UB-TU WIEN
+EM82302706

K.K. BAU u. MASCHINEN-
GEWERBE-SCHULE in WIEN
BAU-ABTH:
Invent. Nr. 30
Handschrift d. Projectionslehre

Lehrbuch

der

Geometrie

für die

oberen Classen der Mittelschulen

Von

Dr. **Franz Ritter von Močnik**

Vierzehnte verbesserte Auflage

Mit 272 in den Text gedruckten Holzschnitten

Das Recht der Uebersetzung behält sich der Verfasser vor.

Technisch - gewerbliche
Bundes - Lehranstalt
WIEN, I.
Bücherei - Verzeichnis
№ 9652

Wien
Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn
1877

Vorwort zur achten Auflage.

Um den berechtigten Wünschen von Fachmännern Rechnung zu tragen, sind in der neuen Auflage des vorliegenden Lehrbuches mehrere Abschnitte einer gänzlichen Umarbeitung unterzogen worden. Indem in der Darstellung für größere Kürze und Bündigkeit gesorgt wurde, mußte insbesondere auch auf bessere Gliederung des Lehrstoffes, auf bestimmtere Fassung der Lehrsätze und Aufgaben, sowie auf strengere Beweisführung Bedacht genommen werden.

Bezüglich der Ausführung der Beweise suchte ich zwischen jenen mathematischen Lehrbüchern, welche dieselben den Schülern bis in die kleinsten Einzelnheiten in vollständig ausgearbeiteter Form vorführen, und denjenigen, welche nur ein heuristisches Gerippe dieser Beweise bringen, die Mitte zu halten. Die Beweise werden, je nachdem es zum Verständnisse erforderlich erscheint, bald ausführlicher gegeben, bald nur angedeutet; in jedem Falle aber wird auch minder befähigten Schülern die Vorbereitung und Wiederholung möglich gemacht. Daß in der Behandlung nicht durchaus dieselbe Gleichförmigkeit vorherrscht, rührt auch von dem Umstande her, daß das Lehrbuch für mehrere Classen der Mittelschulen bestimmt ist und daher Schülern auf verschiedenen Altersstufen und bei verschiedenem Fortschritte mathematischer Erkenntniß genügen soll.

Die Aufnahme einiger Grundlehren der neueren Geometrie und deren Anwendung bei der Lösung der Berührungsprobleme dürfte bei der immer mehr anerkannten Wichtigkeit dieses Gegenstandes von Vielen als eine willkommene Bereicherung des Inhaltes angesehen werden.

Da die theoretische Erkenntniß mit praktischer Uebung Hand in Hand gehen soll, habe ich namentlich auch auf die Auswahl und Anordnung der Aufgaben alle Sorgfalt verwendet. Den Aufgaben, welche häufig als Bestandtheile des Systems angesehen werden, ist meistens auch die Lösung beigefügt; bei den eigentlichen Uebungsaufgaben habe ich die Ausführung entweder vollständig der Selbstthätigkeit des Schülers überlassen, oder, wo es nöthig erschien, auf die Sätze hingewiesen, in denen die Mittel zur Auflösung enthalten sind.

Graz, im November 1865.

Vorwort zur zwölften Auflage.

Das vorliegende Lehrbuch ist in allen seinen Theilen vollständig umgearbeitet worden.

Das Prinzip der Vorzeichen wurde schon am Anfange begründet und später an den betreffenden Stellen consequent angewendet. Der Aehnlichkeitsbegriff für ebene Figuren erhielt eine allgemeinere Fassung, in welcher derselbe in der Stereometrie auch auf körperliche Raumgebilde ausgedehnt werden konnte.

Wenn es mir aus didaktischen Rücksichten geboten erschien, die bisherige Scheidung des Lehrstoffes in Planimetrie und Stereometrie beizubehalten, so war ich dagegen bemüht, die innigen Wechselbeziehungen zwischen den Lehren beider Theile um

so mehr durch gleichförmige Anordnung und analoge Darstellung möglichst klar hervortreten zu lassen. So gestalten sich z. B. die meisten Sätze über die Kugel als eine bloße Erweiterung der analogen Sätze über den Kreis.

Auch bei der Entwicklung der sphärischen Trigonometrie habe ich auf die möglichste Uebereinstimmung mit der ebenen Bedacht genommen. Die Neper'schen Gleichungen wurden ohne Hilfe der Gauß'schen Formeln, die ohnehin für die Berechnung sphärischer Dreiecke von geringem praktischen Werthe sind, unmittelbar aus dem Sinus- und den beiden Cosinus-Sätzen hergeleitet.

Die analytische Geometrie erhielt mehrseitige Bereicherungen; insbesondere glaubte ich, damit der innige Zusammenhang zwischen den Linien zweiter Ordnung besser erfaßt werde, auch die allgemeine Untersuchung über die geometrische Bedeutung einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten aufnehmen zu sollen.

Indem ferner die Zahl der am Schlusse jedes Abschnittes vorkommenden Uebungsaufgaben bedeutend vermehrt wurde, sind für die Anregung der selbstständigen Thätigkeit der Schüler überall auch leichtere Uebungs-Lehrsätze zur Selbstauffindung der Beweise beigegeben worden. Einige Rechnungsaufgaben über die Flächenbestimmung und über den Kreis setzen Vorkenntnisse aus der Arithmetik voraus, welche den Schülern zur Zeit, als jene Abschnitte an die Reihe kommen, vielleicht noch nicht zu Gebote stehen; in diesem Falle werden die betreffenden Aufgaben vorläufig zu übergehen und erst später, namentlich bei der Wiederholung des gesammten Lehr- und Uebungsstoffes, vorzunehmen sein.

Graz, im Jänner 1874.

Vorwort zur vierzehnten Auflage.

Die vorliegende Auflage unterscheidet sich von der früheren zunächst dadurch, daß in derselben mehrere Beweise und Entwicklungen einfacher und bündiger gegeben und eine Reihe von Sätzen, welche zur Begründung späterer Lehren nicht unbedingt erforderlich sind, gänzlich weggelassen wurden. Die Elemente der neueren Geometrie, welche früher der Lehre vom Kreise organisch eingefügt waren, sind hier aus derselben ausgeschieden und nach Weglassung einiger minder wichtigen Sätze in einen Anhang verlegt worden, so daß in dem Falle, wo dieser Gegenstand übergangen wird, dadurch die Theorie des Kreises in ihrem systematischen Zusammenhange keine Störung erleidet. In der analytischen Geometrie erhielten mehrere Aufgaben durch die Berücksichtigung der Normalform der Gleichung einer Geraden eine kürzere und elegantere Auflösung, als sie die allgemeine Form der Gleichung darbietet.

Graz, im October 1876.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Grundbegriffe der Geometrie 1

Erster Theil.

Die Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Winkel.

I. Länge der Geraden 5
II. Winkel zweier Geraden 6
III. Messung der Winkel 9
IV. Winkel beim Durchschnitte zweier Geraden durch eine dritte 11
V. Parallele Linien 12
VI. Aufgaben 16
VII. Uebungssätze und Uebungsaufgaben 17

Zweiter Abschnitt.

Das Dreieck.

I. Erklärungen und allgemeine Eigenschaften der Dreiecke 18
II. Congruenz der Dreiecke 21
III. Aufgaben 25
IV. Uebungssätze und Uebungsaufgaben 27

Dritter Abschnitt.

Das Viereck.

I. Erklärungen und Lehrsätze 29
II. Aufgaben 34
III. Uebungssätze und Uebungsaufgaben 35

Vierter Abschnitt.

Das Vieleck.

I. Erklärungen und Lehrsätze 35
II. Uebungsaufgaben 37

Fünfter Abschnitt.

Proportionalität der Strecken und Aehnlichkeit der ebenen Gebilde.

I. Geometrische Verhältnisse 38
II. Geometrische Proportionen 40
III. Proportionale Theilung der Strahlen durch parallele Transversalen 41
IV. Aehnlichkeit der ebenen Gebilde 44
V. Aufgaben 48
VI. Uebungssätze und Uebungsaufgaben 49

Sechster Abschnitt.

Flächeninhalt der geradlinigen Gebilde. Seite

I. Vergleichung der Flächeninhalte geradliniger Gebilde ... 50
II. Bestimmung des Flächeninhaltes ... 54
III. Aufgaben ... 56
IV. Uebungssätze und Uebungsaufgaben ... 60

Siebenter Abschnitt.

Der Kreis.

I. Allgemeines über den Kreis ... 63
II. Die Geraden und Winkel am Kreise ... —
III. Lage zweier Kreise gegen einander ... 69
IV. Dem Kreise eingeschriebene und umgeschriebene Vielecke ... 72
V. Kreismessung ... 75
VI. Aufgaben ... 79
VII. Uebungssätze und Uebungsaufgaben ... 87

Anhang.

Einiges aus der neueren Geometrie.

I. Harmonische Theilung der Strecken ... 89
II. Pol und Polare ... 90
III. Potenz und Potenzlinie ... 92
IV. Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsaxen ... 95
V. Aufgaben ... 100

Zweiter Theil.

Die Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Ebenen im Raume ... 103

I. Lage der Geraden gegen eine Ebene ... 104
II. Lage der Ebenen gegen einander ... 107
III. Körperliche Ecken ... 111
IV. Aufgaben ... 116
V. Uebungssätze und Uebungsaufgaben ... —

Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern im Allgemeinen.

I. Ebenflächige Körper oder Polyeder ... 117
1. Die Pyramide ... 118
2. Das Prisma und das Prismatoid ... 120
3. Regelmäßige Polyeder ... 122
II. Krummflächige Körper ... 123
1. Der Kegel ... —
2. Der Cylinder ... 125
3. Die Kugel ... 126
III. Aufgaben ... 132
IV. Uebungssätze und Uebungsaufgaben ... 134

Dritter Abschnitt.

Congruenz, Symmetrie und Aehnlichkeit der Körper.

I. Congruenz und symmetrische Gleichheit der Körper ... 135
II. Aehnlichkeit und symmetrische Aehnlichkeit der Körper ... 137

Vierter Abschnitt.

Seite

Größenbestimmung der Körper 140
I. Das Prisma 141
II. Die Pyramide und das Prismatoid 145
III. Regelmäßige Polyeder 149
IV. Der Kegel ..... —
V. Der Cylinder 152
VI. Rotationsflächen und Rotationskörper 153
VII. Die Kugel 156
VIII. Uebungsaufgaben 160

Dritter Theil.

Die Trigonometrie.

Erster Abschnitt.

Die Goniometrie.

I. Erklärung und Darstellung der Winkelfunctionen 165
II. Relationen zwischen den Winkelfunctionen desselben Winkels 170
III. Relationen zwischen den Winkelfunctionen verschiedener Winkel ..... —
IV. Functionen zusammengesetzter Winkel 171
V. Trigonometrische Tafeln 174
VI. Uebungsaufgaben 176

Zweiter Abschnitt.

