathrm{d}\Omega \\
&= D\nu \iint_{\Omega} \Delta w \,\delta(\nabla \cdot \nabla w) \,\mathrm{d}\Omega \\
&= D\nu \iint_{\Omega} \{\nabla \cdot [\Delta w \,\delta(\nabla w)] - \nabla\Delta w \cdot \delta(\nabla w) \quad \mathrm{d}\Omega \\
&= D\nu \left\{ \iint_{\partial\Omega} \Delta w \,(\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla \delta w) \,\mathrm{d}s - \iint_{\Omega} \nabla\Delta w \cdot \delta(\nabla w) \,\mathrm{d}\Omega \right\} \\
&= D\nu \left\{ \iint_{\partial\Omega} \Delta w \,\delta(\partial_\nu w) \,\mathrm{d}s - \iint_{\Omega} \{\nabla \cdot [(\nabla\Delta w)\,\delta w] - (\nabla \cdot \nabla\Delta w)\,\delta w \quad \mathrm{d}\Omega \right\} \\
&= D\nu \left\{ \iint_{\partial\Omega} \Delta w \,\delta(\partial_\nu w) \,\mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla\Delta w)\,\delta w \,\mathrm{d}s + \iint_{\Omega} \Delta\Delta w \,\delta w \,\mathrm{d}\Omega \right\}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Ganz analog kann bei U_{B2} vorgegangen werden:

$$
\begin{aligned}
\delta U_{B2} &= D(1-\nu) \iint_\Omega (\nabla\nabla w) \cdot\cdot [\delta(\nabla\nabla w)] \,\mathrm{d}\Omega \\
&= D(1-\nu) \iint_\Omega \{\nabla \cdot [(\nabla\nabla w) \cdot \delta(\nabla w)] - (\nabla \cdot \nabla\nabla w) \cdot \delta(\nabla w) \} \,\mathrm{d}\Omega \\
&= D(1-\nu) \Big\{ \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla\nabla w) \cdot \delta(\nabla w) \,\mathrm{d}s - \iint_\Omega (\Delta\nabla w) \cdot \delta(\nabla w) \,\mathrm{d}\Omega \Big\} \\
&\qquad\qquad - \iint_\Omega (\Delta\nabla w) \cdot \delta(\nabla w) \,\mathrm{d}\Omega \Big\} \\
&= D(1-\nu) \Big\{ \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla\nabla w) \cdot \boldsymbol{\nu}\, \delta(\partial_\nu w) \,\mathrm{d}s + \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla\nabla w) \cdot \boldsymbol{t}\, \delta(\partial_s w) \,\mathrm{d}s \\
&\qquad\qquad - \iint_\Omega \{\nabla \cdot [(\Delta\nabla w)\, \delta w] - \Delta\Delta w\, \delta w \} \,\mathrm{d}\Omega \Big\} \\
&= D(1-\nu) \Big\{ \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla\nabla w) \cdot \boldsymbol{\nu}\, \delta(\partial_\nu w) \,\mathrm{d}s \\
&\qquad\qquad - \int_{\partial\Omega} \{\partial_s[\boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla\nabla w) \cdot \boldsymbol{t}] + \boldsymbol{\nu} \cdot (\Delta\nabla w) \}\, \delta w \,\mathrm{d}s + \int_\Omega \Delta\Delta w\, \delta w \,\mathrm{d}\Omega \Big\}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Weiters ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\delta U_M &= \iint_\Omega \nabla w \cdot \mathbf{n} \cdot \delta(\nabla w) \,\mathrm{d}\Omega \\
&= \int_\Omega \{\nabla \cdot [(\nabla w \cdot \mathbf{n})\, \delta w] - \nabla \cdot (\nabla w \cdot \mathbf{n})\, \delta w \} \,\mathrm{d}\Omega \\
&= \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n} \cdot \nabla w\, \delta w \,\mathrm{d}s - \iint_\Omega \nabla \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla w)\, \delta w \,\mathrm{d}\Omega.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Abschließend wird das Potential W variiert, was sich in Anlehnung an [5] schreibt als

$$
\begin{aligned}
\delta W &= -\int_\Omega p_z\, \delta w \,\mathrm{d}\Omega - \oint_{\partial\Omega} \big[(P_z\, \delta w - \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{k} \cdot \delta(\nabla w)\big] \,\mathrm{d}s \\
&= -\int_\Omega p_z\, \delta w \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} P_z\, \delta w \,\mathrm{d}s + \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\nu}\, \delta(\partial_\nu w) \,\mathrm{d}s + \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{t}\, \delta(\partial_s w) \,\mathrm{d}s \\
&= -\int_\Omega p_z\, \delta w \,\mathrm{d}\Omega - \oint_{\partial\Omega} (P_z - \partial_s M_\nu)\, \delta w \,\mathrm{d}s + \oint_{\partial\Omega} M_t\, \delta(\partial_\nu w) \,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{31}
$$

Die Endergebnisse aus (28), (29) und (31) enthalten jeweils drei Integrale mit den unabhängigen Variationen δw im Inneren, δw und $\delta(\partial_\nu w)$ am Rand. Einzig bei δU_M treten nur zwei dieser Größen auf. Außerdem wird bei den Herleitungen vorausgesetzt, dass $\partial\Omega$ keine Knicke aufweist [5]. Diese Annahme betrifft aber nur die Integrale über die Randkurve und ist für den Erhalt von Gleichung (36) unwesentlich.

Es sei nun an das Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\delta A^i + \delta A^e = 0 \tag{32}$$

erinnert, das den Gleichgewichtszustand charakterisiert [6].

Die zwei Beiträge lassen sich in dem konservativen System mittels der Potentiale ausdrücken:

$$\delta A^i = -\,U = -(U_B + U_M) = -(U_{B1} + U_{B2} + U_M), \tag{33}$$
$$\delta A^e = -\,W. \tag{34}$$

Es ergibt sich letztlich die Variationsgleichung

$$\begin{aligned}
0 = D\nu \Big\{ &\int_{\partial\Omega} \Delta w\, \delta(\partial_\nu w)\,\mathrm{d}s - \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu}\cdot(\nabla\Delta w)\,\delta w\,\mathrm{d}s + \oint_{\Omega} \Delta\Delta w\,\delta w\,\mathrm{d}\Omega \Big\} \\
&+ D(1-\nu)\Big\{ \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu}\cdot(\nabla\nabla w)\cdot\boldsymbol{\nu}\,\delta(\partial_\nu w)\,\mathrm{d}s \\
&\qquad - \int_{\partial\Omega} \{\partial_s[\boldsymbol{\nu}\cdot(\nabla\nabla w)\cdot\boldsymbol{t}] + \boldsymbol{\nu}\cdot(\Delta\nabla w)\ \ \delta w\,\mathrm{d}s + \int_{\Omega} \Delta\Delta w\,\delta w\,\mathrm{d}\Omega \Big\} \\
&+ \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{n}\cdot\nabla w\,\delta w\,\mathrm{d}s - \oint_{\Omega} \nabla\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla w)\,\delta w\,\mathrm{d}\Omega \\
&- \int_{\Omega} p_z\,\delta w\,\mathrm{d}\Omega - \oint_{\partial\Omega} (P_z - \partial_s M_\nu)\,\delta w\,\mathrm{d}s + \oint_{\partial\Omega} M_t\,\delta(\partial_\nu w)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{35}$$

Damit diese Gleichung identisch erfüllt ist, muss der Vorfaktor vor jeder unabhängigen Variation verschwinden [6]. Für δw im Inneren von Ω ergibt sich daraus

$$D\Delta\Delta w - \nabla\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla w) = p_z. \tag{36}$$

Dies ist die erweiterte Plattengleichung, wie sie auch in [7] angeführt wird. Es ist die Ähnlichkeit zu Gleichung (18) zu erkennen, nun aber werden bei der Durchbiegung der Platte die bereits herrschenden Membrankräfte $\mathbf{n}$ berücksichtigt. Analog ließen sich mittels der verbleibenden Variationen die statischen Randbedingungen herleiten, die gegenüber (14) und (15) ebenso an Komplexität zunehmen. Es wird aber in weiterer Folge ein Ritz-Ansatz eingesetzt, bei dessen Wahl diese natürlichen Randbedingungen ohnehin nicht berücksichtigt werden müssen. Aus diesem Grund sind auch die genannten Anforderungen an die Randkurve unerheblich.

Im Hinblick auf das Anwendungsproblem wird p_z nun null gesetzt. Wie erwähnt, werden die Membrankräfte aus den Gleichungen (10) bis (12) der ebenen Scheibe bezogen. Beim vorliegenden Problem resultiert dieser Spannungszustand aus der gemeinsamen Wirkung der Längskraft F und der Temperaturdifferenz T. Weil die besagten Gleichungen aber linear sind, kann der Membrankrafttensor in Anlehnung an [7] wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_F + T\tilde{\mathbf{n}}_T. \tag{37}$$

$\mathbf{n}_F$ steht für den Anteil zufolge der Längskraft, während $\tilde{\mathbf{n}}_T$ den Referenzwert zufolge des Temperaturfeldes bei $T = 1$ bezeichnet. Die Temperaturdifferenz T kann somit gleichzeitig als Lastfaktor verstanden werden, der die thermischen Spannungen skaliert. Beulen tritt erstmals ein, wenn die Membrankräfte unter Erfüllung von Gleichung (36) ein nichttriviales Durchbiegungsfeld erlauben. Dieses muss natürlich auch noch den problemspezifischen Randbedingungen genügen. Gemeinsam mit Gleichung (37) führt dies auf ein Eigenwertproblem für die Temperaturdifferenz.

Um die Bedeutung und Eigenschaften der Eigenwerte besser zu verstehen, sei noch einmal auf das Prinzip der virtuellen Arbeit verwiesen. Ein Gleichgewichtszustand ist stets durch $\delta A^i + \delta A^e = -\delta V = 0$ gekennzeichnet. Diese Bedingung definiert den Gleichgewichtspfad. Erreicht der Lastfaktor einen Eigenwert, so gibt es benachbarte Gleichgewichtslagen und der Pfad weist eine Bifurkation auf [6]. Im vorliegenden Fall handelt es sich dabei konkret um eine Gleichgewichtsverzweigung. Welcher Ast auf welchen Abschnitten stabil bzw. instabil ist, hängt von der Steifigkeit $\delta^2 V$ des konservativen Systems ab.

Es sei festgehalten, dass $T < 0$ für die gesamte Abschlussarbeit ausgeschlossen wird. Eine solche negative Temperaturdifferenz würde eine Umkehrung zwischen kalten und heißen Bereichen bewirken, an der kein Interesse besteht. Von besonderer Bedeutung ist somit der kleinste positive Eigenwert, der fortan mit T_{kr} bezeichnet wird. Bei Erreichen dieses Wertes geht die Steifigkeit der ebenen Konfiguration verloren. Es gilt schließlich, dass die ebene Gleichgewichtslage bei $T < T_{kr}$ stabil und bei $T > T_{kr}$ instabil ist [6]. Zweiteres führt somit zum Beulen.

Für die Näherungslösungen wird die schwache Formulierung des soeben beschriebenen Problems herangezogen. Wegen $p_z = 0$ reduziert sich das Gesamtpotential auf die Verzerrungsenergie, es ist also $V = U$. Bei der späteren Anwendung wird au erdem eine Formulierung in Koordinaten gebraucht, wobei die x- und y-Achse in der Ebene liegen. Gemäß [2, S. 335-341] ist

$$U_B = \frac{D}{2} \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} \mathrm{d}\Omega \tag{38}$$

und

$$U_M = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[n_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + n_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 n_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \mathrm{d}\Omega. \tag{39}$$

Zu bedenken ist weiterhin, dass sich n_x, n_y und n_{xy} wegen Gleichung (37) aus zwei Anteilen zusammensetzen und T involvieren. An der speziellen Form von V lässt sich außerdem leicht nachvollziehen, dass $w \equiv 0$ stets $\delta V = 0$ bewirkt und damit einen Gleichgewichtszustand darstellt. Diese Erkenntnis steht mit der Aussage im Einklang, dass ein verschwindendes Durchbiegungsfeld die homogene Version von Gleichung (36) selbst für beliebiges $\mathbf{n}$ löst.

Stabil ist die ebene Konfiguration allerdings nur dann, wenn V ein lokales Minimum aufweist. Es muss also zusätzlich $\delta^2 V > 0$ gelten [6]. Ob das zutrifft bzw. bei welchem kritischen Lastfaktor dies erstmals nicht mehr der Fall ist, kann im Allgemeinen nur schwer überprüft werden. Es müsste hierzu nämlich ein unendlichdimensionaler Raum von möglichen Durchbiegungsfeldern untersucht werden. Aus diesem Grund wird beim vorliegenden Problem ein Ritz-Ansatz verwendet, der im nächsten Kapitel erklärt werden soll.

2.3 Der Ritz-Ansatz

Wie bereits erwähnt, ist es nicht besonders aussichtsreich, einen unendlichdimensionalen Funktionenraum zu untersuchen, um eine Gleichgewichtslage zu finden und sie zudem auf Stabilität zu untersuchen. Der Ritz-Ansatz erleichtert dieses Problem insofern, als nur bestimmte Verformungen zugelassen werden. Damit beschränkt sich besagte Suche auf einen niedrigdimensionalen Raum.

Im vorliegenden Fall der Statik wird ein Durchbiegungsfeld beschrieben, dessen Näherungslösung mit

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} q_i \, w_i(x, y) \tag{40}$$

angesetzt wird [6]. Die w_i werden Basisfunktionen genannt. Entsprechend ihrem Namen sind sie linear unabhängig und spannen den Unterraum auf, der durchsucht werden soll. Außerdem müssen sie alle die kinematischen Randbedingungen erfüllen, die statischen jedoch nicht unbedingt. n ist die Anzahl der verwendeten Basisfunktionen und damit gleichzeitig die Dimension des besagten Unterraums. Sind die w_i sinnvoll gewählt und ist die Anzahl n groß genug, so werden freilich auch die erwähnten statischen Randbedingungen mit ausreichender Genauigkeit in Erfüllung gebracht. Die q_i sind zunächst unbestimmte Koeffizienten und werden als verallgemeinerte Lagekoordinaten bezeichnet. An dieser Stelle sei darauf aufmerksam gemacht, dass $\tilde{w}$ gemäß obigem Ansatz linear in den q_i ist. Später werden zusätzliche Parameter eingesetzt, die nichtlinear in den Ansatz eingehen. Doch vorerst sollen die Implikationen und Ergebnisse vorgestellt werden, die sich auf die besagte Linearität stützen.

Wird der Ansatz für das Durchbiegungsfeld in die Gleichungen (38) und (39) eingesetzt, so kann das Potential offenbar als Funktion $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ aufgefasst werden. Im Gleichgewichtszustand muss die erste Variation von V null sein, was sich nun über

$$\left.\frac{\partial V(q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial q_i}\right|_0 = 0 \quad \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\} \tag{41}$$

ausdrücken lässt [6]. Die Auswertung im Zustand „0“ ist so zu verstehen, dass für jedes einzelne q_i jener Wert einzusetzen ist, der im betrachteten Gleichgewichtszustand angenommen wird.

$V = U$ ist außerdem eine quadratische Form in den verallgemeinerten Lagekoordinaten. Sind also alle q_i null, dann verschwinden sowohl das Potential selbst als auch sämtliche Ableitungen aus Gleichung (41). Es bestätigt sich die Tatsache, dass das Verschiebungsfeld $w \equiv 0$ einen Gleichgewichtszustand darstellt. Jetzt soll die Frage geklärt werden, ob dieser zusätzlich stabil ist.

Auch die zweite Variation von V lässt sich aufgrund des Verschiebungsansatzes mittels partieller Ableitungen darstellen. Ob das Gesamtpotential im betrachteten Gleichgewichtszustand ein lokales Minimum hat, ist im Rahmen des Ritz-Ansatzes gleichbedeutend mit der Frage, ob die Hesse-Matrix von V positiv definit ist. Diese wird auch als Steifigkeitsmatrix K bezeichnet und ist durch

$$K_{i,j} = \left.\frac{\partial^2 V(q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_k = 0} \qquad \text{mit} \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \tag{42}$$

gegeben [6]. Dabei wird sogleich für die Gleichgewichtslage $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ ausgewertet.

Nun muss diese reelle symmetrische Matrix untersucht werden. K ist genau dann positiv definit und die Gleichgewichtslage somit stabil, wenn alle Eigenwerte positiv sind. Die Stabilitätsgrenze wird erreicht, wenn erstmals ein Eigenwert null wird. Hierzu muss die Determinante $\det(K)$ verschwinden.

