DIPLOMARBEIT

Die Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen zur Bewertung in der Lebensversicherung

ausgeführt am

Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

durch

Dorothea Viktoria Zvonarich, BSc
Matrikelnummer: 01406188

Wien, am 9. September 2024

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Kurzfassung

Die vorliegende Diplomarbeit widmet sich der Entwicklung und Bewertung eines allgemein gültigen Marktmodells, das sowohl finanzielle als auch biometrische Risiken berücksichtigt und integriert. Um eine gezielte Bewertung von (allgemeinen) Lebensversicherungen (und deren Besonderheiten) vornehmen zu können, liegt eine der Hauptanforderungen an das Modell darin, die Dynamiken der Finanzmärkte und die Unsicherheiten biometrischer Ereignisse wie Tod oder Invalidität zu kombinieren. Die Berücksichtigung beider Risikokategorien in einem Raum resultiert aus dem Mängeln traditioneller Modelle, welche oft nur einen Ausschnitt der relevanten Komponenten abbilden.

Im ersten Abschnitt der Arbeit werden die erforderlichen technischen Grundlagen aus der Theorie der Finanz- und Versicherungsmathematik eingeführt und erläutert. Daraufhin wird das erweiterte Marktmodell vorgestellt, welches in dieser Arbeit durch die Einführung eines Produktraums erzielt wird und das Zusammenspiel zwischen den beiden Konzepten beschreiben soll. Dieses basiert auf dem Fundament des traditionellen Settings, jedoch erweitert durch die Annahme stochastischer Finanzmärkte, d.h. der Einführung eines äquivalenten Martingalmaßes, welches eine zentrale Rolle in der Bewertung in Finanzmärkten einnimmt.

Der wesentlichste Beitrag der Arbeit behandelt die Herleitung und Anwendung eines Bewertungsprinzips für Lebensversicherungsprodukte in diesem vergrößerten Rahmen. Dieses kombiniert bereits bekannte Konzepte aus der Finanz- und Versicherungsmathematik und basiert auf der Existenz eines eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes, welches beide Quellen der Unsicherheiten abdeckt.

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Personenbezeichnungen beziehen sich gleichermaßen auf weibliche, männliche und diverse Personen. Auf eine Doppelnennung und gegenderte Bezeichnungen wird zugunsten einer besseren Lesbarkeit verzichtet.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Abstract

This thesis focuses on the development and evaluation of a general market model that integrates both financial and biometric risks. In order to perform an evalaution of (general) life insurance products (and their specific features), one of the main requirements of the model is to combine the dynamics of financial markets with the uncertainties of biometric events such as death or disability. The consideration of both categories of risk within a single framework results from the shortcomings of traditional models which often capture only a subset of the relevant components.

In the first section, the necessary technical foundations from the theory of financial and insurance mathematics are introduced and explained. Afterwards, the extended market model is presented, which in this work is achieved through the introduction of a product space and aims to describe the interaction between these two concepts. This model is based on the foundation of the traditional setting, but is extended by the assumption of stochastic financial markets, i.e., the introduction of an equivalent martingale measure which plays a central role in the valuation in financial markets.

The most significant contribution of this thesis involves the derivation and application of a valuation principle for life insurance products within this expanded framework. This principle combines already known concepts from financial and insurance mathematics and is based on the existence of a unique equivalent martingale measure that covers both sources of uncertainty.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während der Erstellung dieser Diplomarbeit unterstützt haben.

Ich danke zuerst meinem Betreuer, Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold, für die kompentente Anleitung und die stetige Unterstützung, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ein herzliches Dankeschön geht an all meine WegbegleiterInnen, mit denen ich von der Schulzeit bis zum Abschluss meines Studiums viele schöne Momente erleben durfte. Ich hoffe, dass wir auch weiterhin unvergessliche Erlebnisse miteinander teilen können.

Ein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern und Geschwistern für ihre moralische Unterstützung und stets passende Worte. Sie haben mir nicht nur das Studium finanziell ermöglicht, sodern mich auch in allen Phasen meines Studiums motiviert und ermutigt.

Nicht zuletzt möchte ich meinem Freund Luka danken, der mit seinem Verständnis, Optimismus und seiner Geduld maßgeblich zur Ferstigstellung dieser Arbeit beigetragen hat.

Hvala za sve!

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 9. September 2024

Dorothea Viktoria Zvonarich

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Inhaltsverzeichnis

1 Notation **1**

2 Einleitung und Motivation **2**

3 Grundsätze **5**

4 Marktmodell für allgemeine Lebensversicherungsverträge **8**
4.1 Finanzmarktmodell 8
4.2 Arbitragefreiheit und äquivalente Martingalmaße 15
4.3 Produktraum für finanzielle und biometrische Risiken 20
4.3.1 Bewertungsansatz für Finanzportfolios 22

5 Allgemeine Lebensversicherungsverträge **26**
5.1 Einleitung 26
5.2 Lebensversicherungsverträge 26
5.2.1 Äquivalenzprinzip 27
5.3 Prämienberechnung für eine fondsgebundene Lebensversicherung 27
5.3.1 Beispiel 28

6 Klassische Bewertung in der Lebensversicherung **32**
6.1 Einleitung 32
6.2 Nettoprämienprinzip 33
6.2.1 Absicherungsstrategien 34
6.3 Anwendung an Lebensversicherungsprodukte 35

7 Allgemeine Bewertung in der Lebensversicherung **38**
7.1 Einleitung 38
7.2 Vorbereitungen 39
7.3 Bewertung im allgemeinen Fall 45
7.3.1 Haupttheorem 45
7.3.2 Beweis des Haupttheorems 51

8 Hedging und Diversifikation im Produktraum **56**
8.1 Absicherungsstrategien 56
8.2 Diversifikation 57
8.3 Beispiele 57
8.3.1 Ablebensversicherung 59
8.3.2 Gemischte Versicherung 61
8.3.3 Fondsgebundene Versicherung 62

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

9 Vergleich mit anderen Bewertungsmethoden **64**
9.1 Vorbereitungen und Annahmen 64
9.2 Bewertung 66

Tabellenverzeichnis **69**

Literaturverzeichnis **70**

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

1 Notation

Notation	Referenz	Definition
Finanzmarktmodell M^F	Marktannahmen (4.1.1)	Annahmen und Strukturen des Finanzmarktes
Portfolio θ	Definition 4.1.3	Vektor an Vermögenswerten bzw. Positionen in einem Finanzportfolio
Handelsstrategie $\theta_{\mathbb{T}}$	Definition 4.1.5	Handelsentscheidungen für alle $t \in \mathbb{T}$
Bewertungsprinzip π	Definition 4.1.7	Funktion, die den Wert eines Portfolios bestimmt
Äquivalentes Martingalmaß	Definition 4.2.5	Äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem der diskontierte Preisprozess ein Martingal ist.
Demographisches Modell	Annahme III (4.3.4)	Annahmen und Eigenschaften der demographischen Entwicklung
Produktraum $M^{F\times B}$	Annahme II (4.3.1)	Modell zur Beschreibung der finanziellen und biometrischen Risiken
Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}$	Lemma 7.3.2	Äquivalentes Martingalmaß zur Bewertung von Lebensversicherungsprodukten in $M^{F\times B}$
Lebensversicherungsvertrag $((\gamma_t,\delta_t)_{t\in\mathbb{T}})$	Definition 5.2.1	Vektor an Portfolios, welcher die Eigenschaften eines Lebensversicherungsprodukts beschreibt
Menge Θ	Definition 7.2.4	Menge an Portfolios im Produktraum $M^{F\times B}$
$\Theta'_{B\text{-i.i.d.}}$ und Θ'_K	Definition 7.2.4	Teilmengen von Θ, welche spezielle Klassen von LV Produkten repräsentieren
$H^*(\theta)=\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta]$	Lemma 7.3.2	Optimale Hedgingstrategie

Tabelle 1.1: Notation

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

2 Einleitung und Motivation

Lebensversicherungen in all ihren Formen erfreuen sich nach wie vor großer Beliebtheit und sind wesentliche Instrumente zur finanziellen Absicherung von Indivdiduen und ihren Familien. Sie bieten Schutz vor finanziellem Verlust durch Todesfall, Erwerbsunfähigkeit oder anderen biometrischen Risiken.

Diese biometrischen Risiken sind bei traditionellen Lebensversicherungsprodukten (z.B. klassischen Kapital- und Rentenversicherungen oder Ablebensversicherungen) die einzige Quelle der Unsicherheit. Für „moderne“ Produkte, wie fonds- oder indexgebundene Lebensversicherungen, bei welchen die Wertentwicklung und die Höhe der zukünftigen Leistungen von der Entwicklung der gewählten Investmentfonds oder eines bestimmten Aktienindizes abhängt, sind die traditionellen, klassischen Bewertungsmethoden jedoch unzureichend, da sie die finanziellen Risiken nicht umfassend berücksichtigen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun Antworten auf die folgenden Fragen zu geben:

- Wie hoch sollen die im Voraus zu zahlenden Prämien sein, damit diese den zukünftigen Verpflichtungen entsprechen?
- Welche mathematischen Modelle bieten das geeignetste Setting zur Bewertung von Lebensversicherungsverträgen?
- Wie können Absicherungsstrategien und Diversifikation effektiv implementiert werden?

Eine erste Abhilfe zu diesen Fragen schafft das **Äquivalenzprinzip**, welches eine grundlegende Methode zur fairen und nachhaltigen Prämienkalkulation in der Versicherungsmathematik darstellt. Dieses Prinzip der Kalkulation besagt, dass die zukünftigen Prämien derart hergeleitet werden sollen, dass die zukünftigen Versicherungsleistungen und die zukünftigen Prämieneinzahlungen koinzidieren. Zum Zeitpunkt des Vetragsabschlusses sollen daher die Preise der zukünftigen Cashflows gleich sein, d.h. Prämien- und Leistungsbarwert sollen übereinstimmen. Die Idee dahinter ist, dass die Verbindlichkeiten mit den Prämien in einer gewissen Art und Weise abgesichert werden können.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Traditionelle Lebensversicherungsmathematik

In der traditionellen Sichtweise der Lebensversicherungsmathematik, in welcher die Märkte als deterministisch angesehen werden, wird das obige Prinzip durch das **Nettoprämienprinzip** erzielt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\text{abgezinsten Prämien}] = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\text{abgezinsten Leistungen}]$$

Wird die Versicherung gegen eine Einmalprämie ausgegeben, so stimmt die Nettoprämie mit dem erwarteten Barwert der Versicherungsleistungen überein.

Diese Art der Bewertung lässt sich durch das **Gesetz der großen Zahlen** motivieren: Die durchschnittlichen zufälligen Leistungsbeträge des Versicherungsunternehmens aus dem Gesamtportfolio, welche aus einer großen Anzahl unabhängiger Versicherungsnehmer resultieren und angeben, welcher Anteil am kollektiven Gesamtschaden auf ein Kollektivmitglied entfällt, stimmen asymptotisch mit dem Erwartungswert überein.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das Äquivalenzprinzip somit die Grundlage für die faire Prämienkalkulation bildet, während das Gesetz der großen Zahlen sicherstellt, dass diese Kalkulation mit einer großen Anzahl von Versicherten tatsächlich verlässlich ist. Diese Konzepte ermöglichen den Versicherungsunternehmen eine effektivere Risikokontrolle und eine Diversifikation von Risiken. (vgl. [2] S.508-512)

Moderne Lebensversicherungsmathematik

Der Artikel von Fischer Tom mit dem Titel „*A law of large number approach to valuation in life insurance*“[7], der auch als Grundlage für diese Arbeit diente, beschäftigt sich mit der Bewertung von Produkten in der Lebensversicherung unter Berücksichtigung stochastischer Finanzmärkte und der daraus entstehenden Vielfalt an Produkten.

Das Äquivalenzprinzip soll auch unter diesen Bedingungen seine Gültigkeit behalten. Als Bewertungsprinzip wird weiterhin das Nettoprämienprinzip angewendet, allerdings mit einem anderen zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaß bzw. einer anderen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Berechnung des fairen Preises oder Wertes eines Vertrags erfolgt nach dem **Produktmaßprinzip**. Dieses Prinzip basiert auf einem Produktmaß, das durch die Kombination des gegebenen äquivalenten Martingalmaßes des Finanzmarktes mit dem biometrischen Maß gebildet wird.
Das **eindeutig** bestimmte Produktmaß ist ein **äquivalentes Martingalmaß** und dementsprechend wird der Preis – neben der Berücksichtigung von Ausscheidewahrscheinlichkeiten – nach dem in der Finanzmathematik bekannten No-Arbitrage Prinzip berechnet. Dieses hybride Bewertungsprinzip kombiniert die bewährten Konzepte der finanziellen und versicherungsmathematischen Bewertung und stellt sicher, dass beide Risikokomponenten angemessen berücksichtigt werden.
Die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit biometrischer Risiken und Finanzmarktrisiken erleichtert die Modellierung und Bewertung, da diese Komponenten dadurch separat behandelt werden können.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Absicherungsstrategien und Diversifikation

Im klassischen Fall wird die Prämie für ein Lebensversicherungsprodukt derart berechnet, dass das durchschnittliche Saldo pro Vertrag bei einer steigenden Anzahl von Versicherten fast sicher gegen Null konvergiert.
In einem stochastischen Finanzmarktumfeld folgt die soeben beschriebene Konvergenz nicht direkt aus dem berechneten Preis. Dieser soll vorrangig als Finanzierungsquelle für eine selbstfinanzierende **Absicherungsstrategie** dienen, die rein aus Elementen des Finanzmarkts besteht und die gewünschte Konvergenz sicherstellen soll. Das Hauptziel dieser Strategie ist es, zusammen mit den Prämieneinnahmen und den Erträgen aus der Absicherung, die finanziellen Verpflichtungen gegenüber dem Versicherten zu decken.
So soll **Diversifikation** (biometrischer Risiken) in der vorliegenden Arbeit verstanden werden: Durch das Zusammenspiel zwischen den verschiedenen Konzepten – dem Äquivalenz- und Produktmaßprinzip, dem resultierenden Preis, dem Kauf der Absicherung sowie der daraus resultierenden Konvergenz – sollen die Risiken über eine große Anzahl von Versicherungsnehmern verteilt werden.

Gliederung der Arbeit:

Die Arbeit gliedert sich in zwei Hauptblöcke: Zunächst wird eine theoretische Grundlage vorbereitet, welche als Rahmen zur Beschreibung biometrischer und finanzieller Risiken dient. Aufbauend darauf erfolgt die Bewertung von Lebensversicherungsprodukten: Der minimale Preis wird, motiviert durch das Gesetz der großen Zahlen, mithilfe des Produktmaßprinzips bestimmt.

Im direkt anschließenden dritten Kapitel werden informell acht Grundzüge der vorliegenden Arbeit beschrieben. Im vierten Kapitel wird zunächst das Finanzmarktmodell für die Modellierung der Wertpapiere erläutert, mit der anschließenden Einführung des Produktmodells. Das fünfte Kapitel definiert allgemeine Lebensversicherungsverträge und verdeutlicht das Äquivalenzprinzip mit Hilfe der, in dieser Arbeit verwendeten, Portfolionotation. Kapitel sechs wiederholt das klassische Bewertungsprinzip in der Lebensversicherung.

Den Kern der Arbeit behandelt das siebte Kapitel: die Herleitung des minimalen, fairen Preises für allgemeine Lebensversicherungsprodukte. Kapitel acht behandelt das Hedging im zugrunde liegenden Modell. Dem folgen drei Anwendungsbeispiele, sowie ein Vergleich mit einer alternativen Bewertungsmethode aus der Literatur in Kapitel neun.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

3 Grundsätze

Die folgenden acht Grundsätze aus dem Paper *„A law of large numbers approach to valuation in life insurance“* [7] sollen eine informelle Beschreibung des gewünschten Rahmens für die finanzielle und biometrische Modellierung sowie die Bewertung allgemeiner Lebensversicherungsprodukte widergeben. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden diese Grundsätze mathematisch präzisiert.
Das neue Framework, auf dem das eingeführte Bewertungsmaß basiert, übernimmt wesentliche Ideen und Annahmen aus der klassischen Versicherungsmathematik und kombiniert diese mit stochastischen Finanzmärkten.

1. **Unabhängigkeit biometrischer und finananzieller Ereignisse**
   Biometrische Ereignisse wie Tod oder Invalidität sollen vollständig unbeinflusst von den Entwicklungen am Finanzmarkt sein. Auch wenn hohe Korrelationen dieser beiden Märkte in der Rückversicherungsbranche vorkommen können, treten diese Effekte in der Lebensversicherung selten auf.

2. **Vollständige, arbitragefreie Finanzmärkte**
   Die Annahme vollständiger und arbitragefreier Finanzmärkte ist ein durchgängiger Grundsatz der gesamten Arbeit. Aus der Sicht der Versicherungsunternehmen ist diese Annahme durchaus realistisch, da diese in der Regel keine reinen Finanzprodukte in ihren Leistungsportfolios anbieten. Es kann davon ausgegangen werden, dass alle betrachteten Finanzprodukte entweder am Markt gehandelt werden, über Banken gekauft oder durch selbstfinanzierende Strategien nachgebildet werden können.

   Es ist jedoch erkennbar, dass ein Auszahlungsversprechen, welches auch von einem biometrischen Ereignis abhängt (wie dem Tod einer Person), nicht durch Finanzinstrumente abgesichert werden kann. Das bedeutet, dass der gemeinsame Markt für finanzielle und biometrische Risiken nicht vollständig ist.

3. **Unabhängigkeit biometrischer Komponenten einzelner Individuen**
   Diese Standardannahme der klassischen Lebensversicherung soll auch weiterhin ihre Gültigkeit bewahren.

4. **Große Gruppen ähnlicher Individuen**
   Der Ansatz der Bepreisung von Lebensversicherungsprodukten basierend auf dem Gesetz der großen Zahlen setzt auch implizit eine großen Anzahl an versicherten Personen in einem Versicherungsunternehmen voraus. Daneben wird oft auch noch eine stärkere Annahme gefordert: Kohorten von „ähnlichen“ Personen – gleiches Alter, Geschlecht und Gesundheitszustand – sind ebenfalls groß.

   Der Versicherer ist risikoneutral in Bezug auf das Sterblichkeitsrisiko, was bedeutet, dass er keine wirtschaftliche Entschädigung für die Übernahme des Risikos, das mit

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

den zufälligen Fälligkeitsterminen der künftigen Zahlungsströme verbunden ist, erhält. Aus diesem Grund heraus, sollte das Unternehmen in der Lage sein, mit einer großen Gruppe ähnlicher Risiken zurechtzukommen, selbst wenn alle Personen in der Kohorte dieselben Produkte besitzen.

Zu betonen ist, dass das hergeleitete Bewertungsmaß im Sinne von Annahme 7, auf unterschiedliche Lebensversicherungen und Personengruppen angewendet werden kann.

5. **Ähnliche Personen können nicht unterschieden werden**
   Aus Fairnessgründen sollten Personen, bei denen eine ähnliche biometrische Entwicklung zu erwarten ist, für dasselbe Versicherungsprodukt die gleiche Prämie bezahlen. Außerdem sollten auch jegliche Maßnahmen betreffend diese gleichartigen Risiken, wie zum Beispiel Absicherungsstrategien, übereinstimmen, solange die zukünftigen biometrischen Entwicklungen identisch und unabhängig voneinander sind.

6. **No-Arbitrage Prinzip**
   Durch die Herleitung und die Existenz eines risikoneutralen äquivalenten Martingalmaßes für die Bepreisung von Lebensversicherungsprodukten und Cashflows im zugrunde liegenden Produktraum, sollen Arbitragemöglichkeiten, also risikolose Gewinne, ausgeschlossen werden.

7. **Der minimale, faire Preis soll eine Absicherung garantieren, sodass das mittlere Saldo gegen Null konvergiert**
   Diese Annahme kann man mit derjenigen aus der klassischen Lebensversicherung vergleichen: Im klassischen Setting wird Versicherungen eine Nettoeinmalprämie zugewiesen, welche den Ewartungswert des Barwertes der Versicherung darstellt. Den mathematischen Zusammenhang zwischen dieser Art der Bepreisung und dem Prinzip der Unabhängigkeit biometrischer Komponenten liefert das Gesetz der großen Zahlen: Der Preis wird derart festgelegt, dass der Versicherer mit einer zunehmenden Anzahl an verkauften Verträgen, die von unabhängigen Personen abgeschlossen werden, eine Konvergenz des durchschnittlichen Endsaldos pro Vertrag gegen Null erreichen kann.

   Im allgemeinen Fall – wo Lebensversicherungsprodukte nicht mit den gängigen Methoden bepreist werden können – fordert man hingegen lediglich, dass der Preis jedes Vertrags zumindest den Ankauf einer finanziellen Absicherung abdecken soll. Dieser Hedge soll, analog zum klassischen Fall, sicherstellen, dass das mittlere Endguthaben pro Vertrag, bei einer wachsenden Anzahl an Versicherten, gegen Null konvergiert.

8. **Äquivalenzprinzip**
   Um das Äquivalenzprinzip im Setting stochastischer Finanzmärkte informell zu definieren, wird folgende Terminologie verwendet: Als den Marktwert (im Einklang mit Grundsatz 7 als *minimaler, fairer Preis* verstanden) eines Versicherungsvertrags wird jener Wert eines Cashflows bezeichnet, den man durch die Bewertung mit Hilfe von Marktpreisen entsprechender Wertpapiere, die keine biometrischen Risiken enthalten, erhält.

   Die eingenommenen Prämien sollen derart hergeleitet werden, dass ihr (Markt-)Wert

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

unter einem geeigneten Bewertungsmaß (Grundsatz 7), dem (Markt-)Wert der künftigen Zahlungen (Leistungen) an die Versicherten entspricht.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

4 Marktmodell für allgemeine Lebensversicherungsverträge

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, jenes (Versicherungs-)Modell vorzustellen, welches für die spätere Bewertung von allgemeinen Lebensversicherungsprodukten verwendet wird. Um eine breite Palette an Produkten abdecken zu können, unterliegen die im Folgenden eingeführten Preisprozesse von Finanzinstrumenten und die Entwicklung von biometrischen Ereignissen keinem speziellen Modell. Diese Herangehensweise ermöglicht eine größere Flexibilität und gewährleistet eine praxisnähere Abbildung in den Modellen.

Das in den folgenden Kapiteln schrittweise eingeführte Setting wird die Möglichkeit bieten, biometrische Wahrscheinlichkeitsräume (welche die Entwicklung der i-ten Person in einer betrachteten, unendlichen Kohorte beschreiben) mit finanziellen Wahrscheinlichkeitsräumen (die Veträge darstellen) zu verbinden. Diese Kombination führt zur Einführung eines Produktraums, der als stochastisches Marktmodell sowohl finanzielle als auch biometrische Ereignisse berücksichtigt.

Als Grundlage für diese Arbeit wird das Paper von Fischer T. „*A law of large number approach to valuation in life insurance*“ [7] herangezogen. Sofern nicht anders angegeben, richten sich die Informationen und die verwendete Notation an diese Publikation.

4.1 Finanzmarktmodell

Die folgenden Definitionen und Ausführungen sind, falls nicht anders angegeben, aus dem Hauptpaper [7] und aus den Vorlesungsunterlagen [4, Kapitel 1-2] entnommen worden.

Definition 4.1.1. Eine Familie von σ-Algebren $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für $s \leq t$ gilt, wird als Filtration bezeichnet.

