



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

D I P L O M A R B E I T

Nichtlineare Dividendenbarrieren

ausgeführt am

Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
TU Wien

unter der Anleitung von

**Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Peter Grandits**

durch

Claudia Kebsak

Matrikelnummer: 11810851

Wien, am 1. August 2025

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird die Ausschüttung von Dividenden in verschiedenen Modellvarianten untersucht. Der zugrunde liegende Reserveprozess wird durch ein stochastisches Diffusionsgleichungssystem beschrieben.

Ziel ist es, die Dividendenzahlungen von der Entwicklung der Reserve eines Unternehmens abhängig zu machen. Es wird einerseits ein Modell mit beschränkter Auszahlungsrate, als auch ein Modell mit unbeschränkter Auszahlungsrate betrachtet. In beiden Fällen wird das mathematische Kontrollproblem mit einer Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung beschrieben. In beiden Modellen zeigt sich, dass eine konstante Dividendenbarriere, die a-priori eingeführt wird, verwendet wird.

Im zweiten Teil der Arbeit wird ein diskretes Modell mit nichtlinearen Dividendenbarrieren untersucht. Für die numerische Simulation der zu erwartenden Dividendenzahlungen, werden zwei Algorithmen eingeführt: der doppelt-rekursive Algorithmus und der rekursive Algorithmus. Die Simulation durch den rekursiven Algorithmus wird schließlich mit der klassischen Monte Carlo Simulation verglichen. Dabei wird insbesondere der Einsatz von Folgen mit kleiner Diskrepanz analysiert. Abschließend werden die simulierten zu erwartenden Dividendenauszahlungen für feste Parameter präsentiert.

Abstract

This paper analyzes the distribution of various models of dividend payments. The underlying reserve process is described by a stochastic differential equation system. The aim is to make dividend payments dependent on the development of the reserve of a company.

We first study a model with a limited payout rate, followed by a model with unlimited payout rates. In both cases, the mathematical control problem is described by a Hamilton-Jacobi-Bellman equation. It will be shown, that a constant dividend barrier, which is introduced a priori, will optimize the control problem.

In the second part of the thesis, a discrete model with nonlinear dividend barriers will be examined. Two algorithms are introduced for the numerical simulation of expected dividend payments: the double-recursive algorithm and the recursive algorithm. The simulation using the recursive algorithm is then compared with the classic Monte Carlo simulation. In particular, the use of sequences with small discrepancies is analyzed. Finally, the simulated expected dividend payments for fixed parameters are presented.

Danksagung

Ich möchte mich bei Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits für die Betreuung dieser Arbeit und die konstruktive Unterstützung bedanken. Mein besonderer Dank gilt zudem meiner Familie für ihre beständige Unterstützung während meines Studiums.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 1. August 2025

Claudia Kebsak

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundbegriffe und Theorie	2
2.1	Risikothorie	2
2.1.1	Kollektives Modell	2
2.1.2	Ruintheorie	2
2.2	Benötigte Theorie	3
2.2.1	Allgemeine stochastische Analysis	4
2.2.2	Summen von Zufallsvariablen	6
2.2.3	Fixpunktsatz von Banach	7
2.3	Einführung in die Diskrepanz von Folgen	8
2.3.1	Einführung in Monte Carlo und quasi Monte Carlo Methoden	8
2.3.2	Diskrepanz	8
2.3.3	Fehlerschranken der quasi Monte Carlo Methode	10
2.3.4	Punktemengen und Folgen mit kleiner Diskrepanz	11
3	Kontrollierte Diffusions Modelle für optimale Dividenden Zahlungen	15
3.1	Einführung des Modells	15
3.2	Beschränkte Dividendenzahlungen	16
3.3	Unbeschränkte Dividendenraten	20
4	Risikothorie mit nichtlinearen Dividendenbarrieren	25
4.1	Grundlagen der Modelle	25
4.2	Barrieremodelle	26
4.3	Lösungstechniken	28
4.3.1	Der doppelt-rekursive Algorithmus	29
4.3.2	Der rekursive Algorithmus	31
4.3.3	Monte Carlo Simulation	31
4.3.4	Der quasi Monte Carlo Ansatz	33
4.3.5	Ergebnisse	35
5	Fazit	39
	Literaturverzeichnis	40

1 Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit verschiedenen Varianten, wie Dividenden ausgeschüttet werden können. Wir betrachten die Entwicklung eines Reserveprozesses, der durch ein stochastisches Differentialgleichungssystem modelliert wird. Ziel ist es, die Auszahlung der Dividenden zu maximieren und von der Entwicklung der Reserve abhängig zu machen.

Zu Beginn analysieren wir ein Modell mit beschränkter Auszahlungsrate. Die Ausschüttung der Dividenden hängt dabei vom aktuellen Stand der Reserve ab und ist nach oben beschränkt. Das zweite Modell erlaubt im Gegensatz dazu unbeschränkte Dividendenzahlungen. Hier wird der Ausschüttungsprozess nicht durch eine Rate, sondern durch einen kumulierten Prozess beschrieben, welcher auch Sprünge enthalten kann. In beiden Fällen untersuchen wir die Entwicklung der Reserve im Zeitverlauf.

Das zugrunde liegende mathematische Kontrollproblem wird in beiden Modellen mithilfe einer Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung formuliert. Der zu kontrollierende Prozess ist dabei die Auszahlungsrate. Es zeigt sich, dass in beiden Fällen eine Barrierestrategie verwendet wird: Es wird a priori ein konstantes Barriereniveau m definiert. Dabei wird alles von der Reserve ausbezahlt, das die Barriere m überschreitet. Ist die Reserve unter m , werden keine Dividenden ausbezahlt.

Da die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Unternehmens bei einer konstanten Dividendenbarriere langfristig gegen null geht, betrachten wir im zweiten Teil der Arbeit nichtlineare Dividendenbarrieren. Diese ermöglichen eine flexiblere Auszahlungsstruktur, die sich an den Verlauf der Reserve anpasst. Hier werden zwei Algorithmen eingeführt, der doppelt-rekursive Algorithmus und der rekursive Algorithmus, mithilfe derer wir die Entwicklung des Reserveprozesses numerisch und in diskreter Zeit darstellen können. Wir gehen genauer auf die Konstruktion der Simulation ein und vergleichen die klassische Monte Carlo Methode, bei der Schadenseintritte durch gleichverteilte Zufallszahlen modelliert werden, mit den Ergebnissen des rekursiven Algorithmus. Der rekursive Algorithmus basiert im Vergleich nicht auf gleichverteilten Schadenseintritten, sondern wird mit Folgen mit kleiner Diskrepanz approximiert. Diese Folgen haben die Eigenschaft, dass sie den Approximationsfehler minimieren. Ziel des rekursiven Algorithmus ist es, die Laufzeit des implementierten Programmes deutlich zu reduzieren, im Vergleich zur Monte Carlo Methode.

Am Ende der Arbeit werden die Ergebnisse der beiden Implementationen präsentiert, welche die zu erwartenden Dividendenzahlungen in Abhängigkeit vom gewählten Barrierenverlauf simulieren.

2 Grundbegriffe und Theorie

Wir beginnen damit, die benötigte Theorie und Grundbegriffe, die wir für diese Arbeit benötigen, einzuführen.

2.1 Risikotheorie

Für die Grundlagen der Risikotheorie beziehen wir uns auf das Buch von Gerber [4].

2.1.1 Kollektives Modell

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Optimierung von Dividendenzahlungen innerhalb eines Risikomodells. Wir befinden uns im sogenannten kollektiven Modell.

Im kollektiven Modell betrachten wir nicht jede Polizzae einzeln, sondern die Menge an anonymen Polizzen zusammen. Wir nehmen an, dass der Gesamtwert der Schäden innerhalb eines Jahres als Zufallssumme dargestellt werden kann. In den häufigsten Fällen definieren wir den Gesamtwert aller Schäden als zusammengesetzte Poissonverteilung.

Definition 2.1 (zusammengesetzte Poissonverteilung). *Wir bezeichnen mit $S(t)$ den Gesamtwert aller Schäden bis zum Zeitpunkt t :*

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} X_i. \quad (2.1)$$

Wir bezeichnen mit N_t die Anzahl der Schäden bis zum Zeitpunkt t . Die Anzahl der Schäden ist poissonverteilt mit der Intensität λ , die die erwartete Anzahl der Schäden beschreibt. Die Schadenhöhe des i -ten Schadens bezeichnen wir mit X_i . Die Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Zufallsvariablen ist iid. (unabhängig und identisch verteilt) mit der Verteilungsfunktion F_X . Wir nehmen an, dass die X_i unabhängig von N für alle $i \in I$ sind. Es gilt die Konvention, wenn $N = 0$ ist, dann ist $S = 0$. Das heißt, wenn kein Schaden eintritt, wir eine Schadenssumme von 0 haben. Die Schadenssumme selbst ist dabei eine Zufallssumme wie in Abschnitt 2.2.2.

2.1.2 Ruintheorie

Um Dividenden auszahlen zu können, braucht das Unternehmen eine gewisse Menge an Reserven. In der Ruintheorie beschäftigen wir uns mit der Reserve eines Unternehmens. Wir untersuchen, wie sich die Reserve entwickelt und wann diese negativ wird und somit Ruin eintritt. Konkret betrachten wir hier das Cramer-Lundberg Modell:

Sei R_t die Reserve eines Unternehmens zum Zeitpunkt t . Wir definieren es als

$$R_t = x + ct - S_t$$

mit dem Startkapital $x = R_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Konstante c beschreibt die eingenommenen Prämien innerhalb einer Zeiteinheit. Somit ist ct die Menge aller eingenommenen Prämien im Zeitraum $[0, t]$. Der Gesamtwert aller Schäden bis zum Zeitpunkt t wird mit S_t bezeichnet und ist zusammengesetzt poissonverteilt wie in (2.1). Die Annahmen dieses Modells sind, dass der Erwartungswert der Einzelschadenshöhen X_i positiv ist, $\mathbb{E}[X_i] = \mu > 0$, und die Nettoprofitbedingung $c > \lambda\mu$, gilt.

Definition 2.2 (Ruinzeitpunkt). *Der Ruinzeitpunkt ist definiert als Stoppzeit, siehe 2.11,*

$$\tau := \inf\{t > 0 : R_t < 0\}$$

mit $\inf \emptyset = \infty$.

Definition 2.3 (Ruinwahrscheinlichkeit). *Die totale Ruinwahrscheinlichkeit eines Unternehmens ist definiert als*

$$\Psi(x) = \mathbb{P}[\tau < \infty]$$

und die Ruinwahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt t als

$$\Psi(x, t) = \mathbb{P}[\tau < t],$$

mit dem Startkapital x .

Definition 2.4 (Überlebenswahrscheinlichkeit). *Die totale Überlebenswahrscheinlichkeit eines Unternehmens ist definiert als*

$$\Phi(x) = 1 - \Psi(x)$$

und die Überlebenswahrscheinlichkeit bis zum Zeitpunkt t als

$$\Phi(x, t) = 1 - \Psi(x, t),$$

mit dem Startkapital x .

Die Nettoprofitbedingung stellt sicher, dass die Reserve R_t gegen Unendlich konvergiert für $t \rightarrow \infty$. Die Frage, die wir uns dabei stellen, ist, ob sie dabei immer positiv bleibt.

2.2 Benötigte Theorie

In diesem Abschnitt nennen wir die wichtigsten Definitionen der stochastischen Analysis. Wir erläutern den Aufbau von Zufallssummen und erwähnen schließlich den Fixpunktsatz von Banach.

2.2.1 Allgemeine stochastische Analysis

Da wir für das Risikomodell mit stochastischen Prozessen arbeiten, erwähnen wir in diesem Abschnitt die wichtigsten Definitionen der stochastischen Analysis. Diese haben wir aus dem Buch von Baldi [3].

Definition 2.5 (Filtration). *Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist eine wachsende Familie von Subsigmaalgebren von $\mathcal{F}$, für die gilt*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \forall s \leq t.$$

Definition 2.6 (adaptiert). *Eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in T}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Werten im Maßraum $(E, \mathcal{E})$ ist adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, wenn für alle $t \in T$ gilt, dass X_t messbar bezüglich $\mathcal{F}_t$ ist.*

Definition 2.7 (stochastischer Prozess). *Ein stochastischer Prozess ist ein Objekt der Form*

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$$

wobei,

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum,
- T eine Teilmenge von $\mathbb{R}^+$,
- $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ eine Filtration und
- $(X_t)_{t \in T}$ eine Familie von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Werten im Maßraum $(E, \mathcal{E})$ und adaptiert bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ ist.

Definition 2.8 (messbar). *Ein stochastischer Prozess X heißt messbar, wenn die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ für alle $u \in T$ messbar bezüglich*

$$(T \times \Omega, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E))$$

ist, mit der Borelsigmaalgebra $\mathcal{B}(E)$ von E , der Borelsigmaalgebra $\mathcal{B}(T)$ von T und der Sigmaalgebra $\mathcal{F}$ von Ω .

Definition 2.9 (progressiv messbar). *Ein stochastischer Prozess X heißt progressiv messbar, wenn die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ messbar bezüglich*

$$([0, u] \times \Omega, \mathcal{B}(T[0, u]) \otimes \mathcal{F}_u) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E))$$

ist.

Definition 2.10 (Brownsche Bewegung). *Ein Prozess $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathbb{R}$ heißt Brownsche Bewegung, wenn folgende Kriterien erfüllt sind*

- (i) $B_0 = 0$ f.s.
- (ii) für alle $0 \leq s \leq t$ ist die Zufallsvariable $B_t - B_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$

(iii) für alle $0 \leq s \leq t$ ist $B_t - B_s$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$.

