

Diplomarbeit

Lastverteilung im Schotteroberbau bei statischer und dynamischer Beanspruchung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grads
Diplom-Ingenieur
eingereicht an der TU Wien, Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwesen

Diploma Thesis

Load distribution in the ballasted track superstructure under static and dynamic loading conditions

Submitted in satisfaction of the requirements for the degree of
Diplom-Ingenieur
of the TU Wien, Faculty of Civil and Environmental Engineering

von

Timur Galiullin

Matr.Nr.: 01528469

Betreuung: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. **Josef Fink**
Ass.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. **Andreas Stollwitzer**
Institut für Tragkonstruktionen
Forschungsbereich Stahlbau
Technische Universität Wien,
Karlsplatz 13, 1040 Wien, Österreich

Wien, im August 2025

Danksagung

Die Anfertigung dieser Diplomarbeit wäre ohne die Unterstützung meiner Eltern und die wertvollen Hinweise von Herrn Ass.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Andreas Stollwitzer nicht möglich gewesen, bei wem ich mich unter anderem für den Vorschlag dieses spannenden Themas und für mehrfaches sorgfältiges Korrekturlesen herzlich bedanken möchte.

Kurzfassung

Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau werden für dynamische Berechnungen oft vereinfacht als einzelne Euler-Bernoulli-Balken modelliert, weil diese Wahl der Modellbildung aufgrund ihrer Einfachheit am wenigsten Eingangsparameter benötigt, welche bei komplexeren Modellbildungen nicht bekannt sein können oder für welche in der Fachliteratur stark streuende Angaben zu finden sind. Allerdings werden bei solchen vereinfachten Modellierungsverfahren große Abweichungen zwischen Berechnung und Messung in Bezug auf Brückenschwingungen beobachtet, welche neben den unsicheren Eingangsdaten auch durch die fehlende Berücksichtigung der Lastverteilung im Schotteroberbau erklärt werden können.

Im Gegensatz zu einem einzelnen Euler-Bernoulli-Balken können die getrennt betrachteten Tragwerks- und Oberbaubalken miteinander durch Feder-Dämpfer-Elemente verbunden werden, um die mechanische Wirkung des Schotteroberbaues im Rahmen eines Koppelbalkenmodells explizit zu erfassen. Standardmäßig wird für die Kopplung eine lineare Federkennlinie angenommen, wobei die Kopplungssteifigkeit einen großen Einfluss auf die Lastverteilung und auf die rechnerische Brückenschwingung hat. Eine Versuchsreihe zeigt jedoch, dass das Schotterbett (neben einem nichtlinearen Dämpfungsverhalten) eine nichtlineare Federkennlinie hat, für welche noch keine Untersuchungen der Lastverteilung durchgeführt worden sind. Es bleibt zudem unbekannt, ob der Übergang von einer statischen auf eine dynamische Belastung sich ebenfalls auf die Lastverteilung auswirken würde.

Aus diesen Gründen wird in der vorliegenden Diplomarbeit die Lastverteilung eines sowohl statisch als auch dynamisch belasteten elastisch gebetteten Gleisbalkens für verschiedene Oberbau-Steifigkeitsverhalten und für unterschiedliche Variationen der Eingangsparameter untersucht. Bei der Annahme sowohl einer linearen Federkennlinie als auch einer versuchstechnisch ermittelten nichtlinearen Federkennlinie für das Schotterbett wurde eine vom Lastniveau bzw. von der Lastamplitude unabhängige Lastverteilung festgestellt. Einen wesentlichen Einfluss auf die Lastverteilung zeigen hingegen die Schotterbettsteifigkeit, die Dämpfung des Oberbaues sowie die Anregungsfrequenz. Auf Basis der gewonnenen Ergebnisse werden einwirkungsseitige Lastverteilungsansätze für statische und dynamische Achslasten zum Einsatz im vereinfachten Euler-Bernoulli-Einzelbalkenmodell aufgestellt.

Abstract

Railway bridges with ballasted tracks are often modelled as simplified single Euler-Bernoulli beams for dynamic calculations as this modelling approach, due to its simplicity, requires the fewest input parameters that, in case of more complex models, may be unknown or be subject to considerable variation in the technical literature. However, such simplified modelling methods often lead to significant discrepancies between calculated and measured bridge vibrations. These deviations can be attributed not only to the uncertain input data but also to the disregard of load distribution in a ballasted track superstructure.

In contrast to a single Euler-Bernoulli beam model, the separately considered structural and track beams can be coupled via spring-damper elements to explicitly account for the mechanical behaviour of the ballast bed within a more sophisticated coupled beam model. A linear spring characteristic is typically assumed for this purpose, whereby the coupling stiffness has a significant influence on the load distribution and on the computed bridge vibration. However, a series of experiments demonstrates that the ballast (in addition to exhibiting a nonlinear damping behaviour) has a nonlinear spring characteristic, for which no investigations into load distribution have been conducted to date. Moreover, it remains unclear whether the transition from static to dynamic loading also affects the load distribution.

For these reasons, this diploma thesis investigates the load distribution of an elastically supported track beam under both static and dynamic loading, considering various stiffness behaviours of the track superstructure and different variations of input parameters. Assuming a linear spring characteristic as well as an experimentally derived nonlinear spring characteristic for the ballast bed, the load distribution was found to be independent of the load level or load amplitude. In contrast, the ballast bed stiffness, the damping intensity of the track superstructure and the excitation frequency were observed to have a significant effect on the load distribution. Based on the obtained results, action-side load distribution models for static and dynamic axle loads are developed for application in the simplified single Euler-Bernoulli beam model.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielsetzung der Arbeit	5
1.3	Aufbau der Arbeit	6
2	Statische Last und lineare Bettung	8
2.1	Differentialgleichung und Randbedingungen.....	9
2.2	Analytische Lösung.....	10
2.2.1	Allgemeine Lösung.....	11
2.2.2	Bestimmung von Integrationskonstanten.....	14
2.2.3	Geschlossene Ausdrücke für Setzung, Untergrundreaktion und Lastverteilungslänge	16
2.3	Verifizierung der Lösung	16
2.3.1	Definition der Modellkennwerte.....	17
2.3.2	Erstellung eines <i>RFEM</i> -Modells	17
2.3.3	Vergleich der Ergebnisse	18
2.4	Ergebnisse für die lineare Bettung	21
2.5	Lastverteilungsmodell auf Basis des linearen statischen Systems	25
2.5.1	Konzipierung des Lastmodells.....	26
2.5.2	Anwendung des Lastmodells.....	29
2.6	Fazit	33
3	Statische Last und nichtlineare Bettung.....	34
3.1	Quadratische Federkennlinie	35
3.1.1	Differentialgleichung und Randbedingungen.....	35
3.1.2	Umsetzung in <i>MATLAB</i>	37
3.1.3	Verifizierung des <i>MATLAB</i> -Programms mit <i>RFEM</i>	38

3.1.4	Ergebnisse für die Bettung mit einer quadratischen Federkennlinie.....	41
3.1.5	Lastverteilungsmodell auf Basis des statischen Systems mit einer quadratischen Federkennlinie	46
3.2	Federkennlinie gemäß einer Wurzelfunktion.....	53
3.2.1	Differentialgleichung und Randbedingungen	53
3.2.2	Umsetzung in <i>MATLAB</i>	54
3.2.3	Verifizierung des <i>MATLAB</i> -Programms mit <i>RFEM</i>	55
3.2.4	Ergebnisse für die Bettung mit einer Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion 58	
3.2.5	Lastverteilungsmodell auf Basis des statischen Systems mit einer Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion	62
3.3	Degressive Federkennlinie aus Versuchen	67
3.3.1	Umsetzung in <i>MATLAB</i>	68
3.3.2	Ergebnisse für die Bettung mit der Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion.....	69
3.3.3	Lastverteilungsmodell auf Basis des statischen Systems mit der Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion.....	72
3.4	Fazit	74
4	Dynamischer Lastfall	75
4.1	Mechanisches System	75
4.2	Berechnungsmethode.....	78
4.2.1	Örtliche Diskretisierung.....	79
4.2.2	Ordnungsreduktion, Umformung und Anfangswert.....	84
4.3	Dynamische Berechnung des Systems mit einer linearen Federkennlinie	87
4.3.1	Definition der Federungskraft und Anpassung der Bewegungsgleichung	87
4.3.2	Verifizierung dynamischer Berechnung	88
4.3.3	Vergleich zwischen den Ergebnissen einer statischen und einer dynamischen Berechnung für ein lineares Beispielsystem	90

4.3.4	Definition eines vereinfachten Lastmodells	95
4.3.5	Ergebnisse für die Gleisverformung und die Untergrundreaktion des dynamischen Systems mit einer linearen Federkennlinie.....	102
4.3.6	Ergebnisse für die Einzelkräfte des dynamischen Lastmodells beim System mit einer linearen Federkennlinie	110
4.4	Dynamische Berechnung des Systems mit der versuchsbasierten Federkennlinie nach der Potenzfunktion	119
4.4.1	Definition der Federungskraft und Anpassung der Bewegungsgleichung	119
4.4.2	Ergebnisse für die Gleisverformung und die Untergrundreaktion des dynamischen Systems mit der Federkennlinie nach der Potenzfunktion.....	120
4.4.3	Ergebnisse für die Einzelkräfte des dynamischen Lastmodells beim System mit der Federkennlinie nach der Potenzfunktion	128
4.5	Dynamische Berechnung des Systems mit einer quadratischen Federkennlinie	136
4.5.1	Definition der Federungskraft und Anpassung der Bewegungsgleichung	136
4.5.2	Ergebnisse für die Gleisverformung und die Untergrundreaktion des dynamischen Systems mit einer quadratischen Federkennlinie	137
4.5.3	Ergebnisse für die Einzelkräfte des dynamischen Lastmodells beim System mit einer quadratischen Federkennlinie.....	144
4.6	Dynamische Berechnung des Systems mit einer Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion.....	154
4.6.1	Definition der Federungskraft und Anpassung der Bewegungsgleichung	154
4.6.2	Ergebnisse für die Gleisverformung und die Untergrundreaktion des dynamischen Systems mit einer Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion	155
4.6.3	Ergebnisse für die Einzelkräfte des dynamischen Lastmodells beim System mit einer Federkennlinie nach der Wurzelfunktion	162
4.7	Fazit	172
5	Zusammenfassung und Ausblick.....	173
	Literaturverzeichnis	176
	Abbildungsverzeichnis	179

1 Einleitung

Das transeuropäische Hochgeschwindigkeitsschienennetz soll eine attraktive und nachhaltige Alternative zum Luft- und Straßenverkehr für Personenbeförderung zwischen europäischen Großstädten schaffen. Es wird von der Europäischen Union unter anderem als Mittel zur Verkehrsdekarbonisierung anerkannt [1], weshalb dessen europaweiter Aufbau mit EU-Mitteln kofinanziert wird [2]. Als Hochgeschwindigkeitsstrecke gilt dabei jene, deren Betriebsgeschwindigkeit über 250 km/h liegt [3].

Die hohen Betriebsgeschwindigkeiten verursachen allerdings erhöhte Beanspruchung von Eisenbahninfrastruktur. Die hierbei vorherrschenden Einwirkungen besitzen eine ausgeprägte dynamische Natur und versetzen die für den Hochgeschwindigkeitsverkehr freigegebenen Eisenbahnbrücken verstärkt in Schwingung. Die stärkeren Brückenschwingungen beeinträchtigen zum einen den Fahrgastkomfort, zum anderen haben sie das Potential, eine Gleisschotterauflockerung und somit Gleislagefehler auszulösen (vgl. Tabelle 6-1 in [4]), die im Extremfall eine Zugentgleisung bewirken können.

Als Maßnahme zur Gewährleistung eines behaglichen und sicheren Bahnbetriebs wurden auf europäischer sowie auf nationaler Ebene normative Vorgaben formuliert, die es bei der Berechnung von Eisenbahnbrücken in Österreich zu erfüllen gilt. ÖNORM EN 1991-2 [5] gibt erstens die Voraussetzungen an, unter welchen eine dynamische Brückenberechnung erforderlich ist. Zweitens werden in ÖNORM EN 1990/A1 [6] und ÖNORM B 4008-2 [7] Grenzwerte für die vertikale Überbaubeschleunigung während einer Zugüberfahrt festgelegt. Für Brücken mit Schotteroberbau betragen diese $3,5 \text{ m/s}^2$ bei neuen und $6,0 \text{ m/s}^2$ bei bestehenden Bauwerken mit gutem Erhaltungszustand. Die angeführten Grenzen stammen aus den Erkenntnissen in ERRI D 214 / RP 9 [8], dass eine Überbaubeschleunigung von circa 7 m/s^2 und höher Destabilisierungen des Schottergefüges verursacht, wobei für Neubauten und für Bestandsobjekte aus Überlegungen der Wirtschaftlichkeit und des Vorhandenseins von Messdaten (vgl. Anhang F.2 in B 4008-2 [7]) unterschiedliche Sicherheitsfaktoren verwendet werden.

1.1 Motivation

Die strengen Vorgaben zur Überbaubeschleunigung sind in der Lage, die Brückenbemessung für den Hochgeschwindigkeitsverkehr maßgebend zu beeinflussen. Es empfiehlt sich daher, eine möglichst genaue Ermittlung der erwarteten Brückenschwingungen durchzuführen, um eine auf der sicheren Seite liegende und dennoch wirtschaftliche Nachweisführung zu erzielen.

Die Eisenbahnbrücke und der überfahrende Zug stehen miteinander in einer Wechselwirkung. Die infolge der Zugüberfahrt auftretende Überbaubeschleunigung hängt von diversen Faktoren ab, die grundsätzlich in die Eigenschaften des Zuges und in jene der Brücke eingeteilt werden können. Im ersten Fall kommt unter anderem der Zuggeschwindigkeit und den

Radsatzlasten eine große Bedeutung zu, während im zweiten etwa die Brückenbauweise, Lagerung, Spannweite und Oberbauart entscheidend sind.

Für Züge stehen herstellerseitige Angaben zur Verfügung, die zusammen mit der anvisierten Streckengeschwindigkeit für eine Überfahrtsberechnung herangezogen werden können. Im Gegensatz dazu ist eine wirklichkeitsgetreue Erfassung des Brückensystems mit diversen Herausforderungen verbunden. Eine davon bezieht sich auf die Erstellung eines geeigneten Brückenmodells: In der Literatur gibt es unterschiedliche Vorschläge zur mechanischen Modellbildung der Tragkonstruktion und des darauf befindlichen Gleiskörpers. Den einfachsten Zugang stellt Abbildung 1.1 dar, welcher darin besteht, den ganzen Brückenaufbau in einem Euler-Bernoulli-Balken mit der Länge L , Biegesteifigkeit EI , Massenbelegung μ und dem *Lehr*-schen Dämpfungsmaß ζ zusammenzufassen.

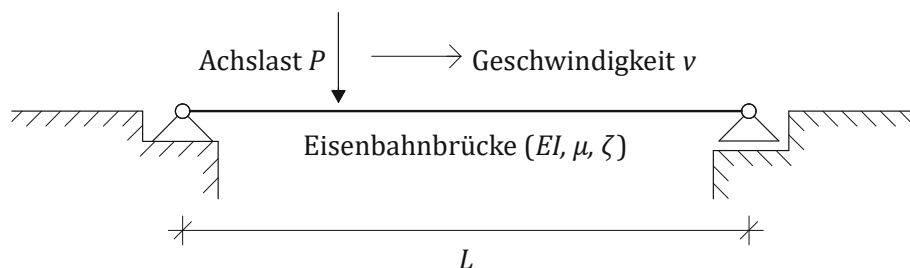


Abbildung 1.1: Eisenbahnbrücke als Euler-Bernoulli-Balken

Des Weiteren kann bei Brücken mit Schotteroberbau eine lastverteilende Wirkung erfasst werden, indem auf ein Koppelbalkenmodell zurückgegriffen wird. Die dabei separat betrachteten Gleisbalken und Tragwerksbalken werden miteinander kontinuierlich über Feder-Dämpfer-Elemente mit der Federsteifigkeit k und der Dämpfungskonstanten c gekoppelt, wie beispielsweise in Abbildung 1.2 gezeigt. Diese Kopplung dient dem Zweck, die mechanischen Effekte eines Schotteroberbaues – seine Nachgiebigkeit, Lastverteilung und Dämpfung – in einer möglichst einfachen Weise explizit abzubilden.

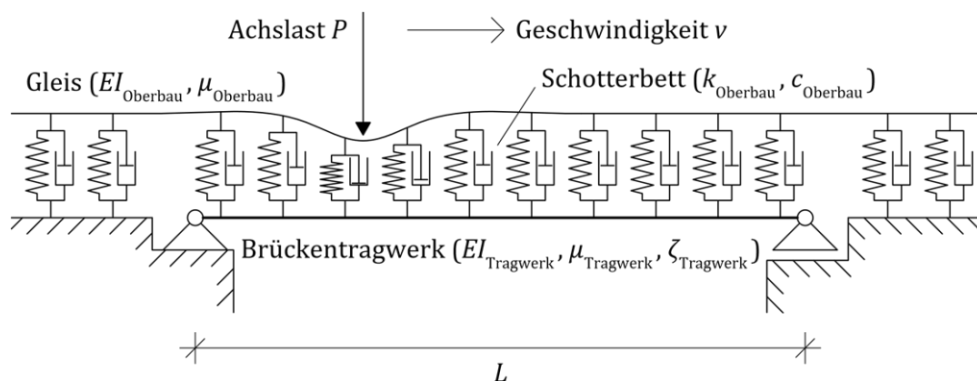


Abbildung 1.2: Übersicht eines Koppelbalkenmodells

Alternativ dazu kann auch der von *Stollwitzer* und *Fink* in [10] vorgestellte kombinierte Kopplungsansatz erwägt werden, der auf eine vollständige Berücksichtigung der Energiedissipationsmechanismen im Schotteroberbau abzielt (vgl. Abbildung 1.3). Darüber hinaus diskutiert

unter anderem *Brandstetter* [11] die Möglichkeit einer dreidimensionalen Bauwerksmodellierung.

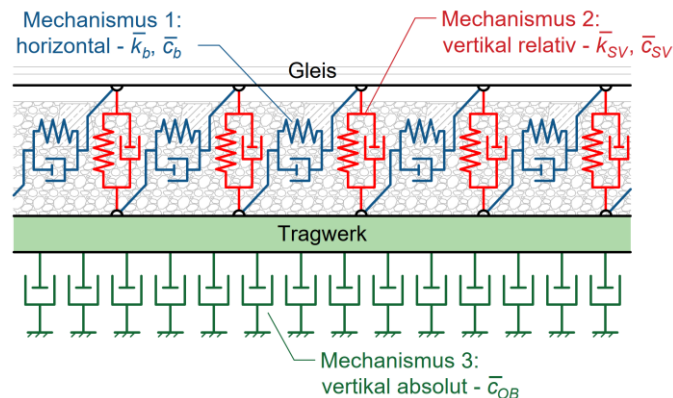


Abbildung 1.3: Kombiniertes Kopplungsmodell zur Berücksichtigung von vertikalen und horizontalen Energiedissipationsmechanismen (Quelle: Abbildung 5.1 in [13])

Eine weitere Herausforderung besteht darin, dass die für die Berechnung benötigten Modellparameter meist nicht genau bekannt sind. Erstens unterliegen die in der Literatur verfügbaren Angaben einer beträchtlichen Streuung: Ebenfalls in der Studie von *Stollwitzer* und *Fink* [10] wurden Kennwertangaben für verschiedene Schotteroberbaumodelle aus unterschiedlichen Literaturquellen verglichen. Dabei wurden Abweichungen um bis zum Faktor 25 zwischen minimalen und maximalen Wertangaben entdeckt. Zweitens werden mechanische Eigenschaften von Eisenbahnbrücken und die entsprechenden Modellparameter durch die jahreszeitbedingten Temperaturänderungen und Witterungsverhältnisse beeinflusst [12], woraus sich eine weitere Unsicherheitsquelle ergibt.

Gerade die Unsicherheiten sowohl in der Modellierung des Schotteroberbaues als auch in den zugehörigen Kennwerten führen häufig zu sehr konservativen Ansätzen und einer damit einhergehenden rechnerischen Überschätzung der Brückenschwingungsantwort [13]. In einer zutreffenderen Brückenberechnung sollten hingegen die Effekte des Schotterbetts in angemessener Art und Weise berücksichtigt werden. Einerseits sind seine Energiedissipationsmechanismen eine der Hauptquellen für die dämpfende Wirkung der Brücke [13]. Andererseits verteilt der Oberbau die konzentrierten Achslasten, wodurch laut Simulationen von *Spengler* [14] wiederum eine die Brückenbeschleunigung mindernde Auswirkung erreicht wird. Der weitere Effekt wurde unter anderem von *Brandstetter* in [11] behandelt: Der Schotter stellt einen Scherverbund zwischen Gleis und Tragwerk her und erhöht infolgedessen die Systemsteifigkeit.

Trotz der vorteilhaften inhärenten Abbildung der Lastverteilung werden die Koppelbalkenmodelle bei groß angelegten Simulationsreihen (die etwa für die Zulassung neuer Züge durchgeführt werden) seltener herangezogen, da zum einen die besprochene Streuung in den Angaben zu den Kopplungsparametern besteht und zum anderen der einfachere Euler-Bernoulli-

Einzelbalken angesichts des geringen Berechnungsaufwandes und der Einfachheit der Anwendung immer noch als Brückenmodell bevorzugt wird.

Um die günstige Auswirkung der Lastverteilung auch unter Anwendung eines Euler-Bernoulli-Einzelbalkenmodells zu erhalten, wurden einwirkungsseitige Ansätze vor allem in der EN 1991-2 [5] und von *Spengler* [14] vorgeschlagen. Beim ersten handelt es sich um den Ersatz einer Achslast durch drei Teil-Einzelkräfte, die zueinander im Abstand der Schwellen stehen und deren Größe jeweils 25, 50 und 25 % der Achslast beträgt, vgl. Abbildung 1.4. Dieser Anordnung liegt ausschließlich die Lastverteilung der Schienen zugrunde (und nicht des vollständigen Oberbaues).

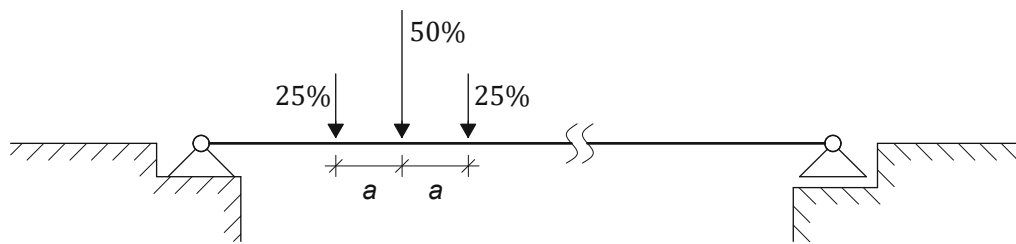


Abbildung 1.4: Längsverteilung einer Achslast im Schwellenabstand a nach EN 1991-2 [5]

Im Gegensatz dazu macht der von *Spengler* [14] entwickelte Ansatz von fünf Teil-Einzelkräften Gebrauch, deren Anordnung gleichermaßen dem Schwellenabstand folgt. Ihnen werden hierbei 11, 23, 32, 23 und 11 % der zu ersetzenden Achslast zugewiesen, siehe Abbildung 1.5.

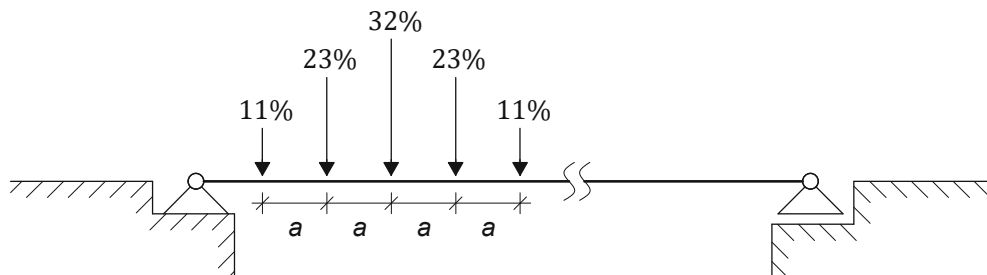


Abbildung 1.5: Lastverteilung mit Schwellenabstand a nach *Spengler* [14]

Berechnungen von *Bruckmoser* [9] zeigen jedoch, dass die tatsächlich vorhandene Lastverteilung von der Schotterbettsteifigkeit abhängt. Hierin betrachtet er unendliches elastisch gebettetes Gleis, auf welches eine statische Achslast einwirkt. Aus der bereichsweisen Integration dessen Biegelinie und dem nachfolgenden Produkt mit der kontinuierlichen Schotterbettsteifigkeit werden die Ersatz-Einzelkräfte ermittelt (vgl. Abbildung 4.1 und Tabelle 4.2 in [9]), deren Größen bei diversen Bettungssteifigkeiten voneinander zum Teil um 50 % abweichen.

Sowohl *Spengler* als auch *Bruckmoser* legen ihren Untersuchungen konstante wegunabhängige Schotterbettsteifigkeiten beziehungsweise lineare Federkennlinien zugrunde. Aus einer von *Stollwitzer et al.* durchgeführten Versuchsreihe zur Analyse der vertikalen Gleis-Trag-

werk-Interaktion [15] lässt sich aber eine verschiebungsabhängige Bettungssteifigkeit erkennen, die einer nichtlinearen degressiven Federkennlinie entspricht (siehe Fig. 15 in [15]). Zudem werden die besprochenen Verteilungsansätze allein für eine statische Kraft von 100 kN hergeleitet. Inwiefern sie allerdings für eine veränderliche Last infolge gefederter schwingender Zugmasse geeignet sind und welche Auswirkung darauf eine nichtlineare Federkennlinie des Schotterbetts hätte, sind offene Fragen, für die weiterhin Forschungsbedarf besteht. Abbildung 1.6 gibt einen qualitativen Überblick über einige bei der Modellbildung des Schotterbetts in Betracht kommende Federkennlinien.

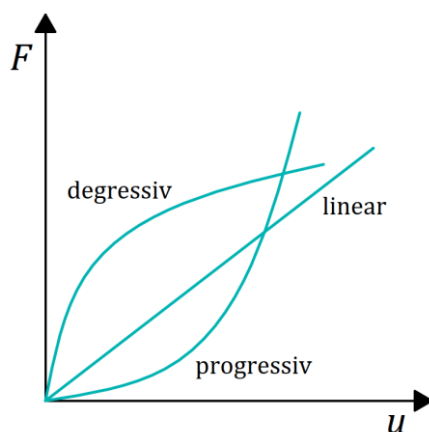


Abbildung 1.6: Federkraft F in Abhängigkeit der Verschiebung u für unterschiedliche Federkennlinienannahmen

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Diese Diplomarbeit setzt sich die Beantwortung der folgenden Forschungsfragen zum Ziel:

1. Wie wird eine auf ein Gleis einwirkende Achslast von einem Schotteroberbau in Schienenlängsrichtung verteilt?
2. Wie ändert sich diese Verteilung für unterschiedliche Belastungsarten (statisch/dynamisch), Kraftamplituden, Anregungsfrequenzen, oberbauseitige Steifigkeitsverhalten sowie Dämpfungsparameter?
3. Wie kann die Lastverteilung in Schienenlängsrichtung in Eisenbahnbrückenberechnungen bei Verwendung eines Euler-Bernoulli-Balkenmodells berücksichtigt werden?

Zu diesem Zweck werden aufeinanderfolgend ein statischer und ein dynamischer Lastfall betrachtet. Die vorzunehmende Variation der Systemkennwerte ermöglicht dabei die Durchführung einer Sensitivitätsanalyse für die zu bestimmende Lastverteilung.

Die Untersuchung des **statischen Lastfalls** umfasst hierbei folgende Teilaufgaben (Federkennlinien siehe Abbildung 1.6):

- Berechnung der Biegelinie eines in Schotter gebetteten Gleises, der Untergrundreaktion und der Lastverteilungslänge infolge einer statischen Achslast für eine konstante wegunabhängige Schotterbettungssteifigkeit (eine lineare Federkennlinie), Konzipierung eines Lastmodells aus verteilten Einzelkräften auf Basis der ermittelten Untergrundreaktion;
- Ermittlung der Biegelinie, der Untergrundreaktion und der Lastverteilungslänge sowie die Anpassung des Lastmodells unter Annahme einer wegababhängigen Schotterbettsteifigkeit für progressive wie auch degressive Federkennlinien.

Beim anschließend zu untersuchenden **dynamischen Lastfall** handelt es sich hingegen um:

- Einrichtung eines für unterschiedliche Federkennlinien des Schotterbetts geeigneten numerischen Lösungsverfahrens,
- Simulation eines durch eine ortsfeste Achslast harmonisch angeregten Gleiskörpers, Bestimmung der Zeitverläufe für die Biegelinie wie auch für die Untergrundreaktion, Vergleich der erhaltenen Ergebnisse mit den Ergebnissen für den statischen Lastfall,
- Definition, Anwendung und Auswertung eines vereinfachten dynamischen Lastmodells für lineare und nichtlineare Federkennlinien des Schotterbetts.

Um eine von Brückentragwerken isolierte Betrachtung des Schotteroberbauverhaltens zu bewerkstelligen, erfolgen die anvisierten Untersuchungen unter Annahme eines starren Untergrundes, sodass die Ergebnisse sowohl auf Eisenbahnbrücken als auch auf Vorlandbereiche vor und nach der Brücke anwendbar sind.

1.3 Aufbau der Arbeit

Kapitel 2 widmet sich einem unendlichen elastisch gebetteten Euler-Bernoulli-Balken, der durch eine konstante Achslast unter Voraussetzung eines linearen Bettungsverhaltens belastet wird. Nach der anfänglichen Darlegung aller Systemparameter werden aus der analytisch hergeleiteten Lösung für die Biegelinie Formeln für die Untergrundreaktion sowie die Lastverteilungslänge erhalten. Nachdem das Ergebnis für ausgewählte Parameterkombinationen in Anlehnung an eine entsprechende *RFEM*-Berechnung validiert wird, erfolgt die Darstellung der Durchbiegung, der Untergrundreaktion und der Lastverteilungslänge unter Variation der (wegunabhängigen) Bettungssteifigkeit und der Achslast. Es werden Systemkennwertbereiche identifiziert, innerhalb welcher die Lastverteilung am empfindlichsten ist und innerhalb welcher diese Kennwerte bei der Brückenmodellierung deshalb besonders präzise erfasst werden sollten. Anhand der gewonnenen Ergebnisse wird der Lastverteilungsansatz aus den in einem konstanten Abstand angeordneten Einzelkräften mittels bereichsweiser Integration der Untergrundreaktion hergeleitet.

In **Kapitel 3** werden nichtlineare progressive und degressive Federkennlinien für die Bettung definiert, welche eine verschiebungsabhängige Schotterbettsteifigkeit abbilden sollen. Zur

Behandlung des ursprünglich in Kapitel 2 bearbeiteten und in diesem Kapitel um die nichtlineare Bettung ergänzten Systems wird eine für Probleme mit Randbedingungen (*Randwertprobleme*) geeignete numerische Methode eingerichtet, mit deren Hilfe die nachfolgende Berechnung für unterschiedliche Modellparameter in *MATLAB* stattfindet. Die Vorgehensweise zur Annäherung einer nichtlinearen kontinuierlichen Bettung in *RFEM* wird im Hinblick auf die bevorstehende Ergebnisvalidierung vorgestellt. Die erhaltenen Ergebnisse für die Durchbiegung, die Untergrundreaktion und die Lastverteilungslänge werden anschließend zur Anpassung des in Kapitel 2 vorgeschlagenen Lastmodells für nichtlineare Schotteroberbausysteme herangezogen.

Das statische Basismodell aus Kapitel 2 wird in **Kapitel 4** in ein von einer harmonischen Achslast angeregtes dynamisches System übergeführt. Ein sowohl für lineare als auch für nichtlineare diskrete Systeme geeignetes numerisches Lösungsverfahren wird dargelegt und auf den zu diskretisierenden Gleisbalken angewandt. Das unmittelbare Berechnungsergebnis in Form eines Zeitverlaufs der Gleisbiegeline wie auch der Untergrundreaktion wird, soweit möglich, wiederum mit einer *RFEM*-Kontrollsimulation verglichen. Die Amplituden der Setzung, Untergrundreaktion und Lastverteilungslänge für unterschiedliche Parametersätze des dynamischen Systems werden den statischen Ergebnissen nach Kapitel 2 und Kapitel 3 gegenübergestellt. Den Abschluss des Kapitels bildet der Vorschlag eines vereinfachten Lastmodells für das dynamische System sowie der Vergleich der erhaltenen Einzelkräfte mit den Einzelkräften zufolge der statischen Lastmodelle gemäß Kapitel 2 und Kapitel 3.

Kapitel 5 bildet den Abschluss dieser Diplomarbeit. Hierin werden Erkenntnisse der durchgeführten Untersuchungen zusammengefasst und Vorschläge für weiterführende Forschung im Bereich Eisenbahnbrücken und deren Dynamik gegeben.

2 Statische Last und lineare Bettung

Es wird ein auf starrem Untergrund liegender und somit gegen Einflüsse eines etwaigen Brückentragwerks isolierter Gleiskörper betrachtet. Der Gleiskörper stellt einen elastisch gebetteten unendlichen Balken gemäß Abbildung 2.1 dar, bei welchem alle federnden Effekte der Schwellen, des Schotters und der Schienen-Schwellen-Verbindungen in der kontinuierlichen Bettungssteifigkeit k in integraler Weise zusammengefasst sind. Die Biegesteifigkeit des Gleises EI setzt sich aus der zweifachen Biegesteifigkeit der Schiene 60E1 (auch als UIC60 bekannt) zusammen. Auf das Gleis wirkt eine ortsfeste vertikale Einzelkraft P , die den statischen Anteil einer Achslast abbildet. Die Einzelkraft P verursacht eine elastische Gleisdurchbiegung bzw. Gleissetzung $w(x)$ und ruft eine Untergrundreaktion $N(x)$ hervor. Die Länge des gedrückten Untergrundbereichs unmittelbar um die Einzelkraft sei die Lastverteilungslänge L_{LV} .

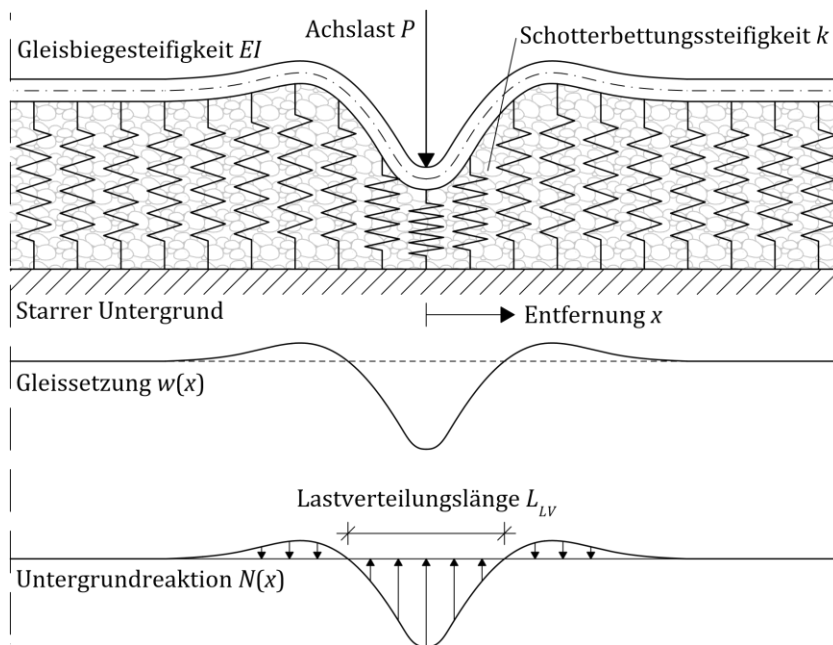


Abbildung 2.1: Statisches Modell des Schotteroberbaues

Anhand der im Folgenden zu bestimmenden Biegelinien, Untergrundreaktionen und Lastverteilungslängen für die jeweils zwischen 10 und 1000 kN/mm/m sowie zwischen 25 und 250 kN variierten Bettungssteifigkeit k und Achslast P wird in diesem Kapitel ein Lastmodell vorgeschlagen, das den Effekt der Lastverteilung für das vollkommen lineare statische System abbilden soll. Die gewählten Kennwertschranken sollen dabei die in Abschnitt 1.1 besprochene große Bandbreite an Angaben aus den Literaturquellen abdecken.

Das Gleis kann für Zwecke dieser Auseinandersetzung annähernd als schubstarr angesehen werden (diese Behauptung wird in Unterabschnitt 2.3.3 überprüft), weshalb, wie auch auf-

grund der ausschließlichen transversalen Belastung und unter Voraussetzung kleiner Deformationen, in den nachfolgenden Berechnungen die Euler-Bernoulli-Balkentheorie I. Ordnung angewendet wird.

2.1 Differentialgleichung und Randbedingungen

Der Ausgangspunkt für die Ermittlung der Gleissetzung ist die Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) \quad (2.1)$$

EI	...	konstante Biegesteifigkeit von zwei Schienen 60E1
x	...	Entfernung von der Kraftangriffsstelle
$w(x)$	...	elastische Gleissetzung
$q(x)$	...	allgemeine Linienlast

Die linke Seite der Gleichung (2.1) kann als kontinuierliche nach oben gerichtete Widerstandskraft infolge der Gleisbiegesteifigkeit interpretiert werden. Diese steht mit der rechten Seite – einer nach unten gerichteten Linienlast (etwa das Eigengewicht des Gleises) – im Gleichgewicht.

Anstelle der Linienlast $q(x)$ in Gl. (2.1) wird gemäß dem Ansatz von *Winkler*¹ (unter Vernachlässigung des Eigengewichtes) der nach oben wirkende Bodendruck $N(x)$ eingesetzt:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = -N(x) \quad (2.2)$$

$N(x)$... Untergrundreaktion oder Bodendruck

Der Bodendruck $N(x)$ stellt die Reaktion des elastischen Untergrundes auf die Gleissetzung $w(x)$ dar. Die positive Richtungsdefinition „nach oben“ bedingt das negative Vorzeichen

¹ Die Idee, den von der Schotterbettung ertragenen Druck als eine auf das Gleis von unten einwirkende Linienlast anzusetzen, die proportional zur Gleissetzung ist, stammt vom deutschen Bauingenieur Emil Winkler, dem damaligen Professor für Ingenieurbaukunde am ständischen polytechnischen Institut in Prag. In seiner Veröffentlichung *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit* [16] vom Jahr 1867 löst er die resultierende Differentialgleichung und erhält die Gleisbiegeline und das Biegemoment. Obwohl dieser Ansatz ursprünglich für Gleise mit den damals üblichen Längsschwellen gedacht war, wurde er später (und immer noch) auch zur Berechnung von Gleisen mit Querschwellen breit angewendet, weil dadurch ausreichend genaue Ergebnisse bei relativ geringem Rechenaufwand geliefert werden. Weitere Details zu den historischen Entwicklungen um dieses Thema siehe [17].

auf der rechten Seite der Gleichung (2.2). Die Untergrundreaktion sei proportional zur Setzung:

$$N(x) = kw(x) \quad (2.3)$$

k ... wegunabhängige Bettungssteifigkeit (bzw. Bettungszahl oder Bettungsmodul)

Aufgrund der von der unstetigen Lasteinleitung durch Achslast P verursachten Diskontinuität muss Gl. (2.2) getrennt für die linke ($x \leq 0$) und rechte ($x \geq 0$) Gleishälfte gelöst werden. Da aber das Gleis symmetrisch um die Achslast verläuft, wird die Lösung nachfolgend lediglich für die rechte Seite erhalten und auf die linke Seite gespiegelt.

Die für die Lösungsfindung erforderlichen Rand- und Übergangsbedingungen betreffen die Kraftangriffsstelle wie auch das unendlich entfernte Gleisende. Aus der Systemsymmetrie um die Achslast sowie aus dem Umstand, dass bei einer elastischen Berechnung nach der Euler-Bernoulli-Balkentheorie keine Stabknicke auftreten dürfen, ergeben sich die folgenden Übergangsbedingungen für die Gleisneigung $dw(x)/dx$ und die Querkraft $Q(x)$ unmittelbar rechts von der Kraftangriffsstelle $x = 0$:

$$\frac{dw(x=0)}{dx} = 0 \quad (2.4)$$

$$Q(x=0) = -\frac{P}{2} \quad (2.5)$$

$Q(x)$... Querkraft infolge Achslast P

P ... stationäre vertikale Einzelkraft, welche den statischen Anteil einer Radsatzlast abbildet

Hinsichtlich der Randbedingungen am unendlich entfernten Gleisende wird die Annahme getroffen, dass sämtliche Störungen durch die angreifende Achslast in einem ausreichend großen Abstand vollkommen abklingen. In diesem Zusammenhang kann die Situation der mit der größeren Entfernung immer kleiner werdenden Setzungsantwort mittels eines entsprechenden Grenzwerts formuliert werden:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = 0 \quad (2.6)$$

2.2 Analytische Lösung

Das Einsetzen der Untergrundreaktion $N(x)$ gemäß Gl. (2.3) in Gl. (2.2) ergibt eine homogene lineare Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + kw(x) = 0 \quad (2.7)$$

Gl. (2.7) kann mithilfe eines geeigneten Ansatzes analytisch gelöst werden. Als zielführend hat sich der von *Winkler* vorgenommene Ansatz einer Exponentialfunktion erwiesen (vgl. S 195 in [16]):

$$w(x) = C e^{\lambda x} \quad (2.8)$$

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = C \lambda^4 e^{\lambda x} \quad (2.9)$$

C, λ ... unbekannte Konstante (die entweder reell oder komplex sein können)

Einsetzen von Gl. (2.8) und (2.9) in Gl. (2.7) ergibt die zugehörige charakteristische Gleichung:

$$EI C \lambda^4 e^{\lambda x} + k C e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow C e^{\lambda x} (EI \lambda^4 + k) = 0 \quad (2.10)$$

$C = 0$ ist die triviale Lösung von Gl. (2.10). Bei $C \neq 0$ kann $C e^{\lambda x}$ gekürzt werden:

$$\lambda^4 + \frac{k}{EI} = 0 \quad (2.11)$$

Gl. (2.11) ist eine charakteristische Gleichung 4. Grades. Aus ihren Lösungen wird die allgemeine Lösung für die Gleisbiegeline $w(x)$ nach Gl. (2.8) gebildet. All darin enthaltene unbekannte Konstante werden anschließend mithilfe der vorgegebenen Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt.

2.2.1 Allgemeine Lösung

Für die charakteristische Gleichung 4. Grades gemäß Gl. (2.11) existieren vier Lösungen. Nachdem sowohl k als auch EI positive Konstante sind, sind alle diese Lösungen komplex (nämlich zwei komplex konjugierte Lösungspaare):

$$\lambda_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt[4]{kEI}}{\sqrt{2}} (\pm 1 \pm i) \quad (2.12)$$

Folgende Abkürzung bietet sich für eine kompakte Schreibweise an:

$$\alpha = \frac{\sqrt[4]{kEI}}{\sqrt{2}} \quad (2.13)$$

Durch die Substitution laut Gl. (2.13) können die Lösungen in Gl. (2.12) wie folgt angeschrieben werden:

$$\lambda_1 = \alpha(1 + i) \quad (2.14)$$

$$\lambda_2 = \alpha(1 - i) \quad (2.15)$$

$$\lambda_3 = \alpha(-1 + i) \quad (2.16)$$

$$\lambda_4 = \alpha(-1 - i) \quad (2.17)$$

Einsetzen von Gl. (2.14), (2.15), (2.16) und (2.17) in Gl. (2.8) ergibt die allgemeine Lösung für die Gleissetzung in der Exponentialform:

$$\begin{aligned} w(x) &= \bar{C}_1 e^{\alpha(1+i)x} + \bar{C}_2 e^{\alpha(1-i)x} + \bar{C}_3 e^{\alpha(-1+i)x} + \bar{C}_4 e^{\alpha(-1-i)x} \\ &= \bar{C}_1 e^{\alpha x} e^{i\alpha x} + \bar{C}_2 e^{\alpha x} e^{-i\alpha x} + \bar{C}_3 e^{-\alpha x} e^{i\alpha x} + \bar{C}_4 e^{-\alpha x} e^{-i\alpha x} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$\bar{C}_{1,2,3,4}$... unbekannte Konstante

Mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$ lässt sich die Setzung durch trigonometrische Funktionen wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} w(x) &= \bar{C}_1 e^{\alpha x} (\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)) + \bar{C}_2 e^{\alpha x} (\cos(\alpha x) - i \sin(\alpha x)) \\ &\quad + \bar{C}_3 e^{-\alpha x} (\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)) \\ &\quad + \bar{C}_4 e^{-\alpha x} (\cos(\alpha x) - i \sin(\alpha x)) \\ &= e^{\alpha x} [\cos(\alpha x) (\bar{C}_1 + \bar{C}_2) + i \sin(\alpha x) (\bar{C}_1 - \bar{C}_2)] \\ &\quad + e^{-\alpha x} [\cos(\alpha x) (\bar{C}_3 + \bar{C}_4) + i \sin(\alpha x) (\bar{C}_3 - \bar{C}_4)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ein reeller Ausdruck für die Setzung $w(x)$ lässt sich nur dann erhalten, wenn die Konstanten $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ und $\bar{C}_3, \bar{C}_4$ jeweils komplex konjugierte Zahlenpaare sind, und zwar:

$$\bar{C}_1 = A + iB \quad (2.20)$$

$$\bar{C}_2 = A - iB \quad (2.21)$$

$$\bar{C}_3 = C + iD \quad (2.22)$$

$$\bar{C}_4 = C - iD \quad (2.23)$$

A, B, C, D ... Unbekannte reelle Konstante

Die imaginären Terme in Gl. (2.19) können nach Einsetzen von Gl. (2.20)–(2.23) herausgekürzt werden:

$$\begin{aligned}
 w(x) &= e^{\alpha x} [\cos(\alpha x) (2A) + i \sin(\alpha x) (2iB)] \\
 &\quad + e^{-\alpha x} [\cos(\alpha x) (2C) + i \sin(\alpha x) (2iD)] \\
 &= e^{\alpha x} [\cos(\alpha x) (2A) - \sin(\alpha x) (2B)] \\
 &\quad + e^{-\alpha x} [\cos(\alpha x) (2C) - \sin(\alpha x) (2D)]
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Eine weitere Vereinfachung ist durch die Einführung der folgenden neuen Konstanten erreichbar:

$$C_1 = 2A \tag{2.25}$$

$$C_2 = -2B \tag{2.26}$$

$$C_3 = 2C \tag{2.27}$$

$$C_4 = -2D \tag{2.28}$$

Schlussendlich ergeben sich aus Gl. (2.24) und Gl. (2.25)–(2.28) die allgemeine Lösung für die Setzung sowie ihre Ableitungen in reeller Form:

$$w(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)] + e^{-\alpha x} [C_3 \cos(\alpha x) + C_4 \sin(\alpha x)] \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dw(x)}{dx} &= \alpha [e^{\alpha x} ((C_1 + C_2) \cos(\alpha x) - (C_1 - C_2) \sin(\alpha x)) \\
 &\quad - e^{-\alpha x} ((C_3 - C_4) \cos(\alpha x) + (C_3 + C_4) \sin(\alpha x))]
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} &= \alpha^2 [e^{\alpha x} (2C_2 \cos(\alpha x) - 2C_1 \sin(\alpha x)) \\
 &\quad - e^{-\alpha x} (2C_4 \cos(\alpha x) - 2C_3 \sin(\alpha x))]
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3 w(x)}{dx^3} &= \alpha^3 [-e^{\alpha x} ((2C_1 - 2C_2) \cos(\alpha x) + (2C_1 + 2C_2) \sin(\alpha x)) \\
 &\quad + e^{-\alpha x} ((2C_3 + 2C_4) \cos(\alpha x) - (2C_3 - 2C_4) \sin(\alpha x))]
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^4 w(x)}{dx^4} &= \alpha^4 [-e^{\alpha x} (4C_1 \cos(\alpha x) + 4C_2 \sin(\alpha x)) \\
 &\quad - e^{-\alpha x} (4C_3 \cos(\alpha x) - 4C_4 \sin(\alpha x))]
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Die allgemeine Lösung nach Gl. (2.29)–(2.33) enthält die unbekannten Integrationskonstanten C_1 , C_2 , C_3 und C_4 . Ihre Bestimmung bildet den letzten Schritt zur Erhaltung einer geschlossenen Lösung für das untersuchte System.

2.2.2 Bestimmung von Integrationskonstanten

Die reellen Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4 im Biegelinienausdruck aus Gl. (2.29) werden im Folgenden anhand der Randbedingungen laut Gl. (2.4), (2.5) sowie (2.6) ermittelt.

2.2.2.1 Setzungsbedingung am unendlich entfernten Gleisende

Wird Gl. (2.29) in die Bedingung gemäß Gl. (2.6) eingesetzt, so erhält man:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\alpha x} [C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)] + e^{-\alpha x} [C_3 \cos(\alpha x) + C_4 \sin(\alpha x)] \right) = 0 \quad (2.34)$$

Anwenden der Grenzwertsummen- sowie Grenzwertproduktregel in Gl. (2.34) liefert:

$$\begin{aligned} & \infty [C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)] + 0 [C_3 \cos(\alpha x) - C_4 \sin(\alpha x)] \\ &= \infty [C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)] = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Da die Sinus- und Cosinus-Terme periodische Funktionen sind, kann die Erfüllung der Bedingung nach Gl. (2.35) an der Stelle $x = \infty$ wie auch in deren Nähe, also die Konvergenz der Setzung, nur dann sichergestellt werden, wenn die verbleibenden Summanden $C_1 \cos(\alpha x)$ und $C_2 \sin(\alpha x)$ verschwinden (sonst alterniert die Setzung mit einer immer größeren Amplitude). Hiermit können die Konstanten C_1 und C_2 eindeutig bestimmt werden:

$$C_1 = C_2 = 0 \quad (2.36)$$

2.2.2.2 Neigungsbedingung an der Kraftangriffsstelle

Einsetzen der Gleisneigung nach Gl. (2.30) in Gl. (2.4) unter Berücksichtigung von Gl. (2.36) ergibt:

$$-\alpha e^0 [(C_3 - C_4) \cos(0) + (C_3 + C_4) \sin(0)] = 0 \quad (2.37)$$

Gl. (2.37) lässt sich nach Division durch α weiter vereinfachen zu:

$$C_3 - C_4 = 0 \quad (2.38)$$

Aus Gl. (2.38) folgt unmittelbar der Zusammenhang zwischen den beiden Konstanten:

$$C_4 = C_3 \quad (2.39)$$

2.2.2.3 Querkraftbedingung an der Kraftangriffsstelle

Die Querkraft gemäß Gl. (2.5) soll zunächst mit der Gleisdurchbiegung $w(x)$ verknüpft werden. Dies erfolgt durch die Ableitung der Differentialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung (siehe z.B. Kapitel 17.1 in [18]):

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (2.40)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \quad (2.41)$$

$M(x)$... Biegemoment

Durch Einsetzen von Gl. (2.41) in Gl. (2.5) und anschließende Division durch $-EI$ kann die Querkraft-Randbedingung an der Kraftangriffsstelle in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\frac{d^3 w(x=0)}{dx^3} = \frac{P}{2EI} \quad (2.42)$$

Die dritte Ableitung der Gleissetzung gemäß Gl. (2.32) lässt sich in Anbetracht der Zusammenhänge in Gl. (2.36) und (2.39) deutlich verkürzen:

$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = 4\alpha^3 e^{-\alpha x} C_3 \cos(\alpha x) \quad (2.43)$$

Implementierung von Gl. (2.43) in Gl. (2.42) resultiert in der Erhaltung einer Bestimmungsgleichung für die letzte unbekannte Konstante:

$$\frac{d^3 w(x=0)}{dx^3} = 4\alpha^3 e^0 C_3 \cos(0) = 4\alpha^3 C_3 = \frac{P}{2EI} \quad (2.44)$$

Somit kann die letzte Konstante C_3 direkt ermittelt werden:

$$C_3 = \frac{P}{8\alpha^3 EI} \quad (2.45)$$

Alle Integrationskonstante sind nun bestimmt und können letztlich in die allgemeine Lösung eingesetzt werden.

2.2.3 Geschlossene Ausdrücke für Setzung, Untergrundreaktion und Lastverteilungslänge

Die Setzung nach Gl. (2.29) erhält nach Einsetzen von Gl. (2.36), (2.39) sowie (2.45) die folgende Gestalt:

$$w(x) = \frac{P}{8\alpha^3 EI} e^{-\alpha x} (\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}} \quad \text{für} \quad x \geq 0 \quad (2.46)$$

Die Untergrundreaktion ergibt sich beim Einsetzen von Gl. (2.46) in Gl. (2.3) zu:

$$N(x) = \frac{kP}{8\alpha^3 EI} e^{-\alpha x} (\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}} \quad \text{für} \quad x \geq 0 \quad (2.47)$$

Bedingt durch die Systemsymmetrie ist die gesuchte Lastverteilungslänge die zweifache Entfernung bis zur ersten Nullstelle der Untergrundreaktion laut Gl. (2.47). Die entsprechende Bestimmungsgleichung wird nachfolgend formuliert und gelöst:

$$N(x) = \frac{kP}{8\alpha^3 EI} e^{-\alpha x} (\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)) = 0 \quad (2.48)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha x) + \sin(\alpha x) = 0 \quad (2.49)$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{3}{4} + n\right) \frac{\pi}{\alpha} \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.50)$$

Schließlich kann die Lastverteilungslänge aus der ersten Lösung zufolge Gl. (2.50) erhalten werden:

$$L_{LV} = 2x_{n=0} = 2 \frac{3\pi}{4\alpha} = \frac{3\pi}{2\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}} \quad (2.51)$$

L_{LV} ... Lastverteilungslänge bzw. die Länge der Druckzone gemäß Abbildung 2.1

2.3 Verifizierung der Lösung

Anschließend wird die nach Gleichung (2.46) ermittelte Setzung mithilfe der Ergebnisse von *Dlubal RFEM* (Version 6.09) verifiziert. Alle analytischen Berechnungen wie auch die Fertigung von Ergebnisdarstellungen erfolgen unter Zuhilfenahme von *MATLAB* (Version R2024b).

2.3.1 Definition der Modellkennwerte

Die bei der Kontrollberechnung eingesetzten Modellkennwerte sind Tabelle 2.1 zu entnehmen. Die Überprüfung wird hierbei für drei unterschiedliche Bettungssteifigkeiten k (10, 100 und 1000 kN/mm pro Laufmeter) durchgeführt.

Tabelle 2.1: Kennwerte für die Kontrollberechnung des linearen statischen Systems

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises aus zwei Schienen 60E1
k	10, 100, 1000	kN/mm/m	kontinuierliche Schotterbettungssteifigkeit (Kontrolle für drei Parameterannahmen, arbiträre Wahl)
P	250	kN	Achslast (arbiträre Wahl)

2.3.2 Erstellung eines *RFEM*-Modells

Im Falle einer linearen Bettung lässt sich das betrachtete statische System auf sehr direkte Weise in *RFEM* nachbilden. Die wesentlichen Schritte können wie folgt zusammengefasst werden:

- Anlegen eines ausreichend langen Gleisbalkens und Ansetzen der Achslast P in dessen Mitte,
- Auswahl einer Stahlsorte mit dem E-Modul von 210 GPa,
- Zuweisung des UIC 60 Profils und Deaktivierung der Schubsteifigkeit,
- Verdoppelung des Flächenträgheitsmomentes I_y durch Erstellung einer *Strukturmodifikation* für den vorhandenen Lastfall (zur Berücksichtigung der zweiten Schiene),
- Zuweisung eines Stablagers mit entsprechenden vertikalen Lagerungsbedingungen (horizontale Lagerung darf beliebig gewählt werden).

Als Folge der obig umrissenen Schritte entsteht das Modell gemäß Abbildung 2.2. Die darin dargestellte horizontale Federung ist eine der Optionen für die erforderliche horizontale Lagerung und hat keinen Einfluss auf die Setzung. Die gewählte Balkenlänge beträgt hier 40 m.

A LF1: BELASTUNG, IN RICHTUNG -Y

Sichtbarkeitsmodus
LF1 - Statische Einzellast

In Richtung -Y

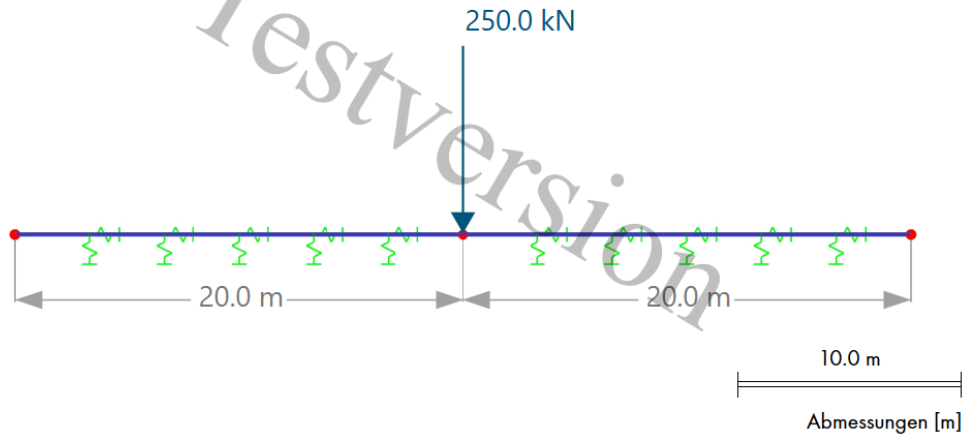


Abbildung 2.2: Beispiel eines *RFEM*-Modells zur Validierung der linearen statischen Berechnung

2.3.3 Vergleich der Ergebnisse

Abweichend von Abschnitt 2.3.2 werden die Biegelinien sowohl für die deaktivierte als auch für die aktivierte Schubsteifigkeit von zwei Schienen ermittelt, um die Annahme des schubstarren Euler-Bernoulli-Balkens auf ihre Zulässigkeit zu prüfen.

Anhand der in Abbildung 2.3 dargestellten Biegelinien lässt sich zum einen eine exakte Übereinstimmung der schubstarren *RFEM*-Berechnung mit der analytischen Lösung gemäß Gleichung (2.46) erkennen. Zum anderen kann eine Abweichung zwischen der schubstarren und der schubnachgiebigen Berechnung beobachtet werden, die für alle drei angesetzten Bettungssteifigkeiten vor allem im Bereich unmittelbar um die Kraftangriffsstelle ($x = 0$) auftritt. Merklich ist der bei den schubnachgiebigen Balken am Kraftangriffspunkt entstehende Knick in der Biegelinie, der bei Berechnung nach der Euler-Bernoulli-Balkentheorie hingegen nicht vorhanden ist.

Bei der kleinsten untersuchten Steifigkeit von 10 kN/mm/m ist die Diskrepanz zwischen schubstarrer und schubnachgiebiger Berechnung am geringsten und erreicht an der Stelle $x = 0$ etwa 1,8 %, wobei die Setzung beim schubstarrten Gleisbalken 8,32 mm gegenüber 8,47 mm beim schubnachgiebigen beträgt. Bei der mittleren Steifigkeit von 100 kN/mm/m macht diese Differenz 5,4 % der schubstarren Setzung aus, die entsprechenden Setzungen sind in diesem Fall 1,48 mm und 1,56 mm. Den größten relativen Unterschied kann man bei der 1000 kN/mm/m steifen Bettung feststellen: Die schubnachgiebige Setzung von 0,309 mm ist um 17,5 % größer als die schubstarre, welche 0,263 mm erreicht. Je größer die Steifigkeit, desto lokaler ist allerdings der Fehler: Die besonders deutliche Diskrepanz von 17,5 % bei $k = 1000$ kN/mm/m baut sich innerhalb von etwa 0,2 m nahezu vollkommen ab (vgl. Abbildung 2.3c).

Angesichts der obigen Erkenntnisse ist hier festzustellen, dass die analytisch hergeleitete Lösung laut Gl. (2.46) und die vorgenommene *RFEM*-Berechnung dieselben Ergebnisse im Rahmen der Euler-Bernoulli-Balkentheorie liefern. Inwiefern diese Theorie und die damit einhergehende schubstarre Berechnung zulässig sind, hängt von den gewählten Modellparametern ab. Für Zwecke dieser Arbeit ist der Fehler infolge schubstarrer Berechnung akzeptabel: Er wirkt sich bei kleinen Bettungssteifigkeiten kaum und bei großen nur sehr lokal auf die Biegelinie aus, weshalb im Großen und Ganzen keine wesentlichen Einflüsse auf die Lastverteilung erwartet werden. Die Lösung gemäß Gl. (2.46) kann hiermit als verifiziert betrachtet werden. Sie wird nachfolgend zur Erhaltung der Ergebnisse für andere Systemkennwerte und für die anvisierte Erarbeitung eines Lastmodells verwendet.

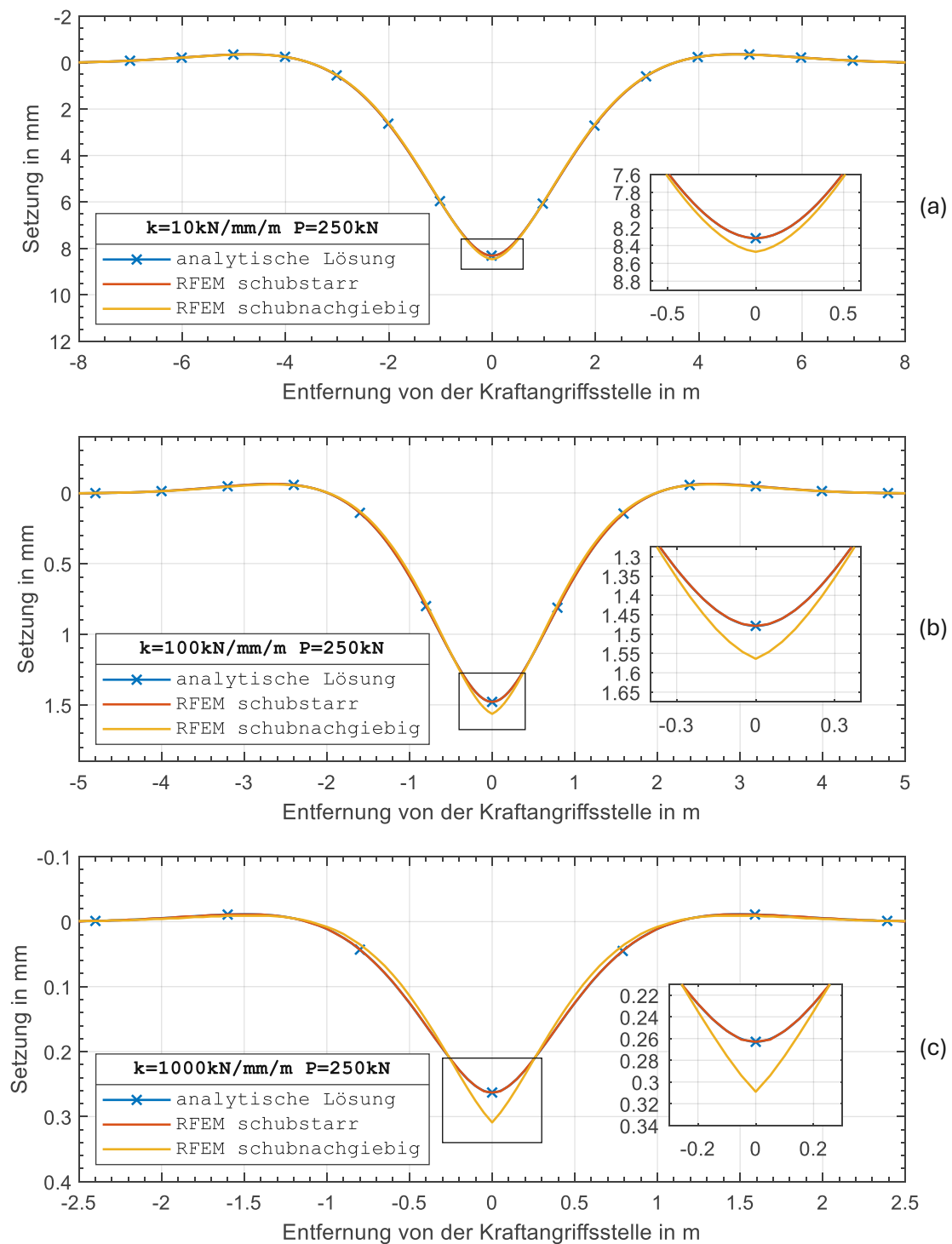


Abbildung 2.3: Vergleich der Gleissetzung $w(x)$ gemäß der analytischen Lösung für das lineare statische System sowohl mit der Schubstarr- als auch mit der Schubnachgiebigen *RFEM*-Kontrollrechnung für unterschiedliche Bettungssteifigkeitskennwerte k

2.4 Ergebnisse für die lineare Bettung

Abschließend folgen exemplarische Darstellungen der Setzungslinien, Untergrundreaktionen und Lastverteilungslängen bei Variation der Modellkennwerte. Eine Übersicht über alle hierbei festgehaltenen sowie variierten Parameter ist in Tabelle 2.2 gegeben.

Tabelle 2.2: Kennwerte für die lineare statische Berechnung

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises (zwei Schienen 60E1)
k	10 – 1000	kN/mm/m	kontinuierliche Schotterbettungssteifigkeit
P	25 – 250	kN	Achslast

In Abbildung 2.4 sind Gleissetzungslinien $w(x)$ für die zwischen 25 und 250 kN variierte Achslast P und die bei 50 kN/mm/m konstant gehaltene Bettungssteifigkeit k dargestellt. Hierin ist ersichtlich, dass die Setzungsnullstellen und folglich die Lastverteilungslänge von Änderungen der einwirkenden Achslast nicht beeinflusst werden. Des Weiteren liegen die von der Last linear abhängigen Setzungslinien nach Gleichung (2.46) bei der schrittweise wachsenden Belastung äquidistant übereinander. Drittens beginnt nach der Nullstelle ein Hebungs-bereich, der umso ausgeprägter, je größer die einwirkende Last ist.

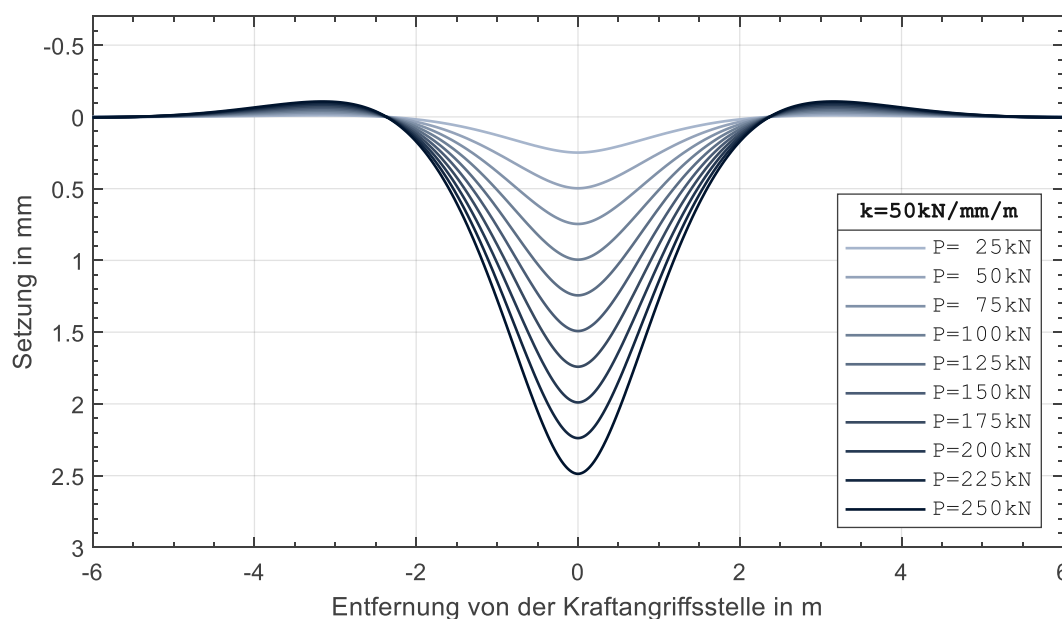


Abbildung 2.4: Setzungslinien $w(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer linearen statischen Berechnung

Im Gegensatz zu Abbildung 2.4 sind in Abbildung 2.5 die Setzungslinien $w(x)$ für unterschiedliche Bettungssteifigkeiten k und eine konstant gehaltene Achslast P dargestellt. So wird insbesondere der nichtlineare Zusammenhang zwischen der Setzung und der Steifigkeit hervorgehoben: Da k die Potenz $-3/4$ im Ausdruck für die Setzung (2.46) besitzt, reduziert sich die

Setzung bei einem höher angesetzten Steifigkeitsparameter unterproportional. Außerdem variiert sich nun die Nullstelle: Bei sinkender Steifigkeit schieben sich die Nullstellen auseinander (die Lastverteilungslänge wird also größer). Der sich hinter der Nullstelle ausbildende Hebungsbereich reagiert auf die Bettungssteifigkeitsänderung im Einklang mit der Setzung: Kleinere Steifigkeiten k lassen stärker ausgeprägte und längere Gleishebungsbereiche zu.

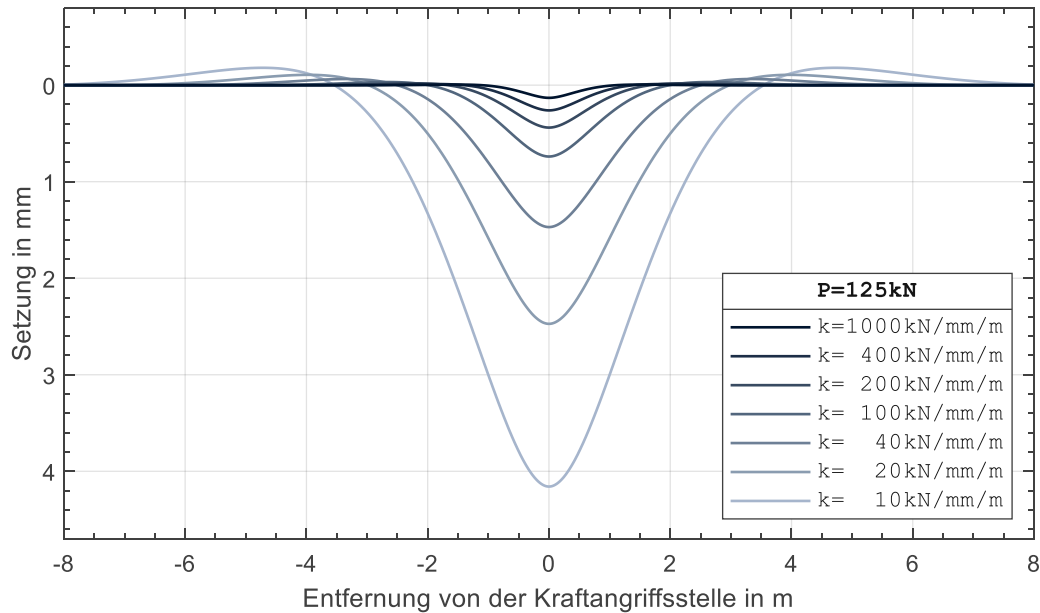


Abbildung 2.5: Setzungslinien $w(x)$ für die variierte Bettungssteifigkeit k zu Folge einer linearen statischen Berechnung

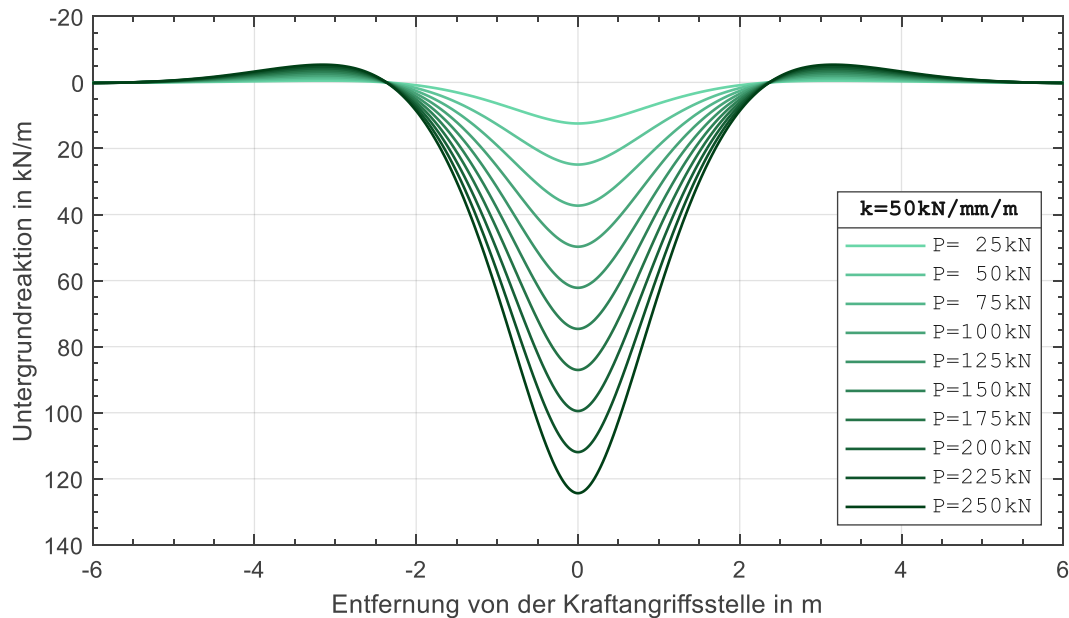


Abbildung 2.6: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für die variierte Achslast P zu Folge einer linearen statischen Berechnung

Betrachtet man hingegen die Untergrundreaktion $N(x)$ nach Gl. (2.47), so wird deren mit der Setzung $w(x)$ übereinstimmendes Verhalten gegen die Achslast P ersichtlich: Die Reaktionslinien in Abbildung 2.6 sind wiederum aufgrund desselben linearen Zusammenhangs mit der Belastung P äquidistant angeordnet, die Lastverteilungslänge (die Länge des gedrückten Untergrundbereichs) bleibt weiterhin konstant. Die früher identifizierten Gleishebungsgebiete bewirken negative Reaktionskräfte, der Untergrund wird also gezogen. An dieser Stelle sei angemerkt, dass diese Zugkraft in der Realität teilweise durch das hier vernachlässigte Eigengewicht des Gleises ausgeglichen worden wäre. Da zu Zwecken dieser Studie allerdings nur die Abweichungen vom Gleisruhezustand von Interesse sind, sind diese Ergebnisse für nachfolgende Ausarbeitungen akzeptabel.

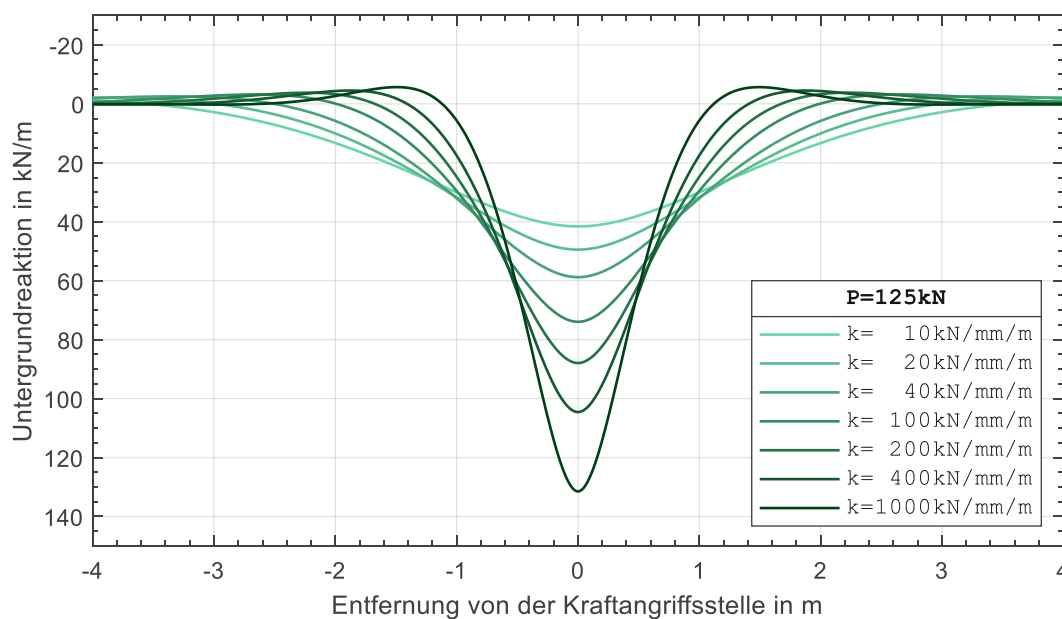


Abbildung 2.7: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für die variierte Bettungssteifigkeit k zufolge einer linearen statischen Berechnung

Der wesentliche Unterschied zwischen den Verhaltensweisen der Setzung $w(x)$ und der Untergrundreaktion $N(x)$ betrifft die Antwort auf die Steifigkeitsänderung: In Abbildung 2.7 ist eine mit dem Anstieg der Steifigkeit k einhergehende unterproportionale Zunahme der Reaktionskraft erkennbar – dieser Zusammenhang kann auf die Potenz von k zurückgeführt werden, welche in Gl. (2.47) den Wert $1/4$ annimmt. Das weitere Merkmal der Untergrundreaktionslinie besteht darin, dass ihr Maximum bei wachsender Steifigkeit k zunimmt, während die Lastverteilungslänge abnimmt. Analog verhält sich die Hebungsreaktion, indem diese durch eine Steifigkeitssteigerung konzentrierter wird.

Zusammenfassend zeigt Abbildung 2.8 die Setzung an der Kraftangriffsstelle

$$w_0 = w(x = 0) \quad (2.52)$$

als Funktion der Bettungssteifigkeit k für verschiedene Achslasten P . Darin wird die besondere Empfindlichkeit der Gleisssetzung gegen Steifigkeitsschwankungen im Bereich kleinerer Steifigkeiten wie etwa unter 50 kN/mm/m verdeutlicht.

