TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

DIPLOMARBEIT

Planung der Ausbildung von Medizinerinnen und Medizinern in Österreich: Ein Vergleich von exakten und metaheuristischen Methoden

ausgeführt am

Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Gernot Tragler

und

Dipl.-Ing. Alexander Gaal
(Fraunhofer Austria Research GmbH)

durch

Paul Lindorfer, BSc
Matrikelnummer: 11779659

Wien, am 4. Juni 2024

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Kurzfassung

Die effiziente Ausbildung von Medizinstudent_innen spielt eine entscheidende Rolle bei der Bewältigung des Ärztemangels in Österreich. Diese Arbeit betrachtet die Mediziner_innenausbildung als ein komplexes Problem, das mithilfe eines exakten Mixed Integer Programming (MIP) Ansatzes modelliert wird. Der Fokus liegt darauf, die Ressourcen optimal zu nutzen, um die notwendigen klinischen Rotationen ohne vermeidbare Unterbrechungen zu gewährleisten und sowohl Ausbildung als auch die Versorgung der Patient_innen bestmöglich zu gewährleisten.

Die vorgestellte MIP-Lösung wird anschließend mit einer Metaheuristik anhand eines realen Planungsproblems verglichen, um ihre Leistungsfähigkeit und Effizienz zu bewerten. Dabei zeigt sich, dass obwohl die MIP-Lösung theoretisch optimale Ergebnisse liefert, die praktische Umsetzung aufgrund der Problemgröße und hoher Komplexität begrenzt ist. Eine bereits entwickelte Metaheuristik erweist sich hingegen als effektive Alternative, die in kürzerer Zeit zu akzeptablen Lösungen führt.

Die Ergebnisse dieser Arbeit liefern wertvolle Einblicke in die Möglichkeiten und Grenzen verschiedener Optimierungsmethoden für die Mediziner_innnenausbildung. Das entwickelte Verfahren kann in der Einsatzplanung in österreichischen Krankenhäusern eingesetzt werden, um den künftigen Personaleinsatz in der ärztlichen Ausbildung zu optimieren und zulässige Lösungen für reale Planungsprobleme zu finden. Damit kann das Verfahren die Bewältigung des Ärztemangels unterstützen und trägt zur Optimierung dieses wichtigen Bereichs des Gesundheitswesens bei.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Abstract

The efficient training of medical students plays a crucial role in coping with the shortage of physicians in Austria. This thesis considers medical education as a complex problem that is modeled using an exact Mixed Integer Programming (MIP) approach. The focus is on optimizing the use of resources to ensure the necessary clinical rotations without avoidable interruptions and to ensure both training and patient care in the best possible way.

The MIP solution presented is then compared with a metaheuristic based on a real planning problem in order to evaluate its performance and efficiency. It is shown that although the MIP solution delivers optimal results in theory, its practical implementation is limited due to the large problem size and complexity. An already developed metaheuristic, on the other hand, proves to be an effective alternative that leads to acceptable solutions in less time.

The results of this work provide valuable insights into the possibilities and limitations of different optimization methods for medical training. The developed method can be used in the deployment planning in Austrian hospitals in order to optimize the future deployment of personnel in medical training and to find admissible solutions for real planning problems. In this way, the procedure can support the management of the shortage of doctors and contribute to the optimization of this important area of the healthcare system.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 4. Juni 2024

Paul Lindorfer

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Problembeschreibung **3**

2.1 Ärzt_innen-ausbildung in Österreich 4

2.2 Lösungsansätze 6

2.3 Zielsetzung 8

2.3.1 Ziel der Arbeit 8

2.3.2 Ziel der Planung 8

3 Betrachtete Methoden **11**

3.1 Mehrzieloptimierung 11

3.2 Gemischt - Ganzzahlige Optimierung 14

3.3 Exakte Verfahren 15

3.3.1 Enumerative Verfahren 16

3.3.2 Branch-and-Bound 16

3.3.3 Branch-and-Cut 17

3.3.4 Branch and Price 17

3.3.5 Solver für MIP 18

3.4 Heuristische Verfahren 19

3.4.1 Genetische Algorithmen 19

3.4.2 Simulated Annealing 20

4 State-of-the-Art **21**

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

5 Umsetzung und Implementierung **29**

5.1 Modellannahmen 29

5.2 Zielfunktion 31

5.3 Definition der Variablenbezeichnungen 33

5.3.1 Betrachtete Mengen 34

5.3.2 Betrachtete Variablen 35

5.3.3 Betrachtete Parameter 37

5.4 Exakte Formulierung als MIP 38

6 Evaluierung der Ergebnisse **42**

6.1 Datenbeschreibung 42

6.2 Methodisches Vorgehen 42

6.3 Analyse der exakten Solver 44

6.4 Vergleich von Optimierungsmethoden 48

6.4.1 Vergleich von Optimierungsmethoden für das volle Problem 48

6.4.2 Vergleich von Optimierungsmethoden für ein eingeschränktes Problem 52

6.5 Analyse der Ergebnisse 56

7 Conclusio **61**

Literaturverzeichnis **63**

Anhang **66**

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

1 Einleitung

Nach dem Abschluss des Medizinstudiums ist eine praktische Ausbildung für angehende Ärztinnen und Ärzte verpflichtend, um den Beruf ausführen zu können. Diese Ausbildung unterliegt genauen Vorschriften bezüglich des Umfangs und der verschiedenen Bereiche in Krankenhäusern, in denen gearbeitet werden muss.
Die gesetzlichen Rahmenbedingungen für die Zuteilung der Ausbildung variieren je nach Land und sind teilweise stark unterschiedlich. Stand 31.12.2022 befanden sich in Österreich gleichzeitig über 8600 Personen in dieser Ausbildung, was einen erheblichen Anteil an der medizinischen Versorgung ausmacht. Eine sorgfältige Planung dieser Ausbildung ist entscheidend, um eine optimale Patient_innenversorgung sicherzustellen. Insbesondere in Zeiten hoher Pensionierungswellen ist dies von großer Bedeutung, da gut ausgebildetes medizinisches Personal dringend benötigt wird.

Diese Arbeit untersucht die exakte mathematische Formulierung des Planungsproblems als Mixed Integer Program (MIP) und vergleicht diesen Ansatz mit einem bereits vorhandenen Metaheuristischen Ansatz. Dabei werden verschiedene Zielkriterien betrachtet, die für eine optimale Ausbildung relevant sind.

Obwohl in der wissenschaftlichen Literatur oft näherungsweise Ansätze für das als Resident Scheduling Problem bekannte Optimierungsproblem gewählt werden, untersucht diese Arbeit, ob auch exakte Verfahren für dieses Problem angewendet werden können und sollen. Sie befasst sich mit der Frage, welche Solver sich am besten für die Lösung dieses Problems

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

eignen.

Um diese Frage zu beantworten, wurden zunächst verschiedene exakte Solver für das implementierte Mixed Integer Program getestet. Darüber hinaus wird die Leistung dieser Methode mit einer existierenden metaheuristischen Methode und einer manuell erstellten Lösung verglichen.

Im folgenden Kapitel 2 wird zunächst das Problem der Mediziner_innenausbildung in Österreich unter Berücksichtigung sämtlicher rechtlicher Rahmenbedingungen vorgestellt. Dabei werden bereits Zielgrößen für die folgende Planung herausgearbeitet, die später zur Bewertung erstellter Pläne verwendet werden.

Anschließend werden mathematische Methoden, die für dieses oder ähnliche Probleme infrage kommen, in Kapitel 3 vorgestellt.

In Kapitel 4 wird der aktuelle Stand der wissenschaftlichen Literatur zum Resident Scheduling Problem aufgegriffen.

Nach der Festlegung grundlegender Annahmen über das vorliegende Problem werden in Kapitel 5 die benötigten Variablenbezeichnungen definiert. Darauf aufbauend wird ein ausführliches Mixed Integer Program erstellt, das die gesamte Ausbildung der Turnusärzt_innen abdeckt.

Dieses MIP wurde anschließend in GAMS implementiert, um in Kapitel 6 einerseits einen Vergleich verschiedener exakter Solver und andererseits einen Vergleich dieser Methode mit einer existierenden metaheuristischen Methode zu ermöglichen.

Abschließend werden diese Ergebnisse analysiert und diskutiert.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

2 Problembeschreibung

Nach dem Studium müssen angehende Mediziner und Medizinerinnen je nach gewählter Fachrichtung verschiedene Module absolvieren, um in Österreich als Arzt beziehungsweise als Ärztin anerkannt zu werden. Wie diese einzelnen Ausbildungsabschnitte ablaufen müssen, wird in der Verordnung der Bundesministerin für Gesundheit über die Ausbildung zur Ärztin für Allgemeinmedizin/zum Arzt für Allgemeinmedizin und zur Fachärztin/zum Facharzt oder kurz Ärztinnen-/Ärzte-Ausbildungsordnung 2015 beziehungsweise ÄAO 2015 festgehalten [1].

Ziel dieser Arbeit ist es, ein Optimierungsmodell für die monatsweise Verplanung von Ärzt_innen in Ausbildung zu definieren und im Anschluss verschiedene Solver, die das Problem lösen, auf Basis von Laufzeit und Lösungsgüte zu evaluieren. Für die Optimierung werden verschiedene ausbildungsrelevante Metriken wie beispielsweise Stehmonate, also Monate, in denen kein Ausbildungsfortschritt erbracht wird, nicht eingehaltene Präferenzen der erlernbaren Wahlfächer oder Krankenhauswechsel berücksichtigt. In der Praxis werden die Ausbildungspläne aktuell zumeist manuell von den dafür Verantwortlichen, also dem Träger einer Ausbildungsstätte, erstellt. Damit verbunden ist im Allgemeinen ein hoher Planungsaufwand und zusätzlich zumeist suboptimale Ergebnisse, da mit einer zunehmenden Anzahl von Beteiligten sowie begrenzten Ressourcen die Planungskomplexität stark zunimmt.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

2.1 Ärzt_innen-ausbildung in Österreich

Die postgraduale Ausbildung in der Allgemeinmedizin oder in einem der 31 Sonderfächer wird in der Ärztinnen-/Ärzte-Ausbildungsordnung 2015 [1] genau festgehalten. Die Verordnung regelt unter anderem die Ausbildung an sich, also welche Anforderungen, Aufgaben und Ziele in den einzelnen betrachteten Abschnitten umgesetzt werden müssen, aber auch rechtliche Anforderungen an Anerkennung von Ausbildungsstätten, Übergangsbestimmungen in Bezug auf Berufsberechtigungen und Berufsbezeichnungen. Sie schafft somit einen rechtlichen Rahmen für die Ausbildung von Allgemeinmediziner_innen und Fachärzt_innen in Österreich. Zudem werden einige Begriffe, welche in der ärztlichen Ausbildung gebräuchlich sind und auch in dieser Arbeit verwendet werden, definiert. Jene Personen, die sich aktuell in dieser Ausbildung befinden, werden als **Turnusärzt_innen** bezeichnet. Der erste Teil der postgradualen Ausbildung wird als **Basisausbildung** bezeichnet und muss von allen Turnusärzt_innen in einem Umfang von 9 Monaten absolviert werden.

In Abbildung 2.1 sieht man, wie die Ausbildung für Allgemeinmedizin oder für eines der Sonderfächer zusammenfassend dargestellt ist. In den ersten 9 Monaten nach Abschluss des Studiums müssen alle Turnusärzt_innen die Basisausbildung absolvieren, welche sich wiederum in chirurgische und konservative Fächer teilt.
Für die Allgemeinmedizin folgen dann 27 Monate Spitalsturnus, aufgeteilt in mehrere Pflichtfächer im Umfang von drei bis sechs Monaten sowie zwei von den angehenden Ärzt_innen gewählte Wahlfächer zu je drei Monaten. Nach insgesamt zumindest 27 Monaten bei voller Beschäftigung folgen dann noch sechs weitere Monate Lehrpraxis, ehe nach 42 Monaten die Ausbildung zum Allgemeinmediziner/zur Allgemeinmedizinerin abgeschlossen werden kann.
Wird die Facharztausbildung in einem der 31 Sonderfächern angestrebt, so müssen nach der Basisausbildung zwei weitere Abschnitte absolviert werden: die Sonderfach-Grundausbildung

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

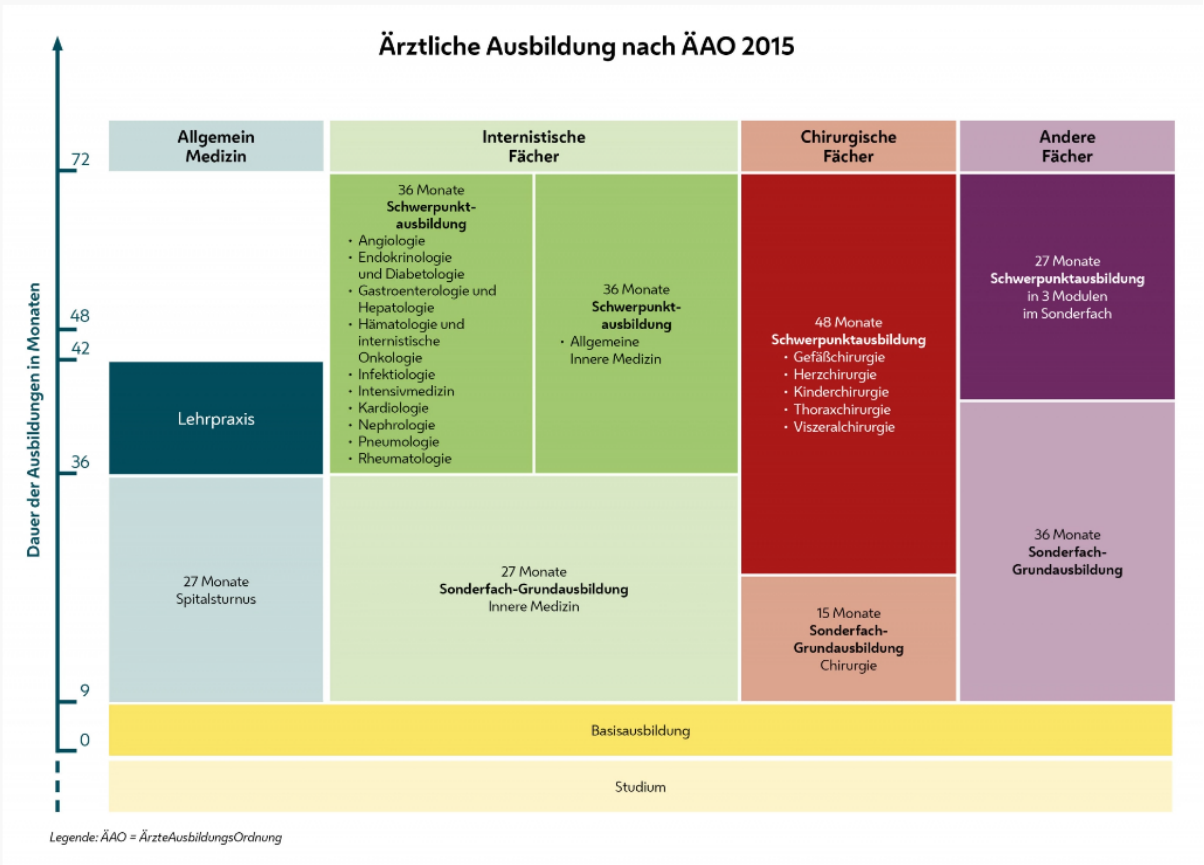


Abbildung 2.1: Ärztliche Ausbildung nach ÄAO 2015 [2]

und die Sonderfach-Schwerpunktausbildung mit einer Gesamtdauer von mindestens 63 Monaten. Der Anteil davon, der in Form der Grundausbildung absolviert werden muss, ist vom jeweiligen Fachgebiet abhängig und beträgt zwischen 15 Monaten in den chirurgischen Fächern und 36 Monaten.

Um das erforderliche Ausbildungsniveau bei entsprechender Zuweisung in dieser angegebenen Mindestdauer auch tatsächlich in dieser Zeit zu erreichen, müssen die Auszubildenden Vollzeit angestellt sein, was hier 35 Wochenstunden Ausbildungszeit entspricht. Sind Turnusärzt_innen beispielsweise nur zu 50% Teilzeit angestellt, so verdoppelt sich die notwendige Ausbildungszeit jedes zu erlernenden Inhaltes.

Eine Besonderheit der Ausbildung in Österreich ist, dass für jede Zuweisung im Sinne der Ausbildung sowohl ein Dienstposten als auch eine Ausbildungsstelle notwendig sind.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Der Dienstposten erlaubt es dienstrechtlich den Turnusärzt_innen, in einer Abteilung zu arbeiten. Um jedoch tatsächlich Ausbildungsfortschritte erreichen zu können, ist auch eine Zuweisung zu einer von der österreichischen Ärztekammer anerkannten Ausbildungsstelle verpflichtend. Ein Dienstposten kann dabei mit einer oder bis zu m verschiedenen Ausbildungsstellen kombiniert werden, genauso kann eine Ausbildungsstelle mit bis zu n Dienstposten kombiniert werden. Diese m:n - Beziehung zwischen Ausbildungsstellen und Dienstposten sowie die Tatsache, dass beide nur eine begrenzte Kapazität haben, erschwert die Erstellung von Ausbildungsplänen enorm.
Fehlende sowie unzureichend geplante Ausbildungskapazitäten wurden auch im Rechnungshofbericht zur Ärzteausbildung 2021 kritisiert [3].

2.2 Lösungsansätze

Die Erstellung der Ausbildungspläne und damit die Zuteilung der Turnusärzt_innen zu ihren Ausbildungsplätzen in Österreich ist aufgrund der verschiedenen in Abschnitt 2.1 angeführten Vorgaben und Einschränkungen kein einfaches Problem. Die Anzahl an Ärzten und Ärztinnen, welche sich gleichzeitig in Ausbildung befinden, umfasst mit Stand 31.Dezember 2022 mehr als 8600 Personen. Diese große Zahl an Personen, die teilweise gleichzeitig in verschiedenen Krankenhäusern verplant werden müssen, erschwert die Planung weiter.

Auch ohne die in Österreich anfallende zusätzliche Regelung, dass Dienstposten und Ausbildungsstellen zugewiesen werden müssen, ist das Problem komplex genug, sodass sich einiges an Literatur zur Thematik dieses sogenannten Resident Scheduling Problems ergeben hat. Die wissenschaftlichen Veröffentlichungen haben in der Regel das Ziel, einerseits die Planungsvorgänge zu automatisieren und andererseits die Ausbildungspläne im Hinblick auf bestimmte betrachtete Zielgrößen zu verbessern. Methodisch werden hierfür meist (multikriterielle) Optimierungsprobleme formuliert und je nach Problemumfang entweder exakt, beispielsweise als Mixed Integer Programming Problem, oder näherungsweise mittels Metaheuristiken wie genetischen Algorithmen gelöst. Ein Überblick über diese verwendeten

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

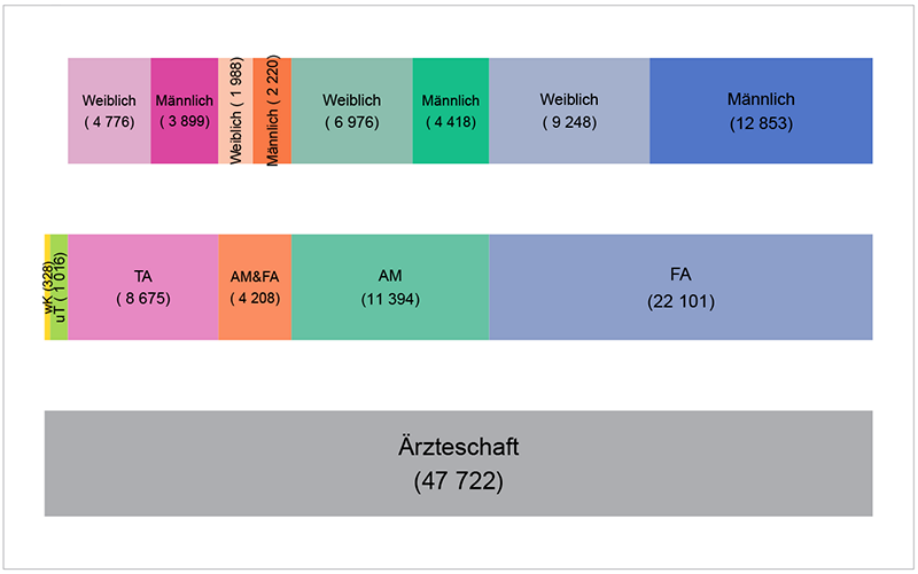


Abbildung 2.2: Strukturdiagramm Ärzteschaft [4] FA=Fachärzteschaft, AM=Allgemeinmediziner_innen, TA=Turnusärzt_innen

Methoden findet sich in Kapitel 3.