Wie in Kapitel 2.2 beschrieben, ist der Membrankrafttensor abhängig von der Längskraft und der Temperaturdifferenz. Ganz konkret handelt es sich um eine lineare Abhängigkeit, in der T als Lastfaktor der thermischen Spannungen auftritt. Schließlich sind auch das Potential V und die Matrix K linear in F

und T. Damit lässt sich die Steifigkeitsmatrix aufspalten, wobei K_B, K_F und K_T feste Werte haben:

$$K = K_B + FK_F + TK_T. \tag{43}$$

Die Stabilitätsgrenze ist wie erwähnt durch $\det(K) = 0$ charakterisiert. Bei bekannter Längskraft ergibt sich daraus das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$\det(K_B + FK_F + TK_T) = 0 \tag{44}$$

für T. Beim Erhöhen der Temperaturdifferenz wird die Stabilität also durch den kleinsten positiven Eigenwert T_{kr} limitiert. Zumindest formal lässt sich eine Funktion $T_{kr}(F)$ bilden, welche schließlich den Beuleintritt vorhersagt und das zentrale Ergebnis dieser Arbeit darstellen wird.

Es gilt nun noch die Frage zu klären, inwiefern sich das geschilderte Prozedere ändert, wenn in $\tilde{w}$ weitere Parameter auf nichtlineare Weise eingehen. Konkret ist die Rede von einem Ansatz der Gestalt

$$\tilde{w}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \, w_i(x, y)\right) \cdot s(x, y, r_1, r_2, \dots, r_m). \tag{45}$$

Darin bezeichnet s eine Funktion, die einerseits von den ebenen Koordinaten und andererseits von den hinzugetretenen Parametern r_1 bis r_m abhängt. Wie sich in weiterer Folge herausstellt, ist nicht jede Gestalt für diese Funktion sinnvoll. Es möge die Einschränkung gelten, dass es kein Argument $(r_1, r_2, \dots, r_m)$ gibt, sodass s im ganzen Gebiet der Platte bzw. des Bandes verschwindet. Damit ist gewährleistet, dass die ebene Gleichgewichtslage weiterhin und vor allem eindeutig durch $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ bestimmt ist. Die Werte der r_j sind dabei allerdings unbestimmt. Aus diesem Grund gelten die q_i weiterhin als verallgemeinerte Lagekoordinaten, während die r_j schlichtweg als Parameter bezeichnet werden.

Im Hinblick auf die q_i wird das exakt gleiche Vorgehen gewählt, wie es für den vollkommen linearen Ansatz beschrieben ist. Allerdings sind nun alle (Zwischen-)Ergebnisse noch von den r_j abhängig. Das betrifft also das Potential V, die Steifigkeitsmatrix K und schließlich auch die Funktion des kleinsten positiven Eigenwerts, die nun allgemein als $T_{kr}(F, r_1, r_2, \dots, r_m)$ geschrieben werden muss. An die bisherige Vorgehensweise schließt sich eine numerische Minimierung an, aus der insbesondere die Werte der Parameter hervorgehen. Das formale Ergebnis dieser Minimierung ist analog zu vorhin eine Funktion $T_{kr,\,tot}(F)$. Diese gibt die Stabilitätsgrenze im Sinne aller mittels q_i und r_j darstellbaren Durchbiegungsfelder an.

Die Notwendigkeit der besagten Minimierung ergibt sich aus der Tatsache, dass die r_j in der ebenen Konfiguration jeden beliebigen Wert haben können. Damit kann auch die Entfernung aus eben dieser Konfiguration mit allen erdenklichen Kombinationen der Paramerter erfolgen. Als ausschlaggebend erweist sich wiederum jene, die bei geringstem T zum Steifigkeitsverlust führt. Auf der Suche nach dieser Parameterkombination muss in jedem Schritt das Eigenwertproblem neuerlich gelöst werden, da sich erst hieraus das konkrete T_{kr} ergibt und ein Vergleich mit vorangegangenen Werten möglich ist. Beim zweiten Lastfall erweist sich diese Minimierung in der Tat als relativ aufwendig, Näheres dazu wird im Kapitel 4.5 erklärt.

3 Quer-Temperaturgradient

In diesem Szenario hängt das Temperaturfeld nur von der Breitenkoordinate des Bandes ab. Es ist außerdem zweimal unstetig und symmetrisch zur Mittellinie. Die beiden Temperatursprünge legen somit eine gedankliche Teilung des Bandes nahe: In der Mitte gibt es einen heißen und am Rand jeweils einen kalten Streifen.

3.1 Endlich lange Platte

Zwecks systematischer Lösung soll das Problem nun unterteilt werden. Zunächst möge es sich bei dem gedachten Ausschnitt des Bandes um eine eigenständige Platte mit einer bestimmten Länge handeln. Erst in einem weiteren Schritt wird die feste Plattenlänge wieder verworfen und von einem unendlich langen Band ausgegangen.

3.1.1 Modell

Es wird eine beschränkte Platte gemäß Abbildung (2) betrachtet. Das Koordinatensystem wird so ausgerichtet, dass die x-Achse mit der Mittellinie zusammenfällt und die y-Achse in Breitenrichtung zeigt. Die Abmessungen der Platte sind L, B und h, womit die Länge, Breite und Dicke bezeichnet werden. Unter b ist die Breite des erhitzten Streifens zu verstehen, welcher die Temperatur T_i hat, während die kühlen Streifen auf der Temperatur T_a gehalten werden. Schließlich wird die Platte im Allgemeinen noch mit einer Längskraft F belastet. Ebenso in der Abbildung erkennbar sind die dimensionslosen Größen μ, τ, β und F^*, die in weiterer Folge der einfacheren Beschreibung dienen.

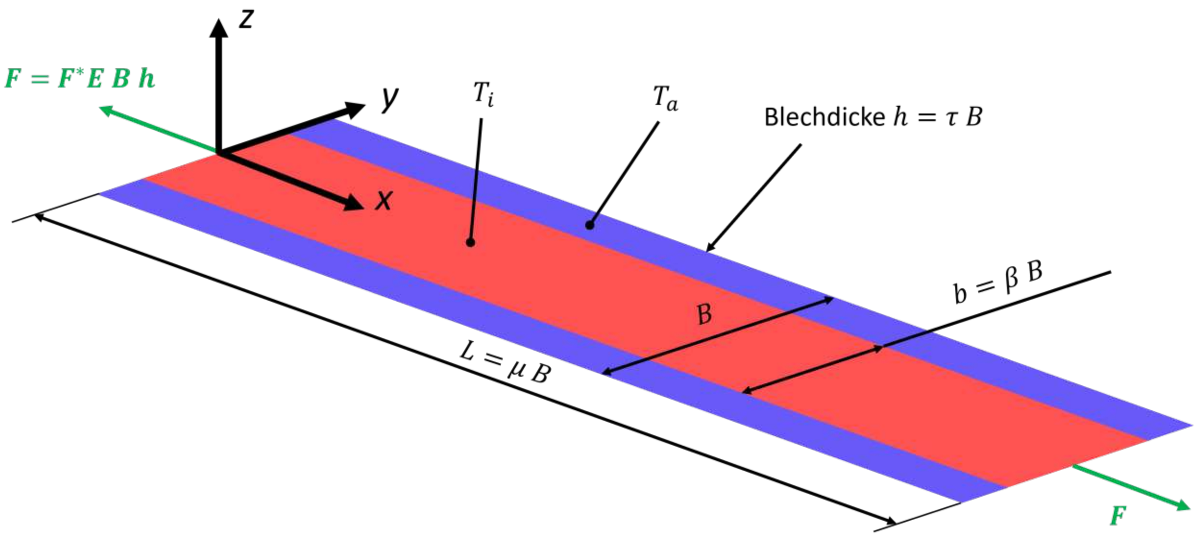


Abbildung 2: Modell der begrenzten Platte mit Temperaturgradient in Breitenrichtung. Die Temperaturverteilung ist bezüglich der Mittelline symmetrisch.

Im Modell degenerieren die Plattenränder zu Linien, an welchen die Randbedingungen vorzugeben sind. An den seitlichen Rändern bei $y = \pm B/2$ handelt es sich um homogene statische Randbedingungen. Am vorderen und hinteren Plattenrand gibt es je zweierlei Bedingungen. Die Längskraft stellt eine statische Randbedingung integraler Form dar. Außerdem werden die besagten Plattenränder jeweils auf eine gerade Linie in der x-y-Ebene gezwungen, was einer kinematischen Randbedingung gleichkommt. Mit dieser wird der spätere Übergang zum unendlich langen Band erheblich erleichtert.

3.1.2 Scheibenproblem

Solange das ebene Flächentragwerk noch nicht beult, handelt es sich um eine Scheibe. Deren Spannungszustand gilt es nun in Vorbereitung auf die Beulanalyse zu ermitteln. Dazu können die Gleichungen (10) bis (12) herangezogen werden. Dabei ist zu beachten, dass die Temperaturdifferenzen zu fiktiven mechanischen Lasten führen.

Besonders interessant sind die Randbedingungen am vorderen bzw. hinteren Ende. Die integrale statische Randbedingung kommt durch

$$n_{x,a}(B-b)+n_{x,i}b=F \tag{46}$$

zum Ausdruck. Der Index i kennzeichnet dabei den inneren, heißen Streifen und der Index a die beiden äußeren, kalten. Aufgrund der speziellen kinematischen Randbedingung gilt für die Dehnungen in Längsrichtung schließlich $\varepsilon_{x,i} = \varepsilon_{x,a}$. Die Temperatur T_a gelte als Referenztemperatur und T bezeichne in weiterer Folge die Temperaturdifferenz $T_i - T_a$. Im inneren Streifen kommt es also neben einer elastischen auch zu einer thermischen Dehnung. Dies führt schlie lich auf

$$n_{x,a}=n_{x,i}+\alpha EhT. \tag{47}$$

Es werden nun noch die weiteren dimensionslosen Größen $n^* = n/(EB)$ für die Membrankraft und $\Theta = \alpha T$ für die Temperaturdifferenz eingeführt. Das Gleichungssystem (46), (47) lässt sich zudem auflösen und frei von Dimensionen mittels

$$n^*_{x,a}=\tau(F^*+\beta\Theta) \tag{48}$$

und

$$n^*_{x,i}=\tau\left[F^*-(1-\beta)\,\Theta\right] \tag{49}$$

ausdrücken. In Anlehnung an Gleichung (37) kann Θ als Lastfaktor für die thermischen Spannungen aufgefasst werden.

3.1.3 Verzerrungsenergie

Es werden nun die Gleichungen (38) und (39) herangezogen und die Ausdrücke für die Membrankräfte eingesetzt. Das Integrationsgebiet Ω erstreckt sich in Längsrichtung von 0 bis L und in Breitenrichtung von $-B/2$ bis $+B/2$. Zudem werden mit

$$\xi=\frac{x}{L},\quad \eta=\frac{y}{B},\quad \Phi=\frac{U}{ELBh},\quad w^*=\frac{w}{B} \tag{50}$$

noch weitere dimensionslose Größen eingeführt. Durch Einsetzen, Vereinfachen und Umformen können schließlich die Formeln

$$\begin{aligned}\Phi_B=\frac{\tau^2}{24(1-\nu^2)}\int_0^1\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Bigg\{&\left(\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial\eta^2}\right)^2\\&-2(1-\nu)\frac{1}{\mu^2}\left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2 w^*}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2\right]\Bigg\}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{51}$$

und

$$\Phi_M = \frac{1}{2\mu^2\tau} \int_0^1 \left[n^*_{x,i} \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi} \right)^2 \mathrm{d}\eta + 2\, n^*_{x,a} \int_{\frac{\beta}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi} \right)^2 \mathrm{d}\eta \right] \mathrm{d}\xi \tag{52}$$

gewonnen werden. Der Index B bezeichnet abermals den Anteil durch Biegung und M den Anteil, den die Membrankräfte aufgrund der geometrisch nichtlinearen Verformung bewirken. Für einen besseren Überblick über die Zusammenhänge bietet es sich an, Φ_M noch einmal zu zerlegen:

$$\Phi_F = \frac{F^*}{2\mu^2} \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi} \right)^2 \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\xi, \tag{53}$$

$$\Phi_\Theta = \frac{\Theta}{2\mu^2} \int_0^1 \left[-(1-\beta) \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi} \right)^2 \mathrm{d}\eta + 2\beta \int_{\frac{\beta}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi} \right)^2 \mathrm{d}\eta \right] \mathrm{d}\xi. \tag{54}$$

Dabei ist Φ_F der Längskraft proportional und Φ_Θ der Temperaturdifferenz.

Nun ist es also möglich, für ein gegebenes Verschiebungsfeld $w^*(\xi, \eta)$ die dimensionslose Verzerrungsenergie $\Phi = \Phi_B + \Phi_F + \Phi_\Theta$ zu berechnen. Tatsächlich wird sich jenes Verschiebungsfeld bilden, das mit der geringstmöglichen Verzerrungsenergie einhergeht. Von besonderem Interesse ist nun wiederum die Frage, welche Parameterkombinationen von F^* und Θ dazu führen, dass das Verschiebungsfeld $w^*(\xi, \eta) \equiv 0$ nicht länger der minimalen Verzerrungsenergie entspricht und damit instabil ist.

3.1.4 Wahl des Ritz-Ansatzes

Wie angekündigt, kommt nun ein Ritz-Ansatz für das dimensionslose Verschiebungsfeld zum Einsatz. Diese Näherungslösung werde mit $\tilde{w}^*$ bezeichnet und sei gemäß

$$\tilde{w}^*(\xi, \eta) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} q_i \cdot \eta^{2i} \right) \cdot \sin(2\pi\mu f \xi) \tag{55}$$

aufgebaut. In Längsrichtung möge sich die Platte also wie die Sinus-Funktion verhalten. Im Argument befindet sich die Beulwellenzahl, die als $f = B/\Lambda$ eingeführt wird, wobei Λ wiederum die Periodenlänge der Beulform bezeichnet. In Breitenrichtung wird die Beulform durch ein Polynom angenähert, dessen Grad je nach Genauigkeitsanforderung variiert werden kann. Zu beachten ist, dass im Polynom ausschließlich gerade Potenzen von η auftreten. Damit wird eine bezüglich der x-z-Ebene symmetrische Beulform unterstellt. Diese Annahme wird später durch Simulationen mit ABAQUS bestätigt.

Die q_i sind die verallgemeinerten Lagekoordinaten und f ist ein zusätzlicher Parameter. Aufgrund der Forderung, dass der vordere und hintere Plattenrand keine Verschiebung in z-Richtung erfahren dürfen, sind nur diskrete Werte für die Periondenlänge Λ möglich. Der größte dieser Werte ist offenbar $2L$, womit die Platte in Längsrichtung das Aussehen einer Sinus-Halbwelle hat. Die weiteren zulässigen Werte für Λ sind $2L/2$, $2L/3$, $2L/4$, $2L/5$ und so weiter. Die Beulwellenzahl f kann somit genau die natürlichzahligen Vielfachen von $1/(2\mu)$ annehmen. Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass $f = 0$ unzulässig ist. Dies würde nämlich die Anforderungen an die Funktion $\sin(2\pi\mu f\xi)$ verletzen, wie sie in Kapitel 2.3 beschrieben sind.

Die Verzerrungsenergie ist eine Funktion $\Phi = \Phi(q_i, f)$ und gleichzeitig eine quadratische Form in den q_i. Analog zur Gleichung (42) wird nun die dimensionslose Steifigkeitsmatrix K gebildet:

$$K_{i,j}(f) = \left. \frac{\partial^2 \Phi(q_0, q_1, ..., q_{n-1}, f)}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_k=0} \quad \text{mit} \quad i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{56}$$

Sie wird sofort für den ebenen Gleichgewichtszustand ausgewertet, bleibt aber weiterhin eine Funktion der Beulwellenzahl. Auch wird wieder eine Aufteilung entsprechend

$$K = K_B + F^* K_F + \Theta K_\Theta \tag{57}$$

vorgenommen. Für einen besseren Überblick wird die funktionale Abhängigkeit von f nicht jedes Mal sichtbar gemacht. Es sei festgehalten, dass die Matrizen K_B und K_F jeweils positiv definit sind. K_Θ ist jedoch indefinit. An der Stabilitätsgrenze verschwindet die Determinante der Matrix K. Dies führt zum verallgemeinerten Eigenwertproblem

$$\det(K_B + F^* K_F + \Theta K_\Theta) = 0. \tag{58}$$

Bei gegebenem F^* und f bestimmt der kleinste positive Eigenwert für Θ den Beuleintritt. Eben dieser Eigenwert werde als Funktion $\Theta_{kr}(F^*, f)$ aufgefasst. Jetzt folgt die Minimierung hinsichtlich der zulässigen Beulwellenzahlen, woraus die Funktion $\Theta_{kr,tot}(F^*)$ hervorgeht. Diese gibt nun im Sinne des gesamten Ansatzes (55) die Stabilitätsgrenze für eine gegebene Längskraft wieder.