Die ebene Trigonometrie.

I. Auflösung der ebenen Dreiecke 177
1. Rechtwinklige Dreiecke ..... —
2. Schiefwinklige Dreiecke 179
3. Uebungsaufgaben 184
II. Anwendung der ebenen Trigonometrie 185
1. Aufgaben aus der Planimetrie ..... —
2. Aufgaben aus der Stereometrie 188
3. Aufgaben aus der praktischen Geometrie und Astronomie 189
4. Uebungsaufgaben 192

Dritter Abschnitt.

Die sphärische Trigonometrie.

I. Auflösung der sphärischen Dreiecke 195
1. Rechtwinklige sphärische Dreiecke ..... —
2. Schiefwinklige sphärische Dreiecke 198
3. Uebungsaufgaben 204
II. Anwendung der sphärischen Trigonometrie 206
1. Aufgaben aus der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie. —
2. Aufgaben aus der Stereometrie 208
3. Uebungsaufgaben 210

Vierter Theil.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Erster Abschnitt.

Seite

Algebraische Lösung geometrischer Aufgaben 211

I. Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke ..... —
II. Algebraische Auflösung geometrischer Aufgaben 213
III. Uebungsaufgaben 218

Zweiter Abschnitt.

Analytische Geometrie 220

I. Analytische Bestimmung eines Punctes in der Ebene ..... —
1. Rechtwinklige Coordinaten ..... —
2. Schiefwinklige Coordinaten 222
3. Polar-Coordinaten ..... —
4. Transformation der Coordinaten 223
5. Uebungsaufgaben 224
II. Die gerade Linie ..... —
1. Analytische Darstellung einer Geraden ..... —
2. Zwei Gerade 231
3. Uebungsaufgaben 235
III. Die Kreislinie 236
1. Analytische Darstellung der Kreislinie ..... —
2. Die Gerade und der Kreis 239
3. Zwei Kreise 242
4. Uebungsaufgaben 244
IV. Die Ellipse ..... —
1. Analytische Darstellung der Ellipse ..... —
2. Die Gerade und die Ellipse 248
3. Uebungsaufgaben 254
V. Die Hyperbel 255
1. Analytische Darstellung der Hyperbel ..... —
2. Die Gerade und die Hyperbel 258
3. Uebungsaufgaben 261
VI. Die Parabel 262
1. Analytische Darstellung der Parabel ..... —
2. Die Gerade und die Parabel 264
3. Uebungsaufgaben 267
VII. Allgemeine Untersuchung der Linien zweiten Grades 268

K.K. STAATS-
GEWERBESCHULE
IN WIEN

Grundbegriffe der Geometrie.

§. 1. Ein von allen Seiten begrenzter Raum wird ein Körper genannt.

Die Grenze eines Körpers nennt man dessen Oberfläche, und jeden Theil derselben eine Fläche.

Die Grenze einer Fläche nennt man deren Umfang, und jeden Theil desselben eine Linie.

Die Grenzen einer Linie nennt man Punkte.

Punkte, Linien, Flächen und Körper heißen Raumgebilde.

Die Raumgebilde werden durch Bewegung erzeugt.

Bewegt sich ein Punkt, so ist der von ihm zurückgelegte Weg eine Linie. Wenn ein Punkt seine Stelle ändern soll, so stehen ihm unzählig viele Bewegungen nach verschiedenen Punkten hin offen. Das unterscheidende Merkmal einer solchen Bewegung nach einem bestimmten Punkte hin heißt die Richtung derselben. Ein Punkt kann während seiner ganzen Bewegung die Richtung nach einem anderen Punkte hin unverändert beibehalten; er kann aber auch an einer jeden Stelle die Richtung seiner Bewegung ändern.

Die Fläche wird durch die Bewegung einer Linie, der Körper durch die Bewegung einer Fläche erzeugt.

Die Bewegung, durch welche ein Gebilde erzeugt wird, haftet an ihm als eine Eigenschaft, die man Ausdehnung nennt. Hiernach hat der Punkt selbst keine Ausdehnung, die Linie eine, die Fläche zwei, der Körper drei Ausdehnungen.

Durch die Begrenzung der Ausdehnungen erhalten die Raumgebilde die Eigenschaft der Größe. Die Linien, Flächen und Körper werden daher als begrenzte Gebilde auch Raumgrößen genannt.

§. 2. Eine Linie, welche durch zwei Punkte bestimmt ist, heißt eine gerade Linie, auch blos Gerade. Sie wird erzeugt, wenn sich der eine Punkt in unveränderter Richtung nach dem andern Punkte hin fortbewegt. Die beständige Richtung, in welcher sich der Punkt bewegt, heißt auch die Richtung der durch die Bewegung erzeugten Geraden.

Aus der Erklärung der geraden Linie folgt:

1. Zwischen zwei Punkten ist nur eine Gerade möglich. Zwei gerade Linien, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, fallen zusammen und bilden eine einzige Gerade.
2. Zwei von einander verschiedene Gerade können nur einen gemeinschaftlichen Punkt haben. Man sagt: sie schneiden sich in diesem Punkte, und nennt den gemeinschaftlichen Punkt ihren Durchschnittspunkt.

Eine Linie, welche aus geraden Linien zusammengesetzt, aber selbst nicht gerade ist, wird eine gebrochene Linie genannt.

Eine Linie, von der kein Theil gerade ist, heißt krumm. Sie wird erzeugt, wenn ein sich bewegender Punkt fortwährend die Richtung seiner Bewegung ändert.

§. 3. Eine Fläche, welche durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmt ist, heißt eine ebene Fläche oder eine Ebene. Eine Ebene wird erzeugt, wenn sich die Gerade, welche durch zwei der gegebenen Punkte geht, um einen derselben so dreht, daß sie sich dabei stets auch längs der durch die beiden anderen Punkte bestimmten Geraden bewegt. Sie hat demnach die Eigenschaft, daß jede Gerade, welche zwei Punkte der Ebene verbindet, ganz in die Ebene hineinfällt.

Eine Fläche, von der kein Theil eben ist, heißt krumm.

Jede begrenzte Fläche wird eine Figur genannt. Eine ebene Figur ist entweder geradlinig oder krummlinig, je nachdem sie von geraden oder krummen Linien begrenzt wird.

Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ebenflächig (eckig); ein Körper, welcher nicht von lauter ebenen Flächen begrenzt wird, heißt krummflächig (rund).

§. 4. Eine Größe messen heißt angeben, wie vielmal eine als Einheit angenommene Größe derselben Art in ihr enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt die Maßzahl der Größe.

Jede Raumgröße kann nur durch eine gleichartige Raumgröße gemessen werden, also eine Linie nur durch eine Linie, eine Fläche nur durch eine Fläche, ein Körper nur durch einen Körper.

Die Größe einer begrenzten Linie heißt deren Länge, die Größe einer begrenzten Fläche deren Flächeninhalt, die Größe eines Körpers dessen Cubikinhalt oder Volumen.

§. 5. An den Raumgebilden zieht man nicht nur die Größe, sondern auch die Gestalt, d. i. die Art der Vereinigung der einzelnen Theile zu einem Ganzen, in Betrachtung.

Zwei Raumgebilde können gleiche Größe haben, aber in der Gestalt verschieden sein; ebenso können zwei Raumgebilde gleiche Gestalt und verschiedene Größe haben. Raumgebilde, welche dieselbe Größe haben, heißen gleich; Raumgebilde, welche dieselbe Gestalt haben, heißen ähnlich; Raumgebilde, welche gleiche Größe und gleiche Gestalt haben, nennt man congruent.

Um anzuzeigen, daß zwei Größen gleich sind, wird zwischen dieselben das Zeichen = (gleich) gesetzt; die Aehnlichkeit wird durch das Zeichen ∼ (ähnlich), die Congruenz durch die Verbindung beider Zeichen, nämlich durch ≅ (congruent) ausgedrückt.

Congruente Raumgebilde unterscheiden sich nur durch den Ort, an dem sie sich befinden, und können so über einander gelegt werden, daß sie sich decken. Umgekehrt: Können zwei Raumgebilde zur Deckung gebracht werden, so sind sie congruent.

§. 6. Die Wissenschaft von den Raumgebilden, insofern an ihnen die Eigenschaften des Raumes betrachtet werden, heißt Geometrie. Sie zerfällt in zwei Haupttheile: die Planimetrie und die Stereometrie.

Die Planimetrie oder ebene Geometrie handelt von jenen Raumgebilden, welche in einer und derselben Ebene liegen; die Stereometrie beschäftigt sich dagegen mit jenen Raumgebilden, die nicht in einer einzigen Ebene liegen, sondern sich auch noch außerhalb derselben ausdehnen.

Als besondere Zweige der Geometrie treten noch auf: die Trigonometrie und die analytische Geometrie. Jene hat die Aufgabe, die Raumgrößen aus gegebenen Bestandtheilen mittelst der Rechnung zu bestimmen; diese, die Lage der verschiedenen Raumgebilde algebraisch darzustellen.

Die Geometrie behandelt ihre Lehren nach der mathematischen Methode auf dem Grunde von Erklärungen, Grundsätzen und Forderungssätzen in Lehrsätzen, die bewiesen, in Aufgaben, die gelöst, und in Zu- und Folgesätzen, die jenen angeschlossen werden.

§. 7. Eine Erklärung ist die Angabe der wesentlichen Merkmale eines Begriffes. Im weiteren Sinne versteht man darunter die Angabe alles dessen, was bei einer folgenden Entwicklung zu Grunde gelegt wird.

Ein Grundsatz (Axiom) ist ein Satz, dessen Wahrheit als von selbst einleuchtend vorausgesetzt wird. Die allgemeinen mathematischen Grundsätze, die in der Arithmetik (§. 7) angeführt wurden, kommen auch in der Geometrie zur Anwendung.

Ein Satz, welcher eine geometrische Wahrheit ausspricht, deren Richtigkeit nicht an und für sich selbst einleuchtet, sondern erst begründet werden muß, heißt ein geometrischer Lehrsatz. Durch jeden solchen Satz wird ausgesagt, daß, wenn einem oder mehreren Raumgebilden eine bestimmte Eigenschaft zugesprochen wird, denselben nothwendig auch andere bestimmte Eigenschaften zukommen. Ein geometrischer Lehrsatz besteht demnach im Allgemeinen aus zwei Theilen, aus der Voraussetzung oder Bedingung, und aus der Behauptung oder Folgerung. Jeder Lehrsatz bedarf, um von uns für wahr erkannt zu werden, eines Beweises, durch welchen die Wahrheit desselben als nothwendige Folge eines Grundsatzes oder anderer bereits als wahr anerkannter Sätze dargethan wird. Der Beweis ist entweder direct oder indirect. Bei einem directen Beweise werden die Gründe, aus denen die Wahrheit des Satzes hervorgeht, unmittelbar angegeben; bei dem indirecten Beweise aber wird auf die Wahrheit einer Behauptung geschlossen, indem man nachweiset, daß die Annahme der entgegengesetzten Behauptung zu Folgerungen führen würde, welche mit schon als wahr erkannten Sätzen in offenbarem Widerspruche stehen.