Die Literatur zu diesem Thema kann grob in zwei Hauptbereiche eingeteilt werden [5]. Der erste Bereich umfasst Publikationen, welche sich mit der genauen Schichtplanung der Turnusärzt_innen auseinandersetzen. Bei dieser kurzfristigen Betrachtung, die häufig nur einzelne Wochen oder Monate umfasst, wird hauptsächlich in Bezug auf gegebene Bedürfnisse der einzelnen Abteilungen geplant.

Der andere, für diese Arbeit relevante Bereich, bezieht sich auf die längerfristige Rotationsplanung, die große Teile der Ausbildung abdeckt. Dabei erfolgt die Planung häufig in Perioden von zwei Wochen bis zu mehreren Monaten, und der Planungshorizont erstreckt sich damit bis zu mehreren Jahren. Diese Literatur wird folgend in Kapitel 4 ausführlich betrachtet. Auf einzelne Zielgrößen wird aber bereits im Sinne der Optimierungsziele und Bedingungen im folgenden Abschnitt vorgegriffen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

2.3 Zielsetzung

2.3.1 Ziel der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, die durchaus komplexe Planung der Ausbildung von Medizinern und Medizinerinnen mathematisch exakt als Mixed Integer Programming Problem zu formulieren. Anschließend wird dieses Modell auf einen realen Datensatz angewendet, der 82 Personen und einen Krankenhausverbund aus 7 Krankenhäusern mit entsprechenden Dienstposten und Ausbildungsstellen beinhaltet. Die Optimierung wird in GAMS durchgeführt, wobei verschiedene Solver verwendet werden, um ihre Leistung bei einem komplexen Optimierungsproblem wie diesem zu vergleichen.
Die erhaltene Lösung, also der nach den festgelegten Zielgrößen optimierte Ausbildungsplan, wird anschließend ausgewertet und betrachtet. Dabei erfolgt eine Gegenüberstellung mit einer manuell erzeugten Expert_innenlösung sowie dem Ergebnis einer metaheuristischen Optimierung durch einen bestehenden genetischen Algorithmus auf derselben Probleminstanz. Der folgende Abschnitt befasst sich nun mit den einzelnen Zielgrößen, die für das Problem in Betracht gezogen werden.

2.3.2 Ziel der Planung

Das Ziel besteht darin, eine umfassende Planung zu entwickeln, welche die Interessen verschiedener Gruppen, also Turnusärzt_innen, Patient_innen und Krankenhäuser, gleichzeitig berücksichtigt. Die Erstellung der Ausbildungspläne soll automatisiert und ohne zusätzlichen Personalaufwand erfolgen können, wobei sie je nach gewünschter Priorisierung der Unterziele angepasst werden können.

Das oberste Ziel der Planung ist es, eine zulässige Lösung zu erhalten. Das bedeutet, einen Ausbildungsplan zu erstellen, der zum einen eine vollständige Ausbildung aller Personen ermöglicht und zum anderen sämtliche kapazitären Einschränkungen von Dienstposten und Ausbildungsstellen berücksichtigt. Diese notwendige Einschränkung führt in der

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Praxis häufig dazu, dass sich die Ausbildungsdauer im Vergleich zum geforderten Umfang verlängert. So berichtet der Rechnungshof, dass 65% der Turnusärzt_innen, die 2016 mit der Ausbildung in Allgemeinmedizin begonnen haben, diese nicht innerhalb der vorgegebenen Zeit abschließen konnten. Davon haben knapp 60% das Fach gewechselt, während der Rest auf geplante und ungeplante Unterbrechungen sowie Wartezeiten zurückzuführen ist [3, S. 80].
Auch die Reihenfolge der einzelnen Ausbildungsabschnitte muss dabei eingehalten werden. Zusätzliche Bedingungen wie eine Obergrenze der maximalen Monate, die in einer Ausbildungsstelle für Ausbildungsfortschritt verbracht werden können, müssen ebenfalls beachtet werden. Um die Zulässigkeit der Lösung zu garantieren, werden diese Bedingungen in der Modellbeschreibung in Kapitel 5 als harte Randbedingungen formuliert.

Für die Turnusärzt_innen steht eine gute sowie schnelle Ausbildung im Vordergrund. In Bezug auf den Ausbildungsplan bedeutet das, dass die Ausbildung möglichst ohne große Lücken, also Monate, in denen kein Ausbildungsfortschritt erzielt wird, stattfindet. Diese Monate ohne Ausbildungsfortschritt werden im Folgenden als **Stehmonate** bezeichnet. Einerseits sollen Stehmonate generell minimiert werden, andererseits führen mehrere aufeinanderfolgende Stehmonate neben einer weiteren Verlängerung der Ausbildungsdauer auch zu einer erhöhten Unzufriedenheit.
Die Qualität der Ausbildung kann verbessert werden, indem Turnusärzt_innen längere Aufenthalte an einer Station haben. Dadurch können sie sich besser auf ihre Arbeit konzentrieren, ohne sich bei jedem Ortswechsel erneut einarbeiten zu müssen. Dies kann erreicht werden, indem die Anzahl der **Ortswechsel zwischen Abteilungen und Krankenhäusern** reduziert wird. Ein Extremfall dabei sind **einmonatige Zuweisungen** in einer Abteilung, die vermieden werden sollen, um die Ausbildungseffektivität zu steigern.
Die angehenden Allgemeinmediziner_innen können für den Abschnitt des Spitalsturnus zwei **präferierte Wahlfächer** angeben, auf deren Einhaltung bei der Planung geachtet werden soll.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Wenn die Ausbildungspläne mehrerer Personen gleichzeitig erstellt werden, ist es wichtig, eine gewisse **Fairness** zwischen diesen Personen zu garantieren. Mathematisch lässt sich das beispielsweise mit einer geringen Varianz oder durch eine Maximin-Formulierung der Fairnessaspekte zwischen den betrachteten Personen darstellen.

Für Patient_innen ist es wichtig, eine möglichst hohe Versorgungsqualität zu erhalten. Dieser Aspekt, auch als Continuity of Care bezeichnet, wird durch einen Ausbildungsplan mit möglichst wenigen Abteilungs- und Ortswechseln am besten abgedeckt [6].

Die Krankenhäuser ihrerseits profitieren auch von einer kurzen und qualitativ hochwertigen Ausbildung der Turnusärzt_innen. Ein weiterer wichtiger Punkt ist es, eine gute Patient_innenversorgung sicherzustellen. Eine gleichmäßige Verteilung der Personen auf die verschiedenen Abteilungen kann dazu beitragen, ausreichend Personal zur Verfügung zu haben. Daher ist es vorteilhaft, die Turnusärzt_innen vorwiegend im eigenen Krankenhaus auszubilden und nur wenige externe Ausbildungszeiten zuzulassen. Zudem profitieren Krankenhäuser von einer langfristigen Planbarkeit durch einen Ausbildungsplan, der möglichst viele Monate in die Zukunft reicht.
Ein Vorteil eines automatisch erstellten Ausbildungsplans besteht darin, dass er nach neutralen und objektiven Kriterien bewertet wird, wodurch persönliche Bevorzugungen ausgeschlossen sind.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

3 Betrachtete Methoden

In dem in dieser Arbeit betrachteten Fall des **Resident Scheduling Problems** handelt es sich um ein Optimierungsproblem mit mehreren betrachteten Zielgrößen. Zielgrößen in einem Optimierungsproblem sind messbare Größen, die durch die Zielfunktion bestimmt werden. Der optimale Wert dieser Zielfunktion wird erreicht, wenn die Entscheidungsvariablen so gewählt werden, dass der Wert maximal oder minimal ist, abhängig von der Formulierung des Problems. Für diese Entscheidungsvariablen müssen in vielen Fällen noch zusätzliche Nebenbedingungen erfüllt werden, um eine zulässige Problemlösung zu erhalten.

In dieser Arbeit wird das Problem der Ausbildungsplanung von Medizinerinnen und Medizinern als Mixed-Integer-Problem formuliert, das im Idealfall exakt gelöst werden kann. Im Folgenden finden sich allgemeine Informationen zu multikriteriellen Optimierungsproblemen, gemischt-ganzzahligen Problemen sowie exakten und näherungsweisen Verfahren zur Lösung dieser Probleme.

3.1 Mehrzieloptimierung

Mehrzieloptimierung oder auch multikriterielle Optimierung bezieht sich auf Optimierungsprobleme, bei denen mehrere Zielfunktionen gleichzeitig optimiert werden sollen. Im Allgemeinen bilden sie mehrere Funktionen f_i aus dem Suchraum S nach $\mathbb{R}$ ab. Zusätzlich kann durch Nebenbedingungen, wie Gleichheitsrestriktionen $h(x) = 0$ und Ungleichheitsrestriktionen $g(x) \geq 0$, ein zulässiger Bereich $\mathbf{M}$ vorgegeben werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Sei

$S \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und

$f_i : S \to \mathbb{R}, i = 1, ..., m$ gegebene Zielfunktionen

Dann ist das **multikriterielle Optimierungsproblem** gegeben durch: (3.1)

Minimiere/Maximiere: $f_i(x), i = 1, ..., m$

Unter der Nebenbedingung: $x \in \mathbf{M}$

Diese Zielfunktionen können konkurrierend zueinander sein, und das Ziel der Optimierung besteht darin, Lösungen zu finden, die **Pareto-optimal** sind. Im Gegensatz zu einkriteriellen Optimierungsproblemen, bei denen nur eine Zielfunktion maximiert oder minimiert wird, gibt es bei der Mehrzieloptimierung keine eindeutig beste Lösung.

Ein zulässiger Punkt x_0 ist genau dann **Pareto-optimal**, wenn kein anderer Punkt $x \in \mathbf{M}$ existiert, der in zumindest einer Zielfunktion besser als x_0 ist, ohne in irgendeiner anderen Zielfunktion schlechter zu sein. Im Falle eines Minimierungsproblems heißt das:

$$x_0 \in M \text{ Pareto-optimal} \iff \nexists x \in M : f_i(x) \leq f_i(x_0) \text{ für alle } i = 1, ..., m$$

Alle Lösungen, welche Pareto-optimal sind, werden in der **Pareto-Menge P** zusammengefasst. Die Auswertungen dieser Pareto-Menge

$$\{f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)) : x \in P\}$$

wird als die **Pareto-Front** bezeichnet [7, Kapitel 5].

Da es bei einer multikriteriellen Zielfunktion keine eindeutig beste Lösung gibt, existieren

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

verschiedene Lösungskonzepte, die je nach spezifischer Zielsetzung unterschiedliche Ergebnisse ermöglichen.

Eines der bekanntesten Konzepte ist die **gewichtete Summe**, auch als weighted sum bekannt. Bei der gewichteten Summe wird jeder Zielfunktion eine Gewichtung zugeordnet. Diese Gewichtungen werden anschließend aufsummiert, um die m verschiedenen Funktionen auf eine einzige eindimensionale Zielfunktion zu reduzieren. Im Falle einer Minimierung würde die Zielfunktion folgendermaßen aussehen:

$$\min_{x \in M} \sum_{i=1,\dots,m} \lambda_i f_i(x)$$

Die Gewichte λ_i erfüllen zwei Hauptfunktionen. Zum einen dienen sie der Normalisierung der einzelnen Funktionen, um diese auf ein einheitliches Niveau zu bringen. Dadurch wird sichergestellt, dass jede Funktion einen vergleichbaren Beitrag zur Gesamtzielfunktion leistet. Zum anderen können die Gewichte dafür genutzt werden, um die Wichtigkeit einzelner Funktionen hervorzuheben oder zu reduzieren. Damit können Entscheidungsträger_innen Prioritäten und Präferenzen individuell festlegen und so die gesuchte Lösung beeinflussen.

Ein weiteres Lösungskonzept multikriterieller Optimierungsprobleme ist die **Lexikographische Optimierung**. Bei diesem Ansatz werden die einzelnen Zielfunktionen absteigend nach ihrer Wichtigkeit sortiert. Die Optimierung erfolgt dann schrittweise in absteigender Priorität der Zielfunktionen. Zunächst wird das einkriterielle Optimierungsproblem der wichtigsten Zielfunktion gelöst. In weiteren Schritten werden nacheinander die weiteren Zielfunktionen in der zuvor festgelegten Reihenfolge optimiert. Dabei werden die zuvor ermittelten Funktionswerte der höher priorisierten Funktionen als zusätzliche Nebenbedingung gefordert. Eine gewisse Toleranz in Bezug auf Abweichungen von den Funktionswerten aus den vorherigen Schritten kann eingeführt werden, um der Optimierung mehr Flexibilität bei weniger strikter Priorisierung zu erlauben [8, Kapitel 7].

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Sind die Prioritäten der einzelnen Zielfunktionen weniger deutlich und es sollen möglichst alle Zielfunktionen gleichmäßig optimiert werden, ohne eine oder mehrere der Zielfunktionen zu vernachlässigen, so eignet sich das **Maximin-Prinzip** für Maximierungsprobleme, beziehungsweise das **Minimax-Prinzip** für Minimierungsprobleme.
Das übergeordnete Ziel des Minimax-Prinzips besteht darin, einen Lösungspunkt x^* zu finden, bei dem gewährleistet ist, dass die schlechteste, also höchste Auswertung aller Zielfunktionen $f_i(x)$, minimal ist. Dieses Konzept ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn alle dieser Funktionen im selben Wertebereich liegen. Dadurch wird sichergestellt, dass jede einzelne Funktion bei konkurrierenden Zielfunktionen berücksichtigt wird. Mathematisch lässt sich das Minimax-Prinzip wie folgt formulieren:

$$x^* = \arg \min_{x \in M} \max_{i=1,\dots,m} f_i(x)$$

Das Maximin-Prinzip für Maximierungsprobleme funktioniert analog [9, Kapitel 1].

3.2 Gemischt - Ganzzahlige Optimierung

In vielen realen Optimierungsprobleme können die Entscheidungsvariablen nur ganzzahlige oder endlich viele diskrete Werte annehmen. Sind alle oder zumindest einige der verwendeten Entscheidungsvariablen ganzzahlig oder diskret, spricht man von **Gemischt-Ganzzahliger Optimierung** oder auch **Mixed Integer Programming (MIP)**. Einsatzbereiche für diesen Problemtyp sind beispielsweise Produktionsplanung, Logistik, Personalplanung oder auch Portfolio-Optimierung. Auch bekannte kombinatorische Optimierungsprobleme wie das Rucksackproblem (Knapsack Problem) oder das Traveling Salesman Problem (TSP) zählen als MIP.

Formell besteht ein Gemischt-Ganzzahliges Optimierungsproblem aus einem Vektor an Entscheidungsvariablen, welcher sich wiederum in einen kontinuierlichen Teil x und einen diskreten Teil y aufteilen lässt, einer Zielfunktion $f(x, y)$ und einer Menge an Gleichungs-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

restriktionen $h(x, y) = 0$ sowie Ungleichungsrestriktionen $g(x, y) \leq 0$. Ein Minimierungsproblem hat somit die allgemeine Form:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,y} f(x, y) \\
&\text{unter den Bedingungen} \\
&g_k(x, y) \leq 0, \quad k = 1, ..., m \\
&h_l(x, y) = 0, \quad l = 1, ..., p \\
&x^{\mathbf{T}} = (x_1, ..., x_{n_c}) \qquad\qquad x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, ..., n_c \\
&y^{\mathbf{T}} = (y_1, ..., y_{n_d}) \qquad\qquad y_j \in \mathbb{Z} \text{ für } j = 1, ..., n_d
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Sind sowohl sämtliche Restriktionen als auch die Zielfunktion linear, so spricht man von Mixed Integer Linear Programming (MILP). Liegt zumindest eine Nichtlinearität vor, so handelt es sich um Mixed Integer Nonlinear Programming (MINLP).

Ein Variablentyp, der in MIP häufig verwendet wird, sind binäre Variablen. Diese Variablen können nur die Werte 0 und 1 annehmen und eignen sich daher gut, um logische Entscheidungen wie „Ja“ oder „Nein“, „Wahr“ oder „Falsch“ oder auch eine Zuweisung beziehungsweise keine Zuweisung einer Ressource oder einer Person zu modellieren. Die Verwendung binärer Variablen erleichtert die Modellierung von diskreten und logischen Aspekten in vielen Optimierungsproblemen.

Mixed Integer Programming (MIP)-Probleme werden in der Praxis oft mittels spezialisierter Solver gelöst, die auf Algorithmen wie Branch-and-Bound oder Branch-and-Cut basieren. Diese nutzen eine lineare Relaxierung des Problems und lösen diese mit dem dualen Simplexverfahren [9, Kapitel 1].

3.3 Exakte Verfahren

Exakte Verfahren bei Optimierungsmodellen sind mathematische Methoden, die darauf abzielen, die optimale Lösung für ein Optimierungsproblem zu finden. Das Hauptziel dabei

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

ist es, tatsächlich ein globales Optimum zu finden und dabei sicherzustellen, dass alle gegebenen Beschränkungen erfüllt sind. Während exakte Verfahren im Allgemeinen bessere Lösungen als heuristische Verfahren liefern, übersteigt die Laufzeit von vor allem großen Probleminstanzen oft die Laufzeit von Heuristiken um ein Vielfaches.
Im Folgenden werden Beispiele für Verfahren betrachtet, die auf gemischt-ganzzahlige Probleme angewandt werden können.

3.3.1 Enumerative Verfahren

Ein einfaches Verfahren, das für alle ganzzahligen Probleme mit endlich großem Suchraum angewendet werden kann, ist die **Enumerationsmethode** (Brute-Force). Dabei werden sämtliche Lösungskandidaten betrachtet und mit der Zielfunktion bewertet. Ein Lösungskandidat mit der besten Zielfunktionsauswertung ist dann ein globales Optimum [7, Kapitel 7].
Man sollte jedoch schnell erkennen, dass diese Optimierungsmethode nur bei sehr kleinen Probleminstanzen sinnvoll sein kann und deshalb für die meisten realen Anwendungsfälle nicht infrage kommt.

3.3.2 Branch-and-Bound

Branch-and-Bound ist ein Optimierungsverfahren, das entwickelt wurde, um den Suchraum effizient zu durchsuchen und so ein globales Optimum eines Optimierungsproblems zu finden.
Zunächst wird (bei einem gegebenen Maximierungsproblem) eine obere Schranke durch das Lösen einer relaxierten linearen Form des eigentlichen Problems bestimmt. Diese relaxierte Version wird meist mithilfe des dualen Simplex-Algorithmus gelöst. Der Algorithmus startet mit einer initialen unteren Schranke von $-\infty$.
Im Laufe des Algorithmus wird der Suchraum in Teilprobleme aufgespalten, indem für bestimmte ganzzahlige oder binäre Variablen alle möglichen Werte festgelegt werden, was als **Branching** bezeichnet wird.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Die Teilprobleme oder deren relaxierte Versionen werden gelöst, und wenn eine ganzzahlige, also zulässige Lösung gefunden wird, die besser als die bisherige untere Schranke ist, wird diese aktualisiert.

Wird ein relaxiertes Teilproblem gelöst, dessen Lösungswert unter der bereits bekannten unteren Schranke des Gesamtproblems liegt, so kann sich eine optimale Lösung nicht in diesem Teilbaum befinden und dieser kann somit verworfen werden. Diesen Teil des Algorithmus bezeichnet man als **Bounding**.

Die Effektivität des Branch-and-Bound-Verfahrens hängt entscheidend von mehreren Faktoren ab, darunter die Auswahl der zu verzweigenden Variablen, die Strategien für das Branching, die Qualität der Schätzungen für untere und obere Schranken sowie die allgemeine Struktur des betrachteten Problems [9, Kapitel 4].

3.3.3 Branch-and-Cut

In **Branch-and-Cut** wird das Branch-and-Bound-Verfahren mit Schnittebenenverfahren kombiniert, um den Suchraum effizienter zu durchsuchen.

Die Schnittebenenverfahren beginnen ähnlich wie Branch-and-Bound mit einer linearen Relaxierung des ursprünglichen Problems. Sie verkleinern jedoch den zulässigen Bereich durch zusätzliche lineare Ungleichungen, die unzulässige oder nicht optimale Lösungskandidaten ausschließen.

Durch die Integration von Schnittebenenverfahren in Branch-and-Bound können Lösungswertschranken schneller festgelegt werden, was zu einer effizienteren Einschränkung des Suchraums führt [9, Kapitel 4].

3.3.4 Branch and Price

In **Branch-and-Price** wird das Grundkonzept des Branch-and-Bound-Verfahrens auf Optimierungsprobleme mit sehr vielen Entscheidungsvariablen angewendet. Ähnlich wie bei Branch-and-Bound beginnt der Algorithmus mit einer linearen Relaxierung des Problems, wobei jedoch eine besondere Betonung auf der Generierung und Anwendung von Spalten

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

liegt.

Jede Spalte repräsentiert dabei eine mögliche Entscheidungsvariable oder Teilentscheidung des Problems. Der Algorithmus generiert solange neue Spalten für das eingeschränkte Problem, bis keine sinnvollen Variablen mehr hinzugefügt werden können.