3.1.5 Beuleintritt und Beulformen

Nachdem die Art der Berechnung geklärt ist, sollen nun einige Ergebnisse vorgestellt werden. Um anschauliche Grafiken zu bekommen, müssen freilich einige Zahlenwerte festgelegt werden. Im Grunde reichen hierfür die dimensionslosen Kennzahlen. Zwecks besserer Vorstellung werden allerdings auch ein exemplarischer Satz von Abmessungen sowie Werkstoffeigenschaften angegeben. Die entsprechenden Werte und die Spezifikation des Ritz-Ansatzes finden sich in Tabelle (1).

Tabelle 1: Beispielwerte für die Berechnung

Werkstoffeigenschaften	
Elastizitätsmodul E in GPa	210
Possion-Zahl ν	0.3
Wärmeausdehnungskoeffizient α in K^{-1}	$1.2 \cdot 10^{-5}$

Spezifikation des globalen Ritz-Ansatzes	
n	8

Geometrie der Platte	
gesamte Plattenbreite B in m	0.4
erhitzte Plattenbreite b in m	0.24
Plattenlänge L in m	2
Plattendicke h in m	0.002
$\beta = b/B$	0.6
$\mu = L/B$	5
$\tau = h/B$	0.005

Die Ausführung der obigen Rechnungen in Wolfram Mathematica führt unter anderem auf Abbildung (3). Darin ist der Verlauf der Funktion $\Theta_{kr}(F^*, f)$ für verschiedene Beulwellenzahlen zu erkennen. Es ist sogleich zu bemerken, dass aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht für alle zulässigen f eine Linie gezeichnet ist. $f = 1/(2\mu) = 0.1$ entspricht aber tatsächlich der kleinst möglichen Beulwellenzahl und $f = 0.2$ der nächst größeren. Die eingezeichneten Kreuze markieren die Simulationsergebnisse mit ABAQUS, welche offenbar sehr gut mit jenen des hier beschriebenen Verfahrens übereinstimmen.

Bezug nehmend auf diese Abbildung besagt die Minimierung, dass die abschnittsweise unterste Kurve für den Beuleintritt ausschlaggebend ist. Allerdings müssten hierzu die Kurven für alle zulässigen Beulwellenzahlen gezeichnet sein. Für die Ergebnisse aus ABAQUS gilt natürlich völlig analog, dass stets das am tiefsten liegende Kreuz den Stabilitätsverlust angibt. Es sind aber wiederum nur jene Ergebnisse in Abbildung (3) eingetragen, die dem Vergleich mit dem globalen Ritz-Ansatz dienen.

Zur besseren Orientierung in diesem dimensionslos gehaltenen Diagramm ist auch der ungefähre Übergang zum plastischen Regime von herkömmlichem Stahl angegeben. Speziell wird eine Streckgrenze von 210 MPa angenommen. Gemeinsam mit dem gegebenen E-Modul ergibt sich daraus eine maximale elastische Dehnung von 0.1%. Wie bereits bekannt ist, herrscht aufgrund der Temperaturdifferenz in den äußeren Streifen Zug- und im mittleren Druckspannung. Wird eine Längskraft aufgebracht, so erhöht sich die Zugspannung in den kalten Bereichen, während der heiße entlastet wird. Mit $\beta = 0.6 > 1/2$ sind es also stets die kalten Streifen, die den betragsmäßig größeren Spannungen ausgesetzt sind. Als Grenze für deren Belastbarkeit ergibt sich schließlich die fallende strichlierte Linie.

Um die nachstehenden Schlussfolgerungen besser verständlich zu machen, sollte nun ein Blick auf die Beulformen in Abbildung (4) geworfen werden. Die linke Spalte zeigt die Beulmoden des globalen Ritz-Ansatzes und die rechte jene aus ABAQUS. Offenbar gibt es durchwegs sehr gute Übereinstimmung. Sämtliche Darstellungen gehen von einer Längskraft $F = 30\,\text{kN}$ bzw. $F^* = 1.786 \cdot 10^{-4}$ aus. In Abbildung (3) sind außerdem alle zugehörigen Eigenwerte erkennbar. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass bei besagter Längskraft der aller niedrigste Eigenwert mit $f = 0.6$ zustande kommt. Mit dem globalen Ritz-Ansatz ergibt sich hierfür $\Theta_{kr,tot} = 8.414 \cdot 10^{-4}$, während ABAQUS den Wert $8.409 \cdot 10^{-4}$ liefert.

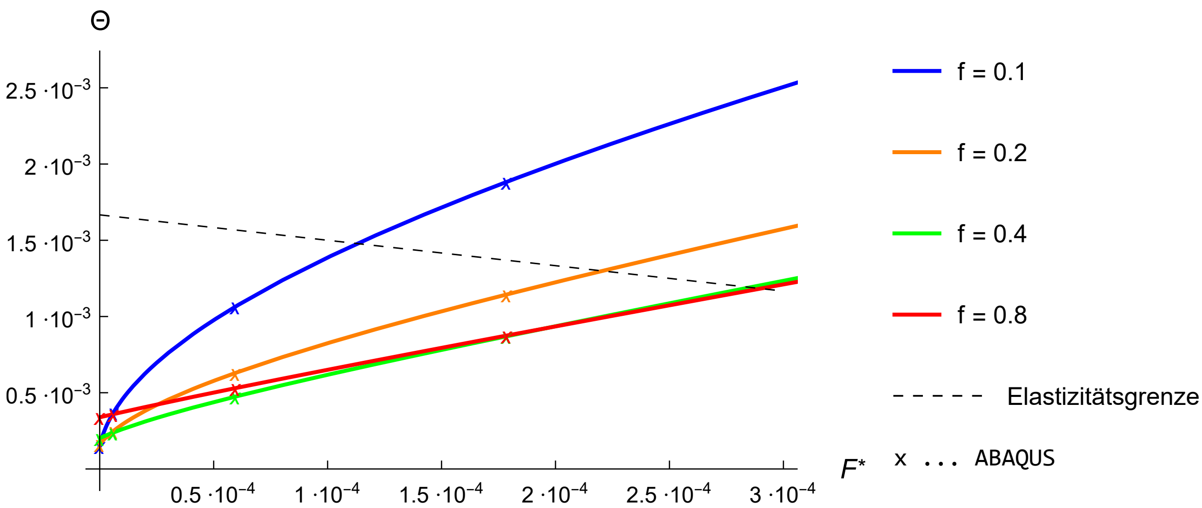
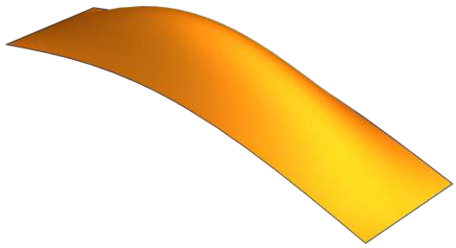
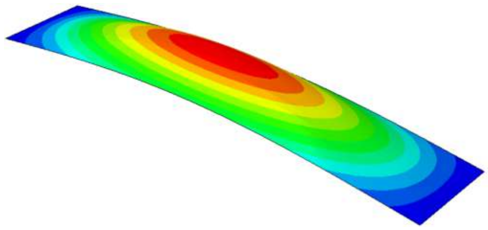


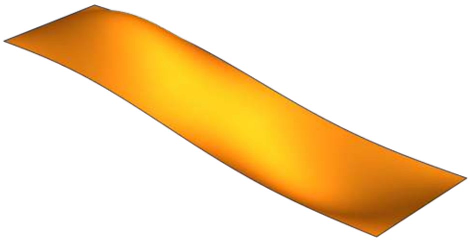
Abbildung 3: Kritische Temperaturdifferenz bei begrenzter Platte. Dargestellt sind Kurven von $\Theta_{kr}(F^*, f)$ über der Längskraft F^* bei jeweils fester Beulwellenzahl f. Strichliert eingezeichnet ist der ungefähre Übergang zum plastischen Regime bei Stahl. Die mit Kreuzen eingetragenen Simaltionsergebnisse aus ABAQUS bestätigen die Rechnung.



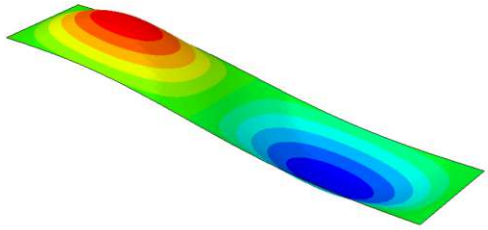
(a) WM: $f = 0.5/\mu = 0.1$



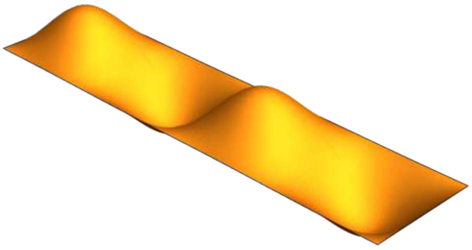
(b) AQ: $f = 0.5/\mu = 0.1$



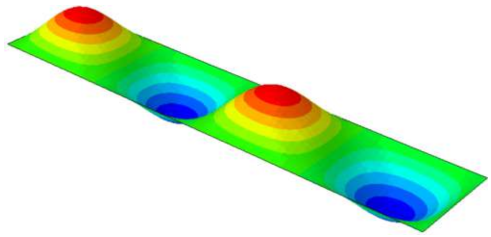
(c) WM: $f = 1/\mu = 0.2$



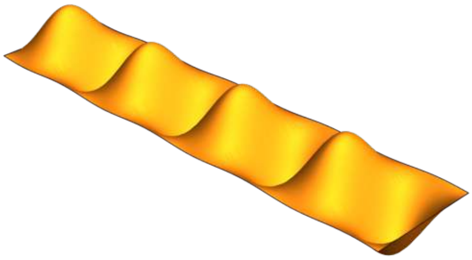
(d) AQ: $f = 1/\mu = 0.2$



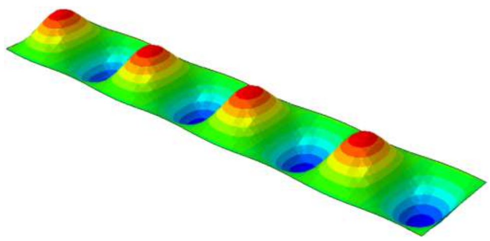
(e) WM: $f = 2/\mu = 0.4$



(f) AQ: $f = 2/\mu = 0.4$



(g) WM: $f = 4/\mu = 0.8$



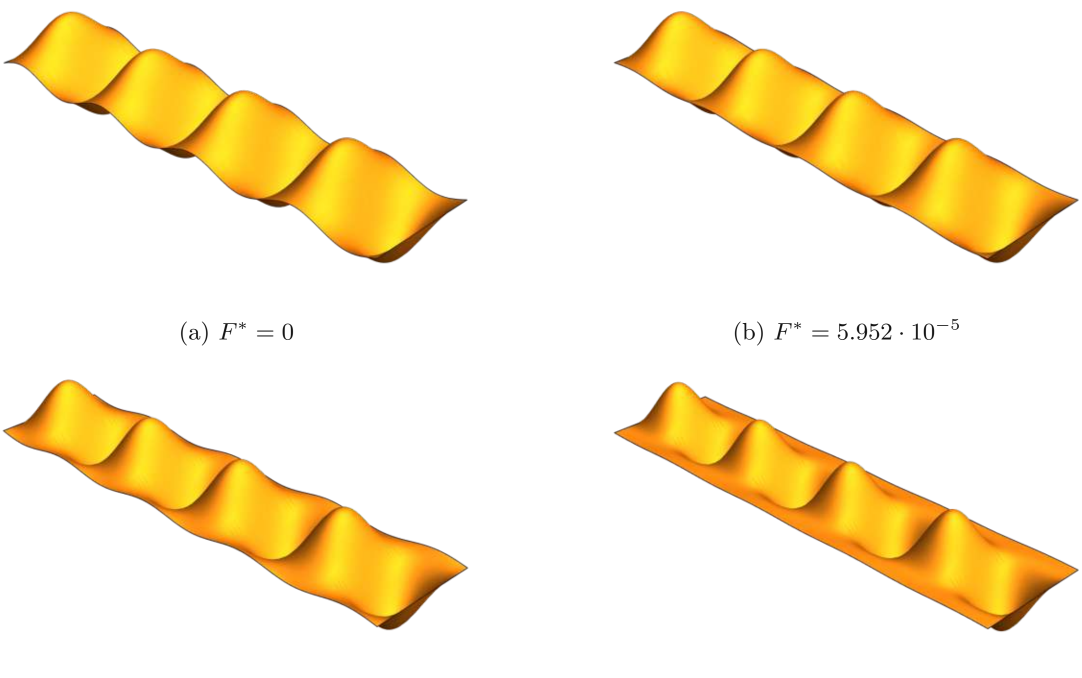
(h) AQ: $f = 4/\mu = 0.8$

Abbildung 4: Beulformen mit unterschiedlichen Beulwellenzahlen. Die linke Spalte zeigt die Beulmoden, die mit dem globalen Ritz-Ansatz und Wolfram Mathematica berechnet werden. Die rechte Spalte zeigt die Ergebnisse der Simulationen in ABAQUS. Es gilt einheitlich $F^* = 1.786 \cdot 10^{-4}$.

Bei Variation der Längskraft ändern sich im Allgemeinen auch die Beulformen mit fester Beulwellenzahl. Diese Tatsache wird in Abbildung (5) veranschaulicht. Für alle darin enthaltenen Beulmoden wird f konstant auf dem Wert 0.8 gehalten. Die zunehmende Längskraft ändert aber dennoch die verallgemeinerten Lagekoordinaten q_i. Bezug nehmend auf Abbildung (3) bedeutet dies schließlich, dass die farbigen Linien nicht genau „einer“ Beulform entsprechen. Es bleibt stets nur die Beulwellenzahl konstant, ihr sonstiges Aussehen verändert sich entlang der Kurven.

Es können nun noch einige Sachverhalte aus den Graphen in Abbildung (3) herausgelesen werden. Erstens scheint die kritische Temperaturdifferenz in jedem Fall mit der Längskraft anzuwachsen. Das ist soweit plausibel, da die Längskraft die Platte zusätzlich versteift und damit das Beulen erschwert. Zweitens ist die unterste aller Kurven je nach betrachtetem Bereich eine andere. Das bedeutet also, dass die Beulformen mit unterschiedlichem f einander bei steigender Längskraft spontan ablösen. Speziell tritt etwa für $F^* = 0$ jene Beulform ein, die gerade einer Halbwelle des Sinus entspricht, doch schon bei recht geringer Längskraft wird die Platte plötzlich gemäß einer ganzen Periode des Sinus beulen.

Abschließend sei noch einmal betont, dass sich die hier vorgenommenen Untersuchungen auf $T \geq 0$ beschränken. Ist $T < 0$, dann liegen heiße Randbereiche und ein kühler Mittelstreifen vor. Simulationen in ABAQUS zeigen, dass es dann zu Beulformen kommt, die schiefsymmetrisch bezüglich der x-z-Ebene sind. Diese können mit den Ansätzen (55) und (64) nicht erfasst werden. Statt der geraden Potenzen für η müssten nämlich die ungeraden herangezogen werden. Das prinzipielle Vorgehen bliebe völlig analog, doch gibt es kein unmittelbares Interesse an diesem Szenario.



(a) $F^* = 0$

(b) $F^* = 5.952 \cdot 10^{-5}$

(c) $F^* = 5.952 \cdot 10^{-4}$

(d) $F^* = 5.952 \cdot 10^{-3}$

Abbildung 5: Beulformen mit $f = 0.8 = \text{const.}$ bei zunehmender Längskraft. Die Unterschiede zeigen sich vor allem in den Randbereichen.

3.2 Unendlich langes Band

Statt von einer begrenzten Platte wird nun von einem unendlich langen Band ausgegangen. Auch hier möge die Beulform in Längsrichtung wie die Sinus-Funktion aussehen. Dementsprechend reicht es, aus dem Band ein Segment der Periodenlänge Λ freizuschneiden und dieses statt des gesamten Bandes zu betrachten. Der einzige, obgleich sehr wesentliche Unterschied zur Abbildung (2) besteht also darin, dass die feste Länge L durch die vorerst unbekannte Periodenlänge des Sinus ersetzt wird.

3.2.1 Spannungen, Energie, Ansatz und Methode

Es ist augenscheinlich, dass das unbegrenzte Band in Längsrichtung einheitlich gedehnt ist. Es gilt somit weiterhin $\varepsilon_{x,i} = \varepsilon_{x,a}$. Rückblickend erscheint die kinematische Randbedingung der endlichen Platte also sehr naheliegend. Zudem muss natürlich auch Gleichung (46) immer noch gelten. Der Spannungszustand der ebenen Scheibe ist folglich der exakt gleiche wie im begrenzten Fall.