Unter der Umkehrung eines Lehrsatzes versteht man einen Satz, welcher die Voraussetzung des ersten als Behauptung, und die Behauptung des ersten als Voraussetzung enthält. Wenn ein Lehrsatz wahr ist, so ist nicht immer auch dessen Umkehrung wahr; sie muß besonders bewiesen werden.

Folgesätze oder Zusätze sind Sätze, welche unmittelbar oder durch einfache Schlüsse aus den vorhergehenden Sätzen abgeleitet werden können.

§. 8. Eine geometrische Aufgabe spricht die Forderung aus, ein geometrisches Gebilde zu verzeichnen, welches gegebenen Bedingungen entspricht. Jede Aufgabe erfordert eine Auflösung, d. i. die Angabe des Verfahrens, wodurch die in der Aufgabe verlangte Construction (Zeichnung) ausgeführt wird. Die Construction erscheint manchmal als unmittelbare Folge eines bereits erwiesenen Lehrsatzes, meistens aber steht sie mit demselben nur in einem mehr versteckten mittelbaren Zusammenhange oder beruhet gar auf der Combination mehrerer Lehrsätze.

In jedem Falle muß der Construction eine verständige Beurtheilung der in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen vorausgehen, welche durch die geo-

metrische Analysis wesentlich erleichtert wird. Die Analysis nimmt die in der Aufgabe verlangte Zeichnung als ausgeführt an, und untersucht dann an derselben den Zusammenhang zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken, um daraus durch Anwendung von geometrischen Lehrsätzen zu folgern, wie die gesuchten Stücke aus den gegebenen gefunden werden können.

Bei der Auflösung geometrischer Aufgaben kommt es meist auf die Bestimmung von Punkten an; diese ergeben sich als die Durchschnitte von Linien oder Flächen, deren alle Punkte gewisse Bedingungen erfüllen. Eine Linie oder Fläche von solcher Beschaffenheit, daß alle in ihr liegenden Punkte, aber auch nur diese, einer gewissen gegebenen Bedingung Genüge leisten, heißt ein geometrischer Ort für diese Punkte. Die geometrischen Oerter liefern daher ein sehr wichtiges Hilfsmittel für die geometrische Analysis.

Ist die Analysis einer Aufgabe durchgeführt worden, so unterliegt die Construction keiner weiteren Schwierigkeit; man braucht dabei nur der Analysis Schritt für Schritt zu folgen, und die Punkte, welche zur Bestimmung der durch die Aufgabe verlangten Figur nöthig sind, genau in der Ordnung aus einander abzuleiten, in welcher sie in der Analysis als gegeben oder aus einander folgend nachgewiesen wurden.

Dann bedarf es noch des Beweises, daß durch die ausgeführte Construction wirklich allen in der Aufgabe gestellten Bedingungen entsprochen werde. Dieser ergibt sich meistens aus der Construction selbst, oder auch aus der Analysis, indem man in dem analytischen Entwicklungsgange zurückschreitend, die Schlüsse, wie sie in der Analysis aus einander hervorgehen, im Beweise in umgekehrter Ordnung auf einander folgen läßt.

Zu dem Beweise tritt häufig noch die Determination dazu, d. i. die Erörterung der Frage, unter welchen Bedingungen die Lösung möglich ist, und ob der Aufgabe nur eine oder mehrere Lösungen genügen.

Zur vollständigen Durchführung einer Aufgabe gehören demnach im allgemeinen fünf Stücke: die Aufgabe selbst, die Analysis, die Construction, der Beweis und die Determination, von denen jedoch die Analysis und die Determination nicht immer nothwendig sind.

Eine Constructionsaufgabe, welche nur eine einzige Auflösung oder eine genau bestimmbare Anzahl von Auflösungen zuläßt, heißt bestimmt; eine Aufgabe, welche unendlich viele Auflösungen zuläßt, heißt unbestimmt.

Eine Aufgabe, deren Auflösung ohne weitere Anweisung für sich einleuchtend ist, heißt Forderungssatz (Postulat).

Außer den geometrischen Constructionsaufgaben gibt es auch geometrische Rechnungsaufgaben, d. i. Aufgaben, welche sich auf die Berechnung der Raumgrößen mit Hilfe der Zahlen beziehen.

Erster Theil.

Die Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Winkel.

I. Länge der Geraden.

§. 9. Die unbegrenzte Gerade wird durch jeden ihrer Punkte in zwei halbbegrenzte Gerade getheilt, welche auf beiden Seiten des gemeinschaftlichen Grenzpunktes liegen und von diesem aus entgegengesetzte Richtungen haben. Jede durch einen Punkt halbbegrenzte Gerade wird ein Strahl genannt. Eine durch zwei Punkte begrenzte Gerade heißt eine Strecke; die beiden Grenzpunkte heißen ihre Endpunkte. Die Strecke bestimmt die Entfernung oder den Abstand zweier Punkte.

Ein Strahl wird durch den Grenzpunkt und einen zweiten in ihm liegenden Punkt, eine Strecke durch ihre Endpunkte bezeichnet. Beide kann man auch durch einen einzigen Buchstaben ausdrücken. So heißt die Gerade, deren Endpunkte A und B (Fig. 1) sind, die Strecke AB oder BA, oder die Strecke a.

Fig. 1.

A a B

Eine Strecke AB kann von einem sich bewegenden Punkte auf zwei Arten beschrieben werden, entweder in der Richtung von A nach B, oder in der entgegengesetzten Richtung von B nach A. Mit Rücksicht auf diesen Gegensatz der Richtungen heißt AB die Strecke, welche der Punkt in seiner Bewegung von A nach B, und BA die Strecke, welche er in seiner Bewegung von B nach A zurücklegt. Vollbringt er nach einander beide Bewegungen, so ist es in Bezug auf den Endzustand so viel, als ob er sich gar nicht bewegt hätte; man kann daher die Summe seiner beiden Bewegungen $AB + BA = 0$ setzen, woraus $BA = -AB$ folgt.

Nimmt man daher eine Strecke in der einen Richtung als positiv an, so muß sie in der entgegengesetzten Richtung als negativ angesehen werden.

Gewöhnlich wird auf diesen Gegensatz der Richtungen nicht Rücksicht genommen und nur die absolute Länge der Strecken in Betracht gezogen.

§. 10. Um zwei Strecken bezüglich ihrer absoluten Länge mit einander zu vergleichen, lege man dieselben so auf einander, daß der eine Endpunkt und die Richtungen derselben zusammenfallen. Wenn dann auch die anderen zwei Endpunkte zusammenfallen, die Strecken sich also decken, so sind diese einander gleich; fallen aber die anderen zwei Endpunkte nicht zusammen, so sind die Strecken ungleich, und zwar ist diejenige die kleinere, deren zweiter Endpunkt zwischen den Endpunkten der anderen Strecke liegt.

Wenn zwei Strecken gleich sind, muß man sich dieselben auch so vorstellen können, daß sie auf einander gelegt sich decken.

(Summe und Differenz zweier Strecken.)

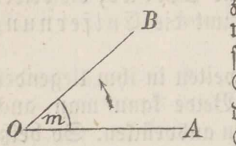
§. 11. Um eine gegebene Strecke zu *messen*, untersucht man, wie oft eine andere als *Längeneinheit* angenommene Strecke in derselben enthalten ist.

Die *Einheit des Längenmaßes* ist in den meisten europäischen Staaten das *Meter*. Ein *Meter* (m) wird in 10 *Decimeter* (dm) à 10 *Centimeter* (cm) à 10 *Millimeter* (mm) eingetheilt. 1000 Meter sind ein *Kilometer* (Km), 10000 Meter sind ein *Myriameter* (Mm).

II. Winkel zweier Geraden.

§. 12. Gehen in einer Ebene von einem Punkte aus zwei Strahlen, so heißt die *Größe der Drehung*, welche der eine Strahl in dieser Ebene um den gemeinschaftlichen Punkt machen muß, um in die Richtung des zweiten Strahles zu gelangen, der *Winkel* der beiden Strahlen. Die zwei Strahlen, welche den Winkel bilden, heißen seine *Schenkel*; den gemeinschaftlichen Punkt, von dem sie ausgehen, nennt man den *Scheitel* oder die *Spitze* des Winkels. Die zwischen den Schenkeln liegende ebene Fläche, worin die Drehung als vollbracht betrachtet wird, heißt die *Winkelfläche*.

Fig. 2.



Einen Winkel bezeichnet man entweder mit einem einzigen Buchstaben, den man zwischen die Schenkel setzt, oder mit dem Buchstaben am Scheitel, oder mit drei Buchstaben, von denen einer am Scheitel und zwei an den Schenkeln stehen und der am Scheitel stehende immer in die Mitte gesetzt wird. In Fig. 2 sind OA und OB die Schenkel, O der Scheitel des Winkels, und dieser selbst heißt entweder der Winkel m, oder der Winkel O, oder der Winkel AOB oder BOA. Drückt man die Strahlen OA und OB durch a und b aus, so kann deren Winkel auch mit (a, b) bezeichnet werden.

Ein Winkel AOB kann von einem Strahle, welcher sich um O dreht, auf zwei Arten beschrieben werden, entweder durch die Drehung aus der Lage OA in die Lage OB, oder durch die entgegengesetzte Drehung aus der Lage OB in die Lage OA. Mit Rücksicht auf diesen Gegensatz der Drehungen heißt AOB der Winkel, welchen der Strahl in seiner Drehung von OA nach OB, und BOA der Winkel, welchen er in seiner Drehung von OB nach OA beschreibt. Vollbringt er nach einander diese beiden Drehungen, so ist es in Bezug auf den Endzustand so viel, als ob er sich gar nicht gedreht hätte; man kann deshalb die Summe seiner beiden Drehungen $AOB + BOA = 0$ setzen, woraus $BOA = -AOB$ folgt.

Nimmt man daher einen Winkel für die Drehung nach der einen Seite als *positiv* an, so muß er für die Drehung nach der entgegengesetzten Seite als *negativ* angesehen werden.

Meistens nimmt man auf diesen Gegensatz der Drehungen keine Rücksicht und betrachtet den Winkel einfach als die absolute Größe der zu dessen Entstehung erforderlichen Drehung.

