TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

DIPLOMARBEIT

Diskrete ebene Netze mit eingeschriebenen Kegelschnitten

zur Erlangung des akademischen Grades Diplom-Ingenieur
im Rahmen des Studiums Technische Mathematik

eingereicht von

Katharina Johanna Kastberger
Matrikelnummer: 11770644

unter der Anleitung von

Assoc. Prof. Mag. Dr. Christian Müller

ausgeführt am

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

Wien, am 30. August 2024

Katharina Kastberger

Christian Müller

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Kurzfassung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Konstruktion und Visualisierung von diskreten ebenen Netzen mit eingeschriebenen Kegelschnitten. Die eingeschriebenen Kegelschnitte sind nicht-degenerierte Kegelschnitte und berühren jede der vier Kanten der Facette genau einmal. Jede Facette enthält sogar eine Familie von eingeschriebenen Kegelschnitten.

Berühren sich alle benachbarten eingeschriebenen Kegelschnitte eines Netzes, das heißt, jeder Kegelschnitt berührt seinen benachbarten Kegelschnitt in genau einem Berührpunkt, so handelt es sich um ein Kœnigsnetz. Deren Gestalt kann beispielsweise durch ein Geradengitter erzeugt werden, dessen Geraden tangential zu einem Kegelschnitt liegen. Wir untersuchen auch sogenannte Schleifennetze, welche wie bei einem klassischen Spinnennetz aus teils geschlossenen Polygonzügen bestehen.

Während die nicht-degenerierten Kegelschnitte (Ellipse, Parabel und Hyperbel) effizient in der reellen projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ betrachtet und berechnet werden können, wird für eine adäquate Behandlung von Kreisen die projektive Ebene komplex erweitert. Durch Identifizierung von $\mathbb{R}^2$ mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ können wir Kreismuster auch auf der komplexen projektiven Gerade $\mathbb{CP}^1$ und der dazu isomorphen Riemannschen Sphäre $\mathbb{S}^2$ betrachten. Orthogonale Kreismuster und Kreispackungen lassen sich durch geeignete Wahl der Polygonzüge ebenfalls als Netze mit eingeschriebenen Kegelschnitten interpretieren.

Die ebenen Kreismuster können wir mittels stereographischer Projektion auf die Riemannsche Sphäre projizieren. Umgekehrt ist jede polyedrische zellenförmige Zerlegung der Sphäre in die Ebene projizierbar. Diese Zerlegung bildet einen Polyeder dessen Facetten eingeschriebene Kreise enthalten, welche in der Ebene ein Netz mit eingeschriebenen Kreisen bildet. Demnach haben wir sogar ein Netz mit eingeschriebenen Kreisen auf der Sphäre in der projektiven komplexen Ebene $\mathbb{CP}^2$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Abstract

In this thesis we construct and visualize the so-called discrete planar nets with inscribed conics. The nets are made of planar polygons as faces (mostly quadrilaterals). The inscribed conics are non-degenerated conics and have to touch the edges of the corresponding face in exactly one point.

If the whole set of inscribed conics are touching each other, meaning each conic touches each neighbouring conic in exactly one point, then we speak of a Kœnigs net. There are several ways to construct such a net, for example, it can be generated by using a line grid, where each line is tangent to a conic. Additionally, we consider loops of inscribed conics which can also create nets that look like spiderwebs.

The non-degenerated conics ellipse, parabola and hyperbola can be efficiently studied and calculated in the real projective plane $\mathbb{P}^2$. In contrast, using again projective geometry circles are determined in terms of complex numbers. We can identify $\mathbb{R}^2$ with $\mathbb{C}$ and therefore we can consider the circle patterns on the complex projective line $\mathbb{CP}^1$. Orthogonal circle patterns and circle packings with an appropriate choice of polygon chains are reinterpretable as nets with inscribed circles, the so-called incircular nets.

Incircular nets on the plane can be projected by stereographic projection onto the Riemann sphere, which is isomorphic to the complex projective line. Thus, we also obtain a circle pattern on the sphere. Vice-versa every polytopal cellular decomposition of the sphere with inscribed circles can be mapped onto a pattern of circles in the plane. We have now two incircular nets: one on the sphere and its projected picture in the plane.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Danksagung

Ein großes Dankeschön gilt Christian Müller, der mir ermöglicht hat eigenständig an das Thema heranzugehen und sowohl die Einteilung als auch den Verlauf der Arbeit mir frei überlassen hat. Weiters ist es mir ein Anliegen mich bei Gabriela Schranz-Kirlinger zu bedanken, welche mir eine Anstellung als studentische Mitarbeiterin für meine Masterarbeit ermöglicht hat. Dahingehend bedanke ich mich auch herzlich bei meiner Kollegin Ružica Rasoulzadeh-Mijić, die mir weitergeholfen hat, wenn sich ein Knoten in meinem Kopf gebildet hat.

Ohne die mentale Unterstützung meiner Eltern, meiner Tante und meiner Oma säße ich nicht hier und finalisiere meine Masterarbeit. Die richtigen Worte zu finden ist egal bei welchem Text nicht einfach und dahingehend bedanke ich mich bei meinem Freund für seine Geduld beim Durchlesen und Einenglischen von Textpassagen, aber auch für die aufbauenden Worte in den schweren prüfungsbelasteten Zeiten.

Wien, am 30. August 2024 *Kathi Kastberger*

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 30. August 2024

Katharina Johanna Kastberger

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Geometrische Grundlagen **3**
1.1 Reelle projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ 4
1.2 Kegelschnitte in $\mathbb{P}^2$ 7
1.3 Spezialfall Kreis und die komplexe projektive Gerade $\mathbb{CP}^1$ 9
1.4 Netze in $\mathbb{P}^2$ 13
1.5 Eingeschriebene Kegelschnitte 17

2 Verschiedene Netze **25**
2.1 Schleifen- und Spinnennetze 25
2.2 Kœnigsnetze 28
2.3 Geradengitter an Kegelschnitt 33

3 Kreismuster und Netze **41**
3.1 Von Kreismustern zu Kreisnetzen 41
3.2 Von β-vielen Blütenblättern zu Kreisnetzen 49

Literaturverzeichnis **61**

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Einleitung

Seit Jahrhunderten wird die klassisch glatte Differentialgeometrie erforscht und bietet auch noch heute einen großen Forschungsbereich. Von dort abgeleitet hat sich die diskrete Differentialgeometrie, deren Objekte nicht nur als Approximationen von glatten Objekten gesehen werden können, sondern auch einen eigenen separaten Forschungszweig bilden.

Den Grundstein dafür legte Robert Sauer mit dem, nach seinem Tod im Jahre 1970 erschienen, Buch *Differenzengeometrie*, [S70], in dem er den Begriff der Differenzengeometrie verwendet. Zum Beispiel stellte Sauer die Benutzung von Polygonen als Modelle für Kurven und Vierecks- und Dreiecksnetze für die Modelle als Flächen vor.

Eine erste Sammlung an Themen der diskreten Differentialgeometrie gelang durch das Oberwolfach Seminar »Discrete Differential Geometry« im Jahre 2004, [B08]. Im Jahr 2008 erschienen dann das Lehrbuch *Discrete Differential Geometry – Integrable Structure* von Alexander I. Bobenko und Yuri B. Suris, [BS08]. Durch die Anwendung in der Computergrafik hat die diskrete Differentialgeometrie in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen.

Wir interessieren uns in dieser Arbeit besonders für die Betrachtung von Netzen in der Ebene. Diese sind allen voran Vierecksnetze bestehend aus an den Kanten zusammengeklebten konvexen Vierecken. Zusätzlich sei in jede dieser Facetten ein Kreis oder ein nicht-degenerierter Kegelschnitt, also Ellipse, Parabel und Hyperbel, eingeschrieben. Das heißt beispielsweise, jedes Viereck im Netz enthält eine Ellipse, die jede der vier Kanten in genau einem Punkt berührt. Durch die Kombination von Vierecksnetzen und eingeschriebenen Kegelschnitten lassen sich die unterschiedlichsten Varianten von Netzen konstruieren.

Für die Einführung in die geometrischen Grundlagen sind im ersten Abschnitt dieser Arbeit das Vorlesungsskript *Projektive Geometrie* von Christian Müller aus dem Jahr S2022, [M22], und *Perspectives on Projective Geometry – A Guided Tour through Real and Complex Geometry* von Jürgen Richter-Gebert, [RG11], essentiell, um die reelle projektive Ebene und komplexe projektive Gerade zusammen mit den Kegelschnitten einzuführen.

Die Hauptliteratur für den zweiten Teil der Arbeit liefert uns Alexander I. Bobenko in Zusammenarbeit mit einigen seiner Kollegen. Wir orientieren uns besonders an dem Paper *Nets of Lines with the Combinatorics of the Square Grid and with Touching Inscribed Conics* von Alexander I. Bobenko und Alexander Y. Fairley, [BF21] und an dem

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

bereits erwähnten Buch [BS08].

Im dritten Abschnitt bilden das Paper *Circle patterns with the combinatorics of the square grid* von Oded Schramm, [S97] und das Buch von Kenneth Stephenson *Introduction to Circle Packing – The Theoriy of Discrete Analytic Functions*, [S05], die Grundlage. Einige Worte wurden aus dem Englischen eingedeutscht, da die Literatur (mit ein paar Ausnahmen) ausschließlich auf Englisch verfasst ist.

Die gesamte Arbeit lässt sich in folgende drei Teile teilen:

Wir starten mit der Einführung in die reelle projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ und der Definition von Kegelschnitten und Netzen. Die nicht-degenerierten Kegelschnitte Ellipse, Hyperbel und Parabel lassen sich einfach in $\mathbb{P}^2$ definieren und ermöglichen uns eine einfache Betrachtung zusammen mit dem dazugehörigen Netz. Das Netz wird über seine Knoten, Kanten und Facetten definiert sein, wobei wir hauptsächlich mit viereckigen Facetten und Kanten als Teilstrecken von Polygonzügen arbeiten werden.

Jede Facette enthält einen sogenannten eingeschriebenen Kegelschnitt und sogar eine ganze Familie von eingeschriebenen Kegelschnitten. Da ein Kreis bereits durch drei Punkte eindeutig festgelegt ist, ist die Gestalt der Netze deutlich eingeschränkter und weniger einfach zu finden. Um diese Netze mit eingeschriebenen Kreisen weiterhin in der projektiven Geometrie verwenden zu können, gehen wir zu den komplexen Zahlen über. Den ebenen Raum $\mathbb{R}^2$ können wir mit der Menge komplexer Zahlen $\mathbb{C}$ identifizieren, auf gleiche Weise lässt sich auch die projektive reelle Ebene $\mathbb{P}^2$ mit der projektiven komplexen Gerade $\mathbb{CP}^1$ identifizieren, wo wir zukünftig die Kreise betrachten wollen.

Wir setzen im zweiten Teil direkt mit den klassischen Kegelschnitten (ohne Spezialfall Kreis) fort und untersuchen Bedingungen für eingeschriebene Kegelschnitte, die in speziellen Netzarten resultieren. Dazu gehört auch das Kœnigsnetz, welches uns bis zum Ende dieser Arbeit begleitet und durch ein Netz gegeben ist, in dem sich benachbarte Kegelschnitte in genau einem Punkt berühren.

Im letzten Abschnitt befassen wir uns ausschließlich mit dem Kegelschnittspezialfall Kreis. Wir starten hier mit einer Definition von orthogonalen Kreismustern auf der komplexen projektiven Geraden, diese ist isomorph zur Riemannschen Sphäre. Aus diesen orthogonalen Kreismustern konstruieren wir Netze mit berührenden eingeschriebenen Kreisen.

Darüber hinaus verallgemeinern wir die Anzahl der Ecken einer Facette auf $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Somit lassen sich auch Kreispackungen betrachten, deren tangential aneinander stehende Kreise nicht nur vier berührende Kreise als Nachbarn haben, sondern genau β-viele. Wir können diese Kreismuster, aus denen sich Netze mit eingeschriebenen Kegelschnitten herleiten lassen, nicht nur in der Ebene, sondern auch auf der Riemannschen Sphäre visualisieren. Die stereographische Projektion gibt uns die Möglichkeit Kreisnetze nicht nur in der Ebene, sondern auch auf der Sphäre im $\mathbb{CP}^2$ genauer zu analysieren.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Kapitel 1

Geometrische Grundlagen

Wir wollen uns Netze ansehen, die eingeschriebene Kegelschnitte enthalten. Um diese Begriffe später richtig zu verwenden, nutzen wir dieses Einfühungskapitel, um wesentliche Notationen, Begriffe und benötigtes Hintergrundwissen vorzustellen. Wir klären allen voran in welchem Raum wir all diese Überlegungen anstellen, dies geschieht in Kapitel 1.1. Um die Antwort gleich vorweg zu nehmen: Das meiste wird sich in der reellen projektiven Ebene, dem $\mathbb{P}^2$, abspielen.

Kegelschnitte sind bekanntlich Hyperbeln, Parabeln und Ellipsen, dennoch widmen wir ihnen das Kapitel 1.2. Da Kreise deutlich speziellere Ellipsen darstellen und oft in einem anderen Raum betrachtet werden, sehen wir uns diese in Kapitel 1.3 genauer an.

Im Gegensatz zu Kegelschnitten ist »Netz« ein vielfältigeres Wort. Um nicht jedes Mal an das Straßennetz oder Spinnennetz oder gar Mobilfunknetz zu denken, betrachten wir in Kapitel 1.4 die benötigte mathematische Definition dahinter.

Den Abschluss dieses Kapitels bilden die Netze mit eingeschriebenen Kegelschnitten im Kapitel 1.5. Dort führen wir auch einige Eigenschaften an, die wir in den darauffolgenden Kapiteln brauchen werden.

> **Notation:** Wir werden von nun an **Netz mit eingeschriebenen Kegelschnitten** häufig durch **Netze mit EKSen** abkürzen.

Die dazugehörige Literatur ist [C14], [M22], [RG11] für die projektive Geometrie inklusive Kegelschnitte und [GS39], [AB18], [BF21] für die Herleitung bzw. Definition von Netzen mit eingeschriebenen Kegelschnitten.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

1.1 Reelle projektive Ebene $\mathbb{P}^2$

Der Hauptteil dieser Arbeit spielt sich im projektiven Raum ab. Später visualisieren wir die EKS-Netze in der Euklidischen Ebene, dem $\mathbb{R}^2$. Zur Vollständigkeit wollen wir die wichtigsten Eigenschaften nennen, vgl. [M22].

Sei $x := (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann sei $[x] := \operatorname{span}\{x\}$ die lineare Hülle von x und es gilt

$$[x] = \{\lambda x \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

Die Koordinaten des Vektors x werden auch **homogene Koordinaten** genannt.

Definition 1.1.1. Der **reelle projektive Raum der Dimension n** sei durch

$$\mathbb{P}^n := \{[x] : x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}\}$$

definiert.

Es gelten folgende Eigenschaften

- ▷ Sei $G \subseteq \mathbb{P}^n$ ein projektiver Unterraum, dann existiert ein Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, sodass $G = \mathcal{P}(U)$ für $\mathcal{P}(U) = \{[g] \in \mathbb{P}^2 \ : \ g \in G, g \neq 0\}$ gilt, wobei $\mathcal{P}$ auch Projektivierungsoperator heißt;
- ▷ Die Dimension von G sei definiert durch $\dim G := \dim_\ell U - 1$, wobei $\dim_\ell$ die lineare Dimension von U als Untervektorraums des $\mathbb{R}^{n+1}$ darstellt.

In dieser Arbeit beschränken wir uns auf die reelle projektive Ebene $\mathbb{P}^2$, also setzen wir $n = 2$. Wir betten demnach die euklidische (eigentlich affine) Ebene $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ ein und zwar als Ebene für $x_0 = const$ mittels

$$[(x_0, x_1, x_2)] \in \mathbb{P}^2 \ \longleftrightarrow \ \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)^\top \in \mathbb{R}^2 \text{ für } x_0 \neq 0.$$

Die Punkte im $\mathbb{R}^2$ heißen auch **eigentliche Punkte**. Ein **Fernpunkt** wird definiert durch $x_0 = 0$, also

$$[(0, x_1, x_2)] \in \mathbb{P}^2 \text{ Fernpunkt} \quad \longleftrightarrow \quad (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \text{ Richtung}$$

und liefert darüber hinaus auch folgende Definition.

Definition 1.1.2. Die **Ferngerade**, welche wir mit ω bezeichnen werden, trägt alle Fernpunkte und ist definiert durch

$$\omega := \{[x] \in \mathbb{P}^2 \ : x_0 = 0\}.$$

Die allgemeine **Geradengleichung** ist gegeben durch $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$ mit homogenen Geradenkoordinaten $u := (u_0, u_1, u_2)$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Eine besondere Eigenschaft des $\mathbb{P}^2$ ist, dass je zwei Punkte $P = [p]$ und $Q = [q]$ in $\mathbb{P}^2$ eine **Verbindungsgerade** $P \vee Q := [\lambda p + \mu q]$ für $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ besitzen. Umgekehrt haben je zwei Geraden g und h genau einen Schnittpunkt $g \cap h$ (bei parallelen Geraden ist dieser Schnittpunkt im Unendlichen).

Eine Menge von Punkten ist **kollinar**, wenn alle Punkte auf einer gemeinsamen Gerade liegen. Dual dazu ist eine Menge an Geraden **kopunktal**, wenn alle Geraden durch ein und denselben Punkt gehen. Ein Punkt bzw. eine Gerade **inzidiert** mit einer Geraden bzw. einem Punkt, wenn der Punkt auf einer Geraden liegt bzw. die Gerade durch einen Punkt geht. Diese damit verbundene Umgekehrtseineigenschaft heißt auch **Dualität**, welche wir nach der folgenden Definition vorstellen wollen.

Definition 1.1.3. Sei P ein Punkt in $\mathbb{P}^2$. Dann bezeichnen wir mit P^* das **Geradenbüschel durch P**, also die Menge aller Geraden, die kopunktal in P liegen.

Wie angkündigt, kommen wir jetzt zur Dualität[1].

Definition 1.1.4 (Dualität).
Sei A eine Aussage in $\mathbb{P}^2$ bestehend aus Begriffen, wie Punkt, schneiden, kollinear, etc. Dann handelt es sich bei $A^\star$ um die **duale Aussage** und hat im Vergleich zu A die Begriffe Gerade, verbinden, kopunktal, etc. Wir können also folgende etwas detailiertere Tabelle betrachten

$$\begin{array}{rcl} \text{Gerade} & \longleftrightarrow & \text{Punkt} \\ \text{Tangente} & \longleftrightarrow & \text{Berührpunkt} \\ \text{schneiden} & \longleftrightarrow & \text{verbinden} \\ \text{kollinear} & \longleftrightarrow & \text{kopunktal} \\ \text{Geradenbüschel} & \longleftrightarrow & \text{Punktreihe} \end{array}$$

Als Nächstes wollen wir uns Funktionen in $\mathbb{P}^2$ ansehen.

Definition 1.1.5. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bijektiv und linear, d.h. ein Automorphismus. Dann ist

$$\kappa : \begin{cases} \mathbb{P}^2 & \to & \mathbb{P}^2 \\ [x] & \mapsto & [f(x)] \end{cases}$$

eine **projektive Transformation**.

Für die lineare Abbildung f existiert eine Matrix $A_\kappa \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass wir $f(x) = A_\kappa x$ schreiben können. Projektive Transformationen halten die kollineare Lage von Punkten

[1] Wir weisen auf den Unterschied zwischen $.^\star$ und $.^*$ hin.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

aufrecht (demnach sind projektive Transformationen geradentreu).

Wir wollen die projektive Transformation κ auf eine Gerade mit homogenen Gerdenkoordinaten u anwenden. Die Bildgerade wird dann durch die homogenen Geradenkoordinaten $A_\kappa^{-\top} u$ $(= (A_\kappa^{-1})^\top u)$ ausgedrückt, wobei A_κ die Darstellungsmatrix von κ sei. Wenden wir κ auf jeden Punkt der Gerade an, dann ist sein Bild die Trägergerade. Gilt $\kappa(P) = P$ für einen Punkt P unter κ, dann ist P ein sogenannter **Fixpunkt**.

Als **Zentrum** Z bezeichnen wir einen Punkt durch den jede Gerade nach Anwendung von κ fest bleibt. Gibt es eine Gerade auf der jeder Punkt ein Fixpunkt ist, so nennen wir diese **Fixpunktgerade** oder auch **Achse**.

Darüber hinaus ist die Einschränkung einer projektiven Transformation auf eine Gerade eine Projektivität, welche wir nun betrachten.

Definition 1.1.6. Eine **Perspektivität von g nach g' mit Zentrum Z** ist

$$\rho : \begin{cases} g & \to & g' \\ X & \mapsto & X' := (Z \vee X) \cap g' \end{cases}$$

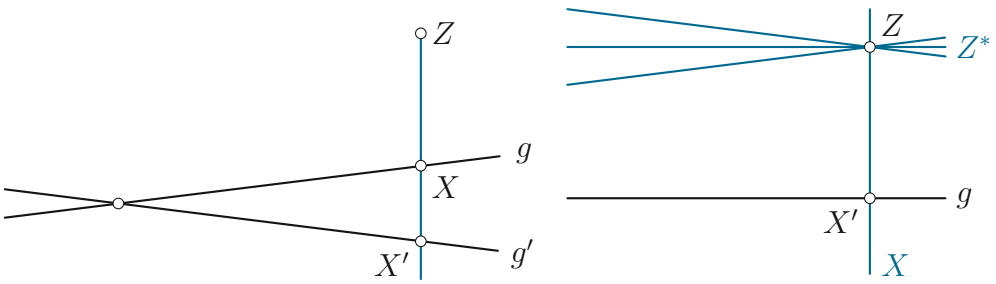
mit Geraden g, g' und Punkt Z in der Verbinungsebene von $g \vee g'$ mit $Z \notin g$ und $Z \notin g'$. Wir bezeichnen eine Perspektivität auch mit $g \overset{=}{\wedge} g'$ bzw. $g(X) \overset{(Z)}{\overset{=}{\wedge}} g'(X')$, siehe Abbildung 1.1 (a).

Eine **Perspektivität von Z^* nach g** wäre

$$\rho : \begin{cases} Z^* & \to & g \\ X & \mapsto & X' := X \cap g' \end{cases}$$

mit g Gerade und Z ein Punkt mit $Z \notin g$, siehe Abbildung 1.1 (b).

Eine Hintereinanderausführung von Perspektivitäten ist eine **Projektivität**.



(a) *Perspektivität von g nach g'* (b) *Perspektivität von Z^* nach g*

Abbildung 1.1: *Visualisierung von Definition 1.1.6.*

Nach [C14, Prop 5.3.2] gilt folgende Proposition.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Proposition 1.1.7. Seien $P, Q \in \mathbb{P}^2$ mit $P \neq Q$. Dann ist die projektive Transformation $\rho : P^* \to Q^*$ eine Perspektivität, genau wenn $\rho(P \vee Q) = P \vee Q$ gilt.

Kommen wir nun zu Kegelschnitten in der projektiven Ebene.

1.2 Kegelschnitte in $\mathbb{P}^2$

Wir schreiben gleich die Definition von einem Kegelschnitt an, welche wir ebenfalls [M22] entnehmen.

Definition 1.2.1. Sei $A_Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}\backslash\{\mathbf{0}\}$ symmetrisch, d.h. es gilt $A_Q^\top = A_Q$. Dann heißt

$$\mathscr{Q} := \{[x] \in \mathbb{P}^2 \ : \ x^\top A_Q x = 0\} \tag{1.1}$$

Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2$ (der zweidimensionale Fall einer **Quadrik**). Die Gleichung $x^\top A_Q x = 0$ nennen wir auch **Gleichung des Kegelschnitts**.

Ein Punkt auf einem Kegelschnitt $P = [p] \in \mathscr{Q}$ heißt genau dann **regulär**, wenn $p^\top A_Q \neq 0$ erfüllt ist. Gilt hingegen Gleichheit, so handelt es sich um einen **singulären Punkt**. Daraus resultiert die Definition eines **regulären** oder **nicht-degenerierten Kegelschnitts**: Ein Kegelschnitt ist regulär, wenn jeder Punkt des Kegelschnitts regulär ist. Das heißt der Kegelschnitt enthält keine Geraden und besteht nicht nur aus einem Doppelpunkt. Von nun an wollen wir ausschließlich nicht-degenerierte Kegelschnitte betrachten, welche verschieden von der leeren Menge sind. Mit $|\mathscr{Q}|$ kennzeichnen wir die Menge aller Punkte des Kegelschnittes $\mathscr{Q}$.

Wir definieren eine Gerade $g \in \mathbb{P}^2$ mit homogenen Geradenkoordinaten $u = p^\top B$, wobei B eine symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}\backslash\{\mathbf{0}\}$ ist. Der Schnitt einer Geraden mit einem Kegelschnitt $\mathscr{Q}$ hat genau keinen, einen oder zwei Schnittpunkte, wenn es sich bei dieser Geraden um eine Passante, Tangente oder Sekante handelt. Ist $P = [p]$ ein regulärer Punkt in $\mathscr{Q}$, dann ist die **Tangente im Berührpunkt** P definiert durch

$$\{[x] \in \mathbb{P}^2 \ : \ p^\top A_Q x = 0\}.$$

Wir bezeichnen mit t_P die homogenen Geradenkoordinaten der Tangente. Weiters gilt für eine Tangente t_P an $\mathscr{Q}$ im Punkt P

$$t_P^\top A_Q^{-\top} t_P = 0. \tag{1.2}$$

Die **Klassifikation reeller Kegelschnitte** besagt, dass es zu jedem Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2$ eine projektive Transformation gibt, sodass der abgebildete Kegelschnitt die Gleichung

$$x_0^2 + \cdots + x_{m-1}^2 - x_m^2 - \cdots - x_{r-1}^2 = 0 \tag{1.3}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

für eindeutige $r, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ erfüllt, wobei stets $r - m \leq m$ gilt mit $0 \leq r \leq n + 1$.

Der **Rang eines Kegelschnitts** ist definiert durch $\operatorname{rang}(\mathscr{Q}) := r := n + 1$. Der **Index eines Kegelschnitts** ist die Anzahl der negativen Vorzeichen in (1.3) und wird mit $\operatorname{index}(\mathscr{Q}) := r - m$ abgekürzt. Da wir nicht-degenerierte Kegelschnitte betrachten gilt stets $\operatorname{index}(\mathscr{Q}) > 0$ (durch das ausschließen der leeren Menge) und

$$\operatorname{index}(\mathscr{Q}) < \operatorname{rang}(\mathscr{Q}) - 1. \tag{1.4}$$

Den Rang und den Index können wir verwenden, um die Eindeutigkeit eines Kegelschnitts zu zeigen, wie folgender Satz aufzeigt, vgl. [C14, Thm 7.3.3, Prop 7.2.5].

Satz 1.2.2. Angenommen $\mathscr{Q}$ und $\mathscr{Q}'$ sind Kegelschnitte in $\mathbb{P}^2$ mit gleicher Menge an Punkten, d.h. $|\mathscr{Q}| = |\mathscr{Q}'|$. Ist (1.4) erfüllt oder $\operatorname{rang}(\mathscr{Q}) = 1$ oder wenn $\mathbb{P}^2$ über $\mathbb{C}$ definiert ist, dann gilt $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}'$.

Wir können damit sogar den Begriff der **Signatur** beschreiben, welche definiert ist durch $(m, \operatorname{index}(\mathscr{Q}), n - m - \operatorname{index}(\mathscr{Q}) + 1)$. Somit können Kegelschnitte auch durch seine Signatur beschrieben werden, was insbesondere auch folgendes Beispiel aufzeigt.

Beispiel 1.2.3. *Bei* $(1, 1, 1)$ *oder auch* $(+-0)$ *handelt es sich um ein Geradenpaar mit Gleichung* $x_0^2 - x_1^2 = 0$*, welches einen singulären Kegelschnitt beschreibt. Ein regulärer Kegelschnitt hat beispielsweise die Signatur* $(++-)$ *bzw.* $(2, 1, 0)$*. Dann wissen wir sofort der Kegelschnitt hat die Gestalt* $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ *(die Konstanten wurden hier vernachlässigt) und dabei handelt es sich um eine Hyperbel.* ◇

Dies führt uns auf folgende Klassifikation.

Definition 1.2.4 (Klassifikation der Kegelschnitte).
Sei ω eine Ferngerade und $\mathscr{Q}$ ein Kegelschnitt, wie in Definition 1.2.1. Dann unterscheiden wir nach Anzahl der Schnittpunkte von ω mit dem Kegelschnitt $\mathscr{Q}$, wie folgt

- ▷ kein Schnittpunkt liefert uns eine **Ellipse** (bzw. Kreis),
- ▷ ein Schnittpunkt ergibt eine **Parabel** und
- ▷ zwei Schnittpunkte liefern uns eine **Hyperbel**.