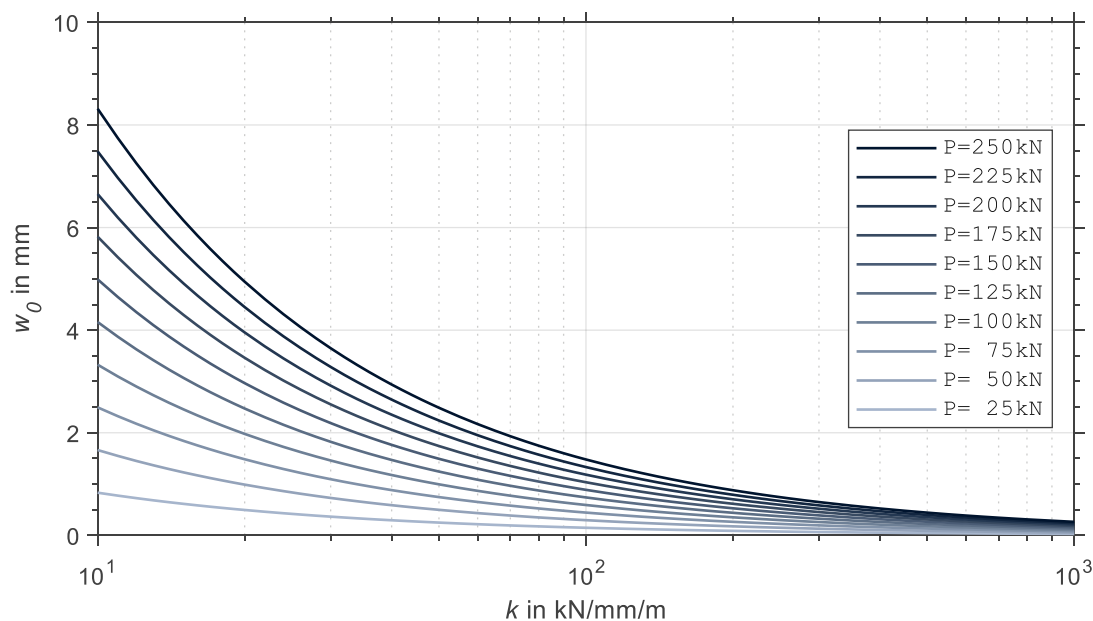


Abbildung 2.8: Gleisssetzung an der Kraftangriffsstelle w_0 in Abhängigkeit der Bettungssteifigkeit k zufolge einer linearen statischen Berechnung

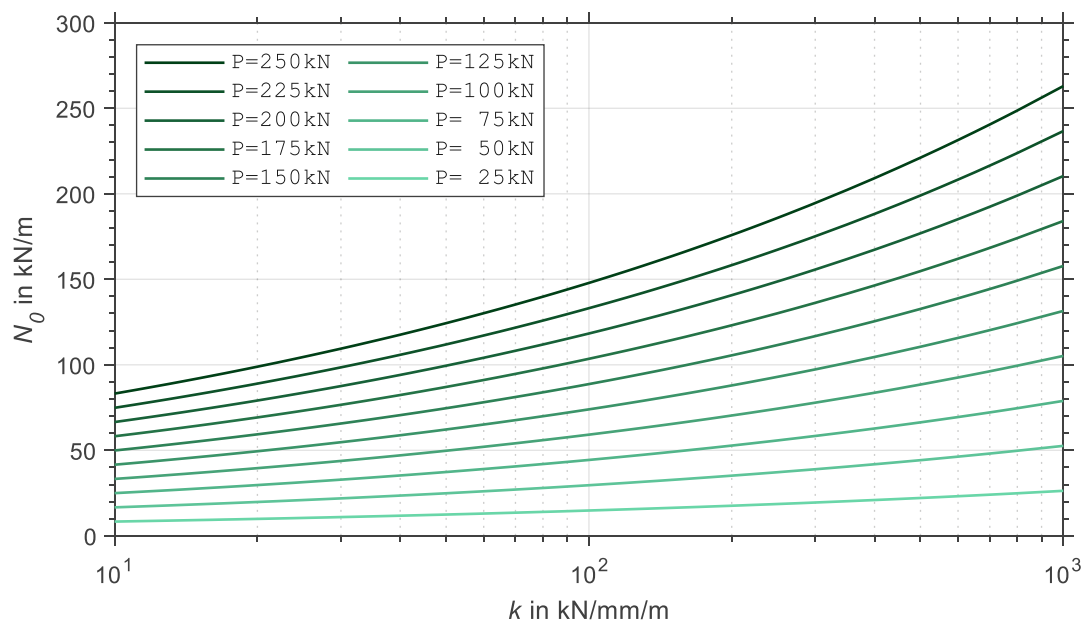


Abbildung 2.9: Untergrundreaktion an der Kraftangriffsstelle N_0 in Abhängigkeit der Bettungssteifigkeit k zufolge einer linearen statischen Berechnung

Der lineare Zusammenhang der Untergrundreaktion an der Kraftangriffsstelle

$$N_0 = N(x = 0) \quad (2.53)$$

und der Achslast P spiegelt sich in Abbildung 2.9 erneut wider; darin wird ferner deren Abhängigkeit von der Steifigkeit k veranschaulicht. Im Bereich kleinerer Steifigkeiten (unterhalb 100 kN/mm/m) kann unter Beachtung der logarithmischen Skala wiederum eine hohe Sensibilität festgestellt werden, die allerdings nun deutlich weniger ausgeprägt ist.

Zuletzt wird in Abbildung 2.10 gezeigt, wie sich die Lastverteilungslänge nach Gl. (2.51) innerhalb des untersuchten Steifigkeitsbereiches ändert. Diesbezüglich ergeben sich im Einklang mit den vorigen Erkenntnissen sowohl die umgekehrte unterproportionale Abhängigkeit von der Bettungssteifigkeit k als auch die Unabhängigkeit von der einwirkenden Achslast P . Die hohe Empfindlichkeit in der Steifigkeitszone unter 100 kN/mm/m ist gleichermaßen hervorzuheben.

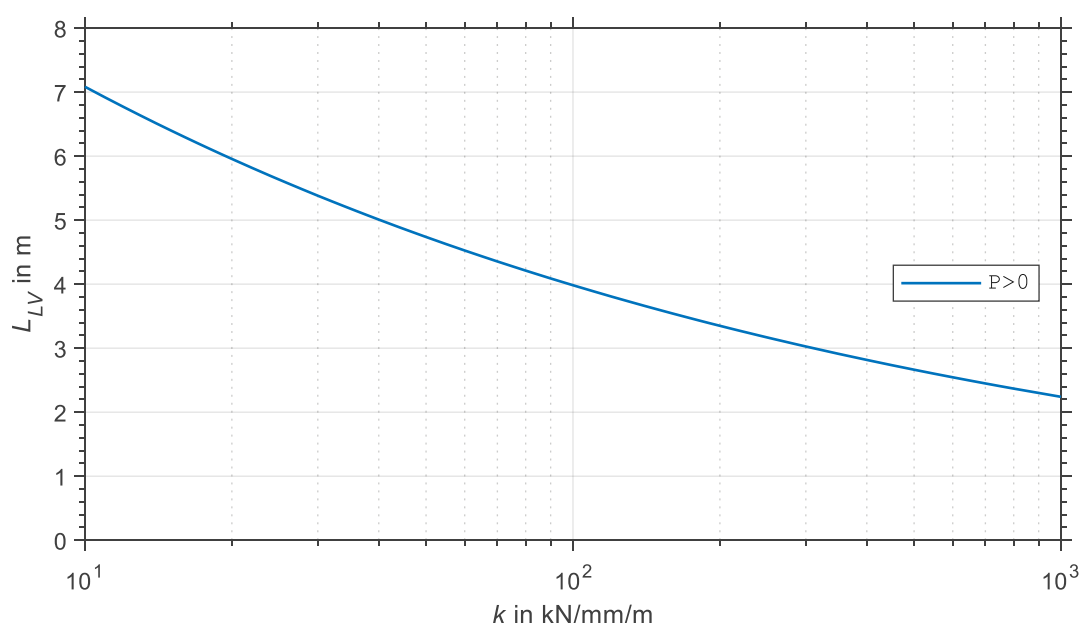


Abbildung 2.10: Lastverteilungslänge L_{LV} in Abhängigkeit der Bettungssteifigkeit k zufolge einer linearen statischen Berechnung

2.5 Lastverteilungsmodell auf Basis des linearen statischen Systems

In diesem Abschnitt wird ein Lastverteilungsansatz für als einzelne Euler-Bernoulli-Balken modellierte Eisenbahnbrücken auf Basis des untersuchten statischen Lastfalls mit linearer Bettung erarbeitet. Der prinzipielle Aufbau des Lastmodells folgt der in der Literatur bereits etablierten Aufteilung einer einzelnen Achslast auf Teileinzelkräfte im Schwellenabstand von 60 cm. Während feinere Abstände eine genauere Abbildung des durch den Schotteroberbau verteilten Drucks verschaffen würden, ermöglicht der gewählte Abstand einen direkten quantitativen Vergleich zwischen den Ergebnissen dieser Arbeit und den in Frage kommenden bestehenden Literaturquellen (Eurocode [5], Spengler [14]). Zudem wird infolge des Verzichtes

auf feinere Aufteilung etwaiger zusätzlicher Modellierungsaufwand bei der Anwendung dieses Lastmodells vermieden werden können.

2.5.1 Konzipierung des Lastmodells

Die prinzipielle Herangehensweise zur einwirkungsseitigen Berücksichtigung der Lastverteilung besteht in der Aufteilung der Achslast P auf mehrere Einzelkräfte F , die den Druck auf das Tragwerk infolge der kontinuierlichen Untergrundreaktion $N(x)$ nachbilden sollen. Diese Kräfte werden entsprechend der bestehenden Systemsymmetrie symmetrisch um die Achslast und – unter Vernachlässigung etwaiger seitlicher Zugzonen – innerhalb der zuvor definierten Lastverteilungslänge L_{LV} angeordnet, siehe Abbildung 2.11.

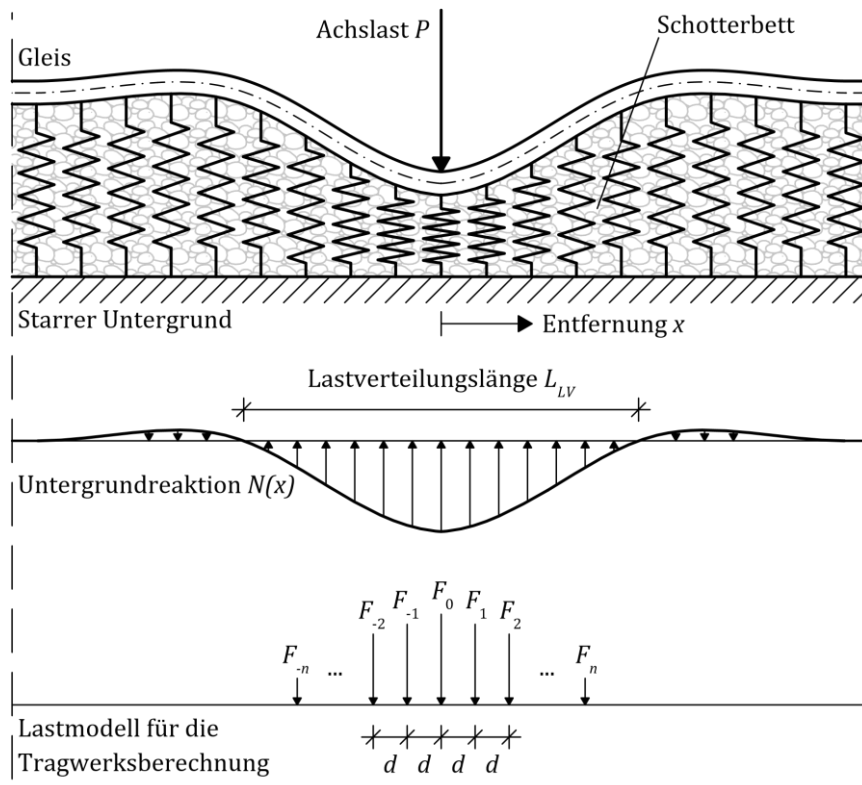


Abbildung 2.11: Lastmodell mit $2n+1$ innerhalb der Lastverteilungslänge symmetrisch verteilten Einzelkräften F

Die Größe jeder Einzelkraft wird durch die Integration der Untergrundreaktion $N(x)$ innerhalb der jeweiligen Krafteinflusszone ermittelt, welche durch den Kraftabstand d (in dieser Arbeit der Schwellenabstand) vorgegeben ist:

$$F_j = \int_{dj - \frac{d}{2}}^{dj + \frac{d}{2}} N(x) dx \quad \text{für } j = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n \quad (2.54)$$

- F_j ... j -te Einzelkraft, die die Druckbelastung des Untergrundes im Integrationsbereich von $dj - \frac{d}{2}$ bis $dj + \frac{d}{2}$ abbildet
- d ... konstanter Einzelkraftabstand
- n ... Anzahl der Einzelkräfte links ($x < 0$) oder rechts ($x > 0$) von der Achslast

Nach Einsetzen der bekannten Funktion für die Untergrundreaktion $N(x)$ laut Gl. (2.47) in Gl. (2.54) – unter Beachtung deren nichtnegativen Definitionsbereichs ($x \geq 0$) – kann das Integral für positive Integrationsgrenzen berechnet werden:

$$F_j = \int_{(j-\frac{1}{2})d}^{(j+\frac{1}{2})d} \frac{kP}{8\alpha^3 EI} e^{-\alpha x} (\cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)) dx \quad (2.55)$$

$$= -\frac{kP}{8\alpha^4 EI} \left[e^{-\alpha x} \cos(\alpha x) \right]_{(j-\frac{1}{2})d}^{(j+\frac{1}{2})d} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n$$

Gezieltes Einsetzen von α nach Gl. (2.47) bewirkt eine Vereinfachung von Gl. (2.55), sodass die Formel für die j -te Einzelkraft eine kompakte Form erhält:

$$F_j = -\frac{P}{2} \left[e^{-\alpha x} \cos(\alpha x) \right]_{(j-\frac{1}{2})d}^{(j+\frac{1}{2})d} \quad \text{mit } \alpha = \frac{\sqrt[4]{kEI}}{\sqrt{2}} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n \quad (2.56)$$

Wegen des beschränkten Definitionsbereichs der Funktion für die Untergrundreaktion $N(x)$ (Gl. (2.47)), der nur die rechte Seite ($x \geq 0$) bezüglich der einwirkenden Achslast beinhaltet, werden Einzelkräfte links von der Achslast ($x < 0$) durch folgende Identität bestimmt:

$$F_{-j} = F_j \quad (2.57)$$

- F_{-j} ... j -te Einzelkraft *links* von der Achslast
- F_j ... j -te Einzelkraft *rechts* von der Achslast

Die zentrale Einzelkraft F_0 wäre grundsätzlich mittels Gl. (2.54) zu bestimmen:

$$F_0 = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} N(x) dx \quad (2.58)$$

Angesichts der erwähnten Einschränkung des Definitionsbereichs wird bei der Lösung von Gl. (2.58) von der Systemsymmetrie Gebrauch gemacht, sodass lediglich das Integral des positiven Teils ($0 \leq x \leq d/2$) berechnet und verdoppelt werden kann:

$$F_0 = 2 \int_0^{\frac{d}{2}} N(x) dx \quad (2.59)$$

Einsetzen von Gl. (2.47), dem Ausdruck für die Untergrundreaktion $N(x)$, in Gl. (2.59) und anschließende Resubstitution von α^4 ergibt die Formel für die zentrale Einzelkraft:

$$F_0 = -P \left[e^{-\alpha x} \cos(\alpha x) \right]_0^{\frac{d}{2}} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{EI}} \quad (2.60)$$

Die Einzelkräfte F_j nach Gl. (2.56), (2.57) sowie (2.60) sind direkt proportional zur Achslast P . Folglich hängt die Aufteilung der Achslast nicht von der Laststufe ab.

Die Untergrundreaktion $N(x)$ hat bekanntlich Zugzonen (siehe Abbildung 2.6 sowie Abbildung 2.7), die im vorliegenden Lastmodell vernachlässigt werden. Eine vollständige Integration der zentralen Druckzone ohne Weiteres würde allerdings eine höhere gesamte Druckkraft als die Achslast erzeugen, da kein Ausgleich durch die auftretenden Zugkräfte vorhanden wäre. Die ausschließlich drückenden Einzelkräfte F müssen deshalb hinsichtlich ihrer Anzahl n und ihrer Größe so begrenzt werden, dass eine Äquivalenz mit der Achslast P hergestellt wird. In diesem Zusammenhang wird die Untergrundreaktion $N(x)$ im Folgenden ausgehend von der Gleismitte ($x = 0$) bis zu denjenigen Einzelkräften F_{-n} und F_n integriert, deren kumulierter Wert (oder vielmehr bis die Summe aller Kräfte) laut der Ungleichung (2.61) die Achslast P erreicht oder überschreitet. Als Korrekturmaßnahme wird der etwaige resultierende Druckkraft-Überschuss von den Randkräften F_{-n} und F_n in gleichem Verhältnis gemäß Gl. (2.62) abgezogen:

$$\sum_{j=-n}^n F_j \geq P, \quad \text{wobei} \quad \sum_{j=-n+1}^{n-1} F_j < P \quad (2.61)$$

$$F_{-n}^* = F_n^* = F_n - \frac{(\sum_{j=-n}^n F_j) - P}{2} \quad (2.62)$$

F_{-n}^* und F_n^* ... um den Drucküberschuss korrigierte Randkräfte

Im Hinblick auf die Erkenntnisse von *Bruckmoser*, dass flacher verteilte Achslasten tendenziell zu geringeren Tragwerksbeschleunigungen führen (vgl. Abbildung 4.22 und Tabelle 4.8 in [9], in denen die höheren k_g -Indizes auf konzentriertere Lasten deuten), kann die hier betriebene Verengung der Lastverteilung als ein auf der sicheren Seite liegender Ansatz gesehen werden.

Als Ergebnis dieses Vorgangs entsteht die in Abbildung 2.12 skizzierte Anordnung der Einzelkräfte. Die grün gefüllten Flächen repräsentieren die Integrale der Untergrundreaktion in den

jeweiligen Einzelkraft-Einflusszonen, wobei die strichlierten Flächen an den Rändern des integrierten Gebiets auf die oben besprochene Abminderung der Randkräfte deuten.

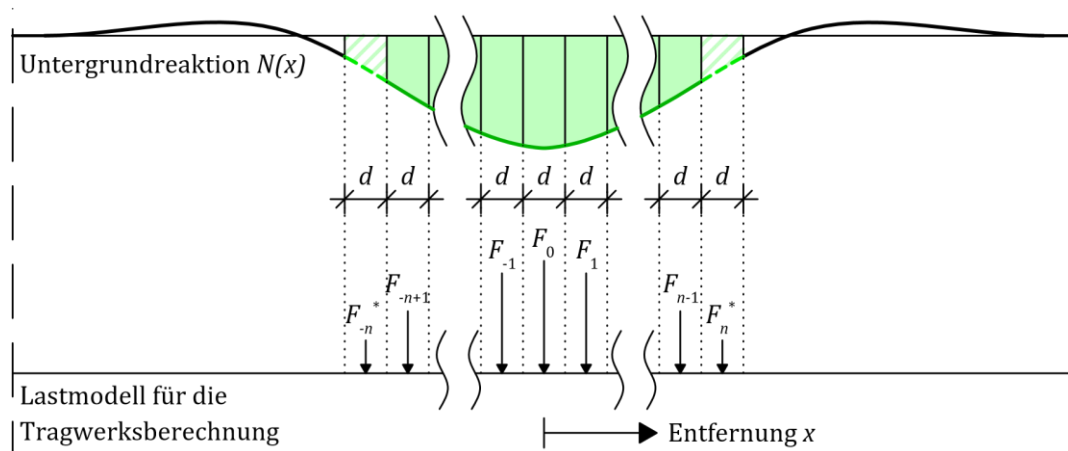


Abbildung 2.12: Integration der Untergrundreaktion $N(x)$ zu den Einzelkräften F_j

2.5.2 Anwendung des Lastmodells

Die Einzelkräfte F_j des in Abschnitt 2.5.1 erarbeiteten Lastmodells werden anhand der in Tabelle 2.3 angeführten Systemkennwerte berechnet. Der gewählte Kraftabstand d beträgt 60 cm, um eine direkte quantitative Vergleichbarkeit der Ergebnisse dieses Lastmodells mit den in Abschnitt 1.2 besprochenen Ansätzen nach Eurocode [5] und nach Spengler [14] zu gewährleisten.

Tabelle 2.3: Kennwerte zur Ermittlung des Lastmodells mit verteilten Einzelkräften zufolge linearer statischer Berechnung

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises (zwei Schienen 60E1)
k	10 – 1000	kN/mm/m	kontinuierliche Schotterbettungssteifigkeit
P	25 – 250	kN	Achslast
d	60	cm	Kraftabstand

Tabelle 2.4 gibt die Anteile der berechneten Einzelkräfte F_j an der Achslast P unter Variation der Bettungssteifigkeit k an. Da die Lastverteilung im vorliegenden linearen Fall von der Größe der einwirkenden Achslast nicht beeinflusst wird (vgl. Gl. (2.56), (2.57) sowie (2.60) bezogen auf P), wird auf eine explizite Angabe der zugehörigen Achslast bei den darauffolgenden Ergebnisdarstellungen verzichtet. Die außenliegenden angegebenen Einzelkräfte sind die korrigierten Randkräfte nach Gl. (2.62), sofern sie nach der Rundung auf das nächste ganze Prozent nicht verschwinden. Aufgrund der vorgenommenen Rundung kann die Summe aller angegebenen Anteile von 100 % abweichen (höchstens um 2 %).

Tabelle 2.4: Auf die einwirkende Achslast P bezogene verteilte Einzelkräfte F_j des Lastmodells für das lineare statische System

k in kN/mm/m	$\frac{F_{-4}}{P}$ in %	$\frac{F_{-3}}{P}$ in %	$\frac{F_{-2}}{P}$ in %	$\frac{F_{-1}}{P}$ in %	$\frac{F_0}{P}$ in %	$\frac{F_1}{P}$ in %	$\frac{F_2}{P}$ in %	$\frac{F_3}{P}$ in %	$\frac{F_4}{P}$ in %	L_{LV} in m
10	2	8	13	17	20	17	13	8	2	7,08
20	-	6	13	20	23	20	13	6	-	5,96
30	-	3	13	21	26	21	13	3	-	5,38
40	-	2	12	22	28	22	12	2	-	5,01
50	-	1	12	23	29	23	12	1	-	4,74
60	-	-	12	23	30	23	12	-	-	4,53
80	-	-	10	24	33	24	10	-	-	4,21
100	-	-	8	25	34	25	8	-	-	3,98
200	-	-	4	26	40	26	4	-	-	3,35
400	-	-	1	26	47	26	1	-	-	2,82
600	-	-	-	24	51	24	-	-	-	2,55
1000	-	-	-	21	57	21	-	-	-	2,24

Abbildung 2.13 stellt das Lastmodell mit den Einzelkraftverteilungen laut Tabelle 2.4 für die Steifigkeiten k von 10 kN/mm/m und 1000 kN/mm/m maßstäblich in grafischer Form dar.

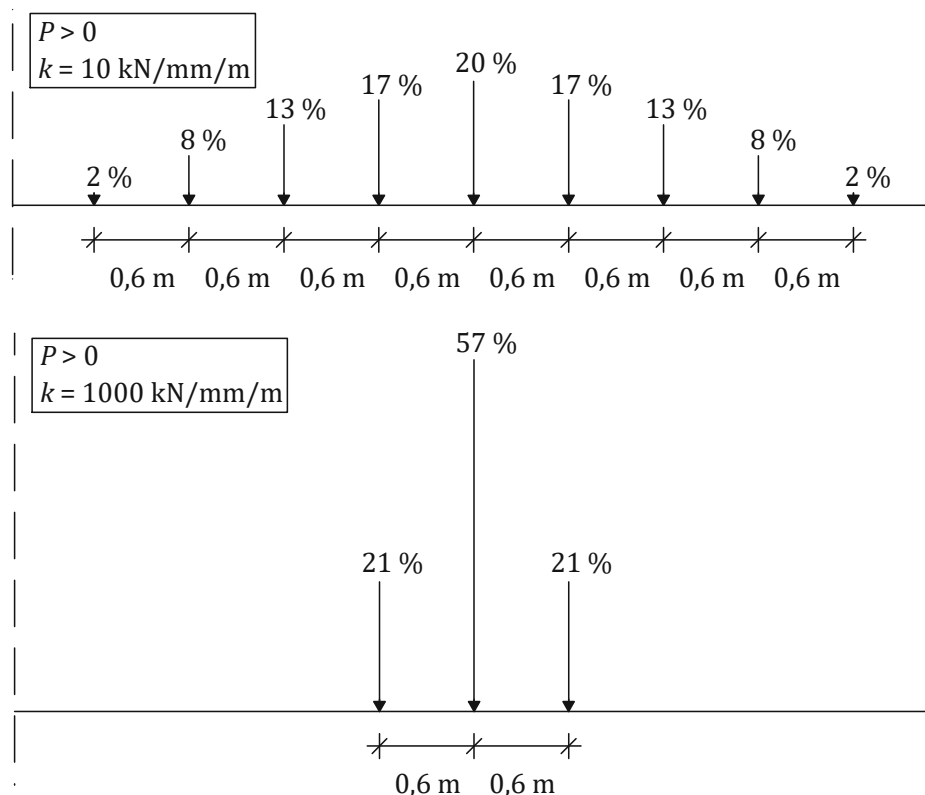


Abbildung 2.13: Lastmodell für das lineare statische System bei $k = 10$ kN/mm/m und bei $k = 1000$ kN/mm/m in % von der Achslast

Abbildung 2.14 zeigt die Aufteilung der Achslast in die verteilten Einzelkräfte F_j für die variierte Bettungssteifigkeit k , wodurch eine genaue Ablesung für spezifische Kennwerte möglich ist. Die letzten dargestellten Kräfte für jedes Steifigkeitsniveau sind die korrigierten Randkräfte gemäß Gl. (2.62).

Beim Vergleich mit dem Lastmodell laut *Spengler*, das umgerechnet für die kontinuierliche Bettungssteifigkeit von etwa 60 kN/mm/m ermittelt wurde (vgl. Abbildung 4-15 in [14]), zeigt sich eine große Ähnlichkeit der in dieser Arbeit hergeleiteten und der von *Spengler* vorgeschlagenen Lastaufteilungen (mit Ausnahme der Randkraftkorrektur). Dieses Ergebnis kann als eine teilweise Verifizierung des hier aufgestellten Lastmodells gedeutet werden. Die Beurteilung dessen Beitrags zur richtigen Erfassung der Brückenschwingungen setzt dennoch Brückenüberfahrtssimulationen wie auch Messungen voraus, die außerhalb des Rahmens dieser Diplomarbeit liegen und auf welche das Augenmerk weiterführender Studien gelegt werden könnte.

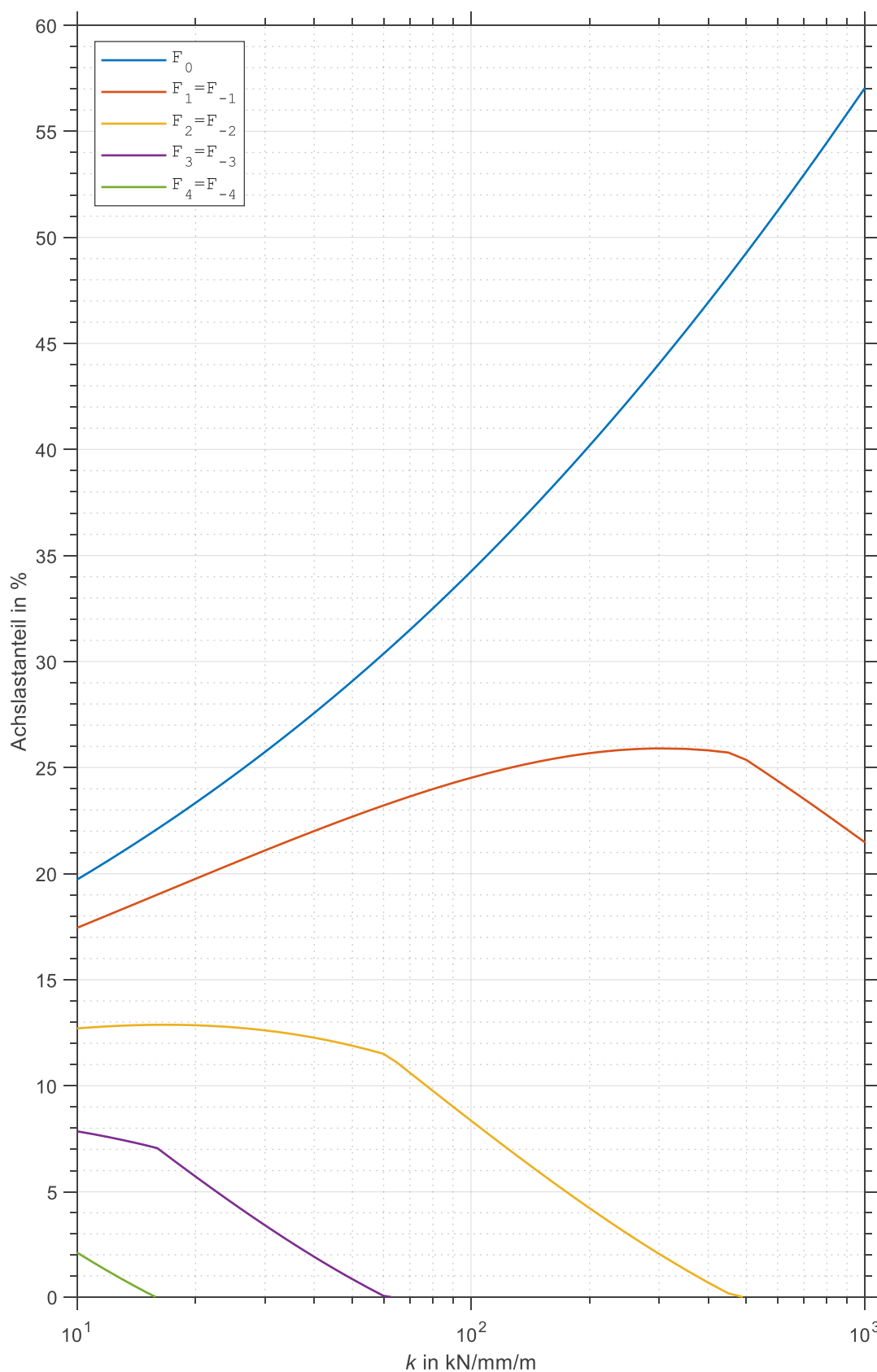


Abbildung 2.14: Aufteilung der einwirkenden Achslast in die verteilten Einzelkräfte F_j gemäß dem Lastmodell für das lineare statische System

2.6 Fazit

Schotteroberbau kann am einfachsten als elastisch in Schotter gebetteter Gleisbalken mit einer konstanten wegunabhängigen Bettungssteifigkeit k modelliert werden. Für dieses mechanische System lassen sich analytische Formeln zur Berechnung der Gleissetzung $w(x)$ und Untergrundreaktion $N(x)$ infolge einer statischen Achslast P herleiten. Die Länge des in den Untergrund eingedrückten Gleisabschnitts – die Lastverteilungslänge L_{LV} – zeigt hierbei eine Abhängigkeit von der Schotterbettsteifigkeit k (die Erhöhung der Steifigkeit verringert die Lastverteilungslänge), aber nicht von der einwirkenden Achslast P .

Die Untergrundreaktion $N(x)$ kann abschnittsweise integriert werden, um Einzelkräfte F_j für ein Lastmodell zur einwirkungsseitigen Abbildung der Lastverteilung zu ermitteln. In dieser Arbeit wird die Abschnittslänge bzw. der Kraftabstand d von 60 cm verwendet, um die Vergleichbarkeit des erhaltenen Lastmodells mit den Vorschlägen in anderen Literaturquellen (ÖNORM EN 1991-2 [5], *Spengler* [14]) herzustellen. Die Einzelkräfte des Lastmodells F_j sind proportional zur Achslast P , der Wert der Schotterbettsteifigkeit k beeinflusst hingegen verschiedene Einzelkräfte F_j unterschiedlich, wobei die mittige Einzelkraft F_0 mit der wachsenden Steifigkeit k stets ansteigt.

3 Statische Last und nichtlineare Bettung

In diesem Kapitel werden Lastmodelle für Oberbausysteme mit nichtlinearem Federungsverhalten entwickelt, sodass im Hinblick auf die in Abschnitt 1.2 angeschnittenen Forschungserkenntnisse der Einfluss realistischer wegabhängiger Schotterbettungssteifigkeit auf die Lastverteilung miterfasst werden kann. Das in Kapitel 2 definierte statische System bleibt grundsätzlich bestehen (siehe Abbildung 2.1), aber die in Abschnitt 2.1 angenommene Untergrundreaktion $N(x)$ laut Gl. (2.3) wird für nichtlineare Federung angepasst. Es werden hierzu die folgenden in entsprechenden Abschnitten im Detail erläuterten nichtlinearen Federkennlinienarten betrachtet:

- $N(x) = k_q w(x)^2$ (progressiv quadratisch, Abschnitt 3.1),
- $N(x) = k_w w(x)^{0,5}$ (degressiv nach einer Wurzelfunktion, Abschnitt 3.2) sowie
- $N(x) = 64,492 w(x)^{0,8329}$ (degressiv nach einer auf den Ergebnissen von *Stollwitzer et al.* [15] basierten Regressionskurve, Abschnitt 3.3).

Abbildung 3.1 zeigt einen Überblick über die in dieser Arbeit betrachteten Federkennlinien mit unterschiedlichen Federungskraftbeiwerten. Sämtliche Herleitungen beruhen auf der Euler-Bernoulli-Balkentheorie I. Ordnung.

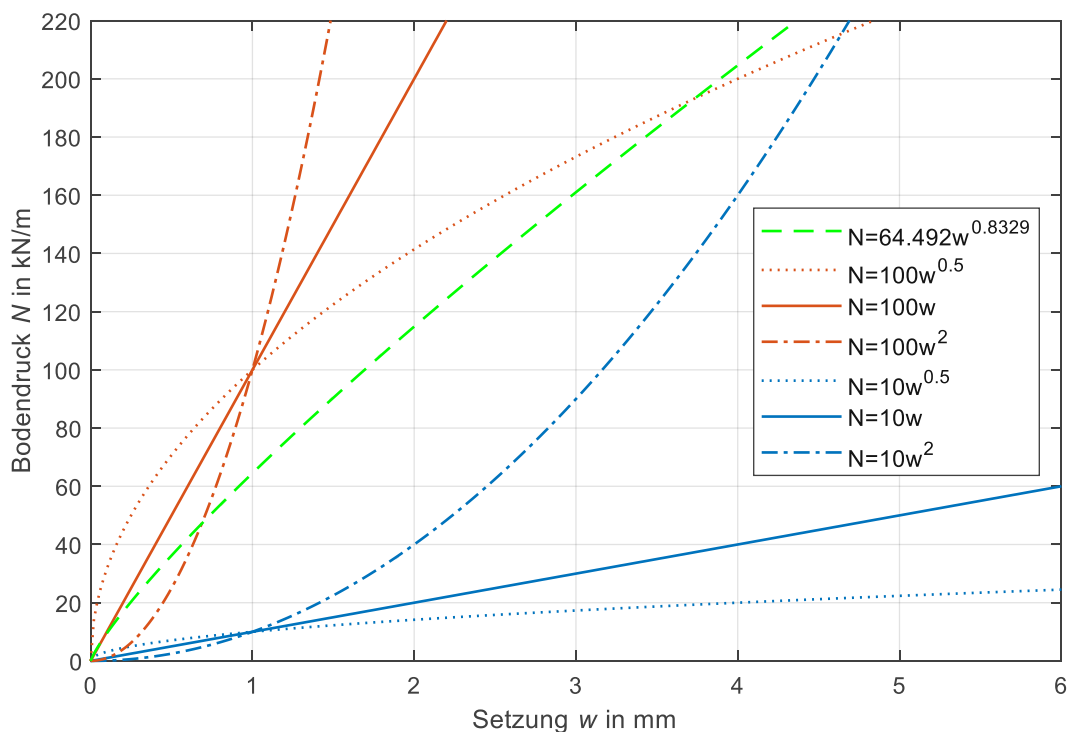


Abbildung 3.1: Vergleich der untersuchten linearen, progressiven und degressiven Federkennlinien für diverse Federungskraftbeiwerte (w in mm, N in kN/m)

3.1 Quadratische Federkennlinie

Die Auswirkung einer progressiven Federungskraft wird anhand der folgenden quadratischen Funktion untersucht:

$$N(x) = \begin{cases} k_q w(x)^2 & \text{für } w(x) \geq 0 \\ -k_q w(x)^2 & \text{für } w(x) < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

x ... Entfernung von der Kraftangriffsstelle

$N(x)$... Untergrundreaktion (Bettungsdruck)

$w(x)$... elastische Gleissetzung

k_q ... Beiwert für die quadratische Funktion der Federungskraft

Die Definition in Gl. (3.1) sieht unterschiedliche Vorzeichen für die positiven und negativen Gleissetzungen $w(x)$ vor: Es werden punktsymmetrische Kraft-Weg-Diagramme (Federkennlinien) laut der qualitativen Darstellung in Abbildung 3.2 angenommen.

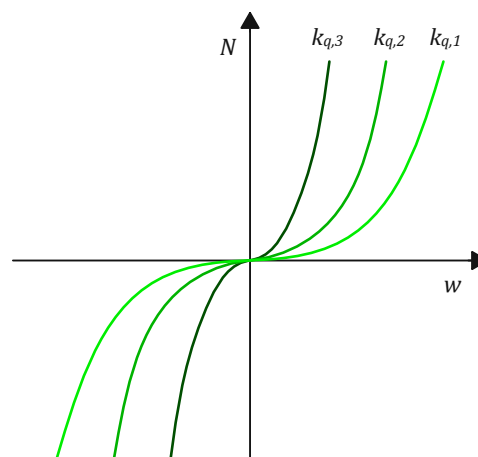


Abbildung 3.2: Qualitativer Verlauf quadratischer Federkennlinien für verschiedene Federungskraftbeiwerte k_q

3.1.1 Differentialgleichung und Randbedingungen

In allgemeiner Form lautet die Differentialgleichung der Gleisbiegeline folgendermaßen (vgl. Abschnitt 2.1):

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + N(x) = 0 \quad (3.2)$$

EI ... Biegesteifigkeit des Gleises

Aufgrund der neuen Festlegung der Untergrundreaktion gemäß Gl. (3.1) erhält die Differentialgleichung (3.2) die folgende Gestalt (vgl. Gl. (2.7)), wobei die Bereichsunterscheidung für $w(x)$ mithilfe der Vorzeichenfunktion sgn umgesetzt wird:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \operatorname{sgn}(w(x)) k_q w(x)^2 = 0 \quad (3.3)$$

Gl. (3.3) ist eine nichtlineare Differentialgleichung 4. Ordnung ohne analytische Lösung. Zur Berechnung des vorliegenden nichtlinearen Systems wird dementsprechend ein in *MATLAB* eingebautes numerisches Lösungsprogramm *bvp4c*² eingesetzt, welches auf einem Kollokationsverfahren basiert (Kollokation siehe z.B. Abschnitt 8.1.6 in [19]).

Numerische Methoden schätzen die Lösung für eine endliche Menge diskreter Knoten. Folglich muss das in Kapitel 2 vorgestellte kontinuierliche unendliche Gleis diskretisiert werden, indem es durch einen aus diskreten Knoten zusammengesetzten Balken mit der endlichen Länge $2L$ approximiert wird. Je größer die Balkenlänge und je dichter die Knotenabstände, desto besser wird das kontinuierliche unendliche Gleis auf Kosten der Rechenzeit abgebildet. Entsprechend der in Kapitel 2 gefolgten Vorgehensweise wird in Bezug auf die Einzelkraft nur die rechte Gleishälfte (mit der Länge L) berechnet und danach um die Achslast gespiegelt, sodass vollständige Setzungs- und Untergrundreaktionslinien gebildet werden.

An der Kraftangriffsstelle ($x = 0$) sind die bereits in Gl. (2.4) und (2.42) festgehaltenen Übergangsbedingungen zu erfüllen:

$$\frac{dw(x=0)}{dx} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{d^3 w(x=0)}{dx^3} = \frac{P}{2EI} \quad (3.5)$$

P ... stationäre vertikale Einzelkraft, welche den statischen Anteil einer Radsatzlast abbildet

Aufgrund der endlichen rechnerischen Balkenlänge L hätte hier die Grenzwertbetrachtung in Gl. (2.6) keine Gültigkeit. Es werden am positiven Gleisende stattdessen Randbedingungen für ein freies Ende angenommen:

$$M(x=L) = 0 \quad (3.6)$$

$$Q(x=L) = 0 \quad (3.7)$$

² Numerische Probleme mit Randbedingungen werden *Randwertprobleme* genannt. Der Programmname *bvp4c* folgt dieser Bezeichnung im Englischen – *Boundary Value Problems*. Für eine ausführliche Erklärung der Funktionsweise von *bvp4c* sei auf [20] verwiesen.

L ... Länge des numerisch zu berechnenden Gleisbalkens

$M(x)$... Biegemoment

$Q(x)$... Querkraft infolge der Einzelkraft P

Randbedingungen nach Gl. (3.6) und (3.7) können auch als Verformungsbedingungen aufgeschrieben werden (siehe Abschnitt 2.2.2.3):

$$\frac{d^2 w(x=L)}{dx^2} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{d^3 w(x=L)}{dx^3} = 0 \quad (3.9)$$

3.1.2 Umsetzung in MATLAB

Das Programm *bvp4c* passt Knotenabstände automatisch an, weshalb bei der Spezifikation des numerischen Problems vor allem auf die Vorgabe einer ausreichenden Balkenlänge geachtet werden sollte, sodass wesentliche Gleislagestörungen durch die Achslast noch vor dem Balkenende abklingen. *bvp4c* akzeptiert außerdem ausschließlich Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung. Aus diesem Grund muss die vorhandene Differentialgleichung 4. Ordnung (3.3) mithilfe folgender Substitutionen in die für das Programm passende Form gebracht werden:

$$\frac{dw(x)}{dx} = w_1(x) \quad (3.10)$$

$$\frac{dw_1(x)}{dx} = w_2(x) \quad (3.11)$$

$$\frac{dw_2(x)}{dx} = w_3(x) \quad (3.12)$$

$$\frac{dw_3(x)}{dx} = -\operatorname{sgn}(w(x)) \frac{k_q}{EI} w(x)^2 \quad (3.13)$$

Die in Gl. (3.10)–(3.12) eingeführten Substitutionen müssen auch in den Übergangs- und Randbedingungen laut Gl. (3.4), (3.5), (3.8) und (3.9) implementiert werden:

$$w_1(x=0) = 0 \quad (3.14)$$

$$w_3(x=0) = \frac{P}{2EI} \quad (3.15)$$

$$w_2(x = L_{stab}) = 0 \quad (3.16)$$

$$w_3(x = L_{stab}) = 0 \quad (3.17)$$

Der weitere notwendige Schritt ist die Vorgabe einer ersten Schätzung für den Verlauf der Funktionen $w(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ und $w_3(x)$ gemäß Gl. (3.10)–(3.13), wobei für eine erfolgreiche Lösungsfindung des Programms folgende grobe konstante Einschätzung genügt (in der im Programm akzeptierten vektoriellen Schreibweise):

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ w_1(x) \\ w_2(x) \\ w_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \text{ mm} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

3.1.3 Verifizierung des *MATLAB*-Programms mit *RFEM*

Die Umsetzungsrichtigkeit der gewählten Strategie wird in Anlehnung an die entsprechenden *RFEM*-Ergebnisse beurteilt. Die Kontrolle erfolgt anhand der Kennwerte aus Tabelle 3.1.

Tabelle 3.1: Kennwerte für die Kontrollberechnung des statischen Systems mit einer progressiven Federkennlinie gemäß der quadratischen Funktion

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises (zwei Schienen 60E1)
k_q	10, 100, 1000	kN/mm ² /m	Federungskraftbeiwert für eine quadratische Federkennlinie (Kontrolle für drei Parameterannahmen, arbiträre Wahl)
P	250	kN	Achslast (arbiträre Wahl)
L	10	m	Balkenlänge für die numerische Berechnung

3.1.3.1 *RFEM*-Modell

Die in Abschnitt 2.3.2 vorgeschlagene Vorgehensweise wird größtenteils beibehalten. Die Ausnahme stellt das kontinuierliche Stablager (Gleisbettung) dar, für welches in *RFEM* in Version 6.09 keine nichtlinearen Federkennlinien unterstützt werden: Es wird durch eine Reihe an in einem engen Abstand platzierten diskreten Lagern nachgebildet, für welche die Erstellung eines beliebigen Kraft-Weg-Diagramms verfügbar ist. Die gewünschte Federkennlinie des Schotterbetts ist auf den gewählten Stützpunktstand umzurechnen und als vertikale Lagerbedingung mittels der Nichtlinearität-Einstellung *Diagramm* einzugeben. Das auf dieser Weise erstellte *RFEM*-Kontrollmodell ist in Abbildung 3.3 dargestellt, wobei die Balkenlänge von 10 m für die numerische Berechnung einer Gleisseite und der Einzellagerabstand von 10 cm für das *RFEM*-Näherungsmodell verwendet werden. Die ebenfalls in Abbildung 3.3 dargestellte horizontale Federung gewährleistet ein nichtkinematisches Systemverhalten.

A

LF1: BELASTUNG, IN RICHTUNG -Y

Sichtbarkeitsmodus

LF1 - Statische Einzellast

Lasten [kN]

In Richtung -Y

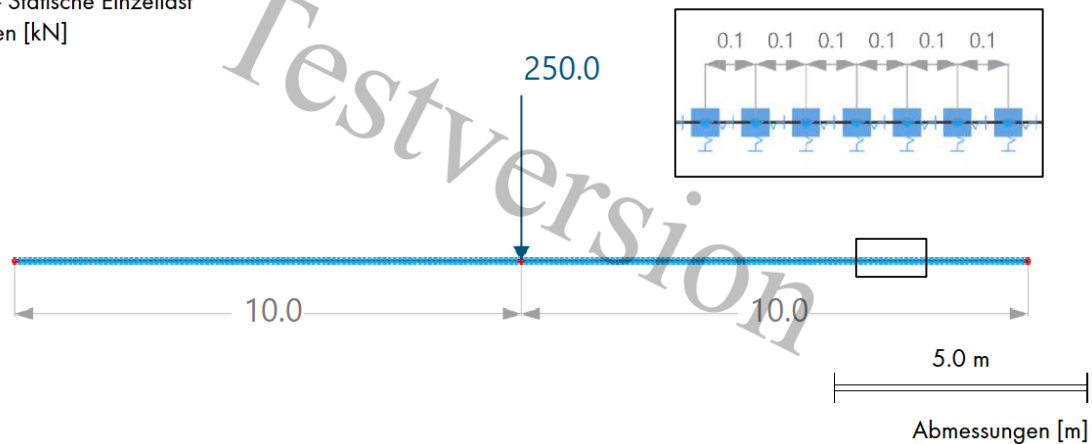
**Abbildung 3.3:** RFEM-Kontrollmodell für die nichtlineare statische Berechnung**3.1.3.2 Vergleich der Ergebnisse**

Abbildung 3.4 zeigt die Ergebnisse der durchgeführten Kontrollberechnung. Darin werden die Biegelinien gemäß *bvp4c* und *RFEM* einander gegenübergestellt, wobei im Falle von *RFEM* sowohl schubstarr als auch schubnachgiebig gerechnet wurde. Dies ermöglicht, die Zulässigkeit der in dieser Arbeit verwendeten schubstarrten Euler-Bernoulli-Balkentheorie zu prüfen.

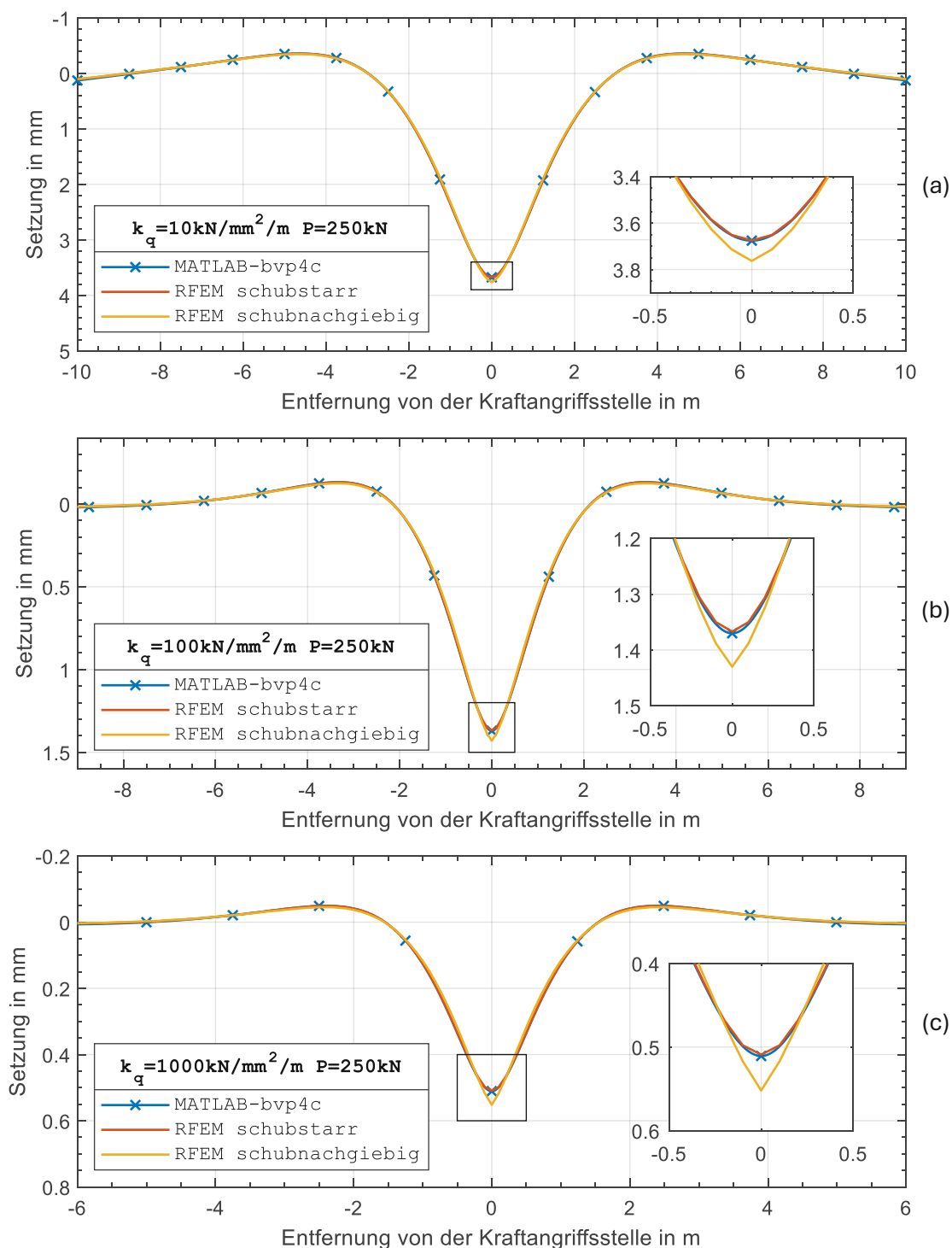


Abbildung 3.4: Vergleich der Gleissetzung $w(x)$ für quadratische Federkennlinien zufolge der Berechnung mit *bvp4c* sowohl mit der schubstarrten als auch mit der schubnachgiebigen *RFEM*-Kontrollberechnung für unterschiedliche Federungskraftbeiwerte k_q

Die Setzungslinien $w(x)$ zufolge der schubstarrten *RFEM*-Berechnung und zufolge des *bvp4c*-Programms stimmen überein, obgleich für das *RFEM*-Modell eine diskrete Federung verwenden

det wird. Dies bestätigt zum einen die Äquivalenz der in *RFEM* verwendeten quasikontinuierlichen Bettung mit der kontinuierlichen, zum anderen verifiziert es das in *MATLAB* umgesetzte numerische Lösungsprogramm *bvp4c* für diese Betrachtung.

Die Abweichungen zwischen den schubstarren und schubnachgiebigen *RFEM*-Berechnungen sind wie im Falle der linearen Federkennlinien minimal und betreffen vorrangig den Bereich um die Kraftangriffsstelle ($x = 0$), wobei der schubnachgiebige Balken hier einen Knick aufweist. Diese kleine Diskrepanz wird im Rest dieses Abschnitts vernachlässigt, es folgen Auswertungen ausschließlich für den schubstarren Euler-Bernoulli-Balken.

3.1.4 Ergebnisse für die Bettung mit einer quadratischen Federkennlinie

Die Darstellungen der Setzungslinien $w(x)$, Untergrundreaktionen $N(x)$ und Lastverteilungslängen L_{LV} erfolgen bei Variation der Achslast P und des Federungskraftbeiwerts k_q . Die Übersicht über die festgehaltenen und variierten Parameter ist in Tabelle 3.2 gegeben.

Tabelle 3.2: Kennwerte für die Berechnung des Systems mit einer quadratischen Federkennlinie

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises (zwei Schienen 60E1)
k_q	10 – 1000	kN/mm ² /m	Federungskraftbeiwert für eine quadratische Federkennlinie
P	25 – 250	kN	Achslast
L	20	m	Balkenlänge für die numerische Berechnung

Die Besonderheit der nachfolgend in Abbildung 3.5 gezeigten Setzungslinien $w(x)$ für die schrittweise steigende Achslast P liegt in der Abwesenheit einer für alle Lastniveaus gemeinsamen Nullstelle (vgl. Abbildung 2.4). Man erkennt außerdem eine Verdichtung der Setzungslinien bei größeren Lasten: Der quadratisch wachsende Bodenwiderstand gemäß Gl. (3.1) behindert eine proportionale Setzungszunahme. Wie auch im Falle linearer Federung bildet sich nach der Setzungsnullstelle eine negative Halbwelle bzw. Gleishebungszone, die bei größerer Belastung geringere Ausdehnung und höheres Maximum hat.

Wenn die Achslast P konstant gehalten und stattdessen der Federungskraftbeiwert k_q variiert wird, zeigt sich in Abbildung 3.6 eine unterproportionale Setzungsabnahme gegenüber dem wachsenden Federungskraftparameter, wie dies bereits beim linearen Schotterbett beobachtet wurde (siehe Abbildung 2.5). Erwartungsgemäß werden die Setzungsnullpunkte bei der Erhöhung des Federungskraftbeiwerts zusammengezogen und die Gleishebungen geringer.

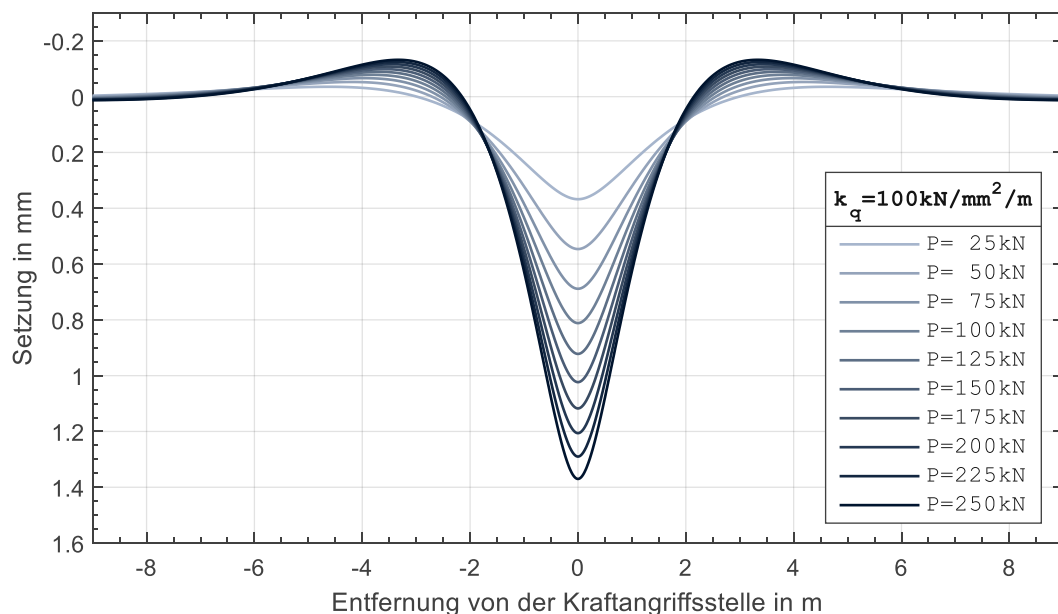


Abbildung 3.5: Setzungslinien $w(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien

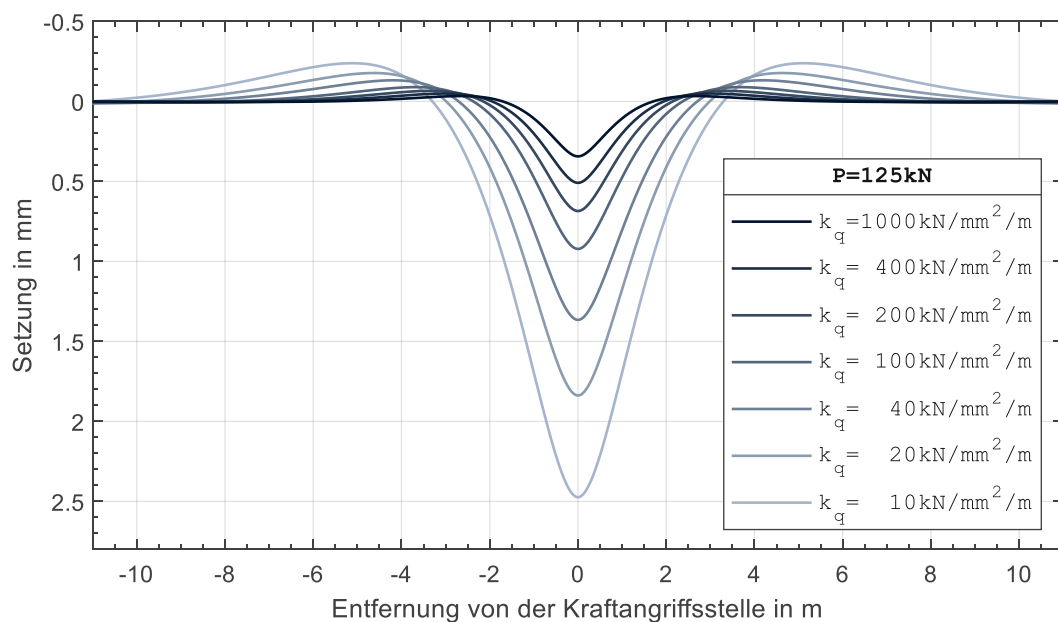


Abbildung 3.6: Setzungslinien $w(x)$ für den variierten Federungskraftbeiwert k_q zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien

Die Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für diverse Achslasten P sind Abbildung 3.7 zu entnehmen. Demnach nimmt die (von den Nullstellen des Bodendrucks umgrenzte) Lastverteilungslänge mit der steigenden Achslast geringfügig ab. Die in einer angepassten Skalierung hervorgehobenen Verläufe der Untergrundreaktion sind progressiv gegenüber der Setzung und ähneln an ihren Nullstellen einer quadratischen Funktion – dies entspricht der getroffenen Modellannahme, dass die Untergrundreaktion $N(x)$ gemäß Gl. (3.1) in einer quadratischen Relation zur Setzung $w(x)$ steht. Die in der Gleishebungszone auftretende Zugkraft ist

im Vergleich zum zentrischen Druck verschwindend gering. Zudem kann ein annähernd linearer Zusammenhang der Untergrundreaktion $N(x)$ mit der Achslast P betont werden, welcher für die Setzung $w(x)$ nicht festzustellen war.

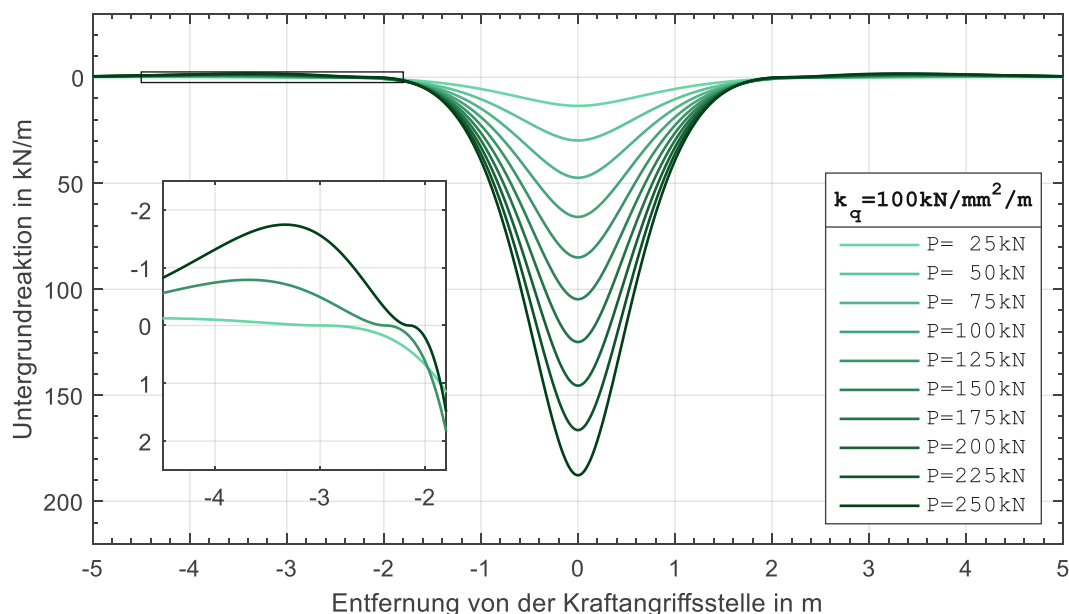


Abbildung 3.7: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien

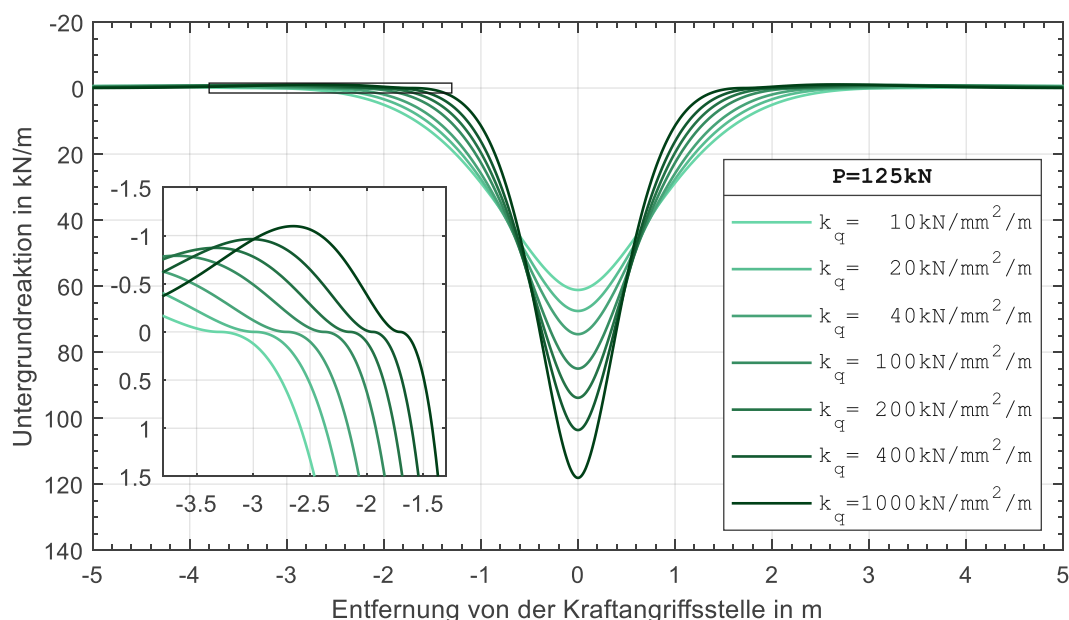


Abbildung 3.8: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für den variierten Federungskraftbeiwert k_q zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien

Der quadratische Verlauf der Untergrundreaktionslinien $N(x)$ an ihren jeweiligen Nullstellen sowie die geringe Relevanz der Zugkraft in der Gleishebungszone bleiben auch bei Variation des Federungskraftbeiwertes k_q erhalten, wie in Abbildung 3.8 unter anderem mithilfe eines

entsprechend skalierten Teilbildes veranschaulicht wird. Wie auch bei den linearen Federkennlinien (vgl. Abbildung 2.7) steuert der Federungskraftbeiwert, wie flach oder wie konzentriert die Achslast über die Länge verteilt ist, und zwar so, dass die Lastverteilungslänge bei weicherer Bettung größer wird.

Abbildung 3.9 stellt die Setzung an der Kraftangriffsstelle

$$w_0 = w(x = 0) \quad (3.19)$$

unter Variation sowohl des Federungskraftbeiwerts k_q als auch der Achslast P dar. So wird eine Unterproportionalität der Setzungsantwort w_0 auf die gestiegene Last sowie auf den erhöhten Federungskraftbeiwert ersichtlich – ein ähnliches Verhalten wurde bereits bei den linearen Federkennlinien festgestellt (vgl. Abbildung 2.8). Der hinsichtlich der Setzungsabnahme besonders wirksame Bereich für den Federungskraftbeiwert befindet sich etwa unter 100 kN/mm²/m.

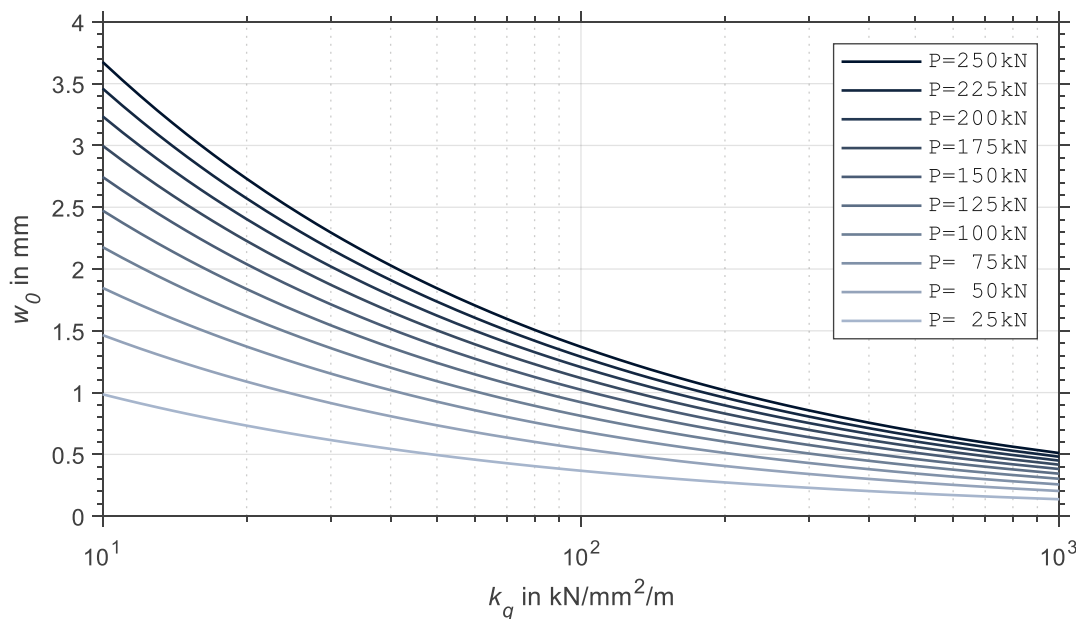


Abbildung 3.9: Gleissetzung an der Kraftangriffsstelle w_0 in Abhängigkeit des Federungskraftbeiwerts k_q zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien

Im Gegensatz zur Setzung w_0 zeigt die in Abbildung 3.10 dargestellte Untergrundreaktion am Kraftangriffspunkt

$$N_0 = N(x = 0) \quad (3.20)$$

ein nahezu lineares Verhalten gegen die Achslast P . Der Bodendruck N_0 wächst unterproportional mit dem Federungskraftbeiwert k_q , der Bereich unterhalb 100 kN/mm²/m fällt jedoch erneut deutlich sensibler aus.

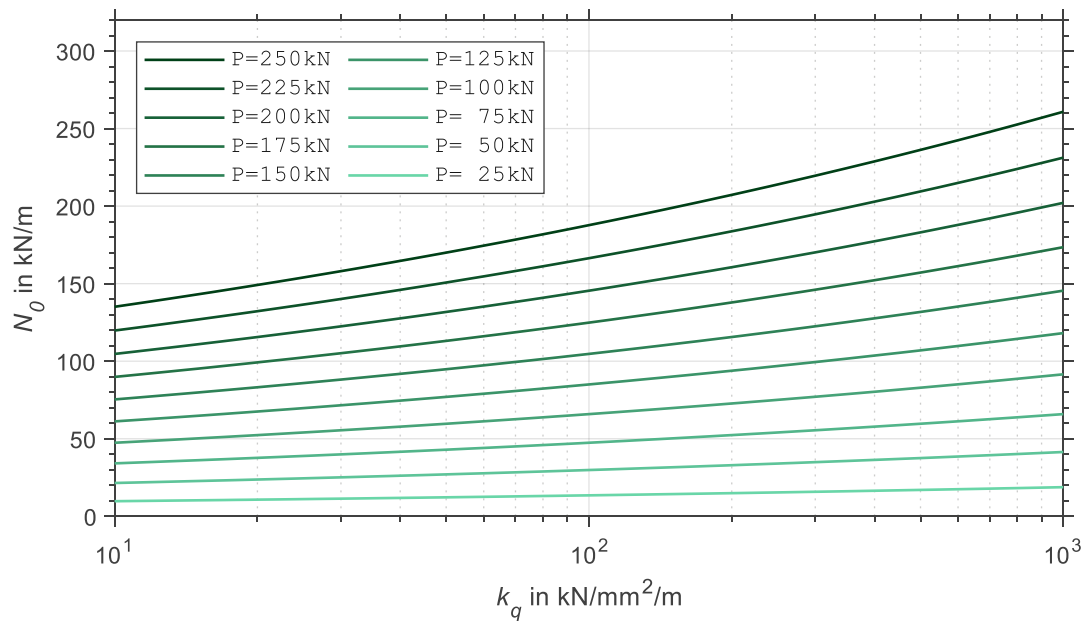


Abbildung 3.10: Untergrundreaktion an der Kraftangriffsstelle N_0 in Abhängigkeit des Federungskraftbeiwerts k_q zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien

Entsprechend den in Abbildung 3.11 präsentierten Ergebnissen reduziert sich die Lastverteilungslänge L_{LV} bei steigendem Federungskraftbeiwert k_q und Achslast P unterproportional. Der besonders sensible Bereich hinsichtlich des verwendeten Federungskraftbeiwerts k_q liegt wiederholt unter 100 kN/mm²/m.

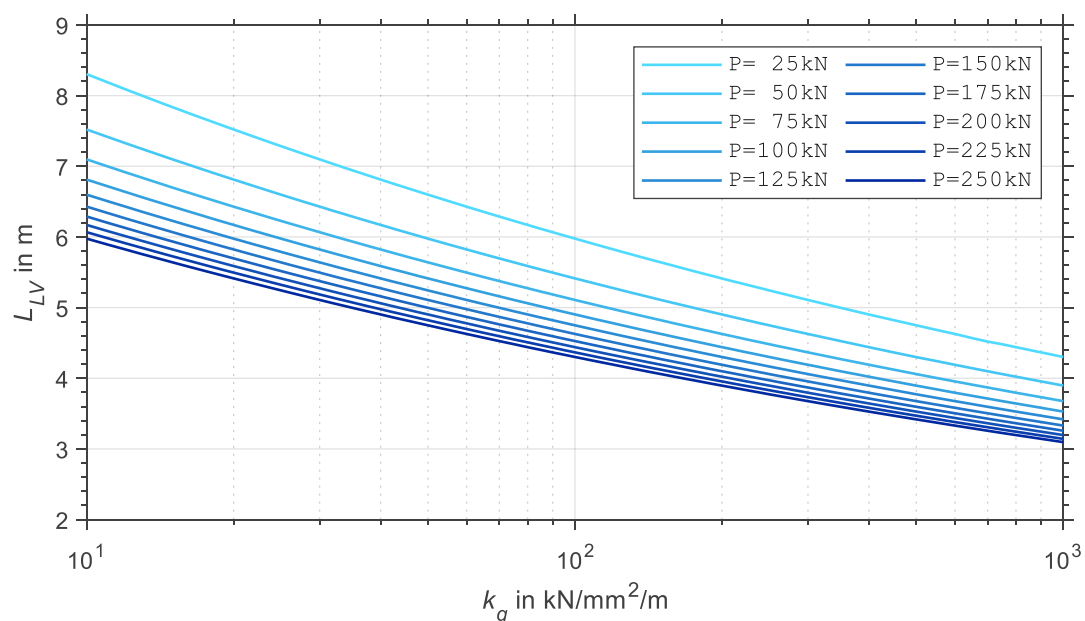


Abbildung 3.11: Lastverteilungslänge L_{LV} in Abhängigkeit des Federungskraftbeiwerts k_q zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien

3.1.5 Lastverteilungsmodell auf Basis des statischen Systems mit einer quadratischen Federkennlinie

Nun folgt die Anpassung des in Abschnitt 2.5 vorgeschlagenen Lastmodells aus den verteilten Einzelkräften an die Lastverteilung des Oberbausystems mit einer quadratischen Federkennlinie gemäß Gl. (3.1).

Das wesentliche Merkmal des vorliegenden quadratischen Systems liegt in der Abhängigkeit seiner Lastverteilungslänge von der Achslast, die beim linearen System nicht vorhanden war (vgl. Abbildung 3.11 und Abbildung 2.10). Außerdem fehlt eine geschlossene Funktion der Untergrundreaktion, weshalb ihre bereichsweise Integration zur Ermittlung der verteilten Einzelkräfte indirekt anhand der Ergebnisse für die Verformung erfolgt.

3.1.5.1 Anpassung des Lastmodells

Generell sind die verteilten Einzelkräfte F_j gemäß Abschnitt 2.5.1 durch die Integration der Untergrundreaktion $N(x)$ innerhalb der entsprechenden Krafteinflusszonen zu bestimmen, deren Ausdehnung dem Einzelkraftabstand d entspricht (siehe Abbildung 2.12):

$$F_j = \int_{dj - \frac{d}{2}}^{dj + \frac{d}{2}} N(x) dx \quad \text{für } j = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n \quad (3.21)$$

F_j ... j -te Einzelkraft, die die Druckbelastung des Untergrundes im Integrationsbereich von $dj - \frac{d}{2}$ bis $dj + \frac{d}{2}$ abbildet

d ... konstanter Einzelkraftabstand

n ... Anzahl der Einzelkräfte links ($x < 0$) oder rechts ($x > 0$) von der Achslast

Da kein eigenständiger analytischer Ausdruck für die Untergrundreaktion $N(x)$ verfügbar ist, wird an seiner Stelle die Differentialgleichung der Biegelinie (3.2) herangezogen:

$$N(x) = -EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} \quad (3.22)$$

Einsetzen von Gl. (3.22) in Gl. (3.21) ergibt:

$$F_j = -EI \int_{dj-\frac{d}{2}}^{dj+\frac{d}{2}} \frac{d^4 w(x)}{dx^4} dx \quad (3.23)$$

$$= -EI \left[\frac{d^3 w(x)}{dx^3} \right]_{dj-\frac{d}{2}}^{dj+\frac{d}{2}} \quad \text{für } j = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$$

Ferner wird von der in Abschnitt 3.1.2 eingeführten Substitution Gebrauch gemacht (vgl. Gl. (3.10)–(3.12)):

$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = w_3(x) \quad (3.24)$$

Die Verformungsgröße $w_3(x)$ wird vom in Abschnitt 3.1.2 eingerichteten numerischen Lösungsprogramm *bvp4c* als Teil des zu lösenden Differentialgleichungssystems aus Gl. (3.10)–(3.13) mitberechnet. Aus dem Grund, dass die Berechnung von $w_3(x)$ nur für den rechten Gleisbalken ($x \geq 0$) erfolgt, werden daraus anfänglich die Einzelkräfte rechts von der Achslast ermittelt:

$$F_j = -EI \left[w_3(x) \right]_{dj-\frac{d}{2}}^{dj+\frac{d}{2}} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n \quad (3.25)$$

Die Einzelkräfte links von der Achslast ($x < 0$) werden unter Ausnutzung der vorhandenen Systemsymmetrie durch die folgende Identität bestimmt:

$$F_{-j} = F_j \quad (3.26)$$

F_{-j} ... j -te Einzelkraft *links* von der Achslast

F_j ... j -te Einzelkraft *rechts* von der Achslast

Die zentrale Einzelkraft F_0 ergibt sich aus der Verdoppelung des Integrals über die positive Hälfte ihrer Einflusszone:

$$F_0 = 2 \int_0^{\frac{d}{2}} N(x) dx = -2EI \left[w_3(x) \right]_0^{\frac{d}{2}} \quad (3.27)$$

Die Integration der Untergrundreaktion $N(x)$ zu den Lastmodell-Einzelkräften F_j erfolgt vollständig innerhalb der zentralen Bettungsdruckzone (oder der Lastverteilungslänge) infolge der Achslast P (siehe Abbildung 2.11). Aufgrund der Vernachlässigung der außenliegenden Zugzonen würde die Integration über die volle Lastverteilungslänge ohne Weiteres eine zu große Druckkraft erzeugen, die die Achslast P überschreiten würde. Um eine Äquivalenz des Lastmodells mit der Achslast herzustellen, wird erstens die Ausdehnung des gesamten Integrationsbereichs unter Beibehaltung des Einzelkraftabstandes d begrenzt, sodass alle Einzelkräfte in Summe gerade die Achslast erreichen oder überschreiten (siehe die Ungleichung (3.28)). Zweitens wird der resultierende Druckkraft-Überschuss von den an den Rändern des verbleibenden Integrationsbereichs liegenden Einzelkräften abgezogen, sodass die „korrigierten“ Randkräfte F_{-n}^* und F_n^* entstehen (siehe Gl. (3.29)).

$$\sum_{j=-n}^n F_j \geq P, \quad \text{wobei} \quad \sum_{j=-n+1}^{n-1} F_j < P \quad (3.28)$$

$$F_{-n}^* = F_n^* = F_n - \frac{(\sum_{j=-n}^n F_j) - P}{2} \quad (3.29)$$

F_{-n}^* und F_n^* ... um den Drucküberschuss korrigierte Randkräfte

Für die schematische Darstellung der endgültigen Einzelkraftanordnung und der zugehörigen Integrationsbereiche sei auf Abbildung 2.12 in Kapitel 2 verwiesen.

