



Diplomarbeit

Numerische Untersuchung des Beulverhaltens von Hohlprofilen

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-ingenieurs (Dipl.-ing.)

Eingerichtet an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

Von

Mahbod Firoozbakht

Mat.Nr.: 11918502

Unter der Leitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing.in Dr.in techn. Melanie Todt

Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik, E317

Wien, September 2025

Mahbod Firoozbakht

Ich nehme zur Kenntnis, dass ich zur Drucklegung dieser Arbeit nur mit Bewilligung der Prüfungskommission berechtigt bin.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen, sind als solche kenntlich gemacht.

Das Thema dieser Arbeit wurde von mir bisher weder im In- noch Ausland einem_r Beurteiler_in zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Arbeit stimmt mit der von den Begutachter_innen beurteilten Arbeit überein.

Ich nehme zur Kenntnis, dass die vorgelegte Arbeit mit geeigneten und dem derzeitigen Stand der Technik entsprechenden Mitteln (Plagiat-Erkennungssoftware) elektronisch-technisch überprüft wird. Dies stellt einerseits sicher, dass bei der Erstellung der vorgelegten Arbeit die hohen Qualitätsvorgaben im Rahmen der geltenden Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis „Code of Conduct“ an der TU Wien eingehalten wurden. Zum anderen werden durch einen Abgleich mit anderen studentischen Abschlussarbeiten Verletzungen meines persönlichen Urheberrechts vermieden.

Wien, September 2025

Mahbod Firoozbakht

Hinweis zur Nutzung von KI-Software

Zur sprachlichen Überarbeitung dieser Arbeit wurde KI-gestützte Software wie DeepL und QuillBot zur Rechtschreib- und Grammatikprüfung verwendet. Die inhaltliche Ausarbeitung, Argumentation und wissenschaftliche Analyse wurden vollständig eigenständig vorgenommen.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all den Menschen bedanken, die mich während der Entstehung dieser Masterarbeit unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt Meiner Betreuerin Associate Prof. Dipl.-Ing.in Dr.in techn. Melanie Todt, die mir stets mit wertvollen Anregungen, konstruktivem Feedback und großem Engagement zur Seite stand. Ihre fachliche Expertise und Unterstützung waren für das Gelingen dieser Arbeit von unschätzbarem Wert.

Ebenso danke ich Dr. techn. Antonia Wagner herzlich, die durch hilfreiche Hinweise, fundierte Anregungen und kritische Rückfragen wesentlich zur Qualität dieser Arbeit beigetragen hat.

Nicht zuletzt danke ich der Palfinger AG für die zur Verfügung gestellten Ressourcen und die Möglichkeit, wertvolle Einblicke in die Praxis zu gewinnen.

Inhalt

Abstract.....	1
Kurzfassung.....	2
1 Einleitung und Motivation.....	3
1.1 Literaturübersicht	4
1.2 Ziel dieser Arbeit.....	7
2 Theoretische Grundlagen	9
2.1 Grundformen elastischer Instabilität	9
2.2 Näherungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Last.....	11
2.3 Plattenbeulen.....	12
2.4 Schalenbeulen	15
2.4.1 Kreiszyinderschale	15
2.4.2 Teilzyinderschale	17
2.5 Normen und Regelwerke.....	19
2.5.1 Nachweis gegen Plattenbeulen nach DIN EN 13001-3-1	19
2.5.2 Nachweis gegen Plattenbeulen nach DIN EN 1993-1-5	20
3 Methoden	22
3.1 Numerische Beulanalyse mittels FEM	22
3.1.1 Lineare Beulanalyse.....	22
3.1.2 Nichtlineare Nachbeulanalyse.....	23
3.2 Numerische Beulanalyse mit PyAnsys	25
3.3 Modelbildung	26
3.3.1 Material.....	26
3.3.2 Meshing.....	27
3.3.3 Randbedingungen	28
3.4 Solver Configuration und Analysis Type	28

4	Beulverhalten von Profilsegmenten.....	30
4.1	Plattenbeulen.....	30
4.1.1	Definition der Randbedingungen und deren Einfluss auf die Beullast für die gelenkig gelagerte Platte unter axialer Druckbelastung	30
4.1.2	Einfluss des Winkels auf das Beulverhalten	34
4.1.3	Platte unter Biegebelastung.....	37
4.1.4	Nachbeulanalyse der Platte.....	38
4.2	Schalenbeulen	55
4.2.1	Zylinderschalenbeulen	55
4.2.2	Beulverhalten von Gekrümmten Platten	59
5	Beulverhalten von Hohlprofilen.....	68
5.1	Beulverhalten von Polygonen mit unterschiedlicher Anzahl von Seiten.....	68
5.1.1	Einfluss vom Winkel auf das Beulverhalten benachbarter Platten	73
5.2	Beulverhalten von Polygonen mit gekrümmten Seiten.....	74
5.3	Beulverhalten von Polygonen mit abgerundeten Kanten	80
5.4	Beulverhalten Polygonen mit einer segmentierten Seite	91
6	Zusammenfassung und Ausblick.....	95
7	Referenz.....	98
8	Anhang.....	101
8.1	Anhang A	101
	Herausforderungen und Lösungen bei der Modellierung.....	101
8.2	Anhang B	103
8.3	Anhang C	107

Abstract

Polygonal hollow sections are widely used in telescopic structures of mobile lifting solutions, as they offer an advantageous balance between load-bearing capacity and manufacturability. However, as wall thickness decreases, the buckling behavior of such profiles becomes increasingly critical for structural performance. The present thesis aims to investigate the buckling behavior of polygonal hollow sections and to identify the key parameters influencing their buckling strength.

Analytical calculations based on DIN 13001-3-1 are compared with numerical simulations using the finite element method (FEM). A parameter study is conducted to trace the design criterion defined by the standard and to explain the deviations between normative and numerical buckling loads. Particular attention is given to geometric features such as folds, curvature of the buckling fields, and rounded edges. Correct modeling of the simply supported conditions of a curved plate in accordance with the standard, ensuring radial and tangential restraint of free edges, proves to be essential for consistent results.

The findings reveal significant discrepancies between the normative approach and numerical simulations, especially in the range where the standard derives the buckling stress of simple profile segments linearly from a defined slenderness parameter and employs the yield strength as the basis for calculation, while excluding plastic deformation and subsequent failure. Furthermore, it is demonstrated that the buckling resistance of polygonal hollow sections can be enhanced through targeted geometric modifications, such as increasing the number of sides, introducing curvature, or applying rounded edges. Overall, this thesis contributes to a more reliable assessment of the buckling behavior of polygonal hollow sections and provides a clearer interpretation of the design criterion specified in DIN 13001.

Kurzfassung

Polygonale Hohlprofile werden häufig in Teleskopstrukturen von mobilen Hebelösungen wie Kränen und Hubarbeitsbühnen eingesetzt, da sie eine günstige Kombination aus Tragfähigkeit und Fertigungsfreundlichkeit bieten. Mit abnehmender Wandstärke gewinnt jedoch das Beulverhalten entscheidend an Bedeutung für die Tragfähigkeit solcher Strukturen. Ziel dieser Arbeit ist es, das Beulverhalten polygonaler Hohlprofile systematisch zu untersuchen und die wesentlichen Einflussfaktoren auf die Beulspannung zu analysieren.

Hierzu werden analytische Berechnungen nach DIN 13001-3-1 mit numerischen Simulationen auf Basis der Finite-Elemente-Methode (FEM) verglichen. Eine Parameterstudie ermöglicht es, das Auslegungskriterium der Norm nachzuvollziehen und Abweichungen zwischen normativen und numerischen Beullasten zu identifizieren. Besondere Aufmerksamkeit gilt dabei geometrischen Faktoren wie Kantungen, Krümmungen und abgerundeten Kanten. Die richtige Modellierung der gelenkigen Lagerung einer gekrümmten Platte gemäß Norm sorgt für die radiale und tangential Sperrung der freien Ränder und stellt eine wesentliche Voraussetzung für konsistente Ergebnisse dar.

Die Ergebnisse zeigen deutliche Unterschiede zwischen Norm und Simulation insbesondere im Bereich, in dem die Norm die Beulspannung der einzelnen Profilsegmente linear von einem von der Norm definierten Schlankheitsgrad ableitet und die Fließgrenze zur Berechnung der Beulspannung herangezogen wird. In diesem Bereich des Schlankheitsgrads schließt die Norm das Plastizieren und das nachfolgende Versagen der Platte aus. Darüber hinaus konnte nachgewiesen werden, dass sich die Beullast polygonaler Hohlprofile durch gezielte geometrische Anpassungen, wie eine Erhöhung der Seitenanzahl oder die Einführung gekrümmter Profilsegmente und abgerundeter Kanten, steigern lässt. Die Arbeit leistet somit einen Beitrag zur genaueren Bewertung des Beulverhaltens polygonaler Hohlprofile und zur klareren Interpretation des in der Norm 13001 definierten Auslegungskriteriums.

1 Einleitung und Motivation

In vielen Bereichen des Maschinen- und Stahlbaus kommen dünnwandige Querschnitte zum Einsatz, deren Tragfähigkeit maßgeblich durch ihr Beulverhalten bestimmt wird[1], [2]. Polygonale Hohlprofile bilden dabei häufig die Querschnittsform von Teleskopstrukturen. Eine Optimierung der Geometrie der Profilquerschnitte der Teleskopstrukturen spielt für die Entwicklung von mobilen Hebelösungen eine große Rolle. Vor allem ist die Gewichtsreduzierung ohne negative Auswirkung auf die Tragfähigkeit und Stabilität ein wichtiger Aspekt dieser Optimierung.

Durch kontinuierliche Fortschritte in den Fertigungstechnologien und Verwendung hochfester Werkstoffe ergeben sich immer neue Möglichkeiten zur Profilloptimierung und Gewichtsreduktion. Um das Gewicht zu reduzieren, wird oft eine kleinere Wandstärke für die Hohlprofile verwendet. Mit dünner werdenden Wandstärken müssen neben dem Festigkeitsnachweis auch Stabilitätsprobleme wie Beulen berücksichtigt werden[3]. Deswegen ist das Verständnis des Beulverhaltens von Hohlprofilen essenziell, um die Sicherheit dieser Systeme zu gewährleisten.

Die Berechnung und Nachweisführung von Stahltragwerken bei Krankonstruktionen erfolgt gemäß DIN EN 13001-3-1[4]. Die analytische Berechnung vom elastischen Beulen kann schnell und einfach umgesetzt werden, ist jedoch auf eingeschränkte Geometrien anwendbar und eher konservativ. Die Ermittlung der Beulspannung nach der Norm geht von rechteckigen Beulfeldern aus. Bei Hohlprofilen behandelt die Norm die Beulfelder einzeln und mit idealisierten, gelenkigen Lagerungen. Effekte wie Kantungen, Plattenkrümmung und Abrundungen der Kanten bleiben unberücksichtigt. Diese Einflüsse verändern das gesamte Beulverhalten dieser Profile. Deshalb soll die Berechnung einzelner Beulfelder nicht ohne Weiteres mit idealisierten gelenkigen Randbedingungen erfolgen. Für den Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den analytischen Lösungen ist es teilweise unklar, wie in der Literatur definierten Randbedingungen für die numerische Modellierung umzusetzen sind.

Für mittlere Plattenschlankheitsgrade wird in DIN EN 13001-3-1 die Fließgrenze für die Berechnung der Beulspannung herangezogen. In diesem Bereich liefert die Norm tendenziell konservative Ergebnisse, wenn das elastische Beulen betrachtet wird. Das Auslegungskriterium der Norm bleibt hingegen unklar. Es ist nicht eindeutig festgelegt, ob bei mittlerer Schlankheit der Platte das Plattenbeulen, das Plastizieren der Platte oder ein

komplettes Versagen maßgebend sein soll. Es besteht daher die Notwendigkeit, die Auswirkungen der Fließgrenze auf die Beulspannung zu analysieren und die zukünftige Vorgehensweise bei der Beulbewertung zu definieren.

Ein weiterer offener Punkt ist die Auswirkung von gekrümmten Segmenten bzw. abgerundeten Kanten auf das Beulverhalten von Hohlprofilen. In der Norm werden die Segmente einzeln voneinander betrachtet und der Einfluss von der Form bzw. der Geometrie von benachbarten Segmenten wird nicht berücksichtigt. Gekrümmte Segmente können unter bestimmten geometrischen Voraussetzungen zudem eine erhöhte Imperfektionsempfindlichkeit aufweisen, was einen negativen Einfluss auf die Beulspannung haben kann.

Um eine sichere Auslegung von Teleskopprofilen zu gewährleisten aber auch mögliche Optionen zur Gewichtseinsparung zu evaluieren sollen die laut Norm ermittelten Bemessungsdruckspannungen mit den Ergebnissen aus numerischen Simulationen ermittelt werden. Bei den numerischen Simulationen sollen sowohl einzelnen Profilstegsegmente als geschlossenen Profile mit unterschiedlichsten Geometrien untersucht werden.

Bevor die Ziele der Arbeit in Abschnitt 1.2 im Detail erläutert werden, solle zunächst in Abschnitt 1.1 der Stand der Technik in Form von einer Literaturübersicht zusammengefasst werden. Der Fokus liegt dabei auf numerischen Untersuchungen des Beulverhaltens von Hohlprofilen mittels Finite Elemente Methode.

1.1 Literaturübersicht

Bei der Auslegung der Profile von Teleskopstrukturen von Kranstrukturen und ähnlichen Hebelösungen hat das Beulverhalten immer eine wichtige Rolle gespielt. Aufgrund ihrer typischerweise dünnwandigen Geometrie und der hohen Druck- und Biegebelastung der Profile ist der Tragfähigkeit solcher Strukturen durch ihre Stabilität und ihr lokales oder globales Beulen bestimmt.

Zur Untersuchung und Bewertung des Beulverhaltens dieser Strukturen hat sich die Finite-Elemente-Methode (FEM) als ein effizientes Werkzeug bewiesen und wird oft angewendet. So wurden beispielsweise in [5] insgesamt 50 numerische Simulationen mit unterschiedlichen Kombinationen aus Belastungen, Lagerungsarten und Kontaktbedingungen durchgeführt, um das Beulverhalten der Teleskopstruktur einer Hubarbeitsbühne zu analysieren. Die FEM erwies sich dabei als zuverlässige Methode, mit der auf aufwendige experimentelle Untersuchungen weitgehend verzichtet werden konnte. In [6] wurden druckbelastete Rechteckplatten mit gelenkiger Lagerung mittels FEM modelliert. Zur Bestimmung der

Beulspannung wurden lineare Eigenwertanalysen durchgeführt. Die numerisch ermittelten Ergebnisse wurden anschließend mit analytischen Lösungen verglichen, wobei eine gute Übereinstimmung festgestellt werden konnte.

In [3] wurde eine nichtlineare statische Analyse mittels FEM durchgeführt, um die Versagensursache einer Teleskopstruktur zu untersuchen. Es wurde ein vereinfachtes Model der gesamten Struktur mit Balkenelementen sowie ein detailliertes Model mit Schalen- und Kontinuumselementen aufgebaut. Beim Balkenmodel wurde kein Beulen der Struktur erkannt aber beim detaillierten Model wurde die sogenannte „Stress wrinkle“ auf der Teleskopwand beobachtet. Diese Stress wrinkle wurde als Ursache des Beulens erkannt und die maximale Belastung, bei der gerade noch keine Stress wrinkle aufgetreten ist, wurde als die Beullast festgelegt.

Das Bogenlängenverfahren ist ein numerisches Verfahren innerhalb der Finite-Elemente-Methode, das zur Analyse nichtlinearer Deformationen eingesetzt wird, insbesondere bei Stabilitätsproblemen wie dem Beulen. In [7] wurde diese Methode verwendet, um den Einfluss verschiedener Parameter auf das Beulverhalten von Teleskopprofilen zu untersuchen. Die Ergebnisse der Studie zeigen, dass die Tragfähigkeit der Struktur annähernd linear mit der Streckgrenze des verwendeten Materials ansteigt. Zudem wurde festgestellt, dass sich eine Exzentrizität der Lasteinleitung negativ auf die Beultragfähigkeit auswirkt. Darüber hinaus kann eine größere Überdeckung zwischen den Teleskopsektionen zu einer erhöhten Tragfähigkeit führen.

In [8] wurde ebenfalls die Arc-length-Methode aufgrund ihrer guten Konvergenzeigenschaften zur nichtlinearen Beulanalyse eingesetzt. Die daraus resultierenden Beulspannungen wurden mit den Ergebnissen einer linearen Beulanalyse verglichen. Für die nichtlineare Analyse wurde der erste Eigenmode als Initialimperfektion in das Modell eingebracht, um den Einfluss geometrischer Unvollkommenheiten auf die Beullast zu untersuchen. Die Ergebnisse zeigten, dass die Beulspannung mit zunehmender Imperfektionsgröße abnimmt, was die Stabilitätsabhängigkeit dünnwandiger Strukturen gegenüber Imperfektionen bestätigt.

In [9] wurde der erste Eigenmode aus der Eigenwertanalyse als Initialimperfektion verwendet, um den Einfluss geometrischer Imperfektionen, von Eigenspannungen infolge des Schweißens sowie von Rissen auf das Beulverhalten teleskopischer Strukturen zu analysieren. Zur numerischen Untersuchung wurden zwei Ansätze verwendet:

- I. Die nichtlineare implizite FEM, um die Spannungsverteilung in der Struktur vor dem Beulen zu untersuchen.
- II. Die nichtlineare explizite FEM, um die Spannungen und Deformationen im Nachbeulbereich zu untersuchen.

In beiden Fällen zeigte sich ein charakteristischer Übergang der Spannungsverteilung von einem „continuous state“ zu einem „wrinkle state“. Die Belastung, bei der dieser Übergang aufgetreten ist, wurde als Beullast definiert. Unter Berücksichtigung des Rechenaufwands und der Ergebnisqualität wurde von den Autoren die nichtlineare implizite Analyse als die geeignetere Methode gewählt.

Durch den Einsatz hochfester Werkstoffe kann die Beulspannung von Hohlprofilstützen deutlich erhöht werden. In [10] wurde experimentell und numerisch gezeigt, dass Hohlprofilstrukturen aus hochfestem Stahl (HSS) eine wesentlich höhere Beultragfähigkeit aufweisen als vergleichbare Stützen aus normalfestem Stahl (NSS) mit identischer Geometrie. Zum einen sind die Eigenspannungen bei HSS in der Regel geringer als bei NSS. Zum anderen führen eine höhere Fertigungsqualität und präzisere Herstellungsverfahren bei HSS zu geringeren geometrischen Imperfektionen. Der höhere Elastizitätsmodul des HSS trägt ebenfalls zur Erhöhung der Beulspannung bei. Insgesamt zeigt sich, dass HSS-Hohlprofile hinsichtlich des Beulverhaltens klare Vorteile gegenüber NSS-Profilen bieten.

In [11] wurde das Beulverhalten unter axialer Druckbelastung von insgesamt zwölf Profilen mit Rechteck- und I-Querschnitt aus hochfestem Stahl experimentell untersucht. Zusätzlich wurde eine umfangreiche Parameterstudie mithilfe der FEM für verschiedene Profilabmessungen durchgeführt, um ebenfalls, das Beulverhalten von Profilen aus HSS zu untersuchen. Bei den FEM-Analysen wurden die geometrischen Initialimperfektionen auf zwei Arten modelliert: Zum einen durch das Aufbringen der ersten Eigenform auf die ideale Geometrie, zum anderen durch eine Spline-Kurve, die anhand von drei gemessenen Abweichungspunkten entlang der Struktur erstellt wurde. Auch Last-Exzentrizitäten wurden im zweiten Modell berücksichtigt. Die zweite Methode zeigte eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen, da die Imperfektionen realistischer abgebildet wurden. Die Ergebnisse zeigten zudem, dass die Beulsicherheit von HSS-Profilen höher ist als die von NSS-Profilen, da sie weniger empfindlich gegenüber Imperfektionen reagieren.

In [12] wurde eine Parameterstudie mittels nichtlinearer Beulanalyse mit Imperfektionen in der FEM durchgeführt. Untersucht wurden Rechteckhohlprofile aus hochfestem Stahl mit nicht ausgesteiften Beulfeldern sowie mit durch Rechtecksicken ausgesteiften

Beulfeldern. Die Ergebnisse zeigten, dass die Beultragfähigkeit der ausgesteiften Profile deutlich erhöht werden konnte und die Rechtecksicken eine gute Optimierungsmöglichkeit im Hinblick auf die Beultragfähigkeit bieten. Ein Vergleich mit analytischen Bemessungsvorschriften nach amerikanischen, australischen und europäischen Design Codes ergab, dass diese Vorschriften für nicht ausgesteifte Rechteckprofile tendenziell konservativ sind und für ausgesteifte Profile jedoch teilweise eine höhere kritische Last liefern.

In [13] wurde das Beulverhalten von Zylinderschalen mit perfekter und imperfekter Geometrie unter axialer Druckbelastung numerisch untersucht. Die Beulspannung der perfekten Zylinderschale wurde mithilfe einer linearen Eigenwertanalyse bestimmt, und für die imperfekte Geometrie wurde eine nichtlineare statische Analyse durchgeführt. Zur Modellierung der Imperfektionen wurden die Eigenmoden der perfekten Struktur mit einem Skalierungsfaktor auf die Geometrie aufgebracht. Die Ergebnisse zeigten, dass die Beulspannung mit zunehmendem Radius-zu-Wandstärke-Verhältnis deutlich abnimmt, während das Höhen-zu-Radius-Verhältnis einen geringeren Einfluss aufweist. Zudem sinkt die Beulspannung mit zunehmender Größe der Imperfektion. Es wurde ebenfalls festgestellt, dass Zylinderschalen mit asymmetrischem Beulmodus empfindlicher gegenüber Imperfektionen reagieren.

Wie es in [14] thematisiert ist, kann die Wahl geeigneter Imperfektionen bei der Stabilitätsuntersuchung von Schalentragwerken eine besondere Herausforderung darstellen. Im Gegensatz zu stab- oder plattenartigen Strukturen, bei denen häufig die erste Eigenform als Imperfektion genügt, ist die Identifikation der kritischsten Imperfektionsform bei Schalen stark vom Einzelfall abhängig und nicht pauschal lösbar.

1.2 Ziel dieser Arbeit

Die Auswertung der Literatur zeigt, dass die Finite-Elemente-Methode eine verlässliche und weit verbreitete Methode zur Untersuchung des Beulverhaltens ist. Sie eignet sich sowohl für perfekte als auch für realitätsnähere imperfekte Geometrien. Für einen aussagekräftigen Vergleich mit den in der Norm verwendeten analytischen Verfahren ist es entscheidend, die Randbedingungen möglichst genau gemäß den Normvorgaben zu modellieren, damit die in der Norm abgeleiteten Formeln korrekt interpretiert und validiert werden können. In der einschlägigen Literatur fehlt jedoch oft eine klare Beschreibung, wie diese Randbedingungen in numerischen Modellen konkret umgesetzt werden sollen. Vor diesem Hintergrund legt die Methodik dieser Arbeit besonderen Wert auf die präzise Abbildung der gelenkigen Lagerung der Profile. Aufbauend auf der korrekten Modellierung der

Lagerungsbedingungen wird eine systematische Parameterstudie durchgeführt, mit dem Ziel, die bislang unvollständigen oder fehlenden Angaben zur Berechnung der Beulspannung nach DIN EN 13001 zu klären. Um die Möglichkeiten zur Erhöhung der Beulspannung von Hohlprofilen zu identifizieren und zu bewerten und den Einfluss verschiedener geometrischer Parameter auf die Beulspannung gezielt zu untersuchen, wird in dieser Arbeit auf eine vollständige detaillierte Modellierung der Hohlprofile in den Teleskopstrukturen verzichtet, wie sie zwar bei der FEM wegen ihrer Effizienz häufig angewandt wird. Stattdessen kommen vereinfachte, repräsentative Geometriemodelle zum Einsatz. Diese ermöglichen eine isolierte und kontrollierte Untersuchung einzelner Einflussgrößen, wie beispielsweise die Anzahl der Kantungen, den Winkel zwischen benachbarten Platten, die Krümmung der Platte oder die abgerundeten Kanten bei den Polygonprofilen.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Grundformen elastischer Instabilität

Strukturen können unter Belastung auf unterschiedliche Weise instabil werden. Diese Instabilitäten lassen sich in verschiedene Grundformen einteilen, die sich nach ihrem charakteristischen Trag- und Verformungsverhalten unterscheiden [15]:

- Durchschlagen:

Bei einem Durchschlagproblem nimmt die Struktursteifigkeit mit zunehmender Belastung ab. Am kritischen Punkt geht die Struktursteifigkeit gegen null und die Konstruktion schlägt dynamisch auf eine andere nicht benachbarte Gleichgewichtslage durch. Das System kann nach dem Durchschlagen wieder Last aufnehmen. Typische Beispiele sind das von-Mises-Fachwerk und schwach gewölbte Konstruktionen.

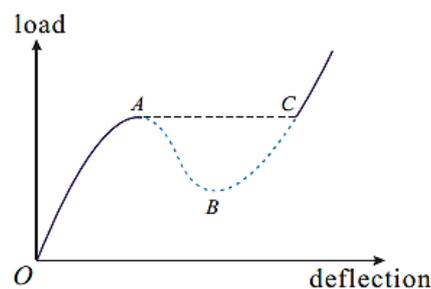


Abbildung 1: Last-Verschiebungskurve bei Durchschlagen[16].

- Zurückschlagen

Beim Zurückschlagen nehmen die Belastung und die Verschiebung plötzlich ab. Dieses Problem ist durch einen Wendepunkt gekennzeichnet und es kommt zu einer Veränderung der Verformungsart [16]. Beispiel für dieses Stabilitätsproblem ist der Lee-Frame.

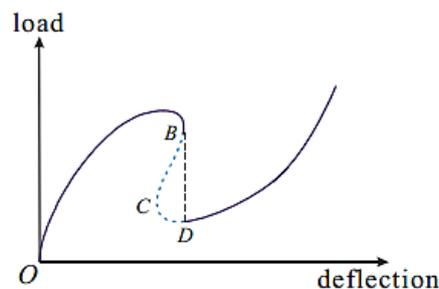


Abbildung 2: Last-Verschiebungskurve bei Zurückschlagen[16].

- Flutter-Instabilität

Flutter-Instabilität ist ein dynamisches Schwingungsverhalten, die sich durch anwachsende Oszillationen auszeichnet, wenn zwei benachbarte Eigenfrequenzen in einem nicht-konservativen System gleich werden. die Struktur ist dabei mit einer Folgelast belastet wird.

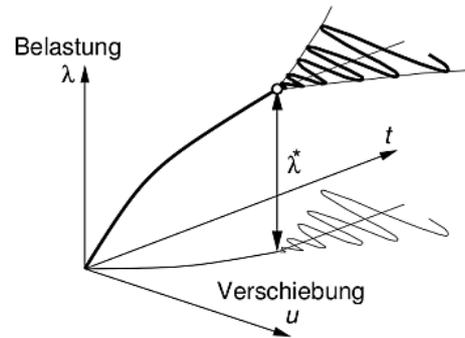


Abbildung 3: Last-Verschiebungskurve bei Flutter-Instabilität[15].

- Verzweigungsproblem

Bei einem Verzweigungsproblem wechselt das System bei der kritischen Last auf einen benachbarten energetisch günstigeren Gleichgewichtspfad. Das Nachbeulverhalten spielt für die Imperfektionsempfindlichkeit des Systems eine große Rolle. Bei einem instabilen Verzweigungsproblem reagiert die Struktur sehr empfindlich gegen Imperfektionen.

Plattenbeulen und Schalenbeulen gehören zur Klasse der Verzweigungsprobleme, bei denen ab einer kritischen Last auch nicht-triviale Lösungen existieren. Zur Behandlung von Verzweigungsproblemen werden Näherungsverfahren verwendet, die im Abschnitt 2.2 kurz erläutert werden.

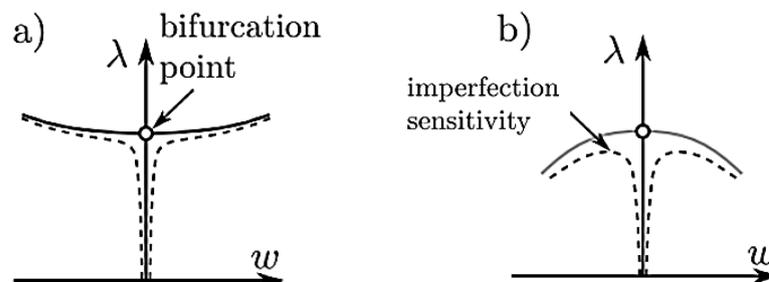


Abbildung 4: Last-Verschiebungskurve: a) Stabiles Verzweigungsproblem wie Plattenbeulen. b) Instabiles Verzweigungsproblem wie Schalenbeulen [15].

2.2 Näherungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Last

Bei Stabilitätsproblemen kann die exakte Lösung, wenn überhaupt durchführbar, sehr aufwändig werden. Deshalb wird bei Verzweigungsproblemen oft das Verfahren der klassischen Näherung angewendet. Dieses Verfahren findet nicht nur bei gewöhnlichen Knickstäben Anwendung, sondern auch bei den Rechteckplatten und Kreiszyinderschalen [40]. Das Näherungsverfahren wird ausschließlich bei Verzweigungsproblemen angewendet, nicht jedoch bei Durchschlagproblemen. Bei der klassischen Näherung werden zwei Vereinfachungen angenommen: Einerseits wird davon ausgegangen, dass die Struktur nach Erreichen des Verzweigungspunktes keine Last mehr aufnehmen kann. Andererseits wird die Vorbeuldeformationen der Struktur bis zum Erreichen dieses Punktes vernachlässigt. Siehe Abbildung 5.

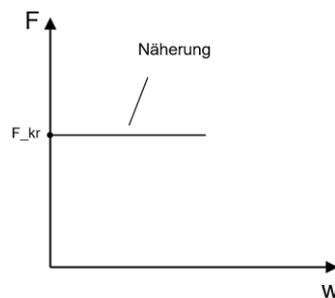


Abbildung 5: Klassische Näherung bei der Last-Verschiebungskurve [40].

Bei diesem Näherungsverfahren werden zwei Methoden zur Bestimmung der kritischen Last verwendet: die Gleichgewichtsmethode und die Energiemethode.

Bei der Gleichgewichtsmethode wird angenommen, dass das System sich im Gleichgewicht befindet, wenn es nahe an der kritischen Belastung steht. Um die Differentialgleichung für das Stabilitätsproblem abzuleiten, werden zuerst die Schnittgrößen ermittelt. Anschließend werden die Gleichgewichtsbedingungen im verformten Zustand (Theorie 2.Ordnung) aufgestellt. Aus den Gleichgewichtsbedingungen im verformten Zustand wird eine Differentialgleichung abgeleitet, die den Zusammenhang zwischen der Belastung und der Verformung beschreibt. Die kritische Last ergibt sich als kleinste Last, für die eine nichttriviale Lösung existiert. Dies führt zu einem Eigenwertproblem. Die ermittelten Eigenwerte sind dann die gesuchte Lösung.

Die Energiemethode basiert auf Energieprinzipien und ermöglicht die Bestimmung kritischer Lasten, bei denen ein stabiles Gleichgewicht in einen instabilen Zustand übergeht. Im Gegensatz zur Gleichgewichtsmethode werden hier nicht direkt die Gleichgewichts-

bedingungen betrachtet, sondern die Energiebilanz des Systems. Die gesamte potentielle Energie eines Systems setzt sich aus der Formänderungsenergie (gespeicherte elastische Energie im System) und aus dem Potential der äußeren konservativen Belastungen zusammen. Nach dem Prinzip der stationären potentiellen Energie herrscht Gleichgewicht, wenn die erste Variation der Gesamtenergie gleich null ist. Die Stabilität des Gleichgewichts hängt von der zweiten Variation der Gesamtenergie ab:

- $\delta^2\Pi > 0$: stabiles Gleichgewicht
- $\delta^2\Pi < 0$: instabiles Gleichgewicht
- $\delta^2\Pi = 0$: kritischer Zustand: Übergang zwischen stabil und instabil

Die Beziehungen für die potentielle Energie der inneren Kräfte sowie das Potential der äußeren Kräfte werden aufgestellt und die benötigten Differentialgleichungen für das Verzweigungsproblem ergeben sich aus dem Prinzip der stationären potentiellen Energie.

2.3 Plattenbeulen

Das Beulen von Platten ist ein Stabilitätsphänomen, das bei dünnwandigen, flächigen Bauteilen unter Druck- und Schubbeanspruchung auftritt. Bei dieser Versagensart geht die strukturelle Stabilität des Bauteils verloren.

Beim Plattenbeulen handelt es sich um ein Verzweigungsproblem, bei dem die perfekte Struktur mit zunehmender Belastung bis zum Erreichen des Verzweigungspunktes eben bleibt. Wird jedoch die Beullast erreicht, dann verformt sich die Platte normal zur Plattenebene. Bei einer imperfekten Struktur nehmen die Verformungen normal zur Plattenebene von Anfang an mit zunehmender Belastung zu. Siehe Abbildung 6. Es kommt in diesem Fall zu keinem kritischen Verzweigungspunkt. Es handelt sich um ein Spannungsproblem und nicht mehr um ein Verzweigungsproblem. Beim stabilen Verzweigungsproblem kann die Belastung nach dem Erreichen der Beullast steigen, während die Verformungen normal zur Plattenebene zunehmen und die wirkende Belastung in der Platte auf die Randbereiche der Platte umgelagert wird [17].

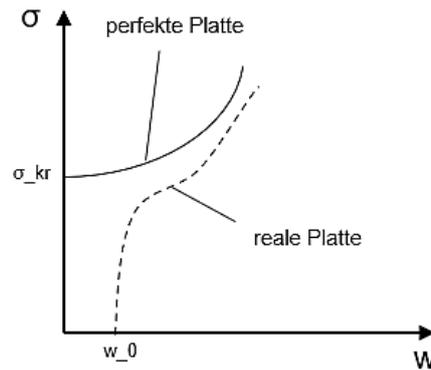


Abbildung 6: Tragverhalten Rechteckplatten unter Druckbelastung.

Die Ermittlung der Beullast ist essenziell für die sichere Auslegung dünnwandiger Strukturen. Die Beullast kann mit der Gleichgewichtsmethode bestimmt werden und mit der Differentialgleichung der Plattenbiegung nach Theorie zweiter Ordnung ergibt sich

$$K\Delta\Delta w + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (2.1)$$

wobei $K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ (2.2) die Biegesteifigkeit der Platte und N_{ij} mit $i, j = x, y$ die Membrandruckkraft in der Platte ist [18].

Die Plattendifferentialgleichung (2.1) vereinfacht sich für eine druckbelastete Platte zu

$$K\Delta\Delta w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.3)$$

Als Lösungsansatz der die Randbedingungen der allseitig gelenkig gelagerten Platte und die Differentialgleichung erfüllt wird eine doppelsinusförmige Beulform gewählt

$$w(x, y) = A_{mn} \sin\left(m \frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(n \frac{\pi y}{b}\right), \quad (2.4)$$

mit a und b als Beulfeldlänge bzw. Beulfeldbreite. Dabei stellen m und n die Anzahl der Halbwellen in Längs- bzw. Querrichtung dar.

Durch Einsetzen von (2.4) in (2.3) ergibt sich die Beulspannung zu

$$\sigma_{cr} = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left(\frac{mb}{a} + n^2 \frac{a}{mb}\right)^2. \quad (2.5)$$

Die kleinste bzw. die kritischste Spannung ergibt sich für eine Halbwelle in Querrichtung ($n=1$)

$$\sigma_{cr} = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb}\right)^2, \quad (2.6)$$

wobei $\sigma_e = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$ (2.7) als Euler-Bezugsspannung bezeichnet wird. In den weiteren Betrachtungen wird $\alpha = \frac{a}{b}$ als Seitenverhältnis und $k_\sigma = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m}\right)^2$ (2.8) als Beulwert verwendet.

Die sogenannten Girlandenkurven ergeben sich aus der Auswertung der Beulwerte in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis α [19]. Siehe Abbildung 7.

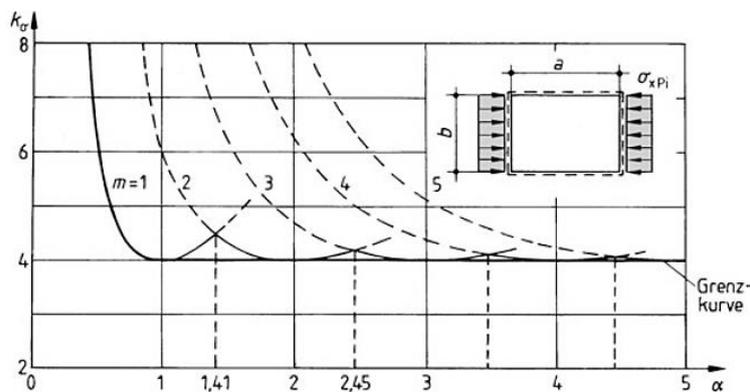


Abbildung 7: Beulwerte für rechteckige Platten – Girlandenkurven [19].

Bei größeren Seitenverhältnissen kann der Beulwert mit ausreichender Genauigkeit auf den Wert 4 gesetzt werden, da sich das Maximum der Kurven kaum von diesem Wert unterscheidet. Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha < 1: \quad k_{\sigma x} &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \\ \alpha \geq 1: \quad k_{\sigma x} &= 4. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Bei anderen Randbedingungen als einer gelenkigen Lagerung und anderen Belastungen als einer konstanten Druckbelastung ergeben sich andere Beulwerte. In diesen Fällen werden Näherungsverfahren wie die Energiemethode mit Ritzansätzen zur Lösung der Plattendifferentialgleichung verwendet [19]. Die Beulwerte bei anderen Lagerungen und Beanspruchungsarten sind aus den Anwendungsnormen wie DIN EN 1993-1-5 [20] (Tabelle 6.1 und 6.2) und DIN EN 13001-3-1 [21] (Tabelle 15) zu entnehmen. Diese Tabellen befinden sich im Anhang C.

2.4 Schalenbeulen

2.4.1 Kreiszylinderschale

Kreiszylinderschalen sind in Abhängigkeit von der Höhe l , der Wandstärke t und dem Radius R in drei Bereiche eingeteilt:

- Kurze Zylinderschale für $\frac{l}{R} \leq \frac{2,44}{\sqrt{\alpha_A}} \sqrt{\frac{t}{R}}$ (2.10)

mit $\alpha_A = \frac{0,64}{\sqrt{1 + \frac{R}{100t}}}$, l als die Höhe, R als Radius und t als Wandstärke der Kreiszylinderschale.

Bei kurzen Kreiszylinderschalen ist der Einfluss der Krümmung gering, sodass für die Berechnung der kritischen Spannung die Beulspannung eines Plattenstreifens ausschlaggebend ist [17]. Für die Berechnung der Beulspannung für kurze Zylinderschalen kann daher näherungsweise die Gleichung (2.6) verwendet werden.

- Mittellange Zylinderschale für $\frac{2,44}{\sqrt{\alpha_A}} \sqrt{\frac{t}{R}} \leq \frac{l}{R} \leq \sqrt{\frac{R}{t}}$ (2.11)

Bei den mittellangen Zylinderschalen ist das Zylinderschalenbeulen maßgebend. Das Tragverhalten von druckbelasteten Kreiszylinderschalen unterscheidet sich grundlegend von dem Tragverhalten ebener Platten. Rechteckplatten reagieren auf die Druckbelastung vor dem Erreichen ihrer Tragfähigkeit typischerweise durch lokale Ausbeulung sowie eine Umverteilung der Spannungen auf die Randbereiche. Zylinderschalen zeigen in der Regel sehr geringe Vorverformungen. Sie versagen meist abrupt und ohne Vorankündigungen, sobald die kritische Last überschritten wird [17].

