

Diplomarbeit

Modellbildung in der Baustatik: Federmodelle nach Theorie I. und II. Ordnung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grads

Diplom-Ingenieur

eingereicht an der TU Wien, Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwesen

Diploma Thesis

Modeling in Structural Analysis: Spring Models According to First and Second Order Theory

submitted in satisfaction of the requirements for the degree

Diplom-Ingenieur

of the TU Wien, Faculty of Civil and Environmental Engineering

Johannes Zierke, B.Eng.

Matr.Nr.: 12143558

Betreuung: Ao. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. **Mehdi Aminbaghai**
Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen
Forschungsbereich: Baustatik und experimentelle Mechanik, E202-03
Technische Universität Wien
Karlsplatz 13/202, 1040 Wien, Österreich

Wien, im Jänner 2025

Kurzfassung

Bei der Lastabtragung von Baustrukturen spielt die gegenseitige Wechselwirkung einzelner Bauteile eine entscheidende Rolle. Dies wird besonders relevant bei Renovierungsprojekten, bei denen Bauteile von der Originalstruktur entfernt oder durch neue ergänzt werden. Solche Änderungen führen häufig zu einer erheblichen Umlagerung der Lastabtragung. Um die neuen Rand- und Übergangsbedingungen möglichst wirklichkeitsnah zu definieren, sind fundierte Kenntnisse über die Wechselwirkung der Bauteile unverzichtbar.

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, wie der Beitrag einzelner Stabbauteile zur Gesamtsteifigkeit eines Systems durch die sogenannten *Federkonstanten* (Federsteifigkeiten) quantifiziert werden kann. Diese *Federkonstanten* werden mithilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte (PvK) und der Übertragungsbeziehungen nach Rubin (1993) hergeleitet. Die Ergebnisse werden für ausgewählte Stabbauteile in tabellarischer Form aufbereitet, um Ingenieuren eine einfache Anwendung bei der Neudefinition von Rand- und Übergangsbedingungen zu ermöglichen. Dieses Vorgehen ist besonders hilfreich bei der statischen Analyse von Renovierungsprojekten.

Die Ergebnisse bilden außerdem die Grundlage für das neu entwickelte *Federmodellverfahren*, das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt wird. Dieses Verfahren ermöglicht die statische Analyse ausgewählter Stabsysteme unterschiedlichen Komplexitätsgrades nach der Biegestabtheorie I. und II. Ordnung. Dabei werden die untersuchten Stabsysteme in mechanisch äquivalente Federmodelle transformiert, die lediglich materialspezifische und geometrische Eingangsparameter erfordern, welche in der Praxis meist bekannt sind.

Eine Besonderheit des *Federmodellverfahrens* liegt in der Anwendung bekannter Zusammenhänge von Stromkreismodellen in der Elektrotechnik. Die untersuchten Stabsysteme werden zunächst in einzelne Teile zerlegt, deren *Federkonstanten* in Abhängigkeit von Übergangs- und Lagerungsbedingungen formuliert werden. Anschließend erfolgt die Zusammensetzung der Einzelfedern zu einem mechanisch äquivalenten Federmodell mittels *Parallel- und/oder Serienschaltungen*. Dabei ist zu beachten, dass diese Schaltungen nicht mit den Parallel- und Serienschaltungen verwechselt werden dürfen, die im Bauingenieurwesen häufig zur Beschreibung nichtlinearer Materialverhalten (z. B. Plastizierung von Werkstoffen, Kriechen und Schwinden von Beton) verwendet werden. In dieser Arbeit werden sie ausschließlich im Kontext der Systemstatik und der statischen Analyse eingesetzt. Die entstandenen Modelle ermöglichen die schnelle Ermittlung der gesuchten Verschiebungs- und Rotationsgrößen sowie der Zustandslinien des Originalsystems mithilfe linearer Federgesetze.

Das *Federmodellverfahren* bietet somit eine innovative Alternative zu etablierten baustatischen Verfahren wie dem *Kraftgrößenverfahren* oder dem *Drehwinkelverfahren* und erweitert die Möglichkeiten der Modellbildung in der Baustatik.

Abstract

The interaction between structural components significantly affects the load-bearing behavior of building structures, particularly in renovation projects where modifications lead to load redistributions. This thesis introduces a method to quantify the contribution of structural elements to system stiffness through *spring constants*, derived using the Principle of Virtual Forces and transfer relationships.

The work also presents a novel *spring model method* for static analysis of structural systems based on beam theory of the first and second order. Structural systems are transformed into equivalent spring models, requiring only material and geometric parameters. The method involves decomposing systems into components and determining their *spring constants*. By incorporating well-known principles from electrical engineering, it recombines them through parallel and series connection. This approach enables the efficient calculation of kinematic degrees of freedom and state variables of the original system.

Offering an innovative alternative to traditional methods like the *force method* or *moment-distribution method*, the *spring model method* is particularly valuable for structural modifications and practical modeling in engineering.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Motivation	7
1.2	Vorgehensweise	8
1.3	Praktische Problemstellungen	9
2	Grundlagen des Federmodellverfahrens	11
2.1	Grundgesetze der Federmechanik	11
2.2	Ermittlung von Federkonstanten nach Theorie I. Ordnung	13
2.3	Ermittlung von Federkonstanten nach Theorie II. Ordnung	31
3	Erweiterte Modellierungsansätze im Federmodellverfahren	48
3.1	Parallel- und Serienschaltung von Federmodellen	48
3.1.1	Parallelschaltung von Federmodellen	48
3.1.2	Serienschaltung von Federmodellen	57
3.2	Kombination der Parallel- und Serienschaltung von Federmodellen	59
4	Das Federmodellverfahren im dreidimensionalen Raum	66
4.1	Allgemeine Analyse mit dem Federmodellverfahren	67
4.2	Numerische Analyse mit dem Federmodellverfahren	72
4.3	Vergleichsrechnung mit der Statiksoftware RSTAB	75
5	Zusammenfassung und Ausblick	77
	Literaturverzeichnis	78
	Abbildungsverzeichnis	78
	Tabellenverzeichnis	80
	Anhang	82

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

In einer Zeit, in der die Grenzen der Architektur ständig neu definiert werden und die Nachhaltigkeit des Bauens im Bestand zunehmend in den Fokus rückt, stehen Bauingenieure vor der komplexen Aufgabe, Methoden zu entwickeln, die den Anforderungen beider Disziplinen gerecht werden. Die Herausforderung besteht nicht nur in der Realisierung anspruchsvoller Entwürfe, sondern auch in der Integration und Aufwertung existierender Strukturen, welche eine effiziente und ressourcenschonende Planung unabdingbar machen. Angesichts dieser Umstände konzentriert sich die Diskussion auf die kritische Rolle der zugrunde liegenden Berechnungsmodelle, die als Schlüsselkomponente für eine erfolgreiche Bauplanung gelten.

Die Auswahl eines geeigneten Berechnungsmodells ist jenes Fundament, welches über die Stabilität, Effizienz und die Kosteneffektivität eines Bauvorhabens entscheidet. Angesichts der Komplexität moderner Bauaufgaben und der spezifischen Anforderungen an die Sanierung und Erweiterung bestehender Bauten ist eine fortgeschrittene Modellbildung unerlässlich. Diese Arbeit soll einen Beitrag dazu leisten, indem sie sich auf die innovative Anwendung und Implementierung von Federmodellen fokussiert. Durch ihre Fähigkeit, Lastabtragungs-Szenarien und Steifigkeitsverhältnisse präzise abzubilden, wird eine zuverlässigere statische Analyse des strukturellen Verhaltens unter Lasteinwirkung ermöglicht. In der vorliegenden Arbeit werden Stabwerkstrukturen durch Federmodelle gemäß Biegestabtheorie erster bzw. zweiter (I. und II.) Ordnung ersetzt und mit dem sogenannten *Federmodellverfahren* detailliert untersucht und berechnet.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren liefert Anwendern die Möglichkeit, komplexe Stabwerksstrukturen in einfach handhabbare Ersatzfedermodelle zu überführen, die lediglich geometrische und materialspezifische Eingangsgrößen erfordern, um schnell auf die wesentlichen Verschiebungs-, Rotations- und Kraftgrößen des ursprünglichen Systems schließen zu können, ohne dass damit ein Verlust an Genauigkeit einhergeht. Dadurch erhöht das Verfahren auch die Effizienz bei der Ermittlung von Schnittgrößen im Vergleich zu herkömmlichen Methoden der Baustatik wie dem *Kraftgrößenverfahren* oder dem *Drehwinkelverfahren*. Die verwendeten Federmodelle beschränken sich dabei auf Biegestabtheorie I. und II. Ordnung unter Berücksichtigung der Biege-, Querkraft-, Normalkraft- und Torsionsverformungen. Stabilitätsaspekte der Theorie II. Ordnung wie die Beeinflussung der Gesamtsteifigkeit eines Stabsystems durch große Axialkräfte, sowie die Berücksichtigung der vorgeschriebenen Vorverformungen gemäß Eurocode bei der Berechnung der Strukturen werden somit erfasst. Durch diese differenzierte Betrachtung eröffnet das neue Verfahren Wege, eine statische Berechnung effizienter und realitätsgetreuer zu gestalten, indem sie eine genauere Anpassung an die realen Gegebenheiten gestattet.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, durch die Einführung und Anwendung des *Federmodellverfahrens* basierend auf Federmodellen, eine methodische Erneuerung in der Modellbildung zu initiieren. Das Verfahren soll nicht nur das theoretische Fundament der Disziplin bereichern, sondern auch praktische Anwendung finden, indem es Bauingenieuren ermöglicht, mit erhöhter Präzision und Effizienz zu arbeiten. Eine zentrale Innovation des Ansatzes besteht in der detaillierten Beschreibung der statischen und geometrischen Übergangsbedingungen zwischen verschiedenen Bauteilen, sowie der Erfassung der gegenseitigen Wechselwirkung an Bauteilen von Alt- und Zubauten. Darüber hinaus ermöglicht das Verfahren eine gezielte Analyse der Kopplungsarten zwischen den Strukturbestandteilen unter Berücksichtigung der gegebenen Rand- und Übergangsbedingungen. Diese umfassende Betrachtung gewährt eine bisher nicht erreichte Genauigkeit in der Simulation von Tragstrukturen und bietet somit das Potenzial, einen wichtigen Beitrag zur Weiterentwicklung der baustatischen Praxis zu leisten und die Präzision in der Modellbildung deutlich zu steigern.

1.2 Vorgehensweise

In der vorliegenden Arbeit wird ein systematischer Ansatz verfolgt, um die Modellierung von Federmodellen nach Theorie I. und II. Ordnung eingehend zu untersuchen und weiterzuentwickeln. Ihr Aufbau orientiert sich an einer schrittweisen Vertiefung in das Thema, beginnend mit den fundamentalen Aspekten der Federmechanik bis hin zu fortgeschrittenen Modellierungsansätzen und der Erweiterung auf den dreidimensionalen Raum.

Ausgehend von der detaillierten Darstellung der Grundgesetze der Federmechanik, werden die physikalischen und mathematischen Grundlagen des *Federmodellverfahrens* erörtert. Diese sind für das Verständnis des Verfahrens essentiell. Auf dieser Basis erfolgt zuerst die Ermittlung der Federkonstanten nach Theorie I. und II. Ordnung für gerade Stäbe in unterschiedlichen Lagerungs- und Belastungsszenarien unter Berücksichtigung von Biege-, Querkraft-, Normalkraft- und Torsionsverformungen. Die Ergebnisse der allgemeinen Herleitungen werden dabei ständig durch numerische Beispielberechnungen überprüft. Weiters werden, nach der Erläuterung und Beschreibung der Methoden für Parallelschaltung und Serienschaltung, die verschiedenen Kombinationen von Federanordnungen analysiert. Diese Untersuchung erlaubt es, das Zusammenspiel verschiedener Federmodelle zu verstehen und deren Auswirkungen auf das Gesamtverhalten von statischen Systemen zu bewerten. In diesem Zuge wird auch der Umgang mit Vorverformungen und Pendelstäben nach Theorie I. und II. Ordnung demonstriert, um das Handwerkszeug für übliche Stabwerkssysteme zu vervollständigen.

Neben der theoretischen Entwicklung der Modelle wird auch deren praktische Anwendbarkeit anhand von einigen Modellierungsbeispielen demonstriert. Diese Beispiele sollen zeigen, wie das *Federmodellverfahren* zur Lösung realer baustatischer Probleme eingesetzt werden kann. Sie helfen dabei, die Verbindung zwischen der erarbeiteten Theorie des *Federmodellverfahrens* und praktischer Ingenieurarbeit greifbar zu machen.

1.3 Praktische Problemstellungen

Eingangs sollen nun zwei Anwendungsbeispiele zeigen, wie sich Federmodelle in praktische Problemstellungen implementieren lassen.

Beispiel 1: Integration eines Garagenvordachs an ein bestehendes Gebäude

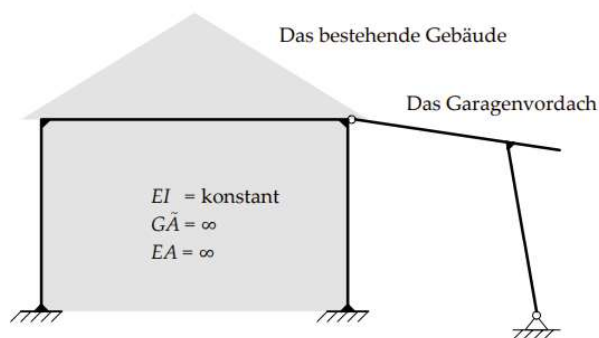


Abb. 1.1: Bestandsgebäude mit geplantem Garagenvordach

Wie in Abbildung 1.1 zu erkennen ist, soll in diesem Beispiel ein Garagendach an einem Bestandsgebäude ergänzt werden. Die korrekte Modellierung der Verbindung zwischen dem neuen Garagendach und dem bestehenden Gebäude stellt hierbei die wesentliche Herausforderung dar. Welche Möglichkeiten dazu bestehen, zeigt Abbildung 1.2:

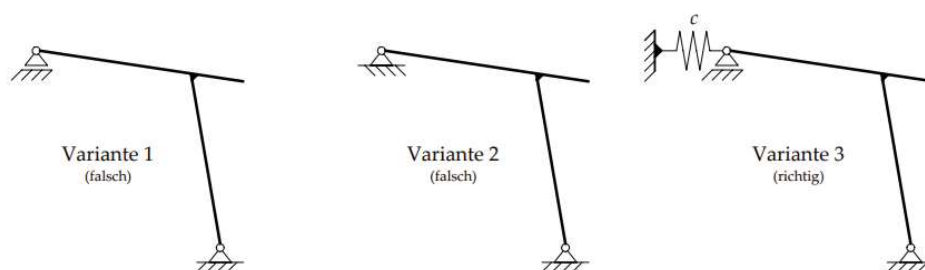


Abb. 1.2: Varianten zur Modellierung des Auflagers

In Variante 1 wird angenommen, dass die Anschlussstelle horizontal verschieblich ist und die Steifigkeit des Bestandes vernachlässigt wird. Variante 2 hingegen geht von einer unverschieblichen Anschlussstelle aus. Demzufolge wird die Nachgiebigkeit des Bestandes ignoriert. In Variante 3 wird die Steifigkeit des Bestandes schließlich mittels einer linearen Feder mit der Federkonstante c simuliert.

Die ersten beiden Varianten führen in diesem Beispiel zu unbrauchbaren und wirklichkeitsfremden Ergebnissen, da sie die entscheidenden Randbedingungen des Auflagers entweder über- oder unterschätzen. Variante 3 hingegen bietet eine realitätsnähere Modellierung, indem sie die Steifigkeit des Bestandes miteinbezieht. Hier wird die gegenseitige Wechselwirkung der Bauteile von Alt- und Zubauten bei der Berechnung berücksichtigt. Somit werden zuverlässigere Vorhersagen über das Verhalten der Struktur ermöglicht. Durch die Anwendung des Federmodells wird eine präzise Analyse der Kraftübertragung und der resultierenden Verformungen erreicht, was für die

strukturelle Sicherheit und eine erfolgreiche Berechnung des Systems entscheidend ist.

Beispiel 2: Abschnittsweise belasteter Durchlaufträger

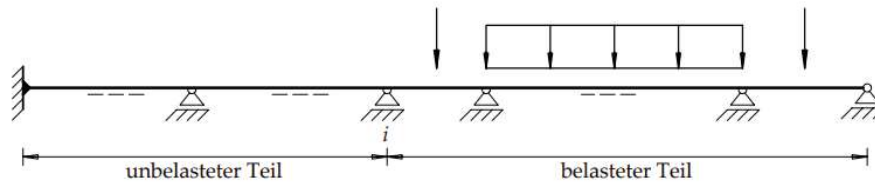


Abb. 1.3: Durchlaufträger mit abschnittsweiser Querbelastung

In Abbildung 1.3 ist ein Durchlaufträger zu sehen, der in zwei Abschnitte unterteilt werden kann. Der linke Teil des Trägers ist rein durch sein Eigengewicht belastet und empfängt keinerlei äußere Einwirkungen. Der rechte Teil des Trägers ist zusätzlich durch eine Gleichstreckenlast, als auch zwei Einzellasten belastet. Jener Teil, der keine äußeren Belastungen aufweist, kann nun durch eine Drehfeder am Knoten i mit der Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ ersetzt werden, so wie es in Abbildung 1.4 zu sehen ist:

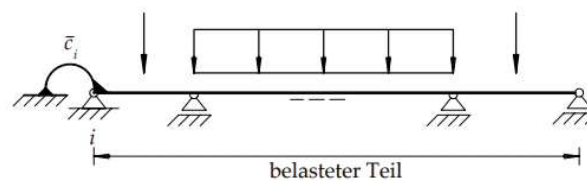


Abb. 1.4: Durchlaufträger mit Drehfeder anstelle des unbelasteten Teils

Diese Vorgehensweise bringt einige Vorteile mit sich. Durch den Einsatz der Drehfeder anstatt des unbelasteten Trägerabschnitts können die Drehsteifigkeits- und Rotationsverhältnisse an der Anschlussstelle exakt definiert werden. Das Originalsystem und sein Federersatzsystem sind mechanisch äquivalent. Außerdem reduziert sich durch den Einsatz der Drehfeder der Rechenaufwand der Struktur. Das komplexe Systemverhalten des äußerlich unbelasteten Trägerabschnitts kann durch ein einfaches mechanisches Modell beschrieben werden.

Kapitel 2

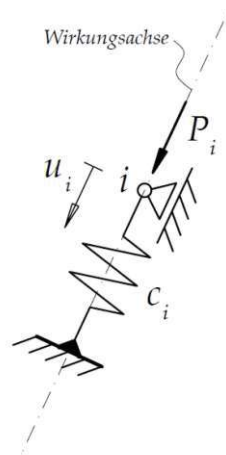
Grundlagen des Federmodellverfahrens

2.1 Grundgesetze der Federmechanik

Dieser Abschnitt behandelt die Grundlagen der Federgesetze für lineare Längsfedern und lineare Drehfedern. Sie beide stellen wesentliche Komponenten in der Modellierung von baustatischen Systemen dar. Die Herleitung der Federgesetze basiert in beiden Fällen auf dem Prinzip der Proportionalität zwischen der an einer Feder angewendeten Belastung - Längskraft bzw. Drehmoment - und der daraus resultierenden Verschiebung bzw. Verdrehung.

Lineare Längsfeder

Das Federgesetz für die linearen Längsfedern kann prinzipiell in beliebiger Richtung im Raum bzw. in den drei Koordinatenrichtungen X , Y , Z formuliert werden. In einer beliebigen Richtung im Raum lautet das Federgesetz:



$$u_i = \mp \frac{P_i}{c_i} \quad (2.1)$$

Abb. 2.1: Lineare Längsfeder unter der Einwirkung der Kraft P_i

In 2.1 ist der lineare Zusammenhang zwischen der Kraft P_i , der resultierenden Verschiebung u_i am Knoten i und der Federkonstante c_i erkennbar. Da die Gleichung (2.1) auf dem Hook'schen Gesetz basiert, zeigt sie, dass die Verschiebung u_i direkt proportional zur aufgebrachten Kraft P_i am Knoten i ist und umgekehrt proportional zu der Federkonstante c_i . Je höher also die Federsteifigkeit c_i ist, desto kleiner wird die Verschiebung u_i unter Einwirkung der selben Kraft P_i .

Vorzeichenregelung: Wenn die Kraft und die Verschiebung dieselbe Wirkungsrichtung aufweisen, so ist ihr Vorzeichen positiv, andernfalls negativ.

Lineare Drehfedern



Abb. 2.2: Lineare Drehfeder (links) und lineare Torsionsfeder (rechts)

Für die linearen Drehfedern wird eine ähnliche Beziehung herangezogen wie bei der linearen Längsfeder. Das Federgesetz für die linearen Drehfedern kann prinzipiell um die drei Koordinatenrichtungen X , Y , Z formuliert werden. Zur besseren Übersichtlichkeit wird in dieser Arbeit die lineare Drehfeder um die lokale x -Achse des Stabes als lineare Torsionsdrehfeder bezeichnet, während die anderen als lineare Drehfedern bezeichnet werden. Die lineare Torsionsdrehfederkonstante $\bar{c}_{T,i}$ hängt von der Querschnittsverdrehung (Verdrillung) ϑ_i um die Stabachse (x -Achse) ab, die durch ein Torsionsmoment $M_{T,i}$ hervorgerufen wird. Die zwei anderen linearen Drehfederkonstanten $\bar{c}_{y,i}$ und $\bar{c}_{z,i}$ hängen von der Querschnittsverdrehung $\varphi_{y,i}$ um die y -Achse sowie von der Querschnittsverdrehung $\varphi_{z,i}$ um die z -Achse ab, die durch Einzelbiegemomente $M_{y,i}$ um die y -Achse sowie $M_{z,i}$ um die z -Achse hervorgerufen werden.

Die linearen Beziehungen zwischen den Momenten M_i bzw. $M_{T,i}$, den Federkonstanten $\bar{c}_i$ bzw. $\bar{c}_{T,i}$ und den resultierenden Querschnittsverdrehungen φ_i und ϑ_i lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$\varphi_i = \mp \frac{M_i}{\bar{c}_i} \quad (2.2)$$

$$\vartheta_i = \mp \frac{M_{T,i}}{\bar{c}_{T,i}} \quad (2.3)$$

Gleichung (2.2) präsentiert die Formulierung des Drehfedergesetzes um die y -Richtung bzw. z -Richtung, während Gleichung (2.3) das Drehfedergesetz um die x -Richtung des Stabes darstellt. Beide Gleichungen zeigen, dass die Querschnittsverdrehungen φ_i und ϑ_i direkt proportional zum einwirkenden Biegemoment M_i bzw. Torsionsmoment $M_{T,i}$ sind und umgekehrt proportional zu der Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ bzw. $\bar{c}_{T,i}$. Je größer die Drehfederkonstante ist, desto kleiner wird die Rotation am Knoten i unter Einwirkung des selben Moments.

Vorzeichenregelung: Wenn das Drehmoment und die Verdrehung dieselbe Drehrichtung aufweisen, so ist ihr Vorzeichen positiv, andernfalls negativ.

Die Federkonstanten c_i und $\bar{c}_i$ bzw. $\bar{c}_{T,i}$ können je nach Bedarf nach Theorie I. Ordnung oder Theorie II. Ordnung ermittelt werden. Dies wird in den folgenden Kapiteln demonstriert.

2.2 Ermittlung von Federkonstanten nach Theorie I. Ordnung

Anhand traditioneller baustatischer Modelle wird in diesem Abschnitt die Ermittlung von Federkonstanten gemäß Theorie I. Ordnung exemplarisch dargestellt. Dazu wird Gebrauch von den vereinfachenden Annahmen der Theorie I. Ordnung gemacht. Die in diesem Kapitel ermittelten Federkonstanten werden als Bauteile zur Aufstellung der Federmodelle (Ersatzfedersysteme) benötigt.

Pendelstab mit konstanter Dehnsteifigkeit EA

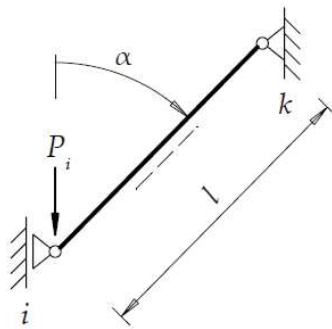


Abb. 2.3: geneigter Pendelstab mit konstanter Dehnsteifigkeit EA , der Länge l und der Einzellast P_i

Wie in Abbildung 2.3 zu erkennen ist, wird ein um den Winkel α geneigter Pendelstab betrachtet. Die sich am Knoten i ergebende Verschiebung u_i ist von der Dehnsteifigkeit EA und der Länge l des Stabes abhängig. Gesucht wird im Folgenden die Federkonstante für eine Längsfeder am Punkt i , die ein Ersatzsystem zum ursprünglichen System darstellt und mechanisch äquivalent zu ihm ist. Dafür muss sichergestellt werden, dass die Einwirkung der gleichen Einzelkraft P_i die gleichen Verschiebungen w_i am Originalsystem, als auch am Federmodell hervorruft. Die gesuchte Federkonstante c_i wird wie folgt hergeleitet.

Am Knoten i wird die Einzelkraft P_i in Richtung der Verschiebung w_i angesetzt. Diese Größen sind arbeitskonjugiert und werden benötigt, um die gesuchte Federkonstante ermitteln zu können. Die Verschiebung u_i zufolge der Einwirkung P_i wird mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) identifiziert. Dazu wird zunächst an der Stelle, an der die Verschiebung ermittelt werden soll, eine virtuelle Einzelkraft δP_i mit der selben Wirkungsrichtung wie die tatsächliche Einzelkraft P_i aufgebracht. Daraufhin werden die Normalkraftverläufe des realen und des virtuellen Systems N und δN zufolge der jeweiligen Einzelkräfte gegenübergestellt, so wie es in (2.4) zu sehen ist. Dazu werden einfache Gleichgewichtsbeziehungen herangezogen.

Nun wird die Arbeitsgleichung wie folgt formuliert:

$$\delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0 \quad (2.4)$$

Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ergibt sich gemäß (2.5) aus dem Produkt der realen Verschiebung u_i und der virtuellen Einzelkraft δP_i :

$$\delta A^{(a)} = u_i \delta P_i \quad [\text{Längeneinheit}] \quad (2.5)$$

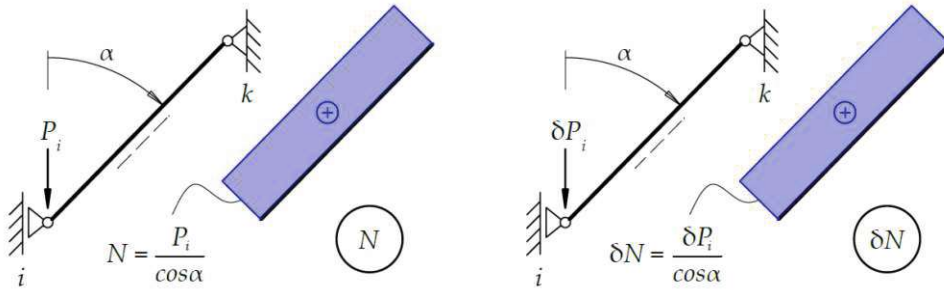


Abb. 2.4: Gegenüberstellung der Normalkraftverläufe im Pendelstab zufolge P_i und δP_i

Durch Überlagerung der Normalkraftverläufe mithilfe von Integraltafeln (Pichler u. Eberhardsteiner, 2024, S. 189) erhält man die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte:

$$\delta A^{(i)} = - \int_0^l \frac{N(x) \delta N(x)}{EA} dx = -N \delta N \frac{l}{EA} = -\frac{l}{EA \cos^2 \alpha} P_i \delta P_i \quad [\text{Längeneinheit}] \quad (2.6)$$

Einsetzen von (2.5) und (2.6) in (2.4) liefert den allgemeinen Ausdruck für die Vertikalverschiebung u_i . Durch Anwendung des Federgesetzes (2.1) kann die Federkonstante c_i für den Pendelstab gemäß (2.7) identifiziert werden:

$$\begin{aligned} \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} &= 0 \quad \Rightarrow \quad u_i = \frac{l}{EA \cos^2 \alpha} P_i \quad \Rightarrow \quad c_i = \frac{P_i}{u_i} \\ &\Rightarrow \quad c_i = \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Der hiermit gefundene Ausdruck für die Federkonstante c_i repräsentiert den mechanisch äquivalenten Widerstand des ursprünglichen Pendelstabes gegen Verschiebung w_i infolge Einzelkraft P_i am Knoten i . Demzufolge kann der Pendelstab sowohl als Einzelstab, als auch als Teilsystem eines zusammenhängenden Gesamtsystems durch eine Längsfeder mit der Federsteifigkeit c_i ersetzt werden. Ihre Grenzwerte liegen bei $c_i = 0$, wenn die Dehnsteifigkeit des Pendelstabes $EA \approx 0$ und bei $c_i = \infty$ wenn ein dehnstarrer Pendelstab ($EA = \infty$) vorliegt.

Numerisches Beispiel zur Anwendung:

Querschnitt: QRO 200 x 5, Baustahl S235: $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$, $G = 8\,076,92 \text{ kN/cm}^2$

- Stablänge $l = 180 \text{ cm}$
- Stabneigungswinkel $\alpha = 56,31^\circ$
- $A = 38,70 \text{ cm}^2$
- $I_y = I_z = 2445 \text{ cm}^4$, $I_T = 3756 \text{ cm}^4$
- $EA = 812\,700 \text{ kNcm}^2$

Belastung: Einzelkraft $P_i = 50 \text{ kN}$

$$c_i = \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha = 1389,23 \text{ kN/cm} \quad \Rightarrow \quad u_i = \frac{P_i}{c_i} = 0,036 \text{ cm} \equiv 0,36 \text{ mm}$$

Die Ergebnisse wurden in einer Vergleichsrechnung mit der Software *RSTAB* (Version 8.20, Fa. Dlubal) überprüft. Dabei wurde eine exakte Übereinstimmung der Ergebnisse festgestellt.

Kragarm mit konstanter Biegesteifigkeit EI und konstanter Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$

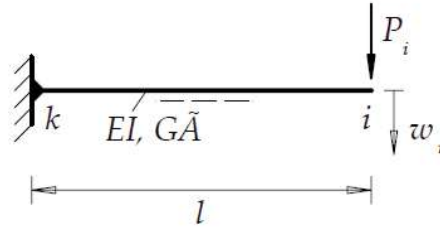


Abb. 2.5: Kragarm mit konstanter Biegesteifigkeit EI , konstanter Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$, der Länge l und der Einzelkraft P_i

Dieses Beispiel behandelt einen Kragarm mit konstanter Biegesteifigkeit EI , konstanter Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ und mit der Länge l gemäß Abbildung 2.5. Die Verschiebung w_i am freien Stabende ist von der Biegesteifigkeit EI und der Länge l des Stabes abhängig. Im Folgenden soll die Federkonstante c_i für eine lineare Längsfeder am Punkt i ermittelt werden, die ein Ersatzsystem zum ursprünglichen System darstellt und mechanisch äquivalent zu ihm ist. Hierzu muss sichergestellt werden, dass am Federmodell unter Einwirkung der gleichen Einzelkraft P_i die gleiche Verschiebung w_i wie am Originalsystem hervorgerufen wird. Die gesuchte Federkonstante c_i wird wie folgt ermittelt.

Am Knoten i wird die Einzelkraft P_i in Richtung der Verschiebung w_i angesetzt. Diese Größen sind arbeitskonjugiert und werden benötigt, um die gesuchte Federkonstante ermitteln zu können. Die Verschiebung w_i zufolge der Einwirkung P_i wird mit dem PvK identifiziert. Dazu wird zunächst an der Stelle, an der die Verschiebung ermittelt werden soll, eine virtuelle Einzelkraft δP_i mit derselben Wirkungsrichtung wie die tatsächliche Einzelkraft P_i aufgebracht. Daraufhin werden die Momenten- und Querkraftverläufe M , δM und V , δV des realen und des virtuellen Systems zufolge der jeweiligen Einzelkräfte gegenübergestellt, so wie es in (2.6) zu sehen ist. Hierzu werden einfache Gleichgewichtsbedingungen herangezogen.

Grundlage für die folgenden Berechnungsschritte bildet erneut die Arbeitsgleichung (2.4). Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ergibt sich wiederum aus dem Produkt der realen Verschiebung w_i und der virtuellen Einzelkraft δP_i :

$$\delta A^{(a)} = w_i \delta P_i \quad [\text{Längeneinheit}] \quad (2.8)$$

Durch Überlagerung der Biegemomenten- und Querkraftverläufe mithilfe von Integraltafeln (Pichler u. Eberhardsteiner, 2024, S. 189) erhält man die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte:

$$\delta A^{(i)} = - \int_0^l \frac{M(x) \delta M(x)}{EI} dx - \int_0^l \frac{V(x) \delta V(x)}{G\tilde{A}} dx \quad (2.9)$$

$$\delta A^{(i)} = -\frac{1}{3} M_k \delta M_k \frac{l}{EI} - V_k \delta V_k \frac{l}{G\tilde{A}} = -\frac{1}{3} \frac{l^3}{EI} P_i \delta P_i - \frac{l}{G\tilde{A}} P_i \delta P_i \quad [\text{Längeneinheit}] \quad (2.10)$$

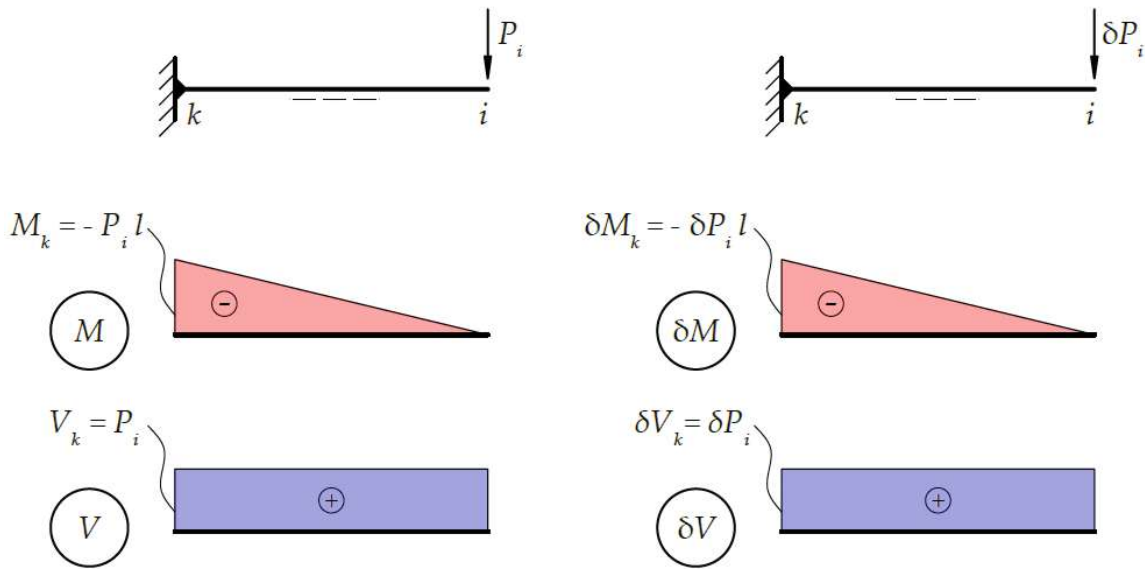


Abb. 2.6: Biegemomenten- und Querkraftverläufe des Kragarms infolge P_i und δP_i

Einsetzen von (2.8) und (2.10) in (2.4) liefert den allgemeinen Ausdruck für die Vertikalverschiebung w_i . Durch Anwendung des Federgesetzes (2.1) kann die Federkonstante c_i für den Kragarm gemäß (2.11) identifiziert werden:

$$\begin{aligned} \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0 &\Rightarrow w_i = \frac{1}{3} \frac{l^3}{EI} P_i + \frac{l}{G\tilde{A}} P_i \Rightarrow c_i = \frac{P_i}{w_i} \\ &\Rightarrow c_i = \frac{1}{\frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{G\tilde{A}}} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die hiermit ermittelte Federkonstante c_i für den Kragarm gibt an, wie steif er sich bezüglich der Verschiebung w_i zufolge der Einzelkraft P_i am Knoten i verhält. Sie stellt die Steifigkeit eines Federersatzsystems für den ursprünglichen Kragarm dar, welches als Einzel- oder Teilsystem eines zusammenhängenden Systems weiterverwendet werden kann. Je höher die Federsteifigkeit c_i , desto kleiner die Vertikalverschiebung des Stabes an seinem freien Ende.

Für den Sonderfall des schubstarren Kragarms ($G\tilde{A} = \infty$) lässt sich die gesuchte Federkonstante durch das Entfallen aller Querkraftanteile in der Gleichung (2.12) ermitteln.

$$\begin{aligned} \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0 &\Rightarrow w_i = \frac{1}{3} \frac{l^3}{EI} P_i \Rightarrow c_i = \frac{P_i}{w_i} \\ &\Rightarrow c_i = 3 \frac{EI}{l^3} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Der hiermit gefundene Ausdruck für die Federkonstante c_i ist ausschließlich von der Biegesteifigkeit EI und der Länge l abhängig und weist somit eine vereinfachte Form auf.

