Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

DIPLOMARBEIT

# Das Banach-Tarski Paradoxon

ausgeführt am

Institut für
Analysis and Scientific Computing
Technische Universität Wien

unter der Betreuung von

**Dr. Harald Woracek**

durch

**Riel Blakcori**

[redacted]

Wien, 29. September 2024

# Kurzfassung

Das Paradoxon von Banach-Tarski ist möglicherweise das verblüffendste Ergebnis moderner Mathematik. In seiner klassischen Variante besagt es, dass es möglich ist eine Kugel des Raumes in endlich viele Stücke zu zerlegen, welche anders zusammengesetzt zwei volle Kugeln der ursprünglichen Größe ergeben.

Der offensichtliche Widerspruch, dass es nicht möglich ist durch Bewegungen ein Volumen zu verdoppeln, löst sich auf, indem man die Konsequenz zieht, das die Zerteilung so kompliziert von statten geht, dass es nicht möglich ist, den einzelnen Teilen ein Volumen zuzuordnen.

In der folgenden Diplomarbeit konstruieren wir einen Beweis des berühmt berüchtigten Paradoxons von Banach-Tarski, ehe wir uns mit verwandten Fragestellungen im weiteren Verlauf beschäftigen. Zunächst nehmen wir die maßtheoretischen Konsequenzen unter die Lupe und folgern, dass beim Paradoxon von Banach-Tarski nicht messbare Mengen involviert sein müssen, sowie, dass das Inhaltsproblem ab Raumdimension 3 nicht mehr lösbar ist. Mit dem Satz von Tarski drehen wir die Fragestellung dann um und beweisen, dass sich für nicht paradoxe Mengen Inhalte finden lassen, deren Volumen normiert bleiben. Weiters zeigen wir dann, dass sich für Raumdimension 1 und 2 kein Analogon zum Paradoxon von Banach-Tarski finden lässt und folgern mit Hilfe des Satzes von Tarski, dass das Inhaltsproblem in Dimension 1 und 2 in der Tat eine Lösung besitzt. Abschließend lösen wir mit den neugewonnenen Methoden ein zum Verwechseln ähnliches Problem zu dem der Quadratur des Kreises aus der Antike, ohne uns in die Welt der pseudomathematischen Kreisquadrierer zu verirren.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Bibliothek
Your knowledge hub

# Abstract

The Banach-Tarski paradox is possibly the most astonishing result of modern mathematics. In its classic form, it states that it is possible to decompose a ball in space into a finite number of pieces, which can then be reassembled in such a way as to form two full balls of the original size.

The apparent contradiction, that it is impossible to double a volume merely by rearranging pieces, is resolved by considering that the decomposition is so complex that it is impossible to assign a volume to the individual pieces.

In the following thesis, we construct a proof of the infamous Banach-Tarski paradox, before addressing related questions in the subsequent sections. First, we examine the measure-theoretic consequences and conclude that the Banach-Tarski paradox involves non-measurable sets and that the problem of assigning volume becomes unsolvable in spatial dimensions of 3 or higher. With Tarski's theorem, we then reverse the question and prove that for non-paradoxical sets, it is possible to assign volumes that remain normalized. Furthermore, we show that in dimensions 1 and 2, no analog to the Banach-Tarski paradox can be found, and using Tarski's theorem, we conclude that the problem of assigning volume in dimensions 1 and 2 indeed has a solution. Finally, we will solve a problem strikingly similar to that of squaring the circle from ancient times using the newly acquired methods, without losing ourselves in the world of pseudo-mathematical circle-squarers.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Bibliothek
Your knowledge hub

# Danksagung

Abseits mathematischer Fähigkeiten bedarf es an Einigem, um ein Mathematik Studium erfolgreich bewältigen zu können. Es bedarf an Geduld und Disziplin, aber noch viel mehr bedarf es meiner Meinung nach an Spaß und Hilfsbereitschaft in der Gruppe. Ohne meine lieben Freunde hätte das ganze nicht annähernd so viel Spaß gemacht. Ich danke hierfür Renato, Sebastian, Afrim, Ewald und Carlo.

Wenn ich mal einen Rückzugsort im Falle einer Erkrankung gebraucht hatte, warteten meine Eltern in meiner Heimat in Kärnten stets mit offenen Armen auf mich. Für moralischen Beistand und gute Ratschläge sorgten dann meine beiden Schwestern Lorela und Alina. Ich hab euch sehr gern!

Im Nachhinein bin ich mir sicher die richtige Studienwahl getroffen zu haben. In der Mathematik habe ich in der Tat meine akademische und intellektuelle Heimat sowie meine künftige berufliche Leidenschaft gefunden. Großer Dank gilt all jenen, die mich in all den Jahren inspiriert haben, meinem ausgezeichneten Mathematiklehrer aus dem Gymnasium Herrn Arnulf Schönlieb, fantastischen Professoren wie Herrn Michael Kaltenbäck, Herrn Reinhard Winkler und Herrn Martin Goldstern und allen voran meinem Betreuer Herrn Harald Woracek, der mich seit Tag 1 auf der Uni mit seinem einzigartigen Vortragsstil für Mathematik begeistern konnte. Ich danke Ihnen für die unzähligen AHA Momente.

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Habilitation ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Bibliothek
Your knowledge hub

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne unzulässige Hilfe Dritter angefertigt habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet.

Wien, 29. September 2024

Riel Blakcori

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Bibliothek
Your knowledge hub

# Statutory Declaration in Lieu of an Oath

I hereby declare in lieu of an oath that I have completed the present Master Thesis independently and without illegitimate assistance from third parties. I have used no other than the specified sources and aids.

Vienna, September 29, 2024

Riel Blakcori

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Bibliothek
Your knowledge hub

# Inhaltsverzeichnis


**1. Einleitung** **1**

**2. Paradoxe Zerlegungen** **3**

**3. Konstruktion der freien Gruppe vom Rang 2** **6**
3.1. Eine allgemeine Konstruktion aus der Algebra . . . . . 6
3.2. Die freie Gruppe vom Rang 2 . . . . . 8
3.3. Die freie Gruppe als Untergruppe der Drehgruppe . . . . . 10

**4. Die Paradoxa von Hausdorff und von Banach-Tarski** **14**
4.1. Orbits und die Vererbung von Paradoxie . . . . . 14
4.2. Das Hausdorff Paradoxon . . . . . 16
4.3. Das Banach-Tarski Paradoxon . . . . . 17
4.4. Allgemeine Version des Banach-Tarski Paradoxons . . . . . 19

**5. Maßtheoretische Folgerungen und der Satz von Tarski** **22**
5.1. Auswirkungen des Banach-Tarski Paradoxons . . . . . 22
5.2. Der Satz von Tarski . . . . . 23

**6. Die (Nicht)-Existenz von Paradoxa auf der Gerade und der Ebene** **32**
6.1. Mittelbare Gruppen und Maße auf Gruppen . . . . . 32
6.2. Invariante Maß Erweiterung und Nichtexistenz von Paradoxa . . . . . 38
6.3. Das Sierpiński-Mazurkiewicz Paradoxon und das von Neumann Paradoxon . 40
6.4. Paradoxa auf den reellen Zahlen . . . . . 45

**7. Quadratur des Kreises** **47**
7.1. Das klassische Problem aus der Antike . . . . . 47
7.2. Eureka! Die Kreisquadratur nach Tarski . . . . . 52

**A. Appendix** **68**
A.1. Nützliches aus der Graphentheorie . . . . . 68
A.2. Nützliches aus der Topologie . . . . . 71
A.3. Nützliches aus der Algebra . . . . . 72
A.4. Nützliches aus der Linearen Algebra . . . . . 75
A.5. Nützliches aus der Zahlentheorie . . . . . 77
A.6. Nützliches aus der Maßtheorie . . . . . 85

**Symbole und Notation** **87**

**Literaturverzeichnis** **89**




Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Habilitationsschrift ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

# 1. Einleitung

In der Geometrie nennen wir zwei Polygone bzw. Polyeder kongruent oder deckungsgleich, wenn sie sich durch Parallelverschiebungen oder Drehungen ineinander überführen lassen. Unserer menschlichen Intuition nach besitzen solche deckungsgleichen Formen immer dasselbe Volumen. Wollen wir diese Beobachtung mathematisch präziser fassen, erwarten wir uns von einem Volumensmaß, dass es sich invariant unter Bewegungen des Raumes zu verhalten hat. Weiters nennen wir zwei Figuren äquizerlegbar bzw. zerlegungsgleich, wenn man sie in paarweise kongruente Mengen zerlegen kann. In der Tat erwarten wir auch in diesem Fall, dass sich das Volumen nicht verändert. Die nachfolgende Abbildung illustriert, wie man eine Tafel Schokolade zerschneiden kann, sodass man denken könnte, dass es vermeintlich möglich sei ein Stück Schokolade aus dem Nichts zu erhalten.

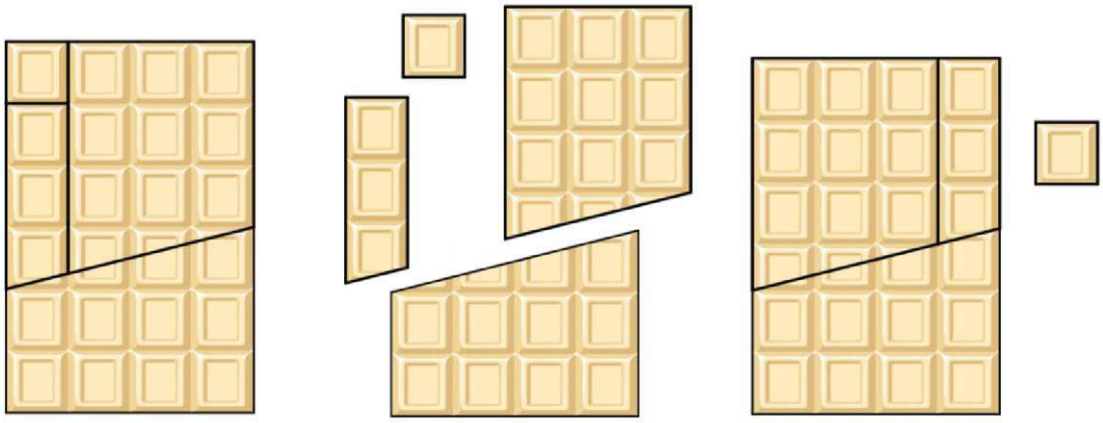

Abbildung 1.1.: Schokoladen Tafel Paradoxon (Quelle: [14])

Dass es sich allenfalls um ein psychologisches Paradoxon handelt, wird man schnell einsehen, indem man feststellt, dass die resultierende Tafel bei genauerer Betrachtung um ein Stück Schokolade an Volumen verloren hat. Es handelt sich nicht um die Verletzung unserer Intuition. Es stellt sich trotzdem die Frage, ob das immer der Fall ist oder ob es möglich ist, Etwas aus dem Nichts zu erzeugen.

Doch was genau ist ein Volumen eigentlich? Während die alten Griechen zur Zeit der Antike nach dem Archimedischen Prinzip unter Volumsmessung noch die Menge an Wasser verstanden, die ein Körper in der Lage war zu verdrängen, stellten sich Mathematiker des 19. und 20. Jahrhunderts die Frage, was eine Maßfunktion im Allgemeinen zu erfüllen hat und ob es möglich sei, den Begriff des Maßes auf beliebige Mengen sinnvoll zu erweitern.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

Zeitgleich kannte man bereits seit der Antike viele Mengen Paradoxa des Unendlichen, wenn gleich sie noch kein geometrisches Pendant hatten. Beispielsweise wusste man, dass die Menge der natürlichen Zahlen gleich groß im Sinne einer eins zu eins Beziehung ihrer Elemente wie die Menge der geraden Zahlen ist. Analoges gilt auch für die ungeraden Zahlen, die mit den geraden Zahlen vereint die natürlichen Zahlen ergeben. Es ist also möglich durch Umnummerierung Teile des Ganzen und sein Komplement zu nehmen und das Ganze zweimal zu erzeugen:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \to \mathbb{G}: &\quad 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 6, \ldots \\ \mathbb{N} \to \mathbb{U}: &\quad 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 5, \ldots \\ |\mathbb{G}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{U}| &\quad \text{wobei } \mathbb{N} = \mathbb{G} \cup \mathbb{U}. \end{aligned}$$

Es stellte sich die Frage, ob sich so eine mengentheoretische Überlegung auf geometrische Figuren ummünzen ließe. Für endgültige Verblüffung sorgte dann das von den polnischen Mathematikern Stefan Banach und Alfred Tarski entdeckte Paradoxon, nach dem es möglich sei, eine Kugel in drei oder mehr Dimensionen derart zu zerlegen, sodass sich ihre Teile zu zwei lückenlosen Kugeln mit jeweils der selben Größe wie die ursprüngliche Kugel zusammenfügen lassen.

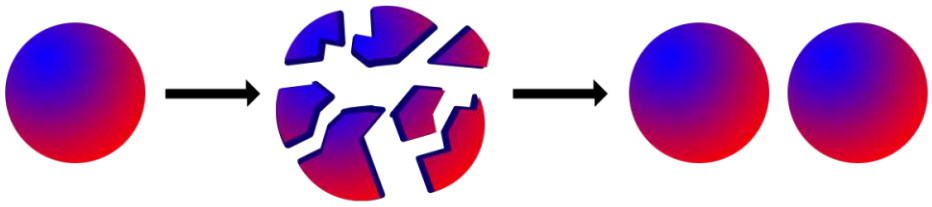

Abbildung 1.2.: Das Paradoxon von Banach und Tarski

In der folgenden Arbeit verschärfen wir die Bedeutung, dass eine Menge paradox ist und konstruieren dann das Banach-Tarski Paradoxon ausgehend von einer mengentheoretisch algebraischen Überlegung hin zu einer geometrischen Betrachtung, ehe wir die maßtheoretischen Auswirkungen dieser Entdeckung unter die Lupe nehmen.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

# 2. Paradoxe Zerlegungen

Der folgende Abschnitt richtet sich nach [TW16, Kapitel 1-3].

**2.1. Definition.**
Sei $G$ eine Gruppe, die auf $X$ operiert und seien $A$ und $B$ Teilmengen von $X$.

(i) $A$ und $B$ heißen *kongruent bezüglich* $G$, falls es ein Element $g$ aus $G$ gibt, sodass $A = gB$ gilt.

(ii) $A$ und $B$ heißen *äquizerlegbar* bzw. *zerlegungsgleich bezüglich* $G$, falls $A$ und $B$ in dieselbe endliche Anzahl disjunkter Teilmengen $A_i$ und $B_i$ zerlegt werden können, die jeweils $G$-kongruent sind. Also, es existieren $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \subseteq X$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$, $i < j \leqslant n$, und für $g_1, \ldots, g_n \in G$ gilt $g_i(A_i) = B_i$, sodass

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Für die Äquizerlegbarkeit zweier Mengen $A$ und $B$ benutzen wir die Notation $A \sim_G B$. Für die Relation äquizerlegbar vermöge $n$-vielen Stücken zu sein, schreiben wir $A \sim_n B$.

**2.2. Lemma.** *Bei $\sim_G$ handelt es sich um eine Äquivalenzrelation.*

*Beweis.* Für die Reflexivität nimmt man die Identität $\mathrm{id} \in G$. Symmetrie ist auch direkt ersichtlich. Falls $A$ und $B$ kongruent vermöge $g \in G$ sind, so sind $B$ und $A$ dies auch vermöge $g^{-1}$. Für die Transitivität betrachte man $A \sim_n B$, also die Relation, dass zwei Mengen $G$-äquizerlegbar mittels $n$-vielen Stücken sind. Natürlich gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sim_n = \sim_G$. Nun sei $A \sim_n B$ und $B \sim_m C$. Dann folgt $A \sim_{mn} C$, da $\bigcup_{j=1}^{m} h_j(C_j) = B = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i)$ und somit, dass $C = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} h_j^{-1}(g_i(A_i))$ gilt. Insbesondere folgt mit $A \sim_G B$ und $B \sim_G C$, dass $A \sim_G C$ gilt.

□

**2.3. Definition (paradox).** Sei $G$ eine Gruppe, die auf einer Menge $X$ operiert und sei $E$ eine nichtleere Teilmenge von $X$. Dann heißt $E$ *paradox bezüglich* $G$, falls es positive ganze Zahlen $m$ und $n$, paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ von $E$, und Gruppenelementen $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ gibt, sodass $E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i)$ und $E = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j)$ gilt.
Eine Gruppe $G$ heißt *paradox*, falls sie als Menge paradox bezüglich sich selbst mittels Linksmultiplikation ist.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Wien Bibliothek Your knowledge hub

**2.4. Bemerkung.** $E$ ist paradox bezüglich $G$, genau dann wenn sich $E$ in zwei Teilmengen $A$ und $B$ disjunkt zerlegen lässt, sodass sowohl $A$ als auch $B$ äquizerlegbar mit $E$ bezüglich $G$ sind. Man definiere einfach $A := \bigcup_i A_i$ und $B := \bigcup_j B_j$ und erhält die beiden zu $E$ äqizerlegbaren Mengen. Umgekehrt erhält man aus disjunkten und zu $E$ äquizerlegbaren Mengen $A$ und $B$ eine paradoxe Zerlegung, da wegen der Definition von Äquizerlegbarkeit $E$ sowohl als $\bigcup_i g_i(A_i)$ als auch als $\bigcup_j h_j(B_j)$ geschrieben werden kann.

**2.5. Lemma.** *Seien $A$ und $A'$ bzw. $B$ und $B'$ äquizerlegbar bezüglich $G$. Falls $A \cap B = \emptyset = A' \cap B'$, dann gilt, dass $A \cup B$ und $A' \cup B'$ äquizerlegbar bezüglich $G$ sind.*

*Beweis.* Aufgrund von $A \sim_G A'$ und $B \sim_G B'$, erhalten wir die disjunkten Zerlegungen $A \cup B = \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{j=1}^m B_j$ sowie $A' \cup B' = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i) \cup \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j)$ vermöge der Mengen $A_i, B_j$ und der Gruppenelemente $g_i, h_j \in G$, und somit Äquizerlegbarkeit $A \cup B \sim_G A' \cup B'$. $\square$

**2.6. Beispiel.** Sei $SO_2(\mathbb{R})$ die Drehgruppe im $\mathbb{R}^2$. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kreis und $x \in K$ ein beliebiger Punkt. Dann ist $K$ äquizerlegbar zu $K \setminus \{x\}$ bezüglich $SO_2(\mathbb{R})$.

Der Einfachkeit halber betrachten wir den Einheitskreis und identifizieren $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$. Sei $x = 1$, dann definieren wir folgende Rotation $\varrho : z \mapsto z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}$ und wenden sie auf folgende Menge an: $E = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$. Es gilt folglich $\varrho(E) = E \cup \{x\}$ und somit folgt mit Lemma 2.5

$$K \setminus \{x\} = K \setminus (E \cup \{x\}) \cup E \sim_{SO_2} K \setminus (E \cup \{x\}) \cup \varrho(E) = \\ K \setminus (E \cup \{x\}) \cup E \cup \{x\} = K.$$

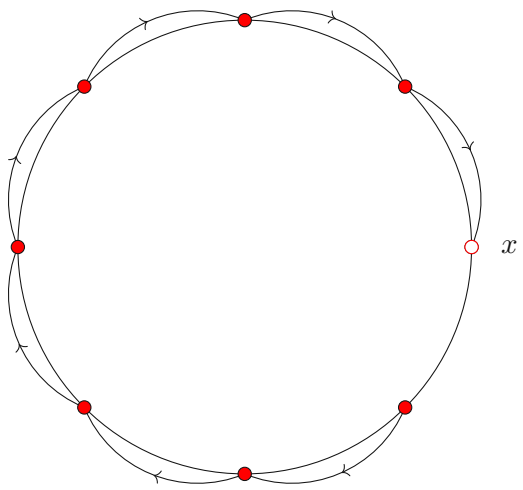


Abbildung 2.1.: Das Loch kann durch die unendlich vielen Punkte auf der Kreislinie gestopft werden.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

**2.7. Lemma.** *Betrachte Mengen $A$ und $B$, die $G$-äquizerlegbar sind. Dann gibt es eine bijektive Funktion $g : A \to B$, so dass für alle Teilmengen $C$ von $A$ gilt, dass $C$ und $g(C)$ äquizerlegbar bezüglich $G$ sind.*

*Beweis.* Nach Definition existieren disjunkte Zerlegungen $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ und $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ und $g_i \in G$ mit $g_i(A_i) = B_i$. Damit können wir eine Funktion $g$ auf jeder Teilmenge $A_i$ mittels $g\big|_{A_i} := g_i$ definieren. Diese Funktion ist somit bijektiv und wir zeigen, dass jede Teilmenge $C$ von $A$ äquizerlegbar bezüglich $G$ mit $g(C)$ ist. Sei $C = \bigcup_i C_i$ wobei $C_i \subseteq A_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt. Dann erhalten wir $g(C) = \bigcup_i g\big|_{A_i}(C_i) = \bigcup_i g_i(C_i)$ und somit Äquizerlegbarkeit.

□

**2.8. Satz.** *Sei $G$ eine Gruppe, die auf einer Menge $X$ operiert und seien $E$ und $E'$ Teilmengen von $X$, die äquizerlegbar bezüglich $G$ sind. Falls $E$ paradox bezüglich $G$ ist, so ist auch $E'$ paradox bezüglich $G$.*

*Beweis.* $E$ und $E'$ sind $G$-äquizerlegbar, also $E \sim_G E'$. Da $E$ paradox bezüglich $G$ ist, existieren nach Bemerkung 2.4 disjunkte Teilmengen $A$ und $B$ mit $E = A \cup B$, sodass $A \sim_G E$ und $B \sim_G E$ gilt. Aus der Transitivität der Äquizerlegbarkeitsrelation folgt, dass $A \sim_G E'$ und $B \sim_G E'$. Da $E$ und $E'$ äquizerlegbar sind, gilt nach Lemma 2.7, dass es eine Bijektion $g : E \to E'$ mit der Eigenschaft $C \sim_G g(C)$ für jede Teilmenge $C$ von $E$ gibt. Insbesondere gilt somit $A \sim_G g(A)$ und $B \sim_G g(B)$. Aus der Bijektivität von $g$, erhalten wir die disjunkte Zerlegung $E' = g(A) \cup g(B)$ und aus der Transitivität folgt wiederum $E' \sim_G g(A)$ und $E' \sim_G g(B)$. Also ist $E'$ paradox bezüglich $G$.

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

# 3. Konstruktion der freien Gruppe vom Rang 2

## 3.1. Eine allgemeine Konstruktion aus der Algebra

Der folgende Abschnitt richtet sich nach der Konstruktion aus [GW22, Kapitel 4].

**3.1. Definition.** Sei

1. $\mathcal{K}$ eine Klasse von Algebren des gleichen Typs,
2. $\mathfrak{F} = \big(F, (\omega_i)_{i \in I}\big)$ eine Algebra in $\mathcal{K}$,
3. X eine Menge,
4. und $\iota : X \to F$ eine Funktion.

$\mathfrak{F}$ heißt *frei über* $(X, \iota)$ *in* $\mathcal{K}$, wenn für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ mit Trägermenge $A$ und für alle $j : X \to A$ ein eindeutiger Homomorphismus $\varphi$ mit $j = \varphi \circ \iota$ existiert.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\iota"] & \\ \mathfrak{A} & & \mathfrak{F} \arrow[ll, dotted, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

Im Folgenden werden wir meist nur den Fall $X \subseteq F$ und $\iota = \mathrm{id}_X$ betrachten.

Nun werden wir den Begriff der freien Gruppe aus der Algebra wiederholen, der ein zentrales Konzept im Zusammenhang der Konstruktionen in den folgenden Kapiteln darstellen wird.

**3.2. Konstruktion der freien Gruppe.** Sei $B$ eine Menge von Buchstaben. Sei $\bar{B}$ eine zu $B$ disjunkte Menge, die gleichmächtig zu $B$ ist, und sei $x \mapsto \bar{x}$ eine Bijektion. Sei $M := (B \cup \bar{B})^*$ das freie Monoid, dass wie folgt kanonisch entsteht. Seine Trägermenge ist die Menge aller endlichen Zeichenfolgen, die man mit den Buchstaben aus $B$ und $\bar{B}$ bilden kann (inklusive der leeren Folge $\varepsilon$). Seine Operation ist die Konkatenation der Zeichenfolgen. Die Folgen der Länge 1, die nur aus einem Element von $B$ bestehen, identifizieren wir mit dem entsprechenden Element, sodass wir $B \subseteq M$ annehmen dürfen.
Auf dem Monoid $M$ definieren wir eine Relation $\sim$, von der wir zeigen werden:

1. $\sim$ ist eine Kongruenzrelation.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

2. $M/\sim$ ist nicht nur ein Monoid, sondern sogar eine Gruppe.

3. $M/\sim$ ist frei über $B$ bezüglich

$$B \hookrightarrow B \cup \bar{B} \hookrightarrow (B \cup \bar{B})^* = M \xrightarrow{k} M/\sim .$$

**Definition der Kongruenzrelation** $\sim$: Für zwei Worte $w, w' \in M$ sagen wir, dass $w'$ aus $w$ hervorgeht, wenn man $w = ux\bar{x}v$ oder $w = u\bar{x}xv$ schreiben kann und $w' = uv$ mit $u, v \in M$. Sprich, man erhält $w'$ durch Anwenden der Kürzungsregel eines Buchstabens und seines Inversen aus $w$. In Zeichen schreiben wir hierfür $w \rightsquigarrow w'$. Nun bezeichnen wir mit $\sim$ die reflexive, symmetrische und transitive Hülle von $\rightsquigarrow$, also die kleinste Äquivalenzrelation, die $\rightsquigarrow$ enthält. Alternativ: $w \sim w'$ gilt genau dann, wenn $w = w'$ ist, oder es eine endliche Folge $(w_0, \ldots, w_n)$ gibt, für die $w = w_0$, $w' = w_n$, und für alle $i < n : w_i \rightsquigarrow w_{i+1}$ oder $w_{i+1} \rightsquigarrow w_i$ gilt.

Aus $v \rightsquigarrow v'$ und $w \rightsquigarrow w'$ folgt $vw \rightsquigarrow v'w \rightsquigarrow v'w'$, also $vw \sim v'w'$. Mit Induktion nach der Wortlänge folgert man leicht, dass $\sim$ mit der Konkatenation verträglich ist. Daher ist $\sim$ eine Halbgruppenkongruenz, womit $M/\sim$ eine Halbgruppe und sogar ein Monoid ist.

$M/\sim$ **ist eine Gruppe** : Da $x\bar{x} \sim \varepsilon \sim \bar{x}x$ gilt, gibt es in $M/\sim$ zu jedem Element von $B \cup \bar{B}$ ein Inverses. Die Inverse erhält man, indem man die Reihenfolge der Buchstaben umdreht und jedes $b$ mit dem entsprechenden $\bar{b}$ vertauscht. Zum Beispiel ist $\left(b_1\bar{b}_2\bar{b}_2\bar{b}_1b_2\right)^{-1} = \bar{b}_2b_1b_2b_2\bar{b}_1$. Daher ist $M/\sim$ eine Gruppe.

$M/\sim$ **ist frei über** $k(B)$: Sei $j : B \to G$ eine beliebige Abbildung von $B$ in eine Gruppe $G$. Zunächst setzen wir $j$ zu einer Abbildung $\bar{j} : B \cup \bar{B} \to G$ fort, indem wir $\bar{j}(\bar{b}) := j(b)^{-1}$ definieren. Weil $(B \cup \bar{B})^*$ als Monoid frei über $B \cup \bar{B}$ ist, können wir $\bar{j}$ zu einem Monoidhomomorphismus $j^* : (B \cup \bar{B})^* \to G$ fortsetzen. Nach Definition der inversen Elemente und aufgrund der Multiplikativität des Homomorphismus folgt aus $w \rightsquigarrow w'$ stets $j^*(w) = j^*(w')$. Somit ist die Relation $\rightsquigarrow$ im Kern der Abbildung $\ker(j^*) := \{(w, w') \in M \times M \mid j^*(w) = j^*(w')\}$ enthalten. Aus der Algebra wissen wir, dass der Kern eines Homomorphismus stets eine Äquivalenzrelation bildet, insbesondere gilt also $\sim \subseteq \ker(j^*)$, da $\sim$ die kleinste Äquivalenzrelation ist, die $\rightsquigarrow$ enthält. Daher folgt aus $w \sim w'$, dass $j^*(w) = j^*(w')$ gilt. Somit ist die Abbildung $j^\sim : M/\sim \to G$, die durch $j^\sim([w]_\sim) := j^*(w)$ definiert ist, wohldefiniert. Um zu zeigen, dass $j^\sim$ ein Gruppenhomomorphismus ist, beweist man zunächst die Eigenschaft $j^\sim(ww') = j^\sim(w)\, j^\sim(w')$ wobei $w, w' \in B \cup \bar{B}$, welche sich aus der Homomorphismuseigenschaft von $j^*$ ergibt. Mit Induktion nach der Wortlänge folgt dann die Behauptung. Nach Definition ist $j^\sim(k(b)) = j^\sim([b]_\sim) = j^*(b) = j(b)$ für alle $b \in B$. Also ist $M/\sim$ frei über $B$ bezüglich $k$.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, Rightarrow] \arrow[rrd, bend right, "j"'] & M \arrow[r] & M/\sim \arrow[d, dotted, "j"] \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

**3.3. Definition.** Wir nennen ein Wort $w \in M$ *reduziert*, wenn es kein $w'$ gibt, sodass $w \rightsquigarrow w'$ gilt.

**3.4. Bemerkung.** Klarerweise ist ein Wort reduziert, wenn keine aufeinanderfolgenden, inversen Buchstaben vorkommen. Man kann sehen, dass es in jeder Äquivalenzklasse ein eindeutiges reduziertes Wort gibt, wobei der folgende Algorithmus zu jedem $w \in M$ das eindeutig bestimmte reduzierte $w'$ mit $w \sim w'$ liefert. Dieses Wort $w'$ ist gleichzeitig das eindeutig bestimmte kürzeste Wort aus der Äquivalenzklasse $[w]_\sim$.

**Algorithmus:** Erhalten des reduzierten Wortes
**Eingabe:** $w \in M$
  **für alle** $b \in B$ **tue**
    **wenn** $w = vb\bar{b}v'$ oder $w = v\bar{b}bv'$ **dann**
      $w' := vv'$
      **neue Eingabe:** $w'$
    **end wenn**
  **end für**
  $w$ **zurückgeben**

**3.5. Definition.** Die Mächtigkeit der Menge $B$ wird der Rang der freien Gruppe genannt.

## 3.2. Die freie Gruppe vom Rang 2

Dieser Abschnitt richtet sich nach [TW16, Kapitel 1.1.2].
Im Folgenden sei $B = \{\sigma, \tau\}$ mit den inversen Buchstaben $\sigma^{-1}$ und $\tau^{-1}$. Mit $F(\sigma, \tau)$ bezeichnen wir die daraus resultierende freie Gruppe vom Rang 2 ganz nach der Konstruktion wie in Abschnitt 3.1. In Zukunft schreiben wir die Elemente von $F(\sigma, \tau)$ nicht mehr als Äquivalenzklassen, sondern als den reduzierten Repräsentanten.

Für die Wörter in $F(\sigma, \tau)$, die mit $\sigma, \tau, \sigma^{-1}$ bzw. $\tau^{-1}$ beginnen, schreiben wir $F_\sigma, F_\tau, F_{\sigma^{-1}}$ und $F_{\tau^{-1}}$, womit sich die freie Gruppe vom Rang 2 wie folgt disjunkt zerlegen lässt:

$$F(\sigma, \tau) = \{\varepsilon\} \cup F_\sigma \cup F_{\sigma^{-1}} \cup F_\tau \cup F_{\tau^{-1}}.$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Habilitationsschrift ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

Mit der geleisteten Vorarbeit lässt sich nun folgender Satz formulieren.

**3.6. Satz.** *Die freie Gruppe vom Rang 2 ist paradox.*

*Beweis.* Wir schreiben $F(\sigma, \tau)$ als die disjunkte Vereinigung der Mengen $A := A_1 \cup A_2$ und $B := B_1 \cup B_2$, wobei die zugehörigen Mengen wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} A_1 &:= F_\sigma \\ A_2 &:= F_{\sigma^{-1}} \\ B_1 &:= F_\tau \cup \{\varepsilon, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \ldots\} \\ B_2 &:= F_{\tau^{-1}} \setminus \{\tau^{-1}, \tau^{-2}, \ldots\}. \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass sowohl $A$ als auch $B$ äquizerlegbar mit $F(\sigma, \tau)$ sind.

Sei dazu $w \notin A_1$ ein reduziertes Wort. Dann ist $\sigma^{-1}w \in A_2$ ebenfalls ein reduziertes Wort, da es nicht mit einem $\sigma$ gekürzt werden kann. Somit gilt $w = \sigma\sigma^{-1}w \in \sigma A_2$.
Umgekehrt sei $w \notin \sigma A_2$ ein reduziertes Wort. Es gilt $\sigma A_2 = \{\varepsilon\} \cup F_{\sigma^{-1}} \cup F_\tau \cup F_{\tau^{-1}}$. Somit kann sich $w$ nur mehr in $F_\sigma = A_1$ befinden und $F(\sigma, \tau)$ kann als die disjunkte Vereinigung $A_1 \cup \sigma A_2$ geschrieben werden, somit gilt: $A$ und $F(\sigma, \tau)$ sind äquizerlegbar.

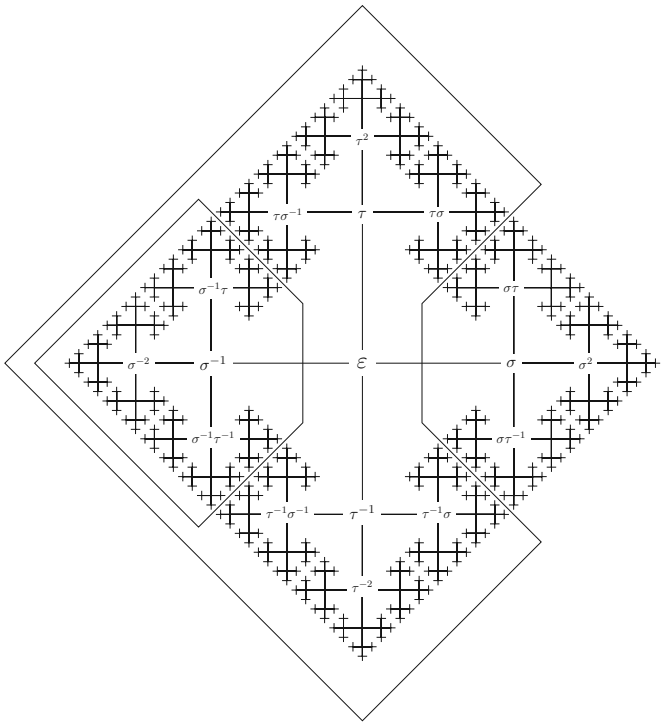


Abbildung 3.1.: Der sogenannte Cayley Graph der freien Gruppe illustriert die Beweisidee: aus einem Viertel der Menge wird durch Linksmultiplikation Dreiviertel erzeugt.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

Weiters sieht man, dass $\tau B_2 = \tau(F_{\tau^{-1}}) \setminus \{\varepsilon, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \ldots\}$ gilt. Insgesamt folgt dann Äquizerlegbarkeit von $B$ und $F(\sigma, \tau)$ mittels

$$\begin{aligned} B_1 \cup \tau B_2 =& F_\tau \cup \{\varepsilon, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \ldots\} \cup \tau(F_{\tau^{-1}}) \setminus \{\varepsilon, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \ldots\} = \\ & F_\tau \cup \tau F_{\tau^{-1}} = F_\tau \cup \{\varepsilon\} \cup F_{\tau^{-1}} \cup F_\sigma \cup F_{\sigma^{-1}} = F(\sigma, \tau). \end{aligned}$$

□

## 3.3. Die freie Gruppe als Untergruppe der Drehgruppe

Dieser Abschnitt folgt den Ideen und Beweisen aus [Winb, Kapitel 3].
Sei $SO_3(\mathbb{R})$ die Gruppe aller 3-dimensionalen orthogonalen Matrizen mit Determinante 1. In Zuge unserer vorhergehenden Überlegungen wurde noch gar nicht auf eine mögliche geometrische Interpretation der freien Gruppe eingegangen. Bisher war unsere Konstruktion rein formal.

**3.7. Motivation.** Im Folgenden sind wir auf der Suche nach einer zu $F(\sigma, \tau)$ isomorphen Untergruppe von $SO_3(\mathbb{R})$. Dabei fassen wir im Weiteren die Worte $w$ als Folgen von Rotationen im $\mathbb{R}^3$ auf, die sich durch eine geeignete Rotation $\sigma$ bezüglich der $z$-Achse und $\tau$ bezüglich der $x$-Achse und deren Inversen erzeugen lassen. Für einen Punkt $y$ auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$ bezeichnen wir mit $w(y)$ die Folge an Rotationen angewandt an den Punkt. Wir suchen also nach Rotationen mit der Eigenschaft, dass $w(y) = w'(y)$ nur wenn die Wörter $w = w'$ übereinstimmen.

Die Drehgruppe $SO_3(\mathbb{R})$ ist eine Untergruppe der orthogonalen Matrizen und jedes Element lässt sich als die Hintereinanderausführung von Rotationen darstellen, die die kartesischen Basisvektoren als Rotationsachse haben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Wählt man beispielsweise den Rotationswinkel $\alpha = 2\pi/3 \mathrel{\widehat{=}} 120°$ für unsere Rotationen $\sigma$ und $\tau$ in $x$- bzw. $z$-Richtung, erhält man mit sicherlich nicht die freie Gruppe, sondern eine Untergruppe, die sich ähnlich wie die zyklische Gruppe mit drei Elementen verhält.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Bibliothek
Your knowledge hub

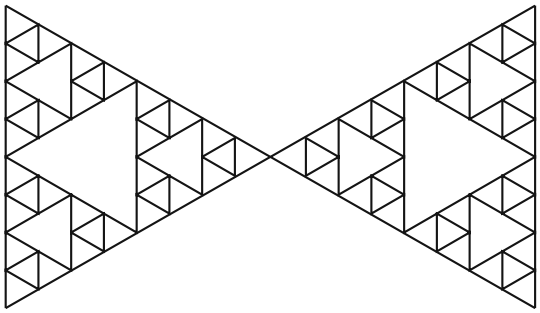

Abbildung 3.2.: Bei dieser Wahl des Rotationswinkels 120° bleibt der Cayley Graph nicht mehr zyklenfrei und es bilden sich lauter Dreiecke wegen $\tau^3 = \sigma^3 = \varepsilon$.