- Als Indexmenge $\mathbb{T}$ wird meist $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \ldots, T\}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$ gewählt, wobei $t \in \mathbb{T}$ als ein Zeitpunkt interpretiert wird.

- Zu jedem dieser Zeitpunkte modelliert $\mathcal{F}_t$ die Menge der Ereignisse, welche den bis zu diesem Zeitpunkt verfügbaren Informationen entsprechen, das heißt der Informationsstand über den Verlauf eines Prozesses bis zu diesem Zeitpunkt ist bekannt.
  Die Inklusionen der σ-Algebren $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für $s \leq t$ geben an, dass keine Ereignisse „verloren“ gehen können. Die Informationen der Investoren über den Endzustand, der bei einem endlichen Zeithorizont bei $t = T$ erreicht wird, nehmen daher im Laufe der Zeit zu.

  In vielen Anwendungen wird $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_\mathrm{T} = \mathcal{F}$ angenommen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Fasst man all diese Eigenschaften zusammen, wird $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ als ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnet, wobei

- die Ergebnismenge Ω die abstrakte Darstellung des Zufalls darstellt und alle möglichen Ausgänge des „Experiments“ beinhaltet.
- $\mathcal{F}$ eine gegebene σ-Algebra ist, deren Elemente (= Ereignisse) Teilmengen der Ergebnismenge sind.
- $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ die dazugehörige Filtration darstellt, die in Definition 4.1.1 beschrieben wurde und
- $\mathbb{P}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß ist, welches als Mengenfunktion unter bestimmten Voraussetzungen den Ereignissen Werte im Intervall $[0, 1]$ zuordnet und somit Wahrscheinlichkeiten definiert.

Auf Basis der soeben allgemein formulierten Definition sei nun der im Folgenden definierte diskrete Finanzmarkt für $T \in \mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ von Interesse:

Definition 4.1.2. Ein Finanzmarkt in diskreter Zeit $\mathbb{T} = \{0, \dots, T\}$ wird durch einen $\mathbb{R}^d$-wertigen adaptierten, stochastischen Prozess $S = (S_t^0, \dots, S_t^{d-1})_{t=0}^T$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(F, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}, \mathbb{F})$ beschrieben.

(vgl. [7], S.39)

Marktannahmen

i) Der Finanzmarkt setzt sich aus d Wertpapieren zusammen, deren Preisprozesse durch einen $\mathcal{F}_t$-adaptierten Prozess $S = (S)_{t=0}^T = (S_t^0, \dots, S_t^{d-1})_{t=0}^T$ beschrieben werden. Dabei sind die stochastischen Funktionen S_t^i für $S_t^i : F \mapsto \mathbb{R}$ für alle $i = 0 \dots d-1$ und $t \in \mathbb{T}$ reellwertige Zufallsvariablen.

   Des Weiteren lassen sich diese d Anlagemöglichkeiten auf folgende Weise unterteilen:

   - Für $i = 1 \dots d-1$ beschreibt S_t^i den Preis des i–ten risikobehafteten Wertpapiers zum Zeitpunkt t.
   - Für $i = 0$ repräsentiert $(S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ die deterministische Preisentwicklung des risikolosen Wertpapiers, das durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet ist:

     $$S_0^0 = 1 \text{ und } S_{t+1}^0 > S_t^0 > 0\,, \text{ für alle } t \in \mathbb{T}.$$

     Dieses Finanzinstrument wird in vielen elementaren Modellen als eine Art Sparbuch interpretiert, wobei S_t^0 als das Ergebnis eines zum Zeitpunkt 0 angelegten Geldbetrages zum Zeitpunkt t darstellt, z.B. $S_t^0 = (1+r)^t$ mit einer konstanten Zinsrate $r \geq 0$. (vgl. [3], S.7)

   Die $\mathcal{F}_t$-adaptierten Prozesse gewährleisten, dass der Preis zum Zeitpunkt t aus den Informationen in $\mathcal{F}_t$ bestimmt werden kann.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

ii) Die Bedingung $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, F\}$ bedeutet, dass dem Investor zum Zeitpunkt $t = 0$ „keine Informationen“ zur Verfügung stehen und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ symbolisiert, dass zum Endzeitpunkt T alle Unsicherheiten bereinigt sind.

Die Menge $\{\mathcal{F}_0, \dots \mathcal{F}_T\}$ beschreibt die Entwicklung des Informationsgewinns im Laufe der Zeit.

iii) Der Markt ist friktionslos, was bedeutet, dass für die Umschichtung von Handelsstrategien keine Transaktionskosten anfallen und Gewinne nicht versteuert werden müssen. Zudem haben alle Marktteilnehmer freien Zugang zum Finanzmarkt.

iv) Die Menge $\mathbb{T} \setminus \{0\} = \{1, \dots, T\}$ beschreibt die möglichen Handelstage für die Wertpapiere.

Fasst man all diese Eigenschaften zusammen, so repräsentiert im Folgenden das Tupel

$$M^F = (F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F}, \mathbb{T}, S) \tag{4.1.1}$$

ein Finanzmarktmodell.

Handelsstrategien

Im nächsten Schritt wird ein Instrument eingeführt, welches Investitionen und Handel in die oben eingeführten Wertpapiere ermöglicht. Dazu werden einige Definitionen und Erläuterungen angeführt:

Definition 4.1.3. Ein Portfolio im Marktmodell M^F wird durch einen d-dimensionalen Vektor $\theta = (\theta^0, \dots, \theta^{d-1})$ beschrieben. Die einzelnen Komponenten dieses Vektors sind reellwertige Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(F, \mathcal{F}_T, \mathbb{F})$, das heißt Funktionen der Form $\theta^i : F \mapsto \mathbb{R}$, für alle $i = 0 \dots d-1$.
Die Menge aller möglichen Portfolios wird mit Θ bezeichnet.

Investoren verwenden für ihre Handelsentscheidungen die ihnen zum Zeitpunkt t zur Verfügung stehenden Informationen:

Definition 4.1.4. Ein Portfolio zu einem bestimmten Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ ist ein Vektor $\theta_t = (\theta_t^0, \dots, \theta_t^{d-1})$, dessen Komponenten $\mathcal{F}_t$-messbare Zufallsvariablen sind. Diese Art von Portfolio wird als *t-Portfolio* bezeichnet und verfügt durch die Eigenschaft der Adaptiertheit alle bis zum Zeitpunkt t aufgetretenen Informationen.

Eine Handelsstrategie ist eine Ansammlung von t-Portfolios $(\theta_t)_{t\in\mathbb{T}}$, welche wie folgt formal beschrieben wird:

Definition 4.1.5. Eine *Handelsstrategie* für einen Preisprozess S ist ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess

$$\theta_{\mathbb{T}} = (\theta_t)_{t\in\mathbb{T}} = (\theta_t^0, \dots, \theta_t^{d-1})_{t=0}^T.$$

Dabei entsprechen die Elemente θ_t dieses Prozesses den in Definition 4.1.4 beschriebenen t-Portfolios. Die Gesamtheit all solcher Strategien wird mit $\tilde{\Theta}$ bezeichnet.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Die Elemente θ_t^i für $i = 0 \dots d-1$ und alle $t \in \mathbb{T}$ werden folgendermaßen definiert:

i) θ_t^i repräsentiert die Anzahl der Einheiten eines Wertpapieres $i = 1 \dots d-1$, welche im Zeitraum $[t, t+1)$ gehalten wird.

ii) θ_t^0 ist derjenige Geldbetrag, der in das risikolose Wertpapier S_t^0 angelegt und bis zum Zeitpunkt $t+1$ gehalten wird.

Auf Grundlage der bis zum Zeitpunkt t beobachteten Preise, kann nun von Investoren eine dynamische Zusammensetzung θ_t gewählt werden, die bis zum nächsten Zeitpunkt $t+1$ gehalten wird. Diese Entscheidung beruht auf der $\mathcal{F}_t$-Adaptiertheit der Handelsstrategie. Im Allgemeinen liefert die Filtration zum Zeitpunkt t nicht nur Informationen über die Wertpapierpreise, sondern erteilt auch Auskunft z.B. über ökonomische Faktoren. (vgl. [3], S.8)

Damit gilt:

- $\theta_t S_t$ bezeichnet den Wert der Handelsstrategie zur Zeit t, also den Betrag, der neu investiert werden kann.
- $\theta_t S_{t+1}$ repräsentiert den Wert der Handelsstrategie zum Zeitpunkt $t+1$.

Definition 4.1.6. Der Preisprozess der risikolosen Anlage $(S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ wird auch als Diskontierungsfaktor (*"Numéraire"*) verwendet. Benutzt man diesen als Bezugsgröße für die anderen Wertpapiere S_t^i, definiert man

$$\hat{S}_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}$$

und

$$\hat{S}_t^0 := \equiv 1$$

für $i \in \{1, \dots d-1\}$ und $t \in \{0, \dots, T\}$.

Ausgehend von dieser Notation führt dies zur Definition des diskontierten Preisprozesses

$$\hat{S} := (\hat{S}_t^1, \dots, \hat{S}_t^{d-1}) \text{ und } \hat{S}_t^0 \equiv 1 \text{ für } t = 0, \dots, T.$$

Hierbei repräsentiert $\hat{S}_t^i$ den Wert des i-ten Wertpapiers zum Zeitpunkt t, ausgedrückt in Einheiten des risikolosen Wertpapiers. Alternativ ausgedrückt, versteht man unter dem diskontierten Preisprozess die zinsbereinigte Wertentwicklung der Anlagegüter, was einen Preisvergleich über verschiedene Zeitpunkte hinweg möglich macht.

Bewertungsprinzip

Der Wert eines Portfolios oder einer Handelsstrategie $\theta_{\mathbb{T}}$ wird durch ein Bewertungsprinzip π^F auf der Menge der Portfolios Θ bestimmt.

Für die folgende Definition soll gelten:

$$H = \{X | X \text{ ist ein adaptierter, reellwertiger stochastischer Prozess}\}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Definition 4.1.7. Ein Bewertungsprinzip π^F: $\Theta \mapsto H$ ist eine lineare Abbildung mit Definitionsbereich Θ und Zustandsraum H. Es ordnet jedem Portfolio $\theta \in \Theta$ einen adaptierten stochastischen Prozess in H zu, d.h. $\pi^F(\theta) = (\pi_t^F(\theta))_{t\in\mathbb{T}}$ mit

$$\pi_t^F(\theta) = \langle \theta, S_t \rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \theta^i S_t^i \tag{4.1.2}$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ für die gilt, dass θ $\mathcal{F}_t$-messbar ist. Die Klammer $\langle ., . \rangle$ bezeichnet das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$.

Typische Anwendung

Für ein $\mathcal{F}_T$-messbares Portfolio θ stellt der Ausdruck $\langle \theta, S_T \rangle$ einen contingent claim dar. Diese Finanzinstrumente sind so gestaltet, das ihre Auszahlungen oder Werte von einem zukünftigen, ungewissen Ereignis abhängen und nur dann fällig sind, wenn bestimmte Bedingungen erfüllt sind. Diese Bedingungen können von verschiedenen Ereignissen abhängig sein, wie zum Beispiel Tod oder Invalidität einer Person (Lebensversicherung) oder dem Erreichen eines bestimmten Preises eines Vermögenswertes.
Betrachtet man als Beispiel eine Unterkategorie von contingent claims, nämlich Derivate, so hängt deren Wert von den Preisbewegungen eines zugrunde liegenden Vermögenswerts ab. Call-Optionen mit der Auszahlung $\langle \theta, S_T \rangle = (S_T - K)^+$ sind typische Vertreter dieser Kategorie. Der bestehende Markt wird um diesen zugehörigen Preisprozess erweitert:

$$S' = (S_t^0, \dots S_t^{d-1}, (S_T - K)^+)$$

Bemerkung:

- Der Prozess $\pi^F(\theta) = (\pi_t^F(\theta))_{t\in\mathbb{T}}$ wird oft als Preisprozess des Portfolios θ bezeichnet. Für den Fall, dass θ $\mathcal{F}_t$-messbar ist (üblicherweise wird nur $\mathcal{F}_T$-Messbarkeit vorausgesetzt), beschreibt die Summe aus Gleichung (4.1.2) den Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t.

- Liegt eine Handelsstrategie $\theta_{\mathbb{T}}$ vor, kann der $\mathcal{F}_t$-adaptierte Prozess aus Definition (4.1.7) als der Wertprozess der Strategie $\theta_{\mathbb{T}}$ interpretiert werden. Dabei beschreibt $V_t^{\theta_{\mathbb{T}}} := \pi_t^F(\theta)$ den Wert der Strategie zum Zeitpunkt t.

  * Der dazugehörige diskontierte Wertprozess mit Anfangskapital $\theta_0^0 + \sum_{i=1}^{d-1} \theta_0^i \hat{S}_0^i$ wird mit $\hat{V}_t^{\theta_{\mathbb{T}}}$ notiert.

Zusätzlich zu dieser Kennzahl können die akkumulierten Gewinne oder Verluste bis zum Zeitpunkt t mit Hilfe eines stochastischen Integrals in diskreter Zeit dargestellt werden:

Definition 4.1.8. Sei $\hat{S} := (\hat{S}_t^1, \dots, \hat{S}_t^{d-1})$ ein Modell für die diskontierten Aktienpreise, wobei $\hat{S}_t^0 \equiv 1$ für $t = 0, \dots, T$ und sei $\theta_{\mathbb{T}} = (\theta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ eine Handelsstrategie. Das stochastische Integral in diskreter Zeit $\theta \cdot \hat{S}$ ist ein reellwertiger stochastischer Prozess $(\langle \theta, \hat{S}_t \rangle)_{t=0}^{T-1}$ und

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

der diskontierte Gewinnprozess zum Zeitpunkt t bezüglich der Strategie $\theta_{\mathbb{T}}$ wird definiert durch:

$$G_t := \langle \theta, \hat{S} \rangle_t = \sum_{u=0}^{t} \langle \theta_u, \Delta \hat{S}_u \rangle =$$

$$\sum_{u=0}^{t} \langle \theta_u, \hat{S}_{u+1} - \hat{S}_u \rangle = \sum_{u=0}^{t} \sum_{i=1}^{d-1} \theta_u^i (\hat{S}_{u+1}^i - \hat{S}_u^i) \tag{4.1.3}$$

Bemerkung:

i) An diesem Punkt der Arbeit sind die Eigenschaften der Handelsstrategie noch nicht näher spezifiziert (siehe dazu z.B. die Definition der selbstfinanzierenden Strategie in Definition 4.1.9).
Der Grund für das Entfallen der ersten Komponente in (4.1.3) liegt in der Verwendung der diskontierten Darstellungsweise. Die Differenz $(\hat{S}_{u+1}^0 - \hat{S}_u^0)$ ist zu jedem Zeitpunkt gleich Null, daher ist auch die entsprechende Position in der risikolosen Anlage nicht weiter von Bedeutung.

ii) Wenn nun der Strategie $(\theta_t)_{t \in \mathbb{T}}$ gefolgt wird, modelliert die Zufallsvariable G_t, die im gegebenen diskreten Zeitrahmen eine einfach Riemann-Summe darstellt, die akkumulierten Gewinne oder Verluste bis zum Zeitpunkt t.

Falls die Strategie bis zum Schluss gehalten wird, kann der gesamte Gewinn oder Verlust folgendermaßen berechnet werden:

$$G_T = \langle \theta_{\mathbb{T}}, \hat{S} \rangle_T = \sum_{t=0}^{T-1} \langle \theta_t, \hat{S}_{t+1} - \hat{S}_t \rangle \tag{4.1.4}$$

Der Raum

$$G = \left\{ \langle \theta, \hat{S} \rangle_T = \sum_{t=0}^{T-1} \langle \theta_t, \hat{S}_{t+1} - \hat{S}_t \rangle \,|\, \theta_t \text{ t-Portfolio} \right\} \tag{4.1.5}$$

beschreibt alle möglichen Auszahlungsfunktionen zum Zeitpunkt T, die von den Ergebnissen in F abhängen und die mit der Handelsstrategie $\theta_{\mathbb{T}} = (\theta_t)_{t \in \mathbb{T}}$ repliziert werden können.

Selbstfinanzierende Strategien

Die folgenden Informationen zu diesem Unterkapitel habe ich großteils aus *„The mathematics of arbitrage“* von F. Delbaen und W. Schachermayer [5, Kapitel 2] entnommen.

Eine spezielle Art einer Handelsstrategie, bei welcher sich eine Wertänderung des Portfolios nur durch die Änderung der Marktpreise der im Portfolio enthaltenen Vermögenswerte ergibt, wird als eine *selbstfinanzierende Strategie* bezeichnet.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Definition 4.1.9. Eine Handelsstrategie $\theta_{\mathbb{T}}$ heißt selbstfinanzierend, wenn für alle $t = 1 \dots T$ gilt:

$$\langle \theta_{t-1}, S_t \rangle = \langle \theta_t, S_t \rangle$$

oder explizit ausgedrückt

$$\sum_{i=0}^{d-1} \theta_{t-1}^i S_t^i = \sum_{i=0}^{d-1} \theta_t^i S_t^i$$

Diese Tatsache bedeutet Folgendes: Wenn ein Investor die Marktpreise S beobachtet, passt er seine selbstfinanzierende Handelsstrategie von θ_{t-1} zu θ_t an. Das heißt der zum Zeitpunkt t erwirtschaftete Betrag $\theta_{t-1}S_t$, der durch das Halten der Strategie während der Periode $[t-1, t)$ erzielt wurde, wird in θ_t reinvestiert, ohne jedoch das Gesamtvermögen zu ändern.

Bei diesem Anpassungsvorgang kommt es weder zu externen Geldeinflüssen, noch wird Vermögen konsumiert. Die Zusammensetzung wird lediglich so angepasst, dass der aktuelle Wert erhalten bleibt.

- Sei $\hat{\theta}_{\mathbb{T}} = (\hat{\theta}_t)_{t\in\mathbb{T}} = (\hat{\theta}_t^1, \dots, \hat{\theta}_t^{d-1})_{t=0}^T$ eine $\mathbb{R}^{d-1}$-wertige Handelsstrategie für die risikobehafteten Wertpapiere. Diese Strategie ergibt sich durch das Weglassen der ersten Komponente der initialen Strategie $(\theta_t)_{t\in\mathbb{T}} = (\theta_t^0, \dots, \theta_t^{d-1})_{t=0}^T$. Daher gilt: $\hat{\theta}_t^i = \theta_t^i$ für $i = 1 \dots d-1$.

  Es kann gezeigt werden, dass zu jeder Handelsstrategie $\hat{\theta}_{\mathbb{T}}$ stets eine zugehörige Strategie $(\theta_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ existiert, sodass die gesamte Strategie $(\theta_t^0, \dots, \theta_t^{d-1})_{t=0}^T$ selbstfinanzierend ist. Wird zusätzlich $\theta_0^0 = 0$ verlangt, so ist die Eindeutigkeit dieser Erweiterung gesichert.

  Aus wirtschaftlicher Sicht betrachtet, kann dies folgendermaßen interpretiert werden: Wird das risikolose Wertpapier S^0 als ein Bankkonto betrachtet, bekommt dieses einerseits zu den Handelszeitpunkten die Gewinne und Verluste aus den $d-1$ Wertpapieren ab, andererseits dient es auch als „Geldquelle“ für Investitionen in die risikobehafteten Wertpapiere. Beginnt man mit einem leeren Konto ($\theta_0^0 = 0$), so hängt die Entwicklung von $(\theta_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ eindeutig von den Anteilen ab, welche man in den $d-1$ risikoreichen Wertpapieren hält. Dies resultiert in den Handelsstrategien $(\hat{\theta}_t)_{t\in\mathbb{T}} = (\hat{\theta}_t^1, \dots, \hat{\theta}_t^{d-1})_{t=0}^T$ und $(\theta_t)_{t\in\mathbb{T}} = (\theta_t^0, \dots, \theta_t^{d-1})_{t=0}^T$, welche wie beschrieben in einer eindeutig definierten Beziehung zueinander stehen.

  Für jede Handelsstrategie $\hat{\theta}_{\mathbb{T}}$ und die eindeutig dazugehörige selbstfinanzierende Strategie $\theta_{\mathbb{T}}$ kann der diskontierte Wertprozess $\hat{V}_t^{\theta_{\mathbb{T}}}$ folgendermaßen dargestellt werden:

$$\hat{V}_t^{\theta_{\mathbb{T}}} = \hat{V}_0^{\theta_{\mathbb{T}}} + \sum_{u=0}^{t} \langle \theta_u, \Delta\hat{S}_u \rangle = \hat{V}_0^{\theta_{\mathbb{T}}} + \hat{G}_t \tag{4.1.6}$$

  Aus der Darstellung ist ersichtlich, dass der Wertprozess einer (selbstfinanzierenden) Handelsstrategie als Summe des diskontierten Anfangskapitals und des diskontierten Gewinnprozeses dargestellt werden kann.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Von nun an wird – sofern nicht anders erwähnt – der Fokus auf selbstfinanzierende Handelsstrategien mit diskontierten Preisprozessen $\hat{S}$ und dazugehörigen Wertprozessen $\hat{V}_t^{\theta_\mathbb{T}}$ gelegt.

Notation: $\hat{V}_t^{\theta_\mathbb{T}}$ soll die Notation für den Wertprozess beider Strategien, sowohl $(\hat{\theta}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ als auch $(\theta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ zu verstehen sein, wobei diese im zuvor erläuterten Verhältnis zueinander stehen.

4.2 Arbitragefreiheit und äquivalente Martingalmaße

Definition 4.2.1. Sei $\hat{S}_t := (\hat{S}_t^1, \dots, \hat{S}_t^{d-1})$ ein Finanzmarktmodell. Dann gilt:

i) Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\theta_\mathbb{T} \in \tilde{\Theta}$ wird als Arbitragestrategie (risikoloser Gewinn) bezeichnet, falls der dazugehörige Wertprozess $\hat{V}$ folgende Kriterien erfüllt:

$$\hat{V}_0 = 0,\ \mathbb{F}(\hat{V}_T \geq 0) = 1 \ \mathbb{F}\text{-f.s. und } \mathbb{F}(\hat{V}_T > 0) > 0, \tag{4.2.1}$$

wobei $\mathbb{F}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

ii) Ein Modell wird als arbitragefrei bezeichnet oder es erfüllt die No-Arbitrage Bedingung (NA), falls keine Arbitragestrategie existiert.

(vgl. [3], S.11)

Daher ist festzuhalten: Arbitrage ist möglich, falls eine Handelsstrategie existiert, bei welcher der dazugehörige Wertprozess mit einem Anfangskapital von Null einen nichtnegativen Wert zum Zeitpunkt T ergibt.

Die obige Definition formalisiert ein wichtiges Konzept der Finanzmathematik, welches besagt, dass ein mathematisches Finanzmarktmodell keine Arbitrage erlauben darf.