Die weitere Vorgehensweise ist sehr analog. Zunächst werden wieder einige dimensionslose Kennzahlen definiert:

$$\rho = \frac{x}{\Lambda}, \quad \eta = \frac{y}{B}, \quad f = \frac{B}{\Lambda}, \quad \Phi = \frac{U}{E\Lambda Bh}, \quad w^* = \frac{w}{B}. \tag{59}$$

Die dimensionslose Verzerrungsenergie Φ berechnet sich anschließend wie folgt:

$$\Phi = \Phi_B + \Phi_F + \Phi_\Theta \tag{60}$$

mit

$$\begin{aligned}\Phi_B = \frac{\tau^2}{24(1-\nu^2)} \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Bigg\{ \left(f^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial \eta^2} \right)^2 \\ - 2(1-\nu) f^2 \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial \rho^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial \rho \partial \eta} \right)^2 \right] \Bigg\} \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\rho,\end{aligned} \tag{61}$$

$$\Phi_F = F^* \frac{f^2}{2} \int_0^1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \rho} \right)^2 \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\rho, \tag{62}$$

$$\Phi_\Theta = \Theta \frac{f^2}{2} \int_0^1 -(1-\beta) \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \rho} \right)^2 \mathrm{d}\eta + 2\beta \int_{\frac{\beta}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \rho} \right)^2 \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\rho. \tag{63}$$

Das dimensionslose Durchbiegungsfeld wird mittels

$$\tilde{w}^*(\rho, \eta) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} q_i \cdot \eta^{2i} \right) \sin(2\pi\rho) \tag{64}$$

angesetzt. Auch hier ist die Beulwellenzahl ein zusätzlicher Parameter, der nun über $\rho = xf/B$ eingeht.

Die Steifigkeitsmatrix wird ebenso berechnet und aufgespalten wie zuvor. Folglich gilt es auch nun wieder das verallgemeinerte Eigenwertproblem (58) zu lösen. Der kleinste positive Eigenwert für Θ definiere abermals $\Theta_{kr}(F^*, f)$. Die Minimierung hinsichtlich der Beulwellenzahl führt wie gehabt auf die Funktion $\Theta_{kr,tot}(F^*)$, die endgültig die Stabilitätsgrenze angibt. Der ganz wesentliche Unterschied besteht nun darin, dass als Beulwellenzahl nicht nur diskrete Werte in Frage kommen, sondern jede positive reelle Zahl.

3.2.2 Beuleintritt, Beulwellenzahl und Approximation

Für anschauliche Ergebnisse braucht es abermals konkrete Zahlenwerte. Es wird wieder auf Tabelle (1) zurückgegriffen, wobei die dortigen Angaben für L und μ jetzt freilich zu ignorieren sind. Ein großer Teil der Rechenergebnisse ist in Abbildung (6) zusammengefasst. Neben der Funktion $\Theta_{kr,tot}$ finden sich darin auch diverse zusätzliche Informationen, die dem besseren Verständnis dienen. Anhand dieses Diagramms sollen nun einige wesentliche Eigenschaften der besagten Funktion erklärt werden.

Offenbar ist $\Theta_{kr,tot}(F^*)$ streng monoton steigend. Das ist wieder darauf zurückzuführen, dass die Längskraft die Platte versteift. Eine größere Vorspannung führt demnach auch zu einer höheren kritischen Temperaturdifferenz. Doch wie einige ausgewählte Punkte belegen, nimmt auch die Beulwellenzahl von links nach rechts zu. Ein solches Phänomen ist auch bei der begrenzten Platte feststellbar. Wie Abbildung (3) zeigt, wird bei zunehmender Längskraft die gerade unterste Kurve immer von jener mit der nächst höheren Beulwellenzahl abgelöst. Im vorliegenden Fall des unendlichen Bandes geschieht dieses Ablösen allerdings nicht sprungartig, sondern kontinuierlich.

Analog zum Szenario der begrenzten Platte können auch in das jetzige Diagramm wieder Kurven fester Beulwellenzahl eingezeichnet werden. Speziell werden die Linien aus Abbildung (3) unverändert übernommen, da den Berechnungen die gleichen Parameter zugrunde liegen. Zu bedenken ist allerdings, dass im gegenwärtigen Fall alle $f > 0$ zulässig sind und damit die Fülle an derartigen Kurven sehr viel größer ist als zuvor. $\Theta_{kr,tot}$ bildet sodann die untere Grenzlinie all dieser Kurven. Sie liegt nun an jeder Stelle mindestens so tief wie ihr Analogon im Falle der begrenzten Platte. Das Band beult also häufig schon bei geringerer Temperaturdifferenz als die Platte, nie aber gilt das Umgekehrte.

Eine anschauliche Begründung für diese Tatsache findet sich bei den Randbedingungen. Während sich das Band stets so verformen kann wie die Platte, ist es der Platte im Allgemeinen nicht möglich, sich so zu verformen wie das Band. Mathematisch fließt dieser Umstand in die Minimierungsaufgabe ein. Sowohl bei der Platte als auch beim Band wird eine Funktion $\Theta_{kr}(F^*, f)$ hinsichtlich der Beulwellenzahl minimiert. Bei der begrenzten Platte kommen hierfür nur bestimmte diskrete Werte in Frage, beim Band hingegen alle Zahlen größer null. Nun ist aber die Menge dieser diskreten Werte eine echte Teilmenge der positiven reellen Zahlen. Damit liegt das Minimum beim unendlichen Band immer mindestens so tief wie jenes der Platte.

Der praktisch relevante Bereich des Diagramms ist abermals durch den Übergang zum plastischen Materialverhalten limitiert. Nichtsdestoweniger soll das Verhalten der Funktion $\Theta_{kr,tot}(F^*)$ für $F^* \to \infty$ untersucht werden. Wie sich später herausstellt, ist die Längskraft auch innerhalb des linear-elastischen Bereichs oft schon groß genug, sodass die folgenden Näherungen Sinn ergeben. Es werde also erneut Gleichung (58) betrachtet. Hierin steht der positiv definite Anteil $K_B + F^* K_F$ dem indefiniten ΘK_Θ gegenüber. Für große Längskraft kann K_B vernachlässigt werden. Das Eigenwertproblem lässt sich dann näherungsweise schreiben als

$$\det\left(K_F + \frac{\Theta}{F^*} K_\Theta\right) = 0. \tag{65}$$

Offenbar ist also nur noch ein Verhältnis zwischen der Temperaturdifferenz und der Längskraft ausschlaggebend. Das wahre Verhältnis Θ/F^* ist aber stets durch die Steigung der Funktion $\Theta_{kr,tot}(F^*)$ gegeben. Der Quotient, welcher durch Gleichung (65) bestimmt wird, ist also der Grenzwert dieser Steigung. Gleichzeitig definiert besagter Quotient eine homogene Gerade, wie sie in Abbildung (6) dargestellt wird.

Es ist zu erahnen, dass die Tangente an $\Theta_{kr,tot}(F^*)$ mit zunehmender Längskraft immer eher parallel zur braunen Geraden wird. Diese ist jedoch keine Asymptote. Obgleich der relative Fehler zwischen der Geraden und $\Theta_{kr,tot}(F^*)$ verschwindet, bleibt der absolute Fehler bestehen.

Die eben diskutierte homogene Gerade kann auch als Approximation aufgefasst werden. Da sie stets unter der tatsächlichen Funktion liegt, gibt sie eine konservative Schätzung der kritischen Temperaturdifferenz an. Im Übrigen ist die Approximation immer besser, je dünner das Blech ist. Das lässt sich auch sehr einfach begründen. Die Blechdicke geht nämlich in den Biege-Anteil der Verzerrungsenergie gemäß Gleichung (61) ein, nicht aber in die beiden anderen. Diese Zusammenhänge übertragen sich auch auf die Anteile der Steifigkeitsmatrix. Es ist also K_B proportional zu τ^2, während K_F und K_Θ von der Blechdicke unabhängig sind. Ist nun aber τ sehr klein, dann ist K_B gegenüber $F^* K_F$ rasch vernachlässigbar und die Approximation entsprechend gut.

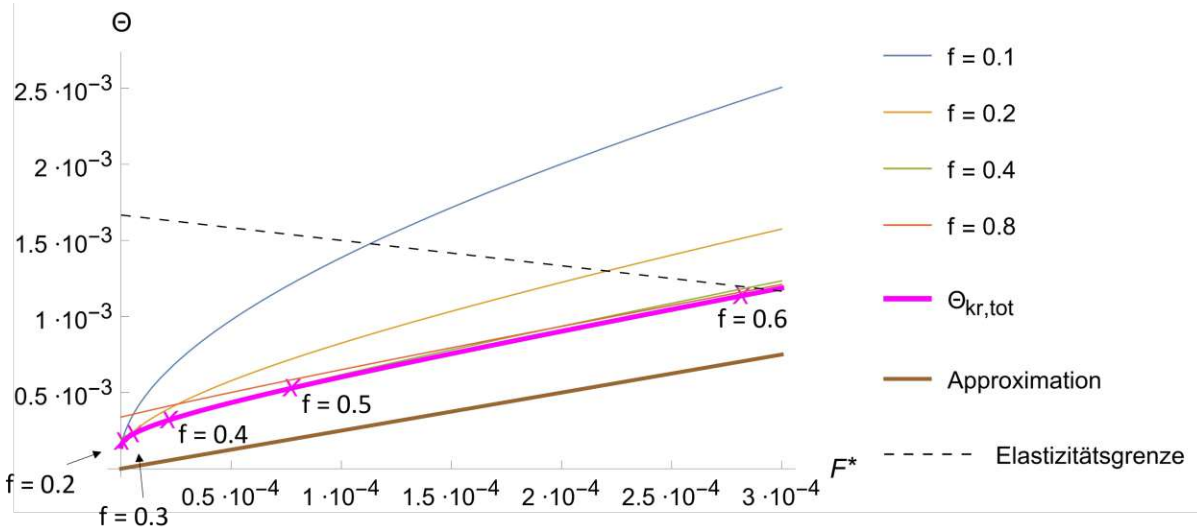


Abbildung 6: Funktion $\Theta_{kr,tot}(F^*)$. Für ausgewählte Punkte ist die Beulwellenzahl angegeben. Durch den Grenzwert der Steigung ist außerdem eine homogene Gerade definiert. Die dünnen Linien sind Graphen von $\Theta_{kr}(F^*, f)$ bei festen Werten für f. Strichliert eingezeichnet ist der ungefähre Übergang zum plastischen Materialverhalten.

3.2.3 Einfluss der erhitzten Breite und der Blechdicke

Als nächstes wird die Abhängigkeit der Funktion $\Theta_{kr,tot}(F^*)$ von der erhitzten Breite untersucht. Alle anderen Größen sollen währenddessen ihren bisherigen Wert beibehalten. In Abbildung (7) sind vier Kurven für unterschiedliches β gezeichnet. Validiert sind diese Linien außerdem mit den Simulationsergebnissen aus ABAQUS. Es zeigt sich insgesamt eine recht komplexe Abhängigkeit, die keine einfachen Schlüsse erlaubt. Deswegen gilt es für reale Probleme gegebenenfalls mehrere Szenarien durchzurechnen und den kritischsten Fall anzunehmen.

Abschließend soll noch der Einfluss der Blechdicke beobachtet werden. In Abbildung (8) ist die Funktion $\Theta_{kr,tot}(F^*)$ für vier verschiedene Werte von τ gezeichnet. Wie bereits erläutert, hat die Blechdicke unter allen Größen im Eigenwertproblem einzig auf K_B einen Einfluss. Speziell ist diese Matrix proportional zum Quadrat von τ. Mit abnehmender Blechstärke hat die initiale Biegesteifigkeit des Bandes immer geringere Bedeutung. Für $\tau \to 0$ degeneriert das Blech schließlich zu einer Membran, die ihre Steifigkeit ausschließlich durch die Längskraft erhält. Gemäß den obigen Ausführungen lässt sich die Funktion $\Theta_{kr,tot}(F^*)$ bei kleinem τ auch zunehmend besser durch die homogene Gerade approximieren, deren Steigung aus Gleichung (65) hervorgeht.

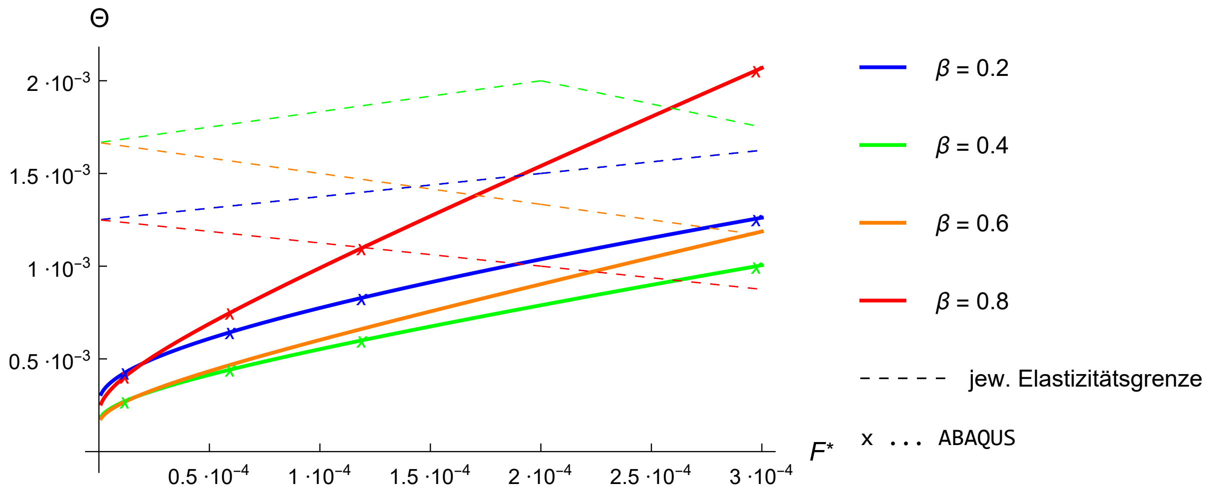


Abbildung 7: Funktion $\Theta_{kr,tot}(F^*)$ für unterschiedliche erhitzte Breite. Die Kreuze markieren die Simulationsergebnisse mit ABAQUS. Strichliert eingezeichnet ist der ungefähre Übergang zum plastischen Materialverhalten.

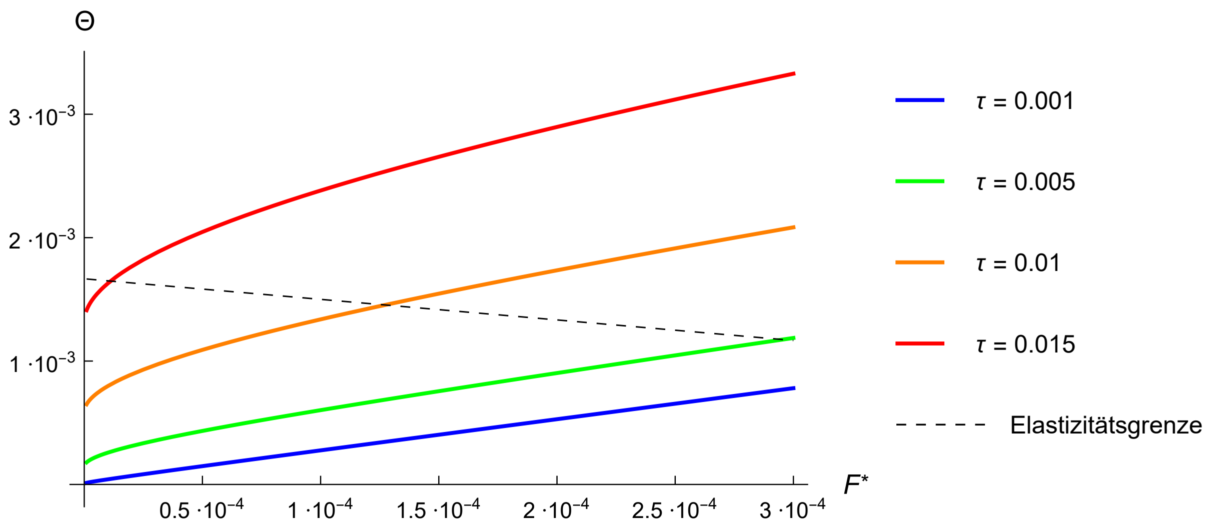


Abbildung 8: Funktion $\Theta_{kr,tot}(F^*)$ für unterschiedliche Blechdicken. Strichliert eingezeichnet ist der ungefähre Übergang zum plastischen Materialverhalten.