§. 13. Um zwei Winkel in Bezug auf ihre Größe zu vergleichen, lege man ihre Winkelflächen so auf einander, daß der Scheitel und ein Schenkel des einen Winkels auf den Scheitel und einen Schenkel des andern zu liegen kommen. Fallen dann auch die zweiten Schenkel der Richtung nach zusammen,

so sind die beiden Winkel gleich; fallen aber die zweiten Schenkel nicht zusammen, so sind die zwei Winkel ungleich, und zwar ist derjenige kleiner, dessen zweiter Schenkel zwischen die Schenkel des anderen Winkels fällt.

Wenn zwei Winkel gleich sind, so können sie mit ihren Winkelflächen so auf einander gelegt werden, daß, wenn die Scheitel und ein Paar Schenkel derselben zusammenfallen, auch die andern zwei Schenkel zusammenfallen.

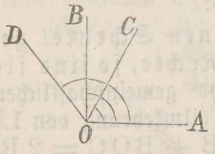
(Summe und Differenz zweier Winkel.)

§. 14. Dreht sich ein Strahl um seinen Grenzpunkt in einer Ebene herum, so nimmt er nach und nach alle Richtungen an, welche in der Ebene von diesem Punkte aus möglich sind, und bildet daher mit seiner anfänglichen Richtung alle um jenen Punkt möglichen Winkel.

Am kleinsten ist der Winkel, wenn der bewegliche Strahl noch gar keine Drehung gemacht hat, und somit mit seiner anfänglichen Richtung zusammenliegt; man nennt diesen Winkel den Nullwinkel.

Legt der bewegliche Strahl den vierten Theil einer vollständigen Umdrehung zurück, so heißt der dadurch erzeugte Winkel ein rechter Winkel. Alle rechten Winkel sind einander gleich. Der rechte Winkel wird gewöhnlich mit dem Buchstaben R bezeichnet.

Fig. 3.



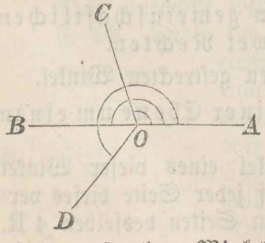
Ein Winkel, zu dessen Entstehung weniger als eine Vierteldrehung erforderlich ist, heißt ein spitzer, und ein Winkel, zu dessen Erzeugung mehr als eine Viertel-, aber weniger als die halbe Umdrehung erfordert wird, ein stumpfer Winkel. Ein spitzer Winkel ist demnach kleiner, ein stumpfer größer als ein rechter; beide werden auch schiefe Winkel genannt.

Hat (Fig. 3) der Strahl OA, wenn er in die Lage OB gelangt ist, den vierten Theil einer vollen Umdrehung zurückgelegt, so ist AOB ein rechter, AOC ein spitzer und AOD ein stumpfer Winkel.

Zwei Winkel, welche sich zu einem Rechten ergänzen, heißen Complementwinkel, wie z. B. AOC und COB.

§. 15. Wenn der bewegliche Strahl eine halbe Umdrehung gemacht hat, so kommt er in eine Richtung, welche seiner anfänglichen Richtung entgegengesetzt ist. Der Winkel, welcher durch diese Drehung erzeugt wird, dessen Schenkel daher entgegengesetzt in einer geraden Linie liegen, heißt ein gestreckter Winkel. Ein gestreckter Winkel ist gleich zwei Rechten. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

Fig. 4.

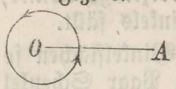


Ein Winkel, der kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein hohler, und ein Winkel, der größer als ein gestreckter ist, ein erhabener Winkel. In Fig. 4 ist AOB ein gestreckter, AOC ein hohler, AOD ein erhabener Winkel. Jedem hohlen Winkel zweier Strahlen entspricht immer auch ein erhabener Winkel derselben; wenn jedoch nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, ist unter dem Winkel zweier Strahlen stets der hohle Winkel zu verstehen.

Zwei Winkel, welche sich zu zwei Rechten oder zu einem gestreckten Winkel ergänzen, heißen Supplementwinkel, wie z. B. AOC und COB.

Nach einer vollständigen Umdrehung gelangt der bewegliche Strahl wieder in seine anfängliche Lage. Der Winkel, der durch diese Drehung entsteht, heißt ein voller Winkel (Fig. 5); seine beiden Schenkel fallen zusammen, wie bei dem Nullwinkel. Ein voller Winkel ist gleich zwei gestreckten Winkeln oder vier Rechten.

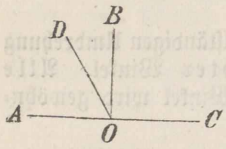
Fig. 5.



Wird der bewegliche Strahl, nachdem er eine volle Umdrehung gemacht hat, noch weiter gedreht, so kommt er nach und nach wiederholt in die Richtungen, die er schon während der ersten Umdrehung hatte. Die Winkel, die dadurch erzeugt werden, sind gleich so vielmal vier Rechten, als volle Umdrehungen stattfanden, vermehrt um die Winkel, welche der Strahl mit seiner anfänglichen Lage bei der ersten Umdrehung gebildet hat.

§. 16. Zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren andere Schenkel auf entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Scheitels in einer geraden Linie liegen, heißen Nebenwinkel; z. B. (Fig. 6) AOB und BOC, ebenso AOD und DOC.

Fig. 6.

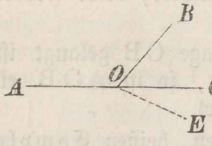


Lehrsätze. 1. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

Denn sie bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

2. Haben zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemeinschaftlich, und beträgt ihre Summe zwei Rechte, so sind sie Nebenwinkel, d. i. ihre nicht gemeinschaftlichen Schenkel bilden eine gerade Linie. (Umkehrung von 1.)

Fig. 7.



Voraussf. Es sei (Fig. 7) AOB + BOC = 2 R.

Behaupt. AOC ist eine gerade Linie.

Indirecter Beweis. Wäre nicht OC, sondern irgend eine andere Gerade, z. B. OE, die Verlängerung von AO, so müßte

AOB + BOE = 2 R (als Nebenwinkel) und wegen
AOB + BOC = 2 R (nach der Voraussetzung) auch
AOB + BOE = AOB + BOC, oder, wenn man AOB wegnimmt,
BOE = BOC

sein, was unmöglich ist, weil das Ganze größer als ein Theil ist. Es muß demnach OC selbst die Verlängerung von AO, folglich AOC eine gerade Linie sein.

Folgesätze. a) Die Summe aller Winkel, welche auf einer Seite einer geraden Linie liegen und einen gemeinschaftlichen in ihr liegenden Scheitel haben, ist gleich zwei Rechten.

Denn alle diese Winkel betragen zusammen einen gestreckten Winkel.

b) Die Summe aller Winkel, welche in einer Ebene um einen Punkt herum liegen, ist gleich vier Rechten.

Denn verlängert man einen beliebigen Schenkel eines dieser Winkel über den Scheitel hinaus, so betragen die Winkel auf jeder Seite dieses verlängerten Schenkels 2 R, folglich alle Winkel zu beiden Seiten desselben 4 R.

§. 17. Bildet eine Gerade mit einer andern rechte Winkel, so heißen die beiden Geraden senkrecht, sonst schief auf einander. So ist (Fig. 6)

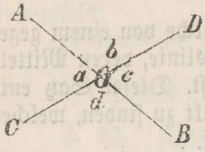
BO senkrecht auf AC, DO schief auf AC. Daß BO auf AC senkrecht steht, wird angezeigt: BO ⊥ AC. Die Senkrechte wird auch Loth genannt.

Wird von einem Punkte außerhalb einer Geraden zu dieser eine senkrechte oder eine schiefe Gerade gezogen, so heißt ihr Durchschnitt mit der gegebenen Geraden der Fußpunkt der andern Geraden.

§. 18. Zwei Winkel, bei denen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des andern über den Scheitel sind, heißen Scheitelwinkel, wie a und c, oder b und d (Fig. 8).

Lehrsätze. 1. Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Fig. 8.



Voraussf. a und c sind Scheitelwinkel.

Behaupt. a = c.

Beweis. a + b = 2 R als Nebenwinkel,

b + c = 2 R " "

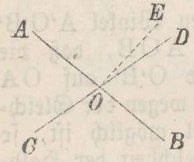
also a + b = b + c, und wenn man beiderseits b wegnimmt, a = c.

Eben so kann man beweisen, daß b = d ist.

2. Gehen von einem Punkte einer Geraden auf verschiedenen Seiten derselben zwei Strahlen aus, welche einzeln mit den Abschnitten jener Geraden gleiche Winkel bilden, so sind diese Scheitelwinkel. (Umkehrung von 1.)

Voraussf. Es sei (Fig. 9) AOB eine gerade Linie und W. AOC = BOD.

Fig. 9.



Behaupt. COD ist eine gerade Linie.

Indirecter Beweis. Würde nicht OD, sondern irgend eine andere Gerade, z. B. OE, die Verlängerung von CO sein, so wäre

AOC = BOE (als Scheitelwinkel), und wegen

AOC = BOD (nach der Voraussetzung) auch

BOE = BOD,

was nicht sein kann, weil das Ganze größer als ein Theil ist. Es muß daher OD selbst die Verlängerung von CO, folglich COD eine gerade Linie sein.

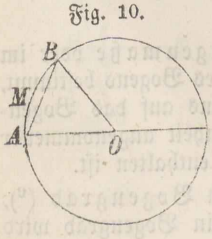
III. Messung der Winkel.

§. 19. Um die Winkel zu messen, nimmt man irgend einen bekannten Winkel als Maßeinheit an und untersucht, wie oft diese in dem gegebenen Winkel enthalten ist. Als Einheit des Winkelmaßes wird der Grad (°), d. i. der 360ste Theil eines vollen Winkels angenommen. Einen Grad theilt man in 60 Minuten (′), eine Minute in 60 Secunden (″).

Das einfachste Mittel der Winkelmessung bietet die Kreislinie.

§. 20. Dreht sich in einer Ebene eine Strecke OA (Fig. 10) um den einen Endpunkt O herum, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt der Punkt A während dieser Umdrehung eine krumme Linie, welche Kreislinie oder Kreis genannt wird. Die Kreislinie hat daher die Eigenschaft, daß alle Punkte derselben von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit abstehen. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt oder das Centrum, und jede Lage der bewegten Strecke, wie OA, OB, ein Halbmesser (radius) des Kreises.

Fig. 10.



Jeder Theil der Kreislinie, wie AMB, heißt ein Bogen (arcus), und die ganze Kreislinie der Umfang oder die Peripherie des Kreises. Eine Gerade AB, welche zwei Punkte des Umfanges verbindet, heißt Sehne, (chorda). Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, wie AC, so heißt sie ein Durchmesser (diameter) des Kreises.