Wir suchen also ein $\alpha$, welches sich nicht wie folgt schreiben lässt: $\alpha/\pi = p/q$ mit gekürzten $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ansonsten gilt $\tau^{2q} = \sigma^{2q} = \varepsilon$, da der Umfang der Einheitssphäre genau $2\pi$ entspricht. Die Menge der erzeugten Wörter ist in diesem Fall sicher nicht isomorph zur freien Gruppe mit Rang 2.

**3.8. Lemma.** *Der Winkel* $\alpha = \arccos(1/3)$ *kann nicht als rationales Vielfaches von* $\pi$ *geschrieben werden. Das heißt*

$$\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \notin \mathbb{Q}.$$

*Beweis.* Sei $\alpha = \arccos 1/3$, sodass $\cos\alpha = 1/3$. Angenommen $\alpha$ sei ein rationales Vielfaches von $\pi$, also $\alpha = m\pi/n$, dann ist $\cos(n\alpha) = \pm 1$. Nun sei an die Definition der sogenannten Tschebyscheff Polynome aus Numerik mittels folgender Rekursion erinnert,

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Mittels der trigonometrischen Identitäten folgt $\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$, wobei dies wie folgt gezeigt wird. Es gilt

$$\begin{aligned} \cos((n+2)\alpha) &= \cos((n+1)\alpha + \alpha) \\ &= \cos((n+1)\alpha)\cos\alpha - \sin((n+1)\alpha)\sin\alpha \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \cos(n\alpha) &= \cos((n+1)\alpha - \alpha) \\ &= \cos((n+1)\alpha)\cos\alpha + \sin((n+1)\alpha)\sin\alpha. \end{aligned}$$

Durch Addieren beider Gleichungen erhalten wir

$$\cos((n+2)\alpha) + \cos(n\alpha) = 2\cos\alpha\cos((n+1)\alpha).$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

und somit die folgende Formel

$$T_{n+2}(\cos\alpha) = 2\cos\alpha T_{n+1}(\cos\alpha) - T_n(\cos\alpha).$$

Indem wir $\cos\alpha$ durch $x$ ersetzen, sehen wir die bereits bekannte Rekursion

$$T_{n+2}(x) = 2T_1(x)T_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Für den führenden Koeffizienten $a_n$ im $n$-ten Tschebyscheff-Polynom zeigen wir mit Induktion, dass $a_n = 2^{n-1}$ für $n \geq 1$ gilt.
**Induktionsanfang** $(n = 1)$**:**

$$T_1(x) = x \implies a_n = 1 = 2^{1-1}$$

**Induktionsschritt** $(n \to n+1)$**:**

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \implies a_{n+1} = 2a_n \overset{\text{(IVS)}}{=} 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

Aus diesen Überlegungen erhalten wir also insgesamt

$$\pm 1 = \cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha) = T_n\left(\frac{1}{3}\right) = 2^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \text{ Terme niedrigeren Grades.}$$

Multiplizieren wir die ganz linke und die ganz rechte Seite mit $3^n$, erhalten wir

$$\pm 3^n = 2^{n-1} + \text{ Terme, die durch 3 teilbar sind.}$$

Eine positive Potenz von 2 soll also ein Vielfaches von 3 sein, was der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung widerspricht.

□

Der Beweis von Lemma 3.8 stammt von [Ano13].

**3.9. Satz.** *Die Drehgruppe $SO_3(\mathbb{R})$ hat eine Untergruppe, die isomorph zur freien Gruppe vom Rang 2 ist.*

*Beweis.* Betrachte folgende Matrizen

$$\sigma^{\pm 1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mp 2\sqrt{2} \\ 0 & \pm 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^{\pm 1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \mp 2\sqrt{2} & 0 \\ \pm 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

welche genau die Rotationen 3.1 im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $\alpha = \arccos(1/3)$ in $x$ und in $z$-Richtung darstellen. Wir zeigen, dass jedes reduzierte nichttriviale Wort der erzeugten Untergruppe ungleich der Identität ist, indem wir zeigen, dass

$$w\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Ohne Beschränkung auf die Allgemeinheit nehmen wir an, dass $w$ auf $\tau^{\pm 1}$ endet. Es gilt nämlich $w = \varepsilon$ genau dann, wenn $\tau w \tau^{-1} = \varepsilon$. Wenn $w$ bereits auf $\tau^{\pm 1}$ endet, betrachten wir $w$, andernfalls betrachten wir $w_1 = \tau w \tau^{-1}$ statt $w$. Dann ist $w_1$ ein reduziertes Wort, außer $w$ hat die Form $\tau^{-1} w_2$. In diesem Fall ist $w_3 = w_2 \tau^{-1}$ ein reduziertes Wort mit $w_3 = \varepsilon$ genau dann, wenn $w = \varepsilon$. Sei nun $w$ ein Wort, das auf $\tau^{\pm 1}$ endet. Wir behaupten, dass

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} a \\ b\sqrt{2} \\ c \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

gilt, wobei $a, b$ und $c$ ganze Zahlen sind und $b$ nicht durch 3 teilbar ist. Insbesondere folgt dann, dass $b \neq 0$. Dies lässt sich durch Induktion über die Wortlänge zeigen.
**Induktionsanfang** $(n = 1)$**:** Es gilt $w = \tau^{\pm 1}$ und es lässt sich schnell nachrechnen, dass $w(1,0,0) = (1, \pm 2\sqrt{2}, 0)/3$. Wir sehen, dass $b = \pm 2$ nicht durch 3 teilbar ist.
**Induktionsschritt** $(n - 1 \to n)$**:** Es gibt vier Fälle für das erste Symbol $\rho_1$ in $w = \rho_1 w'$, die zu unterscheiden sind. Mit

$$w' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{(IVS)}}{=} \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} a' \\ b'\sqrt{2} \\ c' \end{pmatrix}$$

erhält man durch Einsetzen in die Abbildungsgleichungen im Fall $\rho_1 = \tau^{\pm 1}$ die Gleichungen $a = a' \mp 4b', b = b' \pm 2a', c = 3c'$, im Fall $\rho_1 = \sigma^{\pm 1}$ entsprechend $a = 3a', b = b' \mp 2c', c = c' \pm 4b'$. Das zeigt die Ganzzahligkeit von $a, b$ und $c$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $b$ nicht durch 3 teilbar ist. Wir haben für $w = \rho_1 \rho_2 v$ vier Möglichkeiten zu unterscheiden, nämlich $\rho_1 \rho_2 = \tau^{\pm 1} \sigma^{\pm 1}, \sigma^{\pm 1} \tau^{\pm 1}, \tau^{\pm 2}$ oder $\sigma^{\pm 2}$. Im ersten Fall erhält man aus der Rekursion ein durch 3 teilbares $c'$, also kann mit $b'$ auch $b = b' \mp 2c'$ nicht durch 3 teilbar sein. Ähnlich verhält sich der zweite Fall mit $b = b' \pm 2a'$ und durch 3 teilbarem $a'$. In den verbleibenden beiden Fällen muss man in der Rekursion einen Schritt weiter zurückgreifen und $v(1,0,0) = \left(a'', b''\sqrt{2}, c''\right)$ heranziehen. In beiden Fällen erhält man (hier für den dritten Fall ausgeführt) mit Hilfe der Rekursion

$$b = b' \pm 2a' = b' \pm 2\left(a'' \mp 4b''\right) = b' + b'' \pm 2a'' - 9b'' = 2b' - 9b''.$$

Die Eigenschaft nicht durch 3 teilbar zu sein, vererbt sich von $b'$ auf $b$. Wir haben also Darstellung (3.2) gezeigt, wobei $b \neq 0$, da $b$ nicht durch 3 teilbar ist. Insbesonders kann jedes nichttriviale reduzierte Wort niemals die Identität ergeben.

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

# 4. Die Paradoxa von Hausdorff und von Banach-Tarski

## 4.1. Orbits und die Vererbung von Paradoxie

Dieser Teil verwendet Ideen aus [Winb, Kapitel 3] und [Pet06, Kapitel 2.5].

**4.1. Motivation.** Wir haben dank Satz 3.9 eine Untergruppe der Gruppe $SO_3(\mathbb{R})$ gefunden, die isomorph zur freien Gruppe $F(\sigma, \tau)$ ist. Wir wissen nach Satz 3.6, dass $F(\sigma, \tau)$ paradox ist und werden daraus folgern, dass $SO_3(\mathbb{R})$ paradox ist. Aus der Tatsache, dass die Drehgruppe $SO_3(\mathbb{R})$ paradox ist, werden dann all unsere geometrischen Paradoxa auf der Einheitsspäre $\mathbb{S}^2$ und der Einheitskugel $\mathbb{B}$ folgen. Weiters definieren wir wie folgt eine Äquivalenzrelation: Punkte $x$ und $y$ auf $\mathbb{S}^2$ befinden sich in derselben Äquivalenzklasse, falls es ein Wort $w \in F(\sigma, \tau)$ gibt, sodass man mittels $w$ von $x$ aus $y$ erreichen kann, sprich $w(x) = y$. Diese Äquivalenzklassen nennen wir Orbits. Es stellt sich die Frage, ob sich der Orbit eines Punktes $x \in \mathbb{S}^2$ wie die freie Gruppe verhalten kann und sich paradox zerlegen lässt. Nun folgen ein paar Definitionen.

**4.2. Definition.**

- Sei $G$ eine Gruppe, die auf $X$ operiert. Für ein Element $x$ in $X$ ist der *$G$-Orbit* durch $Gx := \{g(x) \mid g \in G\}$ gegeben.
- Im Kontext unserer geometrischen Überlegungen benutzen wir die folgende Notation. Sei $x \in \mathbb{S}^2$ ein Startpunkt. Der *Orbit von $x$* ist durch

$$\mathcal{O}(x) := \{w(x) \mid w \in F(\sigma, \tau)\}$$

  gegeben. Mit Hilfe des Auswahlaxioms lässt sich eine Auswahlfunktion finden, die jedem Orbit einen Repräsentanten $\mathcal{O} \mapsto x_{\mathcal{O}}$ zuordnet. Die Menge dieser Repräsentanten bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}$.

**4.3. Definition.** Sei $G$ eine Gruppe, die auf einer Menge $X$ operiert.

- Der *Stabilisator* eines Elements $x \in X$ bezeichnet die Untergruppe aller $g \in G$, für die $gx = x$ gilt. In Zeichen schreiben wir hierfür $\mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G \mid gx = x\}$.
- $G$ heißt *fixpunktfrei*, falls für jeden Startpunkt der Stabilisator trivial ist, also $\mathrm{Stab}_G(x) = \{\varepsilon\}$ für alle $x \in X$.
- Ein Orbit $\mathcal{O}$ heißt *fixpunktfrei* oder *typisch*, falls für einen beliebigen Repräsentanten $x \in \mathcal{O}$ der Stabilisator trivial ist, also $\mathrm{Stab}_{F(\sigma,\tau)}(x) = \{\varepsilon\}$.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

**4.4. Bemerkung.**

- Wie in der Motivation 4.1 bereits erläutert, haben wir nach Rotationen gesucht, die ausgehend vom selben Startpunkt nur am selben Ort landen, wenn die Wörter übereinstimmen. Diese Beobachtung deckt sich mit der Definition, dass ein Orbit fixpunktfrei ist: Aus $w = w'$ folgt $\varepsilon = w'w^{-1}$ und somit gilt $w(x) = x$ nur, wenn $w = \varepsilon$ ist.

- Man sieht schnell ein, dass die Menge aller Orbits die Sphäre $\mathbb{S}^2$ disjunkt zerlegen. Zwei Orbits $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}(x_1)$ und $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}(x_2)$ sind entweder disjunkt oder identisch, denn: sei $y = w_1(x_1) = w_2(x_2) \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, dann gilt $w_1^{-1}w_2 = \varepsilon$ und somit folgt für beliebiges $z = w(x_1) \in \mathcal{O}_1$ insbesondere $z = w(x_1) = ww_1^{-1}w_1(x_1) = ww_1^{-1}w_2(x_2) \in \mathcal{O}_2$. Insgesamt gilt $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ und analog auch die Umkehrung, also $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

- Da ein Orbit alle Punkte beschreibt, die ausgehend von einem Startpunkt durch endliche Folgen von zwei Rotationen erreichbar sind, ist die Menge sicher abzählbar. Gleichzeitig wissen wir aber auch, dass die Menge $\mathbb{S}^2$ überabzählbar ist und die Menge der Orbits die gesamte Sphäre zerlegt. Also muss es überabzählbar viele solcher Orbits geben, insbesondere ist das Auswahlaxiom ist tatsächlich von Nöten und die Menge der Repräsentanten $\mathcal{M}_\mathcal{O}$ überabzählbar. Mit der Menge $\mathcal{M}_\mathcal{O}$ erhalten wir die Darstellung

$$\mathbb{S}^2 = F(\sigma,\tau)\mathcal{M}_\mathcal{O} = \mathcal{M}_\mathcal{O} \cup F_\sigma\mathcal{M}_\mathcal{O} \cup F_{\sigma^{-1}}\mathcal{M}_\mathcal{O} \cup F_\tau\mathcal{M}_\mathcal{O} \cup F_{\tau^{-1}}\mathcal{M}_\mathcal{O}, \tag{4.1}$$

  welche zwar sehr nützlich ist, sich jedoch nicht als disjunkte Zerlegung herausstellen wird. Einiges an Arbeit fehlt uns noch, ehe wir ein Paradoxon formulieren können.

**4.5. Satz.** *Sei $G$ eine paradoxe fixpunktfreie Gruppe, die auf einer Menge $X$ operiert. Dann ist $X$ eine $G$-paradoxe Menge.*

*Beweis.* Sei $G$ paradox vermöge $A_i, B_j \subseteq G$ und $g_i, h_j \in G$, $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$. Analog wie Bemerkung 4.4 lässt sich $X$ disjunkt durch die Menge aller $G$-Orbits zerlegen. Mit Hilfe des Auswahlaxioms lässt sich für jeden $G$-Orbit ein Repräsentant auswählen. Sei $M$ die Menge all dieser Repräsentanten. Wir schreiben $X$ also als die disjunkte Vereinigung $X = \bigcup_{x\in M} Gx$. Die Abbildung $\phi : G \to Gx, g \mapsto gx$ ist bijektiv für alle $x$ aus $M$. Surjektivität ist klar, und die Injektivität folgt daraus, dass der Stabilisator jedes Elementes von $M$ trivial ist, da $G$ fixpunktfrei ist. Somit ist $Gx$ die disjunkte (aufgrund der Injektivität) Vereinigung aus $\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{x\in M} A_i x$ und $\bigcup_{j=1}^m \bigcup_{x\in M} B_j x$ wobei zusätzlich folgende paradoxe Zerlegung für X gefunden wurde

$$\bigcup_{i=1}^n g_i \left( \bigcup_{x\in M} A_i x \right) = X = \bigcup_{j=1}^m h_j \left( \bigcup_{x\in M} B_j x \right).$$

□

**4.6. Korollar.** *Jede Gruppe mit einer paradoxen Untergruppe ist selbst paradox.*



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

*Beweis.* Eine Untergruppe operiert durch Linksmultiplikation fixpunktfrei auf der ganzen Gruppe. Wende Satz 4.5 an.

□

**4.7. Korollar.** *Sei $G$ eine Gruppe, die auf einer Menge $X$ operiert und die die freie Gruppe vom Rang 2 als Untergruppe hat. Wenn die freie Gruppe fixpunktfrei auf $X$ operiert, dann ist $X$ eine paradoxe Menge bezüglich $G$.*

*Beweis.* Nach Satz 3.6 ist die freie Gruppe vom Rang 2 paradox. Nach Satz 4.5 ist schließlich $X$ paradox bezüglich der freien Gruppe vom Rang 2 und somit insbesondere paradox bezüglich $G$.

□

## 4.2. Das Hausdorff Paradoxon

Der folgende Beweis folgt der Idee in [Winb, Kapitel 3.4] und [Wina, Kapitel 4].
Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist das sogenannte Hausdorff Paradoxon, ein Verwandter und Wegbereiter des berühmt berüchtigten Banach-Tarski Paradoxons.

**4.8. Definition.** Wir definieren die *Menge aller Fixpunkte* nichttrivialer Rotationen

$$D = \left\{x \in \mathbb{S}^2 \mid \exists w \in F(\sigma,\tau) \setminus \{\varepsilon\} : w(x) = x\right\}. \tag{4.2}$$

Mit Hilfe des Auswahlaxioms lässt sich für jeden Orbit aus $\mathbb{S}^2 \setminus D$ ein Repräsentant auswählen. Diese Menge bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$.

**4.9. Satz (Paradoxon von Hausdorff).** *Es existiert eine abzählbare Teilmenge $D$ von $\mathbb{S}^2$, sodass $\mathbb{S}^2 \setminus D$ paradox bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$ ist.*

*Beweisvariante (konstruktiv).* Sei $F(\sigma,\tau)$ die freie Untergruppe von $SO_3(\mathbb{R})$ vom Rang 2 aus Satz 3.9. Wir erinnern uns an die Zerlegung der Einheitssphäre (4.1) aus Bemerkung 4.4

$$\mathbb{S}^2 = F(\sigma,\tau)\mathcal{M}_{\mathcal{O}} = \mathcal{M}_{\mathcal{O}} \cup F_\sigma \mathcal{M}_{\mathcal{O}} \cup F_{\sigma^{-1}} \mathcal{M}_{\mathcal{O}} \cup F_\tau \mathcal{M}_{\mathcal{O}} \cup F_{\tau^{-1}} \mathcal{M}_{\mathcal{O}}.$$

Diese Zerlegung ist jedoch noch nicht disjunkt, da beispielsweise $\sigma(1,0,0) = (1,0,0)$ sowohl in $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}$ als auch in $F_\sigma \mathcal{M}_{\mathcal{O}}$ liegt. Wir wollen also alle Fixpunkte entfernen. Sei dazu $D$ wie in (4.2). Wir zeigen zunächst, dass für $x \in \mathbb{S}^2 \setminus D$ der gesamte Orbit $\mathcal{O}(x)$ in $\mathbb{S}^2 \setminus D$ enthalten ist. $\mathbb{S}^2 \setminus D$ ist also abgeschlossen unter Rotationen aus $F(\sigma,\tau)$. Dazu betrachte $x \in \mathbb{S}^2$ mit $w \in F(\sigma,\tau)$, sodass $w(x) \in D$. Nach der Definition von $D$ gibt es ein $\tilde{w} \in F(\sigma,\tau)$, für das $\tilde{w}w(x) = w(x)$ bzw. $w^{-1}\tilde{w}w(x) = x$ gilt. Da $\tilde{w} \neq \varepsilon$, gilt insbesondere $w^{-1}\tilde{w}w \neq \varepsilon$ und somit gilt $x \in D$. Durch Kontraposition haben wir also gezeigt, dass, wenn $x \in \mathbb{S}^2 \setminus D$ liegt, so muss der gesamte Orbit enthalten sein. Insgesamt erhalten wir mit den Repräsentanten $\mathcal{M}$ aus $\mathbb{S}^2 \setminus D$ die Zerlegung

$$\mathbb{S}^2 \setminus D = F(\sigma,\tau)\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup F_\sigma \mathcal{M} \cup F_{\sigma^{-1}} \mathcal{M} \cup F_\tau \mathcal{M} \cup F_{\tau^{-1}} \mathcal{M}. \tag{4.3}$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

Um einzusehen, dass die Zerlegung disjunkt ist, zeigen wir mittels Kontraposition, dass für unterschiedliche Wörter $w, w' \in F(\sigma, \tau)$ die Mengen $w(\mathcal{M})$ und $w'(\mathcal{M})$ disjunkt sind. Also seien $x, x' \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{S}^2 \setminus D$, sodass $w(x) = w'(x')$. Durch Multiplizieren mit $w^{-1}$, folgt dann $x = w^{-1}w'(x')$ und somit $x \in \mathcal{O}(x')$. Da die Menge $\mathcal{M}$ von jedem Orbit genau einen Repräsentanten besitzt, gilt $x = x'$. Insbesondere gibt es per Konstruktion von $D$ kein nichttriviales Wort, sodass $x$ ein Fixpunkt davon ist. Also gilt $w^{-1}w' = \varepsilon$ bzw. $w = w'$. Da die Mengen $\{\varepsilon\}, F_\sigma, F_\tau, F_{\sigma^{-1}}$ und $F_{\tau^{-1}}$ alle unterschiedliche Wörter beinhalten ist die Zerlegung (4.3) in der Tat disjunkt. Insgesamt erhalten wir die paradoxe Zerlegung analog wie in Abbildung 3.1.

$$\sigma^{-1}\left(F_\sigma \mathcal{M}\right) \cup F_{\sigma^{-1}}\mathcal{M} = \mathbb{S}^2 \setminus D = \tau^{-1}\left(F_\tau \mathcal{M}\right) \cup F_{\tau^{-1}}\mathcal{M}.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $D$ abzählbar ist. Da jede Rotation genau 2 Fixpunkte besitzt, nämlich die beiden antipoden Punkte (Nord- und Südpol) entlang der Rotationsachse, und es nur abzählbar viele Wörter in $F(\sigma, \tau)$ gibt, kann es also nur abzählbar viele Punkte in $D$ geben.

□

*Beweisvariante (schnell).* In Satz 3.9 haben wir bewiesen, dass die Drehgruppe die freie Gruppe vom Rang 2 als Untergruppe besitzt. Diese wiederum operiert fixpunktfrei auf $\mathbb{S}^2 \setminus D$ nach Konstruktion. Nach Korollar 4.5 ist $\mathbb{S}^2 \setminus D$ somit paradox bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$.

□

## 4.3. Das Banach-Tarski Paradoxon

Die folgenden beiden Unterkapitel verwenden Ideen und Beweise aus [Wina, Kapitel 6-7] und [TW16, Kapitel 3].

**4.10. Satz.** *Sei $D$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{S}^2$. Dann sind $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{S}^2 \setminus D$ äquizerlegbar bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$.*

*Beweis.* Sei $\ell$ eine Gerade, die durch den Ursprung geht und nicht $D$ trifft, also $\ell \cap D = \emptyset$. Da $\mathbb{S}^2$ als überabzählbar unendliche Menge deutlich größer ist als $D$, gibt es so eine Gerade sicherlich. Mit $\rho_\theta \in SO_3(\mathbb{R})$ bezeichnen wir jene Rotation, welche die Rotationsachse $\ell$ hat, und (im Gegenuhrzeigersinn) um den Winkel $\theta$ dreht. Für $d \in D$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definieren wir die Menge

$$\mathcal{A}_d^n := \{\theta \in [0, 2\pi) \mid \underbrace{\rho_\theta(\rho_\theta(\ldots \rho_\theta(d)))}_{\text{n-mal}} = \rho_\theta^n(d) \in D\}.$$

Diese Menge ist abzählbar, da sicherlich $|\mathcal{A}_d^n| \leq |D|$ gilt. Währenddessen ist die Menge $[0, 2\pi)$ gleichmächtig dem Kontinuum, also überabzählbar und somit echt größer als $\mathcal{A}_d^n$. Somit folgt die Abzählbarkeit der folgenden Menge

$$\mathcal{A} := \bigcup_{d \in D} \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \mathcal{A}_d^n$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

und es gibt einen Winkel $\omega \in [0, 2\pi) \setminus \mathcal{A}$, mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ folgendes gilt

$$\rho_\omega(D) \cap D = \emptyset. \tag{4.4}$$

Insbesonders folgt für alle $m, n \in \mathbb{R}$ mit $m > n$, dass $\rho_\omega^m(d) \cap \rho_\omega^n(d) = \emptyset$ gilt. Andererseits würde durch Anwenden von $\rho_\omega^{-n}$ ein Widerspruch zu (4.4) entstehen. Also lässt sich die disjunkte Vereinigung $\bar{D} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho_\omega^n(D)$ defnieren. Es gilt

$$\rho_\omega \bar{D} = \rho_\omega \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho_\omega^n(D) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \rho_\omega^n(D) = \bar{D} \setminus D$$

und somit erhalten wir die Aquizerlegbarkeit mittels $\rho_\omega \in SO_3(\mathbb{R})$ wie folgt

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2 \setminus \bar{D} \cup \bar{D} \sim_{SO_3} \mathbb{S}^2 \setminus \bar{D} \cup \rho_\omega \bar{D} = \mathbb{S}^2 \setminus \bar{D} \cup \bar{D} \setminus D = \mathbb{S}^2 \setminus D.$$

□

**4.11. Korollar.** *Die Einheitsshäre $\mathbb{S}^2$ ist paradox bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$.*

*Beweis.* Wir wissen dank dem Paradoxon von Hausdorff 4.9, dass es eine abzählbare Menge $D$ gibt, sodass $\mathbb{S}^2 \setminus D$ paradox bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$ ist. Nach Satz 4.10 gilt $\mathbb{S}^2 \sim_{SO_3} \mathbb{S}^2 \setminus D$ und somit gilt nach Satz 2.8, dass $\mathbb{S}^2$ paradox bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$ ist, da sich die Eigenschaft paradox zu sein für äquizerlegbare Mengen vererbt.

□

**4.12. Korollar.** *Die Einheitskugel ohne Ursprung $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ ist paradox bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$.*

*Beweis.* Es gilt ein bijektiver Zusammenhang zwischen Punkten auf $\mathbb{S}^2$ und Teilmengen von $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ wie folgt $f : \mathbb{S}^2 \ni s \mapsto \{ts : 0 < t \leq 1\} \subseteq \mathbb{B} \setminus \{0\}$. Punkte auf der Oberfläche werden mit ihrer Verbindungsstrecke bis zum Ursprung identifiziert. Die paradoxe Zerlegung aus Korollar 4.11 vererbt sich auf kanonische Weise auf $f(\mathbb{S}^2) = \mathbb{B} \setminus \{0\}$.

□

**4.13. Proposition.** *Die Einheitskugel $\mathbb{B}$ ist äquizerlegbar zur Einheitskugel ohne Ursprung $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$.*

*Beweis.* Sei $K$ ein Kreis mit $0 \in K$, der in $\mathbb{B}$ enthalten ist. Wie wir in Beispiel 2.6 gesehen haben, gilt $K \sim_{SO_2} K \setminus \{0\}$, insbesonders also auch für $SO_3(\mathbb{R})$, wenn wir die 2-dimensionalen Rotationen in die höhere Raumdimension einbetten. Wir erhalten Äquizerlegbarkeit mittels

$$\mathbb{B} = \mathbb{B} \setminus K \cup K \sim_{SO_3} \mathbb{B} \setminus K \cup K \setminus \{0\} = \mathbb{B} \setminus \{0\}.$$

□

**4.14. Satz (Paradoxon von Banach-Tarski).** *Sei $G_3$ die Gruppe aller Translationen und Rotationen. Dann ist jede abgeschlossene Kugel im $\mathbb{R}^3$ paradox bezüglich $G_3$.*



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

*Beweis.* Es genügt den Beweis für die Einheitskugel $\mathbb{B}$ zu erbringen, da jede abgeschlossene Kugel mittels $G_3$ in den Ursprung translatiert werden kann und mittels einer $SO_3$-äquivarianten Abbildung normiert werden kann. Für eine zentrierte abgeschlossene Kugel $A \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Radius $r$ gilt, dass die Abbildung $\phi : A \ni x \mapsto x/\|r\| \in \mathbb{B}$ mit allen Operationen $\psi \in SO_3(\mathbb{R})$ kommutiert, also $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$. Finden wir also eine paradoxe Zerlegung von $\mathbb{B}$ bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$, so liefert uns das Urbild unter $\phi$ eine paradoxe Zerlegung für $A$ bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$ und somit auch $G_3$, da $SO_3(\mathbb{R})$ eine Untergruppe ist. Nach Korollar 4.12 ist $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ bereits $SO_3(\mathbb{R})$-paradox und nach Proposition 4.13 gilt $\mathbb{B} \sim_{SO_3} \mathbb{B} \setminus \{0\}$. Nach Satz 2.8 vererbt sich die Paradoxie somit auf $\mathbb{B}$.

□

## 4.4. Allgemeine Version des Banach-Tarski Paradoxons

**4.15. Definition.** Sei $G$ eine Gruppe, die auf einer Menge $X$ operiert. Seien $A$ und $B$ Teilmengen von $X$. Wir schreiben $A \preccurlyeq_G B$, falls es ein $B' \subseteq B$ gibt, sodass $A$ und $B'$ äquizerlegbar bezüglich $G$ sind.

**4.16. Satz (Banach-Schröder-Bernstein).** *Falls $A \preccurlyeq_G B$ und $A \succcurlyeq_G B$ gilt, dann sind $A$ und $B$ äquizerlegbar bezüglich $G$.*

*Beweis.* Da $A \preccurlyeq_G B$ und $A \succcurlyeq_G B$, existieren die Mengen $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$ mit $A \sim_G B'$ und $B \sim_G A'$. Wie in Lemma 2.7 betrachten wir nun Bijektionen $f : A \to B'$ und $g : B \to A'$, die Mengen in ihre äquizerlegbaren Bilder abbilden. Weiters definieren wir die Mengen $C_0 := A \setminus A' = A \setminus g(B)$ und für $n > 0$ definieren wir $C_n := g(f(C_{n-1}))$. Sei nun $C := \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \subseteq A$, dann folgt

$$\begin{aligned} g^{-1}(A \setminus C) &= g^{-1}\left(A' \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \\ &= g^{-1}(A') \setminus g^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} g(f(C_{n-1}))\right) \\ &= B \setminus f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right) = B \setminus f(C). \end{aligned}$$

Da die Bijektionen $f$ und $g$ aus Lemma 2.7 stammen, gilt insbesonders $A \setminus C \sim_G B \setminus f(C)$ bzw. $C \sim_G f(C)$. Mit Lemma 2.5 folgt dann insgesamt

$$A = A \setminus C \cup C \sim_G B \setminus f(C) \cup f(C) = B.$$

□

**4.17. Satz (Paradoxon von Banach-Tarski, allgemeine Version).** *Seien $A$ und $B$ beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ mit nichtleerem Inneren (vgl. Definition 1.6 in Appendix*



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

*A.2). Dann sind $A$ und $B$ äquizerlegbar bezüglich $G_3$.*

*Beweis.* Wähle Kugeln $K$ und $L$, sodass $A \subseteq K$ und $L \subseteq B$. Dies ist möglich, da $A$ beschränkt ist und $B$ nichtleeres Inneres hat. Nun wählen wir $n$ so groß, dass wir $K$ durch $n$-viele Kopien von $L$ überdecken können, also $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n L_i$ mit $L_i = g_i(L)$ wobei $g_i \in G_3$. Sei $W$ eine disjunkte Vereinigung der $n$ Kopien von $L$, also $W := \bigcup_{i=1}^n L_i'$ wobei $L_i' = h_i(L)$ mit passend gewählten $h_i \in G_3$ ist, sodass die Kugeln $L_i'$ alle disjunkt zueinander sind. Es folgt

$$K = \bigcup_{i=1}^n (L_i \cap K) \sim_{G_3} \bigcup_{i=1}^n (L_i' \cap K) \subseteq W$$

vermöge der Kongruenz $L_i = g_i^{-1} h_i(L_i')$, also gilt $K \preccurlyeq_{G_3} W$. Indem wir die klassische Version des Banach-Tarski Paradoxons 4.14 wiederholen, erhalten wir $n$-viele Kopien aus $L$ und somit $W \preccurlyeq_{G_3} L$. Insgesamt erhalten wir

$$A \subseteq K \preccurlyeq_{G_3} W \preccurlyeq_{G_3} L \subseteq B$$

und damit $A \preccurlyeq_{G_3} B$. Aus Symmetriegründen erhalten wir analog auch $B \preccurlyeq_{G_3} A$. Aus dem Satz von Banach-Schröder-Bernstein 4.16 folgt dann $A \sim_{G_3} B$.

□

**Wissenswertes:** Diese Version des Banach-Tarski Paradoxons wird in der englischen Literatur häufig als das „*pea and the sun paradox*“ bezeichnet. Es veranschaulicht den absurden Charakter der Aussage, dass es durch Drehen und Schieben im $\mathbb{R}^3$ möglich ist, eine Erbse (zu englisch: *pea*) zu zerteilen und dann in die Sonne (zu englisch: *sun*) zu verwandeln.

**4.18. Satz (Paradoxon von Banach-Tarski, mehrdimensional).** *Sei $n \geq 3$.*

*(a) Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ im $\mathbb{R}^n$ ist paradox bezüglich $SO_n(\mathbb{R})$.*

*(b) Die Einheitskugel $\mathbb{B}$ im $\mathbb{R}^n$ ist paradox bezüglich $G_n$.*

*(c) Je zwei beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren sind äquizerlegbar bezüglich $G_n$.*

*Beweis.* Beweis zu *(a)*: Wir führen den Beweis mittles vollständiger Induktion.
**Induktionsanfang** ($n = 3$)**:** Die Aussage folgt aus Korollar 4.11.
**Induktionsschritt** ($n - 1 \to n$)**:** Wir betrachten $\mathbb{S}^n$, die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung sei $\mathbb{S}^{n-1}$ paradox bezüglich $SO_n(\mathbb{R})$ vermöge $A_i, B_j \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ und $\sigma_i, \tau_j \in SO_n(\mathbb{R})$, wobei $i = 1, \ldots, p$ und $j = 1, \ldots, q$. Wir definieren die Mengen

$$A_i^* := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; \frac{1}{\|(x_1, \ldots, x_n)\|} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in A_i \right\},$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

$$B_j^* := \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; \frac{1}{\|(y_1, \dots, y_n)\|} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in B_j \right\}.$$

Weiters definieren wir in $SO_{n+1}(\mathbb{R})$ die folgenden Rotationen

$$\sigma_i^* := \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \sigma_i & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \tau_j^* := \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \tau_j & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Wir erhalten eine paradoxe Zerlegung der Einheitssphäre ohne Pole, also der Menge $\mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$ mittels der disjunkten Zerlegung $A_i^*, B_j^*$, da $\mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\} = \bigcup_{i=1}^p A_i^* \cup \bigcup_{j=1}^q B_j^*$ und

$$\bigcup_{i=1}^p \sigma_i^*(A_i^*) = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\} = \bigcup_{j=1}^q \tau_j^*(B_j^*).$$

Analog wie in Satz 4.10 erhalten wir, dass $\mathbb{S}^n$ und $\mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$ äquizerlegbar bezüglich $SO_{n+1}(\mathbb{R})$ sind. Mit Satz 2.8 folgt dann Aussage *(a)*. Aussage *(b)* und *(c)* folgen dann analog wie im 3-dimensionalen Fall (siehe Satz 4.14 und Satz 4.17).

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

# 5. Maßtheoretische Folgerungen und der Satz von Tarski

## 5.1. Auswirkungen des Banach-Tarski Paradoxons

**5.1. Problem (Inhaltsproblem).** *Anfang des 20. Jahrhunderts stellten sich Mathematiker die folgende Frage, das sogenannte Inhaltsproblem: Gibt es eine Mengenfunktion $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt?*

*(i) für paarweise disjunkte $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(A_i\right), \qquad \textit{(endliche Additivität)}$$

*(ii) für alle $G_n$-kongruenten $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\mu(A) = \mu(B)$,* *(Bewegungsinvarianz)*

*(iii) $\mu([0,1]^n) = 1$.* *(Normiertheit)*

**5.2. Korollar.** *Das Banach-Tarski Paradoxon basiert auf nicht messbaren Mengen.*

*Beweis.* Sei $\lambda$ das Lebesgue Maß im $\mathbb{R}^n$ wobei $n \geq 3$. Wir betrachten die Enheitskugel $\mathbb{B}$ und duplizieren sie vermöge der paradoxen Zerlegung

$$\mathbb{B} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} C_j \quad \text{mit} \quad \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = \mathbb{B} = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(C_j).$$

Angenommen die betrachteten Mengen in der Zerlegung seien messbar. Da das Lebesgue Maß invariant bezüglich den Symmetrien $g_i, h_j \in G_n$ ist und aufgrund der Additivität paarweise disjunkter Mengen, erhalten wir

$$\lambda(\mathbb{B}) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} C_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \lambda(C_j) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda\left(g_i(A_i)\right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda\left(h_j(C_j)\right) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i)\right) + \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{m} h_j(C_j)\right) = \lambda(\mathbb{B}) + \lambda(\mathbb{B}).$$

Damit kein Widerspruch entsteht, müsste $\lambda(\mathbb{B}) = 0$ gelten. Da die Einheitskugel bekanntlich nichtleeres Inneres hat, gilt $\lambda(\mathbb{B}) > 0$, womit die involvierten Mengen nicht Lebesgue-messbar sein können.

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

**5.3. Korollar.** *Insbesondere ist das Inhaltsproblem für $n \geq 3$ nicht lösbar.*

*Beweis.* Der Beweis folgt unmittelbar aus Korollar 5.2.

□

Im Folgenden gehen wir der Frage nach, ob es umgekehrt möglich ist aus einer nichtparadoxen Menge eine Mengenfunktion zu erhalten, die dem Inhaltsproblem auf analoge Weise genügt.

## 5.2. Der Satz von Tarski

Der folgende Abschnitt richtet sich nach der Vorgehensweise von [Run04, Kapitel 0.2].

**5.4. Satz (Tarski).** *Sei $G$ eine Gruppe die auf einer Menge $X$ operiert, und sei $E$ eine Teilmenge von $X$. Dann existiert eine Mengenfunktion $\mu : \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$, mit $\mu(E) \in (0, \infty)$ und den folgenden Eigenschaften:*

*(i) für alle $A \subseteq X, g \in G$ gilt:* $\mu(gA) = \mu(A)$, *(G-invariant)*

*(ii) für alle $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(X)$ paarweise disjunkt gilt:*

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)\,. \qquad \textit{(endlich additiv)}$$

*genau dann, wenn $E$ nicht paradox bezüglich $G$ ist.*

**5.5. Bemerkung.** Die Beweisrichtung " $\Longrightarrow$ " von Satz 5.4 ist nicht schwer zu zeigen. Sei $\mu$ eine Mengenfunktion mit den oben beschriebenen Eigenschaften und angenommen $E$ sei paradox bezüglich $G$. Dann finden wir paradoxe Zerlegungen $E = \bigcup_i A_i \cup \bigcup_j B_j$ mit $\bigcup_i g_i(A_i) = E = \bigcup_j h_j(B_j)$ und somit

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_i A_i \cup \bigcup_j B_j\right) \overset{(ii)}{=} \sum_i \mu(A_i) + \sum_j \mu(B_j) \overset{(i)}{=} \sum_i \mu(g_i(A_i)) + \sum_j \mu(h_j(B_j))$$
$$\overset{(ii)}{=} \mu\left(\bigcup_i g_i(A_i)\right) + \mu\left(\bigcup_j h_j(B_j)\right) = \mu(E) + \mu(E)\,.$$

Insbesondere muss $\mu(E) = 0$ oder $\mu(E) = \infty$ sein, was unseren Forderungen der Mengenfunktion widerspricht. Die andere Beweisrichtung ist die deutlich interessantere und bedarf einiger neuer Techniken.