Nicht-degenerierte Kegelschnitte sind also Ellipsen (dazu gehören auch die Kreise), Parabeln und Hyperbeln. Diese besitzen darüber hinaus sogenannte **Brennpunkte** (Ellipsen und Hyperbeln haben zwei, Parabeln haben zwei mit einem Brennpunkt im Unendlichen, während Kreise nur einen Brennpunkt besitzen, der mit dem Mittelpunkt zusammenfällt), wie [RG11, Kap. 19.4] aufzeigt und in Abbildung 1.2 visualisiert wurde. Diese Punkte erfüllen folgende Bedingung: Ausgehend vom Brennpunkt F_1 schicken wir einen Strahl an den Rand des Kegelschnitts, welcher von dort (im Punkt P) zurück gespiegelt wird und durch den zweiten Brennpunkt F_2 geht. In diesem Fall bedeutet

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

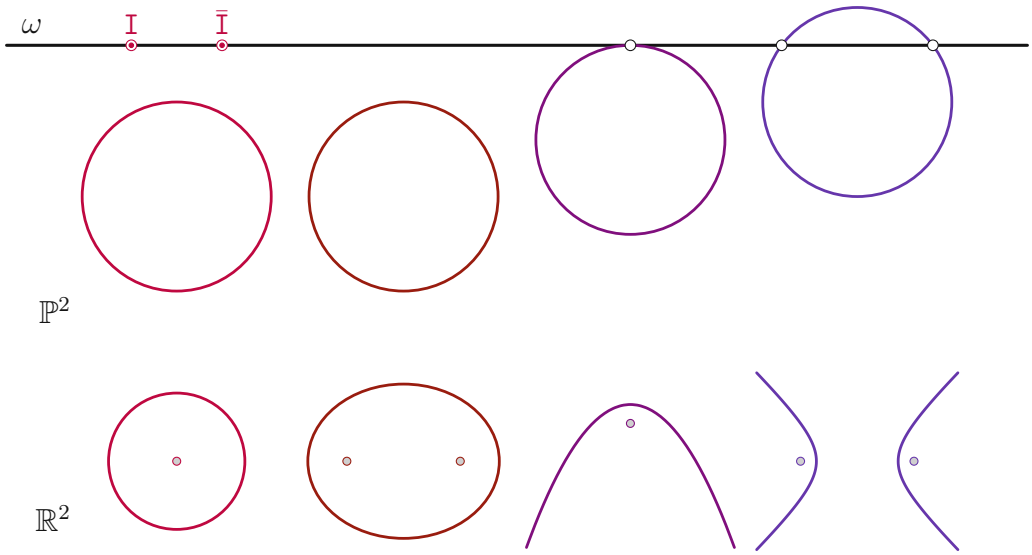


Abbildung 1.2: *Klassifikation der Kegelschnitte inklusive Brennpunkte*

Spiegelung am Kegelschnitt, dass die Tangente im Punkt P den Spiegel repräsentiert und der Strahl an einer zur Tangente senkrechten Gerade gespiegelt wird. In [RG11, Kap. 19.5] wird sogar gezeigt, wie wir mithilfe von Brennpunkten einen Kegelschnitt konstruieren können.

Ein wichtiger Satz zur Eindeutigkeit von Kegelschnitten durch fünf Geraden bzw. durch fünf Punkte, siehe [C14, Cor. 8.1.9, 8.1.12], spielt im weiteren Verlauf noch eine besondere Rolle.

Korollar 1.2.5. Wir betrachten fünf Punkte in $\mathbb{P}^2$, von den je drei nicht kollinear sind. Dann existiert ein eindeutiger nicht-degenerierter Kegelschnitt durch diese fünf Punkte.
Dual dazu gilt für fünf Geraden in $\mathbb{P}^2$, von denen je drei nicht kopunktal sind, existiert ein eindeutiger nicht-degenerierter Kegelschnitt tangential zu diesen Geraden.

1.3 Spezialfall Kreis und die komplexe projektive Gerade $\mathbb{CP}^1$

Laut Definition 1.2.4 haben wir eine Ellipse gegeben, wenn sie keinen Schnittpunkt mit der Ferngerade ω aufweist. Aber wann ist eine Ellipse ein Kreis? Oder allgemeiner: Wann ist ein Kegelschnitt ein Kreis? Mit dieser Frage wollen wir uns nun beschäftigen, vgl. [RG11, Kap. 1.6, 16-18] und [M22]:

Ein Kreis mit Mittelpunkt (m_x, m_y) und Radius r in $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die Kreisgleichgleichung

$$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2.$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Schreiben wir x und y nun auf homogene Koordinaten $\frac{x_1}{x_0}$ und $\frac{x_2}{x_0}$ um, dann erhalten wir (nach einer Multiplikation der Kreisgleichung mit x_0^2)

$$(m_x^2 + m_y^2 - r^2)x_0^2 - 2x_0(m_x x_1 + m_y x_2) + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Schneiden wir nun diese mit der Ferngerade ω, dann ergibt sich die Quadrik

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$\mathtt{I} := [(0, 1, \mathtt{i})]_{\mathbb{C}} \text{ und } \bar{\mathtt{I}} := [(0, 1, -\mathtt{i})]_{\mathbb{C}} \tag{1.5}$$

für $\mathtt{i}^2 = -1$ und $\mathbb{C} := \{z = a + \mathtt{i}b \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ der Menge aller komplexer Zahlen. Diese Punkte (1.5) heißen auch **absolute Kreispunkte**.

Wir betrachten also im Allgemeinen die **komplexe lineare Hülle** von $z \in \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}$

$$[z]_{\mathbb{C}} := \{\mu z \ : \ \mu \in \mathbb{C}\}$$

und beispielsweise repräsentieren dann $(2, 1)$, $(6\mathtt{i}, 3\mathtt{i})$ und $(4 + 2\mathtt{i}, 2 + \mathtt{i})$ denselben Punkt. Die **komplexe Erweiterung des $\mathbb{P}^n$** ist definiert durch

$$\mathbb{CP}^n := \left\{[z]_{\mathbb{C}} \ : \ z \in \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}\right\}$$

für den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^{n+1} = \{(z_0, \ldots, z_n) \ : \ z_k \in \mathbb{C}\}$.

Das heißt, wir betrachten die Kreise eigentlich nicht mehr in $\mathbb{P}^2$, sondern müssen ihn in die komplexe projektive Geometrie übertragen. Die Frage ist in welchem Raum? Um dies zu beantworten starten wir erneut mit Kreisen im $\mathbb{R}^2$. Den $\mathbb{R}^2$ können wir mit $\mathbb{C}$ identifizieren, wie folgt

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longleftrightarrow a + \mathtt{i}b \in \mathbb{C}.$$

Ergo können wir die Projektifizierung von $\mathbb{C}$ betrachten, nämlich die **komplexe projektive Gerade $\mathbb{CP}^1$**, wie in [RG11, Kap. 16-18]. Wir verknüpfen also alle Vektoren in der Form $[(z_0, z)]_{\mathbb{C}}$ für $z_0 = const$ mit einer Zahl $\frac{z}{z_0} \in \mathbb{C}$ für $z_0 \neq 0$. Der Vektor $[(0, z)]_{\mathbb{C}}$ repräsentiert einen eindeutigen Punkt im Unendlichen. Das heißt wir können $\mathbb{CP}^1$ mit $\mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \hat{\mathbb{C}}$ identifizieren (die beiden sind isomorph zueinander).

Das lässt einige Fragen auftauchen, darunter: Wie sehen komplexe projektive Transformationen aus? Und: Welche Verbindungen gibt es zwischen der reellen projektiven Ebene $\mathbb{P}^2 (:= \mathbb{RP}^2)$ und der komplexen projektiven Gerade $\mathbb{CP}^1$?

Starten wir mit der Beantwortung der zweiten Frage: Die Verbindung zwischen $\mathbb{CP}^1$ und $\mathbb{P}^2$! Beide können den $\mathbb{R}^2$ repräsentieren, haben aber völlig unterschiedliche algebraische Strukturen. Während in $\mathbb{CP}^1$ ein Punkt im Unendlichen hinzugefügt wird, wird im $\mathbb{P}^2$ eine Gerade im Unendlichen beigefügt. Anders als im $\mathbb{P}^2$ (hier haben wir vielmehr die allgemeine Form der Kegelschnitte betrachtet) lässt sich auf der komplexen projektiven Gerade sehr gut mit Kreisen, Winkeln und Distanzen rechnen, wenn auch Geraden

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

etwas zu kurz kommen (diese werden als Kreise mit unendlichem Radius angenommen und sind demnach nicht einmal mehr projektiv invariante Objekte).

Die absoluten Kreispunkte $\mathtt{I}$, $\bar{\mathtt{I}}$ in (1.5) spannen eine Gerade im Unendlichen auf, nämlich unsere Ferngerade ω, vergleiche Definition 1.1.2 und siehe hierfür auch Abbildung 1.2. Sie können sogar Punkte von $\mathbb{P}^2$ nach $\mathbb{C}$ transportieren. Sei x ein Punkt mit homogenen Koordinaten $(1, a, b)$ und sei $z = a + \mathtt{i}b$ ein Punkt in $\mathbb{C}$, dann gilt für folgenden Repräsentant von $[(1, z)]_{\mathbb{C}}$, $\mathtt{I}_\perp := [(0, \mathtt{i}, 1)]_{\mathbb{C}}$, $\bar{\mathtt{I}}_\perp := [(0, -\mathtt{i}, 1)]_{\mathbb{C}}$ und ω, dass

$$\det(x, \mathtt{I}_\perp, \omega) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & \mathtt{i} & 0 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}) = a - \mathtt{i}b = \bar{z}_x \quad \text{und}$$

$$\det(x, \bar{\mathtt{I}}_\perp, \omega) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & -\mathtt{i} & 0 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}) = a + \mathtt{i}b = z_x$$

gilt und $\bar{z} := a - \mathtt{i}b$ heißt auch **konjugiert komplexe Zahl**. Der **Betrag** einer komplexen Zahl sei $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Die (projektiv invariante) **euklidische Distanz** zwischen zwei Punkten P und Q ist

$$|P, Q| = \frac{\sqrt{\det(P, Q, \mathtt{I}), \det(P, Q, \bar{\mathtt{I}})}\det(A, \mathtt{I}, \bar{\mathtt{I}})\det(B, \mathtt{I}, \bar{\mathtt{I}})}{\sqrt{\det(A, B, \mathtt{I}), \det(A, B, \bar{\mathtt{I}})}\det(P, \mathtt{I}, \bar{\mathtt{I}})\det(Q, \mathtt{I}, \bar{\mathtt{I}})} \tag{1.6}$$

für eine Referenzlänge von A nach B mit $|A, B| := |(A - B)| = 1$, siehe [RG11, Thm. 18.10]. Für die Geraden g und h in $\mathbb{P}^2$ sei der **Winkel** folgendermaßen zu verstehen: Schneiden sich die beiden Geraden in einem endlichen Punkt durch den wir die Gerade g gegen den Uhrzeigersinn rotieren bis diese mit h übereinstimmt, dann ist dieser Winkel positiv orientiert und liegt insbesondere im offenen Intervall $(0, \pi)$. Der Winkel zwischen diesen beiden Geraden lässt sich mittels

$$\measuredangle(g, h) = \frac{1}{2\mathtt{i}} \cdot \ln\left(\frac{\det(g \times \omega, \omega, \mathtt{I})\det(h \times \omega, \omega, \bar{\mathtt{I}})}{\det(g \times \omega, \omega, \bar{\mathtt{I}})\det(h \times \omega, \omega, \mathtt{I})}\right) = \frac{1}{2\mathtt{i}} \cdot \ln\left(\frac{\bar{z}_{g\times\omega} z_{h\times\omega}}{z_{g\times\omega}\bar{z}_{h\times\omega}}\right)$$

modulo π berechnen. Diese Formel ist auch bekannt unter Laguerresche Formel, vgl. [RG11, Thm. 18.9]. Das leitet uns direkt auf den Begriff der **Orientierung**. Sie enthält die Information darüber in welcher Reihenfolge wir die Punkte auf einem Kreis durchlaufen. Falls ein Kreis positiv orientiert ist, dann rotieren wir einen Punkt am Kreis (auf den wir einen Pfeil setzen) gegen den Uhrzeigersinn, wie uns auch [RG11, Kap. 17.4] so erklärt. Wir können auch sagen, der Kreis hat einen positiv orientierten Radius. Weitere Eigenschaften sind in [RG11, Kap. 18] nachzuschlagen.

Kommen wir nun zu den komplexen projektiven Transformationen. Sie können genau wie im reellen Fall, siehe Definition 1.1.5, mittels Matrixmultiplikation dargestellt werden. Es gilt also für die projektive Transformation in $\mathbb{CP}^1$

$$\kappa : \begin{cases} \mathbb{CP}^1 & \to & \mathbb{CP}^1 \\ \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

für eine reguläre Matrix mit Einträgen a, b, c, d in $\mathbb{C}$. Projektive Transformationen in $\mathbb{CP}^1$ bilden insbesondere Kreise auf Kreise ab (also auch Geraden, da wir diese als Kreise mit unendlichem Radius annehmen).

Wir wollen jetzt projektive Transformationen genauer anschreiben und identifizieren hierfür $\mathbb{CP}^1$ mit $\hat{\mathbb{C}}$. Wir homogenisieren $z \in \hat{\mathbb{C}}$ mit der Standardeinbettung ι, wenden die projektive Transformation darauf an und dehomogenisieren wieder, sodass wir

$$z \overset{\iota}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \overset{\kappa}{\mapsto} \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cz + d \\ az + b \end{pmatrix} \overset{\iota^{-1}}{\mapsto} \frac{az + b}{cz + d}.$$

erhalten.

Definition 1.3.1. Die Abbildung

$$\mathtt{m} : \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} & \to & \hat{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{cases}$$

heißt **Möbiustransformation** und ist eine komplexe projektive Transformation in $\mathbb{CP}^1$.

Die Möbiustransformation hat viele spannende und wichtige Eigenschaften, darunter auch:

- ▷ Die Fixpunkte von $\mathtt{m}$ sind gegeben durch die Eigenvektoren seiner Transformationsmatrix.
- ▷ Möbiustransformationen erhalten die Orientierung aufrecht und sind kreistreu (das heißt, sie bilden Kreise auf Kreise ab).
- ▷ Sie sind winkeltreu (das heißt Möbiustransformationen erhalten den Schnittwinkel zwischen zwei Kreisen).

Wir können also jetzt den $\mathbb{CP}^1$ mit $\hat{\mathbb{C}}$ identifizieren. Weiters lässt sich die komplexe projektive Gerade sogar mit der Einheitssphäre

$$\mathbb{S}^2 := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ : \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \tag{1.7}$$

im $\mathbb{R}^3$, der sogenannten **Riemannschen Sphäre**, identifizieren (via stereographischen Projektion, siehe Definition 3.2.2), vergleiche [RG11, Kap. 17.7]. Jeder Punkt von $\mathbb{CP}^1$ kann auf einen Punkt auf $\mathbb{S}^2$ abgebildet werden, beispielsweise wird ∞ auf den Nordpol von $\mathbb{S}^2$ geschickt. Wir haben also die Beziehung

$$\mathbb{CP}^1 \approx \hat{\mathbb{C}} \approx \mathbb{S}^2$$

und für bijektive Abbildung zwischen diesen Räumen gilt insbesondere

- ▷ Kreise in $\mathbb{CP}^1$ werden auf Kreise in $\mathbb{S}^2$ abgebildet und umgekehrt (der Schnittwinkel bleibt erhalten).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

▷ Möbiustransformationen sind interpretierbar als Abbildungen von $\mathbb{CP}^1$ nach $\mathbb{S}^2$, wo sie die Sphäre rotieren, skalieren, zu einer tangentialen Position verschieben und dann vom Nordpol der bewegten Sphäre zurück zum $\mathbb{CP}^1$ abbilden.

Demzufolge betrachten wir jetzt Kreise in $\mathbb{CP}^1$ und es gilt folgender Satz.

Satz 1.3.2. Alle Kreise in $\mathbb{CP}^1$ gehen durch die Punkte $\mathtt{I}$ und $\bar{\mathtt{I}}$ aus (1.5). Jeder Kegelschnitt, der durch die absoluten Kreispunkte geht, ist ein Kreis.

Weitere Eigenschaften und Definitionen zu Kreisen betrachten wir in Kapitel 3.

1.4 Netze in $\mathbb{P}^2$

Zunächst wollen wir uns überlegen, was so ein Netz sein könnte, welches wir betrachten werden. Informell ausgedrückt wäre beispielsweise ein Netz die Menge aller Linien auf einem karierten Blatt Papier oder die Menge aller zusammengeklebter Vierecke. Diese Vorstellung hilft uns bei der Definition von Netzen, laut [GS39], [BF21] und [AB18].

Definition 1.4.1. Gegeben sei eine Fläche $F = F(u, v)$ mit $(u, v) \in I \times J$ für die Intervalle $I, J \subset \mathbb{Z}$. Dann bilden zwei Kurvenscharen $u = c_0$ und $v = c_1$ ein **Kurvennetz** für Konstanten c_0, c_1. Das **Vierecksnetz** ist eine Diskretisierung der einzelnen Kurvenfolgen der beiden Kurvenscharen.

Im Verlauf dieser Arbeit werden wir Vierecksnetze mittels Netze abkürzen und falls wir explizit eine andere Netzart betrachten, werden wir diese namentlich anführen. Was sagt uns nun Definition 1.4.1? Ein Netz N ist im n-dimensionalen Fall gegeben durch

$$N : \begin{cases} I \times J & \to & \mathbb{R}^n \\ (i, j) & \mapsto & V_{i,j} := F(i, j) \end{cases} \tag{1.8}$$

mit $V_{i,j}$ dem **Vertex**, **Knoten** oder auch **Eckenstern**. Weiters definieren wir:

Definition 1.4.2. Die Menge aller Knoten bezeichnen wir mit $\mathcal{V}(N)$.
Die Verbindungsstrecke $k_j^{i,i+1}$ zum nächsten Eckenstern in der aufsteigenden Reihenfolge von I, also

$$V_{i,j}V_{i+1,j} := \{(1-\lambda)V_{i,j} + \lambda V_{i+1,j} \ : \ V_{i,j}, V_{i+1,j} \in \mathcal{V}(N), \lambda \in [0, 1]\},$$

nennen wir **Kante** oder **Balken**. Würden wir in der Reihenfolge von J entlanglaufen, so lautet die Kante $k^i_{j,j+1} := V_{i,j}V_{i,j+1}$. Jeder dieser Kanten ist in der Menge $\mathcal{E}(N)$.
Die viereckige Facette entsteht durch die Punkte $V_{i,j}$, $V_{i,j+1}$, $V_{i+1,j}$, $V_{i+1,j+1}$ und den dazwischen liegenden Kanten $k^i_{j,j+1}, k_i^{i,i+1}, k^{i+1}_{j,j+1}, k^{i,i+1}_{j+1}$ bezeichnen wir mit $\diamond_{i,j}$ und heißt auch **Viereck**, welches in Abbildung 1.3 veranschaulicht wurde. Alle Facetten sammeln wir in der Menge $\mathcal{F}(N)$.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Wir wollen unser Vierecksnetz ähnlich zu Definition 1.4.1 mittels Kurvenscharen definieren. Hierfür sei $g := \{g_i \ : \ i \in I\}$ eine diskrete Kurvenschar mit diskreten Kurvenfolgen g_i, zum Beispiel, in horizontaler Anordnung und $h := \{h_j \ : \ j \in I\}$ mit h_j in vertikaler Anordnung, wie in Abbildung 1.3. Die Kurvenscharen g und h sind sogenannte **Polygonzüge** und durch eine Folgen von Ecken $V_{i,j}$ festgelegt, das bedeutet beispielsweise $g_i = (\dots, V_{i,j-1}, V_{i,j}, V_{i,j+1}, \dots)$ für festes $j \in J$ und $h_j = (\dots, V_{i-1,j}, V_{i,j}, V_{i+1,j}, \dots)$ für festes $i \in I$. Dies legt eine Definition von Netzen ausschließlich via Eckpunkte nahe, auf die wir in Kapitel 3 zurückkommen werden. Allerdings wollen wir uns nun mit Netzen definiert über Polygonzüge beschäftigen. Das bedeutet, dass jede Kante einer Facette ein Teilstück des dazugehörigen Polygons darstellt.

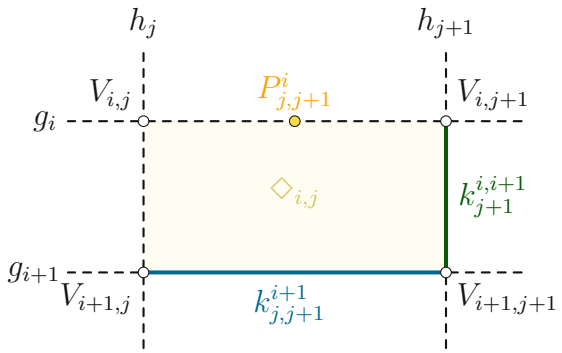


Abbildung 1.3: *Notation innerhalb einer Facette*

Wir können ein Netz auch via Graphentheorie betrachten (etwas was wir erst in Kapitel 3 aufgreifen werden). Laut [H20] besteht ein (gerichteter) **Graph** $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ aus der Menge aller seiner Knoten $\mathcal{V}$ und der Menge aller Kanten für die $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ gilt. Zwei Knoten $U, V \in \mathcal{V}$ sind **benachbart**, wenn $UV \in \mathcal{E}$ liegt (für einen gerichteten Graph müsste $\overrightarrow{UV} \in \mathcal{E}$ gelten). Weiters ist es essentiell, dass wir **zusammenhängende** Graphen betrachten, das bedeutet, dass alle Knoten in $\mathcal{V}$ einen Pfad in $\mathcal{E}$ haben und wir wollen einen **schlichten** Graph, das heißt, es gibt weder Schlingen (oder Zykeln, also ein Kantenzug, wo Start- und Endknoten dieselben sind) noch Mehrfachkanten. Ein **Teilgraph** $G' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ liegt vor, wenn $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ gilt. Demnach lässt sich ein Viereck auch als Graph mit vier Knoten bestehend aus vier benachbarten Kanten sehen, die im Inneren keinen weiteren Knoten oder Kante enthalten.

Wir wollen uns jetzt die Vierecke im Setting von Definition 1.4.2 genauer ansehen. Die **Diagonalen** seien definiert durch

$$d_{i,j} := V_{i,j}V_{i+1,j+1} \text{ und } f_{i,j} := V_{i+1,j}V_{i,j+1}$$

und ihren Schnittpunkt bezeichnen wir mit $M_{i,j} = d_{i,j} \cap f_{i,j}$, siehe hierfür auch Abbildung 1.4. Allerdings könnte so ein Viereck $\diamond_{i,j}$ nicht konvex sein oder zwei Kanten schneiden sich. So etwas wollen wir vermeiden, daher betrachten wir das **Verhältnis seiner Diagonalen** und setzen voraus es sollte

$$\frac{L(M_{i,j}, V_{i+1,j+1})}{L(M_{i,j}, V_{i,j})} < 0 \text{ und } \frac{L(M_{i,j}, V_{i,j+1})}{L(M_{i,j}, V_{i+1,j})} < 0 \tag{1.9}$$

für $L(.,.)$ orientierte Länge vom Intervall $(.,.)$ gelten. Genau dann ist $\diamond_{i,j}$ konvex, vgl. [BS08, Def. 2.21].

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Bemerkung 1.4.3 (allgemeine Netzbedingungen). *Unser Netz in $\mathbb{P}^2$ erfüllt:*

1. *Jeder Eckenstern ist mit vier Kanten verbunden, außer am Rand des Netzes.*
2. *Jeder Eckenstern im Inneren des Netzes berührt vier Facetten.*
3. *Auf keiner Kante liegen mehr Knoten als die beiden Eckensterne.*
4. *Für jede Facette gilt (1.9).*
5. *Jede Facette ist stets an den Kanten mit der nächsten zusammengeklebt, das heißt keine Facette überlappt sich.*

Kommen wir nun zu einigen Eigenschaften und Definitionen zu Netzen oder allgemeiner deren Vierecke, siehe hierfür auch [BS08, Kap. 2.3].

Definition 1.4.4. Seien $\diamond_{i,j}$ und $\diamond^\star_{i,j}$ zwei Vierecke. Sie sind **dual** genau dann, wenn die zusammenpassende Seiten parallel sind, also

$$k^i_{j,j+1} \| (k^i_{j,j+1})^\star,\ k^{i+1}_{j,j+1} \| (k^{i+1}_{j,j+1})^\star,\ k^{i,i+1}_i \| (k^{i,i+1}_i)^\star \text{ und } k^{i,i+1}_{j+1} \| (k^{i,i+1}_{j+1})^\star$$

gilt und die nicht zusammenpassenden Diagonalen ebenfalls parallel sind, es gilt also

$$d_{i,j} \| f^\star_{i,j} \text{ und } f_{i,j} \| d^\star_{i,j}, \tag{1.10}$$

visualisiert in Abbildung 1.4.

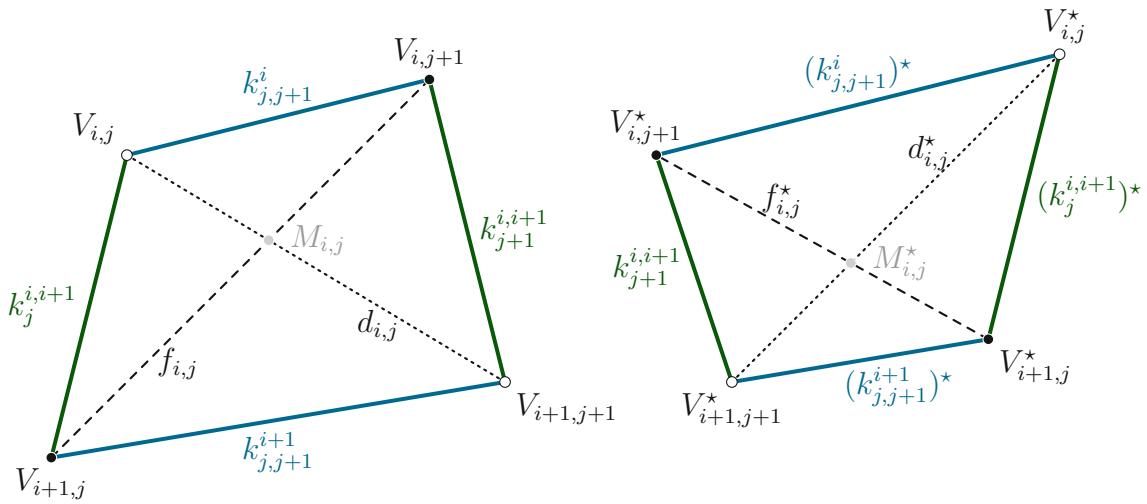


Abbildung 1.4: *Viereck $\diamond_{i,j}$ (links) und sein Dual $\diamond^\star_{i,j}$ (rechts)*

Wir sehen, dass sich die Orientierung der Eckensterne innerhalb einer Facette ändert. Die Definition der dualen Vierecken führt direkt zu folgendem Lemma.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Lemma 1.4.5 (Existenz und Eindeutigkeit von dualen Vierecken). Für alle $\diamond_{i,j}$ existiert ein eindeutiges duales Viereck $\diamond^\star_{i,j}$ bis auf Skalierung und Translation.

Beweis. Der Beweis ist analog zu [BS08, Lemma 2.20]:

Eindeutigkeit von dualen Vierecken: Wir haben das Viereck $\diamond_{i,j}$ mit seinem Diagonalschnittpunkt $M_{i,j}$ gegeben. Um so ein duales Viereck zu konstruieren, starten wir mit seinem Diagonalschnittpunkt $M^\star_{i,j}$. Diesen wählen wir beliebig und legen zwei Geraden $\ell_{i,j}$ und $l_{i,j}$ durch, welche parallel zu $f_{i,j}$ und $d_{i,j}$ (vgl. Bedingungen aus Definition 1.4.4) sind. Auf $\ell_{i,j}$ wählen wir $V^\star_{i,j}$ beliebig. Danach ist die übrige Konstruktion eindeutig:

Wir legen eine Linie durch $\left\{\begin{matrix} V^\star_{i,j} \\ V^\star_{i+1,j} \\ V^\star_{i+1,j+1} \end{matrix}\right\}$, welche parallel zu $\left\{\begin{matrix} V_{i,j} \vee V_{i+1,j} \\ V_{i+1,j} \vee V_{i+1,j+1} \\ V_{i+1,j+1} \vee V_{i,j+1} \end{matrix}\right\}$ ist, wobei $\left\{\begin{matrix} V^\star_{i+1,j} \\ V^\star_{i+1,j+1} \\ V^\star_{i,j+1} \end{matrix}\right\}$ der Schnittpunkt mit $\left\{\begin{matrix} \ell_{i,j} \\ l_{i,j} \\ \ell_{i,j} \end{matrix}\right\}$ ist.

Nun stellt sich die Frage, ob die parallele Gerade von $V_{i,j+1} \vee V_{i,j}$ durch $V^\star_{i,j+1}$ auch wirklich durch $V^\star_{i,j}$ geht. Diese folgt direkt aus dem Beweis seiner Existenz.