Mit geeigneten Ansätzen können die Differentialgleichungen der dünnwandigen Zylinderschale mit radial und tangential unverschieblichen Ränder gelöst werden. Auf eine genaue Herleitung wird verzichtet. Es werden nur die Ergebnisse angegeben. Weitere Details sind [40] zu entnehmen. Für eine Mittellange Kreiszylinderschale ergibt sich die Beulspannung zu [22]

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E \frac{t}{R}, \quad (2.12)$$

mit $\nu = 0,3$ findet man

$$\sigma_{cr} = 0,605 E \frac{t}{R}. \quad (2.13)$$

Im Gegensatz zu ebenen Rechteckplatten zeigen die mittellangen Kreiszylinderschalen ein

instabiles Nachbeulverhalten, siehe Abbildung 8. Daher haben Imperfektionen, wie eine imperfekte Geometrie oder die Imperfektion des Materials, einen größeren Einfluss auf die Tragfähigkeit der Kreiszyinderschale. Aufgrund der hohen Imperfektionsempfindlichkeiten wird die theoretische Beulspannung, wie in Gleichung 2.12 angegeben, nicht erreicht [14]. Die Einflüsse der Imperfektionen auf die Beulspannung werden mit einem Abminderungsfaktor α_A berücksichtigt, der aus Experimenten oder numerischen Simulationen bestimmt wird. Für den Abminderungsfaktor findet man

$$\alpha_A = \frac{0,64}{\sqrt{1 + \frac{R}{100t}}}. \quad (2.14)$$

Anschließend wird eine praktische Beulspannung berechnet [22].

$$\sigma_{pr} = \alpha_A 0,605E \frac{t}{R} \quad (2.15)$$

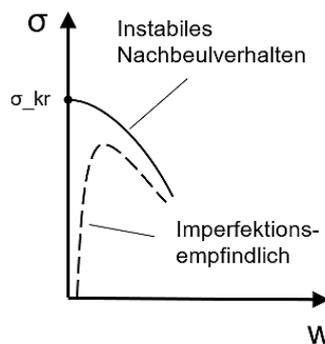


Abbildung 8: Instabiles Nachbeulverhalten bei Kreiszyinderschalen.

- Lange Zylinderschale für $\frac{l}{R} \geq \sqrt{\frac{R}{t}}$ (2.16)

Bei langen Kreiszyinderschalen wird einen Übergang vom Schalenbeulen zum Stabknicken beobachtet. Die Beulspannung für lange Zylinderschalen wird nach Abbildung 9 mit $\sigma_{pr} = \alpha_A 0,36E \frac{t}{R}$ (2.17) berechnet und mit der Knickspannung eines Stabes mit identischem Kreisringquerschnitt verglichen. Die Beulspannung der langen Kreiszyinderschale ergibt sich aus dem Minimum dieser beiden Werte.

Die Auswertung der Beulwerte in den drei Längenbereichen der Kreiszyinderschale liefert das in der Abbildung 9 dargestellten Girlandendiagramm. Daraus wird ersichtlich, dass die Beulspannung bei mittellangen Schalen nahezu unabhängig von der Zylinderschalenlänge ist.

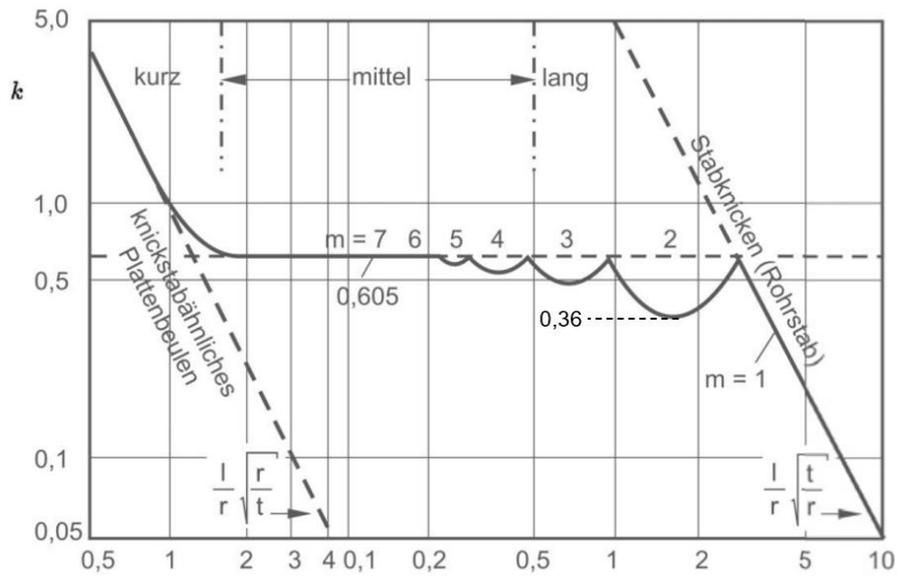


Abbildung 9: Girlandendiagramm für Kreiszylinderschalen [38].

2.4.2 Teilzylinderschale

Teilzylinderschalen und gekrümmte Platten weisen in der Regel für Druck- und Schubbelastung eine höhere Beulspannung auf als ebene Platten. Teilzylinderschalen können jedoch im Gegensatz zu ebenen Platten ein instabiles Nachbeulverhalten zeigen [23].

Bei einer schwach gekrümmten Platte entsteht, analog zur ebenen Platte, über die Plattenbreite nur eine Beule und in Längsrichtung eine Halbwellenlänge. Der Beulwert k_σ gemäß (2.6) nimmt zu und wird wie folgt berechnet [23]

$$k_\sigma \approx 3,6 \left(1 + \frac{\Omega}{16\pi^4} \right), \tag{2.18}$$

wobei $\Omega = \frac{11b^4}{r^2t^2}$ (2.19) der Krümmungsparameter ist.

Anschließend wird der Beulwert für die gekrümmte Platte (2.18) in die Gleichung (2.6) zur Berechnung der Beulspannung einer Rechteckplatte eingesetzt.

$$\sigma_{kr} = k_\sigma E \left(\frac{t}{b} \right)^2 \tag{2.20}$$

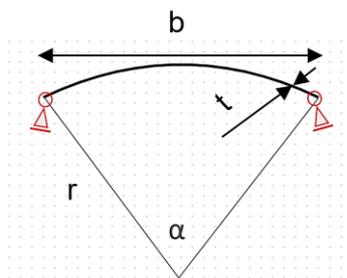


Abbildung 10: Teilzylinderschale mit radial unverschieblichen Rändern.

Der Beulwert (2.18) gilt bis zu einem Krümmungsparameter $\sqrt{\Omega} < 40$ ($Z = \frac{b^2}{rt} < 12$). Bei Platten mit stärkerer Krümmung wird die Beulspannung für eine Kreiszylinderschale nach [23] Gleichung (2.12) berechnet.

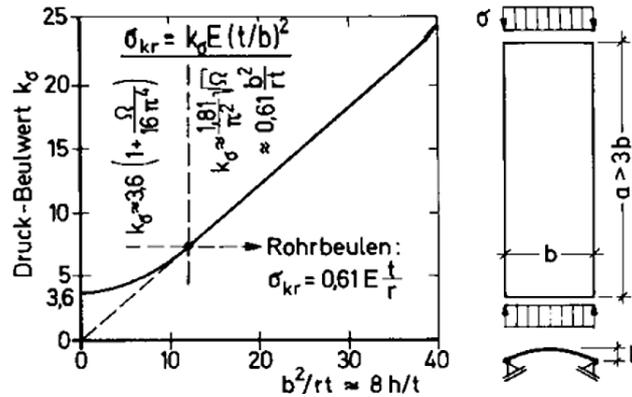


Abbildung 11: Beulwert für Teilzylinderschalen mit radial unverschieblichen Rändern [23].

Untersuchungen zeigen, dass die Beulspannung gekrümmter perfekter Platten mit großem Krümmungsparameter deutlich unterhalb derjenigen idealisierter perfekter Kreiszylinderschalen liegen kann. Die Anwendung der klassischen Schalentheorie kann deswegen zu einer Überschätzung der Beulspannung führen. Um dieses abweichende Verhalten realitätsnäher abzubilden, hat Stowell eine modifizierte Formel entwickelt, die für stark gekrümmte Platten eine bessere Näherung der tatsächlichen Beulspannung für die perfekte Struktur liefert [24]

$$\sigma_{kr, \text{stowell}} = \frac{k_{\sigma} \pi^2 E t^2}{12(1 - \nu^2) b^2} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{48(1 - \nu^2)}{\pi^4} \left(\frac{b^2}{k_{\sigma} r t}\right)^2}}{2}, \quad (2.21)$$

wobei r der Krümmungsradius ist.

Die Formel von Stowell liefert für einen großen Krümmungsparameter $\frac{b^2}{rt}$ eine Beulspannung, die halb so groß ist wie die einer Kreiszylinderschale. Diese Beulspannung stimmt jedoch besser mit den aus Experimenten ermittelten Beulspannungen überein als die klassische Theorie.

$$Z = \frac{b^2}{rt} \text{ groß} \rightarrow \sigma_{kr, \text{stowell}} = \frac{E \frac{t}{r}}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}} = 0.303 E \frac{t}{r} \quad (\nu = 0.3) \quad (2.22)$$

Für einen großen Krümmungsparameter $Z = \frac{b^2}{rt}$ zeigt die Gleichung (2.22) eine gute Übereinstimmung mit der Beulspannung einer langen Kreiszylinderschale (2.17), da diese

ebenfalls eine große Krümmung aufweisen. Es ist jedoch nicht genau definiert, in welchem Bereich von Zylinderschalendicke sich eine gekrümmte Platte mit großem Krümmungsradius nach der Formel von Stowell (2.22) befindet.

2.5 Normen und Regelwerke

2.5.1 Nachweis gegen Plattenbeulen nach DIN EN 13001-3-1

Die Tragfähigkeitsnachweise von Stahltragwerken in Kränen und Hubarbeitsbühnen erfolgen gemäß der Norm DIN EN 13001-3-1 [4]. In dieser Norm werden durch theoretische Nachweisverfahren die strukturellen Anforderungen in Bezug auf Festigkeit, Stabilität und Ermüdung berücksichtigt.

Die Grenzwerte der Bemessungsdruckspannung sollen beim Beulsicherheitsnachweis sicherstellen, dass kein Beulen der Platten auftritt. Das Nachbeulverhalten der Platten wird in dieser Norm nicht berücksichtigt.

Die Beulbewertung nach DIN EN 13001 mit Bezug auf die Normalspannungen in der Platte erfolgt wie folgt:

Zuerst wird die die Euler-Bezugsspannung σ_e

$$\sigma_e = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2.23)$$

berechnet. Anschließend wird der von der Fließgrenze f_y abhängige Plattenschlankheitsgrad

$$\lambda_x = \sqrt{\frac{f_y}{k_{\sigma x} \sigma_e}} \quad (2.24)$$

ermittelt, wobei λ_x der dimensionslose Schlankheitsgrad und $k_{\sigma x}$ der Beulfaktor sind. Der Knickfaktor ist abhängig vom Spannungsverhältnis in der Platte sowie von der Art der Lagerung und kann Tabelle 15 in der Norm entnommen werden, siehe Anhang C. Bei Teleskopstrukturen wird der Fall 1, i.e. die gelenkige Lagerung, in der Tabelle 15 für die Auflagerbedingungen angenommen.

Anschließend wird ein Reduktionsfaktor κ_x in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad wie folgt berechnet

$$\kappa_x = 1.05 \quad \text{für} \quad \lambda_x \leq 0,635, \quad (2.25)$$

$$\kappa_x = 1,474 - 0,677 \lambda_x \quad \text{für} \quad 0,635 \leq \lambda_x \leq 1,26, \quad (2.26)$$

$$\kappa_x = \frac{1}{\lambda_x^2} \quad \text{für} \quad \lambda_x \geq 1,26. \quad (2.27)$$

Abschließend wird die Bemessungsdruckspannung zu

$$f_{b,Rd,x} = \frac{\kappa_x * f_y}{\gamma_m} \quad (2.28)$$

berechnet, wobei γ_m der allgemeine Widerstandsbeiwert ist. Der Widerstandsbeiwert ist gemäß DIN EN 13001-2 [25] Tabelle 13 gleich 1,1, siehe Anhang C.

Je nach Plattenschlankheitsgrad ergibt sich die Bemessungsdruckspannung nach DIN EN 13001-3-1 entweder als konstanter Wert, als lineare Funktion des von der Fließgrenze abhängigen Schlankheitsgrads, oder sie entspricht der Euler-Bezugsbeulspannung multipliziert mit dem Knickfaktor bei größeren Schlankheitsgraden.

2.5.2 Nachweis gegen Plattenbeulen nach DIN EN 1993-1-5

Die DIN EN 1993 ist Teil des Eurocodes 3 und befasst sich mit der Bemessung und Konstruktion von Stahltragwerken. Teil 1-5 ist speziell für Plattenförmige Bauteile entworfen.

Die Beulbewertung nach DIN EN 1993-1-5 [20] wird sowohl für nicht ausgesteifte als auch für längsausgesteifte Platten verwendet. Im Rahmen dieser Arbeit gelten die Beulfelder der untersuchten Profile als nicht ausgesteifte Platten. Die Beulspannung für nicht ausgesteifte Rechteckplatten wird gemäß dieser Norm wie folgt berechnet:

$$\sigma_{cr,p} = \sigma_E k_\sigma \quad (2.29)$$

$\sigma_{cr,p}$ ist die elastische Beulspannung und der Beulwert k_σ kann der Tabellen 6.1 und 6.2 entsprechend dem Spannungsverhältnis und der Lagerungsbedingungen entnommen werden, siehe Anhang C.

Die reale Tragfähigkeit rechteckiger Beulfelder wird in der DIN EN 1993-1-5 berücksichtigt. Die Beanspruchbarkeit der Platten nach dem elastischen Beulen wird dabei entweder über die Methode der effektiven Querschnitte oder über die Methode der reduzierten Spannungen ermittelt.

Nach der Methode der effektiven Querschnitte ist der gesamte Querschnitt der Platte nach dem elastischen Beulen nicht mehr vollständig tragfähig. Die Spannungen lagern sich auf

die Randbereiche um, so wird eine weiter Lastaufnahme möglich. Eine reduzierte Breite der Platte wird bestimmt und diese Breite wird für den Tragfähigkeitsnachweis verwendet.

Nach der Methode der reduzierten Spannung wird die zulässige Spannung in der Platte verringert. Die Fließgrenze wird in den druckbelasteten Bereichen durch einen Abminderungsfaktor verringert. Der Querschnitt wird der Querschnittsklasse 3 zugeordnet. Das bedeutet, dass die äußersten Druckfasern des Querschnitts die Streckgrenze erreichen. Da sie jedoch lokal beulen, kann die volle plastische Momenten-Tragfähigkeit nicht erreicht werden. Abschließend wird einen Spannungsnachweis durchgeführt.

3 Methoden

Ziel dieser Arbeit ist es, das Beulverhalten polygonaler Hohlquerschnitte zu analysieren und den Einfluss geometrischer Parameter wie beispielweise die Anzahl der Seiten, die Krümmung einzelner Seiten und die Randbedingungen, zu untersuchen. Aufgrund der Komplexität der Geometrien, wurde ein numerischer Ansatz auf Basis der Finite-Elemente-Methode (FEM) gewählt. Die FEM ermöglicht die realitätsnahe Abbildung komplexer Geometrien und unterschiedlicher Randbedingungen und ist für die Analyse von Stabilitätsproblemen wie Platten- und Schalenbeulen geeignet. Der Fokus liegt auf der Ermittlung der Spannung bei der erstmals Beulen in einem der Profilssegmente auftritt. Diese Spannung wird in weiterer Folge als kritische Spannung oder auch als Beulspannung bezeichnet.

3.1 Numerische Beulanalyse mittels FEM

3.1.1 Lineare Beulanalyse

Die lineare Beulanalyse basiert auf einem Eigenwertproblem, in welchem die kritische Last für das Verzweigungsproblem ermittelt wird [15], [26], [27]. Die fundamentale Gleichung aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit in Matrizenform lautet wie folgt [15]

$$([k_E] + [k_G])\Delta u = \{F_{\text{ext}}\} - \{F_{\text{int}}\}. \quad (3.1)$$

Die Matrix $[k_E]$ ist die elastische Steifigkeitsmatrix und quantifiziert den Widerstand einer Struktur gegen elastische Verformung für die aufgebrachte Belastung. Die Matrix $[k_G]$ ist die geometrische Steifigkeitsmatrix und berücksichtigt die Auswirkung von Vorbeulspannungen auf die Steifigkeit. Der Vektor $\{u\}$ ist der Knotenpunktverschiebungsvektor und der Vektor $\{F\}$ ist der Vektor der Knotenpunktlasten.

Am Verzweigungspunkt gilt

$$([k_E] + [k_G])\{\delta U\} = 0. \quad (3.2)$$

Im Hinblick auf das Eigenwertproblem wird die folgende Gleichung für proportionelle Belastung gelöst

$$([k_E] + \lambda_i [k_G])\{\psi\}_i = 0, \quad (3.3)$$

wobei λ_i der Eigenwert und ψ_i der Eigenvektor ist.

Der Eigenwert stellt einen Lastfaktor dar. Der Schätzwert für die Beullast F_{Krit} ergibt sich zu

$$F_{Krit} = \lambda_1 F_{ref}, \quad (3.4)$$

wobei λ_1 der kleinste Eigenwert ist und F_{ref} die aufgebrachte Referenzlast darstellt. Da Platten- und Schalenbeulen jedoch ein lineares Vorbeulverhalten aufweisen, kann das Ergebnis aus der linearen Eigenwertanalyse mit sehr guter Näherung als die Beullast angenommen werden. Die Eigenvektoren sind die entsprechenden Beulformen.

Die lineare Beulanalyse geht von einem linearen Materialverhalten aus und die Vorbeuldeformationen sind klein. Das Vorbeulverhalten der perfekten Platte ist linear, siehe Abbildung 12, sodass $[K_G]$ von der ursprünglichen Geometrie berechnet wird.

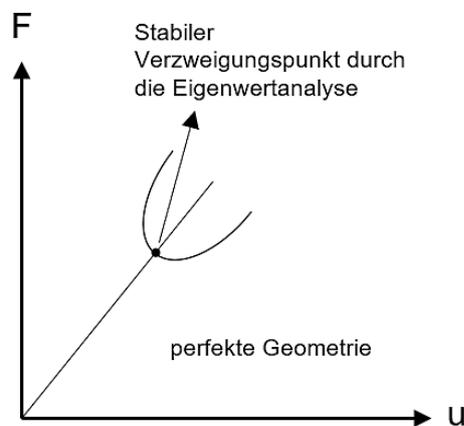


Abbildung 12: Last-Verschiebungskurve der perfekten Geometrie bei einem Verzweigungsproblem[22].

Wie aus der Last-Verschiebungskurve einer perfekten Geometrie aus der Abbildung 12 ersichtlich ist, kann die Struktur nach Überschreiten des stabilen Verzweigungspunktes, der durch die Eigenwertanalyse ermittelt wurde, weitere Last aufnehmen. Die Struktur weist in diesem Fall ein stabiles Nachbeulverhalten auf.

3.1.2 Nichtlineare Nachbeulanalyse

Die nichtlineare Beulanalyse berücksichtigt die geometrische Nichtlinearität und das nichtlineare Materialverhalten und verfolgt den Gleichgewichtspfad über den Verzweigungspunkt hinaus und erfasst das Nachbeulverhalten. In FEM wird bei der perfekten Geometrie der triviale Gleichgewichtspfad verfolgt. Das Einbringen von Imperfektionen auf die Strukturgeometrie trägt zur realistischeren Nachbildung der Struktur bei und ermöglicht eine bessere Übereinstimmung der berechneten numerischen Beullast mit den experimentellen Werten. Streng genommen existiert bei einer imperfekten Struktur kein Verzweigungspunkt. Unter zunehmender Belastung wachsen die Deformationen der imperfekten

Geometrie, wodurch sich die Steifigkeit der Struktur verringert und die tragfähige Last reduziert wird. Bei stabilem Nachbeulverhalten wird aus einem Verzweigungsproblem ein Spannungsproblem. Bei instabilem Nachbeulverhalten hingegen wird aus einem Verzweigungsproblem ein Durchschlagproblem [15].

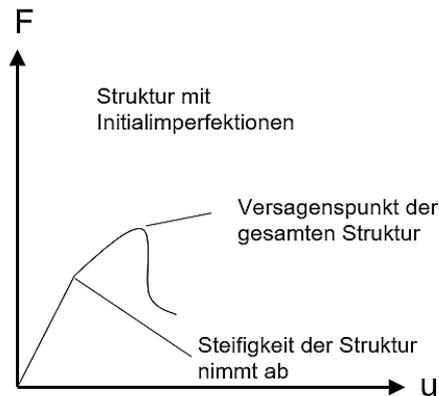


Abbildung 13: Last-Verschiebungskurve einer imperfekten Geometrie bei einem stabilen Nachbeulverhalten

Die Imperfektionen können als kleine Störungen, wie z.B. kleine Einzellasten auf die Geometrie aufgebracht werden. Üblicherweise wird der erste Eigenmode von der Eigenwertanalyse mit einem Skalierungsfaktor als die kritischste Beulform auf die perfekte Geometrie aufgebracht[8], [28]. Bei Strukturen mit nahen Eigenwerten ist jedoch unklar welche Eigenmode bei einem Stabilitätsverlust auftritt und der erste Eigenmode ist nicht unbedingt der kritischste Fall. Deswegen ist es ratsam, eine Linearkombination der ersten Eigenmoden als Imperfektion zu verwenden [29]. Anschließend wird eine nichtlineare statische Analyse auf die imperfekte Geometrie z.B. mittels Newton-Raphson-Verfahren durchgeführt.

Die Last wird bei der nichtlinearen Analyse nicht zu einem bestimmten Zeitpunkt, sondern inkrementell aufgebracht. Jeder Step in der nichtlinearen Analyse wird in Inkremente unterteilt, sodass der nichtlinearen Gleichgewichtspfad verfolgt werden kann. Am Ende von jedem Inkrement befindet sich das System im Gleichgewicht. Bei jedem Inkrement erfolgt die Iteration, um die Gleichgewichtslösung zu ermitteln.

Bei der nichtlinearen Analyse hängen die aufgebrachten Belastungen und die Verschiebungen nichtlinear voneinander ab. Die Steifigkeitsmatrix ändert sich während der Deformation, während die Steifigkeitsmatrix bei der linearen statischen Analyse konstant bleibt. Beim Newton-Raphson-Verfahren wird die tangentielle Steifigkeitsmatrix bei jeder Iteration neu berechnet. Dieses Verfahren konvergiert quadratisch, jedoch ist der Rechenaufwand hoch.

Beim modifizierten Newton-Raphson-Verfahren wird die tangentielle Steifigkeitsmatrix in der ersten Iteration berechnet und für die nächsten Iterationen wiederverwendet. Das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren konvergiert linear, was bedeutet, dass es eine höhere Anzahl an Iterationen pro Inkrement braucht, um zu konvergieren. Aufgrund der schnelleren Konvergenz wird in dieser Arbeit das Newton-Raphson-Verfahren verwendet.

3.2 Numerische Beulanalyse mit PyAnsys

Zur Untersuchung des Beulverhaltens wurden lineare Eigenwertanalysen und nichtlineare statische Analysen auf Basis der Finite Elemente Methoden für unterschiedliche Geometrien und Belastungen durchgeführt. Um eine schnelle Parameterstudie zu ermöglichen, wurde PyAnsys als FEM-Software gewählt.

PyAnsys bezieht sich auf eine Sammlung offizieller Python-Bibliotheken, die von Ansys, Inc. für die Interaktion mit ihren Simulationssoftwareprodukten entwickelt wurden. Diese Bibliotheken ermöglichen es Anwendern, Aufgaben zu automatisieren, Arbeitsabläufe anzupassen und Ansys-Tools in Python-basierte Umgebungen zu integrieren.

Mit Batch-Processing ist es möglich, automatisierte Parameterstudien für verschiedene Geometrien durchzuführen, ohne mit Ansys Workbench direkt arbeiten zu müssen, so können im Vergleich zu GUI sehr schnelle Analysen durchgeführt werden. Verschiedene Parameter für z.B. die Definition der Geometrie oder der Randbedingungen können einfach geändert oder modifiziert werden. PyAnsys ist in Python-Bibliotheken wie NumPy und Matplotlib integriert, um fortschrittliche Datenanalyse, Visualisierung und statistische Validierung zu ermöglichen.

Die Wahl von PyAnsys war entscheidend für den Erfolg dieser Studie. Seine Python-API ermöglichte die vollautomatische parametrische Modellierung verschiedener Geometrien (Platten, Zylinder, gekrümmte Platten). Die Durchführung der Batch-Analysen und die schnelle Datenextraktion spielten eine wichtige Rolle bei der Beulanalyse. So würde beispielsweise die Analyse von 20 gekrümmten Plattenvarianten mit manuell eingestellten Parametern in Ansys Mechanical eine lange wiederholte Eingabe erfordern, während PyAnsys diese Aufgabe mit Hilfe von skriptgesteuerten Schleifen in kürzerer Zeit erledigt. Die Ergebnisse sind genauso zuverlässig wie die von Ansys Mechanical, aber mit der Flexibilität des Programmierens.

Reproduzierbarkeit und Transparenz der PyAnsys-Skripten und Automatisierung der Simulationen sind ein entscheidender Vorteil bei dieser Studie und ermöglichen eine systematische Untersuchung des Beulverhaltens bei mehreren geometrischen Konfigurationen.

3.3 Modelbildung

3.3.1 Material

Bei allen numerischen Simulationen in dieser Studie wurden angenommen, dass das Material über den gesamten Querschnitt homogen und isotrop ist. Fertigungsbedingte Einflüsse wie Kaltverfestigung, Schweißnähte oder Materialfehler wurden in der Modellierung nicht berücksichtigt. Für die Teleskopstrukturen bei mobilen Hebelösungen kommen üblicherweise Stahl und Aluminium zum Einsatz. Die in den Simulationen verwendeten Materialparameter sind in der Tabelle 1 zusammengefasst.

Tabelle 1: In den Simulationen verwendete Materialparameter.

Material	E-Modul (MPa)	ν	Fließgrenze (MPa)
Aluminium	70000	0.33	270
Stahl	210000	0.3	690

Um den Einfluss unterschiedlicher Geometrien und Randbedingungen auf die Beullast zu verstehen, wird zunächst in Ansys ein linear-elastisches Materialverhalten definiert. Diese Annahme ist für die Untersuchung des elastischen Beulens mittels linearer Eigenwertanalyse geeignet.

Um den Einfluss der Fließgrenze auf die Beullast zu erfassen und das Nachbeulverhalten genauer zu untersuchen, ist die Berücksichtigung des elastisch-idealplastischen Materialverhaltens notwendig. Der Einfluss der Streckgrenze ist bei den untersuchten Hohlprofilen nur für Aluminiumprofile von Relevanz. Die untersuchten Stahlprofile liegen ausserhalb der Schlankheitsgradbereiche für welche die Streckgrenze eine Rolle spielt. Für Aluminium wird daher ein elastisch-idealplastisches Materialverhalten mit einer Streckgrenze von 270 MPa angenommen.

Die Definition des elastisch-idealplastischen Materialverhaltens erfolgt in PyAnsys durch die Definition einer Datentabelle für Materialeigenschaften. In dieser wird eine bilineare isotrope Verfestigung mit von Mises- oder Hill-Plastizität festgelegt. Anschließend wird die Fließgrenze in der Datentabelle eingegeben. Die Abbildung 14 veranschaulicht die Definition des elastisch-idealplastischen Materials in PyAnsys.

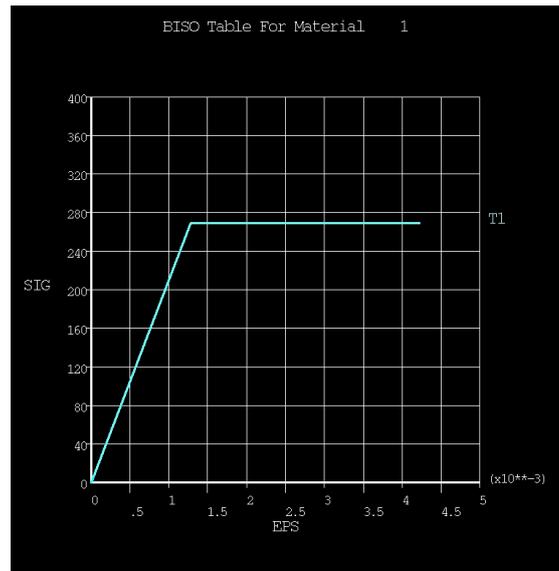


Abbildung 14: Elastisch-idealplastisches Materialverhalten definiert in PyAnsys.

3.3.2 Meshing

Für alle Modelle in dieser Studie wurde eine strukturierte Vernetzung mit viereckselementen verwendet. Für die Modellierung dünnwandiger Strukturen wurden Schalenelemente verwendet. In Ansys werden die Schalenelemente SHELL181 und SHELL281 für die Strukturanalyse verwendet. In dieser Studie wurden Elemente vom Typ Shell281 verwendet. Das Schalenelement 281 verwendet eine quadratische Ansatzfunktion wodurch gekrümmte Geometrien im Vergleich zu Elementen mit linearer Ansatzfunktion mit weniger Elementen abgebildet und vernetzt werden können.

Die Schalenelementen mit quadratischen Ansatzfunktionen haben acht Knoten mit jeweils sechs Freiheitsgraden. Die Translation in x-, y- und z-Richtung und die Rotation um x-, y- und z-Achse. Diese Schalenelemente sind für beide lineare und nichtlineare Analyse geeignet. Bei nichtlinearen Analysen unterstützen Schalenelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen große Dehnungen und Rotationen. Die Änderung der Schalendicke wird bei diesen Elementen ebenso berücksichtigt. Diese Schalenelemente können Membrankräfte und Biegespannungen erfassen [31].

Die Vernetzung der Geometrien in den einzelnen Studien erfolgt automatisch. Die Elementgröße wurde dabei so gewählt, dass die Anzahl der Elemente pro Plattenbreite für unterschiedliche Plattenabmessungen konstant bleibt, um die Ergebnisse für verschiedene Seitenverhältnisse der Platte vergleichbar zu machen. Es ist dabei auf eine ausreichend feine Vernetzung zu achten, sodass die Struktursteifigkeit und die teilweise hochwelligen Beulformen richtig abgebildet werden können. Für die lineare Eigenwertanalyse der Platte

wurde eine Konvergenzstudie durchgeführt. Sobald sich die Beullast bei weiterer Verfeinerung des Netzes um nicht mehr als 0.1% änderte, wurde die Netzgröße festgelegt und als eine Referenz für die anderen Modelle verwendet. Wie in Abbildung 15 dargestellt, weist die berechnete Beullast für eine druckbelastete gelenkig gelagerte Platte mit einer Breite von 200 mm und einer Dicke von 2 mm und einem Seitenverhältnis von 3 ab einer Anzahl von 20 Elementen pro Plattenbreite (Elementgröße = 10 mm) eine ausreichende Genauigkeit auf, ohne dass dies einen großen Aufwand für die numerische Berechnung bedeutet. Als Referenz wurden 20 Elemente über die Plattenbreite festgelegt. Für weitere Simulationen mit anderen Plattenbreiten wurde ebenfalls diese Anzahl gewählt. Dadurch ändert sich jedoch die Elementgröße.

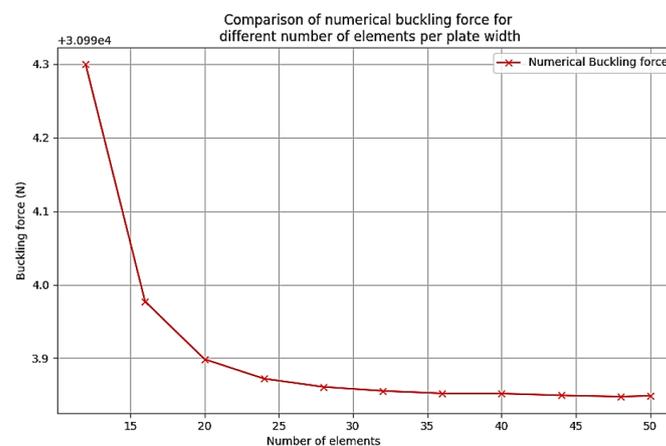


Abbildung 15: Vergleich der numerische Beullast für verschiedene Anzahl von Elementen pro Plattenbreite für eine Platte mit einer Breite von 200 mm und einer Dicke von 2 mm.

3.3.3 Randbedingungen

Ein wichtiger Punkt dieser Untersuchung ist die richtige Definition der Randbedingungen, insbesondere im Hinblick auf den Vergleich mit analytischen Berechnungsmethoden.

Um die Lösungen aus den numerischen Analysen gut mit den analytischen Berechnungen vergleichen zu können und praxisnahe Ergebnisse zu erhalten, wurde bei einem Großteil der simulierten Geometrien eine gelenkige Lagerung an den Rändern definiert. In PyAnsys wurde dies durch gezielte Einschränkung der Freiheitsgrade umgesetzt. Die genaue Definition der Randbedingungen erfolgt bei den einzelnen Studien.

3.4 Solver Configuration und Analysis Type

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Berechnungen mithilfe von PyMAPDL (Python Mechanical Ansys Parametric Design Language) durchgeführt. Die Modelle sind mithilfe von

Python und MAPDL geskriptet. Mittels PyVista konnten die verschiedenen Geometrien und deren Meshing geplottet werden.

Für die numerische Untersuchung des Beulverhaltens verschiedener Querschnitte wurden in Ansys MAPDL zwei primäre Analysisverfahren eingesetzt:

- Lineare Eigenwertanalyse
- Nichtlineare statische Analyse

4 Beulverhalten von Profilstegsegmenten

4.1 Plattenbeulen

Bei Teleskopprofilen spielt das lokale Beulen der einzelnen Plattenfelder eine entscheidende Rolle für die Tragfähigkeit und normgerechte Auslegung der Teleskopstrukturen. Das Plattenbeulen wird daher als erstes analysiert und verschiedene Einflüsse auf das Beulverhalten der Platten werden genau untersucht. Diese Untersuchungen bilden daher die Basis für das Verständnis des Beulverhaltens bei Teleskopprofilen und liefern eine Referenz zur Bewertung analytischer und numerischer Methoden.

4.1.1 Definition der Randbedingungen und deren Einfluss auf die Beullast für die gelenkig gelagerte Platte unter axialer Druckbelastung

Eine lineare Eigenwertanalyse wird für die Platte durchgeführt. Die Analyse soll die korrekte Definition der Randbedingungen in FEM für einen Vergleich mit der analytischen Lösung nach normativen Vorgaben für eine Platte mit gelenkiger Lagerung ermitteln.

Für die Generierung der Platte wurde eine Funktion definiert. Die Funktion erzeugt eine Linie mit der gewünschten Plattenbreite. Die erzeugte Linie wird anschließend um ein definiertes Seitenverhältnis extrudiert, um die Platte zu erstellen. Siehe Abbildung 16.

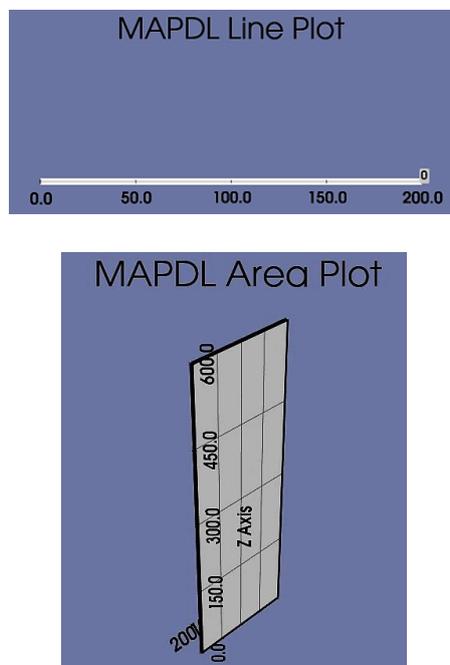


Abbildung 16: Die Plattengeometrie in MAPDL PyAnsys für eine Platte mit Breite 200 mm und Seitenverhältnis von 3.

Um die Platte gelenkig zu lagern, wird die Verschiebung aller Knoten von den vier Rändern der Platte in out-of-plane-Richtung gesperrt. Um die Platte im Raum zu fixieren und dabei

den Poisson Effekt nicht zu verhindern, wurde der mittlere Knoten der Platte selektiert und dessen Translationsfreiheitsgrade in der Plattenebene gesperrt. Zusätzlich wurde der Mittelknoten am linken Rand in Richtung der Plattenhöhe gesperrt. Siehe Abbildung 17.

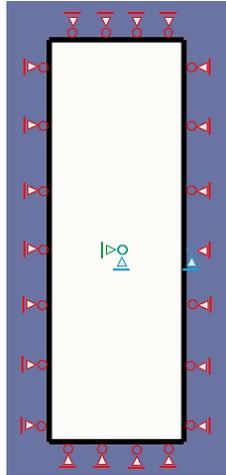


Abbildung 17: Definition der gelenkigen Randbedingung für die Platte.

Die Platte wird über eine Linienlast am oberen und unteren Rand mit Druck belastet, so dass eine gleichmäßige axiale Beanspruchung in der Platte entsteht. Diese Art der Belastung ermöglicht eine gleichmäßige Spannungsverteilung und die Ergebnisse können mit den analytischen Lösungen verglichen werden.

Für die oben genannten Randbedingungen und unterschiedliche Seitenverhältnisse wird eine Batch-Simulation für eine 2 mm dicke, 200 mm breite Platte aus Stahl durchgeführt. Die Länge der Platte wird von 400 mm bis 800 mm variiert. Die numerische Beullast aus der linearen Eigenwertanalyse wird mit der analytischen Beullast für gelenkig gelagerte Platten verglichen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 18 dargestellt.

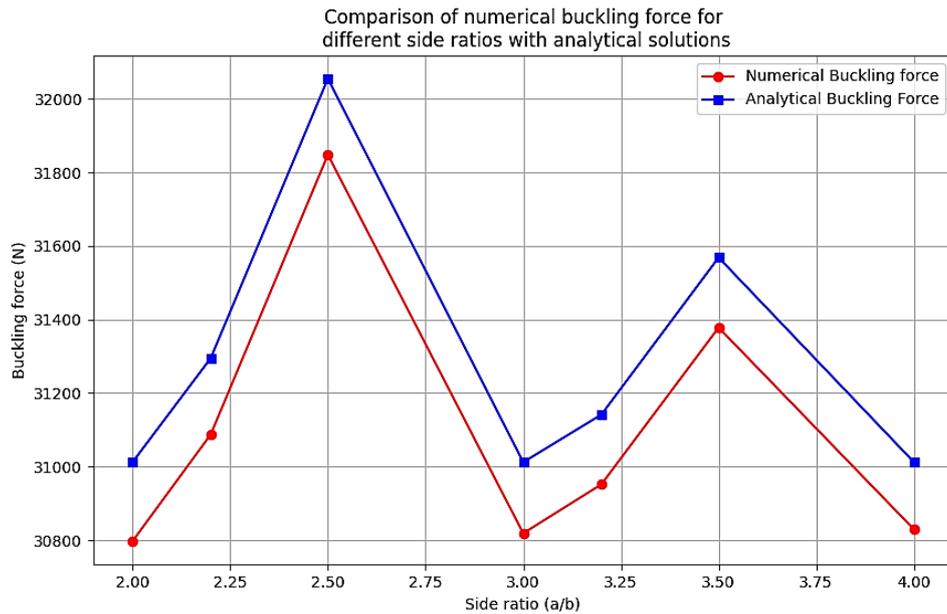


Abbildung 18: Vergleich der numerischen Beullast der gelenkig gelagerten Platte aus der linearen Eigenwertanalyse mit analytischen Lösungen für verschiedene Seitenverhältnisse wobei a die Länge und b die Breite der Platte darstellen. Die out-of-plane Verschiebungen aller Kanten sind gesperrt.

Die maximale Differenz zwischen der numerischen Beullast und der für die entsprechende Platte berechneten analytische Lösung beträgt $-0,6\%$. Die numerischen Simulationen liefern eine kleinere Beullast.

Die Girlandenkurve nähert sich ab einem Seitenverhältnis von 4 asymptotisch dem Wert 4 [40]. Für die einfache Berechnung der Beulspannung wird deswegen in der Norm für den Beulfaktor der konstante Wert 4 verwendet [18], [19]. Um dieses asymptotische Verhalten auch numerisch nachzuvollziehen, wurden zusätzliche Simulationen für Seitenverhältnisse größer als 4 für die gleiche Platte durchgeführt. Es sollte überprüft werden, ob die numerisch ermittelten Beullasten ebenfalls gegen den theoretischen Grenzwert konvergieren und somit mit der analytischen Lösung übereinstimmen.