**5.6. Definition.** Sei $G$ eine Gruppe die auf einer Menge $X$ operiert.

- Definiere $X^* := X \times \mathbb{N}_0$ und

$$G^* := \{(g, \pi) : g \in G, \text{ und } \pi \text{ ist eine Permutation von } \mathbb{N}_0\}\,,$$

  wobei $G^*$ auf $X^*$ wie folgt operiert

$$(g, \pi) \cdot (x, n) := (gx, \pi(n)) \quad ((g, \pi) \in G^*, (x, n) \in X^*)\,.$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

- Sei $A \subset X^*$, dann bezeichnen wir die folgende Menge als den *Level von A*

$$\mathrm{Lev}(A) := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists x \in X : (x, n) \in A\}.$$

**5.7. Definition.** Seien $X^*$ und $G^*$ wie in Definition 5.6.

(a) Eine Menge $A \subseteq X^*$ heißt *beschränkt*, falls die Menge der Level von $A$ endlich ist.

(b) Sei $A \subseteq X^*$ beschränkt, die Äquivalenzklasse von $A$ bezüglich $\sim_{G^*}$ bezeichnen wir als der *Typ von A* und schreiben hierfür $[A]$.

(c) Falls $E \subseteq X$, schreiben wir $[E] := [E \times \{0\}]$.

(d) Seien $A, B \subseteq X^*$ und $k \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$A \cap \underbrace{\{(b, n+k) \in X^* \mid (b, n) \in B\}}_{B' :=} = \emptyset. \tag{5.1}$$

Dann definieren wir $[A] + [B] := [A \cup B']$.

(e) Sei

$$\mathcal{S} := \{[A] \mid A \subseteq X^* \text{ ist beschränkt}\}.$$

Dann heißt $(\mathcal{S}, +)$ die *Typen Halbgruppe* der Gruppenoperation von $G$ auf $X$.

**5.8. Proposition.** *Bei der Typen Halbgruppe der Gruppenoperation von $G$ auf $X$ handelt es sich um eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element.*

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass die Addition aus (d) wohldefiniert ist. Wir zeigen wie gewohnt Existenz und Eindeutigkeit. Dazu seien $A$ und $B$ beschränkt in $X^*$. Um ein $k$ und somit ein $B'$ wie in (5.1) zu finden, reicht es $k > \max \mathrm{Lev}(A)$ zu nehmen. Es gilt sicher $|\mathrm{Lev}(A)| < \infty$, da $A$ beschränkt ist. Insbesondere gilt durch die Wahl von $k$ für $(b, n) \in B$, dass $(b, n+k) \notin A$, also $A \cap B' = \emptyset$. Für die Eindeutigkeit betrachten wir verschiedene $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 < k_2$ und den dazugehörigen Mengen $B'_{k_1}$ und $B'_{k_2}$ wie in (5.1). Wir zeigen, dass $A \cup B'_{k_1} \sim_{G^*} A \cup B'_{k_2}$. Da $A \cap B'_{k_1} = \emptyset = A \cap B'_{k_2}$ gilt, reicht es nach Lemma 2.5 zu zeigen, dass $B'_{k_1}$ und $B'_{k_2}$ äquizerlegbar bezüglich $G^*$ sind. Tatsächlich sind die beiden Mengen sogar kongruent in $G^*$ mittels des geeigneten Gruppenelements $(\mathrm{id}, \pi_{k_1}^{k_2}) \in G^*$, wobei die Permutation $\pi_{k_1}^{k_2}$ in $\mathbb{N}_0$ wie folgt defniert ist

$$\pi_{k_1}^{k_2}(n) := \begin{cases} n + k_2 - k_1, & k_1 \leq n \leq \max(\mathrm{Lev}(B)) + k_1, \\ n - \max(\mathrm{Lev}(B)) - 1, & \max(\mathrm{Lev}(B)) + k_1 < n \leq \max(\mathrm{Lev}(B)) + k_2, \\ n, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

Wir sehen, dass $(\mathrm{id}, \pi_{k_1}^{k_2})(B'_{k_1}) = B'_{k_2}$ gilt, da jedes $(b, n + k_2) \in B'_{k_2}$ eindeutig durch $(\mathrm{id}, \pi_{k_1}^{k_2})(b, n + k_1)$ getroffen wird und erhalten insbesondere $B'_{k_1} \sim_{G^*} B'_{k_2}$ und somit

$$[A] +_{k_1} [B] = [A \cup B'_{k_1}] = [A \cup B'_{k_2}] = [A] +_{k_2} [B].$$

Natürlich ist die Addition auch kommutativ. Die Konstruktion in (5.1) ist symmetrisch und mit einer geeigneten Wahl eines $A'$, das sowohl mit $B$ als auch $B'$ disjunkt bleibt und der Wohldefniertheit unabhängig vom $k$ lässt sich wieder Lemma 2.5 anwenden. Analog wie oben zeigt man auch $B \sim_{G^*} B'$ bzw. $A \sim_{G^*} A'$ und wir erhalten

$$[A] + [B] = [A \cup B'] = [A' \cup B'] = [B' \cup A'] = [B \cup A'] = [B] + [A].$$

Mit diesen Überlegungen folgt auch Assoziativität mittels eines geeigneten $C'$, das sowohl mit $A, B$ und $B'$ disjunkt ist. Es folgt also

$$\begin{aligned}([A] + [B]) + [C] &= [A \cup B'] + [C] = [A \cup B' \cup C'] = [A \cup (B \cup C)'] \\ &= [A] + [(B \cup C)'] = [A] + [B' \cup C'] = [A] + [B \cup C'] = [A] + ([B] + [C]).\end{aligned}$$

Unser neutrales Element erhalten wir mit $[\emptyset]$, denn

$$[A] + [\emptyset] = [A \cup \emptyset'] = [A \cup \emptyset] = [A] = [A'] = [\emptyset \cup A'] = [\emptyset] + [A].$$

□

**5.9. Definition.** Sei $(\mathcal{S}, +)$ die Typen Halbgruppe. Wir definieren folgende Notation

$$n\alpha := \underbrace{\alpha + \ldots + \alpha}_{n-\text{mal}} \qquad (\alpha \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}).$$

Außerdem schreiben wir allgemein in einer Halbgruppe $\alpha \leq \beta$ für $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, falls es ein $\gamma \in \mathcal{S}$ gibt, sodass $\alpha + \beta = \gamma$.

**5.10. Lemma.** *Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ mit $\alpha \leq \beta$ und $\alpha \geq \beta$, dann gilt $\alpha = \beta$. Die Relation $\leq$ ist insbesondere eine Halbordnung auf der Typen Halbgruppe $(\mathcal{S}, +)$.*

*Beweis.* Wir wissen $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \alpha$, also gibt es $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{S}$, sodass $\alpha + \gamma_1 = \beta$ bzw. $\beta + \gamma_2 = \alpha$. Es folgt somit

$$\begin{aligned} & \alpha + \gamma_1 + \gamma_2 = \beta + \gamma_2 = \alpha \\ \implies & \gamma_1 + \gamma_2 = [\emptyset] && (\triangle) \\ & \beta + \gamma_2 + \gamma_1 = \alpha + \gamma_1 = \beta \\ \implies & \gamma_2 + \gamma_1 = [\emptyset] && (\triangledown) \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $\gamma_1 = [\Gamma_1]$ und $\gamma_2 = [\Gamma_2]$ Inverse sind und somit können wir daraus folgern

$$\gamma_1 + \gamma_2 = [\Gamma_1 \cup \Gamma'_2] \overset{(\triangle)}{=} [\emptyset]$$

$$\Gamma_1 \cup \Gamma'_2 \sim_{G^*} \emptyset \times \{0\} \quad \implies \quad \Gamma_1 \sim_{G^*} \emptyset \times \{0\} \quad \implies \quad [\Gamma_1] = [\emptyset],$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

beziehungsweise folgt analog auch

$$\gamma_2 + \gamma_1 = [\Gamma_2 \cup \Gamma_1'] \overset{(\triangledown)}{=} [\emptyset]$$
$$\Gamma_2 \cup \Gamma_1' \sim_{G^*} \emptyset \times \{0\} \quad \Longrightarrow \quad \Gamma_2 \sim_{G^*} \emptyset \times \{0\} \quad \Longrightarrow \quad [\Gamma_2] = [\emptyset].$$

Insgesamt folgt Antisymmetrie der Relation mittels

$$\alpha = \alpha + [\emptyset] = \alpha + \gamma_1 = \beta.$$

Reflexivität ergibt sich trivialerweise aus $\alpha + [\emptyset] = \alpha$ und damit $\alpha \leq \alpha$ und Transitivität folgt auch direkt: falls $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \gamma$, so gilt $\alpha + \delta = \beta$ bzw. $\beta + \epsilon = \gamma$ und damit gilt $\alpha + \delta + \epsilon = \gamma$, also $\alpha \leq \gamma$.

□

**5.11. Lemma.** *Sei $E$ eine Teilmenge von $X$ und $G$ eine Gruppe, die auf $X$ operiert. $E$ ist paradox bezüglich $G$ genau dann, wenn $[E] = 2[E]$.*

*Beweis.* "$\Longrightarrow$": Sei $E$ eine paradoxe Menge vermöge der Zerlegung $E = \bigcup_i A_i \cup \bigcup_j B_j$ und $\bigcup_i g_i(A_i) = E = \bigcup_j h_j(B_j)$. Wähle $k$, sodass $E \times \{0\} \cap E \times \{k\} = \emptyset$ und definiere $E' := E \times \{k\}$. Es gilt $E \times \{0\} \sim_{G^*} E'$ und somit folgt

$$\begin{aligned}[E] = \left[\bigcup_i A_i \cup \bigcup_j B_j\right] &= \left[\bigcup_i g_i(A_i) \cup \bigcup_j h_j(B_j)\right] \\ &= \Bigg[\underbrace{\left(\bigcup_i g_i(A_i) \times \{0\}\right)}_{=E\times\{0\}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_j h_j(B_j)\right)'}_{=E'}\Bigg] = [E] + [E] = 2[E].\end{aligned}$$

"$\Longleftarrow$": Es gelte $[E] = 2[E] = [E] + [E]$. Somit folgt, dass es ein $k$ gibt, sodass $E \times \{0\} \sim_{G^*} E \times \{0\} \cup E \times \{k\}$ gilt. Also gibt es eine endliche Menge $I \subseteq \mathbb{N}$, $A_i \subseteq X$ paarweise disjunkt und $(g_i, \pi_i) \in G^*$, sodass

$$\bigcup_{i \in I} A_i \times \{0\} = E \times \{0\} \quad \text{und} \quad E \times \{0\} \cup E \times \{k\} = \bigcup_{i \in I} (g_i, \pi_i)(A_i \times \{0\})$$

Da die Mengen $E \times \{0\}$ und $E \times \{k\}$ ebenfalls disjunkt sind, erhalten wir eine Zerlegung

$$E \times \{0\} = \bigcup_{j \in J} (g_j, \pi_j)(A_j \times \{0\}) \quad \text{und} \quad E \times \{k\} = \bigcup_{i \in I \setminus J} (g_i, \pi_i)(A_i \times \{0\}).$$

Insgesamt erhalten wir die paradoxe Zerlegung für $E$ mittels

$$E = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{und} \quad \bigcup_{j \in J} g_j(A_j) = E = \bigcup_{i \in I \setminus J} g_i(A_i)$$

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

**5.12. Satz (Kürzungsregel).** *Sei $(\mathcal{S}, +)$ die Typen Halbgruppe. Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass $n\alpha = n\beta$. Dann gilt $\alpha = \beta$.*

*Beweis.* Der folgende Beweis bedient sich aus Definitionen und Sätzen aus der Graphentheorie. Zur Auffrischung sei an dieser Stelle an den Appendix A.1 verwiesen.
Sei $n\alpha = n\beta$, also gibt es zwei disjunkte $G^*$-äquizerlegbare Mengen $E, E' \subseteq X^*$ mit paarweise disjunkten, $G^*$-äquizerlegbaren Mengen $A_1, \ldots, A_n \subseteq E$ und $B_1, \ldots, B_n \subseteq E'$, sodass

$$\begin{aligned} E &= A_1 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{und} \quad [A_j] = \alpha \text{ für alle } j = 1, \ldots, n \\ E' &= B_1 \cup \ldots \cup B_n \quad \text{und} \quad [B_j] = \beta \text{ für alle } j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die folgenden Bijektionen wie in Lemma 2.7. Sei $\chi : E \to E'$ und für $j = 1, \ldots, n$ seien $\phi_j : A_1 \to A_j$ bzw. $\psi_j : B_1 \to B_j$ bijektive Funktionen, die Mengen in $G^*$-äquizerlegbare Bilder abbilden ($\phi_1$ und $\psi_1$ sind die Identitäten). Für $a \in A_1$ und $b \in B_1$ definieren wir

$$\bar{a} := \{a, \phi_2(a), \ldots, \phi_n(a)\} \quad \text{und} \quad \bar{b} := \{b, \psi_2(b), \ldots, \psi_n(b)\}.$$

Wir definieren einen bipartiten Graphen wie in A.1 Definition 1.2 mittels $X := \{\bar{a} \mid a \in A_1\}$ und $Y := \{\bar{b} \mid b \in B_1\}$. Wann immer es ein $j = 1, \ldots, n$ gibt, sodass $\chi(\phi_j(a)) \in \bar{b}$, fügen wir zwischen den Knoten $\bar{a}$ und $\bar{b}$ eine Kante hinzu. Somit erhält jeder Knoten $n$-viele Kanten, weil es genau $n$-viele solche $\phi_j$ gibt. Wir erhalten einen $n$-regulären bipartiten Graphen und können den Satz von König 1.4 aus A.1 anwenden. Wir erhalten ein perfektes Matching $F$. Für jedes $\bar{a} \in X$, gibt es ein $\bar{b} \in Y$ und eine eindeutige Kante $(\bar{a}, \bar{b}) \in F$ sodass $\chi(\phi_j(a)) = \psi_k(b)$ für ein $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Für beliebige $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir

$$\begin{aligned} C_{j,k} &:= \{a \in A_1 \mid (\bar{a}, \bar{b}) \in F \text{ und } \chi(\phi_j(a)) = \psi_k(b)\} \\ D_{j,k} &:= \{b \in B_1 \mid (\bar{a}, \bar{b}) \in F \text{ und } \chi(\phi_j(a)) = \psi_k(b)\}. \end{aligned}$$

Die Abbildung $\psi_k^{-1} \circ \chi \circ \phi_j$ liefert uns eine Bijektion von $C_{j,k}$ nach $D_{j,k}$ und wegen Lemma 2.7 folgt insbesondere $C_{j,k} \sim_{G^*} D_{j,k}$. Da $\{C_{j,k} \mid j, k = 1, \ldots, n\}$ und $\{D_{j,k} \mid j, k = 1, \ldots, n\}$ disjunkte Zerlegungen der Mengen $A_1$ und $B_1$ sind, folgt insgesamt nach Lemma 2.5, dass $A_1 \sim_{G^*} B_1$, also $\alpha = \beta$.

□

**5.13. Korollar.** *Sei $(\mathcal{S}, +)$ die Typen Halbgruppe mit $\alpha \in \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Falls $(n+1)\alpha \leq n\alpha$, dann gilt $\alpha = 2\alpha$.*

*Beweis.* Aus unserer Voraussetzung erhalten wir

$$2\alpha + n\alpha = (n+1)\alpha + \alpha \leq n\alpha + \alpha = (n+1)\alpha \leq n\alpha$$

Wiederholen wir diese Schlussfolgerung $n$-mal, so erhalten wir $n\alpha + n\alpha = 2n\alpha \leq n\alpha$. Klarerweise gilt $n\alpha \leq 2n\alpha$. Nach Lemma 5.10 folgt somit $n\alpha = 2n\alpha = n(2\alpha)$ und somit können wir nach Satz 5.12 kürzen und erhalten $\alpha = 2\alpha$.

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

Ehe wir uns dem Beweis vom Satz von Tarski 5.4 widmen können, brauchen wir noch ein weiteres technisches Lemma.

**5.14. Lemma.** *Sei $(\mathcal{S}, +)$ eine kommutative Halbgruppe, $\mathcal{S}_0$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{S}$ und $\epsilon \in \mathcal{S}_0$, sodass $(n+1)\epsilon \not\leq n\epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und sodass es für jedes $\alpha \in \mathcal{S}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \leq n\epsilon$ gibt. Dann gibt es eine Funktion $\nu : \mathcal{S}_0 \to [0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:*

*(i)* $\nu(\epsilon) = 1$,

*(ii) falls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathcal{S}_0$ mit $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq \beta_1 + \ldots + \beta_m$, dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} \nu(\alpha_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \nu(\beta_i).$$

*Beweis.* Wir führen einen Induktionsbeweis nach der Kardinalität von $\mathcal{S}_0$ durch.
**Induktionsanfang** ($|\mathcal{S}_0| = 1$)**:** Es gilt $\mathcal{S}_0 = \{\epsilon\}$. Wir definieren $\nu(\epsilon) := 1$ und es gilt unmittelbar *(i)*. Um *(ii)* nachzuweisen betrachten wir $m, n \in \mathbb{N}$, sodass $n\epsilon \leq m\epsilon$ gilt. Angenommen *(ii)* gelte nicht, also $n \geq m+1$, dann folgt $(m+1)\epsilon \leq n\epsilon \leq m\epsilon$. Das widerspricht unserer Voraussetzung an $\epsilon$, womit *(ii)* folgt.

**Induktionsschritt** ($|\mathcal{S}_0| > 1$)**:** Da $\mathcal{S}_0$ mehr Elemente als nur $\epsilon$ enthält, finden wir ein $\alpha_0 \in \mathcal{S}_0 \backslash \{\epsilon\}$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es eine Funktion $\nu : \mathcal{S}_0 \backslash \{\alpha_0\} \to [0, \infty]$, die die Eigenschaften *(i)* und *(ii)* erfüllt. Da es für alle $\alpha \in \mathcal{S}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \leq n\epsilon$ gibt, folgt aus *(ii)*, dass $\nu$ nur endliche Werte annehmen kann. Somit können wir $\nu$ in $\mathcal{S}_0$ wie folgt fortsetzen

$$\nu(\alpha_0) := \inf \left\{ \frac{1}{r} \left( \sum_{j=1}^{p} \nu(\gamma_j) - \sum_{j=1}^{q} \nu(\delta_j) \right) : r \in \mathbb{N}, \gamma_1, \ldots, \gamma_p, \delta_1, \ldots, \delta_q \in \mathcal{S}_0 \setminus \{\alpha_0\}, \right.$$
$$\left. \text{sodass} \quad \delta_1 + \ldots + \delta_q + r\alpha_0 \leq \gamma_1 + \ldots + \gamma_p \right\}.$$

Wegen der Eigenschaft, dass es für alle $\alpha \in \mathcal{S}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \leq n\epsilon$ gibt, wird dieses Infimum insbesondere über eine nichtleere Menge gebildet und es gilt $\nu(\alpha_0) \geq 0$. Es bleibt noch zu zeigen, dass das fortgesetzte $\nu$ nach wie vor *(ii)* genügt. Dazu betrachten wir $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathcal{S}_0$ und $s, t \in \mathbb{N}_0$ sodass

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + s\alpha_0 \leq \beta_1 + \ldots + \beta_m + t\alpha_0. \tag{5.2}$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

Für den Fall $s = t = 0$ ist *(ii)* klarerweise aufgrund unserer Induktionsvoraussetzung erfüllt.
*1. Fall ($s = 0$ und $t > 0$):* Wir müssen zeigen, dass

$$\sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) \leq t\nu(\alpha_0) + \sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j) \quad \text{bzw.}$$

$$\nu(\alpha_0) \geq \underbrace{\frac{1}{t}\left(\sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_p) - \sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j)\right)}_{w:=}.$$

Dazu seien $r \in \mathbb{N}, \gamma_1, \ldots, \gamma_p, \delta_1, \ldots, \delta_q \in \mathcal{S}_0 \setminus \{\alpha_0\}$, sodass

$$\delta_1 + \ldots + \delta_q + r\alpha_0 \leq \gamma_1 + \ldots + \gamma_p. \tag{5.3}$$

Es genügt zu zeigen, dass folgende Ungleichung gilt

$$\frac{1}{r}\left(\sum_{j=1}^{p} \nu(\gamma_j) - \sum_{j=1}^{q} \nu(\delta_j)\right) \geq w. \tag{5.4}$$

Da $s = 0$ ist, erhalten wir Folgendes aus (5.2), indem wir mit $r$ multiplizieren und denselben Term links und rechts addieren

$$r\alpha_1 + \ldots + r\alpha_n + t\delta_1 + \ldots + t\delta_q \leq r\beta_1 + \ldots + r\beta_m + rt\alpha_0 + t\delta_1 + \ldots + t\delta_q.$$

Einsetzen von (5.3) liefert

$$r\alpha_1 + \ldots + r\alpha_n + t\delta_1 + \ldots + t\delta_q \leq r\beta_1 + \ldots + r\beta_m + t\gamma_1 + \ldots + t\gamma_p.$$

Durch Anwenden der Induktionsvoraussetzung, erhalten wir Folgendes, woraus schließlich (5.4) folgt

$$r\sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) + t\sum_{j=1}^{q} \nu(\delta_j) \leq r\sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j) + t\sum_{j=1}^{n} \nu(\gamma_j).$$

*2. Fall ($s > 0$):* Es reicht zu zeigen, dass

$$s\nu(\alpha_0) + \sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) \leq z_1 + \cdots + z_t + \sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j),$$

wobei $z_1, \ldots, z_t$ die Zahlen sind, die deren Infimum $\nu(\alpha_0)$ definieren. Ohne Beschränkung auf die Allgemeinheit, können wir sogar $z := z_1 = \ldots = z_t$ annehmen, da sie dann alle insbesondere das Infimum darstellen und die Ungleichung nach wie vor erfüllt ist, wenn manche Werte $z_j$ auch größer werden dürfen. Also wollen wir nun Folgendes zeigen

$$s\nu(\alpha_0) + \sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) \leq tz + \sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j).$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

Indem wir wieder (5.2) mit $r$ multiplizieren und denselben Term links und rechts addieren, erhalten wir diesmal

$$r\alpha_1 + \ldots + r\alpha_n + rs\alpha_0 + t\delta_1 + \ldots + t\delta_q \leq r\beta_1 + \ldots + r\beta_m + rt\alpha_0 + t\delta_1 + \ldots + t\delta_q. \quad (5.5)$$

Sei $\gamma_1, \ldots, \gamma_p, \delta_1, \ldots, \delta_q \in \mathcal{S}_0 \setminus \{\alpha_0\}$ und erfülle (5.3) mit

$$z = \frac{1}{r}\left(\sum_{j=1}^{p} \nu(\gamma_j) - \sum_{j=1}^{q} \nu(\delta_j)\right).$$

Einsetzen von (5.3) in (5.5) hinein liefert somit

$$r\alpha_1 + \cdots + r\alpha_n + t\delta_1 + \cdots + t\delta_q + rs\alpha_0 \leq r\beta_1 + \cdots + r\beta_m + t\gamma_1 + \cdots + t\gamma_p.$$

Von der vorherigen Ungleichung und der Definition von $\nu(\alpha_0)$ folgt nun unmittelbar

$$\begin{aligned} s\nu(\alpha_0) + \sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) &\leq \sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) + \frac{s}{sr}\left(r\sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j) + t\sum_{j=1}^{p} \nu(\gamma_j) - r\sum_{j=1}^{n} \nu(\alpha_j) - t\sum_{j=1}^{q} \nu(\delta_j)\right) \\ &= tz + \sum_{j=1}^{m} \nu(\beta_j). \end{aligned}$$

Wir haben in beiden Fällen *(ii)* gezeigt und somit eine gewünschte Fortsetzung auf $\mathcal{S}_0$ unserer Funktion $\nu$ gefunden.

□

**5.15. Satz.** *Sei $(\mathcal{S}, +)$ eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element $0$. Sei $\epsilon$ ein Element in $\mathcal{S}$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

*(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(n+1)\epsilon \not\leq n\epsilon$.*

*(b) Es gibt einen Halbgruppenhomomorphismus $\nu : (\mathcal{S}, +) \to ([0, \infty], +)$, sodass $\nu(\epsilon) = 1$.*

*Beweis.* *(b) $\Longrightarrow$ (a)*: Angenommen es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $(n+1)\epsilon \leq n\epsilon$ gilt. Dann erhalten wir den folgenden Widerspruch in $([0, \infty], +)$ mit Hilfe unseres Halbgruppenhomomorphismus $\nu$:

$$\begin{aligned} (n+1)\epsilon \;\leq\; n\epsilon \quad &\Longrightarrow \quad \nu(\underbrace{\epsilon + \ldots + \epsilon}_{(n+1)-\text{mal}}) \;\leq\; \nu(\underbrace{\epsilon + \ldots + \epsilon}_{n-\text{mal}}) \\ &\Longleftrightarrow \quad (n+1)\underbrace{\nu(\epsilon)}_{=1} \;\leq\; n\underbrace{\nu(\epsilon)}_{=1} \\ &\Longleftrightarrow \quad n+1 \;\leq\; n \qquad \lightning \end{aligned}$$

*(a) $\Longrightarrow$ (b)*: Ohne Beschränkung auf die Allgemeinheit nehmen wir an, dass es für alle



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

$\alpha \in \mathcal{S}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\alpha \leq n\epsilon$. Andernfalls ignorieren wir diese $\alpha$ vorerst und setzen später $\nu(\alpha) := \infty$. Sei $\mathcal{S}_0$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{S}$, die $\epsilon$ enthält. Wir definieren

$$M_{\mathcal{S}_0} := \Big\{ \kappa : \mathcal{S} \to [0,\infty] \;\Big|\; \kappa(\epsilon) = 1, \text{ für alle } \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \mathcal{S}_0 : \\ \kappa(\alpha+\beta) = \kappa(\alpha) + \kappa(\beta) \Big\}.$$

Lemma 5.14 garantiert uns, dass die Menge $M_{\mathcal{S}_0}$ nichtleer ist, da aus Eigenschaft *(ii)*, sowohl $\kappa(\alpha+\beta) \leq \kappa(\alpha) + \kappa(\beta)$ als auch $\kappa(\alpha+\beta) \geq \kappa(\alpha) + \kappa(\beta)$ gefolgert werden kann. Nun betrachten wir $[0,\infty]^{\mathcal{S}}$ mit der Produkttopologie. Nach dem Satz von Tychonoff 1.9 aus Appendix A.2 ist dieser Raum kompakt, da $[0,\infty]$ kompakt ist. Somit ist $M_{\mathcal{S}_0}$ abgeschlossen, da $\mathcal{S}_0$ eine endliche Teilmenge von $\mathcal{S}$ ist. Zusätzlich erfüllt die Familie $\{M_{\mathcal{S}_0} \mid \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}, |\mathcal{S}_0| < \infty\}$ die endliche Durschnittseigenschaft. Nach Proposition 1.8 aus A.2 gilt somit

$$\bigcap \{M_{\mathcal{S}_0} \mid \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}, |\mathcal{S}_0| < \infty\} \neq \emptyset.$$

Also erhalten wir eine Abbildung $\nu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ mit $\nu(\epsilon) = 1$ und $\nu(\alpha+\beta) = \nu(\alpha) + \nu(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, da $\nu \in M_{\{\epsilon,\alpha,\beta,\alpha+\beta\}}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ gilt.

□

Wir besitzen nun alle Werkzeuge, die wir für den Beweis vom Satz von Tarski 5.4 benötigen und können uns im Folgenden darum widmen.

*Beweis.* In Bemerkung 5.5 haben wir die einfache Richtung "$\Longrightarrow$"bereits gesehen.
"$\Longleftarrow$": Sei $(\mathcal{S}, +)$ die Typen Halbgruppe der Gruppenoperation von $G$ auf $X$. Nach Voraussetzung ist $E$ nicht paradox bezüglich $G$. Nach Lemma 5.11 bedeutet dies, dass $[E] \neq 2[E]$. Nach Kontraposition aus Korollar 5.13 folgt dann, dass $(n+1)[E] \not\leq n[E]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aus Satz 5.15 erhalten wir dann die Existenz einer additiven Abbildung $\nu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ mit $\nu([E]) = 1$. Die gewünschte Mengenfunktion erhalten wir dann wie folgt

$$\mu : \mathfrak{P}(X) \to [0,\infty], \quad A \mapsto \nu([A]).$$

Unsere Mengenfunktion $\mu$ ist $G$-invariant nach der Definition vom Typ von $A$ und endlich-additiv, da sich die Additivität von $\nu$ auf $\mu$ vererbt.

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

# 6. Die (Nicht)-Existenz von Paradoxa auf der Gerade und der Ebene

Wie wir in den vorherigen Kapiteln gezeigt haben, existiert das Paradoxon von Banach-Tarski für $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$. Wir werden sehen, dass das in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ nicht mehr der Fall ist. Der folgende Teil richtet sich nach der Vorgehensweise von [TW16, Kapitel 12].

**6.1. Motivation.** In Kapitel 4 haben wir paradoxe Zerlegungen auf Mengen gefunden, in dem wir paradoxe Zerlegungen von Gruppen auf die Mengen, auf die sie agieren, übertragen haben. In Kapitel 5 haben wir gesehen, dass die Existenz von geeigneten Mengenfunktionen mit der Nichtexistenz solcher paradoxen Mengen im Zusammenhang steht. Unsere Konstruktion wird analog zunächst ein endlich-additives Maß auf allen Teilmengen einer Gruppe $G$ beinhalten, welche sich dann auf die Grundmenge $X$ übertragen lässt. Solche Maße auf $X$ liefern uns dann, dass $G$ nicht paradox ist. Diese Resultate werden sich dann auf die Gerade und die Ebene in Raumdimension 1 und 2 anwenden lassen.

## 6.1. Mittelbare Gruppen und Maße auf Gruppen

**6.2. Definition.** Sei $G$ eine Gruppe und $\mu$ eine endlich-additive Mengenfunktion auf $\mathfrak{P}(G)$. Falls $\mu(G) = 1$ und falls $\mu$ links-invariant bezüglich $G$ ist, also $\mu(gA) = \mu(A)$ für alle $g \in G$ und $A \subseteq G$, dann nennen wir $\mu$ ein *Maß von* $G$. Eine Gruppe, für die ein solches Maß existiert, nennen wir *mittelbar*.

**6.3. Bemerkung.**

*(i)* Falls $G$ paradox bezüglich der Linksmultiplikation ist, dann ist $G$ nicht mittelbar. Man könnte ansonsten eine paradoxe Zerlegung von $G$ finden, sodass $\mu(G) = 2\mu(G)$ gefolgert werden kann, was im Widerspruch zu $\mu(G) = 1$ steht.

*(ii)* Mit $B(G)$ bezeichne man den Raum aller reelwertigen beschränkten Funktionen auf einer Gruppe $G$, der mit der punktweisen Addition und der Skalarmultiplikation versehen ist. Falls $\mu$ ein Maß von $G$ ist, so lässt sich ein Integral $\int f \, d\mu$ konstruieren. Die Konstruktion erfolgt wie gewohnt zunächst über Treppenfunktionen und dann durch Suprema über alle messbaren Funktionen, die im Maßraum $(G, \mathfrak{P}(G), \mu)$ allen Funktionen auf $B(G)$ entsprechen. Insbesondere erfüllt der Operator $\left(\int \cdot \, d\mu\right) : B(G) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int f \, d\mu$ folgende Eigenschaften:

(a) $\int (af + bg) \, d\mu = a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu$ mit $a, b \in \mathbb{R}$,



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Bibliothek
Your knowledge hub

(b) $\int f \, d\mu \geq 0$ falls $f(g) \geq 0$ für alle $g \in G$ gilt,

(c) $\int \chi_G \, d\mu = 1$,

(d) für alle $g \in G, f \in B(G)$ gilt $\int ({}_g f) \, d\mu = \int f \, d\mu$, wobei $({}_g f)(h) = f\left(g^{-1}h\right)$, also ist das Integral links-invariant bezüglich $G$.

Allgemein nennen wir ein lineares Funktional $M : B(G) \to \mathbb{R}$ ein links-invariantes Mittel, falls die folgenden Eigenschaften $(a)-(d)$ erfüllt sind. Insbesondere besitzt jede mittelbare Gruppe mit dem Integraloperator ein links-invariantes Mittel. Umgekehrt liefert jedes links-invariante Mittel durch $\mu(A) = M(\chi_A), A \subseteq G$ ein Maß auf $G$. Eine Gruppe ist also mittelbar genau dann, wenn ein es links-invariantes Mittel auf der Gruppe gibt.

*(iii)* Analog wie in Definition 6.2 lässt sich auf einer Gruppe in offensichtlicher Weise auch ein rechts-invariantes Maß bezüglich $G$ definieren. In der Tat erhält man so eines durch ein links-invariantes Maß mittels $\mu_r(A) = \mu(A^{-1}), A \subseteq G$. Wir bemerken, dass das Integral bezüglich $\mu_r$ analog wie in *(ii)* konstruiert werden kann, wobei das Integral rechts-invariant bezüglich $G$ ist, also $\int (f_g) \, d\mu_r = \int f \, d\mu_r$ mit $(f_g)(h) = f\left(hg^{-1}\right)$. Falls ein Maß sowohl links- als auch rechts-invariant bezüglich $G$ ist, nennen wir es einfach $G$-invariant.

**6.4. Proposition.** *Sei $G$ eine mittelbare Gruppe. Dann gibt es ein Maß $\nu$ auf $\mathfrak{P}(G)$, das links- und rechts-invariant (also einfach invariant) bezüglich $G$ ist.*

*Beweis.* $G$ ist mittelbar, also gibt es ein links-invariantes Maß $\mu$ auf $\mathfrak{P}(G)$. Sei $\mu_r$ das dazugehörige rechts-invariante Maß wie in *(iii)* von Bemerkung 6.3. Für $A \subseteq G$ definieren wir $f_A(g) := \mu(Ag^{-1})$. Die Funktion $f_A$ ist durch 1 beschränkt, also $f_A \in B(G)$ und erfüllt unmittelbar aus der Definition die folgenden Eigenschaften

- für alle $A, B \subseteq G$ gilt: $f_{A \cup B} = f_A + f_B$, falls $A \cap B = \emptyset$,
- für alle $h \in G, A \subseteq G$ gilt: $f_{hA} = f_A$, und $f_{Ah} = (f_A)_h$.

Nun definieren wir unsere gesuchte Maßfunktion $\nu$ auf $\mathfrak{P}(G)$ mittels $\nu(A) := \int f_A \, d\mu_r$. Die Funktion $\nu$ ist endlich-additiv, da

$$\begin{aligned}\nu(A \cup B) = \int f_{A \cup B} \, d\mu_r &= \int f_A + f_B \, d\mu_r \\ &= \int f_A \, d\mu_r + \int f_B \, d\mu_r = \nu(A) + \nu(B).\end{aligned}$$

Weiter ist sie links- und rechts-invariant, was man wie folgt sieht. Für alle $h \in G$ und $A \subseteq G$ gilt

$$\begin{aligned}\nu(hA) &= \int f_{hA} \, d\mu_r = \int f_A \, d\mu_r = \nu(A), \\ \nu(Ah) &= \int f_{Ah} \, d\mu_r = \int (f_A)_h \, d\mu_r = \int (f_A) \, d\mu_r = \nu(A).\end{aligned}$$

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

**6.5. Satz.** *Sei $G$ eine mittelbare Gruppe, die auf einer Menge $X$ operiert. Dann gibt es ein endlich-additives, $G$-invariantes Maß $\nu$ auf $\mathfrak{P}(X)$ mit $\nu(X) = 1$. Insbesondere ist $X$ nicht paradox bezüglich $G$.*

*Beweis.* Sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt. Da $G$ mittelbar ist, finden wir nach Proposition 6.4 ein $G$-invariantes Maß $\mu$ auf $\mathfrak{P}(G)$. Somit können wir $\nu : \mathfrak{P}(X) \to [0,1]$ wie folgt definieren: für $A \subseteq X$ sei $\nu(A) := \mu(\{g \in G : g(x) \in A\})$. Es gilt:

- $\nu(X) = \mu(\{g \in G : g(x) \in X\}) = \mu(G) = 1$,
- seien $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$, dann

$$\begin{aligned}\nu(A \cup B) &= \mu(\{g \in G : g(x) \in A \cup B\}) \\ &= \mu(\{g \in G : g(x) \in A\} \cup \{g \in G : g(x) \in B\}) \\ &= \mu(\{g \in G : g(x) \in A\}) + \mu(\{g \in G : g(x) \in B\}) = \nu(A) + \nu(B),\end{aligned}$$

- seien $h \in G$ und $A \subseteq X$, dann

$$\begin{aligned}\nu(hA) &= \mu(\{g \in G : g(x) \in hA\}) = \mu(\{h^{-1}g \in G : h^{-1}g(x) \in A\}) \\ &= \mu(h^{-1}\{g \in G : g(x) \in A\}) = \mu(\{g \in G : g(x) \in A\}) = \nu(A),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu(Ah) &= \mu(\{g \in G : g(x) \in Ah\}) = \mu(\{gh^{-1} \in G : gh^{-1}(x) \in A\}) \\ &= \mu(\{g \in G : g(x) \in A\}h^{-1}) = \mu(\{g \in G : g(x) \in A\}) = \nu(A).\end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt unsere gewünschte Mengenfunktion. Nun ist $X$ insbesondere nicht paradox, da ansonsten $\nu(X) = 2\nu(X)$ mittels einer paradoxen Zerlegung einen Widerspruch zu $\nu(X) = 1$ ergeben würde.

□

**6.6. Korollar.** *Sei $G$ eine Gruppe die auf $X$ operiert. Falls $X$ paradox bezüglich $G$ ist, dann ist $G$ paradox bezüglich sich selbst. Es gilt also eine starke Umkehrung von Satz 4.5.*

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage mittels Kontraposition. Sei $G$ also nicht paradox bezüglich sich selbst. Dann erhalten wir eine Mengenfunktion $\mu$ wie in Satz von Tarski 5.4 für $G$. Insbesondere ist $G$ mittelbar und nach Satz 6.5 folgt, dass $X$ nicht paradox bezüglich $G$ ist.