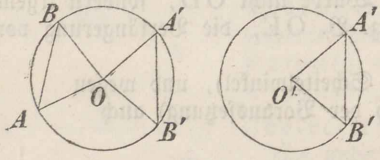
Ein Winkel AOB, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt und dessen Schenkel Halbmesser des Kreises sind, heißt ein Centriwinkel.

Folgesätze. a) Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich.
b) Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß als ein Halbmesser.
c) Alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich.
d) Kreise von gleichen Halbmessern sind congruent.
e) Der geometrische Ort (§. 8) aller Punkte, welche von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand haben, ist die Kreislinie, deren Mittelpunkt jener Punkt, und deren Halbmesser jener Abstand ist. Dieser Satz enthält die Lösung der unbestimmten Aufgabe: Einen Punkt zu finden, welcher von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat.

§. 21. Lehrsätze. 1. In gleichen Kreisen oder in demselben Kreise gehören zu gleichen Centriwinkeln gleiche Sehnen und gleiche Bogen.

Voraussetzung. Es seien O und O′ (Fig. 11) die Mittelpunkte zweier gleicher Kreise und W. AOB = A′O′B′.

Fig. 11.



Behauptung. Sehne AB = A′B′ und Bogen AB = A′B′.

Beweis. Legt man den Winkel A′O′B′ so auf den Winkel AOB, daß die Halbmesser O′A′ und O′B′ auf OA und OB fallen, was wegen der Gleichheit der beiden Winkel möglich ist, so müssen wegen der Gleichheit der Halbmesser auch die Punkte A′ und B′ auf A und B fallen; folglich Sehne A′B′ = AB. Fallen aber die Sehnen A′B′ und AB auf einander, so müssen sich auch die Bogen A′B′ und AB decken, weil sonst nicht alle Punkte derselben vom Mittelpunkte gleiche Entfernung hätten; mithin Bogen A′B′ = AB.

2. Zu gleichen Bogen gehören in gleichen Kreisen oder in demselben Kreise gleiche Centriwinkel und gleiche Sehnen.

3. Zu gleichen Sehnen gehören in gleichen Kreisen oder in demselben Kreise gleiche Bogen und gleiche Centriwinkel, wenn vorausgesetzt wird, daß die Bogen kleiner als der Halbkreis und die Centriwinkel hohle Winkel sind.

Die Beweise für diese zwei Sätze, welche Umkehrungen des ersten Lehrsatzes sind, werden ebenfalls durch Deckung geführt.

§. 22. Die Größe eines Kreisbogens kann im Längenmaße oder im Bogenmaße ausgedrückt werden. Wie man die Länge eines Bogens bestimmt, wird später (§. 159) gezeigt werden. Hier wollen wir uns auf das Bogenmaß beschränken, wobei man angibt, wie oft ein als Einheit angenommener Bogen desselben Kreises in dem zu bestimmenden Bogen enthalten ist.

Als Einheit des Bogenmaßes nimmt man den Bogengrad (°), d. i. den 360sten Theil des ganzen Kreisumfanges, an; ein Bogengrad wird

in 60 Bogenminuten (′), eine Bogenminute in 60 Bogensecunden (″) eingetheilt.

Denkt man sich den Umfang eines Kreises in 360 Bogengrade getheilt, und vom Mittelpunkte zu jedem Theilungspunkte einen Halbmesser gezogen, so entstehen (§. 21, 2) 360 gleiche Centriwinkel, welche zusammen 360 Winkelgrade betragen; es ist also ein Centriwinkel, welcher einem Bogengrade entspricht, gleich einem Winkelgrade. Ebenso entspricht einer Bogenminute eine Winkelminute, einer Bogensecunde eine Winkelsecunde. Hiernach drückt die Zahl der Grade, Minuten und Secunden eines Kreisbogens zugleich die Zahl der Grade, Minuten und Secunden des zugehörigen Centriwinkels aus. In diesem Sinne sagt man: Der Kreisbogen ist das Maß des zugehörigen Centriwinkels.

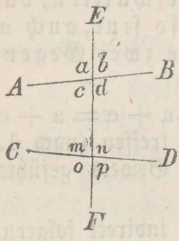
(Gebrauch des Transporteurs.)

IV. Winkel beim Durchschnitte zweier Geraden durch eine dritte.

§. 23. Eine Gerade EF (Fig. 12), welche zwei oder mehrere gerade Linien durchschneidet, wird eine Transversale dieser Geraden genannt.

Werden zwei Gerade AB und CD von einer dritten EF geschnitten, so entstehen an den beiden Durchschnittspunkten acht Winkel.

Fig. 12.



Die Winkel c, d, m, n, welche zwischen den geschnittenen Geraden liegen, heißen innere; die Winkel a, b, o, p dagegen äußere Winkel.

Ein äußerer und ein innerer Winkel auf derselben Seite der Transversale und an verschiedenen Scheiteln heißen Gegenwinkel; wie a und m, b und n, c und o, d und p.

Zwei äußere oder auch innere Winkel auf den entgegengesetzten Seiten der Transversale und an verschiedenen Scheiteln werden Wechselwinkel genannt; wie a und p, b und o, c und n, d und m.

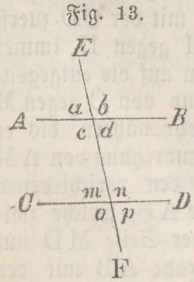
Zwei äußere oder zwei innere Winkel auf derselben Seite der Transversale und an verschiedenen Scheiteln heißen Anwinkel; wie a und o, b und p, c und m, d und n.

§. 24. Lehrsätze.

1. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß irgend zwei Gegenwinkel gleich sind, so sind a) auch je zwei andere Gegenwinkel gleich, b) je zwei Wechselwinkel gleich und c) je zwei Anwinkel Supplementwinkel. (Fig. 13.)

Voraussetzung. a = m. Erste Behaupt. b = n, c = o, d = p.

Fig. 13.



Beweis. a + b = 2 R als Nebenwinkel,
m + n = 2 R als Nebenwinkel,

a + b = m + n,
a = m nach der Voraussetzung,

folglich b = n.

Eben so wird bewiesen, daß c = o ist.

Endlich ist a = d als Scheitelwinkel,
m = p als Scheitelwinkel,
a = m nach der Voraussetzung,

also auch d = p.

Zweite Behaupt. $a = p$, $b = o$, $c = n$, $d = m$.
Beweis. $a = m$ nach der Voraussetzung,
$p = m$ als Scheitelwinkel,
also $a = p$.

Ebenso zeigt man, daß $b = o$, $c = n$, $d = m$ ist.

Dritte Behaupt. $a + o = 2R$, $b + p = 2R$,
$c + m = 2R$, $d + n = 2R$.

Beweis. $a + c = 2R$ als Nebenwinkel,
$c = o$ als Gegenwinkel,
$a + o = 2R$.

Eben so zeigt man, daß $b + p = 2R$ $c + m = 2R$, und $d + n = 2R$ ist.

2. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß irgend zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind a) auch je zwei andere Wechselwinkel gleich, b) je zwei Gegenwinkel gleich, und c) je zwei Anwinkel Supplementwinkel.

Es sei $c = n$. Da $c = b$ als Scheitelwinkel, so ist auch $b = n$. Sind aber zwei Gegenwinkel gleich, so müssen (nach 1.) auch alle übrigen in dem Lehrsatze enthaltenen Behauptungen als bewiesen angesehen werden.

3. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß irgend zwei Anwinkel Supplementwinkel sind, so sind auch a) je zwei andere Anwinkel Supplementwinkel, b) je zwei Gegenwinkel gleich, und c) je zwei Wechselwinkel gleich.

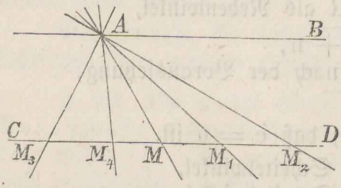
Es sei $a + o = 2R$. Da auch $a + c = 2R$, so muß $a + c = a + o$, daher $c = o$ sein. Sind aber zwei Gegenwinkel gleich, so treffen (nach 1.) auch alle übrigen Behauptungen zu. — Ebenso wird der Beweis geführt, wenn man $c + m = 2R$ annimmt.

Zusatz. Aus den voranstehenden drei Sätzen läßt sich indirect folgern: Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß entweder zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel nicht gleich, oder zwei Anwinkel nicht Supplementwinkel sind, so sind je zwei Gegenwinkel und je zwei Wechselwinkel nicht gleich, und je zwei Anwinkel nicht Supplementwinkel.

V. Parallele Linien.

§. 25. Dreht sich von zwei Geraden AM und CD (Fig. 14) in einer Ebene die eine AM so um den Punkt A herum, daß sie nach und nach die Lagen aller durch A möglichen Geraden erhält, so wird ihr Durchschnittspunkt mit der CD zuerst auf der einen Seite von M gegen D immer weiter und weiter rücken, dann auf die entgegengesetzte Seite überspringen und von C gegen M diesem Punkte sich immer mehr nähern, bis er ihn nach einer vollständigen Umdrehung von AM wieder erreicht. Unter allen den verschiedenen Lagen von AM gibt es eine AB, welche zwischen dem Ueberspringen des Durchschnittspunktes M von der Seite MD auf die andere Seite MC liegt. In dieser Lage trifft die Gerade AB mit der CD in keinem Punkte zusammen und heißt ihr parallel.

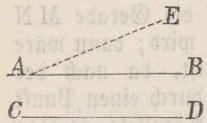
Fig. 14.



Parallele Gerade sind solche, welche auch unendlich verlängert in keinem Punkte zusammentreffen. Um zu bezeichnen, daß zwei Gerade AB und CD parallel sind, schreibt man AB || CD.

Grundsatz. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann zu dieser nur eine Parallele gezogen werden.

Fig. 15.

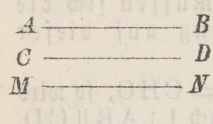


Folgesätze. a) Eine Gerade AE (Fig. 15), welche eine von zwei Parallelen, AB, schneidet, muß bei gehöriger Verlängerung auch die andere CD schneiden.

Denn schnitte sie diese nicht, so wäre sie ihr parallel; dann gäbe es aber durch den Punkt A zwei Parallele zu CD, was dem obigen Grundsatz widerspricht.

b) Sind zwei gerade Linien mit einer und derselben dritten parallel, so sind sie unter einander parallel.

Fig. 16.



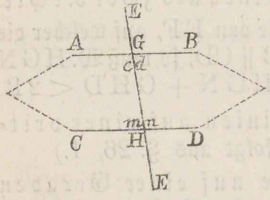
Ist (Fig. 16) AB || MN und CD || MN, so ist auch AB || CD.

Denn wäre AB nicht parallel mit CD, so müßte sie hinreichend verlängert dieselbe in einem Punkte schneiden; dann aber gäbe es durch diesen Durchschnittspunkt zwei Parallele zu MN, was nach dem obigen Grundsatze nicht möglich ist.