Bemerkung. Es lässt sich zeigen, dass der Raum G in Gleichung (4.1.5) ein Unterraum des Vektorraums $L^0(F, \mathcal{F}_T, \mathbb{F})$ ist. Der Quotientenraum

$$L^0(F, \mathcal{F}_T, \mathbb{F}) := \mathcal{L}^0 \backslash \mathcal{N} = \{[X] := X + \mathcal{N} | X : F \mapsto \mathbb{R}, X \text{ ist } \mathcal{F}_T \text{ -messbar}\}$$

mit

$$\mathcal{N} = \{X \in \mathcal{L}^0 \mid X \equiv 0 \ \mathbb{F}\text{-f.s.}\}$$

und

$$[X] = [Y] \Leftrightarrow X \sim Y \Leftrightarrow X = Y \ \mathbb{F}\text{-f.s.}$$

umfasst alle reellwertigen, $\mathcal{F}_T$-messbaren Zufallsvariablen, wobei zwei Elemente als äquivalent betrachtet werden, wenn sie sich nur um ein Element von $\mathcal{N}$ unterscheiden, daher $X = Y$ $\mathbb{F}$-f.s. gilt.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Das Konzept der Arbitragemöglichkeit (4.2.1) kann nun folgenderweise formal beschrieben werden:

Definition 4.2.2. Ein Finanzmarkt $\hat{S}$ erfüllt die No-Arbitrage Bedingung (NA) falls

$$G \cap L^0_+(F, \mathcal{F}_T, \mathbb{F}) = \{0\}$$

mit $L^0_+ = \{X \in L^0(F, \mathcal{F}_T, \mathbb{F}) | X \geq 0\}$.

Äquivalente Martingalmaße und FTAP

Für diesen Abschnitt habe ich mich an *„Fixed Income Modelling“* von C. Munk [12, S. 76-78] und *„Discrete-time Asset Pricing Models in Applied Stochastic Finance“* von P-C.G. Vassiliou [15, Kapitel 6] orientiert.

Wie in der Einführung beschrieben, wird für die Bewertung von (allgemeinen) Versicherungsprodukten auf eine Standardmethode der Finanzmathematik zurückgegriffen: Der Preis eines Finanzinstrumentes wird durch den *risikoneutralen Erwartungswert* des diskontierten zukünftigen Payoffs bestimmt.

Diese „risikoneutrale“ Welt wird, vereinfacht gesagt, durch einen Wechsel des verwendeten Wahrscheinlichkeitsmaßes dargestellt.

Bemerkung. Das Wahrscheinlichkeistmaß $\mathbb{P}$ stellt die „wahren“, in der realen Welt verwendeten Wahrscheinlichkeiten dar. Im Gegensatz dazu soll $\mathbb{Q}$ die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten präsentieren.

Es ist wünschenswert, dass Ereignisse, denen unter beiden Maßen die Wahrscheinlichkeit Null zugewiesen wird, übereinstimmen.

Definition 4.2.3. Zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum heißen *äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße* ($\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$), falls

$$\mathbb{Q}(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{A}) = 0 \quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}. \tag{4.2.2}$$

Einerseits stimmen bei einem Maßwechsel die Nullmengen überein, andererseits werden anderen Ereignissen verschiedene Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. Auf diese Weise ändern sich auch die Gewichte, mit denen die Erwartungswerte der Zufallsvariablen, die auf diesen Wahrscheinlichkeitsräumen definiert sind, berechnet werden.

Martingale

Ein wichtiges Wahrscheinlichkeitsmaß, welches eine tragende Rolle bei der Bewertung von Finanzinstrumenten spielt, ist das Martingalmaß. Unter einem solchen Maß werden alle diskontierten Preisprozesse der Wertpapiere zu Martingalen:

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Definition 4.2.4. Sei $\hat{S}_t$ ein $\mathcal{F}_t$-adaptierter Prozess mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mid \hat{S}_t \mid] < \infty, \forall t \in \{0, \ldots, T\}$. Der Prozess ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal, falls gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{S}_t \mid \mathcal{F}_s] = \hat{S}_s \text{ für } 0 \leq s \leq t \leq T.$$

(vgl.[3], S.181)

Martingale sind letztlich eine mathematische Beschreibung eines „fairen Spiels“: Für jedes $s \in \{0, \ldots, T\}$ und $t > s$ beträgt der erwartete Gewinn

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{S}_t - \hat{S}_s \mid \mathcal{F}_s] = 0$$

für die Informationen, die bis zum Zeitpunkt s beobachtbar sind. Wie im Folgenden zu sehen sein wird, ist es daher möglich, dass ein stochastischer Prozess unter dem ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ die Martingaleigenschaft nicht erfüllt, dies jedoch unter einem passenden, äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ möglich ist:

Definition 4.2.5. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum heißt *risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß* oder *äquivalentes Martingalmaß*, falls die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$

ii) Für jedes der $i = 1 \ldots d-1$ Wertpapiere ist der diskontierte Preisprozess $(\hat{S}^i_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal.

iii) Die Zufallsvariable $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ besitzt eine endliche Varianz.

(vgl.[12], S.92)

Dieser spezielle Maßwechsel hat eine entscheidende Auswirkung auf die Bewertung von Finanzinstrumenten, da garantiert wird, dass die erwarteten zukünftigen Gewinne fair, also Null, sind. Dies ist eine grundlegende Voraussetzung für die Arbitragefreiheit in einem Finanzmarkt.

- Im weiteren Verlauf der Arbeit wird das äquivalente Martingalmaß mit der englischen Abkürzung EMM für „Equivalent Martingal Measure“ bezeichnet.
- Die Klasse aller äquivalenten Martingalmaße für den diskontierten Preisprozes $\hat{S}$ wird mit $\mathcal{P}(\hat{S})$ bezeichnet.

Bemerkung. Betrachtet man diesen Maßwechsel aus der ökonomischen Perspektive, kann festgehalten werden, dass diese risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ausschließlich durch Marktpreise bestimmt werden und nicht durch den „Grad der Überzeugung“.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Radon-Nikodym Dichte

Die strikt positive Zufallsvariable

$$Z := \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \tag{4.2.3}$$

stellt den Zusammenhang zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ dar und wird als *Radon-Nikodym Dichte* von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\mathbb{P}$ bezeichnet.

Theorem 4.2.6. *Seien $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ zwei äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße auf demselben Wahrscheinlichkeistraum. Dann existiert die durch (4.2.3) definierte Zufallsvariable Z und erfüllt folgende Eigenschaften:*

i) $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$

ii) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z] = 1$

iii) Für jede Zufallsvariable X gilt: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[ZX]$,

wobei $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X]$ dem Ewartungswert unter $\mathbb{Q}$ entspricht.

(vgl. [15], S.196)

Fundamentalsatz der Arbitragepreistheorie (FTAP)

Die No-Arbitrage Bedingung (NA) lässt sich nun mithilfe der Existenz von äquivalenten Martingalmaßen charakterisieren. Dieses Resultat, auch bekannt als das **Fundamental Theorem of Asset Pricing (FTAP)**, ist eines der zentralsten Theoreme in der Preistheorie der modernen Finanzmathematik:

Theorem 4.2.7. ***(First Fundamental Theorem of Asset Pricing)*** *Für ein Finanzmarktmodell M^F mit Preisprozess $\hat{S}$ gilt die folgende Äquivalenz:*

i) M^F erfüllt No-Arbitrage (NA),

ii) $\mathcal{P}(\hat{S}) \neq \emptyset$

(vgl. [5], S.18)

Bemerkung. Das äquivalente Martingalmaß spielt nicht nur für den Wertpapierprozess S eine wichtige Rolle, sondern auch für den Preisprozess $\pi_t^F(\theta)$ eines Portfolios θ in M^F, sowie den dadurch erweiterten Markt mit Preisentwicklung $S' = ((S_t^0, \dots S_t^{d-1}, \pi_t^F(\theta))_{t\in\mathbb{T}}$. Nach FTAP gilt:

$$\text{Der erweiterte Markt ist arbitragefrei} \Leftrightarrow \text{Es existiert ein EMM } \mathbb{Q} \text{ für } \hat{S}'.$$

Dies impliziert für den diskontierten Preisprozess folgende Beziehung:

$$\pi_t^F(\theta) = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\langle \theta, S_T\rangle / S_T^0 \mid \mathcal{F}_t] \tag{4.2.4}$$

Hierbei ist $\pi_t^F(\theta) = \langle \theta, S_t\rangle$ gemäß Definition 4.1.7.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Vollständiger Markt

Enthält die Menge aller äquivalenten Martingalmaße nur ein Element, daher $|\mathcal{P}(\hat{S})| = 1$, garantiert dies die Vollständigkeit des arbitragefreien Marktes. Dies bedeutet, dass es genau ein äquivalentes Martingalmaß gibt, welches den Preis der Finanzinstrumente eindeutig bestimmt.

Definition 4.2.8. i) Ein Zahlungsanspruch X heißt erreichbar in M^F, wenn eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\theta_{\mathbb{T}}$ existiert, dessen Wertprozess

$$V_T^{\theta_{\mathbb{T}}} = \pi_T^F(\theta_{\mathbb{T}}) = X$$

erfüllt.

Dann heißt $V_0^{\theta_{\mathbb{T}}} = \pi_0^F(\theta_{\mathbb{T}})$ *ein* Preis von X und $\theta_{\mathbb{T}}$ eine Hedgingstrategie von X.

ii) Ein Markt wird als *vollständig* bezeichnet, wenn jeder Zahlungsanspruch erreichbar ist.

(vgl. [3], S. 14-15)

Die Notation $\theta_{\mathbb{T}}$ in $\pi_t^F(\theta_{\mathbb{T}})$ hebt die dynamische Anwendung der Strategie $\theta_{\mathbb{T}} = (\theta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ zu den Zeitpunkten $t = 0 \dots T$ hervor.

Für den Preis(prozess) eines erreichbaren $\mathcal{F}_T$-messbaren Zahlungsanspruchs $X > 0$ zum Zeitpunkt t gilt gemäß der Gleichung (4.2.4) bzw. dem ersten Fundamentalsatz der Arbitragetheorie:

$$\pi_t^F(X) = V_t^{\theta_{\mathbb{T}}} = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T^{\theta_{\mathbb{T}}}/S_T^0 \mid \mathcal{F}_t] = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X/S_T^0 \mid \mathcal{F}_t] \tag{4.2.5}$$

Theorem 4.2.9. ***(Second Fundamental Theorem of Asset Pricing)*** *Es gelte (NA). Dann ist der Markt genau dann vollständig, wenn genau ein äquivalentes Martingalmaß existiert, d.h.* $|\mathcal{P}(\hat{S})| = 1$.

(vgl.[3], S.47)

Die einelementige Menge $\mathcal{P}(\hat{S})$ garantiert nun die Eindeutigkeit des arbitragefreien Preises in einem vollständigen Markt und es gilt:

$$\pi_0^F(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\frac{X}{S_T^0}\Big],$$

da $S_0^0 = 1$ und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, F\}$.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das äquivalente Martingalmaß ein theoretisches, aber hilfreiches Konzept ist, dessen Existenz es ermöglicht, eine Bedingung zu formulieren, um einen arbitragefreien Markt gewährleisten zu können.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

4.3 Produktraum für finanzielle und biometrische Risiken

In diesem Unterkapitel werden die grundlegenden Bausteine für die Modellierung eines geeigneten Marktmodells, welches neben den finanziellen Risiken nun auch biometrische Ereignisse berücksichtigt, gelegt.

Demographisches Modell

Sei

$$(B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B})$$

ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, welcher die Entwicklung der Zustände aller unter Vertrag stehenden Personen beschreibt. Eine genauere Betrachtung erfolgt in Annahme III.

Es sei auch hier darauf hingewiesen, dass kein spezifisches Modell für die Entwicklung der Informationen angenommen wird.

Zur Wiederholung werden die ersten vier Grundannahmen aus Kapitel 3 für solch ein Modell aufgelistet:

i) Unabhängigkeit von finanziellen und biometrischen Ereignissen: Dies bedeutet, dass die Finanzvariablen unabhangig von der zukünftigen Lebensdauer der Einzelpersonen sind.

ii) Es wird ein vollständiger, arbitragefreier Finanzmarkt angenommen.

iii) Die biometrischen Zustände (wie Leben oder Tod) der betrachteten Einzelpersonen sind unabhängig voneinander.

iv) Es existiert eine große Gruppe von Personen, welche ähnliche Merkmale (z.B. gleiches Alter, Geschlecht oder Gesundheitszustand) aufweisen und daher in eine Risikoklasse zusammengelegt werden können.

Diese Annahmen werden im Folgenden näher erläutert:

I. **Annahme:** Betrachtet man den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(M, (\mathcal{M}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$, so beschreibt dieser die möglichen Finanzereignisse sowie die biometrischen Zustände der betrachteten Einzelpersonen. Dieser Raum kann als Produkt des Finanzmarktmodells $(F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F})$ sowie des Versicherungsportfolios $(B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B})$ aufgefasst werden, d.h.:

$$(M, (\mathcal{M}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}) = (F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F}) \otimes (B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B}).$$

   a) Die Menge $M := F\times \mathrm{B} = \{(f, b)\,|\, f \in F, b \in B\}$ sei das kartesische Produkt der Ergebnismengen F und B.

   b) Nach [1] gilt die Annahme, dass die σ-Algebren $\mathcal{F}_t$ und $\mathcal{B}_t$ unanbhängig voneinander sind. Im Wesentlichen beschreibt dies die Unabhängigkeit der Ereignisse am Finanzmarkt und des (Gesundheits-)Zustandes des Versicherungsnehmers.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Die σ-Algebra $\mathcal{M}_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t$ kann als das Produkt der σ-Algebren $\mathcal{F}_t$ und $\mathcal{B}_t$ definiert werden. Dafür bildet man zunächst das kartesische Produkt der beiden σ-Algebren $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}_t$, welches im Allgemeinen noch keine σ-Algebra definiert. Das Anwenden des σ-Operators auf dieses Produkt erzeugt die σ-Algebra $\mathcal{M}_t$, die somit vom Mengensystem des kartesischen Produkts erzeugt wird:

$$\mathcal{M}_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t = \sigma(\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}_t)$$

Diese Produkt σ-Algebra kann als Gesamtheit der Informationen interpretiert werden, welche durch die Entwicklung der Wertpapiere am Finanzmarkt und dem Zustand des Versicherten von Versicherungsbeginn bis einschließlich t beobachtet werden können. (vgl [1], S.32)

Zudem folgt aus der bereits in 4.1 getroffenen Annahme $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, F\}$ und der Annahme $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, B\}$:

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{B}_0 = \sigma(\mathcal{F}_0 \times \mathcal{B}_0) = \{\emptyset, F \times B\}$$

Dies impliziert das vollständige Wissen der möglichen Ausgänge zum Zeitpunkt 0.

Notation: Die Buchstaben M bzw. $\mathcal{M}_t$ sollen die Ereignisse im Marktmodell beschreiben. Außerdem wird, wie später ersichtlich, das eindeutig äquivalente Martingalmaß im Produktraum als $\mathbb{M}$ bezeichnet.

c) Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} = \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$ sei das Produktmaß der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{F}$ und $\mathbb{B}$ auf der σ-Algebra $\mathcal{M}$. Dieses Produktmaß hat die Eigenschaft, dass für alle $F_t \times B_t \in \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t$ gilt:

$$\mathbb{P}(F_t \times B_t) = \mathbb{F}(F_t) \cdot \mathbb{B}(B_t)$$

Die Form des Produktmaßes wird verwendet, um stochastische Unabhängigkeit zu modellieren. In diesem Setting beschreibt $\mathbb{P}$ das „wahre Wahrscheinlichkeitsmaß“, im Englischen oft als *p*hysical bezeichnet.

II. **Annahme:** Gegeben sei, wie in 4.1 eingeführt, ein Finanzmarktmodell

$$M^F = (F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F}, \mathbb{T}, {}_FS)$$

mit der Eigenschaft der Vollständigkeit und der Existenz eines eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q} \sim \mathbb{F}$.

Das zu M^F assoziierte, arbitragefreie Marktmodell zur Beschreibung der *finanziellen und biometrischen Risiken* wird durch

$$M^{F\times B} = (M, (\mathcal{M}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}, \mathbb{T}, S) \tag{4.3.1}$$

bezeichnet, wobei die Funktion

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

$$S(f,b) = {}_FS(f) \text{ für alle } (f,b) \in M \tag{4.3.2}$$

die kanonische Einbettung von ${}_FS$ in den Raum $(M, (\mathcal{M}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P})$ darstellt. Dies ist eine Methode, um den Preisprozess ${}_FS$ des Finanzmarktes in das erweiterte Modell zu integrieren, ohne dabei die Eigenschaften oder Struktur des ursprünglichen Prozesses zu verändern.

Zusammenfassend gesagt, verwendet man zur Bewertung allgemeiner Lebensversicherungsprodukte mit zufälligen Auszahlungen die Theorie der Finanzmathematik und bettet die daraus resultierenden Marktpreise, die noch keine biometrischen Risiken enthalten, in die üblichen versicherungsmathematischen Standardmodelle ein. Dabei ergeben sich zwei unabhängige Quellen der Unsicherheit: Eine in Bezug auf den Finanzmarkt, die andere betrifft die Sterblichkeitskomponente. (vgl. [1], S.36)

Bemerkung. Zu beachten ist, dass das eben eingeführte Modell $M^{F\times B}$ nicht vollständig ist. Durch die Erweiterung des Modells um biometrische Ereignisse ist es nicht mehr möglich diese zusätzlichen Unsicherheiten vollständig mit den vorhandenen Vermögenswerten des Finanzmarktes abzusichern.

4.3.1 Bewertungsansatz für Finanzportfolios

Für die weiteren Überlegungen sei folgendes Lemma relevant, welches die Definition 4.2.8 formalisiert:

Lemma 4.3.1. *i) Jedes $\mathcal{F}_t$-messbare Portfolio θ_t kann bis zum Zeitpunkt t durch eine selbstfinanzierende Strategie $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ aus M^F repliziert werden.*

ii) Jede $\mathcal{F}_t$-messbare Auszahlung in M^F kann bis zum Zeitpunkt t durch eine selbstfinanzierende Strategie repliziert werden.

Die Begriffe Portfolio und t-Portfolio sind wie in Definition 4.1.3 bzw. 4.1.4 zu verstehen.

Beweis. *i)* Durch die Eigenschaft der Vollständigkeit von M^F kann jeder $\mathcal{F}_T$-messbare Payoff X mit Fälligkeit T auch bis zum Zeitpunkt T repliziert werden. Da $\langle\theta_t, S_T\rangle$ $\mathcal{F}_T$-messbar in M^F ist, muss es laut Definition für das $\mathcal{F}_t$-messbare Portfolio bzw. dessen Wert eine selbstfinanzierende Strategie $\varphi_{\mathbb{T}} = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ geben.

Für den Auszahlungsbetrag X kann folgender Zusammenhang betrachtet werden:

$$X := \langle\theta_t, S_T\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \theta_t^i S_T^i$$

Daher soll gelten:

$$\langle\varphi_T, S_T\rangle = \langle\theta_t, S_T\rangle = X,$$

wobei $\varphi_T = \theta_t$ zum Zeitpunkt T ist.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Für den Wertprozess von $\varphi_{\mathbb{T}}$ gilt:

$$\pi_s^F(\varphi_{\mathbb{T}}) = \langle \varphi_s, S_s \rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \varphi_s^i S_s^i$$

Aufgrund der (NA) Eigenschaft im vollständigen Raum M^F muss gelten:

$$\pi_s^F(\theta_t) = \langle \theta_t, S_s \rangle = \langle \varphi_s, S_s \rangle \text{ für } s \in \mathbb{T}.$$

Dies impliziert für den Preis- bzw. Wertprozess von θ_t und $\varphi_{\mathbb{T}}$: $\langle \theta_t, S_s \rangle = \langle \varphi_s, S_s \rangle$ zu den Zeitpunkten $s \geq t$ und insbesondere $\theta_t = \varphi_t$ für $s = t$. Daher kann das Portfolio θ_t bis zum Zeitpunkt t repliziert werden und $\langle \theta_t, S_s \rangle = \langle \varphi_s, S_s \rangle$ für $s < t$.

ii) Sei X ein beliebiger, $\mathcal{F}_t$-messbarer Payoff. Nach Punkt *(i)* kann das $\mathcal{F}_t$-messbare Portfolio $\theta_t = X/S_t^0 \cdot e_0 = (X/S_t^0 \cdot 1, 0 \dots 0)$ durch eine selbstfinanzierende Strategie $\tilde{\varphi}_{\mathbb{T}}$ bis t repliziert werden. Aufgrund der gewählten Darstellung von θ_t ergibt sich für diesen Preisprozess zum Zeitpunkt t, dass $\langle \theta_t, S_t \rangle = X$.

Damit ist gezeigt, dass die Auszahlung X mit der Strategie $\tilde{\varphi}_{\mathbb{T}}$ abgesichert werden kann.

(vgl. [7], S.40) □

Im Weiteren wird die Notation der kanonischen Einbettung wie in (4.3.2) fortgeführt:

Definition 4.3.2. Falls für eine Zufallsvariable X mit zugrundeliegendem Modell M^F und einer Zufallsvariablen Y in $M^{F \times B}$ gilt, dass

$$Y(f, b) = X(f) \text{ für alle } (f, b) \in M,$$

so heißt Y die kannonische Einbettung von X in $M^{F \times B}$.

Einfach ausgedrückt, ermöglicht diese Abbildung, ein Objekt als Teil eines anderen aufzufassen. Im bestehenden Setting sollen dadurch jene Portfolios im Marktmodell $M^{F \times B}$ charakterisiert werden, welche keine Informationen über biometrische Zustände enthalten.

Preisprozess für Finanzportfolios

Es soll gezeigt werden, dass der Preisprozess eines Finanzportfolios ${}_F\theta$ unter einem geeigneten Bewertungsmaß im Produktraum $M^{F \times B}$ unverändert bleibt und dass die Bewertung finanzieller Portfolios nicht durch biometrische Unsicherheiten beeinflusst wird. Es soll daher die Gleichung $\pi_t({}_F\theta) = \pi_t^F({}_F\theta)$ gelten.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Sei nun ${}_F\theta$ ein beliebiges Portfolio im vollständigen Finanzmarktmodell M^F. Nach Lemma (4.3.1) existiert für ${}_F\theta$ eine selbtsfinanzierende Absicherungsstrategie ${}_F\theta_{\mathbb{T}} = ({}_F\theta_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Nach Theorem 4.2.9 und Gleichung (4.2.4) ist der eindeutige, arbitragefreie Preis(prozess) $\pi^F({}_F\theta)$ dieses Portfolios in M^F gegeben durch:

$$\pi_t^F({}_F\theta) = {}_FS_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\langle {}_F\theta,\ {}_FS_T\rangle / {}_FS_T^0 \mid \mathcal{F}_t] \tag{4.3.3}$$

Da $S(f,b) = {}_FS(f)$ für alle $(f,b) \in M$ gilt, wird das eingebettete Portfolio ${}_F\theta$ in $M^{F\times B}$ ebenfalls durch die eingebettete Strategie ${}_F\theta_{\mathbb{T}}$ in $M^{F\times B}$ repliziert.

Aufgrund der (NA) Bedingung in $M^{F\times B}$ muss daher für jedes angemessene Bewertungsprinzip π und den implizierten Preisprozess $\pi({}_F\theta)$ in $\mathrm{M}^{F\times B}$

$$\pi_t({}_F\theta) = \pi_t^F({}_F\theta)\ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ gelten.