Dieses Vorgehen ermöglicht es, während des Branch-and-Price-Prozesses effizient Lösungskandidaten zu identifizieren. Die Kombination von Branch-and-Bound und der systematischen Generierung von Spalten ermöglicht eine präzise Durchsuchung des Suchraums[9, Kapitel 4 & 8].

3.3.5 Solver für MIP

Mixed-Integer Linear Programming (MILP) Solver sind Algorithmen, die zur Lösung von gemischt-ganzzahligen Optimierungsproblemen verwendet werden. MILP-Solver verwenden verschiedene Methoden zur Lösung dieser Probleme, darunter Branch-and-Bound, Branch-and-Cut und Branch-and-Price. Im Allgemeinen umfassen diese Methoden eine Kombination aus linearen Programmierungstechniken (zur Lösung des Relaxationsproblems, bei dem alle Variablen kontinuierlich sind) und diskreten Methoden wie Baumexploration und Schnittgenerierung. Zusätzlich nutzen einige Solver Heuristiken, um frühzeitig gute Abschätzungen der Lösung zu erhalten.

Während des Lösungsprozesses werden sowohl obere als auch untere Schranken für das optimale Ergebnis des primären Problems ermittelt. Diese Schranken werden durch die Lösung von relaxierten primären Problemen, sowie durch die Lösung von dualen Problemen gefunden. Der MILP-Solver strebt danach, die Lücke zwischen der oberen und der unteren Schranke zu verringern. Wenn diese Lücke konvergiert oder einen vorgegebenen Toleranzwert erreicht, kann der Solver feststellen, dass ein exaktes Optimum gefunden wurde. Anderenfalls stoppt der Lösungsprozess, wenn ein anderes Abbruchkriterium wie maximale Rechenzeit oder maximale Zeit ohne Verbesserung erfüllt ist.

GAMS (General Algebraic Modeling System) ist eine Modellierungssoftware, in welcher verschiedene Solver auf einer gemeinsamen Oberfläche integriert sind. Dadurch ist es mög-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

lich, ein Optimierungsproblem einmal zu modellieren und dann mit verschiedenen Solvern zu lösen. In dieser Arbeit wird GAMS verwendet, um in Kapitel 6 mehrere der integrierten Solver zu vergleichen. Insbesondere der von IBM entwickelte Solver CPLEX, der von FICO entwickelte Xpress, der als Open-Source-Projekt entwickelte SCIP und der ebenfalls als Open-Source verfügbare Solver HiGHS werden dabei konkret betrachtet [10].

3.4 Heuristische Verfahren

Wenn es für die Lösung eines Problems wichtiger ist, in vergleichsweise kurzer Zeit eine hinreichend gute, wenn auch nicht zwangsläufig optimale Lösung zu finden, werden häufig heuristische Verfahren eingesetzt. Es gibt zwei verschiedene Typen von Heuristiken: problemspezifische Heuristiken, die Informationen und Erfahrungen über das zugrunde liegende Optimierungsproblem nutzen, um eine approximative Lösung zu finden, und Metaheuristiken, die nicht auf das Problem zugeschnitten sind, sondern eine allgemeine Struktur für das Lösen eines Problems liefern.
Metaheuristische Verfahren modellieren häufig biologische oder physikalische Prozesse und übertragen ihre Verhaltensweisen auf mathematische Modelle [8, Kapitel 8].
Im Folgenden werden Beispiele für solche Metaheuristiken vorgestellt, die auch für das Resident Scheduling Problem angewendet werden.

3.4.1 Genetische Algorithmen

Genetische Algorithmen (GA) repräsentieren eine Klasse von evolutionären Algorithmen, die von der biologischen Evolution inspiriert sind. Ihr Ziel ist es, das Optimum einer Funktion in einem gegebenen Suchraum zu finden. Ähnlich wie in der biologischen Evolution gibt es eine Population von Individuen, die verschiedene Lösungskandidaten repräsentieren. Das Besondere dabei ist, dass diese Individuen binär codiert sind, was bedeutet, dass ihre Eigenschaften durch eine Abfolge von Binärwerten dargestellt werden. Dies ermöglicht die

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Anwendung der Operatoren Kreuzung zweier Individuen sowie Mutation.
In jeder Iterationsstufe erhält jedes Individuum eine Fitnessbewertung, die auf der Auswertung der Zielfunktion basiert. Anschließend werden vielversprechende Lösungskandidaten, abhängig von ihrer Fitness, im Schritt der Selektion ausgewählt. Bei jeweils zwei ausgewählten Individuen erfolgt dann die Rekombination, bei der Teile ihrer binären Codes miteinander ausgetauscht werden. Diese neuen Individuen haben möglicherweise eine bessere Fitness, da sie Merkmale beider Eltern teilen. Darüber hinaus findet bei einigen Individuen eine Mutation statt, bei der zufällige Veränderungen an ihren binären Kodierungen vorgenommen werden. Dies soll die genetische Vielfalt in der Population erhöhen und somit den Suchraum besser erkunden.
Abschließend wird die vorherige Population durch die neu erzeugten Lösungskandidaten ersetzt. Dies wird iterativ fortgeführt, bis ein Abbruchkriterium erreicht wird, wie beispielsweise eine festgelegte Anzahl von Iterationen oder keine Verbesserung in den letzten m Iterationen[7, Kapitel 12].

3.4.2 Simulated Annealing

Simulated Annealing bezeichnet ein metaheuristisches Verfahren, das dem physikalischen Abkühlungsprozess von Metallen nachempfunden ist. Bei diesem Prozess werden auf der Suche nach dem energetisch minimalen Zustand zwischenzeitlich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit energetisch höhere Zustände akzeptiert. Je geringer jedoch die Temperatur sinkt, desto geringer wird die Wahrscheinlichkeit, einen energetisch günstigen Zustand wieder zu verlassen. Diese Idee wird beim Simulated Annealing Verfahren angewendet, um das Minimum/Maximum einer Funktion in einem gegebenen Suchraum zu ermitteln. Durch das Zulassen suboptimaler Zwischenlösungen können somit lokale Extrema überwunden und eine gute Näherung des Optimums erreicht werden. Mit zunehmender Iterationszahl, also im Modell mit sinkender Temperatur, nimmt die Wahrscheinlichkeit, schlechtere Lösungen zu akzeptieren, ab, und der Algorithmus konvergiert gegen eine Näherung der optimalen Lösung [7, Kapitel 11].

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

4 State-of-the-Art

Für das sogenannte Resident Scheduling Problem **(RSP)** gibt es in der Literatur verschiedene Lösungsansätze. Das Problem in einer sehr grundlegenden Form beschreibt lediglich, dass jeder Resident bzw. jeder Turnusärzt_in in jeder Zeitperiode genau einer Zuweisung zugeteilt wird, sodass die jeweiligen Ausbildungsfortschritte für dieses Jahr erreicht und die gegebenen Positionen ausreichend besetzt werden. Dieses Problem gehört im Sinne der Komplexität zu den NP-vollständigen Problemen [11].

In den meisten realen Anwendungen ist diese vereinfachte Problemmodellierung jedoch nicht ausreichend, und es müssen zusätzliche Einschränkungen wie verfügbare Kapazitäten oder Positionen, an denen mehr als ein Ausbildungstyp absolviert werden kann, berücksichtigt werden. Auch andere Bedingungen an die Zielfunktion, wie in Abschnitt 2.2 angeführt, erhöhen zusätzlich die Komplexität. Daher ist das in dieser Arbeit behandelte Optimierungsproblem, wie auch die meisten anderen RSPs, ein Problem der Komplexitätsklasse NP-schwer [12].

NP steht hier für die Komplexitätsklasse „nichtdeterministisch-polynomiell“ und repräsentiert gemeinsam mit P zwei der wichtigsten Klassen in der theoretischen Informatik. Probleme in P sind per Definition in polynomieller Zeit lösbar. Bei Problemen in der Klasse NP gibt es keine bekannten Algorithmen, die das Problem in polynomieller Zeit lösen können. Allerdings können Lösungen für NP-Probleme in polynomieller Zeit überprüft und verifiziert werden.

Ein NP-schweres Problem, wie zum Beispiel das kombinatorische Rucksackproblem, ist ein

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Problem, das mindestens so schwer ist wie die schwierigsten Probleme in NP. Ein Problem, das sowohl NP-schwer ist als auch in NP liegt, wird als NP-vollständig bezeichnet [13].

Angesichts der Komplexität des Problems und der oft beträchtlichen Größe der Problemstellung verwenden viele Autor_innen in der wissenschaftlichen Literatur zum RSP Heuristiken und Metaheuristiken, um das Problem zumindest näherungsweise in angemessener Zeit zu lösen. In den von Akbarzadeh und Maenhout [14] verglichenen und gegenübergestellten Publikationen zum Ärzt_innenausbildungsproblem werden elf heuristische Ansätze und je dreimal Mixed Integer Programming und Branch-and-Price mit Column Generation angewendet.

Smalley und Keskinocak modellieren in [15] die monatlichen Rotationen von Ärzt_innen über ein Jahr und beachten dabei die in den USA geltenden Richtlinien für die Ausbildung. Diese unterscheiden sich in einigen Punkten von den hier geltenden Bedingungen. Eine Besonderheit ist etwa, dass bei den Auszubildenden des vierten und fünften Jahres jeweils Gleichheit untereinander gelten muss. Das heißt, dass all diese Studierenden innerhalb des Jahres über exakt dieselben Abteilungen eines Krankenhauses rotieren müssen, um eine gleichwertige Ausbildung zu garantieren. Für Ärzt_innen der ersten drei Jahre soll zumindest Ähnlichkeit in den Ausbildungsplänen herrschen. Die Modellierung erfolgt dabei als Mixed Integer Programming Problem. Als Zielgrößen werden Verletzungen von präferierten Disziplinen, präferierten freien Zeiten und große Ungleichheiten der Ausbildung unter den Mediziner_innen desselben Jahres minimiert. Zusätzlich wird darauf geachtet, Ober- und Untergrenzen an Personal an den einzelnen Abteilungen einzuhalten. Gelöst wird das MIP mit dem kommerziellen Solver CPLEX. Die Größe des Problems, das 73 Studierende in 20 Fachbereichen über einen Zeitraum von 12 Monaten betrifft, ist ausreichend groß, sodass unter Berücksichtigung aller Restriktionen nur eine Optimierungslücke von 4% erreicht werden kann.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Das Resident Scheduling Problem wurde auch für das Japanische Aichi Medical University Hospital als MIP modelliert [16]. Das dabei beschriebene Problem umfasst 25 Turnusärt_innen, welche jeweils eine Präferenz für einen der Fünf internen Krankenhausbereiche angeben können. Im Anschluss werden sie über die folgenden 13 Monate verplant, wobei als Zielgröße zum einen darauf geachtet wird, dass diese angegebene Präferenz eingehalten wird, zum anderen sollen bei bestimmten Fachgebieten, wie der Notfallmedizin, mehrere aufeinanderfolgende Monate in diesem Bereich verbracht werden, was für eine gute Ausbildung von Vorteil ist. Als Rahmenbedingungen wird darauf geachtet, jede Person in jedem Monat einer Abteilung zuzuweisen sowie gegebene Kapazitäten einzuhalten. Dieses vergleichsweise kleine Problem konnte mit dem Solver CPLEX in etwa einer Minute gelöst werden.

Proano und Agarwal versuchen mit ihrem Modell [17], welches auf die Bedingungen der dreijährigen Fachärzt_innenausbildung für Innere Medizin am Rochester General Hospital in New York zugeschnitten ist, die Fairness der Ausbildungspläne sowie die Qualität der Patient_innenversorgung zu verbessern. In diesem Sinne wurden in einem Mixed Integer Programming Modell, welches sämtliche Rahmenbedingungen der Ausbildung abdeckt, vier Hauptzielgrößen herausgearbeitet, welche optimiert werden sollen. Das erste dieser Ziele ist eine gute Verteilung der Arbeitslast unter den Personen, mathematisch beschrieben als die Varianz über die Nachtschichtrotationen. Die weiteren Zielgrößen bilden die Varianz über Wahlfachrotationen ab, um eine breitgefächerte Ausbildung zu gewährleisten, sowie die Varianz über die zusätzlich verfügbaren Personen je Station um Ausfälle abzufangen und die Patient_innenversorgung zu gewährleisten. Als vierte Zielgröße werden noch die genehmigten Freiwünsche unter den Ärzt_innen berücksichtigt. Da das Modell mit 57 Personen in 17 verschiedenen Krankenhausabteilungen über die 52 Wochen eines Jahres jedoch umfangreich ist, modellieren die Autoren nicht alle Zielgrößen in einem einzelnen MIP Modell. Stattdessen werden die Ansätze Goal Programming und Analytical Hierarchy Process (AHP) kombiniert. Goal Programming bedeutet, dass anstelle eines Optimierungsproblems

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

mit allen zu beachtenden Zielgrößen zuerst nur nach der wichtigsten optimiert wird. Der so ermittelte Wert wird als Nebenbedingung, welche erreicht werden muss, dem Problem hinzugefügt, und es wird auf die nächstwichtige Zielgröße optimiert, bis iterativ alle Größen behandelt wurden. AHP als Ansatz liefert nun alle möglichen Zielreihungen, was bei vier Zielgrößen 4! (also 24) Kombinationen liefert, und vergleicht diese beziehungsweise eine gewichtete Summe der einzelnen Größen untereinander, um die beste Gesamtbewertung zu finden. Die einzelnen 24 Instanzen wurden iterativ mit dem GUROBI Solver gelöst, die Gesamtdauer belief sich dabei auf etwa 40 Stunden.
Durch die harten Einschränkungen dieses Verfahrens an die weiteren Optimierungsiterationen kann jedoch nicht garantiert werden, dass hier tatsächlich ein globales Optimum gefunden wird.

Akbarzadeh und Maenhout lösen das Resident Scheduling Problem für die Medizinerinnenausbildung in Belgien mittels einer problemspezifischen Heuristik [14]. Die Modellierung umfasst dabei spezifische Ausbildungspläne für unterschiedliche medizinische Fachrichtungen. Von den Krankenhäusern und deren Abteilungen werden sowohl Unter- als auch Obergrenzen für die Anzahl an Auszubildenden vorgegeben. Es ist notwendig sicherzustellen, dass vor dem Absolvieren bestimmter Fachgebiete im Rahmen der medizinischen Ausbildung bereits Besuche in anderen Abteilungen erfolgt sind. Als Zielgrößen der Optimierung werden die Präferenzen an Wahlfächern und Krankenhäusern der Turnusärzt_innen, die gegebenen Kapazitäten, eine geringe Anzahl an Krankenhauswechseln und Monaten ohne Ausbildung betrachtet. Um eine gewisse Fairness zwischen den Personen zu gewährleisten, wird die niedrigste Gesamtbewertung des Ausbildungsplanes für eine Person maximiert. Gelöst wird dieses Problem, indem es zunächst in Probleme jeweils einer Planungsperiode zerlegt wird, und so eine initiale Lösung erzeugt wird. In einem zweiten Schritt wird das Problem in Subprobleme für einzelne Studierende zerlegt und diese initiale Lösung unter Verwendung eines dynamischen Optimierungsalgorithmus weiter verbessert. Im letzten Schritt wird das Problem erneut in Subprobleme zerlegt, hier werden jedoch die

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Ausbildungsplätze betrachtet und mit einem Tauschalgorithmus Verbesserungspotentiale genutzt. Selbst bei einer hohen Problemgröße von 320 Studierenden in 30 Disziplinen über 24 Zeitperioden konnten so effizient näherungsweise optimale Lösungen gefunden werden.

In [18] wenden Akbarzadeh und Maenhout einen für das Problem entwickelten Branch-and-Price Algorithmus an, um das RSP exakt zu lösen. Im Gegensatz zu ihrer vorherigen Publikation wurde das Problem etwas vereinfacht und die Problemgröße reduziert. Betrachtet werden hier nur 12 verschiedene Fachgebiete, welche in jedem der betrachteten Krankenhäuser in jeweils genau einer Abteilung absolviert werden können. Die 40 bis 80 Studierende je nach Probleminstanz werden für 12 Zeitperioden verplant. Als Zielgröße dient wieder die Gesamtanzahl der erfüllten Präferenzen, sowie eine Maximierung der niedrigsten Bewertung des Ausbildungsplanes einer Person, um Fairness zu gewährleisten. Der Branch-and-Price Algorithmus verwendet zusätzliche Methoden, um die Laufzeit zu verbessern, wie beispielsweise die Dantzig-Wolfe Zerlegung, um das Grundproblem effizienter neu zu definieren. Das Pricing Problem, welches den Großteil der Rechenzeit in Anspruch nimmt, wird mit dynamischer Optimierung gelöst. Für ihre Problemformulierung findet ein klassischer MIP Solver innerhalb ihres Zeitlimits keine Lösung, der hier entwickelte Ansatz in wenigen Minuten.

Für dasselbe Problem setzen Zanazzo et al. [19] Simulated Annealing ein, einen metaheuristischen Ansatz, um das Problem schnell zu lösen, wenn auch ohne Gewähr auf eine optimale Lösung. Modelliert wird das Problem als Integer Matrix, in welcher der Wert für jede Zeitperiode angibt, zu welcher Station in welchem Krankenhaus die Person zugewiesen ist. Verstöße gegen die Einhaltung von Kapazitäten oder zu berücksichtigende Reihungen an Disziplinen werden dabei in der Zielfunktion stark bestraft, um eine zulässige Lösung zu erhalten. Für die Verbesserung einer Basislösung stehen ein Wechseloperator, welcher einer Person in einer Periode eine neue Abteilung zuweist, sowie ein Tauschoperator, welcher die Zuweisungen einer Person an zwei Zeitpunkten tauscht zur Verfügung. Diese Operatoren

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

werden mit einer Tauschrate ρ_s und einer Wechselrate $1 - \rho_s$ in jeder Iteration des zugrundeliegenden Simulated Annealing Algorithmus angewendet. Damit konnte nach 5 Millionen Iterationen in einer Zeit von insgesamt unter 3 Sekunden bereits eine gute Lösung erzielt werden, nach 100 Millionen Iterationen in knapp 50 Sekunden konnte sogar ein gleich gutes Ergebnis wie in [18] erzielt werden.

