



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology



## Diplomarbeit

# Einflüsse eines Schwingungstilgers auf das laterale Stabilitätsverhalten eines Motorrads

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Ingenieur (Dipl.-Ing. oder DI)

eingereicht an der Technischen Universität Wien

**Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften**

von

**Fabian SCHWARZINGER**

Mat.Nr.: 11914665

unter der Leitung von

**Senior Lecturer Dipl.-Ing. Dr.techn. Florian Klinger**

Institut für Mechanik und Mechatronik, E325

mit Mitbetreuung von

**Projektassistent Dipl.-Ing. Christoph Ott**

Institut für Mechanik und Mechatronik, E325

Wien, Juni 2025

---

Fabian Schwarzinger

### *Eidesstattliche Erklärung*

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde.

Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.

Das Thema dieser Arbeit wurde von mir bisher weder im In- noch Ausland einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Arbeit stimmt mit der von den Begutachterinnen/Begutachtern beurteilten Arbeit überein.

Wien, Juni 2025

---

Fabian Schwarzinger

---

## Kurzfassung

Charakteristische Schwingungen zählen seit jeher zu den zentralen Herausforderungen in der Fahrdynamik von Motorrädern. Bestimmte Eigenmoden neigen in spezifischen Geschwindigkeitsbereichen zu instabilem Verhalten bezüglich der aufrechten Geradeausfahrt. Bei sehr geringen oder hohen Geschwindigkeiten betrifft dies den Weave-Mode, der einer niederfrequenten Pendel- bzw. Slalombewegung des gesamten Fahrzeugs entspricht. Die zweite kritische Schwingungsform ist der Wobble-Mode, häufig auch als Lenkungsflattern bezeichnet. Dieser höherfrequente Mode betrifft hauptsächlich die Lenkbaugruppe und wird meist im Bereich mittlerer, im Alltag üblicher Geschwindigkeiten instabil. Abhilfe können konstruktive Maßnahmen, angepasste Reifenparameter oder zusätzliche passive bzw. aktive Elemente schaffen. Ein häufig beobachteter Zielkonflikt besteht jedoch darin, dass eine Verbesserung der Stabilität eines Modes meist negative Auswirkungen auf den anderen zur Folge hat.

Die vorliegende Arbeit untersucht das Potential passiver Schwingungstilger zur Stabilisierung von Weave und Wobble. Als Grundlage dient ein linearisiertes Motorradmodell, welches mit einem linearen Reifenmodell inklusive transientem Kraftaufbau vervollständigt wird. Dieses Modell basiert auf bewährten Ansätzen aus der Literatur.

Im Zuge dieser Arbeit werden drei Tilgervarianten betrachtet: ein rotatorischer Tilger am Vorderrahmen (Lenkbaugruppe), ein rotatorischer Tilger am Hauptrahmen, sowie ein translatorischer Tilger in lateraler Richtung am Hauptrahmen. Das Ausgangsmodell wird jeweils um einen Tilger ergänzt und die resultierenden Bewegungsgleichungen werden einer detaillierten Stabilitätsanalyse unterzogen. Dabei werden das Stabilisierungspotential der einzelnen Varianten in Bezug auf Weave und Wobble sowie deren Parameterabhängigkeiten und Sensitivitäten systematisch untersucht.

Mit dem rotatorischen Tilger an der Lenkbaugruppe kann der Wobble-Mode stabilisiert werden, ohne die Stabilität des Weave-Modes negativ zu beeinflussen. Der translatorische Tilger am Hauptrahmen ermöglicht je nach Abstimmung eine deutliche Verbesserung beider Moden, wobei sich bei einer Abstimmung auf Weave sogar ein positiver Einfluss auf Wobble zeigt. Darüber hinaus wird auch die Wirkung kombinierter Tilger untersucht, um deren gemeinsames Potential zur gleichzeitigen Verbesserung beider Schwingungsformen aufzuzeigen.

Abschließend erfolgt eine nichtlineare Betrachtung anhand eines numerischen Mehrkörpermodells, bei dem nur die translatorische Tilgervariante weiterverfolgt wird. Hierbei werden real auftretende Effekte, wie beispielsweise Reibung oder nichtlineare Dämpfung, berücksichtigt. Anhand der Ergebnisse lassen sich Rückschlüsse auf die praktische Umsetzbarkeit des Tilgers, sowie auf eine mögliche experimentelle Untersuchung ziehen.

---

## Abstract

Characteristic vibrations are a long-standing challenge in the field of motorcycle dynamics. Certain eigenmodes tend to become unstable within specific speed ranges, compromising the vehicle's ability to maintain upright straight motion. At very low or high speeds, the weave mode, a low-frequency oscillation involving the entire vehicle, can become unstable. At medium, everyday speeds, instability typically occurs in the wobble mode, a higher-frequency motion affecting mainly the steering assembly. Stabilisation measures include design modifications, adjusted tire parameters, and additional passive or active components. However, improvements to one mode often compromise the stability margin of the other, presenting a design trade-off.

This thesis investigates the potential of passive dynamic vibration absorbers to stabilise weave and wobble modes. The analysis is based on a linearised motorcycle model extended by a linear tire model including transient force buildup, following well-established approaches from the literature.

Three absorber configurations are considered: a rotational absorber at the front frame (steering assembly), a rotational absorber at the main frame, and a translational absorber in the lateral direction of the main frame. The model is individually extended by each absorber, and the resulting equations of motion are subjected to a detailed stability analysis. The stabilisation potential of each variant concerning weave and wobble is systematically evaluated.

The rotational absorber at the steering assembly proves effective in stabilising the wobble mode without negatively affecting the weave mode. The translational absorber at the main frame enables significant improvement of one mode, and when tuned toward weave, even a positive influence on wobble is observed. In addition, combinations of absorbers are examined to evaluate their joint potential for simultaneous stability improvement of both modes.

Finally, a nonlinear analysis is conducted using a numerical multibody simulation, focusing exclusively on the translational absorber. Realistic effects such as friction and nonlinear damper characteristics are considered. The results provide insight into the practical feasibility of such absorbers and serve as a basis for potential experimental investigations.

---

## Danksagung

Zuallererst möchte ich meinen beiden Betreuern, Herrn Dipl.-Ing. Dr. techn. Florian Klinger und Herrn Dipl.-Ing. Christoph Ott, meinen herzlichen Dank aussprechen. Ihre kompetente und stets engagierte Betreuung leistete einen wesentlichen Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit. Ich danke Ihnen dafür, dass Sie mir mit konstruktiven Anmerkungen und hilfreichen Tipps stets zur Seite standen und sich immer Zeit für meine Fragen nahmen.

Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern, Margit und Peter. Ihr habt mir diesen Weg ermöglicht und mich in jeder Phase meines Studiums bestens unterstützt. Ohne euch wäre dieser Erfolg nicht möglich gewesen. Ebenso danke ich meinen Brüdern, Tobias und Philip. Seit Tag eins steht ihr mir als Brüder und beste Freunde zur Seite. Aufgrund unserer gleichen Bildungswege konntet ihr mir immer wieder wertvolle Perspektiven und Anregungen bieten. Ein großes Dankeschön geht auch an meine Freundin Lisa. Danke für die vielen aufmunternden Worte und den durchwegs positiven Zuspruch. Ich schätze sehr, dass du während der intensiven Phasen so viele Aufgaben des täglichen Lebens übernommen hast und Verständnis dafür hattest, wenn unsere gemeinsamen Tage oftmals zu kurz kamen. Es ist nicht selbstverständlich, eine so wunderbare Familie an meiner Seite zu haben und ich bin für euch alle zutiefst dankbar.

Nicht zuletzt möchte ich meinen langjährigen Studienkollegen Lukas, Fabian und Michael danken. Die Stunden des Lernens und die Vorbereitung auf Prüfungen wären ohne euch nicht nur deutlich anstrengender und weniger erfolgreich gewesen, sondern auch um vieles weniger unterhaltsam. Es war mir eine Freude diese Zeit mit euch gemeinsam zu verbringen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Danksagung</b>	<b>III</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Literaturrecherche: Motorrad-Stabilität um die aufrechte Geradeausfahrt</b>	<b>4</b>
2.1 Modellierung: Notwendige Modelleigenschaften . . . . .	4
2.2 Einflüsse von Parametervariationen . . . . .	6
2.3 Stabilisierung durch passive oder aktive Elemente . . . . .	8
<b>3 Grundlagen und Modellbildung</b>	<b>11</b>
3.1 Grundlagen der Stabilitätsuntersuchung . . . . .	11
3.2 Grundlagen Schwingungstilger . . . . .	16
3.3 Modellbildung - Basiskonfiguration . . . . .	21
3.3.1 Motorradmodell . . . . .	21
3.3.2 Reifenmodell . . . . .	24
3.3.3 Linearisierte Bewegungsgleichungen . . . . .	29
3.3.4 Modellparameter . . . . .	33
3.4 Modellbildung - mit Tilger . . . . .	35
3.4.1 Rotatorischer Tilger am Vorderrahmen . . . . .	35
3.4.2 Rotatorischer Tilger am Hauptrahmen . . . . .	37
3.4.3 Translatorischer Tilger am Hauptrahmen . . . . .	39
3.4.4 Kombinierte linearisierte Bewegungsgleichungen . . . . .	40
<b>4 Analytische Stabilitätsuntersuchung</b>	<b>44</b>
4.1 Stabilitätsanalyse der Basiskonfiguration . . . . .	44
4.2 Tilger am Vorderrahmen . . . . .	48
4.2.1 Stabilitätsanalyse . . . . .	49
4.2.2 Parametereinflüsse . . . . .	53
4.3 Tilger am Hauptrahmen . . . . .	56
4.3.1 Einfluss starrer Körper . . . . .	56
4.3.2 Rotatorischer Tilger . . . . .	58
4.3.3 Translatorischer Tilger . . . . .	62
4.4 Kombinationen von Tilgern . . . . .	65
4.5 Fazit . . . . .	68

<b>5</b>	<b>Weiterführende Untersuchung anhand eines numerischen Mehrkörpermodells</b>	<b>72</b>
5.1	Modellerweiterung und Modellvergleich . . . . .	72
5.2	Einfluss nichtlinearer Effekte . . . . .	74
5.2.1	Nichtlineare Dämpferkennlinie . . . . .	75
5.2.2	Reibung in der Linearführung . . . . .	78
5.2.3	Tilgerauslenkung und elastische Endanschläge . . . . .	80
5.3	Praktische Überlegungen . . . . .	81
5.4	Fazit . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>84</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	84
6.2	Ausblick . . . . .	86
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>87</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>89</b>
	<b>Literatur</b>	<b>90</b>

# 1 Einleitung

Motorradfahren wird von vielen Menschen als der Inbegriff von Fahrgefühl und Fahrspaß angesehen. Das Fahren von einspurigen Fahrzeugen ist jedoch eine komplexe Aufgabe, welche man meist bereits im Kindesalter in seinem Unterbewusstsein verankert. Denkt man z.B. an eine einfache Kurvenfahrt, benötigt es bekanntermaßen zuerst ein Gegenlenken, um anschließend mit passendem Rollwinkel, Lenkwinkel, sowie Haltung bzw. Position des Körpers erfolgreich durch die Kurve fahren zu können. Bei einem Automobil hingegen reicht es grundsätzlich aus, mit dem Lenkrad in die gewünschte Richtung zu lenken. In der Fahrdynamik der einspurigen Kraftfahrzeuge spielen also mehrere Zustandsgrößen eine große Bedeutung. Dies kann vor allem im Motorsport (z.B. *MotoGP*) sehr deutlich beobachtet werden. In einer gängigen Kurvenfahrt passieren die Abläufe vollkommen automatisiert und es bedarf keines großen Nachdenkens. Tritt aber nun ein plötzliches, dem Fahrer unbekanntes Manöver ein, ist die Situation eine andere. Aufgrund der komplexen Zusammenhänge der Freiheitsgrade können dabei intuitive Korrekturmaßnahmen von ungeübten Fahrern den Fahrzustand verschlechtern oder sogar einen Unfall herbeiführen.

Dies resultiert darin, dass das Unfallrisiko bei Zweirädern im Vergleich zu anderen Fortbewegungsmitteln erschreckend hoch ist. Der Jahresbericht des *European Road Safety Observatory* [1] aus dem Jahr 2024 kommt zu dem Ergebnis, dass 19 % aller Verkehrstoten Passagiere von motorbetriebenen Zweirädern wie Motorrädern und Mopeds sind. Inkludiert man auch Fahrräder sind es sogar 29 %. Stellt man dem die Statistik der zurückgelegten Kilometer pro Transportart gegenüber, zeichnet sich ein noch drastischeres Bild ab. Während wie erwähnt fast ein Drittel aller Verkehrstoten Zweirädern zugeschrieben werden können, beträgt deren zurückgelegte Strecke lediglich unter 3% der gesamt zurückgelegten Kilometer. [2]

Demnach sollten unbedingt Maßnahmen erarbeitet werden, wie das Fahren von einspurigen Kraftfahrzeugen sicherer gestaltet werden kann. In Fällen, in denen ein Unfall durch den Fahrer selbst oder gar einen anderen Verkehrsteilnehmer verursacht wird, kann der Schaden nur noch durch fortschrittliche Sicherheitskleidung, wie beispielsweise Airbag-Westen, minimiert werden. Oftmals wird ein solcher jedoch aufgrund eines unbekanntes Fahrzustands des Fahrzeugs hervorgerufen, weshalb das Eintreten eines solchen Zustands bestmöglich verhindert werden muss. Ein zentrales Phänomen, welches zu solch unvorhersehbaren Fahrzuständen führen kann, sind instabile Schwingungsformen des Systems. Im Fall des Motorrads treten dabei oftmals die umgangssprachlich als *Tank-Slapper* oder *Death-Wobble* bezeichneten Schwingungsformen auf. Korrekterweise handelt es sich dabei um Wobble und Weave Eigenmoden des Fahrzeugs, welche

in nicht-technischer Literatur oftmals miteinander vermischt werden. Falls einem diese Phänomene unbekannt sind, lohnt sich vor dem Lesen dieser Arbeit eine kurze Recherche im Internet. Das Video zu der Thematik von *Dunlop* [3] ist dabei äußerst empfehlenswert.

Unter Wobble versteht man einen Eigenmode des Motorrads, welcher hauptsächlich die Lenkbaugruppe anregt. Deshalb wird dieser oft auch *Lenkungsflattern* genannt. Bei Weave hingegen ist eine Art Pendel- oder Slalombewegung des gesamten Motorrads gemeint. Wobble weist eine hohe Eigenfrequenz auf und tritt typischerweise bei mittleren Geschwindigkeiten auf, während Weave üblicherweise bei sehr niedrigen Geschwindigkeiten instabil aber aufgrund dessen niedriger Eigenfrequenz für einen Menschen beherrschbar ist. Fallweise ist er auch bei sehr hohen Geschwindigkeiten instabil und dann aufgrund einer höheren Frequenz für einen Fahrer nicht mehr stabilisierbar und somit gefährlich. Beide Phänomene können die Kontrolle über das Fahrzeug beeinträchtigen oder im schlimmsten Fall zum Unfall führen.

Die Suche nach einer geeigneten Abhilfe gegen die mögliche Instabilität dieser Eigenmoden ist häufig in der wissenschaftlichen Literatur und Praxis zu finden. Beispielsweise wurden Lösungsansätze mithilfe eines passiven oder semi-aktiven Lenkungsdämpfers, eines Inerters oder aktiven Lenkungsreglern bereits publiziert (Näheres in Abschnitt 2). Eine Arbeit basierend auf die Verwendung eines Schwingungstilgers (folgend auch mit Tilger abgekürzt) ist jedoch nicht bekannt. Vor allem die passiven Eigenschaften eines solchen Bauteils machen diese mögliche Lösung aufgrund der damit verbundenen Ausfallsicherheit und keiner Notwendigkeit einer externen Energiezufuhr besonders interessant. Angesichts der beschriebenen Forschungslage ergibt sich folgende Frage:

*Können die Stabilitätseigenschaften von Wobble und/oder Weave mithilfe eines passiven Schwingungstilgers verbessert werden?*

Bei dem untersuchten Fahrzeug handelt es sich um ein Touring-Motorrad (*KTM Super Adventure 1290 S*), welches dem Institut für Forschungszwecke zur Verfügung steht.

Die Arbeit gliedert sich dabei in folgende Abschnitte: Kapitel 2 beschreibt die Ergebnisse der Literaturrecherche. Hier wird auf die grundlegende Modellierung zur Stabilitätsanalyse der aufrechten Geradeausfahrt, sowie die notwendigen Modelleigenschaften zur akkuraten Beschreibung von Weave- und Wobble-Mode eingegangen. Weiters werden die beschriebenen Ansätze zur Stabilisierung dieser Moden erläutert. Dabei werden sowohl Parametereinflüsse, passive Bauteile und (semi-) aktive Elemente aufgezeigt.

Kapitel 3 soll die Basis für die Untersuchungen darstellen. Hier wird in Kürze auf die Art der Stabilitätsanalyse und die grundlegende Funktion von Schwingungstilgern eingegangen. Zusätzlich werden die Abstimmung bzw. das Tuning des Tilgers und verwendete Zielfunktionen für die Optimierung näher gebracht. Der größte Teil des Abschnitts ist

der Modellbildung gewidmet. Dabei wird zuerst das Basismodell im Detail beschrieben, sowie dessen lineare Bewegungsgleichungen angeführt. Darauffolgend werden die Systeme mit den unterschiedlichen Tilgervarianten vorgestellt. Abschließend sind die linearen Bewegungsgleichungen des Motorrads mit den zusätzlichen Tilgervarianten angeschrieben.

Kapitel 4 widmet sich den Ergebnissen der analytischen Stabilitätsuntersuchung des Motorrads anhand der zuvor hergeleiteten Gleichungen. Es wird einerseits eine geeignete Positionierung für die Tilger abgeleitet und andererseits deren Stabilisierungspotential bezüglich Weave und Wobble aufgezeigt.

Kapitel 5 beinhaltet die Analyse in einem komplexen numerischen Mehrkörpersystem, welches in *VI Grade* basierend auf *MSC Adams* umgesetzt ist. Das zugrundeliegende Modell ist am Institut bereits vorhanden und mit Messungen abgeglichen worden. Eine Tilgervariante wird in dem detaillierten Modell realisiert und der Einfluss von nichtlinearen Effekten wie Reibung oder progressiver Dämpferkennlinien ermittelt.

Kapitel 6 fasst nochmals die wichtigsten Erkenntnisse der Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick für zukünftige Tätigkeiten zu dieser Thematik.

## 2 Literaturrecherche: Motorrad-Stabilität um die aufrechte Geradeausfahrt

In diesem Kapitel wird auf die wissenschaftliche Literatur der Stabilität von Motorrädern bezüglich der aufrechten Geradeausfahrt eingegangen. Zuerst werden gängige Modelle und notwendige Modelleigenschaften für die akkurate Stabilitätsanalyse um die aufrechte Geradeausfahrt aufgezeigt. Danach folgt ein Überblick über die Möglichkeiten zur Stabilitätsverbesserung. Diese können in Form von Parameteränderungen (z.B. Geometrie, Massen Steifigkeiten, ...) oder in Form zusätzlicher Elemente wie z.B. Dämpfern oder allgemeinerer Aktuatoren unterteilt werden.

### 2.1 Modellierung: Notwendige Modelleigenschaften

Ein bedeutendes Paper zur Modellbildung von Motorrädern wurde von Sharp im Jahr 1971 [4] veröffentlicht. Dieses besteht aus vier starren Körpern. Der Hauptrahmen des Fahrzeugs ist dabei um eine geneigte Lenkachse drehbar mit dem Vorderrahmen verbunden. Beim Hauptrahmen werden die reduzierten Massen von Rahmen, Hinterrad, Antriebsstrang und starr angebundenem Fahrer zusammengefasst, während der Vorderrahmen jene von Lenkerbaugruppe, Vorderrad und Gabel vereint. Die beiden Räder sind um deren Drehachse gegenüber den jeweiligen Rahmen frei drehbar gelagert und werden als starre Scheiben mit Punktkontakt zur ebenen Fahrbahn angesehen. Deren Trägheitseigenschaften werden, abgesehen vom polaren Trägheitsmoment, auf die Rahmen reduziert.

Ziel ist der Vergleich der Eigenwerte unter der Verwendung von drei unterschiedlichen Reifenmodellen:

- verschwindender Querschlupf - Modell mit nicht-holonomer Bindung in Querrichtung
- zugelassener Querschlupf mit sofortigem Aufbau der Lateralkraft
- zugelassener Querschlupf mit Berücksichtigung einer zeitlichen Verzögerung des Kraftaufbaus

Es war die erste Arbeit, welche auch die Reifendynamik, also den zeitlichen Verzug zwischen dem kinematischen Schlupf eines pneumatischen Reifens und des darauf folgenden Kraftaufbaus berücksichtigte. Diesen Verzug erzielte er mithilfe zweier zusätzlicher Differentialgleichungen erster Ordnung (Verzögerungsglieder) je Reifen. Dazu werden die sogenannten Einlaufängen als Parameter mit geschwindigkeitsabhängigen Betrag eingeführt.

Sharp kommt dabei zu folgenden Ergebnissen. Die Verwendung von nicht-holonomen Bindungen ist nur für die Beschreibung des Weave-Modes bei sehr niedrigen Geschwindigkeiten ausreichend. Eine mögliche Weave-Instabilität bei erhöhten Geschwindigkeiten ist damit nicht darstellbar und der Wobble-Mode ist gar nicht erst vorhanden. Das Modell mit dem sofortigen Kraftaufbau weist bereits den Wobble-Mode auf. Beide Moden werden jedoch, im Vergleich zum detaillierten Modell mit Zeitverzug, als zu stabil bewertet. Sharp kommt zu dem Fazit, dass es mindestens ein System achter Ordnung benötigt um die aufrechte Geradeausfahrt akkurat bezüglich der Stabilität von Weave und Wobble analysieren zu können.

Sharp und Alstead veröffentlichten 1980 [5] eine Arbeit bezüglich des Einflusses von strukturellen Steifigkeiten des Motorrads auf die Eigenmoden der aufrechten Geradeausfahrt. Dabei untersuchten sie drei Modelle, welche unterschiedliche Nachgiebigkeiten berücksichtigen:

- A: Gabelnachgiebigkeit in lateraler Richtung - durch einen lateralen Freiheitsgrad des Rades auf der Achse
- B: Torsionsnachgiebigkeit der Gabel - durch Torsionsfreiheitsgrad um Achse parallel zur Lenkachse
- C: Nachgiebigkeit des Hauptrahmens - durch ein normal auf die Lenkachse stehendes Gelenk am Steuerkopf

Dabei reduziert der zusätzliche laterale Freiheitsgrad von Modell A zwar die Wobble-Dämpfung, jedoch weicht der Verlauf über den Geschwindigkeitsbereich von jenem der Messungen ab. Weiters kommen sie zu dem Ergebnis, dass der Einfluss des Torsionsfreiheitsgrads in Modell B nur sehr gering ist. Vor allem die Variante C mit dem zusätzlichen Gelenk normal zur Lenkachse führte aber zu einer besseren Übereinstimmung der Ergebnisse mit den Messungen. Auch Spierings schlug unabhängig davon in seinem Paper 1981 [6] die Einführung eines zusätzlichen Gelenks in der Gabel des Motorrads vor, um damit die Instabilität des Wobble-Modes besser darstellen zu können.

Im Jahr 2001 schlugen Sharp und Limebeer [7] ein Motorradmodell für die Untersuchung von Stabilität und Regelbarkeit in der stationären Kurvenfahrt vor. Darin werden Anforderungen an ein Modell zur akkuraten Beschreibung der Lateraldynamik bei der aufrechten Geradeausfahrt angegeben. Dieses soll über folgende Eigenschaften verfügen:

- zwei starre Rahmen, welche um eine geneigte Lenkachse verbunden sind
- Berücksichtigung der Rotation der Reifen
- Lenkfreiheitsgrad des Vorderrahmens und Ersatzsteifigkeit für Nachgiebigkeit des Rahmens/der Gabel

- realistisches stationäres Reifenmodell
- Berücksichtigung der zeitlichen Verzögerung zwischen auftretendem Schlupf und den davon hervorgerufenen Reifenkräften
- aerodynamische Effekte für geschwindigkeitsabhängige Aufstandskräfte
- Rollfreiheitsgrad für den Oberkörper des Fahrers

Das zugrundeliegende Reifenmodell kann zudem unter der Annahme von verschwindendem Längsschlupf vereinfacht werden. Dies ist zulässig, da die zu untersuchenden Schwingungen bei annähernd konstanter Längsgeschwindigkeit auftreten.

Für eine detailliertere Aufarbeitung der Entwicklung von Zweiradmodellen soll hier auf das sehr ausführliche Review-Paper von Limebeer und Sharp [8] verwiesen werden.

## 2.2 Einflüsse von Parametervariationen

Nun soll sich der Verbesserung der kritischen Moden gewidmet werden. Es folgt ein Überblick über die Einflüsse von verschiedenen Parametern moderner Motorräder auf Weave und auf Wobble.

In dem bereits erwähnten Paper von Sharp [4] werden neben den Erkenntnissen zur Modellierung auch bereits viele Parametereinflüsse analysiert. Er kommt zu den Ergebnissen, dass der Capsize Mode nur eine im Allgemeinen sehr geringe Parametersensitivität aufweist, während die Stabilität von Wobble und Weave durch manche Parameter teilweise sehr stark beeinflusst werden kann. Eine grundlegende Erkenntnis ist, dass fast alle Parametervariationen zugunsten eines Modes bzw. eines Geschwindigkeitsbereichs, negative Auswirkungen auf den anderen Mode bzw. den restlichen Geschwindigkeitsbereich haben. Bei der Wahl der Designparameter ist also immer ein Kompromiss nötig. Erhöht man beispielsweise das Trägheitsmoment des Vorderrads um dessen Radachse, verbessert es die Eigenschaften bei sehr geringen Geschwindigkeiten auf Kosten der Stabilität bei höheren Geschwindigkeiten. Eine Verbesserung beider Moden konnte nur durch eine geeignete Kombination von Parameteränderungen erreicht werden. So führt die Verschiebung des Hauptrahmenschwerpunkts nach unten oder nach vorne bzw. die Verschiebung des Vorderrahmenschwerpunkts nach hinten in Kombination mit einer gleichzeitigen Anpassung der Lenkungsdämpfung zu besseren Dämpfungseigenschaften über den gesamten Geschwindigkeitsbereich.

Roe und Thorpe haben in ihrer experimentiellen Arbeit [9] Einflüsse von lateralen Steifigkeiten der Gabel und des Hauptrahmens an einem Polizeimotorrad untersucht. Dabei identifizierten sie die Biegnachgiebigkeit der Gabelholme und jene des vorderen

oberen Bereichs des Hauptrahmens als kritisch. Einen weiteren negativen Einfluss hatte eine zusätzliche Hecklast, sowie eine Reduktion der Fahrer Masse. Durch geeignete Versteifungen des vorderen Fahrwerks und einer Anbringung von versteifenden Rohren am Hauptrahmen konnte das untersuchte Motorrad trotz Zuladung stabilisiert werden. Die beiden bereits erwähnten theoretischen Untersuchungen von Sharp und Alstead [5] und von Spierings [6] bestätigen den von Roe und Thorpe erkannten Einfluss der Nachgiebigkeit im vorderen Bereich des Motorrads. Die übereinstimmenden Ergebnisse besagen, dass sowohl eine untere, als auch eine obere Schranke für die vordere Steifigkeit des Ersatzgelenks existiert, um eine bestmögliche Wobble Dämpfung zu erreichen.

Eine weitere ausführliche Analyse der Parametereinflüsse auf Weave und Wobble sind im Buch von Pacejka [10] zu finden. Das behandelte Modell verfügt ebenfalls über das zuvor erwähnte Ersatzgelenk am Vorderrahmen, sowie einen zusätzlichen Freiheitsgrad zwischen Motorrad und Oberkörper des Fahrers.

Einige Beispiele für einflussreiche Parameter sind:

- verschwindende Einlauflängen bzw. direktes Verhalten der Reifen verbessern Wobble
- hohe Ersatzsteifigkeit des Hauptrahmens (Ersatzgelenk) verschiebt Wobble Instabilität hin zu höheren Geschwindigkeiten
- verschwindendes polares Trägheitsmoment des Vorderrads verschlechtert die Stabilitätseigenschaften von Weave (bei geringen Geschwindigkeiten) und Wobble stark → großer positiver Einfluss von gyroroskopischen Effekten
- stärkere Neigung der Lenkachse (bzw. erhöhter mechanischer Nachlauf) verbessern Wobble und Weave - verschlechtern jedoch Capsize
- Senken der Schwerpunkte von Fahrer und Rahmen verbessert beide Moden
- Verschiebung der Schwerpunkte nach vorne verbessert Weave auf Kosten von Wobble

Zuletzt soll noch die Arbeit von Imaizumi und Fujioka erwähnt werden [11]. Dieses Paper gab mitunter den Anstoß für die hier vorliegende Arbeit. Darin haben sie mithilfe eines detaillierten Mehrkörpermodells den Einfluss einer Hecklast auf Wobble und Weave analysiert. Das untersuchte Motorrad ist in seiner Basiskonfiguration stabil. Durch eine Erhöhung der Hecklast nimmt die Dämpfung des Wobble-Modes kontinuierlich ab, bis schließlich ab einer Zuladung von ca. 16 kg die Stabilitätsgrenze überschritten und der Mode instabil wird. Bringt man die Masse jedoch nicht starr sondern in lateraler Richtung elastisch mit parallel angeordneter Feder und Dämpfer an das Heck des Motorrads an, bleibt das System stabil. Dies wurde auch mithilfe eines Versuchs so

bestätigt. Die Masse ist in dieser Konfiguration also als Schwingungstilger (näheres zum Schwingungstilger siehe [12]) aufgebracht und dieser verbessert anscheinend die Stabilitätseigenschaften des Motorrads oder verringert zumindest den negativen Einfluss der zusätzlichen Hecklast. Eine Analyse der genauen Stabilitätsauswirkungen dieser Anordnung wurde nicht durchgeführt.

## 2.3 Stabilisierung durch passive oder aktive Elemente

Parameter können zwar in der Theorie leicht verändert werden, sind aber in der Praxis oftmals aufgrund von Design, Konstruktion oder physikalischen Gesetzen vorgegeben. Daraus folgt das Streben nach anderweitigen Lösungen, um die Sicherheit für den Fahrer zu erhöhen. Dieses Kapitel geht auf die aus der Literatur bekannten Möglichkeiten einer Stabilisierung durch zusätzliche Bauteile ein.

Die wohl bekannteste Methode zur Wobble-Stabilisierung ist jene eines passiven Lenkungsämpfers. Im zuvor erwähnten Paper von Sharp [4] wurde bereits ein Motorrad mit eingebautem Lenkungsämpfer untersucht. Es ist bekannt, dass der Realteil des Wobble-Modes dadurch stark verringert werden kann. Wählt man die Dämpfungskonstante groß genug, kann dieser sogar stabilisiert werden. Gleichzeitig geht diese Lösung aber mit einem negativen Einfluss auf die Weave-Stabilität einher. Die korrekte Abstimmung des Dämpfers ist also immer ein Kompromiss zwischen den beiden kritischen Eigenmoden. Eine Möglichkeit, die Sharp bereits ansprach, ist eine mit der Vorwärtsgeschwindigkeit variierende Dämpfungskonstante. Damit ließe sich eine hohe Dämpfung im Wobble-kritischen Geschwindigkeitsbereich einstellen, während diese bei höheren Geschwindigkeiten auf ein Minimum reduziert werden könnte, um den negativen Einfluss auf Weave zu verhindern. In der Praxis wurde eine solche Variante z.B. von *Honda* [13] umgesetzt.

Eine weitere Verbesserung verspricht man sich durch die Nutzung eines semi-aktiven Lenkungsämpfers. Das Grundprinzip beruht auch hier auf einer veränderbaren Dämpfungskonstante, wobei der Unterschied in der hochdynamischen Reaktionsfähigkeit liegt. Filippi et al. [14] untersuchten solch einen Dämpfer. Sie passten die aus der Automobilbranche gängigen Konzepte für die Vertikaldynamik (*Ground-Hook* und *Sky-Hook*) auf das Lenkverhalten eines Motorradmodells an. Das schnelle Ansprechverhalten des semi-aktiven Dämpfers soll genutzt werden, um unter Berücksichtigung von Lenkrate und Gierrate bestmöglich einen fiktiven Dämpfer gegen das Inertialsystem zu imitieren. Weitere Arbeiten [15, 16] beschäftigen sich mit der Umsetzung eines solchen semi-aktiven Dämpfers - meist mithilfe einer magnetorheologischen Flüssigkeit (Viskosität über Magnetfeld einstellbar).

Abseits von Dämpfern wurden auch andere Technologien zur Verbesserung der Sta-

bilität herangezogen. Eine interessante Möglichkeit ist hier die Verwendung eines Inerter. Ein Inerter ist noch ein relativ junges Konzept in der mechanischen Modellbildung. Die Idee wurde 2002 von Smith [17] erstmalig veröffentlicht. Sie entstand aus Überlegungen zur Verallgemeinerung der Beziehungen zwischen elektrotechnischen und mechanischen Systemen. Diese können mithilfe der *Kraft-Strom-Analogie* in der Regel von einer Domäne in die andere überführt werden. Die Analogie hinkt jedoch bei der Beziehung zwischen Masse und Kondensator, weshalb hier Smith nach einem allgemeineren Element suchte und beim Inerter fündig wurde. Im Gegensatz zur Masse ist die beim Inerter wirkende Kraft nicht proportional zu einer Absolutbeschleunigung, sondern zu einer Relativbeschleunigung zwischen beispielsweise zwei Körpern. Für detaillierte Einblicke in die Einsatzbereiche und praktische Umsetzung sei auf das sehr empfehlenswerte Review Paper von Smith [18] aus dem Jahr 2020 verwiesen. Die Anwendung ist vor allem in Automobil-Fahrwerken im Motorsport (z.B. erste Nutzung in Formel 1 [19]) gängig, wo auch bereits kommerziell erwerbliche Inerter angeboten werden.

Auch zur Stabilitätsverbesserung des Motorrads wurden Inerter bereits erfolgreich eingesetzt. Mehrere Veröffentlichungen dazu finden sich von Evangelou et al [20–22], welche sogenannte mechanische Netzwerke (Zusammenschaltungen von Federn, Dämpfern und Inertern) zwischen Lenker und Hauptrahmen berücksichtigen. In ihrer Arbeit [21] analysieren die Autoren deren Einfluss auf Wobble und Weave. Dabei kommen sie auf die von Sharp [4] bekannten positiven/negativen Auswirkungen eines Lenkungsdämpfers auf Wobble/Weave. Der Einsatz eines reinen Inerter zeigt ein inverses Verhalten: Wobble wird verschlechtert, während Weave verbessert wird. Die Übertragungsfunktion des Lenkungskompensators sollte demnach ein Verhalten ähnlich zu einem Dämpfer in der Nähe der Wobble-Eigenfrequenz, sowie ein Verhalten eines Inerter in der Nähe der Weave-Eigenfrequenz aufweisen. Bei sehr kleinen Frequenzen soll eine verschwindende Verstärkung erreicht werden, wodurch der Kompensator bei normalen Fahrmanövern für den Fahrer kaum spürbar ist. Es wird gezeigt, dass sich eine solche Übertragungsfunktion mithilfe einer einfachen Serienschaltung von Feder, Dämpfer und Inerter realisieren lässt. Diese, wohlgerneht rein passive, Lösung ist in der Lage, sowohl Weave, als auch Wobble zu verbessern und ist daher eine sehr attraktive Lösung. Ein großes Problem zeigt sich jedoch in der praktischen Umsetzung. Weiterführende Arbeiten [23, 24] zeigen die Komplexität der tatsächlichen Umsetzung eines solchen mechanischen Netzwerks.

Auch die Möglichkeit aktiver Lenkungsregler wurde z.B. in [25, 26] in Betracht gezogen. Die Autoren rund um Evangelou zeigten dabei in [25] weitere Vorteile gegenüber der eben erwähnten Verwendung mechanischer Netzwerke. Dazu zählen z.B. die Verwendung von Übertragungsfunktionen höherer Ordnung oder die einfache manuelle oder automatische Anpassung der Parameter (reine Softwareanpassung), welche beide im Falle

eines mechanischen Netzwerks sehr schwierig umzusetzen wären. Das zugrundeliegende Regelungsmodell basiert auf einer  $H_\infty$ -Synthese mit Loop-Shaping-Ansatz. Details dazu sind in [27, 28] angeführt. Grundsätzlich wird dabei der maximale singuläre Wert der Übertragungsfunktion von Störungen zu Modellausgängen minimiert. Der zusätzliche Loop-Shaping-Ansatz fügt dem System weitere Übertragungsfunktionen, welche lediglich der Frequenzfilterung dienen, hinzu. Diese sorgen dafür, dass der aktive Regler nur bei Weave und Wobble kritischen Frequenzen und nicht bei normalen Fahrmanövern eingreift. Implementiert werden kann solch ein aktiver Lenkungsregler z.B. mithilfe eines Elektromotors.