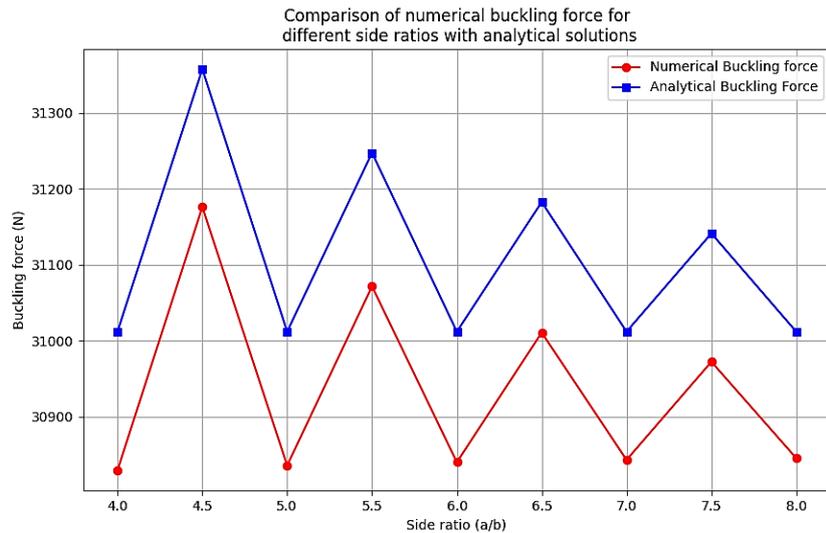


Abbildung 19: Vergleich der numerischen Beullast der gelenkig gelagerten Platte mit analytischen Lösungen für Seitenverhältnisse größer als 4, wobei a die Länge und b die Breite der Platte darstellen.

Aus Abbildung 19 ist erkennbar, dass die Minima der Beullast numerisch und analytisch jeweils bei ganzzahligen Seitenverhältnissen auftreten. Zwischen den ganzzahligen und nicht-ganzzahligen Werten sind kleine Unterschiede zu beobachten. Der größte Unterschied der Beullast zwischen den ganzzahligen Seitenverhältnissen und nicht-ganzzahligen Seitenverhältnissen ist bei einem Seitenverhältnis von 4,5 und beträgt 1,1 %, dieser Unterschied wird für größere Seitenverhältnisse noch kleiner. Der Unterschied zwischen der numerischen Beullast und der analytisch berechneten Beullast beträgt in diesen Fällen immer noch weniger als -0,6 %. Insgesamt ist aus Abbildung 19 ersichtlich, dass die numerischen Ergebnisse die Gültigkeit der normativen Vereinfachung, dass bei höheren Seitenverhältnissen den konstanten Wert $k = 4$ für die analytische Berechnung der Beullast verwendet werden darf, bestätigen. Um diese normative Annahme besser zu überprüfen, wurden in der Abbildung 20 die numerischen und analytischen Beullasten aus der Abbildung 19 durch die entsprechenden Euler-Bezugsspannungen und die entsprechenden Querschnittsflächen der Platten dividiert, um den Beulfaktor zu bekommen. Die Abbildung 20 zeigt, dass der Beulfaktor mit guter Näherung als konstanter Wert 4 angenommen werden darf. Die numerischen Ergebnisse zeigen zudem, dass beim Plattenbeulen die Plattenbreite maßgeblich für die Beullast ist, während die Plattenlänge bei ausreichend hohen Seitenverhältnissen keinen signifikanten Einfluss mehr auf die Beullast hat.

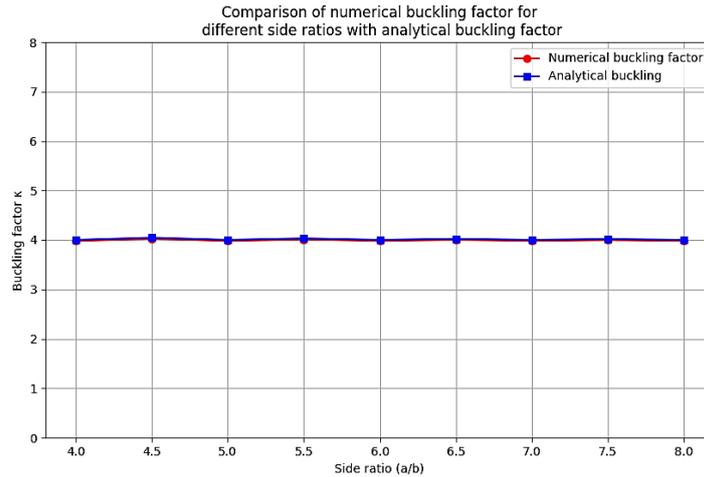


Abbildung 20: Vergleich des numerischen Beulfaktors der gelenkig gelagerten Platte mit analytischen Beulfaktoren für Seitenverhältnisse größer als 4.

4.1.2 Einfluss des Winkels auf das Beulverhalten

Um den Einfluss des Winkels zwischen benachbarten Platten auf die Beullast sowie auf die Randbedingungen der einzelnen Platten zu untersuchen, wurde ein Modell aus drei verbundenen Platten mit variierenden Zwischenwinkeln erstellt.

Drei Linien wurden mit einem definierten Winkel erzeugt. Die erzeugten Linien werden schließlich um ein gewünschtes Seitenverhältnis extrudiert, wodurch drei Platten mit einem beliebig gewählten Winkel zueinander entstehen. Siehe Abbildung 21.

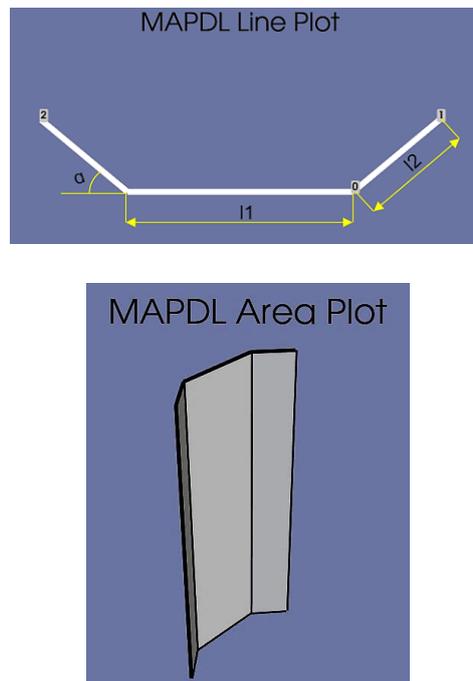


Abbildung 21: Die erzeugte drei Plattengeometrie in MAPDL PyAnsys.

Um die drei Platten gelenkig zu lagern, wird zunächst im globalen Koordinatensystem die Verschiebung der freien Ränder der mittleren Platte analog zur einfachen Platte in out-of-plane-Richtung gesperrt. Um die seitlichen Platten gelenkig zu lagern, wurde ein lokales kartesisches Koordinatensystem für jede Seite definiert. Im lokalen Koordinatensystem werden anschließend die seitlichen Platten ebenfalls gelenkig gelagert, indem die Verschiebung der freien Ränder in out-of-plane-Richtung gesperrt wird. Siehe Abbildung 22.

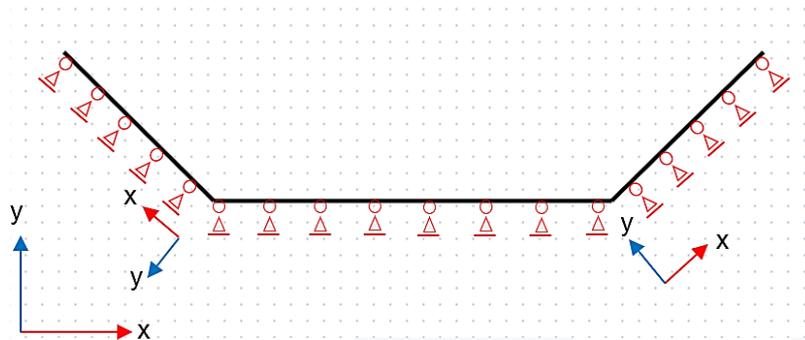


Abbildung 22: Gelenkige Lagerung der drei Platten

Für die Fixierung der Platten im Raum wird die Symmetrie der Platte ausgenutzt. Die Verschiebung der Mittellinie aller Platten bezüglich der Plattenhöhe wird in die Richtung der Plattenhöhe gesperrt (mit blau gekennzeichnet), während die Verschiebung der Mittellinie der mittleren Platte bezüglich der Plattenbreite in die Richtung der Plattenbreite gesperrt wird (mit rot gekennzeichnet). Siehe Abbildung 23.

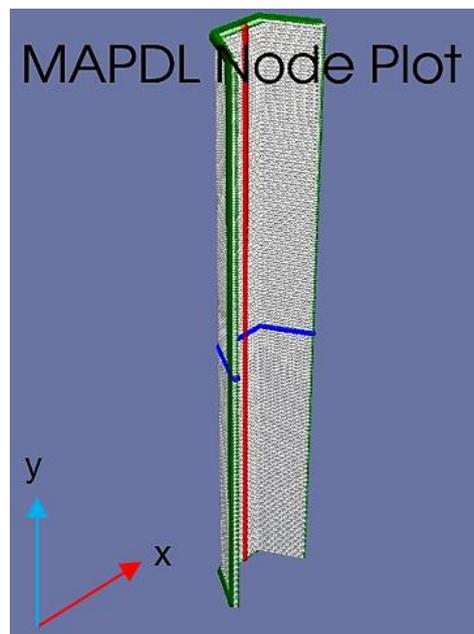


Abbildung 23: Gelenkige Lagerung in MAPDL PyAnsys.

Der Winkel zwischen den seitlichen Platten und der mittleren Platte wurde von 10° bis 89° geändert. Dabei wurden die seitlichen Platten bewusst deutlich kürzer gewählt als die mittlere Platte, um sicherzustellen, dass nur der Einfluss des Winkels auf das Beulverhalten untersucht wird und die seitlichen Platten als Lagerungen für die mittlere Platte wirken. Die analytische Beullast wird dabei mit gelenkigen Randbedingungen berechnet. In der Tabelle 2 sind die numerischen Ergebnisse aus der linearen Eigenwertanalyse sowie die analytische Beullast für die mittlere Platte aus Stahl mit einer Breite von 2000 mm, einer Dicke von 2 mm und einem Seitenverhältnis von 4 und zwei seitlichen Platten aus Stahl mit jeweils einer Breite von 5 mm und mit einer Dicke von 2 mm eingetragen.

Tabelle 2: Vergleich der numerischen Beullast aus der linearen Eigenwertanalyse und der analytisch berechneten Beullast für verschiedene Winkel zwischen den seitlich anliegenden Platten und der mittleren Platte.

Winkel (°)	Analytische Beullast (N)	Numerische Beullast (N)	ΔF (%)
10	3101.21	3068,40	-1.0
20		3062,21	-1.2
30		3053,16	-1.5
45		3031,65	-2.2
60		2987,42	-3.6
89		1250.43	-59

Tabelle 2 zeigt, dass die Beullast der Platte mit zunehmendem Winkel sinkt, was nicht der Realität entspricht. Bei genauerer Betrachtung wurde festgestellt, dass bei größeren Winkeln die gelenkige Lagerung der mittleren Platte nicht mehr korrekt abgebildet wird. Wie in Abbildung 24 ersichtlich ist, sind der linke und rechte Rand der mittleren Platte beim großen Winkel nicht mehr gelenkig gelagert und deren out-of-plane-Verschiebung ist nicht mehr korrekt gesperrt. Dieser Effekt führt zu einer Reduktion der Beullast in den Simulationen bei zunehmendem Winkel.

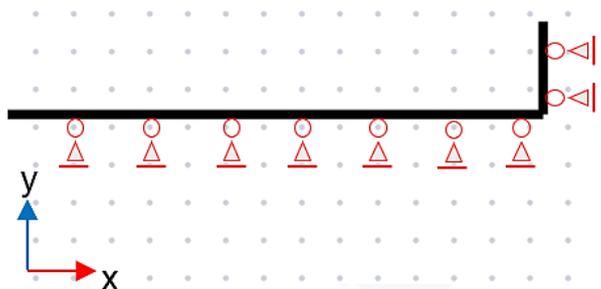


Abbildung 24: Die out-of-plane Verschiebung der Ränder sind beim rechten Winkel nicht gesperrt.

Um den Einfluss des Winkels zwischen benachbarten Platten auf die Beullast korrekt zu untersuchen, wurde ein alternativer Modellierungsansatz gewählt. Dabei wird ein regelmäßiges Polygon so aufgebaut, dass alle seine Seiten die gleiche Breite haben. Da die Beullast

für rechteckige Platten bei gegebenem Material von der Wandstärke und der Breite abhängt, bleibt die Beullast der Platten ebenfalls konstant.

Durch Erhöhen der Anzahl der Polygonseiten verändert sich der Winkel zwischen den benachbarten Platten. Auf diese Weise lässt sich untersuchen, ob der Winkel allein einen Einfluss auf das Beulverhalten hat.

Die numerische Beullast des Polygons wird anschließend berechnet und mit der analytischen Beullast verglichen, um eventuelle Abweichungen in Abhängigkeit vom Innenwinkel festzustellen. Siehe Kapitel 5.1.1.

4.1.3 Platte unter Biegebelastung

Zur weiteren Untersuchung des Beulverhaltens wurde die betrachtete Platte mit einem Biegemoment belastet. Die Randbedingungen entsprechen weiterhin einer gelenkigen Lagerung, um den Vergleich mit vorherigen Lastfällen konsistent zu halten.

Um das Biegemoment auf die Platte auszuüben, wurde ein Pilot-Node definiert. Dieser wurde mit Multi-Point Constraints (MPCs) mit den Knoten am oberen Plattenrand verbunden, damit sich die Kräfte gleichmäßig verteilen. Das Biegemoment wurde dann direkt auf den Pilot-Node aufgebracht und so auf den gesamten Plattenrand übertragen. Dabei wurde der Spannungsverlauf in der Platte in den Simulationen genau untersucht, um sicherzustellen, dass das Verhältnis von $\psi = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = -1$ ist. Die Abbildung 25 zeigt ein Beispiel für den Spannungsverlauf von einer biegebeanspruchten Platte.

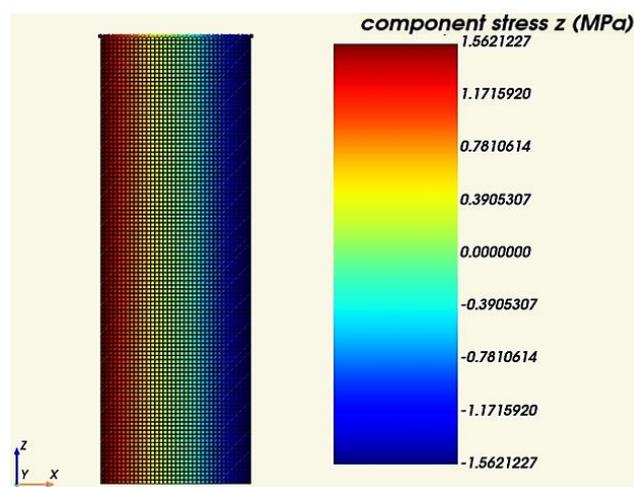


Abbildung 25: Spannungsverlauf von einer Biegebeanspruchten Platte mit einem Moment von 21000 Nmm. Die Platte ist aus Stahl mit der Breite von 200 mm, der Dicke von 2 mm und einem Seitenverhältnis von 3.

Tabelle 3 zeigt die numerisch ermittelten und die analytisch berechneten Beulspannungen für das Spannungsverhältnis $\psi = -1$. Die analytischen Beulspannungen sind nach DIN 13001-3-1 berechnet. Alle Platten haben ein Seitenverhältnis von 3.

Tabelle 3: Vergleich der numerischen und analytischen Beulspannung der gelenkig gelagerten Platte unter Biegemoment $\psi = -1$. Die zur Bestimmung der analytischen Lösung verwendeten Gleichungen sind in Klammern angegeben.

Material	Breite (mm)	Dicke (mm)	λ_x (2.21)	κ_x	Analytische Beulspannung DIN 13001 (MPa) (2.28)	Numerische Beulspannung (MPa)	ΔF (%)
Aluminium	370	4	1,24	0,64 (2.26)	156,4	182,51	17
Aluminium	335	5	0,9	0,87 (2.26)	213,03	347,34	63
Aluminium	272	4	0,91	0,86 (2.26)	210,8	331,53	57,6
Stahl	690	4	1,33	0,56 (2.27)	138,59	157,62	13,6
Stahl	577	4	1,79	0,31 (2.27)	198,2	230,9	16
Stahl	521	4	1,62	0,38 (2.27)	243,08	276,3	13,5

In Tabelle 3 ist erkennbar, dass die analytisch berechnete Beulspannung laut DIN EN 13001-3-1 und die numerisch ermittelte Beulspannung aus der linearen Eigenwertanalyse für Platten aus Aluminium können sehr unterschiedlich sein. Die Abweichung kann sogar bis zu 63 % betragen.

Die Ursache liegt in der Berücksichtigung der Streckgrenze bei bestimmten Schlankheitsgraden. Für $0,635 \leq \lambda_x \leq 1,26$ wird die Streckgrenze des Materials in die Berechnung der Bemessungsdruckspannung einbezogen. Dadurch wird die Beulspannung geringer. In praktischen Anwendungen trifft das eher auf Aluminiumprofile zu.

Diese konservative Annahme ermöglicht eine sichere Auslegung der Teleskopstrukturen aber die Beulspannung der einzelnen Beulfelder der Teleskopstruktur wird für die idealisierten Bedingungen unterschätzt. Eine genauere Bestimmung der Beullast bietet Potential für eine Gewichtsreduktion der Profile.

4.1.4 Nachbeulanalyse der Platte

Um die Formel in der Norm DIN 13001-3-1 zur Berechnung der Bemessungsdruckspannung (siehe Gleichungen (2.23) bis (2.28)) genauer zu untersuchen und das Nachbeul-

verhalten sowie den Einfluss der Streckgrenze auf die Beulspannung besser zu verstehen, wird eine nichtlineare verschiebungsgesteuerte Nachbeulanalyse mit einem elastisch-idealplastischen Materialmodell für Platten aus Aluminium durchgeführt.

Bei verschiebungsgesteuerten Analysen wird für die reine Druckbeanspruchung eine axiale Verschiebung und für die reine Biegebeanspruchung eine Rotation auf den Pilot-Node aufgebracht. Der Pilot-Node ist durch MPCs mit den Knoten entlang des oberen Plattenrands verbunden, sodass die aufgebrachte Verschiebung bzw. Rotation gleichmäßig auf den Plattenrand übertragen wird. Zunächst wird eine lineare Eigenwertanalyse auf Basis einer linearen statischen Analyse durchgeführt, um die Beulformen (Eigenmoden) zu ermitteln. Anschließend werden die resultierenden Eigenmoden als geometrische Imperfektionen auf das Modell aufgebracht. Für die imperfekte Struktur wird dann eine nichtlineare statische Analyse durchgeführt, um deren Nachbeulverhalten unter Berücksichtigung des elastisch-idealplastischen Materialverhaltens zu untersuchen. Die Platte wird für die Nachbeulanalyse gelenkig gelagert.

Die Bemessungsdruckspannung wird in den Abbildungen 26 und 27 exemplarisch für eine Plattendicke von 4 mm dargestellt. Dieser Wert wurde gewählt, da er eine der am häufigsten verwendeten Wandstärken bei Teleskopstrukturen ist. Dabei wurde die Bemessungsdruckspannung abhängig von der Plattenbreite für Spannungsverhältnisse: $\psi = 1$ (reine Druckbeanspruchung) und $\psi = -1$ (reine Biegung bzw. Wechsellast) berechnet.

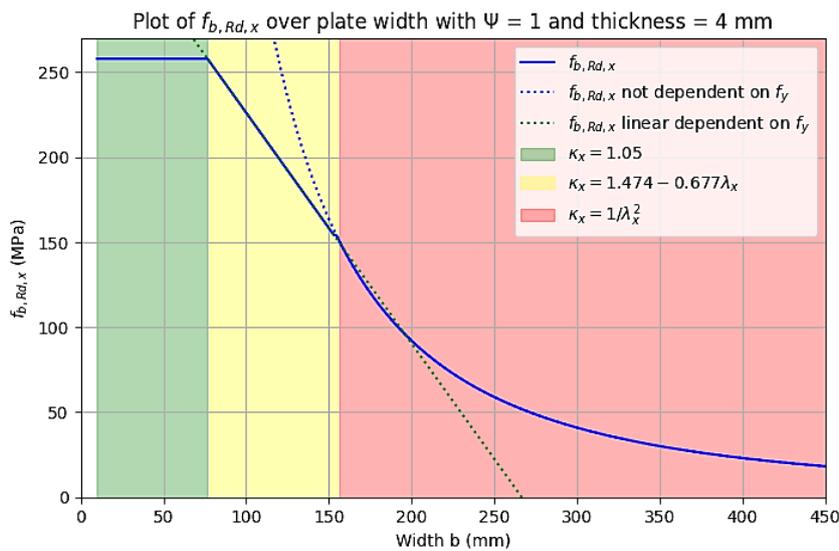


Abbildung 26: Die Bemessungsdruckspannung abhängig von der Plattenbreite für $t = 4 \text{ mm}$ und $\psi = 1$.

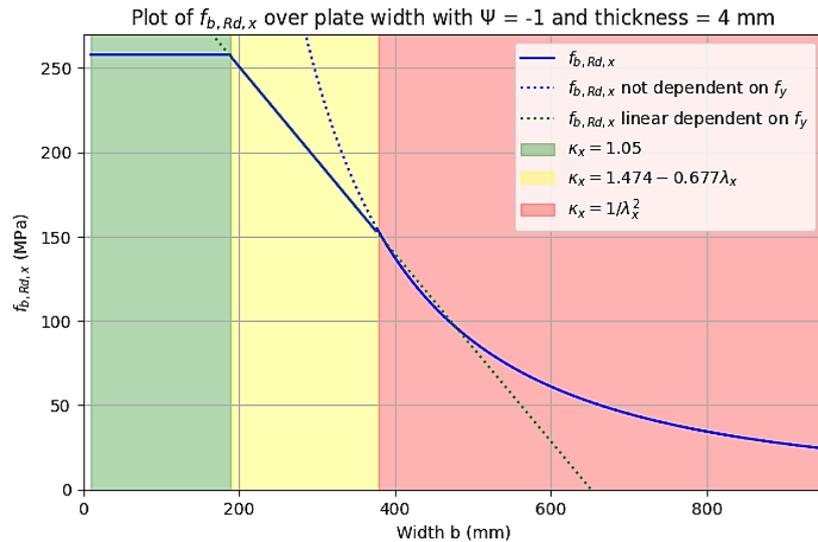


Abbildung 27: Die Bemessungsdruckspannung abhängig von der Plattenbreite für $t = 4 \text{ mm}$ und $\psi = -1$.

Wie die Abbildungen 26 und 27 zeigen, wird die Bemessungsdruckspannung in Abhängigkeit von der Plattenbreite in drei Bereiche unterteilt:

- Im roten Bereich wird die Bemessungsdruckspannung unabhängig von der Streckgrenze des Werkstoffes unter Verwendung von Gleichung (2.27) ermittelt und wird als elastische Beulspannung σ_{el}^* bezeichnet. Außerhalb des roten Bereiches ist σ_{el}^* strichliert dargestellt.
- Im gelben Bereich ist die Bemessungsdruckspannung linear abhängig vom Schlankheitsgrad und dadurch auch abhängig von der Streckgrenze und wird unter Verwendung von Gleichung (2.26) ermittelt. Sie wird in weiterer Folge als elastisch-plastische Beulspannung σ_{el-pl}^* bezeichnet. σ_{el-pl}^* ist innerhalb des roten und grünen Bereiches strichliert dargestellt.
- Im grünen Bereich bleibt die Bemessungsdruckspannung konstant, wenn die Plattenbreite weiter abnimmt und entspricht der Fließspannung des Werkstoffes, multipliziert mit einem von der Norm berücksichtigten Sicherheitsfaktor ($\frac{\kappa_x}{\gamma_m}$). Siehe Gleichungen (2.25) und (2.28).

Diese Darstellung soll für die späteren Analysen zeigen, in welchen Bereichen es einen großen Unterschied zwischen den numerisch ermittelten Beulspannungen und den analytisch berechneten Bemessungsdruckspannungen gibt. Die strichlierte blaue Linie im gelben Bereich zeigt die Abweichung zwischen σ_{el-pl}^* und σ_{el}^* . Die strichlierte grüne Linie im roten Bereich veranschaulicht die σ_{el-pl}^* in diesem Bereich.

In Abbildung 28 ist dieses Verhalten in dimensionsloser Form dargestellt, sodass der Verlauf der Bemessungsdruckspannung für verschiedene Plattendicken und Spannungsverhältnisse vergleichbar wird. Dazu wurde auf der Ordinate das Verhältnis der Bemessungsdruckspannung zur Streckgrenze des Materials und auf der Abszisse den Schlankheitsgrad λ_x aufgetragen. Für weitere Analysen wird in den Diagrammen die Bemessungsdruckspannung jedoch gegen die Plattenbreite dargestellt. So können die realen Beulfelder der Hohlprofile von Teleskopstrukturen besser untersucht werden.

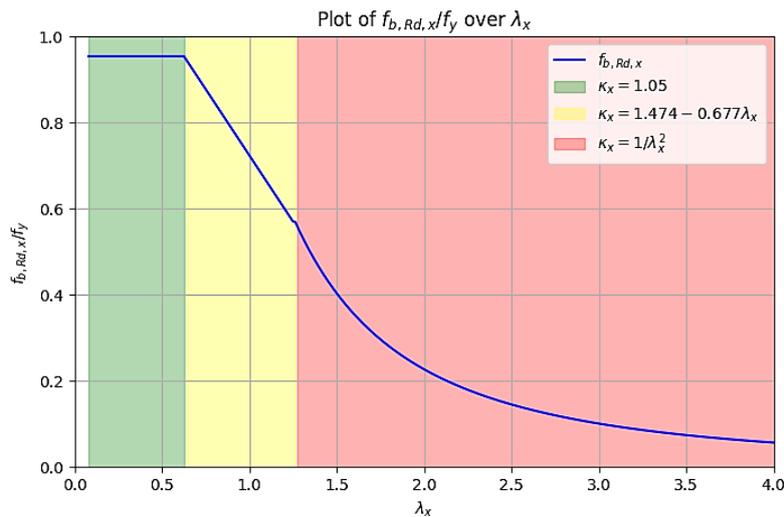


Abbildung 28: Das Verhältnis von der Bemessungsdruckspannung zur Werkstofffließgrenze abhängig vom Schlankheitsgrad.

Die nichtlineare Nachbeulanalyse mittels FEM wird für verschiedene Plattenbreiten von 200 mm bis 110 mm durchgeführt.

Um die Beullast zu bestimmen, wurden folgende Auswertungen verwendet:

- die Last-Verschiebungskurve,
- die Plattensteifigkeit in Abhängigkeit von der Verschiebung,
- sowie die out-of-plane-Verschiebung des mittleren Plattenknotens in Abhängigkeit der axialen Verschiebung des Pilot-Nodes für die rein druckbelastete Platte.

Als Kriterium für den Beginn des Beulens wurde eine Steifigkeitsreduktion von 1 % bezüglich der Anfangssteifigkeit definiert. Diese Annahme wird zusätzlich für die rein druckbelastete Platte durch die sprunghafte Zunahme der out-of-plane-Verschiebung des mittleren Knotens bestätigt. Der Beginn des Plastizierens wurde dadurch ermittelt, dass für mindestens einen FEM-Knoten die Vergleichsspannung (von-Mises-Spannung) die Streckgrenze des Materials erreicht hat. Für das Versagen wurde die maximale Reaktionskraft am Pilot-

Node herangezogen, die während der nichtlinearen Nachbeulanalyse ermittelt wird. Dieser Punkt stellt fest, wie viel Last die Struktur höchstens tragen kann, bevor sie komplett versagt.

Die nach der Norm 13001 berechnete Bemessungsdruckspannung wird in eine Beullast umgerechnet und in die ermittelten Last-Verschiebungsdiagramme eingetragen. Zusätzlich sind die Sicherheitswerte gemäß der Norm gegenüber Beulen, Plastizieren sowie totalem Versagen in die Diagramme eingetragen.

4.1.4.1 Nachbeulanalyse der rein druckbeanspruchten Platte

Zunächst wird der Fall betrachtet, bei dem die Platte druckbelastet wird. Hier wurde 1 % vom ersten Eigenmode als die Imperfektion auf die Geometrie aufgebracht. In Ansys wird normalerweise die maximale Verschiebung von Eigenformen auf 1 normiert [32]. Durch die Wahl von 1 % als Skalierungsfaktor ergibt sich für die imperfekte Platte eine maximale Auslenkung von 1 mm im Vergleich zu der perfekten Platte. Die gewählte Größenordnung der Imperfektion wirkt sich jedoch unterschiedlich auf Platten mit verschiedenen Abmessungen aus. Deshalb ist es normalerweise üblich, die Größenordnung der Imperfektion relativ zur Geometrie der Platte zu definieren, beispielsweise in Relation zur Wandstärke oder zur Plattenbreite.

Da bei Schweißkonstruktionen die Ebenheitstoleranzen bezüglich der Blechwandstärke definiert werden, die Platten alle die gleiche Wandstärke aufweisen und die verwendeten Bleche denselben Fertigungstoleranzen unterliegen, wird in den numerischen Analysen für alle Platten die gleiche Imperfektionsgröße angenommen.

Die Ergebnisse für eine Platte mit einer Breite von 200 mm, einer Wandstärke von 4 mm und eine Länge von 600 mm sind in Abbildung 29 zusammengefasst. Diese Platte liegt im roten Bereich der Schlankheitsklassifikation. Die analytisch berechnete Beullast mit $F_A^* = 73.62 \text{ kN}$ und die numerisch bestimmte Beullast mit $F_N^* = 77.35 \text{ kN}$ liegen relativ nah beieinander.

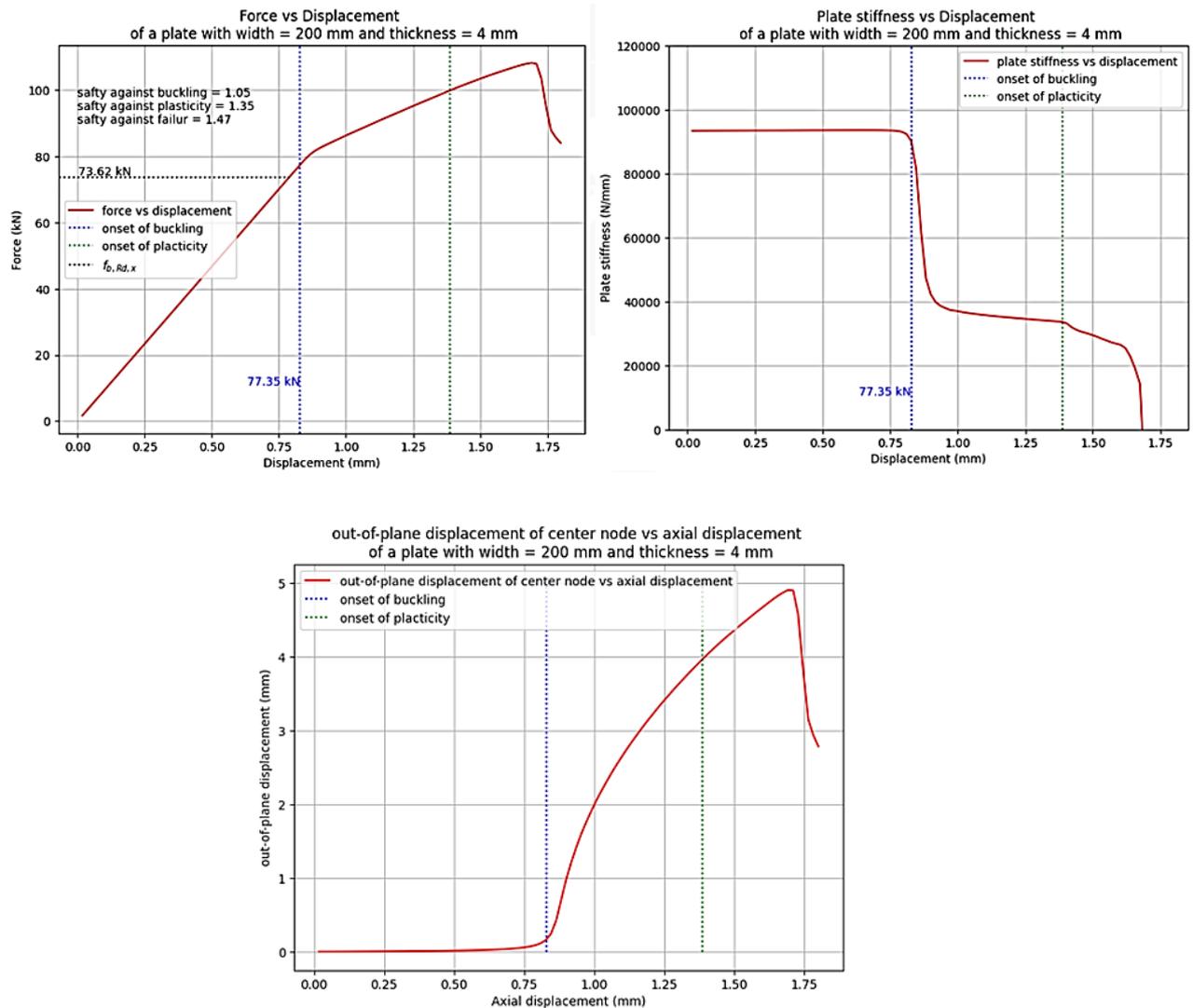


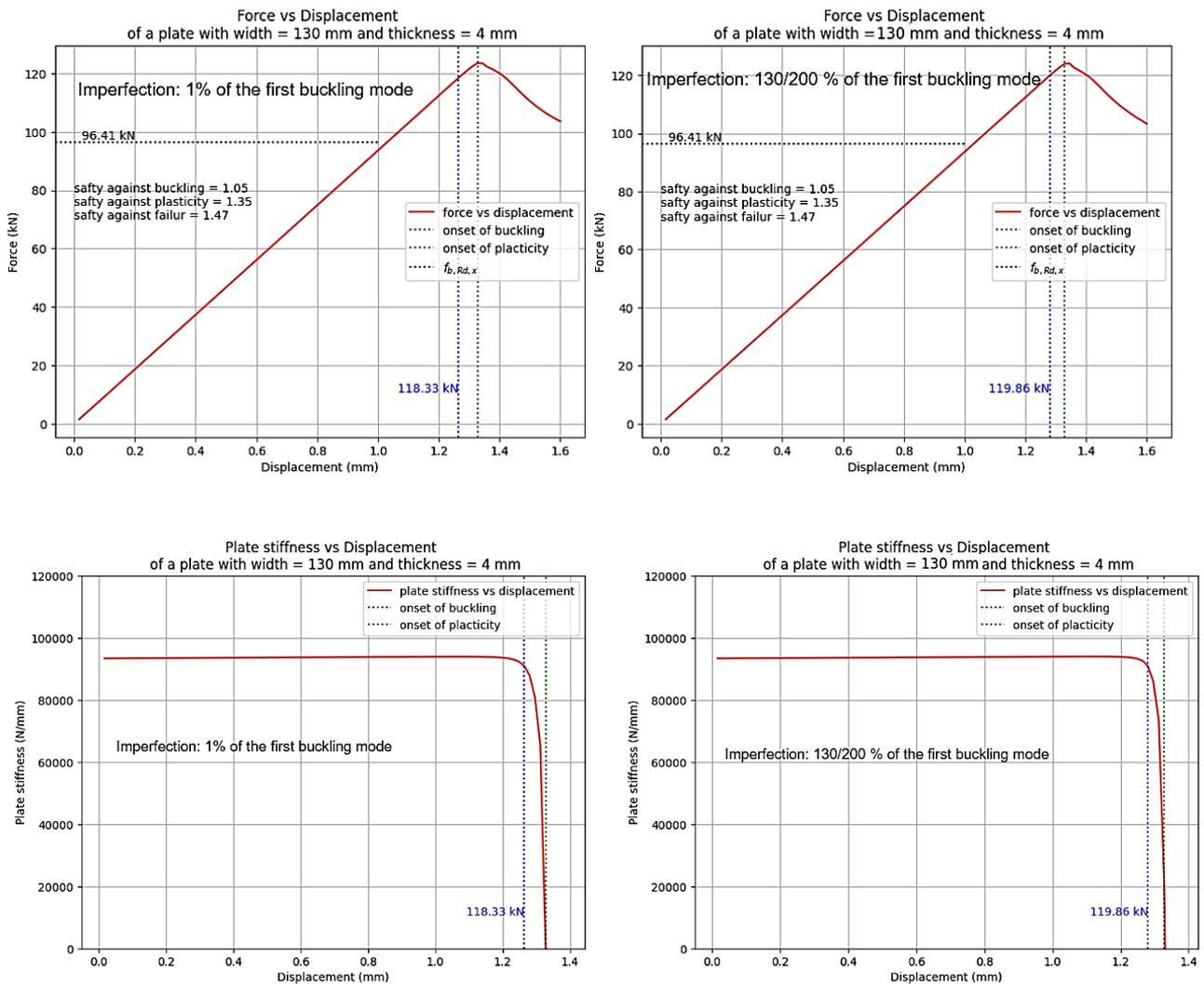
Abbildung 29: Das Nachbeulverhalten der druckbeanspruchten Platte $\psi = 1$ mit Breite = 200 mm und Dicke = 4 mm.

Es zeigt sich, dass die Struktur erst deutlich nach dem Einsetzen des Beulens bei einer Belastung von $F_{\text{Plastizität}} = 100.65 \text{ kN}$ plastiziert. Die Platte kann nach dem Beginn der Plastizität noch Last aufnehmen, bevor sie bei einer Belastung von $F_{\text{Versagen}} = 110 \text{ kN}$ versagt.

Mit abnehmender Plattenbreite und damit der Schlankheit – also bei Platten im gelben Bereich – vergrößert sich der Unterschied zwischen der analytisch berechneten und der numerisch bestimmten Beullast deutlich. Die Kraft, bei der Plastizieren auftritt, ist im gelben Bereich nah an der Beullast und das totale Versagen tritt kurz nach dem Erreichen der Fließgrenze ein. Die Struktur versagt in diesem Fall nach dem Plastifizieren deutlich schneller. Für eine Platte mit einer Breite von 130mm sind die Ergebnisse in Abbildung 30

dargestellt. Die Ergebnisse für weitere Plattenbreiten können den Abbildungen 102 bis 105 im Anhang B entnommen werden.

Gemäß Annex C der Norm EN 1993-1-5 wird für lokale geometrische Imperfektionen bei Plattenbeulanalysen ein Wert von $b/200$ empfohlen [33]. Um die Imperfektion auf die Geometrie zu beziehen, wurde die Plattenbreite von 200 mm als Referenz gewählt. Für diese Breite wird eine Imperfektion in Höhe von 1 % des ersten Beulmoden aufgebracht. Für eine ausgewählte kleinere Plattenbreite von 130 mm wird für eine Nachbeulanalyse die Imperfektion in Höhe von 1 % des ersten Beulmoden aufgebracht und für eine weitere Nachbeulanalyse wird die Imperfektion proportional zur Breite skaliert, sodass $130/200$ % des ersten Beulmoden auf die Geometrie aufgebracht wird. Dadurch bleibt die Größenordnung der Imperfektion relativ zur Plattenbreite vergleichbar. Die Ergebnisse für die unterschiedlichen Imperfektionen sind in Abbildung 30 zusammengefasst.