Existenz von dualen Vierecken: Die Vektoren entlang der Diagonalen nennen wir der Einfachheit halber $\vec{d}_{i,j}$ und $\vec{f}_{i,j}$ und es gilt

$$\overrightarrow{M_{i,j}V_{i,j}} = a\vec{d}_{i,j},\ \overrightarrow{M_{i,j}V_{i+1,j}} = b\vec{f}_{i,j},\ \overrightarrow{M_{i,j}V_{i+1,j+1}} = c\vec{d}_{i,j},\ \overrightarrow{M_{i,j}V_{i,j+1}} = d\vec{f}_{i,j}$$

für die Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sodass wir schreiben können

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{i,j}V_{i+1,j}} &= b\vec{f}_{i,j} - a\vec{d}_{i,j}, & \overrightarrow{V_{i+1,j}V_{i+1,j+1}} &= c\vec{d}_{i,j} - b\vec{f}_{i,j}, \\ \overrightarrow{V_{i+1,j+1}V_{i,j+1}} &= d\vec{f}_{i,j} - c\vec{d}_{i,j}, & \overrightarrow{V_{i,j+1}V_{i,j}} &= a\vec{d}_{i,j} - d\vec{f}_{i,j}. \end{aligned}$$

Nun konstruieren wir das duale Viereck $\diamond^\star_{i,j}$ mittels

$$\overrightarrow{M^\star_{i,j}V^\star_{i,j}} = -\frac{\vec{f}_{i,j}}{a},\ \overrightarrow{M^\star_{i,j}V^\star_{i+1,j}} = -\frac{\vec{d}_{i,j}}{b},\ \overrightarrow{M^\star_{i,j}V^\star_{i,j+1}} = -\frac{\vec{f}_{i,j}}{c},\ \overrightarrow{M^\star_{i,j}V^\star_{i,j+1}} = -\frac{\vec{d}_{i,j}}{d}$$

und nach Konstruktion gilt für die Diagonalen (1.10). Außerdem sind die Kanten ebenfalls parallel, so wie es Definition 1.4.4 verlangt, denn mit

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V^\star_{i,j}V^\star_{i+1,j}} &= \frac{\vec{f}_{i,j}}{a} - \frac{\vec{d}_{i,j}}{b} = \frac{1}{ab}\overrightarrow{V_{i,j}V_{i+1,j}}, \\ \overrightarrow{V^\star_{i+1,j}V^\star_{i+1,j+1}} &= \frac{\vec{d}_{i,j}}{b} - \frac{\vec{f}_{i,j}}{c} = \frac{1}{bc}\overrightarrow{V_{i+1,j}V_{i+1,j+1}}, \\ \overrightarrow{V^\star_{i+1,j+1}V^\star_{i,j+1}} &= \frac{\vec{f}_{i,j}}{c} - \frac{\vec{d}_{i,j}}{d} = \frac{1}{cd}\overrightarrow{V_{i+1,j+1}V_{i,j+1}}, \\ \overrightarrow{V^\star_{i,j+1}V^\star_{i,j}} &= \frac{\vec{d}_{i,j}}{d} - \frac{\vec{f}_{i,j}}{a} = \frac{1}{da}\overrightarrow{V_{i,j+1}V_{i,j}} \end{aligned}$$

ist die Parallelitätseigenschaft der Kanten erfüllt. Wir sehen, es ändert sich die Größe des dualen Vierecks allein durch die Wahl von $V^\star_{i,j}$. Außerdem sind die Konstanten a, b, c, d nicht wohldefiniert, da sie von den Diagonalvektoren abhängen. □

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Dieser Beweis zeigt uns, wie wir ein duales Viereck erzeugen können. Dies brauchen wir anschließend für die Konstruktion von dualen Netzen in Kapitel 2.2. Wir wollen uns jetzt ansehen, wie ein Netz mit eingeschriebenen Kegelschnitten aussehen könnte.

1.5 Eingeschriebene Kegelschnitte

Obwohl diese Eigenschaft mit den Kapitel 1.2 eng zusammenhängt, haben wir uns entschlossen die Begriffe in zwei Kapitel aufzuteilen. Kommen wir noch einmal auf die im vorigen Kapitel eingangs erwähnte informelle Definition von Netzen zurück (wir erinnern uns an das karierte Blatt Papier). Nehmen wir nun ein Kasterl auf unserem Blatt heraus und zeichnen einen Kreis hinein, der tangential zu den Kanten steht. Dann haben wir einen eingeschriebenen Kreis in eine Facette des Netzes gezeichnet. Um dies mathematisch zu formulieren, orientieren wir uns an [C14] und [BF21].

Um so einen Kegelschnitt zu konstruieren brauchen wir einige wichtige Sätze.

Satz 1.5.1 (Steiner Theorem).
Seien P und Q zwei Punkte in $\mathbb{P}^2$ mit $P \neq Q$. Weiters ist $\kappa : P^* \to Q^*$ eine projektive Transformation und keine Perspektiviät.
Dann ist die Punktmenge $\{g \cap \kappa(g) \ : \ g \in P^*\}$ ein nicht-degenerierter Kegelschnitt $\mathscr{Q}$, welcher durch P und Q geht mit Tangenten $\kappa^{-1}(P \vee Q)$ und $\kappa(P \vee Q)$ an diesen Punkten, vgl. Abbildung 1.5.

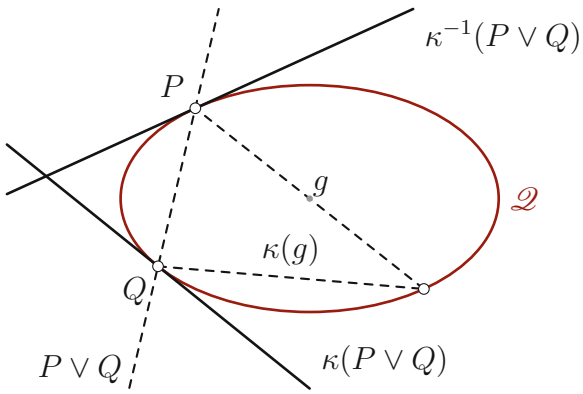


Abbildung 1.5: *Visualisierung von Steiners Theorem 1.5.1*

Für den Beweis verweisen wir auf [C14, Thm 8.1.1]. Das Dualitätsprinzip 1.1.4 lässt sich auch auf Steiners Theorem anwenden, vgl. [C14, Thm 8.1.4].

Satz 1.5.2 (Duale Steiner Theorem).
Seien g und h zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2$ mit Schnittpunkt $S = g \cap h$. Weiters sei $\kappa : g \to h$ eine projektive Transformation und keine Perspektivität. Dann gilt für $Q \in g$, dass $Q \vee \kappa(Q)$ tangential zu einem Kegelschnitt $\mathscr{Q}$ ist, welcher auch Tangential zu g in $\kappa^{-1}(S)$ und h in $\kappa(S)$ ist.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Satz 1.5.3 (Umkehrung von Steiner's Theorem).
Sei $\mathscr{Q}$ ein nicht-degenerierter Kegelschnitt mit Punkten P und Q mit $P \neq Q$. Seien t_P und t_Q die Tangenten an $\mathscr{Q}$ in den Punkten P und Q.
Dann existiert eine projektive Transformation $\kappa : P^* \to Q^*$ mit

$$\kappa : \begin{cases} t_P & \mapsto & P \vee Q \\ P \vee Q & \mapsto & t_Q \\ P \vee R & \mapsto & Q \vee R \quad \text{für alle } R \in \mathscr{Q}, P \neq R \neq Q. \end{cases}$$

Auch zu diesem Satz, [C14, Thm 8.1.5], gibt es eine duale Version, [C14, Thm 8.1.8]:

Satz 1.5.4 (Duale Umkehrung von Steiner's Theorem).
Seien g und h zwei verschiedene Geraden im $\mathbb{P}^2$, welche tangential zu einem nicht-degenerierten Kegelschnitt $\mathscr{Q}$ an den entsprechenden Punkten P und Q mit Schnittpunkt $S = g \cap h$ sind.
Dann definiert

$$\kappa : \begin{cases} t \cap g & \mapsto & t \cap h \text{ für } t \text{ tangential zu } \mathscr{Q} \text{ und } t \neq g, h \\ P & \mapsto & S \\ S & \mapsto & Q. \end{cases}$$

eine projektive Transformation $\kappa : g \to h$.

Um einen allgemeinen Kegelschnitt in ein Viereck im $\mathbb{P}^2$ zu legen, starten wir mit folgender Überlegung: Wir betrachten ein konvexes Punktetviereck mit P_1, P_2, P_3 und P_4. Nach Wahl unserer Punkte sind höchstens jeweils zwei Punkte kollinear, siehe Abbildung 1.6. Durch diese vier Punkte wollen wir einen Kegelschnitt legen. Weiters sei k_1 eine Gerade an P_1, welche keinen der Punkte P_2, P_3 und P_4 enthält, da sich sonst ein degenerierter Kegelschnitt bilden könnte.

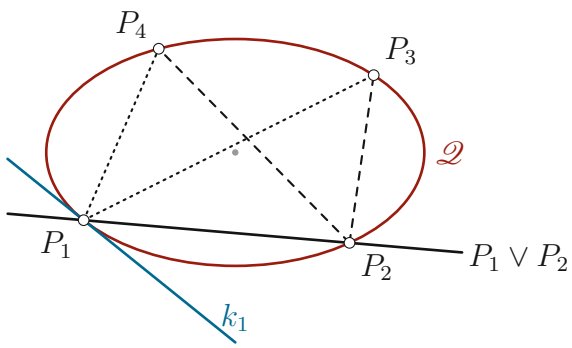


Abbildung 1.6: *Veranschaulichung unserer Situation*

Das Geradenbüschel P_1^* durch P_1 soll die Geraden $P_1 \vee P_3$, $P_1 \vee P_4$, k_1 enthalten und P_2^* die Geraden $P_2 \vee P_3$, $P_2 \vee P_4$, $P_2 \vee P_1$. Dann definieren wir folgende projektive Transformation

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

$$\kappa : \begin{cases} P_1^* & \to & P_2^* \\ P_1 \vee P_\ell & \mapsto & P_2 \vee P_\ell \quad \forall \ell = 3,4 \\ k_1 & \mapsto & P_1 \vee P_2 \end{cases}$$

Wir wollen jetzt Steiners Theorem 1.5.1 anwenden. Hierfür müssen wir zeigen, dass es sich um keine Perspektivität handelt, das nach Proposition 1.1.7 erfüllt ist.

Nach Steiner Theorem 1.5.1 existiert ein nicht-degenerierter Kegelschnitt im $\mathbb{P}^2$, der durch $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ geht und tangential zu k_1 im Punkt P_1 ist. Wir sehen also, dass ein Kegelschnitt existiert, genauer gesagt es existiert eine 1-Parameterfamilie von Kegelschnitten, da unsere P_ℓ's beliebige Punkte auf ihren Kanten k_ℓ für $\ell = 1,2,3,4$ der Facette $\diamond_{i,j}$ sind. Es gibt also einen Kegelschnitt durch vier Punkte und an einer Tangente, aber ist dieser Kegelschnitt auch eindeutig?

Angenommen es gäbe einen zweiten nicht-degenierten Kegelschnitt $\mathscr{Q}'$ durch dieselben Punkte $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ und ist ebenfalls tangential zu k_1. Nach der Umkehrung von Steiner's Theorem 1.5.3 existiert eine projektive Transformation $\kappa' : P_1^* \to P_2^*$, für die gilt

$$\begin{aligned} \kappa'(P_1 \vee P_\ell) = P_2 \vee P_\ell = \kappa(P_1 \vee P_\ell) \quad \forall \ell = 3,4 \\ \kappa'(k_1) = P_1 \vee P_2 = \kappa(k_1). \end{aligned}$$

Demnach gilt $\kappa' = \kappa$. Weiters sind $|\mathscr{Q}|$ und $|\mathscr{Q}'|$ die Orte der Schnittpunkte der beiden Geraden, die $\kappa = \kappa'$ entsprechen. Also folgt $|\mathscr{Q}| = |\mathscr{Q}'|$. Da wir nur nicht-degenerierte Kegelschnitte mit index > 0 betrachten ist die Voraussetzung Satz 1.2.2 stets erfüllt. Wir können den Satz anwenden und erhalten, dass die beiden Kegelschnitte dieselben sein müssen, das heißt $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}'$ gilt. Damit ist der gesuchte Kegelschnitt eindeutig, wenn vier Punkte und eine Tangente vorgegeben sind.

Die Frage ist nun: Wir wollten eigentlich einen Kegelschnitt, der in unserer Facette $\diamond_{i,j}$ liegt und damit tangential zu den dazugehörigen Kanten ist ohne alle Punkte explizit vorzugeben. Wieso betrachten wir dann vier Punkte und eine Gerade? Die Antwort versteckt sich hinter der Dualität, siehe Definition 1.1.4. Demnach gilt diese Herleitung auch für die vier Kanten $k^i_{j,j+1}, \ldots, k^{i,i+1}_{j+1}$ der Facette $\diamond_{i,j}$ und einen Berührpunkt, beispielsweise sei dieser $P^i_{j,j+1}$ und verschieden von den Eckensternen der Facette $\diamond_{i,j}$. Damit haben wir folgende Proposition bewiesen, wie in [C14, Cor 8.1.10].

Proposition 1.5.5. Für jede Facette $\diamond_{i,j}$ in $\mathbb{P}^2$ existiert eine 1-Parameterfamilie von nicht-degenerierten eingeschriebenen Kegelschnitten. Durch Festlegung eines von der Ecke verschiedenen Berührpunkts auf einer Kante, ist der nicht-degenerierte eingeschriebene Kegelschnitt sogar eindeutig.

Dies führt direkt auf die Definition von Netzen mit eingeschriebenen Kegelschnitten.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Definition 1.5.6. Sei N ein Netz in $\mathbb{P}^2$ mit Facetten $\diamond_{i,j}$ für $i, j \in \mathbb{Z}$. Ist für jede Facette die Proposition 1.5.5 erfüllt, also gibt es einen nicht-degenerierten Kegelschnitt in jeder Facette, so handelt es sich um ein **Netz mit eingeschriebenen Kegelschnitten**.

Wir wollen uns noch ein paar Eigenschaften zu EKSen in einem Viereck ansehen. Als Erstes betrachten wir Proposition 1.5.7, der auch als degenerierter Fall von Brianchon's Theorem bekannt ist, vgl. [BS08, Cor. 9.20].

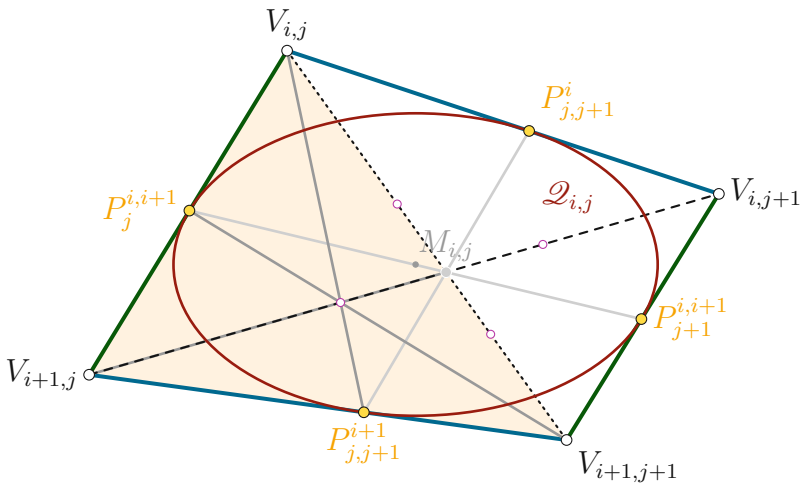


Abbildung 1.7: *Degenrierte Fall von Brianchon's Theorem 1.5.7 und Ceva-Konfiguration 1.5.8 für das hellorange Dreieck*

Proposition 1.5.7 (Degenerierter Fall von Brianchon's Theorem). Ein Viereck hat einen EKS mit tangentialen Geraden $k^{i}_{j,j+1}$, $k^{i,i+1}_{j}$, $k^{i+1}_{j,j+1}$ und $k^{i,i+1}_{j+1}$ und Tangentenpunkten $P^{i,i+1}_{j}$, $P^{i+1}_{j,j+1}$, $P^{i,i+1}_{j+1}$ und $P^{i}_{j,j+1}$. Dann sind die Diagonalen $V_{i,j} \vee V_{i+1,j+1}$, $V_{i,j+1} \vee V_{i+1,j}$ und die (hellgrauen) Verbindungsgeraden der gegenüberliegenden Tangentenpunkte $P^{i,i+1}_{j} \vee P^{i+1}_{j,j+1}$, $P^{i,i+1}_{j+1} \vee P^{i}_{j,j+1}$ kopunktal (dieser Schnittpunkt ist genau $M_{i,j}$).

Wir finden folgende Definition, Ceva's und Menelaus' Theorem auch in [RG11, Kap. 1.3].

Definition 1.5.8. Sei $\diamond_{i,j}$ ein Viereck mit eingeschriebenem Kegelschnitt $\mathscr{Q}_{i,j}$. Wir betrachten o.B.d.A. das (hellorangene) Dreieck $(V_{i,j}, V_{i+1,j}, V_{i+1,j+1})$ mit Berührpunkten $P^{i,i+1}_{j}$, $P^{i+1}_{j,j+1}$, $M_{i,j}$ auf den Kanten und der Diagonale. Diese Punkte formen eine **Ceva-Konfiguration**, wenn die (grauen) Linien $P^{i,i+1}_{j} \vee V_{i+1,j+1}$, $P^{i+1}_{j,j+1} \vee V_{i,j}$, $M_{i,j} \vee V_{i+1,j}$ kopunktal sind, siehe Abbildung 1.7.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Jedes der vier Dreiecke in einer Facette bildet so eine Ceva-Konfiguration mit kopunktalen Punkten auf den Diagonalen, eingezeichnet in violetten Punkten (mit weißer Füllung) in Abbildung 1.7.

Satz 1.5.9 (Ceva's Theorem).
Gegeben sei das Viereck aus Definition 1.5.8.
Dann bilden die Punkte $P_j^{i,i+1}$, $P_{j,j+1}^{i+1}$, $M_{i,j}$, $V_{i,j}$, $V_{i+1,j}$, $V_{i+1,j+1}$ genau dann eine Ceva-Konfiguration, wenn

$$\frac{L(V_{i,j}, P_j^{i,i+1})}{L(P_j^{i,i+1}, V_{i+1,j})} \cdot \frac{L(V_{i+1,j}, P_{j,j+1}^{i+1})}{L(P_{j,j+1}^{i+1}, V_{i+1,j+1})} \cdot \frac{L(V_{i+1,j+1}, M_{i,j})}{L(M_{i,j}, V_{i,j})} = 1 \tag{1.11}$$

mit orientierter Länge L erfüllt ist.

Ein weiterer Satz, der sich eng auf (1.11) bezieht, ist der folgende.

Satz 1.5.10 (Menelaus' Theorem).
Wir betrachten $(V_{i,j}, V_{i+1,j}, V_{i+1,j+1})$ ein Dreieck in der Ebene. Sei $P_j^{i,i+1}$ auf $V_{i,j} \vee V_{i+1,j}$, $P_{j,j+1}^{i+1}$ auf $V_{i+1,j} \vee V_{i+1,j+1}$ und P auf $V_{i,j} \vee V_{i+1,j+1}$, wobei alle Punkte verschieden von den Eckpunkten seien.
Dann sind $P_j^{i,i+1}$, $P_{j,j+1}^{i+1}$, P kollinear (bilden eine sogenannte **Menelaus-Konfiguration**) genau dann, wenn die linke Seite von (1.11) gleich -1 ist.

Abschließend fassen wir noch Definition 1.5.6 in folgenden Beispielen zusammen.

Beispiel 1.5.11 (Netz mit eingeschriebenen Ellipsen).
Um ein Netz zu definieren wollen wir stets die Eckensterne vorgeben durch die je zwei Kurvenscharen verlaufen. In diesem Fall handelt es sich bei den Kurvenscharen um Polygonzugscharen.

Gegeben seien $V_{1,1} := (-1,4)^\top$, $V_{1,2} := (2,3)^\top$, $V_{,21} := (-2,-2)^\top$ *und* $V_{2,2} := (3,-1)^\top$. *Um einen Kegelschnitt in dieses Viereck zu legen, wechseln wir in die projektive Ebene* $\mathbb{P}^2$. *Damit sind die Koordinaten gegeben durch* $[(1, V_{1,1})^\top]$, $[(1, V_{1,2})^\top]$, $[(1, V_{2,1})^\top]$ *und* $[(1, V_{2,2})^\top]$ *und folglich die Kanten des Vierecks*

$$\begin{aligned}
k_{1,2}^1 &:= [(1, V_{1,1})^\top] \times [(1, V_{1,2})^\top] \\
k_1^{1,2} &:= [(1, V_{2,1})^\top] \times [(1, V_{2,2})^\top] \\
k_{1,2}^2 &:= [(1, V_{1,1})^\top] \times [(1, V_{2,1})^\top] \\
k_2^{1,2} &:= [(1, V_{1,2})^\top] \times [(1, V_{2,2})^\top].
\end{aligned}$$

Nach Proposition 1.5.5 müssen wir einen Punkt auf den Kanten wählen, um den EKS eindeutig festzulegen. Dementsprechend wählen wir als Startpunkt $P_{1/2} := [(1, V_{1,1} + \frac{1}{2}(V_{1,2} - V_{1,1}))^\top]$ *auf* $k_{1,2}^1$ *und erhalten wegen Proposition 1.5.7 auch gleich den Berührpunkt des Kegelschnitts auf der gegenüberliegenden Kante* $k_{1,2}^2$. *Mit Ceva's Theorem 1.5.9 finden wir sogar alle anderen Punkte auf den übrigen Kanten durch Bestimmen von*

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Schnittpunkten.

Unser Ziel ist es, die Darstellungsmatrix $A_{Q_{1,1}}$ unseres gesuchten Kegelschnitts zu bestimmen. Hierfür betrachten wir die symmetrische Matrix

$$A_{Q_{1,1}}^{-\top} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

und nach (1.2) und (1.1) muss

$$\begin{aligned} (k_{1,2}^1)^\top A_{Q_{1,1}}^{-\top} (k_{1,2}^1)^\top &\overset{!}{=} 0, \\ (k_1^{1,2})^\top A_{Q_{1,1}}^{-\top} (k_1^{1,2})^\top &\overset{!}{=} 0, \\ (k_{1,2}^2)^\top A_{Q_{1,1}}^{-\top} (k_{1,2}^2)^\top &\overset{!}{=} 0, \\ (k_2^{1,2})^\top A_{Q_{1,1}}^{-\top} (k_2^{1,2})^\top &\overset{!}{=} 0 \text{ und} \\ P_{1/2}^\top A_{Q_{1,1}} P_{1/2} &\overset{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

gelten. Lösen wir dieses Gleichungssystem und setzten $a_{01} := 19$, dann gilt

$$A_{Q_{1,1}}^{-\top} = \begin{pmatrix} 30 & 19 & 34 \\ 19 & -101 & \frac{137}{2} \\ 34 & \frac{137}{2} & -142 \end{pmatrix} \text{ und } A_{Q_{1,1}} = \begin{pmatrix} \frac{319}{18050} & \frac{914}{99275} & \frac{861}{99275} \\ \frac{914}{99275} & -\frac{10832}{1092025} & -\frac{2818}{1092025} \\ \frac{861}{99275} & -\frac{2818}{1092025} & -\frac{6782}{1092025} \end{pmatrix}$$

und damit ist die Kegelschnittgleichung (1.3) für $\mathscr{Q}_{1,1}$ in $P_{1/2}$ gegeben durch

$$\frac{1}{2184050}\left(38599 - 21664x_1^2 + 8x_1(5027 - 1406x_2) + 4x_2(9471 - 3391x_2)\right) = 0,$$

welche wir in Abbildung 1.8 mit **`Python`** *visualisiert haben. Hier haben wir für P_ℓ die Werte $\ell = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}$ gewählt (gelbe Punkte) und erhalten damit einen Ausschnitt der 1-Parameterfamilie an Ellipsen (in der Farbabfolge für ℓ in* **`Python`***-Sprache darkred, salmon, deeppink, darkviolet, mediumpurple). Die (grauen) Mittelpunkte der Ellipsen können wir mittels $\left[A_{Q_{1,1}}^{-\top}(1,0,0)^\top\right]$ in $\mathbb{P}^2$ berechnen. Durch analoge Herleitung der Kegelschnitte $\mathscr{Q}_{0,0}$, $\mathscr{Q}_{0,1}$, $\mathscr{Q}_{1,0}$ erhalten wir folgende Polygonzüge im $\mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned} h_0 &= (V_{0,0}, V_{1,0}, V_{2,0}) = \left(\begin{pmatrix} -5.0 \\ 6.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.0 \\ 6.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.5 \\ 5.0 \end{pmatrix}\right), \\ h_1 &= (V_{0,1}, V_{1,1}, V_{2,1}) = \left(\begin{pmatrix} -6.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.0 \\ 4.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.0 \\ 3.0 \end{pmatrix}\right), \\ h_2 &= (V_{0,1}, V_{1,2}, V_{2,2}) = \left(\begin{pmatrix} -6.2 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.0 \\ -2.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.0 \\ -1.0 \end{pmatrix}\right), \\ g_0 &= (V_{0,0}, V_{0,1}, V_{0,2}) = \left(\begin{pmatrix} -5.0 \\ 6.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6.2 \\ -1.5 \end{pmatrix}\right), \\ g_1 &= (V_{1,0}, V_{1,1}, V_{1,2}) = \left(\begin{pmatrix} -2.0 \\ 6.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.0 \\ 4.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.0 \\ -2.0 \end{pmatrix}\right), \\ g_2 &= (V_{2,0}, V_{2,1}, V_{2,2}) = \left(\begin{pmatrix} 2.5 \\ 5.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.0 \\ 3.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.0 \\ -1.0 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

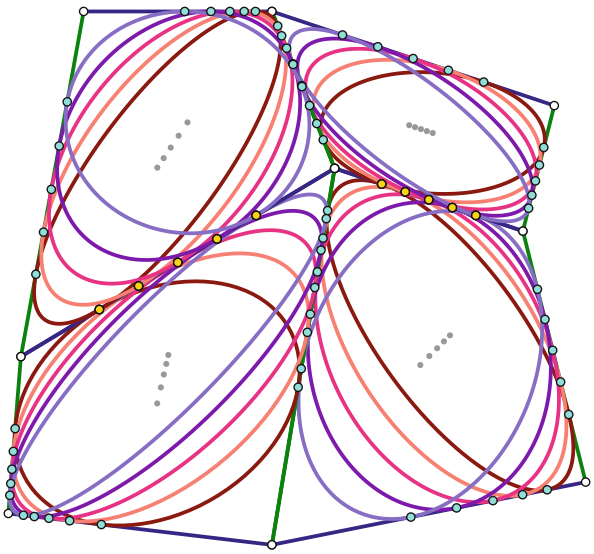


Abbildung 1.8: *Netz mit den eingeschriebenen Ellipsen: in Gelb die Startpunkte und gleichzeitig Berührpukte mit dem benachbarten Kegelschnitt, in Cyan die Schnittpunkte mit den übrigen Kanten und in Grau die Mittelpunkte der Ellipsen*

◇

Als Nächstes wollen wir uns ein Geradennetz ansehen. Anders als im Beispiel zuvor wollen wir Hyperbeln als eingeschriebene Kegelschnitte erzwingen.

Beispiel 1.5.12 (Geradennetz mit eingeschriebenen Hyperbeln).
Damit ein Hyperbelnetz entsteht muss der gewählte Startpunkt für eine Facette nicht auf einer seiner eigenen Kanten gewählt werden, sondern auf einer benachbarten Kante. Damit dies nicht in vollkommenen Chaos endet, wählen wir Geraden als Kurvenscharen für unser Netz. Wir haben also für $V_{1,1} = (-1.6, 2.8)^\top, V_{1,2} = (2, 3)^\top, V_{2,1} = (-1.8, -0.8)^\top, V_{2,2} = (3, -1)^\top$ *die Geraden*

$$\begin{aligned}
g_2(t) &:= V_{21} + t(V_{22} - V_{21}) \\
g_1(t) &:= V_{11} + t(V_{12} - V_{11}) \\
g_0(t) &:= h_2(1.75) + t(h_1(1.75) - h_2(1.75)) \\
h_2(t) &:= V_{22} + t(V_{12} - V_{22}) \\
h_1(t) &:= V_{11} + t(V_{21} - V_{11}) \\
h_0(t) &:= g_2(1.75) + t(g_1(1.75) - g_2(1.75))
\end{aligned}$$

für t *in einem endlichen Intervall. Für die gewählten gelben Startpunkte ergibt sich folgendes Geradennetz, siehe Abbildung 1.9 durch analoge Berechnung zu Beispiel 1.5.11.*

◇

Dem Spezialfall Kreis wenden wir uns erst in Kapitel 3 und Kapitel 2.3 zu. Da ein Kreis durch drei Punkte eindeutig festgelegt ist, lässt sich nicht jedes beliebige Netz mit Kreisen befüllen. Wir werden dort Bedingungen aufstellen, die uns garantieren, dass wir ein Netz mit eingeschriebenen Kreisen erhalten.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

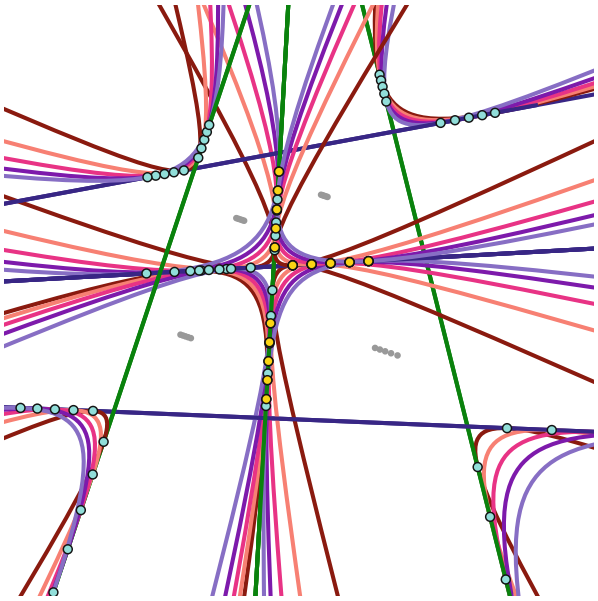


Abbildung 1.9: *Netz mit eingeschriebenen Hyperbeln: in Gelb die Startpunkte, in Cyan die Schnittpunkte mit den übrigen Kanten*

Zum Abschluss überlegen wir: Bis jetzt haben wir pro Facette einen Berührpunkt frei wählen können. Angenommen wir legen einen Berührpunkt fest und halten anschließend die Berührpunkte auf den Kanten auch für die benachbarten Facetten fest. Das heißt, halten wir beispielsweise einen Punkt auf einer Kante $k^i_{j,j+1}$ für die Facette $\diamond_{i,j}$ fest, so ist betreffender Punkt auch für die Facette $\diamond_{i-1,j}$ festgelegt. Dies führt auf folgende Definition:

Definition 1.5.13. Als **berührende eingeschriebene Kegelschnitte**, kurz berührende EKSe, bezeichnen wir eingeschriebene Kegelschnitte, welche ihre benachbarten Kegelschnitte im selben Punkt berühren.

Mit dieser Definition werden wir uns in den nächsten Kapiteln auseinandersetzen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Kapitel 2

Verschiedene Netze

In diesem Kapitel sehen wir uns verschiedene Arten von Netzen mit EKSen an. Zunächst betrachten wir einzelne endliche Streifen in einem Netz und kleben diese an den Enden zu Schleifen zusammen. Die daraus entstehenden Schleifennetze erinnern sehr stark an Spinnennetze, vergleiche Kapitel 2.1.