4 Längs-Temperaturgradient

Dieses Kapitel ist dem zweiten Szenario gewidmet, bei dem die Temperaturverteilung nur von der Längsrichtung abhängt. Ganz konkret gibt es einen Temperatursprung, der das Blech in ein kaltes und ein heißes Ende unterteilt. Es wird vorausgeschickt, dass die Beulformen hier nicht länger periodisch sind. Außerdem betreffen diese stets das gesamte Blech, unabhängig davon, ob es als endliche Platte oder als unendliches Band gedacht wird. Mit Ausnahme von Kapitel 4.7 wird davon ausgegangen, dass das Band tatsächlich mit einer Vorspannung $F > 0$ in die Länge gezogen wird. Mit Simulationen lässt sich dann belegen, dass die Neigungen und Krümmungen der Beulmoden mit zunehmender Entfernung vom Temperatursprung stark nachlassen. Der allergrößte Teil der Verzerrungsenergie ist also in einer kleinen Umgebung um eben diesen Temperatursprung gespeichert. Das legt die Vorgehensweise nahe, abermals eine endliche Platte zu betrachten, wie sie in Abbildung (9) dargestellt ist.

4.1 Modell

Die x-Achse des Koordinatensystems fällt wieder mit der Mittellinie zusammen. Die y-Achse führt gerade entlang des Temperatursprungs. Die Länge, Breite und Dicke der Platte werden mit L, B und h abgekürzt. l kennzeichnet eine weitere Länge, die bei der Berechnung der Verzerrungsenergie ins Spiel kommt. Die Temperaturdifferenz zwischen dem vorderen und hinteren Ende ist $T_v - T_h = T = \Theta/\alpha$. Die Längskraft F greift jetzt gleichmäßig verteilt am vorderen und hinteren Plattenrand an. Auf kinematische Randbedingungen kann verzichtet werden. F^*, τ, μ und χ sind schließlich wieder dimensionslose Größen für die Längskraft und Geometrie.

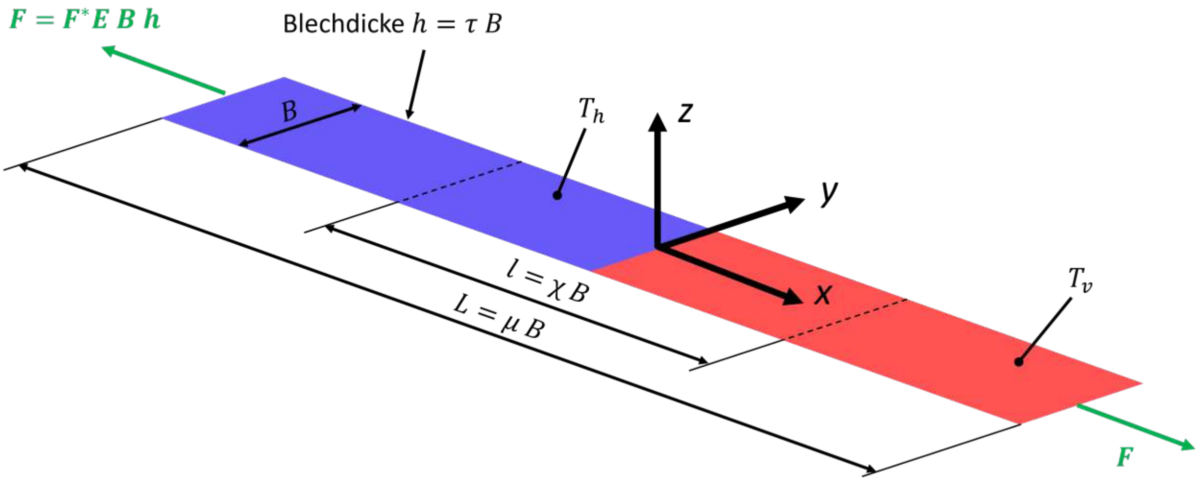
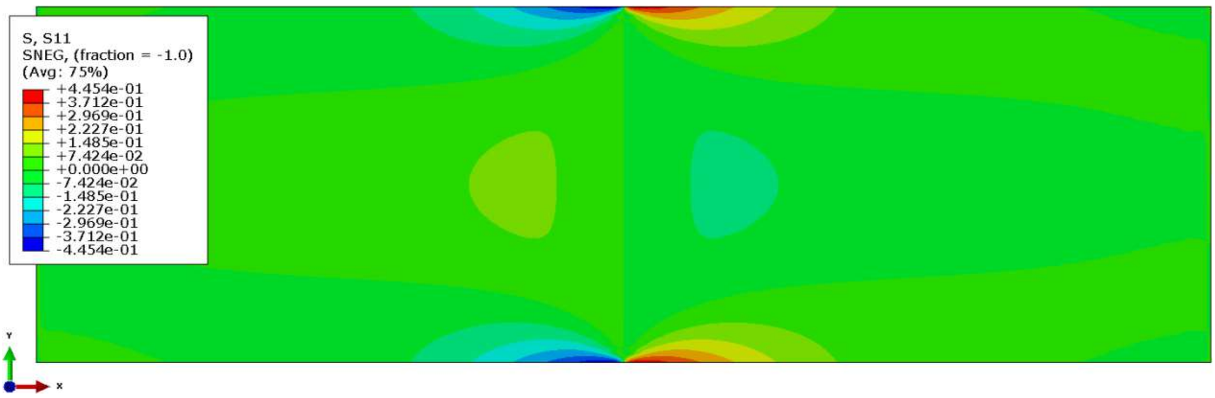


Abbildung 9: Modell der begrenzten Platte mit Temperaturgradient in Längsrichtung.

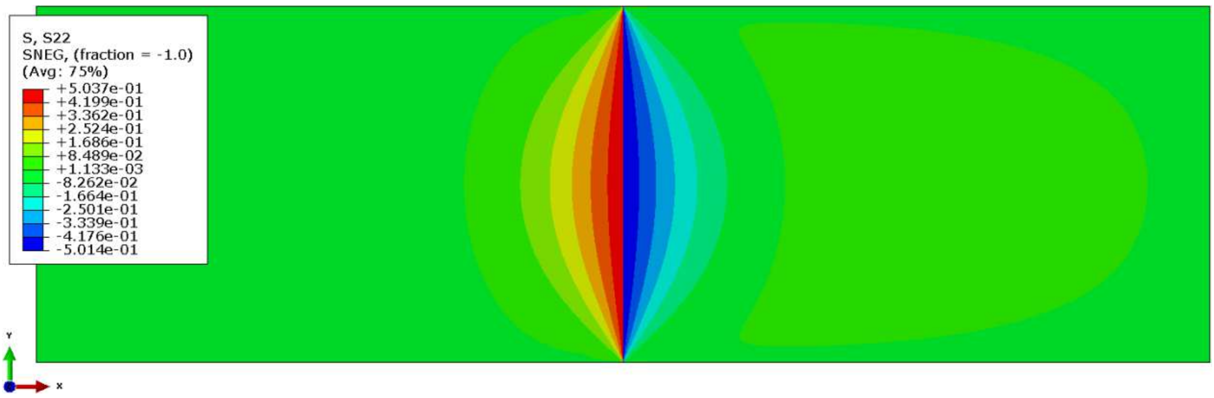
4.2 Scheibenproblem

Als nächstes muss der Spannungszustand der ebenen Scheibe geklärt werden. Dieser setzt sich entsprechend des Superpositionsprinzips aus zwei Anteilen zusammen. Der erste wird durch die Längskraft verursacht und der zweite durch die Temperaturdifferenz. Der Spannungszustand zufolge der Längskraft ist trivial. In der gesamten Platte gilt $n_{x,F} = \tau\, F^*$, was die einzige nicht verschwindende Komponente des Membrankrafttensors darstellt.

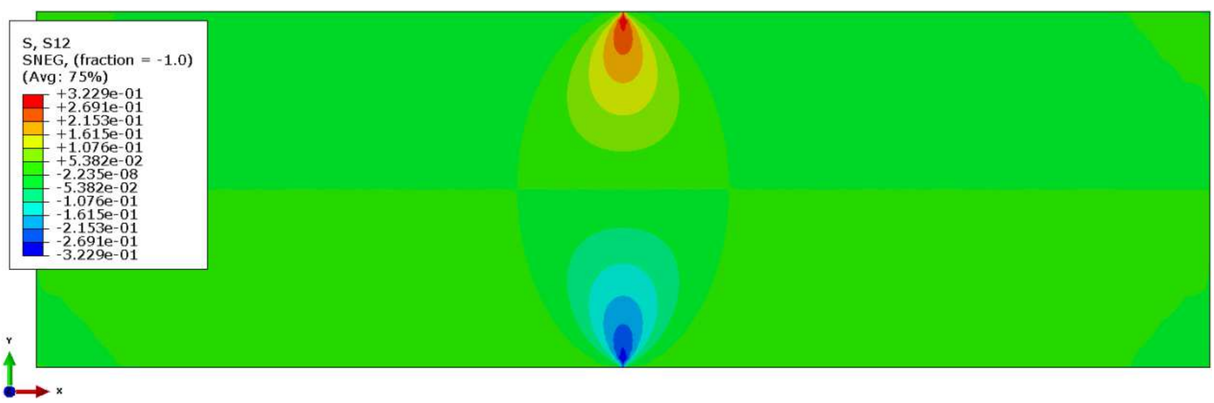
Umso komplizierter ist hingegen der Spannungszustand zufolge der Temperaturdifferenz. Vom Versuch einer analytischen Lösung wird Abstand genommen, stattdessen wird eine Referenz-Spannungsverteilung aus ABAQUS bezogen. Abbildung (10) stellt die Komponenten des ebenen Cauchy'schen Spannungstensors dar. Hierfür wurde $T = 1\,\mathrm{K}$, $\alpha = 1\,\mathrm{K}^{-1}$, $E = 1\,\mathrm{Pa}$ und $\nu = 0.3$ gewählt. Es ist zu betonen, dass ν eine Sonderstellung unter diesen Größen hat. Während die übrigen das Spannungsfeld lediglich skalieren, hat die Poisson-Zahl auch tatsächlich Einfluss auf dessen Gestalt.



(a) Spannungskomponente S11.



(b) Spannungskomponente S22.



(c) Spannungskomponente S12.

Abbildung 10: Spannungsverteilung zufolge der Temperaturdifferenz. S11, S22 und S12 bezeichnen die xx-, yy- und xy-Komponente des ebenen Cauchy'schen Spannungstensors.

4.3 Verzerrunsenergie

Da eine Platte mit fester Länge betrachtet wird, können auch wieder die Gleichungen (50) eingesetzt werden. Für die Berechnung der Verzerrungsenergie gilt es allerdings zu beachten, dass sich das Integrationsgebiet nun von $-L/2$ bis $+L/2$ erstreckt. Für den Anteil durch Biegung ergibt sich

$$\Phi_B = \frac{\tau^2}{24(1-\nu^2)} I_B \tag{66}$$

mit

$$\begin{aligned} I_B = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Bigg\{ &\left(\frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial \eta^2} \right)^2 \\ &- 2(1-\nu) \frac{1}{\mu^2} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] \Bigg\} \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\xi . \end{aligned} \tag{67}$$

Beim Anteil zufolge der Membrankräfte und der geometrisch nichtlinearen Verformung wird die bewährte Aufteilung durchgeführt. Für den Teil, der der Vorspannung geschuldet ist, gilt

$$\Phi_F = \frac{F^*}{2\mu^2} I_F, \tag{68}$$

wobei

$$I_F = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi} \right)^2 \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\xi . \tag{69}$$

Der verbleibende Teil wird mittels

$$\Phi_\Theta = \frac{\Theta}{2\tau} I_{\Theta,ref} \tag{70}$$

und

$$\begin{aligned} I_{\Theta,ref} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Bigg[& n^*_{x,\Theta,ref} \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi} \right)^2 \\ &+ n^*_{y,\Theta,ref} \left(\frac{\partial w^*}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{2}{\mu} n^*_{xy,\Theta,ref} \frac{\partial w^*}{\partial \xi} \frac{\partial w^*}{\partial \eta} \Bigg] \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{71}$$

berechnet. Der zusätzliche Index „ref“ bedeutet, dass es sich um einen Referenzwert handelt. Gemäß den obigen Angaben wird das Spannungsfeld in ABAQUS mit $\alpha T = \Theta = 1$ berechnet. Die tatsächlichen Werte für die Temperaturdifferenz und den Wärmeausdehnungskoeffizienten finden schließlich durch Gleichung (70) Eingang in das Problem.

ABAQUS arbeitet mit der Finite-Elemente-Methode und ermittelt so Näherungswerte für die Spannungen in den Integrationspunkten der Elemente. Es wird eine Liste dieser Punkte gemeinsam mit deren Koordinaten und Spannungswerten exportiert. Folglich ist es naheliegend, das Integral aus Formel (71) durch eine Summe zu approximieren. Die Qualität der Spannungsverteilung hängt von der Art der Elemente, der Feinheit des Gitters und der Größe der skizzierten Scheibe ab. Ein genaueres Spannungsfeld bedeutet aber unweigerlich mehr Integrationspunkte, mehr Summanden und vor allem eine längere Rechenzeit in Mathematica.

Es gibt also gegensätzliche Bestrebungen hinsichtlich der Qualität der Spannungsverteilung. Vor diesem Hintergrund ist es wichtig zu bemerken, dass alle Spannungskomponenten bei zunehmender Entfernung vom Temperatursprung exponentiell abfallen. Ohne nennenswerte Genauigkeitseinbußen wird für die weiteren Berechnungen in Mathematica schließlich nur ein zentraler Ausschnitt von $-l/2$ bis $+l/2$ berücksichtigt. Konkret wird $l = 2.2B$ gewählt. Damit sinken an den Grenzen des Ausschnitts alle Spannungen auf unter 2% ihres Maximalwertes ab. Für die dimensionslose Längskoordinate ξ ist der genannte Bereich durch $\pm\chi/2$ begrenzt, was sogleich in die übrigen Gleichungen einfließen soll.

4.4 Wahl des Ritz-Ansatzes

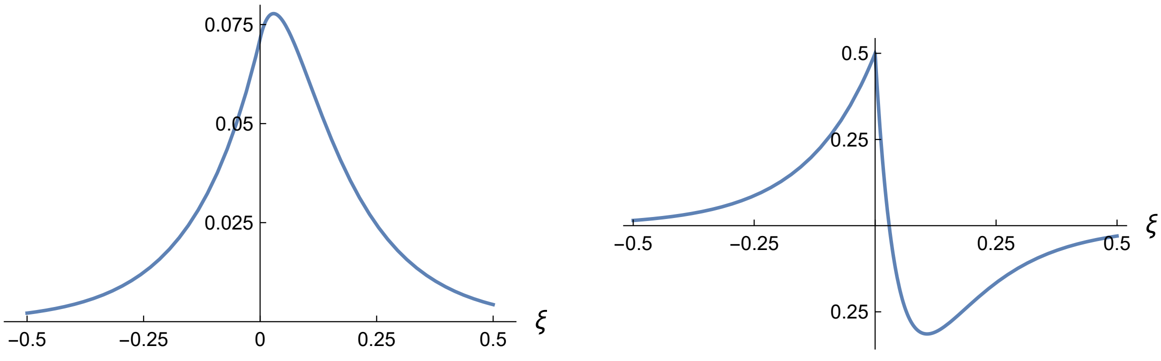
Es folgt nun die Wahl des Ritz-Ansatzes. Wie einige Simulationen bestätigen, ist auch bei der Beulform mit beidseitig exponentiellem Abfall zu rechnen. Davon abgesehen können kaum generelle Aussagen über das Aussehen der Beulmoden getroffen werden. Insbesondere gibt es auch keine durchwegs vorhandenen Symmetrieebenen. Folglich wird das Verschiebungsfeld recht allgemein mittels

$$\tilde{w}^*(\xi,\eta) = \left(\sum_{i=0}^{n_\xi-1}\sum_{j=0}^{n_\eta-1} q_{ij}\,\xi^i\,\eta^j\right)\cdot g(\xi,a_1,a_2) \tag{72}$$

angesetzt, wobei

$$\begin{aligned} g(\xi,a_1,a_2) &= e^{-a_1\xi}\int_{-\infty}^{\xi} e^{-a_2|\hat{\xi}|}\mathrm{d}\hat{\xi} \\ &= \begin{cases} a_2^{-1}e^{(a_2-a_1)\xi} & \xi\le 0 \\ a_2^{-1}e^{-a_1\xi}(2-e^{-a_2\xi}) & \xi>0 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad 0<a_1<a_2. \end{aligned} \tag{73}$$

g fällt für betragsmäßig große ξ exponentiell ab, was sich wie beabsichtigt auf die Ansatzfunktion $\tilde{w}^*$ überträgt. Abbildung (11) zeigt exemplarisch das Aussehen von g und seiner Ableitung $\partial g/\partial\xi$. Beide müssen stetig sein, damit die Platte weder Sprünge noch Knicke aufweist. $\partial^2 g/\partial\xi^2$ ist bei $\xi = 0$ jedoch nicht mehr stetig. Damit wird der Platte erlaubt, ihre Krümmung sprungartig zu ändern. Einen solchen Krümmungssprung zuzulassen, ist angesichts der teils ebenso unstetigen Spannungsverläufe naheliegend.