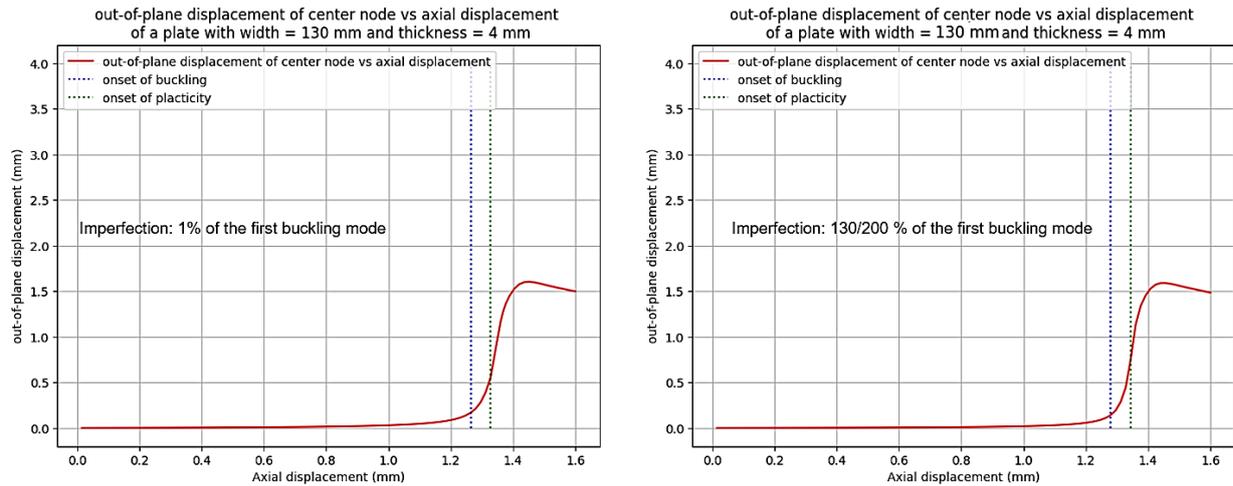


Abbildung 30: Das Nachbeulverhalten der druckbeanspruchten Platte $\psi = 1$ mit Breite = 130 mm und Dicke = 4 mm für 1 % des ersten Beulmodos und für 130/200 % des ersten Beulmodos.

Die Beullast für die Platte mit 130/200 % des ersten Beulmodos als Imperfektion ist marginal größer als die Beullast für die Platte mit 1 % des ersten Beulmodos als Imperfektion. Da der Unterschied lediglich 1 % beträgt, werden weitere Analysen für unterschiedliche Plattenbreiten mit 1 % des ersten Beulmodos als Imperfektion durchgeführt.

Ab einer bestimmten Plattenbreite kann in den Simulationen kein Beulen mehr beobachtet werden, siehe Abbildung 31. Stattdessen erfolgt direkt das Plastifizieren mit anschließendem Versagen der Struktur. In diesem Bereich ist das Beulen nicht mehr der Versagensfall. Vielmehr bestimmt die Fließgrenze die Tragfähigkeit der Platte. Im konkreten Fall tritt das für Plattenbreiten < 110 mm auf. Für Plattenbreiten < 110 mm unterscheiden sich die Ergebnisse der Norm stark von den Simulationsergebnisse, da erstere immer noch von einem Versagen durch Beulen unter Einfluss der Streckgrenze ausgeht.

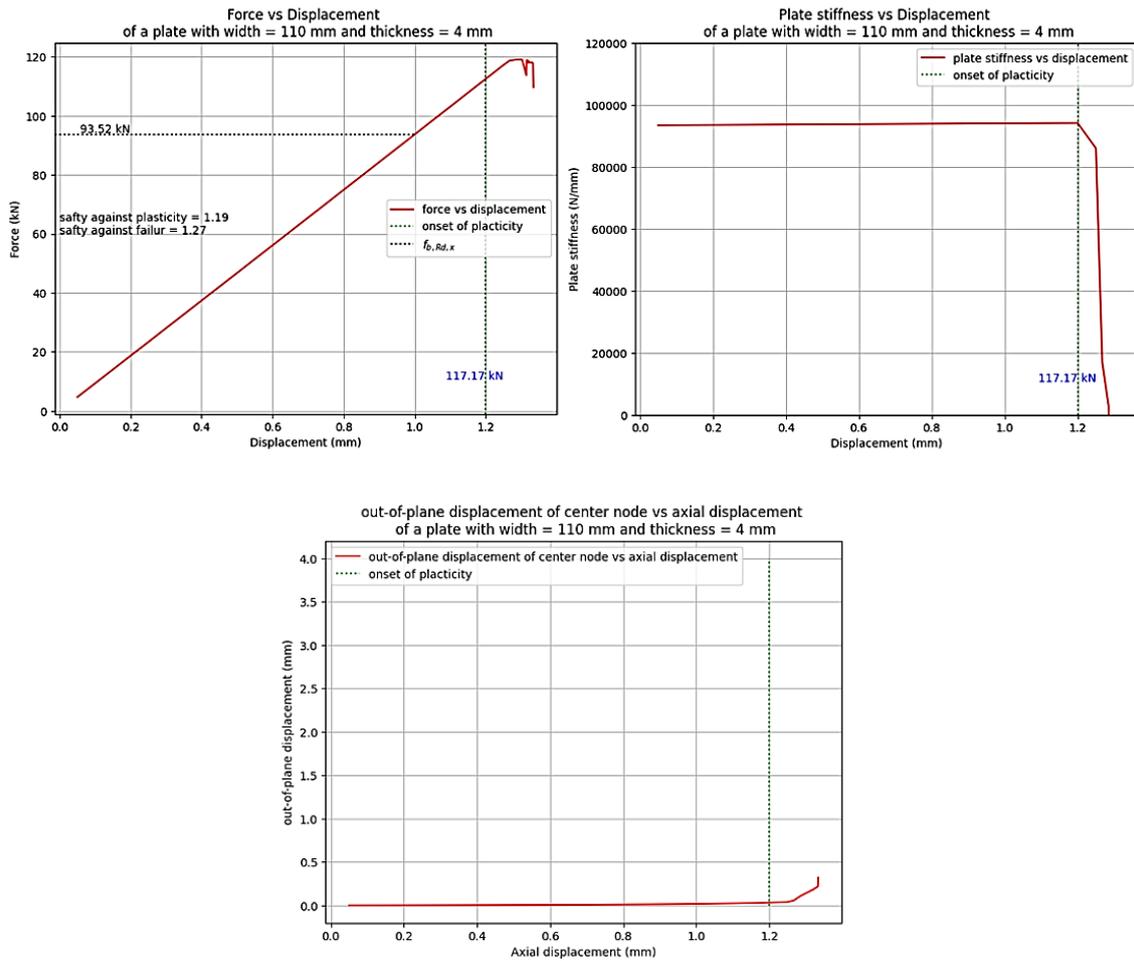


Abbildung 31: Das Nachbeulverhalten der druckbeanspruchten Platte $\psi = 1$ mit Breite = 110 mm und Dicke = 4 mm.

In den Bereichen mit geringer Schlankheit, also im gelben und grünen Bereich, in denen das Plastifizieren und das anschließende Versagen kurz nach dem Beulen auftreten, scheint die Norm eine konservative berechnete Bemessungsdruckspannung zu verwenden, um eine höhere Sicherheit gegen Versagen zu gewährleisten. Denn in diesen Bereichen kann ein plötzliches Versagen nach dem Beulen auftreten.

Zur genaueren Gegenüberstellung der Bemessungsdruckspannungen und des nichtlinearen Nachbeulverhaltens wurden insgesamt 25 Platten mit unterschiedlichen Breiten und einer Dicke von 4 mm numerisch analysiert. Die ermittelten Ergebnisse sind in der Abbildung 32 dargestellt.

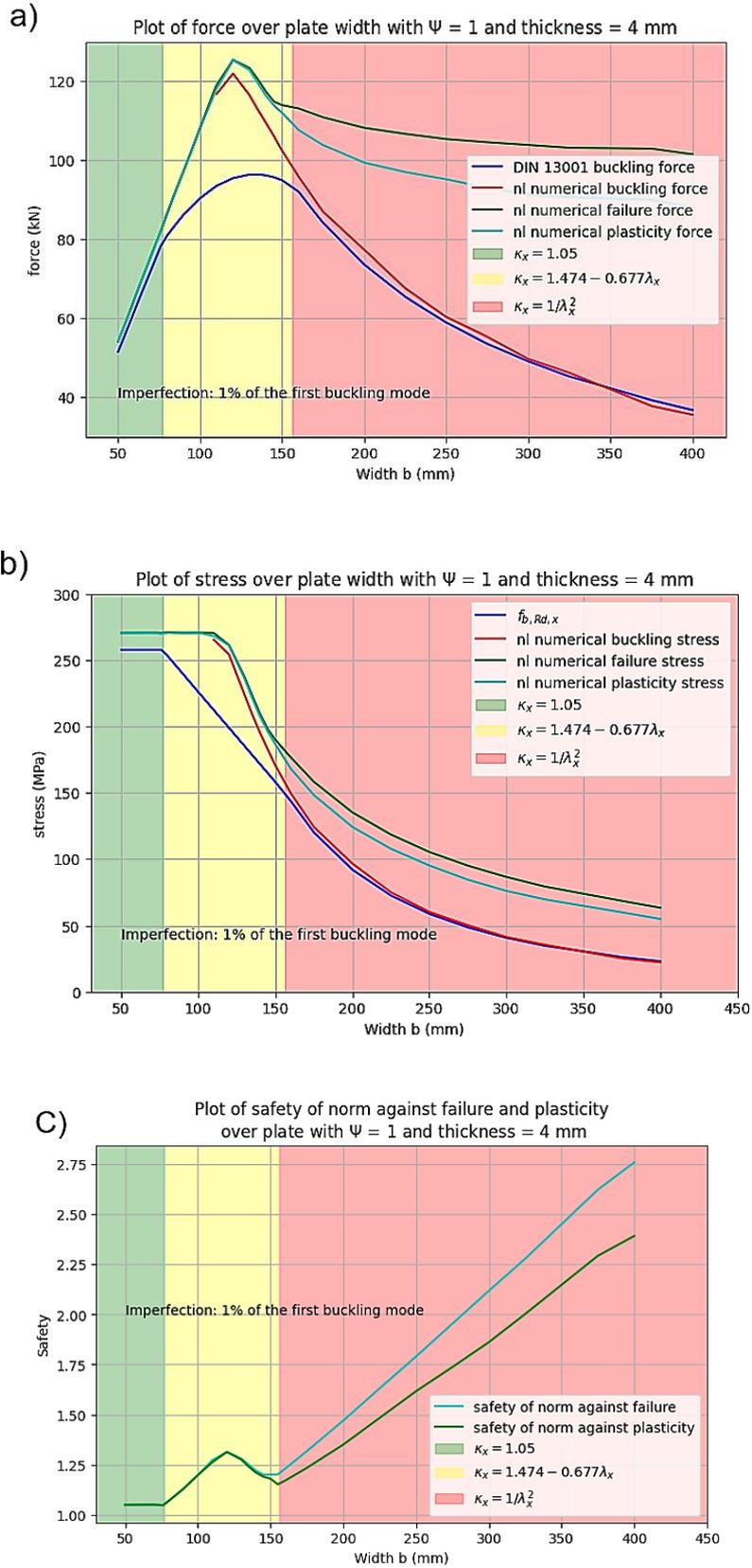


Abbildung 32: Gegenüberstellung der Bemessungsdruckspannung und des Nachbeulverhaltens der druckbelasteten Platte mit 1% vom ersten Beulmode als Imperfektion.

Aus den Diagrammen in der Abbildung 32 ist ersichtlich, dass die Norm DIN EN 13001-3-1 im roten Bereich, bei dem die Fließgrenze bei der Berechnung der Bemessungsdruckspannung noch keine Rolle spielt, vergleichbare Ergebnisse zur numerisch ermittelten Beullast liefert. Mit abnehmender Breite, also im gelben und grünen Bereich, nimmt der Unterschied zwischen den von der Norm berechneten analytischen Lösungen und der numerischen Beulspannung deutlich zu. Im gelben Bereich plastiziert die Platte schnell nach dem Beulen und es wird ein schnelles Versagen der Struktur beobachtet. Für diese Schlankheitsgrade wird das elastische Beulen nicht mehr als das maßgebende Auslegungskriterium betrachtet, sondern das Plastizieren und das nachfolgende Versagen. Für Plattenbreiten kleiner als 120 mm tritt Plastizieren vor dem Beulen auf.

In Diagramm C der Abbildung 32 ist die nach der Norm berücksichtigte Sicherheit gegen Versagen und Plastizieren dargestellt. Zur Berechnung der Sicherheit gegen Versagen wurde das Verhältnis der maximal ertragbaren Last der Platte zur Bemessungsdruckspannung nach der Norm ermittelt. Zur Berechnung der Sicherheit gegen Plastizieren wurde das Verhältnis der Last, bei der für mindestens einen FEM-Knoten die Vergleichsspannung die Streckgrenze des Materials erreicht hat, zur Bemessungsdruckspannung nach der Norm ermittelt und. Im gelben Bereich tritt teilweise elastisches Beulen auf. Bei Platten mit einer Breite von unter 110 mm plastiziert die Platte, bevor sie beult, und die definierten Sicherheiten gegen Plastizieren und Versagen sind nahezu gleich.

Um einen genaueren Einblick zu erhalten, wie die Ansätze in der Norm formuliert bzw. hergeleitet wurden, werden in den folgenden Analysen unterschiedliche Größenordnung der Imperfektionen verwendet, um deren Einfluss auf das Nachbeulverhalten besser zu verstehen.

4.1.4.1.1 Einfluss von Imperfektionen auf das Nachbeulverhalten der druckbelasteten Platte

Um die zuvor festgestellten Abweichungen zwischen den nach Norm berechneten Beullasten und den numerisch ermittelten Ergebnissen aus nichtlinearen Analysen mit imperfekter Geometrie systematisch zu untersuchen, wurde der Einfluss verschiedener geometrischer Imperfektionen analysiert.

Hierzu wurden verschiedene Imperfektionsgrößen vom ersten Beulmode angewendet: einmal 10 %, einmal $L/1000$ und einmal $2b/250$. Der Wert $L/1000$ wird als globale Imperfektion für nichtlineare Beulanalyse verwendet [34],[35]. Der Wert $2b/250$ entspricht der

nach DIN EN 13001-3-1 zulässigen maximalen Imperfektion für Platten, deren Länge mehr als das Doppelte ihrer Breite beträgt, was auf die in dieser Arbeit untersuchten Fälle zutrifft.

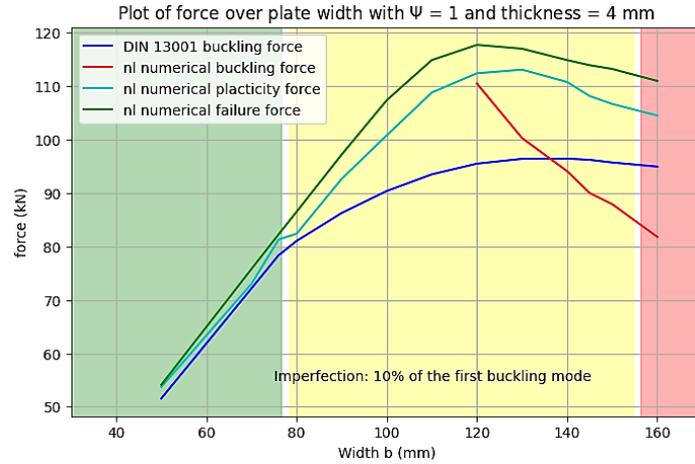


Abbildung 33: Gegenüberstellung der nach der 13001 berechneten Beullast und des Nachbeulverhaltens der druckbelasteten Platte mit 10 % vom ersten Beulmode als Imperfektion.

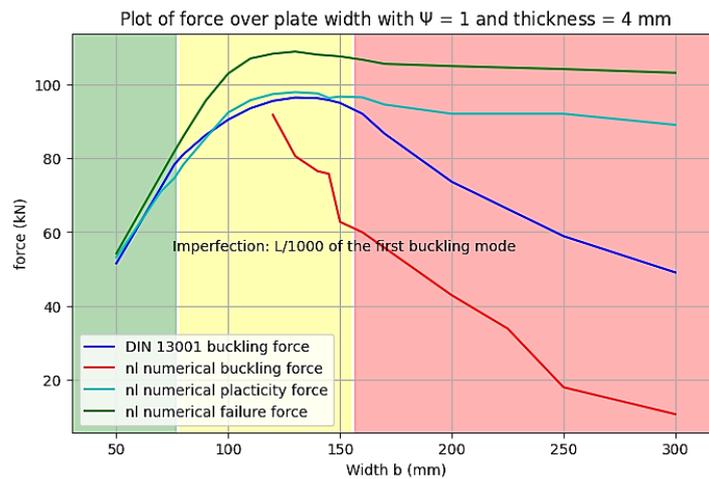


Abbildung 34: Gegenüberstellung der nach der 13001 berechneten Beullast und des Nachbeulverhaltens der druckbelasteten Platte mit L/1000 vom ersten Beulmode als Imperfektion.

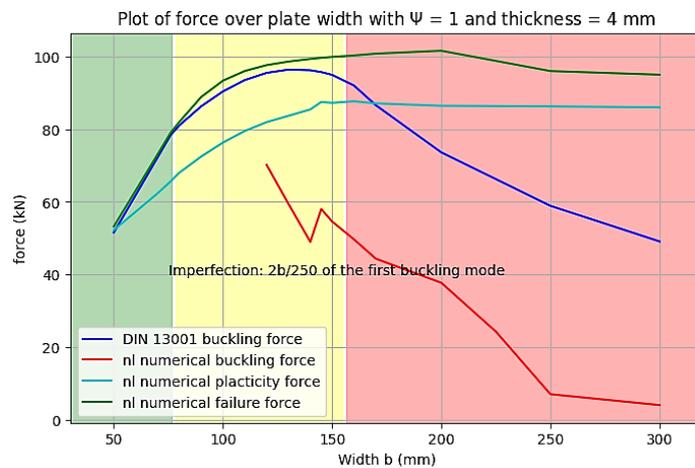


Abbildung 35: Gegenüberstellung der nach der 13001 berechneten Beullast und des Nachbeulverhaltens der druckbelasteten Platte mit $2b/250$ vom ersten Beulmode als Imperfektion.

Wie in Abbildungen 33, 34 und 35 ersichtlich ist, fällt die numerisch bestimmte Beullast bei Verwendung großer Imperfektionen deutlich ab. Der Beginn des Beulens wurde dabei so definiert, dass die Plattensteifigkeit um mehr als 1 % sinkt. Aufgrund der großen aufgebrauchten Imperfektion fiel die Plattensteifigkeit zu Beginn kontinuierlich ab, sodass kein eindeutig sprunghafter Abfall und damit kein klar definierter Beulbeginn festgestellt werden konnte. Vielmehr nahm die aufgebrauchte Deformation stetig zu. Dieses Verhalten ist in der Abbildung 36 für die Steifigkeit von einer Platte mit einer Breite von 130 mm und einer Dicke von 4 mm für unterschiedliche Größenordnung der Imperfektion dargestellt.

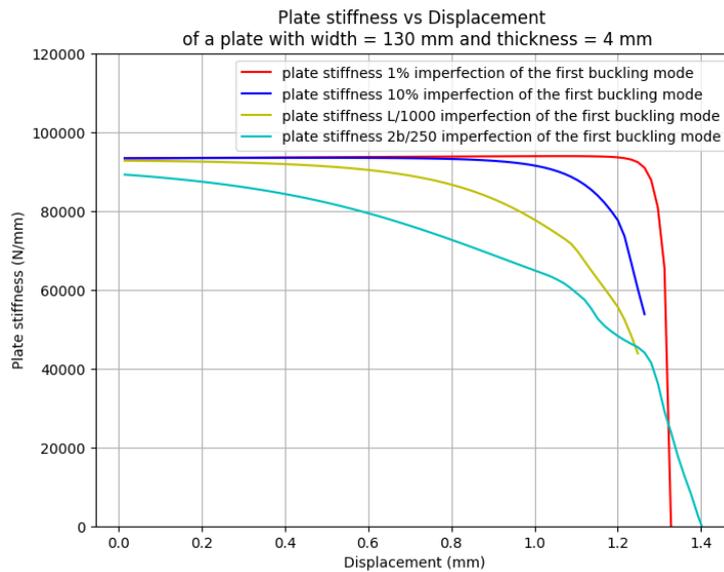


Abbildung 36: Die Steifigkeit einer Platte mit $b = 130$ mm und $t = 4$ mm für unterschiedliche Größenordnung der Imperfektionen.

In einzelnen Fällen könnte argumentiert werden, dass die Kraft, bei der erstmal die Platte plastiziert oder auch die Kraft, bei der die Platte versagt, bei bestimmten Schlankheitsgraden, wo die Norm die Fließgrenze in die Berechnung der Grenzspannung einbezieht, eine bessere Übereinstimmung mit den nach der Norm berechneten Beullasten liefern. Allerdings lassen sich diese Beobachtungen nicht verallgemeinern, da sie vom Spannungsverhältnis abhängen und bei unterschiedlichen Spannungsverhältnissen keine bessere Übereinstimmung erzielt wird.

4.1.4.2 Nachbeulanalyse der rein Biegebeanspruchten Platte

Anschließend wurde das Nachbeulverhalten der unter Biegebeanspruchung stehenden Platte mit dem Spannungsverhältnis $\psi = -1$ untersucht, um auch in diesem Fall einen Vergleich zwischen den normbasierten Berechnungen und den numerischen Ergebnissen

zu ermöglichen und die Norm besser nachvollzuziehen. Hier wurde ebenfalls 1 % vom ersten Eigenmode als die Imperfektion auf die Geometrie aufgebracht.

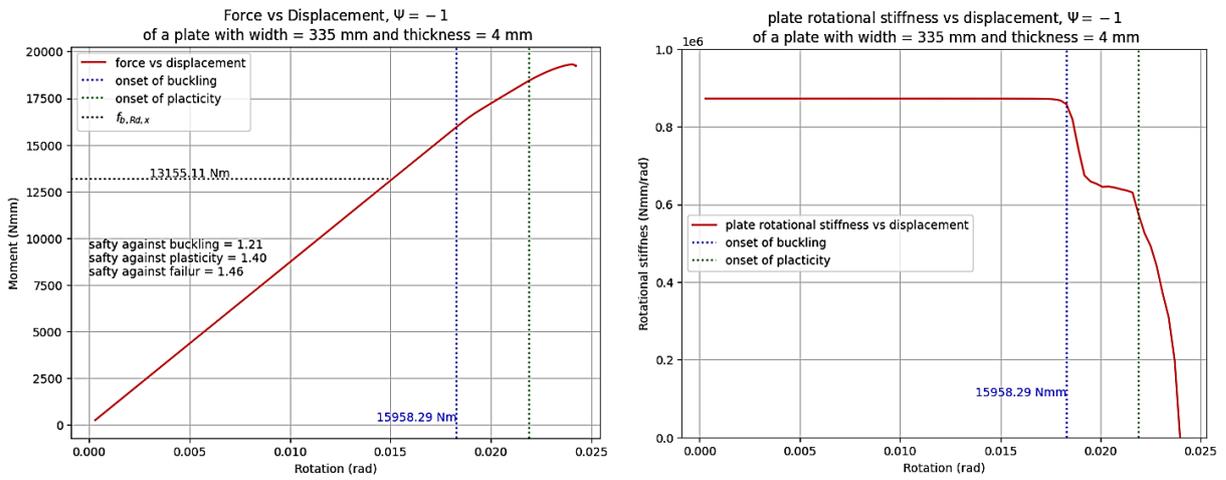


Abbildung 37: Das Nachbeulverhalten der biegebeanspruchten Platte $\psi = -1$ mit Breite = 335 mm und Dicke = 4 mm.

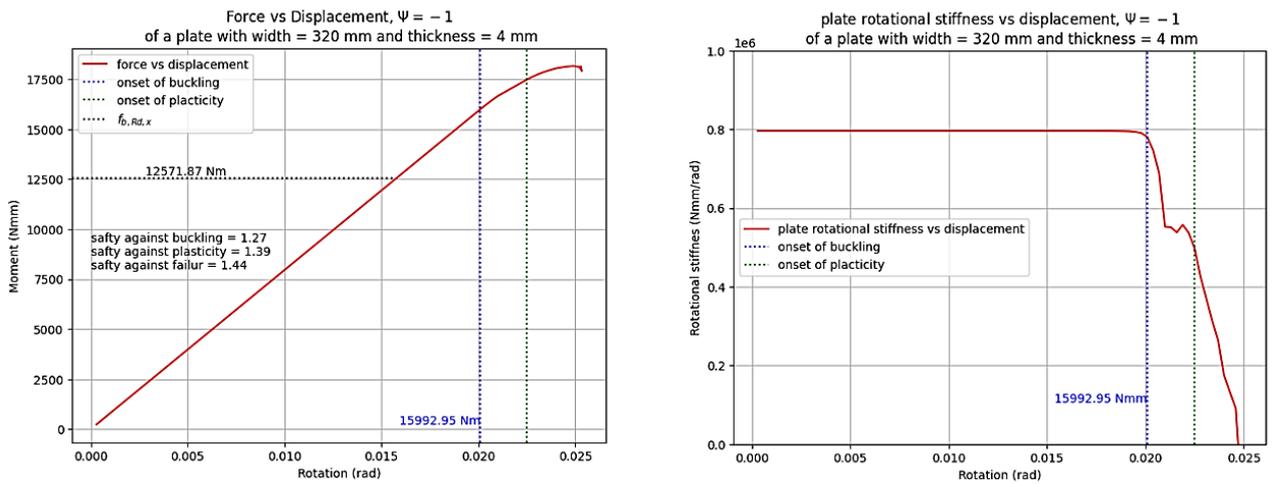


Abbildung 38: Das Nachbeulverhalten der biegebeanspruchten Platte $\psi = -1$ mit Breite = 320 mm und Dicke = 4 mm.

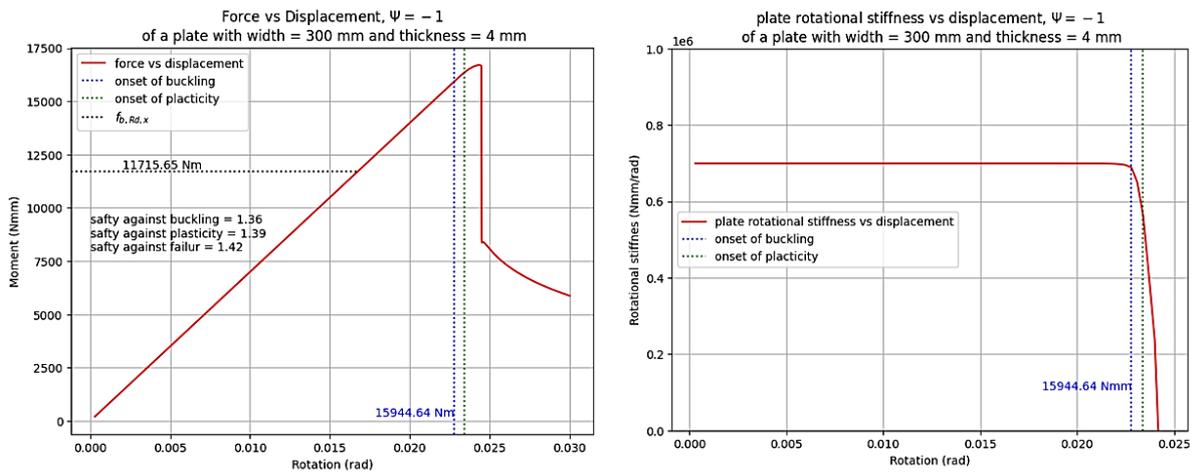
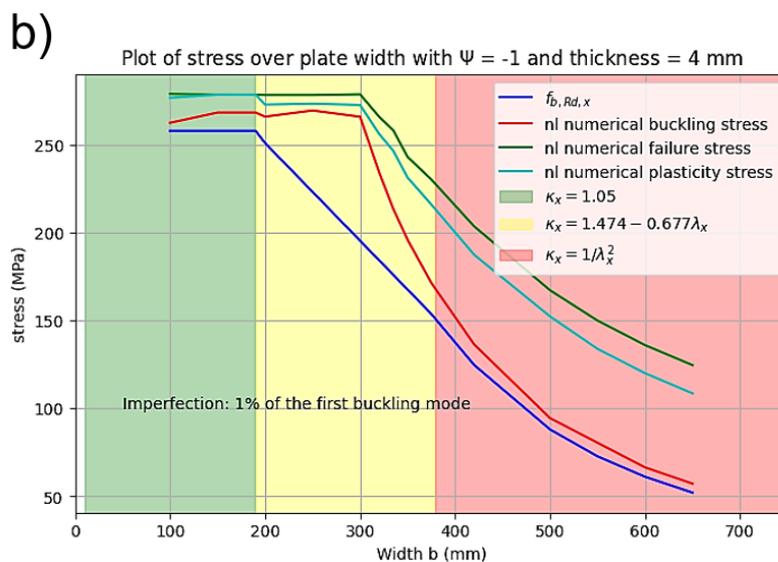
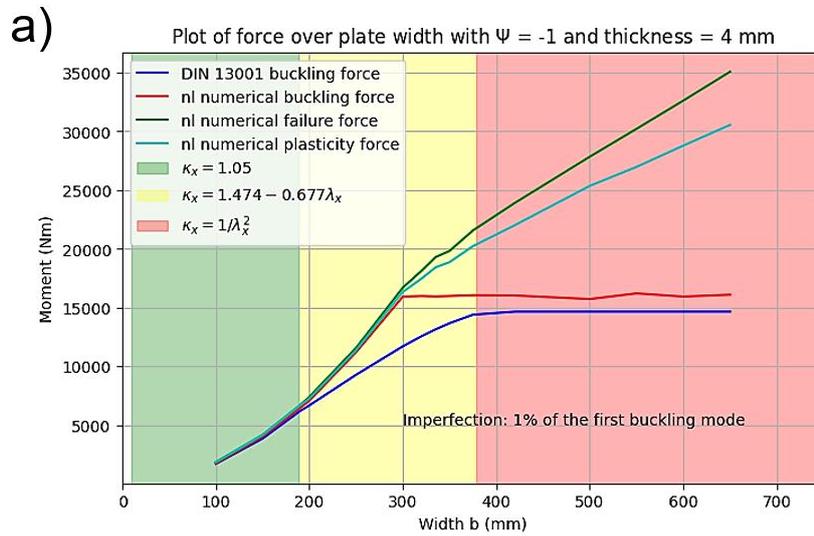


Abbildung 39: Das Nachbeulverhalten der biegebeanspruchten Platte $\psi = -1$ mit Breite = 300 mm und Dicke = 4 mm.

Die Analysen für die Platten mit Biegebelastung wurden im gelben Bereich durchgeführt. In diesem Bereich wird die σ_{el-pl}^* nach der Norm 13001 mit den Gleichungen (2.26) und (2.28) berechnet. Aus den Abbildungen 37, 38 und 39 ist ein ähnliches Verhalten wie bei der Druckbeanspruchung zu erkennen: Mit abnehmender Plattenbreite vergrößert sich der Unterschied zwischen σ_{el-pl}^* und der numerisch ermittelten Beullast. Außerdem plastifiziert die Platte näher an der Beullast und Versagen passiert schneller nach dem Plastizieren.

Auch für den Fall der Biegebeanspruchung wurde eine systematische Parameterstudie mit 25 Platten mit unterschiedlichen Breiten und einer Dicke von 4 mm durchgeführt, um die Ergebnisse nach Norm mit der numerisch ermittelten Beullast vergleichen zu können.



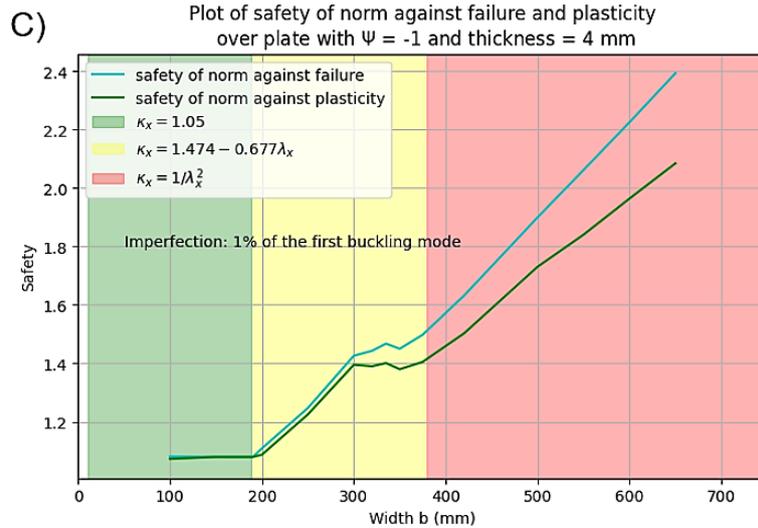


Abbildung 40: Gegenüberstellung der Bemessungsdruckspannung und des Nachbeulverhaltens der biegebelasteten Platte.

Die Ergebnisse zeigen ein ähnliches Verhalten wie bei der Platte mit reiner Druckbelastung. Im roten Bereich stimmen σ_{el}^* nach Norm gut mit den numerisch ermittelten Beulspannungen überein. Außerdem bleibt das Beulmoment bei verschiedenen Plattenbreiten im roten Bereich fast gleich. Im gelben Bereich nimmt aber der Unterschied zwischen $\sigma_{el,pl}^*$ und der numerischen Analyse deutlich zu. Ab einer bestimmten Breite treten elastisches Beulen, Plastifizieren und totales Versagen sehr dicht nacheinander auf, was bedeutet, dass die Struktur in diesem Bereich nach dem Beulen nur noch geringe Reserven besitzt und schnell versagt.

Zur besseren Vergleichbarkeit wurde die Darstellung der Sicherheitsfaktoren gegen Versagen für Druck- und Biegebeanspruchung dimensionslos gewählt. Anstelle der Plattenbreite wurde der Schlankheitsgrad λ_x als Abszisse verwendet, da dieser die maßgebende geometrische Einflussgröße für das Beulverhalten darstellt und die Ergebnisse somit auf unterschiedliche Plattendicken und Materialkombinationen übertragbar macht.

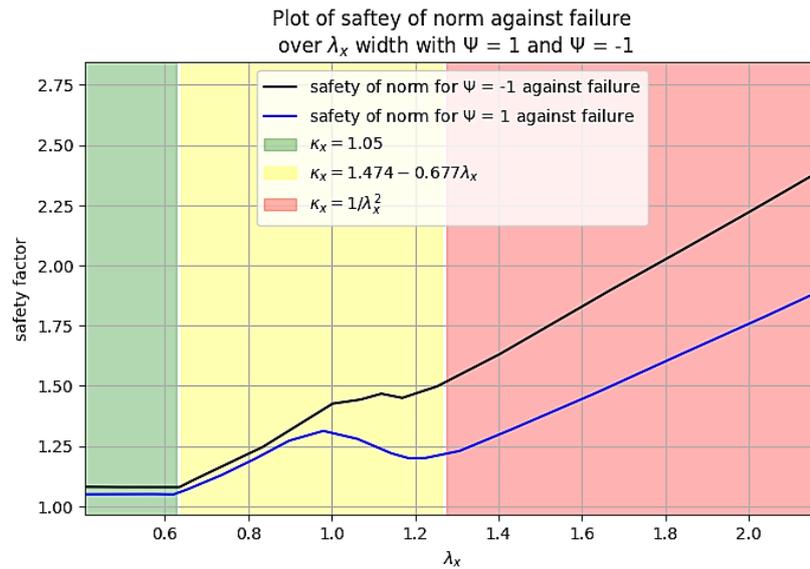


Abbildung 41: Von der Norm berechneten Sicherheit gegen numerisch ermitteltes Versagen für $\psi=1$ und $\psi=-1$.

Die Abbildung 41 zeigt, dass sich der Sicherheitsfaktor in Abhängigkeit von λ_x für beide Beanspruchungsarten unterschiedlich stark verändert. Besonders im gelben Bereich, in dem die Norm eine lineare Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad annimmt, steigen die Sicherheitsfaktoren an. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Norm in diesem Übergangsbereich bewusst konservativer rechnet, um das Risiko eines schnellen Versagens nach dem Plastifizieren zu minimieren. Aber der Sicherheitsfaktor schwankt auch. Er fällt stellenweise leicht ab. Die Norm verwendet im gelben Bereich eine lineare Abhängigkeit der Bemessungsdruckspannung vom Schlankheitsgrad aber das tatsächliche Nachbeulverhalten der Struktur hängt nichtlinear vom Schlankheitsgrad ab.

4.2 Schalenbeulen

Viele Bauteile weisen gekrümmte Geometrien auf. Die Beullast ist bei schwach gekrümmten Platten im Vergleich zu ebenen Platten sowohl unter axialer Druckbeanspruchung als auch unter Schubbelastung erhöht. Allerdings haben Gekrümmte Bauteile ein anderes Stabilitätsverhalten als ebene Platten [23]. Die Analysen sollten dabei helfen, die Modellierung von Zylinderschalen und gekrümmten Platten unter axialer Belastung besser zu verstehen. Besonders wichtig war dabei die richtige Umsetzung der Randbedingungen. Die numerisch ermittelten Ergebnisse wurden mit den analytischen Lösungen verglichen, um zu überprüfen, ob das Model richtig aufgebaut ist, damit das Model anschließend für komplexere Analysen benutzt werden kann.

4.2.1 Zylinderschalenbeulen

Zur Erzeugung der Zylinderschale wird zunächst ein Kreis mit dem gewünschten Radius als Parameter definiert. Dieser wird anschließend entlang der axialen Richtung mit der vorgegebenen Zylinderlänge extrudiert und das Zylindermodell entsteht. Siehe Abbildung 42.

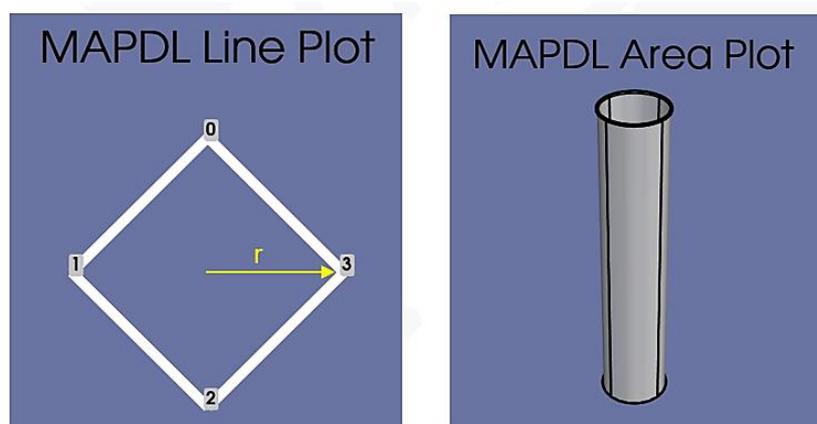


Abbildung 42: Die erzeugte Zylindergeometrie in MAPDL PyAnsys.

Für die Vernetzung des Zylinders wurde für einen Zylinder mit einem Radius von 200 mm 20 Elementen pro Radius gewählt. Die Elementgröße ist dabei 10 mm. Diese Anzahl von Elementen wurde als Referenz gewählt. Für Zylinder mit anderen Radien bleibt die Anzahl der Elemente konstant, wodurch sich die Größe der Elemente ändert.

Für die Definition der Randbedingungen wird ein globales zylindrisches Koordinatensystem definiert. Der obere und untere Rand des Zylinders werden entsprechend der Literatur in tangentialer und radialer Richtung gesperrt [22]. Zusätzlich wird Die Verschiebung der Symmetrielinie des Zylinders in axialer Richtung fixiert (mit blau gekennzeichnet). Siehe Abbildung 43.

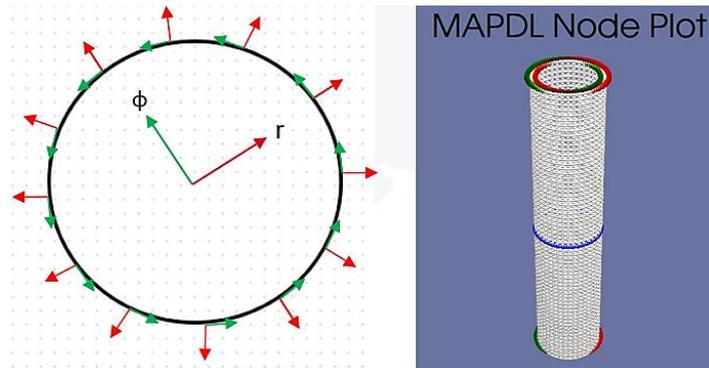


Abbildung 43: Definition der Randbedingungen eines Zylinders. Die out-of-plane Verschiebung der Knoten sind in Richtung der skizzierten roten und grünen Feilen gesperrt.