§. **26.** Lehrsätze.

1. Werden zwei Gerade von einer Transversale so geschnitten, daß entweder zwei Wechselwinkel oder zwei Gegenwinkel gleich, oder zwei Anwinkel Supplementwinkel sind, so sind die geschnittenen Geraden parallel. (Fig. 17.).

Fig. 17.



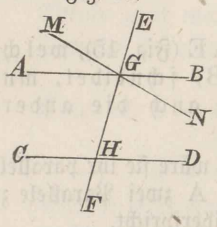
Beweis. Ist c = n, also auch d = m, so kann man (§. 13) den auf der einen Seite von EF zwischen BG, GH und HD liegenden Theil der Ebene BGHD so in den auf der andern Seite liegenden Theil CHGA bringen, daß die Gerade GH auf HG, GB in die Richtung HC und HD in die Richtung GA fällt. Würden nun die Geraden AB und CD auf der einen Seite von EF in einem Punkte zusammentreffen, so müßte diesem Durchschnittspunkte auch einer auf der andern Seite entsprechen; dann hätten aber AB und CD zwei Punkte gemeinschaftlich, was der Grundvorstellung der geraden Linien (§. 2, 2) widerspricht. Die Geraden AB und CD können also nicht zusammentreffen; folglich muß AB || CD sein.

Da (§. 24) zwei Wechselwinkel auch gleich sind, wenn zwei Gegenwinkel einander gleich, oder wenn zwei Anwinkel Supplementwinkel sind, so ist der obige Lehrsatz vollständig bewiesen.

2. (Umkehrung des Lehrsatzes 1.) Werden zwei parallele Gerade von einer Transversale geschnitten, so sind a) je zwei Wechselwinkel gleich, b) je zwei Gegenwinkel gleich, und c) je zwei Anwinkel Supplementwinkel (Fig. 18.)

Man braucht hier nur zu zeigen, daß unter der gegebenen Voraussetzung zwei Wechselwinkel gleich sind, indem dann nach §. 24 auch die übrigen Behauptungen zutreffen.

Fig. 18.



Voraussf. AB || CD.
Behaupt. W. BGH = CHG.
Beweis. Wenn BGH nicht = CHG, so ist BGH > CHG oder BGH < CHG. Wäre BGH > CHG, so ziehe man die Gerade MN so durch G, daß NGH = CHG wird; dann wäre MN || CD, was nicht möglich ist, da nach der Voraussetzung AB || CD ist und durch einen Punkt G zu einer Geraden nur eine Parallele gezogen werden kann. Eben so läßt sich zeigen, daß BGH nicht kleiner als CHG sein könne. Es muß also BGH = CHG sein.

3. Werden zwei gerade Linien von einer dritten so geschnitten, daß die Summe der inneren Anwinkel auf einer Seite der Transversale kleiner ist als zwei Rechte, so müssen sich die beiden Geraden bei hinreichender Verlängerung auf dieser Seite der Transversale schneiden. (Fig. 18.)

Es sei HGN + GHD < 2 R. Macht man HGB = CHG, so wird HGB + GHD = CHG + GHD = 2 R, und daher (nach 1.) AB || CD. Dann ist HGN + GHD < HGB + GHD, folglich HGN < HGB; die GN liegt also zwischen GB und GH. Da nun die Gerade MN die AB schneidet, so muß sie (§. 25, a) auch die CD schneiden, und zwar in einem Punkte der Winkelfläche BGH, da nur jener Theil der MN, welcher zwischen AB und CD liegt, d. i. GN, mit der CD zusammentreffen kann.

4. (Umkehrung des Lehrsatzes 3.) Werden zwei nicht parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so ist die Summe der inneren Anwinkel auf derjenigen Seite der Transversale, auf welcher sich die beiden Geraden schneiden, kleiner als zwei Rechte.

Es schneide MN (Fig. 18) die CD auf jener Seite von EF, auf welcher die W. HGN und GHD liegen. Zieht man durch G die AB || CD, so muß W. HGN < HGB sein; aber HGB + GHD = 2 R, daher HGN + GHD < 2 R.

§. 27. Folgesätze. a) Wenn zwei gerade Linien auf einer dritten senkrecht stehen, so sind sie parallel. (Folgt aus §. 26, 1.)

b) Steht von zwei Parallelen die eine auf einer Geraden senkrecht, so steht auch die andere auf ihr senkrecht. (Folgt aus §. 26, 2.)

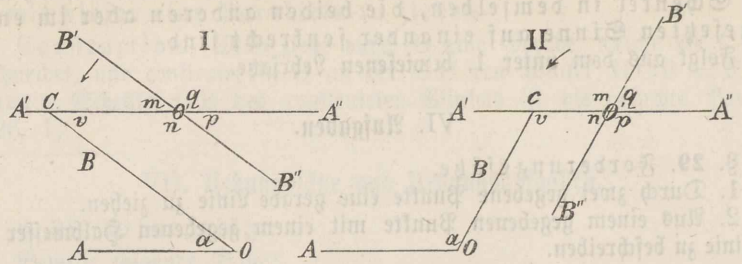
c) Jede auf den einen Schenkel eines spitzen Winkels errichtete Senkrechte trifft den andern Schenkel dieses Winkels.

d) Errichtet man auf jeden Schenkel eines hohlen Winkels eine Senkrechte, so müssen sich diese in einem Punkte schneiden.

Die Sätze c) und d) folgen aus §. 26, 3.

§. 28. Es sei der Winkel AOB (Fig. 19) und der Punkt O′ gegeben. Zieht man durch O′ die Gerade A′A″ || AO und die Gerade B′B″ || BO, so sind die Schenkel der um O′ entstehenden vier Winkel mit den Schenkeln des gegebenen Winkels theils in demselben Sinne parallel, wie O′A′ mit OA, oder O′B′ mit OB, theils im entgegengesetzten Sinne parallel, wie O′A″ mit OA, oder O′B″ mit OB.

Fig. 19.



Lehrsatz. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind a) einander gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind; dagegen b) Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in demselben, die beiden anderen aber im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

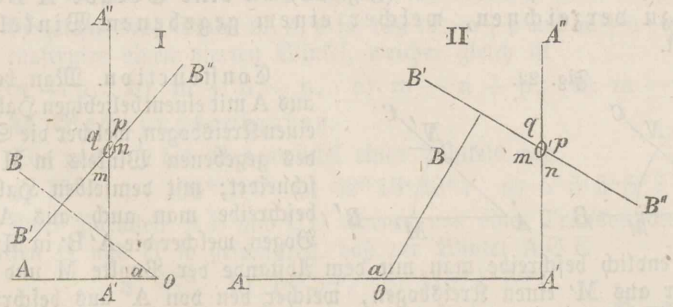
Beweis. a) Verlängert man OB, bis sie A'A'' in C schneidet, so ist (nach §. 26) $m = v$ und $a = v$, folglich auch $m = a$. — Aus $m = a$ und $m = p$ (§. 18, 1) folgt auch $p = a$.

b) Nach a) ist $m = a$, aber $n + m = 2R$; mithin auch $n + a = 2R$. Da $n = q$, so ist auch $q + a = 2R$.

Ebenso wird der Beweis geführt, wenn man den Punkt O' in der Winkelfläche AOB annimmt.

2. Dreht man in der vorhergehenden Fig. 19 die Geraden A'A'' und B'B'' als eine feste Verbindung um den Punkt O' in einer bestimmten Richtung, die hier der Pfeil anzeigt, um 90^0, so kommen dieselben in eine Lage gegen den Winkel AOB, wie sie Fig. 20 darstellt; es wird $A'A'' \perp OA$ und $B'B'' \perp OB$, während dabei die Winkel m, n, p, q ungeändert bleiben. Die Schenkel dieser Winkel heißen in der neuen Lage auf die Schenkel des Winkels AOB in demselben oder im entgegengesetzten Sinne senkrecht, je nachdem sie vor ihrer Drehung um 90^0 mit den Schenkeln dieses Winkels in demselben oder im entgegengesetzten Sinne parallel waren. So ist O'A' auf OA, oder O'B' auf OB in demselben Sinne senkrecht, dagegen O'A'' auf OA, oder O'B'' auf OB im entgegengesetzten Sinne senkrecht.

Fig. 20.



Lehrsatz. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise auf einander senkrecht stehen, sind a) einander gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne

auf einander senkrecht sind; dagegen b) Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in demselben, die beiden anderen aber im entgegengesetzten Sinne auf einander senkrecht sind.

Folgt aus dem unter 1. bewiesenen Lehrsatze.

VI. Aufgaben.

§. **29.** Forderungssätze.

1. Durch zwei gegebene Punkte eine gerade Linie zu ziehen.

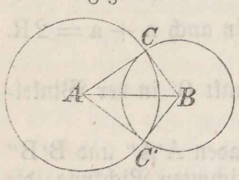
2. Aus einem gegebenen Punkte mit einem gegebenen Halbmesser eine Kreislinie zu beschreiben.

Zur Ausführung dieser beiden Postulate bedient man sich beziehungsweise des Lineals und des Cirkels.

§. **30.** Constructionsaufgaben.

1. Einen Punkt zu construiren, welcher von einem gegebenen Punkte A (Fig. 21) den Abstand a, und von einem zweiten gegebenen Punkte B den Abstand b hat.

Fig. 21.



Analysis. Es sei C der gesuchte Punkt. Da C von A den Abstand a haben soll, so ist der aus A mit dem Halbmesser a beschriebene Kreis ein geometrischer Ort für den Punkt C (§. 20, Folges. e); da ferner C von B den Abstand b haben soll, so ist der aus B mit dem Halbmesser b beschriebene Kreis ein zweiter geometrischer Ort für C; der Punkt C liegt also im Durchschnitte dieser Oerter.

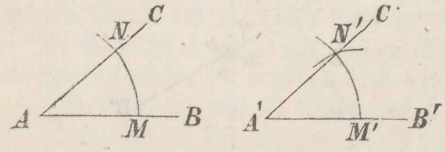
Construction. Man beschreibe aus A einen Kreis mit dem Halbmesser a, und aus B einen Kreis mit dem Halbmesser b; ihr Durchschnitt C ist der gesuchte Punkt.

Beweis. Nach der Construction ist $AC = a$, $BC = b$.

Determination. Ist $a + b < AB$ oder $a - b > AB$, so treffen die Kreise in keinem Punkte zusammen; in diesem Falle hat die Aufgabe keine Lösung. Ist $a + b = AB$ oder $a - b = AB$, so liegt der gesuchte Punkt in der Geraden AB; ist $a + b > AB$ und zugleich $a - b < AB$, so gibt es zwei Punkte C und C', welche der Aufgabe genügen.