□

**6.7. Proposition.** *Sei $\{G_\alpha \mid \alpha \in I\}$ eine gerichtete Familie von mittelbaren Gruppen, also: für alle $\alpha, \beta \in I$ gibt es ein $\gamma \in I$, sodass $G_\alpha$ und $G_\beta$ eine Untergruppe von $G_\gamma$ sind. Dann ist $G := \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ auch mittelbar.*



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

*Beweis.* Wir betrachten die Menge $[0,1]^{\mathfrak{P}(G)}$. Nach dem Satz von Tychonoff 1.9 aus Appendix A.2 ist diese Menge kompakt. Weiters definieren wir für $\alpha \in I$ die folgende Menge

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\alpha := \{\mu : \mathfrak{P}(G) \to [0,1] \mid \mu(G) = 1,\ \mu \text{ ist endlich-additiv,}\\ \mu(gA) = \mu(A) \text{ für } g \in G_\alpha, A \subseteq G\}.\end{aligned}$$

Die Menge $\mathcal{M}_\alpha$ ist insbesondere nicht leer, da eines der $\mu$ beispielsweise wie folgt gefunden werden kann: $\mu(A) = \mu_\alpha(A \cap G_\alpha)$ für $A \subseteq G$, wobei $G_\alpha$ vermöge $\mu_\alpha$ mittelbar ist. Die Menge $\mathcal{M}_\alpha$ ist abgeschlossen, da die Funktionen aus $[0,1]^{\mathfrak{P}(G)} \setminus \mathcal{M}_\alpha$ eine der drei Eigenschaften von $\mathcal{M}_\alpha$ verletzen (wie z.B.: $\mu(G) \neq 1$) und somit aus dem stetigen Urbild einer offenen Menge stammen. Insgesamt ist $[0,1]^{\mathfrak{P}(G)} \setminus \mathcal{M}_\alpha$ offen bzw. $\mathcal{M}_\alpha$ abgeschlossen. Da für alle $\alpha, \beta \in I$ ein $\gamma \in I$ mit $G_\alpha, G_\beta \subseteq G_\gamma$ gefunden werden kann, gilt insbesondere $\mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{M}_\beta \supseteq \mathcal{M}_\gamma \neq \emptyset$ und somit erfüllt die Menge $\{\mathcal{M}_\alpha : \alpha \in I\}$ die endliche Durschnittseigenschaft. Nach Satz 1.8 aus A.2 gibt es somit ein $\mu \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha$, sodass $G$ mittelbar vermöge $\mu$ ist.

□

**6.8. Satz (Banach und von Neumann).** *Jede abelsche Gruppe ist mittelbar.*

*Beweis.* Sei $G$ eine abelsche Gruppe. Wir wissen, dass jede abelsche Gruppe die Vereinigung seiner endlich erzeugten Untergruppen ist, denn jedes Element $g \in G$ ist in der endlichen zyklischen Untergruppe $\langle g \rangle$ enthalten, welche wiederum in der Vereinigung enthalten ist. Da die endlich erzeugten Untergruppen eine gerichtete Familie bilden, reicht es nach Proposition 6.7 endlich erzeugte abelsche Gruppen zu betrachten und zu zeigen, dass sie mittelbar sind. Wir nehmen an, dass $G$ von den Elementen $\{g_1, \ldots, g_m\}$ erzeugt wird. Zunächst konstruieren wir für alle $\epsilon > 0$ eine Funktion $\mu_\epsilon : \mathfrak{P}(G) \to [0,1]$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $\mu_\epsilon(G) = 1$,

(2) $\mu_\epsilon$ ist endlich-additiv,

(3) für alle $A \subseteq G$ und für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$ gilt $|\mu_\epsilon(A) - \mu_\epsilon(g_k A)| \leq \epsilon$.

Dazu wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $2/N \leq \epsilon$. Wir definieren $\mu_\epsilon$ wie folgt

$$\mu_\epsilon(A) := \frac{|\{(i_1, \ldots, i_m) \mid 1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq N, g_1^{i_1} \cdots g_m^{i_m} \in A\}|}{N^m}$$

Es folgt $|\mu_\epsilon(A) - \mu_\epsilon(g_k A)| = |\{(i_1, \ldots, i_m) \mid 1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_m \leq N \text{ und } i_k = 1 \text{ oder } i_k = N+1\}|/N^m = 2N^{m-1}/N^m = 2/N \leq \epsilon$ für alle $A \subseteq G$ und $k = 1, \ldots, m$. Dass $\mu_\epsilon(G) = 1$ ist und dass $\mu_\epsilon$ endlich additiv ist, sieht man unmittelbar mittels der Definition. Nun bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_\epsilon$ die Menge aller Funktionen auf $\mathfrak{P}(G)$ nach $[0,1]$, die Eigenschaften $(1)-(3)$ erfüllen. Wir haben bereits gesehen, dass die Menge $\mathcal{M}_\epsilon$ nichtleer ist. Sie ist außerdem auch abgeschlossen, da es für eine Funktion $\mu$, die beispielsweise $\mu(G) = 1$ verletzt, insbesondere eine offene Kugel gibt, die $\mu$ enthält und wo Eigenschaft (1) auch verletzt wird. Analog gilt dies auch für Eigenschaft (2) und (3). Also ist das Komplement von $\mathcal{M}_\epsilon$ offen. Weiters erfüllen die Mengen $\{\mathcal{M}_\epsilon \mid \epsilon > 0\}$ die endliche Durschnittseigenschaft, da $\bigcap_{j=1}^p \mathcal{M}_{\epsilon_j} = \mathcal{M}_{\min_{j=1,\ldots,p} \epsilon_j} \neq \emptyset$. Nach Satz von Tychonoff 1.9 in Appendix A.2



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

ist $[0,1]^{\mathfrak{P}(G)}$ kompakt und somit folgt nach 1.8 in A.2, dass $\bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{M}_\epsilon \neq \emptyset$. Insgesamt haben wir ein $\mu$ gefunden, dass für alle $\epsilon > 0$ in $\mathcal{M}_\epsilon$ liegt und somit links-invariant bezüglich allen Erzeugern $g_k$ und schließlich für alle Elemente in $G$ ist.

□

**6.9. Proposition.** *Sei $G$ eine Gruppe, $N$ ein Normalteiler von $G$ und $G/N$ die dazugehörige Faktorgruppe (vgl. Definition 1.12 und 1.13 aus Appendix A.3). Falls $N$ und $G/N$ mittelbar sind, so ist es auch $G$.*

*Beweis.* Sei $\nu_1$ ein Maß auf $N$ und $\nu_2$ ein Maß auf $G/N$. Für $A \subseteq G$ definieren wir $f_A : G \to \mathbb{R}$ durch $f_A(g) := \nu_1(N \cap g^{-1}A)$. Für $g_1, g_2 \in G$, die sich in derselben Nebenklasse befinden, also $g_2^{-1}g_1 = h \in G$, erhalten wir

$$\begin{aligned} f_A(g_2) = \nu_1(N \cap g_2^{-1}A) &= \nu_1(N \cap hg_1^{-1}A) \\ &= \nu_1(h(N \cap g_1^{-1}A)) = \nu_1(N \cap g_1^{-1}A) = f_A(g_1). \end{aligned}$$

Somit induziert $f_A$ eine beschränkte reelwertige Funktion $\hat{f}_A$ mit Definitionsbereich in $G/N$. Wir definieren weiters $\mu(A) := \int \hat{f}_A \, d\nu_2$. Da $f_G = \chi_G$ gilt, folgt $\mu(G) = 1$. Weiters gilt für $A, B \subseteq G$ mit $A \cap B = \emptyset$, dass $g^{-1}A \cap g^{-1}B = \emptyset$ für alle $g \in G$ und somit $f_{A\cup B}(g) = f_A(g) + f_B(g)$. Insbesondere erhalten wir $\widehat{f_{A\cup B}}(g) = \hat{f}_A(g) + \hat{f}_B(g)$ und somit endliche Additivität von $\mu$ mittels Linearität des Integrals. Schließlich erhalten wir Links-Invarianz unserer Maßfunktion wie folgt. Es gilt $f_{gA}(g_0) = \nu(N \cap g_0^{-1}gA) = f_A(g^{-1}g_0) = {}_g(f_A)(g_0)$ und aus der Links-Invarianz von $\nu_2$ folgt $\mu(gA) = \mu(A)$.

□

**6.10. Korollar (von Neumann).** *Sei $G$ eine auflösbare Gruppe (vgl. Definition 1.17 aus Appendix A.3). Dann ist $G$ mittelbar.*

*Beweis.* Da $G$ auflösbar ist, gibt es eine Normalreihe von $G$, in der alle Faktoren abelsch sind. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach der Länge $n$ der dazugehörigen Normalreihe durch.

**Induktionsanfang ($n = 1$):** Unsere Normalreihe $\mathcal{G}$ sieht wie folgt aus

$$\mathcal{G}: \quad G = G_0 \triangleright G_1 = \{\varepsilon\}.$$

Wir sehen, dass $G_0/G_1 = G/\{\varepsilon\}$ der einzige Faktor in $\mathcal{G}$ ist und dass $G/\{\varepsilon\}$ abelsch ist. Da $G/\{\varepsilon\}$ isomorph zu $G$ ist, folgt aus dem Satz von Banach und von Neumann 6.8, dass $G$ mittelbar ist.

**Induktionsschritt ($n \to n+1$):** Wir betrachten die folgende Normalreihe

$$\mathcal{G}: \quad G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \ldots \triangleright G_{n+1} = \{\varepsilon\}.$$

Fassen wir $G_1 = H$ selbst als Gruppe auf, erhalten wir eine Normalreihe der From

$$\mathcal{H}: \quad G_1 = H = H_0 \triangleright \ldots \triangleright H_n = G_{n+1} = \{\varepsilon\}.$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

Wir sehen, dass $G_1$ auflösbar bezüglich $\mathcal{H}$ ist, da die Faktoren von $\mathcal{H}$ aus $\mathcal{G}$ stammen und somit abelsch sind. Nach Induktionsvoraussetzung folgt somit, dass $G_1$ eine mittelbare Gruppe ist. Weiters ist $G_1$ ein Normalteiler von $G$ und $G/G_1$ abelsch. Im Insbesonderen ist $G/G_1$ mittelbar nach dem Satz von Banach und von Neumann 6.8. Insgesamt folgt nach Proposition 6.9, dass $G$ mittelbar ist.

□

**6.11. Korollar.** *Insbesondere sind die Isometriegruppen $G_1$ und $G_2$ mitelbar.*

*Beweis.* Sei $f$ eine affine Abbildung (vgl. Definition 1.21 in Appendix A.4). Dann gilt nach Satz 1.22 in A.4, dass $f$ als eindeutiges Produkt einer Translation und einer invertierbaren linearen Abbildung geschrieben werden kann. Sei also $f = \tau\sigma$ mit $\tau \in T_n(\mathbb{R})$ und $\sigma \in GL_n(\mathbb{R})$. Wir definieren die Abbildung $\pi : A_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ durch $\pi(f) = \sigma$. Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\pi^{-1}(\{\mathrm{id}\}) = T_n(\mathbb{R})$. Somit erhalten wir mit Bedingung *(c)* von Satz 1.11 aus A.3, dass $T_n(\mathbb{R}) \lhd A_n(\mathbb{R})$. Aus dem Homomorphiesatz 1.15 in A.3 folgt dann $A_n(\mathbb{R})/T_n(\mathbb{R}) \cong GL_n(\mathbb{R})$. Weiters bildet $\pi$ die Gruppe aller Isometrien $G_n$ in die orthogonale Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ ab und wiederum $T_n(\mathbb{R}) \lhd G_n$. Also ist jede Isometrie ein eindeutiges Produkt aus einer Translation und einer orthogonalen Abbildung. Für den Fall $G_1$ erhalten wir also $G_1 = \{x \mapsto a \pm x \mid a \in \mathbb{R}\}$, da $O_1(\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}, x \mapsto -x\}$, und somit die Normalereihe

$$\mathcal{G}_1 : G_1 \rhd T_1(\mathbb{R}) \rhd \{\mathrm{id}\}.$$

Wie oben erwähnt gilt $G_1/T_1(\mathbb{R}) \cong O_1(\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}, x \mapsto -x\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ und somit ist der Faktor $G_1/T_1(\mathbb{R})$ abelsch. Auch der Faktor $T_1(\mathbb{R})/\{\mathrm{id}\} \cong T_1(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}, +)$ ist abelsch. Insgesamt ist $G_1$ auflösbar vermöge $\mathcal{G}_1$ und nach dem Korollar von von Neumann 6.10 auch mittelbar.
Für den Fall $G_2$ betrachten wir die Menge $SG_2$, die Gruppe aller Isometrien mit Determinante 1. Die Abbildung $\pi$ bildet $SG_2$ in $SO_2(\mathbb{R})$ hinein ab und es gilt wieder $\pi^{-1}(\{\mathrm{id}\}) = T_2(\mathbb{R})$, also $T_2(\mathbb{R}) \lhd SG_2$. Somit erhalten wir, dass $SG_2/T_2(\mathbb{R}) \cong SO_2(\mathbb{R})$. Bezeichnen wir mit $\rho_\theta$ die Rotation, die im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $\theta$ um eine Rotationsachse durch den Ursprung dreht, so erhalten wir $SO_2(\mathbb{R}) = \{\rho_\theta \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Also ist $SO_2(\mathbb{R})$ abelsch, und damit die Faktorgruppe $SG_2/T_2(\mathbb{R})$. Weiters erhalten wir, dass $SG_2 \lhd G_2$ mittels den Gruppenhomomorphismus $\det : (G_2, \cdot) \to (\{-1, +1\}, \cdot)$ gilt, da gerade $SG_2$ als all jene Isometrien definiert sind, die Determinante 1 haben. Es gilt $\det^{-1}(\{1\}) = SG_2$ und somit ist $G_2/SG_2 \cong (\{-1, +1\}, \cdot) \cong ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), +)$, also ist der Faktor abelsch. Weiters gilt, dass der Faktor $T_2(\mathbb{R})/\{\mathrm{id}\} \cong T_2(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^2, +)$ abelsch ist und wir erhalten Auflösbarkeit von $G_2$ mittels der Normalreihe

$$\mathcal{G}_1 : G_2 \rhd SG_2 \rhd T_2(\mathbb{R}) \rhd \{\mathrm{id}\}.$$

Insgesamt ist $G_2$ mittelbar nach dem Korollar von von Neumann 6.10.

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

## 6.2. Invariante Maß Erweiterung und Nichtexistenz von Paradoxa

**6.12. Definition.** Sei $\mathcal{A}$ eine Boolsche Algebra (vgl. Definition 1.18 in Appendix A.3). Ein *Maß auf einer Boolschen Algebra* ist eine endlich-additive Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, also $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$ für $a, b \in \mathcal{A}$ mit $a \wedge b = \mathbf{0}$, für die $\mu(\mathbf{0}) = 0$ gilt.
Weiters sei $G$ eine Gruppe von Automorphismen auf der Boolschen Algebra $\mathcal{A}$ (vgl. Definition 1.20 in A.3). Wir nennen das Maß $\mu$ auf $\mathcal{A}$ zusätzlich *invariant bezüglich* $G$, falls $\mu(g(a)) = \mu(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$ und $g \in G$ gilt.

**6.13. Satz (Maß Erweiterung).** *Sei $\mathcal{A}_0$ eine Boolsche Subalgebra der Boolschen Algebra $\mathcal{A}$ und $\mu$ ein Maß auf $\mathcal{A}_0$. Dann existiert ein Maß $\overline{\mu}$ auf $\mathcal{A}$, sodass $\overline{\mu}\big|_{\mathcal{A}_0} = \mu$.*

*Beweis.* Angenommen $\mathcal{A}$ sei zunächst endlich. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion nach der Anzahl der Atome durch (vgl. Definition 1.18 in Appendix A.3).
**Induktionsanfang ($\#$ Atome $= 1$):** Wir erhalten $\mathcal{A} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Nachdem die Subalgebra $\mathcal{A}_0$ per Definition eine nichtleere Teilmenge von $\mathcal{A}$ ist, muss entweder $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ gelten, womit $\overline{\mu} := \mu$ Gewünschtes ergibt, oder es gilt, dass $\mathcal{A}_0 = \{\mathbf{0}\}$ bzw. $\mathcal{A}_0 = \{\mathbf{1}\}$, womit $\overline{\mu} \equiv 0$ Gewünschtes leistet.
**Induktionsschritt ($\#$ Atome $> 1$):** Falls $\mathcal{A}_0$ nur aus dem einzelnen Element $\mathbf{0}$ besteht, so definieren wir $\overline{\mu} \equiv 0$. Andernfalls betrachten wir $\mathcal{A}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Da in einer Boolschen Algebra zu je zwei Elementen ein Infimum existiert, können wir $s := \bigwedge(\mathcal{A}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}) \in \mathcal{A}_0$ definieren, welches das minimale Element zu allen Elementen aus $\mathcal{A}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ bezüglich $\leq$ ist. Sei $c := \neg s$, dann definieren wir $A_c := \{a \in \mathcal{A} \mid a \leq c\}$. Diese Menge bildet eine Boolsche Subalgebra mittels $\neg_{\mathcal{A}_c} a := (\neg a) \wedge c$ für alle $a \in \mathcal{A}_c$, da alle Operationen in $\mathcal{A}_c$ abgeschlossen bleiben. Sei weiters $a_0 \in \mathcal{A}$ ein Atom, sodass $a \leq s$ gilt. Dann folgt sicherlich $a_0 \notin \mathcal{A}_c$, womit die Boolsche Subalgebra $\mathcal{A}_c$ weniger Atome als $\mathcal{A}$ besitzt. Da der Schnitt zweier Boolschen Subalgebren wieder eine Boolsche Subalgebra ist, können wir unsere Induktionsvoraussetzung benutzen und erhalten ein Maß $\nu$ auf $\mathcal{A}_c$, das $\mu\big|_{(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_c)}$ erweitert. Nun können wir $\overline{\mu}$ auf $\mathcal{A}$ wie folgt definieren. Sei $a$ ein Atom aus $\mathcal{A}$, dann:

$$\overline{\mu}(a) := \begin{cases} \nu(a), & a \leq c, \\ \mu(s), & a = a_0, \\ 0, & a \leq s \text{ und } a \neq a_0. \end{cases}$$

Für ein allgemeines Element $b \in \mathcal{A}$ definieren wir $\overline{\mu}(b) := \sum\{\overline{\mu}(a) \mid a \text{ ist ein Atom}, a \leq b\}$, womit $\overline{\mu}$ endlich additiv auf $\mathcal{A}$ ist. In der Tat stimmt $\overline{\mu}$ auf $\mathcal{A}_c$ mit $\nu$ überein. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\overline{\mu}$ auf $\mathcal{A}_0$ mit $\mu$ übereinstimmt. Aufgrund der Minimalitätseigenschaft von $s$, erhalten wir für $d \in \mathcal{A}_0$, dass entweder $d \wedge s = \mathbf{0}$ oder $s \leq d$. Falls $d \wedge s = \mathbf{0}$, dann gilt $d \leq c$ und somit folgt $\overline{\mu}(d) = \nu(d) = \mu(d)$. Falls andernfalls $s \leq d$ gilt, bekommen wir $d = s \vee (d - s)$ und somit

$$\overline{\mu}(d) = \mu(s) + \overline{\mu}(d - s) = \mu(s) + \nu(d - s) = \mu(s) + \mu(d - s) = \mu(d).$$

Sei nun $|\mathcal{A}| = \infty$. Für eine feste endliche Subalgebra $\mathcal{C}$ von $\mathcal{A}$ betrachten wir die Menge

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) := \left\{ \mu\big|_{\mathcal{C}} \in [0, \infty]^{\mathcal{A}} \mid \mu\big|_{\mathcal{C}} \text{ ist eine Maßerweiterung von } \mu\big|_{(\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_c)} \right\}.$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

Diese Menge ist eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge von $[0,\infty]^{\mathcal{A}}$ und die Familie $\{\mathcal{M}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C}$ ist eine endliche Subalgebra von $\mathcal{A}\}$ erfüllt die endliche Durchschnittseigenschaf. Nach dem Satz von Tychonoff 1.9 in Appendix A.2 gilt, dass $[0,\infty]^{\mathcal{A}}$ kompakt ist, womit nach 1.8 in A.2 folgt, dass $\bigcap_{\mathcal{C}} \mathcal{M}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$. Insgesamt haben wir eine passende Maßerweiterung $\overline{\mu} \in \bigcap_{\mathcal{C}} \mathcal{M}(\mathcal{C})$ auf ganz $\mathcal{A}$ gefunden.

□

**6.14. Satz (Invariante Maß Erweiterung).** *Sei $G$ eine mittelbare Gruppe von Automorphismen auf einer Boolschen Algebra $\mathcal{A}$ (vgl. Definition 1.20 in Appendix A.3). Sei $\mathcal{A}_0$ eine Subalgebra von $\mathcal{A}$ und $\mu$ ein $G$-invariantes Maß auf $\mathcal{A}_0$, dann kann die Maßerweiterung $\overline{\mu}$ aus Satz 6.13 auch $G$-invariant gewählt werden.*

*Beweis.* Sei $\nu$ die Maßerweiterung auf $\mathcal{A}$ aus Satz 6.13. Sei $\theta$ ein Maß auf der mittelbaren Gruppe $G$. Für ein $b \in \mathcal{A}$ definieren wir $f_b : G \to \mathbb{R}$ durch $f_b(g) := \nu(g^{-1}(b))$ und somit

$$\overline{\mu}(b) := \begin{cases} \int f_b \, d\theta, & \text{falls } f_b \in B(G), \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\theta$ als Maß auf $G$ schließlich linksinvariant bezüglich $G$ agiert und da $f_{g(b)} = {}_g(f_b)$, folgt dann mit *(d)* aus Bemerkung 6.3 Punkt *(ii)*, dass

$$\overline{\mu}(g(b)) = \int f_{g(b)} \, d\theta = \int {}_g(f_b) \, d\theta = \int f_b \, d\theta = \overline{\mu}(b).$$

□

**6.15. Korollar.** *Sei $G$ eine mittelbare Gruppe von Isometrien auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine endlich-additive, $G$-invariante Erweiterung des Lebesgue Maßes $\lambda$ bezüglich allen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Insbesondere hat das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ eine $G_1$- bzw. $G_2$-invariante Erweiterung auf allen Teilmengen.*

*Beweis.* Wir wenden die invariante Maßerweiterung aus Satz 6.14 auf $\mathcal{A} := \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{A}_0 := \mathcal{L}$ und $\mu := \lambda$ an, wobei $\mathcal{L}$ die $n$-dimensionalen Lebesgue-messbaren Mengen bezeichnet. Die zweite Behauptung folgt dann aus Korollar 6.11, wo wir gezeigt haben, dass $G_1$ und $G_2$ mittelbar sind.

□

**6.16. Korollar (Nicht Existenz von Paradoxa).** *Es gibt keine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ mit nichtleerem Inneren, die paradox bezüglich $G_1$ bzw. $G_2$ ist. Also gibt es kein Analogon des Banach-Tarski Paradoxons auf der Gerade und der Ebene.*

*Beweis.* Sei $\mu$ die $G_1$- bzw. $G_2$-invariante Maßerweiterung von $\lambda$ aus Korollar 6.15. Sei $A$ eine beschränkte Menge mit nichtleerem Inneren. Dann folgt $0 < \mu(A) < \infty$, also kann $A$ nicht paradox sein.

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

**6.17. Korollar.** *Insbesondere hat das Inhaltsproblem aus 5.1 eine Lösung in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$.*

*Beweis.* Der Beweis folgt unmittelbar aus Korollar 6.15 und 6.16, wenn auch die Lösung in der Tat nicht eindeutig ist, wie man zeigen könnte.

□

## 6.3. Das Sierpiński-Mazurkiewicz Paradoxon und das von Neumann Paradoxon

Wir wissen nun zwar, dass es kein Analogon zum Banach-Tarski Paradoxon in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ gibt. Dass man in der Ebene nichtsdestotrotz andere Paradoxa konstruieren kann, sehen wir mit Hilfe des Sierpiński-Mazurkiewicz Paradoxons und des von Neumann Paradoxons, indem man bereit ist nichtbeschränkte Mengen zu betrachten bzw. über die Gruppe der Isometrien hinaus paradoxe Zusammenhänge zu beobachten. Der folgende Abschnitt richtet sich nach [TW16, Kapitel 1 und 8].

**6.18. Lemma.** *Für Isometrien $\sigma, \tau \in G_2$ im $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die Menge der erzeugten Wörter $W(\sigma, \tau)$, die aus $\sigma$ und $\tau$ gebildet werden. Mit $W_\sigma$ bzw. $W_\tau$, bezeichnen wir die Menge der Wörter, die mit $\sigma$ bzw. $\tau$ beginnen. Dann gibt es Isometrien $\sigma$ und $\tau$, sodass:*

$$w_1 \in W_\sigma, w_2 \in W_\tau \Longrightarrow w_1((0,0) \neq w_2((0,0)).$$

*Beweis.* Wir betrachten die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Die Menge aller Rotationen auf der komplexen Ebene stimmt mit der Menge der Punkte auf dem Einheitskreis überein, indem die komplexe Zahl $e^{ik}$ mit der Rotation mit Bogenmaß $k$ identifiziert werden kann. Die Menge der komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis ist überabzählbar. Nach Proposition 1.27 in Appendix A.5 ist die Menge der algebraischen Zahlen auf dem Einheitskreis abzählbar. Insbesondere finden wir also eine transzendente Zahl $u$, die auf dem Einheitskreis liegt. Mit $\sigma(z) := uz$ bezeichnen wir die dazugehörige Rotation. Weiters definieren wir die Translation $\tau(z) := z + 1$.
Falls ein Wort $w$ auf $\sigma$ endet, können wir es hinten kürzen ohne $w(0)$ zu ändern, da $\sigma(0) = 0$ ist. Seien $w_1 \in W_\tau$ und $w_2 \in W_\sigma$ Wörter, die mit $\sigma$ bzw. $\tau$ beginnen. Wir erhalten aus $w_1$ und $w_2$ die Wörter $t_1$ und $t_2$, indem wir wiederholt den letzten Buchstaben $\sigma$ kürzen, ehe sie nicht mehr auf $\sigma$ enden, also

$$t_1 = \tau^{j_1}\sigma^{j_2}\tau^{j_3}\dots\tau^{j_m}, \qquad t_2 = \sigma^{k_1}\tau^{k_2}\sigma^{k_3}\dots\tau^{k_n}, \quad \{j_i\}, \{k_i\}, m, n \in \mathbb{N}.$$

Wir bemerken, dass $t_2$ auch das leere Wort sein kann, welches mit der Identität übereinstimmt. Insgesamt erhalten wir

$$w_1(0) = t_1(0) = j_1 + j_3u^{j_2} + j_5u^{j_2+j_4} + \ldots + j_mu^{j_2+j_4+\ldots} \tag{6.1}$$

$$w_2(0) = t_2(0) = \begin{cases} k_2u^{k_1} + k_4u^{k_1+k_3} + \ldots + k_nu^{k_1+k_3+\ldots}, & t_2 \neq \varepsilon, \\ 0, & t_2 = \varepsilon. \end{cases} \tag{6.2}$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Angenommen es gilt $w_1(0) = w_2(0)$. Dann folgt $0 = w_1(0) - w_2(0) = p(u)$ für ein Polynom $p$ und somit der Widerspruch zur Transzendenz von $u$.

□

**6.19. Korollar.** *Seien $\sigma$ und $\tau$ die Isometrien aus Lemma 6.18. Dann ist die Menge der erzeugten Wörter $W(\sigma, \tau)$ eine Teilmenge von $G_2$, die zur freien Halbgruppe vom Rang 2 isomorph ist.*

*Beweis.* Seien $l_1$ und $l_2$ zwei unterschiedliche Wörter aus $W(\sigma, \tau)$. Es reicht zeigen, dass sie nicht dieselbe Isometrie darstellen. Angenommen sie wären es, also $l_1 = l_2$. Dann unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle.
**Fall 1:** Eines der beiden Wörter ist als Sequenz in dem anderen enthalten. Dann erhalten wir durch kürzen ein $w'$, das mit $\varepsilon$ übereinstimmt. Wir erhalten für eine der beiden Gleichungen $w'\sigma(0) = \sigma(0)$ bzw. $w'\tau(0) = \tau(0)$ einen Widerspruch zu Lemma 6.18, je nachdem ob $w'$ mit $\sigma$ oder $\tau$ beginnt.
**Fall 2:** Keines der beiden Wörter ist als Sequenz in dem anderen enthalten. Dann kürzen wir gleiche Anfangsbuchstaben, ehe wir Wörter $l_1'$ und $l_2'$ erhalten, die mit unterschiedlichen Anfangsbuchstaben beginnen. Es gilt unter der Annahme $l_1 = l_2$ weiters $l_1'(0) = l_2'(0)$ im erneuten Widerspruch zu Lemma 6.18.

□

**6.20. Satz (Paradoxon von Sierpiński-Mazurkiewicz).** *Es gibt eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, die paradox bezüglich $G_2$ ist.*

*Beweis.* Sei $\sigma$ und $\tau$ wie in Lemma 6.18. Wir betrachten die folgende Menge $E := \{w(0) \in \mathbb{C} \mid w \in W(\sigma, \tau)\}$, den sogenannten $W(\sigma, \tau)$-Orbit von 0. Aus den Gleichungen (6.1) und (6.2) in Lemma 6.18 erhalten wir

$$E = \{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \ldots + a_n u^n \mid n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{N}_0\}$$

Wir sehen, dass $\sigma(E) \subseteq E$ und $\tau(E) \subseteq E$ gilt. Wegen Lemma 6.18 gilt zudem, dass $\sigma(E)$ und $\tau(E)$ disjunkt sind. Mit den Isometrien $\sigma^{-1}$ und $\tau^{-1}$ erhalten wir die Paradoxie von $E$ bezüglich $G_2$ mittels $E \supseteq \sigma(E) \cup \tau(E)$ und $\sigma^{-1}(\sigma E) = E = \tau^{-1}(\tau E)$.

□

**6.21. Bemerkung.** Die Gruppe $G_2$ besitzt zwar eine nichtleere paradoxe Teilmenge, wie wir oben gesehen haben, ist aber selbst nicht paradox. Das liegt daran, dass $W(\sigma, \tau)$ nur eine Halbgruppe und keine Gruppe ist. Also können wir Korollar 4.6 nicht anwenden. Weiters bemerken wir, dass unsere konstruierte paradoxe Menge $E \subseteq \mathbb{R}^2$ Lebesgue Maß 0 besitzt und somit nicht der Bewgungs- und Rotationsinvarianz widerspricht.

Als Nächstes wollen wir eine beschränkte paradoxe Menge auf der Ebene finden. Dazu konstruieren wir das sogenannte von Neumann Paradoxon in der Ebene.

**6.22. Definition.**



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

- Wir betrachten das halboffene Einheitsquadrat $J := [0,1) \times [0,1)$.
- Wir definieren eine Äquivalenzrelation wie folgt. Für $P, Q \in \mathbb{R}^2$ sei $P \approx Q$ genau dann, wenn es ganze Zahlen $m$ und $n$ gibt, sodass $P = Q + (m,n)$.
- Für $P \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir mit $\hat{P}$ den eindeutigen Punkt in $J$, sodass $P \approx \hat{P}$.
- Wir definieren die Menge $H := \pi^{-1}(SL_2(\mathbb{Z}))$, wobei $\pi : A_2(\mathbb{R}) \to GL_2(\mathbb{R})\ ;\ f = \tau L \mapsto L$ den kanonischen Homomorphismus bezeichnet (vgl. 1.22 in Appendix A.4).
- Für $\sigma \in H$ definieren wir die folgende Funktion: $\hat{\sigma} : J \to J\ ;\ P \mapsto \widehat{\sigma(P)}$.

**6.23. Bemerkung.** Dass es sich bei $\approx$ um eine Äquivalenzrelation handelt, lässt sich sehr leicht prüfen, denn: $P = P + (0,0)$ liefert Reflexivität. Mit $P = Q + (m,n)$ folgt $Q = P + (-m,-n)$ und somit Symmetrie. Und als letztes erhalten wir aus $P = Q + (m,n)$ und $Q = R + (u,v)$ auch $P = R + (m+u, n+v)$ und insgesamt Transitivität.
In der Tat handelt es sich außerdem bei der Menge $H$ um eine Gruppe, welche aus den Elementen $\tau L$ besteht, wo $\tau$ eine beliebige reele Translation darstellt und $L$ eine ganzzahlige invertierbare Matrix mit Determinante 1 ist. Mit der Funktion, die einem $\sigma \in H$ die Funktion $\hat{\sigma}$ zuordnet, haben wir es geschafft, eine planare Version der modulo 1 Arithmetik darzustellen.

**6.24. Proposition.** *Die Abbildung $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $H$ in den Raum der flächenerhaltenden, stückweise affinen Bijektionen von $J$ nach $J$. Eingeschränkt auf $SL_2(\mathbb{Z})$ ist sie sogar ein Isomorphismus auf sein Bild.*

*Beweis.* Es gilt $\hat{\sigma} : J \to J$. Nun zeigen wir die folgende Eigenschaft von $\approx$. Falls $P \approx Q$ und $\sigma \in H$, dann gilt $\sigma(P) \approx \sigma(Q)$. Dies gilt, da $L(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$ für $L \in SL_2(\mathbb{Z})$. Aus dieser Eigenschaft zeigen wir, dass $\hat{\sigma}$ injektiv auf $J$ operiert. Sei $J_1, J_2 \in J$ mit $\hat{\sigma}(J_1) = \hat{\sigma}(J_2)$. Dann erhalten wir $\sigma(J_1) \approx \sigma(J_2)$, wobei wir $\sigma$ als Hintereinanderausführung einer Translation und einem $L \in SL_2(\mathbb{Z})$ schreiben können. Lassen wir die Translation weg, folgt $L(J_1) \approx L(J_2)$ bzw. $L(J_1 - J_2) = P \in \mathbb{Z}^2$. Nach Proposition 1.24 in Appendix A.4 stellt die Menge $SL_2(\mathbb{Z})$ eine Gruppe dar, womit wir ein ein $L^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z})$ finden, sodass $J_1 - J_2 = L^{-1}(P) \in \mathbb{Z}^2$ gilt. Also erhalten wir $J_1 \approx J_2$ und somit $J_1 = J_2$, da der Repräsentant der Äquivalenzklasse in $J$ eindeutig ist. Insgesamt haben wir Injektivität von $\hat{\sigma}$ gezeigt. Weiters gilt für jedes beliebige $P \in J$, dass $P = \hat{\sigma}(\hat{Q})$ gilt, wobei $Q := \sigma^{-1}(P)$. Also erhalten wir $\hat{\sigma}(J) = J$ und somit auch Surjektivität. Da jedes $\sigma \in H$ aus einer Translation $\tau$ und einer ganzzahligen invertierbaren Matrix mit Determinante 1 besteht, handelt es sich bei der Menge $\sigma(J)$ um ein translatiertes Parallelogramm von der Fläche 1. Also ist die Funktion $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ eine endliche Zerlegung in flächenerhaltende, stückweise affine Abbildungen $\tau_i\sigma$, wobei die $\tau_i$ Translationen um Punkte aus $\mathbb{Z}^2$ bezeichnen. Als Nächstes zeigen, wir dass $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ ein Homomorphismus ist. Sei $P \in J$ und $\sigma_1, \sigma_2 \in H$, dann folgt aus der oben erwähnten Eigenschaft von $\approx$, dass

$$\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2(P) = \hat{\sigma}_1\widehat{\sigma_2(P)} = \sigma_1\widehat{(\widehat{\sigma_2(P)})} = \sigma_1\widehat{(\sigma_2(P))} = \widehat{\sigma_1\sigma_2(P)}.$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

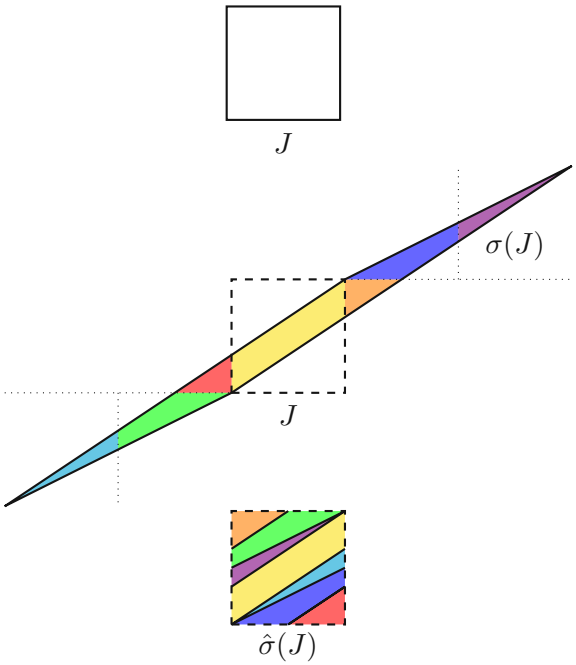


Abbildung 6.1.: Illustration der Mengen $J, \sigma(J)$ und $\hat{\sigma}(J)$, wobei $\sigma = \tau L$ mit $\tau \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{R})$ und $L = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ ist.

Nun zeigen wir, dass die Abbildung $SL_2(\mathbb{Z}) \ni L \mapsto \hat{L}$ ein Isomorphismus ist. Dazu reicht es Folgendes zu überprüfen: falls $\hat{L} = \mathrm{id}_J$, dann gilt $L = \mathrm{id}_{SL_2(\mathbb{Z})}$. Damit wäre die Identität in $SL_2(\mathbb{Z})$ die einzige Abbildung, die von $\widehat{\cdot}$ auf die Identität in $J$ abgebildet wird. Sei $\hat{L} = \mathrm{id}_J$, dann gilt mit den Überlegungen von zuvor, dass $J$ so zerlegt werden kann, dass auf einem Polygon $Q \subseteq J$ die Abbildung $\hat{L}$ stückweise mit einer der Abbildung $\tau_Q L$ übereinstimmt, wobei $\tau_Q$ eine Translation ist. Da $Q$ ein Polygon ist, finden wir drei nicht kollineare Punkte in $Q$, wo $\tau_Q L$ mit der Identität übereinstimmen muss. Also gilt $\tau_Q L = \mathrm{id}_Q$ und somit ist $L|_Q = \tau_Q^{-1}$ eine Translation in jedem solchen Polygon $Q$, was nur möglich ist, wenn $L$ die Identität in $SL_2(\mathbb{Z})$ ist.

□

**6.25. Satz (Paradoxon von von Neumann für die Ebene).** *Für zwei linear unabhängige Elemente $\sigma_1$ und $\sigma_2$ in $SL_2(\mathbb{Z})$ betrachten wir die Untergruppe $G$ von $SA_2(\mathbb{Z})$, die durch $\sigma_1, \sigma_2$ und $T_2(\mathbb{R})$ erzeugt wird. Dann ist die Menge $J$ paradox bezüglich $G$. Weiters sind je zwei beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ mit nichtleerem Inneren $G$-äquizerlegbar.*



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Habilitationsschrift ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

*Beweis.* Sei $F$ die freie Untergruppe von $SL_2(\mathbb{Z})$, die durch $\sigma_1$ und $\sigma_2$ erzeugt wird. Sei $\hat{F} := \{\hat{L} \mid L \in F\}$ und $\hat{T} := \widehat{T_2(\mathbb{R})}$. Da die Menge $F$ eine freie Untergruppe von $SL_2(\mathbb{Z})$ vom Rang 2 ist, gilt nach Proposition 6.24, dass $\hat{F}$ eine freie Gruppe vom selben Rang ist, die auf $J$ operiert, da $SL_2(\mathbb{Z}) \ni L \mapsto \hat{L}$ ein Isomorphismus ist. Sei $D$ die Menge der Fixpunkte in $J$, die von einem nicht trivialen Element aus $\hat{F}$ angenommen werden. Dann operiert $\hat{F}$ fixpunktfrei auf $J \setminus D$. Wir wissen, dass $\hat{F}$ durch $\hat{\sigma}_1$ und $\hat{\sigma}_2$ frei erzeugt ist und dass $\hat{F}$ stückweise in $G$ ist, da $T_2(\mathbb{R})$ eine Untergruppe von $G$ ist. Also ist $J \setminus D$ nach Korollar 4.7 paradox bezüglich $G$. Bleibt also noch zu zeigen, dass $J$ und $J \setminus D$ äquizerlegbar bezüglich $G$ sind.

Zunächst betrachten wir eine beliebige abzählbare Menge $C \subseteq J$ und zeigen, dass $J$ und $J \setminus C$ äquizerlegbar bezüglich $T_2(\mathbb{R})$ sind. Da die Menge $C$ abzählbar ist, sei $\{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ eine Aufzählung. Wir betrachten die Menge $A := \{\tau \in T_2(\mathbb{R}) \mid \forall i = 0, 1, 2, \ldots \exists j \geq i : \tau(P_i) \approx P_j\}$ und bemerken, dass es sich um eine abzählbare Menge handelt. Somit finden wir ein $\tau \in T_2(\mathbb{R})$, das nicht in $A$ enthalten ist, da es überabzählbar viele Translationen gibt. Für so ein $\tau$ gibt es ein $n \geq 1$, sodass $C \cap \hat{\tau}^n(C) = \emptyset$ und somit $\hat{\tau}^n(C) \subseteq J \setminus C$ gilt. Insgesamt erhalten wir Äquizerlegbarkeit bezüglich $\hat{T}$ mittels

$$J = J \setminus C \cup C \sim_{\hat{T}} J \setminus C \cup \hat{\tau}^n(C) = J \setminus C.$$

Somit gilt auch $J \sim_G J \setminus C$. Bleibt also nur noch zu zeigen, dass es so ein abzählbares $C$ gibt, sodass $J \setminus D \sim_{\hat{T}} J \setminus C$ gilt.

Die Punkte in $D$ sind Fixpunkte affiner Abbildungen, womit $D$ selbst in einem affinen Unterraum enthalten. Da $F$ abzählbar ist, lässt sich $D$ in $D_0 \cup D_1$ aufteilen, wobei $D_0$ eine abzählbare Menge von Punkten in $J$ und $D_1$ eine abzählbare Menge von Strecken in $J$ ist. Wir behaupten, dass es eine Translation $\tau$ gibt, sodass $D \cap \hat{\tau}^n(D)$ für alle $n \neq 0$ gilt. Sei $\bigcup_{i=0}^{\infty} S_i := D_1$ eine Aufzählung der Strecken in $D_1$. Seien $n$ und $0 < i, j$ feste ganze Zahlen. Falls $S_i$ und $S_j$ nicht parallel sind, können sie höchstens einen Schnittpunkt besitzen. Falls die beiden Strecken parallel sind, wählen wir einen Punkt $P \in S_j$ aus und vernachlässigen all jene Translationen $\tau$, für die es ein $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ und ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $\hat{\tau}^n(P)$ auf der Gerade liegt, welche die Strecke $S_i + (p, q)$ enthält. Somit gibt es ein $\tau$, sodass $\hat{\tau}^n(S_j) \cap S_i = \emptyset$. Für das abzählbare Triplett $n, i, j$ werden also nur abzähbar viele stückweise Translationen vernachlässigt. Also gibt es ein $\tau$, sodass $D \cap \hat{\tau}^n(D)$ für alle $n \neq 0$ abzählbar ist. Nun definieren wir

$$C := \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} D \cap \hat{\tau}^n(D).$$

Wir haben eine abzählbare Teilmenge von $D$ gefunden, für die gilt, dass alle $\hat{\tau}^n(D \setminus C)$ für $n \geq 0$ paarweise disjunkt und zu $C$ disjunkt sind. Insgesamt erhalten wir Äquizerlegbarkeit



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

mittels

$$J \setminus C = \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{\tau}^n (D \setminus C) \right) \cup \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{\tau}^n (D \setminus C) \right)^c$$
$$\sim_{\hat{T}} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{\tau}^n (D \setminus C) \right) \cup \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{\tau}^n (D \setminus C) \right)^c = J \setminus D.$$

Wir haben den Beweis vollbracht, dass das halboffene Einheitsquadrat paradox bezüglich $G$ ist. Weiters zeigen wir, dass je zwei beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ mit nichtleerem Inneren $G$-äquizerlegbar sind. Dies folgt analog wie im Beweis des allgemeinen Banach-Tarski Paradoxons 4.17 mit Hilfe des Satzes von Banach-Schröder-Bernstein 4.16, wobei wir Quadrate statt Kugeln verwenden.

□

## 6.4. Paradoxa auf den reellen Zahlen

Der folgende Teil richtet sich nach [TW16, Kapitel 8].

**6.26. Motivation.** Auf der Gerade handelt es sich bei den flächenerhaltenden stückweise affinen Transformationen genau um die Isometriegruppe. Also können wir mit dem Wissen von Korollar 6.16 keine analoge Konstruktion eines Paradoxons wie auf der Ebene erwarten und müssen die Gruppe der Isometrien hinreichend erweitern. Wir werden sehen, dass die folgende Gruppe in der Tat paradoxe Konstruktionen zulässt:

$$G(\lambda) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist bijektiv, } f \text{ und } f^{-1} \text{ sind Borel messbar}, \forall A \in \mathcal{L} : \lambda(f^{\pm 1}(A)) = \lambda(A) \}.$$

**6.27. Lemma.** *Sei $C$ eine beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen, dessen Kardinalität kleiner als $2^{\aleph_0}$ ist. Dann sind $[0,1)$ und $[0,1) \setminus C$ äquizerlegbar bezüglich Translationen.*

*Beweis.* Da $C$ eine beschränkte Menge ist, finden wir ein $C_1 \subseteq [0,1)$, sodass $[0,1) \setminus C = [0,1) \setminus C_1$ gilt. Nun betrachten wir die kanonische Bijektion $\varphi : [0,1) \ni x \mapsto e^{ix} \in \mathbb{S}^1$, die das halboffene Einheitsintervall auf den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ abbildet. Nun sei $D := \varphi(C_1)$ und wir bemerken, dass es weniger als $2^{\aleph_0}$-viele Rotationen gibt, die einen Punkt $D$ wieder in $D$ abbilden. Da $\mathbb{S}^1$ dieselbe Mächtigkeit wie das Kontinuum besitzt, sei nun $\rho$ eine der Rotationen, sodass die Familie $\{\rho^n(D) \mid n \geq 0\}$ aus paarweise disjunkten Mengen besteht. Dann erhalten wir Äquizerlegbarkeit mittels

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D) \sim_{SO_2} \mathbb{S}^1 \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n(D) = \mathbb{S}^1 \setminus D.$$

Aufs halboffene Intervall umgemünzt bedeutet das also

$$[0,1) \setminus C = [0,1) \setminus C_1 \sim_T [0,1).$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

□

**6.28. Bemerkung.** Sei $G(\lambda)$ die Gruppe aller Bijektionen $f$ auf $\mathbb{R}$, sodass sowohl $f$ als auch $f^{-1}$ Borel messbar (vgl. Definition 1.38 in A.6) und invariant bezüglich $\lambda$ sind. Dann verrät uns das vorherige Lemma, dass $[0,1) \sim_{G(\lambda)} (0,1)$ gilt und somit erhalten wir

$$[0,1] \sim_{G(\lambda)} (0,1] \sim_{G(\lambda)} [0,1) \sim_{G(\lambda)} (0,1).$$

**6.29. Satz.** *Sei $G(\lambda)$ die Gruppe aus Bemerkung 6.28. Dann gilt, dass jedes reelle Intervall paradox bezüglich $G(\lambda)$ ist. Weiters gilt, dass je zwei beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit nichtleerem Inneren äquizerlegbar bezüglich $G(\lambda)$ sind.*

*Beweis.* Aus Satz 1.40 in Appendix A.6 folgt die Existenz einer bijektiven Funktion $f : [0,1) \to \mathbb{S}^2$, sodass sowohl $f$ als auch $f^{-1}$ Borel messbar (vgl. Definition 1.38 in A.6) sind. Um sich davon zu überzeugen nehme man beispielsweise für $\mathbb{S}^2$ das normierte Lebesgue Oberflächenmaß $\lambda/(4\pi)$. Weiters besagt eine Variante des Paradoxons von Banach-Tarski 4.11, dass $\mathbb{S}^2$ paradox bezüglich $SO_3(\mathbb{R})$ mittels der Zerlegung $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{S}^2$ und $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in SO_3(\mathbb{R})$ ist. Somit erhalten wir die Paradoxie von $[0,1)$ bezüglich $G(\lambda)$ mittels $f^{-1} \circ \sigma_i \circ f \in G(\lambda)$ und der Zerlegung $f^{-1}(A_i) \subseteq [0,1)$, $i = 1, \ldots, n$, wobei $f^{-1} \circ \sigma_i \circ f$ als periodische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$ zu verstehen ist. Diese Technik lässt sich auf jedes weitere halboffene Intervall anwenden und die anderen Intervalle folgen mittels Bemerkung 6.28. Die Äquizerlegbarkeit zweier beliebiger beschränkter Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit nichtleerem Inneren folgt analog wie zuvor mittels der Technik des Satzes von Banach-Schröder-Bernstein 4.16.

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

# 7. Quadratur des Kreises

**Wissenswertes:** Eines der berühmten klassischen Probleme der antiken Mathematik ist die Quadratur des Kreises. Die Aufgabe ist es, aus einem gegebenen Kreis mittels Zirkel und Lineal ein Quadrat in endlich vielen Schritten zu konstruieren, das dieselbe Fläche wie der Kreis besitzt. Ende des 19. Jahrhunderts konnte man die Unlösbarkeit beweisen. Selbst danach versuchten einige Pseudomathematiker den Kreis zu quadrieren. Im Jahr 1925 führte die Untersuchung von Äquizerlegbarkeit und Maßen durch Alfred Tarski zur Formulierung eines neuen Problems, das unverwechselbare Ähnlichkeit zur klassischen Fragestellung hatte und Jahrzehnte später im Alleingang durch Miklós Laczkovich gelöst werden konnte.

## 7.1. Das klassische Problem aus der Antike

Dieser Abschnitt richtet sich nach [GW22, Kapitel 6] und [Kra].

**7.1. Problem (Quadratur des Kreises, klassisch).** *Eines der klassischen Probleme der antiken Mathematik lautet wie folgt: Ist es möglich aus einem Kreis ein Quadrat desselben Flächeninhalts mit Zirkel und Lineal zu konstruieren?*

**7.2. Definition.** Sei $A$ eine Menge von Punkten aus der Ebene $\mathbb{R}^2$, die die Punkte $(0,0)$ und $(1,0)$ enthält. Wir verstehen unter einer *Konstruktion mit Zirkel und Lineal* aus $A$ eine endliche Folge $(X_1, \ldots, X_n)$, sodass für alle $i = 1, \ldots, n$ folgendes gilt:

1. $X_i$ ist entweder ein Punkt, oder eine Gerade oder ein Kreis in der Ebene, oder eine reelle Zahl.

2. Wenn $X_i$ ein Punkt $p$ ist, dann gilt $p \in A$, oder $p$ wird als Durchschnitt früherer Kreise und Geraden erhalten. Das heißt: es gibt $j, k < i$, sodass $p$ im Durchschnitt von $X_j$ und $X_k$ enthalten ist, wobei $X_j$ ein Kreis oder eine Gerade ist, $X_k$ ebenso. Außerdem muss $X_j \neq X_k$ gelten.

3. Wenn $X_i$ eine Gerade $g$ ist, dann geht $g$ durch zwei vorher konstruierte Punkte. Das heißt: es gibt zwei verschiedene Punkte $p_1 = X_j$ und $p_2 = X_k$ mit $j, k < i$, die beide auf $g$ liegen.

4. Wenn $X_i$ ein Kreis $k$ mit Mittelpunkt $m$ und Radius $r$ ist, dann wurden Mittelpunkt und Radius schon früher konstruiert. Das heißt: es gibt $j, k < i$, sodass $m = X_j$ und $r = X_k$ gilt.

5. Wenn $X_i$ eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ ist, dann ist $|z|$ die Distanz zwischen zwei früher konstruierten Punkten. Das heißt: es gibt nicht notwendigerweise verschiedene $j, k < i$, sodass $p_1 := X_j$ und $p_2 := X_k$ Punkte mit Abstand $|z|$ sind.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

Wir nennen einen Punkt, eine Gerade, einen Kreis bzw. eine Zahl *konstruierbar mit Zirkel und Lineal* aus $A$, wenn es so eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal aus $A$ gibt, sodass der Punkt, die Gerade, der Kreis bzw. die Zahl daraus hervorkommt.

**7.3. Mögliche Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.** Sind zwei Strecken $a$ und $b$ bereits konstruiert, so können wir $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ und $a/b$ mit Zirkel und Lineal leicht konstruieren. Beispielsweise verwendet man für die Multiplikation die folgende Technik: vom Ausgangspunkt 0 werden auf einer Gerade die Strecken 1 und $a$ abgetragen. Auf einer weiteren Hilfsgerade vom Ausgangspunkt 0 wird die Strecke $b$ abgetragen. Nun wird eine Gerade gelegt, die durch 1 und $b$ geht. Die Parallele dieser so erhaltenen Gerade schneidet die Hilfsgerade im Abstand $x = ab$, weil $x/b = a/1$ gilt.

Neben den vier Grundrechenoperationen ist es möglich die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl $a$ zu konstruieren. Dazu werden auf einer Gerade nacheinander $a$ und 1 abgetragen. Dann wird ein Halbkreis mit Mittelpunkt $M = (\frac{a+1}{2}, 0)$ und Radius $\frac{a+1}{2}$ konstruiert. Über den Punkt $A$ wird dann eine senkrechte Gerade gelegt. Der Schnittpunkt $C$ dieser Gerade und des Halbkreises bildet nach dem Satz von Thales ein rechtwinkeliges Dreieck mit dem Ursprung und $B$. Nach dem Höhensatz von Euklid folgt dann für die Strecke $x$ unter $C$, dass $x^2 = 1 \cdot a$ bzw. $x = \sqrt{a}$ gilt.

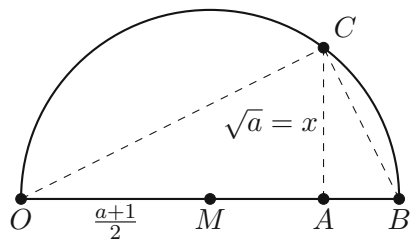


Abbildung 7.1.: Konstruktion der Quadratwurzel

**Schnittpunkt zweier Geraden:**
Ausgehend von der Einheitsstrecke lassen sich also alle rationalen Zahlen und daher alle Punkte der rationalen Ebene konstruieren. Für den Schnittpunkt zweier nicht paralleler Geraden gilt wie folgt, dass sie rationale Koordinaten haben. Betrachte die Geraden

$$\begin{aligned} 0 &= ax + by + c \quad (a, b, c \in \mathbb{Q}) \\ 0 &= dx + ey + f, \quad (d, e, f \in \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

wobei $ae - bd \neq 0$. Durch Auflösen der ersten Gleichung nach $y$ (o.B.d.A: $b \neq 0$ ) und



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

Einsetzen in die zweite, erhalten wir

$$\begin{aligned}
& 0 = dx + e\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + f \\
\iff\ & 0 = x\left(d - \frac{ae}{b}\right) - \left(\frac{ce}{b} - f\right) \\
\iff\ & 0 = x\left(\frac{bd - ae}{b}\right) - \left(\frac{ce - bf}{b}\right) \\
\iff\ & x = \frac{ce - bf}{bd - ae} \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Entsprechend erkennt man, dass auch $y$ rational ist. Das Schneiden zweier Geraden liefert also einen Punkt mit rationalen Koordinaten.

**Schnittpunkt von Kreis und Gerade:**
Schneidet man Kreis und Gerade erhalten wir Folgendes:

$$\begin{aligned}
0 &= ax + by + c && (a, b, c \in \mathbb{Q}) \\
0 &= x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma, && (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q})
\end{aligned}$$

wobei ohne Beschränkung auf die Allgemeinheit $b \neq 0$ sei. Indem wir die Geradengleichung nach $y$ umstellen und in die Kreisgleichung einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
& 0 = x^2 + \left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)^2 + 2\alpha x + 2\beta\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + \gamma \\
\iff & 0 = x^2 + \frac{a^2}{b^2}x^2 + \frac{2ac}{b^2}x + \frac{c^2}{b^2} + 2\alpha x - \frac{2\beta a}{b}x - \frac{2\beta c}{b} + \gamma \\
\iff & 0 = \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)x^2 + \left(\frac{2ac}{b^2} + 2\alpha - \frac{2\beta a}{b}\right)x + \left(\frac{c^2}{b^2} - \frac{2\beta c}{b} + \gamma\right) \\
\iff & 0 = \left(a^2 + b^2\right)x^2 + \left(2ac + 2\alpha b^2 - 2\beta ab\right)x + \left(c^2 - 2\beta cb + \gamma b^2\right).
\end{aligned}$$

Um die Gleichung zu vereinfachen, führen wir die neuen Koeffizienten $A, B$ und $C$ ein:

$$A := a^2 + b^2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad B := 2ac + 2\alpha b^2 - 2\beta ab \in \mathbb{Q}, \quad C := c^2 - 2\beta cb + \gamma b^2 \in \mathbb{Q}.$$

Somit erhält man die quadratische Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ mit den beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}}.$$

Beim Schneiden von einem Kreis mit einer Gerade enstehen also entweder Schnittpunkte mit rationalen Koordinaten oder Koordinaten, die Quadratwurzeln rationaler Zahlen sind.

**Schnittpunkt zweier Kreise:**
Analoges erhalten wir auch beim Schneiden zweier Kreise:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma && (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}) \\
0 &= x^2 + y^2 + 2\alpha' x + 2\beta' y + \gamma', && (\alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{Q})
\end{aligned}$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

wobei ohne Beschränkung auf die Allgemeinheit $\alpha \neq \alpha'$ sei. Durch Subtrahieren beider Gleichungen erhalten wir durch Auflösen nach $x$ Folgendes

$$\begin{aligned} & 0 = 2\left(\alpha - \alpha'\right) x + 2\left(\beta - \beta'\right) y + \left(\gamma - \gamma'\right) \\ \iff\ & x = \frac{2\left(\beta' - \beta\right) y + \left(\gamma' - \gamma\right)}{2\left(\alpha - \alpha'\right)} \\ \iff\ & x = \frac{\beta' - \beta}{\alpha - \alpha'} y + \frac{\gamma' - \gamma}{2\left(\alpha - \alpha'\right)} \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung führen wir die Koeffizienten $A$ und $B$ ein,

$$A := \frac{\beta' - \beta}{\alpha - \alpha'} \in \mathbb{Q}, \quad B := \frac{\gamma' - \gamma}{2\left(\alpha - \alpha'\right)} \in \mathbb{Q}.$$

Damit gilt $x = Ay + B$. Nach Einsetzen in die erste Kreisgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} & 0 = (Ay + B)^2 + y^2 + 2\alpha(Ay + B) + 2\beta y + \gamma \\ \iff\ & 0 = A^2 y^2 + 2ABy + B^2 + y^2 + 2\alpha Ay + 2\alpha B + 2\beta y + \gamma \\ \iff\ & 0 = \left(A^2 + 1\right) y^2 + (2AB + 2\alpha A + 2\beta) y + \left(B^2 + 2\alpha B + \gamma\right) \end{aligned}$$

Mit den neuen Koeffizienten $M := A^2 + 1 \in \mathbb{Q}, N := 2AB + 2\alpha A + 2\beta \in \mathbb{Q}$ und $P := b^2 - 2\alpha B + \gamma \in \mathbb{Q}$ ergibt sich die quadratische Gleichung $My^2 + Ny + P = 0$, wobei die Lösungen wie folgt lauten

$$y_{1,2} = -\frac{N}{2M} \pm \sqrt{\frac{N^2}{4M^2} - \frac{P}{M}}.$$

Wir erhalten also wieder Schnittpunkte mit rationalen Koordinaten oder Koordinaten, die Quadratwurzeln rationaler Zahlen sind.

**Zusammenfassung:**
Sowohl beim Schneiden einer Geraden mit einem Kreis als auch beim Schneiden zweier Kreise entstehen entweder Schnittpunkte mit rationalen Koordinaten oder Koordinaten, die Quadratwurzeln rationaler Zahlen sind. Zusammengefasst sind die Koordianten also jeweils von der Form $a + b\sqrt{k}$, wobei $a, b, k \in \mathbb{Q}$.

Wir betrachten somit die Menge $\mathbb{K}_1 := \{a + b\sqrt{k} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Wir beachten, dass $\mathbb{K}_1$ ein Körper ist, da $\mathbb{K}_1$ bezüglich der vier Grundrechenoperationen abgeschlossen ist. Seien dazu $a, b, c, d, k \in \mathbb{K}_0 := \mathbb{Q}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{k}) + (c + d\sqrt{k}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{k}, \\ (a + b\sqrt{k}) - (c + d\sqrt{k}) &= (a - c) + (b - d)\sqrt{k}, \\ (a + b\sqrt{k})(c + d\sqrt{k}) &= (ac + bdk) + (ad + bc)\sqrt{k}, \\ \frac{a + b\sqrt{k}}{c + d\sqrt{k}} &= \frac{a + b\sqrt{k}}{c + d\sqrt{k}} \cdot \frac{c - d\sqrt{k}}{c - d\sqrt{k}}, \\ &= \frac{ac - bdk}{c^2 - d^2 k} + \frac{bc - ad}{c^2 - d^2 k}\sqrt{k}. \end{aligned}$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

Dieser Prozess kann nun beliebig oft wiederholt werden. Ausgehend von den Zahlen aus $\mathbb{K}_1$ können wir für ein festes $k_1 \in \mathbb{K}_1$ die Menge $\mathbb{K}_2 := \left\{a_1 + b_1\sqrt{k_1} \mid a_1, b_1 \in \mathbb{K}_1\right\}$ betrachten. Indem wir so fortfahren, erhalten wir nach $n$ Schritten mit einem festen $k_{n-1} \in \mathbb{K}_{n-1}$ den Körper $\mathbb{K}_n := \left\{a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{k_{n-1}} \mid a_{n-1}, b_{n_1} \in \mathbb{K}_{n-1}\right\}$. Insgesamt entsteht eine Folge aus Körpern, die die aus Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen darstellen

$$\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{K}_n \subseteq \ldots$$

**7.4. Satz.** *Jede konstruierbare Zahl ist algebraisch.*

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage, indem wir folgende Behauptung beweisen. Sei $x_k \in \mathbb{K}_k$ eine konstruierbare Zahl. Dann ist $x_k$ die Nullstelle eines Polynoms vom Grad $2^l$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}_{k-l}$, wobei $0 < l \leq k$. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion über $l \in \mathbb{N}$ durch.

**Induktionsanfang** ($l = 1$)**:** Sei $x_k = a_{k-1} + b_{k-1}\sqrt{k_{k-1}} \in \mathbb{K}_k$ mit $a_{k-1}, b_{k-1}, k_{k-1} \in \mathbb{K}_{k-1}$ gegeben. Wegen

$$\begin{aligned} x_k = a_{k-1} + b_{k-1}\sqrt{k_{k-1}} &\iff x_k - a_{k-1} = b_{k-1}\sqrt{k_{k-1}} \\ &\iff (x_k - a_{k-1})^2 = b_{k-1}^2 k_{k-1} \end{aligned}$$

erkennt man, dass $x_k$ Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^2 - b_{k-1}^2 k_{k-1}$ ist. Da $f(x)$ ein Polynom vom Grad $2^1$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}_{k-1}$ ist, ist der Induktionsanfang bewiesen.

**Induktionsschritt** ($l - 1 \to l$)**:** Wir nehmen an, dass $x_k \in \mathbb{K}_k$ Nullstelle eines Polynoms

$$f(x) = \alpha_L x^L + \alpha_{L-1}x^{L-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

vom Grad $L := 2^l$ ist, wobei die Koeffizienten aus $\mathbb{K}_{k-l}$ sind. Das heißt, es gilt $\alpha_j \in K_{k-l}$ für alle $j = 0, 1, \ldots, L$. Wir schreiben $\alpha_j := a_j + b_j\sqrt{w}$ mit $a_j, b_j \in \mathbb{K}_{k-l-1}$ und einem festen $w \in \mathbb{K}_{k-l-1}$, womit Folgendes gilt

$$f(x) = \left(a_L x^L + a_{L-1}x^{L-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) + \sqrt{w} \cdot \left(b_L x^L + b_{L-1}x^{L-1} + \ldots + b_1 x + b_0\right).$$

Wir setzen $x_k$ in das Polynom ein und erhalten unter Beachtung von $f(x_k) = 0$ die Gleichheit

$$-\left(a_L x_k^L + a_{L-1}x_k^{L-1} + \ldots + a_1 x_k + a_0\right) = \sqrt{w} \cdot \left(b_L x_k^L + b_{L-1}x_k^{L-1} + \ldots + b_1 x_k + b_0\right).$$

Durch Quadrieren beider Seiten erhalten wir

$$\left(a_L x_k^L + a_{L-1}x_k^{L-1} + \ldots + a_1 x_k + a_0\right)^2 = w \cdot \left(b_L x_k^L + b_{L-1}x_k^{L-1} + \ldots + b_1 x_k + b_0\right)^2.$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Diese Gleichung zeigt, dass $x_k$ Nullstelle eines Polynoms vom Grad $2 \cdot L = 2^{l+1}$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}_{k-l-1}$ ist. Damit ist der Induktionsschritt bewiesen.

□

**7.5. Satz.** *Die Quadratur des Kreises mittels Zirkel und Lineal ist unmöglich.*

*Beweis.* Betrachten wir ohne Beschränkung auf die Allgemeinheit einen Kreis mit Radius 1. Dann ist der Flächeninhalt des Kreises $\pi$ und somit die Seitenlänge des flächengleichen Quadrats $\sqrt{\pi}$. Da $\pi$ transzendent, also nicht algebraisch, und somit auch $\sqrt{\pi}$ nicht algebraisch ist, kann $\sqrt{\pi}$ nicht konstruierbar mit Zirkel und Lineal sein. Somit ist die Quadratur des Kreises unmöglich.

□

## 7.2. Eureka! Die Kreisquadratur nach Tarski

Die folgende Arbeit entstammt [TW16, Kapitel 9]. Wir beweisen in diesem Abschnitt das folgende Problem.

**7.6. Problem (Tarskis Quadratur des Kreises).** *Das von Alfred Tarski im Jahr 1925 formulierte Problem lautet wie folgt: Ist eine Kreisscheibe aquizerlegbar bezüglich der Isometrien der Ebene zu einem Quadrat derselben Fläche?*

**Wissenswertes:** In der Tat gelang es dem ungarischen Mathematiker Miklós Laczkovich am Ende des 20. Jahrhunderts im Alleingang eine Lösung für Tarskis Problem zu finden, obwohl nichts dafür sprach, seitdem man wusste, dass es kein Analogon des Banach-Tarski Paradoxons für Raumdimension 1 und 2 gibt. Nicht nur das, er konnte sogar beweisen, dass die Quadratur des Kreises nach Tarski nur mittels Translationen bewerkstelligt werden kann. Er ist somit der erste und einzige ernstzunehmende Mathematiker, der sich zum Klub der ominösen Kreisquadrierer hinzu zählen darf, ohne pseudowissenschaftlich vorgegangen zu sein. Um im Wortlaut der Kreisquadrierer zu bleiben: „Sehet! Das Grand Problem endlich gelöst: der quadrierte Kreis, jenseits jeglicher Widerlegung - Eureka!"

Zuerst definieren wir die folgende Notation.
**7.7. Definition.**

- Sei $J := [0,1) \times [0,1)$.
- Sei $E$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^2$.
- Sei $K$ eine Jordan Kurve (also eine einfach geschlossene Kurve), dann bezeichnet $K^*$ die Menge im Inneren.
- Für ein Polygon $P$, bezeichnen wir mit $p(P)$ den Umfang.
- Ein *Einheitsquadrat* ist eine Menge von der Form $[a, a+1) \times [b, b+1)$, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

- Ein *Gitterpunkt* ist ein Element in $\mathbb{Z}^2$.
- Ein *Gitter Polygon* ist ein orthogonales Polygon mit Gitterpunkten als Knoten.
- Für ein Gitter Polygon $P$ bezeichnen wir mit $\hat{P}$ die Vereinigung aller Einheitsquadrate, die in $P^*$ enthalten sind.
- Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $\langle x \rangle := \min_{z \in \mathbb{Z}} |x - z|$ und die *Bruchteilfunktion* $\operatorname{frac}(x) := x - \lfloor x \rfloor$. Falls der Input der Bruchteilfunktion vektorwertig ist, ist die Funktion komponentenweise zu verstehen.
- Für eine endliche Teilmenge $A$ von $J$ und eine messbare Teilmenge der Ebene $H$ definieren wir die *Diskrepanz* von $A$ zu $H$ wie folgt: $D(A, H) := \left| \frac{|A \cap H|}{|A|} - \lambda(H) \right|$.
- Für eine abzählbare Teilmenge $S$ von $J$ und einem messbaren $H$ defineren wir $\Delta(S, H) := ||S \cap H| - \lambda(H)|$.
- Seien $u \in \mathbb{R}^2$ und $X = \{x_1, x_2\}$, wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, und sei $N$ eine positive ganze Zahl. Dann definieren wir eine Teilmenge von $J^2$ wie folgt: $F_N(u, X) := \{\operatorname{frac}(u + n_1 x_1 + n_2 x_2) \mid n_1, n_2 = 0, \ldots, N-1\}$, wobei die Bruchteilfunktion vektorwertig zu verstehen ist.
- Für ein positives reelles $x$ sei $\ell(x) := \max(2, \ln x)$.
- Mit $\Psi$ bezeichnen wir eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $[0, +\infty)$, sodass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \Psi(2^k)/2^k$ konvergiert.
- Für $C > 0$ sei $N(C)$ die kleinste positive ganze Zahl $N$, sodass $16(N+1)^2 < \left(1 + \frac{1}{4C}\right)^2$ gilt.
- Seien $u \in \mathbb{R}^2$, $X = \{x_1, x_2\}$, wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, und $H \subseteq \mathbb{R}^2$, so definieren wir $S(u, H) := \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \operatorname{frac}(u + n_1 x_1 + n_2 x_2) \in H\}$, wobei die Bruchteilfunktion vektorwertig zu verstehen ist.
- Mit $\mathcal{H}$ bezeichnen wir die Familie aller nichtleerer Vereinigungen von endlich vielen Einheitsquadraten, also: $\mathcal{H} := \{\bigcup_{f \in \mathcal{F}} Q_f \mid Q_f \text{ ist ein Einheitsquadrat}, |\mathcal{F}| < \infty\}$.
- Sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\delta > 0$. Wir definieren die *abgeschlossene $\delta$-Nachbarschaft* von $X$ mittels $K_\delta(X) := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in X : \|x - y\| \leq \delta\}$.

**7.8. Lemma.** *Falls $H \in \mathcal{H}$, dann gilt mindestens eine der folgenden Behauptungen:*

*(a) $H = \hat{P}$ für ein Gitter Polygon $P$.*

*(b) Es gibt disjunkte Mengen $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ mit $H = H_1 \cup H_2$ und $p(H) = p(H_1) + p(H_2)$.*

*(c) Es gibt Mengen $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ mit $H_1 \subseteq H_2$ und $H = H_2 \setminus H_1$, sodass $p(H) = p(H_1) + p(H_2)$.*



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

*Beweis.* Mit $B := \partial H$ bezeichnen wir den Rand von $H$. Falls $B$ ein einfaches Gitter Polygon ist, folgt Behauptung *(a)*. Ansonsten können wir $B$ in einfache Gitter Polygone zerlegen, wobei wir wie in der folgenden Abbildung zwei Fälle unterscheiden können.

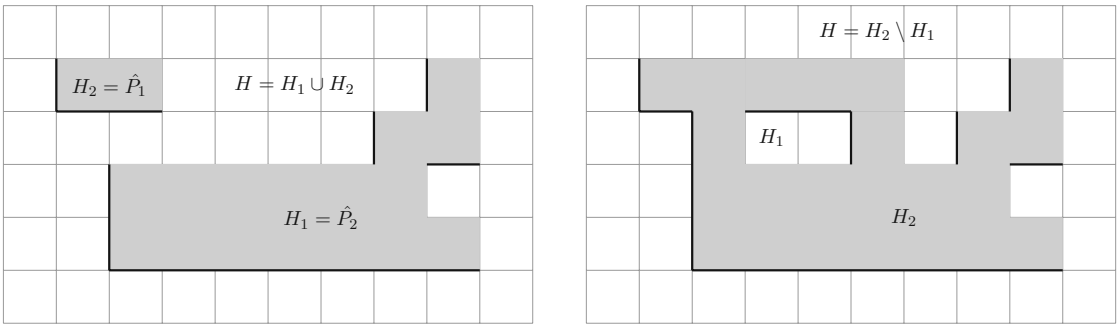


Abbildung 7.2.: Veranschaulichung der Fälle *(b)* und *(c)*

□

**7.9. Definition.** Seien $Q_1$ und $Q_2$ zwei disjunkte Einheitsquadrate. Wir nennen sie *adjazent* falls ihr Rand ein gemeinsames Segment (Strecke) als Schnitt hat. Analog definieren wir, dass $H_1$ und $H_2$ in $\mathcal{H}$ adjazent sind. Weiters definieren wir die *adjazente Erweiterung*

$$H' := H \cup \{Q \mid Q \text{ ist ein zu } H \text{ adjazentes Einheitsquadrat}\}.$$

Mit $H^{(n)}$ bezeichnen wir im Folgenden die $n$-fache adjazente Erweiterung.

**7.10. Beispiel.** Betrachten wir das Gitter Polygon $P$, das wie der Buchstabe H geformt ist, und das dazugehörige $H = \hat{P} \in \mathcal{H}$. Dann sieht $H'$ folgendermaßen aus:

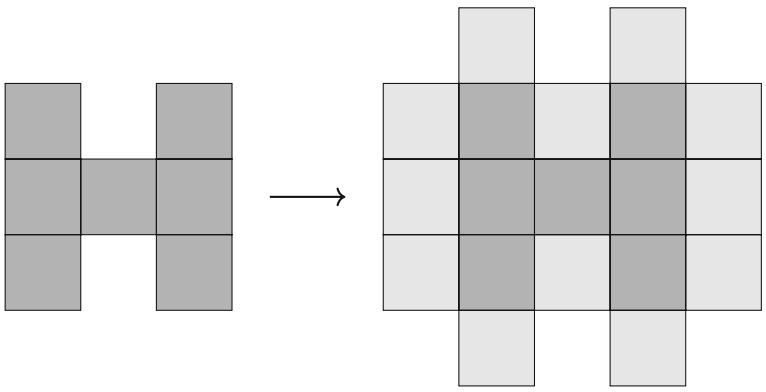

Abbildung 7.3.: Illustration der adjazenten Erweiterung

**7.11. Lemma.** *Sei $C > 0$ und $H \in \mathcal{H}$. Dann gibt es eine positive ganze Zahl $n \leq N(C)$, sodass $\lambda(H^{(n)}) \geq Cp(H^{(n)}) + \lambda(H)$. Dasselbe gilt auch fürs Komplement eines Elements in $\mathcal{H}$.*



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

*Beweis.* Sei $N := N(C)$ und $p_n := p(H^{(n)})$. Dann besteht $\partial H^{(n)}$ aus $p_n$-vielen Segmenten der Länge 1. Jedes solches Segment ist Teil des Randes eines Einheitsquadrats in $H^{(n+1)} \setminus H^{(n)}$. Ein jedes dieser Quadrate besitzt aber höchstens vier solcher Segmente. Also gilt $p_n \leq 4\lambda(H^{(n+1)} \setminus H^{(n)})$. Angenommen die Behauptung stimmt nicht, dann gilt für alle $n \leq N$, dass

$$\begin{aligned}\lambda(H^{(n)} \setminus H) &\leq Cp_n \leq 4C\lambda(H^{(n+1)} \setminus H^{(n)}) \\ &= 4C\lambda(H^{(n+1)} \setminus H) - 4C\lambda(H^{(n)} \setminus H).\end{aligned}$$

Somit folgt durch iterierte Anwendung der Ungleichung $\lambda(H^{(n+1)} \setminus H) > \left(1 + \frac{1}{4C}\right)^N \lambda(H' \setminus H)$ und wir erhalten mit der Ungleichung $p_n \leq 4\lambda(H^{(n+1)} \setminus H^{(n)})$ insgesamt

$$\lambda(H^{(n+1)} \setminus H) > \left(1 + \frac{1}{4C}\right)^N \lambda(H' \setminus H) \geq \left(1 + \frac{1}{4C}\right)^N \frac{p_0}{4}. \tag{7.1}$$

Als nächstes beweisen wir $\lambda(H^{(n+1)} \setminus H) \leq 4(n+1)^2 p_0$, womit dann gemeinsam mit (7.1) ein Widerspruch zur Definition von $N = N(C)$ folgen würde (vgl. Definition 7.7). Sei $Q$ ein Einheitsquadrat, das sich in $H^{(n+1)} \setminus H$ befindet. Dann gibt es eine Folge von Einheitsquadraten $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n = Q$, wobei $Q_0 \subseteq H$, von mindestens zwei und höchstens $N+2$ vielen, die nacheinander adjazent sind. Da $Q_1$ und $H$ adjazent zueinander sind können wir einen Gitterpunkt $z$ in $\partial Q_1 \cap \partial H$ wählen. Sei $T$ das Quadrat mit dem Mittelpunkt in $z$ und Seitenlänge von $2N+2$. Nun folgt $Q \subseteq \hat{T}$. Da $\partial H$ höchstens $p_0$ viele Gitterpunkte besitzt, können wir mit dieser Methode alle $Q \subseteq H^{(n+1)} \setminus H$ mit Hilfe von $p_0$ vielen Quadraten der Fläche $4(N+1)^2$ überdecken, womit die gesuchte Ungleichung bewiesen wurde. Der komplementäre Fall folgt analog.

□

**7.12. Lemma.** *Sei $H \in \mathcal{H}$ und $C > 0$, dann gibt es ein $K \in \mathcal{H}$, sodass*

*(a)* $H \subseteq K \subseteq H^{(N(C))}$,

*(b)* $\lambda(H^{(N(C))}) \geq Cp(K) + \lambda(K)$.

*Beweis.* Sei $N := N(C)$. Wir wenden Lemma 7.11 an. Sei dazu $A := \mathbb{R}^2 \setminus H^{(n)}$ und $n \leq N$ eine positive ganze Zahl, sodass $\lambda(A^{(n)} \setminus A) \geq Cp(A^{(n)})$ gilt. Wir definieren weiters $K := \mathbb{R}^2 \setminus A^{(n)}$, dann gilt $K \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus A = H^{(n)}$. Angenommen *(a)* gelte nicht. Dann gibt es ein Einheitsquadrat $Q$, das in $H$ enthalten ist aber nicht in $K$, also $Q \subseteq A^{(n)}$. Somit gibt es eine Folge von höchstens $n+1$ adjazenten Enheitsquadraten $Q_0 = Q, \ldots, Q_n$, wobei $Q_n \subseteq A$. Da $Q \subseteq H$ gilt, folgt $Q_n \subseteq H^{(n)} \subseteq H^{(N)} = \mathbb{R}^2 \setminus A$ und somit der Widerspruch, dass $Q_n$ sowohl Teilmenge von $A$ als auch von $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ist. Um *(b)* zu beweisen, bemerken wir, dass $A^{(n)} \setminus A = H^{(N)} \setminus K$ und $p(K) = p(A^{(n)})$. Mit der Ungleichung $\lambda(A^{(n)} \setminus A) \geq Cp(A^{(n)})$ folgt dann die Behauptung.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

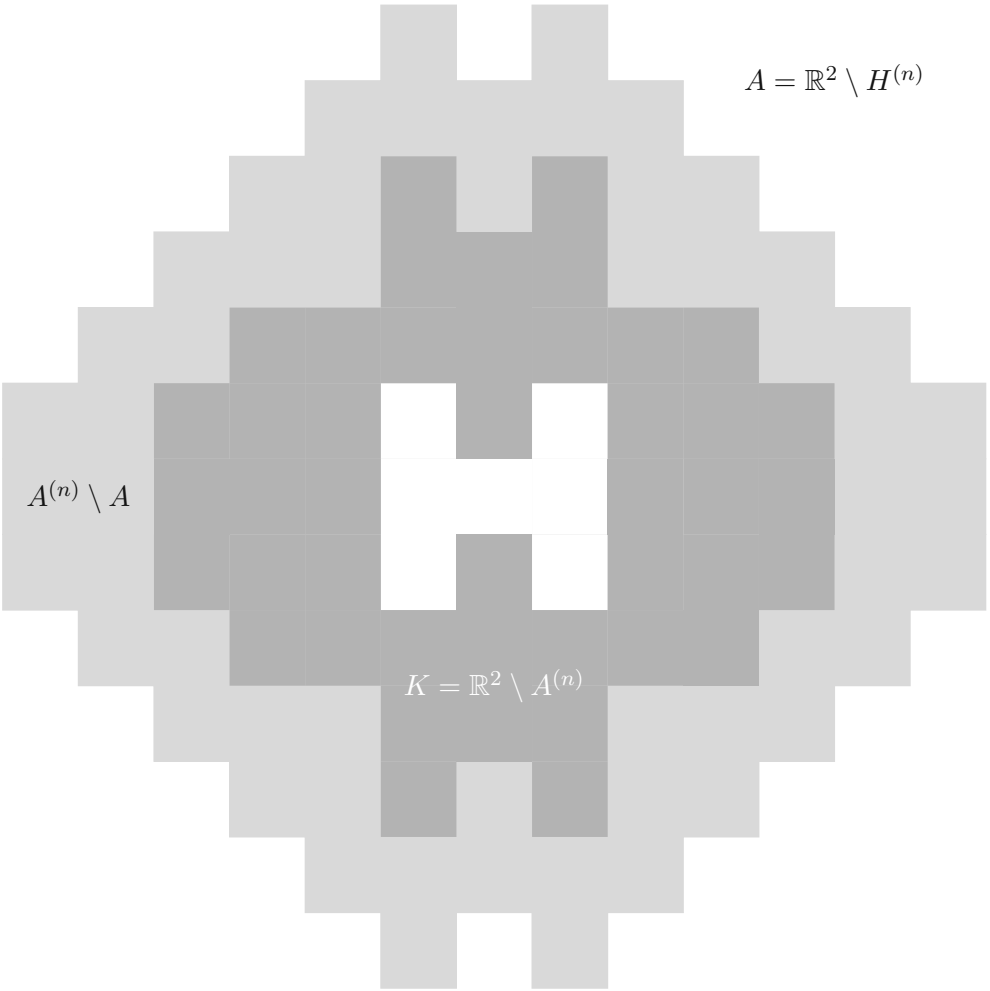


Abbildung 7.4.: Die weißen Punkte in der Mitte stellen $H$ dar. Alle Punkte gemeinsam sind $H^{(5)}$. Das Komplement davon ist $A$ und der hellgraue Bereich ist $A^{(2)} \setminus A$. Falls $C = 0,088$ ist, so gilt $N(C) = 5$. In unserem Bild gilt $\lambda(H^{(5)}) = 107 > 51 + 0,088 \cdot 40 = \lambda(K) + Cp(K)$.

□

**7.13. Lemma (Bijektionslemma).** *Sei $S$ eine abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^2$. Sei $C > 0$, sodass für jedes Gitter Polygon gilt, dass $\Delta(S, \hat{P}) \leq Cp(P)$. Dann gibt es eine Bijektion $\Phi : S \to \mathbb{Z}^2$, wo die Distanz eines jeden Bildpunktes zum Ursprungspunkt in $S$ durch $N(C) + \sqrt{2}$ beschränkt ist.*

*Beweis.* Zunächst beweisen wir die folgende Behauptung mittels vollständiger Induktion nach der Länge des Umfangs. Für jedes $H \in \mathcal{H}$ gilt $\Delta(S, H) \leq Cp(H)$.
**Induktionsanfang ($p(H) = 4$):** Nach Lemma 7.8 wissen wir, dass einer der Fälle *(a)-(c)* gelten muss. Da $p(H) = 4$ ist, müssen wir uns im Fall *(a)* befinden und somit gilt $H = Q$, wobei $Q$ ein Einheitsquadrat ist.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

**Induktionsschritt ($p(H_0) < p(H)$):** Wir setzen voraus, dass die Behauptung für alle $H_0 \in \mathcal{H}$ mit $p(H_0) < p(H)$ gilt. Dann erhalten wir im Falle *(b)* von Lemma 7.8, dass $\Delta(S,H) \leq \Delta(S,H_1) + \Delta(S,H_2) \leq Cp(H_1) + Cp(H_2) = Cp(H)$. Im Fall *(c)* erhalten wir $\Delta(S,H) = \mid |S \cap H_2| - \lambda(H_2) - (|S \cap H_1| - \lambda(H_1)) \mid \leq \Delta(S,H_1) + \Delta(S,H_2) \leq Cp(H_1) + Cp(H_2) = Cp(H)$, womit die Behauptung bewiesen wurde.

Sei nun $N := N(C)$ und $M := N + \sqrt{2}$. Weiters sei $\Gamma$ der bipartite Graph, der aus den beiden Teilen $S$ und $\mathbb{Z}^2$ besteht, wobei die Kanten die Paare $(x,y) \in S \times \mathbb{Z}^2$ sind, für die $\|x-y\| \leq M$ gilt. Wir wollen zeigen, dass $\Gamma$ ein perfektes Matching hat (vgl. Definition 1.3 in Appendix A.1), womit wir unsere gewünschte Bijektion erhalten. Der Grad eines jeden Knoten ist endlich, also garantiert uns der Satz von Hall-Rado-Hall 1.5 in A.1, dass so ein Matching existiert, falls wir Folgendes zeigen können: Jede Menge von $k$ vielen Knoten in einem der beiden Teile, hat mindestens $k$ viele Nachbarn im jeweils anderen Teil.

Sei also $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ eine $k$-elemtige Menge und $H$ die Vereinigung aller Einheitsquadrate, dessen linke untere Ecke in $A$ enthalten ist. Also gilt $H \in \mathcal{H}$ und $\lambda(H) = k$. Nach Lemma 7.11 gibt es eine positive ganze Zahl $n \leq N$, sodass $\lambda(H^{(n)}) - Cp(H^{(n)}) \geq \lambda(H) = k$. Mit unserer bewiesenen Behauptung folgt dann $|S \cap H^{(n)}| \geq \lambda(H^{(n)}) - Cp(H^{(n)}) \geq k$. Sei als nächstes $K_n(H) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in H : \|x-y| \leq n\}$ die abgeschlossene Nachbarschaft um $H$ mit Radius $n$. Dann erhalten wir $H^{(n)} \subseteq K_n(H) \subseteq K_{n+\sqrt{2}}(A) \subseteq K_M(A)$ und somit $|S \cap K_M(A)| \geq k$. Wir haben gezeigt, dass $A$ mit mindestens $k$ vielen Punkten in $\mathbb{Z}^2$ verbunden ist.
Sei umgekehrt $B$ eine $k$-elementige Teilmenge von $S$. Sei $H$ die Vereinigung aller Einheitsquadrate, die nichtleeren Schnitt mit $B$ haben. Es gilt $H \in \mathcal{H}$ und nach Lemma 7.12 gibt es ein $K \in \mathcal{H}$, sodass $H \subseteq K \subseteq H^{(N)}$ und $\lambda(H^{(N)}) \geq \lambda(K) + Cp(K)$. Durch gemeinsames Anwenden der oben bewiesenen Behauptung und der letzten Ungleichung erhalten wir $k \leq |S \cap H| \leq |S \cap K| \leq \lambda(K) + Cp(K) \leq \lambda(H^{(N)})$ und somit $|\mathbb{Z}^2 \cap H^{(N)}| = \lambda(H^{(N)}) \geq k$. Da $H^{(N)} \subseteq K_N(H) \subseteq K_M(B)$ gilt, folgt $|\mathbb{Z}^2 \cap K_M(B)| \geq k$. Also erhalten wir unsere gewünschten $k$ vielen Nachbarn in $B$ und die Bedingung des Satzes 1.5 in A.1 ist erfüllt, um ihn zwei mal anwenden zu können und ein perfektes Matching von $\Gamma$ zu finden.

□

**7.14. Lemma (Lemma des dicken Umfangs).** *Sei $\epsilon > 0$ und $P$ ein orthogonales Polygon. Sei weiters $K_\epsilon(P)$ die abgeschlossene $\epsilon$-Nachbarschaft von $P$. Dann gilt, dass $\lambda(K_\epsilon(P)) \leq 2\epsilon p(P)$.*

*Beweis.* Durch Erweiterung des Polygons um $\epsilon$ Einheiten erhalten wir eine Region die höchstens die Fläche $2\epsilon p(P)$, da die Viertelkreise, die in $K_\epsilon(P)$ entstehen, durch die gegenüberliegenden Ecken überdeckt werden können, die bei der Überlappung der Rechtecke entstehen.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

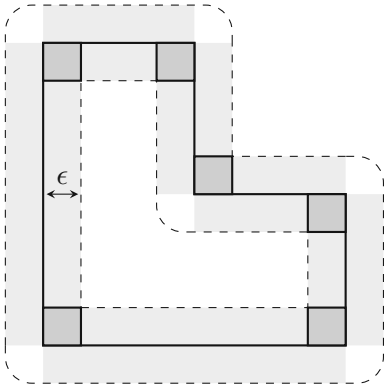


Abbildung 7.5.: Illustration des Lemmas: Wir sehen eindeutig, wie die dunkelgrauen Quadrate in die weißen runden Teile passen

□

**7.15. Lemma.** *Sei $P$ ein orthogonales Polygon und $\mathcal{D} = \{R_1, \ldots, R_m\}$ eine Menge an Gitter Quadraten mit der Seitenlänge einer Zweierpotenz und mit der Eigenschaft, dass die Seitenlänge der Quadrate maximal groß im Inneren von $P^*$ sind und alle Einheitsquadrate im Ineren von $P^*$ überdecken. Sei weiters $Q_i = \hat{R}_i$. Dann erhalten wir*

*(a)* $P^* \setminus K_{\sqrt{2}}(P) \subseteq \bigcup_{j=1}^m Q_j$,

*(b) falls $\Psi : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ eine Abbildung ist, sodass $C := \sum_{n=0}^{\infty} \Psi(2^n)/2^n > 0$ konvergiert, dann gilt $\sum_{j=1}^m \Psi(s(R_j)) < 6Cp(P)$, wobei mit $s(R_j)$ die Seitenlänge der Quadrate bezeichnet wird.*

*Beweis.* Wie wir in der folgenden Abbildung erkennen, liegt jeder Punkt in $P^* \setminus K_{\sqrt{2}}(P)$ eindeutig in einem der Einheitsquadrate in $P^*$. Da diese vollständig durch $R_1$ bis $R_m$ überdeckt werden, liegen sie somit auch in einem $Q_j$, womit wir *(a)* gezeigt haben.

Sei nun $\mathcal{D}_k := \{Q \in \mathcal{D} \mid s(Q) = 2^k\}$ und $n_k := |\mathcal{D}_k|$. Beispielsweise bezeichnet $\mathcal{D}_0$ die kleinen dunkelgrauen Einheitsquadrate in unserer Abbildung. Für $Q \in \mathcal{D}_k$ kann die Distanz zum Polygon $P$ höchstens $2^k\sqrt{2}$ betragen, somit gilt $Q \subseteq P^* \cap K_{2^k\sqrt{2}}(P)$ und insgesamt

$$\bigcup_{Q \in \mathcal{D}_k} Q \subseteq P^* \cap K_{2^k\sqrt{2}}(P). \tag{7.2}$$

Nach dem Lemma des dicken Umfangs 7.14 gilt dann

$$\lambda\left(K_{2^{k+1}\sqrt{2}}(P)\right) \leq 2^{k+2}\sqrt{2}p(P).$$

Andererseis gilt $\lambda\left(\bigcup\{Q \mid Q \in \mathcal{D}_k\}\right) = n_k 2^{2k}$ und somit gilt durch (7.2), dass $n_k \leq 2^{-k}4\sqrt{2}p(P)$ gilt. Insgesamt folgt

$$\sum_{j=1}^m \Psi(s(Q_j)) = \sum_{k_0}^{\infty} n_k \Psi(2^k) \leq 4\sqrt{2}p(P) \sum_{k=0}^{\infty} \Psi(2^k)/2^k < 6Cp(P).$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Habilitationsschrift ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

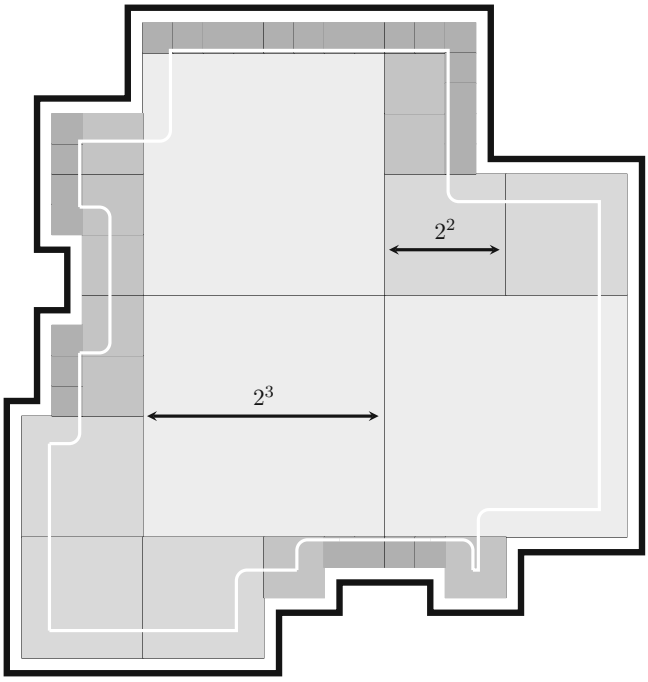


Abbildung 7.6.: Die weiße Kurve umschließt die Menge $P^* \setminus K_{\sqrt{2}}(P)$, die in der Vereinigung aller Quadrate enthalten ist.

□

Nun besitzen wir genügend Werkzeuge, um uns im Folgenden einem passenden Kriterium zu widmen, wann zwei Teilmengen von $J$ äquizerlegbar mittels Translationen sind.

**7.16. Satz (Äquizerlegbarkeitskriterium).** *Seien $H_1$ und $H_2$ messbare Teilmengen von $J$ mit $\lambda(H_1) = \lambda(H_2) = \alpha^2 > 0$. Bezeichne weiters $E := \{(1,0),(0,1)\}$ die Standardbasis im $\mathbb{R}^2$ und $X := \{x_1, x_2\}$ zwei Vektoren, die in $J$ liegen. Weiters seien die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:*

*(i) Die Menge der Vektoren $E \cup X$ ist linear unabhängig über $\mathbb{Q}$,*

*(ii) Sei $\Psi : \mathbb{N} \to [0,\infty)$, sodass die Reihe $C := \sum_{k=0}^{\infty}$ konvergiert, sei $u \in \mathbb{R}^2$ beliebig und $N \in \mathbb{N}$, sodass $D(F_N(u,X), H_j) \leq \Psi(N)/N^2$ für $j \in \{1,2\}$ gilt.*

*Dann erhalten wir, dass $H_1$ und $H_2$ äquizerlegbar mittels Translationen sind.*

*Beweis.* Für ein $u \in \mathbb{R}^2$ definieren wir zunächst $S_i := S_i(u) := S(u, H_i)$ mit $i \in \{1,2\}$ (vgl. Definition 7.7). Eines unserer Ziele ist es eine beschränkte Bijektion $\Phi_u : S_1 \to S_2$ zu konstruieren. Dazu zeigen wir zunächst die folgende Behauptung. Für jedes Gitter Quadrat $Q$ gilt $||Q \cap S_j| - \alpha^2\lambda(Q)| \leq \Psi(s(Q))$, wobei $j \in \{1,2\}$. Dazu sei $s(Q) = N$ und der Punkt



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ die linke untere Ecke von $Q$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} |Q \cap S_j| &= \left| \left\{ n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \middle| \operatorname{frac}(u + n_1x_1 + n_2x_2) \in H_j \text{ und } a \leq n < a + \begin{pmatrix} N \\ N \end{pmatrix} \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \middle| \operatorname{frac}(u + a_1x_1 + a_2x_2 + m_1x_1 + m_2x_2) \in H_j \text{ und } 0 \leq m < N \right\} \right| \\ &= |F_N(u + a_1x_1 + a_2x_2, X) \cap H_j|. \end{aligned}$$

Indem wir *(ii)* für $u + a_1x_1 + a_2x_2$ im ersten Argument von $F_N$ verwenden, und indem wir die lineare Unabhängigkeit von $E \cup X$ für $|F_N(u + a_1x_1 + a_2x_2, X)| = N^2$ verwenden, folgt die Behauptung mittels

$$\begin{aligned} \Psi(N) \geq N^2 D(F_N(u + a_1x_1 + a_2x_2, X), H_j) &= N^2 \left| \frac{|F_N(u + a_1x_1 + a_2x_2, X) \cap H_j|}{|F_N(u + a_1x_1 + a_2x_2, X)|} - \alpha^2 \right| \\ = N^2 \left| \frac{|Q \cap S_j|}{|F_N(u + a_1x_1 + a_2x_2, X)|} - \alpha^2 \right| &= \left| \frac{N^2}{|F_N(u + a_1x_1 + a_2x_2, X)|} |Q \cap S_j| - N^2\alpha^2 \right| \\ = ||Q \cap S_j| - \lambda(Q)\alpha^2|. \end{aligned}$$

Als nächstes beweisen wir die Behauptung, dass $\alpha S_j$ die Bedingungen des Bijektionslemmas 7.13 erfüllt. Also beweisen wir, dass für jedes Gitter Polygon $P$ Folgendes gilt: $\Delta(\alpha S_j, \hat{P}) \leq C_1 p(P)$, wobei $j \in \{1, 2\}$ und $C_1 := (4\sqrt{2}+6C)/\alpha$. Dazu sei $P_\alpha$ das skalierte Polygon $\alpha^{-1}P$, auf das wir Lemma 7.15 anwenden, um Gitter Quadrate wie folgt zu erhalten

$$\bigcup_{i=1}^{m} Q_i \subseteq \hat{P}_\alpha \subseteq K_{\sqrt{2}}(P_\alpha) \cup \bigcup_{i=1}^{m} Q_i. \tag{7.3}$$

Weiters bezeichnen wir mit $s_i = s(Q_i)$, für $i = 1, \ldots, m$, die die Seitenlängen der Quadrate bezeichnen und definieren die folgende Notation: $V := \alpha^2 \sum_{i=1}^{m} s_i$, $W := \sum_{i=1}^{m} \Psi(s_i)$ und $Y := |S_j \cap K_{\sqrt{2}}(P_\alpha)|$. Wir wollen die folgende Ungleichungskette zeigen

$$V - W - Y \leq |S_j \cap \hat{P}_\alpha| \leq V + W + Y. \tag{7.4}$$

Für die erste Ungleichung, verwenden wir die linke Seite der ersten Behauptung auf jedes Quadrat $Q_i$ und erhalten somit

$$V = \alpha^2 \sum_{i=1}^{m} s_i \leq \sum_{i=1}^{m} \Psi(s_i) + \sum_{i=1}^{m} |Q_i \cap S_j| \leq |S_j \cap \hat{P}_\alpha| + W.$$

Für die zweite Ungleichung, fangen wir bei der rechten Teilmengenrelation von (7.3) an, schneiden die Menge $S_j$ und erhalten

$$|\hat{P}_\alpha \cap S_j| \leq |S_j \cap K_{\sqrt{2}}(P_\alpha)| + \left| \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \cap S_j \right| = Y + \left| \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \cap S_j \right|.$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

Nun verwenden wir die rechte Seite der ersten Behauptung in der Form von $|Q_i \cap S_j| \leq \alpha^2\lambda(Q_i) + \Psi(s(Q_i))$. Das liefert $|\hat{P}_\alpha \cap S_j| \leq Y + \Psi(s_j) + \alpha^2 \sum_{i=1}^m \lambda(Q_i) = Y + W + V$, womit wir (7.4) gezeigt haben. Als nächstes zeigen wir

$$||S_j \cap \hat{P}_\alpha| - \lambda(\hat{P})| \leq (4\sqrt{2} + 6C)\frac{p(P)}{\alpha}. \tag{7.5}$$

Hierfür kennen wir bereits die folgenden drei Ungleichungen

- Nach (7.4) und dem Lemma des dicken Umfangs 7.14 gilt $|V - \lambda(\hat{P})| \leq \lambda(\alpha K_{\sqrt{2}}(P_\alpha)) \leq \lambda(K_{\sqrt{2}}(P_\alpha)) \leq 2\sqrt{2}p(P_\alpha) = 2\sqrt{2}\frac{p(P)}{\alpha}$.
- Nach dem Lemma des dicken Umfangs 7.14 gilt auch $Y \leq |\mathbb{Z}^2 \cap K_{\sqrt{2}}(P_\alpha)| \leq 2\sqrt{2}\frac{p(P)}{\alpha}$.
- Nach Lemma 7.15, angewandt auf $P_\alpha$, gilt $W \leq 6C\frac{p(P)}{\alpha}$.

Die Dreiecksungleichung liefert uns insgesamt wie gewünscht

$$\begin{aligned}
||S_j(u) \cap \hat{P}_\alpha| - \lambda(\hat{P})| &\leq ||S_j(u) \cap \hat{P}_\alpha| - V| + |V - \lambda(\hat{P})| \\
&\leq W + Y + 2\sqrt{2}\frac{1}{\alpha}p(P) \\
&\leq 6C\frac{1}{\alpha}p(P) + 2\sqrt{2}\frac{1}{\alpha}p(P) + 2\sqrt{2}\frac{1}{\alpha}p(P).
\end{aligned}$$

Skalieren zeigt, dass $|S_j(u) \cap \hat{P}_\alpha| = |\alpha S_j(u) \cap \hat{P}|$, womit wir (7.5) und somit die zweite Behauptung erhalten.

Als letztes zeigen wir noch folgende Behauptung: für jedes $u \in \mathbb{R}^2$ gibt es eine Bijektion $\Phi : S_1 \to S_2$, wo die Distanz eines jeden Bildpunktes zum Ursprungspunkt durch $C_2 := 2\alpha^{-1}(N(C_1) + \sqrt{2})$ beschränkt ist.

Da nach Behauptung 2 die Voraussetzungen des Bijektionslemmas 7.13 erfüllt sind, erhalten wir die zwei Bijektionen $\Phi_{u,j} : \alpha S_j \to \mathbb{Z}^2$ mit dazugehöriger Distanz $N(C_1) + \sqrt{2}$, wobei $j \in \{1, 2\}$. Definiere $\Phi(n) := \alpha^{-1}\Phi_{u,2}^{-1}\Phi_{u,1}(\alpha n)$, das ergibt eine Bijektion von $S_1$ nach $S_2$, wie wir im folgenden kommutierenden Diagramm feststellen können.

$$\begin{tikzcd}
 & \alpha S_2 \arrow[r] & S_2 \\
\mathbb{Z}^2 \arrow[ur, "\Phi_{u,2}^{-1}"] & & \\
 & \alpha S_1 \arrow[ul, "\Phi_{u,1}"] & S_1 \arrow[l, "\alpha S_1"] \arrow[uu, "\Phi"']
\end{tikzcd}$$

Wir bemerken, dass die dazugehörige Distanz der Bildpunkte zu den Ursprungspunkten bei $\Phi_{u,2}^{-1}$ gleich groß ist wie bei $\Phi_{u,2}$. Sei $m_1 := \Phi_{u,1}(\alpha n) - \alpha n$ und $m_2 := \Phi_{u,2}^{-1}(\Phi_{u,1}(\alpha n)) - \Phi_{u,1}(\alpha n)$, dann gilt

$$\alpha^{-1}\Phi_{u,2}^{-1}\left(\Phi_{u,1}(\alpha n)\right) = \alpha^{-1}\left(\alpha n + m_1 + m_2\right) = n + \alpha^{-1}\left(m_1 + m_2\right).$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

Da $\|m_1\| \leq N(C_1) + \sqrt{2}$ bzw. $\|m_2\| \leq N(C_1) + \sqrt{2}$ gilt, folgt unsere Behauptung.

Nun können wir endlich den Beweis des Satzes vervollständigen. Sei $G := \{n_1x_1 + n_2x_2 + m_1e_1 + m_2e_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}^2\}$ die additive Untergruppe von $\mathbb{R}^2$, die durch $E$ und $X$ erzeugt wird. Nun betrachten wir die folgende Partition von $\mathbb{R}^2$ in Nebenklassen: $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{a\in\mathbb{R}^2/G} \mathcal{E}_u := \bigcup_{u\in\mathbb{R}^2/G}(a + G)$. Mit einem Repräsentanten $u \in \mathcal{E}_u$ lässt sich wegen *(i)* jedes $z \in \mathcal{E}_u$ eindeutig wie folgt schreiben $z = u + n_1x_1 + n_2x_2 + m_1e_1 + m_2e_2$, wobei $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Im Weiteren schreiben wir anstatt $n_1x_1 + n_2x_2 + m_1e_1 + m_2e_2$ abkürzend $n \cdot X + m \cdot E$ mit entsprechenden $n, m \in \mathbb{Z}^2$. Nun sei $z \in H_1$, mit der gerade erwähnten Darstellung erhalten wir $\operatorname{frac}(u + n \cdot X) \in H_1$ und somit $n \in S_1(u)$. Sei $\Phi$ die Bijektion aus der letzten Behauptung für das gewählte $u$. Sei weiters $n' := \Phi(n)$. Da $n' \in S_2(u)$, haben wir $\operatorname{frac}(u + n' \cdot X) \in H_2$, also gibt es ein $m' \in \mathbb{Z}^2$, sodass $u + n' \cdot X + m' \cdot E \in H_2$. Wir können somit die Abbildung $\xi_u : H_1 \cap \mathcal{E}_u \to H_2 \cap \mathcal{E}_u$ mit $\xi_u(z) := u + n' \cdot X + m' \cdot E$ definieren. Das ist eine wohldefinierte Abbildung, da die Vektoren in $X$ und $E$ linear unabhängig zueinander sind. Da $\Phi$ bijektiv von $S_1(u)$ nach $S_2(u)$ ist, vererbt sich die Bijektivität auf $\xi_u$ von $H_1 \cap \mathcal{E}_u$ nach $H_2 \cap \mathcal{E}_u$. Die Distanz der Bildpunkte zu den Ursprungspunkten beträgt $\|n' - n\| \leq C_2$ für $\Phi$ und da $z$ und $\xi_u(z)$ in $J$ liegen, gilt $\|z - \xi_u(z)\| \leq \sqrt{2}$. Weiters haben wir

$$\|(n' - n) \cdot X + (m' - m) \cdot E\| \leq \|\xi_u(z) - z\| \leq \sqrt{2}.$$

Sei $C_3 := \sqrt{2} + C_2 \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$, dann gilt somit

$$\|m' - m\| = \|(m' - m) \cdot E\| \leq \sqrt{2} + \|(n' - n) \cdot X\| \leq C_3.$$

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass es Vektoren $q, r \in \mathbb{Z}^2$ gibt, sodass $\xi_u(z) = u + q \cdot X + r \cdot E$ mit der Eigenschaft

$$\|q\| \leq C_2 \text{ und } \|r\| \leq C_3. \tag{7.6}$$

Sei $(d_t)_{t=1}^L$ die Familie aller Vektoren der Form $q \cdot X + r \cdot E$ wie in (7.6). Sie besteht nur aus höchstens $(2C_3 + 1)^2$ vielen Vektoren, wobei diese Schranke nur von $\alpha$ und $\Psi$ abhängt. Wir haben also gezeigt, dass für alle $z \in H_1 \cap \mathcal{E}_u$ gibt es ein $t \leq L$, sodass $\xi_u(z) = z + d_t$. Diese Definition hängt nicht mehr von der Wahl der Nebenklasse ab, da $d_t \in G$, womit wir eine bijektive Translation $\xi : H_1 \to H_2$ wie folgt erhalten: es gibt ein $t \leq L$, sodass $\xi(z) := z + d_t$ gilt. Definiere die Menge $A_t := \{z \in H_1 \mid \xi(z) = z + d_t\}$. Dann erhalten wir Äquizerlegbarkeit mittels Translationen zwischen $H_1$ und $H_2$ vermöge den Familien $(A_t)_{t=1}^L$ und $(A_t + d_t)_{t=1}^L$.

□

Nun können wir uns endlich der Konstruktion der Quadratur des Kreises widmen. Ein wesentlicher Schritt beinhaltet zu zeigen, dass ein gleichschenkeliges Dreieck äquizerlegbar mittels Translationen mit einem Quadrat ist, was nicht mehr so leicht geht, wenn man nur Translationen anstatt Isometrien zulässt. Zunächst betrachten wir die folgende Definition.

**7.17. Definition.** Für eine Funktion $f : [0, 1) \to [0, 1)$ definieren wir den *gefüllten Graph* $\operatorname{gr}(f) := \{(x, y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

**7.18. Satz.** *Jedes gleichschenkelige Dreieck ist äquizerlegbar mit einem Quadrat mittels Translationen.*

*Beweis.* Wir betrachten das gleichschenkelige Dreieck $A := \mathrm{gr}(f)$, wobei $f$ die Identität ist. Wir werden zeigen, dass $A \sim_T Q$ gilt, wobei $Q := [0, 1/\sqrt{2}) \times [0, 1/\sqrt{2})$. Sei $\Psi(x) = \ell^7(x)$, womit $\sum_{k=0}^{\infty} \Psi(2^k)/2^k$ endlich ist. Nach dem Äquizerlegbarkeitskriterium 7.16 reicht es zu zeigen, dass es zwei Vektoren $X := \{x, y\}$ gibt, sodass $X \cup E$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist, und dass es eine Konstante $C$ gibt, sodass für alle $u \in \mathbb{R}^2$ und positive ganze Zahlen $N$ Folgendes gilt

$$D(F_N(u, X), A) \leq C \frac{\Psi(N)}{N^2}, \tag{7.7}$$

$$D(F_N(u, X), Q) \leq C \frac{\Psi(N)}{N^2}. \tag{7.8}$$

Da $Q$ ein Teilrechteck von $J$ ist, liefert uns die Dritte Abschätzung 1.34 in Appendix A.5 mit $\epsilon = 1$ die Formel (7.8) für fast alle $x, y \in \mathbb{R}^2$. Da eine Menge von Maß 1 über ein Paar von Vektoren verfügt, dass der Bedingung der linearen Unabhängigkeit genügt, reicht es (7.7) für fasst alle $x$ und $y$ zu zeigen. Wir werden zeigen, dass es $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in J^2$ gibt, sodass

*(a)* die Behauptung der Dritten Abschätzung 1.34 in A.5 mit $X = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$ und $\epsilon = 1$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$ und alle positiven ganzen $N$ hält,

*(b)* die Behauptung der Ersten Abschätzung 1.31 in A.5 mit $\epsilon = 1$ und entweder $(x_1, y_1)$ oder $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ hält.

Hiermit folgt dann (7.7) für $X = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$ und jedem $u$ und $N$.

Wir wenden den Satz von Erdős-Turán 1.35 in Appendix A.5 an. Sei das $S$ aus dem Satz die $N^2$ elementige Menge $F_N(u, X)$. Da $f$ die Identität ist, ist $C$ aus dem Satz gleich 1. Hiermit erhalten wir $D(F_N(u, X), A) \leq \max(8D(F_N(u, X)), 216E_m)$, wobei

$$E_m = \frac{1}{m} + \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n,k=0}^{N-1} e^{2\pi hi(u_1 + nx_1 + ky_1 - u_2 - nx_2 - ky_2)} dx \right| \right.$$
$$\left. + \left| \int_0^1 e^{2\pi hix} dx - \frac{1}{N^2} \sum_{n,k=0}^{N-1} e^{2\pi hi(u_1 + nx_1 + ky_1)} \right| \right).$$

Wegen *(a)* ist das erste Argument des Maximums aus dem Satz von Erdős-Turán 1.35 in A.5 kleiner als $C\Psi(N)/N^2$, mit entsprechender Konstante $C$. Für das zweite Argument verschwindet das Integral in $E_m$, und daher gilt analog, wie im Beweis der Dritten Abschätzung 1.34 in A.5, wobei man *(b)* zweimal für die letzte Ungleichung verwendet, dass

$$E_m \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{m} \left( \frac{1}{h \langle h(x_1 - x_2) \rangle \langle h(y_1 - y_2) \rangle} + \frac{1}{h \langle hx_1 \rangle \langle hy_1 \rangle} \right)$$
$$\leq \frac{1}{m} + \frac{C'}{N^2} \ell^4(m).$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

Setzt man $m = N^2$, erhält man (7.7). Es bleibt also zu zeigen, dass das vorherige Argument für fast alle $(x_1, x_2, y_1, y_2)$ in $J^2$ gilt.

Durch den Ersten Abschätzungssatz 1.31 in A.5 gibt es eine Nullmenge $S \subseteq J$, so dass für jedes $(x, y) \in J \backslash S$ eine Konstante $C$ existiert, so dass für $\epsilon = 1$ und jede positive ganze Zahl $n$ die Schlussfolgerung des Satzes gilt. Wir behaupten, dass für fast alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in J^2$ gilt, dass $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \notin S$. Tatsächlich ist $L(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, x_1, y_1)$ eine nicht-singuläre lineare Transformation, und $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in S$ genau dann, wenn $L(x_1, x_2, y_1, y_2) \in S \times J$. Da das Urbild einer Nullmenge unter $L$ ebenfalls Maß Null hat, beweist das, dass für fast alle Vektorenpaare $x, y \in J$, *(a)* und *(b)* gelten, was zu (7.8) wie gewünscht führt. Damit haben wir den Beweis für das oben beschriebene gleichschenkelige Dreieck vollendet. Da jedoch für jede Skalierung $\sigma$ und jede Translation $\tau$ gilt, dass $\sigma^{-1}\tau\sigma$ eine Translation ist, funktioniert die Methode bei jedem gleichschenkeligen Dreieck.

□

Als nächstes wollen wir zeigen, dass je zwei Polygone derselben Fläche äquizerlegbar mittels Translationen sind. Zuvor folgen noch zwei Lemmata.

**7.19. Lemma (Absorptionslemma).** *Sei $K$ das Innere einer Jordan Kurve (also einer einfach geschlossenen Kurve) und $H$ sei die Vereinigung endlich vieler Linien Segmente (Strecken). Dann gilt $K \sim_T K \cup H$.*

*Beweis.* Angenommen $H$ sei eine Strecke, die relativ kurz zur Größe von $K$ ist. Wir verschieben $H$ in $K$, sodass ein kleines Rechteck mit der Seite wie in $H$ innerhalb von $K$ entstehen kann. Analog wie in Lemma 6.27 sieht man leicht ein, dass jedes Rechteck äquizerlegbar mittels Translationen zu demselben Rechteck mit fehlendem Segment an der Seite ist. Im Lemma in Dimension 1 haben wir die Endpunkte der abgeschlossenen Intervalle entfernt, analog geht das auch in Dimension 2, sodass die ganze Strecke fehlt. Für beliebig große Segmente können wir die Methode einfach sukzessive für ganzzahlige Vielfache der absorbierbaren Strecke nacheinander ausführen, ehe $H$ vollständig absorbiert ist, womit Äquizerlegbarkeit durch Translatieren folgt.

□

**7.20. Lemma.** *Je zwei Parallelogramme derselben Fläche sind äquizerlegbar mittels Translationen.*

*Beweis.* Dank dem Absorptionslemma 7.19 können wir die Ränder vernachlässigen. Ein Parallelogramm der Fläche $\alpha$ ist klarerweise äquizerlegbar mittels Translationen zu einem Rechteck derselben Fläche, indem wir an den Eckpunkten die Höhen abtragen und entsprechend schneiden und verschieben. Dieses Rechteck können wir in ein verdrehtes Quadrat wie in der folgenden Abbildung translatieren, solange die Breite höchstens das Vierfache der Höhe ist. Diese Einschränkung macht uns aber nichts aus, da wir ansonsten unser Rechteck hinreichend oft halbieren und die beiden Hälften übereinanderstapeln können.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

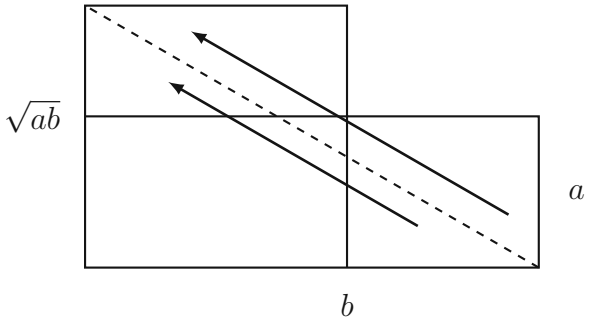


Abbildung 7.7.: Quadratur des Rechtecks, solange die Breite höchstens viermal so groß wie die Höhe ist.

Der Satz des Pythagoras wie in der folgenden Abbildung liefert uns eine Konstruktion des verdrehten Quadrats in 2 achsenparallele Quadrate.