3.1.5.2 Anwendung des Lastmodells

Die in Unterabschnitt 3.1.5.1 dargelegte Methode wird zur Ermittlung der verteilten Kräfte F_j für die in Tabelle 3.3 angegebenen Systemkennwerte angewendet. Der gewählte Kraftabstand von 60 cm sorgt für eine direkte Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit den Lastverteilungen nach Abschnitt 2.5.2 wie auch nach Eurocode [5] und nach Spengler [14].

Tabelle 3.3: Kennwerte zur Ermittlung des Lastmodells mit verteilten Einzelkräften zufolge einer statischen Berechnung für quadratische Federkennlinien

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises (zwei Schienen 60E1)
k_q	10 – 1000	kN/mm ² /m	Federungskraftbeiwert für eine quadratische Federkennlinie
P	25 – 250	kN	Achslast
d	60	cm	Kraftabstand

Beim System mit einer quadratischen Federungsfunktion besteht eine Abhängigkeit der Lastverteilungslänge von der Achslast (wie aus Abbildung 3.11 ersichtlich ist), sodass – im Unterschied zum linearen System – für verschiedene Achslasten eine eigene Lastverteilung bestimmt werden muss. Exemplarisch werden die ermittelten Lastverteilungskräfte F_j für zwei

Achslasten $P = 25 \text{ kN}$ und $P = 250 \text{ kN}$ jeweils in Tabelle 3.4 und Tabelle 3.5 festgehalten (bezogen auf die zugehörige Achslast sowie gerundet auf das nächste ganze Prozent, weshalb die Anteilsumme von 100% abweichen kann). Die äußersten angegebenen Kräfte sind, wenn diese nicht auf null zu runden waren, die korrigierten Randkräfte gemäß Gl. (3.29).

Die bezogenen Einzelkräfte laut Tabelle 3.4 und Tabelle 3.5 verdeutlichen, dass höhere Achslasten einen mindernden Einfluss auf die Lastverteilung haben, sodass die zentrische Einzelkraft F_0 bei der Achslast P von 250 kN tendenziell einen höheren Lastanteil als jene bei der Achslast von 25 kN aufweist. Hinsichtlich der minimalen und maximalen möglichen Einzelkraftanzahl für die betrachteten Schranken des Federungskraftbeiwerts k_q kann eine Verringerung von 5–9 auf 3–7 bei der besprochenen Laststeigerung beobachtet werden.

Tabelle 3.4: Auf die einwirkende Achslast P bezogene verteilte Einzelkräfte F_j des Lastmodells für das statische System mit einer quadratischen Federkennlinie bei $P = 25 \text{ kN}$

k_q in kN/mm ² /m	$\frac{F_{-4}}{P}$ in %	$\frac{F_{-3}}{P}$ in %	$\frac{F_{-2}}{P}$ in %	$\frac{F_{-1}}{P}$ in %	$\frac{F_0}{P}$ in %	$\frac{F_1}{P}$ in %	$\frac{F_2}{P}$ in %	$\frac{F_3}{P}$ in %	$\frac{F_4}{P}$ in %	L_{LV} in m
$P = 25 \text{ kN}$										
10	2	6	12	19	23	19	12	6	2	8,30
20	1	5	11	20	25	20	11	5	1	7,52
30	-	5	11	21	27	21	11	5	-	7,10
40	-	4	11	21	28	21	11	4	-	6,81
50	-	4	11	21	28	21	11	4	-	6,60
60	-	3	10	22	29	22	10	3	-	6,43
80	-	3	10	22	30	22	10	3	-	6,17
100	-	2	10	22	31	22	10	2	-	5,98
200	-	1	9	23	34	23	9	1	-	5,41
400	-	-	8	24	38	24	8	-	-	4,90
600	-	-	6	24	40	24	6	-	-	4,63
1000	-	-	5	24	42	24	5	-	-	4,30

Tabelle 3.5: Auf die einwirkende Achslast P bezogene verteilte Einzelkräfte F_j des Lastmodells für das statische System mit einer quadratischen Federkennlinie bei $P = 250$ kN

k_q in kN/mm ² /m	$\frac{F_{-4}}{P}$ in %	$\frac{F_{-3}}{P}$ in %	$\frac{F_{-2}}{P}$ in %	$\frac{F_{-1}}{P}$ in %	$\frac{F_0}{P}$ in %	$\frac{F_1}{P}$ in %	$\frac{F_2}{P}$ in %	$\frac{F_3}{P}$ in %	$\frac{F_4}{P}$ in %	L_{LV} in m
$P = 250$ kN										
10	-	2	10	22	31	22	10	2	-	5,98
20	-	1	9	23	34	23	9	1	-	5,41
30	-	-	8	23	36	23	8	-	-	5,11
40	-	-	8	24	38	24	8	-	-	4,90
50	-	-	7	24	39	24	7	-	-	4,75
60	-	-	6	24	40	24	6	-	-	4,63
80	-	-	6	24	41	24	6	-	-	4,44
100	-	-	5	24	42	24	5	-	-	4,30
200	-	-	3	24	46	24	3	-	-	3,90
400	-	-	2	23	50	23	2	-	-	3,53
600	-	-	1	23	52	23	1	-	-	3,33
1000	-	-	-	22	56	22	-	-	-	3,10

Abbildung 3.12 veranschaulicht maßstäblich das Lastmodell mit den Einzelkraftverteilungen nach Tabelle 3.4 und Tabelle 3.5 die für Achslasten P von 25 und 250 kN sowie die Federungskraftbeiwerte k_q von 10 und 1000 kN/mm²/m.

In Abbildung 3.13 sind die Verläufe der ermittelten Einzelkraftanteile F_j / P für unterschiedliche Achslasten P im gesamten untersuchten Bereich des Federungskraftbeiwerts k_q dargestellt.

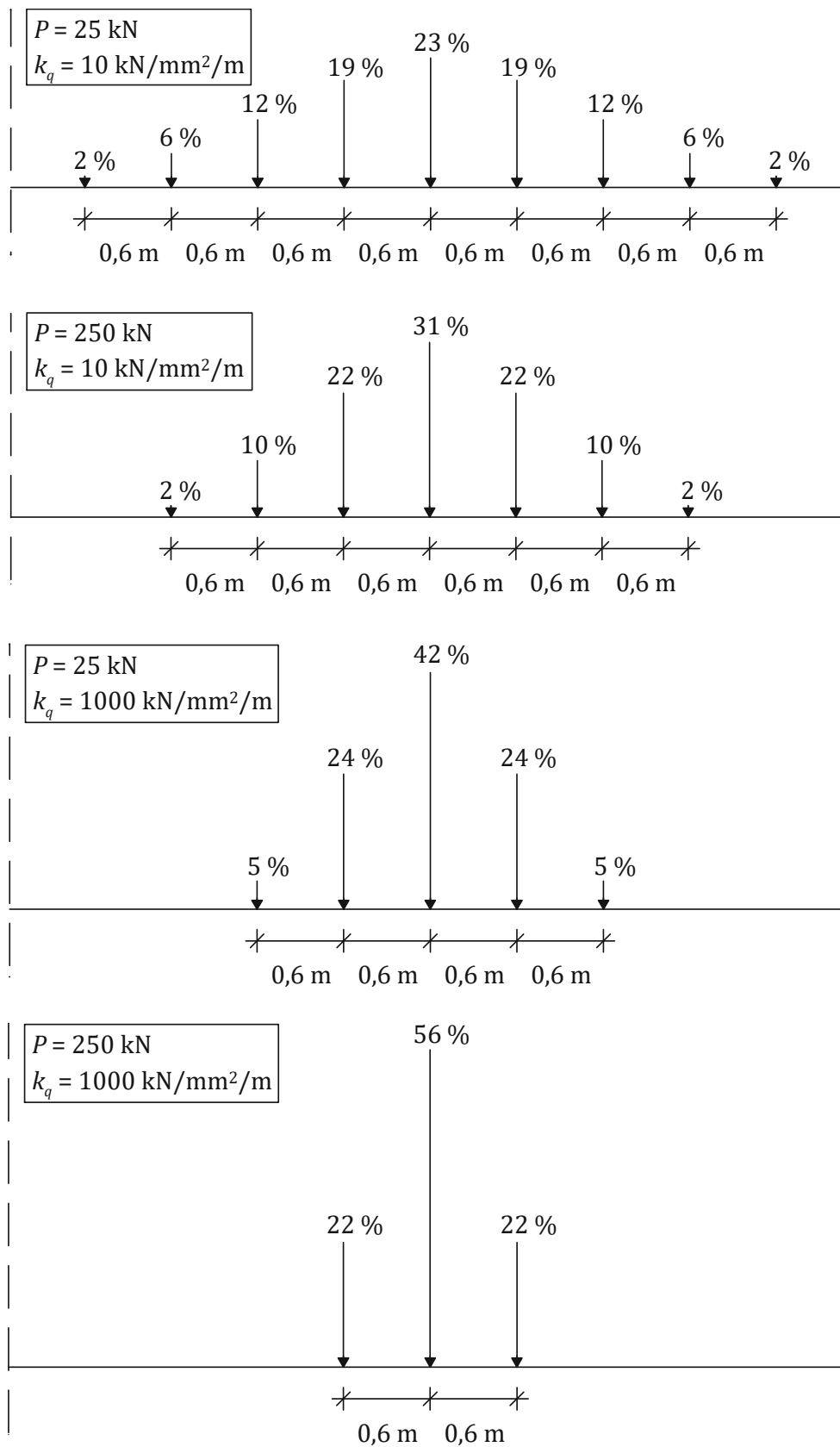


Abbildung 3.12: Lastmodell für das statische System mit einer quadratischen Federkennlinie bei ausgewählten Achslasten P und Federungskraftbeiwerten k_q in % von der Achslast

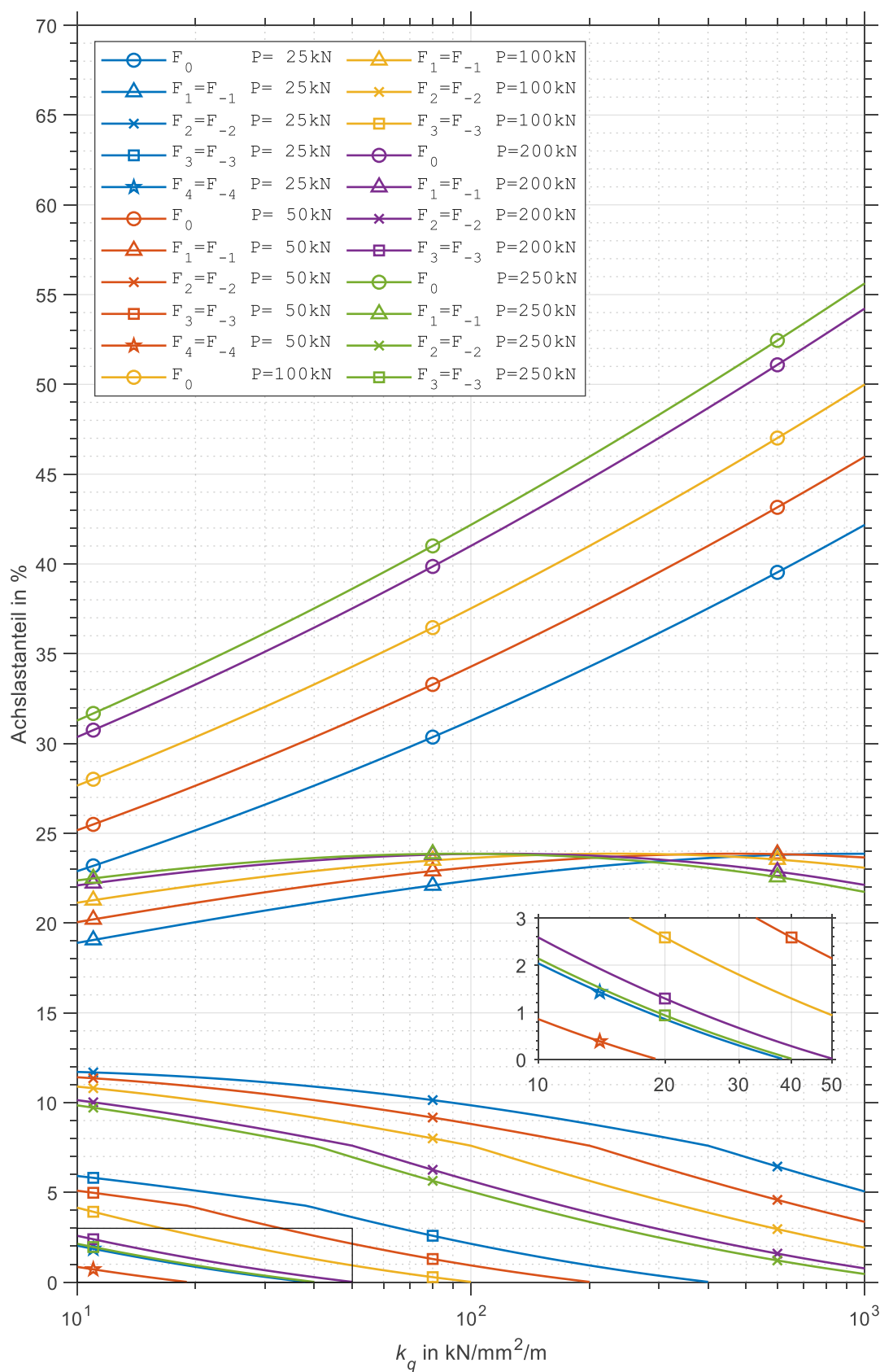


Abbildung 3.13: Aufteilung der einwirkenden Achslast P in die verteilten Einzelkräfte F_i gemäß dem Lastmodell für das statische System mit einer quadratischen Federkennlinie

3.2 Federkennlinie gemäß einer Wurzelfunktion

Die Auswirkung eines degressiven Schotterbetts auf die Lastverteilung von Schotteroberbau wird zuerst unter Annahme der folgenden Wurzelfunktion der Federungskraft untersucht:

$$N(x) = \begin{cases} k_W \sqrt{|w(x)|} & \text{für } w(x) \geq 0 \\ -k_W \sqrt{|w(x)|} & \text{für } w(x) < 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

k_W ... Beiwert für die Wurzelfunktion der Federungskraft

Der Vorzeichenwechsel beim Nullübergang der Setzung in Gl. (3.30) ist durch die Annahme punktsymmetrischer Kraft-Weg-Diagramme oder Federkennlinien gemäß der qualitativen Darstellung in Abbildung 3.14 bedingt. Diese Vereinfachung ist insofern zulässig, als die im hier betrachteten Lastfall Achslast in Oberbau auftretenden Zugkräfte bei einer Überlagerung mit anderen Lastfällen (z.B. Gleiseigengewicht) überdrückt werden.

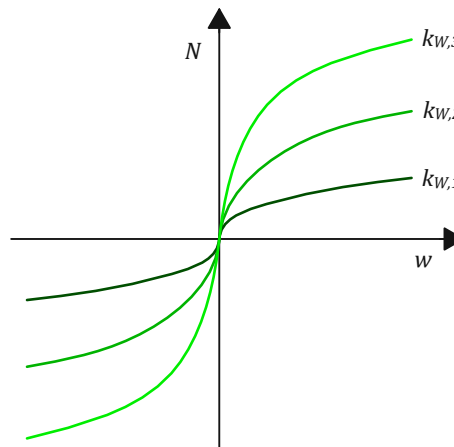


Abbildung 3.14: Qualitativer Federkennlinienverlauf gemäß der Wurzelfunktion für verschiedene Federungskraftbeiwerte k_W

3.2.1 Differentialgleichung und Randbedingungen

Die Gleissetzung $w(x)$ sowie die Untergrundreaktion $N(x)$ sind durch Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie 4. Ordnung zu erhalten (vgl. Abschnitt 2.1):

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + N(x) = 0 \quad (3.31)$$

Gl. (3.31) kann nach Einsetzen von Gl. (3.30) und bei Verwendung der Vorzeichenfunktion sgn folgendermaßen angeschrieben werden:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \text{sgn}(w(x)) k_W \sqrt{|w(x)|} = 0 \quad (3.32)$$

Analog zum in Abschnitt 3.1 untersuchten System mit der progressiven quadratischen Federkennlinie existiert für Gl. (3.32), eine nichtlineare Differentialgleichung 4. Ordnung mit einem Wurzelterm, keine analytische Lösung. Stattdessen wird diese Gleichung wieder mithilfe des in *MATLAB* integrierten numerischen Lösungsprogramms *bvp4c* behandelt, das sich zur Lösung von Randwertproblemen – numerischen Problemen mit Randbedingungen – eignet (näheres siehe Abschnitt 3.1). Entsprechend der in Kapitel 2 entwickelten Vorgehensweise erfolgt die Berechnung für die positive Gleishälfte ($x \geq 0$), für welche die Rand- und Übergangsbedingungen formuliert werden. Die Ergebnisse für die negative Hälfte ($x < 0$) werden unter Ausnutzung der Systemsymmetrie durch Spiegelung um die Achslast erhalten.

Die Übergangsbedingungen an der Kraftangriffsstelle ($x = 0$) bleiben unverändert (vgl. Abschnitt 3.1):

$$\frac{dw(x=0)}{dx} = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{d^3w(x=0)}{dx^3} = \frac{P}{2EI} \quad (3.34)$$

Die Randbedingungen am freien Gleisende dürfen ebenfalls aus Abschnitt 3.1 übernommen werden, wobei L wieder die endliche Länge des numerischen Gleisbalkens ist:

$$M(x=L) = 0 \quad (3.35)$$

$$Q(x=L) = 0 \quad (3.36)$$

Praktischerweise können die Schnittgrößen-Randbedingungen gemäß Gl. (3.35) und (3.36) durch die folgenden äquivalenten Verformungsbedingungen ausgedrückt werden (siehe Abschnitt 2.2.2.3):

$$\frac{d^2w(x=L)}{dx^2} = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{d^3w(x=L)}{dx^3} = 0 \quad (3.38)$$

3.2.2 Umsetzung in *MATLAB*

Die Differentialgleichung 4. Ordnung (3.32) soll durch ein von *bvp4c* akzeptiertes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung ersetzt werden, das aus den Ableitungssubstitutionen $w_1(x)$, $w_2(x)$ und $w_3(x)$ gebildet wird:

$$\frac{dw(x)}{dx} = w_1(x) \quad (3.39)$$

$$\frac{dw_1(x)}{dx} = w_2(x) \quad (3.40)$$

$$\frac{dw_2(x)}{dx} = w_3(x) \quad (3.41)$$

$$\frac{dw_3(x)}{dx} = -\operatorname{sgn}(w(x)) \frac{k_W}{EI} \sqrt{|w(x)|} \quad (3.42)$$

Die Rand- und Übergangsbedingungen laut Gl. (3.33), (3.34), (3.37) sowie (3.38) müssen ebenso in eine für das numerische Lösungsprogramm geeignete Form gebracht werden, indem von Substitutionen gemäß Gl. (3.39)–(3.41) Gebrauch zu machen ist:

$$w_1(x = 0) = 0 \quad (3.43)$$

$$w_3(x = 0) = \frac{P}{2EI} \quad (3.44)$$

$$w_2(x = L_{Stab}) = 0 \quad (3.45)$$

$$w_3(x = L_{Stab}) = 0 \quad (3.46)$$

Als die erforderliche erste Schätzung der Verformungsverläufe können dem Programm die folgenden konstanten Werte vorgegeben werden:

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ w_1(x) \\ w_2(x) \\ w_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \text{ mm} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Auf diese Art wird eine Lösung für die Biegelinie erhalten, die nun vor einer weiteren Auswertung anhand eines *RFEM*-Modells verifiziert werden soll.

3.2.3 Verifizierung des *MATLAB*-Programms mit *RFEM*

Die eingesetzte Verifizierungsmethode folgt der Vorgehensweise aus Abschnitt 3.1.3. Die dabei verwendeten Kennwerte sind Tabelle 3.6 zu entnehmen.

Tabelle 3.6: Kennwerte für die Kontrollberechnung des statischen Systems mit einer degressiven Federkennlinie nach der Wurzelfunktion

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm^2	Biegesteifigkeit des Gleises (zwei Schienen 60E1)
k_W	10, 100, 1000	$\text{kN/mm}^{0.5}/\text{m}$	Federungskraftbeiwert für eine Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion (Kontrolle für drei Parameterannahmen, arbiträre Wahl)
P	250	kN	Achslast (arbiträre Wahl)
L	10	m	Balkenlänge für die numerische Berechnung

3.2.3.1 RFEM-Modell

Die Verifizierung erfolgt anhand des in Unterabschnitt 3.1.3.1 vorgeschlagenen *RFEM*-Modells, in welchem die kontinuierliche Schotterbettung durch die im gegenseitigen Abstand von 10 cm platzierten diskreten Einzellager angenähert wird, für welche die Zuweisung nichtlinearer Kraft-Weg-Diagramme von *RFEM 6.09* unterstützt wird. Ein der Wurzelfunktion entsprechendes – auf den Lagerabstand umgerechnetes – Kraft-Weg-Diagramm ist als vertikale Lagerbedingung mittels der Nichtlinearität-Einstellung *Diagramm* einzugeben (Übersicht des Modells siehe Abbildung 3.3).

3.2.3.2 Vergleich der Ergebnisse

Die nachfolgend in Abbildung 3.15 dargestellten Setzungslinien zeigen eine eindeutige Übereinstimmung der *bvp4c*-Ergebnisse mit den *RFEM*-Ergebnissen für einen schubstarren Balken, obwohl beim *RFEM*-Modell eine diskrete Lagerung angesetzt wird. Zugleich können teils wesentliche Abweichungen zwischen dem schubstarren und dem schubnachgiebigen Balken festgestellt werden: Während für die kleineren Federungskraftbeiwerte k_W von $10 \text{ kN/mm}^{0.5}/\text{m}$ sowie $100 \text{ kN/mm}^{0.5}/\text{m}$ diese noch vernachlässigbar sind (vgl. Abbildung 3.15a und Abbildung 3.15b), wächst die Diskrepanz an der Kraftangriffsstelle ($x = 0$) bei dem Federungskraftbeiwert von $1000 \text{ kN/mm}^{0.5}/\text{m}$ auf 43 % relativ zur schubstarren Setzung (siehe Abbildung 3.15c). Dieser Fehler ist bei Anwendung der Ergebnisse dieser Arbeit für degressive Federung gemäß der Wurzelfunktion in Kauf zu nehmen. Im Folgenden wird nur der schubstarre Balken betrachtet.

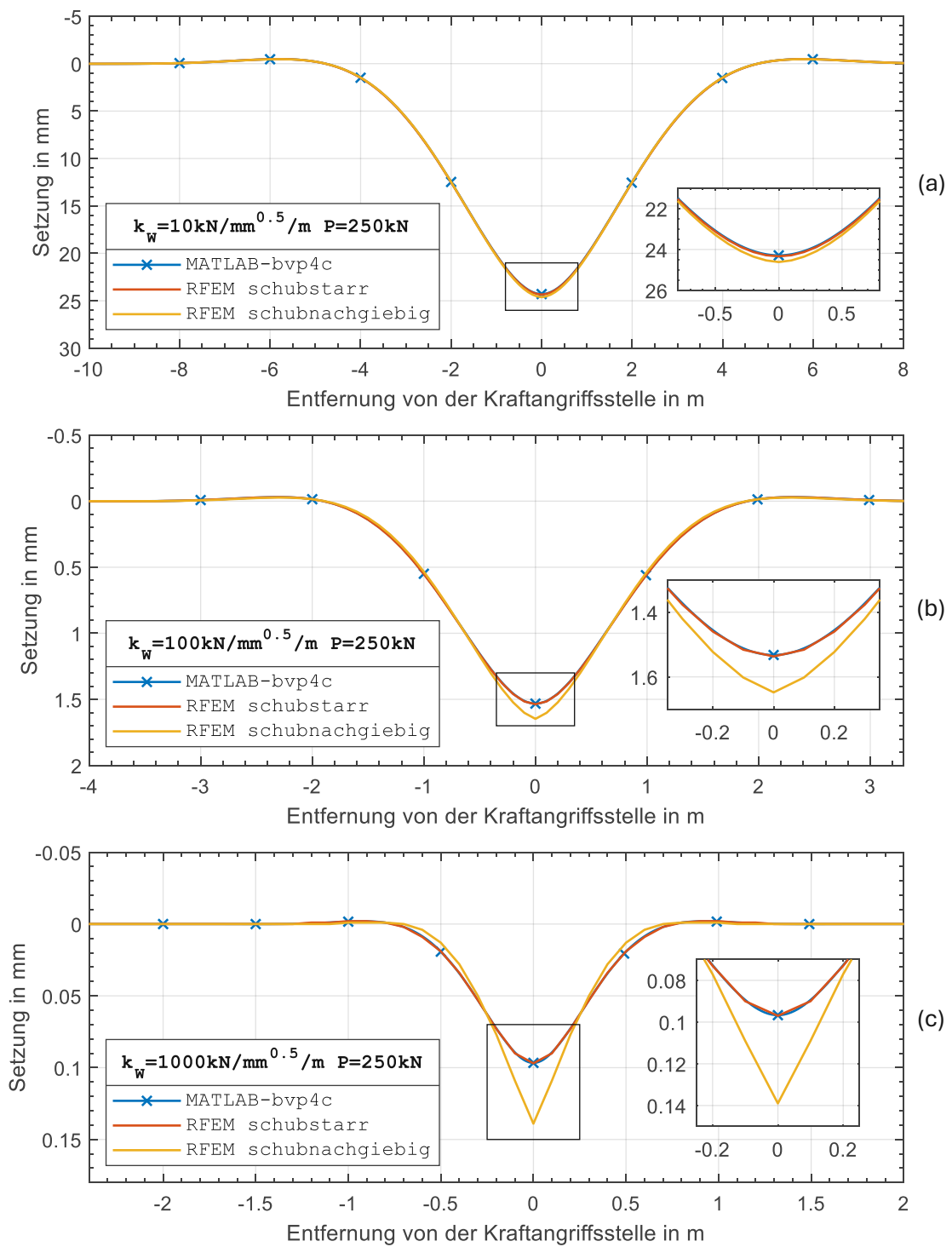


Abbildung 3.15: Vergleich der Gleisssetzung $w(x)$ für die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion zufolge der Berechnung mit *bvp4c* sowohl mit der schubstarrn als auch mit der schubnachgiebigen RFEM-Kontrollberechnung für unterschiedliche Federungskraftbeiwerte k_w

3.2.4 Ergebnisse für die Bettung mit einer Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion

Die Berechnung der Gleissetzung $w(x)$ und der Untergrundreaktion $N(x)$ erfolgt für die in Tabelle 3.7 angegebenen Systemkennwerte mithilfe des in Abschnitt 3.2.2 eingerichteten und in Abschnitt 3.2.3 verifizierten *MATLAB*-Programms *bvp4c*.

Tabelle 3.7: Kennwerte für die Berechnung des Systems mit einer Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises (zwei Schienen 60E1)
k_W	10 – 1000	kN/mm ^{0.5} /m	Federungskraftbeiwert für eine Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion
P	25 – 250	kN	Achslast
L	20	m	Balkenlänge für die numerische Berechnung

Die Setzungslinien $w(x)$ gemäß Abbildung 3.16 zeigen eine steigende Empfindlichkeit der Gleissetzung gegenüber der Achslaständerung im Bereich höherer Lasten P . Zudem werden die Nullstellen der Gleisbiegeline durch die wachsende Last auseinander geschoben – dies wird sich bei den Untergrundreaktionen noch deutlicher zeigen. Diese beiden Verhaltensweisen stehen im Gegensatz zum System mit einer quadratischen Federkennlinie (vgl. Abbildung 3.5). Die hier entstandenen Hebungsgebiete sind im Vergleich zu den vorherigen Systemen kaum merklich (vgl. Abbildung 2.4 und Abbildung 3.5).

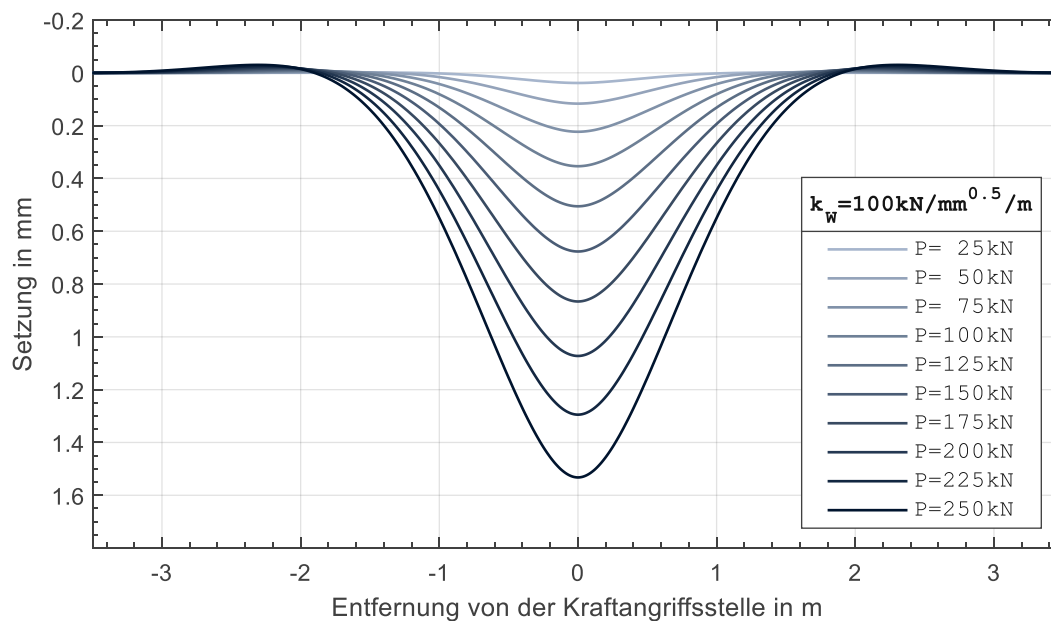


Abbildung 3.16: Setzungslinien $w(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

Bei Variation des Federungskraftbeiwerts k_W zeigt sich in Abbildung 3.17 das zu erwartende Verhalten der Setzungslinie $w(x)$: Eine Vergrößerung des Beiwerts führt zu kleineren Setzungen und Hebungen, die Setzungsnullstellen nähern aneinander an. Die sinkende Beeinflussbarkeit der Setzungen bei größeren Beiwerten ist im Falle der degressiven Federkennlinien nach der Wurzelfunktion am deutlichsten ausgeprägt (im Vergleich zu den angesetzten linearen und progressiven quadratischen Federkennlinien).

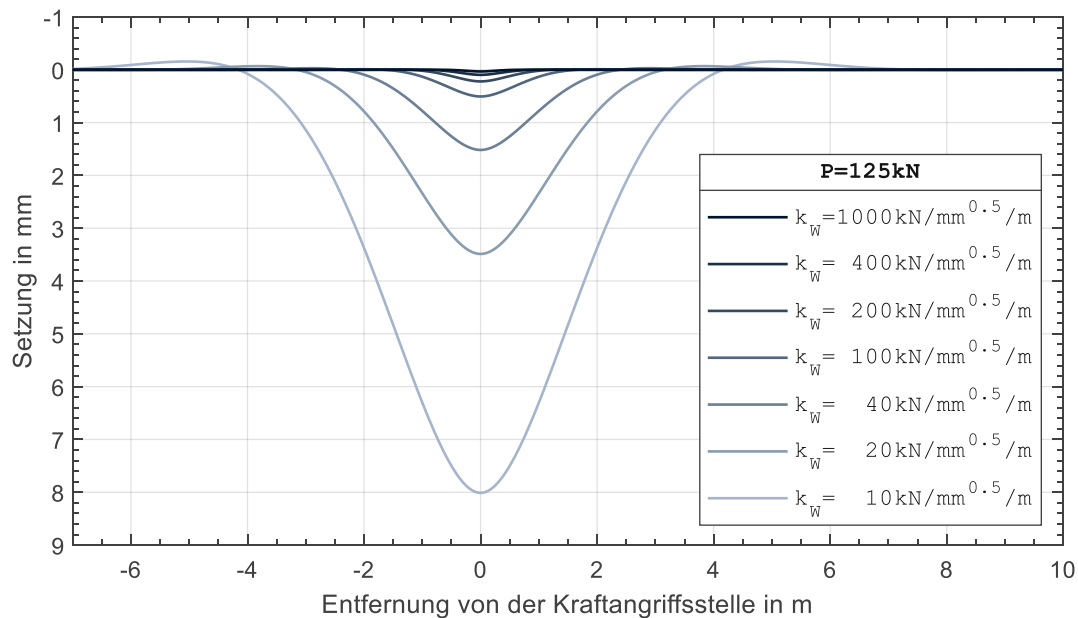


Abbildung 3.17: Setzungslinien $w(x)$ für den variierten Federungskraftbeiwert k_W zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

Abbildung 3.18 veranschaulicht die Untergrundreaktionen $N(x)$ für die schrittweise steigende Achslast P . Hervorzuheben sind die vertikalen Abfälle bzw. Anstiege des Bodendrucks bei den Durchquerungen der Setzungsnullpunkte – dieser steile Verlauf ist auf die angenommene Wurzelfunktion der Untergrundreaktion zurückzuführen. Die bei den Setzungslinien $w(x)$ (Abbildung 3.16) beobachteten mit der zunehmenden Last P immer weiter auseinander liegenden Nullstellen (also die mit der Last P wachsende Lastverteilungslänge L_{LV}) sind nun beim Übergang zur Untergrundreaktion $N(x)$ deutlicher zu sehen.

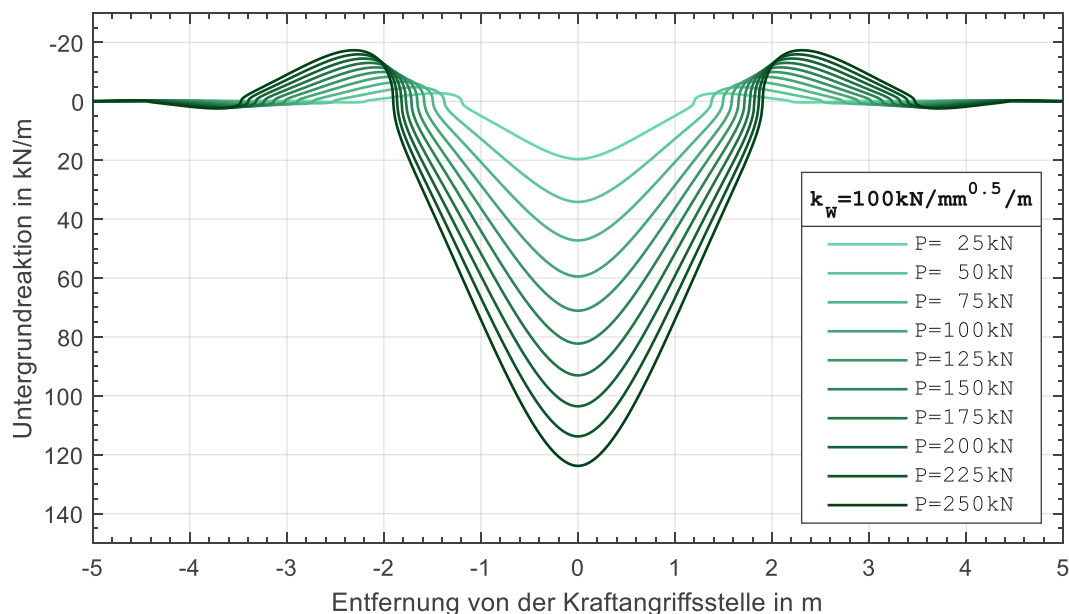


Abbildung 3.18: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

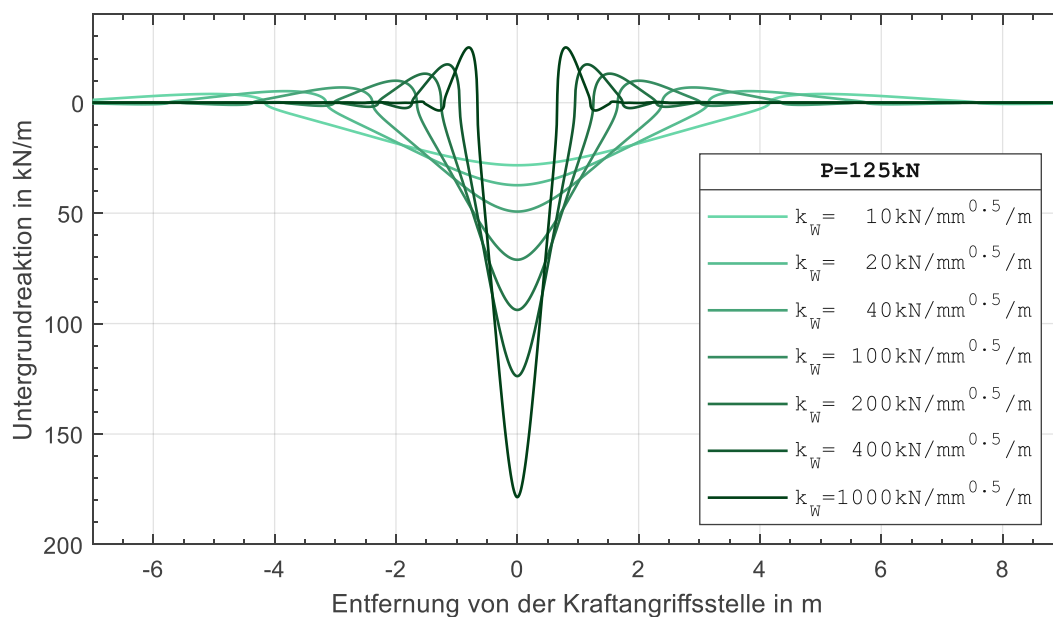


Abbildung 3.19: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für den variierten Federkraftbeiwert k_W zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

Die Erhöhung des Federkraftbeiwerts k_W ruft erwartungsgemäß kürzere Lastverteilungslängen (Nullpunktabstände) und höhere Druck- und Zugspitzen hervor, siehe Abbildung 3.19. Der vertikale Verlauf der Untergrundreaktion $N(x)$ an ihren Nullstellen ist demgemäß für alle Federkraftbeiwerte k_W festzustellen. Die Lastverteilungslänge L_{LV} reagiert auf die Änderung des Beiwerts unter all den in dieser Arbeit untersuchten Federungsmodellen hier am sensibelsten, worauf nachfolgend näher eingegangen wird.

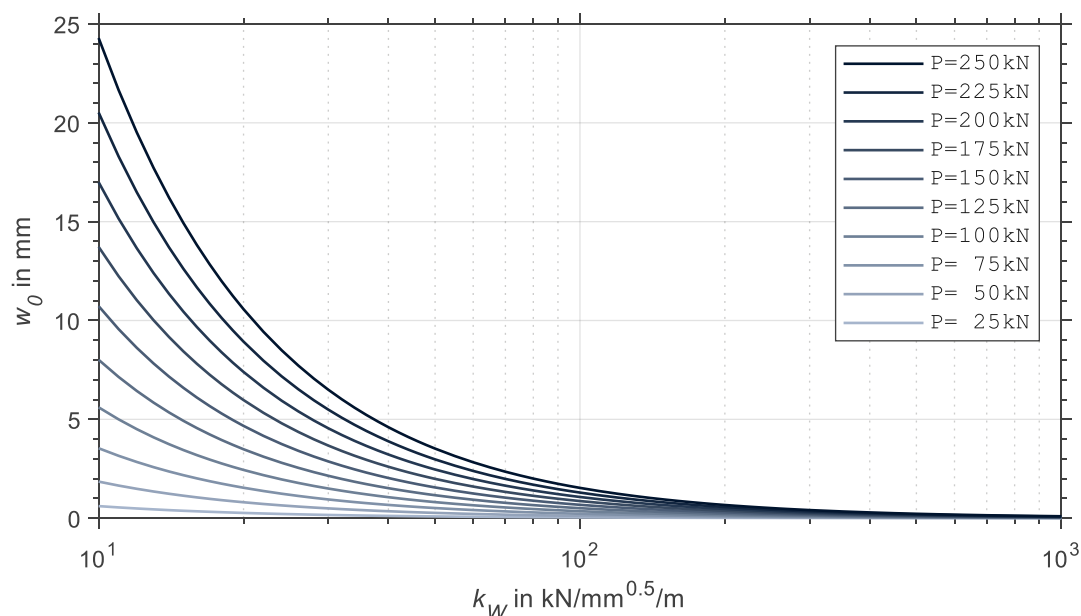


Abbildung 3.20: Gleissetzung an der Kraftangriffsstelle w_0 in Abhängigkeit des Federungskraftbeiwerts k_W zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

Das Verhalten der Gleissetzung an der Kraftangriffsstelle w_0 (siehe Gl. (3.19)) gegenüber den variierten Federungskraftbeiwert k_W und Achslast P ist Abbildung 3.20 zu entnehmen. In Betracht der logarithmischen Skala lässt sich der ausgesprochen starke Abfall der Setzung bei der Vergrößerung des Beiwerts betonen. Ab dem Federungskraftbeiwert von $300 \text{ kN/mm}^{0.5/\text{m}}$ ist die Setzung kaum mehr wahrnehmbar.

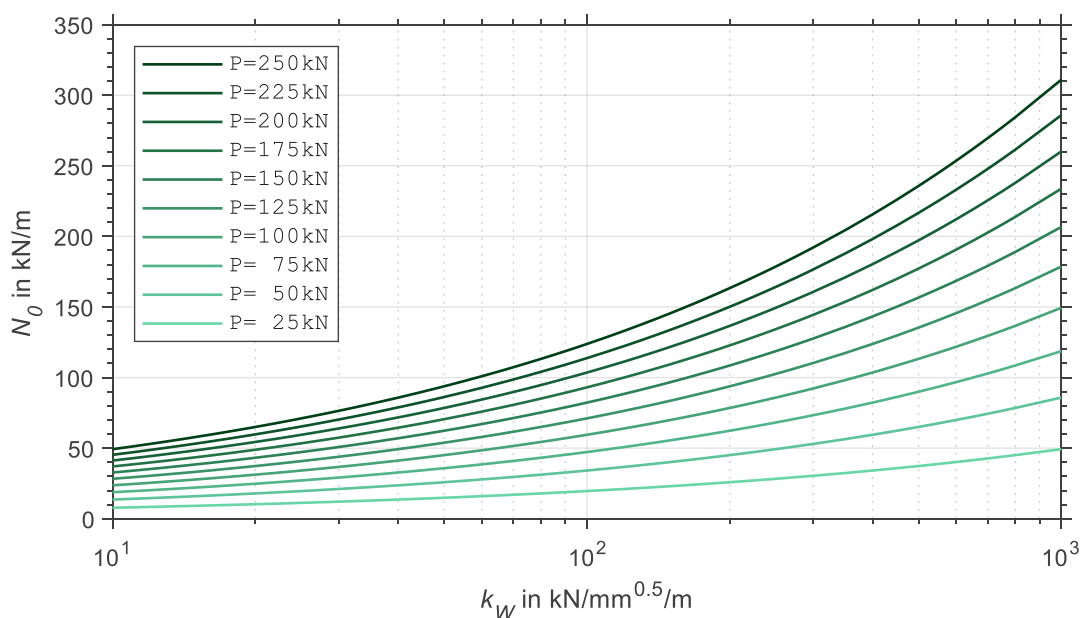


Abbildung 3.21: Untergrundreaktion an der Kraftangriffsstelle N_0 in Abhängigkeit des Federungskraftbeiwerts k_W zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

Abbildung 3.21 stellt die Untergrundreaktion an der Kraftangriffsstelle N_0 (siehe Gl. (3.20)) dar. Demnach behält der Bodendruck eine hohe Sensibilität gegenüber den Änderungen des Federungskraftbeiwerts k_W etwa im gesamten Parameterbereich bei.

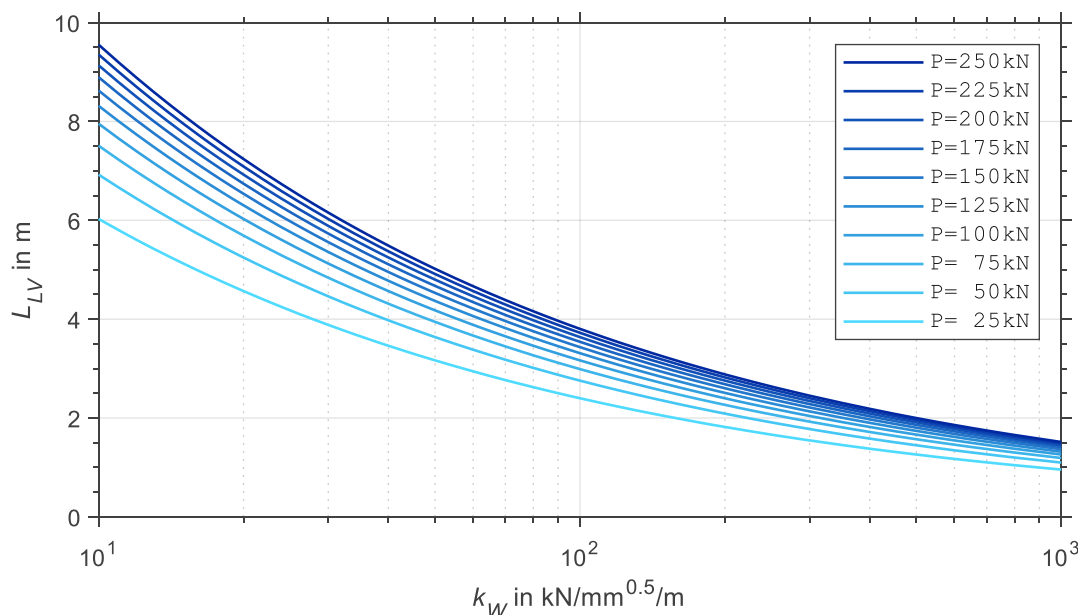


Abbildung 3.22: Lastverteilungslänge L_{LV} in Abhängigkeit des Federungskraftbeiwerts k_W zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

Die bei Betrachtung der Untergrundreaktionslinien $N(x)$ gemäß Abbildung 3.18 festgestellte Zunahme der Lastverteilungslänge L_{LV} infolge der Achslasterhöhung ist in Abbildung 3.22 nun direkt veranschaulicht. Bei fortschreitender Steigerung der Achslast P wird dieser Zusammenhang jedoch immer weniger ausgeprägt. Zwischen den drei untersuchten Federungsmodellen bringen die Federkennlinien nach der Wurzelfunktion die größten Unterschiede zwischen der minimalen und der maximalen Lastverteilungslänge für das angesetzte Parameterfeld hervor (vgl. Abbildung 2.10, Abbildung 3.11 sowie Abbildung 3.22).

3.2.5 Lastverteilungsmodell auf Basis des statischen Systems mit einer Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion

Die verteilten Einzelkräfte F_j des Lastverteilungsmodells gemäß Abbildung 2.12 werden nun für das System mit degressiver Federung nach der Wurzelfunktion bestimmt. Zu diesem Zweck wird auf das für die numerische Berechnung adaptierte Verfahren laut Unterabschnitt 3.1.5.1 zurückgegriffen (siehe Gl. (3.25)–(3.29)), welches gleichermaßen für das vorliegende Wurzelsystem geeignet ist. Die Berechnung erfolgt für die in Tabelle 3.8 angegebenen Systemkennwerte. Der darin gewählte Kraftabstand d gewährleistet eine quantitative Vergleichbarkeit des vorliegenden Lastmodells mit den Lastverteilungsansätzen nach Abschnitt 2.5.2 wie auch nach Eurocode [5] und nach Spengler [14].

Tabelle 3.8: Kennwerte zur Ermittlung des Lastmodells mit verteilten Einzelkräften zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises (zwei Schienen 60E1)
k_W	10 – 1000	kN/mm ^{0,5} /m	Federungskraftbeiwert für eine Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion
P	25 – 250	kN	Achslast
d	60	cm	Kraftabstand

Aufgrund der vorhandenen Abhängigkeit der Lastverteilungslänge L_{LV} von der Achslast P (siehe Abbildung 3.22) sind die Einzelkraftaufteilungen für jede Achslast gesondert zu ermitteln (im Unterschied zum linearen System). Die Aufteilungen für die Achslasten $P = 25$ kN und $P = 250$ kN und ausgewählte Federungskraftbeiwerte k_W sind exemplarisch in Tabelle 3.9 bzw. Tabelle 3.10 angegeben (die vorgenommene Rundung auf das nächste ganze Prozent verursacht eine geringfügige Abweichung der Anteilsumme von 100% für einige Federungskraftbeiwerte). Die äußersten Einzelkräfte F_j sind die korrigierten Randkräfte nach Gl. (3.29), solange diese nicht auf null gerundet wurden.

Tabelle 3.9: Auf die einwirkende Achslast P bezogene verteilte Einzelkräfte F_j des Lastmodells für das statische System mit einer Federkennlinie nach der Wurzelfunktion bei $P = 25$ kN

k_W in kN/mm ^{0,5} /m	$\frac{F_{-3}}{P}$ in %	$\frac{F_{-2}}{P}$ in %	$\frac{F_{-1}}{P}$ in %	$\frac{F_0}{P}$ in %	$\frac{F_1}{P}$ in %	$\frac{F_2}{P}$ in %	$\frac{F_3}{P}$ in %	L_{LV} in m
$P = 25$ kN								
10	10	14	17	19	17	14	10	6,03
20	2	15	21	24	21	15	2	4,57
30	-	12	24	29	24	12	-	3,88
40	-	8	26	32	26	8	-	3,46
50	-	6	27	35	27	6	-	3,17
60	-	4	28	37	28	4	-	2,94
80	-	-	29	41	29	-	-	2,62
100	-	-	27	45	27	-	-	2,40
200	-	-	21	58	21	-	-	1,82
400	-	-	14	73	14	-	-	1,38
600	-	-	9	82	9	-	-	1,17
1000	-	-	2	94	2	-	-	0,96

Anhand der in Tabelle 3.9 und Tabelle 3.10 präsentierten Lastaufteilungen kann festgestellt werden, dass das Oberbausystem mit einer Federkennlinie nach der Wurzelfunktion die einwirkende Achslast P für die gewählten Parameterschranken auf bis zu 11 Einzelkräfte F_j aufteilt (vgl. Tabelle 3.10). Hier ergibt sich somit die flachste der in dieser Arbeit beobachteten

statischen Lastverteilungen. Zugleich kann sich diese Anzahl auf lediglich 3 Einzelkräfte reduzieren, wenn der Federungskraftbeiwert k_W etwa Werte größer als $400 \text{ kN/mm}^{0.5}/\text{m}$ annimmt.

Tabelle 3.10: Auf die einwirkende Achslast P bezogene verteilte Einzelkräfte F_j des Lastmodells für das statische System mit einer Federkennlinie nach der Wurzelfunktion bei $P = 250 \text{ kN}$

k_W in $\text{kN/mm}^{0.5}/\text{m}$	$\frac{F_{-5}}{P}$ in %	$\frac{F_{-4}}{P}$ in %	$\frac{F_{-3}}{P}$ in %	$\frac{F_{-2}}{P}$ in %	$\frac{F_{-1}}{P}$ in %	$\frac{F_0}{P}$ in %	$\frac{F_1}{P}$ in %	$\frac{F_2}{P}$ in %	$\frac{F_3}{P}$ in %	$\frac{F_4}{P}$ in %	$\frac{F_5}{P}$ in %	L_{LV} in m
$P = 250 \text{ kN}$												
10	6	7	9	10	11	12	11	10	9	7	6	9,55
20	-	5	10	13	15	16	15	13	10	5	-	7,24
30	-	1	10	14	17	18	17	14	10	1	-	6,16
40	-	-	7	14	19	20	19	14	7	-	-	5,49
50	-	-	4	15	20	22	20	15	4	-	-	5,02
60	-	-	2	15	21	24	21	15	2	-	-	4,67
80	-	-	-	14	23	27	23	14	-	-	-	4,16
100	-	-	-	11	24	29	24	11	-	-	-	3,80
200	-	-	-	3	28	38	28	3	-	-	-	2,88
400	-	-	-	-	25	49	25	-	-	-	-	2,19
600	-	-	-	-	22	57	22	-	-	-	-	1,86
1000	-	-	-	-	16	67	16	-	-	-	-	1,51

Maßstäbliche Darstellungen des Lastmodells mit Achslastaufteilungen für ausgewählte Kennwerte nach Tabelle 3.9 und Tabelle 3.10 sind Abbildung 3.23 zu entnehmen.

Die Einzelkraftanteile F_j / P für die Gesamtheit der angesetzten Federungskraftbeiwerte k_W und Achslasten P sind in Abbildung 3.24 wiedergegeben.

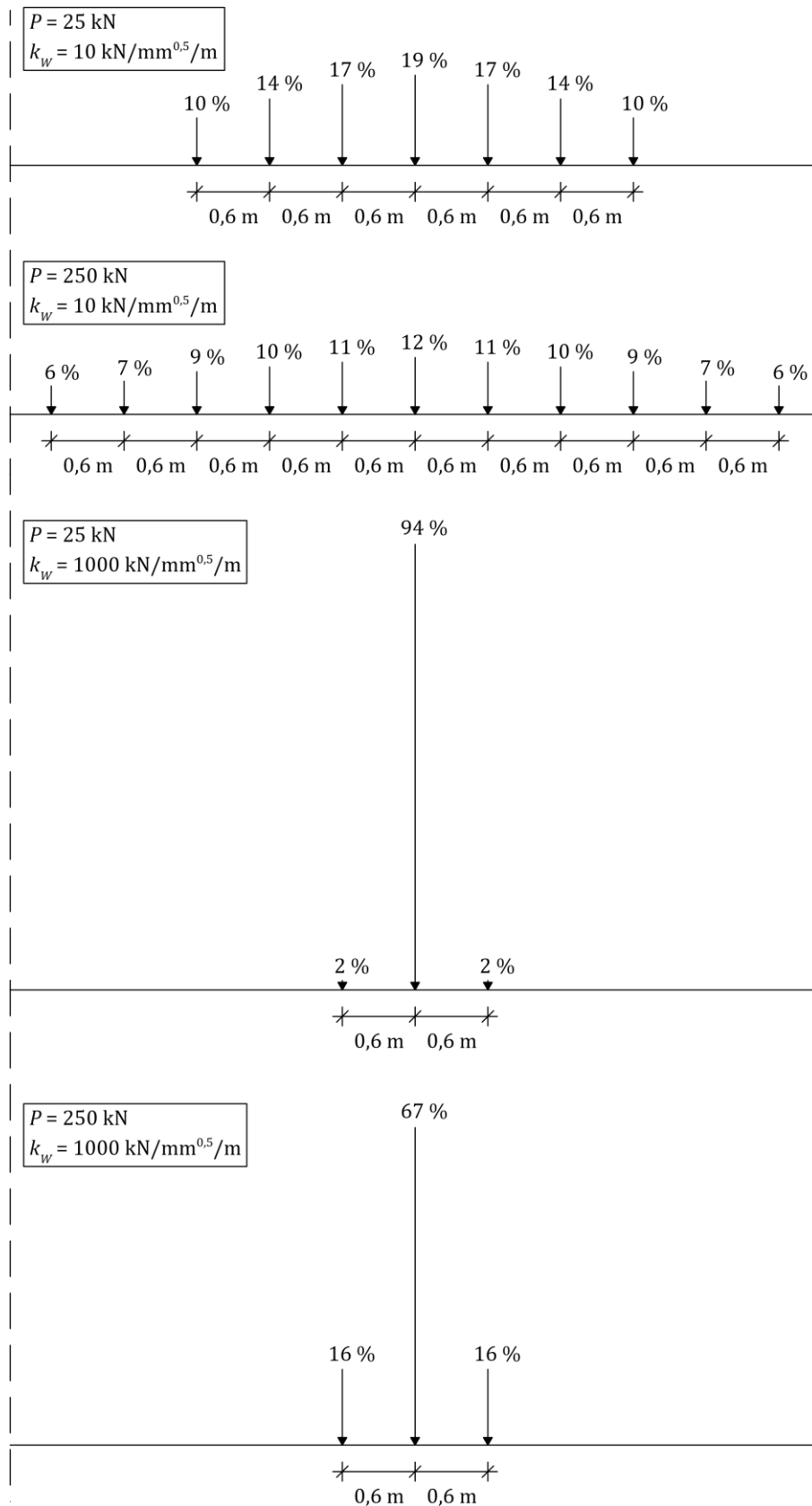


Abbildung 3.23: Lastmodell für das statische System mit einer Federkennlinie nach der Wurzelfunktion bei ausgewählten Achslasten P und Federungskraftbeiwerten k_w in % von der Achslast

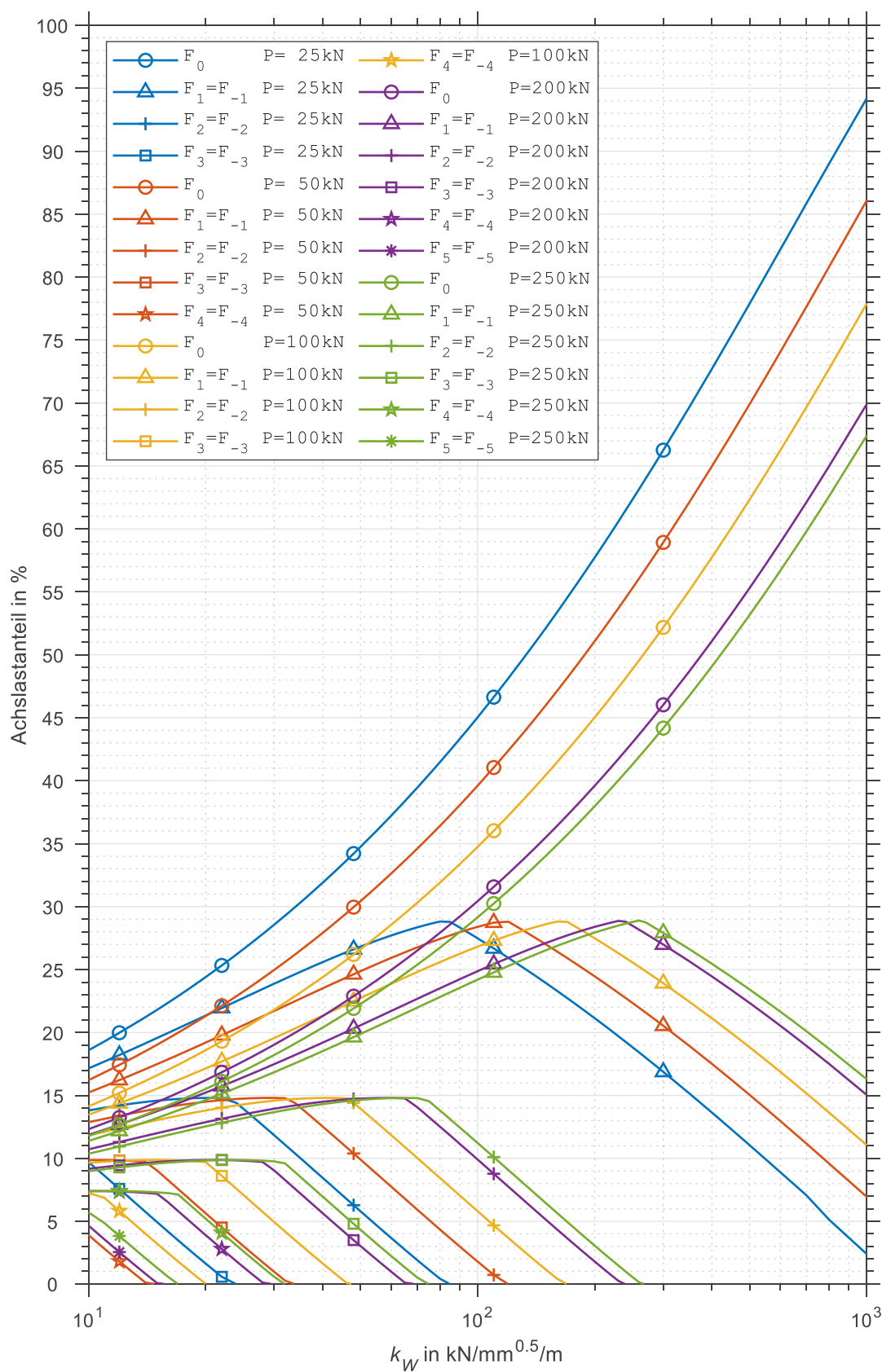


Abbildung 3.24: Aufteilung der einwirkenden Achslast P in die verteilten Einzelkräfte F_i gemäß dem Lastmodell für das statische System mit einer Federkennlinie nach der Wurzelfunktion

3.3 Degressive Federkennlinie aus Versuchen

Die Ergebnisse einer von *Stollwitzer et al.* [15] durchgeführten dynamischen Versuchsreihe an einem repräsentativen Abschnitt von Schotteroberbau unter einer vertikalen Anregung implizieren die degressive Potenzfunktion laut Abbildung 3.25 (grüne strichlierte Kurve) als zutreffende Federkennlinie für das Schotterbett (die in [15] vorgeschlagene logarithmische Funktion in Rot verläuft anfangs ähnlich, beginnt aber bei einer weiteren Steigerung der Verschiebung abzufallen).

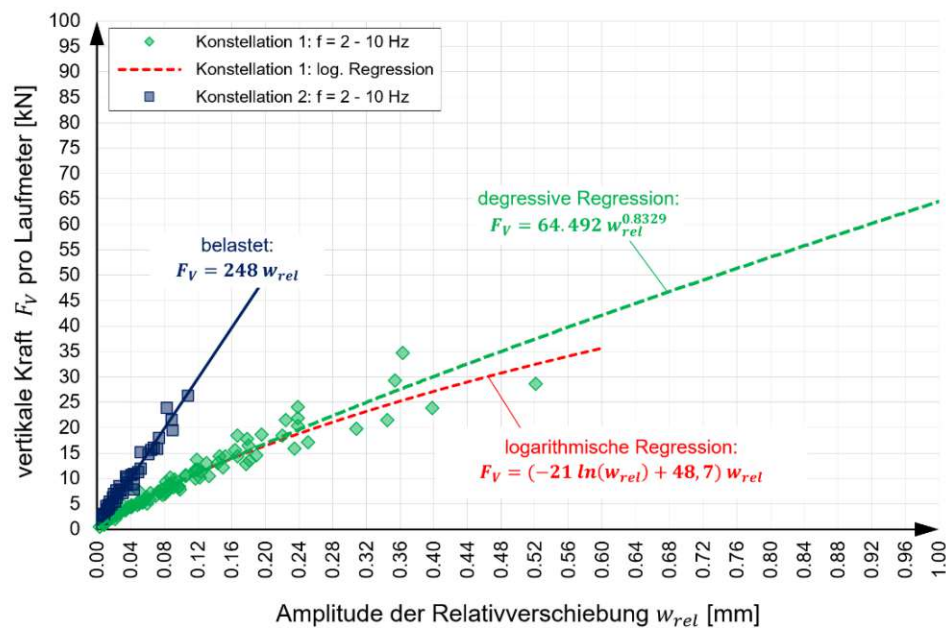


Abbildung 3.25: Experimentelle Ergebnisse für einen vertikal angeregten Eisenbahnbrückenabschnitt gemäß Fig. 15b in [15]

Ergänzt um den vereinfacht angenommenen negativen Zugbereich und adaptiert für die Nomenklatur der vorliegenden Arbeit lautet die Regression folgendermaßen:

$$N(x) = \begin{cases} 64,492 \text{ kN/m/mm}^{0,8329} |w(x)|^{0,8329} & \text{für } w(x) \geq 0 \\ -64,492 \text{ kN/m/mm}^{0,8329} |w(x)|^{0,8329} & \text{für } w(x) < 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

Die entsprechende Differentialgleichung der Biegelinie wird durch Einsetzen von Gl. (3.48) in Gl. (3.31) erhalten:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \text{sgn}(w(x)) 64,492 \text{ kN/m/mm}^{0,8329} |w(x)|^{0,8329} = 0 \quad (3.49)$$

Die für die numerische Berechnung adaptierten Übergangsbedingungen an der Kraftangriffsstelle ($x = 0$) wie auch die Randbedingungen am rechnerischen Balkenende ($x = L$) werden Abschnitt 3.1 entnommen:

$$\frac{dw(x=0)}{dx} = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{d^3w(x=0)}{dx^3} = \frac{P}{2EI} \quad (3.51)$$

$$\frac{d^2w(x=L)}{dx^2} = 0 \quad (3.52)$$

$$\frac{d^3w(x=L)}{dx^3} = 0 \quad (3.53)$$

3.3.1 Umsetzung in *MATLAB*

Für die numerische Berechnung mittels *bvp4c* sind die Substitutionen laut Abschnitt 3.1.2 sinngemäß anzuwenden:

$$\frac{dw(x)}{dx} = w_1(x) \quad (3.54)$$

$$\frac{dw_1(x)}{dx} = w_2(x) \quad (3.55)$$

$$\frac{dw_2(x)}{dx} = w_3(x) \quad (3.56)$$

$$\frac{dw_3(x)}{dx} = - \frac{\text{sgn}(w(x)) \cdot 64,492 \text{ kN/m/mm}^{0,8329} \cdot |w(x)|^{0,8329}}{EI} \quad (3.57)$$

Die Substitutionen laut Gl. (3.54)–(3.57) werden in die Rand- und Übergangsbedingungen entsprechend Gl. (3.50)–(3.53) eingesetzt:

$$w_1(x=0) = 0 \quad (3.58)$$

$$w_3(x=0) = \frac{P}{2EI} \quad (3.59)$$

$$w_2(x=L) = 0 \quad (3.60)$$

$$w_3(x=L) = 0 \quad (3.61)$$

Die erste Schätzung für den Verlauf der Funktionen $w(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ und $w_3(x)$ kann wie folgt vorgegeben werden (siehe Abschnitt 3.1.2):

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ w_1(x) \\ w_2(x) \\ w_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \text{ mm} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

3.3.2 Ergebnisse für die Bettung mit der Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion

Es werden die Setzungslinien $w(x)$, Untergrundreaktionslinien $N(x)$ und Lastverteilungslängen L_{LV} für die in Tabelle 3.11 angegebenen Systemkennwerte mithilfe des numerischen Lösungsprogramms *bvp4c* bestimmt.

Tabelle 3.11: Kennwerte für die Berechnung des Systems mit der Federkennlinie nach der degressiven Potenzfunktion

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises (zwei Schienen 60E1)
P	25 – 250	kN	Achslast
L	10	m	Balkenlänge für die numerische Berechnung

In Abbildung 3.26 und Abbildung 3.27 sind die Setzungslinien $w(x)$ sowie die Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für die schrittweise gestiegene Radsatzlast P dargestellt.

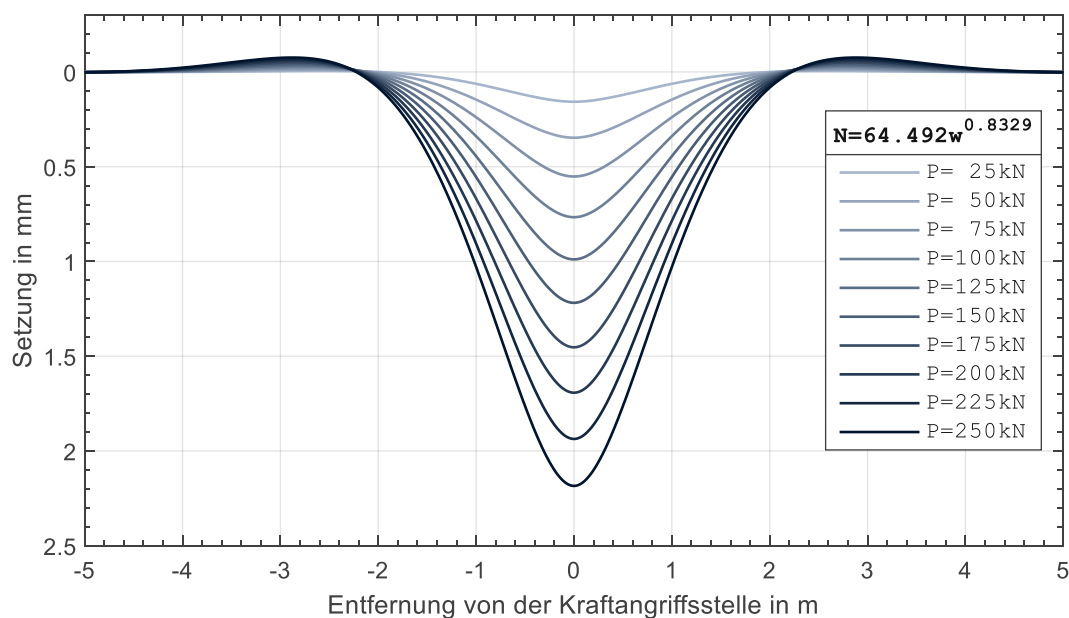


Abbildung 3.26: Setzungslinien $w(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion

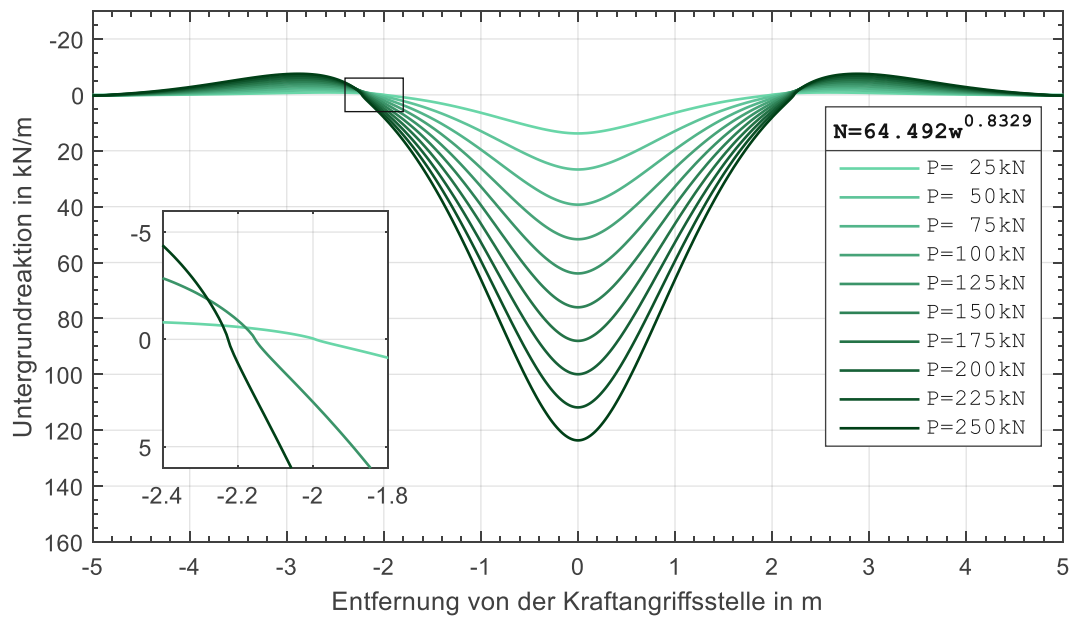


Abbildung 3.27: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion

Die Setzung an der Kraftangriffsstelle w_0 (nach Gl. (3.19)) hat eine annähernd lineare Abhängigkeit von der Radsatzlast, siehe Abbildung 3.28.

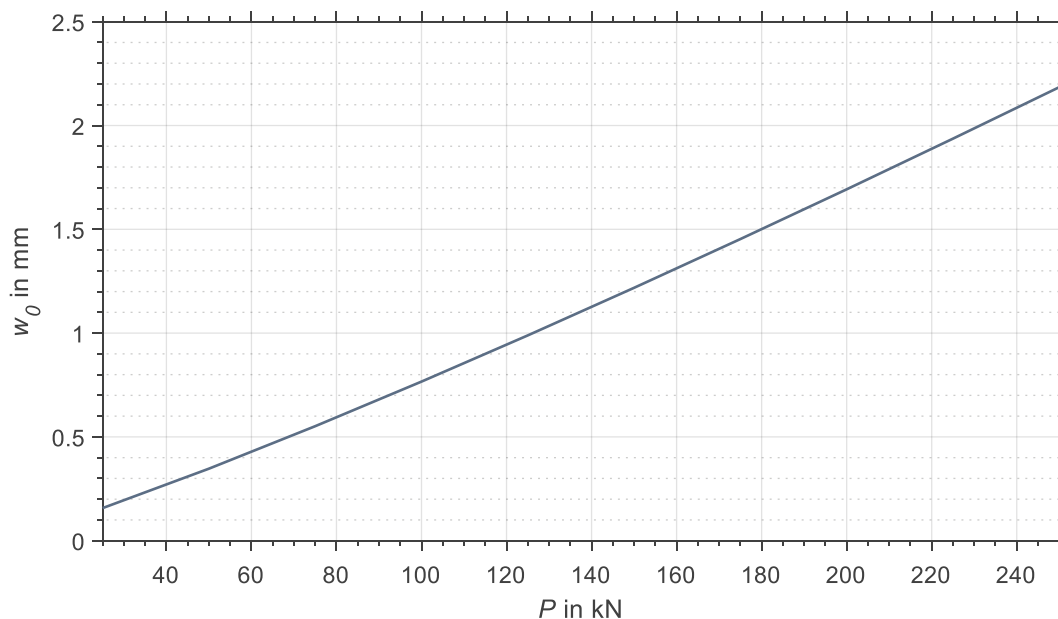


Abbildung 3.28: Gleissetzung an der Kraftangriffsstelle w_0 in Abhängigkeit der Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion

Ähnlich verhält sich die Untergrundreaktion an der Kraftangriffsstelle N_0 (siehe Gl. (3.20)), wie aus Abbildung 3.29 ersichtlich ist.

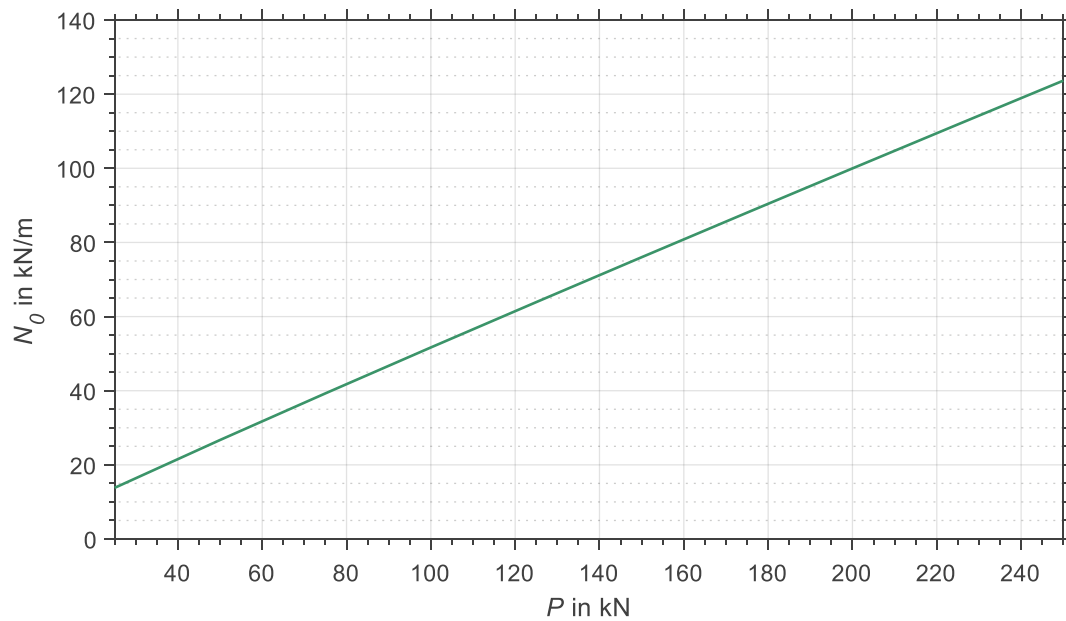


Abbildung 3.29: Untergrundreaktion an der Kraftangriffsstelle N_0 in Abhängigkeit der Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion

Die Lastverteilungslänge L_{LV} (der Abstand zwischen den Nullstellen der Untergrundreaktionslinie $N(x)$ um den mittigen gedrückten Bereich) nimmt bei der wachsenden Radsatzlast P stark unterproportional zu, siehe Abbildung 3.30.