(a) Funktion $g(\xi,a_1,a_2)$ (b) Funktion $\partial g/\partial\xi\,(\xi,a_1,a_2)$

Abbildung 11: Funktion g des Ritz-Ansatzes. Es ist die Funktion sowie ihre Ableitung nach ξ exemplarisch für $a_1 = 7$ und $a_2 = 14$ dargestellt.

Der jetzige Ansatz enthält erstmals ein gemischtes Polynom in ξ und η. Dieses hat insgesamt n_ξ mal n_η Terme, was zu sehr umfangreichen Ausdrücken bei den Ableitungen und umso mehr noch bei den Integralen aus (67), (69) und (71) führt. An dieser Stelle sei in Erinnerung gerufen, dass die Verzerrungsenergie quadratisch in den q_{ij} ist. Außerdem dient sie im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich der

Berechnung der Steifigkeitsmatrix im ungebeulten Zustand. Deren Elemente wiederum sind gerade die zweiten Ableitungen der Verzerrungsenergie. Mit dem Ziel, die Rechnung zu portionieren, können die Differentialoperatoren in die Integrale gezogen und alle Elemente der Steifigkeitsmatrix bzw. von K_B, K_F und K_Θ einzeln ermittelt werden.

Zunächst aber wird der Ansatz (72) zu

$$\tilde{w}^*(\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{n-1} q_k\, b_k(\xi,\eta,a_1,a_2) \quad \text{mit} \quad n = n_\xi \cdot n_\eta \tag{74}$$

umgeschrieben. Darin sind die ehemals zwei Summen zu einer zusammengefasst, was eine neue Indizierung verlangt. Die Abbildungen, die den Index k mit dem alten Indexpaar (i,j) verknüpfen, sehen dabei wie folgt aus:

$$k = i\, n_\eta + j \quad \longleftrightarrow \quad i = \lfloor\, k/n_\eta \rfloor \ \text{ und } \ j = k \bmod n_\eta. \tag{75}$$

Darin steht $\lfloor\,\#\,\rfloor$ für das Abrunden von $\#$ zur nächsten ganzen Zahl. $\#_1$ mod $\#_2$ repräsentiert den Modulo-Operator, welcher den Rest bei ganzzahliger Division von $\#_1$ durch $\#_2$ zurückgibt. Die b_k sind die Basisfunktionen des Ansatzes und ergeben sich zu

$$b_k(\xi,\eta,a_1,a_2) = g(\xi,a_1,a_2)\cdot \xi^{\lfloor\, k/n_\eta \,\rfloor} \cdot \eta^{k \bmod n_\eta}. \tag{76}$$

Basierend auf der Definition der Steifigkeitsmatrix und ihrer üblichen Aufteilung berechnen sich die Elemente der Matrizen K_B, K_F und K_Θ entsprechend

$$K_{B\ k,l} = \left.\frac{\partial^2 \Phi_B(q_0,q_1,\dots,q_{n-1})}{\partial q_k \partial q_l}\right|_{q_m=0}, \tag{77}$$

$$K_{F\ k,l} = \frac{1}{F^*}\left.\frac{\partial^2 \Phi_F(q_0,q_1,\dots,q_{n-1})}{\partial q_k \partial q_l}\right|_{q_m=0}, \tag{78}$$

$$K_{\Theta\ k,l} = \frac{1}{\Theta}\left.\frac{\partial^2 \Phi_\Theta(q_0,q_1,\dots,q_{n-1})}{\partial q_k \partial q_l}\right|_{q_m=0} \quad \text{mit} \quad k,l \in \{0,1,\dots,n-1\}. \tag{79}$$

Unter Verwendung der Gleichungen (66) bis (71) sowie des Ansatzes (74) können schließlich die folgenden Formeln gewonnen werden:

$$\begin{aligned} K_{B\ k,l} = \frac{\tau^2}{12(1-\nu^2)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Bigg[& \frac{1}{\mu^4}\frac{\partial^2 b_k}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 b_l}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 b_k}{\partial \eta^2}\frac{\partial^2 b_l}{\partial \eta^2} \\ & \frac{\nu}{\mu^2}\left(\frac{\partial^2 b_k}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 b_l}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 b_k}{\partial \eta^2}\frac{\partial^2 b_l}{\partial \xi^2}\right) + 2(1-\nu)\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 b_k}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial^2 b_l}{\partial \xi \partial \eta}\Bigg] \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{80}$$

$$K_{F\ k,l} = \frac{1}{\mu^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial b_k}{\partial \xi}\frac{\partial b_l}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi, \tag{81}$$

$$\begin{aligned} K_{\Theta\ k,l} = \frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\chi}{2}}^{\frac{\chi}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Bigg[& \frac{1}{\mu^2} n^*_{x,\Theta,ref}\frac{\partial b_k}{\partial \xi}\frac{\partial b_l}{\partial \xi} \\ & + n^*_{y,\Theta,ref}\frac{\partial b_k}{\partial \eta}\frac{\partial b_l}{\partial \eta} + \frac{1}{\mu} n^*_{xy,\Theta,ref}\left(\frac{\partial b_k}{\partial \xi}\frac{\partial b_l}{\partial \eta} + \frac{\partial b_k}{\partial \eta}\frac{\partial b_l}{\partial \xi}\right)\Bigg]\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{82}$$

Der große Fortschritt gegenüber der bisherigen Berechnungsmethode besteht nun darin, dass alle Elemente unabhängig voneinander ermittelt werden können. Zur optimalen Nutzung der technischen Ressourcen wird die Berechnung ausparallelisiert und so der Arbeitsaufwand möglichst gleich auf alle verfügbaren Kerne des Prozessors aufgeteilt. Zusätzlich können aber auch Anzahl und Umfang der Rechnungen durch einige Überlegungen stark herabgesetzt werden. Die Steifigkeitsmatrix und ebenso ihre drei Anteile sind symmetrisch. Demnach ist es vollkommen ausreichend, die Formeln (80) bis (82) nur für die Paare (k, l) mit $k \in \{0, 1, \ldots l\}$ und $l \in \{0, 1, \ldots n-1\}$ auszuwerten. Damit wird zunächst nur die rechte obere Hälfte inklusive der Hauptdiagonale berechnet. Die restlichen Einträge können dann einfach durch Spiegelung erhalten werden.

Die nächste wesentliche Steigerung der Recheneffizienz basiert auf Symmetrie und Antisymmetrie. Gemäß (76) sind die b_k entweder gerade oder ungerade Funktionen in η. Darüber hinaus ist das Integrationsgebiet in den Formeln (80) bis (82) symmetrisch bezüglich der ξ-Achse. Das führt unmittelbar dazu, dass viele der Elemente von K_B und K_F verschwinden. Bei K_Θ ist die Situation etwas komplizierter, weil im Integranden auch noch der Membrankrafttensor auftritt. Wie in Abbildung (10) zu sehen ist, weisen dessen Komponenten aber auch Symmetrie bzw. Antisymmetrie bezüglich der ξ-Achse auf. Die genaue Rechnung zeigt schließlich, dass alle drei Matrizen die gleiche Gestalt haben.

Um die gemeinsame Struktur von K_B, K_F und K_Θ zu veranschaulichen, werden Beispielwerte für die Polynomgrade gewählt. Es sei $n_\xi = 2$ und $n_\eta = 3$. Folglich gibt es 6 verschiedene Basisfunktionen. b_1, b_3, b_4 und b_6 sind in η gerade, während b_2 und b_5 ungerade sind. Die genannten Matrizen haben dann alle die folgende Gestalt:

$$K = \begin{array}{cc} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \end{pmatrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{matrix} \end{array} \tag{83}$$

Rechts und oberhalb der Matrix stehen die Basisfunktionen, aus denen die einzelnen Elemente berechnet werden. Wo immer eine gerade und eine ungerade Funktion aufeinandertreffen, wird der Eintrag zu null. In den übrigen Fällen ergeben sich im Allgemeinen von null verschiedene Ausdrücke, welche durch einen Punkt repräsentiert werden. Aber auch deren Berechnung kann basierend auf den Symmetrieeigenschaften der Basisfunktionen erheblich erleichtert werden. In diesen Fällen sind die Integranden aus (80) bis (82) nämlich gerade Funktionen in η. Es reicht also, wenn die Integration hinsichtlich η nur von 0 bis $1/2$ erfolgt und das Ergebnis anschließend verdoppelt wird.

Die obigen Behauptungen zu beweisen, ist nicht schwierig, erfordert wegen der diversen Fallunterscheidungen aber viele einzelne Rechnungen. Statt diese hier alle anzuführen, werden nur die wesentlichen Schritte und Überlegungen genannt. In den Gleichungen (80) bis (82) treten unterschiedliche Ableitungen der Basisfunktionen auf. Es ist zu beachten, dass die Differentiation nach η die Symmetrieeigenschaft umkehrt, während das Ableiten nach ξ darauf keinen Einfluss hat. Außerdem entsteht bei Multiplikation zweier gerader oder zweier ungerader Funktionen eine gerade. Das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ist aber wieder ungerade. Es stellt sich heraus, dass letztlich alle Integranden der genannten Gleichungen entweder gerade (g) oder ungerade (u) Funktionen in η sind. Somit kann stets eine der beiden folgenden Formeln angewandt werden, worin a freilich eine positive reelle Zahl bezeichnet:

$$\int_{-a}^{a} f_g(\eta)\,\mathrm{d}\eta = 2\int_{0}^{a} f_g(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \tag{84}$$

$$\int_{-a}^{a} f_u(\eta)\,\mathrm{d}\eta = 0. \tag{85}$$

Stehen nun alle Matrizen bereit, so kann wieder das verallgemeinerte Eigenwertproblem (58) gelöst werden. Dessen kleinster positiver Eigenwert definiert nun die Funktion $\Theta_{kr}(F^*, a_1, a_2)$. Anschließend wird hinsichtlich der beiden Parameter a_1 und a_2 minimiert. Das Resultat ist die Funktion $\Theta_{kr,tot}(F^*)$, welche den Beuleintritt im Rahmen des Ritz-Ansatzes angibt. Die Beulform ist abermals durch den zugehörigen Eigenvektor bestimmt.

4.5 Numerische Minimierung

Anhand des ersten Beispiels soll näher auf die erwähnte Minimierungsaufgabe eingegangen werden. Es werde sogleich auf Abbildung (12) verwiesen, in der das Funktionsgebirge von $\Theta_{kr}(F^*, a_1, a_2)$ punktuell über ein weites Gebiet der a_1-a_2-Ebene dargestellt ist. Zu diesem Zweck werden natürlich einige Beispielwerte gewählt. Konkret ist $\tau = 10^{-3}$, $F^* = 2 \cdot 10^{-4}$ und $\mu = 6$. Der Ansatz ist außerdem mit einem Polynom entsprechend $n_\xi = 3$ und $n_\eta = 7$ ausgestattet. Offenbar ist das dargestellte Funktionsgebirge über weite Teile recht flach. Das erschwert einerseits das Auffinden des Minimums. Andererseits hat es den Vorteil, dass eine Ungenauigkeit bei den Parametern a_1 und a_2 nur geringe Auswirkung auf den Wert von Θ_{kr} hat.

Die grüne Linie in Abbildung (12) verbindet die Minima der Punktescharen, die sich für konstantes a_1 ergeben. Der rote Punkt kennzeichnet das absolute Minimum aller Auswertungen, der orange ist ein zusätzliches lokales Minimum. Die Abbildungen (13a) und (13b) dienen dem Zweck, den genauen Verlauf der grünen Linie sowie die relative Lage des roten und orangen Punktes gut erkennbar zu machen.

Im vorliegenden Fall wurde rechnerisch sehr viel Information über die Funktion Θ_{kr} gewonnen. Es kann mit großer Sicherheit geschlossen werden, dass der rote Punkt dem tatsächlichen Minimum sehr nahe ist. Er wird damit im Rahmen des verwendeten Ansatzes als das Endergebnis angesehen. Bei einem umfangreicheren Ansatz ist es bedeutend rechen- und zeitaufwendiger, das Funktionsgebirge über einen derart großen Bereich so akkurat darzustellen. Aus diesem Grund kommt in weiterer Folge ein Minimierungsalgorithmus zum Einsatz.

Zur Minimierung wird eine diskrete Abwandlung des Gradientenverfahrens eingesetzt. Die Suchrichtung ist also der negative Gradient, womit das Verfahren bei passender Schrittweite auf ein lokales Minimum zusteuert [8, S. 11-41]. Um welches es sich dabei handelt, hängt vor allem von der Initialisierung ab. Mit dem aus den Abbildungen (12) und (13) gewonnenen Wissen scheint es also sinnvoll, das Verfahren mehrfach an verschiedenen Stellen in der Umgebung der grünen Linie starten zu lassen. Sollten die einzelnen Ergebnisse voneinander abweichen, ist freilich das kleinste zu wählen.

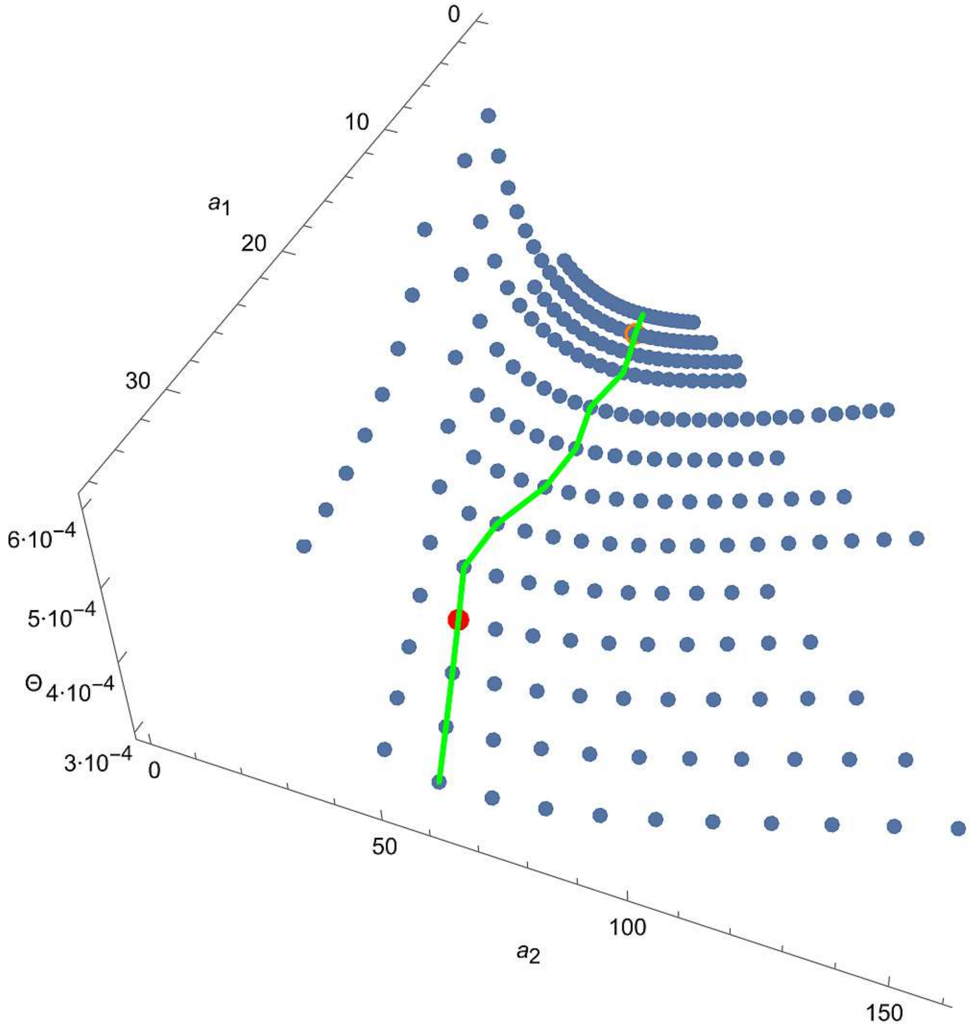
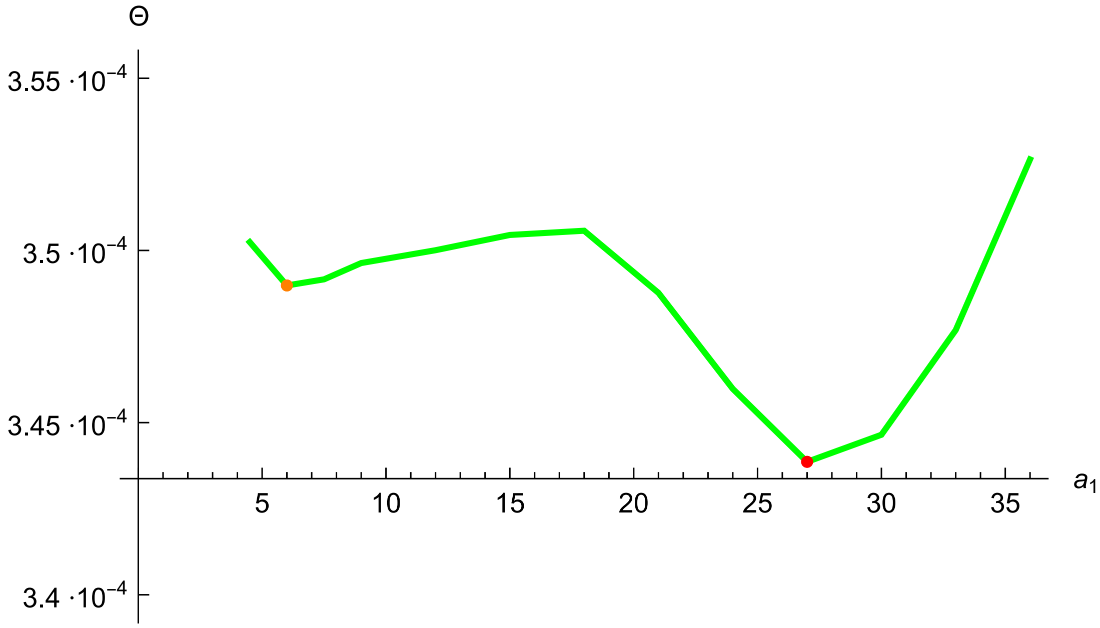