Nach (4.3.3) ergibt sich:

$$\pi_t^F({}_F\theta) = {}_FS_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\langle {}_F\theta,\ {}_FS_T\rangle / {}_FS_T^0 \mid \mathcal{F}_t]$$

und für S als die kanonische Einbettung von ${}_FS$ gilt:

$$= S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle {}_F\theta, S_T\rangle / S_T^0 \mid \mathcal{F}_t]$$

Mit der Tatsache, dass für jede Zufallsvariable $X \in (F, \mathcal{F}_T, \mathbb{F})$ aufgrund von $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, B\}$ gilt, dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[X \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0]\ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

folgt für das eingebettete Portfolio ${}_F\theta$ in $M^{F\times B}$ damit:

$$\pi_t({}_F\theta) = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle {}_F\theta, S_T\rangle / S_T^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0]\ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

$$= S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle {}_F\theta, S_T\rangle / S_T^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t]\ \mathbb{P}\text{-f.s.}.$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich aus der Unabhängigkeit des Preisprozesses S und der Entwicklung der biometrischen Zustände.

Bemerkung. Es ist ersichtlich, dass (S_t/S_t^0) ein $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}$-Martingal ist. Dies zeigt sich durch ${}_F\theta = e_{i-1}$, wobei e_i den i-ten Standardbasisvektor in $\mathbb{R}^d$ (für alle $i = 1,\dots,d-1$) bezeichnet, sowie durch die Unabhängigkeit von finanziellen und biometrischen Risiken.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

III. **Annahme:** Sei

$$B_H = \{(B^i, (\mathcal{B}_t^i)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B}^i) : i \in \mathbb{N}^+\}$$

eine Menge von filtrierten Wahrscheinlichkeitsräumen. Jeder Raum $(B^i, (\mathcal{B}_t^i)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B}^i)$ modelliert für jedes $i \in \mathbb{N}^+$ die biometrische Entwicklung der i-ten Person über die Zeit hinweg, wobei $\mathcal{B}_0^i = \{\emptyset, B^i\}$ gilt.
Der abzählbar unendliche Produktraum

$$(B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B}) = \bigotimes_{i=1}^{\infty} (B^i, (\mathcal{B}_t^i)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B}^i) \tag{4.3.4}$$

definiert das Versicherungsmodell, welches die Zustände aller beobachtbaren Personen beschreibt. Auch hierbei gilt $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, B\}$.

IV. **Annahme:** Für jedes Element $(B^i, (\mathcal{B}_t^i)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B}^i)$ in B_H existieren abzählbar unendlich viele, identisch verteilte und unabhängige (i.i.d.) Räume in B_H. Diese Annahme soll die Tatsache widerspiegeln, dass es innerhalb der betrachteten Kohorte große Klassen von Personen gibt, die „ähnliche“ Eigenschaften aufweisen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

5 Allgemeine Lebensversicherungsverträge

5.1 Einleitung

Die klassische Theorie der Versicherungsmathematik, welche Finanzmärkte und Zinsen als deterministisch annimmt, bietet den Vorteil, dass verschiedene Berechnungen im zugrunde liegenden Modell vereinfacht werden können.

Im Gegensatz dazu bieten allgemeinere Modelle die Möglichkeit, Veträge und Produkte zu beschreiben, bei denen der Wert der Versicherungspolizze vom Marktwert eines Fonds abhängt oder der Rechnungszins einem stochastischen Prozess folgt.

Wie schon im vorangegangenen Kapitel angesprochen, stellt in diesen erweiterten Modellen die biometrische Komponente, im Regelfall die Sterbewahrscheinlichkeit oder die Restlebenszeit eines Individuums, bei der Bewertung komplexerer (z.b. fondsgebundener) Lebensversicherungsprodukte, eine Herausforderung dar. Solche Produkte (Portfolios θ im Produktraum $M^{F\times B}$, die nicht der Form $\theta = {}_F\theta$ entsprechen), werden im Regelfall nicht am Finanzmarkt gehandelt und eine Bewertung, wie in Kapitel 4.3.1 erläutert, ist nicht mehr möglich.

Rückkaufswert

Neben der Notwendigkeit der Erstbepreisung komplexerer Lebensversicherungsprodukte, gibt es einen weiteren Grund für die Entwicklug eines allgemeineren Bewertungsansatzes: Der sogenannte *Rückkausfwert*. Der Versicherungsnehmer räumt sich das Recht ein, die Versicherung vorzeitig kündigen zu können und erhält einen gewissen Betrag zurückerstattet.

Aus diesen Gründen ist es notwendig, dass solche Produkte nicht nur zu Vertragsbeginn einen sinnvollen Preis zugewiesen bekommen.

5.2 Lebensversicherungsverträge

Definition 5.2.1. Gegeben sei das Marktmodell $M^{F\times B}$ aus Kapitel 4.3. Ein Lebensversicherungsvertrag in $M^{F\times B}$ ist ein Vektor an Paaren $((\gamma_t,\delta_t)_{t\in\mathbb{T}}) = ((\gamma_0,\delta_0),(\gamma_1,\delta_1),...(\gamma_T,\delta_T))$. Die einzelnen Elemente γ_t und δ_t eines Paares (γ_t,δ_t) sind, für alle $t\in\mathbb{T}$, t-Portfolios aus der Menge Θ.

Das Paar (γ_t,δ_t) wird zum Zeitpunkt t folgendermaßen interpretiert:

- Das t-Portfolio γ_t bezeichnet die Einheiten an den Finanzinstrumenten, welche das Versicherungsunternehmen zu leisten hat (= Leistungen).
- Das t-Portfolio δ_t stellt die Zahlungen dar, welche die versicherte Person für die Übernahme des Risikos erbringen muss (= Prämien).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Die Entwicklung eines Vertrages hängt – neben der Preisentwicklung der Basiswerte im Fonds – ausschließlich vom Zustand der i-ten Person in der betrachteten Kohorte ab. Zur Verdeutlichung schreibt man $({}^i\gamma_t, {}^i\delta_t)$ für Person i:

Definition 5.2.2. Für alle Elemente $(f,x),(f,y) \in M$ mit $M = F \times B$ gilt

$$({}^i\gamma_t(f,x), {}^i\delta_t(f,x))_{t\in\mathbb{T}} = ({}^i\gamma_t(f,y), {}^i\delta_t(f,y))_{t\in\mathbb{T}}, \tag{5.2.1}$$

wenn

$$p^i(x) = p^i(y) \quad \text{mit} \quad p^i : B \mapsto B^i \quad x \mapsto p^i(x) = x^i,$$

wobei p^i die kannonische Projektion von B nach B^i beschreibt.

Aus der Sicht des Versicherungsunternehmens ist nun die Vergabe eines Vertrages gleichbedeutend mit dem Besitz des Portfolios $({}^i\delta_t - {}^i\gamma_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

5.2.1 Äquivalenzprinzip

V. Annahme

Sei π ein geeignetes Bewertungsmaß auf Θ, dem Raum aller zulässigen Portfolios in M^F. Gemäß dem Äquivalenzprinzip soll für einen Lebensversicherungsvertrag die Berechnung der Beiträge für die übernommenen Verpflichtungen kalkulatorisch äquivalent zu der Höhe der Leistungen sein. Dieses Prinzip – welches in der versicherungsmathematischen Literatur meist in der Cashflownotation dargestellt wird – fordert, dass die Barwerte zukünftiger Zahlungsströme übereinstimmen sollen. Das Ziel besteht darin, dass die eingegangenen Verpflichtungen $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mithilfe der eingenommenen Prämien $(\delta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ gedeckt werden können.

Wie bereits erwähnt, sind allgemeinere Lebensversicherungen in ihrer Struktur etwas komplexer gestaltet. Zum Beispiel erwirbt der Versicherungsnehmer bei Abschluss einer fondsgebundenen Lebensversicherung, durch einen Einmalerlag oder laufende Prämien, Anteile an einem Fonds, welcher seinerseits aus einer Kombination von gehandelten Wertpapieren besteht.

Im Folgenden wird das Äquivalenzprinzip mithilfe der Portfolionotation dargestellt:

$$\pi_0(\sum_{t=0}^{T} \gamma_t) = \pi_0(\sum_{t=0}^{T} \delta_t) \tag{5.2.2}$$

5.3 Prämienberechnung für eine fondsgebundene Lebensversicherung

Das folgende Beispiel soll einerseits die soeben eingeführten Definitionen und Notationen veranschaulichen, andererseits einen Einblick auf das Bewertungsprinzip mithilfe des Produktmaßes $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}$ im Raum $M^{F\times B}$ geben. Darüber hinaus wird die Prämienberechnung unter Anwendung des soeben vorgestellten Äquivalenzprinzips (Annahme V) dargestellt. Es wird vorausgesetzt, dass Annahme I und II aus 4.3 erfüllt sind.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Cox-Ross-Rubinstein Modell

Zur Modellierung des Wertpapiermarktes M^F wird das Cox-Ross-Rubinstein Modell herangezogen, welches als Spezialfall eines Mehr-Perioden-Marktmodells angesehen wird. Für den Zeithorizont $T = 2$ (d.h. $\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$) und eine Anzahl von $d = 2$ Finanzprodukten, beinhaltet dieses Modell, neben dem risikolosen Wertpapier S^0, auch ein risikobehaftetes Wertpapier S^1:

$$S = (S_t)_{t\in\{0,1,2\}} = (S_t^0, S_t^1)_{t\in\{0,1,2\}}$$

- Die Preisentwicklung von S^0 entwickelt sich gemäß:

  $$S_{t+1}^0 = (1 + r)\, S_t^0 = (1 + r)^{t+1},\ S_0^0 = 1$$

  wobei $r \geq 0$ den risikolosen Zinssatz und $t = 0, 1, 2$ die Zeitpunkte repräsentiert.

- Für die Wertentwicklung des risikobehafteten Wertpapiers wird das vollständige und arbitragefreie Marktmodell $M^F = (F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F}, \mathbb{T}, {}_F S)$ verwendet. Hierbei ist F definiert als:

  $$F := \{d, u\}^T = \Big\{ f = (y_1, \ldots, y_T) \mid y_t \in \{d, u\} \Big\} \text{ für } t = 0, 1, 2,$$

  wobei d und u die zwei möglichen Kursbewegungen pro Zeitschritt angeben.

(vgl. [3], S.24)

Theorem 5.3.1. *Im T-periodigen Cox-Ross-Rubinstein Modell gilt: Der Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn $d < 1 + r < u$ gilt. (vgl. [3], S.25)*

Für die Eigenschaft der Vollständigkeit gilt:

Theorem 5.3.2. *Im Cox-Ross-Rubinstein Modell gilt unter (NA):*

i) Der diskontierte Preisprozess $\hat{S}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal.

ii) $\mathbb{Q}$ ist das einzige äquivalente Martingalmaß zu $\mathbb{F}$, d.h. $\mid \mathcal{P}(\hat{S}) \mid = 1$.

(vgl. [3], S.38)

In diesen Fällen ist der Markt vollständig und die Existenz und Eindeutigkeit des risikoneutralen Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ im CRR-Modell sichergestellt.

5.3.1 Beispiel

Wie bereits beschrieben, wird eine fondsgebundene Lebensversicherung durch die Portfolios $(\gamma_t, \delta_t)_{t\in\{0,1,2\}}$ dargestellt. Die Darstellung der Verpflichtungen $\gamma_t = (\gamma_t^0, \gamma_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$ sowie Prämien $\delta_t = (\delta_t^0, \delta_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$ für die verschiedenen Zeitpunkte sind für diesen Vertrag als t-Portfolios folgendermaßen dargestellt:

- Zum Zeitpunkt $t = 0$: Das Paar (γ_0, δ_0) entspricht einer Auszahlung $\gamma_0 = (0, 0)$ und einer Einmalprämie $\delta_0 = (P, 0)$ mit $P \in \mathbb{R}$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

- Zum Zeitpunkt $t = 1$: Das Paar (γ_1, δ_1) mit $\gamma_1 = (0{,}1500(1\text{-}\beta))$ und $\delta_1 = (0{,}0)$ stellt eine Auszahlung von 1500 Anteilen am Fonds, falls die Person bis zum Zeitpunkt 1 verstirbt, dar.
- Zum Zeitpunkt $t = 2$: Das Paar (γ_2, δ_2) mit $\gamma_2 = (0, 2000\beta)$ und $\delta_2 = (0{,}0)$ entspricht einer Leistung von 2000 Anteilen an die versicherte Person oder an die Hinterbliebenen.

Modellierung der Restlebenszeit

Der biometrische Faktor, der die Entwicklung des betrachteten Lebens mit Alter x beschreibt, wird durch den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\{0,1,2\}}, \mathbb{B})$ modelliert.

Betrachtet man die $\mathcal{B}_1$-messbare Zufallsvariable β mit $\beta(b) \in \{0, 1\}$ für alle $b \in B$, so setzt man:

$$\beta = 1 \Longleftrightarrow \text{Die betrachtete Person ist zum Zeitpunkt t=1 am Leben.}$$

Weitere Details zur Bedeutung dieser Zufallsvariable folgen in den Beispielen in Kapitel 8.3.
Es wird angenommen, dass die Person bei Abschluss der Versicherung $(t = 0)$ am Leben ist.

Prämienberechnung

Für die Berechnung der Einmalprämie P unter Einhaltung des Äquivalenzprinzips wird das zentrale Thema dieser Arbeit, die Bewertung nach dem *Produktmaßprinzip*, herangezogen. Eine genauere Analyse dieses Bewertungsmaßes erfolgt in Kapitel 7.

Für das Bewertungsprinzip π gilt die folgende Annahme:

$$\pi_t(\theta) = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle\theta, S_2\rangle / S_2^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t], \quad t \in \{0, 1, 2\} \tag{5.3.1}$$

Speziell für $t = 0$ gilt unter der Annahme $S_0^0 = 1$ und $\mathcal{F}_0 \times \mathcal{B}_0 = \{\emptyset, F \times B\}$

$$\pi_0(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\langle\theta, S_2\rangle / S_2^0\right].$$

Nach dem Äquivalenzprinzip (5.2.2) müssen daher folgende Gleichungen gelten:

$$\pi_0(\sum_{t=0}^{2} \gamma_t) = \pi_0(\sum_{t=0}^{2} \delta_t)$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

$$\pi_0((0,0)+(0,1500(1-\beta)),(0,2000\beta)) = \pi_0((P,0)+(0,0)),(0,0))$$

$$\pi_0((0,1500(1-\beta)+2000\beta)) = \pi_0((P,0))$$

$$\pi_0(\underbrace{1000(0,1.5(1-\beta)+2\beta)}_{:=\theta}) = \pi_0(\underbrace{(P,0)}_{:=\tilde{\theta}})$$

Nach (5.3.1) und $S_2 = (S_2^0, S_2^1)$ ergibt sich:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\underbrace{\langle\theta, S_2\rangle/S_2^0}_{A}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\underbrace{\langle\tilde{\theta}, S_2\rangle/S_2^0}_{B}\right]$$

mit

$$A: \frac{\langle\theta, S_2\rangle}{S_2^0} = \sum_{i=0}^{1}\theta^i\frac{S_2^i}{S_2^0}$$

$$\iff \frac{0\cdot S_2^0 + (1.5+0.5\beta)\cdot S_2^1}{S_2^0}$$

$$= \frac{(1.5+0.5\beta)\cdot S_2^1}{S_2^0}$$

und analog

$$B: \frac{\langle\tilde{\theta}, S_2\rangle}{S_2^0} = \sum_{i=0}^{1}\tilde{\theta}^i\frac{S_2^i}{S_2^0}$$

$$\iff \frac{P\cdot S_2^0 + 0\cdot S_2^1}{S_2^0} = P\cdot\frac{S_2^0}{S_2^0} = P$$

Insgesamt ergibt sich:

$$1000\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[(1.5+0.5\beta)\cdot S_2^1/S_2^0\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[P]$$

Durch die Unabhängigkeit von finanziellen und biometrischen Ereignissen folgt:

$$P = 1000\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[(1.5+0.5\beta)]\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_2^1/S_2^0\right]$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Da das Cox-Ross-Rubinstein Modell ein vollständiges und arbitragefreies Marktmodell ist, existiert ein eindeutig bestimmtes EMM $\mathbb{Q}$, sodass der diskontierte Preisprozess ein Martingal unter $\mathbb{Q}$ darstellt. Dies in Kombination mit der Linearität des Erwartungswertes führt zu:

$$P = 1000 \cdot (1.5 + 0.5\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\beta]) \cdot S_0^1$$

$$= 1500 S_0^1 + 500\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\beta] S_0^1$$

$$= 1500 S_0^1 + 500 p_x S_0^1,$$

wobei $\mathrm{p}_x = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\beta]$ die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-Jährigen bezeichnet.

Diese soeben nach dem *Produktmaßprinzip* hergeleitete Prämie spiegelt die Absicherung eines Vertrages wider, der zu den Zeitpunkten 1 oder 2 1500 Anteile am Wertpapier liefert und zusätzliche 500 Anteile, falls der Versicherungsnehmer das erste Jahr überlebt. (vgl. [7], S.42)

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

6 Klassische Bewertung in der Lebensversicherung

6.1 Einleitung

Eine Lebensversicherung kann als eine Art Wette betrachtet werden: Ohne den tatsächlichen Ausgang eines in bestimmter Weise definierten Ereignisses zu kennen, zahlt der Versicherungsnehmer zunächst die Versicherungsprämie. Abhängig von der Realisierung des Ereignisses (Ausgang der Wette), wird entweder eine Leistung erbracht oder die Prämie verbleibt ohne Gegenleistung beim Versicherungsunternehmen.(vgl.[10], S.1)

Deterministischer Finanzmarkt

Zur Modellierung klassischer Lebensversicherungen (Erlebens- und Ablebensversicherungen sowie Mischformen) werden hauptsächlich Versicherungsmodelle betrachtet, bei welchen der Rechnungszins bzw. der Finanzmarkt als deterministisch angenommen werden, d.h. die Leistungen sind konstant.

Diese Eigenschaften werden im Produktmarktmodell $M^{F\times B}$ aus Kapitel 4.3 wie folgt umgesetzt:

- Die deterministischen Zahlungen werden durch $\mid \mathcal{F}_T \mid = 2$ modelliert, d.h. $\mathcal{F}_T = \{\emptyset, F\}$. Dies bedeutet, dass die finanzielle Filtration zu jedem Zeitpunkt Informationen über alle möglichen Ausgänge verfügt.

- Alle Wertpapiere weisen, bis auf Skalierungsfaktoren, die gleichen Verteilungseigenschaften auf. Dies wird durch die Annahme der Arbitragefreiheit des Markmodells impliziert und folgendermaßen umgesetzt: $S = (S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$, d.h. $d = 1$. Durch diese Vereinfachung ist ein risikoloser Gewinn ausgeschlossen.

  Das risikolose Wertpapier S^0 wird durch eine deterministische Funktion, in Abhängigkeit der Zeit, beschrieben.

- $M^{F\times B} = (M, (\mathcal{M}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}, \mathbb{T}, S)$ wird dem Versicherungsmodell $(B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B})$ gleichgesetzt.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

6.2 Nettoprämienprinzip

Im klassischen Umfeld ist das am weitesten verbreitete Bewertungsmaß das Nettoprämienprinzip:

Sei C_t eine $\mathbb{B}$-integrierbare Auszahlung zum Zeitpunkt t, d.h. $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[C_t] < \infty$. Der Preis(prozess) dieser Zahlungsforderung in der klassischen Lebensversicherung entspricht dem bedingten Erwartungswert des diskontierten Auszahlungsbetrags bezüglich $\mathcal{B}_s$. Für ein t-Portfolio C_t/S_t^0 mit dem Wert C_t zum Zeitpunkt t gilt:

$$\pi_s(C_t/S_t^0) = S_s^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[C_t/S_t^0 \mid \mathcal{B}_s], \ s \in \mathbb{T} \tag{6.2.1}$$

Der Preis von C_t zur Zeit s ist das notwendig bereitgestellte Kapital (bedingt auf die Vorgeschichte, welche durch $\mathcal{B}_s$ modelliert wird) um C_t abzusichern. Nach Lemma 4.3.1 kann C_t durch das konstante Portfolio C_t/S_t^0 repliziert werden und $\pi_s(C_t/S_t^0)$ ist genau der Wert, der erforderlich ist, um C_t ab dem Zeitpunkt s zu hedgen.

Bemerkung. Unter dem Bewertungsmaß (6.2.1) ist das Äquivalenzprinzip (5.2.2) jenes, welches aus der klassischen Versicherungsmathematik bekannt ist:

$$\text{EW der abgezinsten Prämien} \mathrel{\hat{=}} \text{EW der abgezinsten Leistungen}$$

Die Beiträge sind daher kalkulatorisch äquivalent zu den Verpflichtungen.

Eigenschaften

Für das Bewertungsprinzip nach (6.2.1) soll folgendes gelten:

- Die Menge Θ ist durch die $\mathbb{B}$-integrierbaren Portfolios gegeben:

  $$\Theta = \{\theta \mid \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta] < \infty\} \text{ in } (B, (\mathcal{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{B}).$$

  Der Erwartungswert existiert und ist endlich.

- Es gelten die Annahmen I - III aus Kapitel 4.3.

- Die Leistungen γ_t zum Zeitpunkt t werden als t-Portfolios modelliert. Die Menge $\{(-{}^i\gamma_t)_{t\in\mathbb{T}} : i \in \mathbb{N}^+\}$ stellt die vom Zustand des i-ten Individuums abhängigen Leistungen eines Vertrags dar. Im Rahmen dieses Kapitels werden für alle $t \in \mathbb{T}$ die Werte ${}^i\gamma_t$ als deterministisch angesehen (eine Anzahl an „Sparbuch - Einheiten“).

- Sei $\|\cdot\|_2$ die vom Skalarpodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2}$ induzierte L^2-Norm auf dem Hilbertraum

  $$L^2(M, \mathcal{M}_T, \mathbb{P}, \mathbb{R}) = \{X : M \mapsto \mathbb{R} \mid X \text{ messbar und } \int_M \mid X \mid^2 d\mathbb{P} < \infty\}$$

  dem Raum aller quadratisch integrierbaren reellen Funktionen in $(M, \mathcal{M}_T, \mathbb{P})$. Die Norm hat dabei folgende Form:

  $$\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X\rangle_{L_2}} = \sqrt{\int_M \mid X \mid^2 d\mathbb{P}} = \left(\int_M \mid X \mid^2 d\mathbb{P}\right)^{1/2},$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

wobei $\langle X, Y \rangle_{L_2} := \int_M \langle X, Y \rangle \, d\mathbb{P}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet das Standardskalarprodukt.

Es wird angenommen, dass für alle $t \in \mathbb{T}$ ein $c_t \in \mathbb{R}^+$ existiert, sodass für alle $i \in \mathbb{N}^+$ und ${}^i\gamma_t \in \Theta$ die *Kolmogorov-Bedingung* gilt:

$$\|{}^i\gamma_t\|_2 \leq c_t \tag{6.2.2}$$

Dies impliziert für alle $t \in \mathbb{T}$ und $i \in \mathbb{N}^+$:

$${}^i\gamma_t \in L^2(M, \mathcal{M}_T, \mathbb{P})$$

6.2.1 Absicherungsstrategien

Nach den getroffenen Annahmen wird das folgende Finanzprodukt als Absicherungsportfolio betrachtet:

Sei $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t]$ ein t-Portfolio mit einem Wert $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] \cdot S_t^0$ zum Zeitpunkt t, wobei S^0 gemäß Annahme einer deterministischen Funktion folgt. Alternativ ausgedrückt, wird zum Zeitpunkt 0 der Wert $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t]$ in das Geldkonto investiert. Unter der getroffenen Annahme $S_0^0 = 1$, ergibt sich daraus eine Barauszahlung von $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] \cdot S_t^0$ zum Zeitpunkt t.