2. In einem Punkte A' (Fig. 22) an eine Gerade A'B' einen Winkel zu verzeichnen, welcher einem gegebenen Winkel BAC gleich ist.

Fig. 22.



Construction. Man beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels in M und N schneidet; mit demselben Halbmesser beschreibe man auch aus A' einen Bogen, welcher die A'B' in M' durchschneidet; endlich beschreibe man mit dem Abstande der Punkte M und N als Halbmesser aus M' einen Kreisbogen, welcher den von A' aus beschriebenen Bogen in N' schneidet. Zieht man nun durch A' und N' die Gerade A'C', so ist B'A'C' der verlangte Winkel.

Der Beweis folgt aus §. 21.

3. Durch einen Punkt G (Fig. 18) außerhalb einer Geraden CD mit dieser eine Parallele zu ziehen.

Construction. Man ziehe durch G eine Gerade, welche die CD in H schneidet, und construire in G an der GH den Winkel HGB = FHD; der zweite Schenkel GB des construirten Winkels ist die gesuchte Parallele (§. 26, 1).

VII. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. 31. Uebungssätze.

Beweise folgende Sätze:

1. Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel stehen senkrecht auf einander.
2. Die Halbirungslinie eines zweier Scheitelwinkel halbirt auch den andern.
3. Die Halbirungslinien zweier Gegen- oder Wechselwinkel an zwei parallelen, von einer Transversale geschnittenen Geraden sind parallel.
4. Die Halbirungslinien zweier Anwinkel an zwei von einer Transversale geschnittenen Parallelen stehen senkrecht auf einander.

§. 32. Constructionsaufgaben.

1. Gegeben sind zwei Strecken m und n; construire a) ihre Summe, b) ihre Differenz.

2. In einer Geraden sind zwei Punkte A und B gegeben; stelle darin den Punkt C so, daß

a) $AB = AC + CB$, b) $AB = AC - CB$ wird.

3. Ziehe drei Strecken m, n, p so, daß $m > n + p$ ist, und construire eine vierte Strecke, welche gleich ist

a) $m + n + p$, b) $m + n - p$, c) $m - n + p$, d) $m - n - p$.

4. Construire einen Punkt, welcher von zwei gegebenen Punkten A und B denselben Abstand a hat.

5. Gegeben ist der Winkel AOB; construire a) seinen Nebenwinkel, b) seinen Scheitelwinkel.

6. Gegeben sind zwei Winkel m und n; verzeichne einen Winkel, welcher a) der Summe, b) der Differenz derselben gleich ist.

7. Gegeben ist ein Winkel AOB; ziehe durch den Scheitel O eine Gerade OC so, daß

a) $AOB = AOC + COB$, b) $AOB = AOC - COB$ wird.

8. Verzeichne drei Winkel m, n, p so, daß $m > n + p$ und $m + n + p < 360^0$ ist, und construire einen vierten Winkel, welcher gleich ist

a) $m + n + p$, b) $m + n - p$, c) $m - n + p$, d) $m - n - p$.

§. 33. Rechnungsaufgaben.

1. Wie groß ist der Nebenwinkel eines Winkels von

a) 73^0? b) $108^0\,31'$? c) $62^0\,15'\,48''$? d) $5^0\,5'\,5{\cdot}5''$?

2. Zwei Parallele AB und CD werden von einer Transversale EF in den Punkten G und H so geschnitten, daß der Winkel AGE

a) 37^0, b) $78^0\,39'$, c) $119^0\,5'\,52''$

beträgt; wie groß ist in jedem Falle jeder der übrigen an den Durchschnittspunkten entstehenden Winkel?

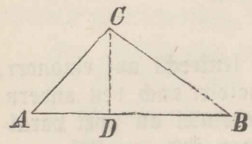
Zweiter Abschnitt.

Das Dreieck.

I. Erklärungen und allgemeine Eigenschaften der Dreiecke.

§. **34.** Eine von drei geraden Linien begrenzte Figur wird ein Dreieck genannt. Die drei Geraden heißen Seiten des Dreieckes.

Fig. 23.



Bei jedem Dreiecke hat man auf sechs Bestandstücke Rücksicht zu nehmen, auf drei Seiten und auf drei Winkel. Jede Seite, z. B. AB (Fig. 23) hat zwei anliegende Winkel A und B, und einen gegenüberliegenden C; jeder Winkel, z. B. A, wird von zwei Seiten AB und AC eingeschlossen, die dritte BC liegt ihm gegenüber.

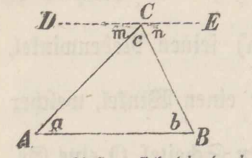
Nimmt man irgend eine Seite AB eines Dreieckes als Grundlinie an, so heißt die Senkrechte CD, welche von dem gegenüberliegenden Eckpunkte auf diese Seite gefällt wird, die zugehörige Höhe des Dreieckes.

§. **35.** Ein Dreieck, in welchem keine Seite einer anderen gleich ist, heißt ungleichseitig, ein Dreieck, in welchem zwei Seiten gleich sind, heißt gleichschenklig; ein Dreieck, in welchem alle drei Seiten gleich sind, heißt gleichseitig.

In einem gleichschenkligen Dreiecke nennt man die beiden gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite die Grundlinie, und den dieser gegenüberliegenden Eckpunkt die Spitze oder den Scheitel.

§. **36.** Lehrsatz. Die Summe aller Winkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten.

Fig. 24.



Beweis. Zieht man durch C (Fig. 24) DE || AB,

so ist $a = m$, $b = n$, } nach §. 26, 2;

daher $a + b + c = m + n + c$;

nun ist $m + n + c = 2R$ (§. 16, Folges. a),

folglich muß auch $a + b + c = 2R$ sein.

Ließen sich die drei Winkel a, b, c nicht auch um den Scheitel B an der verlängerten Dreiecksseite AB darstellen, und wie wäre dann der Beweis zu führen?

Folgesätze. a) Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gegeben, so findet man den dritten, indem man die Summe der beiden gegebenen Winkel von 180^0 subtrahirt.

b) Sind zwei Winkel eines Dreieckes zwei Winkeln eines andern Dreieckes gleich, so müssen auch die dritten Winkel in beiden Dreiecken gleich sein.

c) Ist ein Winkel eines Dreieckes so groß als die beiden andern zusammengenommen, so ist er ein Rechter.

d) Die Summe zweier Winkel eines Dreieckes ist immer kleiner als zwei Rechte; in einem Dreiecke kann daher nur ein rechter, sowie auch nur ein stumpfer Winkel sein.

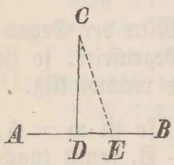
§. **37.** Ein Dreieck heißt spitzwinklig, wenn alle drei Winkel spitz sind; rechtwinklig, wenn darin ein rechter, stumpfwinklig, wenn darin ein stumpfer Winkel vorkommt.

In einem rechtwinkligen Dreiecke heißt die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, die Hypotenuse; die beiden Seiten, welche den

rechten Winkel bilden, werden die Katheten genannt. Das spitz- und stumpfwinklige Dreieck bezeichnet man mit dem gemeinschaftlichen Namen schiefwinklige Dreiecke.

§. 38. 1. Von einem Punkte außerhalb einer geraden Linie kann zu dieser nur eine einzige Senkrechte gezogen werden.

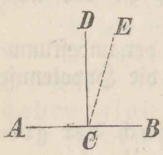
Fig. 25.



Beweis. Es sei CD ⊥ AB (Fig. 25); dann kann aus C auf die AB keine zweite Linie, z. B. CE, senkrecht geführt werden. Denn im Dreiecke CDE ist der Winkel CDE nach der Voraussetzung ein rechter, somit CED ein spitzer; die CE steht also auf AB nicht senkrecht, sondern schief.

2. In einem Punkte einer Geraden kann auf diese nur eine einzige Senkrechte errichtet werden.

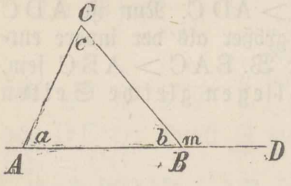
Fig. 26.



Beweis. Es sei CD ⊥ AB (Fig. 26); dann kann in C auf die AB nicht noch eine zweite Linie, z. B. CE, senkrecht errichtet werden. Denn der Winkel BCD ist nach der Annahme ein rechter, folglich muß ECB ein spitzer Winkel sein; CE steht also nicht senkrecht auf AB.

§. 39. Verlängert man in einem Dreiecke eine Seite, so heißt der Winkel, welcher von dieser Verlängerung mit der anstoßenden Seite gebildet wird, ein Außenwinkel des Dreieckes; z. B. CBD (Fig. 27) ist ein Außenwinkel des Dreieckes ABC.

Fig. 27.



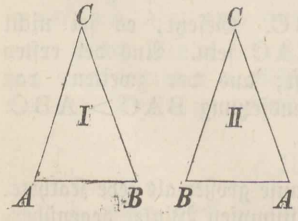
Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel.

Beweis. Es ist $m + b = 2R$, ferner $a + b + c = 2R$; daher auch $m + b = a + b + c$, oder wenn man beiderseits den Winkel b wegnimmt, $m = a + c$.

Folgesatz. Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist größer als ein innerer ihm nicht anliegender Winkel.

§. 40. 1. Gleichen Seiten eines Dreieckes liegen gleiche Winkel gegenüber. (Fig. 28.)

Fig. 28.



Voraus s. AC = BC.

Behaupt. B = A.

Beweis. Man stelle sich das Dreieck I noch einmal, jedoch umgewendet vor, wie in II, und lege das Dreieck II so auf I, daß C auf C und die Seiten CB und CA des Dreieckes II längs der Seiten CA und CB des Dreieckes I zu liegen kommen, was möglich ist, weil die Winkel C in beiden Dreiecken gleich sind. Dann müssen wegen BC = AC auch die Punkte B und A des Dreieckes II in die Punkte A und B des Dreieckes I, und somit die Seite BA des ersteren auf die Seite AB des letzteren fallen; es deckt also der W. B des Dreieckes II den Winkel A des Dreieckes I; folglich A = B.

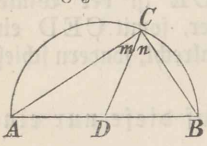
Folgesätze. a) In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. Durch einen Winkel eines gleichschenkligen Dreieckes sind alle bestimmt (§. 36).

b) Der Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist doppelt so groß als jeder Winkel an der Grundlinie (§. 39).

c) In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich, und daher jeder 60^0.

d) Ist in einem Dreiecke die von einem Eckpunkte zur Mitte der Gegenseite gezogene Gerade gleich der halben Gegenseite, so ist das gegebene Dreieck an jenem Eckpunkte rechtwinklig.

Fig. 29.