Neben den erwähnten Anbauten direkt am Lenker, gibt es in der Literatur auch ausgefallenerere Lösungsansätze. Diese werden folglich kurz angeführt, jedoch wird nicht im Detail darauf eingegangen. Maggio und Cossalter [29] untersuchten eine passive und aktive Hinterradlenkung zur Stabilitätsverbesserung. Die aktive Variante verbesserte beide kritische Moden, während man mit der passiven Variante lediglich Weave beeinflussen kann. Marumo und Nagai [30] schlugen ein Steer-By-Wire System vor, um sowohl die Manövrierbarkeit, als auch die Stabilitätseigenschaften zu verbessern. Mavros [31] und Thanos et al [32] beschäftigten sich mit einem Reaktionsrad-Aktuator um den Capsize-Mode zu stabilisieren. Lot und Fleming [33] hingegen beschrieben einen Ansatz basierend auf einem Gyroskop-Aktuator zur Stabilisierung von Weave, Wobble und Capsize.

Veröffentlichungen basierend auf einer Stabilisierung mithilfe eines Schwingungstilgers sind in der Zweiradliteratur nicht aufzufinden. Im Gegensatz dazu gibt es zwei Arbeiten diesbezüglich zur Abhilfe gegen Shimmy-Phänomene in Flugzeugfahrwerken [34, 35]. Die Ergebnisse bezüglich der Stabilisierung sind sehr vielversprechend. In [35] wird anhand einer Bifurkationsanalyse ein bistabiler Bereich identifiziert, welcher durch eine degressive Federkennlinie wieder unterdrückt werden konnte. Da Shimmy-Phänomene im Allgemeinen Wobble miteinschließen, wird auch durch einen Tilger um die Lenkachse ein positiver Einfluss auf Wobble erwartet.

## 3 Grundlagen und Modellbildung

Zu Beginn dieses Kapitel wird auf die Art der Stabilitätsuntersuchung, sowie auf die grundlegende Theorie eines Schwingungstilgers eingegangen. Dabei sollen kurz die wichtigsten Informationen zusammengefasst werden. Für genauere Ausführungen sei bezüglich der Stabilitätsanalyse auf [36, 37] und bezüglich des Schwingungstilgers auf [12] verwiesen. Nachdem die Theorie nähergebracht wurde, werden die in dieser Arbeit untersuchten analytischen Modelle beschrieben und deren lineare Bewegungsgleichungen angeschrieben.

### 3.1 Grundlagen der Stabilitätsuntersuchung

Die Stabilität ist eine wichtige Eigenschaft eines dynamischen Systems und beschreibt allgemein das Systemverhalten nach Aufbringung einer Störung um einen zu untersuchenden Zustand des Systems. Meist wird unter stabilem Verhalten ein Abklingen einer solchen Störung und das Erreichen der ungestörten Lösung verstanden. Diese Definition ist aber nicht eindeutig. Im folgenden soll sowohl der verwendete Stabilitätsbegriff, als auch die mathematische Methodik zur Feststellung der Stabilität. Das Kapitel bildet dabei eine Zusammenfassung aus dem Vorlesungsskriptum [37], welches wiederum zu großen Teilen auf dem Buch von Leipholz [36] basiert.

#### Stabilität nach Ljapunow

In dieser Arbeit wird die Stabilitätsdefinition nach Ljapunow verwendet. Diese ist ein geometrischer Stabilitätsbegriff und bewertet den Abstand einer ungestörten Lösung, zu einer gestörten Lösung im euklidischen Vektorraum. Das im allgemeinen Fall nichtlineare Differentialgleichungssystem ist gegeben durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

Ausgangspunkt der Stabilitätsuntersuchung ist ein Zustand  $\mathbf{x}^0$ . Dieser wird oftmals zweckmäßig in einer Gleichgewichtslage  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  des Systems gewählt, kann aber beliebige allgemeine Zustände annehmen. Betrachtet man nun die zeitliche Lösung ausgehend von dieser Anfangsbedingung, ergibt sich ein bestimmter Verlauf der Zustandsgrößen  $\mathbf{x}^0(t)$ . Nun geht man von einer gestörten Anfangsbedingung  $\mathbf{x}^s$  aus, indem man kleine Störungen  $\xi$  auf den zu untersuchenden Zustand aufbringt. Je nach zeitlicher Entwicklung des Systems mit den gestörten Anfangsbedingungen, lässt sich dann die Stabilität bestimmen.

$$|\mathbf{x}^0(t) - \mathbf{x}^s(t)| \leq \varepsilon \quad \forall \mathbf{x}^s(t_0) : |\mathbf{x}^0(t_0) - \mathbf{x}^s(t_0)| \leq \eta(\varepsilon) \quad (3.2)$$

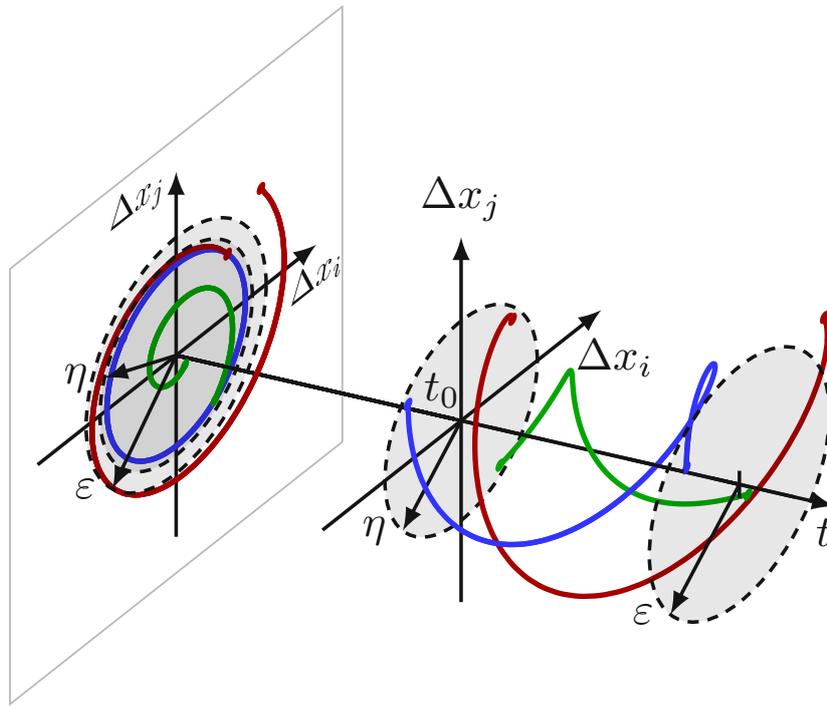


Abbildung 1: Stabilität nach Ljapunow: asymptotisch stabiles (grün, abklingend), stabiles (blau) und instabiles (rot, hier aufklingend) Verhalten

In Worten ausgedrückt: Bleiben beide zeitlichen Lösungen, ausgehend von kleinen Abweichungen der Anfangsbedingungen, für alle Zeitpunkte  $t$  nah beieinander, ist das System stabil. Ein Sonderfall ist die asymptotische Stabilität. Von dieser spricht man dann, wenn ein nach Ljapunow stabiles System zusätzlich noch gegen die ungestörte Lösung konvergiert (*Attraktivität*).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}^0(t) - \mathbf{x}^s(t)| = 0 \quad (3.3)$$

Diese asymptotische Stabilität beschreibt also das oftmals geforderte Kriterium des Abklingens von Störungen. Dargestellt sind diese Verhalten in Abbildung 1. Überschreitet die Distanz auch nur für einen Zeitpunkt  $t$  den zulässigen Wert  $\varepsilon$ , dann ist das System instabil. Das heißt, dass ein Zustand *Attraktivität* aufweisen kann aber dennoch instabil sein kann. Ebenso folgt aus Instabilität eines Zustands nicht direkt aufklingendes Verhalten, da die Lösung auch begrenzt sein kann.

Als anschauliches Beispiel kann ein Pendel herangezogen werden. Dieses verfügt über zwei Gleichgewichtslagen - jene wo das Pendel nach unten hängt und jene wo es perfekt aufrecht steht. In beiden Fällen bleibt das Pendel in der Ruhelage falls die Anfangsbedingung exakt der Gleichgewichtslage entspricht. Lenkt man das Pendel minimal aus den Gleichgewichtslagen aus, schwingt sich das System in beiden Fällen in der unteren Ruhelage ein (minimale Dämpfung vorausgesetzt). Die untere Lage ist also asymptotisch

stabil, während die obere Lage instabil (jedoch ohne aufklingendes Verhalten) ist.

### Mathematische Stabilitätsanalyse

Nun gilt es zu klären, wie man mathematisch die oben angeführte Stabilitätsbedingung prüft. Ausgangslage sind die sogenannten Variationsgleichungen. Hierbei wird der gestörte Zustand durch eine Variation des zu untersuchenden Zustands dargestellt.

$$\mathbf{x}^s(t) = \mathbf{x}^0(t) + \boldsymbol{\xi}(t) \quad (3.4)$$

Hier soll nur auf den Fall einer gestörten Anfangsbedingung eingegangen werden. Weiters gibt es auch Störungen der rechten Seite durch Störfunktionen oder Parameterstörungen. Aus Gleichung (3.4) und Gleichung (3.1) ergeben sich die nichtlinearen Variationsgleichungen

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \dot{\mathbf{x}}^s(t) - \dot{\mathbf{x}}^0(t) = \mathbf{f}^s(\mathbf{x}^s, t) - \mathbf{f}^0(\mathbf{x}^0, t) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi}, t) \quad (3.5)$$

Möglichkeiten zur Stabilitätsanalyse lassen sich nun in zwei Klassen einteilen:

- direkte Lösung der Variationsgleichungen
- Methoden ohne Lösung der Variationsgleichungen

Da für den mathematischen Nachweis der Stabilität jede mögliche Anfangsbedingung im Bereich  $\eta$  analysiert werden muss, ist eine direkte Lösung der Variationsgleichungen nur analytisch im strengen Sinn möglich. Analytische Lösungen sind jedoch für die meisten technischen Anwendungen nicht zu finden. Oftmals werden daher die Gleichungen für eine endliche Anzahl an Anfangsbedingungen numerisch gelöst und dann auf Basis dieser Auswahl eine Stabilitätsaussage für den Zustand des Systems getroffen. Dies ist häufig ausreichend, jedoch kann im strengen Sinn keine tatsächliche Stabilitätsaussage getroffen werden. Da man mit dieser Herangehensweise niemals alle Möglichkeiten abdecken kann, wird bestenfalls auf Methoden ohne direkter Lösung des Gleichungssystems zurückgegriffen.

Allgemeine nichtlineare Systeme können ohne direkter Lösung, z.B. mithilfe der direkten Methode von Ljapunow untersucht werden. Dies ist jedoch eine schwierigere Aufgabe, da es keine allgemein gültige Lösungsstrategie für diese Vorgehensweise gibt. Die Anwendung dieser Methodik benötigt also viel Erfahrung und Geschick.

Daher wird das System in der Regel zuerst linearisiert und anschließend das linearisierte System einer Stabilitätsuntersuchung unterzogen. Sind die Störungen klein, sind Terme höherer Ordnung, wie z.B. Produkte zweier Störungsterme, in erster Näherung vernachlässigbar. Das bedeutet also, dass sich das nichtlineare System in unmittelbarer Umgebung des Ausgangszustands  $\mathbf{x}^0(t_0)$  wie das lineare System verhält. Die Übertragung

der Stabilitätsaussage auf das nichtlineare System ist aber nur für den asymptotisch stabilen, sowie dem instabilen Fall des Aufklings möglich.

### Spezialfall: lineares zeitinvariantes System

Der Vorteil der linearen Stabilitätsuntersuchung liegt darin, dass die Eigenwerte  $\lambda$  der  $(n \times n)$  Systemmatrix  $\mathbf{A}$  das Stabilitätsverhalten des linearen Systems vollständig charakterisieren. Ein lineares zeitinvariantes System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.6)$$

besitzt stets ein Fundamentalsystem von  $n$  linear unabhängigen Lösungsvektoren  $\mathbf{x}_i(t)$ . Die Lösung des Systems kann dann als lineare Superposition dieser Lösungsvektoren angegeben werden.

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i(t) \quad (3.7)$$

Die Konstanten  $c_i$  werden durch Koeffizientenvergleich mit den Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt  $t_0$  bestimmt. Durch einen harmonischen Ansatz  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}$  und Grundlagen der linearen Algebra können stets  $n$  linear unabhängige Lösungen gefunden werden. Diese werden durch Eigenwerte  $\lambda$  und Eigenvektoren  $\mathbf{v}$  der Systemmatrix vollständig beschrieben. Durch das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (3.8)$$

lassen sich die Eigenwerte des Systems bestimmen, welche anschließend mithilfe des Eigenwertproblems

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^m \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

die Berechnung der Eigenvektoren (oder auch Hauptvektoren bei erhöhter Vielfachheit  $m$  der Eigenwerte) zulassen. Somit ergibt sich die Grundstruktur der Lösung zu

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v} = e^{\lambda t} e^{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})t}\mathbf{v} \quad (3.10)$$

$$= e^{\lambda t} \left[ \mathbf{v} + t(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{m-1} \mathbf{v} \right] \quad (3.11)$$

Somit lassen sich auf Basis der Eigenwerte des Systems folgende Stabilitätsaussagen treffen:

1. Sind die Realteile aller Eigenwerte  $\lambda$  negativ, ist das System bezüglich dieses Zustands asymptotisch stabil.
2. Ist auch nur ein Realteil positiv, dann divergiert die Lösung (klingt auf) und es folgt Instabilität.
3. Ist auch nur ein Realteil gleich null, muss weiter unterschieden werden:
  - a) Ist die Anzahl linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (3.9) gleich der Vielfachheit des Eigenwertes, ist das System stabil.
  - b) Ist die Anzahl linear unabhängiger Lösungen kleiner als die Vielfachheit des Eigenwertes, ist das System instabil.

Ist das lineare zeitinvariante System aus Gleichung (3.6) durch Linearisierung eines nicht-linearen Systems entstanden, lassen sich die zuvor getroffenen Stabilitätsaussagen 1 und 2 direkt auf das nichtlineare System übertragen. Für den Fall, dass ein kritischer Eigenwert ( $\Re(\lambda) = 0$ ) vorhanden ist, kann keine Stabilitätsaussage getroffen werden, da die nichtlinearen Terme das Systemverhalten bestimmen. Auch die Größe der zulässigen Störungen  $\eta$  kann im linearisierten System nicht bestimmt werden.

Neben der direkten Auswertung der Eigenwertanalyse sind z.B. auch die Kriterien nach *Stodola*, *Hurwitz* oder *Liénard-Chipart* Möglichkeiten zur Stabilitätsbeurteilung. Bei diesen wird das charakteristische Polynom  $p(\lambda)$  der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  betrachtet. Diese basieren also auf der selben Grundüberlegung. Nähere Details werden hier nicht angeführt, da in dieser Arbeit nur die Auswertung der Eigenwerte verwendet wird. Es sei jedoch angemerkt, dass diese durch direkte Betrachtung der Einträge der Systemmatrix wertvolle Information über den Stabilitätseinfluss verschiedener Parameter bereitstellen können. Bei zu großen Systemmatrizen oder bei komplizierten Einträgen, kann die Auswertung jedoch schnell unübersichtlich werden.

### Grenzyklus bzw. Limit-Cycle

Instabilität des linearisierten Systems würde im ersten Moment ein unbegrenztes Wachstum der Lösung bedeuten, doch wie wirkt sich das instabile Verhalten auf die Lösung des nichtlinearen Systems aus? Auf die mathematisch komplexen Grundlagen der nicht-linearen Stabilitätstheorie soll hier nicht näher eingegangen werden. Stattdessen soll ein anschauliches Beispiel die grundlegenden Überlegungen vor Augen führen.

Im Falle einer aufklingenden Schwingung würden unbegrenzt große Zustandsgrößen

unbegrenzt große Beschleunigungen bedeuten, welche wiederum nur mit unbegrenzt großen Kraftamplituden hervorgerufen werden könnten. In einem nichtlinearen System, wo z.B. die Kraftkennlinien ein Sättigungsverhalten aufweisen (z.B. Reifenkennlinien in der Fahrzeugdynamik), ist die maximal übertragbare Kraft und somit das Aufklingverhalten limitiert. Wird also der Reifen als Kraftgenerator mit einer nichtlinearen Sättigungscharakteristik modelliert, wird die Lösung zu Beginn nach den linearen Stabilitätsaussagen aufklingen, ehe dann die nichtlinearen Komponenten des Modells den Aufklingvorgang limitieren. Da die Schwingung zuvor bereits große Amplituden annehmen kann, bewahrt dieser Fakt jedoch nicht zwingend vor einem Unfall.

Aufgrund solcher nichtlinearer Effekte kann es dazu kommen, dass ein stabiler *Grenzzyklus* bzw. *Limit-Cycle* eintritt. Dieser entspricht einem stabilen, geschlossenen Pfad im Phasenraum, zu welchem auch andere Pfade in dessen Umgebung einfallen. Es stellt sich also aufgrund der Nichtlinearitäten des Systems eine stabile Schwingung ein. Dies ist nur durch geeignete Überlagerung von anfachendenen und dissipierenden Effekten über eine Schwingungsperiode möglich, da die gesamt zugeführte oder dissipierte Energie über eine Schwingungsperiode null sein muss. Der Wobble Eigenmode des Motorrads weist einen solchen Grenzzyklus auf. Das Auffinden und Beschreiben dieser Grenzzyklen ist ein Thema für sich und eine sehr komplexe Aufgabe, welche in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt wurde. Hier soll lediglich darauf aufmerksam gemacht werden, dass ein linearisiertes, instabiles System nicht unbedingt ein unbegrenztes Aufklingen der Schwingung mit sich bringen muss.

## 3.2 Grundlagen Schwingungstilger

Ein Schwingungstilger, nachfolgend oft kurz Tilger bzw. DVA (*Dynamic Vibration Absorber*) genannt, ist ein Bauteil, welches elastisch auf das zu tilgende System angebracht wird. Ein Tilger soll grundsätzlich Abhilfe gegen ungewollte Schwingungen eines Systems im Falle einer Fremderregung mit konstanter Frequenz bewirken (z.B. Motor im Leerlauf). Für eine ausführlichere Beschreibung sowie die Herleitung der Gleichungen soll auf das Buch von Den Hartog [12] verwiesen werden. Hier folgt lediglich eine Zusammenfassung der wichtigsten Grundlagen.

Der einfachste Fall eines schwingungsfähigen mechanischen Systems ist ein 1-Massen-Schwinger. Wird an diesem eine harmonische Krafterregung ( $F(t) = F \cos \omega t$ ) angebracht, stellt sich wiederum eine harmonische Schwingung der Masse mit gleicher Frequenz  $\omega$  ein. Die Amplitude (Auslenkung) und der Phasenverzug gegenüber des Kraftsignals ist dabei von der Masse  $m_1$ , sowie der Federsteifigkeit  $c_1$  und Dämpfung  $k_1$  gegenüber dem Inertialsystem abhängig. Diese Schwingungsamplituden können vor al-

lem im Resonanzfall ( $\omega = \Omega_n = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$ ) oder in der Nähe der Resonanzfrequenz sehr groß werden. Um dies zu unterbinden, könnte man die Masse oder die Federsteifigkeit variieren, um die Resonanzfrequenz zu verschieben, die Dämpfung erhöhen, oder einen Schwingungstilger einführen.

Der Schwingungstilger mit Masse  $m_2$  wird mit parallel angebrachter Feder  $c_2$  und Dämpfer  $k_2$  an die Hauptmasse angebracht. Somit erhält man einen 2-Massen-Schwinger. Wählt man im ungedämpften Fall ( $k_1 = k_2 = 0$ ) nun die Eigenfrequenz des Tilgers gleich der Erregerfrequenz  $\omega_2 = \omega$ , so nimmt dieser bei Anregung mit  $\omega$  die gesamte Schwingungsenergie auf und die Hauptmasse verharrt in Ruhe. Aufgrund des zusätzlich eingeführten Freiheitsgrads hat das System jetzt aber zwei Resonanzfrequenzen. Diese würden ebenfalls wieder zu unbegrenzten Schwingungsamplituden führen. Dagegen bietet ein gedämpfter Tilger Abhilfe. Durch die zusätzlich eingeführte Dämpfung wird die Amplitudenüberhöhung in der Resonanz limitiert, jedoch wird dadurch auch keine vollständige Tilgung mehr erreicht.

Abbildung 2a zeigt ein 2-Massen-Schwinger System. Auf die Hauptmasse (Index 1) ist die kleinere Tilgermasse (Index 2) angebunden. Die Hauptmasse ist mit dem Inertialsystem verbunden. Es wirkt eine harmonische Erregung durch die Kraft  $F(t) = F \cos \omega t$  an der Hauptmasse. Abbildung 2b zeigt die Übertragungsfunktion  $G_{x_1 F}$  der Kraft auf die Auslenkung der Hauptmasse bei ungedämpftem Basissystem ( $k_1 = 0$ ) über die normierte Erregerfrequenz bezogen auf die Resonanzfrequenz  $\Omega_n$  des ursprünglichen 1-Massen-Schwingers ohne Tilger. Die Eigenfrequenz des Tilgers ist in diesem Fall auf die Resonanzfrequenz des Hauptschwingers abgestimmt  $\omega_2 = \Omega_n$ . Man erkennt die im ungedämpften Fall erreichte Tilgung bei der Tuningfrequenz  $\omega_2$ , sowie die sich in unmittelbarer Umgebung befindlichen neuen zwei Resonanzfrequenzen. Auch die Übertragungsfunktion eines gedämpften Tilgers ist dargestellt. Hier sieht man einerseits die gewünschte Limitierung der Amplitudenerhöhung für alle Erregerfrequenzen, andererseits aber auch das Entfallen der vollständigen Tilgung bei der Tuningfrequenz. Ein maßgeblicher Einfluss auf die Effektivität des Tilgers ist durch das Massenverhältnis  $\mu = \frac{m_2}{m_1}$  gegeben. Durch dieses Verhältnis wird der Betrag von  $G_{x_1 F}$  verringert und der Abstand zwischen den beiden neuen Resonanzfrequenzen vergrößert. Gängige Massenverhältnisse in der Praxis betragen 1 – 10 %.

Den Hartog leitet für den einfachen Fall eines gedämpften Tilgers auf einem ungedämpften 1-Massen-Schwinger noch Gleichungen zur optimalen Parameterauswahl her. Für eine optimale Abstimmung (beide Höcker der Übertragungsfunktion auf sel-

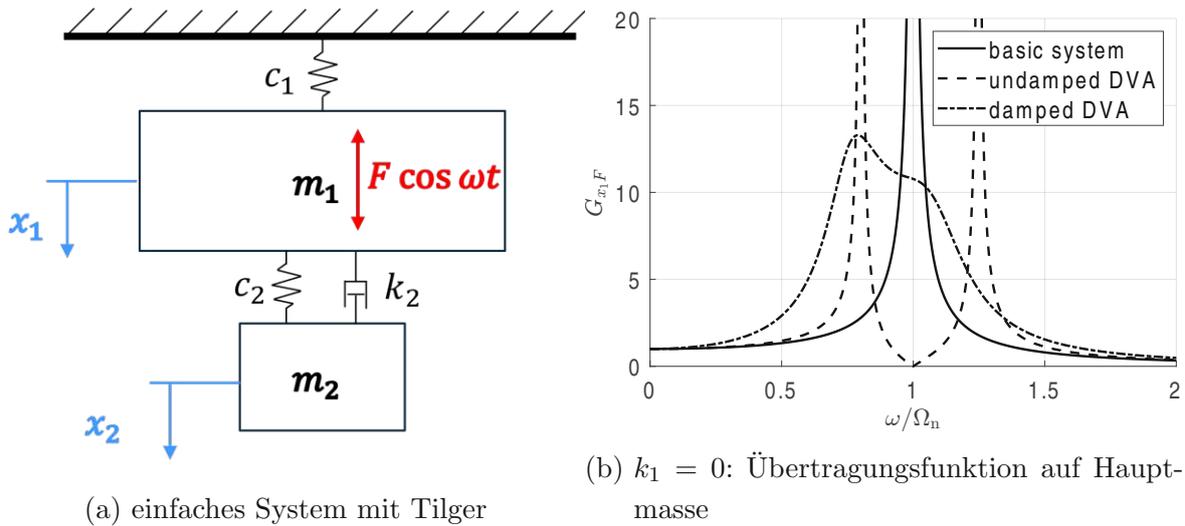


Abbildung 2: Einfaches 2-Massen-Schwinger System mit Tilgerwirkung

ber Höhe) kommt er auf folgende Zusammenhänge:

$$\omega_2 = \frac{1}{1 + \mu} \Omega_n \quad (3.12)$$

$$c_2 = \omega_2^2 m_2 \quad (3.13)$$

$$k_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}} \Omega_n m_2 \quad (3.14)$$

Bei einem Tilger mit sehr geringem Massenverhältnis folgt also  $\omega_2 \approx \Omega_n$ . Demnach entspricht der Wurzel Ausdruck aus Den Hartogs Formel in etwa dem Lehr'schen Dämpfungsmaß  $D$ . Ist das Massenverhältnis groß, soll die Tuningfrequenz reduziert werden (größere Gesamtmasse bei gleich steifer Anbindung an Inertialsystem). Folglich entspricht der Wurzel Ausdruck auch nicht mehr dem Lehr'schen Dämpfungsmaß des Tilgers ( $\omega_2 \neq \Omega_n$ ).

Sobald jedoch auch das Basissystem über eine Dämpfung verfügt ( $k_1 \neq 0$ ) muss bereits auf numerische Optimierung zurückgegriffen werden. Die meisten technischen Systeme umfassen in der Regel mehrere Freiheitsgrade, sowie eine breitbandige oder transiente Anregung, weshalb die Optimierung bei der optimalen Tilgerabstimmung unabdinglich ist. Auch der Ursprung in der Schwingung fremderregter Systeme ist ein gänzlich anderer als die Anwendung in dieser Arbeit zur Stabilisierung eines Systems. Die grundlegende Idee bleibt jedoch die Gleiche: Der verwendete Tilger soll bei einer bestimmten Frequenz (in diesem Fall Wobble- oder Weave-Frequenz) die Schwingungsenergie bestmöglich aufnehmen und dissipieren. Damit sollen die Stabilitätseigenschaften der Modes verbessert werden. Ob dies auch tatsächlich so funktioniert, soll in dieser Arbeit analysiert werden.

## Tilger-Tuning bezüglich Weave und Wobble

Hier soll kurz aufgezeigt werden, wie die unterschiedlichen Tuning-Verfahren der Tilger in dieser Arbeit ausgeführt werden. Wie zuvor erwähnt gibt es für den Fall eines einfachen 1-Massen-Schwingers eine analytische Lösung von Den Hartog [12]. Obwohl diese für grundlegend unterschiedliche Fälle hergeleitet wurde, wird das Tuningverfahren trotzdem in dieser Arbeit angewendet. Dadurch soll die Effektivität des Den-Hartog-Tunings festgestellt werden, da dieses für erste Abschätzungen in einem Designprozess praktisch wäre. Anstatt der äußeren Erregerfrequenz, welche normalerweise in die Abstimmung des Tilgers eingeht, wird die kritische Eigenmode-Frequenz gewählt. Dies basiert auf der Überlegung, dass der Tilger selbst in der Nähe seiner Eigenfrequenz am stärksten angeregt wird und somit am meisten Energie aufnehmen und schließlich auch dissipieren kann. Die kritischen Frequenzen werden näherungsweise aus dem Ergebnis der Basiskonfiguration entnommen:

**Wobble:** Frequenz des Wobble Eigenmodes an dem der Realteil sein Maximum erreicht ( $f \approx 8.25$  Hz).

**Weave:** Frequenz des Weave Eigenmodes an dem der Mode wieder instabil wird ( $f \approx 3.5$  Hz).

Mithilfe dieser Frequenzen und den Massen bzw. Massenverhältnissen  $\mu$  (Näheres dazu im nächsten Kapitel) können die Tilger nach der Faustformel von Den Hartog abgestimmt werden.

Andererseits wird auch eine numerische Optimierung der Parameter durchgeführt. Da das Massenverhältnis  $\mu$  des Tilgers größtmöglich gewählt werden soll, wird dieses aus den Optimierungsparametern ausgenommen und bereits zuvor festgelegt. Grundsätzlich wird  $\mu$  durch den zur Verfügung stehenden Bauraum oder der Masse eines vorhandenen Bauteils begrenzt bzw. vorgegeben. In dieser Arbeit ist der Wert so groß wie nötig (für eine Stabilisierung des Wobble-Modes) oder aufgrund realistischer Parameter gewählt.

## Optimierung bezüglich Wobble

Als Zielfunktion für die Optimierung wird der maximale Realteil des Wobble-Modes über den Wobble-kritischen Geschwindigkeitsbereich minimiert:

$$\Gamma_{wobble} = \min_d \max_u \Re(\lambda_{wobble}) \quad (3.15)$$

Um das Minimum zu erreichen, müssen die Optimierungsvariablen  $d$  passend variiert werden. Diese können dabei beliebige Parameter wie Steifigkeiten, Dämpfungskonstanten oder auch Positionen darstellen.

### Optimierung bezüglich Weave

Als Zielfunktion für die Optimierung wird die Geschwindigkeit maximiert, bei welcher der Weave-Mode instabil wird  $u_{weave}$ :

$$\Gamma_{weave} = \max_d \{u \mid \Re(\lambda_{weave}(u)) < 0\} \quad (3.16)$$

### Kombination beider Moden

Sollen beide Moden gleichzeitig verbessert werden, gibt es zwei mögliche Ansätze. Der erste Ansatz gewichtet lediglich beide zuvor beschriebenen Zielfunktionen:

$$\Gamma_{allg} = w_1 \Gamma_{wobble} + w_2 \Gamma_{weave} \quad (3.17)$$

Hierzu sind lediglich die beiden Gewichte  $w_i$  nötig, welche beliebig gewählt werden können. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine Nebenbedingung einzuführen. Zum Beispiel soll der Realteil von Wobble auf einen vorgegebenen Wert  $C_{wobble}$  gesenkt werden und falls möglich noch die Weave Geschwindigkeit maximiert werden. Eine solche Optimierungsstrategie lautet:

$$\max_d \{u \mid \Re(\lambda_{weave}(u)) < 0\} \quad (3.18)$$

$$\text{unter der Bedingung: } \max_u (\Re(\lambda_{wobble})) - C_{wobble} < 0 \quad (3.19)$$

### 3.3 Modellbildung - Basiskonfiguration

In diesem Kapitel wird das verwendete Motorradmodell für die analytischen Untersuchungen in Abschnitt 4 beschrieben. Das verwendete Modell ist eine Vereinfachung des Pacejka-Motorrad-Modells [10] und wurde bereits im Zuge der Dissertation von Ott [38] (noch nicht veröffentlicht) validiert. Danach widmet sich das Kapitel der Herleitung der linearen Bewegungsgleichungen. Hierbei werden zuerst die nichtlinearen Gleichungen anhand eines Mehrkörperformalismus aufgestellt, welche anschließend für die Stabilitätsanalyse linearisiert werden. Diese linearisierten Bewegungsgleichungen werden sowohl für das Basismotorrad als auch für die Tilgervarianten (in gesammelter Form) angeschrieben.

#### 3.3.1 Motorradmodell

Das dieser Arbeit zugrundeliegende Modell basiert auf dem Motorradmodell nach Pacejka [10]. Dieses beschreibt die Bewegung des Motorrad-Fahrer-Systems anhand von sechs Freiheitsgraden, wobei einer davon für die relative Rollbewegung des Oberkörpers des Fahrers gegenüber des Motorradrahmens vorgesehen ist. In dieser Arbeit wird eine vereinfachte Version davon verwendet. Nachdem der Fokus auf der Eigenstabilität des Motorrads liegt, wird der Fahrer als starr verbunden angenommen, wodurch das verwendete Modell über fünf Freiheitsgrade verfügt. Dementsprechend wird der zusätzliche Roll-Freiheitsgrad für den Oberkörper gesperrt. Die Masseneigenschaften des Fahrers werden also aufgrund der starren Anbindung auf den Rahmen des Motorrads reduziert. Das Modell ist in Abbildung 3 in ausgelenkter Lage zu sehen.

Anhand dieser wird der Modellaufbau sowie dessen Freiheitsgrade beschrieben. Es verfügt über einen Hauptrahmen (*m - mainframe*), welcher wie bereits erwähnt auch die Trägheitseigenschaften des Fahrers beinhaltet. Das Hinterrad ist ohne Federung, also mit starrer Schwinge mit dem Hauptrahmen verbunden und um die Radachse drehbar gelagert.

Die allgemeine Bewegung im Raum wird über einen mitgeführten Punkt  $A$  in der Fahrbahnebene beschrieben. Dieser ergibt sich aus der Projektion des Schwerpunkts auf jene Gerade, welche sich aus der Verschnidung zwischen Symmetrieebene des Hauptrahmens und der Fahrbahnebene ergibt. Entlang dieser Schnittgeraden zeigt die  $x_A$ -Achse des Systems. Bei einer Gierbewegung des Motorrads wird diese Gerade mit der Winkelgeschwindigkeit  $r$  um die vertikale  $z_A$ -Achse gegenüber dem Inertialsystem rotiert. Das Koordinatensystem mit Ursprung im Punkt  $A$  spannt mit der  $x_A y_A$ -Ebene die als eben angenommene Fahrbahn auf. Die  $z_A$ -Achse zeigt in den Boden, wodurch die  $y_A$ -

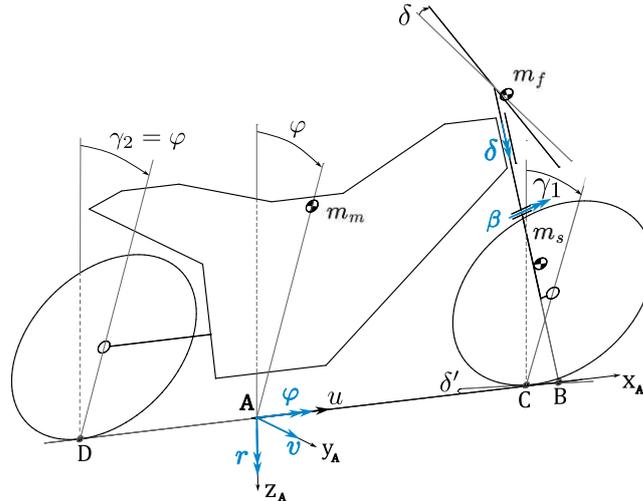


Abbildung 3: Vereinfachtes Pacejka-Motorrad-Modell in ausgelenkter Lage

Achse aus Sicht des Fahrers nach rechts zeigt. Der Basispunkt verfügt über eine fest vorgeschriebene konstante Longitudinalgeschwindigkeit  $u$  in Richtung  $x_A$ , sowie einer lateralen Geschwindigkeit  $v$  in Querrichtung  $y_A$ . Der Hauptrahmen kann darüber hinaus um die  $x_A$ -Achse mit dem Freiheitsgrad  $\varphi$  rotieren. Dieser wird gegenüber der vertikalen Ebene (aufgespannt durch  $x_A z_A$ ) gemessen.

Hinzu kommt nun der Vorderrahmen ( $f$  - *frontframe*), welcher die Lenkerbaugruppe sowie den oberen Anteil der Gabel beinhaltet. Dieser ist mit einem idealen Drehgelenk (Freiheitsgrad  $\delta$ ) mit dem Hauptrahmen verbunden. Die Drehachse ist um den Lenkachsenwinkel  $\varepsilon$  gegenüber der Vertikalen geneigt. Auch die vordere Federung wird in diesem Modell nicht berücksichtigt. Entlang der Gabel ist ein zusätzliches Gelenk vorgesehen, dessen Drehachse normal auf die Lenkachse steht. Diesem Gelenk wird der Freiheitsgrad  $\beta$  zugeschrieben. Es dient wie in Kapitel 2 erwähnt der besseren Darstellung des Wobble-Eigenmode. Mit diesem kann man mithilfe von Ersatzsteifigkeit und -dämpfung die Nachgiebigkeit der Gabel, der Felge und des vorderen Teils des Hauptrahmens berücksichtigen. An dieser unteren Gabelstruktur ( $s$  - *subframe*) wird das Vorderrad drehbar gelagert. Das Modell verfügt also über 5 Freiheitsgrade  $r$ ,  $v$ ,  $\varphi$ ,  $\delta$  und  $\beta$ . Resultierend aus den Starrkörperrotationen  $\varphi$ ,  $\delta$  und  $\beta$  nimmt das Vorderrad den *Bodenlenkwinkel*  $\delta'$  gegenüber der Schnittgeraden ein (Details siehe [10]). Dieser wird für die Beschreibung der Reifenkräfte benötigt.

Aufgrund der Vernachlässigung der Federungen können die Massen der Räder sowie deren Trägheitsmomente um die Längs- und Vertikalachse  $x_i$  und  $z_i$  den jeweiligen Rahmen ( $m$  &  $s$ ) zugerechnet werden. Um die gyroskopischen Effekte zu berücksichtigen,

wird das Trägheitsmoment um die laterale Achse gesondert berücksichtigt. Aus der Annahme der konstanten Vorwärtsgeschwindigkeit  $u$  ergibt sich eine konstante relative Winkelgeschwindigkeit der beiden Räder. Diese kann aus dem Quotienten von Vorwärtsgeschwindigkeit durch den Abrollradius des jeweiligen Rades berechnet werden.