Als Absicherung kauft das Versicherungsunternehmen für jedes $i \in \mathbb{N}^+$ und jeden diskreten Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ das zuvor eingeführte Finanzprodukt $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t]$, welches zu t fällig wird.

Betrachtet man nun den ausgeschütteten Wert $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] \cdot S_t^0$ und die Leistungen $(-{}^i\gamma_t)$ zum Zeitpunkt t, so beschreibt die zentrierte Zufallsvariable $(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] - {}^i\gamma_t) \cdot S_t^0$ den Gewinn bzw. Verlust für ein $i \in \mathbb{N}^+$ und $t \in \mathbb{T}$.

Das durchschnittliche Saldo der ersten m Versicherungsträger zum Zeitpunkt t ergibt sich durch das Bilden des arithmetischen Mittels der zentrierten Zufallsvariablen:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] - {}^i\gamma_t) \cdot S_t^0 \tag{6.2.3}$$

Um zu zeigen, dass die obige Partialsumme $\mathbb{B}$-f.s. gegen Null konvergiert, ist das folgende Kriterium erforderlich:

Theorem 6.2.1. ***(Kolmogoroffs 1-tes Gesetz der großen Zahlen)*** *Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X_n) eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen aus $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var[X_n]}{n^2} < \infty$, so gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}[X_i]) = 0 \ \ \mathbb{P}\text{-}f.s.$$

(vgl. [11], S.251)

Nun wird die Überprüfung der Voraussetzungen in unserem Setting durchgeführt:

i) **Paarweise Unabhängigkeit der Leistungen:**
Die Leistungen in der Menge $\{(-{}^i\gamma_t)_{t \in \mathbb{T}} : i \in \mathbb{N}^+\}$ sind paarweise unabhängig, da der Wert ${}^i\gamma_t$ ausschließlich vom i-ten Leben abhängt, siehe Kapitel 5.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

ii) **Endlicher Erwartungswert und Varianz:**
Da jede Zufallsvariable aus $\mathcal{L}_2$ einen endlichen Erwartungswert besitzt, gilt mit $\mu := \mathbb{E}[{}^i\gamma_t]$, der Annahme (6.2.2) und für alle $t \in \mathbb{T}$ und $i \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathrm{Var}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}\left[({}^i\gamma_t - \mathbb{E}[{}^i\gamma_t])^2\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}\left[({}^i\gamma_t - \mu)^2\right] =$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[({}^i\gamma_t)^2] - \mu^2 = \int_M |\ ({}^i\gamma_t)\ |^2\, d\mathbb{P} - \mu^2 = \|({}^i\gamma_t)\|_2^2 - \mu^2 \leq c_t^2 - \mu^2 := \tilde{c}_t.$$

Unter Berücksichtigung von Lemma 15.31 aus ([11], S.250) folgt das gewünschte Ergebnis.

Mit diesen Resultaten ist die Konvergenz der Summe der Mittelwerte aus der Gleichung (6.2.3) $\mathbb{B}$-fast sicher gegen 0 gewährleistet.

Äquivalenzprinzip in der klassischen Lebensversicherung

Aus der Bewertungsmethode (6.2.1) folgt für alle $i \in \mathbb{N}^+$:

$$\pi_0\big(\underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t]}_{:=\theta}\big) = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}\big[\mathbb{E}_{\mathbb{B}}\big[\underbrace{{}^i\gamma_t}_{\langle\theta, S_t^0\rangle} \cdot S_t^0\big] / S_t^0\big] =$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t \cdot S_t^0 / S_t^0] = \pi_0({}^i\gamma_t)$$

Dies zeigt, dass der faire Preis des Vertrags zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses gleichwertig zum Preis der Absicherung sein muss.

6.3 Anwendung an Lebensversicherungsprodukte

Betrachtet man zusätzlich Einnahmen in Form von Prämienzahlungen, so sei $\{({}^i\gamma_t, {}^i\delta_t)_{t\in\mathbb{T}} : i \in \mathbb{N}^+\}$ die Menge aller Lebensversicherungsverträge des Unternehmens, wobei ${}^i\gamma_t$ und ${}^i\delta_t$ weiterhin als t-Portfolios modelliert werden.

Es wird zudem angenommen, dass die Prämienzahlungen ${}^i\delta_t$ ebenfalls im Raum aller quadratisch integrierbaren Funktionen liegen, d.h. analog zu den Leistungen nimmt man an, dass ${}^i\delta_t \in L^2(M, \mathcal{M}_T, \mathbb{P}, \mathbb{R})$ gilt.

Absicherungsstrategie

Wie bereits bekannt, kann jeder Vertrag des Versicherungsunternehmens durch einen Vektor von Portfolios beschrieben werden: $({}^i\delta_t - {}^i\gamma_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Aus der Sicht des Unternehmens ergibt sich dadurch der Zahlungsstrom

$$\Big(({}^i\delta_0 - {}^i\gamma_0), ({}^i\delta_1 - {}^i\gamma_1) \ldots ({}^i\delta_T - {}^i\gamma_T)\Big).$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Analog zu den oben getroffenen Überlegungen können diese Forderungen durch den Kauf der Strategie $(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t])_{t\in\mathbb{T}}$ (Ansammlung an t-Portfolios) für jeden Zeitpunkt t abgesichert werden.

Unter Berücksichtigung des Äquivalenzprinzips (5.2.2) folgt, dass jeder Vertrag zum Zeitpunkt des Abschlusses, für alle $i \in \mathbb{N}^+$, den Wert Null aufweist:

$$\pi_0(\sum_{t=0}^{T} {}^i\delta_t) = \pi_0(\sum_{t=0}^{T} {}^i\gamma_t)$$

$$\iff 0 = \pi_0(\sum_{t=0}^{T} {}^i\delta_t) - \pi_0(\sum_{t=0}^{T} {}^i\gamma_t)$$

Unter Anwendung des Nettoprämienprinzips (6.2.1) als Bewertungsmaß und aufgrund der Linearitätseigenschaft des Erwartungswertes gilt:

$$\begin{aligned} \iff 0 &= \sum_{t=0}^{T} \pi_0({}^i\delta_t) - \sum_{t=0}^{T} \pi_0({}^i\gamma_t) \\ &= \sum_{t=0}^{T} \pi_0({}^i\delta_t - {}^i\gamma_t) = \sum_{t=0}^{T} \pi_0(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t]) \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Es ist ersichtlich, dass die Absicherung für jeden einzelnen Vertrag und die gesamte Laufzeit hinweg zum Vertragsabschluss „kostenlos“ ist und $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t]$ den Wert der Anlage in das risikolose Wertpapier (in „Sparbuch-Einheiten“) zum Zeitpunkt 0 darstellt.

Bildet man die Differenz zwischen dem Zahlungsstrom $({}^i\delta_t - {}^i\gamma_t) \cdot S_t^0$ und dem resultierenden Wert der zum Vertragsbeginn erworbenen Absicherung $(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t]) \cdot S_t^0$, wählt einen fixen Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ und bildet den Mittelwert der ersten m Polizzen, erhält man:

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}({}^i\delta_t - {}^i\gamma_t - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t] + \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t]) \cdot S_t^0$$

Durch das Bilden des Grenzwertes und der Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen folgt:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}({}^i\delta_t - {}^i\gamma_t - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t] + \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t]) \cdot S_t^0 = 0 \quad \mathbb{B}\text{-f.s.} \tag{6.3.2}$$

Interpretation

Unter den getroffenen Annahmen I-III, der Anwendung des Nettoprämienprinzips als Bewertungsmaß und der Einhaltung des Äquivalenzprinzips (insbesondere für die weitere Prämienberechnung) kann sich ein Versicherungsunternehmen zum Zeitpunkt 0 vollständig und ohne jegliche Kosten gegen das finanzielle Risiko absichern (vgl. Gleichung 6.3.1). Durch die Strategie $(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t])_{t\in\mathbb{T}}$ wird sichergestellt, dass der durchschnittliche

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Verlust pro Vertrag (d.h pro versicherter Person) bei einer wachsenden Anzahl unabhängiger Versicherungsnehmer zu jedem Zeitpunkt t gegen 0 konvergiert.

Als direkte Implikation gilt für den Mittelwert des Endsaldos:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=0}^{T} ({}^i\delta_t - {}^i\gamma_t - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t] + \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t]) \cdot S_T^0 = 0 \ \mathbb{B}\text{-f.s.} \tag{6.3.3}$$

Fazit

Das Nettoprämienprinzip (6.2.1) impliziert, dass der minimale faire Preis eines jeden Vertrages zumindest ausreicht, um die Kosten der Absicherungsstrategie gegen das finanzielle Risiko zu decken. Dadurch können die Gleichungen (6.3.2) und (6.3.3) erzielt werden. Durch diese Strategie wird eine Diversifikation der biometrischen Risiken (z.B. Tod) im klassischen Versicherungsfall gewährleistet, was bedeutet, dass das Risiko, welches durch die zufälligen Auszahlungszeitpunkte der Leistungen ensteht, ausgeglichen wird. Wie in Gleichung (6.3.1) dargestellt, ist unter dem Äquivalenzprinzip ersichtlich, dass die Absicherungsstrategie für jeden Vertrag zum Verkaufszeitpunkt kostenlos umgesetzt werden kann. Dies ist eine wichtige Eigenschaft, da der Vertrag ebenfalls als „kostenlos“ betrachtet werden kann.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

7 Allgemeine Bewertung in der Lebensversicherung

7.1 Einleitung

Wurden bisher Modelle betrachtet, bei denen der Zins als deterministisch vorausgesetzt wurde und die Auszahlungen der Versicherung einer deterministischen Funktion folgten, werden im folgenden Kapitel stochastische Finanzmärkte untersucht.

Diese Märkte ermöglichen es, allgemeinere Lebensversicherungsprodukte zu bewerten und zu bepreisen. Beispiele für komplexere Produkte sind Verträge, bei denen der Versicherungswert von einem Fonds abhängt oder Verträge mit stochastischem Zins.

Fondsgebundene Lebensversicherungen

Im Folgenden wird die Funktionsweise fondsgebundener Lebensversicherungen kurz erläutert: Fondsgebundene Lebensversicherungen, im Englischen als „Unit-Linked"-Produkte bekannt, sind dadurch charakterisiert, dass ihre Leistungen von der Entwicklung einer im Voraus vereinbarten Zusammensetzung verschiedener Finanzinstrumente abhängen. Diese Produkte haben in den letzten Jahrzehnten stark an Beliebtheit gewonnen.

Dies ist der oft besseren Langzeitleistung von Aktienmärkten geschuldet, die besonders den langen Laufzeiten vieler Lebensversicherungsverträge zugutekommt.

Für das Versicherungsunternehmen vergrößern diese Produkte den Markt und bieten die Möglichkeit eine vielfältigere Kundenbasis anzusprechen. Ein weiterer Vorteil für das Unternehmen besteht darin, dass, falls keine Garantieauszahlung vereinbart wurde, das Veranlagungsrisiko auf den Kunden übertragen wird, da jeder Versicherungsnehmer individuell über seine Anlagestrategie entscheiden kann.

In der Regel versprechen diese Verträge, bei Eintritt eines zuvor festgelegten Versicherungsfalls, eine bestimmte Anzahl an Anteilen an den gewählten Finanzinstrumenten. Ein Charakteristikum dieser Versicherungen ist daher, dass die Auszahlungen im Erlebens- oder Todesfall zufällig sind. (vgl. [10], S.103-104)

Aus diesen Gründen ist es naheliegend, die Höhe der Versicherungsleistung durch einen stochastischen Prozess zu modellieren und damit zu zeigen, dass die Auszahlung im Wesentlichen dem Wert eines am Finanzmarkt gehandelten Wertpapiers entspricht. Dies erschwert die Bewertung allgemeiner Lebensversicherungsverträge, da die Techniken der traditionellen Versicherungsmathematik nicht mehr angewendet werden können.

Es wird ersichtlich, dass der Erwartungswert auch weiterhin als Bewertungsprinzip Anwendung finden kann, nun jedoch unter einem anderen, risikoneutralen Maß. (vgl. [1], S.26-28)

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

7.2 Vorbereitungen

Zur Formulierung und Herleitung des minimalen, fairen Preises durch das eindeutige Produktmaß werden im Folgenden einige Definitionen und technische Lemmata eingeführt:

Sei dafür $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ der Abschluss der Menge der reellen Zahlen, welche eine Erweiterung der reellen Zahlen darstellt. Diese Menge ist mit der Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{B \cup C : B \in \mathbb{R}, C \in \{-\infty, \infty\}\}$ ausgestattet.

Oft ist es nützlich, Funktionen auf dieser erweiterten Zahlengeraden zu betrachten:

Definition 7.2.1. Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\overline{\mathbb{R}}$ die Menge der erweiterten reellen Zahlen. Eine Abbildung

$$f : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$$

wird numerische Funktion genannt. (vgl. [14], S.91)

Bemerkung. Solche Funktionen werden betrachtet, wenn das Infimum oder Supremum einer Folge von reellen Funktionen nicht reell ist.

Lemma 7.2.2. *Seien $g_1 \dots g_n$ für $n > 1$, n messbare, numerische Funktionen auf dem Produktraum $(F, \mathcal{F}, \mathbb{F}) \otimes (B, \mathcal{B}, \mathbb{B})$, wobei $(F, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ und $(B, \mathcal{B}, \mathbb{B})$ zwei beliebig gewählte Wahrscheinlichkeitsräume sind. Dann gilt:*

$$g_1 = \dots = g_n \ \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}\text{-}f.s. \Leftrightarrow \mathbb{F}\text{-}f.s.\, g_1(f, \cdot) = \dots = g_n(f, \cdot)\, \mathbb{B}\text{-}f.s. \tag{7.2.1}$$

Erklärung: Dieses Lemma formuliert die Äquivalenz zwischen der Definiton von Gleichheit von Funktionen im Kontext des Produktmaßes $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$ und der Definition von Gleichheit auf einem der Faktoren des Produktraums. Während die linke Seite der Aussage einfach nachzuvollziehen ist, so erfordert die rechte Seite eine zusätzliche Erklärung:

Die Funktionen $g_i(f, \cdot)$ können für alle $i = 1 \dots n$ als Schnitte der messbaren Abbildungen $g_i(f, b)$ betrachtet werden. Das bedeutet, dass $g_i(f, \cdot) : (B, \mathcal{B}, \mathbb{B}) \mapsto (Z, \mathcal{Z})$, wobei $(Z, \mathcal{Z})$ einen beliebigen Messraum darstellt.
Die Gleichheit der Funktionen im Produktraum lässt sich daher auch als fast sicheres Ereignis definieren:

$$\mathbb{F}[f \in F : g_1(f, \cdot) = \dots = g_n(f, \cdot)\, \mathbb{B}\text{-f.s.}] = 1$$

und bedeutet, dass für fast jedes $f \in F$, die Funktionen $g_1(f, \cdot) = \dots = g_n(f, \cdot)$ auf dem biometrischen Raum fast sicher gleich sind.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Beweis Lemma 7.2.2. Sei $Q \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$ die Produkt-σ-Algebra auf dem Produktraum M definiert. Da $(F, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ und $(B, \mathcal{B}, \mathbb{B})$ σ-endliche Wahrscheinlichkeitsräume darstellen, kann dieses eindeutig bestimmte Produktmaß $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$ (nach dem Prinzip von Cavalieri in der Maßtheorie) als Integral dargestellt werden. Für ein beliebiges Q mit dem Schnitt $Q_f = \{b \in B : (f, b) \in Q\}$ gilt folgende Beziehung:

$$\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}(Q) = \int_F \mathbb{B}(Q_f)\ \mathrm{d}\mathbb{F}$$

Nach den Eigenschaften des Integrals und des eindeutigen Produktmaßes ist die Funktion $\mathbb{B}(Q_f)$ $\mathcal{F}$-messbar im Raum $(F, \mathcal{F}, \mathbb{F})$. (vgl. [6], S.181)

Für f und g messbare, reellwertige Funktionen ist auch die Differenz $f - g$ messbar. Im vorliegenden Fall stellen die Funktionen $g_1 \dots g_n$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum definierte Abbildungen dar und die Werte $+\infty$ oder ∞ werden nicht angenommen. Für alle $i \neq j$ mit $i, j = 1 \dots n$ gilt daher:

$$\text{Die Differenz } g_{i,j} := g_i - g_j \text{ ist } \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}\text{-messbar.}$$

Daraus folgt, dass auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \neq j} g_{i,j}^{-1}(0)$ (Dies entspricht dem Schnitt der Mengen, in denen die Funktionen gleich sind) $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$-messbar ist.

Definiert man die Teilmenge Q als $Q := \bigcap_{i \neq j} g_{i,j}^{-1}(0)$, so erhält man:

$$\begin{aligned} Q = \bigcap_{i \neq j} g_{i,j}^{-1}(0) &= \bigcap_{i \neq j} (g_i - g_j)^{-1}(0) \\ &= \bigcap_{i \neq j} \{(f, b) \in F \times B : (g_i - g_j)(f, b) = 0\} \\ &= \bigcap_{i \neq j} \{(f, b) \in F \times B : g_i(f, b) = g_j(f, b)\} \\ &= \{(f, b) \in F \times B : g_1(f, b) = \dots = g_n(f, b)\} \end{aligned}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Zusammenfassend ergibt sich für das $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$-messbare Ereignis Q:

$$\begin{aligned} g_1(f,b) = \cdots = g_n(f,b)\ \mathbb{F}\otimes\mathbb{B}\text{-f.s.} &\Leftrightarrow \mathbb{F}\otimes\mathbb{B}(Q) = 1 \\ &= \int_F \mathbb{B}(Q_f)\ d\mathbb{F} = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{B}(Q_f) = 1\ \mathbb{F}\text{-f.s.} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{B}(\{b \in B : (f,b) \in Q\} = 1\ \mathbb{F}\text{-f.s.} \\ &\Leftrightarrow g_1(f,\cdot) = \cdots = g_n(f,\cdot)\ \mathbb{B}\text{-f.s.} \end{aligned}$$

□

Lemma 7.2.3. *Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge in $L^0(F\times B, \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}, \mathbb{F}\otimes\mathbb{B})$, dem Raum aller reellwertigen, messbaren Funktionen auf $F\times B$. Der Produktraum ist der Raum $(F\times B, \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}, \mathbb{F}\otimes\mathbb{B})$, der aus zwei beliebigen Wahrscheinlichkeitsräumen $(F,\mathcal{F},\mathbb{F})$ und $(B,\mathcal{B},\mathbb{B})$ zusammengesetzt ist. Des Weiteren sei die Funktion g ebenfalls ein Element aus L^0. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

$$g_n(f,b) \mapsto g(f,b)\ \mathbb{F}\otimes\mathbb{B}\text{-}f.s. \iff \mathbb{F}\text{-}f.s\ g_n(f,\cdot) \mapsto g(f,\cdot)\,\mathbb{B}\text{-}f.s.$$

Bemerkung. Die verwendete Notation entspricht jener aus Lemma 7.2.2.

Beweis. Für Elemente in $L^0(F\times B, \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}, \mathbb{F}\otimes\mathbb{B})$ gelten folgende Eigenschaften:

i) Die Elemente in L^0 sind numerische, messbare Funktionen.

ii) Für jede reelle Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und jede Zahl $h \in \mathbb{R}$ gilt:

$$h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h \iff \underset{n\to\infty}{limsup}\ h_n = h = \underset{n\to\infty}{liminf}\ h_n$$

iii) Für numerische Funktionen existieren der Limes superior und Limes inferior stets, da ihre Grenzwerte in den erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$ liegen.

iv) Sei $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ ein beliebiger Maßraum. Für eine $(\mathcal{X},\mathcal{A}) - (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-messbare Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sind auch der Limes inferior und Limes superior dieser Folge wieder messbar.

Da $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und g Elemente des Raumes L^0 sind, gelten die obigen Eigenschaften auch für diese. Die Anwendung von Lemma 7.2.2 auf die messbaren Funktionen limsup g_n, liminf g_n und g führt zur folgenden Aussage:

$$\underset{n\to\infty}{limsup}\ g_n(f,b) = g(f,b) = \underset{n\to\infty}{liminf}\ g_n(f,b)\ \mathbb{F}\otimes\mathbb{B}\text{-f.s.}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Diese Beziehung ist äquivalent zu:

$$\mathbb{F}\text{-f.s. } \underset{n\to\infty}{limsup}\ g_n(f,\cdot) = g(f,\cdot) = \underset{n\to\infty}{liminf}\ g_n(f,\cdot)\ \mathbb{B}\text{-f.s.}$$

Nach Eigenschaft ii) ist dies äquivalent zu:

$$g_n(f,b) \mapsto g(f,b)\ \mathbb{F}\otimes\mathbb{B}\text{-f.s.} \iff \mathbb{F}\text{-f.s } g_n(f,\cdot) \mapsto g(f,\cdot)\ \mathbb{B}\text{-f.s.}$$

□

Portfolios und deren Eigenschaften

Es ist aufmerksamen Lesern nicht entgangen, dass die Menge der Portfolios Θ aus Definition 4.1.3 bisher nicht näher spezifiziert wurde.
Jedoch wurde in Kapitel 6 ersichtlich, dass eine genauere Auswahl geeigneter Portfolios notwendig ist (beispielsweise die Erfüllung der Kolmogorov-Bedingung) um ein sinnvolles Bewertungsmaß einführen zu können und somit die gewünschten Ergebnisse zu erzielen.

Definition 7.2.4. (**Menge der geeigneten Portfolios**)

- Die Menge $\Theta = (L^1(M, \mathcal{M}_T, \mathbb{P}))^d$ umfasst die Portfolios im Produktraum $M^{F\times B}$, wobei $\theta = (\theta^0 \dots \theta^{d-1}) \in \Theta$.
- $\Theta^F = (L^1(F, \mathcal{F}_T, \mathbb{F}))^d$ besteht aus allen Portfolios im Finanzmarktmodell M^F von der Form ${}_F\theta = ({}_F\theta^0 \dots {}_F\theta^{d-1}) \in \theta^F$.

Für die Elemente beider Mengen gilt: Die einzelnen Komponenten θ^i bzw. ${}_F\theta^i$ sind integrierbare, reellwertige und messbare Funktionen auf $(M, M_T, \mathbb{P})$ bzw. $(F, F_T, \mathbb{F})$ für alle $i = 0 \dots d-1$.
Θ^F kann durch die kanonische Einbettung, welche in Kapitel 4.3 eingeführt wurde, als Teilmenge von Θ aufgefasst werden.

i) **Unabhängigkeit und identische Verteilung:** Eine Teilmenge $\Theta' \subset \Theta$ an Portfolios im Marktmodel $M^{F\times B}$ heißt unabhängig und identisch verteilt in Bezug auf $(B, \mathcal{B}_T, \mathbb{B})$, falls die Zufallsvariablen $\{\theta(f,\cdot) : \theta \in \Theta'\}$ für alle (bis auf endlich viele) $f \in F$ im Raum $(B, \mathcal{B}_T, \mathbb{B})$ unabhängig und identisch verteilt sind.
Unter Annahme IV existiert solch eine – möglicherweise abzählbar unendliche – Menge.

ii) Eine Menge $\Theta' \subset \Theta$ erfüllt unter den Annahmen I-III, Eigenschaft (K) falls für alle $f \in F$ folgende Bedingungen gelten:
   - **Stochastische Unabhängigkeit:** Die Elemente in $\{\theta(f,\cdot) : \theta \in \Theta'\}$ sind stochastisch unabhängig im Raum $(B, \mathcal{B}_T, \mathbb{B})$.
   - **Beschränkte L^2 Norm**: Es existiert ein $c(f) \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $\theta \in \Theta'$ gilt: $\|\theta^j(f,\cdot)\|_2 < c(f)$ für alle $j = 0 \dots d-1$.