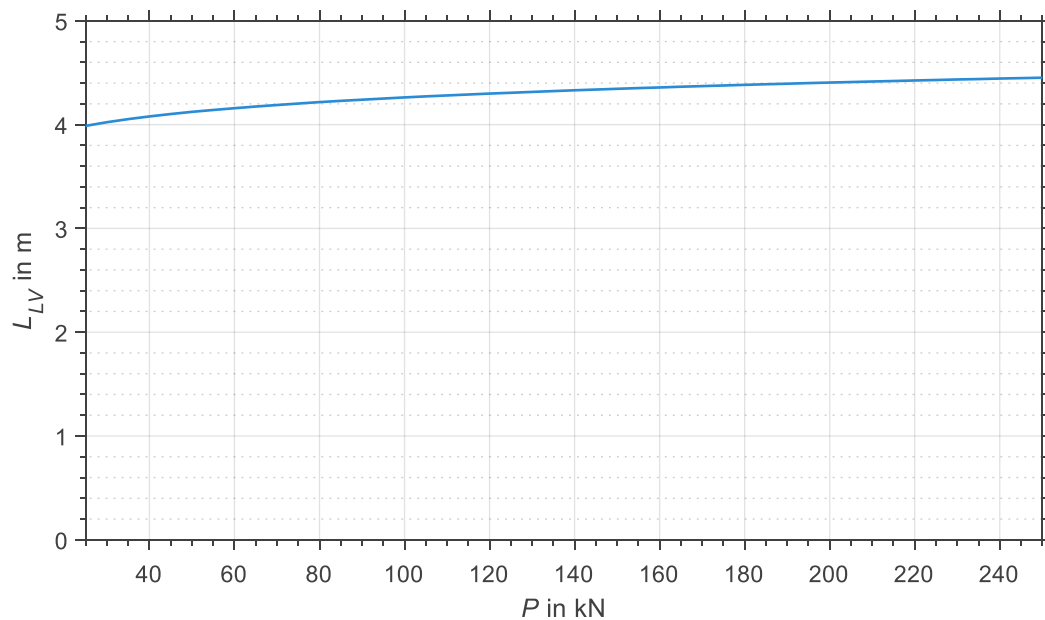


Abbildung 3.30: Lastverteilungslänge L_{LV} in Abhängigkeit der Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion

3.3.3 Lastverteilungsmodell auf Basis des statischen Systems mit der Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion

Das Lastverteilungsmodell gemäß Abbildung 2.12 wird für das vorliegende System anhand der Kennwerte laut Tabelle 3.12 nach der in Unterabschnitt 3.1.5.1 dargelegten Methode (siehe Gl. (3.25)–(3.29)) bestimmt.

Tabelle 3.12: Kennwerte zur Ermittlung des Lastmodells aus verteilten Einzelkräften für ein statisches System mit der Federkennlinie nach der degressiven Potenzfunktion

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises (zwei Schienen 60E1)
P	25 – 250	kN	Achslast
d	60	cm	Kraftabstand

Tabelle 3.13 gibt die Aufteilung der variierten Achslast P auf die Einzelkräfte F_j in Prozent an. Es zeigt sich eine nur sehr geringfügige bis vernachlässigbare Abhängigkeit der Lastverteilung vom Lastniveau.

Tabelle 3.13: Auf die einwirkende Achslast P bezogene verteilte Einzelkräfte F_j des Lastmodells für das statische System mit der Federkennlinie nach der degressiven Potenzfunktion

P in kN	$\frac{F_{-2}}{P}$ in %	$\frac{F_{-1}}{P}$ in %	$\frac{F_0}{P}$ in %	$\frac{F_1}{P}$ in %	$\frac{F_2}{P}$ in %	L_{LV} in m
25	10	24	32	24	10	3,99
50	10	24	31	24	10	4,12
75	11	24	31	24	11	4,20
100	11	24	30	24	11	4,26
125	12	23	30	23	12	4,31
150	12	23	30	23	12	4,35
175	12	23	29	23	12	4,38
200	12	23	29	23	12	4,41
225	12	23	29	23	12	4,43
250	12	23	29	23	12	4,45

Abbildung 3.31 stellt die Verläufe der bezogenen Einzelkräfte des Lastmodells in grafischer Form dar.

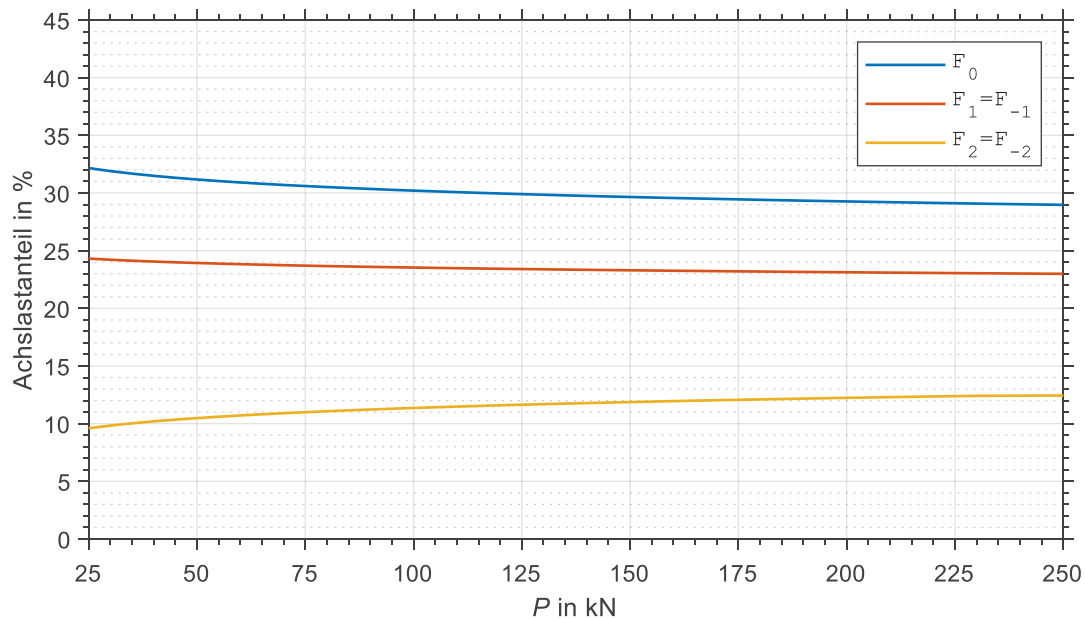


Abbildung 3.31: Aufteilung der einwirkenden Achslast P in die verteilten Einzelkräfte F_j gemäß dem Lastmodell für das statische System mit der Federkennlinie nach der degressiven Potenzfunktion

Aufgrund der sehr schwachen Abhängigkeit der Lastverteilung von der Radsatzlasthöhe kann als universelles Lastmodell für das System mit der degressiven Regressionsfederung annähernd die Einzelkraftaufteilung gemäß Abbildung 3.32 verwendet werden, die für die mittlere der ausgewerteten Achslasten $P = 125 \text{ kN}$ gilt.

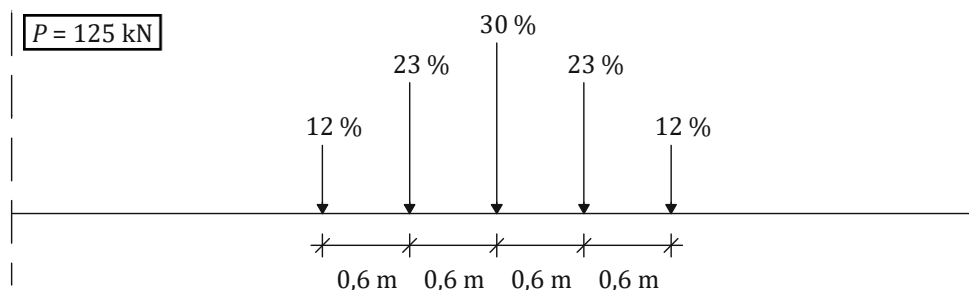


Abbildung 3.32: Lastmodell für das statische System mit der Federkennlinie nach der degressiven Potenzfunktion bei der Achslast $P = 125 \text{ kN}$ in % von der Achslast

Das Lastverteilungsmodell gemäß Abbildung 3.32, das auf experimentellen Daten aus den vertikalen Brückenschwingsversuchen von *Stollwitzer et al.* [15] basiert, ist jenem von *Spengler* [14] sehr ähnlich, siehe Abbildung 1.5. Beiden Modellen liegt jedoch statische Berechnung zugrunde. Das bevorstehende Kapitel widmet sich hingegen der Behandlung eines dynamischen Lastfalls, sodass die Einflüsse einer harmonischen Kraftanregung auf die bisher ermittelten Lastmodelle gleichermaßen erfasst werden können.

3.4 Fazit

Bei der Annahme eines nichtlinearen Schotterbettverhaltens können keine analytischen Formeln zur Bestimmung der Gleissetzung $w(x)$ und der Untergrundreaktion $N(x)$ infolge einer statischen Achslast P herangezogen werden. Stattdessen bieten sich zu diesem Zweck numerische Lösungsprogramme für Randwertprobleme an, wie etwa *bvp4c*, die eine näherungsweise Lösung für beliebige Definitionen des Kraft-Weg-Diagramms der Gleisbettung berechnen können.

So zeigen die Ergebnisse für eine quadratische Federungskraftfunktion bzw. Federkennlinie des Schotterbetts, dass die Lastverteilungslänge L_{LV} mit der steigenden Achslast P sich geringfügig verringert, und dass der zunehmende Federungskraftbeiwert k_q (steuert den Anstieg einer quadratischen Federkennlinie) im Vergleich dazu eine wesentlich stärkere entsprechende Reduktion bewirkt. Der Ansatz einer Wurzelfunktion für die Federkennlinie des Schotterbetts resultiert hingegen in einer mit der zunehmenden Achslast P leicht wachsenden Lastverteilungslänge L_{LV} , die in erster Linie dennoch wiederum vom Federungskraftbeiwert (k_w für die Wurzelfunktion) abhängt. Die größte praktische Relevanz hat allerdings das System mit der aus Versuchen von *Stollwitzer et al.* [15] ermittelten degressiven Potenzfunktion der Schotterbett-Federkennlinie, bei welcher die Lastverteilungslänge annähernd lastunabhängig ist.

Die abschnittsweise Integration der Untergrundreaktion $N(x)$ kann bei einer numerischen Berechnung mit dem Programm *bvp4c* mithilfe der Differenzen der mitberechneten dritten Ableitung der Setzungslinie $d^3w(x)/dx^3$ approximiert werden, um das Lastverteilungsmodell mit den Einzelkräften F_j im gewählten gegenseitigen Abstand d für nichtlineare Systeme zu erhalten. Die Lastverteilung ist beim Ansatz der versuchsbasierten Federkennlinie näherungsweise lastunabhängig und entspricht dem Lastverteilungsmodell aus fünf Einzelkräften nach *Spengler* [14].

4 Dynamischer Lastfall

Kapitel 2 und Kapitel 3 befassen sich mit der Bestimmung von Lastverteilungsmodellen für einen statischen Lastfall mit einer konstanten und einer wegabhängigen Schotterbettsteifigkeit. In diesem Kapitel wird hingegen die Lastverteilung im Schotteroberbau für einen dynamischen Lastfall sowohl bei linearen als auch bei nichtlinearen Schotterbett-Federkennlinien (wegabhängige Steifigkeit) ermittelt und daraus wiederum vereinfachte Lastverteilungsmodelle für als einzelne Euler-Bernoulli-Balken modellierte Eisenbahnbrücken aufgestellt.

In Abschnitt 4.1 erfolgt die Darlegung des untersuchten dynamischen Systems, die Aufstellung seiner Bewegungsgleichung und die Angabe der angesetzten Federkennlinien des Schotterbetts. Darauffolgend befasst sich Abschnitt 4.2 mit der Erarbeitung einer numerischen Berechnungsmethode, die für die betrachteten linearen und nichtlinearen Federkennlinien geeignet ist. Im anschließenden Abschnitt 4.3 wird die entwickelte numerische Berechnungsmethode angewandt, um die Zeitverläufe der Gleisverformung und der Untergrundreaktion für das System mit einer linearen Federkennlinie zu erhalten. Anhand dieser Ergebnisse werden Größen für weitere Auswertungen definiert (die Amplitude der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$, der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$, der Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ und der Reaktionskraft $R_{\text{dyn,max}}$ sowie die bezogenen Lastmodell-Einzelkräfte $\chi_{j,\text{dyn}}$), welche nachfolgend für ein breites Parameterfeld ermittelt und präsentiert werden. Die erhaltenen dynamischen Größen werden hierbei mit den entsprechenden statischen Größen verglichen, um den Einfluss einer dynamischen Belastung auf die Lastverteilung zu bestimmen. In den Abschnitten 4.4 bis 4.6 werden die besprochenen nichtlinearen Federkennlinienfunktionen näher spezifiziert und zur dynamischen Berechnung nach der erarbeiteten numerischen Methode angesetzt, so dass anschließend die Ergebnisse für die ausführlich in Abschnitt 4.3 definierten Größen bei der Verwendung der nichtlinearen Federkennlinienfunktionen für die entsprechenden Parameterfelder dargestellt werden können.

4.1 Mechanisches System

Das statische Schotteroberbaumodell gemäß Abbildung 2.1 wird zur dynamischen Untersuchung erstens um neue Eigenschaften des Gleiskörpers ergänzt, welche die Massenbelastung μ und die kontinuierliche Dämpfungskonstante c umfassen. Zweitens wird als Belastung nun eine harmonische Achslast $P(t)$ angesetzt:

$$P(t) = P_A \sin(2\pi f t) \quad (4.1)$$

$P(t)$... zeitveränderliche harmonische Achslast

P_A ... Achslast-Amplitude³

f ... Anregungsfrequenz

t ... Zeit

Das auf dieser Weise erhaltene dynamische System ist Abbildung 4.1 zu entnehmen.

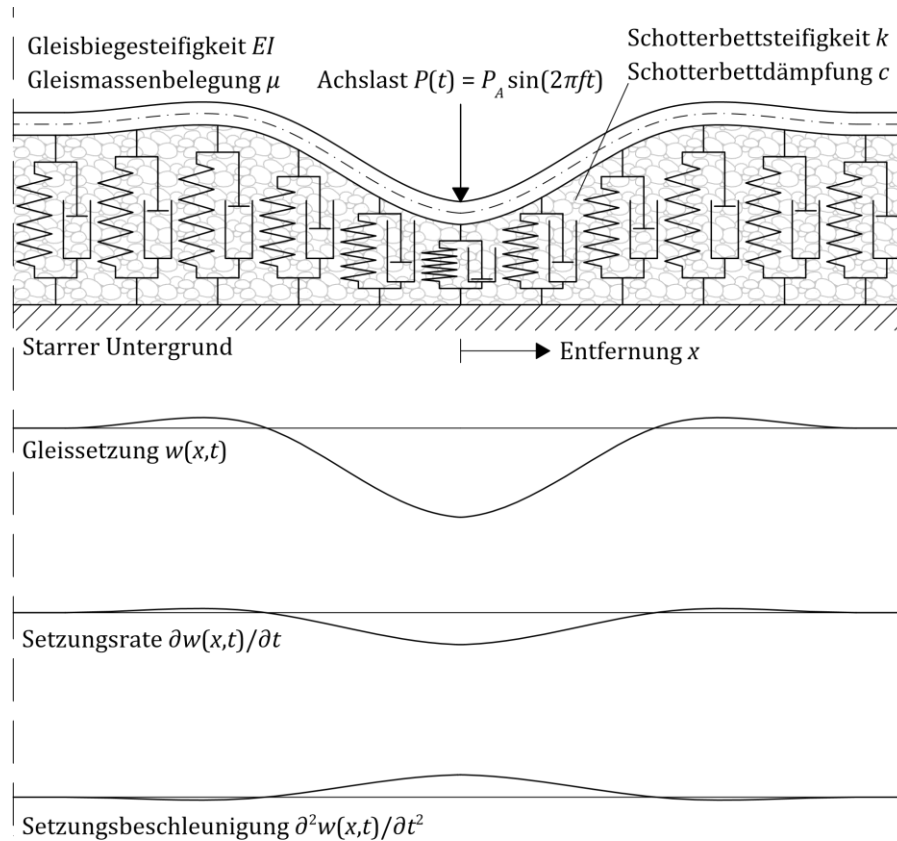


Abbildung 4.1: Dynamisches Modell des durch eine Achslast angeregten Schotteroberbaues

Da der Eisenbahnbetrieb ausschließlich bei kleinen Gleisverformungen möglich ist, wird für die nachfolgende Auseinandersetzung die Gültigkeit der Euler-Bernoulli-Balkentheorie I. Ordnung angenommen.

Von Interesse ist die zeitabhängige vertikale Untergrundreaktion $N(x,t)$, die beim dynamischen System außer der noch festzulegenden kontinuierlichen Federungskraft $N_F(x,t)$ nun auch die kontinuierliche viskose Dämpfungskraft $N_D(x,t)$ beinhaltet:

³ In der Fachliteratur wird die Amplitude einer Anregungskraft oft mit 0 indexiert (wie zum Beispiel P_0). In dieser Arbeit wird 0 dennoch zum Bezug auf die Lastangriffsstelle ($x = 0$) verwendet.

$$N(x, t) = N_F(x, t) + N_D(x, t) \quad (4.2)$$

$$N_D(x, t) = c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \quad (4.3)$$

$N(x, t)$	... Untergrundreaktion bzw. die von der Gleisverformung verursachte Streckenlast auf das darunterliegende Tragwerk oder den Untergrund
$N_F(x, t)$	... kontinuierliche Schotterbett-Federungskraft
$N_D(x, t)$	... kontinuierliche Schotterbett-Dämpfungskraft
$w(x, t)$	... elastische Gleissetzung
c	... Dämpfungskonstante
x	... Entfernung von der Lastangriffsstelle

Die Federungskraft $N_F(x, t)$ und die Dämpfungskraft $N_D(x, t)$ in Gl. (4.2) können sowohl Druckkräfte als auch Zugkräfte (mit einem negativen Vorzeichen) sein. Die Zulassung vertikaler Zugkräfte in Schotteroberbau ist insofern physikalisch sinnvoll, als dieser während einer Zugüberfahrt z.B. durch das Eigengewicht überdrückt bleibt.

Der zeitliche Verformungsverlauf $w(x, t)$ des dynamisch angeregten Gleises nach Abbildung 4.1 lässt sich anhand der Bewegungsgleichung bestimmen, welche das Gleichgewicht der auf das Gleis wirkenden vertikalen Kräfte beschreibt:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + N_F(x, t) + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (4.4)$$

EI	... Biegesteifigkeit des Gleises
μ	... Massenbelegung des Gleises
$p(x, t)$	... verteilte Anregungskraft

In Gl. (4.4) sind die im positiven Sinne nach oben gerichteten kontinuierlichen Widerstandskräfte infolge der Biegesteifigkeit $EI \partial^4 w(x, t) / \partial x^4$, der Schotterbettfederung $N_F(x, t)$, der Schotterbettdämpfung $c \partial w(x, t) / \partial t$ und der Gleisrosttragheit $\mu \partial^2 w(x, t) / \partial t^2$ der positiv nach unten gerichteten allgemeinen anregenden Belastung $p(x, t)$ gegenübergestellt.

Die auf den Gleiskörper nach Abbildung 4.1 wirkende Last $P(t)$ ist eine Einzelkraft. Diese analytische Vereinfachung der Kontaktfläche zwischen Radsatz und Schiene ist zur Systemberechnung nach Gl. (4.4) kontraproduktiv, da die einwirkende Einzelkraft so keine Berücksichtigung in den vorgestellten kontinuierlich verteilten Kräften finden kann. Die in Kapitel 2 und Kapitel 3 ausgenutzte Querkraftbedingung am Ursprung (siehe Gl. (2.5) und (2.42)) ist für das dynamische System nicht anwendbar, denn die Querkraft $Q(x, t)$ ist eine innere Kraft, die von der Gleisverformung hervorgerufen wird:

$$Q(x, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \quad (4.5)$$

Aufgrund der dem dynamischen System zugehörigen Trägheit (Masse) verformt sich das Gleis infolge der einwirkenden Last zeitverzögert, sodass nun – im Gegensatz zum statischen System – kein fixes Verhältnis zwischen der Achslast $P(t)$ und der Verformung am Ursprung $-EI \partial^3 w(x = 0, t) / \partial x^3$ existiert. Die Achslast kann also nicht in eine Verformungsbedingung zur Lösung der Bewegungsgleichung (4.4) einfließen. Stattdessen muss diese in der verteilten Anregungskraft $p(x, t)$ Berücksichtigung finden. In der Realität hätte die Kontaktfläche zwischen dem Gleis und dem Radsatz eine endliche Ausdehnung L_p , sodass die Achslast im Rahmen dieser Arbeit vereinfacht als eine konstante Streckenlast $P(t)/L_p$ anzusehen ist, die innerhalb dieser (nahezu punktuellen) Kontaktfläche wirkt:

$$p(x, t) = \begin{cases} \frac{P(t)}{L_p} & \text{für } -\frac{L_p}{2} \leq x \leq \frac{L_p}{2} \\ 0 & \text{für } x < -\frac{L_p}{2} \text{ und } x > \frac{L_p}{2} \end{cases} \quad (4.6)$$

L_p ... Kontaktlänge zwischen Radsatz und Gleis

Das angeregte System wird unter Annahme der schon in Kapitel 2 und Kapitel 3 betrachteten Federungskraft-Definitionen ausgewertet (vgl. Abbildung 3.1):

- $N_F(x, t) = k w(x, t)$ (lineare Federkennlinien, Abschnitt 4.3),
- $N_F(x, t) = 64,492 \text{ kN/m/mm}^{0,8329} w(x, t)^{0,8329}$ (eine degressive Federkennlinie nach der auf den Ergebnissen von *Stollwitzer et al.* [15] basierten Potenzfunktion, Abschnitt 4.4),
- $N_F(x, t) = k_q w(x, t)^2$ (progressive quadratische Federkennlinien, Abschnitt 4.5),
- $N_F(x, t) = k_w w(x, t)^{0,5}$ (degressive Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion, Abschnitt 4.6).

Im Gegensatz zur Federungskraft $N_F(x, t)$ verhält sich die angenommene viskose Dämpfungskraft $N_D(x, t)$ stets linear gemäß Gl. (4.3).

4.2 Berechnungsmethode

Die Bewegungsgleichung (4.4) ist eine partielle Differentialgleichung 4. Ordnung, die je nach eingesetzter Definition der Federungskraft $N_F(x, t)$ linear oder nichtlinear sein kann. Als eine allgemein anwendbare Lösungsstrategie bietet sich hierbei die numerische Zeitschrittintegration an, welche in dieser Arbeit zur Optimierung der Berechnungszeit mittels der in *MATLAB* enthaltenen Programme *ode23t* (überwiegend) sowie *ode23* (für die Federkennlinien nach der Wurzelfunktion) erfolgt.

ode23 [21] löst die von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen 1. Ordnung beschriebenen Anfangswertprobleme – Evolution eines Systems aus einer bekannten Ausgangslage heraus – mithilfe eines expliziten Runge-Kutta-Verfahrens (Formelpaar von *Bogacki* und *Shampine* [22]). Das Programm *ode23t* macht dabei hingegen von einer impliziten Runge-Kutta-Formel Gebrauch (Tapezregel gemäß Gl. (2.16) in [23]).

Die **partielle** Differentialgleichung (4.4) beinhaltet jedoch im Gegensatz zu den **gewöhnlichen** Differentialgleichungen, die *ode23* und *ode23t* lösen können, Ableitungen nach mehreren Variablen, nämlich nach der Ortsvariable x und nach der Zeitvariable t . Deswegen wird die Bewegungsgleichung zunächst für das gewählte numerische Verfahren unter Zuhilfenahme der vertikalen Linienmethode angepasst, indem Gl. (4.4) bezüglich der Ortsvariable diskretisiert und so in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit der alleinigen Zeitvariable übergeführt wird. Die örtliche Diskretisierung erfolgt mittels der Finite-Differenzen-Methode. Unter Ausnutzung der Systemsymmetrie wird in diesem Kapitel wieder lediglich die positive Gleishälfte ($x \geq 0$) berechnet und das erhaltene Resultat um die Achslast gespiegelt, sodass Daten für das vollständige Gleis entstehen.

4.2.1 Örtliche Diskretisierung

L sei die Länge des Gleises von der Achslast-Angriffsstelle ($x = 0$) bis zum angenommenen freien Ende ($x = L$). Dieser Gleisabschnitt sei in n gleiche Abschnitte der Länge h unterteilt, sodass $n+1$ Teilungspunkte (Knoten) $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ entstehen:

$$x_0 = 0 \quad (4.7)$$

$$x_n = L \quad (4.8)$$

$$x_j = hj \quad (4.9)$$

$$h = \frac{L}{n} = x_{j+1} - x_j \quad (4.10)$$

L ... Länge des numerisch zu berechnenden Gleisbalkens

n ... Anzahl der Gleisteilungen

x_j ... j -ter Teilungspunkt

h ... konstanter Diskretisierungspunkt-Abstand ⁴

⁴ Je kleiner der Punktabstand bzw. feiner die Diskretisierungsdichte, desto geringer wird der Berechnungsfehler auf Kosten der Rechenzeit. Idealerweise sollte der Abstand so fein gewählt werden, dass seine fortschreitende Verkleinerung keinen wesentlichen Einfluss mehr auf die Ergebnisse hat (die Ergebnisse konvergieren). Die Balkenlänge sollte hingegen ausreichend groß sein, um die Reflexion der

Die Gleissetzung am Punkt x_j sei $w_j(t)$ und die entsprechende Federkraft sei $N_{F,j}(t)$:

$$w_j(t) = w(x_j, t) \quad (4.11)$$

$$N_{F,j}(t) = N_F(x_j, t) \quad (4.12)$$

Die Diskretisierung der verteilten Anregungskraft $p(x, t)$ gemäß Gl. (4.6) wird durch die Gleichsetzung der Radsatz-Kontaktlänge L_p und des Punktabstands h erreicht, der als Einflusslänge des Knotens an der Kraftangriffsstelle x_0 anzusehen sei. Die verteilte Last $P(t)/h$ wirke am Knoten x_0 und verschwinde ansonsten (vgl. den untenstehenden Aufbau mit Gl. (4.6)):

$$p_j(t) = \begin{cases} \frac{P(t)}{h} & \text{für } j = 0 \\ 0 & \text{für } j \neq 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Die örtlichen Setzungsableitungen werden durch die zentralen Differenzenquotienten δ_x , δ_{xx} , δ_{xxx} und δ_{xxxx} angenähert (verkürzend ist in den untenstehenden Formeln die Zeitvariable t weggelassen):

$$\delta_x w_{j+\frac{1}{2}} = \frac{w_{j+1} - w_j}{h} \quad (4.14)$$

$$\delta_x w_j = \frac{1}{2} \left(\delta_x w_{j+\frac{1}{2}} + \delta_x w_{j-\frac{1}{2}} \right) = \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2h} \approx \frac{\partial w(x_j)}{\partial x} \quad (4.15)$$

$$\delta_{xx} w_j = \frac{\delta_x w_{j+\frac{1}{2}} - \delta_x w_{j-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{h^2} \approx \frac{\partial^2 w(x_j)}{\partial x^2} \quad (4.16)$$

$$\delta_{xxx} w_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\delta_{xx} w_{j+1} - \delta_{xx} w_j}{h} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \delta_{xxx} w_j &= \frac{1}{2} \left(\delta_{xxx} w_{j+\frac{1}{2}} + \delta_{xxx} w_{j-\frac{1}{2}} \right) = \frac{w_{j+2} - 2w_{j+1} + 2w_{j-1} - w_{j-2}}{2h^3} \\ &\approx \frac{\partial^3 w(x_j)}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (4.18)$$

von der Achslast ausgehenden Schwingungswellen vom Gleisende zurück in Richtung Achslast zu vermeiden.

$$\delta_{xxxx}w_j = \frac{\delta_{xxx}w_{j+\frac{1}{2}} - \delta_{xxx}w_{j-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{w_{j+2} - 4w_{j+1} + 6w_j - 4w_{j-1} + w_{j-2}}{h^4} \quad (4.19)$$

$$\approx \frac{\partial^4 w(x_j)}{\partial x^4}$$

Die partielle Differentialgleichung (4.4) kann nun mithilfe der Notationen laut Gl. (4.11) und (4.12), der Belastungsdefinition laut Gl. (4.13) sowie der Approximation gemäß Gl. (4.19) in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem der folgenden Gestalt übergeführt werden:

$$\begin{aligned} EI \delta_{xxxx}w_0(t) + N_{F,0}(t) + c \frac{dw_0(t)}{dt} + \mu \frac{d^2w_0(t)}{dt^2} &= \frac{P_A \sin(2\pi ft)}{h} \\ EI \delta_{xxxx}w_1(t) + N_{F,1}(t) + c \frac{dw_1(t)}{dt} + \mu \frac{d^2w_1(t)}{dt^2} &= 0 \\ EI \delta_{xxxx}w_2(t) + N_{F,2}(t) + c \frac{dw_2(t)}{dt} + \mu \frac{d^2w_2(t)}{dt^2} &= 0 \\ \dots & \\ EI \delta_{xxxx}w_{n-1}(t) + N_{F,n-1}(t) + c \frac{dw_{n-1}(t)}{dt} + \mu \frac{d^2w_{n-1}(t)}{dt^2} &= 0 \\ EI \delta_{xxxx}w_n(t) + N_{F,n}(t) + c \frac{dw_n(t)}{dt} + \mu \frac{d^2w_n(t)}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Wenn man allerdings den Differenzenquotienten δ_{xxxx} nach Gl. (4.19) für die Randsetzungen w_0 , w_1 , w_{n-1} und w_n formuliert, entstehen Ausdrücke mit den Setzungen w_{-2} , w_{-1} , w_{n+1} und w_{n+2} außerhalb des betrachteten Gleisabschnitts (die Zeitvariable wird verkürzend weggelassen):

$$\delta_{xxxx}w_0 = \frac{w_2 - 4w_1 + 6w_0 - 4w_{-1} + w_{-2}}{h^4} \quad (4.21)$$

$$\delta_{xxxx}w_1 = \frac{w_3 - 4w_2 + 6w_1 - 4w_0 + w_{-1}}{h^4} \quad (4.22)$$

$$\delta_{xxxx}w_{n-1} = \frac{w_{n+1} - 4w_n + 6w_{n-1} - 4w_{n-2} + w_{n-3}}{h^4} \quad (4.23)$$

$$\delta_{xxxx}w_n = \frac{w_{n+2} - 4w_{n+1} + 6w_n - 4w_{n-1} + w_{n-2}}{h^4} \quad (4.24)$$

Die Setzungen an den äußeren „virtuellen“ Diskretisierungspunkten w_{-2} , w_{-1} , w_{n+1} und w_{n+2} können mittels der Ausnutzung der Systemsymmetrie und des Heranziehens der Randbedingungen am freien Ende bestimmt werden. Aus der symmetrischen Verformung des physikalischen Gleises um die Achslast (vgl. Abbildung 4.1) können direkt die Setzungen vor dem rechnerischen Balkenanfang ermittelt werden:

$$w_{-1} = w_1 \quad (4.25)$$

$$w_{-2} = w_2 \quad (4.26)$$

Am freien Ende des Gleisbalkens der Länge L umfassen die zugehörigen Randbedingungen das Biegemoment $M(x,t)$ und die Querkraft $Q(x,t)$:

$$M(x = L, t) = 0 \quad (4.27)$$

$$Q(x = L, t) = 0 \quad (4.28)$$

Die Anwendung der Schnittgrößen-Verformung-Beziehungen nach Gl. (2.40) und (2.41) unter der Beachtung der Definition in Gl. (4.8) resultiert in der Vorgabe der örtlichen Ableitungen am Punkt x_n :

$$M(x = L, t) = -EI \frac{\partial^2 w(x = L, t)}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w(x_n, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.29)$$

$$Q(x = L, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x = L, t)}{\partial x^3} = -EI \frac{\partial^3 w(x_n, t)}{\partial x^3} = 0 \quad (4.30)$$

Aus der Approximation der Verformungsbedingungen in Gl. (4.29) und (4.30) mit den Differenzenquotienten nach Gl. (4.16) sowie (4.18) ergeben sich die folgenden Bestimmungsgleichungen für die „virtuellen“ Setzungen hinter dem Gleisbalkenende w_{n+1} und w_{n+2} :

$$\delta_{xx} w_n = \frac{w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}}{h^2} = 0 \quad (4.31)$$

$$\delta_{xxx} w_n = \frac{w_{n+2} - 2w_{n+1} + 2w_{n-1} - w_{n-2}}{2h^3} = 0 \quad (4.32)$$

Aus Gl. (4.31) und (4.32) folgt:

$$w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} \quad (4.33)$$

$$w_{n+2} = 2w_{n+1} - 2w_{n-1} + w_{n-2} = 4w_n - 4w_{n-1} + w_{n-2} \quad (4.34)$$

Die virtuellen Verschiebungen gemäß Gl. (4.25), (4.26), (4.33) und (4.34) können nun in die Differenzenquotienten an den Balkenenden nach Gl. (4.21)–(4.24) eingesetzt werden:

$$\delta_{xxxx}w_0 = \frac{2w_2 - 8w_1 + 6w_0}{h^4} \quad (4.35)$$

$$\delta_{xxxx}w_1 = \frac{w_3 - 4w_2 + 7w_1 - 4w_0}{h^4} \quad (4.36)$$

$$\delta_{xxxx}w_{n-1} = \frac{-2w_n + 5w_{n-1} - 4w_{n-2} + w_{n-3}}{h^4} \quad (4.37)$$

$$\delta_{xxxx}w_n = \frac{2w_n - 4w_{n-1} + 2w_{n-2}}{h^4} \quad (4.38)$$

Das Gleichungssystem (4.20) mit den ausführlich angeschriebenen Differenzenquotienten lautet somit wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{EI}{h^4}(6w_0 - 8w_1 + 2w_2) + N_{F,0} + c \frac{dw_0}{dt} + \mu \frac{d^2w_0}{dt^2} &= \frac{P_A}{h} \sin(2\pi ft) \\ \frac{EI}{h^4}(-4w_0 + 7w_1 - 4w_2 + w_3) + N_{F,1} + c \frac{dw_1}{dt} + \mu \frac{d^2w_1}{dt^2} &= 0 \\ \frac{EI}{h^4}(w_0 - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4) + N_{F,2} + c \frac{dw_2}{dt} + \mu \frac{d^2w_2}{dt^2} &= 0 \\ \dots & \\ \frac{EI}{h^4}(w_{n-4} - 4w_{n-3} + 6w_{n-2} - 4w_{n-1} + w_n) + N_{F,n-2} + c \frac{dw_{n-2}}{dt} & \\ + \mu \frac{d^2w_{n-2}}{dt^2} &= 0 \\ \frac{EI}{h^4}(w_{n-3} - 4w_{n-2} + 5w_{n-1} - 2w_n) + N_{F,n-1} + c \frac{dw_{n-1}}{dt} + \mu \frac{d^2w_{n-1}}{dt^2} &= 0 \\ \frac{EI}{h^4}(2w_{n-2} - 4w_{n-1} + 2w_n) + N_{F,n} + c \frac{dw_n}{dt} + \mu \frac{d^2w_n}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Zur Lösung des erhaltenen Gleichungssystems mit den gewählten *MATLAB*-Programmen sind noch gewisse formale Anpassungen notwendig, auf welche anschließend eingegangen wird.

4.2.2 Ordnungsreduktion, Umformung und Anfangswert

Das Gleichungssystem (4.39) setzt sich aus gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung zusammen (denn die Massenträgheitskräfte $\mu \, d^2 w_j / dt^2$ enthalten die zweifache Zeitableitung). Angesichts der Beschränkungen für die Verwendung der Lösungsprogramme *ode23* und *ode23t*, die formal nur Gleichungssysteme 1. Ordnung akzeptieren, muss die Ordnung der Differentialgleichungen mittels eines Substitution-Gleichungssystems herabgesetzt werden:

$$v_j = \frac{dw_j}{dt} \tag{4.40}$$

$$EI \delta_{xxxx} w_j + N_{F,j} + c v_j + \mu \frac{dv_j}{dt} = p_j$$

Die Verwendung des Gleichungssystems (4.40) anstelle der einzelnen Gleichungen im Gleichungssystem (4.39) sowie die Sammlung der Zeitableitungen auf der linken Seite erzeugt ein mit den Programmen *ode23* und *ode23t* kompatibles gewöhnliches Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\frac{dw_0}{dt} = v_0$$

$$\frac{dw_1}{dt} = v_1$$

...

$$\frac{dw_n}{dt} = v_n$$

$$\mu \frac{dv_0}{dt} = -cv_0 - N_{F,0} - \frac{EI}{h^4}(6w_0 - 8w_1 + 2w_2) + \frac{P_A}{h} \sin(2\pi ft)$$

$$\mu \frac{dv_1}{dt} = -cv_1 - N_{F,1} - \frac{EI}{h^4}(-4w_0 + 7w_1 - 4w_2 + w_3) \quad (4.41)$$

$$\mu \frac{dv_2}{dt} = -cv_2 - N_{F,2} - \frac{EI}{h^4}(w_0 - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4)$$

...

$$\mu \frac{dv_{n-2}}{dt} = -cv_{n-2} - N_{F,n-2} - \frac{EI}{h^4}(w_{n-4} - 4w_{n-3} + 6w_{n-2} - 4w_{n-1} + w_n)$$

$$\mu \frac{dv_{n-1}}{dt} = -cv_{n-1} - N_{F,n-1} - \frac{EI}{h^4}(w_{n-3} - 4w_{n-2} + 5w_{n-1} - 2w_n)$$

$$\mu \frac{dv_n}{dt} = -cv_n - N_{F,n} - \frac{EI}{h^4}(2w_{n-2} - 4w_{n-1} + 2w_n)$$

Das Gleichungssystem (4.41) kann zusätzlich in eine Matrixform übergeführt werden. Um den resultierenden Ausdruck kompakt zu halten, werden folgende Vektoren und Untermatrizen definiert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dw_0/dt \\ dw_1/dt \\ \vdots \\ dw_n/dt \end{pmatrix}, \\
\mathbf{N}_F &= \begin{pmatrix} N_{F,0} \\ N_{F,1} \\ \vdots \\ N_{F,n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_D = c\mathbf{v} = c \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \frac{P_A}{h} \begin{pmatrix} \sin(2\pi f t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & & \dots & 0 \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & \dots & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.42) \\
\mathbf{Q} &= \frac{EI}{h^4} \begin{pmatrix} 6 & -8 & 2 & & \dots & 0 \\ -4 & 7 & -4 & 1 & & \vdots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \vdots & & & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & \dots & & & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

In Gl. (4.42) besitzen die Vektoren jeweils $n+1$ Elemente und alle Matrizen sind quadratische $(n+1) \times (n+1)$ -Matrizen. $\mathbf{N}_D$ ist die Dämpfungskraft gemäß Gl. (4.3). Die Blockmatrixform des Gleichungssystems (4.41) lautet bei der Verwendung der Definitionen laut Gl. (4.42) wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mu \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{Q} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Das Gleichungssystem (4.43) erfüllt die Voraussetzungen des Lösungsprogramms *ode23* wie auch *ode23t* und kann darüber hinaus in *MATLAB* mit Einsatz dünnbesetzter Matrizen gebildet werden, um die damit einhergehende Reduktion der Arbeitsspeicherausnutzung und der Rechenzeit zu erzielen.

Zur Berechnung der Gleisschwingungen wird außerdem die Vorgabe einer Ausgangslage benötigt. Für den ersten Berechnungsschritt zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die unverformte Ruhelage angenommen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}(t=0) \\ \mathbf{v}(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Die Gleichungssysteme (4.43) und (4.44) werden in den anschließenden Abschnitten zur Bestimmung von Gleisverformungen herangezogen, wobei der allgemeine Federungskraftvektor $\mathbf{N}_F$ im Gleichungssystem (4.43) für die angesetzten Federkennlinien des Schotterbetts näher spezifiziert wird.

4.3 Dynamische Berechnung des Systems mit einer linearen Federkennlinie

In diesem Abschnitt erfolgt die Definition der Federungskraft für lineare Federkennlinien, die Verifizierung der verwendeten numerischen Berechnungsmethode anhand einer *RFEM*-Berechnung, die Festlegung der auszuwertenden Größen und die Präsentation der Berechnungsergebnisse für ein breites Parameterfeld, wobei ein Vergleich zwischen den Ergebnissen für dynamische und statische Systeme vorgenommen wird, um den Einfluss einer dynamischen Belastung auf die Lastverteilung zu ermitteln.

4.3.1 Definition der Federungskraft und Anpassung der Bewegungsgleichung

Entsprechend den linearen Federkennlinien ist die Schotteroberbau-Federungskraft $N_F(x, t)$ proportional zur Gleissetzung $w(x, t)$, wobei, wie in Abschnitt 4.1 besprochen, die Federungskraft in Abhängigkeit der Gleissetzung sowohl eine Druckkraft (positiv) als auch eine Zugkraft (negativ) sein kann:

$$N_F(x, t) = kw(x, t) \quad (4.45)$$

k ... wegunabhängige Bettungssteifigkeit (bzw. Bettungszahl oder Bettungsmodul)

Im Kontext des diskretisierten Gleisbalkens und des Gleichungssystems (4.43) gilt die Beziehung in Gl. (4.45) auch für diskrete Knoten, und zwar wie folgt:

$$\mathbf{N}_F = \begin{pmatrix} N_{F,0} \\ \vdots \\ N_{F,n} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = k\mathbf{w} \quad (4.46)$$

Die Untergrundreaktion an einem diskreten Punkt $N_j(t)$ setzt sich aus der Federungskraft $N_{F,j}(t)$ und der Dämpfungskraft $N_{D,j}(t)$ zusammen (vgl. Gl. (4.2), (4.42) und (4.46)):

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_0 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix} = \mathbf{N}_F + \mathbf{N}_D = k\mathbf{w} + c\mathbf{v} = \begin{pmatrix} kw_0 + cv_0 \\ \vdots \\ kw_n + cv_n \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Die Summe der linearen Federungskraft $\mathbf{N}_F$ und der viskosen Dämpfungskraft $\mathbf{N}_D$ gemäß Gl. (4.47) kann im Hinblick auf das Format von Gl. (4.43) in der folgenden Blockmatrixform formuliert werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ k\mathbf{1} & c\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

So kann Gl. (4.48) in das Gleichungssystem (4.43) eingesetzt werden, um einen kompakten Ausdruck für das Gleichungssystem des linear gefederten und viskos gedämpften Gleisbal-kens zu erhalten:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ (-Q - k\mathbf{1}) & -c\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Das hergeleitete Blockmatrix-Gleichungssystem (4.49) ist besonders gut zur Verwendung dünnbelegter Matrizen geeignet, was in Anbetracht der in Unterabschnitt 4.2.2 erwähnten Vorteile in dieser Arbeit entsprechend ausgenutzt wird. Vor der anvisierten Auswertung eines breiten Parameterfeldes wird jedoch das Ergebnis einer numerischen Berechnung mit Gl. (4.49) in *MATLAB* anhand einer *RFEM*-Berechnung verifiziert.

4.3.2 Verifizierung dynamischer Berechnung

RFEM 6.09 unterstützt die Berechnung dynamisch belasteter linearer Systeme mithilfe der modalen Analyse oder eines impliziten Newmark-Verfahrens (nachfolgend als *RFEM-Newmark* bezeichnet). Als Kontrolle der vorgeschlagenen Berechnungsmethode werden Ergebnisse für die Setzung unter Verwendung der in Tabelle 4.1 angegebenen Kennwerte zwischen *MATLAB-ode23t* und *RFEM-Newmark* verglichen, wobei die für dynamische Berechnungen in dieser Arbeit einheitlich angesetzte Gleisbalkenlänge L von 40 m den Schwingungswellen-Reflexionen bei hohen Anregungsfrequenzen f entgegenwirken soll (siehe Fußnote 4 in Unterabschnitt 4.2.1). Das *RFEM*-Kontrollmodell gemäß Unterabschnitt 2.3.2 wird zur dynamischen Berechnung um die Massenbelegung μ , um die Rayleigh-Dämpfung mit den Dämpfungsparametern α und β sowie um die harmonische Belastung $P(t)$ ergänzt. Die Rayleigh-Parameter α und β stellen eine proportionale Verknüpfung zwischen der viskosen Systemdämpfung und der Massenbelegung bzw. der Systemsteifigkeit her. Die in der *MATLAB*-Berechnung verwendete Dämpfungskonstante c kann in *RFEM* nicht direkt eingegeben werden, sie lässt sich dennoch durch die folgende Wahl der Rayleigh-Parameter umsetzen:

$$\alpha = \frac{c \text{ in kNs/m}^2}{\mu \text{ in t/m}}, \quad \beta = 0. \quad (4.50)$$

In dieser und in weiteren exemplarischen Einzelberechnungen wird eine schwache Dämpfung mit der Dämpfungskonstanten c von 50 kNs/m² betrachtet, um anschauliche Darstellungen für gewisse dynamische Effekte zu erzielen, auf die im anschließenden Unterabschnitt eingegangen wird.

Tabelle 4.1: Kennwerte für die Kontrollberechnung des dynamischen Systems mit einer linearen Federkennlinie

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises aus zwei Schienen 60E1
μ	0,6667	t/m	Massenbelegung des Gleises (60 kg/m pro Schiene und 328 kg pro Betonschwelle im 60 cm-Abstand)
k	80	kN/mm/m	kontinuierliche Schotterbettsteifigkeit
c	50	kNs/m ²	kontinuierliche Schotterbettdämpfung
α	75	-	Rayleigh-Dämpfungsparameter für die Massenproportionalität (<i>RFEM</i>)
β	0	-	Rayleigh-Dämpfungsparameter für die Steifigkeitsproportionalität (<i>RFEM</i>)
P_A	125	kN	Achslast-Amplitude
f	40	Hz	Anregungsfrequenz
h	5	cm	Diskretisierungspunkt-Abstand
L	40	m	Gleisbalkenlänge

Abbildung 4.2 zeigt den errechneten Setzungsverlauf am Gleisbalkenanfang $w_0(t)$ zufolge der beiden Berechnungsmethoden. Darin ist ersichtlich, dass die Berechnung in *MATLAB* und in *RFEM* miteinander übereinstimmende Ergebnisse liefert.

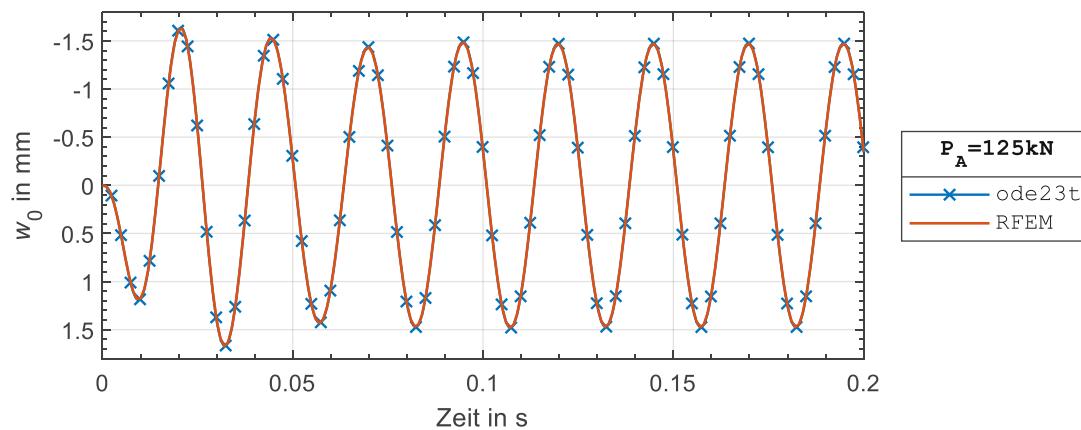


Abbildung 4.2: Zeitverlauf der Setzung an der Kraftangriffsstelle w_0 für das linear gefederte dynamische System mit den Kennwerten nach Tabelle 4.1 zufolge einer *ode23t*-Berechnung wie auch zufolge einer *RFEM-Newmark*-Kontrollberechnung

4.3.3 Vergleich zwischen den Ergebnissen einer statischen und einer dynamischen Berechnung für ein lineares Beispielsystem

Es werden exemplarisch die Setzung und die Untergrundreaktion zwischen dem statischen System nach Abbildung 2.1 und dem dynamischen System nach Abbildung 4.1 bei der Annahme derselben Größe für die statische Achslast P_{stat} und die Achslastamplitude P_A und einer linearen Federkennlinie mit der Steifigkeit k verglichen. Das statische System wird analytisch nach Gl. (2.46) und (2.47) (siehe Kapitel 2) berechnet. Für das dynamische System wird zunächst eine **dynamische Simulation** mit einer **statischen Belastung** durchgeführt, indem die Achslast $P(t)$ allmählich bis zur vorgegebenen Größe gesteigert und darauffolgend konstant gehalten wird (Anregungsfrequenz f von 0 Hz). So wird der gewählte dynamische Lösungsalgorithmus bei der Anwendung auf ein statisch belastetes System zusätzlich anhand analytischer statischer Ergebnisse verifiziert. Anschließend wird eine Anregung mit der Frequenz f von 40 und 90 Hz angesetzt. Die erhaltenen Ergebnisse werden zur Veranschaulichung des dynamischen Systemverhaltens und zur Bestimmung der Vorgehensweise für die fernere Auswertung verwendet. Den vorgenommenen Berechnungen liegen die Kennwerte nach Tabelle 4.2 mit der einheitlich festgelegten Gleisbalkenlänge L von 40 m (vgl. Unterabschnitt 4.3.2) zugrunde. Die erhaltenen Ergebnisse sind in Abbildung 4.3 dargestellt.

Tabelle 4.2: Kennwerte für die Vergleichsberechnung der betrachteten statischen und dynamischen Lastfälle mit einer linearen Federkennlinie

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises aus zwei Schienen 60E1
μ	0,6667	t/m	Massenbelegung des Gleises (60 kg/m pro Schiene und 328 kg pro Betonschwelle im 60 cm-Abstand)
k	80	kN/mm/m	kontinuierliche Schotterbettsteifigkeit
c	50	kNs/m ²	kontinuierliche Schotterbettdämpfung

P_A	125	kN	Achslast-Amplitude
P_{stat}	125	kN	statische Achslast
f	0, 40, 90	Hz	Anregungsfrequenz
h	5	cm	Diskretisierungspunkt-Abstand
L	40	m	Gleisbalkenlänge

Gemäß den Darstellungen in Abbildung 4.3 stimmen die analytischen statischen Ergebnisse („statisch“) mit jenen zufolge der dynamischen Simulation mit der konstant gehaltenen Achslast („ $f = 0$ Hz“) nach der anfänglichen Belastungsphase von 0,05 Sekunden überein. Somit ist die Anwendbarkeit der gewählten dynamischen Berechnungsmethode zusätzlich bestätigt.

Wie aus dem Graph der Setzung w_0 in Abbildung 4.3 ersichtlich, findet am Anfang einer periodischen dynamischen Belastung im angeregten System der von deutlich erkennbaren Fluktuationen der Verformungsamplitude gekennzeichnete Einschwingvorgang statt, bevor sich allmählich eine stationäre Schwingung mit einer näherungsweise konstanten Amplitude einstellt. Die Verläufe der Durchbiegung $w_0(t)$ wie auch des Bodendrucks $N_0(t)$ an der Kraftangriffsstelle ($x = 0$) zeigen, dass der Einschwingvorgang für das vorliegende System bei der Anregungsfrequenz f von 40 und 90 Hz nach 0,05 s größtenteils abgeschlossen ist, und dass sich danach die entsprechenden konstanten Endamplituden $w_{0,\text{dyn,max}}$ und $N_{0,\text{dyn,max}}$ einstellen. In dieser Arbeit werden bei dynamischen Analysen stets eingeschwungene Amplituden betrachtet (wie z.B. $w_{0,\text{dyn,max}}$ und $N_{0,\text{dyn,max}}$).

Sowohl die Durchbiegung $w_0(t)$ als auch der Bodendruck $N_0(t)$ an der Laststelle ($x = 0$) in Abbildung 4.3 weisen unterschiedliche eingeschwungene Amplituden $w_{0,\text{dyn,max}}$ und $N_{0,\text{dyn,max}}$ in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz f auf: Bei der Anregung mit 40 Hz beträgt die Setzungsamplitude $w_{0,\text{dyn,max}}$ 1,47 mm und die Amplitude der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ 119 kN/m, sodass sie die statische Setzung von 0,87 mm und die statische Untergrundreaktion von 70 kN/m übersteigen, während sie bei der Anregung mit 90 Hz hingegen auf 0,59 mm und 50 kN/m sinken und so unterhalb der statischen Werte liegen.

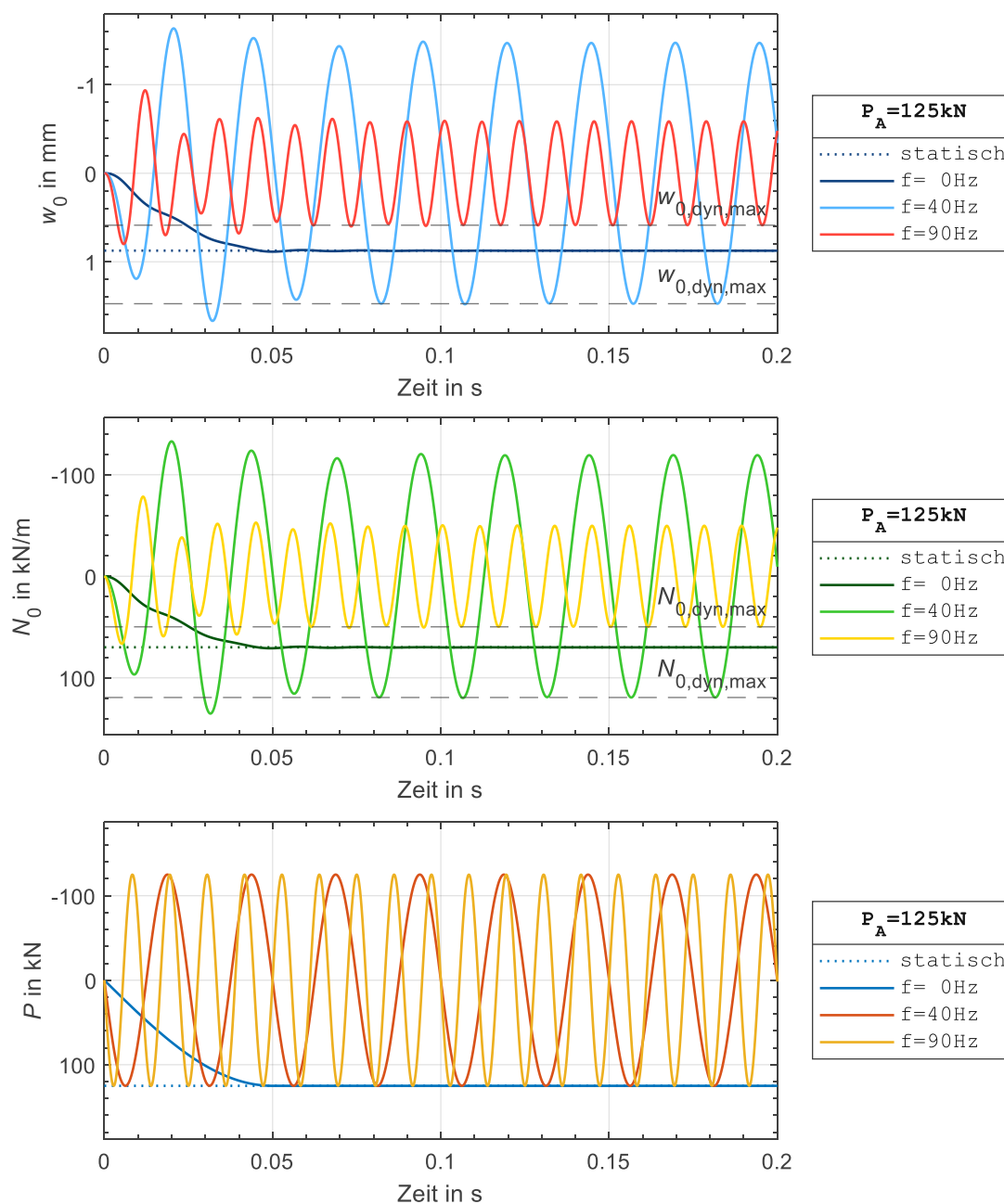


Abbildung 4.3: Vergleich der Setzung $w_0(t)$ und des Bodendrucks $N_0(t)$ an der Angriffsstelle der Anregungskraft $P(t)$ zufolge einer analytischen statischen Berechnung sowie zufolge einer dynamischen Simulation mit der Anregungsfrequenz f von 0, 40 und 90 Hz für eine lineare Federkennlinie und die Systemkennwerte nach Tabelle 4.2

Die Abhängigkeit der jeweiligen Verformungs- oder Reaktionskraftamplitude von der Anregungsfrequenz wird mit der (auch als Amplituden-Frequenzgang oder Resonanzkurve genannten) Vergrößerungsfunktion des betroffenen Systems beschrieben. Die Vergrößerungsfunktion für die Setzung $w_{0,dyn,max}$, die Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ und die nachfolgend definierte Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ des vorliegenden Systems ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

Darin werden sie ins Verhältnis zur zugehörigen statischen Setzung $w_{0,\text{stat}}$ (0,87 mm), Untergrundreaktion $N_{0,\text{stat}}$ (70 kN/m) und Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{stat}}$ (4,21 m) gesetzt.

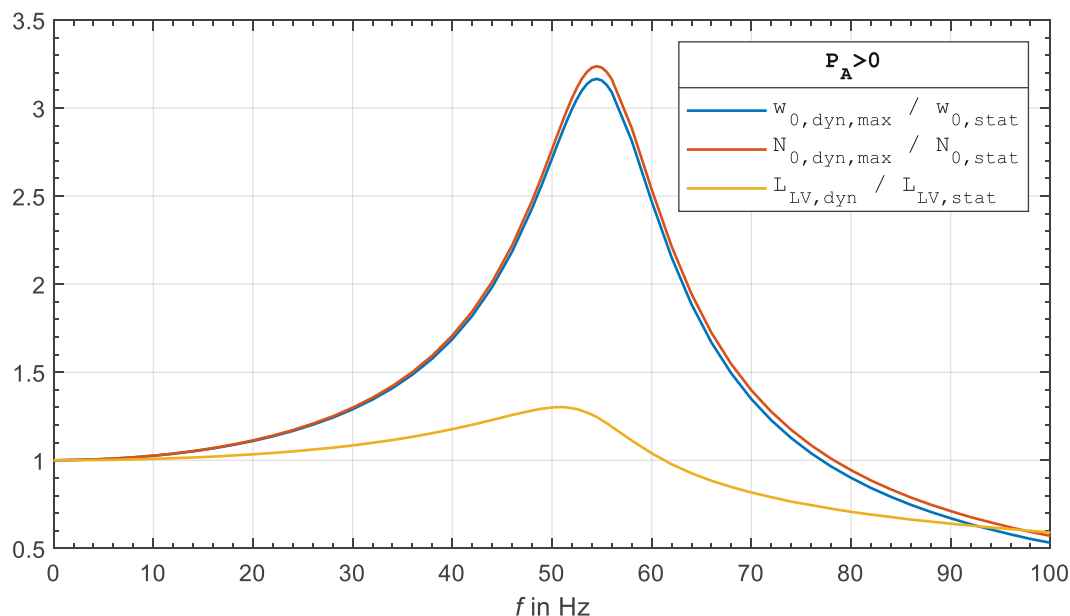


Abbildung 4.4: Vergrößerungsfunktion für die Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ an der Laststelle sowie der Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ als ihr Verhältnis zur statischen Setzung $w_{0,\text{stat}}$, Untergrundreaktion $N_{0,\text{stat}}$ und Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{stat}}$ des Systems mit einer linearen Federkennlinie und den Kennwerten gemäß Tabelle 4.2

Die dynamischen Vergrößerungsfunktionen in Abbildung 4.4 nehmen bei der Anregungsfrequenz f von 0 Hz den Wert 1 an, denn diese Frequenz entspricht einer statischen Belastung, welche die statischen Verformungen und Reaktionen hervorruft. Bei der Steigerung der Anregungsfrequenz f auf 54,5 Hz erreichen die Vergrößerungsfunktionen für die Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ ihre leicht unterschiedliche Hochpunkte: 3,16 für die Setzung und 3,24 für die Untergrundreaktion. Die Frequenz von 54,5 Hz ist somit die Resonanzfrequenz des Systems. Die abweichenden Maxima dieser Vergrößerungsfunktionen sind dadurch bedingt, dass die dynamische Untergrundreaktion $N_0(t)$, im Gegensatz zur dynamischen Setzung $w_0(t)$, sich aus einer setzungsproportionalen Komponente $N_{F,0}(t)$ wie auch aus einer geschwindigkeitsproportionalen Komponente $N_{D,0}(t)$ zusammensetzt, siehe Gl. (4.47). Bei einer weiteren Steigerung der Anregungsfrequenz über die Resonanzfrequenz von 54,5 Hz hinaus wird der überresonante Frequenzbereich erreicht, in welchem die Vergrößerungsfunktionen bei wachsender Frequenz abfallen, sodass die dynamischen Größen $w_{0,\text{dyn,max}}$ und $N_{0,\text{dyn,max}}$ bei der Anregungsfrequenz größer als 77,1 bzw. 78,3 Hz kleiner als die entsprechenden statischen Größen $w_{0,\text{stat}}$ und $N_{0,\text{stat}}$ werden, wie dies auch in Abbildung 4.3 für die Frequenz von 90 Hz der Fall ist. Der Wert einer Vergrößerungsfunktion wird ferner als dynamischer Vergrößerungsfaktor bezeichnet.

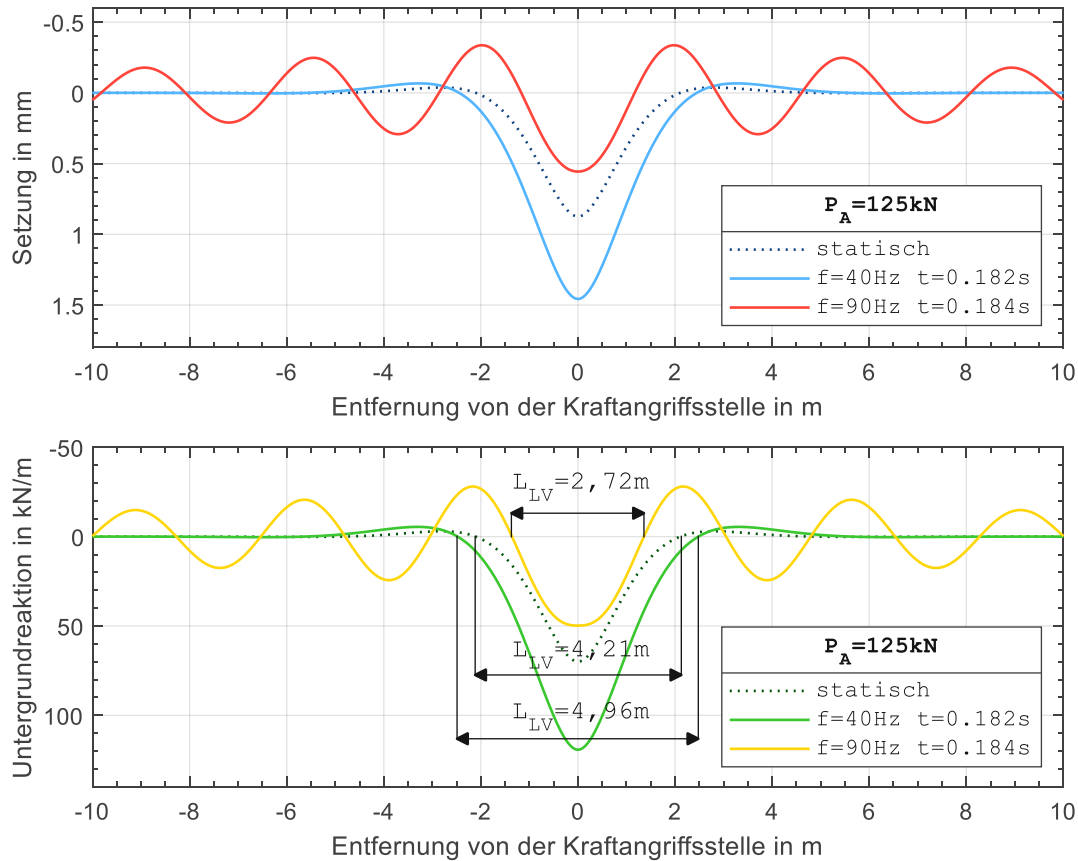


Abbildung 4.5: Gleissetzung $w(x,t)$ und Untergrundreaktion $N(x,t)$ zum Zeitpunkt der maximalen Untergrundreaktion bei statischer wie auch dynamischer Belastung mit der Anregungsfrequenz f von 40 und 90 Hz für eine lineare Federkennlinie und die Systemkennwerte nach Tabelle 4.2

In Abbildung 4.5 sind die statischen und dynamischen Gleissetzungslinien $w(x,t)$ und Untergrundreaktionslinien $N(x,t)$ zu den Zeitpunkten t der jeweiligen maximalen Untergrundreaktion ($N_0(t) = N_{0,\text{dyn,max}}$) dargestellt. Außerdem wird darin die Lastverteilungslänge L_{LV} für die angezeigten Anregungsfrequenzen f angegeben, welche als zentraler Nullstellenabstand der Untergrundreaktionslinie zum Zeitpunkt der maximalen Untergrundreaktion an der Laststelle $N_{0,\text{dyn,max}}$ definiert ist. Es zeigt sich zum einen der Einfluss der Anregungsfrequenz f auf die Lastverteilungslänge L_{LV} , die beim Übergang von der statischen Last hin zur dynamischen mit der Frequenz von 40 Hz eine Zunahme von 4,21 auf 4,96 m erfährt. Ähnlich wie die Setzungs- und Bodendruckamplituden ($w_{0,\text{dyn,max}}$ und $N_{0,\text{dyn,max}}$) sinkt die Lastverteilungslänge bei der Erhöhung der Frequenz auf 90 Hz, sodass diese 2,72 m beträgt und so unter dem statischen Niveau liegt. Zum anderen ist bei der Anregungsfrequenz f von 90 Hz der Übergang zu einer überresonanten Schwingung ersichtlich, als die mittige Anregung nun die über große Distanzen ausbreitenden Wellen erzeugt, deren Amplitude nur sehr allmählich mit der Entfernung von der Kraftangriffsstelle abnimmt – insbesondere bei der vorliegenden schwachen Dämpfung. Der Amplituden-Frequenzgang der Lastverteilungslänge L_{LV} ist Abbildung 4.4 zu entnehmen. Darin lässt sich im Vergleich zur Setzung und Untergrundreaktion der wesentlich niedrigere zugehörige Hochpunkt von 1,30 bei der Anregungsfrequenz von 51,0 Hz erkennen.

4.3.4 Definition eines vereinfachten Lastmodells

Dieser Unterabschnitt widmet sich dem Vorschlag eines Lastverteilungsmodells für den dynamischen Lastfall gemäß Abbildung 4.1, das eine einfache Anwendung und eine adäquate Erfassung der Tragwerksbelastung sicherstellt.

Das Lastmodell besteht aus den zueinander im Schwellenabstand d von 60 cm stehenden Einzelkräften, die nachfolgend aus der zeitveränderlichen Untergrundreaktion $N(x,t)$ hergeleitet werden. Mittels der abschnittsweisen örtlichen Integration der Untergrundreaktion $N(x,t)$ gemäß Gl. (4.51) werden vorerst die dynamischen Einzelkräfte $F_j(t)$ im gegenseitigen Abstand d nach Abbildung 4.6 ermittelt. Die so errechneten dynamischen Einzelkräfte $F_j(t)$ sind zeitveränderlich, weshalb ein weiterer Aufbereitungsschritt begangen wird, um das Endergebnis für den Einsatz als Belastungsmodell zu vereinfachen: Als Lastmodell werden lediglich die Einzelkraftamplituden $F_{j,\text{dyn,max}}$ angegeben, und zwar hinsichtlich ihrer Anzahl und Größe so modifiziert, dass sie in Summe die Amplitude des Untergrundreaktion-Integrals über die gesamte Gleislänge $R_{\text{dyn,max}}$ ergeben. So wird unter Beibehaltung der höchstmöglichen gesamten Tragwerksbelastung die Lastverteilung unterschätzt, weshalb das vereinfachte Lastmodell für dynamische Berechnungen von Eisenbahnbrücken auf der sicheren Seite liegen sollte.

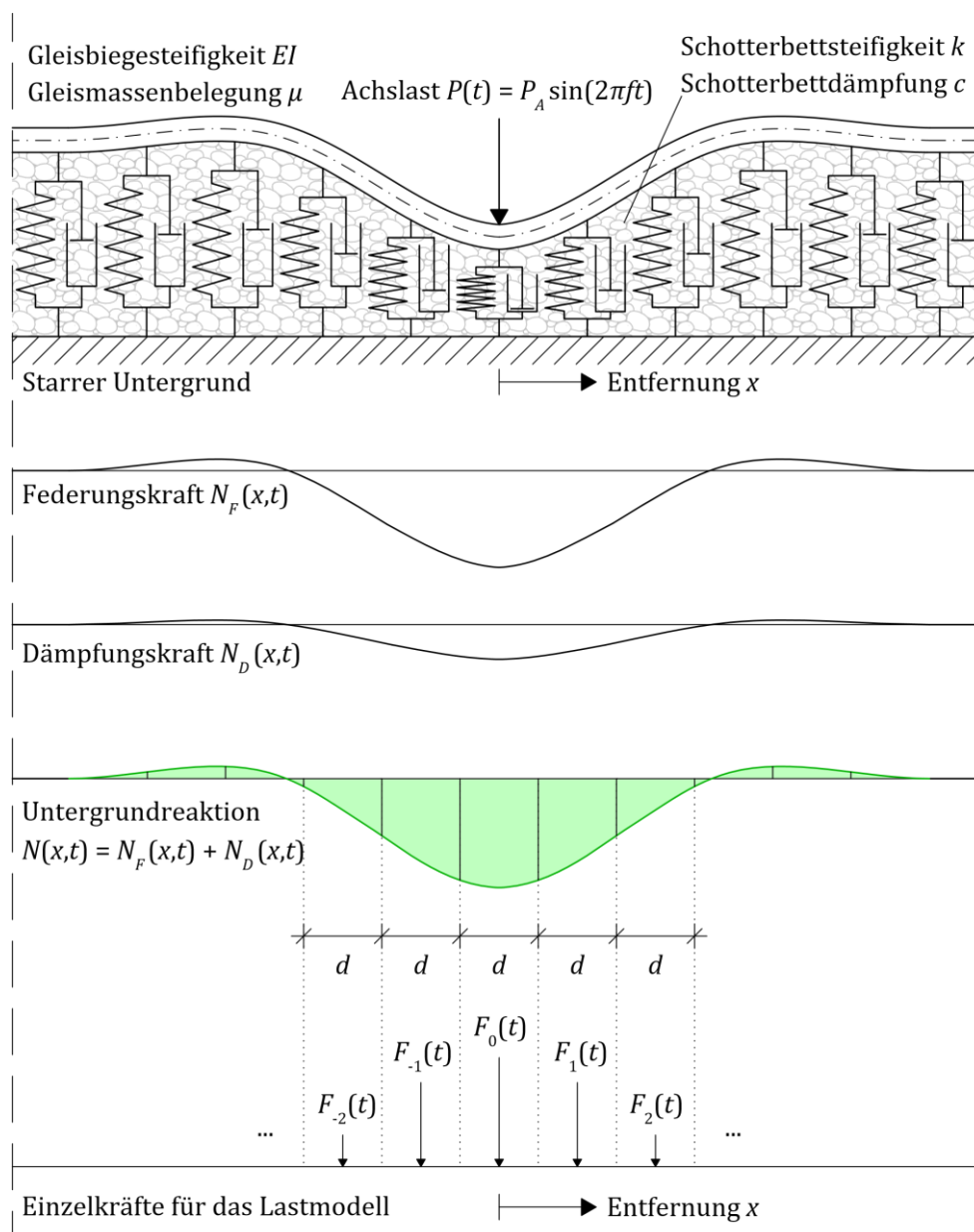


Abbildung 4.6: Ermittlung der dynamischen Lastmodell-Einzelkräfte $F_j(t)$ durch die abschnittsweise Integration der dynamischen Untergrundreaktion $N(x,t)$

Gl. (4.51) sei die Definition der dynamischen Einzelkräfte $F_j(t)$:

$$F_j(t) = \int_{(j-\frac{1}{2})d}^{(j+\frac{1}{2})d} N(x,t) dx \quad \text{für } j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (4.51)$$

$F_j(t)$... j -te zeitveränderliche Einzelkraft, die den verteilten Druck auf den Untergrund $N(x,t)$ im Integrationsbereich von $(j - \frac{1}{2})d$ bis $(j + \frac{1}{2})d$ zusammenfasst

d ... konstanter Einzelkraftabstand

$N(x,t)$ ist die kontinuierliche Untergrundreaktion, die aufgrund der in Abschnitt 4.2 durchgeführten Diskretisierung der Gleisbalken-Bewegungsgleichung in dieser Form nicht verfügbar ist. Bekannt sind stattdessen die (näherungsweisen) Untergrundreaktionen $N_i(t)$ an den Diskretisierungspunkten x_i , sodass durch die Anwendung der Trapezregel mit dem Diskretisierungspunkt-Abstand h das Integral in Gl. (4.51) als Summe der Flächen gemäß Gl. (4.52) und der schematischen Darstellung in Abbildung 4.7 approximiert werden kann:

$$F_j(t) \approx \sum_{i=(dj-\frac{d}{2})\frac{1}{h}}^{(dj+\frac{d}{2})\frac{1}{h}-1} h \frac{N_i(t) + N_{i+1}(t)}{2} \quad \text{für } j = 1, 2, 3, \dots \quad (4.52)$$

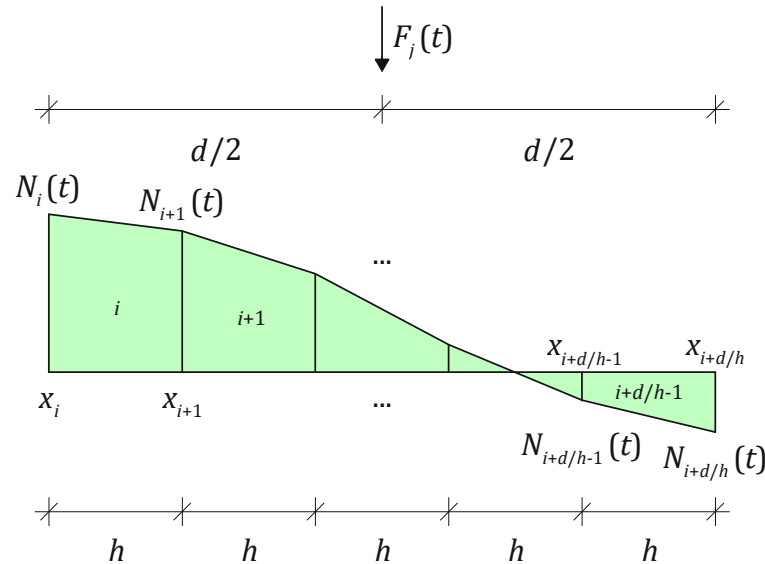


Abbildung 4.7: Summierte Trapezflächen i als Approximation des Integrals der kontinuierlichen Untergrundreaktion $N(x,t)$ im Einflussbereich d der Einzelkraft $F_j(t)$

Gl. (4.52) gilt für Einzelkräfte auf der positiven Gleishälfte ($j \geq 1$), denn die diskreten Boden drücke $N_i(t)$ werden streng genommen nur dort ausgerechnet.

Die Ausnutzung der Systemsymmetrie lässt dennoch auch die fehlenden zentralen ($j = 0$) und linksseitigen ($j \leq -1$) Einzelkräfte bestimmen:

$$F_0(t) \approx 2 \sum_{i=0}^{(\frac{d}{2})\frac{1}{h}-1} h \frac{N_i(t) + N_{i+1}(t)}{2} \quad (4.53)$$

$$F_{-j}(t) = F_j(t) \quad (4.54)$$

Exemplarisch werden im Folgenden Verläufe der ersten fünf ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) Einzelkräfte $F_j(t)$ für das bereits in Unterabschnitt 4.3.3 betrachtete System mit den Kennwerten laut Tabelle 4.2 dargestellt.