Der Luftwiderstand wird gesammelt als eine Ersatzkraft in Längsrichtung am aerodynamischen Zentrum des Hauptrahmens in Höhe  $h_d$  aufgebracht. Rollwiderstände werden als Produkt aus der Aufstandskraft und einem reifenspezifischen Parameter ermittelt. Die Longitudinalkraft am Hinterrad muss für eine unbeschleunigte Geradeausfahrt ( $u = \text{const.}$ ) gleich der Summe dieser Widerstände sein. Damit kann über den Abrollradius und der Getriebeübersetzung ein notwendiges Motormoment berechnet werden. Das Motormoment und das resultierende Moment aus dem Luftwiderstand wird als Änderung der beiden Aufstandskräfte berücksichtigt. Vereinfacht wird ein verschwindender Schlupf in Längsrichtung angenommen, weshalb diese Effekte nur in die Aufstandskräfte eingehen. Näheres dazu in Abschnitt 3.3.2.

Folgende Vereinfachungen wurden getroffen:

- Alle Körper sind starr.
- Alle Gelenke sind ideal (kein Spiel) und reibungsfrei.
- Feder- und Dämpferelemente werden als linear betrachtet.
- Der Fahrer ist starr mit dem Motorrad verbunden.
- Unbeschleunigte Geradeausfahrt und damit konstante Längsgeschwindigkeit.
- Die Fahrbahn ist eben.
- Punktförmiger fiktiver Reifen-Fahrbahn-Kontakt.
- Vereinfachte Berücksichtigung von Fahrwiderständen und Antrieb.
- Vernachlässigung des Einflusses des konstanten Längsschlupfs bei der Linearisierung des Reifenmodells.

Die Geometrie des Motorrads, sowie die Referenzsysteme der starren Körper sind in Abbildung 4 in unausgelenkter Lage dargestellt. Hier sind die wichtigsten Parameter des Modells aufgezeigt. Dazu zählen die Schwerpunkthöhen  $h_i$ , die Schwerpunktsabstände zur Gabel  $e_i$ , der Radstand  $l$  und einer der zugehörigen Abstände  $b_c$  oder  $a_c$ , der Lenkachsenwinkel  $\varepsilon$  und der sich ergebende mechanische Nachlauf  $t_c$ , die Höhe des  $\beta$ -Gelenks entlang der Gabel  $s_c$ , sowie die Abrollradien der beiden Räder  $r_1$  und  $r_2$ . Übrige Parameter können aus den gerade eben erwähnten Parametern berechnet werden.



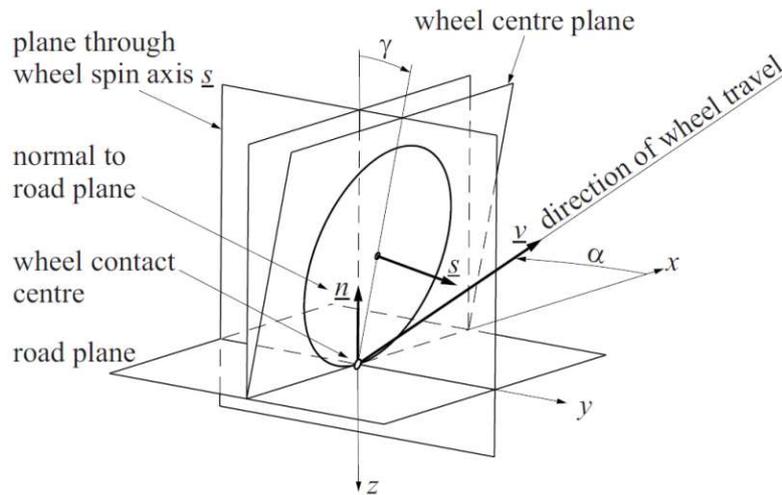


Abbildung 5: Definition von Schräglauf- und Sturzwinkel (aus [39])

Bei einem allgemeinen Geschwindigkeitszustand zeigt die Geschwindigkeit des Rades im Kontaktpunkt nicht in diese Längsrichtung, sondern steht im sogenannten Schräglaufwinkel  $\alpha$  dazu. Dieser kann also aus der Geschwindigkeit des Rades im Kontaktpunkt ermittelt werden.

$$\tan \alpha = -\frac{v_y}{v_x} \quad (3.20)$$

**Sturzwinkel  $\gamma$**  Der Sturzwinkel ist im Gegensatz zu zweispurigen Kraftfahrzeugen bei Motorradreifen maßgeblich an der Generierung der Lateralkraft beteiligt. Dieser wird zwischen der Symmetrieebene des Rads und einer vertikalen Ebene (*normal to road plane*) entlang der Schnittlinie von Radsymmetrieebene und Fahrbahnebene definiert. Berechnet werden kann dieser mit dem Skalarprodukt aus Radachse und Fahrbahnnormalvektor.

$$\sin \gamma = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \quad (3.21)$$

**Bestimmen der Größen für Vorder- und Hinterrad** Nun gilt es diese kinematischen Größen anhand der Freiheitsgrade des Modells zu bestimmen. Die Vorgangsweise ist in [10] oder [39] sehr gut beschrieben. Die kinematischen Zusammenhänge bezogen auf den Schräglaufwinkel sind in Abbildung 6 ersichtlich. Da das Hinterrad (Index 2) starr mit dem Hauptrahmen verbunden ist, lassen sich die Größen hierzu einfach bestimmen. Mit Anwendung der soeben genannten Zusammenhänge und den Starrkörperbewegungen des

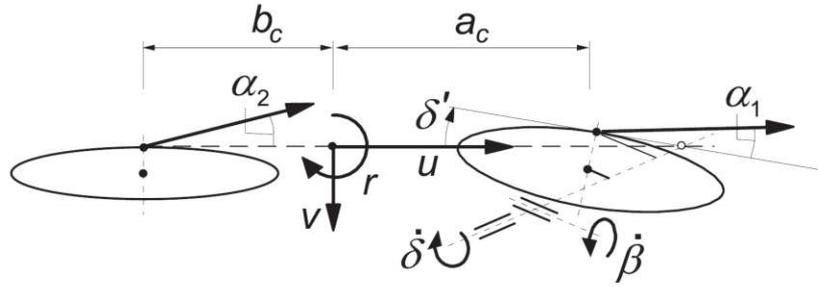


Abbildung 6: Draufsicht auf das Motorradmodell (aus [10])

Hauptrahmens folgt:

$$\alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = -\frac{v - b_c r}{u} \quad (3.22)$$

$$\gamma_2 = \varphi \quad (3.23)$$

Komplexer gestaltet sich der Zusammenhang am Vorderrad. Aufgrund der Überlagerung der Starrkörperrotationen  $\varphi \rightarrow \delta \rightarrow \beta$  ergibt sich eine allgemeine Lage der Radachse. Über Basistransformationen kann die Radachse des Vorderrades in das Referenzsystem  $A$  transformiert und anschließend der Bodenlenkwinkel  $\delta'$  und der vordere Sturzwinkel  $\gamma_1$  bestimmt werden. Der Bodenlenkwinkel wird zur Berechnung des Schräglaufwinkels am Vorderrad verwendet. Durch die Linearisierung um die aufrechte Geradeausfahrt ergeben sich für das Vorderrad:

$$\delta' = -\arctan \left( \frac{\mathbf{s}_{|A,x}}{\mathbf{s}_{|A,y}} \right) \approx \delta \cos \varepsilon - \sin \beta \varepsilon \quad (3.24)$$

$$\alpha_1 - \delta' = \arctan \left( -\frac{v + a_c r - t_c \dot{\delta} - s_c \dot{\beta}}{u} \right) \approx -\frac{v + a_c r - t_c \dot{\delta} - s_c \dot{\beta}}{u} \quad (3.25)$$

$$\gamma_1 = \arcsin (\mathbf{s}_{|A,z}) \approx \varphi + \delta \sin \varepsilon + \beta \cos \varepsilon \quad (3.26)$$

### Reifenkräfte

Hier werden kurz die vom Reifen erzeugten Kräfte angeführt. Abbildung 7 zeigt ein Rad mit großem Sturzwinkel  $\gamma$  und die vereinfachte Betrachtungsweise des Reifen-Fahrbahn-Kontaktpunktes. Die vom Längsschlupf abhängige Kraft in Längsrichtung wird nicht modelliert.

**Vertikalkraft  $F_z$**  Die Vertikal- bzw. Aufstandskraft des Reifens wird vereinfacht berücksichtigt. Durch die Annahme der unbeschleunigten Geradeausfahrt werden die Vertikalkräfte aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen des aufrecht stehenden Motorrads

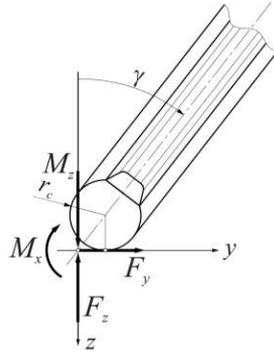


Abbildung 7: Vereinfachte Betrachtung des Reifenkontaktpunktes sowie angreifende Kräfte und Momente (aus [39])

ermittelt und als konstant angenommen. Wie bereits in Abschnitt 3.3.1 erwähnt wird der Luftwiderstand  $F_{Drag}$  gesammelt im aerodynamischen Zentrum des Motorrads in einer Höhe von  $h_d$  aufgebracht. Die Vertikalkomponente (*Lift*) wird in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt aber für die anschließenden Untersuchungen gleich null gesetzt. Zusätzlich geht das aufgrund der Rollreibung und Luftwiderstand benötigte Antriebsmoment  $M_{drive}$  des Motors, welcher sich am Rahmen abstützt, in die Änderung der Aufstandskräfte ein. Beide Größen erhöhen dabei die Kraft am Hinterrad und verringern jene am Vorderrad.

**Querkraft  $F_y$**  Die Querkraft wird durch zwei unterschiedliche Mechanismen hervorgerufen. Sowohl der Schräglaufwinkel  $\alpha$ , als auch der Sturzwinkel  $\gamma$  erzeugen eine Querkraft am Reifen. Grundsätzlich führen beide Größen zu einer Deformation im Reifenlatsch, welche in Schubspannungen resultieren. Die Integration dieser Schubspannungen über den Reifenlatsch kann dann in Form einer Ersatzkraft berücksichtigt werden. Dieser Zusammenhang ist im vorliegenden Reifenmodell anhand der Magic-Formula modelliert.

**Rückstellmoment  $M_z$  und Overturning Couple  $M_x$**  Ein Rückstellmoment entsteht aufgrund des sogenannten pneumatischen Nachlaufs. Da die Schubspannungen im Reifenlatsch (hervorgerufen durch Schräglaufwinkel und Sturzwinkel) nicht symmetrisch um den Reifenkontaktpunkt verteilt sind, erzeugen die Schubspannungen ein Moment um die vertikale Achse des Reifens. Aufgrund des Radius des Reifenquerschnitts ( $r_c$ ) resultiert ein Sturzwinkel in einer Verschiebung des Reifenkontaktpunktes aus der Symmetrieebene des Rades hinaus. Da in der Modellbildung dieser Versatz des Kontaktpunktes nicht berücksichtigt ist, wird zur Korrektur ein zusätzliches Moment um die Längsachse (Overturning Couple) und die vertikale Achse benötigt.

**Magic-Formula (nichtlineares Reifenmodell)** Um die Querkraft  $F_y$ , sowie die Momente  $M_z$  und  $M_x$  zu bestimmen, wird das Reifenmodell *MC PAC* aus *MSC Adams* verwendet. Die *Magic-Formula* kombiniert physikalisches und empirisches Wissen, weshalb diese auch als *semi-empirisches* Modell bezeichnet wird. Die allgemeine Form lautet

$$y(x) = D \sin (C \arctan (Bx - E (Bx - \arctan Bx))) \quad (3.27)$$

$$Y(X) = y(x) + S_V \quad (3.28)$$

$$x = X + S_H \quad (3.29)$$

wobei  $Y$  eine Kraftgröße (z.B.  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $M_z$ ) und  $X$  eine Eingangsgröße (z.B.  $\alpha$  oder  $\gamma$ ) darstellt. Die Terme  $S_V$  und  $S_H$  dienen zur vertikalen bzw. horizontalen Verschiebung der Kurven. Ein typischer Verlauf eines solchen Kraftverlaufs für  $Y(X)$  und  $y(x)$  ist in Abbildung 8 dargestellt.

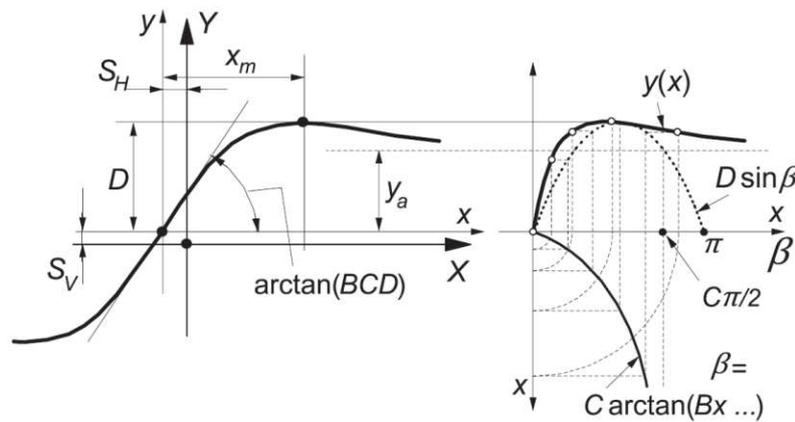


Abbildung 8: Standardmäßiger Verlauf einer *Magic-Formula*-Kraftkurve mit Einfluss der Parameter (aus [10])

Die Kurve für  $y(x)$  ist punktsymmetrisch um den Ursprung und zeigt einen steilen Anstieg zu einem Maxima mit einem anschließenden flacheren Abfall hin zu einer horizontalen Asymptote. Die mathematische Funktion stimmt in ihrer Form qualitativ sehr gut mit einer gemessenen Kraftkurve eines realen Reifens überein. Zusätzlich wird der Einfluss der unterschiedlichen Parameter dargestellt.

D: gibt den Maximalwert an

C: Formfaktor der Kurve (Limit für Sinusfunktion)

B: Steifigkeitsfaktor um die Steigung am Ursprung ( $\frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = BCD$ ) einzustellen

E: bestimmt den Verlauf und die horizontale Position des Maximums

$S_H$ : horizontaler Korrekturfaktor ( $x$ )

$S_V$ : vertikaler Korrekturfaktor ( $y$ )

**Lineares Reifenmodell** Für die Stabilitätsanalyse des vereinfachten Modells wird das Reifenmodell linearisiert. Dabei werden jeweils die Steigungen am Ursprung aus dem *Magic-Formula*-Modell ausgewertet, womit man Reifen-Steifigkeiten für kleine Werte  $\alpha$  und  $\gamma$  erhält. Die Kraftkurven des Reifenmodells sind von der Aufstandskraft abhängig, weshalb folglich auch die Steifigkeiten von dieser abhängig sind. Die lineare Beschreibung der Reifenkräfte lautet somit (Index  $i$  für Vorder- und Hinterrad weggelassen)

$$F_y = C_{F\alpha}(F_z)\alpha' + C_{F\gamma}(F_z)\gamma \quad (3.30)$$

$$M_x = -C_{Mx\gamma}(F_z)\gamma \quad (3.31)$$

$$M_z = -C_{M\alpha}(F_z)\alpha' + C_{M\gamma}(F_z)\gamma - F_x r_c \gamma \quad (3.32)$$

Mit der Berücksichtigung der Einlauflänge  $\sigma_\alpha$  für den Schräglaufwinkel

$$\alpha = \frac{\sigma_\alpha(F_z)}{u} \dot{\alpha}' + \alpha' \quad (3.33)$$

Durch die von der Aufstandskraft abhängige Einlauflänge  $\sigma_\alpha$  wird das transiente Verhalten des pneumatischen Reifens, also ein verzögerter Kraftaufbau durch die erst notwendige Verformung des Reifenlatschs berücksichtigt. Ein transientes Verhalten bezüglich des Sturzwinkels wird nicht modelliert - der modellierte Reifen reagiert also unmittelbar auf eine Änderung des Sturzwinkels.

### 3.3.3 Linearisierte Bewegungsgleichungen

Das Aufstellen der Bewegungsgleichungen erfolgt automatisiert mithilfe eines Mehrkörperformalismus. In dieser Vorgehensweise müssen die Ortsvektoren zu den jeweiligen Schwerpunkten der Körper sowie die Rotationsmatrizen in Abhängigkeit der verallgemeinerten Lagekoordinaten angegeben werden. Zusätzlich müssen die Trägheitseigenschaften und die wirkenden eingepprägten Kräfte und Momente aller starren Körper zur Verfügung gestellt werden. Durch die automatische Aufstellung der Kinematik und der Anwendung des *Prinzip von d'Alembert* erhält man anschließend die Dynamik des Systems in Form von nichtlinearen Bewegungsgleichungen. Für detaillierte Ausführungen diesbezüglich sei auf [37, 40, 41] verwiesen. Wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, wird die Stabilität des Systems anhand dessen linearer Bewegungsgleichungen bewertet. Dazu werden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen um die aufrechte Geradeausfahrt linearisiert. Die Trägheitstensoren der einzelnen Körper sind in deren körperfesten Koordinatensyste-

men (vergleiche Abbildung 4) nach folgender Konvention definiert:

$$\mathbf{I}_{|i} = \begin{bmatrix} I_{i,xx|i} & 0 & -I_{i,xz|i} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{i,xz|i} & 0 & I_{i,zz|i} \end{bmatrix} \quad i \in \{m, f, s\} \quad (3.34)$$

Dabei sind aufgrund der Symmetrieeigenschaften die außerdiagonalen Einträge bezüglich  $y_i$  gleich null. Das Trägheitsmoment um die laterale Achse kommt in den linearisierten Bewegungsgleichungen nicht vor und ist somit nicht von Bedeutung. Die Schwerpunkthöhe ist in den Gleichungen dem Koordinatensystem  $A$  entsprechend mit  $z_i = -h_i$  berücksichtigt ( $z_A$  zeigt nach unten). Um die komplexen linearen Bewegungsgleichungen einfacher ausdrücken zu können, werden einige zusammengefasste Größen definiert. Diese sind im Grunde jenen aus [39] nachempfunden, beinhalten jedoch keine Terme des Fahrers. Die zusammengefassten Größen des Gesamtsystems  $T$  lauten:

$$m_T = m_m + m_f + m_s \quad (3.35)$$

$$z_T = \frac{m_T z_T + m_f z_f + m_s z_s}{m_T} \quad (3.36)$$

$$a_T = \frac{m_f a_f + m_s a_s}{m_T} \quad (3.37)$$

Auch für die Trägheitsmomente bezüglich Punkt  $A$  werden zusammengefasste Größen definiert:

$$I_{T,xx|A} = I_{m,xx|m} + m_m z_m^2 + m_f z_f^2 + m_s z_s^2 + (I_{f,xx|f} + I_{s,xx|s}) \cos^2(\varepsilon) + (I_{f,zz|f} + I_{s,zz|s}) \sin^2(\varepsilon) - 2(I_{f,xz|f} + I_{s,xz|s}) \cos(\varepsilon) \sin(\varepsilon) \quad (3.38)$$

$$I_{T,zz|A} = I_{m,zz|m} + m_f a_f^2 + m_s a_s^2 + (I_{f,zz|f} + I_{s,zz|s}) \cos^2(\varepsilon) + (I_{f,xx|f} + I_{s,xx|s}) \sin^2(\varepsilon) + 2(I_{f,xz|f} + I_{s,xz|s}) \cos(\varepsilon) \sin(\varepsilon) \quad (3.39)$$

$$I_{T,xz|A} = -I_{m,xz|m} - m_f a_f z_f - m_s a_s z_s - (I_{f,xz|f} + I_{s,xz|s})(\cos^2(\varepsilon) - \sin^2(\varepsilon)) - (I_{f,xx|f} + I_{s,xx|s} - I_{f,zz|f} - I_{s,zz|s}) \sin(\varepsilon) \cos(\varepsilon) \quad (3.40)$$

Für die gesamte vordere Baugruppe  $H$  (Lenker + unterer Vorderrahmen) werden ebenfalls Ersatzterme eingeführt. Dadurch ergibt sich die Gesamtmasse und deren Abstand zur Gabel wie folgt:

$$m_H = m_f + m_s \quad (3.41)$$

$$e_H = \frac{m_f e_f + m_s e_s}{m_H} \quad (3.42)$$

Für das zusammengefasste Trägheitsmoment um die Lenkachse ergibt sich:

$$I_{H,\delta\delta} = I_{f,zz|f} + I_{s,zz|s} + m_f e_f^2 + m_s e_s^2 \quad (3.43)$$

Weiters werden zwei Deviationsmomente der Lenkachse und der Achsen  $x_A$  bzw.  $z_A$  definiert.

$$I_{H,\delta x_A} = (I_{f,zz|f} + I_{s,zz|s}) \sin(\varepsilon) - (I_{f,xz|f} + I_{s,xz|s}) \cos(\varepsilon) - m_f z_f e_f - m_s z_s e_s \quad (3.44)$$

$$I_{H,\delta z_A} = (I_{f,zz|f} + I_{s,zz|s}) \cos(\varepsilon) + (I_{f,xz|f} + I_{s,xz|s}) \sin(\varepsilon) + m_f a_f e_f + m_s a_s e_s \quad (3.45)$$

Die gleiche Vorgehensweise wird auch für den unteren Vorderrahmen  $s$  wiederholt. Hier wird zusätzlich auch noch ein Deviationsmoment bezüglich  $\beta$  und  $\delta$  benötigt.

$$I_{s,\beta\beta} = I_{s,xx|s} + m_s s_s^2 \quad (3.46)$$

$$I_{s,\beta\delta} = -I_{s,xz|s} - m_s e_s s_s \quad (3.47)$$

$$I_{s,\beta x_A} = I_{s,xx|s} \cos(\varepsilon) - I_{s,xz|s} \sin(\varepsilon) + m_s s_s z_s \quad (3.48)$$

$$I_{s,\beta z_A} = -I_{s,xx|s} \sin(\varepsilon) - I_{s,xz|s} \cos(\varepsilon) - m_s a_s s_s \quad (3.49)$$

Auch die gyroskopischen Terme der Räder kommen häufig in den Gleichungen vor und werden folgendermaßen ersetzt:

$$G_1 = \frac{I_{1,yy|1}}{r_1}, \quad G_2 = \frac{I_{2,yy|2}}{r_2}, \quad G_T = G_1 + G_2 \quad (3.50)$$

Dadurch ergeben sich die linearen Bewegungsgleichungen des Motorrads in der Basis-konfiguration zu:

$$\begin{aligned} v : \\ m_T \dot{v} + m_T a_T \dot{r} - m_T z_T \ddot{\varphi} + m_H e_H \ddot{\delta} - m_s s_s \ddot{\beta} + m_T u r - F_{Drag,z} \varphi \\ - F_{x1} \cos(\varepsilon) \delta + F_{x1} \sin(\varepsilon) \beta = F_{y1} + F_{y2} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} r : \\ m_T a_T \dot{v} + I_{T,zz|A} \dot{r} + I_{T,xz|A} \ddot{\varphi} + I_{H,\delta z_A} \ddot{\delta} + I_{s,\beta z_A} \ddot{\beta} + m_T a_T u r - u G_T \dot{\varphi} \\ - G_1 u \sin(\varepsilon) \dot{\delta} - G_1 u \cos(\varepsilon) \dot{\beta} - (F_{Drag,z} a_{Drag} - F_{Drag,x} h_{Drag}) \varphi \\ - F_{x1} (t_c + a_c \cos(\varepsilon)) \delta - F_{x1} (s_c - a_c \sin(\varepsilon)) \beta = M_{z1} + M_{z2} + F_{y1} a_c - F_{y2} b_c \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \varphi : \\ - m_T z_T \dot{v} + I_{T,xz|A} \dot{r} + I_{T,xx|A} \ddot{\varphi} + I_{H,\delta x_A} \ddot{\delta} + I_{s,\beta x_A} \ddot{\beta} + (G_T - m_T z_T) u r \\ + G_1 u \cos(\varepsilon) \dot{\delta} - G_1 u \sin(\varepsilon) \dot{\beta} + m_T z_T g \varphi - (F_{z1} t_c + m_H e_H g) \delta \\ + (m_s s_s g - F_{z1} s_c) \beta = M_{x1} + M_{x2} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$\delta$  :

$$\begin{aligned}
 & m_H e_H \dot{v} + I_{H,\delta z_A} \dot{r} + I_{H,\delta x_A} \ddot{\varphi} + I_{H,\delta\delta} \ddot{\delta} + I_{s,\beta\delta} \ddot{\beta} + (m_H e_H + G_1 \sin(\varepsilon)) u r \\
 & - G_1 u \cos(\varepsilon) \dot{\varphi} + k_\delta \dot{\delta} - G_1 u \dot{\beta} - (F_{z1} t_c + m_H e_H g) \varphi \\
 & + (c_\delta - \sin(\varepsilon)(F_{z1} t_c + m_H e_H g)) \delta + (\sin(\varepsilon)(m_s s_s g \sin(\varepsilon) - F_{z1} s_c) + F_{x1} z_\beta) \beta \\
 & = M_\delta - F_{y1} t_c + M_{z1} \cos(\varepsilon) + M_{x1} \sin(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

$\beta$  :

$$\begin{aligned}
 & - m_s s_s \dot{v} + I_{s,\beta z_A} \dot{r} + I_{s,\beta x_A} \ddot{\varphi} + I_{s,\beta\delta} \ddot{\delta} + I_{s,\beta\beta} \ddot{\beta} + (G_1 \cos(\varepsilon) - m_s s_s) u r \\
 & + G_1 u \sin(\varepsilon) \dot{\varphi} + G_1 u \dot{\delta} + k_\beta \dot{\beta} + (m_s s_s g - F_{z1} s_c) \varphi \\
 & + (\sin(\varepsilon)(m_s s_s g - F_{z1} s_c)) \delta + (c_\beta + \cos(\varepsilon)(m_s s_s g - F_{z1} s_c)) \beta \\
 & = M_{x1} \cos(\varepsilon) - F_{y1} s_c - M_{z1} \sin(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Die Reifenkräfte und -momente, sowie die Kräfte zufolge der aerodynamischen Effekte wurden bis jetzt noch allgemein gehalten.

Um das System einer Stabilitätsanalyse unterziehen zu können, werden nun die linearisierten Zusammenhänge aus Gleichung (3.32) eingesetzt. Auch die sonstigen Kräfte müssen noch bestimmt werden. Zur Beschreibung der aerodynamischen Kräfte werden entsprechende Parameter eingeführt, wobei jener für die Kräfte in Vertikalrichtung folgend als null angenommen wird.

$$F_{Drag,x} = C_{dA} u^2, \quad F_{Drag,z} = C_{lA} u^2 \tag{3.56}$$

Der gesamte Rollwiderstand wird mithilfe der nominellen Aufstandskräfte (aus statischem Gleichgewicht) und einem reifenspezifischen Parameter  $f_{rrki}$  berechnet.

$$F_{W,Roll} = \left( \frac{b_c + a_T}{l} f_{rrk1} + \frac{l - b_c + a_T}{l} f_{rrk2} \right) m_T g \tag{3.57}$$

In den tatsächlichen Aufstandskräften wird das vom Motor aufgebrauchte Drehmoment sowie der Einfluss des Luftwiderstands berücksichtigt. Dazu wird zuerst die notwendige Längskraft am Hinterreifen für eine unbeschleunigte Geradeausfahrt berechnet. Von dieser notwendigen Längskraft wird das Motormoment  $M_{Drive}$  berechnet, welches proportional zu dem hinteren Abrollradius  $r_1$  und der Getriebeübersetzung des Motorrads ist. Vereinfachend werden die an den Rädern angreifenden Rollwiderstände in den Untersuchungen nicht berücksichtigt und somit nur die notwendige Antriebskraft am Hinterrad, sowie die Änderung der Aufstandskräfte berücksichtigt.

$$F_{x1} = 0, \quad F_{x2} = F_{Drag,x} + F_{W,Roll} \tag{3.58}$$

$$F_{z1} = \frac{b_c + a_T}{l} m_T g - \Delta F_z, \quad F_{z2} = \left( 1 - \frac{b_c + a_T}{l} \right) m_T g + \Delta F_z \tag{3.59}$$

$$\text{mit: } \Delta F_z = \frac{F_{Drag,x} h_{Drag} + M_{Drive}}{l} \quad (3.60)$$

Zuletzt wird das System noch um die zwei Verzögerungsglieder bezüglich des Schräglaufwinkels wie in Gleichung (3.33) erweitert. Nun können die Bewegungsgleichungen in eine Zustandsraumdarstellung überführt werden. Dadurch ergibt sich für das Basissystem folgender Zustandsvektor  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \left[ v, r, \dot{\varphi}, \dot{\delta}, \dot{\beta}, \varphi, \delta, \beta, \alpha_1, \alpha_2 \right]^T \quad (3.61)$$

Setzt man das einzige in den Bewegungsgleichungen verbleibende äußere Moment  $M_\delta$  gleich null, ergibt sich folgendes lineares System

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.62)$$

Somit kann die Systemmatrix  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{B})$  berechnet und das Eigensystem analysiert werden.

### 3.3.4 Modellparameter

Die Parameter des Modells sind bereits im Vorgang dieser Arbeit am Institut durch die Dissertation von Ott [38] (noch nicht veröffentlicht) bestimmt worden. Diese konnten teilweise gemessen oder der CAD-Geometrie entnommen werden. Andere Parameter wie die Ersatzsteifigkeit  $c_\beta$  und -dämpfung  $k_\beta$  oder die Lage des Ersatzgelenks  $s_c$  wurden im Zuge der Validierung des Modells ermittelt. Tabelle 1 und Tabelle 2 sammeln die Parameter des Motorrads.

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
<i>Allgemeine Parameter</i>			
Radstand	$l$	1.5606	m
Lenkachsenwinkel	$\varepsilon$	25.728	°
Nachlauf	$t_c$	0.099804	m
Lage Ersatzgelenk	$s_c$	0.62905	m
<i>Hauptrahmen <math>m</math> (Hauptrahmen + Hinterrad + Fahrer)</i>			
Schwerpunktlage	$[b_c, h_m]$	[0.61678, 0.71831]	m
Masse	$m_m$	326.4	kg
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{m,xx m} & 0 & -I_{m,xz m} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{m,xz m} & 0 & I_{m,zz m} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 49.938 & 0 & -8.26 \\ 0 & * & 0 \\ -8.26 & 0 & 38.385 \end{bmatrix}$	kgm <sup>2</sup>
<i>Vorderrahmen <math>f</math> (Lenker + oberer Anteil Gabel)</i>			
Schwerpunktlage	$[e_f, h_f]$	[0.00027135, 1.0431]	m
Masse	$m_f$	6.02	kg
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{f,xx f} & 0 & -I_{f,xz f} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{f,xz f} & 0 & I_{f,zz f} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.5965 & 0 & -0.0131 \\ 0 & * & 0 \\ -0.0131 & 0 & 0.4190 \end{bmatrix}$	kgm <sup>2</sup>
<i>unterer Vorderrahmen <math>s</math> (unterer Anteil Gabel + Vorderrad)</i>			
Schwerpunktlage	$[e_s, h_s]$	[0.02194, 0.42483]	m
Masse	$m_s$	27.679	kg
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{m,xx M} & 0 & -I_{m,xz M} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{m,xz M} & 0 & I_{m,zz M} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.8895 & 0 & 0.0371 \\ 0 & * & 0 \\ 0.0371 & 0 & 0.5851 \end{bmatrix}$	kgm <sup>2</sup>
<i>Vorderrad</i>			
Abrollradius	$r_1$	0.31901	m
Trägheitsmoment	$I_{1,yy 1}$	0.58342	m
Rollwiderstand	$f_{rrk1}$	0.018	m
<i>Hinterrad</i>			
Abrollradius	$r_2$	0.31132	m
Trägheitsmoment	$I_{2,yy 2}$	0.84366	m
Rollwiderstand	$f_{rrk2}$	0.018	m

Tabelle 1: Geometrie- und Massenparameter des Motorrads

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
<i>Federsteifigkeiten und Dämpfungskonstanten</i>			
Lenkersteifigkeit	$c_\delta$	0	Nm/rad
Lenkerdämpfung	$k_\delta$	0	Nms/rad
Rahmensteifigkeit	$c_\beta$	21682	Nm/rad
Rahmendämpfung	$k_\beta$	58.853	Nms/rad
<i>Aerodynamische Parameter</i>			
Lage	$[a_d, h_d]$	[0.22675, 0.69783]	m
Luftwiderstandsfaktor	$C_{dA}$	0.37	kg/m
Lift-Faktor	$C_{lA}$	0	kg/m

Tabelle 2: Steifigkeiten, Dämpfungen und aerodynamische Parameter des Motorrads

### 3.4 Modellbildung - mit Tilger

Nun sollen auch die linearen Bewegungsgleichungen der Systeme mit Tilger hergeleitet werden. Dabei wird je nach Tilger der zusätzliche starre Körper elastisch an das Motorrad angebracht. Dazu müssen der Lagevektor zum Schwerpunkt des Tilgers in Abhängigkeit der verallgemeinerten Lagekoordinaten, sowie die an den Körper wirkenden eingprägten Kräfte (Feder-, Dämpfer- und Gewichtskraft) berücksichtigt werden. Das Aufstellen der linearisierten Bewegungsgleichungen erfolgt anschließend wie zuvor automatisiert mithilfe eines Mehrkörperformalismus, wobei nun das System über einen zusätzlichen Freiheitsgrad verfügt.

Da das zugrundeliegende Motorradmodell unverändert bleibt, soll hier nur mehr auf die Änderungen gegenüber der Basisvariante eingegangen werden. Abgesehen von den veränderten Bewegungsgleichungen ergeben sich auch Unterschiede in einigen Parametern der Gleichungen. So verändern sich z.B. aufgrund des zusätzlichen Körpers die Gesamtmasse des Fahrzeugs und auch die Lage des Gesamtschwerpunkts. Daraus ergeben sich unterschiedliche Werte für die Rollwiderstände, das notwendige Antriebsmoment und vor allem abweichende Reifenaufstandskräfte zum Basis-Modell. Diese Aufstandskräfteänderung resultiert wiederum in veränderten Steifigkeiten des linearen Reifenmodells. Auf diese Einflüsse wird erst in Abschnitt 4 genauer eingegangen.

#### 3.4.1 Rotatorischer Tilger am Vorderrahmen

Um den Drehtilger am Vorderrahmen zu berücksichtigen, wird ein zusätzlicher Körper mit Freiheitsgrad  $\zeta$  eingeführt. Der Tilger ist mit einer Parallelanordnung von Drehfeder

$c_\zeta$  und Drehdämpfer  $k_\zeta$  elastisch am oberen Vorderrahmen ( $f$ ) angebunden. Abbildung 9 zeigt eine schematische Darstellung des neuen Modells. Die Trägheitseigenschaften des

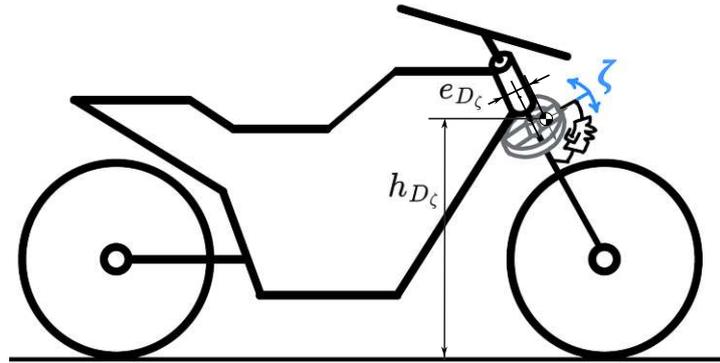


Abbildung 9: Schematische Darstellung eines an den Vorderrahmen angebauten Tilgers ( $h_{D_\zeta} = -z_{D_\zeta}$ )

Tilgers werden mit  $m_{D_\zeta}$  und  $\mathbf{I}_{D_\zeta}$  ( $D$  für DVA - *Dynamic Vibration Absorber*,  $\zeta$  für den Freiheitsgrad) bezeichnet. Zur Positionsbeschreibung werden die Schwerpunkthöhe  $h_{D_\zeta}$  sowie die in positiver Längsrichtung definierte Exzentrizität des Tilgers  $e_{D_\zeta}$  (Abstand zur Rotationsachse - in diesem Fall Lenkachse) eingeführt. Die Längsposition  $a_{D_\zeta}$  ist, wie für die anderen Körper auch, durch die Lenkachse vorgegeben und berechenbar. Ein exzentrisch liegender Schwerpunkt wurde zwar in den Bewegungsgleichungen aus Gründen der Vollständigkeit berücksichtigt, wurde im Zuge dieser Arbeit jedoch als verschwindend ( $e_{D_\zeta} = 0$ ) angenommen. Als vereinfachter allgemeiner Körper wird für den Tilger ein massenbehafteter Ring mit Trägheitsradius  $i_{D_\zeta} = 0.15$  m angenommen. Die sich daraus ergebenden Parameter sind in Tabelle 3 angegeben. Die Wahl dieser Werte wird erst in Abschnitt 4 erläutert.

