

Diplomarbeit

Analytische Untersuchung von gedämpften Outrigger-Systemen für die Anwendung bei schwingungsanfälligen Hochhäusern

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grads

Diplom-Ingenieur

eingereicht an der TU Wien, Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwesen

Diploma Thesis

Analytical investigation of damped Outrigger-Systems for application to vibration prone high-rise buildings

submitted in satisfaction of the requirements for the degree

Diplom-Ingenieur

of the TU Wien, Faculty of Civil and Environmental Engineering

Tim Noack, BSc

Matr.Nr.: 12213739

Betreuung: Privatdoz. Dipl.-Ing. Dr.techn. **Michael Reiterer**
Institut für Tragkonstruktionen
Forschungsbereich Baumechanik und Baudynamik
Technische Universität Wien
Karlsplatz 13/212-03, 1040 Wien, Österreich

Wien, im September 2024



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Danksagung

Das Schreiben der Diplomarbeit hat mir viel Spaß gemacht. Das Thema hat mich sehr interessiert und das Einarbeiten in die tiefe analytische Baudynamik war spannend. Das gilt auch trotz mehrerer Faktoren, die das Schreiben erschwert haben und mehrerer Rückschläge in der Erarbeitung der Inhalte. Dafür gab es zahlreiche Personen, die sehr hilfreich waren und meinen Dank verdienen.

Ein großes Dankeschön möchte ich an meinen Betreuer richten – Herrn Michael Reiterer. Dass diese Arbeit überhaupt möglich wurde, habe ich Ihnen zu verdanken. Die vielen Treffen, Gespräche und Hinweise haben mir sehr geholfen, eine Struktur zu finden und an den richtigen Stellschrauben der Arbeit zu drehen.

Weiterhin soll die Firma *PORR* erwähnt werden, die die Unterlagen des DC2-Towers zur Verfügung gestellt hat. Ohne die Ausführungspläne und die Windkanaluntersuchungen wäre eine Analyse und Modellierung des DC2-Towers nicht möglich gewesen.

Auch meiner Familie und meinen Freunden gebührt viel Dank. Sie haben mir erlaubt, den einen oder anderen Tag und Abend abzuschalten.

Am meisten habe ich aber meiner Freundin zu danken, die mir durch die anstrengende Zeit geholfen hat. Mich zu motivieren hat niemand so gut geschafft wie Du, Betti. Danke, dass Du mir Deine volle Unterstützung gegeben hast.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Kurzfassung

Durch das globale Bevölkerungswachstum und die damit einhergehende Urbanisierung ist es in vielen Großstädten und Metropolen notwendig geworden, Hochhäuser zu errichten, um genügend Platz für Büro- und Wohnflächen zu bieten. Je höher dabei gebaut wird, desto mehr sind diese Gebäude starken dynamischen horizontalen Belastungen wie Wind und Erdbeben ausgesetzt. Um die daraus resultierenden Schwingungen zu reduzieren, wurden die gedämpften Outrigger-Systeme (Damped Outrigger-Systems, DOS) eingeführt, in denen Dämpferelemente zwischen ein Aussteifungsgeschoss, den Outrigger, und die äußeren Stützen des Hochhauses installiert werden. Dadurch soll zusätzliche Dämpfung im Gebäude erreicht werden.

In dieser Arbeit werden international durchgeführte Studien zu DOS zusammengefasst und anschließend verschiedene Arten von DOS untersucht, bspw. DOS mit negativer Steifigkeit oder mit Inerter-Elementen. Dafür wird ein analytisches Modell eines Hochhauses mit DOS gebildet und seine dynamischen Eigenschaften ermittelt. Mithilfe dieser Attribute kann anschließend eine Zeitverlaufsberechnung einer Erdbebenbelastung des Hochhauses durchgeführt werden. Als beispielhaftes Hochhaus wird der aktuell im Bau befindliche DC2-Tower in Wien betrachtet und analysiert.

Es lässt sich als Ergebnis festhalten, dass viele verschiedene Parameter einen starken Einfluss auf die Schwingungseigenschaften von Hochhäusern haben. So ist beispielsweise das Steifigkeitsverhältnis zwischen innerem Kern und äußeren Stützen maßgebend, wie auch die Position der DOS im Hochhaus. Es können für einfache DOS mit viskosen Dämpfern hohe modale Dämpfungen erreicht werden. Dadurch werden auch die Schwingungsdauer und die Schwingwege und Schwingbeschleunigungen von Hochhäusern während eines Erdbebens stark reduziert.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Abstract

Due to global population growth and the associated urbanization, it has become necessary in many large cities and metropolises to build high-rise buildings to provide enough space for office and residential space. The higher they are, the more these high-rise buildings are exposed to strong dynamic horizontal loads such as wind and earthquakes. In order to reduce the resulting vibrations, damped Outrigger-Systems (DOS) were introduced, in which damper elements are installed between an outrigger and the outer columns of the building. This is intended to achieve additional damping in the high-rise building.

In this work, international studies on DOS are summarized and then different types of DOS are examined, e.g. with negative stiffness or with inerter elements. For this purpose, an analytical model of a high-rise building with DOS is created and its dynamic properties are determined. Using these attributes, the behaviour of the building under an earthquake load is calculated. As an example of a building, the DC2 Tower, who is currently under construction, in Vienna is examined and exposed to an earthquake.

As a result, it can be stated that many different parameters have a strong influence on the dynamic properties of high-rise buildings. For example, the stiffness ratio between the inner core and the outer supports is crucial, as is the position of the DOS in the building. High modal damping can be achieved for simple DOS with viscous dampers. Following, the implementation of DOS in a high-rise building can also greatly reduce the duration and the vibration deflection and acceleration during an earthquake.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	13
2	Grundlagen der Baudynamik	15
2.1	Prinzip von D'Alembert	15
2.2	Einmassenschwinger (EMS)	15
2.2.1	Ungedämpfte freie Schwingung des EMS	16
2.2.2	Viskos gedämpfte freie Schwingung des EMS	17
2.2.3	Erzwungene viskos gedämpfte Schwingung des EMS	17
2.3	Mehrmassenschwinger (MMS)	22
2.3.1	Kontinuierliche Systeme: Stäbe und Stabwerke	23
2.3.2	Diskrete MMS	27
3	Stand der Technik: Aussteifung und Dämpfung von Hochhäusern	30
3.1	Windbelastung von Hochhäusern	30
3.1.1	Schwingungserregung von Hochhäusern durch Wind	32
3.2	Erdbebenbelastung von Hochhäusern	33
3.2.1	Antwortspektren	35
3.3	Horizontale Aussteifung von Hochhäusern	36
3.3.1	Outrigger-Systeme	37
3.4	Dämpfung von Hochhäusern	39
3.4.1	Dämpfungsmodelle	40
3.4.2	Dämpfungsmechanismen und Schwingungsdämpfersysteme	44
3.5	Gedämpfte Outrigger-Systeme (DOS)	45
3.5.1	Weiterentwicklung und Optimierung von DOS	47
4	Analytische Baudynamik von Hochhäusern mit gedämpften Outrigger-Systemen (DOS)	55
4.1	Modellbildung	55
4.1.1	Berechnung der Kraft im Dämpfersystem F_{Dj}	59
4.1.2	Schwingungsgleichung	61
4.1.3	Argument-Prinzip-Algorithmus (APA)	66
4.2	Parameterstudie	72
4.2.1	Ein einzelnes DOS im Hochhaus	72
4.2.2	Zwei über die Gebäudehöhe verteilte DOS	82
4.3	Anwendung der DOS auf ein reales Hochhaus (DC2-Tower)	83
4.3.1	Eigenschwingung des Gebäudes	87
4.3.2	Modalanalyse des Gebäudes	87
4.3.3	Zeitverlaufsberechnung einer Erdbebenbelastung	90
5	Zusammenfassung	102
6	Ausblick	106
A	MATLAB-Skript zur Suche der Eigenkreisfrequenzen für ein Hochhaus mit DOS	111

B	MATLAB-Skript zur Zeitverlaufsrechnung der Erdbebenanregung des DC2-Towers mit DOS	121
----------	---	------------

Abkürzungen

α Position des Outrigger-Systems in Bezug auf die Gebäudehöhe [-]

χ_{Dj} komplexer Dämpfer-Parameter am j -en Outrigger [-]

$\delta(t)$ Dirac-Funktion

κ_K Schubbeiwert des Kerns [-]

λ Schwingungsparameter [-]

μ Masse pro Längeneinheit [$\frac{\text{kg}}{\text{m}}$]

Ω Erregerkreisfrequenz [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]

ω Eigenkreisfrequenz [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]

Φ frequenzunabhängiger Verlustmodul [$\frac{\text{N}}{\text{m}}$]

ψ Verlustfaktor [-]

ρ Massendichte [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]

φ Verdrehung des Querschnitts zur Stabachse [rad]

$\vec{\phi}$ Eigenvektor der Schwingung

ζ Lehr'sches Dämpfungsmaß [-]

A Flächeninhalt [m^2]

a Beschleunigung [$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$]

a_D Dämpfungsexponent [-]

b Trägheit des Inerters [kg]

c Dämpfungskoeffizient [$\frac{\text{Ns}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$]

E Elastizitätsmodul [$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$]

$E_K I_K$ Biegesteifigkeit des Kerns [Nm^2]

$E_{Oj} I_{Oj}$ Biegesteifigkeit des j -en Outriggers [Nm^2]

$E_{Sj} A_{Sj}$ Dehnsteifigkeit der j -en Pendelstütze [N]

f Eigenfrequenz [$\frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$]

F Kraft [N]

F_{Dj} Kraft im Dämpfer am j -en Outrigger [N]

- F_j Kraft in der Stütze unter dem j -en Outrigger [Nm]
- G Schubmodul [$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$]
- $G(in\Omega)$ komplexe Übertragungsfunktion
- $G_K A_K$ Schubsteifigkeit des Kerns [N]
- g_{Erd} Erdbeschleunigung, $g_{Erd} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- H Höhe [m]
- I Flächenträgheitsmoment [m^4]
- i Imaginäre Einheit
- I_T Torsionsträgheitsmoment [m^4]
- k Federsteifigkeit [$\frac{\text{N}}{\text{m}}$]
- L Länge [m]
- M Biegemoment [Nm]
- m (Punkt-)Masse [kg]
- M_j Moment im j -en Outrigger [Nm]
- n Anzahl der Outrigger [-]
- N Normalkraft [N]
- R Länge des Outriggers [m]
- T Eigenperiode [s]
- t Zeitvariable [s]
- T_F Erregerperiode [s]
- u_{Dj} Längsverschiebung des Dämpfers am j -en Outrigger [m]
- V Querkraft [N]
- v Geschwindigkeit [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]
- w Laplace-Variable
- x Verschiebung [m]
- y Auslenkung [m]
- APA** Argument-Prinzip-Algorithmus
- DOS** gedämpftes Outrigger-System (Damped Outrigger-System)
- EMS** Einmassenschwinger
- FEM** Finite Elemente Methode

FUD frequenzunabhängiger Dämpfer

FUDOS frequenzunabhängiges gedämpftes Outrigger-System

IDOS gedämpftes Outrigger-System mit Inerter

KDOS konventionelles gedämpftes Outrigger-System

KOS konventionelles Outrigger-System

MMS Mehrmassenschwinger

NS-FUDOS frequenzunabhängiges gedämpftes Outrigger-System mit negativer Steifigkeit

NSDOS gedämpftes Outrigger-System mit negativer Steifigkeit

NSE Element mit negativer Steifigkeit

TMD Tuned Mass Damper

Kapitel 1

Einleitung

Im Laufe der aktuell immer weiter fortschreitenden Urbanisierung ist es erforderlich, Maßnahmen zu ergreifen, um das Flächenwachstum von Städten einzuschränken. Die resultierenden Verdichtungsmaßnahmen bestehen neben der Verwendung ungenutzter innerstädtischer Flächen vor allem darin, in die Höhe zu bauen. Dadurch können mehr Wohnungen bzw. mehr Büroflächen trotz eingeschränkter Grundfläche geschaffen werden. Das Resultat dieser Maßnahmen ist die Errichtung von immer mehr Hochhäusern in Innenstädten.

Das Erbauen von Hochhäusern hat allerdings nicht nur Vorteile. Aufgrund der Tatsache, dass die Lasten aus den oberen Geschossen von den darunterliegenden Geschossen mit abgetragen werden müssen, steigt der Bedarf an Baumaterialien mit der Höhe mehr als linear an. Neben diesen vertikalen Eigen- und Nutzlasten im Gebäude haben die zusätzlichen horizontalen Belastungen einen großen Einfluss auf Hochhäuser. Generell gilt, dass der Winddruck und -sog am Gebäude mit zunehmender Höhe ansteigt. Somit sind Hochhäuser stärkeren quasistatischen Windlasten ausgesetzt als Gebäude mit geringerer Höhe. Hinzu kommt, dass die horizontalen Belastungen infolge Wind und Erdbeben dynamische Belastungen sind, die zu Resonanzschwingungen verbunden mit hohen Schwingwegen und Schwingbeschleunigungen führen können.

In Kapitel 2 werden Grundlagen der Baudynamik erklärt und es wird dargelegt, welche Auswirkungen dynamische Belastungen auf Baukonstruktionen haben können. Dazu zählt, dass dynamische Lasten, je nach Frequenzbereich und Intensität, in denen sie auftreten, zu starken Beanspruchungen der Tragglieder von Gebäuden führen können. Einerseits ist oft die dynamische Last in den maximalen Amplituden höher als statische Lasten. Andererseits können auch geringere dynamische Beanspruchungen zum Versagen von Tragwerken führen. Unter der dynamischen Wechselbeanspruchung ermüden die Baumaterialien und können sogar bei geringen Lasten versagen, wenn die Ermüdungsfestigkeit erreicht wird. Deshalb ist es notwendig, die Tragwerke zu versteifen, um möglichst geringe Verformungen zuzulassen und Ermüdungsversagen zu verhindern. Außerdem sollten Möglichkeiten installiert werden, die dynamische Energie zu dissipieren. Der Grund dafür ist, dass die Dauer der Beanspruchung abnimmt, wenn die dynamische Energie schnell in Wärme umgewandelt wird. Ist die Beanspruchung kürzer, so muss das Tragwerk nur den Spitzenamplituden der Belastung widerstehen und wird wenig auf Ermüdung beansprucht. Zudem kann die Dämpfung auch die Amplituden reduzieren. Dafür sind allerdings hohe Dämpfungen in der Baukonstruktion notwendig, die bei herkömmlichen Hochhäusern nicht vorkommen.

Zur Versteifung von hohen Hochhäusern gibt es viele verschiedene Lösungen, die insbesondere im Laufe des 20. Jahrhunderts entwickelt wurden. Eine Aussteifungsmöglichkeit sind die sogenannten Outrigger-Konstruktionen, die in einem Aussteifungsgeschoss den inneren Kern des Hochhauses mit den äußeren Stützen des Gebäudes verbinden. Dadurch nehmen die Belastungen im Kern und Fundament stark ab. Anfang dieses Jahrhunderts wurden diese Konstruktionen in Studien zu gedämpften Outrigger-Systemen (DOS) erweitert. Bei diesen Systemen wird ein Dämpfer zwischen der Outrigger-Konstruktion und der äußeren Stütze vorgesehen, um die Energiedissipation während dynamischer Belastungen zu vergrößern. In Kapitel 3 wird der Stand der Technik zu

Aussteifungssystemen in Hochhäusern dargelegt und anschließend eine Literaturstudie zu DOS durchgeführt.

In Kapitel 4 werden die DOS analytisch untersucht. Dafür wird ein vereinfachtes Modell eines Hochhauses mit DOS gebildet und seine dynamischen Eigenschaften, die Eigenfrequenzen, Eigenformen und die modalen Dämpfungen, ermittelt. Es werden unterschiedliche Arten von DOS hinsichtlich ihres Einflusses auf die sich ergebende Größe der Dämpfung betrachtet, bspw. DOS mit negativer Steifigkeit oder mit Inerter-Elementen. Anschließend wird ein reales Hochhaus mit denselben Methoden untersucht. Dafür wird der DC2-Tower in Wien herangezogen, mit dem daraufhin eine Zeitverlaufsberechnung unter einer generierten Erdbebenlast durchgeführt wird. Es wird rechnerisch ermittelt, in welcher Größe sich die Auslenkung des Hochhauses ohne Outrigger, mit Outrigger und mit verschiedenen anderen Arten von DOS ergibt.

In Kapitel 5 werden die Ergebnisse zusammengefasst und bewertet, bevor in Kapitel 6 erläutert wird, wie die an DOS durchgeführten Untersuchungen fortgeführt werden können.

Kapitel 2

Grundlagen der Baudynamik

Das folgende Kapitel wurde vor allem unter Nutzung des Buches *Dynamik der Baukonstruktionen* von Petersen und Werkle [1] verfasst. Dabei wurden viele Grundlagen der Baudynamik stark zusammengefasst, die in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Für genauere Beschreibungen und Herleitungen wird auf das Original verwiesen.

2.1 Prinzip von D'Alembert

Die Grundlagen der Dynamik im Allgemeinen lassen sich aus dem Prinzip von D'Alembert ableiten [1]. Dieses Prinzip basiert auf dem dritten Newtonschen Grundgesetz der Physik, dem Wechselwirkungsgesetz für eine Punktmasse

$$F + (-ma) = 0, \quad (2.1)$$

wobei F einer Kraft entspricht, die auf die Masse m wirkt und a der Beschleunigung der Masse. $(-ma)$ wird Trägheitskraft genannt. In der Festigkeitslehre wird dieses Trägheitsgesetz auch allgemeiner für ein Volumenelement dV geschrieben [2]

$$\vec{f}(\vec{x}) + \operatorname{div}\sigma(\vec{x}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2}, \quad (2.2)$$

wobei $\vec{x}(t)$ der Verschiebungsvektor des Volumenelements ist, $\sigma(\vec{x})$ sein Cauchy'scher Spannungstensor, $\vec{f}(\vec{x})$ die Kraftdichtevektoren, die auf dV wirken, ρ die Massendichte des Stoffs und t die Zeitvariable. Ziel des Prinzips von D'Alembert ist, eine Lösung für $\vec{x}(t)$ zu finden, um das dynamische Verhalten der Struktur beschreiben zu können. Da das Wechselwirkungsgesetz eine Differentialgleichung 2. Grades bezüglich $\vec{x}(t)$ ist, gilt es also, diese zu lösen.

Insgesamt ist das in den Gleichungen (2.1) und (2.2) beschriebene Wechselwirkungsgesetz eine Gleichung eines Kraftgleichgewichts, die sich für im Gleichgewicht befindliche Strukturen beliebig um weitere Kräfte erweitern lässt. Das bekannteste Beispiel für eine dynamische Gleichung nach dem Prinzip von D'Alembert ist die Schwingungsgleichung eines Einmassenschwingers

$$m\ddot{\vec{x}}(t) + c\dot{\vec{x}}(t) + k\vec{x}(t) = 0. \quad (2.3)$$

mit dem Dämpfungskoeffizienten c und der Federkonstante k des Einmassenschwingers (EMS).

Es gilt weiterhin $\dot{\vec{x}}(t) = \frac{\partial \vec{x}(t)}{\partial t}$ und $\ddot{\vec{x}}(t) = \frac{\partial^2 \vec{x}(t)}{\partial t^2}$ [1].

2.2 Einmassenschwinger (EMS)

Ein EMS ist, wie schon in seinem Namen enthalten, eine Punktmasse, die einer gewissen Schwingung unterworfen wird. Der EMS wird auch Einfreiheitsgradsystem [englisch single degree of freedom (SDOF)] genannt, da es nur eine freie Bewegungsrichtung, also einen Freiheitsgrad gibt.

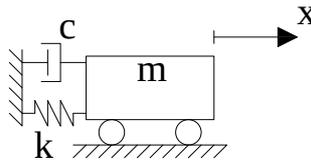


Abb. 2.1: Modell eines frei schwingenden gedämpften EMS

Diese Bewegung kann translatorisch (geradlinige Bewegung) oder rotatorisch sein. Ein Beispiel einer translatorischen Bewegung ist in Abbildung 2.1 dargestellt; eine Masse, die reibungsfrei auf einer geraden Unterlage rollt und mit einem Feder- und einem Dämpferelement an einen festen Punkt angebunden ist. In diesem Fall hat der Verschiebungsvektor \vec{x} nur die Komponente x . Das Prinzip nach D'Alembert stellt ein Kraftgleichgewicht dar. Somit entsprechen alle Summenteile in Gleichung (2.3) Kräften. Die Trägheitskraft $ma = m\ddot{x}$ wurde bereits erwähnt. Hinzu kommen eine Federkraft kx , abhängig von der Verschiebung der Feder und eine Dämpfungskraft des viskosen Dämpferelements $cv^{a_D} = c\dot{x}^{a_D}$, die mit steigender Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ wächst. a_D ist der Dämpfungsexponent. Dieser wird im Folgenden $a_D = 1$ gesetzt, da von linear viskosem Dämpfungsverhalten des Dämpferelements ausgegangen wird. Neben viskoelastischem Verhalten wie in diesem Beispiel gibt es noch andere Dämpfungsmodelle, um Stoff- beziehungsweise Bauteilverhalten zu beschreiben [1]. Siehe dazu Abschnitt 3.4.

2.2.1 Ungedämpfte freie Schwingung des EMS

Um nun das Schwingungsverhalten des EMS zu beschreiben, muss Gleichung (2.3) gelöst werden. Dazu wird vorerst angenommen, dass ein dämpfungsfreier Zustand vorliegt: $c = 0$. Es ergibt sich folgende kinetische Gleichgewichtsgleichung

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (2.4)$$

Nun wird die Eigenkreisfrequenz ω eingeführt

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \text{ bzw. } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.5)$$

Es ergibt sich

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (2.6)$$

Dies ist eine gewöhnliche homogene Differentialgleichung 2. Grades für die Verschiebung x . Eine Lösung von Gleichung (2.6) ist [1]

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (2.7)$$

Die Konstanten A und B können mittels Randbedingungen ermittelt werden. Für die Anfangsauslenkung $x(t=0) = x_0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(t=0) = v_0$ gilt $B = x_0$ und $A = \frac{v_0}{\omega}$. Die Lösung $x(t)$ ist eine freie, ungedämpfte, harmonische Schwingung mit der Eigenkreisfrequenz ω . Für die Eigenkreisfrequenz gilt

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ und } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.8)$$

mit der Eigenfrequenz f und der Eigenperiode T des EMS.

2.2.2 Viskos gedämpfte freie Schwingung des EMS

Gilt $c \neq 0$, ergibt sich aus Gleichung (2.3) folgende homogene Differentialgleichung 2. Grades

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \quad (2.9)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist [1]

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \text{ mit } \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \quad (2.10)$$

Wird nun das Lehr'sche Dämpfungsmaß $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega}$, auch Dämpfungsgrad genannt, eingeführt und in Gleichung (2.10) eingesetzt, ergibt sich für Dämpfungen $\zeta < 1$ [1]

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} \left(Ae^{i\omega t\sqrt{1-\zeta^2}} + Be^{-i\omega t\sqrt{1-\zeta^2}} \right), \text{ da } \lambda_{1,2} = -\left(\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega. \quad (2.11)$$

i definiert eine imaginäre Zahl, für die gilt: $i^2 = -1$. Mit der Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung $\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$ lässt sich diese Gleichung auch im Reellen anschreiben

$$x(t) = e^{-\zeta\omega t} (C \cos \omega_d t + D \sin \omega_d t). \quad (2.12)$$

Die Äquivalenz ergibt sich mithilfe der Euler-Identität $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Auch hier lassen sich die Freiwerte A, B bzw. C, D unter Nutzung von Randbedingungen ermitteln.

2.2.3 Erzwungene viskos gedämpfte Schwingung des EMS

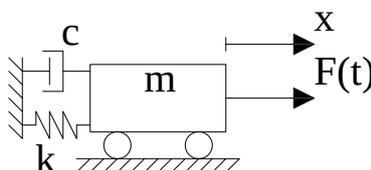


Abb. 2.2: Modell eines gedämpften EMS mit Kraftanregung

In der Baudynamik gibt es unterschiedliche dynamische Anregungsmechanismen. Diese sind alle äußerlich und zeitveränderlich, wobei die Änderung relativ schnell vonstatten gehen muss, um eine dynamische Reaktion des Bauwerks auszulösen; größere Änderungen innerhalb von 100 ms bis 10 s sind notwendig [1]. Eine Krafterregung ist am Beispiel des EMS in Abbildung 2.2 dargestellt. Hier greift eine in der Zeit veränderliche Kraft in Richtung der Verschiebung des EMS an. Beispiele für Krafterregungen sind Windböen bei einem Hochhaus, Überfahrten von Zügen über eine Brücke und eine Maschine mit Unwucht in einer Fabrik. Neben den Krafterregungen gibt es außerdem noch Weganregungen, bspw. bei der Basiserregung eines Hochhauses durch Erdbeben oder Tunnelbauarbeiten.

Sowohl die Kraftanregung als auch die Weganregung lassen sich mit folgender Bewegungsgleichung nach dem Prinzip von D'Alembert beschreiben

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t), \quad (2.13)$$

mit $F(t) = \hat{F} \cdot f(t)$ (\hat{F} ... Amplitude der Erregung) für eine Kraftanregung und $F(t) = -m\ddot{x}_F(t)$ ($x_F(t)$... Weganregung) für eine Weganregung. Für die Weganregung stellt $x(t) = x_{EMS}(t) - x_F(t)$ eine relative Verschiebung zwischen Schwinger und Basis dar. Die Lösung der Schwingungsgleichung hängt davon ab, ob eine harmonische, periodische oder aperiodische Anregung vorliegt.

2.2.3.1 Harmonische Kraftanregung

Im Falle einer harmonischen Kraftanregung gilt

$$F(t) = \hat{F} \cdot \sin \Omega t \quad (2.14)$$

mit Erregerkreisfrequenz $\Omega = \frac{2\pi}{T_F}$. Die Lösung von Gleichung (2.13) lautet dann [1]

$$x(t) = \hat{x} \cdot \sin(\Omega t - \varphi), \quad (2.15)$$

mit φ als Phasenwinkel und \hat{x} als Amplitude der Schwingung

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}. \quad (2.16)$$

Es ergibt sich des Weiteren folgende Beziehung für den sogenannten dynamischen Vergrößerungsfaktor

$$\frac{\hat{x}}{x_{stat}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{2\zeta\frac{\Omega}{\omega}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}. \quad (2.17)$$

Dabei ist x_{stat} die statische Verformung infolge \hat{F}

$$x_{stat} = \frac{\hat{F}}{k}. \quad (2.18)$$

2.2.3.2 Periodische Kraftanregung

Jede periodische Funktion lässt sich mithilfe einer Fourierreihe annähern. Mit steigender Anzahl der Glieder der Reihe wird die Annäherung genauer. Im Komplexen hat die Fourierreihe $F(t)$ einer periodischen Funktion $f(t)$ folgende Form [1]

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot e^{in\Omega t} \quad (2.19)$$

mit

$$c_n = \frac{1}{T_F} \cdot \int_{-T_F/2}^{T_F/2} f(t) \cdot e^{in\Omega t} dt. \quad (2.20)$$

Es ergibt sich folgende Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot e^{in\Omega t}, \quad (2.21)$$

die die folgende Lösung hat [1]

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G(in\Omega) \cdot c_n \cdot e^{in\Omega t} \quad \text{mit} \quad G(in\Omega) = \frac{1}{k \left[\left(1 - \left(\frac{n\Omega}{\omega}\right)^2\right) + i2\zeta \frac{n\Omega}{\omega} \right]}. \quad (2.22)$$

Die Funktion $G(in\Omega)$ wird komplexe Übertragungsfunktion bzw. Frequenzgang des EMS genannt. Sie „überträgt“ die n-te Lastamplitude c_n der Anregung auf die Wegamplitude des EMS

$$\hat{x}_n = G(in\Omega) \cdot c_n. \quad (2.23)$$

Gleichung (2.22) ist eine stationäre Gleichung. Das heißt, sie beschreibt das Verhalten des EMS unter periodischer Erregung im stationären, eingeschwungenen Zustand. Kurz nach dem Zeitpunkt der Lastaufbringung oder bei etwaiger Entlastung ($F(t - t_{Entlastung}) = 0$) verhält sich das System wie bei bzw. nach einer aperiodischen Anregung [1].

2.2.3.3 Aperiodische Kraftanregung

Im Bauwesen kommt es neben periodischen (Unwuchtanregung durch eine Maschine, Zugüberfahrt bei Brücken) auch oft zu aperiodischen Anregungen (Windanregung, Erdbeben, Stoß, plötzlicher Riss). Diese können impulsartig oder auch über längere Zeit aperiodisch wirken. Zur Auslegung von Bauwerken auf aperiodische Anregungen muss zwischen zwei Arten unterschieden werden:

- a) Die Erregung tritt über die Lebensdauer des Bauwerks häufiger auf, wie bspw. Verkehrslasten auf Brücken, Windanregung bei freistehenden Konstruktionen oder Erdbeben mit geringer Intensität. Im Umgang mit solchen Belastungen ist es das Ziel, die Beanspruchung in allen wesentlichen Bauteilen im elastischen Bereich zu halten. Bei Konstruktionen ohne Stoßdämpfer entspricht das möglichst kleinen Verformungen. Weiterhin muss darauf geachtet werden, dass die Dauerfestigkeit besonders bei Stahl- und Stahlbetonelementen unter der wechselnden Beanspruchung entsprechend hoch ist [1].
- b) Die Erregung tritt über die Lebensdauer des Bauwerks seltener, eventuell sogar nur einmal (als Katastrophenlastfall) auf. Ein Beispiel hierfür ist ein Erdbeben hoher Intensität. In diesem Fall ist es meistens nicht wirtschaftlich, die Beanspruchung in allen Bauteilen im elastischen Bereich zu halten. Es wird versucht, möglichst viel der Energie zu dissipieren, die durch die Anregung in das System kommt. Das geschieht zum Teil durch Dämpfungselemente, aber auch durch die Ausnutzung des nichtlinearen Verhaltens der Baustoffe (z.B. Plastifizierungen in Stahlbauteilen). Der Entwurf des Bauwerks kann in solchen Fällen sogar eine Beschädigung bis zum Versagen einzelner Bauteile vorsehen. Im Gegensatz zu Fall a) wird es in Fall b) zu weit größeren Verformungen in der Konstruktion kommen [1].

Wie mit beiden Fällen im Hochbau, insbesondere bei Hochhäusern, umgegangen wird, wird in Abschnitt 3 behandelt.

Im Falle aperiodischer Anregung setzt sich die Lösung für $x(t)$ aus einem homogenen und einem partikulären Anteil zusammen [1]

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_{part}(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + x_{part}(t), \quad (2.24)$$

wobei der partikuläre Anteil der Lösung durch einen Störansatz gefunden werden kann. Zu beachten ist, dass bei zeitlich begrenzter Anregung zwei Zustände vorkommen: der Zustand der Lastaufbringung bzw. Anregung vom Anregungsbeginn $t = 0$ bis Anregungsende $t = T_F$ und anschließend der freien Ausschwingvorgang analog zu Abschnitt 2.2.2 bis hin zum statischen

Gleichgewicht. Für beide Zustände müssen jeweils die Koeffizienten A und B bestimmt werden. Im Ausschwingvorgang geschieht das mithilfe der Anfangsbedingungen $x_0 = x(t = T_F)$ und $v_0 = \dot{x}(t = T_F)$.

Einheitsimpuls Viele aperiodische Anregungen auf Bauwerke sind stoßartiger Natur oder lassen sich durch viele unterschiedliche aufeinanderfolgende Stöße approximieren. Mathematisch werden Stöße mithilfe des Einheitsimpulses $I = 1$ dargestellt. Dieser basiert auf der Dirac-Funktion, auch bezeichnet als Delta-Funktion $\delta(t)$. Die Dirac-Funktion hat die Dauer Null und eine unendliche Intensität, sodass gilt [1]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.25)$$

Damit kann der Einheitsimpuls zu

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = \int_0^{T_F} F(t) dt = \int_0^{T_F} 1 \cdot \delta(t) dt \quad (2.26)$$

bestimmt werden. Nach der Stoßtheorie hat eine Masse m , nachdem sie einen Impuls I erfährt, eine Geschwindigkeit $v = \frac{I}{m} = \frac{1}{m} \int_0^{T_F} F(t) dt = \dot{x}(t = 0)$ [1]. Als weitere Anfangsbedingung gibt es keine Anfangsauslenkung $x(t = 0) = 0$. Es ergibt sich folgende Lösung

$$x(t) = I \cdot g(t) \text{ mit } g(t) = \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t), \quad (2.27)$$

wobei $g(t)$ als Gewichts- oder Einflussfunktion bezeichnet werden kann.

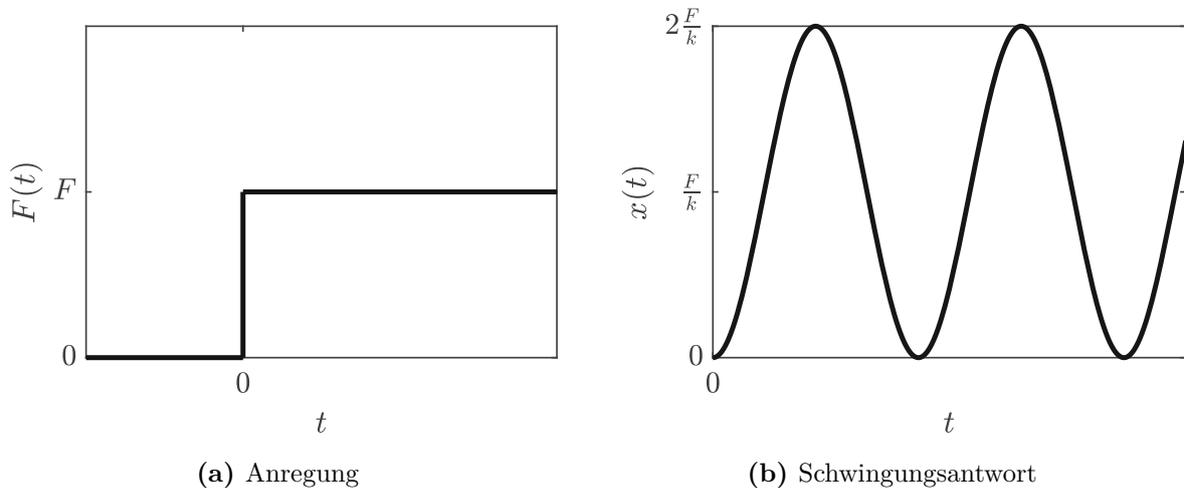


Abb. 2.3: Anregung in Sprungform (a) und sich ergebende Schwingungsantwort (b)

Einheitssprung Ein Einheitsimpuls reicht nicht aus, um komplexere Anregungen zu beschreiben. Dafür werden zumeist ein oder mehrere Sprünge der Last verwendet. Für einen Sprung ergibt sich folgende Sprungfunktion der Last

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ F, & t \geq 0 \end{cases}. \quad (2.28)$$

Die Sprungfunktion der Last $F(t)$ ist in Abbildung 2.3a dargestellt. Wird als partikulärer Ansatz eine Polynomfunktion $x_{part}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots$ gewählt [1], ergibt sich nach Einsetzen in die Bewegungsgleichung und Koeffizientenvergleich

$$a_0 = \frac{F}{k}, a_1 = a_2 = \dots = 0. \quad (2.29)$$

Die Lösung für die Verschiebung lautet demnach

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + \frac{F}{k}. \quad (2.30)$$

Mit den Anfangsbedingungen $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$ ergibt sich

$$x(t) = \frac{F}{k} h(t) \text{ mit } h(t) = 1 - \cos(\omega t), \quad (2.31)$$

dabei ist $h(t)$ die Einflussfunktion für diese Anregung. Es gilt $g(t) = \dot{h}(t)$. Die Lösung für die gesuchte Schwingungsantwort der Struktur $x(t)$ ist in Abbildung 2.3b dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass die Schwingung um die statische Auslenkung $x_{stat} = \frac{F}{k}$ infolge der Belastung F stattfindet. Erwähnenswert ist weiterhin, dass die maximale Amplitude im Fall einer Sprunganregung doppelt so groß ist wie die statische Auslenkung [1]

$$\max x = 2 \frac{F}{k} = 2x_{stat}. \quad (2.32)$$

Es ergibt sich also eine dynamische Überhöhung mit dem Faktor 2.

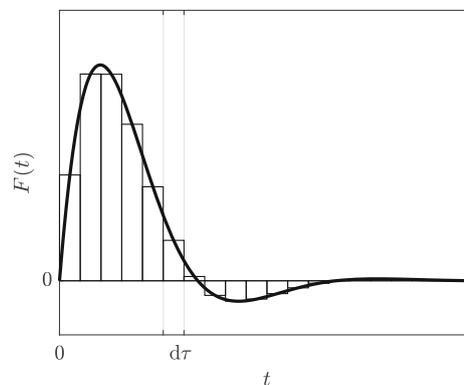


Abb. 2.4: Diskretisierung eines Kraft-Zeitverlaufs mithilfe von Impulsen

Duhamel-Faltungsintegral Hat eine aperiodische Anregung einen kontinuierlichen Verlauf, ist es sinnvoll, ihren Verlauf zu diskretisieren. Dazu wird die Kraftfunktion in Einzelimpulse der infinitesimalen Dauer $d\tau$ zerlegt. Die Verschiebung zum Zeitpunkt t , resultierend aus dem Einzelimpuls $F(\tau) \cdot d\tau$, berechnet sich zu [1]

$$dx = F(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau. \quad (2.33)$$

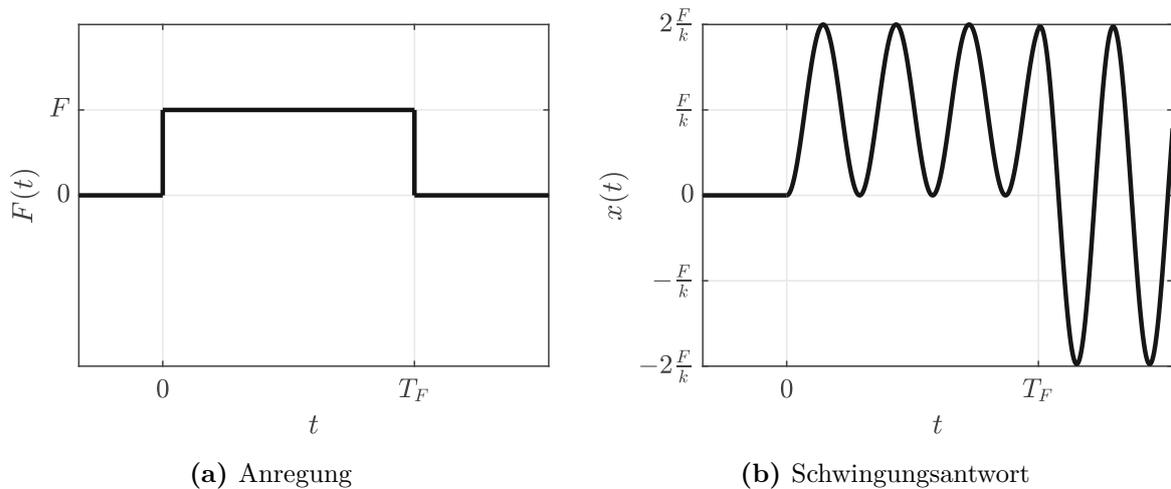


Abb. 2.5: Anregung in Rechteckfunktion (a) und sich ergebende freie ungedämpfte Schwingung (b)

Durch die linearen Eigenschaften des EMS kann das Superpositions-gesetz angewandt werden und über die Belastungsgeschichte von $\tau = 0$ bis $\tau = t$ integriert werden

$$x(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} F(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau. \quad (2.34)$$

Diese Gleichung wird auch Duhamel-Integral genannt, das sowohl für numerische als auch für analytische Lösungen der Bewegungsgleichung herangezogen werden kann. Bspw. zeigt bei einer Belastung in Form einer Rechteckfunktion nach Abbildung 2.5 ein EMS folgende Schwingungsantwort für den Zeitraum der Anregung $0 \leq t \leq T_F$ [1]

$$x(t) = \frac{F}{k} \cdot \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right) \right]. \quad (2.35)$$

2.3 Mehrmassenschwinger (MMS)

Es ist bei vielen einfachen dynamischen Systemen möglich und üblich, sie mit einem (gedämpften) EMS zu modellieren. Beispiele hierfür sind Pendel, Maschinenfundamente und sehr steife Geschossdecken mit Schwingungsisolierung. Diese Systeme haben eine dominante Eigenfrequenz und einfach bestimmbare Federkonstanten und Dämpfungen. Bei anderen Konstruktionen gibt es mehrere relevante Eigenfrequenzen und Eigenformen. Sie lassen sich in zwei Kategorien unterteilen: analytisch beschreibbare Systeme und diskretisierte Systeme, auch MMS.

Die analytisch darstellbaren Tragwerke sind zumeist einfache Konstruktionen, die Stab- und/oder Seiltragwerke enthalten. Im Folgenden wird ausschließlich auf Stabtragwerke eingegangen, da Seiltragwerke im Hochhausbau kaum zum Einsatz kommen.

Diskrete MMS sind dagegen entweder einfache Systeme, die sich aber in mehrere verbundene EMS zerlegen lassen, oder komplexere Tragwerke, die zur Vereinfachung zu einigen verbundenen schwingenden Punktmassen diskretisiert wurden, z.B. mithilfe der Finite Elemente Methode (FEM).

2.3.1 Kontinuierliche Systeme: Stäbe und Stabwerke

Stabtragwerke bestehen aus kontinuierlich mit Masse belegten Stäben mit Masse pro Längeneinheit $\mu = \rho A$, Dehnsteifigkeiten EA , Schubsteifigkeiten GA , Torsionssteifigkeiten GI_T und Biegesteifigkeiten EI . Bei Stäben werden die Verschiebungen, Verdrehungen und Schnittgrößen (Spannungsergebnisse) auf die Stabachse bezogen, die immer in Richtung der längsten Ausdehnung des Stabes verläuft und im Massenmittelpunkt des Querschnitts liegt. Die einfachsten Stabtragwerke sind Kragarme und Einfeldträger, aber auch für Durchlaufträger und weitere komplexere Systeme lassen sich die Schwingungen analytisch beschreiben [1],[2].

Grundsätzlich gilt für jede Baukonstruktion, dass sie schwingungsfähig ist. Sie kann also in gewissen Bereichen von ihrer Ruhelage (Gleichgewichtslage) ausgelenkt werden und beginnt anschließend, um diese Ruhelage zu schwingen. Dabei wirken rückstellende Federkräfte, auch Federcharakteristik genannt, die abhängig von der Auslenkung und Verdrehung der Struktur sind. Die Federcharakteristik kann entweder linear oder nichtlinear sein. Nichtlinearität tritt bspw. im Fall von Plastifizierungen ein. Dämpfung hat dagegen im Stab kaum Einfluss auf die Schwingung, weil sie im linearen Fall bei Baukonstruktionen sehr gering ist ($\zeta < 10\%$). Im Folgenden werden deshalb ungedämpfte Stabschwinger mit linearer Federcharakteristik fokussiert [1].

Charakteristisch für MMS sind die Eigenschwingungen, auch Moden genannt. Das ist eine Bezeichnung für die freien Schwingungen des Systems, wobei es in einer sogenannten Eigenform $\phi_i(x, t)$ mit einer zugehörigen Eigenkreisfrequenz ω_i bzw. Eigenfrequenz f_i schwingt. Beispiele von solchen Eigenformen sind in Abbildung 2.6 dargestellt; zu sehen sind hier die Biegeschwingsformen eines Kragträgers und eines Einfeldträgers. Beim Einfeldträger lässt sich gut die sinusoidale Form erkennen.

Stabwerke haben wegen ihrer kontinuierlichen Massenbelegung unendlich viele Eigenformen und Eigenfrequenzen. Sie besitzen unendlich viele infinitesimale mit Masse belegte Punkte auf der Stabachse, die alle mindestens einen Freiheitsgrad besitzen. Bei Stäben gibt es für die infinitesimalen Massenpunkte jeweils sechs Freiheitsgrade: drei Verschiebungen und drei Verdrehungen. Wird von geraden Stäben mit der x -Koordinate in Richtung der Stabachse und y - und z -Achse jeweils senkrecht dazu ausgegangen, teilen sich diese Verschiebungen wie folgt auf [1]:

- Verschiebung in x -Richtung: Dehnung des Stabes,
- Verschiebung in y - oder z -Richtung: Schubverformung des Stabes,
- Verdrehung um die x -Achse: Torsion des Stabes und
- Verdrehung um die y - oder z -Achse: Biegung des Stabes.

Zu beachten ist, dass die Biegung auch zur Verschiebung von Bereichen des Stabes führt. Nach dieser Aufzählung gibt es vier verschiedene Schwingungsformen von Stäben: Dehn-, Schub-, Torsions- und Biegeschwingung, die sich auch überlagern können. Überlagerungen entstehen, wenn die Eigenfrequenzen von zwei verschiedenen Schwingungen so nah beieinander liegen, dass für Frequenzen in diesem Bereich beide Schwingungen gleichzeitig ablaufen. So gibt es bspw. bei Hochhäusern oft den Fall der sogenannten Torsionsbiegeschwingung. Um wirklich eine entkoppelte Betrachtung zu ermöglichen, müssen Annahmen bezüglich der Steifigkeit der Stäbe getroffen werden. So sind häufig Torsions- und Dehnschwingungen von untergeordneter Bedeutung bei Stäben, da einerseits die Steifigkeiten EA und GI_T relativ groß sind und die betrachtete Anregung zumeist senkrecht zur Stabachse verläuft. Oft wird auch von schubstarrten Stäben ausgegangen, also Euler-Bernoulli-Stäben, wodurch auch eine Schubverformung verhindert wird und ausschließlich Biegeschwingungen betrachtet werden [1]. Weitere Ausführungen zu diesem Thema sind im Abschnitt 4 zu finden, in dem es unter anderem um die Modellbildung zur Analyse schlanker Hochhäuser mit gedämpften Outrigger-Systemen geht.

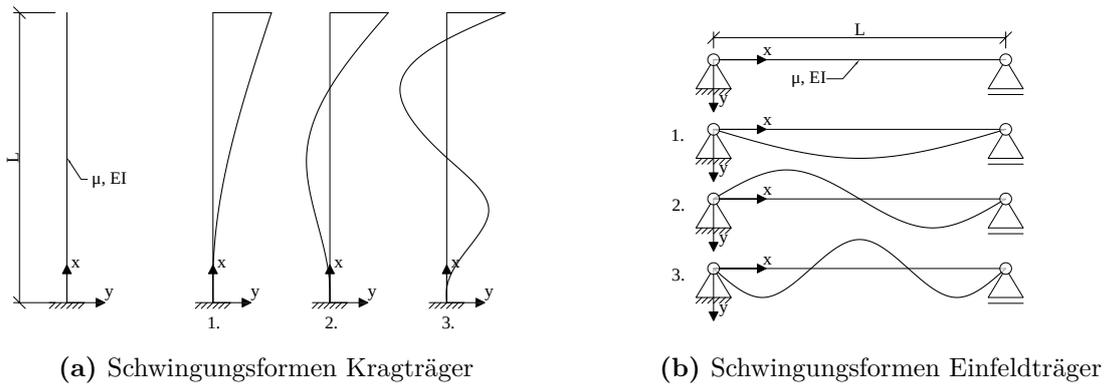


Abb. 2.6: Die drei ersten Biegeschwingungs-Eigenformen zweier einfacher Stabtragwerke: Kragbalken (a) und Einfeldträger (b) [1]

2.3.1.1 Eigenfrequenzen und Eigenformen von einfachen schubstarren Stabwerken

Sollen für Stabwerke Eigenfrequenzen und Eigenformen gefunden werden, ist die Methode mit dem geringsten Aufwand eine Diskretisierung des Stabwerks. Dabei wird das Tragwerk in Teile zerlegt, deren kontinuierliche Massenbelegungen zu jeweils einer Punktmasse zusammengezogen werden. Je mehr dieser Elemente eingeführt werden, desto genauer ist die Ermittlung der Eigenfrequenzen und der Eigenformen, aber es steigt auch der Rechenaufwand mit der Zahl der Elemente [1]. Details werden in Abschnitt 2.3.2 beschrieben.

Es gibt allerdings Stabwerke, für die auch höhere Eigenfrequenzen und -formen genau bekannt sind. Dafür werden im Folgenden Euler-Bernoulli-Stäbe betrachtet. Es werden demnach schubstarre Träger mit kleinen Verformungen analysiert, für die das linearisierte Gesetz der Stabbiegung $M = -EI \cdot y''$ gilt ($y' = \frac{\partial y}{\partial x}$). Zudem wird die Rotationsträgheit vernachlässigt [1]. An einem

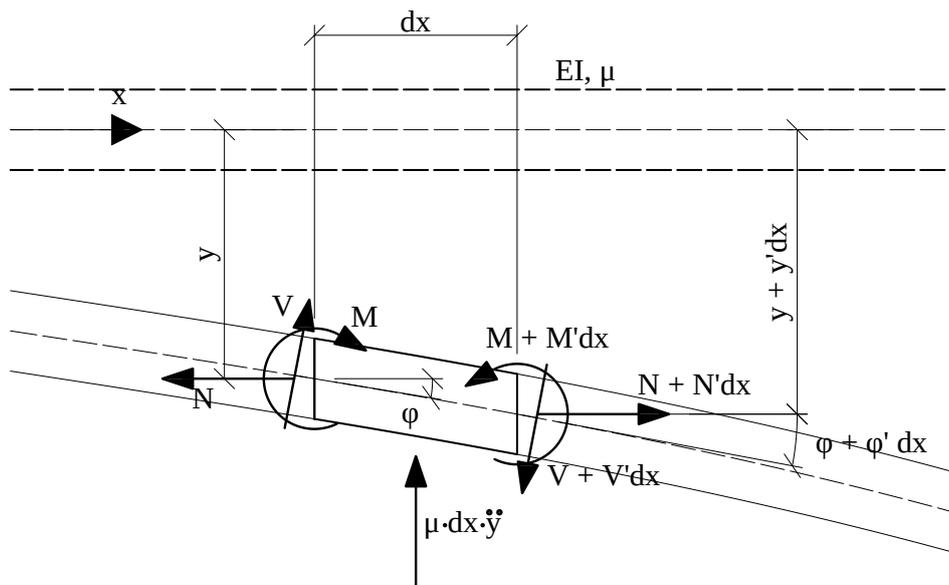


Abb. 2.7: Verschiebungs- und Kraftgrößen am infinitesimalen Stabelement

infinitesimalen Abschnitt eines in der x - y -Ebene betrachteten belasteten Euler-Bernoulli-Stabes stellt sich das Schnittkraft- und Verformungsbild nach Abbildung 2.7 ein. $N(x)$ ist dabei die Normalkraft, $V(x)$ die Querkraft, $M(x)$ das Biegemoment und $\varphi(x)$ die Verdrehung des Querschnitts zur Stabachse. $y(x, t)$ ist die dynamische Auslenkung, es gilt also $\varphi \approx y'$. Werden dem Prinzip von D'Alembert folgend die Gleichgewichte $\sum N = \sum V = \sum M = 0$ gebildet und ineinander eingesetzt, ergibt sich folgende Beziehung

$$M'' = -N(x)y'' + \mu\ddot{y}. \quad (2.36)$$

Das lässt sich unter Nutzung des Elastizitätsgesetzes der Stabbiegung zur Grundgleichung für die Eigenschwingungen umformen

$$[EI(x)y'']'' - N(x)y'' + \mu\ddot{y} = 0. \quad (2.37)$$

Wird ein harmonischer Ansatz für die Eigenschwingung $y(x, t)$ genutzt [1]

$$y(x, t) = Y(x) \cdot \sin(\omega t) \text{ bzw. } y(x, t) = Y(x) \cdot e^{i\omega t}, \quad (2.38)$$

ergibt sich eine homogene gewöhnliche Differentialgleichung 4. Grades in Y

$$[EI(x)Y'']'' - N(x)Y'' - \mu\omega^2 Y = 0. \quad (2.39)$$

Für diese Gleichung müssen Lösungen gefunden werden, wenn analytisch exakte Lösungen für die Größen der Eigenschwingungen eines Stabwerks gesucht sind. Das ist nur in wenigen speziellen Fällen möglich. Ein Beispiel dafür ist ein Stab mit konstantem Querschnitt ($EI(x) = \text{konst.}$ und $\mu = \text{konst.}$) und ohne Normalkraft $N = 0$. Gleichung (2.39) lässt sich damit umschreiben zu

$$Y'''' - \frac{\mu\omega^2}{EI} Y = 0. \quad (2.40)$$

Unter Nutzung einer auf die Stablänge L bezogenen Längskoordinate

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (2.41)$$

lässt sich die Differentialgleichung mithilfe von vier linear unabhängigen Gleichungen lösen [1]

$$\begin{aligned} Y &= C_1 \cosh \lambda \xi + C_2 \sinh \lambda \xi + C_3 \cos \lambda \xi + C_4 \sin \lambda \xi, \\ \phi = Y' &= C_1 \frac{\lambda}{L} \sinh \lambda \xi + C_2 \frac{\lambda}{L} \cosh \lambda \xi - C_3 \frac{\lambda}{L} \sin \lambda \xi + \frac{\lambda}{L} \cos \lambda \xi, \\ -\frac{M}{EI} = Y'' &= C_1 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \cosh \lambda \xi + C_2 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \sinh \lambda \xi - C_3 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \cos \lambda \xi - C_4 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \sin \lambda \xi, \\ -\frac{V}{EI} = Y''' &= C_1 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^3 \sinh \lambda \xi + C_2 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^3 \cosh \lambda \xi + C_3 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^3 \sin \lambda \xi - C_4 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^3 \cos \lambda \xi. \end{aligned} \quad (2.42)$$

λ ist ein dimensionsloser Parameter, der von den Geometrie- und Materialparametern des Stabes abhängt

$$\lambda = L \sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2}{EI}}. \quad (2.43)$$

Daraus lässt sich alternativ auch die Eigenkreisfrequenz bestimmen

$$\omega = \frac{\lambda^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}. \quad (2.44)$$

Die Freiwerte C_1 bis C_4 lassen sich mithilfe der Randbedingungen des Stabes ermitteln. Werden diese Randbedingungen eingesetzt, ergibt sich aus den Gleichungen (2.42) ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Freiwerte. Dann wird λ berechnet, indem die Nennerdeterminante dieses Gleichungssystems zu Null gesetzt wird. Die so erhaltene Frequenzgleichung $\text{Det}(\lambda) = 0$ besitzt unendlich viele Wurzeln, die nicht explizit anschreibbar sind, sondern einzeln durch ein Einschachtelungsverfahren berechnet werden müssen. Ein solches Verfahren ist der sogenannte Argument-Prinzip-Algorithmus (APA). Dieser wird in Abschnitt 4.1.3 dargelegt. Für jeden so ermittelten Eigenwert λ lassen sich die Eigenfrequenz und durch Einsetzen ins Gleichungssystem die Freiwerte C berechnen. Sind diese Werte bekannt, können auch die zugehörigen Eigenformen für y , φ , M und die Querkraft V ermittelt werden [1].