Numerisches Beispiel zur Anwendung:

Querschnitt: QRO 200 x 5, Baustahl S235: $E = 21\,000\text{ kN/cm}^2$, $G = 8\,076,92\text{ kN/cm}^2$

- Stablänge $l = 150\text{ cm}$
- $EI = 51\,345\,000\text{ kNcm}^2$
- $A_y = 16,35\text{ cm}^2$
- $I_y = I_z = 2445\text{ cm}^4$, $I_T = 3756\text{ cm}^4$

Belastung: Einzelkraft $P_i = 50\text{ kN}$

$G\tilde{A} = 132\,057,64\text{ kN}$:

$$c_i = \frac{1}{\frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{G\tilde{A}}} = 43,39\text{ kN/cm} \Rightarrow w_i = \frac{P_i}{c_i} = 1,152\text{ cm} \equiv 11,52\text{ mm}$$

$G\tilde{A} = \infty$:

$$c_i = 3\frac{EI}{l^3} = 45,64\text{ kN/cm} \Rightarrow w_i = \frac{P_i}{c_i} = 1,096\text{ cm} \equiv 10,96\text{ mm}$$

Die Ergebnisse wurden in einer Vergleichsrechnung mit der Software *RSTAB* (Version 8.20, Fa. Dlubal) überprüft. Dabei wurde eine exakte Übereinstimmung der Ergebnisse festgestellt.

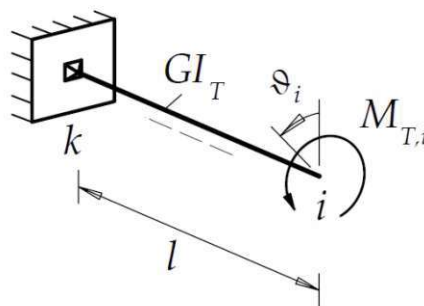
Kragarm unter Torsionsbeanspruchung

Abb. 2.7: Kragarm mit Torsionssteifigkeit GI_T und Torsionsmoment $M_{T,k}$ am freien Stabende

Der zuvor behandelte Kragarm wird auch in diesem Beispiel betrachtet. Anstelle der vertikalen Einzellast greift jedoch nun das Torsionsmoment $M_{T,i}$ am freien Stabende an, so wie es in Abbildung 2.7 zu sehen ist. Dieses wirkt im Gegenuhrzeigersinn um die Stabachse und erzeugt damit die Querschnittsverdrehung bzw. -verdrillung ϑ_i . Für diesen Fall soll im Folgenden die

Torsionsfedersteifigkeit $\bar{c}_{T,i}$ für eine Torsionsfeder am Punkt i mit dem PvK ermittelt werden. Diese soll als Ersatzsystem für den Kragarm dienen, welches die selben mechanischen Eigenschaften bezüglich der Rotation ϑ_i am Knoten i wie der Kragarm aufweist. wiederum gilt hierfür, dass das gleiche Torsionsmoment $M_{T,i}$ am Federmodell, als auch am Originalsystem die selbe Querschnittsverdrillung ϑ_i hervorrufen muss. Die gesuchte Federkonstante $\bar{c}_{T,i}$ wird wie folgt hergeleitet.

Am Knoten i wird das Torsionsmoment $M_{T,i}$ in der selben Verdrehungsrichtung wie die Querschnittsverdrillung ϑ_i angesetzt. Diese Größen sind arbeitskonjugiert und werden benötigt, um die gesuchte Federkonstante ermitteln zu können. Die Verdrillung ϑ_i zufolge des Torsionsmoments $M_{T,i}$ wird mit dem PvK identifiziert. Dazu wird das Torsionsmoment erneut als virtuelles Torsionsmoment $\delta M_{T,i}$ analog zum vorangegangenen Beispiel am freien Stabende eingeführt. Die reine Torsionsbeanspruchung des Kragarms bewirkt keinerlei Biegemomente und Querkräfte im System, so dass im nächsten Schritt ausschließlich die Torsionsmomentenverläufe M_T und δM_T gegenübergestellt werden, wie in Abbildung 2.8 zu erkennen ist. Hierzu werden einfache Gleichgewichtsbedingungen herangezogen.

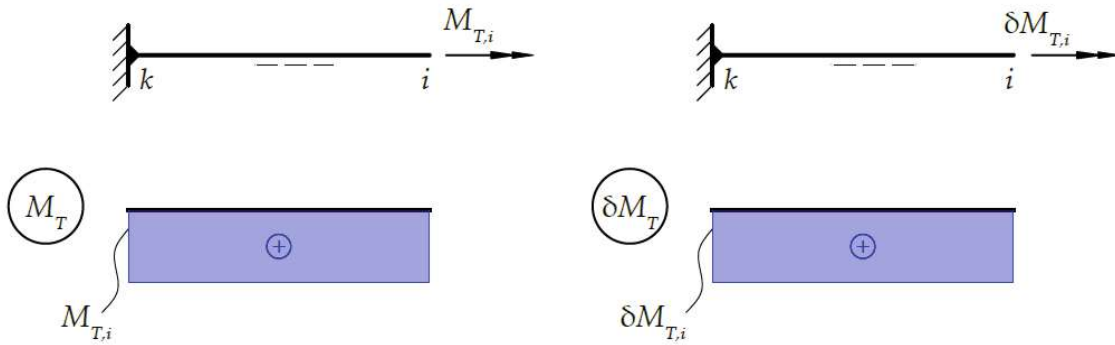


Abb. 2.8: Torsionsmomentenverläufe infolge des tatsächlichen Moments $M_{T,i}$ und des virtuellen Moments $\delta M_{T,i}$

Basierend auf der Arbeitsgleichung (2.4) kann nun die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte gemäß (2.13) formuliert werden.

$$\delta A^{(a)} = \vartheta_i \delta M_{T,i} \quad [\text{Einheitslos}] \quad (2.13)$$

Die Überlagerung der beiden konstanten Torsionsmomentenverläufe liefert die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte:

$$\delta A^{(i)} = - \int_0^l \frac{M_T(x) \delta M_T(x)}{GI_T} dx = -M_{T,i} \delta M_{T,i} \frac{l}{GI_T} \quad [\text{Einheitslos}] \quad (2.14)$$

Einsetzen von (2.13) und (2.14) in (2.4) liefert den allgemeinen Ausdruck für die Querschnittsverdrillung ϑ_i . Durch Anwendung des Federgesetzes (2.3) kann die Torsionsfederkonstante $\bar{c}_{T,i}$ für den Kragarm gemäß (2.15) identifiziert werden:

$$\begin{aligned} \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0 & \Rightarrow \vartheta_i = \frac{M_{T,i} l}{GI_T} \Rightarrow \bar{c}_{T,i} = \frac{M_{T,i}}{\vartheta_i} \\ & \Rightarrow \bar{c}_{T,i} = \frac{GI_T}{l} \quad [\text{Krafteinheit} \cdot \text{Längeneinheit}] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Der gefundene Ausdruck für $\bar{c}_{T,i}$ hängt lediglich von der Torsionssteifigkeit GI_T und der Länge l des Stabes ab. Eine lineare Drehfeder mit der Torsionsfederkonstante (2.15) kann als äquivalentes Ersatzsystem für den ursprünglichen Kragarm betrachtet werden. Der Kragarm kann demzufolge als Einzel- oder Teilsystem vollwertig durch eine Drehfeder mit der entsprechenden Torsionsfedersteifigkeit ersetzt werden. Die Torsionsfederkonstante gibt dabei an, wie steif der Stab auf die gegebene Torsionsbelastung reagiert. Eine große Torsionsfedersteifigkeit bewirkt kleine Verdrillungen am freien Stabende.

Die Analyse des Kragarms unter Torsionsbeanspruchung beschränkt sich im Rahmen dieser Arbeit nur auf die St. Venant'sche Torsion. Die Wölbkrafttorsion, welche den Umfang der Arbeit überschreitet, wird nicht behandelt.

Numerisches Beispiel zur Anwendung:

Querschnitt: QRO 200 x 5, Baustahl S235: $E = 21\,000\text{ kN/cm}^2$, $G = 8\,076,92\text{ kN/cm}^2$

- Stablänge $l = 150\text{ cm}$
- $EI = 51\,345\,000\text{ kNcm}^2$
- $A_y = 16,35\text{ cm}^2$
- $GI_T = 30\,336\,911,52\text{ kNcm}^2$
- $I_y = I_z = 2445\text{ cm}^4$, $I_T = 3756\text{ cm}^4$

Belastung: Torsionsmoment $M_{T,i} = 50\text{ kNm} = 5000\text{ kNcm}$

$$\bar{c}_{T,i} = \frac{GI_T}{l} = 202246,08\text{ kNcm} \Rightarrow \vartheta_i = \frac{M_{T,i}}{\bar{c}_{T,i}} = 0,0247\text{ rad} \equiv 24,7\text{ mrad}$$

Die Ergebnisse wurden in einer Vergleichsrechnung mit der Software *RSTAB* (Version 8.20, Fa. Dlubal) überprüft. Dabei wurde eine exakte Übereinstimmung der Ergebnisse festgestellt.

Einseitig eingespannter Stab mit konstanter Biegesteifigkeit EI und konstanter Schubsteifigkeit $\tilde{G}\tilde{A}$ - verdrehbare Anschlussstelle (Einspannstelle)



Abb. 2.9: Stab mit Biegesteifigkeit EI , Schubsteifigkeit $\tilde{G}\tilde{A}$ und frei drehbarer Anschlussstelle (Einspannstelle)

In diesem Beispiel soll die Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ für einen am Knoten i biegesteif angeschlossenen Stab mit konstanter Biege- und Schubsteifigkeit ermittelt werden. Der in Abbildung 2.9

dargestellte Stab hat die Länge l und ist gegenüber der verdrehbaren Einspannstelle am Knoten i mit einem einwertigen Auflager gelenkig verbunden. Die Rotation des Knotens i im Uhrzeigersinn wird als φ_i bezeichnet. Diese ist abhängig von den Steifigkeiten und der Länge des Stabes. In diesem Fall soll eine Drehfeder mit der Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ am Knoten i ermittelt werden, welche in weiterer Folge als mechanisch äquivalente Steifigkeit eines Federersatzsystems anstelle des Originalsystems verwendet werden kann. Maßgebende Bedingung hierfür ist, dass ein Biegemoment M_i , welches den Querschnittsdrehwinkel φ_i induziert, am Federmodell, als auch am ursprünglichen Stab die selben Rotationen hervorruft.

Die gesuchte Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ wird in diesem Beispiel sowohl mit dem PvK als auch mit der Übertragungsmatrix nach Theorie I. Ordnung (Rubin, 1993, 1.4) identifiziert. Dazu wird die Verdrehung der Einspannstelle durch ein Gelenk in der Einspannung simuliert, auf welches das Moment M_i einwirkt und somit den Querschnittsdrehwinkel φ_i erzeugt (vgl. Abb. 2.10). Da zunächst der Querschnittsdrehwinkel φ_i an der Stelle i gesucht wird, wird am Knoten i ein virtuelles Moment δM_i angebracht, welches dieselbe Wirkungsrichtung wie das tatsächliche Moment M_i aufweist. Nachfolgend können die Biegemomenten- und Querkraftverläufe M , δM bzw. V , δV des statisch bestimmten Grundsystems und des virtuellen Systems mithilfe von Gleichgewichtsbedingungen gegenübergestellt werden. Dies ist in Abbildung 2.10 zu sehen.

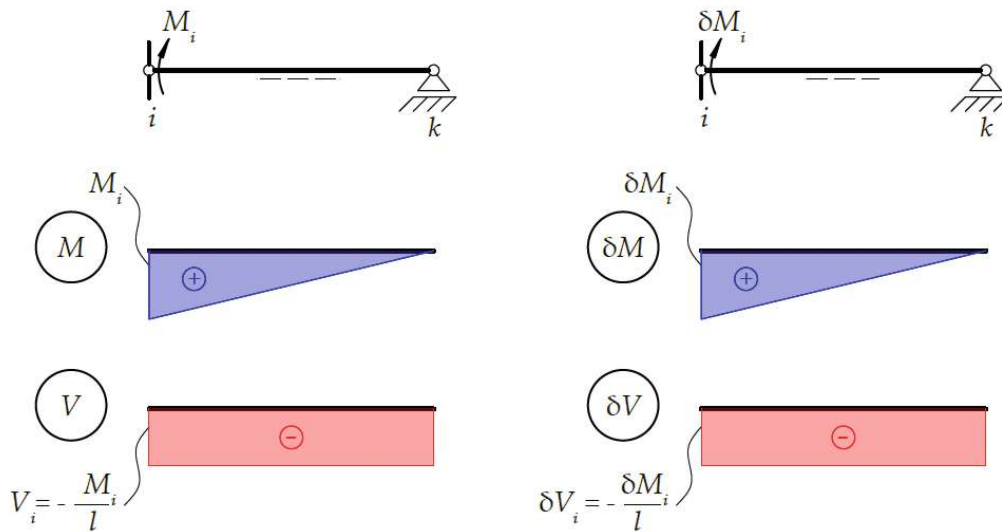


Abb. 2.10: Biegemomenten- und Querkraftverläufe infolge M_i und δM_i

Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ergibt sich wiederum aus dem Produkt der realen Verdrehung φ_i und des virtuellen Moments δM_i :

$$\delta A^{(a)} = \varphi_i \delta M_i \quad [\text{Einheitslos}] \quad (2.16)$$

Auf Grundlage von (2.9) erhält man durch Überlagerung der Zustandsverläufe gemäß der Integraltafeln (Pichler u. Eberhardsteiner, 2024, S. 189) die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte:

$$\begin{aligned} \delta A^{(i)} &= -\frac{1}{3} M \delta M \frac{l}{EI} - V \delta V \frac{l}{GA} = -\frac{1}{3} M \delta M \frac{l}{EI} - \frac{M_i}{l} \frac{\delta M_i}{l} \frac{l}{GA} \\ &= -\frac{1}{3} M \delta M \frac{l}{EI} - M_i \delta M_i \frac{1}{lGA} \quad [\text{Einheitslos}] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Einsetzen von (2.16) und (2.17) in (2.4) liefert den allgemeinen Ausdruck für die Querschnittsverdrehung φ_i . Durch Anwendung des Drehfedergesetzes (2.2) kann die Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ für den Stab gemäß (2.18) identifiziert werden:

$$\begin{aligned} \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0 &\Rightarrow \varphi_i = \frac{1}{3} \frac{M_i l}{EI} + \frac{M_i}{l G \bar{A}} \Rightarrow \bar{c}_i = \frac{M_i}{\varphi_i} \\ &\Rightarrow \bar{c}_i = \frac{1}{\frac{l}{3EI} + \frac{1}{l G \bar{A}}} \quad [\text{Krafteinheit} \cdot \text{Längeneinheit}] \quad (2.18) \end{aligned}$$

Die ermittelte Drehfedersteifigkeit $\bar{c}_i$ [Krafteinheit*Längeneinheit] gibt an, wie steif er sich bezüglich der Rotation φ_i infolge Einzelmoment M_i am Knoten i verhält. Sie stellt die Steifigkeit eines Ersatzfedersystems für den ursprünglichen Kragarm dar. Je höher ihr Betrag ist, desto kleiner ist der sich aus Verdrehung ergebende Querschnittsdrehwinkel am Knoten i .

Auch in diesem Beispiel soll der Sonderfall $G \bar{A} = \infty$ betrachtet werden, so dass die Querkraftverformungen vernachlässigt werden. Demnach entfallen in der Analyse alle Querkraftanteile. Gleichung (2.19) führt auf die Drehfederkonstante in vereinfachter Form ohne Berücksichtigung der Querkraftverformungen:

$$\begin{aligned} \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0 &\Rightarrow \varphi_i = \frac{1}{3} \frac{M_i l}{EI} \Rightarrow \bar{c}_i = \frac{M_i}{\varphi_i} \\ &\Rightarrow \bar{c}_i = 3 \frac{EI}{l} \quad [\text{Krafteinheit} \cdot \text{Längeneinheit}] \quad (2.19) \end{aligned}$$

Alternativ zur Herleitung mittels PvK kann die Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ bzw. der Querschnittsdrehwinkel φ_i an der Anschlussstelle auch mit Hilfe der sogenannten Übertragungsmatrix nach Theorie I. Ordnung (Rubin, 1993, 1.4) ermittelt werden. Sie verknüpft den Zustandsvektor $\vec{Z}_i$ am Anfangspunkt i eines Stabes mit dem Zustandsvektor $\vec{Z}_x$ an einer beliebigen Stelle x des Stabes. Gleichung (2.20) zeigt die Übertragungsmatrix F_{xi} (Rubin, 1993, 1.4) für gerade Stäbe mit konstantem Querschnitt und wie die Zustandsvektoren miteinander gekoppelt werden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_x \\ \varphi_x \\ M_x \\ V_x \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{Z}_x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_1 & -\frac{a_2}{EI} & -\left(\frac{a_3}{EI} - \frac{a_1}{G \bar{A}}\right) & \vdots & w^L \\ 0 & 1 & -\frac{a_1}{EI} & -\frac{a_2}{EI} & \vdots & \varphi^L \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & \vdots & M^L \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & V^L \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Übertragungsmatrix } F_{xi}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ M_i \\ V_i \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{Z}_i} \quad (2.20)$$

Ein Zustandsvektor umfasst folgende Zustandsgrößen: die Durchbiegung w , den Querschnittsdrehwinkel φ , das Biegemoment M und die Querkraft V . Bei den aufscheinenden a_j -Funktionen handelt es sich um die Lösungsfunktionen der linearen Differentialgleichungen der Theorie I.

Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie sind wie folgt definiert.

Für die Funktionen $a_j = a_j(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} x \geq 0: \quad a_0 &= 1, \quad a_j = \frac{x^j}{j!} \quad \text{für } j = 1, 2, 3, \\ x < 0: \quad \text{alle } a_j &= 0. \end{aligned}$$

Für die Gesamtlänge des Stabes $x = l$ gilt:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = l, \quad a_2 = \frac{l^2}{EI}, \quad a_3 = \frac{l^3}{EI}.$$

In die Zustandsvektoren werden nun die bekannten Randbedingungen des Kragarms eingesetzt, wodurch das Gleichungssystem gelöst werden kann. Außerdem ist die Spalte der Lastglieder gemäß Rubin (1993, 1.4) zufolge des Moments M_i auszufüllen.

Die ausgefüllte Übertragungsmatrix für die Gesamtlänge des Stabes $x = l$ wird gemäß (2.21) ermittelt, wobei mit $M_{i,links} = 0$ das Auflagermoment links vom Gelenk am Knoten i gemeint ist.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_k = 0 \\ \varphi_k \\ M_k = 0 \\ V_k \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{Z}_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2EI} & -\left(\frac{l^3}{6EI} - \frac{l}{GA}\right) & \vdots & -\frac{l^2}{2EI}M_i \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EI} & -\frac{l^2}{2EI} & \vdots & -\frac{l}{EI}M_i \\ 0 & 0 & 1 & l & \vdots & M_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Übertragungsmatrix } F_{ki}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w_i = 0 \\ \varphi_i \\ M_{i,links} = 0 \\ V_i \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{Z}_i}. \quad (2.21)$$

Zunächst wird die unbekannte Querkraft V_i aus der dritten Zeile der Übertragungsmatrix ermittelt.

$$M_k = 0 = \underbrace{M_{i,links}}_0 + lV_i + M_i = 0 \quad \Rightarrow \quad V_i = -\frac{M_i}{l}. \quad (2.22)$$

Der gesuchte Querschnittsdrehwinkel φ_i wird aus der ersten Zeile des Gleichungssystems wie folgt ermittelt.

$$w_k = 0 = l\varphi_i - \left(\frac{l^3}{6EI} - \frac{l}{GA}\right) \underbrace{\frac{V_i}{M_i}}_{-\frac{1}{l}} - \frac{l^2}{2EI}M_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = \frac{1}{3} \frac{M_i l}{EI} + \frac{M_i}{lGA} \quad (2.23)$$

Mit Hilfe des gefundenen Querschnittsdrehwinkels φ_i und des Federgesetzes für Drehfedern kann schlussendlich die Drehfederkonstante für den einseitig eingespannten Stab ermittelt werden. Wie zu erwarten gleicht das Ergebnis nach (2.24) jenem, welches mit dem PvK ermittelt wurde.

$$\varphi_i = \frac{1}{3} \frac{M_i l}{EI} + \frac{M_i}{l G \tilde{A}} \Rightarrow \bar{c}_i = \frac{M_i}{\varphi_i} \Rightarrow \bar{c}_i = \frac{1}{\frac{l}{3EI} + \frac{1}{l G \tilde{A}}} \quad [\text{Krafteinheit} \cdot \text{Längeneinheit}] \quad (2.24)$$

Für den Sonderfall eines schubsteifen Systems ($G \tilde{A} = \infty$) entfallen die Terme der Schubsteifigkeit in der Übertragungsmatrix nach (2.21). Die Matrizengleichung reduziert sich somit unter der Berücksichtigung der Randbedingungen auf den folgenden Ausdruck.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_k = 0 \\ \varphi_k \\ M_k = 0 \\ V_k \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{Z}_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2EI} & -\frac{l^3}{6EI} & \vdots & -\frac{l^2}{2EI} M_i \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EI} & -\frac{l^2}{2EI} & \vdots & -\frac{l}{EI} M_i \\ 0 & 0 & 1 & l & \vdots & M_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Übertragungsmatrix } F_{ki}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w_i = 0 \\ \varphi_i \\ M_{i,links} = 0 \\ V_i = \frac{M_i}{l} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{Z}_i} \quad (2.25)$$

Analog zur vorangegangenen Berechnung kann der Querschnittsdrehwinkel φ_i aus der ersten Zeile des Gleichungssystems gemäß (2.26) ermittelt werden.

$$w_k = 0 = l \varphi_i - \frac{l^3}{6EI} \left(-\frac{M_i}{l} \right) - \frac{l^2}{2EI} M_i \Rightarrow \varphi_i = \frac{1}{3} \frac{M_i l}{EI} \quad (2.26)$$

Die gesuchte Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ kann wiederum mit Hilfe des zugehörigen Federgesetzes identifiziert werden.

$$\varphi_i = \frac{1}{3} \frac{M_i l}{EI} \Rightarrow \bar{c}_i = \frac{M_i}{\varphi_i} \Rightarrow \bar{c}_i = 3 \frac{EI}{l} \quad [\text{Krafteinheit} \cdot \text{Längeneinheit}] \quad (2.27)$$

Gleichung (2.27) zeigt, dass die Berechnungsmethode mit den Übertragungsbeziehungen auch im Sonderfall $G \tilde{A} = \infty$ dasselbe Ergebnis wie das PvK gemäß (2.19) liefert. Folglich kann also mit beiden Methoden eine Drehfederkonstante ermittelt werden, welche den einseitig eingespannten Stab allein durch seine Ersatzfedersteifigkeit mechanisch ersetzt. Konkret heißt dies, dass der ursprüngliche Stab als Einzel- oder Teilsystem vollständig durch eine Drehfeder mit der zuvor ermittelten Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ ersetzt werden kann, ohne dass dabei relevante mechanische Eigenschaften vernachlässigt werden.

Numerisches Beispiel zur Anwendung:

Querschnitt: QRO 200 x 5, Baustahl S235: $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$, $G = 8\,076,92 \text{ kN/cm}^2$

- Stablänge $l = 150 \text{ cm}$
- $EI = 51\,345\,000 \text{ kNcm}^2$
- $A_y = 16,35 \text{ cm}^2$
- $I_y = I_z = 2445 \text{ cm}^4$, $I_T = 3756 \text{ cm}^4$

Belastung: Biegemoment $M_i = 50 \text{ kNm} = 5000 \text{ kNcm}$

$G\tilde{A} = 132\,057,64 \text{ kN}$:

$$\bar{c}_i = \frac{1}{\frac{l}{3EI} + \frac{1}{lG\tilde{A}}} = 976288,24 \text{ kNcm} \Rightarrow \varphi_i = \frac{M_i}{\bar{c}_i} = 0,0051 \text{ rad} \equiv 5,1 \text{ mrad}$$

$G\tilde{A} = \infty$:

$$\bar{c}_i = 3 \frac{l}{EI} = 1026900 \text{ kNcm} \Rightarrow \varphi_i = \frac{M_i}{\bar{c}_i} = 0,00486 \text{ rad} \equiv 4,86 \text{ mrad}$$

Die Ergebnisse wurden in einer Vergleichsrechnung mit der Software *RSTAB* (Version 8.20, Fa. Dlubal) überprüft. Dabei wurde eine exakte Übereinstimmung der Ergebnisse festgestellt.

Beidseitig eingespannter Stab mit Querkraftgelenk, konstanter Biegesteifigkeit EI und konstanter Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ - verdrehbare Einspannstelle



Abb. 2.11: Beidseitig eingespannter Stab mit Querkraftgelenk am Knoten i , Biegesteifigkeit EI , Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ und verdrehbarer Einspannstelle

In Anlehnung an das vorangegangene Beispiel wird in diesem Fall ein Stab mit konstanter Biege- und Schubsteifigkeit betrachtet, dessen rechtes Stabenende ebenfalls voll eingespannt ist. Am Knoten i ist nun ein Querkraftgelenk gemäß Abbildung 2.11 zu erkennen, welches die Aufnahme von Vertikalkräften unterdrückt. Zusätzlich ist dieser Knoten drehbar gelagert, so dass der sich im Uhrzeigersinn öffnende Drehwinkel φ_i an dieser Stelle ergibt, welcher von der Stablänge und den Stabsteifigkeiten EI und $G\tilde{A}$ abhängt. Erneut soll für diesen Stab die Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ ermittelt werden, mit welcher das System mechanisch vollständig ersetzt werden kann. Analog zum vorherigen Beispiel ist für diese Untersuchung maßgebend, dass ein Biegemoment M_i , welches den Querschnittsdrehwinkel φ_i induziert, am Federmodell, als auch am ursprünglichen Stab dieselben Verdrehungen hervorruft.

Die gesuchte Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ wird im vorliegenden Beispiel mit Hilfe der bereits eingeführten Übertragungsmatrix nach Th. I. Ordnung (Rubin, 1993, 1.4) ermittelt. Die Verdrehung der Einspannstelle wird durch ein Gelenk in der Einspannung simuliert, auf welches das Moment M_i einwirkt und somit den Querschnittsdrehwinkel φ_i erzeugt (vgl. Abb. 2.12). Dies erleichtert in weiterer Folge die Formulierung der Randbedingungen, die für die Lösung des Gleichungssystems zwingend erforderlich sind.

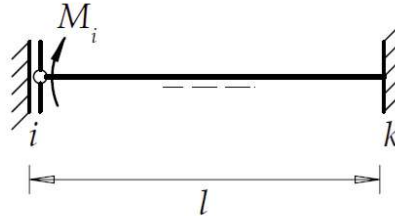


Abb. 2.12: Die Verdrehung des linken Auflagers wird durch das Biegemoment M_i und ein Gelenk in der Einspannstelle simuliert

Nun kann die Übertragungsmatrix nach Th. I. Ordnung gemäß (2.20) herangezogen werden und die Zustandsvektoren $\vec{Z}_i$ und $\vec{Z}_k$ mit den entsprechenden Randbedingungen ausgefüllt werden. Die Spalte der Lastglieder zufolge des Moments M_i ist analog zum vorangegangenen Beispiel nach Rubin (1993, 1.4) auszufüllen. Mit $M_{i,links}$ ist wiederum das Auflagermoment links vom Gelenk am Knoten i gemeint.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_k = 0 \\ \varphi_k = 0 \\ M_k \\ V_k \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{Z}_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2EI} & -\left(\frac{l^3}{6EI} - \frac{l}{GA}\right) & \vdots & -\frac{l^2}{2EI}M_i \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EI} & -\frac{l^2}{2EI} & \vdots & -\frac{l}{EI}M_i \\ 0 & 0 & 1 & l & \vdots & M_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Übertragungsmatrix } F_{ki}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ M_{i,links} = 0 \\ V_i = 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{Z}_i} \quad (2.28)$$

Der zur Ermittlung der Drehfederkonstanten $\bar{c}_i$ benötigte Querschnittsdrehwinkel φ_i kann in diesem Fall unmittelbar aus der zweiten Zeile der Matrizengleichung ermittelt werden. Gemäß Gleichung (2.29) ergibt sich dieser folgendermaßen.

$$\varphi_k = 0 = \varphi_i - \frac{l}{EI}M_i \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = \frac{l}{EI}M_i \quad (2.29)$$

Die gesuchte Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ kann nun wie gewohnt mit Hilfe des Federgesetzes für lineare Drehfedern ermittelt werden.

$$\varphi_i = \frac{l}{EI}M_i \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_i = \frac{M_i}{\varphi_i} \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_i = \frac{EI}{l} \quad [\text{Krafteinheit} \cdot \text{Längeneinheit}] \quad (2.30)$$

Mit der erhaltenen Federkonstante kann auch der betrachtete beidseitig eingespannte Stab mit Querkraftgelenk und verdrehbarer Einspannstelle vollständig durch eine einfache Drehfeder am

Knoten i ersetzt werden.

In diesem speziellen Fall ist der Querschnittsdrehwinkel φ_i und damit auch die daraus ermittelte Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ unabhängig von der Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$. Somit ist für die Drehfederkonstante irrelevant, ob der Stab als schubsteif oder schubweich angenommen wird.

Numerisches Beispiel zur Anwendung:

Querschnitt: QRO 200 x 5, Baustahl S235: $E = 21\,000\text{ kN/cm}^2$, $G = 8\,076,92\text{ kN/cm}^2$

- Stablänge $l = 150\text{ cm}$
- $EI = 51\,345\,000\text{ kNcm}^2$
- $A_y = 16,35\text{ cm}^2$
- $I_y = I_z = 2445\text{ cm}^4$, $I_T = 3756\text{ cm}^4$

Belastung: Biegemoment $M_i = 50\text{ kNm} = 5000\text{ kNcm}$

$$\bar{c}_i = \frac{EI}{l} = 342300\text{ kNcm} \Rightarrow \varphi_i = \frac{M_i}{\bar{c}_i} = 0,0146\text{ rad} \equiv 14,6\text{ mrad}$$

Die Ergebnisse wurden in einer Vergleichsrechnung mit der Software *RSTAB* (Version 8.20, Fa. Dlubal) überprüft. Dabei wurde eine exakte Übereinstimmung der Ergebnisse festgestellt.

Die ermittelten Drehfedersteifigkeiten bleiben identisch für den Fall, dass die Einspannung und das Querkraftgelenk am Knoten i entfallen und der Stab somit zu einem Kragarm wird. Dieser Fall ist in Tabelle 2.2, Zeile 7 dargestellt.

Beidseitig eingespannter Stab mit Querkraftgelenk, konstanter Biegesteifigkeit EI und konstanter Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ - Einwirkung der Einzellast P_i

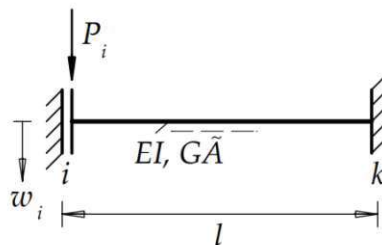


Abb. 2.13: Beidseitig eingespannter Stab mit Querkraftgelenk am Knoten i , Biegesteifigkeit EI , Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ und Einzellast P_i

Das in Abbildung 2.13 zu erkennende System ist im Hinblick auf die Geometrie und die Lagerung identisch mit dem vorangegangenen Beispiel. In diesem Fall wirkt jedoch die Einzellast P_i anstatt der verdrehten Einspannstelle auf das System ein, welche die Vertikalverschiebung w_i

am Knoten i hervorruft. Daher wird in diesem System, im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen, keine Verdrehung mehr verursacht. Folglich wird in diesem Fall eine Längsfederkonstante c_i am Knoten i ermittelt, um das System durch eine lineare Längsfeder mit identischen mechanischen Eigenschaften ersetzen zu können. Zur korrekten Herleitung der Federkonstanten ist maßgebend, dass das Federmodell unter der Einwirkung derselben Einzellast P_i die gleiche Verschiebung w_i wie das ursprüngliche System aufweist. Demzufolge ist zunächst die aus der Einzellast resultierende Vertikalverschiebung (konjugierte Arbeitsgrößen) zu ermitteln, wodurch die gesuchte Ersatzfederkonstante c_i einfach identifiziert werden kann. Zur Ermittlung der Größen wird erneut die Übertragungsmatrix nach Th. I. Ordnung (Rubin, 1933, 1.4) gemäß Gleichung (2.20) herangezogen.

Wie bisher werden die bekannten Randbedingungen der Knotenpunkte i und k in die jeweiligen Zustandsvektoren eingesetzt, so dass das Gleichungssystem lösbar wird. Ebenso ist die Spalte der Lastglieder zufolge der Einzelkraft P_i gemäß Studienblatt 1.4 (Rubin, 1993) auszufüllen. Die Übertragungsmatrix und die Zustandsvektoren haben somit folgendes Aussehen.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_k = 0 \\ \varphi_k = 0 \\ M_k \\ V_k \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{Z}_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2EI} & -\left(\frac{l^3}{6EI} - \frac{l}{GA}\right) & \vdots & \left(\frac{l^3}{6EI} - \frac{l}{GA}\right) P_i \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EI} & -\frac{l^2}{2EI} & \vdots & -\frac{l^2}{2EI} P_i \\ 0 & 0 & 1 & l & \vdots & -l P_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -P_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Übertragungsmatrix } F_{ki}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i = 0 \\ M_i \\ V_i = 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{Z}_i} \quad (2.31)$$

Zur Ermittlung der Vertikalverschiebung w_i ist nun zunächst das Einspannmoment M_i aus der zweiten Zeile des Gleichungssystems gemäß (2.31) zu identifizieren, um die Anzahl der Unbekannten im Zustandsvektor $\vec{Z}_k$ zu reduzieren.

$$\varphi_k = 0 = -\frac{l}{EI} M_i - \frac{l^2}{2EI} P_i \Rightarrow M_i = \frac{l}{2} P_i \quad (2.32)$$

Das Einspannmoment aus (2.32) kann nun dazu verwendet werden, die gesuchte Vertikalverschiebung w_i aus der ersten Zeile des Gleichungssystems herauszulösen.

$$w_k = 0 = w_i - \frac{l^2}{2EI} \underbrace{M_i}_{\frac{l}{2} P_i} - \left(\frac{l^3}{6EI} - \frac{l}{GA}\right) P_i \Rightarrow w_i = \left(\frac{l^3}{12EI} + \frac{l}{GA}\right) P_i \quad (2.33)$$

Die somit bekannte Vertikalverschiebung kann nun gemeinsam mit der einwirkenden Einzelkraft in das Federgesetz der linearen Längsfeder eingesetzt werden (2.34). Daraus resultiert die gesuchte Ersatzfederkonstante c_i für das System.

$$w_i = \left(\frac{l^3}{12EI} + \frac{l}{GA}\right) P_i \Rightarrow c_i = \frac{1}{\frac{l^3}{12EI} + \frac{l}{GA}} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \quad (2.34)$$

Die ermittelte Längsfederkonstante kann als Ersatzsteifigkeit für das ursprüngliche Stabsystem betrachtet werden. In Form einer linearen Längsfeder mit der errechneten Federsteifigkeit kann sie das Stabsystem mechanisch vollständig ersetzen. Sie trifft eine Aussage darüber, wie steif sich das System bzw. eine Längsfeder zufolge der Einzellast P_i am Knoten i in physikalischer Richtung der Einzelkraft verhält.