Der Zylinder wird am oberen und unteren Rand mittels einer Linienlast druckbelastet, damit eine gleichmäßige axiale Beanspruchung im Zylinder möglich wird.

Eine lineare Eigenwertanalyse wird für zehn verschiedene Zylinderradien durchgeführt, dabei wird die Zylinderwandstärke konstant bei 2 mm gelassen und beachtet, dass es sich für alle gewählten Radien nach Gleichung (2.11) um eine „mittellange Zylinderschale“ handelt. Die ermittelten Beulspannungen werden anschließend mit den analytischen Lösungen verglichen. Die analytischen Lösungen werden mit Gleichung (2.12) bzw. (2.13) ermittelt.

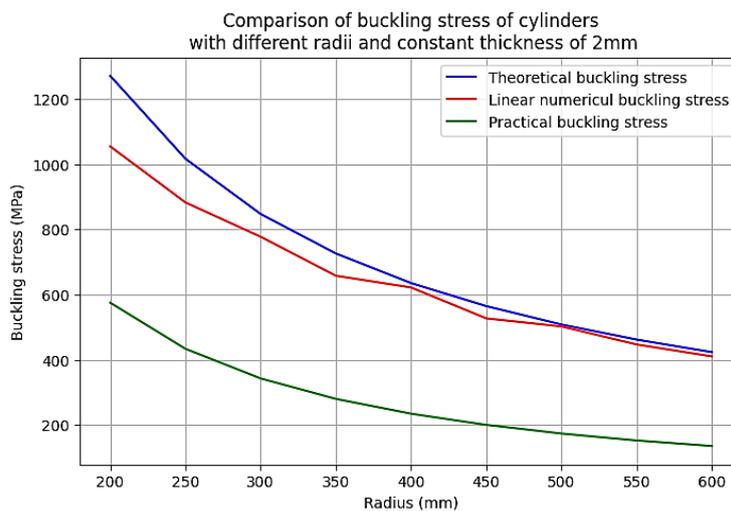


Abbildung 44: Vergleich der numerischen Beulspannung der Zylinderschale mit der analytischen Lösung.

Wie in Abbildung 44 dargestellt ist, liefert die lineare Eigenwertanalyse tendenziell konservative Ergebnisse im Vergleich zu den theoretischen analytischen Beulspannungen σ_{th} , insbesondere bei kleinen Zylinderradien, bei denen die Krümmung stärker ausgeprägt ist. Da die Anzahl der Elemente für unterschiedliche Zylinderradien gleich gewählt wurde, kann die Krümmung der Zylinderschalen für kleinere Zylinderradien nicht gut abgebildet werden. Deswegen steigt der Unterschied zwischen den analytischen Lösungen und den

numerischen Ergebnissen mit kleiner werdendem Zylinderradius. Die maximale Differenz zwischen numerischen Lösungen und analytisch berechneten Beulspannungen ist 16 %. Die Definition der Randbedingungen hat bei Schalenstrukturen einen deutlich größeren Einfluss auf das Beulverhalten als bei ebenen Platten, insbesondere die Art und Weise, wie die in der Literatur beschriebenen Randbedingungen numerisch umgesetzt werden, beeinflusst die berechnete Beulspannung maßgeblich.

Mit zunehmendem Radius verringert sich dieser Unterschied deutlich, da bei großen Radien die Zylinderschale sich mehr wie eine ebene Platte verhält und die Sensitivität gegenüber Imperfektionen sinkt. Da Zylinderschalen eine hohe Imperfektionsempfindlichkeiten aufweisen, wurde ergänzend die praktische Beulspannung σ_{pr} berücksichtigt. Die Imperfektionen sind in σ_{pr} erfasst. σ_{th} geht von einer perfekten Schale aus, deshalb ist für die Bemessungsgrundlage σ_{pr} relevant. Diese liegt jedoch signifikant unter der numerisch ermittelten Beulspannung für perfekte Zylinderschalen ohne Imperfektionen.

Um den Einfluss geometrischer Imperfektionen auf das Beulverhalten detaillierter zu untersuchen, wurde für jede Zylinderschale jeweils 1 % bzw. 2 % des entsprechenden R/t des ersten Beulmodes als Imperfektion auf die Geometrie aufgebracht. Anschließend wurde eine verschiebungsgesteuerte nichtlineare statische Analyse durchgeführt, um das Nachbeulverhalten der Struktur zu erfassen. Für die Analyse wurde ein elastisches Materialverhalten angenommen, da in diesem Fall nur elastisches Beulen von Interesse ist.

Zwei Pilot-Nodes wurde auf der Zylinderachse an der oberen und unteren Stirnseite definiert. Diese wurden mittels Multi-Point Constraints (MPCs) mit den jeweiligen Randknoten der Zylinderschale verbunden. Die axiale Verschiebung wurde anschließend über die Pilot-Nodes aufgebracht, um eine gleichmäßige Lastverteilung im Zylinder zu gewährleisten. Als Kriterium für den Beginn des Beulens wurde eine Steifigkeitsreduktion von 1 % bezüglich der Anfangssteifigkeit definiert. In Abbildung 45 ist die Steifigkeit einer Zylinderschale mit einem Radius von 200 mm, einer Dicke von 2 mm und einer Länge von 1000 mm in Abhängigkeit der Verschiebung des Pilot-Nodes dargestellt. Das instabile Nachbeulverhalten dieser Zylinderschale ist in Abbildung 46 aus der Last-Verschiebungskurve ersichtlich. Die Zylinderschale weist ein lineares Vorbeulverhalten auf und nach dem Beulen ist ein abruptes Versagen erkennbar.

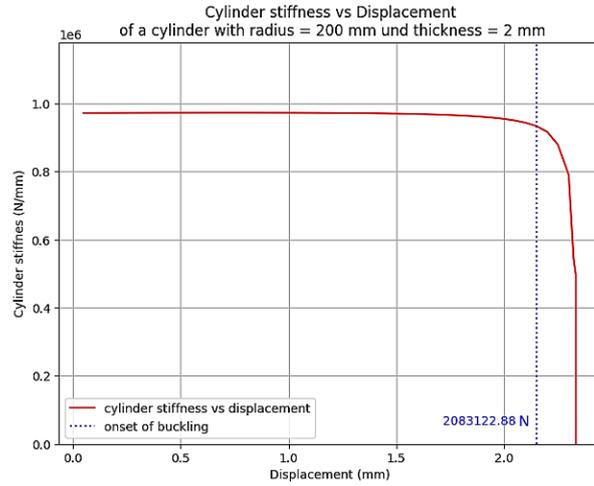


Abbildung 45: Die Zylindersteifigkeit gegen Pilot-Node Verschiebung von einem Zylinder mit $R = 200$ mm, $t = 2$ mm und $L = 1000$ mm.

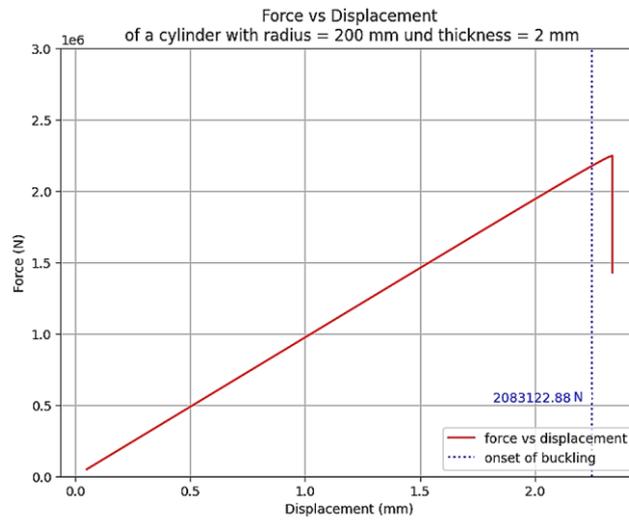


Abbildung 46: Last-Verschiebungskurve bei der Nachbeulanalyse von einem Zylinder mit $R = 200$ mm, $t = 2$ mm und $L = 1000$ mm.

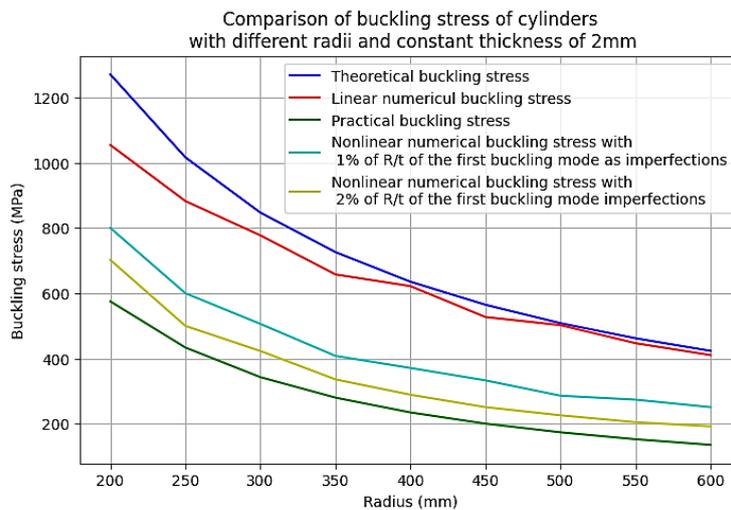


Abbildung 47: Vergleich der nichtlinearen numerischen Beulspannung der Zylinderschale mit der analytischen Lösung.

Wie in Abbildung 47 ersichtlich ist, ist die Beulspannung der nichtlinearen Analyse kleiner als die der Eigenwertanalyse, da hier auch der Einfluss von geometrischen Imperfektionen berücksichtigt wurde. Eine größere Imperfektion führt wie zu erwarten auch zu einer stärkeren Abnahme der Beulspannung.

In der Regel ist die analytische praktische Beulspannung σ_{pr} aufgrund der hohen Imperfektionsempfindlichkeit von Zylinderschalen relevant und wird als Bemessungsgrundlage verwendet. Für die numerischen Berechnungen soll eine geeignete Größenordnung von R/t als Imperfektion verwendet werden, um eine Überschätzung der Beulspannung des Bauteils zu vermeiden.

4.2.2 Beulverhalten von Gekrümmten Platten

Das Beulverhalten gekrümmter Platten wurde untersucht, da sie im Vergleich zu ebenen Platten eine höhere Beulspannung aufweisen. Es wurde untersucht, wie am besten die gekrümmten Platten modelliert und die Randbedingungen am besten gemäß Normvorgaben modelliert werden sollen. Dies bildet die Grundlage, um gekrümmte Platten in komplexeren Geometrien realistisch darzustellen. Zudem wird der Einfluss der Krümmung auf das Beulverhalten untersucht, um mögliche Optimierungspotenziale für Teleskopstrukturen abzuleiten.

Zur Modellierung der gekrümmten Platte wurde zunächst ein Bogen mit einem als Parameter vorgegebenen Krümmungsradius und zwei definierten Endpunkten generiert. Dieser Bogen wurde anschließend über eine definierte Höhe extrudiert, sodass eine gekrümmte Plattengeometrie entstand. Bei der Modellierung der gekrümmten Platten wurde beachtet, dass es sich für Krümmungsparameter $\frac{b^2}{rt} > 12$ um eine mittellange Teilzylinderschale handelt. Siehe Abbildung 50.

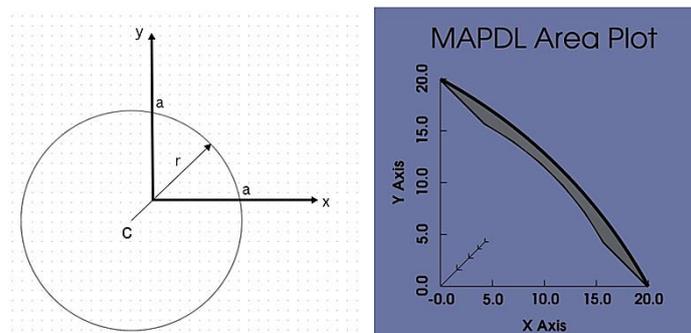


Abbildung 48: Definition der gekrümmten Platte in MAPDL PyAnsys.

Für die Definition der Randbedingungen wurde ein lokales zylindrisches Koordinatensystem definiert. Dazu wurde zunächst der Mittelpunkt des Bogens bestimmt, dieser Mittelpunkt wurde als Ursprung des lokalen Koordinatensystems verwendet. Da in der Literatur die analytische Berechnung der Beulspannung für gekrümmte Platten mit radial gestützten Rändern angegeben ist [23], wurde die Verschiebung aller vier Plattenränder im lokalen zylindrischen Koordinatensystem in radialer Richtung fixiert. Zur vollständigen Lagerung im Raum wurde zusätzlich die Mittellinie der Platte über die Plattenhöhe hinweg in axialer Richtung gesperrt (mit blau gekennzeichnet). Der Mittelpunkt am unteren Plattenrand wurde außerdem tangential fixiert, damit die Platte eine eindeutige Lage im Raum hat. Siehe Abbildung 49.

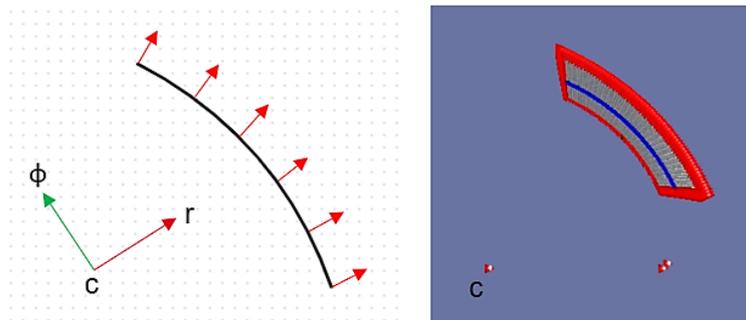


Abbildung 49: Definition der gelenkigen Lagerung der gekrümmten Platte. Die radiale Verschiebung der Knoten aller freien Ränder der gekrümmten Platte ist in Richtung der skizzierten roten Feile gesperrt.

Die Belastung der gekrümmten Platte erfolgt über eine Linienlast, die entlang des oberen und unteren Randes aufgebracht wird, um eine gleichmäßige Druckbeanspruchung entlang der Plattenhöhe zu erzeugen.

Zur Bestimmung der Beulspannung wird eine lineare Eigenwertanalyse durchgeführt. Die numerisch ermittelten Ergebnisse werden anschließend mit den analytischen Lösungen in Abhängigkeit von der Zylinderlänge nach Gleichungen (2.12), (2.18) und (2.20) verglichen.

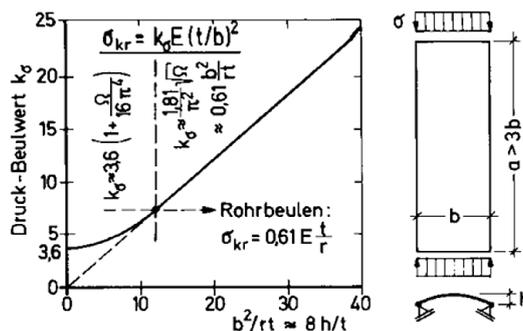


Abbildung 50: Beulwerte für die Kreiszyklindrische Teilschale mit radial gestützten Rändern [23].

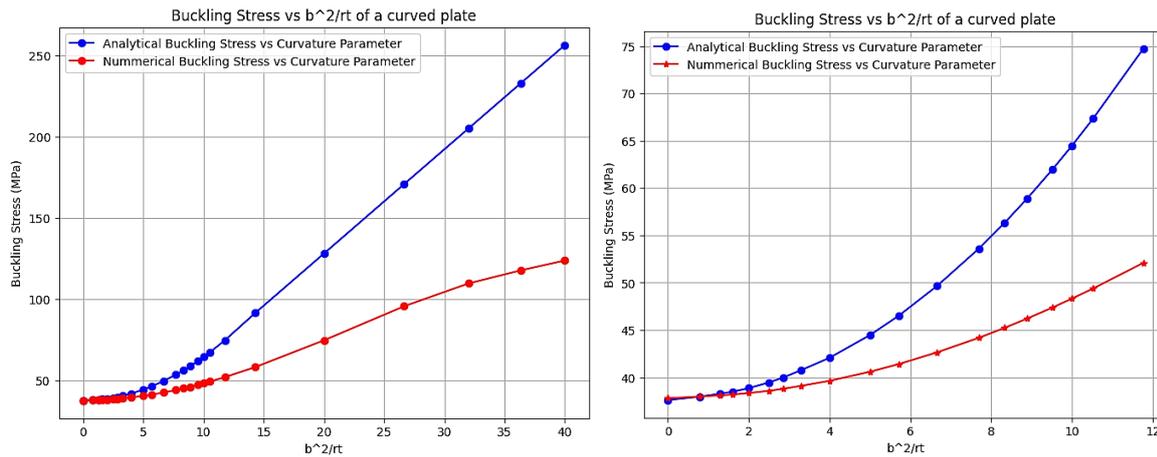


Abbildung 51: Vergleich der numerischen Beulspannung mit den analytischen Beulspannung für Teilzylinderschalen.

Wie in Abbildung 50 ersichtlich ist, gibt es zwei Bereiche für die Berechnung der Beulspannung bei Teilzylinderschalen: für Krümmungsparameter kleiner als 12 wird die Struktur unter Verwendung von Gleichung (2.20) wie eine schwach gekrümmte Platte behandelt. Ist der Krümmungsparameter größer als 12, wird die Teilzylinderschale wie eine volle Zylinderschale betrachtet, und es wird für die Mittellange Zylinderschale Gleichung (2.12) für die Berechnung der Beulspannung verwendet.

Wie in Abbildung 51 ersichtlich ist, vergrößert sich der Unterschied zwischen den numerisch ermittelten Beulspannungen und den analytischen Lösungen mit steigendem Krümmungsparameter. Insbesondere in dem Bereich, in dem Rohrbeulen angenommen wird, ist die Abweichung deutlich größer.

Zur Modellierung dieser gekrümmten Platten werden zwei fixe Endpunkte definiert, wodurch die Breite der Platten konstant bleibt. Siehe Abbildung 52. Der Krümmungsparameter wird erhöht, indem der Krümmungsradius verringert wird. Da die Beulspannung indirekt proportional zum Krümmungsradius ist, steigt die Beulspannung mit sinkendem Krümmungsradius, d. h. mit wachsendem Krümmungsparameter.

$$a = \text{konst.} \rightarrow b = \text{konst.}$$

$$r \downarrow \rightarrow \frac{b^2}{rt} \uparrow$$

$$\sigma = kE \frac{t}{r} \quad \frac{b^2}{rt} \uparrow \rightarrow \sigma \uparrow$$

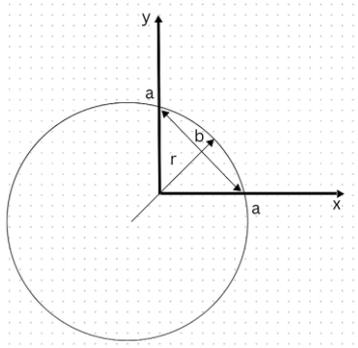


Abbildung 52: Modellierung der gekrümmten Platte

Zur weiterführenden Analyse wurde in Abbildung 53 zusätzlich die numerisch berechnete Beulspannung des zugehörigen vollständigen Zylinders sowie die entsprechende praktische analytische Beulspannung dargestellt.

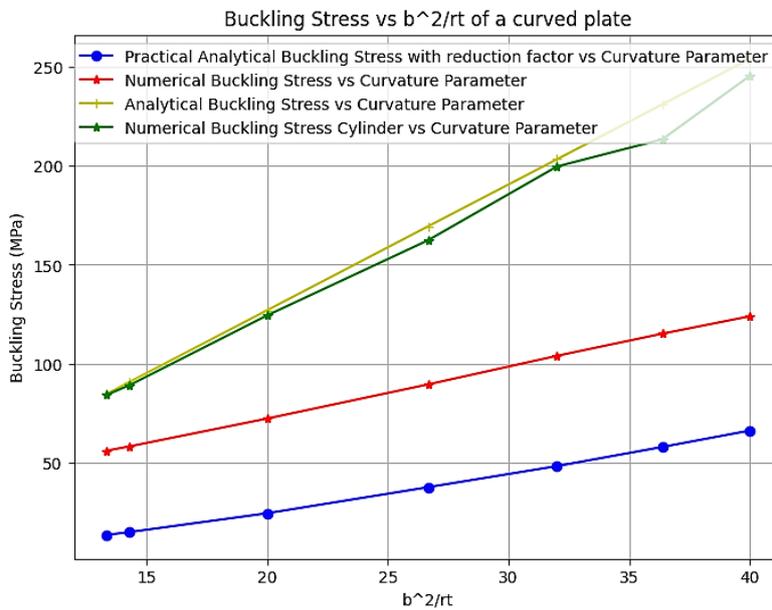


Abbildung 53: Vergleich der numerischen Beulspannung der gekrümmten Platte und des zugehörigen Zylinders mit den analytischen Lösungen.

Wie zu erwarten war, liegt die praktische Beulspannung unterhalb der numerisch ermittelten Beulspannung für die gekrümmte Platte. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die praktische Beulspannung einen Abminderungsfaktor berücksichtigt, der aus experimentellen Untersuchungen oder detaillierten numerischen Simulationen abgeleitet wurde [22]. Auffällig ist, dass die numerische Beulspannung des zugehörigen vollen Zylinders eine gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung zeigt, während dies für die gekrümmte Platte bei steigendem Krümmungsparameter nicht der Fall ist. Dies deutet darauf hin, dass die in der Literatur verwendete Beulformel für Zylinderschalen (Rohrbeulen) ab einem

Krümmungsparameter von 12 zwar für vollständige Zylinder anwendbar ist, jedoch nicht uneingeschränkt für Teilzylinderschalen verwendet werden kann.

Die numerischen Ergebnisse zeigen, dass die Beulspannung der gekrümmten Platte gegen die Hälfte der Beulspannung der entsprechenden Kreiszylinderschale konvergiert. Der Unterschied ist größtenteils auf die unterschiedlichen Randbedingungen zurückzuführen. Während die Kreiszylinderschale lediglich zwei freie Ränder hat, besitzt die gekrümmte Platte vier freie Ränder. Dadurch können sich die zirkumferentiellen Membranspannungen in der gekrümmten Platte anders ausbilden als in der vollständig geschlossenen Zylinderschale, was das Beulverhalten beeinflusst [36].

Wie in Abbildung 54 ersichtlich ist, zeigen die numerisch ermittelten Beulspannungen der Teilzylinderschale eine deutlich bessere Übereinstimmung mit der von Stowell entwickelten Formel. Siehe Gleichung (2.21) Nach Stowell ergibt sich für Teilzylinderschalen mit großem Krümmungsradius eine Beulspannung, die etwa der Hälfte derjenigen eines vollständigen Zylinders mit gleichem Radius entspricht [24].

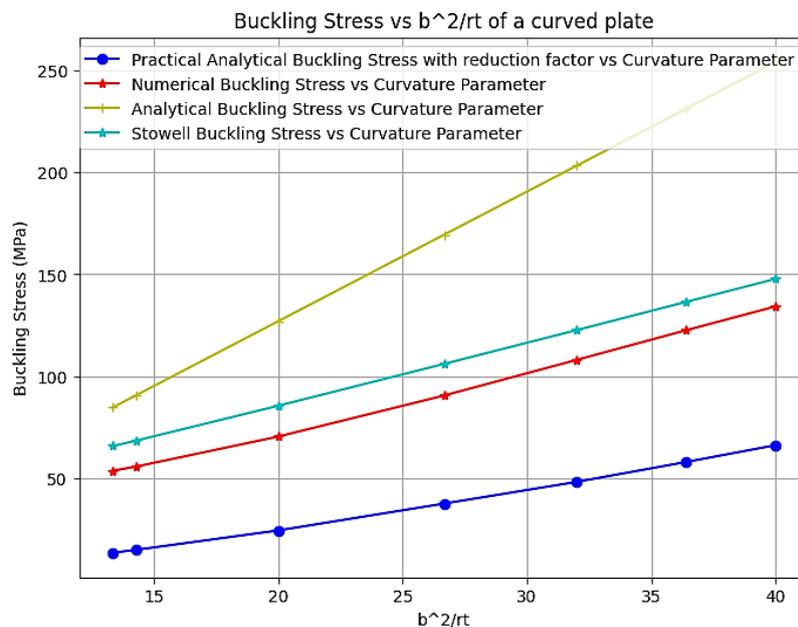


Abbildung 54: Vergleich der numerisch ermittelten Beulspannungen für Teilzylinderschalen mit verschiedenen analytischen Lösungen.

Da die Randbedingungen bei gekrümmten Platten einen erheblichen Einfluss auf das Beulverhalten haben und die gelenkige Lagerung in der Literatur nicht eindeutig hinsichtlich ihrer numerischen Umsetzung definiert ist, werden in den folgenden Analysen die freien Ränder der gekrümmten Platte sowohl in radialer als auch in tangentialer Richtung fixiert. Siehe Abbildung 55.

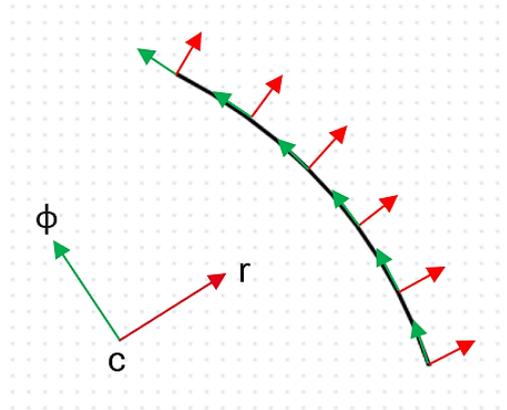


Abbildung 55: Die radialen und tangentialen Verschiebungen der Knoten aller freien Ränder der gekrümmten Platte sind in Richtung der skizzierten roten und grünen Pfeile gesperrt.

Zur Validierung dieses Ansatzes wurde eine Parameterstudie durchgeführt, in der insgesamt 32 gekrümmte Platten untersucht wurden. Dabei blieben die Krümmungswinkel konstant bei 30° , 45° , 60° und 90° und für jeden Krümmungswinkel wurde unterschiedliche Krümmungsradien betrachtet. Für jede Variante wurde der zugehörige Krümmungsparameter, wie dessen Variablen in der Abbildung 56 definiert sind, berechnet und die numerische Beulspannung ermittelt. Zwei Varianten der Randbedingungen wurden untersucht: Einerseits Varianten mit ausschließlich radial gesperrten Rändern, andererseits Varianten mit radial und zusätzlich tangential fixierten Rändern.

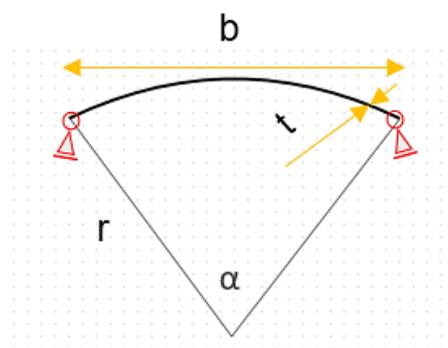


Abbildung 56: Definition der gekrümmten Platte für die Parameterstudie für die richtige Definition der gelenkigen Lagerung.

Bei diesem Modellierungsansatz bleibt der Krümmungswinkel konstant, während sich die Breite der gekrümmten Platte und der Krümmungsradius ändern. In diesem Fall ist der Krümmungsparameter proportional zum Krümmungsradius, d. h., wenn der Krümmungsradius steigt, steigt auch der Krümmungsparameter. Da die Beulspannung der Zylinderschale jedoch indirekt proportional zum Krümmungsradius ist, sinkt die Beulspannung hier

mit steigendem Krümmungsparameter. In Abbildung 57 ist die Modellierung für eine gekrümmte Platte mit einer Krümmung von 90° dargestellt.

$$\alpha = 90^\circ \rightarrow \text{Endpunkten} = \text{Krümmungsradius } r$$

$$b = r\sqrt{2} \rightarrow \frac{b^2}{rt} = \frac{2r^2}{rt} = \frac{2r}{t} \propto r$$

$$r \uparrow \rightarrow \frac{b^2}{rt} \uparrow$$

$$\sigma = kE \frac{t}{r} \quad r \uparrow \rightarrow \sigma \downarrow$$

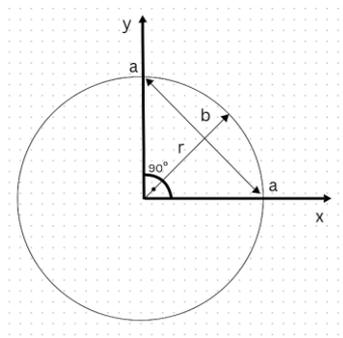


Abbildung 57: Modellierung der gekrümmten Platte $\alpha = 90^\circ$

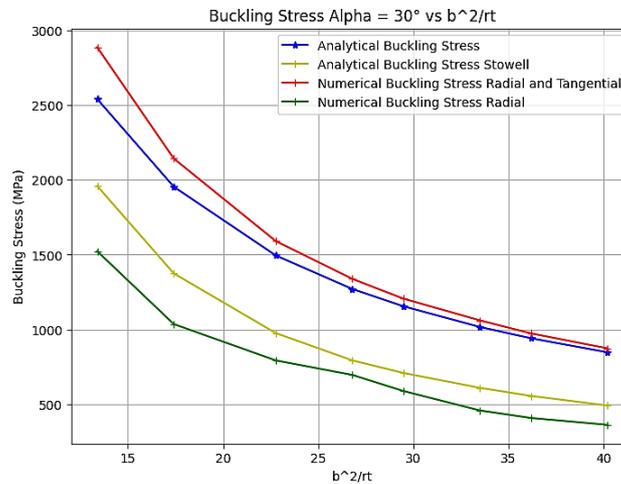


Abbildung 58: Vergleich der numerisch ermittelten Beulspannungen für zwei Varianten der Randbedingungen für radial bzw. radial und tangential fixierte Ränder mit den analytischen Lösungen am Beispiel von Platten mit einem Krümmungswinkel von 30° .

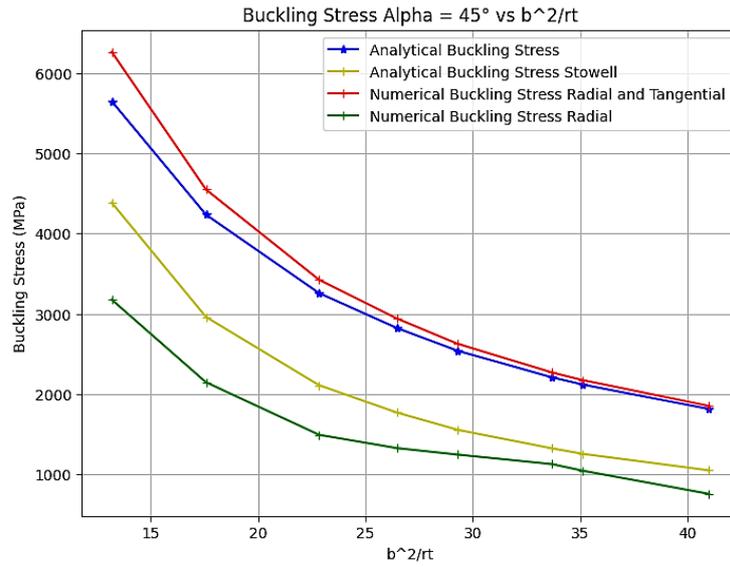


Abbildung 59: Vergleich der numerisch ermittelten Beulspannungen für zwei Varianten der Randbedingungen für radial bzw. radial und tangential fixierte Ränder mit den analytischen Lösungen am Beispiel von Platten mit einem Krümmungswinkel von 45° .

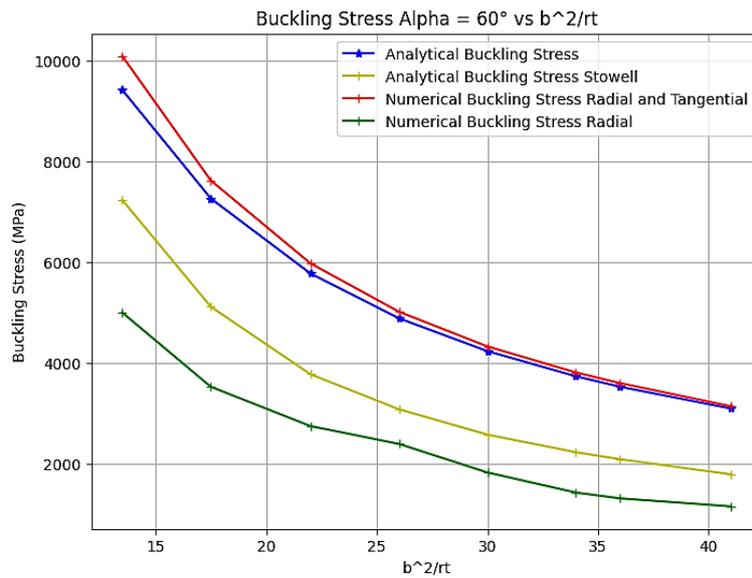


Abbildung 60: Vergleich der numerisch ermittelten Beulspannungen für zwei Varianten der Randbedingungen für radial bzw. radial und tangential fixierte Ränder mit den analytischen Lösungen am Beispiel von Platten mit einem Krümmungswinkel von 60° .

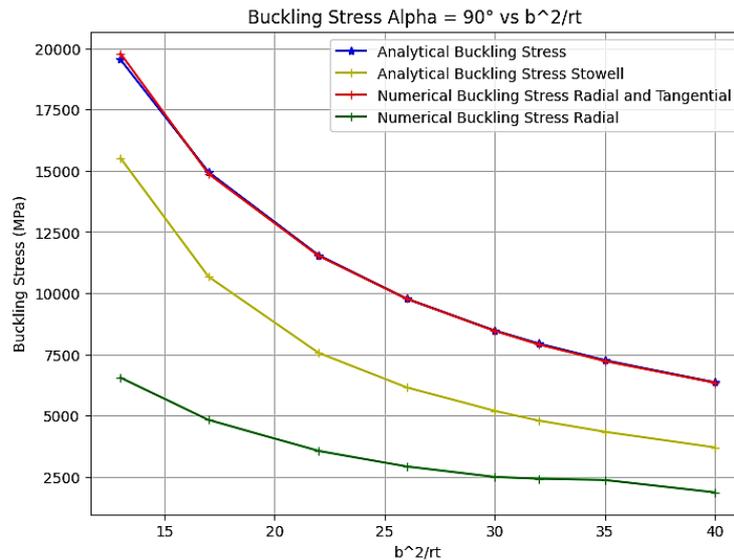


Abbildung 61: Vergleich der numerisch ermittelten Beulspannungen für zwei Varianten der Randbedingungen für radial bzw. radial und tangential fixierte Ränder mit den analytischen Lösungen am Beispiel von Platten mit einem Krümmungswinkel von 90° .

Wie in Abbildungen 58 bis 61 ersichtlich ist, zeigen die numerischen Beulspannungen der gekrümmten Platten mit sowohl radial als auch tangential fixierten Rändern eine deutlich bessere Übereinstimmung mit den analytischen Lösungen. Werden in den numerischen Simulationen lediglich die radialen Verschiebungen der Ränder gesperrt, so kann dies zu einer Reduktion der Membranspannungen in Umfangsrichtung führen und infolgedessen zu einer geringeren Beulspannung. In realen Strukturen wird dieser Effekt aber durch die vollständigen Zylindersegmente bzw. Profilssegmente verhindert. Beim Krümmungswinkel von 90° , bei dem ein Viertelzylinder modelliert wird, kommt das Verhalten der Teilzylinder-schale dem eines vollständigen Zylinders näher, dadurch nähern sich die numerischen Ergebnisse den analytischen Beulspannungen an.

Nachdem das Beulverhalten gekrümmter Platten untersucht und ein geeignetes Modell entwickelt wurde, können diese Platten nun gezielt in komplizierteren Geometrien verwendet werden. Dadurch kann ihr Vorteil von einer erhöhten Beulspannung für komplexere Strukturen systematisch untersucht und genutzt werden.

5 Beulverhalten von Hohlprofilen

Die Untersuchung polygonaler Profile wurde aufgrund ihrer praktischen Relevanz für Teleskopstrukturen durchgeführt. Polygonale Querschnitte bieten eine vorteilhafte Kombination aus Fertigungsfreundlichkeit und Tragfähigkeit. Der Bauraum der Teleskopstrukturen kann durch Polygonale Hohlprofile optimal ausgenutzt werden.

Verschiedene geometrische Parameter wie die Anzahl der Seiten und Kanten des Profils, die Abrundung der Kanten sowie die Krümmung der einzelnen Seiten wurden untersucht, um ihren Einfluss auf das Beulverhalten bei Polygonquerschnitten zu erfassen.

Dieses Verständnis ist wichtig, um die Stabilität von Teleskopstrukturen besser vorhersagen und optimieren zu können.

5.1 Beulverhalten von Polygonen mit unterschiedlicher Anzahl von Seiten

Um den Einfluss der Seitenanzahl sowie des Winkels zwischen benachbarten Flächen auf das Beulverhalten besser zu verstehen, wurde ein parametrisches Polygonmodell entwickelt. In diesem Modell kann die Anzahl der Seiten, der Umkreisradius des Polygons sowie die Höhe des Profils flexibel vorgegeben werden, damit unterschiedliche Geometrien untersucht werden können.

Wie es beispielweise für ein Polygon mit sechs Seiten in der Abbildung 62 dargestellt ist, werden ausgehend von der vorgegebenen Anzahl an Seiten und dem gewünschten Polygonradius zunächst die Eckpunkte des Polygons berechnet und durch gerade Linien miteinander verbunden. Der entstehende Querschnitt wird anschließend um die gewünschte Höhe extrudiert, um das dreidimensionale Profil zu erzeugen. In Abbildung 63 sind einige Polygonprofile mit unterschiedlicher Anzahl an Seiten dargestellt.

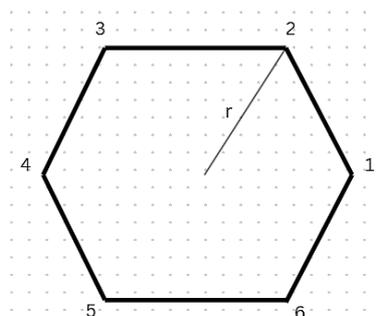


Abbildung 62: Definition des Querschnitts eines Polygons mit sechs Seiten.

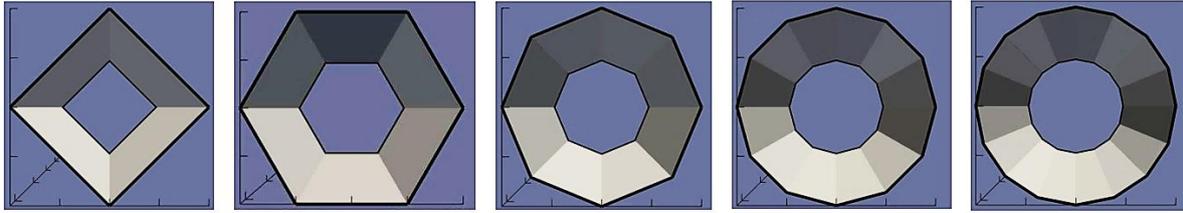


Abbildung 63: Einige untersuchte Polygoneometrien mit unterschiedlicher Anzahl an Seiten.

Um das Polygon gelenkig zu lagern, wurde ein lokales kartesisches Koordinatensystem für jede Seitenfläche, wie es als Beispiel in der Abbildung 64 für ein Polygon mit 4 Seiten dargestellt ist, definiert.