Mengen mit diesen Eigenschaften werden mit B-i.i.d. bzw. (K) gekennzeichnet.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Annahmen zum Bewertungsmaß

Im Folgenden werden gewünschte Annahmen für ein geeignetes Bewertungsmaß aufgestellt:

Bemerkung. Die nachstehende Annahme kann als Erweiterung der Gleichung (4.2.4) aus Kapitel 4.2 betrachtet werden, nun jedoch für das Bewertungsprinzp im Produktraum.

In Kapitel 3 wird die (NA) Bedingung für die betrachteten Märkte gefordert. Diese Bedingung soll auch für den Finanzmarkt M gelten, in welchem für den, durch eine endliche Anzahl an Preisprozessen $\pi_t(\theta)$ erweiterten Markt mit Preisentwicklung $S' = ((S_t^0, \dots, S_t^{d-1}, \pi_t(\theta))_{t\in\mathbb{T}})$ für beliebige $\theta \in \Theta$, folgendes gelten soll:

VI Annahme

Alle in Frage kommenden Bewertungsmaße π müssen für alle Zeitpunkte $t \in \mathbb{T}$ und für jedes Portfolio $\theta \in \Theta$ von der Form

$$\pi_t(\theta) = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[\langle \theta, S_T\rangle / S_T^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t] \tag{7.2.2}$$

für ein äquivalentes Maß $\mathbb{M} \sim \mathbb{P}$ sein.

Für die rein finanziellen Portfolios ${}_F\theta$ in M^F soll weiterhin gelten:

$$\pi_t({}_F\theta) = \pi_t^F({}_F\theta) \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{7.2.3}$$

Bemerkung. Aus dieser Annahme folgt direkt, dass der Preisprozess $(S_t/S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ ein $\mathbb{M}$-Martingal ist. Sei dazu ${}_F\theta = e_{i-1}$, wobei e_i den i-ten Standardbasisvektor in $\mathbb{R}^d$ für alle $i = 1, \dots, d$ bezeichnet. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \pi_t({}_F\theta) &\overset{(7.2.2)}{=} S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[S_T^i/S_T^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t] \\ &\overset{(7.2.3)}{=} {}_FS_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[{}_FS_T^i/{}_FS_T^0 \mid \mathcal{F}_t] \\ &\overset{(4.2.4)}{=} \langle {}_F\theta, {}_F S_t\rangle = {}_FS_t^i \end{aligned}$$

Für S als die kanonische Einbettung von ${}_FS$ folgt daraus insgesamt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{M}}[S_T^i/S_T^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t] = S_t^i/S_t^0$$

ist ein $\mathbb{M}$-Martingal für $i = 1 \dots d$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Die folgende Annahme stellt eine Verallgemeinerung des Settings und der Erkentnisse aus Kapitel 6 auf die Bewertung von allgemeinen Produkten dar und formalisiert Grundsätze 5 und 7:

VII Annahme

Ein *minimaler, fairer Preis* ist ein Bewertungsprinzip π an der Menge Θ, der zum Vertragsbeginn unter den Annahmen I-IV und VI für jedes Element $\theta \in \Theta$ folgende Bedingung erfüllt:

$$\pi_0(\theta) = \pi_0^F(H(\theta)),$$

wobei die Funktion H („*Hedge*“)

$$H : \Theta \mapsto \Theta^F \tag{7.2.4}$$

folgende Eigenschaften aufweisen soll:

(i) Wenn θ ein t-Portfolio ist, dann ist auch $\mathrm{H}(\theta)$ ein t-Portfolio.

(ii) Für B-i.i.d. Portfolios ${}^1\theta$ und ${}^2\theta$ gilt: $\mathrm{H}({}^1\theta) = \mathrm{H}({}^2\theta)$.

(iii) Für t-Portfolios $\{{}^i\theta : i \in \mathbb{N}^+\}_{B\text{-i.i.d.}}$ oder $\{{}^i\theta : i \in \mathbb{N}^+\}_K$ soll die folgende Konvergenzeigenschaft gelten:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle {}^i\theta - H({}^i\theta), S_t \rangle = 0 \ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

In Lemma 7.3.3 wird gezeigt, dass ein Hedge H mit den beschriebenen Eigenschaften existiert.

Erklärungen

1. Die Beziehung (7.2.4) impliziert zwei zentrale Eigenschaften der Absicherungsstrategie:
   - Der Hedge $H(\theta)$ ist ein Portfolio im vollständigen Finanzmarkt M^F und Eigenschaft i) spezifiziert diesen Hedge als ein t-Portfolio. Nach Lemma 4.3.1 existiert eine selbstfinanzierende Strategie, die dieses Portfolio bis zum Zeitpunkt t repliziert.
   - Für die Bestimmung des minimalen, fairen Preises, welcher die selbstfinanzierende Absicherungsstrategie zum Vetragsbeginn finanziert, ist lediglich der Zustand der versicherten Person zum Zeitpunkt 0 relevant. Biometrische Entwicklungen nach Vertragsabschluss werden für die Preisfindung nicht berücksichtigt.
2. Eigenschaft ii) konkretisiert Grundsatz 5: Die definierte Hedgingstrategie H unterscheidet nicht zwischen B-i.i.d. Individuen. Mit anderen Worten: Für Personen mit vergleichbaren biometrischen Entwicklungen sollen dieselben Absicherungsstrategien angewendet werden, vorausgesetzt, die Ereignisse sind unabhängig voneinander.
3. Die punktweise Konvergenz in iii) wird durch die Eigenschaften der (K)-Portfolios und B-i.i.d. Portfolios gewährleistet.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Dieser Grenzwert beschreibt Grundsatz 7: „Der minimale Preis soll zumindest die Kosten eines finanziellen Hedges abdecken, welcher den Mittelwert der Gewinne und Verluste - bei einer wachsenden Anzahl an unabhängiger Versicherer – gegen 0 konvergieren lässt“.

4. Zusätzlich wird auch Grundsatz 4 präzisiert: Versicherungsunternehmen müssen sicherstellen, dass diese eine große Klasse von ähnlichen Verträgen, im Sinne von B-i.i.d. Veträgen, verwalten können.

7.3 Bewertung im allgemeinen Fall

Nach den umfangreichen Vorbereitungen, kann nun das zentrale Thereom dieser Arbeit angeführt werden:

7.3.1 Haupttheorem

Theorem 7.3.1. ***(der minimale, faire Preis):***
Der minimale, faire Preis π auf der Menge Θ ist unter den Annahmen I-IV, VI und VII eindeutig durch das Martingalmaß $\mathbb{M} = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}$ bestimmt. Im Detail gilt:

$$\pi_t(\theta) = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle \theta, S_T \rangle / S_T^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t] \tag{7.3.1}$$

für alle $\theta \in \Theta$ und alle Zeitpunkte $t = \{0 \dots T\}$.

Es ist ersichtlich, dass das Nettoprämienprinzip aus Kapitel 6 einen Spezialfall der Gleichung (7.3.1), im Kontext deterministischer Finanzmärkte, darstellt. Der Preis $\pi_t(\theta)$ für eine Lebensversicherung ist nicht nur eindeutig durch das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{M}$ bestimmt, sondern stellt auch den niedrigsten, fairsten Preis für beide Vetragspartner dar.

Bevor der Beweis des Theorems 7.3.1 vollständig dargestellt werden kann, sind zunächst folgende Lemmata zu betrachten:

Lemma 7.3.2. *Auf dem Maßraum $(F \times B, \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_T)$ gilt:*

i) $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B} \sim \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$

ii) Für die Radon-Nikodym Dichte gilt:

$$\frac{d(\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B})}{d(\mathbb{F} \otimes \mathbb{B})} = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{F}} \; \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}\text{-}f.s.$$

Beweis. Sei $Z \in \mathcal{M}_T = \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_T$ und $\mathbf{1}_Z$ die Indikatorfunktion von Z, d.h.

$$\mathbf{1}_Z(f, b) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } (f, b) \in Z, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

ad *i)*:
Nach den Eigenschaften und Rechenregeln der Indikatorfunktion gilt:

$$\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}(Z) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{1}_Z = 0 \ \mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}\text{-f.s.}$$

Des Weiteren lässt sich zeigen, dass $\mathbf{1}_Z$ eine $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}_T$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbare Funktion ist. Nach Lemma 7.2.2 folgt dann:

$$\mathbf{1}_Z(f,b) = 0 \ \mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}\text{-f.s.} \Leftrightarrow \mathbb{Q}\text{-f.s. } \mathbf{1}_Z(f,\cdot) = 0 \ \mathbb{B}\text{-f.s.}$$

Da $\mathbb{Q} \sim \mathbb{F}$, impliziert dies die gleichen Nullmengen und es gilt:

$$\mathbb{Q}\text{-f.s. } \mathbf{1}_Z(f,\cdot) = 0 \ \ \mathbb{B}\text{-f.s.} \Leftrightarrow \mathbb{F}\text{-f.s. } \mathbf{1}_Z(f,\cdot) = 0 \ \mathbb{B}\text{-f.s.}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{1}_Z(f,b) = 0 \ \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}\text{-f.s.} \Leftrightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}(Z) = 0.$$

ad *ii)*:
Für den Erwartungswert der Indikatorfunktion gilt $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}(Z) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\mathbf{1}_Z]$. Nach dem Satz von Fubini, da $\mathbf{1}_Z$ eine $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}_T$-messbare Funktion ist, gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\mathbf{1}_Z] = \int_F \mathbf{1}_Z \, \mathrm{d}(\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}) = \int_F \int_B \mathbf{1}_Z \, \mathrm{d}\mathbb{B} \, \mathrm{d}\mathbb{Q} = \int_F \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\mathbf{1}_Z] \, \mathrm{d}\mathbb{Q} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\mathbf{1}_Z]]$$

Aufgrund der Vollständigkeit des Marktes M^F und dem zweiten Fundamentalsatz der Arbitragepreistheorie gibt es ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q} \sim \mathbb{F}$). Folglich existiert die Radon-Nikodym Dichte $\mathrm{d}\mathbb{Q}/\mathrm{d}\mathbb{F}$ mit beschränkter, endlicher Varianz.
Aufgrund der Eigenschaften dieser Dichtefunktion (siehe Theorem 4.2.6) und der Äquivalenz $\mathbb{Q} \sim \mathbb{F}$ gilt daher:

$$\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}(Z) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\mathbf{1}_Z]] = \mathbb{E}_{\mathbb{F}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\mathbf{1}_Z]\right] = \int_F \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{F}} \int_B \mathbf{1}_Z \ \mathrm{d}\mathbb{B} \ \mathrm{d}\mathbb{F}$$

$$= \int_F \mathbf{1}_Z \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{F}} \, \mathrm{d}(\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}) = \mathbb{E}_{\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}}\left[\mathbf{1}_Z \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{d\mathbb{F}}\right]$$

Zusammenfassend folgt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\mathbf{1}_Z] = \mathbb{E}_{\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}}\left[\mathbf{1}_Z \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{d\mathbb{F}}\right]$$

Da nun eine weitere Funktion in $L^1(F \times B, \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_T, \mathbb{F} \otimes \mathbb{B})$ die Eigenschaft einer Radon-Nikodym Dichte erfüllt (nach Theorem 4.2.6), folgt:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B})}{\mathrm{d}(\mathbb{F} \otimes \mathbb{B})} = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{F}} \ \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}\text{-f.s.}$$

□

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Lemma 7.3.3. *Gegeben seien Annahme I und II. Dann gilt:*

i) Für alle $\theta \in \Theta$ gilt:

$$H^*(\theta) := \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta] \in \Theta^F. \tag{7.3.2}$$

ii) Es existiert eine selbstfinanzierende, replizierende Strategie für $H^*(\theta)$ und der Preisprozess $\pi_t(H^*(\theta))$ ist unter Annahme VI von der Form

$$\pi_t(H^*(\theta)) = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle \theta, S_T\rangle / S_T^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0], \tag{7.3.3}$$

für $t \in \mathbb{T}$.

iii) H^* erfüllt die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) aus Annahme VII.

Beweis. ad i) Für $\theta \in \Theta = (L^1(M, \mathcal{M}_T, \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}))^d$ gilt: θ ist integrierbar bezüglich des Prduktmaßes $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$. Das bedeutet, dass

$$\int_{F\times B} \theta(f,b)\, \mathrm{d}(\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}) < \infty.$$

Nach dem Satz von Fubini folgt unter dieser Voraussetzung, dass die Funktion $f \mapsto \theta(f,b)$ für fast alle b integrierbar ist. Daraus ergibt sich, dass:

$$f \mapsto \textstyle\int_B \theta(f,b)\, \mathrm{d}\mathbb{B}$$

integrierbar ist und $\int_F \int_B \theta(f,b)\, \mathrm{d}\mathbb{B}\, \mathrm{d}\mathbb{F}$ existiert. Somit ist $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta]$ $\mathbb{F}$-integrierbar.

Aus diesen Überlegungen lässt sich schließen, dass $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta] \in \Theta^F = (L^1(F, \mathcal{F}_T, \mathbb{F}))^d$.

ad ii) Nach Annahme II (Vollständigkeit des Marktes M^F) kann das Portfolio $H^*(\theta)$ durch eine selbstfinanzierende Strategie innerhalb von M^F repliziert werden. Weiterhin soll nach Annahme VI für $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta] \in \Theta^F$ gelten, dass die Gleichheit $\pi_t(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta]) = \pi_t^F(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta])$ erfüllt ist.
Nach Kapitel 4.3.1 hat dieser Preisprozess folgende Form:

$$\pi_t(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta]) = \pi_t^F(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta]) = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta], S_T\rangle / S_T^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0] \tag{7.3.4}$$

Um die Gleichheit von (7.3.3) und (7.3.4) zu zeigen, muss zunächst die Existenz des Erwartungswertes aus Gleichung (7.3.3) nachgewiesen werden:

Aus der Definition von $\theta = (\theta^0, \dots \theta^{d-1}) \in (L^1(M, \mathcal{M}_T, \mathbb{P}))^d$ folgt, dass die Erwartungswerte der einzelnen Komponenten endlich sind, das heißt, sie sind $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$-integrierbar. Außerdem ist zum Zeitpunkt T der Wert des risikolosen Wertpapiers $S_T^0 > 0$ endlich und nimmt fast sicher endliche Werte an. (vgl. [13])

Zusammenfassend gilt:

$$\langle \theta, S_T\rangle / S_T^0 \text{ ist } \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}\text{-integrierbar}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Nach Lemma 7.3.2 ist $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B} \sim \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$ mit einer beschränkter Radon-Nikodym Dichte $\mathrm{d}(\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B})/\mathrm{d}(\mathbb{F} \otimes \mathbb{B})$. (vgl.[13], S.200)

Die Existenz der Gleichung 7.3.4 ist damit gesichert:

$$S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{\langle\theta, S_T\rangle}{S_T^0}\frac{\mathrm{d}(\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B})}{\mathrm{d}(\mathbb{F}\otimes\mathbb{B})} \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0\right] = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{\langle\theta, S_T\rangle}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0\right]$$

Da durch die Bedingung auf $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, B\}$ keine Abhängigkeit mehr von den Elementen des biometrischen Wahrscheinlichkeitsraums gegeben ist, gilt für alle $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}$-integrierbaren Funktionen X:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[X] \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[X \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0] \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{7.3.5}$$

Für jedes $\theta \in \Theta$ folgt daraus:

$$\pi_t(H^*(\theta)) = \pi_t(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta]) =$$

$$S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta], S_T\rangle/S_T^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0] \overset{(7.3.5)}{=} S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle\theta, S_T\rangle/S_T^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0]$$

ad iii) Für eine $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t$-messbare Zufallsvariable X gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}}[X \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0] = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[X] \ \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}\text{-f.s.}$$

Für ein t-Portfolio $\theta \in \mathcal{M}_t$ ergibt sich dann:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}}[\theta \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0] = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta]$$

und $H^*(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta]$ ist ein t-Portfolio und Eigenschaft (i) aus Annahme VII ist bewiesen.

Zu Eigenschaft (ii) aus Annahme VII:
Für zwei B-i.i.d Portfolios ${}^1\theta$ und ${}^2\theta$ gilt gemäß der Gleichung (7.3.2):

$$H^*({}^1\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^1\theta] = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^2\theta] = H^*({}^2\theta)$$

Zu Eigenschaft (iii):
Sei $K = \{{}^i\theta : i \in \mathbb{N}^+\}_K$ eine Menge an t-Portfolios, die das Kolmogorow-Kriterium erfüllen. Für ${}^i\theta \in K$ gilt nach *Kolmogoroffs erstem Gesetz der großen Zahlen* $\mathbb{F}$-fast sicher:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle {}^i\theta(f, \cdot) - H^*({}^i\theta)(f), S_t(f)\rangle = 0 \ \mathbb{B}\text{-f.s.}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Lemma 7.2.3 impliziert dann:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle {}^i\theta(f,b) - H^*({}^i\theta), S_t\rangle = 0 \ \mathbb{F}\otimes\mathbb{B}\text{-f.s.}$$

Nach *Kolmogoroffs zweitem Gesetz der großen Zahlen* (vgl. [11], S.252) gelten für B-i.i.d Portfolios mit endlichem Erwartungswert aus der Menge $\{{}^i\theta : i \in \mathbb{N}^+\}_{B\text{-i.i.d.}}$ gleiche Konvergenzresultate.

□

Lemma 7.3.4. *Unter den Annahmen I und II gilt für alle $\theta \in \Theta, t \in \mathbb{T}$ und $\mathbb{M} \in \{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}, \mathbb{F}\otimes\mathbb{B}\}$:*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{M}}[\langle \theta - H^*(\theta), S_t\rangle] = 0$$

Beweis. Zunächst wird der Fall $\mathbb{M} = \mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}$ gezeigt. Nach dem Satz von Fubini gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{M}}[\langle \theta - H^*(\theta), S_t\rangle] = \int_{F\times B} \langle \theta - H^*(\theta), S_t\rangle \, \mathrm{d}\mathbb{M}$$

Dies lässt sich umschreiben als:

$$\int_{F\times B} \langle \theta - H^*(\theta), S_t\rangle \, \mathrm{d}\mathbb{M} = \int_F \left(\int_B \langle \theta - H^*(\theta), S_t\rangle \, \mathrm{d}\mathbb{B} \right) \mathrm{d}\mathbb{Q}$$

Aufgrund der Definition von $H^*(\theta)$ gilt:

$$\int_B \langle \theta - H^*(\theta), S_t\rangle \, \mathrm{d}\mathbb{B} = \langle \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta - H^*(\theta)], S_t\rangle = 0$$

Somit gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{M}}[\langle \theta - H^*(\theta), S_t\rangle] = 0$$

Analoge Ergebnisse gelten für $\mathbb{M} = \mathbb{F}\otimes\mathbb{B}$. □

Lemma 7.3.5. *Unter den Annahmen I-IV und VI, gilt für jede Funktion $H : \Theta \mapsto \Theta^F$ aus Annahme VII, welche die Bedingungen (i)-(iii) erfüllt, folgender Zusammenhang für den Preisprozess eines Portfolios θ in $\Theta'_{B\text{-i.i.d}}$:*

$$\pi_t(H(\theta)) = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle \theta, S_T\rangle / S_T^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0]$$

Beweis. Gegeben sei eine Funktion H gemäß Annahme VII mit den Eigenschaften (i)-(iii), sowie eine Menge von Portfolios $\Theta' = \{{}^i\theta, i \in \mathbb{N}^+\}_{B\text{-i.i.d}}$. Es wird angenommen, dass ein gegebenes Portfolio $\theta \in \Theta$ in dieser Menge Θ' enthalten ist.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Da jedes $\theta \in \Theta$ ein T-Portfolio ist, beobachtet man nach den Eigenschaften (ii) und (iii), dass:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle {}^i\theta(f,b) - H(\theta)(f), S_T(f)\rangle = 0 \ \mathbb{F}\otimes\mathbb{B}\text{-f.s.}$$

Nach Lemma 7.2.3 ist dies äquivalent zu:

$$\mathbb{F}\text{-f.s. } \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle {}^i\theta(f,\cdot) - H(\theta)(f), S_T(f)\rangle = 0 \ \mathbb{B}\text{-f.s.} \tag{7.3.6}$$

Da das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinarform ist, kann man die Summanden in der obigen Gleichung (7.3.6) darstellen als

$$\langle {}^i\theta(f,\cdot), S_T(f)\rangle - \langle H(\theta)(f), S_T(f)\rangle.$$

Nach dem Gesetz der großen Zahlen muss daher gelten:

$$\langle H(\theta)(f), S_T(f)\rangle = \langle \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta(f,\cdot)], S_T(f)\rangle \ \mathbb{F}\text{-f.s}$$

Für den Preisprozess gilt nach der Gleichung $\pi_t({}_F\theta) = \pi_t^F({}_F\theta)$ aus Annahme VI und der (NA) Bedingung im Raum Θ^F für $H(\theta) \in \Theta^F$:

$$\pi_t(H(\theta)) = \pi_t(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta]) = \pi_t(H^*(\theta)) \ \mathbb{P}\text{-f.s. für } t \in \mathbb{T}.$$

Nach Lemma 7.3.3 folgt daher:

$$\pi_t(H(\theta)) = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle \theta, S_T\rangle / S_T^0 \mid \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_0]$$

□

Aus dem Lemma folgt, dass Strategien, welche keine biometrischen Informationen berücksichtigen, dennoch auch die gewünschten Eigenschaften (i)-(iii) erfüllen, denselben Preisprozess wie das Absicherungsportfolio H^* aufweisen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

7.3.2 Beweis des Haupttheorems

Mit diesen soeben hergeleiteten Ergebnissen ist es schlussendlich möglich den Beweis des **Haupttheorems 7.3.1** anzuführen. Dieser gliedert sich in zwei Teile: Der erste Teil zeigt die Existenz und die Erfüllung der gewünschten Eigenschaften, während der zweite Teil die Eindeutigkeit behandelt.

Beweis Theorem 7.3.1. Sei $\theta \in \Theta$ und **Annahmen I-IV** sollen gelten.