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
Masse	$m_{D_\zeta}$	3	kg
Trägheitsradius	$i_{D_\zeta}$	0.15	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{D_\zeta,xx D_\zeta} & 0 & -I_{D_\zeta,xz D_\zeta} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{D_\zeta,xz D_\zeta} & 0 & I_{D_\zeta,zz D_\zeta} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0338 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0.0675 \end{bmatrix}$	kgm <sup>2</sup>
Schwerpunkthöhe	$h_{D_\zeta}$	0.8	m
Exzentrizität	$e_{D_\zeta}$	0	m

Tabelle 3: Parameter des rotatorischen Tilgers am Vorderrahmen

Um die Bewegungsgleichungen kompakter anschreiben zu können, werden einige zusammenfassende Terme verwendet. Die sich ergebenden Bewegungsgleichungen werden gesammelt in Abschnitt 3.4.4 angegeben.

$$I_{D_\zeta,xx|A} = I_{D_\zeta,xx|D_\zeta} \cos^2(\varepsilon) + I_{D_\zeta,zz|D_\zeta} \sin^2(\varepsilon) - 2I_{D_\zeta,xz|D_\zeta} \sin(\varepsilon) \cos(\varepsilon) + m_{D_\zeta} z_{D_\zeta}^2 \quad (3.63)$$

$$I_{D_\zeta,zz|A} = I_{D_\zeta,xx|D_\zeta} \sin^2(\varepsilon) + I_{D_\zeta,zz|D_\zeta} \cos^2(\varepsilon) + 2I_{D_\zeta,xz|D_\zeta} \sin(\varepsilon) \cos(\varepsilon) + m_{D_\zeta} a_{D_\zeta}^2 \quad (3.64)$$

$$I_{D_\zeta,xz|A} = (I_{D_\zeta,zz|D_\zeta} - I_{D_\zeta,xx|D_\zeta}) \sin(\varepsilon) \cos(\varepsilon) - I_{D_\zeta,xz|D_\zeta} (\cos^2(\varepsilon) - \sin^2(\varepsilon)) - m_{D_\zeta} a_{D_\zeta} z_{D_\zeta} \quad (3.65)$$

$$I_{D_\zeta,\zeta\zeta} = I_{D_\zeta,zz|D_\zeta} + m_{D_\zeta} e_{D_\zeta}^2 \quad (3.66)$$

$$I_{D_\zeta,\zeta x_A} = I_{D_\zeta,zz|D_\zeta} \sin(\varepsilon) - I_{D_\zeta,xz|D_\zeta} \cos(\varepsilon) - m_{D_\zeta} z_{D_\zeta} e_{D_\zeta} \quad (3.67)$$

$$I_{D_\zeta,\zeta z_A} = I_{D_\zeta,zz|D_\zeta} \cos(\varepsilon) + I_{D_\zeta,xz|D_\zeta} \sin(\varepsilon) + m_{D_\zeta} a_{D_\zeta} e_{D_\zeta} \quad (3.68)$$

### 3.4.2 Rotatorischer Tilger am Hauptrahmen

Nun soll auch die Modellbildung für den rotatorischen Tilger am Hauptrahmen angeführt werden. Im Grunde genommen ist dieser Fall sehr ähnlich zur vorhergehenden Variante. Als Körper werden zwei starr miteinander verbundene Punktmassen (*Hundeknochen*) gewählt, wobei die starre Kopplung als masselos betrachtet wird. Inspiriert wurde diese Körperwahl durch die zur Verfügung stehenden Seitenkoffer am Heck des Motorrads. Der Tilger ist um eine geneigte Achse mit dem Freiheitsgrad  $\eta$  drehbar an den Hauptrahmen angebaut. Zusätzlich ist wieder eine Parallelanordnung von Drehfeder  $c_\eta$  und -dämpfer  $k_\eta$  vorgesehen. Diese Konfiguration ist in Abbildung 10 schematisch dargestellt.

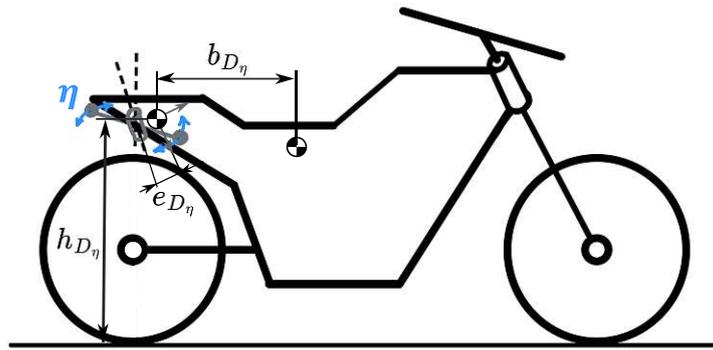


Abbildung 10: Variante mit Rotationstilger ( $h_{D_\eta} = -z_{D_\eta}$ )

Die Trägheitseigenschaften sind mit der Masse  $m_{D_\eta}$  und dem Trägheitstensor  $\mathbf{I}_{D_\eta}$  gegeben. Der Trägheitstensor wird mithilfe des Trägheitsradius  $i_{D_\eta}$  berechnet. Auch

hier gibt  $h_{D_\eta}$  die Schwerpunktshöhe des Tilgers an. In diesem Fall muss zusätzlich der Abstand des Schwerpunkts zum Schwerpunkt des Hauptrahmens  $b_{D_\eta}$  festgelegt werden. Der Wert  $b_{D_\eta}$  beschreibt den Abstand vom Schwerpunkt des Hauptrahmens ausgehend nach hinten, während die sonstigen Körper bis jetzt immer vor dem Schwerpunkt des Hauptrahmens lagen (Abstände  $a_i$ ). Dieser kann beliebig gewählt werden, wurde aber in dieser Arbeit gleich  $b_c$  gesetzt, sodass der Tilger direkt über dem Hinterrad positioniert wird. Diese Wahl erfolgte aufgrund einer realistischen Anbringungsmöglichkeit, da diese Längsposition in etwa der Lage von möglichen Seitenkoffern entspricht. Dadurch ergibt sich durch die zusätzliche Masse lediglich eine Änderung der hinteren Aufstandskraft.

Im Gegensatz zum Vorderrahmen ist in diesem Fall die Wahl der Rotationsachse nicht im Vorhinein klar. Um sich die Option einer Achsanpassung offen zu halten, wird die Achse mit einem Winkel  $\Theta$  zur Vertikalen geneigt. Näheres dazu in Abschnitt 4. Auch hier ist in den Bewegungsgleichungen eine mögliche Exzentrizität des Tilgers (rechtwinkelig zur Tilgerachse in positive Längsrichtung)  $e_{D_\eta}$  berücksichtigt, welche aber ebenfalls im Zuge der Arbeit gleich null gesetzt wird. Tabelle 4 fasst die Parameterwerte des rotatorischen Tilgers am Hauptrahmen zusammen.

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
Masse	$m_{D_\eta}$	13.5	kg
Trägheitsradius	$i_{D_\eta}$	0.4	m
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{D_\eta,xx D_\eta} & 0 & -I_{D_\eta,xz D_\eta} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{D_\eta,xz D_\eta} & 0 & I_{D_\eta,zz D_\eta} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.16 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 2.16 \end{bmatrix}$	kgm <sup>2</sup>
Schwerpunktshöhe	$h_{D_\eta}$	0.8	m
$x_A$ -Abstand Schwerpunkt	$b_{D_\eta}$	0.61678	m
Exzentrizität	$e_{D_\eta}$	0	m

Tabelle 4: Parameter des rotatorischen Tilgers am Hauptrahmen

Für die angeschriebenen Bewegungsgleichungen wird auf die gesammelten Gleichungen in Abschnitt 3.4.4 verwiesen. Um auch für diesen Fall die Bewegungsgleichungen kurz zu halten werden folgende zusammengefasste Terme für die Massenträgheits- und

Deviationsmomente eingeführt.

$$I_{D_\eta,xx|A} = I_{D_\eta,xx|D_\eta} \cos^2(\Theta) + I_{D_\eta,zz|D_\eta} \sin^2(\Theta) - 2I_{D_\eta,xz|D_\eta} \sin(\Theta) \cos(\Theta) + m_{D_\eta} z_{D_\eta}^2 \quad (3.69)$$

$$I_{D_\eta,zz|A} = I_{D_\eta,xx|D_\eta} \sin^2(\Theta) + I_{D_\eta,zz|D_\eta} \cos^2(\Theta) + 2I_{D_\eta,xz|D_\eta} \sin(\Theta) \cos(\Theta) + m_{D_\eta} b_{D_\eta}^2 \quad (3.70)$$

$$I_{D_\eta,xz|A} = (-I_{D_\eta,xx|D_\eta} + I_{D_\eta,zz|D_\eta}) \sin(\Theta) \cos(\Theta) - I_{D_\eta,xz|D_\eta} \cos(2\Theta) + m_{D_\eta} z_{D_\eta} b_{D_\eta} \quad (3.71)$$

$$I_{D_\eta,\eta\eta} = I_{D_\eta,zz|D_\eta} + m_{D_\eta} e_{D_\eta}^2 \quad (3.72)$$

$$I_{D_\eta,\eta x_A} = I_{D_\eta,zz|D_\eta} \sin(\Theta) - I_{D_\eta,xz|D_\eta} \cos(\Theta) - m_{D_\eta} e_{D_\eta} z_{D_\eta} \quad (3.73)$$

$$I_{D_\eta,\eta z_A} = I_{D_\eta,zz|D_\eta} \cos(\Theta) + I_{D_\eta,xz|D_\eta} \sin(\Theta) - m_{D_\eta} e_{D_\eta} b_{D_\eta} \quad (3.74)$$

$$(3.75)$$

### 3.4.3 Translatorischer Tilger am Haupttrahmen

Der letzte untersuchte Fall ist jener eines translatorisch angebrachten Tilgers am Haupttrahmen. Die Idee dafür geht wie in Abschnitt 2 erwähnt aus dem Paper von Imaizumi und Fujioka [11] hervor. Wie in Abbildung 11 dargestellt, verfügt der Tilger über einen translatorischen Freiheitsgrad  $\xi$  in lateraler Richtung des Haupttrahmens. Auch die für den Tilger notwendige Kopplung mithilfe einer Feder  $c_\xi$  und eines Dämpfers  $k_\xi$  ist dargestellt.

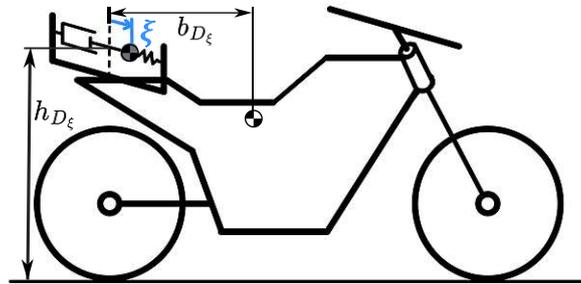


Abbildung 11: Variante mit lateralen Tilger ( $h_{D_\xi} = -z_{D_\xi}$ )

Wie in der Skizze bereits angedeutet, wird der Tilgerkörper vereinfacht als Punktmasse angenommen ( $\mathbf{I}_{D_\xi} = \mathbf{0}$ ). Dies ist insofern kein Problem, da die Massenträgheitsmomente des Haupttrahmens im Vergleich zu jenen des Tilgers ohnehin sehr groß sind. Aus Gründen der Vollständigkeit sind die Trägheitsmomente aber in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt. Somit reicht zur Beschreibung der Trägheitseigenschaften die Masse des Tilgers  $m_{D_\xi}$  aus. Die Positionsbeschreibung erfolgt wie zuvor beim rotatorischen Gegenstück

durch Festlegung der Höhe des Schwerpunkts  $h_{D_\xi}$  und des Abstands zum Haupttrahmenswerpunkt in negative Längsrichtung  $b_{D_\xi}$ . Weiters wird in dieser Variante keine Schwerpunktsexzentrizität berücksichtigt. Die sich so ergebenden Parameter sind in Tabelle 5 angegeben.

Bezeichnung	Symbol	Wert	Einheit
Masse	$m_{D_\xi}$	13.5	kg
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} I_{D_\xi,xx D_\xi} & 0 & -I_{D_\xi,xz D_\xi} \\ 0 & * & 0 \\ -I_{D_\xi,xz D_\xi} & 0 & I_{D_\xi,zz D_\xi} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	kgm <sup>2</sup>
Schwerpunktshöhe	$h_{D_\xi}$	1	m
$x_A$ -Abstand Schwerpunkt	$b_{D_\xi}$	0.61678	m

Tabelle 5: Parameter des translatorischen Tilgers am Haupttrahmen

Für die angeschriebenen Bewegungsgleichungen ist wieder auf Abschnitt 3.4.4 verwiesen. Aufgrund des fehlenden Drehfreiheitsgrads sind die Achsen des Tilgerkoordinatensystems parallel zu jenen des Haupttrahmens. Dadurch ergeben sich im Vergleich zu den beiden anderen Varianten sehr einfache Terme bezüglich der Trägheitsmomente:

$$I_{D_\xi,xx|A} = I_{D_\xi,xx|D_\xi} + m_{D_\xi} z_{D_\xi}^2 \tag{3.76}$$

$$I_{D_\xi,zz|A} = I_{D_\xi,zz|D_\xi} + m_{D_\xi} b_{D_\xi}^2 \tag{3.77}$$

$$I_{D_\xi,xz|A} = -I_{D_\xi,xz|D_\xi} + m_{D_\xi} z_{D_\xi} b_{D_\xi} \tag{3.78}$$

### 3.4.4 Kombinierte linearisierte Bewegungsgleichungen

In diesem Kapitel werden die kombinierten linearen Bewegungsgleichungen aller Tilgervarianten angegeben. Zur Verdeutlichung werden die Terme in unterschiedlichen Farben dargestellt. Diese wurde für den vorderen rotatorischen Tilger **rot**, für den rotatorischen Tilger am Haupttrahmen **grün** und für den translatorischen Tilger **blau** gewählt. Die schwarz gehaltenen Terme entstammen den Gleichungen des Basismodells und sind somit für alle Tilgervarianten identisch.

$v :$

$$\begin{aligned}
 & (m_T + m_{D_\zeta} + m_{D_\eta} + m_{D_\xi})\dot{v} \\
 & + (m_T a_T + m_{D_\zeta} a_{D_\zeta} - m_{D_\eta} b_{D_\eta} - m_{D_\xi} b_{D_\xi})\dot{r} \\
 & - (m_T z_T + m_{D_\zeta} z_{D_\zeta} + m_{D_\eta} z_{D_\eta} + m_{D_\xi} z_{D_\xi})\ddot{\varphi} \\
 & + (m_H e_H + m_{D_\zeta} e_{D_\zeta})\ddot{\delta} - m_s s_s \ddot{\beta} + m_{D_\zeta} e_{D_\zeta} \ddot{\zeta} + m_{D_\eta} e_{D_\eta} \ddot{\eta} + m_{D_\xi} \ddot{\xi} \\
 & + (m_T + m_{D_\zeta} + m_{D_\eta} + m_{D_\xi})ur - F_{Drag,z}\varphi - F_{x1} \cos(\varepsilon)\delta + F_{x1} \sin(\varepsilon)\beta \\
 & = F_{y1} + F_{y2}
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

$r :$

$$\begin{aligned}
 & (m_T a_T + m_{D_\zeta} a_{D_\zeta} - m_{D_\eta} b_{D_\eta} - m_{D_\xi} b_{D_\xi})\dot{v} \\
 & + (I_{T,zz|A} + I_{D_\zeta,zz|A} + I_{D_\eta,zz|A} + I_{D_\xi,zz|A})\dot{r} \\
 & + (I_{T,xz|A} + I_{D_\zeta,xz|A} + I_{D_\eta,xz|A} + I_{D_\xi,xz|A})\ddot{\varphi} + (I_{H,\delta z_A} + I_{D_\zeta,\zeta z_A})\ddot{\delta} \\
 & + I_{s,\beta z_A} \ddot{\beta} + I_{D_\zeta,\zeta z_A} \ddot{\zeta} + I_{D_\eta,\eta z_A} \ddot{\eta} - m_{D_\xi} b_{D_\xi} \ddot{\xi} \\
 & + (m_T a_T + m_{D_\zeta} a_{D_\zeta} - m_{D_\eta} b_{D_\eta} - m_{D_\xi} b_{D_\xi})ur \\
 & - u G_T \dot{\varphi} - G_1 u \sin(\varepsilon)\dot{\delta} - G_1 u \cos(\varepsilon)\dot{\beta} - (F_{Drag,z} a_{Drag} - F_{Drag,x} h_{Drag})\varphi \\
 & - (F_{x1}(t_c + a_c \cos(\varepsilon)))\delta - (F_{x1}(s_c - a_c \sin(\varepsilon)))\beta \\
 & = M_{z1} + M_{z2} + F_{y1} a_c - F_{y2} b_c
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

$\varphi :$

$$\begin{aligned}
 & - (m_T z_T + m_{D_\zeta} z_{D_\zeta} + m_{D_\eta} z_{D_\eta} + m_{D_\xi} z_{D_\xi})\dot{v} \\
 & + (I_{T,xz|A} + I_{D_\zeta,xz|A} + I_{D_\eta,xz|A} + I_{D_\xi,zz|A})\dot{r} \\
 & + (I_{T,xx|A} + I_{D_\zeta,xx|A} + I_{D_\eta,xx|A} + I_{D_\xi,xx|A})\ddot{\varphi} + (I_{H,\delta x_A} + I_{D_\zeta,\zeta x_A})\ddot{\delta} \\
 & - I_{s,\beta x_A} \ddot{\beta} + I_{D_\zeta,\zeta x_A} \ddot{\zeta} + I_{D_\eta,\eta x_A} \ddot{\eta} - m_{D_\xi} z_{D_\xi} \ddot{\xi} \\
 & + (G_T - m_T z_T - m_{D_\zeta} z_{D_\zeta} - m_{D_\eta} z_{D_\eta} - m_{D_\xi} z_{D_\xi})ur \\
 & + G_1 u \cos(\varepsilon)\dot{\delta} - G_1 u \sin(\varepsilon)\dot{\beta} \\
 & - (m_T z_T + m_{D_\zeta} z_{D_\zeta} + m_{D_\eta} z_{D_\eta} + m_{D_\xi} z_{D_\xi})g\varphi \\
 & - (F_{z1} t_c + (m_H e_H + m_{D_\zeta} e_{D_\zeta})g)\delta + (m_s s_s g - F_{z1} s_c)\beta \\
 & - m_{D_\zeta} e_{D_\zeta} g \zeta - m_{D_\eta} e_{D_\eta} g \eta = M_{x1} + M_{x2}
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

$\delta :$ 

$$\begin{aligned}
 & (m_H e_H + m_{D_\zeta} e_{D_\zeta}) \dot{v} + (I_{H, \delta z_A} + I_{D_\zeta, \zeta z_A}) \dot{r} + (I_{H, \delta x_A} + I_{D_\zeta, \zeta x_A}) \ddot{\varphi} \\
 & + (I_{H, \delta \delta} + I_{D_\zeta, \zeta \zeta}) \ddot{\delta} + I_{s, \beta \delta} \ddot{\beta} + I_{D_\zeta, \zeta \zeta} \ddot{\zeta} + (G_1 \sin(\varepsilon) + m_H e_H + m_{D_\zeta} e_{D_\zeta}) u r \\
 & - G_1 u \cos(\varepsilon) \dot{\varphi} + k_\delta \dot{\delta} - G_1 u \dot{\beta} - (F_{z1} t_c + (m_H e_H + m_{D_\zeta} e_{D_\zeta}) g) \varphi \\
 & + (c_\delta - \sin(\varepsilon) (F_{z1} t_c + (m_H e_H + m_{D_\zeta} e_{D_\zeta}) g)) \delta \\
 & + (\sin(\varepsilon) (m_s s_s g \sin(\varepsilon) - F_{z1} s_c) + F_{x1} z_\beta) \beta \\
 & - m_{D_\zeta} e_{D_\zeta} \sin(\varepsilon) g \zeta = M_\delta - F_{y1} t_c + M_{z1} \cos(\varepsilon) + M_{x1} \sin(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

 $\beta :$ 

$$\begin{aligned}
 & - m_s s_s \dot{v} + I_{s, \beta z_A} \dot{r} + I_{s, \beta x_A} \ddot{\varphi} + I_{s, \beta \delta} \ddot{\delta} + I_{s, \beta \beta} \ddot{\beta} + (G_1 \cos(\varepsilon) - m_s s_s) u r \\
 & + G_1 u \sin(\varepsilon) \dot{\varphi} + G_1 u \dot{\delta} + k_\beta \dot{\beta} + (m_s s_s g - F_{z1} s_c) \varphi \\
 & + (\sin(\varepsilon) (m_s s_s g - F_{z1} s_c)) \delta + (c_\beta + \cos(\varepsilon) (m_s s_s g - F_{z1} s_c)) \beta \\
 & = M_{x1} \cos(\varepsilon) - F_{y1} s_c - M_{z1} \sin(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

 $\zeta :$ 

$$\begin{aligned}
 & m_{D_\zeta} e_{D_\zeta} \dot{v} + I_{D_\zeta, \zeta z_A} \dot{r} + I_{D_\zeta, \zeta x_A} \ddot{\varphi} + I_{D_\zeta, \zeta \zeta} (\ddot{\delta} + \ddot{\zeta}) + m_{D_\zeta} e_{D_\zeta} u r + k_\zeta \dot{\zeta} \\
 & - m_{D_\zeta} e_{D_\zeta} g \varphi - m_{D_\zeta} e_{D_\zeta} g \sin(\varepsilon) (\delta + \zeta) + c_\zeta \zeta = 0
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

 $\eta :$ 

$$\begin{aligned}
 & m_{D_\eta} e_{D_\eta} \dot{v} + I_{D_\eta, \eta z_A} \dot{r} + I_{D_\eta, \eta x_A} \ddot{\varphi} + I_{D_\eta, \eta \eta} \ddot{\eta} + m_{D_\eta} e_{D_\eta} u r + k_\eta \dot{\eta} \\
 & - m_{D_\eta} e_{D_\eta} g \varphi + (c_\eta - m_{D_\eta} e_{D_\eta} g \sin(\Theta)) \eta = 0
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

 $\xi :$ 

$$m_{D_\xi} \dot{v} - m_{D_\xi} b_{D_\xi} \dot{r} - m_{D_\xi} z_{D_\xi} \ddot{\varphi} + m_{D_\xi} \ddot{\xi} + m_{D_\xi} u r + k_\xi \dot{\xi} - m_{D_\xi} g \varphi + c_\xi \xi = 0 \tag{3.86}$$

Wie man anhand der meisten eingefärbten Terme in den Bewegungsgleichungen erkennen kann, haben die Tilger eine Veränderung der Trägheitseigenschaften zufolge. Dabei wirken sie sich, unabhängig von deren Freiheitsgrad, wie eine Erhöhung gewisser Maseneigenschaften aus. In den Gleichungen bezüglich  $v$ ,  $r$  und  $\varphi$  sieht man die Effekte der erhöhten Gesamtmasse bzw. der veränderten Trägheitsmomente des Motorrads. Der massenerhöhende Einfluss auf die Trägheitseigenschaften ist sehr gut in der Gleichung bezüglich  $\delta$  anhand des rotatorischen Tilgers am Vorderrahmen zu erkennen. Die Einträge bezüglich des Tilgers  $D_\zeta$  gleichen jenen der gesammelten Einträge der vorderen Baugruppe  $H$ . Einzige Ausnahme sind die neuen Terme, welche aufgrund des Tilgerfreiheitsgrades  $\zeta$  in die Gleichung eingehen. Die meisten zusätzlichen Terme treten in der Hauptdiagonale oder in Koppeltermen der fünf Basis-Freiheitsgrade untereinander auf. Würde man den Körper des Tilgers also starr an das System anbringen, würden diese Terme bestehen bleiben. Folglich wären diese Auswirkungen durch Parameteränderungen am Basismodell ebenfalls erzielbar.

Die neuen Terme, in welchen die Tilgerfreiheitsgrade direkt eingehen, ergeben sich jedoch erst durch die elastische Anbringung des Tilgers. Diese sind vor allem in den Gleichungen für  $\zeta$ ,  $\eta$  und  $\xi$  gut ersichtlich. Der Betrag der außerdiagonalen Einträge hängt für die rotatorischen Tilger von den Winkeln der Tilgerachse ab. Beim lateralen Tilger sind die Abstände  $b_{D_\zeta}$  und  $z_{D_\xi}$  ausschlaggebend. Diese fungieren bei einer Anregung der Rotationsfreiheitsgrade des Hauptrahmens als Hebelarme und sind somit direkt proportional zu einer translatorischen Anregung. Darüber hinaus bestimmen die Trägheitseigenschaften der Tilger maßgeblich den Betrag dieser außerdiagonalen Terme. Eine fundierte Aussage über die tatsächlichen Kopplungen der Tilger zu treffen, bedarf bei einer dicht besetzten Massenmatrix viel Aufwand, jedoch können anhand der zum Schluss angeführten Tilgergleichungen zumindest die direkten Kopplungsterme in der Massenmatrix leicht eingesehen werden.

Da für die folgenden Analysen ohnehin verschwindende Schwerpunktsexzentrizitäten angenommen werden, haben die Einträge bezüglich  $e_{D_i}$  untergeordnete Bedeutung. Somit bleiben für die rotatorischen Tilger nur mehr außerdiagonale Einträge in der Massenmatrix bestehen. Für den lateral wirkenden Tilger sind solche auch in der Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix vorhanden. In der Steifigkeitsmatrix ergibt sich dieser Eintrag aufgrund der Potentialänderung durch den Rollwinkel  $\varphi$ . In der Dämpfungsmatrix ist der Term proportional zur Vorwärtsgeschwindigkeit  $u$  und der Gierrate  $r$  - dieser entspricht also einem Term aufgrund von Corioliseffekten.

## 4 Analytische Stabilitätsuntersuchung

In diesem Kapitel werden die soeben aufgestellten linearen Bewegungsgleichungen bezüglich der Stabilität des Systems um die aufrechte Geradeausfahrt analysiert. Dabei wird zuerst auf die Stabilität der Basiskonfiguration eingegangen und die relevanten Moden werden erläutert. Danach werden für die jeweiligen Tilger die Einflüsse der geänderten Massengeometrie untersucht, um somit eine geeignete Position und einen geeigneten Körper vorschlagen zu können. Anschließend werden die Einflüsse der Tilger auf die Stabilität des Motorrads analysiert.

### 4.1 Stabilitätsanalyse der Basiskonfiguration

Als Erstes wird auf das Basismodell des Motorrads eingegangen. Dieses entspricht dem am Institut zur Verfügung stehenden Motorrad (*KTM Super Adventure 1290 S*), jedoch ohne den standardmäßig verbauten Lenkungsdämpfer ( $k_\delta = 0$ ). Zusätzliche Bauteile wie Top-Case oder Seitenkoffer sind in dieser Konfiguration nicht berücksichtigt. Es sind die Parameterwerte sowie die Bewegungsgleichungen aus Abschnitt 3.3.1 gültig.

Aus der Systemmatrix  $A$  lassen sich nun, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, die Eigenwerte  $\lambda_i$  und Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  des Motorrads bestimmen. Da es sich um ein System 10. Ordnung handelt, verfügt es über ebenso viele Eigenmoden. Der Realteil  $\Re(\lambda_i)$  des jeweiligen Eigenwerts charakterisiert die Stabilität des Eigenmodes. Ist dieser negativ, ist der Mode asymptotisch stabil und kehrt somit in den untersuchten Zustand der aufrechten Geradeausfahrt zurück. Bei einem positiven Realteil ist der Mode instabil und die Lösung klingt auf. Weiters beinhaltet der Eigenwert die Information, ob es sich um einen oszillierenden oder reellen Eigenmode handelt. Darüber gibt der Imaginärteil  $\Im(\lambda_i)$  Auskunft.

- $\Im(\lambda_i) = 0$ : monotoner Eigenmode
- $\Im(\lambda_i) \neq 0$ : oszillierender Eigenmode mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_i = \Im(\lambda_i)$

Handelt es sich um einen oszillatorischen Eigenmode, gibt es immer ein Paar konjugiert komplexe Eigenwerte dazu. Diese weisen den selben Realteil, aber einen im Vorzeichen inversen Imaginärteil auf.

Im Zuge dieser Arbeit werden die Verläufe der Eigenwerte über den Geschwindigkeitsbereich in Form von Stabilitätsdiagrammen dargestellt. Diese bestehen aus zwei Plots, einer dem Realteil und einer dem Imaginärteil zugehörig. Entlang der Abszisse ist immer die Vorwärtsgeschwindigkeit  $u$  in m/s aufgetragen. Im linken Plot ist entlang der Ordinate der Realteil  $\Re(\lambda)$  aufgetragen, während im rechten Plot die Frequenz

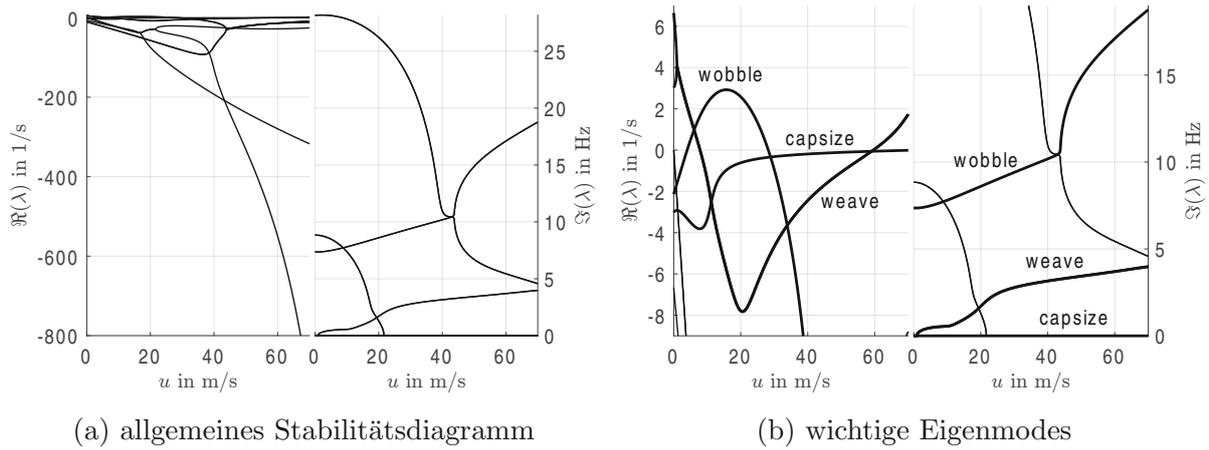


Abbildung 12: Plots aller Eigenwerte des Motorradmodells

(umgerechneter Imaginärteil  $f = \frac{\Im(\lambda_i)}{2\pi}$  in  $Hz$ ) abzulesen ist. Abbildung 12 zeigt zwei solcher Stabilitätsdiagramme für das Basismodell. Wie man in Abbildung 12a sehen kann, nehmen einige Realteile betragsmäßig große negative Werte an. Da für die Stabilitätsuntersuchungen nur Moden nahe der Stabilitätsgrenze von Interesse sind, werden Moden mit stark negativen Realteilen in den folgenden Stabilitätsdiagrammen nicht dargestellt. Die kritischen Moden sind in Abbildung 12b dick gekennzeichnet und mit ihren gängigen Namen versehen. In den nachfolgenden Stabilitätsdiagrammen werden nur mehr diese kritischen Moden gezeigt und die übrigen Moden aufgrund besserer Übersicht komplett weggelassen.

Anhand Abbildung 12b kann man den autostabilen bzw. selbststabilen Bereich des vorhandenen Motorrads ablesen. Dieser ist dadurch gekennzeichnet, dass alle Eigenwerte des Motorrads kleiner als null, also stabil sind. Für das vorliegende Basismodell liegt dieser im Geschwindigkeitsbereich von  $u \in [28.3, 59.5]$   $m/s \approx [102, 214]$   $km/h$ .

### Wobble (Lenkungsflattern)

Wie man in Abbildung 12b erkennen kann, ist Wobble für einen großen Geschwindigkeitsbereich von ca.  $u \in [4.0, 28.3]$   $m/s (\approx [15, 100]$   $km/h)$  instabil. Der maximale Realteil wird bei  $u = 15.7$   $m/s$  erreicht, was in etwa  $57$   $km/h$  entspricht. Dies ist vor allem problematisch, da übliche Geschwindigkeiten im Alltag fast ausschließlich in diesem instabilen Geschwindigkeitsbereich liegen. Der Mode ist über den gesamten untersuchten Bereich oszillatorisch. Die Eigenfrequenz erhöht sich mit steigenden Geschwindigkeiten und variiert zwischen  $f_{wobble} \in [7.4, 9.2]$   $Hz$  im kritischen Bereich. Abbildung 13a zeigt die Schwingungsform des Modes bei  $u = 20$   $m/s$  (normiert auf Lenkwinkel  $\delta_{max} = 10^\circ$ ), während Abbildung 13b die Entwicklung des Eigenvektors im kritischen Geschwindig-

keitsbereich darstellt. Über der Darstellung der Schwingung ist die Trajektorie des Punk-

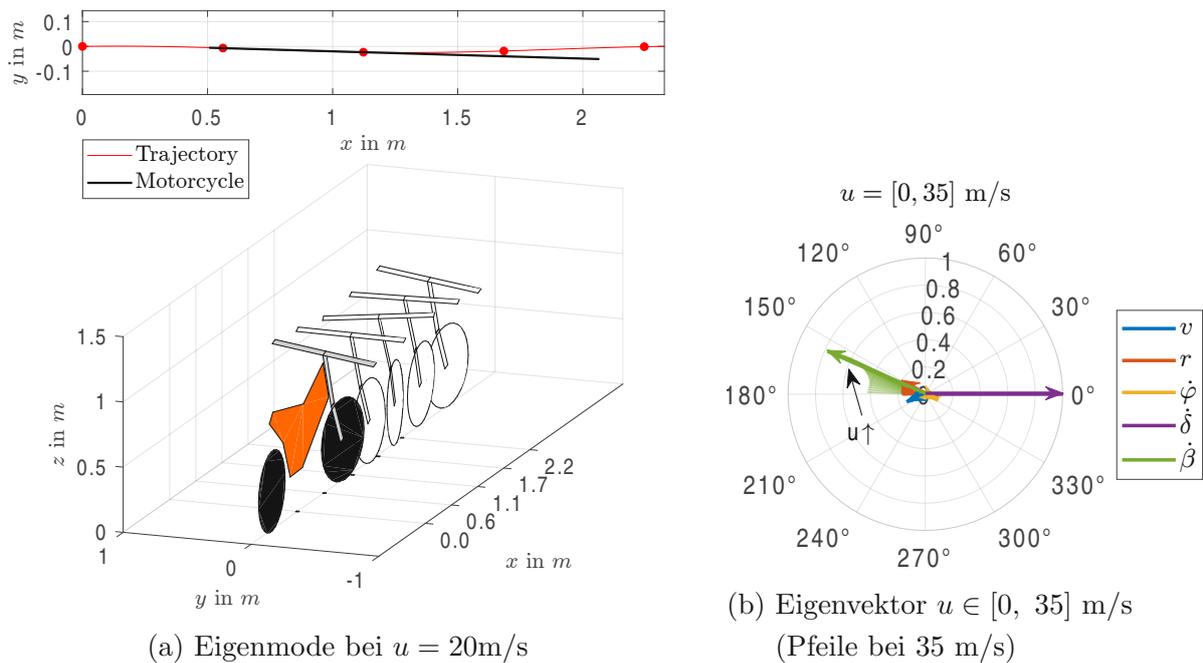


Abbildung 13: Wobble Eigenmode

tes  $A$  in der Fahrbahn dargestellt. Zusätzlich ist die Schnittlinie der Symmetrieebene des Motorrads mit der Fahrbahnebene eingezeichnet. Daran erkennt man das Verhältnis von Motorradabmessungen zu dem zurückgelegten Weg in einer Schwingungsperiode. Aufgrund der hochfrequenten Schwingung wird in der Darstellung nur die Lenkerbaugruppe gezeigt.

Der Eigenvektor in Abbildung 13b ist auf die Lenkwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\delta}$  normiert. Um eine Vergleichbarkeit der Größen zu gewährleisten sind in diesen Eigenvektor-Plots die Geschwindigkeitsgrößen jedes Freiheitsgrads dargestellt. Wie oben ersichtlich, sind die dominierenden Freiheitsgrade jene der Lenkbaugruppe  $\delta$  und  $\beta$ , wobei  $\beta$  zu höheren Geschwindigkeiten hin einen immer größeren Anteil an der Schwingung hat. Die restlichen Freiheitsgrade  $v$ ,  $r$  und  $\varphi$  verfügen über deutlich geringere Schwingungsamplituden. Daher wird oftmals auch der Name *Lenkungsflattern* als Synonym für Wobble herangezogen, dessen visuelle Ausprägung in Abbildung 13a erkennbar ist. Bei sehr niedrigen Geschwindigkeiten sind sowohl  $v$ ,  $r$  und  $\dot{\beta}$  näherungsweise gegenphasig zu  $\dot{\delta}$ . Im Bereich höherer Geschwindigkeiten eilen  $r$  und  $\dot{\beta}$  der Lenkwinkelgeschwindigkeit um ca.  $150^\circ$  vor, während  $v$  ca.  $150^\circ$  Verzug hat. Die Rollwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  hat über den gesamten Geschwindigkeitsbereich einen annähernd konstanten Phasenverzug von  $30^\circ$  zu  $\dot{\delta}$ . Im Zuge dieser Arbeit ist mit Wobble nur der Eigenmode bis ca.  $40\text{m/s}$  gemeint da dieser bei hohen Geschwindigkeiten ohnehin stabil ist.