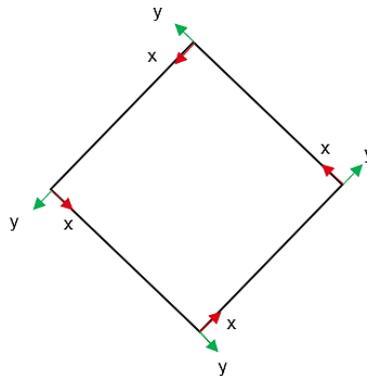


Abbildung 64: Definition des lokalen kartesischen Koordinatensystems für ein Polygon mit 4 Seiten.

In diesem System wird die out-of-plane-Verschiebung (y-Richtung des lokalen kartesischen Koordinatensystems) der freien Ränder gesperrt. Um das Polygonprofil im Raum zu fixieren, wird der mittlere Knoten einer unteren Seitenkante entlang der Seitenrichtung fixiert. Zusätzlich wird die Verschiebung der Mittellinie des Profils in Richtung der Polygonachse gesperrt (mit blau gekennzeichnet). Siehe Abbildung 65.

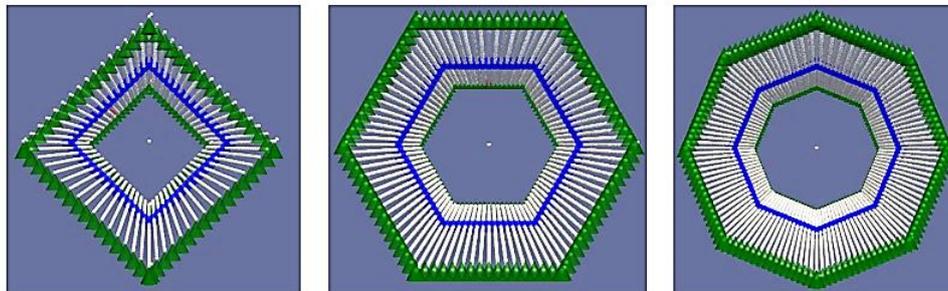


Abbildung 65: Gelenkige Lagerung der Polygone.

Um den Einfluss der Seitenanzahl sowie der Plattenbreite jeder Seite im Polygonprofil auf das Beulverhalten zu untersuchen, werden Eigenwertanalysen durchgeführt. Zusätzlich wird der Einfluss der Lagerung benachbarter Seiten in Abhängigkeit von der Seitenanzahl

und damit vom Winkel zwischen den Einzelplatten analysiert. Zu diesem Zweck wird die analytische Beulspannung unter Verwendung von Gleichung (2.6) berechnet und mit den numerischen Ergebnissen verglichen. Dabei wird jede Seite des Polygons idealisiert als einzelne, an allen vier Rändern gelenkig gelagerte Platte betrachtet.

Die Eigenwertanalyse wurde für zehn Polygonprofile aus Stahl mit gleichem Umkreisradius von 600 mm, gleicher Höhe von 4200 mm und gleicher Wandstärke von 2 mm, jedoch variierender Seitenanzahl von 4 bis 22 durchgeführt. Wie in Abbildung 66 dargestellt, ist der Unterschied zwischen den analytischen und den numerischen Ergebnissen bei einer geringen Seitenanzahl minimal und erreicht bei der höchsten Seitenanzahl maximal -1,5 %. Die Ergebnisse bestätigen die Annahme, dass jede Polygonseite als eine Platte mit gelenkiger Lagerung betrachtet werden darf. Die Ergebnisse bestätigen, dass die angenommene Berechnungsmethode, jede Seite als eigenständige, gelenkig gelagerte Platte zu betrachten, gut anwendbar ist. Selbst wenn die Anzahl der Seiten steigt und sich dadurch die Innenwinkel zwischen den Seiten vergrößern, bleibt diese Vereinfachung sinnvoll, da die angrenzenden Seiten weiterhin wie gelenkig miteinander verbunden wirken. Der zunehmende Unterschied zwischen numerischer und analytischer Beulspannung bei steigender Seitenanzahl kann dadurch erklärt werden, dass in der numerischen Simulation zusätzliche Effekte wie Spannungskonzentrationen an den Kanten durch Behinderung von Poisson Effekt auftreten, die in den analytischen Berechnungen als idealisierte Platten mit gelenkiger Lagerung nicht berücksichtigt sind. Siehe Abbildung 67. Diese Effekte führen zu einer leichten Reduktion der numerischen Beulspannung im Vergleich zu analytischen Lösungen.

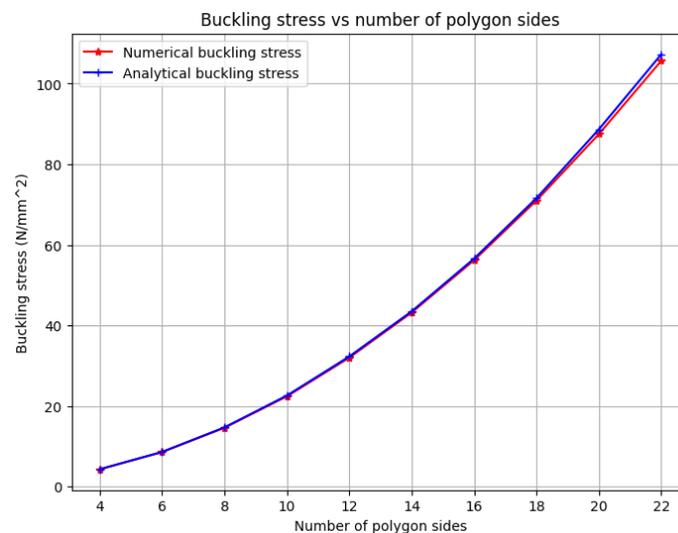


Abbildung 66: Vergleich der Beulspannung für Polygone mit unterschiedlicher Anzahl an Seiten.

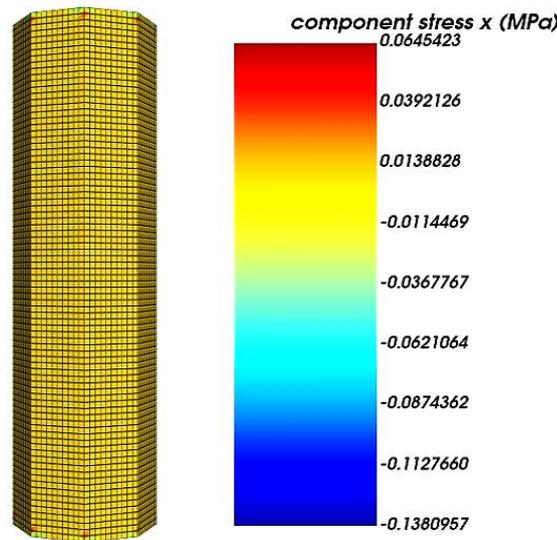


Abbildung 67: Spannungsverteilung in radialer Richtung eines druckbelasteten Polygons mit 8 Seiten.

Weiterhin zeigt Abbildung 66, dass die Beulspannung bei Polygonprofilen mit gleichem Umkreisradius mit zunehmender Anzahl an Seiten ansteigt. Dies kann dadurch erklärt werden, dass bei höherer Seitenanzahl die einzelnen Plattenabschnitte schmäler werden und die Beulfeldbreite kleiner wird. Kleinere Beulfelder weisen in der Regel eine höhere Beulspannung auf.

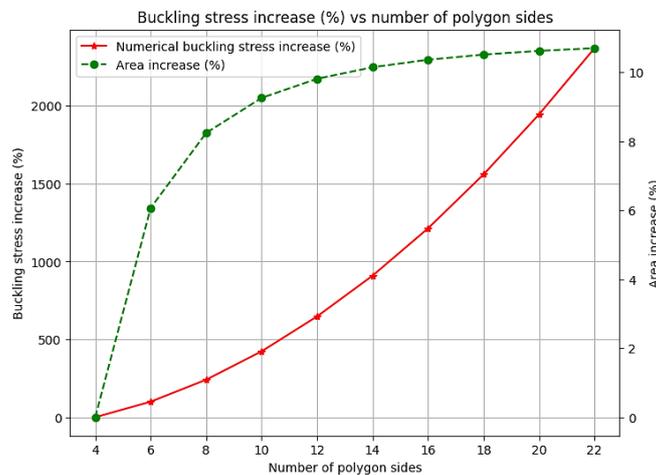


Abbildung 68: Prozentuelle Steigerung der Beulspannung und Querschnittsfläche abhängig von der Seitenanzahl.

In der Abbildung 68 ist die prozentuale Steigerung der Querschnittsfläche der Polygone im Vergleich zur Querschnittsfläche eines Polygons mit vier Seiten ($\frac{A_{\text{Polygon}} - A_{\text{Viereck}}}{A_{\text{Viereck}}} * 100 \%$) und die prozentuale Steigerung der Beulspannung der Polygone im Vergleich zur Beulspannung eines Polygons mit vier Seiten ($\frac{\sigma_{\text{Polygon}}^* - \sigma_{\text{Viereck}}^*}{\sigma_{\text{Viereck}}^*} * 100 \%$) dargestellt. Daraus lässt sich

erkennen, dass die Querschnittsfläche mit steigender Seitenzahl weniger stark zunimmt, während die Beulspannung mit steigender Seitenzahl weiter deutlich zunimmt. Daraus ergibt sich das Potenzial, durch eine gezielte Erhöhung der Anzahl an Kanten die Beulspannung von Profilen zu steigern. In [1] wurde das lokale Beulverhalten von polygonalen Hohlprofilen experimentell untersucht. Die Ergebnisse zeigten, dass bei gleicher Wanddicke und Querschnittsfläche die Beullast mit zunehmender Anzahl der Seiten steigt. Aufgrund fertigungstechnischer Einschränkungen erwiesen sich jedoch Profile mit acht Seiten als am günstigsten. In [2] wurde ebenfalls die lokale Beultragfähigkeit von dünnwandigen polygonalen Hohlprofilen untersucht. Dabei wurden oktagonale, dodekagonale und hexadekagonale Querschnitte für verschiedene Plattenschlankheitsverhältnisse (Breite-zu-Dicke-Verhältnis) analysiert. Die Ergebnisse zeigen, dass bei gleicher Querschnittsfläche Profile mit geringerer Plattenschlankheit, eine höhere lokale Beultragfähigkeit aufweisen und daher vorteilhaft sind.

Die numerischen Analysen wurden bis zu einer Seitenanzahl von 26 durchgeführt, wobei sich der Polygonquerschnitt zunehmend einem Kreis angenähert hat. Selbst in diesen Fällen zeigten die Ergebnisse bei idealisierter, imperfektionsfreier Geometrie unter axialer Druckbelastung weiterhin klar lokalisierte Plattenbeulen zwischen den einzelnen Seitenflächen. Eine Übergangsform zum typischen Schalenbeulenverhalten konnte nicht festgestellt werden. Es konnte festgestellt werden, dass mit zunehmender Anzahl an Seiten die einzelnen Plattensegmente weniger in der Plattenmitte beulen, während sich die Beulwellen zunehmend an den oberen und unteren Rändern des Profils konzentrieren. Siehe Abbildung 69.

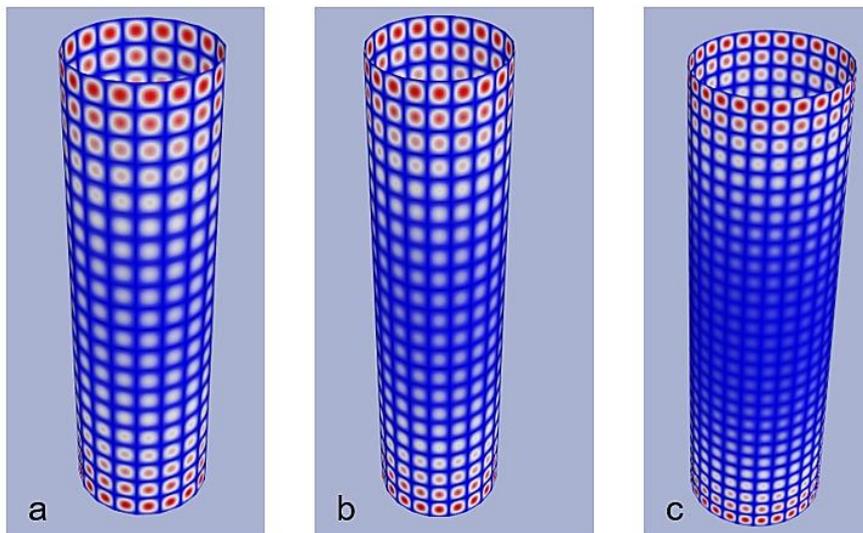


Abbildung 69: Beulformen von symmetrischen Polygonen mit a) 18 Seiten, b) 20 Seiten und c) 26 Seiten.

5.1.1 Einfluss vom Winkel auf das Beulverhalten benachbarter Platten

Der in Kapitel 4.1.2 vorgestellte Ansatz wurde in diesem Abschnitt angewendet, um den Einfluss des Winkels zwischen benachbarten Plattensegmenten auf das Beulverhalten einzelner Platten zu untersuchen. Hierzu wurde die Anzahl der Polygonseiten schrittweise von 4 auf 22 erhöht, was dazu führte, dass sich der Innenwinkel zwischen den benachbarten Platten von 90° auf 163° vergrößerte. Die Polygone sind aus Stahl und haben eine Länge von 4200 mm und eine Wandstärke von 2 mm. Jede Seite der Polygone ist 500 mm breit.

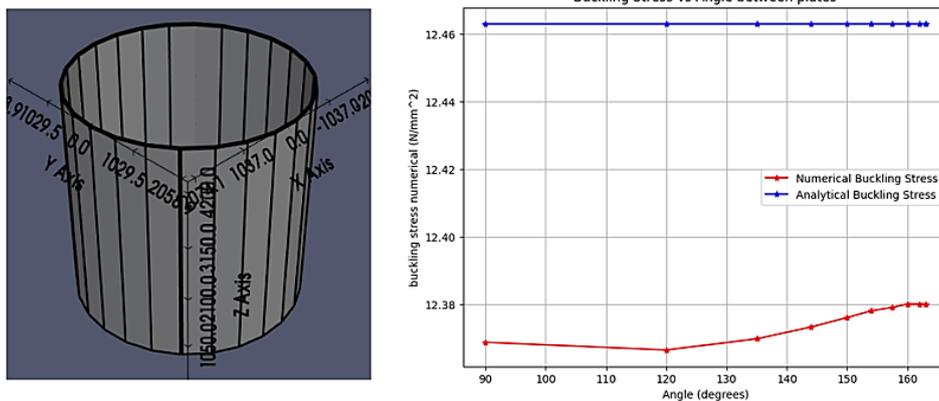


Abbildung 70: Die Beulspannung abhängig vom Winkel zwischen benachbarten Platten.

Wie zu erwarten war, bleibt die analytisch berechnete Beulspannung konstant, da bei gleichbleibender Wandstärke des Polygons auch die Plattenbreite unverändert ist. Auch die numerisch ermittelte Beulspannung zeigt, wie in Abbildung 70 dargestellt ist, über die untersuchten Winkelbereiche hinweg einen nahezu konstanten Verlauf. Der maximale Unterschied zwischen den Fällen mit einem Innenwinkel von 90° und 163° beträgt lediglich 0,1%. Die Abweichung zwischen den analytischen und den numerischen Ergebnissen bleibt durchgehend unter 1%.

Die Ergebnisse zeigen, dass der Winkel zwischen benachbarten Platten bei polygonalen Querschnitten nur einen sehr geringen Einfluss auf das Beulverhalten und die Beulspannung einzelner Platten hat. Die Platten verhalten sich unabhängig voneinander, sodass polygonale Querschnitte in guter Näherung als Aneinanderreihung einzelner Plattenstreifen betrachtet werden können.

5.2 Beulverhalten von Polygonen mit gekrümmten Seiten

Aufbauend auf den zuvor gewonnenen Erkenntnissen zum Einfluss der Krümmung auf das Beulverhalten ebener Platten im Kapitel 4.2.2, insbesondere der beobachteten Zunahme der Beullast mit steigendem Krümmungsparameter, werden in diesem Abschnitt Polygonprofile mit gekrümmten Seiten untersucht. Der Einfluss lokaler Krümmung, in Form einer einzelnen oder zweier gegenüberliegender gekrümmter Seiten auf die Beulspannung innerhalb des Polygonquerschnitts wird betrachtet.

Analog zu den zuvor entwickelten Polygonmodellen kann auch in dieser Modellierung die Anzahl der Seiten, der Umkreisradius des Polygons sowie die Profilhöhe vorgegeben werden. Es kann zusätzlich ein freier Krümmungsradius für die gekrümmten Seitenflächen definiert werden. Die Polygone sind aus Stahl und haben einen Umfangsradius von 600 mm, eine Länge von 4200 mm und eine Wandstärke von 2 mm. In der Abbildung 71 sind ein Paar Polygonprofile mit einer gekrümmten Seite exemplarisch dargestellt.

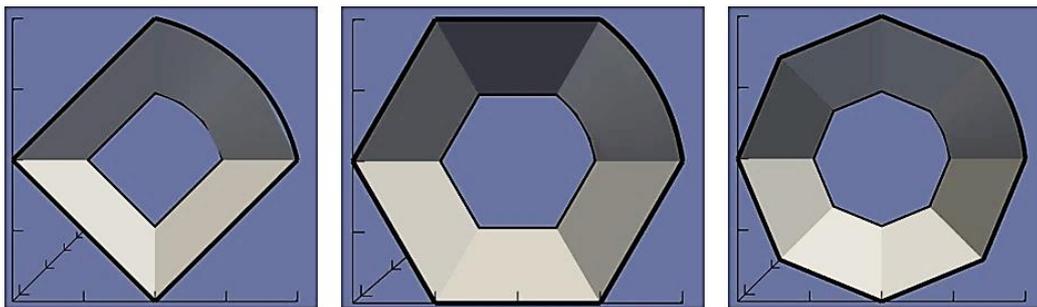


Abbildung 71: Untersuchte Polygonprofile mit einer gekrümmten Seite.

Zur gelenkigen Lagerung der Seiten wird für die geraden Seiten jeweils ein lokales kartesisches Koordinatensystem definiert, in dem die Verschiebung der freien Ränder in out-of-plane-Richtung gesperrt wird. Für die gekrümmte Seite erfolgt die gelenkige Lagerung in einem lokalen zylindrischen Koordinatensystem mit dem Ursprung „c“, wobei die radiale Verschiebung der freien gekrümmten Ränder gesperrt wird. Siehe Abbildung 72. In Abbildung 73 sind die Randbedingungen für die gelenkige Lagerung exemplarisch für Polygone mit 4, 6 und 8 Seiten in MAPDL PyAnsys dargestellt.

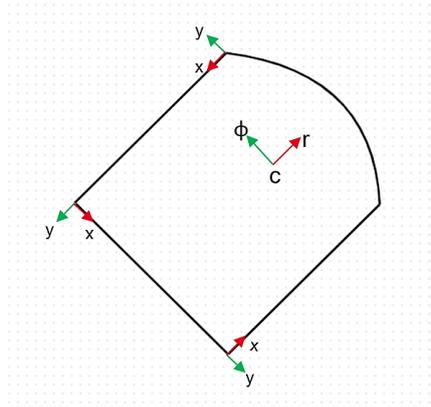


Abbildung 72: Die Verschiebung der geraden Seiten wird im lokalen kartesischen Koordinatensystem in y-Richtung gesperrt. Die Verschiebung der gekrümmten Seite wird im lokalen zylindrischen Koordinatensystem in r-Richtung gesperrt.

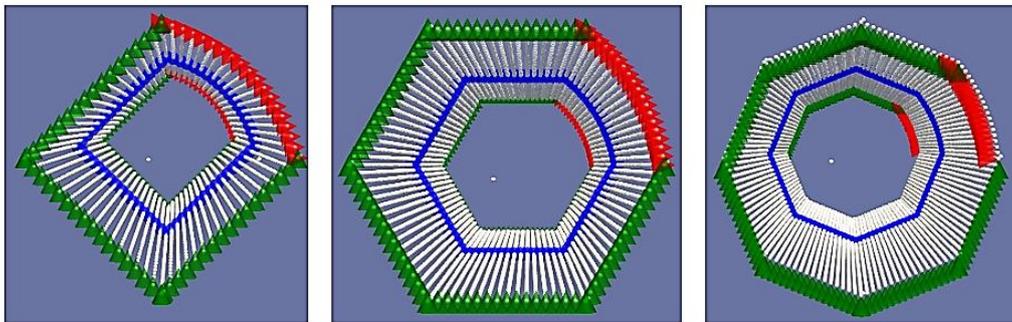


Abbildung 73: Gelenkige Lagerung der Polygone mit einer gekrümmten Seite.

Zur Untersuchung des Einflusses einer gekrümmten Seite sowie des Krümmungsradius auf das Beulverhalten wird eine lineare Eigenwertanalyse durchgeführt. Dazu werden Polygonprofile aus Stahl mit 4, 6 und 8 Seiten mit einem Umfangsradius von 200 mm, einer Länge von 1400 mm und einer Wandstärke von 2 mm betrachtet, bei denen die Krümmung einer Seite variiert wird. Die resultierenden Beullasten werden anschließend mit jenen von Vergleichsprofilen ohne die gekrümmte Seite gegenübergestellt.

Tabelle 4: Erhöhung der Beullast und des Gewichtes für Polygone mit einer gekrümmten Seite abhängig vom Krümmungsparameter.

Anzahl von Seiten	Erhöhung der Beullast (%)			Gewichtserhöhung (%)		
	$\frac{b^2}{rt} = 12$	$\frac{b^2}{rt} = 11$	$\frac{b^2}{rt} = 10$	$\frac{b^2}{rt} = 12$	$\frac{b^2}{rt} = 11$	$\frac{b^2}{rt} = 10$
4	7,2	6,6	5,9	0,007	0,006	0,005
6	3,4	3,2	3	0,010	0,008	0,006
8	1,9	1,8	1,7	0,013	0,010	0,008

In der Tabelle 4 sind die prozentualen Abweichungen der Beullasten von Polygonprofilen mit einer gekrümmten Seite gegenüber den entsprechenden Profilen mit ausschließlich geraden Seiten aufgeführt. Zusätzlich wird die durch die Krümmung bedingte

Gewichtszunahme in Prozent angegeben. Aus den Ergebnissen ergibt sich, dass die Beullast mit zunehmendem Krümmungsradius steigt. Dabei wurde berücksichtigt, dass die gekrümmte Seite nur eine schwache Krümmung aufweist. Gemäß Abbildung 11 wird sie wie eine modifizierte Platte behandelt und reagiert somit nicht empfindlich auf Imperfektionen. Die Beulspannung der gekrümmten Seite wird mit dem modifizierten Beulwert für die schwach gekrümmte Platte nach Gleichung (2.18) berechnet. Dadurch ist ihre Beulspannung im Vergleich zur geraden Platte größer. Dieser Effekt ist bei Polygonen mit geringerer Seitenanzahl, bei denen einzelne Platten breiter sind, deutlich stärker ausgeprägt. Mit steigender Anzahl der Seiten nimmt der Einfluss der Krümmung auf die Beullast ab. Es zeigte sich, dass nicht nur die gekrümmte Seite selbst kein Beulen aufwies, sondern auch die angrenzenden geraden Seiten eine deutlich reduzierte Beulneigung aufwiesen, siehe Abbildung 74. Die Krümmung wirkt sich auf die Randbedingungen aus. Die angrenzenden Platten sind nicht mehr ideal gelenkig gelagert. Dabei verhält sich die gekrümmte Seite wie ein Support. Infolgedessen zeigen auch die benachbarten geraden Plattenseiten ein verbessertes Stabilitätsverhalten. Der Einfluss der Änderung der Randbedingungen klingt mit Entfernung von der gekrümmten Seite ab.

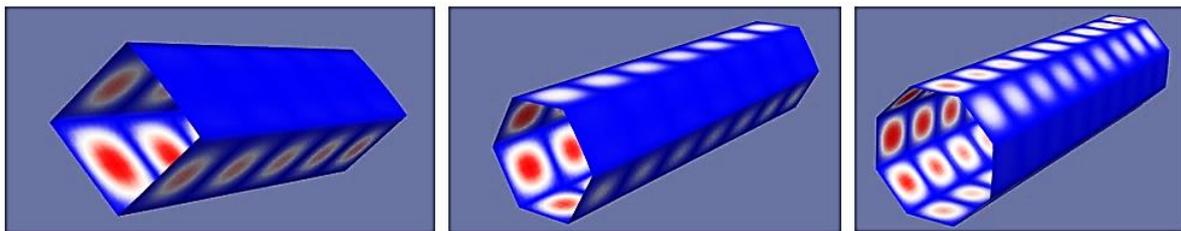


Abbildung 74: Das Beulverhalten der Polygone mit einer gekrümmten Seite

Es wurde darauf geachtet, dass die gewählten Krümmungsradien nur eine leichte Wölbung in der gekrümmten Platte verursachen und sogar beim größten betrachteten Krümmungsparameter bleibt die Platte nahezu eben. Das heißt, dass durch stärkere Krümmungen eine zusätzliche Steigerung der Beullast möglich ist. Bei größeren Krümmungsradien verhält sich die gekrümmte Seite wie eine Schale und reagiert sehr empfindlich auf Imperfektionen. Um der Einfluss der Imperfektionen auf die Beullast zu untersuchen, wird eine nicht-lineare Nachbeulanalyse für ein Polygon mit 4 Seiten, einem Umfangsradius von 200 mm, einer Länge von 1400 mm und einer Wandstärke von 2 mm durchgeführt. Die gekrümmte Seite hat einen Krümmungsparameter von $\frac{b^2}{rt} = 20$ und verhält sich gemäß Abbildung 11 wie eine Zylinderschale. Um die geometrische Imperfektion der gekrümmten Seite abzubilden, wurden vier in axialer Richtung äquidistant angeordnete Knoten ausgewählt und in

radialer Richtung um $\pm 1\%$ der Blechdicke verschoben. Durch diese Variation entsteht eine definierte Welligkeit in der gekrümmten Seite. Für die geraden Seiten des Polygons wurde der erste Beulmode mit einer Größenordnung von 1% der Blechdicke als Imperfektion aufgebracht. Die Größenordnung der Imperfektion wurde so gewählt, dass die Anfangssteifigkeit der Struktur nicht stark abnimmt. Für die nichtlineare Nachbeulanalyse wurde ein elastisches Materialverhalten angenommen.

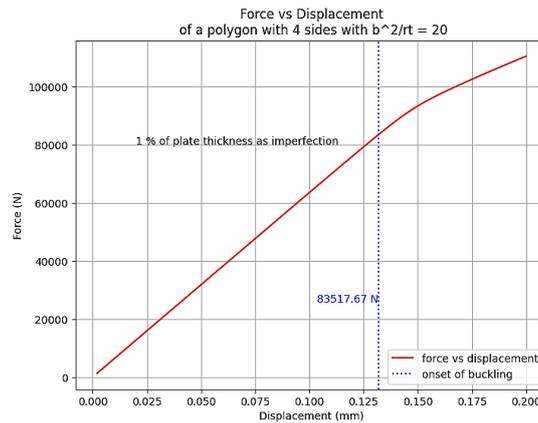


Abbildung 75: Last-Verschiebungskurve von der nichtlinearen Nachbeulanalyse für ein polygon mit 4 Seiten und einer gekrümmten Seite mit $\frac{b^2}{rt} = 20$.

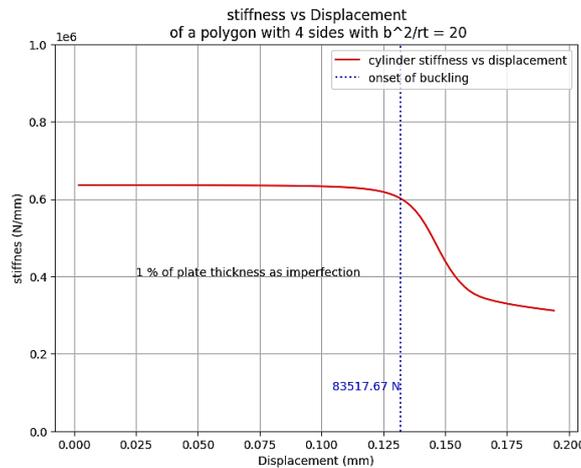


Abbildung 76: Steifigkeit gegen Verschiebung von einem polygon mit 4 Seiten und einer gekrümmten Seite mit $\frac{b^2}{rt} = 20$.

Wie in den Abbildungen 75 und 76 dargestellt, ergibt sich für das modellierte Polygon mit eingeführten Imperfektionen eine Beullast von 83517,67 N. Dieser Wert liegt rund 13% unter der Beullast des perfekten Polygons ohne geometrische Imperfektionen, die 95968,70 N beträgt. Es ist kein instabiles Nachbeulverhalten zu erkennen und die geraden Seiten beulen bei der imperfekten Geometrie zuerst, siehe Abbildung 77.

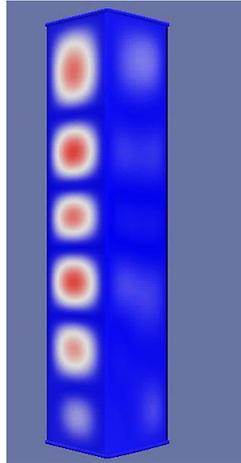


Abbildung 77: Beulverhalten eines Polygons mit 4 Seiten und einer gekrümmten Seite mit $\frac{b^2}{rt} = 20$.

Es müssen jedoch auch die resultierende Gewichtszunahme sowie mögliche Einschränkungen in der Fertigung berücksichtigt werden, um zu bewerten, ob die Erhöhung der Beullast durch die Krümmung auch wirtschaftlich sinnvoll ist.

Nachdem bereits der Einfluss einer einzelnen gekrümmten Seite auf das Beulverhalten polygonaler Querschnitte analysiert wurde, wird im Folgenden untersucht, wie sich zwei gegenüberliegende gekrümmte Seiten auf das Beulverhalten auswirken. Durch diese Konfiguration wird geprüft, wie hoch die Beullast des Polygons im Vergleich zu einer gekrümmten Seite weiter steigt. Die untersuchten Profile sind in Abbildung 78 dargestellt. Dazu werden erneut lineare Eigenwertanalysen für verschiedene Anzahl von Polygonseiten mit variierenden Krümmungsparameter durchgeführt und die Ergebnisse mit entsprechenden Modellen mit ausschließlich geraden Seiten verglichen. Die Polygone sind aus Stahl und haben einen Umfangsradius von 200 mm, eine Länge von 1400 mm und eine Wandstärke von 2 mm.

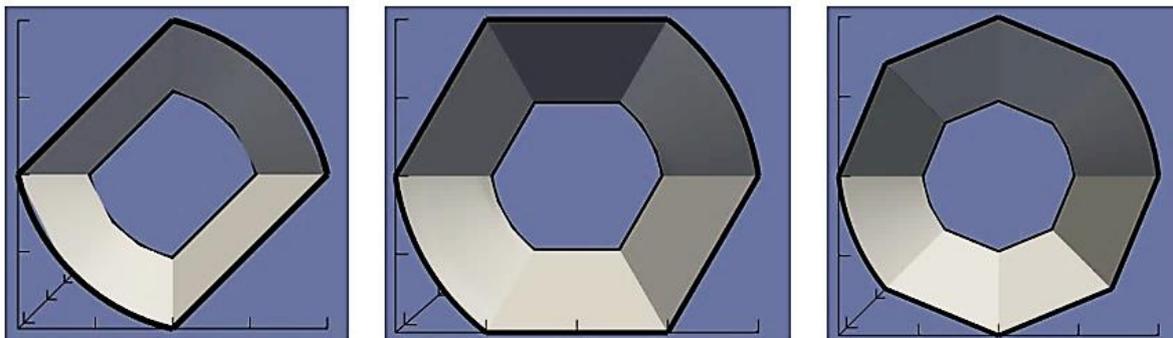


Abbildung 78: Untersuchte Polygonprofile mit zwei symmetrisch angeordneten gekrümmten Seiten.

Tabelle 5: Erhöhung der Beullast und des Gewichtes für Polygone mit zwei symmetrisch angeordneten gekrümmten Seiten abhängig vom Krümmungsradius.

Anzahl von Seiten	Erhöhung der Beullast (%)			Gewichtserhöhung (%)		
	$\frac{b^2}{rt} = 12$	$\frac{b^2}{rt} = 11$	$\frac{b^2}{rt} = 10$	$\frac{b^2}{rt} = 12$	$\frac{b^2}{rt} = 11$	$\frac{b^2}{rt} = 10$
4	21,4	18,9	16,3	0,015	0,012	0,010
6	10,6	9,6	8,5	0,020	0,016	0,012
8	6,08	5,9	5,5	0,026	0,020	0,016

Aus Tabelle 5 ist erkennbar, dass sich zwei symmetrisch angeordnete, gekrümmte Seiten deutlich stärker positiv auf die Beullast auswirken als lediglich eine gekrümmte Seite. Die prozentuale Zunahme der Beullast verdreifacht sich nahezu im Vergleich zu Polygonen mit nur einer gekrümmten Seite während sich die prozentuale Gewichtszunahme nur verdoppelt.

Diese Ergebnisse zeigen, dass durch gezielte geometrische Modifikation, wie die Einführung von gekrümmten Seiten in den Teleskopprofilen, eine deutliche Verbesserung der Stabilität der Strukturen erreicht werden kann, ohne dass das Gewicht proportional steigt. Im Leichtbau spielt lokale Stabilität und Gewichtseffizienz eine entscheidende Rolle, deswegen bietet dieser Ansatz ein gutes Optimierungspotenzial.

Um zusätzlich den Einfluss der Krümmung auf die Lagerung der angrenzenden geraden Plattenseiten zu bewerten, wurde die gekrümmte Seite entfernt und die freigewordenen Ränder einmal gelenkig und einmal eingespannt gelagert. Siehe Abbildung 79. Der Vergleich der Beullasten zeigt, ob die gekrümmte Seite im Hinblick auf das Beulverhalten dem Effekt einer gelenkigen Lagerung oder dem einer Einspannung entspricht.

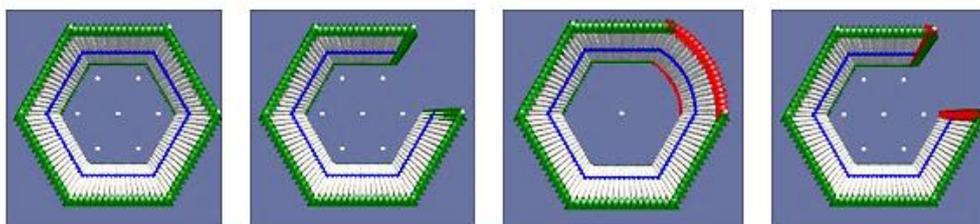


Abbildung 79: Vergleich der Art der Lagerung am Beispiel vom Polygon mit 6 Seiten in MAPDL PyAnsys.

Tabelle 6: Vergleich der numerischen Beulspannung von Polygonen mit ausschließlich geraden Seiten, Polygonen mit einer gekrümmten Seite, Polygonen mit gelenkiger und eingespannter Lagerung der freien Ränder von der entfernten Seite.

Anzahl von Seiten	Krümmungsradius (mm)	Numerische Beulspannung des Polygons mit geraden Seiten (MPa)	Numerische Beulspannung des Polygons (MPa) Freie Ränder gelenkig	Numerische Beulspannung des Polygons mit einer gekrümmten Seite (MPa)	Numerische Beulspannung des Polygons (MPa) Freie Ränder eingespannt
6	600	8,56	8,57	9,05	9,18
8	600	14,63	14,64	15,07	15,18
10	600	22,45	22,47	22,88	22,96
12	600	32,02	32,04	32,38	32,46

Aus Tabelle 6 geht hervor, dass bei gelenkiger Lagerung der freigewordenen Ränder, nach Entfernung der gekrümmten Seite, die resultierende Beulspannung nahezu identisch mit der Beulspannung des Polygons mit ausschließlich geraden Seiten ist. Dies stützt die Annahme, dass die benachbarten Plattenseiten als gelenkig gelagert betrachtet werden können. Die numerische Beulspannung von Polygonen mit einer gekrümmten Seite ähnelt eher der Beulspannung von Polygonen mit einer eingespannten Seite als der von Polygonen mit einer gelenkigen Lagerung. Eine tatsächliche Einspannung der freigewordenen Ränder führt aber zu einer höheren Beulspannung als die Beulspannung des Polygons mit einer gekrümmten Seite. Daher ist es sinnvoll, für eine konservative und sicherere Auslegung der Profile, die angrenzenden Platten an gekrümmte Seiten nicht als eingespannt, sondern als gelenkig gelagert zu betrachten. Die Auswirkung der Krümmung auf die Beulspannung der Polygone kann durch einen Einspannfaktor berücksichtigt werden. Dafür sind jedoch weitere Studien erforderlich.

5.3 Beulverhalten von Polygonen mit abgerundeten Kanten

Die Kanten realer Profile, wie sie in Teleskopstrukturen verwendet werden, weisen in der Regel Abrundungen auf. Studien wie [37] zeigen, dass Profile mit abgerundeten Kanten im Vergleich zu vollständig geradlinigen Querschnitten oft ein besseres Beulverhalten aufweisen.

Es wird untersucht, wie sich verschiedene Rundungsradien auf die Beullast auswirken. Dabei soll nicht nur geprüft werden, ob die Beullast steigt, sondern auch, ob sich das Beulverhalten mit wachsendem Rundungsradius vom typischen Plattenbeulen hin zu einem Schalenbeulen verändert.

Dafür werden regelmäßige Polygone mit unterschiedlicher Anzahl von Seiten und variierenden Rundungsradien an den Ecken untersucht. Die Bewertung erfolgt zum einen über lineare Eigenwertanalysen, zum anderen über nichtlineare, verschiebungsgesteuerte statische Analysen, in die gezielt geometrische Imperfektionen eingebracht werden, da die gekrümmten Teile empfindlicher gegen Imperfektionen reagieren und ihre tatsächliche Beulspannung unter der Beulspannung der perfekten Geometrie liegen kann.

Die Geometrie der Profile wird parametrisch definiert, wobei die Anzahl der Seiten, der Umkreisradius des Polygons, der Rundungsradius der Ecken sowie die Länge des Profils nach Wunsch eingegeben werden können. Ausgehend von der gewünschten Seitenanzahl und dem Polygonradius werden die Eckpunkte des Polygons berechnet und durch Geraden miteinander verbunden. An den Ecken werden mittels des definierten Rundungsradius tangentielle Rundungen eingefügt. In der Abbildung 80 ist ein Beispiel für die Definition des Querschnitts eines Polygons mit 6 Seiten und einem Umkreisradius von R und einem Rundungsradius von r dargestellt.

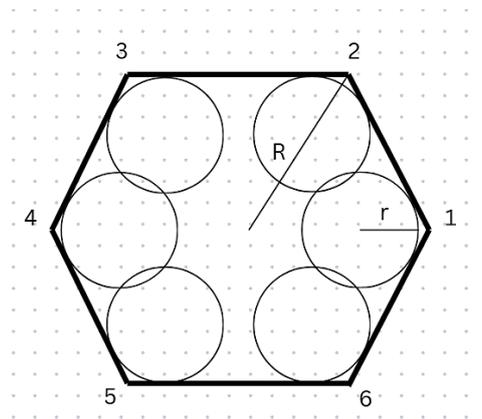


Abbildung 80: Definition des Querschnitts eines Polygons mit 6 Seiten und abgerundeten Kanten.

Der entstandene Querschnitt wird anschließend über die angegebene Länge extrudiert, um das dreidimensionale Profil zu erzeugen. In Abbildung 81 sind exemplarisch einige der untersuchten Profilgeometrien mit abgerundeten Kanten dargestellt.