Existenz

Nach Lemma 7.3.2 existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B} \sim \mathbb{F}\otimes\mathbb{B}$ im unterliegenden Produktraum $M^{F\times B}$ mit der beschränkten Radon-Nikodym Dichte $\mathrm{d}(\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B})/\mathrm{d}(\mathbb{F}\otimes\mathbb{B})$. Analog zum Existenzbeweis aus Lemma 7.3.3 ist der Erwartungswert unter $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}$ gesichert durch:

$$S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{\langle\theta, S_T\rangle}{S_T^0}\frac{\mathrm{d}(\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B})}{\mathrm{d}(\mathbb{F}\otimes\mathbb{B})} \mid \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}_t\right] = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}\left[\frac{\langle\theta, S_T\rangle}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}_t\right]$$

Form

Der Preis(prozess) (7.3.1) für allgemeine Lebensversicherungsprodukte ist somit kompatibel mit der gewünschten Form eines Bewertungsmaßes aus **Annahme VI** mit $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B} \sim \mathbb{F}\otimes\mathbb{B}$. Es bewertet auch reine Finanzportfolios θ_F im Produktraum entsprechend Kapitel 4.3.1 durch $\pi_t({}_F\theta) = \pi_t^F({}_F\theta)$ $\mathbb{P}$-f.s. (aufgrund der NA Bedingung in Finanzmodell M^F) und es gilt:

$$\pi_t({}_F\theta) = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle {}_F\theta, S_T\rangle/S_T^0 \mid \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}_t] \ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Bewertungsmaß

Ebenso ist aus dem Kapitel 4.3.1 bekannt, dass der Wertpapierpreisprozess (S_t/S_t^0) unter dem eingeführten Preis ein $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}$-Martingal darstellt. Aufgrund der Definiton des Preisprozesses

$$\pi_t(\theta) = S_t^0 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle\theta, S_T\rangle/S_T^0 \mid \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}_t]$$

impliziert man

$$\pi_t(\theta) = \langle\theta, S_t\rangle$$

für jedes $\mathcal{F}_t$-messbare Portfolio $\theta \in \Theta$. Nach Definition 4.1.7 sind die Eigenschaften eines Bewertungsmaßes erfüllt.

Minimaler Preis

Annahme VII: Das Bewertungsmaß π_0 soll minimal im Sinne von $\pi_0(\theta) = \pi_0^F(H(\theta))$ sein, d.h. der Preis soll für den Ankauf der Absicherung $H(\theta) = H^*(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta]$ ausreichen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Nach dem Theorem von Fubini gilt für $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, F\}$ und $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, B\}$:

$$\pi_0(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle\theta, S_T\rangle/S_T^0] = \int_{F\times B} \langle\theta, S_T\rangle/S_T^0 \; \mathrm{d}(\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B})$$

$$= \int_F \int_B \langle\theta, S_T\rangle/S_T^0 \; \mathrm{d}\mathbb{B}\,\mathrm{d}\mathbb{Q} = \int_F \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\langle\theta, S_T\rangle/S_T^0]\,\mathrm{d}\mathbb{Q}$$

$$= \int_F \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\sum_{i=0}^{d-1} \theta^i \cdot S_T^i]/S_T^0\,\mathrm{d}\mathbb{Q} = \int_F \sum_{i=0}^{d-1} \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta^i]\cdot S_T^i/S_T^0\,\mathrm{d}\mathbb{Q}$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\langle\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[\theta], S_T\rangle/S_T^0] = \pi_0(H^*(\theta)) = \pi_0^F(H^*(\theta))$$

Die optimale Absicherung bzw. deren Preisprozess erfüllt nach Lemma 7.3.3 die gewünschten Eigenschaften (i)-(iii).

Eindeutigkeit

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die Eindeutigkeit des minimalen, fairen Preises π nachzuweisen, d.h. für ein EMM $\mathbb{M} \sim \mathbb{P}$ im Produktraum

$$M^{F\times B} = (M, (\mathcal{M}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}) = (F\times B, (\mathcal{F}_t\otimes\mathbb{B}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{F}\otimes\mathbb{B})$$

soll die Gleichheit

$$\mathbb{M} = \mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}$$

gelten.

Um sinnvolle Ergebnisse erzielen zu können, sind einige Vorbereitungen und Annahmen notwendig:
Um Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem abzählbar unendlichen Produktraum zu konstruieren, werden spezielle Mengen – sogenannte Zylindermengen – zur Hilfe herangezogen. Diese werden in einem Produktraum als jene Mengen definiert, die nur von einer endlichen Anzahl an Koordinaten abhängen. Alternativ können sie auch als die Urbilder der Elemente einer σ-Algebra unter der kanonischen Projektion angesehen werden. (vgl. [9], S.262)

Die Konstruktion der Wahrscheinlichkeitsmaße erfolgt in zwei Schritten: Zunächst arbeitet man mit den „einfacheren“ Zylindermengen (d.h. mit endlichen Projektionen), welche als Erzeuger für die terminale σ-Algebra $\mathcal{M}_T$ dienen. Da diese Algebra die gesamten Informationen bis zum Zeitpunkt T enthält, liegt die Aufgabe darin, ein wohldefiniertes Maß auf den Erzeugermengen von $\mathcal{M}_T$ zu definieren. Aufbauend darauf, kann man diese Resultate eindeutig auf den gesamten Raum fortsetzen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Nach der Existenzaussage im oberen Teil des Beweises, sei

- π ein minimaler, fairer Preis im Sinne von Annahme VII und
- $\{{}^i\theta,\ i \in \mathbb{N}^+\}_{B\text{-i.i.d.}}$ eine Teilmenge an Portfolios mit den bekannten Eigenschaften, sodass
$$ {}^1\theta = (\mathbf{1}_Z, 0, \ldots, 0)$$
d.h. der Versicherungsvertrag verspricht den Wert der Indikatorfunktion einer Zylindermenge Z und keine Auszahlung in den verbliebenen $d-1$ Positionen.

Bemerkung. Die Möglichkeit zur Konstruktion dieser B-i.i.d Menge ist durch Annahme IV gesichert.

Zylindermengen

Definition 7.3.6. Die Zylindermenge Z_J sei folgenderweise definiert:

$$Z_J = \{(f,b) \in M : (f,b) \in S := (F' \times B_1 \times B_2 \times \ldots B_i \ldots) \in F_T \otimes B_T\} \tag{7.3.7}$$

mit $F' \in F_T, B_j \in B_T^j$ für $j \in J \subset \mathbb{N}^+$ und $B_j \neq B^j$ für endlich viele $j \in \mathbb{N}^+$.

Die Einschränkung $B_j \neq B^j$ besagt, dass nur bei endlich vielen biometrischen Risiken die Menge B_j von der individuellen Ergebnismenge B^j abweicht.
Diese Endlichkeitsforderung macht es möglich die Produktstruktur zu vereinfachen und Z_J als einfacheres Produkt zu definieren, welches nur auf einer endlichen Teilmenge an Indizes basiert, wobei der Rest der Faktoren als „trivial“ (d.h. als die gesamte Grundmenge) angesehen wird.

Bemerkung. Da die Mengen S als kartesische Produkte von gewissen Mengen aus der σ-Algebra definiert sind, nennt man Z_J einen Rechteckszylinder. (vgl. [9], S.262)

Erzeugendensystem

Im Weiteren sei das Mengensystem aller Rechteckszylinder folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{Z} := \bigcup_{J \subset \mathbb{N}^+} Z_J$$

mit Z_J wie in (7.3.7) definiert und

$$\sigma(\mathcal{Z}) = \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_T = \mathcal{M}_T \tag{7.3.8}$$

(vgl.[9], S.262)

Aufgrund der Definition von $\mathcal{Z}$ ist ersichtlich, dass die gesamte Grundmenge M Teil des Erzeugendensystems ist, da sie durch die Vereinigung aller Elemente gebildet werden kann.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

- Das System $\mathcal{Z}$ ist ein durschnittsstabiles Mengensystem (auch π-System genannt): Betrachtet man zwei Zylindermengen Z_J und $Z_{\tilde{J}}$ mit $J \neq \tilde{J}$ und einer endlichen Produktstruktur

$$Z_J = \{(f,b) \in M : (f,b) \in S_1\}$$

$$Z_{\tilde{J}} = \{(f,b) \in M : (f,b) \in S_2\}$$

und S_1 und S_2 laut Definition 7.3.6.

Der Durchschnitt dieser beiden Mengen $Z_J \cap Z_{\tilde{J}}$

$$Z_J \cap Z_{\tilde{J}} = \{(f,b) \in M : (f,b) \in S_1 \wedge (f,b) \in S_2\}$$

ist ebenso eine Zylindermenge, die nun aber möglicherweise durch eine kleinere, jedoch weiterhin endliche Anzahl (höchstens $min(n_1, n_2)$ für $|J| = n_1$ und $|\tilde{J}| = n_2$) an Koordinaten definiert ist.

- Ein Dynkin-System sei folgendermaßen definiert:

Definition 7.3.7. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt Dynkin-System (oder λ-System), falls gilt:

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ ist $B \setminus A \in \mathcal{A}$

iii) für je abzählbar viele, paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(vgl.[9], S.4)

Ausgehend von einem π-System der Zylindermengen ist es möglich, ein Dynkin-System zu konstruieren, welches alle Mengen beinhaltet, die durch die Erweiterung der oben aufgelisteten Mengenoperationen gebildet werden können.

Einerseits ist zu erwähnen, dass das konstruierte λ-System im Allgemeinen aus komplexeren Mengen als sein erzeugendes System π bestehen kann. Durch die Eigenschaft der Vereinigungs- sowie Differenzenstabilität können Mengen resultieren, welche die Eigenschaften einer Zylindermenge nicht mehr erfüllen.

Dynkin'scher π-λ-Satz

Bezeichnet man das durch $\mathcal{Z}$ erzeugte Dynkin-System als $\delta(\mathcal{Z})$, dann besagt Satz 1.19 in ([9], S.7) für das durchschnittstabile Mengensystem $\mathcal{Z}$:

$$\delta(\mathcal{Z}) = \sigma(\mathcal{Z})$$

In Worten: Das vom Mengensystem der Zylindermengen $\mathcal{Z}$ erzeugte Dynkin-System ist gleich der von diesem System erzeugten σ-Algebra. Mit Gleichung (7.3.8) ist nun ersichtlich, dass $\mathcal{M}_T$ die kleinste σ-Algebra ist, welche die ursprünglichen Zylindermengen enthält.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Maßeindeutigkeitssatz

Um den letzten Schritt hin zur Gleichheit der Maße im gesamten Produktraum zu zeigen, sei π_0 der Preis zum Zeitpunkt 0 und ${}^1\theta$ wie oben beschrieben.

Für dieses Portfolio, ein $Z \in \mathcal{Z}$ und ein Bewertungsprinzip π im Sinne von Annahme VII ist der Preis durch Gleichung (7.3.3), daher unter dem Produktmaß $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}$, gegeben:

$$\pi_0({}^1\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\langle {}^1\theta, S_T\rangle / S_T^0] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{B}}[\mathbf{1}_Z] = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}(Z)$$

Andererseits gilt nach Annahme VI:

$$\pi_0({}^1\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[\langle {}^1\theta, S_T\rangle / S_T^0] = \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[\mathbf{1}_Z] = \mathbb{M}(Z),$$

daher folgt die Gleichheit

$$\pi_0({}^1\theta) = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}(Z) = \mathbb{M}(Z) \tag{7.3.9}$$

Lemma 7.3.8. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$. Es gebe $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$ mit $\mathcal{E}_n \uparrow \Omega$ und $\mu(\mathcal{E}_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist μ durch die Werte $\mu(E), E \in \mathcal{E}$, eindeutig festgelegt.*
Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so gilt die Folgerung auch ohne Existenz der Folge $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(vgl. [9], S.19)

Durch die Anwendung des Lemma an die Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{B}$ und $\mathbb{M}$ folgt durch (7.3.9) die Eindeutigkeit des Preises π im Produktraum $\mathrm{M}^{F\times B}$.

□

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

8 Hedging und Diversifikation im Produktraum

8.1 Absicherungsstrategien

Im Kapitel zur klassichen Bewertung von Lebensversicherungen (Kapitel 6) wurden bereits erste Resultate zur Absicherung der dort auftretenden biometrischen Risiken erarbeitet. Es wird ersichtlich, dass viele dieser Ergebnisse auch für die optimale Hedgingmethode H^* im allgemeinen Fall ihre Gültigkeit bewahren werden.

Zur Wiederholung: Die Verträge im allgemeinen Fall sind unter den Annahmen I-IV aus Kapitel 4.3 folgendermaßen definiert:

$$\{({}^i\gamma_t(f,b), {}^i\delta_t(f,b))_{t\in\mathbb{T}} : i \in \mathbb{N}^+\}$$

und werden im Folgenden mit $({}^i\gamma_t, {}^i\delta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ abgekürzt.

Die Menge der Leistungen und Prämien erfüllt für alle $t \in \mathbb{T}$ die Eigenschaft (K) :

$$\{{}^i\gamma_t : i \in \mathbb{N}^+\}_K \text{ und } \{{}^i\delta_t : i \in \mathbb{N}^+\}_K$$

Absicherung H* für allgemeine Versicherungsverträge

Der Hedge H^* für einen Vertrag $({}^i\delta_t - {}^i\gamma_t)_{t\in\mathbb{T}}$ setzt sich nach Gleichung (7.3.2) aus den $\mathcal{F}_t$-messbaren Finanzportfolios $(-\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t] + \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t])_{t\in\mathbb{T}}$ (oder den zugehörigen selbstfinanzierenden replizierenden Strategien) aus M^F zusammen. Diese Absicherungen werden für alle $i \in \mathbb{N}^+$ und alle $t \in \mathbb{T}$ zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses ($t = 0$) erworben.

Durch die Anwendung dieser Absicherungsstrategien erhält man analog zum klassischen Fall im Mittel für die Gesamtauszahlung pro Vetrag und zum Zeitpunkt t bei einer wachsenden Anzahl an Versicherungsnehmern:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle {}^i\delta_t - {}^i\gamma_t - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t - {}^i\gamma_t], S_t\rangle = 0 \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{8.1.1}$$

Diese Konvergenz folgt direkt aus der Konvergenzeigenschaft (iii) für den Hedge $H^*(\theta)$ sowie der Eigenschaft (K) der betrachteten Mengen für die Leistungen und Prämien. (siehe Lemma 7.3.3)

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Für den Mittelwert des Endsaldos gilt ebenso:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=0}^{T} \langle {}^i\delta_t - {}^i\gamma_t - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t - {}^i\gamma_t], S_T \rangle = 0 \ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Die Strategien zur Zeit des Vetragsabschlusses sind so gestaltet, dass diese nicht mehr auf etwaige spätere biometrischen Entwicklungen einzelner Personen reagieren. Diese Eigenschaft ist eine der Vorteile der Absicherungstrategie H^*, da alle zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegenden Informationen über die versicherte Person (wie Alter und Gesundheitszustand) für die Strategiegestaltung ausreichend sind. Anpassungen der Strategie sind nur durch die Erträge der bestehenden Vermögenswerte möglich, ohne dass weiteres Kapital zugeführt oder entnommen werden darf.

8.2 Diversifikation

Wendet man das Äquivalenzprinzip unter dem Preis aus Theorem 7.3.1 an, so ergibt sich in Analogie zum klassischen Setting mit der Eigenschaft $\pi_0(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t]) = \pi_0({}^i\delta_t - {}^i\gamma_t)$ folgende Beziehung:

$$\sum_{t=0}^{T} \pi_0({}^i\delta_t - {}^i\gamma_t) = \sum_{t=0}^{T} \pi_0(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t - {}^i\delta_t]) = 0 \tag{8.2.1}$$

Unter Diversifikation biometrischer Risiken wird die Konvergenz des durchschnittlichen Saldos gegen 0 verstanden. Dies gilt für jeden Zeitpunkt t und für eine wachsende Anzahl an Versicherungsnehmern. Die entsprechende, selbstfinanzierende Absicherung kann, unter der Einhaltung des Äquivalenzprinzips und der Anwendung des minimalen Preises, zu Vertragsabschluss kostenlos angeschafft werden.

8.3 Beispiele

Zur Demonstration der hergeleiteten Ergebnisse der letzten Kapitel werden diese im Folgenden exemplarisch auf drei Lebensversicherungsprodukte angewendet. Als „Vertreter“ der klassischen Lebensversicherung dienen hierbei eine *Ablebensversicherung* sowie eine *gemischte Versicherung*. Ein weit verbreitetes Produkt für komplexere Lebensversicherungsprodukte sind *fondsgebundene Versicherungen.*

Für die folgenden Beispiele gilt folgende Annahme: Die versicherte Person i ist zum Zeitpunkt $t = 0$ am Leben.

Klassische Lebensversicherungen

Für die folgenden zwei Beispiele werden zunächst die Zahlungsströme eines Vertrages für den i-ten Versicherungsnehmer aufgelistet.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Betrachtet man dazu den Vertrag $({}^i\gamma_t, {}^i\delta_t)_{t\in\mathbb{T}}$, dessen Komponenten als t-Portfolios aus der Menge Θ folgendermaßen definiert sind:

Leistungen

Sei $({}^i\gamma_t)_{t\in\mathbb{T}} = ({}^iC_t/S_t^0 \cdot e_0)_{t\in\mathbb{T}}$, wobei:

- Der Preisprozess S wie in Kapitel 4.3 zu verstehen ist.
- Die Auszahlung ${}^iC_t(f,b)$ für alle Elemente $(f,b) = (f, b^1, b^2, \dots b^i \dots) \in M$ ist gegeben durch
$$ {}^iC_t(f,b) = {}^ic \; {}^i\beta_t^\gamma(b^i), $$
wobei:
  * die Komponente f die Art des Vertrages bzw. das Leistungsniveau symbolisiert,
  * der Faktor b^i die biometrische Entwicklung des i-ten Lebens widerspiegelt,
  * die Zahl ${}^ic > 0$ als konstant angenommen wird und
  * die Funktion ${}^i\beta_t^\gamma(b^i)$ definiert ist als:
$$ {}^i\beta_t^\gamma(b^i) : B_t^i \mapsto \{0,1\}. \tag{8.3.1} $$
Diese Abbildung, welche in ihrer grundlegendsten Form bereits in Beispiel 5.3 eingeführt wurde, ist eine $\mathcal{B}_t^i$-messbare Zufallsvariable. Sie beschreibt den Zustand des Versicherungsnehmers (ob verstorben oder lebendig) zum Zeitpunkt t, wobei
$$ {}^i\beta_t^\gamma(b^i) \in \{0,1\} $$
für alle $b^i \in B^i$ gilt.

Prämien

Die t-Portfolios $({}^i\delta_t)_{t\in\mathbb{T}} = ({}^iD_t/S_t^0 \cdot e_0)_{t\in\mathbb{T}}$ werden analog definiert als:

- Die Einnahmen ${}^iD_t(f,b)$ sind für alle Elemente $(f,b) \in M$ als
$$ {}^iD_t(f,b) = {}^id \; {}^i\beta_t^\delta(b^i) $$
zu verstehen, wobei ${}^id$ eine Konstante und die Funktion ${}^i\beta_t^\delta(b^i)$ wie in (8.3.1) gegeben ist.

Bemerkung. Der Vektor e_0 bezeichnet in beiden Fällen den ersten Einheitsvektor und $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, T\}$ repräsentiert die Zahlungszeitpunkte in Jahren.

Weiters gilt die Annahme, dass der Vertrag zu einem im Voraus festgelegten Zeitpunkt $T_i \in \mathbb{T}$ fällig wird. Dementsprechend gelten die oben genannten Eigenschaften für alle $t \le T_i$ und ${}^i\gamma_t = {}^i\delta_t = 0$ für $t > T_i$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Nullkuponanleihen

Als letzte vorbereitende Maßnahme und technisches Hilfsmittel wird das Portfolio $(e_0/S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ eingeführt. Dieses Portfolio gewährleistet zu einem vereinbarten Zeitpunkt t eine garantierte, einmalige Zahlung. In diesem Fall handelt es sich um eine Auszahlung von einer Einheit, die in konkreteren Aufgabenstellungen als „Euro“ betrachtet werden kann.

Ein solcher Vertrag wird als *Nullkuponanleihe mit Fälligkeit* t bezeichnet. Wie der Name schon andeutet, handelt es sich bei diesem Finanzprodukt um eine Anleihe ohne Zinskupons. Bei einer Nullkuponanleihe erfolgt keine laufende Verzinsung, stattdessen wird der gesamte Betrag erst bei Fälligkeit ausgezahlt. Im Gegensatz dazu erhalten klassische Anleihen vorab fixierte oder variable Zinszahlungen zu mehreren fixierten Zeitpunkten. (vgl. [12], S.2)

Im Fall einer Nullkuponanleihe mit Auszahlung von einem Euro zur Zeit t, kann der Preis B dieser Anleihe als Diskontierungsfaktor für andere Zahlungen, die ebenfalls zu diesem Zeitpunkt fällig sind, betrachtet werden. Es gilt daher:

$$B_s^t = \pi_s(e_0/S_t^0) = 1/S_t^0 \text{ zu } s < t$$

$$B_t^t = \pi_t(e_0/S_t^0) = 1 \text{ zu } s = t$$

für alle $s \in \mathbb{T}$. (vgl. [12], S.2)

Wie die folgenden Beispiele zeigen werden, besteht in der klassischen Lebensversicherung die Aufgabe darin, ein geeignetes mathematisches Modell oder Setting zu entwickeln, welches eine möglichst genaue Schätzung der Restlebenszeit der versicherten Individuen mithilfe von Sterbetafeln ermöglicht.

8.3.1 Ablebensversicherung

Bei einer temporären *Ablebensversicherung* oder *Todesfallversicherung* gilt der Versicherungsschutz nur für eine vereinbarte Laufzeit. Verstirbt die versicherte Person innerhalb dieses Zeitraums, zahlt der Vertrag eine vorab festgelegte Summe an die Angehörigen aus. Überlebt der Versicherungsnehmer den „Fälligkeitszeitpunkt“ – auch Schlussalter genannt – so erfolgt keine Auszahlung des Versicherungsbetrags. (vgl. [10], S.3)

Diese Eigenschaften lassen sich unter Verwendung der zuvor eingeführten Definitionen, Notationen und mit der Abkürzung VN für einen Versicherungsnehmer, wie folgt formal darstellen:

1. Für die Leistungsportfolios $({}^i\gamma_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sowie für jedes ${}^iC_t$ und die entsprechende Ablebenssumme ${}^ic > 0$ gilt für die Zeitpunkte $t \le T_i$:
   - 1.1 ${}^iC_t(f,b) = {}^ic\ {}^i\beta_t^\gamma(b^i) = {}^ic \Leftrightarrow {}^i\beta_t^\gamma = 1 \Leftrightarrow$ der VN verstirbt in der Periode $(t-1,t]$
   - 1.2 ${}^iC_t(f,b) = {}^ic\ {}^i\beta_t^\gamma(b^i) = 0 \Leftrightarrow {}^i\beta_t^\gamma = 0 \Leftrightarrow$ der VN lebt in der Periode $(t-1,t]$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

2. Für die Modellierung der jährlichen, konstanten Prämien ${}^{i}d$ gilt für die Zeitpunkte $t < T_i$:
   2.1 ${}^{i}D_t(f,b) = {}^{i}d\ {}^{i}\beta_t^{\delta}(b^i) = {}^{i}d \Leftrightarrow {}^{i}\beta_t^{\delta} = 1 \Leftrightarrow$ der VN lebt in der Periode $(t-1,t]$
   2.2 ${}^{i}D_t(f,b) = {}^{i}d\ {}^{i}\beta_t^{\delta}(b^i) = 0 \Leftrightarrow {}^{i}\beta_t^{\delta} = 0$
      2.2.1 $\Leftrightarrow$ der VN verstirbt in der Periode $(t-1,t]$ für $t < T_i$
      oder
      2.2.2 $\Leftrightarrow$ der VN erreicht das Schlussalter, daher $t = T_i$.

Die Restlebenszeit

Wie aus den obigen Überlegungen ersichtlich, stellen die Funktionen ${}^{i}\beta^{\gamma}$ bzw. ${}^{i}\beta^{\delta}$ „Gegenwahrscheinlichkeiten“ dar. Diese bernouilliverteilten Zufallsvariablen können als Indikatorfunktion des Ereignisses angesehen werden, welches die restliche Lebensdauer eines Individuums modelliert.