Ein anderer Ansatz, das Resident Scheduling Problem zu lösen, ist die Verwendung eines genetischen Algorithmus. In [6] verwendet Kraul einen solchen, um ein Problem mit einer quadratischen Zielfunktion effizient zu lösen. In dieser Formulierung der Mediziner_innenausbildung wird zum einen ein großer Wert auf eine auf durchgeführte Eingriffe und Behandlungen bezogen möglichst gleichmäßige Ausbildung unter den Turnusärzt_innen gelegt. Hierfür wird die Abweichung an durchgeführten Eingriffen im Vergleich zum Soll gemessen und in der Zielfunktion minimiert. Zum anderen liegt ein Fokus auf einer möglichst hohen Versorgungsqualität der Patient_innen, der sogenannten Continuity of Care. Diese wird daran gemessen, wie viele Personen in einer gegebenen Woche eine Abteilung verlassen. Dadurch, dass sich mehrere Abgänge in einer Woche stärker auf die Patient_innenversorgung auswirken, wird diese Größe in der Zielfunktion quadratisch berücksichtigt. In dem Fallbeispiel eines deutschen Krankenhauses wurden 52 Turnusärzt_innen in der Fachrichtung Anästhesiologie betrachtet. Diese sollten im Verlauf des Jahres insgesamt 14 verschiedene Arten von medizinischen Eingriffen absolvieren und wurden dazu wochenweise einer der 13 Abteilungen zugewiesen. Da das Problem als Mixed Integer Problem nicht in 24 Stunden exakt gelöst werden konnte, wurde das Problem mittels eines genetischen Algorithmus gelöst. Dabei wurden verschiedene Parameterkonfigurationen für Populationsgröße, Mutationsrate und Rekombinationsrate getestet und verglichen. Mit einer guten Parametrisierung konnte so in vergleichsweise kurzer Laufzeit ein Ausbildungsplan erstellt werden, welcher den manuell erzeugten Plan in allen relevanten Zielgrößen deutlich übertrifft.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Die aktuellsten Publikationen, welche sich mit dem Resident Scheduling Problem in Österreich befassen, sind [20] und [21] aus dem Jahr 2023 von Dummer et al. beziehungsweise Gaal et al. Wie in dieser Arbeit werden auch in diesen beiden Publikationen die speziell in Österreich geltenden Restriktionen für das Resident Scheduling Problem berücksichtigt. Zum einen gilt die Einschränkung, dass der volle Ausbildungsplan bereits zu Beginn der Ausbildung feststehen soll, wodurch eine höhere Planungsdauer unmittelbar folgt. Zum anderen müssen für jeden Monat, in dem Ausbildungsfortschritte erzielt werden sollen, zwei Arten von Zuweisungen erfolgen. Erstens die Zuweisung zu einem freien Dienstposten in einer gegebenen Abteilung. Diese Zuweisung ist erforderlich, um auf der Station arbeiten zu dürfen. Zweitens die Zuweisung zu einer von der Ärztekammer zugelassenen Ausbildungsstelle. Diese Zuweisung ist notwendig für den Fortschritt in der Ausbildung. Dabei muss garantiert werden, dass der Dienstposten mit der gewünschten Ausbildungsstelle verknüpft werden darf und beide Kapazitäten eingehalten werden. Zusätzlich müssen Reihenfolgenrestriktionen für die einzelnen Ausbildungsabschnitte eingehalten werden. Gelöst wird dieses Problem in Dummer et al. [20] mit einem genetischen Algorithmus, welcher eine Optimierung hinsichtlich sechs verschiedener Zielgrößen vornimmt. Diese umfassen (aufeinanderfolgende) Monate ohne Ausbildungsfortschritt, Abteilungs- und Krankenhauswechsel, einmonatige Zuweisungen zu einer Abteilung sowie verletzte Präferenzen der Wahlfächer. Um diese teilweise konkurrierenden Ziele gleichzeitig möglichst effizient zu behandeln, wird hier als Selektionskriterium des genetischen Algorithmus NSGA-II verwendet, was bedeutet, dass die jeweils besten Individuen bezüglich der einzelnen Zielgrößen immer in der Population erhalten bleiben.
In Gaal et al. [21] wird die Methode des genetischen Algorithmus noch um eine regelbasierte Greedy-Heuristik zur Erstellung zulässiger Ausbildungspläne erweitert. Der Ansatz wird daher als hybrider Ansatz aus metaheuristischen und heuristischen Methoden bezeichnet.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es für das Resident Scheduling Problem bereits einige Ansätze gibt, sowohl exakt als auch näherungsweise. Bei einer Problemgröße und Komplexität durch betrachtete Zielgrößen wie in dieser Arbeit werden aber oftmals keine

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

exakten Methoden wie MIP verwendet. Auch dadurch ist die Frage interessant, ob das Problem überhaupt in anwendbarer Zeit exakt lösbar ist. Zusätzlich ist auch der Vergleich verschiedener Solver zu diesem Problem in der Literatur nicht durchgeführt worden. Auch der Vergleich zwischen der heuristischen und der exakten Lösung in den Punkten Lösungsgüte und Berechnungsdauer fehlt bisher.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

5 Umsetzung und Implementierung

Im Folgenden wird das Resident Scheduling Problem für die Ausbildung von Turnusärzt_innen in Österreich als Mixed Integer Program formuliert. Das Problem lässt sich als Zuweisungsproblem darstellen, bei dem jeder Person in jedem für die Ausbildung benötigten Monat entweder genau eine Kombination aus Dienstposten und Ausbildungsstelle oder ein Monat ohne Ausbildung, also ein Stehmonat, zugewiesen wird.

5.1 Modellannahmen

Im Folgenden werden einige Annahmen an das Modell vorgestellt, die einerseits dazu dienen, das Modell klar und präzise zu formulieren, und andererseits aus den zugrunde liegenden Planungsdaten abgeleitet sind. Ein weiterer Teil schließt suboptimale Lösungen im Vorhinein aus, um den zulässigen Bereich des Modells einzuschränken. Die Lösung des Problems behält trotz dieser Annahmen ihre Gültigkeit für das reale Ausbildungsplanungsproblem.

Annahme 5.1.1. Jede Person ist für Vollzeit angestellt. Diese Annahme basiert darauf, dass in den Planungsdaten nur Vollzeitbeschäftigte hinterlegt sind. Dadurch vereinfacht sich die Modellierung indem die Mindestdauer der einzelnen Module in Monaten angegeben ist und somit immer volle Monate abgeschlossen werden. Außerdem würde die Einbeziehung von Teilzeitbeschäftigung die Mindestdauer der Ausbildung verlängern und den Planungshorizont deutlich erhöhen.

Annahme 5.1.2. Eine Ausbildungsstelle, welche einmal genehmigt worden ist, wird auch in der nächsten Rezertifizierungsperiode erneut genehmigt. Diese Annahme bedeutet, dass

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

sich die Anzahl der Ausbildungsstellen über den Betrachtungszeitraum erhöhen kann, jedoch nicht reduziert wird. Im Normalfall werden auch in der Realität bestehende Stellen erneut genehmigt, wodurch diese Annahme auch für den realen Fall gerechtfertigt ist.

Annahme 5.1.3. Die Anzahl an Stehmonaten, welche eine Person in der Planung maximal zugewiesen bekommen kann, ist begrenzt und abhängig von der verbleibenden Mindestdauer der Ausbildung. Diese Einschränkung reduziert den Raum der zulässigen Lösungen schon zu Beginn der Optimierung. Der Fairness-Aspekt in der Zielfunktion (siehe Abschnitt 5.2) würde diese Bedingung auch implizit fordern, wodurch diese Annahme kein Optimierungspotential vernachlässigt.

Annahme 5.1.4. Stehmonate sind in der MIP-Formulierung den verschiedenen Krankenhäusern zugeordnet. Diese Annahme erleichtert die Modellierung, indem Krankenhauswechsel während der Stehmonate korrekt abgebildet werden können. In der Umsetzung bedeutet das, dass es zu jedem Krankenhaus zusätzlich einen Dienstposten und eine Ausbildungsstelle mit unbeschränkter Kapazität gibt, die Stehmonate symbolisieren.

Annahme 5.1.5. Für die Basisausbildung ist vorgesehen, insgesamt neun Monate in den beiden Teilbereichen Chirurgische Fachgebiete und Konservative Fachgebiete zu absolvieren. Entsprechend der gesetzlichen Vorgabe muss auch hier jeweils zumindest ein Monat in jedem der beiden Fachgebiete absolviert werden. Wenn eine gleichmäßigere Ausbildung angestrebt wird, kann diese Mindestanforderung jedoch auf mehr Monate erhöht werden.

Annahme 5.1.6. Für die Basisausbildung reicht eine Zuweisung zu einem Dienstposten, auf dem das jeweilige Fachgebiet angeboten wird. Eine zusätzliche Ausbildungsstelle ist nicht erforderlich. In der Modellierung erfolgt jedoch immer eine Zuweisung von Dienstposten und Ausbildungsstelle. Aus diesem Grund wird eine zusätzliche fiktive Ausbildungsstelle mit unbegrenzter Kapazität eingeführt, welche mit jedem beliebigen Dienstposten kombiniert werden kann.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

5.2 Zielfunktion

Wie bereits in Abschnitt 2.3.2 angeführt, gibt es verschiedene Größen, die für die Optimierung betrachtet werden. Neben den festen Randbedingungen, welche die Zulässigkeit des Ausbildungsplans garantieren, werden nun die relevanten Zielgrößen definiert, die in Form der MIP-Modellierung implementiert wurden.
Die einzelnen implementierten Zielfunktionen sind:

- $f_1(x)$: Minimierung der Stehmonate
- $f_2(x)$: Minimierung der Krankenhauswechsel
- $f_3(x)$: Minimierung der Abteilungswechsel
- $f_4(x)$: Minimierung einmonatiger Zuweisungen
- $f_5^*(x)$: Maximierung eingehaltener Präferenzen
- $f_6^*(x)$: Maximierung der Fairness

x bezeichnet hier jeweils den mehrdimensionalen Vektor, welcher den erstellten Ausbildungsplan darstellt.
Die Fairness-Komponente in f_6^* unterliegt einer eigenen Berechnung welche im folgenden Abschnitt ausführlich behandelt wird.

Da das Problem als Minimierungsproblem dargestellt werden soll, werden die Funktionen f_5^* und f_6^* zu f_5 : Minimierung verletzter Präferenzen und f_6 : Minimierung der Fairnessbewertung umgewandelt.
Um diese voneinander unabhängigen Zielfunktionen gemeinsam betrachten und optimieren zu können, wird das multikriterielle Optimierungsproblem mit der bereits bechriebenen Methode der gewichteten Summe in ein einkriterielles Optimierungsproblem umgewandelt. Dafür wird den einzelnen Unterzielfunktionen f_i jeweils ein Gewicht ω_i, $i = 1, ..., 6$ zuge-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

ordnet.

Dadurch ergibt sich folgende Zielfunktion:

$$\min F(x) := \sum_{i=1}^{6} \omega_i * f_i(x) \tag{5.1}$$

Fairness

Ein Planungsziel besteht darin, einen Ausbildungsplan zu erstellen, der für alle Beteiligten möglichst fair ist. Dabei ist es wichtig, nicht nur einige Personen mit einem guten oder sehr guten Ausbildungsplan zu bevorzugen, sondern dies nicht auf Kosten anderer Personen geschehen zu lassen. Diese könnten in so einem Fall zusätzliche Stehmonate und ungewollte Wahlfächer zugewiesen bekommen, um die Kapazitätsbeschränkungen einzuhalten. Um das zu ermöglichen, muss zunächst festgelegt werden, wie Fairness messbar gemacht wird.

Eine Möglichkeit zur Messung der Fairness zwischen den betrachteten Personen besteht darin, die Varianzen der negativen Planungskomponenten, wie Stehmonate, verletzte Wahlfachpräferenzen oder Krankenhauswechsel, zu ermitteln und zu minimieren. Varianzberechnungen erfordern jedoch hohe Rechenleistung in jedem Optimierungsschritt und bringen zusätzlich Nichtlinearitäten in die MIP-Modellierung ein. Nicht alle betrachteten Solver sind in der Lage, nichtlineare Modelle zu lösen, und explizite MINLP-Solver verwenden dabei in der Regel weniger leistungsstarke Algorithmen.
Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit zur Messung der Fairness eine Formulierung nach dem Minimax-Prinzip aus Abschnitt 3.1 angewandt.
Dabei wird jeder Person basierend auf ihrem Ausbildungsplan ein Unzufriedenheitsindex u_p zugeordnet. Dieser Index setzt sich zusammen aus den verletzten Wahlfachpräferenzen, der Anzahl an Krankenhauswechseln sowie den notwendigen Stehmonaten. Der Wert der Unzufriedenheit einer Person ist normiert auf den Bereich $[0, 1]$, wobei 0 für den bestmöglichen individuellen Ausbildungsplan steht, in dem alle Präferenzen eingehalten werden und

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

keine Stehmonate absolviert werden müssen.
Im MIP-Modell kann dann der höchste individuelle Unzufriedenheitswert $\max_p u_p$ bestimmt und dann als Teil der Gesamtzielfunktion minimiert werden.
Damit kann in der Zielfunktion gleichzeitig eine Optimierung bezüglich der einzelnen Zielgrößen als auch bezüglich der Fairnesskomponente durchgeführt werden. Dies soll sicherstellen, dass gute Ausbildungspläne nicht auf Kosten einzelner Personen erstellt werden.

Die Minimax-Methode wird als einer von vielen möglichen Ansätzen zur Bewertung der Fairness betrachtet, wie auch in der Gegenüberstellung von Fairnessmetriken in [22] deutlich wird. In diesem Paper zur Fairnessmodellierung in Optimierungsproblemen werden insgesamt acht verschiedene Typen von Metriken betrachtet, darunter Minimax-Ansätze in verschiedenen Varianten, spieltheoretische Konzepte und statistische Methoden. Da es jedoch keinen eindeutig festgelegten Wert gibt, wie Fairness gemessen werden kann, gestaltet sich der Vergleich zwischen verschiedenen Methoden schwierig. Das errechnete Resultat kann und wird sich je nach verwendetem Ansatz unterscheiden. Daher lässt sich bereits hier feststellen, dass zwar Fairness-Methoden wie auch in dieser Arbeit implementiert werden können, ein Vergleich zwischen verschiedenen Konzepten jedoch sehr schwierig ist. Die folgend implementierte Minimax-Methode zielt darauf ab, unvorteilhafte Ausbildungspläne einzelner Personen zu vermeiden. Aus den Gründen der mangelnden Vergleichbarkeit, der Laufzeiteffizienz sowie der starken Abhängigkeit von der Gewichtung des Fairnessaspekts wird sie jedoch nicht im Vergleich der Optimierungsmethoden in Abschnitt 6.4 angewendet.

5.3 Definition der Variablenbezeichnungen

Bevor nun mit der genauen Formulierung des Mixed Integer Programming Modells begonnen werden kann, müssen zunächst die verwendeten Mengen, Parameter und Variablen vorgestellt und definiert werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

5.3.1 Betrachtete Mengen

Für das Optimierungsproblem müssen folgende Mengen definiert sein:

Beschreibung	Bezeichnung	Werte	Index
Personen	P	$\{1,\ldots,\lvert P\rvert\}$	p
Dienstposten	D	$\{1,\ldots,\lvert D\rvert\}$	d
Ausbildungsstellen	A	$\{0,\ldots,\lvert A\rvert\}$	a
Krankenhäuser	H	$\{1,\ldots,\lvert H\rvert\}$	h
Zeitperioden	T	$\{1,\ldots,\lvert T\rvert\}$	t
Inhalte	I	{Anästhesiologie,...,Urologie}	i

Tabelle 5.1: Auflistung aller relevanten Grundmengen.

Da sich die Anforderungen der Ausbildung je nach Ausbildungsabschnitt unterscheiden, jede Person einen anderen Ausbildungsfortschritt haben kann, die Ausbildungen zu verschiedenen Zeiten starten können, reichen diese groben Mengen nicht aus, um sämtliche Relationen korrekt abbilden zu können. Aus diesem Grund werden im Folgenden noch relevante Teilmengen deklariert:

Durch die Einführung fiktiver Dienstposten in Annahme 5.1.4 lässt sich die Menge D unterteilen in tatsächliche Dienstposten D^* und Dienstposten für Stehmonate D^s, wobei $D^* \dot\cup D^s = D$.
Analog folgen mit Annahmen 5.1.4 und 5.1.6 mit A^0 als Bezeichnung für die Ausbildungsstelle bei der Basisausbildung $A^* \dot\cup A^s \dot\cup A^0 = A$.

Für die unterschiedlichen Restriktionen je nach Ausbildungsabschnitt Abs, werden die Indizes B für die Basisausbildung, SP für Spitalsturnus, G für die Sonderfach-Grundausbildung und S für die Sonderfach-Schwerpunktausbildung eingeführt. Personen können dabei in einer oder mehreren Teilmengen vorkommen.
Damit lassen sich dann beispielsweise Personen, welche für den Spitalsturnus zugewiesen werden sollen, mit P^{SP} notieren oder die Monate, welche Person $p \in P^G$ in der Sonderfach-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Grundausbildung leistet, mit T_p^G darstellen.

Genauso können Dienstposten und Ausbildungsstellen mit D^h und A^h einzelnen Krankenhäusern zugeordnet sein. Um darzustellen, welche Dienstposten und Ausbildungsstellen miteinander kombiniert werden dürfen, werden auch entsprechende Sets D_a und umgekehrt A_d definiert.

Inhalte können entweder den zugehörigen Ausbildungsabschnitten zugeordnet werden oder den Personen, welche diese Inhalte (in entsprechendem Abschnitt) erledigen müssen. Gesondert betrachtet werden hierbei noch I^W, die Inhalte, welche als Wahlfach gewählt werden können, sowie I_p^* für $p \in P^{SP}$ die präferierten Wahlfächer von Person p.

5.3.2 Betrachtete Variablen

Das vorliegende Mixed Integer Optimierungsproblem besteht aus drei verschiedenen Arten an Variablen. Die meisten vorkommenden Variablen sind dabei binär, können also nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Hinzu kommen einige ganzzahlige Variablen, welche beispielsweise die Anzahl an Krankenhauswechseln messen. Für die Bewertung der Fairness und der Gesamtzielfunktion gibt es noch reellwertige Variablen.

Wenn man die Struktur des Problems genauer betrachtet, sieht man, dass im Grunde alles durch die binäre Entscheidungsvariable x_{pdat} festgelegt wird. x_{pdat} ist eine binäre Variable, die für alle $p \in P, d \in D, a \in A$ und $t \in T$ angibt, ob eine Zuweisung stattfindet oder nicht.

$x_{pdat} = 1$ bedeutet, dass Person p im Monat t auf Dienstposten d mit der zugehörigen Ausbildungsstelle a ihre Ausbildung absolvieren kann. $x_{pdat} = 0$ heißt, dass für diese Kombination keine Zuweisung erfolgt. Die Größe des Entscheidungsraumes $|X|$ ist damit abhängig von den Größen der einzelnen vorkommenden Mengen. Wäre jede mögliche Kombination zulässig, so wäre $|X| = |P| \cdot |D| \cdot |A| \cdot |T|$. Durch richtiges Formulieren der entsprechenden Mengen und Teilmengen lässt sich dieser Suchraum aber deutlich reduzieren, indem für

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

sämtliche unzulässige Kombinationen an p, d, a und t der Wert $x_{pdat} = 0$ gesetzt wird. Die übrigen Variablen lassen sich alle durch x bestimmen, dienen aber der Lesbarkeit, der Bestimmung einzelner Zielgrößen sowie der korrekten Implementierung des Modells.

hc_p^t	$\in \{0,1\}$	$\forall p \in P : \forall t \in T_p$	symbolisiert einen Krankenhauswechsel von Person p in Monat t.
c_p^t	$\in \{0,1\}$	$\forall p \in P : \forall t \in T_p$	symbolisiert einen Abteilungswechsel von Person p in Monat t nach der Basisausbildung.
tc_p	$\in \{0,1,2,\dots\}$	$\forall p \in P$	symbolisiert Summe der Wechsel von Person p.
w_p^i	$\in \{0,1\}$	$\forall p \in P^{SP} : \forall i \in I^W$	symbolisiert ein zugeteiltes Wahlfach.
v_p	$\in \{0,1,2\}$	$\forall p \in P^{SP}$	symbolisiert verletzte Wahlfachpräferenzen.
s_p	$\in \{0,1,2,\dots\}$	$\forall p \in P$	symbolisiert Stehmonate einer Person.
m_p^t	$\in \{0,1\}$	$\forall p \in P$	symbolisiert einmonatige Zuweisung von Person p.
u_p	$\in [0,1]$	$\forall p \in P$	symbolisiert den Unzufriedenheitsindex einer Person p.
u^*	$\in [0,1]$		symbolisiert maximalen Unzufriedenheitsindex.
Z	$\in \mathbb{R}$		symbolisiert den Zielfunktionswert.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

5.3.3 Betrachtete Parameter

Zusätzlich zu den Variablen werden noch feste Parameter für die Beschreibung des Problems benötigt. Diese sind:

r_p^i	$\in \mathbb{N}$	$\forall p \in P : \forall i \in I_p$	gibt die verbleibenden Monate eines Inhalts an.
b_p^i	$\in \mathbb{N}$	$\forall p \in P^B : \forall i \in I_p^B$	gibt die erledigten Monate eines Basisinhalts an.
κ_d^t	$\in \mathbb{N}$	$\forall d \in D^* : \forall t \in T$	gibt die maximale Kapazität für Dienstposten d in Monat t an.
κ_a^t	$\in \mathbb{N}$	$\forall a \in A^* : \forall t \in T$	gibt die maximale Kapazität für Ausbildungsstelle a in Monat t an.
ω_H	$\in \mathbb{R}$		gibt die Gewichtung für Krankenhauswechsel in der Zielfunktion an.
ω_C	$\in \mathbb{R}$		gibt die Gewichtung für Abteilungswechsel in der Zielfunktion an.
ω_S	$\in \mathbb{R}$		gibt die Gewichtung für Stehmonate in der Zielfunktion an.
ω_P	$\in \mathbb{R}$		gibt die Gewichtung für verletzte Präferenzen in der Zielfunktion an.
ω_M	$\in \mathbb{R}$		gibt die Gewichtung für einmonatige Zuweisungen in der Zielfunktion an.
ω_F	$\in \mathbb{R}$		gibt die Gewichtung für Fairness in der Zielfunktion an.

Mit diesen Definitionen lässt sich nun das Problem als MIP formulieren.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

5.4 Exakte Formulierung als MIP

Das Mixed Integer Programming Problem setzt sich also aus folgenden Gleichungen zusammen:

$$\forall p \in P : \forall \text{Abs} \in \{SP, G, S\} :$$

$$\forall i \in I^{Abs} : \quad \sum_{t \in T_p^{Abs}} \sum_{a \in A_p^i} \sum_{d \in D_a} x_{pdat} = r_p^i \tag{5.2}$$

$$\forall p \in P^B : \forall i \in I^B : a = A^0 : \quad \sum_{t \in T_p^B} \sum_{d \in D_p^i} x_{pdat} + b_p^i \geq 1 \tag{5.3}$$

$$\forall p \in P^B : a = A^0 : \quad \sum_{i \in I^B} (\sum_{t \in T_p^B} \sum_{d \in D_p^i} x_{pdat}) + b_p^i = 9 \tag{5.4}$$

$$\forall p \in P^{SP} : \forall i \in I^W : \quad (\sum_{t \in T_p^{SP}} \sum_{a \in A_p^i} \sum_{d \in D_a} x_{pdat}) + 3 * (1 - w_p^i) \geq r_p^i \tag{5.5}$$

$$\forall p \in P^{SP} : \quad \sum_{i \in I^W} w_p^i \geq 2 \tag{5.6}$$

$$\forall p \in P : \forall t \in T_p : \quad \sum_{a \in A} \sum_{d \in D} x_{pdat} \leq 1 \tag{5.7}$$

$$\forall d \in D^* : \forall t \in T : \quad \sum_{p \in P} \sum_{a \in A} x_{pdat} \leq \kappa_d^t \tag{5.8}$$

$$\forall a \in A^* : \forall t \in T : \quad \sum_{p \in P} \sum_{d \in D} x_{pdat} \leq \kappa_a^t \tag{5.9}$$

$$\forall p \in P : |\text{Abs}_p| > 1 : i = \{1, 2\} : \quad \sum_{a \in A^s} \sum_{d \in D^s} \sum_{t \leq |T^{\text{Abs}}| - (3-i)} x_{pdat} + \sum_{a \in A^{Abs+1}} \sum_{d \in D^*} \sum_{t \leq |T^{\text{Abs}}| - (2-i)} x_{pdat} \leq i \tag{5.10}$$

Dieser erste Block an Gleichungen (5.2) - (5.10) garantiert die Zulässigkeit der Lösung. (5.2) garantiert den Abschluss der Ausbildungsabschnitte Spitalsturnus, Sonderfach-Grundausbildung und Sonderfach-Schwerpunktausbildung. Ohne die Annahme 5.1.1 müsste hier für eine all-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

gemeinere Formulierung x_{pdat} noch mit dem Anteil der geleisteten Stunden an Vollzeitbeschäftigung multipliziert werden. Diese Multiplikation würde noch an mehreren Stellen auftreten, kann aber aufgrund der Annahme ignoriert werden.

(5.3) und (5.4) garantieren die Erledigung der Basisausbildung. Dabei wird die in Annahme 5.1.5 bemerkte Mindestanforderung der beiden Fachgebiete auch beachtet.

(5.5) und (5.6) bilden ab, dass jede Person im Spitalsturnus 2 Wahlfächer absolviert.

(5.7) legt fest, dass jede Person in jeder Zeitperiode nur eine Zuweisung haben kann.

(5.8) und (5.9) garantieren die Einhaltung der Kapazitätsvorgaben für Ausbildungsstellen und Dienstposten.

(5.10) garantiert, dass die einzelnen Abschnitte in der richtigen Reihenfolge absolviert werden. Diese Bedingung muss nur bei der Möglichkeit von Stehmonaten implementiert werden, da ansonsten in jeder Periode nur Module aus genau einem Abschnitt zulässig wären.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

$$\forall p \in P : \forall h \in H : \forall t \in T_p : \quad \sum_{d \in D^h} \sum_{a \in D_a} (x_{pda,t} - x_{pda,t+1}) \leq hc_p^t \tag{5.11}$$

$$\forall p \in P^{SP} : \quad 2 - \sum_{i \in I_p^*} w_p^i \leq v_p \tag{5.12}$$

$$\forall p \in P : \quad \sum_{a \in A^s} \sum_{d \in D^s} \sum_{t \in T^*} x_{pdat} \leq s_p \tag{5.13}$$

$$\forall p \in P : \forall t \in T_p :$$

$$\forall a \in A^* : \forall d \in D* : \quad x_{pda,t} - x_{pda,t+1} \leq c_p^t \tag{5.14}$$

$$\forall p \in P : \quad \sum_{t \in T_p} c_p^t \leq tc_p \tag{5.15}$$

$$\forall p \in P : \forall t \in T_p : \quad 2 - c_p^t - c_p^{t+1} - \sum_{a \in A^S} \sum_{d \in D^S} x_{pda,t+2} + m_p^t \geq -5 * \sum_{a \in A^S} \sum_{d \in D^S} x_{pda,t+2} \tag{5.16}$$

$$\forall p \in P : t = \min(T_p) : \quad m_p^t \geq c_p^t + \sum_{a \in A^S} \sum_{d \in D^S} x_{pda,t+1} \tag{5.17}$$

$$\forall p \in P : t = \max(T_p) - 1 : \quad m_p^t \geq c_p^t \tag{5.18}$$

$$\forall p \in P : \quad u_p^s \cdot s_p + u_p^h \cdot \sum_t hc_p^t + u_p^v \cdot v_p \leq u_p \tag{5.19}$$

Die Gleichungen (5.11) - (5.19) bilden die einzelnen zu optimierenden Größen ab. (5.11), (5.14) und (5.15) bestimmen dabei die Wechsel der Personen. Genauer gesagt wird durch diese mathematischen Formulierungen jeweils eine Variable als 1 festgesetzt, wenn von einer Kombination aus Dienstposten und Ausbildungsstelle in eine andere gewechselt wird. Die binäre Variable für den Krankenhauswechsel ist genau dann 1, wenn ein Wechsel aus einem Krankenhaus in ein anderes stattgefunden hat. Analog dazu ist die binäre Variable für den Abteilungswechsel genau dann 1, wenn ein Wechsel aus einer Abteilung in eine andere stattgefunden hat.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

(5.12) gibt an, wie viele der 2 gewünschten Wahlfächer wirklich belegt wurden.

(5.13) gibt an, wie viele Stehmonate eine Person laut dem Plan hat.

(5.16) - (5.18) bilden einmonatige Zuweisungen ab. Dabei wird eine einmonatige Zuweisung festgestellt. Dafür werden Wechsel in aufeinanderfolgenden Monaten unter berücksichtigten möglichen Stehmonaten betrachtet.

(5.19) zeigt den individuellen Unzufriedenheitswert der Personen als gewichtete Summe der einzelnen negativen Faktoren.

Abschließend wird in Gleichung (5.20) der maximale Unzufriedenheitswert als Index der Fairness bestimmt.

$$\forall p \in P: \qquad u_p \leq u^* \tag{5.20}$$

$$\omega_H \cdot \sum_{p \in P} \sum_{t \in T_p} hc_p^t + \omega_S \cdot \sum_{p \in P} s_p + \omega_P \cdot \sum_{p \in P} v_p + \omega_C \cdot \sum_{p} tc_p + \omega_M \cdot \sum_{p \in P} \sum_{t \in T_p} m_p^t + \omega_F \cdot u^* \leq Z \tag{5.21}$$

(5.21) gibt die Zielfunktion an. Dabei können einzelne Zielfunktionsgewichtungen auch auf null gesetzt und so der Fokus auf ein kleineres Subproblem gelegt werden.

In dieser Modellierung als Mixed-Integer-Programm sind alle Gleichungen linear formuliert. Es handelt sich also genauer gesagt um ein MILP-Problem, was die Anwendung von linearen Optimierungslösern ermöglicht, die in der Regel leistungsstärker sind, als nichtlineare Solver.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

6 Evaluierung der Ergebnisse

6.1 Datenbeschreibung

Die Formulierung aus Abschnitt 5 wird nun auf einen realen Datensatz angewendet, um die exakte Lösbarkeit des Problems zu testen und die gewählte Modellierung zu verifizieren. Der vorliegende Datensatz umfasst insgesamt 32 Ausbildungsstellen und 41 mögliche Dienstposten, die jeweils einem von insgesamt sieben verschiedenen Krankenhäusern zugeordnet sind. Dabei sollen 82 verschiedene Turnusärzt_innen mit individuellem Ausbildungsfortschritt über einen Planungshorizont von 35 Monaten Ausbildungspläne mit den entsprechenden Modulen zugewiesen werden. Zusätzlich zu den reinen Planungsparametern liegt bereits eine manuell erstellte Expert_innenlösung für dieses Problem vor. Diese Problemgröße gilt als realistische Planungsgröße für Krankenhausverbände in Österreich.
Im Folgenden werden die in den vorherigen Abschnitten definierten Restriktionen in GAMS implementiert, und der genannte Datensatz wird in geeigneter Form in GAMS eingefügt.

6.2 Methodisches Vorgehen

Aufgrund der Komplexität des vorliegenden Problems mit all seinen Restriktionen und Zielfunktionen ist es mit den verfügbaren Ressourcen nicht machbar, das Problem mit den in GAMS verfügbaren Solvern exakt zu Ende zu lösen. Das bedeutet, dass die Optimierung nicht so lange ausgeführt werden kann, bis die duale und die primale Lösung konvergieren und der Optimality Gap auf null reduziert wird. Stattdessen wird das Programm nach einer festgelegten Zeit von 72 Stunden abgebrochen, und die bis zu diesem Zeitpunkt beste

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

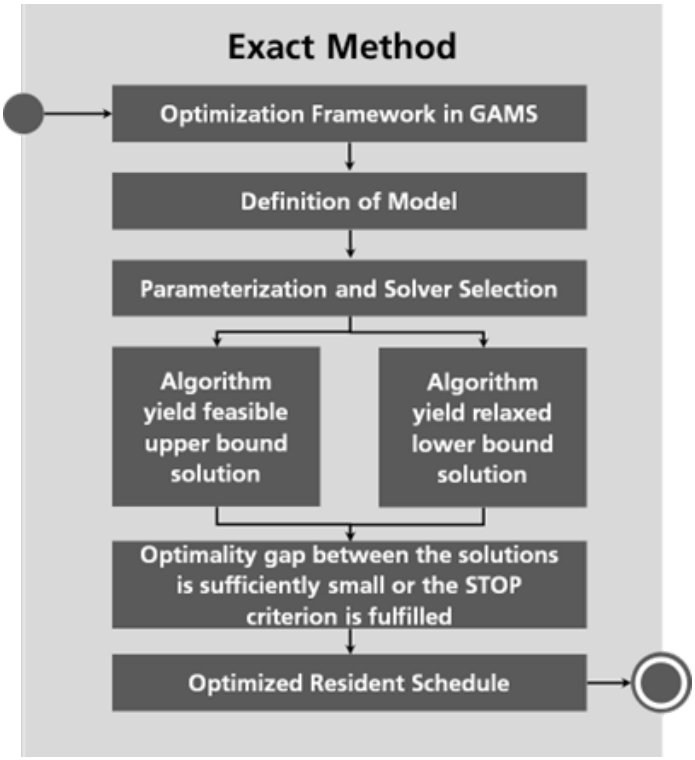


Abbildung 6.1: Methodisches Vorgehen der exakten Methode

zulässige Lösung wird ausgewertet. Abbildung 6.1 gibt einen Überblick über den Ablauf der exakten Methode.

Zunächst werden die ausgewählten Solver über einen kurzen Zeitraum getestet, um den vielversprechendsten für das vorliegende Problem zu ermitteln. Anschließend wird ein weiterer Optimierungslauf dieses Solvers auf das gesamte Problem über einen Zeitraum von 72 Stunden durchgeführt. Das Ergebnis wird dann sowohl mit der vorhandenen Expert_innenlösung als auch mit der hybriden Optimierungsmethode aus Gaal et al. [21] verglichen.
Zusätzlich wird noch eine Optimierung mit einer eingeschränkten Zielfunktion durchgeführt, um die Leistungsfähigkeit eines vereinfachten Problems zu testen.

Sämtliche Optimierungsläufe wurden in einer Linux-Umgebung auf einer virtuellen Ma-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

schine in der Azure-Cloud durchgeführt. Das gewählte Modell war eine Maschine der Größe Standard E16as v4 mit 16 virtuellen CPU-Einheiten und 128 GB Arbeitsspeicher. Diese Konfiguration wurde gewählt, um eine effiziente Bearbeitung des Optimierungsproblems bei angemessener Rechenleistung und Speicherkapazität sicherzustellen. Insbesondere verfügte die gewählte Konfiguration über einen großen Arbeitsspeicher, um mit der zunehmenden Größe des Branch-and-Bound-Baumes in der exakten Optimierung umgehen zu können [23].

6.3 Analyse der exakten Solver

Für den Vergleich zwischen den Solvern wurde das Problem auf folgende vier ausgewählte Zielgrößen eingeschränkt.

#	**Zielgröße**	**Parameter**	**Gewichtung**	**Gleichung**
1	Stehmonate	ω_S	3	(5.13)
2	Krankenhauswechsel	ω_H	2	(5.11)
3	Abteilungswechsel	ω_C	1	(5.15)
4	Einmonatige Zuweisungen	ω_M	3	(5.16) -(5.18)

Tabelle 6.1: Zielgrößen mit entsprechenden Gewichtungen

Diese Beschränkung ergibt sich einerseits aus dem starken Einfluss der zusätzlichen Gleichungen auf die Laufzeit der Solver und ihr Konvergenzverhalten. Andererseits wurde die manuelle Lösung des Planungsproblems bereits auf diese Zielgrößen optimiert, wodurch ein fairer Vergleich möglich ist. Die gewählten Größen haben die größten Auswirkungen auf Qualität und Dauer der Ausbildung, und die Gewichtungen spiegeln deren Einfluss wider. Die Gewichtung der Optimierungsziele wurde zusätzlich so angepasst, dass sie proportional zur Häufigkeit ihres Vorkommens gewählt wurde. Dabei erhalten seltener vorkommende Zielgrößen, wie einmonatige Zuweisungen, höhere Gewichtungen, um ihre Relevanz im Gesamtoptimierungsprozess zu sichern.

In der folgenden Tabelle werden die Optimierungsläufe der betrachteten Solver nach je

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

zwei Stunden gegenübergestellt. Wie bereits in Abschnitt 3.3.5 beschrieben, werden im Laufe der Optimierung jeweils obere und untere Schranken der Zielfunktion festgestellt. Die obere Schranke repräsentiert die beste gefundene zulässige Lösung des Problems und wird hier als primale Lösung bezeichnet. Die duale Lösung entspricht der größtmöglichen unteren Schranke. Der Abstand zwischen diesen Lösungen wird als Optimality Gap bezeichnet und wird meist in Prozent angegeben. Ein Optimality Gap von null würde ein exaktes globales Optimum des vorliegenden Optimierungsproblems bedeuten.

Solver	**Primale Lösung**	**Duale Lösung**	**Optimality Gap**
CPLEX	351	48.4012	86.21%
Xpress	381	50.5458	86.73%
SCIP	-	42.9807	-
HiGHS	-	57.3253	-

Tabelle 6.2: Vergleich zwischen exakten Solvern

Innerhalb von zwei Stunden Laufzeit gelang es nur den Solvern CPLEX und Xpress, überhaupt eine zulässige Lösung des Problems zu finden. Die beste Lösung nach dieser Zeit wurde vom Solver CPLEX mit einer Gesamtzielfunktionsauswertung von 351 und einer zu diesem Zeitpunkt ermittelten dualen Lösung von 48.4 erzielt. Damit lag das Optimality Gap nach zwei Stunden Laufzeit immer noch bei sehr hohen 86.2%.
Der Solver Xpress erzielte mit einem Optimality Gap von 86.7% nur knapp schlechtere Ergebnisse. Die primale Lösung war dabei um 30 Punkte höher als die von CPLEX ermittelte, während die duale Lösung auch etwas höher ausfiel. Die Auswirkungen dieses Unterschieds in den zulässigen Lösungen auf die Ausbildungspläne sind in Tabelle 6.3 dargestellt.
Die beiden Solver konnten bereits nach wenigen Minuten erste zulässige Lösungen finden und erzielten die größten Fortschritte bei deren Verbesserung in den ersten 30 Minuten. In der verbleibenden Zeit gab es bei beiden nur noch geringfügige Veränderungen.

Die anderen beiden Solver konnten in der gegebenen Zeit nur unzulässige untere Schran-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

		CPLEX		Xpress	
Zielgröße	**Gewichtung**	#	Gewichtet	#	Gewichtet
Stehmonate	3	14	42	7	21
Krankenhauswechsel	2	50	100	67	134
Abteilungswechsel	1	131	131	145	145
Einmonatige Zuweisungen	3	26	78	27	81
Gesamt			351		381

Tabelle 6.3: Optimierungsergebnisse von CPLEX und Xpress nach 2 Stunden

ken des Problems ermitteln. Dabei lieferte der Solver SCIP mit einem Wert von 43 die schlechtesten Ergebnisse, während der Solver HiGHS immerhin die höchste duale Lösung mit 57.3 erzielte. Zum Zeitpunkt des Abbruchs der Optimierungsläufe lagen die dualen Lösungen der verschiedenen Solver alle in einem sehr ähnlichen Bereich.

In Abbildung 6.2 wird das zeitliche Verhalten der genannten Solver dargestellt. Die Kurven zeigen die Entwicklung der Primalen und Dualen Zielwerte im Laufe der Zeit. Durch diese Darstellung lassen sich der Fortschritt der Optimierungsalgorithmen verfolgen und das Konvergenzverhalten beobachten.

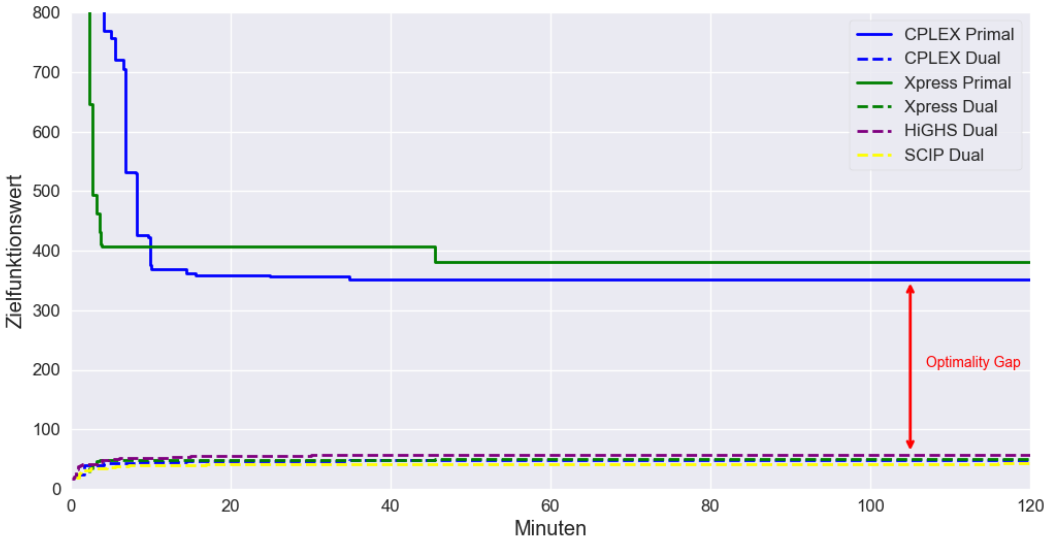


Abbildung 6.2: Vergleich der exakten Solver im zeitlichen Verlauf

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

In der Darstellung zeigen die oberen beiden Kurven jeweils die bis zu diesem Zeitpunkt beste gefundene Lösung der Solver CPLEX beziehungsweise Xpress. Im unteren Bereich der Grafik sind die dualen Lösungen aller Solver im Zeitverlauf aufgetragen. Im mit rot als Optimality Gap gekennzeichneten Bereich dazwischen liegt das exakte Optimum des vorliegenden Problems. Dieser Bereich ist aufgrund von Problemgröße und Komplexität durch die vorliegenden Restriktionen und Kriterien jedoch sehr groß und deutet bereits an, dass es möglicherweise bessere Verfahren für das Lösen des Problems gibt.

Für die Interpretation der Ergebnisse ist es wichtig zu betonen, dass eine gewisse Anzahl von Krankenhauswechseln und eine größere Anzahl von Abteilungswechseln während der Ausbildung unvermeidbar sind. Die Wechsel zwischen den Abteilungen sind dem Rotationsprinzip geschuldet und tragen zu einer gleichmäßigen und vielseitigen Ausbildung bei. Bei der Optimierung werden also über das erforderliche Maß hinausgehende Abteilungswechsel vermieden. Selbst bei unbegrenzter Kapazität wäre es nicht möglich, sie unter ein gewisses Niveau zu senken. Ebenso ist es bei bestimmten noch ausstehenden Modulen unerlässlich, zumindest einen Krankenhauswechsel durchzuführen, da nicht alle Bereiche der Ausbildung in einem Krankenhaus angeboten werden können. Aus diesem Grund erfolgt die Erstellung der Ausbildungspläne in den meisten Fällen über Verbünde aus Krankenhäusern, um überhaupt eine vollständige Ausbildung anbieten zu können.