Definition 2.11 (Stoppzeit). Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ eine Filtration. Eine Zufallsvariable $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{+\infty\}$ heißt Stoppzeit, wenn für alle $t \in T$ gilt: $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Definition 2.12 (Martingal). Ein Prozess $M = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (M_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathbb{R}$ heißt Martingal, wenn folgende Kriterien erfüllt sind

$$(i) \mathbb{E}[|M_t|] < \infty \quad \forall t \in T,$$

$$(ii) \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad \forall s \leq t.$$

Gilt $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s$, dann heißt M Supermartingal.

Gilt $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$, dann heißt M Submartingal.

Wir bezeichnen mit $M_{loc}^p([a, b])$ den Raum aller Äquivalenzklassen von reellen, progressiv messbaren Prozessen $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$, sodass

$$\int_a^b |X_s|^p ds < +\infty \quad f.s.$$

Hier sprechen wir von Äquivalenzklassen in dem Sinne, dass wir X und X' miteinander identifizieren, wenn sie ununterscheidbar sind, also

$$\int_a^b |X_s - X'_s|^p ds = 0 \quad f.s.$$

Definition 2.13 (Ito-Prozess). Sei X ein Prozess, sodass für jedes $0 \leq s \leq t \leq T$ gilt:

$$X_t - X_s = \int_s^t F_r dr + \int_s^t G_r dB_r,$$

wobei $F \in M_{loc}^1([0, T])$, $G_t \in M_{loc}^2([0, T])$ und B_t eine Brownsche Bewegung ist. In diesem Fall sagen wir, dass X die lokale stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = F_t dt + G_t dB_t$$

zulässt. Wir nennen einen Prozess, der das stochastische Differential zulässt einen Ito-Prozess.

Satz 2.14 (Ito Formel). Sei X ein Prozess mit dem stochastischen Differential

$$dX_t = F_t dt + G_t dB_t$$

und sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion in (x, t) , die einmal differezierbar in t und zweimal differezierbar in x ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} df(X_t, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)G_t^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)F_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)G_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)G_t dB_t. \end{aligned}$$

2.2.2 Summen von Zufallsvariablen

Da die Schäden in unserem Modell als Zufallssumme definiert sind, betrachten wir im folgenden Abschnitt die Summe von unabhängigen Zufallsvariablen und Zufallssummen [4]. Wir beginnen mit der Summe von unabhängigen Zufallsvariablen.

Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_X und F_Y . Wir definieren ihre Summe als $S = X + Y$. Seien $M_X(t)$, $M_Y(t)$ und $M_S(t)$ die zugehörigen momenterzeugenden Funktionen. Es gilt

$$M_S(t) = \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{tX} e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{tX}] \mathbb{E}[e^{tY}] = M_X(t) M_Y(t).$$

Die Verteilungsfunktion F_S von S ist als die Faltung der Verteilungsfunktionen von X und Y definiert

$$F_S(s) = F_X * F_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s - x) dF_X(x).$$

Die Dichtefunktion f_S von S wird analog als Faltung der Dichtefunktionen f_X und f_Y von X und Y definiert.

$$f_S(s) = f_X * f_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(s - x) f_X(x) dx.$$

Somit gilt für eine Familie $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$ von Zufallsvariablen, die iid. verteilt ist, mit gleicher Verteilungsfunktion F_X und Momenterzeugenden $M_X(t)$, dass die Verteilung ihrer Summe $S = \sum_{n=1}^N X_n$, die N -fache Faltung der Verteilungsfunktion F_X ist. Also gilt

$$F_S(t) = F_X^{*N}(t).$$

Gehen wir nun eine Schritt weiter und nehmen an, dass die Anzahl an Summanden der Summe S zufällig ist und führen damit die Zufallssumme ein.

Sei nun N eine nichtnegative Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$. Wir definieren die momenterzeugende Funktion von N als

$$M_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} p_n,$$

mit $p_n = \mathbb{P}[N = n]$ für $n = 0, 1, 2, \dots$.

Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von iid. Zufallsvariablen mit gleicher Verteilungsfunktion F_X und momenterzeugender Funktion $M_X(t)$. Wir nehmen an, dass X_n unabhängig von N ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren somit

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

mit der Konvention, dass $S = 0$, wenn $N = 0$ ist. Für die Verteilungsfunktion $F_S(s)$ und die momenterzeugenden Funktion $M_S(t)$ von S gilt

$$F_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_X^{*n}(s) p_n$$

$$M_S(t) = M_N(\log M_X(t)).$$

Weiters gelten für den Erwartungswert und die Varianz, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X] \\ \mathbb{V}[S] &= \mathbb{V}[N] \cdot \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{V}[X].\end{aligned}$$

Ein Beispiel für eine Zufallssumme ist die zusammengesetzte Poissonverteilung, die in unserem Risikomodell zur Anwendung kommt. In diesem Fall ist die Zufallsvariable N poissonverteilt mit dem Parameter λ . Wie zuvor haben wir eine Familie von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die iid. ist, und X_n unabhängig von N ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich die Zufallssumme

$$S = \sum_{n=0}^N X_n$$

mit der Verteilungsfunktion

$$F_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_X^{*n}(s) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

Mithilfe der momenterzeugenden Funktion $M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ ergibt sich folgende Formel

$$M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}.$$

2.2.3 Fixpunktsatz von Banach

Um später in dieser Arbeit die Existenz und Eindeutigkeit der optimalen Strategie der Dividendenzahlungen zu beweisen, brauchen wir den Fixpunktsatz von Banach [5]. Dafür geben wir zuerst die Definition eines Banachraums bekannt.

Definition 2.15 (Banachraum). *Ein Raum $(B, \|\cdot\|)$ heißt Banachraum, wenn folgende Axiome erfüllt sind*

- (i) *B ist ein linearer Vektorraum, also abgeschlossen bezüglich der Addition von Vektoren und der Skalarmultiplikation.*
- (ii) *B ist ein normierter Vektorraum mit der Norm $\|\cdot\|$.*
- (iii) *B ist vollständig bezüglich der Norm $\|\cdot\|$. Das heißt, wenn wir eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B haben, sodass $\lim_{r,p \rightarrow \infty} \|X_r - X_p\| = 0$ ist, dann existiert ein Element $X \in B$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - X_n\| = 0$.*

Satz 2.16. *Sei B ein Banachraum. Wenn*

- (i) *$T : B \rightarrow B$ ein stetiger Operator ist und*
- (ii) *ein $0 < M < 1$ existiert, sodass für jedes $x_1, x_2 \in B$ gilt, dass $\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$ gilt,*

dann existiert ein eindeutiges Element x , sodass $x = T(x)$.

2.3 Einführung in die Diskrepanz von Folgen

Da wir die Optimierung der Dividendenzahlungen später auch simulieren wollen, benötigen wir die Theorie der Diskrepanz von Folgen, um den Fehler unserer Approximation zu minimieren. Der gesamte folgende Abschnitt basiert auf dem Buch von Niederreiter [6].

2.3.1 Einführung in Monte Carlo und quasi Monte Carlo Methoden

Ziel der Monte Carlo und quasi Monte Carlo Methoden ist es

$$\int_{[0,1]^s} f(u) du \quad \text{mit} \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n)$$

zu approximieren.

Verwenden wir Monte Carlo Methoden, dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Realisationen einer iid. Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen in $[0, 1]^s$.

Wird die quasi Monte Carlo Methode angewandt, dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine deterministische Folge. Ein Vorteil der definierten Folge ist, dass sie gleichverteilt über $[0, 1]^s$ ist. Ein Maß der Gleichverteilung einer solchen Folge ist die Diskrepanz, die wir im folgenden näher betrachten werden. Die Diskrepanz einer Folge ist vor allem für die Fehlerschranken der quasi Monte Carlo Methode interessant.

2.3.2 Diskrepanz

Von nun an normalisieren wir den Integrationsbereich auf den s -dimensionalen Würfel $\bar{I}^s = [0, 1]^s$. Für einen Integranden f wenden wir die quasi Monte Carlo Methode an,

$$\int_{[0,1]^s} f(u) du \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n), \quad (2.2)$$

mit $x_1, \dots, x_N \in \bar{I}^s$.

Im folgenden diskutieren wir, wie sich die Punktmenge $x_1, \dots, x_N$ in einem idealen Modell entwickelt und leiten daraus nützliche Annahmen her.

In einem idealen Modell können wir die Punktmenge $x_1, \dots, x_N$ durch eine unendliche Folge $x_1, x_2, \dots \in \bar{I}^s$ ersetzen. Wir fordern für diese Folge, dass sie folgende Gleichung erfüllt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_{\bar{I}^s} f(u) du, \quad (2.3)$$

für zulässige Integranden f . Ein Beispiel für zulässige Integranden ist die Klasse aller stetigen Funktionen auf $\bar{I}^s$. Die Bedingung (2.3) impliziert, dass die Folge $x_1, x_2, \dots$ gleichverteilt in $\bar{I}^s$ ist. Äquivalent dazu gilt:

Eine Folge $x_1, x_2, \dots$ ist gleichverteilt auf $\bar{I}^s$, wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N c_J(x_n) = \lambda_s(J),$$

für alle Quader $J \in \bar{I}^s$. Dabei beschreibt c_J die charakteristische Funktion von J und λ_s das s -dimensionale Lebesguemaß. Ist eine Folge $x_1, x_2, \dots$ gleichverteilt auf $\bar{I}^s$, dann gilt (2.2) sogar für alle Riemann integrierbaren Funktionen auf $\bar{I}^s$.

Mit Hilfe dieses Ansatzes liegt nun nahe, die Punktmenge $x_1, \dots, x_N$ gleichverteilt auf $\bar{I}^s$ zu wählen.

Sei P die Punktmenge $x_1, \dots, x_N \in \bar{I}^s$. Für eine beliebige Teilmenge $B \subset \bar{I}^s$ definieren wir den Operator A als

$$A(B; P) = \sum_{n=1}^N c_B(x_n), \quad (2.4)$$

mit c_B als charakteristische Funktion von B . Somit beschreibt $A(B; P)$ die Anzahl aller Punkte $x_n, 1 \leq n \leq N$, für die gilt, dass $x_n \in B$.

Definition 2.17 (Diskrepanz). Sei $\mathcal{B}$ eine nichtleere Familie von lebesgue messbaren Teilmengen von $\bar{I}^s$. Dann heißt $D_N(\mathcal{B}; P)$ die Diskrepanz der Punktmenge P mit

$$D_N(\mathcal{B}; P) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \left| \frac{A(B; P)}{N} - \lambda_s(B) \right|.$$

Es gilt: $0 \leq D_N(\mathcal{B}; P) \leq 1$.

Für bestimmte Mengen $\mathcal{B}$ gibt es zwei wichtige Konzepte der Diskrepanz. Dafür setzen wir im folgenden $I^s = [0, 1)^s$.

Definition 2.18 (Stern-Diskrepanz). Die Stern-Diskrepanz $D_N^*(P) = D_N^*(x_1, \dots, x_N)$ einer Punktmenge P ist definiert als

$$D_N^*(P) = D_N(\mathcal{J}^*; P),$$

wobei $\mathcal{J}^*$ die Familie aller Teilmengen von I^s der Form $\Pi_{i=1}^s [0, u_i]$ ist.

Definition 2.19 (extreme-Diskrepanz). Die extreme-Diskrepanz $D_N(P) = D_N(x_1, \dots, x_N)$ einer Punktmenge P ist definiert als

$$D_N(P) = D_N(\mathcal{J}; P),$$

wobei $\mathcal{J}$ die Familie aller Teilmengen von I^s der Form $\Pi_{i=1}^s [u_i, v_i]$ ist.

Bemerkung 2.20. Sind die Punkte der Menge P in I^s , dann gilt

$$\begin{aligned} D_N^*(P) &= D_N(\mathcal{J}_c^*; P) \\ D_N(P) &= D_N(\mathcal{J}_c; P), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{J}_c^*$ die Familie aller Teilintervalle von I^s der Form $\Pi_{i=1}^s [0, u_i]$, und $\mathcal{J}_c$ die Familie aller Teilintervalle von I^s der Form $\Pi_{i=1}^s [u_i, v_i]$ ist.

Proposition 2.21. Für jede Punktmenge P mit Punkten in $\bar{I}^s$ gilt

$$D_N^*(P) \leq D_N(P) \leq 2^s D_N^*(P).$$

Satz 2.22. Es gilt, wenn $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq 1$ ist, dass

$$D_N^*(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2N} + \max_{1 \leq n \leq N} \left| x_n - \frac{2n-1}{2N} \right|.$$

Satz 2.23. Es gilt, wenn $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq 1$ ist, dass

$$D_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N} + \max_{1 \leq n \leq N} \left(\frac{n}{N} - x_n \right) - \min_{1 \leq n \leq N} \left(\frac{n}{N} - x_n \right).$$

2.3.3 Fehlerschranken der quasi Monte Carlo Methode

Eine klassische Fehlerschranke für die quasi Monte Carlo Methode ist die Koksma-Hlawka Ungleichung.

Satz 2.24. Wenn f von beschränkter Variation $V(f)$ auf $[0, 1]$ ist, dann gilt für jede Punktemenge $x_1, \dots, x_N \in [0, 1]$ folgende Ungleichung

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_0^1 f(u) du \right| \leq V(f) D_N^*(x_1, \dots, x_N).$$

Um diese Ungleichung auf den multidimensionalen Fall auszuweiten, führen wir die totale Variation für Funktionen mit mehreren Variablen ein.