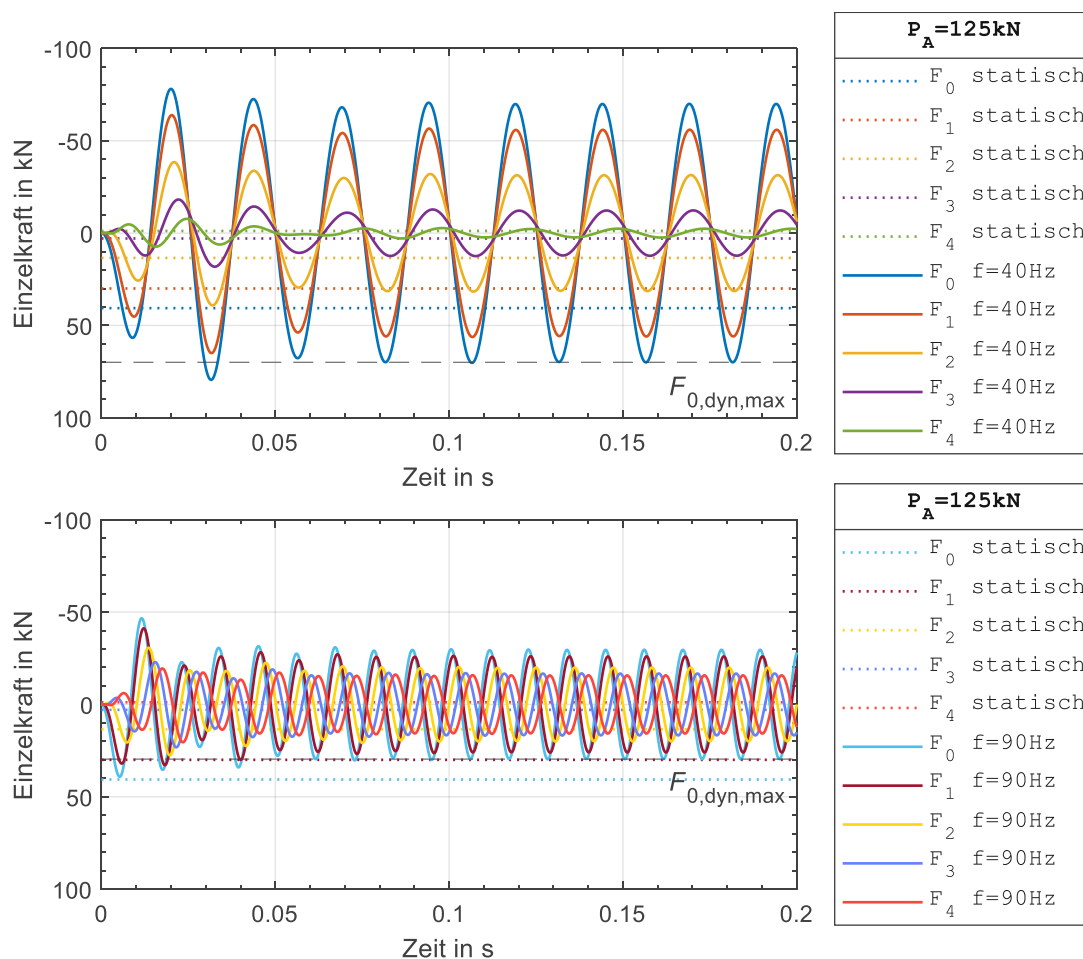


Abbildung 4.8: Vergleich der Einzelkräfte $F_j(t)$ mit $j = 0, 1, 2, 3, 4$ zufolge einer analytischen statischen Berechnung sowie zufolge einer dynamischen Simulation mit den Anregungsfrequenzen f von 40 Hz und 90 Hz für eine lineare Federkennlinie und die Systemkennwerte nach Tabelle 4.2

Bei den in Abbildung 4.8 dargestellten Einzelkraftverläufen zeigen sich dieselben dynamischen Phänomene wie bei der Setzung und Untergrundreaktion gemäß Abbildung 4.3. Nach dem etwa 0,05 s dauernden Einschwingvorgang nähern sich die Kraftamplituden ihrem jeweiligen stationären Niveau an, der zwecks Übersichtlichkeit nur für die zentrale Einzelkraft $F_0(t)$ mit der strichlierten Begrenzungslinie und der Bezeichnung $F_{0,dyn,max}$ dargestellt ist. Die Endamplituden $F_{j,dyn,max}$ überschreiten oder unterschreiten die entsprechenden statischen Einzelkräfte F_j in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz: Die unterresonante Frequenz von 40 Hz liegt unterhalb der Resonanzfrequenz von 54,5 Hz (vgl. Unterabschnitt 4.3.3) und verursacht eine Lastvergrößerung im Vergleich zur statischen Belastung, während die überresonante Frequenz von 90 Hz eine Lastabminderung für die zentrale Einzelkraftamplitude $F_{0,dyn,max}$ bewirkt. Im Gegensatz dazu nehmen die seitlichen Einzelkraftamplituden $F_{1,dyn,max}$, $F_{2,dyn,max}$, $F_{3,dyn,max}$ sowie $F_{4,dyn,max}$ bei der überresonanten Frequenz deutlich zu – die Ursache

liegt in der in Abbildung 4.5 dargestellten überresonanten Schwingung, bei welcher die Untergrundreaktionswellen sich nun sehr weit von der Achslaststelle her ausbreiten. Dementsprechend steigt mit der wachsenden Frequenz die Anzahl der Einzelkräfte, die eine bemessungsrelevante Amplitude besitzen und die zueinander jedoch teils in Gegenphase stehen, rasch an.

Angesichts einer großen Anzahl der Einzelkräfte in Gegenphase bei überresonanten Frequenzen (vgl. Abbildung 4.5 und Abbildung 4.8 für $f = 90$ Hz) wie auch angesichts ihrer nicht mit einer einzelnen harmonischen Funktion beschreibbaren Zeitverläufe bei den nachfolgend untersuchten Systemen mit nichtlinearen Federkennlinien wird eine Vereinfachung des Lastmodells vorgenommen, indem als Ergebnis lediglich die eingeschwungenen Kraftamplituden $F_{j,\text{dyn,max}}$ angegeben werden und die Anzahl der berücksichtigten Einzelkräfte mithilfe eines Begrenzungskriteriums so reduziert wird, dass sie in Summe die Amplitude der resultierenden vertikalen Untergrundbelastung $R(t)$ ergeben (indem unter anderem die zueinander in Gegenphase stehenden weit von der Laststelle entfernten Einzelkräfte „ausgefiltert“ werden).

$R(t)$ sei die über die gesamte Gleislänge integrierte Untergrundreaktion bzw. die Summe aller zwischen dem linken ($x = -L$) und rechten ($x = L$) Gleisende befindlichen negativen Zug- und positiven Druckkräfte $F_j(t)$:

$$R(t) = \int_{-L}^L N(x, t) dx = \sum F_j(t) \quad (4.55)$$

$R(t)$... über die Gleislänge beidseits der Achslast integrierte Untergrundreaktion

Dadurch, dass kein expliziter Ausdruck für die kontinuierliche Untergrundreaktion vorhanden ist, wird auf die Trapezregel und die bekannten – positiven bei Druck und negativen bei Zug – Bodendrücke $N_i(t)$ an den zentralen ($i = 0$) wie auch positiven ($i > 0$) diskreten Knoten zurückgegriffen:

$$R(t) = 2 \int_0^L N(x, t) dx \approx 2 \sum_{i=0}^{\frac{L}{h}-1} h \frac{N_i(t) + N_{i+1}(t)}{2} \quad (4.56)$$

Im statischen Lastfall aus Kapitel 2 (vgl. Abbildung 2.1) steht die statische Reaktionskraft R_{stat} im Gleichgewicht mit der statischen Achslast P , für welche in der anschließenden Auswertung die Größe der dynamischen Achslastamplitude P_A angesetzt wird:

$$R_{\text{stat}} = P_A \quad (4.57)$$

Die nach Gl. (4.56) und Gl. (4.57) errechneten Reaktionskräfte für die statische Belastung sowie für die Anregungsfrequenzen f von 40 und 90 Hz sind in Abbildung 4.9 dargestellt. Demnach besitzen sie ebenfalls die besprochenen dynamischen Effekte wie der Einschwingvorgang und die dynamische Vergrößerung bzw. Abminderung bei der unterresonanten bzw. überresonanten Anregungsfrequenz f . $R_{\text{dyn,max}}$ sei die eingeschwungene Amplitude der dynamischen Reaktionskraft $R(t)$.

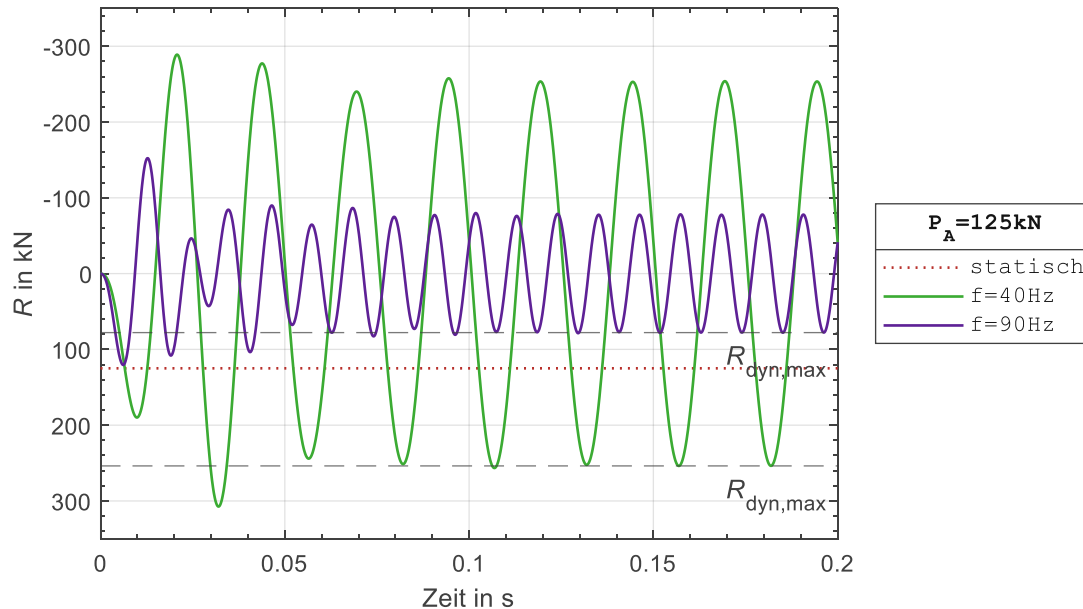


Abbildung 4.9: Vergleich der Reaktionskräfte $R(t)$ zufolge einer analytischen statischen Berechnung sowie zufolge einer dynamischen Simulation mit der Anregungsfrequenz f von 40 und 90 Hz für eine lineare Federkennlinie und die Systemkennwerte nach Tabelle 4.2

Abbildung 4.10 zeigt die dynamische Vergrößerungsfunktion der Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$, die den Hochpunkt von 4,75 bei der schon in Unterabschnitt 4.3.3 festgestellten System-Resonanzfrequenz von 54,5 Hz aufweist. Der Anschaulichkeit halber sind die Vergrößerungsfunktionen der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$, der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ und der Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ gemäß Unterabschnitt 4.3.3 ebenfalls dargestellt.

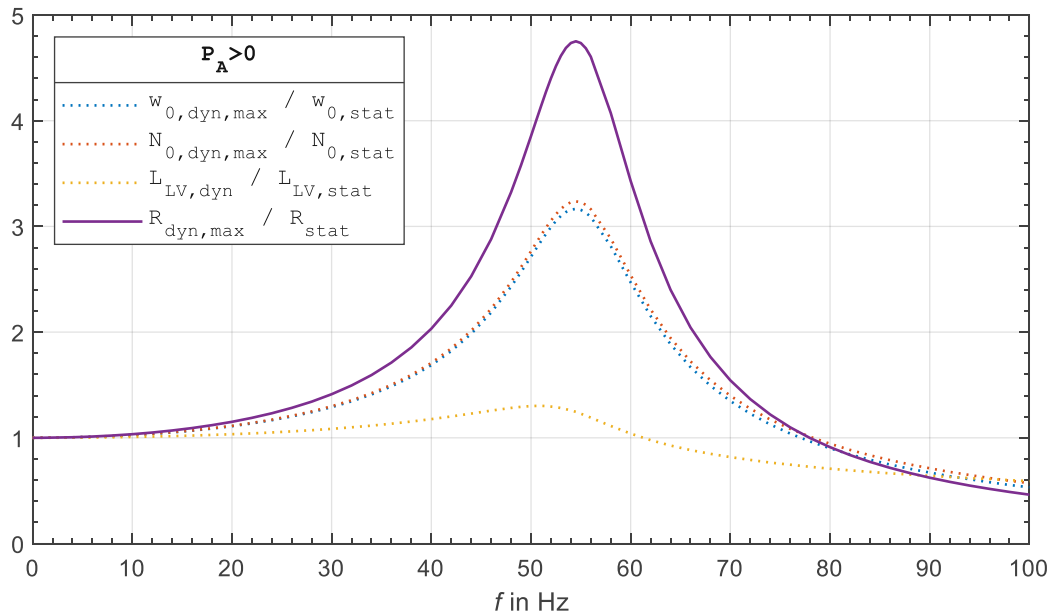


Abbildung 4.10: Vergrößerungsfunktionen für die Amplituden der Reaktionskraft $R_{\text{dyn,max}}$, der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$, der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ und der Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ als ihr Verhältnis zu den entsprechenden statischen Werten des Systems mit einer linearen Federkennlinie und den Kennwerten nach Tabelle 4.2

Die Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ ist als maßgebliche Tragwerksbelastung anzusehen, die vom vereinfachten Lastmodell herzustellen sei. Demzufolge werden die eingeschwingenen Amplituden der Einzelkräfte $F_{j,\text{dyn,max}}$ so lange summiert, bis die Summe die Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ erreicht:

$$\sum_{j=-n}^n F_{j,\text{dyn,max}} \geq R_{\text{dyn,max}} \quad (4.58)$$

n ... minimale Anzahl der Einzelkräfte, sodass die Summe ihrer Amplituden die maximale Reaktionskraft $R_{\text{dyn,max}}$ ergibt

Die äußersten in die Summe aufgenommenen Kräfte werden um den eventuellen Kraftüberschuss abgemindert:

$$F_{-n,\text{dyn,max}}^* = F_{n,\text{dyn,max}}^* = F_{n,\text{dyn,max}} - \frac{(\sum_{j=-n}^n F_{j,\text{dyn,max}}) - R_{\text{dyn,max}}}{2} \quad (4.59)$$

$F_{-n,\text{dyn,max}}^*$ und $F_{n,\text{dyn,max}}^*$... um den Drucküberschuss korrigierte Randkraftamplituden

Die einwirkende dynamische Achslast $P(t)$ ist gemäß dem vorgeschlagenen vereinfachten Lastmodell durch die konstanten Einzelkräfte $F_{j,\text{dyn,max}}$ unter Berücksichtigung der Beschränkung gemäß Gl. (4.58) und Gl. (4.59) zu ersetzen, vgl. Abbildung 4.11.

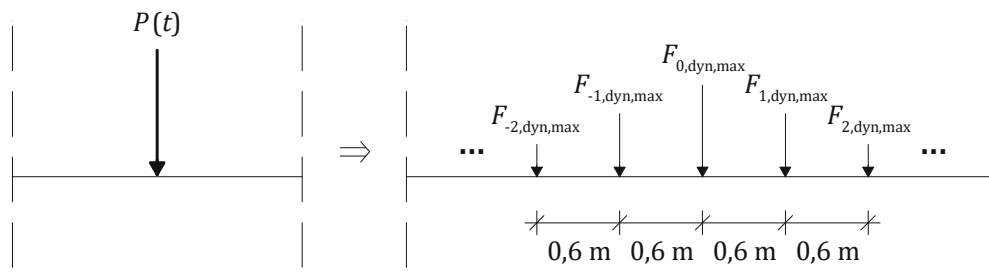


Abbildung 4.11: Anwendung des vereinfachten dynamischen Lastmodells

4.3.5 Ergebnisse für die Gleisverformung und die Untergrundreaktion des dynamischen Systems mit einer linearen Federkennlinie

Nachfolgend werden die eingeschwungenen Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ (gemäß Abbildung 4.3) an der Kraftangriffsstelle wie auch die dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ (gemäß Abbildung 4.5) für die in Tabelle 4.3 festgehaltenen Systemkennwerte dargestellt und mit den entsprechenden statischen Größen verglichen.

Tabelle 4.3: Kennwerte zur dynamischen Berechnung des Systems mit einer linearen Federkennlinie

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises aus zwei Schienen 60E1
μ	0,6667	t/m	Massenbelegung des Gleises (60 kg/m pro Schiene und 328 kg pro Betonschwelle im 60 cm-Abstand)
k	50 – 1000	kN/mm/m	kontinuierliche Schotterbettsteifigkeit
c	50, 100, 500	kNs/m ²	kontinuierliche Schotterbettdämpfung
P_A	25, 125, 250	kN	Achslast-Amplitude
f	2 – 100	Hz	Anregungsfrequenz
h	5	cm	Diskretisierungspunkt-Abstand
L	40	m	Gleisbalkenlänge

Abbildung 4.12 bis Abbildung 4.14 zeigen die Verläufe von $w_{0,dyn,max}$ sowie $N_{0,dyn,max}$ in Abhängigkeit der Bettungssteifigkeit k , der Anregungsfrequenz f und der Achslastamplitude P_A jeweils für einen Dämpfungsbeiwert c , der 50, 100 oder 500 kNs/m² beträgt. Darin lässt sich die wachsende Resonanzfrequenz (die Frequenz der Amplituden-Hochpunkte) für die steigende Schotterbettsteifigkeit k erkennen.

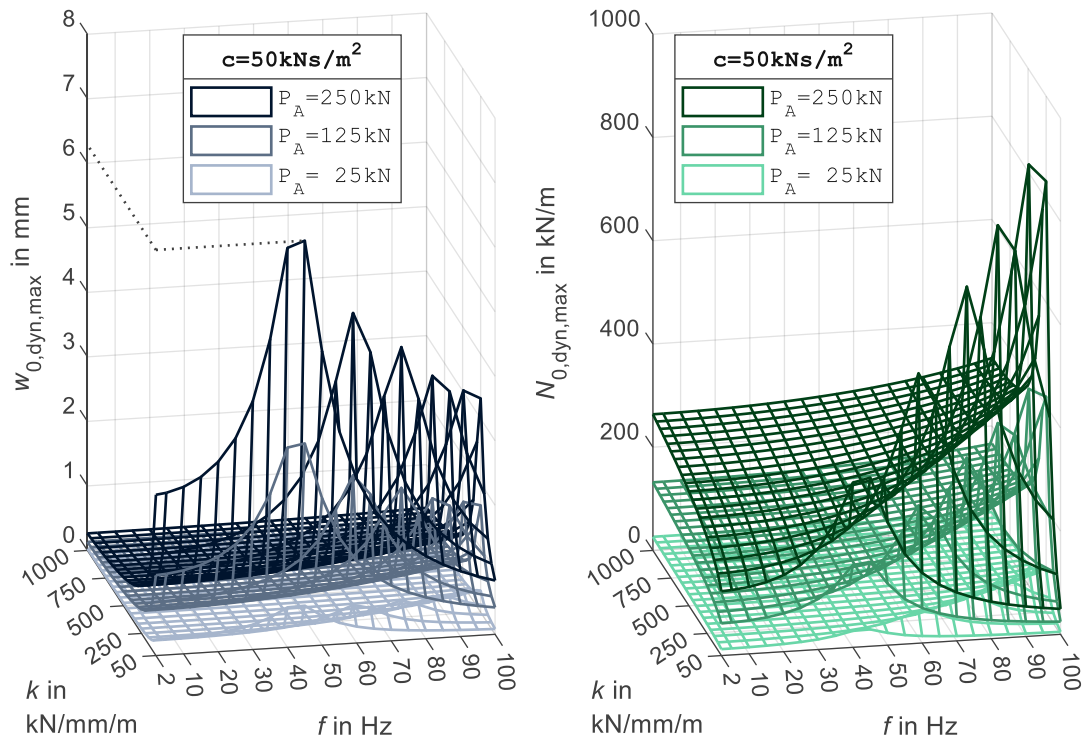


Abbildung 4.12: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m^2 und die linearen Federkennlinien

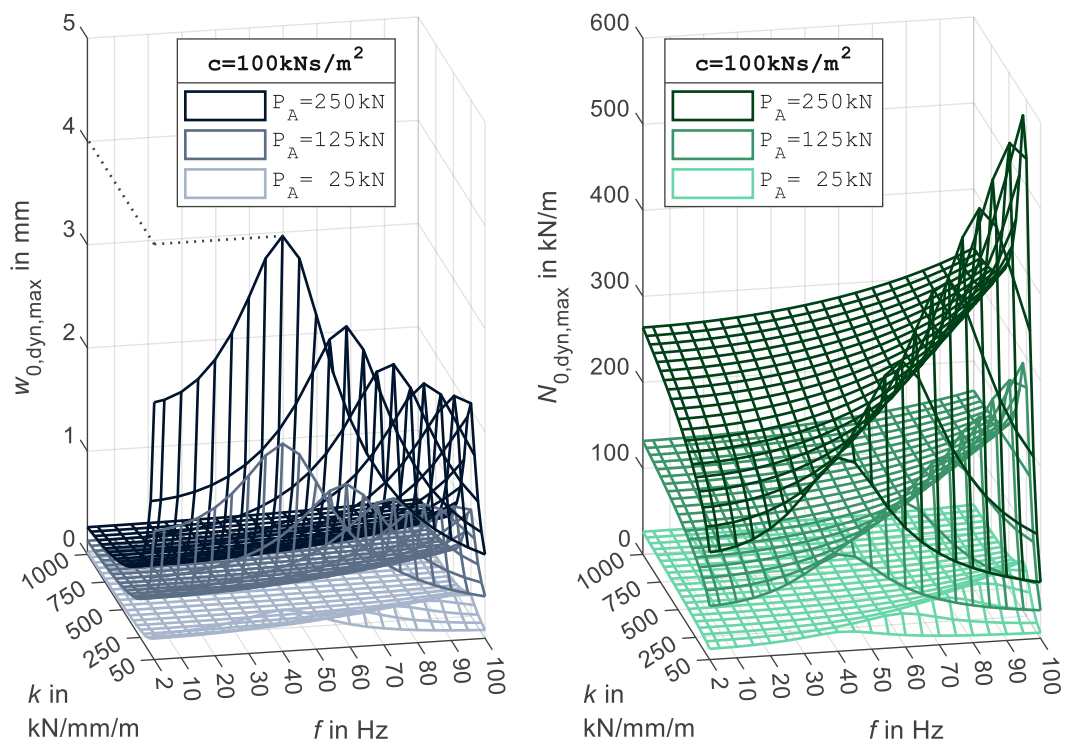


Abbildung 4.13: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m^2 und die linearen Federkennlinien

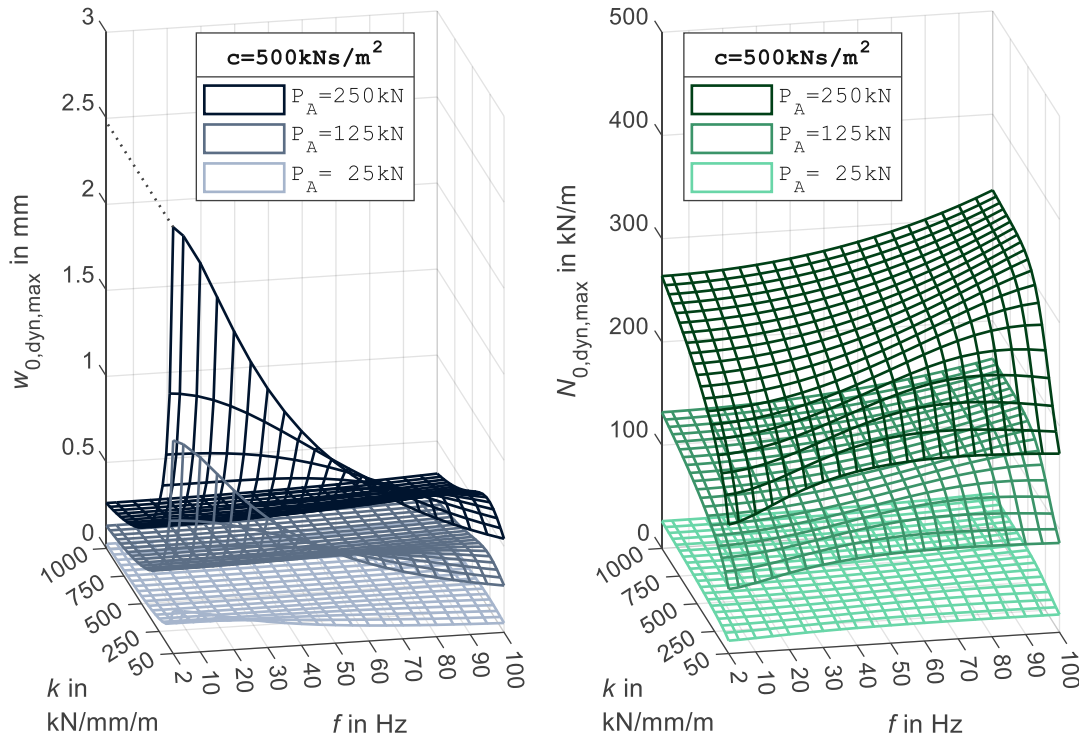


Abbildung 4.14: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die linearen Federkennlinien

Abbildung 4.15 bis Abbildung 4.17 zeigen das Verhältnis von $w_{0,dyn,max}$ und $N_{0,dyn,max}$ zur statischen Setzung $w_{0,stat}$ und zum Bodendruck $N_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle. Daraus ist ersichtlich, dass die dynamischen Größen bei kleinen Frequenzen sich kaum von den statischen unterscheiden (ihr Verhältnis zueinander ist annähernd 1), bei den mittleren dargestellten Frequenzen jedoch nehmen sie zu (abgesehen vom Fall mit der äußerst starken Dämpfung von 500 kNs/m²), bis sie bei hohen überresonanten Frequenzen zurück und sogar unter die statischen Werte sinken. Der von diesem Zusammenhang abweichende Verlauf von $w_{0,dyn,max}$ bei der hohen Dämpfungskonstante von 500 kNs/m² liegt darin begründet, dass das mit dem entsprechend großen Widerstand schwingende Gleis bei der höher werdenden Anregungsfrequenz nicht mehr ausreichend Zeit hat, die statische Setzung innerhalb eines Lastspiels zu erreichen. Die zugehörige Bodendruckamplitude $N_{0,dyn,max}$ wächst trotzdem mit der Frequenz wegen der dominanten Dämpfungskraftkomponente. Die Achslastamplitude P_A hat keinerlei Einfluss auf die dynamische Setzungs- und Untergrundreaktionsvergrößerung beim linear gefederten System.

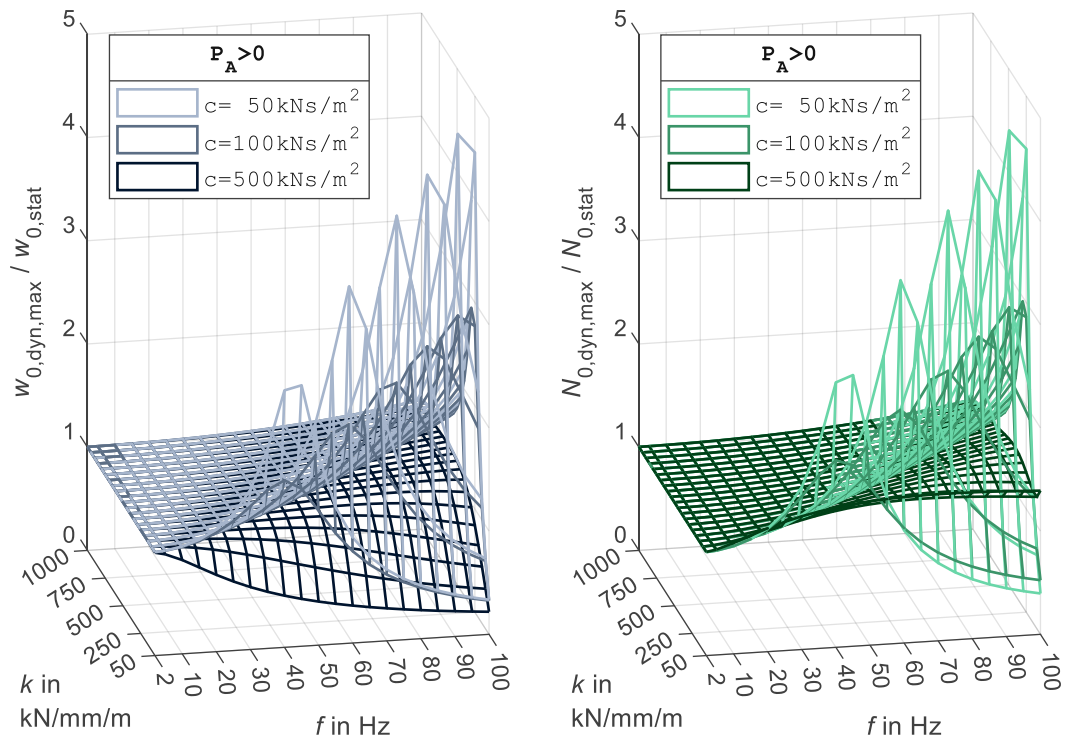


Abbildung 4.15: Verhältnis der eingeschwungenen Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ zu den statischen Setzung $w_{0,stat}$ und Untergrundreaktion $N_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die linearen Federkennlinien (Übersicht)

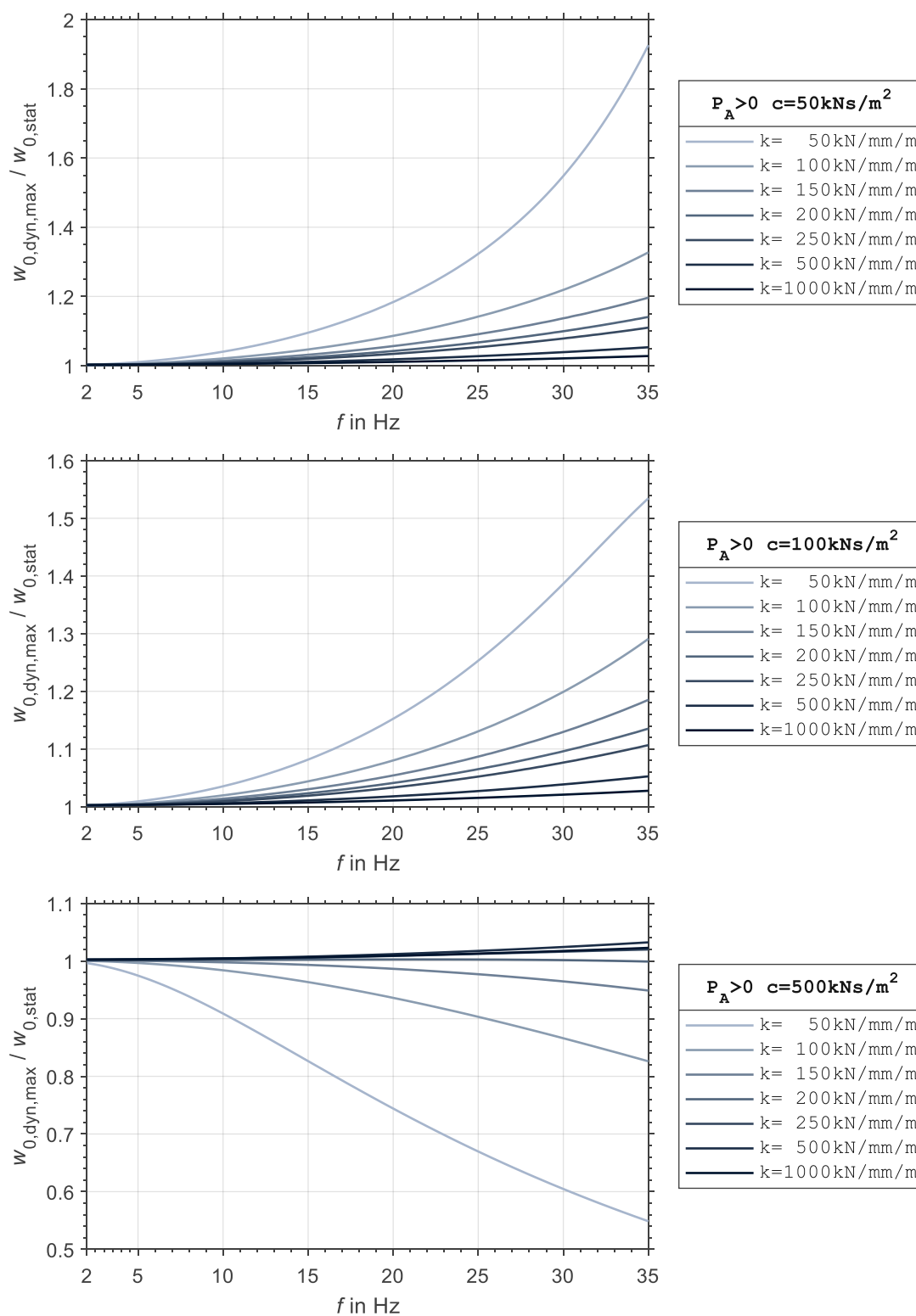


Abbildung 4.16: Verhältnis der eingeschwungenen Amplitude der Setzung $w_{0,dyn,max}$ zur statischen Setzung $w_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² und die linearen Federkennlinien (detailliert)

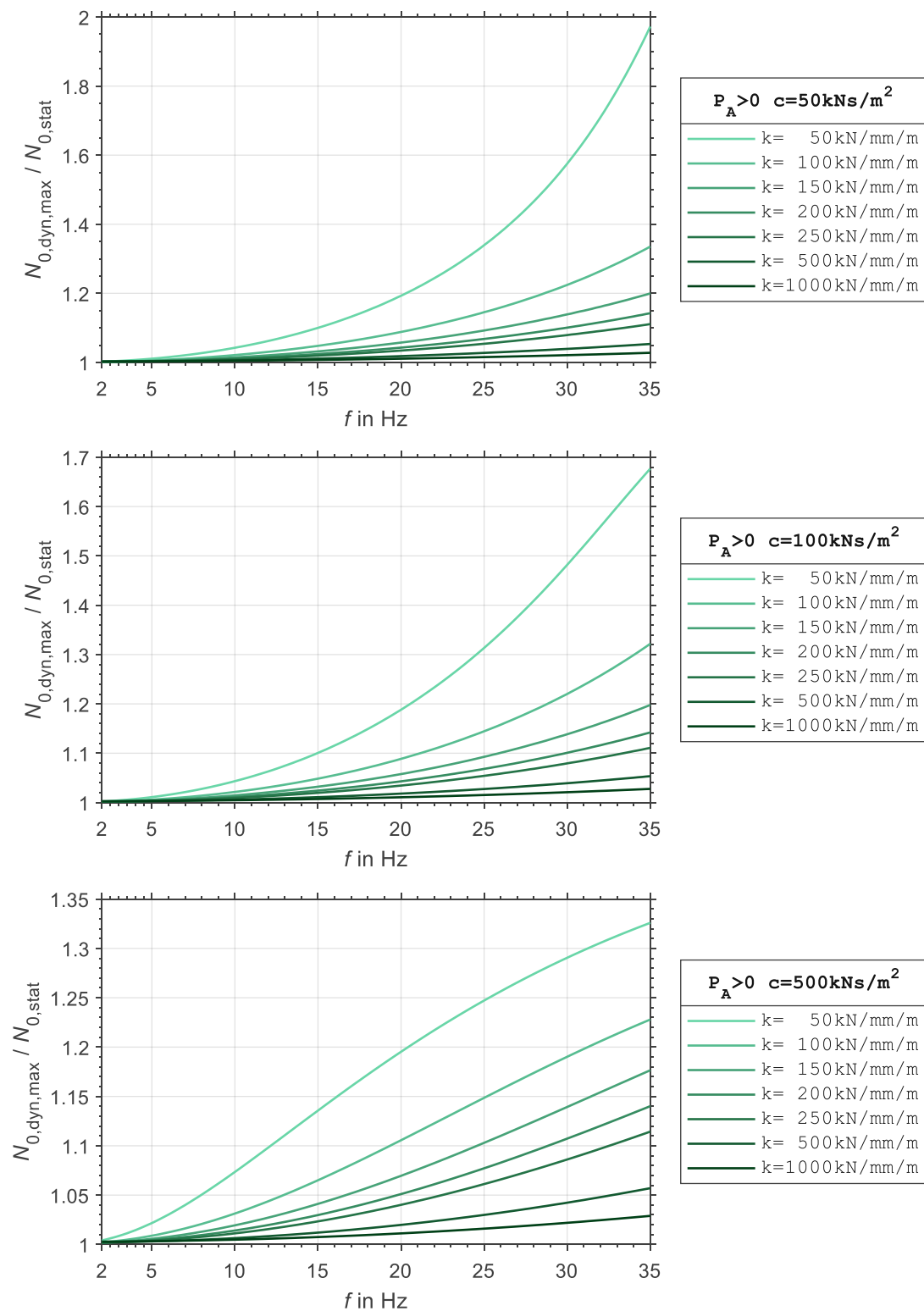


Abbildung 4.17: Verhältnis der eingeschwungenen Amplitude der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ zur statischen Untergrundreaktion $N_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² und die linearen Federkennlinien (detailliert)

Die dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ folgt etwa dem Zusammenhang für $w_{0,dyn,max}$ und $N_{0,dyn,max}$ – siehe Abbildung 4.18 und Abbildung 4.19 – indem sie mit der steigenden Frequenz im unterresonanten Bereich zunimmt und im überresonanten Bereich herabfällt. Wiederum bewirkt die starke Dämpfung von 500 kNs/m^2 eine Abweichung von diesem Verhalten, als die Untergrundreaktion bedingt durch die große Dämpfungskonstante zunehmend von der Setzungsgeschwindigkeit anstatt der Setzung generiert wird. Die Achslastamplitude P_A hat hingegen keine Bedeutung für die Lastverteilungslänge des linearen Systems.

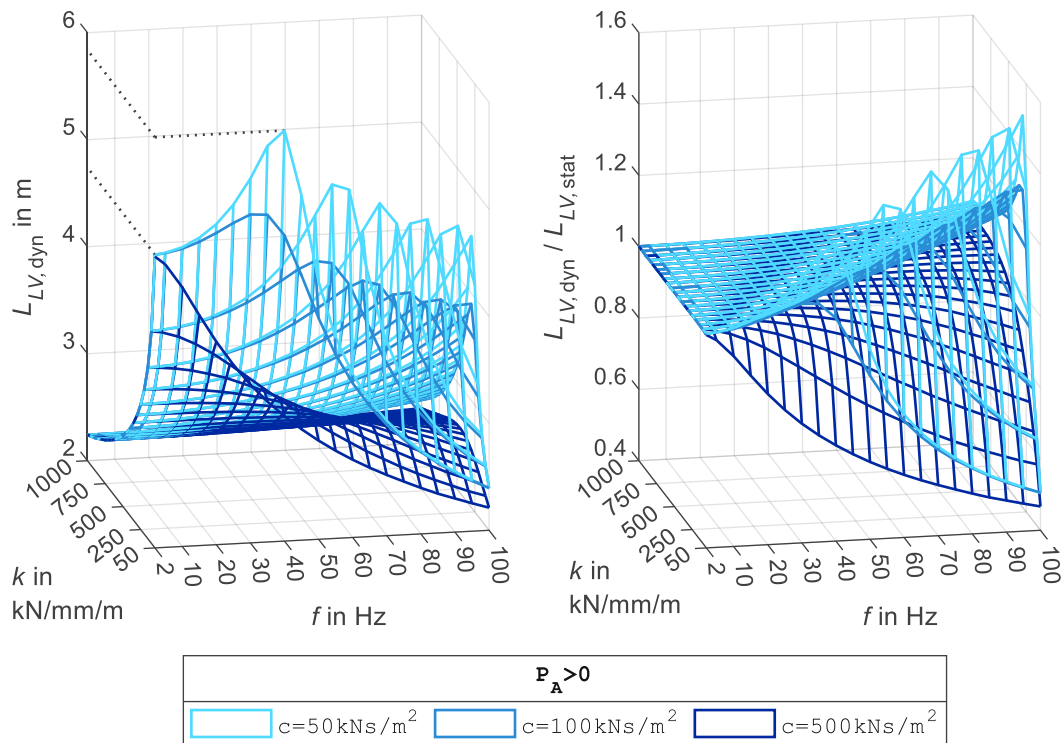


Abbildung 4.18: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ (die zum Zeitpunkt des maximalen eingeleiteten Bodendrucks $N_{0,dyn,max}$ auftritt) sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für lineare Federkennlinie (Übersicht)

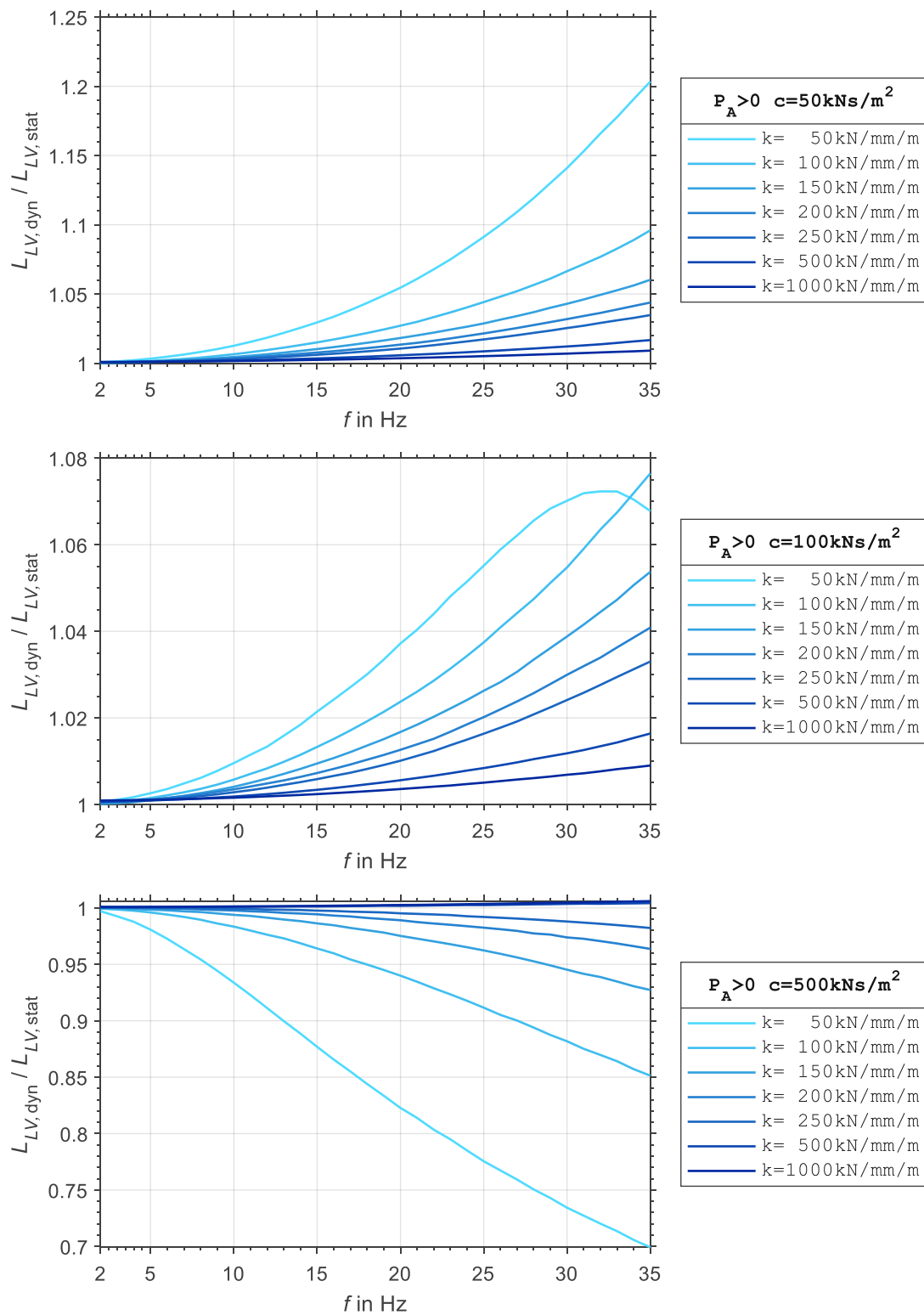


Abbildung 4.19: Verhältnis der dynamischen Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² und die linearen Federkennlinien (detailliert)

4.3.6 Ergebnisse für die Einzelkräfte des dynamischen Lastmodells beim System mit einer linearen Federkennlinie

Im Folgenden werden die Einzelkräfte $F_{j,\text{dyn,max}}$ des dynamischen Lastmodells gemäß Unterabschnitt 4.3.4 (vgl. Abbildung 4.11) und jene des in Kapitel 2 vorgeschlagenen statischen Lastmodells $F_{j,\text{stat}}$ anhand der entsprechenden bezogenen Einzelkräfte $\chi_{j,\text{dyn}}$ und $\chi_{j,\text{stat}}$ ausgewertet:

$$\chi_{j,\text{dyn}} = \frac{F_{j,\text{dyn,max}}}{R_{\text{dyn,max}}} \quad (4.60)$$

$$\chi_{j,\text{stat}} = \frac{F_{j,\text{stat}}}{P} = \frac{F_{j,\text{stat}}}{P_A} \quad (4.61)$$

$F_{j,\text{stat}}$... Einzelkraft F_j des statischen Lastmodells gemäß Kapitel 2

P ... statische Achslast gemäß Kapitel 2

Vorerst wird der Frequenzverlauf der bezogenen Einzelkräfte des dynamischen Lastmodells $\chi_{j,\text{dyn}}$ allein wie auch im Verhältnis zu den bezogenen Einzelkräften des statischen Lastmodells $\chi_{j,\text{stat}}$ für die Systemkonfigurationen nach Tabelle 4.3 in Abbildung 4.20 bis Abbildung 4.26 dargestellt. Der Verlauf der Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ im Verhältnis zur Achslastamplitude P_A wird anschließend in Abbildung 4.27 und Abbildung 4.28 gezeigt.

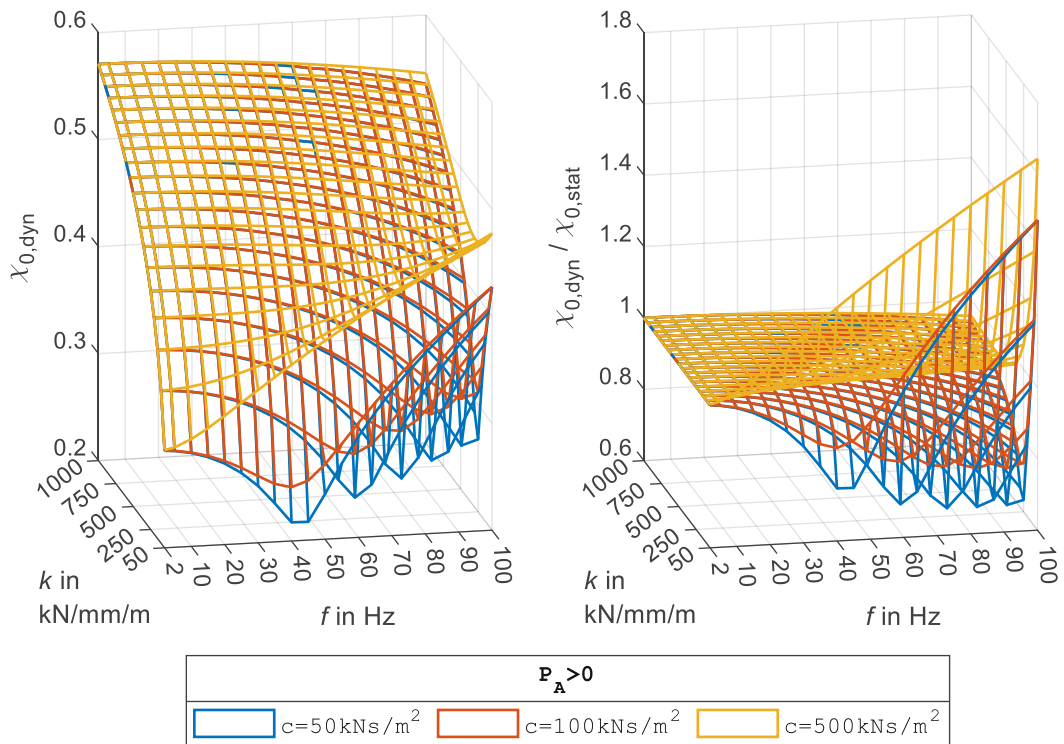


Abbildung 4.20: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{0,stat}$ (rechts) für die linearen Federkennlinien

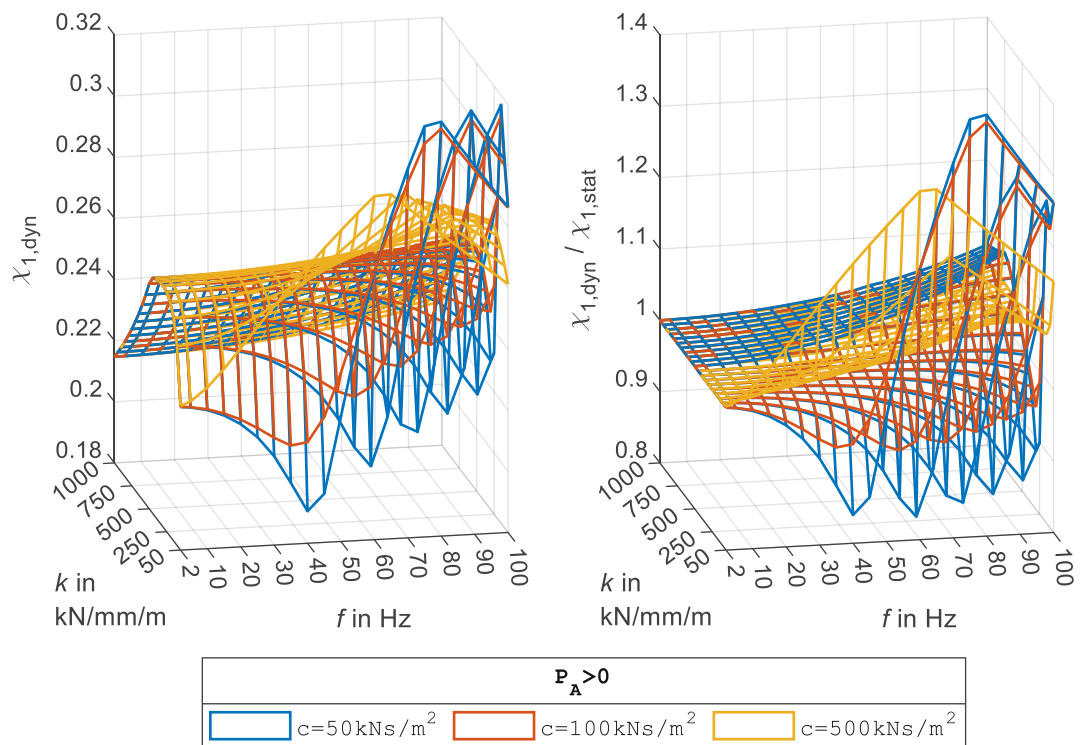


Abbildung 4.21: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{1,stat}$ (rechts) für die linearen Federkennlinien

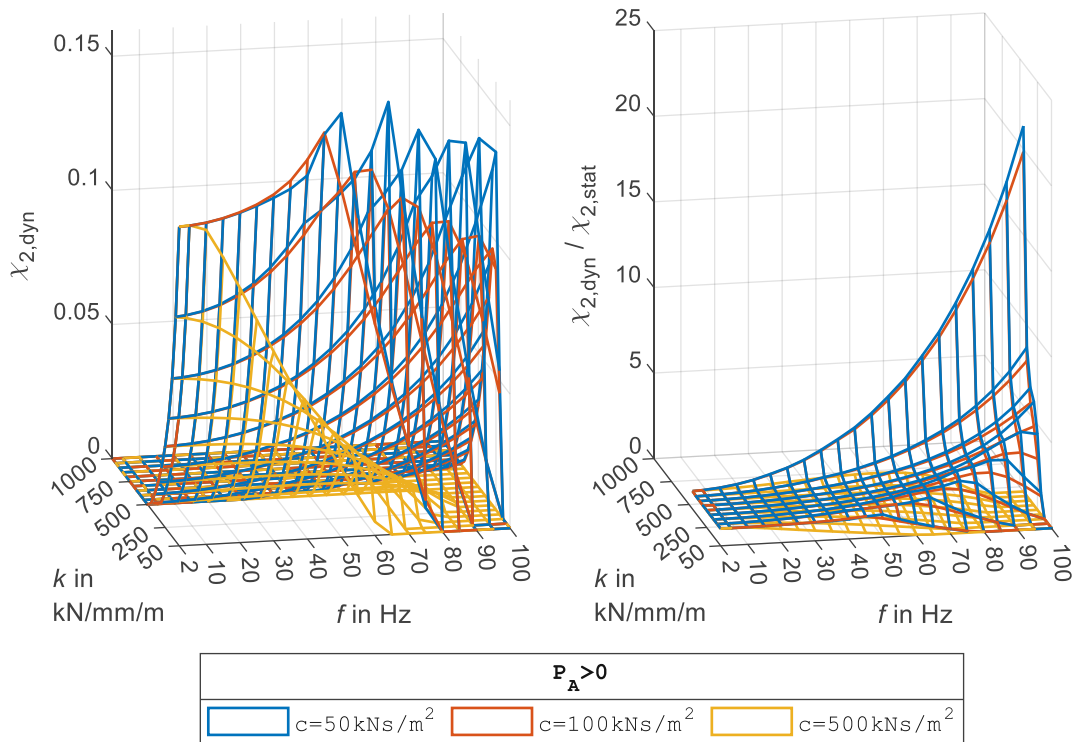


Abbildung 4.22: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{2,stat}$ (rechts) für die linearen Federkennlinien

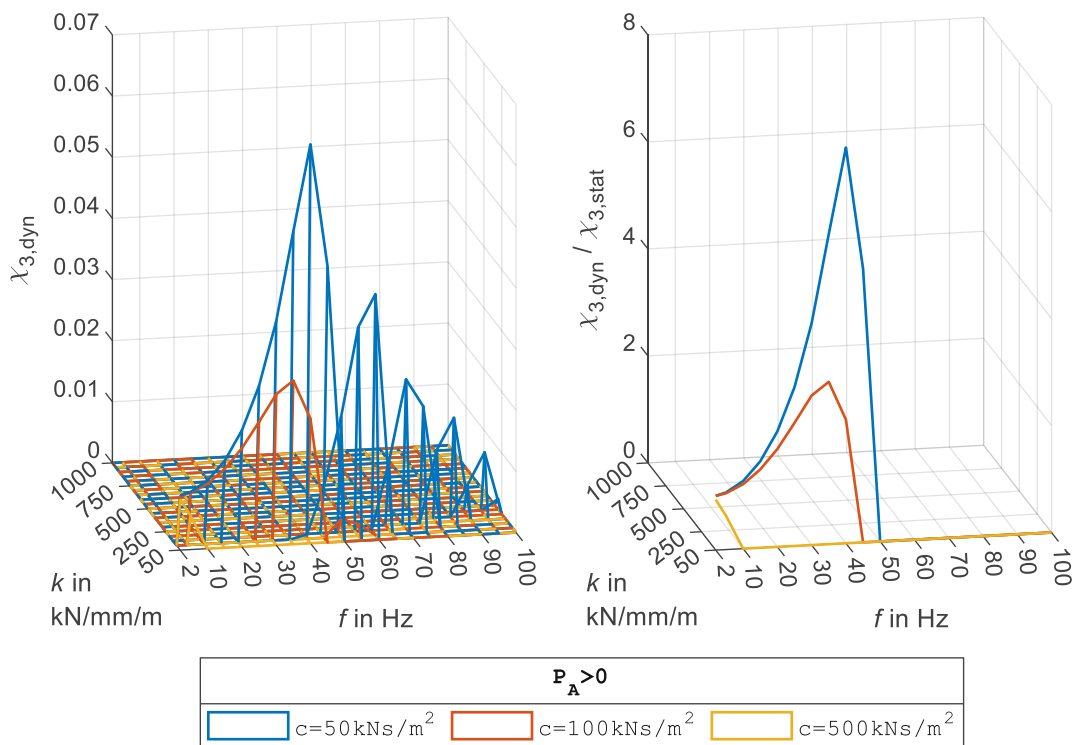


Abbildung 4.23: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{3,stat}$ (rechts) für die linearen Federkennlinien

Gemäß den linken Darstellungen in Abbildung 4.20 bis Abbildung 4.23 sind die bezogenen Einzelkräfte $\chi_{j,\text{dyn}}$ des hier betrachteten Systems mit einer linearen Federkennlinie sowohl von der Anregungsfrequenz f als auch von der Bettungssteifigkeit k und der Dämpfungskonstanten c abhängig. Die angesetzte Achslastamplitude P_A hat hingegen keinen Einfluss auf die Ergebnisse.

Dieselben Abhängigkeiten betreffen auch das Verhältnis der bezogenen Einzelkräfte des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{j,\text{dyn}}$ und $\chi_{j,\text{stat}}$ gemäß dem rechten Teil in Abbildung 4.20 bis Abbildung 4.23 sowie gemäß den detaillierten Darstellungen in Abbildung 4.24 bis Abbildung 4.26. Die bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,\text{dyn}}$ weist demnach die größten Unterschiede zur zugehörigen bezogenen Einzelkraft des statischen Lastmodells auf und kann sowohl deutlich größer als auch deutlich kleiner als diese sein. Das Verhältnis der Einzelkräfte $\chi_{2,\text{dyn}} / \chi_{2,\text{stat}}$ ist allerdings nur bis zur Steifigkeit k von 450 kN/mm/m verfügbar und wird dementsprechend lediglich für diesen Steifigkeitsbereich dargestellt, vgl. Abbildung 4.22. Das Verhältnis $\chi_{3,\text{dyn}} / \chi_{3,\text{stat}}$ kann hingegen aufgrund der beschränkten statischen Lastverteilung nur für die Steifigkeit k von 50 kN/mm/m angezeigt werden, vgl. Abbildung 4.23.

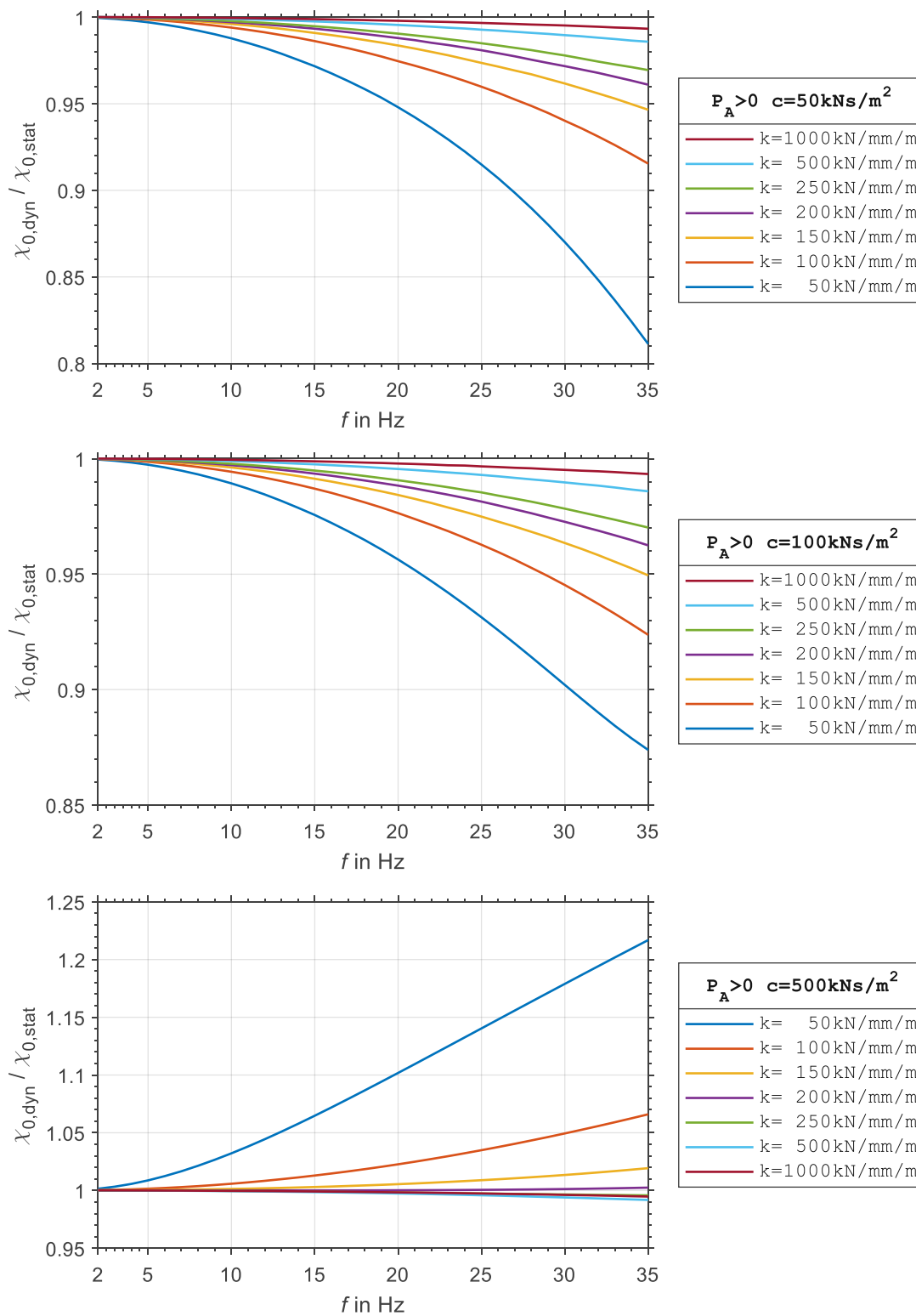


Abbildung 4.24: Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{0,stat}$ für die linearen Federkennlinien und die Dämpfungs-konstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² (detailliert)

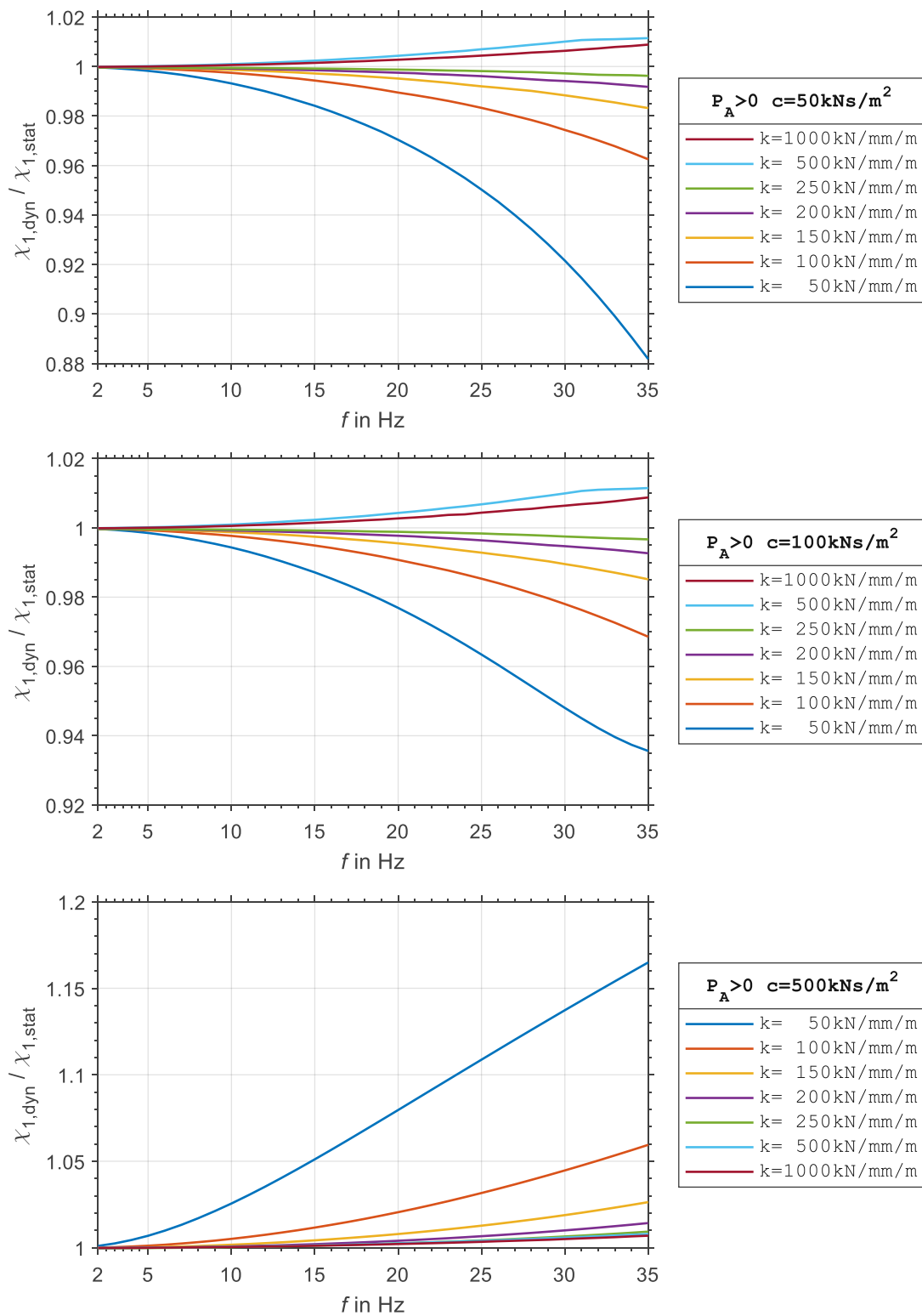


Abbildung 4.25: Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{1,stat}$ für die linearen Federkennlinien und die Dämpfungs-konstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² (detailliert)

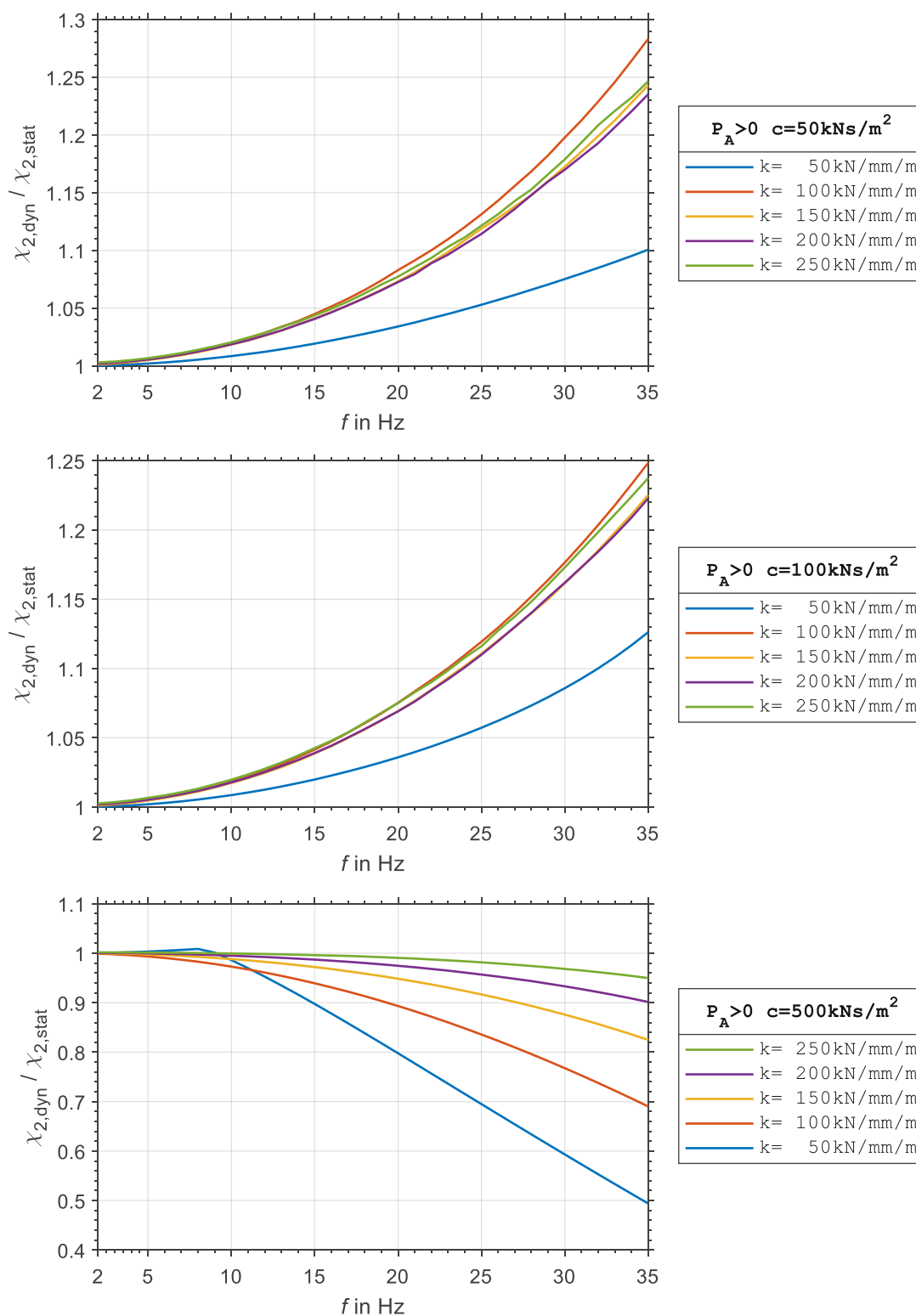


Abbildung 4.26: Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{2,stat}$ für die linearen Federkennlinien und die Dämpfungs-konstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² (detailliert)

Abbildung 4.27 und Abbildung 4.28 zeigen den Verlauf der Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz f und der Bettungssteifigkeit k für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m².

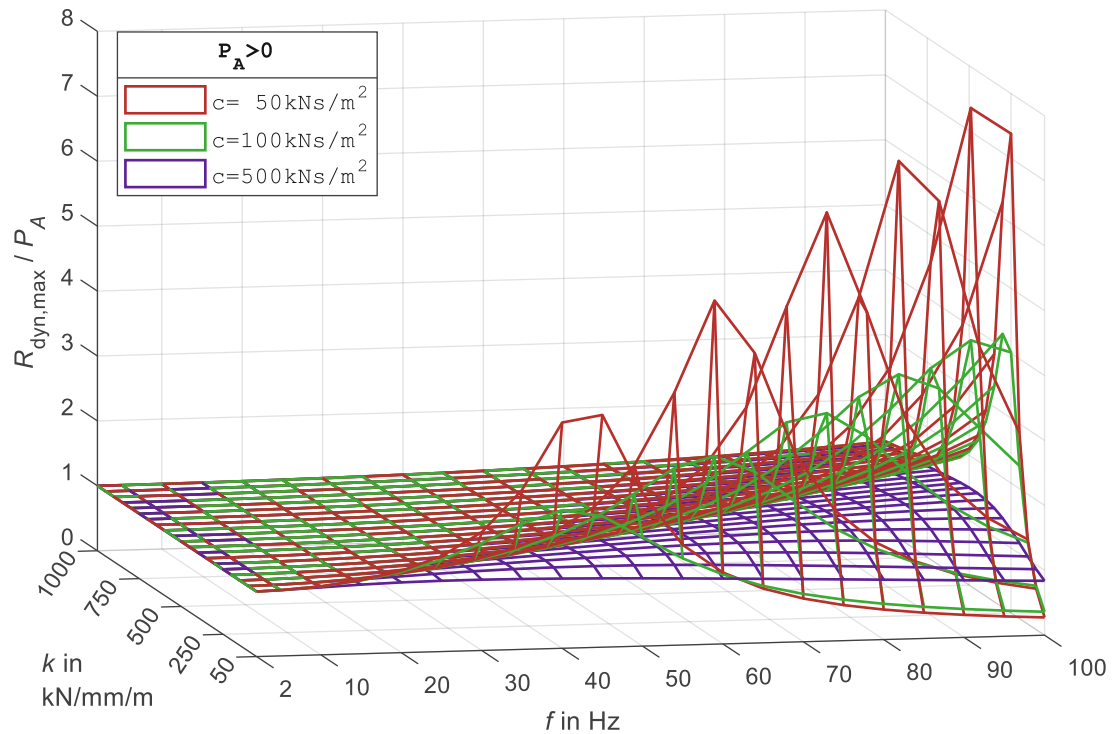


Abbildung 4.27: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² und die linearen Federkennlinien (Übersicht)

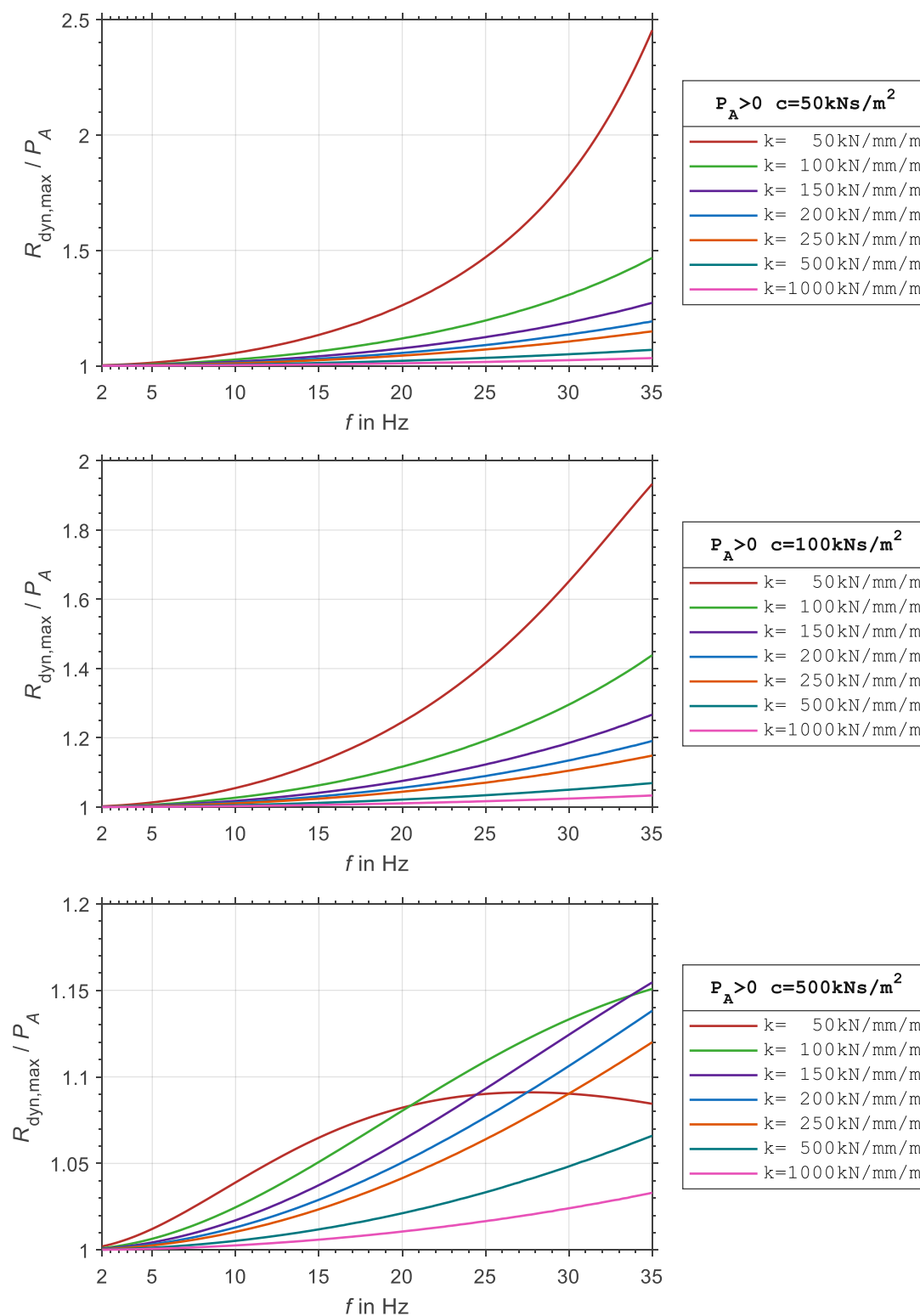


Abbildung 4.28: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² und die linearen Federkennlinien (detailliert)

4.4 Dynamische Berechnung des Systems mit der versuchsbasierten Federkennlinie nach der Potenzfunktion

Nach der anfänglichen Festlegung der Federkennlinie und der Herleitung der zugehörigen Bewegungsgleichung werden in diesem Abschnitt, in Anlehnung an die in Abschnitt 4.3 erarbeiteten Definitionen und Verfahren, die Berechnungsergebnisse für die Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$, der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$, der Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ und der Reaktionskraft $R_{\text{dyn,max}}$ sowie die bezogenen Lastmodell-Einzelkräfte $\chi_{j,\text{dyn}}$ für das System mit der Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion präsentiert.

4.4.1 Definition der Federungskraft und Anpassung der Bewegungsgleichung

Die auf den Ergebnissen von *Stollwitzer et al.* [15] basierte degressive Potenzfunktion für die Federkennlinie des Schotterbetts, die in Abbildung 3.25 in Kapitel 3 als „degressive Regression“ gekennzeichnet ist, impliziert bei der Annahme eines punktsymmetrischen Kraft-Weg-Diagramms die folgende vertikale Federungskraft der Schotterbettung im dynamischen Lastfall (vgl. Gl. (3.48) für den statischen Lastfall):

$$N_F(x, t) = \begin{cases} k_P |w(x, t)|^{0,8329} & \text{für } w(x, t) \geq 0 \\ -k_P |w(x, t)|^{0,8329} & \text{für } w(x, t) < 0 \end{cases} \quad (4.62)$$

$$k_P = 64,492 \text{ kN/m/mm}^{0,8329} \quad (4.63)$$

k_P ... Beiwert für die Potenzfunktion der versuchsbasierten Federkennlinie

Gl. (4.62) müsste für die Knoten des vorliegenden diskretisierten Gleisbalkens wie folgt umformuliert werden:

$$\mathbf{N}_F = \begin{pmatrix} N_{F,0} \\ N_{F,1} \\ \vdots \\ N_{F,n} \end{pmatrix} = k_P \begin{pmatrix} \text{sgn}(w_0) |w_0|^{0,8329} \\ \text{sgn}(w_1) |w_1|^{0,8329} \\ \vdots \\ \text{sgn}(w_n) |w_n|^{0,8329} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Die Untergrundreaktion $\mathbf{N}$ des Systems mit der Federkennlinie nach der versuchsbasierten Potenzfunktion ergibt sich als Summe aus der degressiven Federungskraft $\mathbf{N}_F$ nach Gl. (4.64) und der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskraft $\mathbf{N}_D$ nach Gl. (4.42):

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix} = \mathbf{N}_F + \mathbf{N}_D = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(w_0) k_P |w_0|^{0,8329} + c v_0 \\ \operatorname{sgn}(w_1) k_P |w_1|^{0,8329} + c v_1 \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(w_n) k_P |w_n|^{0,8329} + c v_n \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

Die Summe in Gl. (4.65) kann für die Verwendung in Gl. (4.43) in das folgende Blockmatrix-Format übergeführt werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_D \end{bmatrix} = k_P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \operatorname{sgn}(w_0) |w_0|^{0,8329} \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(w_n) |w_n|^{0,8329} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Das Einsetzen von Gl. (4.66) in die Bewegungsgleichung (4.43) erzeugt das gesuchte Bewegungsgleichungssystem für den Gleisbalken mit der versuchsbasierten degressiven Federkennlinie des Schotterbetts, vgl. Gl. (4.67):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = -k_P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \operatorname{sgn}(w_0) |w_0|^{0,8329} \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(w_n) |w_n|^{0,8329} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{Q} & -c\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

4.4.2 Ergebnisse für die Gleisverformung und die Untergrundreaktion des dynamischen Systems mit der Federkennlinie nach der Potenzfunktion

Tabelle 4.4 gibt die Kennwerte an, für welche im Folgenden die Setzungen, Untergrundreaktionen und Lastverteilungslängen des Systems mit der Federkennlinie nach der degressiven Potenzfunktion ausgewertet werden.