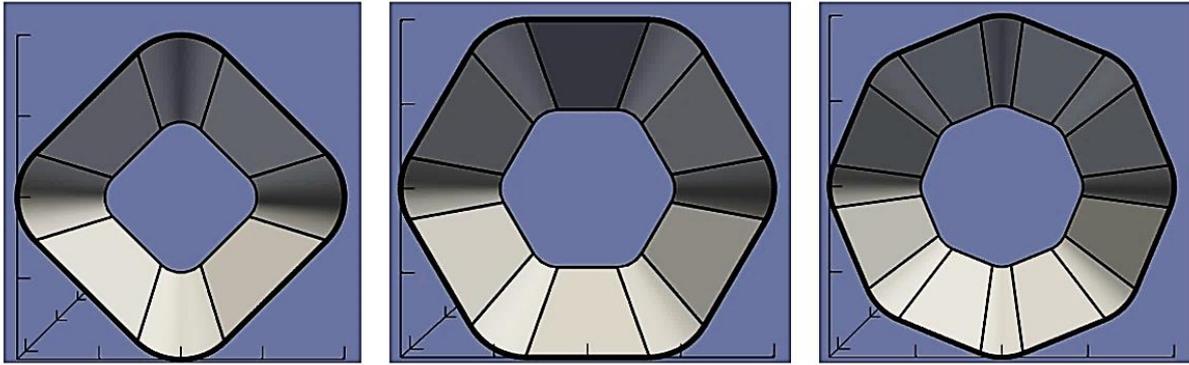


Abbildung 81: Untersuchte Polygonprofile mit abgerundeten Kanten.

Wie in der Abbildung 82 dargestellt ist, werden die oberen und unteren freien Ränder der Profile gelenkig gelagert, indem für jede Seite ein lokales kartesisches Koordinatensystem definiert und die out-of-plane-Verschiebung der freien Ränder gesperrt wurde (mit grün gekennzeichnet). Für die abgerundeten Kanten wurde ein lokales zylindrisches Koordinatensystem verwendet, in dem die radiale Verschiebung der gekrümmten Randbereiche gesperrt wurde (mit rot gekennzeichnet). Zur vollständigen Fixierung im Raum wurde zusätzlich die Symmetrielinie des Profils in axialer Richtung fixiert (mit blau gekennzeichnet).

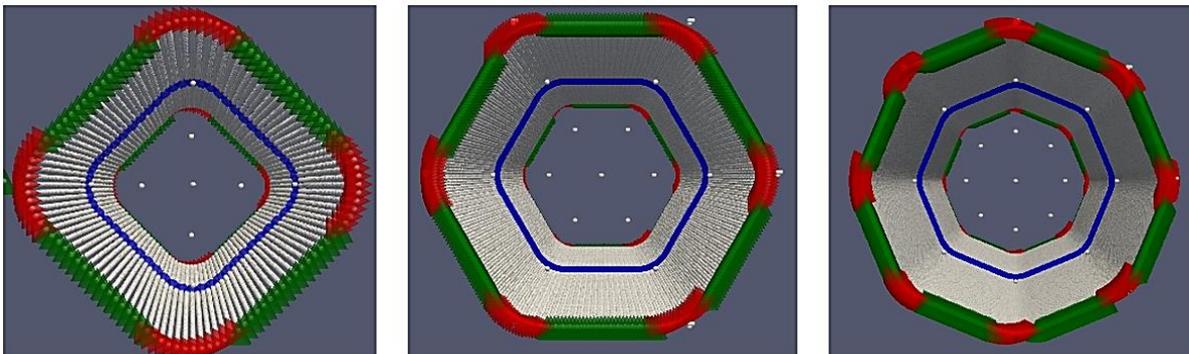


Abbildung 82: Gelenkige Lagerung der Polygone mit abgerundeten Kanten in MAPDL PyAnsys.

Für die lineare Eigenwertanalyse wurde das Polygonprofil am oberen und unteren Rand über eine Linienlast axial belastet, um eine möglichst gleichmäßige Spannungsverteilung zu erzeugen. In der nichtlinearen statischen Analyse wurden zwei Pilot-Nodes auf der Polygonachse an den Stirnseiten definiert. Diese Pilot-Nodes wurden mittels Multi-Point Constraints (MPCs) mit den jeweiligen Randknoten verbunden. Die axiale Verschiebung wurde über die Pilot-Nodes aufgebracht, um eine gleichmäßige Belastung entlang der Ränder zu gewährleisten.

Zur Validierung des Modells wird zunächst eine lineare Eigenwertanalyse mit einem Polygonprofil aus Stahl mit vier Seiten mit einem Umfangsradius von 600, einer Länge von

4200 mm und einer Wandstärke von 2 mm durchgeführt. Dabei wird der Rundungsradius der Kanten schrittweise von null bis zum maximal zulässigen Wert erhöht, letzterer entspricht dem Grenzfall eines Kreisquerschnitts. Wie in der Abbildung 83 dargestellt ist, ist der größte Rundungsradius für ein Polygon mit einem Umkreisradius von r und mit 4 Seiten gleich $r/\sqrt{2}$.

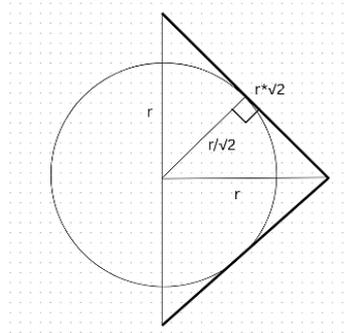


Abbildung 83: Berechnung des größten Rundungsradius von einem Polygon mit 4 Seiten.

Die numerischen Beullasten der beiden Grenzfälle (ohne Abrundung und mit maximaler Abrundung) werden anschließend mit der Beullast eines Polygons ohne abgerundete Kanten sowie mit der Beullast des entsprechenden Zylinders verglichen. Dabei wurde die Länge des Polygons so gewählt, dass es sich beim maximal zulässigen Rundungsradius um eine mittellange Zylinderschale handelt.

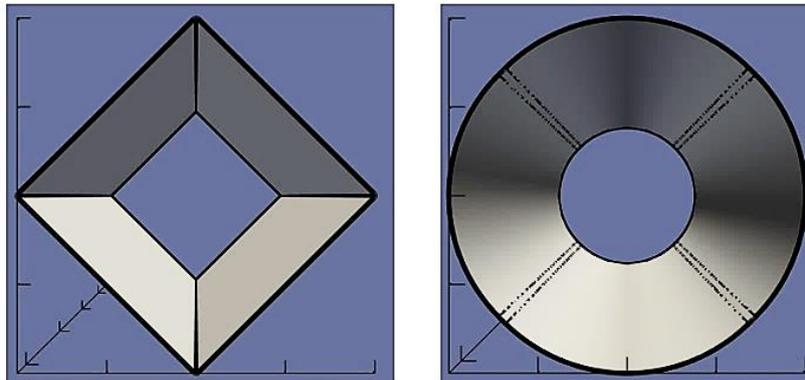


Abbildung 84: Polygon mit 4 Seiten mit scharfen Kanten und maximal zulässigen abgerundeten Kanten ($r=424$ mm).

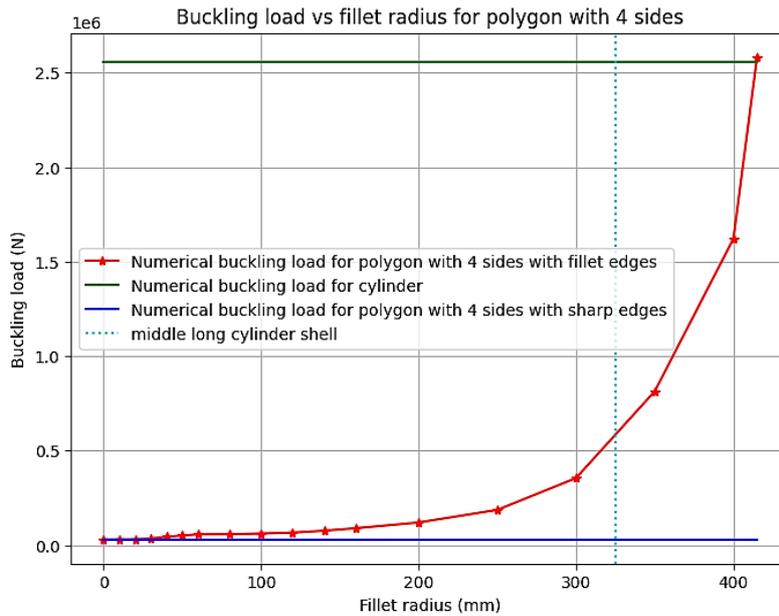


Abbildung 85: Die numerische Beullast vom Polygon mit 4 Seiten abhängig von den Rundungsradien.

Wie in Abbildung 85 ersichtlich ist, zeigt die numerisch ermittelte Beullast des Viereck-Polygons mit abgerundeten Kanten eine gute Übereinstimmung mit den beiden Grenzfällen: dem Polygon mit scharfen Kanten und dem entsprechenden vollrunden Zylinder. Dies bestätigt die Korrektheit der Modellierung sowie die konsistente Definition der Randbedingungen.

Zudem ist zu erkennen, dass die numerisch bestimmte Beullast mit zunehmendem Rundungsradius des Viereck-Polygons ansteigt. Im Grenzfall, in dem das Polygon einem vollrunden Zylinder entspricht, wird die maximale theoretische Beullast einer perfekten Zylinderschale erreicht. Ab einem Rundungsradius von 325 mm beim untersuchten Polygon handelt es sich um eine mittellange Zylinderschale, die empfindlich auf Imperfektionen reagiert. Deshalb ist ab diesem Rundungsradius für die Berechnung der analytischen Beulspannung die praktische Beulspannung als Bemessungsgrundlage relevant. Da dieser Rundungsradius bei realen Profilen jedoch nicht vorkommt (siehe Abbildung 86), wurde hier die theoretische Beulspannung verwendet.

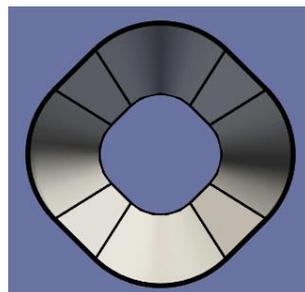


Abbildung 86: Polygon mit 4 Seiten und einem Rundungsradius von 325 mm.

Zur Bestimmung des realistischen Beulverhaltens und der Beulspannung der Polygone mit großen Rundungsradien wurde eine nichtlineare statische Analyse durchgeführt. Ziel war es, den Einfluss zunehmender Rundungsradien auf die elastische Beulspannung zu untersuchen. Daher wurde ein rein elastisches Materialverhalten definiert. Zur Einführung geometrischer Imperfektionen wurde für das Polygon mit scharfen Kanten (Plattenbreite = 848 mm) 1 % vom ersten Beulmode auf die Struktur aufgebracht. Für Polygone mit größerem Rundungsradius und somit mit kleinerer Plattenbreite wurde die Größenordnung der Imperfektion entsprechend kleiner skaliert.

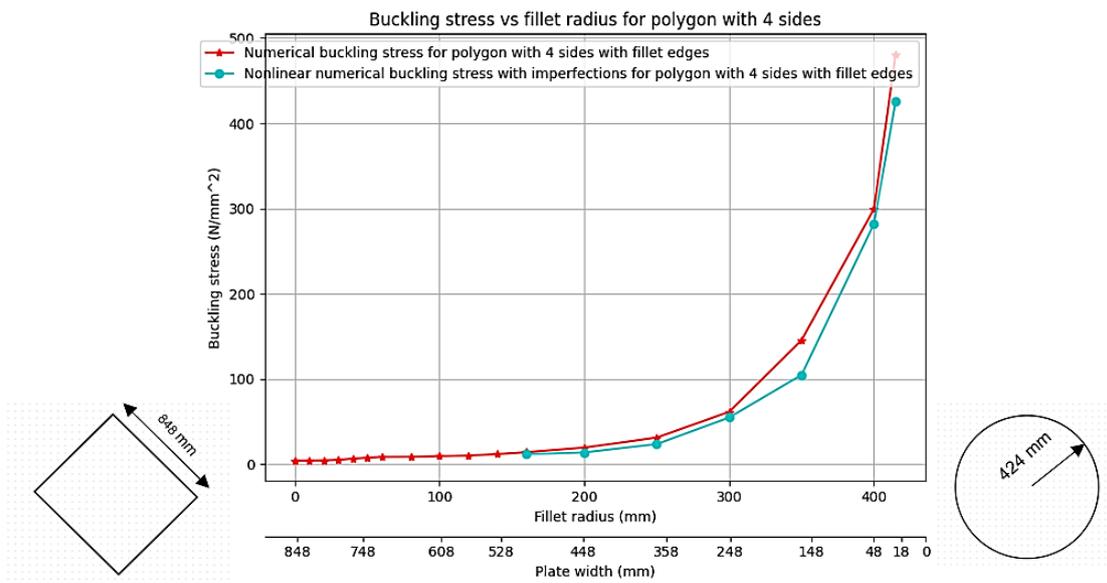


Abbildung 87: Die linear und nichtlineare numerische Beullast vom Polygon mit 4 Seiten abhängig von den Rundungsradien.

Wie in Abbildung 87 dargestellt, liegt die numerisch bestimmte Beulspannung aus der nichtlinearen Analyse mit Imperfektionen unter der Beulspannung aus der linearen Eigenwertanalyse, insbesondere bei größeren Rundungsradien des Viereckpolygons. Bei Rundungsradien kleiner als 140 mm waren die Beulspannungen aus der linearen Eigenwertanalyse und der nichtlinearen statischen Analyse mit den definierten Imperfektionen wenig voneinander zu unterscheiden. Um eine bessere Veranschaulichung zu ermöglichen, sind in diesem Bereich die Beulspannungen aus der nichtlinearen statischen Analyse in Abbildung 87 nicht dargestellt. Die Polygone zeigen bei größeren Radien zunehmend schalenartiges Verhalten und dadurch sind sie empfindlicher gegenüber Imperfektionen. Trotz der durch Imperfektionen bedingten Reduktion der Beulspannung ist deutlich zu erkennen, dass die Beulspannung mit zunehmendem Rundungsradius und kleiner werdender Plattenbreite der Beulfelder ansteigt. Viereckpolygone mit abgerundeten Kanten weisen somit insgesamt höhere Beulspannungen auf als jene mit scharfkantigen Übergängen.

Die gleiche lineare Eigenwertanalyse wurde auch für Polygone mit sechs und acht Seiten mit dem gleichen Umfangradius durchgeführt, um den Einfluss der Rundungsradien auf die Beulspannung bei unterschiedlichen Geometrien zu untersuchen. Wie aus Abbildungen 88 ersichtlich ist, steigt die Beulspannung ebenfalls mit zunehmendem Rundungsradius für Polygone mit sechs und acht Seiten. Allerdings zeigen die Analysen für verschiedene Polygone, dass der Einfluss der Abrundung mit zunehmender Anzahl an Polygonseiten abnimmt. Der prozentuale Gewinn ist bei Polygonen mit mehr Seiten somit geringer als bei einem Polygon mit vier Seiten. Das liegt daran, dass die gerade Platte der Polygonseiten mit mehreren Seiten schmaler ist und die Grundgeometrie der Polygone mit mehreren Seiten einem Kreis ähnelt.

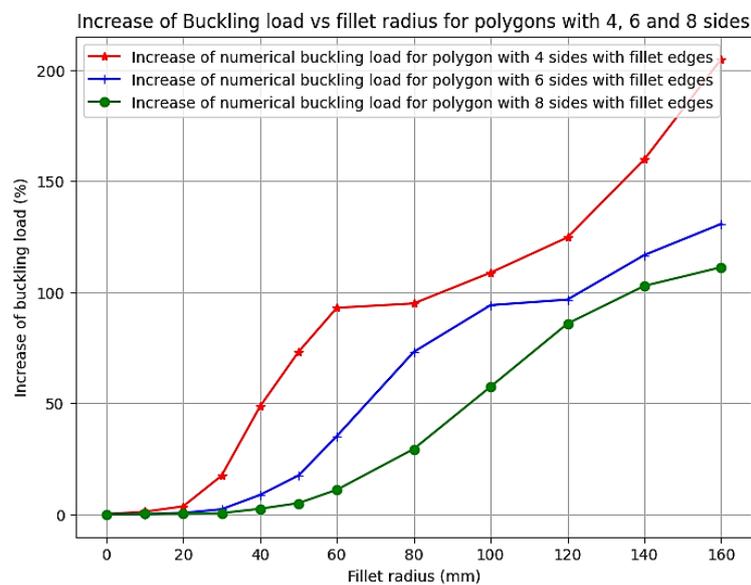


Abbildung 88: Die prozentuale Beullaststeigerung für Polygone mit 4, 6 und 8 Seiten abhängig vom Rundungsradius.

Aufgrund der konsistenten Trends in der linearen Analyse und des geringeren Einflusses der Abrundung bei Polygonen mit mehr Seiten wurde eine weiterführende nichtlineare Analyse in diesen Fällen nicht durchgeführt.

Um zu beurteilen, ob das Beulverhalten von Profilen mit abgerundeten Kanten dem Platten- oder dem Schalenbeulen zuzuordnen ist, werden die Ergebnisse der Eigenwertanalysen für verschiedene Rundungsradien herangezogen. Treten die Hauptverformungen überwiegend in den ebenen Bereichen des Querschnitts auf, handelt es sich um klassisches Plattenbeulen. Verlagern sich die Verformungen hingegen zunehmend in die abgerundeten Kantenbereiche, deutet dies auf einen Übergang zum Schalenbeulen hin [38].

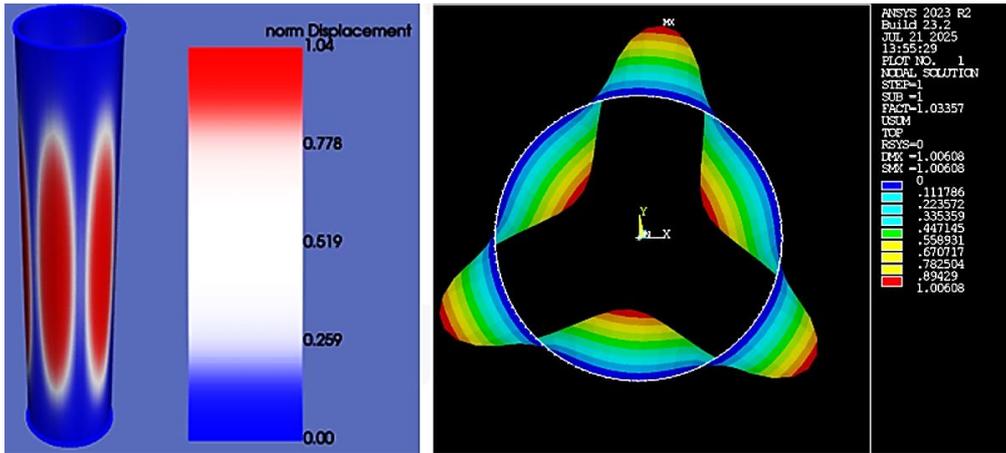


Abbildung 89: Der erste Beulmode vom Viereckpolygon mit maximal zulässigem Rundungsradius

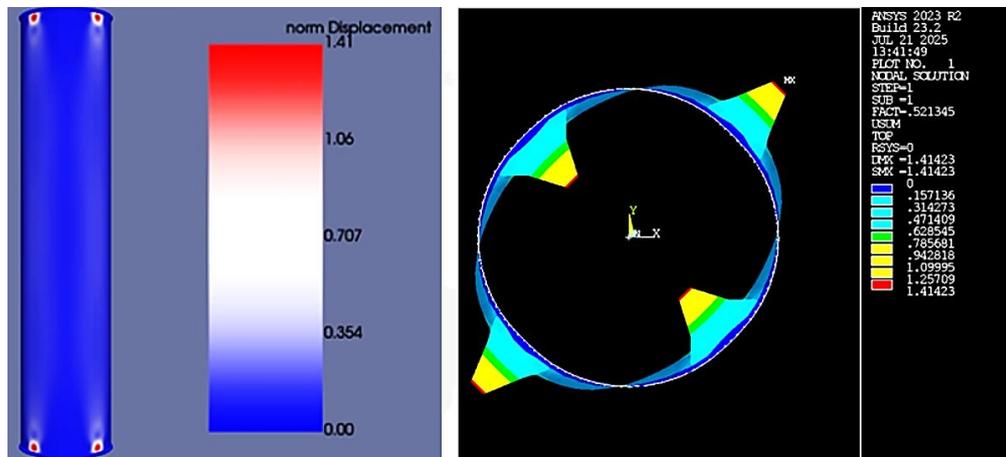


Abbildung 90: Der erste Beulmode vom Viereckpolygon mit stark abgerundeten Kanten (Rundungsradius = 400 mm)

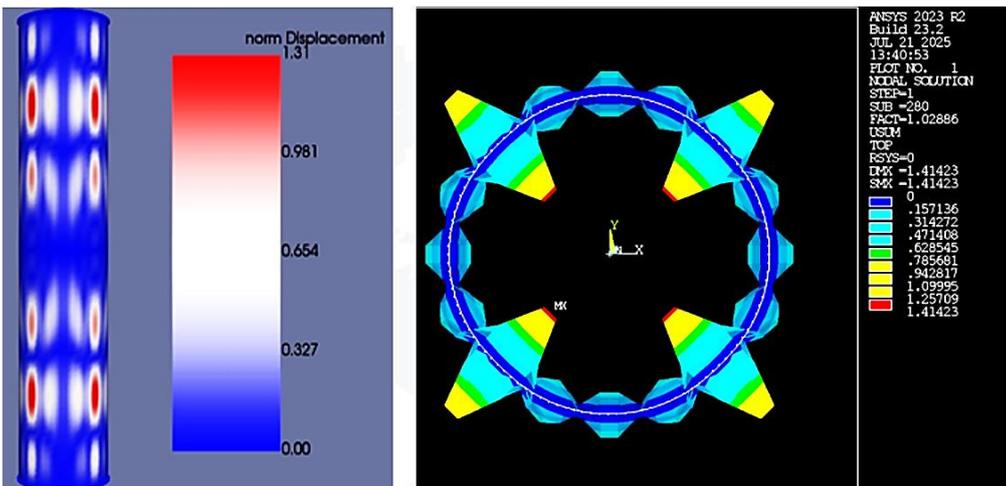


Abbildung 91: Der 280ste Beulmode vom Viereckpolygon mit stark abgerundeten Kanten (Rundungsradius = 400 mm).

Es wurde eine lineare Eigenwertanalyse an Polygonen mit 4 Seiten und variierendem Rundungsradius von 0 bis zum maximal zulässigen Wert (Vollkreis) durchgeführt. Dabei wurden

die ersten 300 Beulmoden berechnet und bewertet, ob sie dem Plattenbeulen oder dem Schalenbeulen zuzuordnen sind.

Die Analyse ergab, dass im Grenzfall des maximalen Rundungsradius eindeutig Schalenbeulen auftritt. Siehe Abbildung 89. Sobald jedoch auch nur ein kleines gerade Segment erhalten bleibt, dominieren wieder Plattenbeulmodi. Siehe Abbildung 90. Wie die Abbildung 91 zeigt, können aber bei einem sehr großen Rundungsradius und einem höheren Beulmode, bei dem kleinere Wellenlängen auftreten, wiederum Schalenbeulen beobachtet werden.

Für realistisch kleine Rundungsradien, wie sie typischerweise bei Profilen vorkommen, lassen sich die beobachteten Beulmoden dem Plattenbeulen zuordnen, da die Deformationen auf die ebenen Flächen beschränkt bleiben. Siehe Abbildung 92. Jedoch beulen die einzelnen Beulfelder durch die abgerundeten Kanten weniger in der Plattenmitte und das Beulen konzentriert sich mehr am Polygonrand. In der Abbildung 93 ist die axiale Spannungsverteilung von Polygonen mit 4, 6, und 8 Seiten jeweils mit abgerundeten Kanten (in der Abbildung mit Großbuchstaben gekennzeichnet) mit einem Rundungsradius von 50 mm und mit scharfen Kanten (in der Abbildung mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet) dargestellt. Durch die abgerundeten Kanten kommt es zu einer anderen Spannungsverteilung in den Polygonen.

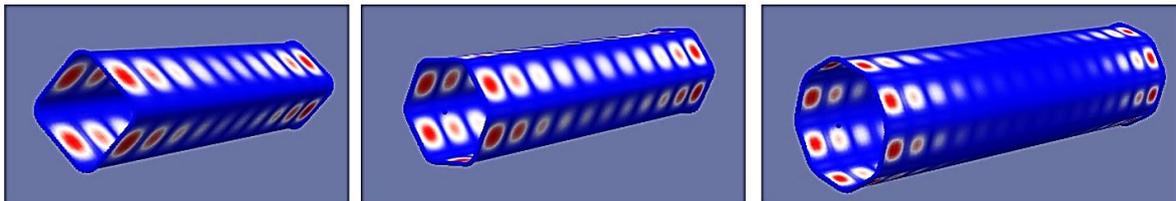


Abbildung 92: Beulmoden von Polygonen mit 4, 6 und 8 Seiten mit abgerundeten Kanten.

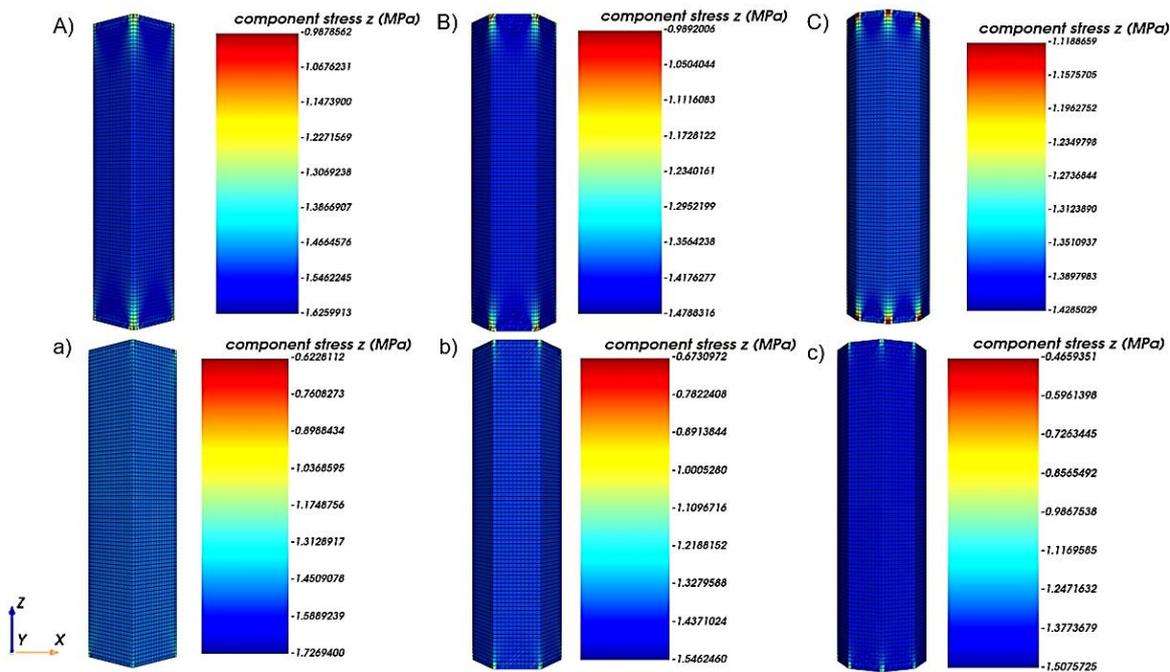


Abbildung 93: Axiale Spannungsverteilung in Polygonen mit a) 4 Seiten, b) 6 Seiten und c) 8 Seiten.

Die Untersuchungen zeigten, dass abgerundete Kanten die Beulspannung polygonaler Profile deutlich erhöhen können.

Um jetzt auch die maximale Belastungskapazität der Profile mit abgerundeten Kanten zu ermitteln und zu untersuchen, ob bei realistischen Rundungsradien ein instabiles Nachbeulverhalten auftritt, wird eine nichtlineare Nachbeulanalyse mit elastisch-ideal-plastischem Materialverhalten durchgeführt.

Die Nachbeulanalyse wurde für Polygone mit vier Seiten, einem Umfangradius von 600 mm und einer konstanten Schalendicke von 2 mm durchgeführt. Dabei wurde der Rundungsradius in Schritten von 10 mm von 20 bis 50 mm erhöht. Die Fließgrenze wurde auf 270 MPa festgelegt. Da bei den vorherigen Analysen festgestellt wurde, dass das Beulverhalten bei Profilen mit abgerundeten Kanten von Plattenbeulen geprägt ist und die geraden Platten primär beulen, wurde für das Polygon mit einem Rundungsradius von 20 mm eine Imperfektion von 1 % des ersten Beulmoden, also die wahrscheinlichste aufgetretene Beulform, auf die Geometrie aufgebracht. Für Polygone mit größerem Rundungsradius und somit mit kleinerer Plattenbreite wurde die Größenordnung der Imperfektion entsprechend kleiner skaliert.

Auf der oberen und unteren Seite sind jeweils zwei Pilot-Nodes definiert, die durch MPCs mit den Knoten auf den oberen und unteren Kanten verbunden sind. Die nichtlineare Nachbeulanalyse wurde verschiebungsgesteuert durchgeführt, wobei die Reaktionskraft der

Pilot-Nodes ermittelt wurde. Um die Profile mit unterschiedlichen Rundungsradien miteinander vergleichen zu können, wurde die Spannungs-Verschiebungskurve aufgezeichnet. Der jeweils höchste Punkt der Kurven entspricht der maximal erreichten Spannung in den Profilen.

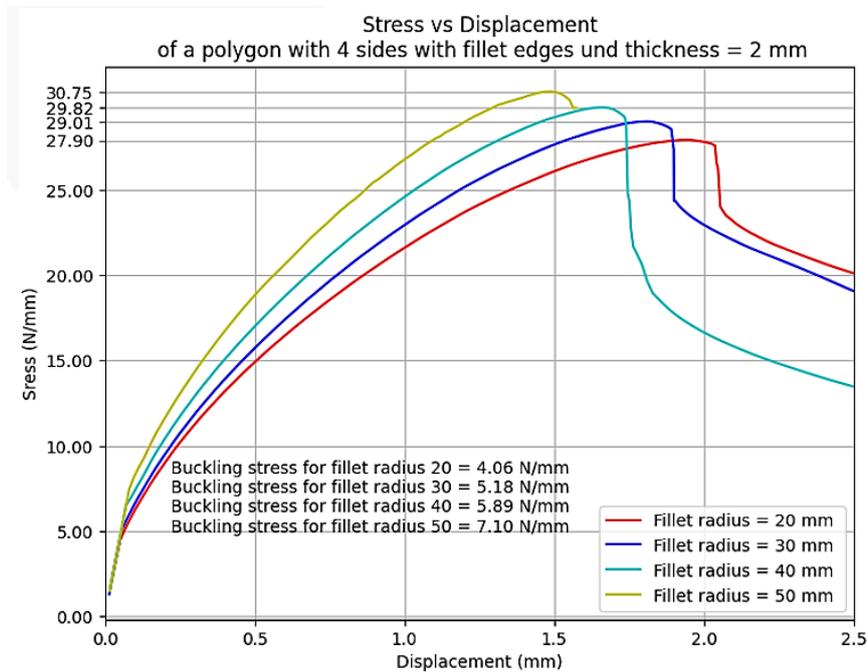


Abbildung 94: Spannungs-Verschiebungskurve der Polygone mit 4 Seiten und unterschiedlichen Rundungsradien.

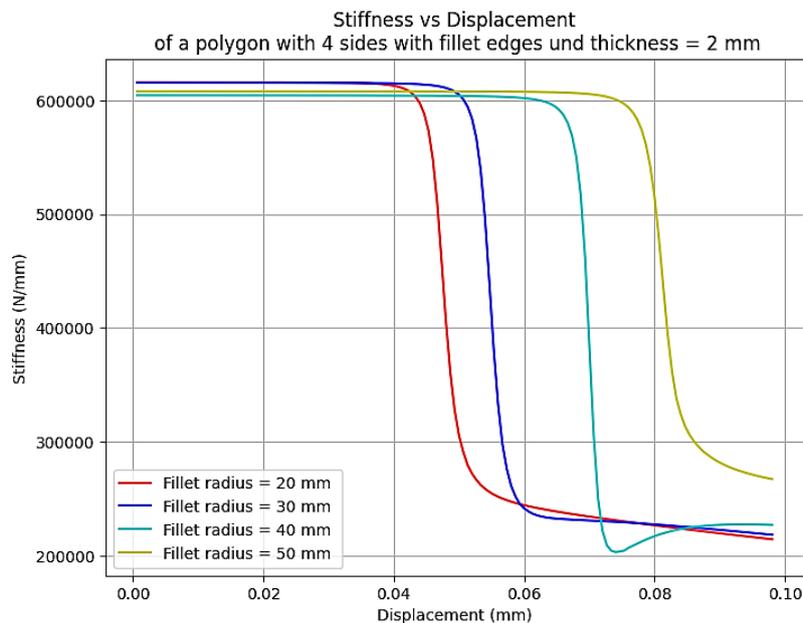


Abbildung 95: Steifigkeits-Verschiebungskurve der Polygone mit 4 Seiten und unterschiedlichen Rundungsradien.

Abbildung 94 zeigt, dass mit steigendem Rundungsradius nicht nur die Beulspannung, sondern auch die maximal erreichte Spannung der Polygone steigt. Es ist aus der Abbildung 95 erkennbar, dass Polygone mit größerem Rundungsradius ihre Steifigkeit erst bei

größeren Verschiebungen verlieren. Zudem ist für Polygone mit vier Seiten und Rundungsradien von 20 bis 50 mm kein instabiles Nachbeulverhalten zu beobachten.

Die abgerundeten Kanten weisen ein hohes Optimierungspotenzial hinsichtlich der Beul-laststeigerung auf. Das Beulverhalten der Profile mit abgerundeten Kanten beschränkt sich auf das lokale Plattenbeulen, wobei kein instabiles Nachbeulverhalten auftritt.

5.4 Beulverhalten Polygonen mit einer segmentierten Seite

Im Kapitel 5.2 wurde gezeigt, dass bereits eine leichte Krümmung einer einzelnen Seitenwand eines polygonalen Profils einen signifikanten Einfluss auf die Erhöhung der Beullast haben kann. Solche kontinuierlich gekrümmten Seiten können sich jedoch in der praktischen Umsetzung häufig nur näherungsweise realisieren. Die Imperfektionsempfindlichkeit der gekrümmten Platten soll durch einen Abminderungsfaktor berücksichtigt werden und die praktische Beullast einer gekrümmten Platte liegt unter der berechneten Beullast der perfekten Struktur. Vor diesem Hintergrund wurde untersucht, inwieweit sich die Wirkung einer gekrümmten Seitenwand durch eine stückweise Aneinanderreihung gerader Plattensegmente approximieren lässt.

Ziel ist es, das Beulverhalten solcher diskretisierten Krümmungen zu bewerten und zu bestimmen, ab welcher Segmentanzahl eine hinreichend genaue Annäherung an die kontinuierlich gekrümmte Geometrie vorliegt. Somit wird versucht eine robustere, weniger empfindliche Geometrie zu realisieren, die näher an realistisch herstellbare Strukturen herankommt.

Zur systematischen Analyse wurde das bestehende Polygonmodell so erweitert, dass sowohl der gewünschte Krümmungsradius als auch die Anzahl der Segmente der gekrümmten Seite als freie Parameter vorgegeben werden können. Die Krümmung wird dabei durch eine Approximation mit entsprechend berechneten Kantensegmenten ersetzt, die zusammen eine angenäherte Krümmung erzeugen. In der Abbildung 96 sind ein Paar modellierte Querschnitte exemplarisch dargestellt.

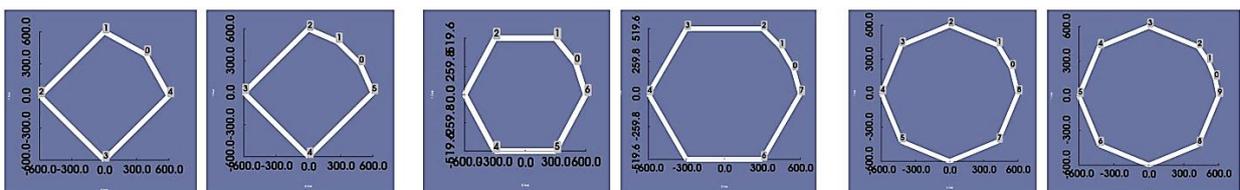


Abbildung 96: Polygonale Querschnitte mit einer segmentierten Seite.

Für jede Polygonseite sowie für jedes einzelne Segment der approximierten gekrümmten Seite wird, wie in der Abbildung 97 für ein Polygon mit 4 Seiten und 3 Segmenten dargestellt ist, ein lokales kartesisches Koordinatensystem definiert. In diesem System werden die out-of-plane-Verschiebungen der freien oberen und unteren Ränder gesperrt, wodurch eine gelenkige Lagerung dieser Bereiche realisiert wird. Das Polygon wird am oberen und unteren Rand durch eine Linienlast axial auf druck belastet, somit wird eine regelmäßige Druckspannung im Polygon realisiert.

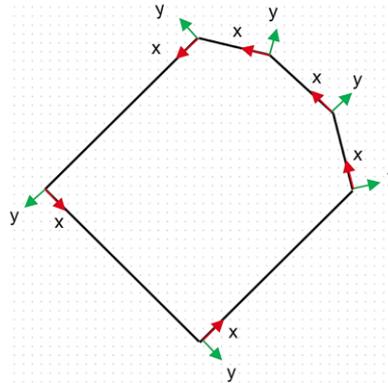


Abbildung 97: Definition der gelenkigen Lagerung im lokalen kartesischen Koordinatensystem, indem die Verschiebung jeder Seite in y-Richtung gesperrt wird.

Es wird eine Eigenwertanalyse durchgeführt und untersucht, wie sich die Anzahl der Segmente auf das Beulverhalten auswirkt und welche Anzahl der Segmente am besten die Krümmung approximiert. Dazu wird für verschiedene Krümmungsradien und die Seitenanzahl von 4, 6 und 8 die Segmentanzahl variiert und die resultierende Beullast untersucht.

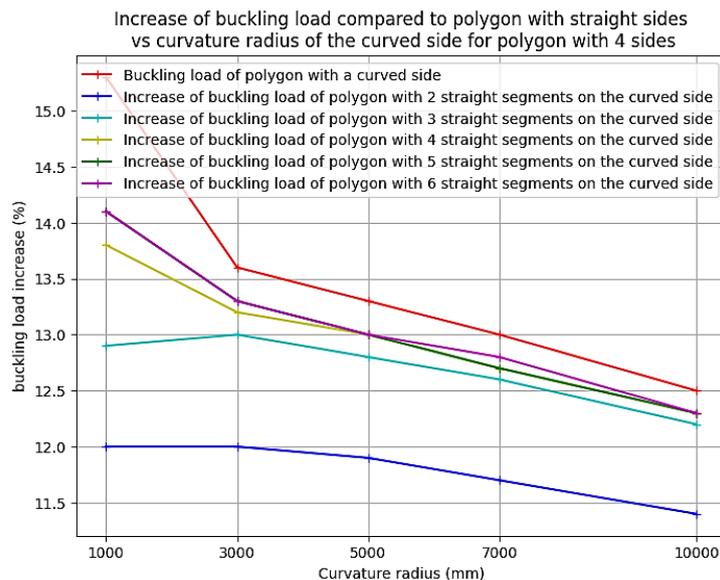


Abbildung 98: Die Beullaststeigerung vom Polygon mit 4 Seiten abhängig vom Krümmungsradius der gekrümmten Seite.