Mit Kœnigsnetzen beschäftigen wir uns in Kapitel 2.2. Sie spielen eine zentrale Rolle. Diese können auf unterschiedliche Weisen definiert werden, welche wir uns kurz ansehen wollen, ehe wir mit der für uns wichtigen Definition (mit eingeschriebenen Kegelschnitten) starten können.

Der letzte Abschnitt, Kapitel 2.3, befasst sich mit Geradenscharen, welche wir an einen Kegelschnitt legen. Erfüllt die Geradenschar eine bestimmte Bedingung (die Schnittpunkte der Geradenfamilien liegen auf einem konfokalen Kegelschnitt), dann erhalten wir nicht nur ein Kœnigsnetze, sondern auch ein Netz mit eingeschriebenen Kreisen.

Diese Kapitel stützen sich allen voran auf [BF21], [BS08], [BS09], [AB18] und [C14]. Bevor wir uns in die Kapitel stürzen, legen wir noch die Notation fest.

Notation: Zukünftig sei ein **Netz mit eingeschriebenen Kegelschnitten** (Netz mit EKS) ein Netz mit Polygonzügen als Kurvenscharen. Als **Geradennetz oder Geradengitter mit eingeschriebenen Kegelschnitten** bezeichnen wir ein Netz mit zwei Geradenkurvenscharen. Die Definition und Anordnung der Kurvenscharen entspricht Abbildung 1.3 und generell dem Kapitel 1.

2.1 Schleifen- und Spinnennetze

Ein Netz N besteht, wie im Einführungskapitel 1.4 festgelegt, aus zwei Kurvenscharen g und h. Nehmen wir uns nun zwei benachbarte Kurven heraus, g_i und g_{i+1} für festgehaltenes $i \in I$. Diese beiden Kurven zusammen mit seinen Kanten und inklusive ihrer EKSe bilden einen sogenannten **Streifen**. Wir bezeichnen ihn mit $g_i \square\!\square\!\square g_{i+1}$, visualisiert in Abbildung 2.1. Dies führt uns nun auf folgende Definition, hierfür verweisen wir auch auf [BF21, Kap. 3.1].

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Definition 2.1.1. Eine **Schleife** $g_i \bowtie g_{i+1}$ ist ein Streifen mit geschlossenen, sich nicht schneidenden Kurven g_i und g_{i+1} als Randpolygone. Jede Facette in diesem Streifen grenzt an genau zwei Facetten. Die Schleife enthält dann m_i Facetten.

So ein Schleife heißt **bipartit**, wenn wir jede Ecke in eine von zwei Farben einfärben können und keine benachbarten Knoten auf einer Kante dieselbe Farbe haben. Damit eine Schleife bipartit einfärbbar ist, muss die Anzahl der Facetten m_i ein Vielfaches von Zwei sein. Dies liefert den Satz [BF21, Thm. 3.1].

Satz 2.1.2. Sei $g_i \bowtie g_{i+1}$ eine bipartite Schleife in $\mathbb{P}^2$ mit $m_i < \infty$. Enthält jede Facette der Schleife einen berührenden EKS, so enthält jede Facette eine 1-Parameterfamilie von berührenden EKSen.

Beweis. Wir betrachten die Schleife $g_i \bowtie g_{i+1}$ für festgehaltenes $i \in I$, das heißt, wir haben m_i Facetten darunter $\diamond_{i,j}$, $\diamond_{i,j+1}, \ldots, \diamond_{i,j+m_i}$ mit $\diamond_{i,j} = \diamond_{i,j+m_i}$. Weiters ist unser Streifen an der Kante $k_j^{i,i+1} = k_{j+m_i}^{i,i+1}$ zusammengeklebt. Getrennt werden $\diamond_{i,j}$ und $\diamond_{i,j+1}$ durch $k_{j+1}^{i,i+1}$.

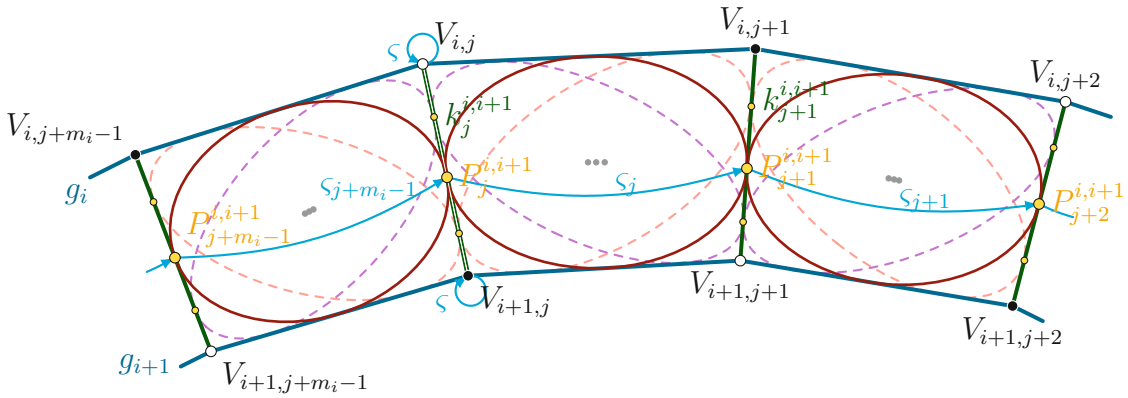


Abbildung 2.1: *Ausschnitt der Schleife $g_i \bowtie g_{i+1}$ zusammengeklebt bei der doppelgeführten Kante $k_j^{i,i+1}$ zur Visualisierung des Beweises von Satz 2.1.2*

Für alle $j \in J$ definieren wir die Zentralprojektion $\varsigma_j : k_j^{i,i+1} \to k_{j+1}^{i,i+1}$ mit Zentrum $M_{i,j}$ und $k_j^{i,i+1} \cap k_{j+1}^{i,i+1} \neq \emptyset$. Unsere Schleife ist an der Kante $k_j^{i,i+1}$ zusammengeklebt und damit werden die Knotenpunkte auf dieser Kante aufeinander abgebildet, das heißt $V_{i,j} \mapsto V_{i,j+m_i}$ und $V_{i+1,j} \mapsto V_{i+1,j+m_i}$. Sie sind insbesondere zwei Fixpunkte der projektiven Transformation $\varsigma := \varsigma_{j+m_i-1} \circ \cdots \circ \varsigma_{j+1} \circ \varsigma_j : k_j^{i,i+1} \to k_j^{i,i+1}$ und weil der Streifen bipartit eingefärbt ist, wird auch Weiß auf Weiß und Schwarz auf Schwarz abgebildet.

Angenommen jede Facette unserer bipartiten Schleife enthält einen berührenden eingeschriebenen Kegelschnitt. Nach Proposition 1.5.7 bildet ς_j den Berührpunkt $P_j^{i,i+1}$ an $k_j^{i,i+1}$ auf $P_{j+1}^{i,i+1} = \varsigma_j\left(P_j^{i,i+1}\right)$ an $k_{j+1}^{i,i+1}$ ab. Dementsprechend gilt für ς, dass $P_j^{i,i+1}$ auf $P_{j+m_i}^{i,i+1}$ abgebildet wird und liefert damit einen weiteren Fixpunkt. Folglich handelt es sich bei ς um die Identität und die Schleife enthält eine 1-Parameterfamilie von berührenden EKSen. $\square$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Zur Illustration dieses Satzes betrachten wir die Abbildung 2.1. Dies gilt nicht nur für bipartite Schleifen, sondern auch für herkömmliche Netze, siehe [AB18, Cor. 3.2] und Abbildung 2.3. Aus Definition 2.1.1 lässt sich auch ein Netz konstruieren: Wir sehen, dass die erste fest gewählte Schleife die Anzahl der Facetten in jeder weiteren Schleife des Netzes festlegt. Täte diese das nicht, würde dies der Definition von Netzen widersprechen, da einige Knoten nicht vier Kanten hätte, sondern nur noch drei.

Definition 2.1.3. Ein Netz mit nur Schleifen als Streifen in einer Kurvenschar ist ein **Schleifennetz**. Hierbei legt der Startstreifen $g_i \bowtie g_{i+1}$ die Anzahl der Facetten m_i pro Schleife fest.

Zur Veranschaulichung betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 2.1.4 (Spinnennetz). *Sei g die Kurvenschar bestehend nur aus Schleifen und sei h eine Geradenschar. Zusammen ergeben sie ein sogenanntes* ***Spinnennetz*** *für eine gerade Anzahl von Facetten m_i. Je näher wir einem möglichen Schnittpunkt der Geradenschar h kommen, desto kleiner werden die Facetten.*

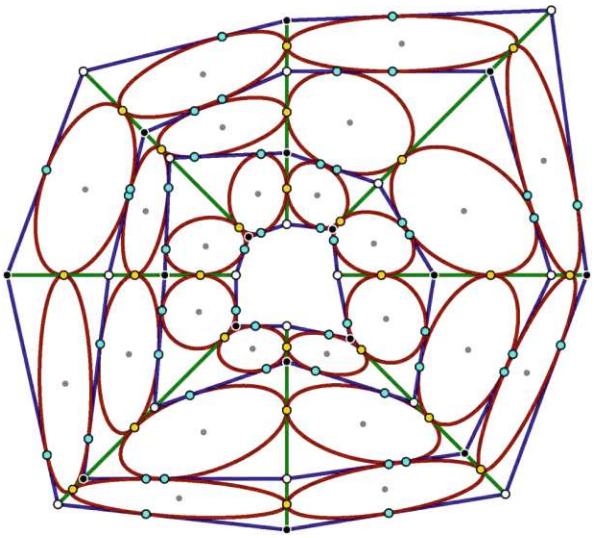


Abbildung 2.2: *Spinnennetz für $m_i = 8$ mit Kurvenschar g in Blau und h in Grün, Startpunkte bzw. Berührpunkte mit anderen Ellipsen in Gelb und Schnittpunkte von Ellipsen mit Kanten in Cyan*

In unserem Beispiel wählen wir $m_1 = 8$. Die Berechnungen verlaufen analog zu Beispiel 1.5.11 mit $V_{1,1} = V_{1,m_i+1}$ und $V_{2,1} = V_{2,m_i+1}$. Wir sehen in Abbildung 2.2, dass beim zusammenkleben von zwei Schleifen, beispielsweise $g_1 \bowtie g_2$ und $g_0 \bowtie g_1$, die Berührpunkte der eingeschrieben Kegelschnitte im Streifen $g_1 \bowtie g_2$ nicht dieselben Punkte wie in $g_0 \bowtie g_1$ sind. Für das ganze Netz gilt stets $m := m_2 = m_1 = m_0 = 8$, wobei m der Anzahl der Facetten pro Schleife des Netzes entspricht.

In Abbildung 2.3 haben wir $m = 6$ gewählt und erzwingen, dass wir berührende eingeschriebene Kegelschnitte wie in Definition 1.5.13 erhalten. ◇

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

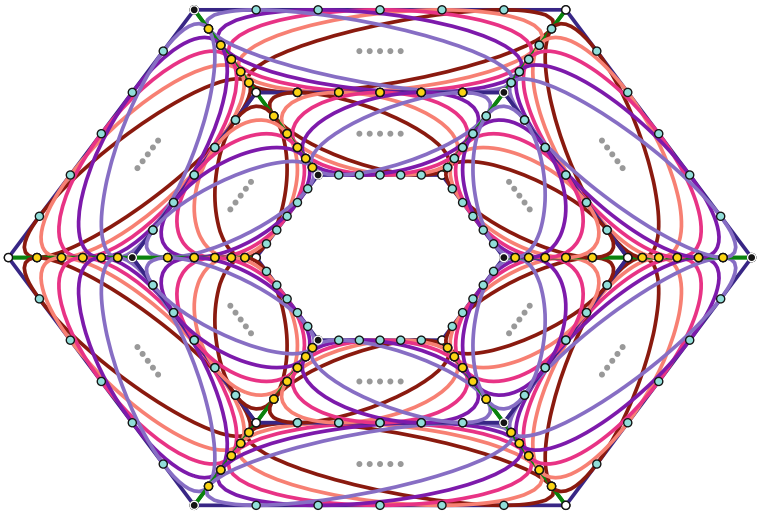


Abbildung 2.3: *Spinnennetz für $m_i = 6$ mit Kurvenschar g in Blau und h in Grün, Startpunkte bzw. Berührpunkte mit anderen Ellipsen in Gelb und Schnittpunkte von Ellipsen mit Kanten in Cyan*

2.2 Kœnigsnetze

Starten wir gleich mit einer Definition und betrachten einige Eigenschaften, siehe hierfür insbesondere [BS08, Kap. 2.3.2] und [AB18, Kap. 3.2]

Definition 2.2.1. Sei $N : I \times J \to \mathbb{R}^2$ ein Netz. Dann ist $N^\star$ **Christoffel dual** zu N genau dann, wenn jedes Viereck von $N^\star$ das Duale zum dazugehörigen Viereck von N ist, also es gilt

$$k^i_{j,j+1} \| (k^i_{j,j+1})^\star, k^{i+1}_{j,j+1} \| (k^{i+1}_{j,j+1})^\star, d_{i,j} \| f^\star_{i,j} \text{ und } f_{i,j} \| d^\star_{i,j}$$

bzw. gleichbedeutend mit Definition 1.4.4.

Dies führt direkt auf die erste Definition von Kœnigsnetzen.

Definition 2.2.2. Das Netz $N : I \times J \to \mathbb{R}^2$ ist ein **Kœnigsnetz**, falls ein Christoffel duales Netz $N^\star$ zu N existiert.

Eine weitere Möglichkeit ein Kœnigsnetz zu definieren ist via algebraischer Charakterisierung. Hierfür müssen wir eine sogenannte multiplikative 1-Form einführen, siehe [BS09, Kap. 3.1].

Definition 2.2.3. Sei $\mathcal{G}$ ein Graph bestehend aus Knotenmenge $\mathcal{V}$, orientierter Kantenmenge $\vec{\mathcal{E}}$ und der Menge aller Facetten $\mathcal{F}$. Dann heißt $q : \vec{\mathcal{E}} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ **multiplikative 1-Form** auf $\mathcal{G}$, wenn für alle orientierten Kanten $k \in \vec{\mathcal{E}}$ die Bedingung $q(-k) = \frac{1}{q(k)}$ erfüllt ist.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Jedes Netz besitzt zwei multiplikative 1-Formen q: Wir können jedes Netz (nicht nur Schleifennetze) bipartit färben, da wenn wir beispielsweise einen Knoten schwarz einfärben, können wir die Knoten auf den Verbindungskanten Weiß färben und von dort jeden Knoten auf der Verbindungskante wieder Schwarz, dann Weiß und so weiter. Somit gibt es in jeder Facette eine Diagonale zwischen weißen Punkten und eine Diagonale zwischen schwarzen Punkten, welche wir genau in dieser Farbe einfärben können, betrachte hierfür auch Abbildung 2.4. Demnach können wir einen weißen Graphen $\mathcal{G}_\circ$ mit $(i,j) \subset \mathbb{Z}^2_{\text{gerade}}$[1] definieren, welcher nur aus weißen Knoten und weißen orientierten Diagonalen besteht, analog der schwarze Graph $\mathcal{G}_\bullet$ für $(i,j) \subset \mathbb{Z}^2_{\text{ungerade}}$[2]. Damit hat jedes Netz eine multiplikative 1-Form auf $\mathcal{G}_\circ$ und eine auf $\mathcal{G}_\bullet$.

Definition 2.2.4. Zusätzlich zur Definition 2.2.3 gelte für alle Zyklen von orientierten Kanten, dass das Produkt der Werte von q ausgewertet an den jeweiligen Kanten entlang dieses Zyklus gleich eins ist. Dann heißt q **geschlossen**.

Dies führt uns direkt auf die algebraische Charakterisierung eines Kœnigsnetzes. Deren Beweis ist insofern wichtig, da sich daraus die geometrische Definition zu Kœnigsnetzen ableiten lässt.

Satz 2.2.5. Ein Netz $N : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist ein Kœnigsnetz genau dann, wenn die multiplikative 1-Form q auf $\mathbb{Z}^2_{\text{gerade}}$ und $\mathbb{Z}^2_{\text{ungerade}}$ geschlossen ist.

Beweis. Wir gehen wie im Beweis von [BS09, Thm 12] vor. Sei also ein Netz $N : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben, dann können wir ein duales Netz mittels Beweis von Lemma 1.4.5 konstruieren, indem wir mit einem beliebigen Viereck starten. Dieses soll an seinen Kanten mit dem nächsten Viereck verbunden sein, was wir insbesondere überprüfen wollen: Hierfür betrachten wir alle Vierecke, die an $V_{i,j}$ kleben, siehe Abbildung 2.4. Die dualen Vierecke sind bis auf Skalierungsfaktoren $\lambda_{k,\ell}$ für $k \in \{i-1, i\}$ und $\ell \in \{j-1, j\}$ bestimmt. Wir passen nun die Vierecke $\diamond_{i,j-1}$ und $\diamond_{i,j}$ an der Kante $k_j^{i,i+1}$ durch

$$\frac{\lambda_{i,j-1}}{L(M_{i,j-1}, V_{i,j})L(M_{i,j-1}, V_{i+1,j})} = \frac{\lambda_{i,j}}{L(M_{i,j}, V_{i,j})L(M_{i,j}, V_{i+1,j})}$$

an. Machen wir dies für alle anderen Vierecke an $V_{i,j}$, so gilt für alle vier Skalierungsfaktoren

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_{i,j-1}}{\lambda_{i,j}} &= \frac{L(M_{i,j-1}, V_{i,j})L(M_{i,j-1}, V_{i+1,j})}{L(M_{i,j}, V_{i,j})L(M_{i,j}, V_{i+1,j})}, \\
\frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_{i-1,j}} &= \frac{L(M_{i,j}, V_{i,j})L(M_{i,j}, V_{i,j+1})}{L(M_{i-1,j}, V_{i,j})L(M_{i-1,j}, V_{i,j+1})}, \\
\frac{\lambda_{i-1,j}}{\lambda_{i-1,j-1}} &= \frac{L(M_{i-1,j}, V_{i,j})L(M_{i-1,j}, V_{i-1,j})}{L(M_{i-1,j-1}, V_{i,j})L(M_{i-1,j-1}, V_{i-1,j})}, \\
\frac{\lambda_{i-1,j-1}}{\lambda_{i,j-1}} &= \frac{L(M_{i-1,j-1}, V_{i,j})L(M_{i-1,j-1}, V_{i,j-1})}{L(M_{i,j-1}, V_{i,j})L(M_{i,j-1}, V_{i,j-1})},
\end{aligned}$$

[1] mit $\mathbb{Z}^2_{\text{gerade}}$ meinen wir die Zahlenmenge, sodass $(i+j) \in 2\mathbb{Z}$ gilt

[2] und $\mathbb{Z}^2_{\text{ungerade}}$ sei die Zahlenmenge für die $(i+j) \in (2\mathbb{Z}+1)$ gelte

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

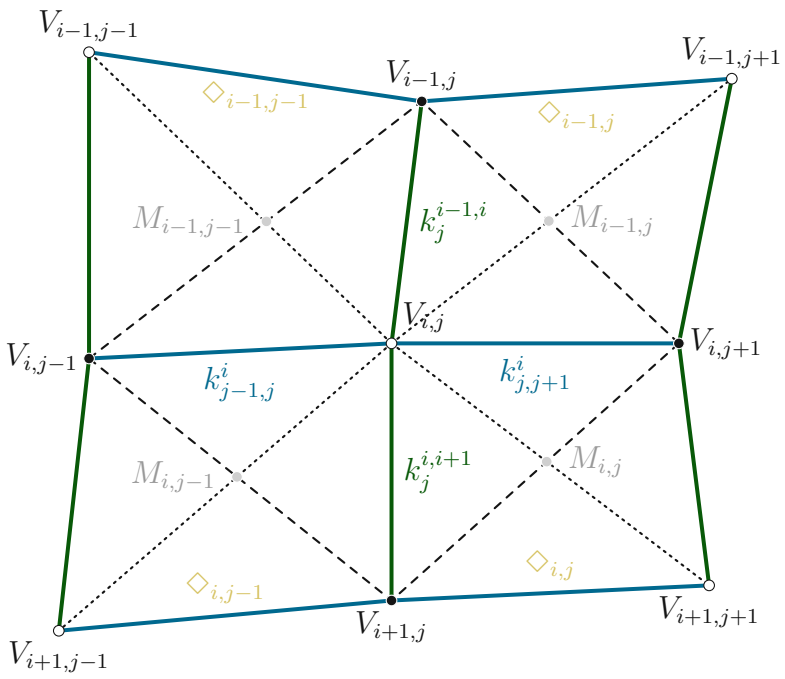


Abbildung 2.4: *Veranschaulichung des Beweises von Satz 2.2.5*

durch Anpassung an den Kanten $k_j^{i,i+1}$, $k_{j,j+1}^i$, $k_j^{i-1,i}$ und $k_{j-1,j}^i$. Diese können nur dann angepasst werden, wenn deren Zyklusprodukt von Quotienten der Skalierungsfaktoren gleich eins ist, also

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda_{i,j-1}}{\lambda_{i,j}} \cdot \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_{i-1,j}} \cdot \frac{\lambda_{i-1,j}}{\lambda_{i-1,j-1}} \cdot \frac{\lambda_{i-1,j-1}}{\lambda_{i,j-1}} = \\ &= \frac{L(M_{i,j-1}, V_{i+1,j})}{L(M_{i,j}, V_{i+1,j})} \cdot \frac{L(M_{i,j}, V_{i,j+1})}{L(M_{i-1,j}, V_{i,j+1})} \cdot \frac{L(M_{i-1,j}, V_{i-1,j})}{L(M_{i-1,j-1}, V_{i-1,j})} \cdot \frac{L(M_{i-1,j-1}, V_{i,j-1})}{L(M_{i,j-1}, V_{i,j-1})} = 1\end{aligned} \tag{2.1}$$

gilt. Dies ist genau die benötigte Bedingung aus Definition 2.2.4, damit es sich hierbei um eine geschlossene 1-Form für den weißen und schwarzen Graphen handelt. Ist nun eine 1-Form für diese Graphen geschlossen, so steht einer Konstruktion eines dualen Netzes nichts im Wege und der Satz ist bewiesen. □

Dies führt direkt auf folgende Definition, siehe [BF21, Kap.3.2].

Definition 2.2.6. Ein Netz $N : I \times J \to \mathbb{R}^2$ heißt **Kœnigsnetz** genau dann, wenn (2.1) für alle $(i, j) \in I \times J \subset \mathbb{Z}^2$ gilt.

Nun stellt sich die Frage, ob wir ein Kœnigsnetz auch allein durch die darin enthaltenen eingeschriebenen Kegelschnitte in $\mathbb{P}^2$ definieren können. Die Antwort lautet ja, wie uns folgender Satz verrät, welchen wir [BF21, Thm 3.5] entnehmen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Satz 2.2.7. Sei $N : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{P}^2$ ein Netz. So ist N ein Kœnigsnetz genau dann, wenn jedes Viereck eine 1-Parameterfamilie von berührenden eingeschriebenen Kegelschnitten enthält.

Beweis. Wir betrachten hierfür den Beweis von [BF21, Thm. 3.5]. Angenommen es gibt eine 1-Parameterfamilie von berührenden eingeschriebenen Kegelschnitten im Netz N. Nehmen wir nun ein beliebiges berührendes EKS-Set heraus. Laut Definition 1.5.8 besitzt jedes Viereck von N vier Ceva-Konfigurationen.

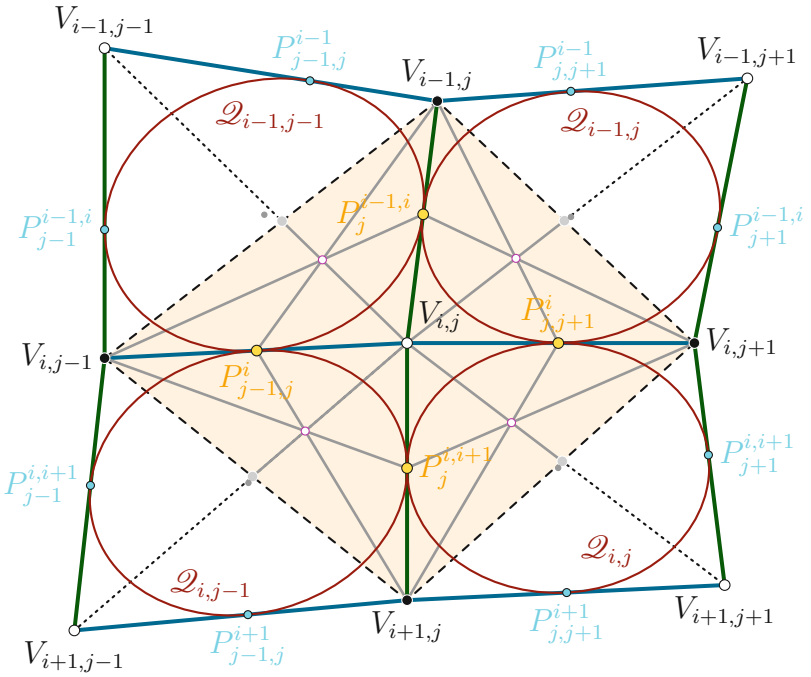


Abbildung 2.5: *Erweiterung von Abbilung 2.4 zum Beweis von Satz 2.2.7*

Betrachten wir nun speziell die Facetten, die an einem beliebigen $V_{i,j}$ im Inneren des Netzes N angeklebt sind. Hier gibt es in jedem der vier Vierecke genau eine Ceva-Konfiguration, die $V_{i,j}$ und jeweils die Punkte auf den benachbarten Kanten enthält, dargestellt durch die hellorangenen Dreiecke in Abbildung 2.5. Das heißt, es gilt Ceva's Theorem 1.5.9 für diese vier Ceva-Konfigurationen:

$$\frac{L(V_{i+1,j}, P^{i,i+1}_j)}{L(P^{i,i+1}_j, V_{i,j})} \cdot \frac{L(V_{i,j}, P^{i}_{j,j+1})}{L(P^{i}_{j,j+1}, V_{i,j+1})} \cdot \frac{L(V_{i,j+1}, M_{i,j})}{L(M_{i,j}, V_{i+1,j})} = 1,$$

$$\frac{L(V_{i-1,j}, P^{i-1,i}_j)}{L(P^{i-1,i}_j, V_{i,j})} \cdot \frac{L(V_{i,j}, P^{i}_{j,j+1})}{L(P^{i}_{j,j+1}, V_{i,j+1})} \cdot \frac{L(V_{i,j+1}, M_{i-1,j})}{L(M_{i-1,j}, L(V_{i-1,j})} = 1,$$

$$\frac{L(V_{i-1,j}, P^{i-1,i}_j)}{L(P^{i-1,i}_j, V_{i,j})} \cdot \frac{L(V_{i,j}, P^{i}_{j-1,j})}{L(P^{i}_{j-1,j}, V_{i,j-1})} \cdot \frac{L(V_{i,j-1}, M_{i-1,j-1})}{L(M_{i-1,j-1}, V_{i-1,j})} = 1,$$

$$\frac{L(V_{i+1,j}, P^{i,i+1}_j)}{L(P^{i,i+1}_j, V_{i,j})} \cdot \frac{L(V_{i,j}, P^{i}_{j-1,j})}{L(P^{i}_{j-1,j}, V_{i,j-1})} \cdot \frac{L(V_{i,j-1}, M_{i,j-1})}{L(M_{i,j-1}, V_{i+1,j})} = 1.$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Fassen wir diese zusammen und kürzen in jeder Zeile die ersten beiden Brüche heraus, dann erhalten wir genau (2.1) durch entsprechende Umänderung der orientierten Längen.