## Weave (Pendeln)

Der Weave Mode ist der zweite kritische Mode des Motorrads. Eine Besonderheit ist, dass dieser Mode bei  $u = 0.93 \text{ m/s}$  aus einer Verzweigung zweier instabiler reeller Moden entsteht. Danach bleibt auch dieser wieder oszillatorisch über den restlichen Geschwindigkeitsbereich. Weave ist bei geringen ( $u < 7.9 \text{ m/s} \approx 28 \text{ km/h}$ ), oder sehr hohen ( $u > 59.6 \text{ m/s} \approx 215 \text{ km/h}$ ) Geschwindigkeiten instabil. Auch die Eigenfrequenz des Weave-Modes erhöht sich mit steigender Geschwindigkeit. Aus der Verzweigung der reellen Moden wird zuerst für geringe Geschwindigkeiten ein Frequenzniveau von ca. 0.5 Hz erreicht. Danach nimmt die Frequenz im Bereich 15 – 20 m/s rasch zu und flacht kurz darauf wieder ab. In dem für diese Arbeit relevanten höheren Geschwindigkeitsbereich liegt die Frequenz im Bereich  $f_{weave} \in [3, 4] \text{ Hz}$ .

Der Eigenvektor ist auf den dominierenden Freiheitsgrad der Quergeschwindigkeit  $v$  normiert in Abbildung 14b zu sehen. Man erkennt, dass im Vergleich zu Wobble meh-

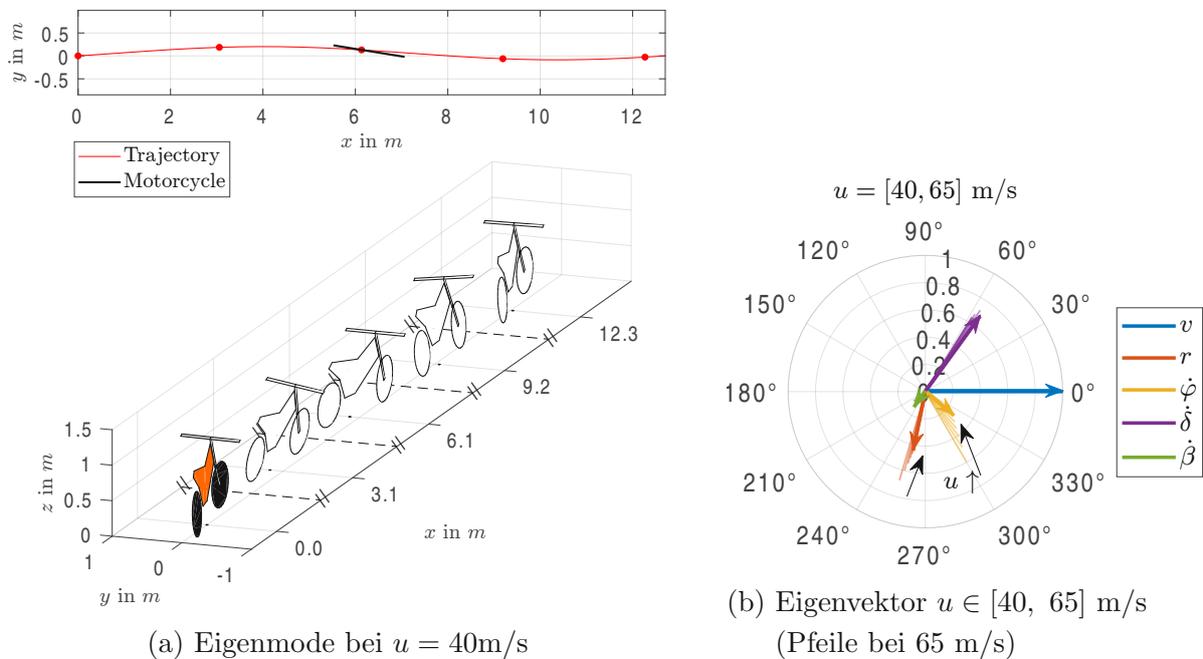


Abbildung 14: Weave Eigenmode

rere Freiheitsgrade maßgeblichen Anteil an der Schwingungsform haben. Eine Periode des Modes bei  $u = 40 \text{ m/s}$  ist in Abbildung 14a (normiert auf  $\delta_{max} = 10^\circ$ ) mit einer unterbrochenen  $x$ -Achse dargestellt. Das sogenannte *Pendeln* des Motorrads ähnelt einer Fahrt durch einen Slalomkurs.

Anhand des Eigenvektors in Abbildung 14b ist wieder die Entwicklung über den kritischen Geschwindigkeitsbereich gezeigt. Die Phasenwinkel verändern sich für alle Frei-

heitsgrade mit Ausnahme der Rollrate nur wenig. Das Amplitudenverhältnis zwischen Lenkwinkelrate und Lateralgeschwindigkeit bleibt in etwa gleich. Die abnehmenden Amplitudenverhältnisse von  $r$  und  $\dot{\varphi}$  in Relation zu  $v$  bedeuten eine abnehmende Winkelgeschwindigkeit des Hauptrahmens bei erhöhten Vorwärtsgeschwindigkeiten.

Für eine bessere Darstellung von strichlierten oder punktierten Linien wurde bei manchen Plots der zweite Zweig des Weave-Modus (für  $u \leq 0.93\text{m/s}$ ) nicht dargestellt. Da dieser Bereich in dieser Arbeit nicht näher analysiert wird, stellt dies kein Problem dar und soll lediglich Missverständnissen vorbeugen.

### Capsize (Kentern)

Der dritte Mode nahe der Stabilitätsgrenze wird Capsize genannt. Dieser ist ein rein reeller Mode und weist somit keine Oszillation auf. In Abbildung 12b ist deshalb die Capsize Beschriftung neben der Abszisse platziert. Er beschreibt das sogenannte *Kentern* des Motorrads. Bei Geschwindigkeiten unter 100 km/h ist  $\varphi$  der dominierende Freiheitsgrad, während darüber der Mode vor allem von der Quergeschwindigkeit und Gierrate bestimmt wird. Die Anteile der Freiheitsgrade der Lenkbaugruppe sind in diesem Mode verschwindend. Der Capsize Mode ist bei kleinen und mäßigen Geschwindigkeiten stabil und wird erst bei sehr hohen Geschwindigkeiten instabil ( $u = 72\text{ m/s} \approx 260\text{ km/h}$ ). Der Capsize stellt aufgrund seines reellen Verhaltens und den nur minimal positiven Realteilen für den Fahrer in der Regel kein Problem dar, weshalb auch die geringe Stabilitätsreserve über einen großen Geschwindigkeitsbereich nicht negativ auffällt.

## 4.2 Tilger am Vorderrahmen

Zuerst soll die Effektivität eines an der Lenkbaugruppe montierten Tilgers untersucht werden. Diese Lösung liegt am nächsten zu den aus der Literatur bekannten Lenkungsdämpfern und Lenkungskompensatoren. Da dieser Tilger direkt um die Lenkachse angebracht ist, wird ein großes Stabilisierungspotential bezüglich Wobble (Abbildung 13b) erwartet. Zu Beginn wird die geeignete Position des Tilgers ermittelt. Anschließend wird die Effektivität dieser Tilgervariante analysiert. Zum Schluss soll auch noch auf die Umsetzungsmöglichkeiten am Motorrad eingegangen werden.

### 4.2.1 Stabilitätsanalyse

#### Starre Anbindung

Bevor der Einfluss des Tilgers analysiert wird, ist es sinnvoll den Stabilitätseinfluss der veränderten Massengeometrie des Motorrads festzustellen. Wie in Abschnitt 3.4.4 erwähnt, entsprechen diese Effekte einer starren Anbindung an das Motorrad. Zusätzlich zu diesen wirkt sich das zusätzliche Gewicht und die unterschiedliche Gewichtsverteilung auf die Aufstandskräfte des Motorrads aus, was wiederum die Parameter des Reifenmodells verändert. Mit dieser Untersuchung können kritische Einflüsse und somit Design-Ziele für einen Tilger am Vorderrahmen analysiert werden. Abbildung 15 zeigt die Ergebnisse.

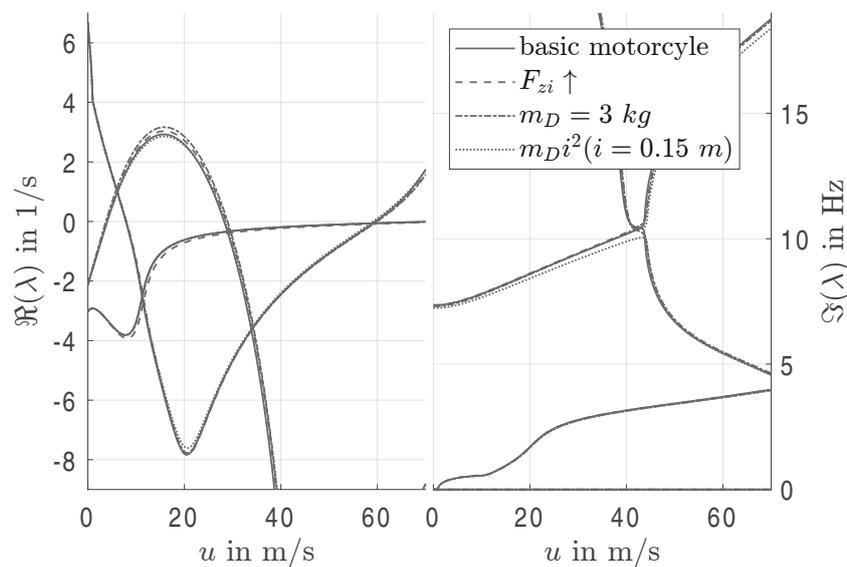


Abbildung 15: Einfluss eines starren Körpers am Vorderrahmen

Die Erhöhung der Aufstandskräfte ohne Berücksichtigung der veränderten Massengeometrie ( $F_{zi} \uparrow$ ) führt zu einer minimalen Destabilisierung von Wobble sowie einer leichten Verbesserung von Capsize. Durch die Berücksichtigung der Masseneffekte einer Punktmasse ( $m_D = 3 \text{ kg}$ ) setzt sich der Trend bei Wobble weiter fort, während die Verbesserung bei Capsize wieder verschwindet. Das Hinzufügen einer Punktmasse am Vorderrahmen verschlechtert also die Wobble-Stabilität. Wird anstatt einer Punktmasse nun ein massebehafteter Ring ( $I_{D_\zeta,zz|D_\zeta} = m_D i^2$ ,  $I_{D_\zeta,xx|D_\zeta} = I_{D_\zeta,zz|D_\zeta}/2$ ,  $i = 0.15 \text{ m}$ ) mit Trägheitsradius  $i$  angebracht, wird der negative Einfluss der Punktmasse wieder aufgehoben. Der starr angebrachte Körper hat gesamt betrachtet sogar leicht positiven Einfluss auf Wobble, was auf einen positiven Effekt eines erhöhten Trägheitsmoments des Lenkers zurückschließen lässt. Der Weave-Mode bleibt bei all diesen Änderungen

näherungsweise unverändert. Gesammelt ergeben sich folgende Einflüsse eines starr angebrachten Körpers am Vorderrahmen:

- $F_{z1} \uparrow$  destabilisiert Wobble
- $F_{z2} \uparrow$  leichte Verbesserung von Weave bei hohen Geschwindigkeiten
- $m_{D_\zeta} \uparrow$  destabilisierender Effekt für Wobble
- $h_{D_\zeta} \uparrow$  erhöhte Lage des Tilgers verbessert Stabilitätseigenschaften
- $I_{D_\zeta,zz|D_\zeta} \uparrow$  erhöhtes Trägheitsmoment um die Lenkachse verbessert Wobble
- $I_{D_\zeta,xx|D_\zeta}$  Trägheitsmoment normal auf die Lenkachse hat verschwindenden Einfluss

Der Tilger sollte also bestenfalls so hoch wie möglich positioniert werden. Weiters ist eine geringe Masse bei gleichzeitig hohem Massenträgheitsmoment um die Rotationsachse, also ein großer Trägheitsradius  $i$  des Körpers, anzustreben.

### Freigegebener Freiheitsgrad

Nun wird der selbe Körper mit vorgesehenem Freiheitsgrad  $\zeta$  an den Vorderrahmen angebracht und ist somit in der Lage eine Relativbewegung auszuführen. Der Unterschied der Ergebnisse zum vorherigen Kapitel ist nun also auf die Koppelterme bezüglich dem neuen Freiheitsgrad zurückzuführen.

Abbildung 16 zeigt das Stabilitätsdiagramm dieser Konfiguration. Die beiden Abstimmungen erfolgten nach Abschnitt 3.2. Die Masse des Tilgers wurde, bei festgehaltenem Trägheitsradius, so groß wie notwendig gewählt um eine Stabilisierung des Wobble-Modes durch die optimale Abstimmung zu ermöglichen. Man erkennt eine große Reduktion des Realteils für beide Abstimmungen und die gewünschte Stabilisierung des Modes im Fall der Optimierung. Die Tilgerparameter werden in Tabelle 6 angeführt. Das Stabilitätsdiagramm bestätigt also den erwarteten starken Einfluss auf den Wobble Mode. Bezüglich Weave konnte mit dieser Art von Tilger jedoch keine nennenswerte Verbesserung erzielt werden. Diese Ineffektivität liegt an der geringen Trägheit des Tilgers, wenn man diese mit der Schwingung des gesamten Motorrads vergleicht. Da die schwingende Masse bei Wobble hauptsächlich die Lenkbaugruppe beinhaltet, ist das Massenverhältnis und somit die Effektivität des Tilgers weit höher.

Die Konfiguration mit Tilger weist aufgrund des hinzugefügten Freiheitsgrads einen zusätzlichen Eigenmode auf. Dieser ist bezüglich der Modeform der Basisfreiheitsgrade sehr ähnlich zu Wobble - tatsächlich dominiert aber der Tilgerfreiheitsgrad (Amplitudenverhältnisse  $\leq 10$ ). Interessant ist dabei der stark unterschiedliche Verlauf der Eigenmoden der beiden Abstimmungen. Durch das Tuning von Den Hartog (DH) bleibt

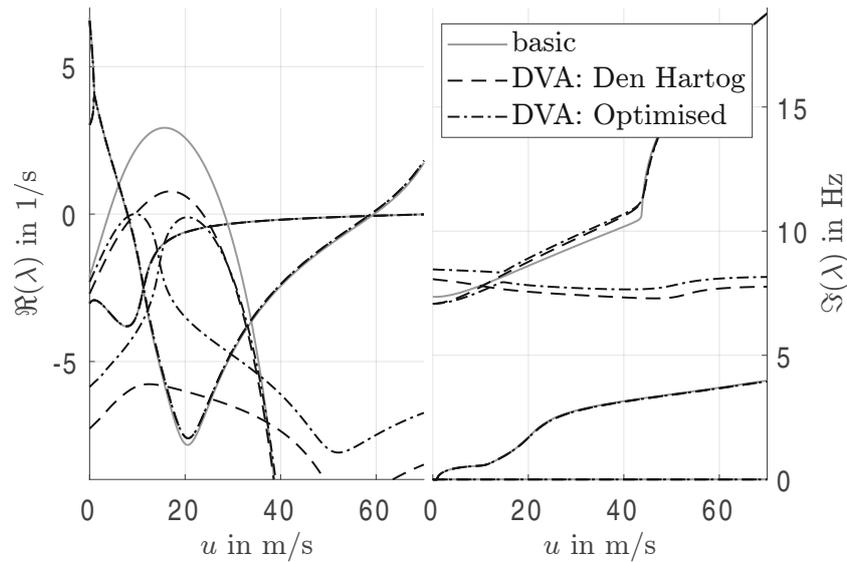


Abbildung 16: Stabilitätsdiagramm des Motorrads mit Tilger (DVA) am Vorderrahmen

im Realteil ein einzelner klar erkennbarer Wobble-Höcker bestehen, welcher im Vergleich zum Basic-Modell stark verbessert ist. Der neue Mode aufgrund des Tilgers liegt weit unter der Stabilitätsgrenze. Bei der Abstimmung durch die Optimierung ergeben sich zwei Wobble-Höcker. In diesem Fall wechseln die beiden Eigenmoden im Bereich von 10–20 m/s ihre Form. Der zuerst dem Tilger zugeordnete Mode wird dabei zum Wobble-Mode, während der erste Wobble-Höcker anschließend den Tilger-Mode darstellt. Dies lässt sich auch anhand des Frequenzverlaufs erkennen. In diesem sind die Tilgermoden aufgrund der in etwa gleichbleibenden Frequenz ersichtlich. Ebenso ist die steifere Abstimmung der optimierten Variante anhand des höher liegenden Frequenzniveaus erkennbar. In beiden Fällen nimmt die Wobble-Frequenz bei höheren Geschwindigkeiten zu und bei geringen Geschwindigkeiten gegenüber der Basiskonfiguration ab. Die Frequenzerhöhung ist durchaus ein unerwartetes Resultat, da man aufgrund der erhöhten Trägheit des Systems eigentlich mit einer Abnahme dieser rechnen würde.

Abbildung 17 zeigt den Wobble-Mode des Tilger-Modells mit DH-Tuning und stellt ihn jenem der Basiskonfiguration gegenüber. Der Tilgerfreiheitsgrad  $\zeta$  ist dominierend und nimmt vor allem bei geringen Geschwindigkeiten große Amplituden an. Dessen Phasenwinkel ändert sich stark über die Geschwindigkeit. Der Phasenverzug zum Lenkwinkel beträgt anfangs in etwa  $60^\circ$  und nimmt bei höheren Geschwindigkeiten stetig zu. Schlussendlich nimmt  $\dot{\zeta}$  für höhere Geschwindigkeiten den selben Phasenverzug wie  $v$  ein. Mit Ausnahme des zusätzlichen Freiheitsgrads ist der Wobble-Mode ansonsten kaum verändert, was in einer ähnlichen Schwingungsform resultiert.

Auffällig ist vor allem das große Amplitudenverhältnis  $\dot{\zeta}/\dot{\delta}$ . Der Tilger wird also bei

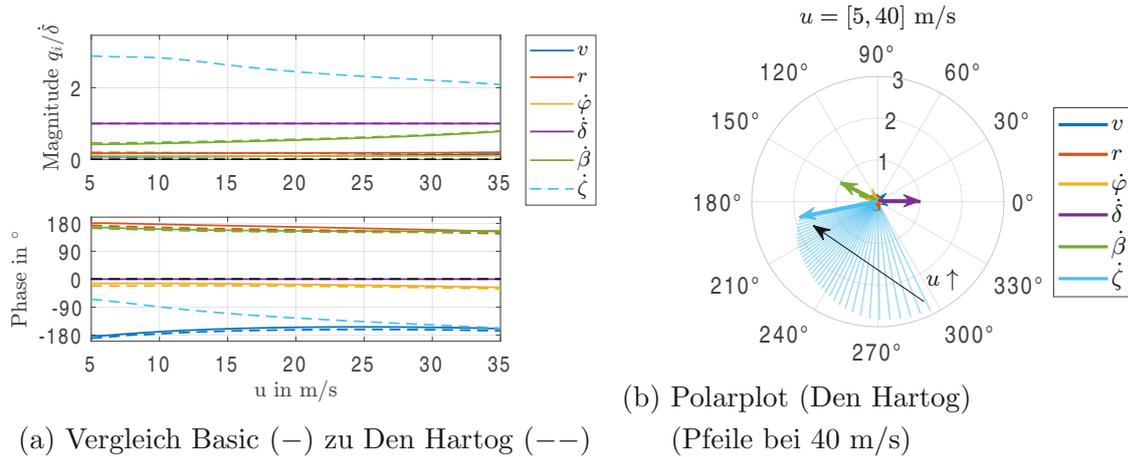


Abbildung 17: Entwicklung des Wobble Eigenvektors mit DH Tuning

auftretendem Wobble sehr stark angeregt. Durch diese starke Anregung ist er in der Lage, Schwingungsenergie aufzunehmen und einen Teil davon zu dissipieren, was sich offensichtlich in einer verbesserten Stabilität widerspiegelt. Ein spezifischer Eigenmode des Systems regt demnach einen auf dessen spezifische Eigenfrequenz abgestimmten Tilger stark an. Dieser ist dadurch in der Lage den Mode zu stabilisieren. Dieses Ergebnis kann also als Bestätigung für die zugrundeliegende Idee dieser Arbeit angesehen werden.

Nun sollen die Wobble-Höcker genauer analysiert werden. In beiden Fällen entsprechen die Modenformen der Höcker jener des Wobbles, während der zweite Mode den Tilgermode darstellt. Im Übergangsbereich bei ca. 15 m/s findet der Modewechsel statt, in welchem die Modenformen einer Mischung der beiden entsprechen. Man kann also behaupten, dass der jeweils kritische Mode (aus Sicht der Stabilitätsgrenze) dem Wobble entspricht. Auch im Frequenzverlauf lässt sich der Wechsel der Modes feststellen. Während beim DH-Tuning der Tilgermode durchgängig ein ähnliches Frequenzniveau einhält, sieht man bei der optimierten Variante einen Knick, bei welchem die Moden ihre Form wechseln.

Der Einfluss des Tilgers auf Weave und Capsize ist in diesem Fall vernachlässigbar und bestätigt die Aussagen aus der Analyse der starren Anbringung. Demnach ist eine Verbesserung bzw. sogar eine Stabilisierung des Wobble-Modes bei gleichbleibenden Stabilitätseigenschaften bezüglich Weave möglich. Das ist durchaus ein sehr vielversprechendes Ergebnis, da in der Regel eine Abhilfe gegen einen Mode, den jeweils anderen verschlechtert.

Tabelle 6 zeigt die Parameter der beiden Varianten. Die Abstimmung laut Faustformel ist im Vergleich zum Optimum zu weich, und das Lehr'sche Dämpfungsmaß zu hoch. Der relative Fehler von Faustformel zu Optimierung ist auch dargestellt. Die letzte Zeile zeigt den maximalen Realteil des Wobble-Modes in der jeweiligen Konfiguration, sowie

dessen relative Veränderung zur Basiskonfiguration. Auch die Abstimmung laut Den Hartog reduziert den maximalen Realteil bereits um beachtliche 84 %. Der Parameter  $\mu$  muss noch definiert werden. Im Fall des rotatorischen Tilgers am Vorderrahmen wird das Massenträgheitsmoment um die Tilgerachse in Relation zu dem gesamten Massenträgheitsmoment des lenkbaren Rahmens gesetzt.

$$\mu = \frac{I_{D_\zeta, zz} |D_\zeta}{I_{H, \delta\delta}} \quad (4.1)$$

	Den Hartog	Optimiert ( $\Gamma_{wobble}$ )	$\Delta_{rel}$
$\mu$ in %		6.6	-
$f_D$ in Hz	7.74	8.06	-4.0 %
$D_D$	0.15	0.12	+25.0 %
$\max \Re(\lambda_{wobble})$ in 1/s	0.77 (-84 %)	-0.04 (-101 %)	-

Tabelle 6: Tuning-Parameter: Rotatorischer Tilger am Vorderrahmen

#### 4.2.2 Parametereinflüsse

Nun gilt es die Einflüsse der Tilgerparameter  $\mu$ ,  $c_\zeta$  und  $k_\zeta$  festzustellen. Da  $\mu$  die Effektivität des Tilgers bestimmt, sollte es so groß wie möglich gewählt werden. Der Einfluss einer Erhöhung und die damit zusammenhängenden optimalen Tuningparameter sind in Tabelle 7 gezeigt. Der Trend einer reduzierten Eigenfrequenz und eines erhöhten

$\mu$ in %	6.6	8.3	10
$f_D$ in Hz	8.06	8.00	7.86
$D_D$	0.12	0.13	0.16
$\max \Re(\lambda_{wobble})$ in 1/s	-0.05	-0.51	-0.79

Tabelle 7: Parametereinfluss des Massenverhältnis  $\mu$  (Parameter durch Optimierung bestimmt)

Dämpfungsmaß wie von Den Hartog beschrieben ist auch in der Optimierung erkennbar. Klar ersichtlich ist jedenfalls, dass eine Erhöhung des Trägheitsmoments des Tilgers weiteres Stabilisierungspotential mit sich bringt.

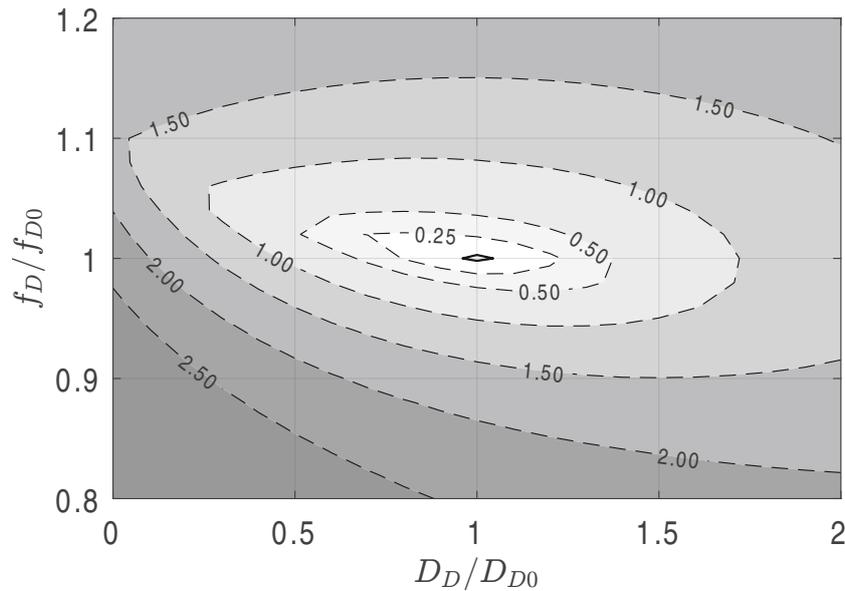


Abbildung 18: Stabilitätskarte des für Wobble abgestimmten Rotationstilgers bezüglich  $f_D$  &  $D_D$  ( $\max \Re(\lambda_{wobble})$ )

Der Einfluss der Tuningfrequenz und des Lehr'schen Dämpfungsmaß ist in Abbildung 18 anhand einer Stabilitätskarte dargestellt. Da zuvor ein Trägheitsmoment gewählt wurde, welches gerade so zur Stabilisierung des Systems reicht, fällt der stabile Bereich der Stabilitätskarte sehr klein aus. Die Sensitivität bezüglich der Tuningfrequenz  $f_D$  ist groß, während jene bezüglich  $D_D$  um ein Vielfaches kleiner ist. Die zulässige Abweichung der Tuningfrequenz ist also gering. Auffällig ist auch, dass eine Frequenzabweichung hin zu höheren Frequenzen eine geringere Sensitivität aufweist, als jene hin zu niedrigeren Frequenzen. Selbiges ist auch bei der Dämpfung erkennbar, wo ebenfalls eine Abweichung zu höheren Werten unkritischer ist. Der dargestellte Bereich  $f_D/f_{D0} \in [0,8, 1,2]$  entspricht durch den quadratischen Zusammenhang von Eigenfrequenz und Federsteifigkeit einem Wertebereich  $c_\zeta/c_{\zeta 0} \in [0,64, 1,44]$ . Ein weiterer interessanter Einfluss der beiden Parameter betrifft die Wobble-Höcker. Der rechte Höcker kann z.B. durch eine steifere Abstimmung ( $c_\zeta \uparrow$  bzw.  $f_D \uparrow$ ) nach unten verschoben werden, jedoch wird dabei der linke nach oben verschoben. Bei einer weicheren Abstimmung ergibt sich die inverse Auswirkung - die Stabilität wird für geringe Geschwindigkeiten verbessert, für höhere jedoch verschlechtert. Der Einfluss der Dämpfung auf den Realteil der Moden ist im Vergleich nur sehr gering. Verringert man das Lehr'sche Dämpfungsmaß bzw. die Dämpfungskonstante, verschiebt man den rechten Höcker nach oben, verschlechtert also das Verhalten bei höheren Geschwindigkeiten. Ein inverser Effekt zeigt sich bei einer Erhöhung der Dämpfung. Weiters kann durch eine erhöhte Dämpfung der Modewechsel unterdrückt werden. Schon bei gering größeren Werten ergibt sich nur mehr ein

durchgängiger Wobble-Mode, welcher nun aber zwei Peaks aufweist. Der zweite Mode bleibt dann dauerhaft dem Tilger zugeordnet und ist stets stabil. Wird der Wert noch mehr gesteigert, ergibt sich schlussendlich nur mehr ein Peak (wie bei DH Abstimmung) mit gering höherem Realteil als die optimale Abstimmung. Da bei der Variation der Tilgerfrequenz die beiden Höcker zwar verschoben werden, jedoch bestehen bleiben, ist das Wechseln der Mode-Form bzw. das Vorhandensein zweier Wobble-Peaks, rein der Dämpfung zuzuschreiben.

### Möglichkeiten zur Umsetzung

In diesem Kapitel wird in Kürze auf mögliche praktische Umsetzungen eingegangen. Es soll keineswegs detailliert darauf eingegangen, sondern nur zwei grundsätzliche Möglichkeiten aufgezeigt werden. Aus den vorhergehenden Kapiteln wurden bereits Designvorschläge abgeleitet. Der Tilger soll in möglichst großer Höhe platziert werden und bei möglichst geringer Masse über ein hohes Trägheitsmoment um die Lenkachse verfügen. Abbildung 19 zeigt zwei mögliche Konzepte zur Umsetzung. Beim ersten Konzept ist ein

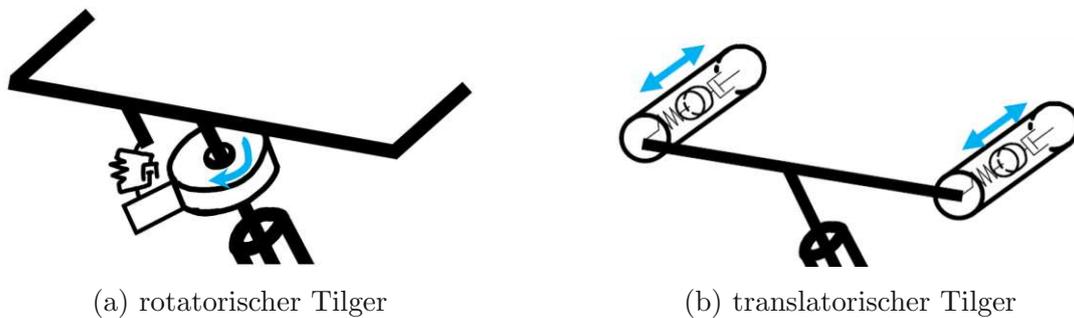


Abbildung 19: Skizzen zur Anbringung eines Tilgers am Vorderrahmen

Körper direkt unter dem Steuerkopf des Motorrads drehbar um die Lenkachse gelagert. Hier ist der Platz aufgrund der Gabelholme sehr beschränkt. Die einzige Möglichkeit wäre ein Ring um diese Holme herum, was einem Mindestradius von  $r \geq 150$  mm entsprechen würde. Wie vorhin gezeigt, wäre für eine Stabilisierung des Wobble Modes bei einem Trägheitsradius  $i \approx r$  eine Masse von 3 kg notwendig. Der Tilger würde also sehr massiv ausfallen.

Die zweite Möglichkeit beruht auf zwei translatorischen Tilgern an den Seiten des Lenkers, wodurch sich ein hoher Radius zur Lenkachse ergeben würde ( $r = 0.42$  m). Reduziert man diese beiden Massen zu einem translatorischen Körper um die Lenkachse kann mit sehr geringen Massen bereits ein hohes Trägheitsmoment erreicht werden. Im hier vorliegenden Fall wären ca. 185 g pro Seite nötig ( $i = r$ ), was in etwa einem

Stahlzylinder mit  $d = h = 25$  mm entspräche. Dieser Fall wirkt am ersten Blick sehr attraktiv, da man mit geringen Massen hohe Trägheitsmomente erreichen kann. Die tatsächliche Umsetzung ist aber für diese Variante komplexer.

### 4.3 Tilger am Hauptrahmen

Nach der Analyse am Vorderrahmen soll auch das Stabilisierungspotential eines Tilgers am Hauptrahmen untersucht werden. Hierzu wurden zwei Varianten analysiert. Die erste ist eine rotatorische Anbringung wie sie bereits am Vorderrahmen analysiert wurde. Die zweite ist in Form eines translatorischen Tilgers in lateraler Richtung umgesetzt.

#### 4.3.1 Einfluss starrer Körper

Zuerst wird wieder der Einfluss eines starr an den Hauptrahmen angebrachten Körpers untersucht, um den Einfluss der veränderten Massengeometrie zu analysieren. Dazu wird ein Körper mit Masse  $m_D$ , Trägheitstensor  $\mathbf{I}_D$  in der Höhe  $h_D$  über der Fahrbahn und mit Abstand  $b_D$  in negative  $x_m$  Richtung zum Schwerpunkt des Motorrads angebracht. Da der zusätzliche Körper nicht beliebig am Motorrad befestigt werden kann, wird folgend von einer Position am Heck (in der Nähe des Top-Cases) ausgegangen. Die Längsposition ist so gewählt, dass der Körper direkt über dem hinteren Reifenkontaktpunkt liegt  $b_D = b_C \approx 0.62$  m. Als Höhe wird  $h_D = 1$  m gewählt.

Abbildung 20 zeigt die verschiedenen Einflüsse eines starr angebrachten Körpers auf die Moden des Motorrads. Die Masse beträgt dabei  $m_D = 13.5$  kg. Eine reine Erhöhung der hinteren Aufstandskraft um  $F_\Delta = m_D g$  hat verschwindenden Einfluss auf Weave und Wobble, und verbessert Capsize geringfügig. Anhand aller anderen Kurven lässt sich Folgendes feststellen: Das Hinzufügen eines starren Körpers am Hauptrahmen hat im allgemeinen negative Auswirkungen auf beide Moden. Dies ist z.B. bei der Verwendung von einem herkömmlichen Top-Case oder von Seitentaschen der Fall. Da die Auswirkung der veränderten Reifensteifigkeiten aufgrund der höheren Aufstandskraft minimal sind, ergibt sich der destabilisierende Effekt rein aus der veränderten Massengeometrie des Motorrads. Die starr angebrachte Punktmasse am Heck des Motorrads führt zu einer starken Destabilisierung von Wobble und Weave. Das Verringern der Höhe hat positive Auswirkungen auf Wobble und führt zu einem unterschiedlichen Verlauf von Weave, jedoch bei fast unveränderter Geschwindigkeitsgrenze der Weave Stabilität. Eine Reduktion des longitudinalen Abstands verringert den negativen Einfluss auf beide Moden. Verfügt der starr angebrachte Körper auch über eine Trägheitsmoment um die vertikale Achse, wird Wobble noch stärker destabilisiert. Durch die Anwendung des *Satzes*

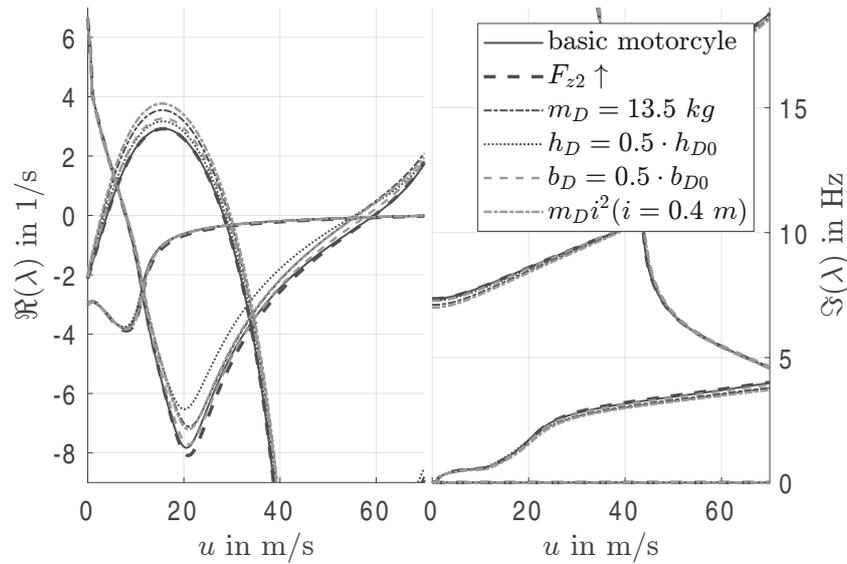


Abbildung 20: Stabilitätsdiagramm für starr angebrachten Körper am Hinterrahmen

von Steiner verändern sich die Schwerpunktslage und der Trägheitstensor des Hauptrahmens. Aufgrund der gleichzeitigen Änderung vieler Parameter kann die ideale Lage eines starr angebrachten Körpers nicht so einfach bestimmt werden.