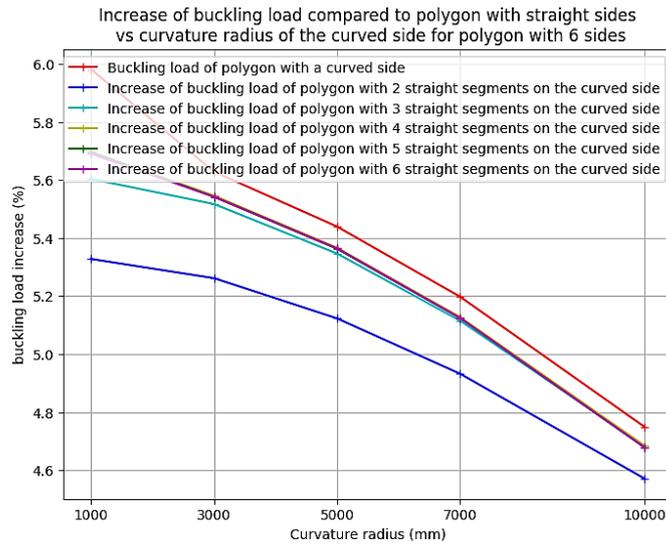


Abbildung 99: Die Beullaststeigerung vom Polygon mit 6 Seiten abhängig vom Krümmungsradius der gekrümmten Seite

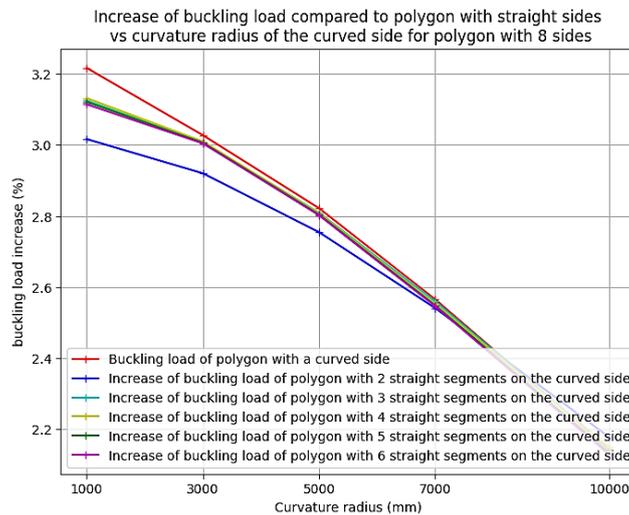


Abbildung 100: Die Beullaststeigerung vom Polygon mit 8 Seiten abhängig vom Krümmungsradius der gekrümmten Seite.

Aus Abbildungen 98, 99 und 100 ist es ersichtlich, dass die Beullast am stärksten bei Polygonen mit einer gekrümmten Seite steigt, und je stärker die Krümmung ist, desto größer ist der Effekt. Polygone mit nur vier Seiten profitieren dabei am meisten. sie zeigen den größten prozentualen Anstieg der Beullast. Mit steigender Seitenanzahl wird dieser positive Effekt der Krümmung schwächer.

Der Einfluss der Krümmung lässt sich aber auch durch eine Aufteilung der gekrümmten Seite in gerade Segmente nachbilden. Dabei gilt: Je mehr Segmente verwendet werden, desto besser wird die Krümmung angenähert. Bei Polygonen mit 6 oder 8 Seiten macht es allerdings kaum einen Unterschied, ob 4, 5 oder 6 Segmente verwendet werden. Beim 8-seitigen Polygon sinkt sogar die Beullast leicht, wenn mehr als 4 Segmente verwendet

werden. Das kann an Spannungskonzentrationen, die an den Verbindungsstellen zwischen den Segmenten entstehen liegen. Siehe Abbildung 101.

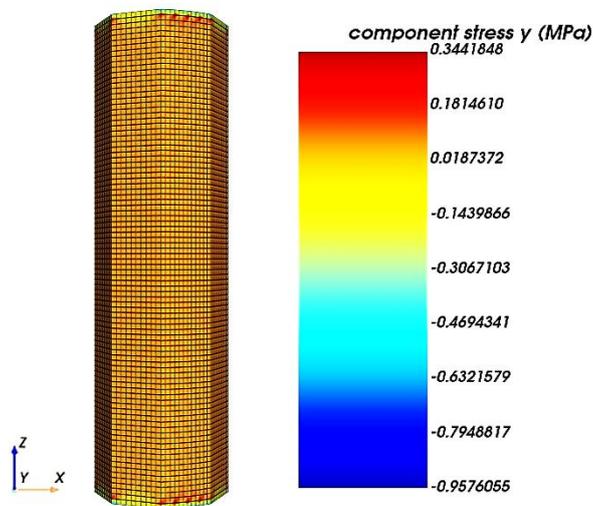


Abbildung 101: Spannungsverteilung in einem Polygon mit 8 Seiten und 5 Segmenten in tangentialer Richtung.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass mit einer Aufteilung einer Seite in Segmenten die Beullast der Profile gesteigert werden kann und diese Segmentierung neben der Krümmung ebenso eine Optimierungsmöglichkeit hinsichtlich der Beultragfähigkeit der Profile anbietet.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird das Beulverhalten polygonaler Hohlprofile untersucht, wie sie häufig in Teleskopstrukturen von Krankonstruktionen und ähnlichen Hebelösungen eingesetzt werden. Ziel ist es, den Einfluss verschiedener geometrischer Parameter und Randbedingungen auf die Beullast zu analysieren und die Beubewertung nach DIN EN 13001-3-1 besser zu nachvollziehen.

Mithilfe der Finite-Elemente-Methode, unter Verwendung von linearen Eigenwertanalysen und nichtlinearen statischen Analysen mit geometrischen Imperfektionen, wurden umfangreiche Parameterstudien durchgeführt. Die Profile wurden mithilfe von PyAnsys automatisiert modelliert, vernetzt und ausgewertet.

Die numerischen Analysen haben gezeigt, dass insbesondere im Bereich mittlerer Schlankheiten deutliche Abweichungen zwischen den normativen und den berechneten numerischen Beullasten auftreten. In diesen Bereichen zieht die Norm die Fließgrenze zur Berechnung der Beulspannung heran, obwohl das Beulverhalten – wie durch die numerischen Untersuchungen nachgewiesen – unabhängig von der Fließgrenze ist. In der Norm wird in diesem Bereich von einem linearen Zusammenhang zwischen Beulspannung und Schlankheitsgrad ausgegangen. Aus den numerischen Berechnungen ergibt sich allerdings eine nichtlineare Abhängigkeit der Beulspannung vom Schlankheitsgrad. Die Norm berücksichtigt in diesem Bereich des Schlankheitsgrads eine zusätzliche Sicherheit, da nach dem Beulen bei geringer Steigerung der Last bereits Plastizieren und Versagen der Struktur eintreten.

Ein weiterer Fokus lag auf der korrekten Modellierung der Randbedingungen nach Normvorgaben. Für den Vergleich mit analytischen Lösungen einer gekrümmten Platte zeigte sich, dass eine gelenkige Lagerung gemäß Norm nur dann richtig abgebildet wird, wenn radiale und tangential Verschiebungen an den freien Rändern gesperrt werden. So werden die zirkumferentielle Spannungen in der gekrümmten Platte richtig ausgebildet.

In einer erweiterten Parameterstudie wurde nachgewiesen, dass der Effekt der Erhöhung der Beullast durch die Krümmung lässt sich auf das Gesamtverhalten polygonaler Querschnitte übertragen. Wird die Krümmung in die Polygonstruktur eingebracht – etwa durch gekrümmte Seiten oder abgerundete Kanten –, kann die Beullast deutlich erhöht werden, ohne dass es bei für die Profile realistischen Krümmungen zu einem instabilen

Nachbeulverhalten kommt. Interessanterweise lässt sich dieser positive Einfluss einer gekrümmten Seite auch durch eine Segmentierung in gerade Platten näherungsweise abbilden.

Eine Erhöhung der Anzahl der Kantungen, also der Seiten eines Polygons, führt zu einer Steigerung der Beulspannung. Sinkt jedoch die Breite der Kantungen unter einen bestimmten Wert, steigt die kritische Spannung nicht weiter an, da die Platte in diesem Fall zunächst plastisch verformt wird, bevor das eigentliche Beulen eintritt. Dieser Fall ist jedoch nicht von praktischer Relevanz. Der Winkel zwischen benachbarten Platten hat bei symmetrischen Profilen kaum einen Einfluss auf die Beullast der einzelnen Platten. Die Platten in einem symmetrischen Polygon können somit einzeln mit gelenkiger Lagerung betrachtet und deren Beullast analytisch berechnet werden.

Die Arbeit leistet einen Beitrag zur genaueren Bewertung des Beulverhaltens polygonaler Hohlprofile. Die gewonnenen Erkenntnisse bieten eine gute Grundlage für weiterführende Untersuchungen zur Optimierung polygonaler Hohlprofile hinsichtlich ihres Beulverhaltens. Für die zukünftige Arbeit könnte das Optimierungspotential durch Modellierung von Sicken in Teleskopstrukturen untersucht werden. Das gezielte Einbringen von Eigenspannungen oder das bewusste Überlappen von Beulfeldern könnten weitere Möglichkeiten zur Erhöhung der Beultragfähigkeit anbieten. Diese Maßnahmen könnten helfen, Material effizienter einzusetzen und die Strukturen leichter zu machen, ohne die Stabilität der Struktur zu beeinträchtigen.

Ein wichtiger Schritt wäre die gezielte Weiterentwicklung der normativen Bemessungsdruckspannung. Durch Parameterstudien könnten realitätsnähere Grenzwerte und Übergänge zwischen den Schlankheitsbereichen definiert werden und die lineare Abhängigkeit der Bemessungsdruckspannung vom Schlankheitsgrad könnte angepasst werden.

Für komplexere oder asymmetrische Querschnitte sowie Profile mit abgerundeten Kanten, bei denen eine unabhängige analytische Berechnung der Beullast der Einzelsegmente ungenau ist, könnte ein Einspannfaktor die Genauigkeit der analytischen Berechnung erhöhen. Die Ermittlung des Einspannfaktors aus einer numerisch erstellten Datenbank mittels KI wäre denkbar. Dieser würde es ermöglichen, den gegenseitigen Einfluss benachbarter Platten auf das Beulverhalten besser zu erfassen und die Beullast dem einzelnen Platten analytisch zu berechnen.

Darüber hinaus gibt es weitere Einflussfaktoren, die bislang nicht detailliert betrachtet wurden, aber für reale Teleskopstrukturen von großer Bedeutung sind. Dazu zählen beispiels-

weise die Teleskopüberdeckung, die Anordnung von Gleitpaketen, lokale Imperfektionen wie Ausnehmungen in den Wänden, Querbelastungen sowie die Einflüsse von Schweißnähten. Diese Aspekte könnten durch gezielte numerische Studien näher untersucht und in bestehende Nachweiskonzepte integriert werden.

7 Referenz

- [1] T. Aoki, Y. Migita, und Y. Fukumoto, „Local buckling strength of closed polygon folded section columns“, *Journal of Constructional Steel Research*, Bd. 20, Nr. 4, S. 259–270, Jan. 1991, doi: 10.1016/0143-974X(91)90077-E.
- [2] A. Godat, F. Legeron, und D. Bazonga, „Stability investigation of local buckling behavior of tubular polygon columns under concentric compression“, *Thin-Walled Structures*, Bd. 53, S. 131–140, Apr. 2012, doi: 10.1016/j.tws.2011.12.013.
- [3] J. Yao, X. Qiu, Z. Zhou, Y. Fu, F. Xing, und E. Zhao, „Buckling failure analysis of all-terrain crane telescopic boom section“, *Engineering Failure Analysis*, Bd. 57, S. 105–117, Nov. 2015, doi: 10.1016/j.engfailanal.2015.07.038.
- [4] *DIN EN 13001-3-1:2019-03, Krane_- Konstruktion allgemein_- Teil_3-1: Grenzzustände und Sicherheitsnachweis von Stahltragwerken; Deutsche Fassung EN_13001-3-1:2012+A2:2018*. doi: 10.31030/2687824.
- [5] Pavlovic, A., Cristiano, F., Giangiacomo M., „Buckling analysis of telescopic boom: Theoretical and numerical verification of sliding pads“, *Tehnicki Vjesnik*. 24, 729-735, 2017, DOI: 10.17559/TV-20160510143822.
- [6] A. R. Pouladkhan, J. Emadi, und M. Safamehr, „Numerical Study of Buckling of Thin Plates“, *World Academy of Science, Engineering and Technology* 78, 2011.
- [7] G. N. Xu, G. H. Gao, und Z. C. Guo, „Analysis on Nonlinear Buckling Failure Influence Factors of Telescopic Boom System Based on Arc-Length and FEM Method“, *AMM*, Bd. 532, S. 291–296, Feb. 2014, doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.532.291.
- [8] X. L. Huang und A. M. Ji, „Analysis of Nonlinear Local Buckling of Crane Telescopic Boom“, *AMM*, Bd. 387, S. 197–201, Aug. 2013, doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.387.197.
- [9] J. Yao, F. Xing, Y. Fu, X. Qiu, Z. Zhou, und J. Hou, „Failure analysis of torsional buckling of all-terrain crane telescopic boom section“, *Engineering Failure Analysis*, Bd. 73, S. 72–84, März 2017, doi: 10.1016/j.engfailanal.2016.12.006.
- [10] B. Somodi und B. Kövesdi, „Flexural buckling resistance of cold-formed HSS hollow section members“, *Journal of Constructional Steel Research*, Bd. 128, S. 179–192, Jan. 2017, doi: 10.1016/j.jcsr.2016.08.014.
- [11] H. Ban, G. Shi, Y. Shi, und Y. Wang, „Overall buckling behavior of 460MPa high strength steel columns: Experimental investigation and design method“, *Journal of Constructional Steel Research*, Bd. 74, S. 140–150, Juli 2012, doi: 10.1016/j.jcsr.2012.02.013.
- [12] E. Ellobody, „Buckling analysis of high strength stainless steel stiffened and unstiffened slender hollow section columns“, *Journal of Constructional Steel Research*, Bd. 63, Nr. 2, S. 145–155, Feb. 2007, doi: 10.1016/j.jcsr.2006.04.007.

- [13] S.-E. Kim und C.-S. Kim, „Buckling strength of the cylindrical shell and tank subjected to axially compressive loads“, *Thin-Walled Structures*, Bd. 40, Nr. 4, S. 329–353, Apr. 2002, doi: 10.1016/S0263-8231(01)00066-0.
- [14] W. Schneider, „Ersatzimperfektionen für den numerischen Beulsicherheitsnachweis stählerner Schalentragwerke – State of the Art“, *Stahlbau*, Bd. 75, Nr. 9, S. 754–760, Sep. 2006, doi: 10.1002/stab.200610081.
- [15] M. Todt, „Lecture Notes – Nonlinear Finite Element Method“, TU Wien 2021.
- [16] P. Zhang und C. Yang, „A theoretical proof of the invalidity of dynamic relaxation arc-length method for snap-back problems“, *Comput Mech*, Bd. 69, Nr. 1, S. 335–344, Jan. 2022, doi: 10.1007/s00466-021-02071-9.
- [17] T. Reinke, „*Tragverhalten von biegebeanspruchten Stahlmasten mit polygonalen Querschnitten*“, Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Fakultät für Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften, KIT Scientific Publishing, D-76131 Karlsruhe, 2014.
- [18] D. Gross, W. Hauger, und P. Wriggers, *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2023. doi: 10.1007/978-3-662-66524-4.
- [19] W. Lohse, J. Laumann, und C. Wolf, *Stahlbau 2*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2020. doi: 10.1007/978-3-8348-2116-4.
- [20] *DIN EN 1993-1-5:2022-03, Eurocode_3_- Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten_- Teil_1-5: Plattenförmige Bauteile; Deutsche und Englische Fassung prEN_1993-1-5:2022*. doi: 10.31030/3304046.
- [21] *DIN EN 13001-3-1:2019-03, Krane_- Konstruktion allgemein_- Teil_3-1: Grenzzustände und Sicherheitsnachweis von Stahltragwerken; Deutsche Fassung EN_13001-3-1:2012+A2:2018*. doi: 10.31030/2687824.
- [22] Rammerstorfer, F.G., Skriptum Leichtbau, TU Wien, 2017.
- [23] J. Wiedemann, *Leichtbau: Elemente und Konstruktion*, 3. Aufl. 2007. in *Klassiker der Technik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. doi: 10.1007/978-3-540-33657-0.
- [24] Stowell E., „critical compressive stress for curved sheet“, NACA Wartime Reports, RB No. 3107, Washington, September 1943.
- [25] „DIN EN 13001-2“. *Kransicherheit - Konstruktion allgemein, Teil 2: Lasteinwirkungen, Deutsche Fassung EN 13001-2:2021*.
- [26] M. Seitz, „Linear Base Eigenvalue Buckling“, CADFEM GmbH, 2021.
- [27] Y. Yan, T. Xie, und Y. Qin, „Buckling Failure Analysis of Slender Composite Structure with Telescopic Boom and Truss“, *J Fail. Anal. and Preven.*, Bd. 24, Nr. 3, S. 1404–1411, Juni 2024, doi: 10.1007/s11668-024-01937-3.

- [28] P. E. Marsden, „Nonlinear Buckling Analysis with Initial Imperfection“, Customer Support Note, Lusas Engineering, UK, 2017.
- [29] S. Shayan, K. J. R. Rasmussen, und H. Zhang, „On the modelling of initial geometric imperfections of steel frames in advanced analysis“, *Journal of Constructional Steel Research*, Bd. 98, S. 167–177, Juli 2014, doi: 10.1016/j.jcsr.2014.02.016.
- [30] „ANSYS Introduction to Nonlinear Solver“, ANSYS, Inc., Canonsburg, PA 15317.
- [31] „ANSYS Mechanical APDL Element Reference“, ANSYS, Inc., Canonsburg, PA 15317, Release 14.0, November 2011.
- [32] „ANSYS Structural Analysis Guide“, ANSYS, Inc., Canonsburg, PA 15317, Release 12.1, November 2009.
- [33] „en.1993.1.5.2006“. *Eurocode_3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten_- Teil_1-5: Plattenförmige Bauteile. Annex C: Finite Element Methodes.*
- [34] *DIN EN 1993-1-14:2023-09, Eurocode_3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten_- Teil_1-14: Bemessung mithilfe von Finite-Element-Berechnung; Deutsche und Englische Fassung prEN_1993-1-14:2023.* doi: 10.31030/3481242.
- [35] M. Radwan und B. Kövesdi, „Enhanced buckling reduction factors using amplified imperfections for existing steel structures“, *Journal of Constructional Steel Research*, Bd. 214, S. 108478, März 2024, doi: 10.1016/j.jcsr.2024.108478.
- [36] K. L. Tran, L. Davaine, C. Douthe, und K. Sab, „Stability of curved panels under uniform axial compression“, *Journal of Constructional Steel Research*, Bd. 69, Nr. 1, S. 30–38, Feb. 2012, doi: 10.1016/j.jcsr.2011.07.015.
- [37] B. P. Gilbert, T. J.-M. Savoyat, und L. H. Teh, „Self-shape optimisation application: Optimisation of cold-formed steel columns“, *Thin-Walled Structures*, Bd. 60, S. 173–184, Nov. 2012, doi: 10.1016/j.tws.2012.06.008.
- [38] D. JobbÄ, „Stability Analysis of Thin-Walled Members with Curved Cross-Section Parts: Inelastic Behavior“.
- [39] „ANSYS Mechanical APDL Command Reference“, ANSYS, Inc., Canonsburg, PA 15317, Release 13.0, November 2010.
- [40] Pflüger A., *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, 3. Auflage, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 1975.

8 Anhang

8.1 Anahng A

Herausforderungen und Lösungen bei der Modellierung

Toleranz für die Selektion der Knoten:

Es wurde festgestellt, dass bei einer zunehmenden Netzfeinheit mehr als eine Reihe von Knoten am Rand für die Definition der Randbedingungen selektiert wurde. Infolgedessen wurde eine Toleranz von 10^{-9} für die Selektion der Knoten definiert. Somit erfolgte die automatische Selektion der Knoten mit zunehmender Netzfeinheit für verschiedene Seitenverhältnisse stets adäquat.

Lokales Koordinatensystem:

Bei der Modellierung der gekrümmten Platte zeigte die statische Analyse unsymmetrische Verschiebungen in tangentialer Richtung. Es stellte sich heraus, dass in der Simulation jedem Knoten ein individuelles lokales Knoten-Koordinatensystem zugewiesen ist, das unabhängig vom aktiv gesetzten Koordinatensystem immer parallel zum globalen Koordinatensystem ausgerichtet ist. Während globale und lokale Koordinatensysteme geometrische Elemente lokalisieren, orientiert das Knoten-Koordinatensystem die Freiheitsgradrichtungen an jedem Knoten. Die Knoten-x-Achse soll so rotiert werden, dass sie parallel zur x- oder r-Achse des aktiven Koordinatensystems verläuft. Das ist ein wichtiger Aspekt für die Definition der gelenkigen Lagerung unter Verwendung eines lokalen Koordinatensystems.

Überprüfung der erzeugten Geometrie:

Bei der automatisierten Geometrieerzeugung ist eine sorgfältige Überprüfung jedes einzelnen Schrittes essenziell, insbesondere im Hinblick auf die korrekte Definition der Key-points. Werden diese ungenau oder überlappend gesetzt, können die daraus generierten Flächen beim Extrudieren fehlerhaft erzeugt oder nicht korrekt miteinander verbunden werden. Dies führt in der Folge zu unplausiblen Spannungsverteilungen oder unrealistischen Verschiebungen in der späteren Analyse. Die entwickelten Skripten sind überprüft und korrekte Geometrien können zuverlässig für unterschiedliche Parameterkombinationen erzeugt werden.

Negativer Pivotwert:

In nichtlinearen Stabilitätsanalysen ist kein klarer Verzweigungspunkt in der Last-Verschiebungskurve sichtbar. Dennoch kann das Strukturverhalten auf einen Stabilitätsverlust hinweisen. In solchen Fällen ist eine genaue Untersuchung der numerischen Lösungsschritte erforderlich. Ein wichtiger Indikator für den Stabilitätsverlust ist das Auftreten eines negativen Pivotwertes in der Steifigkeitsmatrix während des Gleichungslösungsprozesses. Dieser Wert deutet darauf hin, dass die Gesamtsteifigkeit des Systems nicht mehr positiv definit ist, das ist ein typisches Merkmal für einen kritischen Gleichgewichtszustand bzw. einen Beulfall[39].

Während der Analyse kann mithilfe des Befehls PIVCHECK in der .out-Datei der jeweils größte und kleinste Pivotwert der Steifigkeitsmatrix ausgegeben werden. Tritt ein negativer Pivotwert in einem konvergiertem Lösungsschritt auf, hat das System einen Verzweigungspunkt übersehen. Bei der nichtlinearen Nachbeulanalyse wurde bei jeder Simulation die .out-Datei ausgewertet, um das Stabilitätsverhalten der Struktur genau nachzuvollziehen und einen richtigen Vergleich mit der analytischen Lösung aus der Norm zu machen.

8.2 Anhang B

Das Nachbeulverhalten der druckbeanspruchten Platten im gelben Bereich:

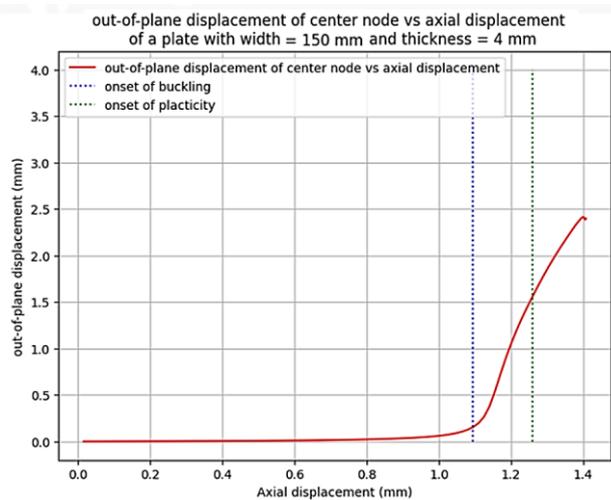
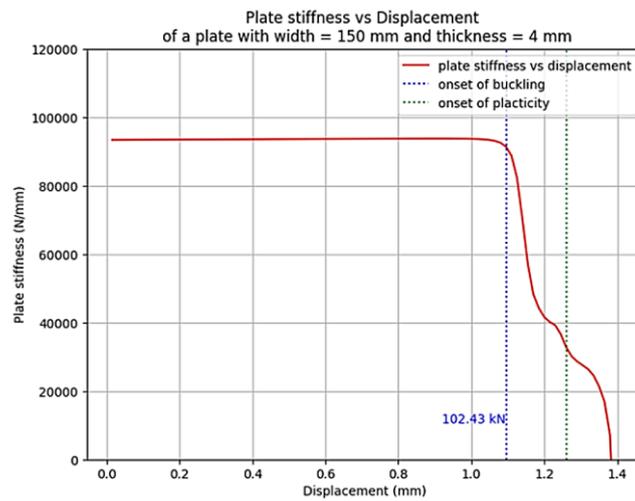
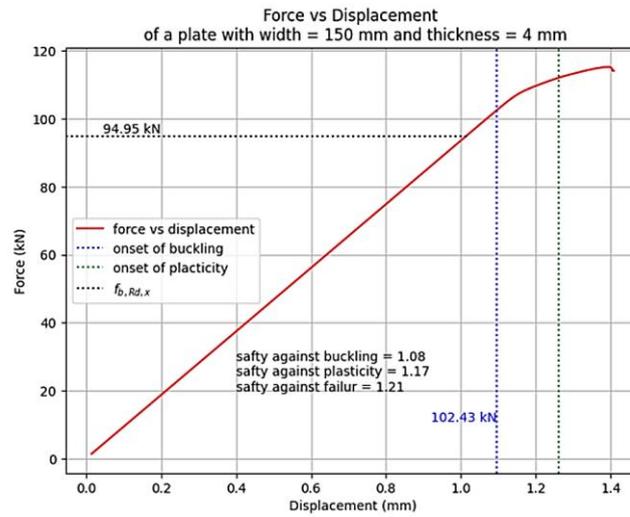


Abbildung 102: Das Nachbeulverhalten der druckbeanspruchten Platte $\psi = 1$ mit Breite = 150 mm und Dicke = 4 mm.

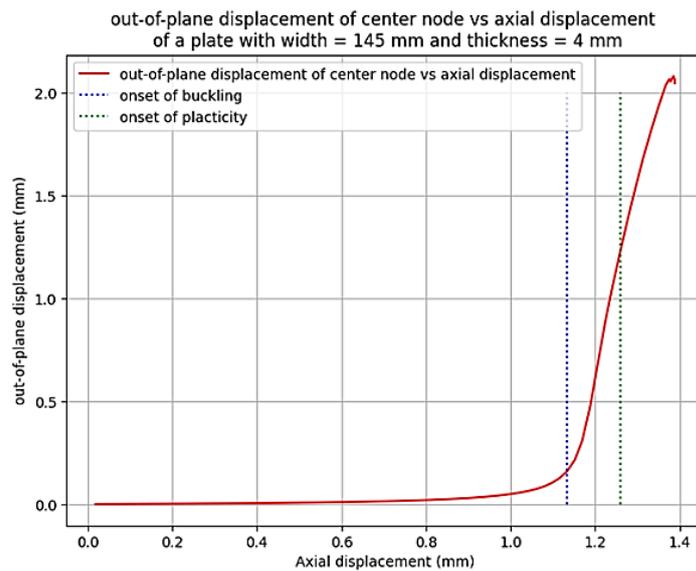
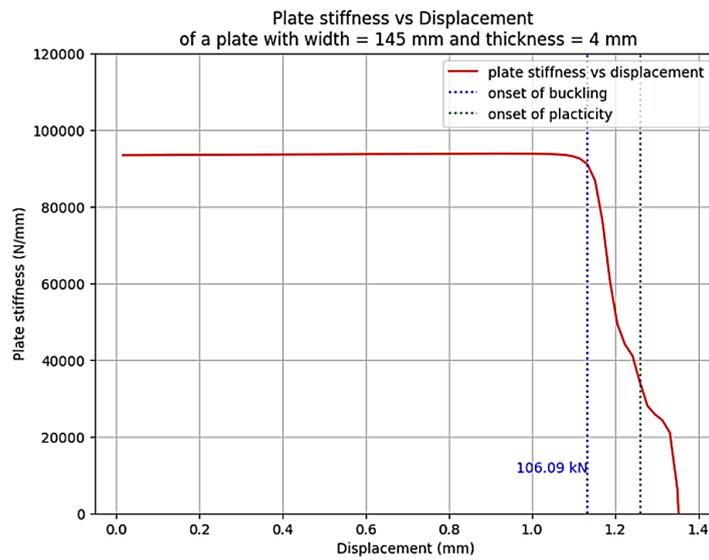
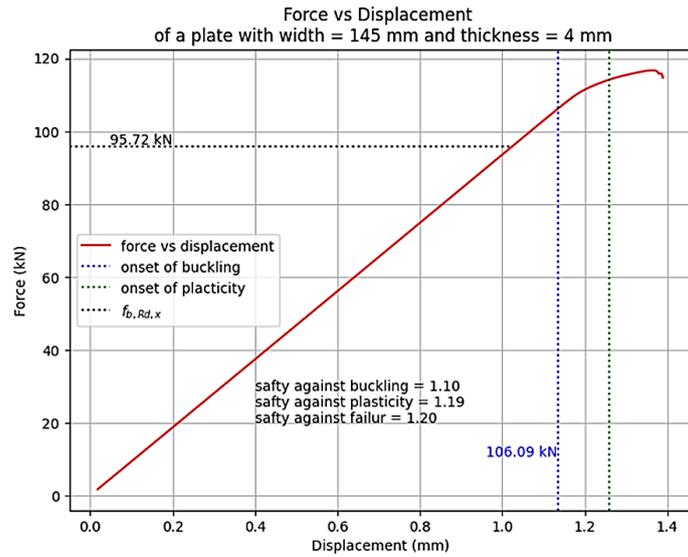


Abbildung 103: Das Nachbeulverhalten der druckbeanspruchten Platte $\psi = 1$ mit Breite = 145 mm und Dicke = 4 mm.

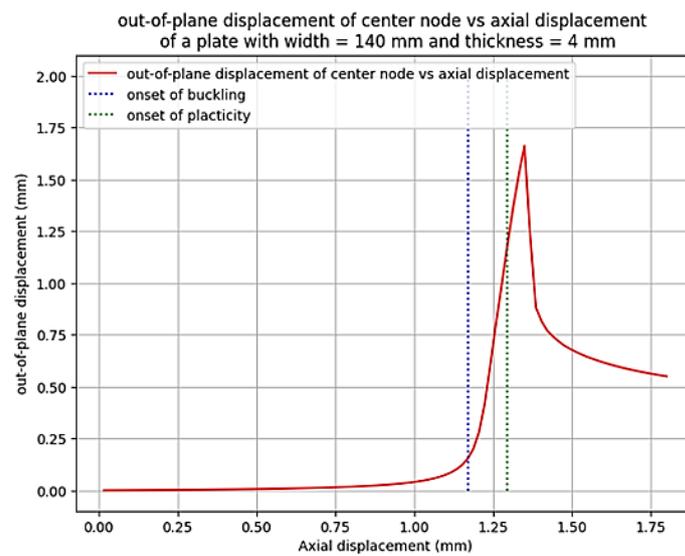
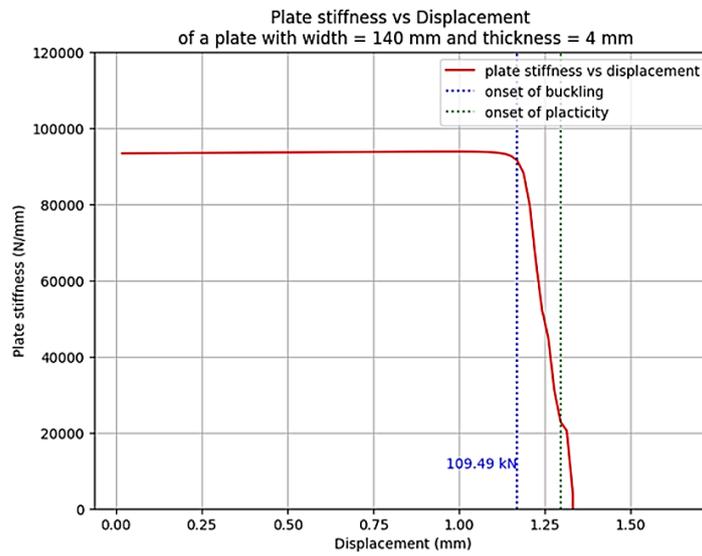
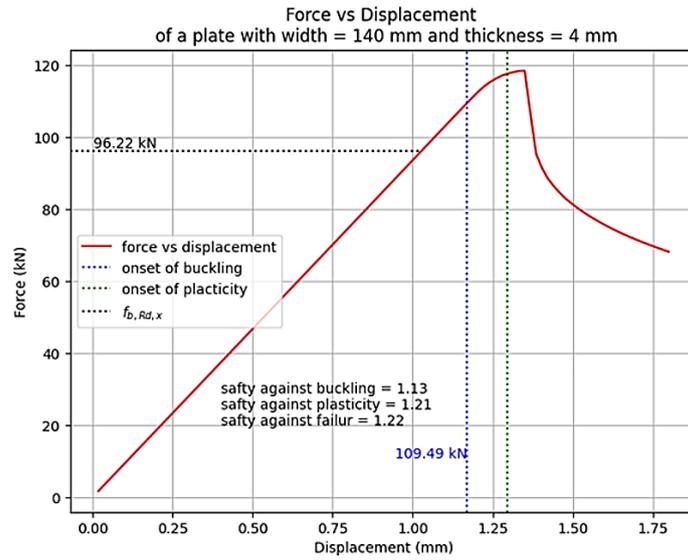


Abbildung 104: Das Nachbeulverhalten der druckbeanspruchten Platte $\psi = 1$ mit Breite = 140 mm und Dicke = 4 mm.

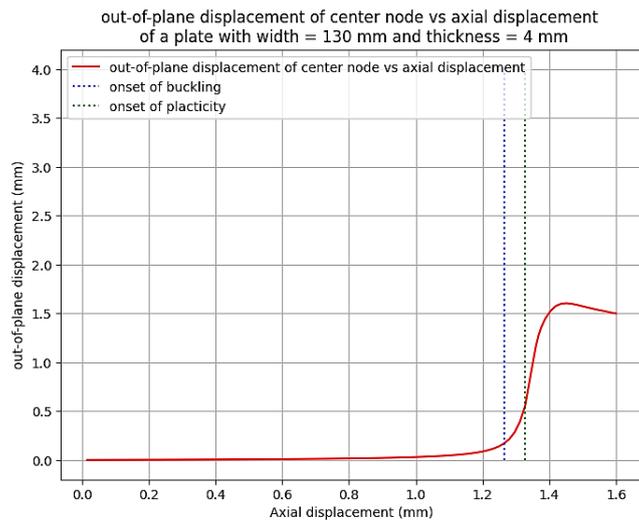
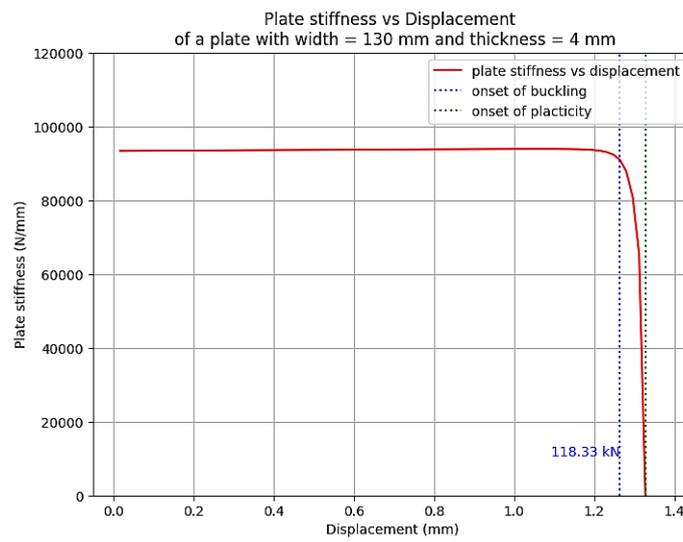
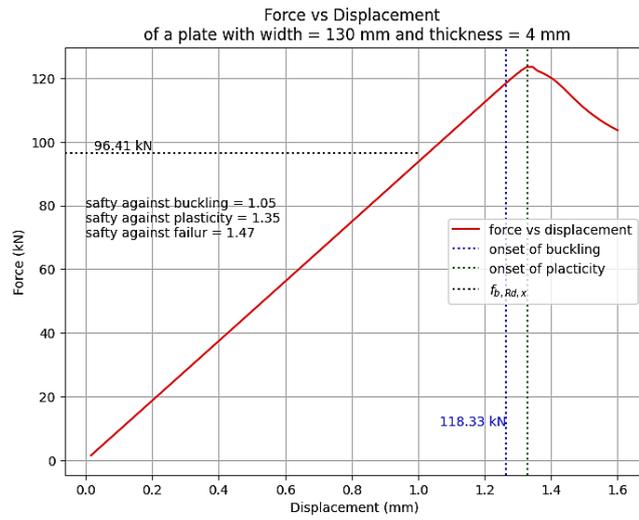


Abbildung 105: Das Nachbeulverhalten der druckbeanspruchten Platte $\psi = 1$ mit Breite = 130 mm und Dicke = 4 mm.

8.3 Anhang C

DIN EN 13001-3-1 Tabelle 15 – Knickfaktor $k_{\sigma x}$ [4].Tabelle 15 — Knickfaktor $k_{\sigma x}$

		Fall 1	Fall 2	
		An allen vier Rändern gestützt	An beiden belasteten (Außen-)Rändern und an nur einem längsseitigen Rand gestützt	
1	Art der Stützung			
2	Spannungsverteilung			
3	$\psi = 1$	4	0,43	
4	$1 > \psi > 0$	$\frac{8,2}{\psi + 1,05}$	$\frac{0,578}{\psi + 0,34}$	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$
5	$\psi = 0$	7,81	1,70	0,57
6	$0 > \psi > -1$	$7,81 - 6,29\psi + 9,78\psi^2$	$1,70 - 5\psi + 17,1\psi^2$	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$
7	$\psi = -1$	23,9	23,8	0,85
8	$\psi < -1$	$5,98 \times (1 - \psi)^2$	23,8	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$

DIN EN 1993-1-5 Tabelle 6.1 und 6.2 – Beulwert k_σ [20].

Tabelle 6.1 — Zweiseitig gestützte druckbeanspruchte Querschnittsteile

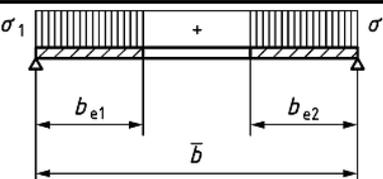
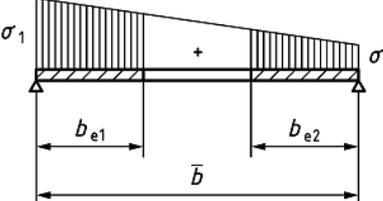
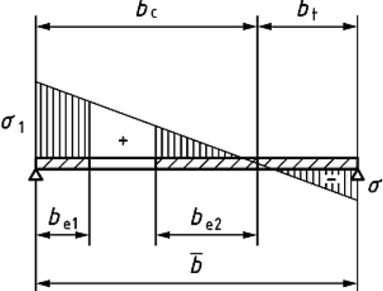
Spannungsverteilung (Druck positiv)				Wirksame Breite b_{eff}			
				$\psi = 1:$ $b_{\text{eff}} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = 0,5 b_{\text{eff}}$ $b_{e2} = 0,5 b_{\text{eff}}$			
				$1 > \psi \geq 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = \frac{2}{5 - \psi} b_{\text{eff}}$ $b_{e2} = b_{\text{eff}} - b_{e1}$			
				$\psi < 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho b_c = \rho \bar{b} / (1 - \psi)$ $b_{e1} = 0,4 b_{\text{eff}}$ $b_{e2} = 0,6 b_{\text{eff}}$			
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	$-1 > \psi \geq -3$	$\psi < -3$
Beulwert k_σ	4,0	$8,2 / (1,05 + \psi)$	7,81	$7,81 - 6,29\psi + 9,78\psi^2$	23,9	$5,98 (1 - \psi)^2$	95,68

Tabelle 6.2 — Einseitig gestützte Querschnittsteile

Spannungsverteilung (Druck positiv)		Wirksame Breite b_{eff}			
		$1 > \psi \geq 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho c$			
		$\psi < 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho b_c = \rho c / (1 - \psi)$			
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	0	-1	$1 \geq \psi \geq -3$	$\psi < -3$
Beulwert k_σ	0,43	0,57	0,85	$0,57 - 0,21\psi + 0,07\psi^2$	1,83

Spannungsverteilung (Druck positiv)		Wirksame Breite b_{eff}			
		$1 > \psi \geq 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho c$			
		$\psi < 0:$ $b_{\text{eff}} = \rho b_c = \rho c / (1 - \psi)$			
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	$\psi \leq -1$
Beulwert k_σ	0,43	$0,578 / (\psi + 0,34)$	1,70	$1,7 - 5\psi + 17,1\psi^2$	23,8