In Tabelle 6.3 ist zu erkennen, dass sich die besten Ergebnisse, die von den Solvern CPLEX und Xpress jeweils nach zwei Stunden gefunden wurden, in den einzelnen Kriterien teilweise stark unterscheiden. Mit insgesamt 14 Stehmonaten plant der CPLEX-Solver bei exakt gleicher Modellformulierung in derselben Zeit noch doppelt so viele Monate ohne Ausbildungsfortschritt wie der Solver Xpress. Dafür sind die anderen Metriken jeweils niedriger, was zu einer um 30 Punkte niedrigeren Gesamtbewertung führt. Der größte Unterschied zeigt sich dabei bei den Krankenhauswechseln und Abteilungswechseln. Die 50 Krankenhauswechsel, die für die insgesamt 82 verplanten Personen im mit CPLEX er-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

stellten Ausbildungsplan ermittelt wurden, entsprechen durchschnittlich einem Wechsel bei 60% der Personen im Planungshorizont. Im mit Xpress optimierten Ausbildungsplan müssen im Durchschnitt über 81% der Personen Krankenhauswechsel durchführen. Dieser Durchschnittsvergleich dient nur zur Veranschaulichung des Größenverhältnisses zwischen Wechsel und Personenanzahl. In den vorliegenden Ergebnissen sind die Krankenhauswechsel nicht gleichmäßig auf die Personen verteilt, sondern abhängig von den verbleibenden Ausbildungsabschnitten. In beiden Fällen müssen einige Personen bis zu vier Krankenhauswechsel durchführen, während viele andere eine Ausbildung ganz ohne den Wechsel in ein anderes Krankenhaus absolvieren können.
Bezogen auf die einmonatigen Zuweisungen gibt es mit 26 zu 27 keine großen Unterschiede. Insgesamt war in diesem ersten Vergleich die Performance des CPLEX Solvers am Vielversprechendsten, sodass die Optimierung über längere Zeit im nächsten Abschnitt auch mit diesem Solver durchgeführt wird.

6.4 Vergleich von Optimierungsmethoden

6.4.1 Vergleich von Optimierungsmethoden für das volle Problem

Im folgenden Abschnitt wird die Ausführung des Mixed Integer Problems (MIP) mit dem Solver CPLEX über einen längeren Zeitraum von 72 Stunden mit dem hybriden Lösungsansatz verglichen, wie er von Gaal et al. [21] beschrieben wird. Zunächst wird dabei mit einer guten Ausgangslösung des Problems mithilfe einer Greedy-Heuristik initialisiert. Anschließend wird diese Lösung weiter verbessert, indem ein eigens für das Resident Scheduling Problem implementierter genetischer Algorithmus angewendet wird. Die durch Mutation und Rekombination erzeugten Lösungskandidaten werden gemäß des Non-Dominated-Sorting-Kriteriums (NSGA-II) ausgewählt, um gute Lösungen für jedes der Zielkriterien in der Gesamtpopulation zu erhalten. Um die Vergleichbarkeit dieser unterschiedlichen Ansätze zu gewährleisten, wird auch bei der hybriden Methode im Hinblick auf dieselben vier Metriken optimiert.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

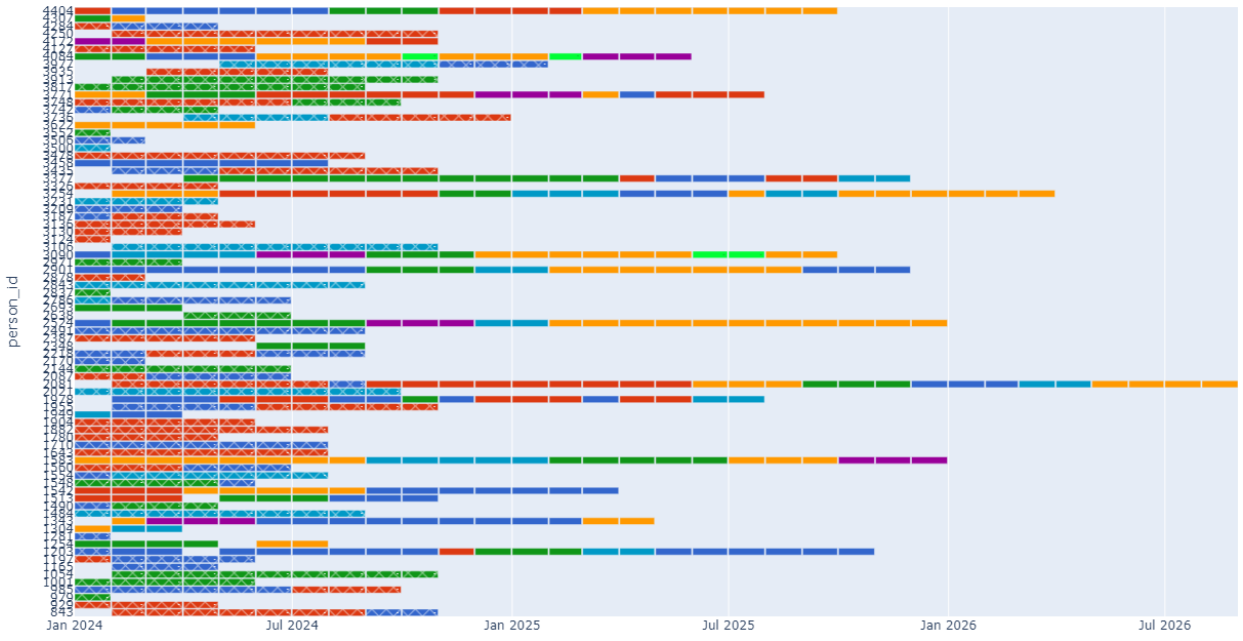


Abbildung 6.3: Manuell erzeugter Ausbildungsplan

Zusätzlich zu diesen beiden Ansätzen liegt für dieselben Ausgangsdaten eine manuell ermittelte Lösung eines Experten vor. Dieser vergleichbare Ausbildungsplan wurde ebenfalls im Hinblick auf die genannten Kriterien erstellt. Die von einem Experten innerhalb von acht Stunden erzeugte Lösung soll zeigen, welches Potenzial verschiedene Methoden im Vergleich zur aktuell gängigen manuellen Methode bieten können.
Diese manuelle Lösung ist in Abbildung 6.3 dargestellt. In dieser Darstellung sind die auszubildenden Personen entlang der vertikalen Achse und die einzelnen Monate ihrer jeweiligen Ausbildung entlang der horizontalen Achse aufgetragen. Jedes Kästchen gibt Auskunft über die entsprechende Zuweisung einer Person in einem bestimmten Monat, einschließlich Dienstposten, Ausbildungsstelle und Krankenhaus. Die Farben, außer Hellgrün, repräsentieren die Zuweisung zu einem der sieben verschiedenen Krankenhäuser. Die hellgrünen Kästchen symbolisieren einen Monat ohne Zuweisung, also einen Stehmonat.

In Abbildung 6.4 sieht man, wie sich die beschriebenen Methoden im Zeitverlauf ent-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

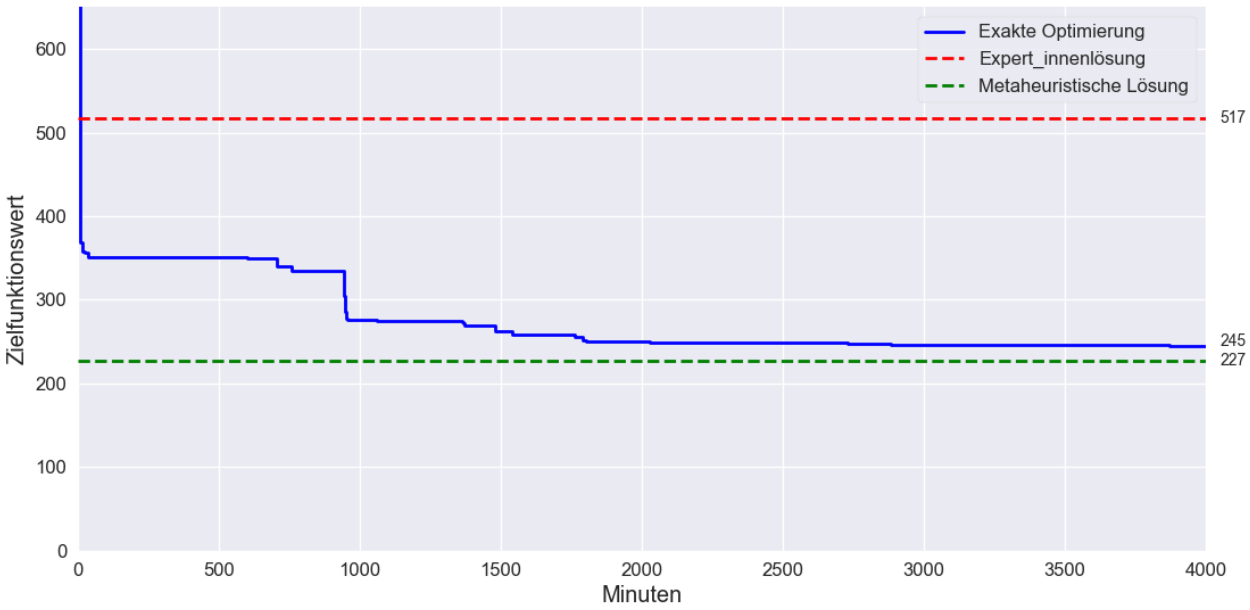


Abbildung 6.4: Zeitlicher Verlauf der Optimierung

wickeln. Dazu sei gesagt, dass das Abbruchkriterium des genetischen Algorithmus bereits nach 45 Minuten eintritt und die Optimierung folglich an diesem Punkt, bei einer Gesamtbewertung von 227, stoppt. Der deutlich kürzere Zeitaufwand ist sowohl auf die angewandte Methode als auch auf die Verwendung von Rust als eine der effizientesten Programmiersprachen zurückzuführen, was die Ausführung zusätzlich erheblich beschleunigt hat [24].
Die Optimierung mit CPLEX läuft insgesamt 72 Stunden, und selbst nach dieser Zeit kann die hybride Lösung nicht übertroffen werden. Am Ende steht bei der exakten Variante ein Zielfunktionswert von 245. Die duale Lösung, also die untere Schranke des exakten Optimums des Problems, hat sich hierbei in den weiteren Stunden der Optimierung nur unwesentlich erhöht und liegt am Ende bei 50.6486. Damit beträgt auch das Optimality Gap bei Abbruch des Solvers immer noch 79.33%.
Im Vergleich mit diesen beiden Verfahren hat die Expert_innenlösung schlechter abgeschnitten und konnte nur einen Zielfunktionswert von 517 erreichen.

Gemessen an den einzelnen Optimierungsgrößen ist das Ergebnis in Tabelle 6.4 angeführt.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Dabei steht MWT (Month Without Training) für Stehmonate, HC (Hospital Changes) für Krankenhauswechsel, DC (Department Changes) für Abteilungswechsel und SMA (Single Month Assignments) für einmonatige Zuweisungen.

		Exakt (CPLEX)		**Metaheuristisch**		**Manuell**	
Zeit	in Minuten		3870		45		480
Zielgröße	**Gewichtung**	#	Gewichtet	#	Gewichtet	#	Gewichtet
MWT	3	2	6	0	0	4	12
HC	2	34	68	32	64	92	184
DC	1	111	111	106	106	162	162
SMA	3	20	60	19	57	53	159
Gesamt			245		227		517

Tabelle 6.4: Vergleich der 3 verschiedenen Lösungsansätze

Betrachtet man die Ergebnisse in der Tabelle, so fällt auf, dass der metaheuristische Ansatz in jeder der betrachteten Zielgrößen die exakte Optimierungsmethode übertrifft. Es ist jedoch wichtig anzumerken, dass dies nicht bedeutet, dass die exakte Optimierung per se schlechtere Ergebnisse liefert, sondern vielmehr daran liegt, dass sie aufgrund begrenzter Rechenkapazität nicht vollständig durchgeführt werden konnte. Selbst die verwendete virtuelle Maschine verfügte nicht über genügend Ressourcen, um ein so großes und komplexes Problem in akzeptabler Zeit zu lösen. Unter der Voraussetzung ausreichender Rechenleistung und Rechenzeit sollte die exakte Methode jedoch mindestens so gute Ergebnisse erzielen wie das metaheuristische Verfahren. In der Praxis ist dies jedoch, wie hier zu sehen, nicht der Fall.

Dennoch erzeugt das exakte Verfahren eine sehr gute Lösung, die eine manuelle Planung deutlich übertrifft, und kann ohne großen Mehraufwand auf verschiedene Problemstellungen mit variablen Zielkriterien und Gewichtungen angepasst werden. Dies trifft jedoch auch auf den genetischen Algorithmus zu, der dies sogar in wesentlich kürzerer Rechenzeit erreicht.

Bei genauer Betrachtung der einzelnen Zielgrößen in Tabelle 6.4 wird deutlich, dass die Anzahl der Monate ohne Ausbildungsfortschritt in allen drei Verfahren sehr gering gehalten werden kann. Bezüglich Krankenhauswechsel, Abteilungswechsel sowie einmonatiger Zu-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

weisungen ist das Ergebnis des metaheuristischen Ansatzes in allen Bereichen etwas besser, jedoch bleiben große Unterschiede in den Kriterien aus. Insbesondere ist die Anzahl der Krankenhauswechsel bei der manuellen Planung mit 92 im Vergleich zu 34 beim exakten Verfahren deutlich höher, was nahezu dem Dreifachen entspricht. Aufgrund der Größe des Problems ist es offensichtlich schwierig, bei der manuellen Planung genau auf die einmonatigen Zuweisungen zu achten, weshalb dieser Wert hier deutlich höher ist.

Der erstellte Ausbildungsplan, der durch die metaheuristische Optimierung mit dem Ziel minimierter einmonatiger Zuweisungen in einer Abteilung, Stehmonate, Krankenhauswechsel sowie Abteilungswechsel entstand, ist in Abbildung 6.5 dargestellt.

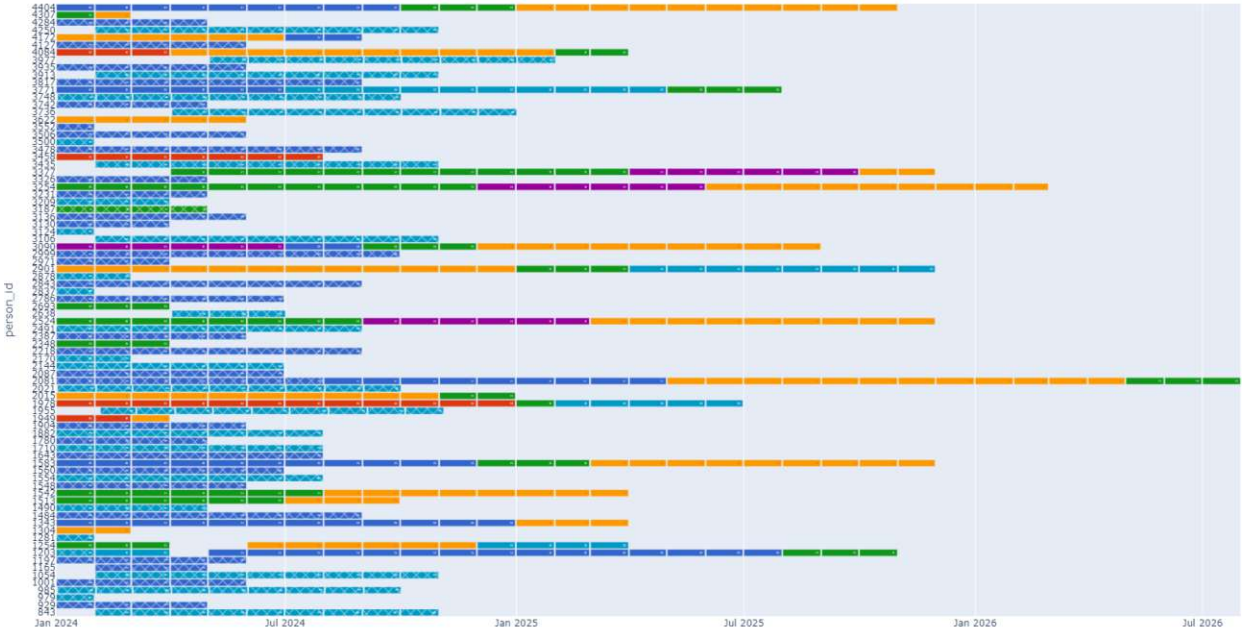


Abbildung 6.5: Metaheuristisch optimierter Ausbildungsplan

6.4.2 Vergleich von Optimierungsmethoden für ein eingeschränktes Problem

Aufgrund der in den vorherigen Abschnitten festgestellten Performance-Probleme bei dem Modellansatz mit vier Zielkriterien wird nun noch eine Optimierung basierend auf zwei

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Metriken durchgeführt. Diese sind die in der Literatur zur Ausbildungsplanung am häufigsten betrachteten Kriterien, nämlich Krankenhauswechsel und Monate ohne Zuweisung. Sowohl Abteilungswechsel als auch einmonatige Zuweisungen sind in der MIP Formulierung jeweils mit vielen Gleichungen im Optimierungssystem verbunden, was sich stark auf Problemkomplexität und damit Optimierungsleistung auswirkt. Auch hier wird wieder mit demselben genetischen Algorithmus wie im vorherigen Abschnitt verglichen. Der exakte Optimierungsansatz wird auch hier mit dem Solver CPLEX durchgeführt. Im formulierten Optimierungsproblem werden die Gewichte beider Zielgrößen auf eins normiert, also

$$\omega_S = 1, \quad \omega_H = 1.$$

Beide Optimierungsmethoden wurden anhand dieser Zielfunktion für eine Stunde gegeneinander getestet. Abbildung 6.6 zeigt die Zielwerte beider Methoden über den Zeitverlauf hinweg. Zusätzlich sind die dualen Werte der exakten Optimierungsmethode und somit das Optimality Gap dargestellt. Es ist jedoch anzumerken, dass die letzten zulässigen Verbesserungen des Zielfunktionswerts bereits nach deutlich weniger Zeit erreicht wurden. Die letzte Verbesserung des genetischen Algorithmus wurde etwa nach 1400 Sekunden erzielt und führte zu einer Minimierung auf 32.
Die exakte Methode erzielte ihre letzte zulässige Verbesserung nach etwa 1650 Sekunden, also ebenfalls in weniger als einer halben Stunde. Der damit erreichte Zielwert von 28 ist niedriger als das Ergebnis der Metaheuristik. Bereits nach 330 Sekunden erreichte der exakte Solver einen Zielfunktionswert von 32, also in unter sechs Minuten.
Nach einer Stunde Rechenzeit beträgt die duale Lösung 13.66, damit ist das Optimality Gap zwischen primaler und dualer Lösung immer noch 51.2% hoch. Hier konnten auch nach knapp einer Stunde noch immer kleine Verbesserungen erzielt werden.

Betrachtet man die erzeugten Lösungen in Tabelle 6.5, so sieht man, dass in beiden Lösungen keine Stehmonate verplant werden. Die Bewertungen der Zielfunktion stammen

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

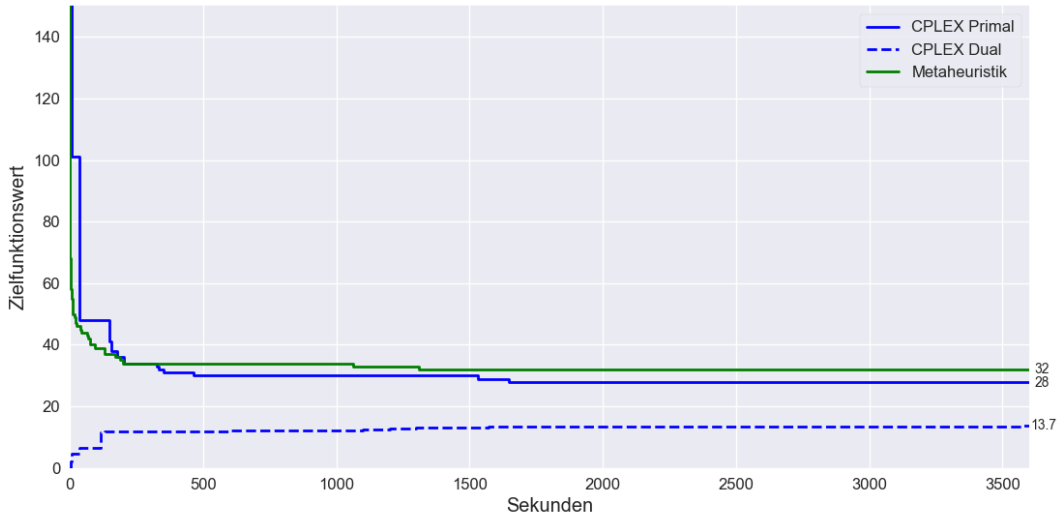


Abbildung 6.6: Zeitlicher Verlauf der Optimierung bei 2 Kriterien

also in beiden Fällen von den 28 beziehungsweise 32 Krankenhauswechseln in der Lösung. Damit erzielt die metaheuristische Lösung in Bezug auf die Kriterien Stehmonate und Krankenhauswechsel ein genauso gutes Ergebnis wie bei den vier betrachteten Kriterien in Abschnitt 6.4.1. Dieses Verhalten zeigt die Stärke des Auswahlverfahrens NSGA-II, bei dem Lösungskandidaten an der Pareto-Front, also Kandidaten, welche bezüglich eines Kriteriums dominieren, in der Gesamtpopulation bleiben.