Aufschluss darüber geben die Stabilitätskarten in Abbildung 21. Sie zeigen den Einfluss

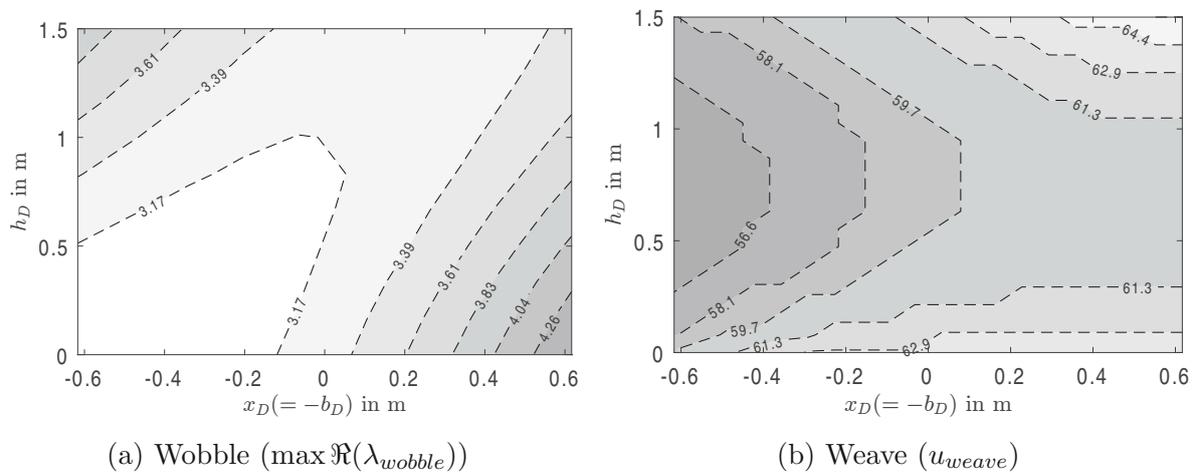


Abbildung 21: Einfluss eines starr angebrachten Körpers am Hauptrahmen

der Position einer starren Punktmasse auf den maximalen Realteil des Wobble-Moden, sowie auf die Weave-Geschwindigkeit. Dabei hätte eine Positionierung im vorderen oberen Bereich den geringsten Einfluss auf beide Moden. Interessanterweise ist die übliche Position eines Top-Cases, also eine hohe Position am Heck, für beide Moden nachteilig.

### 4.3.2 Rotatorischer Tilger

Nun soll der Fall eines Rotationstilgers am Hauptrahmen untersucht werden. Da der Lenkwinkel der dominierende Freiheitsgrad der Wobble Schwingung ist, war es beim Vorderrahmen naheliegend, den Tilger um die Lenkachse anzubringen. Am Hauptrahmen überlagern sich nun aber für Weave und Wobble die beiden Rotationen durch  $r$  und  $\dot{\varphi}$ , wodurch die ideale Rotationsachse im Vorhinein nicht klar ist.

### Überlegungen zur Platzierung

Aufgrund des Phasenverzugs der Rotationsfreiheitsgrade zueinander ändert sich die Richtung der Winkelgeschwindigkeit bzw. der Winkelbeschleunigung über eine Schwingungsperiode. Die anregende Größe für den Schwingungstilger ist die Winkelbeschleunigung des Motorradrahmens. Treten um eine Achse hohe Winkelbeschleunigungen auf, so sind große Momente nötig, um einen elastisch angebrachten Tilger um diese Achse mitdrehen zu können. Um die ideale Rotationsachse des Tilgers zu definieren, wird also die Entwicklung der Winkelbeschleunigung über eine Schwingungsperiode betrachtet. Diese sind für beide Moden in Abbildung 22 dargestellt. Die Werte entlang der Ordinate wurden zur Übereinstimmung mit dem physikalischen Raum invertiert ( $z_M$  zeigt in die Fahrbahn). Im Falle von Wobble ist die sich ergebende Ellipse sehr schmal. Somit treten große Winkelbeschleunigungen fast ausschließlich in diese Richtung des Hauptrahmens auf. Der optimale Winkel beträgt  $\Theta = -27.2^\circ$ . Die Tilgerachse sollte also von der Vertikalen aus nach vorne geneigt sein. Für Weave ist die sich ergebende Ellipse breiter, was bedeutet, dass die Winkelbeschleunigungen auch abseits der idealen Achse signifikante Größen annehmen und damit die korrekte Ausrichtung der Rotationsachse im Vergleich zu Wobble weniger kritisch sein sollte. Die ideale Rotationsachse liegt in diesem Fall um  $\Theta = 25.1^\circ$  nach hinten geneigt.

Da die Winkelbeschleunigung eine Eigenschaft für den gesamten starren Körper ist, kann die Position des Tilgers frei gewählt werden. Abhängig vom zu verbessernden Mode sollte ein Rotationstilger also idealerweise an einer Stelle mit geringen negativen Auswirkungen auf die Stabilitätseigenschaften platziert werden und gleichzeitig dessen Drehachse in die Richtung der maximal auftretenden Winkelbeschleunigung geneigt sein.

### Stabilitätsanalyse

Das Massenverhältnis  $\mu$  des Tilgers wurde in diesem Fall relativ zum Trägheitsmoment um die vertikale Achse des Hauptrahmens definiert. Der Wert für das gewählte Massenträgheitsmoment um die  $z_D$ -Achse wurde aus der Masse  $m_D = 13.5$  kg und dem

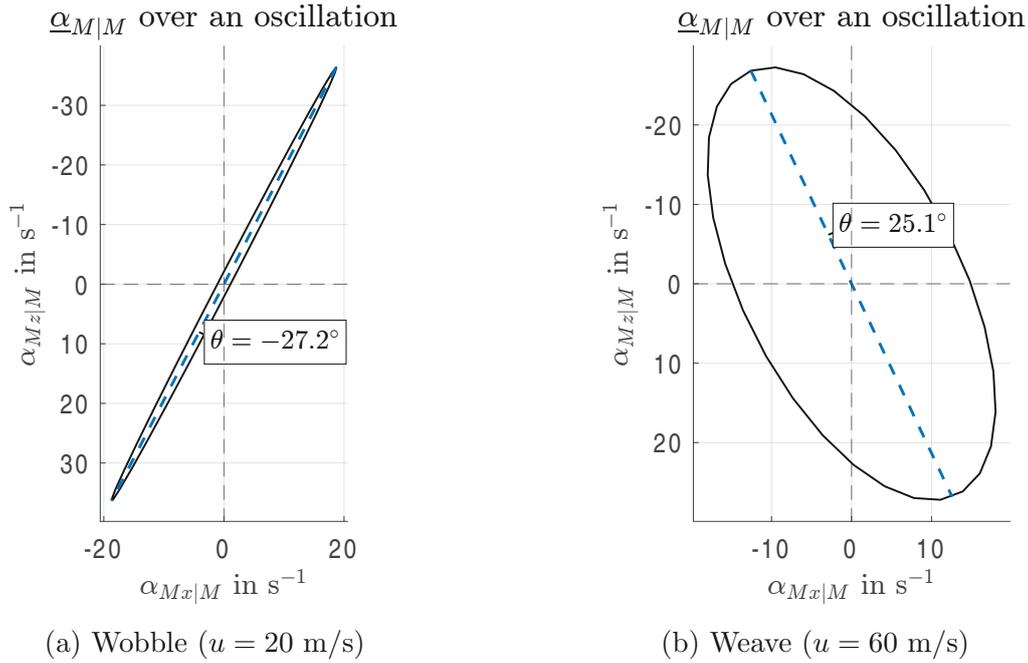


Abbildung 22: Winkelbeschleunigung des Hauptrahmens  $\alpha_{M|M}$  über eine Schwingungsperiode

Trägheitsradius  $i = 0.4$  m bestimmt. Der Trägheitsradius entspricht in etwa dem Schwerpunktsabstand der Seitenkoffer des Motorrads. Somit ergibt sich ein Massenverhältnis von:

$$\mu = \frac{I_{D,\eta\eta}}{I_{m,zz|m}} = 5.6 \% \quad (4.2)$$

Die Position des Tilgers befindet sich in Längsrichtung über dem hinteren Reifenaufstandspunkt  $b_D = b_C$  und die Höhe wurde auch in etwa jener der Schwerpunkte der Seitenkoffer angepasst  $h_D = 0.6$  m. Das Tuning der Tilger wurde mit den jeweiligen Optimierungskriterien aus Abschnitt 3.2 ausgeführt.

Abbildung 23 zeigt den Effekt des rotatorischen Tilgers am Hauptrahmen. Es können also beide Moden mit einem entsprechend abgestimmten rotatorischen Tilger am Hauptrahmen verbessert werden. Der maximale Realteil des Wobble-Modes konnte zwar um etwas mehr als die Hälfte reduziert werden, ist jedoch noch weit von der Stabilitätsgrenze entfernt. Um eine Stabilisierung zu erreichen, wäre in etwa das dreifache Trägheitsmoment des Tilgers nötig, was Seitenkoffern mit einer Masse von ca. 40 kg entsprechen würde und somit realistisch betrachtet nicht umsetzbar ist. Der Einfluss der Tilger auf die Wobble-Frequenz ist nur bei hochfrequentem Tuning (Wobble) bei niedrigen Geschwindigkeiten erkennbar. Die Weave-Frequenz wird in beiden Fällen bei höheren Geschwindigkeiten etwas abgesenkt. Auch die beiden stark unterschiedlichen Tuningfrequenzen der Tilger

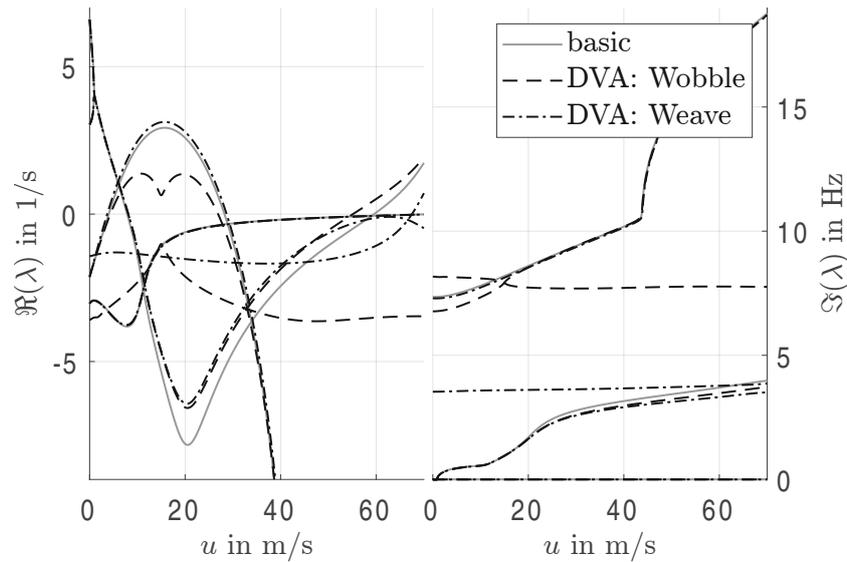


Abbildung 23: Stabilitätsdiagramm für rotatorischen Tilger

sind im rechten Plot klar ersichtlich. Die Tilgerfrequenz muss so abgestimmt werden, dass sie jener des zu tilgenden Modes bei dessen kritischen Geschwindigkeiten entspricht. Dies zeigt sich auch beim Schnittpunkt der Wobble-Eigenfrequenz mit jener des Tilgers. Dieser liegt im selben Geschwindigkeitsbereich, bei welchem auch der maximale Wobble-Realteil des Basismodells auftritt. Andererseits ist die Weave-Abstimmung auch effektiv, wenn sich die Imaginärteile in etwa bei der Weave-Geschwindigkeit überschneiden. Dies bestätigt die ursprüngliche Annahme, dass der Tilger auf die kritische Frequenz abgestimmt werden muss, sodass er in diesem Bereich angeregt wird und stabilisierend wirken kann.

Die aus Abbildung 22 abgeleitete ideale Rotationsachse des Tilgers wirkt sich positiv auf das Stabilisierungspotential der Tilger aus. Auch mit vertikaler Rotationsachse lassen sich zwar etwas schlechtere, aber dennoch gute Ergebnisse erzielen. Wird diese jedoch horizontal in Richtung  $\varphi$  gelegt, nimmt das Verbesserungspotential stark ab. Dieser Zusammenhang ist klar, da die Schwingungsamplitude beider Moden bezüglich  $r$  größer ist als für  $\dot{\varphi}$ .

Wie auch beim Tilger am Vorderrahmen sind zwei Wobble-Peaks zu sehen. Diesmal wechseln die Eigenmoden jedoch nicht ihre Form, wie es zuvor der Fall war. Eine starke Interaktion zwischen Tilger- und Wobble-Mode in der Nähe des Schnittpunkts ihrer Imaginärteile bei ca.  $u = 15$  m/s ist jedoch klar erkennbar. Diese Wechselwirkung ist auch im Verlauf der Eigenvektoren sichtbar, da sich ihre Modeshape bei diesen Geschwindigkeiten stark annähert. Danach ist die Modeshape des Tilger-Modes wieder eine andere und vor allem von sehr hohen Amplituden des Tilgerfreiheitsgrads  $\eta$  geprägt. Für die Weave-

Abstimmung ergibt sich jedoch wieder ein Wechsel der Mode-Formen. Der anfänglich dem Weave-Mode zugehörige Eigenwert geht nahe der kritischen Geschwindigkeit in den Tilger-Mode über, während für den Tilger-Mode inverses Verhalten zutrifft.

Für die Wobble-Abstimmung ergibt sich aufgrund der veränderten Trägheitseigenschaften des Motorrads ein negativer Einfluss auf den Weave-Mode. Die Weave-Geschwindigkeit  $u_{weave}$  sinkt von 59.5 m/s ( $\approx 214$  km/h) auf 55.2 m/s ( $\approx 199$  km/h), was auch der Weave-Geschwindigkeit bei starrer Anbringung des Tilgers entspricht. Durch ein Weave-Tuning des Tilgers kann die kritische Geschwindigkeit auf 67.5 m/s ( $\approx 243$  km/h) erhöht werden. Auch hier lässt sich der bereits für Wobble beschriebene Mode-Wechsel erkennen. Es hat dem Stabilitätsdiagramm nach zwar den Anschein, dass der Tilgermode instabil wird, jedoch wechseln in unmittelbarer Umgebung die beiden Eigenmoden ihre Schwingungsform. Somit ist der Stabilitätsverlust dem Weave-Mode zuzuschreiben.

Der Weave-Mode befindet sich bereits zuvor sehr nah an der Stabilitätsgrenze. Die Abstimmung ist also nicht sehr robust. Durch ein Weave-Tuning mit der Faustformel nach DH ergäbe sich zwar eine niedrigere Weave-Geschwindigkeit, jedoch verfügt man dafür über eine weit größere Stabilitätsreserve bei den Geschwindigkeiten zuvor. Interessant zu sehen ist der für geringe und mittlere Geschwindigkeiten sehr ähnliche Verlauf der Weave-Moden für beide Abstimmungen (Weave- und Wobble-Tuning). Erst wenn der Tilger-Mode einen Frequenzbereich nahe des Weave-Modes erreicht, kann man im Realteil einen abgeänderten Verlauf und somit den Einfluss des Tilgers erkennen. Der Tilger beginnt also, wie zu erwarten, erst bei angenäherten Frequenzen zu arbeiten.

Tabelle 8 zeigt die Ergebnisse in tabellarischer Form und den relativen Werten bezogen auf die Basiskonfiguration. Im Vergleich zur Optimierung ist die Den Hartog Abstimmung wieder etwas weicher (niedrigere Frequenz) und weist eine höhere Dämpfung auf.

	<b>Basic</b>	<b>Wobble</b>	<b>Weave / Den Hartog</b>
$\mu$ in %	-		5.6
$f_D$ in Hz	-	7.6	3.54 / 3.31
$D_D$	-	0.07	0.06 / 0.14
$\max \Re(\lambda_{wobble})$ in 1/s	2.93	1.37 (-53 %)	3.13 (+7 %) / 3.2 (+9 %)
$u_{weave}$ in m/s	59.5	55.2 (-7 %)	67.5 (+13 %) / 63.6 (+7 %)

Tabelle 8: Tuning-Parameter: Rotatorischer Tilger am Haupttrahmen

Abbildung 24 zeigt die Stabilitätskarten beider Abstimmungen. Die Sensitivität bezüglich der Tuning-Frequenz  $f_D$  beträgt ein Vielfaches jener des Lehr'schen Dämpfungsmaßes

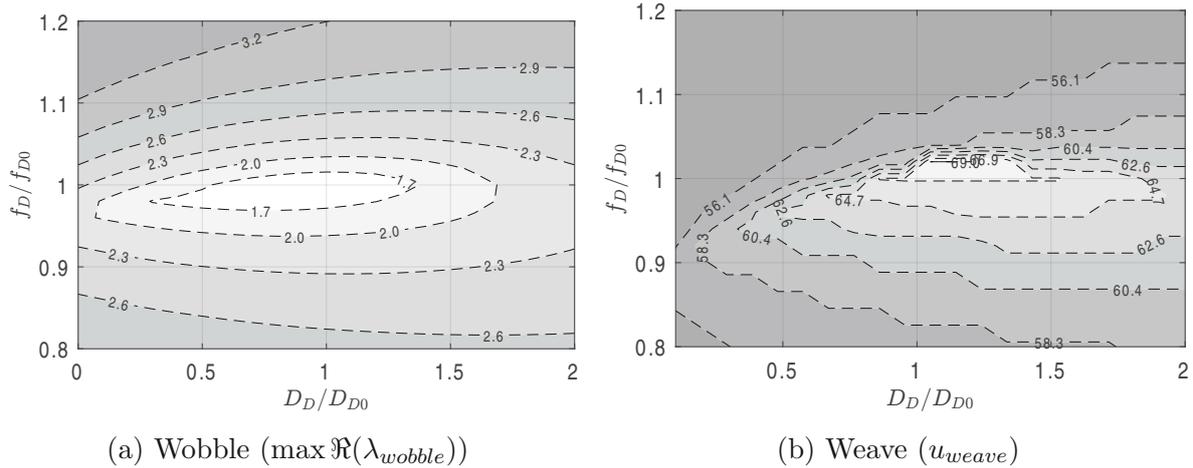


Abbildung 24: Stabilitätskarten bezüglich  $f_D$  und  $D_D$  des rotatorischen Tilgers am Hauptrahmen

$D_D$ . Im Gegensatz zum Tilger am Vorderrahmen weist nun eine weichere Abstimmung eine geringere Sensitivität auf. Die Abweichung der Dämpfung sollte auch hier eher zu größeren Werten hin ausfallen. Durchaus interessant ist die stark asymmetrische Sensitivität für den Fall der Weave-Abstimmung. Hier ist das Verhältnis der beiden Sensitivitäten zwar ähnlich, ausgehend von den optimalen Tuningparametern jedoch nur in eine Richtung. Eine Erhöhung der Eigenfrequenz sowie eine Abschwächung der Dämpfung führen sehr schnell zu einer starken Absenkung von  $u_{weave}$ . Dieses Verhalten ist der bereits frühen Annäherung des Eigenmodes an die Stabilitätsgrenze geschuldet. Erhöht man die Tuning-Frequenz des Tilgers, verschiebt sich der Weave-kritische Mode (mit steilem Durchstoß durch die Stabilitätsgrenze) nach rechts, während der an der Stabilitätsgrenze streifende Mode nach oben verschoben wird. Eine Erhöhung des Lehr'schen Dämpfungsmaß hat kaum Einfluss auf den steil ansteigenden Mode, während hingegen der flach verlaufende Mode nach unten verschoben wird. Somit ist auch die harte Grenze in der Stabilitätskarte in Abbildung 24 zu erklären, da eine Verschiebung des stabilitätskritischen Modes nach oben die Weave-Geschwindigkeit sehr stark verringert. Mögliche Abweichungen der Tuningparameter sollten also lediglich hin zu niedrigeren Frequenzen und höheren Dämpfungen ausfallen.

### 4.3.3 Translatorischer Tilger

Als dritte Variante wird nun ein translatorischer Tilger in lateraler Richtung mit dem neu eingeführten Freiheitsgrad  $\xi$  untersucht. Die Überlegungen zur Platzierung des Tilgers sind nun etwas schwieriger anzustellen. Ausschlaggebend für die Anregung des transla-

torischen Tilgers ist die Absolutbeschleunigung in Richtung des relativen Freiheitsgrads  $\xi$ . Herrscht an einem Punkt des Motorrads eine große laterale Beschleunigung (also eine Beschleunigung in Richtung  $\xi$ ), muss dementsprechend eine große Kraft aufgebracht werden, um die Masse des Tilgers mit dem Rahmen mitführen zu können. Diese Kräfte können nur durch Feder und Dämpfer hervorgerufen werden, was wiederum einer Anregung des Tilgerfreiheitsgrades entspricht. Dementsprechend ist der laterale Tilger dort zu positionieren, wo über eine Schwingungsperiode eine maximale Lateralbeschleunigung des Hauptrahmens  $a_{M,y|M}$  auftritt. Die Darstellung im rahmenfesten Koordinatensystem ist aufgrund der Übereinstimmung mit dem gewählten Freiheitsgrad von fundamentaler Bedeutung. Diese Lateralbeschleunigung setzt sich nun aus komplexen Überlagerungen der Freiheitsgrade  $v$ ,  $r$  und  $\varphi$  sowie deren Ableitungen zusammen. Die absolute Lateralbeschleunigungen wurde demnach über eine Schwingungsperiode für Punkte des Hauptrahmens berechnet und anschließend die Maximalwerte der Beschleunigungen ermittelt. Diese maximal auftretenden, absoluten Lateralbeschleunigungen über eine Schwingungsperiode sind in Abbildung 25 dargestellt. Bezüglich beider Moden ergeben sich durchaus

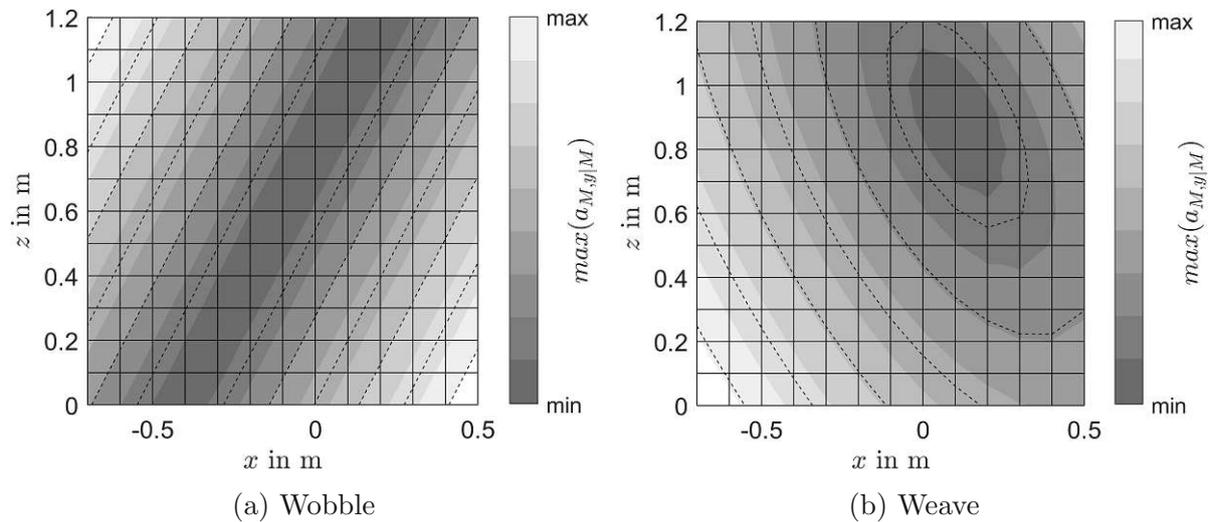


Abbildung 25: Maximal auftretende, absolute, laterale Beschleunigung des Hauptrahmens  $a_{M,y|M}$   
Position:  $x$  in  $x_A$ - und  $z$  in  $-z_A$ -Richtung in unausgelenkter Lage

unterschiedliche optimale Anbindungspunkte. So wäre für Wobble eine hohe Anbindung am Heck, oder eine niedrige Anbindung an der Vorderseite ideal. Für Weave hingegen wäre eine Anbringung am Hinterrad von Vorteil. Eine Positionierung am Heck des Motorrads dürfte jedoch einen guten Kompromiss für beide Moden darstellen. Interessanterweise ist gerade in diesem Bereich der negative Einfluss der Massengeometrie aus Abbildung 21 groß. Aufgrund der praktischen Anbindungsmöglichkeit ist eine An-

bindung nahe des Top-Cases gewählt. Als Höhe wurde  $h_D = 1$  m und als Längsposition wieder der Reifenkontaktpunkt des Hinterrads  $b_D = b_C$  festgelegt. Das Massenverhältnis  $\mu$  ist in diesem Fall relativ zur Masse des Hauptrahmens definiert. Dadurch ergibt sich mit einer Masse von  $m_D = 13.5$  kg ein Massenverhältnis von

$$\mu = \frac{m_D}{m_m} = 4.1 \% \quad (4.3)$$

Abbildung 26 zeigt das Stabilitätsdiagramm für diese Konfiguration. Auffällig sind die

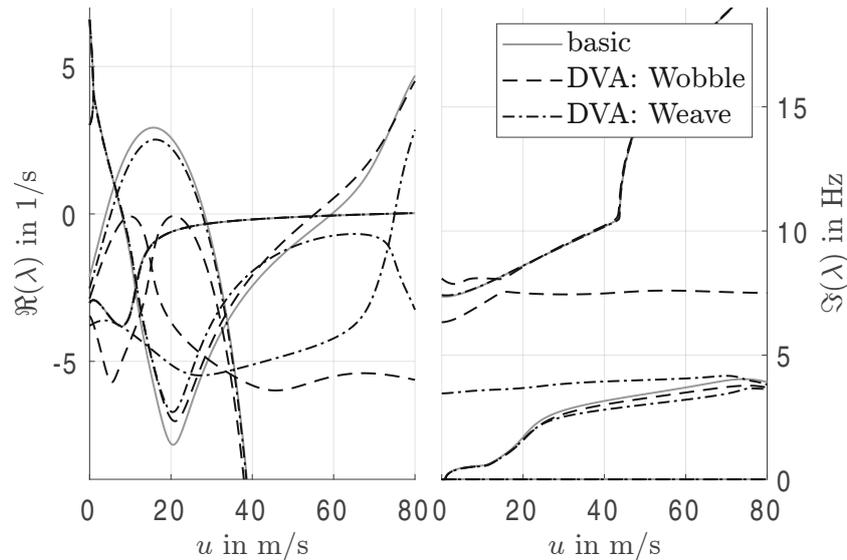


Abbildung 26: Stabilitätsdiagramm für den lateralen Tilger

im Vergleich zur rotatorischen Anbringung durchaus beeindruckenden Verbesserungsmöglichkeiten beider Moden. Mithilfe der lateralen Anbindung lässt sich der Wobble-Mode wieder stabilisieren und auch der Weave-Mode stark verbessern. Der Geschwindigkeitsbereich ist auf bis zu 80 m/s erweitert geplottet, um den Stabilitätsverlust des Weave-Moden überhaupt darstellen zu können. Diese würde sich von 59.5 m/s ( $\approx 214$  km/h) um 26 % auf 75 m/s (270 km/h) erhöhen. Demnach ist der autostabile Bereich des Motorrads sogar vom instabil werdenden Capsize Mode bei  $u_{Capsize} = 72$  m/s begrenzt.

Bei der Abstimmung bezüglich Wobble ist für geringe Geschwindigkeiten wieder eine Absenkung der Frequenz erkennbar, ansonsten bleibt diese unverändert. Der Effekt der Frequenzerhöhung bei Geschwindigkeiten über 15 m/s wird also nur durch den rotatorischen Tilger am Vorderrahmen hervorgerufen. Die Frequenz des Weave-Moden wird in beiden Fällen hin zu höheren Geschwindigkeiten wieder abgesenkt, wobei die Reduzierung für den niederfrequenten Tilger (Weave-Abstimmung) größer ausfällt.

Durchaus interessant ist die Reduktion des maximalen Wobble-Realteils trotz Weave-Abstimmung. Das bedeutet, dass die elastische Anbringung des Körpers nicht nur die negativen Effekte wie in Abbildung 20 dargestellt verringert, sondern sogar positiven Einfluss auf den zweiten Mode hat, was bisher in dieser Weise noch nicht der Fall war. Beim Wobble-Tilger hingegen erkennt man den negativen Effekt auf die Weave-Geschwindigkeit.

In dieser Konfiguration treten bei beiden optimalen Abstimmungen die bereits beobachteten Modewechsel auf. Eine Abstimmung laut Den Hartog erzielt bezüglich Weave ebenfalls wieder gute Ergebnisse. Bei Wobble jedoch liegt die Eigenfrequenz des Tilgers bei 7.92 Hz anstatt den optimalen 6.85 Hz, was einer großen Abweichung entspricht. Tabelle 9 fasst die durch Optimierung erzielten Ergebnisse sowie die Tuning-Parameter zusammen.

	Basic	Wobble	Weave
$\mu$ in %	-	4.1	
$f_D$ in Hz	-	6.85	3.41
$D_D$	-	0.12	0.17
$\max \Re(\lambda_{wobble})$ in 1/s	2.93	-0.09 (-103 %)	2.52 (-14 %)
$u_{weave}$ in m/s	59.5	55.4 (-7 %)	75.0 (+26 %)

Tabelle 9: Tuning-Parameter: Translatorischer Tilger am Hauptrahmen

Anhand der Stabilitätskarten in Abbildung 27 lassen sich sehr ähnliche Erkenntnisse wie für den rotatorischen Tilger am Hauptrahmen ausmachen. Auch hier ist für beide Moden die Sensitivität hin zu niedrigeren Frequenzen und höherer Dämpfung kleiner und somit bevorzugt. Ebenfalls gut erkennbar ist im Falle der Weave-Abstimmung wieder der starke Abfall aufgrund des Übergangs vom Weave- zum Tilger-Mode.

#### 4.4 Kombinationen von Tilgern

Bis jetzt wurden die Stabilisierungspotentiale einzelner Schwingungstilger analysiert. Hierbei sind vor allem die beiden Varianten des rotatorischen Tilgers am Vorderrahmen und des lateralen Tilgers am Hauptrahmen sehr vielversprechend, jedoch bringt auch der Drehtilger am Hauptrahmen Potential zur Verbesserung der kritischen Moden mit sich.

Da die Tuning-Frequenz des Tilgers an den jeweiligen Mode angepasst werden muss, kann ein passiver Tilger nur auf einen Mode abgestimmt werden. Möchte man Weave

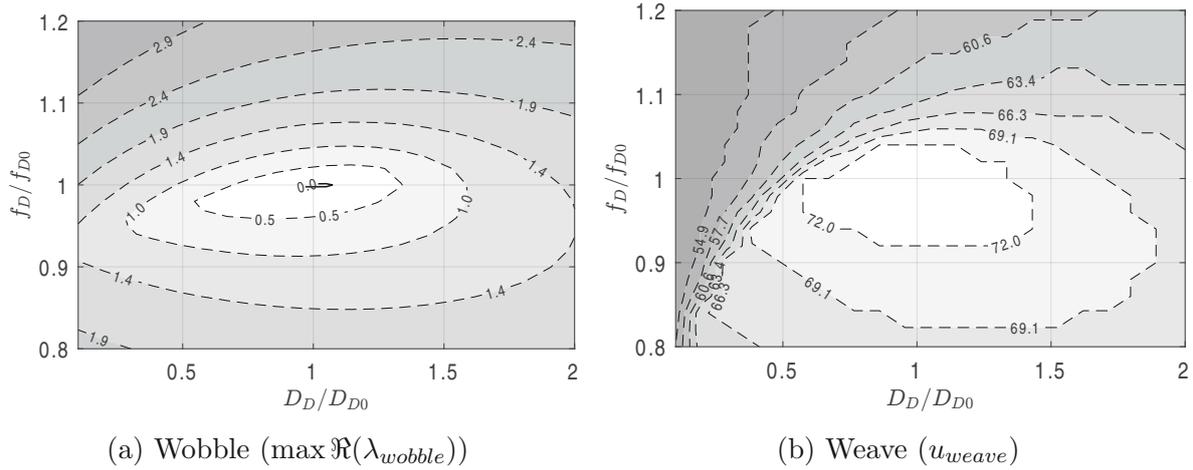


Abbildung 27: Stabilitätskarten bezüglich  $f_D$  und  $D_D$  des lateralen Tilgers am Hauptrahmen

und Wobble gleichzeitig stabilisieren, müsste die Eigenfrequenz des Tilgers veränderbar sein. Das bedeutet, dass man entweder die Federsteifigkeit oder die Masse (bzw. das Trägheitsmoment) des Tilgers anpassen müsste. Dies wäre beispielhaft mithilfe nichtlinearer Federn und veränderlicher Vorspannung oder durch einen Mechanismus wie bei einem Fliehkraftpendel zu Veränderung des Trägheitsmoments möglich.

Hier soll als mögliche Lösung für eine Stabilisierung beider Moden die Kombination zweier separater Tilger untersucht werden. Dabei ist vor allem die Frage zu klären, ob diese eventuell negative Wechselwirkungen miteinander haben bzw. ob die Effektivität und die Abstimmung vergleichbar bleibt. Abbildung 28 zeigt die beiden untersuchten Varianten. Die erste Variante beinhaltet den lateralen Tilger am Hauptrahmen sowie den

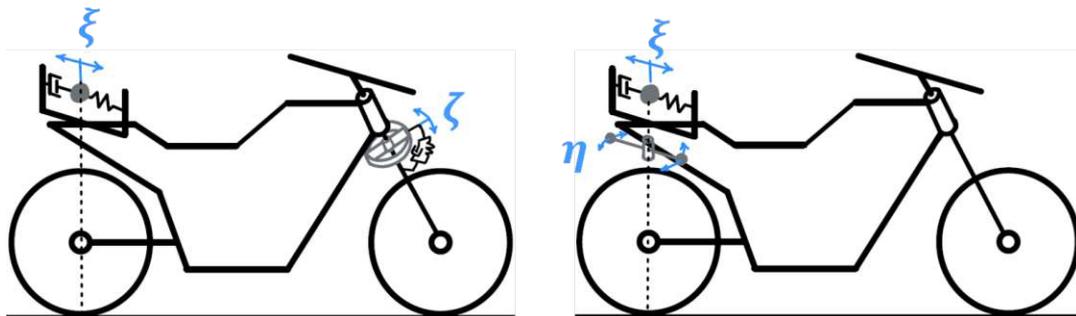


Abbildung 28: Schematische Darstellungen der kombinierten Tilger-Konfigurationen

rotatorischen Tilger am Vorderrahmen, während die zweite die Varianten am Hauptrahmen kombiniert. Aufgrund der vorhergehenden Untersuchungen ist vor allem die erste Variante sehr vielversprechend, wenn der vordere Tilger für Wobble und der hintere für

Weave abgestimmt wird. In beiden Fällen konnte jeweils ein Mode signifikant verbessert werden. Der Einfluss auf den anderen Mode war nur minimal bzw. sogar positiv.

Abbildung 29 zeigt das Stabilitätsdiagramm beider Varianten. Es ist klar ersicht-

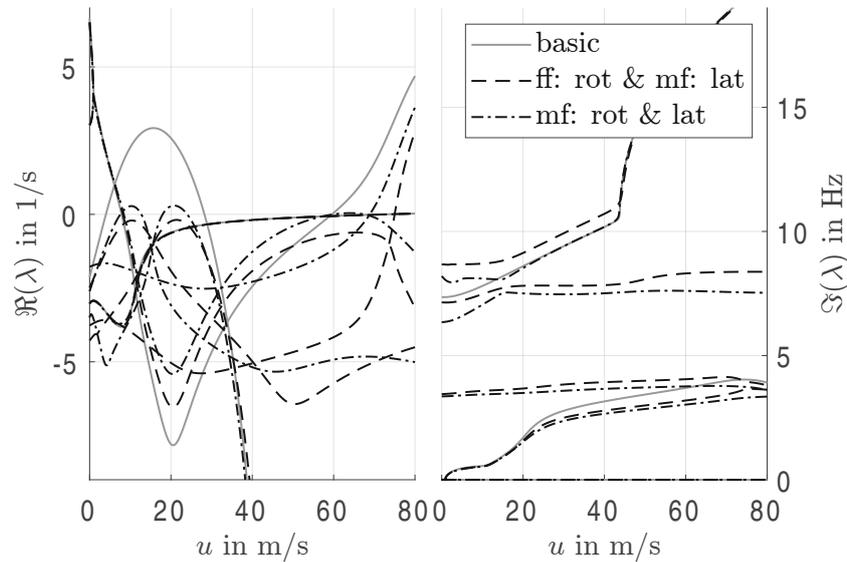


Abbildung 29: Stabilitätsdiagramm beider kombinierter Varianten

lich, dass eine große Verbesserung beider Moden gleichzeitig möglich ist. Die auf beide Rahmen aufgeteilte Variante erreicht somit einen autostabilen Bereich von ca.  $u_{stable} \in [8, 72] \text{ m/s} \approx [30, 260] \text{ km/h}$ . Dieser Bereich wäre nach unten vom Low-Speed-Weave und nach oben vom Capsize-Mode beschränkt. Die Weave-Geschwindigkeit liegt für diese Konfiguration bei  $75 \text{ m/s} = 270 \text{ km/h}$ .