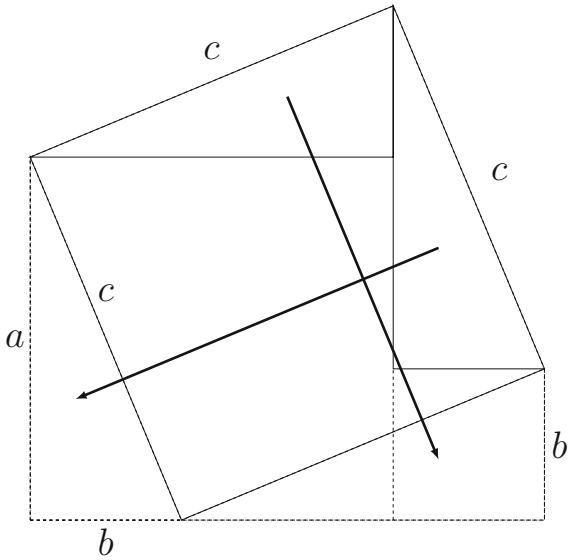


Abbildung 7.8.: Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras sehen wir, wie ein verdrehtes Quadrat in 2 achsenparallele Quadrate translatiert werden kann.

Indem wir den Schritt, bei dem wir das Rechteck quadrieren in die andere Richtung wiederholen, erhalten wir zwei Rechtecke mit einer Basislänge von $\sqrt{a}$. Diese beiden Rechtecke können nun aufeinander gestapelt werden, um ein achsenparalleles Quadrat zu erhalten. Machen wir dies für beide Parallelogramme, mit denen wir gestartet sind, so landen wir am Ende beim selben Quadrat, also haben wir Äquizerlegbarkeit mittels Translationen.

□

**7.21. Satz (Polygon Äquizerlegbarkeit).** *Je zwei Polygone derselben Fläche sind äquizerlegbar mittels Translationen.*



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

*Beweis.* Aufgrund von Transitivität reicht es Äquizerlegbarkeit mittels Translationen zwischen einem gegebenen Polygon und einem achsenparallelen Quadrat derselben Fläche zu zeigen. Indem wir vertikale Linien an allen Knoten entlang schneiden, erhalten wir für $P$ eine Zerteilung in Trapeze. Wenn wir die entlang, der Diagonalen schneiden, erhalten wir Dreiecke $(T_i)_{i=1}^m$. Schneiden wir $Q$ horizontal in Rechtecke $(R_i)_{i=1}^m$, ist nun also nur noch $T_i \sim_T R_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$ zu zeigen, wobei die Flächen in $R_i$ gleich groß wie die Flächen aus $T_i$ gewählt wurden. Nach dem Absorptionslemma 7.19 können wir dabei die Ränder in unserer Betrachtung ignorieren. Für jedes $i = 1, \ldots, m$ sei $L_i$ die lineare Transformation, sodass $L_i(T_i)$ ein gleichschenkeliges Dreieck ist. Nach Satz 7.18 gilt somit, dass $L_i(T_i) \sim_T S_i$, wobei $S_i$ ein Quadrat ist. Gleichzeitig ist $L_i(R_i)$ aber auch ein Rechteck und somit erhalten wir mittels Lemma 7.20, dass $L_i(R_i) \sim_T S_i$ gilt. Also gilt nach Transitivität $L_i(T_i) \sim_T L_i(R_i)$. Weiters gilt aber auch für jede Translation $\tau$, dass $L_i^{-1}\tau L_i$ auch eine Translation ist, da $T \lhd GL_2(\mathbb{R})$ (vgl. 1.22 in A.4 und *(c)* in 1.11 aus A.3), womit sogar $T_i$ und $R_i$ äquizerlegbar mittels Translationen sind. Insgesamt haben wir also

$$P = \bigcup_{i=1}^m T_i \sim_T \bigcup_{i=1}^m L_i^{-1}\tau L_i(T_i) = \bigcup_{i=1}^m R_i = Q.$$

□

**7.22. Satz (Graphen Äquizerlegbarkeit).** *Sei $K$ eine Jordan Kurve (einfach geschlossene Kurve), die aus den drei Bögen $OA$, $AB$ und $BO$ besteht, die zwischen den Punkten $O$, $A$ und $B$ liegen. Weiters seien $OA$ und $AB$ Strecken einer Gerade und $BO$ eine zweimal differenzierbare Kurve, die sich im Inneren des Parallelogramms $P$ befindet, welche durch die Punkte $O$, $A$ und $B$ bestimmt wird. Weiters sei die Krümmung der letzten Kurve beschränkt und wird nie* 0*, also hat sie eine durchgehend erkennbare Krümmung. Dann ist $K^*$ äquizerlegbar mittels Translationen zu einem achsenparallelen Quadrat $Q$ derselben Fläche.*

*Beweis.* Sei $L$ eine lineare Transformation, die wie in der folgenden Abbildung operiert.

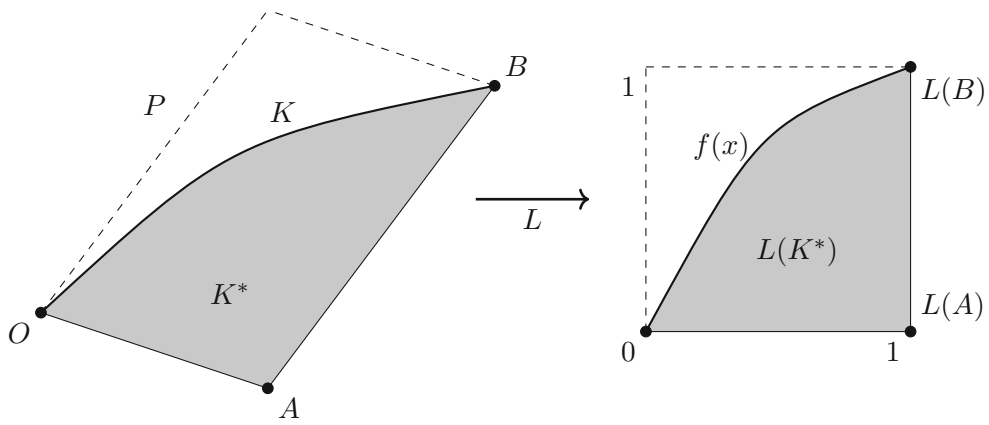


Abbildung 7.9.: Die transormierte Jordan Kurve und $\mathrm{gr}(f)$ rechts in grau.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

Sei $O = (0,0)$, dann sehen wir wie $L(A) = (1,0)$ und $L(B) = (0,1)$ gilt. Weiters ist die Kurve $L(OB)$ in $[0,1]^2$ enthalten. Durch unsere Voraussetzungen der Differenzierbarkeit und Krümmung ist $L(OB)$ insbesondere entweder konkav oder konvex bezüglich der $x$-Achse. Wir erhalten also eine streng monoton wachsende Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$, sodass $\mathrm{gr}(f) = L(K^*)$. Die Krümmung ist im Punkt $(x, f(x))$ gleich $f''(x)/(1 + (f'(x))^2)^{3/2}$. Also sind die Bedingungen für die Variation des Satzes von Erdős-Turán 1.36 in Appendix A.5 erfüllt. Somit gibt es für jedes Paar an Vektoren $X = \{x, y\}$ aus $\mathbb{R}^2$ eine Konstante $C'$, sodass für alle $u \in \mathbb{R}^2$ und positive ganze $N$ Folgendes gilt

$$D(F_N(u, X), \mathrm{gr}(f)) \leq C' N^{-4/3} \ell^7(x). \tag{7.9}$$

Sei weiters $Q_1$ ein achsenparalleles Quadrat von derselben Fläche wie $\mathrm{gr}(f)$, wo die untere linke Ecke im Koordinatenursprung liegt. Sei $Q_2$ ein zu $Q_1$ kongruentes Quadrat, sodass sowohl $Q_2$ als auch $L^{-1}(Q_2)$ hinreichend weit weg vom Ursprung sind. Natürlich gilt $Q_1 \sim_T Q_2$. Sei $P := L^{-1}(Q_2)$ ein geschlossenes Parallelogramm. Mit der Dritten Abschätzung 1.34 aus A.5 folgt dann für fast alle Paare an Vektoren $X$ die Existenz einer Konstante $C''$, sodass

$$D(F_N(u, X), Q_1) \leq C'' N^{-2} \ell^7(x). \tag{7.10}$$

Somit können wir so ein Paar von Vektoren $X$ und eine Konstante $C$ wählen, sodass für alle $u \in \mathbb{R}^2$ und ganze positive $N$ sowohl (7.9) als auch (7.10) gilt. Sei nun $\Psi(N) := CN^{2/3}\ell^7(N)$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi(2^k)/2^k$. Da sowohl $D(F_N(u, X), \mathrm{gr}(f)) \leq \Psi(N)/N^2$ als auch $D(F_N(u, X), Q_1) \leq \Psi(N)/N^2$ für alle $u$ und $N$ gilt, liefert uns das Kriterium der Äquizerlegbarkeit 7.16, dass $\mathrm{gr}(f) \sim_T Q_1$ und somit auch $\mathrm{gr}(f) \sim_T Q_2$. Anwenden von $L^{-1}$ auf beiden Seiten liefert $L^{-1}(\mathrm{gr}(f)) \sim_T P$, da für jede Translation $\tau$ auch $L^{-1}\tau L$ eine Translation ist, da $T \lhd GL_2(\mathbb{R})$. Weiters bemerken wir, dass $L(K^*) = \mathrm{gr}(f) \cup (\{1\} \times [0,1])$ ist. Somit unterscheiden sich $L^{-1}(\mathrm{gr}(f))$ und $K^*$ nur durch die Strecke $AB$, also gilt nach dem Absorptionslemma 7.19, dass $L^{-1}(\mathrm{gr}(f)) \sim_T K^*$ und somit $P \sim_T K^*$. Die Flächen von $P$ und $K^*$ stimmen überein, womit mit der Äquizerlegbarkeit von Polygonen 7.21 folgt, dass $P$ äquizerlegbar mittels Translationen zu einem achsenparallelen Quadrat $Q$ derselben Fläche ist. Transitivität liefert abschließend $K^* \sim_T Q$.

□

**7.23. Korollar (Tarskis Quadratur des Kreises).** *Jede Kreisscheibe ist äquizerlegbar zu einem Quadrat derselben Fläche mittels Translationen.*

*Beweis.* Wir betrachten ohne Beschränkung auf die Allgemeinheit die Einheitskreisscheibe und zerteilen den Kreis in zwei Teile wie folgt: die halboffene Viertelkreisscheibe zwischen den Punkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ und der restliche abgeschlossene Dreiviertelkreis. Einmal haben wir eine konvexe Menge, einmal nicht. Nach dem Satz der Graphen Äquizerlegbarkeit 7.22 ist der Abschluss beider Mengen äquizerlegbar zu einem achsenparallelen Quadrat der jeweils selben Fläche. Mit dem Absorptionslemma 7.19 gilt dies für die halboffene Menge genauso. Durch Translation können wir unter Nichtberücksichtigung gemeinsamer Ränder die beiden erhaltenen Quadrate nebeneinander anordnen und erhalten so ein Polygon, welches nach der Äquizerlegbarkeit von Polygonen 7.21 äquizerlegbar mittels Translationen zu einem Quadrat derselben Fläche ist - der quadrierte Kreis!

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

# A. Appendix

## A.1. Nützliches aus der Graphentheorie

Dieser Abschnitt richtet sich nach [Run04, Kapitel 0.2]

**1.1. Definition.** Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Tripel $(V, E, \phi)$, wobei $V$ und $E$ nichtleere Mengen sind und $\phi$ eine Abbildung von $E$ in die ungeordneten Paare von Elementen von $V$ ist. Die Elemente von $V$ werden *Knoten* genannt, und die Elemente von $E$ werden *Kanten* genannt. Wenn $e \in E$ und $v, w \in V$ mit $\phi(e) = (v, w)$ gilt, sagen wir, dass $v$ und $w$ durch $e$ verbunden wird oder dass $v$ und $w$ die *Endpunkte* von $e$ sind bzw. dass $v$ und $w$ *Nachbarn* sind. Wir werden auch manchmal etwas nachlässig sein und die Kante $e$ einfach mit ihrem Bild unter $\phi$ identifizieren. Der *Grad* eines Knoten ist die Anzahl der Kanten, in denen der Knoten ein Endpunkt ist. Ein *Pfad* in $(V, E, \phi)$ ist eine endliche Folge $(e_1, \ldots, e_n)$ von Kanten zusammen mit einer endlichen Folge $(v_0, \ldots, v_n)$ von Knoten, wobei $v_0$ ein Endpunkt von $e_1$, $v_n$ ein Endpunkt von $e_n$ ist, und $v_j$ ein Endpunkt von $e_j$ für $j = 1, \ldots, n-1$ ist. Wir sagen, dass $v_0$ und $v_n$ durch den Pfad verbunden sind. Aus formalen Gründen sagen wir auch, dass der leere Pfad jeden Knoten mit sich selbst verbindet.

**1.2. Definition.** Sei $(V, E, \phi)$ ein Graph und sei $k \in \mathbb{N}$.

(i) Eine Menge $M \subseteq E$ heißt *Matching*, falls keine zwei Kanten aus $M$ einen Knoten gemeinsam haben.

(ii) Wenn jeder Knoten Endpunkt von genau $k$ Kanten ist, dann wird $(V, E, \phi)$ als *$k$-regulär* bezeichnet.

(iii) Wenn $V = X \cup Y$, wobei $X$ und $Y$ disjunkt sind, und jede Kante einen Endpunkt in $X$ und einen in $Y$ hat, dann wird $(V, E, \phi)$ als *bipartit* bezeichnet.

Im Folgenden sprechen wir einfach von einem bipartiten Graph $(X, Y, E, \phi)$, wenn wir meinen, dass $(V, E, \phi)$ ein bipartiter Graph mit $V, X$ und $Y$ wie oben sind.

**1.3. Definition.** Sei $(X, Y, E, \phi)$ ein bipartiter Graph, und seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Ein *perfektes Matching* von $A$ und $B$ ist eine Teilmenge $F$ von $E$, so dass

- jedes Element von $A \cup B$ Endpunkt von genau einem $f \in F$ ist, und
- alle Endpunkte von Kanten in $F$ in $A \cup B$ liegen.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

**1.4. Satz (König).** *Sei $(X, Y, E, \phi)$ ein bipartiter Graph, der $k$-regulär für ein gewisses $k \in \mathbb{N}$ ist. Dann gibt es ein perfektes Matching von $X$ und $Y$.*

*Beweis.* Definiere eine Äquivalenzrelation auf $V$ wie folgt: zwei Knoten sind äquivalent, wenn sie durch einen Pfad verbunden werden können (beachte, dass jeder Knoten durch den leeren Pfad mit sich selbst verbunden ist). Jede Äquivalenzklasse bezüglich dieser Relation ist wiederum ein $k$-regulärer, bipartiter Graph und hat abzählbar viele Knoten und Kanten (durch $k$-Regularität). Wenn wir für jeden solchen Graphen ein perfektes Matching finden können, können wir sie zusammenfügen, um ein Matching für $X$ und $Y$ zu bilden. Wir können also annehmen, dass $X, Y$ und $E$ abzählbar unendlich sind und dass je zwei Punkte in $V$ durch einen Pfad verbunden werden können.
Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Aufzählung von $E$. Betrachte die Menge aller endlichen Folgen in $\{0, 1\}$. Wenn $s$ und $t$ solche Folgen sind, schreiben wir $s \leq t$, wenn $s$ ein Anfangssegment von $t$ ist. Wir nennen eine solche Folge $s$ der Länge $n$ gut, wenn es endliche Mengen $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gibt, so dass

- $V'$ alle Knoten enthält, die als Endpunkte von $e_1, \ldots, e_n$ auftreten,
- $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq E'$,
- $(V', E', \phi|_{E'})$ ein $k$-regulärer, bipartiter Graph ist, der ein perfektes Matching $F'$ für $V' \cap X$ und $V' \cap Y$ hat, sodass für $j < n, e_j \in F'$ genau dann, wenn $s_j = 1$ ist.

Aus dieser Definition ist klar, dass wenn $s \leq t$ und wenn $t$ gut ist, dann ist auch $s$ gut. Wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ endliche Mengen sind, sodass $(V', E', \phi|_{E'})$ ein Graph ist, dann gibt es endliche Teilmengen $V'' \subseteq V$ und $E'' \subseteq E$ mit $V' \subseteq V''$ und $E' \subseteq E''$, sodass $(V'', E'', \phi|_{E''})$ ein bipartiter, $k$-regulärer Graph ist. Somit gibt es ein perfektes Matching $F'' \subseteq E''$ für $V'' \cap X$ und $V'' \cap Y$. Definiere eine gute Folge durch

$$\mathbb{N} \to \{0, 1\}, \quad j \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } e_j \in F'', \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt, dass jede gute Folge der Länge $n$ für jedes $m > n$ eine gute Erweiterung der Länge $m$ hat.
Wir können somit induktiv eine unendliche Folge in $\{0, 1\}$ definieren, sodass jedes endliche Anfangssegment von $s$ gut ist und unendlich viele gute Erweiterungen hat. Sei $F := \{e_n : s_n = 1\}$. Dann ist $F$ ein perfektes Matching für $X$ und $Y$.

□

**1.5. Satz (Hall-Rado-Hall).** *Sei $(A, B, E, \phi)$ ein bipartiter Graph, so dass jeder Knoten in $A$ endlichen Grad hat. Dann gibt es ein Matching, das jeden Knoten in $A$ beinhaltet genau dann, wenn für alle endlichen $k$ gilt, dass jede Menge von $k$ vielen Knoten in $A$ mindestens $k$ viele Nachbarn hat.*

*Beweis.* "$\Longrightarrow$": Sei $M$ ein Matching, das jeden Knoten in $A$ beinhaltet. Sei $S$ eine Teilmenge von $A$ und $N(S)$ die Menge aller Nachbarn von Elementen in $S$. Klarerweise gilt $|S| \leq |N(S)|$.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

"$\Longleftarrow$": Sei $B$ mit der diskreten Topologie $\mathfrak{P}(B)$ versehen. Für $a \in A$ bezeichnen wir mit $N_a \subseteq B$ die Nachbarn von $a$. Da jeder Knoten in $A$ endlichen Grad hat, ist die Menge $N_a$ kompakt und somit gilt nach dem Satz von Tychonoff 1.9 in Appendix A.2, dass $Y = \prod_{a \in A} N_a$ ein kompakter Unterraum von $B^A$ ist. Nun betrachten wir eine endliche nichtleere Teilmenge $H$ von $A$ und definieren weiters

$$M(H) := \{f \in B^A \mid \forall a \in A : f(a) \in N_a, f|_H \text{ ist ein Matching } \}.$$

Falls wir die Behauptung des Satzes für alle endlichen bipartiten Graphen zeigen können, erhalten wir $M(H) \neq \emptyset$ für alle solche $H$. Zusätzlich ist $M(H)$ abgeschlossen in $Y$, da $Y \setminus M(H)$ als die offene Vereinigung offener Mengen der Produkttopologie der diskreten Topologie geschrieben werden kann, da das Nichtdazugehören zur Menge $M(H)$ nur vom Verhalten zweier Punkte abhängt. Also erfüllt die Familie $\{M(H) \subseteq Y \mid H \subseteq A \text{ endlich und nichtleer}\}$ die endliche Durschnittseigenschaft, da nur endliche bipartite Graphen berücksichtigt werden. Somit gibt es nach Satz 1.8 aus Appendix A.2 ein $f \in \bigcap\{M(H) \mid H \subseteq A \text{ endlich und nichtleer}\}$. So ein $f$ ist ein Matching für ganz $A$.

Also bleibt die Aussage nur mehr für endliche bipartite Graphen zu zeigen. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion nach $|A|$ durch.
**Induktionsanfang ($|A| = 1$):** Sei $A = \{a\}$. Unsere Bedingung impliziert, dass der Grad von $a$ mindestens 1 ist. Also gibt es eine Kante $(a, b)$, zu der $a$ ein Endpunkt ist. $M := \{(a, b)\}$ ist also ein Matching von ganz $A$.
**Induktionsschritt ($|A| = n + 1$):** Sei $a \in A$ ein beliebiger Knoten. Wir wissen aufgrund unserer Voraussetzung, dass $\text{Grad}(a) \geq 1$ gilt und es somit eine Kante $(a, b) \in E$ gibt. Nun betrachten wir den folgenden Graphen: $G' := (A' \cup B', E', \phi|_{E'})$, wobei $A' := A \setminus \{a\}$, $B := B \setminus \{b\}$ und $E' := E \setminus \{(a', b') \mid a' \in N_a, b' \in N_b\}$. Wir erhalten für diesen Graphen die folgenden beiden Fälle.
*1. Fall:* $G'$ erfüllt die Bedingung unserer Voraussetzung. Da $|A'| = n < n + 1 = |A|$ ist, erhalten wir per Induktionsvoraussetzung ein $A'$-Matching $M'$ und somit ein $A$-Matching mittels $M := M' \cup \{(a, b)\}$.
*2. Fall:* Die Bedingung unserer Voraussetzung des Satzes ist nicht mehr erfüllt für $G'$. Also gibt es eine Menge $S \subseteq A'$, sodass $|N_{G'}(S)| < |S|$. Da der ursprüngliche Graph $G$ jedoch nach wie unsere Voraussetzung erfüllt, gilt gleichzeitig $|N_G(S)| \geq |S|$. Die Mengen $N_G(S)$ und $N_{G'}(S)$ können sich aber nur unterscheiden, indem $N_{G'}(S) = N_G(S) \setminus \{b\}$ gilt. Somit gilt $b \in N_G(S)$ bzw. $|N_G(S)| = |S|$. Als nächstes betrachten wir die folgenden zwei Graphen. Sei $G_1$ der von $G$ induzierte Subgraph durch $S \cup N_G(S)$ und $G_2$ der durch $(A \setminus S) \cup (B \setminus N_G(S)$ induzierte. Wir zeigen, dass die beiden Graphen die rechte Bedingung des Satzes erfüllen, womit wir wieder im 1. Fall landen würden. Zunächst zeigen wir es für $G_1$. Sei $T \subseteq S$ und damit $N_G(T) \subseteq N_G(S)$. Also gilt $N_{G_1}(T) = N_G(T)$ und somit $|N_{G_1}(T)| = |N_G(T)| = |T|$. Also erfüllt $G_1$ die Bedingung.
Für $G_2$ betrachten wir $T \subseteq A \setminus S$. Wir erhalten dann $N_{G_2}(T) = N_G(T) \setminus N_G(S) = N_G(S \cup T) \setminus N_G(S)$. Insgesamt erhalten wir

$$|N_{G_2}(T)| = |N_G(S \cup T)| - |N_G(S)| \geq |S \cup T| - |S| = |T|.$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

Da sowohl $|S|$ als auch $|A \setminus S|$ kleiner als $|A|$ sind, gilt die Induktionsvoraussetzung. Sei $M_1$ das $S$-Matching von $G_1$ und $M_2$ das $A \setminus S$-Matching von $G_2$. Dann ist $M_1 \cup M_2$ ein $A$-Matching von G.

□

## A.2. Nützliches aus der Topologie

Folgendes ist aus [Kal15, Kapitel 12] entnommen.

**1.6. Definition.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M$ eine Teilmenge von $X$. Dann bezeichnen wir das *Innere von $M$* mit

$$M^\circ := \bigcup \{U \mid U \in \mathcal{T}, U \subseteq M\}.$$

**1.7. Definition.** Sei $X$ eine Menge. Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Teilmengen von $X$, also $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{P}(X)$. Wir sagen, dass $\mathcal{C}$ die *endliche Durchschnittseigenschaft* hat, wenn für je endlich viele $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ stets $C_1 \cap \ldots \cap C_n \neq \emptyset$ gilt.

**1.8. Satz.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und $K$ eine Teilmenge von $X$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

*(K1) $K$ ist kompakt.*

*(K2) Jede Familie bzgl. $\mathcal{T}|_K$ abgeschlossener Teilmengen von $K$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft hat nichtleeren Durchschnitt.*

*Beweis.* *(K1) $\Longrightarrow$ (K2)*: $K$ ist kompakt, also ist $K$ insbesondere als Teilmenge von $(K, \mathcal{T}|_K)$ kompakt. Sei $\mathcal{C}$ eine Familie in $(K, \mathcal{T}|_K)$ abgeschlossener Teilmengen von $K$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Angenommen $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \emptyset$, dann folgt

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} K \backslash C = K,$$

wobei die $K \backslash C$ in $(K, \mathcal{T}|_K)$ offen sind. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung, $(K \backslash C_1) \cup \ldots \cup (K \backslash C_n) = K$, und wir erhalten $C_1 \cap \ldots \cap C_n = \emptyset$, was aber der endlichen Durchschnittseigenschaft widerspricht.

*(K2) $\Longrightarrow$ (K1)*: Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}|_K$ eine offene Überdeckung von $K$. Würde $\mathcal{V}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzen, so wäre $(K \backslash V_1) \cap \ldots \cap (K \backslash V_n) \neq \emptyset$ für jede endliche Auswahl $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$. Also hätte $C = \{K \backslash V : V \in \mathcal{V}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, und nach Voraussetzung wäre der Schnitt aller Mengen $K \backslash V, V \in \mathcal{V}$ nichtleer. Damit wäre $\mathcal{V}$ aber keine Überdeckung.

□



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

**1.9. Satz (Tychonoff).** *Sei $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$, eine Familie topologischer Räume, und sei $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ die Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} X_i$. Dann ist $\left(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i\right)$ genau dann kompakt, wenn alle Räume $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$, kompakt sind.*

## A.3. Nützliches aus der Algebra

Der folgende Abschnitt enthält Definitionen und Resultate von [GW22, Kapitel 3]

**1.10. Definition.** Sei $N$ eine Untergruppe einer Gruppe $G$. Sei $g$ ein beliebiges Element in $G$. Dann bezeichnen wir die folgende Menge als die *linke Nebenklasse von $N$* nach dem Element $g$.

$$gN := \{gn \mid n \in N\} \subseteq G.$$

Analog definieren wir die *rechte Nebenklasse von $N$* nach dem Element $g$

$$Ng := \{ng \mid n \in N\} \subseteq G.$$

**1.11. Satz.** *Sei $N$ eine Untergruppe von $G$. Mit $\varepsilon$ bezeichnen wir das Einselement in $G$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

*(a) Es gibt genau eine Kongruenzrelation $\sim$ auf $G$ mit $N = [\varepsilon]_\sim$.*

*(b) Es gibt eine Kongruenzrelation $\sim$ auf $G$ mit $N = [\varepsilon]_\sim$.*

*(c) Es gibt eine Gruppe $H$ und einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ mit $N = \varphi^{-1}(\{\varepsilon_H\})$.*

*(d) Es gibt eine Gruppe $H$ und einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ mit $N = \varphi^{-1}(\{\varepsilon_H\})$.*

*(e) Für alle $g \in G$ gilt $gNg^{-1} \subseteq N$.* *($N$ ist invariant unter Konjugation mit $g$)*

*(f) Für alle $g \in G$ gilt $gNg^{-1} = N$.*

*(g) Für alle $g \in G$ gilt $gN = Ng$.* *(Links- und Rechtsnebenklassen stimmen überein)*

*(h) Für alle $g \in G$ gilt $gN \subseteq Ng$.*

*Beweis.* Wir führen den Beweis zyklisch durch.
*(a)* $\implies$ *(b)*: Das ist klar.
*(b)* $\implies$ *(c)*: Sei $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $G$ und definiere mit $H := G/_\sim$ die Menge



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$. Überträgt man die Gruppenoperation $\cdot_G$, das neutrale Element $\varepsilon_G$ und das inverse Element durch

$$[a]_\sim \cdot_H [b]_\sim := [a \cdot_G b]_\sim, \quad \varepsilon_H := [\varepsilon_G]_\sim, \quad [a]_\sim^{-1} := [a^{-1}]_\sim$$

für $a, b \in G$, so erhält man eine Gruppe, die sogenannte Faktorgruppe, da sich die Gruppengesetze entspechend übertragen. Die Abbildung $\varphi : G \to H$ mit $\varphi(a) := [a]_\sim$ bildet einen Gruppenhomomorphismus, da

$$\varphi(a \cdot_G b) = [a \cdot_G b]_\sim = [a]_\sim \cdot_H [b]_\sim = \varphi(a) \cdot_H \varphi(b)$$

gilt. Wegen $a \in N = [\varepsilon_G]_\sim \iff \phi(a) = [\varepsilon_G]_\sim = \varepsilon_H$ folgt zudem sofort $N = \varphi^{-1}(\{\varepsilon_H\})$.
*(c)* $\implies$ *(d)*: Man ersetze $H$ einfach durch $\varphi(G)$. Somit ist $\varphi$ surjektiv.
*(d)* $\implies$ *(e)*: Wir setzen $N = \varphi^{-1}(\varepsilon_H)$ voraus. Für ein beliebiges Element $y = gng^{-1} \in gNg^{-1}$ folgt

$$\varphi(y) = \varphi(gng^{-1}) = \varphi(g)\underbrace{\varphi(n)}_{=\,\varepsilon_H}\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = \varepsilon_H.$$

Also gilt $y \in \varphi^{-1}(\varepsilon_H) = N$ und somit $gNg^{-1} \subseteq N$.
*(e)* $\implies$ *(f)*: Wir wissen $gNg^{-1} \subseteq N$ für alle $g \in G$, also gilt insbesondere für ein festgehaltenes Element $g^{-1}$, dass $g^{-1}Ng \subseteq N$. Somit folgt

$$N = gg^{-1}Ngg^{-1} \subseteq gNg^{-1}.$$

Also erhalten wir insgesamt $N = gNg^{-1}$.
*(f)* $\implies$ *(g)*: Multipliziert man $gNg^{-1} = N$ von rechts mit $g$, erhalten wir $gN = Ng$.
*(g)* $\implies$ *(h)*: Das ist klar.
*(h)* $\implies$ *(a)*: Sei $N$ also eine Untergruppe mit $gN \subseteq Ng$ für alle $g \in G$. Multiplikation von rechts mit $g^{-1}$ liefert $gNg^{-1} \subseteq N$ und somit wissen wir wegen *(e)* $\implies$ *(f)*, dass auch $gNg^{-1} = N$ gilt. Nun betrachten wir folgende Kongruenzrelation

$$g \sim h :\iff g^{-1}h \in N.$$

Es gilt sicherlich $N = [\varepsilon]_\sim$, da $g^{-1}h \in N \Leftrightarrow g \sim h \Leftrightarrow \varepsilon \sim g^{-1}h$. Weiters ist $\sim$ eindeutig mit dieser Eigenschaft. Nun bleibt noch zu zeigen, dass es sich tatsächlich um eine Kongruenz handelt. Es gilt $g \sim h$ genau dann, wenn $g^{-1}h \in N$ bzw. $h \in gN$. Also liegt $h$ in der Linksnebenklasse von $N$ nach $g$. Da $N$ eine Untergruppe ist, bilden die Linksnebenklassen eine Partition von $G$. Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Für die Verträglichkeit mit der Gruppenoperation betrachten wir $g \sim g'$ und $h \sim h'$. Es folgt

$$(gh)^{-1}(g'h') = h^{-1}(g^{-1}g')h' \in h^{-1}Nh' \subseteq N \implies gh \sim g'h'.$$

□

**1.12. Definition.** Eine Untergruppe $N$ einer Gruppe $G$ heißt *Normalteiler*, falls sie eine der äquivalenten Bedingungen *(a)*–*(h)* aus Satz 1.11 in Appendix A.3 erfüllt. In Zeichen



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

schreiben wir hierfür $N \lhd G$.

**1.13. Definition.** Sei $N$ ein Normalteiler einer Gruppe $G$. Dann bezeichnen wir die Menge der Linksnebenklassen $G/N := \{gN \mid g \in G\}$ als *Faktorgruppe von $G$ nach $N$*. Auf $G/N$ defineren wir das *Komplexprodukt*, welches folgende Operation darstellt

$$(gN) \cdot (hN) := \{x \cdot y \mid x \in gN, y \in hN\}.$$

**1.14. Proposition.** *Die Faktorgruppe eines Normalteilers bildet mit dem Komplexprodukt eine Gruppe.*

*Beweis.* Aus der Tatsache, dass bei Normalteilern Links- und Rechtsnebenklassen übereinstimmen (vgl. Bedingung *(g)* aus Satz 1.11 in Appendix A.3), erhalten wir

$$gN \cdot hN = g(Nh)N \overset{(g)}{=} g(hN)N = (gh)(NN) = (gh)N.$$

Die Gruppenaxiome vererben sich somit von $G$ auf $G/N$ weiter.

□

**1.15. Satz (Homomorphiesatz).** *Ist $f : (G, \circ) \to (H, \star)$ ein Gruppenhomomorphismus, dann ist $N := f^{-1}(\varepsilon_H)$ ein Normalteiler von $G$ und die Faktorgruppe $G/N$ ist isomorph zum Bild $f(G)$. Ein entsprechender Isomorphismus ist gegeben durch*

$$\tilde{f} : \begin{cases} G/N & \to & f(G) \\ gN & \mapsto & f(g) \end{cases}$$

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, dass die Abbildung $\tilde{f}$ ein Gruppenisomorphismus ist. Den Rest wissen wir bereits mit *(c)* aus Satz 1.11. Es gilt, dass $\tilde{f}$ wohldefiniert und injektiv ist, da

$$aN = bN \Leftrightarrow b^{-1}a \in N \Leftrightarrow f\left(b^{-1}a\right) = e \Leftrightarrow \tilde{f}(aN) = f(a) = f(b) = \tilde{f}(bN).$$

Weiters ist $\tilde{f}$ ein Gruppenhomomorphismus, da für alle Nebenklassen $aN$ und $bN$ Folgendes gilt:

$$\tilde{f}(aN \circ bN) = \tilde{f}(abN) = f(ab) = f(a) \star f(b) = \tilde{f}(aN) \star \tilde{f}(bN).$$

Es gilt, dass $\tilde{f}$ surjektiv ist, da für jedes $g := f(g') \in f(G)$ gilt, dass $\tilde{f}(g'N) = f(g') = g$. Hieraus folgt, dass $\tilde{f} : G/N \to f(G)$ ein Gruppenisomorphismus ist, und somit $G/N \cong f(G)$.

□

**1.16. Definition.** Eine endliche Folge von Untegruppen

$$\mathcal{G} : G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_m = \{\varepsilon\}$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

heißt *Normalreihe*, falls $G_i$ ein Normalteiler von $G_{i-1}$ für alle $i = 1, \ldots, m$ ist. Weiters bezeichnen wir die Gruppen $G_{i-1}/G_i$ als die *Faktoren der Normalreihe*.

**1.17. Definition.** Eine Gruppe heißt *auflösbar*, falls sie eine Normalreihe besitzt, deren Faktoren alle abelsch sind.

**1.18. Definition.** Sei $\mathcal{A}$ eine nichtleere Menge, $\vee$ und $\wedge$ binäre Operationen auf $\mathcal{A}$ und $\neg$ eine unäre Operation auf $\mathcal{A}$. Weiters definieren wir $\mathbf{1} := a \vee \neg a$ und $\mathbf{0} := a \wedge \neg a$ für ein beliebiges $a \in \mathcal{A}$. Dann nennen wir $(\mathcal{A}, \vee, \wedge, \neg, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ eine *Boolsche Algebra*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

*(i)* die Operationen $\vee$ und $\wedge$ sind kommutativ und assoziativ,

*(ii)* für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt $(a \wedge b) \vee b = b$ und $(a \vee b) \wedge b = b$,

*(iii)* für alle $a, b, c \in \mathcal{A}$ gilt $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ und $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

*(iv)* für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt $(a \wedge \neg a) \vee b = b$ und $(a \vee \neg a) \wedge b = b$.

Wir bezeichnen mit $a - b := a \wedge \neg b$ für $a, b \in \mathcal{A}$ als das *Komplement von $b$ in $a$*. Weiters lässt sich auf einer Boolschen Algebra eine Halbordnung wie folgt definieren. Für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt: $a \leq b \;:\Longleftrightarrow\; a = a \wedge b$.
Ein Element $a \in \mathcal{A}$ heißt außerdem *Atom*, falls es ein minimales nicht $\mathbf{0}$ Element ist, also: $a \neq 0$ und falls für ein $b \in \mathcal{A}$ gilt, dass $\mathbf{0} \leq b \leq a$, dann folgt $b = \mathbf{0}$ oder $b = a$.

**1.19. Definition.** Wir bezeichnen eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{A}_0$ von $\mathcal{A}$ als *Boolsche Subalgebra*, falls $\mathcal{A}_0$ unter den Operationen $\vee, \wedge$ und $\neg$ abgeschlossen ist.

**1.20. Definition.** Sei $\mathcal{A}$ eine Boolsche Algebra. Dann nennen wir eine Bijektion $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, für die $g(a \vee b) = g(a) \vee g(b)$, $g(a \wedge b) = g(a) \wedge g(b)$ und $g(\neg a) = \neg g(a)$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt, einen *Automorphismus* auf einer Boolschen Algebra.

## A.4. Nützliches aus der Linearen Algebra

Die Informationen sind [Hav08] entnommen.
**1.21. Definition.** Eine Bijektion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *affin*, falls für alle Punkte $P, Q$ in $\mathbb{R}^n$ und für alle reelen Zahlen $\alpha, \beta$ mit $\alpha + \beta = 1$ gilt, dass $f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$. Als Menge bilden sie eine Gruppe, die wir mit $A_n(\mathbb{R})$ bezeichnen.

**1.22. Satz.** *Sei $f \in A_n(\mathbb{R})$ eine affine Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Translation $\tau \in T_n(\mathbb{R})$ und eine eindeutig bestimmte invertierbare lineare Transformation $\sigma \in GL_n(\mathbb{R})$, sodass $f = \tau\sigma$.*



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

*Beweis.* Sei $\tau$ die Translation um $f(0)$, also $\tau(P) := P + f(0)$. Klarerweise ist $\tau$ eine bijektive Abbildung. Weiters definieren wir $\sigma := \tau^{-1} \circ f$. Als Komposition bijektiver Abbildungen ist $\sigma$ auch bijektiv. Für die Existenz einer gesuchten Darstellung bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\sigma$ eine lineare Abbildung ist. Seien dazu $P, Q$ Punkte im $\mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir aus der Affinität von $f$ die Linearität von $\sigma$ mittels

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha P + Q) =& f(\alpha P + Q) - f(0) = f\left(\alpha P + (1-\alpha)\frac{1}{1-\alpha}Q\right) - f(0) = \\ & \alpha f(P) + (1-\alpha) f\left(\frac{1}{1-\alpha}Q\right) - f(0) = \\ & \alpha f(P) + (1-\alpha)\left(\frac{1}{1-\alpha}f(Q) + \left(1 - \frac{1}{1-\alpha}\right)f(0)\right) - (1-\alpha)f(0) = \\ & \alpha f(P) + f(Q) - f(0) = \alpha\sigma(P) + \sigma(Q).\end{aligned}$$

Für die Eindeutigkeit betrachten wir $f = \sigma\tau = \sigma'\tau'$. Es folgt unmittelbar $\sigma = \sigma'\tau'\tau^{-1}$, womit die Translation $\tau'\tau^{-1}$ die Identität ergeben muss und somit $\tau = \tau'$. Wir erhalten auch $\sigma = \sigma'$.