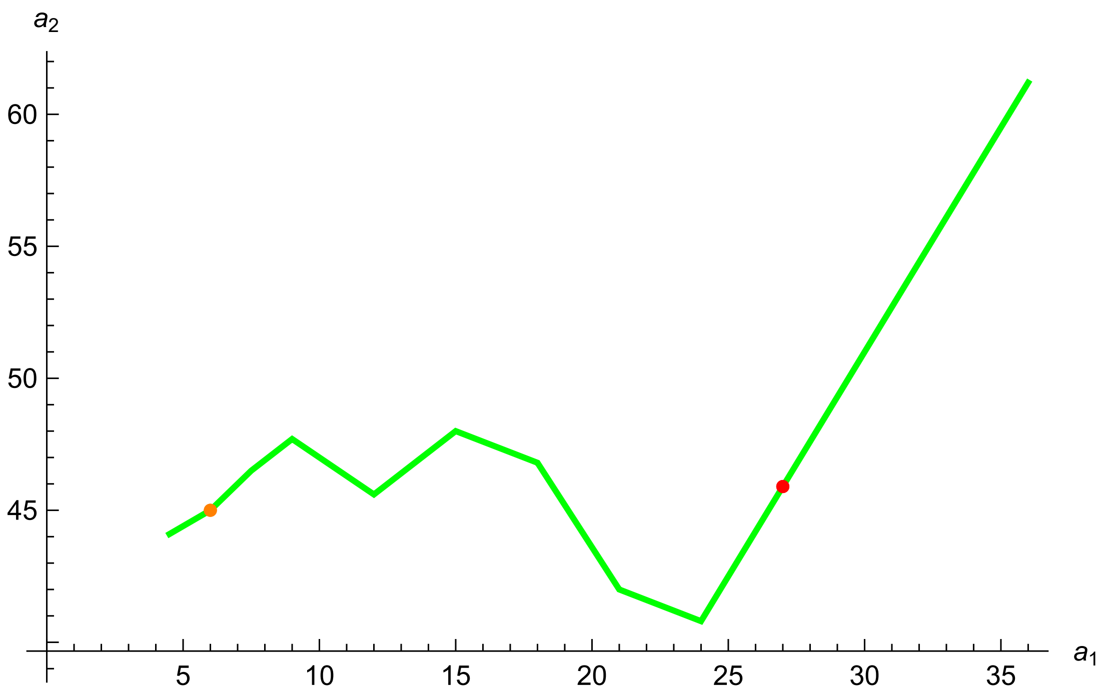
Abbildung 12: Funktion $\Theta_{kr}(F^*, a_1, a_2)$ für $\tau = 10^{-3}$, $F^* = 2 \cdot 10^{-4}$, $\mu = 6$, $n_\xi = 3$ und $n_\eta = 7$.

Für die Funktion Θ_{kr} gibt es keine geschlossene Form. Das trifft entsprechend auch auf die Ableitungen zu. Es ist also nicht ohneweiters möglich, das Gradienten-, Newton- oder Levenberg-Marquardt-Verfahren für die Minimierung zu verwenden. Allerdings können die Ableitungen stets durch entsprechende Differenzenquotienten approximiert werden. Mit Hilfe einer solchen Näherung kann das Gradientenverfahren für die vorliegende Minimierungsaufgabe eingesetzt werden. Es wird die Funktion also in jedem Iterationsschritt bei drei Paaren $(a_1,\, a_2)$ berechnet. Daraus ergeben sich drei Punkte im Raum, durch die eine Ebene gelegt werden kann. Es ist der Gradient dieser Ebene, der anstelle des nicht berechenbaren Gradienten der Funktion verwendet wird. Abbildung (14) soll den Fortschritt dieses Algorithmus an einem Beispiel zeigen.

Der grün markierte Startpunkt wird aus vorangegangenen Untersuchungen mit einem einfacheren Ansatz gewonnen. Dann wird auf $n_\xi = 4$ und $n_\eta = 11$ gewechselt, um das Ergebnis weiter zu verbessern. Zu Beginn macht der Algorithmus gute Fortschritte. Schließlich scheint er in einem sehr flachen Bereich gestrandet zu sein. Für eine weitere Verbesserung des Ergebnisses könnte etwa die Schrittweite geändert werden. Im Zuge dieser Arbeit scheint es aber vollkommen ausreichend, einfach den tiefsten Punkt als Endergebnis zu verwenden.

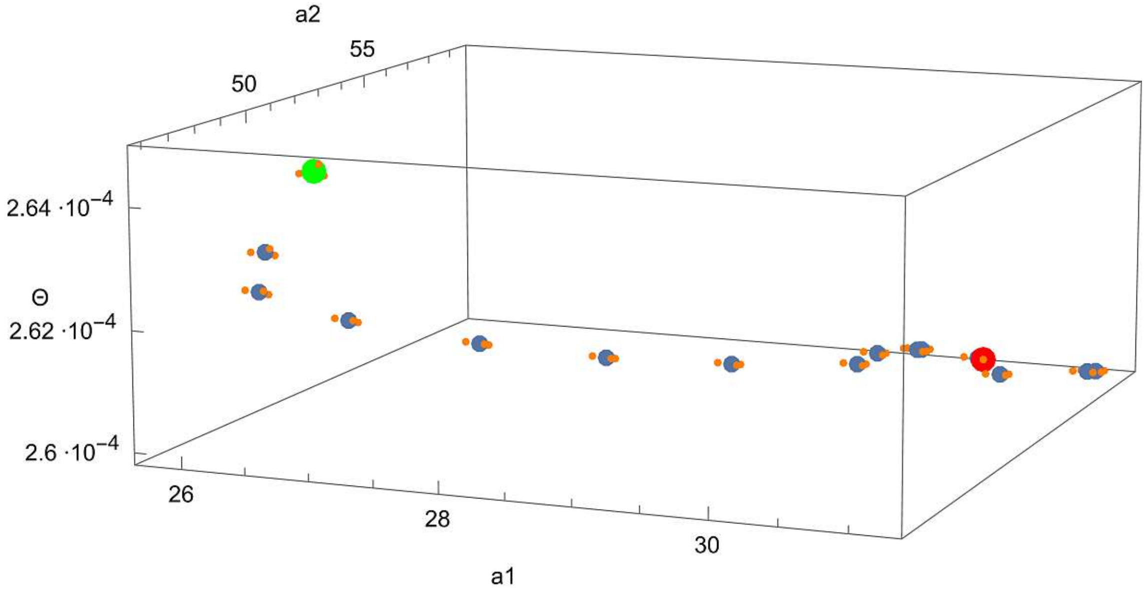


(a) Projektion der grünen Linie aus Abbildung (12) auf die a_1-Θ-Ebene.

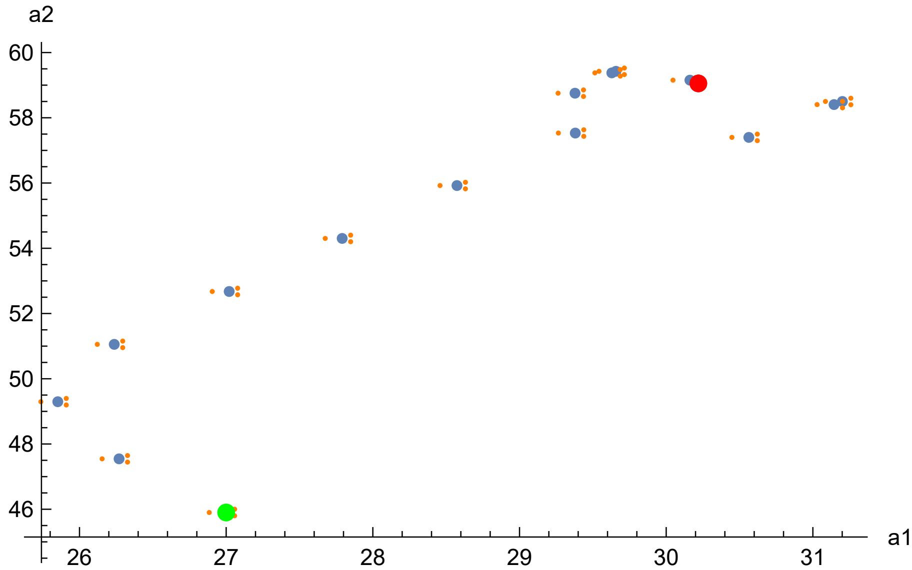


(b) Projektion der grünen Linie aus Abbildung (12) auf die a_1-a_2-Ebene.

Abbildung 13: Minima der Punktescharen für konstantes a_1. Der rote Punkt kennzeichnet das globale und der orange ein zusätzliches lokales Minimum.



(a) Abnahme der berechneten Funktionswerte. Zu Beginn sinkt der Wert von Θ_{kr} deutlich ab. Gegen Ende macht der Algorithmus mit der gewählten Schrittweite keine nennenswerten Fortschritte mehr. Das Verfahren wird dementsprechend abgebrochen.



(b) Projektion der Abbildung (14a) auf die $a1$-$a2$-Ebene.

Abbildung 14: Fortschritt des diskreten Gradienten-Verfahrens. Es wird die Funktion $\Theta_{kr}(F^*, a_1, a_2)$ für $\tau = 10^{-3}$ und $F^* = 2 \cdot 10^{-4}$ untersucht. Außerdem ist $\mu = 6$, $n_\xi = 4$ und $n_\eta = 11$. Die Schrittweite des Verfahrens beträgt konstant 1.8. Der grüne Punkt markiert den Start, der rote das Endergebnis. Die blauen Punkte zeigen den abgegangenen Pfad. Die orangen Punkte dienen der näherungsweisen Berechnung des Gradienten.

4.6 Beulen mit Längskraft

Da nun die Berechnungsmethode geklärt ist, sollen einige Ergebnisse präsentiert werden. Tabelle (2) gibt die gemeinsamen Eckdaten der untersuchten Szenarien an. In Tabelle (3) ist für jedes Szenario die kritische Temperaturdifferenz gemäß der vorgestellten Berechnung sowie jene aus ABAQUS zu finden. Abbildung (15) zeigt die diversen Beulformen, wobei zeilenweise die Ergebnisse aus Mathematica mit jenen aus ABAQUS verglichen werden.

Tabelle 2: Gemeinsame Eckdaten der untersuchten Szenarien

Werkstoffeigenschaften	
Poisson-Zahl ν	0.3
Wärmeausdehnungskoeffizient α in K^{-1}	$1.2 \cdot 10^{-5}$
Polynomgrade des globalen Ritz-Ansatzes	
n_ξ	4
n_η	11
Geometrie der Platte	
Plattenbreite B in m	1
Plattenlänge L in m	6
$\mu = L/B$	6

Tabelle 3: Kritische Temperaturdifferenz in Kelvin

		$F/(EBh) = F^*$					
		$2 \cdot 10^{-4}$			$8 \cdot 10^{-4}$		
$t/B = \tau$	$5 \cdot 10^{-4}$	11.00	9.362	17.5	25.77	17.86	44.3
	10^{-3}	21.66	20.23	7.11	44.04	37.45	17.6
	$3 \cdot 10^{-3}$	76.47	70.22	8.90	162.6	128.9	26.2

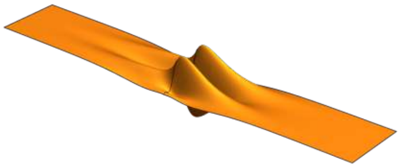
Globaler Ritz-Ansatz ABAQUS (FEM) Relativer Fehler in %

Es soll sogleich näher auf Abbildung (15) eingegangen werden, aus der mehrere Sachverhalte herausgelesen werden können. Offenbar haben die Beulmoden bei $\tau = 0.003$ nur ein oder zwei ausgeprägte Wellen, während es bei dünnerem Blech mehrere gibt. Dieses Phänomen kann mit der abnehmenden Biegesteifigkeit erklärt werden. Mathematisch kommt dieser Umstand in den Gleichungen (80) bis (82) zum Ausdruck. Die gesamte Matrix K_B ist offenbar proportional zu τ^2. K_F hängt von τ jedoch nicht ab und aus Gleichung (82) kürzt sich die dimensionslose Blechdicke wegen $\mathbf{n}^* \propto \tau$ wieder heraus. Wird also das Blech dünner, so werden die Einträge von K_B betragsmäßig kleiner, während jene der übrigen Matrizen unverändert bleiben. K_B ist außerdem die einzige dieser Matrizen, in die die Krümmungen der Platte eingehen. Folglich sind die Beulformen bei dünnem Blech im Allgemeinen stärker gebogen, was sich in der höheren Anzahl von Wellen widerspiegelt.

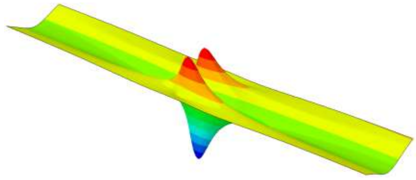
Als nächstes sollen die Symmetrieeigenschaften der Beulformen beleuchtet werden. Die rechte Spalte von Abbildung (15) zeigt 5 Beulmoden, die symmetrisch bezüglich der x-z-Ebene sind, und eine, die schiefsymmetrisch ist. Viele weitere Simulationen in ABAQUS bestätigen, dass grundsätzlich immer mit beidem zu rechnen ist. Die linke Spalte zeigt hingegen ausschließlich symmetrische Beulformen. Es sei betont, dass der globale Ritz-Ansatz sehr wohl auch andere und insbesondere schiefsymmetrische Formen zulässt, doch entsprechen keine davon dem minimalen Eigenwert. Eine Ursache hierfür findet sich in Tabelle (2). Mit $n_\eta = 11$ enthält der Ansatz nämlich 24 Basisfunktionen, die in η gerade sind, aber nur 20, die ungerade sind. Dementsprechend können die geraden Beulformen besser nachgebildet werden und führen tendenziell zum kleineren Eigenwert.

Außerdem ist keine der Beulformen (schief-)symmetrisch bezüglich der y-z-Ebene. Dieser Umstand ist in der Temperaturverteilung begründet. Auf der heißen Seite möchte sich die Platte bekanntermaßen ausdehnen. In Breitenrichtung kann diese Ausdehnung aber nicht ungehindert stattfinden. Den größten Widerstand bei der Verbreiterung erfährt das heiße Blech an der Grenzlinie des Temperatursprungs. Folglich sind die Spitzen der Beulen nahe dieser Grenzlinie, aber stets auf der heißen Seite angesiedelt. Das kalte Blech steht in Breitenrichtung unter Zugspannung und ist demnach grundsätzlich nicht bestrebt zu beulen. Insbesondere da die Platte keine Sprünge und Knicke aufweisen darf, erstrecken sich die Beulformen aber auch auf die kalte Seite. Schließlich kommt es für $\xi \to -1/2$ und $\xi \to 1/2$ zu unterschiedlichen Abfallraten des Durchbiegungsfeldes. Dies geht deutlich aus allen Abbildungen in (15) hervor und ist im Übrigen auch die Motivation dafür, in der Funktion g die beiden unabhängigen Parameter a_1 und a_2 einzuführen.