Für den Fall, dass der untersuchte Stab als schubstarr ($G\tilde{A} = \infty$) betrachtet wird, entfallen in (2.33) die Querverformungsanteile und die resultierende Längsfederkonstante hängt infolgedessen nur noch von der Biegesteifigkeit EI und der Länge l ab.

$$\begin{aligned} w_k &= w_i - \frac{l^2}{2EI} \left(\frac{l}{2} P_i \right) - \frac{l^3}{6EI} P_i = 0 \quad \Rightarrow \quad w_i = \frac{l^3}{12EI} P_i \\ c_i &= \frac{P_i}{w_i} \quad \Rightarrow \quad c_i = 12 \frac{EI}{l^3} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Numerisches Beispiel zur Anwendung:

Querschnitt: QRO 200 x 5, Baustahl S235: $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$, $G = 8\,076,92 \text{ kN/cm}^2$

- Stablänge $l = 150 \text{ cm}$
- $EI = 51\,345\,000 \text{ kNcm}^2$
- $A_y = 16,35 \text{ cm}^2$
- $I_y = I_z = 2445 \text{ cm}^4$, $I_T = 3756 \text{ cm}^4$

Belastung: Einzelkraft $P_i = 50 \text{ kN}$

$G\tilde{A} = 132\,057,64 \text{ kN}$:

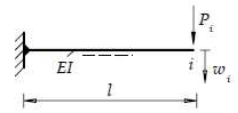
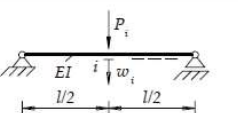
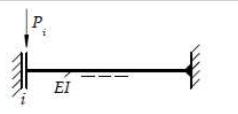
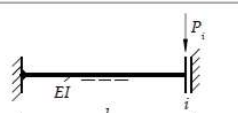
$$c_i = \frac{1}{\frac{l^3}{12EI} + \frac{l}{G\tilde{A}}} = 151,2054368 \text{ kN/cm} \quad \Rightarrow \quad w_i = \frac{P_i}{c_i} = 0,331 \text{ cm} \equiv 3,31 \text{ mm}$$

$G\tilde{A} = \infty$:

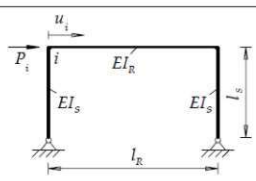
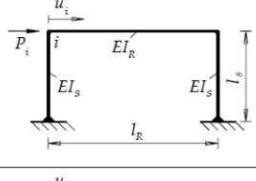
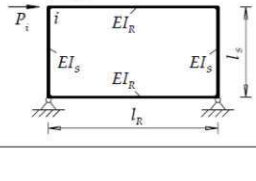
$$\bar{c}_i = 12 \frac{EI}{l^3} = 182,56 \text{ kN/cm} \quad \Rightarrow \quad w_i = \frac{P_i}{\bar{c}_i} = 0,274 \text{ cm} \equiv 2,74 \text{ mm}$$

Die Ergebnisse wurden in einer Vergleichsrechnung mit der Software *RSTAB* (Version 8.20, Fa. Dlubal) überprüft. Dabei wurde eine exakte Übereinstimmung der Ergebnisse festgestellt.

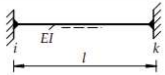
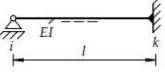
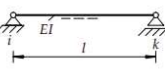
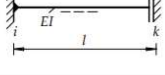
Im Anschluss an die bisherigen Untersuchungen werden die Ergebnisse für Einzelstäbe mit unterschiedlichen Lagerungsfällen und einige weitere Systeme tabellarisch zusammengefasst:

Ersatzlängsfederkonstante c für einfache Tragelemente nach Th. I. Ordnung		
System	Längsfederkonstante c_i [Krafteinheit / Längeneinheit]	
	$0 < G\tilde{A} < \infty$	$G\tilde{A} = \infty$
	$\frac{1}{\frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{G\tilde{A}}}$	$3 \frac{EI}{l^3}$
	$\frac{1}{\frac{l^3}{48EI} + \frac{l}{4G\tilde{A}}}$	$48 \frac{EI}{l^3}$
	$\frac{1}{\frac{l^3}{12EI} + \frac{l}{G\tilde{A}}}$	$12 \frac{EI}{l^3}$
	$\frac{1}{\frac{l^3}{12EI} + \frac{l}{G\tilde{A}}}$	$12 \frac{EI}{l^3}$

Tab. 2.1: Längsfederkonstanten für gerade Einzelstäbe mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie I. Ordnung

Ersatzlängsfederkonstante c für einfache Tragelemente nach Th. I. Ordnung	
System	Längsfederkonstante [Krafteinheit / Längeneinheit] $EA = \infty \quad G\tilde{A} = \infty$
	$c_i = \frac{2}{l_s^2 \left(\frac{l_s}{3EI_s} + \frac{l_R}{6EI_R} \right)}$
	$\eta = 6 \frac{l_s EI_R}{l_R EI_s} \quad c_i = 24 \frac{1 + \eta}{4 + \eta} \frac{EI_s}{l_s^3}$
	$c_i = \frac{24}{l_s^2 \left(\frac{l_s}{EI_s} + \frac{l_R}{EI_R} \right)}$

Tab. 2.2: Längsfederkonstanten für Rahmensysteme mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie I. Ordnung

Ersatzdrehfederkonstante $\bar{c}$ für einfache Tragelemente nach Th. I. Ordnung				
System	Drehfederkonstante			
	$\bar{c}_i$ [Krafteinheit * Längeneinheit]	$\bar{c}_k$ [Krafteinheit * Längeneinheit]	$\bar{c}_i$ [Krafteinheit * Längeneinheit]	$\bar{c}_k$ [Krafteinheit * Längeneinheit]
	$0 < G\tilde{A} < \infty$	$G\tilde{A} = \infty$	$0 < G\tilde{A} < \infty$	$G\tilde{A} = \infty$
	$\left(\frac{3}{1+12 \frac{EI}{l^2 G\tilde{A}}} + 1 \right) \frac{EI}{l}$	$4 \frac{EI}{l}$	$\left(\frac{3}{1+12 \frac{EI}{l^2 G\tilde{A}}} - 1 \right) \frac{EI}{l}$	$4 \frac{EI}{l}$
	$\frac{1}{\frac{l}{3EI} + \frac{l}{G\tilde{A}}}$	$3 \frac{EI}{l}$	0	0
	0	0	$\frac{1}{\frac{l}{3EI} + \frac{l}{G\tilde{A}}}$	$3 \frac{EI}{l}$
	0	0	0	0
	$\frac{EI}{l}$	$\frac{EI}{l}$	$\frac{EI}{l}$	$\frac{EI}{l}$
	$\frac{EI}{l}$	$\frac{EI}{l}$	$\frac{EI}{l}$	$\frac{EI}{l}$

Tab. 2.3: Drehfederkonstanten für gerade Einzelstäbe mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie I. Ordnung

2.3 Ermittlung von Federkonstanten nach Theorie II. Ordnung

In diesem Abschnitt wird nun die Ermittlung von Federkonstanten gemäß Theorie II. Ordnung anhand der zuvor behandelten Beispiele aus Abschnitt 2.2 durchgeführt. Zugrunde liegt dabei nach wie vor das Prinzip der virtuellen Kräfte und die Übertragungsbeziehungen (Rubin, 1993) zur Herleitung der gesuchten Federkonstanten. Der Unterschied besteht darin, dass das reale System zufolge tatsächlicher Lastgrößen nun nach Theorie II. Ordnung berechnet werden muss, während das virtuelle System noch immer nach Theorie I. Ordnung gelöst werden kann. Demzufolge können die bislang herangezogenen Integraltafeln zur Überlagerung der Zustandsverläufe nicht mehr verwendet werden, da diese mit der Theorie II. Ordnung nicht kompatibel sind. Die Ermittlung der gesuchten Verschiebungen u_i und Verdrehungen φ_i wird daher mit den Winkelgewichten oder den Übertragungsbeziehungen (Rubin, 1993) der Theorie II. Ordnung durchgeführt. An dieser Stelle wird auf die fundamentalen Zusammenhänge der Theorie II. Ordnung von Einzelstäben mit konstanter Querschnittshöhe nach Rubin (1993) zurückgegriffen. Diese sind entscheidend, um das nötige Verständnis der methodischen Vorgehensweise in den Beispielen sowie der theoretischen Hintergründe zu gewährleisten. Insbesondere soll auf die Berechnung und Anwendung der b_j -Funktionen eingegangen werden. Diese sind die Lösungsfunktionen der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Mit den b_j -Funktionen lassen sich die Zustandsfunktionen der Biegestabtheorie II. Ordnung analytisch angeben. Selbiges gilt für die Übertragungsbeziehungen in der schubstarr und schubweichen Theorie II. Ordnung. Die Ermittlung der b_j -Funktionen erfolgt gemäß Tabelle (2.4). Die Eingangsgrößen, die hierzu erforderlich sind, sind die Parameter f , K und γ , welche Auskunft über die Steifigkeitsverhältnisse des Stabes geben. Außerdem fließen die Axialdruck- oder Zugkraft N^{II} , sowie die Lauflängsordinate x entlang des Stabes mit ein. Werden also Reaktionskräfte oder Verformungen an den Stabenden gesucht, ist $x = l$ zu setzen. Sollte der betrachtete Stab zusätzlich als schubstarr angenommen werden, sprich $G\tilde{A} = \infty$ und damit $\gamma = 1$, so entspricht der Ausdruck $fx = fl$ in diesem Fall der in der Theorie II. Ordnung verwendeten Stabkennzahl ε . Diese trifft eine Aussage über die Stabilitätsgefährdung eines Stabes.

$$f = \sqrt{|K|} \quad K = \gamma \frac{N^{\text{II}}}{EI} \quad \gamma = \frac{1}{1 + N^{\text{II}}/G\tilde{A}} \quad \varepsilon = l \sqrt{\frac{|N^{\text{II}}|}{EI}}$$

Theorie	N^{II}	$b_0 =$	$b_1 =$	$b_2, b_3, \dots$
II. Ordnung	< 0	$\cos fx$	$\frac{\sin fx}{f}$	$b_j = \frac{b_{j-2} - a_{j-2}}{K}$
	> 0	$\cosh fx$	$\frac{\sinh fx}{f}$	
I. Ordnung	$= 0$	$b_j = a_j$		

Tab. 2.4: Analytische Formeln für die b_j -Funktionen (Rubin, 1993, 2.2)

Unter Anwendung der b_j -Funktionen und der daraus resultierenden Formeln werden in den folgenden Beispielen die Zustandslinien infolge der tatsächlichen Lastgrößen im Rahmen des PvK ermittelt und deren Integration ermöglicht. Auch in diesem Abschnitt sollen zunächst alle Berechnungen unter Berücksichtigung der Querkraftverformungen durchgeführt werden. In einem weiteren Rechenlauf wird daraufhin die Schubsteifigkeit als unendlich groß angenommen.

Kragarm nach Theorie II. Ordnung mit konstanter Biegesteifigkeit EI und konstanter Schubsteifigkeit GA

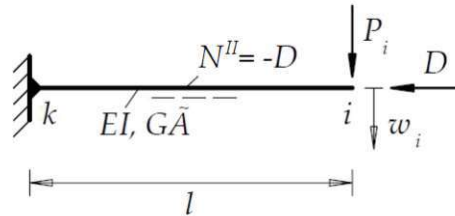


Abb. 2.14: Kragarm mit vertikaler Einzellast P_i , Axialdruckkraft $N^{\text{II}} = -D$ und konstanter Biegesteifigkeit EI

Das zuvor in Abschnitt 2.2 behandelte Beispiel des Kragarms mit der Länge l und konstanter Biegesteifigkeit EI wird nun gemäß Abbildung 2.14 um die Axialdruckkraft $N^{\text{II}} = -D$ am freien Stabende i erweitert. Auch in diesem Fall soll die Federkonstante c_i einer linearen Längsfeder am Knoten i ermittelt werden, die als Ersatzsystem für den Kragarm fungiert und dieselben mechanischen Eigenschaften trotz der axialen Belastung aufweist. Konkret heißt dies, dass am ursprünglichen Kragarm, als auch im darauf basierenden Ersatzfedersystem dieselben Vertikalverschiebungen w_i zufolge derselben Einzellast P_i entstehen.

Die Herleitung der Federkonstanten geschieht zunächst unter Zuhilfenahme vom Prinzip der virtuellen Kräfte. Prinzipiell verringern Druckkräfte die Steifigkeit des Stabes bzw. Systems, während Zugkräfte die Steifigkeit erhöhen. Dem Stab wird eine Änderung der Steifigkeit infolge der Axialdruckkraft $N^{\text{II}} = -D$ unterstellt, wodurch die Ermittlung der Federkonstante nach Theorie II. Ordnung erfolgen muss. Wie bereits erwähnt, bedeutet dies konkret, dass die Verläufe der Zustandslinien infolge tatsächlicher Lasten am realen System in diesem Fall ebenfalls im Rahmen der Theorie II. Ordnung ermittelt werden müssen.

Gesucht wird in diesem Beispiel die vertikale Verschiebung w_i zufolge der Einzelkraft P_i mit dem PvK. Zunächst kann im ersten Schritt analog zur Berechnung nach Th. I. Ordnung vorgegangen werden. Dazu wird an der Stelle, an der die Verschiebung ermittelt werden soll, eine virtuelle Einzelkraft δP_i mit der selben Wirkungsrichtung wie die tatsächliche Einzelkraft P_i aufgebracht. Nachfolgend sind die resultierenden Biegemomentenverläufe M und δM des realen und des virtuellen Zustandes gegenübergestellt.

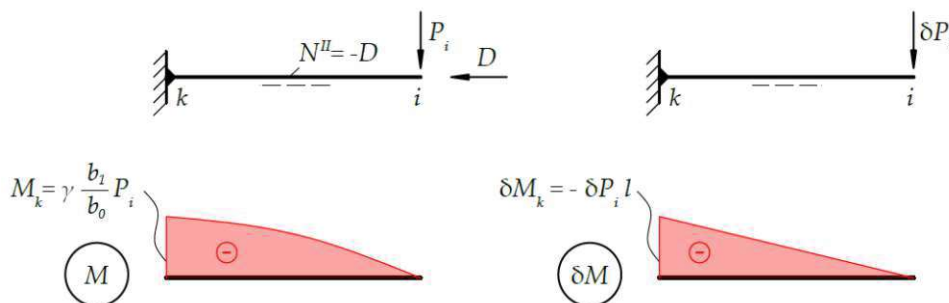


Abb. 2.15: Biegemomentenverläufe M und δM des Kragarms infolge der tatsächlichen Lasten P_i und D nach Th. II. Ord. und der virtuellen Last δP_i nach Th. I. Ordnung

Wie in Abbildung 2.15 zu erkennen ist, ergibt sich infolge der virtuellen Lastgröße δP_i nach Th. I. Ordnung ein linearer Momentenverlauf mit dem Einspannmoment δM_k . Wohingegen die realen Lasten an dem Kragarm einen nichtlinearen Momentenverlauf induzieren. Das dabei entstehende Stabendmoment M_k ergibt sich gemäß des Studienblattes 2.6, Zeile 12 (Rubin, 1993), in Abhängigkeit der Funktionen b_0 und b_1 . Nach Tabelle 2.4 ermitteln sich alle erforderlichen b_j -Funktionen bzw. -werte in Abhängigkeit der Stabkennzahl ε für den Kragarm zu

$$b_0 = \cos(\varepsilon), \quad b_1 = l \frac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad b_2 = l^2 \frac{b_0 - 1}{\varepsilon^2}, \quad b_3 = l^2 \frac{b_1 - l}{\varepsilon^2}. \quad (2.36)$$

Den ersten Teil der Arbeitsgleichung (2.4) bildet die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte. Analog zu (2.8) erhält man diese aus dem Produkt der realen Vertikalverschiebung w_i und der virtuellen δP_i .

Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte $\delta A^{(i)}$ hingegen lässt sich nicht mehr wie bis gewohnt durch die Überlagerung der Momentenverläufe mittels Integraltafeln berechnen, da diese Tabelle die Effekte der Theorie II. Ordnung generell nicht berücksichtigt. Dieses Problem hat Rubin (1993) mit Einführung der sogenannten Winkelgewichte, ϕ , (stabsehenbezogene Drehwinkel der Stabrandquerschnitte) gelöst. Diese ermittelte Rubin unter Berücksichtigung der Biege- und Querkraftverformungen mit Hilfe der b_j -Funktionen bereits für einen geraden Stab mit konstantem Querschnitt für einige typische Belastungsarten (Rubin, 1993, 2.5). Diese Werte werden nun zur Formulierung der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte herangezogen, die sich gemäß (2.37) aus dem Produkt des Winkelgewichts ϕ_k und dem virtuellen Moment δM_k an der Einspannstelle berechnet.

$$\delta A^{(i)} = -\phi_k \delta M_k \quad (2.37)$$

Das Winkelgewicht ϕ_k lautet gemäß des Studienblattes 2.5, Zeile 1 (Rubin, 1993):

$$\phi_k = \frac{1}{l} \left(\frac{lb_2 - b_3}{b_1 EI} + \frac{1}{G\tilde{A}} \right) M_k \quad (2.38)$$

Somit ergibt sich die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte gemäß (2.41) zu

$$\delta A^{(i)} = -\frac{1}{l} \left(\frac{lb_2 - b_3}{b_1 EI} + \frac{1}{G\tilde{A}} \right) M_k \delta M_k = - \left(\frac{lb_2 - b_3}{b_1 EI} + \frac{1}{G\tilde{A}} \right) \frac{b_1}{b_0} \gamma P_i \delta P_i \quad (2.39)$$

Hiermit sind alle Komponenten zur Formulierung der Arbeitsgleichung bekannt. Einsetzen von (2.8) und (2.41) in (2.4) liefert den allgemeinen Ausdruck für die gesuchte Vertikalverschiebung w_i . Durch Anwendung des Federgesetzes (2.1) kann die Federkonstante c_i [Krafteinheit/Längeneinheit] für den Kragarm identifiziert werden:

$$\begin{aligned} \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0 & \Rightarrow w_i = \left(\frac{lb_2 - b_3}{EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right) \frac{\gamma}{b_0} P_i \\ \Rightarrow c_i = \frac{P_i}{w_i} & \Rightarrow c_i = \frac{b_0}{\left(\frac{lb_2 - b_3}{EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right) \gamma} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Die ermittelte Federkonstante c_i kann als jene Federsteifigkeit betrachtet werden, welche die notwendige Kraft pro Längeneinheit angibt, um die gleiche Vertikalverschiebung w_i am Ersatzfedersystem hervorzurufen, wie sie im ursprünglichen Stabsystem durch die Einzellast P_i verursacht wird. Der Kragarm kann demnach also auch nach Th. II. Ord. durch eine lineare

Längsfeder am Knoten i mit der entsprechenden Federkonstante vollwertig ersetzt werden, wobei insbesondere die Effekte zufolge der Axialkraft N^{II} durch die b_j -Funktionen mitberücksichtigt werden.

Die Federkonstante kann alternativ auch unter Vernachlässigung der Querkraftverformungen ermittelt werden, wodurch die Querkraftanteile in (2.38) entfallen und sich die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte entsprechend (2.41) ergeben.

$$\delta A^{(i)} = \frac{1}{l} \left(\frac{lb_2 - b_3}{b_1 EI} \right) M_k \delta M_k = -\frac{lb_2 - b_3}{b_0 EI} P_i \delta P_i \quad (2.41)$$

Erneutes Einsetzen in die Arbeitsgleichung und Anwendung des Federgesetzes liefert die Federkonstante [Krafteinheit/Längeneinheit] ohne Querkraftanteile.

$$\begin{aligned} \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} &= 0 \Rightarrow w_i = \frac{lb_2 - b_3}{b_0 EI} P_i \\ \Rightarrow c_i = \frac{P_i}{w_i} &\Rightarrow c_i = \frac{b_0 EI}{lb_2 - b_3} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Alternativ zur Herleitung mittels PvK und Winkelgewichten, kann die Federkonstante bzw. die dafür notwendige Vertikalverschiebung w_i am freien Stabende auch mit Hilfe der sogenannten Übertragungsmatrix nach Theorie II. Ordnung (Rubin, 1993, 2.3) ermittelt werden. Analog zur Übertragungsmatrix nach Th. I. Ord. verknüpft sie die Zustandsgrößen ($\vec{Z}_k$) eines Stabes am Stabanfang mit denen am Stabende ($\vec{Z}_i$). Gleichung (2.43) zeigt die Übertragungsmatrix F_{ik} in Transversalkraft-Darstellung (Rubin, 1993, 2.3) für gerade Stäbe mit konstantem Querschnitt und wie die Zustandsvektoren miteinander gekoppelt werden. Bei den aufscheinenden b_j -Funktionen handelt es sich um jene, die auch für die vorangegangene Herleitung herangezogen wurden (vgl. (2.36)). Da auch in diesem Fall Schnittgrößen und Verformungen am Stabanfang bzw. -ende betrachtet werden, ist auch hier $x = l$ zu setzen.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ M_i \\ R_i \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{Z}_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \gamma b_1 & -\gamma \frac{b_2}{EI} & -\gamma \left(\frac{b_3}{EI} - \frac{b_1}{GA} \right) & \vdots & w^R \\ 0 & b_0 & -\frac{b_1}{EI} & -\gamma \frac{b_2}{EI} & \vdots & \varphi^R \\ 0 & -\gamma N^{\text{II}} b_1 & b_0 & \gamma b_1 & \vdots & M^R \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & R^R \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Übertragungsmatrix } F_{ik}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w_k \\ \varphi_k \\ M_k \\ R_k \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{Z}_k} \quad (2.43)$$

In die Zustandsvektoren werden nun die bekannten Randbedingungen des Kragarms eingesetzt, wodurch das Gleichungssystem gelöst werden kann. Außerdem entfallen alle Lastglieder, die in der allgemeinen Form der Übertragungsmatrix aufscheinen, da keinerlei Belastungen bzw. eingeprägte Verformungen im Feldbereich des Kragarms existieren.

$$\begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ M_i = 0 \\ R_i = P_i \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma b_1 & -\gamma \frac{b_2}{EI} & -\gamma \left(\frac{b_3}{EI} - \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right) & \vdots & 0 \\ 0 & b_0 & -\frac{b_1}{EI} & -\gamma \frac{b_2}{EI} & \vdots & 0 \\ 0 & -\gamma N^{\text{II}} b_1 & b_0 & \gamma b_1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_k = 0 \\ \varphi_k = 0 \\ M_k \\ R_k \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Aus der vierten Zeile der Übertragungsmatrix ergibt sich die Lösung für die unbekannte Transversalkraft an der Einspannstelle R_k gemäß

$$R_k = R_i = P_i \quad (2.45)$$

Dadurch kann auch die dritte Zeile vereinfacht werden zu

$$M_i = 0 = b_0 M_k + \gamma b_1 R_k, \quad \Rightarrow \quad M_k = -\gamma \frac{b_1}{b_0} R_k = -\gamma \frac{b_1}{b_0} P_i \quad (2.46)$$

Somit ergibt sich für die gesuchte Unbekannte w_i unter Verwendung von (2.45) und (2.46) aus der ersten Zeile der Übertragungsmatrix

$$w_i = -\gamma \frac{b_2}{EI} M_k - \gamma \left(\frac{b_3}{EI} - \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right) R_k = \left(\frac{\gamma b_2 b_1 - b_0 b_3}{EI} + \frac{b_0 b_1}{G\tilde{A}} \right) \frac{\gamma}{b_0} P_i \quad (2.47)$$

Der mit (2.47) ermittelte Ausdruck für die vertikale Verformung am Stabende w_i unterscheidet sich in seiner äußerlichen Form von jenem, der mit dem Pvk hergeleitet wurde (2.42). Numerisch liefern jedoch beide Ausdrucksformen identische Ergebnisse, so dass die gesuchte Federkonstante c_i wie gewohnt unter Anwendung des Federgesetzes gemäß (2.48) ermittelt werden kann.

$$c_i = \frac{P_i}{w_i} \quad \Rightarrow \quad c_i = \frac{b_0}{\gamma \left(\frac{\gamma b_2 b_1 - b_0 b_3}{EI} + \frac{b_0 b_1}{G\tilde{A}} \right)} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \quad (2.48)$$

Für den Sonderfall eines schubstarren Stabes wird in (2.48) $G\tilde{A} = \infty$ und $\gamma = 1$ eingesetzt.

$$c_i = \frac{P_i}{w_i} \quad \Rightarrow \quad c_i = \frac{EI b_0}{b_1 b_2 - b_0 b_3} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \quad (2.49)$$

Numerisches Beispiel zur Anwendung:

Querschnitt: QRO 200 x 5, Baustahl S235: $E = 21\,000\text{ kN/cm}^2$, $G = 8\,076,92\text{ kN/cm}^2$

- Stablänge $l = 150\text{ cm}$
- $EI = 51\,345\,000\text{ kNcm}^2$
- $A_y = 16,35\text{ cm}^2$
- $I_y = I_z = 2445\text{ cm}^4$, $I_T = 3756\text{ cm}^4$

Belastung: Einzelkraft $P_i = 50\text{ kN}$ und Axialdruckkraft $N^{\text{II}} = -1000\text{ kN}$

Zusätzliche Eingangsparameter:

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{N^{\text{II}}}{G\tilde{A}}} = 1,00763023$$

$$b_0 = \cos(fl) = 0,787227303$$

$$b_1 = \frac{\sin(fl)}{f} = 1,392022739\text{ m}$$

$$K = \gamma \frac{N^{\text{II}}}{EI} = -0,196247002\text{ m}^{-2}$$

$$b_2 = \frac{b_0 - 1}{K} = 1,084208653\text{ m}^2$$

$$f = \sqrt{|K|} = 0,442997745\text{ m}^{-1}$$

$$b_3 = \frac{b_1 - l}{K} = 0,550211008\text{ m}^3$$

$$G\tilde{A} = 132\,057,64\text{ kN}$$

$$c_i = \frac{b_0}{\left(\frac{lb_2 - b_3}{EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}}\right)\gamma} = 35,49\text{ kN/cm} \Rightarrow w_i = \frac{P_i}{c_i} = 1,409\text{ cm} \equiv 14,09\text{ mm}$$

$$G\tilde{A} = \infty:$$

$$c_i = \frac{b_0 EI}{lb_2 - b_3} = 37,623\text{ kN/cm} \Rightarrow w_i = \frac{P_i}{c_i} = 1,329\text{ cm} \equiv 13,29\text{ mm}$$

Die Ergebnisse wurden in einer Vergleichsrechnung mit der Software *RSTAB* (Version 8.20, Fa. Dlubal) überprüft. Dabei wurde eine exakte Übereinstimmung der Ergebnisse festgestellt.

Einseitig eingespannter Stab nach Theorie II. Ordnung mit konstanter Biegesteifigkeit EI und konstanter Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ - verdrehbare Anschlussstelle (Einspannstelle)

Der einseitig eingespannte Einfeldträger aus dem Abschnitt 2.2 mit konstanter Biegesteifigkeit EI und Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ soll um eine Axialbelastung N^{II} gemäß (2.16) ergänzt werden. Auch in diesem Fall ist die Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ herzuleiten. Diese ist genau so zu ermitteln, dass das



Abb. 2.16: Stab mit Axialbelastung N^{II} , konstanter Biegesteifigkeit EI und frei drehbarer Anschlussstelle (Einspannstelle)

gleiche induzierende Biegemoment M_i dieselbe Querschnittsverdrehung φ_i am originalen Stabsystem, als auch am Ersatzfedersystem hervorruft. Unter dieser Bedingung kann der ursprüngliche Stab vollständig durch eine lineare Drehfeder mit der Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ am Knoten i ersetzt werden, ohne dass dabei mechanische Eigenschaften vernachlässigt werden.

Bei N^{II} handelt es sich um eine Drucknormalkraft, die im Stab eine Verminderung der Steifigkeit des Stabes hervorruft. Demzufolge muss die Ermittlung der Drehfederkonstante des Stabes nach Th. II. Ord. erfolgen. Analog zum vorangegangenen Beispiel müssen also auch die Zustandsgrößen entlang des Stabes infolge tatsächlicher Lasten am realen System nach Th. II. Ord. ermittelt werden.

Die Vorgehensweise des PvK geschieht identisch zu jener, die in Abschnitt 2.2 gezeigt wurde. Zunächst ist also der zum Biegemoment M_i energetisch konjugierte Querschnittsdrehwinkel φ_i zu berechnen, mit dessen Hilfe die gesuchte Drehfederkonstante hergeleitet werden kann. Dazu werden im ersten Schritt die Biegemomenten- und Transversalkraftverläufe M , δM und R , δR des Stabes zufolge des realen Moments M_i und des virtuellen Moments δM_i in Abbildung 2.17 gegenübergestellt.

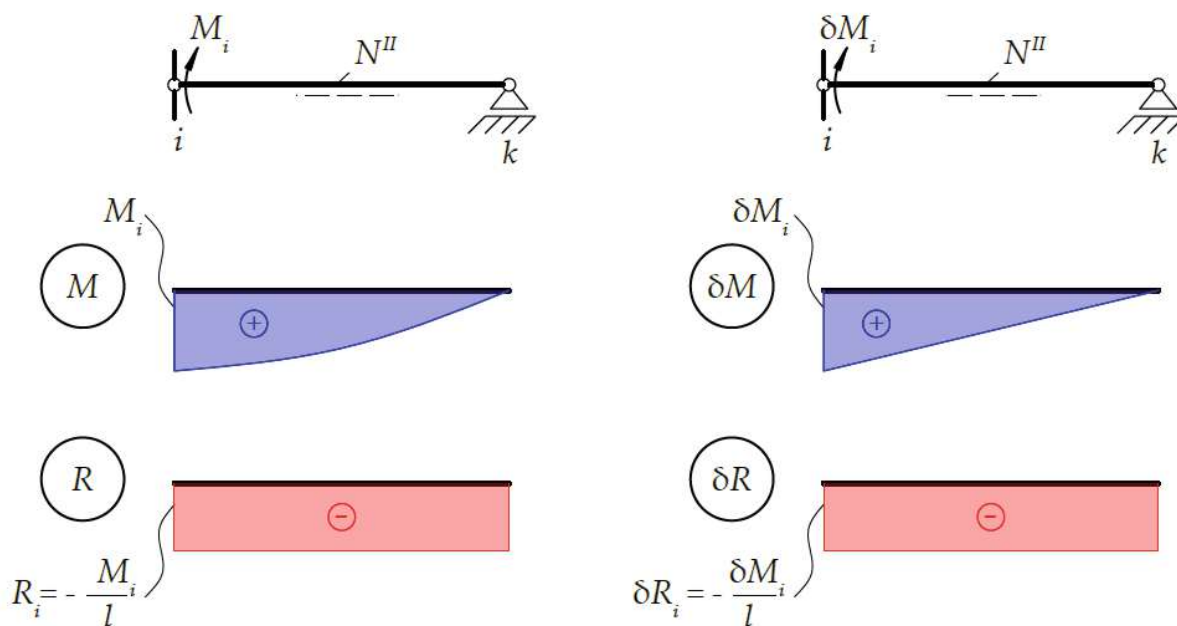


Abb. 2.17: Biegemomenten- und Transversalkraftverläufe M , δM und R , δR infolge M_i und δM_i

Erwartungsgemäß ist die reale Momentenlinie nach Th. II. Ord. nicht linear, weil das Gleichgewicht am verformten System ermittelt wird. Die Berechnung nach PvK wird wiederum mittels des Winkelgewichts ϕ_i durchgeführt. Zunächst soll jedoch der erste Teil der Arbeitsgleichung, die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte, formuliert werden. Analog zum Beispiel nach Th. I. Ord. ermittelt sich diese aus dem Produkt des Querschnittsdrehwinkels φ_i und dem virtuellen Moment δM_i gemäß der Gleichung (2.16).

Wie bereits erwähnt, wird nun erneut das Winkelgewicht ϕ_i herangezogen, um die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte zu ermitteln. Analog zu (2.37) ergibt sich diese aus dem negativen Produkt des Winkelgewichts ϕ_i und dem virtuellen Einspannmoment δM_i . Der Ausdruck für das Winkelgewicht wird dem Studienblatt 2.5, Zeile 1 (Rubin, 1993) in vollständiger Form entnommen, um die Querkraftverformungen mit zu berücksichtigen. Gemäß (2.50) ergibt sich damit die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte folgendermaßen

$$\delta A^{(i)} = -\phi_i \delta M_i = -\frac{1}{l} \left(\frac{lb_2 - b_3}{b_1 EI} + \frac{1}{G\tilde{A}} \right) M_i \delta M_i \quad (2.50)$$

Somit kann die Arbeitsgleichung vervollständigt und die gesuchte Drehfederkonstante identifiziert werden. Der allgemeine Ausdruck für φ_i kann aus (2.4) herausgelöst werden, indem (2.16) und (2.50) eingesetzt werden. Die Anwendung des Drehfedergesetzes (2.2) liefert gemäß (2.51) in weiterer Folge die zu ermittelnde Drehfederkonstante $\bar{c}_i$.

$$\begin{aligned} \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0 &\Rightarrow \varphi_i = \frac{1}{l} \left(\frac{lb_2 - b_3}{b_1 EI} + \frac{1}{G\tilde{A}} \right) M_i \\ \Rightarrow \bar{c}_i = \frac{M_i}{\varphi_i} &\Rightarrow \bar{c}_i = \frac{l}{\left(\frac{lb_2 - b_3}{b_1 EI} + \frac{1}{G\tilde{A}} \right)} \quad [\text{Krafteinheit} \cdot \text{Längeneinheit}] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Die Querkraftverformungen können jedoch auch vernachlässigt werden, indem $G\tilde{A} = \infty$ in (2.16) gesetzt wird. Damit entfallen die Querkraftanteile in den Berechnungsschritten und es ergibt sich gemäß (2.52) ein vereinfachter Ausdruck für die Drehfederkonstante des Stabes.

$$\begin{aligned} \delta A^{(a)} + \delta A^{(i)} = 0 &\Rightarrow \varphi_i = \frac{1}{l} \left(\frac{lb_2 - b_3}{b_1 EI} \right) M_i \\ \Rightarrow \bar{c}_i = \frac{M_i}{\varphi_i} &\Rightarrow \bar{c}_i = \frac{lb_1 EI}{lb_2 - b_3} \quad [\text{Krafteinheit} \cdot \text{Längeneinheit}] \end{aligned} \quad (2.52)$$

Die Anwendung der Übertragungsmatrix nach Th. II. Ord. gemäß (2.43) muss offensichtlich dasselbe Ergebnis liefern. Dazu sind die Randbedingungen des Systems zu identifizieren und in die Matrizengleichung einzupflegen (Gleichung (2.54)). Zunächst ist in diesem Zuge die noch unbekannte Transversalkraft R_i am statisch bestimmten Grundsystem zu ermitteln. Die Spalte der Lastglieder zufolge des Moments M_i ist nach Studienblatt 2.3 (Rubin, 1993) auszufüllen. Mit $M_{i,links}$ ist wiederum das Auflagermoment links vom Gelenk am Knoten i gemeint.

$$(\sum \overset{\curvearrowright}{M})_k = 0 \Rightarrow R_i l + M_i = 0 \Rightarrow R_i = -\frac{M_i}{l} \quad (2.53)$$

$$\begin{bmatrix} w_k = 0 \\ \varphi_k \\ M_k = 0 \\ R_k \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma b_1 & -\gamma \frac{b_2}{EI} & -\gamma \left(\frac{b_3}{EI} - \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right) & \vdots & -\gamma \frac{b_2}{EI} M_i \\ 0 & b_0 & -\frac{b_1}{EI} & -\gamma \frac{b_2}{EI} & \vdots & -\frac{b_1}{EI} M_i \\ 0 & -\gamma N^{\text{II}} b_1 & b_0 & \gamma b_1 & \vdots & b_0 M_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_i = 0 \\ \varphi_i \\ M_{i, \text{links}} = 0 \\ R_i = -\frac{M_i}{l} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Aus der ersten Zeile der Matrixgleichung lässt sich das Verhältnis zwischen dem Biegemoment M_i und dem Querschnittsdrehwinkel φ_i , die gesuchte Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ [Krafteinheit*Längeneinheit], unmittelbar berechnen:

$$\begin{aligned} w_k = \gamma b_1 \varphi_i + \gamma \left(\frac{b_3}{EI} - \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right) \frac{M_i}{l} - \gamma \frac{b_2}{EI} M_i = 0 & \Rightarrow \gamma b_1 \varphi_i = -\gamma \left(\frac{b_3}{EI} - \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right) \frac{M_i}{l} + \gamma \frac{b_2}{EI} M_i \\ \varphi_i = \left(\frac{\ell b_2 - b_3}{EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right) \frac{M_i}{b_1 l} \\ \bar{c}_i = \frac{M_i}{\varphi_i} = \frac{b_1 l}{\left(\frac{\ell b_2 - b_3}{EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right)} & \quad [\text{Krafteinheit} \cdot \text{Längeneinheit}] \end{aligned} \quad (2.55)$$

Für den Sonderfall eines schubstarren Stabes wird in (2.55) $G\tilde{A} = \infty$ eingesetzt.

$$\bar{c}_i = \frac{M_i}{\varphi_i} = \frac{lb_1 EI}{lb_2 - b_3} \quad [\text{Krafteinheit} \cdot \text{Längeneinheit}] \quad (2.56)$$

Numerisches Beispiel zur Anwendung:

Querschnitt: QRO 200 x 5, Baustahl S235: $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$, $G = 8\,076,92 \text{ kN/cm}^2$

- Stablänge $l = 150 \text{ cm}$
- $EI = 51\,345\,000 \text{ kNcm}^2$
- $A_y = 16,35 \text{ cm}^2$
- $I_y = I_z = 2445 \text{ cm}^4$, $I_T = 3756 \text{ cm}^4$

Belastung: Einzelmoment $M_i = 50 \text{ kN}$ und Axialdruckkraft $N^{\text{II}} = -1000 \text{ kN}$

Zusätzliche Eingangsparameter:

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{N^{\text{II}}}{G\tilde{A}}} = 1,00763023$$

$$K = \gamma \frac{N^{\text{II}}}{EI} = -0,196247002 \text{ m}^{-2}$$

$$f = \sqrt{|K|} = 0,442997745 \text{ m}^{-1}$$

$$b_0 = \cos(fl) = 0,787227303$$

$$b_1 = \frac{\sin(fl)}{f} = 1,392022739 \text{ m}$$

$$b_2 = \frac{b_0 - 1}{K} = 1,084208653 \text{ m}^2$$

$$b_3 = \frac{b_1 - l}{K} = 0,550211008 \text{ m}^3$$

$$G\tilde{A} = 132\,057,64 \text{ kN:}$$

$$\bar{c}_i = \frac{l}{\left(\frac{lb_2 - b_3}{b_1 EI} + \frac{1}{G\tilde{A}}\right)} = 9485,733 \text{ kNm} \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = \frac{M_i}{\bar{c}_i} = 0,00527 \text{ rad} \equiv 5,27 \text{ mrad}$$

$$G\tilde{A} = \infty:$$

$$\bar{c}_i = \frac{lb_1 EI}{lb_2 - b_3} = 9962,821 \text{ kNm} \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = \frac{M_i}{\bar{c}_i} = 0,00501 \text{ rad} \equiv 5,01 \text{ mrad}$$

Die Ergebnisse wurden in einer Vergleichsrechnung mit der Software *RSTAB* (Version 8.20, Fa. Dlubal) überprüft. Dabei wurde eine exakte Übereinstimmung der Ergebnisse festgestellt.

Beidseitig eingespannter Stab nach Theorie II. Ordnung mit Querkraftgelenk, konstanter Biegesteifigkeit EI und konstanter Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ - verdrehbare Anschlussstelle (verdrehbares Querkraftgelenk)



Abb. 2.18: Beidseitig eingespannter Stab mit Querkraftgelenk am Knoten i , Drucknormalkraft N^{II} , Biegesteifigkeit EI , Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ und verdrehbarer Einspannstelle

In Abbildung 2.18 ist erneut der beidseitig eingespannte Einfeldträger mit Querkraftgelenk am Knoten i zu erkennen, der ebenfalls in Abschnitt 2.2 untersucht wurde. Auch dieses Beispiel wird in diesem Abschnitt um die Axialdruckkraft N^{II} erweitert und ist somit nach Th. II. Ord. zu analysieren. Analog zur Untersuchung nach Th. I. Ord. ist jene Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ für den Stab gesucht, die den Stab mechanisch so ersetzt, dass keinerlei Eigenschaften des Stabes

vernachlässigt werden - insbesondere nicht die Effekte der Axialdruckkraft N^{II} . In dieser Analyse ist wiederum entscheidend, dass das Biegemoment M_i , welches den Querschnittsdrehwinkel φ_i induziert, sowohl am Ersatzfedermodell als auch am ursprünglichen Stab identische Querschnittsverdrehungen erzeugt. Ist dieses Kriterium erfüllt, kann das Stabsystem vollwertig durch eine lineare Drehfeder mit der Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ ersetzt werden und somit weitere Berechnungen erleichtern.

Der zur Anwendung des Drehfedergesetzes benötigte Querschnittsdrehwinkel φ_i wird mit Hilfe der Übertragungsmatrix nach Th. II. Ord. (Rubin, 1993, 2.3) gemäß (2.43) ermittelt. Zunächst wird das ursprüngliche System durch ein statisch äquivalentes System ersetzt, um die Formulierung der Randbedingungen zu erleichtern. Dazu wird das Querkraftgelenk am Knoten i durch ein Momentengelenk erweitert, auf welches das Moment M_i einwirkt und somit den Querschnittsdrehwinkel φ_i erzeugt. Das beschriebene System ist in Abbildung 2.19 zu erkennen.

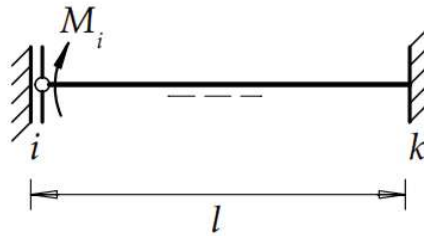


Abb. 2.19: Das Querkraftgelenk einschließlich des Momentengelenks und des eingepägten Biegemoments M_i am Knoten i .

Nun kann die schubweiche Übertragungsmatrix nach Th. II. Ord. gemäß (2.20) herangezogen werden und die Zustandsvektoren $\vec{Z}_i$ und $\vec{Z}_k$ mit den entsprechenden Randbedingungen ausgefüllt werden. Die Spalte der Lastglieder zufolge des Moments M_i ist gemäß des Studienblattes 2.3 (Rubin, 1993) auszufüllen. $M_{i,links}$ entspricht dabei dem Einspannmoment der verdrehbaren Anschlussstelle am Knoten i .

$$\begin{bmatrix} w_k = 0 \\ \varphi_k = 0 \\ M_k \\ R_k \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma b_1 & -\gamma \frac{b_2}{EI} & -\gamma \left(\frac{b_3}{EI} - \frac{b_1}{GA} \right) & \vdots & -\gamma \frac{b_2}{EI} M_i \\ 0 & b_0 & -\frac{b_1}{EI} & -\gamma \frac{b_2}{EI} & \vdots & -\frac{b_1}{EI} M_i \\ 0 & -\gamma N^{\text{II}} b_1 & b_0 & \gamma b_1 & \vdots & b_0 M_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ M_{i,links} = 0 \\ R_i = 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Der gesuchte Querschnittsdrehwinkel φ_i kann in (2.57) unmittelbar aus der zweiten Zeile der Matrixgleichung ermittelt werden. Dieser ergibt sich gemäß (2.58) zu

$$\varphi_k = 0 = b_0 \varphi_i - \frac{b_1}{EI} M_i \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = \frac{b_1}{b_0 EI} M_i \quad (2.58)$$

Durch die Anwendung des linearen Drehfedergesetzes kann die zu ermittelnde Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ identifiziert werden.

$$\varphi_i = \frac{b_1}{b_0 EI} M_i \Rightarrow \bar{c}_i = \frac{M_i}{\varphi_i} \Rightarrow \bar{c}_i = \frac{b_0 EI}{b_1} \quad [\text{Krafteinheit} \cdot \text{Längeneinheit}] \quad (2.59)$$

Mit der erhaltenen Federkonstante kann auch der betrachtete beidseitig eingespannte Stab mit Querkraftgelenk und verdrehbarer Einspannstelle vollständig durch eine einfache Drehfeder am Knoten i ersetzt werden. Gegenüber der Lösung nach Theorie I. Ordnung aus Abschnitt 2.2 wird im nun gefundenen Ausdruck auch die Axialdruckkraft N^{II} und die daraus resultierenden Effekte durch die b_j -Funktionen mitberücksichtigt.

Jedoch bleibt der Querschnittsdrehwinkel φ_i und die daraus ermittelte Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ auch nach Th. II. Ord. unabhängig von der Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$. Dadurch ist die in (2.59) ermittelte Drehfederkonstante $\bar{c}_i$ für schubsteife, als auch für schubweiche Stäbe dieser Art gültig.

Numerisches Beispiel zur Anwendung:

Querschnitt: QRO 200 x 5, Baustahl S235: $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$, $G = 8\,076,92 \text{ kN/cm}^2$

- Stablänge $l = 150 \text{ cm}$
- $EI = 51\,345\,000 \text{ kNcm}^2$
- $A_y = 16,35 \text{ cm}^2$
- $I_y = I_z = 2445 \text{ cm}^4$, $I_T = 3756 \text{ cm}^4$

Belastung: Einzelmoment $M_i = 50 \text{ kN}$ und Axialdruckkraft $N^{\text{II}} = -1000 \text{ kN}$

Zusätzliche Eingangsparameter:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{1 + \frac{N^{\text{II}}}{G\tilde{A}}} = 1,00763023 & b_0 &= \cos(fl) = 0,787227303 \\ K &= \gamma \frac{N^{\text{II}}}{EI} = -0,196247002 \text{ m}^{-2} & b_1 &= \frac{\sin(fl)}{f} = 1,392022739 \text{ m} \\ f &= \sqrt{|K|} = 0,442997745 \text{ m}^{-1} & b_2 &= \frac{b_0 - 1}{K} = 1,084208653 \text{ m}^2 \\ & & b_3 &= \frac{b_1 - l}{K} = 0,550211008 \text{ m}^3 \\ \bar{c}_i &= \frac{b_0 EI}{b_1} = 2903,702 \text{ kNm} \Rightarrow \varphi_i = \frac{M_i}{\bar{c}_i} = 0,01722 \text{ rad} \equiv 17,22 \text{ mrad} \end{aligned}$$

Die Ergebnisse wurden in einer Vergleichsrechnung mit der Software *RSTAB* (Version 8.20, Fa. Dlubal) überprüft. Dabei wurde eine exakte Übereinstimmung der Ergebnisse festgestellt.

Beidseitig eingespannter Stab nach Theorie II. Ordnung mit Querkraftgelenk, konstanter Biegesteifigkeit EI und konstanter Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ - Einwirkung der Einzellast P_i

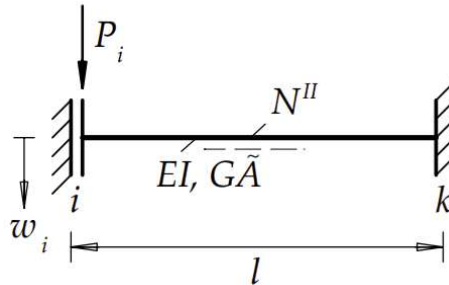


Abb. 2.20: Beidseitig eingespannter Stab mit Querkraftgelenk am Knoten i , Drucknormalkraft N^{II} , Biegesteifigkeit EI , Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ und Einzellast P_i

Das letzte Beispiel aus dem Abschnitt 2.3 soll auch diesen Abschnitt abschließen. Der beidseitig eingespannte Träger mit Querkraftgelenk am Knoten i wird wie die vorangegangenen Systeme zusätzlich mit der Axialdruckkraft N^{II} versehen. Die Einwirkung der Einzelkraft P_i , sowie eine konstante Biegesteifigkeit EI und Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ bleiben gemäß Abbildung 2.20 weiterhin erhalten. Auch in diesem Fall ist eine Federkonstante c_i zu ermitteln, die den mechanischen Ersatz des Stabes ermöglicht. Da die Einzellast P_i ausschließlich eine Vertikalverschiebung w_i verursacht, wird als Ersatz eine lineare Längsfeder mit einer Federkonstanten c_i herangezogen. In diesem Ersatzfedersystem muss infolge derselben Einzellast P_i dieselbe Vertikalverschiebung w_i auftreten wie im ursprünglichen Stabsystem. Demzufolge ist zunächst die Vertikalverschiebung w_i am Originalsystem zu ermitteln. Dazu wird erneut die Übertragungsmatrix nach Th. II. Ord. (Rubin, 1933, 2.3) gemäß (2.43) herangezogen, die auch die Auswirkungen der Axialdruckkraft N^{II} mit berücksichtigt. Ist die gesuchte Verschiebung identifiziert, kann die entsprechende Federkonstante für das Federersatzsystem einfach ermittelt werden.

Als Erstes werden die bekannten Randbedingungen der Knotenpunkte i und k in die jeweiligen Zustandsvektoren eingesetzt, so dass das Gleichungssystem lösbar wird. Ebenso ist die Spalte der Lastglieder zufolge der Einzelkraft P_i gemäß Studienblatt 2.3 (Rubin, 1993) auszufüllen. Die Übertragungsmatrix und die Zustandsvektoren haben somit folgendes Aussehen.

$$\begin{bmatrix} w_k = 0 \\ \varphi_k = 0 \\ M_k \\ R_k \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma b_1 & -\gamma \frac{b_2}{EI} & -\gamma \left(\frac{b_3}{EI} - \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right) & \vdots & \gamma \left(\frac{b_3}{EI} - \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right) P_i \\ 0 & b_0 & -\frac{b_1}{EI} & -\gamma \frac{b_2}{EI} & \vdots & \gamma \frac{b_2}{EI} P_i \\ 0 & -\gamma N^{II} b_1 & b_0 & \gamma b_1 & \vdots & -\gamma b_1 P_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -P_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i = 0 \\ M_i \\ R_i = 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Aus der zweiten Zeile der Matrizengleichung kann das Einspannmoment am Knoten i folgendermaßen errechnet werden

$$\varphi_k = 0 = -\frac{b_1}{EI}M_i + \gamma \frac{b_2}{EI}P_i \Rightarrow M_i = \gamma \frac{b_2}{b_1}P_i \quad (2.61)$$

Daraufhin kann das nun bekannte Moment M_i in die erste Zeile gemäß (2.62) eingesetzt werden und somit verbleibt die gesuchte Vertikalverschiebung w_i als einzige Unbekannte.

$$\begin{aligned} w_k = 0 &= w_i - \gamma \frac{b_2}{EI} \underbrace{M_i}_{\gamma \frac{b_2}{b_1}P_i} + \gamma \left(\frac{b_3}{EI} - \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right) P_i \\ \Rightarrow w_i &= \gamma \left(\frac{\gamma b_2^2 - b_1 b_3}{b_1 EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right) P_i \end{aligned} \quad (2.62)$$

Nun sind die konjugierten Arbeitspartner P_i und w_i bekannt und führen unter Anwendung des Federgesetzes für lineare Längsfedern auf die folgende Federkonstante c_i .

$$c_i = \frac{P_i}{w_i} \Rightarrow c_i = \frac{1}{\gamma \left(\frac{\gamma b_2^2 - b_1 b_3}{b_1 EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right)} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \quad (2.63)$$

Die in (2.34) berechnete Federkonstante kann als jene Federsteifigkeit interpretiert werden, welche die notwendige Einzelkraft P_i angibt, um die gleiche Vertikalverschiebung w_i im Ersatzsystem zu erzeugen, wie sie im ursprünglichen Stabsystem durch die Einzelkraft P_i verursacht wird. Somit kann der Stab am Knoten i durch eine lineare Längsfeder mit der Federkonstanten c_i ersetzt werden, ohne dass dabei mechanische Eigenschaften des Stabes und insbesondere Auswirkungen der Axialdruckkraft N^{II} vernachlässigt werden.

Für den Sonderfall eines schubstarren Stabes wird in (2.55) $G\tilde{A} = \infty$ und $\gamma = 1$ eingesetzt.

$$c_i = \frac{b_1 EI}{b_2^2 - b_3 b_1} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \quad (2.64)$$

Die in (2.64) berechnete Federkonstante c_i hängt nun nicht mehr von der Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ ab und kann dementsprechend als eine Ersatzfedersteifigkeit für schubsteife Stäbe dieser Art betrachtet werden.

Numerisches Beispiel zur Anwendung:

Querschnitt: QRO 200 x 5, Baustahl S235: $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$, $G = 8\,076,92 \text{ kN/cm}^2$

- Stablänge $l = 150 \text{ cm}$
- $EI = 51\,345\,000 \text{ kNcm}^2$
- $A_y = 16,35 \text{ cm}^2$
- $I_y = I_z = 2445 \text{ cm}^4$, $I_T = 3756 \text{ cm}^4$

Belastung: Einzelkraft $P_i = 50 \text{ kN}$ und Axialdruckkraft $N^{\text{II}} = -1000 \text{ kN}$

Zusätzliche Eingangsparameter:

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{N^{\text{II}}}{G\tilde{A}}} = 1,00763023$$

$$b_0 = \cos(fl) = 0,787227303$$

$$b_1 = \frac{\sin(fl)}{f} = 1,392022739 \text{ m}$$

$$K = \gamma \frac{N^{\text{II}}}{EI} = -0,196247002 \text{ m}^{-2}$$

$$b_2 = \frac{b_0 - 1}{K} = 1,084208653 \text{ m}^2$$

$$f = \sqrt{|K|} = 0,442997745 \text{ m}^{-1}$$

$$b_3 = \frac{b_1 - l}{K} = 0,550211008 \text{ m}^3$$

$G\tilde{A} = 132\,057,64 \text{ kN}$:

$$c_i = \frac{1}{\gamma \left(\frac{\gamma b_2^2 - b_1 b_3}{b_1 EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right)} = 143,613 \text{ kN/cm} \quad \Rightarrow \quad w_i = \frac{P_i}{c_i} = 0,348 \text{ cm} \equiv 3,48 \text{ mm}$$

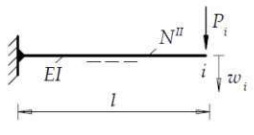
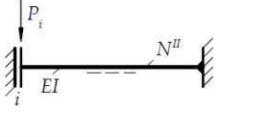
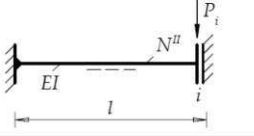
$G\tilde{A} = \infty$:

$$c_i = \frac{b_1 EI}{b_2^2 - b_3 b_1} = 174,495 \text{ kN/cm} \quad \Rightarrow \quad w_i = \frac{P_i}{c_i} = 0,286 \text{ cm} \equiv 2,86 \text{ mm}$$

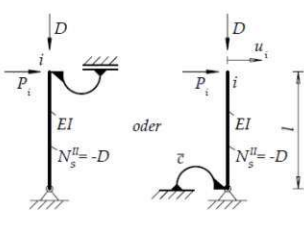
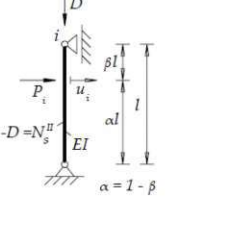
Die Ergebnisse wurden in einer Vergleichsrechnung mit der Software *RSTAB* (Version 8.20, Fa. Dlubal) überprüft. Dabei wurde eine exakte Übereinstimmung der Ergebnisse festgestellt.

In diesem Kapitel wurde detailliert gezeigt, wie sich verschiedene Stabsysteme mit Hilfe der Federgesetze für lineare Längs- und Drehfedern in gleichwertige Ersatzfedermodelle transformieren lassen. Die Berechnung der Längs- und Drehfederkonstanten nach Theorie I. und II. Ordnung erfolgt dabei unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte und/oder mithilfe der Übertragungsbeziehungen nach Rubin. Wie auch im Abschnitt 2.2 werden die Ergebnisse für die Federkonstanten nach Th. II. Ord. der betrachteten Systeme mit und ohne Querkraftverformungen im Anschluss tabellarisch dargestellt.

Das folgende Kapitel wird zeigen, wie man mit den erarbeiteten Ersatzfedermodellen in zusammenhängenden Systemen verfährt, welche Vorteile dies bietet und welche Möglichkeiten zur erweiterten Modellierung der Ersatzfedermodelle bestehen.

Ersatzlängsfederkonstante c für einfache Tragelemente nach Th. II. Ordnung		
System	Längsfederkonstante c_i [Krafteinheit / Längeneinheit]	
	$0 < G\tilde{A} < \infty$	$G\tilde{A} = \infty$
	$\frac{b_0}{\left(\frac{l b_2 - b_3}{EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}}\right) \gamma}$	$\frac{b_0 EI}{l b_2 - b_3}$
	$\frac{1}{\gamma \left(\frac{\gamma b_2^2 - b_1 b_3}{b_1 EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right)}$	$\frac{b_1 EI}{b_2^2 - b_3 b_1}$
	$\frac{b_1 EI}{b_2^2 - b_3 b_1}$	$\frac{1}{\gamma \left(\frac{\gamma b_2^2 - b_1 b_3}{b_1 EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right)}$

Tab. 2.5: Längsfederkonstanten für gerade Einzelstäbe mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie II. Ordnung

Ersatzlängsfederkonstante c für einfache Tragelemente nach Th. II. Ordnung		
System	Vorwerte	Längsfederkonstante [Krafteinheit / Längeneinheit] $EA = \infty \quad G\tilde{A} = \infty$
	$\varepsilon = l \sqrt{\frac{D}{EI}}$ $k = \frac{1}{Q - \frac{Dl}{\bar{c}}}$ $Q = \frac{\varepsilon}{\tan \varepsilon}$ starre Einspannung: $\bar{c} = \infty \rightarrow k = \frac{1}{Q}$	$c_i = 2 \frac{D/l}{k-1}$
	$\varepsilon = l \sqrt{\frac{D}{EI}}$ $Q = \frac{\sin(\alpha \varepsilon) \sin(\beta \varepsilon)}{\varepsilon \sin \varepsilon}$ Sonderfall: $\alpha = \beta = 0,5$ $Q = \frac{\tan(\varepsilon/2)}{2\varepsilon}$	$c_i = \frac{D/l}{Q - \alpha \beta}$
		$c_i = \frac{D/l}{Q - 0,25}$

Tab. 2.6: Längsfederkonstanten für Stäbe mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie II. Ordnung

Ersatzlängsfederkonstante c für einfache Tragelemente nach Th. II. Ordnung		
System	Vorwerte	Längsfederkonstante [Krafteinheit / Längeneinheit] $EA = \infty \quad G\tilde{A} = \infty$
	$\varepsilon = l \sqrt{\frac{D}{EI}}$ $k = \frac{1}{Q - \frac{D l_s l_R}{6EI_R}}$ $Q = \frac{\varepsilon}{\tan \varepsilon}$	$c_i = 2 \frac{D/l}{k-1}$
	$\eta = 6 \frac{l_s EI_R}{l_R EI_s}$ $\alpha = \frac{\tan(\varepsilon/2)}{\varepsilon} \eta$ $\beta = \frac{\varepsilon}{\tan \varepsilon} + \eta$	$c_i = 2 \frac{D/l}{\frac{1+2\alpha}{\beta} - 1}$

Tab. 2.7: Längsfederkonstanten für Rahmensysteme mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie II. Ordnung

Ersatzdrehfederkonstante $\tilde{c}$ für einfache Tragelemente nach Th. II. Ordnung				
System	Drehfederkonstante			
	$\tilde{c}_i$ [Krafteinheit * Längeneinheit] $0 < G\tilde{A} < \infty$	$G\tilde{A} = \infty$	$\tilde{c}_k$ [Krafteinheit * Längeneinheit] $0 < G\tilde{A} < \infty$	$G\tilde{A} = \infty$
	$\frac{l b_2 - b_3 + \frac{EI}{G\tilde{A}} b_1}{\gamma b_2^2 - b_1 \left(b_3 - \frac{EI}{G\tilde{A}} b_1 \right)} EI$	$\frac{l b_2 - b_3}{b_2^2 - b_1 b_3} EI$	$\frac{l b_2 - b_3 + \frac{EI}{G\tilde{A}} b_1}{\gamma b_2^2 - b_1 \left(b_3 - \frac{EI}{G\tilde{A}} b_1 \right)} EI$	$\frac{l b_2 - b_3}{b_2^2 - b_1 b_3} EI$
	$\frac{1}{\left(\frac{l b_2 - b_3}{b_1 EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right)}$	$\frac{l b_1 EI}{l b_2 - b_3}$	0	0
	0	0	$\frac{1}{\left(\frac{l b_2 - b_3}{b_1 EI} + \frac{b_1}{G\tilde{A}} \right)}$	$\frac{l b_1 EI}{l b_2 - b_3}$
	0	0	0	0
	$\frac{b_0 EI}{b_1}$	$\frac{b_0 EI}{b_1}$	$\frac{b_0 EI}{b_1}$	$\frac{b_0 EI}{b_1}$
	$\frac{b_0 EI}{b_1}$	$\frac{b_0 EI}{b_1}$	$\frac{b_0 EI}{b_1}$	$\frac{b_0 EI}{b_1}$

Tab. 2.8: Drehfederkonstanten für gerade Einzelstäbe mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie II. Ordnung

Kapitel 3

Erweiterte Modellierungsansätze im Federmodellverfahren

In diesem Kapitel wird erläutert, wie die in Kapitel 2 erarbeiteten Grundlagen auf zusammengesetzte statische Systeme angewendet werden können. Durch die Untersuchung verschiedener Beispiele wird detailliert dargelegt, welche Möglichkeiten zum Einsatz und zur Kombination von Federmodellen existieren und welche Vorteile diese bieten. Dabei werden zunächst die Parallel-, sowie die Serienschaltung von Ersatzfedermodellen und deren jeweiliges Einsatzgebiet untersucht. Die dabei erläuterten Ansätze stellen einen weiteren essenziellen Bestandteil für die Anwendung des *Federmodellverfahrens* dar. Anhand komplexerer statischer Systeme wird demonstriert, wie sich durch die Kombination beider Schaltungsarten entscheidende Vereinfachungen modellieren lassen, ohne dass die Genauigkeit der Berechnung beeinträchtigt wird. Im Gegenteil, es wird deutlich, welche Rolle einzelne Systemelemente im Bezug auf die Gesamtsystemsteifigkeit spielen und wie deren gezielte Modellierung zur Verbesserung der Gesamtstruktur beiträgt.

3.1 Parallel- und Serienschaltung von Federmodellen

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, welche Möglichkeiten bestehen, die einzelnen Federn innerhalb eines Systems miteinander zu kombinieren und daraus ein Gesamtfedersystem (Gesamtfedermodell) aufzustellen. In allgemein gültiger Vorgehensweise werden die Einzelbestandteile eines Originalsystems zunächst autark betrachtet und durch entsprechende Federmodelle mit den zugehörigen Federkonstanten erfasst. Die Federsteifigkeiten werden nach Theorie I. oder II. Ordnung in Abhängigkeit von den unbekannten Verschiebungsgrößen an den Anschlussstellen gemäß Kapitel 2 berechnet. Daraufhin werden die einzelnen Federn in Abhängigkeit der Zusammensetzung des Gesamtsystems in Parallel- und/oder Serienschaltung zu einem Gesamtfedersystem (Gesamtfedermodell) miteinander verknüpft. Am entstandenen Gesamtfedersystem werden daraufhin die gesuchten Verschiebungsgrößen berechnet. Abschließend werden die Schnittgrößen und Auflagerreaktionen anhand der bereits bekannten Verschiebungsgrößen am Originalsystem durch eine Nachlaufrechnung ermittelt.

3.1.1 Parallelschaltung von Federmodellen

Die Parallelschaltung von Federn kommt zur Anwendung, wenn die Bestandteile eines Systems in ihrem Verbindungspunkt dieselbe Verschiebung aufweisen. In diesem Fall addieren sich die Federsteifigkeiten zu einer Gesamtfedersteifigkeit. Die in jedem Teilsystem entstandenen Schnittgrößen sind von der jeweiligen Steifigkeit der Teilsysteme sowie der Verschiebungsgröße am Verbindungspunkt abhängig.

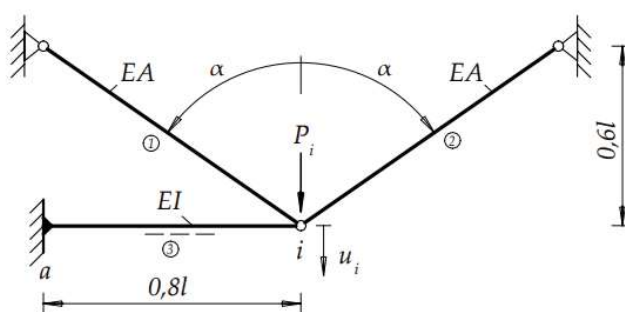


Abb. 3.1: Stabwerksystem bestehend aus den geneigten Fachwerkstäben ①, ② (EA) und dem Balkenstab ③ (EI) mit der Einzelkraft P_i

Beispiel: Stabwerksystem mit Einzelkraft

In Abbildung 3.1 ist ein 2-fach statisch unbestimmtes System zu erkennen, an dem im Folgenden die Parallelschaltung von Federn vorgenommen wird. Prinzipiell spielen die statischen Unbestimmtheiten eines Systems bei der Anwendung des Federmodellverfahrens keine Rolle.

Das gewählte System besteht aus den um α geneigten Fachwerkstäben ① und ② mit einer Dehnsteifigkeit EA und der Länge l . Sie sind symmetrisch zueinander angeordnet und im Punkt i gelenkig miteinander verbunden. An den Punkt i schließt zusätzlich der Balkenstab ③ mit der Biegesteifigkeit EI an, der an seinem Stabende a eingespannt ist. Gesucht ist die Gesamtverschiebung u_i in vertikaler Richtung, sowie die vorhandenen Schnittgrößen der Stäbe.

Im ersten Schritt werden die Stäbe einzeln als Teilsysteme betrachtet. Anstelle einzelner Stäbe können für Teilsysteme auch Stabformationen betrachtet werden, solange für diese die Ersatzfedersteifigkeiten bereits bekannt sind. Die in diesem Fall zu erkennenden Teilsysteme und ihre zugehörigen Federsteifigkeiten sind aus Kapitel 2 bekannt. Die Federkonstanten können nun je nach den Erfordernissen der spezifischen Situation nach Theorie I. oder II. Ordnung gewählt werden. Um das vorliegende Beispiel überschaubar zu halten, wird ohne Berücksichtigung der Querkraftverformungen weiterverfahren.

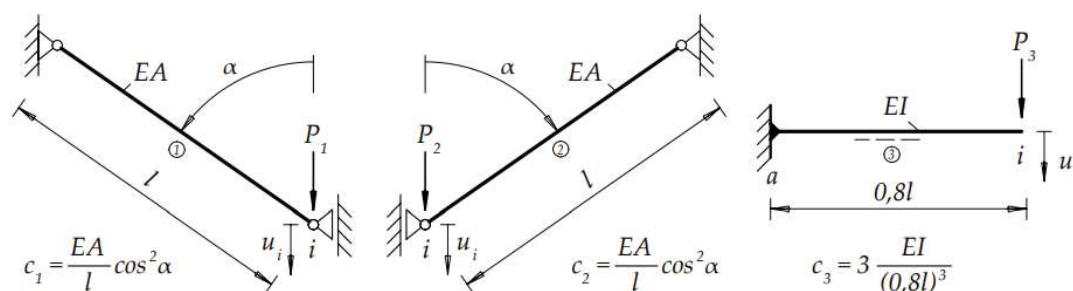


Abb. 3.2: Teilsysteme der Einzelstäbe mit entsprechenden Ersatzfederkonstanten

Die Teilsysteme des ursprünglichen Systems und die entsprechenden Ersatzfederkonstanten gemäß Abschnitt 2.2 sind in Abbildung 3.2 zu sehen. Die Anteile der auf das System wirkenden äußere Einzelkraft P_i , die von den Teilsystemen aufgenommen werden (P_1, P_2, P_3), sind proportional zu deren Federkonstanten (c_1, c_2, c_3). Daraus folgt, dass die Summe der einzelnen Federsteifigkeiten der Systemfedersteifigkeit c_{ges} gemäß Gleichung (3.1) entspricht. Somit kann

das Gesamtsystem in ein Federmodell mit drei parallelgeschalteten Längsfedern transformiert werden, wie es in Abbildung 3.3 zu sehen ist. Aus dem neu gebildeten Modell lässt sich die resultierende Gesamtverschiebung u_i durch das Federgesetz ermitteln.

$$c_{ges} = c_{123} = c_1 + c_2 + c_3 \quad \Rightarrow \quad u_i = \frac{P_i}{c_{ges}} \quad (3.1)$$

$$P_1 = u_i c_1 \quad P_2 = u_i c_2 \quad P_3 = u_i c_3 \quad (3.2)$$

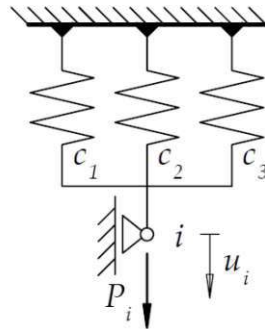


Abb. 3.3: Ersatzfedersystem aus parallel geschalteten Längsfedern der Teilsysteme

An dieser Stelle wird offensichtlich, wie stark die Berechnung der Verschiebungsgröße u_i durch das Federmodellverfahren gegenüber Standardmethoden wie dem Kraftgrößenverfahren (KGV), Verschiebungsgrößenverfahren (VGV), Drehwinkelverfahren (DV) etc. vereinfacht werden konnte, ohne dass dabei die Genauigkeit oder die Transparenz der Berechnung verloren geht. Dabei sind lediglich die Steifigkeiten der Elemente, deren geometrischen Abmessungen und die äußeren Einwirkungen als Eingangsgrößen erforderlich, um die Berechnung durchführen zu können.

Im Anschluss werden über die nun bekannten Einzelkräfte alle wesentlichen Schnittgrößenverläufe der Stäbe bzw. Teilsysteme in Abbildung 3.3 ermittelt.

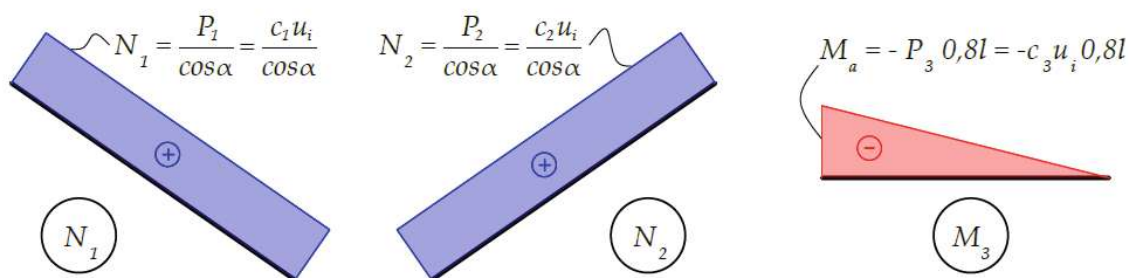


Abb. 3.4: Maßgebende Schnittkraftverläufe des untersuchten Systems

Beispiel: Stabwerksystem mit konstanter Streckenlast

Das bereits betrachtete Beispiel wird nun einer weiteren Berechnung unterzogen. In diesem Fall greift statt der Einzellast die Gleichstreckenlast q entlang des Biegestabes ③ an. Alle weiteren Rahmenbedingungen sind entsprechend Abbildung 3.5 identisch zum vorangegangenen

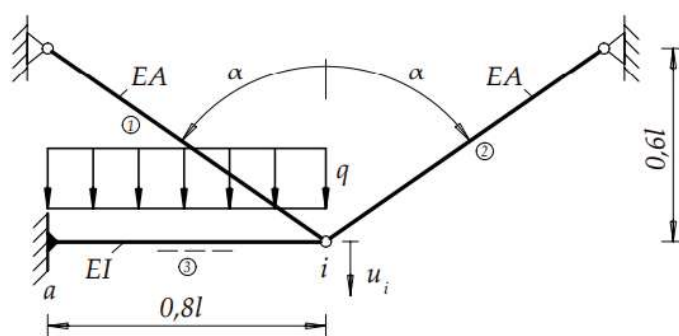


Abb. 3.5: Stabwerkssystem bestehend aus den geneigten Fachwerkstäben ①, ② (EA) und dem Balkenstab ③ (EI) mit der konstanten Streckenlast q

Beispiel. Gesucht wird in dieser Berechnung jene Festhaltekraft I_0 , die erforderlich ist, um die vertikale Verschiebung des Punktes i vollständig zu unterdrücken ($u_i = 0$). Diese unterdrückte Verschiebung muss als neue Randbedingung in den Teilsystemen einfließen, damit die gesuchte Festhaltekraft ermittelt werden kann.

In analoger Vorgehensweise zum vorangegangenen Beispiel werden Teilsysteme in Form der einzelnen Stäbe gebildet und die entsprechenden Federsteifigkeiten (auch hier Th. I. Ord., ohne Querkraftverformungen) gewählt. Diese bleiben ebenso unverändert gegenüber der ersten Berechnung, da die Federkonstanten unabhängig von der Belastung sind. Die Summe der einzelnen Federsteifigkeiten ergibt sich zur Systemfedersteifigkeit c_{ges} . Das Grundsystem kann somit in ein parallel geschaltetes Federmodell transformiert werden, wie in Abbildung 3.6 zu sehen ist. An diesem wird auch die gesuchte Festhaltekraft aufgebracht.

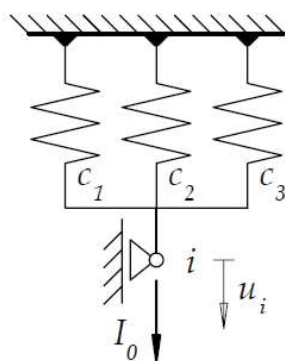


Abb. 3.6: Ersatzfedersystem des betrachteten Stabsystems mit Festhaltekraft I_0

Die gesuchte Größe kann offensichtlich nicht unmittelbar aus dem Federgesetz ermittelt werden. Stattdessen ist die dafür erforderliche Randbedingung $u_i = 0$, wie bereits erwähnt, in den Teilsystemen zu berücksichtigen. Dies ist leicht umsetzbar, indem am Punkt i ein einwertiges Auflager eingeführt wird, so dass die Vertikalverschiebung unterdrückt wird. Die Reaktionskraft des eingeführten Auflagers entspricht der gesuchten Festhaltekraft I_0 . In Abbildung 3.7 ist das Auflager und seine zugehörige Festhaltekraft am Punkt i zu erkennen. Das Einspannmoment M_a^0 ist aus der Einzelstabformel ($M_a = -q\ell_3^2/8$) bekannt.

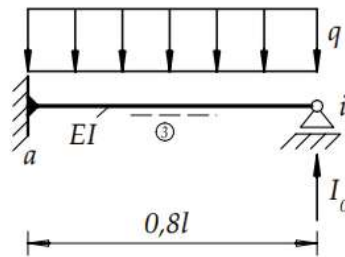


Abb. 3.7: Teilsystem des Balkenstabes ③ mit der Festhaltekraft I_0 als Auflagerreaktion

Die Ermittlung der Festhaltekraft erfolgt gemäß (3.3) mittels Momentengleichgewicht um die Einspannstelle. Aus dem Federgesetz der Längsfeder kann die aus der Festhaltekraft I_0 resultierenden Vertikalverschiebung des Punktes i ermittelt werden.

$$(\sum \overset{\curvearrowright}{M})_a^0 = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{M_a^0 + q \frac{(0,8l)^2}{2}}{0,8l} \Rightarrow u_i = \frac{I_0}{c_{ges}} \quad (3.3)$$

Die berechnete Vertikalverschiebung u_i ist nun in den Teilsystemen der Pendelstäbe für die Berechnung der Lastanteile P_1 und P_2 anzusetzen, wie es in Abbildung 3.8 gezeigt wird. Durch die Proportionalität zwischen Last und Federsteifigkeit der Einzelstäbe lagern sich die Verschiebungsanteile entsprechend auf die Stäbe ① und ② um. Somit können die Normkraftverläufe für die Pendelstäbe ermittelt werden. Zur Bestimmung des Biegemomentenverlaufs des Stabes ③ müssen die Einzelkräfte P_1 und P_2 aus den Pendelstäben am freien Stabende des Biegestabs positiv nach oben wirkend angesetzt werden. Diese erfüllt das Knotengleichgewicht in vertikaler Richtung am Knoten i . Dadurch ergibt sich das tatsächliche Einspannmoment M_a für den Kragarm und der aus der Streckenlast resultierende parabelförmige Verlauf der Momentenlinie kann konstruiert werden.

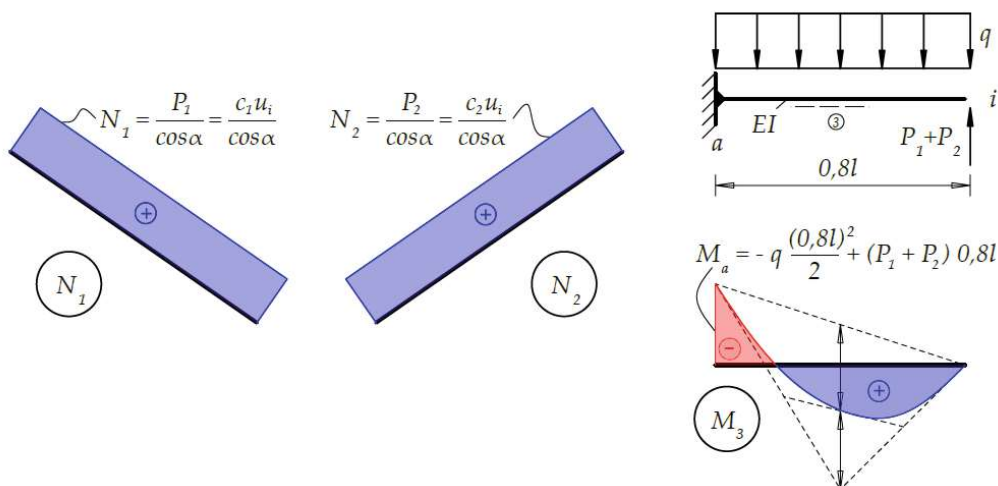


Abb. 3.8: Ermittelte Verläufe der vorhandenen Zustandsgrößen

Exkurs: Analogie zur Elektrotechnik

Eine weitere Disziplin, in der die Parallelschaltung zum Einsatz kommt, ist die Elektrotechnik. Vergleicht man die Vorgehensweisen in der Baustatik und der Elektrotechnik, ist festzustellen, dass sie sich sehr ähneln. In der Baustatik ergibt sich die Kraft aus der Multiplikation der Federsteifigkeit mit der Verschiebung. In der Elektrotechnik ergibt sich die elektrische Spannung als Produkt des elektrischen Widerstands und der elektrischen Stromstärke. Die Gesamtsteifigkeit eines parallelen Federsystems ergibt sich aus der Summe der einzelnen Federkonstanten, ähnlich wie der Gesamtleitwert durch die Summe der Leitwerte der Widerstände bestimmt wird (Höwing, 2021, s.194). Die Methode vereinfacht in beiden Fächern die Modellierung und Berechnung komplexer Systeme, da jedes Teilsystem unabhängig betrachtet werden kann. Die Verteilung der Gesamtkraft in einem Federsystem und der Gesamtstrom in einem Widerstandsnetzwerk erfolgt proportional zu den Eigenschaften der Einzelelemente.

Beispiel: Vorgespanntes Pendelstabsystem mit Einzelkraft I

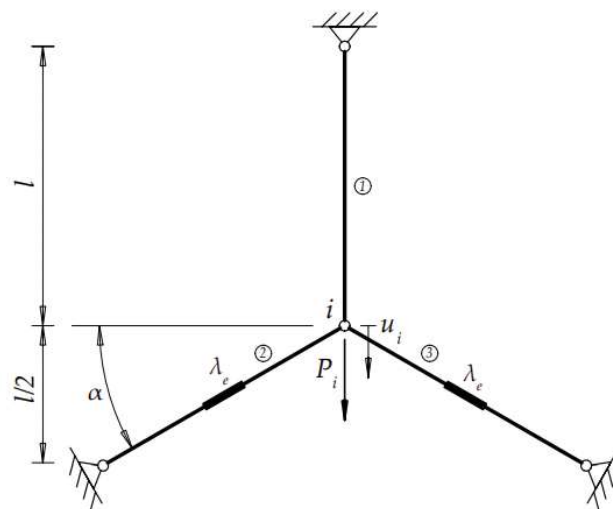


Abb. 3.9: Stabwerksystem bestehend aus den Fachwerkstäben ① bis ③ mit der Dehnsteifigkeit EA und der Länge l

Dieses Beispiel zeigt ein aus drei Stäben bestehendes Pendelstabsystem. Jeder der Pendelstäbe besitzt die Länge l und die Dehnsteifigkeit EA . Die Stäbe ② und ③ sind zudem um den Winkel α (60°) geneigt und mit Spannschlössern versehen, so dass ihnen eine eingeprägte Längenänderung λ^e (Vorspannung) eingetragen werden kann. Die Pendelstäbe treffen sich gemeinsam im Knoten i , an dem auch die Einzelkraft P_i angreift und die vertikale Knotenverschiebung u_i induziert.

Gesucht wird in diesem Beispiel die vertikale Knotenverschiebung u_i zufolge der Einzellast P_i mit dem *Federmodellverfahren* unter der Bedingung, dass die Stäbe ② und ③ gerade nicht schlaff werden. Daraufhin soll auch ermittelt werden, welche Größe die Vorspannungen λ^e die beiden Stäbe unter dieser Bedingung aufweisen müssen.

Zur Ermittlung der gesuchten Knotenverschiebung unter der gegebenen Bedingung werden zunächst logische Schlüsse gezogen. Die Pendelstäbe ② und ③ sind nur dann gerade nicht schlaff,

wenn ihre Stabnormalkraft zufolge der Einzelkraft P_i gleich null ist. Somit wird die Last allein durch den vertikalen Stab ① abgetragen.

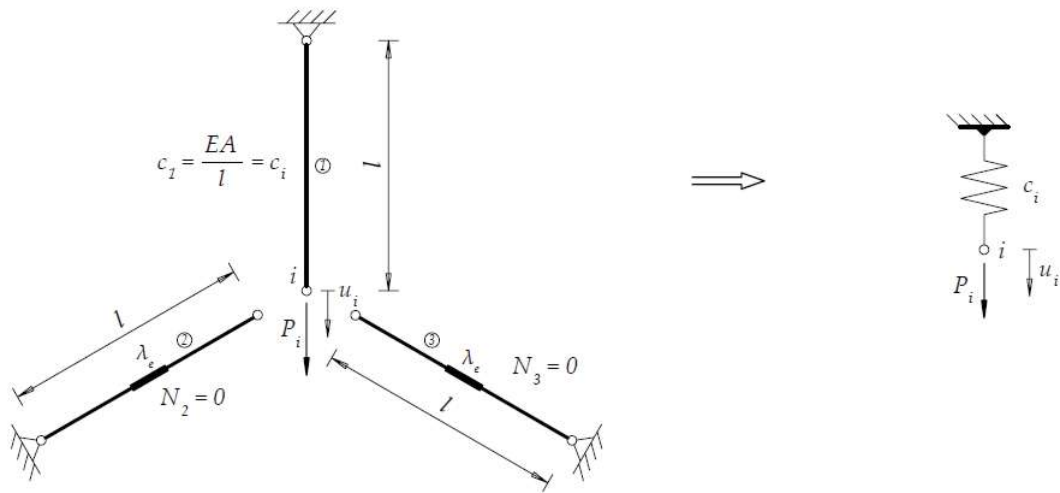


Abb. 3.10: Stabwerksystem bestehend aus den Fachwerkstäben ① bis ③ mit der Dehnsteifigkeit EA und der Länge l

Wie in Abbildung 3.10 zu sehen ist, kann der Pendelstab ① durch ein bekanntes Ersatzfedermodell aus Kapitel 2 mit der Federsteifigkeit c_1 mechanisch ersetzt werden. Die sich zufolge der Einzellast P_i ergebende Verschiebung des Knotens i ist daher ebenfalls bekannt und entspricht der eingangs gesuchten Verschiebungsgröße. In Gleichung (3.4) ist ihre Herleitung mit Hilfe des Längsfedergesetzes gezeigt.

$$c_1 = \frac{EA}{l} \Rightarrow c_i = \frac{P_i}{u_i} \Rightarrow u_i = \frac{P_i l}{EA} \quad (3.4)$$

Weiters wird nun ermittelt, wie groß die Spannwege λ^e in den Stäben ② und ③ sein müssen, damit der Ausfall der Stäbe zufolge der Einzelkraft P_i gewährleistet bleibt. Diese ergeben sich gemäß (3.5) durch den trigonometrischen Zusammenhang zwischen der Richtung der vertikalen Knotenverschiebung u_i und der Richtung der Spannwege λ^e . Die jeweiligen Anteile der Vorspannungen müssen die Knotenverschiebung u_i gemeinsam kompensieren, so dass keine Kraftübertragung in die Stäbe ② und ③ stattfindet und sie somit gerade nicht schlaff werden.

$$\lambda^e = u_i \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \frac{P_i l}{EA} \quad (\text{Verkürzung}) \quad (3.5)$$

Beispiel: Vorgespanntes Pendelstabsystem mit Einzelkraft II

In diesem Beispiel wird ein ähnliches Pendelstabsystem unter der Einwirkung einer Einzellast analysiert. Abbildung 3.11 zeigt das Stabsystem, welches aus den Pendelstäben ① bis ⑥ besteht, die im Knoten i miteinander verbunden sind und jeweils um den Winkel α (60°) relativ zueinander geneigt sind. Jeder der Stäbe besitzt eine konstante Dehnsteifigkeit EA , eine Länge l und eine Vorspannung λ_e .

Zunächst wird an dem System der Lastfall P_i untersucht, welcher die Knotenverschiebung u_i und Normalkräfte in den Stäben induziert. In der ersten Systemanalyse werden diese Größen unter der Annahme ermittelt, dass Druckstäbe nicht ausfallen.

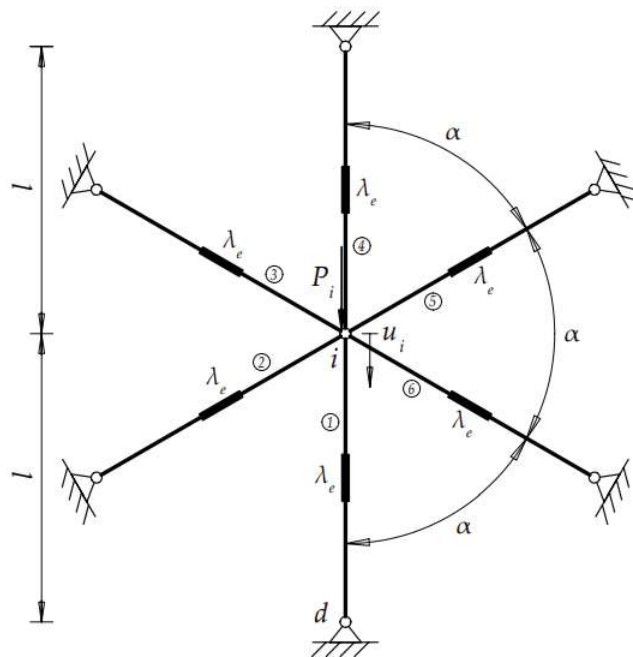


Abb. 3.11: Stabwerksystem bestehend aus den Fachwerkstäben ① bis ⑥ (EA) mit der Länge l und der Vorspannung λ_e

Nach der bekannten Vorgehensweise werden die Stäbe als einzelne Teilsysteme betrachtet und die entsprechenden Längsfederkonstanten werden ihnen zugeordnet. Da die Verschiebung u_i für alle Stäbe ① bis ⑥ gleich groß ist, können die einzelnen Ersatzfederkonstanten parallel geschaltet und zu einer Gesamtfedersteifigkeit c_{ges} aufsummiert werden. Die Transformation des Pendelstabsystems zu seinem mechanisch äquivalenten Federersatzmodell ist in Abbildung 3.12 zu sehen.

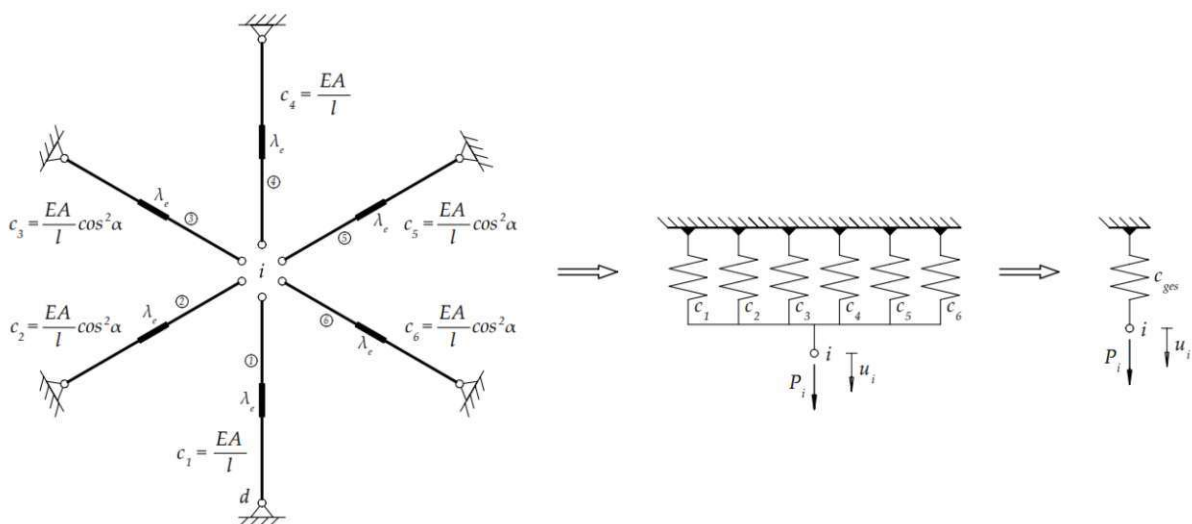


Abb. 3.12: Transformation der Teilsysteme der Pendelstäbe ① bis ⑥ zu ihrem äquivalenten Ersatzfedersystem

Entsprechend der Parallelschaltung der einzelnen Längsfedern ergibt sich für die Gesamtfedersteifigkeit c_{ges} , welche unter Anwendung des Längsfedergesetzes (2.1) die gesuchte Knotenverschiebung u_i gemäß (3.6) liefert.

$$\begin{aligned} c_1 = c_4 = \frac{EI}{l} \quad c_2 = c_3 = c_5 = c_6 &= \frac{EA}{l} \cos^2(\alpha) = \frac{EA}{l} \cos^2(60) = \frac{EA}{4l} \\ \Rightarrow c_{ges} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 &= \frac{3EA}{l} \quad \Rightarrow u_i = \frac{P_i}{c_{ges}} = \frac{Pl}{3EA} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Mit Kenntnis der Ersatzfedersteifigkeiten der einzelnen Pendelstäbe und der Knotenverschiebung u_i zufolge P_i lassen sich nun auch die Kraftanteile ermitteln, die auf die einzelnen Stäbe wirken - die Normalkräfte $N_1^{P_i}$ bis $N_6^{P_i}$. Die Nachlaufrechnung gemäß (3.7) zeigt deren Ermittlung. Erwartungsgemäß ergeben sich im Lastfall P_i für die Stäbe oberhalb des Knotens i Zugbelastungen, während die Stäbe unterhalb Druckkräfte erfahren.

$$\begin{aligned} N_1^{P_i} = -N_4^{P_i} = -u_i c_1 &= -\frac{P_i}{3} \\ N_2^{P_i} = -N_3^{P_i} = N_5^{P_i} = -N_6^{P_i} &= -\frac{u_i c_2}{\cos(60)} = -\frac{P_i}{6} \end{aligned} \quad (3.7)$$

In einer zweiten Systemanalyse soll nun der Lastfall Vorspannung genauer untersucht werden, da sich das *Federmodellverfahren* auch in diesem Fall anwenden lässt. In einer weiteren Untersuchung wird nach jenen eingepprägten Längenänderungen λ_e gesucht, bei der es zufolge P_i zu keinen Druckbelastungen in den Stäben kommt. Das Vorgehen wird für die Stäbe ① und ② gezeigt und ist auf alle weiteren Stäbe analog übertragbar. Da der Lastfall Vorspannung in der jeweiligen Stabachse der Stäbe wirkt, kann in diesem Fall für alle Stäbe dieselbe Ersatzfederkonstante herangezogen werden. Die Verschiebung λ_s entlang der Stabachse (Längenänderung) zufolge der Summe der Vorspannung und der eingepprägten Längenänderung kann gemäß (3.8) für jeden Stab ermittelt werden. Zunächst wird die Längenänderung λ^V mit Hilfe des Längsfedergesetzes ermittelt, wobei N_s^V die aus der aufgebrachten Vorspannung resultierende Normalkraft in den Stäben repräsentiert.

$$\begin{aligned} c = \frac{EA}{l} \quad \Rightarrow \quad \lambda^V &= \frac{N_s^V}{c} = \frac{N_s^V l}{EA} \\ \lambda_s = \lambda^V + \lambda^e \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_s &= \frac{N_s^V l}{EA} + \lambda^e \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad N_s^V = \frac{\lambda^e EA}{l} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Bedingung, dass die Summe der Längenänderungen aus Vorspannung und eingepprägter Verschiebung null ergeben muss, liefert die im Stab resultierende Normalkraft zufolge Vorspannung N_s^V in Abhängigkeit von λ^e . Damit im Lastfall P_i keine Druckkräfte in den Stäben auftreten, muss die Summe der durch die Vorspannung erzeugten Zugkraft N_s^V und der durch die Last P_i erzeugten Druckkraft $N_s^{P_i}$ ebenfalls null ergeben. Dies ergibt folgende Bedingung für die Stäbe ① und ② im resultierenden Lastfall P_i + Vorspannung:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N_1^V + N_1^{P_i} = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{\lambda^e EA}{l} - \frac{P_i}{3} \Rightarrow \lambda_1^e = \frac{Pl}{3EA} \quad (\text{Verkürzung}) \\
 N_2 &= N_2^V + N_2^{P_i} = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{\lambda^e EA}{l} - \frac{P_i}{6} \Rightarrow \lambda_2^e = \frac{Pl}{6EA} \quad (\text{Verkürzung}) \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Gemäß (3.9) ergeben sich die gesuchten Vorspannwege als Verkürzung, damit die aus Lastfall P_i resultierende Verschiebung u_i vollständig durch die Vorspannungen λ^e kompensiert werden kann und sich keinerlei Stabdruckkräfte ergeben.

Auch in diesem Beispiel schaffen die Ersatzfedermodelle klaren und einfachen Zugang zu den Verformungs- und Kräfteverhältnissen innerhalb des Systems. Dieser Vorteil wurde bei den vergangenen Beispielen besonders im Hinblick auf die gesuchte Vorspannung genutzt. Mit einfachen Berechnungen konnten konkrete Vorspannwege ermittelt werden, die beispielsweise Druckkräfte in einem zusammenhängenden System verhindern. Dieser Rechenvorgang erfordert auf anderen Wegen das Aufstellen und Lösen von Differentialgleichungen oder die Anwendung der Finite-Elemente-Methode und ist mit erheblichem Mehraufwand verbunden.

3.1.2 Serienschaltung von Federmodellen

Die Serienschaltung von Federn kommt zur Anwendung, wenn die gesamte äußere Einzelkraft im gleichen Verhältnis auf die Teilsysteme aufgeteilt wird. Dabei addieren sich die Verschiebungen der Teilsysteme zu der Gesamtverschiebung des Systems. Die Gesamtnachgiebigkeit des Systems ergibt sich aus der Summe der Kehrwerte der Federsteifigkeiten (Nachgiebigkeiten) der Teilsysteme. Anschließend kann durch den Kehrwert dieser Gesamtnachgiebigkeit die Federsteifigkeit des Gesamtsystems ermittelt werden. Dieses Vorgehen bietet den Vorteil, dass sich die Deformationen der Teilsysteme getrennt voneinander betrachten und berechnen lassen.

Beispiel: Pendelstabsystem mit Einzelkraft

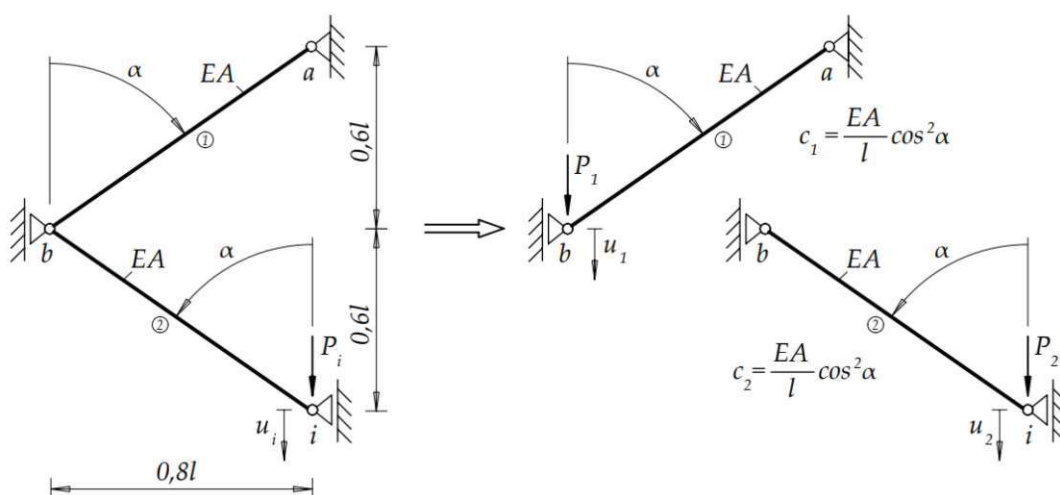


Abb. 3.13: Gesamtsystem mit den Pendestäben ① und ②, deren Teilsysteme und entsprechende Ersatzfederkonstanten

Gemäß Abbildung 3.13 werden in diesem Beispiel die zwei übereinander angeordneten Pendelstäbe ① und ② betrachtet. Beide sind unter dem Winkel α geneigt und besitzen die Dehnsteifigkeit EA , sowie die Länge l . Am Knoten a befindet sich ein zweiwertiges Auflager, welches keine Verschiebungen zulässt. Die Lager an den Knotenpunkten b und i sind vertikal verschieblich. Zusätzlich greift am Knoten i die Einzelkraft P_i an und ruft damit die Vertikalverschiebung u_i und u_b hervor, welche in weiterer Folge ermittelt werden sollen.

Analog zur Vorgehensweise bei der Parallelschaltung werden auch in diesem Fall die Pendelstäbe als einzelne Teilsysteme betrachtet. Dementsprechend werden den Stäben im nächsten Schritt ihre Federkonstanten aus Abschnitt 2.2 zugeteilt. Da auf beide Fachwerkstäbe dieselbe Kraft P_i wirkt, können deren Federn in Serie geschaltet werden, wie es in Abbildung 3.14 zu sehen ist. Im Falle der Serienschaltung von Federn ermittelt sich die Systemfedersteifigkeit c_{ges} gemäß Gleichung (3.11) aus der Summe der Kehrwerte der Federsteifigkeiten der Teilsysteme.

$$\text{Gesamtnachgiebigkeit:} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c_{ges}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{c_{12}} \quad (3.10)$$

$$\text{Gesamtsteifigkeit:} \quad \Rightarrow \quad c_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} \quad (3.11)$$

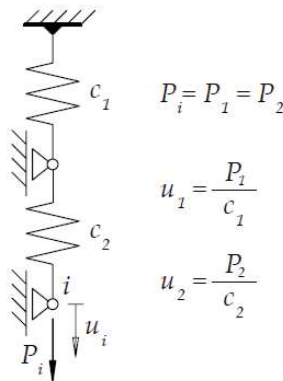


Abb. 3.14: Ersatzfedersystem aus den zwei in Serie geschalteten Längsfedern der Pendelstäbe mit der Einzelkraft P_i

Die beiden Verschiebungsanteile lassen sich gemäß Abbildung 3.14 durch die Anwendung des Federgesetzes auf die einzelnen Federn direkt berechnen. Gemäß (3.12) ergibt ihre Summe die resultierende Vertikalverschiebung u_i .

$$u_i = \frac{P_i}{c_{ges}} \quad (3.12)$$

$$\text{Kontrolle: } u_i = u_1 + u_2 = \frac{P_i}{c_1} + \frac{P_i}{c_2} \quad (3.13)$$

Zuletzt können die Normalkraftverläufe des Pendelstabsystems ermittelt werden, wie es in Abbildung 3.15 zu sehen ist.

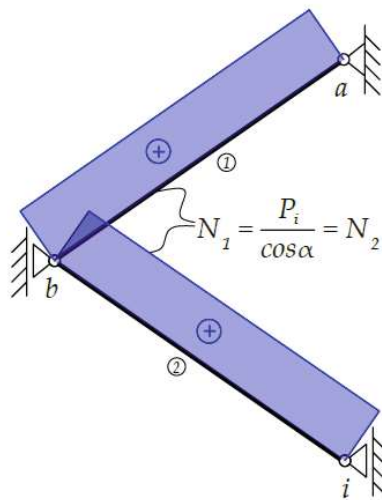


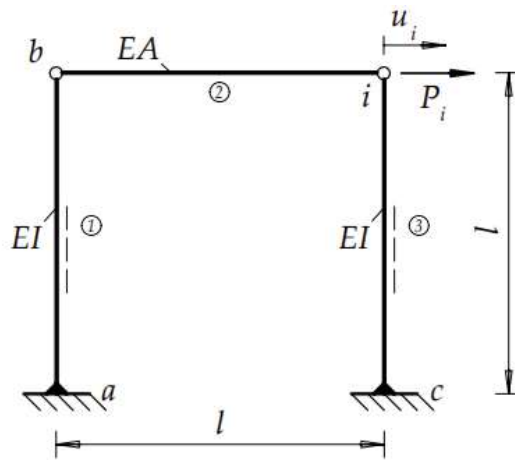
Abb. 3.15: Normalkraftverläufe des Pendelstabsystems

Exkurs: Analogie zur Elektrotechnik

Ebenso wie in Abschnitt 3.1.1 ist in der Serienschaltung von Federn eine Analogie zur Serienschaltung von Widerständen in der Elektrotechnik zu erkennen. In beiden Disziplinen werden Systeme mit denselben Kraft- oder Stromflussbedingungen betrachtet, was zu einer analogen Berechnungsweise führt. Bei seriell geschalteten Federn teilt sich die Gesamtkraft auf die einzelnen Federn auf, während bei Widerständen in Serie die gleiche Stromstärke durch jeden Widerstand fließt. Die Gesamtsteifigkeit eines seriellen Federsystems ergibt sich als Kehrwert der Summe der Kehrwerte der einzelnen Federkonstanten, analog zur Berechnung des Gesamtwiderstands in einem Reihenschaltungssystem. Hier wird der Gesamtwiderstand durch die Summe der Einzelwiderstände gebildet (Höwing, 2021, s.191). Auch in der Elektrotechnik trägt dieses Vorgehen zur Vereinfachung komplexer Systeme im Hinblick auf die Modellierung und die Berechnung bei, da die Spannungen innerhalb jedes Teilsystems individuell betrachtet und berechnet werden können.

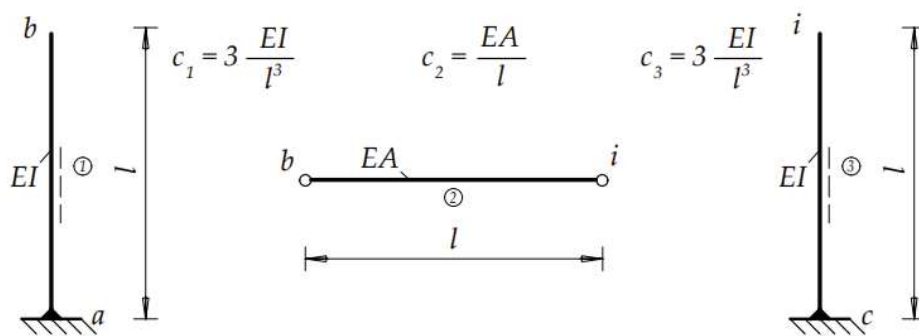
3.2 Kombination der Parallel- und Serienschaltung von Federmodellen

In diesem Abschnitt sollen die zuvor untersuchten Möglichkeiten zur Parallel- bzw. Serienschaltung von Federmodellen zusammengeführt werden, um somit die Methodiken des *Federmodellverfahrens* zu vervollständigen. Anhand von nicht-trivial zu lösenden Beispielen wird veranschaulicht, wie sich die Schaltungsarten der Federn kombinieren lassen. Insbesondere wenn unterschiedliche Lastfälle untersucht werden sollen oder komplexe Randbedingungen vorliegen, kommen die Vorteile der Vorgehensweisen zur Geltung. Dabei wird ein weiteres Mal deutlich, wie das *Federmodellverfahren* es ermöglicht, einerseits den Berechnungsaufwand zu reduzieren und andererseits die Zustandsgrößen präzise zu ermitteln.

Beispiel: Ein-fach statisch unbestimmtes Rahmentragwerk**Abb. 3.16:** Rahmentragwerk mit eingespannten Stützen und gelenkig angeschlossenen Riegel

Die Stützen (Stab ① und ③) des in Abbildung 3.16 dargestellten Rahmens sind an ihren Fußpunkten eingespannt, haben die Länge l und die Biegesteifigkeit EI . Der an die Stützen angeschlossene Riegel (Stab ②) mit der Dehnsteifigkeit EA hat ebenfalls die Länge l und ist beidseitig gelenkig mit den Stützen verbunden. Am Knoten i des Systems greift die Einzelkraft P_i an und ruft die Horizontalverschiebung u_i am Knoten i hervor. Diese und die infolge P_i resultierenden Schnittgrößen sollen im Folgenden nach Theorie I. Ordnung und ohne Berücksichtigung der Querkraftverformungen ermittelt werden.

Zunächst wird das System wie in der Analyse der vorangegangenen Beispiele auf seine Einzelstäbe und bekannte, zusammenhängende Teilsysteme untersucht. Im vorliegenden Fall wird der Rahmen in alle drei Einzelstäbe zerlegt und mit den entsprechenden Ersatzfederkonstanten gemäß Kapitel 2 ersetzt, so wie es Abbildung 3.17 zeigt.

**Abb. 3.17:** Teilsysteme des Rahmensystems mit Ersatzfederkonstanten

Nun folgen wesentliche Überlegungen zu den Verformungs- und Kraftzusammenhängen zwischen den Teilsystemen, um die Prinzipien der Parallel- und Serienschaltung optimal nutzen zu können. Das System wird vom Knoten i betrachtet und die horizontale Verschiebung u_i wird gesucht. Die aufnehmbare Teilkraft von beiden Teilsystemen ① und ② ist gleich. Diese Gegebenheiten beschreiben die Bedingungen für eine serielle Schaltung der Ersatzfedern, so dass die Stäbe ① und ② mit den Federsteifigkeiten c_1 und c_2 zu einem in Serie geschalteten Teilsystem TS_{12}

zusammengefasst werden können. Die Ersatzfedersteifigkeit c_{12} des Teilsystems TS_{12} errechnet sich gemäß (3.14) aus dem Kehrwert der Summe der Kehrwerte der einzelnen Federsteifigkeiten (vgl. (3.11)).

$$c_1 = 3 \frac{EI}{l^3} \quad c_2 = \frac{EA}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c_{12}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \quad \Rightarrow \quad c_{12} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}} \quad (3.14)$$

Durch die Bildung des neuen Teilsystems TS_{12} verbleibt der Stab ③ alleine als separates Teilsystem TS_3 . Die Teilsysteme sind im Knoten i gelenkig miteinander verbunden und weisen an dieser Stelle dieselbe Verschiebung u_i auf, so dass sie die Voraussetzungen für eine Parallelschaltung an diesem Punkt erfüllen. Nun kann das ursprüngliche Rahmensystem vollständig in ein Gesamtfedermodell transformiert werden, welches in Abbildung 3.18 dargestellt ist.

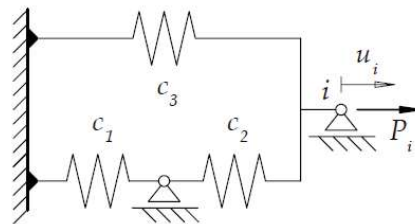


Abb. 3.18: Ersatzfedersystem aus den seriell geschalteten Federn c_1 und c_2 , und der parallel dazu geschalteten Feder c_3 unter der Last P_i

Aufgrund der Parallelschaltung der Federn c_{12} und c_3 ergibt sich die erforderliche Ersatzsystemfedersteifigkeit c_{ges} gemäß (3.15) aus deren Summe. Damit sind alle notwendigen Größen bekannt, um die gesuchte Horizontalverschiebung u_i mit Hilfe des Federgesetzes ermitteln zu können.

$$c_{ges} = c_{123} = c_{12} + c_3 \quad \Rightarrow \quad u_i = \frac{P_i}{c_{ges}} \quad (3.15)$$

Mit der ermittelten Verschiebung können nun alle relevanten Zustandsgrößen in den Teilsystemen des Rahmens bestimmt werden, indem die Federgesetze und Gleichgewichtsbeziehungen angewandt werden. Die ausgewählten Teilsysteme des Rahmens, deren Kraftanteile sowie die vorhandenen Schnittgrößen sind abschließend in Abbildung 3.19 dargestellt.

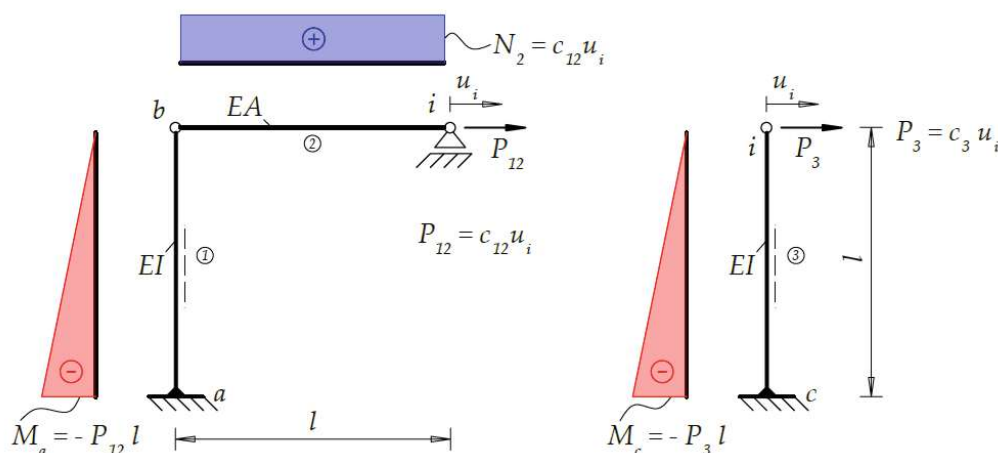


Abb. 3.19: Teilsysteme des Rahmens mit Kraftanteilen und vorhandenen Schnittgrößen

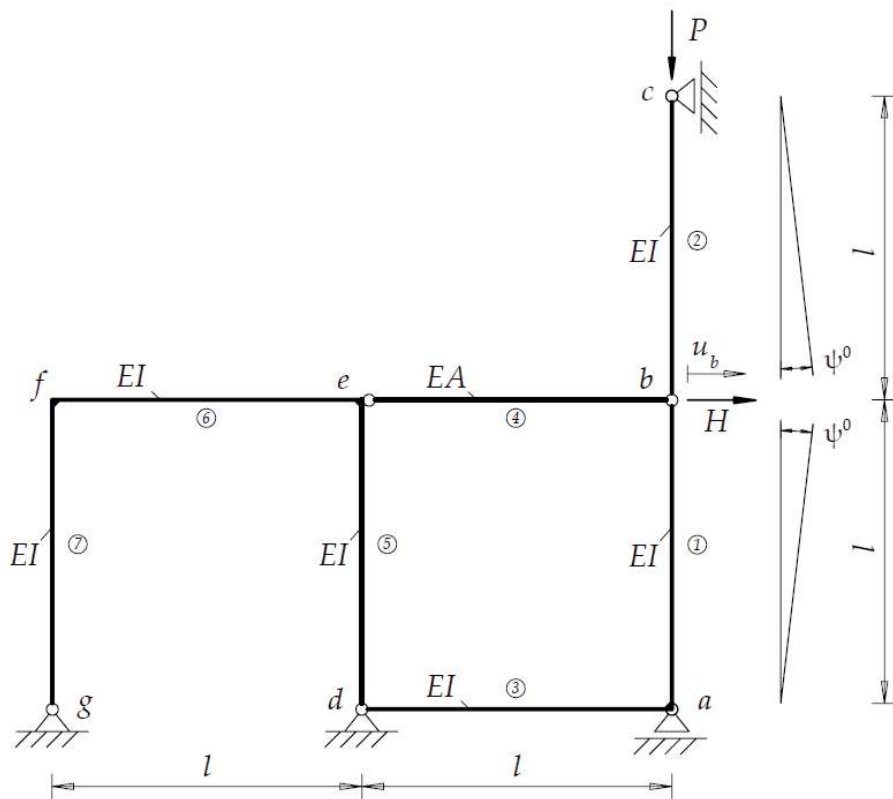
Beispiel: Stabtragwerk gemäß Biegestabtheorie II. Ordnung

Abb. 3.20: Stabtragwerk bestehend aus den Stäben ①–⑦ mit der Länge l und der Biegesteifigkeit EI bzw. Dehnsteifigkeit EA

Wie in Abbildung 3.20 zu erkennen ist, behandelt das vorliegende Beispiel ein umfangreiches Stabsystem, an dem die gegebene Belastung Effekte nach Theorie II. Ordnung hervorruft. Alle Stäbe des Systems weisen eine Länge von l auf. Mit Ausnahme des Stabs ④, der durch eine Dehnsteifigkeit EA charakterisiert ist, verfügen die Stäbe zudem über eine Biegesteifigkeit EI . Die Stäbe ⑤, ⑥ und ⑦ bilden einen Rahmen mit biegesteifen Ecken und gelenkig gelagerten Fußpunkten. An den Knoten d und e des Rahmens schließen jeweils die horizontalen Stäbe ③ und ④ gelenkig an. Diese verbinden den Rahmen mit den vertikal angeordneten Stäben ① und ②. Die Verbindung der Stäbe am Knotenpunkt b ist an allen Seiten vollgelenkig, während die Stäbe ① und ③ biegesteif, jedoch verdrehbar am Auflagerpunkt a miteinander verbunden sind. Das Auflager am Knotenpunkt c ist vertikal verschieblich und durch die axial angreifende Druckkraft P belastet. Aufgrund der Axialbelastung kommt es in den Stäben ① und ② zu einer Stabilitätsgefährdung, die eine Berechnung nach Biegestabtheorie II. Ordnung inklusive Vorverdrehungen ψ^0 notwendig macht. Die Horizontalkraft H , die am Knoten b angreift, begünstigt die Stabilitätsgefährdung zusätzlich. Alle übrigen Stäbe sind von der Stabilitätsgefährdung nicht betroffen und können daher wie bisher nach Biegestabtheorie I. Ordnung berechnet werden. Querkraftverformungen werden auch in diesem Beispiel weiterhin vernachlässigt.

Es soll nun die horizontale Verschiebung u_b infolge der Einzelkräfte P und H , sowie der Vorverdrehungen ψ^0 der Stäbe ① und ② ermittelt werden. Im ersten Schritt wird das System auf seine Abhängigkeiten bezüglich der Lasten und der Verformungen zwischen den einzelnen

Stäben untersucht, um auf dieser Grundlage sinnvolle Teilsysteme zu wählen. Es ist zu erkennen, dass der Dehnstab ④ seine Belastung unmittelbar auf den Rahmen (Tabelle 2.7, Zeile 1) aus den Stäben 5, 6 und 7 überträgt und somit eine Serienschaltung zwischen den Ersatzfedern des Dehnstabes und des Rahmens entsteht. Da die Ersatzfederkonstanten für den Dehnstab, als auch für den Rahmen aus Kapitel Zwei bereits bekannt sind, kann somit ein erstes Teilsystem TS_{4567} mit entsprechendem Ersatzfedermodell gebildet werden, wie es in Abbildung 3.21 zu sehen ist. Die Federsteifigkeit c_{4567} der beiden Elemente wird wiederum gemäß der Serienschaltung aus dem Kehrwert der Summe der Kehrwerte der jeweiligen Ersatzfederkonstanten ermittelt.

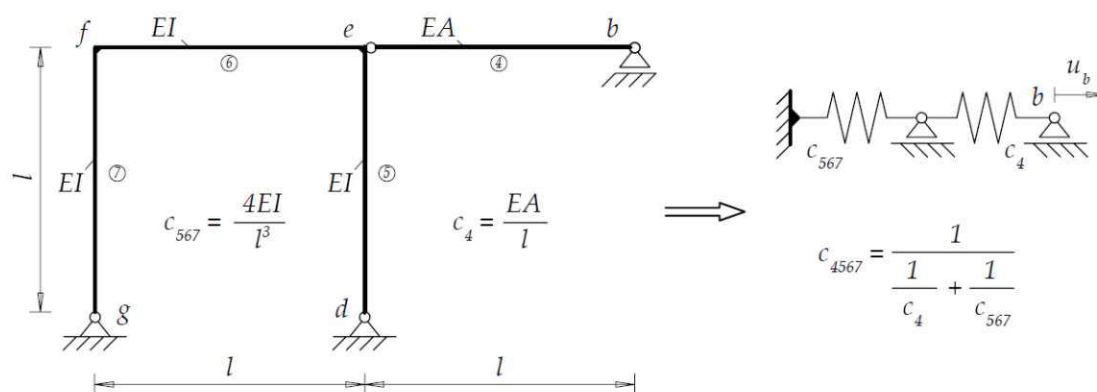


Abb. 3.21: Teilsystem TS_{4567} und sein äquivalentes Ersatzfedermodell in Serienschaltung

Im nächsten Schritt kann das ermittelte Federmodell für die weitere Analyse am Gesamtsystem angesetzt werden, um somit die Stäbe ④ bis ⑦ allein durch die Federsteifigkeit c_{4567} vollwertig zu ersetzen. Dieses vereinfachte Modell ist als neues Teilsystem TS_{4567} in Abbildung 3.22 zu sehen.

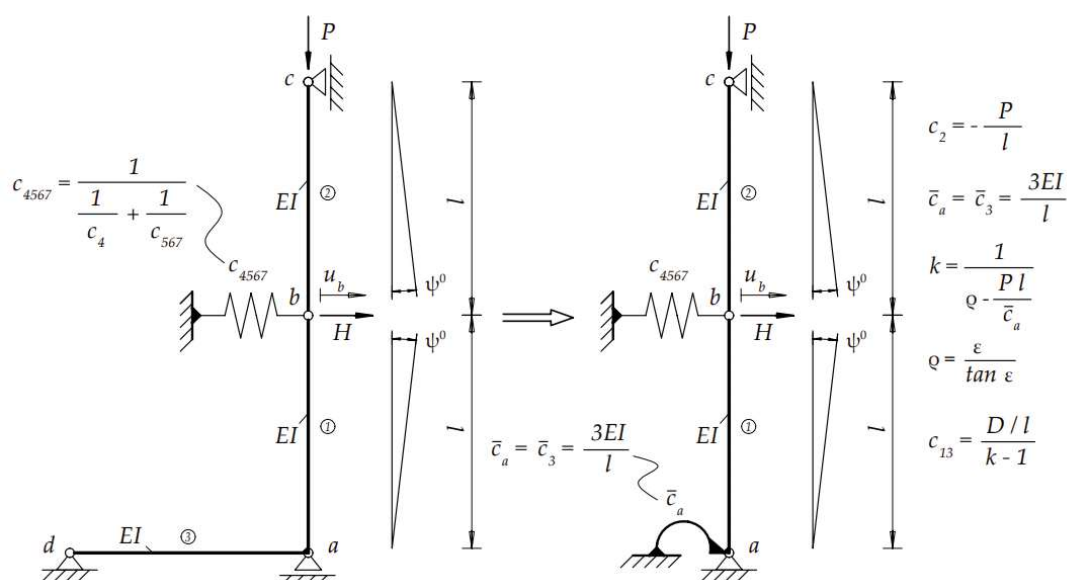


Abb. 3.22: Links: Teilsystem TS_{123} mit Ersatzfeder c_{4567} anstelle der Stäbe ④ bis ⑦. Rechts: weitere Vereinfachung durch Ersatzdrehfeder $\bar{c}_a$ anstelle des Stabes ③

In Abbildung 3.22 ist außerdem eine weitere Möglichkeit zur nächsten Vereinfachung des betrachteten Systems dargestellt, die am Stab ③ besteht. Dieser entspricht dem in Kapitel 2 behandelten Stab mit konstanter Biegesteifigkeit EI und freidrehbarer Einspannstelle nach Theorie I. Ordnung. Der Stab lässt sich somit am Knoten a durch die entsprechende Ersatzdrehfeder $\bar{c}_a$ gemäß Tabelle 2.2, Zeile 3 abbilden und reduziert somit das System um einen weiteren Stab. Jedoch ist dies nicht die letzte Vereinfachung, die an dem bereits stark reduzierten System getroffen werden kann. Betrachtet man den Stab ① isoliert, verbleibt ein axial belasteter Druckstab, der am freien Ende eine Horizontalkraft aufweist und am Fußpunkt durch eine Drehfeder nachgiebig eingespannt ist. Dieser Fall ist ebenfalls bekannt und kann der Tabelle 2.6, Zeile 1 entnommen werden. Mit Hilfe der dort angegebenen Vorwerte lässt sich die Federkonstante c_{13} nach Th. II. Ord. ermitteln. Dadurch verbleibt vom ursprünglichen Gesamtsystem lediglich der Stab ②, welcher als Pendelstab nach Th. II. Ord. zu betrachten ist. Näheres hierzu im folgenden Exkurs.

Exkurs: Pendelstäbe und ihre Federkonstanten nach Theorie I. und II. Ordnung

Wie dehnstarre Pendelstäbe grundsätzlich nach Th. I. und II. Ord. zu behandeln sind, ist in Abbildung 3.23 dargestellt. Während sie nach Th. I. Ord. vereinfacht durch ein einwertiges Auflager ersetzt werden können, gilt es, sie nach Th. II. Ord. durch ein lineares Federmodell zu ersetzen und vorhandene Vorverdrehung mit zu berücksichtigen. Die entsprechende Federsteifigkeit ermittelt sich im Allgemeinen gemäß Gleichung (3.16). Vorverdrehungen sind als Knotenkraft aus dem Produkt aus der jeweiligen Vorverdrehung mit der Axialkraft des Stabes wieder zu erfassen.

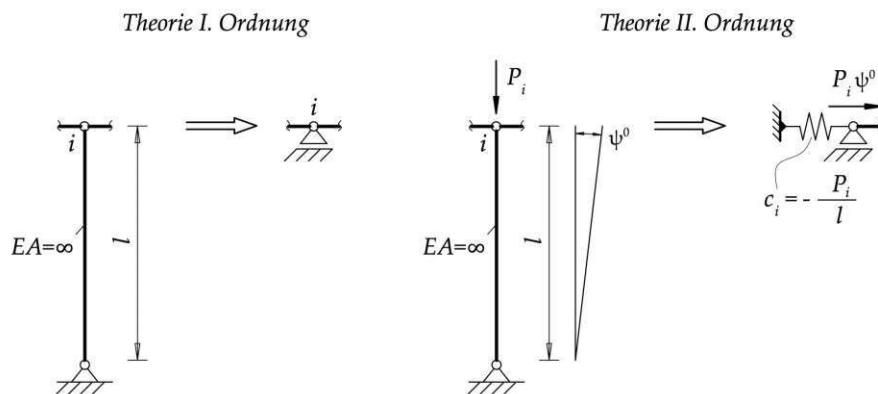


Abb. 3.23: Pendelstäbe und ihre Federkonstanten nach Theorie I. und II. Ordnung

$$c_i = \frac{N^{\text{II}}}{l} \quad \text{für Pendelstäbe nach Th. II. Ord.} \quad (3.16)$$

Anhand der vorhergehenden Erläuterungen kann der verbliebene Pendelstab ② durch ein äquivalentes Federmodell ersetzt werden. Die Vorverdrehungen ψ^0 werden dabei durch entsprechende Ersatzlasten am Knoten b berücksichtigt. Bevor das Originalsystem vollständig in ein Gesamtfedermodell überführt werden kann, sind noch Überlegungen bezüglich weiterer Schaltungsmöglichkeiten anzustellen. Am ursprünglichen Stabsystem (Abb. (3.20)) ist zu erkennen, dass sich alle Stäbe am Knoten b um den selben Betrag u_b verschieben werden. Diese Erkenntnis führt darauf, dass alle anschließenden Ersatzfedermodelle an diesem Knoten parallel geschaltet

werden können. Das sich final ergebende Gesamtfedermodell des Originalsystems ist in Abbildung 3.24 dargestellt und zeigt ein weiteres Mal, wie weit sich selbst komplexe Systeme mit Hilfe der Ersatzfedermodelle reduzieren lassen, ohne dass dabei Ungenauigkeiten in den Berechnungen entstehen.

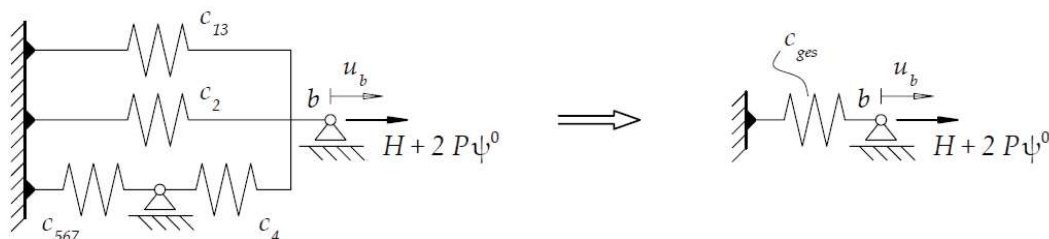


Abb. 3.24: Ersatzfedermodelle des Gesamtsystems

Zu erkennen sind die parallel geschalteten Ersatzfedern c_{13} , c_2 und c_{567} , die mit c_4 in Serie geschaltet sind. Am Knoten b sind neben der Horizontalkraft H auch die Vorverdrehungen ψ^0 im Produkt mit der Axialkraft P zweifach anzusetzen. Auch dieses Modell lässt sich noch ein letztes Mal vereinfachen, indem die Ersatzfedersteifigkeiten zur Ersatzsystemfedersteifigkeit c_{ges} gemäß (3.17) aufaddiert werden, wie es die Parallelschaltung ermöglicht. Dadurch kann das aus sieben Stäben bestehende Grundsystem auf eine einzelne lineare Längsfeder reduziert werden.

$$c_{4567} = \frac{1}{\frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_{567}}} \Rightarrow c_{ges} = c_{4567} + c_{13} + c_2 \Rightarrow u_b = \frac{H + 2P\psi^0}{c_{ges}} \quad (3.17)$$

Schlussendlich kann mit der resultierenden Ersatzsystemfedersteifigkeit c_{ges} auch die gesuchte Horizontalverschiebung u_b mit dem Federgesetz ermittelt werden. Durch die Kenntnis dieser Verschiebung ist es nun möglich, die Zustandsgrößenverläufe des gesamten Systems aus Gleichgewichtsbedingungen und Federgesetzen zu bestimmen. Die resultierende Momentenlinie, sowie maßgebende Normalkräfte sind in Abbildung 3.25 dargestellt.

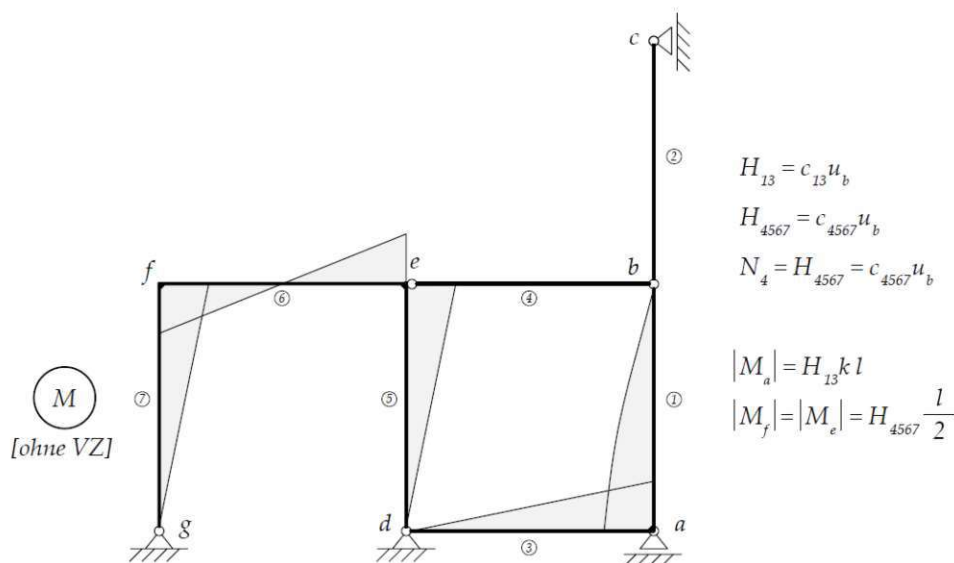


Abb. 3.25: Vorzeichenloser Momentenverlauf des Gesamtsystems

Kapitel 4

Das Federmodellverfahren im dreidimensionalen Raum

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Methoden zur Ermittlung der Ersatzfederkonstanten nach der Theorie I. und II. Ordnung sowie deren Kombinationsarten anhand von zweidimensionalen Stabsystemen erläutert. Im vierten und letzten Kapitel dieser Arbeit wird nun ein dreidimensionales System analysiert, um die Übertragbarkeit der bisher erarbeiteten Grundlagen des *Federmodellverfahrens* auf den dreidimensionalen Raum zu demonstrieren. Zunächst wird das Beispielsystem in allgemeiner Form mit dem *Federmodellverfahren* untersucht. Anschließend erfolgt eine numerische Berechnung unter Berücksichtigung spezifischer geometrischer Abmessungen, Querschnittswerte und Belastungsgrößen. Zusätzlich werden die resultierenden Zustandslinien des Systems gesucht und sollen im Zuge einer Nachlaufrechnung ermittelt und dargestellt werden. Im letzten Schritt wird eine Vergleichsrechnung mit der Software *RSTAB* (Version 8.20, Fa. Dlubal) durchgeführt, um die händisch ermittelten Ergebnisse des *Federmodellverfahrens* zu validieren.

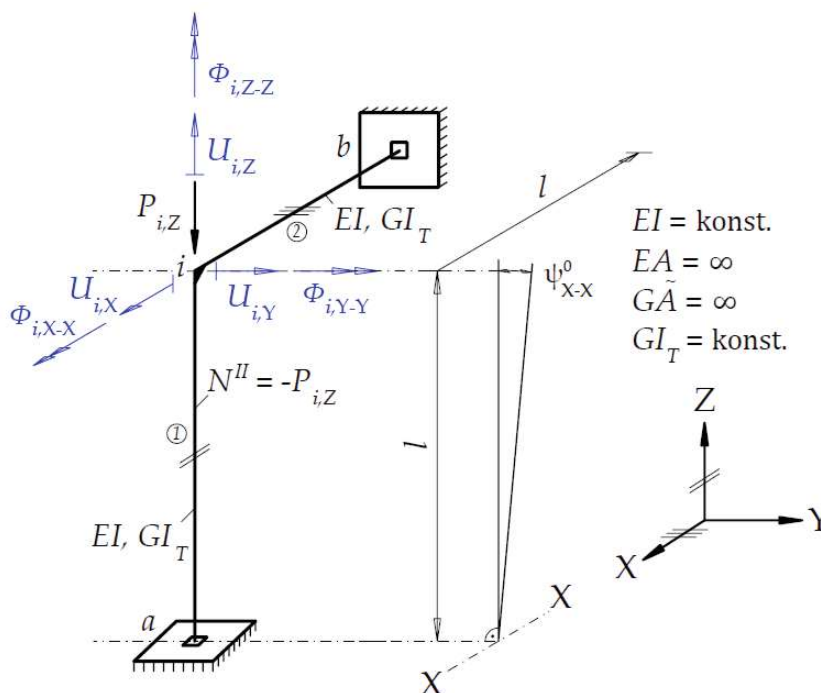


Abb. 4.1: 3D-System

Das in Abbildung 4.1 dargestellte 3D-Stabsystem besteht aus den Biegestäben ① in Z-Richtung und ② in X-Richtung mit der Biegesteifigkeit EI und der Länge l . Die Stäbe sind am Knoten i biegesteif miteinander verbunden und jeweils an ihrem gegenüberliegenden Stabenden (Knoten a und b) volleingespant. Die Dehnsteifigkeit EA und die Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ der Stäbe werden

als unendlich groß angenommen, sodass die Dehn- und Querkraftverformungen vernachlässigt werden können. Dadurch gilt der Knoten i in globaler X - und Z -Richtung als unverschieblich ($U_{i,X} = U_{i,Z} = 0$). Am selben Knoten wirkt die Einzellast $P_{i,Z}$ in vertikaler Richtung auf das System ein. Da diese Last entlang der Stabachse des Stabes ① eine große Axialdruckkraft hervorruft, ist eine Stabilitätsgefährdung des Systems zu erwarten, wodurch eine Betrachtung nach Th. II. Ord. zufolge der Axialdruckkraft $N_{\textcircled{1}}^{\text{II}} = -P_{i,Z}$ erforderlich wird. Aus demselben Grund wird für diesen Stab die Vorverdrehung ψ_{X-X}^0 gewählt. Ihre lokale Rotationsachse ist parallel zur X -Achse. Diese Vorverformung wurde qualitativ ähnlich zur Knickfigur des Systems gewählt. Da der Stab ② nur quer zu seiner Stabachse durch die Einzellast $P_{i,Z}$ belastet wird, und keine große Axialkraft besitzt, kann dieser nach Th. I. Ord. analysiert werden.

In den Berechnungen sind die folgenden globalen Verschiebungsgrößen am Knoten i gesucht:

Verschiebungen

$$U_{i,Y} = ?$$

$$U_{i,X} = 0$$

$$U_{i,Z} = 0$$

Rotationen

$$\phi_{i,Y-Y} = ?$$

$$\phi_{i,X-X} = ?$$

$$\phi_{i,Z-Z} = ?$$

Die Verschiebungen $U_{i,Y}$, $U_{i,X}$ und $U_{i,Z}$ am Knoten i verlaufen in Richtung der Y -, X - und Z - Achse. Mit $\phi_{i,Y-Y}$, $\phi_{i,X-X}$ und $\phi_{i,Z-Z}$ sind jene Rotationen am Knoten i gemeint, deren Achsen parallel zu den Y -, X - und Z - Achsen verlaufen. Aufgrund der Dehnstarrheit der Stäbe ① und ② sind die beiden globalen Verschiebungen $U_{i,X}$ und $U_{i,Z}$ bekannt und gleich null.

4.1 Allgemeine Analyse mit dem Federmodellverfahren

Die allgemeine Ermittlung der gesuchten Verschiebungs- und Rotationsgrößen erfolgt schrittweise im Bezug auf die betrachteten globalen Raumrichtungen (X -, Y - und Z -Richtung). Dazu werden nach dem bekannten Vorgehen Teilsysteme aus den einzelnen Stäben gebildet und deren Rand- und Übergangsbedingungen zu den benachbarten Teilsystemen bzw. zur Erdscheibe berücksichtigt, um die erforderlichen Federsteifigkeiten bezüglich der jeweiligen Verschiebungs- oder Rotationsrichtung nach Theorie I. oder II. Ordnung ermitteln zu können. Daraufhin werden die ermittelten Federsteifigkeiten aus den Teilsystemen mittels Parallel- oder Serienschaltung so kombiniert, dass ein zum Originalsystem mechanisches äquivalentes Federersatzsystem entsteht, an dem mühelos alle gesuchten Freiheitsgrade des Systems ermittelt werden können. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass es im Vergleich zu den bisherigen 2D-Betrachtungen von Stabsystemen im dreidimensionalen Raum durch unterschiedliche Stabachsenorientierungen zu unterschiedlichen lokalen Verschiebungsgrößen zufolge der globalen Verschiebungsgrößen im Raum kommen kann. Während dieselbe globale Rotation bei einem Stab als lokale Querschnittsverdrehung erscheint, kann sie bei einem anderen Stab als Verdrillung auftreten. Dieser Effekt muss im Folgenden bei der Ermittlung der Federkonstanten berücksichtigt werden, indem die entsprechenden Steifigkeiten an den Übergangsstellen in die Analyse der Teilsysteme miteinbezogen werden.

Ermittlung der linearen Längsfedersteifigkeit $c_{i,Y}$ und der globalen Verschiebung $U_{i,Y}$

Im ersten Schritt soll die Federsteifigkeit $c_{i,Y}$ ermittelt werden. Sie stellt einen Zusammenhang zwischen der globalen Verschiebung in Y-Richtung, $U_{i,Y}$, und der gegebenen Belastungen $P_{i,Z}$, sowie der Vorververdrehung ψ_{X-X}^0 dar. Dazu wird zunächst das Gesamtsystem in zwei Teilsystemen mit je einem Stab unterteilt. Wie in den Abbildungen (4.1) und (4.2) zu erkennen ist, entspricht die Verdrillung des Stabes ② um seine Stabachse am Knoten i dem Querschnittsdrehwinkel des Stabes ① um die Z-Achse. Genauso entspricht die Verdrillung des Stabes ① um seine Stabachse am Knoten i dem Querschnittsdrehwinkel um die X-Achse des Stabes ②, siehe Abbildung 4.3. Um diese Kopplungen bei den Teilsystemen zu berücksichtigen, werden die Drehfedern für die Biegungen am Knoten i durch die Torsionsdrehfedersteifigkeiten des korrespondierenden Stabes wie folgt definiert.

$$\bar{c}_{i,Z-Z}^{(2)} = \bar{c}_{T,i,Z-Z}^{(1)} = \frac{GI_T}{\ell_1} \quad \text{und} \quad \bar{c}_{i,X-X}^{(1)} = \bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} = \frac{GI_T}{\ell_2} \quad (4.1)$$

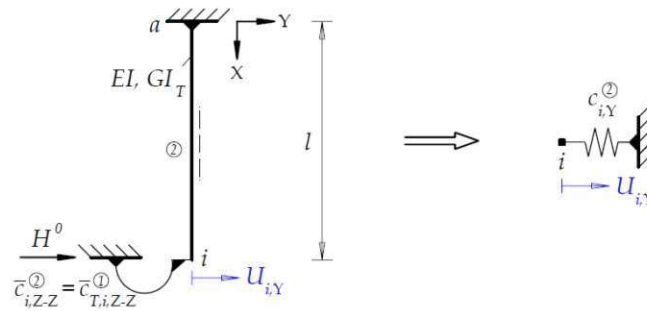


Abb. 4.2: Teilsystem für Stab ② inklusive Rand- und Übergangsbedingungen am Knoten i zur Ermittlung der Federsteifigkeit $c_{i,Y}^{(2)}$

Das betrachtete Teilsystem bzw. der Stab ② wird nun durch entsprechende Federmodelle nach Theorie I. Ordnung so ersetzt, dass diese die Übergangsbedingungen am Knoten i in weiterer Folge exakt und mechanisch äquivalent zum Stab ② abbilden. Analog dazu wird im nächsten Schritt das Teilsystem des Stabes ② gemäß Abbildung 4.3 betrachtet. In diesem Fall sind nun jedoch Federmodelle nach Theorie II. Ordnung zu verwenden, da der Stab zufolge der Einzellast $P_{i,Z}$ stabilitätsgefährdet ist.

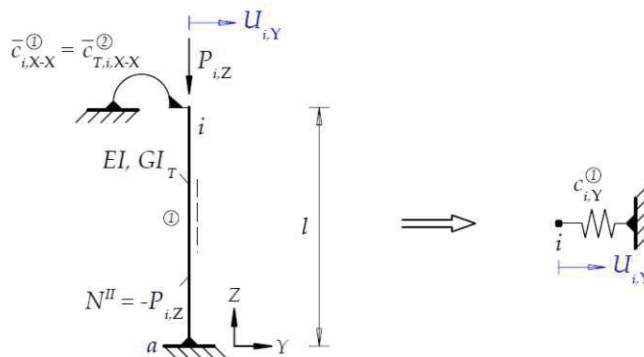


Abb. 4.3: Teilsystem für Stab ① inklusive Rand- und Übergangsbedingungen am Knoten i zur Ermittlung der Federsteifigkeit $c_{i,Y}^{(1)}$

Um die globale Verschiebung am Knoten i in Y – Richtung, $U_{i,Y}$, zu berechnen, werden die linearen Federsteifigkeiten, $c_{i,Y}^{(1)}$ und $c_{i,Y}^{(2)}$ für die beiden Teilsysteme mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen bzw. mittels Übertragungsbeziehungen nach Th. II. Ord. (Rubin, 1993) gemäß Kapitel 2 ermittelt. Hierzu ist in Anhang A eine Programmierung zu finden, die die gesuchten Ausdrücke analytisch berechnet. Diese lauten:

$$c_{i,Y}^{(1)} = \frac{EI(b_1\bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} + b_0EI)}{b_2^2\bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} + b_1b_2EI - b_3(b_1\bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} + b_0EI)} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \quad (4.2)$$

und

$$c_{i,Y}^{(2)} = \frac{12EI(EI + \bar{c}_{T,i,X-X}^{(1)}\ell)}{\ell^3(4EI + \bar{c}_{T,i,X-X}^{(1)}\ell)} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}] \quad (4.3)$$

Mit $c_{i,Y}^{(1)}$ und $c_{i,Y}^{(2)}$ sind nun die Längsfedersteifigkeiten der einzelnen Teilsysteme bekannt. Da die horizontale Verschiebung (in Y -Richtung) des Knotens i für beide Stäbe gleich groß ist, lassen sich die ermittelten Federsteifigkeiten mittels der Parallelschaltung von Federn zu einer Gesamtfedersteifigkeit aufaddieren, um damit die resultierende Knotenverschiebung $U_{i,Y}$ gemäß Gleichung (4.4) berechnen zu können. Die Vorverdrehung ψ_{X-X}^0 lässt sich durch eine Knotenlast $H^0 = -N^{II}\psi_{X-X}^0$ gemäß Abbildung 4.4 ersetzen.

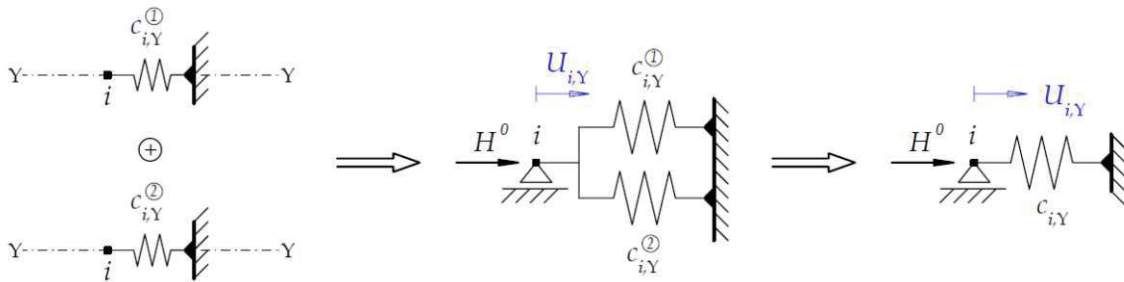


Abb. 4.4: Kombination der Federsteifigkeiten $c_{i,Y}^{(1)}$ und $c_{i,Y}^{(2)}$ mittels Parallelschaltung und Vereinfachung zu einer einzelnen Längsfeder mit der Steifigkeit $c_{i,Y}$

$$c_{i,Y} = c_{i,Y}^{(1)} + c_{i,Y}^{(2)} \quad [\text{Krafteinheit/Längeneinheit}]$$

$$c_{i,Y} = \frac{EI(b_1\bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} + b_0EI)}{b_2^2\bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} + b_1b_2EI - b_3(b_1\bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} + b_0EI)} + \frac{12EI(EI + \bar{c}_{T,i,X-X}^{(1)}\ell)}{\ell^3(4EI + \bar{c}_{T,i,X-X}^{(1)}\ell)}$$

$$U_{i,Y} = \frac{H^0}{c_{i,Y}} \quad [\text{Längeneinheit}] \quad (4.4)$$

Somit ist der erste unbekannte Freiheitsgrad des dreidimensionalen Systems $U_{i,Y}$, die horizontale Verschiebung des Knotens i in Y -Richtung, in analytischer Form hergeleitet.

Ermittlung der Drehfedersteifigkeit $\bar{c}_{i,Y-Y}$ und der Rotation $\phi_{i,Y-Y}$

Die Ermittlung der Drehfedersteifigkeit $\bar{c}_{i,Y-Y}$, die die Steifigkeit des Systems gegenüber Rotationen $\phi_{i,Y-Y}$ am Knoten i mit der Achse parallel zur Y -Achse beschreibt, erübrigt sich. Da der Knoten i aufgrund der Dehnstarrheit der Stäbe in X - und Z -Richtung festgehalten wird, die Endknoten a und b volleingespannt sind und keine Feldbelastungen wirken, die Biegung in Richtung der Y -Achse erzeugen könnten, bleibt die Rotation $\phi_{i,Y-Y}$ am Knoten i gleich null. Damit kann auf die Ermittlung der entsprechenden Drehfedersteifigkeit $\bar{c}_{i,Y}$ verzichtet werden.

$$\phi_{i,Y-Y} \equiv 0 \quad (4.5)$$

Ermittlung der Rotation $\phi_{i,X-X}$

Im nächsten Schritt wird die Rotation $\phi_{i,X-X}$ ermittelt. Hierzu ist die Herleitung einer entsprechenden Drehfedersteifigkeit $\bar{c}_{i,X-X}$ nicht mehr zwingend notwendig, da die gesuchte Rotation direkt auf Basis der nun bekannten Knotenverschiebung $U_{i,Y}$ berechnet werden kann. Dazu wird das Teilsystem des Stabes ① entsprechend Abbildung 4.5 betrachtet.

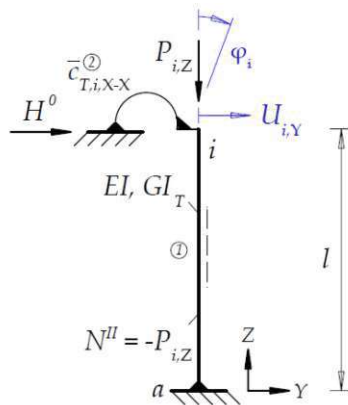


Abb. 4.5: Teilsystem für Stab ① inklusive Rand- und Übergangsbedingungen am Knoten i zur Ermittlung der Drehfedersteifigkeit $\bar{c}_{i,X-X}$

Am Knoten i wird analog zu den bisherigen Analysen eine Torsionsfedersteifigkeit $\bar{c}_{T,i,X-X}^2$ gemäß Gleichung (4.1) berücksichtigt, die die Torsionssteifigkeit des Stabes ② repräsentiert. Nun können die Rand- und Übergangsbedingungen des Teilsystems wiederum in die Übertragungsbeziehungen nach Th. II. Ord. (Rubin, 1993) eingesetzt werden, wobei die Knotenverschiebung $U_{i,Y}$ als eingeprägte Verschiebung am Knoten i zu berücksichtigen ist (siehe Anhang B). Das dabei entstehende Gleichungssystem kann direkt nach dem lokalen Querschnittsdrehwinkel φ_i aufgelöst werden, so dass die Ermittlung einer Drehfederkonstante in diesem Fall vernachlässigt werden kann. Dabei ist das Vorzeichen des resultierenden Ausdrucks für φ_i entsprechend Gleichung (4.6) der globalen Drehrichtung der gesuchten Rotation $\phi_{i,X-X}$ anzupassen.

$$\phi_{i,X-X} = -\varphi_i = \frac{(b_1^2 EI - b_0 b_2 EI) U_{i,Y-Y}}{b_2^2 \bar{c}_{T,i,X-X}^2 + b_1 b_2 EI - b_0 b_3 EI} \quad (4.6)$$

Hiermit ist auch die Knotenrotation $\phi_{i,X-X}$ allgemein für das System hergeleitet. Nun zum letzten noch unbekannten Freiheitsgrad.

Ermittlung der Rotation $\phi_{i,Z-Z}$

Zuletzt wird nun die Rotation $\phi_{i,Z-Z}$ des Knoten i um die globale Z -Achse ermittelt. Dies erfolgt analog zur gerade identifizierten Rotation $\phi_{i,X-X}$ mit Hilfe der bekannten Knotenverschiebung $U_{i,Y}$. So ist auch in diesem Fall die Ermittlung der zugehörigen Drehfedersteifigkeit $\bar{c}_{i,Z-Z}$ nicht erforderlich, um den gesuchten Querschnittsdrehwinkel $\phi_{i,Z-Z}$ zu ermitteln. Dazu wird das Teilsystem des Stabes ② gemäß Abbildung 4.6 betrachtet.

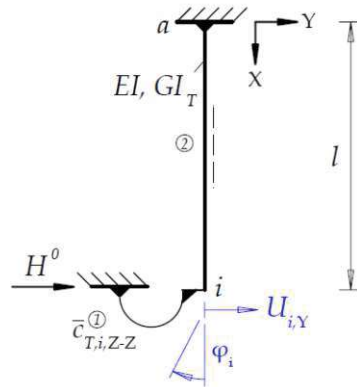


Abb. 4.6: Teilsystem für Stab ② inklusive Rand- und Übergangsbedingungen am Knoten i zur Ermittlung der Drehfedersteifigkeit $\bar{c}_{i,Z-Z}$

Auch in diesem Teilsystem wird der Widerstand gegen Verdrehung um die Stabachse des Stabes ① durch die Torsionsfedersteifigkeit $\bar{c}_{T,i,Z-Z}^{(1)}$ am Knoten i gemäß Gleichung (4.1) repräsentiert. Nun werden die bekannten Rand- bzw. Übergangsbedingungen in die Übertragungsbeziehungen nach Th. I. Ord. (Rubin, 1993) eingesetzt, wobei die Knotenverschiebung $U_{i,Y}$ als eingeprägte Verschiebung am Knoten i zu berücksichtigen ist (siehe Anhang B). Die gesuchte lokale Knotenverdrehung φ_i kann wiederum unmittelbar aus dem Gleichungssystem der Übertragungsmatrix ermittelt werden, ohne dass dafür eine Drehfederkonstante hergeleitet werden muss. Nun ist das Vorzeichen des resultierenden Ausdrucks für φ_i entsprechend Gleichung (4.7) der globalen Drehrichtung der gesuchten Rotation $\phi_{i,Z-Z}$ anzupassen.

$$\phi_{i,Z-Z} = \varphi_i = \frac{6EI U_{i,Y}}{l(4EI + \bar{c}_{T,i,Z-Z}^{(1)} l)} \quad (4.7)$$

Mit dem hergeleiteten Ausdruck für $\phi_{i,Z-Z}$ sind nun alle gesuchten Freiheitsgrade des Systems in allgemeiner Form bekannt. Im folgenden Abschnitt werden die hergeleiteten Ausdrücke verwendet, um eine numerische Analyse mit dem *Federmodellverfahren* an dem Beispiel durchzuführen.

Ermittlung der ideellen Knicklast P_{Ki}

Um die zusätzlich die Knicklast P_{Ki} zu ermitteln, wird die Kraft P soweit erhöht bis die Gesamtfederkonstante, $c_{i,Y}$ in Gleichung (4.4) gleich Null wird.

4.2 Numerische Analyse mit dem Federmodellverfahren

Das zuvor in Abschnitt 4.1 allgemein betrachtete 3D-System wird im Folgenden durch konkrete geometrische Abmessungen, Materialeigenschaften und Lastgrößen ergänzt. In diesem Abschnitt erfolgt eine numerische Analyse der Freiheitsgrade auf Basis der hergeleiteten Federsteifigkeiten und Einzelformeln. Die ermittelten Werte dienen anschließend als Grundlage für den Vergleich der Ergebnisse zwischen dem *Federmodellverfahren* und einer Statiksoftware.

Im Hinblick auf seine kinematischen Freiheitsgrade bleibt das System identisch zu dem aus Kapitel 4.1. Die Stäbe ① und ② sind demnach dehn- ($EA = \infty$) und schubstarr ($G\tilde{A} = 0$), wodurch der Knoten i entlang der globalen X- und Z-Achse unverschieblich ist ($U_{i,X} = U_{i,Z} = 0$). Demzufolge werden auch in dieser Berechnung die selben Freiheitsgrade wie zuvor ermittelt.

In Abbildung 4.7 ist das betrachtete 3D-System erneut dargestellt. Der Einzelkraft $P_{i,Z}$ und der Vorverdrehung ψ_{X-X}^0 des Stabes ① wurden nun spezifische Werte zugeteilt.

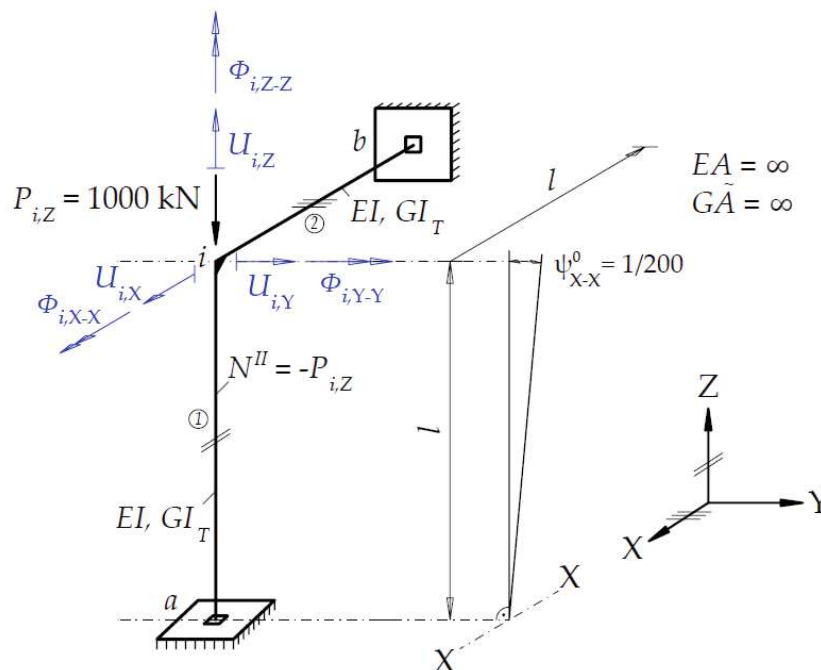


Abb. 4.7: Untersuchtes 3D-System mit Lastwerten zur numerischen Analyse

Alle weiteren Geometrie- und Materialeigenschaften des Systems für die numerische Analyse lauten folgendermaßen:

Querschnitt: QRO 200 x 5, Baustahl S235: $E = 21\,000\text{ kN/cm}^2$, $G = 8\,076,92\text{ kN/cm}^2$

- Stablänge $l = 300\text{ cm}$
- $EI = 51\,345\,000\text{ kNcm}^2$
- $A_y = 16,35\text{ cm}^2$
- $GI_T = 30\,336\,911,52\text{ kNcm}^2$
- $I_y = I_z = 2445\text{ cm}^4$, $I_T = 3756\text{ cm}^4$
- $G\tilde{A} = \infty$, $EA = \infty$

Belastung: Einzelkraft $P_{i,Z} = 1000 \text{ kN}$

Vorverformungen: Vorverdrehung $\psi_{X-X}^0 = 1/200 = 0.005$ an Stab ①

Zusätzliche Eingangsparameter für Stab ① nach Th. II. Ord.:

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{N^{\text{II}}}{G\tilde{A}}} = 1.00$$

$$K = \gamma \frac{N^{\text{II}}}{EI} = -0,194760931 \text{ cm}^{-2}$$

$$f = \sqrt{|K|} = 0,441317268 \text{ cm}^{-1}$$

$$b_0 = \cos(fl) = 0,244345352$$

$$b_1 = \frac{\sin(fl)}{f} = 219,7258854 \text{ cm}$$

$$b_2 = \frac{b_0 - 1}{K} = 38799,08791 \text{ cm}^2$$

$$b_3 = \frac{b_1 - l}{K} = 4121674,416 \text{ cm}^3$$

Die Abfolge der Berechnung erfolgt direkt entlang der allgemeinen Herleitung aus Kapitel 4.1:

Ermittlung der linearen Längsfedersteifigkeit $c_{i,Y}$ und der globalen Verschiebung $U_{i,Y}$

Die Torsionsfedersteifigkeiten $\bar{c}_{T,i,Z-Z}^{(1)}$ und $\bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)}$, die in den Teilsystemen der Stäbe ① und ② (Abb. (4.2) und (4.3)) benötigt werden, um die Steifigkeit des jeweils anschließenden Stabes zu repräsentieren, lautet gemäß Gleichung (4.1) für beide Stäbe:

$$\bar{c}_{T,i,Z-Z}^{(1)} = \bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} = \frac{GI_T}{\ell} = 101\,230,038 \text{ kNcm} \quad (4.8)$$

Mit den nun bekannten Torsionsfedersteifigkeiten gemäß (4.8) lassen sich die einzelnen Längsfedersteifigkeitsanteile $c_{i,Y}^{(1)}$ und $c_{i,Y}^{(2)}$ beider Teilsysteme in globaler Y-Richtung anhand der allgemeinen Gleichungen (4.2) und (4.3) berechnen.

$$c_{i,Y}^{(1)} = \frac{EI(b_1\bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} + b_0EI)}{b_2^2\bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} + b_1b_2EI - b_3(b_1\bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} + b_0EI)} = 3,99637 \text{ kN/cm} \quad (4.9)$$

$$c_{i,Y}^{(2)} = \frac{12EI(EI + \bar{c}_{T,i,X-X}^{(1)}\ell)}{\ell^3(4EI + \bar{c}_{T,i,X-X}^{(1)}\ell)} = 7,90771 \text{ kN/cm} \quad (4.10)$$

Die Parallelschaltung beider Längsfedern gemäß Gleichung (4.4) liefert die Gesamtfedersteifigkeit des Systems in globaler Y-Richtung:

$$c_{i,Y} = c_{i,Y}^{(1)} + c_{i,Y}^{(2)} = 3,99637 \text{ kN/cm} + 7,90771 \text{ kN/cm} = 11,90408 \text{ kN/cm}$$

Die gesuchte Verschiebung des Knotens i entlang der Y-Achse, $U_{i,Y}$, wird abschließend gemäß (4.11) mit dem Längsfedergesetz ermittelt.

$$U_{i,Y} = \frac{H^0}{c_{i,Y}} = \frac{5 \text{ kN}}{11,90408 \text{ kN/cm}} = 0,420024 \text{ cm} \equiv 4,20024 \text{ mm} \quad (4.11)$$

Ermittlung der Rotation $\phi_{i,X-X}$

Die gesuchte Rotation $\phi_{i,X-X}$ des Knotens i um die globale X -Achse kann unmittelbar aus Gleichung (4.6) ermittelt werden:

$$\begin{aligned}\phi_{i,X-X} = -\varphi_i &= \frac{(b_1^2 EI - b_0 b_2 EI) U_{i,Y}}{b_2^2 \bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} - b_1 b_3 \bar{c}_{T,i,X-X}^{(2)} + b_1 b_2 EI - b_0 b_3 EI} \\ &= -0,00187333 \text{ rad} \equiv -1,87334 \text{ mrad}\end{aligned}\quad (4.12)$$

Ermittlung der Rotation $\phi_{i,Z-Z}$

Der letzte gesuchte Freiheitsgrad, die Rotation $\phi_{i,Z-Z}$ des Knotens i um die globale Z -Achse kann unmittelbar aus Gleichung (4.7) ermittelt werden:

$$\phi_{i,Z-Z} = \varphi_i = \frac{6EI U_{i,Y}}{l(4EI + \bar{c}_{T,i,Z-Z}^{(1)})} = 0,001829833 \text{ rad} \equiv 1,82983 \text{ mrad} \quad (4.13)$$

Zusammenfassung der Ergebnisse und Darstellung der Zustandslinien

In den Berechnungen waren die folgenden globalen Verschiebungs- und Rotationsgrößen am Knoten i mit dem *Federmodellverfahren* gesucht:

Verschiebungen

$$U_{i,Y} = 4,20 \text{ mm}$$

$$U_{i,X} = 0$$

$$U_{i,Z} = 0$$

Rotationen

$$\phi_{i,Y-Y} = 0$$

$$\phi_{i,X-X} = -1,87334 \text{ mrad}$$

$$\phi_{i,Z-Z} = 1,82983 \text{ mrad}$$

Die Zustandslinien des Systems können im Zuge einer Nachlaufrechnung aus den bereits verwendeten Übertragungsbeziehungen (Anhang A und B) der Stäbe ermittelt werden.

4.3 Vergleichsrechnung mit der Statiksoftware RSTAB

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit soll nun die Gegenüberstellung der Ergebnisse des *Federmodellverfahrens* und einer Softwareberechnung des Systems erfolgen.

Im vorhergehenden Abschnitt wurde das dreidimensionale Stabsystem mit Hilfe des *Federmodellverfahrens* analysiert, wobei die Verschiebungen und Rotationen des Knoten i unter Verwendung von Federmodellen nach Theorie I. und II. Ordnung ermittelt wurden. Zur Validierung der ermittelten Ergebnisse wurde das gleiche System mit identischen geometrischen Abmessungen, Materialeigenschaften und Belastungsgrößen in der Statiksoftware *RSTAB* (Version 8.20, Fa. Dlubal) modelliert. Die Ergebnisse der Softwareberechnung für das System, bzw. für die kinematischen Freiheitsgrade des Knotens i lauten folgendermaßen:

Verschiebungen

$$U_{i,Y} = 4,20 \text{ mm}$$

$$U_{i,X} = 0$$

$$U_{i,Z} = 0$$

Rotationen

$$\phi_{i,Y-Y} = 0$$

$$\phi_{i,X-X} = -1,87334 \text{ mrad}$$

$$\phi_{i,Z-Z} = 1,82983 \text{ mrad}$$

Ein Vergleich der Ergebnisse der Softwareberechnung mit den Werten des *Federmodellverfahrens* aus Abschnitt 4.1 zeigt eine exakte Übereinstimmung. Ebenso weisen die Zustandslinienverläufe des Systems, die im Ausgabeprotokoll der Softwareberechnung im Anhang C dokumentiert sind, in beiden Analysen identische Verläufe auf. Diese Übereinstimmung validiert die vorausgesagte Präzision des *Federmodellverfahrens* und zeigt, dass die erarbeiteten Grundlagen erfolgreich auf den dreidimensionalen Raum übertragen werden können.

Ermittlung der ideellen Knicklast P_{Ki}

Um die Knicklast P_{Ki} zu ermitteln, wird die Kraft P soweit erhöht bis die Gesamtfederkonstante, $c_{ges.}$ in (4.4) gleich Null wird. Mit $P_{Ki} = 3946,7805 \text{ kN}$ ist die Knicklast erreicht und es liegt ein Verzweigungsfall vor.

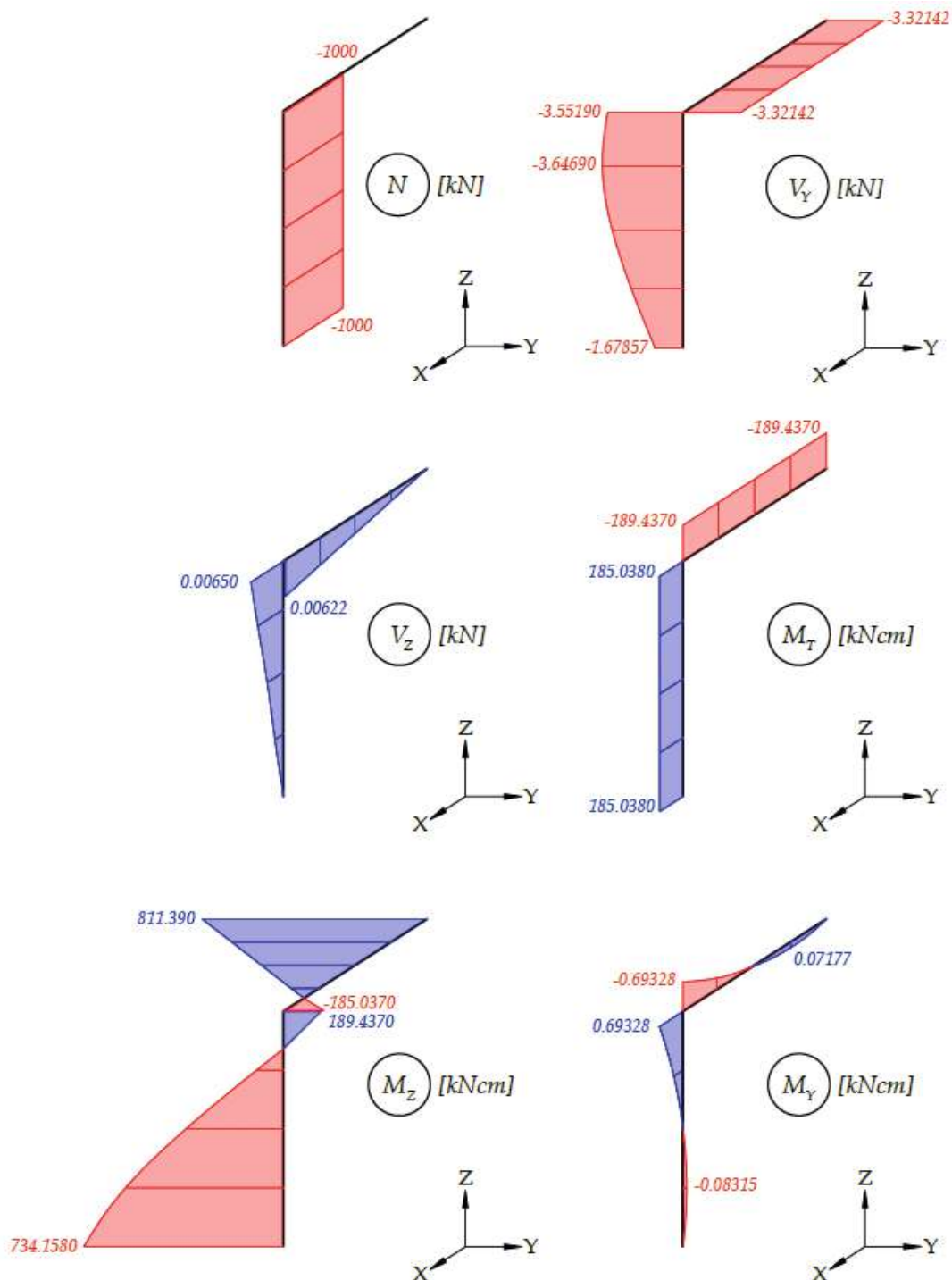


Abb. 4.8: Resultierende Zustandslinien des 3D-Systems

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Mit dem *Federmodellverfahren* wurde im Rahmen dieser Arbeit ein neues baustatisches Verfahren zur Modellbildung im Bereich der Biegestabtheorie I. und II. Ordnung entwickelt und vorgestellt. Das Prinzip des Verfahrens ist es, komplexe Stabsysteme unabhängig von ihrer statischen Bestimmtheit in einfach handhabbare und mechanisch äquivalente Ersatzfedermodelle zu transformieren. Diese Ersatzfedermodelle ermöglichen es wiederum, mit wenigen, in der Praxis meist bekannten, Eingangsparametern Verschiebungen, Rotationen und Kraftgrößen des Originalsystems mit exakter Genauigkeit zu bestimmen. Außerdem bringen die einfachen Zusammenhänge der linearen Federmechanik den Vorteil mit sich, dass auch die Schnittgrößen- und Zustandslinienermittlung durch das Verfahren stark vereinfacht wird. Mit diesen Kompetenzen stellt das *Federmodellverfahren* eine präzise und effektive Alternative zu den etablierten Methoden wie dem *Drehwinkel- oder Kraftgrößenverfahren* dar.

Ein zentraler Bestandteil dieser Arbeit besteht in der allgemeinen Herleitung von Federkonstanten nach Theorie I. und II. Ordnung unter Berücksichtigung verschiedener Verformungseinflüsse (Biege-, Querkraft-, Normalkraft- und Torsionsverformungen). Das Vorgehen zur Herleitung der Federkonstanten wurde anhand klassischer Lagerungs- und Belastungsfälle von Einzelstäben demonstriert. Die Ergebnisse wurden in tabellarischer Form aufbereitet, sodass sie direkt zur Anwendung durch Ingenieur*innen gebracht werden können. Die erstellten Tabellen dienen in Zukunft als wertvolle Ressource zur schnellen und präzisen Anwendung des Verfahrens in der Praxis.

Ein weiterer Schwerpunkt der Arbeit lag auf der Entwicklung von Parallel- und Serienschaltungen von Federn, basierend auf der Analogie zur Elektrotechnik. Diese Kombinationsmöglichkeiten ermöglichen es, auch komplex zusammenhängende Systeme in mechanisch äquivalente Federmodelle zu überführen. Durch diese methodische Erweiterung wird die Analyse von vernetzten Stabsystemen erheblich erleichtert, was insbesondere für Bestandssituationen wie die Kopplung von Alt- und Neubauten eine entscheidende Rolle spielt. Die Ergebnisse zeigen, dass mit dem *Federmodellverfahren* eine klare und systematische Abbildung solcher Übergangsbedingungen möglich ist.

Das vorgestellte Verfahren bildet die Grundlage für eine theoretisch weitreichende Erweiterung der baustatischen Modellierungsmöglichkeiten. Obwohl sich diese Arbeit auf Stabsysteme beschränkt, könnten zukünftige Forschungen das Verfahren auf Tragwerksarten wie Platten und andere räumliche Systeme ausweiten und ihre Anwendbarkeit gegenüber der etablierten *Finite-Elemente-Methode* untersuchen. Ebenso wären Erweiterungen zur Berücksichtigung nichtlinearer Materialeigenschaften und dynamischer Effekte denkbar. Solcherlei Weiterentwicklungen könnten das Potenzial und die Effizienz des *Federmodellverfahrens* weiter ausschöpfen.

Literatur

- [1] Dlubal Software GmbH. RSTAB 8.20: RSTAB 8.20: Software für statische Berechnungen. Version 8.20. Erhältlich unter <https://www.dlubal.com>. Leipzig, Deutschland, 2024.
- [2] M. Höwing. Einführung in die Elektrotechnik. 2., durchgesehene Auflage. Bonn, Deutschland: Rheinwerk Verlag, 2021.
- [3] B. Pichler und J. Eberhardsteiner. Vorlesungsskriptum Baustatik. Vorlesungsskriptum. Wien, Österreich: Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen (IMWS), Technische Universität Wien, 2024.
- [4] H. Rubin. Studienblätter der Vorlesung Baustatik 2. Studienblätter 1 und 2. Wien, Österreich: Technische Universität Wien, 1993.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Bestandsgebäude mit geplantem Garagenvordach	9
1.2	Varianten zur Modellierung des Auflagers	9
1.3	Durchlaufträger mit abschnittsweiser Querbelastrung	10
1.4	Durchlaufträger mit Drehfeder anstelle des unbelasteten Teils	10
2.1	Lineare Längsfeder unter der Einwirkung der Kraft P_i	11
2.2	Lineare Drehfeder (links) und lineare Torsionsfeder (rechts)	12
2.3	geneigter Pendelstab mit konstanter Dehnsteifigkeit EA , der Länge l und der Einzellast P_i	13
2.4	Gegenüberstellung der Normalkraftverläufe im Pendelstab zufolge P_i und δP_i . .	14
2.5	Kragarm mit konstanter Biegesteifigkeit EI , konstanter Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$, der Länge l und der Einzelkraft P_i	15
2.6	Biegemomenten- und Querkraftverläufe des Kragarms infolge P_i und δP_i	16
2.7	Kragarm mit Torsionssteifigkeit GI_T und Torsionsmoment $M_{T,k}$ am freien Stabende	17
2.8	Torsionsmomentenverläufe infolge des tatsächlichen Moments $M_{T,i}$ und des virtu- ellen Moments $\delta M_{T,i}$	18
2.9	Stab mit Biegesteifigkeit EI , Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ und frei drehbarer Anschlussstelle (Einspannstelle)	19
2.10	Biegemomenten- und Querkraftverläufe infolge M_i und δM_i	20
2.11	Beidseitig eingespannter Stab mit Querkraftgelenk am Knoten i , Biegesteifigkeit EI , Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ und verdrehbarer Einspannstelle	24
2.12	Die Verdrehung des linken Auflagers wird durch das Biegemoment M_i und ein Gelenk in der Einspannstelle simuliert	25
2.13	Beidseitig eingespannter Stab mit Querkraftgelenk am Knoten i , Biegesteifigkeit EI , Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ und Einzellast P_i	26
2.14	Kragarm mit vertikaler Einzellast P_i , Axialdruckkraft $N^{\text{II}} = -D$ und konstanter Biegesteifigkeit EI	32
2.15	Biegemomentenverläufe M und δM des Kragarms infolge der tatsächlichen Lasten P_i und D nach Th. II. Ord. und der virtuellen Last δP_i nach Th. I. Ordnung . .	32
2.16	Stab mit Axialbelastung N^{II} , konstanter Biegesteifigkeit EI und frei drehbarer Anschlussstelle (Einspannstelle)	37
2.17	Biegemomenten- und Transversalkraftverläufe M , δM und R , δR infolge M_i und δM_i	37
2.18	Beidseitig eingespannter Stab mit Querkraftgelenk am Knoten i , Drucknormalkraft N^{II} , Biegesteifigkeit EI , Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ und verdrehbarer Einspannstelle .	40
2.19	Das Querkraftgelenk einschließlich des Momentengelenks und des eingepprägten Biegemoments M_i am Knoten i	41
2.20	Beidseitig eingespannter Stab mit Querkraftgelenk am Knoten i , Drucknormalkraft N^{II} , Biegesteifigkeit EI , Schubsteifigkeit $G\tilde{A}$ und Einzellast P_i	43
3.1	Stabwerksystem bestehend aus den geneigten Fachwerkstäben ①, ② (EA) und dem Balkenstab ③ (EI) mit der Einzelkraft P_i	49

3.2	Teilsysteme der Einzelstäbe mit entsprechenden Ersatzfederkonstanten	49
3.3	Ersatzfedersystem aus parallel geschalteten Längsfedern der Teilsysteme	50
3.4	Maßgebende Schnittkraftverläufe des untersuchten Systems	50
3.5	Stabwerkssystem bestehend aus den geneigten Fachwerkstäben ①, ② (EA) und dem Balkenstab ③ (EI) mit der konstanten Streckenlast q	51
3.6	Ersatzfedersystem des betrachteten Stabsystems mit Festhaltekraft I_0	51
3.7	Teilsystem des Balkenstabes ③ mit der Festhaltekraft I_0 als Auflagerreaktion . .	52
3.8	Ermittelte Verläufe der vorhandenen Zustandsgrößen	52
3.9	Stabwerkssystem bestehend aus den Fachwerkstäben ① bis ③ mit der Dehnsteifigkeit EA und der Länge l	53
3.10	Stabwerkssystem bestehend aus den Fachwerkstäben ① bis ③ mit der Dehnsteifigkeit EA und der Länge l	54
3.11	Stabwerkssystem bestehend aus den Fachwerkstäben ① bis ⑥ (EA) mit der Länge l und der Vorspannung λ_e	55
3.12	Transformation der Teilsysteme der Pendelstäbe ① bis ⑥ zu ihrem äquivalenten Ersatzfedersystem	55
3.13	Gesamtsystem mit den Pendestäben ① und ②, deren Teilsysteme und entsprechende Ersatzfederkonstanten	57
3.14	Ersatzfedersystem aus den zwei in Serie geschalteten Längsfedern der Pendelstäbe mit der Einzelkraft P_i	58
3.15	Normalkraftverläufe des Pendelstabsystems	59
3.16	Rahmentragwerk mit eingespannten Stützen und gelenkig angeschlossenen Riegel	60
3.17	Teilsysteme des Rahmensystems mit Ersatzfederkonstanten	60
3.18	Ersatzfedersystem aus den seriell geschalteten Federn c_1 und c_2 , und der parallel dazu geschalteten Feder c_3 unter der Last P_i	61
3.19	Teilsysteme des Rahmens mit Kraftanteilen und vorhandenen Schnittgrößen . . .	61
3.20	Stabtragwerk bestehend aus den Stäben ①-⑦ mit der Länge l und der Biegesteifigkeit EI bzw. Dehnsteifigkeit EA	62
3.21	Teilsystem TS_{4567} und sein äquivalentes Ersatzfedermodell in Serienschaltung . .	63
3.22	Links: Teilsystem TS_{123} mit Ersatzfeder c_{4567} anstelle der Stäbe ④ bis ⑦. Rechts: weitere Vereinfachung durch Ersatzdrehfeder $\bar{c}_a$ anstelle des Stabes ③	63
3.23	Pendelstäbe und ihre Federkonstanten nach Theorie I. und II. Ordnung	64
3.24	Ersatzfedermodelle des Gesamtsystems	65
3.25	Vorzeichenloser Momentenverlauf des Gesamtsystems	65
4.1	3D-System	66
4.2	Teilsystem für Stab ② inklusive Rand- und Übergangsbedingungen am Knoten i zur Ermittlung der Federsteifigkeit $c_{i,Y}^{(2)}$	68
4.3	Teilsystem für Stab ① inklusive Rand- und Übergangsbedingungen am Knoten i zur Ermittlung der Federsteifigkeit $c_{i,Y}^{(1)}$	68
4.4	Kombination der Federsteifigkeiten $c_{i,Y}^{(1)}$ und $c_{i,Y}^{(2)}$ mittels Parallelschaltung und Vereinfachung zu einer einzelnen Längsfeder mit der Steifigkeit $c_{i,Y}$	69
4.5	Teilsystem für Stab ① inklusive Rand- und Übergangsbedingungen am Knoten i zur Ermittlung der Drehfedersteifigkeit $\bar{c}_{i,X-X}$	70
4.6	Teilsystem für Stab ② inklusive Rand- und Übergangsbedingungen am Knoten i zur Ermittlung der Drehfedersteifigkeit $\bar{c}_{i,Z-Z}$	71
4.7	Untersuchtes 3D-System mit Lastwerten zur numerischen Analyse	72
4.8	Resultierende Zustandslinien des 3D-Systems	76

Tabellenverzeichnis

2.1	Längsfederkonstanten für gerade Einzelstäbe mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie I. Ordnung	29
2.2	Längsfederkonstanten für Rahmensysteme mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie I. Ordnung	29
2.3	Drehfederkonstanten für gerade Einzelstäbe mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie I. Ordnung	30
2.4	Analytische Formeln für die b_j -Funktionen (Rubin, 1993, 2.2)	31
2.5	Längsfederkonstanten für gerade Einzelstäbe mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie II. Ordnung	46
2.6	Längsfederkonstanten für Stäbe mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie II. Ordnung	46
2.7	Längsfederkonstanten für Rahmensysteme mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie II. Ordnung	47
2.8	Drehfederkonstanten für gerade Einzelstäbe mit konstantem Querschnitt und verschiedenen Lagerungsfällen nach Theorie II. Ordnung	47

Anhang

Anhang A: Programmierung der Übertragungsbeziehungen zur Ermittlung der Federkonstanten $c_{i,Y}$ des 3D-Systems

Program Code 1: Analyse der Federkonstanten in Mathematica

```

1  ClearAll;
2  P=1;
3  gamma =1;
4  If[gamma ==1,UGA=0;];
5  wr1=0;phir1=0;Mr1=0;Rr1=0;
6  Mk1=CTi*phik1;Rk1=P;
7  (* wi=0;phii=0;-0.05*L*NII *)
8  wi1=0;phii1=0;
9
10 UE1=Table[0,{5},{5}];
11 UE1[[1,1]]=1;
12 UE1[[1,2]]=gamma*b1;
13 UE1[[1,3]]=-gamma*b2/EIy;
14 UE1[[1,4]]=-gamma*(b3/EIy-b1*UGA);
15 UE1[[1,5]]=wr1;
16
17 UE1[[2,1]]=0;
18 UE1[[2,2]]=b0;
19 UE1[[2,3]]=-b1/EIy;
20 UE1[[2,4]]=-gamma*b2/EIy;
21 UE1[[2,5]]=phir1;
22
23 UE1[[3,1]]=0;
24 UE1[[3,2]]=-gamma*NII*b1;
25 UE1[[3,3]]=b0;
26 UE1[[3,4]]=gamma*b1;
27 UE1[[3,5]]=Mr1;
28
29 UE1[[4,1]]=0;
30 UE1[[4,2]]=0;
31 UE1[[4,3]]=0;
32 UE1[[4,4]]=1;
33 UE1[[4,5]]=Rr1;
34
35 UE1[[5,5]]=1;
36
37 Zeile1=UE1[[1,1]]*wi1+UE1[[1,2]]*phii1+UE1[[1,3]]*Mi1+UE1[[1,4]]*Ri1+wr1-
    wk1;
38 Zeile2=UE1[[2,1]]*wi1+UE1[[2,2]]*phii1+UE1[[2,3]]*Mi1+UE1[[2,4]]*Ri1+phir1-
    phik1;
39 Zeile3=UE1[[3,1]]*wi1+UE1[[3,2]]*phii1+UE1[[3,3]]*Mi1+UE1[[3,4]]*Ri1+Mr1-
    Mk1;
40 Zeile4=UE1[[4,1]]*wi1+UE1[[4,2]]*phii1+UE1[[4,3]]*Mi1+UE1[[4,4]]*Ri1+Rr1-
    Rk1;

```

```

41
42 st=Solve[{Zeile1==0,Zeile2==0,Zeile3==0,Zeile4==0},{wk1,phik1,Mi1,Ri1}];
43 Print["UE1=",UE1//MatrixForm];
44 ci1=P/wk1/.st[[1]];
45
46 wr2=0;phir2=0;Mr2=0;Rr2=0;
47 Mk2=CTi*phik2;Rk2=P;
48 wi2=0;phii2=0;
49 UE2=Table[0,{5},{5}];
50 UE2[[1,1]]=1;
51 UE2[[1,2]]=L;
52 UE2[[1,3]]=-L^2/(2*EIy);
53 UE2[[1,4]]=- (L^3/(6*EIy)-L*UGA);
54 UE2[[1,5]]=wr2;
55
56 UE2[[2,1]]=0;
57 UE2[[2,2]]=1;
58 UE2[[2,3]]=-L/EIy;
59 UE2[[2,4]]=-L^2/(2*EIy);
60 UE2[[2,5]]=phir2;
61
62 UE2[[3,1]]=0;
63 UE2[[3,2]]=0;
64 UE2[[3,3]]=1;
65 UE2[[3,4]]=L;
66 UE2[[3,5]]=Mr2;
67
68 UE2[[4,1]]=0;
69 UE2[[4,2]]=0;
70 UE2[[4,3]]=0;
71 UE2[[4,4]]=1;
72 UE2[[4,5]]=Rr2;
73
74 UE2[[5,5]]=1;
75
76 Zeile11=UE2[[1,1]]*wi2+UE2[[1,2]]*phii2+UE2[[1,3]]*Mi2+UE2[[1,4]]*Ri2+wr2-
    wk2;
77 Zeile21=UE2[[2,1]]*wi2+UE2[[2,2]]*phii2+UE2[[2,3]]*Mi2+UE2[[2,4]]*Ri2+phir2
    -phik2;
78 Zeile31=UE2[[3,1]]*wi2+UE2[[3,2]]*phii2+UE2[[3,3]]*Mi2+UE2[[3,4]]*Ri2+Mr2-
    Mk2;
79 Zeile41=UE2[[4,1]]*wi2+UE2[[4,2]]*phii2+UE2[[4,3]]*Mi2+UE2[[4,4]]*Ri2+Rr2-
    Rk2;
80
81 stt=Solve[{Zeile11==0,Zeile21==0,Zeile31==0,Zeile41==0},{wk2,phik2,Mi2,Ri2
    }];
82 Print["UE2=",UE2//MatrixForm];
83 ci2=P/wk2/.stt[[1]];
84 cges=ci1+ci2;

```

Anhang B: Programmierung der Übertragungsbeziehungen zur Ermittlung der Knotenrotationen $\phi_{i,X-X}$ und $\phi_{i,Z-Z}$ des 3D-Systems

Program Code 2: Analyse der Knotenrotationen in Mathematica

```

1 ClearAll;
2 P=1;
3 gamma =1;
4 If[gamma ==1,UGA=0;];
5 wr1=0;phir1=0;Mr1=0;Rr1=-P;
6 Mk1=CTi*phik1;wk1=UiYY;(* wi=0;phii=0;-0.05*L*NII *)
7 wi1=0;phii1=0;(* Mk=0;Rk=0; *)
8
9 UE1=Table[0,{5},{5}];
10 UE1[[1,1]]=1;
11 UE1[[1,2]]=gamma*b1;
12 UE1[[1,3]]=-gamma*b2/EIy;
13 UE1[[1,4]]=-gamma*(b3/EIy-b1*UGA);
14 UE1[[1,5]]=wr1;
15
16 UE1[[2,1]]=0;
17 UE1[[2,2]]=b0;
18 UE1[[2,3]]=-b1/EIy;
19 UE1[[2,4]]=-gamma*b2/EIy;
20 UE1[[2,5]]=phir1;
21
22 UE1[[3,1]]=0;
23 UE1[[3,2]]=-gamma*NII*b1;
24 UE1[[3,3]]=b0;
25 UE1[[3,4]]=gamma*b1;
26 UE1[[3,5]]=Mr1;
27
28 UE1[[4,1]]=0;
29 UE1[[4,2]]=0;
30 UE1[[4,3]]=0;
31 UE1[[4,4]]=1;
32 UE1[[4,5]]=Rr1;
33
34 UE1[[5,5]]=1;
35
36 Zeile1=UE1[[1,1]]*wi1+UE1[[1,2]]*phii1+UE1[[1,3]]*Mi1+UE1[[1,4]]*Ri1+wr1-
    wk1;
37 Zeile2=UE1[[2,1]]*wi1+UE1[[2,2]]*phii1+UE1[[2,3]]*Mi1+UE1[[2,4]]*Ri1+phir1-
    phik1;
38 Zeile3=UE1[[3,1]]*wi1+UE1[[3,2]]*phii1+UE1[[3,3]]*Mi1+UE1[[3,4]]*Ri1+Mr1-
    Mk1;
39 Zeile4=UE1[[4,1]]*wi1+UE1[[4,2]]*phii1+UE1[[4,3]]*Mi1+UE1[[4,4]]*Ri1+Rr1-
    Rk1;
40
41 st=Solve[{Zeile1==0,Zeile2==0,Zeile3==0,Zeile4==0},{Rk1,phik1,Mi1,Ri1}];
42 Print["UE1=",UE1//MatrixForm];
43 phi_iXX=phik1/.st[[1]];
44
45 wr2=0;phir2=0;Mr2=0;Rr2=-P;
46 Mk2=CTi*phik2;wk2=UiYY;(* wi1=0;phii1=0;-0.05*L*NII *)
47 wi2=0;phii2=0;(* Mk1=0;Rk1=0; *)
48 UE2=Table[0,{5},{5}];

```

```

49  UE2[[1,1]]=1;
50  UE2[[1,2]]=L;
51  UE2[[1,3]]=-L^2/(2*EIy);
52  UE2[[1,4]]=- (L^3/(6*EIy)-L*UGA);
53  UE2[[1,5]]=wr2;
54
55  UE2[[2,1]]=0;
56  UE2[[2,2]]=1;
57  UE2[[2,3]]=-L/EIy;
58  UE2[[2,4]]=-L^2/(2*EIy);
59  UE2[[2,5]]=phir2;
60
61  UE2[[3,1]]=0;
62  UE2[[3,2]]=0;
63  UE2[[3,3]]=1;
64  UE2[[3,4]]=L;
65  UE2[[3,5]]=Mr2;
66
67  UE2[[4,1]]=0;
68  UE2[[4,2]]=0;
69  UE2[[4,3]]=0;
70  UE2[[4,4]]=1;
71  UE2[[4,5]]=Rr2;
72
73  UE2[[5,5]]=1;
74
75  Zeile11=UE2[[1,1]]*wi2+UE2[[1,2]]*phii2+UE2[[1,3]]*Mi2+UE2[[1,4]]*Ri2+wr2-
    wk2;
76  Zeile21=UE2[[2,1]]*wi2+UE2[[2,2]]*phii2+UE2[[2,3]]*Mi2+UE2[[2,4]]*Ri2+phir2
    -phik2;
77  Zeile31=UE2[[3,1]]*wi2+UE2[[3,2]]*phii2+UE2[[3,3]]*Mi2+UE2[[3,4]]*Ri2+Mr2-
    Mk2;
78  Zeile41=UE2[[4,1]]*wi2+UE2[[4,2]]*phii2+UE2[[4,3]]*Mi2+UE2[[4,4]]*Ri2+Rr2-
    Rk2;
79
80  stt= Solve[{Zeile11==0,Zeile21==0,Zeile31==0,Zeile41==0},{Rk2,phik2,Mi2,Ri2
    }];
81  Print["UE2=",UE2//MatrixForm];
82  phi_iZZ=phik2/.stt[[1]];
83
84  Print["Länge = ",L];
85  Print["Normalkraft, NII = ",NII];
86  Print["Biegesteifigkeit, EIy =EIz =",EIy];
87  Print["Schubsteifigkeit, GA=",GA];
88  Print["Torsionssteifigkeit, GIT=",GIT];
89  Print["gamma =",gamma];
90  Print["UGA= 1/GA=",UGA];
91  Print["Torsionsdrehfederkonstante, CTi=",CTi];
92  Print["UiYY=",FullSimplify[UiYY]];
93  Print["phi_iXX=",FullSimplify[phi_iXX]];
94  Print["phi_iZZ=",FullSimplify[phi_iZZ]];

```

Anhang C: Ausgabeprotokoll der statischen Berechnung mit der Software RSTAB (Fa. Dlubal, Version 8.20) für Kapitel 4.3

siehe Folgeblätter

Projekt: Diplomarbeit

Modell: Federmodellverfahren - 3D-System

Datum: 14.12.2024

■ MODELL-BASISANGABEN

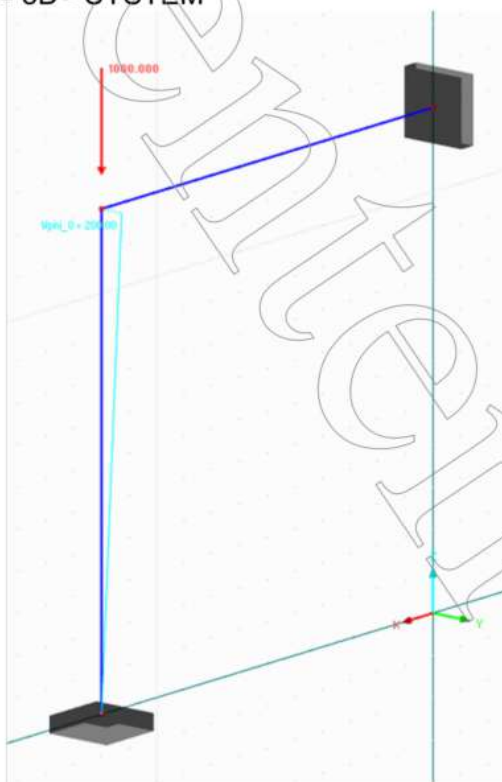
Allgemein
Modellname : DA_3D_SYS_Balkenstab_EA_inf_MA
Modelltyp : 3D
Positive Richtung der globalen Z-Achse : Nach oben
Klassifizierung der Lastfälle und Kombinationen : Nach Norm: Ohne
Nationaler Anhang: Kein

Optionen
☐ CQC-Regel anwenden
☐ CAD/BIM-Modell ermöglichen

Erdbeschleunigung
g : 10.00 m/s²

Historie	Nr.	Benutzer	Geöffnet am	Gespeichert am	Kommentar
	7	Johannes Zierke	14.12.2024 13:28		
	6	Johannes Zierke	08.12.2024 15:54	10.12.2024 08:50	
	5	Johannes Zierke	21.11.2024 11:00	22.11.2024 12:10	
	4	Mehdi Aminbaghai	29.10.2024 09:04	29.10.2024 16:09	
	3	Johannes Zierke	18.10.2024 13:14	18.10.2024 13:24	
	2	Johannes Zierke	04.10.2024 12:03	04.10.2024 13:07	
	1	Johannes Zierke	29.09.2024 16:42	29.09.2024 20:09	

■ 3D - SYSTEM



■ 1.1 KNOTEN

Knoten Nr.	Bezugs-Knoten	Koordinaten-System	Knotenkoordinaten			Kommentar
			X [m]	Y [m]	Z [m]	
1	-	Kartesisch	3.000	0.000	0.000	
2	-	Kartesisch	3.000	0.000	3.000	
3	-	Kartesisch	0.000	0.000	3.000	

■ 1.2 MATERIALIEN

Mat. Nr.	Modul E [kN/cm ²]	Modul G [kN/cm ²]	Spez. Gewicht γ [kN/m ³]	Wärmedehn. α [1/°C]	Teilsich.-Beiwert γ_M [-]	Material-Modell
2	Baustahl S 235 EN 1993-1-1:2005-05					
	21000.00	8076.92	78.50	1.20E-05	1.00	Isotrop linear elastisch

Projekt: Diplomarbeit

Modell: Federmodellverfahren - 3D-System

Datum: 14.12.2024

1.3 QUERSCHNITTE

Quers. Nr.	Mater. Nr.	I_T [cm ⁴] A [cm ²]	I_y [cm ⁴] A_y [cm ²]	I_z [cm ⁴] A_z [cm ²]	Hauptachsen α [°]	Drehung α' [°]	Gesamtabmessungen [mm]	
							Breite b	Höhe h
1	QRO 200x5 (warmgefertigt) 2	3756.00 38.70	2445.00 16.35	2445.00 16.35	0.00	0.00	200.0	200.0

1.4 STABENDGELENKE

Gelenk Nr.	Bezugs-system	Axial/Quer-Gelenk bzw. Feder [kN/m]			Momentengelenk bzw. Feder [kNm/rad]		
		u_x	u_y	u_z	φ_x	φ_y	φ_z
1	Lokal x,y,z Nichtlinearität	☐	☐	☐	☐	☒	☐
		-	-	-	-	-	-

1.7 STÄBE

Stab Nr.	Stabtyp	Knoten		Drehung Typ	β [°]	Querschnitt		Gelenk Nr.		Exz. Nr.	Teilung Nr.	Länge L [m]	Z
		Anfang	Ende			Anfang	Ende	Anfang	Ende				
1	Balkenstab	1	2	Winkel	0.00	1	1	-	-	-	-	3.000	Z
2	Balkenstab	2	3	Winkel	0.00	1	1	-	-	-	-	3.000	X

1.7.1 STÄBE - STEIFIGKEITSREDUZIERUNG

Stab Nr.	Faktor GJ [-]	Faktor EI_y [-]	Faktor EI_z [-]	Faktor EA [-]	Faktor GA_y [-]	Faktor GA_z [-]
1	1.00	1.00	1.00	10000000000.0	1.00	1.00
2	1.00	1.00	1.00	10000000000.0	1.00	1.00

1.8 KNOTENLAGER

Lager Nr.	Knoten Nr.	Folge	Lagerdrehung [°]			Stütze in Z	Lagerung bzw. Feder					
			um X	um Y	um Z		u_x	u_y	u_z	φ_x	φ_y	φ_z
1	3	XYZ	90.00	90.00	0.00	☐	☒	☒	☒	☒	☒	☒
2	1	XYZ	0.00	0.00	0.00	☐	☒	☒	☒	☒	☒	☒

2.1 LASTFÄLLE

Last-fall	LF-Bezeichnung	Keine Norm Einwirkungskategorie	Eigengewicht - Faktor in Richtung			
			Aktiv	X	Y	Z
LF1	P _{i,z}	Ständige Lasten	☐			

2.1.1 LASTFÄLLE - BERECHNUNGSPARAMETER

Last-fall	LF-Bezeichnung	Berechnungstheorie Optionen	Berechnungsparameter
LF1	P _{i,z}		II. Ordnung (P-Delta) ☒ Schnittgrößen auf das verformte System beziehen für: ☒ Normalkräfte N ☒ Querkräfte V_y und V_z ☒ Momente M_y , M_z und M_T Steifigkeitsbeiwerte aktivieren für: ☒ Querschnitte (Faktor für J , I_y , I_z , A , A_y , A_z) ☒ Stäbe (Faktor für GJ, EI_y , EI_z , EA, GA_y , GA_z)

3.1 KNOTENLASTEN - KOMPONENTENWEISE - KOORDINATENSYSTEM

Nr.	An Knoten Nr.	Koordinaten-system	Kraft [kN]			Moment [kNm]		
			P_x / P_u	P_y / P_v	P_z / P_w	M_x / M_u	M_y / M_v	M_z / M_w
1	2	0 Globales XYZ	0.000	0.000	-1000.000	0.000	0.000	0.000

 LF1: P_{i,z}

3.4 IMPERFEKTIONEN

Nr.	Beziehen auf	An Stäben Nr.	Richt.	Schiefstellung	Vorkrümmung	Berücksicht. e_0	Kommentar
				$1/\varphi_0, \delta$ [-, mm]	$L/e_0, e_0$ [-, mm]	ab e_0 [-]	
1	Stäbe	1	y	-200.00	0.00	-	

 LF1: P_{i,z}

Projekt: Diplomarbeit

Modell: Federmodellverfahren - 3D-System

Datum: 14.12.2024

4.0 ERGEBNISSE - ZUSAMMENFASSUNG

Bezeichnung	Wert	Einheit	Kommentar
LF1 - P _{1,z}			
Summe Belastung in Richtung X	0.000000	kN	
Summe Lagerkräfte in X	0.000000	kN	
Summe Belastung in Richtung Y	0.000000	kN	
Summe Lagerkräfte in Y	0.000000	kN	
Summe Belastung in Richtung Z	-1000.000	kN	
Summe Lagerkräfte in Z	-1000.000	kN	
Resultierende der Reaktionen um X	-1.92E+01	kNm	Abweichung 0.00%
Resultierende der Reaktionen um Y	7.500E+02	kNm	Im Schwerpunkt des Modells (X:2.250000, Y:0.000000, Z:2.250000 m)
Resultierende der Reaktionen um Z	0.000001	kNm	Im Schwerpunkt des Modells
Max. Verschiebung in X	-0.00000	mm	
Max. Verschiebung in Y	4.20024	mm	Stab Nr. 1, x: 3.000 m
Max. Verschiebung in Z	-0.00000	mm	
Max. Verschiebung vektoriell	4.20024	mm	Stab Nr. 1, x: 3.000 m
Max. Verdrehung um X	-1.96834	mrad	Stab Nr. 1, x: 2.400 m
Max. Verdrehung um Y	0.00000	mrad	
Max. Verdrehung um Z	1.92962	mrad	Stab Nr. 2, x: 0.600 m
Berechnungstheorie	II. Ordnung		Theorie II. Ordnung (nichtlinear, Timoshenko)
Schnittgrößen bezogen auf verformtes System für...	☒		N, V _y , V _z , M _y , M _z , M _T
Steifigkeitsreduktion multipliziert mit Faktor	☐		
Entlastende Wirkung der Zugkräfte berücksichtigen	☐		
Ergebnisse durch LK-Faktor zurückdividieren	☐		
Anzahl der Laststufen	1		
Anzahl der Iterationen	2		
Verzweigungslastfaktor ermitteln	☐		
Gesamt			
Anzahl 1D-Finite-Elemente (Stabelemente)	2		
Anzahl der FE-Knoten	3		
Anzahl der Gleichungen	18		
Maximale Anzahl Iterationen	100		
Stabteilungen für Ergebnisse der Stäbe	10		
Stabteilungen der Seil-, Bettungs- und Voutenstäbe	10		
Stab-Schubsteifigkeiten (A-y, A-z) berücksichtigen	☐		
Sonstige Einstellungen			Maximale Anzahl Iterationen : 100 Anzahl der Stabteilungen für Ergebnisverläufe : 10 Stabteilungen Seilstäbe, Bettungs- und Voutenstäbe : 10 Anzahl der Stabteilungen für das Suchen der Maximalwerte : 10
Optionen			☐ Schubsteifigkeit (A _y , A _z) der Stäbe aktivieren ☒ Steifigkeitsänderungen berücksichtigen (Materialien, Querschnitte, Stäbe, Lastfälle und Kombinationen) ☒ Temperatur-/Verformungslasten ohne Steifigkeitsänderungen anwenden
Genauigkeit und Toleranz			☐ Standardeinstellung ändern

4.1 STÄBE - SCHNITTGRÖSSEN

STATENDE CONTROLLIEREN										
Stab		Knoten	Stelle	Kräfte [kN]			Momente [kNm]			
Nr.	LF/LK	Nr.	x [m]	N	V _y	V _z	M _T	M _y	M _z	Querschnitt
1	LF1	1	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02	1 - QRO 200x5 (warmgefertigt)
		2	3.000	-1.000E+03	-3.551900	0.006499	1.850E+02	0.693277	1.894E+02	
		Max N	2.400	-1.000E+03	-3.646900	0.005339	1.850E+02	0.323524	-27.798100	
		Min N	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02	
		Max V _y	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02	
		Min V _y	2.400	-1.000E+03	-3.646900	0.005339	1.850E+02	0.323524	-27.798100	
		Max V _z	3.000	-1.000E+03	-3.551900	0.006499	1.850E+02	0.693277	1.894E+02	
		Min V _z	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02	
		Max M _T	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02	
		Min M _T	2.400	-1.000E+03	-3.646900	0.005339	1.850E+02	0.323524	-27.798100	
		Max M _y	3.000	-1.000E+03	-3.551900	0.006499	1.850E+02	0.693277	1.894E+02	
		Min M _y	0.900	-1.000E+03	-2.801200	0.001538	1.850E+02	-0.083146	-5.299E+02	
		Max M _z	3.000	-1.000E+03	-3.551900	0.006499	1.850E+02	0.693277	1.894E+02	
		Min M _z	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02	
		2	LF1	2	0.000	0.006078	-3.321420	0.006222	-1.894E+02	
3	3.000			0.000000	-3.321430	0.000000	-1.894E+02	0.000000	8.114E+02	
Max N	0.600			0.006409	-3.321420	0.004978	-1.894E+02	-0.344190	14.247900	
Min N	3.000			0.000000	-3.321430	0.000000	-1.894E+02	0.000000	8.114E+02	
Max V _y	0.000			0.006078	-3.321420	0.006222	-1.894E+02	-0.693277	-1.850E+02	
Min V _y	3.000			0.000000	-3.321430	0.000000	-1.894E+02	0.000000	8.114E+02	
Max V _z	0.000			0.006078	-3.321420	0.006222	-1.894E+02	-0.693277	-1.850E+02	
Min V _z	3.000			0.000000	-3.321430	0.000000	-1.894E+02	0.000000	8.114E+02	
Max M _T	0.600			0.006409	-3.321420	0.004978	-1.894E+02	-0.344190	14.247900	
Min M _T	3.000			0.000000	-3.321430	0.000000	-1.894E+02	0.000000	8.114E+02	
Max M _y	2.400			0.002763	-3.321430	0.001244	-1.894E+02	0.071776	6.121E+02	
Min M _y	0.000			0.006078	-3.321420	0.006222	-1.894E+02	-0.693277	-1.850E+02	
Max M _z	3.000			0.000000	-3.321430	0.000000	-1.894E+02	0.000000	8.114E+02	
Min M _z	0.000			0.006078	-3.321420	0.006222	-1.894E+02	-0.693277	-1.850E+02	

Projekt: Diplomarbeit

Modell: Federmodellverfahren - 3D-System

Datum: 14.12.2024

4.3 QUERSCHNITTE - SCHNITTGRÖSSEN

Stab Nr.	LF/LK	Knoten Nr.	Stelle x [m]	Kräfte [kN]			Momente [kNm]		
				N	V _y	V _z	M _T	M _y	M _z
Querschnitt-Nr. 1: QRO 200x5 (warmgefertigt)									
1	LF1	1	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02
		2	3.000	-1.000E+03	-3.551900	0.006499	1.850E+02	0.693277	1.894E+02
		-	2.400	-1.000E+03	-3.646900	0.005339	1.850E+02	0.323524	-27.798100
		-	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02
		-	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02
		-	2.400	-1.000E+03	-3.646900	0.005339	1.850E+02	0.323524	-27.798100
		-	3.000	-1.000E+03	-3.551900	0.006499	1.850E+02	0.693277	1.894E+02
		-	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02
		-	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02
		-	2.400	-1.000E+03	-3.646900	0.005339	1.850E+02	0.323524	-27.798100
		-	3.000	-1.000E+03	-3.551900	0.006499	1.850E+02	0.693277	1.894E+02
		-	0.900	-1.000E+03	-2.801200	0.001538	1.850E+02	-0.083146	-5.299E+02
		-	3.000	-1.000E+03	-3.551900	0.006499	1.850E+02	0.693277	1.894E+02
		-	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02
		-	0.000	-1.000E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.342E+02
		-	2.400	-1.000E+03	-3.646900	0.005339	1.850E+02	0.323524	-27.798100
2	LF1	2	0.000	0.006078	-3.321420	0.006222	-1.894E+02	-0.693277	-1.850E+02
		3	3.000	0.000000	-3.321430	0.000000	-1.894E+02	0.000000	8.114E+02
		-	0.600	0.006409	-3.321420	0.004978	-1.894E+02	-0.344190	14.247900
		-	3.000	0.000000	-3.321430	0.000000	-1.894E+02	0.000000	8.114E+02
		-	0.000	0.006078	-3.321420	0.006222	-1.894E+02	-0.693277	-1.850E+02
		-	3.000	0.000000	-3.321430	0.000000	-1.894E+02	0.000000	8.114E+02
		-	0.000	0.006078	-3.321420	0.006222	-1.894E+02	-0.693277	-1.850E+02
		-	3.000	0.000000	-3.321430	0.000000	-1.894E+02	0.000000	8.114E+02
		-	0.600	0.006409	-3.321420	0.004978	-1.894E+02	-0.344190	14.247900
		-	3.000	0.000000	-3.321430	0.000000	-1.894E+02	0.000000	8.114E+02
		-	2.400	0.002763	-3.321430	0.001244	-1.894E+02	0.071776	6.121E+02
		-	0.000	0.006078	-3.321420	0.006222	-1.894E+02	-0.693277	-1.850E+02
		-	3.000	0.000000	-3.321430	0.000000	-1.894E+02	0.000000	8.114E+02
		-	0.000	0.006078	-3.321420	0.006222	-1.894E+02	-0.693277	-1.850E+02
		-	0.600	0.006409	-3.321420	0.004978	-1.894E+02	-0.344190	14.247900
		-	0.000	-1.00E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.34E+02
2	LF1	MAX N	0.600	0.006409	-3.321420	0.004978	-1.89E+02	-0.344190	14.247900
1	LF1	MIN N	0.000	-1.00E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.34E+02
1	LF1	MAX V _y	0.000	-1.00E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.34E+02
1	LF1	MIN V _y	2.400	-1.00E+03	-3.646900	0.005339	1.850E+02	0.323524	-2.78E+01
1	LF1	MAX V _z	3.000	-1.00E+03	-3.551900	0.006499	1.850E+02	0.693277	1.894E+02
2	LF1	MIN V _z	3.000	0.000000	-3.321430	0.000000	-1.89E+02	0.000000	8.114E+02
1	LF1	MAX M _T	0.000	-1.00E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.34E+02
2	LF1	MIN M _T	3.000	0.000000	-3.321430	0.000000	-1.89E+02	0.000000	8.114E+02
1	LF1	MAX M _y	3.000	-1.00E+03	-3.551900	0.006499	1.850E+02	0.693277	1.894E+02
2	LF1	MIN M _y	0.000	0.006078	-3.321420	0.006222	-1.89E+02	-0.693277	-1.85E+02
2	LF1	MAX M _z	3.000	0.000000	-3.321430	0.000000	-1.89E+02	0.000000	8.114E+02
1	LF1	MIN M _z	0.000	-1.00E+03	-1.678570	0.000000	1.850E+02	0.000000	-7.34E+02

4.4 KNOTEN - LAGERKRÄFTE

Knoten Nr.	LF/LK	Lagerkräfte [kN]			Lagermomente [kNm]		
		P _x	P _y	P _z	M _x	M _y	M _z
1	LF1	0.000000	-3.321430	-1000.000000	-734.158000	0.000000	185.038000
3	LF1	3.321430	0.000000	0.000000	0.000000	811.390000	-189.438000
P _x =90.00°, φ _y =90.00°							
Schiefe Lagerung -> Bezug auf das gedrehte Lagerachsensystem							
Σ Lager	LF1	0.000000	0.000000	-1.0000E+03			
Σ Lasten	LF1	0.000000	0.000000	-1.0000E+03			

4.6 KNOTEN - VERFORMUNGEN

Knoten Nr.	LF/LK	Verschiebungen [mm]				Verdrehungen [mrad]		
		u	u _x	u _y	u _z	φ _x	φ _y	φ _z
1	LF1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	LF1	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	-1.87334	0.00000	1.82983
3	LF1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

4.7 STÄBE - LOKALE VERFORMUNGEN

Stab Nr.	LF/LK	Knoten Nr.	Stelle x [m]	Verschiebungen [mm]				Verdrehungen [mrad]			Querschnitt
				u	u _x	u _y	u _z	φ _x	φ _y	φ _z	
1	LF1	1	0.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1 - QRO 200x5 (warmgefertigt)
		2	3.000	4.20024	0.00000	-4.20024	0.00000	1.82983	0.00000	-1.87334	
		Max u _x	0.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
		Min u _x	3.000	4.20024	0.00000	-4.20024	0.00000	1.82983	0.00000	-1.87334	
		Max u _y	0.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
		Min u _y	3.000	4.20024	0.00000	-4.20024	0.00000	1.82983	0.00000	-1.87334	
		Max u _z	3.000	4.20024	0.00000	-4.20024	0.00000	1.82983	0.00000	-1.87334	
		Min u _z	2.100	2.45016	0.00000	-2.45016	0.00000	1.28088	0.00000	-1.92023	
		Max φ _x	3.000	4.20024	0.00000	-4.20024	0.00000	1.82983	0.00000	-1.87334	
		Min φ _x	0.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
		Max φ _y	0.900	0.53211	0.00000	-0.53211	0.00000	0.54895	0.00000	-1.12263	
		Min φ _y	3.000	4.20024	0.00000	-4.20024	0.00000	1.82983	0.00000	-1.87334	
		Max φ _z	0.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
		Min φ _z	2.400	3.03503	0.00000	-3.03503	0.00000	1.46387	0.00000	-1.96834	
		2	0.000	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	1.87334	0.00000	-1.82983	1 - QRO 200x5 (warmgefertigt)
2	LF1	3	3.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
		Max u _x	3.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
		Min u _x	0.000	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	1.87334	0.00000	-1.82983	
		Max u _y	0.000	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	1.87334	0.00000	-1.82983	

Projekt: Diplomarbeit

Modell: Federmodellverfahren - 3D-System

Datum: 14.12.2024

4.7 STÄBE - LOKALE VERFORMUNGEN

7) STAB-LOKALE VERFORMUNGEN												
Stab		Knoten	Stelle	Verschiebungen [mm]				Verdrehungen [mrad]				
Nr.	LF/LK	Nr.	x [m]	u	u _x	u _y	u _z	φ _x	φ _y	φ _z	Querschnitt	
2	LF1	Min u _y	3.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
		Max u _z	0.000	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	1.87334	0.00000	-1.82983		
		Min u _z	3.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
		Max φ _x	0.000	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	1.87334	0.00000	-1.82983		
		Min φ _x	3.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
		Max φ _y	1.200	1.93127	0.00000	1.93127	0.00000	1.12400	0.00000	-1.79654		
		Min φ _y	3.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
		Max φ _z	3.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
		Min φ _z	0.600	3.06076	0.00000	3.06076	0.00000	1.49867	0.00000	-1.92962		

4.8 STÄBE - GLOBALE VERFORMUNGEN

ROBUSTE GLEICH VERGAMEN												
Stab	Knoten	Stelle	Verschiebungen [mm]					Verdrehungen [mrad]			Querschnitt	
Nr.	LF/LK	Nr.	x [m]	u	u _x	u _y	u _z	φ _x	φ _y	φ _z		
1	LF1	1	0.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1 - QRO 200x5 (warmgefertigt)
		2	3.000	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	-1.87334	0.00000	1.82983		
		Max u _x	0.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
		Min u _x	3.000	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	-1.87334	0.00000	1.82983		
		Max u _y	0.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
		Min u _y	3.000	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	-1.87334	0.00000	1.82983		
		Max u _z	3.000	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	-1.87334	0.00000	1.82983		
		Min u _z	2.100	2.45016	0.00000	2.45016	0.00000	-1.92023	0.00000	1.28088		
		Max φ _x	3.000	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	-1.87334	0.00000	1.82983		
		Min φ _x	0.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
		Max φ _y	0.900	0.53211	0.00000	0.53211	0.00000	-1.12263	0.00000	0.54895		
		Min φ _y	3.000	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	-1.87334	0.00000	1.82983		
		Max φ _z	0.000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
		Min φ _z	2.400	3.03503	0.00000	3.03503	0.00000	-1.96834	0.00000	1.46387		
		2	LF1	2	0.000	4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	-1.87334	0.00000	
3	3.000			0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
Max u _x	3.000			0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
Min u _x	0.000			4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	-1.87334	0.00000	1.82983		
Max u _y	0.000			4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	-1.87334	0.00000	1.82983		
Min u _y	3.000			0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
Max u _z	0.000			4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	-1.87334	0.00000	1.82983		
Min u _z	3.000			0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
Max φ _x	0.000			4.20024	0.00000	4.20024	0.00000	-1.87334	0.00000	1.82983		
Min φ _x	3.000			0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
Max φ _y	1.200			1.93127	0.00000	1.93127	0.00000	-1.12400	0.00000	1.79654		
Min φ _y	3.000			0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
Max φ _z	3.000			0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
Min φ _z	0.600			3.06076	0.00000	3.06076	0.00000	-1.49867	0.00000	1.92962		

4.9 STÄBE - STABKENNZAHLEN FÜR KNICKEN

					Länge	Normalkraft	Stabparameter [-]		
Stab Nr.	LF/LK	Stabtyp	Material	Querschnitt	L [m]	N [kN]	ϵ_y	ϵ_z	τ_b
1	LF1	Balkenstab	2 - Baustahl S 235	1 - QRO 200x5 (warmgefertigt)	3.000	-1.000E+03	1.324	1.324	
2	LF1	Balkenstab	2 - Baustahl S 235	1 - QRO 200x5 (warmgefertigt)	3.000	0.004634	-	-	

4.10 STABSCHLANKHEITEN

Stab Nr.	Querschnitt	Länge L [m]	Knicklängenbeiwerte [-]	Schlankheit [-]
			$k_{cr,y}$ $k_{cr,z}$	λ_y λ_z
1	1 - QRO 200x5 (warmgefertigt)	3.000	1.000 1.000	37.74 37.74
2	1 - QRO 200x5 (warmgefertigt)	3.000	1.000 1.000	37.74 37.74

Projekt: Diplomarbeit

Modell: Federmodellverfahren - 3D-System

Datum: 14.12.2024

1.1 BASISANGABEN

Anzahl der Knickfiguren:	4
Normalkräfte wurden aus RSTAB LF 1 übernommen	
Interne Stabteilung wegen	
- Balkenstäbe:	2
- Fachwerkstäbe:	1
- Vouten bzw. elast. Bettung:	6
Ausnutzung des Entlastungseffektes durch Zugkräfte	☒
Änderung der Steifigkeit _{YM}	☐
Maximale Anzahl der Iteration:	100
Iteration-Abbruchschranke:	1.000E-05

2.1 KNICKLÄNGEN UND -LASTEN

Stab-Nr.	Knoten		Stablänge [m]	Figur-Nr.	Knicklänge[m]		Knicklängenbeiwert [-]		Knicklast N-k[kN]
	Anfang	Ende			$s_{K,y}$	$s_{K,z}$	β_y	β_z	
1	1	2	3.000	1	3.581	3.581	1.194	1.194	3952.480
				2	1.905	1.905	0.635	0.635	13967.600
				3	1.751	1.751	0.584	0.584	16528.500
				4	1.055	1.055	0.352	0.352	45525.400
Zug im Stab -> keine Ermittlung									
Zug im Stab -> keine Ermittlung									
Zug im Stab -> keine Ermittlung									
Zug im Stab -> keine Ermittlung									

2.2 KNICKFIGUREN

Stab-Nr.	Knoten-Nr.	Figur-Nr.	Normierte Knickfigur [-]					
			u_x	u_y	u_z	φ_x	φ_y	φ_z
1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
		2	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
		3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
		4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	2	1	0.00000	1.00000	0.00000	-0.49218	0.00000	0.43565
		2	0.00000	0.52668	0.00000	0.72483	0.00000	0.22945
		3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.81963	0.00000
		4	0.00000	0.53926	0.00000	-2.07624	0.00000	0.23493
	3	1	0.00000	1.00000	0.00000	-0.49218	0.00000	0.43565
		2	0.00000	0.52668	0.00000	0.72483	0.00000	0.22945
		3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.81963	0.00000
		4	0.00000	0.53926	0.00000	-2.07624	0.00000	0.23493

2.3 VERZWEIGUNGSLASTFAKTOREN

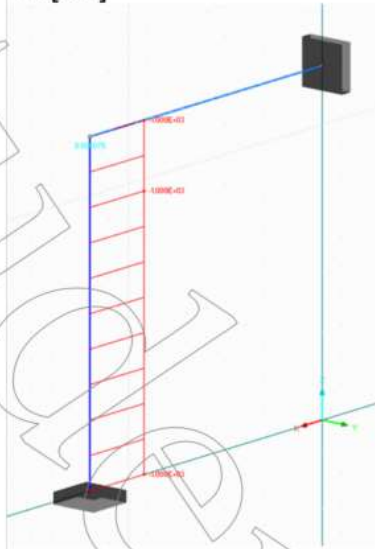
Figur-Nr.	Verzweigungs-lastfaktor	Vergrößerungs-faktor Alpha
1	3.952	1.339
2	13.968	1.077
3	16.528	1.064
4	45.525	1.022

Projekt: Diplomarbeit

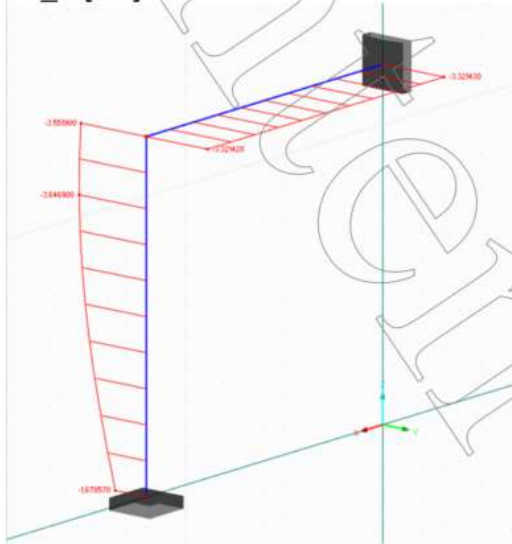
Modell: Federmodellverfahren - 3D-System

Datum: 14.12.2024

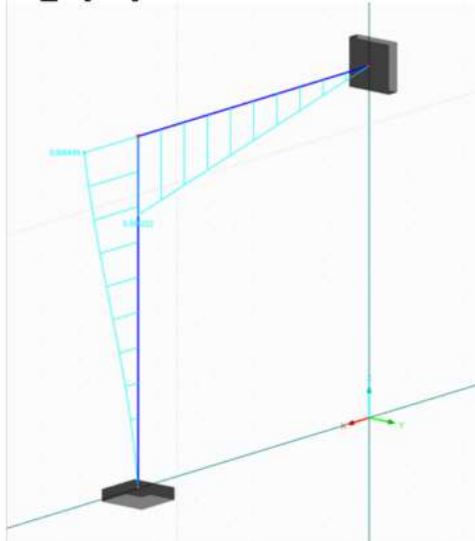
■ N [KN]



■ V_Y [KN]



■ V_Z [KN]

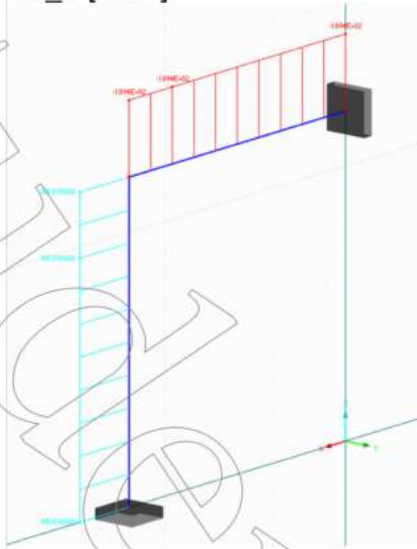


Projekt: Diplomarbeit

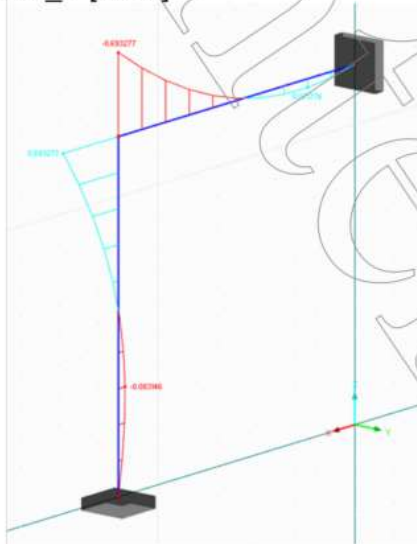
Modell: Federmodellverfahren - 3D-System

Datum: 14.12.2024

■ M_T [KNM]



■ M_Y [KNM]



■ M_Z [KNM]