Tabelle 4.4: Kennwerte zur dynamischen Berechnung des Systems mit der Federkennlinie nach der versuchsbasierten Potenzfunktion

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises aus zwei Schienen 60E1
μ	0,6667	t/m	Massenbelegung des Gleises (60 kg/m pro Schiene und 328 kg pro Betonschwelle im 60 cm-Abstand)
k_P	64,492	kN/mm ^{0,8329} /m	Beiwert für die Potenzfunktion der kontinuierlichen Federungskraft
c	50, 100, 500	kNs/m ²	kontinuierliche Schotterbettdämpfung
P_A	25 – 250	kN	Achslast-Amplitude
f	2 – 100	Hz	Anregungsfrequenz
h	5	cm	Diskretisierungspunkt-Abstand
L	40	m	Gleisbalkenlänge

Wie sich die eingeschwungenen Setzungs- und Bodendruckamplituden an der Laststelle $w_{0,dyn,max}$ und $N_{0,dyn,max}$ mit der Anregungsfrequenz f und Lastamplitude P_A ändern, ist Abbildung 4.29 zu entnehmen. Im Allgemeinen bewirkt die steigende Achslastamplitude einen Zuwachs in den Setzungs- und Bodendruckamplituden. Die vom Rest stark abweichenden Ergebnisverläufe für den Extremwert der Dämpfung von 500 kNs/m² wird durch einen Übergang von der dominanten setzungsabhängigen Federungskraft zur dominanten geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskraft verursacht.

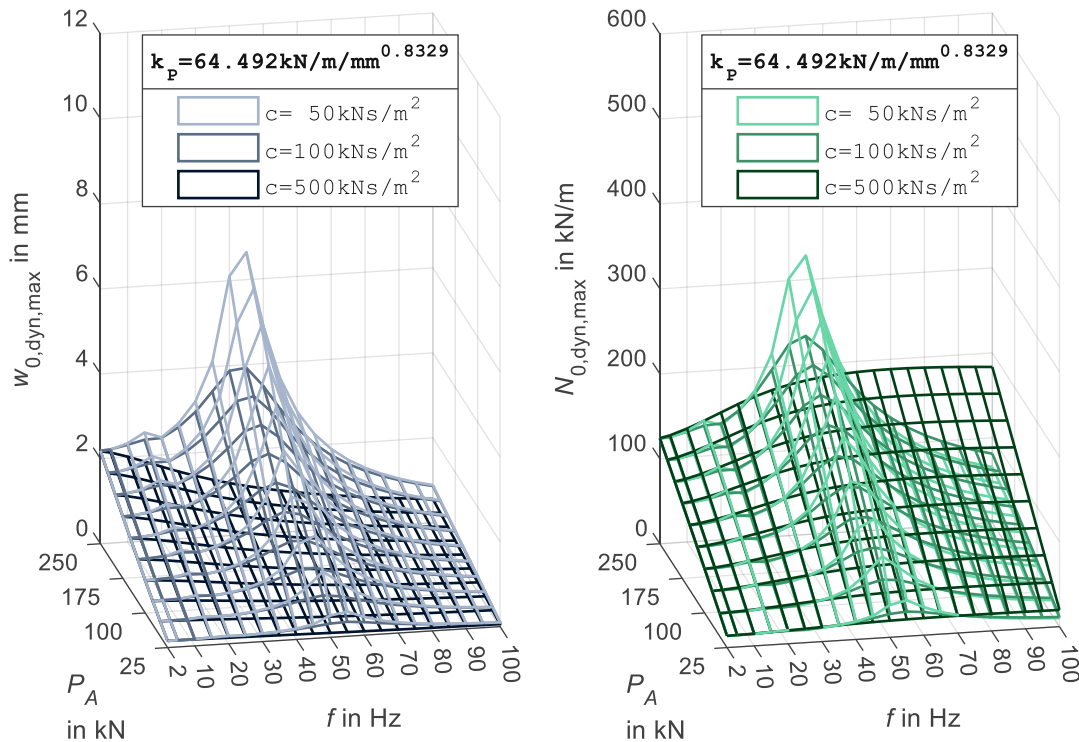


Abbildung 4.29: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Kraftangriffsstelle für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion

Abbildung 4.30 bis Abbildung 4.32 zeigen, in welcher Relation die errechneten Amplituden der Setzung und des Bodendrucks des dynamischen Systems $w_{0,dyn,max}$ und $N_{0,dyn,max}$ zu den zugehörigen statischen Ergebnissen $w_{0,stat}$ und $N_{0,stat}$ stehen. So können die dynamischen Abhängigkeiten isoliert werden, die sich bei den absoluten Ergebnissen nach Abbildung 4.29 mit anderen, allgemeinen Zusammenhängen vermischen (wie „größere Setzungen für größere Lasten“). Demnach ist das Verhältnis „dynamisch/statisch“ für die Federkennlinie nach der degressiven Potenzfunktion im Großen und Ganzen - die Resonanzspitze ausgenommen - näherungsweise lastunabhängig und wird in erster Linie von der Anregungsfrequenz f und Dämpfungskonstanten c beeinflusst. In diesem Sinne verhält sich das System im unterresonanten Bereich der Anregungsfrequenz analog jenem mit einer linearen Federkennlinie (vgl. Abbildung 4.15). Im überresonanten Frequenzbereich passiert jedoch ein Abfall der dynamischen Setzungs- und Druckvergrößerungsfaktoren bei wachsender Lastamplitude (zum Beispiel von etwa 3,5 auf 2,8 für die Setzung bzw. von 3,0 auf ungefähr 2,4 für den Bodendruck bei der Dämpfungskonstanten c von 50 kNs/m²). Erkennbar ist zudem eine geringe Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Lastamplitude, die für die Dämpfungskonstanten c von 50 und 100 kNs/m² bei zunehmender Lastamplitude von etwa 55 auf ungefähr 45 Hz sinkt.

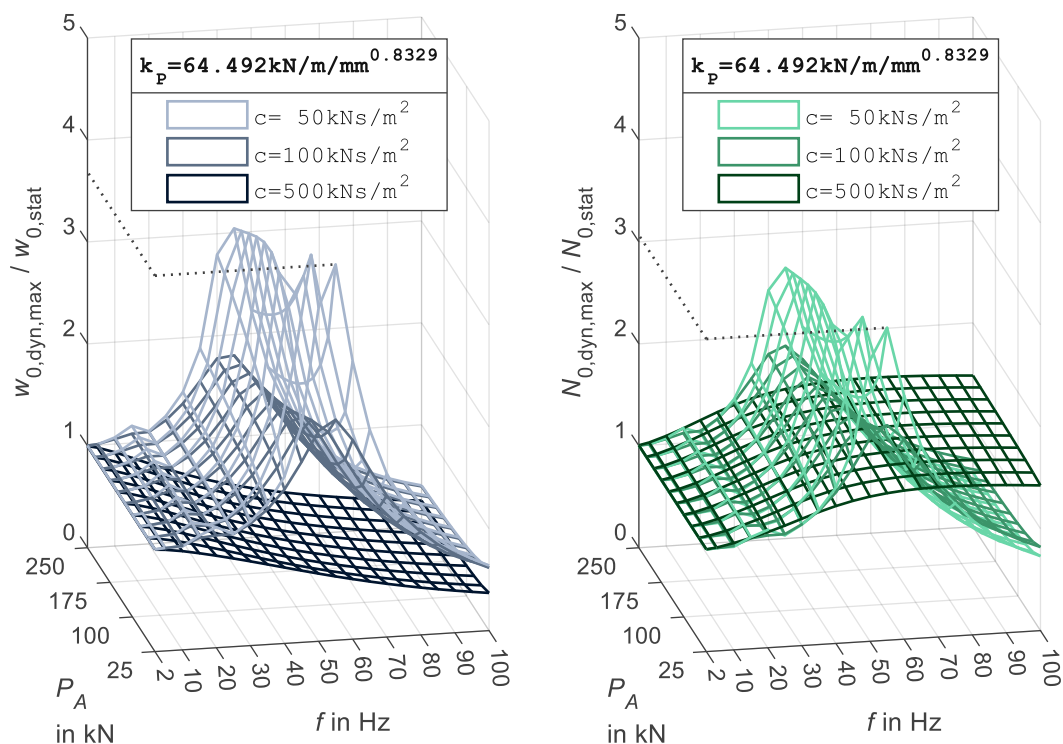


Abbildung 4.30: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ zu den statischen Setzung $w_{0,stat}$ und Untergrundreaktion $N_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion (Übersicht)

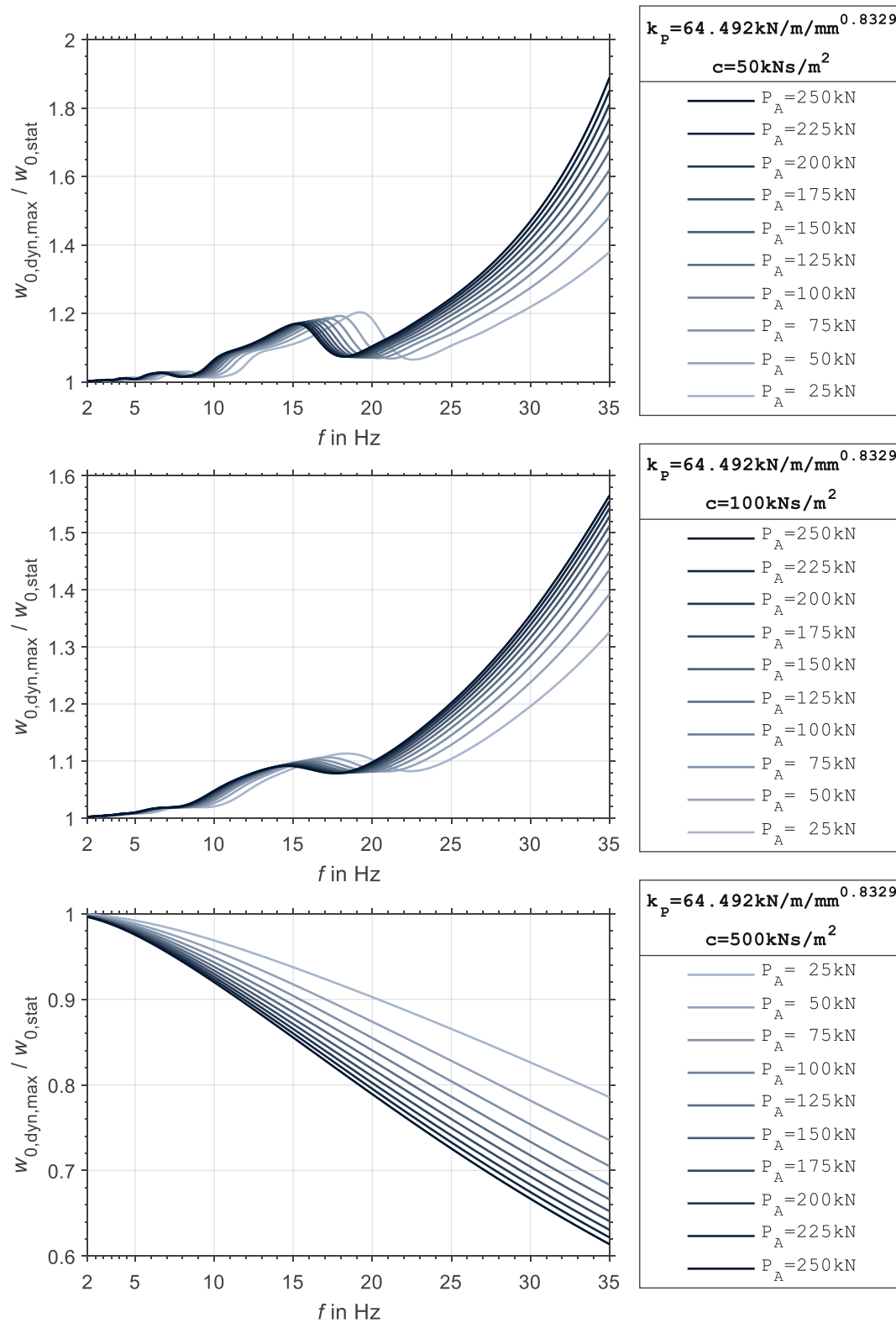


Abbildung 4.31: Verhältnis der eingeschwungenen Amplitude der Setzung $w_{0,dyn,max}$ zur statischen Setzung $w_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² und die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion (detailliert)

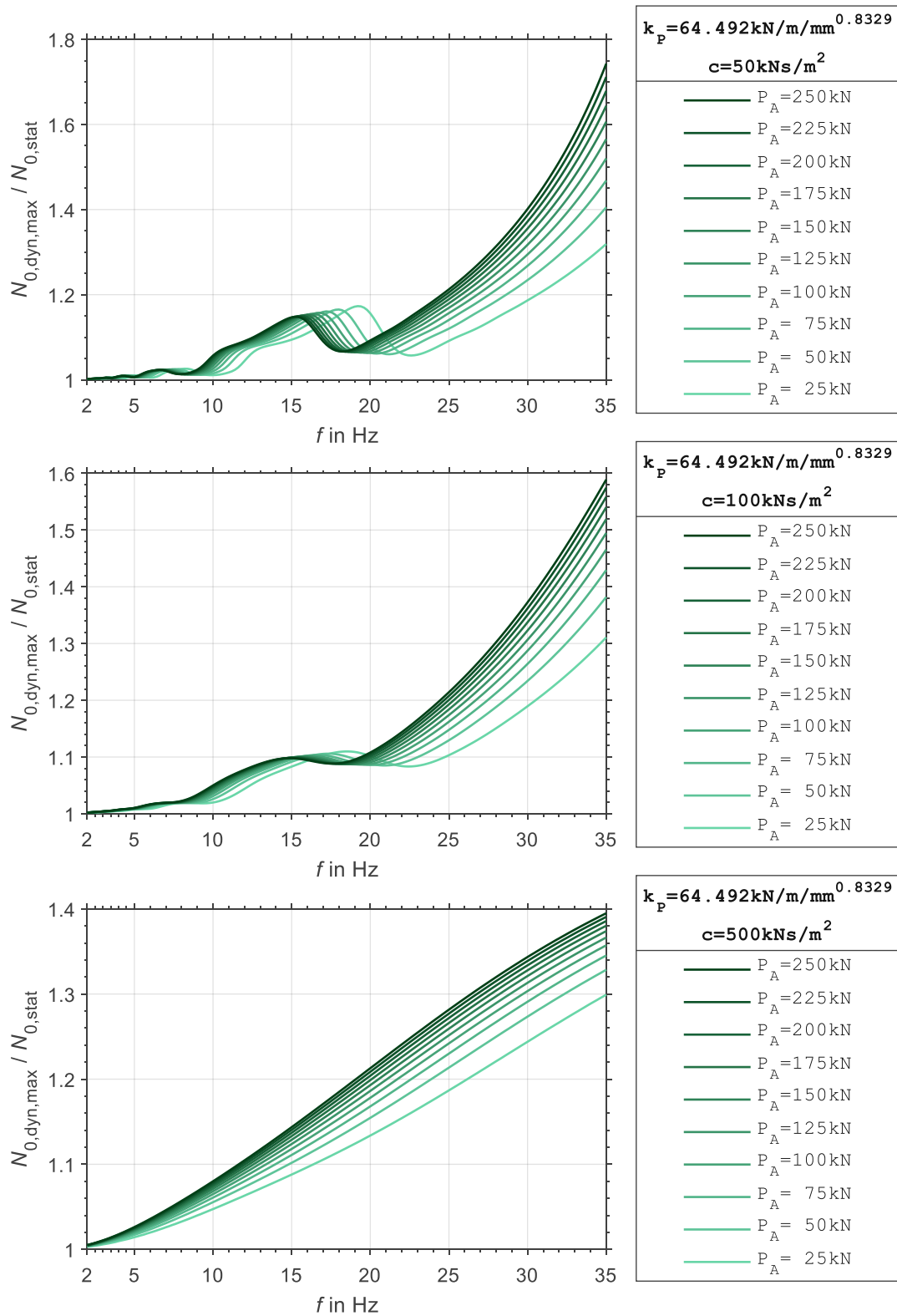


Abbildung 4.32: Verhältnis der eingeschwungenen Amplitude der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ zur statischen Untergrundreaktion $N_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² und die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion (detailliert)

Der ebenfalls fast lastunabhängige Amplitudenverlauf der Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ ist in Abbildung 4.33 und Abbildung 4.34 ersichtlich. Dieser Verlauf betrifft sowohl den absoluten Wert der Amplitude als auch ihre Relation zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$. Im unterresonanten Bereich der Anregungsfrequenz, in Abhängigkeit der Lastamplitude P_A unter 40 oder 50 Hz, ist die dynamische Lastverteilungslängenamplitude für die „mäßigen“ Dämpfungen von 50 und 100 kNm/s² stets größer als deren statischer Wert. Sie erreicht bei der Resonanzfrequenz von 40 oder 50 Hz ihr Maximum (mit dem Verhältnis „dynamisch/statisch“ von 1,3-1,4) und wird bei der zunehmenden Frequenz im überresonanten Bereich (über 50 Hz) immer kleiner. Im Gegensatz dazu bewirkt die „übermäßige“ Dämpfung von 500 kNm/s² einen abfallenden Verlauf gegen die wachsende Frequenz sowohl der absoluten Amplitude als auch deren Relation zur statischen Lastverteilungslänge im gesamten ausgewerteten Frequenzbereich. Das dynamische Verhaltensmuster des linearen Systems nach Abbildung 4.18 wird somit im Wesentlichen wiederholt.

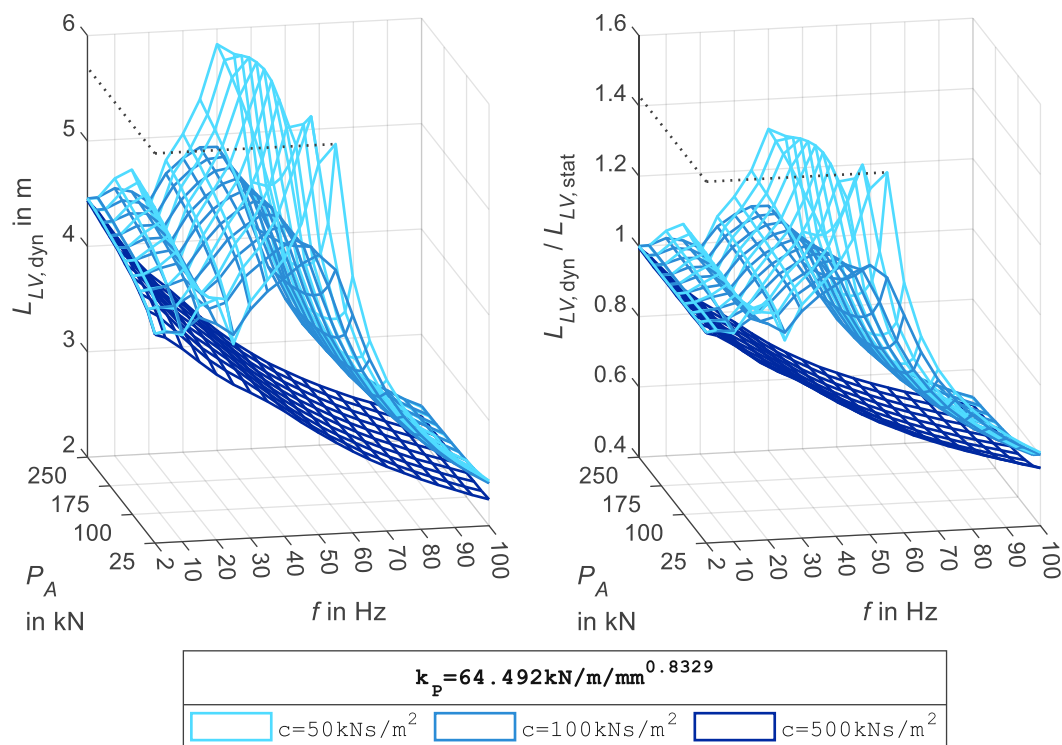


Abbildung 4.33: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ (zum Zeitpunkt des maximalen eingeschwungenen Bodendrucks $N_{0,dyn,max}$) sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion (Übersicht)

Aufgrund der linearen Interpolation der Untergrundreaktionslinie $N(x,t)$ zwischen den im gewählten gegenseitigen Abstand von 5 cm stehenden Diskretisierungspunkten x_i (vgl. Unterabschnitt 4.2.1), welche als Basis zur Bestimmung der Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ dient, zeigen die detaillierten Darstellungen für die entsprechend feinen Frequenzschritten in Abbildung 4.34 eine als Wellenlinie erscheinende Ungenauigkeit der Ergebnisse.

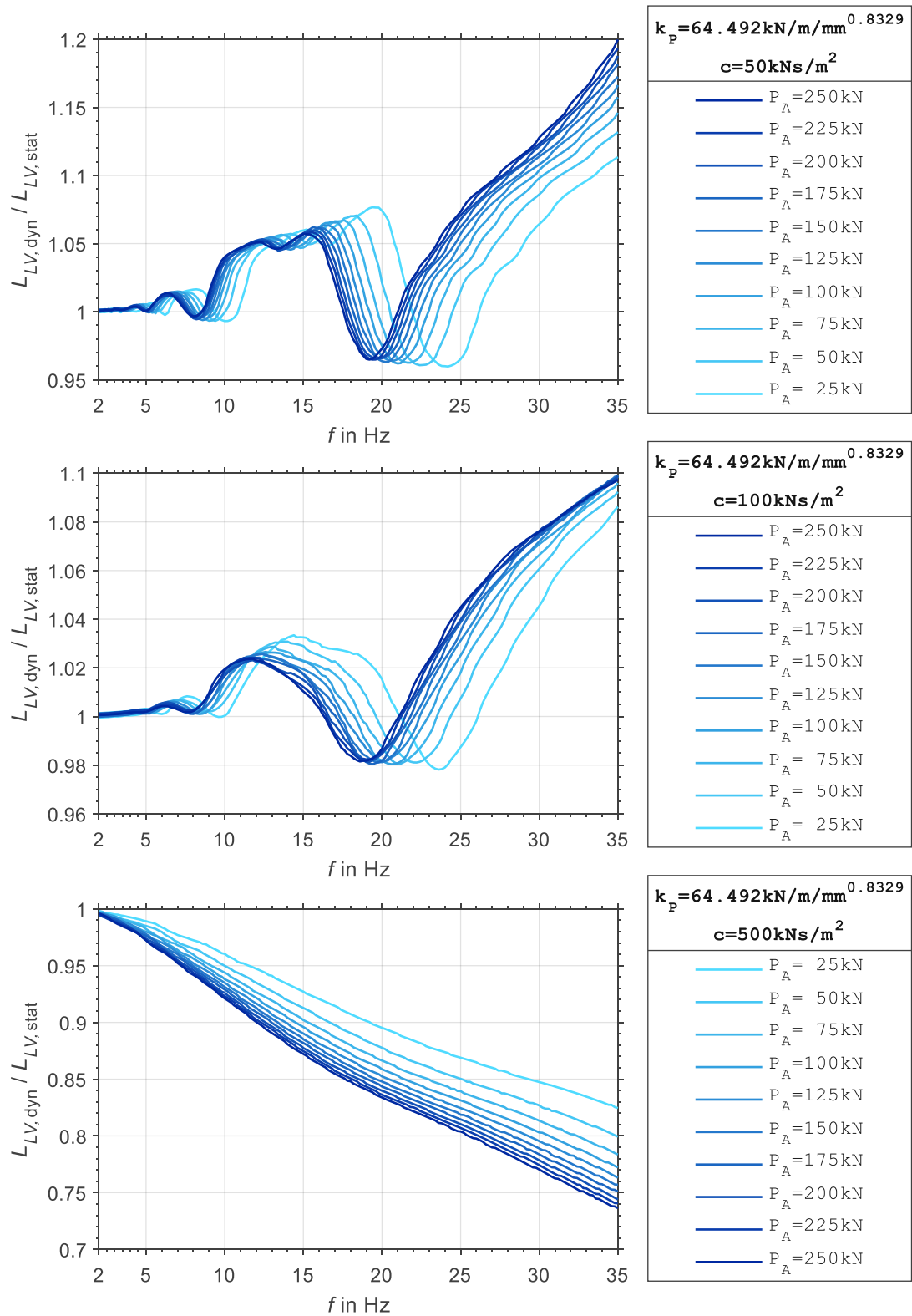


Abbildung 4.34: Verhältnis der dynamischen Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² und die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion (detailliert)

4.4.3 Ergebnisse für die Einzelkräfte des dynamischen Lastmodells beim System mit der Federkennlinie nach der Potenzfunktion

Die Verläufe der gemäß Gl. (4.60) und Gl. (4.61) in Unterabschnitt 4.3.6 definierten bezogenen Einzelkräfte des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{j,\text{dyn}}$ und $\chi_{j,\text{stat}}$ sind für den nach der Potenzfunktion degressiv gefederten Gleisbalken mit den Kennwerten nach Tabelle 4.4 in Abbildung 4.35 bis Abbildung 4.41 veranschaulicht. Die bezogenen Einzelkraftamplituden $\chi_{j,\text{dyn}}$ weisen eine deutliche Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz f und im Allgemeinen eine geringfügige Abhängigkeit von der Achslastamplitude P_A auf, vgl. Abbildung 4.39 bis Abbildung 4.41. Aufgrund der gemäß Gl. (4.58) und Gl. (4.59) (Unterabschnitt 4.3.4) vorgenommenen Beschränkung der Einzelkräfte des Lastmodells fallen die äußeren bezogenen Einzelkräfte $\chi_{2,\text{dyn}}$ und $\chi_{3,\text{dyn}}$ bei höheren Frequenzen bis auf null ab, vgl. Abbildung 4.37 und Abbildung 4.38.

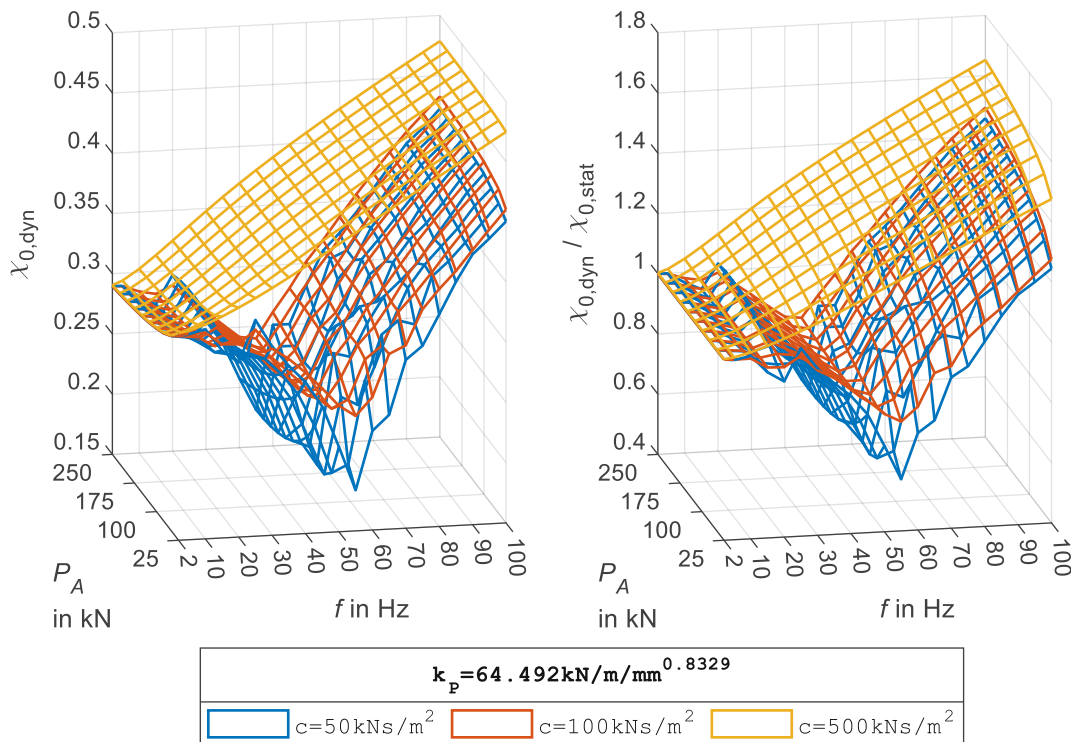


Abbildung 4.35: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{0,\text{stat}}$ (rechts) für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion

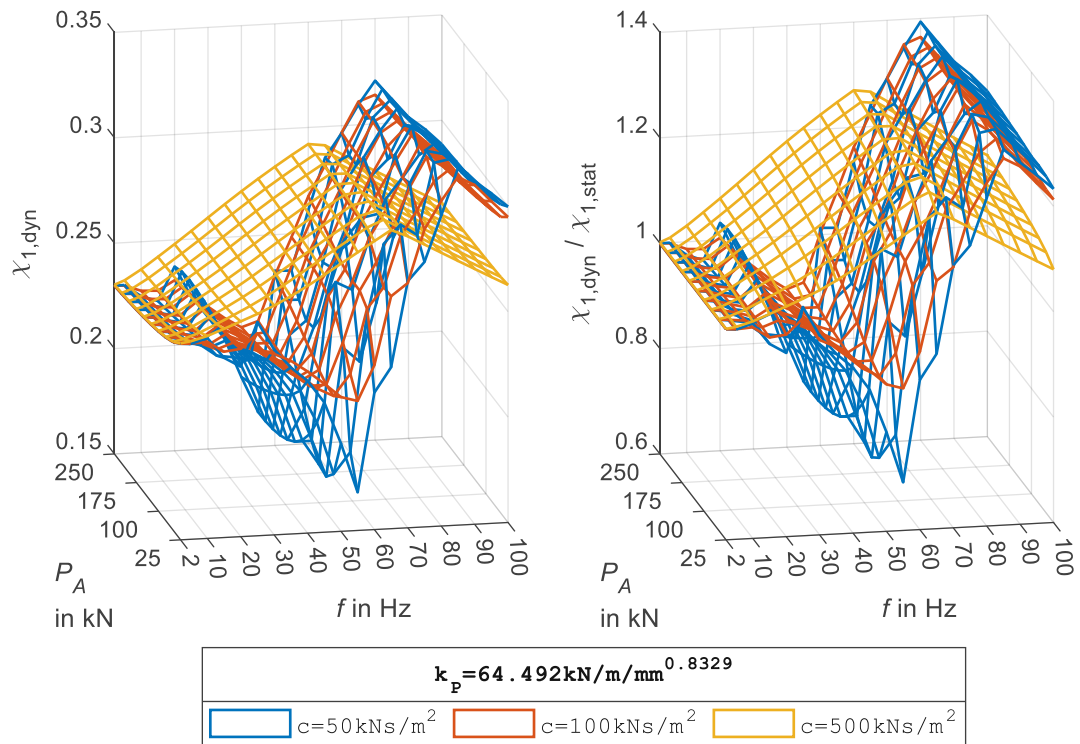


Abbildung 4.36: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{1,stat}$ (rechts) für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion

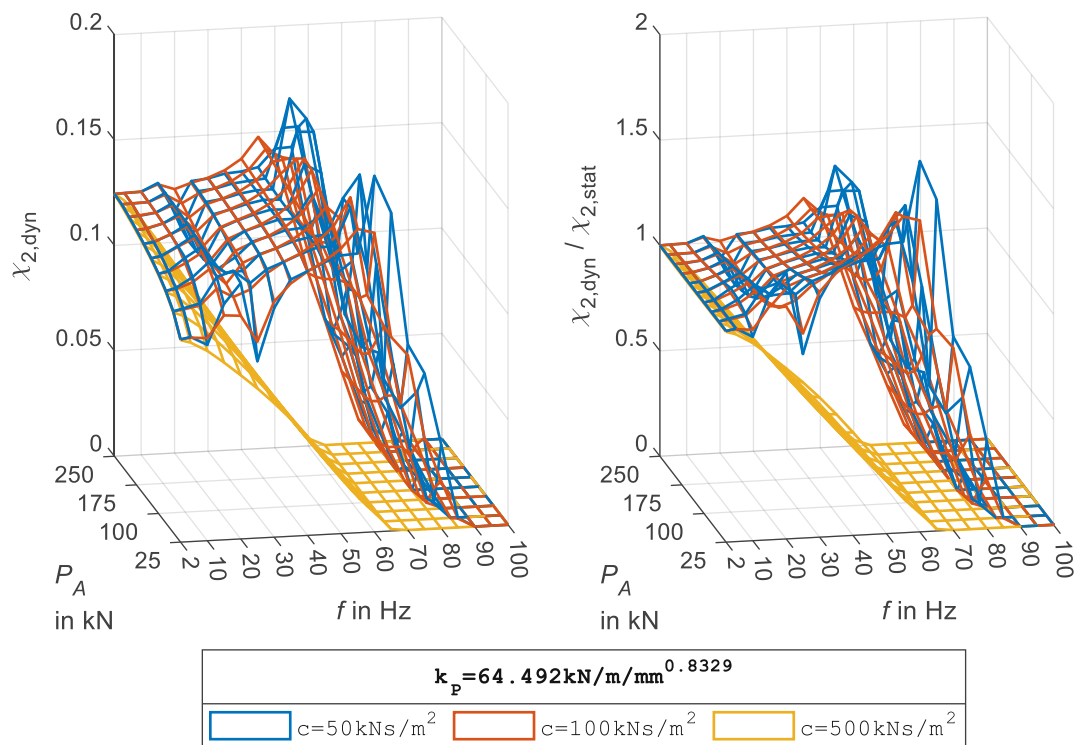


Abbildung 4.37: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{2,stat}$ (rechts) für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion

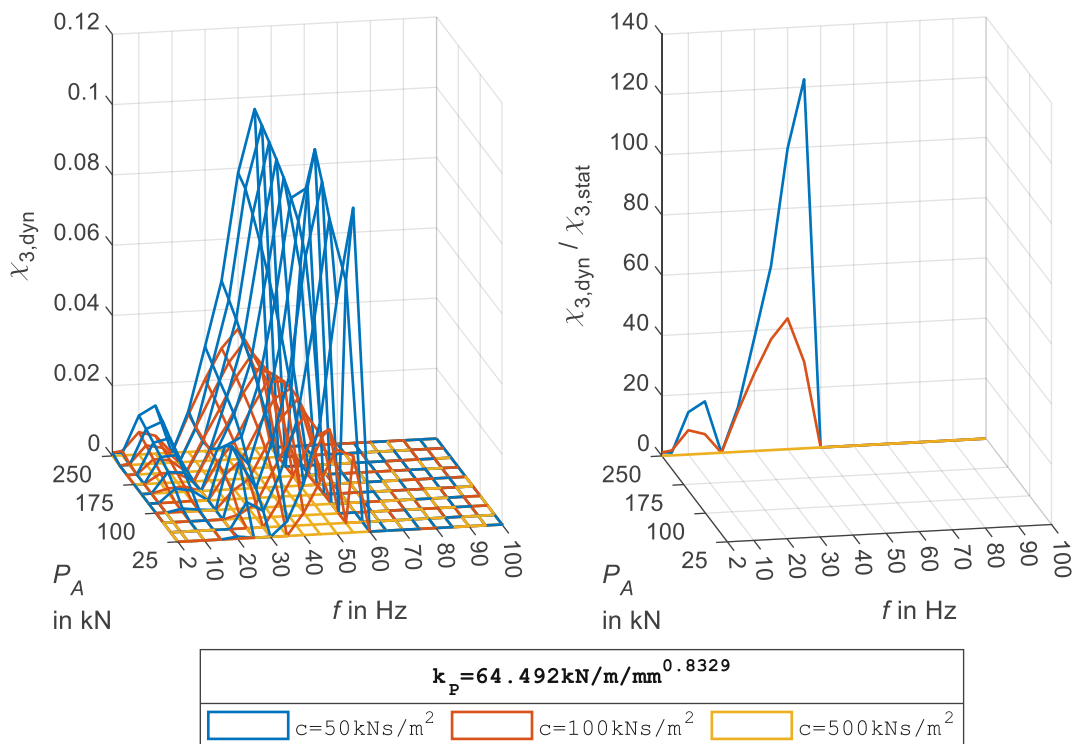


Abbildung 4.38: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,\text{dyn}}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{3,\text{stat}}$ (rechts) für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion

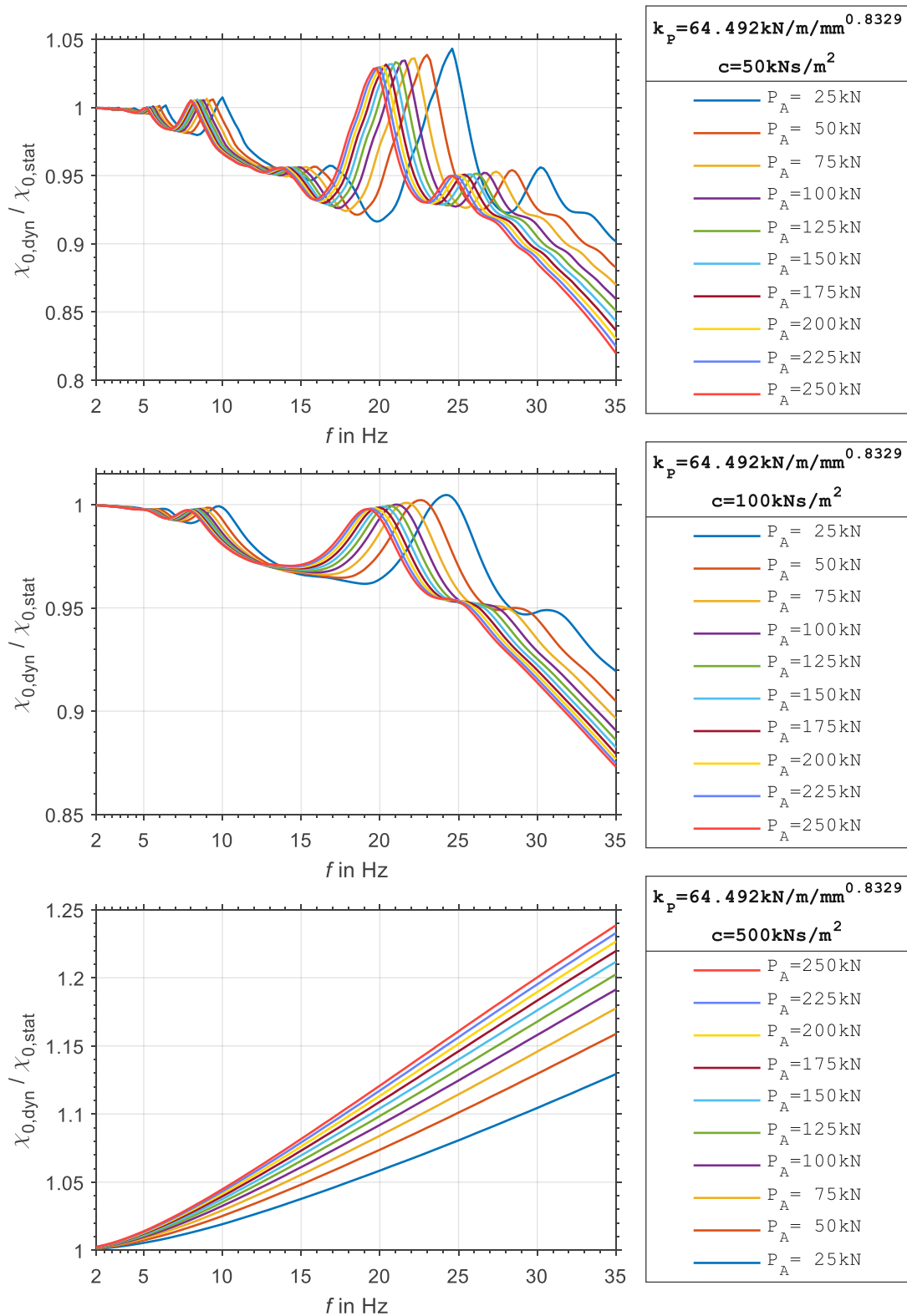


Abbildung 4.39: Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{0,stat}$ für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion und die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² (detailliert)

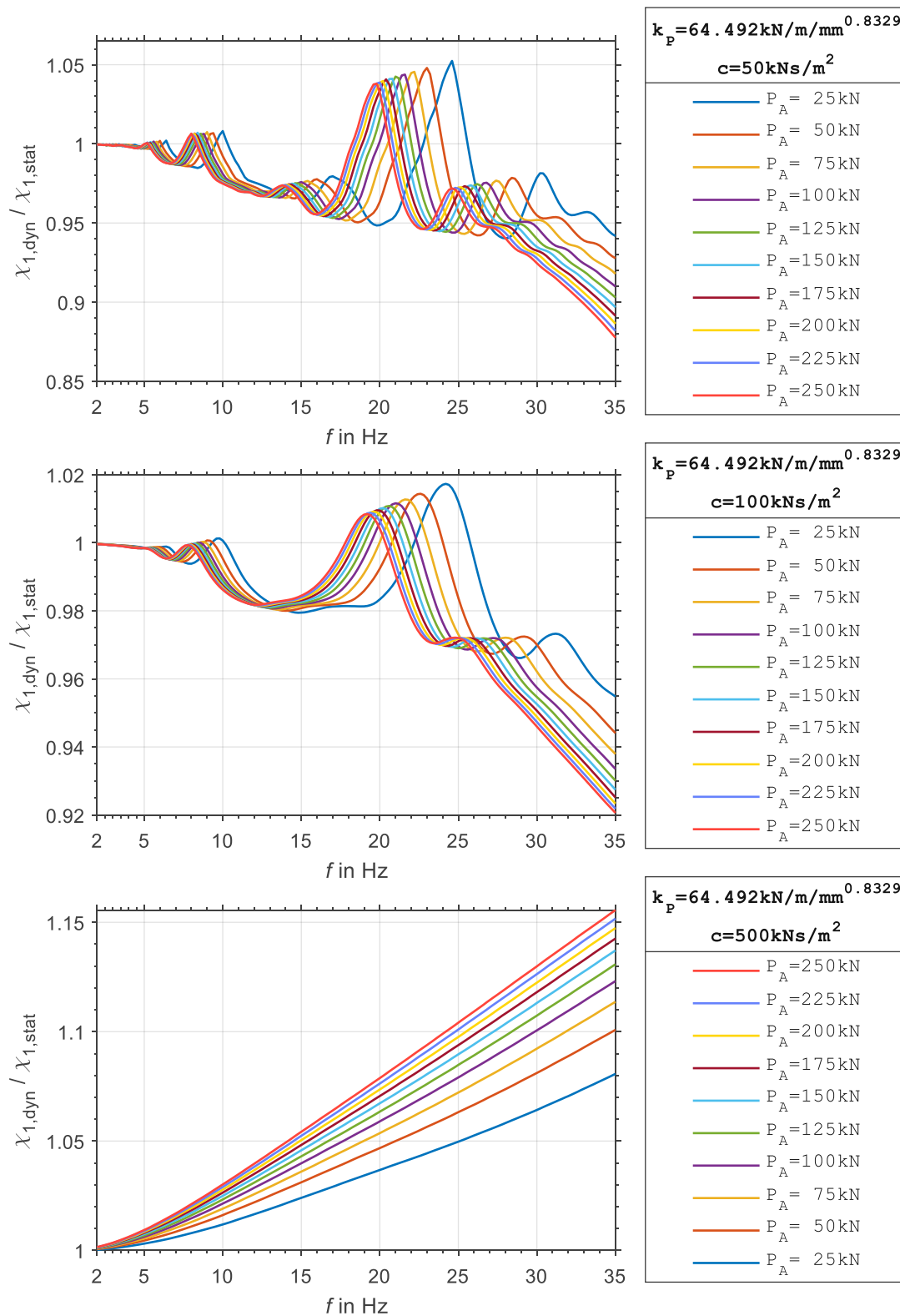


Abbildung 4.40: Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{1,stat}$ für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion und die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² (detailliert)

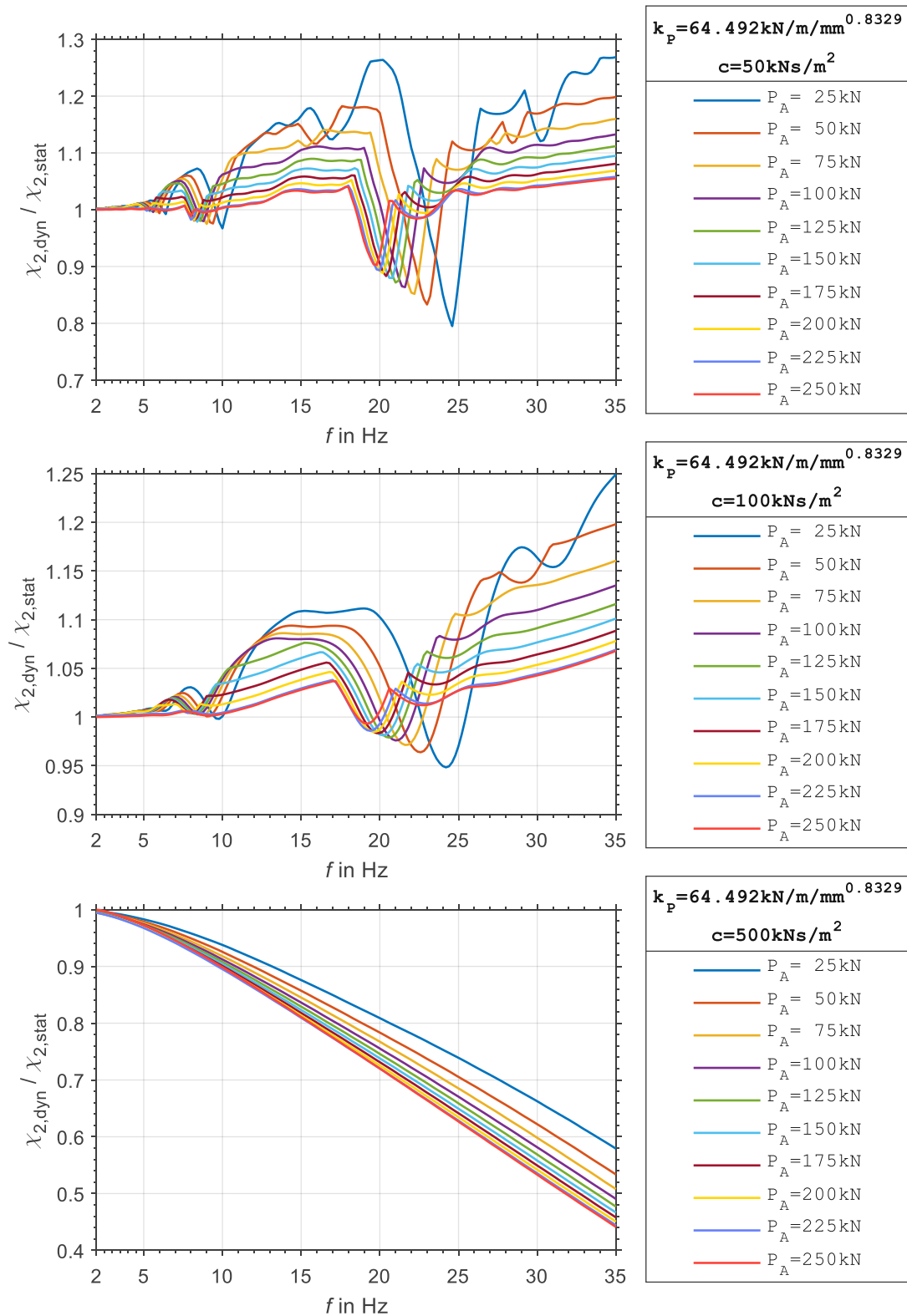


Abbildung 4.41: Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{2,stat}$ für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion und die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² (detailliert)

Abbildung 4.42 und Abbildung 4.43 zeigen den Verlauf der auf die Achslastamplitude P_A bezogenen Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m². Die bezogene Reaktionskraft weist im Einklang mit den bezogenen Einzelkräften $\chi_{j,\text{dyn}}$ eine geringfügige Abhängigkeit von der Achslastamplitude P_A auf.

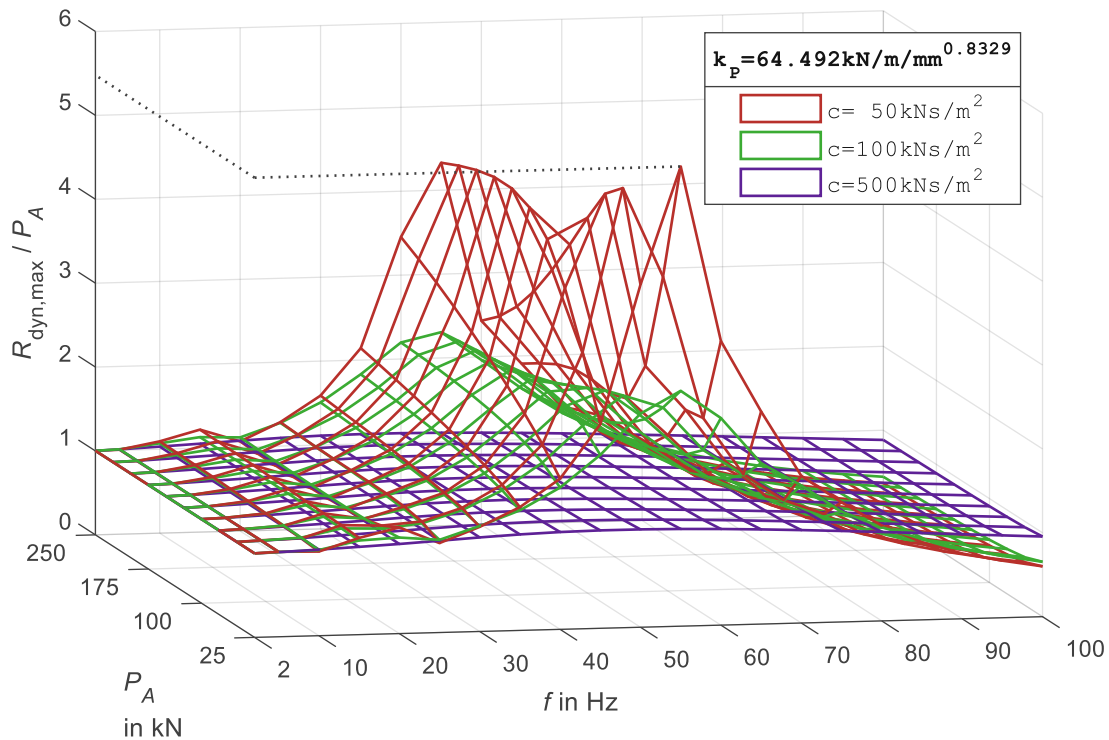


Abbildung 4.42: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² und die Federkennlinie nach der Potenzfunktion (Übersicht)

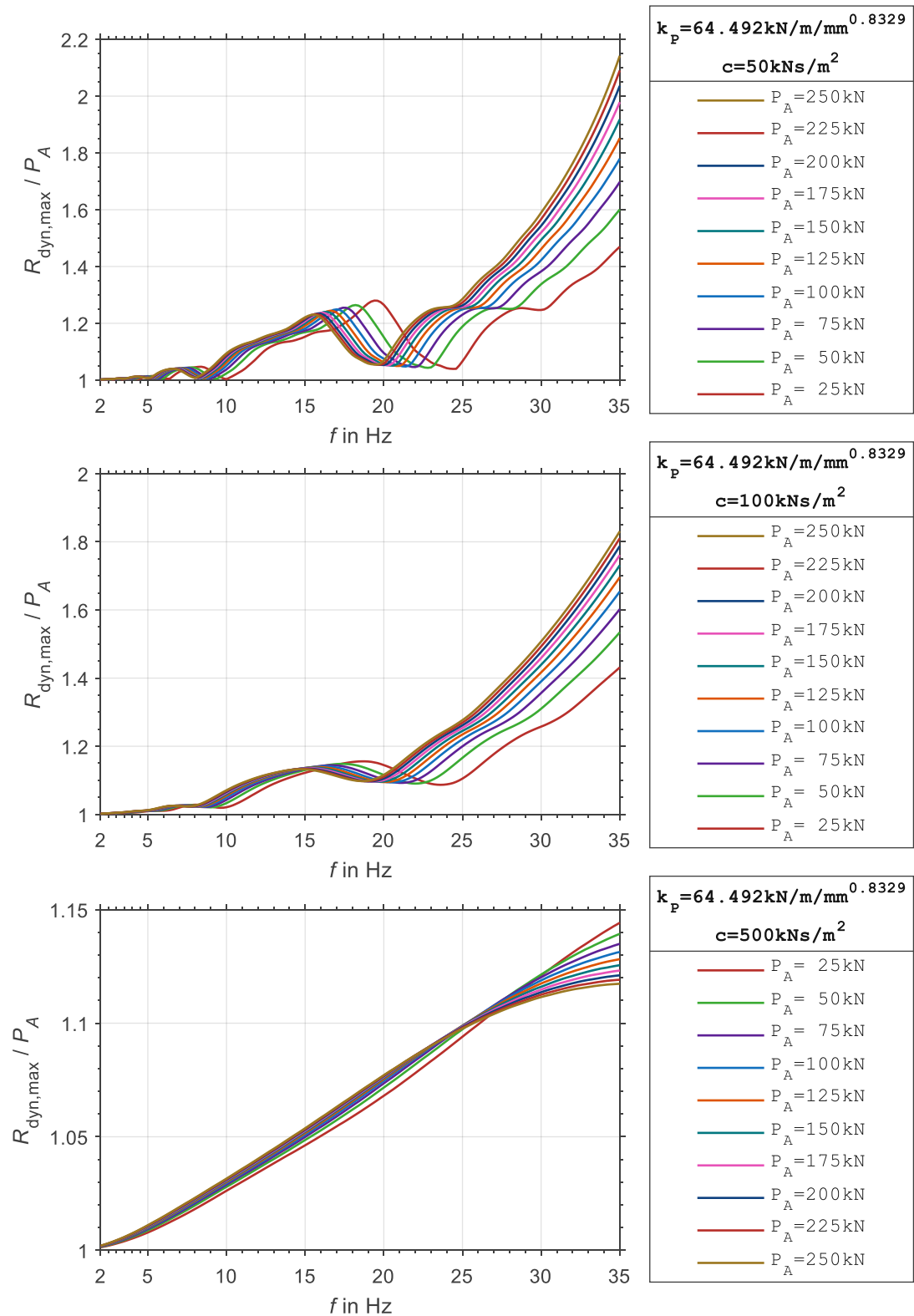


Abbildung 4.43: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m² und die Federkennlinie nach der Potenzfunktion (detailliert)

4.5 Dynamische Berechnung des Systems mit einer quadratischen Federkennlinie

Nach der anfänglichen Festlegung der Federkennlinie und der Herleitung der zugehörigen Bewegungsgleichung werden in diesem Abschnitt, in Anlehnung an die in Abschnitt 4.3 erarbeiteten Definitionen und Verfahren, die Berechnungsergebnisse für die Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$, der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$, der Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ und der Reaktionskraft $R_{\text{dyn,max}}$ sowie die bezogenen Lastmodell-Einzelkräfte $\chi_{i,\text{dyn}}$ für das System mit einer quadratischen Federkennlinie präsentiert.

4.5.1 Definition der Federungskraft und Anpassung der Bewegungsgleichung

Die quadratische Funktion für die Federungskraft des Schotterbetts $N_F(x,t)$ sei gemäß Gl. (4.68) definiert, wobei ein punktsymmetrisches Kraft-Weg-Diagramm mit dem negativen Zugkraftbereich (vgl. Abschnitt 4.1) angenommen wird:

$$N_F(x,t) = \begin{cases} k_q w(x,t)^2 & \text{für } w(x,t) \geq 0 \\ -k_q w(x,t)^2 & \text{für } w(x,t) < 0 \end{cases} \quad (4.68)$$

k_q ... Beiwert für die quadratische Funktion der Federungskraft

Die kontinuierliche Federungskraft $N_F(x,t)$ gemäß Gl. (4.68) kann für die in Abschnitt 4.2 erhaltenen diskreten Knoten folgendermaßen formuliert werden:

$$\mathbf{N}_F = \begin{pmatrix} N_{F,0} \\ N_{F,1} \\ \vdots \\ N_{F,n} \end{pmatrix} = k_q \begin{pmatrix} \text{sgn}(w_0) w_0^2 \\ \text{sgn}(w_1) w_1^2 \\ \vdots \\ \text{sgn}(w_n) w_n^2 \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

Die diskretisierte Untergrundreaktion $\mathbf{N}$ setzt sich aus der Federungskraft $\mathbf{N}_F$ gemäß Gl. (4.69) und der viskosen Dämpfungskraft $\mathbf{N}_D$ gemäß Gl. (4.42) wie folgt zusammen:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix} = \mathbf{N}_F + \mathbf{N}_D = \begin{pmatrix} \text{sgn}(w_0) k_q w_0^2 + c v_0 \\ \text{sgn}(w_1) k_q w_1^2 + c v_1 \\ \vdots \\ \text{sgn}(w_n) k_q w_n^2 + c v_n \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

Die Untergrundreaktion gemäß Gl. (4.70) wird für die verwendete Berechnungsmethode in die Blockmatrixform gemäß Gl. (4.71) übergeführt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_D \end{bmatrix} = k_q \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \operatorname{sgn}(w_0) w_0^2 \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(w_n) w_n^2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Gl. (4.71) ist ins Bewegungsgleichungssystem (4.43) einzusetzen, sodass das zur Berechnung des dynamischen Systems mit einer quadratischen Federkennlinie geeignete Bewegungsgleichungssystem gemäß Gl. (4.72) entsteht:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = -k_q \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \operatorname{sgn}(w_0) w_0^2 \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(w_n) w_n^2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{Q} & -c\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

4.5.2 Ergebnisse für die Gleisverformung und die Untergrundreaktion des dynamischen Systems mit einer quadratischen Federkennlinie

Tabelle 4.5 gibt die Kennwerte an, für welche im Folgenden die Setzungen, Untergrundreaktionen und Lastverteilungslängen ausgewertet werden.

Tabelle 4.5: Kennwerte zur dynamischen Berechnung des Systems mit einer quadratischen Federkennlinie

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm ²	Biegesteifigkeit des Gleises aus zwei Schienen 60E1
μ	0,6667	t/m	Massenbelegung des Gleises (60 kg/m pro Schiene und 328 kg pro Betonschwelle im 60 cm-Abstand)
k_q	50 – 1000	kN/mm ² /m	Beiwert für die quadratische Funktion der kontinuierlichen Federungskraft
c	50, 100, 500	kNs/m ²	kontinuierliche Schotterbettdämpfung
P_A	25, 125, 250	kN	Achslast-Amplitude
f	2 – 100	Hz	Anregungsfrequenz
h	5	cm	Diskretisierungspunkt-Abstand
L	40	m	Gleisbalkenlänge

In Abbildung 4.44 bis Abbildung 4.46 sind die Verläufe der eingeschwungenen Setzungs- und Bodendruckamplituden an der Laststelle $w_{0,dyn,max}$ und $N_{0,dyn,max}$ für unterschiedliche Federkraftbeiwerte k_q , Anregungsfrequenzen f und Dämpfungskonstanten c gezeigt.

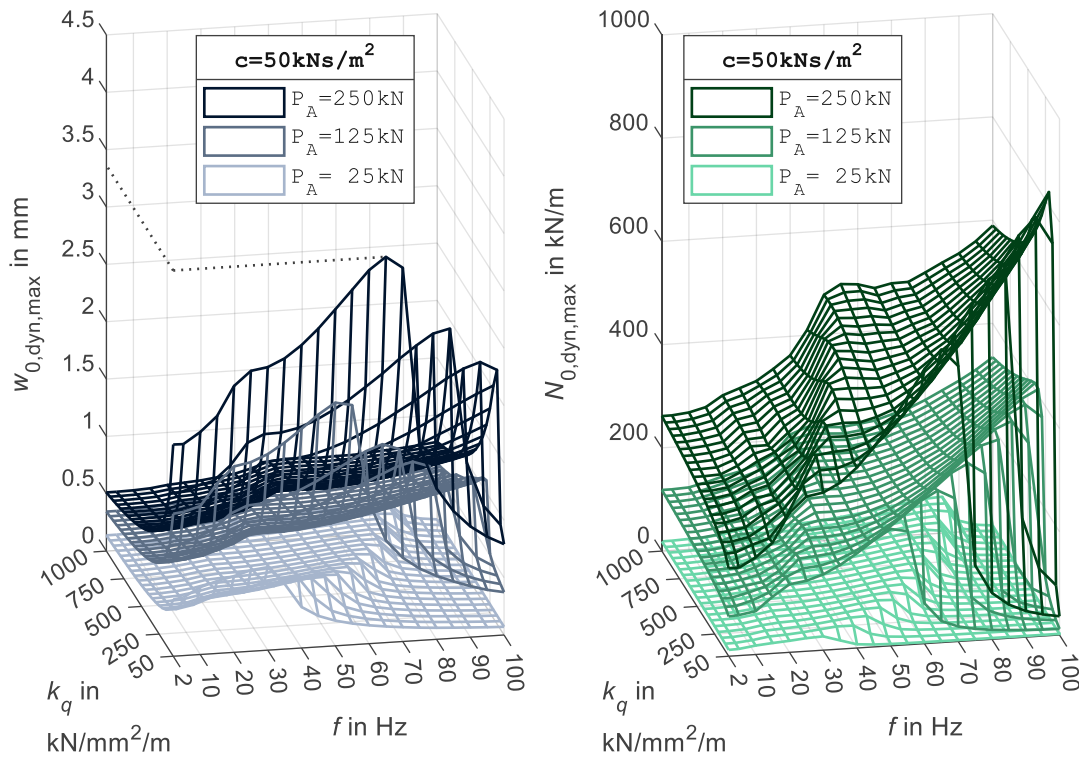


Abbildung 4.44: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

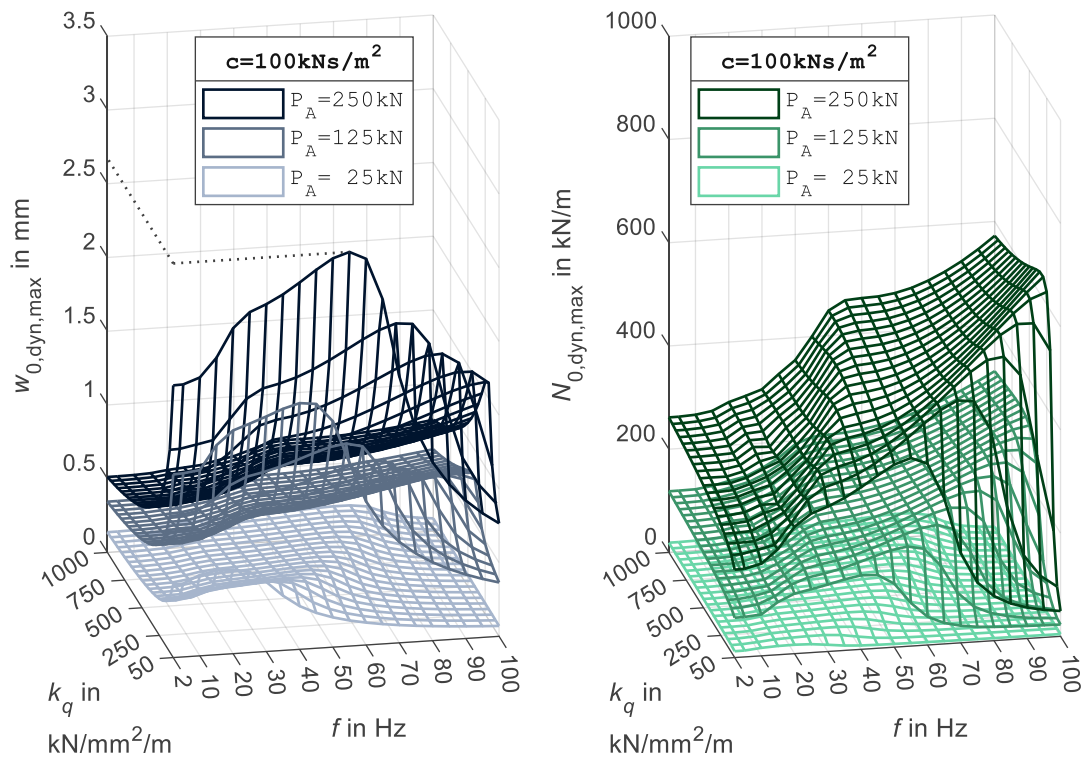


Abbildung 4.45: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

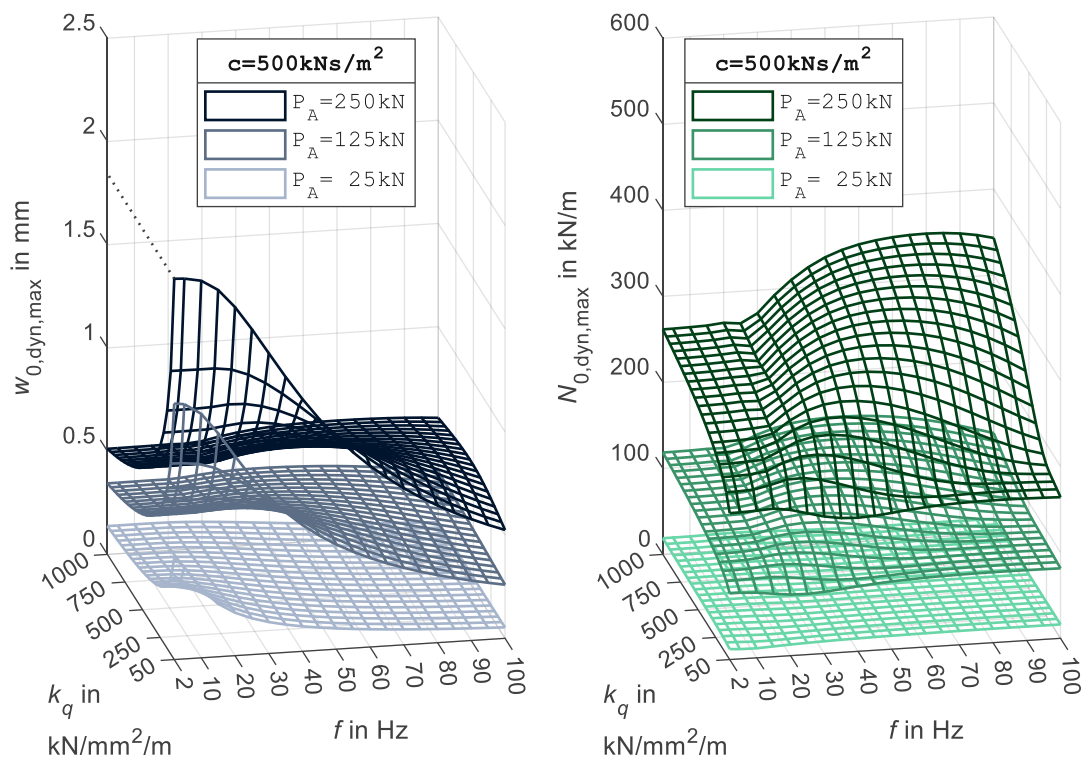


Abbildung 4.46: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

Zusätzlich werden die Verläufe der auf die statischen Ergebnisse $w_{0,\text{stat}}$ und $N_{0,\text{stat}}$ bezogenen Amplituden der Setzung und des Bodendrucks des dynamischen Systems $w_{0,\text{dyn,max}}$ und $N_{0,\text{dyn,max}}$ in Abbildung 4.47 bis Abbildung 4.49 dargestellt.

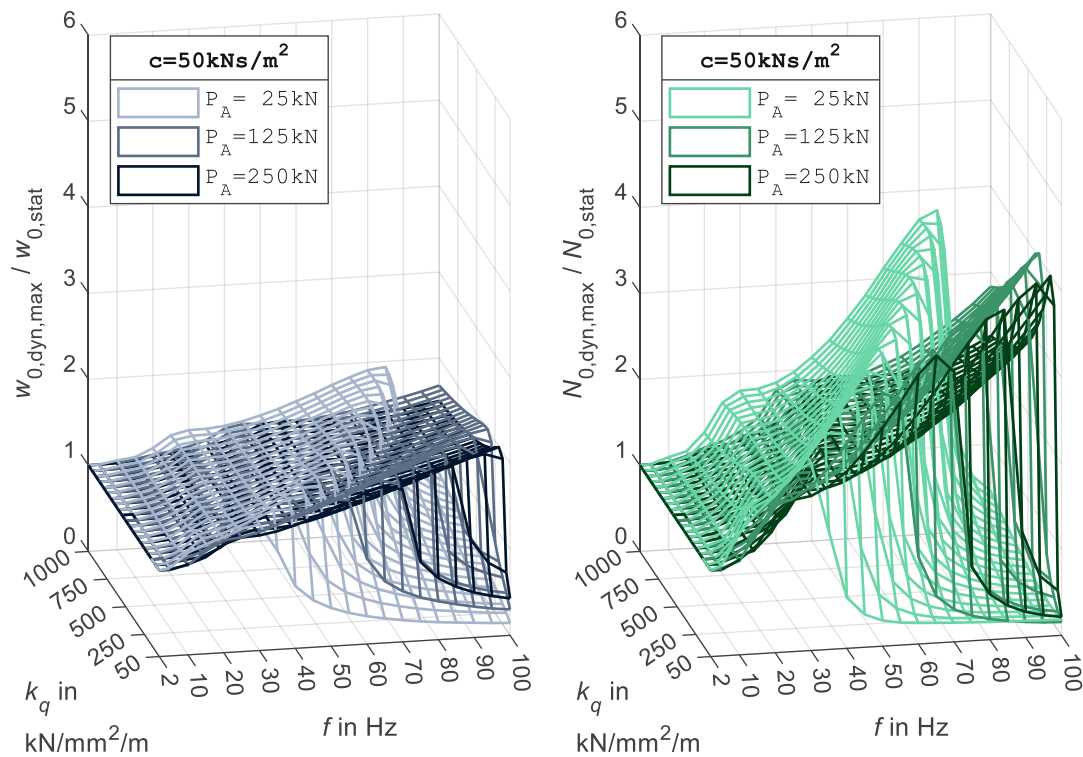


Abbildung 4.47: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ zu den statischen Setzung $w_{0,\text{stat}}$ und Untergrundreaktion $N_{0,\text{stat}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

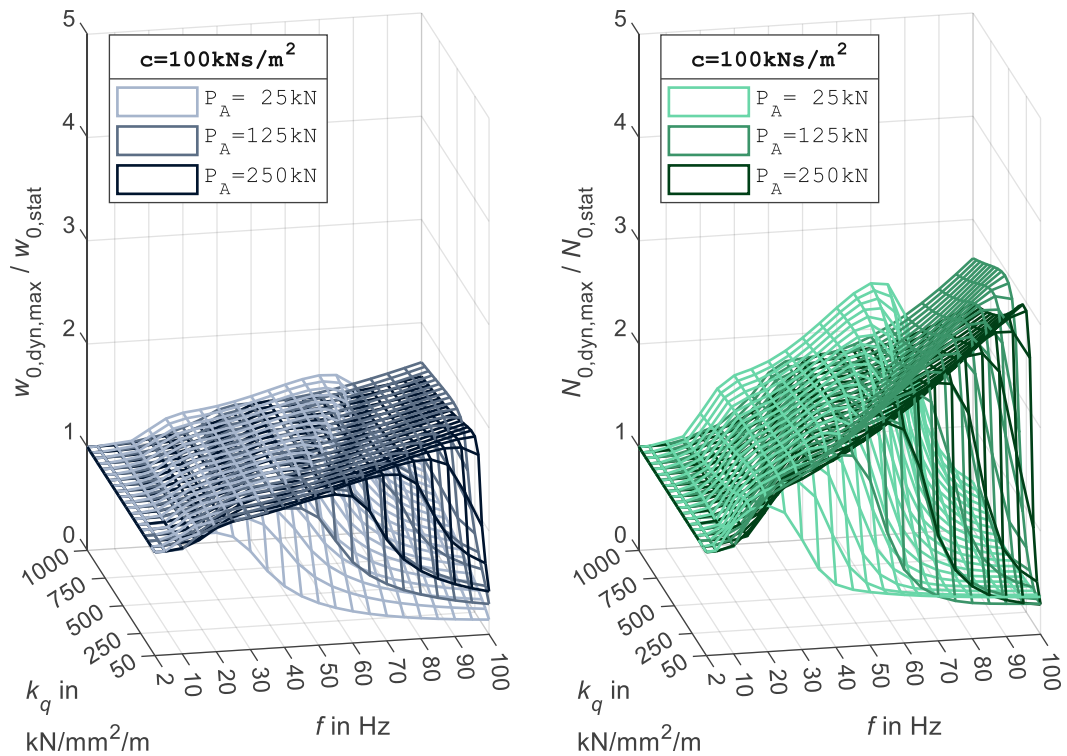


Abbildung 4.48: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ zu den statischen Setzung $w_{0,stat}$ und Untergrundreaktion $N_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

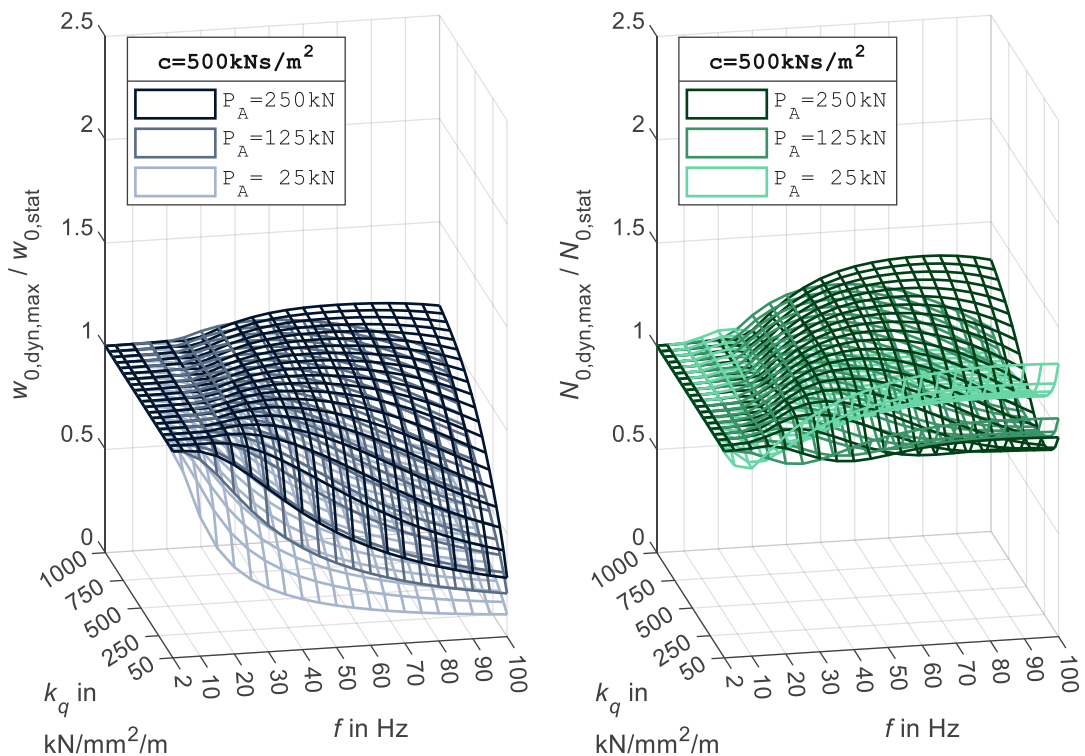


Abbildung 4.49: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ zu den statischen Setzung $w_{0,stat}$ und Untergrundreaktion $N_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

Abbildung 4.50 bis Abbildung 4.52 zeigen die entsprechenden Ergebnisse für die Lastverteilungsamplitude $L_{LV,dyn}$.