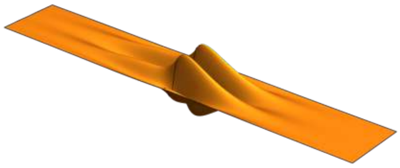
Gemäß Tabelle (3) liegen die kritischen Temperaturdifferenzen aus Mathematica stets über jenen aus ABAQUS. Das ist wenig verwunderlich, da der Platte beim Finite-Elemente-Verfahren mehrere 10000 Freiheitsgrade gewährt werden, während der globale Ritz-Ansatz hier gerade einmal 46 verallgemeinerte Lagekoordinaten aufweist. Dieser Unterschied wird mit zunehmender Komplexität der Beulform immer signifikanter. Wie bereits erwähnt, kommt es beim dünneren Blech zu mehreren parallelen Wellen. Entsprechend schwieriger ist es, diese Beulformen mit dem globalen Ritz-Ansatz zu erfassen. Darunter leidet in weiterer Folge auch die berechnete Temperaturdifferenz des Beuleintritts. Während die Ergebnisse des globalen Ritz-Ansatzes und der Finite-Elemente-Methode etwa für $F^* = 0.0002$ und $\tau = 0.003$ recht nahe beieinander liegen, sind sie für $F^* = 0.0008$ und $\tau = 0.0005$ deutlich weiter voneinander entfernt.



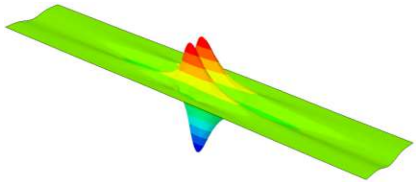
(a) $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$, $F^* = 2 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_{kr,tot} = 1.32 \cdot 10^{-4}$



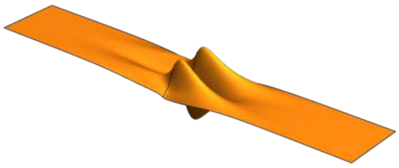
(b) $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$, $F^* = 2 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_{kr,tot} = 1.12 \cdot 10^{-4}$



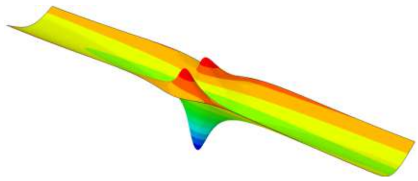
(c) $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$, $F^* = 8 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_{kr,tot} = 3.09 \cdot 10^{-4}$



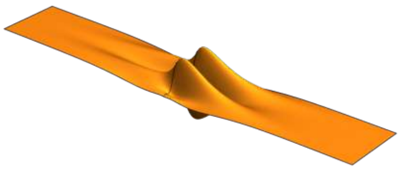
(d) $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$, $F^* = 8 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_{kr,tot} = 2.14 \cdot 10^{-4}$



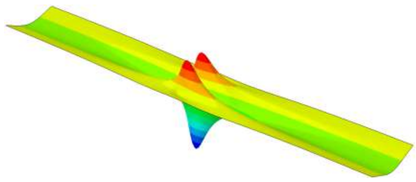
(e) $\tau = 10^{-3}$, $F^* = 2 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_{kr,tot} = 2.60 \cdot 10^{-4}$



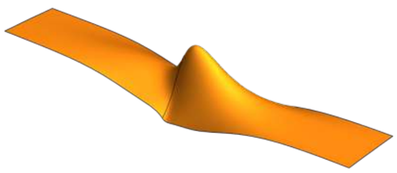
(f) $\tau = 10^{-3}$, $F^* = 2 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_{kr,tot} = 2.43 \cdot 10^{-4}$



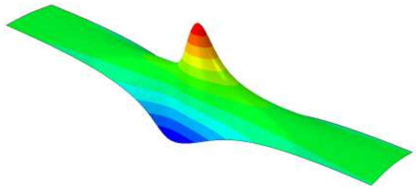
(g) $\tau = 10^{-3}$, $F^* = 8 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_{kr,tot} = 5.29 \cdot 10^{-4}$



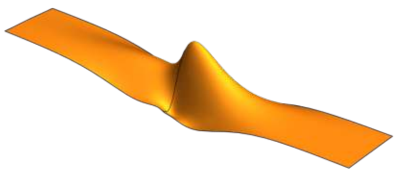
(h) $\tau = 10^{-3}$, $F^* = 8 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_{kr,tot} = 4.49 \cdot 10^{-4}$



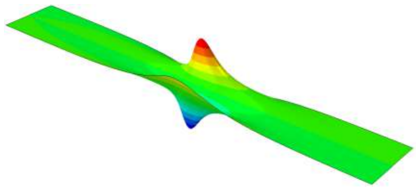
(i) $\tau = 3 \cdot 10^{-3}$, $F^* = 2 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_{kr,tot} = 9.18 \cdot 10^{-4}$



(j) $\tau = 3 \cdot 10^{-3}$, $F^* = 2 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_{kr,tot} = 8.43 \cdot 10^{-4}$



(k) $\tau = 3 \cdot 10^{-3}$, $F^* = 8 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_{kr,tot} = 1.95 \cdot 10^{-3}$



(l) $\tau = 3 \cdot 10^{-3}$, $F^* = 8 \cdot 10^{-4}$, $\Theta_{kr,tot} = 1.55 \cdot 10^{-3}$

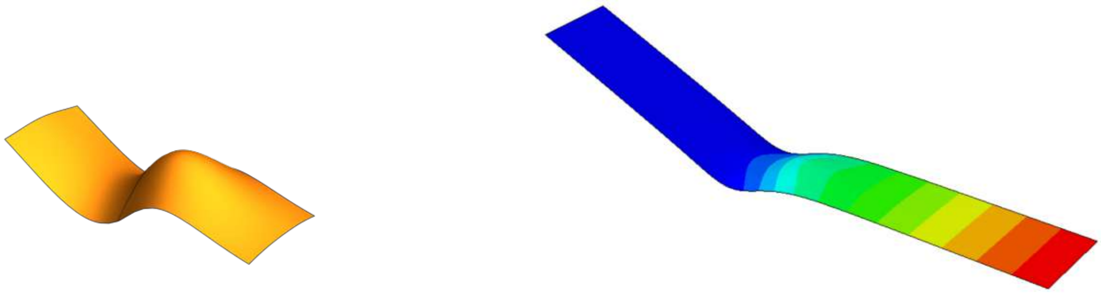
Abbildung 15: Beulformen und $\Theta_{kr,tot}$ bei unterschiedlicher Blechdicke und Längskraft. Die linke Spalte zeigt die Beulformen, die mit dem globalen Ritz-Ansatz und Wolfram Mathematica berechnet werden. Die rechte Spalte zeigt die Ergebnisse der Simulationen in ABAQUS.

4.7 Beulen ohne Längskraft

Abschließend wird der Fall betrachtet, in dem keine Längskraft aufgebracht wird. Die Platte beult dann gemäß Abbildung (16). Die Beulform ist unabhängig von der Blechdicke, während für den Beuleintritt $\Theta_{kr,tot} \propto \tau^2$ gilt. Diese beiden Ergebnisse folgen abermals aus der Gesetzmäßigkeit $K_B \propto \tau^2$ und der Tatsache, dass K_Θ von der Blechdicke unabhängig ist. Zusätzlich ist klarzustellen, dass K_F wegen $F^* = 0$ im vorliegenden Fall natürlich keinen Einfluss hat. Mit Blick auf Gleichung (58) wird also erstens klar, dass der Beuleintritt durch ein festes Verhältnis von Θ/τ^2 bestimmt ist. Zweitens führt dieses konstante Verhältnis auch zum immer gleichen Eigenvektor, womit die Beulform ebenso unverändert bleibt.

Eine weitere interessante Eigenschaft der Beulform aus Abbildung (16) ist die unterschiedliche Neigung der Enden. Das Beulen im Bereich des Temperatursprungs bewirkt also auch eine Winkeländerung zwischen den weit entfernten kalten und heißen Bereichen. Um diese Winkeländerung mit dem Ritz-Ansatz nicht versehentlich zu unterbinden, darf keine allzu lange Platte betrachtet werden. Für ein besseres Verständnis soll noch einmal auf Abbildung (11) hingewiesen werden. Die Funktion g führt aufgrund des beidseitig exponentiellen Abfalles stets dazu, dass die Verschiebungen und Neigungen bei betragsmäßig großen ξ rasch zurückgehen. Sobald die Platte vorgespannt wird, ist diese Eigenschaft auch sehr hilfreich. Für $F^* = 0$ würde dies das Ergebnis aber verfälschen. Ein möglicher Ausweg ist es, das Modell wie hier auf $\mu = 2.8$ zu beschränken.

Nicht zuletzt sei bemerkt, dass die Beulform aus Mathematica mit jener aus ABAQUS qualitativ gut übereinstimmt. Für eine Blechdicke von $t = 1\,\text{mm}$ gibt ABAQUS eine kritische Temperaturdifferenz von 2.51 K an, während der globale Ritz-Ansatz 2.69 K liefert. Die hierfür verwendeten Polynomgrade sind wiederum $n_\xi = 4$ und $n_\eta = 11$.



(a) WM: $\mu = 2.8$ (b) AQ

Abbildung 16: Beulform ohne Längskraft. Links ist das Ergebnis des globalen Ritz-Ansatzes aus Wolfram Mathematica zu sehen und rechts jenes aus ABAQUS. Die Beulform ist unabhängig von der Blechdicke.

5 Resümee und Ausblick

5.1 Zusammenfassung

Das hier behandelte Beulen von Stahlbändern reiht sich in eine Vielzahl von technischen Problemstellungen ein, bei denen sich ein globaler Ritz-Ansatz als nützlich erweist. Im Gegensatz zur Finite-Elemente-Methode kann hier die Intuition einfließen, was mitunter sehr allgemeine Aussagen über die Lösung und fallweise signifikante Einsparung des Rechenaufwandes erlaubt. Aber auch die dimensionslose Beschreibung erweist sich hinsichtlich dieser Ziele als überaus günstig und gibt zudem tieferen Einblick in das Problem. Aus den Ergebnissen der vorliegenden Abschlussarbeit kann letztlich geschlossen werden, dass ein globaler Ritz-Ansatz für den ersten Lastfall absolut ausreichend und für den zweiten immerhin gut brauchbar ist. Zu betonen ist in diesem Zusammenhang, dass stets ein oder zwei Parameter eingesetzt werden, in dem/denen der gewählte Ansatz nichtlinear ist.

Im Falle des Quer-Temperaturgradienten ist es schließlich möglich, die kritische Temperaturdifferenz als Funktion der Längskraft anzugeben. Für diese kann zusätzlich eine Approximation abgeleitet werden, deren Eigenschaften anhand von Formeln und Relationen dargelegt werden. Weiters kann auch die Beulwellenzahl für beliebige Änderung der Vorspannung vorhergesagt werden. Außerdem wird eine Idee davon vermittelt, wie sensibel die Ergebnisse auf eine Variation der erhitzten Breite reagieren. Am Ende des Kapitels 3.1 wird erklärt, welchen Einfluss die Blechdicke auf die besagte Funktion und Güte der Approximation hat. Es sei darauf hingewiesen, dass sämtliche Simulationen aus ABAQUS die ermittelte Temperaturdifferenz wie auch die Beulform bestätigen, was letztlich auch die Berechnungsmethode verifiziert.

Für den zweiten Lastfall, also den Längs-Temperaturgradienten, sind die meisten Schritte völlig analog durchgeführt, obgleich sich einige als sehr herausfordernd erweisen. So ist der Spannungszustand zufolge der Temperaturdifferenz durchaus komplex und deshalb aus ABAQUS entnommen. Darüber hinaus sind die Beulformen nicht mehr so intuitiv zu erfassen, weswegen der Ritz-Ansatz reicher gestaltet und das Eigenwertproblem umfangreicher ist. Das Charakteristikum des Ansatzes ist zweifellos die Funktion g, die den exponentiellen Abfall nach vorne wie nach hinten bewirkt. Sie bringt außerdem zwei Parameter ins Spiel, in denen der Ansatz nichtlinear ist, was die Minimierungsaufgabe bedeutend erschwert. Es gibt somit mehrere Gründe, warum beim Längs-Temperaturgradienten keine derart generellen und exakten Aussagen mehr möglich sind. Nichtsdestoweniger gelingt es in allen untersuchten Szenarien, den Beuleintritt gegenüber ABAQUS mit einem relativen Fehler von 7 bis 45% zu prognostizieren. Die Beulformen haben im Allgemeinen auch durchaus vergleichbares Aussehen.

5.2 Ergänzende Überlegungen

Gerade weil die Minimierung beim zweiten Lastfall durch a_1 und a_2 sehr aufwendig ist, muss die Notwendigkeit dieser zwei unabhängigen Parameter in Frage gestellt werden. Die Beulformen aus ABAQUS zeigen bei Vorhandensein einer Längskraft immer unterschiedliche Abfälle im heißen und kalten Bereich. Speziell flachen die Wellen am heißen Ende offenbar bedeutend langsamer ab. Dieser Umstand stellt die Motivation für zwei unabhängige Parameter dar. Aus der Minimierung bei $F^* > 0$ geht allerdings immer $1.79 < a_2/a_1 < 1.96$ hervor, obwohl dieses Verhältnis aufgrund der besagten Beobachtung eigentlich deutlich größer als 2 zu erwarten wäre. Es muss also gefolgert werden, dass die Unabhängigkeit der genannten Parameter den Ansatz nicht wie beabsichtigt bereichert. Stattdessen ist es offenbar das Polynom in Längsrichtung, dass für die unterschiedlichen Abfallraten sorgt. Ein möglicher Verbesserungsvorschlag für künftige Untersuchungen kann also lauten, das Verhältnis mit $a_2/a_1 = 2$ zu fixieren und gegebenenfalls den Polynomgrad in Längsrichtung zu erhöhen. Alternativ könnte das Verhältnis auch variabel gelassen und der Polynomgrad gesenkt werden. Dies wiederum hätte zum Ziel, einen höheren Wert für a_2/a_1 zu erzwingen.

Neben den genannten Vorschlägen zur Behandlung des zweiten Lastfalls könnnen freilich noch viele weitere Abänderungen der Ritz-Ansätze angedacht werden. Im Hinblick auf die tatsächlich vorhandene Wärmeleitung wäre es außerdem naheliegend, auch Lastfälle mit endlichen Gradienten statt der hier verwendeten Temperatursprünge zu untersuchen. Von besonderem Interesse wäre dabei natürlich der Einfluss des Temperaturgefälles auf die kritische Temperaturdifferenz. Außerdem können die genannten Lastfälle kombiniert werden. Ein sehr praxisnaher Anwendungsfall wäre etwa, dass nur der Mittelstreifen durch die Induktionsspulen erhitzt wird. Es gibt also eine Reihe von Ideen, wie die gegenwärtigen Szenarien noch ausgebaut und umgeändert werden können, sodass für Industrie und Forschung weitere Erkenntnisse gewonnen werden.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literatur

[1] R.R. Heldenfels, W.M. Roberts, *Experimental and theoretical determination of thermal stresses in a flat plate*, Technical Note 2769, National Advisory Committee for Aeronautics (1952).

[2] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of elastic stability*, 2. Auflage, McGraw-Hill, New York [u.a.], 1961.

[3] E.A. Thornton, *Thermal buckling of plates and shells*, Applied Mechanics Reviews (1993) 46(10): 485-506. https://doi.org/10.1115/1.3120310.

[4] M.L. Gossard, P. Seide, W.M. Roberts, *Thermal buckling of plates*, Technical Note 2771, National Advisory Committee for Aeronautics (1952).

[5] Y. Vetyukov, M. Krommer, *Höhere Festigkeitslehre*, Skriptum zur Vorlesungsübung, TU Wien, Institut für Mechanik und Mechatronik, 2022.

[6] Y. Vetyukov, *Mechanik 3 Vorlesungsskriptum*, TU Wien, Institut für Mechanik und Mechatronik, 2022.

[7] S. Eisenträger, J. Kiendl, G. Michloudis, R. Duy, Y. Vetyukov, *Stability analysis of plates using cut Bogner-Fox-Schmit elements*, Computers & Structures (2022) 270:106854. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2022.106854.

[8] M. Ulbrich, S. Ulbrich, *Nichtlineare Optimierung*, Springer bzw. Birkhäuser, Basel, 2012. https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0654-7.