Für eine Funktion f auf $\bar{I}^s$ und einer Teilmenge $\mathcal{J}$ von $\bar{I}^s$ sei $\Delta(f; \mathcal{J})$ die alternierende Summe der Werte von f ausgewertet an den Punkten enthalten in $\mathcal{J}$. Im Fall $s = 2$ gilt somit für $\mathcal{J} = [a, b] \times [c, d]$, dass

$$\Delta(f; \mathcal{J}) = f(b, d) - f(a, d) + f(a, c) - f(b, c).$$

Definition 2.25 (Variation im Sinne von Vitali). Die Variation von f auf $\bar{I}^s$ im Sinne von Vitali ist definiert als

$$V^{(s)} = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{\mathcal{J} \in \mathcal{P}} |\Delta(f; \mathcal{J})|,$$

wobei das Supremum über alle Partitionen $\mathcal{P}$ von $\bar{I}^s$ in Teilintervallen gerechnet wird.

Folgende intuitivere Formel ist äquivalent zu der eben genannten Definition und gilt, wenn alle partiellen Ableitungen stetig auf $\bar{I}^s$ sind

$$V^{(s)}(f) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \frac{\partial^s f}{\partial u_1 \dots \partial u_s} \right| du_1 \dots du_s.$$

Definition 2.26 (Variation im Sinne von Hardy und Krause). Sei für $1 \leq k \leq s$ und $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s$, $V^{(k)}(f; i_1, \dots, i_k)$ die Variation im Sinne von Vitali, wobei f beschränkt auf das k -dimensionale Simplex $\{(u_1, \dots, u_k) \in \bar{I}^s : u_j = 1 \text{ für } j \neq i_1, \dots, i_k\}$ ist. Dann heißt

$$V(f) = \sum_{k=1}^s \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} V^{(k)}(f; i_1, \dots, i_k)$$

die Variation von f auf $\bar{I}^s$ im Sinne von Hardy und Krause. Eine Funktion f ist von beschränkter Variation in diesem Sinne, wenn $V(f)$ endlich ist.

Mithilfe dieser Definition können wir die Koksma-Hlawka Ungleichung definieren. Wir setzen dafür $I^s = [0, 1]^s$.

Satz 2.27 (Koksma-Hlawka Ungleichung). *Wenn f auf $\bar{I}^s$ von beschränkter Variation im Sinne von Hardy und Krause ist, dann gilt für alle $x_1, \dots, x_N \in I^s$, dass*

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_{\bar{I}^s} f(u) du \right| \leq V(f) D_N^*(x_1, \dots, x_N).$$

2.3.4 Punktemengen und Folgen mit kleiner Diskrepanz

Die eben beschriebene Fehleranalyse der quasi Monte Carlo Approximation hat uns gezeigt, dass wir kleine Fehler erzielen können, wenn wir Punktemengen mit kleiner Stern-Diskrepanz oder extremer-Diskrepanz haben. Das gilt für den Integrationsbereich $\bar{I}^s$, aber auch für alle Teilmengen von $\bar{I}^s$.

Um die Anzahl N an Punkten variabel zu halten, verwenden wir unendliche Folgen und nehmen die ersten N Punkte der Folge. So können wir N erhöhen, ohne die Daten der vorgehenden Berechnungen mit geringerem N zu verlieren.

Im folgenden diskutieren wir eine klassische Methode, um Punktemengen und Folgen mit kleiner Diskrepanz zu konstruieren. Im eindimensionalen Fall ist es leicht, das Minimum der Stern-Diskrepanz $D_N^*(x_1, \dots, x_N)$ und der Diskrepanz $D_N(x_1, \dots, x_N)$ zu bestimmen, wenn N fest ist. Aus Satz 2.22 folgt, dass $D_N^*(x_1, \dots, x_N) \geq 1/(2N)$ gilt. Es gilt dabei Gleichheit, wenn $x_n = (2n - 1)/(2N)$ ist, für $1 \leq n \leq N$. Die quasi Monte Carlo Approximation

$$\int_0^1 f(u) du \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{2n-1}{2N}\right)$$

mit diesen Punkten ist eine klassische Integrationsregel, die wir die N -panel Mittelpunktsregel für das Intervall $[0, 1]$ nennen. Analog dazu zeigt uns der Satz 2.23, dass $D_N(x_1, \dots, x_N) \geq 1/N$ gilt. In diesem Fall gilt Gleichheit, wenn $x_n = (2n - 1)/(2N)$ ist, für $1 \leq n \leq N$. Daraus folgt also, dass die Diskrepanz $D_N(P) = \mathcal{O}(N^{-1})$ ist, für eine Punktemenge P mit Elementen aus $[0, 1]$. Es existiert jedoch keine Folge S mit Elementen aus $[0, 1]$, sodass $D_N(S) = \mathcal{O}(N^{-1})$ für alle $N \geq 1$ gilt. Allerdings wurde gezeigt, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodass für jede Folge S mit Elementen aus $[0, 1]$ gilt

$$D_N(S) \geq \mathcal{O}(cN^{-1} \log N),$$

für unendlich viele N . Der optimale Wert für c ist $c = 0,12$. Demnach gilt aufgrund Proposition 2.21, dass

$$D_N^*(S) \geq 0,06N^{-1} \log N,$$

für unendlich viele N . Zusammenfassend gilt für Folgen mit kleiner Diskrepanz im eindimensionalen Fall, dass wir keine geringere Sterndiskrepanz bekommen als

$$D_N^*(S) = \mathcal{O}(N^{-1} \log N),$$

für alle $N \geq 2$.

Es gibt verschiedenste Methoden, um Folgen, mit Hilfe derer wir diesen Aufwand erreichen und damit minimieren können, zu konstruieren. Wir betrachten eine Konstruktion im eindimensionalen Fall, die wir dann auf den mehrdimensionalen Fall erweitern können.

Für eine natürliche Zahl $b \geq 2$, setzen wir $\mathbb{Z}_b := \{0, 1, \dots, b-1\}$. Die Menge $\mathbb{Z}_b$ beschreibt das kleinste Residuen-System modulo b . Jede natürliche Zahl $n \geq 0$ hat eine eindeutige Zifferndarstellung

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(n) b^j$$

mit der Basis b , wobei $a_j(n) \in \mathbb{Z}_b$ ist für alle $j \geq 0$. Es gilt, dass $a_j(n) = 0$ ist, für alle j , die groß genug sind. Damit ist die Summe eine endliche Summe.

Definition 2.28 (radikale Umkehrfunktion). Für eine natürliche Zahl $b \geq 2$ heißt die Funktion ϕ_b die radikale Umkehrfunktion mit Basis b , wenn

$$\phi_b(n) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(n) b^{-j-1}.$$

Beispiel 2.29. Sei $b = 2$ unsere Basis. Daraus folgt, dass $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ ist. Wir wollen nun die Zahl $n = 10$ in ihrer eindeutigen Zifferndarstellung mit unserer Basis 2 darstellen. Wir setzen

$$\begin{aligned} a_0(10) &= 0, & a_1(10) &= 1, & a_2(10) &= 0 \\ a_3(10) &= 1, & a_j(10) &= 0 \quad \forall j \geq 4, \end{aligned}$$

dann können wir 10 schreiben als

$$10 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(10) \cdot 2^j.$$

Die radikale Umkehrfunktion ist demnach

$$\begin{aligned} \phi(10) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j(10) \cdot 2^{-j-1} = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125 \end{aligned}$$

für alle $n \geq 0$. Die natürliche Zahl n ist dabei in ihrer Zifferndarstellung mit Basis b gegeben. Es gilt, dass $\phi_b(n) \in I = [0, 1)$ für alle $n \geq 0$ ist.

Im folgenden werden wir die Folgeglieder der Folgen mit kleiner Diskrepanz mit $n = 0, 1, 2, \dots$ indizieren. Daher schreiben wir von nun an

$$D_N(S) = D_N(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$$

für die Diskrepanz der ersten N Elemente der Folge S . Analog schreiben wir auch die Stern-Diskrepanz.

Definition 2.30 (van der Corput Folge). Für eine natürliche Zahl $b \geq 2$ nennen wir die Folge $x_0, x_1, \dots$ van der Corput Folge mit Basis b , wenn $x_n = \phi_b(n)$ für alle $n \geq 0$ gilt.

Ist S_b eine van der Corput Folge mit Basis b , dann gilt für alle $N \geq 2$, dass $D_N^*(S_b) = \mathcal{O}(N^{-1} \log N)$ ist, mit einer Konstanten, die nur von b abhängt. Das folgt aus Satz 2.33, den wir nun im mehrdimensionalen Fall einführen werden. Wir erweitern die van der Corput Folge auf höhere Dimensionen und bekommen als Resultat die Halton Folgen.

Definition 2.31 (Halton Folge). Seien nun für die gegebene Dimension $s \geq 1$, $b_1, \dots, b_s$ natürliche Zahlen größer gleich 2. Mithilfe der radikalen Umkehrfunktion ϕ_b definieren wir die Halton Folge mit der Basis $b_1, \dots, b_s$ als die Folge $x_0, x_1, \dots$ mit

$$x_n = (\phi_{b_1}(n), \dots, \phi_{b_s}(n)) \in I^s$$

für alle $n \geq 0$. Für $s = 1$ haben wir die van der Corput Folge.

Beispiel 2.32. Wir berechnen die ersten 4 Folgenglieder der van der Corput Folge mit der Basis $b = 2$, zur besseren Veranschaulichung.

$$\begin{aligned} 0 &= [0]_2 &\rightarrow a_j(0) &= 0 &\quad \forall j \geq 0 \\ 1 &= [1]_2 &\rightarrow a_0(1) &= 1, \quad a_j(1) &= 0 &\quad \forall j \geq 1 \\ 2 &= [10]_2 &\rightarrow a_0(2) &= 0, \quad a_1(2) &= 1, \quad a_j(2) &= 0 &\quad \forall j \geq 2 \\ 3 &= [11]_2 &\rightarrow a_0(3) &= 1, \quad a_1(3) &= 1, \quad a_j(3) &= 0 &\quad \forall j \geq 2 \\ 4 &= [100]_2 &\rightarrow a_0(4) &= 0, \quad a_1(4) &= 0, \quad a_2(4) &= 1, \quad a_j(4) &= 0 &\quad \forall j \geq 3. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} x_0 &= \phi_2(0) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(0) 2^{-j-1} = 0 \\ x_1 &= \phi_2(1) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(1) 2^{-j-1} = 1 \cdot 2^{-1} = 0,5 \\ x_2 &= \phi_2(2) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(2) 2^{-j-1} = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 0,25 \\ x_3 &= \phi_2(3) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(3) 2^{-j-1} = 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-2} = 0,125. \end{aligned}$$

In diesem Fall haben wir $N = 3$ und für die Stern-Diskrepanz der van der Corput Folge S_2

$$D_3^*(S_2) = \mathcal{O}(3^{-1} \log(3)).$$

Satz 2.33. Sei S eine Halton Folge, die paarweise verschiedene Primzahlen $b_1, \dots, b_s$ als Basis hat, dann gilt für alle $N \geq 1$, dass

$$D_N^*(S) < \frac{s}{N} + \frac{1}{N} \prod_{i=1}^s \left(\frac{b_i - 1}{2 \log b_i} \log N + \frac{b_i + 1}{2} \right).$$

Beispiel 2.34. Wir berechnen nun die ersten 4 Folgenglieder der Halton Folge $x_0, x_1, \dots$ mit der Basis $b_1 = 2$, $b_2 = 3$ und $b_3 = 5$:

$$x_0 = (\phi_2(0), \phi_3(0), \phi_5(0))$$

$$x_1 = (\phi_2(1), \phi_3(1), \phi_5(1))$$

$$x_2 = (\phi_2(2), \phi_3(2), \phi_5(2))$$

$$x_3 = (\phi_2(3), \phi_3(3), \phi_5(3)).$$

Wir wissen bereits die Werte bezüglich der Basis 2:

$$\phi_2(0) = 0; \phi_2(1) = 0, 5; \phi_2(2) = 0, 25; \phi_2(3) = 0.$$

Wir berechnen analog die Werte der radikalen Umkehrfunktion mit der Basis 3 und 5:

$$\begin{array}{ll} \phi_3(0) = 0 & \phi_5(0) = 0 \\ \phi_3(1) = 1 \cdot 3^{-1} = 0, 33 & \phi_5(1) = 1 \cdot 5^{-1} = 0, 2 \\ \phi_3(2) = 2 \cdot 3^{-1} = 0, 66 & \phi_5(2) = 2 \cdot 5^{-1} = 0, 4 \\ \phi_3(3) = 0 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} = 0, 11 & \phi_5(3) = 3 \cdot 5^{-1} = 0, 6. \end{array}$$

Damit hat unsere Halton Folge die Werte:

$$x_0 = (0; 0; 0)$$

$$x_1 = (0, 5; 0, 33; 0, 2)$$

$$x_2 = (0, 25; 0, 66; 0, 4)$$

$$x_3 = (0, 125; 0, 11; 0, 6).$$

3 Kontrollierte Diffusions Modelle für optimale Dividenden Zahlungen

3.1 Einführung des Modells

Wir wollen ein Problem mithilfe des kontrollierten Diffusions Modells formulieren und lösen. Die Idee ist, die Dividenden mit einer dynamischen Rate auszuzahlen. Die Rate hängt von der aktuellen Reserve ab. Wir wollen dabei eine gewisse Auszahlungsfunktion optimieren. Die Theorie aus diesem Kapitel basiert auf dem Paper von Assmussen und Taksar [2]. Zuerst betrachten wir den Fall, bei dem es keine Dividendenzahlungen gibt. Dabei entwickelt sich die Reserve $(r^{(0)}(t))_{t \geq 0}$ wie eine Brownsche Bewegung mit Drift μ , Varianz σ^2 und Absorption bei 0. Die Stoppzeit τ , siehe Definition (2.11), ist dabei der Absorptionszeitpunkt. Dieser definiert den Zeitpunkt, an dem Ruin eintritt. Die Reserve wird beschrieben mit

$$dr^{(0)}(t) = \mu dt + \sigma dW(t),$$

wobei $(W(t))_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung ist. Gehen wir von einer festen Dividendenrate a aus, beschreiben wir die Reserve mit

$$dr^{(a)}(t) = (\mu - a)dt + \sigma dW(t).$$

Im Dritten Fall beschreiben wir die Reserve mit einer dynamischen Dividendenrate $a(t)$, die zum Zeitpunkt t ausbezahlt wird:

$$dr(t) = (\mu - a(t))dt + \sigma dW(t).$$

Im folgenden definieren wir die mathematische Umgebung in der wir uns bewegen. Wir können nur auf die Informationen, die zum Zeitpunkt t verfügbar sind, zugreifen. Die Entscheidung darf also nicht von der Zukunft abhängen. Wir befinden uns im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, die die Information zum Zeitpunkt t enthält und der Standard Brownschen Bewegung $(W_t)_{t \geq 0}$ bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)$. Wir fordern, dass $a(t)$ adaptiert bezüglich $\mathcal{F}_t$ ist, also $a(t) \in \mathcal{F}_t$.

Definition 3.1 (Kontrollprozess). *Eine Familie von Zufallsvariablen $(a(t))_{t \geq 0}$ heißt Kontrollprozess, wenn*

$$a(t) \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0.$$

Der Prozess $a(\cdot)$ ist die Entscheidungsvariable des Kontrollproblems. Wir wollen also den Prozess bezüglich $a(\cdot)$ optimieren. Ziel ist es, den Erwartungswert der Zufallsvariablen $J_x(a(\cdot))$ zu maximieren:

$$V(x) = \sup_{a(\cdot)} \mathbb{E}[J_x(a(\cdot))].$$

Das Supremum nehmen wir über alle zulässigen Kontrollfunktionale $a(\cdot)$. Wir sagen, dass $a^*(\cdot)$ die optimale Kontrolle heißt, wenn folgende Gleichung gilt

$$V(x) = \mathbb{E}[J_x(a^*(\cdot))].$$

Für den Performance Index J_x , der die totale diskontierte Auszahlung der Dividenden beschreibt, verwenden wir

$$J_x(a^*(\cdot)) = \int_0^\tau e^{-ct} a(t) dt \quad (3.1)$$

mit der Diskontrate c und dem Absorptionszeitpunkt τ .

Wir werden im Folgenden zwei Szenarien betrachten:

1. Wir haben eine obere Schranke a_0 für die Dividendenzahlungen.
2. Wir sind nach oben unbeschränkt.

Die optimale Kontrolle $a^*(t)$ zum Zeitpunkt t sollte nur bezüglich $r(t)$ von $\mathcal{F}$ abhängen. Das Ergebnis im 1. Fall wird zeigen, wenn a_0 klein genug ist, dass $\alpha = \frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0$ nicht gilt, wir die maximale Dividendenrate auszahlen. Liegt die Reserve unter einem optimalen Level m , dann zahlen wir nichts aus. Wir zahlen also die maximale Dividendenrate, wenn die Reserve über m liegt. Im 2. Fall werden wir im folgenden Abschnitt auch erkennen, dass die beste Strategie besagt, alles auszuzahlen, das das Level m übersteigt. Ansonsten wird nichts ausgezahlt. Wir werden auch diskutieren, wie man die Barriere m bestimmt.

3.2 Beschränkte Dividendenzahlungen

Betrachten wir nun zuerst den ersten der beiden gerade beschriebenen Fälle. Hier ist der Kontrollparameter $a(t)$ die Rate, zu der die Dividenden ausgezahlt werden. Der Performance Index J_x ist wie in (3.1) definiert. Wir nehmen an, dass $a(t) \in [0, a_0] \forall t > 0$ und die Reserve die Form

$$\begin{aligned} dr(t) &= (\mu - a(t))dt + \sigma dW(t) \\ r(0) &= x \end{aligned}$$

hat. Das Optimierungsproblem wird wie folgt definiert

$$V(x) = \sup_{a(\cdot)} \mathbb{E}[J_x(a(\cdot))].$$

Dabei gilt, wenn $V(0) = 0$ ist, das Startkapital somit also 0 ist, wir keine Dividenden auszahlen können, da das Unternehmen bankrott ist.

Definition 3.2 (ϵ -optimale Kontrolle). Wir nennen $a_y(t)$ die ϵ -optimale Kontrolle, wenn gilt

$$\forall y : \mathbb{E}[J_y(a_y(t))] \geq V(y) - \epsilon.$$

Sei nun $x > 0$ fest. Wir zahlen Dividenden mit der Rate u bis zum Zeitpunkt δ oder bis zum Zeitpunkt des Ruins τ . Je nachdem was zuerst eintritt, wechselt man die Strategie:

$$a(t) = \begin{cases} u, & 0 \leq t \leq \delta \\ a_{r(\delta)}(t - \delta), & t > \delta. \end{cases}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} V(x) &\geq u\delta\mathbb{P}_x[\tau > \delta] + e^{-\delta c}(\mathbb{E}[V(r(\delta))] - \epsilon) \\ &\geq u\delta\mathbb{P}_x[\tau > \delta] + (1 - c\delta)(\mathbb{E}[V(r(\delta))] - \epsilon). \end{aligned}$$

Ist Epsilon beliebig, dann gilt

$$V(x) \geq u\delta\mathbb{P}_x[\tau > \delta] + (1 - c\delta)\mathbb{E}[V(r(\delta))]. \quad (3.2)$$

Nehmen wir nun an, dass $V(x) \in C^2$ zweimal stetig differenzierbar ist. Es gilt

$$\mathbb{P}[\tau > \delta] = 1 + \mathcal{O}(1) \quad \text{für} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Um von (3.2) auf die Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung für die optimale Return Funktion $V(x)$ zu kommen, wenden wir zuerst die Ito Formel 2.14 auf $V(r(\delta))$ an. Hier gilt

$$dr(t) = (\mu - a(t))dt + \sigma dW(t).$$

Wir setzen somit für die Ito Formel

$$F_t = (\mu - a(t)) \quad \text{und} \quad G_t = \sigma.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} dV(r(\delta)) &= [V'(r(\delta))(\mu - u) + \frac{1}{2}V''(r(\delta))\sigma^2]dt + V'(r(\delta))\sigma dW(t) \\ V(r(\delta)) &= V(x) + \int_0^\delta (\mu - u)V'(X_r)dr + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^\delta V''(X_r)dr + \sigma \int_0^\delta V'(X_r)dW_r. \end{aligned}$$

Da $V'(X_r)$ beschränkt ist und W_r als Brownsche Bewegung ein Martingal ist, gilt

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\delta V'(X_r)dW_r\right] = 0.$$

Somit ist

$$\mathbb{E}[V(r(\delta))] = \mathbb{E}\left[V(x) + \int_0^\delta (\mu - u)V'(X_r)dr + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^\delta V''(X_r)dr\right].$$

Setzen wir nun unsere Ergebnisse in (3.2) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} V(x) &\geq u\delta(1 + o(1)) \\ &\quad + (1 - c\delta)\mathbb{E}\left[V(x) + \int_0^\delta (\mu - u)V'(X_r)dr + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^\delta V''(X_r)dr\right] \\ &= u\delta + uo(\delta) + V(x) - c\delta V(x) \\ &\quad + (1 - c\delta)\mathbb{E}\left[V(x) + \int_0^\delta (\mu - u)V'(X_r)dr + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^\delta V''(X_r)dr\right]. \end{aligned}$$

Die Terme, die die Ordnung von $o(\delta)$ oder kleiner haben, werden in dem Fehlerterm $o(\delta)$ gesammelt. Wir dividieren nun durch δ und lassen $\delta \rightarrow 0$ gehen:

$$0 \geq u + (\mu - u)V'(x) + \frac{\sigma^2}{2}V''(x) - cV(x).$$

Dies gilt für alle $u \in [0, a_0]$. Für zumindest ein $u \in [0, a_0]$ gilt Gleichheit. Damit haben wir die Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung für die optimale Return Funktion $V(x)$:

$$\begin{cases} \max_{0 \leq u \leq a_0} [\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + (\mu - u)V'(x) - cV(x) + u] = 0 \\ V(0) = 0. \end{cases}$$

Angenommen, $f(x)$ ist die Lösung der HJB Gleichung, welche linear in u ist. Dann ergibt sich, dass das gesuchte Maximum entweder bei 0 oder bei a_0 erreicht wird. Sei $u^*(x)$ dieses Maximum mit

$$u^*(x) = \begin{cases} 0, & f'(x) > 1 \\ a_0, & f'(x) \leq 1. \end{cases}$$

Nehmen wir nun zusätzlich an, dass $f(x)$ als Lösung konkav ist, dann existiert ein $m \geq 0$, sodass

$$\begin{cases} f'(x) > 1 & \text{für } x < m \\ f'(x) \leq 1 & \text{für } x \geq m. \end{cases}$$

Somit können wir unser Problem wie folgt formulieren

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - cf(x) = 0, & 0 \leq x \leq m \\ \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - a_0)f'(x) - cf(x) + a_0 = 0, & x \geq m. \end{cases} \quad (3.3)$$

Seien $\theta_1(\lambda)$ und $-\theta_2(\lambda)$ die positive und negative Wurzel der Gleichung $\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + \lambda s - cs = 0$. Eine allgemeine Lösung für (3.3) sieht dann folgendermaßen aus

$$\begin{cases} C_1 e^{\theta_1(\mu)x} + C_2 e^{-\theta_2(\mu)x} \\ \frac{a_0}{c} + C_3 e^{\theta_1(\mu-a_0)x} + C_4 e^{-\theta_2(\mu-a_0)x}. \end{cases}$$

Da für jede Kontrolle $a(\cdot)$ gilt, dass $J_x(a(\cdot)) \leq \frac{a_0}{c}$, suchen wir eine Lösung, die $f(x) \leq \frac{a_0}{c}$ erfüllt. Daraus ergibt sich, dass $C_3 = 0$ und $C_4 = -d < 0$, aber auch, dass $f(x) > 0$, $x > 0$ und $f(0) = 0$. Damit ergeben sich auch die Werte für $C_1 = C_2 \equiv C > 0$. Somit sind unsere gesuchten Unbekannten C , d und m . Um diese zu bestimmen, benutzen wir das Prinzip des „smooth fit“:

$$\begin{aligned} f(m+) &= f(m-) \\ f'(m-) &= 1 \\ f'(m+) &= 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Seien

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta_1(\mu) \\ \theta_2 &= \theta_2(\mu) \\ \theta_3 &= \theta_2(\mu - a_0),\end{aligned}$$

dann sind folgende Gleichungen äquivalent zu (3.4)

$$\text{I: } C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) = \frac{a_0}{c} - de^{-\theta_3 m}$$

$$\text{II: } C(\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}) = 1$$

$$\text{III: } d\theta_3 e^{-\theta_3 m} = 1.$$

Aus der Gleichung III erkennen wir, dass $de^{-\theta_3 m} = \frac{1}{\theta_3}$ gilt. Substituieren wir dies nun in Gleichung I, dann resultiert folgendes Ergebnis

$$\frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} = \alpha > 0. \quad (3.5)$$

Es existiert also nur dann eine Lösung, wenn die Bedingung (3.5) erfüllt ist. Um festzustellen, dass diese Bedingung ausreichend für die Existenz einer Lösung ist, brauchen wir die folgenden Aussagen.

Lemma 3.3. $\alpha\theta_1 < 1$.

Proposition 3.4. Wenn $\alpha > 0$ ist, dann existiert eine eindeutige positive Lösung (C, d, m) für das eben aufgestellte Gleichungssystem.

Satz 3.5. Es existiert eine zweimal stetig differenzierbare, konkave Lösung für unsere HJB Gleichung.

Wenn $\frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} \leq 0$ ist, dann hat die Lösung die Form

$$f(x) = \frac{a_0}{c}(1 - e^{-\theta_3 x}).$$

Wenn $\frac{a_0}{c} - \frac{1}{\theta_3} > 0$ ist, dann hat die Lösung die Form

$$f(x) = \begin{cases} C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}), & 0 \leq x \leq m \\ \frac{a_0}{c} - de^{-\theta_3 x}, & x > m \end{cases}$$

mit der eindeutigen Lösung (C, d, m) aus I.-III. .

Proposition 3.6. Die Funktion f in Satz 3.5 maximiert $J_x(a(\cdot))$ für jede zulässige Strategie $a(\cdot)$.

Korollar 3.7. $f(x) \geq V(x)$.

Proposition 3.8. Wir definieren $u^*(x) = a_0 \mathbb{1}_{\{x > m\}}$. Sei $r^*(t)$ die Lösung folgender stochastischer Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dr(t) &= (\mu - a^*(t))dt + \sigma dW(t) \\ r(0) &= x \end{aligned}$$

mit $a^*(t) = u^*(r^*(t))$. Dann gilt

$$J_x(a^*(\cdot)) = f(x).$$

Korollar 3.9. $f(x) = V(x) = J_x(a^*(\cdot))$.

Zusammenfassend haben wir nun eine eindeutige konkave Lösung für die HJB Gleichung gefunden.

3.3 Unbeschränkte Dividendenraten

Wir beschäftigen uns nun mit unserem 2. Szenario, in dem $a(t) = \infty$ ist, wir also unbeschränkte Dividendenraten haben und es daher mathematisch aufwendiger zu betrachten ist. Zuerst definieren wir die Menge aller Dividendenzahlungen bis zu Zeitpunkt t mit

$$L(t) = \int_0^t a(s)ds.$$

Dabei ist $L(t)$ offensichtlich eine wachsende Funktion. Wir nennen eine Funktion $L(\cdot)$ zulässig, wenn $L(t) \in \mathcal{F}_t$ adaptiert ist und $L(\cdot)$ ein nichtfallender und nichtnegativer Prozess ist. Von nun an betrachten wir $L(\cdot)$ als den Kontrollprozess. Wir nehmen in diesem Fall nicht an, dass der Prozess $L(t)$ stetig oder absolut stetig ist. Somit kann $L(\cdot)$ Sprünge enthalten. Die Bedingung, die wir für die folgenden Rechnungen brauchen, ist, dass $L(\cdot)$ rechtsstetige Pfade mit linksseitigem Grenzwert hat. Wir beschreiben mit $L(t) - L(s)$ die Dividenden, die im Zeitraum $(s, t]$ ausbezahlt werden und mit $L(t) - L(t-)$ den Pauschalbetrag zum Zeitpunkt t . Dabei muss t allerdings in einer abzählbaren Menge vorkommen.

Da wir unsere Kontrollfunktion $L(t)$ in kummulierter Form definiert haben, passen wir auch die Dynamik von $r(t)$ daran an und formulieren das Gleichungssystem der Reseve wie folgt

$$\begin{aligned} r(t) &= x + \int_0^t \mu(r(s))ds + \sigma W(t) - L(t) \\ r(0) &= x - L(0). \end{aligned}$$

Wir können unsere Anfangsbedingung so interpretieren, dass, wenn wir eine Auszahlung zum Zeitpunkt $t = 0$ haben, die Reserve r direkt von unserem Startkapital x auf $x - L(0)$ sinkt. Daher nehmen wir an, dass $r(0-) = x$ und $L(0-) = 0$ ist.

Definition 3.10 (Performance Index). Der Performance Index ist wie folgt definiert:

$$J_x(L(\cdot)) = \int_0^\tau e^{-ct} dL(t).$$

Unser Ziel ist es, die Funktion $V(x)$ zu finden, für die folgende Gleichung erfüllt sein muss

$$V(x) = \sup_{L(\cdot)} \mathbb{E}[J_x(L(\cdot))].$$

Definition 3.11 (optimale Kontrolle). *Wir nennen $L^*(\cdot)$ die optimale Kontrolle, wenn*

$$V(x) = \mathbb{E}[J_x(L^*(\cdot))].$$

Im ersten Fall war die maximale Dividendenrate beschränkt, wohingegen wir nur die maximale Rate ∞ haben können. Wir gehen analog vor. Die optimale Strategie ist nichts zu zahlen, wenn wir in einem kleinen Zeitraum $[0, \delta]$ sind. Sonst zahlen wir die unendliche Rate. Damit können wir die ϵ -optimale Kontrolle für unendliche Dividendenraten definieren.

Definition 3.12 (ϵ -optimale Kontrolle). *Sei y fest. Wir nennen $L^y(\cdot)$ die ϵ -optimale Kontrolle, wenn*

$$\mathbb{E}[J_y(L^y(\cdot))] \geq V(y) - \epsilon.$$

Sei $\delta > 0$ fest und sei $\mathcal{W}(t) = x + \mu t + \sigma W(t)$ eine Brownsche Bewegung mit Drift μ , Varianz σ^2 und Startkapital x . Betrachten wir nun folgende Strategie

$$L_\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < \delta \\ L^{\mathcal{W}(\delta)}(t - \delta), & t \geq \delta. \end{cases}$$

Wir zahlen also nichts aus, bis wir den Zeitpunkt δ erreichen. Währenddessen entwickelt sich die Reserve mit $\mathcal{W}(\cdot)$ und hat den Wert $L(\delta)$ zum Zeitpunkt δ . Haben wir δ erreicht, wechseln wir die Strategie und zahlen $L^{\mathcal{W}(\delta)}(\cdot - \delta)$, dessen Ertrag zumindest $V(\mathcal{W}(\delta)) - \epsilon$ ist. Da diese Strategie suboptimal ist, schreiben wir

$$V(x) \geq e^{-c\delta} \mathbb{E}[V(\mathcal{W}(\delta)) - \epsilon; \tau \geq \delta].$$

Da ϵ beliebig ist, können wir diese Ungleichung umschreiben in

$$V(x) - e^{-c\delta} \mathbb{E}[V(\mathcal{W}(\delta))] + o(\delta) \geq 0. \quad (3.6)$$

Nehmen wir nun an, dass die Funktion $V \in C^2$ zweimal stetig differenzierbar ist und wenden Ito's Formel an, dann gilt analog wie zuvor im Fall der beschränkten Dividenden mit $u = 0$

$$e^{-c\delta} \mathbb{E}[V(\mathcal{W}(\delta))] = (1 - c\delta)(V(x) + \delta\{\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x)\}) + o(\delta).$$

Nutzen wir nun diese Gleichheit und setzen es in die Ungleichung (3.6) ein und dividieren durch δ , dann bekommen wir

$$\begin{aligned} V(x) - (1 - c\delta)(V(x) + \delta\{\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x)\}) - o(\delta) + o(\delta) &\geq 0 \\ \frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x) &\leq 0. \end{aligned}$$

Definition 3.13 (Variationsungleichung (1)). $\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x) \leq 0$.

V sollte somit diese Variationsungleichung (1) erfüllen. Sei x und $\delta > 0$ fest und sei $L^y(\cdot)$ definiert wie zuvor mit $y = x - \delta$. Wir betrachten nun die Strategie $\mathcal{L}_\epsilon(t) = \delta + L^{x-\delta}(t)$. Diese Strategie beschreibt eine sofortige Auszahlung von δ , womit wir die Reserve auf $x - \delta$ reduzieren, und verwenden dann die Kontrollfunktion $L^{x-\delta}(\cdot)$. Mit ähnlichen Argumenten wie zuvor gilt

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-ct} d\mathcal{L}_\epsilon(t)\right] \\ &= \delta + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-ct} dL^{x-\delta}(t)\right] \\ &\geq \delta + V(x - \delta) - \epsilon. \end{aligned}$$

Da ϵ beliebig war, können wir beobachten, dass

$$V(x) - V(x - \delta) \geq \delta \quad \text{und} \quad V'(x) \geq 1.$$

Das Fazit dieser Überlegungen ist, dass V folgende Ungleichungen erfüllen muss

- i. $\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x) \leq 0$
- ii. $V'(x) \geq 1$.

Eine der beiden Ungleichungen ist strikt für alle x . Der Ruin tritt ein, wenn $x = 0$. Somit hält die Anfangsbedingung $V(0) = 0$. Wir fassen dieses Resultat in folgendem Satz zusammen:

Satz 3.14. Die optimale Return Funktion V erfüllt die folgende HJB Gleichung

$$\begin{cases} \max\{\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - cV(x); V'(x) \geq 1\} \\ V(0) = 0. \end{cases}$$

In unserem Fall können wir es vermeiden, fortgeschrittene Viskositätslösungs-Techniken anzuwenden. Stattdessen verwenden wir die HJB Gleichung in Satz 3.14 als unser Führungsinstrument. Wir werden mithilfe der im folgenden genannten 4 Schritte zeigen, welche Strategie die optimale Kontrolle ist.

1. Wir finden eine Lösung f mit Hilfe zweier analytischer Teile.
2. Wir zeigen, dass diese Lösung f die HJB Gleichung maximiert.
3. Wir konstruieren ein Kontrollfunktional L^* , sodass $V(x) = \mathbb{E}[J_x(L^*(\cdot))]$ gilt.
4. Wir beweisen damit, dass $f = V$ und L^* die optimale Kontrolle ist.

1. Schritt

Wir nehmen an, dass f konkav und nichtwachsend ist. Sei $m := \sup\{x : f'(x) > 1\}$. Dann folgt, dass

$$f'(x) \begin{cases} > 1, & x < m \\ = 1, & x \geq m. \end{cases}$$

Definition 3.15 (Operator $\mathcal{A}$). $\mathcal{A} := \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} - c$.

Es folgt, dass

$$\mathcal{A}f(x) = 0, \quad \text{für } x \leq m.$$

Die Funktion f besteht aus 2 analytischen Teilen:

- ein Teil auf $[0, m]$ mit $\mathcal{A}f(x) = 0$
- ein Teil auf $[m, \infty)$ mit $f'(x) = 1$.

Wir wenden analog zu den beschränkten Dividendenzahlungen das Prinzip des „smooth fit“ an, um die Grenze m zu bestimmen

$$\begin{aligned} f'(m) &= f'(m-) = f'(m+) \\ f''(m) &= f''(m-) = f''(m+). \end{aligned}$$

Für $x \leq m$ müssen wir nun eine Lösung f finden, für die gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(m) &= 1, \\ f''(m) &= 0. \end{aligned}$$

Im allgemeinen hat die Lösung f die Form

$$C_1 e^{\theta_1 x} + C_2 e^{\theta_2 x},$$

mit $\theta_1(\lambda)$ und $-\theta_2(\lambda)$ die wie zuvor die positive und negative Lösungen von $\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 + \lambda s - cs = 0$ sind. Mit Hilfe der beliebigen Konstanten C_1 , C_2 und m und mit $f(0) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}), \quad C > 0 \\ f'(x) &= C(\theta_1 e^{\theta_1 x} + \theta_2 e^{-\theta_2 x}) \\ f''(x) &= C(\theta_1^2 e^{\theta_1 x} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 x}). \end{aligned}$$

Wir nutzen die 2. Ableitung, um m zu bestimmen

$$\begin{aligned} f''(x) &= C(\theta_1^2 e^{\theta_1 x} - \theta_2^2 e^{-\theta_2 x}) = 0 \\ \rightarrow m &= \frac{2}{\theta_1 + \theta_2} \log\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c}} \log \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c}}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 c}}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der 1. Ableitung bestimmen wir C

$$\begin{aligned} f'(x) &= C(\theta_1 e^{\theta_1 x} + \theta_2 e^{-\theta_2 x}) = 1 \\ \rightarrow C &= \frac{1}{\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}}. \end{aligned}$$

Satz 3.16. *Definiere*

$$f(x) = \begin{cases} C(e^{\theta_1 x} + e^{-\theta_2 x}), & x \leq m \\ C(e^{\theta_1 m} + e^{-\theta_2 m}) + (x - m), & x \geq m \end{cases}$$

$$\text{mit } m = \frac{2}{\theta_1 + \theta_2} \log\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)$$

$$C = \frac{1}{\theta_1 e^{\theta_1 m} + \theta_2 e^{-\theta_2 m}}.$$

Dann ist $f(x)$ eine Lösung der HJB Gleichung.

2. Schritt

Nun müssen wir zeigen, dass f die HJB Gleichung für jede Strategie L maximiert, also $f \geq V$.

Proposition 3.17. *Sei L eine beliebige Kontrolle, dann gilt*

$$f(x) \geq \mathbb{E}[J_x(L)].$$

Korollar 3.18. *Es gilt, dass $f(x) \geq V(x)$.*

3. Schritt

Wir suchen nun das Funktional L^* , sodass $f(x) = \mathbb{E}[J_x(L^*)]$.

Sei $m = \frac{2}{\theta_1 + \theta_2} \log\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)$. Definiere:

- $L^*(t) = \max_{s \leq t} [x + \mu s + \sigma W(s) - m]^+$
- $r^*(t) = x + \mu t + \sigma W(t) - L^*(t)$.

Der Prozess $(L^*(t))_{t \geq 0}$ ist stetig und wachsend. Es gilt, dass $L^*(0) > 0$, genau dann, wenn $x > m$. Daraus folgt, dass L^* die Sprunghöhe von $x - m$ zum Zeitpunkt $t = 0$ hat. Der Prozess $(r^*(t))_{t \geq 0}$ ist eine reflektierte Brownsche Bewegung auf $[0, m]$ mit der oberen Grenze m . $L^*(\cdot)$ wächst nur dann, wenn $r^*(t) = m$ ist. Daraus schließen wir, dass $r^*(t) \leq m$ ist für alle $t > 0$ und somit:

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{r^*(t) < m\}} dL^*(t) = 0.$$

Proposition 3.19. *Sei*

$$f(x) = \begin{cases} C(e^{\theta_1 x} - e^{-\theta_2 x}) & x \leq m \\ C(e^{\theta_1 m} - e^{-\theta_2 m}) + (x - m) & x \geq m. \end{cases}$$

Dann gilt, dass $\mathbb{E}[J_x(L^*)] = f(x)$.

4. Schritt

Korollar 3.20. *Es gilt, dass $f(x) = V(x)$ und L^* die optimale Kontrolle ist.*

Wir setzen also a priori ein optimales Reservelevel m fest. Es wird all das ausgezahlt, das die Grenze m überschreitet. Ist die Reserve unter m , werden keine Dividenden ausbezahlt.

4 Risikotheorie mit nichtlinearen Dividendenbarrieren

4.1 Grundlagen der Modelle

In den vorherigen Kapiteln führten die konstanten Dividendenbarrieren fast sicher zum Ruin. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns nun mit einem Modell der Barrierschranken, wo das nicht mehr der Fall ist. In diesem Modell betrachten wir einen unendlichen Zeithorizont und unbeschränkte Dividendenbarrieren. Dieses Kapitel basiert auf dem Paper von Albrecher und Kainhofer [1].

Beginnen wir mit der Einführung unseres Risikoprozesses R_t , der Reserve eines Unternehmens.

Definition 4.1 (Reserve, Risikoprozess). *Wir definieren die Reserve als*

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad (4.1)$$

wobei c die konstante Prämie ist und N_t ein homogener Poissonprozess, mit Intensität λ , der die Schäden bis zum Zeitpunkt t zählt. Die Zufallsvariablen X_i sind iid., haben die Verteilungsfunktion $F(y)$, und beschreiben dabei die Schadenshöhe.

Wir haben die Reserve bereits in Abschnitt 2.1.1 eingeführt und auch wichtige Eigenschaften besprochen. Wir nehmen in diesem Kapitel immer an, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind

- $\mu = \mathbb{E}[X_i] < \infty$
- $c > \lambda \int_0^\infty y dF(y)$.

Wir bezeichnen mit b_t die Dividendenbarriere. Wenn die Reserve R_t die Dividendenbarriere b_t erreicht, werden Dividenden mit der Intensität $c - \frac{db_t}{dt}$ ausbezahlt. Die Höhe der Reserve bleibt bei der Dividendenbarriere, bis der nächste Schaden eintritt. Die Reserve R_t entwickelt sich wie folgt

$$\begin{cases} dR_t = cdt - dS_t, & R_t < b_t \\ dR_t = db_t - dS_t, & R_t = b_t, \end{cases}$$

wobei $S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ als zusammengesetzter Poissonprozess (siehe (2.1)) die Summe der Schadenshöhe bezeichnet und $R_0 = u$ das Startkapital, mit $0 \leq u \leq b_t$ ist. Das Startkapital u bestimmt den Verlauf der Reserve $\{R_t, t \geq 0\}$. Wir sind nun an zwei Werten interessiert:

- der Überlebenswahrscheinlichkeit
 $\phi(u, b) = \mathbb{P}[R_t \geq 0, \forall t > 0 \mid R_0 = u, b_0 = b]$

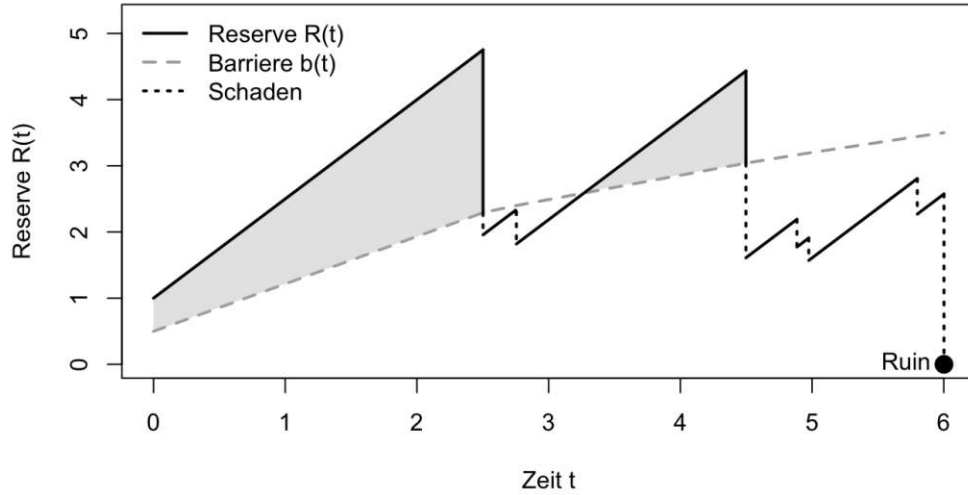


Abbildung 4.1: Reserveverlauf mit Barriere und Ruinzeitpunkt

- und der erwarteten Summe der diskontierten Dividendenzahlungen $W(u, b)$.

In der Abbildung 4.1 wurde zur besseren Veranschaulichung beispielhaft ein Reserveverlauf gezeigt. Die grau-gestrichelte Linie zeigt die Dividendenbarriere. Die linear steigende Reserve wird durch den schwarzen Graphen dargestellt. Die grauen Flächen markieren die Dividenden, die ausgeschüttet werden. Tritt ein Schaden ein, wird die Schadenshöhe von der Reserve abgezogen, welche durch die senkrecht strichlierte Linie gekennzeichnet ist. Überschreitet die Reserve die Dividendenbarriere, so werden zuerst die Dividenden ausgeschüttet und erst danach der Schaden von der Reserve abgezogen. Somit überschreitet der Wert der Reserve, die für die Schadensabdeckung zur Verfügung steht, nie die Dividendenbarriere. Der Ruin tritt ein, wenn die Reserve den Wert 0 unterschreitet.

4.2 Barrieremodelle

In diesem Abschnitt definieren wir zuerst die Dividendenbarriere b_t , wenn wir einen unendlichen Zeithorizont haben und betrachten die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Unternehmens.

Sei nun R_t , wie in (4.1), die Reserve eines Unternehmens und sei

$$b_t = \left(b^m + \frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{mit } \alpha, b > 0, m > 1,$$

der Prozess der Dividendenbarriere. In dem Fall, dass $m = 1$ ist, haben wir eine lineare Dividendenbarriere. Wir stellen die Überlebenswahrscheinlichkeit als Grenzproblem dar.

Dafür bedingen wir auf den Zeitpunkt des ersten Schadenseintritts. Für $u < b$ gilt

$$\begin{aligned}\phi(u, b) &= (1 - \lambda dt) \phi(u + cdt, (b^m + \frac{dt}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) \\ &\quad + \lambda dt \int_0^{u+cdt} \phi(u + cdt - z, (b^m + \frac{dt}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) dF(z).\end{aligned}\quad (4.2)$$

Wir wollen nun auf $\phi(u, b)$ die Taylorentwicklung anwenden. Dafür betrachten wir zuerst

$$(b^m + \frac{dt}{\alpha})^{\frac{1}{m}} = (b^m)^{\frac{1}{m}} (1 + \frac{dt}{b^m \alpha})^{\frac{1}{m}} = b (1 + \frac{dt}{b^m \alpha})^{\frac{1}{m}}.$$

Mit Hilfe der Taylorentwicklung erhalten wir

$$(b^m + \frac{dt}{\alpha})^{\frac{1}{m}} \approx b (1 + \frac{dt}{mb^{m-1}\alpha}) = b + \frac{1}{mb^{m-1}\alpha} dt.$$

Somit ist

$$\phi(u + cdt, (b^m + \frac{dt}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) \approx \phi(u, b) + \frac{\partial \phi}{\partial b} \frac{1}{mb^{m-1}\alpha} dt + \frac{\partial \phi}{\partial u} cdt.$$

Da wir im Integral nur die führenden Terme betrachten, ergibt sich für den zweiten Term der Gleichung (4.2) mit der Taylorentwicklung

$$\int_0^{u+cdt} \phi(u + cdt - z, (b^m + \frac{dt}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) dF(z) \approx \int_0^u \phi(u - z, b) dF(z).$$

Setzen wir nun unsere Erkenntnisse zusammen und dividieren durch dt , so erhalten wir

$$c \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{1}{\alpha mb^{m-1}} \frac{\partial \phi}{\partial b} - \lambda \phi + \lambda \int_0^u \phi(u - z, b) dF(z) = 0 \quad (4.3)$$

für $0 \leq u \leq b$. Setzen wir $u = b$, dann gilt für die Überlebenswahrscheinlichkeit folgende Integro-Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\phi(u, b) &= (1 - \lambda dt) \phi((b^m + \frac{dt}{\alpha})^{\frac{1}{m}}, (b^m + \frac{dt}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) \\ &\quad + \lambda dt \int_0^{(b^m + \frac{dt}{\alpha})^{\frac{1}{m}}} \phi((b^m + \frac{dt}{\alpha})^{\frac{1}{m}} - z, (b^m + \frac{dt}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) dF(z),\end{aligned}$$

und die zugehörige Integro-Differentialgleichung

$$\frac{1}{\alpha mb^{m-1}} \frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{1}{\alpha mb^{m-1}} \frac{\partial \phi}{\partial b} - \lambda \phi + \lambda \int_0^u \phi(u - z, b) dF(z) = 0. \quad (4.4)$$

Setzen wir die Gleichungen (4.3) und (4.4) gleich, bekommen wir für $u = b$ das Resultat

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \Big|_{u=b} = 0.$$

Außerdem verlangen wir, wenn wir keine Barriere haben, also $b \rightarrow \infty$ geht, dass

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \phi(u, b) = \phi(u).$$

Hier bezeichnet $\phi(u)$ die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Unternehmens, wenn wir keine Barriere haben. Unser allgemeines Ziel ist jedoch, die Barriere zu überschreiten. Wir nennen $W(u, b)$ den erwarteten aktuellen Wert der zukünftigen Dividendenzahlungen. Dabei verwenden wir die konstante Intensität δ , um den Wert zu diskontieren. Die Dividendenzahlungen stoppen, wenn der Ruin eintritt. Die zugehörige Integro-Differentialgleichung wird analog wie zuvor hergeleitet

$$\begin{aligned} c \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{\alpha m b^{m-1}} \frac{\partial W}{\partial b} - (\delta + \lambda)W + \lambda \int_0^u W(u - z, b) dF(z) &= 0 \\ \text{mit } \frac{\partial W}{\partial u} \big|_{u=b} &= 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Angenommen, wir lassen zu, dass auch nach dem Ruin noch Dividenden ausbezahlt werden, dann ist $V(u, b)$ der erwartete Wert der diskontierten Dividendenzahlungen mit der Integro-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} c \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{\alpha m b^{m-1}} \frac{\partial V}{\partial b} - (\delta + \lambda)V + \lambda \int_0^\infty V(u - z, b) dF(z) &= 0 \\ \text{mit } \frac{\partial V}{\partial u} \big|_{u=b} &= 1. \end{aligned}$$

Diese Annahme macht in der Realität tatsächlich Sinn, da der Ruin eines Portfolios nicht den Ruin des gesamten Unternehmens bedeutet.

4.3 Lösungstechniken

Bevor wir uns in diesem Kapitel mit den Algorithmen der Lösungstechniken beschäftigen, zeigen wir, dass es eine eindeutige beschränkte Lösung für das Problem gibt.

Wir beginnen damit, die eindeutige Lösbarkeit des Problems (4.5) zu zeigen:

$$\begin{aligned} c \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{\alpha m b^{m-1}} \frac{\partial W}{\partial b} - (\delta + \lambda)W + \lambda \int_0^u W(u - z, b) dF(z) &= 0 \\ \text{mit } \frac{\partial W}{\partial u} \big|_{u=b} &= 1. \end{aligned}$$

Dafür definieren wir den Operator A .

Definition 4.2 (Operator A). Sei

$$\begin{aligned} Ag(u, b) = & \int_0^{t^*} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{u+ct} g(u+ct-z, (b^m + \frac{t}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) dF(z) dt \\ & + \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{(b^m + \frac{t}{\alpha})^{\frac{1}{m}}} g((b^m + \frac{t}{\alpha})^{\frac{1}{m}} - z, (b^m + \frac{t}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) dF(z) dt \\ & + \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{t^*}^t e^{-\delta s} (c - \frac{1}{m\alpha(b^m + \frac{s}{\alpha})^{1-\frac{1}{m}}}) ds dt, \end{aligned}$$

wobei t^* die positive Lösung der Gleichung $u + ct = (b^m + \frac{t}{\alpha})^{\frac{1}{m}}$ ist.

Somit ist t^* der Zeitpunkt, an dem die eingenommenen Prämien inklusive des Startkapitals, gleich der Barriere b_t sind. Dieser Zeitpunkt ist eindeutig, da $m > 1$, b_t konkav und $u \leq b$ ist. Wir interpretieren die drei Terme des Operator A wie folgt:

1. Term: Der Schaden tritt ein, bevor die Reserve die Dividendenbarriere erreicht, also $t < t^*$ ist.
2. Term: Der Schaden tritt ein, nachdem die Reserve die Dividendenbarriere erreicht, also $t^* < t$ ist.
3. Term: Auch hier gilt, dass $t^* < t$. Die diskontierten Dividenden werden ausbezahlt, bevor der nächste Schaden eintritt.

Die Lösung $W(u, b)$ unseres Problems ist ein Fixpunkt des Operators A . Wir zeigen nun, dass der Operator A eine Kontraktion ist, für alle beschränkten Funktionen g_1 und g_2 .

$$\begin{aligned} |Ag_1(u, b) - Ag_2(u, b)| & \leq \|g_1 - g_2\|_{\infty} \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} dt \\ & \leq \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \|g_1 - g_2\|_{\infty}, \end{aligned}$$

für $0 \leq u \leq b < \infty$. Mit $\|\cdot\|_{\infty}$ verstehen wir hier die Supremumsnorm. Mithilfe des Fixpunktsatzes von Banach, siehe Satz 2.16, können wir schlussfolgern, dass der Fixpunkt und somit die Lösung W eindeutig ist.

4.3.1 Der doppelt-rekursive Algorithmus

Wir betrachten nun die erste Lösungstechnik. Wir entwickeln die Lösungstechnik für den Operator A . Zusätzlich beschränken wir uns hier auf exponentiell verteilte Schadenshöhen mit der Intensität γ , also

$$X_i \sim \text{Exp}(\gamma).$$

Wir können den Fixpunkt von dem Operator A approximieren, indem wir den Operator A k -Mal auf eine Startfunktion $h(u, b)$ anwenden. Für die Startfunktion $h(u, b)$ wählen wir den inhomogenen Term des Operators A . Der Parameter k wird abhängig davon gewählt, wie genau die Approximation sein soll.

Definition 4.3 (doppelt-rekursiver Algorithmus). *Wir definieren den doppelt-rekursiven Algorithmus als*

$$g^{(k)}(u, b) = A^k g^{(0)}(u, b)$$

$$g^{(0)}(u, b) = h(u, b) := \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{t^*}^t e^{-\delta s} \left(c - \frac{1}{m\alpha(b^m + \frac{t}{\alpha})^{1-\frac{1}{m}}} \right) ds dt.$$

Das resultierende $2k$ -dimensionale Integral für $g^{(k)}(u, b)$ wird numerisch mit der Monte Carlo oder der quasi Monte Carlo Methode gelöst. Dafür transformieren wir den Integrationsbereich auf den Einheitswürfel:

$$Ag(u, b) = h(u, b) + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left[\begin{aligned} & (1 - e^{-(\lambda+\delta)t^*}) \int_0^1 \int_0^1 g(u + ct_1 - z_1, (b^m + \frac{t_1}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) (1 - e^{-\gamma(u+ct_1)}) dv_1 dw_1 \\ & + e^{-(\lambda+\delta)t^*} \int_0^1 \int_0^1 g((b^m + \frac{t_2}{\alpha})^{\frac{1}{m}}, (b^m + \frac{t_2}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) (1 - e^{-\gamma(b^m + \frac{t_2}{\alpha})^{\frac{1}{m}}}) dv_2 dw_2 \end{aligned} \right]$$

mit

$$\begin{aligned} t_1 &= -\frac{\log(1-w_1(1-e^{-(\lambda+\delta)t^*}))}{\lambda+\delta} & z_1 &= -\frac{\log(1-v_1(1-e^{-\gamma(u+ct_1)}))}{\gamma} \\ t_2 &= t^* - \frac{\log(1-w_2)}{\lambda+\delta} & z_2 &= -\frac{\log(1-v_2(1-e^{-\gamma(b^m + \frac{t_2}{\alpha})^{\frac{1}{m}}}))}{\gamma}. \end{aligned}$$

Definition 4.4 (Monte Carlo Schätzer für $W(u, b)$). *Wir definieren den Monte Carlo Schätzer von $W(u, b)$, mit u und b gegeben, als*

$$W(u, b) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_n^{(k)}(u, b)$$

mit

$$\begin{aligned} g_n^{(0)}(u, b) &= h(u, b) \\ g_n^{(i)}(u, b) &= h(u, b) + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left[\begin{aligned} & (1 - e^{-(\lambda+\delta)t^*}) (1 - e^{-\gamma(u+ct_{1,n}^i)}) g_n^{(i-1)}(u + ct_{1,n}^i - z_{1,n}^i, (b^m + \frac{t_{1,n}^i}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) \\ & + e^{-(\lambda+\delta)t^*} (1 - e^{-\gamma((b^m + \frac{t_{2,n}^i}{\alpha})^{\frac{1}{m}})}) g_n^{(i-1)}((b^m + \frac{t_{2,n}^i}{\alpha})^{\frac{1}{m}} - z_{2,n}^i, (b^m + \frac{t_{2,n}^i}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) \end{aligned} \right]. \end{aligned}$$

Dabei werden $t_{j,n}^i$ und $z_{j,n}^i$, wie zuvor bestimmt, mithilfe zufälliger Abweichungen $v_{j,n}^i$ und $w_{j,n}^i$ aus der Gleichverteilung im Einheitsintervall ($1 \leq i \leq k$)

$$\begin{aligned} t_{1,n}^i &= -\frac{\log(1-w_{1,n}^i(1-e^{-(\lambda+\delta)t^*}))}{\lambda+\delta} & z_{1,n}^i &= -\frac{\log(1-v_{1,n}^i(1-e^{-\gamma(u+ct_{1,n}^i)}))}{\gamma} \\ t_{2,n}^i &= t^* - \frac{\log(1-w_{2,n}^i)}{\lambda+\delta} & z_{2,n}^i &= -\frac{\log(1-v_{2,n}^i(1-e^{-\gamma(b^m + \frac{t_{2,n}^i}{\alpha})^{\frac{1}{m}}}))}{\gamma}. \end{aligned}$$

Somit wird $g_n^{(k)}$ für die Approximation rekursiv berechnet. In jedem Schritt der Rekursion wird die Funktion g_n zweimal aufgerufen. Damit verdoppelt sich der Aufwand der Approximation in jedem Schritt. Um den Aufwand zu reduzieren, verwenden wir den doppelt-rekursiven Algorithmus nur in den ersten zwei Rekursionsschritten. Alle weiteren Rekursionsschritte werden mit dem rekursiven Algorithmus durchgeführt, den wir nun einführen werden.

4.3.2 Der rekursive Algorithmus

Um den Aufwand des doppelt-rekursiven Algorithmus zu verringern, rechnen wir nicht mehr beide Integrale einzeln, sondern fassen die beiden Integrale in eines zusammen. Mit einem passenden Variablenwechsel können wir so den Operator A neu definieren.

Definition 4.5 (Operator $\tilde{A}$). *Der Operator $\tilde{A}$, den wir für den rekursiven Algorithmus benötigen, ist definiert als*

$$\tilde{A}g(u, b) = h(u, b) + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\lambda}{\lambda + \delta} (1 - e^{-\gamma z_{\min}(u, b, t)}) g(z_{\min}(u, b, t) - z, (b^m + \frac{t}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) dv dw$$

mit

$$t = -\frac{\log(1 - w)}{\lambda + \delta}$$

$$z = -\frac{\log(1 - v(1 - e^{-\gamma z_{\min}(u, b, t)}))}{\lambda + \delta}$$

$$z_{\min}(u, b, t) = \min(u + ct, (b^m + \frac{t}{\alpha})^{\frac{1}{m}}).$$

Der Operator $\tilde{A}$ wird wieder k -Mal angewendet auf $g^{(0)}$. Die Approximation des resultierenden mehrdimensionalen Integrals ist

$$g^{(k)}(u, b) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_n^{(k)}(u, b),$$

wobei jedes $g_n^{(k)}(u, b)$ wieder auf einem pseudo Zufallspunkt $x_n \in [0, 1]^2$ basiert.

$$g_n^{(0)}(u, b) = h(u, b)$$

$$g_n^{(i)}(u, b) = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} (1 - e^{-\gamma z_{\min}(u, b, t_n^i)}) g_n^{(i-1)}(z_{\min}(u, b, t_n^i) - z_n^i, (b^m + \frac{t_n^i}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) + h(u, b),$$

für alle $1 \leq i \leq k$. Die Variablen t_n^i und z_n^i sind definiert wie zuvor, mit v und w als die $2i$ -te und $(2i + 1)$ -te Komponenten von x_n . Der Aufwand reduziert sich auf ein Viertel des Aufwands des doppelt-rekursiven Algorithmus.

4.3.3 Monte Carlo Simulation

Um die Ergebnisse des Algorithmus zu vergleichen, müssen wir das Modell simulieren. Dafür brauchen wir Schätzer für die Ruinwahrscheinlichkeit und den diskontierten Dividendenzahlungen. Wir beginnen damit, N Wege des Reserve Prozesses zu erstellen.

Sei nun $t_0 = 0$, $b_0 = b$ und $x_0 = u$, wobei u das Startkapital des Unternehmens ist. Weiters generieren wir exponentiell verteilte Zufallsvariablen $\tilde{t}_i$ bis zu dem Zeitpunkt, an dem der nächste Schaden eintritt

$$\tilde{t}_i \sim \text{Exp}(\lambda) \quad t_{i+1} = t_i + \tilde{t}_i.$$

Die Schadenshöhe z_i wird ebenfalls exponentiell verteilt mit dem Parameter γ

$$\tilde{z}_i \sim \text{Exp}(\gamma).$$

Daraus ergibt sich die Reserve x_{i+1} nach dem Schaden

$$x_{i+1} = \min(x_i + c\tilde{t}_i, (b_i^m + \frac{\tilde{t}_i}{\alpha})^{\frac{1}{m}}) - z_i.$$

Aufgrund der Struktur der Dividendenbarriere können wir den Ursprung zu t_{i+1} zurücksetzen. Dafür setzen wir auch

$$b_{i+1} = (b_i^m + \frac{\tilde{t}_i}{\alpha})^{\frac{1}{m}}.$$

Anschließend diskontieren wir die Dividendenzahlungen zwischen dem i -ten und dem $i+1$ -ten Schaden mit dem Faktor $e^{-\delta t_i}$. Daraus bekommen wir einen Schätzer für die Überlebenswahrscheinlichkeit mit

$$\phi(u, b) \approx \frac{m}{N},$$

wobei m die Anzahl an Wegen beschreibt, in denen kein Ruin eintritt, also $x_i > 0$ ist, für alle i . Wir sagen, dass ein Weg überlebt, wenn für ein i gilt, dass $x_i > x_{\max}$. Dabei ist $x_{\max}$ ein Schwellenwert, der groß genug ist. Man kann zeigen, dass $x_{\max}$ eine absorbierende horizontale Barriere ist. Damit stoppt der Prozess mit einer Wahrscheinlichkeit von 1. Dies verursacht jedoch, dass wir die Überlebenswahrscheinlichkeit überschätzen. Mit einem $x_{\max}$, das groß genug ist, ist die Abweichung jedoch verschwindend klein.

Für die Simulation der erwarteten Dividendenzahlungen fahren wir fort wie zuvor. Immer, wenn der Prozess die Dividendenbarriere erreicht, also wenn

$$x_i + c\tilde{t}_i > (b_i^m + \frac{\tilde{t}_i}{\alpha})^{\frac{1}{m}},$$

dann müssen wir den Wert der ausbezahlten Dividenden bis zum nächsten Schaden i berechnen

$$v_i = v_{i-1} + e^{-\delta t_i} \int_{t^*}^{\tilde{t}_i} e^{-\delta s} (c - \frac{1}{m\alpha(b_i^m + \frac{s}{\alpha})^{1-\frac{1}{m}}}) ds \quad \text{für } i \geq 1$$

$$v_0 = 0.$$

Dabei ist t^* die positive Lösung von $x_i + ct = (b_i^m + \frac{t}{\alpha})^{\frac{1}{m}}$. Es beschreibt den Zeitpunkt, an dem die Dividendenbarriere erreicht wird.

Der Prozess stoppt, wenn der Ruin eintritt, also $x_i < 0$ für ein i ist, oder wenn ein $t_{\max}$

erreicht wird, nachdem der erwartete Wert der diskontierten Dividenden aufgrund des Diskontfaktors $e^{-\delta t}$ verschwindend klein wird.

Sei $v(j)$ der finale Wert von v_j für den Weg j . Der erwartete Wert der Dividendenzahlungen wird dann approximiert durch

$$\mathbb{E}[W(u, b)] \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v(j).$$

Für unsere Simulation hier wählen wir die Parameter wie folgt

$$\begin{array}{lll} c = 1,5 & \delta = 0,1 & \alpha = 0,5 \\ \lambda = 1 & \gamma = 1 & m = 2. \end{array}$$

Da wir $m = 2$ setzen, betrachten wir den Fall einer quadratisch verlaufenden Dividendenbarriere. Als Abbruchkriterium für den Prozess der Reserve betrachten wir ein Szenario, indem höchstens $M = 100$ Schäden innerhalb des Zeithorizontes $t_{\max} = 100$, eintreten können. Als minimale Reserve, die nicht unterschritten werden kann, wählen wir $x_{\min} = 0$. Somit hat das Unternehmen überlebt, wenn die Reserve bis zum Abbruchkriterium positiv bleibt. Die Parameter t^* und v_i werden numerisch berechnet mit:

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{2}{9} \cdot (2 - 3x_i + \sqrt{(3x_i - 2) + 9(x_i^2 - b_i^2)}) \\ v_i &= v_{i-1} + e^{-\delta t_i} \cdot (V_i(\tilde{t}_i) - V_i(t^*)). \end{aligned}$$

Hier bezeichnen wir mit $V_i(\cdot)$ die Stammfunktion von $e^{-\delta s} \left(c - \frac{1}{m\alpha(b_i^m + \frac{s}{\alpha})^{1-\frac{1}{m}}} \right)$:

$$V_i(s) = -\sqrt{5}\sqrt{\pi}e^{\frac{b^2}{20}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2s+b^2}}{2\sqrt{5}}\right) - 15e^{-\frac{s}{10}}.$$

4.3.4 Der quasi Monte Carlo Ansatz

In diesem Abschnitt verwenden wir gleichverteilte Punktemengen anstatt pseudo-Zufalls Punktemengen, wie in der Monte Carlo Methode. Ein Maß für die Gleichverteilung einer Punktemenge $\{x_n\}_{1 \leq n \leq N} \subset U^s = [0, 1)$ ist die Sterndiskrepanz, die wir bereits detailliert in Kapitel 2.3.2 betrachtet haben. Dort haben wir bereits die Koksma-Hlawka Ungleichung 2.27 eingeführt, die uns eine obere Schranke für den Fehler der quasi Monte Carlo Integration gibt. Diese obere Grenze ist im Gegensatz zu Beschränkungen von Fehlern bei der Monte Carlo Methode deterministisch. Vor allem für nicht zu große s sind gewisse quasi Monte Carlo Folgen in vielen Anwendungen den pseudo Monte Carlo Folgen überlegen. Dies gilt vor allem für die Folgen mit kleiner Diskrepanz, die folgende Ungleichung erfüllen

$$D_N^*(x_1, \dots, x_N) \leq C_s N^{-1} (\log N)^s$$

wobei C_s eine Konstante ist, die explizit berechnet werden kann mit der Dimension s . Die Schranken für C_s sind meistens sehr pessimistisch. Daher ist der Fehler durch die quasi Monte Carlo Integration oft viel kleiner. Der Fehler ist am geringsten, wenn wir die Halton

Folge, siehe 2.31, mit paarweise verschiedenen Primzahlen als Basis verwenden. Mit Hilfe der Koksma-Hlawka Ungleichung 2.27 wollen wir nun konkret für unseren rekursiven Algorithmus eine obere Fehlerschranke finden, in Bezug auf die Diskrepanz der verwendeten Folge.

Satz 4.6. *Wenn der erwartete Wert von $W(u, b)$ der diskontierten Dividenden approximiert wird durch $g^{(k)}(u, b)$ und eine Folge ω mit N Elementen verwendet wird, dann ist der Fehler beschränkt durch*

$$\|W(u, b) - g^{(k)}(u, b)\|_{\infty} \leq \frac{\|h(u, b)\|_{\infty}}{1 - q} (q^k + qD_N(\omega))$$

mit $q := \frac{\lambda}{\lambda + \delta}$.

Siehe [1] für den Beweis. Für die tatsächliche Simulation verwenden wir den rekursiven Algorithmus, den wir in Punkt 4.3.2 beschrieben haben. Hier dient uns die Halton Folge aus 2.31 als gleichverteilte Punkte für die Variablen v und w . Für die Berechnung des Algorithmus erstellen wir $N = 10.000$ pseudo-Zufallspunkte und wählen für die Exaktheit des Algorithmus $k = 20$. Wir setzen

$$\begin{aligned} v_n &= (\phi_2(n), \phi_5(n), \phi_{11}(n), \dots) \\ w_n &= (\phi_3(n), \phi_7(n), \phi_{13}(n), \dots). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} v_n^i &= \phi_{b_i}(n) \quad \text{für } b_i \in \{\text{jede zweite der ersten } k \text{ Primzahlen}\} = \{2, 5, 11, \dots\} \\ w_n^i &= \phi_{b_i}(n) \quad \text{für } b_i \in \{\text{jede andere zweite der ersten } k \text{ Primzahlen}\} = \{3, 7, 13, \dots\}, \end{aligned}$$

mit $\phi_{b_i}(n)$ als radikale Umkehrfunktion aus Definition 2.28 und $n = 1, \dots, N$. Damit können wir dann t_n^i und z_n^i , wie in Definition 4.5 beschrieben, berechnen.

Weiters müssen wir die Startfunktion $h(u, b)$ berechnen. Die Startfunktion entspricht genau dem inhomogenen Teil der Definition 4.2 des Operators A . Also

$$h(u, b) = \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{t^*}^t e^{-\delta s} \left(c - \frac{1}{m\alpha(b^m + \frac{s}{\alpha})^{1-\frac{1}{m}}} \right) ds dt.$$

Wir fassen die Schritte zur Berechnung dieses Integrals im folgenden zusammen. Dafür teilen wir das Integral in zwei Teile. Teil 1 ist

$$\begin{aligned} & \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{t^*}^t e^{-\delta s} c \, ds dt \\ &= \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \cdot \frac{c}{\delta} (e^{-\delta t^*} - e^{-\delta t}) dt \\ &= \frac{c}{\lambda + \delta} e^{-(\lambda + \delta)t^*}. \end{aligned}$$

Der zweite Teil des Integrals ist

$$\begin{aligned} & \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{t^*}^t e^{-\delta s} \frac{1}{m\alpha(b^m + \frac{s}{\alpha})^{1-\frac{1}{m}}} ds dt \\ &= \int_{t^*}^{\infty} e^{-\delta s} \frac{1}{m\alpha(b^m + \frac{s}{\alpha})^{1-\frac{1}{m}}} ds \int_s^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_{t^*}^{\infty} e^{-(\delta+\lambda)s} \frac{1}{m\alpha(b^m + \frac{s}{\alpha})^{1-\frac{1}{m}}} ds. \end{aligned}$$

Wir substituieren $b^m + \frac{s}{\alpha} = z$ mit $ds = \alpha dz$. Dadurch ändert sich auch die untere Grenze des Integrals zu $b^m + \frac{t^*}{\alpha}$.

$$= \frac{1}{m\alpha} \int_{b^m + \frac{t^*}{\alpha}}^{\infty} e^{-(\delta+\lambda)(z-b^m)\alpha} \frac{1}{z^{1-\frac{1}{m}}} \alpha dz$$

Wir setzen im folgenden $m = 2$.

$$= \frac{e^{(\delta+\lambda)b^2\alpha}}{2} \int_{b^2 + \frac{t^*}{\alpha}}^{\infty} \frac{e^{-(\delta+\lambda)\alpha z}}{\sqrt{z}} dz$$

Wir substituieren ein weiteres Mal $\sqrt{z} = \frac{w}{\sqrt{\alpha(\delta+\lambda)}}$ mit $dz = \frac{2w}{\alpha(\delta+\lambda)} dw$, wodurch sich wieder die untere Grenze des Integrals ändert.

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{(\delta+\lambda)b^2\alpha}}{2} \int_{\sqrt{b^2 + \frac{t^*}{\alpha}} \sqrt{\alpha(\delta+\lambda)}}^{\infty} \frac{e^{-w^2} \sqrt{\alpha(\delta+\lambda)}}{w} \frac{2w}{\alpha(\delta+\lambda)} dw \\ &= \frac{e^{(\delta+\lambda)b^2\alpha}}{\sqrt{\alpha(\delta+\lambda)}} \int_{\sqrt{b^2 + \frac{t^*}{\alpha}} \sqrt{\alpha(\delta+\lambda)}}^{\infty} e^{-w^2} dw \\ &= -e^{-t^*(\delta+\lambda)} \sqrt{\frac{\pi}{(\lambda+\delta)\alpha}} \frac{e^{y^2}}{2} \operatorname{erfc}(y), \end{aligned}$$

mit $y = \sqrt{(\delta+\lambda)(\alpha b^2 + t^*)}$. Damit haben wir nun unsere Startfunktion $h(u, b)$ gefunden:

$$h(u, b) = e^{-t^*(\delta+\lambda)} \left(\frac{c}{\delta+\lambda} - \sqrt{\frac{\pi}{(\lambda+\delta)\alpha}} \frac{e^{y^2}}{2} \operatorname{erfc}(y) \right).$$

Für t^* ergibt sich

$$t^* = \frac{1}{2\alpha c^2} - \frac{u}{c} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha c^2} - \frac{u}{c} \right)^2 + \frac{b^2 - u^2}{c^2}}.$$

4.3.5 Ergebnisse

In diesem Kapitel stellen wir die Ergebnisse dar, die wir durch die Monte Carlo Simulation und den rekursiven Algorithmus bekommen. Die Vorgehensweise wurde bereits ausführlich

b/u	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.049102				
0.2	0.049298	0.05134			
0.3	0.050264	0.051786	0.053408		
0.4	0.050424	0.052948	0.054168	0.055608	
0.5	0.051298	0.053506	0.055774	0.05664	0.057598
0.6	0.051838	0.054422	0.056506	0.058596	0.059106
0.7	0.053144	0.055278	0.057578	0.059658	0.061404
0.8	0.053586	0.05668	0.058758	0.06086	0.062798
0.9	0.055244	0.05746	0.060332	0.06236	0.064282
1.0	0.05674	0.059372	0.061386	0.064158	0.065878

Tabelle 4.1: Überlebenswahrscheinlichkeit mit der Monte Carlo Methode 1/2

b/u	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1					
0.2					
0.3					
0.4					
0.5					
0.6	0.059816				
0.7	0.06166	0.062294			
0.8	0.064386	0.064574	0.064892		
0.9	0.066056	0.067498	0.067506	0.06787	
1.	0.067674	0.06937	0.070834	0.070682	0.070872

Tabelle 4.2: Überlebenswahrscheinlichkeit mit der Monte Carlo Methode 2/2

im vorherigen Kapitel beschrieben.

In Tabelle 4.1 und Tabelle 4.2 stehen die Ergebnisse der Überlebenswahrscheinlichkeit eines Unternehmens.

Die erwarteten Dividendenzahlungen der Monte Carlo Simulation sind in Tabelle 4.3 und Tabelle 4.4 dargestellt. Hier kann man gut erkennen, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit mit ca. 5% – 7% relativ gering ist. Um die Überlebenswahrscheinlichkeit zu erhöhen, könnte man den Parameter m genauer untersuchen. Je höher wir m wählen, desto flacher fällt die Kurve der Dividendenbarriere. Dadurch werden weniger Dividenden ausgeschüttet, aber die Überlebenswahrscheinlichkeit würde aufgrund der dadurch höheren Reserve steigen.

Die Ergebnisse des rekursiven Algorithmus, der mit der Halton-Folge berechnet wurde, sind in Tabelle 4.5 und Tabelle 4.6 abgebildet.

b/u	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	1.522286				
0.2	1.522093	1.623287			
0.3	1.51938	1.623854	1.722721		
0.4	1.514048	1.620663	1.723486	1.820503	
0.5	1.517778	1.615572	1.719943	1.82153	1.915894
0.6	1.515465	1.618407	1.715057	1.817919	1.918526
0.7	1.5114	1.615659	1.716708	1.813909	1.914016
0.8	1.511429	1.610008	1.714833	1.8138	1.910294
0.9	1.508392	1.611348	1.70638	1.810228	1.909606
1.0	1.506015	1.607224	1.709131	1.803158	1.904526

Tabelle 4.3: erwartete Dividendenzahlungen mit der Monte Carlo Methode 1/2

b/u	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1					
0.2					
0.3					
0.4					
0.5					
0.6	2.010111				
0.7	2.012559	2.105209			
0.8	2.009042	2.106003	2.19837		
0.9	2.003598	2.101856	2.198361	2.289987	
1.0	2.002171	2.096401	2.19317	2.289284	2.380094

Tabelle 4.4: erwartete Dividendenzahlungen mit der Monte Carlo Methode 2/2

b/u	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	1.517245				
0.2	1.516342	1.621967			
0.3	1.514818	1.620380	1.724811		
0.4	1.512657	1.618116	1.722568	1.825975	
0.5	1.509850	1.615171	1.719532	1.822891	1.925652
0.6	1.506383	1.611505	1.715682	1.819012	1.921614
0.7	1.502253	1.607111	1.711056	1.814229	1.916632
0.8	1.497434	1.602003	1.705649	1.808531	1.910781
0.9	1.491908	1.596188	1.699457	1.801999	1.903937
1.0	1.485695	1.589624	1.692526	1.794644	1.896166

Tabelle 4.5: erwartete Dividendenzahlungen mit dem rekursiven Algorithmus 1/2

b/u	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1					
0.2					
0.3					
0.4					
0.5					
0.6	2.023768				
0.7	2.018728	2.120326			
0.8	2.012496	2.114177	2.215379		
0.9	2.005344	2.106570	2.207888	2.308809	
1.0	1.997257	2.097962	2.198786	2.299796	2.400513

Tabelle 4.6: erwartete Dividendenzahlungen mit dem rekursiven Algorithmus 2/2

5 Fazit

In dieser Arbeit wurden ein Modell mit beschränkten, und ein Modell mit unbeschränkten Dividendenzahlungen betrachtet. In beiden Fällen hat sich gezeigt, dass die Dividendenausschüttung optimiert wird, wenn a priori eine konstante Dividendenbarriere eingeführt wird.

Da die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Unternehmens bei einer konstanten Dividendenbarriere langfristig gegen Null geht, wurde im zweiten Teil der Arbeit ein Modell mit nichtlinearen und unbeschränkten Barrieren eingeführt. Um die zu erwartenden Dividendenzahlungen zu simulieren, wurden zwei Algorithmen betrachtet. Da der doppelt-rekursive Algorithmus eine sehr hohe Rechenzeit beansprucht, wurde der rekursive Algorithmus eingeführt und anschließend implementiert. Dieser basiert auf Folgen mit kleiner Diskrepanz, welche zur Effizienz des Algorithmus wesentlich beitragen.

Die Werte der zu erwartenden Dividendenzahlungen wurden mit festen Parametern simuliert. Dabei wurde unter anderem eine quadratische Dividendenbarriere gewählt. Als Folge mit kleiner Diskrepanz wurde die Halton-Folge verwendet. Es zeigte sich, dass die Ergebnisse des rekursiven Algorithmus vergleichbare Ergebnisse zur klassischen Monte Carlo Methode bringt, jedoch eine deutlich verkürzte Laufzeit benötigt. Die Überlebenswahrscheinlichkeit von Unternehmen liegt bei 5% – 7%. Somit wurde auch hier gezeigt, dass mit der nichtlinearen Dividendenbarriere die Überlebenswahrscheinlichkeit im Zeitverlauf nicht gegen Null geht.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Albrecher und R. Kainhofer. „Risk Theory with a Nonlinear Dividend Barrier“. In: *Computing* 68 (2002), S. 289–311. DOI: [10.1007/s00607-001-1447-4](https://doi.org/10.1007/s00607-001-1447-4).
- [2] S. Asmussen und M. Taksar. „Controlled diffusion models for optimal dividend payout“. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 20.1 (1997), S. 1–15. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6687\(96\)00017-0](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(96)00017-0).
- [3] P. Baldi. *Stochastic Calculus: An Introduction Through Theory and Exercises*. Springer Cham, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-62226-2>.
- [4] H. U. Gerber. *An introduction to mathematical risk theory*. Irwin, 1979.
- [5] J. Jachymski und I. J. und Małgorzata Terepeta. „The Banach Fixed Point Theorem: selected topics from its hundred-year history“. In: *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Serie A: Matemáticas* 118 (2024). DOI: [10.1007/s13398-024-01636-6](https://doi.org/10.1007/s13398-024-01636-6).
- [6] H. Niederreiter. *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*. Society for Industrial und Applied Mathematics, 1992.