Für den Fall beider Tilger am Hauptrahmen fallen die Verbesserungen geringer aus. Grund dafür sind die zweimaligen negativen Effekte der Massen am Hauptrahmen, sowie die geringere Effektivität des rotatorischen Tilgers. Im Vergleich zur Basiskonfiguration ist aber auch dieses Ergebnis durchaus sehr gut. Tabelle 10 sammelt wie gewohnt die Tuning-Parameter, wobei im Falle der Weave-Geschwindigkeit in Variante 2 erst der steile Durchstoß durch die Stabilitätsgrenze angeführt wird und der zuvor minimal instabile Mode unberücksichtigt bleibt. Das Ergebnis der ersten Variante ließe sich ähnlich gut erreichen, wenn das Tuning aus den einzelnen Tilger-Analysen eins zu eins übernommen werden würde. Für die zweite Konfiguration fiel das Ergebnis weniger effektiv aus. Das ist der grundsätzlich stärkeren Veränderung der Wobble- und Weave-Moden durch die veränderte Massengeometrie geschuldet. Diese Änderung fällt aufgrund der beiden schweren Tilger am Hauptrahmen sehr stark aus. Hier ist also die kombinierte Optimierung durchaus sinnvoll.

Die Stabilitätskarten sowie das Verhalten der Höcker bezüglich  $f_D$  und  $D_D$  sind dem

	<b>Basic</b>	<b>ff: rot &amp; mf: lat</b>	<b>mf: rot &amp; mf: lat</b>
$f_D$ in Hz	-	8.27 & 3.4	3.38 & 6.93
$D_D$	-	0.08 & 0.17	0.09 & 0.10
$\max \Re(\lambda_{wobble})$ in 1/s	2.93	-0.19 (-106 %)	0.30 (-90 %)
$u_{weave}$ in m/s	59.5	75 (+26 %)	68.9 (+16 %)

Tabelle 10: Tuning-Parameter: Kombinierte Tilger-Konfigurationen

Fälle der einzeln angebrachten Tilger sehr ähnlich und werden deshalb nicht näher angeführt. Weiters hat die Verstimmung eines Tilgers kaum erkennbaren Einfluss auf den anderen, was auf eine sehr geringe Wechselwirkung dieser hinweist. Dies ist insofern keine Überraschung, da die Tilger auf die unterschiedlichen Moden und somit stark unterschiedliche Frequenzen abgestimmt sind. Auch bei einer Abstimmung beider Tilger der ersten Variante auf Wobble (siehe folgender Absatz) liegen die Tuningfrequenzen mit 6.85 Hz und 8.06 Hz noch weit auseinander, wodurch wieder keine negative Interaktion erkennbar ist.

Zusätzlich wurde auch die Möglichkeit einer kombinierten Variante bezüglich des Wobble-Modes analysiert. Auch hier zeigen sich die eben angeführten Ergebnisse. So kann, mithilfe zweier auf Wobble abgestimmter Tilger, der Eigenmode weit unter die Stabilitätsgrenze abgesenkt werden. Dadurch ließe sich z.B. auch in der zweiten Variante das Motorrad bezüglich Wobble stabilisieren. Anders betrachtet könnten z.B. durch ein hochfrequentes Tuning beider Tilger in Variante 1 die notwendigen Trägheitseigenschaften auf ein Drittel reduziert werden und dennoch eine Stabilisierung des Wobble-Modes erreicht werden. In diesem Fall ist auch die negative Auswirkung auf die Weave-Geschwindigkeit um ein Vielfaches geringer. Es ließe sich z.B. der Wobble-Mode stabilisieren und durch die nun geringere Masse am Heck von nur 4.5 kg würde die Weave-Geschwindigkeit nur um 6 km/h abnehmen. Dies entspricht einer relativen Änderung von unter 3 %. Demnach ist die Möglichkeit mehrerer kleiner Tilger als Abhilfe gegen einen Mode ebenso möglich.

## 4.5 Fazit

Aus den vorangegangenen ausführlichen Analysen sind einige Erkenntnisse zu ziehen, welche hier nochmal zusammengefasst werden sollen. Zunächst einmal sei ausdrücklich festgehalten: Das Stabilisierungspotential eines Schwingungstilgers bezüglich Weave und Wobble ist durchaus vorhanden.

Durch eine geeignete Abstimmung des Tilgers kann je ein Mode effektiv stabilisiert werden. Dass mit einem Tilger beide Moden signifikant verbessert werden, ist aufgrund der stark unterschiedlichen Eigenfrequenzen nicht möglich. Zwei Varianten sind dabei besonders effektiv. Ein am Vorderrahmen angebrachter rotatorischer Tilger kann großen positiven Einfluss auf Wobble haben, während ein lateraler Tilger am Hauptrahmen je nach Abstimmung für beide Moden große Vorteile bietet.

Zur Verbesserung des Wobble-Modes wäre ein rotatorischer Tilger um die Lenkachse, aufgrund des verschwindenden negativen Einflusses auf Weave, die beste Wahl. Dieses Ergebnis ist nicht zu unterschätzen. Bekannterweise wirkt sich eine Abhilfe gegen einen Mode negativ auf die Stabilität des anderen Modes aus (vgl. Abschnitt 2). Es ist durchaus bemerkenswert, dass der Wobble-Mode mit dieser Variante verbessert werden kann und die Stabilitätseigenschaften bezüglich Weave dabei unverändert bleiben. Für eine vollständige Stabilisierung des Wobble-Modes ist ein Trägheitsmoment mit in etwa 7 % des gesamten Trägheitsmoments der Vorderrahmen um die Lenkachse nötig. Dies entspräche wie gezeigt einem massebehafteten Ring mit 3 kg und 150 mm Radius, also einem massiven zusätzlichen Bauteil. Die zweite dargestellte Variante mit den translatorischen Massen im Lenker wäre für eine tatsächliche Umsetzung also interessanter. Am besten wäre eine elastische Anbringung eines bereits vorhandenen Bauteils, da dadurch kein zusätzlicher Körper notwendig wäre. Hier gibt es jedoch am Vorderrahmen wenig Optionen. Bezüglich dem Weave-Mode lässt sich mit dieser Art von Tilger keine nennenswerte Verbesserung erzielen.

Auch die beiden Tilger am Hauptrahmen erzielen gute Ergebnisse, wobei der laterale Tilger effektiver ist als sein rotatorisches Gegenstück. Hier ist vor allem positiv, dass beide relevante Moden durch die jeweiligen Tilger verbessert werden können. Im Falle des lateralen Tilgers ist zur Stabilisierung des Wobbles eine sehr große Masse von 13.5 kg notwendig. Ein gängiges Top-Case hat z.B. in etwa 5.5 kg mit einer zulässigen Zuladung von weiteren 5 kg. Das heißt die zulässige Gesamtmasse des Top-Cases würde nicht ausreichen um Wobble gänzlich stabilisieren zu können. Aufgrund der großen Masse der Tilger sind auch negative Auswirkungen auf den anderen Mode zu erkennen. Eine positive Erkenntnis ist, dass diese im Worst-Case dem negativen Einfluss eines starr angebunden Körpers mit selben Trägheitseigenschaften entsprechen. Die Einführung des elastischen Freiheitsgrads anstatt der starren Anbringung hat also bezüglich der Stabilität des Systems nur positive Auswirkungen und führt zu keiner weiteren Destabilisierung. Für den Fall des lateralen Tilgers mit Weave-Abstimmung führt dieser sogar zu einer leichten Verbesserung des Wobble-Modes, was durchaus ein überraschendes Ergebnis ist.

Demnach wäre eine Kombination mehrerer Tilger durchaus erstrebenswert. Ein auf Wobble abgestimmter rotatorischer Tilger am Vorderrahmen und ein lateraler Tilger am

Hauptrahmen mit Weave-Tuning würde beide Moden drastisch verbessern. Wie erwähnt wären hier auch die Einflüsse auf die jeweilig anderen Moden durch die Tilger verschwindend bzw. sogar positiv. Weiters besteht auch die Möglichkeit beide Tilger bezüglich Wobble abzustimmen um so mit kleineren Körpern ebenfalls den Mode stabilisieren zu können. Es ist also möglich, dass mit mehreren einzelnen Tilgern am Motorrad gemeinsam ein Mode verbessert werden kann. Das würde auch eine praktische Umsetzung erleichtern und realistischer machen. Gleichzeitig sind in diesem Fall durch die geringeren Massen die negativen Einflüsse auf die jeweils anderen Moden geringer als für einen massiven Tilger z.B. am Heck des Motorrads.

Eine Schwierigkeit für die Umsetzung ist die große Sensitivität bezüglich der Tuningfrequenz des Tilgers. Kleinere Abweichungen der Eigenfrequenz resultieren bereits in einer Frequenzverstimmung und dadurch in einer geringeren Effektivität des Tilgers. Diese sollte also so genau wie möglich eingestellt werden. Bei einem Tilger am Hauptrahmen ist eine Abweichung hin zu einer weicheren Abstimmung unkritischer, während beim Tilger am Vorderrahmen ein steiferes Tuning vorteilhafter ist. Die Eigenfrequenz kann dabei durch einer erhöhte oder reduzierte der Masse ziemlich gut eingestellt werden. Diese eingestellte Masse sollte anschließend jedoch nicht mehr verändert werden. Würde man nun z.B. das Top-Case gerne als Tilger verwenden, verändert sich je nach Zuladung dessen Gesamtmasse sehr stark, womit der Tilger wiederum stark verstimmt wird. Es müsste also die Federsteifigkeit in Abhängigkeit der Zuladung des Top-Cases ebenfalls vergrößert werden. Eventuell ließe sich eine solche Aufhängung durch nicht-lineare Federkennlinien und einer von der Masse abhängigen Vorspannung über eine geeignete Kinematik erzielen oder ein Gummilager dementsprechend FEM optimieren. Wird die Federsteifigkeit konstant gehalten wäre eine Abstimmung bei niedriger Zuladung vorteilhaft, da die Sensitivität hin zu niedrigeren Eigenfrequenzen wie zuvor gezeigt unkritischer ist. Somit könnte man eine ideale Abstimmung finden, in welcher zumindest über die gesamte zulässige Beladung ein merklich positiver Effekt erzielt wird, auch wenn dieser nur für einen kleinen Bereich tatsächlich optimal ausfällt. Nichtsdestotrotz ist die Umsetzung mit Sicherheit nicht einfach, und es gäbe wahrscheinlich geeignetere Bauteile, welche als Tilger verwendet werden könnten.

Im Falle des Lehr'schen Dämpfungsmaß ist die Sensitivität geringer. In allen Varianten ist eine Abweichung hin zu größeren Dämpfungen vorteilhafter. Zusätzlich wird durch ein erhöhtes Dämpfungsmaß der Mode-Wechsel des Tilgermodes und des zu tilgenden Modes unterbunden. Die kleinere Sensitivität bezüglich der Dämpfung des Systems ist eine wichtige Information, da Dämpfungskonstanten in der Praxis sehr schwierig abzuschätzen und genau einzustellen sind.

Ein Tilger ist also realistisch betrachtet kein alleiniges Allheilmittel gegen die Insta-

bilitäten eines Motorrads bei aufrechter Geradeausfahrt - dafür wären zu große Massen notwendig. Dennoch lässt sich, vor allem im Vergleich zu anderen Abhilfemaßnahmen wie Lenkungsdämpfern, behaupten, dass man mithilfe eines realistischen Tilgers durchaus ähnliche, wenn nicht sogar bessere Ergebnisse erzielen kann. Wie verdeutlicht wurde, ist ein korrektes Tuning dabei von fundamentaler Bedeutung.

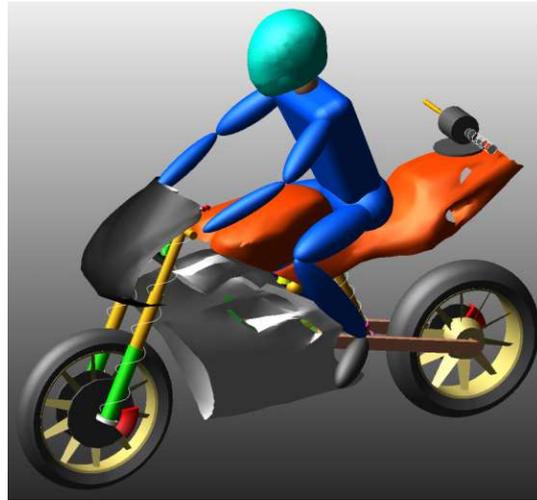
## 5 Weiterführende Untersuchung anhand eines numerischen Mehrkörpermodells

Nach den ausführlichen grundlegenden Untersuchungen anhand des analytischen Modells im vorhergehenden Kapitel soll nun ein lateraler Tilger am Hauptrahmen in ein numerisches Mehrkörpersystem integriert und analysiert werden. Der laterale Tilger soll dabei als allgemeiner *Proof-of-Concept* für die Stabilisierungsmöglichkeiten eines Schwingungstilgers am Motorrad dienen. Zuerst wird kurz das verwendete Modell und die Erweiterung um den Tilger angeführt. Danach werden die Ergebnisse aus dem analytischen Modell mit jenen des komplexen numerischen Modells verglichen. Hierzu werden die Eigenwerte der Basiskonfiguration und jene der Variante mit lateralen Tilger angeführt. Anschließend soll auf die nichtlinearen Effekte eines realen Tilgers eingegangen und deren Auswirkung auf das Stabilisierungspotential des Tilgers analysiert werden. Dazu zählen nichtlineare Dämpferkennlinien, Reibungen im System oder das Erreichen von Endanschlägen. Weiters sollen die tatsächlichen Auslenkungen des Tilgers nach Auftritt einer Störung abgeschätzt werden. Dieses Kapitel soll dabei die bisherigen Ergebnisse abrunden und einen Einblick in die nichtlinearen Effekte geben, jedoch keine detaillierte Analyse darstellen, da eine solche den Rahmen der Arbeit übersteigen würde. Demzufolge beschränken sich die nachfolgenden Untersuchungen auch nur auf den Wobble-Mode.

### 5.1 Modellerweiterung und Modellvergleich

Das vorhandene *MSC Adams* -Modell war bereits am Institut vorhanden und basiert auf der Dissertation von Ott [38] (noch nicht veröffentlicht), der mir das Modell dankenswerterweise zur Verfügung stellte. Dieses wurde bereits zuvor anhand diverser Messdaten validiert. Im Zuge dieser Arbeit wurde lediglich der Tilger am Hauptrahmen hinzugefügt.

Im Gegensatz zum vereinfachten analytischen Modell sind im numerischen Modell die Federungen berücksichtigt. Beim Vorderrahmen ist dafür eine Linearführung entlang der Gabelholme vorgesehen, während das Hinterrad über eine Schwinge an den Rahmen angebunden ist. Beide Fahrwerke verfügen über Feder, Dämpfer und begrenzende Endanschläge. Weiters sind der Antriebsstrang und der starr mit dem Rahmen verbundene Fahrer realitätsnah modelliert. Das Mehrkörper-Modell mit dem bereits hinzugefügten lateralen Tilger ist in Abbildung 30 zu sehen. Der Tilger verfügt wie zuvor über einen translatorischen Freiheitsgrad quer zum Rahmen, wobei die Linearführung genau in der Höhe des Schwerpunkts des Tilgers festgelegt wurde. Positioniert ist die Führung gleich wie im analytischen Modell in einer Höhe von einem Meter und direkt über dem hinteren Reifenkontaktpunkt. Feder und Dämpfer wurden so angebracht, dass deren Wirklinien

Abbildung 30: Modell in *MSC Adams* mit lateralem Tilger

entlang der Linearführung und somit durch den Schwerpunkt des Tilgers verlaufen. Durch diese Anordnung wird also kein zusätzliches Moment in der Führung erzeugt, welches wiederum in den späteren Analysen zusätzliche Reibung verursachen würde. An den Rahmen wurde die Tilgerbaugruppe mit einer starren Verbindung angebracht.

Vor den nichtlinearen Untersuchungen wird das numerische Modell noch mit dem analytischen Modell verglichen. Um in *MSC Adams* den Zustand der aufrechten Geradeausfahrt bei kritischen Wobble-Geschwindigkeiten zu erreichen, wird zu Beginn der Simulation das  $\beta$ -Gelenk gesperrt.

Zuerst wird kurze Zeit simuliert, sodass ein eingeschwungener Zustand erreicht wird. Danach wird das  $\beta$ -Gelenk freigegeben und die Eigenwerte des Systems direkt aus *MSC Adams* ermittelt. In Abbildung 31 sind die Eigenwerte gegenübergestellt. Die Eigenwerte aus dem numerischen Modell sind mit + Symbolen markiert, wobei aus Gründen der Übersicht nur jene von Weave und Wobble geplottet wurden. Man kann eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse der beiden Modelle erkennen. Der Wobble-Mode verfügt dabei im numerischen Modell allgemein über einen höheren Realteil, während jener des Weave-Modes etwas niedriger ist. Die Wobble-Instabilität wird durch das analytische Modell also etwas unterschätzt, während Weave etwas konservativ bewertet wird. Auch der beim analytischen Modell beobachtete Modewechsel durch den hinzugefügten Tilger wird in dem numerischen Modell ebenfalls abgebildet. Dabei ist der linke Mode leicht instabiler als im vereinfachten Modell angenommen. Der rechte Höcker weist hingegen nur einen geringfügig höheren Realteil auf.

Zuletzt soll noch die außerordentlich gute Übereinstimmung des Imaginärteils erwähnt werden. Hier liegen die beiden Modelle sowohl mit als auch ohne Tilger über den ge-

samt analysierten Bereich sehr nahe beieinander. Erst im Bereich der Verzweigung des Wobble-Modes, welche durch die abrupte Änderung des Imaginärteils erkennbar ist, beginnen die numerischen und analytischen Lösungen stärker voneinander abzuweichen. Dieser Bereich wird ohnehin nicht mehr betrachtet, da der Mode in diesem Geschwindigkeitsbereich bereits stark negative Realteile aufweist.

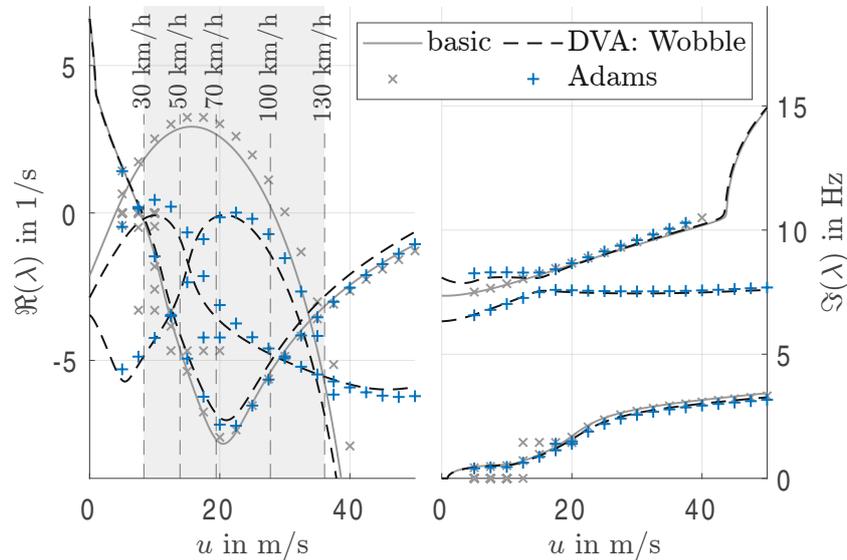


Abbildung 31: Vergleich der Eigenwerte des analytischen und numerischen Modells

## 5.2 Einfluss nichtlinearer Effekte

Nun sollen die möglichen nichtlinearen Effekte eines realen Tilgers analysiert werden. Untersucht werden die Einflüsse einer nichtlinearen Dämpferkennlinie, eines begrenzten Tilgerwegs, sowie der Reibung in der linearen Führung. Eine nichtlineare Federkennlinie wurde nicht gesondert untersucht, da bereits gezeigt wurde, wie wichtig ein korrektes Frequenz tuning des Tilgers für dessen Effektivität ist.

Die Anfangsstörung wird mithilfe eines Drehmomentimpulses am Lenker nach  $t = 1$  s eingebracht, wobei die Größe der Anfangsstörung für die nichtlineare Analyse von fundamentaler Bedeutung ist. Ist diese zu groß gewählt, sodass sich immense Zustandsgrößen des Motorrads ergeben, entspricht die Untersuchung keinem realistischen Fall und die initiale Störung würde ohnehin bereits zu einem Sturz führen. Wählt man die Anfangsstörung zu klein, haben die meisten nichtlinearen Effekte keinerlei Bedeutung und man würde keinen Mehrwert im Vergleich zu einer linearen Stabilitätsanalyse erhalten. Deshalb muss ein geeigneter und vor allem realistischer Wert gewählt werden. In diesem Fall wurde der initiale Lenkwinkel von Messläufen als Vergleich herangezogen. Dieser lag

im Bereich von  $\delta \in [1, 2]^\circ$  und wurde durch einen Schlag auf den Lenker des Motorrads hervorgerufen. In der Simulation kann dieser Schlag durch einen Drehmomentimpuls nachgestellt werden. Mit einem Spitzenmoment des Impulses von 40 Nm und einer Zeitspanne von 0.1 s ergeben sich passende initiale Lenkwinkel in der Zeitsimulation. Es soll noch angemerkt werden, dass diese Anfangsstörung durchaus bereits eine heftige Anregung des Modes ist und die allermeisten Anregungen im Fahrbetrieb wahrscheinlich glimpflicher ausfallen.

### 5.2.1 Nichtlineare Dämpferkennlinie

Die meisten Dämpfer weisen in der Praxis eine stark nichtlineare Charakteristik auf, weshalb dieser Einfluss mit höchster Wahrscheinlichkeit in einem realen Tilger auftreten wird. Aus der linearen Stabilitätsanalyse wurde eine geringe Sensitivität bezüglich dem Lehr'schen Dämpfungsmaß ermittelt, was auf eine gewisse Robustheit des Tilgers bezüglich abweichender Dämpferkennlinien hindeutet. Inwiefern sich eine nichtlineare Kennlinie auf die Stabilitätseigenschaften auswirkt, wird im Folgenden gezeigt.

Da die nichtlinearen geschwindigkeitsabhängigen Effekte bei kleinen Geschwindigkeiten noch sehr geringe Ausprägung haben, entspricht die allgemeine Kennlinie in der Nähe des Ursprungs in etwa der linearen Kennlinie. Daher sollte Wert darauf gelegt werden, dass die Dämpfungskonstante um den Ursprung in etwa jener der geforderten Dämpfungskonstante aus der linearen Stabilitätsanalyse entspricht. Weiters ist es natürlich vorteilhaft, wenn der nichtlineare Anteil so gering wie möglich gehalten wird. Dadurch tritt eine Abweichung der idealen Dämpfung erst bei größeren Geschwindigkeiten auf. In Abbildung 32 sind die in diesem Kapitel verwendeten Dämpferkennlinien dargestellt und mit der idealen aus der linearen Stabilitätsanalyse verglichen. Die nichtlinearen Kennlinien der Dämpfer sind dabei aus Messdaten übernommen und bieten somit einen realistischen Anhaltspunkt. Wie man z.B. anhand des schwachen (*soft*) Dämpfers sehen kann, sind die Anfangssteigungen nicht identisch zu jener des linearen Dämpfers, aber dieser relativ nahe. Alle drei nichtlinearen Dämpfer verfügen jedoch über eine geringere Anfangssteigung als der lineare Dämpfer. Somit ist zwar in allen Fällen bei verschwindenden Geschwindigkeiten die Dämpfung zu gering, jedoch stimmen dadurch die Dämpferkräfte über einen größeren Geschwindigkeitsbereich zumindest näherungsweise überein. Da die initiale Dämpfergeschwindigkeit von der Größe der Störung abhängt, ist die zulässige Größe dieser Anfangsstörung für eine Stabilisierung direkt von der nichtlinearen Dämpferkennlinie abhängig. Weicht diese also von der linear geforderten Kennlinie erst bei sehr hohen Geschwindigkeiten ab, können auch große Störungen stabilisiert werden. In dem vorliegenden Fall mit der zuvor erwähnten Anfangsstörung ergeben sich zu Beginn Dämpfergeschwindigkeit in der Größenordnung von 0.4 m/s. Bei diesen Ge-

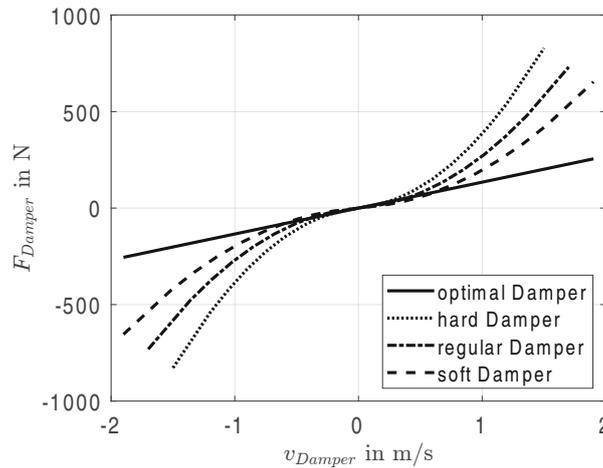


Abbildung 32: Verwendete Dämpferkennlinien

schwindigkeiten schneidet die Kennlinie des *regular*-Dämpfers in etwa jene des linearen, optimalen Dämpfers.

Ein weiterer Aspekt einer realen Dämpferkennlinie ist ein sprungartiger Anstieg der Kraft um den Ursprung. Dieser kann z.B. als Losbrechkraft oder als Gleitreibung im Dämpfer betrachtet werden. Die real gemessene Dämpferkennlinie lässt sich also mit einer Sprung-Funktion um den Ursprung und den zuvor erwähnten passenden Kennlinien adäquat modellieren. Im Modell wurde für die Losbrechkraft in der translatorischen Führung eine Gleitreibung von  $\mu_G = 0.04$  angenommen. Zusammen mit der Masse des lateralen Tilgers ergibt sich so eine Reibkraft von ungefähr 5 N entgegen der Bewegungsrichtung des Tilgers. Wie man anhand der Kräfte der dargestellten Dämpferkennlinien erkennen kann, ist diese Losbrechkraft im Vergleich zu den Dämpferkräften sehr gering. Da diese Kraft aber auch bereits bei minimalen Geschwindigkeiten vorhanden ist, ergibt sich für diese eine sehr große Dämpfungskonstante und somit eine Abweichung zum idealen Dämpfer. Die Größe der Losbrechkraft und somit der Gleitreibung ist in allen drei Dämpfervarianten gleich gewählt.

Abbildung 33 zeigt die Ergebnisse der Zeitsimulationen für die nichtlinearen Tilger. Dargestellt ist der Lenkwinkel über die Zeit für im Alltag gängige Geschwindigkeiten von 50, 70 und 100 km/h. Neben den vier unterschiedlichen Dämpfervarianten ist auch noch die Basiskonfiguration dargestellt. Diese ist in grau geplottet und für alle drei Geschwindigkeiten instabil. Nach Eintritt der Störung klingt die Lösung sehr schnell auf, ehe sie sich in einem nichtlinearen Grenzyklus bzw. einem Limit-Cycle (LC) einschwingt. Ein schnell aufklingendes System ist dabei die Folge des deutlich positiven Realteils. Demnach lässt ein langsames Aufklingen auf bessere Stabilitätseigenschaften zurückschließen. Der beste Fall wäre natürlich ein Abklingen der aufgebrachtten Störung

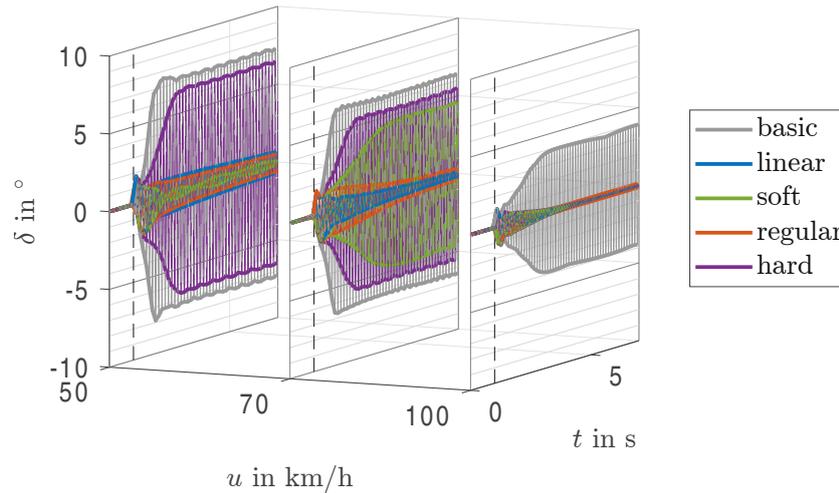


Abbildung 33: Zeitsimulation nichtlinearer Tilger mit weicher, normaler und harter Abstimmung

und somit eine Stabilisierung des Systems. Eine weitere Verbesserung wäre eine Verringerung der sich einstellenden LC-Amplituden im Falle eines aufklingenden Systems.

Aus der linearen Stabilitätsanalyse ist bekannt, dass der Wobble-Mode der Basiskonfiguration bei ca. 55 km/h seinen maximalen Realteil erreicht und erst bei ca. 108 km/h wieder stabil wird. Dementsprechend fallen auch die Aufklingverhalten der Basiskonfiguration in Abbildung 33 aus. Für 50 km/h klingt die Lösung sehr schnell auf, während bei 100 km/h die bereits weit besseren Stabilitätseigenschaften zu erkennen sind.

Eine wichtige Erkenntnis der Plots ist, dass mit allen nichtlinearen Dämpfern dennoch eine zum Teil sehr starke Verbesserung des Wobble-Modus erreicht wird. Vor allem für hohe Geschwindigkeiten ist die frühzeitige Stabilisierung des Modes durch einen Tilger klar zu erkennen. Die Konfiguration mit dem linearen Dämpfer weist, wie aus den Eigenwerten in Abbildung 31 ersichtlich, einen negativen Realteil für alle ausgewählten Geschwindigkeiten auf. Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h ist auch hier Wobble sehr nahe der Stabilitätsgrenze, was sich in dem sehr langsam abklingenden Lenkwinkelverlauf in der Zeitsimulation widerspiegelt. Aus der linearen Analyse ist bekannt, dass eine erhöhte Dämpfungskonstante den linken Wobble-Höcker verschlechtert, während eine niedrigere den Realteil minimal verringert. Ein ähnlicher Einfluss kann auch im nichtlinearen Fall anhand der drei nichtlinearen Tilger beobachtet werden. Durch den weicheren Dämpfer wird das Stabilitätsverhalten etwas verbessert, während der negative Einfluss des stärkeren Dämpfers in diesem Fall das System sogar destabilisiert. Für den zweiten Höcker bei ungefähr 70 km/h sind zwei Effekte zu sehen. Der nachteilige Einfluss einer reduzierten Dämpfung wird durch das aufklingende Verhalten der weichen Vari-

ante bestätigt. Bei einer erhöhten Dämpfung würde man sich eigentlich laut linearer Analyse eine Verbesserung erwarten. Im Zeitverlauf ist jedoch inverses Verhalten bei sogar schnellerem Aufklingverhalten verglichen mit der weichen Dämpfung zu sehen. Dies könnte mit dem zweiten besprochenen Effekt einer erhöhten Dämpfung in Verbindung stehen - der Unterbindung des Modewechsels. Die erhöhte Dämpfung verschlechtert also die Stabilitätseigenschaften für zwischen den Höcker liegenden Geschwindigkeiten. Man kann also ähnliche Effekte zur linearen Stabilitätsanalyse auch in der nichtlinearen Analyse erkennen. Es ist also für alle drei Tilger eine Verbesserung gegenüber dem Basismodell entweder durch Stabilisierung oder durch verlangsamtes Aufklingverhalten sowie geringere LC-Amplituden gegeben. Weiters zeigt sich jedoch deutlich, dass die nichtlinearen Effekte bestmöglich verhindert werden sollten.

### 5.2.2 Reibung in der Linearführung

Nachdem ohnehin bereits eine Gleitreibung in der Führung zur Modellierung des Dämpfers eingeführt wurde, sollen nun auch die Einflüsse größerer Reibwerte sowie die der Haftreibung analysiert werden.

Die Auswirkung einer berücksichtigten Haftreibung ist bei realistischen Werten verschwindend. Erst bei sehr hohen Werten  $\mu_H > 1$  lässt sich ein Effekt erkennen. So große Haftreibungskoeffizienten treten bei Metallpaarungen zwar nicht auf, jedoch kann es durch ein Verklemmen in den Führungen oder durch Verunreinigungen durchaus dazu kommen, dass der Tilger eine größere Anfangskraft zu überwinden hat. Dieser Einfluss ist wie folgt. Zu Beginn der Simulation tritt Haften ein. Dabei wird durch die veränderte Massengeometrie das System destabilisiert (entspricht dann in etwa einer starren Anbindung) und die Lösung klingt auf. Ab einer gewissen Stärke der Schwingung bzw. einer kritischen Schwingungsamplitude wird die Haftgrenze überschritten und der Tilger kann sich relativ zum Rahmen bewegen. Ab diesem Moment arbeitet der Tilger und hat somit einen stabilisierenden Effekt auf das System. Nun können unterschiedliche Fälle eintreten. Das System wird je nach Stabilität durch den arbeitenden Tilger entweder weiter aufschwingen oder aber abklingen. Klingt das System weiter auf (wohlgemerkt wird dieses durch den Tilger verlangsamt) stellt sich ein LC ein. Klingt das System aber ab, kann sich entweder eine Schwingung mit geringeren Amplituden einstellen oder der Tilger beginnt nach einiger Zeit erneut zu haften und das eben aufgezeigte Geschehen wiederholt sich.

Der Einfluss der Gleitreibung soll anhand von Abbildung 34 nähergebracht werden. Wie zuvor ist der Lenkwinkel der Zeitsimulation dargestellt. Verglichen wird die Basiskonfiguration, die Variante mit linearem Tilger und drei Tilgervarianten mit unter-

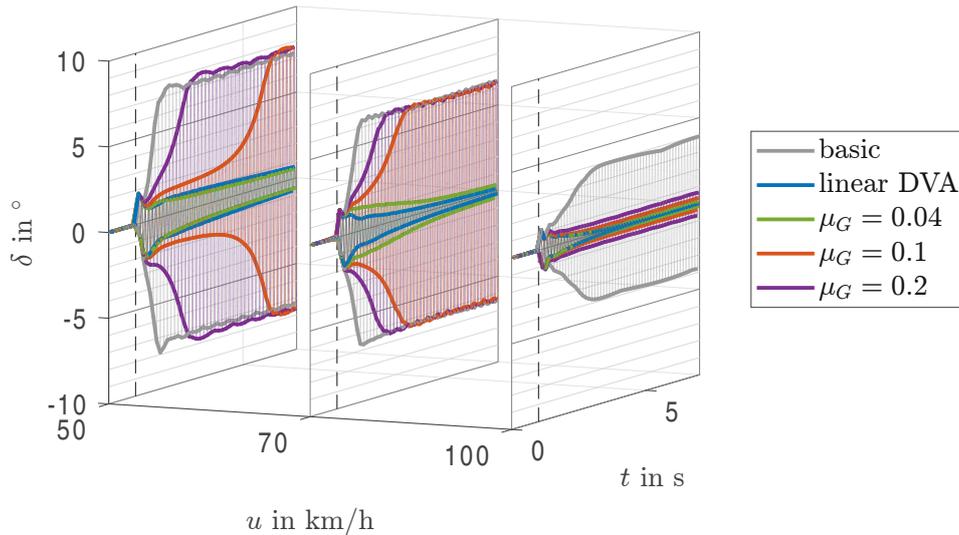


Abbildung 34: Zeitsimulation: nichtlinearer Dämpfer und unterschiedliche Werte für  $\mu_G$

schiedlichen Reibungskoeffizienten. Dabei wurde die geringe Reibung der Analysen zuvor ( $\mu_G = 0.04$ ), ein realistischer Wert für eine Stahl-Stahl-Paarung ( $\mu_G = 0.1$ ) und ein relativ hoher Reibwert ( $\mu_G = 0.2$ ) gewählt. Für den nichtlinearen Dämpfer ist die *regular*-Variante gewählt, da diese, für die sich ergebenden initialen Lenkwinkelgeschwindigkeiten, dem linearen Dämpfer am ähnlichsten ist. Die grün geplottete Kurve mit  $\mu_G = 0.04$  entspricht also dem bereits untersuchten System von zuvor, welches für alle drei Geschwindigkeiten ein stabiles Verhalten aufweist.