Die Lösung des exakten Optimierungsverfahrens für das eingeschränkte Problem übertrifft die beiden Einzelziele der Gesamtoptimierung deutlich. Im Gegensatz dazu können beide Stehmonate eingespart und die Anzahl der Krankenhauswechsel um 6 reduziert werden.

Optimierungsmethode		**Exakt (CPLEX)**		**Metaheuristisch**	
Metrik	**Gewichtung**	#	Gewichtet	#	Gewichtet
Zeit bis zu letzter Verbesserung	in Sekunden		1650		1400
MWT	1	0	0	0	0
HC	1	28	28	32	32
Gesamt			28		32

Tabelle 6.5: Vergleich der beiden Lösungsansätze

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Da dies auch in deutlich kürzerer Zeit möglich ist, zeigt sich, dass die Leistung eines exakten Solvers durch die Vielzahl an verschiedenen Gleichungen in der Problemformulierung deutlich abnimmt. Obwohl die Gesamtlösung aller Kriterien vermutlich nicht optimal wäre, lassen sich dennoch Benchmarks für einzelne Zielgrößen ermitteln. Diese Benchmarks können auch zur Analyse der metaheuristischen Lösung genutzt werden, um zu zeigen, ob diese nur ein lokales Optimum erreicht oder tatsächlich eine annähernd optimale Lösung erzeugt.

Dieser Ansatz führt auf den ersten Blick zu einem sehr guten Ergebnis, bei dem die Krankenhauswechsel minimiert und Stehmonate vollständig vermieden werden können. Abbildung 6.7 zeigt den mit dieser Modellierung erstellten Ausbildungsplan, in dem nur wenige Farb- und somit Krankenhauswechsel zu erkennen sind. Bei genauerer Betrachtung und Einbeziehung der in dieser Modellierung vernachlässigten Faktoren, wie Abteilungswechsel und einmonatige Zuweisungen, zeigt sich jedoch ein deutlich schlechteres Bild. Da der Solver diese Kriterien nicht bewertet, entstehen viele vermeidbare Wechsel, selbst wenn die Kapazitäten vorhanden sind, um diese zu vermeiden. Um einen guten Gesamtplan zu erstellen, kann es trotz schlechterer Ergebnisse in einzelnen Kriterien sinnvoll sein, eine Optimierung auf alle relevanten Faktoren durchzuführen. Will man hingegen nur ein Benchmark für eine oder wenige Kriterien ermitteln, ist dieser Ansatz gut geeignet.

Die Größe und Komplexität des Problems übersteigen dennoch weiterhin die verfügbaren Rechenkapazitäten. Daher ist eine vollständige Optimierung bis zu einem Optimality Gap von null und somit bis zum eindeutig besten Ergebnis nicht möglich.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

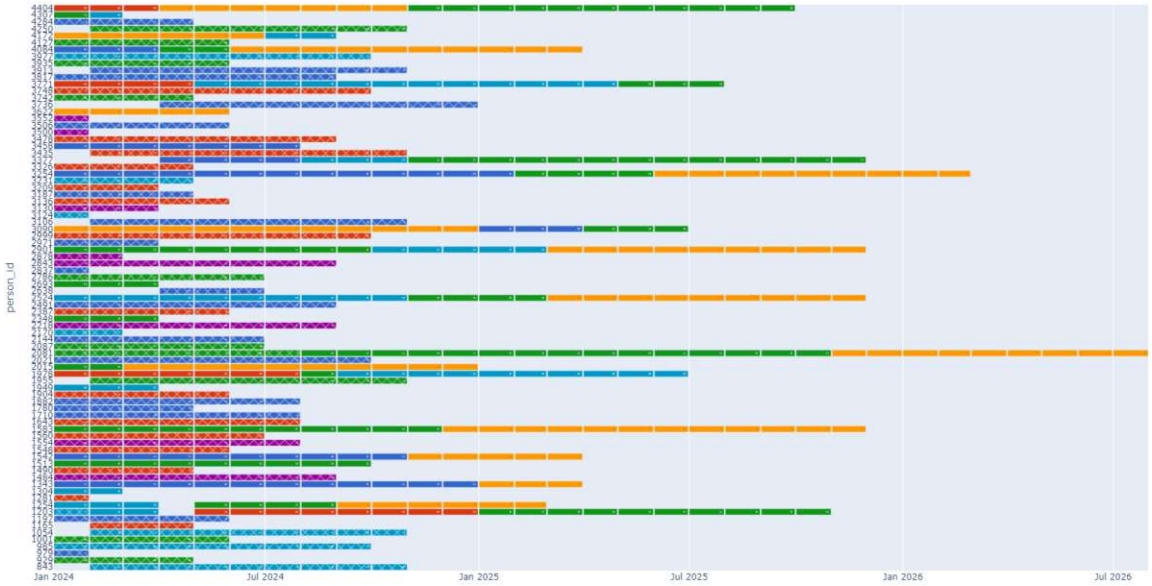


Abbildung 6.7: Ausbildungsplan bei exakter Optimierung nach 2 Kriterien

6.5 Analyse der Ergebnisse

Um die Ergebnisse sinnvoll analysieren zu können, ist es wichtig, zunächst aus dem Output der Optimierung eine geeignete Darstellung zu erhalten. Der Output aus der Optimierung mit GAMS ist dabei lediglich eine Auflistung aller möglichen Kombinationen aus binären Variablen, wobei entweder eine null angezeigt wird, wenn keine Zuweisung in dieser Variablenkombination erfolgt, oder eine eins, wenn eine Zuweisung erfolgt. Mit einer zielgerichteten Datenfilterung in Python können so alle tatsächlichen Zuweisungen in eine geeignete Form gebracht und anschließend in Form einer Zeitachse, wie in einem Kalender, dargestellt werden. Auf diese Weise können potenzielle Fehler aufgrund fehlerhafter Implementierungen oder Programmierfehler, wie doppelte oder fehlende Zuweisungen innerhalb eines Monats, direkt identifiziert werden.

In Abbildung 6.8 ist nun die optimierte Ausbildung als erläuterndes Beispiel dargestellt. Links am Bild sieht man die eindeutige Identifikationsnummer der Personen im Modell. Unten am Bildende sind die einzelnen Monate des Ausbildungsverlaufes dargestellt. Das

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Abbildung 6.8: Ausbildungsplan bei exakter Optimierung nach 2 Kriterien (Auszug)

Bild verdeutlicht auch, wie unterschiedlich die einzelnen vorgegebenen Ausbildungspläne sein können. Während die obere Person noch 21 abzuschließende Monate vor sich hat, muss die zweite Person nur noch zwei Module abschließen, bis die Ausbildung beendet ist. Die dritte Person hat noch keine Spezialisierung nach der Basisausbildung angegeben, weshalb bei dieser Person nur die neun Monate der Basisausbildung eingeplant werden. In der Darstellung sind die karierten Felder als Basisausbildung mit Nullen als Ausbildungsstellen erkennbar. Die verschiedenen Farben in den einzelnen Kalendereinträgen repräsentieren unterschiedliche Krankenhäuser. Die Zahlen in den einzelnen Kästchen zeigen jeweils oben den zugewiesenen Dienstposten und unten die zugewiesene Ausbildungsstelle an, sofern es sich nicht um die Basisausbildung handelt.

Achtet man auf die einzelnen zugewiesenen Dienstposten und Ausbildungsstellen innerhalb eines zu absolvierenden Blocks in einem Krankenhaus, so fällt auf, dass sich Abteilungen oft abwechseln, auch wenn sie teilweise dieselben Module abdecken. Dadurch entstehen natürlich viele unnötige Abteilungswechsel und eine Vielzahl an einmonatigen Zuweisungen, da der Solver diese Kriterien nicht feststellen kann, weil die aufwendigen Gleichungen nicht

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

modelliert werden. Die Modellierung mit weniger Kriterien ist insgesamt weniger praktisch einsetzbar, kann aber dennoch als möglicherweise unrealistisches Benchmark angesehen werden.
Zusätzlich fällt bei Betrachtung des Auszugs aus dem Ausbildungsplan auf, dass bei der zweiten Person, obwohl sie nur noch zwei Monate zu absolvieren hat, diese in verschiedenen Krankenhäusern erfolgen. Dies ist jedoch kein Fehler der Optimierung, sondern liegt an den fehlenden Modulen *Frauenheilkunde und Geburtshilfe* sowie *Orthopädie und Traumatologie*, welche in keinem der modellierten Krankenhäuser gemeinsam angeboten werden. Das bestätigt auch, dass eine „Perfekte Lösung“ ohne Krankenhauswechsel, Stehmonate, einmonatige Zuweisungen oder andere Kriterien gar nicht existieren kann.

Um die erzeugten Pläne nun für einzelne Personen klarer einordnen zu können, sind in Abbildung 6.9 die Ergebnisse der metaheuristischen Gesamtoptimierung, der manuellen Erstellung des Ausbildungsplans und der exakten Optimierung im Hinblick auf zwei Zielgrößen auf Personen heruntergebrochen dargestellt. Während bei der exakten Lösung nur noch maximal zwei Krankenhauswechsel pro Person entstehen, sind es bei der manuell erzeugten noch bis zu acht Krankenhauswechsel bei einer Person. Die metaheuristische Lösung liegt dabei knapp über der exakten und teilt einer Person noch drei Krankenhauswechsel zu. Beide Optimierungsverfahren schaffen es deutlich mehr Personen ohne notwendige Krankenhauswechsel zu verplanen als in der Expert_innenlösung. Betrachtet man die Stehmonate pro Person, so gibt es in der manuellen Lösung zwei Personen mit je zwei Stehmonaten, während die Optimierungsverfahren ohne diese auskommen.

Wie in Abbildung 6.8 ersichtlich ist, kann das exakte Optimierungsverfahren bei zwei Kriterien nicht unbedingt sinnvoll für die Abteilungswechsel und einmonatigen Zuweisungen herangezogen werden. Aus diesem Grund sind in Abbildung 6.10 nur die personenweisen Kriterien der Metaheuristik und der manuellen Lösung dargestellt.
Auch was einmonatige Zuweisungen und Abteilungswechsel betrifft, liefert die Metaheuristik ein deutlich besseres Ergebnis. Mit maximal sieben Abteilungswechseln bei Personen

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

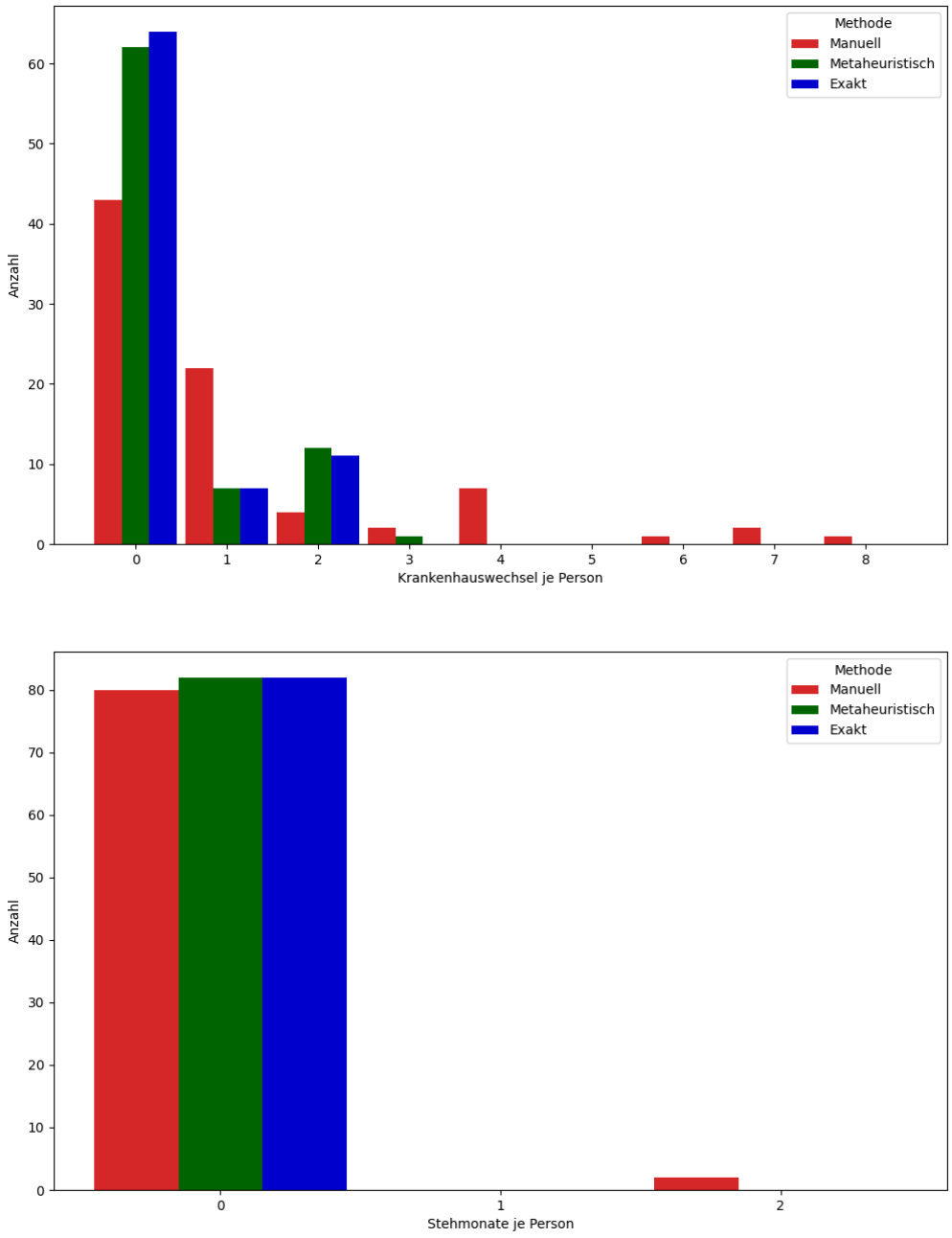
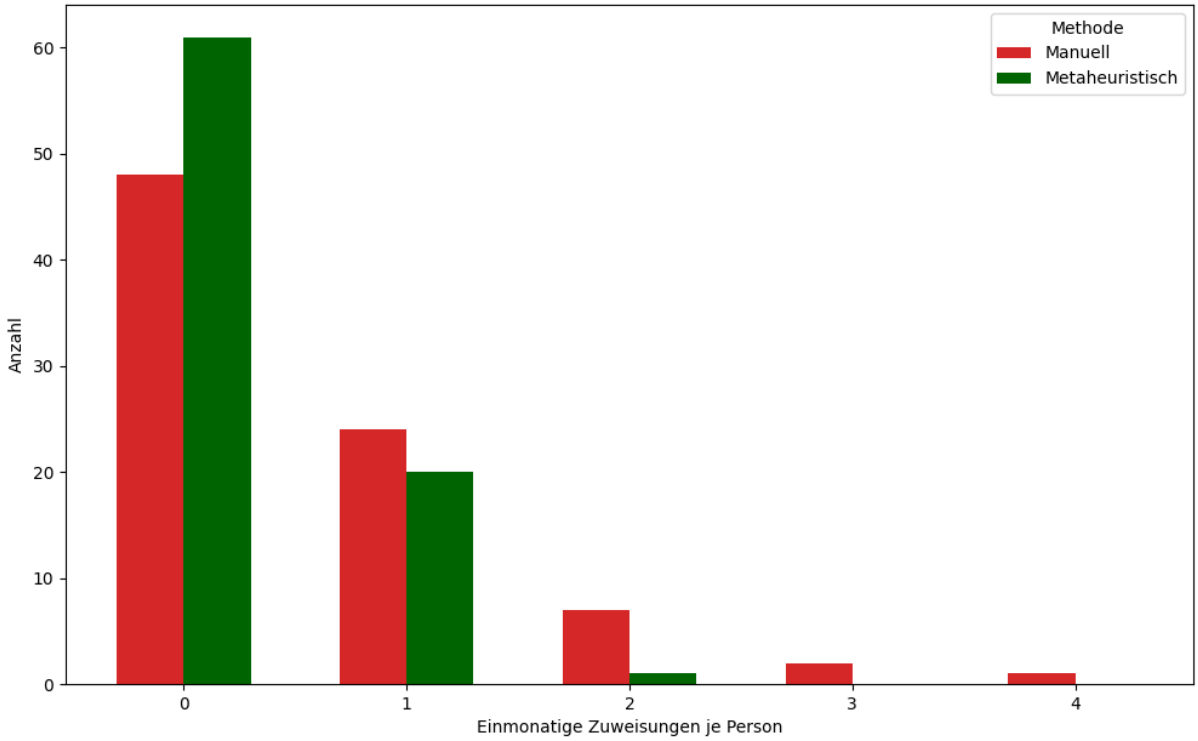


Abbildung 6.9: Krankenhauswechsel und Stehmonate je Person

mit vielen offenen Modulen können im Gegensatz zu den neun viele unnötige Wechsel eingespart werden. Einmonatige Zuweisungen können bei fast allen Personen auf eine oder keine reduziert werden.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.



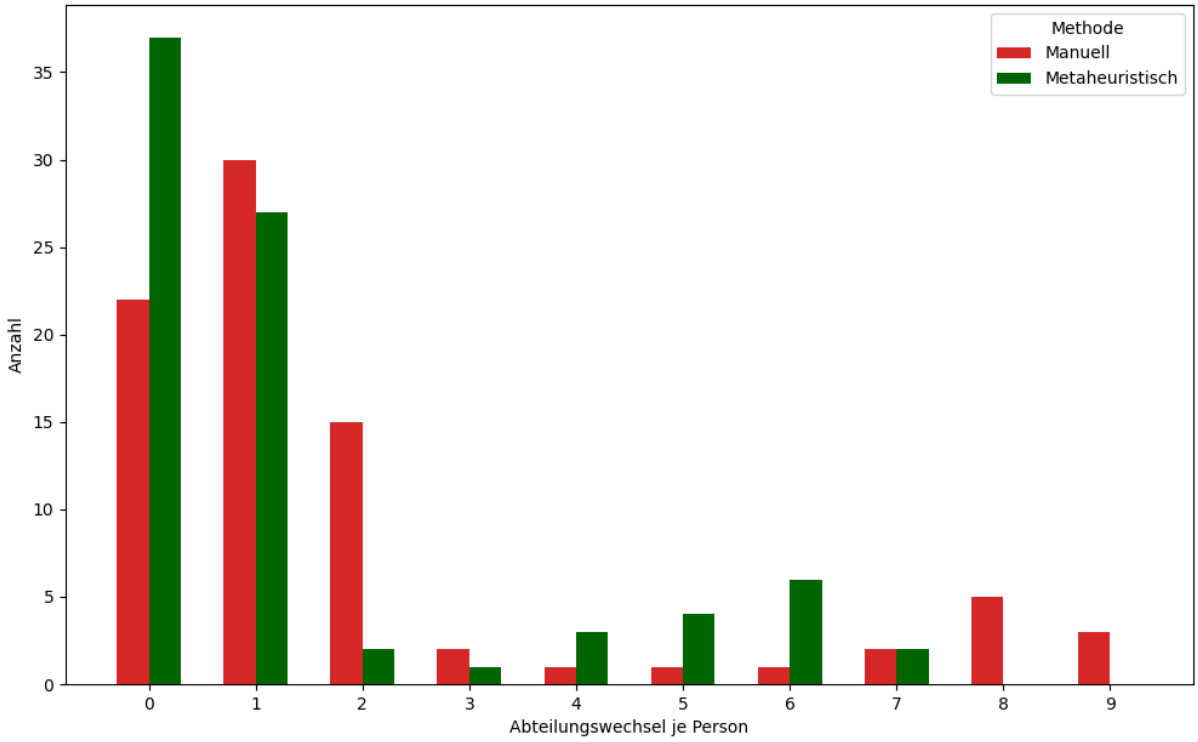


Abbildung 6.10: Einmonatige Zuweisungen und Abteilungswechsel je Person

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

7 Conclusio

Die vorliegende Diplomarbeit hat das komplexe Problem der Mediziner_innenausbildung in Österreich in Form eines exakten Mixed Integer Problems modelliert. Dabei wurde gezeigt, dass eine solche Darstellung sogar unter Verwendung ausschließlich linearer Nebenbedingungen und Zielfunktionen möglich ist.

Die Optimierung konnte auf einem realen Datensatz ausgeführt werden, jedoch konnte sie aufgrund der hohen Problemgröße und Komplexität wegen der Vielzahl an Nebenbedingungen mit der verfügbaren Rechenleistung nicht vollständig exakt durchgeführt werden. Eine bereits entwickelte Metaheuristik konnte in wesentlich kürzerer Zeit eine bessere Lösung für das vorliegende Problem finden. Sowohl das Mixed Integer Problem als auch der genetische Algorithmus lieferten deutlich bessere Ergebnisse als die manuelle Expert_innenlösung.