□

**1.23. Definition.** Sei $f = \tau\sigma$ eine affine Abbildung. Dann definieren wir die *Determinante* von $f$ mittels der Determinante von $\sigma$, also $\det(f) := \det(\sigma)$. Den Raum der affinen Abbildungen mit Determinante $+1$ bezeichnen wir mit $SA_n(\mathbb{R})$. Er bildet mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

**1.24. Proposition.** *Die Menge $(SL_n(\mathbb{Z}), \cdot)$ der invertierbaren Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante 1 bildet eine Gruppe.*

*Beweis.* Die Matrixmultiplikation ist klarerweise abgechlossen in $SL_n(\mathbb{Z})$ und assoziativ. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Inverse Determinante 1 hat und aus ganzzahligen Einträgen besteht. Aus dem Determinanten Multiplikationssatz erhalten wir unmittelbar für ein $A \in SL_n(\mathbb{Z})$, dass

$$1 = \det(\mathrm{id}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \underbrace{\det(A)}_{=1} \cdot \det(A^{-1}) = \det(A^{-1}).$$

Die Cramersche Regel aus der Linearen Algebra liefert uns die folgende Formel für die Berechnung der Inversen

$$A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det(A)}}_{=1} \cdot \mathrm{adj}(A),$$

wobei die sogenannte Adjunkte $\mathrm{adj}(A)$ wie folgt definiert ist

$$\mathrm{adj}(A) := \tilde{A}^T := \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix},$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

$$\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Dabei erhält man also die sogenannten Minoren $M_{ij}$, indem man die Determinante der Untermatrizen berechnet, die sich durch Streichen der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte ergeben. Wie wir sehen, muss es sich bei den Werten der Minoren um ganze Zahlen handeln, da die Determinante einer Matrix mit ganzzahligen Einträgen sicher wieder ganzzahlig ist. Insgesamt sind die Einträge von $A^{-1}$ somit ganzzahlig.

□

## A.5. Nützliches aus der Zahlentheorie

**1.25. Definition.** Eine komplexe Zahl $\alpha$ heißt *algebraisch*, falls es ein Polynom $p$ mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, sodass $p(\alpha) = 0$ ist. Andernfalls nennen wir $\alpha$ *transzendent*. Die Menge aller algebraischen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{A}$.

**1.26. Bemerkung.** Offensichtlich gilt $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$, da jede rationale Zahl $r/q$ Nullstelle des Polynoms $p(z) := qz - r$ ist. Weiters ist $\mathbb{A} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$, da zum Beispiel eine Nullstelle des Polynoms $p(z) := z^2 - 2$ die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ ist. Aber nicht jede komplexe Zahl ist algebraisch, wie wir am Beispiel der Kreiszahl $\pi$ bemerken und im Folgenden festellen werden, da es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt.

**1.27. Proposition.** *Die Menge der algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ ist abzählbar.*

*Beweis.* Sei $\mathcal{P}_n$ die Menge der komplexwertigen Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten vom Grad $n$. Diese Menge ist abzählbar, da $|\mathcal{P}_n| \leq |\prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}|$ gilt. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra, hat jedes Polynom vom Grad $n$ höchstens $n$-viele Nullstellen. Die Vereinigung abzählbarer Mengen ist auch abzählbar. Also ist $\mathbb{A}$ abzählbar mittels $|\mathbb{A}| \leq |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}_n|$.

□

Als nächstes beweisen wir ein paar sehr technische aber nützliche Resultate aus der Zahlentheorie, welche in Kapitel 7 benötigt werden. Folgendes richtet sich nach [TW16, Kapitel 9]. Zunächst erinnern wir uns an die folgenden Definitionen.

**1.28. Definition.**

- $J := [0, 1) \times [0, 1)$.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

- Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $\langle x \rangle := \min_{z \in \mathbb{Z}} |x - z| = \min(\mathrm{frac}(x), 1 - \mathrm{frac}(x))$ und die *Bruchteilfunktion* $\mathrm{frac}(x) := x - \lfloor x \rfloor$. Falls der Input der Bruchteilfunktion vektorwertig ist, ist die Funktion komponentenweise zu verstehen.
- Für ein positives reelles $x$ sei $\ell(x) := \max(2, \ln x)$.
- Für eine endliche Teilmenge $A$ von $J$ und eine messbare Teilmenge der Ebene $H$ definieren wir die *Diskrepanz* von $A$ zu $H$ wie folgt: $D(A, H) := \left| \frac{|A \cap H|}{|A|} - \lambda(H) \right|$.
- Für eine endliche Teilmenge $A$ von $J$ definieren wir $D(A) := \sup\{D(A, H) \mid H \subseteq J$ ist ein halboffenes Rechteck$\}$. Analog können wir die mehrdimensionale Diskrepanz mittels dem mehrdimensionalen halboffenen Würfel definieren.
- Für eine Funktion $f : [0, 1) \to [0, 1)$ definieren wir den *gefüllten Graph* $\mathrm{gr}(f) := \{(x, y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

**1.29. Lemma.**

*(a) Für fast jedes $x \in [0, 1)$ gibt es nur endlich viele positive ganze Zahlen $k$, für die $\langle kx \rangle \geq k^{-2}$ nicht gilt.*

*(b) Für fast alle Paare $x, y \in [0, 1)$ gibt es nur endlich viele Paare von positiven ganzen Zahlen $h, k$, für die $\langle hx + ky \rangle \geq (hk)^{-2}$ nicht gilt.*

*Beweis. (a):* Zunächst bedeutet $\langle kx \rangle < k^{-2}$, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|kx - m| < k^{-2}$. Dies wiederum ist äquivalent zu $\left|x - \frac{m}{k}\right| < k^{-3}$. Für jede positive ganze Zahl $k$, betrachte die Menge der reellen Zahlen $x \in [0, 1)$, sodass für ein $m$ gilt $\left|x - \frac{m}{k}\right| < k^{-3}$. Dies definiert eine Menge von Intervallen mit Durchmesser $2k^{-3}$, wobei die Zentren genau $1/k$ voneinander entfernt sind. Daher ist das Maß der Menge der $x \in [0, 1)$, für die es ein $k$ gibt, sodass $\langle kx \rangle < k^{-2}$, höchstens $2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$. Weiterhin hat die Menge der $x$, die die Ungleichung für $k \geq K$ erfüllen, ein Maß von $2 \sum_{k \geq K} k^{-2}$, was ein Rest einer konvergenten Reihe ist und somit beliebig klein gemacht werden kann. Daher hat die Menge der $x$, für die die Ungleichung unendlich viele Lösungen hat, ein Maß kleiner als $\epsilon$ für jedes positive $\epsilon$ und daher ein Maß von 0.

*(b):* Sei $D_{h,k}$ die Menge von $(x, y) \in J$, sodass $\langle hx + ky \rangle < (hk)^{-2}$; sei $M = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D_{h,k} &= \bigcup_m \left\{(x, y) \in J : |M \cdot (x, y) - m| \leq (hk)^{-2}\right\} \\ &= \bigcup_m M^{-1} \cdot \left\{(x, y) \in M \cdot J : |x + y - m| \leq (hk)^{-2}\right\} \\ &= M^{-1} \cdot \left( \bigcup_m \left\{(x, y) \in M \cdot J : |x + y - m| \leq (hk)^{-2}\right\} \right) \end{aligned}$$

Sei $D$ diese letzte Vereinigung, dann gilt $D \subseteq M \cdot J = [0, h) \times [0, k)$. Da die Bedingung, die $D$ definiert, modulo 1 invariant ist, können wir uns auf $D \cap J$ konzentrieren. Dort sind



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

nur die Werte $m = 0, 1, 2$ relevant. Die langen Kanten des zentralen Streifens werden durch $y = 1 - x \pm (hk)^2$ beschrieben, woraus sich ergibt, dass die Breite des Streifens $\sqrt{2}(hk)^{-2}$ beträgt. Wenn die kleinen Eckstücke verschoben werden, zeigt sich, dass $D \cap J$ durch Zerlegung kongruent zu einem Rechteck ist, das den zentralen Streifen enthält: Seine Längen sind $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(hk)^{-2}$. Daher beträgt die Fläche von $D \cap J$ gleich $2(hk)^{-2}$ (der Fall $h = k = 1$ ist eine triviale Ausnahme: Die Fläche beträgt 1, nicht 2). Die Erweiterung auf $M \cdot J$ sagt uns, dass die gesamte Fläche von $D$ gleich $2(hk)^{-1}$ beträgt. Da $D_{h,k}$ eine Skalierung von $D$ durch $M^{-1}$ ist, tritt ein Faktor von $\det\left(M^{-1}\right) = (hk)^{-1}$ auf, was $\lambda(D_{h,k}) = 2(hk)^{-2}$ ergibt.
Sei $D_K$ die Menge von $(x, y) \in J$, für die es $h, k$ gibt, wobei mindestens eines von $h, k$ nicht kleiner als $K$ ist, sodass $\langle hx + ky\rangle < (hk)^{-2}$. Angenommen, für $(x, y)$ gibt es unendlich viele Paare $h, k$, sodass $(x, y) \in D_{h,k}$. Dann gilt für jedes $K$, dass $(x, y) \in D_K$. Aber das Flächenmaß von $D_K$ ist höchstens $2\sum_{h\geq K}\sum_{k=1}^{\infty} 2(hk)^{-2}$, wobei der führende Faktor 2 durch die Symmetrie in $h$ und $k$ bedingt ist. Dies ergibt $4\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\right)\left(\sum_{h\geq K} h^{-2}\right) = \frac{2}{3}\pi^2 \sum_{h\geq K} h^{-2}$. Aber dieser Rest einer konvergenten Reihe ist, für $K$, die groß genug sind, kleiner als jedes positive $\epsilon$, und somit hat die Menge der Punkte, für die die Ungleichung des Lemmas nicht gilt, ein Maß von 0.

□

**1.30. Lemma.** *Wenn $f$ eine messbare reelle Funktion auf $[0, 1]$ mit einem endlichen Integral ist, $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$, dann gilt*

$$\int_0^1 f(\langle a + kx\rangle)dx = 2\int_0^{1/2} f(x)dx.$$

*Beweis.* Die Periodizität bezüglich $[0, 1]$ und eine Substitution ergeben

$$\int_0^1 f(\langle a + kx\rangle)dx = \int_{-a/k}^{1-a/k} f(\langle a + kx\rangle)dx = \int_0^1 f(\langle kx\rangle)dx.$$

Dann führt die Periodizität bezüglich $[0, 1/k]$ und eine weitere Substitution zu Gewünschtem, wie folgt

$$\int_0^1 f(\langle kx\rangle)dx = k\int_0^{\frac{1}{k}} f(kx)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2k}} f(kx)kdx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx.$$

□

**1.31. Satz (Erste Abschätzung).** *Für fast jedes $(x, y) \in J$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $C > 0$, sodass für jede positive ganze Zahl $n$ Folgendes gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\langle kx\rangle\langle ky\rangle} \leq C\ell^{3+\epsilon}(n).$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

*Beweis.* Wir verwenden die Funktionen $Q_k(w) = \frac{1}{\langle kw\rangle |\ln(\langle kw\rangle)|^{1+\epsilon}}$ und $K_k(w) = \frac{1}{k\ell^{1+\epsilon}(k)} Q_k(w)$. Betrachte die folgende Familie von Funktionen $f_k(x,y) = K_k(y)Q_k(x) = \frac{1}{k\ell^{1+\epsilon}(k)} Q_k(x)Q_k(y)$ mit Definitionsbereich $J$, wobei Singularitäten (bei $x$ oder $y = 1/k$ oder 0) irrelevant sind, da wir Mengen mit Maß 0 ignorieren. Sei $f$ deren Summe: $f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x,y)$.

*Behauptung 1:* Für fast alle $x$ und $y$ ist $f(x,y)$ endlich. Wir vereinfachen das Problem, indem wir durch Integration die Dimension reduzieren. Die Grundidee ist, die Frage der Konvergenz von $f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} K_k(y)Q_k(x)$ auf die gleiche Frage für $\sum_{k=1}^{\infty} K_k(y)$ zu reduzieren.

*Behauptung 2:* Für fast alle $y$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k(x,y)dx$ endlich. Für jedes $y$ liefert Lemma 1.30

$$\int_0^1 f_k(x,y)dx = K_k(y)\int_0^1 Q_k(x)dx = 2K_k(y)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(-\ln x)^{1+\epsilon}}dx = \frac{2K_k(y)}{(\ln 2)^{\epsilon}\epsilon}.$$

Also folgt Behauptung 2 aus der nächsten Behauptung.

*Behauptung 3:* Für fast alle $y$ konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} K_k(y)$.
Wie zuvor liefert das Lemma $\int_0^1 Q_k(y)dy = \frac{2}{(\ln 2)^{\epsilon}\epsilon}$. Der Integralsatz zeigt die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ell^{1+\epsilon}(k)}$, und somit konvergiert die folgende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\ell^{1+\epsilon}(k)}\int_0^1 Q_k(y)dy\right).$$

Der Satz über monotone Konvergenz erlaubt das Vertauschen von Summe und Integral, wodurch sich Folgendes ergibt

$$\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ell^{1+\epsilon}(k)}Q_k(y)\right)dy = \int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}K_k(y)dy < \infty.$$

Dies bedeutet, dass der Integrand für fast alle $y$ endlich ist. Dies beweist Behauptung 3 und damit Behauptung 2.

Durch Vertauschen der Summe und des Limes in Behauptung 2 erhalten wir für fast alle $y$, dass $\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x,y)dx < \infty$ endlich ist. Der Integrand muss für fast alle $x$ endlich sein. Da der Satz von Fubini zeigt, dass die beiden fast überall gültigen Bedingungen zu einer Nullmenge im zweidimensionalen Raum führen, beweist dies Behauptung 1.

Um abzuschließen, verwenden wir Lemma 1.29 *(a)*, das impliziert, dass es ein positives $C'$ (abhängig von $x$ und kleiner als 1 angenommen) gibt, sodass $\langle kx\rangle \geq C'k^{-2}$ für jedes $k$ gilt. Für solches $x$ erhält man, durch Logarithmieren und einfache Algebra:

$$\frac{1}{\ell(k)} \leq \frac{2+|\ln C'|}{|\ln\langle kx\rangle|^{1+\epsilon}}.$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Dies impliziert, dass für fast alle $x, y$ Folgendes gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{k\ell^{3+\epsilon}(k)\langle kx\rangle\langle ky\rangle} &\leq \frac{(2+|\ln C'|)^2}{k\ell^{1+\epsilon}(k)\langle kx\rangle\langle ky\rangle|\ln\langle kx\rangle\ln\langle ky\rangle|^{1+\epsilon}}\\ &= \left(2+\left|\ln C'\right|\right)^2 K_k(y)Q_k(x).\end{aligned}$$

Die rechte Seite summiert sich (fast immer) zu einem endlichen Wert, gemäß Behauptung 1. Daher gilt für fast alle $x, y$:

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ell^{3+\epsilon}(k)\langle kx\rangle\langle ky\rangle} < \infty.$$

Da $\ell$ monoton ist, gilt wie gewünscht

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\langle kx\rangle\langle ky\rangle} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\ell^{3+\epsilon}(n)}{\ell^{3+\epsilon}(k)} \frac{1}{k\langle kx\rangle\langle ky\rangle} < C\ell^{3+\epsilon}(n),$$

□

**1.32. Satz (Zweite Abschätzung).** *Für fast jedes $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in J^2$ und jedes positive $\epsilon$ und $C$ gibt es ein $C' > 0$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgende Abschätzung gilt*

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{hk\,\langle hx_1+ky_1\rangle\,\langle hx_2+ky_2\rangle} \leq C'\ell^{6+\epsilon}(n).$$

*Beweis.* Der Beweis ist ähnlich wie der vorhergehende Beweis. Sei $X = (x_1, y_1)$ und $Y = (x_2, y_2)$. Definiere $Q_{h,k}(V) = \frac{1}{\langle hv_1+kv_2\rangle|\ln(\langle hv_1+kv_2\rangle)|^{1+\epsilon}}$ und $K_{h,k}(V) = \frac{1}{hk\ell^{1+\epsilon}(h)\ell^{1+\epsilon}(k)}Q_k(V)$. Definiere die Funktionen $f_{h,k}(X,Y) = K_{h,k}(Y)Q_{h,k}(X)$, und sei $f$ die Summe $f(X,Y) = \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{h,k}(X,Y)$. Die Behauptungen des vorhergehenden Beweises werden zu den folgenden, und Behauptung 2 impliziert Behauptung 1 genauso wie zuvor.

*Behauptung 1:* Für fast alle $X$ und $Y$ ist $f(X,Y)$ endlich.

*Behauptung 2:* Für fast alle $Y$ ist $\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_J f_{h,k}(X,Y)dX$ endlich.

*Behauptung 3:* Für fast alle $Y$ konvergiert $\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} K_{h,k}(Y)$.

*Beweis von Behauptung 2.* Für jedes $Y$ liefert Lemma 1.30, dass

$$\begin{aligned}\int_J f_{h,k}(X,Y)dX &= K_{h,k}(Y)\int_0^1\int_0^1 Q_{h,k}(x_1,y_1)dx_1dy_1\\ &= K_{h,k}(Y)\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\langle hx_1+ky_1\rangle|\ln(\langle hx_1+ky_1\rangle)|^{1+\epsilon}}dx_1dy_1\\ &= K_{h,k}(Y)\int_0^1 2\int_0^{1/2} \frac{1}{x_1(-\ln x_1)^{1+\epsilon}}dx_1dy_1\\ &= K_{h,k}(Y)\int_0^1 \frac{2}{(\ln 2)^{\epsilon}\epsilon}dy_1 = K_{h,k}(Y)\frac{2}{(\ln 2)^{\epsilon}\epsilon}.\end{aligned}$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

Und nun folgt die Aussage aus Behauptung 3. Wie in Behauptung 2 liefert das Lemma 1.30, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 Q_{h,k}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 = \frac{2}{(\ln 2)^\epsilon \epsilon}.$$

Der Integralsatz (zweimal angewendet) zeigt die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{hk\ell^{1+\epsilon}(h)\ell^{1+\epsilon}(k)} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h\ell^{1+\epsilon}(h)} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ell^{1+\epsilon}(k)} \right).$$

Tatsächlich konvergiert diese Reihe zur Quadratsumme der inneren Reihe. Daher konvergiert die folgende Reihe

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{hk\ell^{1+\epsilon}(h)\ell^{1+\epsilon}(k)} \right) \int_0^1 \int_0^1 Q_{h,k}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \right].$$

Der Satz über monotone Konvergenz liefert dann das Resultat wie zuvor.

Als Nächstes verwenden wir Lemma 1.29 *(b)*, das es für fast alle $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in J^2$ eine Konstante $C_1$ gibt, sodass $C_1 h^{-2} k^{-2} \leq \langle hx_1 + ky_1 \rangle$ und $C_1 h^{-2} k^{-2} \leq \langle hx_2 + ky_2 \rangle$ für alle positiven ganzen Zahlen $h$ und $k$. Für diese Tupel erhalten wir, durch Logarithmieren und für $j = 1$ oder 2, dass

$$|\ln \langle hx_j + ky_j \rangle| \leq (2 + |\ln C_1|)\,(\ell(h) + \ell(k)).$$

Aber $\ell$ kann nicht kleiner als 2 werden, also kann das Produkt zweier $\ell$ nicht kleiner als ihre Summe sein und wir erhalten

$$\frac{1}{\ell(h)\ell(k)} \leq \frac{1}{\ell(h) + \ell(k)} \leq \frac{2 + |\ln C_1|}{|\ln \langle hx_j + ky_j \rangle|} \leq \frac{2 + |\ln C_1|}{|\ln \langle hx_j + ky_j \rangle|^{1+\epsilon}}.$$

Dies impliziert für fast alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und jedes $\epsilon > 0$, dass

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{hk\ell^{3+\epsilon}(h)\ell^{3+\epsilon}(k)\langle hx_1 + ky_1 \rangle \langle hx_2 + ky_2 \rangle} < \infty.$$

□

**1.33. Satz (Erdős-Turán-Koksma-Formel).** *Für einen Gitterpunkt $h = (h_1, \ldots, h_s)$ in $\mathbb{Z}^s$, definiere $\|h\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq s} |h_j|$ und*

$$r(h) = \prod_{j=1}^{s} \max(|h_j|, 1).$$

*Für $x, y \in \mathbb{R}^s$ sei $\langle x, y \rangle$ das Standardskalarprodukt. Sei nun $x_1, \ldots, x_N$ eine endliche Folge von Punkten in $\mathbb{R}^s$ und $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Dann gilt für jede positive ganze Zahl $m$:*

$$D(X) \leq C_s \left( \frac{1}{m} + \sum_{0 < \|h\|_\infty \leq m} \frac{1}{r(h)} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \langle h, x_n \rangle} \right| \right),$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Habilitationsschrift ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

*wobei die Konstante $C_s$ nur von der Dimension $s$ abhängt. Ein expliziter Wert für $C_s$ ist $C_s = 2s^2 3^{s+1}$.*

**1.34. Satz (Dritte Abschätzung).** *Für fast jedes Paar von Vektoren $x, y \in J$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine Konstante $C$, so dass für jedes $u \in \mathbb{R}^2$ und jede positive ganze Zahl $N$, und $X = \{x, y\}$, Folgendes gilt*

$$D(F_N(u, X)) \leq C \frac{\ell^{6+\epsilon}(N)}{N^2}.$$

*Beweis.* Wir werden zeigen, dass, wenn $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in J^2$ so ist, dass die Aussagen der Abschätzungen in Satz 1.31 und Satz 1.32 für jedes der Paare $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ sowie für jedes der Vierer-Tupel $(\pm x_1, \pm x_2, \pm y_1, \pm y_2)$ gelten, dann die Aussage gültig ist. Da die beiden Theoreme behaupten, dass fast jeder 4-Vektor diese Eigenschaft hat, wird dies ausreichen.

Um die Diskrepanz von $F_N(u, X)$ abzuschätzen, wenden wir die Erdős-Turán-Koksma-Formel 1.33 an. Diese Formel liefert eine absolute Konstante $C$, so dass für jede positive ganze Zahl $m$ gilt:

$$D\left(F_N(u, X)\right) \leq C \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{N^2} \Lambda \right), \tag{A.1}$$

wobei $\|h\| = \max\left(|h_1|, |h_2|\right)$, $r(h) = \max\left(|h_1|, 1\right) \max\left(|h_2|, 1\right)$, und

$$\Lambda = \sum_{0 < \|h\| \leq m} \left( \frac{1}{r(h)} \left| \sum_{0 \leq n,k < N} e^{2\pi i (h_1(u_1 + nx_1 + ky_1) + h_2(u_2 + nx_2 + ky_2))} \right| \right).$$

Sei $\Lambda_1$ die Summe der Terme in $\Lambda$, für die $h_1 > 0$ und $h_2 = 0$ gilt. Wir benötigen die folgende Formel, die sich durch Summieren der geometrischen Reihe, Umwandeln der Exponentialfunktionen in trigonometrischer Form und Entfernen von Termen am Einheitskreis ableiten lässt:

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \beta} \right| = |\csc(\pi\beta) \sin(\pi\beta N)| \leq |\csc(\pi\beta)|,$$

wobei $\csc(x) = 1/\sin(x)$ ist. Die Verwendung dieser Formel ergibt für jede positive ganze Zahl $h$, dass

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{0 \leq n,k \leq N-1} e^{2\pi i h (u_1 + nx_1 + ky_1)} \right| = \left| e^{2\pi i h u_1} \right| \left| \sum_{0 \leq n,k \leq N-1} e^{2\pi i h (nx_1 + ky_1)} \right| \\
&= \left| \sum_{0 \leq n,k \leq N-1} e^{2\pi i h n x_1} e^{2\pi i h k y_1} \right| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i h n x_1} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i h k y_1} \right| \\
&\leq \frac{1}{|\sin(\pi h x_1) \sin(\pi h y_1)|} \leq \frac{1}{4 \langle h x_1 \rangle \langle h y_1 \rangle}.
\end{aligned}$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

Durch Summieren und Anwenden der Zweiten Abschätzung 1.32 ergibt sich dann

$$\Lambda_1 = \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h} \left| \sum_{0 \le n,k \le N} e^{(2\pi i h(u_1 + n x_1 + k y_1))} \right| \le \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h \langle h x_1 \rangle \langle h y_1 \rangle} \le C \ell^{3+\epsilon}(m).$$

Sei $\Lambda_2$ analog, wobei die Terme verwendet werden, für die $h_1 < 0$ und $h_2 = 0$ gilt. Dann gilt:

$$\Lambda_2 \le \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h \langle -h x_1 \rangle \langle -h y_1 \rangle} \le \sum_{h=1}^{m^2} \frac{1}{h \langle h x_1 \rangle \langle h y_1 \rangle} \le C \ell^{3+\epsilon}(m).$$

Und wir erhalten die gleichen Abschätzungen für den symmetrischen Fall, bei dem $h_1 = 0$ und $h_2 \neq 0$ ist. Als Nächstes sei $\Lambda_3$ die Summe der Terme, bei denen sowohl $h_1$ als auch $h_2$ positiv sind. Dann liefert die Zweite Abschätzung 1.32 für $(x_1, x_2, y_1, y_2)$, dass

$$\Lambda_3 \le \sum_{h_1, h_2 = 1}^{m} \frac{1}{h_1 h_2 \langle h_1 x_1 + h_2 x_2 \rangle \langle h_1 y_1 + h_2 y_2 \rangle} \le C \ell^{6+\epsilon}(m).$$

Wir erhalten die gleichen Abschätzungen für die Summen der Terme, bei denen $h_1 > 0$, $h_2 < 0$ gilt, sowie für ähnliche Fälle. Insgesamt haben wir also

$$\Lambda \le C_2 \ell^{6+\epsilon}(m),$$

wobei $C_2$ eine Konstante ist, die nur von $x$, $y$ und $\epsilon$ abhängt. Durch Anwendung von (A.1) vollenden wir den Beweis.

□

**1.35. Satz (Erdős-Turán).** *Sei $f : [0,1) \to [0,1)$ eine strikt monotone Funktion und sei $C$ eine Konstante mit $0 < C \le 1$, sodass für alle $x, y \in [0,1)$ gilt, dass $|f(x) - f(y)| \ge C|x - y|$.*

*Dann gilt für jede positive ganze Zahl $m$ und jede endliche Menge $S = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)\}$ der Größe $N$, die eine Teilmenge von $J$ ist, dass*

$$D(S, \mathrm{gr}(f)) \le \max\left(8D(S), \frac{216}{C} E_m\right)$$

*wobei $E_m$ gegeben ist durch*

$$E_m = \frac{1}{m} + \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi h i (f(x_n) - y_n)} dx \right| + \left| \int_0^1 e^{2\pi h i f(x)} dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi h i f(x_n)} \right| \right)$$



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU Bibliothek Your knowledge hub

**1.36. Satz (Erdős-Turán Variation).** *Sei $f$ zweimal differenzierbar auf $[0,1]$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Angenommen, dass $f'(x)$ stets positiv ist und $f''(x)$ von null beschränkt ist. Dann gibt es für fast jede Menge $X = \{x, y\}$ von zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ eine Konstante $C$, sodass für jedes $u \in \mathbb{R}^2$ und $N$ gilt, dass*

$$D\left(F_N(u, X), \mathrm{gr}(f)\right) \leq CN^{-4/3}\ell^7(N).$$

## A.6. Nützliches aus der Maßtheorie

Folgendes richtet sich nach [RF10, Kapitel 15.3]

**1.37. Definition.** Zwei Messräume $\langle X, \mathfrak{A}\rangle$ und $\langle Y, \mathfrak{B}\rangle$ heißen *äquivalent*, falls es eine bijektive Abbildung $\varphi : X \to Y$ gibt, sodass sowohl $\varphi$ als auch $\varphi^{-1}$ messbar sind. Das heißt, falls $\varphi(A) \in \mathfrak{B}$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ und $\varphi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ für alle $B \in \mathfrak{B}$ gilt. Wir nennen $\varphi$ dann eine *Äquivalenz* zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

**1.38. Definition.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann nennen wir die von den offenen Mengen erzeugte $\sigma$-Algebra die *Borelsche $\sigma$-Algebra*. Ein Maß darauf nennen wir dann ein *Borel Maß*.

**1.39. Bemerkung.** In der Tat reicht es Messbarkeit auf einer erzeugenden Menge der $\sigma$-Algebra nachzuweisen. Insbesondere folgt also für zwei topologische Räume $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$, die homöomorph sind, dass sie auch Borel äquivalent sind.

**1.40. Satz.** *Sei $X$ ein vollständiger separabler metrischer Raum und $\mu$ ein Borel Maß auf $X$, sodass $\mu(X) = 1$ und $\mu\{x\} = 0$ für jede Menge $\{x\}$, die aus einem einzelnen Punkt besteht. Dann gibt es eine Borel Menge $X_0 \subseteq X$ mit $\mu(X_0) = 0$ und eine Teilmenge $Y_0$ von $[0,1]$ mit Lebesgue Maß null, sodass es eine Borel-Äquivalenz $\psi$ von $X \setminus X_0$ mit $[0,1] \setminus Y_0$ gibt, die die Eigenschaft hat, dass $\mu\left(\psi^{-1}[A]\right) = \lambda(A)$, wobei $\lambda$ das Lebesgue Maß auf $[0,1]$ ist.*

*Beweis.* Sei $\varphi$ eine Borel-Äquivalenz von $X$ mit einer Borel-Teilmenge $E$ von $[0,1]$, und definiere das Borel-Maß $\nu$ auf $[0,1]$ durch $\nu(A) = \mu\left(\varphi^{-1}[A]\right)$. Sei $f$ die Verteilungsfunktion von $\nu$, das heißt $f(x) = \nu[0,x]$. Dann ist $f$ eine monotone nicht abnehmende Funktion auf $[0,1]$, die rechts stetig ist. Da $f(x) - \lim_{t\to x^-} f(t) = \nu\{x\} = \mu\left\{\varphi^{-1}[x]\right\} = 0$, sehen wir, dass $f$ stetig ist. Da $f(0) = 0$ und $f(1) = \nu[0,1] = \mu(X) = 1$, ist $f$ eine stetige Abbildung von $[0,1]$ auf $[0,1]$.

Für jedes $y \in [0,1]$ ist die Menge $f^{-1}[\{y\}]$ eine abgeschlossene Menge, und da $f$ nicht abnehmend ist, handelt es sich entweder um ein abgeschlossenes Intervall oder um einen einzelnen Punkt. Sei $M$ die Menge der $y$, für die $f^{-1}[\{y\}]$ ein nicht-degeneriertes Intervall



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

ist. Da diese Intervalle disjunkt sind, ist $M$ abzählbar.

Nun gilt $\lambda(E) = \nu\left(f^{-1}[E]\right)$, und daher hat die Menge $N = f^{-1}[M]$ $\nu$-Maß Null. Nun ist $f$ ein Homöomorphismus von $[0,1] \setminus N$ auf $[0,1] \setminus M$. Da $N$ eine Borel-Menge ist, ist die Menge $X_0 = \varphi^{-1}[N]$ eine Borel-Menge, und $\mu(X_0) = \nu(N) = 0$.

Somit ist die Abbildung $\psi = f \circ \varphi$ eine Borel-Äquivalenz von $X \setminus X_0$ mit $\psi\left[X \setminus X_0\right]$. Da $\varphi$ eine Borel-Äquivalenz von $X$ auf eine Borel-Teilmenge von $[0,1]$ ist, ist $\varphi\left[X \setminus X_0\right]$ eine Borel-Teilmenge von $[0,1] \setminus N$ und somit eine Borel-Teilmenge von $[0,1] \setminus N$. Daher ist $\psi\left[X \setminus X_0\right] = f\left[\varphi\left[X \setminus X_0\right]\right]$ eine Borel-Teilmenge von $[0,1] \setminus M$ und damit von $[0,1]$.

Somit ist $\psi$ eine Borel-Äquivalenz von $X \setminus X_0$ mit einer Borel-Teilmenge von $[0,1]$. Da $\lambda(A) = \mu\left(\psi^{-1}[A]\right)$, haben wir $\lambda\left(\psi\left[X \setminus X_0\right]\right) = \mu\left(X \setminus X_0\right) = 1$, und wir sehen, dass die Menge $Y_0 = [0,1] \setminus \psi\left[X \setminus X_0\right]$ eine Borel-Teilmenge von Lebesgue Maß null ist.

$\square$

Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Bibliothek
Your knowledge hub

# Symbole und Notation

## Relationen

| | |
|---|---|
| $\sim_G$ | Äquizerlegbarkeit bezüglich $G$ |
| $\sim_n$ | Äquizerlegbarkeit mittels $n$-vielen Stücken |
| $A \preccurlyeq_G B$ | $A$ ist $G$-äquizerlegbar mit einer Teilmenge von $B$ |
| $\cong$ | Isomorphie Relation zweier Vektorräume |
| $P \approx Q$ | Für Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ gibt es $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, sodass $P = Q + (m, n)$ |

## Vorkommende Gruppen und Räume

| | |
|---|---|
| $O_n(\mathbb{R})$ | die Gruppe aller $n$-dimensionalen orthogonalen Matrizen |
| $SO_n(\mathbb{R})$ | die Gruppe aller $n$-dimensionalen orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 |
| $T_n(\mathbb{R})$ | die Gruppe aller Translationen auf $\mathbb{R}^n$ |
| $GL_n(\mathbb{R})$ | die Gruppe aller invertierbaren linearen Transformationen auf $\mathbb{R}^n$ |
| $SL_n(\mathbb{R})$ | die Gruppe aller invertierbaren linearen Transformationen auf $\mathbb{R}^n$ mit Determinante 1 |
| $SL_n(\mathbb{Z})$ | die Gruppe der Elemente aus $SL_n(\mathbb{R})$ mit ganzzahligen Einträgen |
| $A_n(\mathbb{R})$ | die Gruppe der affinen Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ |
| $SA_n(\mathbb{R})$ | die Gruppe der affinen Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ mit Determinante 1 |
| $G_n$ | die Gruppe aller Translationen und Rotationen im $\mathbb{R}^n$ - die Gruppe aller Isometrien |
| $SG_n$ | die Gruppe aller Translationen und Rotationen im $\mathbb{R}^n$ mit Determinante 1 |
| $B(G)$ | der Raum aller beschränkten reelwertigen Funktionen auf einer Gruppe $G$ |
| $G(\lambda)$ | die Gruppe aller Bijektionen $f$ auf $\mathbb{R}$, sodass sowohl $f$ als auch $f^{-1}$ messbar und invariant bezüglich $\lambda$ sind |
| $T$ | die Gruppe aller Translationen |



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
TU WIEN Bibliothek Your knowledge hub

## Häufige Mengen

| | |
|---|---|
| $\mathbb{S}^{n-1}$ | die $n$-dimensionale Einheitssphäre |
| $\mathbb{B}$ | die abgeschlossene Einheitskugel |
| $J$ | das halboffene Einheitsquadrat $[0,1) \times [0,1)$ |
| $\mathrm{gr}(f)$ | der gefüllte Graph $\{(x,y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$ |

## Maß Notation

| | |
|---|---|
| $\mathcal{L}$ | die Menge der Lebesgue-messbaren Mengen |
| $\lambda$ | das Lebesgue Maß |

## Algebra Notation

| | |
|---|---|
| $F(\sigma,\tau)$ | die freie Gruppe vom Rang 2 |
| $F_\sigma, F_{\sigma^{-1}}$ | die Wörter die mit $\sigma$ bzw. $\sigma^{-1}$ beginnen |
| $F_\tau, F_{\tau^{-1}}$ | die Wörter die mit $\tau$ bzw. $\tau^{-1}$ beginnen |
| $\sigma$ | die erzeugende Rotation entlang der $z$-Achse, aufgefasst als Buchstabe der freien Gruppe vom Rang 2 |
| $\tau$ | die erzeugende Rotation entlang der $x$-Achse, aufgefasst als Buchstabe der freien Gruppe vom Rang 2 |
| $N \lhd G$ | die Untegruppe $N$ ist Normalteiler von $G$ |
| $G/N$ | die Faktorgruppe von $G$ nach Normalteiler $N$ |

## Besondere Funktionen

| | |
|---|---|
| $\ell(x)$ | $\max(2, \ln x)$ |
| $\mathrm{frac}(x)$ | die Bruchteilfunktion $x - \lfloor x \rfloor$ |
| $\langle x \rangle$ | $\min(\mathrm{frac}(x), 1 - \mathrm{frac}(x))$ |
| $D(A,H)$ | die Diskrepanz $\left\lvert \frac{\lvert A \cap H \rvert}{\lvert A \rvert} - \lambda(H) \right\rvert$ |
| $\Psi$ | eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $[0,+\infty)$, sodass $\sum_{k=0}^{\infty} \Psi(2^k)/2^k$ konvergiert |



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.
Your knowledge hub

# Literaturverzeichnis


[Ano13] Anonym. How do i prove that $\frac{1}{\pi}\arccos(1/3)$ is irrational?, 2013. `https://math.stackexchange.com/questions/398687/how-do-i-prove-that-frac1-pi-arccos1-3-is-irrational` [Zuletzt zugegriffen: (5. Feber 2024)].

[GW22] Martin Goldstern and Reinhard Winkler. *Algebra*. TU Wien, 2022.

[Hav08] Hans Havlicek. *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*. Heldermann Verlag, 2008.

[Kal15] Michael Kaltenbäck. *Fundament Analysis*. Heldermann Verlag, 2015.

[Kra] Jürg Kramer. Ist die Quadratur des Kreises möglich?

[Pet06] Andrea Peter. Bachelorarbeit zum Thema: Das Banach-Tarski-Paradoxon. 2006.

[RF10] Halsey Royden and Patrick Michael Fitzpatrick. *Real analysis*. China Machine Press, 2010.

[Run04] Volker Runde. *Lectures on amenability*. Springer, 2004.

[TW16] Grzegorz Tomkowicz and Stan Wagon. *The Banach–Tarski Paradox*, volume 163. Cambridge University Press, 2016.

[Wina] Paul Winkler. Seminararbeit: Das Paradoxon von Banach-Tarski.

[Winb] Reinhard Winkler. Wie macht man 2 aus 1? Das Paradoxon von Banach-Tarski.

[14] Anthony OR . Geogebra: Chocolate Bar Paradox, 2014. `https://www.geogebra.org/classic/nVVDmJpG` [Zuletzt zugegriffen: (21. März 2024)].



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.