Anhand der Verläufe mit den erhöhten Reibungskoeffizienten lässt sich ein allgemein negativer Einfluss auf das Systemverhalten feststellen. Für die niedrigeren Geschwindigkeiten resultiert die erhöhte Reibung in einer Destabilisierung. Bei 50 km/h ist das System mit  $\mu_G = 0.1$  zu Beginn zwar instabil aber nahe der Stabilitätsgrenze, was zu einem sehr langsamen Anstieg der Schwingungsamplituden führt. Ab einem gewissen Punkt überschreitet die Dämpfergeschwindigkeit aber einen kritischen Wert, welcher in Kombination mit der nichtlinearen Dämpferkennlinie zu einer weiteren Destabilisierung des Systems und folglich zu einem schnelleren Aufklingverhalten führt. Würde die Anfangsstörung etwas stärker ausfallen, entfielen also der zu Beginn langsam aufklingende Bereich. Im Vergleich zum Basismodell dauert jedoch der Aufklingvorgang auch bei einer erhöhten Reibung bereits mehr als doppelt so lang, was in der Realität dem Fahrer wertvolle Zeit zum Eingreifen verschafft. Weiters ist das Abklingen der Lösung aufgrund der Gleitreibung limitiert. Dies lässt sich anhand des Verlaufs bei 100 km/h erkennen. Nach der Störung klingen die Lösungen zwar ab, verbleiben aber je nach Größe des Reibungskoeffizienten in einer Schwingung und kehren nicht in die Ausgangsposition zurück. Die sich dabei einstellenden Schwingungsamplituden sind aber gering.

### 5.2.3 Tilgerauslenkung und elastische Endanschläge

Der Einfluss von elastischen Anschlägen kann relativ kurz zusammengefasst werden. Grundsätzlich wurde der Anschlag durch eine sehr steile progressive Kennlinie in *MSC Adams* modelliert. Diese Modellierung entspricht also einem harten Endanschlag zur Begrenzung des Tilgerweges. Sobald der Tilger diese Endanschläge erreicht, stellt sich eine Schwingung von Endanschlag zu Endanschlag ein. Das ist auch naheliegend, da die Anschläge keinerlei Energie dissipieren und somit der Schwingung keine Energie entnehmen können. Im allgemeineren Sinn kann der Endanschlag auch als stufenweise progressive Federkennlinie interpretiert werden, da nach dem Erreichen des Anschlags die Tilgerfeder und die progressive Kennlinie des Anschlags wie parallel geschaltene Federn gleichzeitig auf den Tilger einwirken. Erreicht der Tilger bei einer sehr starken Anfangsstörung direkt den Endanschlag, hat dieser also keinerlei positive Wirkung. Ist die Anfangsstörung jedoch kleiner, ist das Auf- oder Abklingverhalten von den anderen Parametern abhängig. Somit sollte der Tilger über einen größtmöglichen Arbeitsweg verfügen, um in diesem Bereich das Aufklingverhalten zumindest verzögern zu können.

Demnach ist die Frage zu klären, wie stark der Tilger bei gängigen Störungen angeregt wird, um so eine Abschätzung für den notwendigen Arbeitsweg abzuleiten. Abbildung 35 zeigt die Tilgerauslenkungen der Varianten mit unterschiedlichen Reibungskoeffizienten. Den Limit-Cycles bei niedrigen Geschwindigkeiten zufolge kann man eine maximale

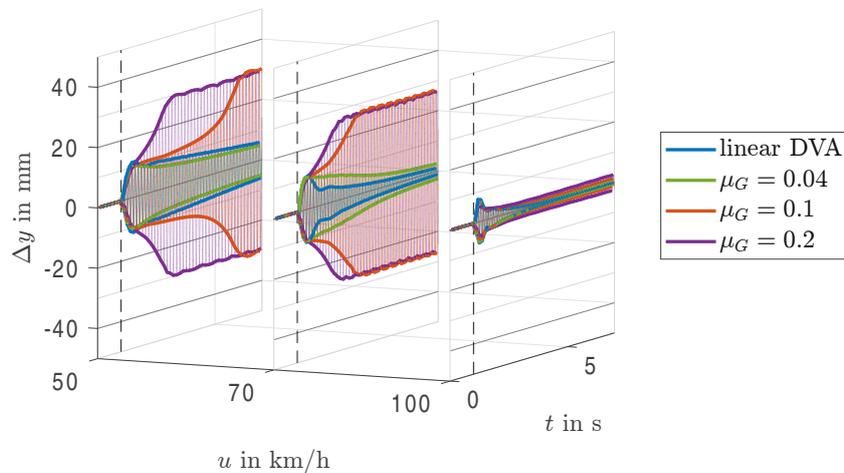


Abbildung 35: Tilgerauslenkungen: nichtlinearer Dämpfer und unterschiedliche Werte für  $\mu_G$

Auslenkung von 30 mm erkennen. Zu höheren Geschwindigkeiten hin verringert sich der notwendige Arbeitsweg des Tilgers. Bei noch niedrigeren Geschwindigkeiten würden diese noch höher ausfallen. Dies kann auch durch den geschwindigkeitsabhängigen Verlauf

des Eigenvektors aus der analytischen Stabilitätsanalyse gefolgert werden. Im Falle einer abklingenden Störung ist der notwendige Weg nur durch die Größe der Anfangsstörung vorgegeben. Durch den hier aufgebrauchten Drehmomentimpuls ergeben sich initiale Auslenkungen von ca. 12 mm. Dieser Arbeitsbereich würde in diesem Fall also für ein stabiles System ausreichen, um den initialen Impuls am Lenker stabilisieren zu können. Wäre die Störung größer, würde demnach ein größerer Arbeitsweg erforderlich sein. Im Umkehrschluss ist jedoch bei Anregung durch kleine Fahrbahnunregelmäßigkeiten die tatsächliche Auslenkung um einiges geringer. In der Praxis sollte der zugelassene Arbeitsweg eines Tilgers so groß wie möglich gewählt werden, um wie dargestellt auch größere Störungen erfolgreich stabilisieren zu können.

### 5.3 Praktische Überlegungen

In diesem Kapitel sollen zwei praktische Überlegungen aufgezeigt werden. Die erste betrifft die Kombination eines Tilgers und eines Lenkungsdämpfers und soll auf die Effektivität dieser hinweisen. Die zweite Überlegung geht auf die Nutzung des Top-Cases als Tilger ein. Hier ist vor allem die bereits angesprochene Verstimmung durch die Zuladung ein Thema. Als Dämpfer wurde wieder die mittlere Kennlinie herangezogen und als Reibwert  $\mu_G = 0.1$ , was einem standardmäßigen Wert für eine Paarung zweier Stähle entspricht.

Die Ergebnisse der Zeitsimulation sind in Abbildung 36 ersichtlich. Hier wird der Vergleich bezüglich der Basiskonfiguration, der Basiskonfiguration mit Lenkungsdämpfer, die Kombination von Lenkungsdämpfer und optimal abgestimmten Tilger, sowie die Kombination von Lenkungsdämpfer und verstimmten Tilgersystem durch z.B. Zuladung im Top-Case aufgezeigt. Für den Lenkungsdämpfer wurde der Standardwert des vorhandenen Motorrads gewählt ( $k_\delta = 2.848 \text{ Nms/rad}$ ). Einerseits zeigt der Vergleich von Basiskonfiguration zu jener mit Lenkungsdämpfer, dass das Aufklingverhalten durch den zusätzlichen Dämpfer nur sehr gering verbessert wird, während die LC-Amplituden etwas verringert werden. Für alle drei Geschwindigkeiten ergibt sich trotz des Lenkungsdämpfers ein Aufklingen des Lenkwinkels, wobei dieses bei 100 km/h bereits sehr langsam vonstattengeht. Nun soll ein Top-Case an das Motorrad angebracht werden, welches in diesem Fall eine Masse von 5 kg aufweist. Wird dieses starr an das Motorrad angebracht wird das Stabilitätsverhalten bezüglich beider Moden verschlechtert. Durch die Nutzung der hinzugefügten Masse als Tilger kann man nun, wie in Abbildung 36 gezeigt, das Stabilitätsverhalten verbessern. Eine Stabilisierung ist mit dieser Masse zwar nur für 100 km/h möglich, jedoch beträgt auch für geringere Geschwindigkeiten die Aufklingzeit ein Vielfaches jener des Basismodells mit oder ohne Lenkungsdämpfer. Nun wird in

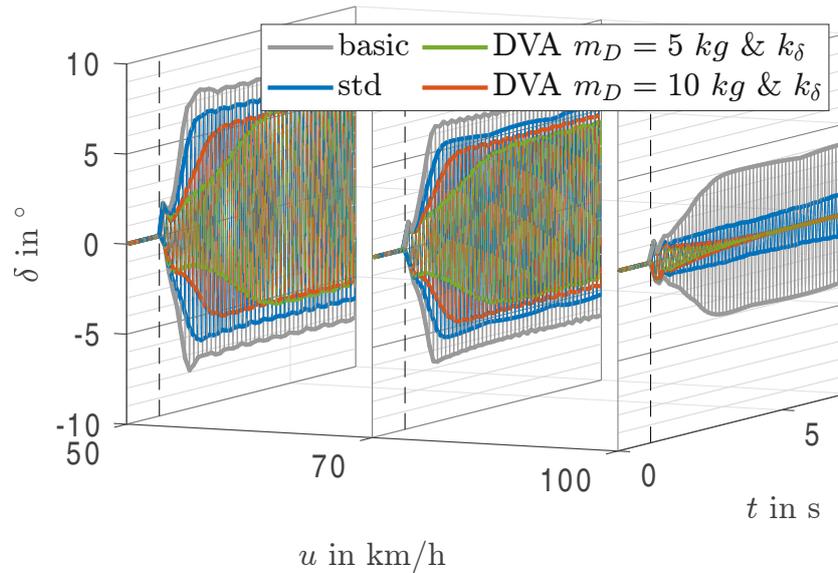


Abbildung 36: Kombination von Lenkungsdämpfer und Top-Case-Tilger,

*grau*: Basiskonfiguration,

*blau* bzw. *std*: Basiskonfiguration mit Lenkungsdämpfer (ohne Tilger),

*grün*: Lenkungsdämpfer und Tilger mit optimaler Tilgerabstimmung,

*rot*: Lenkungsdämpfer und Tilger mit erhöhter Masse (Zuladung) und unveränderter Steifigkeit und Dämpfung → verstimmtes System

das Top-Case das zulässige Höchstgewicht zugeladen und somit die Masse verdoppelt. Dadurch wird zwar die Masse des Tilgers verdoppelt, was ein höheres Stabilisierungspotential mit sich bringen würde, gleichzeitig wird jedoch die Eigenfrequenz um den Faktor  $1/\sqrt{2}$  abgesenkt und somit der Tilger verstimmt. Dass der Tilger dennoch positive Auswirkungen hat, ist ersichtlich. Die Stabilitätseigenschaften werden zwar gegenüber dem perfekt abgestimmten Tilger mit der geringeren Masse verschlechtert, jedoch ist trotzdem eine Verbesserung gegenüber der Variante mit Lenkungsdämpfer ersichtlich. Es sei zudem angemerkt, dass die rein starre Anbindung des Top-Cases die Stabilität des Systems eigentlich verschlechtern würde und somit bei normaler Anbringung die Lösung schneller aufklingen würde, als beim dargestellten Modell mit Lenkungsdämpfer. Demnach kann auch ein Tilger ohne optimaler Abstimmung das Systemverhalten in der Praxis verbessern.

## 5.4 Fazit

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die nichtlinearen Effekte allesamt einen negativen Einfluss auf das Stabilisierungspotential des Tilgers haben und somit so gering

wie möglich gehalten werden sollten. Im unproblematischen Fall stellt sich anstatt eines vollständigen Abklingens der Lösung eine verbleibende Schwingung mit sehr kleinen Amplituden ein. Dieses Verhalten ist vor allem bei erhöhten Gleitreibungen zu sehen. Andererseits kann aber auch ein mit linearem Tilger stabiles System durch die nichtlinearen Effekte destabilisiert werden. Dabei schwingt sich für den Großteil der Untersuchungen ein LC mit etwas reduzierten LC-Amplituden ein, als dies für die Basiskonfiguration der Fall ist. In manchen Fällen werden die sich ergebenden LC-Amplituden aber auch nicht verbessert oder sogar minimal verschlechtert. Zusätzlich wurde aber in allen untersuchten Fällen zumindest die Aufklingdauer verlängert, was aus dem reduzierten Realteil resultiert. Das verschafft dem Fahrer vor allem wertvolle Zeit zum Eingreifen bevor die Schwingung unangenehme oder sogar gefährliche Ausmaße annimmt. Trotz der verschlechterten Stabilitätseigenschaften gegenüber dem linearen Tilger ist also im Vergleich zur Basiskonfiguration eine Verbesserung ersichtlich.

Die tatsächlichen Größen der nichtlinearen Effekte sind schwer abzuschätzen, jedoch sollten die hier verwendeten Werte einem realistischen Rahmen entsprechen. Somit verbleibt ein im Vergleich zur linearen Untersuchung leicht getrübt, aber dennoch positiver Eindruck bezüglich der Wirksamkeit eines realen Tilgers zur Verbesserung des lateralen Stabilitätsverhalten eines Motorrads.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war die Untersuchung des Stabilisierungspotentials von Schwingungstilgern bezüglich der aufrechten Geradeausfahrt des Motorrads. Dazu wurden die Effekte auf die Moden Weave und Wobble betrachtet und unterschiedliche Parameterinflüsse analysiert.

Zu Beginn wurde das grundlegende Motorradmodell vorgestellt. Dabei handelt es sich um das in der Literatur erprobte Modell von Pacejka, wobei einige Vereinfachungen getroffen wurden. Da diese Arbeit die Eigenstabilität des Motorrads behandelt ist der Fahrer als starr mit dem Rahmen verbunden betrachtet. Weiters ist der verzögerte Kraftaufbau des Reifens nur bezüglich des Schräglaufwinkels berücksichtigt. Nachdem die Modellbildung der Basiskonfiguration abgeschlossen war und dessen lineare Bewegungsgleichungen hergeleitet wurden, ging die Arbeit zur Modellbildung des um die Tilger erweiterten Motorrads über. Dabei wurden drei unterschiedliche Tilgervarianten vorgestellt.

- rotatorischer Tilger am Vorderrahmen um die Lenkachse
- rotatorischer Tilger am Hauptrahmen um eine allgemein geneigte Achse in der Symmetrie-Ebene
- translatorischer Tilger am Hauptrahmen in lateraler Richtung

Für alle drei Modelle wurden die Positionierung, sowie grundlegende Überlegungen und Parameterwerte aufgezeigt. Zum Schluss des ersten großen Kapitels der Modellbildung wurden noch die geschlossenen Bewegungsgleichungen des Motorrads mit allen drei Tilgervarianten angeschrieben.

Im nächsten Kapitel wurden die analytischen linearen Bewegungsgleichungen detailliert bezüglich deren Stabilität analysiert. Zu Beginn wurden als Referenz die Stabilitätseigenschaften der Basiskonfiguration gezeigt und im Zuge dessen die möglichen instabilen Moden Weave, Wobble und Capsize erläutert. Danach konnte mit der Analyse des Stabilisierungspotentials der Tilger begonnen werden. Dabei konnten vor allem der rotatorische Tilger am Vorderrahmen bezüglich Wobble, sowie der laterale Tilger am Hauptrahmen bezüglich Weave und Wobble sehr gute Ergebnisse erzielen. Eine weitere sehr positive Erkenntnis war der verschwindende negative Einfluss des Wobble-Tilgers am Vorderrahmen auf den Weave-Mode des Fahrzeugs, sowie der positive Einfluss des lateralen Tilgers mit Weave-Tuning auf den Wobble-Mode des Motorrads. Abhilfen, die beide Moden verbessern bzw. zumindest den zweiten Mode nicht verschlechtern, sind in

der Literatur sehr selten gesehen. Der rotatorische Tilger am Hauptrahmen konnte zwar richtig abgestimmt ebenfalls auf beide Moden einen positiven Einfluss ausüben, jedoch ist die Effektivität geringer als bei den anderen Varianten. Durch den rotatorischen Tilger am Vorderrahmen konnte bezüglich Weave keine nennenswerte Verbesserung erzielt werden. Im Zuge dieser Untersuchungen wurden auch Parametereinflüsse der Positionierung und der Tuningparameter (Eigenfrequenz und Lehr'sches Dämpfungsmaß) der Tilger aufgezeigt. Dabei konnte vor allem eine sehr hohe Sensitivität bezüglich der Tuning-Frequenz festgestellt werden. Neben dieser hohen Sensitivität sind auch die notwendigen großen Massen bzw. Trägheitsmomente zur Stabilisierung des Motorrads nachteilig. Zum Schluss wurden auch noch Kombinationen der Tilgervarianten analysiert. Dabei konnte gezeigt werden, dass mithilfe zweier Tilger beide Moden gleichzeitig erheblich verbessert werden können. Weiters wurde auch die Möglichkeit der gemeinsamen Abstimmung auf einen Mode erwähnt, wodurch die notwendigen massiven Körper der Tilger erheblich verkleinert werden können. Damit bleibt auch die Nutzung mehrere kleiner Tilger als Abhilfe gegen einen Mode als Option offen. Zuletzt soll auch noch die Kombination von Tilgern mit anderen Stabilisierungsmöglichkeiten wie einem Lenkungsdämpfer erwähnt werden. Auch damit ließen sich die notwendigen Massen bzw. Trägheitsmomente zur Stabilisierung drastisch verringern.

Das letzte Kapitel widmete sich den nichtlinearen Effekten eines realen Tilgers. Dabei wurden z.B. nichtlineare Dämpferkennlinien mit progressiven Verhalten und Losbrechkraft, der Einfluss von Gleitreibung auf das System oder ein beschränkter Arbeitsweg des Tilgers analysiert. Zusätzlich sollten die tatsächlich auftretenden Tilgerauslenkungen ermittelt werden, um somit ein besseres Verständnis für den in der Praxis notwendigen Arbeitsbereich zu erlangen. Die allgemeine Erkenntnis ist dabei, dass die nichtlinearen Effekte allesamt die Effektivität des Tilgers verringern. Dennoch kann mit gering gehaltenen nichtlinearen Effekten eine Stabilisierung für die untersuchten Geschwindigkeiten erreicht werden. Auch wenn die Nichtlinearitäten eine Grenze überschreiten und dadurch das System nicht mehr stabilisiert wird, kann dennoch eine Verbesserung im Vergleich zur Basiskonfiguration anhand von reduzierten Limit-Cycle-Amplituden oder langsameren Aufklingverhalten festgestellt werden. Auch hier wurden zum Schluss noch praktische Aspekte wie z.B. die Kombination von Schwingungstilger und Lenkungsdämpfer sowie eine Nutzung des Top-Cases als Schwingungstilger untersucht. Diese lieferten ebenfalls gute Resultate.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Schwingungstilger sehr wohl zur Stabilisierung von Weave und Wobble beitragen und dabei sogar sehr gute Ergebnisse erzielen können. Weiters wurde festgestellt, dass der zusätzliche elastische Freiheitsgrad durchwegs positiven Einfluss auf die Stabilität des Systems hat. Im Fall eines stark

verstimmten Tilgers entsprechen die Stabilitätseigenschaften im worst-case jenen einer starren Anbringung des Körpers. Bei der Abstimmung eines realen Tilgers sollte dessen Masse möglichst groß gewählt und die Eigenfrequenz des Tilgers sehr penibel eingestellt werden. Im besten Fall würde ein rotatorischer Wobble-Tilger am Vorderrahmen und ein lateraler Weave-Tilger am Hauptrahmen eingesetzt werden. Auch ein Anbauteils wie z.B. eines Top-Cases kann mit einer geeigneten elastischen Aufhängung als Tilger genutzt werden. Damit ließe sich nicht nur der negative Effekt der zusätzlichen Masse beheben, sondern sogar eine verbesserte Stabilität im Vergleich zur Basiskonfiguration erzielen.

## 6.2 Ausblick

Hier soll kurz auf offene Punkte eingegangen werden, welche gute Ansätze für zukünftige Anstrengungen in Richtung dieser Thematik sein könnten.

Ein offener Punkt ist die tatsächliche Umsetzung eines Tilgers am Motorrad. Hierzu ist bereits ein *Proof-Of-Concept* am Institut im Gange, in welchem die Effektivität eines lateralen Tilgers an der Top-Case-Position untersucht werden soll. Eine zu klärende Frage dabei ist der Einfluss der Rahmenflexibilität auf die Anregung des Tilgers, da in den hier durchgeführten Untersuchungen nur starre Körper betrachtet wurden.

Eine weitere Thematik würde die tatsächliche Umsetzung an einem Motorrad thematisieren. Dabei könnten vor allem mögliche Bauteile, welche als Tilger in Frage kommen, identifiziert und als Tilger an das Motorrad angebracht werden. Weiters wäre im Fall des rotatorischen Tilgers am Vorderrahmen eine genaue Studie der beiden translatorischen Massen im Lenker durchaus interessant. Hierzu könnten mögliche Koppelmechanismen und generelle Analysen in einem detaillierten und nicht-reduzierten Modell sinnvoll sein. Zuletzt wäre bezüglich der Umsetzung auch eine elastische Anbringung des Top-Cases erstrebenswert, wobei man sich hier besonders auf die Umsetzung einer masseabhängigen Federsteifigkeit fokussieren könnte. Diese könnte z.B. mithilfe einer geeigneten gewichtsabhängigen Vorspannung nichtlinearer Federn oder strukturoptimierter Gummilager erfolgen.

Was in dieser Arbeit zur Gänze außen vor gelassen wurde, ist der Einfluss eines Tilgers auf die generelle Fahrdynamik des Motorrads. Auch wenn ein Tilger die Stabilitätseigenschaften stark verbessern kann, könnten durch den zusätzlichen Freiheitsgrad unangenehme anderweitige fahrdynamische Eigenschaften in der Kurvenfahrt oder bei schnellen Ausweichmanövern auftreten, was einer detaillierten Untersuchung bedarf.

# Abbildungsverzeichnis

1	Stabilität nach Ljapunow: asymptotisch stabiles (grün, abklingend), stabiles (blau) und instabiles (rot, hier aufklingend) Verhalten . . . . .	12
2	Einfaches 2-Massen-Schwinger System mit Tilgerwirkung . . . . .	18
3	Vereinfachtes Pacejka-Motorrad-Modell in ausgelenkter Lage . . . . .	22
4	Geometrie des Motorradmodells ( $h_i = -z_i$ ) . . . . .	24
5	Definition von Schräglauf- und Sturzwinkel (aus [39]) . . . . .	25
6	Draufsicht auf das Motorradmodell (aus [10]) . . . . .	26
7	Vereinfachte Betrachtung des Reifenkontaktpunktes sowie angreifende Kräfte und Momente (aus [39]) . . . . .	27
8	Standardmäßiger Verlauf einer <i>Magic-Formula</i> -Kraftkurve mit Einfluss der Parameter (aus [10]) . . . . .	28
9	Schematische Darstellung eines an den Vorderrahmen angebauten Tilgers ( $h_{D_\zeta} = -z_{D_\zeta}$ ) . . . . .	36
10	Variante mit Rotationstilger ( $h_{D_\eta} = -z_{D_\eta}$ ) . . . . .	37
11	Variante mit lateralen Tilger ( $h_{D_\xi} = -z_{D_\xi}$ ) . . . . .	39
12	Plots aller Eigenwerte des Motorradmodells . . . . .	45
13	Wobble Eigenmode . . . . .	46
14	Weave Eigenmode . . . . .	47
15	Einfluss eines starren Körpers am Vorderrahmen . . . . .	49
16	Stabilitätsdiagramm des Motorrads mit Tilger (DVA) am Vorderrahmen . . . . .	51
17	Entwicklung des Wobble Eigenvektors mit DH Tuning . . . . .	52
18	Stabilitätskarte des für Wobble abgestimmten Rotationstilgers bezüglich $f_D$ & $D_D$ ( $\max \Re(\lambda_{wobble})$ ) . . . . .	54
19	Skizzen zur Anbringung eines Tilgers am Vorderrahmen . . . . .	55
20	Stabilitätsdiagramm für starr angebrachten Körper am Hinterrahmen . . . . .	57
21	Einfluss eines starr angebrachten Körpers am Hauptrahmen . . . . .	57
22	Winkelbeschleunigung des Hauptrahmens $\alpha_{M M}$ über eine Schwingungsperiode . . . . .	59
23	Stabilitätsdiagramm für rotatorischen Tilger . . . . .	60
24	Stabilitätskarten bezüglich $f_D$ und $D_D$ des rotatorischen Tilgers am Hauptrahmen . . . . .	62
25	Maximal auftretende, absolute, laterale Beschleunigung des Hauptrahmens $a_{M,y M}$ Position: $x$ in $x_A$ - und $z$ in $-z_A$ -Richtung in unausgelenkter Lage . . . . .	63
26	Stabilitätsdiagramm für den lateralen Tilger . . . . .	64

27	Stabilitätskarten bezüglich $f_D$ und $D_D$ des lateralen Tilgers am Haupt- rahmen . . . . .	66
28	Schematische Darstellungen der kombinierten Tilger-Konfigurationen . . .	66
29	Stabilitätsdiagramm beider kombinierter Varianten . . . . .	67
30	Modell in <i>MSC Adams</i> mit lateralem Tilger . . . . .	73
31	Vergleich der Eigenwerte des analytischen und numerischen Modells . . .	74
32	Verwendete Dämpferkennlinien . . . . .	76
33	Zeitsimulation nichtlinearer Tilger mit weicher, normaler und harter Ab- stimmung . . . . .	77
34	Zeitsimulation: nichtlinearer Dämpfer und unterschiedliche Werte für $\mu_G$	79
35	Tilgerauslenkungen: nichtlinearer Dämpfer und unterschiedliche Werte für $\mu_G$ . . . . .	80
36	Kombination von Lenkungsdämpfer und Top-Case-Tilger, <i>grau</i> : Basiskon- figuration, <i>blau</i> bzw. <i>std</i> : Basiskonfiguration mit Lenkungsdämpfer (ohne Tilger), <i>grün</i> : Lenkungsdämpfer und Tilger mit optimaler Tilgerabstim- mung, <i>rot</i> : Lenkungsdämpfer und Tilger mit erhöhter Masse (Zuladung) und unveränderter Steifigkeit und Dämpfung → verstimmtes System . . .	82

## Tabellenverzeichnis

1	Geometrie- und Massenparameter des Motorrads . . . . .	34
2	Steifigkeiten, Dämpfungen und aerodynamische Parameter des Motorrads	35
3	Parameter des rotatorischen Tilgers am Vorderrahmen . . . . .	36
4	Parameter des rotatorischen Tilgers am Hauptrahmen . . . . .	38
5	Parameter des translatorischen Tilgers am Hauptrahmen . . . . .	40
6	Tuning-Parameter: Rotatorischer Tilger am Vorderrahmen . . . . .	53
7	Parametereinfluss des Massenverhältnis $\mu$ (Parameter durch Optimierung bestimmt) . . . . .	53
8	Tuning-Parameter: Rotatorischer Tilger am Hauptrahmen . . . . .	61
9	Tuning-Parameter: Translatorischer Tilger am Hauptrahmen . . . . .	65
10	Tuning-Parameter: Kombinierte Tilger-Konfigurationen . . . . .	68

## Literatur

- [1] European Road Safety Observatory. *Annual statistical report on road safety in the EU, 2024*. Techn. Ber. European Commission, 2024.
- [2] Statista. *Share of passenger mileage in EU-27 in 2020, by mode*. accessed 14-09-2024. 2020. URL: <https://www.statista.com/statistics/280520/share-of-passenger-mileage-in-eu-27-by-mode/>.
- [3] *Dunlop Wobble & Weave*. Youtube. 2011. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=z30QTU-kE2s>.
- [4] R.S. Sharp. „The Stability and Control of Motorcycles“. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 13.5 (1971), S. 316–329. DOI: 10.1243/JMES\_JOUR\_1971\_013\_051\_02.
- [5] R. S. Sharp und C. J. Alstead. „The Influence of Structural Flexibilities on the Straight-running Stability of Motorcycles“. In: *Vehicle System Dynamics* 9.6 (1980), S. 327–357. DOI: 10.1080/00423118008968629.
- [6] P. T. J. Spierings. „The Effects of Lateral Front Fork Flexibility on the Vibrational Modes of Straight-Running Single-Track Vehicles“. In: *Vehicle System Dynamics* 10.1 (1981), S. 21–35. DOI: 10.1080/00423118108968633.
- [7] R.S. Sharp und D.J. Limebeer. „A Motorcycle Model for Stability and Control Analysis“. In: *Multibody System Dynamics* 6.5 (2001), S. 123–142. DOI: 10.1023/A:1017508214101.
- [8] D.J.N. Limebeer und R.S. Sharp. „Bicycles, motorcycles, and models“. In: *IE-EE Control Systems Magazine* 26.5 (2006), S. 34–61. DOI: 10.1109/MCS.2006.1700044.
- [9] G. E. Roe und T. E. Thorpe. „A Solution of the Low-Speed Wheel Flutter Instability in Motorcycles“. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 18.2 (1976), S. 57–65. DOI: 10.1243/JMES\_JOUR\_1976\_018\_012\_02. eprint: [https://doi.org/10.1243/JMES\\_JOUR\\_1976\\_018\\_012\\_02](https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1976_018_012_02). URL: [https://doi.org/10.1243/JMES\\_JOUR\\_1976\\_018\\_012\\_02](https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1976_018_012_02).
- [10] Hans B. Pacejka. *Tire and Vehicle Dynamics*. Third Edition. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012. ISBN: 978-0-08-097016-5. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2010-0-68548-8>. URL: <https://www.sciencedirect.com/book/9780080970165/tire-and-vehicle-dynamics>.

- [11] H. Imaizumi und T. Fujioka. „Motorcycle-rider system dynamics by multibody dynamics analysis: Effects of the rear load on wobble motions and the control assembly“. In: *JSAE Review* 19.1 (1998), S. 54–57. ISSN: 0389-4304. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0389-4304\(97\)80396-7](https://doi.org/10.1016/S0389-4304(97)80396-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0389430497803967>.
- [12] J.P. Den Hartog. *Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill Book Company, 1956.
- [13] MotorbikesToday. *Honda HESD Steering Damper*. accessed 21-04-2025. 2005. URL: [https://www.motorbikes.today.com/news/Articles/hon\\_hesd\\_damper.htm](https://www.motorbikes.today.com/news/Articles/hon_hesd_damper.htm).
- [14] Pierpaolo De Filippi u. a. „Semi-Active Steering Damper Control in Two-Wheeled Vehicles“. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 19.5 (2011), S. 1003–1020. DOI: 10.1109/TCST.2010.2070068.
- [15] Cosimo Monti, Alessandro Giorgetti und Andrea Girgenti. „An Axiomatic Design Approach for a Motorcycle Steering Damper“. In: *Procedia CIRP* 34 (2015). 9th International Conference on Axiomatic Design (ICAD 2015), S. 150–155. ISSN: 2212-8271. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procir.2015.07.081>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212827115008495>.
- [16] Simone Piantini u. a. „Design of a Motorcycle Steering Damper for a Safer Ride“. In: *Machines* 8.2 (2020). ISSN: 2075-1702. DOI: 10.3390/machines8020024. URL: <https://www.mdpi.com/2075-1702/8/2/24>.
- [17] M.C. Smith. „Synthesis of mechanical networks: the inerter“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.10 (2002), S. 1648–1662. DOI: 10.1109/TAC.2002.803532.
- [18] Malcolm C. Smith. „The Inerter: A Retrospective“. In: *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems* 3. Volume 3, 2020 (2020), S. 361–391. ISSN: 2573-5144. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-control-053018-023917>. URL: <https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev-control-053018-023917>.
- [19] Michael Z.Q. Chen u. a. „The missing mechanical circuit element“. In: *IEEE Circuits and Systems Magazine* 9.1 (2009), S. 10–26. DOI: 10.1109/MCAS.2008.931738.
- [20] S. Evangelou u. a. „Steering compensation for high-performance motorcycles“. In: *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601)*. Bd. 1. 2004, 749–754 Vol.1. DOI: 10.1109/CDC.2004.1428746.
- [21] S. Evangelou u. a. „Control of motorcycle steering instabilities“. In: *IEEE Control Systems Magazine* 26.5 (2006), S. 78–88. DOI: 10.1109/MCS.2006.1700046.

- [22] Simos Evangelou u. a. „Mechanical Steering Compensators for High-Performance Motorcycles“. In: *Journal of Applied Mechanics* 74.2 (März 2006), S. 332–346. ISSN: 0021-8936. DOI: 10.1115/1.2198547. eprint: [https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/74/2/332/5475250/332\\_1.pdf](https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/74/2/332/5475250/332_1.pdf). URL: <https://doi.org/10.1115/1.2198547>.
- [23] Christakis Papageorgiou u. a. „Experimental testing and modelling of a passive mechanical steering compensator for high-performance motorcycles“. In: *2007 European Control Conference (ECC)*. 2007, S. 3592–3599. DOI: 10.23919/ECC.2007.7068739.
- [24] Jason Z. Jiang, Malcolm C. Smith und Neil E. Houghton. „Experimental testing and modelling of a mechanical steering compensator“. In: *2008 3rd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing*. 2008, S. 249–254. DOI: 10.1109/ISCCSP.2008.4537228.
- [25] Simos Evangelou u. a. „An  $\mathcal{H}_\infty$  Loop-Shaping Approach to Steering Control for High-Performance Motorcycles“. In: *Control of Uncertain Systems: Modelling, Approximation, and Design*. Hrsg. von Bruce A. Francis, Malcolm C. Smith und Jan C. Willems. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006, S. 257–275. ISBN: 978-3-540-31755-5.
- [26] Francesco Passigato u. a. „Two Approaches for the Synthesis of a Weave-Wobble-stabilizing Controller in Motorcycles“. In: *2021 IEEE International Intelligent Transportation Systems Conference (ITSC)*. 2021, S. 3496–3501. DOI: 10.1109/ITSC48978.2021.9565019.
- [27] K. Glover, J. Sefton und D.C. McFarlane. „A Tutorial on Loop Shaping using H-Infinity Robust Stabilization“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 23.8, Part 3 (1990). 11th IFAC World Congress on Automatic Control, Tallinn, 1990 - Volume 3, Tallinn, Finland, S. 117–126. ISSN: 1474-6670. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)51903-5](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)51903-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017519035>.
- [28] D. McFarlane und K. Glover. „A loop-shaping design procedure using H/sub infinity / synthesis“. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 37.6 (1992), S. 759–769. DOI: 10.1109/9.256330.
- [29] Fabiano Maggio und Vittore Cossalter. „How a rear steering system may improve motorcycle dynamics“. In: *Int. J. Vehicle Design Int. J. Vehicle Design* 46 (Juni 2008), S. 328–346. DOI: 10.1504/IJVD.2008.019090.

- [30] Y. Marumo und M. Nagai and. „Steering control of motorcycles using steer-by-wire system“. In: *Vehicle System Dynamics* 45.5 (2007), S. 445–458. DOI: 10.1080/00423110701200194. eprint: <https://doi.org/10.1080/00423110701200194>. URL: <https://doi.org/10.1080/00423110701200194>.
- [31] Georgios Mavros. „Enhanced motorcycle roll stability by use of a reaction wheel actuator“. In: (Jan. 2010). URL: [https://repository.lboro.ac.uk/articles/conference\\_contribution/Enhanced\\_motorcycle\\_roll\\_stability\\_by\\_use\\_of\\_a\\_reaction\\_wheel\\_actuator/9221468](https://repository.lboro.ac.uk/articles/conference_contribution/Enhanced_motorcycle_roll_stability_by_use_of_a_reaction_wheel_actuator/9221468).
- [32] Aristeidis Tanos, Thomas Steffen und George Mavros. „Improving lateral stability of a motorcycle via assistive control of a reaction wheel“. In: Juli 2014, S. 80–85. DOI: 10.1109/CONTROL.2014.6915119.
- [33] R. Lot und J. Fleming and. „Gyroscopic stabilisers for powered two-wheeled vehicles“. In: *Vehicle System Dynamics* 57.9 (2019), S. 1381–1406. DOI: 10.1080/00423114.2018.1506588. eprint: <https://doi.org/10.1080/00423114.2018.1506588>. URL: <https://doi.org/10.1080/00423114.2018.1506588>.
- [34] I.J.M. Besselink. „Shimmy of Aircraft Main Landing Gears“. In: 2000. URL: <https://resolver.tudelft.nl/uuid:c9fc838d-57a3-4bd5-b414-7bc675785d99>.
- [35] Giuseppe Habib und Alberto Epasto. „Towed wheel shimmy suppression through a nonlinear tuned vibration absorber“. In: *Nonlinear Dynamics* 111 (2023), S. 8973–8986. DOI: 10.1007/s11071-023-08314-z. URL: <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08314-z>.
- [36] Horst Leipholz. *Stability Theory*. Second Edition. Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden, 1987. ISBN: 978-3-663-10648-7. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-663-10648-7>. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-663-10648-7>.
- [37] Johannes Edelmann und Manfred Plöchl. „Stabilitätsprobleme bewegter Systeme“. Vorlesungsskriptum zur LVA-Nr. 309.023. 2023.
- [38] Christoph Ott. unpublished, Dissertation, Technische Universität Wien, E325 Institut für Mechanik und Mechatronik.
- [39] Christoph Ott. „Untersuchung des Wobble-Modes bei Fahrrädern: Theorie und Fahrversuch“. Technische Universität Wien, 2011.
- [40] W. Kortüm und P. Lugner. *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen: Einführung und Beispiele*. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 9783642476235.
- [41] Bernhard Angrosch. „Fahrradstabilität unter besonderer Berücksichtigung des Lenkungsflatterns“. Technische Universität Wien, 2010.