Beispiel Kragarm Bei einem Kragarm nach Abbildung 2.6a gelten folgende Randbedingungen

$$\begin{aligned} \xi = 0 : y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \text{ und} \\ \xi = 1 : y''(1) = 0, \quad y'''(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Eingesetzt in das Gleichungssystem (2.42) ergibt sich das Gleichungssystem nach Tabelle 2.1.

Tab. 2.1: Bewegungsgleichungssystem für einen Kragarm

	C_1	C_2	C_3	C_4	
$y(0)$	1	0	1	0	=0
$y'(0)$	0	1	0	1	=0
$y''(1)$	$-\cosh \lambda$	$-\sinh \lambda$	$\cos \lambda$	$\sin \lambda$	=0
$y'''(1)$	$-\sinh \lambda$	$-\cosh \lambda$	$-\sin \lambda$	$\cos \lambda$	=0

Wird von diesem Gleichungssystem die Determinante gebildet und zu Null gesetzt, ergibt sich folgende Frequenzgleichung

$$\cosh \lambda \cos \lambda + 1 = 0. \quad (2.46)$$

Wie bereits erläutert, gibt es unendlich viele Lösungen für diese Gleichung. Die ersten drei sind die folgenden [1]

$$\lambda_1 = 1,875, \lambda_2 = 4,694, \lambda_3 = 7,855, \lambda_n \approx \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi, n \in \mathbb{N}. \quad (2.47)$$

Wird $C_4 = 1$ angenommen, lassen sich die Eigenformen für y und den Ableitungen ermitteln. Hier nur die Eigenform von y [1]

$$y = \sin \lambda \xi - \sinh \lambda \xi + \frac{\sinh \lambda + \sin \lambda}{\cosh \lambda + \cos \lambda} \cdot (\cosh \lambda \xi - \cos \lambda \xi) \quad (2.48)$$

Beispiel Einfeldträger Analog lässt sich das Gleichungssystem auch für einen Einfeldträger nach Abbildung 2.6b lösen, für den folgende Randbedingungen gelten

$$\begin{aligned}\xi = 0 : y(0) = 0, y''(0) = 0 \text{ und} \\ \xi = 1 : y(1) = 0, y''(1) = 0.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Es ergibt sich das Gleichungssystem in Tabelle 2.2 [1].

Tab. 2.2: Bewegungsgleichungssystem für einen Einfeldträger

	C_1	C_2	C_3	C_4	
$y(0)$	1	0	1	0	=0
$y''(0)$	$-\cosh \lambda$	$-\sinh \lambda$	$\cos \lambda$	$\sin \lambda$	=0
$y(1)$	1	0	1	0	=0
$y''(1)$	$-\cosh \lambda$	$-\sinh \lambda$	$\cos \lambda$	$\sin \lambda$	=0

Das Gleichungssystem hat die Determinante

$$\sin \lambda = 0.\tag{2.50}$$

Die Lösung für λ ist damit

$$\lambda_n = n\pi, n \in \mathbb{N}\tag{2.51}$$

und die Eigenformen ergeben sich zu [1]

$$y = \sin \lambda \xi.\tag{2.52}$$

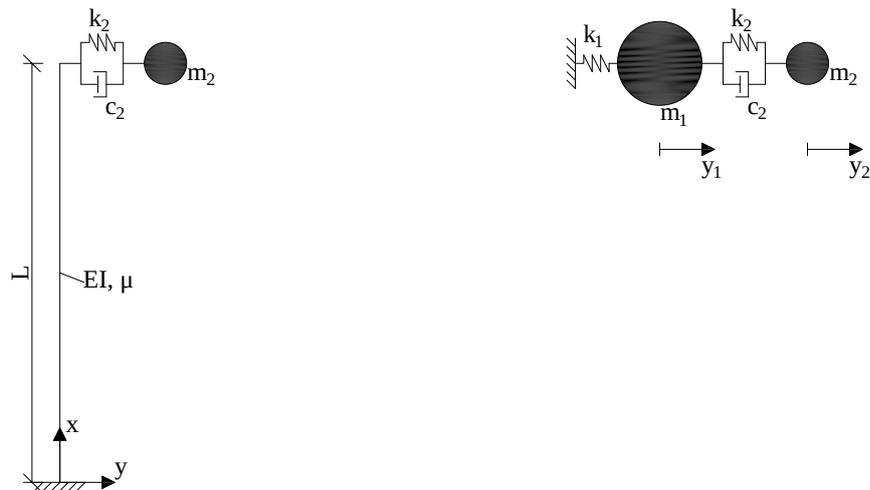
2.3.2 Diskrete MMS

Die diskreten MMS werden nachfolgend am Beispiel eines Zweimassenschwingers beschrieben: ein Kragarm mit angeschlossenem Schwingungsdämpfer, auch Tuned Mass Damper (TMD) genannt. Das Beispiel ist in Abbildung 2.8 dargestellt, gemeinsam mit seinem diskretisierten Schwingungsmodell. Das Prinzip der Diskretisierung wurde schon in Abschnitt 2.3.1.1 beschrieben. In diesem Beispiel wird der ungedämpfte Kragträger zu einer schwingenden Masse zusammengefasst. Diese Masse $m_1 = 0,24\mu L$ ist eine Ersatzmasse (schwingender Massenanteil des Stabes), die mit der Auslenkung $y_1(t)$ schwingt [1]. Der Kragträger hat eine Biegesteifigkeit EI und eine Länge L , die in eine Federsteifigkeit $k_1 = \frac{3EI}{L^3}$ [1] umgerechnet werden können. Die Grundschwingung des Kragarms ohne angekoppelten Schwingungsdämpfer hat demnach die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_H = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{3EI}{0,24\mu L^4}} = \frac{5}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{2\mu}}.\tag{2.53}$$

Der am oberen Ende des Kragträgers angekoppelte Schwingungsdämpfer mit der Masse m_2 und der Federsteifigkeit k_2 ist allein ebenso ein EMS mit der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}.\tag{2.54}$$



(a) Kragträger mit angekoppelter Zusatzmasse (b) Diskretisiertes Modell für den Zweimassenschwinger

Abb. 2.8: Kragförmige Struktur mit angekoppeltem Schwingungsdämpfer: Modell des Kragträgers mit Zusatzmasse (a) und daraus abgeleitetes diskretisiertes Modell (b)

Werden aus dem Schwingermodell in Abbildung 2.8b jeweils die beiden Massen freigeschnitten, ergeben sich für eine freie Schwingung folgende zwei Gleichgewichtsbeziehungen nach dem Prinzip von D'Alembert

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_2) &= 0 \text{ und} \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 - k_1(y_1 - y_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Mit den harmonischen Ansätzen [1]

$$y_1(t) = \phi_1 \cdot e^{-i\omega t}, y_2(t) = \phi_2 \cdot e^{-i\omega t}, \quad (2.56)$$

ergeben sich folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} [-\phi_1 m_1 \omega^2 + \phi_1 k_1 - \phi_2 k_1] \cdot e^{-i\omega t} &= 0 \text{ und} \\ [-\phi_2 m_2 \omega^2 - \phi_2 \omega c_2 + \phi_2 k_2 - \phi_1 k_1 + \phi_2 k_1] \cdot e^{-i\omega t} &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Das lässt sich noch weiter zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} \phi_1 [k_1 - \omega^2 m_1] - \phi_2 k_1 &= 0 \text{ und} \\ -\phi_1 k_1 + \phi_2 [(k_1 + k) - \omega c - \omega^2 m_2] &= 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Daraus lässt sich folgende Matrixgleichung bilden

$$[\mathbf{k} - \omega \mathbf{c} - \omega^2 \mathbf{m}] \vec{\phi} = 0, \quad (2.59)$$

mit Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} , Dämpfungsmatrix \mathbf{c} , Massenmatrix \mathbf{m} und Eigenvektor $\vec{\phi}$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Gleichung (2.59) lässt sich im Übrigen für jeden linear-elastischen MMS mit freier Schwingung bilden. Die Anzahl der Zeilen des Eigenvektors $\vec{\phi}$ gibt an, wie viele Freiheitsgrade das System hat und damit, wie viele Eigenschwingungen es gibt. Um die Gleichung (2.59) zu lösen, gibt es zwei Möglichkeiten: Lösung 1: $\vec{\phi} = 0$ ist trivial und nicht weiter interessant für die Dynamik, während Lösung 2:

$$\det [\mathbf{k} - \omega \mathbf{c} - \omega^2 \mathbf{m}] = 0 \quad (2.61)$$

zu einem Eigenwertproblem mit Eigenwert ω führt. Die Lösung für die Eigenwerte des Zweimassenschwingers (Eigenkreisfrequenzen) ist folgende [1]

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1 + k_2}{m_2} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1 + k_2}{m_2} \right)^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}. \quad (2.62)$$

Mit den Eigenkreisfrequenzen des alleinigen Hauptsystems ω_H und des Dämpfers ω_D , sowie den Massen- und Frequenzverhältnissen

$$\eta = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{\omega_D}{\omega_H} \quad (2.63)$$

ergeben sich die gesuchten Eigenkreisfrequenzen des Zweimassensystems zu

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \omega_H^2 \left([1 + (1 + \eta)\kappa^2] \mp \sqrt{[1 + (1 + \eta)\kappa^2]^2 - 4\kappa^2} \right). \quad (2.64)$$

Offensichtlich sind die gekoppelten Eigenkreisfrequenzen des Zweimassenschwingers abhängig von den Eigenfrequenzen der nicht gekoppelten Einzelsysteme (Kragträger und Schwingungsdämpfer). Das weitere Lösungsverfahren für diese Problemstellung nennt sich Modalanalyse. Es führt zur Ermittlung der Eigenformen und in weiterer Folge zu den resultierenden dynamischen Belastungen und Verschiebungen einer Struktur [1],[3].

Kapitel 3

Stand der Technik: Aussteifung und Dämpfung von Hochhäusern

Hochhäuser sind hohe, meist schlanke Gebäude mit verschiedenen Nutzungen. In den meisten Fällen werden sie als Bürogebäude und/oder als Wohnhäuser benutzt [4]. Es gibt verschiedene Definitionen für ein „Hochhaus“. So wird bspw. in der Bauordnung von Wien in §7f definiert:

(1) Hochhäuser sind Gebäude, deren oberster Abschluss einschließlich aller Dachaufbauten gemäß § 81 Abs. 6, 6a und 7 mehr als 35 m über dem tiefsten Punkt des anschließenden Geländes beziehungsweise der festgesetzten Höhenlage der anschließenden Verkehrsfläche liegt. ([5])

Nach der Musterbauordnung der Bauministerkonferenz von Deutschland sind in Deutschland Gebäude mit einer Höhe von mindestens 22 m als Hochhäuser zu bezeichnen. Hier ist die „Höhe [...] das Maß der Fußbodenoberkante des höchstgelegenen Geschosses, in dem ein Aufenthaltsraum möglich ist, über der Geländeoberfläche im Mittel.“ ([6]) In Deutschland wurde diese Höhe gewählt, da die Rettungsgeräte (Druckschläuche und Leitern) der standardmäßig eingesetzten Feuerwehrfahrzeuge höher liegende Geschosse nicht erreichen. Diese Definition hat demnach nichts mit der Schlankheit oder Belastung der Gebäude zu tun, sondern ausschließlich brand-schutztechnische Gründe [7].

Es bestehen allerdings andere Gründe, weshalb Hochhäuser oft eine schlanke Form haben. Ein Grund ist die natürliche Belichtung, die in Bürohochhäusern an jedem Arbeitsplatz gegeben sein muss. Als weiterer Grund können die begrenzten Baugrundflächen in Städten angeführt werden, die dazu führen, dass mehr in die Höhe als in die Breite gebaut wird. So haben Hochhäuser meistens eine Schlankheit von Höhe zu Breite zwischen 5:1 und 8:1. Das schlankste Hochhaus der Welt ist der *Steinway Tower* in New York City mit einer Schlankheit von ungefähr 24:1 [8]. Solche hohen Bauwerke sind hohen vertikalen, aber auch horizontalen Belastungen unterworfen. Einerseits gibt es die Eigen-, Ausbau- und Nutzlasten, die einer möglichst direkten Ableitung in den Baugrund bedürfen. Das geschieht zumeist über Stützen und Wände in Stahlbetonbauweise, Stahlbauweise oder Stahl-Beton-Verbundbauweise mit für den Hochbau sonst unüblich großen Abmessungen. Andererseits existieren horizontale Belastungen, die oft sogar zu höheren Beanspruchungen in den Traggliedern führen als die Vertikallasten. Je schlanker das Bauwerk, desto größer sind die horizontalen Einwirkungen im Verhältnis zu den vertikalen Belastungen. Die wichtigsten horizontalen Einwirkungen sind im Hochbau Wind und Erdbeben [4],[8].

3.1 Windbelastung von Hochhäusern

Windbelastungen entstehen bei Hochhäusern dadurch, dass Wind das Gebäude anströmt und das Bauwerk dem Wind einen Strömungswiderstand entgegensetzt. Dieser Widerstand entsteht dadurch, dass es Druckunterschiede an unterschiedlichen Flächen der einzelnen Bauteile gibt, wie auch an den Oberflächen des Hochhauses an sich. So gibt es Druckunterschiede zwischen

Innenseite und Außenseite der Fassade und auch zwischen der angeströmten Seite des Bauwerks und der gegenüberliegenden Seite. Neben den Druckunterschieden treten noch Belastungen durch Reibung der Luft am Gebäude auf, allerdings sind diese Lasten für übliche Fassaden viel geringer als die Drücke und werden bei der Bemessung vernachlässigt. In vielen Fällen kann die Windbelastung als stationär angenommen werden, obwohl sie sich stochastisch über die Zeit ändert. Ausnahme hierfür sind schwingungsanfällige Bauwerke (siehe Abschnitt 3.1.1) [4],[8].

Im Falle stationärer Windbelastung ergibt sich die Windbelastung von Bauteilen aus der Summe des angreifenden Winddrucks und -soges. Diese sind von verschiedenen Faktoren abhängig: der geografischen Lage des Gebäudes, seiner Exposition und Umgebung (Geländerauhigkeit), der Höhe des jeweiligen Bauteils über dem Erdboden, der Position des Bauteils in der Fassade beziehungsweise im Dach und davon, ob das Bauwerk offen oder geschlossen ist. Diese Faktoren werden in Normen wie bspw. dem *Eurocode 1* (ÖNORM EN 1991-1-4, [9]) auf verschiedene Weisen berücksichtigt. So geht die geografische Lage direkt als Druckwert $q_{b,0}$ ein, während Höhe z und Geländerauhigkeit einen Standortbeiwert c_e begründen und die Lage des Bauteils einen sogenannten Druckbeiwert c_{pe} (Außendruck) bzw. c_{pi} (Innendruck) bestimmt. Die Berechnung der Windlast nach *Eurocode 1* geschieht nach folgender Formel [9]

$$w = q_{b,0} \cdot c_e(z) \cdot (c_{pe} + c_{pi}). \quad (3.1)$$

In Abbildung 3.1 ist die Abhängigkeit des Winddruckes von Höhe und Geländerauhigkeit (Geländekategorien 0 bis IV) nach *Eurocode 1* dargestellt. Es wird deutlich, dass der Winddruck mit zunehmender Höhe immer stärker wird. Außerdem ist ersichtlich, dass in Städten, also Geländekategorie IV, die starke Bebauung einen positiven Effekt auf die stationäre Windbelastung von Gebäuden hat.

Durch ihre Höhe sind Hochhäuser im Vergleich zu anderen, flacheren Bauwerken besonders stark vom stationären Wind belastet und müssen dementsprechend horizontal ausgesteift werden. In den meisten Fällen wird im Zuge der Tragwerksplanung eines Hochhauses die genaue Windbelastung an einem verkleinerten Modell in einem Windkanal untersucht. Dabei werden außer dem Modell des Gebäudes auch die umliegenden Bauwerke modelliert und anschließend mithilfe von Sensorik

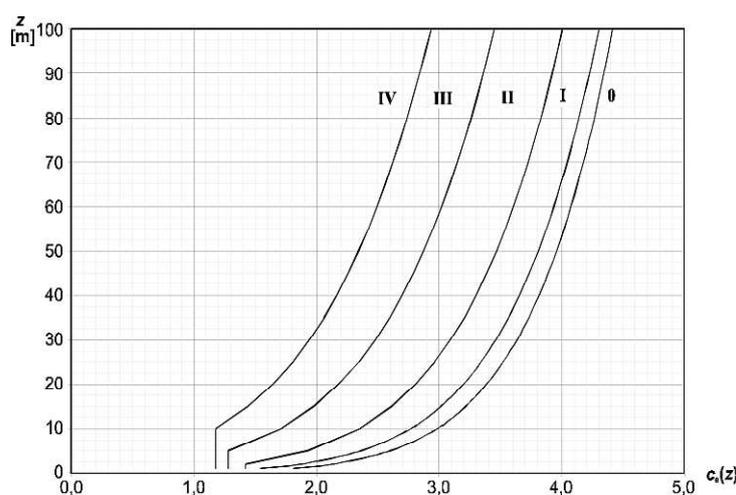


Abb. 3.1: Standortbeiwert $c_e(z)$ nach ÖNORM EN 1991-1-4, abhängig von der Höhe über dem Erdboden z und der Geländekategorie 0 bis IV, entnommen aus [9]

die Druckverteilung am Bauwerk gemessen [4],[8],[9]. Ein Beispiel hierfür ist der Windkanalversuch des derzeit im Bau befindlichen DC2-Towers in Wien, dargestellt in Abbildung 3.2.



Abb. 3.2: Windkanalmodell des DC2-Towers Wien mit Umgebungsbebauung, entnommen aus [10]

3.1.1 Schwingungserregung von Hochhäusern durch Wind

Neben der stationären Belastung von Hochhäusern hat Wind auch einen dynamischen Anteil, der insbesondere bei sehr hohen und schlanken Hochhäusern nicht vernachlässigt werden darf. So gibt es verschiedene dynamische Anregungsmechanismen, in denen der Wind wirken kann. Es gibt die Möglichkeit, dass die an sich aperiodischen Böen das Bauwerk in Windrichtung zu Resonanzschwingungen anregen. Außerdem kann es zu wirbelerregten Schwingungen der Hochhäuser quer zur Windrichtung kommen oder auch zu aerodynamischen Instabilitäten (Galloping, Flattern und Divergenz).

Resonanzartige Bauwerksschwingungen infolge Windturbulenz Windturbulenzen und die daraus resultierenden resonanzartigen Bauwerksschwingungen werden im *Eurocode 1* durch einen weiteren Beiwert, den Strukturbeiwert c_d berücksichtigt. Dieser geht gemeinsam mit dem Beiwert c_s , der das nicht gleichzeitige Auftreten von Spitzenwinddrücken auf der Oberfläche des Baukörpers beschreibt, direkt in die Berechnung der aus dem Außenwind resultierenden Windkräfte F_w ein [9]

$$F_w = c_s c_d \cdot c_f \cdot q_{b,0} \cdot c_e(z) \cdot A_{ref}, \quad (3.2)$$

wobei c_f ein Kraftbeiwert ist, der die Form des Baukörpers beschreibt und A_{ref} die Bezugsfläche. Die Berechnung bei Turbulenzen erfolgt also auch statisch, hier gehen aber dynamische Faktoren wie die Eigenfrequenzen und die Dämpfung des Gebäudes, sowie die Dynamik der Böen (Spektrum, gemittelte Stärke, ...) ein und begründen einen dynamischen Überhöhungsfaktor c_d [4],[8],[9].

Es ist aber ebenso möglich, die dynamische Windbelastung dynamisch auf das Bauwerk anzusetzen, vorausgesetzt, es existiert ein repräsentativer Zeitverlauf der Windbelastung am Errichtungsort des Bauwerks. Dann ist eine dynamische Zeitverlaufsberechnung vonnöten, die zwar genauer ist als die statische Berechnung und niedrigere Belastungen erzeugt, aber nicht immer „auf der sicheren Seite“ liegt. Es können auch andere, kritischere Zeitverläufe der Windgeschwindigkeit auftreten.

Wirbelerregte Querschwingungen Neben den Turbulenzen sind Wirbel, die sich alternierend von gegenüberliegenden Seiten eines Bauwerks ablösen, eine weitere Form der dynamischen Anregung eines Bauwerks. Dabei hat diese Anregung einen breitbandigen Anteil, der massivere Konstruktionen anregen kann und einen schmalbandigen Anteil, der für filigranere Tragwerke (z.B. Stahlkonstruktionen) relevant wird. Nach *Eurocode 1* treten solche Schwingungen aber nur bei schlanken, gering gedämpften Bauwerken auf und, wenn die mittlere 10-Minuten Windgeschwindigkeit größer ist als eine sogenannte kritische Windgeschwindigkeit. Diese kritische Windgeschwindigkeit ist abhängig von der Grundrissform des Gebäudes, ausgedrückt in der Strouhalzahl, seiner Eigenfrequenz und Breite. Im Falle des Eintretens solcher Querschwingungen lassen sich die Beanspruchungen aus den Massenträgheitskräften des in Resonanz schwingenden Bauwerks bestimmen [8],[9].

Aerodynamische Instabilitäten Es gibt drei wesentliche aerodynamische Instabilitäten, nämlich Galloping, Divergenz und Flattern, wobei die letzten beiden im herkömmlichen Hochbau sehr selten vorkommen. Galloping ist im *Eurocode 1* folgendermaßen definiert:

Galloping ist eine selbsterregte Schwingung eines elastischen Bauwerks oder Bauteils in einer Biegeschwingsform normal zum Wind. Nicht kreisförmige Querschnitte einschließlich I-, U-, L- und T-förmige Querschnitte können durch Galloping gefährdet sein. ([9])

Auch Galloping setzt erst ab einer bestimmten kritischen Windgeschwindigkeit ein, die abhängig von Eigenfrequenz, Dämpfung und Querschnittsform des Baukörpers ist. Da es sich hierbei um ein Stabilitätsproblem handelt, ist unbedingt zu verhindern, dass die mittlere 10-Minuten Windgeschwindigkeit diese kritische Geschwindigkeit erreicht [8],[9].

Bemessung bei dynamischen Windlasten Das Ziel der Tragwerksbemessung bei den angeführten dynamischen Belastungen durch Wind ist generell, eine vollständig elastische Beanspruchung des Tragwerks zu erreichen. Da Wind auch in stärkeren Böen relativ oft auftritt, wäre eine Bemessung im plastischen Bereich nicht sinnvoll. Das liegt an der Ermüdungsfestigkeit von Bauteilen, die stark abnimmt, sobald sie plastifiziert sind. Es gibt allerdings Orte außerhalb von Europa, wo so starke Windbelastungen auftreten, dass für solche Belastungen eine elastische Bemessung unwirtschaftlich wäre. Das kann z.B. bei Tsunamis in Ostasien geschehen. Zudem muss beachtet werden, dass Wind nicht immer direkt auf das Massenzentrum der Bauwerksquerschnitte wirkt, sondern auch exzentrisch angreifen kann. Das führt zu Torsionsbelastungen und Torsionsschwingungen, die nicht vernachlässigt werden dürfen [4].

3.2 Erdbebenbelastung von Hochhäusern

Erdbeben treten im Gegensatz zu stärkeren Winden in Europa deutlich seltener auf, haben allerdings in vielen Fällen innerhalb kurzer Zeit eine viel größere Energie, die dann durch das Tragwerk dissipiert werden muss. Erdbeben können verschiedene Ursachen haben, die relevanten Beben sind für Hochhäuser aber die tektonischen Beben. Diese entstehen durch schlagartige Bruchvorgänge in der Erdkruste, die sich aufgrund tektonischer Aktivitäten dauernd in Bewegung befindet. Findet ein solcher Bruchvorgang am sogenannten Herd (auch Hypozentrum) statt, kommt es zur Entspannung von vorher durch die Bewegungen aufgebauten Spannungen. Dadurch entstehen plötzlichen Verschiebungen am Hypozentrum, die sich dann durch die verschiedenen Medien in der Erdkruste bis zur Oberfläche fortpflanzen. Dies geschieht in Form von Wellen,

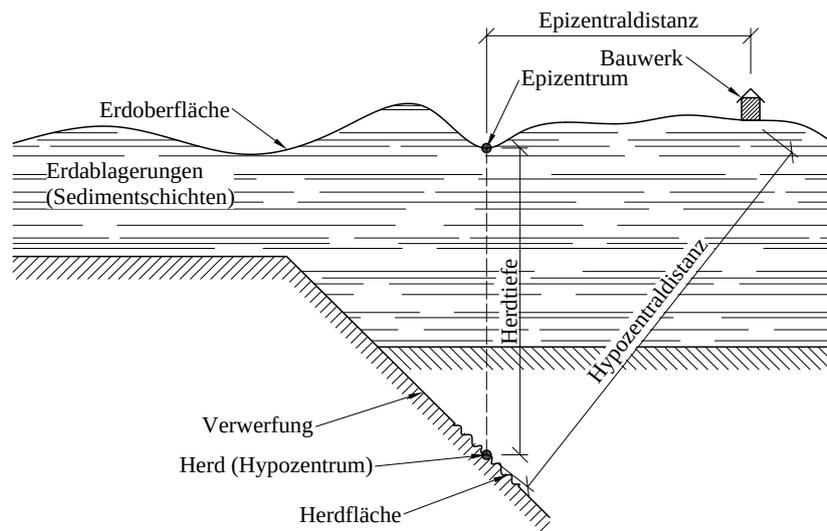
Tab. 3.1: Einteilung der seismischen Wellen [3],[8]

Haupttypen	Wellenarten	Schwingungsrichtung	Geschwindigkeit
Raumwellen	Primärwellen	Längswellen (Druckwellen)	$1,5 \dots 4,0 \frac{m}{s}$
	Sekundärwellen	transversale Scherwellen	$1,0 \dots 2,0 \frac{m}{s}$
Oberflächenwellen	Lovewellen	transversale Scherwellen	$0,9 \dots 1,8 \frac{m}{s}$
	Rayleigwellen	elliptische Teilchenbewegung	$0,9 \dots 1,8 \frac{m}{s}$

wovon es bei Erdbeben zwei verschiedene Haupttypen und je zwei Unterarten gibt, siehe Tabelle 3.1 [3],[4],[8].

Die bei einem Erdbeben auftretenden Wellen haben Frequenzen zwischen 0,1 Hz und 30 Hz. Das Spektrum, also die frequenzabhängige Amplitudenverteilung der Bodenschwingung am Bauwerk, egal ob Verschiebungs-, Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsspektrum, hängt von mehreren Faktoren ab [3],[8]:

- von der Stärke des Bebens, charakterisiert durch Magnitude (Maß für die Herdenergie) und Intensität (Maß für die lokale Zerstörungskraft und Wahrnehmbarkeit); hier gibt es jeweils verschiedene Skalen, durch die ein Erdbeben im Nachhinein klassifiziert werden kann, siehe dafür [3],
- von der Hypozentraldistanz und der Epizentraldistanz (siehe Abbildung 3.3); durch die unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenarten bestimmt der Abstand zwischen Bauwerk und Herd darüber, wie groß die Dauer des Erdbebens ist, und
- von den Sedimentschichten zwischen Herd und Bauwerk; je nach Material der Bodenschichten werden gewisse Frequenzen stärker gedämpft und je nach Steifigkeit des Sediments breiten sich die Erdbebenwellen unterschiedlich schnell aus.

**Abb. 3.3:** Schnitt durch Herdgebiet [3]

Aus den oben angeführten Gründen ist es möglich, dass in einigen Teilen einer einem Erdbeben ausgesetzten Stadt kaum oder nur kurz Schwingungen auftreten, während andere Teile derselben

Stadt ein starkes Erdbeben erfahren. Eine Zeitverlaufsrechnung eines Erdbebens ist somit nicht repräsentativ und nur zur Überprüfung der Erdbebenresilienz von Bauwerken sinnvoll. Um trotzdem einheitliche Bemessungen von Bauwerken zu erlauben, werden in Normen deshalb empirisch ermittelte Daten verwendet und statt eines einzelnen realen Erdbebenspektrums sogenannte Antwortspektren angegeben, die sehr viele repräsentative Erdbebenaufzeichnungen enthalten. Mit diesen Antwortspektren wird dann nach *Eurocode 8* (ÖNORM EN 1998-1:2013, [11]) entweder die Methode der Vereinfachten Antwortspektren, das Modale Antwortspektrenverfahren oder die nichtlineare statische Pushover-Berechnung durchgeführt, siehe Tabelle 3.2 [3],[4],[8].

Tab. 3.2: Berechnungsverfahren für Erdbebenbelastungen [3],[8]

	Vereinfachtes Antwortspektrenverfahren	Modales Antwortspektrenverfahren	Nichtlineare Pushover-Berechnung	Zeitverlaufsverfahren
Art der Berechnung	statisch, linear	dynamisch, linear	statisch, nichtlinear	dynamisch, nichtlinear
Einsatzzwecke	Bemessung	Bemessung/ Nachweis	Bemessung/ Nachweis	Nachweis
Aufwand	relativ klein	mittel	mittel	groß
Anwendungsbereich	regelmäßige und normale Bauwerke	unregelmäßige und/oder bedeutendere Bauwerke		
Bemessung- bzw. Nachweisgrößen	Tragwiderstand, Verformungen	Tragwiderstand, Verformungen	Tragwiderstand, Duktilitätsbedarf, Verformungen	lokaler Duktilitätsbedarf, Verformungen
Bemessungs- bzw. Nachweis-Erdbeben	Antwortspektrum	Antwortspektrum	Antwortspektrum	Beschleunigungs-Seismogramme

3.2.1 Antwortspektren

Offensichtlich basiert in der Erdbebenbemessung von Bauwerken die Berechnung sehr häufig auf der Nutzung von Antwortspektren. Antwortspektren sind frequenzabhängige Einflussdiagramme, die in Abhängigkeit von Gefährdung der Region, Bodentyp, Dämpfung oder Duktilität des Tragwerks und der Eigenperiode der Konstruktion unterschiedliche Werte für die maximale Bodenbeschleunigung, -geschwindigkeit oder -verschiebung liefern. Zur Ermittlung eines Antwortspektrums werden viele EMS mit paarweise unterschiedlichen Eigenfrequenzen, aber mit gleicher Lehr'scher Dämpfung ζ durch denselben Zeitverlauf der Bodenbeschleunigung angeregt. Das Prinzip entspricht dabei der aperiodischen Anregung von EMS nach Abschnitt 2.2.3.3. Es werden dann jeweils die Zeitverläufe der Antwortschwingungen in der Relativverschiebung d , der Relativgeschwindigkeit v und der Absolutbeschleunigung a ermittelt. Die Maximalwerte dieser Zeitverläufe werden frequenz- oder periodenabhängig in ein Diagramm aufgetragen, dadurch entstehen die Spektren $S_d(T)$, $S_v(T)$ und $S_a(T)$. Für jede Dämpfung ζ entstehen unterschiedliche Spektren. In Normen wie dem *Eurocode 8* werden für diese Antwortspektren noch jeweils Umhüllende gebildet, sodass sich ein Antwortspektrum nach Abbildung 3.4 ergibt [3],[8],[11].

In dieses Antwortspektrum gehen zusätzlich die Baugrundklasse (A bis E) und die maximale Bodenbeschleunigung a_{gR} ein. Dabei wurde im *Eurocode 8* eine Überschreitungswahrscheinlichkeit der Bodenbeschleunigung des Erdbebens a_{gR} von 10% in 50 Jahren gewählt, also eine mittlere Wiederkehrperiode des Bemessungserdbebens von 475 Jahren. Die Duktilität des Bauwerks kann als Verhaltensbeiwert q statt der Dämpfung in die Ermittlung des Spektrums eingehen. Es ergibt sich also im Grunde für jedes Bauwerk ein anderes Antwortspektrum [8],[11].

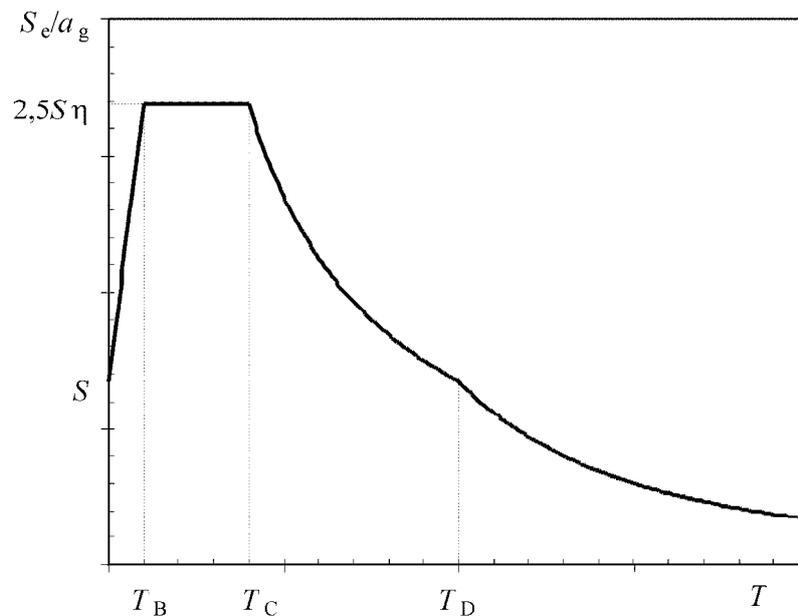


Abb. 3.4: Form des elastischen Antwortspektrums nach *Eurocode 8*, entnommen aus [11]

3.3 Horizontale Aussteifung von Hochhäusern

Die dynamischen Einwirkungen aus Wind und Erdbeben erzeugen große horizontale Kräfte in Hochhäusern. Das liegt unter anderem an der dynamischen Überhöhung, die eintritt, wenn das Gebäude mit seinen Eigenfrequenzen im sehr tiefen Frequenzbereich der Anregung liegt. Das ist bei Hochhäusern oft der Fall, da ihre Eigenfrequenzen zumeist im Bereich von 0,5 Hz bis 5 Hz liegen. Windanregungen haben den maßgebenden Frequenzbereich um 0,5 Hz, bei Erdbeben liegt dieser zwischen 2 Hz und 10 Hz [4]. Um eine resonanzartige Reaktion des Tragwerks auf Wind und Erdbeben zu verhindern, ist es sinnvoll, seine Eigenfrequenzen aus den beschriebenen kritischen Bereichen zu halten. Eine Veränderung von Steifigkeit oder Masse des Tragwerks nach dem Modell $\omega^2 = \frac{k}{m}$ lässt sich in geringen Maßen vornehmen, aber nicht in dem Ausmaß, dass die Eigenfrequenzen immer außerhalb des angegebenen Bereichs fallen. Um die Eigenfrequenz über die 10 Hz zu verschieben und dadurch für Erdbeben weniger anfällig zu machen, muss ein sehr steifes, leichtes Tragwerk geschaffen werden – zwei Attribute, die sich für herkömmliche Baumaterialien widersprechen. Eine Reduktion der Eigenfrequenz durch Erhöhung der Masse und vor allem Reduktion der Steifigkeit ist dagegen möglich, allerdings wären dann die Verformungen sehr groß, was auch die Gebrauchstauglichkeit einschränkt. Zudem lägen dann wahrscheinlich die höheren Eigenfrequenzen im kritischen Bereich. Das Ziel muss also sein, ein Tragwerk zu entwerfen, das steif ist, um möglichst geringe Verformungen zu erlauben, aber trotzdem noch wirtschaftlich. Die Veränderung der ersten Eigenfrequenz auf einen weniger kritischen Bereich

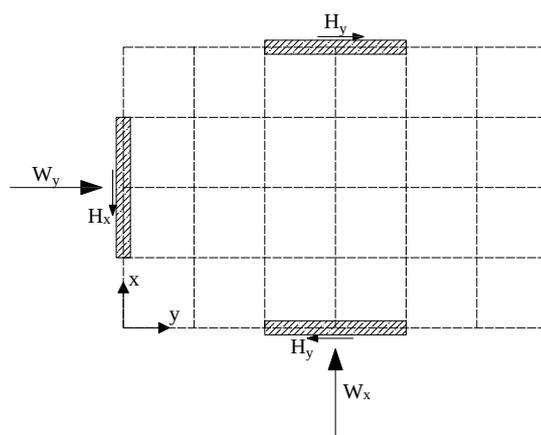


Abb. 3.5: Anordnung der Aussteifungselemente im Grundriss [4]

zwischen 0,5 Hz und 2 Hz kann dabei ein Mittel sein. Dadurch würden die häufigsten Erregerfrequenzen von Wind- und Erdbebenerregung vermieden werden [4],[8].

Aussteifungssysteme im Hochhausbau können an unterschiedlichen Orten des Grundrisses platziert werden, als Kern, Wand (innen oder außen) oder in räumlichen Tragstrukturen. Es muss allerdings gewährleistet sein, dass in jedem Geschoss mindestens drei Aussteifungselemente (Wand, Rahmen oder Fachwerk) vorhanden sind, deren Systemflächen sich nicht in einer Linie schneiden, siehe Abbildung 3.5. Das Gebäude ist in der Abbildung mit einer biaxial einwirkenden Windlast, zusammengesetzt aus W_x und W_y , belastet. Ist die Last und das Gebäude im Grundriss symmetrisch, nehmen die Elemente nur die parallelen Horizontallasten auf. Somit gilt $H_x = W_x$. Bei asymmetrischer Belastung oder Grundrissanordnung gibt es zusätzlich Belastungen aus Torsionsmomenten. Die Kräfte H_y resultieren demnach aus der Belastung W_y und dem Torsionsmoment. Gibt es mehr als zwei parallele Elemente, verteilen sich die Kräfte je nach Steifigkeit auf die Elemente. Die horizontal sehr steifen Deckenelemente verteilen die Kräfte entsprechend. Bei Horizontalbelastung kommt es zu Horizontalkräften in den Aussteifungselementen, die zu Schubspannungen in Wänden und Rahmenstielen und Druck- bzw. Zugspannungen in Fachwerkdagonalen führen. Außerdem erzeugen Horizontalkräfte Momente im Hochhausquerschnitt, die entweder in Form von Momenten in Wänden oder in Form von vertikalen Kräften in Stützen bis ins Fundament abgetragen werden. Dabei sind diese Vertikalkräfte immer kleiner, je größer der Hebelarm zwischen den Vertikalelementen ist; ein großer Hebelarm sollte angestrebt werden. In Abbildung 3.6 sind einige mögliche grundlegende Aussteifungselemente dargestellt, darunter Wandscheiben, Rahmen, ausgesteifte Rahmen und Fachwerksysteme. Bei höheren Gebäuden bestehen die Aussteifungselemente auch größtenteils aus diesen Systemen, nur werden sie im größeren Maßstab verwendet. Es bilden sich Tragstrukturen nach Abbildung 3.7 [4].

Je weiter außen dabei die Aussteifungskonstruktionen im Grundriss liegen, desto effektiver sind sie. Zumeist sind sie dann allerdings auch teurer, da mehr Material benötigt wird. Als Beispiel sei hier der Stahlbetonkern mit wenigen Metern Durchmesser im Vergleich mit einer Rahmenröhre angeführt, bei der die gesamte Außenhaut des Gebäudes umbaut werden muss.

3.3.1 Outrigger-Systeme

Eine sehr effektive Art, Hochhäuser auszusteifen, ist die Ausführung von Aussteifungsgeschossen, sogenannten Outrigger-Systemen. Die positive Wirkung erstreckt sich auch auf die Abtragung von dynamischen Einwirkungen wie Wind und Erdbeben. Das Ziel des Outriggers ist die schub-

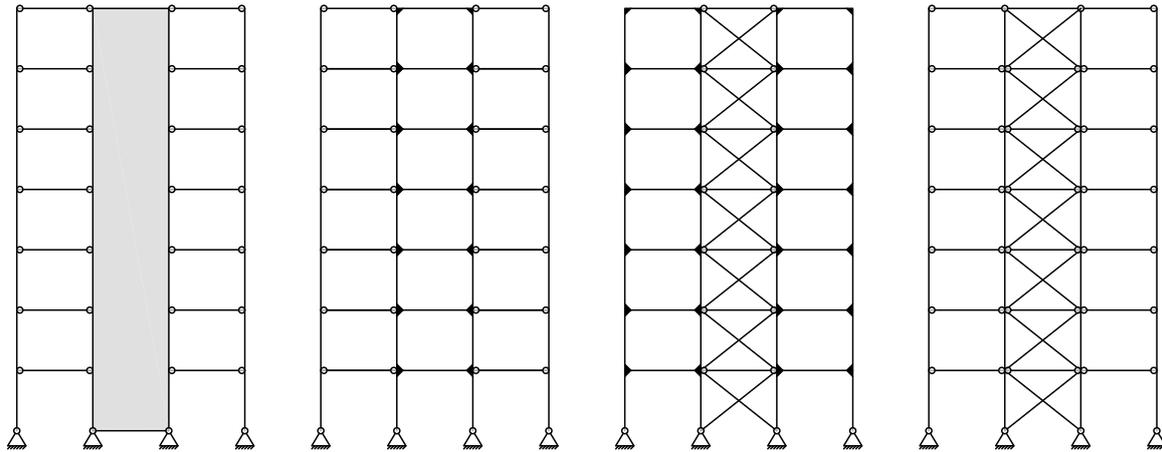


Abb. 3.6: Aussteifungsmöglichkeiten eines Skelettgeschossbaus [4]

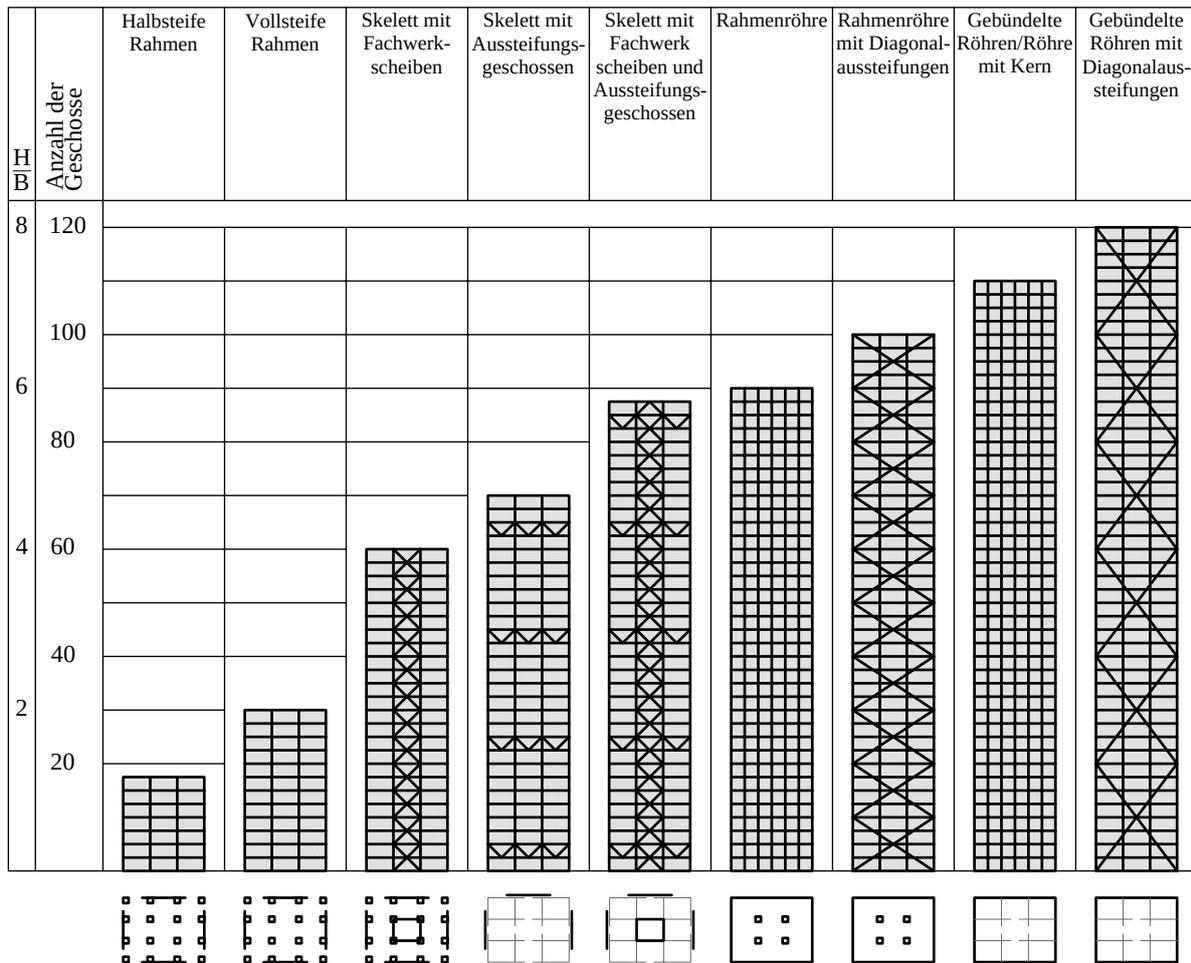


Abb. 3.7: Hochhausstragsysteme in Abhängigkeit von der Gebäudehöhe [4]

steife Verbindung eines inneren Kerns mit äußeren Pendelstützen. Dadurch wird ein Teil des Moments im Kern über den steifen Outrigger auf die äußeren Pendelstützen abgetragen, die die resultierenden Kräfte wiederum nur in Form von Druck- oder Zugkräften aufnehmen. Da die äußeren Stützen einen relativ großen Abstand zum Kern des Hochhauses haben, können mit moderaten Normalkräften in den Stützen große Momente abgetragen werden. Müsste der Kern das Moment allein aufnehmen, wären viel größere Querschnitte der Tragglieder im Kern notwendig. Mit einem oder mehreren Outriggern gibt es zwar je ein oder zwei Geschosse, die durch zumeist Fachwerkstrukturen für die jeweils geplante Gebäudenutzung (Wohnungen oder Büros) unbrauchbar werden, dafür wird insgesamt aber viel an Baumaterial eingespart. Zudem nehmen durch die Nutzung von Outriggern die Zugkräfte und Momente im Fundament erheblich ab [4],[8].

Outrigger sind meist sehr steife Fachwerkstrukturen, die gemeinsam mit den beiden benachbarten Deckenscheiben wie ein Doppel-T-Querschnitt wirken. Sie sind gelenkig an die äußeren Stützen angeschlossen, um ausschließlich Normalkräfte zu übertragen. An den Kern sind die Outrigger wiederum schubstarr angeschlossen, um das entlastende Moment übertragen zu können. Es werden ausschließlich die Momente durch Outrigger abgebaut, Querkräfte im Kern verändern ihre Größe nicht [4]. Die Auswirkung von Outrigger-Systemen ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Das Outrigger-System sollte möglichst steif ausgeführt sein, um die Verformung infolge Momenten im Kern zu reduzieren. Allerdings sollte das Tragwerk immer auch auf die Steifigkeiten des Kerns und der äußeren Stützen angepasst werden. Gerade bei steifen Kernen wie Stahlbetonkernen können mit Outriggern sehr geringe Verschiebungen zugelassen werden. Es ist sogar sinnvoll, nicht nur vom Kern zu den Randstützen, sondern auch zwischen den Randstützen bis hin zu den Eckstützen Aussteifungen im Outrigger-Geschoss vorzusehen, sogenannte „Belt-Trusses“. Dadurch werden auch diese weiteren Stützen zur Momentabtragung genutzt und die Systemsteifigkeit nimmt um ca. 25 bis 30% zu [4].

Neben der Konstruktion und Steifigkeit der Outrigger spielt auch ihre Positionierung im Hochhaus eine wichtige Rolle. So ist bei gleichmäßiger Windbelastung und linear elastischem Tragverhalten die optimale Position eines Outrigger-Systems auf $\alpha = 55,5\%$ der Gebäudehöhe. Je mehr Outrigger über die Höhe platziert werden, desto geringer ist die Endverformung des Hochhauses, die sich bei statischen und dynamischen Belastungen ergibt. Allerdings nimmt die Effektivität mit jedem zusätzlichen Outrigger ab. Ab vier bis fünf Outrigger-Systemen ist eine zusätzliche Installation nicht mehr wirtschaftlich. Davon abgesehen nehmen Outrigger auch immer ein bis zwei Geschosse ein, die oft nur noch für Haustechnik genutzt werden können. Auch dadurch nimmt ihre Wirtschaftlichkeit ab [4].

3.4 Dämpfung von Hochhäusern

Horizontale dynamische Anregungen rufen bei Hochhäusern insbesondere im Resonanzfall große Verformungen hervor und tragen viel Energie in die Tragsysteme ein, die wieder dissipiert werden muss. Um die Verformungen zu verringern, werden Hochhäuser teilweise massiv ausgesteift. Allerdings reduzieren diese kostenintensiven Aussteifungselemente nicht die erzwungenen Schwingungen infolge Erdbeben oder Wind, sondern nur die Größe der Amplitude. Es müssen also auch Wege gefunden werden, die für die Nutzer von Hochhäusern gebrauchstauglichkeitskritischen Schwingungen zu dämpfen, zumal schlanke Hochhäuser an sich nur sehr geringe Dämpfungen haben, siehe Tabellen 3.3 und 3.4. Dämpfung von Schwingungen ist immer verbunden mit der Dissipation von Schwingungsenergie in einem dynamisch angeregten System. Es gibt verschiedene Arten, diese Dissipation umzusetzen.

Tab. 3.3: Lehr'sches Dämpfungsmaß ζ verschiedener Baustoffe [4]

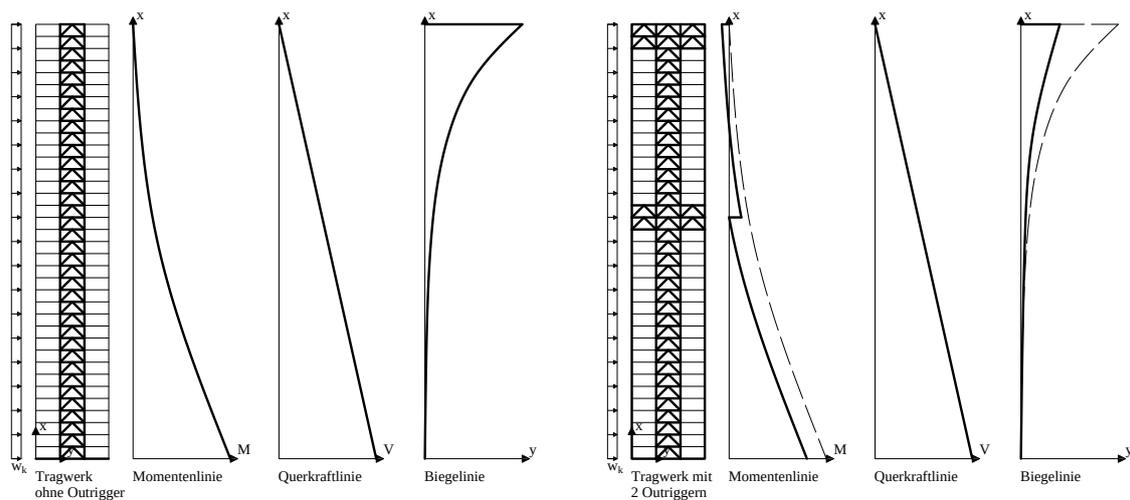
Baustoff	Lehr'sches Dämpfungsmaß	
	Im elastischen Bereich	Im plastischen Bereich
Stahlbeton	0,01 ... 0,02	0,07
Spannbeton	0,008	0,05
Stahl verschraubt	0,01	0,07
Stahl verschweißt	0,004	0,04
Holz	0,01 ... 0,03	-
Mauerwerk	0,01 ... 0,02	0,07

Tab. 3.4: Logarithmisches Dämpfungsdekrement $\Lambda = 2\pi\zeta$ verschiedener Bauweisen [1]

Bauweise Hochbau	Logarithmisches Dämpfungsdekrement		
	geringe	mittlere	große
Stahlbeton Scheiben- und Kastenbauweise	0,030	0,040	0,040
Stahlbeton Rahmenbauweise	0,035	0,045	0,055
Stahl	0,035	0,040	0,045
Holz mit Verbindungsmitteln	0,035	0,040	0,050
Holz in Leimbauweise	0,015	0,020	0,025
Mauerwerk	0,030	0,035	0,040

3.4.1 Dämpfungsmodelle

Es gibt zwei verschiedene grundlegende Dämpfungsmodelle im Hochbau, das Dämpfermodell nach Coulomb, auch Reibungsdämpfer und das Modell nach Newton, auch viskose Dämpfer genannt.



(a) Ohne horizontale Aussteifung

(b) Mit 2 Outrigger-Systemen

Abb. 3.8: Hochhauskonstruktion unter konstanter Windlast ohne (a) und mit Outrigger (b) [4]

Diese lassen sich miteinander und mit Federmodellen (Hookesche Elemente) kombinieren, um das tatsächliche Materialverhalten besser annähern zu können [1],[4]. Diese Modelle sind in Abbildung 3.9 dargestellt. Reibung nach Coulomb basiert darauf, dass zwei Körper aneinander

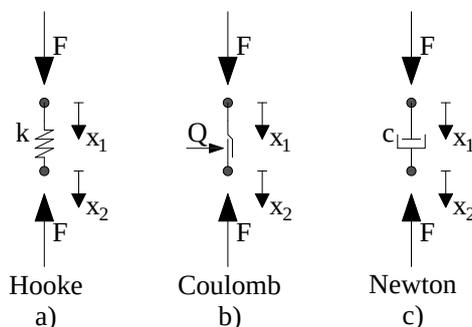


Abb. 3.9: Grundmodelle der Baudynamik [1]

entlanggleiten und durch die Unebenheit in ihrer Oberfläche bei der Bewegung Wärme entsteht. Es geht hier also nur um Gleitreibung. Für diese gilt folgende Formel [1]

$$F_R = \mu_R Q, \quad (3.3)$$

mit der Reibkraft F_R , der Reibungszahl μ_R und der Kraft Q , die normal zur Reibungsfläche drückt. Die Reibkraft ist also abhängig von der Größe der Normalkraft, die auf die Reibungsfläche einwirkt. Die Kraft im Hookeschen Element (Federelement) ist dagegen abhängig von der Längenänderung der Feder x und seiner Federsteifigkeit k [1]

$$F_F = k(x_1 - x_2). \quad (3.4)$$

Das Newton-Modell basiert darauf, dass die Kraft im Element größer wird, je schneller das Element auseinandergezogen oder zusammengedrückt wird [1]

$$F_D = c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^{a_D}, \quad (3.5)$$

wobei c der Dämpfungskoeffizient ist und die Viskosität des Dämpfungselements beschreibt. a_D gibt an, inwiefern das Verhalten des Dämpfers linear ist. Rein lineares Verhalten tritt bei $a_D = 1, 0$ auf. Mit diesen drei Elementen lassen sich Materialverhalten wie bspw. Hysteresekurven annähern, indem die Elemente mehrfach parallel und/oder in Reihe geschaltet werden [1].

3.4.1.1 Inerter-Elemente

Der Inerter wurde 2001 von Malcom C. Smith eingeführt [12]. Das Ziel war es, in der Mechanik ein Bauelement zu erhalten, das dem Kondensator in der Elektrotechnik entspricht. Kondensatoren speichern in einem Gleichstromkreis elektrische Ladung und geben sie im Falle eines Spannungsabfalls verzögert wieder ab. Der Inerter nach Smith

ist ein mechanischer Zweipol mit der Eigenschaft, dass die gleichgroßen und entgegengesetzten Kräfte an den Endpunkten proportional zur relativen Beschleunigung zwischen ihnen sind - insbesondere in der Darstellung von Abbildung 3.10,

$$F(t) = b[\ddot{x}_1(t) - \ddot{x}_2(t)], \quad (3.6)$$

in der $b > 0$ die Trägheit ist und die Einheit $[b] = \text{kg}$ hat. ([13])

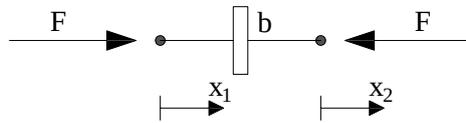
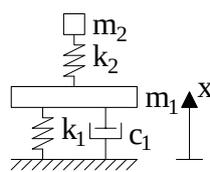


Abb. 3.10: Modell des Inerters nach Malcom C. Smith [13]

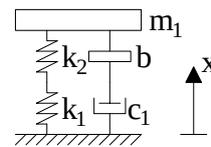
Es gibt bereits ein Element, dessen Kraft proportional zur Beschleunigung ist - das Massenelement. Allerdings ist bei diesem nach Newtons Trägheitsgesetz die Trägheitskraft proportional zur absoluten Beschleunigung der Masse $F(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$. Anders als bei allen anderen Elementen in Elektrotechnik und Mechanik, gibt es keine Abhängigkeit von den relativen Weggrößen zwischen den zwei Enden des Elements. Um ein solches Element zu erhalten, wurde der Inerter eingeführt [13].

Derzeit werden schon Inerter-Elemente eingesetzt, bspw. in der Federung von Automobilen. Diese realen Umsetzungen des Inerters basieren oft darauf, dass durch die relative Beschleunigung an den beiden Enden des Inerters ein oder mehrere Schwungräder im Inerter zum Laufen gebracht werden. Durch die Trägheit der Schwungräder rotieren sie auch weiter, wenn die Beschleunigung zu Null wird. Gibt es eine negative Beschleunigung, wirken sie dieser entgegen und ihre Rotation verlangsamt sich. Wie bei allen realen Umsetzungen der idealen Modelle gibt es auch hier Einschränkungen, bspw. durch die Reibung, maximale Beschleunigungen und Verschiebungen im Inerter oder dadurch, dass das Element selbst auch eine Masse hat und damit eine eigene Trägheit [13].

Eine Möglichkeit, einen Inerter in Gebäuden einzusetzen, ist das Ersetzen eines TMD nach Abbildung 3.11. Die Eigenschaften der dynamischen Antwort sind ähnlich. Analog verhalten sich die asymptotischen Eigenschaften, wenn die Masse m_2 oder die Trägheit b Null bzw. unendlich groß werden. Der Inerter hat hier den Vorteil, dass keine zusätzliche Masse angebracht werden muss, was bei vielen Konstruktionen sowohl konstruktive als auch statische Probleme auslösen kann [12].



(a) Traditioneller TMD



(b) TMD mit Inerter-Element

Abb. 3.11: TMD ohne (a) und mit eingebauten Inerter (b) [12]

3.4.1.2 Elemente mit negativer Steifigkeit (NSE)

Neben den Inertern gab es in den letzten Jahren noch eine weitere neue Entwicklung in der Mechanik und speziell der Dynamik: die Einführung von Elementen mit negativer Steifigkeit. In der Strukturdynamik wurden oft Dämpfungselemente eingesetzt, die sich mit einem Maxwell-Modell (siehe Abbildung 3.13a) darstellen lassen. Bspw. werden häufig Dämpfungselemente an Streben wie bei Knebelstreben oder Scherenwagenhebern gekoppelt. Das lässt sich dann mittels einem Newtonschen Element darstellen, das mit einem Hookeschen Element in Serie

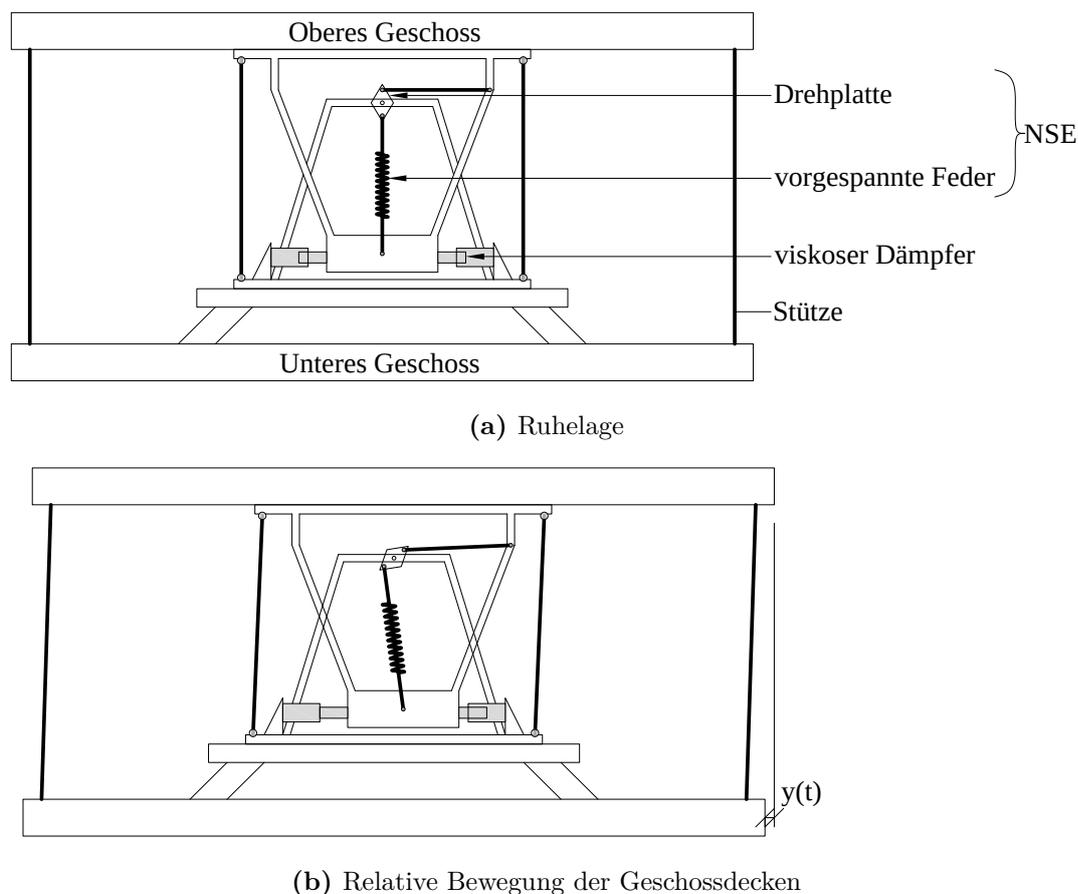


Abb. 3.12: Beispiel der Realisation eines NSE zur Dämpfung der relativen horizontalen Bewegung zweier Deckenplatten: Darstellung in Ruhelage (a) und in verschobener Lage (b) [14]

geschaltet ist. Diese Elemente haben eine Schwäche: wenn die Feder zu schwach ist, finden die Verformungen infolge Belastung vor allem zwischen den beiden Enden der Feder statt und nicht, wie gewollt, beim Dämpfer. Die Effektivität des viskosen Dämpfers nimmt damit ab. Um die Energiedissipation solcher Strukturen zu erhöhen, werden Elemente mit negativer Steifigkeit (NSE) genutzt. Diese Elemente unterstützen die Verschiebung zwischen ihren beiden Enden. Wenn man sie also nach Abbildung 3.13b mit einem Dämpfungselement parallelschaltet, verstärken sie den Zylinderhub und damit die Dissipation von Energie im Dämpfer [14]. Es gibt einige Varianten, solche NSE zu realisieren, bspw. mithilfe von vorgespannten Federn, vorgeknickten Stützen oder Magneten. Ein Beispiel, ein NSE zur Verstärkung Dämpfung relativer horizontaler Bewegungen zwischen zwei Geschossen eines Gebäudes zu realisieren, ist in Abbildung 3.12 dargestellt [14]. Das Prinzip dieser Realisation eines NSE basiert darauf, dass die Feder vorgespannt ist und im Ausgangszustand nach Abbildung 3.12 ihre geringste Länge hat. Sobald sich das obere Geschoss relativ zum unteren Geschoss verschiebt, verdreht sich die Drehplatte, was dazu führt, dass die Feder gedehnt wird. Dadurch, dass sie vorgespannt ist, entspannt sie sich durch die Dehnung, die Federkraft wirkt also in Richtung der Verschiebung. Dadurch unterstützt sie die Bewegung, die durch die horizontal ausgerichteten viskosen Dämpfer gedämpft wird [15].

Ein anderes Beispiel für negative Steifigkeit aus der Baupraxis ist eine gedrückte Stütze: Es kommt im Bauwesen häufig vor, dass Stützen mit Normalkräften nahe ihrer Knicklast belastet werden.

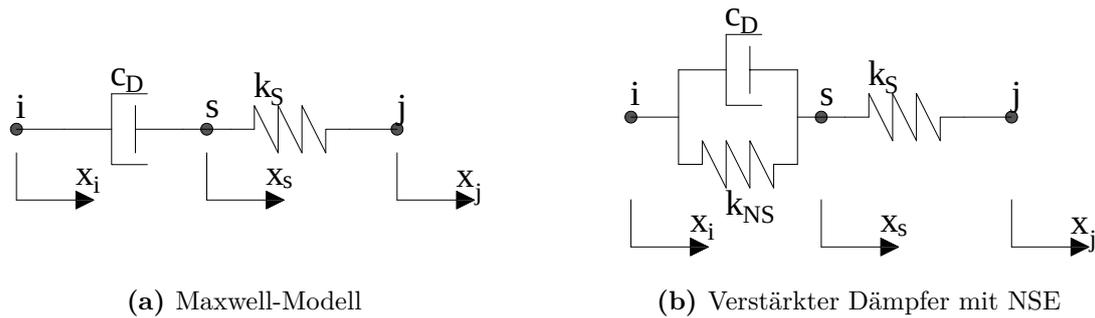


Abb. 3.13: Ergänzung des Maxwell-Dämpfungsmodells (a) durch ein NSE (b) [14]

In solchen Fällen unterstützt der Druck in der Stütze die dynamische Auslenkung der Stütze. Je größer diese Auslenkung, desto größer ist das Moment in der Stütze, das durch den Druck hervorgerufen wird. Somit haben die Stützen nicht mehr die Federsteifigkeit $k_{unbelastet}$, sondern sind weniger steif. Durch den Axialdruck $N < 0$ in der Stütze wird eine negative Steifigkeit auf die Stütze aufgebracht. Die Federsteifigkeit muss zu \bar{k} korrigiert werden [16]

$$\bar{k} = k_{unbelastet} + k_G \quad \text{mit} \quad k_G = \frac{6 N}{5 L}. \quad (3.7)$$

Durch die Abnahme der Steifigkeit sinkt auch die Eigenfrequenz der Struktur.

3.4.2 Dämpfungsmechanismen und Schwingungsdämpfersysteme

Dämpfungs- und Federelemente nach Abschnitt 3.4.1 werden im Hochbau eingesetzt, um Schwingungen zu reduzieren. Das kann in Form von lokalen viskosen oder viskoelastischen (Newton-Element und Hooke-Element parallelgeschaltet) Dämpfern oder Reibungsdämpfern sein, die in Fachwerk- oder Aussteifungselemente eingebaut werden. Es kann ebenso mittels plastischen Hysteresedämpfern geschehen, die an stark dynamisch beanspruchten Stellen installiert sind. Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung eines oder mehrerer Tuned Mass Damper (TMD), die eine ausgewählte Eigenschwingung des Gebäudes stark reduzieren, wenn ihre Eigenfrequenz und Dämpfung den optimalen Wert aufweisen. Eine andere Methode, für ausreichend Dissipation im Gebäude zu sorgen, ist die lokale und globale Erhöhung der Duktilität der Tragwerke, sodass sie bei hohen Belastungen plastische Verformungen erfahren und unter dynamischer Wechselbeanspruchung eine Hysterese durchlaufen. Eine Eigenschaft, die alle diese Dämpfungselemente verbindet, ist, dass sie gewisse Verformungen erfahren müssen, um überhaupt zu wirken. Dementsprechend sind die Verformungen bei gedämpften Tragwerken oft größer als bei elastischen Systemen, allerdings sind die Tragkonstruktionen in den meisten Fällen um einiges wirtschaftlicher. Eine Abwägung und Optimierung von beiden Aspekten ist immer notwendig [4].

Im Laufe der 2000er Jahre kamen zusätzlich zu den angesprochenen etablierten Dämpfungsmechanismen drei neue Ideen auf:

1. der ergänzende Einbau von Dämpfungselementen in die Outrigger-Systeme, sogenannte gedämpfte Outrigger-Systeme,
2. die Nutzung neuartiger Inerter-Elemente, um die Trägheit und damit auch die Eigenfrequenz des Gebäudes zu verändern und
3. die Verwendung von Elementen mit negativer Steifigkeit, um die Dämpfungseigenschaften zu verbessern.

sinnvoll, Dämpferelemente an Orten anzubringen, wo starke relative Verformungen zwischen den Installationspunkten auftreten. Eine solche Stelle ist die Verbindung zwischen den Outrigger-Systemen und äußerer Pendelstütze. Smith und Willford [18] beschreiben demnach die DOS so, dass vertikal zwischen den Pendelstützen und den äußeren Enden der steifen Outrigger zusätzlich lokale Dämpferelemente eingesetzt werden, siehe Abbildung 3.14. Je nach Anzahl und Position der DOS und der Art der Dämpferelemente können dadurch hohe modale Zusatzdämpfungen für mehrere Eigenfrequenzen erreicht werden. Dadurch können die erzwungenen Schwingungen von Hochhäusern infolge Wind und Erdbeben effektiv und dauerhaft reduziert werden.

Die schwingungsdämpfende Effektivität des DOS hängt von mehreren Faktoren ab:

- Von der Masse und dem Massenträgheitsmoment des Gebäudes,
- von der Biege- und Schubsteifigkeit des Kerns,
- von der Dehnsteifigkeit der Pendelstützen und ihrem Abstand zum Kern,
- von der Anzahl, Position und Steifigkeit der Outrigger und
- von der Art und den Eigenschaften des Dämpfungselements.

Somit ist es möglich, durch die Ausführung von DOS im Gebäude eine Lehr'sche Dämpfung von $\zeta > 10\%$ zu erreichen, was auch die Spannungen in den Traggliedern und die maximalen Verformungen und Beschleunigungen aufgrund horizontaler dynamischer Einwirkungen stark reduziert. Mit dem DOS „fügt man ein zusätzliches technisches Dämpfungssystem zum Gebäude hinzu, womit es möglich ist, die Abhängigkeit von der geringen und unsicheren intrinsischen Dämpfung zu beseitigen.“ ([18]) In Abbildung 3.14 haben die einzelnen wichtigen Bauteile eines Hochhauses mit einem DOS folgende Eigenschaften: Der Kern hat eine Biegesteifigkeit $E_K I_K$, eine Schubsteifigkeit $G_K A_K$, einen Schubbeiwert κ_K und eine Masse pro Längeneinheit μ . μ enthält das gesamte Gewicht des Gebäudes, verschmiert über die Höhe H . An den Kern schließen bei einem einzelnen DOS pro Vertikalebene zwei gegenüberliegende Outrigger mit Biegesteifigkeit $E_O I_O$ an. Sie liegen in einer Höhe von αH und haben je eine Länge R . An den Enden der Outrigger sind jeweils Dämpfer angebracht mit einem Dämpfungskoeffizienten c_D und einer Steifigkeit k_D . Sie bilden das Bindeglied zu den Pendelstützen, die eine Dehnsteifigkeit $E_S A_S$ besitzen.

3.5.1 Weiterentwicklung und Optimierung von DOS

Seit seiner Einführung 2007 wurde das DOS in einigen wissenschaftlichen Arbeiten untersucht, optimiert und weiterentwickelt. Zudem wurde es bereits mehrfach in Hochhäusern verbaut, zuerst im St. Francis Shangri-La Palace in Manila, Philippinen, außerdem z.B. noch im North-East Asia Trade Tower in Korea und in einem Bürohochhaus in New York City [19].

3.5.1.1 Optimierung von DOS

In den letzten 10 Jahren gab es einige Studien zur Optimierung von DOS. In [20] wird ein FE-Modell des St. Francis Shangri-La Palace in Manila mit 60 Geschossen erstellt und auf die optimale Position eines einzelnen DOS, sowie die optimale Dämpfung des viskosen Dämpferelements hin untersucht. Die optimale Position des Outriggers liegt dabei zwischen $\alpha = 70\%$ und 90% der Höhe.

Smith [21] beschreibt in einem Artikel, welche verschiedenen Methoden es zur Ermittlung des dynamischen Verhaltens von Gebäuden mit DOS gibt und, welche Parameter des Dämpfers optimierbar sind: Dämpfungskoeffizient c , Dämpfungsexponent a_D (Gleichung $F = c \cdot v^{a_D}$), die Steifigkeit des Dämpfers k_D , und seine maximale Amplitude. Zudem wird aufgeführt, welche weiteren Faktoren beim Design und der Installation eines DOS zu beachten sind.

In [22] wird beschrieben, wie ein Hochhaus mit einem DOS optimiert werden kann. Dafür wurde ein analytisches Modell gebildet, bestehend aus einem eingespannten Euler-Bernoulli-Balken, der den Kern repräsentiert. Der Outrigger wird mit einer Drehfeder dargestellt, die den Kragbalken in zwei Teile teilt. Die Dämpfungs- und Federkräfte aus viskosem Dämpfer und Outrigger und Pendelstütze werden mittels Widerstandsmoment auf die Drehfeder aufgebracht. Aus diesem Modell lassen sich die komplexen Frequenzen und die zugehörigen modalen Dämpfungen bestimmen.

Das wird auch praktiziert, wobei folgende Parameter verändert werden: Position des Outriggers αH , Dämpfungskoeffizient des viskosen Dämpfers c_D und Steifigkeitsverhältnis zwischen Kern und Pendelstütze p_S . Letzteres lässt sich mit folgender Formel bestimmen

$$p_S = \frac{E_K I_K}{2E_S A_S R^2}. \quad (3.8)$$

In den Ergebnissen werden folgende Punkte besonders hervorgehoben:

- Alle drei Parameter haben einen großen Einfluss auf Eigenfrequenz und zugehörige modale Dämpfung.
- Das Steifigkeitsverhältnis zwischen Kern und Pendelstütze beeinflusst die maximale modale Dämpfung stark. Je geringer p_S ist, desto höher kann sich die maximale modale Dämpfung infolge Installation des DOS ergeben. Um eine zusätzliche Dämpfung $\zeta > 5\%$ zu erreichen, muss $p_S < 4$ sein. Um das zu erreichen, muss die Länge des Outriggers R groß sein, ebenso wie die Dehnsteifigkeit der Stütze. Die Biegesteifigkeit des Kerns sollte dagegen möglichst gering sein.
- Die optimale Position des Outriggers hängt von p_S und von c_D ab, für die erste Eigenfrequenz eines Hochhauses liegt sie bei ungefähr $\alpha = 0,51$. Höhere Eigenfrequenzen haben mehrere optimale Positionen des Outriggers. Die optimale Position ist stark von der Schwingungsform abhängig.
- Die modale Dämpfung reagiert stärker auf Veränderungen in p_S als in c_D und stärker auf Veränderungen in c_D als in α . Um das Maximum an Dämpfung zu erhalten, müssen aber alle Faktoren optimiert werden.

Morales-Beltran et al. [23] untersuchen das Verhalten von FE-Modellen von einfachen und doppelten DOS, sowie eine Kombination von einem DOS und einem darüber liegenden KOS unter acht verschiedenen Erdbebenbelastungen. Dafür wird das St. Francis Shangri-La Palace in einem vereinfachten Modell abstrahiert und erst eine Modalanalyse und anschließend mehrere Zeitverlaufsberechnungen für optimierte Outrigger-Konfigurationen durchgeführt. Für ein DOS liegt die optimale Position nach der Studie zwischen $\alpha = 70\%$ und 80% der Höhe, bei zwei DOS und der kombinierten Variante aus DOS und KOS gibt es mehrere Optima, bezogen auf die erreichte Dämpfung. Diese kann für das Gebäude bis auf $\zeta = 8\%$ für den einfachen und $8,8\%$ für den doppelten gedämpften Outrigger gesteigert werden. Bezüglich maximaler Verschiebungen und Beschleunigungen gibt es kaum Unterschiede zwischen den untersuchten Varianten. Bei Belastungen und Spannungen reduzieren die beiden doppelten Outrigger-Varianten die Werte stark, besonders in Kern und Outrigger. In den Stützen ergeben sich allerdings zusätzliche Belastungen.

In der Studie wird auch eine vereinfachte Kostenberechnung durchgeführt, in der die Masse an Bewehrungsstahl mit der Anzahl an benötigten viskosen Dämpferelementen verrechnet wird. Es wird offensichtlich, dass für das Gebäude die Nutzung von zwei DOS ökonomisch nicht sinnvoll ist, die Kombination aus einem DOS und einem KOS ist dagegen die wirtschaftlichste Variante, wenn nur die beiden Faktoren Bewehrungsstahl und Dämpfer betrachtet werden [23].

3.5.1.2 Weiterentwicklung von DOS

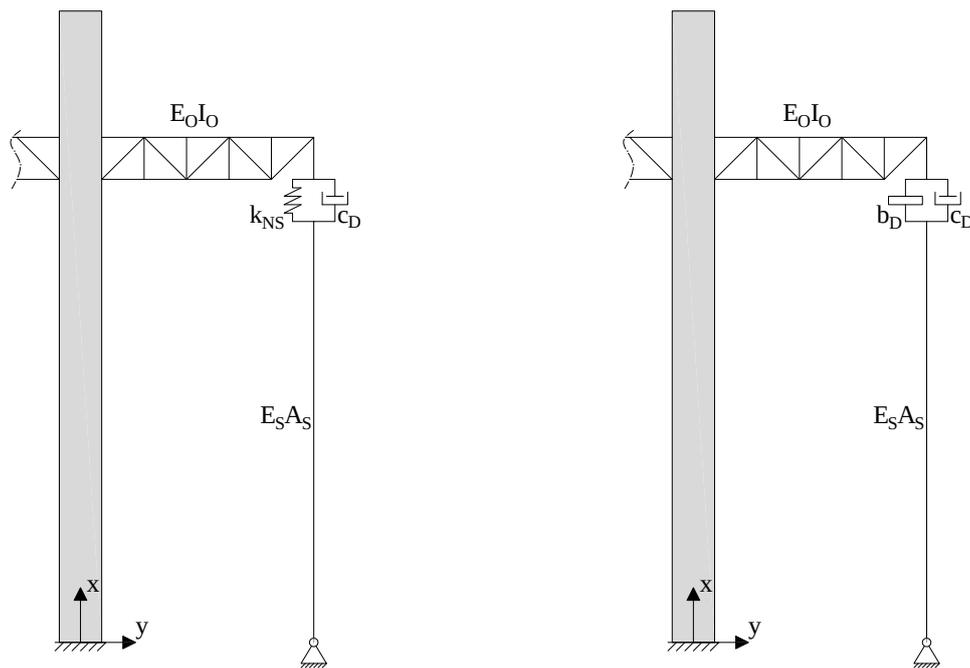
Neben der Optimierung wurden auch alternative Konstruktionen und Weiterentwicklungen des DOS untersucht. Die meisten Studien beschränken sich dabei darauf, den viskosen Dämpfer durch andere gleichwertige Elemente auszutauschen.

Streben mit unterdrücktem Knicken (*englisch*: buckling-restrained braces) Lin et al. verfassten mehrere Artikel [24],[25] und [26] zu den sogenannten *buckling-restrained braces*, also Streben mit unterdrücktem Knicken, die anstelle der viskosen Dämpferelemente zwischen Outriggerfachwerk und äußerer Pendelstütze installiert werden können. Diese Streben sind dünne Querschnitte in einem entkoppelten Rohr, die durch dieses Rohr unter Druck nicht ausknicken können und somit bis zu ihrer Fließgrenze und darüber hinaus belastet werden können. Bis zur Fließgrenze verhalten sie sich elastisch, bei zusätzlicher Belastung gibt es dann ein nahezu lineares Fließverhalten mit leichter Verfestigung. Gleiches Verhalten stellt sich für die Belastung unter Zug ein. Es ergibt sich demnach eine andere Hysteresekurve als die eines viskosen Dämpfers. Der Unterschied ist, dass bei kleinen Verformungen des Tragwerks unter geringen seismischen Lasten oder schwächeren Windlasten rein elastisches Verhalten des Elements auftritt. Damit verhält sich die gesamte gedämpfte Outrigger-Struktur für diese Fälle wie ein konventioneller Outrigger. Mit analytischen und Finite Elemente-Modellen werden verschiedene vereinfachte Modelle von hohen Gebäuden mit einem oder zwei Outriggern unter Erdbebenbelastung untersucht. Als Parameter werden die Fließdehnung der Streben, die Position der Outrigger und die Steifigkeitsverhältnisse zwischen Strebe, Outrigger und Pendelstütze eingegeben. Für verschiedene Kombinationen der Parameter werden dann die dynamischen Eigenschaften der Modelle untersucht, sowie die seismische Antwort des analytischen Modells berechnet. Zusätzlich wird eine nichtlineare Zeitverlaufsrechnung am FE-Modell durchgeführt, um die Berechnungen zu validieren. Es ergibt sich, dass die analytischen und die zugehörigen FE-Modelle eine gute Ähnlichkeit haben. Es gibt folgende weitere Ergebnisse:

- Die Fließdehnung der Streben hat einen Einfluss auf die Energiedissipationseffizienz und die Duktilitätskapazität der Elemente und sollte an die Anforderungen des Bauwerks angepasst werden.
- Bei einem einzelnen DOS liegt die optimale Position zwischen $\alpha = 50\%$ und 80% der Höhe.
- Für zwei Outrigger-Systeme liegt die optimale Position für den oberen Outrigger zwischen $\alpha_2 = 70\%$ und 80% der Höhe, für den unteren zwischen $\alpha_1 = 40\%$ und 70% , um die minimale Verschiebung des Dachgeschosses zu erhalten. Das geringste Moment im Fundament ergibt sich allerdings, wenn der untere Outrigger zwischen $\alpha_1 = 20\%$ und 40% der Gesamthöhe installiert wird.
- Die Steifigkeitsverhältnisse zwischen Strebe und Outrigger und zwischen Strebe und Pendelstütze können ebenso optimiert werden. Sehr steife Streben führen zu kleinen Verformungen aber größeren maximalen Beschleunigungen, umgekehrt verhält es sich für weichere Streben.
- Die maximale Verschiebung des Daches kann im Vergleich zum KOS je nach Höhe des Bauwerks für optimale Parameter um 20% bis 40% reduziert werden.

Neben den Parameterstudien werden auch Empfehlungen abgegeben, wie ein Entwurf von DOS mit Streben mit unterdrücktem Knicken ablaufen kann [24],[25],[26].

Neben Gebäuden mit ausschließlich DOS mit *buckling-restrained-braces* werden auch Tragwerke mit einer Kombination aus diesen Streben und viskosen Dämpfungselementen untersucht. In [27] werden FE-Modelle von vereinfachten Hochhäusern gebildet und diese mit 1, 2, 3 und 4 DOS ausgestattet, die jeweils entweder mit viskosen Dämpfern oder Streben gedämpft werden. Die Studie kommt zu dem Ergebnis, dass bei zwei Outriggern die Kombination aus oben Strebe und unten viskosem Dämpfer die beste Leistung unter Erdbeben zeigt. Bei mehr Outriggern haben dagegen die Gebäude die beste Leistung, die nur DOS mit viskosen Dämpfern besitzen.



(a) DOS mit negativer Steifigkeit (NSDOS)

(b) DOS mit Inerter (IDOS)

Abb. 3.15: Gedämpfte Outrigger mit alternativen Elementen

(Semi-)Aktive Dämpfung Mehrere Studien beschäftigen sich damit, die passive, viskose Dämpfung durch aktive Dämpfung über magneto-rheologische Fluidtdämpfer zu ersetzen oder zu ergänzen. Durch ein hybrides System aus passiven und aktiven Dämpfern können so die maximalen Verschiebungen im Vergleich zu rein passiven DOS um 20% bis 30% reduziert werden. Ebenso zeigen semiaktive Systeme eine bessere Dämpfungleistung als viskose Dämpfer [17],[28],[29].

Negative Steifigkeit und Inerter Ein kritischer Parameter bei DOS sind die Steifigkeitsverhältnisse zwischen Outrigger, Pendelstütze und Kern. Bei konventionellen gedämpften Outrigger-Systemen (KDOS) wirkt das Dämpferelement mit der Stütze und dem Outrigger wie ein Maxwell-Element, bei dem ein viskoser Dämpfer (Newtonsches Element) und ein Federelement (Hookesches Element) in Reihe geschaltet sind. Wenn die Feder, also Stütze und Outrigger, zu weich ist, nimmt sie den Großteil der Verformung auf und verhindert somit große Energiedissipation durch den Dämpfer. Ein Weg, dieses Problem zu lösen, ohne zu viel Material in den Stützen zu verbrauchen, ist die Implementation von Elementen mit negativer Steifigkeit (NSE), siehe auch Abschnitt 3.4.1.2. Diese NSE erzeugen Kraft in dieselbe Richtung ihrer Verschiebung, sie unterstützen somit die relative Bewegung. Wird ein NSE mit einem viskosen Dämpferelement in einem DOS parallel geschaltet, ergibt sich ein gedämpftes Outrigger-System mit negativer Steifigkeit (NSDOS), wie in Abbildung 3.15a dargestellt. Durch das NSE gibt es während der Schwingung größere Deformationen im Dämpfer, die zu größeren Dissipationen von Energie führen [30]. Aufgrund ihres großen Potentials wurden NSDOS in mehreren Studien untersucht. In vielen Fällen wurden sie auch mit gedämpften Outrigger-Systemen mit Inertern (IDOS) verglichen. Das sind Elemente, in denen ein Inerter nach Abschnitt 3.4.1.1 mit einem viskosen Dämpferelement parallel geschaltet wird, siehe Abbildung 3.15b. Inerter-Dämpfer-Elemente haben den Vorteil, dass sie die Trägheit des Tragwerks erhöhen und damit erstens die Eigenfrequenzen verringern

und zweitens die Beschleunigungen infolge Wind oder Erdbeben reduzieren. Das ergibt sich aus der Beziehung $F = b \cdot \Delta\ddot{x}$, umgestellt $\Delta\ddot{x} = \frac{F}{b}$: je größer die Trägheit b bei gleichbleibender Kraft F ist, desto geringer sind die resultierenden Beschleunigungen $\Delta\ddot{x}$. Auf die gleiche Art lässt sich zeigen, dass Federelemente mit positiver Steifigkeit die Verschiebung reduzieren.

Wang et al. führten 2020 die NSDOS in der Studie [15] ein. Es wird ein Hochhaus mit einem einzelnen NSDOS mit einem Gebäude ohne Outrigger, einem Bauwerk mit einem KOS und einem Hochhaus mit einem KDOS verglichen. Dabei wird erst je ein analytisches Modell auf seine dynamischen Eigenschaften untersucht und anschließend ein FE-Modell mit generierten Wind- und Erdbebenlasten belastet und die Strukturantwort in Verschiebung und Beschleunigung berechnet. Folgende Ergebnisse sind zu beachten:

- Das NSDOS verbessert gegenüber dem KDOS die modale Dämpfung für die ersten Eigenfrequenzen stark, wobei sogar der Dämpfungskoeffizient c_D geringer sein kann. Zusätzlich gibt es bei NSDOS eine geringere Abhängigkeit der Gesamtdämpfung vom Steifigkeitsverhältnis Kern-Pendelstütze.
- Für ein einzelnes NSDOS liegen die optimalen Outrigger-Positionen bezüglich maximaler Dämpfung an denselben Stellen wie für ein KDOS. Für die erste Eigenfrequenz ist diese Position ungefähr bei $\alpha = 50\%$.
- Unter veränderlicher Windlast und auch unter Erdbebenlast reduziert ein NSDOS die Beschleunigungen und vor allem die relativen Verschiebungen stark. Dabei hat es eine höhere Wirksamkeit als ein KDOS mit derselben Dämpfung c_D . Es wird vor allem die erste Eigenschwingung stärker als beim KDOS gedämpft.
- Eine Kombination aus NSDOS und zusätzlichem darüber liegendem KOS würde gleiche Ergebnisse für die Reduktion der Beschleunigung erzielen, reduziert aber im gleichen Moment die Verschiebung zufolge statischer Windlast stark. Somit wird diese Kombination zur Verwendung in Hochhäusern empfohlen.

Die gleichen Autor*innen untersuchen in [31], wie sich ein Tragwerk mit einem NSDOS unter Erdbebenlasten verhält und, wie die Tragwerksantworten Beschleunigung und Verschiebung auf diese Belastung reagieren, wenn die NSDOS optimiert wurden. Zudem wird auch die ökonomische Komponente betrachtet, indem die Kosten der Dämpfer als proportional zum Dämpfungskoeffizienten angenommen werden. Es ergibt sich laut Studie, dass nicht nur die maximale Dämpfung als Ziel zur Optimierung von DOS und speziell NSDOS herangezogen werden sollte. Als Beispiel sei hier die optimale Position des Outriggers genannt, die für die erste Eigenfrequenz bei $\alpha = 50\%$ der Höhe liegt. Wird allerdings ein NSDOS an dieser Position installiert, erreicht es die geringsten Reduktionen in den Antworten (Beschleunigung und Verschiebung) auf eine Erdbebenanregung. Das liegt daran, dass auch die höheren Frequenzen gerade bei Erdbeben eine große Rolle spielen und diese haben ihre optimalen Positionen des Outriggers an anderen Stellen. Weiterhin sollte auch immer die ökonomische Dimension des Hochhauses eine Rolle spielen. Es ist möglich, den erforderlichen Dämpfungskoeffizienten des NSDOS um über 40% zu reduzieren, wenn statt des Optimums eine zusätzliche Verschiebung von 5% akzeptiert wird.

Wen et al. [32] nutzen eine Methode, die Schwingungen eines Hochhauses mit DOS auf analytische Art zu beschreiben. Dafür wird das Kerntragwerk mit einem einseitig eingespannten Euler-Bernoulli-Stab modelliert, an den die gedämpften Outrigger angeschlossen werden. Die Modellierung der Outrigger-Konstruktion geschieht mithilfe von Drehfedern. Diese Drehfedern werden mit Widerstandsmomenten aus Dämpferelementen und Pendelstützen belastet. Es können beliebig viele Outrigger mit beliebigen Abständen modelliert werden. Die Dämpfer bestehen dabei aus drei parallel geschalteten Elementen: einem Inerter, einem NSE und einem viskosen

Dämpferelement. Diese Methode basiert auf der exakten dynamischen Lösung von geraden Euler-Bernoulli-Stäben nach [33] und [34] mit beliebig vielen Dämpfer- und Federelementen. In Abschnitt 4.1 wird ein ähnliches System erläutert.

In [32] wird eine komplexe Modalanalyse für ein und für zwei DOS an verschiedenen Positionen betrieben, um die Eigenfrequenzen zu bestimmen. Die Ergebnisse werden mit einem FE-Modell verifiziert. Außerdem werden die Dämpfung und die seismischen Antworten der Modelle berechnet. Dabei werden neben der Position der Outrigger auch die Parameter der Dämpfer - Trägheit, Steifigkeit und Dämpfungskoeffizient - geändert, während die Steifigkeiten der Outrigger und Stützen unverändert gelassen wurden. Die Ergebnisse sind:

- Ein NSDOS ebenso wie ein IDOS mit viskosen Dämpfern können nur auf spezifische Eigenmodes abgestimmt werden. Gibt es mehrere DOS, können auch mehrere Eigenschwingungen gezielt gedämpft werden. Es können je nach System und Eigenfrequenz Lehr'sche Dämpfungen bis über $\zeta = 20\%$ erreicht werden. Ein DOS mit Inerter und NSE kann ebenso die Dämpfung erhöhen, muss aber auch genau auf eine Eigenschwingung abgestimmt werden.
- NSDOS und IDOS beeinflussen die Eigenfrequenzen des Tragwerks. Die Implementation eines IDOS erhöht bspw. die erste Eigenfrequenz. Dementsprechend verändern sich auch die optimalen Parameter der Dämpfer beim Einbau mehrerer DOS gegenüber den Optima für ein DOS, selbst, wenn die Position des ersten Outriggers gleich bleibt.

Fang untersucht in [35] vereinfachte analytische Modelle von Gebäuden mit KDOS und NSDOS basierend auf der Timoshenko-Balkentheorie. Im Gegensatz zur vorherigen Studie [32] wird also auch die Schubverzerrung und das Massenträgheitsmoment in die Berechnungen einbezogen. Folgende Ergebnisse von [35] sind erwähnenswert:

- Die Schubverformung und die Rotationsträgheit des Kerns haben einen großen Einfluss auf dynamische Eigenschaften von Gebäuden mit DOS. Dementsprechend ist auch die Timoshenko-Balkentheorie besser für dynamische Analysen solcher Tragwerke geeignet als die Euler-Bernoulli-Balkentheorie. Nur in Fällen, bei denen die Schlankheit des Kerns größer als 25:1 ist und die erste Eigenfrequenz des Gebäudes dominant wirkt, ist der Unterschied der beiden Methoden so gering, dass auf die Euler-Bernoulli-Balkentheorie zurückgegriffen werden kann.
- Parameter wie die Schlankheit des Kerns, die Steifigkeitsverhältnisse zwischen Kern und Pendelstütze, zwischen Kern und Outrigger und die Steifigkeit der Dämpfer haben auch signifikanten Einfluss auf die modalen Dämpfungen des Gesamttragwerks. Ebenso beeinflusst die Position der Outrigger und die viskose Dämpfung die Gesamtdämpfung stark. All diese Parameter müssen aufeinander abgestimmt und optimiert werden, um horizontale Verformungen und Beschleunigungen infolge Wind oder Erdbeben zu verringern. Zu beachten ist hier auch, dass eine Veränderung eines der Parameter auch zu einer Veränderung der Eigenfrequenzen des Gebäudes führt.
- Je mehr DOS in ein Gebäude eingebaut werden, desto höher ergeben sich die modalen Dämpfungen. Allerdings nimmt der Zuwachs an modaler Dämpfung mit jedem zusätzlichen DOS ab.

Wang et al. untersuchen in [36] eine Kombination aus zwei DOS unter nichtstationärer, also realistischer stochastischer Erdbebenanregung. Es werden FE-Modelle mit den Kombinationen: oben KDOS und unten NSDOS, oben NSDOS und unten KDOS und zwei NSDOS gebildet und auf ihr seismisches Verhalten geprüft. Dabei wird vor allem darauf eingegangen, wie sich

die einzelnen Eigenschaften der Modelle auf die Antworten Verschiebung und Beschleunigung auswirken. Das Ergebnis ist eindeutig, dass die Kombination des doppelten NSDOS die besten Ergebnisse reduziert, sowohl Beschleunigung als auch Verschiebung um über 30% im Vergleich zu einer Struktur ohne Outrigger reduzieren kann, wobei die relative Verschiebung der Geschosse stärker verringert werden kann. Außerdem wird festgestellt, dass die Nutzung einer nichtstationären statt einer stationären Anregung zwar genauer ist, aber nur geringe Auswirkungen auf die optimierten Parameter der Systeme hat. Der maximale Unterschied liegt bei 2%.

In [19] wird eine Sensitivitätsanalyse basierend auf stochastischer Optimierung für Hochhäuser mit KDOS, NSDOS und IDOS durchgeführt, in der die Unsicherheit von Erdbebenereignissen berücksichtigt wird. Es wird ein analytisches Modell eines einzelnen DOS genutzt, basierend auf der Euler-Bernoulli-Balkentheorie. Dieses Modell wird einer stochastisch generierten Erdbebenschwungung ausgesetzt und es werden die daraus resultierenden maximalen Verschiebungen und Beschleunigungen ermittelt. Als Parameter gehen die Steifigkeit des Kerns und der äußeren Stützen ein, sowie die Dämpfung des viskosen Dämpfers, die Steifigkeit des NSE und die Trägheit des Inerters. Das wichtigste Ergebnis der Studie ist, dass der Einsatz eines NSDOS eher empfehlenswert ist, wenn die relative Verschiebung zwischen Geschossen reduziert werden soll. Geht es aber darum, die maximale Beschleunigung zu verringern, ist ein IDOS die bessere Wahl. Dieses Ergebnis passt zu den Erläuterungen am Anfang dieses Abschnittes. Gilt es, beides zu gleichen Teilen umzusetzen, dann ist es wiederum ratsam, ein NSDOS zu verwenden, da diese die Energiedissipation erhöhen. KDOS schneiden bei beiden Aspekten schlechter ab als die neueren Alternativen.

Frequenzunabhängige Dämpfung In [30] wird ein Prinzip beschrieben, wie die Abhängigkeit der Dämpfung der DOS von der Frequenz reduziert oder sogar vollständig entfernt werden kann. Alle bisher beschriebenen Arten von DOS, seien es KDOS, IDOS oder NSDOS verwenden viskose oder viskoelastische Dämpferelemente mit der Dämpfungskraft

$$F_{VD} = k_D u + c_D \dot{u}, \quad (3.9)$$

wobei u die relative Verschiebung der beiden Enden des viskosen Dämpfers ist. Laplace-transformiert ergibt sich daraus folgende Gleichung

$$F_{VD} = k_D U + c_D U w \text{ mit } w = i\Omega, \quad (3.10)$$

hier ist w die Laplace-Variable. Die Dämpfungskraft ist offensichtlich abhängig von der Belastungsfrequenz Ω . Beim Einsatz in DOS ist somit eine Abstimmung auf eine Eigenfrequenz des Tragwerks notwendig, wodurch die weiteren Eigenschwingungen weniger stark gedämpft werden. Es gibt allerdings Materialien wie Asphalt, Polyacrylate und Gummi, die ein anderes Verhalten zeigen: es gibt unter Verformung der Materialien signifikante Energiedissipationen ohne oder mit geringer Abhängigkeit von der Belastungsfrequenz. Aus diesen Materialien lassen sich somit frequenzunabhängige Dämpfer (FUD) konstruieren, die folgende Dämpfungskraft haben

$$F_{FUD} = (k_D + i\Phi)u = k_D(1 + i\psi)u. \quad (3.11)$$

Φ wird als frequenzunabhängiger Verlustmodul bezeichnet, ψ ist der Verlustfaktor (Verhältnis von Verlust- und Speichermodul), der Steifigkeitsparameter k_D ist ein komplexer Wert. Die Dämpfungskraft ist proportional zur Verschiebung und damit frequenzunabhängig.

In [30] werden die viskosen Dämpferelemente mit den FUD verglichen, also KDOS mit frequenzunabhängigen gedämpften Outrigger-Systemen (FUDOS). Um größere Dissipationen zu erhalten, werden die Dämpferelemente in einem weiteren Schritt mit NSE gekoppelt, es wer-

den also außerdem noch NSDOS und frequenzunabhängige gedämpfte Outrigger-Systeme mit negativer Steifigkeit (NS-FUDOS) untersucht. NSE weisen auch eine Unabhängigkeit von der Verschiebungsfrequenz auf und sind damit gut dafür geeignet, mit FUD gekoppelt zu werden. Die Studie [30] beschränkt sich auf die Untersuchung eines einfachen DOS mit den besagten vier Varianten. Es wird ein analytisches Modell nach Euler-Bernoulli-Balkentheorie gebildet und dann per Newton-Raphson-Methode gelöst. Darüber können die dynamischen Eigenschaften der Modelle bestimmt werden. Es werden die Parameter Dämpfung, negative Steifigkeit, Steifigkeit von Outrigger und Pendelstütze und Position des Outriggers untersucht. Zusätzlich gibt es eine Berechnung des Verhaltens unter seismischer Belastung. Die Studie kommt zu folgenden Ergebnissen:

- Die Kopplung von Dämpferelement (viskoser Dämpfer oder FUD) mit einem NSE erhöht stark die Dämpfung bei gleichbleibender Dämpfungskonstante um das sieben- bis achtfache.
- Das neue NS-FUDOS kann die maximale Dämpfung aller Frequenzen gegenüber einem KOS stark erhöhen, auch bei geringen Steifigkeiten der umliegenden Bauteile.
- NS-FUDOS haben ähnliche optimale Positionen wie DOS oder NSDOS. Für die erste Eigenfrequenz liegt das Optimum bspw. bei $\alpha = 55\%$ der Höhe, für höhere Eigenschwingungen gibt es mehrere Optima, z.B. ist die Position unter dem Dach gut geeignet.
- Ein NS-FUDOS erzielt bessere Ergebnisse bei der Reduktion von Erdbebenschwingungen als ein NSDOS, besonders bei den Eigenmodes, auf die das NSDOS nicht abgestimmt ist.

Schwingende Substrukturen In [37] wird ein neues Konzept entwickelt, um die hohe Steifigkeit und Tragfähigkeit des konventionellen Outriggers zu erhalten und trotzdem zusätzliche Dämpfung zu implementieren. Dazu werden die Geschosse zwischen den Outriggern vom Kern entkoppelt und als sogenannte Substrukturen nur auf den darunterliegenden Outriggern abgestützt. Zwischen dem oberen Ende der Substrukturen und dem Outrigger werden dann horizontale Dämpfungselemente installiert, die die hohe Relativverschiebung zwischen Substruktur und darüberliegendem Outrigger ausnutzen sollen. Das Konzept weist nach der Studie ein ähnliches Verhalten auf wie das KDOS, reagiert aber weniger sensitiv auf die Veränderung der Steifigkeit der Pendelstützen. Das ist allerdings der einzige Vorteil des Konzepts. Nachteile wie die höhere notwendige Tragfähigkeit der Outrigger und die zusätzlich notwendigen Tragkonstruktionen in den Substrukturen, sowie die hohen Verformungen der Substrukturen wurden nicht angesprochen, werden aber schnell offensichtlich.

Brücken Neben den Anwendungen in Hochhäusern wurde sogar ein abgewandeltes Konzept für die Nutzung von DOS in Brücken mit großer Spannweite entwickelt. Dabei wird der Fahrbahnträger über eine vertikale Fachwerkkonstruktion mit den Stützen verbunden. Zwischen Fachwerk (Outrigger) und Stütze wird ein horizontales Dämpferelement installiert, das die rotatorischen Schwingungen des Fahrbahnträgers reduziert [38].

Kapitel 4

Analytische Baudynamik von Hochhäusern mit gedämpften Outrigger-Systemen (DOS)

Viele Annahmen, Algorithmen und Berechnungen basieren auf dem Artikel „Generalized Damped Outrigger Systems for Suppressing Multimode Vibrations of Tall Buildings“ von Wen et al. [32]. Allerdings wurde dieser Artikel nur als Grundlage genutzt, um weitere Untersuchungen anzustellen.

4.1 Modellbildung

Wie bereits in Abschnitt 2.3 beschrieben, haben dreidimensionale Körper pro infinitesimalem Volumenelement sechs unabhängige Freiheitsgrade. Das gilt auch für Hochhäuser. Somit lässt sich jedes der unendlich vielen Volumenelemente eines Hochhauses in sechs Richtungen bewegen. Das reale dynamische Verhalten ist mit aktueller Rechenleistung nicht abbildbar. Um dennoch dynamische Berechnungen an Hochhäusern durchführen zu können, müssen diese vereinfacht modelliert werden. Eine Möglichkeit dafür ist die Diskretisierung des Tragwerks und Modalanalyse mittels der Finite Elemente Methode (FEM). Diese Methode kann allerdings vor allem in der Modellierung sehr aufwendig werden. Das gilt besonders, wenn eine Parameterstudie durchgeführt werden soll und hunderte bis tausende Modelle mit leicht abgeänderten Parametern untersucht werden. Eine Alternative bietet die Nutzung analytischer Modelle. Dadurch entstehen stark vereinfachte Strukturen, die schneller als mit der FEM auf ihr dynamisches Verhalten untersucht werden können.

In bisherigen Studien wurden vor allem Stabtragwerke genutzt, um Hochhäuser zu modellieren. Voraussetzungen für die Modellierung als Stabtragwerk sind:

- Existenz eines Kerns: Das Kerntragwerk wird als Stab mit der Stabachse entlang der Schwerpunkte modelliert. Somit sind auch die Steifigkeiten des Kerns gleich den Steifigkeiten des Stabtragwerkes. Die Masse des Hochhauses wird entlang der Stabachse verschmiert und als Dichte ρ oder Masse pro Längeneinheit $\mu = \rho A_K$ angegeben.
- Gleichmäßigkeit in Grund- und Aufriss: Um einen Stab mit gerader Stabachse zu erhalten, müssen die Schwerpunkte und Schubmittelpunkte der Grundrisse der Geschosse auf die Stabachse fallen. Eine konstante Steifigkeits- und Massenverteilung entlang der Stabachse würde analytische Berechnungen zusätzlich erleichtern, ist aber nicht in jedem Fall notwendig.
- Hohe Schlankheit des Gebäudes und besonders des Kerns: Eine Modellierung als Euler-Bernoulli-Stab oder als Timoshenko-Balken setzt voraus, dass die Konstruktion in Stablängsrichtung eine viel größere Abmessung hat als in Stabquerrichtung, mindestens im Verhältnis 5 : 1. Dadurch gelten weitere Annahmen der jeweiligen Theorien wie die vernachlässigbaren Normalspannungen und -verzerrungen in Querrichtung und keine beziehungsweise nur lineare Schubverzerrungen [2].

Gibt es außer dem Kern noch weitere große Tragelemente, wie beispielsweise die gedämpften Outrigger-Systeme (DOS) und die Pendelstützen, müssen diese auch im Modell berücksichtigt werden. Das geschieht mithilfe von Federelementen und Dämpferelementen, die an den jeweiligen Stellen an den Kern angeschlossen werden. Chen et al. hat eine analytische Lösung gefunden, wie jeder Euler-Bernoulli-Balken mit frei wählbarer Anzahl und Position von Feder- und Dämpferelementen dynamisch exakt beschrieben werden kann [33]. Diese Modellierung wurde dann in [32] verwendet, um DOS mit negativer Steifigkeit oder Inertern zu untersuchen, siehe auch Abschnitt 3.5.1.2.

Fang zeigte in seiner Studie [35] zu einzelnen DOS allerdings, dass die Berechnungen nach Euler-Bernoulli-Balkentheorie nur in speziellen Fällen genutzt werden können:

- Die Schlankheit vom Kern ist größer als 25:1 und
- die erste Eigenschwingung ist dominant.

In den anderen Fällen weichen die dynamischen Kennwerte des Hochhauses stark von den realen Werten ab. Aus Gründen der Einfachheit wurde trotzdem die Studie [32] von Wen et al. genutzt und der Kern als Euler-Bernoulli-Balken modelliert.

Soll ein Hochhaus mit seitlichen Aussteifungen wie beispielsweise Outrigger-Systemen analytisch mithilfe eines Stabmodells dargestellt und untersucht werden, so lässt sich die Konstruktion durch ein Modell nach Abbildung 4.1 abstrahieren. Dieses Modell ist eben, räumliche Beanspruchungen wie Torsion werden nicht betrachtet. Allerdings haben Outrigger-Konstruktionen auch kaum Auswirkungen auf die Abtragung von Torsionsbeanspruchungen, da sie ausschließlich Biegemomente vom Kern auf die Stützen übertragen. Ist das Gebäude nur achsen- und nicht punktsymmetrisch im Querschnitt, so muss je ein ebenes Modell für die beiden Symmetrieachsen y und z erstellt werden. Der Kern hat als eingespannter Euler-Bernoulli-Balken eine Biegesteifigkeit $E_K I_K$. Außerdem wird der Kern mit der verschmierten Masse des Gebäudes μ belegt. Diese errechnet sich aus der Eigen- und Ausbaulast des Gebäudes g_k geteilt durch die Erdbeschleunigung $g_{Erd} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und die Geschosshöhe h

$$\mu = \frac{g_k}{g_{Erd} h}. \quad (4.1)$$

Bei vielen Hochhäusern ist es zudem angebracht, auch ständige Nutzlasten in die verschmierte Masse einzurechnen, da diese ebenfalls einen großen Einfluss auf die Schwingung haben können. Neben dem Kern gibt es zwei Pendelstützen pro Outrigger-System, die ausschließlich Normalkräfte aufnehmen und dementsprechend nur eine Dehnsteifigkeit $E_{S_j} A_{S_j}$ benötigen. Auf einer Höhe von $\alpha_j H$ verbindet das j -e Outrigger-System den Kern mit den Pendelstützen. Es gibt insgesamt n Outrigger-Systeme, die über das Hochhaus verteilt sind. Diese haben jeweils eine Länge R und eine Biegesteifigkeit $E_{O_j} I_{O_j}$. Diese Biegesteifigkeit wird im Folgenden unendlich groß angenommen. Die Veränderung von $E_{O_j} I_{O_j}$ hat denselben Effekt wie bei $E_{S_j} A_{S_j}$ auf die dynamischen Eigenschaften des Tragwerks [35], es ist also nicht notwendig, beide Attribute näher zu untersuchen.

Die Verbindung zwischen Outrigger und Stütze geschieht über eine Kombination aus Dämpferelement, Feder und eventuell Inerter mit zugehörigem Dämpfungskoeffizienten c_{D_j} , Federsteifigkeit k_{D_j} und Trägheit b_{D_j} . Der Dämpfer kann auch ein frequenzunabhängiges Verhalten nach Abschnitt 3.5.1.2 haben, dann hat er keinen Dämpfungskoeffizienten, sondern einen frequenzunabhängigen Verlustmodul Φ_{D_j} bzw. einen Verlustfaktor ψ_{D_j} . Ebenso kann die Federsteifigkeit k_{D_j} nach Abschnitt 3.4.1.2 kleiner Null sein, womit das Federelement zum Element mit negativer Steifigkeit (NSE) wird. In Abbildung 4.1 ist eine Kombination aus viskosem Dämpfer und Feder gewählt, also ein viskoelastisches Dämpfungselement. In den meisten Studien zu DOS wird

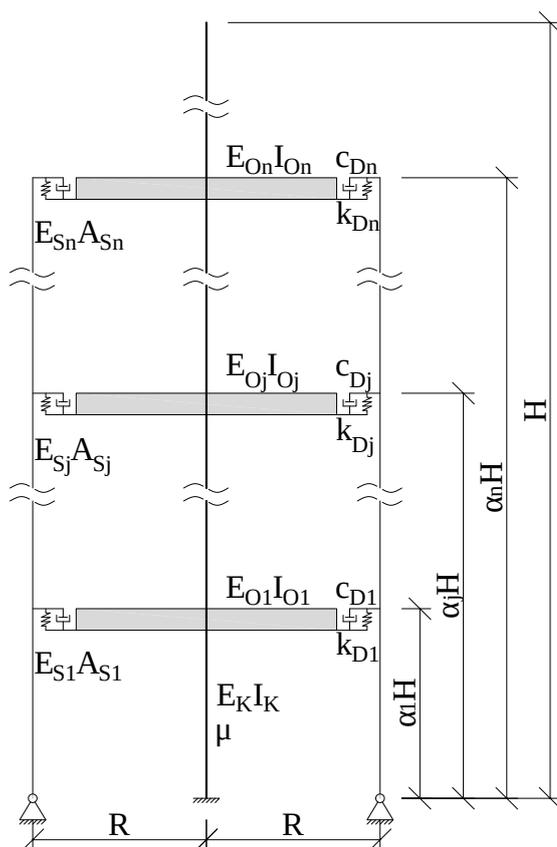


Abb. 4.1: Modell eines Hochhauses mit mehreren gedämpften Outrigger-Systemen (DOS)

$k_{Dj} = 0$ angenommen, da die eigene Steifigkeit eines viskosen Dämpfers sehr klein gegenüber den Steifigkeiten von Stütze und Outrigger ist und wenig Einfluss auf die Schwingung hat. Wird dann $c_{Dj} \rightarrow 0$, sind Outrigger und Stütze entkoppelt und es handelt sich nur noch um einen schwingenden Kragträger. Gilt dagegen $c_{Dj} \rightarrow \infty$, so gibt es eine starre Kopplung zwischen Outrigger und Stütze, was einem konventionellen Outrigger-System (KOS) entspricht.

Dieses Modell lässt sich noch weiter vereinfachen, sodass es auch analytisch beschreibbar wird [32]. Dafür werden die Outrigger-Konstruktionen als Drehfedern nach Abbildung 4.2 an den jeweiligen Positionen am eingespannten Kern-Balken angebracht. Alle Kräfte, die durch die Belastung in den Dämpfer-, Inerter- und Federelementen (Feder und Pendelstütze) wirken, haben eine der Bewegung entgegengerichtete Wirkung, nur das NSE unterstützt die Bewegung. Diese Wirkungen werden in einem Widerstandsmoment M_j zusammengefasst, das immer dem Biegemoment im Kern an der Stelle des Outrigger-Systems entgegenwirkt. M_j greift an der Drehfeder (Outrigger) im jeweiligen Geschoss an und ruft eine Verdrehung

$$\varphi_j = \frac{M_j}{B_{Dj}} \quad (4.2)$$

des Kerns hervor. B_{Dj} ist ein Steifigkeitsparameter, der von den Steifigkeiten des DOS abhängt. Die Verformungen eines DOS aufgrund eines Biegemoments im Kern sind in Abbildung 4.3 dargestellt.

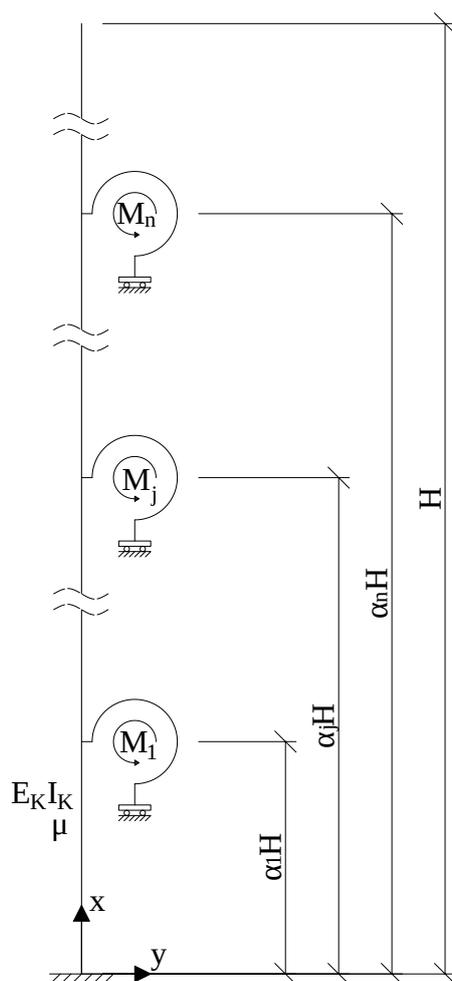


Abb. 4.2: Analytisches Modell eines Hochhauses mit mehreren gedämpften Outrigger-Systemen (DOS)

Für jedes Outrigger-Geschoss ergibt sich folgendes Gleichgewicht in den Stützen

$$F_j = F_{Dj} = F_{Sj}. \quad (4.3)$$

F_j ist somit die Kraft in der Stütze unter dem Outrigger und entspricht der Dämpferkraft F_{Dj} . Hierbei wird angenommen, dass die Stützen keine Kräfte von Abschnitten über den Outriggern übertragen. Um diese Annahme in Realität umzusetzen, müsste pro Outrigger eine Stütze vom Fundament bis zum Outrigger reichen. Das heißt, für zwei Outrigger-Systeme mit je 8 Outriggern wären insgesamt 16 Pendelstützen vonnöten. Eine realistischere Abbildung würde allerdings die nachfolgenden Gleichungen um einiges komplexer machen. F_{Dj} ist die Kraft, die auf das Dämpfersystem wirkt und die das Moment M_j im Outrigger hervorruft.

$$M_j = 2F_j R = 2F_{Dj} R. \quad (4.4)$$

Die Dämpferkraft F_{Dj} berechnet sich abhängig vom Dämpfersystem unterschiedlich.

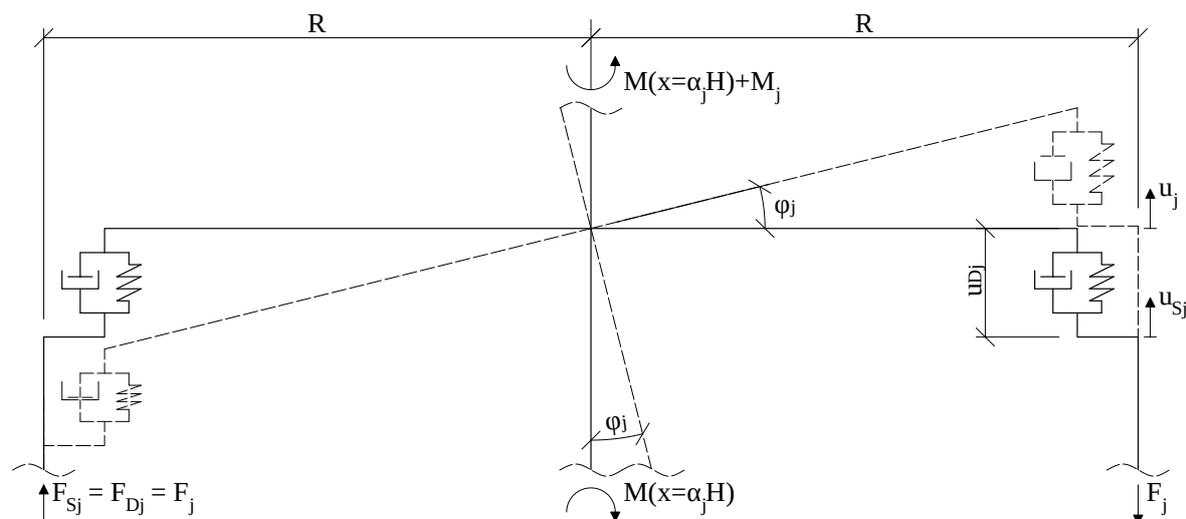


Abb. 4.3: Verdrehung eines DOS aufgrund eines Biegemoments im Kern

4.1.1 Berechnung der Kraft im Dämpfersystem F_{Dj}

In Abschnitt 3.5.1.2 wurden bereits die Gleichungen für die Berechnung der Kräfte in viskoelastischen und frequenzunabhängigen Dämpfern (FUD) angegeben. Die Annahme ist dabei jeweils, dass das Dämpferelement mit dem Federelement parallelgeschaltet ist. Die Dämpferkraft entspricht dann der Summe der Elementkräfte. In jedem Fall besteht eine Beziehung zwischen der Dämpferkraft F_{Dj} und der Deformation des Dämpfers u_{Dj} . Diese Deformation ist auch in Abbildung 4.3 dargestellt.

Viskoelastischer Dämpfer Für einen viskoelastischen linearen Dämpfer ergibt sich somit folgende Formel für die Dämpferkraft

$$F_{Dj} = (k_{Dj}u_{Dj} + c_{Dj}\dot{u}_{Dj}), \quad (4.5)$$

was sich zu

$$F_{Dj} = (k_{Dj}U_{Dj} + w c_{Dj}U_{Dj}) \text{ mit } w = i\omega \quad (4.6)$$

Laplace-transformieren lässt. w ist die Laplace-Variable und ω die Kreisfrequenz der Schwingung. Diese Transformation in den Frequenzbereich wird vorgenommen, um später U_{Dj} aus Gleichung (4.2) eliminieren zu können. Ist $k_{Dj} < 0$, handelt es sich beim Federelement um ein NSE und das System ist ein NSDOS. Gilt dagegen $k_{Dj} = 0$, liegt ein KDOS vor. Im Fall $c_{Dj} \rightarrow \infty$ entsteht ein KOS, für $c_{Dj} = 0$ ergibt sich dagegen ein System, das sich wie ein eingespannter Kragträger verhält. Wie bereits in Abschnitt 3.5.1.2 beschrieben, ist die Dämpferkraft bei viskosen und viskoelastischen Dämpfern abhängig von der Frequenz.

Viskoser Dämpfer mit Inerter Bei einer Parallelschaltung von viskosem linearem Dämpfer mit Inerter in einem IDOS ergibt sich die Dämpferkraft zu

$$F_{Dj} = (b_{Dj}\ddot{u}_{Dj} + c_{Dj}\dot{u}_{Dj}) \quad (4.7)$$

und lässt sich ebenso in den Frequenzbereich transformieren

$$F_{Dj} = \left(-\omega^2 b_{Dj} U_{Dj} + i\omega c_{Dj} U_{Dj} \right). \quad (4.8)$$

Offensichtlich ergibt $b_{Dj} = 0$ wieder das KDOS. $b_{Dj} \rightarrow \infty$ erzeugt eine unendlich große Trägheit an diesem Punkt, wodurch es unter dynamischer Einwirkung keine Verformung u_{Dj} des Dämpfers gibt und auch keine Dämpfung. Dieser Fall entspricht somit einem KOS. Sowohl die Kraft im Inerter als auch im viskosen Element sind frequenzabhängig.

Frequenzunabhängiger Dämpfer mit Federelement Die Gleichung der Dämpferkraft in einem frequenzunabhängigen gedämpften Outrigger-System (FUDOS) lautet [30]

$$F_{Dj} = (k_{Dj} + i\Phi_{Dj})u_{Dj} = k_{Dj}(1 + i\psi_{Dj})u_{Dj}. \quad (4.9)$$

Eine Transformation in den Frequenzbereich ändert diese Formel nicht

$$F_{Dj} = (k_{Dj} + i\Phi_{Dj})U_{Dj} = k_{Dj}(1 + i\psi_{Dj})U_{Dj}. \quad (4.10)$$

Wird k_{Dj} negativ, handelt es sich um ein NS-FUDOS. Φ_{Dj} hat in den Extremfällen $\Phi_{Dj} \rightarrow \infty$ und $\Phi_{Dj} = 0$ dieselben Auswirkungen wie c_{Dj} . Beide Elemente des Dämpfers sind frequenzunabhängig, wodurch auch die Kraft unabhängig von der Frequenz ist.

Dämpfer mit allen Elementen parallelgeschaltet Werden alle vier verschiedenen Elemente parallelgeschaltet, ergibt sich folgende Laplace-transformierte Gleichung

$$F_{Dj} = (k_{Dj} + i\Phi_{Dj} + i\omega c_{Dj} - \omega^2 b_{Dj})U_{Dj}. \quad (4.11)$$

Mit $u_{Dj} = u_j - u_{Sj}$ und $F_j = F_{Dj} = F_{Sj}$, wobei u_j die Gesamtverschiebung des äußeren Endes des Outriggers ist, u_{Sj} die Verschiebung des oberen Endes der Stütze und $F_{Sj} = k_{Sj}u_{Sj}$ die Kraft in der Stütze. Dieser Zusammenhang ist auch in Abbildung 4.3 dargestellt. Damit lässt sich folgender Zusammenhang finden

$$k_{Sj}U_{Sj} = (k_{Dj} + i\Phi_{Dj} + i\omega c_{Dj} - \omega^2 b_{Dj})(U_j - U_{Sj}). \quad (4.12)$$

Umgestellt ergibt sich

$$(k_{Sj} + k_{Dj} + i\Phi_{Dj} + i\omega c_{Dj} - \omega^2 b_{Dj})U_{Sj} = (k_{Dj} + i\Phi_{Dj} + i\omega c_{Dj} - \omega^2 b_{Dj})U_j, \quad (4.13)$$

was sich weiter zur Beziehung

$$U_{Sj} = \frac{F_{Sj}}{k_{Sj}} = \frac{k_{Dj} + i\Phi_{Dj} + i\omega c_{Dj} - \omega^2 b_{Dj}}{k_{Sj} + (k_{Dj} + i\Phi_{Dj} + i\omega c_{Dj} - \omega^2 b_{Dj})}U_j \quad (4.14)$$

verändern lässt. Damit lässt sich folgender Zusammenhang finden

$$F_{Dj} = \chi_{Dj}U_j \text{ mit } \chi_{Dj} = \frac{(k_{Dj} + i\Phi_{Dj} + i\omega c_{Dj} - \omega^2 b_{Dj})k_{Sj}}{k_{Sj} + k_{Dj} + i\Phi_{Dj} + i\omega c_{Dj} - \omega^2 b_{Dj}}. \quad (4.15)$$

Für M_j ergibt sich dann

$$M_j = 2F_{Dj}R = 2\chi_{Dj}RU_j. \quad (4.16)$$

Mit der Beziehung $\varphi_j = \frac{U_{Dj} + U_{Sj}}{R} = \frac{U_j}{R}$ lässt sich $B_{Dj} = \frac{M_j}{\varphi_j}$ bestimmen

$$B_{Dj} = 2\chi_{Dj}R^2. \quad (4.17)$$

χ_{Dj} ist ein komplexer Parameter, der von der Zusammensetzung des Dämpfers und meistens auch von der Frequenz der Schwingung abhängt, siehe Tabelle 4.1.

Tab. 4.1: Komplexe Parameter χ_{Dj} und χ_j nach Zusammensetzung des Dämpfers

Dämpfer	viskoelastischer Dämpfer	Inerter-Dämpfer	FUD
$\chi_{Dj} =$	$\frac{(k_{Dj} + i\omega c_{Dj})k_{Sj}}{k_{Sj} + k_{Dj} + i\omega c_{Dj}}$	$\frac{(-\omega^2 b_{Dj} + i\omega c_{Dj})k_{Sj}}{k_{Sj} - \omega^2 b_{Dj} + i\omega c_{Dj}}$	$\frac{(k_{Dj} + i\Phi_{Dj})k_{Sj}}{k_{Sj} + k_{Dj} + i\Phi_{Dj}}$
$\chi_j = \frac{1}{2\lambda^2 \alpha_j p_{Sj}}$	$\frac{k_j + 2i\lambda^2 \alpha_j p_{Sj} c_j}{1 + k_j + 2i\lambda^2 \alpha_j p_{Sj} c_j}$	$\frac{2i\lambda^2 \alpha_j p_{Sj} c_j - 2\lambda^4 \alpha_j p_{Sj} b_j}{1 + 2i\lambda^2 \alpha_j p_{Sj} c_j - 2\lambda^4 \alpha_j p_{Sj} b_j}$	$\frac{k_j + i\Phi_j}{1 + k_j + i\Phi_j}$

4.1.2 Schwingungsgleichung

Nach dem Prinzip von D'Alembert (siehe auch Kapitel 2) lässt sich die Schwingung für einen Euler-Bernoulli-Balken mit angeschlossenen Drehfedern mit folgender Gleichung beschreiben [33]

$$E_K I_K \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^n M_j \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{d}{dx} \delta(x - \alpha_j H), \quad (4.18)$$

wobei δ die Dirac-Funktion ist, siehe Abschnitt 2.2.3.3. Es werden nun dimensionslose Variablen definiert, um jedes Hochhaus beschreiben zu können [32]

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{y}{H}, \\ \xi &= \frac{x}{H}, \\ \bar{t} &= t\omega_0, \\ \bar{M}_j &= \frac{M_j H}{E_K I_K}, \\ \bar{\delta}(\xi) &= H\delta(x), \\ \lambda^4 &= \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\mu H^4}{E_K I_K} \omega^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

mit der Grundkreisfrequenz $\omega_0^2 = \frac{E_K I_K}{\mu H^4}$. ξ ist eine dimensionslose Laufvariable entlang der Stabachse des Kerns und λ wird als Wellenzahl bezeichnet und ist der Eigenwert der später eingeführten charakteristischen Gleichung (4.50). Mit den dimensionslosen Parametern und Variablen ergibt sich folgende Gleichung

$$\frac{\partial^4 \gamma(\xi, \bar{t})}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 \gamma(\xi, \bar{t})}{\partial \bar{t}^2} = \sum_{j=1}^n \bar{M}_j \frac{\partial \gamma(\xi, \bar{t})}{\partial \xi} \frac{d}{d\xi} \bar{\delta}(\xi - \alpha_j). \quad (4.20)$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$\gamma(\xi, \bar{t}) = Y(\xi) e^{i\omega t} = Y(\xi) e^{i\lambda^2 \bar{t}}, \quad (4.21)$$

wobei $Y(\xi)$ eine komplexe Funktion ist, die die Schwingungsform des Balkens beschreibt. Eingesetzt in das Gleichgewicht von D'Alembert ergibt sich

$$\left[\frac{d^4 Y(\xi)}{d\xi^4} + \lambda^4 Y(\xi) \right] e^{i\lambda^2 t} = e^{i\lambda^2 t} \sum_{j=1}^n \tilde{M}_j \frac{\partial Y(\xi)}{\partial \xi} \frac{d}{d\xi} \bar{\delta}(\xi - \alpha_j). \quad (4.22)$$

Für das dimensionslose \tilde{M}_j gilt die gleiche Beziehung wie für M_j ,

$$\tilde{M}_j = \frac{E_K I_K}{H} B_{Dj} \tilde{\varphi}_j, \quad (4.23)$$

mit der Amplitude der Rotation des Kerns am j -en Outrigger

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{dY(\xi)}{d\xi} \bar{\delta}(\xi - \alpha_j) = \tilde{\varphi}(\alpha_j). \quad (4.24)$$

Die in Gleichung (4.22) dargestellte Beziehung beschreibt eine angeregte Schwingung und ist dementsprechend eine inhomogene Differentialgleichung. Die Lösung dieser Gleichung besteht deshalb aus zwei Teilen: einem homogenen und einem partikulären Anteil. Der partikuläre Teil der Lösung hat nach [33] die Form

$$Y_p(\xi) = \sum_{j=1}^n \chi_j \tilde{\varphi}_j [-\cos(\lambda\xi - \lambda\alpha_j) + \cosh(\lambda\xi - \lambda\alpha_j)] H(\xi - \alpha_j) \quad (4.25)$$

mit einem komplexen Koeffizienten χ_j und der sogenannten Heaviside-Funktion $H(\xi - \alpha_j) = \int \bar{\delta}(\xi - \alpha_j) d\xi$. Eine Verwechslung mit der Höhe H ist nicht möglich. Die vierte Ableitung von Y_p ist [32]

$$\frac{d^4 Y(\xi)}{d\xi^4} = \lambda^4 \sum_{j=1}^n \chi_j \tilde{\varphi}_j [-\cos(\lambda\xi - \lambda\alpha_j) + \cosh(\lambda\xi - \lambda\alpha_j)] H(\xi - \alpha_j) + 2\lambda^2 \sum_{j=1}^n \chi_j \tilde{\varphi}_j \frac{d}{d\xi} \bar{\delta}(\xi - \alpha_j). \quad (4.26)$$

Werden Gleichungen (4.25) und (4.26) in Gleichung (4.22) eingesetzt, ergibt sich nach Koeffizientenvergleich in den Summen der komplexe Dämpferparameter

$$\chi_j = \frac{H B_{Dj}}{2\lambda^2 E_K I_K}. \quad (4.27)$$

Unter Nutzung von Gleichung (4.17) folgt damit

$$\chi_j = \frac{H \chi_{Dj} R^2}{\lambda^2 E_K I_K}. \quad (4.28)$$

χ_j lässt sich mit folgenden Parametern

$$\begin{aligned}
 p_{Sj} &= \frac{E_K I_K}{2E_{Sj} A_{Sj} R^2}, \\
 k_{Sj} &= \frac{E_{Sj} A_{Sj}}{H \alpha_j}, \\
 k_j &= \frac{k_{Dj}}{k_{Sj}}, \\
 \Phi_j &= \frac{\Phi_{Dj}}{k_{Sj}}, \\
 c_j &= \frac{c_{Dj} R^2}{H \sqrt{\mu E_K I_K}} \text{ und} \\
 b_j &= \frac{b_{Dj} R^2}{\mu H^3}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

umformen zu [32]

$$\chi_j = \frac{1}{2\lambda^2 \alpha_j p_{Sj}} \cdot \frac{k_j + i\Phi_j + 2i\lambda^2 \alpha_j p_{Sj} c_j - 2\lambda^4 \alpha_j p_{Sj} b_j}{1 + k_j + i\Phi_j + 2i\lambda^2 \alpha_j p_{Sj} c_j - 2\lambda^4 \alpha_j p_{Sj} b_j}. \tag{4.30}$$

Dabei ist p_{Sj} das Steifigkeitsverhältnis zwischen Stützen und Kern, k_{Sj} ist die Dehnsteifigkeit der j -en Stütze, k_j , Φ_j , c_j und b_j sind die dimensionslosen Eigenschaften des Dämpfers. In Tabelle 4.1 sind spezielle Fälle des Koeffizienten χ_j dargestellt. Die homogene Lösung von Gleichung (4.22) lässt sich nach Abschnitt 2.3.1.1 angeben zu

$$Y_h(\xi) = D_1 \sin(\lambda\xi) + D_2 \cos(\lambda\xi) + D_3 \sinh(\lambda\xi) + D_4 \cosh(\lambda\xi). \tag{4.31}$$

D_i sind Koeffizienten, die sich über Randbedingungen finden lassen. Bei Gleichung (4.31) ist zu beachten, dass sie von der Vorlage in Studie [32] abweicht. Dort werden statt den hyperbolischen Funktionen exponentielle Funktionen von $\lambda\xi$ verwendet. An der späteren Lösung für λ ändert das nichts, da sich die exponentiellen Funktionen in hyperbolische Funktionen umrechnen lassen. Die Gesamtlösung setzt sich aus den beiden Teillösungen zusammen

$$Y(\xi) = Y_p(\xi) + Y_h(\xi). \tag{4.32}$$

In Matrixschreibweise lässt sich diese Gleichung aufschreiben zu

$$Y(\xi) = \vec{Q}_\xi \vec{\phi} + \vec{P}_\xi \vec{D}, \tag{4.33}$$

mit

$$\vec{Q}_\xi = \begin{bmatrix} \chi_1 [-\cos(\lambda\xi - \lambda\alpha_1) + \cosh(\lambda\xi - \lambda\alpha_1)] H(\xi - \alpha_1) \\ \vdots \\ \chi_j [-\cos(\lambda\xi - \lambda\alpha_j) + \cosh(\lambda\xi - \lambda\alpha_j)] H(\xi - \alpha_j) \\ \vdots \\ \chi_n [-\cos(\lambda\xi - \lambda\alpha_n) + \cosh(\lambda\xi - \lambda\alpha_n)] H(\xi - \alpha_n) \end{bmatrix}^T, \quad (4.34)$$

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \cdots & \tilde{\varphi}_j & \cdots & \tilde{\varphi}_n \end{bmatrix}^T, \quad (4.35)$$

$$\vec{P}_\xi = \begin{bmatrix} \sin(\lambda\xi) & \cos(\lambda\xi) & \sinh(\lambda\xi) & \cosh(\lambda\xi) \end{bmatrix} \text{ und} \quad (4.36)$$

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{bmatrix}^T. \quad (4.37)$$

Nach Gleichung (4.24) lassen sich die Koeffizienten von $\vec{\phi}$ aus der ersten Ableitung von $Y(\xi)$ bestimmen

$$\phi_j = \frac{dY}{d\xi}(\alpha_j) = \frac{dY_h}{d\xi}(\alpha_j) + \frac{dY_p}{d\xi}(\alpha_j), \quad (4.38)$$

was sich in Matrixschreibweise zu [32]

$$\vec{\phi} = \mathbf{G}\vec{D} \quad (4.39)$$

umschreiben lassen kann. Dabei ist

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \vec{G}_1^T & \cdots & \vec{G}_k^T & \cdots & \vec{G}_n^T \end{bmatrix}^T, \quad (4.40)$$

mit

$$\vec{G}_1 = \vec{P}_1, \quad \vec{G}_k = \vec{P}_k + \vec{Q}_k \begin{bmatrix} \vec{G}_1 \\ \vdots \\ \vec{G}_j \\ \vdots \\ \vec{G}_{k-1} \end{bmatrix}, \quad k = 2, \dots, n. \quad (4.41)$$

\vec{P}_k und \vec{Q}_k sind die ersten Ableitungen von \vec{P}_ξ bzw. \vec{Q}_ξ nach ξ am k -ten Outrigger ($\xi = \alpha_k$)

$$\vec{Q}_k = \begin{bmatrix} \lambda\chi_1 [\sin(\lambda\alpha_k - \lambda\alpha_1) + \sinh(\lambda\xi - \lambda\alpha_1)] H(\xi - \alpha_1) \\ \vdots \\ \lambda\chi_j [\sin(\lambda\alpha_k - \lambda\alpha_j) + \sinh(\lambda\xi - \lambda\alpha_j)] H(\xi - \alpha_j) \\ \vdots \\ \lambda\chi_{k-1} [\sin(\lambda\alpha_k - \lambda\alpha_{k-1}) + \sinh(\lambda\xi - \lambda\alpha_{k-1})] H(\xi - \alpha_n) \end{bmatrix}^T \text{ und} \quad (4.42)$$

$$\vec{P}_k = \lambda \begin{bmatrix} \cos(\lambda\alpha_k) & -\sin(\lambda\alpha_k) & \cosh(\lambda\alpha_k) & \sinh(\lambda\alpha_k) \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Das ergibt dann die Gesamtgleichung

$$Y(\xi) = (\vec{Q}_\xi \mathbf{G} + \vec{P}_\xi) \vec{D}. \quad (4.44)$$

In dieser Gleichung sind nur \vec{P}_ξ und \vec{Q}_ξ von ξ abhängig.

Der Kern des Hochhauses wird vereinfacht als Kragträger modelliert. Dementsprechend ergeben sich folgende Randbedingungen für den Kern:

1. Es gibt keine Verschiebung am Fundament: $Y(0) = 0$,
2. es gibt keine Verdrehung am Fundament: $\frac{dY}{d\xi}(0) = 0$,
3. es gibt keine Biegemomente am oberen Ende und deshalb auch keine Verkrümmung $\frac{d^2Y}{d\xi^2}(1) = 0$ und
4. es gibt keine Querkräfte am oberen Ende $\frac{d^3Y}{d\xi^3}(1) = 0$.

Diese vier Randbedingungen ergeben folgende vier Gleichungen

$$0 = \left(\begin{bmatrix} \chi_1 [-\cos(0 - \lambda\alpha_1) + \cosh(0 - \lambda\alpha_1)] H(0 - \alpha_1) \\ \vdots \\ \chi_j [-\cos(0 - \lambda\alpha_j) + \cosh(0 - \lambda\alpha_j)] H(0 - \alpha_j) \\ \vdots \\ \chi_n [-\cos(0 - \lambda\alpha_n) + \cosh(0 - \lambda\alpha_n)] H(0 - \alpha_n) \end{bmatrix}^T \mathbf{G} + \begin{bmatrix} \sin(0) \\ \cos(0) \\ \sinh(0) \\ \cosh(0) \end{bmatrix}^T \right) \vec{D} \quad (4.45)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{G} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \vec{D}, \quad (4.46)$$

$$0 = \left(\lambda \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{G} + \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix} \right) \vec{D}, \quad (4.47)$$

$$0 = \left(\lambda^2 \begin{bmatrix} \chi_1 [\cos(\lambda - \lambda\alpha_1) + \cosh(\lambda - \lambda\alpha_1)] \\ \vdots \\ \chi_j [\cos(\lambda - \lambda\alpha_j) + \cosh(\lambda - \lambda\alpha_j)] \\ \vdots \\ \chi_n [\cos(\lambda - \lambda\alpha_n) + \cosh(\lambda - \lambda\alpha_n)] \end{bmatrix}^T \mathbf{G} + \lambda^2 \begin{bmatrix} -\sin(\lambda) \\ -\cos(\lambda) \\ \sinh(\lambda) \\ \cosh(\lambda) \end{bmatrix}^T \right) \vec{D}, \quad (4.48)$$

$$0 = \left(\lambda^3 \begin{bmatrix} \chi_1 [-\sin(\lambda - \lambda\alpha_1) + \sinh(\lambda - \lambda\alpha_1)] \\ \vdots \\ \chi_j [-\sin(\lambda - \lambda\alpha_j) + \sinh(\lambda - \lambda\alpha_j)] \\ \vdots \\ \chi_n [-\sin(\lambda - \lambda\alpha_n) + \sinh(\lambda - \lambda\alpha_n)] \end{bmatrix}^T \mathbf{G} + \lambda^3 \begin{bmatrix} -\cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \\ \cosh(\lambda) \\ \sinh(\lambda) \end{bmatrix}^T \right) \vec{D}. \quad (4.49)$$

Mit den vier Gleichungen lässt sich das Gleichungssystem

$$\mathbf{A}(\lambda) \vec{D} = \vec{0} \quad (4.50)$$

bilden, mit

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{Q}(\lambda)\mathbf{G}(\lambda) + \mathbf{P}(\lambda), \quad (4.51)$$

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \chi_1[\cos(\lambda - \lambda\alpha_1) + \cosh(\lambda - \lambda\alpha_1)] & \cdots & \chi_n[\cos(\lambda - \lambda\alpha_n) + \cosh(\lambda - \lambda\alpha_n)] \\ \chi_1[-\sin(\lambda - \lambda\alpha_1) + \sinh(\lambda - \lambda\alpha_1)] & \cdots & \chi_n[-\sin(\lambda - \lambda\alpha_n) + \sinh(\lambda - \lambda\alpha_n)] \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{P}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\lambda) & -\cos(\lambda) & \sinh(\lambda) & \cosh(\lambda) \\ -\cos(\lambda) & \sin(\lambda) & \cosh(\lambda) & \sinh(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Gleichung (4.50) stellt ein Eigenwertproblem dar: Die triviale Lösung ist $\vec{D} = \vec{0}$, wodurch allerdings $Y(\xi) = 0$ wird, in diesem Fall findet keine Bewegung statt. Die wichtigere Lösung ist der dynamische Fall:

$$\det(\mathbf{A}(\lambda)) = 0. \quad (4.54)$$

Das ist die charakteristische Gleichung des Schwingungsproblems mit dem Eigenwert λ , auch Wellenzahl genannt. Aus den Wellenzahlen lassen sich die komplexen Eigenkreisfrequenzen des Hochhauses bestimmen [35]

$$i\omega_k = i\lambda_k^2\omega_0 = i\lambda_k^2\sqrt{\frac{E_K I_K}{\mu H^4}} = -\zeta_k\omega_{n,k} + i\omega_{n,k}\sqrt{1 - \zeta_k^2} \quad (4.55)$$

mit der modalen Lehr'schen Dämpfung

$$\zeta_k = -\frac{\operatorname{Re}(i\omega_k)}{\omega_{n,k}} \quad (4.56)$$

und der pseudo-ungedämpften Eigenkreisfrequenz

$$\omega_{n,k} = |i\omega_k|. \quad (4.57)$$

Dadurch, dass das System kontinuierlich ist, hat es unendlich viele Eigenfrequenzen bzw. Wellenzahlen. Deshalb lassen sich nie alle Frequenzen berechnen. Der nachfolgende Argument-Prinzip-Algorithmus (APA) in Abschnitt 4.1.3 ermittelt mit numerischen Methoden die Wellenzahlen in einer vorgegebenen Region der komplexen Zahlenebene. Je nachdem, wie groß diese Region gewählt wird, steigt oder sinkt die Anzahl k der zu findenden Wellenzahlen λ_k .

4.1.3 Argument-Prinzip-Algorithmus (APA)

Der Argument-Prinzip-Algorithmus (APA) nach Delves und Lyness in [39] ist eine numerische Methode, mit der alle Nullstellen einer komplexen Funktion $f(z)$ in einem Bereich Θ der komplexen Zahlenebene gefunden werden können. Dabei muss f in Θ überall stetig sein. $z \in \Theta$

ist eine komplexe Variable. Der Rand von Θ ist eine geschlossene Kurve C auf der komplexen Zahlenebene, auf der keine Nullstelle von f liegen darf. Dann gilt [39]

$$s_N = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^N \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k z_j^N, \quad (4.58)$$

wobei $z_j (j = 1, 2, \dots, k)$ alle Nullstellen von f sind, die in Θ liegen. Weiterhin gilt $f'(z) = \frac{df}{dz}$. Das Linienintegral über C in Gleichung (4.58) lässt sich numerisch lösen, beispielsweise mit der Trapezregel. Je kleiner dabei die Diskretisierung von C ist, desto genauer werden die Werte s_N berechnet. Allerdings muss darauf geachtet werden, dass keine Nullstelle von $f(z)$ auf C oder nah an C liegt. Dann wären die Werte von $f(z)$ sehr klein, was zu einem sehr langsamen Konvergieren der Integrationsmethode führen würde. In diesem Fall ist es sinnvoll, die Suchregion zu verändern, im besten Fall zu vergrößern. Als Abbruchkriterium der numerischen Integration kann folgender Vergleich herhalten

$$\left| \operatorname{Re} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right) \right| > K. \quad (4.59)$$

K ist ein frei wählbarer Wert, in dieser Arbeit wird $K = 100$ gewählt. Im Falle des Eintretens von Gleichung (4.59) ist eine Veränderung der Kurve C notwendig. Ein hilfreicher Zusammenhang aus Gleichung (4.58) ist, dass

$$k = s_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (4.60)$$

s_0 gibt also die Anzahl an Nullstellen in Θ an. Nach der Ermittlung von s_0 lassen sich die Werte s_N mit $1 \leq N \leq k$ bestimmen, mit deren Hilfe ein Polynom $p(z)$ k -ter Ordnung gebildet werden kann, das die gleichen Nullstellen in Θ hat wie $f(z)$. Um $p(z)$ zu bilden, wird das sogenannte Newton-Polynom verwendet, das aus k Stützstellen ein Polynom k -ter Ordnung bildet. In [33] wird es folgendermaßen gebildet: Es werden k neue Variablen τ_j eingeführt, die sich aus den Nullstellen z_j berechnen lassen

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -(z_1 + \dots + z_j + \dots + z_k), \\ \tau_2 &= z_1 z_2 + \dots + z_{j-1} z_j + \dots + z_{k-1} z_k, \\ &\vdots \\ \tau_k &= (-1)^k z_1 z_2 \dots z_j \dots z_k. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Für diese Werte τ_j gilt

$$\begin{aligned} s_1 + \tau_1 &= 0, \\ s_2 + s_1 \tau_1 + 2\tau_2 &= 0, \\ s_3 + s_2 \tau_1 + s_1 \tau_2 + 3\tau_3 &= 0, \\ &\vdots \\ s_k + s_{k-1} \tau_1 + s_{k-2} \tau_2 + \dots + s_1 \tau_{k-1} + k\tau_k &= 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Die Gleichungen (4.62) lassen sich umstellen, um die Werte von τ_j zu ermitteln. Folgend sind die Lösungen für $j = 1, 2, 3, 4$ aufgeschrieben

$$\begin{aligned}\tau_1 &= -s_1, \\ \tau_2 &= \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2), \\ \tau_3 &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}s_1^3 + \frac{3}{2}s_1s_2 - s_3\right) \text{ und} \\ \tau_4 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}s_1^4 - s_1^2s_2 + \frac{4}{3}s_1s_3 + \frac{1}{2}s_2^2 - s_4\right).\end{aligned}\tag{4.63}$$

Sobald alle Werte $\tau_j (j = 1, \dots, k)$ ermittelt wurden, lässt sich das Polynom $p(z)$ bilden

$$p(z) = z^k + \tau_1 z^{k-1} + \tau_2 z^{k-2} + \dots + \tau_{k-1} z + \tau_k.\tag{4.64}$$

Für $p(z) = 0$ gibt es viele bekannte Methoden, um die Nullstellen z_j zu ermitteln. Viele Software-Programme haben eine solche Methode bereits implementiert. Im Programm *MATLAB* gibt es beispielsweise die Funktion `roots()`, die für beliebige Polynome die Nullstellen ausgibt.

Beim beschriebenen Algorithmus muss beachtet werden, dass er schneller und genauer funktioniert, wenn nur wenige Nullstellen in Θ liegen. Der numerische Fehler, der durch die Diskretisierung von C bei der Bestimmung von s_N gemacht wird, hat umso größere Auswirkungen auf $p(z)$ und damit auch auf z_j , je mehr s_N bestimmt werden müssen. Auch die Ermittlung der Nullstellen des Polynoms $p(z)$ steigt stark im Aufwand, je höher die Ordnung von $p(z)$ ist. Deshalb ist es angebracht, die anfangs festgelegte Suchregion Θ_0 in Unterregionen Θ_{1i} zu teilen, wenn die Anzahl an Nullstellen $k = s_0 > M$ ist, mit einem selbst gewählten M . Für diese Arbeit wurde $M = 4$ gesetzt, es werden demnach nur 4 oder weniger Nullstellen pro Region berechnet. Wenn es mehr sind, muss die Region geteilt werden und für die Unterregionen jeweils nach Nullstellen gesucht werden.

Der gesamte APA läuft folgendermaßen ab [39]:

0. Benötigt wird eine geschlossene Kurve C in \mathbb{C} , eine Funktion $f(z)$, die stetig und diskretisierbar auf und innerhalb von C ist, alle bereits bekannten Nullstellen z_1, z_2, \dots, z_r von $f(z)$ und die Konstanten M, K und Tol . In dieser Arbeit wurden ausschließlich quadratische Suchregionen C genutzt. Das hat den Vorteil, dass nicht eine der Abmessungen der Region viel größer ist als die anderen und, dass die Modellierung von C einfacher ist als bei anderen Formen.
1. Ist die Region C zu klein, wird die Berechnung abgebrochen und für die Region keine neue Nullstelle ausgegeben. Das verhindert eine unendliche Rekursion. Das Abbruchkriterium ist, dass alle Seitenlängen des Quadrats C kleiner sind als Tol . In dieser Arbeit wurde $Tol = 0.001$ gesetzt.
2. Zuerst wird ermittelt, wie viele und welche der bereits bekannten Nullstellen innerhalb von C liegen. Die Anzahl wird folgend mit q bezeichnet. Anschließend wird berechnet, wie viele Nullstellen von $f(z)$ innerhalb von C liegen. Dafür wird s_0 nach Gleichung (4.58) berechnet. Diese Berechnung hat drei mögliche Ergebnisse:
 - a) Der Fall nach Gleichung (4.59) tritt ein. Dann wird die Integration abgebrochen und die Suchregion muss verändert werden. Siehe auch Abschnitt 4.1.3.1. Mit der veränderten Suchregion wird wieder ab Punkt 1 begonnen.
 - b) Es wird ein Wert für s_0 gefunden. Dann liegen $s_0 - q$ unbekannte Nullstellen in C . Ist $s_0 - q > M$, muss die Suchregion geteilt werden. Bei einer quadratischen Region C ist

es angebracht, die Region zu vierteln, siehe Abbildung 4.4. Für jede der Unterregionen wird der Algorithmus von Punkt 1 an neu gestartet.

c) Es tritt der gleiche Fall ein wie in 2.b), nur dass $s_0 - q \leq M$. Dann wird mit den folgenden Punkten fortgefahren:

3. Ist $s_0 - q = 0$, wird keine weitere Nullstelle ausgegeben. Andernfalls werden die \bar{s}_N -Werte für die unbekannt Nullstellen mit

$$\bar{s}_N = s_N - \sum_{j=1}^q z_j^N, \quad N = 0, 1, \dots, s_0 - q \quad (4.65)$$

bestimmt, wobei z_j ($j = 1, \dots, q$) die bereits bekannten Nullstellen in C sind.

4. Unter Verwendung von \bar{s}_N können nun die Koeffizienten τ_j des Polynoms $p(z)$ nach Gleichung (4.62) bzw. (4.63) ermittelt werden.

5. Aus den τ_j -Werten lässt sich $p(z)$ nach Gleichung (4.64) bestimmen. Für dieses Polynom werden nun die einzelnen Nullstellen z_j ($j = q + 1, \dots, s_0$) ermittelt und ausgegeben.

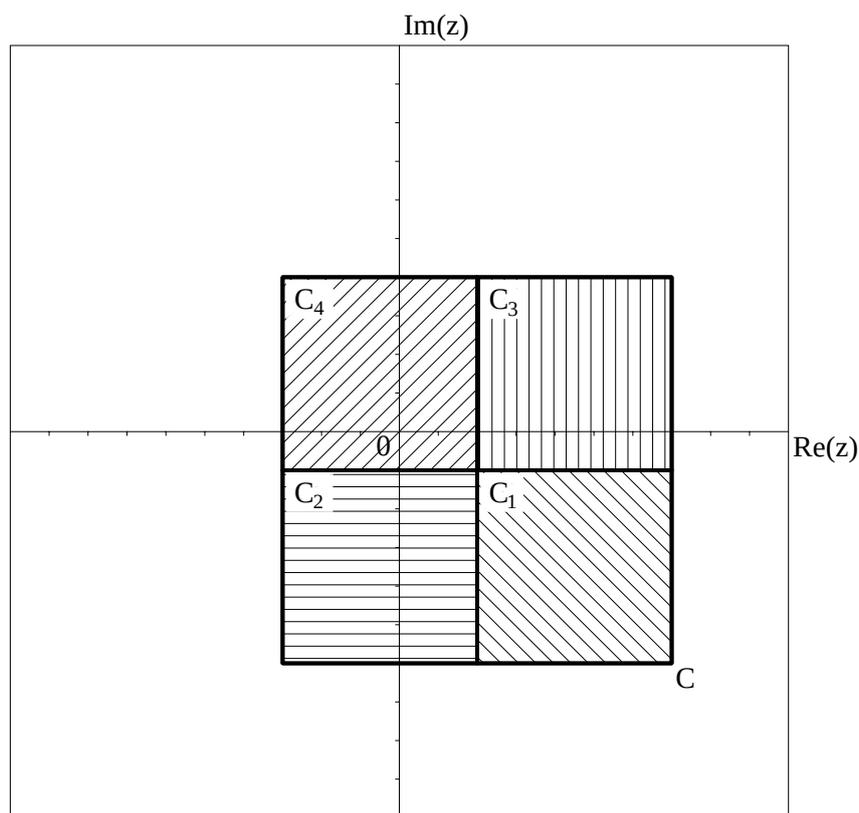


Abb. 4.4: Quadratische geviertelte Suchregion für den APA in der komplexen Zahlenebene

Die Einbindung von bereits bekannten Nullstellen in die Suche neuer Nullstellen hat den Vorteil, dass sich Suchregionen auch überschneiden können und trotzdem bei der Ausgabe keine Dopplung einer gefundenen Nullstelle vorkommt. Im folgenden Abschnitt 4.1.3.1 wird dieser Umstand genutzt.

4.1.3.1 Veränderung der Suchregion

Tritt der Fall 2.a) bzw. tritt Gleichung (4.59) ein, muss die Suchregion verändert werden, damit keine Nullstelle in der Nähe oder auf C liegen. Ist C dabei die anfänglich vorgegebene Suchregion, muss sie manuell angepasst, im Idealfall vergrößert werden. Wurde C nach Punkt 2.b) bereits mindestens ein mal geviertelt, ist eine Anpassung der vier Unterregionen nach Abbildung 4.5 angebracht. Dabei kommt es zur Überschneidung von den beiden größeren Unterregionen. Das ist aber kein Problem, da bereits bekannte Nullstellen nicht erneut gesucht werden. Eine Nullstelle in der Zone der Überlagerung wird also nur bei der ersten Unterregion neu gefunden.

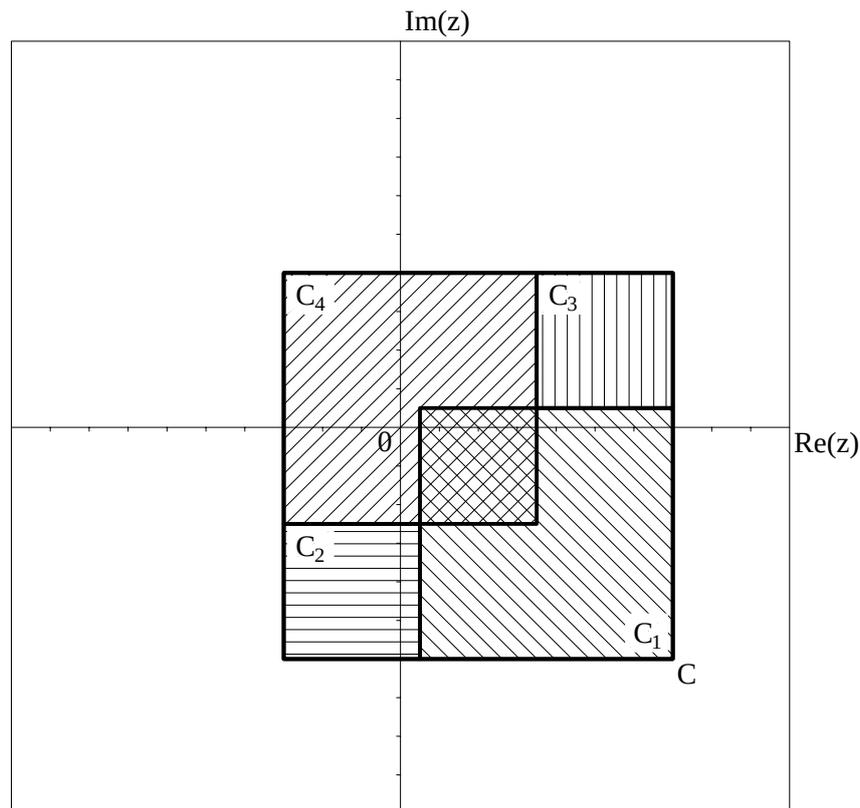


Abb. 4.5: Veränderung der quadratischen geteilten Suchregionen C

4.1.3.2 Anwendung des APA zur Bestimmung von λ_k

Zur Bestimmung der Wellenzahlen λ_k müssen die Nullstellen der Funktion

$$f(\lambda) = \det(\mathbf{A})(\lambda) \quad (4.66)$$

gefunden werden. $f(\lambda)$ ist eine Funktion in der komplexen Zahlenebene, die aus einer Kombination von trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen besteht. Nach Studie [33] ist $f(\lambda)$ unstetig auf $\arg(\lambda) = \frac{\pi}{4}$. Es muss also bei der Anwendung des APA auf $f(\lambda)$ ausgeschlossen werden, dass die Suchregion die Achse $\arg(\lambda) = \frac{\pi}{4}$ enthält. Das geschieht über eine Verdrehung der quadratischen Suchregion C , siehe auch Abbildung 4.6: Es wird eine Region C' als quadratische Region gebildet und diese um den Nullpunkt um $\frac{\pi}{4}$ rotieren gelassen. Er ergibt sich C . Um nicht

eine Kante der Region auf der zu vermeidenden Achse zu haben, sollte die Region C' einen geringen Abstand zur Achse $\text{Im}(\lambda) = 0$ haben.

Mit der Region C werden dann alle Schritte des Algorithmus durchgeführt. Dabei ist es oft sinnvoll, für Zwischenschritte wie das Vierteln der Region oder die Veränderung von Unterregionen alles wieder zurück rotieren zu lassen, die Berechnungen der neuen Koordinaten durchzuführen und dann alles wieder in die gedrehte Lage zu versetzen. Auch zur Überprüfung, ob ein Punkt λ_i in der Region liegt, ist die Rückrotation von C zu C' und die gleichzeitige Rotation des Punktes zu λ'_i angebracht. Es kann einfacher überprüft werden, ob λ'_i in C' liegt, als ob λ_i in C liegt. Nachfolgend in Abschnitt 4.2 wird eine Parameterstudie durchgeführt, die aufzeigt,

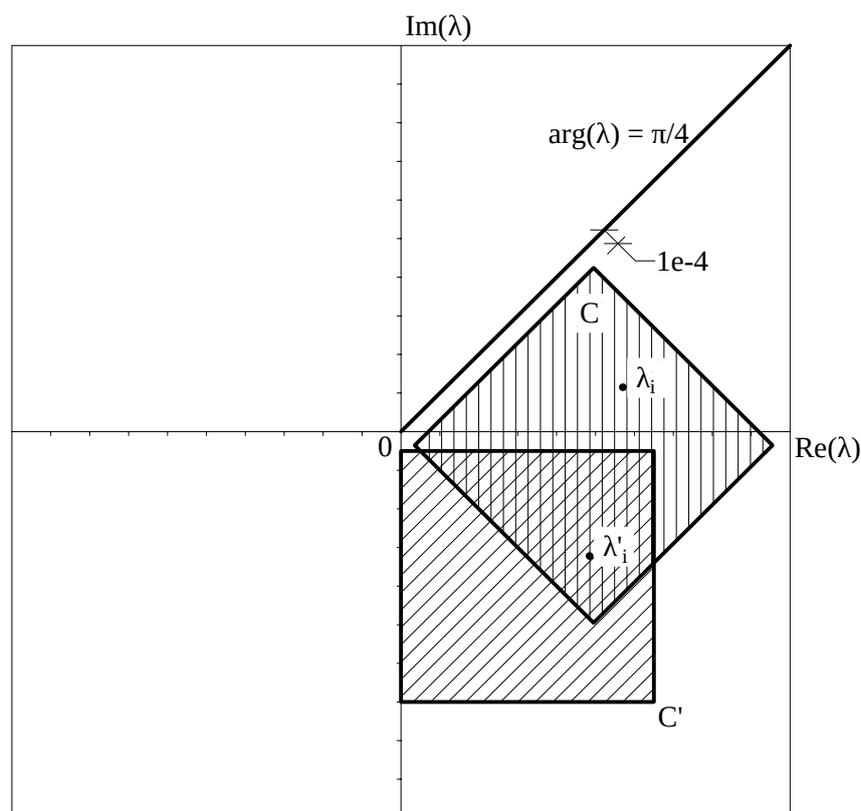


Abb. 4.6: Achse $\arg(\lambda) = \frac{\pi}{4}$ und verdrehte quadratische Suchregionen C und C'

wie sich die modale Lehr'sche Dämpfung und die Eigenkreisfrequenzen eines Hochhauses mit DOS verändern, je nachdem, wie die Parameter des DOS gewählt werden. Dafür wurde die Software *MATLAB 2024b* genutzt. Der *MATLAB*-Code zur Suche der Eigenkreisfrequenzen einer spezifischen Parameterkombination ist in Anhang A gegeben. Dieser Code wurde erweitert, um Plots der Eigenkreisfrequenzen und Dämpfungen in Abhängigkeit der Parameter zu erhalten.

Nachdem die idealen Parameter für ein generisches Hochhaus gefunden wurden, können die Ergebnisse auf ein reales Hochhaus angewandt werden. Das geschieht in Abschnitt 4.3. Dort wird der sogenannte *DC2-Tower* in der Wiener Donau-City untersucht.

4.2 Parameterstudie

In diesem Abschnitt wird eine Parameterstudie durchgeführt, um zu überprüfen, wie sich die modale Lehr'sche Dämpfung ζ_k nach Gleichung (4.56) und die pseudo-ungedämpfte Eigenkreisfrequenz $\omega_{n,k}$ nach Gleichung (4.57) in Abhängigkeit der Parameter p_{Sj} , k_j , b_j , c_j , Φ_j und α_j verhalten.

Folgende Konstanten wurden dabei für den APA gewählt:

- $M = 4$: maximale Anzahl an Nullstellen pro Suchregion,
- $J = 1e5$: Anzahl an Stützstellen je Seite der quadratischen Suchregion C für die Numerische Integration von Gleichung (4.58),
- $K = 100$: maximaler Einzelwert der nach Gleichung (4.58) zu integrierenden Funktion,
- $Tol = 1 \cdot 10^{-3}$: maximale Seitenlänge der quadratischen Suchregion und
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{E_K I_K}{\mu H^4}} = 1$: Grundkreisfrequenz des Kerns. Diese Annahme hat nur Auswirkungen auf $\omega_{n,k}$, nicht auf ζ_k . Allerdings kann wird in den Diagrammen nur die Veränderung von $\omega_{n,k}$ dargestellt, keine absoluten Werte. Dementsprechend hat die Annahme $\omega_0 = 1$ keinen Effekt auf die Auswertung. Sobald ein reales Hochhaus betrachtet wird, siehe Abschnitt 4.3, wird ω_0 entsprechend angepasst, wodurch $\omega_{n,k}$ skaliert wird.

Zu beachten ist weiterhin, dass immer entweder $c_j = 0$ ist oder $\Phi_j = 0$. Zwei verschiedene Dämpfungselemente in einem Dämpfer ist nicht zu empfehlen, da dadurch die Hysterese-Kurve sehr schwer beschreibbar wird und das reale Verhalten auch. Für die Dämpfer werden vor allem die Elementkombinationen nach Abschnitt 4.1.1 und Tabelle 4.1 betrachtet. Außerdem wird angenommen, dass alle Parameter für jedes DOS im Hochhaus gleich groß sind, es sei denn, es wird anders beschrieben.

Die nachfolgend angegebenen Werte sind keine exakten Werte. Die numerische Analyse im APA führt zu Fehlern im Bereich $1 \cdot 10^{-4}$ bei den Eigenfrequenzen und Lehr'schen Dämpfungen. Für genauere Untersuchungen muss der oben angegebenen Wert J vergrößert werden. Das führt allerdings zu verlängerten Rechenzeiten.

4.2.1 Ein einzelnes DOS im Hochhaus

Für den Fall eines einzelnen DOS im Hochhaus lassen sich für $c_j = \Phi_j = k_j = b_j = 0$, $p_{Sj} = 5$ und $\alpha_j = 0,5$ folgende Eigenkreisfrequenzen finden:

$$\begin{aligned}
 \omega_{n,1} = \omega_{0,1} &= 3,5160 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\
 \omega_{n,2} = \omega_{0,2} &= 22,0345 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\
 \omega_{n,3} = \omega_{0,3} &= 61,6971 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\
 \omega_{n,4} = \omega_{0,4} &= 120,9021 \frac{\text{rad}}{\text{s}},
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

die modalen Lehr'schen Dämpfungen sind $\zeta_k = 0$. Durch die numerischen Annäherungen im APA kann es dazu kommen, dass trotz $c_j = \Phi_j = 0$ die Lehr'sche Dämpfung $\zeta_k \neq 0$ gefunden wird, allerdings gilt trotzdem $\zeta_k \approx 0$. Die Werte der Eigenfrequenzen stimmen mit den Eigenfrequenzen eines Kragträgers nach Abschnitt 2.3.1.1 überein. Für einen solchen Träger gilt bspw. $\lambda_1 = 1,875$, also $\omega_1 = \lambda_1^2 = 3,516 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

4.2.1.1 Veränderung der viskosen Dämpfung c_j

Für $p_{Sj} = 5$ und $\alpha_j = 0,5$ wird nun c_j in einem Intervall $[0; 1]$ langsam ansteigen gelassen und jeweils die Werte ζ_k und $\frac{\omega_{n,k}}{\omega_{0,k}}$ berechnet, wobei $\omega_{0,k}$ die Frequenz ist, die sich ergibt, wenn $c_j = 0$.

In Abbildung 4.7a ist dargestellt, wie sich für die ersten drei Moden die Lehr'sche Dämpfung in Abhängigkeit von c_j verändert. Offensichtlich wird, dass es für alle drei Moden ein optimales c_j gibt, um ein maximales ζ_k zu erreichen. Nach diesem Wert c_j flacht die Kurve von ζ_k schnell wieder ab und geht gegen Null. Das liegt daran, dass zu große Schwingungsamplituden notwendig werden, um eine genügend große Dämpferkraft F_{Dj} zu erreichen, um den viskosen Dämpfer stark zu bewegen. Für die erste Eigenfrequenz liegt das Optimum bei $c_{opt,1} = 0,048$, hier wird die Schwingung um $\zeta_1 = 4,1\%$ gedämpft. Das ist um einiges mehr, als eine intrinsische Dämpfung eines Hochhauses erreichen kann. Für Gebäude mit $H > 200$ m liegt diese meist bei höchstens $\zeta = 1\%$ [18]. Außerdem ist ersichtlich, dass die Dämpfung für höhere Eigenfrequenzen stark abnimmt. So ist $\zeta_{2,max} = 0,04\%$ und $\zeta_{3,max} = 0,35\%$. Das ist dem Umstand geschuldet, dass die Dämpfung bei viskoser Dämpfung frequenzabhängig ist. Zudem hat die Lage α_j des DOS einen großen Einfluss auf die Dämpfung unterschiedlicher Moden. Die zweite Eigenschwingung hat einen Schwingungsknoten bei $0,5H$, dort treten also kaum Bewegungen auf. Dadurch wird der Dämpfer wenig gestaucht und die Dämpfungskraft und Energiedissipation sind gering. Es ist demnach relevant, wo die Outrigger-Geschosse liegen. Das wird in Abschnitt 4.2.1.3 genauer untersucht.

Abbildung 4.7b zeigt die Veränderung der Eigenkreisfrequenz in Abhängigkeit von c_j . Es wird ersichtlich, dass die Frequenzen mit steigendem c_j auch streng monoton ansteigen und sich für $c_j \rightarrow \infty$ einem Maximalwert annähern, der je nach Mode zwischen 1,00 und 1,09 mal der ungedämpften Eigenkreisfrequenz $\omega_{0,k}$ entspricht. Die Veränderung ist größer, je stärker die Eigenschwingung gedämpft wird.

Änderung von k_j In Abbildung 4.8 sind die Zusammenhänge wie in Abbildung 4.7 dargestellt, nur dass $k_j = 0,3$ gesetzt wurde. Dadurch wurde der viskose Dämpfer im DOS zum viskoelastischen Dämpfer. Es ist ersichtlich, dass die maximale Dämpfung mit $\zeta_{1,max} = 3,0\%$

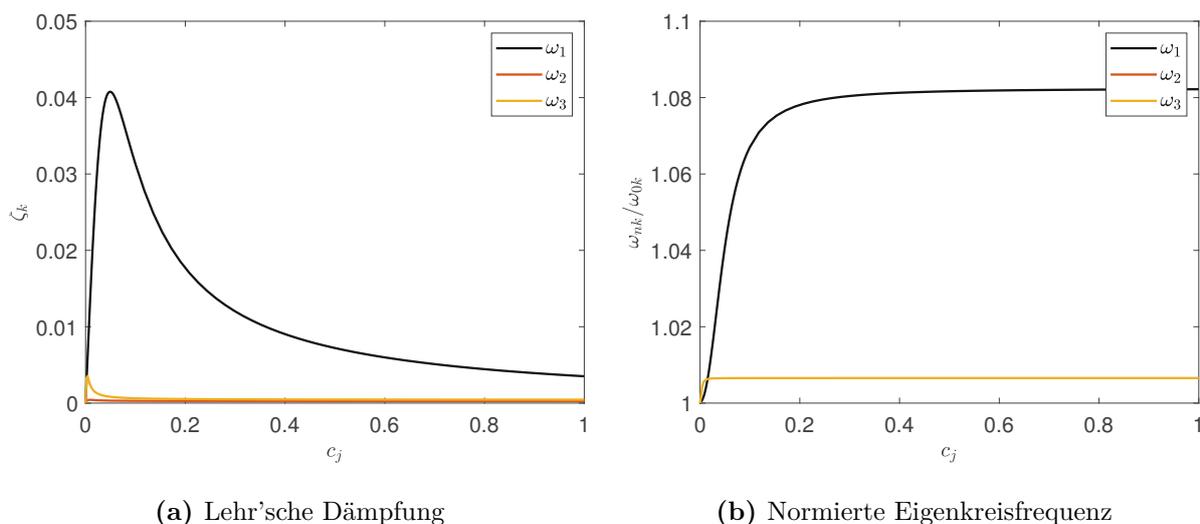


Abb. 4.7: Abhängigkeit von Dämpfung (a) und Eigenkreisfrequenz (b) von der viskosen Dämpfung c_j

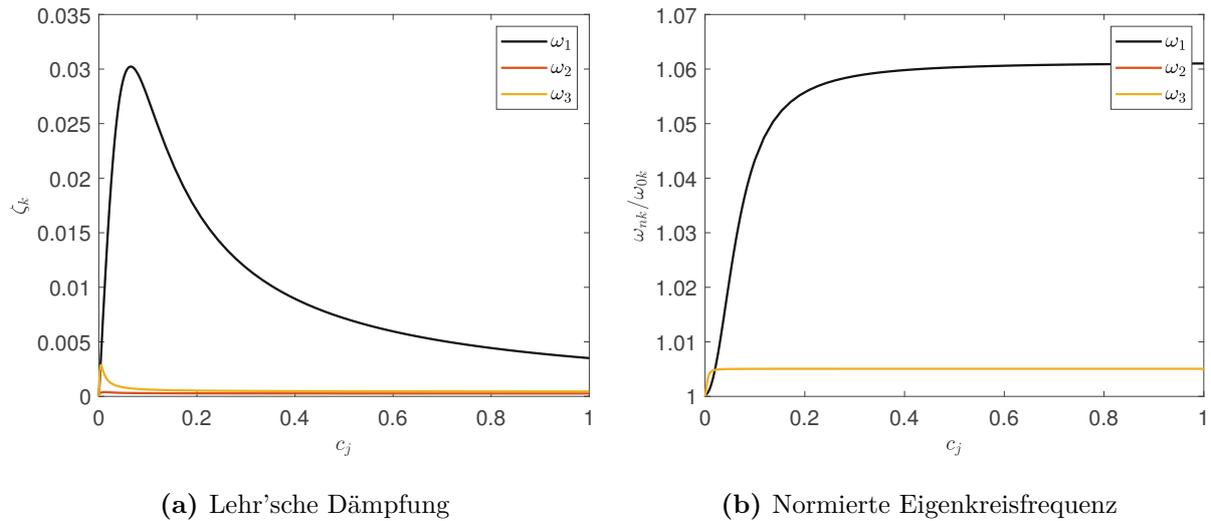


Abb. 4.8: Abhängigkeit von Dämpfung und Eigenkreisfrequenz von der viskosen Dämpfung c_j für $k_j = 0, 3$

gegenüber der Dämpfung ohne Federelement geschrumpft ist. Ebenso wächst $\omega_{n,k}$ nicht mehr so stark mit steigendem c_j . Die geringere maximale Dämpfung liegt am Umstand, dass das Federelement die Stauchung des Dämpferelements verringert und damit auch die Dissipation, siehe auch Abschnitt 3.4.1.2.

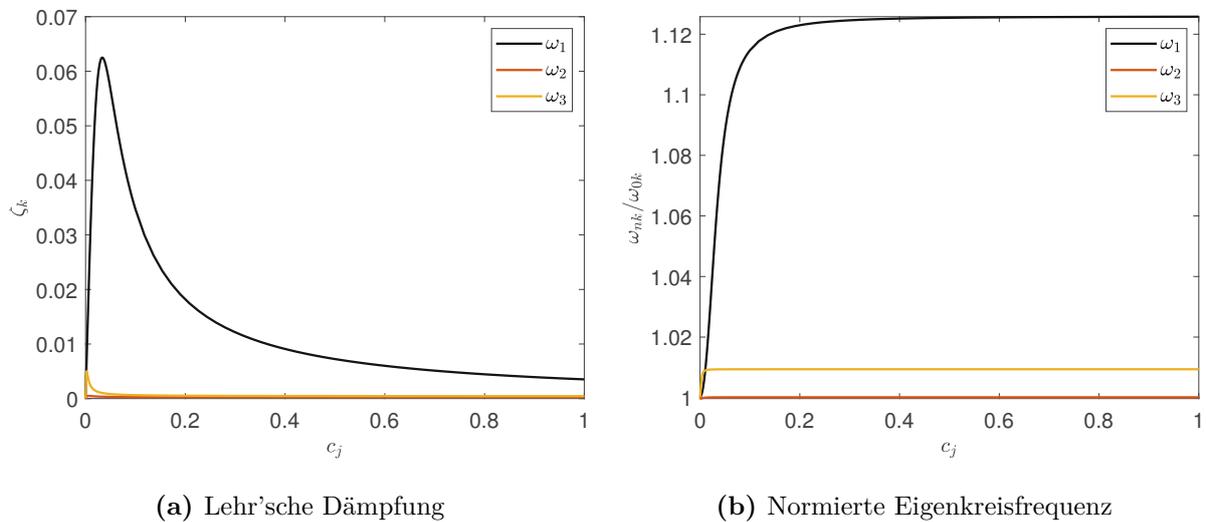


Abb. 4.9: Abhängigkeit von Dämpfung (a) und Eigenkreisfrequenz (b) von der viskosen Dämpfung c_j für $k_j = -0, 3$

Umgekehrt verhält es sich, wenn k_j negativ ist, also ein NSDOS installiert wird. In Abbildung 4.9 wird dieser Umstand für $k_j = -0, 3$ verdeutlicht. $\zeta_{1,max} = 6,3\%$ ist deutlich größer als bei $k_j = 0$ und $\omega_{n,k}$ steigt auch stärker. In diesem Fall verstärkt das NSE die Bewegung des Dämpfers, wodurch mehr Energie dissipiert werden kann. Aufgrund dieses Effekts wird im Folgenden nur noch $k_j \leq 0$ untersucht, siehe auch Abschnitt 4.2.1.4.

Änderung von b_j Wird die Trägheit des Inerters erhöht und gilt $k_j = 0$, ergibt sich ein IDOS. In den Abbildungen 4.10 und 4.11 ist dargestellt, wie sich ζ_k und $\omega_{n,k}$ für die Trägheiten $b_j = 0, 1$ und $0,01$ verhält. Für $b_j = 0, 1$ beträgt $\zeta_{1,max} = 0,53\%$ und liegt für die erste Eigenfrequenz bei $c_{j,opt} = 0,352$. Die höheren Eigenfrequenzen haben eine vernachlässigbare modale Dämpfung. Sinkt b_j auf einen Wert von $0,01$, so steigt die maximale modale Dämpfung auf einen Wert von $\zeta_{1,max} = 8,4\%$ bei $c_{j,opt} = 0,05$. In diesem Fall ist der Inerter nach Studie [32] auf die erste Eigenfrequenz abgestimmt und die Dämpfung ist deutlich höher als ohne Inerter. Allerdings muss auch c_j sehr genau getroffen werden, um das Optimum zu erreichen, da der Anstieg neben dem Extrempunkt sehr groß ist. Auch die Eigenkreisfrequenz verändert sich stark mit zunehmendem c_j . Tatsächlich ist die erste Eigenkreisfrequenz $\omega_{n,1} = 3,8035 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ für $c_j = 0$, also schon um 8% größer als ohne Inerter. Das bedeutet, dass selbst die geringe Trägheit des Inerters die Eigenfrequenz stark verändert. Für $b_j = 0, 1$ ist sie noch höher und liegt bei $\omega_{n,1} = 3,8472 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

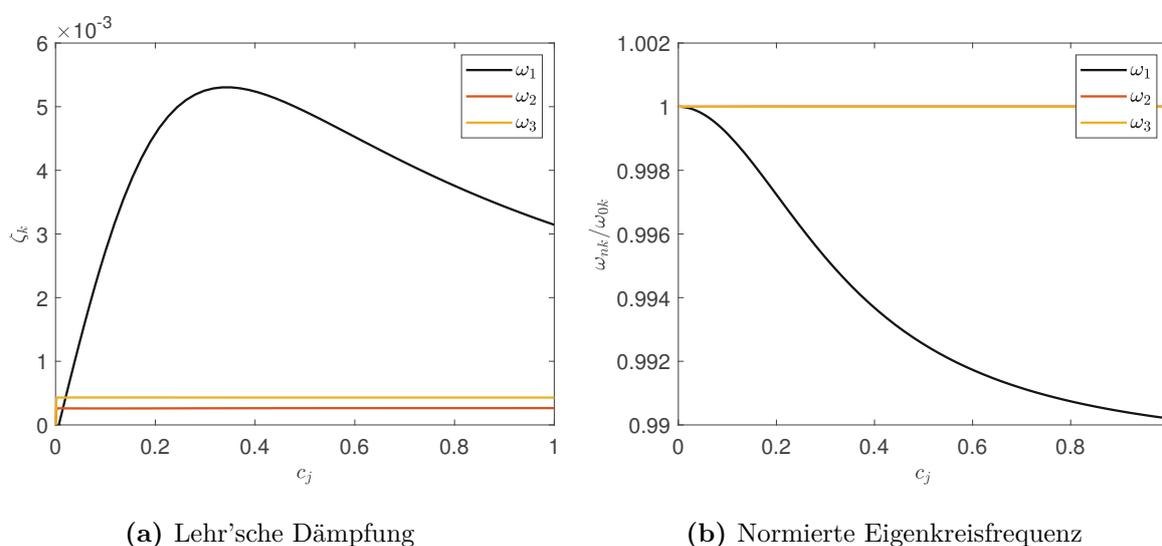


Abb. 4.10: Abhängigkeit von Dämpfung (a) und Eigenkreisfrequenz (b) von der viskosen Dämpfung c_j für $b_j = 0, 1$

Wen et al. haben in ihrer Studie [32] die IDOS und eine Kombination aus IDOS und NSDOS stärker untersucht. So ist die optimale Trägheit des Inerters für die erste Eigenfrequenz und $\alpha = 0,5$ die Trägheit $b_{j,1,opt} = 0,01$. Für genauere Angaben und Parameterstudien zu diesen beiden Systemen wird auf die angegebene Studie verwiesen, sowie auf die Zusammenfassung in Abschnitt 3.5.1.2.

Änderung von p_{Sj} Die Veränderung des Steifigkeitsverhältnisses p_{Sj} zwischen Stütze und Kern hat auch starke Auswirkungen auf das Verhalten von ζ_k . Abbildung 4.12a zeigt das Dämpfungsverhalten des Tragwerks bei $p_{Sj} = 2$, Abbildung 4.12b für $p_{Sj} = 20$. Es ist deutlich zu sehen, dass sich die maximal mögliche Lehr'sche Dämpfung stark vergrößert, wenn p_{Sj} kleiner wird. Umgekehrt sinkt $\zeta_{k,opt}$ stark ab, wenn sich p_{Sj} vergrößert. Ein möglichst kleines p_{Sj} ist also empfehlenswert. Das würde allerdings bedeuten, dass die Dehnsteifigkeit der Stützen sehr groß im Vergleich zur Biegesteifigkeit des Kerns ist und, dass der Abstand $2R$ zwischen den Stützen auch möglichst groß wird. Ein weicher Kern hat allerdings Nachteile in anderen Bereichen und sehr steife Außenstützen sind oftmals ökonomisch nicht sinnvoll. Entsprechend muss eine Abwägung getätigt werden, in der ökonomische gegen baodynamische Aspekte gewichtet werden. Mehr dazu in Abschnitt 4.2.1.5.

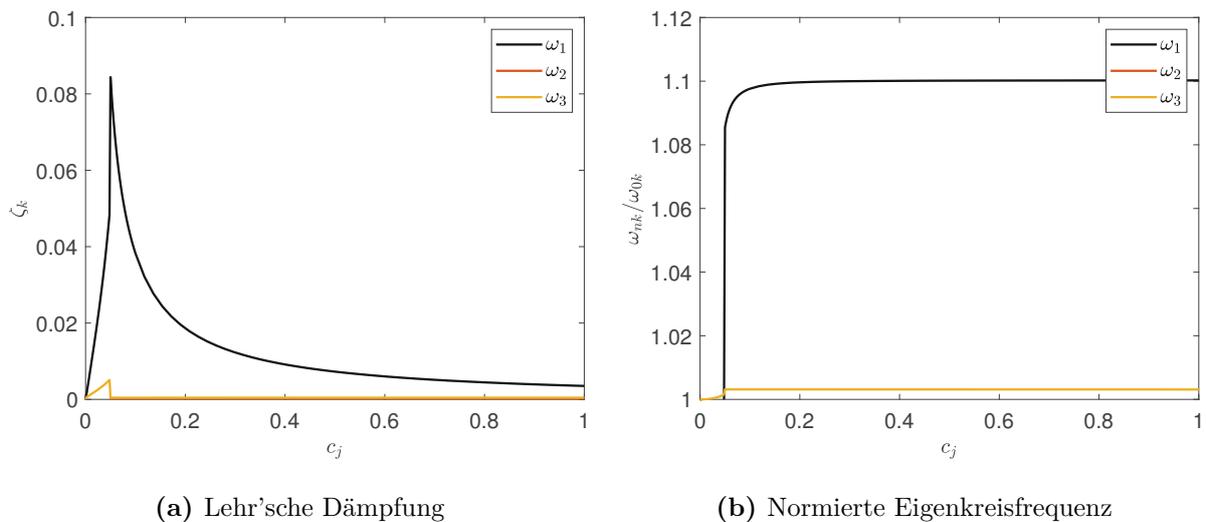


Abb. 4.11: Abhängigkeit von Dämpfung (a) und Eigenkreisfrequenz (a) von der viskosen Dämpfung c_j für $b_j = 0,01$

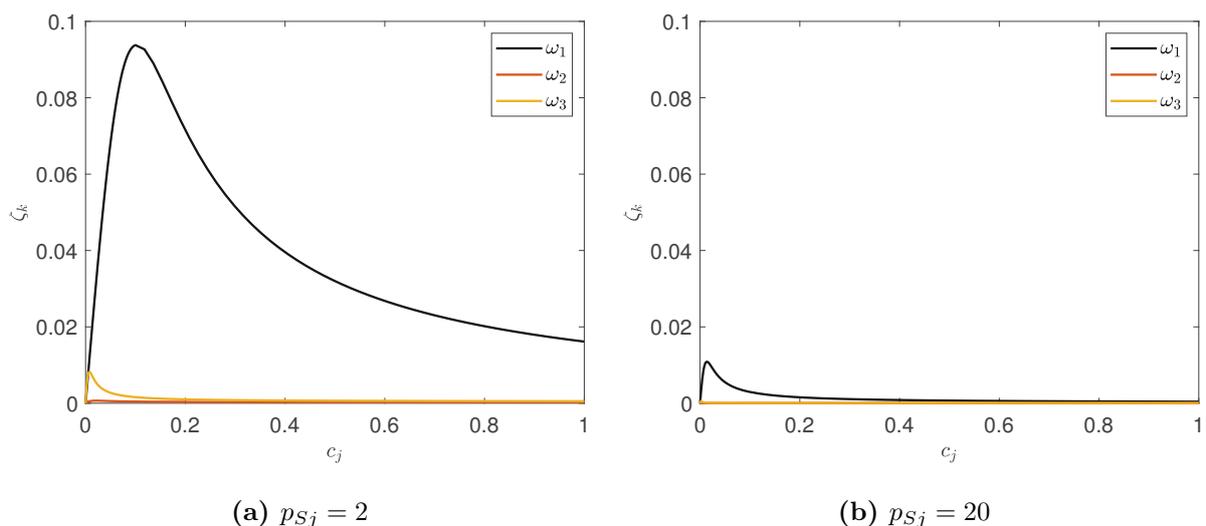


Abb. 4.12: Abhängigkeit von der Lehr'schen Dämpfung von der viskosen Dämpfung c_j für $p_{Sj} = 2$ (a) und $p_{Sj} = 20$ (b)

Änderung von α_j Eine Änderung der Position des DOS hat auch Effekte auf die Dämpfung des Gebäudes. In Abbildung 4.13 ist dieser Effekt dargestellt, für $\alpha_1 = 0,75$ und für $\alpha_1 = 1$. Es ist gut ersichtlich, dass nun die zweite Eigenschwingung eine stärkere Dämpfung erfährt als bei $\alpha_1 = 0,5$, sogar stärker als die dritte Eigenschwingung. Allerdings sinken die Dämpfungen von erster und dritter Eigenmode ab. In Abschnitt 4.2.1.3 wird dieser Umstand erneut betrachtet.

4.2.1.2 Veränderung der frequenzunabhängigen Dämpfung Φ_j

Wenn kein viskoses Dämpferelement eingebaut wird, sondern ein FUD, wird das System zu einem FUDOS. In Abbildung 4.14a ist dargestellt, wie sich die modale Lehr'sche Dämpfung des Hochhauses ζ_k mit steigendem Φ_j verhält. Analog zur viskosen Dämpfung steigt ζ_k bis zu

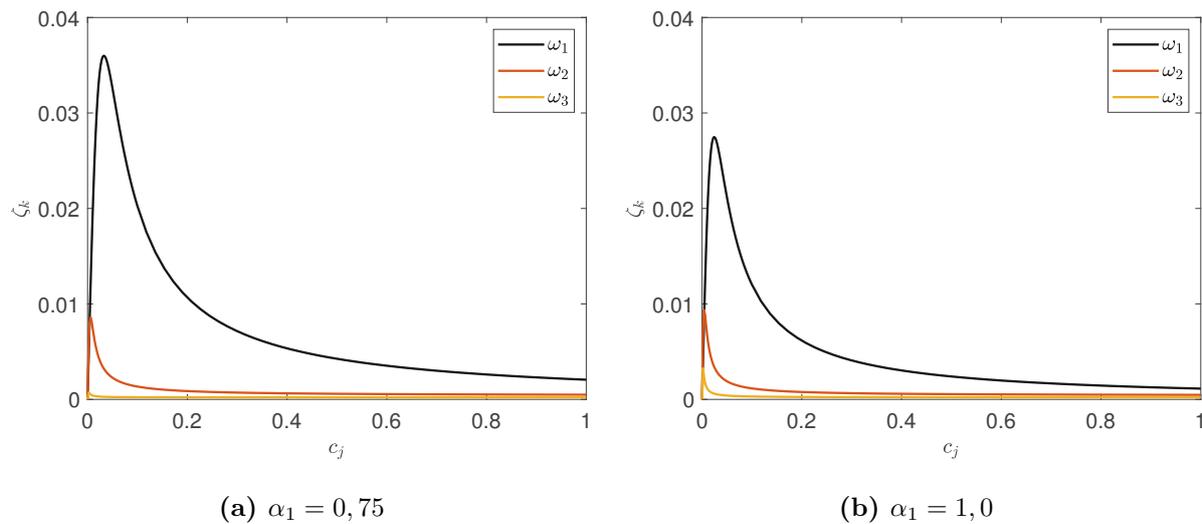


Abb. 4.13: Abhängigkeit der Lehr'schen Dämpfung von der viskosen Dämpfung c_j für unterschiedliche Positionen α_1 des DOS

einem Maximum stark an und fällt dann langsam wieder ab bis Null für $\Phi_j \rightarrow \infty$. Die maximale Dämpfung der ersten Mode wird für $\Phi_{1,opt} = 0,9$ erreicht mit $\zeta_{1,max} = 3,92\%$. Es gibt demnach ähnlich hohe Werte für die Dämpfung wie bei viskosen Dämpfern. Der große Unterschied liegt bei den Eigenschwingungen 2 und 3: diese haben auch bei $\Phi_{opt} \approx 0,9$ ihr Maximum. Das bedeutet, wenn ein FUDOS mit Φ_{opt} eingebaut wird, werden alle Eigenschwingungen optimal gedämpft. Der Grund der unterschiedlichen Höhe von $\zeta_{1,max} > \zeta_{3,max} > \zeta_{2,max}$ liegt ausschließlich an der Position der Outrigger. Wie schon in Abschnitt 4.2.1.1 beschrieben, liegt ein Knotenpunkt der 2. Eigenschwingung in der Nähe von $0,5H$, wodurch dort die Bewegung und deshalb auch die Dämpfung geringer ist. Ein weiterer Unterschied zu KDOS ist, dass sich Φ_j relativ stark verändern kann und trotzdem werden noch Dämpfungen nah am Optimum erreicht. Das hat den Vorteil, dass in Realität eingebaute FUD nicht extrem genau auf die Steifigkeiten des Hochhauses abgestimmt werden müssen. Durch die vielen Ungenauigkeiten und Toleranzen bei Baustoffen sind diese Steifigkeiten nur durch Messungen bestimmbar, außerdem können sie sich im Laufe der Lebenszeit des Hochhauses ändern. Auch dann wäre das FUDOS noch effektiv.

Abbildung 4.14b stellt die Abhängigkeit der Eigenkreisfrequenz $\omega_{n,k}$ von Φ_j dar. Analog zu c_j wächst auch hier das normierte $\omega_{n,k}$ mit steigendem Φ_j und nähert sich einem Wert zwischen 1,00 und 1,08 an, je nach Eigenschwingung.

Änderung von k_j Eine Änderung von k_j hat denselben Effekt wie bei viskosen DOS, siehe Abbildung 4.15. Für $k_j = -0,3$ kann die erste Eigenfrequenz um maximal $\zeta_{1,max} = 5,9\%$ gedämpft werden, was einer Vergrößerung von ca. 50% gegenüber $k_j = 0$ entspricht.

Änderung von p_{Sj} Analog zu Abschnitt 4.2.1.1 hat auch bei FUDOS die Veränderung des Steifigkeitsverhältnisses p_{Sj} große Auswirkungen auf ζ_k . Dieser Umstand wird in Abbildung 4.16 veranschaulicht. Weitere Ausführungen zu diesem Effekt sind in Abschnitt 4.2.1.5 zu finden.

Änderung von α_j Auch bei der Veränderung der Position des Outriggers gibt es Veränderungen des Dämpfungsverhaltens des Systems. Im Abschnitt 4.2.1.3 wird näher auf dieses Prinzip eingegangen.

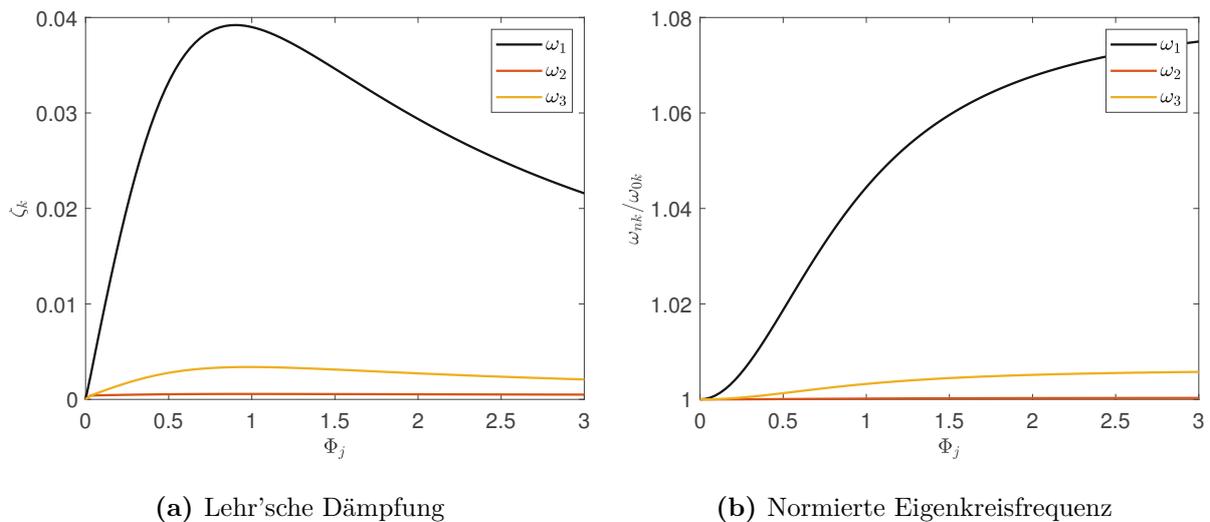


Abb. 4.14: Abhängigkeit von Dämpfung (a) und Eigenkreisfrequenz (b) von der frequenzunabhängigen Dämpfung Φ_j

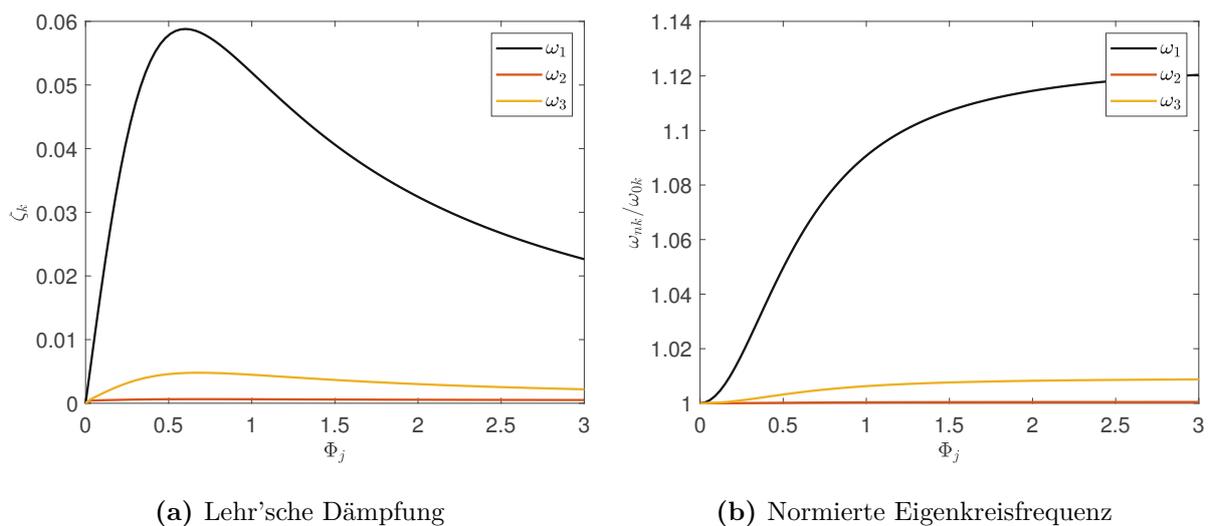


Abb. 4.15: Abhängigkeit von Dämpfung (a) und Eigenkreisfrequenz (b) von der frequenzunabhängigen Dämpfung Φ_j für $k_j = -0,3$

4.2.1.3 Optimale Position des DOS

Die optimale Position des Outrigger-Geschosses bezüglich der maximalen modalen Dämpfung lässt sich aus Abbildung 4.17a ablesen: Für die erste Eigenschwingung liegt die optimale Position auf $\alpha_1 = 0,5$. Für höhere Eigenschwingungen gibt es mehrere Optima, für die k -te Eigenschwingung sind k Optima vorhanden. Ist es das Ziel, für die ersten drei Eigenfrequenzen je eine gute Dämpfung zu erreichen, dann gibt es zwei Positionen dafür: $\alpha_1 = 0,15$ und $\alpha_1 = 0,9$. Diese Positionen liegen nah an den Optima der zweiten und dritten Eigenfrequenz, während die erste Eigenschwingung trotzdem relativ hohe modale Dämpfungen hat. Aus Abbildung 4.17b ist aber ersichtlich, dass $\alpha_1 = 0,9$ einen großen Vorteil gegenüber $\alpha_1 = 0,15$ hat: die erforderliche viskose Dämpfung des DOS $c_{k,opt}$ ist deutlich geringer. Zudem liegen die Werte von $c_{k,opt}$ für

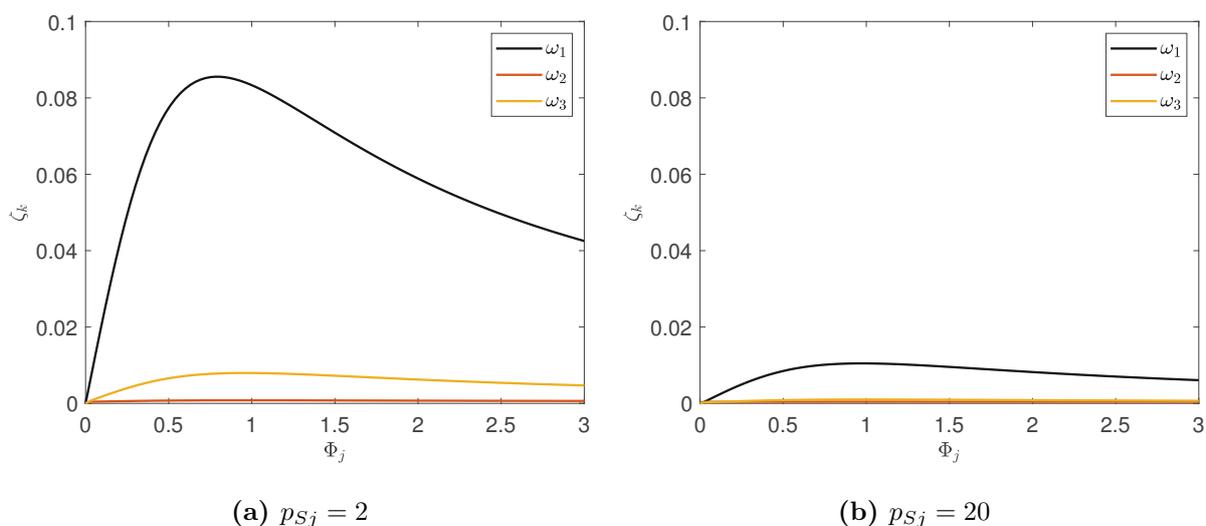


Abb. 4.16: Abhängigkeit der Dämpfung von der frequenzunabhängigen Dämpfung Φ_j für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse p_{Sj}

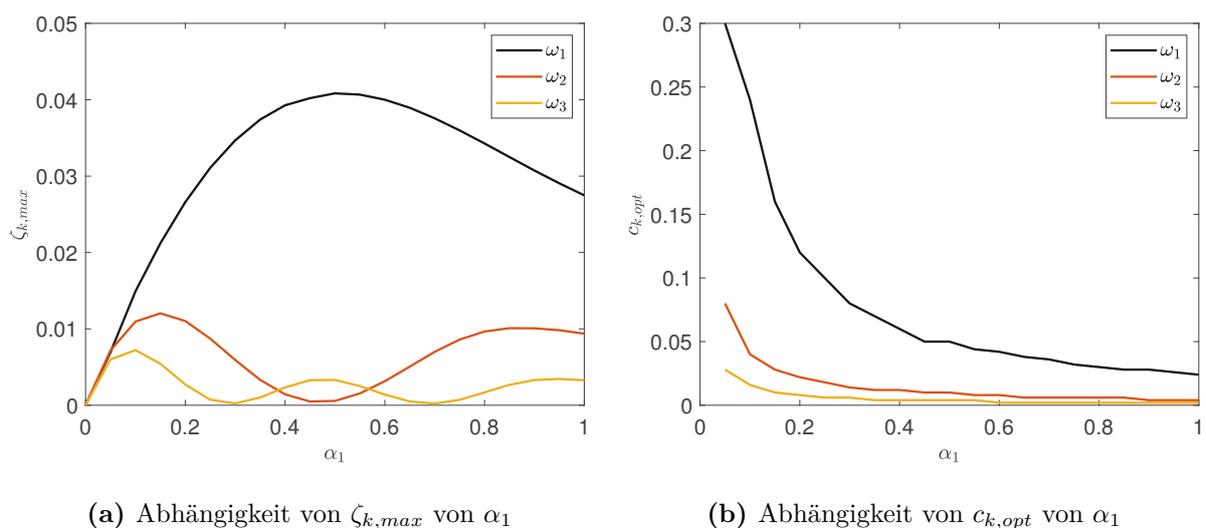


Abb. 4.17: Abhängigkeit von maximaler modaler Dämpfung (a) und optimaler viskoser Dämpfung (b) von der Position des DOS α_1 für $p_{Sj} = 5$

die drei ersten Eigenschwingungen näher beisammen, wodurch bei einer Abstimmung auf eine Eigenfrequenz weiterhin eine Dämpfung für die weiteren Frequenzen vorhanden ist.

Für ein FUDOS ist der Zusammenhang zwischen $\zeta_{k,max}$ und α_1 ähnlich wie bei einem KDOS, siehe Abbildung 4.18a. Der große Unterschied liegt in Abbildung 4.18b; hier ist dargestellt, dass sich die optimale frequenzunabhängige Dämpfung $\Phi_{k,opt}$ nicht stark mit der Veränderung von α_1 ändert. Für jede der drei ersten Eigenschwingungen liegt der Wert zwischen $0,8 \leq \Phi_{k,opt} \leq 1,0$. Das bedeutet, dass bei der Wahl eines $\Phi_j = 0,90$ alle drei Schwingungen nahezu optimal gedämpft werden, unabhängig von der Position des FUDOS.

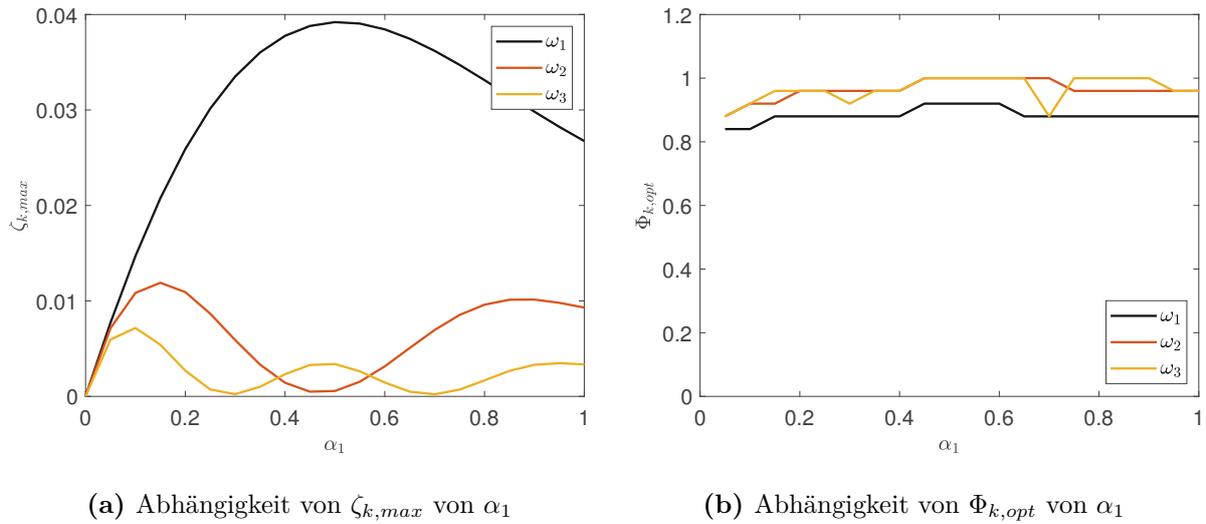


Abb. 4.18: Abhängigkeit von maximaler modaler Dämpfung (a) und optimaler frequenzunabhängiger Dämpfung (b) von der Position des DOS α_1 für $p_{Sj} = 5$

4.2.1.4 Optimale negative Steifigkeit des DOS

In Abbildung 4.19 ist dargestellt, wie sich für $p_{Sj} = 5$ und $\alpha = 0,5$ die maximalen modalen Dämpfungen $\zeta_{k,max}$ und die optimalen viskosen Dämpfungen $c_{k,opt}$ in Abhängigkeit von k_j verändern. Zu beachten ist dabei besonders die erste Eigenschwingung. Die Dämpfung der ersten Mode steigt stark mit abnehmendem k_j . Gleichzeitig nimmt die optimale viskose Dämpfung ab. Das bedeutet, dass durch den Einbau von NSE in ein DOS die Dämpfung erhöht und gleichzeitig die Kosten für den viskosen Dämpfer reduziert werden können. Ein solches Vorgehen ist somit zu empfehlen. Positive Federsteifigkeiten haben dagegen einen negativen Effekt auf die Dämpfung. Von der Nutzung von viskoelastischen Dämpfern ist abzuraten.

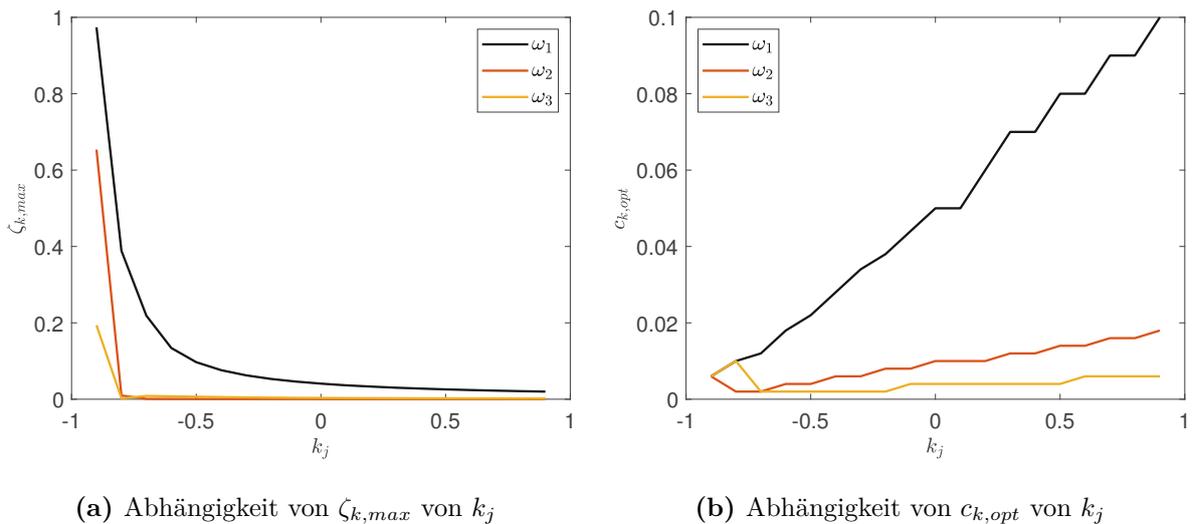


Abb. 4.19: Abhängigkeit von maximaler modaler Dämpfung (a) und optimaler viskoser Dämpfung (b) von der Federsteifigkeit k_j für $p_{Sj} = 5$ und $\alpha = 0,5$

Für FUDOS ergibt sich ein ähnliches Bild, siehe Abbildung 4.20. Hier lässt sich auch erkennen,

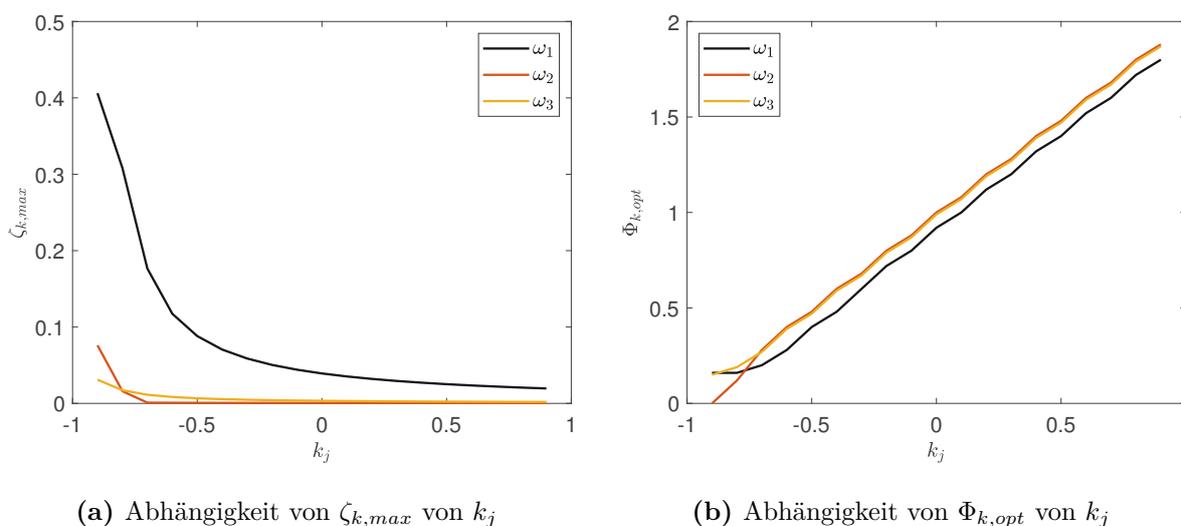


Abb. 4.20: Abhängigkeit von maximaler modaler Dämpfung (a) und optimaler frequenzunabhängiger Dämpfung (b) von der Federsteifigkeit k_j für $p_{Sj} = 5$ und $\alpha = 0,5$

dass für höhere Eigenfrequenzen die gleichen Zusammenhänge zwischen k_j , $\zeta_{k,max}$ und $\Phi_{k,opt}$ herrschen wie für die erste Eigenfrequenz. Es wird zudem deutlich, dass $\Phi_{k,opt}$ für die ersten drei Eigenfrequenzen nah beieinander liegt, wie bereits im vorherigen Abschnitt 4.2.1.3 festgehalten. Wird der FUD also für eine Eigenfrequenz konfiguriert, werden trotzdem die weiteren Eigenfrequenzen relativ stark gedämpft.

4.2.1.5 Optimale Steifigkeit der Stützen

Die optimale Steifigkeit der Stützen bezüglich der modalen Dämpfungen lässt sich an Abbildung 4.21a ablesen: je geringer p_{Sj} , desto höhere modale Lehr'sche Dämpfungswerte lassen sich erreichen. Das gilt für jede der drei ersten Eigenmoden. Dabei ist der Zusammenhang nicht proportional, vielmehr steigt die maximale Dämpfung mit abnehmendem p_{Sj} stärker an. Allerdings muss für ein höheres ζ_k die viskose Dämpfung c_j erhöht werden, um dieses Optimum zu erreichen, wie aus Abbildung 4.21b ersichtlich wird.

Es ist somit von Vorteil, wenn die Stützen sehr steif sind und der Kern sehr weich. Das lässt sich damit erklären, dass die Verschiebungen in den Dämpfern größer werden, je weicher der Kern ist. Umgekehrt verhält es sich bei den Stützen; je weicher diese Tragelemente werden, desto mehr dehnen sie sich unter Normalkräften. Dadurch, dass sie sich verformen, gibt es weniger Dehnungen im viskosen Dämpferelement. Eine geringere Dämpfung ist die Folge. Dieser Zusammenhang wurde bereits in Abschnitt 3.4.1.2 erläutert. Eine Lösung des Problems, ohne den Kern sehr weich und die Stützen sehr steif zu entwerfen, ist die Nutzung von einem NSE, das zum viskosen Dämpfer parallelgeschaltet wird.

Schon geringe negative Steifigkeiten k_j können einen positiven Effekt haben und trotz weicherer Stützen eine höhere modale Dämpfung bewirken. Das zeigt Abbildung 4.22a für die erste Eigenfrequenz. Allerdings ist ab $p_{Sj} = 15$ die Wirkung des NSE kaum mehr erkennbar. Eine gewisse Steifigkeit sollten die Stützen also doch haben. Den größten Unterschied machen die NSE bei einem sehr kleinen p_{Sj} . Auch die optimalen viskosen Dämpfungen nehmen mit k_j ab, wie in Abbildung 4.22b dargestellt ist. Ähnliche Ergebnisse bezüglich der Werte von p_{Sj} und k_j gibt es auch für frequenzunabhängige Dämpfer.

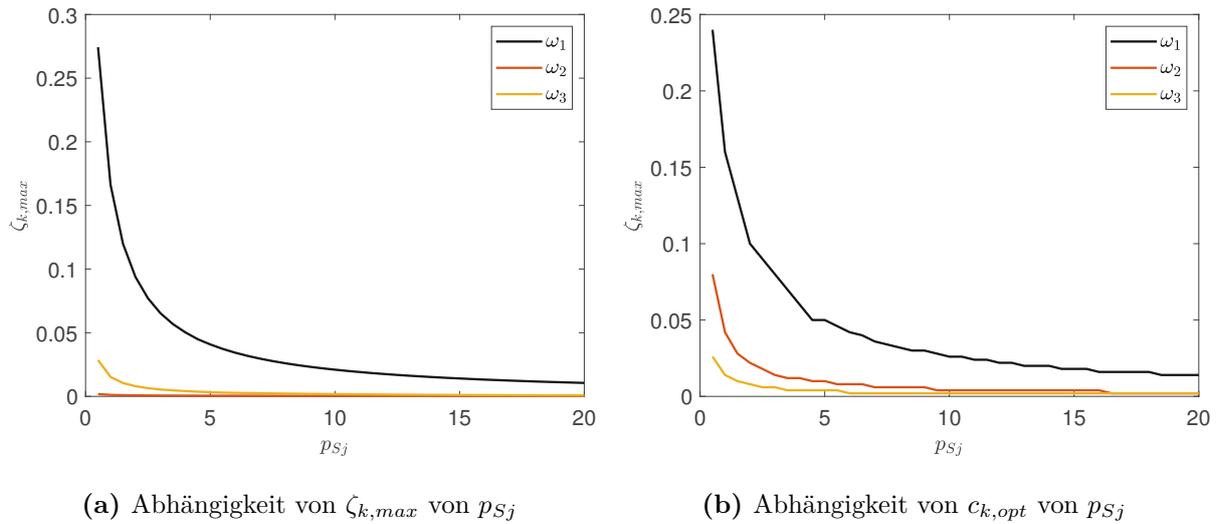


Abb. 4.21: Abhängigkeit von maximaler modaler Dämpfung und optimaler viskoser Dämpfung vom Steifigkeitsverhältnis p_{Sj} für $\alpha = 0,5$

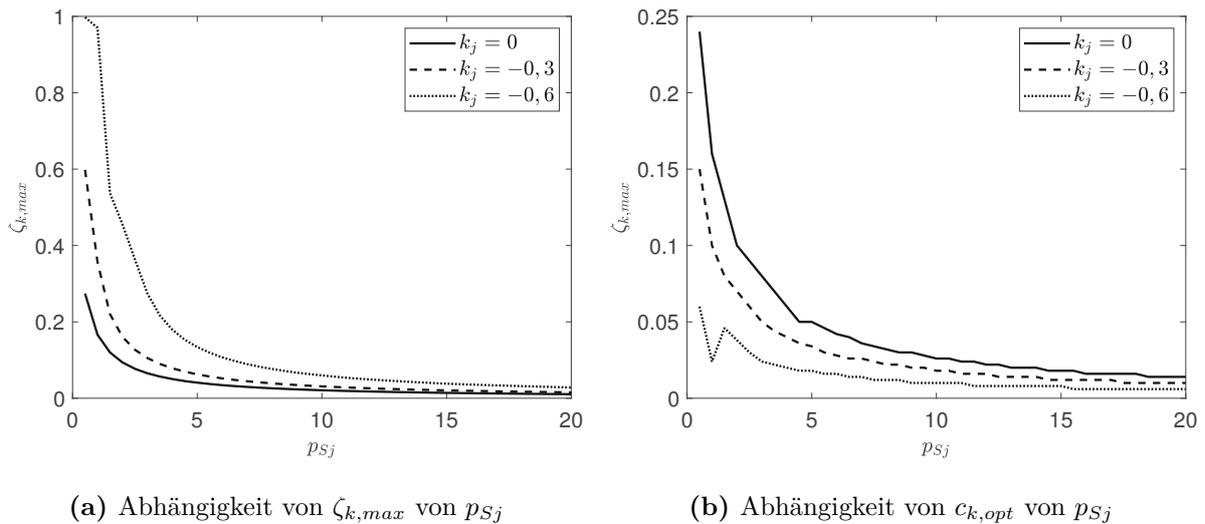


Abb. 4.22: Abhängigkeit von maximaler modaler Dämpfung (a) und optimaler viskoser Dämpfung (b) der ersten Eigenfrequenz vom Steifigkeitsverhältnis p_{Sj} und der negativen Steifigkeit k_j für $\alpha = 0,5$

4.2.2 Zwei über die Gebäudehöhe verteilte DOS

Im Fall vom Einbau von zwei DOS im Hochhaus verdoppelt sich die Anzahl an Dämpferelementen. Dadurch steigt auch die erreichbare modale Lehr'sche Dämpfung an, wie die Abbildung 4.23 für $p_{Sj} = 5$, $\alpha_1 = 0,5$ und $\alpha_2 = 1$ verdeutlicht. Werden zwei KDOS installiert, ergibt sich für die erste Eigenschwingung eine maximale modale Dämpfung von $\zeta_{1,max} = 6,21\%$ bei $c_{1,opt} = 0,034$. Durch das zusätzliche DOS im obersten Geschoss des Hochhauses wird die Dämpfung um 51% gegenüber einem einzelnen DOS bei $\alpha_1 = 0,5$ erhöht. Auch für die höheren Eigenmoden gibt es Steigerungen der Dämpfung; so nimmt die maximale Lehr'sche Dämpfung der zweiten Eigenschwingung um über 130% auf $\zeta_{2,max} = 0,95\%$ zu, während für die dritte Eigenschwingung eine Dämpfung von

$\zeta_{3,max} = 0,61\%$ erreicht werden kann. Ein ähnliches Bild zeigt sich auch für den Einbau von zwei FUDOS. Hier kann die erste Eigenschwingung um $\zeta_{1,max} = 6,25\%$ bei $\Phi_{1,opt} = 0,84$ gedämpft werden.

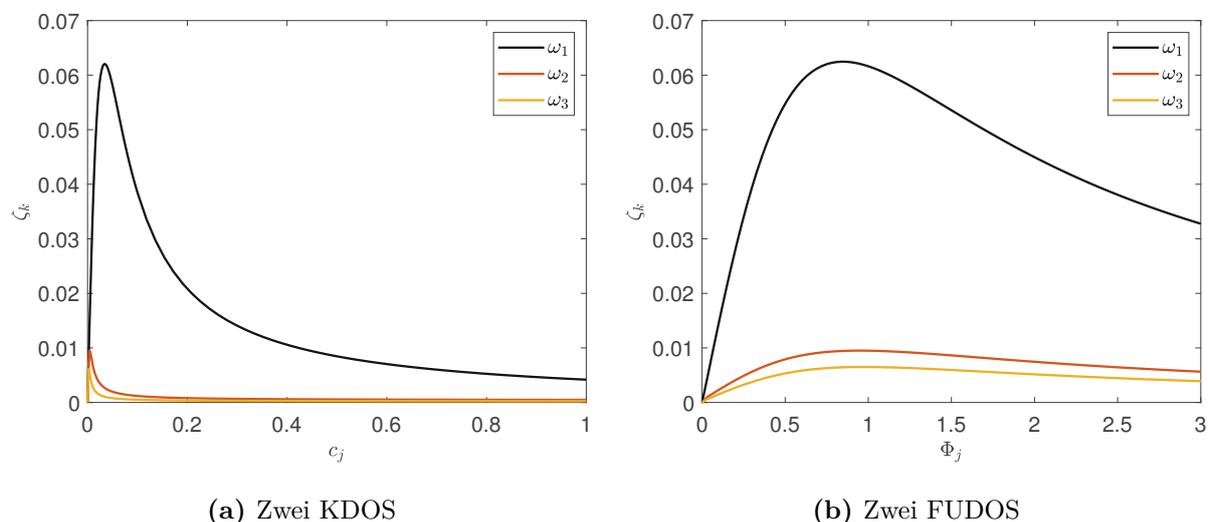


Abb. 4.23: Abhängigkeit der modalen Dämpfung eines Hochhauses mit zwei DOS von der viskosen (a) bzw. frequenzunabhängigen Dämpfung (b) für $p_{Sj} = 5$, $\alpha_1 = 0,5$ und $\alpha_2 = 1,0$

Werden zwei DOS verwendet, so hat das den Vorteil, dass die Optima von mehreren Eigenschwingungen (siehe Abschnitt 4.2.1.3) getroffen werden können. Dadurch haben die zweite und dritte Eigenschwingung so viel stärkere Dämpfungen.

4.3 Anwendung der DOS auf ein reales Hochhaus (DC2-Tower)

Um die Auswirkungen von DOS besser zu veranschaulichen, ist es angebracht, ihre Anwendung bei einem realen Hochhaus zu untersuchen. Dafür wurde der *DC2-Tower* in der Wiener Donau-City gewählt. Mit der Errichtung dieses Hochhauses wurde Anfang 2022 begonnen, die Fertigstellung ist für 2026 geplant. Zum Zeitpunkt des Erstellens dieser Arbeit fanden die Rohbauarbeiten statt. Die *S+B Gruppe* ist mit dem Bau beauftragt, der Grundeigentümer ist die *Commerz Real Investmentgesellschaft mbH*, gebaut wird das Hochhaus von der *PORR AG* [40].

Der DC2-Tower wird ein quaderförmiges Hochhaus mit $H = 175$ m Höhe, einer Grundfläche von $A_G \approx 59,5 \text{ m} \cdot 25,9 \text{ m} \approx 1540 \text{ m}^2$ und 53 Geschossen. Die Geschosshöhe beträgt $h = 3,30$ m und die Gesamtnutzfläche ist $A_{Nutz} \approx 62,800 \text{ m}^2$. Diese Fläche wird in den unteren 30 Geschossen größtenteils für Büros genutzt, darüber sind vorwiegend Wohnungen vorgesehen [40],[41]. Das Hochhaus wird neben den beiden anderen Gebäuden der DC-Tower-Gruppe errichtet: dem 250 m hohen DC1-Tower und dem kleineren DC3-Tower ($H = 100$ m).

Der DC2-Tower hat einen viergeteilten Stahlbetonkern und 4 innere, sowie 36 äußere Stahlbetonstützen. Der Kern besteht aus unterschiedlich dicken Wänden, die sich vom Fundament bis zum Dach erstrecken. Der Großteil der äußeren Stützen haben die Abmessung $A_{S1} = 100 \text{ cm} \cdot 102,5 \text{ cm} = 10250 \text{ cm}^2 = 1,025 \text{ m}^2$, es gibt aber auch vier breitere Stützen mit $A_{S2} = 1,44 \text{ m}^2$. Die Wände des Kerns und die Stützen bestehen im Erdgeschoss aus Beton der Festigkeitsklasse C50/60 und der Expositionsklasse XC1. Über die Höhe nimmt sowohl die Dicke der Wände als auch die Festigkeitsklasse der Stützen ab. Im Folgenden wird allerdings auf

Annahme, dass der Kern eingespannt ist, ist somit gerechtfertigt.

Die Querschnittswerte des Kerns wurden mithilfe des Programms *Dlubal RSECTION 1.02* ermittelt. Dafür wurden die y - und die z -Achse nach Abbildung 4.24 (Mitte) angenommen. Folgende Parameter weist das Hochhaus auf:

- Höhe: $H = 175$ m,
- Masse pro Längeneinheit inklusive 30% der Nutzlasten nach [10]: $\mu \approx 700000 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$,
- Elastizitätsmodul des Kerns und der Stützen (Beton C50/60): $E = 37,0 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$,
- Flächenträgheitsmoment des Kerns um die y -Achse: $I_{yK} \approx 12300 \text{ m}^4$,
- Flächenträgheitsmoment des Kerns um die z -Achse: $I_{zK} \approx 520 \text{ m}^4$,
- y -Abstand Achse der Stützen zu Achse des Kerns: $R_y = 11,2 \text{ m}^4$,
- z -Abstand Achse der Stützen zu Achse des Kerns: $R_z = 27,3 \text{ m}^4$,
- Flächeninhalt der dünneren Stützen (100x102,5 cm): $A_{S1} = 1,025 \text{ m}^2$,
- Flächeninhalt der breiteren Stützen (120x120 cm): $A_{S2} = 1,44 \text{ m}^2$ und
- Flächeninhalt der Eckstützen (55x55 cm): $A_{S3} = 0,303 \text{ m}^2$.

Daraus ergeben sich die Parameter für die Berechnung, siehe Abschnitt 4.1.2:

- Steifigkeitsverhältnis Stütze-Kern für Biegung um die y -Achse, angenommen sind zwei Outrigger-Konstruktionen pro Seite:

$$p_{ySj} = \frac{EI_{yK}}{2 \cdot 2EA_{S1}R_z^2} = 4,025, \quad (4.68)$$

- Grundkreisfrequenz des Kerns ohne Outrigger für Biegung um die y -Achse:

$$\omega_{y0} = \sqrt{\frac{\mu H^4}{EI_{yK}}} = 0,8326 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad (4.69)$$

- Steifigkeitsverhältnis Stütze-Kern für Biegung um die z -Achse, angenommen sind zwei Outrigger-Konstruktionen pro Seite:

$$p_{zSj} = \frac{EI_{zK}}{2 \cdot 2EA_{S2}R_y^2} = 0,720 \text{ und} \quad (4.70)$$

- Grundkreisfrequenz des Kerns ohne Outrigger für Biegung um die z -Achse:

$$\omega_{z0} = \sqrt{\frac{\mu H^4}{EI_{zK}}} = 0,1712 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (4.71)$$

Werden die Werte von ω_{y0} und ω_{z0} mit den Eigenwerten λ_k der charakteristischen Gleichung (4.50) für den ungedämpften Kern ohne Outrigger ($c_j = \Phi_j = k_j = b_j = 0$) nach Abschnitt 4.2.1 multipliziert, ergeben sich nach Gleichung 4.72

$$\omega_{n,k} = |i\omega_k| = |i\omega_0\lambda_k^2| \quad (4.72)$$

die folgenden ersten vier Biegeeigenkreisfrequenzen des DC2-Towers:

$$\begin{aligned}\omega_{y,n,1} &= 2,927 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \omega_{z,n,1} &= 0,602 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\ \omega_{y,n,2} &= 18,35 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \omega_{z,n,2} &= 3,772 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\ \omega_{y,n,3} &= 51,37 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \omega_{z,n,3} &= 16,56 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ und} \\ \omega_{y,n,4} &= 100,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \omega_{z,n,4} &= 20,70 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.\end{aligned}\tag{4.73}$$

Die ersten Eigenfrequenzen nach FE-Berechnung sind in der Statik $f_{y,1} = 0,27$ Hz und $f_{z,1} = 0,15$ Hz [10]. Verglichen mit den Eigenfrequenzen der hier durchgeführten Berechnung

$$\begin{aligned}f_{y,n,1} &= \frac{\omega_{y,n,1}}{2\pi} = 0,4659 \text{ Hz und} \\ f_{z,n,1} &= \frac{\omega_{z,n,1}}{2\pi} = 0,0958 \text{ Hz,}\end{aligned}\tag{4.74}$$

wird deutlich, dass die Eigenfrequenzen im gleichen Bereich liegen, wobei die Eigenfrequenz für die Biegung um die y -Achse leicht über- und die Frequenz für die Biegung um die z -Achse leicht unterschätzt wird. Zur realistischeren Berechnung in den folgenden Schritten werden deshalb die Steifigkeiten EI_K angepasst:

$$\begin{aligned}I_{yK,neu} &= 0,33 \cdot I_{yK,alt} = 4059 \text{ m}^4 \text{ und} \\ I_{zK,neu} &= 2,5 \cdot I_{zK,alt} = 1300 \text{ m}^4.\end{aligned}\tag{4.75}$$

Diese Anpassung ist zulässig, weil einerseits der Querschnitt des Kerns mit der Höhe abnimmt, weshalb $I_{yK,alt}$ für den gesamten Kern stark überschätzt wird. Andererseits gibt es in y -Richtung in höheren Geschossen Unterzüge und Wände, die den Kern mit den äußeren Stützen verbinden und die Steifigkeit stark erhöhen, wodurch $I_{zK,alt}$ eine Unterschätzung des realen Trägheitsmoments darstellt. Es ergeben sich nach der Anpassung der Steifigkeiten folgende neue Eigenkreisfrequenzen:

$$\begin{aligned}\omega_{y,n,1} &= 1,681 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \omega_{z,n,1} &= 0,952 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\ \omega_{y,n,2} &= 10,54 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \omega_{z,n,2} &= 5,964 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \\ \omega_{y,n,3} &= 29,51 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \omega_{z,n,3} &= 16,70 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ und} \\ \omega_{y,n,4} &= 57,83 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, & \omega_{z,n,4} &= 32,73 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.\end{aligned}\tag{4.76}$$

Das Hochhaus hat somit nach ausgeführter Anpassung die folgenden Biegeeigenfrequenzen

$$\begin{aligned}f_{y,n,1} &= 0,268 \text{ Hz}, & f_{z,n,1} &= 0,152 \text{ Hz}, \\ f_{y,n,2} &= 1,677 \text{ Hz}, & f_{z,n,2} &= 0,949 \text{ Hz}, \\ f_{y,n,3} &= 4,696 \text{ Hz}, & f_{z,n,3} &= 2,658 \text{ Hz und} \\ f_{y,n,4} &= 9,203 \text{ Hz}, & f_{z,n,4} &= 5,209 \text{ Hz}.\end{aligned}\tag{4.77}$$

Die neuen Steifigkeitsverhältnisse zwischen Stützen und Kern ergeben sich entsprechend zu

$$p_{ySj,neu} = \frac{EI_{yK,neu}}{2 \cdot 2EA_{S1}R_z^2} = 1,3283 \text{ und} \quad (4.78)$$

$$p_{zSj,neu} = \frac{EI_{zK,neu}}{2 \cdot 2EA_{S2}R_y^2} = 1,7992. \quad (4.79)$$

$$(4.80)$$

Wie in der Parameterstudie im Abschnitt 4.2.1.5 gezeigt, haben Werte von $p_{Sj} < 2$ einen positiven Effekt auf die maximal möglichen modalen Dämpfungen. Der DC2-Tower empfiehlt sich also für eine Installation von DOS.

4.3.1 Eigenschwingung des Gebäudes

Mit den durch den APA für eine individuelle Parameterkombination berechneten Werten für λ_k lassen sich die Eigenfunktionen $Y_k(\xi)$ ermitteln. Dafür müssen die Werte λ_k in die Gleichung (4.44) eingesetzt werden. Für ein einzelnes DOS im Hochhaus ergibt sich dann folgende Gleichung für die k -te Eigenschwingung

$$Y_k(\xi) = \text{Re} \left(\begin{bmatrix} \chi_1 \cdot p(\xi) + \sin(\lambda_k \xi) \\ \chi_1 \cdot p(\xi) + \cos(\lambda_k \xi) \\ \chi_1 \cdot p(\xi) + \sinh(\lambda_k \xi) \\ \chi_1 \cdot p(\xi) + \cosh(\lambda_k \xi) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} D_{k1} \\ D_{k2} \\ D_{k3} \\ D_{k4} \end{bmatrix} \right) \quad (4.81)$$

mit

$$p(\xi) = [-\cos(\lambda_k \xi - \lambda_k \alpha) + \cosh(\lambda_k \xi - \lambda_k \alpha)] H(\xi - \alpha) \cdot \lambda_k \cos(\lambda_k \alpha). \quad (4.82)$$

Der Vektor $\vec{D}_k = [D_{k1} \ D_{k2} \ D_{k3} \ D_{k4}]^T$ ist der k -te Eigenvektor von Gleichung (4.50). Im Folgenden sind die Eigenvektoren \vec{D}_k normiert, haben demnach die Länge 1. Durch die Normierung sind auch die Amplitudenwerte von Y_k nicht aussagekräftig, es handelt sich ausschließlich um eine qualitative Beschreibung der Schwingung. Auf die späteren Zeitverlaufsberechnungen hat die Art der Normierung von \vec{D}_k keinen Einfluss.

In Abbildung 4.25 sind die ersten vier Eigenschwingungen des Kerns für die Schwingung in y -Richtung, also für die Biegeschwingung um die z -Achse, dargestellt. In gestrichelter Form ist gezeichnet, wie das Hochhaus ohne Outrigger schwingt, in durchgezogener Linie ist dagegen ersichtlich, welche Eigenform das Hochhaus mit einem einzelnen FUDOS mit $\Phi_1 = 0,9$ in der Höhe $\alpha = 0,5$ annimmt. Es wird deutlich, dass das DOS die Schwingung leicht verändert. Je größer die modale Dämpfung der Eigenfrequenz ist, desto stärker ist auch die Veränderung. An der Stelle $\xi = \alpha$ gibt es einen Sprung in jeder Eigenform, besonders deutlich sichtbar bei der ersten Eigenschwingung. An dieser Stelle reduziert das DOS die Schwingungen durch Dämpfung. Je nachdem, wie groß die Werte von k_j , b_j , c_j und Φ_j sind, verändert sich die Eigenform.

4.3.2 Modalanalyse des Gebäudes

Um eine Modalanalyse des Gebäudes durchführen zu können, muss erneut die Grundgleichung des Schwingungsproblems angeschrieben werden [1]

$$E_K I_K \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^n M_j \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \frac{d}{dx} \delta(x - \alpha_j H) = q(x,t). \quad (4.83)$$

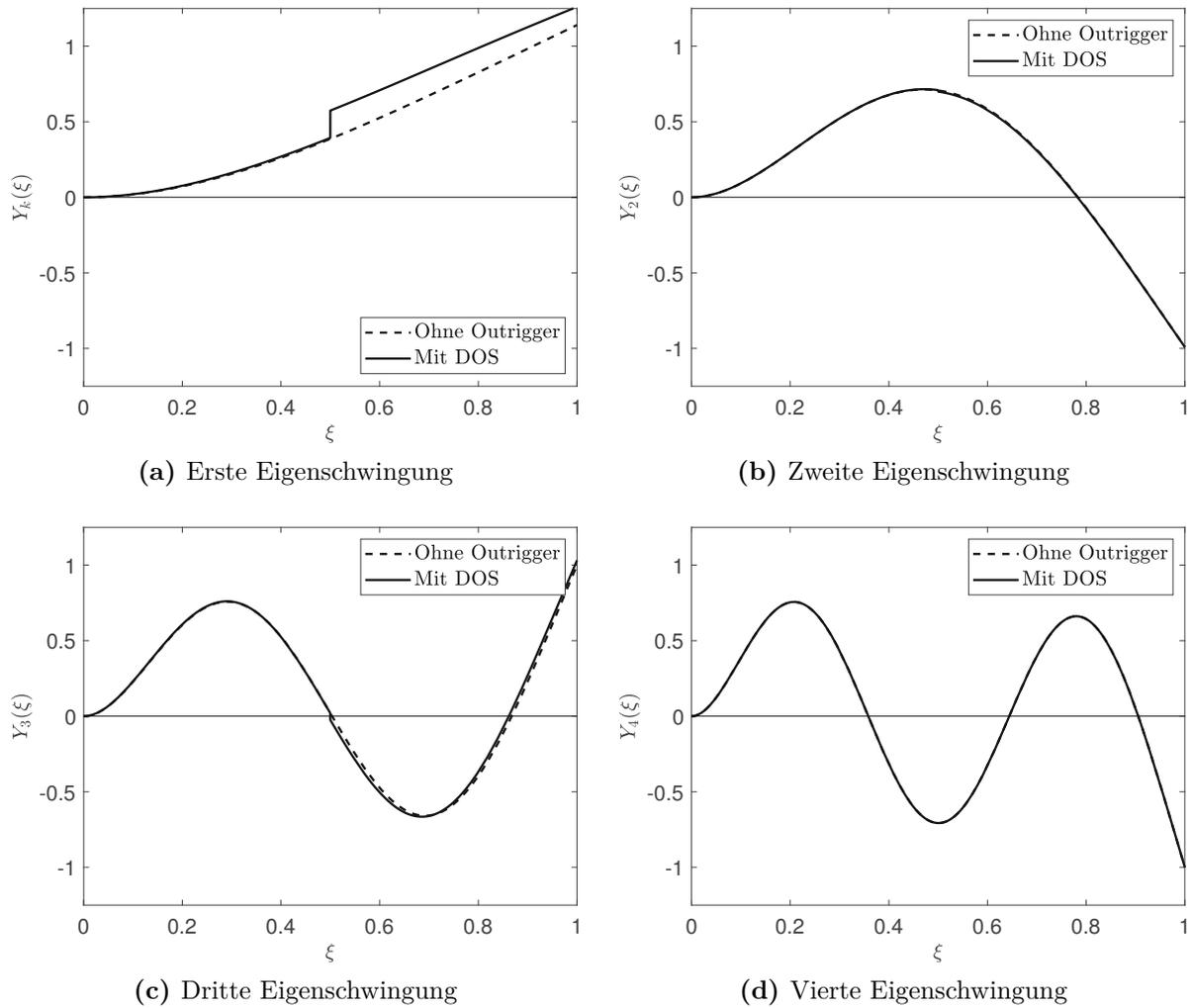


Abb. 4.25: Eigenformen des DC2-Towers in y -Richtung: $Y_k(\xi)$ für $\alpha = 0, 5$ und $\Phi_1 = 0$ (gestrichelt) bzw. $\Phi_1 = 0.9$ (durchgezogen)

Mithilfe des Ansatzes

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) \cdot \eta_k(t) \text{ mit} \tag{4.84}$$

$$y_k(\xi) = H \cdot Y_k(\xi)$$

und unter Verwendung der Eigenform-Orthogonalität lässt sich diese Gleichung (4.83) in entkoppelte Gleichungen der Form

$$\ddot{\eta}_k(t) + 2\zeta_k \omega_{n,k} \dot{\eta}_k(t) + \omega_{n,k}^2 \eta_k(t) = \frac{f_k}{m_k} f(t) \tag{4.85}$$

umstellen. k steht dabei für die k -te Eigenschwingung. Es gilt

$$m_k = \mu H^2 \int_0^1 Y_k(\xi)^2 d\xi \text{ und} \quad (4.86)$$

$$f_k = \int_0^H q(x) y_k(x) dx. \quad (4.87)$$

Gleichung (4.85) ist eine abgewandelte Form von Gleichung (2.13) und stellt eine inhomogene Differentialgleichung der Zeitverläufe der Schwingungen dar. Diese Gleichung ist für eine beliebige Belastung

$$q(x, t) = q(x) f(t) \quad (4.88)$$

lösbar, wenn die Parameter $\omega_{n,k}$, ζ_k , m_k und die Funktionen $Y_k(\xi)$ bekannt sind. Die generalisierte Masse m_k und die generalisierte Kraft f_k lassen sich numerisch berechnen, in Sonderfällen sogar analytisch. Für die Lösung der Gleichung (4.85) müssen die Anfangsbedingungen y_0 und \dot{y}_0 bekannt sein. Für ein Hochhaus in Ruhe gilt

$$y_0 = \dot{y}_0 = 0. \quad (4.89)$$

und damit

$$\eta_k(0) = \dot{\eta}_k(0) = 0 \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.90)$$

Im Falle von Fundamentanregungen wie Erdbeben wird die rechte Seite von Gleichung (4.83) zu

$$-\mu \ddot{y}_F(t) \quad (4.91)$$

umgeschrieben. $\ddot{y}_F(t)$ ist dabei die zeitabhängige Bodenbeschleunigung am Fundament. Damit verändert sich Gleichung (4.85) zu

$$\ddot{\eta}_k(t) + 2\zeta_k \omega_{n,k} \dot{\eta}_k(t) + \omega_{n,k}^2 \eta_k(t) = -\frac{f_{Fk}}{m_k} \ddot{y}_F(t) \quad (4.92)$$

mit

$$f_{Fk} = \mu H \int_0^1 Y_k(\xi) d\xi. \quad (4.93)$$

Hier ist zu beachten, dass $y_k(x)$ die Relativbewegung des Kerns zur Basis kennzeichnet. Die Lösung von Gleichung (4.92) ist ein Duhamel-Integral nach Abschnitt 2.2.3.3 der Form [1]

$$\eta_k(t) = \frac{f_{Fk}}{m_k} \frac{1}{\omega_{n,k} \sqrt{1 - \zeta_k^2}} \int_{\tau=0}^{\tau=t} -\ddot{y}_F(\tau) e^{-\zeta_k \omega_{n,k} (t-\tau)} \sin \left[\omega_{n,k} \sqrt{1 - \zeta_k^2} (t - \tau) \right] d\tau. \quad (4.94)$$

Für die Beschleunigung gilt dann

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_k(t) = & \frac{f_{Fk}}{m_k} \frac{\omega_{n,k}}{\sqrt{1 - \zeta_k^2}} \int_{\tau=0}^{\tau=t} -\ddot{y}_F(\tau) e^{-\zeta_k \omega_{n,k} (t-\tau)} \\ & \cdot \left((2\zeta_k^2 - 1) \sin \left[\omega_{n,k} \sqrt{1 - \zeta_k^2} (t - \tau) \right] - 2\zeta_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \cos \left[\omega_{n,k} \sqrt{1 - \zeta_k^2} (t - \tau) \right] \right) d\tau \\ & - \frac{f_{Fk}}{m_k} \ddot{y}_F(t). \end{aligned} \quad (4.95)$$

Das ist eine Relativbeschleunigung. Die Absolutbeschleunigung $a_{y,k}(t)$ berechnet sich zu

$$a_{y,k}(t) = \frac{f_{Fk}}{m_k} \ddot{y}_F(t) + \ddot{\eta}_k(t) = \frac{f_{Fk}}{m_k} \frac{\omega_{n,k}}{\sqrt{1 - \zeta_k^2}} \int_{\tau=0}^{\tau=t} -\ddot{y}_F(\tau) e^{-\zeta_k \omega_{n,k}(t-\tau)} \cdot \left((2\zeta_k^2 - 1) \sin \left[\omega_{n,k} \sqrt{1 - \zeta_k^2} (t - \tau) \right] - 2\zeta_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \cos \left[\omega_{n,k} \sqrt{1 - \zeta_k^2} (t - \tau) \right] \right) d\tau. \quad (4.96)$$

Mit den Gleichungen (4.94) und (4.84) lassen sich die zeitlichen Verschiebungen $y(x, t)$ ermitteln. Analog berechnet sich die Absolutbeschleunigung

$$a_y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x) a_{y,k}(t). \quad (4.97)$$

Die entstehenden Momente und Querkräfte sind dann mittels

$$\begin{aligned} -\frac{M(x, t)}{EI_{zK}} &= y''(x, t) \text{ und} \\ -\frac{V(x, t)}{EI_{zK}} &= y'''(x, t) \end{aligned} \quad (4.98)$$

bestimmbar. In den meisten Fällen sind nicht unendlich viele Eigenfrequenzen und modale Dämpfungen des Tragwerks bekannt, weshalb die Verschiebung angenähert werden muss. Je mehr Eigenfrequenzen bekannt sind, desto genauer ist die Berechnung. Dabei ist wichtig, dass die Eigenfrequenzen im Frequenzbereich der Anregung bekannt sind.

4.3.3 Zeitverlaufsberechnung einer Erdbebenbelastung

In diesem Abschnitt wird eine Zeitverlaufsberechnung des DC2-Towers unter einer speziellen Erdbebenbelastung durchgeführt. Dazu wird das Hochhaus den Bodenbeschleunigungen des El Centro-Erdbebens vom 18.04.1940 ausgesetzt. Es fand in und um die kalifornische Stadt El Centro statt und hatte die Magnitude 7,1. Dieses Beben wird oft in Studien genutzt, da es eines der ersten aufgezeichneten Beben ist und mit einer Dauer von 54 s besonders lange gedauert hat [42]. In Abbildung 4.26 sind die Zeitverläufe der Bodenbeschleunigungen und die zugehörigen Frequenzinhalte nach *Fast-Fourier-Transformation* in den beiden aufgezeichneten horizontalen Schwingungsrichtungen dargestellt. Die maximale Beschleunigung betrug dabei $\ddot{y}_{F,max} = 0,349 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3,421 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Es wird zudem deutlich, dass in beide Richtungen vor allem Schwingungen in Erregerfrequenzen zwischen 0 und 5 Hz hohe Amplituden erreichen. Das Erdbeben betrifft somit vor allem die ersten vier Biegeeigenfrequenzen des DC2-Towers.

Dieses Erdbeben wird im Folgenden skaliert und auf den DC2-Tower angesetzt. Die Skalierung wird gemäß *Eurocode 8* [11] ausgeführt, in dem die maximale Bodenbeschleunigung für das nordöstliche Wien

$$a_g = S \cdot \gamma_I \cdot a_{gR} = 1 \cdot 1 \cdot 0,70 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,70 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (4.99)$$

beträgt. Dieser Wert legt die maximale Beschleunigung $\ddot{y}_{F,max}$ im Zeitverlauf fest. Dabei ist a_{gR} die Referenzbodenbeschleunigung, S der Bodenbeiwert und γ_I der Bedeutungsbeiwert für das Gebäude. Unter Anwendung von a_g sind die skalierten Zeitverläufe in Abbildung 4.27 dargestellt.

Mit diesen Zeitverläufen wird nun der DC2-Tower belastet. Mithilfe von Gleichung (4.84) und unter Betrachtung der ersten 8 Eigenschwingungen wird die Gesamtauslenkung des Kerns bestimmt. Dabei werden zunächst folgende Parameter angesetzt: $k_j = b_j = c_j = \Phi_j = 0$.

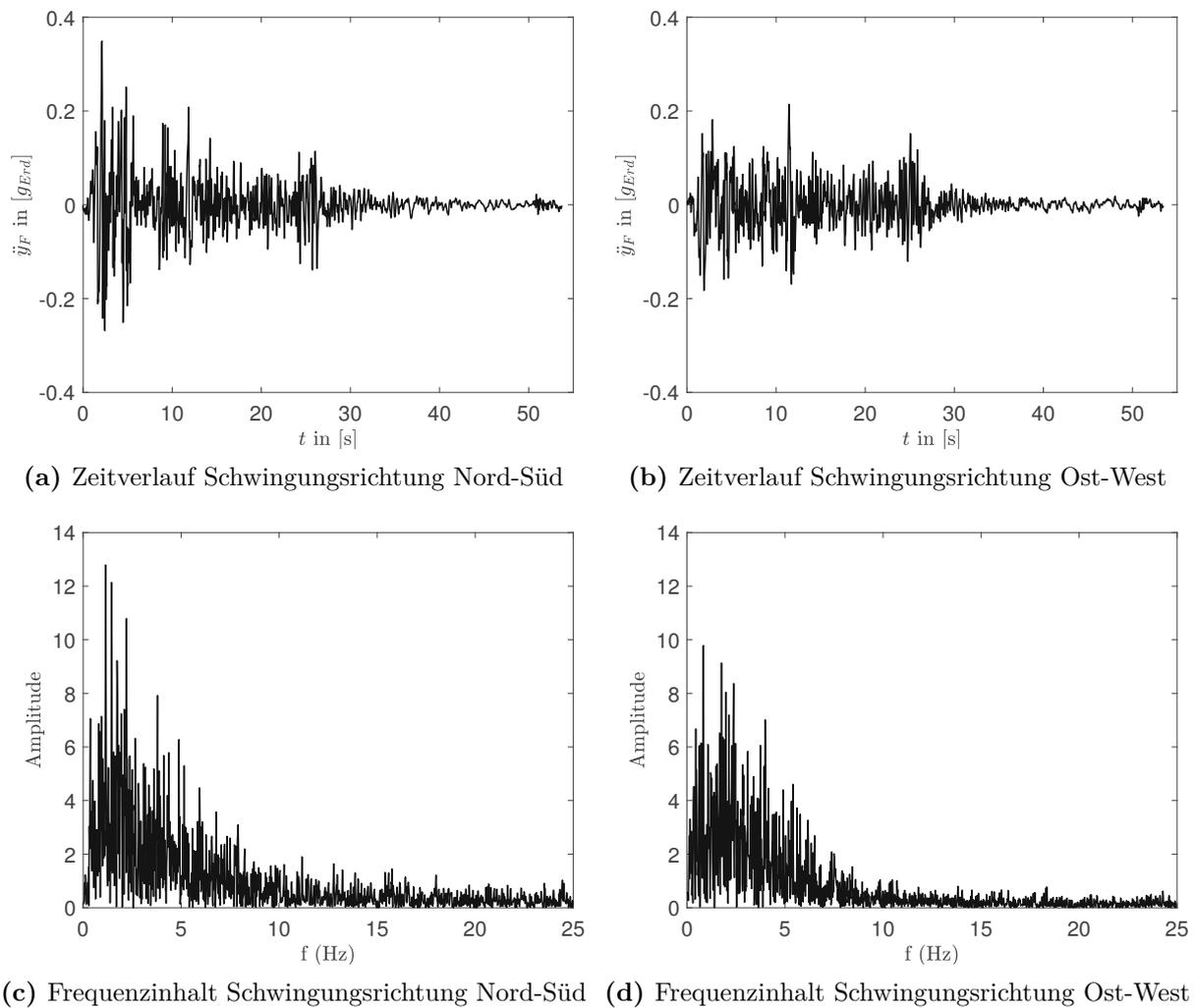


Abb. 4.26: Gemessene Zeitverläufe der Bodenbeschleunigungen und zugehörige Frequenzinhalte beim El Centro-Erdbeben [42]

Um keine unendlich hohe Resonanzüberhöhung auszulösen, wird ein niedriger Wert für die Strukturdämpfung des Kerns angesetzt $\zeta_k = 1\%$. Die resultierende Schwingung des obersten Geschosses und des Geschosses auf der Hälfte der Höhe des DC2-Towers ohne Outrigger ist in Abbildung 4.28 dargestellt. Es ist zu beachten, dass bei den hier angewandten Berechnungen nur die ersten neun Eigenschwingungen einbezogen wurden.

Die maximale Auslenkung beträgt für die Schwingung ohne Outrigger im obersten Geschoss $y_{max}(\xi = 1) = 12,49$ cm. Das kommt einer Auslenkung von $0,071\%$ der Höhe gleich. Das ist ein sehr geringer Wert und lässt darauf schließen, dass der DC2-Tower schon steif genug ist, um die Schwingungen eines Bemessungserdbebens abzutragen und dabei die Kriterien der Gebrauchstauglichkeit zu erfüllen. Eine zusätzliche Dämpfung in Bezug auf die Angenommene Erdbebenbelastung ist nicht notwendig. Für die Biegeschwingung in z -Richtung bzw. um die y -Achse sind die Schwingungen noch schwächer, die maximale Amplitude ist hier $z_{max}(\xi = 1) = 8,10$ cm. Aufgrund dieser Tatsache und da die Schlankheit des Kerns in z -Richtung die in Studie [35] festgelegte Grenze 25:1 unterschreitet, wird im Folgenden nur auf die Biegeschwingung um die schwache z -Achse eingegangen (Schwingung in y -Richtung).

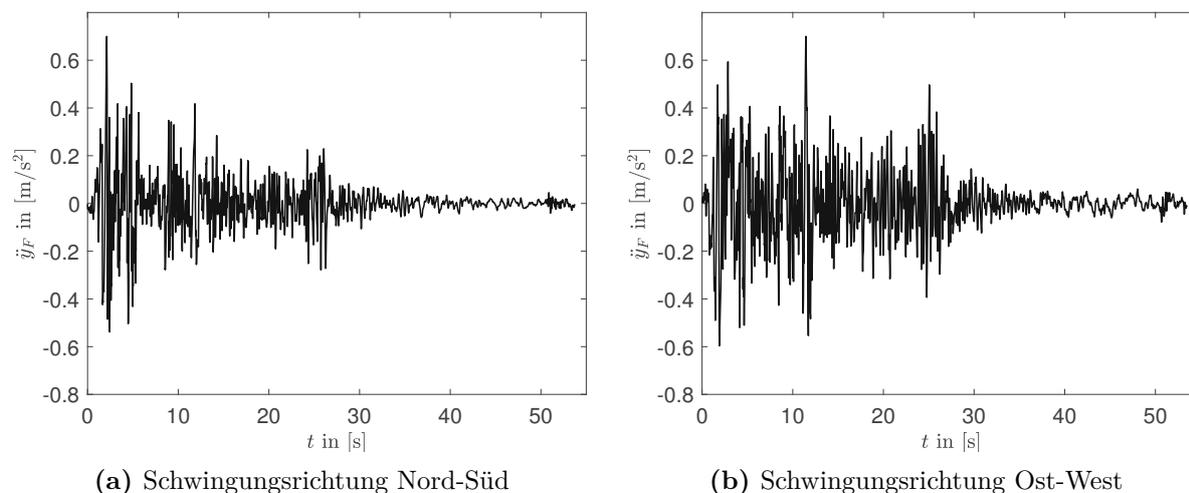


Abb. 4.27: Auf $\ddot{y}_{F,max} = 0,70 \frac{m}{s^2}$ skalierte Zeitverläufe der Bodenbeschleunigungen beim El Centro-Erdbeben

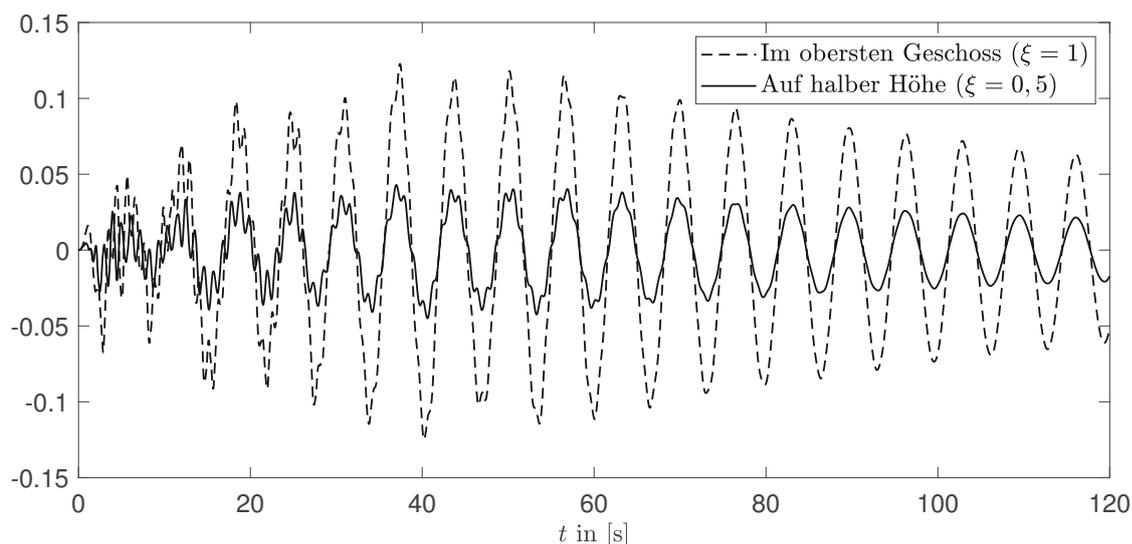


Abb. 4.28: Rechnerisch ermittelter Zeitverlauf der y -Auslenkung auf halber Höhe und im obersten Geschoss des DC2-Towers unter skaliertes Nord-Süd El Centro-Belastung am Fundament für eine Strukturdämpfung von $\zeta_k = 1\%$

Zur Veranschaulichung der Auswirkungen des Einsatzes von DOS wird die Zeitverlaufsberechnung für das Hochhaus mit einem DOS durchgeführt. Das geschieht auf Grundlage des *MATLAB*-Skriptes von Anhang B. Es wird die Erbeben-Zeitverlaufsberechnung für je ein Beispiel der folgenden Systeme durchgeführt:

- System 0: Hochhaus ohne Outrigger,
- System 1: ein KOS mit $\alpha = 0,5$,
- System 2: ein FUDOS mit $\alpha = 0,5$ und $\Phi_j = \Phi_{1,opt} = 0,76$,
- System 3: ein KDOS mit $\alpha = 0,5$ und $c_j = c_{1,opt} = 0,108$,

- System 4: ein IDOS mit $\alpha = 0,5$, $c_j = c_{1,opt} = 0,10$ und $b_j = 0,006$,
- System 5: ein NS-FUDOS mit $\alpha = 0,5$, $\Phi_j = \Phi_{1,opt} = 0,48$ und $k_j = -0,3$ und
- System 6: ein NSDOS mit $\alpha = 0,5$, $c_j = c_{1,opt} = 0,072$ und $k_j = -0,3$.
- System 7: ein FUDOS mit $\alpha = 0,9$ und $\Phi_j = 0,74$,

4.3.3.1 Verhalten unter Nord-Süd El Centro-Beben

Verschiebung des obersten Geschosses ($\xi = 1$) Alle diese Systeme außer System 7 haben ein einzelnes DOS auf $\alpha = 0,5$ der Höhe, sie sind also für die erste Eigenschwingung des Hochhauses optimiert. Entsprechend liegt die Lehr'sche Dämpfung der ersten Mode bei jedem der Systeme 2 bis 6 bei $\zeta_1 > 9\%$. Für System 2 ergibt sich beispielsweise eine modale Lehr'sche Dämpfung infolge Installation des DOS von $\zeta_{1,max} = 9,3\%$. Dieser Wert und die optimale frequenzunabhängige Dämpfung $\Phi_j = \Phi_{1,opt} = 0,76$ wurden wie in der Parameterstudie in Abschnitt 4.2 ermittelt. Für alle Systeme wird zur modalen Dämpfung infolge Installation des DOS noch die angenommene natürlich vorhandene Strukturdämpfung $\zeta_k = 1\%$ addiert. Somit hat die erste Eigenschwingung von System 2 beispielsweise ein effektives Lehr'sches Dämpfungsmaß von $\zeta_1 = 9,3\% + 1\% = 10,3\%$.

In Abbildung 4.29 sind die bebenerregten Schwingungen des obersten Geschosses für die Systeme 0 (kein Outrigger) und 1 im Vergleich mit den Systemen 2 bis 6 dargestellt. Es wurde die Nord-Süd-Komponente des El Centro Bebens angesetzt. Für das System mit konventionellen Outriggern (System 1) ist gut sichtbar, dass zwar die Auslenkungen um über 41% auf $y_{max,KOS}(\xi = 1) = 7,34$ cm reduziert werden, jedoch nimmt die Dauer der Schwingung kaum ab, da durch die konventionellen (nicht gedämpften) Outrigger keine Energie dissipiert wird.

Wird stattdessen wie in System 2 ein FUDOS installiert (Abbildung 4.29a), reduziert das die Schwingungsdauer stark, besonders nach dem Ende des Erdbebens nach $t = 55$ s sind kaum mehr Schwingungen erkennbar. Das Ende der Bewegung des Hochhauses ist bei ungefähr $t = 80$ s erreicht. Die maximale Auslenkung wird auch stark reduziert, auf $y_{max,FUDOS}(\xi = 1) = 6,20$ cm. Das entspricht einer Reduktion um 50% im Vergleich zu System 0.

Es zeigt sich ein sehr ähnliches Bild für System 3, das KDOS. In Abbildung 4.29b ist die zugehörige Schwingung dargestellt. Die maximale Amplitude ist hier $y_{max,KDOS}(\xi = 1) = 5,86$ cm.

Die Ausführung der Systeme 5 und 6 bringen analoge Ergebnisse zu den Systemen 2 und 3, nur, dass die Schwingung schneller gedämpft wird und geringere Amplituden erreicht. Grund hierfür sind die hinzugefügten NSE, die die Dämpfung verstärken. Für die maximalen Amplituden gilt $y_{max,NS-FUDOS}(\xi = 1) = 5,62$ cm und $y_{max,NSDOS}(\xi = 1) = 5,50$ m.

Die Ausführung des IDOS in System 4 hat andere Auswirkungen als die Systeme 2, 3, 5 und 6, siehe Abbildung 4.29c. Es reduziert die Schwingung in der ersten Eigenfrequenz stark, dafür sind die höheren Eigenfrequenzen quasi ungedämpft. Die Folge ist ein Schwingen des Hochhauses in der zweiten Eigenfrequenz, noch lange nachdem das Erdbeben bereits geendet hat. Dass auch bei den anderen Systemen die zweite Eigenschwingung wenig gedämpft wird, liegt nur an der Position des Outriggers auf $\alpha = 0,5$ der Gebäudehöhe. Beim IDOS wird durch die hohe Dämpfung der dominanten ersten Eigenschwingung eine sehr niedrige maximale Amplitude $y_{max,IDOS}(\xi = 1) = 4,57$ cm erreicht. Das ist als äußerst positives Ergebnis anzusehen

Bei System 7 in Abbildung 4.29f zeigt sich auch ein anderes Schwingungsverhalten als bei den restlichen Systemen. Dadurch, dass das FUDOS bei $\alpha = 0,9$ der Gebäudehöhe liegt, werden die höheren Eigenschwingungen stärker gedämpft, die erste Eigenschwingung dagegen weniger als bei den restlichen Systemen 2 bis 6. Somit dauert die Schwingung der ersten Mode (Grundschwingung) bis zu ungefähr $t = 100$ s, die höheren Eigenmoden sind dagegen schon

kurz nach dem Ende des Erdbebens nicht mehr erkennbar. Die maximale Amplitude beträgt $y_{max,FUDOS7}(\xi = 1) = 7,42$ cm. Das ist deutlich höher als bspw. bei System 2.

Relativverschiebung der Geschosse Wird die Relativverschiebung der Geschossdecken betrachtet, ergeben sich die Maximalwerte der Schwingungsantwort unter Bebenanregung (Nord-Süd El Centro) nach Abbildung 4.30. Es fällt direkt ins Auge, dass an der Position des Outrigger-Geschosses viel größere Relativverschiebungen stattfinden als im Rest des Hochhauses. Besonders stark ist dieser Umstand bei System 1, dem KOS. Die Begründung für diesen Effekt liegt in der Modellierung des Outriggers als Drehfeder. Dadurch steigt an der Installationsposition des Outrigger-Systems α die Verdrehung φ des Kerns sprunghaft an. Entsprechend gibt es an dieser Stelle auch eine starke Relativverschiebung der Decken. Allerdings ist gerade das Outrigger-Geschoss sehr verstärkt und kann solche Verformungen auch aufnehmen, zumal sie auch alle kleiner als 2 cm sind. In allen anderen Geschossen wird deutlich, dass die gedämpften Systeme in

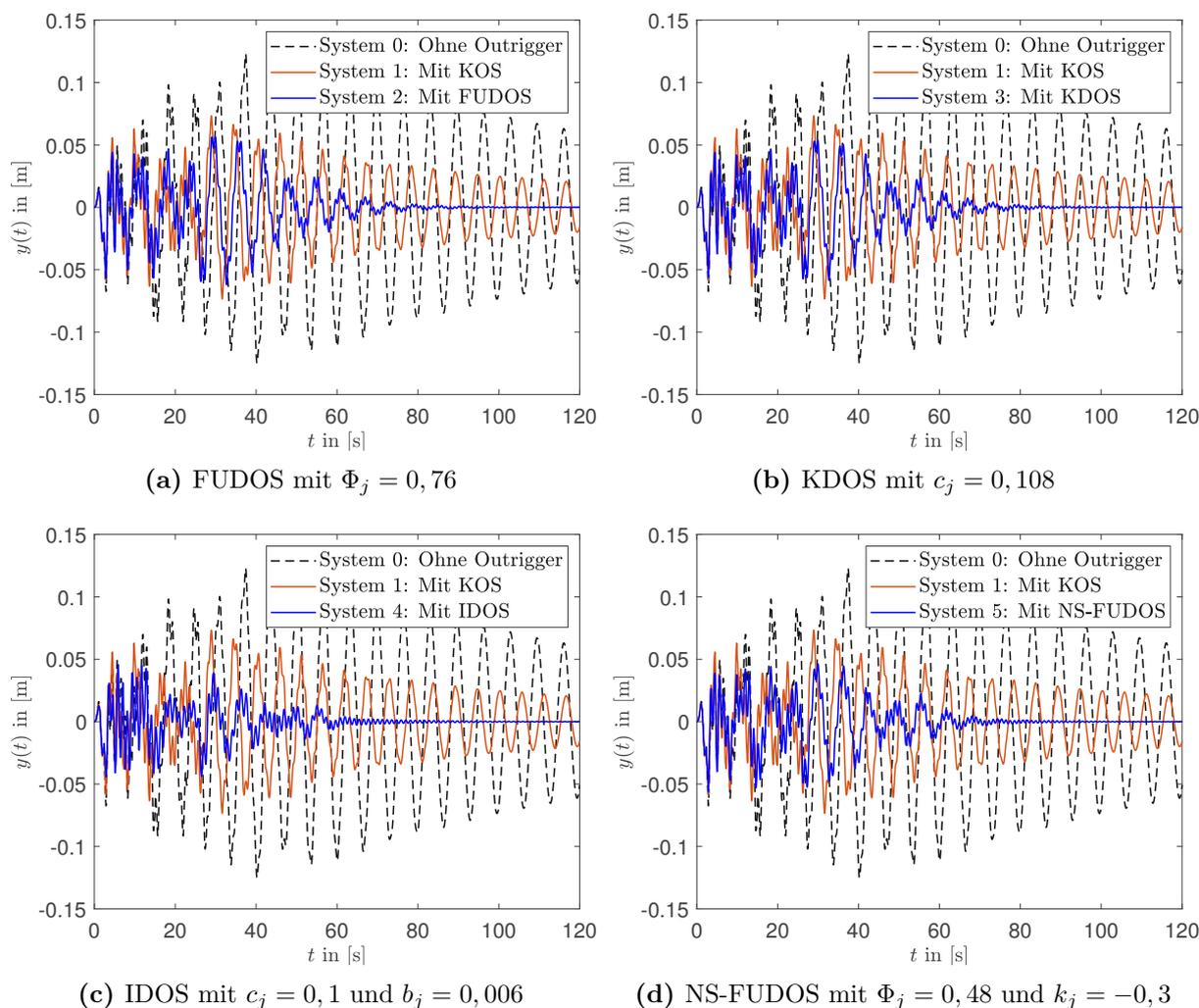


Abb. 4.29: Rechnerisch ermittelte Zeitverläufe der Schwingungsantwort des obersten Geschosses ($\xi = 1$) des DC2-Towers in y -Richtung unter Anregung infolge skaliertem Nord-Süd El Centro-Beben, Vergleich der Systeme 0 (kein Outrigger) und 1 (KOS) mit den Systemen 2 bis 7

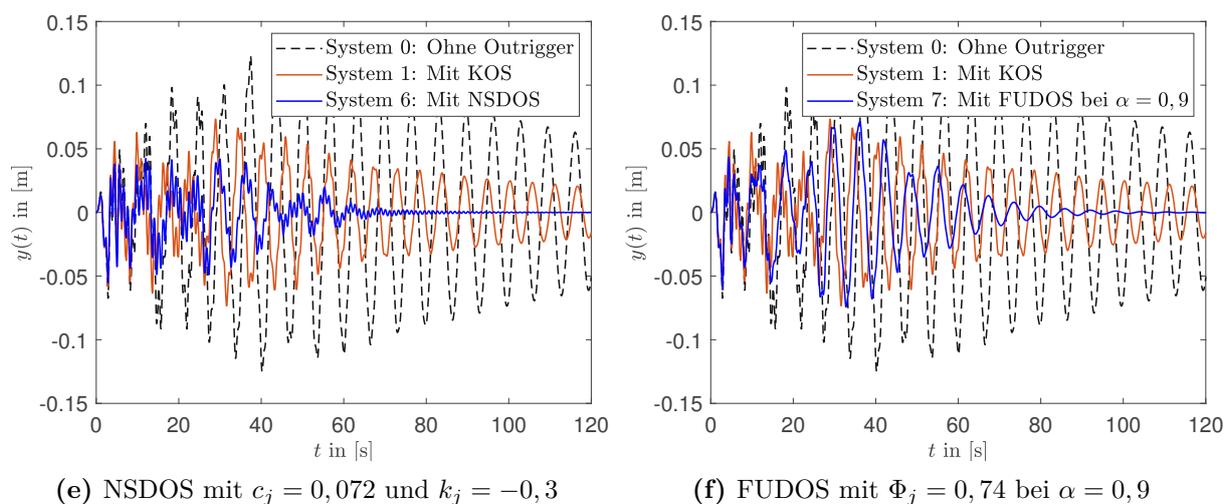


Abb. 4.29: Fortsetzung

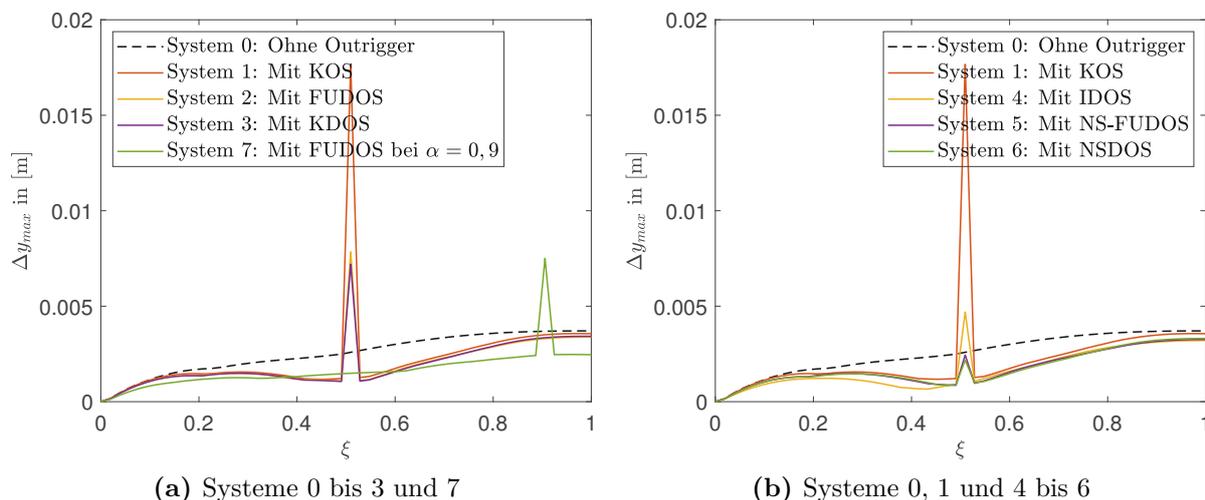


Abb. 4.30: Rechnerisch ermittelte Maximalwerte der Relativverschiebung zweier Geschossdecken Δy_{max} unter skaliertem Nord-Süd El Centro-Belastung am Fundament, Vergleich der Systeme 0 bis 7

den meisten Fällen geringere relative Maximalverschiebungen haben als das KOS, das wiederum stark reduzierte Relativverschiebungen im Vergleich zu System 0 hat. Besonders im Bereich um das Outrigger-Geschoss nehmen die Relativverschiebungen bei den Systemen 1 bis 6 im Vergleich zu System 0 stark ab. Weiterhin ist erkennbar, dass System 7 stark reduzierte Relativverschiebungen über die gesamte Gebäudehöhe hat. In den meisten Geschossen sind die Werte sogar geringer als bei den anderen gedämpften Systemen. Sollen also die Relativverschiebungen über das gesamte Hochhaus reduziert werden, ist die Installation eines DOS in einem der obersten Geschosse zu empfehlen.

Absolutbeschleunigung der Geschosse Abbildung 4.31 stellt dar, wie sich die Absolutbeschleunigung des obersten Geschosses für die Systeme 0, 1, 2 und 7 bei Bebenanregung (Nord-Süd El Centro) entwickelt. Die Maximalwerte der Absolutbeschleunigung liegen für alle Systeme unter

$a_{y,max} < 3 \frac{m}{s^2}$, sind also größer als $a_g = 0,70 \frac{m}{s^2}$. Sie liegen unter 30% der Erdbeschleunigung g_{Erd} . Bei den infolge Bebenbeanspruchung rechnerisch ermittelten Beschleunigungen haben weder das ungedämpfte Hochhaus noch die gedämpften Systeme kritische Werte erreicht. Es wird allerdings deutlich, dass hier die Dämpfung von System 2 und auch die Aussteifung durch ein KOS in System 1 die Beschleunigungen kaum reduzieren. Das liegt daran, dass sich die Beschleunigungsänderungen des Tragwerks schneller einstellen als die Verschiebungsänderungen. Die höheren Eigenschwingungen und besonders die zweite Eigenschwingung sind bei der Beschleunigung dominanter. Dieser Umstand ist in Abbildung 4.32 dargestellt, in welcher die Frequenzspektren von Auslenkung und Absolutbeschleunigung miteinander verglichen werden. Die Auslenkungsschwingung findet fast ausschließlich in der ersten Eigenfrequenz statt, während bei der Beschleunigungsschwingung mehrere Eigenschwingungen einen Einfluss haben, am stärksten aber die Zweite. Diese ist allerdings bei den Systemen mit $\alpha = 0,5$ kaum gedämpft. Daraus resultieren die hohen Schwingungsamplituden.

Mit System 7 werden die Schwingungen schneller gedämpft und haben geringere Amplituden als bei den anderen Systemen, da es mehrere Eigenschwingungen dämpft. Die Beschleunigungen haben auch in den meisten Geschossen geringere Amplituden als bei den restlichen analysierten Systemen, wie Abbildung 4.33 verdeutlicht. Alle anderen Systeme haben maximale Absolutbeschleunigungen, die nah an den Werten von System 0 liegen. System 7 reduziert also nicht nur die Relativverschiebungen der Geschosse stärker als die anderen Systeme, sondern auch die Absolutbeschleunigungen. Es ist somit empfehlenswert, in zukünftigen Anwendungen das DOS nicht nur auf die erste Eigenschwingung abzustimmen und zu optimieren, sondern auch immer die höheren Moden zu beachten. Besonders bei Erdbeben können diese auch einen großen Einfluss auf die Schwingungsantworten von Hochhäusern haben. Die Gesamtverschiebung des obersten Geschosses hat weniger baustatische und gebrauchstaugliche Relevanz als die Absolutbeschleunigung und die Relativverschiebung der Geschosse. Die hohen Schwingbeschleunigungen werden von den Personen im Gebäude als unangenehm wahrgenommen, nicht aber die Gesamtverschiebung (Stichwort: Seekrankheit) [43].

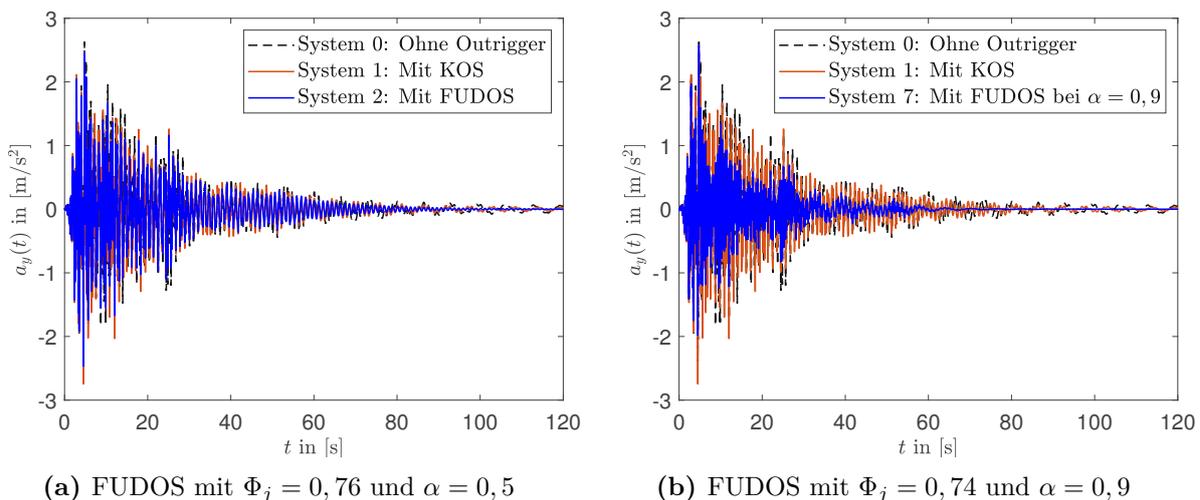


Abb. 4.31: Rechnerisch ermittelte Zeitverläufe der Beschleunigung des obersten Geschosses ($\xi = 1$) des DC2-Towers in y -Richtung unter skaliertem Nord-Süd El Centro-Belastung am Fundament, Vergleich der Systeme 0 (kein Outrigger) und 1 (KOS) mit den Systemen 2 (a) und 7 (b)

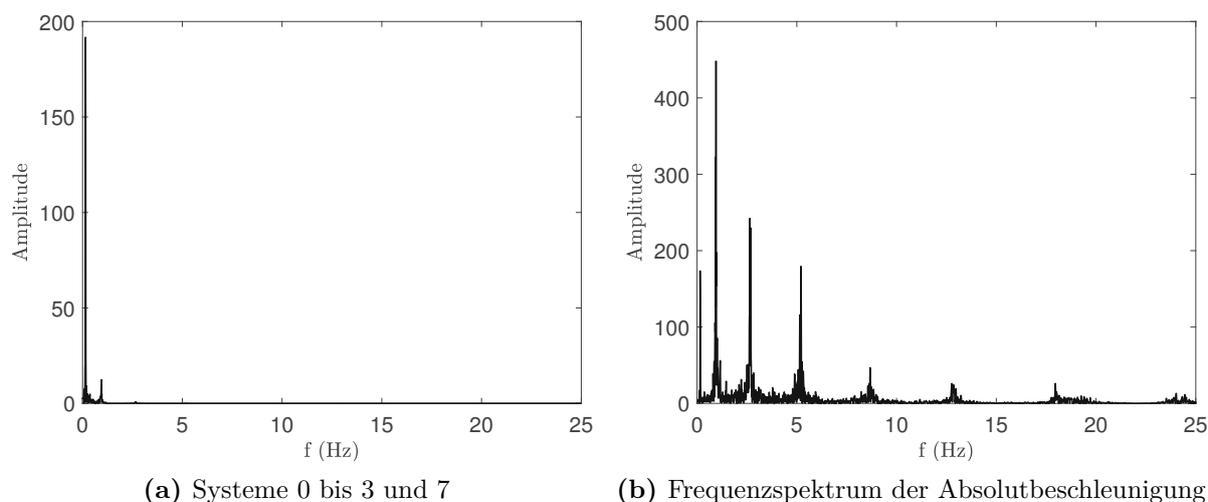


Abb. 4.32: Rechnerisch ermittelte Frequenzspektren der Schwingungsantworten des obersten Geschosses von System 0 (ohne Outrigger) unter skaliertem Nord-Süd El Centro-Belastung am Fundament, Spektren von Auslenkung (a) und Absolutbeschleunigung (b)

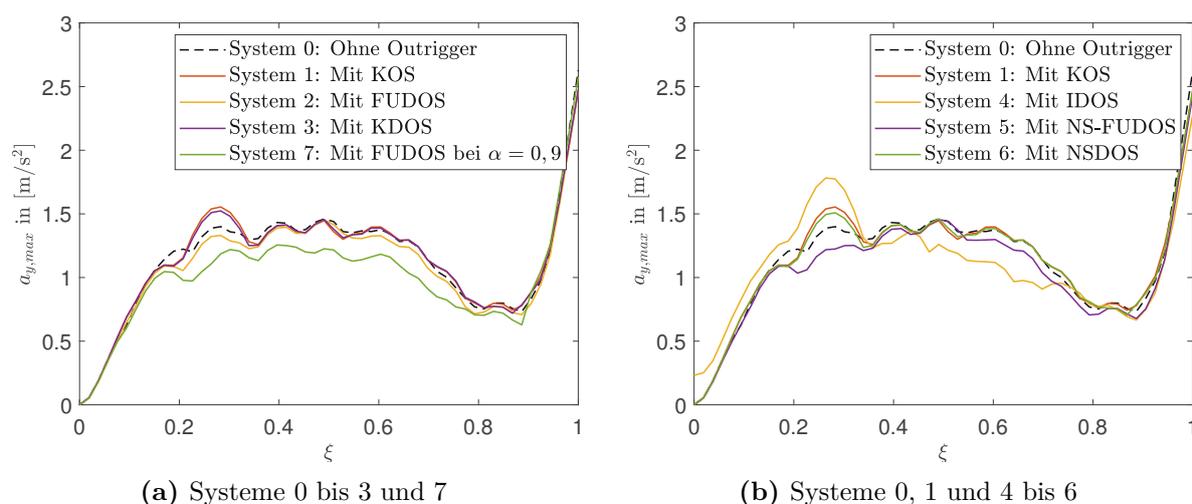


Abb. 4.33: Rechnerisch ermittelte Maximalwerte der Absolutbeschleunigung der Geschosse $a_{y,max}$ unter skaliertem Nord-Süd El Centro-Belastung am Fundament, Vergleich der Systeme 0 und 1 mit den Systemen 2 (a) und 7 (b)

4.3.3.2 Verhalten unter Ost-West El Centro-Beben

Verschiebung des obersten Geschosses ($\xi = 1$) Wird der DC2-Tower mit der skalierten Ost-West El Centro-Belastung angeregt, dann ergeben sich die Schwingungen des obersten Geschosses nach Abbildung 4.34.

Es wird deutlich, dass die Maximalverschiebung von System 0 mit $y_{max}(\xi = 1) = 37,9$ cm mehr als dreimal so groß ist wie unter Nord-Süd El Centro-Belastung. Das liegt daran, dass der Energiegehalt des skalierten Ost-West Bebens höher ist. In Abbildung 4.27 lässt sich das erkennen; es gibt deutlich mehr Momente, an denen das Beben die $0,3 \frac{m}{s^2}$ überschreitet als bei

der Nord-Süd-Schwingung. Außerdem hat das Ost-West-Beben auch noch länger Amplituden $> 0,3 \frac{m}{s^2}$ als jenes in Nord-Süd-Richtung. Die letzte davon ist in Ost-West-Richtung nach 26 s, in Nord-Süd-Richtung nach 12 s. Durch die energiereichere Schwingung ergeben sich höhere Amplituden des ungedämpften Systems. Diese sind allerdings noch immer sehr niedrig in Relation zur Gebäudehöhe.

Das gilt auch für das KOS (System 1), hier überschreiten die Amplituden sogar jene des Systems 0. Die maximale Amplitude von System 1 liegt bei $y_{max,KOS}(\xi = 1) = 42,8$ cm, also rund 13% höher als bei System 0. Das liegt daran, dass sich die Eigenfrequenzen vergrößern, wenn durch die Outrigger die Steifigkeit erhöht wird. Das wurde bereits in der Parameterstudie in Abschnitt 4.2 gezeigt. So steigt die erste Eigenfrequenz beispielsweise um 20% auf $f_{1,KOS} = 0,1827$ Hz. Dadurch wird diese doppelt so stark durch das Beben angeregt, wie sich dem Frequenzspektrum aus Abbildung 4.26d entnehmen lässt. Für $f = 0,152$ Hz liegt die Amplitude bei ca. 3,5, für $f = 0,183$ Hz bei ungefähr 7,7. Dadurch, dass das Messintervall der Bebenmessung nicht feiner

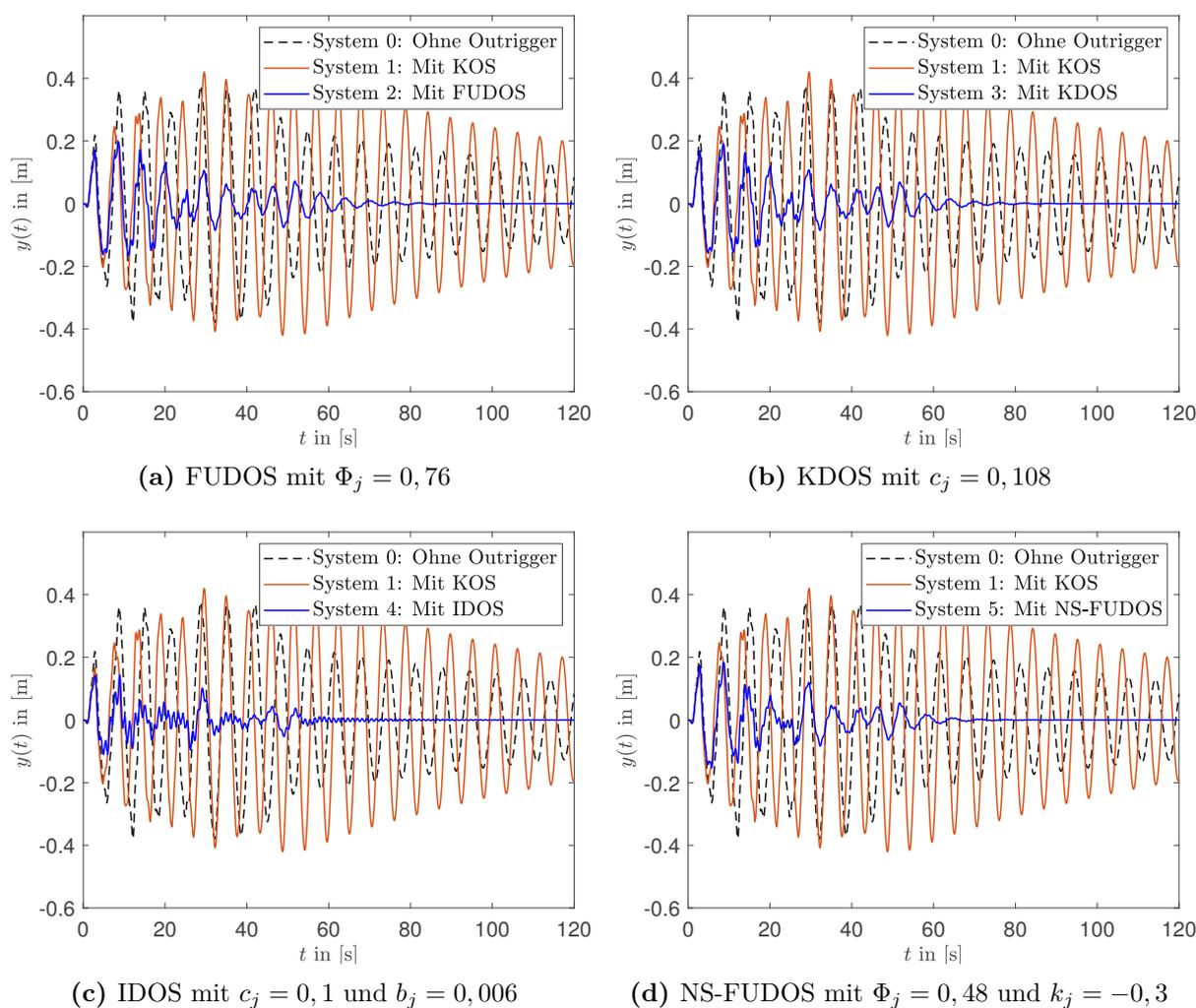


Abb. 4.34: Rechnerisch ermittelte Zeitverläufe der Schwingungsantwort des obersten Geschosses ($\xi = 1$) des DC2-Towers in y -Richtung unter Anregung infolge skaliertem Ost-West El Centro-Beben, Vergleich der Systeme 0 (kein Outrigger) und 1 (KOS) mit den Systemen 2 bis 7

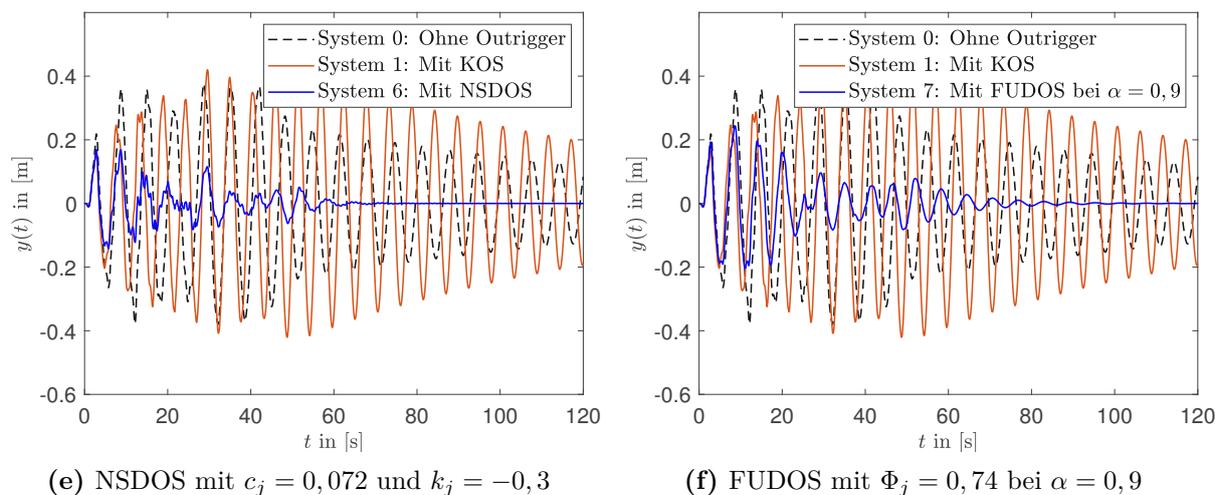


Abb. 4.34: Fortsetzung

ist, lassen sich keine genaueren Angaben machen. Dass die erste Eigenfrequenz beim KOS stärker angeregt wird als beim System ohne Outrigger, ist allerdings deutlich in Abbildung 4.34a sichtbar. Eine Erhöhung der Steifigkeit hat also nicht immer Vorteile, sie kann im Gegenteil sogar zu erhöhten Schwingungsamplituden führen.

Die weiteren Systeme verringern dagegen die Schwingungsamplituden stark, schon bei System 2 in Abbildung 4.34a ist eine Reduktion der Amplitude um 48% auf $y_{max,KDOS}(\xi = 1) = 19,8$ cm gegenüber System 0 zu verzeichnen. Dadurch, dass das Beben in Ost-West-Richtung länger hohe Amplituden hat als in Nord-Süd-Richtung, ist die Schwingung erst nach 80 s nicht mehr erkennbar, das ist aber trotzdem deutlich früher als bei System 0.

Auch für die Systeme 3 bis 6 sind deutliche Reduktionen in Schwingungsdauer und -amplitude gegenüber System 0 zu erkennen. Die stärkste Reduktion gibt es wie bei der Anregung Nord-Süd durch die Installation von System 4, dem IDOS. Hier beträgt die maximale Amplitude der Schwingung im obersten Geschoss $y_{max,IDOS}(\xi = 1) = 14,4$ cm.

System 7, das mehr als eine Eigenschwingung dämpfen soll, erreicht nur eine Verringerung der Amplitude um 35% auf $y_{max,FUDOS7}(\xi = 1) = 24,4$ cm, siehe Abbildung 4.34f. Ebenso dauert die Schwingung ungefähr 100 s, also deutlich länger als beim KDOS (System 2).

Relativverschiebung der Geschosse Auch bei der maximalen Relativverschiebung der Geschosse in Abbildung 4.35 tritt bei Ost-West El Centro-Beben ein ähnliches Verhalten wie unter einer Anregung in Nord-Süd-Richtung auf. Es gibt erneut eine besonders hohe Relativverschiebung im Outrigger-Geschoss bei allen Systemen mit Outrigger-System. Es lassen sich allerdings zwei Unterschiede zur Nord-Süd-Anregung ablesen: erstens sind auch hier die Amplituden in nahezu allen Geschossen deutlich höher unter Ost-West Anregung. Das resultiert aus der höheren Energiedichte des Bebens. Zweitens gibt es keines der Systeme 2 bis 7, das sich deutlich gegenüber den anderen abhebt. Sie reduzieren alle die maximale Relativverschiebung über das gesamte Hochhaus hinweg stark. Um die Relativverschiebung der Geschosse zu optimal zu reduzieren, können also alle Systeme mit optimiertem DOS eingesetzt werden.

Absolutbeschleunigung der Geschosse Auch in der Absolutbeschleunigungsschwingung gibt es unter Ost-West El Centro-Belastung ein ähnliches Verhalten der Systeme wie unter Nord-Süd-Anregung. Das ist in Abbildung 4.36 für das oberste Geschoss dargestellt. Es findet eine deutlich

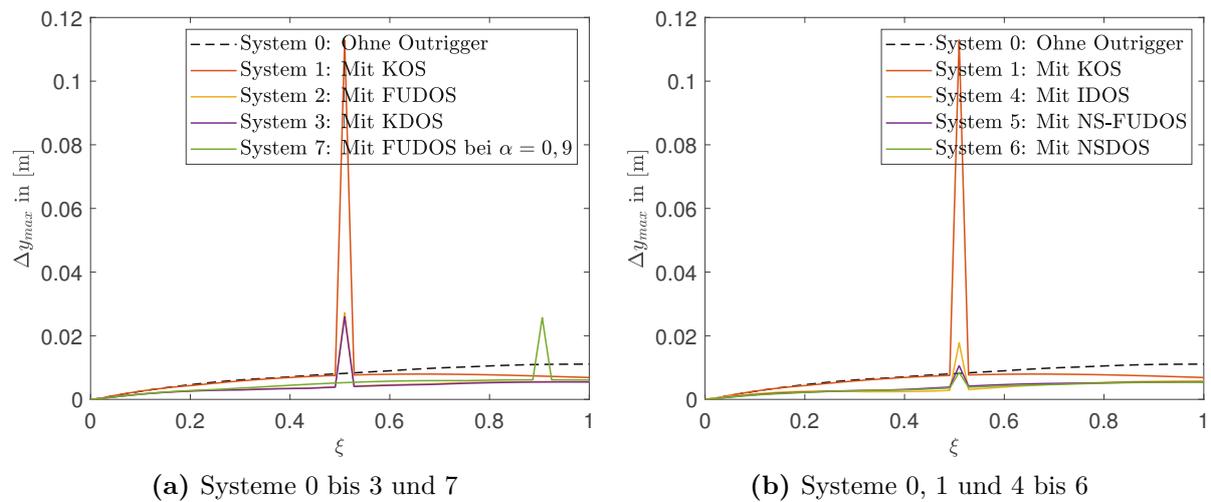


Abb. 4.35: Rechnerisch ermittelte Maximalwerte der Relativverschiebung zweier Geschossdecken Δy_{max} unter skaliertem Ost-West El Centro-Belastung am Fundament, Vergleich der Systeme 0 bis 7

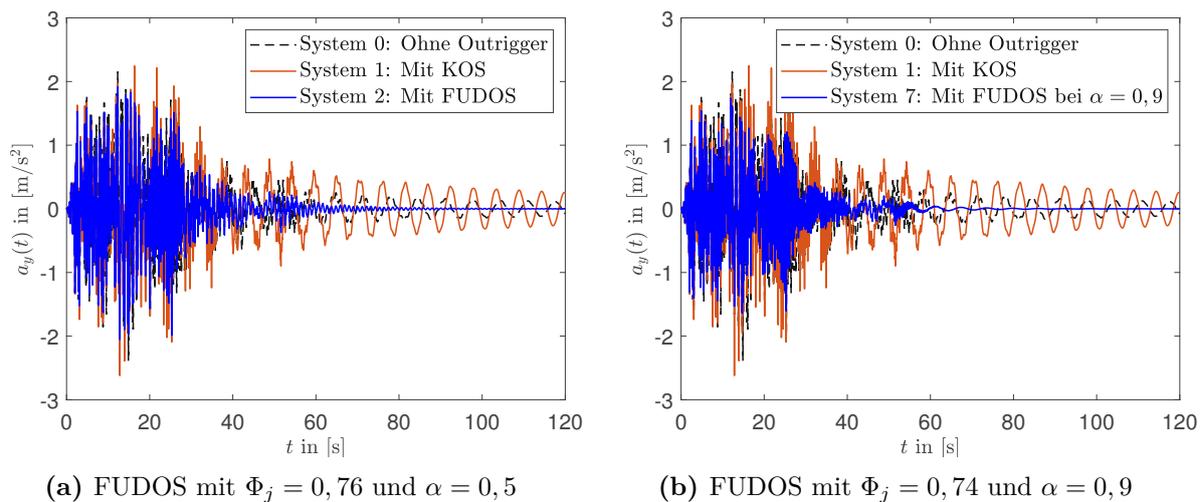


Abb. 4.36: Rechnerisch ermittelte Zeitverläufe der Beschleunigung des obersten Geschosses ($\xi = 1$) des DC2-Towers in y -Richtung unter skaliertem Ost-West El Centro-Belastung am Fundament, Vergleich der Systeme 0 (kein Outrigger) und 1 (KOS) mit den Systemen 2 (a) und 7 (b)

schnellere Schwingung um $a_y = 0$ statt als bei der Auslenkungsschwingung. Dementsprechend haben auch die höheren Eigenschwingungen einen größeren Einfluss auf die maximale Amplitude der Absolutbeschleunigung. Beim System ohne Outrigger (System 0) liegt diese maximale Amplitude bei $a_{y,max,0} : 2,386 \frac{m}{s^2} = 0,243 \cdot g_{Erd}$. Nach dem Ende des Erdbebens schwingt das Hochhaus größtenteils in der ersten Eigenfrequenz weiter. Die Amplitude ist hier allerdings gering gegenüber der Maximalamplitude.

Ähnlich zur Auslenkungsschwingung ist auch bei den Absolutbeschleunigungen die Schwingung des Systems 1 (KOS) stärker als bei System 0. Das zeigt sich unter anderem in der maximalen Amplitude von $a_{y,max,KOS} : 2,619 \frac{m}{s^2} = 0,267 \cdot g_{Erd}$. Auch hier ist der Grund die Verschiebung

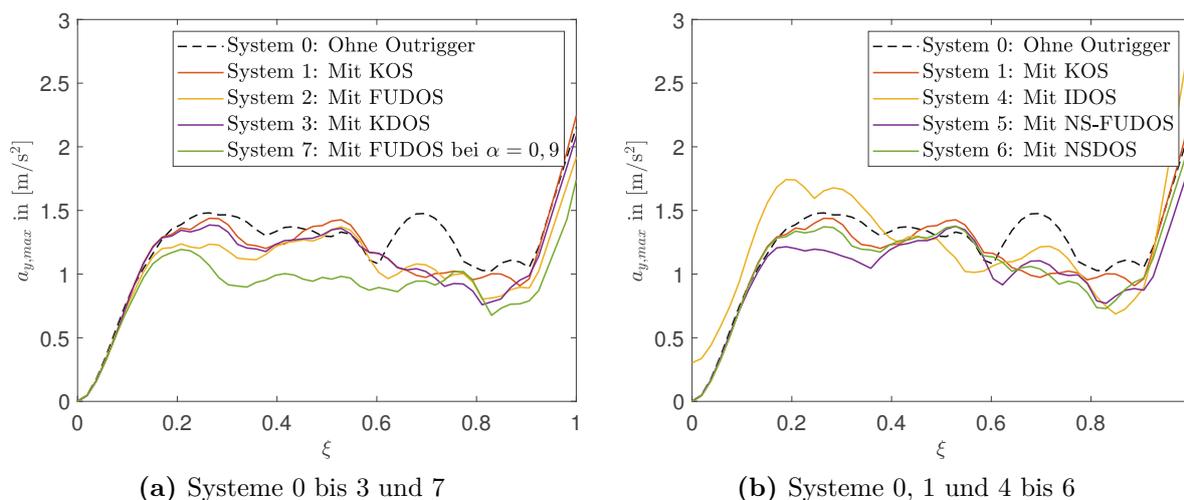


Abb. 4.37: Rechnerisch ermittelte Maximalwerte der Absolutbeschleunigung der Geschosse $a_{y,max}$ unter skaliertem Ost-West El Centro-Belastung am Fundament, Vergleich der Systeme 0 und 1 mit den Systemen 2 (a) und 7 (b)

der Eigenfrequenzen durch die Erhöhung der Steifigkeit des Hochhauses.

Bei Installation der Systeme mit DOS gibt es dagegen niedrigere Amplituden in der Beschleunigung als bei System 0. System 2 mit $a_{y,max,KDOS} : 2,054 \frac{m}{s^2} = 0,209 \cdot g_{Erd}$ und System 7 mit $a_{y,max,FUDOS7} : 1,740 \frac{m}{s^2} = 0,177 \cdot g_{Erd}$ verdeutlichen diesen Umstand. Wie auch beim Nord-Süd-Beben ist das System, das das Beben in Ost-West-Richtung am stärksten dämpft, das System 7. Dieses dämpft mehrere Eigenschwingungen stark, wodurch die Amplitude der Beschleunigung sinkt, aber auch die Dauer des Bebens abnimmt.

Abbildung 4.37 stellt dar, wie sich die Maximalwerte der Beschleunigungen infolge Ost-West-Beben mit System und Geschoss des Hochhauses ändern. In fast allen Geschossen werden die Amplituden durch die Installation eines Outtrigger-Systems verringert. Die Installation von System 7 hat die größten Reduktionen zufolge. Um die Beschleunigungen zu reduzieren, ist somit die Installation eines DOS zu empfehlen, das mehr als eine Eigenschwingung dämpft.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde das dynamische Verhalten von Hochhäusern mit gedämpften Outrigger-Systemen (DOS) unter Bebenanregung untersucht. Dazu wurde in Kapitel 3 der Stand der Technik zur Aussteifung und Dämpfung von Hochhäusern dargelegt und anschließend eine Zusammenfassung bisheriger Studien zu DOS angegeben. Seit ihrer Einführung im Hochhausbau im Jahr 2007 wurden die DOS auf analytische, experimentelle und numerische Weise umfassend untersucht. Sie wurden seitdem auch weiterentwickelt, durch ähnliche Konstruktionen ersetzt und sogar für die Anwendung in Brückenkonstruktionen abgewandelt. Das positive Ergebnis dieser umfassenden Studien ist, dass die effektiven modalen Dämpfungen von Hochhäusern durch die Verwendung von DOS stark erhöht werden können, wenn diese DOS optimal abgestimmt sind. Dazu gibt es verschiedene Parameter, die einen großen Einfluss auf die erzielbare modale Dämpfung von Hochhäusern, die mit DOS ausgestattet sind, haben. Dazu gehören das Steifigkeitsverhältnis zwischen Kern und äußerer Pendelstütze p_S , die Position des oder der DOS α in Bezug auf die Gebäudehöhe und die Größe der viskosen Dämpfung des Dämpferelements c_D . Bei Weiterentwicklungen des Systems kommen weitere optimierungsrelevante Parameter wie die (negative) Steifigkeit des Dämpfers k_D , die Trägheit des am Dämpfer angeschlossenen Inerter-Elements b_D oder die frequenzunabhängige Dämpfung Φ_D hinzu. Durch die Verwendung von Elementen mit negativer Steifigkeit (NSE) k_D ergeben sich gedämpftes Outrigger-System mit negativer Steifigkeit (NSDOS). Werden Inerter-Elemente mit Trägheit b_D im Dämpfer verwendet, lässt sich das System als gedämpftes Outrigger-System mit Inerter (IDOS) bezeichnen. Wird statt des viskosen Dämpferelements ein frequenzunabhängiger Dämpfer (FUD) mit frequenzunabhängiger Dämpfung Φ_D installiert, ergibt sich ein frequenzunabhängiges gedämpftes Outrigger-System (FUDOS) oder ein frequenzunabhängiges gedämpftes Outrigger-System mit negativer Steifigkeit (NS-FUDOS).

In Kapitel 4 wurde in der vorliegenden Arbeit eine eigenständige analytische Untersuchung zur Anwendung der DOS auf ein reales Hochhaus auf Grundlage der Studie [32] erstellt. Die Untersuchung betrachtet ein stark vereinfachtes analytisches Modell eines realen Hochhauses, das auf seinen Gebäudekern reduziert wird. Am Kern sind die unterschiedlichen untersuchten Outrigger-Systeme in der Form von Drehfedern angeschlossen. Der Gebäudekern wird als Euler-Bernoulli-Balken modelliert. Diese vereinfachte Modellierung erlaubt es, die Eigenfrequenzen und modalen Dämpfungen des Hochhauses auf schnelle numerische Weise mithilfe des Argument-Prinzip-Algorithmus (APA) nach Abschnitt 4.1.3 zu finden. Dabei werden die Eigenwerte der charakteristischen Schwingungsgleichung (4.50) gesucht und alle Eigenwerte in einer vorgegebenen Suchregion gefunden.

Mit dieser Methode konnte eine Parameterstudie (Abschnitt 4.2) durchgeführt werden, die sich primär auf die Ausführung eines einzelnen DOS in einem Hochhaus konzentriert. Die folgenden, als Kern der vorliegenden Arbeit hervorzuhebenden Berechnungsergebnisse wurden dabei erzielt:

- Mithilfe von optimal abgestimmten DOS können die effektiven modalen Dämpfungen der jeweiligen Eigenschwingungen und vor allem der ersten Eigenschwingung eines Hochhauses stark erhöht werden. So ist bspw. mit einem konventionellen gedämpften Outrigger-System

(KDOS) für $p_S = 5$ und $\alpha = 0,5$ der Gebäudehöhe eine modale Lehr'sche Dämpfung von $\zeta_{1,max} = 4,1\%$ erreichbar, wenn die optimale dimensionslose viskose Dämpfung $c_{1,opt} = 0,048$ eingestellt ist. Für jede Eigenschwingung ergeben sich allerdings unterschiedliche Werte der Optima $c_{k,opt}$. Wird also das DOS auf die erste Eigenfrequenz abgestimmt, werden die höheren Eigenschwingungen nicht mehr so stark gedämpft.

- Je nach Position α des DOS in Bezug auf die Gebäudehöhe ergeben sich unterschiedlich hohe maximale modale Dämpfungen $\zeta_{k,max}$. Für die erste Eigenschwingung liegt die optimale Installationsposition des DOS bei ungefähr $\alpha = 0,5$ der Gebäudehöhe, für höhere Moden sind mehrere Optima vorhanden. Ist es das Ziel, die ersten drei Eigenfrequenzen jeweils stark zu dämpfen, ist ein $\alpha = 0,9$ zu empfehlen.
- Die durch Installation von DOS maximal erzielbare modale Dämpfung $\zeta_{k,max}$ reagiert sehr sensibel auf eine Veränderung des Steifigkeitsverhältnisses Kern-Stütze p_S . Für $p_S = 2$ ist bei einem KDOS installiert an der Position $\alpha = 0,5$ die maximale Dämpfung $\zeta_{1,max} = 10\%$, für $p_S = 20$ hingegen nur $\zeta_{1,max} = 1,1\%$. Für eine hohe Dämpfung sollten also die Stützen möglichst steif, die Länge der Outrigger möglichst groß und die Biegesteifigkeit des Kerns möglichst klein sein. Dadurch findet während einer erzwungenen Schwingung des Hochhauses eine größere Bewegung im Dämpfer statt, wodurch mehr Energie dissipiert werden kann.
- Statt den Kern zu weich zu machen oder die Steifigkeit der Stützen zu sehr zu vergrößern, was jeweils Nachteile hat, ist es möglich, zusätzliche Bewegung im Dämpfer durch die Parallelschaltung eines NSE mit dimensionsloser, auf die Steifigkeit der Stütze bezogener, Steifigkeit k_j zu erzeugen. Je geringer k_j dabei ist, desto größer ist die erreichbare effektive modale Dämpfung $\zeta_{k,max}$. Es wäre sogar theoretisch eine Dämpfung $\zeta_{1,max} = 100\%$ möglich, wenn $k_j = -1$, also der Betrag der negativen Steifigkeit des NSE der Dehnsteifigkeit der Stütze entspricht. Aus mehreren Gründen ist das in der Realität jedoch nicht möglich: Die Steifigkeit der Stützen ist generell zu hoch, als dass sie mit vorgespannten Federn erreichbar wäre. Außerdem gäbe es durch die hohe negative Steifigkeit im Dämpfer sehr starke Verschiebungen, herkömmliche viskose Dämpfer haben allerdings eine beschränkte Länge und könnten derartig große Verschiebungen nicht aufnehmen. Allerdings ist ein NSDOS auch schon für geringere Beträge von k_j einem KDOS vorzuziehen.
- Eine Nutzung von positiver Steifigkeit im DOS, also die Verwendung von zusätzlichen Federelementen parallel zum Dämpferelement, ist nicht zu empfehlen. Die Feder reduziert die Bewegung des Dämpfers und somit auch die dissipierte Energie.
- Auch ein IDOS kann die Dämpfung gegenüber einem KDOS sehr effektiv erhöhen. Dafür muss allerdings sowohl der viskose Dämpfer als auch der Inerter genau auf die jeweilige zu dämpfende Eigenfrequenz abgestimmt werden. Werden die optimalen Werte von c_j und b_j nicht genau getroffen, führt das zu starken Reduktionen der effektiven modalen Dämpfung und somit zu einem Verlust der Effektivität des DOS. Zudem ist die effektive modale Dämpfung der höheren Eigenschwingungen bei IDOS immer sehr gering. Ein IDOS ist somit nur zu empfehlen, wenn eine einzelne Eigenschwingung des Hochhauses dominant ist.
- Statt eines KDOS kann auch ein FUDOS genutzt werden. Ähnlich wie beim KDOS gibt es auch hier für jede Gruppe an Parameterwerten p_S , α und k_j ein optimales $\Phi_{k,opt}$, um $\zeta_{k,max}$ zu erreichen. Die Beträge der maximalen Dämpfungen liegen dabei in der Nähe der Werte eines KDOS. Allerdings haben FUDOS zwei große Vorteile: wird Φ_j um 50% von $\Phi_{k,opt}$ verringert oder erhöht, können trotzdem noch sehr gute modale Dämpfungen von

rund 90% von $\zeta_{k,max}$ erwartet werden. Bei KDOS führt eine Veränderung von c_j zu viel stärkeren Änderungen der erzielbaren effektiven modalen Dämpfung. Der zweite Vorteil ist, dass $\Phi_{k,opt}$ für alle Moden nah beieinander liegt. Wird demnach das FUDOS auf eine ausgewählte Eigenschwingung des Hochhauses abgestimmt, werden trotzdem auch die höheren Moden nahezu optimal gedämpft.

- Ein FUDOS reagiert auf ähnliche Weise auf die Veränderung der Parameter α , p_S und k_j wie ein KDOS.

Für zwei DOS wurde festgestellt, dass die erzielbare effektive modale Dämpfung bei gleichem p_S wie bei einem einzelnen DOS gegenüber diesem um mindestens 50% erhöht werden kann. Die maximal erzielbare Dämpfung ist dabei stark abhängig von den Positionen der DOS α_1 und α_2 . In Abschnitt 4.3 wurde am Beispiel des Hochhauses DC2-Tower in Wien gezeigt, welchen Einfluss ein DOS auf das dynamische Verhalten des Gebäudes hat. Dafür wurden im ersten Schritt die Eigenfrequenzen und Eigenformen des Hochhauses ermittelt. Anschließend wurde eine Zeitverlaufsberechnung der Schwingung des Gebäudes unter einer beispielhaften Erdbebenlast (El Centro Beben) durchgeführt. Folgende Ergebnisse sind hier erwähnenswert:

- Der DC2-Tower ist aufgrund seiner Bauart bereits ohne DOS steif genug, um nur geringe Verformungen und Beschleunigungen während eines Bemessungserdbebens zuzulassen. So waren die Maximalwerte von Verschiebung und Absolutbeschleunigung im obersten Geschoss unter der simulierten Bebenregung sehr gering.
- Wird zusätzlich noch ein KOS auf halber Höhe des Hochhauses installiert, kann das die maximalen Verschiebungen stark reduzieren. Es ist allerdings auch möglich, dass durch die Erhöhung der Eigenfrequenz auch die Amplitude der Schwingung erhöht wird. Das hängt vom Frequenzspektrum des jeweiligen Erdbebens ab. Die maximalen Beschleunigungen werden im obersten Geschoss durch die Installation eines KOS kaum reduziert und können auch leicht erhöht werden.
- Wird stattdessen ein auf die erste Eigenschwingung optimiertes DOS auf halber Höhe eingebaut, wird sowohl die Dauer als auch die Amplitude der Schwingung infolge Erdbeben stark verringert. Die maximale Amplitude der Verschiebung ist sogar noch geringer als bei einem KOS. Ein optimales FUDOS hat eine ähnliche Wirkung wie ein KDOS. Wird jeweils ein NSE hinzugefügt, reduziert das Dauer und Amplitude noch weiter. Wird ein auf die erste Eigenmode optimiertes IDOS verwendet, werden die Verschiebungen noch weiter reduziert, allerdings wird nur die erste Eigenschwingung stärker gedämpft. Das hat zur Folge, dass die Beschleunigung kaum gedämpft wird, da diese in den höheren Frequenzen stärker schwingt als die Verschiebung. Das gilt allerdings nicht nur für das IDOS, sondern auch für alle anderen DOS, die auf halber Höhe des Hochhauses installiert werden.
- Soll die Amplitude und Schwingungsdauer der Absolutbeschleunigung des Hochhauses reduziert werden, ist es empfehlenswert, die höheren Eigenschwingungen ebenfalls stärker zu dämpfen. Das gelingt, indem das DOS auf einer Höhe von ungefähr $0,9H$ installiert wird. Zudem ist es sinnvoll, ein FUDOS oder ein NS-FUDOS zu verwenden, da diese auf mehrere Eigenschwingungen gleichzeitig optimiert werden können.
- Ist es das Ziel, die Relativverschiebung von Geschossen Δy zu verringern, so wird das in jenen Bereichen des Hochhauses am besten erreicht, in denen das Outtrigger-Geschoss liegt. So wird die Relativverschiebung zwischen $0,4H$ und $0,6H$ stark reduziert, wenn bei $0,5H$ ein KOS oder ein DOS installiert ist. Soll dagegen Δy über das gesamte Hochhaus

verringert werden, ist zu empfehlen, das KOS oder DOS im oberen Bereich des Hochhauses zu installieren, bspw. bei $0,9H$.

Es konnte in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden, dass die Anwendung von DOS in schwingungsanfälligen Hochhäusern unter dynamischen Belastungen zu hohen effektiven modalen Dämpfungen und damit in weiterer Folge zu starken Reduktionen in den Schwingungsatworten des Hochhauses führen können. Die Ergebnisse sind allerdings mit Vorsicht zu betrachten, da es viele Vereinfachungen in der Modellbildung gab. Die Modellierung des Kerns als Euler-Bernoulli-Balken ist für viele Hochhäuser nicht sinnvoll, weil die Schlankheit nicht groß genug ist. Außerdem wurden nur zwei verschiedene Erdbebenanregungen auf das Hochhaus angewandt, zu wenig, um repräsentative Ergebnisse zu erhalten. Das gilt besonders, da es dasselbe Erdbeben war und nur die beiden aufgezeichneten Schwingungsrichtungen genutzt wurden. Ebenso wurde nur ein Beispiel eines Hochhauses untersucht. Die dargelegten Untersuchungen zeigen allerdings das große Potential von gedämpften Outrigger-Systemen und die Gründe, warum diese neuartige Schwingungsdämpfer-Technologie aktuell sehr stark im Fokus der Forschung steht.

Kapitel 6

Ausblick

Es wurde gezeigt, dass die Anwendung von optimal abgestimmten DOS Schwingungen von Hochhäusern infolge Erdbeben stark reduzieren kann, ohne die Steifigkeit des Gebäudes zu ändern. Aus diesem Grund wurden DOS bereits in mehreren Hochhäusern eingebaut, allerdings bisher nur als KDOS [19]. Die bisherigen Studien und auch diese Arbeit haben klar gezeigt, dass die Verwendung von NSDOS, IDOS oder FUDOS bzw. NS-FUDOS Vorteile gegenüber dem KDOS hat, vor allem durch die dabei erzielbaren höheren modale Dämpfungen. Somit ist ein nächster möglicher Schritt, solche Systeme in realen Hochhäusern zu verwenden. Es ist sogar möglich, konventionelle Outrigger-Konstruktionen von den Stützen zu entkoppeln und Dämpfer- und weitere Elemente dazwischenschalten. Für den DC2-Tower wurden bereits dynamische Nachweise nach *Eurocode 1* und *8* geführt, ein nachträglicher Einbau von DOS ist somit nicht mehr notwendig. Es wurde auch in dieser Arbeit gezeigt, dass die Verformungen und Beschleunigungen des DC2-Towers unter einem Bemessungserdbeben sehr gering sind. Allerdings wurde der Kern des Hochhauses dabei als Euler-Bernoulli-Balken modelliert, was nicht für jedes Gebäude sinnvoll ist. Schon beim DC2-Tower ist der Kern in der starken Achse so breit, dass eine Modellierung als Timoshenko-Balken eine bessere Annäherung des realen Verhaltens wäre. In Zukunft sollten solche Modellierungen noch näher untersucht werden, besonders für Hochhäuser mit niedriger Schlankheit.

Weiterhin ist es angebracht, experimentell die Ergebnisse aus den durchgeführten analytischen Berechnungen zu bestätigen, bevor es zu einer Verwendung in realen Hochhäusern kommt. Bisher gibt es nur eine dem Autor bekannte Studie [27], in der ein solches Modell konstruiert und simulierten Erdbebenlasten ausgesetzt wurde. Da sich diese Studie aber auf DOS konzentriert, ist noch nicht gezeigt worden, wie sich bspw. NSDOS oder FUDOS verhalten.

Ein weiterer Punkt, der noch eingehender untersucht werden muss, ist die Installation von zwei oder mehr über die Gebäudehöhe verteilten DOS. Dabei können diese auch unterschiedlich sein, bspw. kann ein System auf die erste und ein Weiteres auf die zweite Eigenschwingung optimiert sein. Dass mit mehreren DOS auch höhere modale Dämpfungen erreicht werden können, wurde auch in dieser Arbeit gezeigt. Eine Optimierung ist allerdings noch notwendig.

Zudem gibt es bisher nur wenige Studien, z.B. [15], die das Verhalten von Hochhäusern mit DOS unter Windlasten untersuchen. Da Wind im Gegensatz zu Erdbeben einen quasistatischen und einen dynamischen Anteil hat, ist ein anderes Verhalten des Systems anzunehmen. Der statische Anteil kann nur durch die Aussteifungskonstruktion abgetragen werden, der Kern sollte also steif genug sein, um nur geringe Verformungen durch statischen Winddruck zuzulassen. Durch den statischen Druck werden die Dämpfer schon ein Stück zusammengedrückt bzw. auseinandergezogen, was durch ein NSE noch verstärkt werden würde. Ist diese statische Verformung zu groß, so kann es sein, dass während der dynamischen Belastung die maximale Ausdehnung des Dämpfers erreicht wird. Eine Reduktion der Dämpfung wäre hier die Folge.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Erforschung von DOS noch nicht abgeschlossen ist. Eine häufigere Anwendung in Neubauten von Hochhäusern ist aber aufgrund ihrer Vorteile erwartbar.

Literatur

- [1] C. Petersen und H. Werkle. *Dynamik der Baukonstruktionen*. Deutsch. 2. Aufl. 2017. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden Imprint: Springer Vieweg, 2017. ISBN: 3834821098. URL: 10.1007/978-3-8348-2109-6.
- [2] C. Hellmich, R. Höller, J. Kalliauer, O. Lahayne, B. Pichler, L. Pircher, R. Plachy, V. Kumbolder und H. Höld. *Skriptum zur Vorlesung mit Übung aus Ingenieurmechanik Teil A - Vorlesungsteil*. Deutsch. 30. Sep. 2023. URL: <https://tuwel.tuwien.ac.at/mod/resource/view.php?id=1854277>.
- [3] H. Bachmann. *Erdbebensicherung von Bauwerken*. Deutsch. Basel [u.a.]: Birkhäuser, 1995. ISBN: 376435190X.
- [4] M. Phocas. *Tragwerke für den Hochhausbau : System, Verformungskontrolle, Konstruktion*. Deutsch. Bauingenieur-Praxis. Berlin: Ernst, 2001. ISBN: 343301454X.
- [5] *Gesamte Rechtsvorschrift für Bauordnung für Wien, Fassung vom 29.05.2024. Wiener Stadtentwicklungs-, Stadtplanungs- und Baugesetzbuch (Bauordnung für Wien – BO für Wien)*. Deutsch. Landtag Wien, 29. Mai 2024. URL: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/LrW/20000006/BO%20f%C3%BCr%20Wien,%20Fassung%20vom%2029.05.2024.pdf> (Zugriff am 29.05.2024).
- [6] *Musterbauordnung. Fassung November 2002 zuletzt geändert durch Beschluss der Bauministerkonferenz*. Deutsch. Bauministerkonferenz, 23. Sep. 2022. URL: <https://www.bauministerkonferenz.de/verzeichnis.aspx?id=991&o=75909860991> (Zugriff am 29.05.2024).
- [7] *Muster-Richtlinie über den Bau und Betrieb von Hochhäusern (Muster-Hochhaus-Richtlinie - MHHR) Fassung April 2008. Redaktionelle Änderung gemäß 272. Sitzung FK Bauaufsicht*. Deutsch. Fachkommission Bauaufsicht, 18. Apr. 2008. URL: <https://www.bauministerkonferenz.de/Dokumente/42310703.pdf> (Zugriff am 29.05.2024).
- [8] A. Kolbitsch, C. Schranz und B. Bucher. *HBK 2 - Hochbaukonstruktionen 2. Ausgabe WS 2019/2020, LVA-Nr. 206.101*. Deutsch. Forschungsbereich für Hochbaukonstruktionen und Bauwerkserhaltung, TU Wien, Karlsplatz 13, A1040 Wien, Austria, 2019.
- [9] *ÖNORM EN 1991-1-4: 2011-05-15: Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke – Teil 1-4: Allgemeine Einwirkungen – Windlasten (konsolidierte Fassung)*. Deutsch. Wien: Austrian Standards, Mai 2011.
- [10] R. Avini. *Donau City – Tower 2 (DC2) (H = 175 m) (Wien, Österreich) - Windgutachten: Ermittlung der Bemessungswindlasten für das Hochhaus inklusive Untersuchung der dynamischen Windlasten und der Beschleunigungen (Benutzerkomfort). (Ergebnisbericht)*. Deutsch. Wacker Ingenieure, 6. Mai 2019.
- [11] *ÖNORM EN 1998-1: 2013-06-15: Eurocode 8: Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben: Teil 1: Grundlagen, Erdbebeneinwirkungen und Regeln für Hochbauten (konsolidierte Fassung)*. Deutsch. Wien: Austrian Standards, Juni 2013.
- [12] M. Smith. „Synthesis of mechanical networks: the inerter“. Englisch. In: *IEEE transactions on automatic control* 47.10 (2002), S. 1648–1662. ISSN: 0018-9286.

- [13] M. Smith. „The Inerter: A Retrospective“. Englisch. In: *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems* 3 (Mai 2020), S. 361–391. DOI: 10.1146/annurev-control-053018-023917.
- [14] M. Wang, F.-f. Sun, J.-q. Yang und S. Nagarajaiah. „Seismic protection of SDOF systems with a negative stiffness amplifying damper“. Englisch. In: *Engineering structures* 190 (2019), S. 128–141. ISSN: 0141-0296.
- [15] M. Wang, S. Nagarajaiah und F.-F. Sun. „Dynamic Characteristics and Responses of Damped Outrigger Tall Buildings Using Negative Stiffness“. Englisch. In: *Journal of structural engineering (New York, N.Y.)* 146.12 (2020). ISSN: 0733-9445.
- [16] M. Reiterer. *Schwingungsdämpfung von Baukonstruktionen, insbesondere von Brücken*. Deutsch. 2004.
- [17] B. G. Kavyashree, S. Patil und V. S. Rao. „Evolution of Outrigger Structural System: A State-of-the-Art Review“. Englisch. In: *Arabian journal for science and engineering (2011)* 46.11 (2021), S. 10313–10331. ISSN: 2193-567X.
- [18] R. J. Smith und M. R. Willford. „The damped outrigger concept for tall buildings“. Englisch. In: *The structural design of tall and special buildings* 16.4 (2007), S. 501–517. ISSN: 1541-7794.
- [19] Z. Wang, J. Zhang, Y. Zhou, C. Fang und C. Huang. „Comparative study between inerter and negative stiffness damped outrigger structures“. Englisch. In: *International journal of mechanical sciences* 262 (2024), S. 108714. ISSN: 0020-7403.
- [20] F. Malik und C. Kolay. „Optimum Parameters for Seismically Excited Tall Buildings with a Single Viscously Damped Outrigger“. Englisch. In: Juni 2022.
- [21] R. Smith. „The Damped Outrigger - Design and Implementation“. Englisch. In: *International Journal of High-Rise Buildings* 5 (März 2016), S. 63–70. DOI: 10.21022/IJHRB.2016.5.1.63.
- [22] P. Tan, C. Fang und F. Zhou. „Dynamic characteristics of a novel damped outrigger system“. Englisch. In: *Earthquake Engineering and Engineering Vibration* 13.2 (2014), S. 293–304. ISSN: 1671-3664.
- [23] M. Morales-Beltran, G. Turan, O. Dursun und R. Nijse. „Energy dissipation and performance assessment of double damped outriggers in tall buildings under strong earthquakes“. Englisch. In: *The structural design of tall and special buildings* 28.1 (2019), n/a. ISSN: 1541-7794.
- [24] P.-C. Lin, T. Takeuchi und R. Matsui. „Seismic performance evaluation of single damped-outrigger system incorporating buckling-restrained braces“. Englisch. In: *Earthquake engineering and structural dynamics* 47.12 (2018), S. 2343–2365. ISSN: 0098-8847.
- [25] P.-C. Lin, T. Takeuchi und R. Matsui. „Optimal design of multiple damped-outrigger system incorporating buckling-restrained braces“. Englisch. In: *Engineering structures* 194 (2019), S. 441–457. ISSN: 0141-0296.
- [26] P.-C. Lin und T. Takeuchi. „Seismic performance of damped-outrigger system incorporating buckling-restrained braces“. Englisch. In: Dez. 2020.
- [27] L. Xing, Y. Zhou und M. Aguaguña. „Optimal vertical configuration of combined energy dissipation outriggers“. Englisch. In: *The structural design of tall and special buildings* 28.4 (2019), n/a. ISSN: 1541-7794.

- [28] C.-M. Chang, Z. Wang, B. Spencer und Z. Chen. „Semi-active damped outriggers for seismic protection of high-rise buildings“. Englisch. In: *Smart Structures and Systems* 11 (Mai 2013), S. 435–451. DOI: 10.12989/sss.2013.11.5.435.
- [29] B. G. Kavyashree, S. Patil und V. S. Rao. „Robustness evaluation of the damped outrigger structure“. Englisch. In: *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 46.1 (2024). ISSN: 1678-5878.
- [30] M. Wang, F.-F. Sun, Y. Koetaka, L. Chen, S. Nagarajaiah und X.-L. Du. „Frequency independent damped outrigger systems for multi-mode seismic control of super tall buildings with frequency independent negative stiffness enhancement“. Englisch. In: *Earthquake engineering and structural dynamics* 52.9 (2023), S. 2731–2754. ISSN: 0098-8847.
- [31] F.-F. Sun, M. Wang und S. Nagarajaiah. „Multi-objective optimal design and seismic performance of negative stiffness damped outrigger structures considering damping cost“. Englisch. In: *Engineering structures* 229 (2021), S. 111615. ISSN: 0141-0296.
- [32] Y. Wen, L. Chen und S. Nagarajaiah. „Generalized Damped Outrigger Systems for Suppressing Multimode Vibrations of Tall Buildings“. Englisch. In: *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 24 (Mai 2023). DOI: 10.1142/S0219455424500342.
- [33] Y. Chen, D. McFarland, B. Spencer und L. Bergman. „Exact solution of free vibration of a uniform tensioned beam combined with both lateral and rotational linear sub-systems“. Englisch. In: *Journal of sound and vibration* 341 (2015), S. 206–221. ISSN: 0022-460X.
- [34] Y. Chen, D. McFarland, B. Spencer und L. Bergman. „A beam with arbitrarily placed lateral dampers: Evolution of complex modes with damping“. Englisch. In: *Journal of vibration and control* 24.2 (2018), S. 379–392. ISSN: 1077-5463.
- [35] C. Fang. „Applicability of Damped Outrigger Systems Using Timoshenko Beam Theory“. Englisch. In: *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 22 (März 2022), S. 2250076. DOI: 10.1142/S0219455422500766.
- [36] Z. Wang, Z. Yuxiang, C. Fang und J. Zhang. „Stochastic Optimization and Sensitivity Analysis of the Combined Negative Stiffness Damped Outrigger and Conventional Damped Outrigger Systems Subjected to Nonstationary Seismic Excitation“. Englisch. In: *Structural Control and Health Monitoring* 2023 (Feb. 2023), S. 22. DOI: 10.1155/2023/4024741.
- [37] L. Liu, P. Tan, Z. Pan, B. Di, S. Pang und R. Qin. „Energy Analysis of a Damped Substructure Outrigger System“. Englisch. In: *Structural Control and Health Monitoring* 2023 (Sep. 2023), S. 1–20. DOI: 10.1155/2023/5524170.
- [38] L. Chen, Z. Liu, S. Nagarajaiah, L. Sun, L. Zhao und W. Cui. „Vibration mitigation of long-span bridges with damped outriggers“. eng. In: *Engineering structures* 271 (2022), S. 114873. ISSN: 0141-0296.
- [39] L. M. Delves und J. N. Lyness. „A Numerical Method for Locating the Zeros of an Analytic Function“. Englisch. In: *Mathematics of computation* 21.100 (1967), S. 543–560. ISSN: 0025-5718.
- [40] S+B Gruppe. *DC 2 Wiens Skyline bekommt Zuwachs*. 2024. URL: <https://www.sb-gruppe.at/aktuelle-projekte/wien/dc-tower-2>.
- [41] Hoffmann-Jantz Ziviltechniker GmbH. *DC2 Tower Ausführungspläne*. Deutsch. Hoffmann-Jantz Ziviltechniker GmbH, 2023.
- [42] vibrationdata.com. *El Centro Earthquake*. 2024. URL: <http://www.vibrationdata.com/elcentro.htm>.

- [43] W. H. Melbourne. „Comfort Criteria for Wind-Induced Motion in Structures“. Englisch. In: *Structural engineering international : journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)* 8.1 (1998), S. 40–44. ISSN: 1016-8664.

Anhang A

MATLAB-Skript zur Suche der Eigenkreisfrequenzen für ein Hochhaus mit DOS

```
1  %-----
2  %   Tim Noack, 12213739
3  %   Datum: 28.08.2024
4
5  % Script zur Suche der Eigenkreisfrequenzen an Hochhäusern
6  %   mit gedämpften Outrigger-Systemen (DOS)
7  %-----
8  clear
9  close all
10 clc
11
12 %-----
13 %Parameter:
14 alphaj = [0.5, 1]; %[-] Position der Outrigger
15 n      = length(alphaj); %[-] Anzahl Outrigger
16 pSj    = ones(1,n)*5; %[-] Steifigkeitsverhältnisse Kern-Stü
17         tzen (Hier kann auch die Steifigkeit des Outriggers
18         eingehen.
19 c      = 1; %[-] Dämpfung viskoses Element in den Dämpfern
20 cj     = ones(1,n)*c; %Dämpfung wird für jedes DOS angesetzt
21
22 Phi    = 1; %[-] Dämpfung frequenzunabhängige Dä
23         mpfungselemente
24 Phij   = ones(1,n)*Phi; %Dämpfung wird für jedes DOS
25         angesetzt.
26 kj     = ones(1,n)*0.1; %[-] Steifigkeiten Feder in den Dä
27         mpfern (normiert auf die Steifigkeit der Stützen)
28 bj     = ones(1,n)*0.2; %[-] Trägheiten Inerter in den Dä
29         mpfern
30 OMEGA  = 1; %[rad/s] Grundkreisfrequenz des Kerns sqrt(EI/(
31         mu*H^4))
32
33 %-----
```

```

26 % Berechnungen:
27 omegaD_k = getDampedOmegas(alpha_j,pSj,kj,bj,Phij,cj); %
    Berechnung der komplexen gedämpften Eigenkreisfrequenzen für
    die spezifischen Parameter
28 omega_k = 1i*omegaD_k*OMEGA; %[rad/s] Diese komplexen
    Eigenkreisfrequenzen sind nun nicht mehr normiert und
    geben das reale Verhalten des Hochhauses an.
29 omega_nk = abs(omega_k); %[rad/s] Berechnung der Pseudo-unged
    ämpften Eigenkreisfrequenzen.
30 zeta_k = abs(real(omega_k))./omega_nk; %[-] Berechnung der
    modalen Dämpfung zugehörig zur jeweiligen
    Eigenkreisfrequenz
31
32 %-----
33 % Ausgabe:
34 fprintf('Gefundene Eigenkreisfrequenzen:\n');
35 disp(omegaD_k);
36 fprintf('Gefundene pseudo-ungedämpfte Eigenkreisfrequenzen:\n
    ');
37 disp(omega_nk);
38 fprintf('Gefundene modale Lehrsche Dämpfungswerte:\n');
39 disp(zeta_k);
40
41 %-----
42 function omegaD_k = getDampedOmegas(alpha_j,pSj,kj,bj,Phij,cj)
43 % Funktion zur Berechnung aller gedämpften komplexen
    Eigenkreisfrequenzen in einem gewählten Bereich der
    komplexen Zahlenebene für ein Hochhaus mit DOS.
44 % Benötigt werden die Position der DOS alpha_j, die
    Steifigkeitsverhältnisse Stützen-Kern pSj, die Steifigkeit
    der Dämpfer kj, die Trägheit der Dämpfer bj, die
    frequenzunabhängige und die viskose Dämpfung der Dämpfer
    Phij bzw. cj.
45 %-----
46 charEquation = getCharEquation(alpha_j,pSj,kj,bj,Phij,cj); %
    Bestimmung der charakteristischen Funktion für das
    Hochhaus, deren Nullstellen die Wellenzahlen lambdaD_k
    sind.
47 % Suchparameter:
48 r = 10; % Wert zur Bestimmung der Größe des zu untersuchenden
    Gebietes. Es werden vier Quadrate mit Seitenlänge r um
    den Nullpunkt der komplexen Zahlenebene verteilt. Dann
    werden diese um pi/4 um den Nullpunkt rotieren gelassen.
    Dadurch wird verhindert, dass die Funktion in den Gebieten
    unstetig wird. Das wäre auf der Achse real(lambda)==imag(
    lambda) der Fall.
49 M = 4; % Maximale Ordnung des Polynoms, mit dem die
    Nullstellen in einem Bereich berechnet werden können. Das
    Polynom wird die Funktion im Bereich annähern.

```

```

50 K = 100; % Schwellenwert, ab dem eine Berechnung der Anzahl
      an Nullstellen abgebrochen wird.
51 tol = 1e-3; % Minimale Seitenlänge der zu untersuchenden
      Regionen
52
53 lambdaD_k = []; %Initialisierung des lambda-Vektors
54 % Nun werden für 4 Bereiche (rechts, unten, links und oben)
      erst die Koordinaten der Eckpunkte gebildet, abhängig von
      r, und anschließend jeweils die Wellenzahlen bestimmt. Bei
      den Suchregionen wird ein kleiner Abstand von 1e-4 zur
      Achse real(lambda)==imag(lambda) gewählt, damit diese
      Achse nicht untersucht wird.
55 %Bereich über positiver Realteil-Achse
56 regUnterNull = [-1i*r-1i*1e-4 r-1i*1e-4];
57 region = regUnterNull*exp(1i*pi/4);
58 [lambdaD_k, ~] = findZerosRotiert(region, charEquation,
      lambdaD_k, K, M, tol);
59
60 % Aus den Wellenzahlen können die normierten gedämpften
61 % Eigenkreisfrequenzen des Hochhauses bestimmt werden:
62 omegaD_k = lambdaD_k.^2;
63 omegaD_k = sort(omegaD_k, "ComparisonMethod", "real"); %
      Schlussendlich werden diese Frequenzen noch nach ihrem
      Realteil sortiert und dann ausgegeben.
64 end
65
66 %-----
67 function charEquation = getCharEquation(alphaj, pSj, kj, bj, Phij
      , cj)
68 % Funktion zur Ermittlung der charakteristischen Gleichung fü
      r die Beschreibung der freien gedämpften Schwingung eines
      Hochhauses mit DOS. Der Kern wird als Euler-Bernoulli-Stab
      angenähert.
69 % Benötigt werden die Position der DOS alphaj, die
      Steifigkeitsverhältnisse Stützen-Kern pSj, die Steifigkeit
      der Dämpfer kj, die Trägheit der Dämpfer bj, die
      frequenzunabhängige und die viskose Dämpfung der Dämpfer
      Phij bzw. cj.
70 %-----
71 n = length(alphaj); % Anzahl der DOS.
72 syms lambda; % Es wird eine symbolische Variable lambda (
      Wellenzahl) benötigt, um die Eigenkreisfrequenzen und
      modalen Dämpfungen aus der Gleichung bestimmen zu können.
73
74 Chij = getChij(alphaj, pSj, kj, bj, Phij, cj, lambda); % Berechnung
      der von lambda abhängigen Dämpferparameter der DOS Chij.
75 % Mithilfe dieser Werte kann die Q-Matrix berechnet werden:
76 for j = 1:n

```

```

77     Q3(j,1)=Chij(j)*( cos(lambda*(1-alphaj(j)))+cosh(lambda
          *(1-alphaj(j)))));
78     % Ermittlung der 3. Zeile der Q-Matrix
79 end
80 for j = 1:n
81     Q4(j,1)=Chij(j)*(-sin(lambda*(1-alphaj(j)))+sinh(lambda
          *(1-alphaj(j)))));
82     % Ermittlung der 4. Zeile der Q-Matrix
83 end
84 Q = [zeros(n,1) zeros(n,1) Q3 Q4]; % Zusammensetzen der Q-
      Matrix
85 % Nun kann die G-Matrix bestimmt werden.
86 G(1,:) = getPk(lambda,alphaj,1); % G(1) ist Pk(1), also das
      Verhalten des ersten DOS von unten. Für alle weiteren G(k)
      müssen der Qk-Vektor und der Pk-Vektor gebildet und mit
      der vorhandenen G-Matrix verrechnet werden.
87 if n >= 2
88     for k = 2:n
89         for j = 1:k-1
90             Qk(j,1) = lambda*Chij(j)*( sin(lambda*(alphaj(k)-
                  alphaj(j)))...
                  +sinh(lambda*(alphaj(k)-alphaj(j)))));
91         end
92         G(k,:) = getPk(lambda,alphaj,k) + Qk*G;
93     end
94 end
95 end
96 % Schlussendlich wird noch die P-Matrix gebildet:
97 P = [0          1          0          1;
98      1          0          1          0;
99      -sin(lambda) -cos(lambda) sinh(lambda) cosh(lambda);
100     -cos(lambda) sin(lambda) cosh(lambda) sinh(lambda)
101     ];
102 % Die drei Matrizen bilden gemeinsam die A-Matrix, die das
      Schwingungsproblem vollständig beschreibt:
103 A = Q.'*G + P;
104 % A*D=0 ist das Gleichungssystem der Schwingung. Für D!=0 ist
      das Problem ein Eigenwertproblem; mit det(A)=0 lassen
      sich alle Eigenwerte lambdaD_k berechnen.
105 d = det(A); %Berechnung der Determinante
106 d = simplify(d, Steps=50); % Vereinfachung der Funktion
107 charEquation = matlabFunction(d); % Schlussendlich wird eine
      matlabFunktion und keine symbolische Funktion ausgegeben.
108 end
109 %-----
110 function Chij = getChij(alphaj, pSj, kj, bj, Phij, cj, lambda
      )
111 % Funktion zur Bestimmung der Dämpferkonstanten Cj der DOS
      eines Hochhauses für eine spezielle Wellenzahl lambda. In

```

```

Cj gehen alle Steifigkeiten der DOS und des Kerns ein. Ben
ötigt werden die Position der DOS alphaj, die
Steifigkeitsverhältnisse Stützen-Kern pSj, die Steifigkeit
der Dämpfer kj, die Trägheit der Dämpfer bj, die
frequenzunabhängige und viskose Dämpfung der Dämpfer Phij
bzw. cj und die jeweilige Wellenzahl lambda.
112 %-----
113 Chij = 1./(2*lambda.^2.*alphaj.*pSj)...
114     *(kj+1i.*Phij+2i*lambda.^2.*alphaj.*pSj.*cj ...
115     - 2*lambda.^4.*alphaj.*pSj.*bj)./...
116     (1+kj+1i.*Phij+2i*lambda.^2.*alphaj.*pSj.*cj ...
117     - 2*lambda.^4.*alphaj.*pSj.*bj);
118 end
119
120 %-----
121 function Pk = getPk(lambda, alphaj, k)
122 % Funktion zur Ermittlung des Vektors Pk für ein gegebenes
    lambda und den k-ten Outrigger im Hochhaus. alphaj gibt
    die relative Höhe der Outrigger an.
123 %-----
124 Pk = lambda*[cos(lambda*alphaj(k)), -sin(lambda*alphaj(k)),
    ...
    cosh(lambda*alphaj(k)), sinh(lambda*alphaj(k))];
125 end
126
127
128 %-----
129 function [z, s0] = findZerosRotiert(region, Funktion,
    zerosBekannt, K, M, tol)
130 % Funktion zur Ermittlung aller Nullstellen einer Funktion in
    einem bestimmten Bereich. Ausgegeben wird neben den
    Nullstellen auch die Anzahl der Nullstellen im Bereich.
131 % Eingabeparameter: region: Komplexer Vektor der Größe 2, der
    die obere und untere Koordinate des gedrehten Quadrates
    in der komplexen Zahlenebene angibt, in dem die Anzahl an
    Nullstellen der Funktion gesucht werden. K bezeichnet
    einen Grenzwert, den die später berechnete Funktion f
    nicht überschreiten sollte, sonst wird die Ermittlung der
    Nullstellen in diesem Bereich abgebrochen. M und tol sind
    Werte, die genutzt werden können, um die Ermittlung zu
    beschleunigen. Je nachdem, wie groß das ganzzahlig M ist,
    müssen weniger Verfeinerungen des Suchgebietes durchgefö
    hrt werden. tol bildet die Grundlage eines
    Abbruchkriteriums. Wenn die Suchregion zu klein wird, von
    den Abmessungen tol unterschreitet, wird in der Region
    nicht weiter nach Nullstellen gesucht.
132 %-----
133 z = zerosBekannt; % Zuerst werden z die bereits bekannten
    Nullstellen der Funktion übergeben.

```

```

134 s0 = countZerosRotiert(region, Funktion, K, 0); % Dann wird
      die Anzahl an Nullstellen in der aktuellen Region bestimmt
      . Dafür wird das N in der Funktion countZerosRotiert
      gleich Null gesetzt.
135 s0 = round(real(s0)); % Diese Zahl wird auf die nächste
      Ganzzahl gerundet, um die Anzahl an Nullstellen in der
      Region zu ermitteln.
136 if s0 == -100 % Ist s0=-100, so liegt eine Nullstelle zu nah
      am Rand des Gebietes. Es werden nur die bereits bekannten
      Nullstellen ausgegeben.
137     fprintf("Zu nah an der Grenze!\n");
138     return;
139 end
140 regRot = region*exp(-1i*pi/4); % Es wird eine rotierte
      Version des Suchbereichs erstellt, um folgende
      Untersuchungen zu vereinfachen.
141 % Nun wird überprüft, wie viele und welche Nullstellen in der
      Region bereits bekannt sind:
142 zerosBekanntImBereich = [];
143 for i = 1:length(zerosBekannt)
144     % Diese Zahl wird um 1 erhöht, wenn eine der bekannten
      Nullstellen im Bereich liegt. Um das zu überprüfen,
      ist es angebracht, die Nullstellen rotieren zu lassen.
      Das vereinfacht die Überprüfung erheblich.
145     zerosBekanntRot = zerosBekannt*exp(-1i*pi/4);
146     if real(zerosBekanntRot(i)) >= real(regRot(1)) ...
147        && real(zerosBekanntRot(i)) < real(regRot(2))...
148        && imag(zerosBekanntRot(i)) >= imag(regRot(1)) ...
149        && imag(zerosBekanntRot(i)) < imag(regRot(2))
150         zerosBekanntImBereich = [zerosBekanntImBereich;
      zerosBekannt(i)];
151     % Liegt die rotierte bekannte Nullstelle im rotierten
      Bereich, dann wird die richtige Nullstelle zu
      einer Liste an bekannten Nullstellen im Bereich
      hinzugefügt.
152     end
153 end
154 q = length(zerosBekanntImBereich); % Anzahl an bekannten
      Nullstellen im Bereich
155 if abs(s0)-q == 0 %Ist s0 == q, gibt es keine unbekannte
      Nullstelle im Bereich. Dann wird auch keine neue
      Nullstelle zu den bekannten hinzugefügt.
156     return
157 elseif abs(s0)-q > M %Ist s0-q > M, so sind mehr Nullstellen
      in der Region als durch den Algorithmus schnell bestimmbar
      . Ist die Region zu klein (festlegbar mithilfe einer
      Toleranzgrenze), so wird keine zusätzliche Nullstelle
      ausgegeben.
158     if real(regRot(2) - regRot(1)) < tol ...

```

```

159     && imag(regRot(2) - regRot(1)) < tol
160     return;
161 end
162 % Andernfalls muss die Region weiter verfeinert werden.
    Das geschieht durch die Viertelung. Dafür wird
    allerdings die rotierte Region genutzt und anschließ
    end zurück rotieren gelassen.
163 x_halb = real(regRot(2)+regRot(1))/2;
164 y_halb = imag(regRot(2)+regRot(1))/2;
165 regionsRot = [regRot(1), x_halb+1i*y_halb; % unterer
    linker Teil
166             x_halb+1i*imag(regRot(1)), real(regRot(2))
             +1i*y_halb;
167             % unterer rechter Teil
168             real(regRot(1))+1i*y_halb, x_halb+1i*imag(
             regRot(2));
169             % oberer linker Teil
170             x_halb+1i*y_halb, regRot(2)]; % oberer
             rechter Teil
171 regions = regionsRot*exp(1i*pi/4); % Rückrotation der
    geviertelten Region
172 zNeu = z; % Initialisierung eines Vektor zNeu, um zu
    verhindern, dass sich Nullstellen doppelnd, wenn sie wä
    hrend der Verfeinerung und Veränderung der Regionen
    bereits berechnet wurden.
173 for i = 1:length(regions) % Für jede Unterregion werden
    nun die Nullstellen rekursiv bestimmt.
174     [zNeu, s0subRegion] = ...
175         findZerosRotiert(regions(i,:), Funktion, zNeu, K, M,
            tol);
176     if s0subRegion == -100 % Ist dabei eine Nullstelle zu
        nah am Rand einer Suchregion, der wird die
        Berechnung abgebrochen und es werden andere
        Regionen gewählt.
177         break
178     end
179 end
180 % Für die Berechnung der Koordinaten der nicht mehr
    geviertelten Region wird ein Faktor und ein Exponent
    benötigt.
181 faktor = 0.75;
182 exponent = 2;
183 while s0subRegion == -100 && faktor < 1
184     r = [real(regRot), imag(regRot)]; % Zur Ü
        bersichtlichkeit werden die 4 Koordinaten der
        rotierten Region in einem neuen Vektor gespeichert
        . Es müssen dann 4 neue Koordinaten für die 4
        neuen Unterregionen berechnet werden: im Vergleich
        zum geviertelten Bereich gibt es nun zwei

```

```

    geschrumpfte Quadrate und zwei sich überlappende
    größere Quadrate, in denen jeweils die Suche
    analog zur geviertelten Region fortgesetzt wird.
    Eine Doppelung der Eigenfrequenzen im ü
    berlappenden Bereich wird durch den Algorithmus
    ausgeschlossen.
185     x1 = faktor*r(1) + (1-faktor)*r(2);
186     x2 = (1-faktor)*r(1) + faktor*r(2);
187     y1 = faktor*r(3) + (1-faktor)*r(4);
188     y2 = (1-faktor)*r(3) + faktor*r(4);
189     regionsRot = [r(1)+1i*r(3), x2+1i*y2; % unterer
        linker Teil
190                 x2+1i*r(3), r(2)+1i*y1; % unterer
        rechter Teil
191                 r(1)+1i*y2, x1+1i*r(4); % oberer linker
        Teil
192                 x1+1i*y1, r(2)+1i*r(4)]; % oberer
        rechter Teil
193     % Ab hier läuft alles analog zur geviertelten Region:
194     regions = regionsRot*exp(1i*pi/4);
195     zNeu = z;
196     for i = 1:length(regions)
197         [zNeu, s0subRegion] = ...
198             findZerosRotiert(regions(i,:),Funktion,zNeu,K
                ,M,tol);
199         if s0subRegion == -100
200             break
201         end
202     end
203     % Nach einem Durchlauf der While-Schleife wird der
        Faktor erhöht, damit werden die größeren Quadrate
        noch größer und die kleineren werden geschrumpft.
        Das ist aber nur nötig, wenn trotz der Anpassungen
        immer noch Nullstellen am Rand einer Unterregion
        liegen.
204     exponent = exponent+1;
205     faktor = faktor+0.5^exponent;
206     end
207     z = zNeu; % Am Ende der Berechnungen werden die neuen
        Nullstellen wieder der originalen Variable übergeben.
208 else % Ist  $\text{abs}(s_0) - q \leq M$ , so kann die Funktion im Bereich
        mithilfe eines Polynoms angenähert werden und für dieses
        Polynom können die Nullstellen bestimmt werden.
209     s0 = abs(s0);
210     % Dafür werden die sN-Werte aus der Funktion
        countZerosRotiert benötigt, und zwar so viele, wie s0-
        q, also wie die Anzahl an unbekannt Nullstellen in
        der Suchregion.
211     sN = zeros(s0-q); % Initialisierung von sN

```

```

212     for N = 1:s0-q % Für jedes sN wird nun die Funktion
                countZerosRotiert genutzt, davon abgezogen wird die
                Summe der mit N potenzierten bekannten Nullstellen im
                Bereich.
213         sN(N) = countZerosRotiert(region,Funktion,K,N) ...
214             - sum(zerosBekanntImBereich.^N);
215     end
216     tauN = [1; -sN(1)]; % Mithilfe von den sN-Werten können
                die tauN-Werte bestimmt werden, die die Faktoren des
                Polynoms darstellen, welches die Funktion im Bereich
                annähert.
217     if s0-q >= 2
218         tauN(3) = 0.5*(sN(1)^2-sN(2));
219     end
220     if s0-q >= 3
221         tauN(4) = 1/3*(-0.5*sN(1)^3+3/2*sN(1)*sN(2)-sN(3));
222     end
223     if s0-q >= 4
224         tauN(5) = 1/4*(1/6*sN(1)^4-sN(1)^2*sN(2)...
225             +4/3*sN(1)*sN(3)+0.5*sN(2)^2-sN(4));
226     end
227     r = roots(tauN); % Die roots-Funktion von Matlab
                ermittelt die Nullstellen eines Polynoms N-ter Ordnung
                mit den Faktoren tauN. Zur Sicherheit wird für jede
                dieser Nullstellen noch überprüft, ob sie wirklich in
                der Region liegt. Dafür wird die Nullstelle rotieren
                gelassen, um die Überprüfung zu vereinfachen.
228     rRot = r*exp(-1i*pi/4);
229     for i = 1:length(r)
230         if real(rRot(i)) >= real(regRot(1)) ...
231             && real(rRot(i)) < real(regRot(2))...
232             && imag(rRot(i)) >= imag(regRot(1)) ...
233             && imag(rRot(i)) < imag(regRot(2))
234             z = [z; r(i)]; % Liegt die Nullstelle in der
                Region, wird sie zu z hinzugefügt.
235         end
236     end
237
238 end
239 end
240
241 %-----
242 function sN = countZerosRotiert(region, Funktion, K, N)
243 % Funktion zur Bestimmung der Anzahl an Nullstellen einer
                Funktion in einem bestimmten Bereich.
244 % Eingabeparameter: region: Komplexer Vektor der Größe 2, der
                die obere und untere Koordinate des gedrehten Quadrates
                in der komplexen Zahlenebene angibt, in dem die Anzahl an
                Nullstellen der Funktion gesucht werden. K bezeichnet

```

```

    einen Grenzwert, den die später berechnete Funktion f
    nicht überschreiten sollte, sonst wird die Ermittlung der
    Nullstellen in diesem Bereich abgebrochen. N beschreibt,
    ob s0, s1, s2, ... oder sN berechnet wird. s0 gibt die
    Anzahl an Nullstellen im Bereich aus, alle weiteren sN-
    Werte helfen in der Funktion findZerosRotiert bei der
    Ermittlung der Position der Nullstellen im Bereich.
245 %-----
246 n = 1e5; % Anzahl der Punkte für die Integration pro Seite
    des Quadrates
247 regRot = region*exp(-1i*pi/4); %Rückrotation
248 x = linspace(real(regRot(1)), real(regRot(2)), n); %Punkte
    auf der reellen Achse
249 y = linspace(imag(regRot(1)), imag(regRot(2)), n); %Punkte
    auf der imaginären Achse
250 % Kontur für die numerische Integration:
251 KonturRot = [x + 1i*imag(regRot(1)), real(regRot(2)) + 1i*y,
    ...
252     fliplr(x) + 1i*imag(regRot(2)), real(regRot(1)) + 1i*
        fliplr(y)];
253 Kontur = KonturRot*exp(1i*pi/4); % Die Kontur wird wieder in
    die Ausgangslage rotiert.
254 Funktionswerte = Funktion(Kontur); % Die Kontur in
    Ausgangslage wird in die Funktion eingesetzt.
255
256 abgeleiteteFunktionswerte = diff(Funktionswerte); % Die
    eingesetzten Funktionswerte werden genutzt, um die
    numerische Ableitung der Funktion zu bilden
257 f = Kontur(1:(end-1)).^N...
258     .*abgeleiteteFunktionswerte./Funktionswerte(1:(end-1)); %
    Funktion, die schlussendlich numerisch integriert wird
259 if N==0 && max(abs(real(f))) > K %Wenn die Nullstelle zu nah
    am Rand der Region liegt, nimmt die Konvergenz dder Suche
    ab, deshalb sollte die Suche dann abgebrochen werden.
260     sN = -100;
261     return;
262 end
263 sN = trapz(f)/(2*pi*1i); %Numerische Integration der Funktion
    f. Diese Zahl wird noch durch 2*pi*i geteilt.

```

Anhang B

MATLAB-Skript zur Zeitverlaufsberechnung der Erdbebenanregung des DC2-Towers mit DOS

```
1 %  
-----  
2 %   Tim Noack, 12213739  
3 %   Datum: 23.09.2024  
4  
5 % Script zur Untersuchung des Verhaltens des DC2-Towers mit  
6 %   gedämpften Outrigger-Systemen (DOS)  
7  
8 clear  
9 close all  
10 clc  
11  
12 %-----  
13  
14 %Parameter des DC2-Towers:  
15 EK      = 37e9;           %[Pa] Elastizitätsmodul (C50/60) Kern  
16 IKY     = 0.33*12300;    %[m^4] Flächenträgheitsmoment Kern  
17 IKZ     = 2.5*520;      %[m^4] Flächenträgheitsmoment Kern  
18 mu      = 700000;       %[kg/m] Masse pro Längeneinheit  
19  
20      Hochhaus  
21 ES      = EK;           %[Pa] Elastizitätsmodul Stützen  
22 AS1     = 2*1.025;      %[m^2] Fläche dünnere Stützen  
23 AS2     = 2*1.44;      %[m^2] Fläche dickere Stützen  
24 Ry      = 11.2;        %[m] Abstand Achse Kern-Achse Stützen  
25  
26      y-Richtung  
27 Rz      = 27.3;        %[m] Abstand Achse Kern-Achse Stützen  
28  
29      z-Richtung  
30 H       = 175;         %[m] Höhe des Hochhauses  
31  
32 %Parameter der Outrigger  
33 alphaj  = 0.5;         %[-] Position der Outrigger  
34 n       = length(alphaj); %[-] Anzahl Outrigger  
35 pSY     = EK*IKY/(2*ES*AS1*Rz^2);  
36 pSZ     = EK*IKZ/(2*ES*AS2*Ry^2);
```

```

31 pSYj      = ones(1,n)*pSY; %[-] Steifigkeitsverhältnisse Kern-
      Stützen
32 pSZj      = ones(1,n)*pSZ; %[-] Steifigkeitsverhältnisse Kern-
      Stützen
33 c         = 0; %[-] Dämpfung viskoses Element in den Dämpfern
34 cj        = ones(1,n)*c; %Dämpfung wird für jedes DOS angesetzt
      .
35 Phi       = 0.76; %[-] Dämpfung frequenzunabhängige Dä
      mpfungselemente
36 Phij      = ones(1,n)*Phi; %Dämpfung wird für jedes DOS
      angesetzt.
37 kj        = ones(1,n)*0; %[-] Steifigkeiten Feder in den Dä
      mpfern (normiert auf die Steifigkeit der Stützen)
38 bj        = ones(1,n)*0; %[-] Trägheiten Inerter in den Dä
      mpfern
39 omegaY0   = sqrt(EK*IKY/(mu*H^4)); %[rad/s] Grundkreisfrequenz
      des Kerns (Biegeschwingung um y-Achse)
40 omegaZ0   = sqrt(EK*IKZ/(mu*H^4)); %[rad/s] Grundkreisfrequenz
      des Kerns (Biegeschwingung um z-Achse)
41
42 elCentroNS = load("elcentro_NS.dat"); %[g_Erd] Einlesen des
      Beschleunigungs-Zeitverlaufs des El Centro-Erdbebens (
      Richtung Nord-Süd)
43 ayF       = elCentroNS(:,2)/max(abs(elCentroNS(:,2)))*0.7; %[m/s^2]
      Skalierung der maximalen Beschleunigung auf 0,7 m/s^2
44 tF        = elCentroNS(:,1); %[s] Zeitvariable
45 tF        = [tF; (tF(end):0.02:120).']; %[s] Hinzufügen von weiteren
      Zeitschritten, um den Ausschwingvorgang untersuchen zu kö
      nnen
46 ayF       = [ayF; zeros(length(tF)-length(ayF), 1)]; % Die
      Beschleunigung ist in diesen zusätzlichen Zeitschritten
      gleich Null
47
48 [Y_k, fF_k, m_k, omega_nk, zeta_k] = getYk(alpha_j, pSZj, kj, bj,
      Phij, cj, omegaZ0, mu, H); % Berechnung der Eigenformen,
      Eigenkreisfrequenzen und modalen Dämpfungen sowie der
      generalisierten Massen und Kräfte des Gebäudes für die
      Schwingung in y-Richtung (Biegeschwingung um die z-Achse)
49 eta_k     = getEtak(fF_k, m_k, ayF, tF, omega_nk, zeta_k); %
      Berechnung der Zeitverläufe der Verschiebungsschwingung,
      pro Eigenform gibt es einen Zeitverlauf
50 y_1       = H*sum(Y_k(1).*eta_k); % Berechnung der
      Verschiebungsschwingung im obersten Geschoss
51 ay_k      = getAk(fF_k, m_k, ayF, tF, omega_nk, zeta_k); % Berechnung
      der Zeitverläufe der Beschleunigungsschwingung, pro
      Eigenform gibt es einen Zeitverlauf
52 ay_1      = H*sum(Y_k(1).*ay_k); % Berechnung der
      Beschleunigungsschwingung im obersten Geschoss
53

```

```

54 %-----
55 % Ausgabe der Schwingung
56 % Verschiebung
57 figure()
58 plot(tF, y_1, LineWidth=1.0);
59 xlabel('$t$ in [s]','Interpreter','latex')
60 ylabel('$y(t)$ in [m]','Interpreter', 'latex')
61 % Beschleunigung
62 figure()
63 plot(tF, ay_1, LineWidth=1.0);
64 xlabel('$t$ in [s]','Interpreter','latex')
65 ylabel('$a_y(t)$ in [m/s$^2$]','Interpreter', 'latex')
66
67 %-----
68 function [Y_k, fF_k, m_k,omega_nk,zeta_k] = getYk(alphaj,pSj,
        kj,bj,Phij,cj,omega0,mu,H)
69 % Funktion zur Berechnung der Eigenformen für ein Hochhaus
        mit DOS. Y_k ist die k-te Eigenform, fF_k ist die
        generalisierte Kraft für eine Anregung am Fundament für
        die k-te Eigenschwingung, m_k ist die generalisierte Masse
        für k-te die Eigenschwingung, omega_nk ist die Pseudo-
        ungedämpfte Eigenkreisfrequenz und zeta_k die modale Dä
        mpfung.
70 % Es werden folgende Parameter benötigt: die Position der DOS
        alphaj, die Steifigkeitsverhältnisse Stützen-Kern pSj,
        die Steifigkeit der Dämpfer kj, die Trägheit der Dämpfer
        bj, die frequenzunabhängige und die viskose Dämpfung der D
        ämpfer Phij bzw. cj. Außerdem die Grundkreisfrequenz
        omega0, die Masse pro Längeneinheit mu und die Höhe h des
        Hochhauses
71 [omegaD_k, lambdaD_k, A] = getDampedOmegas(alphaj,pSj,kj,bj,
        Phij,cj); % Bestimmung der Eigenwerte der
        charakteristischen Gleichung und der Matrix A. Für den
        Code siehe Anhang A!
72 omega_k = 1i*omegaD_k*omega0; %[rad/s] Berechnung der
        komplexen Eigenkreisfrequenzen
73 omega_nk = abs(omega_k); %[rad/s] Berechnung der pseudo-unged
        ämpften Eigenkreisfrequenzen
74 zeta_k = -real(omega_k)./omega_nk + 0.01; %[-] Berechnung der
        modalen Dämpfungen und Addition der angenommenen
        Strukturdämpfung von 1%
75
76 Y_k = []; % Initialisierung des Arrays der Eigenformen
77 for k = 1:length(lambdaD_k) % Für jede Eigenschwingung wird
        der folgende Schritt ausgeführt:
78     Y_k = [Y_k; getEigenschwingung(lambdaD_k(k),A,alphaj,pSj,
        kj,bj,Phij,cj)]; %Es wird die Eigenform ermittelt
        unter Nutzung der gegebenen Parameter
79 end

```

```

80
81 fF_k = []; % Initialisierung der generalisierten Kraft
82 m_k = []; % Initialisierung der generalisierten Masse
83 for k = 1:length(zeta_k) % Für jede Eigenschwingung werden
    generalisierte Kraft und Masse bestimmt. Dafür muss über
    die Höhe des Hochhauses integriert werden.
84     fF_k = [fF_k; mu*H*integral(matlabFunction(Y_k(k)),1e
        -5,1)];
85     m_k = [m_k; mu*H^2*integral(matlabFunction(Y_k(k)^2),1e
        -5,1)];
86 end
87 Y_k = matlabFunction(Y_k); % Die Eigenformen werden in Matlab
    -Funktionen umgewandelt, um spätere Berechnungen zu
    beschleunigen
88 end
89 %-----
90 function Y = getEigenschwingung(lambda,A,alphaj,pSj,kj,bj,
    Phij,cj)
91 % Funktion zur Ermittlung der Eigenschwingungen für die
    Beschreibung der freien gedämpften Schwingung eines
    Hochhauses mit DOS. Der Kern wird als Euler-Bernoulli-Stab
    angenähert.
92 % Benötigt werden die Matrix der charakteristischen Gleichung
    A, der Eigenwert lambda, die Position der DOS alphaj, die
    Steifigkeitsverhältnisse Stützen-Kern pSj, die
    Steifigkeit der Dämpfer kj, die Trägheit der Dämpfer bj,
    die frequenzunabhängige und die viskose Dämpfung der Dä
    mpfer Phij bzw. cj.
93 n = length(alphaj); % Anzahl der DOS.
94
95 A = matlabFunction(A); % Umwandlung von A in eine Matlab-
    Funktion, um sie besser verwenden zu können
96 A_werte = A(lambda); % Einsetzen der Eigenwerte
97 [~, AGauss] = lu(A_werte); %Gauss-Elimination der A-Matrix,
    um auf eine obere Dreiecksmatrix zu kommen
98 Ared = AGauss(1:3,1:3); % Die Dreiecks-K-Matrix wird um die
    unterste Zeile und die letzte Spalte reduziert.
99 Fred = - AGauss(1:3,4); % Es wird ein Kraftvektor erstellt,
    der die letzte Spalte der Dreiecks-K-Matrix enthält.
100 D = Ared\Fred; % Berechnung des Eigenvektors D
101 D = [D; 1]; % Ergänzung durch vierte Zeile
102 D = D/norm(D); % Normierung von D
103
104 syms xi; % Es wird eine symbolische Laufvariable xi entlang
    der Stabachse des Kerns benötigt
105 Chij = getChij(alphaj,pSj,kj,bj,Phij,cj,lambda); % Berechnung
    der von lambda abhängigen Dämpferparameter der DOS Chij.
106
107 % Mithilfe dieser Werte kann die Q-Matrix berechnet werden:

```

```

108 for j = 1:n
109     QXi(j,1)=Chij(j)*( cos(lambda*(xi-alpha(j)))+cosh(lambda
        *(xi-alpha(j))))*heaviside(xi-alpha(j));
110 end
111 G(1,:) = getPk(lambda,alpha,1); % G(1) ist Pk(1), also das
        Verhalten des ersten DOS von unten.
112 % Für alle weiteren G(k) müssen der Qk-Vektor und der Pk-
        Vektor gebildet und mit der vorhandenen G-Matrix
        verrechnet werden.
113 if n >= 2
114     for k = 2:n
115         for j = 1:k-1
116             Qk(j,1) = lambda*Chij(j)*( sin(lambda*(alpha(k)-
                alpha(j)))...
                +sinh(lambda*(alpha(k)-alpha(j))))';
117         end
118         G(k,:) = getPk(lambda,alpha,k) + Qk*G;
119     end
120 end
121 end
122 % Schlussendlich wird noch die P-Matrix gebildet:
123 PXi = [sin(lambda*xi), cos(lambda*xi), sinh(lambda*xi), cosh(
        lambda*xi)];
124 % Die drei Matrizen bilden gemeinsam die AXi-Matrix, die das
        Schwingungsproblem vollständig beschreibt:
125 AXi = QXi.*G + PXi;
126 Y = AXi*D; %Bestimmung der komplexen Eigenform
127 Y = simplify(Y, Steps=50); % Vereinfachung der Funktion
128 Y = real(Y); % Die Eigenform ist der Realteil der komplexen
        Eigenform
129 end
130
131 %-----
132 function [eta_k] = getEtak(fF_k,m_k,ayF,tF,omega_nk,zeta_k)
133 % Funktion zur Berechnung der Verschiebung eines
        Schwingungssystems mit der Eigenkreisfrequenz omega_nk,
        der modalen Dämpfung zeta_k, der generalisierten Masse m_k
        , der generalisierten Kraft fF_k und der Anregung ayF am
        Fundament. tF ist die Zeitvariable der Anregung.
134
135 eta_k = zeros(length(omega_nk),length(tF)); %Initialisierung
        der modalen Verschiebungen
136 for t = 1:length(tF) %Für jeden Zeitschritt muss numerisch
        das Duhamel-Integral berechnet werden. Das geschieht in
        den folgenden Schritten mithilfe der Trapezmethode
137     for tau = 2:t
138         eta_k(:,t) = eta_k(:,t) + (tF(tau)-tF(tau-1))*((-ayF(
                tau) *exp(-zeta_k.*omega_nk*(tF(t)-tF(tau))) .*
                sin(omega_nk.*sqrt(1-zeta_k.^2)*(tF(t)-tF(tau))))

```

```

        +(-ayF(tau-1)*exp(-zeta_k.*omega_nk*(tF(t)-tF(tau
        -1))).*sin(omega_nk.*sqrt(1-zeta_k.^2)*(tF(t)-tF(
        tau-1)))))/2;
139     end
140     eta_k(:,t) = eta_k(:,t).*fF_k./m_k * 1./(omega_nk.*sqrt
        (1-zeta_k.^2));
141 end
142 end
143
144 %-----
145 function [a_k] = getAk(fF_k,m_k,ayF,tF,omega_nk,zeta_k)
146 % Funktion zur Berechnung der Absolutbeschleunigung eines
        Schwingungssystems mit der Eigenkreisfrequenz omega_nk,
        der modalen Dämpfung zeta_k, der generalisierten Masse m_k
        , der generalisierten Kraft fF_k und der Anregung ayF am
        Fundament. tF ist die Zeitvariable der Anregung.
147
148 a_k = zeros(length(omega_nk),length(tF)); %Initialisierung der
        modalen Beschleunigungen
149 for t = 1:length(tF) %Für jeden Zeitschritt muss numerisch
        das Duhamel-Integral berechnet werden. Das geschieht in
        den folgenden Schritten mithilfe der Trapezmethode
150     for tau = 2:t
151         a_k(:,t) = a_k(:,t) + (tF(tau)-tF(tau-1))*((-ayF(tau)
                *exp(-zeta_k.*omega_nk*(tF(t)-tF(tau))) .*(((2*
                zeta_k.^2-1).*sin(omega_nk.*sqrt(1-zeta_k.^2)*(tF(
                t)-tF(tau)))) - 2*zeta_k.*sqrt(1-zeta_k.^2).*cos(
                omega_nk.*sqrt(1-zeta_k.^2)*(tF(t)-tF(tau))))))
                +(-ayF(tau-1)*exp
                (-zeta_k.*omega_nk*(tF(t)-tF(tau-1))).*(((2*zeta_k
                .^2-1).*sin(omega_nk.*sqrt(1-zeta_k.^2)*(tF(t)-tF(
                tau-1)))) - 2*zeta_k.*sqrt(1-zeta_k.^2).*cos(
                omega_nk.*sqrt(1-zeta_k.^2)*(tF(t)-tF(tau-1))))))
                /2;
152     end
153     a_k(:,t) = a_k(:,t).*fF_k./m_k.*omega_nk./(sqrt(1-zeta_k
        .^2));
154 end
155 end

```