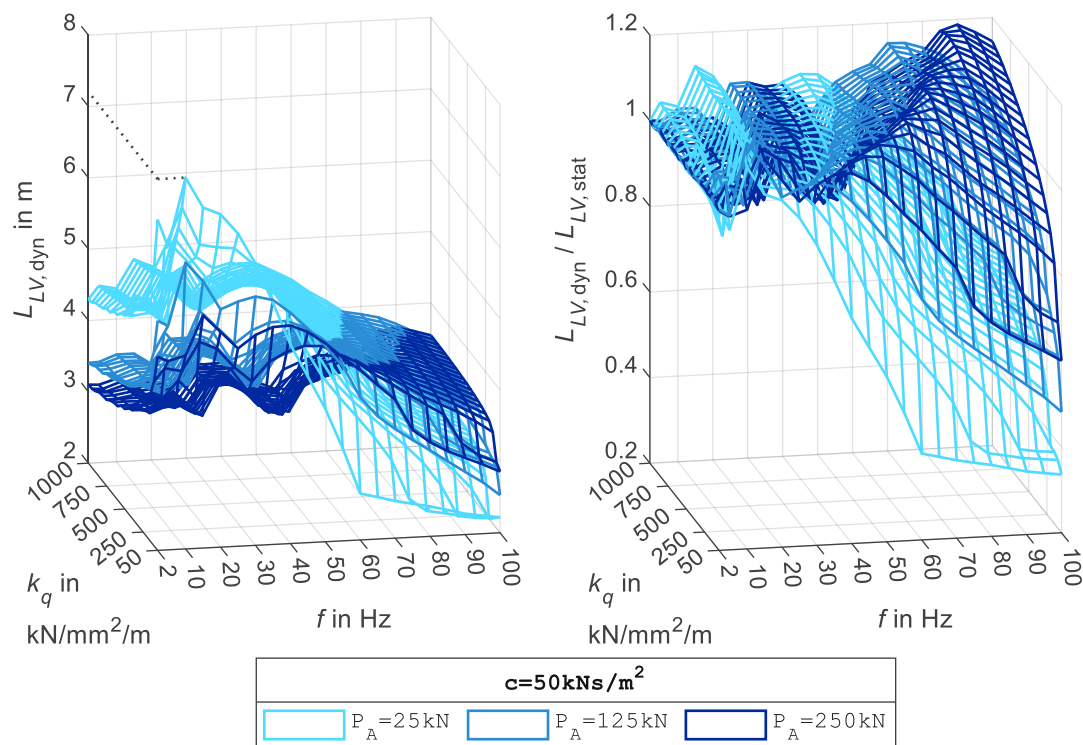


Abbildung 4.50: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ (die zum Zeitpunkt des maximalen eingeschwingenen Bodendrucks $N_{0,dyn,max}$ auftritt) sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

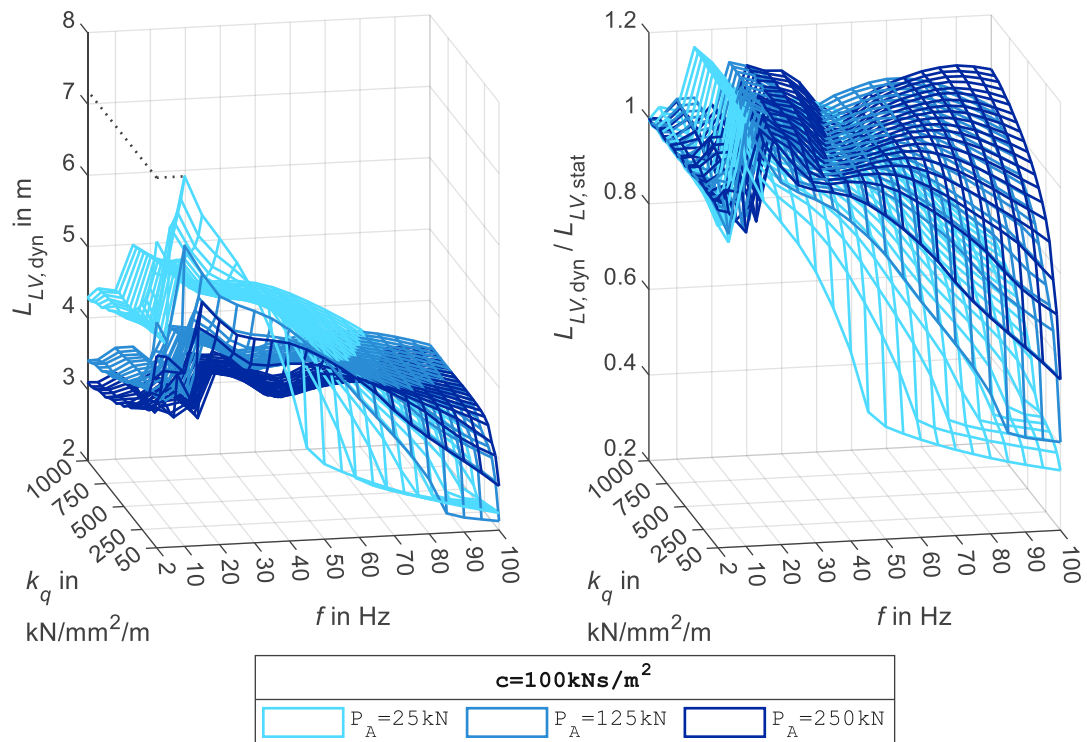


Abbildung 4.51: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ (die zum Zeitpunkt des maximalen eingeschwingenen Bodendrucks $N_{0,dyn,max}$ auftritt) sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

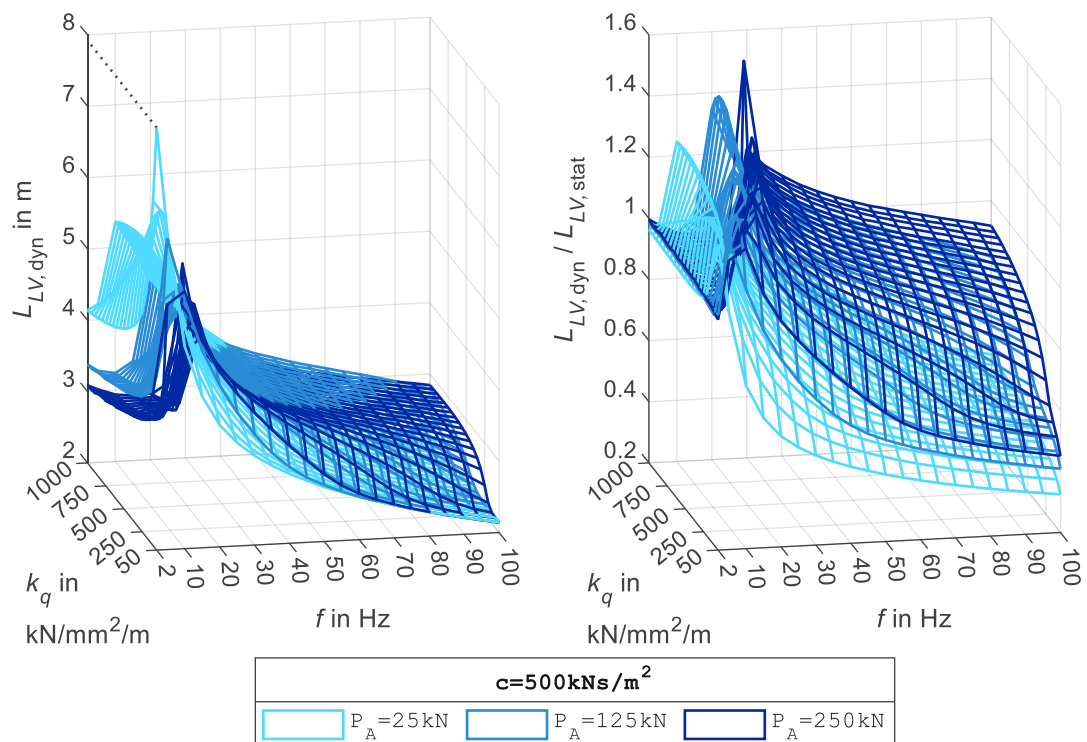


Abbildung 4.52: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ (die zum Zeitpunkt des maximalen eingeschwingenen Bodendrucks $N_{0,dyn,max}$ auftritt) sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

4.5.3 Ergebnisse für die Einzelkräfte des dynamischen Lastmodells beim System mit einer quadratischen Federkennlinie

Nachfolgend werden die Verläufe der bezogenen Einzelkräfte $\chi_{j,\text{dyn}}$ gemäß Gl. (4.60) (Unterabschnitt 4.3.6) für die in Tabelle 4.5 angegebenen Systemkennwerte dargestellt.

Abbildung 4.53 bis Abbildung 4.55 zeigen die Ergebnisse für die zentrale bezogene Einzelkraft $\chi_{0,\text{dyn}}$ bei der Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m².

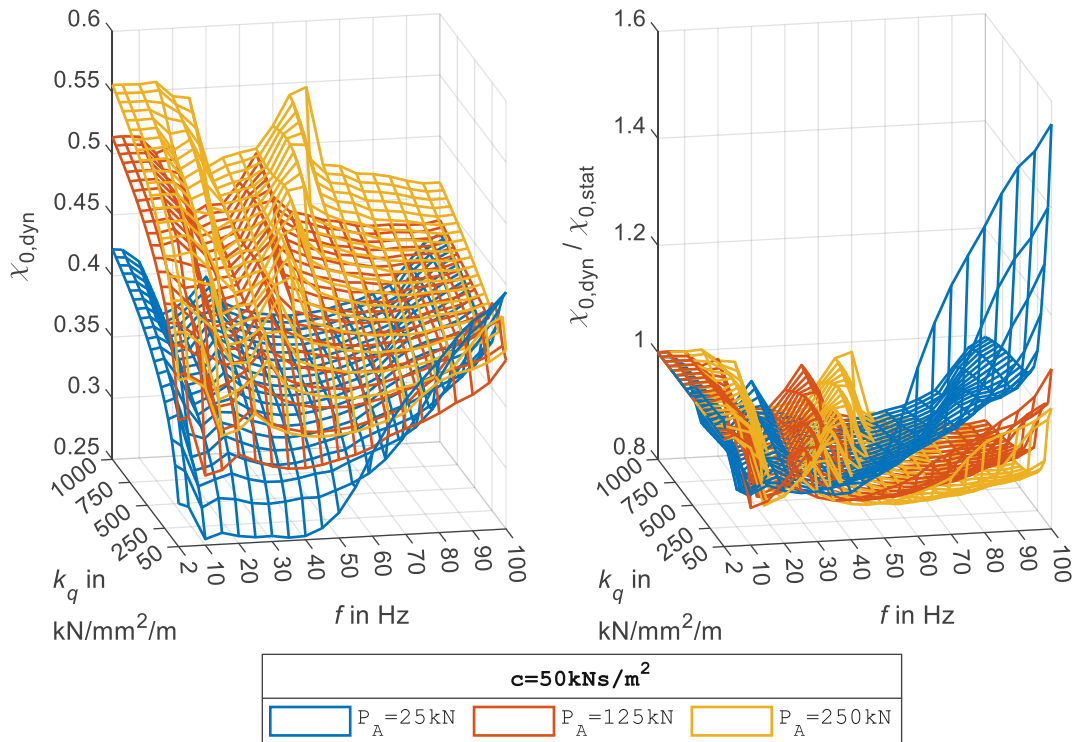


Abbildung 4.53: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ und $\chi_{0,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m² und die quadratischen Federkennlinien

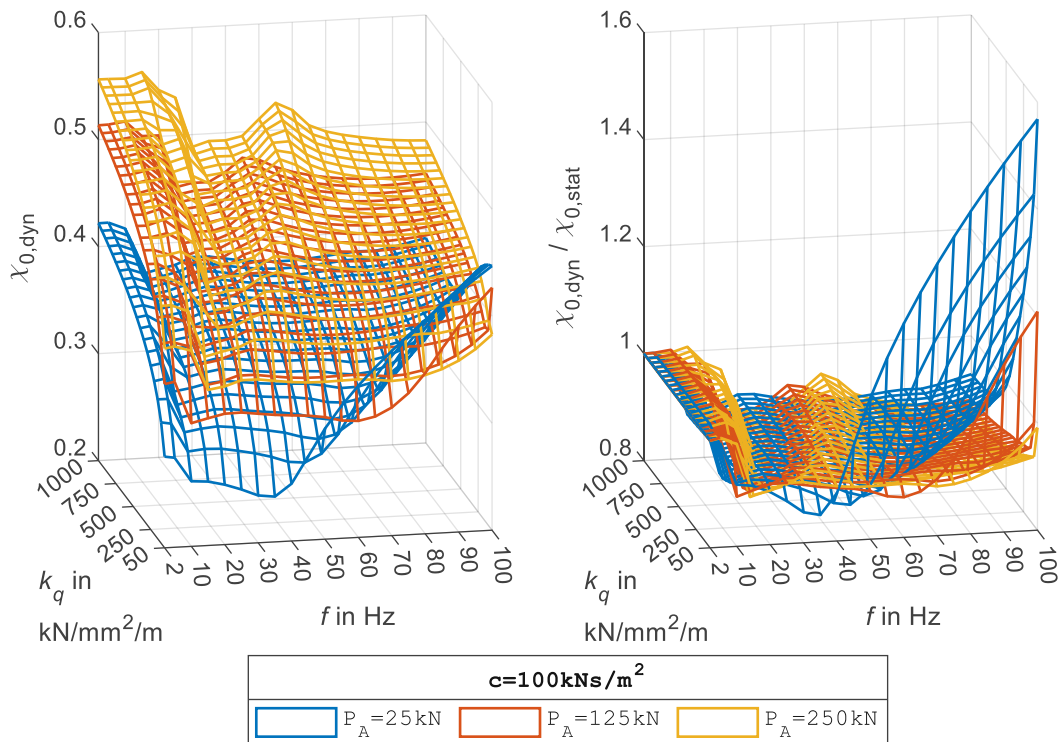


Abbildung 4.54: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ und $\chi_{0,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m² und die quadratischen Federkennlinien

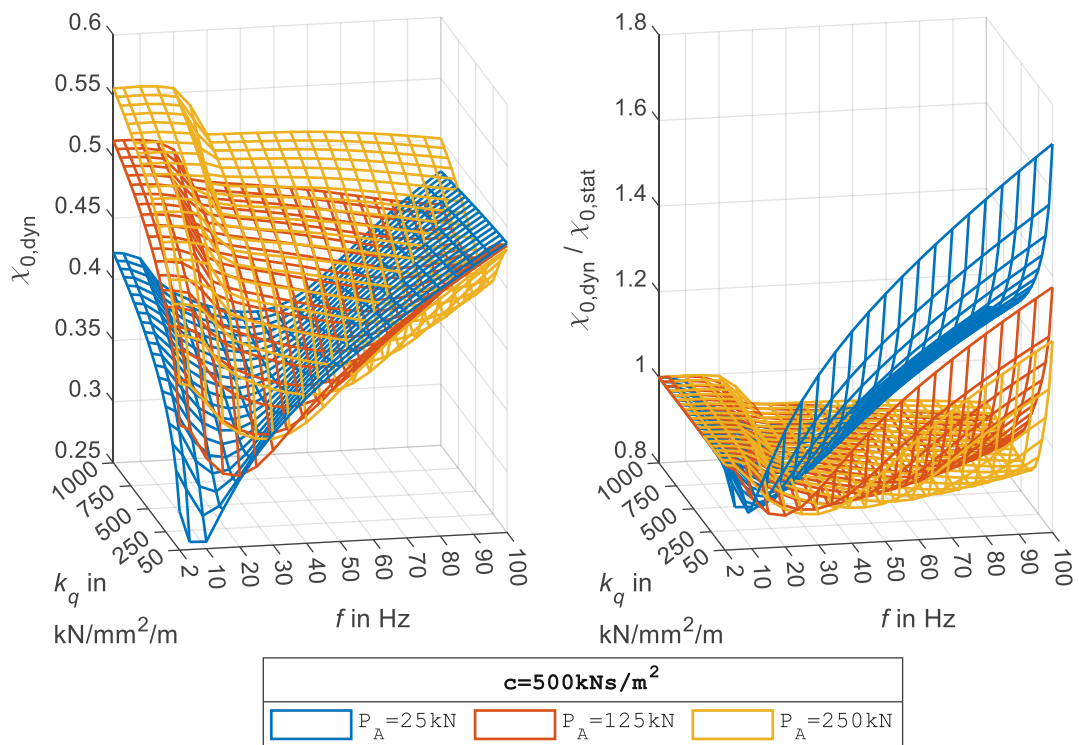


Abbildung 4.55: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ und $\chi_{0,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die quadratischen Federkennlinien

Analog werden in Abbildung 4.56 bis Abbildung 4.58 die Ergebnisse für die bezogene Einzelkraft $\chi_{1,dyn}$ dargestellt.

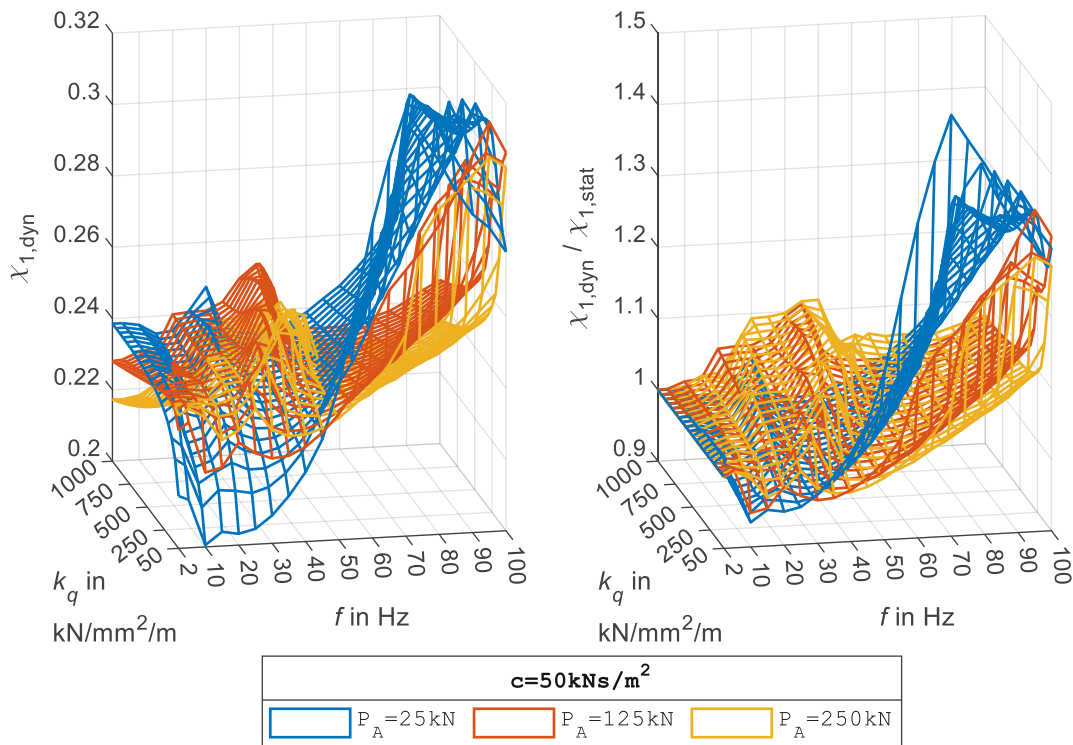


Abbildung 4.56: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und $\chi_{1,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

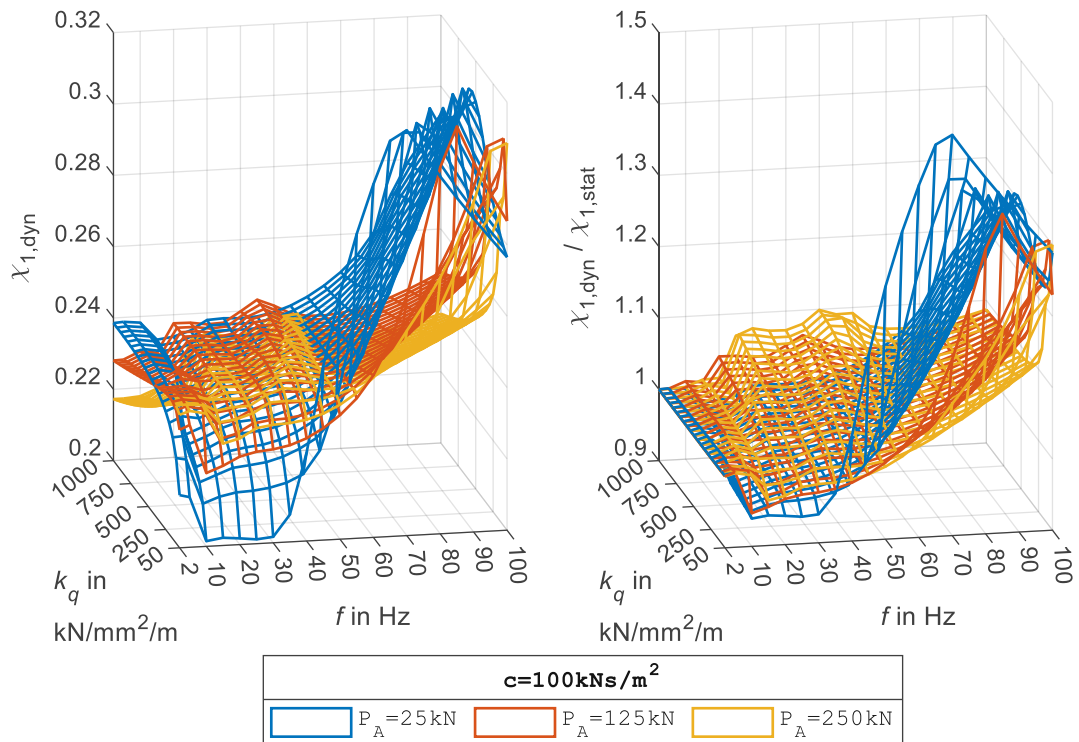


Abbildung 4.57: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{1,\text{dyn}}$ und $\chi_{1,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

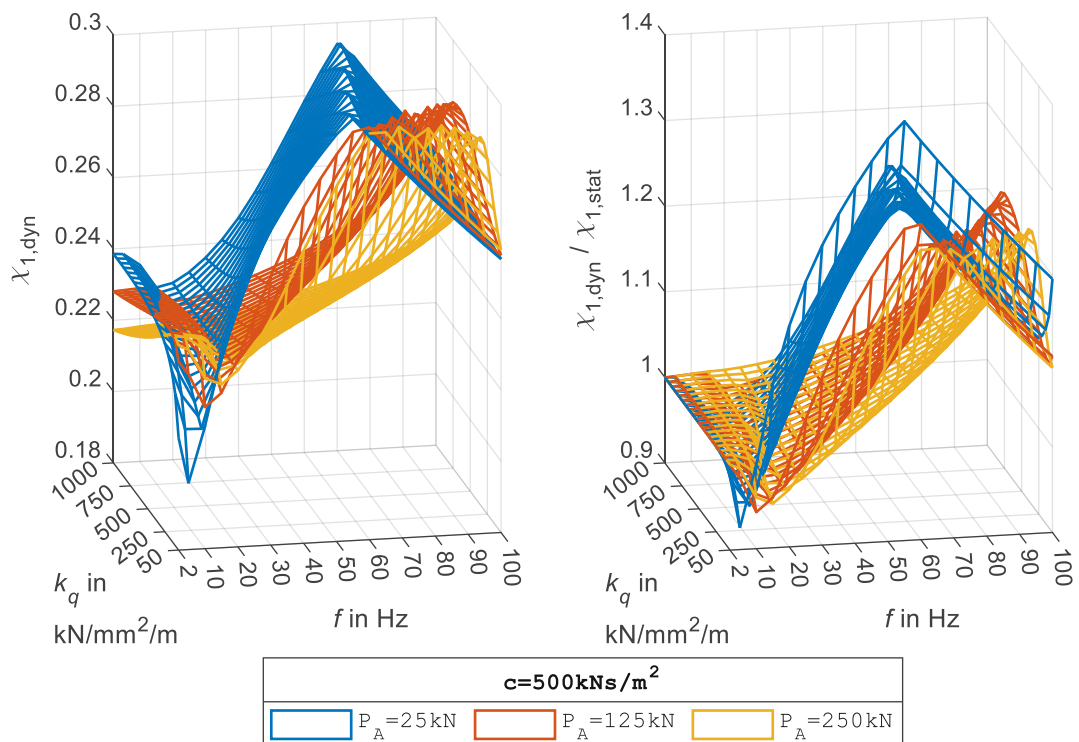


Abbildung 4.58: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{1,\text{dyn}}$ und $\chi_{1,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

Die Berechnungsergebnisse für die bezogene Einzelkraft $\chi_{2,dyn}$ werden in Abbildung 4.59 bis Abbildung 4.61 dargestellt.

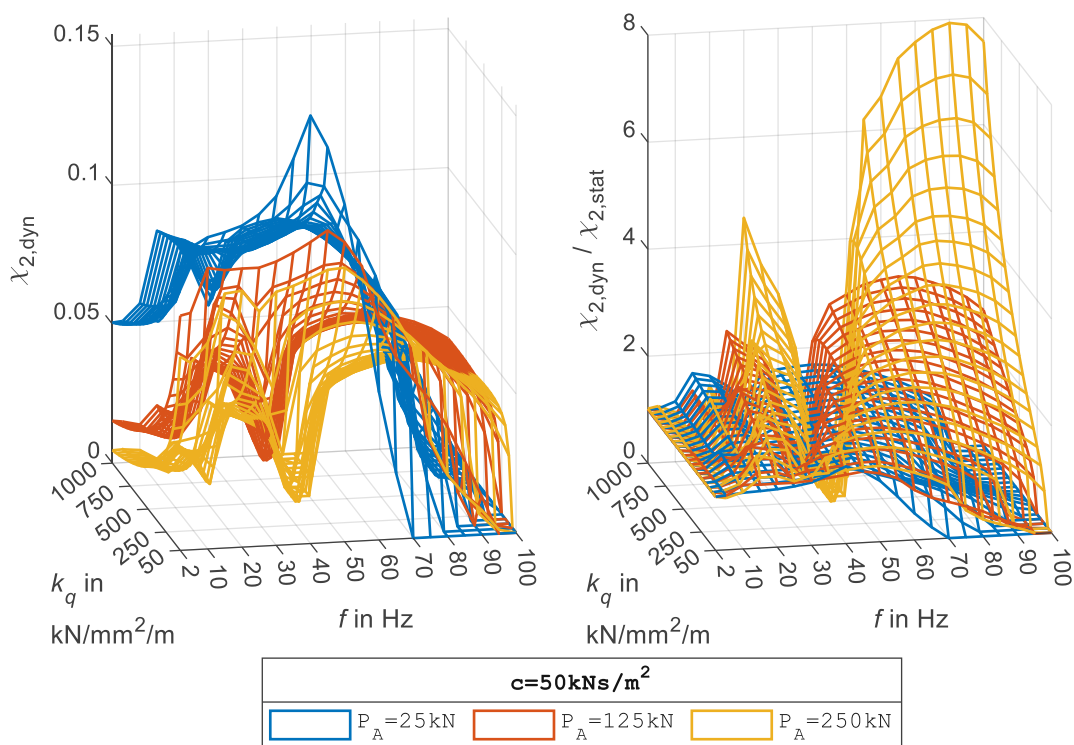


Abbildung 4.59: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und $\chi_{2,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

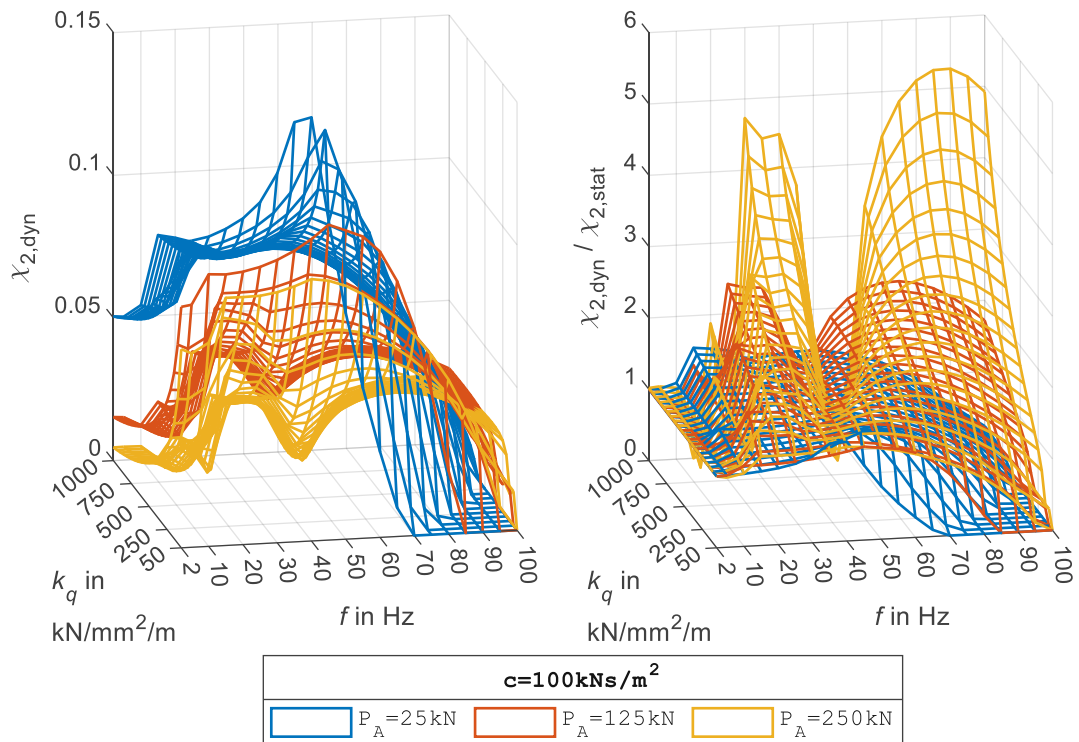


Abbildung 4.60: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi'_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi'_{2,dyn}$ und $\chi'_{2,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m² und die quadratischen Federkennlinien

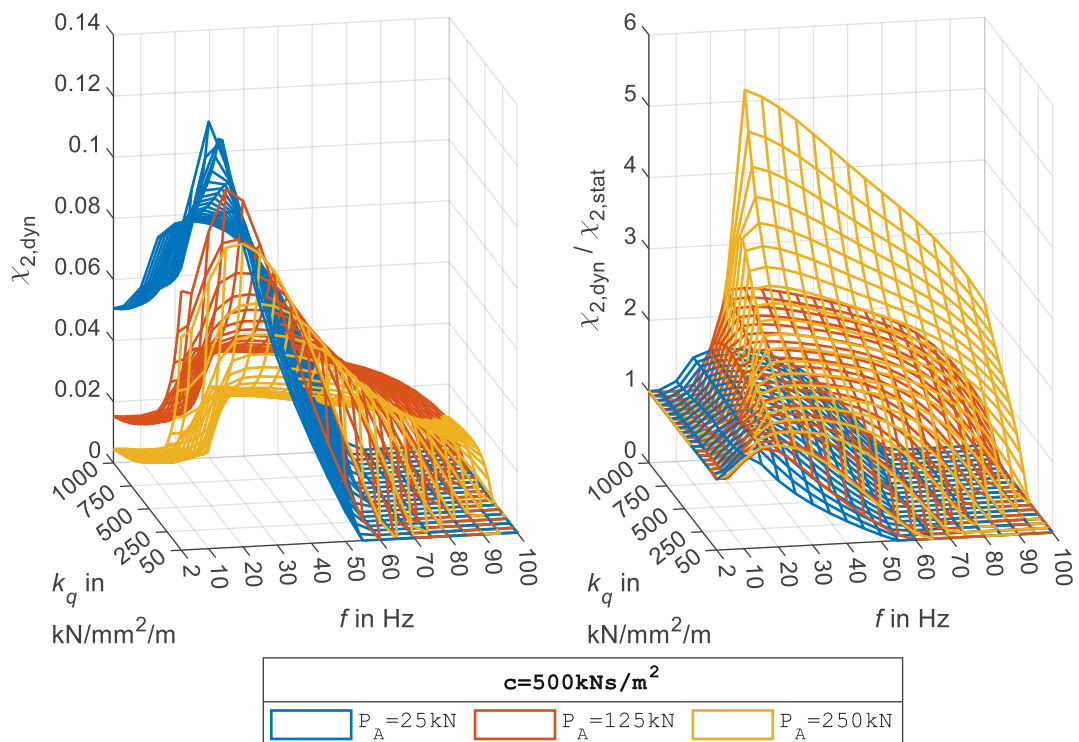


Abbildung 4.61: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi'_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi'_{2,dyn}$ und $\chi'_{2,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die quadratischen Federkennlinien

Die Berechnungsergebnisse für die bezogene Einzelkraft $\chi_{3,\text{dyn}}$ werden in Abbildung 4.62 bis Abbildung 4.64 dargestellt. Das Verhältnis zwischen den Einzelkräften $\chi_{3,\text{dyn}}$ und $\chi_{3,\text{stat}}$ des dynamischen und statischen Lastmodells ist nur für die Federungskraftbeiwerten k_q bis 400 kN/mm²/m bei der Achslastamplitude P_A von 25 kN und für den Federungskraftbeiwert k_q von 50 kN/mm²/m bei der Achslastamplitude P_A von 125 kN verfügbar.

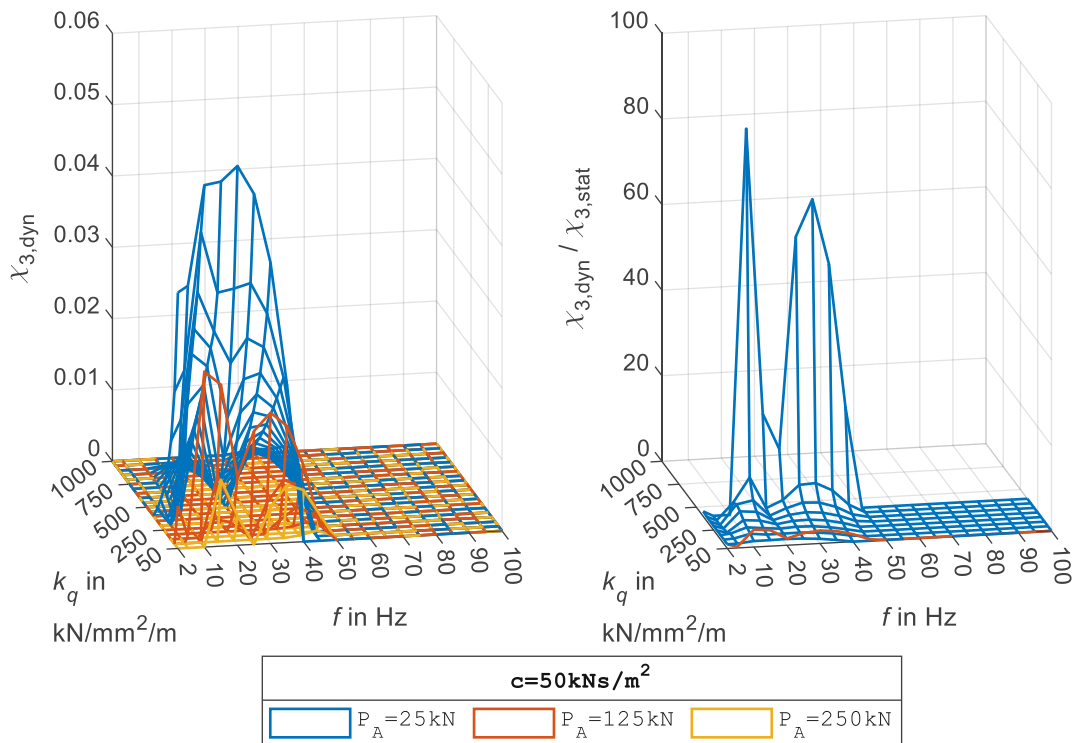


Abbildung 4.62: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{3,\text{dyn}}$ und $\chi_{3,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m² und die quadratischen Federkennlinien

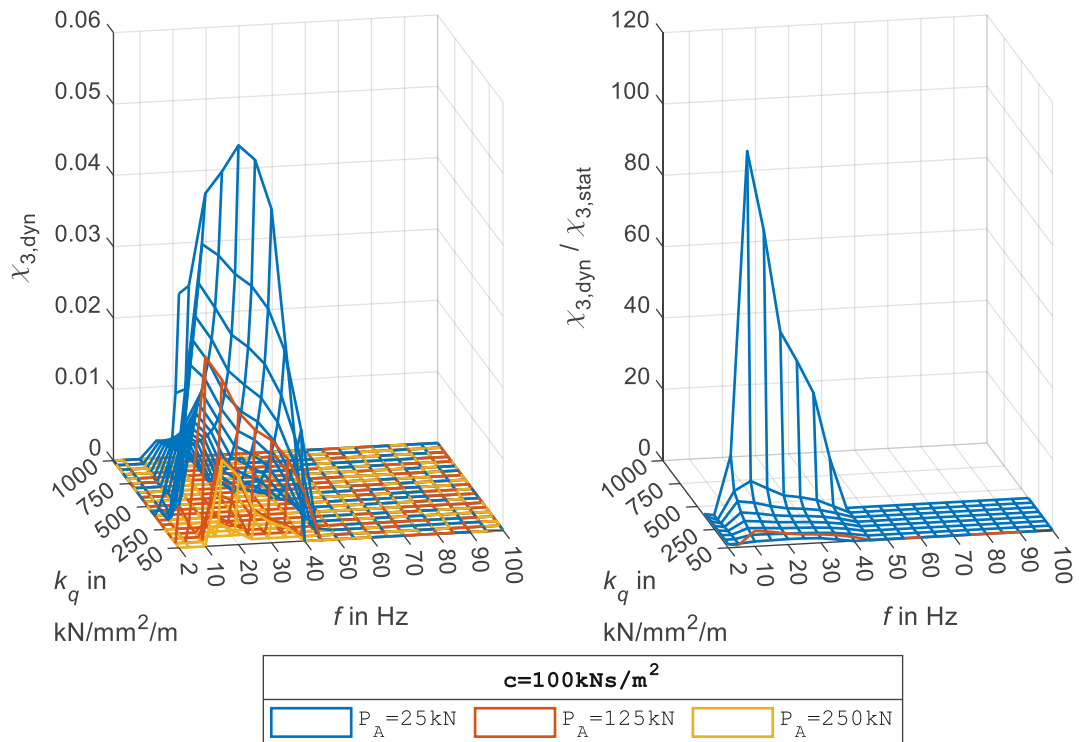


Abbildung 4.63: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{3,\text{dyn}}$ und $\chi_{3,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

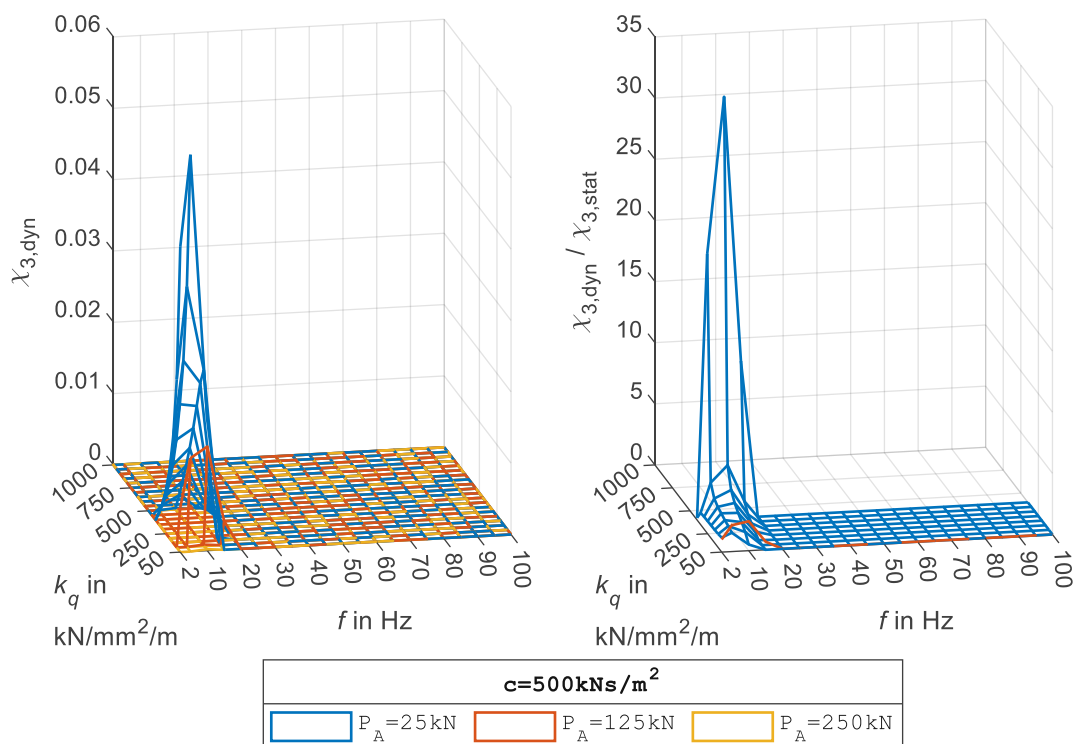


Abbildung 4.64: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{3,\text{dyn}}$ und $\chi_{3,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m^2 und die quadratischen Federkennlinien

Abbildung 4.65 bis Abbildung 4.67 zeigen die auf die Achslastamplitude P_A bezogene Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ für die Dämpfungskonstante c von 50, 100 und 500 kNs/m².

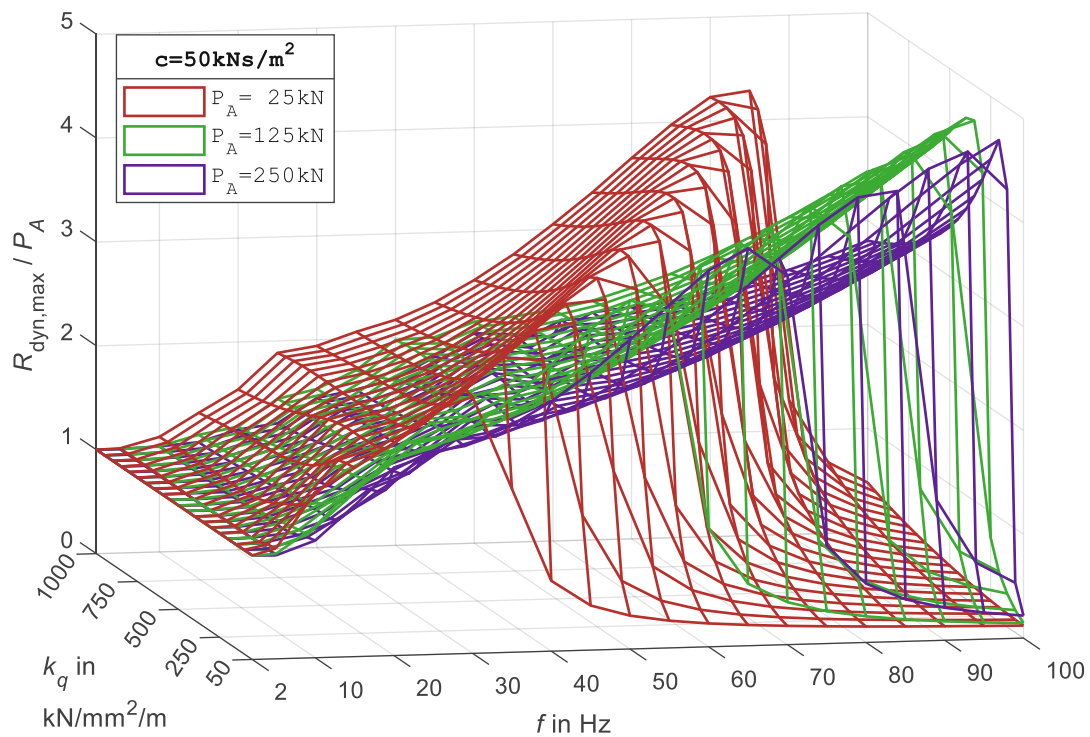


Abbildung 4.65: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m² und die quadratischen Federkennlinien

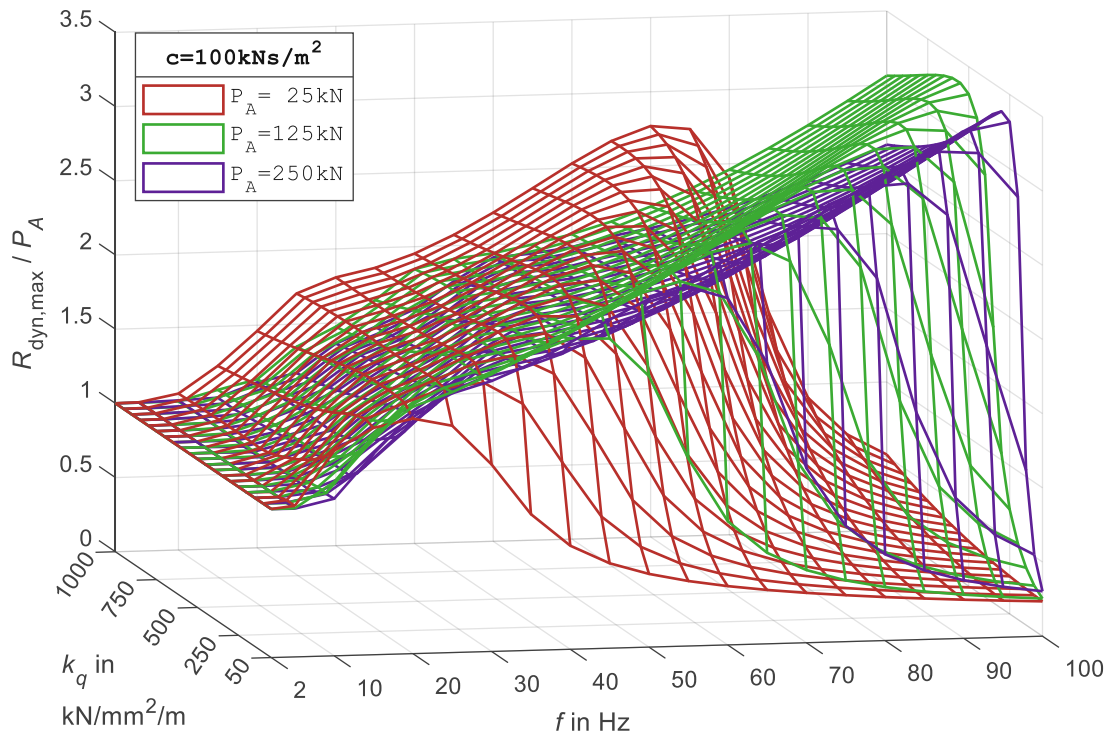


Abbildung 4.66: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m² und die quadratischen Federkennlinien

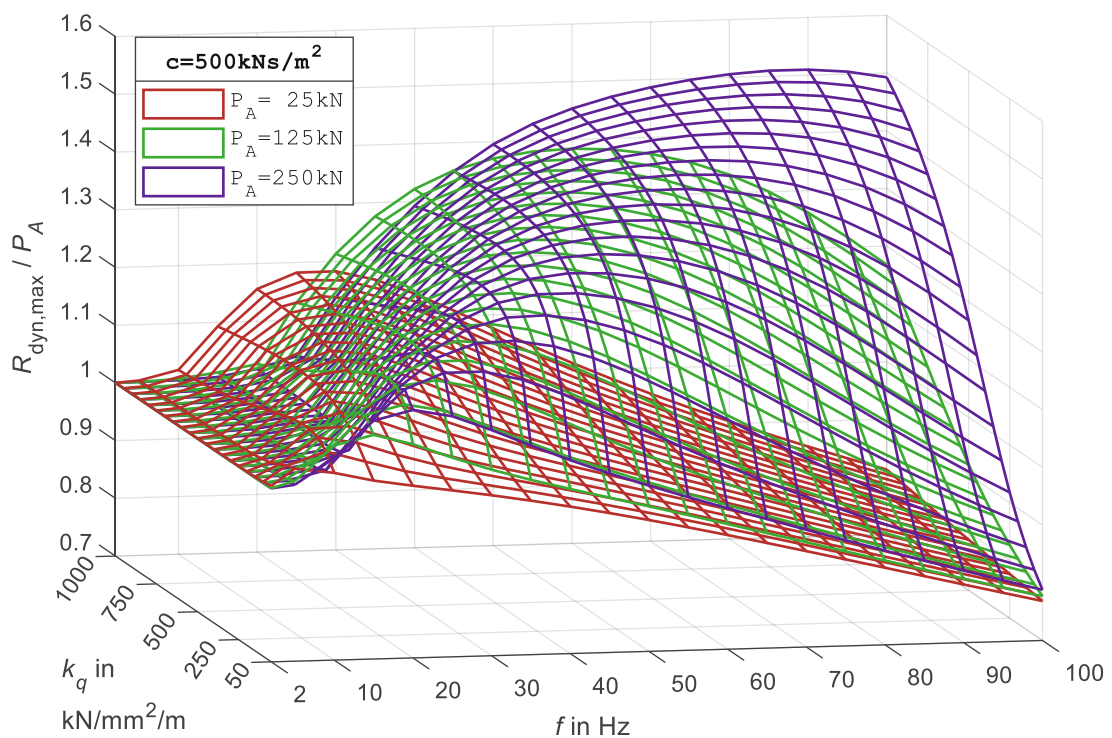


Abbildung 4.67: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die quadratischen Federkennlinien

4.6 Dynamische Berechnung des Systems mit einer Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion

Nach der anfänglichen Festlegung der Federkennlinie und der Herleitung der zugehörigen Bewegungsgleichung werden in diesem Abschnitt, in Anlehnung an die in Abschnitt 4.3 erarbeiteten Definitionen und Verfahren, die Berechnungsergebnisse für die Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$, der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$, der Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ und der Reaktionskraft $R_{\text{dyn,max}}$ sowie die bezogenen Lastmodell-Einzelkräfte $\chi_{i,\text{dyn}}$ für das System mit einer Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion präsentiert.

4.6.1 Definition der Federungskraft und Anpassung der Bewegungsgleichung

Die Wurzelfunktion für die Federungskraft des Schotterbetts $N_F(x,t)$ sei gemäß Gl. (4.73) definiert, wobei ein punktsymmetrisches Kraft-Weg-Diagramm mit dem negativen Zugkraftbereich (vgl. Abschnitt 4.1) angenommen wird:

$$N_F(x,t) = \begin{cases} k_W \sqrt{|w(x,t)|} & \text{für } w(x,t) \geq 0 \\ -k_W \sqrt{|w(x,t)|} & \text{für } w(x,t) < 0 \end{cases} \quad (4.73)$$

k_W ... Beiwert für die Wurzelfunktion der Federungskraft

Die kontinuierliche Federungskraft $N_F(x,t)$ gemäß Gl. (4.73) kann für die in Abschnitt 4.2 erhaltenen diskreten Knoten folgendermaßen formuliert werden:

$$\mathbf{N}_F = \begin{pmatrix} N_{F,0} \\ N_{F,1} \\ \vdots \\ N_{F,n} \end{pmatrix} = k_W \begin{pmatrix} \text{sgn}(w_0) \sqrt{|w_0|} \\ \text{sgn}(w_1) \sqrt{|w_1|} \\ \vdots \\ \text{sgn}(w_n) \sqrt{|w_n|} \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

Die diskretisierte Untergrundreaktion $\mathbf{N}$ setzt sich aus der Federungskraft $\mathbf{N}_F$ gemäß Gl. (4.74) und der viskosen Dämpfungskraft $\mathbf{N}_D$ gemäß Gl. (4.42) wie folgt zusammen:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix} = \mathbf{N}_F + \mathbf{N}_D = \begin{pmatrix} \text{sgn}(w_0) k_W \sqrt{|w_0|} + c v_0 \\ \text{sgn}(w_1) k_W \sqrt{|w_1|} + c v_1 \\ \vdots \\ \text{sgn}(w_n) k_W \sqrt{|w_n|} + c v_n \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

Die Untergrundreaktion gemäß Gl. (4.75) wird für die verwendete Berechnungsmethode in die Blockmatrixform gemäß Gl. (4.76) übergeführt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_D \end{bmatrix} = k_W \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \operatorname{sgn}(w_0) \sqrt{|w_0|} \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(w_n) \sqrt{|w_n|} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Gl. (4.76) ist ins Bewegungsgleichungssystem (4.43) einzusetzen, sodass das zur Berechnung des dynamischen Systems mit einer Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion geeignete Bewegungsgleichungssystem nach Gl. (4.77) entsteht:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = -k_W \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \operatorname{sgn}(w_0) \sqrt{|w_0|} \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(w_n) \sqrt{|w_n|} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{Q} & -c\mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

4.6.2 Ergebnisse für die Gleisverformung und die Untergrundreaktion des dynamischen Systems mit einer Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion

Tabelle 4.6 gibt die Kennwerte an, für welche im Folgenden die Setzungen, Untergrundreaktionen und Lastverteilungslängen ausgewertet werden. Abweichend vom in den Abschnitten 4.3 bis 4.5 einheitlich verwendeten Diskretisierungspunkt-Abstand h von 5 cm wird für die Berechnung des Systems mit der Wurzelfunktion der Federungskraft ein größerer Abstand von 10 cm angesetzt, um die Instabilität des herangezogenen numerischen Verfahrens zu vermeiden. Die damit einhergehende Zunahme des Berechnungsfehlers (in erster Linie bei der Bestimmung der Lastverteilungslänge) ist bei der Verwendung der erhaltenen Ergebnisse in Kauf zu nehmen.

Tabelle 4.6: Kennwerte zur dynamischen Berechnung des Systems mit einer Federkennlinie gemäß der Wurzelfunktion

Kennwert	Wert	Einheit	Beschreibung
EI	127.609	MNcm^2	Biegesteifigkeit des Gleises aus zwei Schienen 60E1
μ	0,6667	t/m	Massenbelegung des Gleises (60 kg/m pro Schiene und 328 kg pro Betonschwelle im 60 cm-Abstand)
k_W	50 – 1000	$\text{kN/mm}^{0.5}/\text{m}$	Beiwert für die Wurzelfunktion der kontinuierlichen Federungskraft
c	50, 100, 500	kNs/m^2	kontinuierliche Schotterbettdämpfung
P_A	25, 125, 250	kN	Achslast-Amplitude
f	2 – 100	Hz	Anregungsfrequenz
h	10	cm	Diskretisierungspunkt-Abstand
L	40	m	Gleisbalkenlänge

In Abbildung 4.68 bis Abbildung 4.70 sind die Verläufe der eingeschwungenen Setzungs- und Bodendruckamplituden an der Laststelle $w_{0,\text{dyn,max}}$ und $N_{0,\text{dyn,max}}$ für unterschiedliche Federungskraftbeiwerte k_W , Anregungsfrequenzen f und Dämpfungskonstanten c gezeigt.

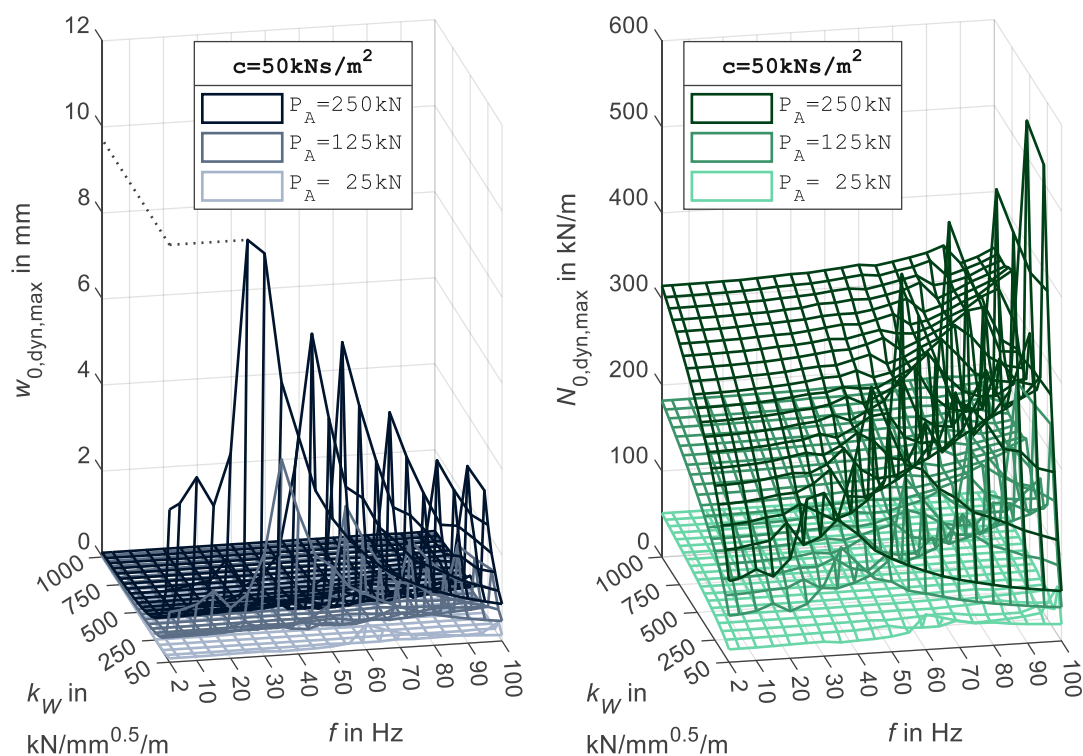


Abbildung 4.68: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m^2 und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

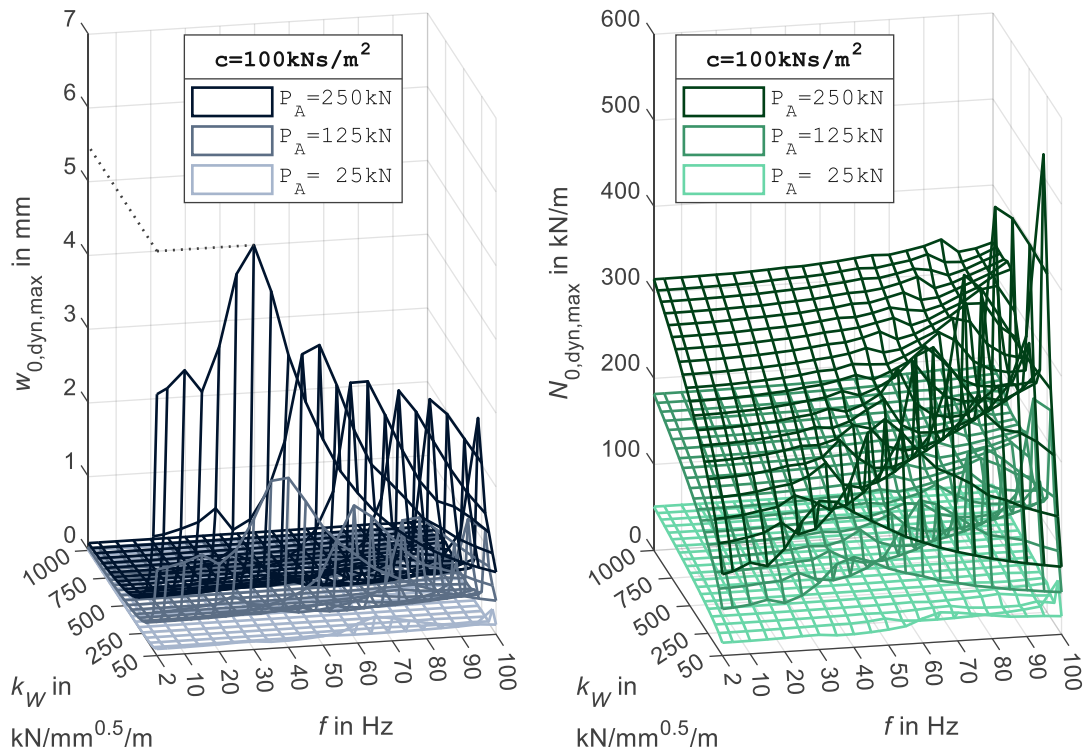


Abbildung 4.69: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

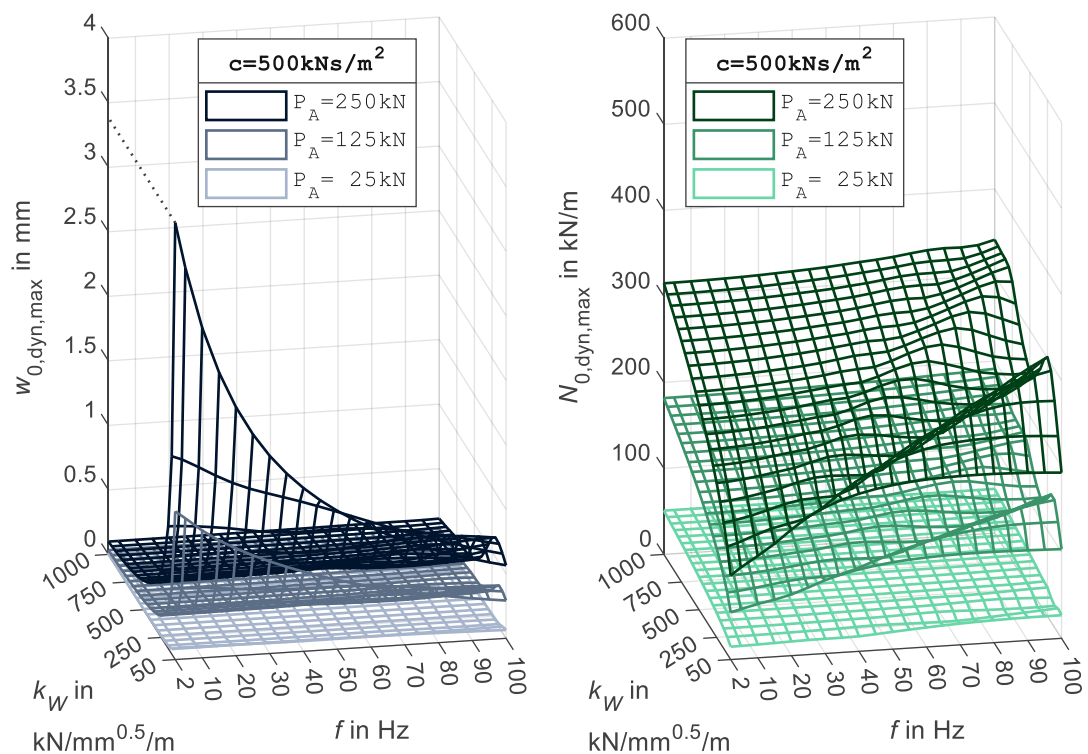


Abbildung 4.70: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

Die Verläufe der auf die statischen Ergebnisse $w_{0,\text{stat}}$ und $N_{0,\text{stat}}$ bezogenen Amplituden der Setzung und des Bodendrucks des dynamischen Systems $w_{0,\text{dyn,max}}$ und $N_{0,\text{dyn,max}}$ werden zusätzlich in Abbildung 4.71 bis Abbildung 4.73 dargestellt.

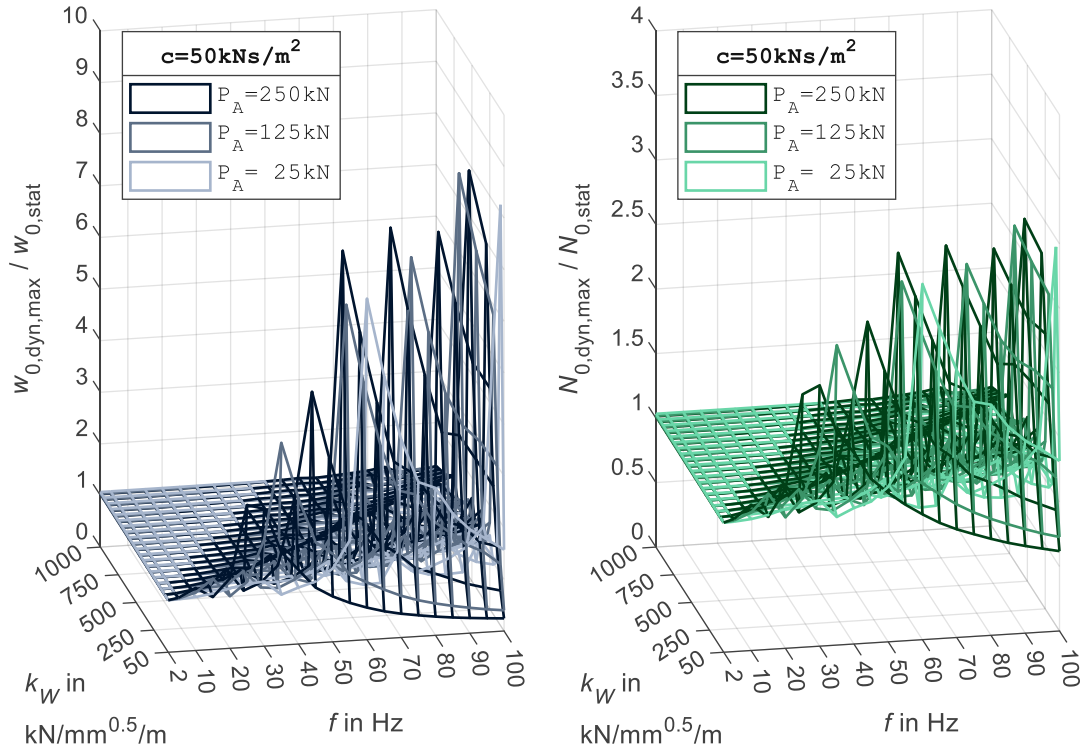


Abbildung 4.71: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ zu den statischen Setzung $w_{0,\text{stat}}$ und Untergrundreaktion $N_{0,\text{stat}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m^2 und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

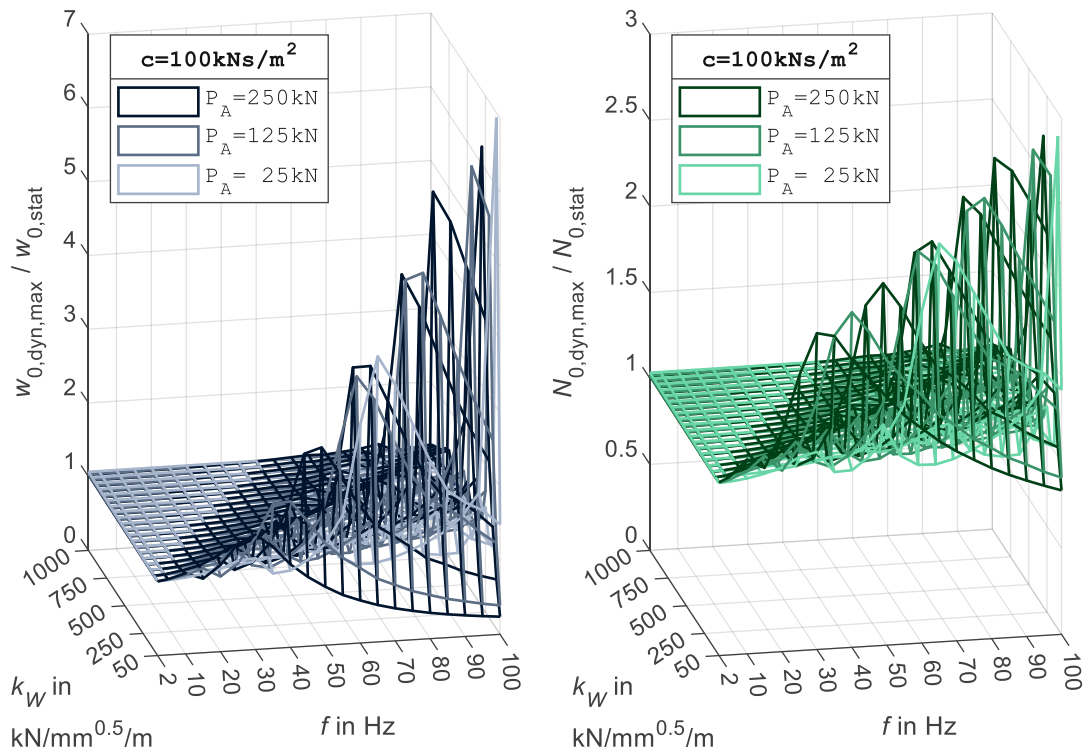


Abbildung 4.72: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ zu den statischen Setzung $w_{0,stat}$ und Untergrundreaktion $N_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m^2 und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

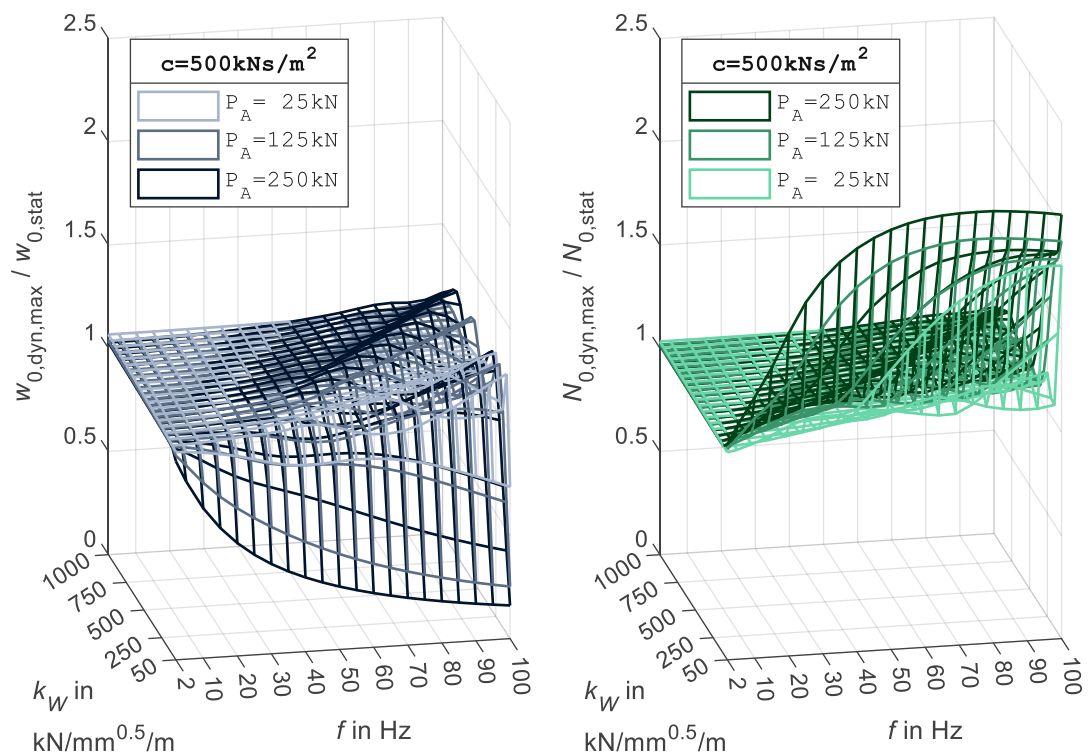


Abbildung 4.73: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ zu den statischen Setzung $w_{0,stat}$ und Untergrundreaktion $N_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m^2 und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

Abbildung 4.74 bis Abbildung 4.76 zeigen die entsprechenden Ergebnisse für die Lastverteilungsamplitude $L_{LV,dyn}$.

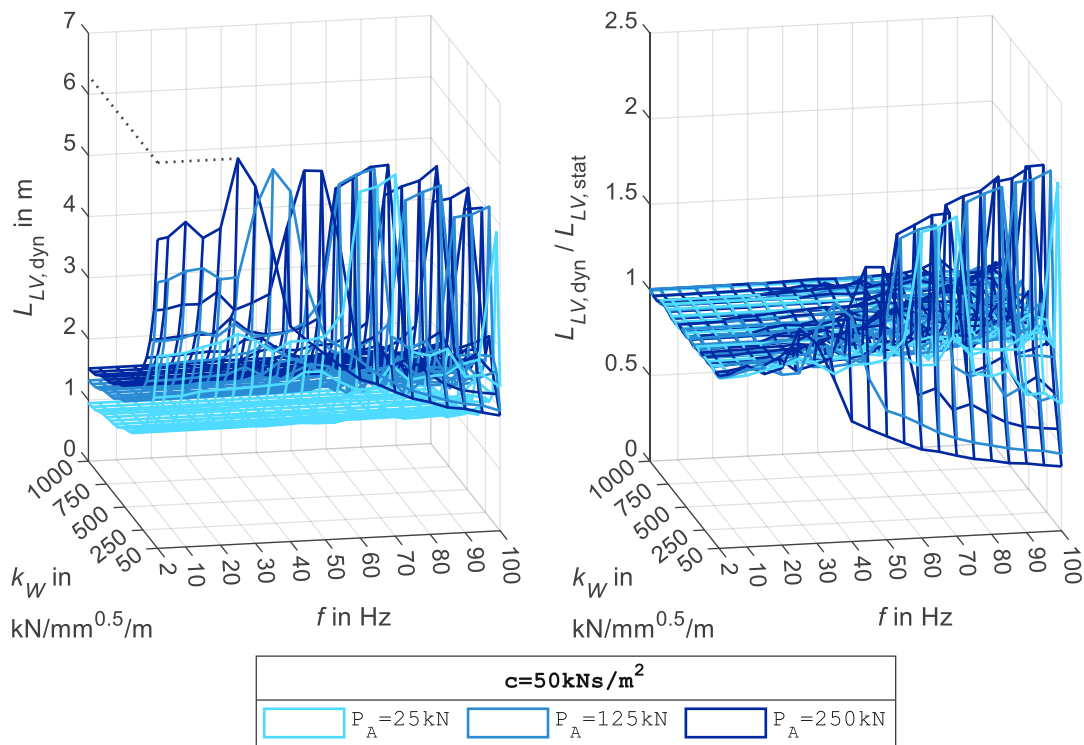


Abbildung 4.74: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m^2 und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

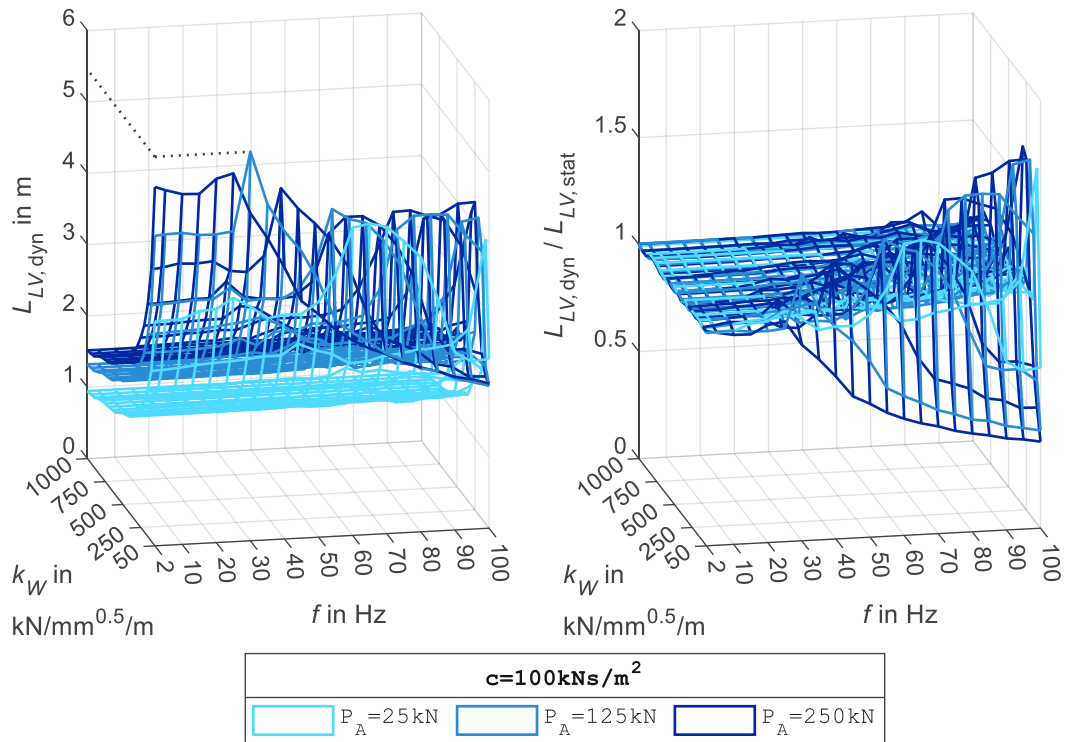


Abbildung 4.75: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m^2 und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

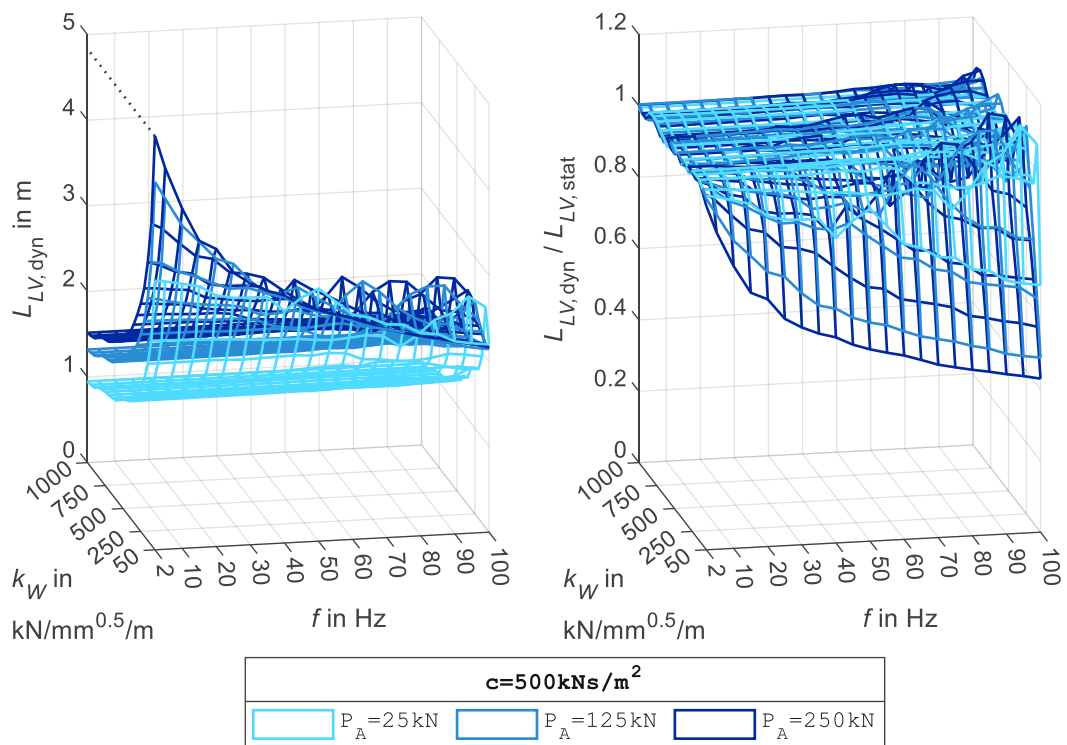


Abbildung 4.76: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m^2 und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

4.6.3 Ergebnisse für die Einzelkräfte des dynamischen Lastmodells beim System mit einer Federkennlinie nach der Wurzelfunktion

Nachfolgend werden die Verläufe der bezogenen Einzelkräfte $\chi_{j,\text{dyn}}$ gemäß Gl. (4.60) (Unterabschnitt 4.3.6) für die in Tabelle 4.6 angegebenen Systemkennwerte dargestellt.

Abbildung 4.77 bis Abbildung 4.79 zeigen die Ergebnisse für die zentrale bezogene Einzelkraft $\chi_{0,\text{dyn}}$ bei der Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m².