Dasselbe funktioniert in die andere Richtung mit derselben Argumentationsweise. Angenommen N ist ein Kœnigsnetz, es gilt also (2.1) für die vier Facetten, die an $V_{i,j}$ kleben. Dann kann mit Ceva's Theorem 1.5.9 eine 1-Parameterfamilie von berührenden EKSen garantiert werden und der Beweis ist fertig. □

Bemerkung 2.2.8. *Rein graphisch ist der Beweis von Satz 2.5 schnell einsehbar. Die Bedingung (2.1) lässt sich in Abbildung 2.5 ablesen. Hier werden stets die orientierten Längenabmessungen nur an den (strichlierten) Diagonalen zwischen den schwarzen Knoten durchgeführt. Hingegen besteht die Bedingung (1.11) aus allen Seiten der (orangenen) Dreiecke. Hier überlappen jeweils die Dreiecke an den Kanten, die an $V_{i,j}$ angrenzen und werden herausgekürzt. Übrig bleiben dann nur mehr die gewünschten (strichlierten) Diagonalen.*

Der Satz 2.2.7 eignet sich besonders zum Erzeugen eines Kœnigsnetzes, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 2.2.9. *Für die Konstruktion eines Kœnigsnetzes gehen wir analog zu Beispiel 1.5.11 vor. Auch hier seien $V_{1,1} := (-1,4)^\top$, $V_{1,2} := (2,3)^\top$, $V_{,21} := (-2,-2)^\top$ und $V_{2,2} := (3,-1)^\top$. Anders als in Beispiel 1.5.11 wählen wir nicht beliebige Startpunkte für die benachbarten Facetten, sonders die Berührpunkte der Ellipsen mit ihrer benachbarten Ellipse, nämlich für die Ellipsen $\mathscr{Q}_{i,j-1}$ und $\mathscr{Q}_{i-1,j}$ seien die Startpunkte die Schnittpunkte der Ellipse $\mathscr{Q}_{i,j}$ mit den dazugehörigen Kanten von $\diamond_{i,j}$. Die zwei fehlenden Eckensterne können bei $\mathscr{Q}_{i,j-1}$ und $\mathscr{Q}_{i-1,j}$ beliebig gewählt werden (nur die Bedingung (1.9) muss erfüllt sein).*

Für $\diamond_{i-1,j-1}$ wählen wir als vorläufigen Eckpunkt $V_{i-1,j-1} := (-7, v_{y;-1})^\top$ und lösen das Gleichungssystem (1.12) mit $P := (k^i_{j-1,j})^\top \mathscr{Q}_{i,j-1}$ und Kanten $k^i_{j-1,j}$, $k^{i-1,i}_j$, $k^{i-1}_{j-1,j}$, $k^{i-1,i}_{j-1}$. Wir erhalten für $a_{01} := 1$ die Matrixeinträge $a_{00}, \dots, a_{22}$, welche alle abhängig von $v_{y;-1}$ sind. Um $v_{y;-1}$ zu bestimmen lösen wir

$$\left((k^{i-1,i}_j)^\top \mathscr{Q}_{i-1,j}\right)^\top A_{Q_{i-1,j-1}} \left((k^{i-1,i}_j)^\top \mathscr{Q}_{i-1,j}\right) \overset{!}{=} 0$$

und erhalten $v_{y;-1} \approx 4.63166$. Analog lässt sich dies fortführen (im Fall unseres Beispiels für größer werdende j). Insgesamt haben wir also folgende Polygonzüge in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
g_{i-1} &:= \left(\begin{pmatrix}-7.0\\ v_{y;-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2.0\\ 6.5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2.5\\ 5.0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5.0\\ v_{y;2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6.5\\ v_{y;3}\end{pmatrix}\right)\\
g_i &:= \left(\begin{pmatrix}-6.0\\ 1.0\end{pmatrix}, V_{1,1}, V_{1,2}, \begin{pmatrix}5.5\\ 3.5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7.0\\ 3.0\end{pmatrix}\right)\\
g_{i+1} &:= \left(\begin{pmatrix}-5.0\\ -1.5\end{pmatrix}, V_{2,1}, V_{2,2}, \begin{pmatrix}7.0\\ -0.5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12.0\\ -1.0\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

mit $v_{y;2} \approx 4.42378$ und $v_{y;3} \approx 3.6287$ (die Herleitung von h_k funktioniert analog). Dementsprechend wurde Abbildung 2.6 mit `Mathematica` *generiert. Hierbei sind die*

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

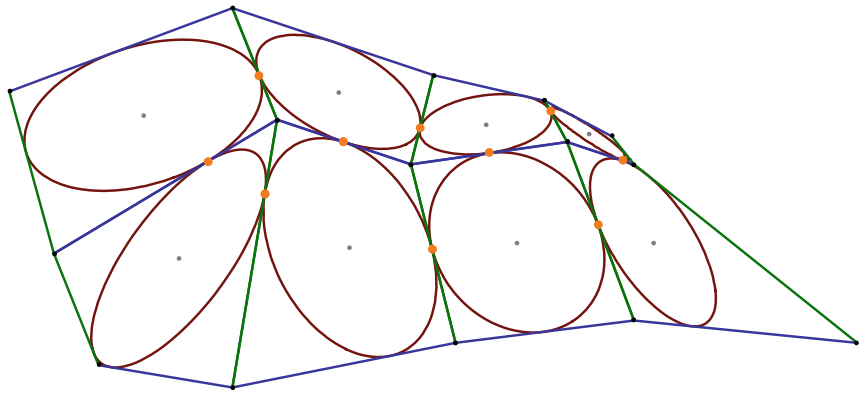


Abbildung 2.6: *Kœnigsnetz von Beispiel 2.2.9 mit Facetten* $\diamond_{i-1,j-1}$ *(links oben),* $\diamond_{i,j-1}$ *(links unten), ...,* $\diamond_{i-1,j+3}$ *(rechts oben) und* $\diamond_{i,j+3}$ *(rechts unten)*

Mittelpunkte der Ellipsen in Grau und die Berührpunkte der eingeschriebenen Kegelschnitte mit einem anderen eingeschriebenen Kegelschnitt in Gelb eingefärbt. Die Kanten und Punktbezeichnungen sind wie in Abbildung 2.4 gewählt, wenn auch nicht direkt eingezeichnet. ◇

Bemerkung 2.2.10. *Auch bei Abbildung 2.3 aus Beispiel 2.1.4 handelt es sich um ein Kœnigsnetz.*

2.3 Geradengitter an Kegelschnitt

Hier wollen wir Geradengitter genauer betrachten, siehe hierfür auch [BF21, Kap. 4.2] und [C14, Kap. 8]. Diese werden wir nicht »beliebig« in den Raum legen, sondern tangential an einen Kegelschnitt. Somit berührt jede Gerade der Geradenscharen g und h einen Kegelschnitt $\mathscr{Q}_{gh}$ in jeweils genau einem Punkt, liegen demnach tangential zu $\mathscr{Q}_{gh}$.

Um diese Punkte auf $\mathscr{Q}_{gh}$ zu konstruieren, betrachten wir das Viereck $\diamond_{i,j}$ in $\mathbb{P}^2$ mit Diagonalschnittpunkt $M_{i,j}$ und Geraden g_i, g_{i+1}, h_j und h_{j+1}, wie in [BF21, Thm 4.1]. Es enthält einen eingeschriebenen Kegelschnitt $\mathscr{Q}_{i,j}$ mit Berührpunkten $P^i_{j,j+1}$, $P^{i,i+1}_j$, $P^{i,i+1}_{j,j+1}$ und $P^{i,i+1}_{j+1}$ auf den Kanten von $\diamond_{i,j}$. Die Gerade $P^i_{j,j+1} \vee M_{i,j} =: h_{j+1/2}$ schneidet h_j und h_{j+1} genau in ihren jeweiligen Tangentenpunkten auf $\mathscr{Q}_{gh}$, welche wir mit H_j und H_{j+1} bezeichnen wollen. Analog schneidet $P^{i,i+1}_j \vee M_{i,j} =: g_{i+1/2}$ die Geraden g_i und g_{i+1} in G_i und G_{i+1} auf $\mathscr{Q}_{gh}$. Dieser Umstand ist beweisen in [BF21, Lemma 2.5] und gilt nicht nur für ein Viereck, sondern für einen Streifen (das ganze Netz) und wurde in Abbildung Abbildung 2.7 visualisiert.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

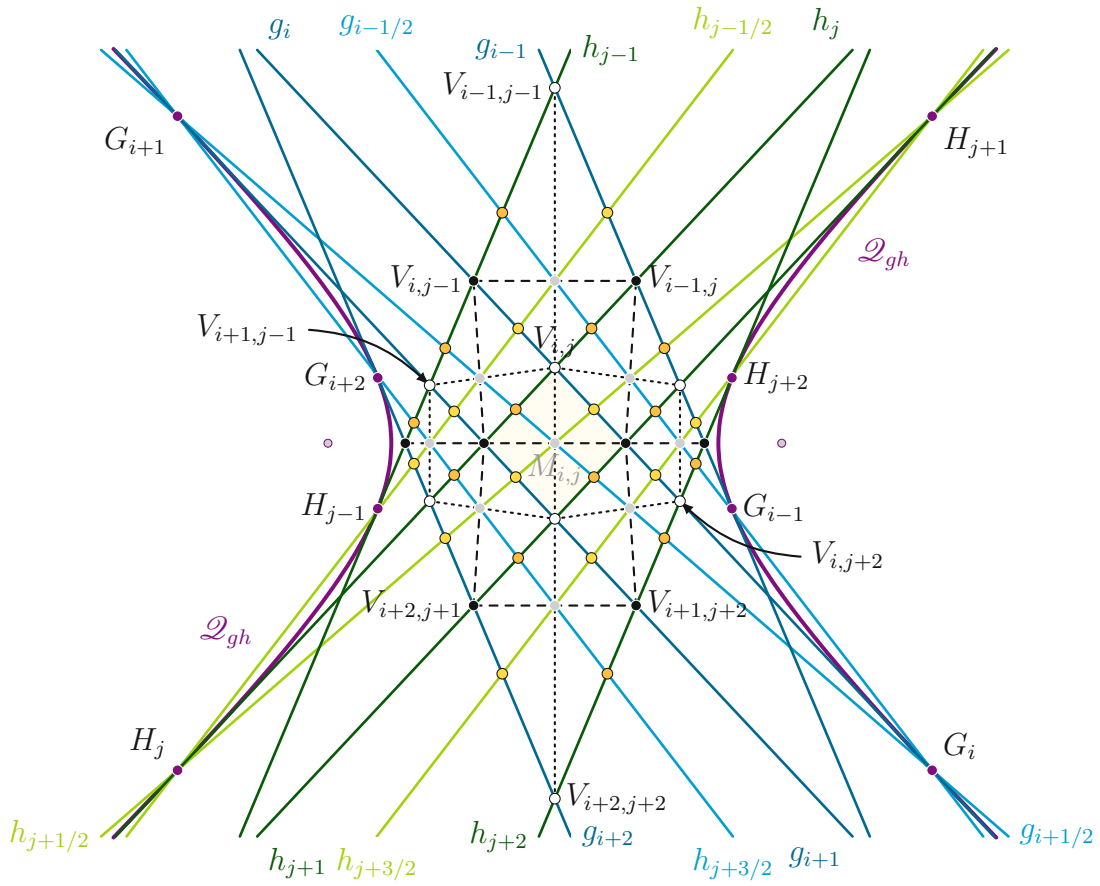


Abbildung 2.7: *Geradengitter an (violetten) Kegelschnitt $\mathscr{Q}_{gh}$ mit (dunkelblauen und -grünen) Geradenscharen g und h; Diagonalen strichliert und gepunktet; Brennpunkten von $\mathscr{Q}_{gh}$ in Grau mit violetter Umrandung und $\diamond_{i,j}$ in Gelb hinterlegt*

Satz 2.3.1. Angenommen g_i und g_{i+1} bilden in $\mathbb{P}^2$ für festgehaltenes $i \in I$ einen endlichen Streifen mit m_i-vielen Facetten $\diamond_{i,j}$ für $j \in \{0, \dots, m_i\}$ und enthaltene Geradenschar h.
Dann sind alle Geraden g_i, g_{i+1}, $h_0, \dots, h_{m_i}$ tangential zu einem nicht-degenerierten Kegelschnitt genau dann, wenn alle Diagonalschnittpunkte $M_{i,0}, \dots, M_{i,m_i}$ auf einer Geraden $g_{i+1/2}$ liegen, welche nicht den Punkt $g_i \cap g_{i+1}$ enthält.
Die Schnittpunkte von $g_{i+1/2}$ mit g_i und g_{i+1} entsprechen genau den Tangentenpunkten eines nicht-degenerierten Kegelschnitts mit Tangenten g_i und g_{i+1}. Diese Situation ist in Abbildung 2.8 für den Streifen $g_i \square\square\square g_{i+1}$ dargestellt.

Bevor wir uns dem Beweis widmen, beschäftigen wir uns mit der Erklärung von $g_{i+1/2}$ in folgender Definition und darauffolgendem Satz, welche wir [C14, Thm 5.3.5] entnehmen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Definition 2.3.2. Seien g und h zwei verschiedenen Geraden mit Schnittpunkt $S = g \cap h$ und $\kappa : g \to h$ eine projektive Transformation in $\mathbb{P}^2$. Dann definieren wir die Gerade a als **Kreuzachse von κ**, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(*i*) Es gilt $a \cap g = \kappa^{-1}(S)$ und $a \cap h = \kappa(S)$.

(*ii*) Für beliebige Punkte $P, Q \in g$ verschieden von $\kappa^{-1}(S)$ und $\kappa(S)$ sind die Geraden $P \vee \kappa(Q)$, $Q \vee \kappa(P)$ und a kopunktal.

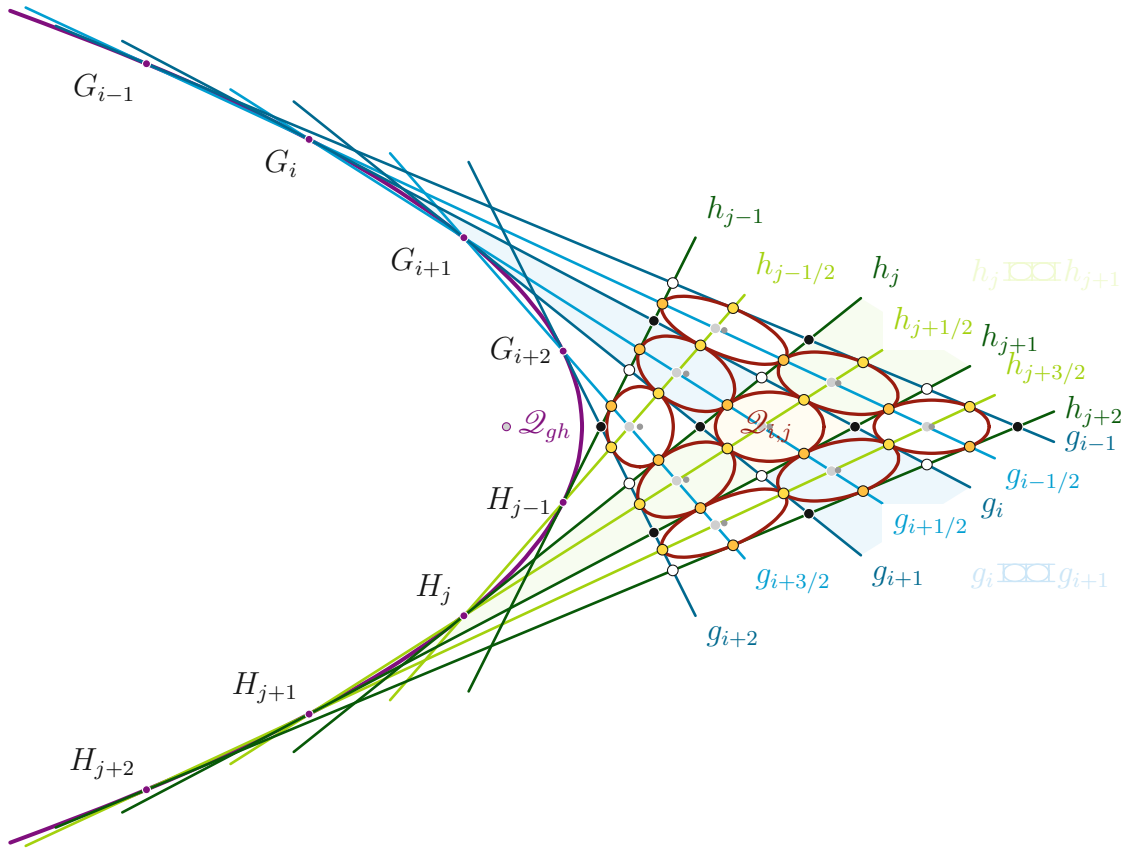


Abbildung 2.8: *Geradengitter an (violetten) Kegelschnitt $\mathscr{Q}_{gh}$ mit (dunkelblauen und -grünen) Geradenscharen g und h; Brennpunkt von $\mathscr{Q}_{gh}$ in Grau mit violetter Umrandung; in Hellblau bzw. Hellgrün hervorgehobene Streifen $\diamond_{i,j}$ in Gelb mit eingeschriebenen Kegelschnitt $\mathscr{Q}_{i,j}$*

Satz 2.3.3 (Kreuzachsen-Theorem). Es gelten die Voraussetzungen von Definition 2.3.2. Dann existiert eine eindeutige Kreuzachse a von κ.

Der Beweis ist zu finden in [C14, Thm 5.3.5]. Diese Kreuzachse a lässt sich mit drei Punkten auf einer Geraden und deren Bilder recht einfach konstruieren, wir verweisen hierfür auf [C14, Rem. 5.3.6] und betrachten nachfolgende Proposition [C14, Prop. 5.3.7].

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Proposition 2.3.4. Auch hier gelten die Voraussetzungen von Definition 2.3.2. Weiters seien die Punkte $P_g \in g$ und $P_h \in h$ gegeben (beide verschieden von S) und a gehe nicht durch P_g und P_h. Wähle die Punkte $Q_g \in g$ und $Q_h \in h$ genau so, dass $Q_g \vee P_h$, $Q_h \vee P_g$ und a kopunktal sind. Dies definiert eine projektive Transformation $\kappa : g \to h$ mit $\kappa(P_g) = P_h$ mit Kreuzachse a.

Satz 2.3.3 und Proposition 2.3.4 zeigen auf, dass es sich bei $g_{i+1/2}$ um eine Kreuzachse handelt für $g = g_{i+1}$ und $h = g_i$ in Abbildung 2.7 mit P_g, P_h, Q_g und G_h die entsprechend weißen und schwarzen Eckpunkte des (gelb unterlegten) Vierecks $\diamond_{i,j}$. Kommen wir nun zum Beweis von Satz 2.3.1.

Beweis (von Satz 2.3.1). Wir gehen analog zu Beweis von [BF21, Thm 4.1] vor. Seien also alle g_i, g_{i+1}, $h_0, \dots, h_{m_i}$ tangential zu einem nicht-degenerierten Kegelschnitt $\mathscr{Q}_{gh}$. Nach 1.5.2 und 1.5.4 ist dies äquivalent dazu, dass eine projektive Transformation $\kappa : g_i \to g_{i+1}$ existiert für die $\kappa(g_i \cap h_j) = (g_{i+1} \cap h_j)$ für alle $j \in \{0, \dots, m_j\}$ und $\kappa(g_i \cap g_{i+1}) \neq (g_i \cap g_{i+1})$ gilt.

Nach Proposition 2.3.4 ist dies äquivalent dazu, dass alle Punkte $M_{i,0}, \dots, M_{i,m_i}$ auf der Kreuzachse $g_{i+1/2}$ von κ liegen. Die Kreuzachse ist nicht kopunktal mit g_i und g_{i+1}, sonst würde es sich bei κ um eine Zentralprojektion handeln und es würde $\kappa(g_i \cap g_{i+1}) = (g_i \cap g_{i+1})$ gelten.

Damit ist die Aussage des Satzes bewiesen. Wir haben also jetzt Tangenten g_i, g_{i+1} und $h_0, \dots, h_{m_i}$ an dem eingeschriebenen Kegelschnitt $\mathscr{Q}_{gh}$ mit Tangentenpunkten G_i, G_{i+1} auf g_i, g_{i+1} gelegt. Die Diagonalschnittpunkte $M_{i,0}, \dots, M_{i,m_i}$ liegen kollinear auf der Kreuzachse $G_i \vee G_{i+1} = g_{i+1/2}$ (vgl. Proposition 1.5.7), daher gilt $G_i = g_i \cap g_{i+1/2}$ und $G_{i+1} = g_{i+1} \cap g_{i+1/2}$. $\square$

In Satz 2.3.1 haben wir nur den Streifen $g_i \square\square g_{i+1}$ mit m_i Facetten betrachtet. Seien nun $g := \{g_0, \dots, g_{m_j}\}$ und $h := \{h_0, \dots, h_{m_i}\}$ Geradenscharen in $\mathbb{P}^2$ mit $m_i \geq 2$ und $m_j \geq 2$. Wir betrachten also ein $m_j \times m_i$ Geradengitter mit Streifenfamilien $\square\square_g := \{g_i \square\square g_{i+1}\}_{i=0}^{m_j-1}$ und $\square\square_h := \{h_j \square\square h_{j+1}\}_{j=0}^{m_i-1}$. Diese bestehen aus Vierecken deren Knoten die Schnittpunkte unserer Geradenscharen darstellen. Um all die Zusammenhänge zwischen den Definitionen (und dem bisher kennengelerntem) zusammenzufassen, stellen wir folgenden Satz vor, zu vergleichen mit [BF21, Thm 4.2, Cor. 4.3].

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Satz 2.3.5. Wir betrachten das $m_j \times m_i$ Geradengitter bestehend aus Streifenfamilien $\square\!\square\!\square_g$ und $\square\!\square\!\square_h$. Weiters seien $M_{i,0}, \dots, M_{i,m_i}$ die Diagonalschnittpunkte, der in den Streifen enthaltenen Vierecke. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(*i*) Die Geraden $g_0, \dots, g_{m_j}$, $h_0, \dots, h_{m_i}$ sind tangential zu einem nicht degenerierten Kegelschnitt $\mathscr{Q}_{gh}$.

(*ii*) Das $m_j \times m_i$ Geradengitter enthält eine Menge an berührenden EKSen $\mathscr{Q}_{i,j}$, sodass die Mengen

$$\left\{M_{i,0}, \dots, M_{i,m_i}, \{h_j \cap (M_{i,j} \vee M_{m_j,j})\}_{j=0}^{m_i}\right\} \text{ in } \square\!\square\!\square_g \text{ und}$$
$$\left\{M_{0,j}, \dots, M_{m_j,j}, \{g_i \cap (M_{i,j} \vee M_{i,m_i})\}_{i=0}^{m_j}\right\} \text{ in } \square\!\square\!\square_h$$

jeweils nur kollineare Punkte enthalten für alle $i \in \{0, \dots m_j\}$ und $j \in \{0, \dots m_i\}$. Die Punktmengen ohne der Diagonalschnittpunkte sind die Tangentenpunkte der EKSe in den dazugehörigen Vierecken.

(*iii*) Das $m_j \times m_i$ Geradengitter hat eine Menge von berührenden EKSen.

(*iv*) Das $m_j \times m_i$ Geradengitter enthält eine 1-Parameterfamilie von berührenden EKSen.

(*v*) Für alle $i \in \{1, \dots m_j - 1\}$ und $j \in \{1, \dots m_i - 1\}$ sind $h_{j-1/2} := M_{i-1,j-1} \vee M_{i,j-1}$, $h_{j+1/2} := M_{i-1,j} \vee M_{i,j}$ und h_j kopunktal.

(*vi*) Für alle $i \in \{1, \dots m_j - 1\}$ und $j \in \{1, \dots m_i - 1\}$ sind $g_{i-1/2} := M_{i-1,j-1} \vee M_{i-1,j}$, $g_{i+1/2} := M_{i,j-1} \vee M_{i,j}$ und g_i kopunktal.

Beweis. Dieser Beweis fasst quasi die Hauptaussagen des Kapitels 2 zusammen und wir orientieren uns am Beweis von [BF21, Thm 4.2].

(*i*) $\iff$ (*ii*): Nach unserer Herleitung am Anfang des Kapitels haben wir insbesondere auch im Beweis vom Satz 2.3.1 gesehen, dass die Diagonalschnittpunkte (betrachtet in einem beliebigen Streifen des Netzes, exemplarisch wählen wir $g_i \square\!\square\!\square g_{i+1}$) genau dann auf der Kreuzachse $g_{i+1/2}$ liegen, wenn die Geradenscharen g und h einen nicht-degenerierten Kegelschnitt berühren. Nach Proposition 1.5.7 handelt es sich dabei genau um die Tangentenpunkte der EKSe in den dazugehörigen Vierecken in diesem Streifen. Die Tangentenpunkte in einem Viereck entsprechen den Tangentenpunkten seines Nachbarvierecks, daher schneiden sich die benachbarten EKSe genau in diesen Punkten.

(*ii*) $\iff$ (*iii*): Während die eine Richtung trivial ist, schauen wir uns die andere Richtung genauer an. Das Geradengitter habe eine Menge an berührenden ESKen. Dieses sei so gewählt, dass deren Startpunkt genau auf dem Schnittpunkt $P_j^{i,i+1}$ der Gerade $M_{i,j-1} \vee M_{i,j}$ von zwei Diagonalschnittpunkten und der dazwischen liegenden Kante liegt. Die Kante sei also zwischen den Vierecken $\diamond_{i,j-1}$ und $\diamond_{i,j}$. Die Frage ist nun: liegt der Berührpunkt $P_{j-1}^{i,i+1}$ auch auf $M_{i,j-1} \vee M_{i,j}$? Ja, denn nach Satz 2.3.3 handelt es sich bei $M_{i,j-1} \vee M_{i,j}$ um eine eindeutige Kreuzachse, daher muss auch $P_{j-1}^{i,i+1}$ darauf liegen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

$(iii) \iff (iv)$: Folgt direkt aus Satz 2.1.2.

$(iv) \implies (v)$ & (vi): Nach Satz 2.2.7 handelt es sich bei unserem Geradengitter mit berührenden EKSen um ein Kœnigsnetz und es gilt (2.1), d.h. umgeschrieben auf unsere Situation

$$\frac{L(M_{i,j-1}, g_{i+1} \cap h_j)}{L(M_{i,j}, g_{i+1} \cap h_j)} \frac{L(M_{i,j}, g_i \cap h_{j+1})}{L(M_{i-1,j}, g_i \cap h_{j+1})} \frac{L(M_{i-1,j}, g_{i-1} \cap h_j)}{L(M_{i-1,j-1}, g_{i-1} \cap h_j)} \frac{L(M_{i-1,j-1}, g_i \cap h_{j-1})}{L(M_{i,j-1}, g_i \cap h_{j-1})} = 1 \tag{2.2}$$

für beliebige $i \in \{1, \dots m_j - 1\}$ und $j \in \{1, \dots m_i - 1\}$. Auf der anderen Seite wollen wir, dass nach dem Satz von Menelaus 1.5.10 die Gleichungen

$$\frac{L(g_i \cap h_{j-1}, M_{i-1,j-1})}{L(M_{i-1,j-1}, g_{i-1} \cap h_j)} \cdot \frac{L(g_{i-1} \cap h_j, M_{i-1,j})}{L(M_{i-1,j}, g_i \cap h_{j+1})} \cdot \frac{L(g_i \cap h_{j+1}, P_{g_i})}{L(P_{g_i}, g_i \cap h_{j-1})} = -1 \tag{2.3}$$

und

$$\frac{L(g_i \cap h_{j-1}, M_{i,j-1})}{L(M_{i,j-1}, g_{i+1} \cap h_j)} \cdot \frac{L(g_{i+1} \cap h_j, M_{i,j})}{L(M_{i,j}, g_i \cap h_{j+1})} \cdot \frac{L(g_i \cap h_{j+1}, P_{g_i})}{L(P_{g_i}, g_i \cap h_{j-1})} = -1 \tag{2.4}$$

für Punkt G_i auf g_i gelten bzw. analoge Formeln für Dreiecke $(g_{i-1} \cap h_j, g_i \cap h_{j-1}, h_j \cap g_{i+1})$, $(g_{i-1} \cap h_j, g_i \cap h_{j+1}, h_j \cap g_{i+1})$ und Punkt H_j auf h_j, damit die Geraden $h_{j-1/2}$, $h_{j+1/2}$ und h_j bzw. $g_{i-1/2}$, $g_{i+1/2}$ und g_i kopunktal sind. Setzen wir nun (2.3) = (2.4), dann erhalten wir nach dem Kürzen genau die Gleichung (2.2).

$(v) \implies (i)$ & $(vi) \implies (i)$: Aus Symmetriegründen genügt es $(v) \implies (i)$ zu zeigen. Somit nehmen wir an, dass $h_{j-1/2}$, $h_{j+1/2}$ und h_j kopunktal im Punkt H_j sind. Weiters sind die Geraden $h_{j-1}, h_j, h_{j+1}, g_{i-1}, g_i$ nach Korollar 1.2.5 tangential zu einem Kegelschnitt $\mathscr{Q}_1$ mit Tangentenpunkt H_j. Dann sind auch die Geraden $h_{j-1}, h_j, h_{j+1}, g_i, g_{i+1}$ tangential zu einem Kegelschnitt $\mathscr{Q}_2$ mit Tangentenpunkt H_j. Nach Proposition 1.5.5 müssen die Kegelschnitte identisch sein, also gilt $\mathscr{Q}_1 = \mathscr{Q}_2$.

Damit sind alle Äquivalenzen des Satzes gezeigt. □

Zum Abschluss stellen wir noch ein Kreisnetz wie in [AB18, Def. 2.3] vor, welches mit Satz 2.3.8 einen Zusammenhang mit unserem zuvor betrachteten Geradengitter herstellt.

Definition 2.3.6. Seien $\mathscr{Q}_{\xi\eta}$ und $\mathscr{Q}_{gh}$ konfokale Kegelschnitte (das heißt, sie haben denselben Brennpunkt). Seien ξ_i und η_j Tangenten auf $\mathscr{Q}_{\xi\eta}$, sodass alle Schnittpunkte $\xi_{i-1} \cap \xi_i$ und $\eta_{j-1} \cap \eta_j$ auf $\mathscr{Q}_{gh}$ liegen für alle $i \in I \subset \mathbb{Z}$ und $j \in J \subset \mathbb{Z}$. Dann bilden ξ und η zusammen ein sogenanntes **Kreisnetz**.

In dieser Definition kam zwar mit keinem einzigen Wort (abgesehen dem Namen der gebrachten Definition) das Wort »Kreis« vor. Wieso also bilden sie ausgerechnet ein Kreisnetz? Dies folgt direkt aus dem Graves-Chasles Theorem, [AB18, Thm. 2.5], welches besagt, dass die horizontalen und vertikalen Geraden (ξ_i, ξ_{i+1} und η_j, η_{j+1}) einen Inkreis haben, wenn die Bedingungen aus dem Theorem erfüllt sind.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Satz 2.3.7 (Graves-Chasles Theorem).
Sei $\mathscr{Q}$ ein Kegelschnitt tangential zu allen Seiten eines Vierecks. Die gegenüberliegenden Knoten seien bezeichnet mit $\{M_{i,j}, M_{i+1,j+1}\}$, $\{M_{i+1,j}, M_{i,j+1}\}$ und $\{\xi_i \cap \xi_{i+1}, \eta_j \cap \eta_{j+1}\}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Das Viereck $\{M_{i,j}, M_{i+1,j}, M_{i,j+1}, M_{i+1,j+1}\}$ enthält einen Kreis, der jede Kante nur einmal berührt.

(ii) Die Eckensterne $M_{i,j}$ und $M_{i+1,j+1}$ liegen auf einem konfokalen Kegelschnitt von $\mathscr{Q}$.

(iii) Die Eckensterne $M_{i,j+1}$ und $M_{i+1,j}$ liegen auf einem konfokalen Kegelschnitt von $\mathscr{Q}$.

(vi) Die Eckensterne $\xi_i \cap \xi_{i+1}$ und $\eta_j \cap \eta_{j+1}$ liegen auf einem konfokalen Kegelschnitt von $\mathscr{Q}$.

Der Satz 2.3.8 zeigt uns die Verbindung zwischen Kreisnetz und Kœnigsnetz auf, deren Beweis auch in [BF21, Thm 4.7] zu finden ist.

Satz 2.3.8. Gegeben sei ein Kreisnetz, wie in Definition 2.3.6.
Dann existiert ein duales Geradengitter, welches eine 1-Parameterfamilie von berührenden EKSen enthält. Die Eckenpunkte des dualen Geradengitters sind die Kreismittelpunkte der Kreise im Kreisnetz und die Geraden des dualen Geradengitters sind die winkelhalbierenden Geraden vom Kreisnetz.

Wir verdeutlichen diesen Satz anhand folgendem Beispiel. Wir konstruieren ein Kreisnetz, an welches wir ein Geradengitter mit eingeschriebenen Kegelschnitten legen.

Beispiel 2.3.9 (Kreisnetz an Parabel). *Wir starten mit der Konstruktion des Kreisnetzes. Dieses wollen wir an einen Kegelschnitt legen, genauer gesagt an eine Parabel. Die Parabel sei gegeben durch*

$$\mathscr{Q}_{\xi\eta} := \{[x] \in \mathbb{P}^2 \ : \ x^\top A_{\xi\eta} x = 0\} \ \textit{mit} \ A_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und als konfokale Parabel wählen wir

$$\mathscr{Q}_{gh} := \{[x] \in \mathbb{P}^2 \ : \ x^\top A_{gh} x = 0\} \ \textit{mit} \ A_{gh} = \begin{pmatrix} -60.8256 & 13.824 & 0 \\ 13.824 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.76 \end{pmatrix}$$

mit gemeinsamen Brennpunkt $B = (1, 1, 0)$. Als Nächstes wählen wir für die Geradenschar ξ und η jeweils einen Punkt auf $\mathscr{Q}_{gh}$. Durch diese Punkte legen wir nun die Tangenten an $\mathscr{Q}_{\xi\eta}$. Die entstehenden Schnittpunkte dieser Tangenten mit $\mathscr{Q}_{gh}$ liefern die nächsten Punkte durch die wir weitere Tangenten legen und so weiter. Nach beliebig vielen Schritten haben wir ein Geradengitter für das Kreisnetz gefunden. In diesem

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Beispiel genügen uns Geradenmengen ξ und η bestehend aus jeweils vier Stück, d.h. $\xi = \{\xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, \xi_{i+2}\}$ und $\eta = \{\eta_{j-1}, \eta_j, \eta_{j+1}, \eta_{j+2}\}$.

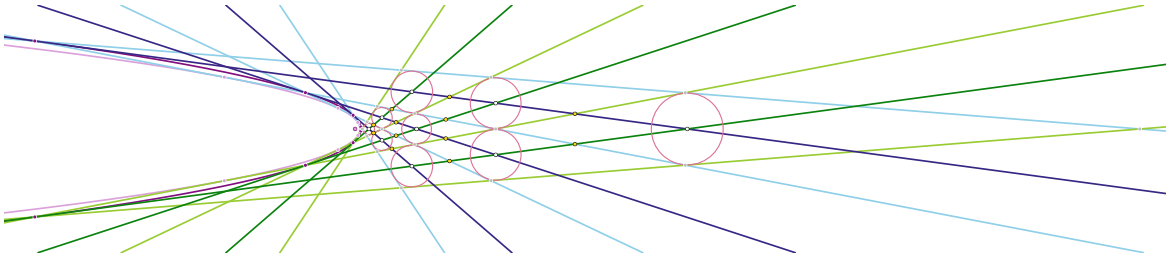


Abbildung 2.9: *Kreisnetz mit Geradenscharen ξ (hellblau) und η (hellgrün) an Kegelschnitt $\mathscr{Q}_{\xi\eta}$ (hellviolett) mit Brennpunkt (dunkelviolett mit hellvioletter Füllung), konfokalem Kegelschnitt $\mathscr{Q}_{gh}$ (dunkelviolett), Kreisen (hellrosa) und Kreuzachsen (dunkelgrün, dunkelblau)*

Die Kreuzachsen erhalten wir durch Bestimmung der Tangenten im Schnittpunkt von $\mathscr{Q}_{gh} \cap \xi_i$ für alle i und $\mathscr{Q}_{gh} \cap \eta_j$ für alle j, abzulesen in Abbildung 2.9. Diese Kreuzachsen sind gleichzeitig die Geradenscharen g und h. Also handelt es sich bei ξ_i eigentlich um $g_{i+1/2}$, bei η_j um $h_{j+1/2}$ und so weiter. Die eingeschlossenen Vierecke in dem Geradengitter von g und h können nun mit eingeschriebenen Kegelschnitten gefüllt werden, während wir das Geradengitter ξ und η mit (nicht berührenden) Kreisen ausstatten können, wie es Satz 2.3.8 voraussagt.

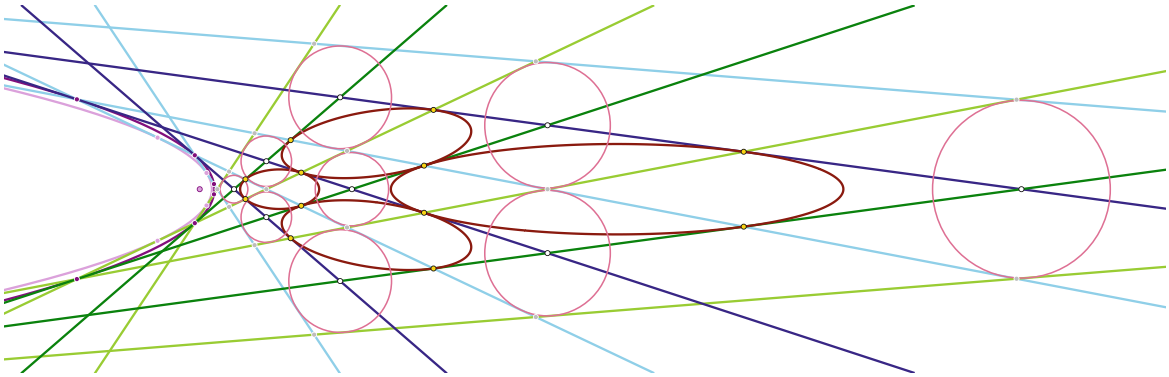


Abbildung 2.10: *Geradennetz mit Geradenscharen g (dunkelgrün) und h (dunkelblau) an Kegelschnitt $\mathscr{Q}_{gh}$ (dunkelviolett) mit Brennpunkt (dunkelviolett mit hellvioletter Füllung), eingeschriebenen Kegelschnitten (dunkelrot) sowie Objekte von Abbildung 2.9*

Die Berechnung der Kreise ist analog zu (1.12) mit dem Zusatz, dass

$$\mathtt{I}^\top \mathscr{Q}\, \mathtt{I} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{\mathtt{I}}^\top \mathscr{Q}\, \bar{\mathtt{I}} = 0$$

ebenfalls erfüllt sein muss und wir keinen Startpunkt P vorgeben, sondern nur die absoluten Kreispunkte $\mathtt{I}$ und $\bar{\mathtt{I}}$ aus (1.5). Für die Ellipsen sei der Startpunkt ein passender Punkt aus den Mengen von (ii) in Satz 2.3.5, welche in Abbildung 2.10 durch die gelben Punkte dargestellt sind. ◇

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Kapitel 3

Kreismuster und Netze

Anders als in den vorangegangenen Kapiteln wollen wir uns jetzt ausschließlich mit dem Kegelschnittspezialfall Kreis auseinandersetzen. Zunächst wird ein Raumwechsel eingeführt, da wir uns nun allen voran im $\mathbb{CP}^1$ bzw. $\mathbb{S}^2$ aufhalten werden, wo wir die Definition von Netzen ein wenig anpassen müssen. Darauf werden wir hier kurz eingehen und ausführlicher in Kapitel 3.1.

Notation: Bisher haben wir die Netze mittels Kurvenscharen definiert, jetzt wollen wir mit den Kreisen starten und das Netz darüber legen. In Kapitel 3.1 werden wir die Kreise auf Netzen, bezeichnet mit Σ, definieren und diese dienen allen voran nur als Grundgerüst. Anschließend werden wir, wie in den vorherigen Kapiteln, ein Netz um die Kreise herum finden, welches diese Kreise als eingeschriebene Kegelschnitte enthält.

Statt der Polygonzüge bzw. Geraden hätte sich genauso gut auch eine Definition von Netzen via seiner Facetten geeignet. Darum sind die Netze in Kapitel 3.2 nur mehr durch Punktmengen definiert, wo jeweils eine Menge von β-vielen Punkten eine konvexe Facette aufspannt für $\beta \geq 3$ und $\beta \in \mathbb{N}$.

Im Kapitel 2.3 haben wir kurz mit Kreisnetzen gearbeitet, was wir nun in der obigen Notation weiterführen werden. Wir starten im Kapitel 3.1 mit Kreismuster aus denen wir Kreisnetze konstruieren wollen. Diese Kreisnetze haben eine ähnliche Notation wie in den vorangegangenen Kapiteln. Sie sind sogar berührende Kreisnetze und damit Kœnigsnetze.

Da uns die neue Definition von Netzen viele neue Möglichkeiten bietet nicht nur Vierecke als Facetten zu betrachten, verallgemeinern wir diese im Kapitel 3.2. Wir nehmen uns eine natürliche Zahl $\beta \geq 3$, die angibt wie viele Kanten eine Facette haben soll. Die zusammengeklebten Facetten bilden ein neues Netz, welches berührende Kreise enthält. Diese Kapitel stützen sich allen voran an [S97], [T80] und [S05].

3.1 Von Kreismustern zu Kreisnetzen

Zunächst starten wir mit einer Definition von Kreismuster, siehe auch [BS08, Def. 3.1], und überlegen uns, was für Eigenschaften und Netze daraus resultieren könnten. Das Kreismuster wird auf einem Netz Σ, dem Grundgerüst, definiert, welches die Lage der

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Kreise festlegt und ansonsten zweitrangig ist. Später wollen wir ein Netz darüber legen, das diese Kreise als eingeschriebene Kegelschnitte enthält.

Definition 3.1.1. Ein **Kreismuster** $\Sigma : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist ein Netz in dem alle Vierecke umschrieben sind. Das heißt für jede Facette $\diamond_{k,\ell}$ mit $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$ existiert ein Kreis, der die Eckpunkte $U_{k,\ell}, U_{k+1,\ell}, U_{k,\ell+1}, U_{k+1,\ell+1}$ enthält.

Wie können wir feststellen, ob jeder Eckenstern einer Facette einen Kreis besitzt, der die vier Punkte enthält? Ein Kreis ist bekanntlich durch drei seiner Punkte eindeutig festgelegt, demnach muss der vierte Punkt geeignet auf diesem Kreis liegen. Um dies zu überprüfen schauen wir auf folgenden Satz, vgl. [RG11, Thm 18.1].

Satz 3.1.2. Die Punkte $U_{k,\ell}, U_{k+1,\ell}, U_{k,\ell+1}, U_{k+1,\ell+1} \in \mathbb{P}^2$ sind zirkulär (das heißt, sie liegen auf einem Kreis), wenn $U_{k,\ell}, U_{k+1,\ell}, U_{k,\ell+1}, U_{k+1,\ell+1}, \mathtt{I}$ und $\bar{\mathtt{I}}$ (die absoluten Kreispunkte (1.5)) auf einem Kegelschnitt liegen.

Wir können nicht nur mit dem obigen Satz rechnen, sondern auch mithilfe des Doppelverhältnis, siehe [M21] und [RG11, Thm 17.2, 17.3].

Definition 3.1.3. Wir betrachten $U_{k,\ell}, U_{k+1,\ell}, U_{k,\ell+1}, U_{k+1,\ell+1} \in \hat{\mathbb{C}}$. Dann ist das **Doppelverhältnis** definiert durch

$$DV(U_{k,\ell}, U_{k,\ell+1}, U_{k+1,\ell+1}, U_{k+1,\ell}) = \frac{(U_{k,\ell} - U_{k,\ell+1})(U_{k+1,\ell+1} - U_{k+1,\ell})}{(U_{k,\ell+1} - U_{k+1,\ell+1})(U_{k+1,\ell} - U_{k,\ell})} \tag{3.1}$$

und deren Ergebnisse liegen ebenfalls wieder in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Für das Doppelverhältnis gelten folgende wichtige Eigenschaften:

- ▷ Das Doppelverhältnis ist invariant unter Möbiustransformationen.
- ▷ Die Punkte $U_{k,\ell}, U_{k,\ell+1}, U_{k+1,\ell+1}, U_{k+1,\ell}$ sind genau dann zirkulär, wenn ihr Doppelverhältnis in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ liegt.
- ▷ Wenn $U_{k,\ell}, U_{k,\ell+1}, U_{k+1,\ell+1}, U_{k+1,\ell}$ zirkulär sind und das aus den Punkten entstehende Viereck konvex ist, genau dann ist das Doppelverhältnis negativ.

Folglich müssen wir nur überprüfen, ob das Doppelverhältnis von $U_{k,\ell}$, $U_{k+1,\ell}$, $U_{k,\ell+1}$, $U_{k+1,\ell+1}$ in Definition 3.1.1 einen reellen negativen Wert annimmt, dann liegen die vier Punkte auf einem Kreis. Gilt dies für alle Knoten eines Netzes, dann erhalten wir unser Kreismuster.

Wir haben also jetzt ein Netz deren Eckensterne zirkulär sind. Ohne weitere Einschränkungen können wir ad hoc wenig damit anfangen. Wir wollen von Kreismustern den Weg zu den Netzen mit eingeschriebenen Kegelschnitten aus Kapitel 2 finden. Das

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

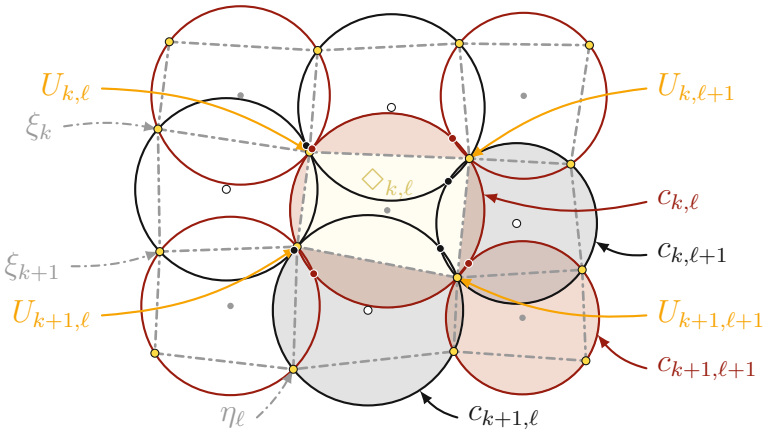


Abbildung 3.1: *Visualisierung des Kreismusters aus Definition 3.1.1*

heißt alle Kanten eines Vierecks liegen tangential zu den Kreisen. Allerdings können sich bei Definition 3.1.1 die Kreise »ungünstig« überlappen, siehe schwarze und rote Schnittpunkte der Kreise in Abbildung 3.1.

Eigentlich wollen wir orthogonale Kreismuster betrachten. Aber wie sieht Orthogonalität in $\mathbb{CP}^1$ überhaupt aus? Dies beantwortet uns [RG11, Thm 18.6, 18.7] mit Satz 3.1.4, wo wir allerdings zuvor noch einige Sachverhalte erklären müssen.

Zuerst identifizieren wir den $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$, wie in [S97] und [BHR24]. Wir betrachten ein endliches Gitter Σ_z bestehend aus sogenannten Zellkomplexen. Seine Eckensterne seien in $\mathcal{V}(\Sigma_z)$ und bezeichnet mit $U_{k,\ell} = a_{k,\ell} + \mathtt{i}b_{k,\ell}$ für $\mathtt{i}^2 = -1$, $a_{k,\ell}, b_{k,\ell} \in \mathbb{R}$ und endlich viele $(k,\ell) \in K \times L \subset \mathbb{Z}^2$. Die Kante zwischen zwei Knoten $U_{k,\ell}$ und $U_{k+1,\ell}$ wird durch das Paar $[U_{k,\ell}, U_{k+1,\ell}]$ beschrieben. Die Facetten seien konvexe Punktmengen

$$\diamond_{k,\ell} = \{U_{k,\ell}, U_{k,\ell+1}, U_{k+1,\ell+1}, U_{k+1,\ell} \ : \ (1.9) \text{ gilt für diese Punkte}\}\,.$$

Seien $\xi_k := [U_{k,0}, U_{k,1}] \dots [U_{k,|L|-1}, U_{k,|L|}]$ und $\eta_\ell := [U_{0,\ell}, U_{1,\ell}] \dots [U_{|K|-1,\ell}, U_{|K|,\ell}]$ die »Polygonzüge«. Da wir, wie angekündigt, die Netze nicht mehr via Polygonzüge betrachten werden, schenken wir diesen im weiteren Verlauf keine Aufmerksamkeit mehr. Unsere Netze sind jetzt allein durch ihre Knotenmenge $\mathcal{V}(\Sigma_z)$ auf dem Grundgerüst Σ_z definiert.

Kommen wir also jetzt im ersten Schritt zu der Definition von Orthogonalität von Geraden, welche in Abbildung 3.2 einzusehen sind.

Satz 3.1.4. Die Geraden $[U_{k,\ell}, M_{c_{k,\ell}}]$ und $[U_{k,\ell}, M_{c_{k+1,\ell}}]$ sind orthogonal aufeinander genau dann, wenn $DV([U_{k,\ell}, M_{c_{k,\ell}}], [U_{k,\ell}, M_{c_{k+1,\ell}}], [U_{k,\ell}, \mathtt{I}], [U_{k,\ell}, \bar{\mathtt{I}}]) = -1$ gilt. Das heißt die Punktepaare $([U_{k,\ell}, M_{c_{k,\ell}}], [U_{k,\ell}, M_{c_{k+1,\ell}}])$ und $([U_{k,\ell}, \mathtt{I}], [U_{k,\ell}, \bar{\mathtt{I}}])$ sind in **harmonischer Lage**.

Äquivalent dazu gilt: Zwei Geraden g und h stehen genau dann orthogonal aufeinander, wenn die Schnittpunkte mit der Ferngerade $g \times \omega$ und $h \times \omega$ in harmonischer Lage mit $\mathtt{I}$ und $\bar{\mathtt{I}}$ sind.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

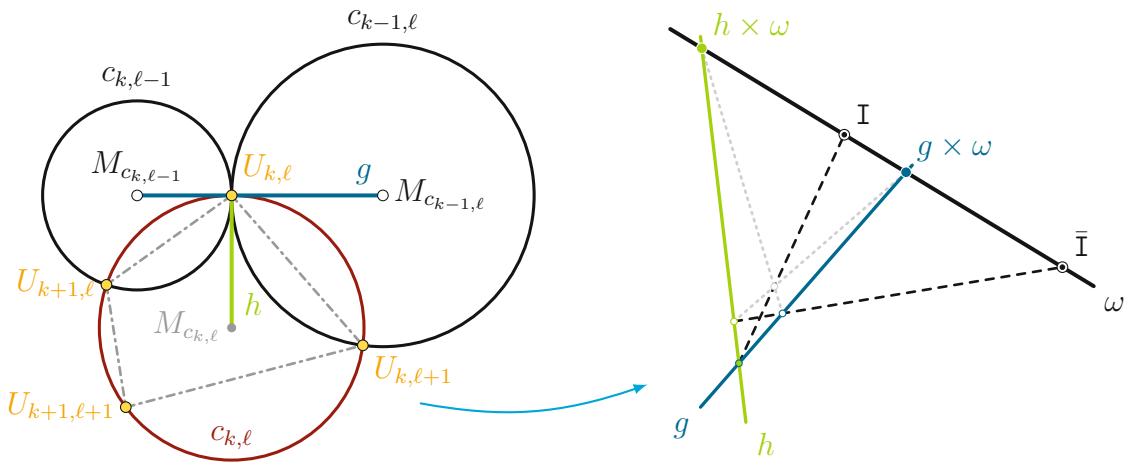


Abbildung 3.2: *Orthogonalität von Geraden inklusive deren berührende Kreise (links) und die dazugehörige projektive Interpretation der Orthogonalität mittels harmonischer Lage (rechts)*

Das Doppelverhältnis aus Satz 3.1.4 lässt sich berechnen mittels

$$\begin{aligned} DV([U_{k,\ell}, M_{c_{k,\ell}}],[U_{k,\ell}, M_{c_{k+1,\ell}}], [U_{k,\ell}, \mathtt{I}], [U_{k,\ell}, \bar{\mathtt{I}}]) &= DV_{U_{k,\ell}}(M_{c_{k,\ell}}, M_{c_{k+1,\ell}}, \mathtt{I}, \bar{\mathtt{I}}) = \\ &= \frac{\det(U_{k,\ell}, M_{c_{k,\ell}}, \mathtt{I}) \det(U_{k,\ell}, M_{c_{k+1,\ell}}, \bar{\mathtt{I}})}{\det(U_{k,\ell}, M_{c_{k+1,\ell}}, \mathtt{I}) \det(U_{k,\ell}, M_{c_{k,\ell}}, \bar{\mathtt{I}})} \end{aligned} \tag{3.2}$$

für $U_{k,\ell}$ betrachtet in $\mathbb{P}^2$ mit $(1, a_{k,\ell}, b_{k,\ell})$. Demnach stehen Kreise **orthogonal** aufeinander, wenn in Definition 3.1.4 der Punkt $U_{k,\ell}$ den Berührpunkt dreier Kreise und $M_{c_{k,\ell}}$ und $M_{c_{k,\ell-1}}$ die Mittelpunkte der anderen Kreise darstellt. Kreise, die orthogonal aufeinander stehen, ermöglichen uns ein Netz darüber zu legen, welches diese als (berührende) eingeschriebene Kreise enthält. Erst dann wollen wir diese Kreismuster als Kreisnetze bezeichnen. Dies führt uns auf folgende Definition, siehe insbesondere auch [BHR24, Def. 1] und [S97, Kap. 2].

Definition 3.1.5. Sei G ein Teilgraph von Σ_z. Wir nehmen an, dass für jeden Knoten $U_{k,\ell} \in \mathcal{V}(G)$ ein orientierter Kreis $c_{k,\ell}$ auf $\mathbb{S}^2$ existiert. Dann heißt die Menge von orientierten Kreisen $\mathcal{C} := \{c_{k,\ell} \ : \ U_{k,\ell} \in \mathcal{V}(G), (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2\}$ **orthogonales Kreismuster** von G in $\hat{\mathbb{C}}$, wenn folgendes gilt:

(*a*) Sind $U_{k,\ell}$ und $U_{k,\ell+1}$ Nachbarn in G, dann schneiden sich die dazugehörigen Kreise $c_{k,\ell}$ und $c_{k,\ell+1}$ orthogonal (analog für den Nachbarn $U_{k+1,\ell}$).

(*b*) Seien $U_{k,\ell+1}$ und $U_{k+1,\ell}$ Nachbarn von $U_{k,\ell}$ in G und gehören diese zur selben Facette $\diamond_{k,\ell}$, dann sind die Kreise $c_{k,\ell+1}$ und $c_{k+1,\ell}$ tangential.

(*c*) Die Orientierung von $c_{k,\ell}$ ist für positiven Radius dieselbe, wie das Triple $((c_{k,\ell} \cap c_{k+1,\ell}) \backslash c_{k,\ell+1}, c_{k+1,\ell} \cap c_{k,\ell+1}, (c_{k,\ell} \cap c_{k,\ell+1}) \backslash c_{k+1,\ell}) = (U_{k+1,\ell}, U_{k+1,\ell+1}, U_{k,\ell+1})$, wenn die Nachbarschaftsbeziehungen aus (*b*) gelten.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

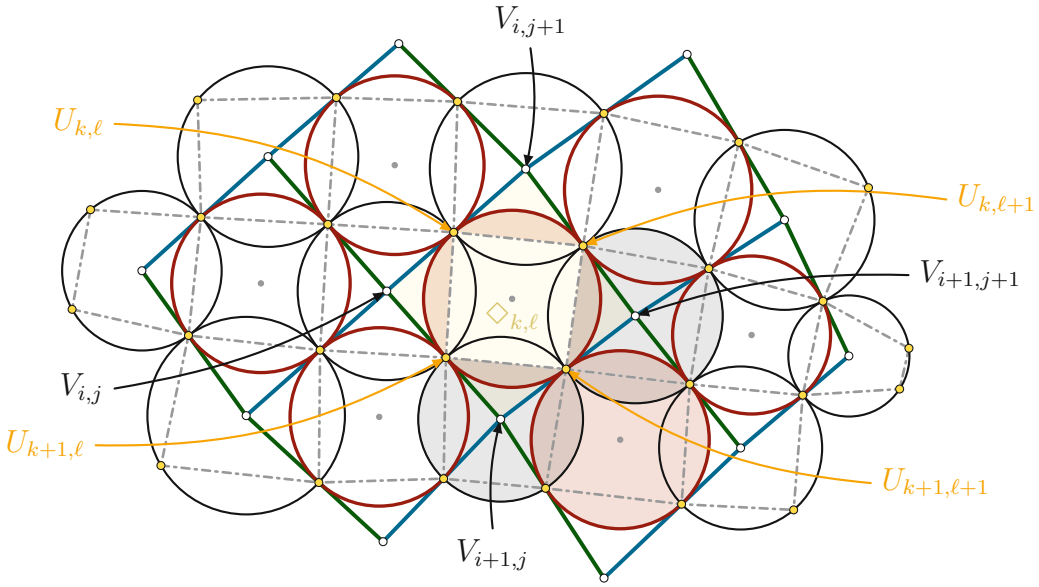


Abbildung 3.3: *Orthogonales Kreisnetz auf (grau strichliertem) Graph G mit dazugehörigen (gelben) Knoten von $\mathcal{V}(G)$, (roten und schwarzen) Kreisen und darüber gelegtes (blau-grüne) Netz N mit berührenden eingeschriebenen (roten) Kreisen, wobei hier die Facetten $\diamond_{k,\ell}$ und $\diamond_{i,j}$ übereinander liegen*

Demnach besteht ein orthogonales Kreismuster $\mathcal{C}$ aus zwei Kreisfamilien: Ein Kreis einer Kreisfamilie berührt ihre Nachbarn in genau einem Punkt und die andere Kreisfamilie stellt die übrigen Kreise dar (und umgekehrt). Färben wir eine Kreisfamilie in Schwarz ein, $\mathcal{C}_\bullet := \left\{c_{k,\ell} \ : \ U_{k,\ell} \in \mathcal{V}(G), (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2_{\text{ungerade}}\right\}$, und die andere in Weiß, $\mathcal{C}_\circ := \left\{c_{k,\ell} \ : \ U_{k,\ell} \in \mathcal{V}(G), (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2_{\text{gerade}}\right\}$ (wie die schwarzen und roten Kreise in Abbildung 3.3), dann bilden jeweils $\mathcal{C}_\circ$ und $\mathcal{C}_\bullet$ sogenannte **Kreispackungen**.

Die Mittelpunkte der Kreise von $\mathcal{C}_\bullet$ sind $V_{i,j}$ und definieren die Eckensterne des Netzes $N_\circ$ mit eingeschriebenen Kreisen $\mathcal{C}_\circ$ (und vice versa), siehe Abbildung 3.3. Dort sind die Kreisfamilien in Schwarz für $\mathcal{C}_\bullet$ und in Rot für $\mathcal{C}_\circ$ eingezeichnet. Darüber haben wir schon ein Netz gelegt, welches $\mathcal{C}_\circ$ als eingeschriebene Kegelschnitte enthält (wir hätten natürlich auch $\mathcal{C}_\bullet$ mit einem Netz belegen können). Diesen Umstand fassen wir ausführlich in folgender Definition zusammen.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Definition 3.1.6. Es gelten die Voraussetzungen von Definition 3.1.5. Ein **Netz mit berührenden eingeschriebenen Kreisen**, kurz berührendes Kreisnetz $N_\circ$, sei auf $I \times J \subset \mathbb{Z}^2$ in $\mathbb{CP}^2$ definiert wie folgt:

1. Alle Kreise $c_{k,\ell}$ mit $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2_{\text{gerade}}$ von $\mathcal{C}$, also $\mathcal{C}_\circ = \{\mathscr{Q}_{i,j} \ : \ (i,j) \in I \times J\}$, entsprechen den berührenden eingeschriebenen Kreisen in den »übereinanderliegenden« Facetten $\diamond_{i,j}$ und $\diamond_{k,\ell}$ für $(i,j) \in I \times J$ und $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2_{\text{gerade}}$.

2. Die Mittelpunkte aller Kreise $c_{k,\ell}$ für $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2_{\text{ungerade}}$, also von $\mathcal{C}_\bullet$, entsprechen $\mathcal{V}(N_\circ)$ der Menge aller Eckensternen von $N_\circ$. Für die Facette $\diamond_{i,j}$ gilt also

$$\begin{aligned}
\text{Mittelpunkt von } c_{k,\ell-1} &= V_{i,j},\\
\text{Mittelpunkt von } c_{k+1,\ell} &= V_{i+1,j},\\
\text{Mittelpunkt von } c_{k-1,\ell} &= V_{i,j+1},\\
\text{Mittelpunkt von } c_{k,\ell+1} &= V_{i+1,j+1}.
\end{aligned}$$

3. Die Knoten von G sind die Berührpunkte der Kreise auf den dazugehörigen Kanten, das heißt

$$\begin{aligned}
U_{k,\ell} &= P^{i}_{j,j+1},\\
U_{k,\ell+1} &= P^{i,i+1}_{j+1},\\
U_{k+1,\ell} &= P^{i,i+1}_{j},\\
U_{k+1,\ell+1} &= P^{i+1}_{j+1}.
\end{aligned}$$

4. Die Kanten von $N_\circ$ sind die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte benachbarter Kreise in $\mathcal{C}_\bullet$ (die Kreise sind benachbart, wenn (a) aus Definition 3.1.5 gilt).

Grafisch dargestellt ist diese Situation in Abbildung 3.3.

Die Abbildung 3.3 motiviert uns folgende Definitionen und Notationen einzuführen, um den Überblick zu bewahren:

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Definition 3.1.7. Als **Knotenpatch** für alle $c_{k,\ell} \in \mathcal{C}$ für $(k,\ell) \in K \times L$

$$\vartheta_{U_{s,t}} := \bigcup_{k,\ell \,:\, U_{s,t} \in c_{k,\ell}} c_{k,\ell}$$

bezeichnen wir alle Kreise, die den Punkt $U_{s,t}$ enthalten (visualisiert in Abbildung 3.3 durch die eingefärbten Kreise für Knotenpatch $\vartheta_{U_{k+1,\ell+1}}$).

Ein **Kreispatch**

$$\vartheta_{c_{s,t}} := \bigcup_{k,\ell \,:\, c_{a,b} \cap c_{k,\ell} \neq \emptyset} c_{k,\ell}$$

beinhaltet alle Kreise, die den Kreis $c_{s,t}$ berühren (alle abgebildeten Kreise in Abbildung 3.1 bilden ein Kreispatch für den Kreis $c_{k,\ell}$).

Beispiel 3.1.8. *Anders als am Anfang wollen wir ein orthogonales Kreismuster erstellen, wobei wir hier nicht mit einem Netz starten, sondern mit einem Kreis. Wir starten mit vier Punkten deren Doppelverhältnis negativ und reell ist. Gegeben seien die Knoten für festgehaltene k und ℓ*

$$\begin{aligned} U_{k,\ell} &= 2 + 3.75\mathtt{i} \\ U_{k,\ell+1} &= 3.5 + 3.75\mathtt{i} \\ U_{k+1,\ell+1} &= 3.5 + 2\mathtt{i} \\ U_{k+1,\ell} &= 2 + 2\mathtt{i} \end{aligned}$$

mit Doppelverhältnis $DV(U_{k,\ell}, U_{k,\ell+1}, U_{k+1,\ell+1}, U_{k+1,\ell}) = -0.734694$. Dann finden wir einen Kegelschnitt $\mathcal{Q}_{k,\ell}$, der durch diese vier Punkte und durch $\mathtt{I}$ und $\bar{\mathtt{I}}$ geht, welcher in $\mathbb{P}^2$ gegeben sei durch[1]

$$A_{Q_{k,\ell}} = \begin{pmatrix} -14.5 & 2.75 & 2.85 \\ 2.75 & -1 & 0 \\ 2.85 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und Mittelpunkt $M_{k,\ell} = 3.5 + 2.5\mathtt{i}$. Um einen orthogonalen Kreis an $U_{k,\ell}$ anzulegen müssen wir

$$DV([U_{k,\ell}, M_{c_o}], [U_{k,\ell}, M_{c_{k,\ell}}], [U_{k,\ell}, \mathtt{I}], [U_{k,\ell}, \bar{\mathtt{I}}]) \overset{!}{=} -1$$

nach dem unbekannten Mittelpunkt $M_{c_o} = (a_o + \mathtt{i}b_o)$ auflösen. Damit wir nun (3.2) anwenden können, identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und schieben die Betrachtungen in den $\mathbb{P}^2$. Demnach lösen wir

$$DV_{U_{k,\ell}}(M_{c_{k,\ell}}, M_{c_o}, \mathtt{I}, \bar{\mathtt{I}}) \overset{!}{=} -1 \quad \Longleftrightarrow \quad b_o = 6.08\dot{3} - 1.1\dot{6}a_o. \tag{3.3}$$

[1] Eigentlich sind $\mathtt{I}$ und $\bar{\mathtt{I}}$ keine Punkte des $\mathbb{P}^2$, daher müssten wir sie formal als Punkte im $\mathbb{CP}^2$ betrachten, wo wir auch die übrigen Rechnungen durchführen. Demnach gehen wir $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2 \to \mathbb{CP}^2$ vor, um die Doppelverhältnisse und Distanzen entsprechend berechnen zu können.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Dieser orthogonale Kreis muss per Definition auch durch $U_{k,\ell+1}$ *gehen, also berechnen wir auch hier sein Doppelverhältnis* $DV_{U_{k,\ell+1}}(M_{c_{k,\ell}}, M_{c_o}, \mathtt{I}, \bar{\mathtt{I}}) \overset{!}{=} -1$ *und setzen es mit* (3.3) *gleich. Wir erhalten*

$$6.08\dot{3} - 1.1\dot{6}a_o = b_o = 6.75 - 0.857143a_o \quad \Longleftrightarrow \quad a_o = 2.75,$$

somit ist der Mittelpunkt unseres orthogonalen Kreis $c_o = c_{k-1,\ell}$ *an* $U_{k,\ell}$ *und* $U_{k,\ell+1}$ *gegeben durch* $M_{c_o} = 2.75 + 4.39286\mathtt{i}$. *Der einfachste Weg einen Kreis zu zeichnen ist im* $\mathbb{R}^2$ *bzw. in* $\mathbb{C}$ *durch seinen Radius. Daher berechnen wir die Distanz zwischen Mittelpunkt und* $U_{k,\ell}$ *in* $\mathbb{CP}^2$, *das heißt wir verschieben* $M_{c_o} = (1, 2.75, 4.39286)^\top$ *und* $U_{k,\ell} = (1, 2, 3.75)^\top$. *Als Referenzlänge für* (1.6) *wählen wir* $A := (1, 1, 1)$ *und* $B := (1, 1, 2)$, *dann gilt* $|A, B| = |(0, 0, 1)^\top| = 1$ *und*

$$\det(A, \mathtt{I}, \bar{\mathtt{I}}) = \det(B, \mathtt{I}, \bar{\mathtt{I}}) = \det(M_{c_o}, \mathtt{I}, \bar{\mathtt{I}}) = \det(U_{k,\ell}, \mathtt{I}, \bar{\mathtt{I}}) = -2\mathtt{i}$$
$$\det(A, B, \mathtt{I}) \det(A, B, \bar{\mathtt{I}}) = (-1)(-1) = 1.$$

Das bedeutet, dass in (1.6) *sich die Berechnung auf*

$$r_{c_o} = |M_{c_o}, U_{k,\ell}| = \sqrt{\det(U_{k,\ell}, M_{c_o}, \mathtt{I}) \det(U_{k,\ell}, M_{c_o}, \bar{\mathtt{I}})} = 0.98781$$

reduziert. Damit haben wir alle notwendigen Informationen, um in $\mathbb{R}^2$ *einen Kreis zu zeichnen.*

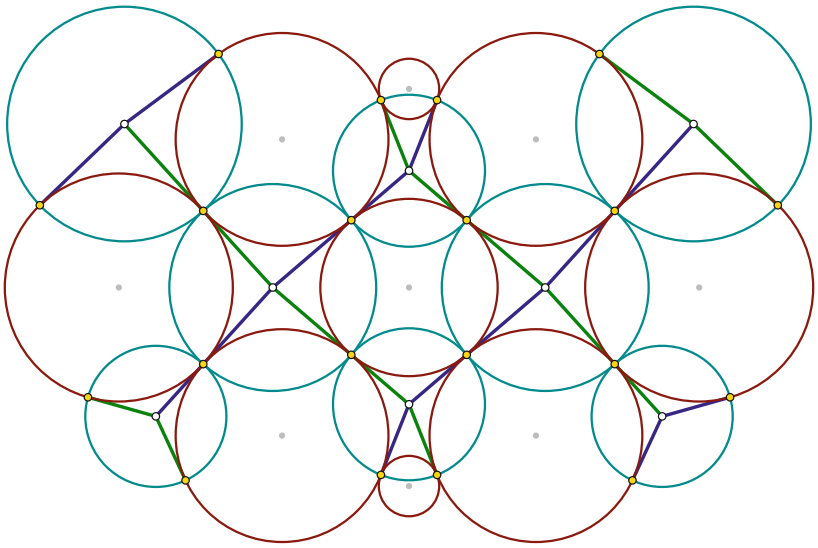


Abbildung 3.4: *Orthogonales Kreismuster aus Beispiel 3.1.8 mit Startkreis in der Mitte*

Als Nächstes wollen wir den tangentialen Kreis c_t *zu* $c_{k,\ell}$ *mit Berührpunkt* $U_{k,\ell}$ *finden. Hierfür berechnen wir das Doppelverhältnis mit*

$$DV_{U_{k,\ell}}(M_{c_{k,\ell}}, M_{c_t}, \mathtt{I}_\perp, \bar{\mathtt{I}}_\perp) \overset{!}{=} -1 \quad \Longleftrightarrow \quad b_t = 2.03571 + 0.857143a_t$$

und wählen $a = 1.1$, *dann erhalten wir als Mittelpunkt* $M_{c_t} = a_t + \mathtt{i}b_t = 1.1 + 4.8\mathtt{i}$. *Auch hier können wir den Radius berechnen und erhalten*

$$r_{c_t} = |M_{c_t}, U_{k,\ell}| = 1.38293$$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

als Radius für unseren tangential liegenden Kreis $c_t = c_{k-1,\ell-1}$. Führen wir dies auch für die anderen Kreise so weiter, dann erhalten wir beispielsweise das Kreisnetz aus Abbildung 3.4. ◇

Mit diesem Beispiel beenden wir das Kapitel und schauen uns im Nächsten an, wie wir so ein Kreisnetz noch herleiten könnten.

3.2 Von β-vielen Blütenblättern zu Kreisnetzen

Im vorigen Kapitel haben wir uns schon mit einer noch eher eingeschränkten Version von Kreispackungen beschäftigt. Wir haben nur Netze mit viereckigen Facetten zugelassen, wodurch jedes Kreispatch nur (exklusive seines erzeugenden Kreises) vier berührende Kreise von jeder Kreisfamilie enthält. In diesem Abschnitt werden die Netze (in denen die Kreise als eingeschriebene Kegelschnitte liegen) nicht mehr via Polygonzüge generieren, sondern durch seine Eckensterne. Wir müssen uns außerdem nicht mehr auf vier Eckpunkte einer Facette beschränken. Somit könnten unsere Facetten beispielsweise Fünfecke, Sechsecke oder auch nur Dreiecke sein. Die Anzahl der Ecken für jede Facette bezeichnen wir von nun an mit $\beta \in \mathbb{N}$ für $\beta \geq 3$.

Nicht wie im vorigen Kapitel werden wir ein Grundgitter generieren und dann die Kreise an seine Ecken legen, sondern die Kreispackungen durch Aneinanderlegen der Kreise. Anschließend werden wir, ähnlich zu Definition 3.1.6, ein Netz N finden, welches diese Kreise als eingeschriebene Kegelschnitte enthält. Dieses Netz N soll β-viele Ecken pro Facette haben, das bedeutet, dass auch β-viele Kreise einen Kreis berühren. Da wir in Definition 3.1.7 noch von orthogonalen Kreismustern ausgegangen sind, führen wir eine nahezu gleichbedeutende Definition für Kreispackungen ein.

Definition 3.2.1. Der Kreis $c_{a,b}$ zusammen mit seinen berührenden Kreisen in einer Kreispackung wird **Blume** genannt und alle orthogonalen Kreise auf $c_{a,b}$ heißen **Blütenblätter**. In Abbildung 3.5 wären alle schwarzen Kreise Blütenblätter, die den roten Kreis berühren und bilden insgesamt eine Blume.

Kreispackungen können wir sowohl in $\mathbb{C}$ als auch auf der Riemannschen Sphäre $\mathbb{S}^2$ (oder der komplexen projektiven Gerade) betrachten. Um von der einen zur anderen Kreispackung zu gelangen (wir erinnern uns, an Kapitel 1.3, wo wir gelernt haben, dass auch Kreise mittels Möbiustransformation stets auf Kreise abgebildet werden) verwenden wir die stereographische Projektion, vgl. [RG11, Kap. 17.7] und [S05, Kap. 3.2].

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Definition 3.2.2. Die **stereographische Projektion** σ_N ist definiert durch

$$\sigma_N : \begin{cases} \mathbb{S}^2 & \to & \hat{\mathbb{C}} \\ (s_0, s_1, s_2)^\top & \mapsto & a + \mathtt{i}b = \frac{s_0}{1+s_2} + \mathtt{i}\frac{s_1}{1+s_2} \\ N & \mapsto & \infty \end{cases}$$

mit Nordpol $N = (0, 0, 1)$ und bildet die Punkte von der Riemannschen Sphäre auf die komplexen Zahlen inklusive Unendlich ab. Die Umkehrabbildung ist

$$\sigma_N^{-1} : \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} & \to & \mathbb{S}^2 \\ a + \mathtt{i}b & \mapsto & (s_0, s_1, s_2)^\top = \frac{1}{1+a^2+b^2}\left(2a, 2b, 1 - a^2 - b^2\right)^\top \\ \infty & \mapsto & N \end{cases} .$$

Wir können also jetzt von $\mathbb{S}^2$ nach $\mathbb{C}$ mit $\sigma : \mathbb{S}^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{C}$ und seiner Umkehrabbildung wechseln und wieder zurück. Insbesondere ist die stereographische Projektion winkeltreu und identifiziert Kreise in $\mathbb{C}$ mit Kreisen auf $\mathbb{S}^2$. Jetzt brauchen wir nur noch eine Kreispackung. Da wir diese nicht mehr via orthogonale Kreismuster definieren werden, müssen wir einen neuen Weg finden. Wir brauchen ein alternatives Konstrukt, wie uns [S05, Kap. 2.1, 5.1] aufzeigt. Für dessen Einführung starten wir zur Vollständigkeit mit der Definition zur Triangulierung, vgl. [S05, Def. 3.1].

Definition 3.2.3. Die **Triangulierung** $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_\tau\}$ einer glatten Fläche F ist eine endliche Zerlegung von F in geschlossene Dreiecke T_j für $j \in \{1, \ldots, \tau\}$, sodass

$$T_i \cap T_j = \begin{cases} \emptyset, \text{also schneiden sich nicht,} \\ \text{berühren sich im selben Knoten,} \\ \text{haben eine gemeinsame Kante} \end{cases}$$

für $i \neq j$ und $\tau \in \mathbb{N}$ mit $\tau < \infty$ gilt.

Eine Kreispackung zeichnet sich allen voran durch Kreise und seine Nachbarschaftsbeziehungen (die benötigte tangentiale Eigenschaft) aus. Es stellt sich heraus, dass sich diese Kombinatorik von Kreispackungen abstrakt zu Triangulierungen umschreiben lassen. Das heißt, wir können wie folgt strukturieren

$$\begin{aligned} \text{Kreispackung} &\longleftrightarrow \text{abstrakte Struktur} \\ \text{Kreise} &\longleftrightarrow \text{Knoten} \\ \text{Tangenten zwischen zwei Kreise} &\longleftrightarrow \text{Kanten} \\ \text{Tripel} &\longleftrightarrow \text{Facetten} \end{aligned}$$

Wir nennen diese abstrakte Struktur auch **Komplex** $\mathcal{K}$, welche eine Triangulierung einer Fläche repräsentiert. Weiters können wir die Triangulierung in Zellennotation zerlegen, vgl. [BS04, Kap. 2] und [S97]. Eine 0-Zelle ist ein Knoten, eine 1-Zelle ist eine Kante und eine 2-Zelle ist eine Facette (im Fall der Triangulierung ein Dreieck).

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Unser Komplex $\mathcal{K}$ ist ein abstraktes kombinatorisches Objekt und besitzt weder eine Metrik noch eine Geometrie. Eine metrische Struktur ermöglicht uns die Distanz zwischen zwei Elementen zu erfassen. In unserem Fall soll die Metrik durch die Radien der Kreise gegeben sein. Sei $\mathcal{R}$ nun eine Menge von positiven reellen Zahlen, die stellvertretend für die **Menge aller Radien** der Kreise in einer Kreispackung stehen soll. Wir ordnen somit jedem Kreis (den Knoten des Komplex $\mathcal{K}$) seinen Radius (eine positive reelle Zahl) zu. Hingegen vernachlässigen wir den Mittelpunkt der Kreise. Die Metrik $d_{\mathcal{R}}$ sei definiert durch die kürzeste Distanz zwischen zwei Punkten in $\mathcal{K}$. Das bedeutet, wir können für den Kreis $c_{k,\ell}$ in einer Kreispackung folgende Identifizierung machen

$$\begin{aligned} \text{Kreispackung} &\longleftrightarrow \text{Komplex } \mathcal{K} \text{ mit } \mathcal{R} \\ \text{Kreis } c_{k,\ell} &\longleftrightarrow \text{Knoten } U_{k,\ell} \text{ in } \mathcal{K} \\ r_{k,\ell} = \text{Radius von Kreis } c_{k,\ell} &\longleftrightarrow r(U_{k,\ell}) \text{ Zahl in } \mathcal{R} \end{aligned}$$

Nun können wir Kreispackungen auch über Komplexe definieren, wie in [S05, Kap. 4].

Definition 3.2.4. Eine Menge von Kreisen $\mathcal{C} = \{\dots, c_{k,\ell}, c_{k,\ell+1}, \dots\}$ ist genau dann eine **Kreispackung** in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{S}^2$ mit Komplex $\mathcal{K}$, wenn folgendes gilt:

1. Ein Kreis $c_{k,\ell}$ in $\mathcal{C}$ wird einem Knoten $U_{k,\ell}$ von $\mathcal{K}$ zugeordnet.
2. Zwei Kreise $c_{k,\ell}$ und $c_{k,\ell+1}$ berühren sich in genau einem Punkt, wenn $[U_{k,\ell}, U_{k,\ell+1}]$ eine Kante in $\mathcal{K}$ ist.
3. Drei Kreise $c_{k,\ell}$, $c_{k,\ell+1}$ und $c_{k,\ell+2}$ bilden genau dann ein positiv orientiertes Tripel, wenn $U_{k,\ell}$, $U_{k,\ell+1}$ und $U_{k,\ell+2}$ eine positiv orientierte Facette in $\mathcal{K}$ ist.

Die Menge $\mathcal{R}$ darf keine beliebigen Zahlen enthalten, da sonst womöglich die Tangentialeigenschaft zwischen den Kreisen in der Kreispackung nicht mehr gegeben ist. Beginnen wir beispielsweise mit einem Startknoten $U_{0,0}$ in $\mathcal{K}$, welcher den Radius $r_{0,0}$ habe. Unseren Startknoten verbinden wir mit $U_{0,1}$ und $U_{0,2}$. Führen wir dies β mal durch, dann erhalten wir eine kombinatorische Blume an $U_{0,0}$ bestehend aus β-vielen Blumenblättern. Passend zu jedem Knoten gibt es die Zahlen $r_{0,0}, r_{0,1}, \dots, r_{0,\beta}$. Wenn wir diesen entstandenen Komplex $\mathcal{K}$ mit einer Kreispackung und dazugehörigen Kreisen $c_{0,0}, \dots, c_{0,\beta}$ vergleichen, dann müssen all diese Radien so gewählt sein, dass sie tangential zu seinem Nachbarn sind. Besonders der Radius des letzten Kreises $r_{0,\beta}$ muss entsprechend gewählt werden, um tangential zu $c_{0,\beta-1}$, $c_{0,0}$ und $c_{0,1}$ zu sein.

Wir suchen also eine Bedingung, die uns garantiert, dass alle Kreise tangential aneinander liegen. Angenommen wir haben drei Radien gefunden, die die drei Kreise $c_{0,0}, c_{0,1}, c_{0,2}$ tangential aneinander stehen lassen. Verbinden wir die Mittelpunkte der benachbarten Kreise mit Geraden von minimaler Distanz (sogenannte Geodätische), so erhalten wir ein Dreieck $T = T_{0,1,2}$, wie es in Abbildung 3.5 eingezeichnet ist. Die Ecken des Dreiecks sind die Mittelpunkte der Kreise.

Sei nun $\alpha_{0,0} = \alpha$ der Winkel von T beim Mittelpunkt von $c_{0,0}$. Dann liefert uns folgende Definition eine Antwort für die Wahl der korrekten Radien, siehe [S05, Def. 5.2].

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

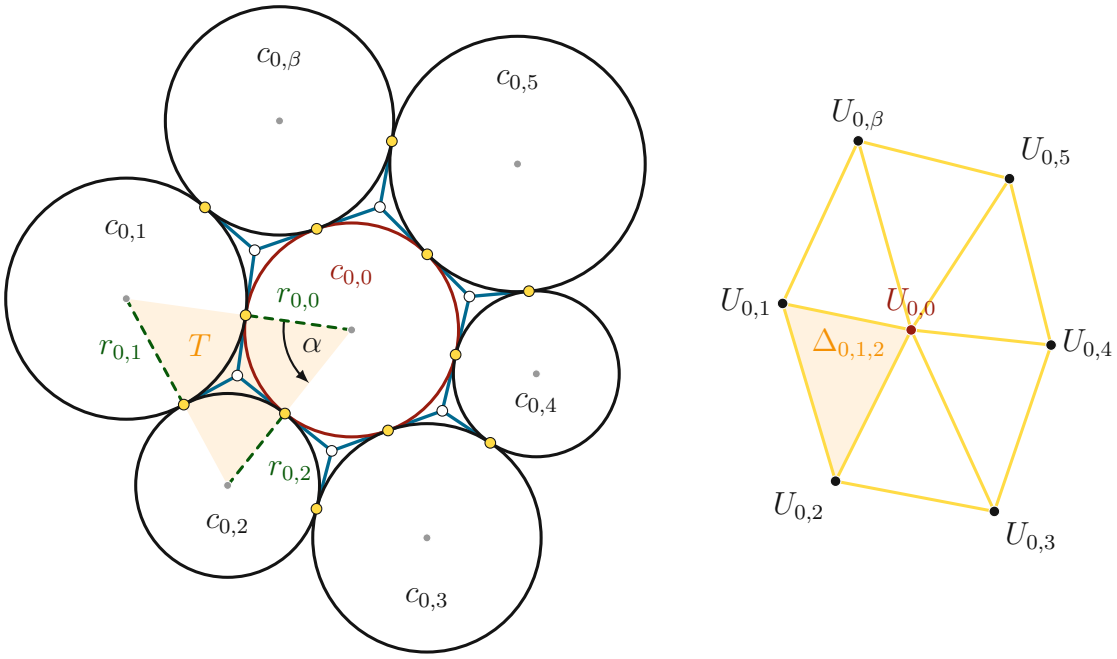


Abbildung 3.5: *Blume $c_{0,0}$ mit Blumenblätter $c_{0,1}, \ldots, c_{0,\beta}$, Winkel $\alpha := \alpha_{0,0}$ und Dreieck $T = T_{0,1,2}$ für $\beta = 6$ und seine kombinatorische Blume (rechts)*

Definition 3.2.5. Sei $\mathcal{R}$ die Menge von Radien für den Komplex $\mathcal{K}$. Sei $U_{k,0}$ ein innerer Knoten von $\mathcal{K}$ mit Nachbarn $U_{k,\ell}$ für $\ell \in \{1, \ldots \beta\}$ mit $\ell = \ell + \beta$. Zusammen bilden sie die kombinatorische Blume um $U_{k,0}$ und $U_{k,0}, U_{k,1}, U_{k,2}$ spannen das Dreieck $\Delta_{k,1,2}$ auf mit dazugehörigen Radien $r(U_{k,0}) = r_{k,0}, r(U_{k,1}) = r_{k,1}, r(U_{k,2}) = r_{k,2}$. Die **Winkelsummenabbildung**

$$\Theta_{\mathcal{R}} : \begin{cases} \mathcal{K} & \to & [0, \infty) \\ U_{k,0} & \mapsto & \sum_{\ell=1}^{\beta} \alpha_{k,0}(r(U_{k,0}), r(U_{k,\ell}), r(U_{k,\ell+1})) \end{cases}$$

bildet jeden Knoten in $\mathcal{K}$ auf seine Winkelsumme in der Facette, zu der dieser Knoten gehört, ab. Für den Dreieckswinkel $\alpha_{k,0}$ in $U_{k,0}$ gilt in $\mathbb{C}$

$$\alpha_{k,0}(r_{k,0}, r_{k,\ell}, r_{k,\ell+1}) = \arccos\left(\frac{(r_{k,0} + r_{k,\ell})^2 + (r_{k,0} + r_{k,\ell+1})^2 - (r_{k,\ell} + r_{k,\ell+1})^2}{2(r_{k,0} + r_{k,\ell})(r_{k,0} + r_{k,\ell+1})}\right)$$

und auf $\mathbb{S}^2$

$$\alpha_{0,k}(r_{k,0}, r_{k,\ell}, r_{k,\ell+1}) = \arccos\left(\frac{\cos(r_{k,\ell} + r_{k,\ell+1}) - \cos(r_{k,0} + r_{k,\ell})\cos(r_{k,0} + r_{k,\ell+1})}{\sin(r_{k,0} + r_{k,\ell})\sin(r_{k,0} + r_{k,\ell+1})}\right)$$

mit $r_{k,0} + r_{k,1} + r_{k,2} \leq \pi$.

Wir müssen also in einer kombinatorischen Blume bei $U_{0,0}$ mit β Blütenblättern für $k = 0$ genau β-viele Winkel berechnen, wie es in Abbildung 3.6 eingezeichnet ist. Welche Bedingung müssen nun die Radien erfüllen, dass wir schlussendlich eine Kreispackung wie in Definition 3.2.4 erhalten?

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Definition 3.2.6. Die Menge aller **eingepackten** Radien $\mathcal{R}$ für $\mathcal{K}$ hat die Eigenschaft, dass für jeden Knoten $U_{k,0}$ von $\mathcal{K}$ eine natürliche Zahl $N \geq 1$ existiert, sodass $\Theta_{\mathcal{R}} = 2\pi N$ gilt.

Diese Definitionen 3.2.6, zu finden in [S05, Def. 5.3], können wir jetzt nutzen, um eine Bedingung für die Kreispackung aufzustellen.

Satz 3.2.7. Sei $U_{k,\ell}$ ein innerer Knoten des Komplexes $\mathcal{K}(\mathcal{R})$, der eine kombinatorische Blume mit β Blütenblättern ist. Dann existiert eine dazugehörige geometrische Blume von Kreisen genau, wenn die Radien eingepackt sind.

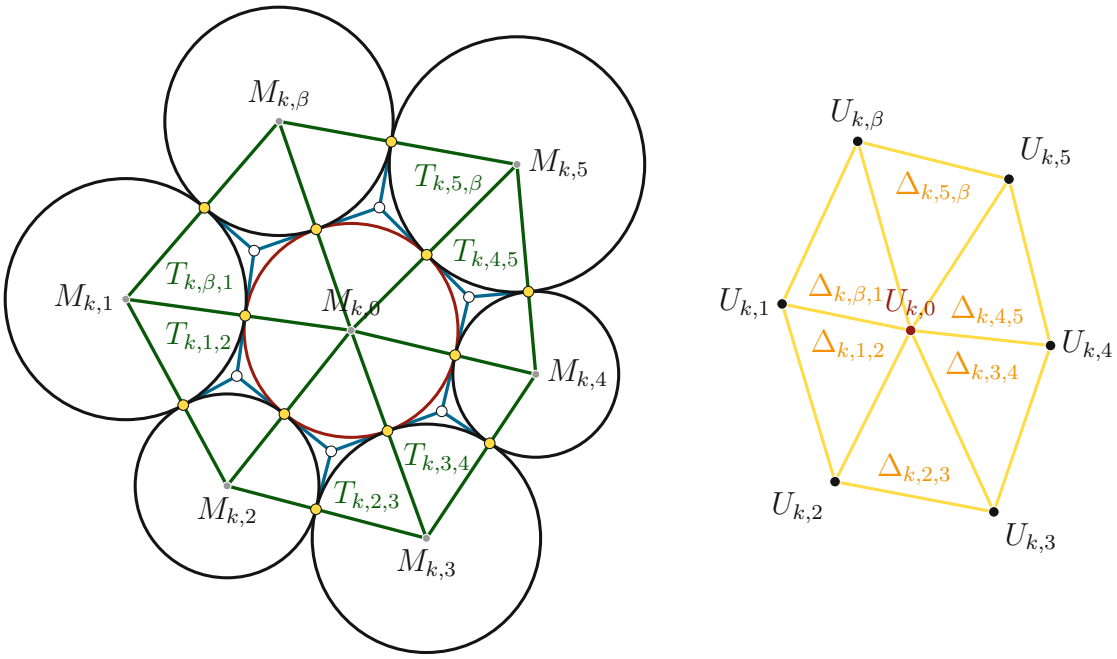


Abbildung 3.6: *Durch Verbinden der Mittelpunkte entsteht eine Triangulierung der Fläche auf der die Kreispackung liegt (links) und die dazugehörige kombinatorische Blume (rechts)*

Wir sehen in Abbildung 3.6, dass wir durch das Verbinden der Mittelpunkte der Kreise eine Triangulierung erzeugen. Dies funktioniert auch umgekehrt, wie folgender Satz zeigt, siehe [BS93, Thm. 1] und bewiesen in [T80, Cor. 13.6.2].

Satz 3.2.8 (Thurston's Coin-Graph Theorem).
Jeder Graph in $\mathbb{R}^2$ kann durch eine Menge von nicht überlappenden Kreisen dargestellt werden, sodass eine Kreispackung wie in Definition 3.2.4 entsteht. Dieser Graph wird auch als **Coin Graph** bezeichnet.

Betrachten wir nun eine Triangulierung $\mathcal{T}$ von $\mathbb{S}^2$, dann ist diese Kreispackung sogar eindeutig bis auf Möbiustransformationen, wie folgender wichtiger Satz sagt, zu finden in [BHS06, Thm 1], [B08, Thm 5.2], [T80, Cor. 13.6.2] und [BS04, Thm].

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Satz 3.2.9 (Koebe).
Jede Triangulierung einer Sphäre hat eine Kreispackung auf der Sphäre, sodass jeder Kreis zu einem Knoten eines Komplexes gehört und sich zwei Kreise genau dann berühren, wenn die entsprechenden Knoten benachbart sind. Diese Kreispackung ist eindeutig bis auf Möbiustransformationen auf der Sphäre.

Weiters können wir feststellen: Jede Triangulierung der Sphäre formt einen dreidimensionalen konvexen Polyeder. Wie in [T80, Cor. 13.6.3] können wir folgendes feststellen.

Korollar 3.2.10. Sei $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von $\mathbb{S}^2$.
Dann existiert ein konvexer Polyeder $\mathcal{P}$ in $\mathbb{R}^3$, welcher kombinatorisch äquivalent zu $\mathcal{T}$ ist, deren 1-Skelett[a] durch die Einheitssphäre umschrieben ist, das heißt, jede Kante von $\mathcal{T}$ ist tangential zur Einheitssphäre. Darüber hinaus ist der Polyeder eindeutig bis auf projektive Transformationen des $\mathbb{R}^3$, die die Einheitssphäre erhalten.

[a] Mit Skelett meinen wir den Graph, der durch die Kanten des Polyeders erzeugt wird.

Es gibt darüber hinaus eine zu $\mathcal{T}$ duale Zerlegung $\mathcal{T}^\star$, welche ebenfalls einem konvexen Polyeder im $\mathbb{R}^3$ entspricht, laut [T80]. Sein 1-Skelett wird von der Einheitssphäre umschrieben und der Schnitt $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}^\star$ ist genau das konvexe Polyeder $\mathcal{P}$ in Korollar 3.2.10. Alle drei Polyeder lassen sich vom $\mathbb{R}^3$ via stereographische Projektion σ in den $\mathbb{R}^2$ projizieren. Die Kanten von $\mathcal{T}^\star$ werden über σ auf die Tangenten der Kreise abgebildet. Die Knoten von $\mathcal{T}$ werden auf die Mittelpunkte der Kreise projiziert, wie in Abbildung 3.9 mit den Daten aus Beispiel 3.2.11 veranschaulicht wurde. Das Bild des 1-Skeletts von $\mathcal{T}$ ist die geometrische Einbettung in $\mathbb{R}^2$ des Komplexes der Kreispackung. Wir nutzen folgendes Beispiel zur Illustration.

Beispiel 3.2.11. *Betrachten wir eine Triangulierung $\mathcal{T}$ von $\mathbb{S}^2$, welche aus 12 Knoten, 30 Kanten und 20 Facetten (gleichseitige Dreiecke) besteht. Diese bildet ein konvexes Polygon, den Isokaeder. Jede Facette kann mit einem Kreis umschrieben werden und bilden eine Kreispackung auf der Sphäre mit dazugehörigem Komplex $\mathcal{K}_\bullet$ aus Abbildung 3.8, wie Satz 3.2.9 besagt.*

Weiters gibt es nach Korollar 3.2.10 auch eine duale Zerlegung $\mathcal{T}^\star$ von $\mathbb{S}^2$, welche aus 20 Knoten, 30 Kanten und 12 Facetten (regelmäßige Fünfecke) besteht. Auch dieser bildet einen konvexen Polyeder, den Dodekaeder, und wir können wieder die Facetten mit Kreisen umschreiben, etwas was wir erst in Satz 3.2.13 lernen werden, welche den dazugehörigen Komplex $\mathcal{K}_\bullet$ besitzt.

Das 1-Skelett beider Polyeder hüllt $\mathbb{S}^2$ ein, auf welcher genau diese eingeschriebenen Kreise der Komplexe $\mathcal{K}_\bullet$ und $\mathcal{K}_\bullet$ liegen. Wir können jetzt die Kreise von $\mathbb{S}^2$ auf die Ebene mittels stereographischer Projektion abbilden und erhalten erneut Kreispackungen, siehe Abbildung 3.8. Projizieren wir die Kanten und Knoten des Polyeders von $\mathcal{T}$ in die Ebene, so sind seine projizierten Kanten tangential zu den projizierten Kreisen

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

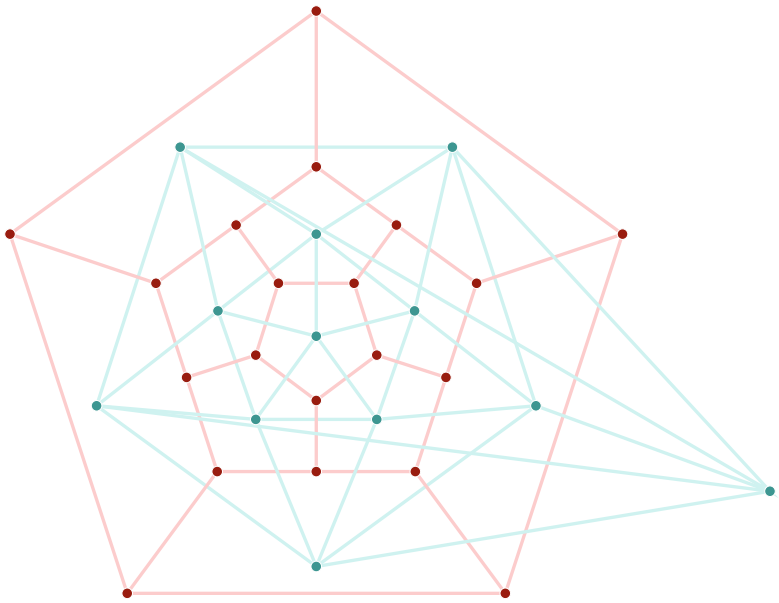


Abbildung 3.7: *Komplex $\mathcal{K}_\bullet$ mit orthogonalem Komplex $\mathcal{K}_\bullet$ zugehörig zu Kreispackungen auf $\mathbb{S}^2$ aus Abbildung 3.8*

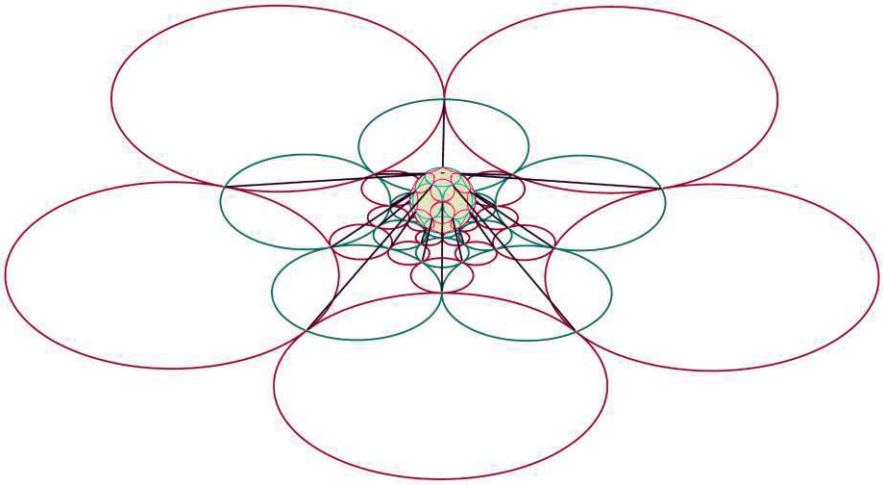


Abbildung 3.8: *(Hellrote) Kreispackung zu Komplex $\mathcal{K}_\bullet$ und (cyan) Kreispackung von Komplex $\mathcal{K}_\bullet$ auf (gelber) Sphäre $\mathbb{S}^2$ mit stereographischen Projektion in die Ebene projiziert, wo sie ebenfalls (dunkelrote und dunkelcyan) Kreispackungen bilden*

des Komplexes $\mathcal{K}_\bullet$ und die Knoten werden auf die Eckensterne des Netzes in der Ebene abgebildet. Ebenso können wir die Knoten des Polyeders $\mathcal{T}^\star$ in die Ebene projizieren, dann werden die Knoten auf die Mittelpunkte der projizierten Kreise von $\mathcal{K}_\bullet$ abgebildet. Umgekehrt gilt dies auch für den Komplex $\mathcal{K}_\bullet$, siehe Abbildung 3.9.

Weiters haben wir in `Microstation` *auch den Polyeder zu $\mathcal{T}$ inklusive der daraufliegenden Kreise und der Kreise seines Duales in Abbildung 3.10 visualisiert.* $\diamond$

Wie wir in dem Beispiel 3.2.11 gesehen haben, bilden die projizierten Kreispackungen in der Ebene ein Kreisnetz. Allerdings haben wir diese bis hierher nur für Vierecke

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

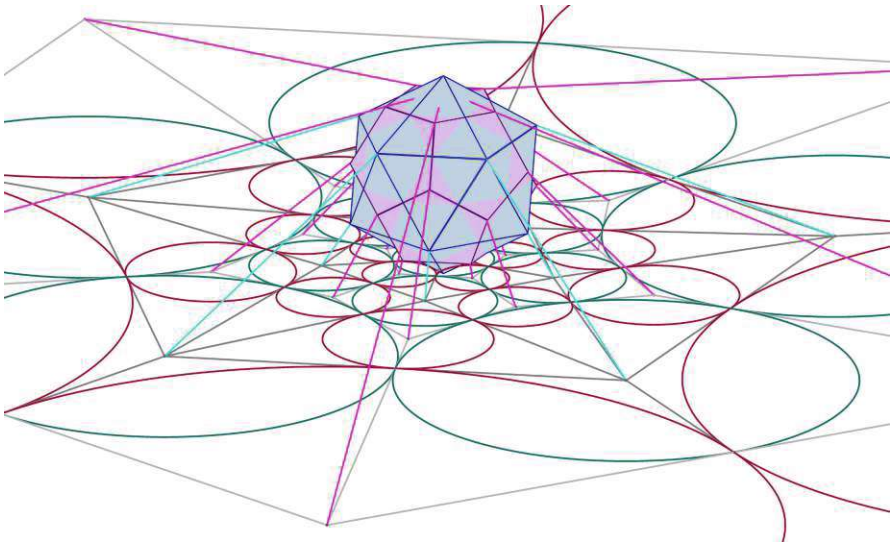


Abbildung 3.9: *(Blaue) Polyeder von $\mathcal{T}$ und dualer (rosa) Polyeder mit stereographischer Projektion in die Ebene auf die dazugehörigen (grauen und hellgrauen) Netze abgebildet*

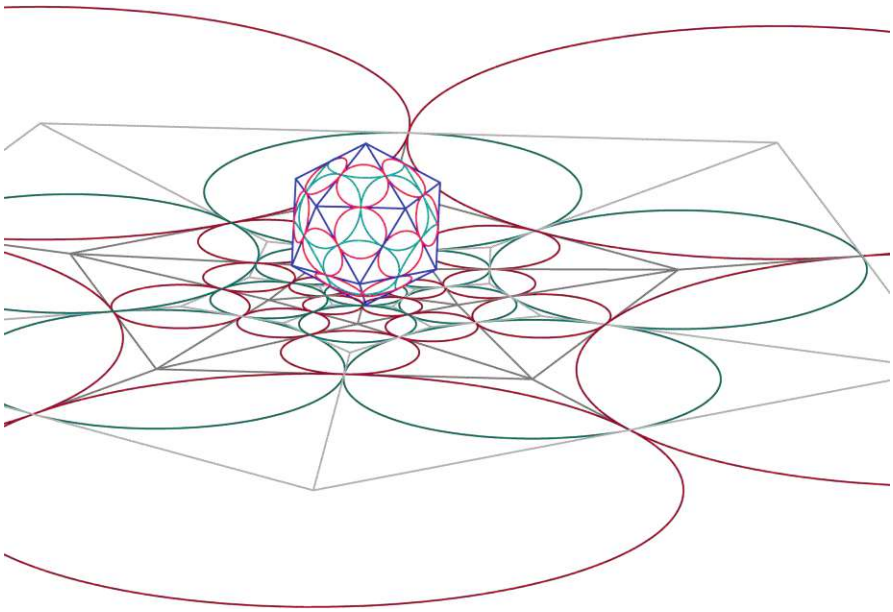


Abbildung 3.10: *Polyeder (Isokaeder) mit (roten) Kreisen eingeschrieben in die Facetten des Polyeders und (cyan) orthogonale Kreise inklusive der projizierten Kreise*

definiert, siehe Definition 3.1.6. Darüber hinaus haben wir auch Komplexe nur mit Triangulierung repräsentiert und nicht mit einer Zerlegung in Fünfecke. Wir wollen sowohl diese Definition, als auch den Satz 3.2.9 verallgemeinern, um deren Existenz nicht nur grafisch zu gewährleisten. Hierfür starten wir mit:

Die zellenförmige Zerlegung der Sphäre muss nicht unbedingt dreieckig sein. Wir können also statt der Triangulierung auch einen schlichten zusammenhängenden Graph betrachten, deren Facetten δ-viele Ecken hat für $\delta \geq 3$ und $\delta \in \mathbb{N}$. Dieser wird durch die stereographische Projektion auf Netze mit Facetten bestehend aus δ-viele Ecken in die Ebene abgebildet. In Kapitel 3.1 haben wir beispielsweise eine viereckige Zellen-Zerlegung be-

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

trachtet. Wir brauchen also eine allgemeinere Definition einer zellenförmigen Zerlegung, siehe [SR34, Kap. 28].

Definition 3.2.12. Ein **polyedrischer** Komplex ist ein Komplex für den gilt:

1. Jede Kante inzidiert mit zwei Knoten.
2. Jede Kante liegt auf einer oder zwei Facetten.
3. Es gibt keine isolierten Ecken und jede Facette hat δ-viele Ecken für $\delta \geq 3$ und $\delta \in \mathbb{N}$.
4. Zu jedem inzidenten Paar (bestehend aus einem Knoten und einer Facette) gibt es genau zwei Kanten des Komplexes, die mit Knoten und Facette inzident sind.

Mit dieser allgemeineren Form von Komplexen können wir Koebes Satz 3.2.9 verallgemeinern, siehe auch [BS93, Thm 6] und [BS04, Thm 1], und haben damit auch die Existenz vom Komplex $\mathcal{K}_{\bullet}$ in Beispiel 3.2.11 gewährleistet. Wir können also jetzt auch einen polyedrischen Komplex mit $\delta = 5$ ansehen, aber können weiterhin nur $\beta = 3$ wählen (so wie es bei $\mathcal{K}_{\bullet}$ der Fall war).

Es zeigt uns außerdem, dass es immer einen orthogonalen Kreis durch drei berührende Kreise gibt. Diese orthogonalen Kreise bilden zusammen ebenfalls eine Kreispackung. Diese haben wir auch in Beispiel 3.2.11 schon gesehen, nämlich die Kreispackung zum Komplex $\mathcal{K}_{\bullet}$. Zur Veranschaulichung verweisen wir auf Abbildung 3.11.

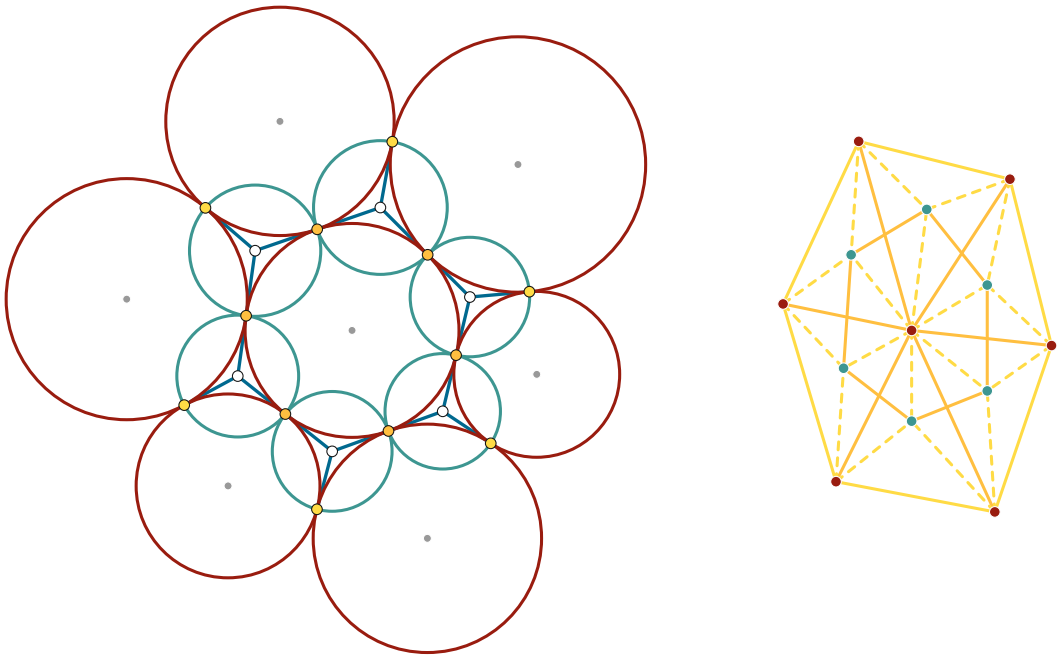


Abbildung 3.11: *(Rote) Kreispackung mit (dunkelcyan) orthogonalen Kreisen (links) und seine kombinatorische Blume mit (gelben) strichlierten Linien als Kennzeichnung der Orthogonalität (rechts)*

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Satz 3.2.13. Für jede polyedrische zelluläre Zerlegung der Sphäre existiert ein Kreismuster auf der Sphäre für das gilt:

(*i*) Jede Facette und jeder Knoten wird durch einen Kreis repräsentiert, genannt Facettenkreis und Knotenkreis.

(*ii*) Die Knotenkreise bilden eine Kreispackung, wo sich zwei Kreise genau dann berühren, wenn die dazugehörigen Knoten benachbart sind.

(*iii*) Die Facettenkreise erzeugen eine Kreispackung mit berührenden Kreisen genau dann, wenn die dazugehörigen Facetten benachbart sind.

(*iv*) Für jede Kante existiert ein Paar von berührenden Knotenkreisen und ein Paar von berührenden Facettenkreisen. Diese Paare berühren sich im selben Punkt und schneiden sich orthogonal.

Diese Kreispackungen sind eindeutig bis auf Möbiustransformationen.

Dieser Satz ist bewiesen in [BS93, Kap. 2] und liefert uns die Existenz von orthogonalen Kreismustern auf der Sphäre. Weiters können wir feststellen: Jede polyedrische Zerlegung der Sphäre formt einen dreidimensionalen Polyeder. Dieser kann nach [BHS06, Thm. 3] folgendermaßen erzeugt werden: Verbinden wir die Mittelpunkte der Kreispackung $\mathcal{C}^s$ auf $\mathbb{S}^2$ und schieben die entstandene Kante zum Berührpunkt der dazugehörigen Kreise tangential zur $\mathbb{S}^2$, dann erhalten wir durch geeignetes Verbinden (und Verlängern) der Kanten einen konvexen Polyeder. Die orthogonalen Kreise $\mathcal{C}^s_\perp$ sind eingeschrieben in den Facetten dieses Polyeders. Dieser Polyeder heißt **Koebe Polyeder** und führt uns auf folgenden Satz, welcher die Verallgemeinerung von Satz 3.2.9 ist.

Satz 3.2.14. Jede polyedrische zelluläre Zerlegung der Sphäre kann durch ein Polyeder dargestellt werden, deren Kanten tangential zur Sphäre sind. Diese Umsetzung ist eindeutig bis auf projektive Transformationen, die die Sphäre erhalten.
Gleichzeitig gibt es ein duales Polyeder, sodass die dazugehörigen Kanten des dualen Polyeders und des originalen Polyeders die Sphäre in denselben Punkten berühren und die Polyeder schneiden sich orthogonal.

Der Beweis dazu ist zu finden in [BS93, Thm. 6]. Damit haben wir die Eigenschaften von Beispiel 3.2.11 auch mathematisch gefestigt. Wir sehen nun, dass wir Kreisnetze auch via Polyeder definieren könnten.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Definition 3.2.15. Sei $\mathcal{T}$ eine polyedrische zelluläre Zerlegung der Sphäre mit δ-vielen Ecken pro Zelle für $\delta \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und bildet einen Polyeder $\mathcal{P}$. Weiters gibt es einen dualen Polyeder $\mathcal{P}^\star$, welcher wie in Satz 3.2.14 definiert sei. Dann projiziert die stereographische Projektion die Ecken und Kanten auf ein Netz N in der Ebene, welches folgende Bedingungen erfüllt:

1. Die Kanten von N sind die projizierten Kanten von $\mathcal{P}$ in die Ebene.
2. Die Eckensterne von N sind die projizierten Knoten von $\mathcal{P}$ in die Ebene.
3. Jede Facette in N enthält einen eingeschriebenen Kreis.
4. Die Mittelpunkte der eingeschriebenen Kreise sind die projizierten Knoten von $\mathcal{P}^\star$.

Dieses Netz in der Ebene zusammen mit seinen eingeschriebenen Kreisen heißt **Kreisnetz**.

Abschließend wollen wir uns noch einmal Vierecksnetze ansehen, das heißt, wir betrachten eine Zerlegung der Sphäre in einen Würfel.

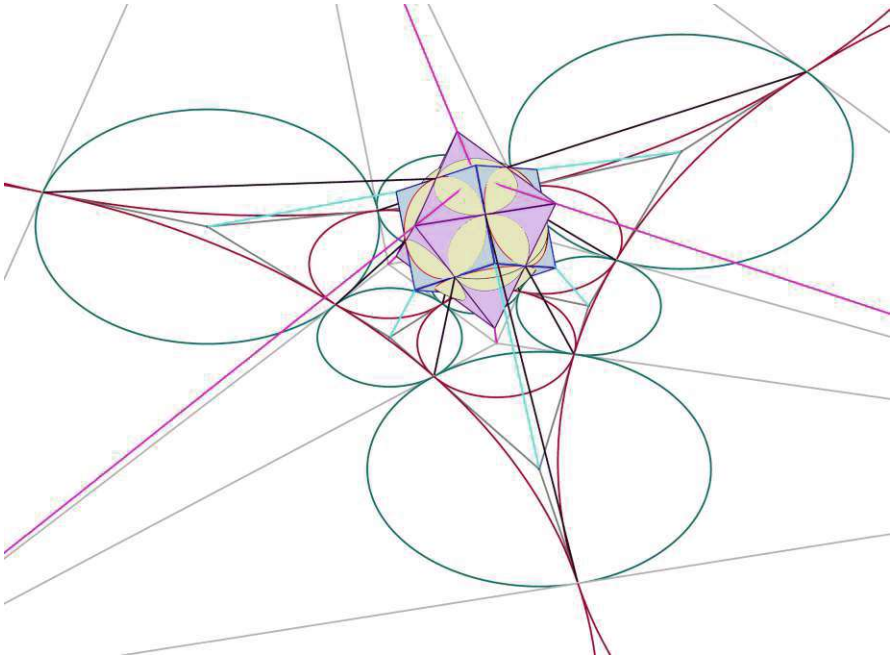


Abbildung 3.12: *Zerlegung der (gelben) Sphäre (blauer Würfel) und duale Zerlegung (violetter Oktaeder) inklusive der (schwarzen, rosa und cyan) stereographischen Projektion von Ecken, (grauen) Kanten, (roten und dunkelcyan) Kreisen und (orangenen) Kreisberührpunkten*

Beispiel 3.2.16. *Analog zu Beispiel 3.2.11 starten wir mit einer Zerlegung der Sphäre, diesmal mit $\delta = 4$. Der dadurch entstehende Polyeder ist ein Würfel. Projizieren wir diesen in die Ebene, so erhalten wir ein Vierecksnetz N, wie uns Definition 3.2.15 sagt. Dieser enthält die berührende Kreisfamilie $\mathcal{C}_\bullet$. Laut Satz 3.2.14 gibt es einen dualen*

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Polyeder, welcher den Würfel orthogonal schneidet. Auch dieser bildet ein Kreisnetz, nämlich $\mathcal{C}_\bullet$ *und ist veranschaulicht in Abbildung 3.12.*

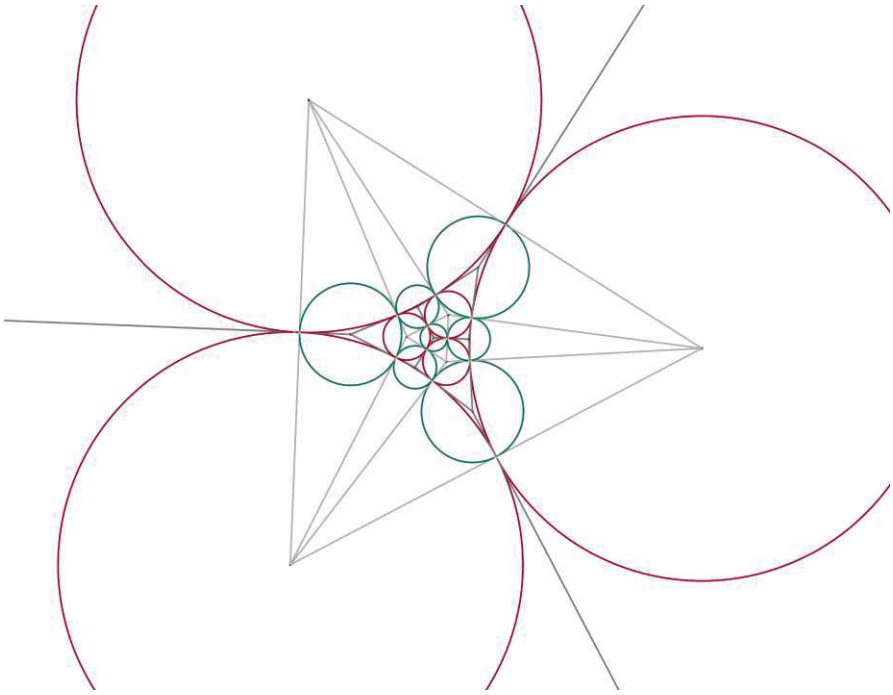


Abbildung 3.13: *(Rote) Kreispackung und seine (cyan) orthogonale Kreispackung eingeschrieben in je einem dazu passendem Netz*

Wir können uns auch nur das Netz N mit seinen eingeschriebenen Kegelschnitten und seinen orthogonalen Kreisen in Abbildung 3.13 ansehen und erkennen eine symmetrische Anordnung der Kreise. ◇

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN

Literaturverzeichnis

[AB18] Akopyan, Arseniy V.; Bobenko, Alexander I.:
Incircular Nets and Confocal Conics, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 370, no. 4, 2018. https://doi.org/10.1090/tran/7292

[B08] Bobenko, Alexander I.; Et Al:
Discrete Differential Geometry, Birkhäuser, Oberwolfach reports, vol. 38, 2008.

[BF21] Bobenko, Alexander I.; Fairley, Alexander Y.:
Nets of Lines with the Combinatorics of the Square Grid and with Touching Inscribed Conics, Discrete & Computational Geometry, vol. 66, no. 4, 2021. https://doi.org/10.1007/s00454-021-00277-5

[BHR24] Bobenko, Alexander I.; Hoffmann, Tim; Rörig, Thilo:
Orthogonal Ring Patterns in the Plane, Geometriae Dedicata, vol. 218, no. 1, 2024. https://doi.org/10.1007/s10711-023-00859-y

[BHS06] Bobenko, Alexander I.; Hoffmann, Tim; Springborn, Boris A.:
Minimal Surfaces from Circle Patterns – Geometry from Combinatorics, Annals of Mathematics, vol. 164, no. 1, 2006. https://doi.org/10.4007/annals.2006.164.231

[BS93] Brightwell, Graham R; Scheinerman, Edward R.:
Representations of Planar Graphs, SIAM Journal on Discrete Mathematics, vol. 6, no. 2, 1993. https://doi.org/10.1137/0406017

[BS04] Bobenko, Alexander I.; Springborn, Boris A.:
Variational Principles for Circle Patterns and Koebe's Theorem, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 356, no. 2, 2004. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03239-2

[BS08] Bobenko, Alexander I.; Suris, Yuri B.:
Discrete Differential Geometry – Integrable Structure, vol. 98, American Mathematical Society, 2008.

[BS09] Bobenko, Alexander I.; Suris, Yuri B.:
Discrete Koenigs Nets and Discrete Isothermic Surfaces, International Mathematics Research Notices, vol. 2009, no. 11, 2009.
https://doi.org/10.1093/imrn/rnp008

[C14] Casas-Alvero, Eduardo:
Analytic Projective Geometry, European Mathematical Society, 2014.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

[GS39] Graf, Heinrich; Sauer, Robert:
Fastrhombische Kurvennetze und Vierecksnetze, Mathematische Zeitschrift, vol. 44, no. 1, 1939. https://doi.org/10.1007/BF01210662

[H20] Hetzl, Stefan:
Diskrete und Geometrische Algorithmen, Vorlesung an der TU Wien im Wintersemester 2020.

[M21] Müller, Christian:
Computer Aided Geometric Design, Vorlesung an der TU Wien im Wintersemester 2021.

[M22] Müller, Christian:
Projektive Geometrie, Vorlesung an der TU Wien im Sommersemester 2022.

[RG11] Richter-Gebert, Jürgen:
Perspectives on Projective Geometry – A Guided Tour through Real and Complex Geometry, Springer, 2011.

[S70] Sauer, Robert:
Differenzengeometrie, Springer, 1970.

[S97] Schramm, Oded:
Circle patterns with the combinatorics of the square grid, Duke Mathematical Journal, vol. 86, no. 2, 1997. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-97-08611-7

[S05] Stephenson, Kenneth:
Introduction to Circle Packing – The Theory of Discrete Analytic Functions, Cambridge University Press, 2005.

[SR34] Steinitz, Ernst; Rademacher, Hans:
Vorlesungen über die Theorie der Polyeder – Unter Einschluß der Elemente der Topologie Springer-Verlag, 1934.

[T80] Thurston, William P.:
The Geometry and Topology of Three-Manifolds, elektronische Version der Vorlesung an der Princeton University, 1980.
https://www.math.unl.edu/∼jkettinger2/thurston.pdf

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub WIEN