Sei T_x jene Zufallsvariable, welche die verbleibende, zufällige Restlebenszeit einer x-jährigen Person beschreibt, wobei $x \in \mathbb{N}^+$. Unter der Verwendung der bekannten Beziehug zwischen dem Erwartungswert dieser Indikatorfunktion und der Wahrscheinlichkeit des dazugehörigen Ereignisses gilt nach der international üblichen Notation (vgl. [7]):

- $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^{i}\beta_t^{\gamma}] = \mathbb{B}(T_x < 1) = {}_{t-1|1}q_x$: Dies gibt die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit an, daher die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines Jahres zu sterben, für $t > 0$.
- $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^{i}\beta_t^{\delta}] = \mathbb{B}(T_x \geq t) = {}_{t}p_x$: Dies stellt die t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit dar.

Die entsprechenden (einjährigen) Werte für die Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten können aus einer Sterbetafel abgelesen werden.

Optimale Hedgingstrategie

Da das Versicherungsunternehmen nun den Zeitpunkt des Leistungseintritts absichern und damit das Sterblichkeitsrisiko diversifizieren möchte, wird der im vorangegangenem Kapitel eingeführte Finanzhedge H^* für alle $t < T_i$ auf den Zahlungsstrom ${}^{i}\delta_t - {}^{i}\gamma_t$ angewendet. Dies betrifft vor allem die Elemente ${}^{i}C_t$ sowie ${}^{i}D_t$ im Raum $\mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^{i}\gamma_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^{i}C_t/S_t^0 \cdot e_0] &= 1/S_t^0\ \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^{i}C_t/S_t^0] \\ &= 1/S_t^0\ \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^{i}c\ {}^{i}\beta_t^{\gamma}] \\ &= 1/S_t^0\ {}^{i}c\ {}_{t-1|t}q_x\end{aligned}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Analog gilt für die Absicherung $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^iD_t/S_t^0 \cdot e_0] &= 1/S_t^0 \ \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^iD_t/S_t^0] \\ &= 1/S_t^0 \ \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^id \ {}^i\beta_t^\delta] \\ &= 1/S_t^0 \ {}^id \ {}_tp_x\end{aligned}$$

In diesem Schritt erweisen sich die oben eingeführten Nullkuponanleihen als nützlich, da sich aus der Form des Hedgingportfolios folgendes ableiten lässt:

1. Für die Zeitpunkte $t < T_i$ sind bei Vertragsabschluss $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t] = ({}^ic \ {}_{t-1|1}q_x - {}^id \ {}_tp_x)$-Nullkuponanleihen mit Fälligkeit t notwendig, um die Auszahlung ${}^id - {}^ic$ abzusichern.
2. Zur Fälligkeit des Vetrags, d.h. zu $t = T_i$ sind ${}^ic \ {}_{T_i-1|1}q_x$-Nullkuponanleihen mit Fälligkeit T_i erforderlich, da ${}^i\beta^\delta_{T_i} = 0$ gilt.

8.3.2 Gemischte Versicherung

Die *Gemischte Versicherung* stellt eine Kombination der soeben eingeführten *Todesfallversicherung* und einer *Erlebensversicherung* dar. Die letztgenannte leistet eine Versicherungssumme, wenn der Versicherungsnehmer nach Erreichen des Schlussalters noch am Leben ist. Im Gegensatz dazu ist die gemischte Versicherug darauf ausgelegt, unabhängig vom vorzeitigen Tod oder vom Erlebensfall den vereinbarten Kapitalbetrag zu zahlen. (vgl. [10] S.3)

Mit vereinfachter Notation kann dieser Vetrag wie folgt definiert werden:

1. Für die Leistungsportfolios $({}^i\gamma_t)_{t\in\mathbb{T}}$ und die entsprechende Ablebens- bzw. Erlebenssumme ${}^ic > 0$ gilt für die Zeitpunkte
   - 1.1 $t < T_i$: ${}^iC_t = {}^ic \ {}^i\beta_t^\gamma = {}^ic \Leftrightarrow {}^i\beta_t^\gamma = 1 \Leftrightarrow$ der VN verstirbt in der Periode $(t-1, t]$ und 0 sonst.
   - 1.2 $t = T_i$: ${}^iC_{T_i} = {}^ic \ {}^i\beta_t^\gamma = {}^ic \Leftrightarrow {}^i\beta_t^\gamma = 1 \Leftrightarrow$ der VN stirbt in der Periode $(T_{i-1}, T_i]$ oder der VN lebt noch zur Zeit T_i.
2. Für die Modellierung der jährlichen, gleichbleibenden Prämien ${}^id$ gilt für die Zeitpunkte $t < T_i$:
   - 2.1 ${}^iD_t = {}^id \ {}^i\beta_t^\delta = {}^id \Leftrightarrow {}^i\beta_t^\delta = 1 \Leftrightarrow$ der VN lebt in der Periode $(t-1, t]$
   - 2.2 ${}^iD_t = {}^id \ {}^i\beta_t^\delta = 0 \Leftrightarrow {}^i\beta_t^\delta = 0$
     - 2.2.1 $\Leftrightarrow$ der VN verstirbt in der Periode $(t-1, t]$ für $t < T_i$

       oder
     - 2.2.2 $\Leftrightarrow$ der VN erreicht das Schlussalter, d.h. $t = T_i$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Optimale Hedgingstrategie

Die Zusammensetzung der Absicherungsstrategie $(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t])_t^{T_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}^+$ entspricht Kapitel 8.3.1:

1. Für die Zeitpunkte $t < T_i$ entspricht die gemischte Versicherung einer Ablebensversicherung und bei Vertragsabschluss sind dementsprechend $({}^ic_{\ t-1|1}\,q_x\text{-}\ {}^id_{\ t}\,p_x)$-Nullkuponanleihen mit Fälligkeit t erforderlich.

2. Zum Zeitpunkt $t = T_i$ sind nach dem Szenario 1.2 $({}^ic_{\,T_i-1|1}\,q_x + {}_{T_i}\,p_x)$-Nullkuponanleihen mit Fälligkeit T_i nötig und ${}^i\beta^{\delta}_{T_i} = 0$ gilt weiterhin.

Bemerkung. Falls, wie in den Beispielen ersichtlich, die gesamte Absicherung ausschließlich durch den Kauf von Nullkupoanleihen erfolgen kann, wird dies als *matching* bezeichnet.

8.3.3 Fondsgebundene Versicherung

Das zentrale Merkmal dieser Art von Versicherungen besteht darin eine Anzahl von Anteilen eines Fonds (z.B. Investmentfonds) zu halten.

Der Grundgedanke hinter dieser Art von Produkten ist zweifach: Einerseits bieten sie Versicherungsschutz, indem im Versicherungsfall der entsprechende Teil der Prämie ausbezahlt wird. Andererseits ermöglichen sie Investmentmöglichkeiten, indem der verbleibende Teil der Prämie, angepasst an die Anlageziele und Risikobereitschaft des Versicherungsnehmers, in Aktien, Anleihen, Immobilien oder eine Kombination dieser investiert wird. (vgl. [8])

Dieser Vertrag kann in vereinfachter Notation folgenderweise definiert werden:

1. Für die Leistungsportfolios $({}^i\gamma_t)_{t\in\mathbb{T}}$ gilt:
   - ${}^i\gamma_t(f,b) = {}^i\gamma_t(f,b^1,b^2,\ldots) = {}^i\theta_t \cdot {}^i\beta^{\gamma}_t$ für alle $(f,b) \in M$ wobei hier,
     * ${}^i\theta_t = ({}^i\theta^0_t, {}^i\theta^1_t, \ldots, {}^i\theta^{d-1}_t)$ ein Finanzportfolio aus der Menge Θ^F ist,
     * die Funktion ${}^i\beta^{\gamma}_t$ analog wie in Kapitel 8.3 zu verstehen ist.

2. Für die Prämien $({}^i\delta_t)_{t\in\mathbb{T}}$, die über die Vertragslaufzeit konstant bleiben, soll ebenfalls die Definition aus Kapitel 8.3 gelten.

Die obigen Eigenschaften gelten weiterhin für alle $t \le T_i$ und ${}^i\gamma_t = {}^i\delta_t = 0$ für $t > T_i$.

Optimale Hedgingstrategie

Die Absicherungsstrategie für den Cashflow ${}^i\delta_t - {}^i\gamma_t$ dieser anteilsgebundenen Versicherung ergibt sich entsprechend den vorherigen Überlegungen für alle $t \le T_i$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\gamma_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\delta_t] = {}^i\varphi_T \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\beta^{\gamma}_t] - {}^id \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\beta^{\delta}_t] \tag{8.3.2}$$

1. Der Ausdruck $({}^i\varphi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ repräsentiert die replizierende, selbstfinanzierende Strategie für ${}^i\theta_t$, welche nach Lemma 4.3.1 stets existiert und ${}^i\varphi_T = {}^i\theta_t$ für alle $t \in \mathbb{T}$ erfüllt.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

2. Der Subtrahend ${}^i d \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{B}}[{}^i\beta_t^\delta] = {}^i d_{\,t}\, p_x$ stellt die Anzahl der benötigten Nullkuponanleihen mit Maturität t dar, wobei wieder ${}^i\beta_t^\delta = 0$ für $t = T_i$ gilt.

Bemerkung. Falls das t-Portfolio ${}^i\theta_t$ konstant ist, das heißt die Stückzahl ${}^i\theta_t^j$ der Wertpapiere, die im Zeitraum $[t, t+1)$ gehalten werden, für alle Zeitpunkte $t = 0 \dots T_i$ und $j = 0, \dots d-1$, gleich bleibt, vereinfacht sich der Hedge aus (8.3.2). In diesem Fall kann das Portfolio ${}^i\theta_t$ direkt erworben werden, ohne eine notwendige Replikation durch $({}^i\varphi_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

9 Vergleich mit anderen Bewertungsmethoden

Das achte Kapitel im Referenzpaper [7] behandelt den Vergleich zwischen dem entwickelten Produktmaßprinzip zu bereits bekannten Bewertungsansätzen in der bestehenden Literatur.

9.1 Vorbereitungen und Annahmen

Für den folgenden Ansatz, der von einem unbekannten Gutachter aus dem Artikel [7] stammt, gelten die anschließenden Annahmen:

1. **Vereinfachung der Notation und der mathematischen Modellierung**
   - Im Gegensatz zu den vorangegangenen Kapiteln, in denen mit der Portfolionotation gearbeitet wurde, greift dieses Kapitel die in der Literatur bekannte Cashflownotation wieder auf.
   - Das stets positive, risikolose Wertpapier S_t^0 wird als über die Zeit konstant angenommen, das heißt, es gilt, $S_t^0 \equiv 1$ für alle $t \in \mathbb{T}$ und die zukünftigen Cashflows müssen nicht abgezinst werden.
2. **Bedingung an die Auszahlungen H^i**
   - Die individuellen Auszahlungen H^i werden für alle $i \in \mathbb{N}^+$ als B-i.i.d Zahlungen betrachtet. Das bedeutet, dass sie unter der Berücksichtigung einer gemeinsamen, zu Beginn der Periode bekannten Informationsmenge $\mathcal{B}_0$, unabhängig sind, aber dieselbe Verteilung aufweisen.
3. **Gesetz der großen Zahlen**

   Theorem 9.1.1. ***(Kolmogoroffs 2-tes Gesetz der großen Zahlen)*** *Besitzen die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ unabhängig, identisch verteilten Zufallsvariablen (X_n), $n \in \mathbb{N}$, einen Erwartungswert $\mathbb{E}[X] := \mathbb{E}[X_n]$, so gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}[X] \ \mathbb{P}\text{-}f.s.$$

   (vgl.[11], S.252)

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Für die B-i.i.d Zahlungen H^i implizieren das zweite starke Gesetz der großen Zahlen und Lemma 7.2.3 zusammen:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (H^i - H) = 0 \ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Dabei bezeichnet $H := \mathbb{E}_{\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}}[H^1 \mid \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_0]$ den erwarteten Wert des Zahlungsstroms H^1 unter dem physischen Maß $\mathbb{P} = \mathbb{F} \otimes \mathbb{B}$, bedingt auf die Kombination der Filtrierungen $\mathcal{F}_T$ (Informationen bis zum Zeitpunkt T) und $\mathcal{B}_0$.

4. **Bewertungsprinzip π**

   - Dem Bewertungsansatz des unbekannten Autors für die faire Bewertung von Zahlungsströmen liegt ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{M}$ zugrunde:

     Das betrachtete Bewertungsprinzip π wird durch den Erwartungswert unter diesem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{M}$ definiert. Wie oben hergeleitet, stellt der Wert H den Erwartungswert einer Reihe von gleichartig verteilten, unabhängigen Zahlungen dar. In Verbindung mit dem Gesetz der großen Zahlen liefert dieser, unter dem Einbeziehen der verfügbaren biometrischen und finanziellen Informationen, den besten Schätzwert für zukünftige Leistungszahlungen eines Versicherungsvertrages und soll zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses folgendes erfüllen:

$$\pi_0(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H] = \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[\mathbb{E}_{\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}}[H^1 \mid \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_0]] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] \tag{9.1.1}$$

     Interpretation

     – Um allgemeine Versicherungsverträge, bei denen sowohl demographische Risiken als auch Schwankungen des Marktes eine Rolle spielen, fair bewerten zu können stellt die **erste Gleichung** $\pi_0(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H]$ sicher, dass eine risikoneutrale und arbitragefreie Methode zur Bestimmung des Barwertes eines zukünftigen Zahlungsstroms verwendet wird.

     – Der **dritte Term** der Gleichung kann in zwei Teile unterteilt werden:

       Zuerst wird durch den inneren Erwartungswert der Wert des Zahlungsstroms H^i berechnet, welcher eine rein statistische Schätzung des mittleren Ergebnisses darstellt. Dieser Wert spiegelt das Risiko wider, welches sich aus finanziellen und biometrischen Unsicherheiten ergibt und dient als Grundlage für die Bewertung zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses.

       Der im Produktraum definierte äußere Erwartungswert $\mathbb{E}_{\mathbb{M}}[\cdot]$ diskontiert den geschätzen Wert und bewertet den Vertrag zum Zeitpunkt 0 unter Anwendung finanzmathematischer Methoden.

       Beide Erwartungswerte werden daher mit unterschiedlichem Hintergrund und anderen Zielen gebildet.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

– Die **dritte Gleichung** $\mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H]$ kann folgenderweise interpretiert werden: Die Bewertung eines Zahlungsstroms H, der sowohl finanzielle als auch versicherungstechnische Risiken umfasst, soll unter dem umfassenderen Martingalmaß $\mathbb{M}$ im Produktraum dieselben Ergebnisse liefern wie eine rein finanzielle Bewertung unter dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$ im Finanzraum.

  Diese Bedingung kann durch die Annahme der Unabhängigkeit von finanziellen und biometrischen Risiken gestützt werden. Dadurch kann die Bewertung der Zahlungsströme für die beiden Risikokomponenten separat erfolgen:
  Da sich die Informationen am Finanzmarkt nicht auf die Verteilung der B-i.i.d Zahlungen H^i auswirken und individuelle biometrische Risiken durch eine große Anzahl von Versicherungsverträgen ausgeglichen werden, lässt sich die Bewertung in zwei Schritte unterteilen: Zuerst wird der biometrische Teil des Vertrages durch den inneren Erwartungswert ermittelt. Anschließend behandelt der äußere Erwartungswert den finanziellen Teil, der wiederum durch das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ dargestellt werden kann.

- Für alle $i, j \in \mathbb{N}^+$ und B-i.i.d Zahlungen H^i sowie H^j gilt:

$$\pi_0(H^i) = \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H^i] = \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H^j] = \pi_0(H^j) \tag{9.1.2}$$

  Diese gewünschte Eigenschaft eines Bewertungsprinzips ist bereits aus Annahme IV bekannt.

9.2 Bewertung

Die folgende Gleichung beschreibt die Beziehung zwischen dem Erwartungswert des Durchschnitts mehrerer Zahlungsströme und dem Erwartungswert eines einzelnen Zahlungsstroms. Basierend auf den oben aufgelisteten Annahmen und Eigenschaften folgt für alle $j \in \mathbb{N}^+$:

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{M}}\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} H^i\right] &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H^i] \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \cdot m \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H^i] = \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H^i] = \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H^j]\end{aligned} \tag{9.2.1}$$

Schrittweise Erklärung und Interpretation:

Im **ersten Schritt** wird die Linearität des Erwartungswertes ausgenutzt um die Summe und die Erwartungswertbildung zu vertauschen. Da die Zahlungsströme H^i B-i.i.d. sind, ist der Wert $\mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H^i]$ für alle $i \in \mathbb{N}^+$ ident und die Summe der Erwartungswerte beträgt $m \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H^i]$. (**Zweite Gleichung**)

Im **dritten Teil** kürzt sich der Faktor $\frac{1}{m} \cdot m$ heraus, sodass nur noch $\mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H^i]$ übrig bleibt. Der **letzte Schritt** hebt hervor, dass der Erwartungswert eines jeden i.i.d. Zahlungsstroms H^i gleich dem einer beliebig anderen Zahlung H^j für alle $i, j \in \mathbb{N}^+$ ist.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Fazit: Mit einer wachsenden Anzahl an i.i.d. Versicherungsnehmern entspricht der erwartete durchschnittliche Wert aller Zahlungsströme dem Erwartungswert eines einzelnen Vetrags.

Die im nächsten Absatz hergeleitete Beziehung zeigt, wie der Preis eines individuellen Zahlungsstroms H^j mit dem Durschnittspreis einer großen Anzahl von Zahlungsströmen in Verbindung gebracht werden kann (unter der Vorraussetzung unabhängiger und identisch verteilter Zahlungsströme H^i). Dies wird unter anderem durch die Vertauschbarkeit von Integral- und Grenzwertbildung unter geeigneten Integrationskriterien möglich gemacht:

$$\begin{aligned}\pi_0(H^j) = \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H^j] &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{M}}\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} H^i\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{M}}\left[\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} H^i\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{M}}[H] = \pi_0(H) \end{aligned} \tag{9.2.2}$$

Schrittweise Erklärung und Interpretation:

Die **erste Gleichung** gibt die Standardbewertungsgleichung der modernen Finanzmathematik wider: Der faire Preis $\pi_0(H^j)$ einer Zahlung H^j zum Zeitpunkt 0 entspricht dem Erwartungswert dieser Zahlung unter einem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{M}$. Der **zweite Schritt** ergibt sich aus der Beziehung (9.2.1).

Die nächste, **dritte Gleichheit** resultiert aus dem Vertauschen von Grenzwertbildung und Erwartungswert. Die dafür notwendigen Kriterien werden im Satz von Lebesgue beschrieben:

Satz 9.2.1. *Gibt es zu einer μ-fü konvergenten Folge (f_n) aus (Ω, Σ, μ) ein $g \in \mathcal{L}_1$ mit $\mid f_n \mid \leq g$ so sind die f_n und $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ integrierbar und es gelten die Beziehungen*

$$\lim_n \int \mid f_n - f \mid d\mu = 0 \wedge \lim_n \int f_n \, d\mu = \int f d\mu \tag{9.2.3}$$

(vgl. [11], S.134)

Da Zufallsvariablen messbare Funktionen auf Wahrscheinlichkeitsräumen darstellen, lassen sich diese Kriterien auch in diesem Setting definieren. Ein Beispiel für die Erfüllung dieser Kriterien ist die Menge an Verträgen, welche die Kolmogorov Eigenschaft (K) aus Definition 7.2.4 erfüllen.

Im **vierten Schritt** wird das Gesetz der großen Zahlen angewendet: Der Grenzwert der Durchschnittsbildung entspricht dem Erwartungswert H. Aufgrund der Annahme (9.1.1) ist die **letzte Gleichung** der Preis des Zahlungsstroms H.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Fazit und Vergleich

Ein wesentlicher Unterschied im Vergleich zum hergeleiteten Preis aus Kapitel 6 besteht in der Anwendung des Gesetzes der großen Zahlen:
Im vorherigen Ansatz wurde der faire Preis derart hergeleitet, dass dieser zunächst eine Absicherungsstrategie finanziert, welche in Folge das mittlere Saldo pro Vertrag bei einer steigenden Anzahl von Versicherten fast sicher gegen Null konvergieren lässt. Im aktuellen Setting hingegen wird das Gesetz direkt auf die Zahlungen H^i angewendet.

Durch die Annahme der i.i.d. Zahlungsströme stabilisieren sich die biometrischen Risiken der Versicherungsverträge und individuelle Schwankungen können durch die Annahme eines großen Portfolios geglättet werden.
Mit angemessenen Kriterien zur Anwendung des Satzes von Lebesgue auf die Zahlungen H^i wird deutlich, dass die Bewertung eines individuellen Versicherungsvertrags auf Basis des erwarteten durchschnittlichen Zahlungsstroms (also des Erwartungswerts $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[H]$ bzw. $\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[H^i]$) vorgenommen werden sollte.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass gemäß der Beziehung (9.2.2) und der Unabhängigkeit der biometrischen und finanziellen Ereignisse, die Bewertung eines Versicherungsvertrags folgendermaßen erfolgen soll:

$$\pi_0(H^i) = \pi_0(\mathbb{E}_{\mathbb{F}\otimes\mathbb{B}}[H^1 \mid \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}_0]) = \pi_0(\mathbb{E}_{\mathbb{B}}[H^i]).$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Tabellenverzeichnis

1.1 Notation 1

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Literaturverzeichnis

[1] K. K. Aase and S.-A. Persson. Pricing of unit-linked life insurance policies. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1994(1):26–52, 1994.

[2] P. Albrecht. Gesetze der großen Zahlen und Ausgleich im Kollektiv — Bemerkungen zu Grundlagen der Versicherungsproduktion. *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft*, 1982.

[3] N. Bäuerle and U. Rieder. *Finanzmathematik in diskreter Zeit*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2017.

[4] C. Cuchiero. *Skriptum zur Vorlesung: Mathematical Finance in discrete time*. Universität Wien, Fakultät für Mathematik, 2015. Wintersemester 2015/16.

[5] F. Delbaen and W. Schachermayer. *The mathematics of arbitrage*. Springer, Berlin [u.a.], 2006.

[6] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Spektrum, Berlin, 2018.

[7] T. Fischer. A law of large numbers approach to valuation in life insurance. *Insurance, mathematics & economics*, 40(1):35–57, 2007.

[8] Investopedia. Unit Linked Insurance Plan: What It Is, How It Works. https://www.investopedia.com/terms/u/unit-linked-insurance-plan.asp. Zugriff am 30.08.2024.

[9] A. Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, Berlin, Heidelberg, 4th ed. 2020 edition, 2020.

[10] M. Koller. *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010.

[11] N. Kusolitsch. *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie: Eine Einführung*. Springer Vienna, Vienna, 2011.

[12] C. Munk. *Fixed Income Modelling*. Oxford University Press, USA, 2011.

[13] A. M. Robert C. Dalang and W. Willinger. Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. *Stochastics and Stochastic Reports*, 29(2):185–201, 1990.

[14] K. D. Schmidt. *Maß und Wahrscheinlichkeit*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.

[15] P. C. G. Vassiliou. *Discrete-Time Asset Pricing Models in Applied Stochastic Finance*. ISTE. John Wiley, Hoboken, 1st edition, 2013.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN