



Masterarbeit

# Wirbelstromverluste im Endbereich von Asynchronmaschinen für Traktionsantriebe

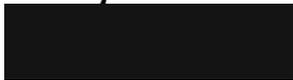
Autor: Wolfgang Strasser  
Matrikelnummer: 11805840  
Betreuer: Schmidt, Erich  
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.  
Universität: Technische Universität Wien  
Institut: Institut für Energiesysteme und Elektrische Antriebe  
Datum der Abgabe: 21. Mai 2025

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt wurde. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Wien, 21. Mai 2025



---

Wolfgang Strasser

# Kurzfassung

Elektrische Maschinen für Traktionsantriebe unterliegen für gewöhnlich hohen Anforderungen hinsichtlich Leistungsdichte, Wirkungsgrad sowie Kosten und sind elektromagnetisch sowie thermisch sehr hoch ausgenutzt. Insbesondere für die thermische Auslegung ist die Bestimmung aller auftretenden Verluste in jedem Betriebspunkt wichtig. Die meisten Verluste können bereits gut abgebildet und berechnet werden, für die Bestimmung der Gehäuseverluste ist allerdings meist eine zeitaufwändige Finite Elemente Analyse notwendig. Um die Gehäuseverluste akkurat und ohne einer solchen Finite Elemente Analyse bestimmen zu können, ist das Ziel dieser Arbeit, ein analytisches Berechnungsmodell zu erstellen, welches die Wirbelstromverluste im Gehäuse anhand von geometrischen, materialbestimmenden und Betriebspunktabhängigen Parametern in kurzer Zeit ermittelt.

Insgesamt werden drei Modelle auf Basis der Maxwell-Gleichungen erstellt, welche die Feldsituation als ebenes Feldproblem lösen und die Wirbelstromverluste im Gehäuse berechenbar machen. Dabei wird die Maschine in vier radiale Schichten (Rotor, Luftspalt, Stator und Gehäuse) aufgeteilt, welche von unterschiedlichen aber jeweils (für einen Betriebspunkt) konstanten Parametern beschrieben werden. Das Gehäuse wird als einzige leitfähige Schicht angenommen. Für Stator und Gehäuse werden Magnetisierungskennlinien hinterlegt, die für die Bestimmung der betriebspunktabhängigen Permeabilitätszahlen verwendet werden, welche nach ihrer Bestimmung ebenfalls konstant gehalten werden.

Die ersten beiden Modelle verwenden kartesische, während das dritte Modell zylindrische Koordinaten verwendet und so auch die Krümmung des Aufbaus berücksichtigt. Die Ergebnisse der Modelle werden jeweils mit Vergleichsdaten aus Finite Elemente Analysen verglichen, um die Resultate verifizieren zu können.

Das Modell mit zylindrischen Koordinaten wird abschließend genutzt, um das Verhalten der Wirbelstromverluste im Gehäuse bei variierenden Parametern zu untersuchen.

# Abstract

Electric motors for traction drives are usually subject to high requirements regarding power density, efficiency as well as cost and are highly utilized electromagnetically as well as thermally. The determination of all losses is important, especially for the thermal dimensioning. Most of the losses can be modelled and calculated to a satisfactory accuracy, but the accurate losses in the housing mostly still require a time-intensive finite elements analysis. To determine the losses in the casing accurately and without such a finite elements analysis, the subject of this thesis is to create an analytical calculation model, which calculates the eddy current losses in the casing on the basis of geometric, material-defining and operating point specific parameters in a short time.

A total of three models on the basis of the Maxwell equations are created, which solve the planar field problem and make the eddy current losses in the casing computable. The machine is divided into four radial layers (rotor, airgap, stator and casing), where each is described by a set of (for an operating point constant) parameters. The casing is the only layer which is assumed to be conductive. Stator and casing each have an underlying magnetization curve, which are used to determine an operating point specific relative permeability, which is then held constant for the operating point.

The first two models utilize Cartesian, whereas the third model utilizes cylindrical coordinates und therefore considers the curvature of the setup. The results of each model are compared to the results of finite elements analyses in order to verify each outcome.

Finally, the model utilizing cylindrical coordinates is used to investigate the behaviour of the eddy current losses in the casing with varying parameters.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Herleitung der Grundgleichungen</b>	<b>4</b>
2.1	Vereinfachende Annahmen . . . . .	4
2.2	Differentialgleichungssystem der Feldgleichungen . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Modellkonfiguration und Validierung</b>	<b>8</b>
3.1	Parameter . . . . .	8
3.2	Vergleichsdaten . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Gehäuseverluste</b>	<b>14</b>
4.1	Kartesische Geometrie . . . . .	15
4.1.1	Vorgabe einer Luftspaltflussdichte . . . . .	19
4.1.1.1	Bestimmung der Permeabilitätszahlen . . . . .	20
4.1.1.2	Auswertung der Flussdichten . . . . .	21
4.1.1.3	Wirbelstromverluste . . . . .	25
4.1.2	Vorgabe einer Luftspalt- und einer Jochflussdichte . . . . .	27
4.1.2.1	Bestimmung der Permeabilitätszahlen . . . . .	28
4.1.2.2	Auswertung der Flussdichten . . . . .	29
4.1.2.3	Wirbelstromverluste . . . . .	29
4.1.2.4	Vergleich mit dem Poynting-Satz . . . . .	30
4.2	Zylindrische Geometrie . . . . .	34
4.2.1	Vorgabe einer Luftspaltflussdichte . . . . .	41
4.2.2	Vorgabe einer Luftspalt- und einer Jochflussdichte . . . . .	42
4.2.2.1	Bestimmung der Permeabilitätszahlen . . . . .	43
4.2.2.2	Auswertung der Flussdichten . . . . .	43
4.2.2.3	Wirbelstromverluste . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Parametervariation</b>	<b>49</b>
5.1	Luftspaltflussdichte . . . . .	49
5.2	Gehäusetemperatur . . . . .	51
5.3	Frequenz . . . . .	52
5.4	Jochhöhe . . . . .	54
5.5	Magnetisierungskennlinie . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Fazit</b>	<b>57</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>60</b>

# Symbolverzeichnis

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Winkel – Index „m“ für mechanische Winkel	rad
$\delta$	Eindringtiefe	m
$\zeta$	Komplexe Zahl mit gleich großem Real- wie Imaginärteil	–
$\vartheta$	Substitutionskoordinate der Besselschen Differentialgleichung	–
$\kappa$	Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstands	1/K
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	W/(m K)
$\mu$	Permeabilität	H/m
$\mu_r$	Permeabilitätszahl	–
$\nu$	Ordnungszahl der Oberwelle	–
$\xi$	Beliebige Referenzlänge bezogen auf die Eindringtiefe	–
$\sigma$	Elektrische Leitfähigkeit	S/m
$\tau_P$	Polteilung	m
$\phi$	Elektrisches Potenzial	V
$\underline{\Phi}(\varphi)$	Lösungsfunktion aus Separationsansatz für zylindrisches Modell	–
$\chi$	Hilfsvariablen	–
$\omega$	Kreisfrequenz	rad/s
$\omega_1$	Kreisfrequenz der Grundschwingung	rad/s

## Lateinische Buchstaben

$\vec{A}$	Magnetisches Vektorpotential	V s/m
$\mathcal{A}$	Geometrische Fläche	–
$a$	Hilfsvariable in Exponentialfunktion für Umfangsrichtung, kartesischer Ansatz	1/m
$\vec{B}$	Magnetische Flussdichte	T
$B_J$	Jochflussdichte	T
$\overline{B}_J$	Jochflussdichte (Mittelwert über die Jochhöhe)	T
$\hat{B}_L$	Luftspaltflussdichte (Amplitudenwert)	T
$B_Z$	Zahnspitzenflussdichte	T
$b_Z$	Breite des Statorzahns am Luftspalt	m
$C$	Koeffizient des Lösungsansatzes der Differentialgleichung	V s/m
$c_{Fe}$	Eisenfüllfaktor	–
$D$	Koeffizient des Lösungsansatzes der Differentialgleichung	V s/m
$d$	Durchmesser	m
$d_a$	Außendurchmesser des Stator-Blechpakets	m
$d_i$	Innendurchmesser des Stator-Blechpakets	m

$\vec{E}$	Elektrische Feldstärke	V/m
$f_1$	Grundschwingungsfrequenz	Hz
$f_{BZ/BL}$	Umrechnungsfaktor: Luft- zu Zahnschneckenflussdichte	–
$f_{\vec{B}J/BJ}$	Umrechnungsfaktor: Zahnschnecken- zu mittleren Jochflussdichte	–
$f_J$	Abschwächfaktor der mittleren Jochflussdichte	–
$\vec{H}$	Magnetische Feldstärke	A/m
$h$	Radiale Abstände (Höhen)	m
$h_G$	Gehäusedicke	m
$h_J$	Jochhöhe	m
$h_L$	Luftspaltlänge	m
$I_n(x)$	Modifizierte Besselfunktion n-ter Ordnung erster Art	–
$\vec{J}$	Stromdichte	A/m <sup>2</sup>
$j$	Imaginäre Einheit	–
$\vec{K}$	Flächenstromdichte	A/m
$K_n(x)$	Modifizierte Besselfunktion n-ter Ordnung zweiter Art	–
$k$	Faktor im Argument der hyperbolischen Funktionen	1/m
$k_f$	Oberschwingungszahl	–
$l$	Länge axial	m
$l_{Fe}$	Axiale Länge des Blechpakets	m
$n$	Natürliche Zahl inkl. Null, d.h. $n \in \mathbb{N}_0$	–
$P_W$	Wirbelstrom Verlustleistung im Gehäuse	W
$p$	Polpaarzahl	–
$2p$	Polzahl	–
$p_W$	Wirbelstrom Verlustleistungsdichte	W/m <sup>3</sup>
$Q_1$	Anzahl Statornuten (bzw. Statorzähne)	–
$\underline{R}(r)$	Lösungsfunktion aus Separationsansatz für zylindrisches Modell	–
$r$	Radius	m
$r, \varphi, z$	Koordinaten zylindrisch	–
$\vec{S}$	Poynting-Vektor	W/m <sup>2</sup>
$s^2$	Normierte Summe der quadratischen Differenzen zum Wert 1	–
$T$	Temperatur	K
$t$	Zeit	s
$U$	Spannung (Effektivwert)	V
$\mathcal{V}$	Geometrisches Volumen	–
$v$	Reelle Zahl	–
$x, y, z$	Koordinaten kartesisch	–

### Indizes

$G$	Gehäuse
$L$	Luftspalt
$R$	Rotor
$S$	Stator

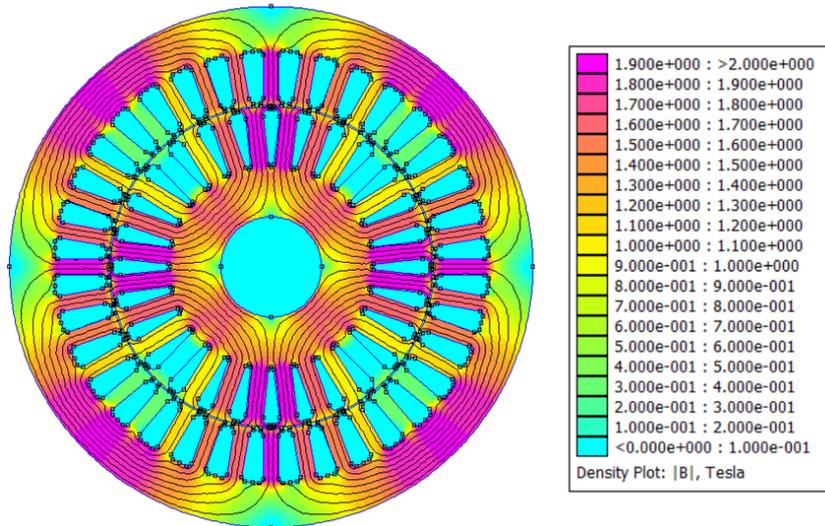
# 1 Einleitung

Für die Auslegung von elektrischen Traktionsmaschinen ist die Kenntnis der auftretenden Verlustleistungen essentiell, um die Baugröße kompakt, den Materialverbrauch niedrig und den Wirkungsgrad hoch zu halten. In [9] werden die Verluste folgendermaßen unterteilt:

- Reibungsverluste – Mechanische Verluste aufgrund von Lagerreibung, Gasreibung der zylindrischen Körper und eines etwaigen Lüfters sowie etwaige Bürstenreibung.
- Erregerverluste – Alle Verluste, die beim Aufbauen des elektromagnetischen Felds entstehen. Zusätzlich zu den Verlusten bei etwaigen Vorwiderständen fallen in diese Kategorie:
  - Wicklungsverluste – Temperaturabhängige Verluste, welche durch den Strom und den Wicklungswiderstand bestimmt sind. Diese werden oft auch „Kupferverluste“ genannt, weil Kupfer das am häufigsten eingesetzte Wicklungsmaterial ist. Diese Verluste machen den Großteil der Erregerverluste aus.
  - Bürstenübergangsverluste – Werden Schleifringe oder Bürsten verwendet, um elektrische Energie in rotierenden Teilen zur Verfügung zu stellen, treten am Schleifkontakt Spannungsabfälle auf, welche stromabhängige Verluste verursachen.
- Eisenverluste – Verluste, die durch eine sich zeitlich ändernde Flussdichte im Eisen entstehen. Hierzu zählen Hysterese- und Wirbelstromverluste.
- Zusatzverluste – Verluste, welche weder rechnerisch noch messtechnisch sinnvoll erfassbar sind. Diese beinhalten unter Anderem die Wirbelstromverluste im Gehäuse bzw. in den konstruktiv notwendigen Massivteilen.

Sowohl die Reibungsverluste als auch die Erregerverluste sind gut abbildbar mithilfe von Messungen. Die Messung der Wirbelstromverluste im Inneren oder in den Endbereichen der Maschine ist allerdings eine größere Herausforderung.

Im magnetischen Aktivteil werden die Wirbelstromverluste klein gehalten, indem der Kern aus elektrisch zueinander isolierten Blechen axial gestapelt gebaut wird. In den baulich notwendigen Massivteilen in der Nähe des magnetischen Aktivteils – dazu zählen insbesondere ein Gehäuse sowie Endbleche und Pressplatten, welche jeweils am Anfang und Ende des geblechten Aktivteils angeordnet sind – wird vor allem bei hoch gesättigten Maschinen ein sich zeitlich ändernder magnetischer Fluss geführt, weshalb sich dort Wirbelströme ausbilden, welche zu erheblichen Verlusten führen können. Meist überwiegen die Gehäuseverluste die Verluste in den Endblechen und Pressplatten.



**Abb. 1.1:** Ergebnis einer FE-Simulation der Flussdichte im Blechpaket einer Asynchronmaschine [13]

Für die Analyse der Feldsituation im Inneren einer elektrischen Maschine wird oft eine Finite Elemente (FE-) Methode verwendet (siehe Abbildung 1.1). Auch die Bestimmung der Wirbelstromverluste im Gehäuse wird meist mithilfe einer FE-Simulation gelöst. Diese benötigt jedoch eine große Menge an Rechenressourcen und kann eine erhebliche Zeit bis zum Ergebnis benötigen. Um in der Prototypphase oder bei häufigen Anpassungen schneller an eine Abschätzung der auftretenden Verluste zu kommen, ist das Ziel dieser Masterarbeit, ein Modell für die Wirbelstromverluste im Gehäuse zu erstellen, welches das Problem approximiert, analytisch lösbar macht und in kurzer Zeit löst. Dafür werden bewusst Vereinfachungen angenommen, weswegen das Ergebnis nicht die exakte Realität wiedergeben kann. Diese Abweichungen können allerdings toleriert werden, solange das Berechnungsmodell einerseits schnell – die Auswertung eines Betriebspunktes soll in weniger als 10 ms erfolgen – ist und andererseits das Ergebnis um nicht mehr als den Faktor drei von den FE-Ergebnissen abweicht. So können Abschätzungen von mehreren Betriebspunkten oder gar einem ganzen Fahrspiel in kurzer Zeit und mit geringem Rechenaufwand erfolgen.

Für das Modell wird ein ähnlicher Ansatz wie in [4] und [21] verfolgt: Die zweidimensionale Betrachtung einer (axial-transversalen) Scheibe aus dem Inneren der Maschine, die (radiale) Aufteilung der Maschine in Schichten, welche durch unterschiedliche Parameter (Leitfähigkeit, Permeabilität, etc.) beschrieben werden, sowie die Lösung der elektrodynamischen Feldgleichungen über das magnetische Vektorpotential für jede Schicht unter der Berücksichtigung von Randbedingungen dienen als Grundlage für die Erstellung des Modells.

Die Herleitung der Feldgleichungen bzw. des Differentialgleichungssystems wird in Kapitel 2 angeführt, während die Lösung dieser Gleichungen in kartesischen Koordinaten in Abschnitt 4.1 bzw. in zylindrischen Koordinaten in Abschnitt 4.2 erfolgt. Für die Herleitung wird von einer Flächenstromdichte  $\vec{K} = K_z \vec{e}_z$  ausgegangen, welche als Erregung dient. Zur Bestimmung der Koeffizienten werden Flussdichten im Luftspalt, Rotor-,

Stator- und Gehäusewand als Randbedingungen herangezogen.

Zur Parametrierung eines Modells werden geometrische Abmessungen, elektrische und magnetische Betriebsparameter sowie Materialparameter benötigt. Die Parameter werden hierbei als Konstanten (homogen, linear, isotrop) angenommen. Zwei Magnetisierungskennlinien sind hinterlegt, um die Permeabilitätszahlen abhängig vom untersuchten Betriebspunkt bestimmen zu können. Nach ihrer Bestimmung werden die Permeabilitätszahlen ebenfalls konstant gehalten. Die verwendeten Parameter sind in Abschnitt 3.1 angeführt. Dort sind auch die Gehäuseverluste aus FE-Analysen von fünf Asynchronmaschinen (ASM) aufgelistet, welche als Vergleichsdaten dienen, um das Modell mit unterschiedlichen Geometrien bei verschiedenen Betriebspunkten zu testen.

Grundsätzlich wurde das Modell für äußerlich kreisrunde Radialfluss-ASM mit Drehfeldwicklung entwickelt. Durch eine entsprechende (empirische) Anpassung des Stator Außendurchmessers zur Modellierung der magnetischen Eigenschaften kann dieses Modell allerdings auch für äußerlich nicht-runde Maschinen eingesetzt werden. Mit ähnlicher Vorgehensweise können Kühllöcher im Statorjoch oder im Gehäuse mitberücksichtigt werden. Diese Anpassungen sind jedoch nicht Teil des Rahmens dieser Arbeit. Des Weiteren werden lediglich einzelne (zeitlich wie räumlich) sinusförmige und umfangsperiodische Wellen mit dem Modell abgebildet. Für eine beliebige Form der Luftspaltflussdichte muss diese als Fourier-Reihe dargestellt und die Summe der Verluste aller Anteile gebildet werden.

## 2 Herleitung der Grundgleichungen

In diesem Kapitel werden die für die Modelle notwendigen Gleichungen hergeleitet. Da der Nabla-Operator  $\nabla$  und auch die damit verbundene Bildung von Divergenz und Rotation von dem gewählten Koordinatensystem abhängig ist (bei krummlinigen Koordinaten – wie etwa Zylinderkoordinaten – sind die Basisvektoren nicht konstant, [20]), werden hier nur die Ausgangsgleichungen hergeleitet. Gelöst werden diese in den jeweiligen Kapiteln selbst: Für kartesische Koordinaten siehe Abschnitt 4.1 und für zylindrische Koordinaten siehe Abschnitt 4.2.

### 2.1 Vereinfachende Annahmen

Da eine elektrische Maschine aus Sicht der analytischen Beschreibung im Allgemeinen eine sehr komplexe Geometrie besitzt, sind Vereinfachungen zwingend notwendig. Es werden deshalb folgende Annahmen getroffen:

- In einer Schicht sind die Parameter, die diese beschreiben, über die gesamte Schicht konstant bzw. linear, homogen und isotrop.
- Die Wirbelströme in den Massivteilen sind rückwirkungsfrei.
- Bereiche aus Eisen sind, für die Zwecke der Modellierung der Felder, durchwegs aus Eisen und ohne Löcher. Weder Nuten noch Kühllöcher fließen in die Modellierung der Feldverläufe ein.
- Die Randeffekte an den axialen Enden der Maschine sind vernachlässigbar, das heißt, die Feldgrößen im magnetischen Aktivteil sind nicht von der z-Koordinate abhängig.
- Am Gehäuserand der Maschine ist die Radialkomponente der Flussdichte null.
- Die Feldanalyse kann durch eine zweidimensionale Berechnung (ebenes Feldproblem) abgebildet werden.
- Das magnetische Feld im Luftspalt ist zeitlich und räumlich sinusförmig sowie umfangsperiodisch.
- Die elektrische Maschine befindet sich im idealen Leerlauf, es herrscht also keine Relativbewegung zwischen Rotor und Drehfeld.
- Die vorgegebene elektrische Frequenz ist konstant, es werden also keine transienten Effekte durch Arbeitspunktänderungen modelliert.

## 2.2 Differentialgleichungssystem der Feldgleichungen

Um die für das Modell relevanten Wirbelstromverluste im Gehäuse zu berechnen, müssen Ausdrücke für die Feldgrößen ermittelt werden. Hierfür wird von den Maxwell-Gleichungen im dominant magnetischen Feldsystem (Gleichung 2.1 bis Gleichung 2.4) ausgegangen und unter Verwendung des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$  (siehe Gleichung 2.5) sowie des Zusammenhangs der Feldgrößen über die Materialparameter (Gleichung 2.6 und Gleichung 2.7) ein Differentialgleichungssystem erstellt ([12], [5]). Es werden, wie in den vereinfachenden Annahmen festgelegt, lineare, homogene und isotrope Materialparameter angenommen.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.4)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.7)$$

Werden Gleichung 2.5 und Gleichung 2.6 in Gleichung 2.1 eingesetzt, resultiert daraus Gleichung 2.8.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \vec{J} \quad (2.8)$$

Die linke Seite von Gleichung 2.8 wird mithilfe einer Vektor-Identität der Vektoralgebra von Gleichung 2.9 sowie der Coulomb-Eichung aus Gleichung 2.10 untersucht. Dabei ist  $\nabla^2$  der Vektor-Laplace-Operator.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \nabla^2 \vec{f} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.10)$$

$$\implies \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} \quad (2.11)$$

Gemäß den vereinfachenden Annahmen liegt für die Feldsituation ein ebenes Feldproblem mit entlang der z-Richtung translationsinvarianten Feldgrößen vor. Demnach sind das magnetische Vektorpotential  $\vec{A} = A_z \vec{e}_z$  und auch die elektrische Feldstärke  $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$  sowie die Stromdichte  $\vec{J} = J_z \vec{e}_z$  nur durch deren z-Komponenten beschreibbar, siehe Gleichung 2.12. Damit ist für die Projektion  $A_z$  nur der skalare Laplace-Operator im zugrundeliegenden Koordinatensystem maßgebend.

$$\vec{A} = A_z \vec{e}_z \quad (2.12)$$

$$-\nabla \times \vec{A} = -\nabla \times (A_z \vec{e}_z) = -\Delta (A_z \vec{e}_z) \quad (2.13)$$

Nun wird aus Gleichung 2.8 also Gleichung 2.14.

$$-\Delta A_z = \mu J_z \quad (2.14)$$

Anschließend wird noch die rechte Seite von Gleichung 2.8, bzw. mithilfe des Zusammenhangs von Gleichung 2.7 die elektrische Feldstärke, untersucht. Wird Gleichung 2.5 in Gleichung 2.2 eingesetzt, lässt sich auf Gleichung 2.15 schließen. Nachdem die Rotation eines Gradientenfeldes stets 0 ist, kann  $\vec{E}$  über den Term  $-\nabla\phi$  verfügen und Gleichung 2.2 ist immer noch erfüllt.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) \implies \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \nabla\phi \quad (2.15)$$

Jeweils gemeinsam mit der Leitfähigkeit  $\sigma$  (siehe Gleichung 2.7) beschreibt der Term  $-(\partial/\partial t)\vec{A}$  die Wirbelstrom-Anteile, während  $-\nabla\phi$  die eingepprägten Anteile der Stromdichte angibt. In den untersuchten Wirbelstromgebieten sind lediglich Wirbelströme vorhanden, jedoch keine eingepprägte Stromdichte, woraus  $-\nabla\phi = 0$  folgt. Dies wiederum bedeutet, dass die elektrische Feldstärke im Rahmen dieser Arbeit mit Gleichung 2.16 angegeben werden kann.

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial t} A_z \quad (2.16)$$

Wird Gleichung 2.16 nun für die elektrische Feldstärke in Gleichung 2.14 angewandt, so ergibt sich die Diffusionsgleichung aus Gleichung 2.17.

$$\Delta A_z = \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} A_z \quad (2.17)$$

Die Feldgrößen werden als harmonische Größen (oder eine Überlagerung dieser) angenommen, für die komplexe Zeiger zur Beschreibung dienlich sind. Dabei gilt (beispielhaft für eine Projektion des magnetischen Vektorpotentials) der Zusammenhang zwischen Zeitfunktion, komplexem Zeiger

$$A_k(t) = \text{Re}\{A_k\} = \text{Re}\{\underline{A}_k e^{j\omega t}\} \quad (2.18)$$

sodass die Ableitung nach der Zeit ( $\partial/\partial t$ ) einer Multiplikation mit  $j\omega$  entspricht. Der Einfachheit und Lesbarkeit zugunsten wird hier üblicherweise auf die Angabe der Variablen bzw. Koordinaten, von denen eine Größe oder ein Zeiger abhängt, verzichtet, außer um die (reelle) Zeitfunktion von einem komplexen Zeiger unterscheiden zu können oder um in Herleitungen den Zusammenhang klarer darzustellen. Außerdem sei angemerkt, dass grundsätzlich Amplitudenwerte verwendet werden. Ausnahmen sind Spannungen,

welche als Effektivwerte angegeben sind, und Mittelwerte, welche mit einem Überstrich gekennzeichnet werden.

Aus der Diffusionsgleichung (Gleichung 2.17) wird dadurch die homogene Helmholtz-Gleichung für leitende Bereiche (siehe Gleichung 2.19a) bzw. die Laplace-Gleichung für nicht-leitende Bereiche (siehe Gleichung 2.19b), in denen  $\sigma = 0 \text{ S/m}$  gilt.

$$\Delta \underline{A}_z = \begin{cases} \mu \sigma j \omega \underline{A}_z & \text{leitende (wirbelstrombehaftete) Bereiche} & (2.19a) \\ 0 & \text{nicht-leitende Bereiche} & (2.19b) \end{cases}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichungen wird in Abschnitt 4.1 mit kartesischen und in Abschnitt 4.2 mit zylindrischen Koordinaten behandelt.

# 3 Modellkonfiguration und Validierung

Für die Modellierung werden geometrische, materialbeschreibende und arbeitspunktspezifische Parameter benötigt, welche in Abschnitt 3.1 beschrieben werden. Das Modell nutzt diese Parameter, um Gehäuseverluste in  $W$  für einen Betriebspunkt zu ermitteln und zurückzugeben. Um die Ergebnisse des Modells verifizieren zu können, werden Vergleichswerte benötigt, welche in Abschnitt 3.2 angeführt sind.

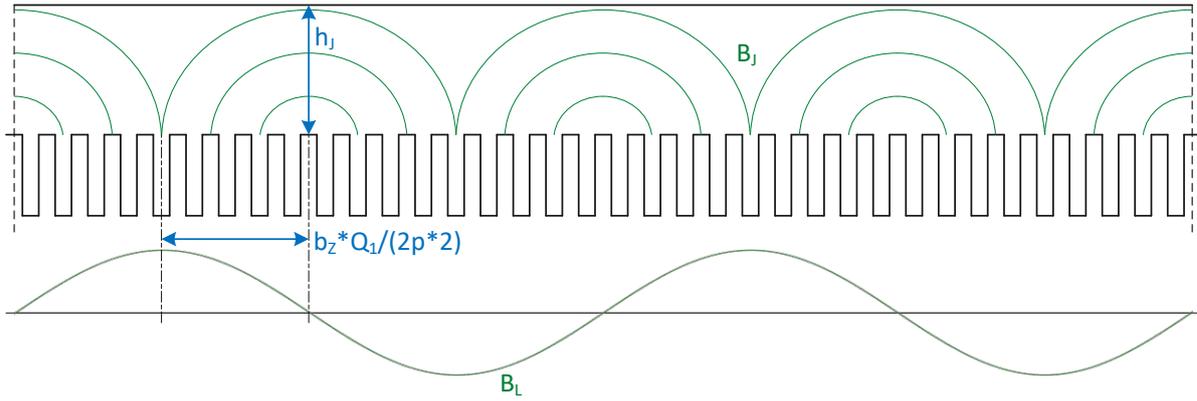
## 3.1 Parameter

Die geometrischen Parameter lauten:

- $d_a$ : Außendurchmesser des Stator-Blechkpakets
- $d_i$ : Innendurchmesser des Stator-Blechkpakets
- $h_L$ : Luftspaltlänge – Abstand zwischen Stator und Rotor
- $h_G$ : Gehäusedicke
- $l_{Fe}$ : Axiale Länge des Blechkpakets – Diese Länge wird auch als Länge des Gehäuses verwendet
- $2p$ : Polzahl
- $f_{BZ/BL}$ : Faktor zur Bestimmung der Zahnschneckenflussdichte aus der Luftspaltflussdichte
- $f_{\overline{B}J/BZ}$ : Faktor zur Bestimmung der mittleren Jochflussdichte aus der Zahnschneckenflussdichte (verwendet in Abschnitt 4.1.2)

Diese Parameter ergeben sich aus der Konstruktion der Maschine. Hierbei sind die Faktoren  $f_{BZ/BL}$  und  $f_{\overline{B}J/BZ}$  jeweils Konstanten, welche sich aus geometrischen Verhältnissen bilden. Da die Modelle nicht die Luftspaltflussdichte per se, sondern die Flussdichte im Eisen abbilden, wird die Luftspaltflussdichte immer zuerst umgerechnet. Hier wird angenommen, dass die Flussdichte, die im Luftspalt über den gesamten Umfang verteilt liegt, zur Gänze in das Eisen der Statorzähne eindringt und die Flussdichte somit entsprechend dem Verhältnis der Gesamtfläche zur Eisenfläche zunimmt. Dieser Zusammenhang wird in Gleichung 3.2 dargestellt, wobei  $c_{Fe}$  der Eisenfüllfaktor und  $Q_1$  die Anzahl der Statorzähne ist.

Um in Abschnitt 4.1.2 eine mittlere Jochflussdichte aus der Zahnschnecken-Flussdichte zu berechnen, wird Gleichung 3.3 verwendet, welche ebenso einen Vergleich zweier Flä-



**Abb. 3.1:** Schematische Darstellung der Statorzähne und des -jochs zur Bestimmung von  $f_{\overline{B_J/B_Z}}$  einer 4-poligen Maschine mit  $Q_1 = 36$

chen darstellt, aber auch die Sinusform der Luftspalt-Flussdichte berücksichtigt. Abbildung 3.1 zeigt die relevanten geometrischen Abmessungen sowie die sinusförmige Luftspaltflussdichte. Der Mittelwert einer Cosinus-Funktion mit Spitzenwert  $\hat{f}$  über eine Viertelperiode, welche für die maximale Jochflussdichte bestimmend ist, ergibt sich zu

$$\overline{\hat{f} \cos(x)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \hat{f} \cos(x) dx = \hat{f} \frac{2}{\pi} \quad (3.1)$$

was gemeinsam mit dem Verhältnis der geometrischen Abmessungen zu Gleichung 3.3 führt, wobei  $h_J$  die Jochhöhe darstellt.

$$f_{B_Z/B_L} = \frac{d_i \pi}{b_Z Q_1 c_{Fe}} \quad (3.2)$$

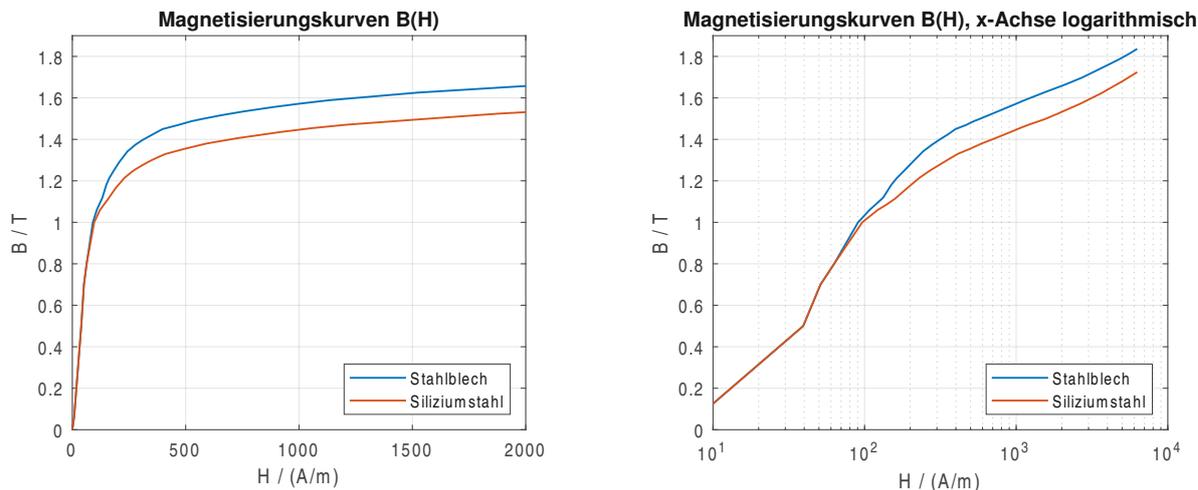
$$f_{\overline{B_J/B_Z}} = \frac{b_Z Q_1}{\pi h_J 2p} \quad (3.3)$$

Die materialbeschreibenden Parameter lauten:

- $\mu_r$ : Permeabilitätszahl
- $\sigma$ : Elektrische Leitfähigkeit

Die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  ist bei Eisen im Allgemeinen nichtlinear von den magnetischen Feldgrößen abhängig, so wie in Abbildung 3.2 abgebildet. Exakterweise folgt die Magnetisierung nicht dieser Kurvenform, sondern einer Hysterese. Die Hysterese wird im Zuge dieser Arbeit jedoch vernachlässigt, da dies sonst die Komplexität und die Dauer der Auswertung der Lösung in die Höhe treiben würde und einer FE-Simulation immer ähnlicher würde. Die Nichtlinearität des Materials wird allerdings nach Abbildung 3.2 abgebildet und berücksichtigt.

Für den Aufbau des magnetischen Aktivteils wird quasi ausschließlich Elektroblech – also eine Eisen-Silizium-Legierung – verwendet, welches in Abbildung 3.2 in rot dargestellt ist.



**Abb. 3.2:** Magnetisierungskennlinien für Stahlblech (Baustahl) und Siliziumstahl (Elektroblech) – Werte aus [18]

Diese rote Kurve beschreibt also (indirekt)  $\mu_r$  für Stator und Rotor. Für die Massivteile wird Stahlblech bzw. Baustahl oder Sphäroguss verwendet, was in dieser Arbeit von der blauen Kurve beschrieben wird.

Im Bereich der geschichteten Elektrobleche verläuft der magnetische Fluss radial bzw. tangential (siehe Abbildung 1.1). Wie aus Gleichung 2.2 ersichtlich, bilden sich hier Wirbelfelder um radiale bzw. tangentielle Achsen. Die Blechung – elektrisch voneinander isolierte Schichten, die axial angeordnet sind – verhindert (nicht gänzlich, aber zu einem sehr großen Grad) hier allerdings die Ausbildung von diesen Stromwirbeln. Diese Tatsache ist Grund zur Annahme von  $\sigma = 0 \text{ S/m}$  für Stator und Rotor. Luft als Nichtleiter wird ebenfalls mit  $\sigma = 0 \text{ S/m}$  beschrieben. Für Massivteile aus Baustahl wird nach den Werten aus [17] und [16] eine Leitfähigkeit von  $\sigma_{Stahl} = 6.667 \text{ MS/m}$  gewählt. Massivteile aus Gusseisen werden als Sphäroguss (Index „SG“) angenommen, welcher einen höheren Kohlenstoffgehalt als Baustahl aufweist. Hierfür wird aufgrund mangelnder Referenzen auf die elektrische Leitfähigkeit über die Wärmeleitfähigkeit geschätzt. Dabei werden die Werte  $\sigma_{Stahl,C60} = 7.9 \text{ MS/m}$  aus [6],  $\lambda_{Stahl} = 53 \text{ W/(m K)}$  aus [7] und  $\lambda_{SG} = 34.675 \text{ W/(m K)}$  aus [19] verwendet, um

$$\sigma_{Guss} = \frac{\sigma_{Stahl,C60}}{\lambda_{Stahl}} \lambda_{SG} \approx 5.2 \frac{\text{MS}}{\text{m}} \tag{3.4}$$

zu erhalten.

Um die elektrische Leitfähigkeit an die Temperatur des jeweiligen Massivteils anzupassen, wird der Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstands  $\kappa = 0.006 \text{ 1/K}$  aus [6] mit Gleichung 3.5 angewandt.

$$\sigma(T) = \frac{\sigma_{20}}{1 + \kappa(T - 293.15 \text{ K})} \tag{3.5}$$

Die resultierenden Werte nach der Temperaturanpassung sind in Tabelle 3.2 aufgelistet.

Die arbeitspunktspezifischen Parameter lauten:

- $f_1$ : Grundswingungsfrequenz der angelegten Spannung
- $k_f$ : Oberswingungszahl
- $\nu$ : Oberwellenzahl
- $\hat{B}_L$ : Luftspaltflussdichte

Eine Traktionsmaschine wird in der Regel nicht an einem Netz mit sinusförmiger Spannung betrieben, sondern von einem Umrichter gespeist. Dadurch treten an den Klemmen der Maschine neben der Grundswingung auch Oberswingungen mit einem Vielfachen der Grundswingungsfrequenz auf. Der Parameter  $k_f$  beschreibt, welches Vielfache der Grundswingung betrachtet werden soll. Die Amplituden der Oberswingungen sind in der Regel betragsmäßig kleiner als die der Grundswingung und müssen entsprechend über die Luftspaltflussdichte angepasst werden. In dieser Arbeit wird grundsätzlich ein  $k_f = 1$  verwendet, außer es ist anders gekennzeichnet.

Die Luftspaltflussdichte ist sowohl zeitlich als auch räumlich harmonisch verteilt. Die räumliche Verteilung der Welle ist durch die Ordnungszahl der Oberwelle  $\nu$  bestimmt. Eine räumlich nicht-harmonische Flussdichteverteilung kann durch Superposition mehrerer Oberwellen gebildet werden, sodass auch die gesamten Verluste aller Flussdichtewellen durch die Summe der Verluste der einzelnen Wellen abgebildet werden können. Auch für diesen Parameter wird in dieser Arbeit, wenn nicht anders gekennzeichnet,  $\nu = 1$  betrachtet, da das Verhalten der Maschine maßgeblich von der Grundwelle bestimmt ist und diese auch durch die (meist) größte Amplitude die größten Verluste zur Folge hat.

Der Parameter  $\hat{B}_L$  ist die Amplitude der Luftspaltflussdichte am Rand des Statorblechs. Aus diesem Wert wird die Zahnsitzenflussdichte für die Modellierung berechnet.

## 3.2 Vergleichsdaten

Um die Ergebnisse der Modelle verifizieren zu können, werden reale ASM herangezogen, für die Ergebnisse aus FE-Simulationen vorliegen. Die Maschinen haben unterschiedliche Bemessungsdaten (siehe Tabelle 3.1), um die Anwendbarkeit über einen großen Bereich der Bemessungsdaten bzw. auch Baugröße prüfen zu können. M1 bis M5 sind jeweils ASM mit einem Gehäuse und Tabelle 3.2 zeigt, welches Material für welches Gehäuse verwendet wird sowie auf welcher Temperatur sich das jeweilige Gehäuse befindet. Die Maschinen M1 bis M3 besitzen ein kreisrundes Gehäuse und weisen keine Kühllöcher auf. M4 besitzt einen rechteckigen Querschnitt und verfügt so wie M5 über axiale Kühllöcher, welche den effektiven Stator-Außendurchmesser reduzieren (Kühllöcher vermindern das für den magnetischen Fluss verfügbare Eisen im Joch). Die Vergleichsdaten sind Ergebnisse von FE-Simulationen (2D), welche in der Mitte des Blechpakets durchgeführt wurden (ähnlich zu Abbildung 1.1). Dabei wurde das Gehäuse ebenso modelliert und die dort auftretenden Wirbelstromverluste wurden ermittelt ([8]). Die Vergleichsdaten der Gehäuseverluste bei verschiedenen Betriebspunkten sind in Tabelle 3.3 angeführt.

**Tab. 3.1:** Bemessungsdaten der Maschinen, welche für die Verifizierung der Modelle verwendet werden [8]

Maschine	$P_N$ / kW	$U_N$ / V	$f_N$ / Hz	Polzahl $2p$
M1	173	500	85.0	6
M2	50	450	90.0	4
M3	100	728	110.0	4
M4	125	415	60.7	4
M5	445	354	28.0	6

**Tab. 3.2:** Temperaturen und Leitfähigkeiten der Maschinen [8]

Maschine	Gehäusematerial	$T_G$ / °C	$\sigma(T)$ / (MS/m)
M1	Baustahl	60	5.38
M2	Baustahl	59	5.40
M3	Baustahl	59	5.40
M4	Baustahl	59	5.40
M5	Gusseisen	70	4.00

**Tab. 3.3:** Gehäuseverluste aus FE-Simulationen der Vergleichsmaschinen bei verschiedenen Frequenzen und Luftspalt-Flussdichten [8]

Maschine	$f_1$ / Hz	$U$ / V	$\hat{B}_L$ / T	$P_{FE}$ / W
M1	75.0	402	0.80	36
		500	0.99	841
		592	1.16	6214
		646	1.25	17138
M2	20.0	98	0.91	43
		123	1.13	493
		142	1.27	1731
		160	1.36	4099
	76.0	307	0.76	9
		407	1.00	378
		465	1.13	1611
		529	1.26	5973
	90.0	450	0.93	137
	181.5	444	0.46	1
M3	63.0	431	1.07	605
	131.0	578	0.69	5
		863	1.03	614
		1021	1.20	4274
M4	62.0	281	0.64	4
		424	0.96	446
		528	1.17	4576
M5	22.1	202	0.96	26
		283	1.33	1933
		331	1.53	9751
	28.0	354	1.32	1366
	60.0	618	1.08	233
		740	1.29	2846
		838	1.44	11585
		917	1.55	31899
	179.9	739	0.43	4

## 4 Gehäuseverluste

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Lösung der Differentialgleichungen aus Kapitel 2 in kartesischer und zylindrischer Geometrie, sowie der Auswertung der Feldgleichungen und der Berechnung der Wirbelstromverluste im Gehäuse.

In dieser Arbeit wird eine zylindrische Struktur betrachtet, in der die Feldgrößen von einem z-gerichtetem magnetischen Vektorpotential beschrieben werden. Hierbei liegt ein ebenes magnetisches Feld vor, das unabhängig von der z-Koordinate und orthogonal zur z-Achse ( $xy$ -Ebene in kartesischen,  $r\varphi$ -Ebene in zylindrischen Koordinaten) ist. Dieser Umstand bringt mehrere Vereinfachungen mit sich. Unter anderem ist, wie bereits in Abschnitt 2.2 erwähnt, für die Projektion  $A_z$  nur der skalare Laplace-Operator im zugrundeliegenden Koordinatensystem maßgebend und die Flussdichte lässt sich sowohl in kartesischen als auch in zylindrischen Koordinaten durch Gleichung 4.1 bestimmen.

$$\vec{B} = \nabla \times (A_z \vec{e}_z) = -\vec{e}_z \times \nabla A_z \quad (4.1)$$

Außerdem ist die lokale Dichte der Joule-Verluste  $p_W$  ([10]) in leitfähigen Bereichen nur durch die z-Komponente der Stromdichte bestimmt – somit gilt Gleichung 4.2, ebenfalls sowohl für kartesische als auch für zylindrische Koordinaten.

$$p_W(t) = \frac{\vec{J}(t) \cdot \vec{J}(t)}{\sigma} = \frac{J_z(t)^2}{\sigma} \quad (4.2)$$

Für die Auswertungen in dieser Arbeit sind lediglich die zeitlichen Mittelwerte, nicht die Augenblickswerte von Interesse. Deshalb wird an dieser Stelle auf den Zusammenhang zwischen dem zeitlichen Mittelwert des Quadrats und dem Betrag des komplexen Zeigers einer harmonischen Größe (siehe Gleichung 4.3) mit Gleichung 4.4 hingewiesen ([11]). Der Faktor 1/2 ist der Verwendung von Amplitudenwerten geschuldet. Würden stattdessen Effektivwerte verwendet werden, wäre dieser Faktor gleich 1.

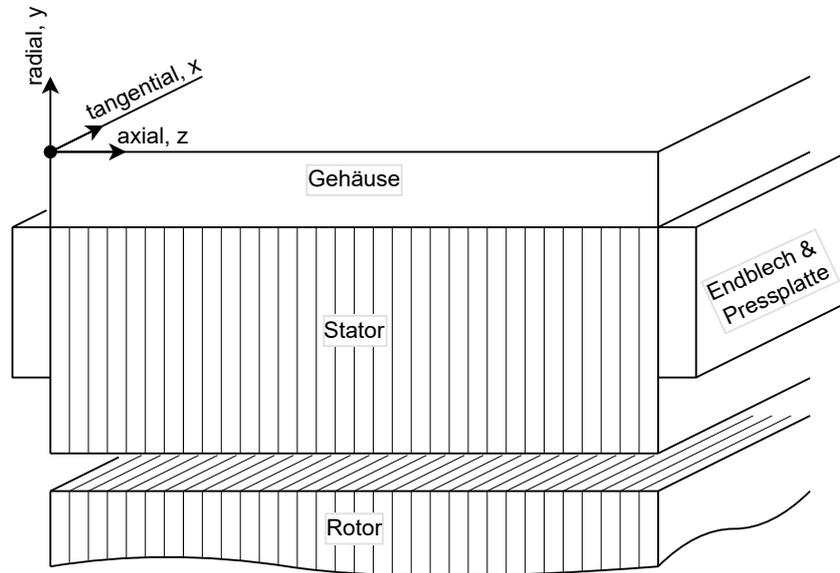
$$J_z(t) = \hat{J}_z \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}\{J_z\} = \operatorname{Re}\{\underline{J}_z e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\hat{J}_z e^{j\alpha} e^{j\omega t}\} \quad (4.3)$$

$$\implies \overline{J_z(t)^2} = \frac{1}{2} \underline{J}_z^* \underline{J}_z \quad (4.4)$$

Somit kann hier der zeitliche Mittelwert der lokalen Dichte der Wirbelstromverluste  $\overline{p_W}$  mithilfe von Gleichung 2.7 und Gleichung 2.16 als Gleichung 4.5 dargestellt werden ([10]).

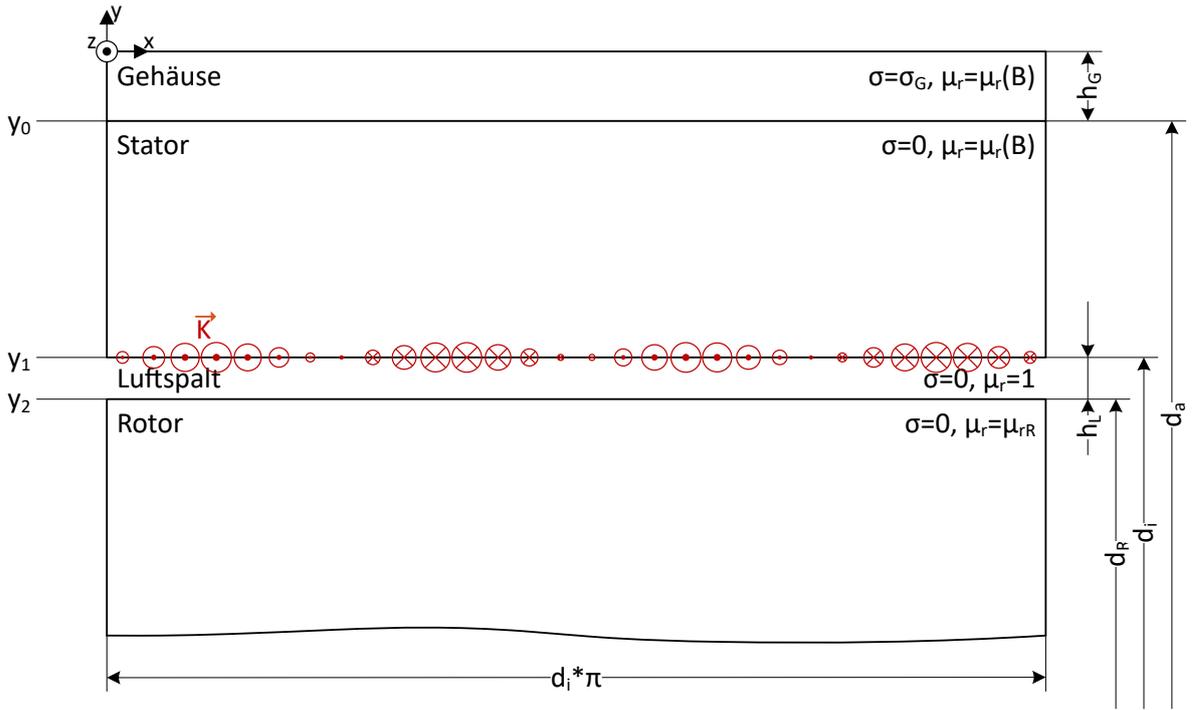
$$\overline{p_W} = \frac{J_z^* J_z}{2\sigma} = \frac{(-j\omega\sigma A_z^*)(j\omega\sigma A_z)}{2\sigma} = \frac{\sigma\omega^2}{2} A_z^* A_z \quad (4.5)$$

## 4.1 Kartesische Geometrie



**Abb. 4.1:** Schematische Darstellung des Aufbaus im kartesischen Modell

Zur Vereinfachung der Problemstellung wird die Maschine abgerollt wie in Abbildung 4.1 betrachtet. Obwohl sich aufgrund der unterschiedlichen Durchmesser unterschiedliche tangentielle Längen ergeben, werden alle tangentialen Längen für die Modellierung der Felder auf  $d_i\pi$  gestreckt/gestaucht. Außerdem werden die Feldgrößen tangential zyklisch fortgeführt, d.h. die Feldgrößen an einem Ende des Aufbaus ( $x = d_i\pi \hat{=} \alpha_m = 2\pi$ ) werden am anderen Ende ( $x_{Ende} = 0$  m) fortgesetzt (Umfangsperiodizität). Der Aufbau besteht aus vier radialen Schichten – Gehäuse, Stator, Luftspalt und Rotor – und jede Schicht wird durch geometrische Parameter (radiale Höhe, Durchmesser/tangentiale Länge, axiale Länge, Polpaarzahl) sowie Materialparameter (elektrische Leitfähigkeit, Permeabilitätszahl) beschrieben. Der Rotor wird unendlich ausgedehnt in negativer y-Richtung modelliert, um später die Bestimmung der Koeffizienten zu vereinfachen. Außerdem werden Randeffekte an  $z = 0$  m und  $z = z_{Ende}$  vernachlässigt, weswegen die Feldgrößen unabhängig von der z-Koordinate sind. Die Parametrisierung des kartesischen Modells ist in Abbildung 4.2 ersichtlich, in der beispielhaft eine 4-polige Maschine dargestellt ist. Hierbei ist anzumerken, dass die Permeabilitätszahl des Rotors für das Modell eine untergeordnete Rolle spielt (und deshalb auf einen konstanten Wert von z.B. 300 gesetzt werden kann), da sich zeigen wird, dass die Koeffizienten von Stator- und Gehäusebereich auch ohne Luftspalt oder Rotor bestimmt werden können – die Feldsituation und die Wirbelströme im Gehäuse sind also unabhängig von der gewählten Rotorpermeabilität. Aus Zwecken der Visualisierung und Vollständigkeit wird dennoch nicht auf die Modellierung von Luftspalt oder Rotor verzichtet.



**Abb. 4.2:** Geometrie des kartesischen Modells mit Flächenstrom  $K_z$  (rot) einer 4-poligen Maschine zum Zeitpunkt  $t = \pi/(2\omega)$

Die Flächenstromdichte in Abbildung 4.2 ist der Ausgangspunkt der magnetischen Erregung. Es wird angenommen, dass  $\vec{K} = K_z \vec{e}_z$  sowohl räumlich als auch zeitlich sinusförmig ist, außerdem umfangsperiodisch ist und dementsprechend mit Gleichung 4.6 beschrieben werden kann. Durch Verwendung der Gleichungen 4.7 bis 4.10 kann die Flächenstromdichte mit dem komplexen Augenblickswert von Gleichung 4.11 beschrieben werden.

$$K_z(t) = \text{Re} \left\{ \hat{K}_z \exp \left( j \left( k_f 2\pi f_1 t - \nu \frac{\pi}{\tau_P} x \right) \right) \right\} \quad (4.6)$$

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \quad (4.7)$$

$$\omega = k_f \omega_1 = k_f 2\pi f_1 \quad (4.8)$$

$$a = \nu \frac{\pi}{\tau_P} \quad (4.9)$$

$$\tau_P = \frac{d_i \pi}{2p} \quad (4.10)$$

$$K_z = \hat{K}_z e^{j(\omega t - ax)} \quad (4.11)$$

Die Flächenstromdichte ist, wie in den vereinfachenden Annahmen aus Abschnitt 2.1 festgelegt, unabhängig von der z-Koordinate und erzeugt x- und y-gerichtete magnetische Flussdichten, während die z-gerichtete Flussdichte stets null ist bzw. das magnetische

Vektorpotential lediglich eine konstante, z-gerichtete Komponente (siehe Gleichung 2.12) besitzt (ebenes Feldproblem).

In Abschnitt 2.2 wurde Gleichung 2.19a allgemein hergeleitet. Der Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten lautet

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.12)$$

und führt zu Gleichung 4.13.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z &= j\omega\mu\sigma A_z \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_z &= j\omega\mu\sigma A_z \end{aligned} \quad (4.13)$$

Es wird angenommen, dass sich  $A_z$  als Produkt von Funktionen mit jeweils nur einer abhängigen Variable darstellen lässt (Separationsansatz), also  $A_z = \underline{A}_{zx}(x)\underline{A}_{zy}(y)e^{j\omega t}$ . Dadurch lässt sich Gleichung 4.13 als Gleichung 4.14 darstellen, welche für alle Werte von  $x$  und  $y$  gilt. Daraus folgt, dass die Verhältnisse der zweiten Ableitungen zu den ursprünglichen Funktionen konstant sind.

$$\begin{aligned} \underline{A}_{zy} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{A}_{zx} + \underline{A}_{zx} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \underline{A}_{zy} &= j\omega\mu\sigma \underline{A}_{zx} \underline{A}_{zy} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\underline{A}_{zx}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{A}_{zx} + \frac{1}{\underline{A}_{zy}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \underline{A}_{zy} &= j\omega\mu\sigma \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dies wird durch die Exponential- und Hyperbelfunktionen erfüllt, weswegen der Ansatz für das magnetische Vektorpotential mit Gleichung 4.15 gewählt wird.  $C$  und  $D$  sind Koeffizienten, die über die Randbedingungen zu bestimmen sind.

$$A_z = (C \sinh(ky) + D \cosh(ky)) e^{j(\omega t - ax)} \quad (4.15)$$

Wird der Ansatz für das magnetische Vektorpotential nun in Gleichung 4.13 eingesetzt, ergibt sich Gleichung 4.17, mit der ein Ausdruck für die komplexe Größe  $k^2$  gefunden werden kann. Dabei kann auch die Eindringtiefe  $\delta$  (siehe Gleichung 4.16) verwendet werden, um den Zusammenhang zwischen  $k$  und  $\delta$  hervorzuheben.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (4.16)$$

$$j\omega\mu\sigma A_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_z = j^2 a^2 A_z + k^2 A_z = (k^2 - a^2) A_z \quad (4.17)$$

$$\implies k^2 = a^2 + j\omega\mu\sigma = a^2 + j\frac{2}{\delta^2} \quad (4.18)$$

In den leitenden Bereichen ist der Koeffizient  $k$  also eine komplexe Größe (bestimmbar durch eine komplexe Wurzel), die maßgeblich von der Eindringtiefe bestimmt ist. In allen nicht-leitenden Bereichen ist  $k$  reell, nämlich  $k = a$ . Gleichungen 4.19a bis 4.19d geben nun die magnetischen Vektorpotentiale für Gehäuse, Stator, Luftspalt und Rotor an.

$$A_{z,G} = \left( C_G \sinh(k_G y) + D_G \cosh(k_G y) \right) e^{j(\omega t - ax)} \quad (4.19a)$$

$$A_{z,S} = \left( C_S \sinh(a(y - y_0)) + D_S \cosh(a(y - y_0)) \right) e^{j(\omega t - ax)} \quad (4.19b)$$

$$A_{z,L} = \left( C_L \sinh(a(y - y_1)) + D_L \cosh(a(y - y_1)) \right) e^{j(\omega t - ax)} \quad (4.19c)$$

$$A_{z,R} = \left( C_R e^{a(y - y_2)} + D_R e^{-a(y - y_2)} \right) e^{j(\omega t - ax)} \quad (4.19d)$$

Die  $y$ -Offsets (siehe Abbildung 4.2 sowie Gleichungen 4.20a bis 4.20c) dienen primär zur Vereinfachung der Gleichungssysteme aber auch zur Vermeidung numerischer Probleme: Die Hyperbel- und Exponentialfunktionen liefern bei großen Argumenten sehr schnell Ergebnisse, die den maximal darstellbaren Zahlenraum von z.B. einem double-Datentyp überschreiten.

$$y_0 = -h_G \quad (4.20a)$$

$$y_1 = y_0 - \frac{d_a - d_i}{2} \quad (4.20b)$$

$$y_2 = y_1 - h_L \quad (4.20c)$$

Für den Rotor wurde mit Gleichung 4.19d ein anderer Ansatz gewählt, da durch die Forderung  $\lim_{y \rightarrow -\infty} A_{z,R} = 0$  V s/m der Koeffizient  $D_R$  zu null wird und somit das Gleichungssystem zur Bestimmung der restlichen Koeffizienten vereinfacht wird. Die Herleitung von  $k$  sowie die Erfüllung aller Gleichungen ist hierbei durch die Verwendung der Exponentialfunktion äquivalent zu der Verwendung der Hyperbelfunktionen gegeben.

Die Bestimmung der jeweiligen Koeffizienten  $C$  und  $D$  erfolgt durch das Festlegen von Randbedingungen und Lösen der resultierenden Gleichungssysteme. Dies wird in den jeweiligen Unterkapiteln durchgeführt. Dabei sind vor allem Flussdichten relevant, weswegen hier noch Gleichung 4.21 angeführt sei, welche zeigt, wie die Flussdichte in kartesischen Koordinaten aus dem magnetischen Vektorpotential, das hier nur eine  $z$ -Komponente besitzt, berechnet wird.

$$\vec{B} = \nabla \times (A_z \vec{e}_z) = -\vec{e}_z \times \nabla A_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} A_z \\ -\frac{\partial}{\partial x} A_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

## 4.1.1 Vorgabe einer Luftspaltflussdichte

In diesem Ansatz wird von einer Luftspaltflussdichte, welche zu einer Zahnsitzenflussdichte umgerechnet wird, ausgegangen und die Koeffizienten gemäß der Sprungbedingungen bestimmt. Die Flächenstromdichte  $K_z$  ist zwar für den Sprung der tangentialen Feldstärke zwischen Luftspalt und Stator maßgeblich, jedoch für die Bestimmung aller Koeffizienten nicht notwendig. Diese theoretische Ersatz-Flächenstromdichte müsste außerdem erst bestimmt werden, während die Luftspaltflussdichte gemessen werden kann. An dieser Stelle sei erneut angemerkt, dass zwar keine Nuten oder Kühllöcher im Aufbau der Schichten selbst berücksichtigt werden, die Luftspaltflussdichte allerdings auf die Zahnsitzenflussdichte umgerechnet wird. Somit wird auch in den Darstellungen der Flussdichten vor allem im Bereich des Luftspalts ein zu hoher magnetischer Fluss visualisiert. Im Gehäuse und im Joch des Stators, also in den Bereichen, bei denen die korrekte Darstellung für die Auswertung wichtig ist, ist dieser Fluss allerdings näher an der Realität.

Die Randbedingungen für diesen Ansatz lauten:

- Für die magnetische Flussdichte im Rotor gilt  $\lim_{y \rightarrow -\infty} |B_R| = 0 \text{ T}$ . Dies ist gleichbedeutend mit  $\lim_{y \rightarrow -\infty} A_{z,R} = 0 \text{ V s/m}$ .
- Die radiale Komponente der Flussdichte am Außenrand des Gehäuses ist null, d.h.  $B_{y,G}(y = 0 \text{ m}) = 0 \text{ T}$ .
- Der Spitzenwert der radialen Flussdichte am inneren Rand des Stators ist gegeben durch  $\hat{B}_L f_{BZ/BL} = B_Z$ .
- Die elektrodynamischen Grenzbedingungen an den Grenzflächen von einer Schicht zur nächsten werden eingehalten.

Hieraus können acht Gleichungen für die Bestimmung der acht Koeffizienten gefunden werden. Diese lauten:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} A_{z,R} = 0 \frac{\text{Vs}}{\text{m}} \quad (4.22a)$$

$$B_{y,G}(y = 0 \text{ m}) = 0 \text{ T} \quad (4.22b)$$

$$B_{y,S} \left( x = \frac{1}{a} \frac{\pi}{2}, y = y_1, t = 0 \text{ s} \right) = B_Z = \hat{B}_L f_{BZ/BL} \quad (4.22c)$$

$$B_{y,G}(y = y_0) = B_{y,S}(y = y_0) \quad (4.22d)$$

$$H_{x,G}(y = y_0) = H_{x,S}(y = y_0) \quad (4.22e)$$

$$B_{y,S}(y = y_1) = B_{y,L}(y = y_1) \quad (4.22f)$$

$$B_{y,L}(y = y_2) = B_{y,R}(y = y_2) \quad (4.22g)$$

$$H_{x,L}(y = y_2) = H_{x,R}(y = y_2) \quad (4.22h)$$

Diese Gleichungen liefern Ausdrücke für die Koeffizienten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden zuvor in den Gleichungen 4.23 bis 4.27 Hilfsvariablen definiert, die die resultierenden Terme kürzer machen. Mit den Hilfsvariablen ergeben sich die Ausdrücke der Koeffizienten wie in Gleichungen 4.28a bis 4.28h angeführt.

$$\chi_{s10} = \sinh(a(y_1 - y_0)) \quad (4.23)$$

$$\chi_{c10} = \cosh(a(y_1 - y_0)) \quad (4.24)$$

$$\chi_{s21} = \sinh(a(y_2 - y_1)) \quad (4.25)$$

$$\chi_{c21} = \cosh(a(y_2 - y_1)) \quad (4.26)$$

$$\chi_{\mu ka} = \frac{\mu_{rS} k_G}{\mu_{rG} a} \quad (4.27)$$

$$D_R = 0 \frac{V_S}{m} \quad (4.28a)$$

$$D_G = 0 \frac{V_S}{m} \quad (4.28b)$$

$$C_G = \hat{B}_L \frac{f_{BZ/BL}}{a(\chi_{\mu ka} \cosh(k_G y_0) \chi_{s10} + \sinh(k_G y_0) \chi_{c10})} \quad (4.28c)$$

$$C_S = C_G \cosh(k_G y_0) \chi_{\mu ka} \quad (4.28d)$$

$$D_S = C_G \sinh(k_G y_0) \quad (4.28e)$$

$$D_L = C_S \chi_{s10} + D_S \chi_{c10} \quad (4.28f)$$

$$C_L = D_L \frac{\chi_{s21} \mu_{rR} - \chi_{c21}}{\chi_{s21} - \chi_{c21} \mu_{rR}} \quad (4.28g)$$

$$C_R = C_L \chi_{s21} + D_L \chi_{c21} \quad (4.28h)$$

#### 4.1.1.1 Bestimmung der Permeabilitätszahlen

Für die Auswertung dieser Koeffizienten ist zuvor noch die Bestimmung der relativen Permeabilitäten  $\mu_{rG}$  und  $\mu_{rS}$  notwendig. Diese sind, wie in den vereinfachenden Annahmen festgelegt, in jeder Schicht über die gesamte Höhe konstant, obwohl die Flussdichte variiert. Um die Grenzbedingungen am Übergang von Stator zu Gehäuse so korrekt wie möglich abzubilden, werden die Permeabilitäten an  $y = y_0$  bestimmt, indem die Magnetisierungskennlinien aus Abbildung 3.2 bzw. die daraus resultierenden Kennlinien  $\mu_{r1}(B)$  von Elektroblech und  $\mu_{r2}(B)$  von Baustahl ausgewertet werden. Dies muss allerdings iterativ geschehen, da die Bestimmung von  $\mu_{rS}$  von der Flussdichte am Jochende des Stators abhängt, diese Flussdichte jedoch von den Koeffizienten  $C_S$  und  $D_S$  abhängt, welche selbst wiederum von (unter anderem)  $\mu_{rS}$  abhängen. Gleiches gilt für  $\mu_{rG}$ . Es ist allerdings anzumerken, dass die Permeabilitätszahlen während der Bestimmung der Koeffizienten und Auswertung der Felder weiterhin konstant sind.

Für die iterative Bestimmung werden die relativen Permeabilitäten auf  $\mu_{rS} = \mu_{r1}(B_Z)$  und  $\mu_{rG} = \mu_{r2}(B_Z)$  initialisiert und  $\delta$ ,  $k_G$ ,  $C_G$ ,  $C_S$  und  $D_S$  berechnet. In einer Schleife werden die x- und y-gerichteten Flussdichten auf radialer Höhe  $y_0$  an mehreren tangentialen Stellen ( $x \in [0, \pi/(2a)]$ ) sowie  $t = 0$  s berechnet und jeweils die Maxima von  $|\vec{B}|$

bestimmt (die nicht notwendigerweise an  $x = 0$  m oder ausschließlich tangential ausgerichtet sein müssen). Diese Maxima werden für die Auswertung der Magnetisierungskennlinie bzw. der Bestimmung der Permeabilitätszahlen verwendet, jedoch empfiehlt es sich, die neuen Werte nur abgeschwächt, das bedeutet nach der Formel

$$\mu_{r,neu} = \frac{(v - 1)\mu_{r,alt} + \mu_r(B = |\vec{B}|_{max})}{v} \quad (4.29)$$

mit dem Abschwächungsfaktor  $v \in \mathbb{R}^+$  (ein Wert von 10 erwies sich als adäquat), zu berücksichtigen, um eine verlässliche Konvergenz (zum Preis von erhöhten Iterationen) zu ermöglichen. Nach der Aktualisierung der  $\mu_r$  werden  $\delta$ ,  $k_G$ ,  $C_G$ ,  $C_S$  und  $D_S$  am Schleifenende erneut berechnet. Diese Schleife wird so lange durchlaufen, bis entweder eine Maximalanzahl an Iterationen erreicht wurde oder die Änderung der Permeabilitätszahlen kleiner als 0.01 % ist.

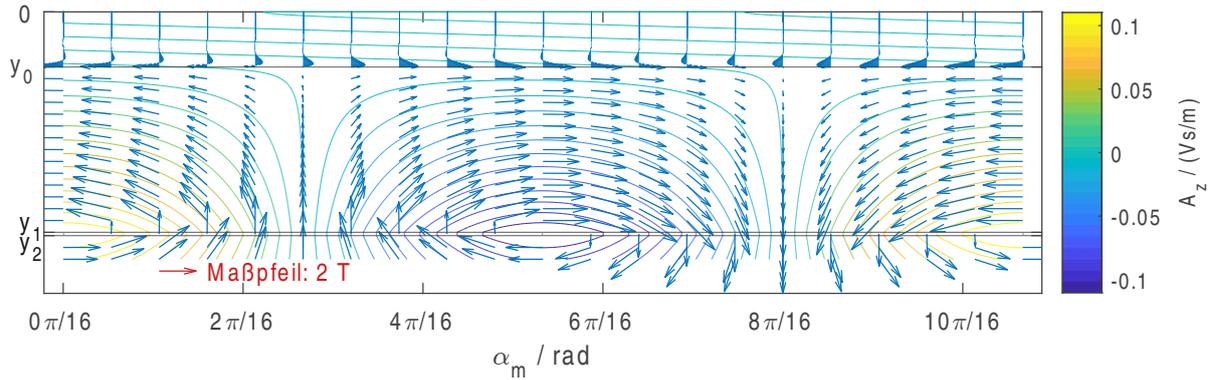
#### 4.1.1.2 Auswertung der Flussdichten

Nachdem die relativen Permeabilitäten konvergiert sind und die Koeffizienten bestimmt wurden, kann nun die Feldlösung untersucht werden. Dies wird am Beispiel der Maschine M1 bei  $f_1 = 75$  Hz und  $U = 500$  V untersucht: Die Flussdichtevektoren und die Feldlinien in Gehäuse, Stator, Luftspalt und dem oberen Bereich des Rotors werden in Abbildung 4.3 dargestellt. Dabei wurde absichtlich eine unterschiedlich dichte Darstellung der Vektoren gewählt, um die Vektoren in Stator, Luftspalt und Rotor mit so wenig Überschneidung wie möglich darzustellen und gleichzeitig im Gehäuse so viel Information über den radialen Verlauf der Vektoren abzubilden, wie möglich. Dies ist notwendig, da die Flussdichte im leitfähigen Gehäuse in diesem Betriebspunkt nur in einem schmalen Band nahe dem Stator signifikant von null verschieden ist und eine Darstellung mit gleicher Dichte wie im Stator wenig Einblick in die Feldsituation im Gehäuse liefert. Um diese Vektoren und deren Verlauf im Gehäuse besser untersuchen zu können, ist in Abbildung 4.4 ein Ausschnitt von Abbildung 4.3 im Bereich des Gehäuses ohne Feldlinien dargestellt.

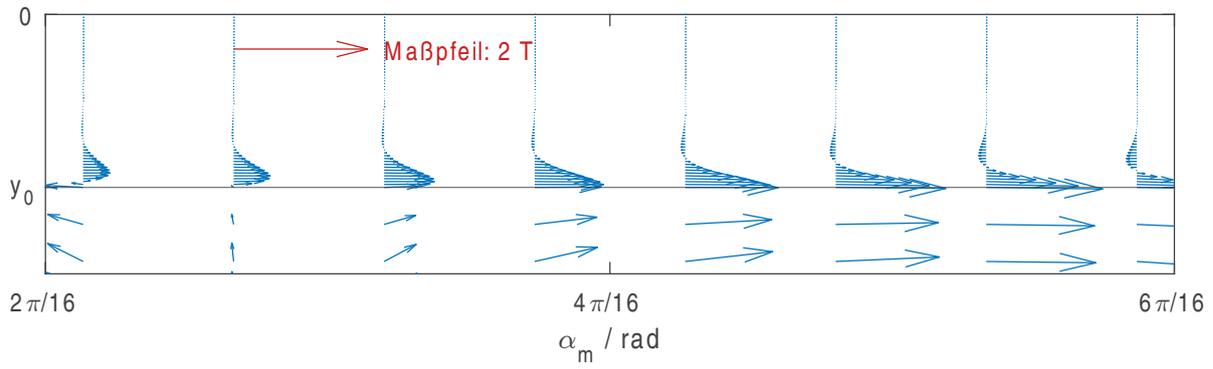
Für die Darstellung wird der mechanische Winkel  $\alpha_m$  verwendet, um die Ergebnisse unterschiedlicher Maschinen vergleichbarer zu machen. Dieser mechanische Winkel errechnet sich nach Gleichung 4.30, bei der der x-abhängige Term der Exponentialfunktion in eine Form gebracht wird, die auch später beim zylindrischen Modell auftritt.

$$ax \stackrel{!}{=} \nu p \alpha_m \implies \alpha_m = \frac{2\pi}{d_i \pi} x \quad (4.30)$$

Es lässt sich erkennen, dass die tangentielle Flussdichte größer als die radiale Flussdichte ist und am Übergang von Stator zum Gehäuse die Flussdichte beinahe vollständig (jedoch nicht ausschließlich) tangential ausgerichtet ist. Aufgrund des Terms  $e^{j(\omega t - ax)}$  ändert sich das Bild der Vektoren periodisch und dabei „wandern“ die Flussdichtevektoren im Stator nach rechts bzw. hin zu größeren Winkeln, wenn ein Zeitpunkt  $t > 0$  s untersucht wird. Gleichzeitig kann an einer festen tangentialen Stelle im Gehäuse beobachtet



**Abb. 4.3:** Flussdichtevektoren und Feldlinien von M1 ( $U = U_N$ ,  $f_1 = 75$  Hz,  $t = 0$  s) über ein Polpaar bei Vorgabe einer Luftspaltflussdichte

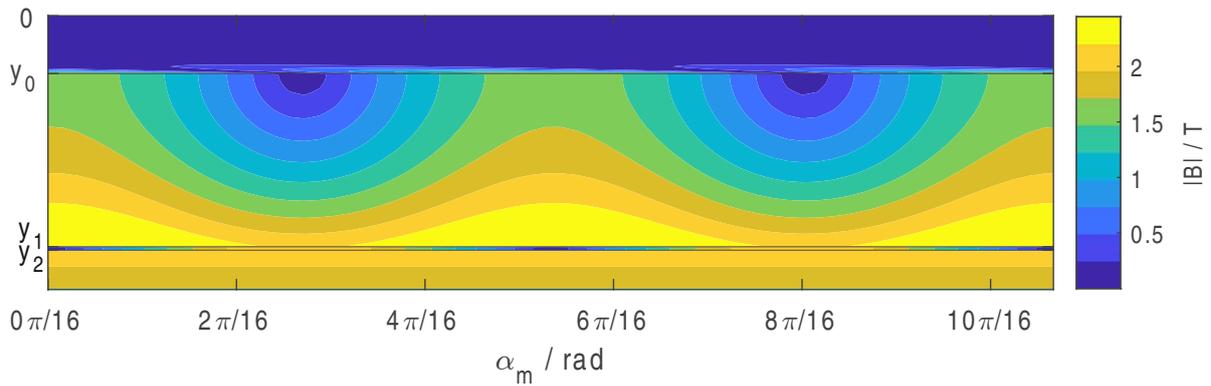


**Abb. 4.4:** Ausschnitt der Flussdichtevektoren im Gehäuse von M1 ( $U = U_N$ ,  $f_1 = 75$  Hz,  $t = 0$  s) bei Vorgabe einer Luftspaltflussdichte

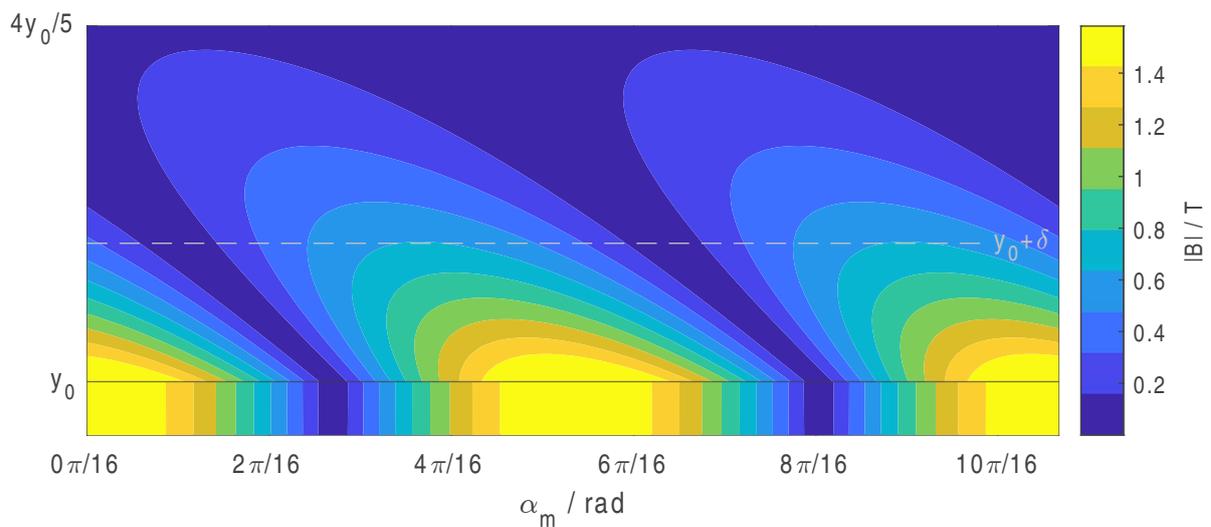
werden, dass die Flussdichtevektoren, welche zu einem Zeitpunkt  $t_1$  an  $y_{t1} = y_0$  anliegen, zu einem späteren Zeitpunkt  $t_2 > t_1$  weiter oben, d.h.  $y_{t2} > y_{t1}$ , in abgeschwächter Form existieren. Die Flussdichte am Statorrand dringt also mit der Zeit immer weiter in das Gehäuse ein, wird aber, je nach Eindringtiefe, abgeschwächt und unter Umständen zu null. Dies entspricht einem Diffusionsvorgang der harmonischen Flussdichte in das Gehäuse. Hierbei sind die Parameter der Eindringtiefe  $\mu$ ,  $\sigma$  und  $\omega$  maßgeblich daran beteiligt, wie weit das magnetische Feld in das Gehäuse eindringt, aber auch, wie schnell es sich im Gehäuse ausbreitet (bzw. wie schnell der Diffusionsvorgang abläuft). Je größer die Eindringtiefe, desto weiter und schneller dringt das magnetische Feld in das Gehäuse ein.

Die Feldlinien in Abbildung 4.3 sind die Isolinien des magnetischen Vektorpotentials  $A_z(t)$ . Die Tangente in einem Punkt einer Feldlinie gibt die Richtung der dort befindlichen Flussdichte an. Die Feldlinien mit dem Wert  $0$  Vs/m, welche im Gehäuse schräg nach oben verlaufen, markieren jene Stellen an einer festen y-Koordinate, an denen die radiale Flussdichte jeweils ein Extremum aufweist. Dies lässt sich mit Gleichung 4.21 und dem tangential sinusförmigen Verlauf von  $A_z$  (siehe Gleichung 4.19a) erklären, sodass Gleichung 4.31 folgt.

$$B_y = -\frac{\partial}{\partial x} A_z = jaA_z \quad (4.31)$$



**Abb. 4.5:** Betrag der Flussdichte von M1 ( $U = U_N$ ,  $f_1 = 75$  Hz,  $t = 0$  s) über ein Polpaar bei Vorgabe einer Luftspaltflussdichte

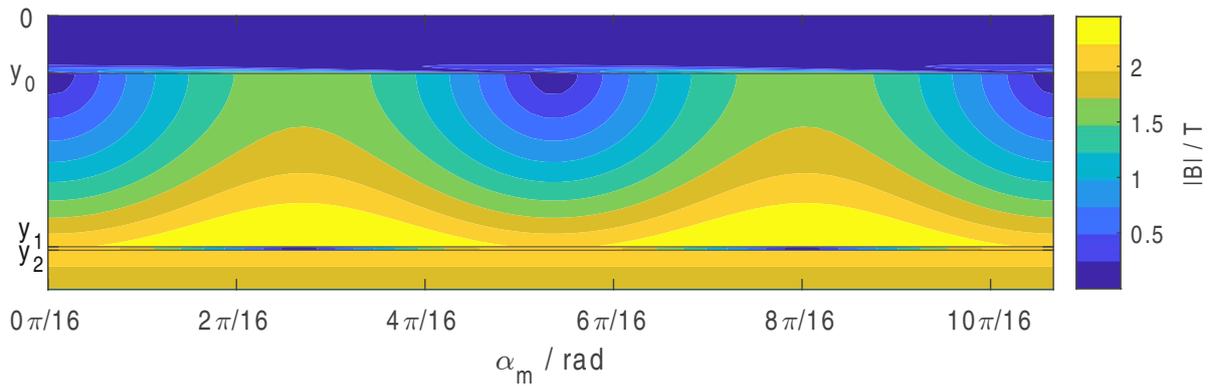


**Abb. 4.6:** Betrag der Flussdichte im Gehäuse von M1 ( $U = U_N$ ,  $f_1 = 75$  Hz,  $t = 0$  s) über ein Polpaar bei Vorgabe einer Luftspaltflussdichte

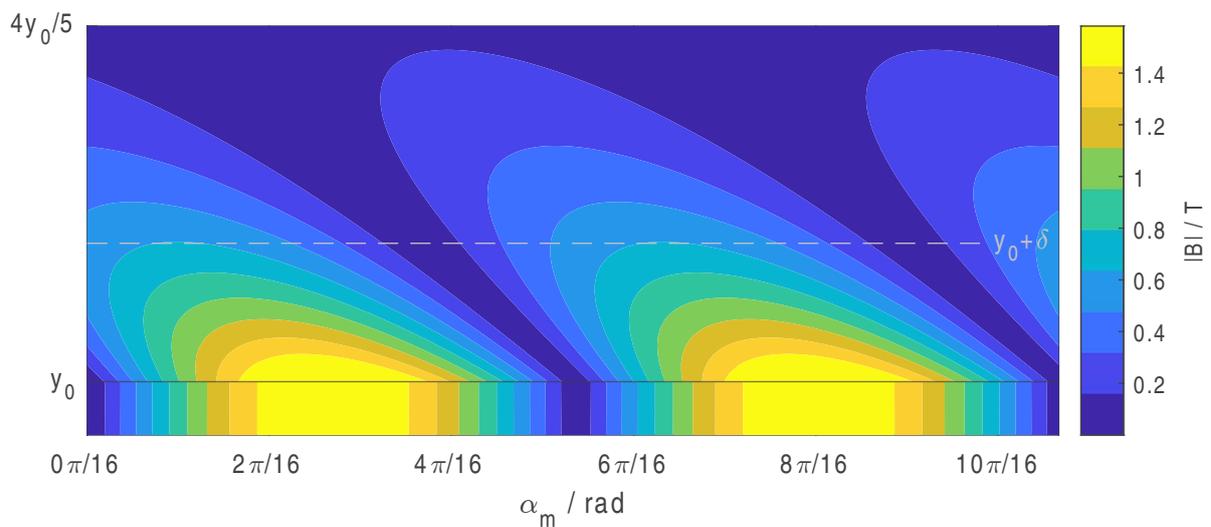
Dies bedeutet, dass der Augenblickswert  $B_y(x, y = v, t)$  ein Extremum aufweist, wenn  $A_z(x, y = v, t)$  im Nulldurchgang ist – Dabei gilt  $v \in \mathbb{R}$ .

Die Schräge der Feldlinien mit dem Wert  $0 \text{ V s/m}$  im Gehäuse ist durch die Eindringtiefe bzw. die harmonische Luftspaltflussdichte bedingt. Wird die Grundschwingungsfrequenz  $f_1$  oder der Leitwert des Gehäuses  $\sigma_G$  zu null (bzw. wird die Eindringtiefe unendlich groß), so sind diese Feldlinien senkrecht ausgerichtet – mit Ausnahme des äußeren Gehäuseandes, da hier die radiale Flussdichte zu null angenommen wurde.

Zwar gibt Abbildung 4.3 Aufschluss über die Länge und v.A. Richtung der Flussdichtevektoren, diese Informationen sind allerdings nur punktuell dargestellt. Deshalb ist in Abbildung 4.5 der Betrag der Flussdichten für den gesamten Bereich dargestellt – gleiches gilt für Abbildung 4.6. Aus den horizontalen Isolinien im Rotor lässt sich erkennen, dass durch den vereinfachten Ansatz (mit den Exponentialfunktionen statt den Hyperbelfunktionen) und den Randbedingungen die x- und y-Komponente der Flussdichte (an einer festen y-Koordinate) gleich groß sind, wenn auch um  $j$  bzw.  $90^\circ$  phasenverschoben.



**Abb. 4.7:** Betrag der Flussdichte von M1 ( $U = U_N$ ,  $f_1 = 75$  Hz,  $t = \pi/(2\omega)$ ) über ein Polpaar bei Vorgabe einer Luftspaltflussdichte

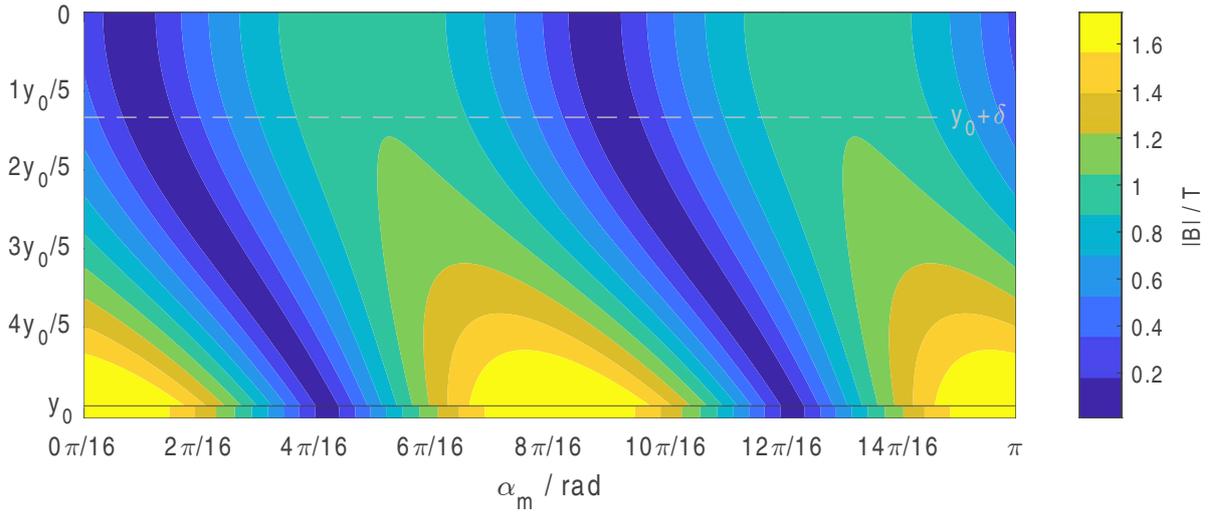


**Abb. 4.8:** Betrag der Flussdichte im Gehäuse von M1 ( $U = U_N$ ,  $f_1 = 75$  Hz,  $t = \pi/(2\omega)$ ) über ein Polpaar bei Vorgabe einer Luftspaltflussdichte

Die Spitze eines Flussdichtevektors an einem festen Punkt im Rotor zeichnet also einen Kreis, während die Spitze eines Flussdichtevektors im Stator eine Ellipse zeichnet.

Des Weiteren sind in Abbildung 4.7 und Abbildung 4.8 die gleichen Visualisierungen wie in Abbildung 4.5 und Abbildung 4.6 dargestellt, allerdings um  $\pi/(2\omega)$  später, um die zeitliche Abhängigkeit erkennbar zu machen.

Aus Abbildung 4.6 lässt sich die Bedeutung der Eindringtiefe erkennen: Sie ist ein Maß für das radial abklingende Feld. Der maximale Betrag der Flussdichte bei der strichlierten Linie, die  $\delta$  über dem Gehäusebeginn liegt, weist nur noch 36.8% des maximalen Betrags an  $y = y_0$  (Vgl.:  $e^{-1} \approx 0.3679$ ) auf. Es sei angemerkt, dass die Maxima der Flussdichte im Gehäuse nicht an der selben x-Koordinate sind, da sich der magnetische Fluss durch den Diffusionsvorgang nicht unendlich schnell im leitfähigen Gehäuse ausbreitet. Weiters ist erkennbar, dass in diesem Betriebspunkt nicht das gesamte Gehäuse einen signifikanten Fluss führt, sondern lediglich ein (dem Stator zugewandter) Streifen. Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 4.9 die Auswertung von M2 bei  $f_1 = 20$  Hz und  $U = 123$  V im Gehäuse



**Abb. 4.9:** Betrag der Flussdichte im Gehäuse von M2 ( $U = 123 \text{ V}$ ,  $f_1 = 20 \text{ Hz}$ ,  $t = 0 \text{ s}$ ) und über ein Polpaar bei Vorgabe einer Luftspaltflussdichte

über ein Polpaar. Dieser Betriebspunkt ist gekennzeichnet durch eine niedrige Frequenz und eine Luftspaltflussdichte von  $1.13 \text{ T}$  (gleiche Flussdichte wie bei  $U = U_N$  und  $f_1 = 76 \text{ Hz}$ ). Hier ist die Eindringtiefe etwa  $0.73h_G$  und die Flussdichte kann über die gesamte Gehäusehöhe als signifikant bezeichnet werden.

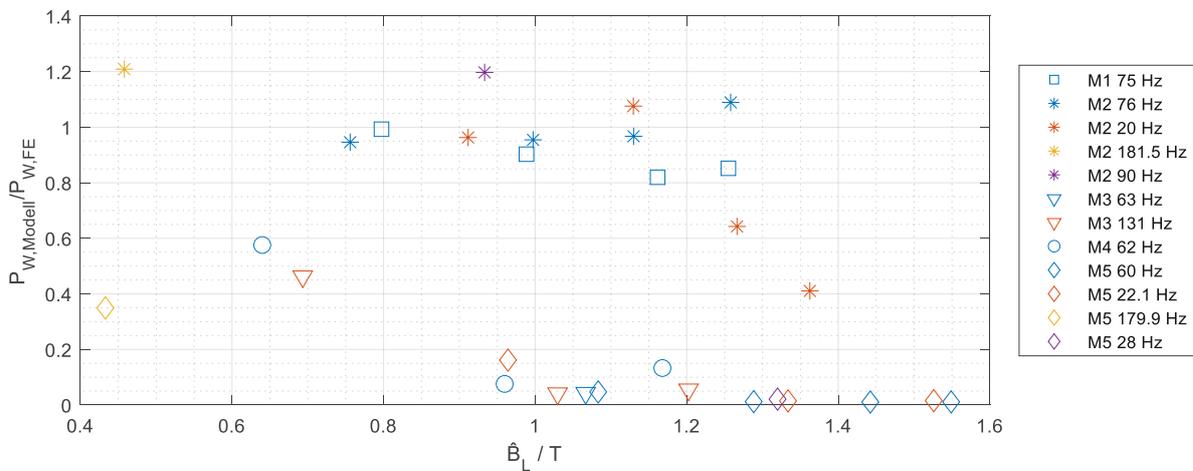
#### 4.1.1.3 Wirbelstromverluste

Da das magnetische Vektorpotential im Gehäuse lediglich eine  $z$ -Komponente aufweist und außerdem  $D_G = 0 \text{ Vs/m}$  ist, ergibt sich die lokale Verlustdichte (siehe Gleichung 4.5) im Gehäuse zu Gleichung 4.32. Für die gesamte im Gehäuse umgesetzte Wirbelstromleistung muss noch das Volumsintegral über das betrachtete Volumen bestimmt werden. Die Wirbelstrom-Verlustleistung im Gehäuse ist in Gleichung 4.33 ersichtlich, wobei hier, trotz der Streckung/Stauchung auf  $d_i\pi$  zur Modellierung der Felder, für die tangentialen Länge  $d_a\pi$  verwendet wurde, um die tatsächlichen Abmessungen des Gehäuses zu berücksichtigen. Zu beachten ist, dass  $y_0$  negativ ist (siehe Abbildung 4.2).

$$\begin{aligned}
 \overline{p_W} &= \frac{\sigma\omega^2}{2} \mathbf{A}_{z,G}^* \mathbf{A}_{z,G} = \\
 &= \frac{\sigma\omega^2}{2} \left( C_G^* \sinh(k_G^* y) e^{-j(-ax)} \right) \left( C_G \sinh(k_G y) e^{j(-ax)} \right) = \\
 &= \frac{\sigma\omega^2}{2} C_G^* C_G \sinh(k_G^* y) \sinh(k_G y) = \\
 &= \frac{\sigma\omega^2}{4} |C_G|^2 \left( \cosh(2y \operatorname{Re}\{k_G\}) - \cos(2y \operatorname{Im}\{k_G\}) \right) \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_W &= \int_{\nu} \overline{p_W} dV = \int_0^{l_{Fe}} \int_{y_0}^0 \int_0^{d_a \pi} \overline{p_W} dx dy dz = \\
&= \frac{\sigma \omega^2}{8} |C_G|^2 l_{Fe} d_a \pi \left( \frac{\sin(2 \operatorname{Im}\{k_G\} y_0)}{\operatorname{Im}\{k_G\}} - \frac{\sinh(2 \operatorname{Re}\{k_G\} y_0)}{\operatorname{Re}\{k_G\}} \right) \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Durch Anwendung dieses Modells und Auswertung der Wirbelstromverlustleistung kann nun mit den Daten aus Tabelle 3.3 verglichen werden. Es sei angemerkt, dass die Ergebnisse, wie in Abschnitt 3.1 bereits erwähnt, bezüglich der Grundwelle  $\nu = 1$  angeführt sind. In Abbildung 4.10 sind diese Ergebnisse bezogen auf die FE-Ergebnisse dargestellt.



**Abb. 4.10:** Gehäuseverluste des kartesischen Modells bei Vorgabe einer Luftspaltflussdichte bezogen auf die FE-Ergebnisse

Es ist ersichtlich, dass die Ergebnisse des Modells für M1 und M2 nahe an den Ergebnissen der FE-Simulationen liegen, das Modell jedoch bei allen anderen Maschinen zu kleine  $P_W$  liefert. Der Grund dafür ist, dass die Flussdichte am Statorrand bei M1 und M2 in etwa der Flussdichte aus der FE-Simulation entspricht, während das Modell bei M3 bis M5 kleinere Flussdichten am Statorrand als die FE-Simulation liefert. Über die Höhe des Stators sinkt der Betrag der Flussdichte im Modell also unter Umständen zu schnell ab.

Sowohl bei M1 als auch bei M2, bei denen die Ergebnisse des Modells nahe an den Ergebnissen der FE-Simulationen liegen, gilt laut Modell für die Flussdichten am Statorrand der Zusammenhang zur mittleren Flussdichte im Statorjoch  $B_{x,S,max}(y = y_0) \approx \overline{B}_J / 1.08 = \hat{B}_L f_{BZ} / B_L f_{\overline{B}_J} / 1.08$ . Dieser Zusammenhang wird deshalb in Abschnitt 4.1.2 als weitere Randbedingung für die Bestimmung der Koeffizienten vorgegeben.

Die Auswertung aller 30 Betriebspunkte in einer MATLAB Implementierung dauerte im Schnitt etwa 250 ms, sodass das Ziel der Berechnungsdauer von weniger als 10 ms pro Arbeitspunkt erfüllt ist.

## 4.1.2 Vorgabe einer Luftspalt- und einer Jochflussdichte

Wie in Abschnitt 4.1.1.3 angesprochen, wird hier ein neues Gleichungssystem für die Bestimmung der Koeffizienten aufgestellt, bei dem auch die maximale tangentielle Flussdichte am Statorrand vorgegeben wird. Dieser Wert wird auf Basis der (über die Jochhöhe) mittleren Jochflussdichte  $\overline{B}_J$  vorgegeben, die sich mit dem Faktor  $f_{\overline{B}_J/BZ}$  aus der Zahnsitzenflussdichte berechnen lässt (siehe Gleichung 3.3). Diese mittlere Jochflussdichte ist, wie auch die Visualisierung der Flussdichte-Vektoren in Abbildung 4.3 zeigt, größer als die Flussdichte am Statorrand. Ein Anpassungsfaktor  $f_J$ , der die mittlere Jochflussdichte reduziert, wird deshalb eingeführt und die maximale tangentielle Flussdichte am Jochende mit  $B_{x,S}(y = y_0) = \overline{B}_J/f_J$  vorgegeben. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.1.1.3 wird der Faktor zu

$$f_J = 1.08 \quad (4.34)$$

gewählt.

Da weiterhin lediglich acht Koeffizienten bestimmt werden müssen, nun aber eine neue Randbedingung hinzukommt, ist das Gleichungssystem überbestimmt. Es wird deshalb Gleichung 4.22d mit der Forderung von Gleichung 4.35d ersetzt, da die radiale Flussdichte am Übergang zwischen Stator und Gehäuse deutlich kleiner ist als die tangentielle Flussdichte und die Grenzbedingung  $H_{t,S} = H_{t,G}$  später (Bestimmung der Permeabilitätszahlen) verwendet wird, diese also zwingend erfüllt sein muss.

Das neue Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten lautet nun:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} A_{z,R} = 0 \frac{\text{Vs}}{\text{m}} \quad (4.35a)$$

$$B_{y,G}(y = 0 \text{ m}) = 0 \text{ T} \quad (4.35b)$$

$$B_{y,S}\left(x = \frac{1}{a} \frac{\pi}{2}, y = y_1, t = 0 \text{ s}\right) = B_Z = \hat{B}_L f_{BZ/BL} \quad (4.35c)$$

$$B_{x,S}(y = y_0, x = 0 \text{ m}, t = 0 \text{ s}) = -\frac{\overline{B}_J}{f_J} = -\hat{B}_L \frac{f_{\overline{B}_J/BZ} f_{BZ/BL}}{f_J} \quad (4.35d)$$

$$H_{x,G}(y = y_0) = H_{x,S}(y = y_0) \quad (4.35e)$$

$$B_{y,S}(y = y_1) = B_{y,L}(y = y_1) \quad (4.35f)$$

$$B_{y,L}(y = y_2) = B_{y,R}(y = y_2) \quad (4.35g)$$

$$H_{x,L}(y = y_2) = H_{x,R}(y = y_2) \quad (4.35h)$$

Dies führt zu den Koeffizienten in den Gleichungen 4.36a bis 4.36h.

$$D_R = 0 \frac{V_s}{m} \quad (4.36a)$$

$$D_G = 0 \frac{V_s}{m} \quad (4.36b)$$

$$C_S = -\hat{B}_L \frac{f_{\overline{BJ}/BZ} f_{BZ/BL}}{f_J a} \quad (4.36c)$$

$$D_S = \frac{\hat{B}_L \frac{f_{BZ/BL}}{a} - C_S \chi_{s10}}{\chi_{c10}} \quad (4.36d)$$

$$C_G = C_S \frac{1}{\chi_{\mu k a} \cosh(k_G y_0)} \quad (4.36e)$$

$$D_L = C_S \chi_{s10} + D_S \chi_{c10} \quad (4.36f)$$

$$C_L = D_L \frac{\chi_{s21} \mu_{rR} - \chi_{c21}}{\chi_{s21} - \chi_{c21} \mu_{rR}} \quad (4.36g)$$

$$C_R = C_L \chi_{s21} + D_L \chi_{c21} \quad (4.36h)$$

#### 4.1.2.1 Bestimmung der Permeabilitätszahlen

Es ist anzumerken, dass die Koeffizienten  $C_S$  und  $D_S$  nun unabhängig von  $\mu_{rS}$  und  $\mu_{rG}$  und außerdem reell sind. Daraus wiederum folgt, dass  $B_{y,S} = j c B_{x,S}$  ( $c$  ist hier lediglich ein Faktor) an  $y_0$  gilt bzw. das Maximum der tangentialen Flussdichte zu einem Zeitpunkt auftritt, in dem die radiale Flussdichte null ist. Außerdem gilt an  $y_0$  weiters, dass die tangentiale Flussdichte größer ist als die radiale. So kann der maximale Flussdichtebetrag am Jochende des Stators bzw. die Permeabilitätszahl  $\mu_{rS}$  direkt mit  $\overline{B}_J / f_J$  bestimmt werden.

Für die Bestimmung der Permeabilitätszahl des Gehäuses wird, ähnlich wie in Abschnitt 4.1.1, eine iterative Vorgehensweise verfolgt. Dabei werden  $C_S$  und  $D_S$  vorab berechnet und die maximale tangentiale magnetische Feldstärke am äußeren Ende des Statorjochs mit  $\overline{B}_J / (f_J \mu_0 \mu_{rS})$  bestimmt. Diese Feldstärke wird für die Initialisierung von  $\mu_{rG}$  verwendet, indem die Magnetisierungskennlinie für Baustahl an dieser Feldstärke ausgewertet wird. Somit können  $\delta$ ,  $k_G$  und  $C_G$  ebenfalls initialisiert werden. In einer Schleife werden mithilfe der gerade bestimmten Koeffizienten die Gehäuse-Flussdichten (radial sowie tangential) an  $y = y_0$ ,  $t = 0$  s und  $x \in [0, \pi / (2a)]$  berechnet und der maximale Betrag gesucht. Dieser maximale Betrag der Flussdichte wird in der Magnetisierungskennlinie für Baustahl ausgewertet, um  $\mu_{rG}$  zu erhalten. Um zuverlässige Konvergenz zu gewährleisten, wird die neue Permeabilitätszahl des Gehäuses erneut nach Gleichung 4.29 und  $v = 10$  aktualisiert. Zuletzt werden die Werte für  $\delta$ ,  $k_G$  und  $C_G$  neu berechnet. Diese Schleife wird so lange durchgeführt, bis eine Maximalanzahl an Iterationen erreicht wurde oder die Änderung der Permeabilitätszahl kleiner als 0.01 % ist.

### 4.1.2.2 Auswertung der Flusssichten

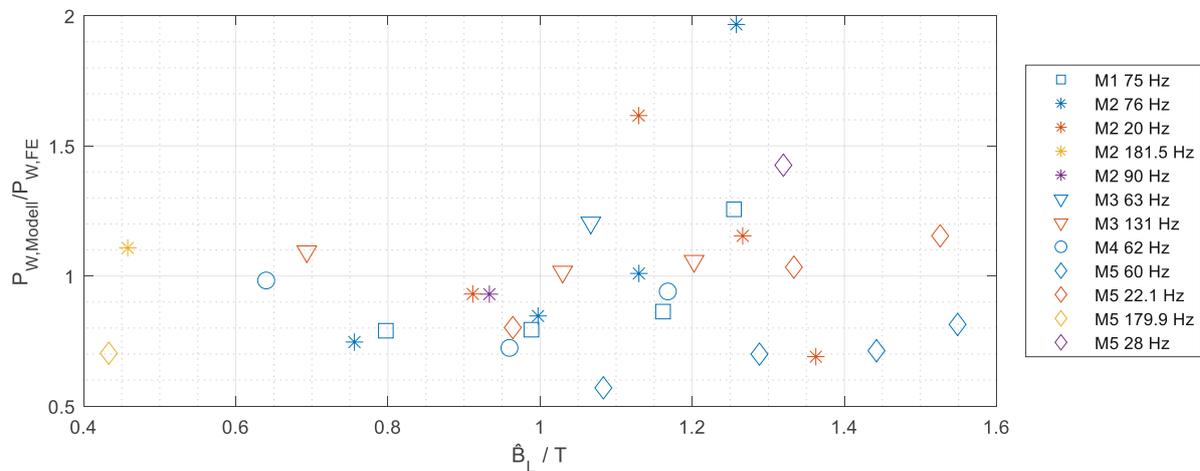
Da in diesem Modell Gleichung 4.35d gefordert wurde, die in Abschnitt 4.1.1 für M1 und M2 bereits erfüllt war, ist die qualitative Auswertung für diese beiden Vergleichsmaschinen beinahe ident. Für alle anderen Maschinen trifft nun durch die explizite Forderung von Gleichung 4.35d ebenfalls das bereits Erwähnte aus Abschnitt 4.1.1.2 zu, weswegen hier nur darauf verwiesen wird.

### 4.1.2.3 Wirbelstromverluste

Die Berechnung der Wirbelstromverluste im Gehäuse ist ident zu Abschnitt 4.1.1.3, da lediglich die Koeffizienten andere Werte haben. Es gilt also auch hier der Zusammenhang

$$P_W = \frac{\sigma\omega^2}{8} |C_G|^2 l_{Fe} d_a \pi \left( \frac{\sin(2 \operatorname{Im}\{k_G\} y_0)}{\operatorname{Im}\{k_G\}} - \frac{\sinh(2 \operatorname{Re}\{k_G\} y_0)}{\operatorname{Re}\{k_G\}} \right) \quad (4.37)$$

für die Wirbelstromverlustleistung. Wird dieses Modell an den Betriebspunkten aus Tabelle 3.3 für die Grundwelle ( $\nu = 1$ , siehe Abschnitt 3.1) ausgewertet und mit den jeweiligen FE-Ergebnissen verglichen, so lassen sich die Ergebnisse in Abbildung 4.11 darstellen. Dieses Modell liefert für alle fünf Vergleichsmaschinen betriebspunktabhängige Wirbelstromleistungen, für die  $P_W \in (P_{FE}/2, 2P_{FE})$  gilt, wenn sie mit den Ergebnissen der FE-Analysen verglichen werden.



**Abb. 4.11:** Gehäuseverluste des kartesischen Modells bei Vorgabe einer Luftspalt- und einer Jochflusssichte bezogen auf die FE-Ergebnisse

Im Vergleich zum Modell aus Abschnitt 4.1.2, dessen Ergebnisse in Abbildung 4.10 dargestellt sind und nur für M1 und M2 passable Werte lieferte, ist dies eine Verbesserung. Mit der zusätzlichen Forderung der Flusssichte am Jochende konnte ein Modell gefunden werden, das unabhängig von der Maschinengeometrie Gehäuse-Wirbelstromverluste liefert, die lediglich um den Faktor 2 höher oder niedriger sind als die FE-Ergebnisse und das bei deutlich geringerer Rechenzeit im Vergleich zum Ansatz aus Abschnitt 4.1.1,

denn die Auswertung aller 30 Betriebspunkte dauerte im Schnitt etwa 16 ms in einer MATLAB Implementierung.

#### 4.1.2.4 Vergleich mit dem Poynting-Satz

Der Poynting Satz, der in Gleichung 4.38 in Integraldarstellung angeführt ist, stellt eine Leistungsbilanz dar. Dabei stellt die linke Seite der Gleichung den durch die Hülle des betrachteten Volumens  $\partial\mathcal{V}$  eintretenden Energiefluss dar, während die rechte Seite Auskunft darüber gibt, wie sich die im Volumen  $\mathcal{V}$  umgesetzte Leistung aufteilt. Hierbei beschreibt der erste Summand die Wechselwirkung mit anderen Energieformen über elektrische Ströme (wie z.B. Joule-Verluste und elektrisch-mechanischer Energieaustausch), während der zweite bzw. dritte Summand jeweils die zeitlichen Änderungen der elektrischen bzw. magnetischen Energien beschreibt. [11]

$$-\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{e}_n \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dA = \int_{\mathcal{V}} \left( \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV \quad (4.38)$$

Um die im Gehäuse umgesetzte Leistung zu ermitteln, muss als Volumen das Gehäuse gewählt werden. Die Feldgrößen sind unabhängig von der z-Koordinate, weshalb das Integral entlang der z-Richtung einer Multiplikation mit  $l_{Fe}$  gleicht. Weiters sind die Feldgrößen an  $x = 0$  m gleich den Feldgrößen an  $x = x_{Ende} = d_i\pi$ , jedoch zeigen die Normalenvektoren in antiparallele Richtungen, weshalb sich die Beiträge gegenseitig aufheben. Es ist also lediglich die Auswertung des Integrals entlang der x-Richtung notwendig, wie Gleichung 4.42 zeigt.

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \quad (4.39)$$

$$P_P(t) = -\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{S}(t) \cdot \vec{e}_n dA = -l_{Fe} \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{S}(t) \cdot \vec{e}_n ds \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{S}(x, y, t) \cdot \vec{e}_n ds &= \int_0^{x_{Ende}} \vec{S}(x, 0, t) \cdot \vec{e}_y dx - \int_0^{y_0} \vec{S}(x_{Ende}, y, t) \cdot \vec{e}_x dy - \\ &\quad - \int_{x_{Ende}}^0 \vec{S}(x, y_0, t) \cdot (-\vec{e}_y) dx + \int_{y_0}^0 \vec{S}(0, y, t) \cdot (-\vec{e}_x) dy = \\ &= \int_0^{x_{Ende}} \vec{S}(x, 0, t) \cdot \vec{e}_y dx - \int_0^{x_{Ende}} \vec{S}(x, y_0, t) \cdot \vec{e}_y dx \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\Rightarrow P_P(t) = l_{Fe} \left( \int_0^{x_{Ende}} S_y(x, y_0, t) dx - \int_0^{x_{Ende}} S_y(x, 0, t) dx \right) \quad (4.42)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \quad (4.43)$$

Da lediglich der zeitliche Mittelwert der Leistung von Interesse ist, kann der komplexe Poynting Vektor, dessen Realteil die mittlere Wirkleistungsflussdichte und dessen Imaginärteil die mittlere Blindleistungsflussdichte angibt, aus Gleichung 4.43 herangezogen werden ([20, S. 164]). Die umgesetzte Wirkleistung im Gehäuse kann nach Gleichung 4.44 ausgewertet werden.

$$P_P = \overline{P_P(t)} = \operatorname{Re} \left\{ l_{Fe} \left( \int_0^{x_{Ende}} \underline{S}_y(x, y_0) dx - \int_0^{x_{Ende}} \underline{S}_y(x, 0) dx \right) \right\} \quad (4.44)$$

Für die Berechnung der Wirbelstromverluste ist also lediglich die y-Komponente des komplexen Poynting Vektors relevant. Gleichung 4.44 kann so interpretiert werden, dass die Differenz des radial in das Gehäuse eintretenden und aus dem Gehäuse radial austretenden Energieflusses die im Gehäuse umgesetzte Leistung ist.  $\underline{S}_y$  berechnet sich, nachdem das magnetische Vektorpotential lediglich eine z-Komponente besitzt, nach Gleichung 4.45. Dabei wurden die Zusammenhänge  $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ ,  $\exp(z)^* = \exp(z^*)$  und  $\underline{z}(z)^* = |\underline{z}|^2$  der Konjugation von komplexen Zahlen ausgenutzt, sowie  $D_G = 0$  V s/m verwendet.

$$\begin{aligned} \underline{S}_y &= \left( \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right) \cdot \vec{e}_y = \frac{1}{2\mu} (-j\omega) A_z \frac{\partial}{\partial y} A_z^* \\ &= -\frac{j\omega}{2\mu} C_G \sinh(k_G y) e^{j(-ax)} k_G^* C_G^* \cosh(k_G^* y) e^{-j(-ax)} = \\ &= -\frac{j\omega}{2\mu} |C_G|^2 k_G^* \sinh(k_G y) \cosh(k_G^* y) = \\ &= -\frac{j\omega}{4\mu} |C_G|^2 k_G^* \left( \sinh(2 \operatorname{Re}\{k_G\} y) + j \sin(2 \operatorname{Im}\{k_G\} y) \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Es ist ersichtlich, dass  $\underline{S}_y$  an  $y = 0$  m gleich null ist, sodass sich Gleichung 4.44 auf ein einziges Integral vereinfacht. Weiters ist  $\underline{S}_y$  unabhängig von der x-Koordinate, weshalb das Integral nach x einer Multiplikation mit  $x_{Ende}$  entspricht. Ähnlich zu Abschnitt 4.1.1.3 und Abschnitt 4.1.2.3 wird auch hier  $x_{Ende} = d_a \pi$  für Vergleichbarkeit gewählt. Außerdem kann die komplexe Größe  $k_G$  als

$$k_G = \operatorname{Re}\{k_G\} + j \operatorname{Im}\{k_G\} = k_{G,r} + j k_{G,i} \quad (4.46)$$

geschrieben werden, um die Ausdrücke zu verkürzen.

Eingesetzt kann auf Gleichung 4.47 umgeformt werden, die im Aufbau Gleichung 4.37 ähnelt und weiter untersucht werden soll. Hier sei erneut darauf hingewiesen, dass  $y_0$  negativ ist (siehe Abbildung 4.2).

$$\begin{aligned}
 P_P &= \operatorname{Re} \left\{ l_{Fe} \left( \int_0^{d_a \pi} \underline{S}_y(y_0) dx - \int_0^{d_a \pi} 0 \frac{W}{m^2} dx \right) \right\} = \operatorname{Re} \{ l_{Fe} d_a \pi \underline{S}_y(y_0) \} = \\
 &= l_{Fe} d_a \pi \operatorname{Re} \left\{ -\frac{j\omega}{4\mu} |C_G|^2 k_G^* \left( \sinh(2k_{G,r} y_0) + j \sin(2k_{G,i} y_0) \right) \right\} = \\
 &= \frac{l_{Fe} d_a \pi \omega}{4\mu} |C_G|^2 \operatorname{Re} \left\{ (k_{G,r} - j k_{G,i}) \left( -j \sinh(2k_{G,r} y_0) + \sin(2k_{G,i} y_0) \right) \right\} = \\
 &= \frac{l_{Fe} d_a \pi \omega}{4\mu} |C_G|^2 \left( k_{G,r} \sin(2 \operatorname{Im}\{k\} y_0) - k_{G,i} \sinh(2 \operatorname{Re}\{k\} y_0) \right) = \\
 &= \frac{l_{Fe} d_a \pi \omega}{4\mu} |C_G|^2 k_{G,r} k_{G,i} \left( \frac{\sin(2k_{G,i} y_0)}{k_{G,i}} - \frac{\sinh(2k_{G,r} y_0)}{k_{G,r}} \right) \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

Wird  $k_G$  quadriert und mit Gleichung 4.18 gleichgesetzt (Gleichung 4.49), so können die Imaginärteile verglichen, der Zusammenhang aus Gleichung 4.50 gefunden und dieser in Gleichung 4.47 eingesetzt werden.

$$k_G^2 = k_{G,r}^2 - k_{G,i}^2 + j2k_{G,r}k_{G,i} \quad (4.48)$$

$$k_{G,r}^2 - k_{G,i}^2 + j2k_{G,r}k_{G,i} = a^2 + j\omega\mu\sigma \quad (4.49)$$

$$\implies k_{G,r}k_{G,i} = \frac{\omega\mu\sigma}{2} \quad (4.50)$$

Dadurch ergibt sich Gleichung 4.51, welche zeigt, dass die ermittelte Leistung mithilfe des Poynting Satzes gleich der Wirbelstromverlustleistung aus Abschnitt 4.1.2.3 ist.

$$\begin{aligned}
 P_P &= \frac{l_{Fe} d_a \pi \omega}{4\mu} |C_G|^2 \frac{\omega\mu\sigma}{2} \left( \frac{\sin(2k_{G,i} y_0)}{k_{G,i}} - \frac{\sinh(2k_{G,r} y_0)}{k_{G,r}} \right) = \\
 &= \frac{l_{Fe} d_a \pi \omega^2 \sigma}{8} |C_G|^2 \left( \frac{\sin(2 \operatorname{Im}\{k\} y_0)}{\operatorname{Im}\{k_G\}} - \frac{\sinh(2 \operatorname{Re}\{k\} y_0)}{\operatorname{Re}\{k_G\}} \right) = P_W \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

Diese Äquivalenz der Wirbelstromleistung und der Leistung aus dem Poynting Satz ist insbesondere auf die Vereinfachung zurückzuführen, dass die Permeabilitätszahl über eine ganze Schicht konstant (genauer: jede Schicht für sich ist homogen, linear und isotrop) ist. Ohne diese Vereinfachung müsste  $\mu_r$  als Funktion von Zeit und Position berücksichtigt werden und auch die Hysterese der Magnetisierungskennlinie würde das Ergebnis beeinflussen.

Es wurde gezeigt, dass der Poynting Satz zur Auswertung der Wirbelstromverluste im Gehäuse verwendet werden kann. Der Zusammenhang von Gleichung 4.44 kann auch für

zylindrische Koordinaten verwendet werden, wenn die kartesischen Koordinaten entsprechend substituiert werden. Dies ist vorteilhaft für die Berechnung der Wirbelstromverluste in zylindrischen Koordinaten, da kein Integral entlang der radialen Richtung erfolgen muss, sondern die modifizierten Besselfunktionen (bzw. ihre Ableitungen) lediglich an festen radialen Positionen ausgewertet werden müssen.



zahl der Feldwelle über dem Umfang an. Die Feldsituation ist mindestens umfangs- bzw.  $2\pi$ -periodisch, sodass das Produkt  $\nu p$  eine ganze Zahl ergeben muss.

$$K_z = \hat{K}_z e^{j(\omega t - n\varphi)} \quad (4.52)$$

$$n = \nu p \quad (4.53)$$

Durch die Vernachlässigung der Randeffekte ist die Flussdichte wie in Abschnitt 4.1 lediglich radial bzw. tangential gerichtet und das magnetische Vektorpotential besitzt nur eine z-Komponente (ebenes Feldproblem).

Für die Lösung des Differentialgleichungssystems Gleichung 2.19a (bzw. Gleichung 2.19b für nicht-leitende Bereiche) aus Abschnitt 2.2 muss der Laplace-Operator für zylindrische Koordinaten beachtet werden. Dies ist in Gleichung 4.54 dargestellt, in der auch Gleichung 2.12 berücksichtigt wurde.

$$\Delta A_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} A_z \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} A_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z \quad (4.54)$$

Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass der Separationsansatz anwendbar ist und sich das magnetische Vektorpotential  $A_z$  also als Produkt von Funktionen mit jeweils einer abhängigen Variable darstellen lässt, d.h.  $A_z = \underline{R}(r)\underline{\Phi}(\varphi)e^{j\omega t}$ . Wird der Laplace-Operator auf diesen Zusammenhang angewandt, ergibt sich Gleichung 4.55.

$$\begin{aligned} \Delta A_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \underline{R}(r)\underline{\Phi}(\varphi)e^{j\omega t} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \underline{R}(r)\underline{\Phi}(\varphi)e^{j\omega t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \underline{R}(r)\underline{\Phi}(\varphi)e^{j\omega t} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \underline{R}(r)\underline{\Phi}(\varphi)e^{j\omega t} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \underline{R}(r)\underline{\Phi}(\varphi)e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Zuerst wird die Laplacegleichung aus Gleichung 2.19b für nicht-leitende Bereiche (Index „nl“) untersucht. Durch Einsetzen von Gleichung 4.55 ergibt sich Gleichung 4.56.

$$\Delta A_{z,nl} = 0 \implies 0 = \frac{r}{\underline{R}_{nl}(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \underline{R}_{nl}(r) \right) + \frac{1}{\underline{\Phi}_{nl}(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \underline{\Phi}_{nl}(\varphi) \quad (4.56)$$

Da diese Gleichung für alle Werte von  $r$  und  $\varphi$  gilt, sind die Summanden jeweils konstant. Für  $\underline{\Phi}_{nl}(\varphi)$  lässt sich ein Ansatz finden, der ähnlich zur tangentialen Abhängigkeit von  $K_z$  ist:

$$\underline{\Phi}_{nl}(\varphi) = e^{-jn\varphi} \quad (4.57)$$

Der Koeffizient, der üblicherweise den Spitzenwert von  $\underline{\Phi}_{nl}(\varphi)$  bestimmt, wird an dieser Stelle weggelassen, da dieser später mit den Koeffizienten von  $\underline{R}_{nl}(r)$  zusammengefasst werden kann. Wird der Ansatz von Gleichung 4.57 in Gleichung 4.56 eingesetzt, ergibt sich Gleichung 4.58, die den Zusammenhang zur Bestimmung von  $\underline{R}_{nl}(r)$  darstellt.

$$\begin{aligned} n^2 \underline{R}_{nl}(r) &= r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \underline{R}_{nl}(r) \right) = r \left( \frac{\partial}{\partial r} \underline{R}_{nl}(r) + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \underline{R}_{nl}(r) \right) = \\ &= r \frac{\partial}{\partial r} \underline{R}_{nl}(r) + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \underline{R}_{nl}(r) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Wird nun Gleichung 4.59 als Ansatz für  $\underline{R}_{nl}(r)$  gewählt, ist die Gleichung 4.58 erfüllt, wie Gleichung 4.60 zeigt.

$$\underline{R}_{nl}(r) = C_1 r^n + D_1 r^{-n} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \underline{R}_{nl}(r) + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \underline{R}_{nl}(r) &= r \left( C_1 n r^{n-1} - D_1 n r^{-n-1} \right) + \\ &\quad + r^2 \left( C_1 n(n-1) r^{n-2} - D_1 n(-n-1) r^{-n-2} \right) = \\ &= C_1 n r^n - D_1 n r^{-n} + C_1 n(n-1) r^n + D_1 n(n+1) r^{-n} = \\ &= C_1 n^2 r^n + D_1 n^2 r^{-n} = n^2 \left( C_1 r^n + D_1 r^{-n} \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Für nicht-leitende Bereiche (Stator, Luftspalt und Rotor) wurde also eine Lösung der Differentialgleichung gefunden. In Gleichung 4.61 ist das magnetische Vektorpotential in zylindrischen Koordinaten für nicht-leitende Bereiche angeführt.

$$A_{z,nl} = \left( C_1 r^n + D_1 r^{-n} \right) e^{j(\omega t - n\varphi)} \quad (4.61)$$

Für leitende Bereiche (Index „lt“) gelten die Helmholtzgleichung aus Gleichung 2.19a, bzw.  $\Delta A_{z,lt} = j\omega\mu\sigma A_{z,lt}$  da lediglich die z-Komponente ungleich null ist, sowie die Funktion für die tangentielle Abhängigkeit aus Gleichung 4.62, die ident zur tangentialen Abhängigkeit des nicht-leitenden Ansatzes ist. Weiters wird der Ausdruck der Eindringtiefe (Gleichung 4.16) eingearbeitet, um schließlich Gleichung 4.63 zu erhalten, die die Form einer Besselschen Differentialgleichung (siehe Gleichung 4.64a und [1]) aufweist.

$$\underline{\Phi}_{lt}(\varphi) = \underline{\Phi}_{nl}(\varphi) = e^{-jn\varphi} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \underline{R}_{lt}(r) \underline{\Phi}_{lt}(\varphi) e^{j\omega t} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \underline{R}_{lt}(r) \underline{\Phi}_{lt}(\varphi) e^{j\omega t} \right) = j\omega\mu\sigma \underline{R}_{lt}(r) \underline{\Phi}_{lt}(\varphi) e^{j\omega t} \\
 \implies & \frac{2j}{\delta^2} \underline{R}_{lt}(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \underline{R}_{lt}(r) \right) - \frac{n^2}{r^2} \underline{R}_{lt}(r) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \underline{R}_{lt}(r) + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \underline{R}_{lt}(r) \right) - \frac{n^2}{r^2} \underline{R}_{lt}(r) \\
 \iff & r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \underline{R}_{lt}(r) + r \frac{\partial}{\partial r} \underline{R}_{lt}(r) - \left( \frac{2j}{\delta^2} r^2 + n^2 \right) \underline{R}_{lt}(r) = 0 \tag{4.63}
 \end{aligned}$$

$$x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x \frac{df(x)}{dx} - (x^2 + n^2) f(x) = 0 \tag{4.64a}$$

$$f(x) = C I_n(x) + D K_n(x) \tag{4.64b}$$

Die Lösung der Besselschen Differentialgleichung aus Gleichung 4.64a ist Gleichung 4.64b, also eine Linearkombination der modifizierten Besselfunktionen  $n$ -ter Ordnung erster Art  $I_n(x)$  bzw. zweiter Art  $K_n(x)$ , wobei  $n \in \mathbb{R}$  gilt ([1]). Im Rahmen dieser Arbeit ist  $n$ , also die Ordnung der modifizierten Besselfunktionen, jedoch keine reelle, sondern eine natürliche Zahl, sodass laut [1] für  $I_n(x)$  die Gleichung 4.65 bzw. für  $K_n(x)$  die Gleichung 4.66 gilt.

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{4.65}$$

$$K_n(x) = \lim_{v \rightarrow n} \frac{\pi I_{-v}(x) - I_v(x)}{2 \sin(v\pi)} \tag{4.66}$$

Die Auswertung der modifizierten Besselfunktionen wird aufgrund der Verwendung von MATLAB durch die integrierten Funktionen `besseli` und `besselk` gelöst, welche sich jeweils hinsichtlich der Implementierung der Berechnungen auf [3] beziehen. In [3] wird angeführt, welche Berechnungsalgorithmen verwendet werden, je nach Größe von Argument und Ordnung der auszuwertenden modifizierten Besselfunktion.

Des Weiteren sind folgende Zusammenhänge aus [1] der modifizierten Besselfunktionen ebenfalls erwähnenswert, da sie in weiterer Folge verwendet oder vorausgesetzt werden.

$$I_{-n}(x) = I_n(x) \tag{4.67}$$

$$K_{-n}(x) = K_n(x) \tag{4.68}$$

$$I'_n(x) = I_{n+1}(x) + \frac{n}{x} I_n(x) \tag{4.69}$$

$$K'_n(x) = -K_{n+1}(x) + \frac{n}{x} K_n(x) \tag{4.70}$$

Da in Gleichung 4.63 der  $r^2$ -Term in der Klammer noch mit einem Faktor  $(2j/\delta^2)$  multipliziert ist, müssen die Variablen noch entsprechend substituiert werden, um auf die Form in Gleichung 4.64a zu kommen. [15] zeigt, dass eine Differentialgleichung

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R(r) + r \frac{d}{dr} R(r) - (k^2 r^2 + v^2) R(r) = 0 \quad (4.71)$$

mithilfe der Substitutionen  $\vartheta = kr$  und  $R(r) = Z_v(\vartheta)$  zu

$$\vartheta^2 \frac{d^2}{d\vartheta^2} Z_v(\vartheta) + \vartheta \frac{d}{d\vartheta} Z_v(\vartheta) - (\vartheta^2 + v^2) Z_v(\vartheta) = 0 \quad (4.72)$$

wird. Hierbei ist die Lösung von  $Z_v(\vartheta)$  wieder die Linearkombination aus den modifizierten Besselfunktionen (Vgl. Gleichung 4.64b). Angewandt auf Gleichung 4.63 bedeutet dies, dass sich die Substitutionskoordinate  $\vartheta$  nach Gleichung 4.73 und sich  $\underline{R}_{lt}(r)$  nach Gleichung 4.74 berechnen lässt.

$$\vartheta^2 = \frac{2j}{\delta^2} r^2 \implies \vartheta = \frac{1+j}{\delta} r \quad (4.73)$$

$$\underline{R}_{lt}(r) = C_1 I_n(\vartheta) + D_1 K_n(\vartheta) = C_1 I_n\left(\frac{1+j}{\delta} r\right) + D_1 K_n\left(\frac{1+j}{\delta} r\right) \quad (4.74)$$

Es sind nun alle Faktoren der Lösung für das magnetische Vektorpotential in leitenden Gebieten in zylindrischen Koordinaten gefunden und zusammen ergibt das den Ausdruck in Gleichung 4.75.

$$A_{z,lt} = \left( C_1 I_n\left(\frac{1+j}{\delta} r\right) + D_1 K_n\left(\frac{1+j}{\delta} r\right) \right) e^{j(\omega t - n\varphi)} \quad (4.75)$$

Der Ausdruck, der im Argument der modifizierten Besselfunktionen von Gleichung 4.75 angeführt ist, wird oft in der Form von Gleichung 4.76 und zusammen mit den Gleichungen 4.77 und 4.78 dargestellt ([14, S. 4.5]), wobei der Außendurchmesser des Gehäuses  $r_G$  als Referenzlänge gewählt wurde (dies ist eine frei wählbare Länge).  $\zeta$  ist eine komplexe Zahl, die einen gleich großen Real- wie Imaginärteil aufweist und in Gleichung 4.77 angeführt ist.  $\xi$  wird nach Gleichung 4.78 berechnet und ist die gewählte Referenzlänge bezogen auf die Eindringtiefe. In weiterer Folge wird jedoch primär  $\vartheta$  (bzw.  $\vartheta_r$ , siehe Gleichung 4.81) als kompaktere Schreibweise des Ausdrucks des Arguments verwendet.

$$\frac{1+j}{\delta} r = \zeta \frac{r}{r_G} \quad (4.76)$$

$$\zeta = \xi(1+j) \quad (4.77)$$

$$\xi = \frac{r_G}{\delta} \quad (4.78)$$

Es ist ersichtlich, dass das Argument der modifizierten Besselfunktionen eine komplexe Zahl mit einem Winkel von  $45^\circ$  ist. In Abbildung 4.13 werden beispielhaft die modifizierten Besselfunktionen dritter Ordnung untersucht (linke Abbildungen). Dabei fällt

auf, dass der Betrag der mod. Besselfunktion erster Art exponentiell steigt, während der Betrag der mod. Besselfunktion zweiter Art exponentiell fällt. Beides kann bei der Auswertung des Arguments  $\left((1 + j)/\delta\right)r$  zum Über- bzw. Unterschreiten des mit einem double-Datentyp darstellbaren Zahlenraums (kleinste darstellbare positive Zahl  $\approx 2.2251 \times 10^{-308}$ , größte darstellbare positive Zahl  $\approx 1.7977 \times 10^{308}$ , gleiches gilt für negative Zahlen) oder zu Genauigkeitsverlust führen. Um dies zu umgehen, kann ein quad-Datentyp, also eine Zahlendarstellung mit vierfacher Genauigkeit bzw. doppelt so viel Speicherplatzbelegung wie ein double-Datentyp, verwendet werden. Da für die Auswertung im Rahmen dieser Arbeit MATLAB herangezogen wurde und hier kein quad-Datentyp unterstützt wird, ist dies jedoch nicht anwendbar. Stattdessen kann die interne Skalierungsoption verwendet werden, die die MATLAB-Implementierungen von `besseli` und `besselk` bei der Auswertung der modifizierten Besselfunktionen bieten. Die skalierten Ergebnisse (Index „s“) berechnen sich nach Gleichung 4.79 bzw. Gleichung 4.80 und die resultierenden Verläufe der Funktionen sind in den rechten Abbildungen von Abbildung 4.13 dargestellt.

$$I_{n,s}(x) = I_n(x)e^{-|\operatorname{Re}\{x\}|} \iff I_n(x) = I_{n,s}(x)e^{|\operatorname{Re}\{x\}|} \quad (4.79)$$

$$K_{n,s}(x) = K_n(x)e^x \iff K_n(x) = K_{n,s}(x)e^{-x} \quad (4.80)$$

Werden in Gleichung 4.75 die Skalierungen der modifizierten Besselfunktionen verwendet und die Koeffizienten mit einem Skalierungsfaktor versehen wie in Gleichung 4.84, können numerische Probleme vermieden werden. Die Exponenten können entsprechend subtrahiert werden, sodass die Auswertung der Exponentialfunktionen innerhalb des darstellbaren Zahlenraums ist: Bei Verwendung eines double-Datentyps ergibt die Auswertung von  $\exp(710) * \exp(-700) = \operatorname{Inf} * 9.8597 \times 10^{-305} = \operatorname{Inf}$ , während die Auswertung von  $\exp(710 - 700) = \exp(10) = 2.2026 \times 10^4$  liefert.

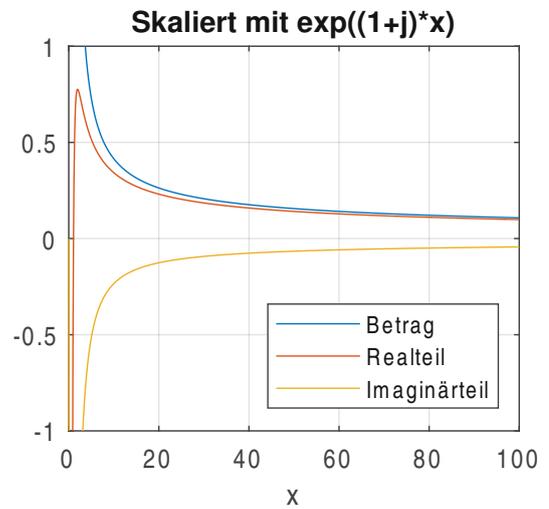
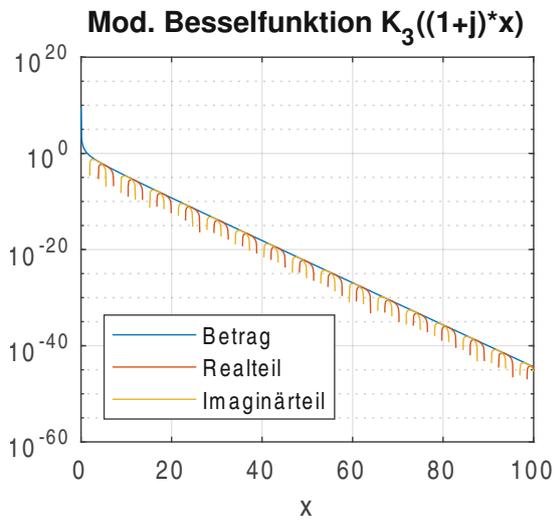
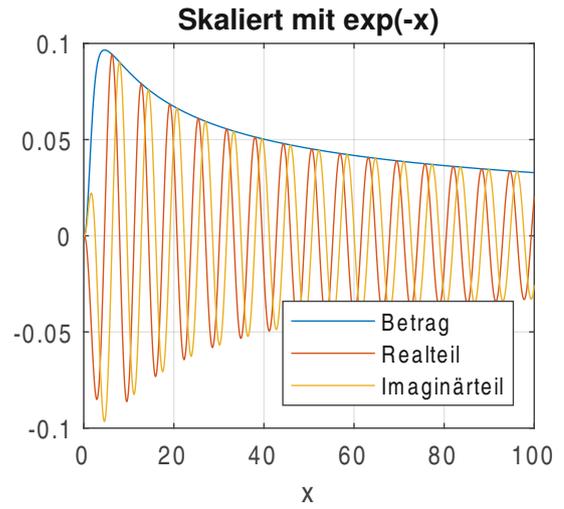
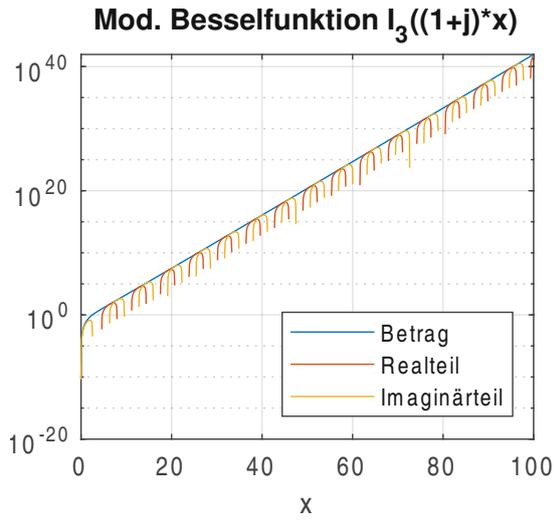
Die Wahl des Arguments des Skalierungsfaktors der Koeffizienten wurde mit  $\vartheta_S$  gewählt, um die Bestimmung des Koeffizienten  $D_G$  einfacher zu gestalten. Hier könnte aber ebenso auch  $\vartheta_G$  verwendet werden, um die Exponenten (bzw. die Differenz dieser) so klein wie möglich zu halten.

$$\vartheta_r = \vartheta = \frac{1 + j}{\delta} r \quad (4.81)$$

$$\vartheta_S = \frac{1 + j}{\delta} r_S \quad (4.82)$$

$$\vartheta_G = \frac{1 + j}{\delta} r_G \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned}
 A_{z,lt} &= \left( C_1 I_n(\vartheta_r) + D_1 K_n(\vartheta_r) \right) e^{j(\omega t - n\varphi)} = \\
 &= \left( C_2 e^{-|\operatorname{Re}\{\vartheta_S\}|} I_{n,s}(\vartheta_r) e^{|\operatorname{Re}\{\vartheta_r\}|} + D_2 e^{\vartheta_S} K_{n,s}(\vartheta_r) e^{-\vartheta_r} \right) e^{j(\omega t - n\varphi)} = \\
 &= \left( C_2 I_{n,s}(\vartheta_r) e^{\operatorname{Re}\{\vartheta_r - \vartheta_S\}} + D_2 K_{n,s}(\vartheta_r) e^{\vartheta_S - \vartheta_r} \right) e^{j(\omega t - n\varphi)} \quad (4.84)
 \end{aligned}$$



**Abb. 4.13:** Verläufe der modifizierten Besselfunktionen  $I_3((1+j)x)$  und  $K_3((1+j)x)$ , jeweils unskaliert und skaliert

Zusammenfassend sind die magnetischen Vektorpotentiale für das Gehäuse (leitender Bereich) sowie Stator, Luftspalt und Rotor (nicht-leitende Bereiche) in den Gleichungen 4.85 bis 4.88 gegeben.

$$A_{z,G} = \left( C_G I_{n,s}(\vartheta_r) e^{\text{Re}\{\vartheta_r - \vartheta_s\}} + D_G K_{n,s}(\vartheta_r) e^{\vartheta_s - \vartheta_r} \right) e^{j(\omega t - n\varphi)} \quad (4.85)$$

$$A_{z,S} = (C_S r^n + D_S r^{-n}) e^{j(\omega t - n\varphi)} \quad (4.86)$$

$$A_{z,L} = (C_L r^n + D_L r^{-n}) e^{j(\omega t - n\varphi)} \quad (4.87)$$

$$A_{z,R} = (C_R r^n + D_R r^{-n}) e^{j(\omega t - n\varphi)} \quad (4.88)$$

Die Bestimmung der Koeffizienten erfolgt durch Festlegen von Randbedingungen, die meist die Flussdichte betreffen. Für Gleichung 4.89 wird Gleichung 4.21 genutzt, um die

Flussdichte in Zylinderkoordinaten aus dem magnetischen Vektorpotential, das nur eine z-Komponente aufweist, zu berechnen.

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} B_r \\ B_\varphi \\ B_z \end{bmatrix} = \nabla \times (A_z \vec{e}_z) = -\vec{e}_z \times \nabla A_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_z \\ -\frac{\partial}{\partial r} A_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Für die Bestimmung der Flussdichte im Gehäuse werden die ersten Ableitungen der modifizierten Besselfunktionen nach ihrem Argument benötigt. Gleichung 4.69 und Gleichung 4.70 beschreiben die Berechnungen der Ableitungen mithilfe von Rekursionszusammenhängen. Da  $I'_n(x)$  und  $K'_n(x)$  jeweils Summen aus den jeweiligen modifizierten Besselfunktionen sind, lassen sich die Skalierungen, wie in Gleichung 4.90 und Gleichung 4.91 gezeigt, herausheben und somit gelten die Gleichungen 4.92 und 4.93 für die skalierten Ableitungen der modifizierten Besselfunktionen.

$$\begin{aligned} I'_n(x) &= I_{n+1}(x) + \frac{n}{x} I_n(x) = I_{n+1,s}(x) e^{|\operatorname{Re}\{x\}|} + \frac{n}{x} I_{n,s}(x) e^{|\operatorname{Re}\{x\}|} = \\ &= \left( I_{n+1,s}(x) + \frac{n}{x} I_{n,s}(x) \right) e^{|\operatorname{Re}\{x\}|} = I'_{n,s}(x) e^{|\operatorname{Re}\{x\}|} \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} K'_n(x) &= -K_{n+1}(x) + \frac{n}{x} K_n(x) = -K_{n+1,s}(x) e^{-x} + \frac{n}{x} K_{n,s}(x) e^{-x} = \\ &= \left( -K_{n+1,s}(x) + \frac{n}{x} K_{n,s}(x) \right) e^{-x} = K'_{n,s}(x) e^{-x} \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$I'_{n,s}(x) = I'_n(x) e^{-|\operatorname{Re}\{x\}|} \iff I'_n(x) = I'_{n,s}(x) e^{|\operatorname{Re}\{x\}|} \quad (4.92)$$

$$K'_{n,s}(x) = K'_n(x) e^x \iff K'_n(x) = K'_{n,s}(x) e^{-x} \quad (4.93)$$

## 4.2.1 Vorgabe einer Luftspaltflussdichte

Die Ergebnisse von Abschnitt 4.1.1 haben gezeigt, dass die Vorgabe einer Luftspaltflussdichte alleine nicht zielführend ist, wenn das Modell für verschiedene Maschinen anwendbar sein soll. Deshalb wird an dieser Stelle auf die Ausarbeitung dieses Modells in zylindrischen Koordinaten verzichtet. Stattdessen eignet sich die gemeinsame Vorgabe einer Luftspaltflussdichte und einer Flussdichte am äußeren Rand des Statorjochs, wie die Ergebnisse aus Abschnitt 4.1.2 nahelegten. Das zylindrische Modell, welches beide Flussdichtevorgaben berücksichtigt, ist in Abschnitt 4.2.2 ausgearbeitet.

## 4.2.2 Vorgabe einer Luftspalt- und einer Jochflussdichte

In diesem Abschnitt wird das zylindrische Modell untersucht, bei dem die Luftspaltflussdichte und die Flussdichte am äußeren Ende des Statorjochs als Randbedingungen für die Bestimmung der Koeffizienten vorgegeben werden. Die Vorgehensweise ist dabei die gleiche wie in Abschnitt 4.1.2 und die Randbedingungen sind die gleichen, wenn auch angepasst auf die zylindrische Geometrie. Das Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten lautet:

$$A_{z,R}(r = 0 \text{ m}) = 0 \frac{\text{Vs}}{\text{m}} \quad (4.94a)$$

$$B_{r,G}(r = r_G) = 0 \text{ T} \quad (4.94b)$$

$$B_{r,S}\left(r = r_L, \varphi = \frac{1}{n} \frac{\pi}{2}, t = 0 \text{ s}\right) = -B_Z = -\hat{B}_L f_{BZ/BL} \quad (4.94c)$$

$$B_{\varphi,S}(r = r_S, \varphi = 0, t = 0 \text{ s}) = \frac{\overline{B}_J}{f_J} = \hat{B}_L \frac{f_{\overline{B}_J/BZ} f_{BZ/BL}}{f_J} \quad (4.94d)$$

$$H_{\varphi,G}(r = r_S) = H_{\varphi,S}(r = r_S) \quad (4.94e)$$

$$B_{r,S}(r = r_L) = B_{r,L}(r = r_L) \quad (4.94f)$$

$$B_{r,L}(r = r_R) = B_{r,R}(r = r_R) \quad (4.94g)$$

$$H_{\varphi,L}(r = r_R) = H_{\varphi,R}(r = r_R) \quad (4.94h)$$

Mit der Hilfsvariable

$$\chi_{CD} = \frac{K_{n,s}(\vartheta_G)}{I_{n,s}(\vartheta_G)} \frac{e^{\vartheta_S - \vartheta_G}}{e^{\text{Re}\{\vartheta_G - \vartheta_S\}}} \quad (4.95)$$

führt dies zu den folgenden Koeffizienten:

$$C_S = \hat{B}_L \frac{f_{BZ/BL} \left( r_L^{n+1} - \frac{f_{\overline{B}_J/BZ}}{f_J} r_S^{n+1} \right)}{n \left( r_S^{2n} + r_L^{2n} \right)} \quad (4.96a)$$

$$D_S = \frac{\hat{B}_L \frac{f_{BZ/BL}}{n} - C_S r_L^{n-1}}{r_L^{-n-1}} \quad (4.96b)$$

$$D_G = \frac{\mu_{rG}}{\mu_{rS}} \frac{n\delta}{1 + j} \frac{C_S r_S^{n-1} - D_S r_S^{-n-1}}{K'_{n,s}(\vartheta_S) - \chi_{CD} I'_{n,s}(\vartheta_S)} \quad (4.96c)$$

$$C_G = -D_G \chi_{CD} \quad (4.96d)$$

$$C_L = \frac{C_S r_L^n + D_S r_L^{-n}}{r_L^n + r_L^{-n} r_R^{2n} \frac{\mu_{rR} - 1}{\mu_{rR} + 1}} \quad (4.96e)$$

$$D_L = C_L r_R^{2n} \frac{\mu_{rR} - 1}{\mu_{rR} + 1} \quad (4.96f)$$

$$C_R = C_L + D_L r_R^{-2n} \quad (4.96g)$$

$$D_R = 0 \quad (4.96h)$$

### 4.2.2.1 Bestimmung der Permeabilitätszahlen

Ähnlich zu Abschnitt 4.1.2 sind auch hier  $C_S$  und  $D_S$  unabhängig von  $\mu_{rG}$  und  $\mu_{rS}$  sowie reell, sodass auch hier  $\max(|\vec{B}_S|) = \max(|B_{S,\varphi}|)$  gilt und  $\mu_{rS}$  mit  $\overline{B}_J/f_J$  bestimmt werden kann. Für die Bestimmung von  $\mu_{rG}$  wird jene iterative Herangehensweise verwendet, die in Abschnitt 4.1.2.1 beschrieben wurde, jedoch angepasst auf die zylindrischen Koeffizienten.  $C_S$  und  $D_S$  können vorab ausgewertet werden, genauso wie die maximale tangential magnetische Feldstärke am Ende des Statorjochs  $H_{S,\varphi,max}(r = r_S) = \overline{B}_J/(f_J\mu_0\mu_{rS})$ , welche für die Initialisierung von  $\mu_{rG}$  mithilfe der Magnetisierungskennlinie für Baustahl herangezogen wird. Somit können  $\delta$ ,  $C_G$  sowie  $D_G$  ebenfalls initialisiert werden. In einer Schleife werden die gerade bestimmten Koeffizienten herangezogen, um die radialen und tangentialen Flussdichten an  $r_S$  und  $t = 0$  s zu bestimmen. Diese werden verwendet, um den maximalen Flussdichtebetrag zu berechnen, der wiederum für die Aktualisierung der Gehäuse-Permeabilitätszahl nach Gleichung 4.29 (und  $v = 10$ ) benutzt wird. Nach der Aktualisierung von  $\mu_{rG}$  werden  $\delta$ ,  $C_G$  sowie  $D_G$  am Schleifenende neu bestimmt. Diese Schleife wird so lange durchlaufen, bis eine maximale Anzahl an Iterationen erreicht wurde oder die Änderung der Permeabilitätszahl kleiner als 0.01 % ist.

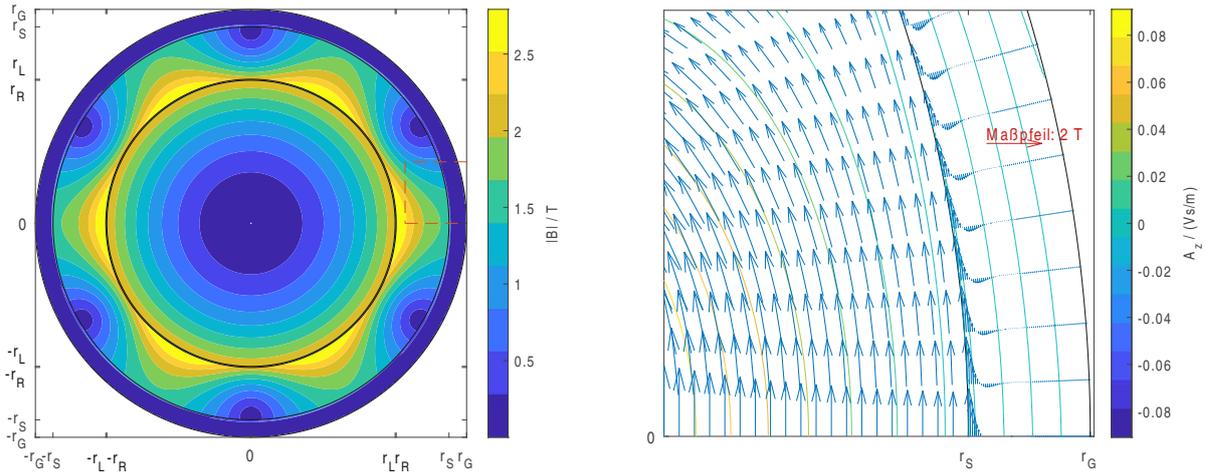
### 4.2.2.2 Auswertung der Flussdichten

Nachdem die Koeffizienten bestimmt wurden, können die Flussdichten in allen Schichten berechnet werden. Abbildung 4.14 (links) stellt den Betrag der Flussdichte über die gesamte Geometrie von M1 dar. Hier wird einerseits der 6-polige Aufbau deutlich, andererseits zeigt sich die qualitative Ähnlichkeit der Lösung im Vergleich zu Abbildung 4.5, allerdings mit Berücksichtigung der Krümmung. Im rechten Teil von Abbildung 4.14 sind die Flussdichtevektoren und die Feldlinien (Isolinien des magnetischen Vektorpotentials) des linken Teils zu sehen, allerdings lediglich ein Ausschnitt, in dem die Skalierung der x- und y-Achse gleich ist, um die Vektoren intuitiv sowie unverzerrt darzustellen und gleichzeitig Informationen über den vergleichsweise schmalen Gehäusebereich bereitzustellen (ähnlich zu Abbildung 4.4).

Die Flussdichte im Gehäuse ist hauptsächlich tangential ausgerichtet, klingt exponentiell zum Gehäuserand hin ab und zeigt das endlich schnelle Eindringen bzw. Ausbreiten der Flussdichte am Statorrand in das Gehäuse. Es sei angemerkt, dass sich die Maxima und Minima der Flussdichte im Luftspalt sowie am Statorrand und im Gehäuse bei fortschreitender Zeit in mathematisch positive Richtung, hier also gegen den Uhrzeigersinn, entlang der jeweiligen Kreise bewegen.

Wird der Verlauf der Flussdichte im Gehäuse entlang eines festen Winkels untersucht, so kann erkannt werden, dass die Flussdichte, die zu einem Zeitpunkt  $t = t_1$  an  $r_S$  herrschte, zu einem späteren Zeitpunkt  $t_2 > t_1$  exponentiell abgeschwächt weiter außerhalb im Gehäuse, also  $r_2 > r_S$ , gefunden werden kann – Diffusionsvorgang des harmonischen Feldes in das Gehäuse. Außerdem können die bereits bei Abbildung 4.3 beschriebenen Feldlinien im Gehäusebereich, die den Wert 0 V s/m kennzeichnen und hier spiralförmig nach außen verlaufen, ebenfalls erkannt werden.

Bei M1 ist die Flussdichte am Gehäuserand bei  $U = U_N$  und  $f_1 = 75$  Hz bereits zu



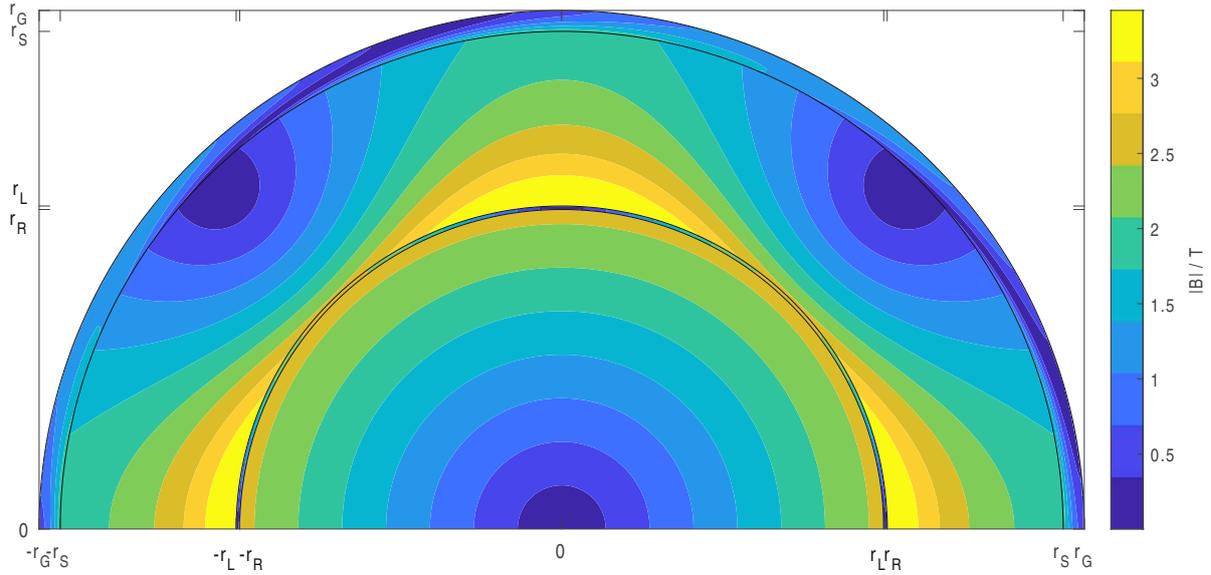
**Abb. 4.14:** Betrag der Flussdichte der gesamten Maschine (links) und Flussdichtevektoren inkl. Feldlinien im rot markierten Bereich (rechts) von M1 ( $U = U_N$ ,  $f_1 = 75 \text{ Hz}$ ,  $t = 0 \text{ s}$ )

0 T abgeklungen. In Abbildung 4.15 ist der Betrag der Flussdichte von M2 (4-polige Maschine) bei 20 Hz 123 V dargestellt. In diesem Betriebspunkt ist die Eindringtiefe groß genug, dass auch am Gehäuserand noch eine (rein tangentielle) Flussdichte existiert, die nicht vernachlässigbar klein ist im Vergleich zur Flussdichte am Statorrand  $r_S$ .

### 4.2.2.3 Wirbelstromverluste

Wie in Abschnitt 4.1.2.4 gezeigt wurde, liefert die Auswertung des Poynting-Satzes im Rahmen dieser Arbeit die in dem betrachteten Volumen umgesetzte Wirbelstromleistung. Dies ist der Fall, da die Permeabilitätszahl über eine ganze Schicht als linear, homogen und isotrop vorausgesetzt wird.

Um die Wirbelstromverluste im Gehäuse zu bestimmen, muss der Poynting-Satz (siehe Gleichung 4.38) in zylindrischen Koordinaten ausgewertet werden. Hilfreich ist, dass, wie in den vereinfachenden Annahmen festgelegt, das magnetische Vektorpotential und somit auch die relevanten Feldgrößen unabhängig von der  $z$ -Koordinate sind – Somit gilt Gleichung 4.40. Auch in zylindrischen Koordinaten heben sich die Integrale entlang der radialen Wege gegenseitig auf, da die Poynting-Vektoren aufgrund der vorausgesetzten Umfangsperiodizität an  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 2\pi$  ident, die Normalenvektoren jedoch antiparallel sind. Nur die Integrale entlang der tangentialen Wege müssen ausgewertet werden, siehe Gleichung 4.97.



**Abb. 4.15:** Betrag der Flussdichte der oberen Hälfte von M2 ( $U = 123 \text{ V}$ ,  $f_1 = 20 \text{ Hz}$ ,  $t = 0 \text{ s}$ )

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial A} \vec{S}(t) \cdot \vec{e}_n ds &= \int_0^{2\pi} \vec{S}(r_G, \varphi, t) \cdot \vec{e}_r r_G d\varphi - \int_{r_G}^{r_S} \vec{S}(r, 2\pi, t) \cdot \vec{e}_\varphi dr - \\
 &\quad - \int_{2\pi}^0 \vec{S}(r_S, \varphi, t) \cdot (-\vec{e}_r) r_S d\varphi + \int_{r_S}^{r_G} \vec{S}(r, 0, t) \cdot (-\vec{e}_\varphi) dr = \\
 &= r_G \int_0^{2\pi} \vec{S}(r_G, \varphi, t) \cdot \vec{e}_r d\varphi - r_S \int_0^{2\pi} \vec{S}(r_S, \varphi, t) \cdot \vec{e}_r d\varphi \quad (4.97)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_P(t) = -l_{Fe} \left( r_G \int_0^{2\pi} S_r(r_G, \varphi, t) d\varphi - r_S \int_0^{2\pi} S_r(r_S, \varphi, t) d\varphi \right) \quad (4.98)$$

Nur der zeitliche Mittelwert ist für die Auswertung von Interesse, sodass auch hier der komplexe Poynting Vektor aus Gleichung 4.43 verwendet wird. Die im Gehäuse umgesetzte Wirkleistung kann dann durch Realteilbildung erhalten werden, siehe Gleichung 4.99.

$$P_P = \overline{P_P(t)} = \text{Re} \left\{ -l_{Fe} \left( r_G \int_0^{2\pi} \underline{S}_r(r_G, \varphi) d\varphi - r_S \int_0^{2\pi} \underline{S}_r(r_S, \varphi) d\varphi \right) \right\} \quad (4.99)$$

Da lediglich die radiale Komponente des komplexen Poynting-Vektors relevant ist, wird  $\underline{S}_r$  in Gleichung 4.101 hergeleitet. Dabei werden die Eigenschaften  $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$  von komplexen Zahlen verwendet sowie die Zusammenhänge  $\vec{E} = -(\partial/\partial t)\vec{A}$  und  $\vec{H} =$

$\vec{B}/\mu = (\nabla \times \vec{A})/\mu$ . Außerdem werden die Skalierungsfaktoren aus Gleichung 4.100a und Gleichung 4.100b für mehr Übersichtlichkeit verwendet.

$$\chi_{eI} = e^{\operatorname{Re}\{\vartheta_r - \vartheta_s\}} \quad (4.100a)$$

$$\chi_{eK} = e^{\vartheta_s - \vartheta_r} \quad (4.100b)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_r &= \left( \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right) \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{2} (-\underline{E}_z \underline{H}_\varphi^*) = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial}{\partial t} A_z \left( -\frac{\partial}{\partial r} A_z \right)^* \right) = \frac{-j\omega}{2\mu} A_z \left( \frac{\partial}{\partial r} A_z \right)^* = \\ &= \frac{-j\omega}{2\mu} \left( C_G I_{n,s}(\vartheta_r) \chi_{eI} + D_G K_{n,s}(\vartheta_r) \chi_{eK} \right) \left( \frac{1+j}{\delta} \left( C_G I'_{n,s}(\vartheta_r) \chi_{eI} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + D_G K'_{n,s}(\vartheta_r) \chi_{eK} \right) \right)^* = \\ &= \frac{-\omega(1+j)}{2\mu\delta} \left( C_G I_{n,s}(\vartheta_r) \chi_{eI} + D_G K_{n,s}(\vartheta_r) \chi_{eK} \right) \left( C_G I'_{n,s}(\vartheta_r) \chi_{eI} + D_G K'_{n,s}(\vartheta_r) \chi_{eK} \right)^* \end{aligned} \quad (4.101)$$

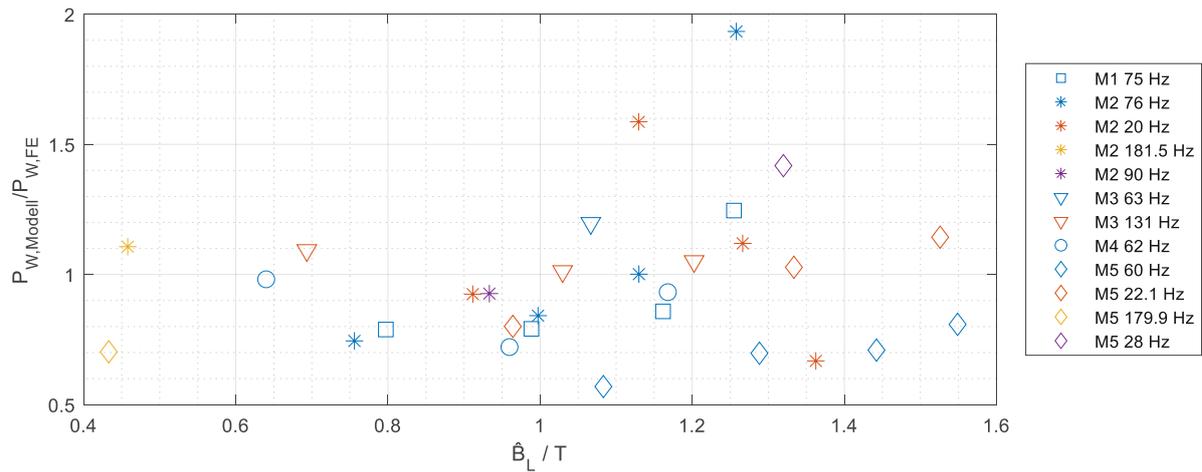
Die radiale Komponente des Poynting Vektors ist also unabhängig von  $\varphi$ , sodass das Integral aus Gleichung 4.99 zu einer Multiplikation wird, siehe Gleichung 4.102.

$$\begin{aligned} P_P &= \operatorname{Re} \left\{ -l_{Fe} \left( r_G \int_0^{2\pi} \underline{S}_r(r_G) d\varphi - r_S \int_0^{2\pi} \underline{S}_r(r_S) d\varphi \right) \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ l_{Fe} 2\pi \left( r_S \underline{S}_r(r_S) - r_G \underline{S}_r(r_G) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.102)$$

Die Auswertung der Wirbelstromverluste zufolge der Grundwelle der Vergleichsmaschinen ist in Abbildung 4.16 abgebildet. Das Resultat ist fast ident zu Abschnitt 4.1.2.3. Um die Ergebnisse der Abbildungen 4.11 und 4.16 bezogen auf die FE-Ergebnisse bewerten zu können, wird die normierte Summe der quadratischen Abstände zum Wert eins (siehe Gleichung 4.103) als quantitatives Vergleichsmaß eingeführt und untersucht. Hierbei ist anzumerken, dass dieses Maß auch von der Qualität der FE-Analysen abhängt.

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{P_{W,Modell,k}}{P_{W,FE,k}} - 1 \right)^2 \quad (4.103)$$

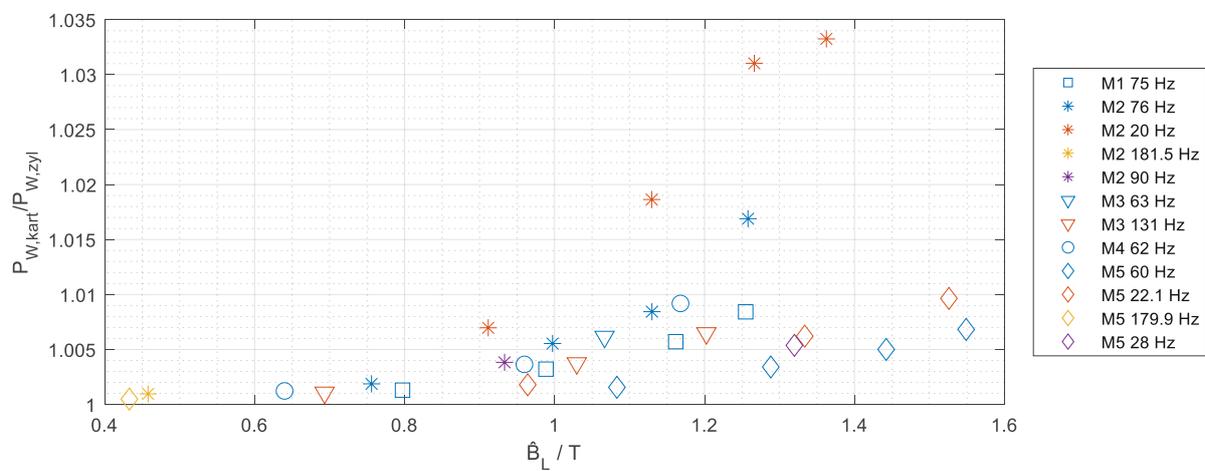
Für die Ergebnisse in Abbildung 4.11 lässt sich  $s_1^2 = 0.08581$  bestimmen, während  $s_2^2 = 0.08259$  für Abbildung 4.16 gilt. Da  $s_1^2$  größer als  $s_2^2$  ist, sind die Ergebnisse des Ansatzes in zylindrischen Koordinaten weniger um die jeweiligen Vergleichsdaten gestreut und bilden diese somit besser ab.



**Abb. 4.16:** Gehäuseverluste des zylindrischen Modells bei Vorgabe einer Luftspalt- und einer Jochflussdichte bezogen auf die FE-Ergebnisse

Abbildung 4.17 zeigt die Wirbelstromleistungen aus dem kartesischen Modell (jenes aus Abschnitt 4.1.2, um gleiche Voraussetzungen/Randbedingungen miteinander zu vergleichen) bezogen auf die Wirbelstromleistungen des zylindrischen Modells (beides jeweils bei  $\nu = 1$ , siehe Abschnitt 3.1). Die Abweichung der beiden Modelle zueinander bei den betrachteten Vergleichsmaschinen und -Betriebspunkten ist maximal 3.5% wobei der zylindrische Ansatz kleinere Wirbelstromleistungen liefert, insbesondere bei höheren Flussdichten (größere Eindringtiefe in das Gehäuse). Die niedrigeren Verlustleistungen des zylindrischen Modells sind eine Folge der mit dem Radius steigenden Zylinderoberfläche (im kartesischen Ansatz ist die Oberfläche unabhängig von der radialen Position). Bei gleicher Durchflutung ist die Feldstärke bei einem längeren Weg durch das gleiche Material (homogen, linear, isotrop) kleiner, sodass auch die Verlustdichte kleiner ist. Je größer  $d_a$  im Vergleich zu  $h_G$  wird, desto kleiner ist der Unterschied zwischen innerem und äußerem Gehäuseumfang bzw. desto ähnlicher werden die Ergebnisse von kartesischem und zylindrischem Ansatz. Die Vergleichsmaschine M2 ist jene mit der kleinsten Bemessungsleistung und auch der kleinsten Baugröße. Demnach ist hier der Einfluss der Krümmung am größten und so ist auch nachvollziehbar, dass die Abweichungen zwischen kartesischem und zylindrischem Modell bei M2 (und insbesondere bei der niedrigsten Frequenz bzw. der größten Eindringtiefe) ebenfalls am größten sind.

Die Dauer der Auswertung aller 30 Referenzpunkte dauerte in einer MATLAB Implementierung im Durchschnitt etwa 20 ms – Die geringe Berechnungsdauer des Modells ist also auch bei der Auswertung der zylindrischen Geometrie gegeben.



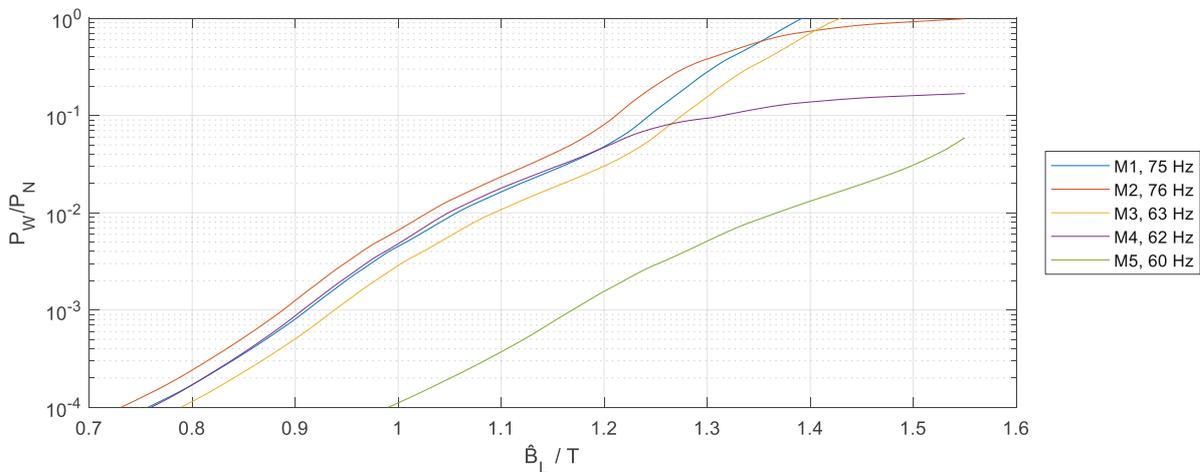
**Abb. 4.17:** Wirbelstromverlustleistungen im Gehäuse aus dem kartesischen Ansatz (Abschnitt 4.1.2) bezogen auf jene vom zylindrischen Ansatz

## 5 Parametervariation

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Auswertung und Analyse, welchen Einfluss die Veränderungen ausgewählter Parameter auf das Ergebnis haben. Für die Auswertungen wird das Modell für die Gehäuseverluste in zylindrischen Koordinaten aus Abschnitt 4.2.2 herangezogen und jeweils die Grundwelle  $\nu = 1$  untersucht.

### 5.1 Luftspaltflussdichte

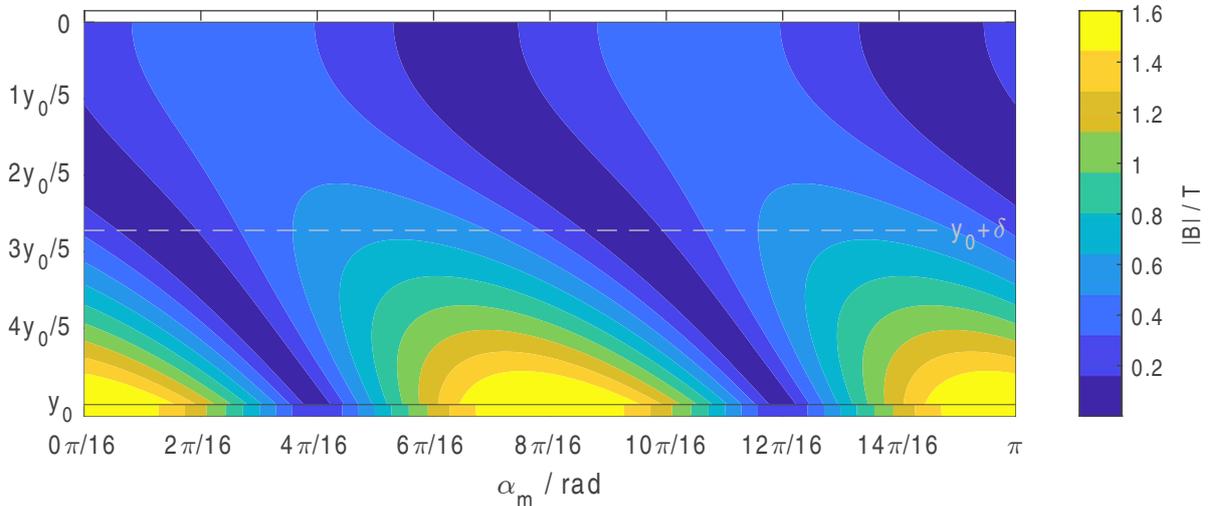
Die Luftspaltflussdichte ist ausschlaggebend für die Sättigung der Maschine – Je höher ihr Spitzenwert, desto mehr Fluss wird in der Maschine geführt und desto mehr Fluss dringt in das Gehäuse ein. Abbildung 5.1 zeigt die auftretenden Gehäuseverluste der Vergleichsmaschinen M1-M5 bei variiertem Luftspaltflussdichte bei einer Frequenz. Es sei angemerkt, dass, wie in Tabelle 3.3 ersichtlich, teilweise deutlich höhere Flussdichten vom Berechnungsmodell ausgewertet werden, als in den Maschinen im Betrieb auftreten.



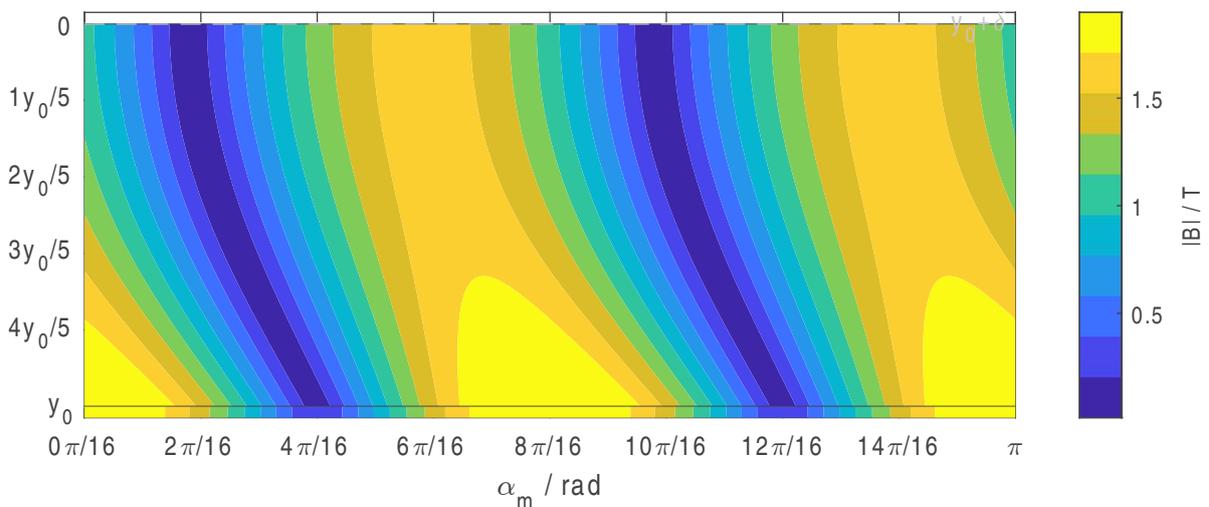
**Abb. 5.1:** Gehäuseverluste in Abhängigkeit der Luftspaltflussdichte und bezogen auf die jeweilige Bemessungsleistung

Die Ergebniskurven weisen ein exponentielles Verhalten auf, das jedoch unter anderem von den Magnetisierungskennlinien modifiziert ist. Die Ergebniskurve von M4 weist in Abbildung 5.1 oberhalb von  $1,215 T$  eine andere Steigung auf als unterhalb. Bei näherer Untersuchung zeigt sich, dass die Eindringtiefe an diesem Punkt die Gehäusedicke erreicht. Unterhalb von  $\hat{B}_L = 1,215 T$  ist ein am äußeren Gehäuserand liegender Streifen ohne signifikante Flussdichte (bezüglich der Verlustdichte). Dieser Streifen wird also mit steigender Eindringtiefe (einhergehend mit steigender Luftspaltflussdichte) kleiner.

Das heißt, dass nicht nur die Verlustdichte (wegen höherer Flussdichte im Gehäuse) steigt, sondern auch das Volumen, in dem signifikante Verluste auftreten, gleichzeitig größer wird. Oberhalb von  $\hat{B}_L = 1.215 \text{ T}$  klingt der Betrag der Flussdichte im Gehäuse nur noch geringfügig zum Gehäuserand hin ab, sodass die Verluste nur noch durch die steigende Verlustdichte zunehmen.



**Abb. 5.2:** Betrag der Flussdichte über ein Polpaar im Gehäuse von M4 ( $\hat{B}_L = 1.0 \text{ T}$ ,  $f_1 = 62 \text{ Hz}$ ,  $t = 0 \text{ s}$ )



**Abb. 5.3:** Betrag der Flussdichte über ein Polpaar im Gehäuse von M4 ( $\hat{B}_L = 1.215 \text{ T}$ ,  $f_1 = 62 \text{ Hz}$ ,  $t = 0 \text{ s}$ )

Die Abbildungen 5.2 und 5.3 wurden zwar, um die gesamte Gehäusedicke übersichtlich darzustellen, dem kartesischen Modell aus Abschnitt 4.1.2 entnommen, liefern durch die ähnlichen Ergebnisse (siehe Abbildung 4.17) jedoch einen vergleichbaren Einblick in die Feldsituation.

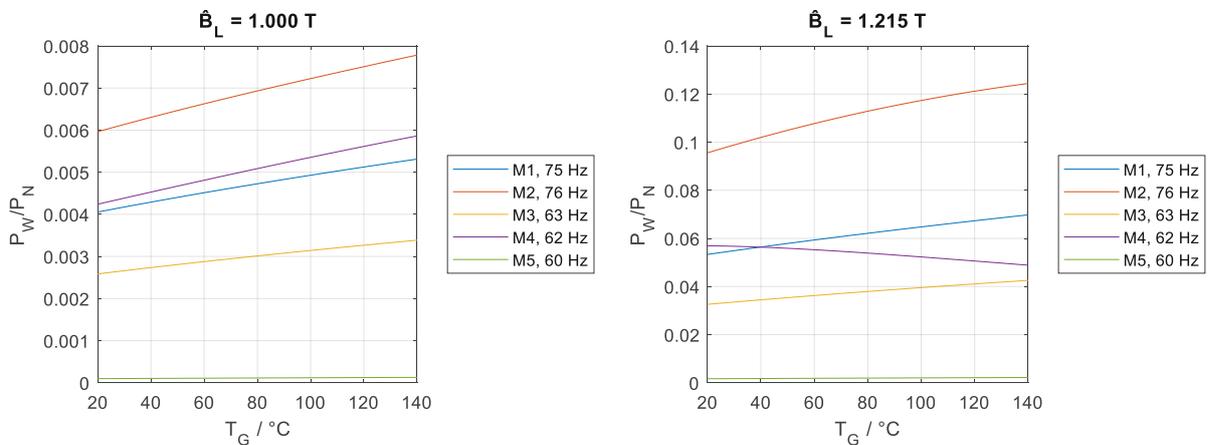
In Abbildung 5.2 ist der Betrag der Flussdichte im Gehäuse von M4 bei einer Luftspaltflussdichte unterhalb von  $1.215 \text{ T}$  dargestellt. Hier ist der Streifen nahe der Gehäu-

seaußenkante ersichtlich, der, bezüglich der Gehäuseverluste, keinen signifikanten Fluss führt: An  $y_0 + \delta$  ist der Maximalwert der Flussdichte nur noch etwa 37% des Maximalwerts der Flussdichte an  $y_0$  und da  $P_W \sim B^2$  gilt, sind die Verluste nur etwa 14% der Verluste am Übergang von Stator zu Gehäuse. Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 5.3 ebenso das Gehäuse von M4, jedoch bei  $\hat{B}_L = 1.215$  T. Hier kann erkannt werden, dass die Eindringtiefe gleich der Gehäusedicke ist und die Maxima der Flussdichte am äußeren Gehäuserand nur geringfügig kleiner sind als die Flussdichte-Maxima am inneren Gehäuserand.

Der direkte Vergleich von Abbildung 5.2 und Abbildung 5.3 zeigt außerdem den bereits erwähnten Zusammenhang zwischen Eindringtiefe und Dauer des Diffusionsvorgangs, hier jedoch bei konstantem  $\omega$  (und konstantem  $\sigma$ ). Die kleinere Luftspaltflussdichte bei Abbildung 5.2 hat eine größere Permeabilitätszahl und deshalb eine kleinere Eindringtiefe zur Folge. Mit sinkender Eindringtiefe diffundiert das magnetische Feld langsamer in das Gehäuse, wie z.B. an der Schräge der 0 T Bereiche erkennbar ist.

Es sei erwähnt, dass in Abbildung 5.1 bei M2 ebenfalls ein ähnliches Verhalten auftritt, allerdings bei  $\hat{B}_L = 1.307$  T. Bei dieser Luftspaltflussdichte tritt auch bei M2 das eben Erklärte (Eindringtiefe gleich Gehäusedicke, Verlustvolumen bleibt oberhalb dieser Flussdichte näherungsweise gleich, Verluste steigen nur noch durch höhere Flussdichte selbst) ein.

## 5.2 Gehäusetemperatur



**Abb. 5.4:** Gehäuseverluste bei  $\hat{B}_L = 1.0$  T (links) und  $\hat{B}_L = 1.215$  T (rechts), jeweils in Abhängigkeit der Gehäusetemperatur und bezogen auf die jeweilige Bemessungsleistung

Steigt die Temperatur des Gehäuses an, so vermindert sich die Leitfähigkeit des Materials und dadurch erhöht sich laut Gleichung 4.16 die Eindringtiefe, was sich auf die radiale Abhängigkeit der magnetischen Vektorpotentiale auswirkt. Gleichzeitig weist aber laut Gleichung 4.5 die lokale Verlustdichte  $\sigma$  als Faktor auf und wird somit mit einer kleineren Zahl skaliert.

Abbildung 5.4 zeigt den Einfluss der Gehäusetemperatur bei zwei unterschiedlichen Luftspalt-Flussdichten. Links ist  $\hat{B}_L = 1 \text{ T}$  und dabei ist erkennbar, dass die steigende Temperatur (bzw. sinkende Leitfähigkeit) einen Anstieg der Gehäuseverluste zur Folge hat. Das zusätzliche „Verlustvolumen“, das aus der größeren Eindringtiefe wirksam ist, überwiegt hier die Änderung der Skalierung, die  $\sigma$  in Gleichung 4.5 bewirkt. Im rechten Teil von Abbildung 5.4 ist  $\hat{B}_L = 1.215 \text{ T}$ , was (nur) für M4 bedeutet, dass die Eindringtiefe gleich der Gehäusedicke ist, bzw. die Flussdichte am Gehäuserand nur noch wenig abgeschwächt ist im Vergleich zum Übergang von Stator zu Gehäuse. Hier wirkt sich die Veränderung der Eindringtiefe weniger aus als die Veränderung der Leitfähigkeit selbst, sodass die Gehäuseverluste sinken.

Solange die Eindringtiefe kleiner als die Gehäusedicke ist, steigen die Verluste mit zunehmender Temperatur an, während sie mit steigender Temperatur sinken, sobald die Eindringtiefe größer als die Gehäusedicke ist.

### 5.3 Frequenz

Traktionsantriebe werden in der Regel für drehzahlvariable Aufgaben eingesetzt. Somit werden sie auch nicht an einer festen Grundschwingungsfrequenz der angelegten Spannung betrieben, sondern werden je nach Drehzahl mit einer anderen Frequenz gespeist. Für diese Aufgabe kann eine U/f-Steuerung verwendet werden, bei der das Verhältnis zwischen angelegter Spannung  $U$  und Grundschwingungsfrequenz  $f_1$  (beinahe) konstant gehalten wird, um den magnetischen Fluss in der Maschine konstant auf Nennfluss-Niveau zu halten. Das Verhältnis U/f wird lediglich bei kleinen Frequenzen nicht konstant gehalten, da die Spannung ein Mindestniveau zur Kompensation des Spannungsabfalls am Statorwiderstand nicht unterschreitet. Diese kleinen Frequenzen werden hier allerdings vernachlässigt bzw. nicht berücksichtigt und so von einem stets konstanten Verhältnis ausgegangen.

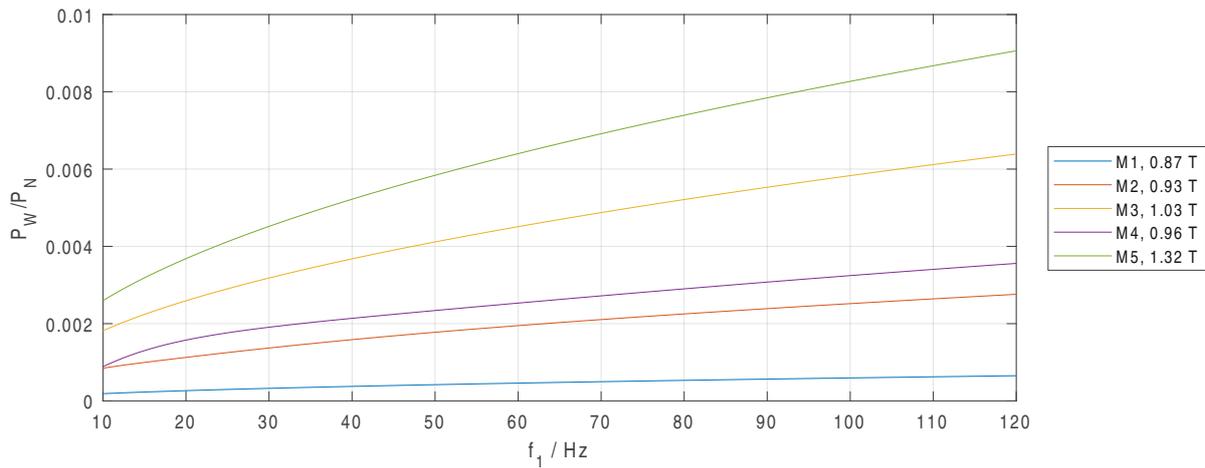
Dieser Nennfluss bzw. diese Nennflussdichte im Luftspalt wird anhand der Bemessungsdaten (siehe Tabelle 3.1), der Schlussrechnung aus Gleichung 5.1 und der am nächsten an den Bemessungsdaten liegenden Betriebspunkte aus Tabelle 3.3 berechnet. Die dafür verwendeten Betriebspunkte sowie die Ergebnisse sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

$$\hat{B}_{L,N} = \frac{U_N}{f_N} \frac{f_{1,x}}{U_x} \hat{B}_{L,x} \quad (5.1)$$

Diese Luftspaltflussdichten werden für die Auswertung der Gehäuseverluste in Abhängigkeit von  $f_1$  verwendet. Wird angenommen, dass die Vergleichsmaschinen auch über ihre jeweilige Bemessungsspannung hinaus betrieben werden können, ohne dass sie Schaden nehmen, kann auch über  $f_N$  hinaus die Nennflussdichte konstant gehalten werden und so ergeben sich die Gehäuseverluste laut Abbildung 5.5. Hierbei wird also bewusst nicht automatisch in den Feldschwächbetrieb übergegangen, wie es bei einer U/f-Steuerung üblich wäre, um darzustellen, wie sich die Verluste bei gleicher Flussdichte aber höherer Frequenz verhalten würden. Dabei kann erkannt werden, dass die Gehäuseverluste mit steigender Frequenz ähnlich einer Wurzelfunktion ebenso steigen.

**Tab. 5.1:** Bemessungsflussdichten als Ergebnis der Schlussrechnung aus den Vergleichsdaten

Maschine	$U_N / \text{V}$	$f_N / \text{Hz}$	$U_x / \text{V}$	$f_{1,x} / \text{Hz}$	$\hat{B}_{L,x} / \text{T}$	$\hat{B}_{L,N} / \text{T}$
M1	500	85.0	500	75.0	0.99	0.87
M2	450	90.0	450	90.0	0.93	0.93
M3	728	110.0	863	131.0	1.03	1.03
M4	415	60.7	424	62.0	0.96	0.96
M5	354	28.0	354	28.0	1.32	1.32



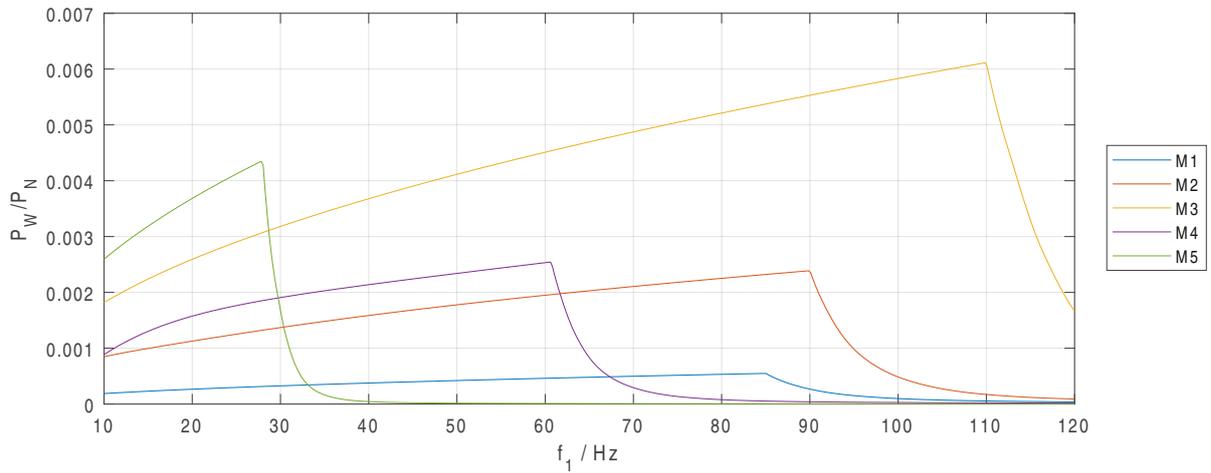
**Abb. 5.5:** Gehäuseverluste bei Nominalflussdichte (ohne Feldschwächbetrieb) in Abhängigkeit der speisenden Grundschwingungsfrequenz  $f_1$

Wird der Feldschwächbetrieb ab  $f_1 = f_N$  berücksichtigt, so muss oberhalb von  $f_N$  die Luftspaltflussdichte angepasst werden, da die angelegte Spannung die Bemessungsspannung nicht übersteigt und so das Verhältnis  $U/f$  nicht mehr konstant ist. Vereinfacht gesagt berechnet sich die Flussdichte für einen Betriebspunkt nach Gleichung 5.2 bzw. der konstante Faktor zur Bestimmung der Flussdichte nach Gleichung 5.3. Damit lässt sich die Flussdichte im Feldschwächbetrieb nach Gleichung 5.4 berechnen – Die Flussdichte ist also bis zur Bemessungsspannung bzw. zur -frequenz konstant die Nennflussdichte, während sie im Feldschwächbetrieb mit  $1/f_1$  abnimmt.

$$\frac{U}{f_1} = k \hat{B}_L \quad (5.2)$$

$$\Rightarrow k = \frac{U}{f_1 \hat{B}_L} = \frac{U_N}{f_N \hat{B}_{L,N}} \quad (5.3)$$

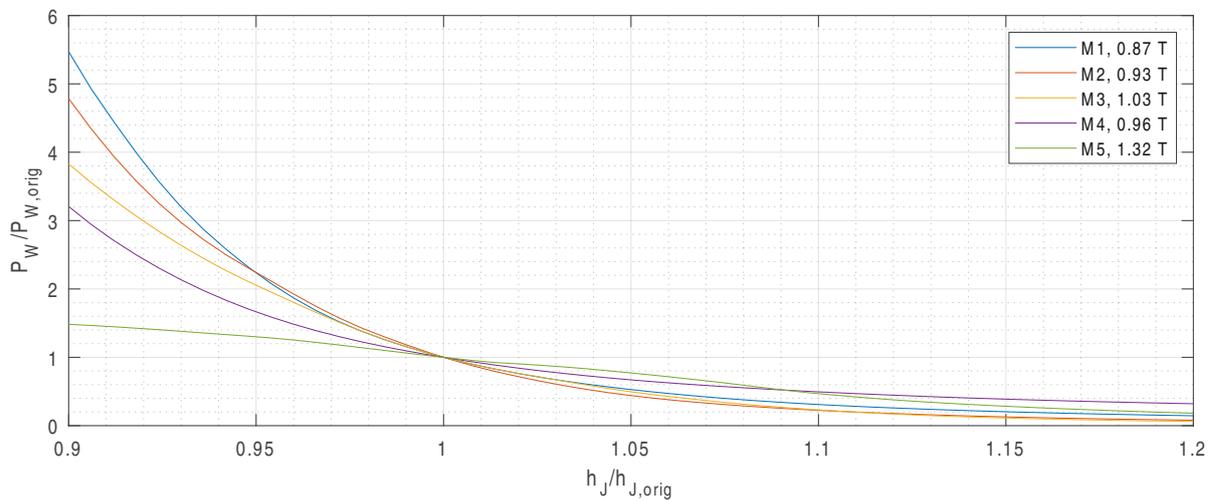
$$\hat{B}_L = \frac{U}{f_1 k} = \frac{U}{f_1} \frac{f_N \hat{B}_{L,N}}{U_N} = \begin{cases} \hat{B}_{L,N} & \text{für } f_1 \leq f_N \\ \frac{f_N}{f_1} \hat{B}_{L,N} & \text{für } f_1 > f_N \end{cases} \quad (5.4)$$



**Abb. 5.6:** Gehäuseverluste in Abhängigkeit der speisenden Grundschwingungsfrequenz  $f_1$ , bei Nominalflussdichte bis  $f_N$ , mit Berücksichtigung des Feldschwächbetriebs ab  $f_N$

Unter Berücksichtigung des Feldschwächbetriebs können die Gehäuseverluste in Abbildung 5.6 visualisiert werden. Hier fällt auf, dass die Reduktion der Flussdichte die Verluste deutlich verkleinert – dieser Zusammenhang ist bereits aus Abbildung 5.1 bekannt – und die höheren Verluste durch die höhere Frequenz einen viel kleineren Anteil ausmachen, sodass die Verluste im Feldschwächbetrieb insgesamt signifikant kleiner werden.

## 5.4 Jochhöhe



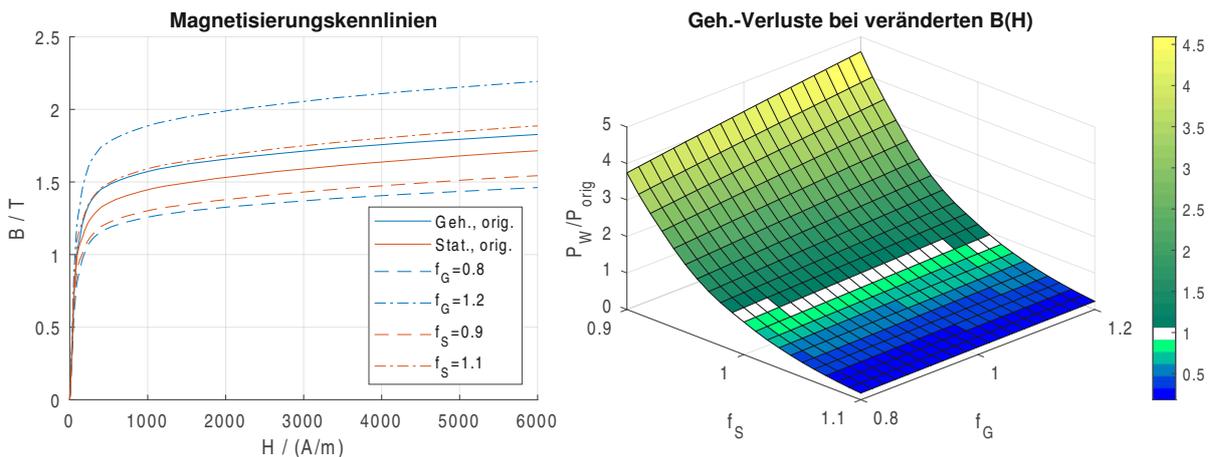
**Abb. 5.7:** Gehäuseverluste bei Veränderung der Jochhöhe  $h_J$ , jeweils bei Nominalflussdichte

Angenommen der Bauraum für die elektrische Maschine wird geringfügig verändert und dieser Änderung soll nachgekommen werden, indem die Jochhöhe im Stator angepasst wird. Die Außendurchmesser von Stator und Gehäuse sowie der Faktor  $f_{BJ/BZ}$  werden

dadurch beeinflusst. Eine größere Jochhöhe hat einerseits eine kleinere mittlere Jochflussdichte, andererseits einen größeren Gehäuseumfang zur Folge (vice versa für eine reduzierte Jochhöhe). Wie Abbildung 5.7 zeigt, ist die Veränderung der mittleren Jochflussdichte der maßgebliche Faktor. Dies war, besonders im Hinblick auf Abbildung 5.1, zu erwarten, da der Umfang linear von der Jochhöhe beeinflusst wird, sich die Gehäuseverluste jedoch proportional zu einer Exponentialfunktion hinsichtlich der Flussdichte verhalten.

## 5.5 Magnetisierungskennlinie

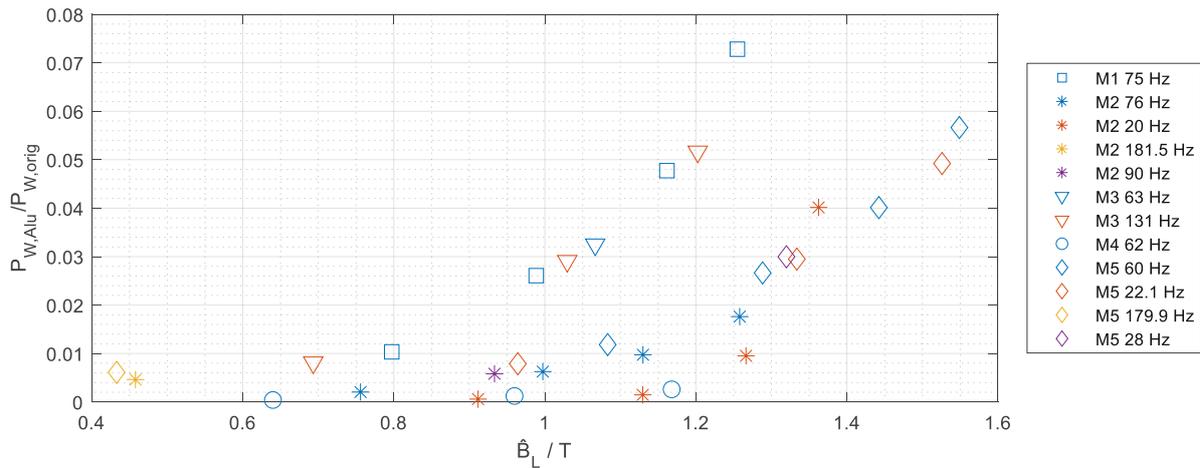
Verschiedene Werkstoffe haben unterschiedliche magnetische Eigenschaften und auch verschiedene Produktionschargen des gleichen Produkts können Unterschiede zueinander aufweisen. Hier wird nun untersucht, welche Auswirkungen Variationen der Magnetisierungskennlinien auf die Gehäuseverluste haben. Dafür werden die Magnetisierungskennlinien aus Abschnitt 3.1 bzw. von Abbildung 3.2 mit einem Faktor modifiziert. Dabei wird jeder Punkt der Kennlinie für das Gehäuse (Baustahl) mit  $f_G \in [0.8, 1.2]$  bzw. jeder Punkt der Kennlinie für den Stator (Elektroblech) mit  $f_S \in [0.9, 1.1]$  multipliziert. Die originalen und die maximal veränderten Kurven sind im linken Teil von Abbildung 5.8 ersichtlich.



**Abb. 5.8:** Originale und mit jeweiligen maximalen bzw. minimalen Faktoren angepasste Magnetisierungskennlinien für Gehäuse und Stator (links), sowie die Ergebnisse der Berechnung bei veränderten  $B(H)$ -Kennlinien bezogen auf die Ergebnisse bei unveränderten Magnetisierungskennlinien, jeweils von M1 bei  $U = U_N$  und  $f_1 = 75$  Hz (rechts)

Wird die Auswertung bei veränderten  $B(H)$ -Kennlinien mit M1 bei  $U = U_N$  und  $f_1 = 75$  Hz durchgeführt und auf die Auswertung von M1 im gleichen Betriebspunkt bei originalen Magnetisierungskennlinien ( $f_S = f_G = 1$ ) bezogen, so ergibt sich der rechte Teil von Abbildung 5.8. Es wird ersichtlich, dass die Veränderung der Permeabilität des Gehäuses wenig Einfluss auf die Gehäuseverluste hat, im Gegensatz zur Veränderung der Permeabilität des Stators. Sinkt die Permeabilitätszahl des Stators, so steigen

die Verluste im Gehäuse. Dies lässt sich mithilfe der Sprungbedingung der tangentialen Feldstärke erklären. Die maximale tangentielle Flussdichte am äußeren Statorrand ist festgelegt durch die Luftspaltflussdichte und die geometrischen Gegebenheiten. Sinkt die Permeabilitätszahl vom Stator, so steigt die magnetische Feldstärke am Statorrand. Da hier keine Flächenstromdichte vorhanden ist, ist die tangentielle Feldstärke am inneren Gehäuserand gleich der vom äußeren Statorrand – also ebenfalls größer wenn die Permeabilitätszahl des Stators sinkt. Eine höhere Feldstärke im Gehäuse hat eine kleinere Permeabilitätszahl des Gehäuses und eine größere Eindringtiefe zur Folge, sodass sowohl das Verlustvolumen als auch die Verlustdichte steigen. Umgekehrtes gilt für eine erhöhte Permeabilität des Stators. Die größte Veränderung der Gehäuseverluste entsteht, wenn sich die Kennlinien voneinander entfernen ( $f_S < 1$ ,  $f_G > 1$ ).



**Abb. 5.9:** Gehäuseverluste eines Aluminiumgehäuses bezogen auf die Verluste des originalen Gehäuses, jeweils an den Betriebspunkten der Vergleichsdaten

Im Rahmen dieser Arbeit waren die Materialien der Gehäuse Eisen bzw. Stahl. Für die Gehäusekonstruktion könnte aber unter Umständen auch Aluminium infrage kommen, welches ein paramagnetisches Material mit der konstanten Permeabilitätszahl  $\mu_r = 1.00002$  ist ([2]). Die elektrische Leitfähigkeit von Aluminium ist  $\sigma_{Al} = 35 \text{ MS/m}$  und der Temperaturkoeffizient zur Anpassung der Leitfähigkeit (siehe Gleichung 3.5) ist  $\kappa_{Al} = 0.0041/\text{K}$  (beides laut [6]). Würden alle fünf Vergleichsmaschinen ihre jeweilige Gehäusekonstruktion behalten, aber Aluminium statt Stahl verwendet werden, so würden die Gehäuseverluste sinken, wie Abbildung 5.9 zeigt. Natürlich kann das Material meist nicht ohne Weiteres ausgetauscht werden, da diese unterschiedlichen Werkstoffe verschiedene mechanische Eigenschaften aufweisen. Dennoch wird aus Abbildung 5.9 erkenntlich, dass die höhere Leitfähigkeit (Faktor 5.3 zu Baustahl bzw. 6.7 zu Sphäroguss) und deutlich geringere Permeabilitätszahl (Faktor sättigungsabhängig: wird kleiner je höher die Sättigung) von Aluminium kleinere Verluste zur Folge haben. Bei höherer Luftspaltflussdichte bzw. größerer Sättigung der Maschine und des Gehäuses sinkt die Permeabilitätszahl von Eisen laut der Magnetisierungskennlinie. Je höher die Sättigung wird, desto kleiner wird der Unterschied der Permeabilitätszahl von Eisen und von Aluminium. Dies erklärt die Verkleinerung des Abstands zwischen  $P_{W,Alu}$  und  $P_{W,orig}$  im rechten Bereich von Abbildung 5.9.

## 6 Fazit

Im Zuge dieser Masterarbeit wurden drei analytische Berechnungsmodelle erstellt, welche die Wirbelstromverluste im Gehäuse einer ASM anhand von geometrischen, materialbeschreibenden und betriebspunktabhängigen Parametern berechnen. Die Maschine wurde dabei in vier Schichten (Rotor, Luftspalt, Stator und Gehäuse) aufgeteilt und die Parameter in jeder Schicht wurden als homogen, linear und isotrop angenommen. Abgesehen vom Gehäuse wurden alle Schichten als nichtleitend definiert. Für Stator und Gehäuse wurde jeweils eine Magnetisierungskennlinie hinterlegt, um die sättigungsabhängigen Permeabilitätszahlen zu bestimmen, welche nach ihrer Bestimmung für die Auswertung des Betriebspunkts konstant gehalten wurden. Die ersten beiden Modelle verwenden kartesische Koordinaten, während das dritte Modell zylindrische Koordinaten verwendet, um das ebene Feldproblem zu lösen.

Diese drei Modelle wurden anhand von fünf Vergleichsmaschinen bei insgesamt 30 Betriebspunkten mit den Ergebnissen von FE-Simulationen der Gehäuseverluste der gleichen Vergleichsmaschinen und Betriebspunkte verglichen. Dabei konnten das zweite und dritte Modell unabhängig von der Maschinengeometrie passende Ergebnisse liefern, während das erste Modell nur für zwei von fünf Vergleichsmaschinen Verlustleistungen zurückgab, welche vergleichbar mit den FE-Ergebnissen waren. Das dritte Modell berücksichtigt, im Vergleich zum zweiten Modell, durch den Ansatz in zylindrischen Koordinaten auch die Krümmung des Aufbaus, sodass dieses Modell den Sachverhalt am besten abbildet und auch die kleinsten Abweichungen zu den Vergleichsdaten zeigte. Wenn nicht anders spezifiziert, ist von nun an lediglich von dem dritten Berechnungsmodell (mit zylindrischen Koordinaten) die Rede.

Es konnte nachgewiesen werden, dass das Berechnungsmodell Gehäuseverluste lieferte, welche auf die jeweiligen Ergebnisse der FE-Simulationen bezogen mit dem offenen Intervall  $P_W \in (P_{FE}/2, 2P_{FE})$  beschrieben werden können. Die Abweichung des Modells konnte also mit dem Faktor zwei angegeben werden, was innerhalb der anfangs gewünschten Genauigkeit (Faktor drei) liegt. Weiters wurde angeführt, dass die benötigte Zeit zur Berechnung der Gehäuseverluste in einer MATLAB Implementierung unter 1 ms pro Betriebspunkt lag. Diese kurze Berechnungsdauer erfüllt das anfangs gestellte Ziel von weniger als 10 ms pro Betriebspunkt.

Das Berechnungsmodell wurde nach der Verifizierung mit den Vergleichsdaten verwendet, um den Einfluss verschiedener Parameter zu untersuchen. Dabei wurde gezeigt, wie sich die Gehäuseverluste verhalten, wenn die Luftspaltflussdichte, die Gehäusetemperatur, die Frequenz (inkl. Feldschwächbetrieb), die Jochhöhe des Stators oder das Material von Gehäuse und Stator variiert werden.

Für zukünftige Arbeiten bieten sich vor allem die Verfeinerung und Erweiterung des

Modells an:

- Die vier Schichten dieses Berechnungsmodells, insbesondere das Gehäuse, könnten in weitere Subschichten unterteilt werden, um die Vereinfachung durch große Schichten mit konstanten Parametern zukünftig zu reduzieren.
- Der Einfluss der Nuten sowie der Kühllöcher könnte weiter untersucht und in die Modellierung eingebaut werden.
- Die Berücksichtigung von nicht-Leerlauf Betriebspunkten einer ASM, also Betriebspunkte mit Relativbewegung zwischen dem Luftspaltfeld und dem Rotor, würde die Anwendbarkeit des Berechnungsmodells erhöhen.
- Um das Berechnungsmodell auch für dynamische Vorgänge verwenden zu können, könnten auch transiente Effekte mitberücksichtigt werden. Dadurch würden die Gehäuseverluste bei Fahrzyklen mit hoher Dynamik akkurater abgebildet werden.
- Eine mögliche Erweiterung ist die Modellierung der Verluste in den Endblechen und Pressplatten, welche sich an den axialen Enden des magnetischen Aktivteils befinden. Naheliegend ist, diese Modellierung aufbauend auf den Ergebnissen des ebenen Feldproblems von dieser Arbeit zu gestalten.

Das in dieser Arbeit erstellte Modell könnte auch für Optimierungsanalysen hinsichtlich der Auslegung einer elektrischen Maschine verwendet werden. Zusätzlich könnte die Auswertung dieses Berechnungsmodells beschleunigt werden, wenn die Implementierung des Algorithmus in einer kompilierten Programmiersprache wie C oder Fortran geschieht, anstatt, wie im Zuge dieser Arbeit, in einer interpretierenden Sprache (MATLAB).

# Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz und I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York, 1972, ISBN: 0-486-61272-4.
- [2] Adeos Media GmbH. „Permeabilitätszahl, Wertetabellen.“ Abgerufen am 09.04.2025. Adresse: <https://www.formel-sammlung.de/formel-Permeabilit%C3%A4tszahl-3-25-148.html>.
- [3] D. E. Amos, „ALGORITHM 644, A Portable Package for Bessel Functions of a Complex Argument and Nonnegative Order,“ *ACM Transactions on Mathematical Software*, Jg. 12, Nr. 3, S. 265–273, 1986. DOI: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/7921.214331>.
- [4] U. Beckert und R. Schulze, „Wirbelstromverluste in den Permanentmagneten von hochoberflächigen PM-Synchronmaschinen,“ *Internationales Wissenschaftliches Kolloquium*, Jg. 51, 2006, ISBN: 3-938843-15-2.
- [5] E. Bolte, *Elektrische Maschinen, Grundlagen · Magnetfelder · Erwärmung · Funktionsprinzipien · Betriebsarten · Einsatz · Entwurf · Wirtschaftlichkeit*. Springer Vieweg Berlin, Heidelberg, 2018, ISBN: 978-3-662-54687-1. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-54688-8>.
- [6] HUG Technik und Sicherheit GmbH. „Metallische Werkstoffe, Physikalische Eigenschaften.“ Abgerufen am 12.12.2024. Adresse: <https://www.tabelle.info/metall.htm>.
- [7] LUMITOS AG. „Wärmeleitfähigkeit.“ Abgerufen am 12.12.2024. Adresse: [https://www.chemie.de/lexikon/W%C3%A4rmeleitf%C3%A4higkeit.html#:~:text=Die%20W%C3%A4rmeleitf%C3%A4higkeit%20ist%20also%20das,m\)%20ist%20eine%20temperaturabh%C3%A4ngige%20Materialkonstante..](https://www.chemie.de/lexikon/W%C3%A4rmeleitf%C3%A4higkeit.html#:~:text=Die%20W%C3%A4rmeleitf%C3%A4higkeit%20ist%20also%20das,m)%20ist%20eine%20temperaturabh%C3%A4ngige%20Materialkonstante..)
- [8] F. Müllner, *FE-Simulation: Vergleich FE-Standardmodell mit Messungen, TSA016499*. Traktionssysteme Austria GmbH, 2017.
- [9] W.-R. Novender, *Vorlesungsskript zu Elektrische Maschinen*. Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich Informationstechnik-Elektrotechnik-Mechatronik, 2023.
- [10] A. Prectl, *Vorlesungen über die Grundlagen der Elektrotechnik*. Springer Wien, 2006, Bd. 1, ISBN: 978-3-211-30418-1.
- [11] A. Prectl, *Vorlesungen über die Grundlagen der Elektrotechnik*. Springer Wien, 2008, Bd. 2, ISBN: 978-3-211-72455-2.

- [12] A. Prechtl, *Vorlesungen über Elektrodynamik*. Technische Universität Wien, Institut für Elektrodynamik, Mikrowellen- und Schaltungstechnik, 2010.
- [13] J. Freitas dos Santos u. a., „Digital Twin-Based Monitoring System of Induction Motors Using IoT Sensors and Thermo-Magnetic Finite Element Analysis,“ *IEEE Access*, Jg. PP, S. 1–1, Jan. 2022. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3232063.
- [14] E. Schmidt, *Unterlagen zur Vorlesung Elektrische Maschinen, LVA: 372.025*. Technische Universität Wien, Institut für Energiesysteme und elektrische Antriebe, 2022.
- [15] B. Schnizer, *Analytische Methoden der Angewandten Theoretischen Physik, Ergänzungen zu speziellen Funktionen: Besselfunktionen*. 2013, Kap. 26, Abgerufen am 05.01.2025. Adresse: <https://itp.tugraz.at/~schnizer/AnalyticalMethods/AnMe26.pdf>.
- [16] Stahlhandel Gröditz GmbH. „1.0570 (S355J2G3) Werkstoffdatenblatt.“ Abgerufen am 12.12.2024. Adresse: <https://www.stahlportal.com/lagervorrat/10570-s355j2g3-geschmiedet-normalisiert/>.
- [17] Stauberstahl GmbH. „1.0570 / S355J2+N / ST 52-3, Datenblatt, Eigenschaften, Zusammensetzung, Bearbeitungsmöglichkeiten.“ Abgerufen am 12.12.2024. Adresse: <https://www.stauberstahl.com/werkstoffe/10570-werkstoff-datenblatt/>.
- [18] C. P. Steinmetz, *Theory and Calculation of Electric Circuits* (Electrical engineering library). McGraw-Hill, 1917. Adresse: <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.162619/mode/2up>.
- [19] vonRoll casting AG. „Gusseisen mit Kugelgraphit.“ Abgerufen am 12.12.2024. Adresse: <https://www.vonroll-casting.ch/de/sphaeroguss>.
- [20] D. Waldhör und H. Kosina, *Skriptum zur Lehrveranstaltung 360.051 Elektrodynamik*. Technische Universität Wien, Institut für Mikroelektronik, 2024.
- [21] A. Wolfschluckner, *Analytische Berechnung der Wirbelstromverluste in den Magneten einer PSM*. Diplomarbeit, Technische Universität Wien, 2013.