In einem Problem mit reduzierter Komplexität aufgrund einfacherer Zielfunktion konnte die exakte Optimierung bessere Ergebnisse in kürzerer Zeit erzielen als der genetische Algorithmus.
Zudem ermöglichte die Verwendung der Modellierungssprache GAMS einen Vergleich verschiedener Optimierungssolver. Dabei wurde festgestellt, dass trotz gleicher Problemstellung große Unterschiede in den Optimierungsleistungen der verschiedenen Solver bestehen. Insbesondere zeigte sich, dass CPLEX die besten Ergebnisse erzielte und somit als leistungsfähigster Solver hervorging.
Es hat sich weiters gezeigt, dass die exakte Optimierung bei hoher Problemkomplexität

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

nicht mit anderen näherungsweisen Methoden mithalten kann. Jedoch kann sie bei der Betrachtung einzelner Kriterien durchaus relevante Benchmarks liefern. Dies ist wichtig, da Metaheuristiken keinen Beleg für die Optimalität ihrer Lösung liefern können.

Insgesamt lässt sich also festhalten, dass die vorliegende Arbeit einen Beitrag zur Optimierung der Mediziner_innenausbildung in Österreich leisten kann. Die Verwendung einer Optimierungsmethode könnte den aktuellen Status Quo der Erstellung von Ausbildungsplänen für Medizinerinnen und Medizinern deutlich verbessern.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Literaturverzeichnis

[1] Bundesministerium für Gesundheit. Verordnung der Bundesministerin für Gesundheit über die Ausbildung zur Ärztin für Allgemeinmedizin/zum Arzt für Allgemeinmedizin und zur Fachärztin/zum Facharzt. `https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20009186`, Fassung vom 10.10.2023.

[2] Wiener Gesundheitsverbund. Ärztliche Ausbildung: Nach dem Studium. `https://ausbildung.gesundheitsverbund.at/aerztliche-ausbildung/nach-dem-studium/#toggle-id-18`, 2024. Zugriff am 11.01.2024.

[3] Rechnungshof Österreich. Bericht des Rechnungshofes betreffend Ärzteausbildung. `https://www.rechnungshof.gv.at/rh/home/home/A-rzteausbildung.pdf`, 2021.

[4] Österreichische Ärztekammer. Ärztestatistik für das Jahr 2022. `https://www.aerztekammer.at/daten-fakten`. Zugriff am 11.01.2024.

[5] Erhard M., Schoenfelder J., Fügener A., and Brunner J. State of the art in physician scheduling. *European Journal of Operational Research*, 265(1):1–18, 2018.

[6] Kraul S. Annual scheduling for anesthesiology medicine residents in task-related programs with a focus on continuity of care. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 32:181–212, 2020.

[7] Hollstein R. *Optimierungsmethoden*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 1st edition, 2023.

[8] Sudermann-Merx N. *Einführung in Optimierungsmodelle*. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 1st edition, 2023.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

[9] Kallrath J. *Gemischt-ganzzahlige Optimierung: Modellierung in der Praxis*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2nd edition, 2012.

[10] GAMS. General Algebraic Modeling Language. `https://www.gams.com/`, 2024. Zugriff am 24.02.2024.

[11] Guo J., Morrison D.R., Jacobson S.H., and Jokela J. Complexity results for the basic residency scheduling problem. *Journal of Scheduling*, 17:211–223, 2014.

[12] Kraul S., Fügener A., Brunner J., and Blobner M. A robust framework for task-related resident scheduling. *European Journal of Operational Research*, 276(2):656–675, 2019.

[13] Goldreich O. *P, NP, and NP-Completeness: The Basics of Computational Complexity*. Cambridge University Press, 2010.

[14] Akbarzadeh B. and Maenhout B. A decomposition-based heuristic procedure for the medical student scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 288(1):63–79, 2021.

[15] Smalley H. and Keskinocak P. Automated medical resident rotation and shift scheduling to ensure quality resident education and patient care. *Health Care Management Science*, 19:66–88, 2014.

[16] Ito M., Onishi A., Suzuki A., Imamura A., and Ito T. The Resident Scheduling Problem: A Case Study at Aichi Medical University Hospital. *Journal of Japan Industrial Management Association*, 68(4):259–272, 2018.

[17] Proano R.A. and Agarwal A. Scheduling internal medicine resident rotations to ensure fairness and facilitate continuity of care. *Health Care Management Science*, 21:461–474, 2018.

[18] Akbarzadeh B. and Maenhout B. An exact branch-and-price approach for the medical student scheduling problem. *Computers & Operations Research*, 129:1–17, 2021.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

[19] Zanazzo E., Ceschia S., Dovier A., and Schaerf A. Local Search Techniques for a Medical Student Scheduling Problem. *Proceedings of the 13th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling*, 3:84–87, 2022.

[20] Dummer W., Gaal A., Sobottka T., and Ansari F. A Genetic Algorithm Approach for Medical Resident Scheduling in Austria. *Towards a Smart, Resilient and Sustainable Industry. ISIEA 2023. Lecture Notes in Networks and Systems*, 745:321–332, 2023.

[21] Gaal A., Dummer W., Sobottka T., Ansari F., and Schlund S. Advancing Medical Resident Scheduling. *How Can Industrial Management Contribute to a Brighter Future?*, Schriftenreihe der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Arbeits- und Betriebsorganisation (WGAB) e.V:115–134, 2023.

[22] Chen V. and Hooker J. A guide to formulating fairness in an optimization model. *Annals of Operations Research*, 326:581–619, 2023.

[23] Microsoft Azure. Eav4- und Easv4-Serie. `https://learn.microsoft.com/de-de/azure/virtual-machines/eav4-easv4-series`, 2024. Zugriff am 10.03.2024.

[24] Rust. Rust Programming Language. `https://www.rust-lang.org/`, 2024. Zugriff am 26.02.2024.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Anhang

Der nachfolgende GAMS-Code ist für die Optimierung erforderlich. Aus Gründen der Platzersparnis und besseren Übersichtlichkeit sind die Variablen abgekürzt dargestellt. Die Datenvorverarbeitung zur Umwandlung der Eingaben in das gezeigte Format wurde extern in Python durchgeführt.

```
Sets
   P "Personen" / p843, p929, p979, ... /
   PB(P) "Personen Basis" / p843, p929, p979, ... /
   PS(P) "Personen Spitalsturnus" / p1203, p1254, p1304, ... /
   M "Monate" / m0*m37/

   DP "Dienstposten" / d0*d33, d301*d307 /
   DPA(DP) "Dienstposten Aktiv" / d0*d33 /
   DPS(DP) "Dienstposten Stehmonat" / d301*d307 /
   AS "Ausbildungsstellen" / a100*a123, a301*a307, a999 /
   ASA(AS) "Ausbildungsstellen Aktiv" / a100*a123 /
   ASS(AS) "Ausbildungsstellen Stehmonat" / a301*a307 /

   KH "Krankenhaus" / kh1*kh7 /
   I "Inhalte" / BasisC, BasisK, W_Neurologie, ...,  Psychiatrie /
   IB(I) "Inhalte Basis" / BasisC, BasisK /
   IS(I) "Inhalte Spitalsturnus" / W_Neurologie, W_Urologie, ..., Psychiatrie /
   IW(I) "Wahlfach" / W_Neurologie, W_Urologie, W_HNO, W_Intensiv, W_Haut /
   ISV(IS) "Inhalte Verpflichtend" / Orthopaedie, ..., Psychiatrie /

   dp_zu_as(AS,DP)  /a100. (d0)
```


Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

```
                    a101. (d0)
                    ...
                    a307.d307/

dp_zu_KH(KH,DP) /kh1. (d0,d301)
                 kh2. (d1,d302)
                 ...
                 kh7. (d27,d28,d29,d30,d31,d32,d33,d307) /

AS_zu_KH(KH,AS) /kh1. (a999,a100,a101,a102,a301)
                 kh2. (a999,a103,a104,a105,a106,a107,a302)
                 ...
                 kh7. (a999,a120,a121,a122,a123,a307) /

dp_zu_p(P,DP) "Zulaessige Dienstposten je Person" /
                 p843. (d301*d307, d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,d9,d12,d13,...,d33)
                 p929. (d301*d307, d2,d3,...,d33)
                 ...
                 p4404. (d301*d307,d0,d32,d1,d3,d4,d5,...,d30) /

as_zu_p(P,AS) "Zulaessige Ausbildungsstelle je Person" /
                 p843. (a999, a301*a307)
                 p929. (a999, a301*a307)
                 ...
                 p4404. (a999, a301*a307, a100,a101,a102,...,a123) /

dp_basis(IB,DP) "Dienstposten bei Basisinhalt" /
                 BasisC. (d32,d2,d4,d5,d6,d13,d14,d18,d20,d22,d23,d24,d25,
                     d27,d28)
                 BasisK. (d33,d3,d7,d8,d9,d12,d16,d19,d29,d30) /

as_inhalt(I,AS) "Ausbildungsstelle bei Inhalt" /
                 W_Neurologie. (a115,a101)
                 W_Urologie. (a122,a102)
```


Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

```
                    W_HNO. (a100)
                    W_Intensiv. (a114,a117,a109)
                    W_Haut. (a106,a107)
                    Orthopaedie. (a105,a110)
                    Innere. (a108,a111,a112,a113,a118,a119,a120,a121,a123)
                    Frauenheilkunde. (a116)
                    Kinder. (a104)
                    Psychiatrie. (a103) /

   M_P(P,M) "belegbare Monate Person" /
                    p843. (m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10,m11)
                    p929. (m0,m1,m2,m3,m4,m5)
                    ...
                    p4404. (m0,m1,m2,...,m22) /

   M_B(PB,M) "belegbare Monate Basis" /
                    p843. (m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10,m11)
                    p929. (m0,m1,m2,m3,m4,m5)
                    ...
                    p4284. (m0,m1,m2,m3,m4,m5) /

   M_Sp(PS,M) "belegbare Monate Spitalsturnus" /
                    p1203. (m1,m2,m4,m5,...,m23)
                    p1254. (m0,m1,m2,m4,...,m15)
                    ...
                    p4404. (m0,m1,m2,m3,...,m22) /
;

Table Ausbildung(P,I) "Offene Monate je Person/Modul"
             BasisC       BasisK       ...       Frauenheilkunde  Psychiatrie
 p843             9            9                           0              0
 p929             0            4                           0              0
 ...            ...          ...       ...             ...            ...
p4404             0            0       ...             2              3
```


Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

```
Table erledigte_Basis(PB,IB)
     BasisC   BasisK
 p843   0       0
 p929   4       1
 ...
p4284   3       2

Table kapa_dp(DP,M)
      m0    m1    m2    ...   m37
d0     1     1     1    ...     1
d1     6     6     6    ...     6
...
d33    11    10    11   ...    10

Table kapa_as(AS,M)
      m0    m1    m2    ...   m37
a100   1     1     1    ...     1
a101   1     1     1    ...     1
...
a123   5     5     5    ...     5
;

Parameter
  genehmigte_Monate(AS)    / a100 3, a101 3, a102 3, a103 3, ..., a123 6/
  Anzahl_Monate(P)         /p843 11, p929 6, p979 3, p985 11, ..., p4404 23 /
  Erste_Monate(P)          /p843 1, p929 0, p979 0, p985 0, ..., p4404 0 /
  Letzte_Monate(P)         /p843 11, p929 5, p979 2, p985 10, ..., p4404 22 /
  Anzahl_Monate_Basis(PB) /p843 11, p929 6, p979 3, p985 11, ..., p4284 6 /
  Erste_Monate_Basis(PB)  /p843 1, p929 0, p979 0, p985 0, ..., p4284 0 /
  Letzte_Monate_Basis(PB) /p843 11, p929 5, p979 2, p985 10, ..., p4284 5/
  Anzahl_Monate_SP(PS)     /p1203 22, p1254 15, p1304 4, p1343 17, ..., p4404 23
      /
  Erste_Monate_SP(PS)      /p1203 1, p1254 0 ,p1304 0, p1343 0, ..., p4404 0 /
```


Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

```
  Letzte_Monate_SP(PS)    /p1203 23, p1254 15, p1304 3, ..., p4404 22 /
;



Binary Variable
    x(P,DP,AS,M) "Assignments"
    c(P,M)       "Changes"
    h_c(P,M)     "Hospital Changes"
    SMA(P,M)     "Single month Assignments"
    w(PS,IW)     "assigned Wahlfach";
Integer Variable
    CP(P) "Person Changes"
    P_SM(P) "Stehmonate pro Person";

Variable
    obj;

x.fx(P,DP,AS,M)$(not dp_zu_as(AS, DP)) = 0;
x.fx(P,DP,AS,M)$(not M_P(P,M)) = 0;
x.fx(P,DP,AS,M)$(not as_zu_p(P,AS)) =0;
x.fx(PB,DP,'a999',M)$(not M_B(PB,M)) = 0;
x.fx(P,DP,'a999',M)$(not PB(P)) = 0;



Equations

    Zuweisung_Basis_mindest(PB, IB)
    Zuweisung_Basis_gesamt(PB)
    Zuweisung_Spitalsturnus(PS, ISV)
    Reihenfolge_B1(PB)
    Reihenfolge_B2(PB)
    Zuweisung_Wahlfach(PS, IW)
    Anzahl_Wahlfach(PS)
    Eine_Zuweisung_Monat(P,M)
```


Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

```
156     Anzahl_Stehmonate_2(P)
157     NB_kapa_DP(DPA,M)
158     NB_kapa_AS(ASA,M)
159     H_changes(P,KH,M)
160     Changes(P,DP,AS,M)
161     Person_total_changes(P)
162     Single_month_assignnment(P,M)
163     SMA_einmonat(P)
164     SMA_erster_Monat(P,M)
165     SMA_letzter_monat(P,M)
166     Stehmonat_m2(P)

168     objective
169     objective_Full;




173 Zuweisung_Basis_mindest(PB, IB)..
174     sum((DP,M)$(dp_basis(IB, DP) and M_B(PB,M)),x(PB,DP,'a999',M)) +
            erledigte_Basis(PB,IB)
175         =g= 1;

177 Zuweisung_Basis_gesamt(PB)..
178     sum((IB,DP,M)$(dp_basis(IB, DP) and M_B(PB,M)),x(PB,DP,'a999',M))
179     + sum(IB, erledigte_Basis(PB,IB))
180     =g= 9;

182 Zuweisung_Spitalsturnus(PS, ISV)..
183     sum((DP,AS,M)$(as_inhalt(ISV,AS) and dp_zu_as(AS, DP) and  M_Sp(PS,M)), x(
            PS,DP,AS,M))
184         =g= Ausbildung(PS, ISV);

186 Reihenfolge_B1(PB)$(PS(PB))..
187     sum((M,DPS,ASS)$(dp_zu_as(ASS,DPS) and M_B(PB,M) and ord(M) < (
```


Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

```
        Letzte_Monate_Basis(PB) - 1))
188     , x(PB,DPS,ASS,M))
189     + sum((M,IS,AS,DP)$(as_inhalt(IS, AS) and  dp_zu_as(AS, DP)
190         and M_B(PB,M) and ord(M)< (Letzte_Monate_Basis(PB))) ,x(PB,DP,AS,M))
191     =l= 1;

193 Reihenfolge_B2(PB)$(PS(PB))..
194     sum((M,DPS,ASS)$(dp_zu_as(ASS,DPS) and M_B(PB,M) and ord(M) < (
        Letzte_Monate_Basis(PB)))
195     , x(PB,DPS,ASS,M))
196     + sum((M,IS,AS,DP)$(as_inhalt(IS, AS) and dp_zu_as(AS, DP)
197         and M_B(PB,M) and ord(M) <= (Letzte_Monate_Basis(PB))) ,x(PB,DP,AS,M))
198     =l= 2;

200 Zuweisung_Wahlfach(PS,IW)..
201     sum((DP,AS,M)$(as_inhalt(IW,AS) and dp_zu_as(AS, DP) and  M_Sp(PS,M)), x(PS
        ,DP,AS,M))
202         =g= Ausbildung(PS,IW)-3*(1-w(PS,IW));

204 Anzahl_Wahlfach(PS)..
205     sum(IW, w(PS,IW)) =g= 2;

207 Anzahl_Stehmonate_2(P)..
208     sum((M,DPS,ASS)$dp_zu_as(ASS,DPS), x(P,DPS,ASS,M)) =g= 2;

210 Eine_Zuweisung_Monat(P,M)$M_P(P,M)..
211     sum((DP,AS), x(P,DP,AS,M)) =l= 1;

213 NB_kapa_DP(DPA,M)..
214     sum((P,AS), x(P,DPA,AS,M)) =l= kapa_DP(DPA,M);

216 NB_kapa_AS(ASA,M)..
217     sum((P,DP), x(P,DP,ASA,M)) =l= kapa_AS(ASA,M);
```


Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

```
219 H_Changes(P,KH,M)$(ord(M) > Erste_Monate(P) and ord(M) <= Letzte_Monate(P))..
220     sum((DP,AS)$(dp_zu_KH(KH,DP)), x(P,DP,AS,M)-x(P,DP,AS,M+1))
221         =l= h_c(P,M);

223 Violated_Preferences(PS)..
224     2-sum(IW$Pref(PS,IW),w(PS,IW)) =l= pref_vio(PS);

226 Changes(P,DP,AS,M)$(ord(M) > Erste_Monate(P) and ord(M) <= Letzte_Monate(P) and
227                         dp_zu_as(AS,DP))..
228         (x(P,DP,AS,M)-x(P,DP,AS,M+1) - sum((DPS,ASS),x(P,DPS,ASS,M+1))) =l= c(P
                ,M);

230 Person_total_changes(P)..
231         sum(M,c(P,M)) =l= CP(P);



234 Single_month_assignnment(P,M)..
235     1.5   - c(P,M) - c(P,M+1) - sum((DPS,ASS),x(P,DPS,ASS,M+2)) + SMA(P,M+1) =g
            = -5* sum((DPS,ASS),x(P,DPS,ASS,M+1));

237 SMA_einmonat(P)$(Anzahl_Monate(P) < 3.5)..
238     SMA(P,'m0') =g= 0.5  ;

240 SMA_erster_Monat(P,M)$(ord(M) = Erste_Monate(P)+1)..
241     SMA(P,M) =g= c(P,M) + sum((DPS,ASS),x(P,DPS,ASS,M+1)) - 3*sum((DPS,ASS),x(P
            ,DPS,ASS,M)) -0.5 ;

243 SMA_letzter_monat(P,M)$(ord(M) = Letzte_Monate(P))..
244     SMA(P,M) =g= c(P,M);

246 Stehmonat_m2(P)..
247   sum((M,DPS,ASS)$(ord(M)<= Letzte_Monate(P)-1),x(P,DPS,ASS,M))
248     =l= P_SM(P);
```


Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

```
251 objective.. 1* sum((P,M),h_c(P,M)) + 1* sum(P,P_SM(P)) =l= obj;

253 objective_F.. 2* sum((P,M),h_c(P,M)) + sum(P,P_SM(P))*3
254          + sum(P,CP(P)) +sum((P,M),SMA(P,M))*3 =l= obj;

256 Option Threads = 0;
257 option MIP = cplex;


260 Model Medizinerplanung_FULL /

262     Zuweisung_Basis_mindest,
263     Zuweisung_Basis_gesamt,
264     Zuweisung_Spitalsturnus,
265     Reihenfolge_B1,
266     Reihenfolge_B2,
267     Zuweisung_Wahlfach,
268     Anzahl_Wahlfach,
269     Eine_Zuweisung_Monat,
270     Anzahl_Stehmonate_2,
271     NB_kapa_DP,
272     NB_kapa_AS,
273     H_changes,
274     Changes,
275     Person_total_changes,
276     Single_month_assignnment,
277     SMA_einmonat,
278     SMA_erster_Monat,
279     SMA_letzter_monat,
280     Stehmonat_m2,
281     objective_Full
282 /;
```

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

```
284 Model Medizinerplanung_2_krit /

286     Zuweisung_Basis_mindest,
287     Zuweisung_Basis_gesamt,
288     Zuweisung_Spitalsturnus,
289     Reihenfolge_B1,
290     Reihenfolge_B2,
291     Zuweisung_Wahlfach,
292     Anzahl_Wahlfach,
293     Eine_Zuweisung_Monat,
294     Anzahl_Stehmonate_2,
295     NB_kapa_DP,
296     NB_kapa_AS,
297     H_changes,
298     Stehmonat_m2,
299     objective
300 /;

302 Solve Medizinerplanung_FULL using MIP minimizing obj;
303 *Solve Medizinerplanung_2_krit using MIP minimizing obj;
```

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.