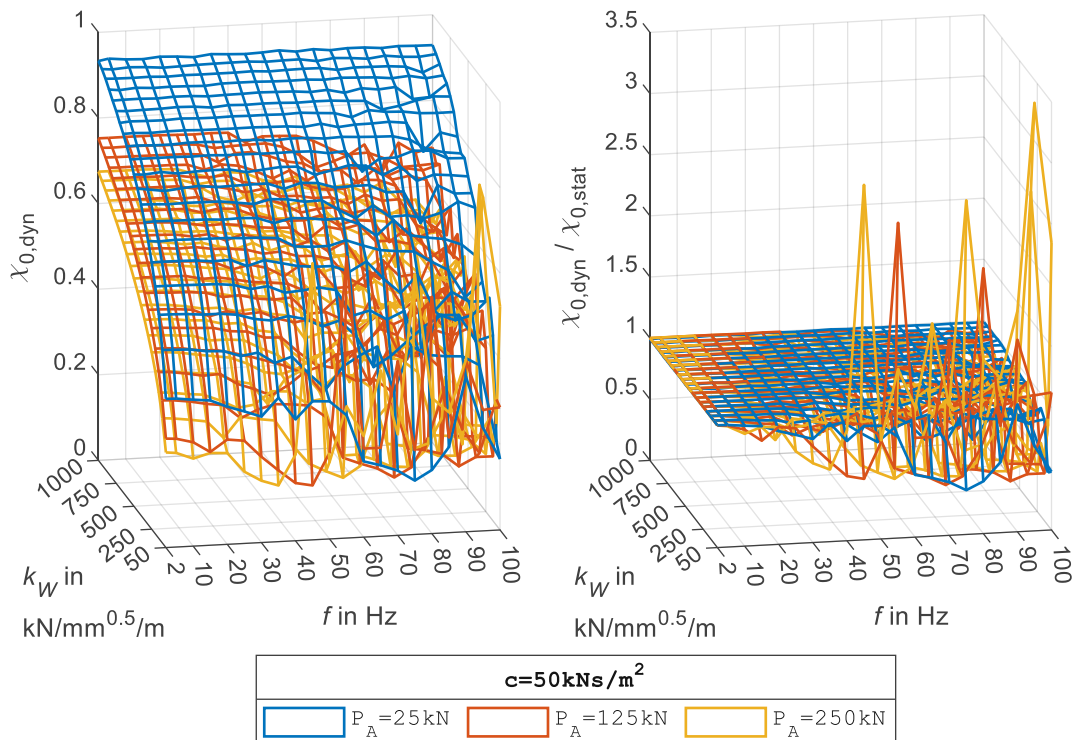


Abbildung 4.77: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ und $\chi_{0,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien

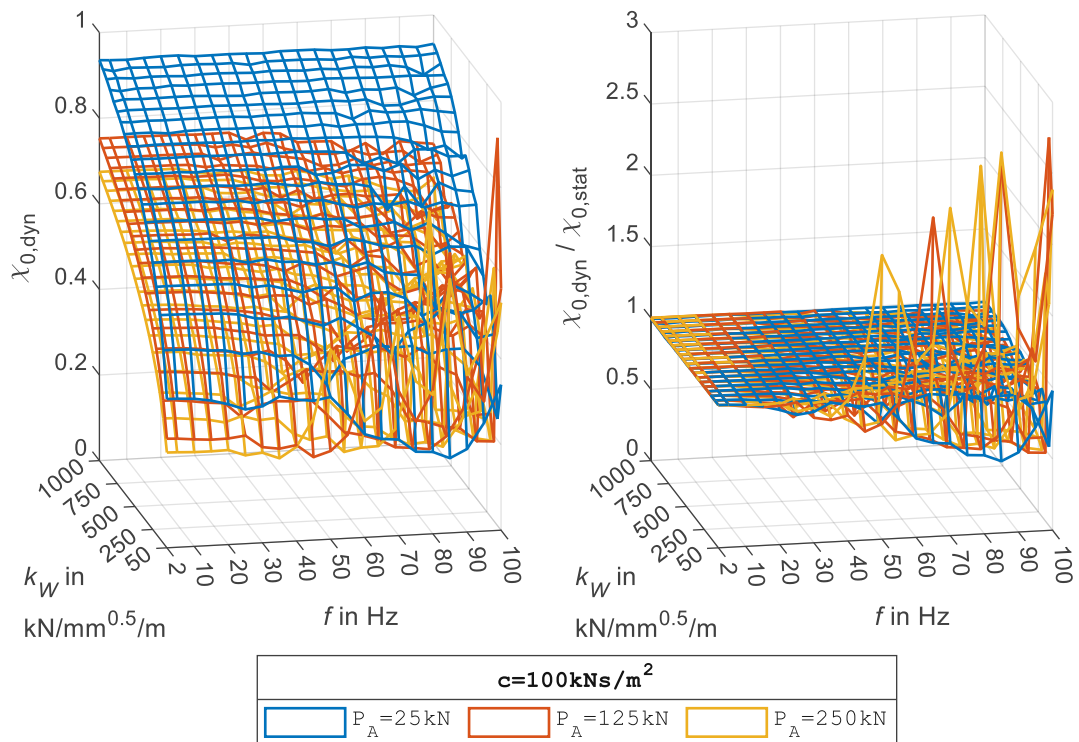


Abbildung 4.78: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ und $\chi_{0,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m^2 und die Wurzelfunktion der Federkennlinien

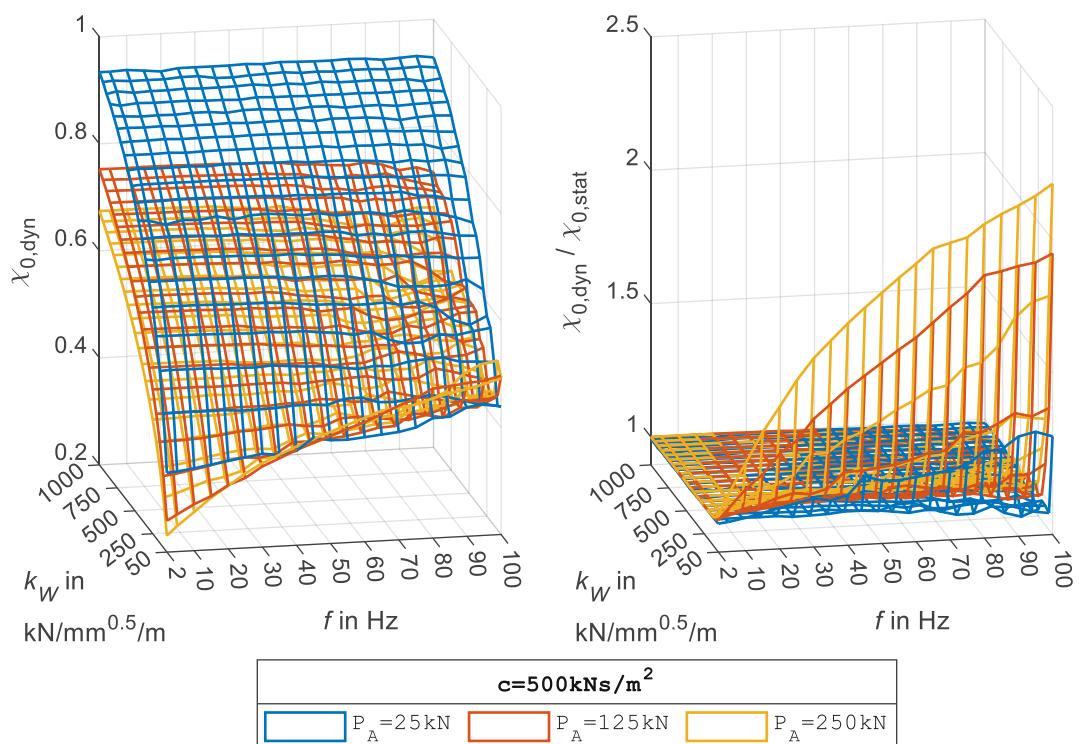


Abbildung 4.79: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ und $\chi_{0,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m^2 und die Wurzelfunktion der Federkennlinien

In Abbildung 4.80 bis Abbildung 4.82 werden analog die Ergebnisse für die bezogene Einzelkraft $\chi_{1,\text{dyn}}$ dargestellt.

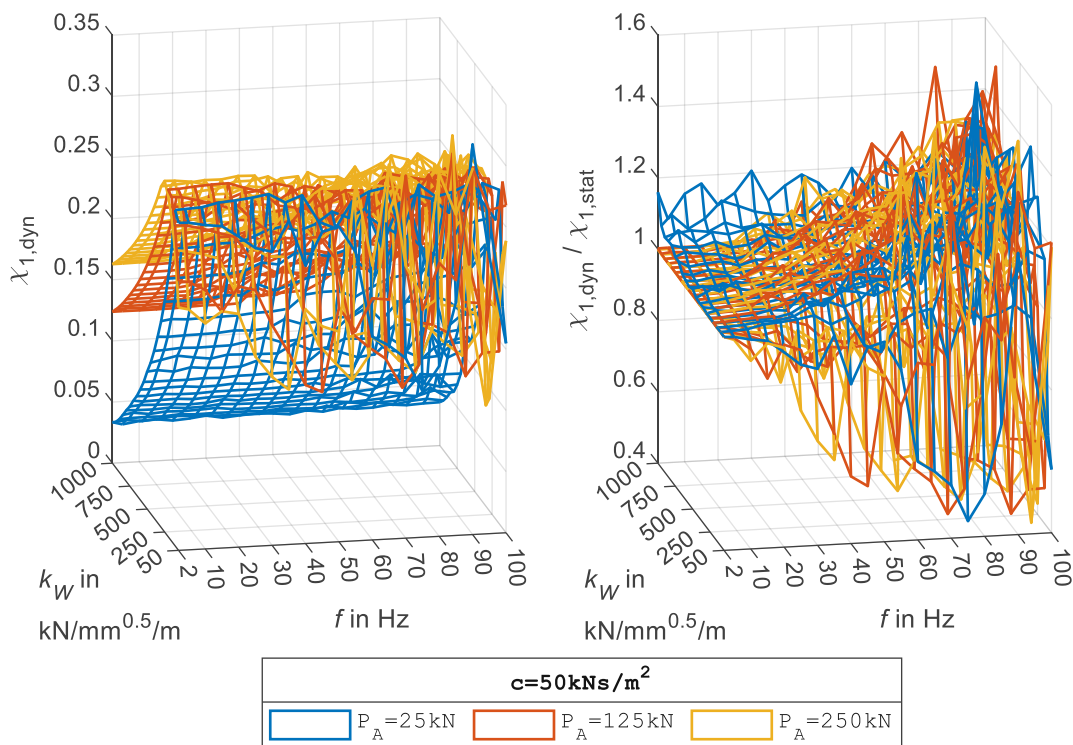


Abbildung 4.80: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{1,\text{dyn}}$ und $\chi_{1,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m^2 und die Wurzelfunktion der Federkennlinien

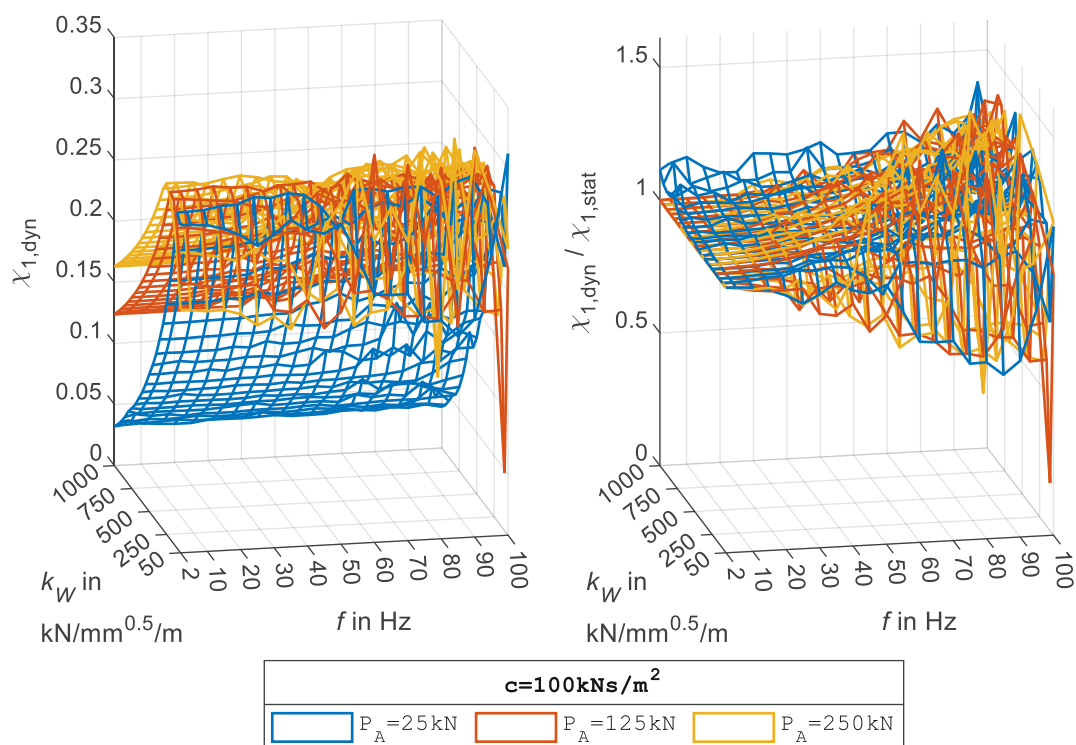


Abbildung 4.81: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und $\chi_{1,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m^2 und die Wurzelfunktion der Federkennlinien

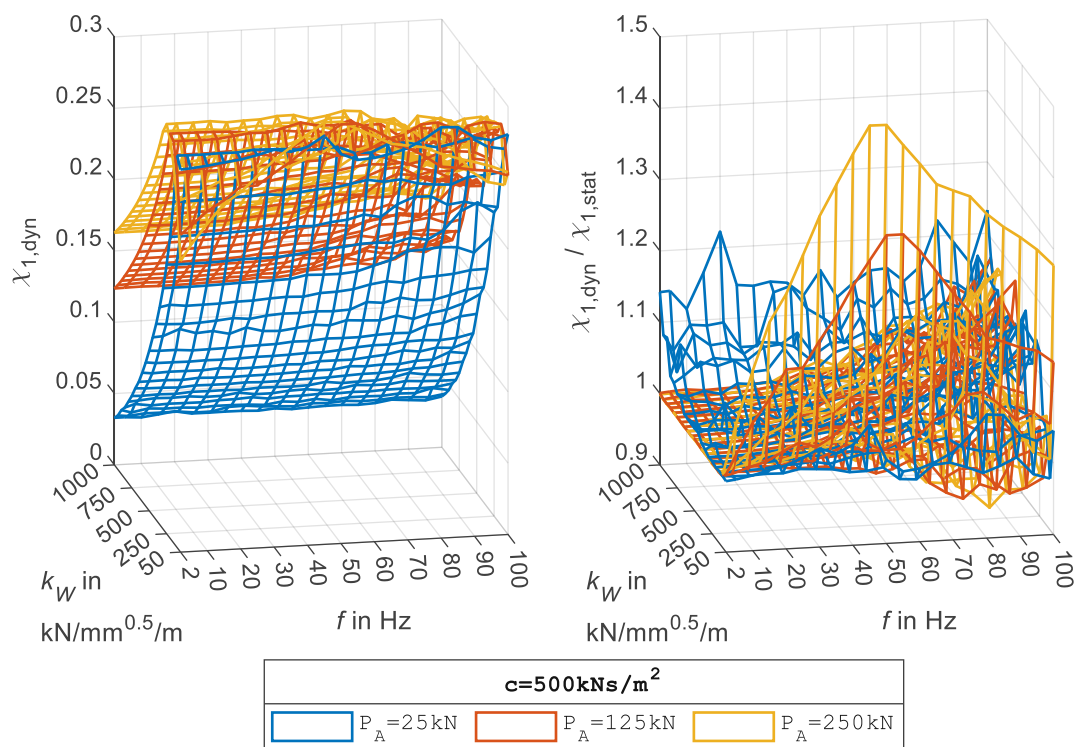


Abbildung 4.82: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und $\chi_{1,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m^2 und die Wurzelfunktion der Federkennlinien

Die Berechnungsergebnisse für die bezogene Einzelkraft $\chi_{2,dyn}$ werden in Abbildung 4.83 bis Abbildung 4.85 dargestellt. Das Verhältnis zwischen den Einzelkräften $\chi_{2,dyn}$ und $\chi_{2,stat}$ des dynamischen und statischen Lastmodells ist in Abhängigkeit der Achslastamplitude P_A nur für die Federungskraftbeiwerten k_W bis $250 \text{ kN/mm}^{0.5}/\text{m}$ verfügbar.

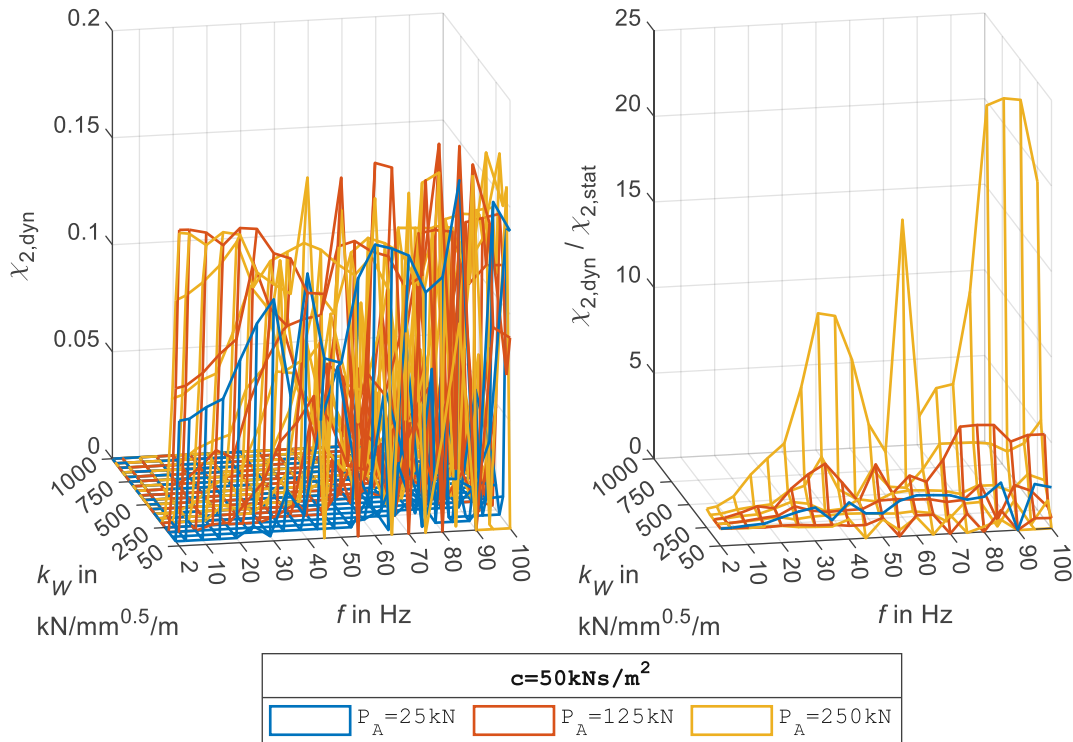


Abbildung 4.83: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und $\chi_{2,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m^2 und die Wurzelfunktion der Federkennlinien

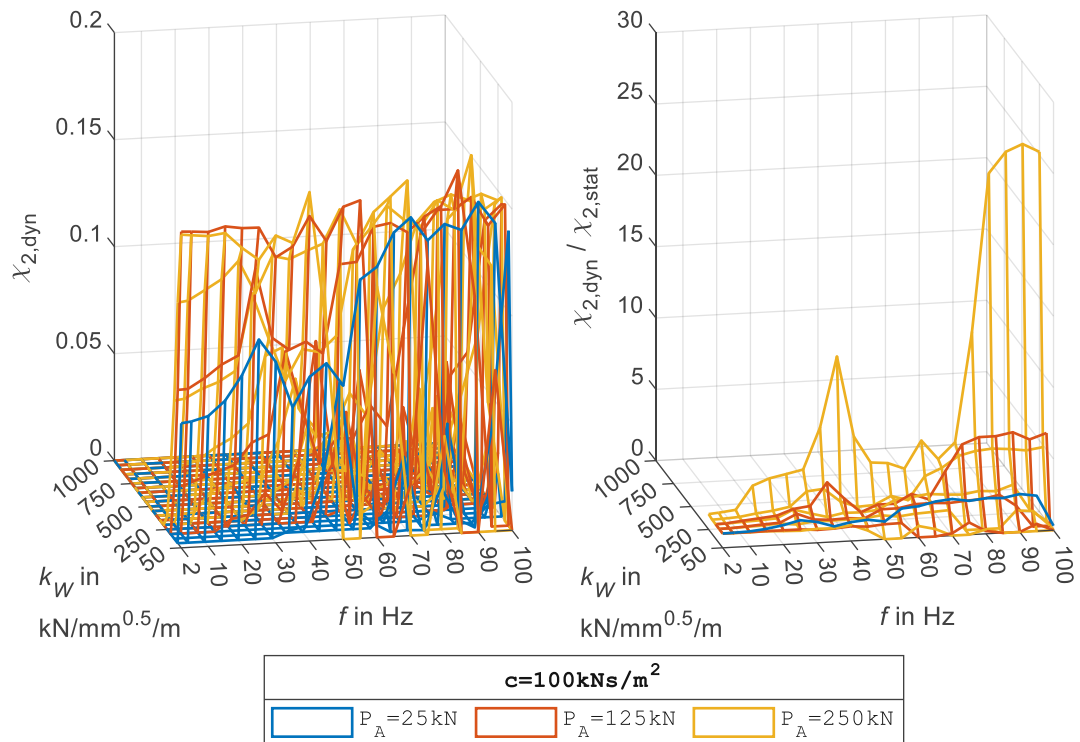


Abbildung 4.84: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{2,\text{dyn}}$ und $\chi_{2,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m^2 und die Wurzelfunktion der Federkennlinien

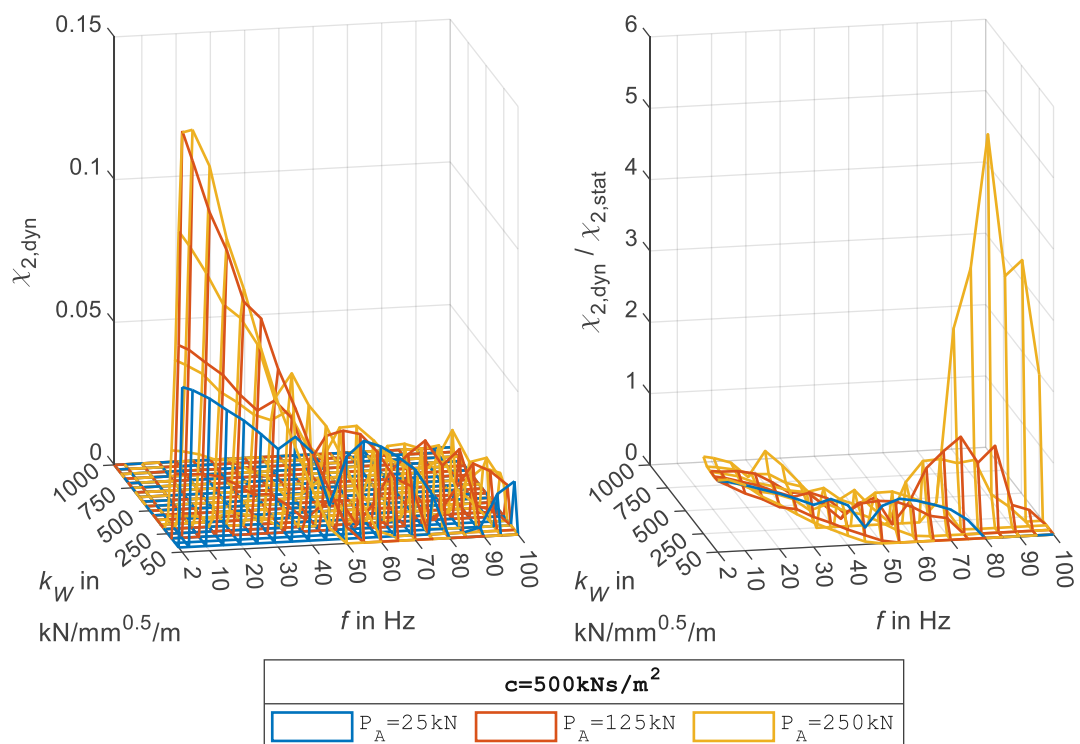


Abbildung 4.85: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{2,\text{dyn}}$ und $\chi_{2,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m^2 und die Wurzelfunktion der Federkennlinien

Die Berechnungsergebnisse für die bezogene Einzelkraft $\chi_{3,\text{dyn}}$ werden in Abbildung 4.86 bis Abbildung 4.88 dargestellt. Das Verhältnis zwischen den dynamischen und statischen bezogenen Einzelkräften $\chi_{3,\text{dyn}}$ und $\chi_{3,\text{stat}}$ kann wiederum für einen begrenzten Parameterbereich angezeigt werden, und zwar nur für den Federungskraftbeiwert k_W von $50 \text{ kN/mm}^{0.5}/\text{m}$ bei der Achslastamplitude P_A von 125 und 250 kN.

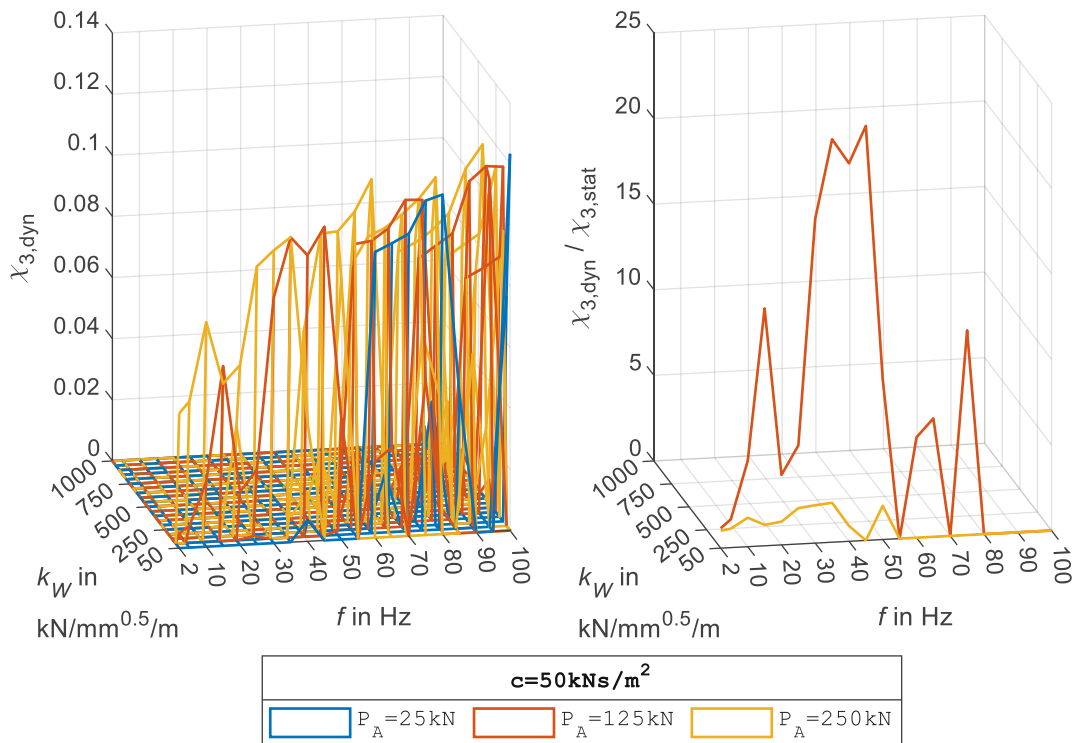


Abbildung 4.86: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{3,\text{dyn}}$ und $\chi_{3,\text{stat}}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m^2 und die Wurzelfunktion der Federkennlinien

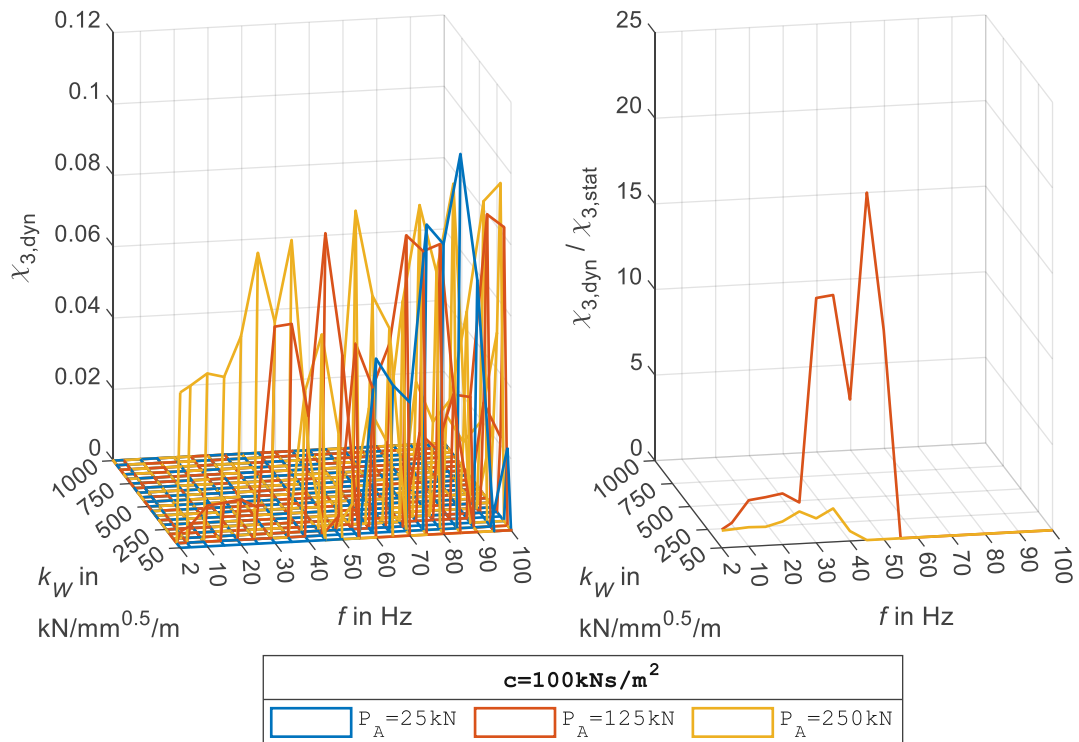


Abbildung 4.87: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ und $\chi_{3,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m^2 und die Wurzelfunktion der Federkennlinien

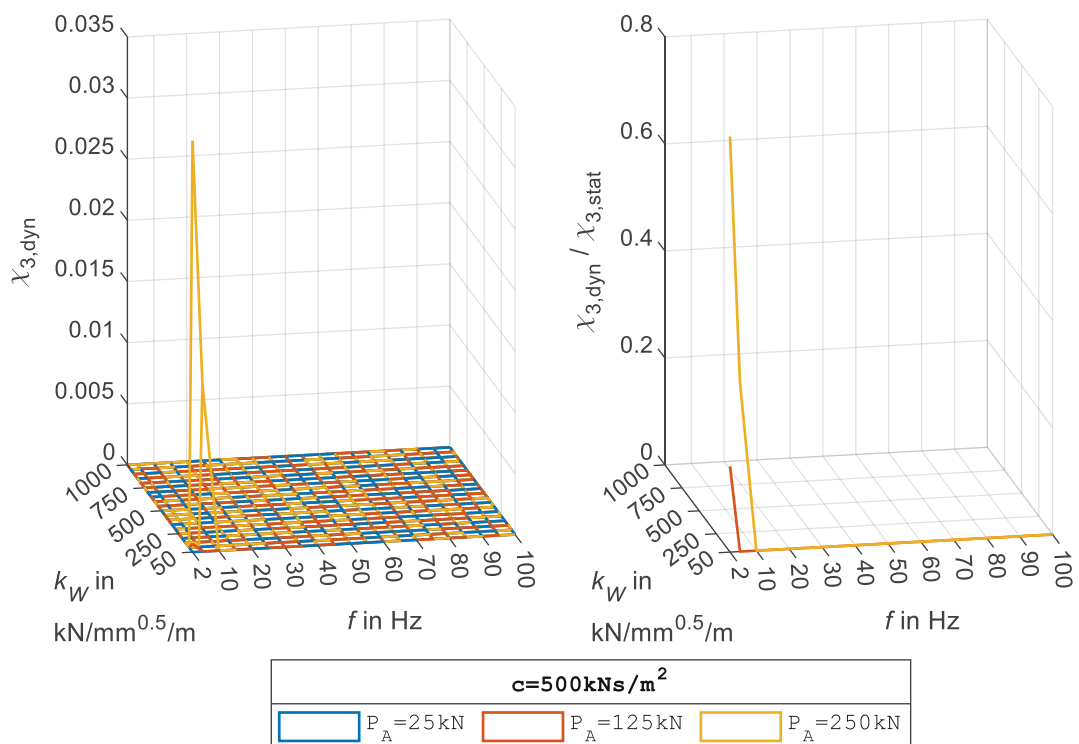


Abbildung 4.88: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ und $\chi_{3,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m^2 und die Wurzelfunktion der Federkennlinien

Abbildung 4.89 bis Abbildung 4.91 zeigen die auf die Achslastamplitude P_A bezogene Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ für die Dämpfungskonstante c von 50, 100 und 500 kNs/m².

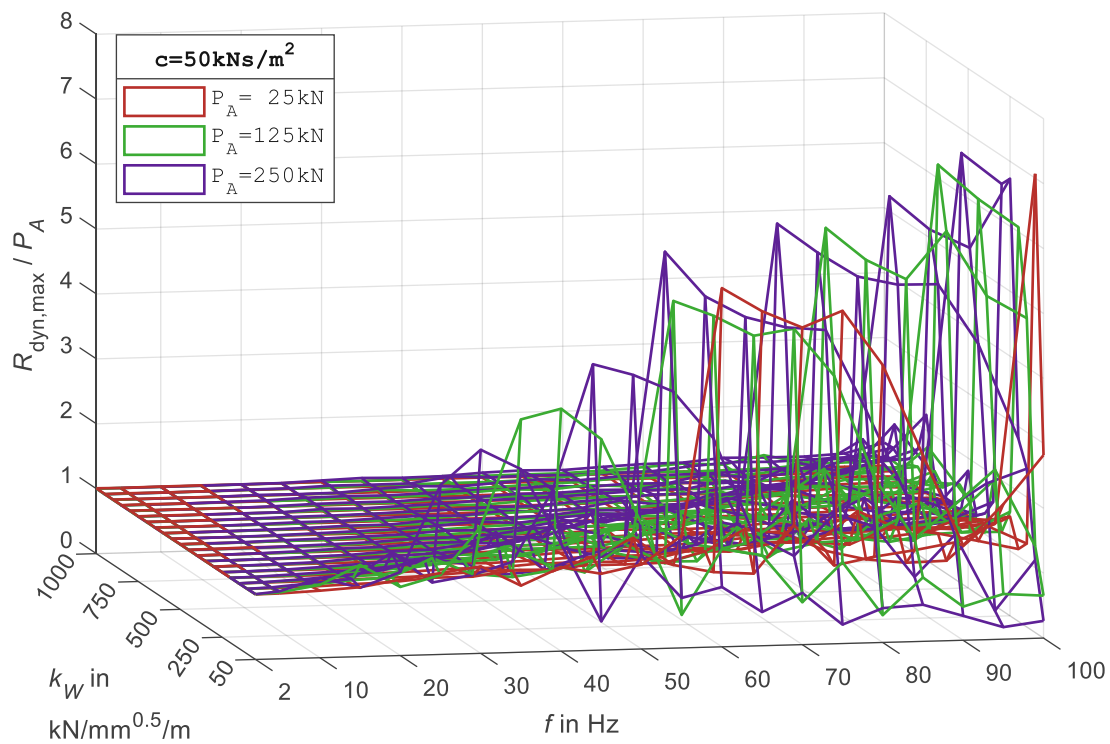


Abbildung 4.89: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

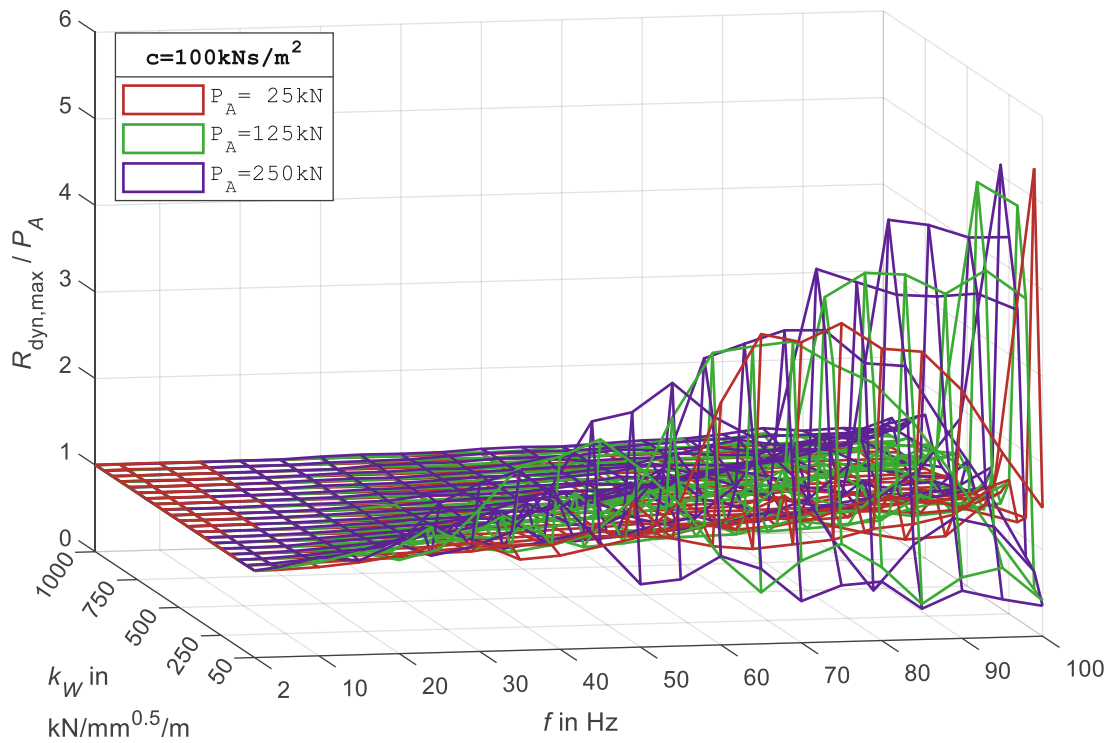


Abbildung 4.90: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

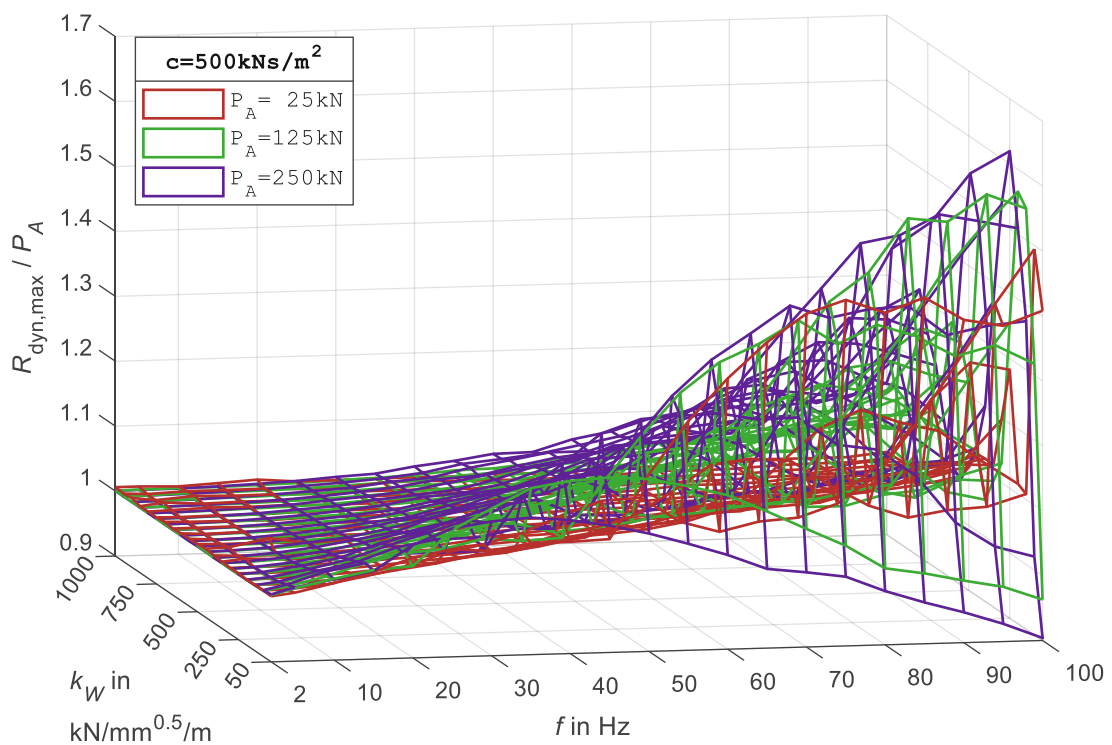


Abbildung 4.91: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion

4.7 Fazit

Numerische Zeitschrittintegration lässt die Schwingung eines durch eine harmonische Achslast angeregten in Schotter gebetteten Gleises für beliebige Kraft-Weg-Diagramme des Schotterbetts berechnen. Vorausgesetzt wird hierbei eine Diskretisierung des kontinuierlichen Gleisbalkens, sodass die Ortsvariable aus der Bewegungsgleichung eliminiert wird und die erhaltenen Bewegungsgleichungen für einzelne diskrete Knoten somit ein Differentialgleichungssystem allein mit der Zeitvariablen bilden, das mit einem Programm für Anfangswertprobleme, wie etwa *ode23t*, numerisch gelöst werden kann.

Die Amplitude der Gleissetzung $w(x, t)$ und der Untergrundreaktion $N(x, t)$ hängt von der Achslastamplitude P_A , der Anregungsfrequenz f , der Schotterbettsteifigkeit oder dem Federungskraftbeiwert (k , k_q oder k_w für lineare, quadratische und Wurzelfunktionen der Federungskraft des Schotterbetts) und der Konstanten c für die angenommene viskose Dämpfung ab. Die dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV, \text{dyn}}$ hat dieselben Abhängigkeiten außer der Achslastamplitude P_A für das System mit einer linearen Federkennlinie des Schotterbetts. Im Vergleich zur statischen Setzung $w(x)$, Untergrundreaktion $N(x)$ und Lastverteilungslänge $L_{LV, \text{stat}}$ können die Amplituden dieser Größen in einem dynamischen Lastfall bei unterresonanten Anregungsfrequenzen größer und bei überresonanten Anregungsfrequenzen kleiner sein.

Mithilfe der Trapezregel können aus den Untergrundreaktionen $N_i(t)$ an den diskreten Punkten zeitvariable Einzelkräfte $F_j(t)$ eines Lastverteilungsmodells abgeleitet werden. Die Summe dieser Einzelkräfte ergibt die gesamte Reaktionskraft $R(t)$. Die auf die Amplitude der Reaktionskraft $R_{\text{dyn}, \text{max}}$ bezogenen Amplituden dieser dynamischen Einzelkräfte $F_{j, \text{dyn}, \text{max}}$ können vor allem in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz f größer oder kleiner als die auf die statische Achslast P (entspricht der statischen Reaktionskraft) bezogenen statischen Einzelkräfte F_j sein. Tendenziell erfahren außenliegende bezogene Einzelkraftamplituden bei einer dynamischen Belastung jedoch eine Vergrößerung und die mittige bezogene Einzelkraftamplitude eine Verringerung im Vergleich zum entsprechenden statischen Lastfall.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die Bemessung von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau gegen dynamische Beanspruchungen durch überfahrende Züge ist aus mehreren Gründen mit Unsicherheiten in der Modellbildung behaftet. Zum einen gibt es verschiedene Modellierungsstrategien, welche die Bestandteile von Brücken wie auch Zügen mit unterschiedlicher Detaillierungstiefe abbilden. Die Brücken können entweder vereinfacht als Euler-Bernoulli-Einzelbalken, als Koppelbalken aus den miteinander verbundenen Oberbau- und Tragwerksbalken oder dreidimensional modelliert werden, wobei die steigende Komplexität des gewählten Modells genauere Ergebnisse verspricht, sie setzt jedoch die genaue Kenntnis von zahlreichen Eingangsparametern voraus. Zum anderen sind die Eingangsparameter oft nicht bekannt und müssen (soweit verfügbar) anhand von diversen Literaturquellen abgeschätzt werden, die zum Teil sehr stark streuende Angaben beinhalten [10]. In der Ingenieurpraxis wird daher häufig der einfachere Zugang durch den Euler-Bernoulli-Balken bevorzugt, für welchen allerdings große Abweichungen zwischen der Berechnung und der Messung hinsichtlich Brückenschwingungen beobachtet werden [13]. Neben den unsicheren Eingangsdaten liegt der Grund teils in der fehlenden Abbildung der Lastverteilung durch den Schotteroberbau, denn bei einem Einzelbalkenmodell werden Radsätze als bewegliche Einzellasten angesetzt, die unmittelbar auf das Brückentragwerk einwirken. Sollten der Gleisrost und die Tragkonstruktion in zwei Balken getrennt und mit Feder-Dämpfer-Elementen gekoppelt werden, um den Schotteroberbau abzubilden, so entsteht ein als Koppelbalken bezeichnetes System, wobei Achslasten in diesem Fall über mehrere Federn verteilt an den Tragwerksbalken übertragen werden. Berechnungen von *Spengler* [14] und *Bruckmoser* [9] beweisen, dass diese Lastverteilung eine schwingungsmindernde Wirkung hat, weshalb deren Erfassung als eine der Voraussetzungen für eine zutreffende Berechnung von Brückenschwingungen anzusehen ist. Außerdem können die Abweichungen zwischen dynamischer Berechnung und Messung auch bei komplexeren Brückenmodellen durch die Annahme einer falschen Federkennlinie (Steifigkeitsmodells) für die Gleis-Tragwerk-Kopplung bedingt sein: Anstatt der überwiegend in Berechnungen angesetzten linearen Federkennlinien ergibt sich aus einer Versuchsreihe von *Stollwitzer et al.* [15] eine degressive Federkennlinie für das Schotterbett. Die Untersuchung der Lastverteilung für unterschiedliches Oberbau-Steifigkeitsverhalten und verschiedene Systemparameter wie auch die Aufstellung eines Lastverteilungsansatzes für einfache Euler-Bernoulli-Einzelbalkenmodelle bilden infolgedessen die Ziele der vorliegenden Diplomarbeit.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit werden die Verformung des Gleises und der vom Gleis auf den Untergrund (Tragwerk) ausgeübte Druck sowie die Verteilung dieses Drucks infolge einer statischen und dynamischen Achslast untersucht. Das zu diesem Zweck in **Kapitel 2** dargestellte mechanische System eines elastisch in Schotter gebetteten Gleisbalkens erfährt bei einer statischen Belastung und einer linearen Federkennlinie der Schotterbettung Setzungen sowie Untergrundreaktionen, die proportional zur Achslast sind. Die Lastverteilungslänge

oder die Länge des gedrückten Bettungsabschnitts verhält sich hingegen lastunabhängig. Alle drei Größen werden zudem stark von der Bettungssteifigkeit beeinflusst: Die Setzung und die Lastverteilungslänge sinken mit zunehmender Steifigkeit, die Untergrundreaktion an der Lastangriffsstelle steigt an. Durch die abschnittsweise Integration der Untergrundreaktion können die in einem konstanten gegenseitigen Abstand angeordneten Einzelkräfte eines einfachen Lastmodells erhalten werden, welche die Lastverteilung des Schotteroberbaues bei der Verwendung in einem Euler-Bernoulli-Einzelbalkenmodell einwirkungsseitig abbilden, sodass der günstige lastverteilende Effekt auch ohne die aufwändigere Koppelbalkenmodellierung von Eisenbahnbrücken berücksichtigt werden kann.

Kapitel 3 erweitert das für die linearen Federkennlinien des Schotterbetts erhaltene Lastmodell auf das Schotterbett mit einer wegabhängigen Steifigkeit bzw. einem nichtlinearen Federungsverhalten, welches progressive quadratische Federkennlinien, degressive Federkennlinien nach einer Wurzelfunktion und eine Federkennlinie nach einer versuchsbasierten degressiven Potenzfunktion umfasst (Gegenüberstellung siehe Abbildung 3.1). Die gesuchten Setzungen und Untergrundreaktionen der nichtlinearen Systeme werden mithilfe des Lösungsprogramms *MATLAB-bvp4c* numerisch bestimmt und ihre Abhängigkeiten vom Federungskraftbeiwert, welcher das Steifigkeitsverhalten bei der nichtlinearen Federung nach der Quadrat- und Wurzelfunktion vorgibt, und von der Achslast analysiert. Während der Einfluss des Federungskraftbeiwerts bei den nichtlinearen Systemen im Allgemeinen jenem der Steifigkeit beim linearen System entspricht (ein größerer Beiwert reduziert Setzungen und die Lastverteilung, wobei die Bodendruckspitze unter der Achslast zunimmt), verursacht der Übergang zu nichtlinearer Federung eine Achslastabhängigkeit der Lastverteilung, die beim linearen System nicht vorhanden war. Bei den progressiven quadratischen Federkennlinien wirkt die erhöhte Last „versteifend“, sodass die Lastverteilung enger wird. Bei den degressiven Federkennlinien nach der Wurzelfunktion und, in einem geringen Maße, bei der Federkennlinie nach der versuchsbasierten degressiven Potenzfunktion kann jedoch die umgekehrte Wirkung beobachtet werden, dass die gestiegene Last eine breitere Lastverteilung zur Folge hat. Das für die Federkennlinie nach der Potenzfunktion ermittelte in guter Näherung lastunabhängige Lastmodell zeigt eine große Ähnlichkeit mit der von *Spengler* vorgeschlagenen Lastverteilung, vgl. Abbildung 1.5 und Abbildung 3.32.

Inwiefern die Lastverteilungsmodelle für die statische Achslast gemäß Kapitel 2 und Kapitel 3 auch im Falle einer dynamischen Belastung zutreffen, wird in **Kapitel 4** thematisiert, indem nun eine harmonische Achslast-Anregung mit unterschiedlichen Frequenzen angesetzt wird. Der kontinuierliche Gleisbalken wird örtlich diskretisiert, um die Zeitverläufe der Setzungen und der Untergrundreaktionen mithilfe der numerischen Lösungsprogramme *MATLAB-ode23t* und *MATLAB-ode23* für Systeme mit linearen sowie nichtlinearen Federkennlinien erhalten zu können. Als Verhältnis der Amplituden der Setzung und der Untergrundreaktion an der Lastangriffsstelle zur entsprechenden statischen Setzung bzw. Untergrundreaktion wird der dynamische Vergrößerungsfaktor für unterschiedliche Anregungsfrequenzen, Achs-

lastamplituden, Schotterbett-Federungskraftbeiwerte und Schotterbett-Dämpfungs-konstanten ausgewertet. Es zeigt sich, dass – in Abhängigkeit der angesetzten Systemparameter – die betrachteten Amplituden inklusive der Lastverteilung sowohl größer als auch kleiner als die zugehörigen statischen Werte sein können. Generell kann bei einer „schwachen“ oder „mäßigen“ Dämpfung sowie bei einer Anregungsfrequenz unterhalb der Resonanzfrequenz des Systems der dynamische Vergrößerungsfaktor größer als 1 erwartet werden. Sowohl das System mit einer linearen Federkennlinie als auch jenes mit der Federkennlinie nach der versuchsbasierten Potenzfunktion weisen weiterhin eine vollständig bzw. annähernd lastamplitudenunabhängige Lastverteilung auf, die dennoch frequenzabhängig ist. Auf Basis der erhaltenen dynamischen Untergrundreaktionen ergibt sich ein Lastmodell für dynamische Systeme aus den im konstanten gegenseitigen Abstand angeordneten Einzelkräften, bei welchen ihre jeweiligen Amplituden vereinfachend als konstante Kräfte anzusetzen sind. Um eine Überschätzung der Tragwerksbelastung zu vermeiden, kann ein Begrenzungskriterium angewendet werden, das die Lastmodell-Einzelkräfte hinsichtlich ihrer Anzahl und Größe so beschränkt, dass sie der Amplitude der über die gesamte Gleisbalkenlänge integrierten Untergrundreaktion entsprechen. Das Vergleich der dynamischen und der statischen (gemäß Kapitel 2 und Kapitel 3) Lastmodelle enthüllt, dass eine dynamische Belastung größer oder kleiner als die entsprechende statische Belastung bei der gleichen Achslastamplitude sein kann. Bei einer „schwachen“ oder „mäßigen“ Dämpfung und bei den Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz ist dennoch stets von einer Lastvergrößerung sowie einer Vergrößerung der Lastverteilung auszugehen. Die Achslastamplitude hat bei den linearen Federkennlinien sowie (annähernd) bei der Federkennlinie nach der versuchsbasierten Potenzfunktion keinen Einfluss auf die Lastverteilung sowie die dynamische Lastvergrößerung.

Somit wird in dieser Diplomarbeit die Frage beantwortet, wie eine Achslast bei unterschiedlichem Schotterbettsteifigkeitsverhalten in einem statischen und in einem dynamischen Lastfall durch den Schotteroberbau verteilt wird. Die abschließend vorgeschlagenen Lastmodelle bilden die ermittelte Lastverteilung einwirkungsseitig ab, sodass diese auch bei den vereinfacht als Euler-Bernoulli-Einzelbalken modellierten Eisenbahnbrücken berücksichtigt werden kann. Eine wünschenswerte Ergänzung wäre dennoch eine experimentelle Bestätigung der erhaltenen Resultate.

Literaturverzeichnis

- [1] Verordnung (EU) 2024/1679 des Europäischen Parlaments und des Rates vom 13. Juni 2024 über Leitlinien der Union für den Aufbau des Transeuropäischen Verkehrsnetzes, zur Änderung der Verordnungen (EU) 2021/1153 und (EU) Nr. 913/2010 und zur Aufhebung der Verordnung (EU) Nr. 1315/2013 (Text von Bedeutung für den EWR), ABl L 2024.
- [2] Verordnung (EU) 2021/1153 des Europäischen Parlaments und des Rates vom 7. Juli 2021 zur Schaffung der Fazilität „Connecting Europe“ und zur Aufhebung der Verordnungen (EU) Nr. 1316/2013 und (EU) Nr. 283/2014 (Text von Bedeutung für den EWR), ABl L 2021/249.
- [3] Richtlinie (EU) 2016/797 des Europäischen Parlaments und des Rates vom 11. Mai 2016 über die Interoperabilität des Eisenbahnsystems in der Europäischen Union (Neufassung) (Text von Bedeutung für den EWR), ABl L 2016/138.
- [4] M. Baeßler, „Lageveränderungen des Schottergleises durch zyklische und dynamische Beanspruchungen“, Dissertation, TU Berlin, 2008. DOI: 10.14279/depositonce-1910.
- [5] ÖNORM EN 1991-2, „Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke – Teil 2: Verkehrslasten auf Brücken (konsolidierte Fassung)“, Österreichisches Normungsinstitut, Wien, 2012.
- [6] ÖNORM EN 1990/A1, „Eurocode – Grundlagen der Tragwerksplanung – Änderung 1: Anwendung bei Brücken (konsolidierte Fassung)“, Österreichisches Normungsinstitut, Wien, 2013.
- [7] ÖNORM B 4008-2, „Bewertung der Tragfähigkeit bestehender Tragwerke – Teil 2: Brückenbau“, Österreichisches Normungsinstitut, Wien, 2019.
- [8] ERRI D 214 / RP 9, „Schlussbericht“, *Eisenbahnbrücken für Geschwindigkeiten über 200km/h*, European Rail Research Institute, Utrecht, 1999.
- [9] B. Bruckmoser, „Untersuchung des Einflusses der lastverteilenden Wirkung des Schotterbetts bei Simulation von Eisenbahnbrückenschwingungen“, Diplomarbeit, TU Wien, 2022. DOI: 10.34726/hss.2022.102407.
- [10] A. Stollwitzer und J. Fink, „Dämpfungskennwerte des Schotteroberbaus auf Eisenbahnbrücken – Teil 2: Energiedissipation im Schotteroberbau und zugehöriges Rechenmodell“, *Bautechnik*, Bd. 98, Nr. 8, S. 552–562, Jän. 2021, DOI: 10.1002/bate.202000100.
- [11] G. Brandstetter, „Analyse einfacher Tragwerksmodelle zur dynamischen Berechnung von Eisenbahnbrücken mit Schwerpunkt Schotteroberbau“, Dissertation, TU Wien, 2018. DOI: 10.34726/hss.2018.60162.

- [12] I. Gonzales, M. Ülker-Kaustell und R. Karoumi, „Seasonal effects on the stiffness properties of a ballasted railway bridge“, *Engineering Structures*, Bd. 57, S. 63–72, Okt. 2013, DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.09.010.
- [13] A. Stollwitzer, „Entwicklung eines Ansatzes zur rechnerischen Bestimmung der Dämpfung von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau“, Dissertation, TU Wien, 2021. DOI: 10.34726/hss.2021.92244.
- [14] M. Spengler, „Dynamik von Eisenbahnbrücken unter Hochgeschwindigkeitsverkehr – Entwicklung eines Antwortspektrums zur Erfassung der dynamischen Tragwerksreaktion“, Dissertation, TU Darmstadt, 2009. Verfügbar unter: <https://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/2036>.
- [15] A. Stollwitzer, L. Bettinelli und J. Fink, „Vertical Track-Bridge Interaction in Railway Bridges with Ballast Superstructure: Experimental Analysis of Dynamic Stiffness and Damping Behavior“, *International Journal Of Structural Stability And Dynamics*, Aug. 2024, DOI: 10.1142/s0219455425400085.
- [16] E. Winkler, „XX. Kapitel. Gleichzeitige Belastung durch Axial- und Transversalkräfte“, in *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik*, H. Dominicius, Prag, 1867, S. 182–184. Verfügbar unter: https://books.google.at/books/about/Die_Lehre_von_der_Elastizität_und_Festi.html.
- [17] A. D. Kerr und John A. Volpe National Transportation Systems Center (U.S.), „On the Stress Analysis of Rails and Ties“, United States. Department of Transportation. Federal Railroad Administration, DOT-TSC-FRA-76-16; FRA-OR&D-76-284; PB-263 414, Sep. 1976. Verfügbar unter: <https://rosap.nhtl.bts.gov/view/dot/10320>.
- [18] J. Dankert und H. Dankert, *Technische Mechanik*. 2013. DOI: 10.1007/978-3-8348-2235-2.
- [19] M. Hermann, „Numerische Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen“, in *Grid-Computing*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, S. 149–205. DOI: 10.1007/978-3-540-79747-0_8.
- [20] J. Kierzenka und L. F. Shampine, „A BVP solver based on residual control and the Matlab PSE“, *ACM Transactions On Mathematical Software*, Bd. 27, Nr. 3, S. 299–316, Sep. 2001, DOI: 10.1145/502800.502801.
- [21] L. F. Shampine und M. W. Reichelt, „The MATLAB ODE Suite“, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Bd. 18, Nr. 1, S. 1–22, Jan. 1997, DOI: 10.1137/s1064827594276424.
- [22] P. Bogacki und L. F. Shampine, „A 3(2) Pair of Runge - Kutta Formulas“, *Applied Mathematics Letters*, Bd. 2, Nr. 4, S. 321–325, Jan. 1989, DOI: 10.1016/0893-9659(89)90079-7.

- [23] L. F. Shampine, I. Gladwell und S. Thompson, „Initial Value Problems“, in *Solving ODEs with MATLAB*, Cambridge University Press, 2003, pp. 39–132, DOI: 10.1017/CBO9780511615542.003.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1: Eisenbahnbrücke als Euler-Bernoulli-Balken	2
Abbildung 1.2: Übersicht eines Koppelbalkenmodells	2
Abbildung 1.3: Kombiniertes Kopplungsmodell zur Berücksichtigung von vertikalen und horizontalen Energiedissipationsmechanismen (Quelle: Abbildung 5.1 in [13]).....	3
Abbildung 1.4: Längsverteilung einer Achslast im Schwellenabstand a nach EN 1991-2 [5].	4
Abbildung 1.5: Lastverteilung mit Schwellenabstand a nach <i>Spengler</i> [14]	4
Abbildung 1.6: Federkraft F in Abhängigkeit der Verschiebung u für unterschiedliche Federkennlinienannahmen	5
Abbildung 2.1: Statisches Modell des Schotteroberbaues	8
Abbildung 2.2: Beispiel eines <i>RFEM</i> -Modells zur Validierung der linearen statischen Berechnung	18
Abbildung 2.3: Vergleich der Gleissetzung $w(x)$ gemäß der analytischen Lösung für das lineare statische System sowohl mit der schubstarren als auch mit der schubnachgiebigen <i>RFEM</i> -Kontrollberechnung für unterschiedliche Bettungssteifigkeitskennwerte k	20
Abbildung 2.4: Setzungslinien $w(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer linearen statischen Berechnung.....	21
Abbildung 2.5: Setzungslinien $w(x)$ für die variierte Bettungssteifigkeit k zufolge einer linearen statischen Berechnung.....	22
Abbildung 2.6: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer linearen statischen Berechnung	22
Abbildung 2.7: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für die variierte Bettungssteifigkeit k zufolge einer linearen statischen Berechnung	23
Abbildung 2.8: Gleissetzung an der Kraftangriffsstelle w_0 in Abhängigkeit der Bettungssteifigkeit k zufolge einer linearen statischen Berechnung.....	24
Abbildung 2.9: Untergrundreaktion an der Kraftangriffsstelle N_0 in Abhängigkeit der Bettungssteifigkeit k zufolge einer linearen statischen Berechnung.....	24
Abbildung 2.10: Lastverteilungslänge L_{LV} in Abhängigkeit der Bettungssteifigkeit k zufolge einer linearen statischen Berechnung	25

Abbildung 2.11: Lastmodell mit $2n+1$ innerhalb der Lastverteilungslänge symmetrisch verteilten Einzelkräften F	26
Abbildung 2.12: Integration der Untergrundreaktion $N(x)$ zu den Einzelkräften F_j	29
Abbildung 2.13: Lastmodell für das lineare statische System bei $k = 10 \text{ kN/mm/m}$ und bei $k = 1000 \text{ kN/mm/m}$ in % von der Achslast	30
Abbildung 2.14: Aufteilung der einwirkenden Achslast in die verteilten Einzelkräfte F_j gemäß dem Lastmodell für das lineare statische System	32
Abbildung 3.1: Vergleich der untersuchten linearen, progressiven und degressiven Federkennlinien für diverse Federungskraftbeiwerte (w in mm, N in kN/m)	34
Abbildung 3.2: Qualitativer Verlauf quadratischer Federkennlinien für verschiedene Federungskraftbeiwerte k_q	35
Abbildung 3.3: RFEM-Kontrollmodell für die nichtlineare statische Berechnung	39
Abbildung 3.4: Vergleich der Gleissetzung $w(x)$ für quadratische Federkennlinien zufolge der Berechnung mit <i>bvp4c</i> sowohl mit der schubstarren als auch mit der schubnachgiebigen RFEM-Kontrollberechnung für unterschiedliche Federungskraftbeiwerte k_q	40
Abbildung 3.5: Setzungslinien $w(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien	42
Abbildung 3.6: Setzungslinien $w(x)$ für den variierten Federungskraftbeiwert k_q zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien	42
Abbildung 3.7: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien	43
Abbildung 3.8: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für den variierten Federungskraftbeiwert k_q zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien	43
Abbildung 3.9: Gleissetzung an der Kraftangriffsstelle w_0 in Abhängigkeit des Federungskraftbeiwerts k_q zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien	44
Abbildung 3.10: Untergrundreaktion an der Kraftangriffsstelle N_0 in Abhängigkeit des Federungskraftbeiwerts k_q zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien	45
Abbildung 3.11: Lastverteilungslänge L_{LV} in Abhängigkeit des Federungskraftbeiwerts k_q zufolge einer statischen Berechnung für die quadratischen Federkennlinien	45

Abbildung 3.12: Lastmodell für das statische System mit einer quadratischen Federkennlinie bei ausgewählten Achslasten P und Federungskraftbeiwerten k_q in % von der Achslast	51
Abbildung 3.13: Aufteilung der einwirkenden Achslast P in die verteilten Einzelkräfte F_j gemäß dem Lastmodell für das statische System mit einer quadratischen Federkennlinie	52
Abbildung 3.14: Qualitativer Federkennlinienverlauf gemäß der Wurfelfunktion für verschiedene Federungskraftbeiwerte k_W	53
Abbildung 3.15: Vergleich der Gleissetzung $w(x)$ für die Federkennlinien gemäß der Wurfelfunktion zufolge der Berechnung mit <i>bvp4c</i> sowohl mit der schubstarren als auch mit der schubnachgiebigen <i>RFEM</i> -Kontrollberechnung für unterschiedliche Federungskraftbeiwerte k_W	57
Abbildung 3.16: Setzungslinien $w(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurfelfunktion	58
Abbildung 3.17: Setzungslinien $w(x)$ für den variierten Federungskraftbeiwert k_W zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurfelfunktion	59
Abbildung 3.18: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurfelfunktion	60
Abbildung 3.19: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für den variierten Federungskraftbeiwert k_W zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurfelfunktion ..	60
Abbildung 3.20: Gleissetzung an der Kraftangriffsstelle w_0 in Abhängigkeit des Federungskraftbeiwerts k_W zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurfelfunktion.....	61
Abbildung 3.21: Untergrundreaktion an der Kraftangriffsstelle N_0 in Abhängigkeit des Federungskraftbeiwerts k_W zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurfelfunktion.....	61
Abbildung 3.22: Lastverteilungslänge L_{LV} in Abhängigkeit des Federungskraftbeiwerts k_W zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinien gemäß der Wurfelfunktion ..	62
Abbildung 3.23: Lastmodell für das statische System mit einer Federkennlinie nach der Wurfelfunktion bei ausgewählten Achslasten P und Federungskraftbeiwerten k_W in % von der Achslast	65
Abbildung 3.24: Aufteilung der einwirkenden Achslast P in die verteilten Einzelkräfte F_j gemäß dem Lastmodell für das statische System mit einer Federkennlinie nach der Wurfelfunktion	66

Abbildung 3.25: Experimentelle Ergebnisse für einen vertikal angeregten Eisenbahnbrückenabschnitt gemäß Fig. 15b in [15].....	67
Abbildung 3.26: Setzungslinien $w(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion	69
Abbildung 3.27: Untergrundreaktionslinien $N(x)$ für die variierte Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion	70
Abbildung 3.28: Gleissetzung an der Kraftangriffsstelle w_0 in Abhängigkeit der Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion	70
Abbildung 3.29: Untergrundreaktion an der Kraftangriffsstelle N_0 in Abhängigkeit der Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion	71
Abbildung 3.30: Lastverteilungslänge L_{LV} in Abhängigkeit der Achslast P zufolge einer statischen Berechnung für die Federkennlinie gemäß der degressiven Potenzfunktion	71
Abbildung 3.31: Aufteilung der einwirkenden Achslast P in die verteilten Einzelkräfte F_j gemäß dem Lastmodell für das statische System mit der Federkennlinie nach der degressiven Potenzfunktion	73
Abbildung 3.32: Lastmodell für das statische System mit der Federkennlinie nach der degressiven Potenzfunktion bei der Achslast $P = 125$ kN in % von der Achslast	73
Abbildung 4.1: Dynamisches Modell des durch eine Achslast angeregten Schotteroberbaues	76
Abbildung 4.2: Zeitverlauf der Setzung an der Kraftangriffsstelle w_0 für das linear gefederte dynamische System mit den Kennwerten nach Tabelle 4.1 zufolge einer <i>ode23t</i> -Berechnung wie auch zufolge einer <i>RFEM-Newmark</i> -Kontrollberechnung	90
Abbildung 4.3: Vergleich der Setzung $w_0(t)$ und des Bodendrucks $N_0(t)$ an der Angriffsstelle der Anregungskraft $P(t)$ zufolge einer analytischen statischen Berechnung sowie zufolge einer dynamischen Simulation mit der Anregungsfrequenz f von 0, 40 und 90 Hz für eine lineare Federkennlinie und die Systemkennwerte nach Tabelle 4.2	92
Abbildung 4.4: Vergrößerungsfunktion für die Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Laststelle sowie der Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ als ihr Verhältnis zur statischen Setzung $w_{0,stat}$, Untergrundreaktion $N_{0,stat}$ und Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ des Systems mit einer linearen Federkennlinie und den Kennwerten gemäß Tabelle 4.2	93

Abbildung 4.5: Gleissetzung $w(x,t)$ und Untergrundreaktion $N(x,t)$ zum Zeitpunkt der maximalen Untergrundreaktion bei statischer wie auch dynamischer Belastung mit der Anregungsfrequenz f von 40 und 90 Hz für eine lineare Federkennlinie und die Systemkennwerte nach Tabelle 4.2.....	94
Abbildung 4.6: Ermittlung der dynamischen Lastmodell-Einzelkräfte $F_j(t)$ durch die abschnittsweise Integration der dynamischen Untergrundreaktion $N(x,t)$	96
Abbildung 4.7: Summierte Trapezflächen i als Approximation des Integrals der kontinuierlichen Untergrundreaktion $N(x,t)$ im Einflussbereich d der Einzelkraft $F_j(t)$	97
Abbildung 4.8: Vergleich der Einzelkräfte $F_j(t)$ mit $j = 0, 1, 2, 3, 4$ zufolge einer analytischen statischen Berechnung sowie zufolge einer dynamischen Simulation mit den Anregungsfrequenzen f von 40 Hz und 90 Hz für eine lineare Federkennlinie und die Systemkennwerte nach Tabelle 4.2.....	98
Abbildung 4.9: Vergleich der Reaktionskräfte $R(t)$ zufolge einer analytischen statischen Berechnung sowie zufolge einer dynamischen Simulation mit der Anregungsfrequenz f von 40 und 90 Hz für eine lineare Federkennlinie und die Systemkennwerte nach Tabelle 4.2	100
Abbildung 4.10: Vergrößerungsfunktionen für die Amplituden der Reaktionskraft $R_{\text{dyn,max}}$, der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$, der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ und der Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ als ihr Verhältnis zu den entsprechenden statischen Werten des Systems mit einer linearen Federkennlinie und den Kennwerten nach Tabelle 4.2	101
Abbildung 4.11: Anwendung des vereinfachten dynamischen Lastmodells	102
Abbildung 4.12: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m ² und die linearen Federkennlinien	103
Abbildung 4.13: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m ² und die linearen Federkennlinien	103
Abbildung 4.14: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m ² und die linearen Federkennlinien	104
Abbildung 4.15: Verhältnis der eingeschwungenen Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ zu den statischen Setzung $w_{0,\text{stat}}$ und Untergrundreaktion $N_{0,\text{stat}}$ an der Kraftangriffsstelle für die linearen Federkennlinien (Übersicht)	105

Abbildung 4.16: Verhältnis der eingeschwungenen Amplitude der Setzung $w_{0,dyn,max}$ zur statischen Setzung $w_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² und die linearen Federkennlinien (detailliert)	106
Abbildung 4.17: Verhältnis der eingeschwungenen Amplitude der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ zur statischen Untergrundreaktion $N_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² und die linearen Federkennlinien (detailliert)	107
Abbildung 4.18: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ (die zum Zeitpunkt des maximalen eingeschwungenen Bodendrucks $N_{0,dyn,max}$ auftritt) sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für lineare Federkennlinie (Übersicht)	108
Abbildung 4.19: Verhältnis der dynamischen Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² und die linearen Federkennlinien (detailliert)	109
Abbildung 4.20: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{0,stat}$ (rechts) für die linearen Federkennlinien	111
Abbildung 4.21: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{1,stat}$ (rechts) für die linearen Federkennlinien	111
Abbildung 4.22: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{2,stat}$ (rechts) für die linearen Federkennlinien	112
Abbildung 4.23: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{3,stat}$ (rechts) für die linearen Federkennlinien	112
Abbildung 4.24: Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{0,stat}$ für die linearen Federkennlinien und die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² (detailliert)	114
Abbildung 4.25: Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{1,stat}$ für die linearen Federkennlinien und die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² (detailliert)	115
Abbildung 4.26: Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{2,stat}$ für die linearen Federkennlinien und die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² (detailliert)	116

Abbildung 4.27: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² und die linearen Federkennlinien (Übersicht).....	117
Abbildung 4.28: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² und die linearen Federkennlinien (detailliert)	118
Abbildung 4.29: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion.....	122
Abbildung 4.30: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ zu den statischen Setzung $w_{0,\text{stat}}$ und Untergrundreaktion $N_{0,\text{stat}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion (Übersicht)...	123
Abbildung 4.31: Verhältnis der eingeschwungenen Amplitude der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ zur statischen Setzung $w_{0,\text{stat}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² und die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion (detailliert)	124
Abbildung 4.32: Verhältnis der eingeschwungenen Amplitude der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ zur statischen Untergrundreaktion $N_{0,\text{stat}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² und die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion (detailliert)	125
Abbildung 4.33: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ (zum Zeitpunkt des maximalen eingeschwungenen Bodendrucks $N_{0,\text{dyn,max}}$) sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{stat}}$ für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion (Übersicht)	126
Abbildung 4.34: Verhältnis der dynamischen Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{stat}}$ für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² und die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion (detailliert)	127
Abbildung 4.35: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,\text{dyn}}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{0,\text{stat}}$ (rechts) für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion	128
Abbildung 4.36: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,\text{dyn}}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{1,\text{stat}}$ (rechts) für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion	129
Abbildung 4.37: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,\text{dyn}}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,\text{dyn}}$ und jener	

des statischen Lastmodells $\chi_{2,stat}$ (rechts) für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion	129
Abbildung 4.38: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{3,stat}$ (rechts) für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion	130
Abbildung 4.39: Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{0,stat}$ für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion und die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² (detailliert)	131
Abbildung 4.40: Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{1,stat}$ für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion und die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² (detailliert)	132
Abbildung 4.41: Verhältnis zwischen der bezogenen Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und jener des statischen Lastmodells $\chi_{2,stat}$ für die Federkennlinie gemäß der Potenzfunktion und die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² (detailliert)	133
Abbildung 4.42: Reaktionskraftamplitude $R_{dyn,max}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² und die Federkennlinie nach der Potenzfunktion (Übersicht)	134
Abbildung 4.43: Reaktionskraftamplitude $R_{dyn,max}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstanten c von 50, 100 und 500 kNs/m ² und die Federkennlinie nach der Potenzfunktion (detailliert)	135
Abbildung 4.44: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	138
Abbildung 4.45: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	139
Abbildung 4.46: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	139
Abbildung 4.47: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ zu den statischen Setzung $w_{0,stat}$ und Untergrundreaktion $N_{0,stat}$	

an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	140
Abbildung 4.48: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ zu den statischen Setzung $w_{0,stat}$ und Untergrundreaktion $N_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	141
Abbildung 4.49: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,dyn,max}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,dyn,max}$ zu den statischen Setzung $w_{0,stat}$ und Untergrundreaktion $N_{0,stat}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	141
Abbildung 4.50: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ (die zum Zeitpunkt des maximalen eingeschwungenen Bodendrucks $N_{0,dyn,max}$ auftritt) sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	142
Abbildung 4.51: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ (die zum Zeitpunkt des maximalen eingeschwungenen Bodendrucks $N_{0,dyn,max}$ auftritt) sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	143
Abbildung 4.52: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,dyn}$ (die zum Zeitpunkt des maximalen eingeschwungenen Bodendrucks $N_{0,dyn,max}$ auftritt) sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,stat}$ für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	143
Abbildung 4.53: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ und $\chi_{0,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	144
Abbildung 4.54: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ und $\chi_{0,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	145
Abbildung 4.55: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ und $\chi_{0,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	145
Abbildung 4.56: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen	

Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und $\chi_{1,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	146
Abbildung 4.57: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und $\chi_{1,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	147
Abbildung 4.58: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und $\chi_{1,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	147
Abbildung 4.59: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und $\chi_{2,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	148
Abbildung 4.60: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und $\chi_{2,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	149
Abbildung 4.61: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und $\chi_{2,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	149
Abbildung 4.62: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ und $\chi_{3,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	150
Abbildung 4.63: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ und $\chi_{3,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	151
Abbildung 4.64: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ und $\chi_{3,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	151
Abbildung 4.65: Reaktionskraftamplitude $R_{dyn,max}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m ² und die quadratischen Federkennlinien	152

- Abbildung 4.66: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m² und die quadratischen Federkennlinien 153
- Abbildung 4.67: Reaktionskraftamplitude $R_{\text{dyn,max}}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die quadratischen Federkennlinien 153
- Abbildung 4.68: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion 156
- Abbildung 4.69: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion 157
- Abbildung 4.70: Eingeschwungene Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion 157
- Abbildung 4.71: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ zu den statischen Setzung $w_{0,\text{stat}}$ und Untergrundreaktion $N_{0,\text{stat}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion 158
- Abbildung 4.72: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ zu den statischen Setzung $w_{0,\text{stat}}$ und Untergrundreaktion $N_{0,\text{stat}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion 159
- Abbildung 4.73: Verhältnis der Amplituden der Setzung $w_{0,\text{dyn,max}}$ und der Untergrundreaktion $N_{0,\text{dyn,max}}$ zu den statischen Setzung $w_{0,\text{stat}}$ und Untergrundreaktion $N_{0,\text{stat}}$ an der Kraftangriffsstelle für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion 159
- Abbildung 4.74: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{stat}}$ für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion 160
- Abbildung 4.75: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{stat}}$ für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion 161
- Abbildung 4.76: Dynamische Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{dyn}}$ sowie ihr Verhältnis zur statischen Lastverteilungslänge $L_{LV,\text{stat}}$ für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion 161

- Abbildung 4.77: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ und $\chi_{0,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien 162
- Abbildung 4.78: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ und $\chi_{0,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien 163
- Abbildung 4.79: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{0,dyn}$ und $\chi_{0,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien 163
- Abbildung 4.80: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und $\chi_{1,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien 164
- Abbildung 4.81: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und $\chi_{1,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien 165
- Abbildung 4.82: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{1,dyn}$ und $\chi_{1,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien 165
- Abbildung 4.83: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und $\chi_{2,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien 166
- Abbildung 4.84: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und $\chi_{2,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien 167
- Abbildung 4.85: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{2,dyn}$ und $\chi_{2,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien 167

Abbildung 4.86: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ und $\chi_{3,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m ² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien.....	168
Abbildung 4.87: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ und $\chi_{3,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m ² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien.....	169
Abbildung 4.88: Bezogene Einzelkraft des dynamischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ (links) sowie Verhältnis zwischen den bezogenen Einzelkräften des dynamischen und statischen Lastmodells $\chi_{3,dyn}$ und $\chi_{3,stat}$ (rechts) für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m ² und die Wurzelfunktion der Federkennlinien.....	169
Abbildung 4.89: Reaktionskraftamplitude $R_{dyn,max}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstante c von 50 kNs/m ² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion	170
Abbildung 4.90: Reaktionskraftamplitude $R_{dyn,max}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstante c von 100 kNs/m ² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion	171
Abbildung 4.91: Reaktionskraftamplitude $R_{dyn,max}$ bezogen auf die Achslastamplitude P_A für die Dämpfungskonstante c von 500 kNs/m ² und die Federkennlinien gemäß der Wurzelfunktion	171