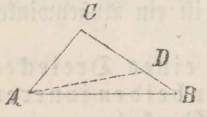
Ist (Fig. 29) $CD = AD = BD$, so ist $m = A$, $n = B$, daher $m + n = ACB = A + B$, somit (nach §. 36, c) der Winkel $ACB = R$.

e) Der geometrische Ort der Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch die Endpunkte einer gegebenen Strecke gehen, ist der über dieser Strecke als Durchmesser beschriebene Halbkreis.

Dieser Satz, welcher aus d) folgt, ist gleichbedeutend mit der unbestimmten Aufgabe: Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse gegeben ist.

2. Der größeren Seite eines Dreieckes liegt auch der größere Winkel gegenüber. (Fig. 30.)

Fig. 30.



Voraussf. $BC > AC$.

Behaupt. W. $BAC > ABC$.

Beweis. Man mache $CD = AC$ und ziehe die Gerade AD. Dann ist in dem gleichschenkligen Dreiecke CAD der Winkel $DAC = ADC$, aber W. $BAC > DAC$, folglich auch W. $BAC > ADC$. Nun ist ADC ein Außenwinkel des Dreieckes ABD und daher größer als der innere entgegengesetzte Winkel ABC; somit muß um so mehr W. $BAC > ABC$ sein.

3. Gleichen Winkeln eines Dreieckes liegen gleiche Seiten gegenüber. (Fig. 28.)

Voraussf. $A = B$.

Behaupt. $BC = AC$.

Beweis indirect. Wäre BC nicht $= AC$, so müßte $BC \gtrless AC$ sein. Allein dann wäre nach dem vorhergehenden Satze auch $A \gtrless B$, was der Voraussetzung $A = B$ widerspricht. Es muß daher $BC = AC$ sein.

4. Dem größeren Winkel eines Dreieckes liegt auch die größere Seite gegenüber.

Es sei (Fig. 30) der Winkel $BAC > ABC$. Gesetzt, es sei nicht $BC > AC$, so müßte $BC = AC$ oder $BC < AC$ sein. Aus der ersten Annahme würde folgen, daß $BAC = ABC$ ist; aus der zweiten, daß $BAC < ABC$ ist; beides widerstreitet der Voraussetzung $BAC > ABC$. Es muß daher $BC > AC$ sein.

Folgesätze.

a) Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse größer als jede Kathete.

b) Im stumpfwinkligen Dreiecke ist die dem stumpfen Winkel gegenüberstehende Seite die größte.

§. 41. 1. In jedem Dreiecke ist die Summe je zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Es sei ABC (Fig. 23) ein Dreieck, dessen größte Seite AB ist. Denkt man sich $CD \perp AB$, so ist (nach §. 40, 4. Folges. a)

$$AC > AD, \text{ und}$$
$$BC > BD, \text{ daher}$$
$$AC + BC > AD + BD, \text{ oder}$$
$$AC + BC > AB.$$

Daß $AB + BC > AC$ und $AB + AC > BC$ ist, folgt unmittelbar aus der Voraussetzung.

2. In jedem Dreiecke ist die Differenz je zweier Seiten kleiner als die dritte Seite. (Fig. 23.)

Nach dem vorhergehenden Satze ist

$$AB < AC + BC \text{ und } BC < AB + AC,$$

folglich auch

$$AB - AC < BC, \quad AB - BC < AC \text{ und } BC - AC < AB.$$

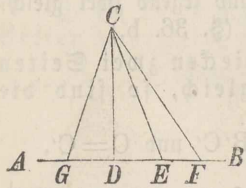
§. 42. Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Geraden zu dieser eine senkrechte und mehrere schiefe Strecken, so ist

1. die Senkrechte die kürzeste unter allen Strecken;

2. zwei schiefe Strecken, deren Fußpunkte auf der gegebenen Geraden von dem Fußpunkte der Senkrechten gleich weit abstehen, sind einander gleich; und

3. von zwei schiefen Strecken, deren Fußpunkte auf der Geraden von dem Fußpunkte der Senkrechten ungleiche Entfernungen haben, ist die entferntere die größere.

Fig. 31.



1. Ist (Fig. 31) $CD \perp AB$, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken CDE, CDF, CDG die Kathete CD kürzer als jede der Hypotenusen CE, CF, CG.

2. Ist $CD \perp AB$ und $DE = DG$, so muß, wenn man das $\triangle$ CDG so auf das $\triangle$ CDE legt, daß CD auf CD und DG längs der DE zu liegen kommt, wegen der Gleichheit der Winkel CDG und CDE und wegen der Gleichheit der Strecken DG und DE der Punkt G auf E, also auch CG auf CE fallen; folglich ist $CE = CG$.

3. Ist $CD \perp AB$, so ist in dem rechtwinkligen $\triangle$ CDE der Winkel CED spitz, daher sein Nebenwinkel CEF stumpf, und somit im stumpfwinkligen $\triangle$ CEF die Seite $CF > CE$.

Aus den Sätzen 2. und 3. folgen indirect auch deren Umkehrungen.

Folgesatz. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden können zu dieser immer zwei, aber auch nur zwei gleich lange schiefe Strecken gezogen werden.

Zusatz. Unter der Entfernung oder dem Abstande eines Punktes von einer Geraden versteht man die kürzeste Linie zwischen beiden, also die von dem Punkte zu der Geraden gezogene Senkrechte.

II. Congruenz der Dreiecke.

§. 43. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie auf einander gelegt sich vollständig decken. Damit dieses möglich sei, müssen in den Dreiecken alle sechs Bestandstücke, die drei Seiten und die drei Winkel, paarweise gleich sein. In congruenten Dreiecken sind die Seiten, welche den

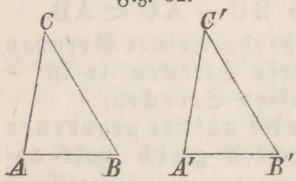
gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander gleich, und ebenso sind die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, einander gleich.

Da die Seiten und Winkel eines Dreieckes von einander nicht unabhängig sind, so genügen oft schon drei Stücke, um aus ihrer Uebereinstimmung in zwei Dreiecken auf deren Congruenz schließen zu können. Die Fälle, in denen dieses stattfindet, sind in den folgenden vier Lehrsätzen über die Congruenz der Dreiecke enthalten:

§. 44. I. Congruenzsatz. Sind in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent. (Fig. 32.)

Voraussetzung. Seite $AB = A'B'$, Winkel $A = A'$ und $B = B'$.

Fig. 32.



Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das $\triangle A'B'C'$ so auf ABC, daß die Punkte A' und B' auf die Punkte A und B fallen, was möglich ist, weil $AB = A'B'$ ist. Weil der Winkel $A = A'$ ist, so muß $A'C'$ in die Richtung AC fallen; wegen $B = B'$ muß ebenso $B'C'$ in die Richtung BC fallen. Wenn aber die Geraden $A'C'$ und $B'C'$ in die Richtungen der Geraden AC und BC fallen, so muß auch der Durchschnittspunkt C' der ersteren auf den Durchschnittspunkt C der letzteren fallen. Die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ decken sich also, wenn sie auf einander gelegt werden, folglich sind sie congruent.

Folgesatz. Zwei Dreiecke, welche eine Seite und irgend zwei gleichliegende Winkel paarweise gleich haben, sind congruent. (§. 36. b.)

§. 45. II. Congruenzsatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent. (Fig. 32.)

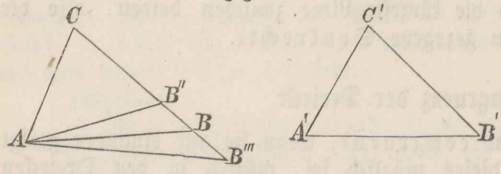
Voraussetzung. Es sei $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und $C = C'$.

Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck ABC, daß C' auf C, $C'A'$ in die Richtung CA und $C'B'$ in die Richtung CB fällt, was möglich ist, da nach der Voraussetzung die Winkel C' und C gleich sind; wegen $AC = A'C'$ muß auch der Punkt A' auf A, und wegen $BC = B'C'$ der Punkt B' auf B, also die Seite $A'B'$ auf AB fallen; folglich ist $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

§. 46. III. Congruenzsatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 33.



Voraussetzung. Es sei (Fig. 33) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, ferner $AB > AC$, somit auch $A'B' > A'C'$, endlich der Winkel $ACB = A'C'B'$.

Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

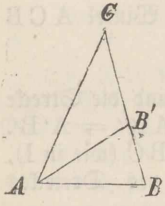
Beweis. Man lege das $\triangle A'B'C'$ so auf das $\triangle ABC$, daß A' auf A, C' auf C und $C'B'$ in die Richtung CB fällt, was wegen der Gleich-

heit der Seiten AC und A'C' und wegen der Gleichheit der Winkel ACB und A'C'B' möglich ist. Dann muß auch B' auf B fallen. Denn fiele der Punkt B' nicht auf B, so müßte er entweder auf einen Punkt innerhalb der Seite CB, etwa auf B'', oder auf einen Punkt ihrer Verlängerung, etwa auf B''', zu liegen kommen. Würde B' auf B'' fallen, so wäre, wenn man AB'' zieht, $\triangle AB''C \cong A'B'C'$ (§. 45), daher $AB'' = A'B' = AB$, somit das $\triangle ABB''$ gleichschenklig, es müßten also in demselben die gleichen Winkel ABB'' und AB''B spitz sein; dann wäre der Winkel AB''C stumpf, und folglich $AC > AB''$ (§. 40, 4, b), somit auch $AC > AB$, was der Voraussetzung widerspricht. — Ebenso würde sich ein Widerspruch ergeben, wenn B' auf B''' fiele.

Der Punkt B' muß daher auf B fallen; dann aber ist $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Zusatz. Die Schlußfolgerungen des obigen Beweises stützen sich auf die vorausgesetzte Bedingung, daß der Winkel, in welchem beide Dreiecke übereinstimmen, der größeren der zwei übereinstimmenden Seiten gegenüber liegt. Ist diese Bedingung nicht vorhanden, so können auch nicht jene Schlüsse gemacht werden.

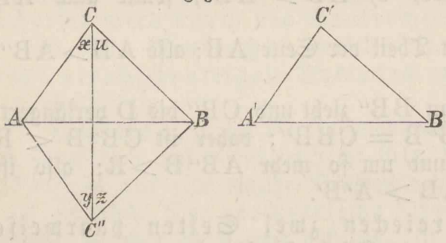
Fig. 34.



Wenn daher in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem der kleineren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel wechselseitig gleich sind, so ist es nicht gestattet, auf die Congruenz der Dreiecke zu schließen. Wirklich haben die Dreiecke ABC und AB'C (Fig. 34) die Seite $AB = AB'$, $AC = AC$, wo $AB = AB' < AC$ ist, und den Winkel $C = C$, und doch sind sie nicht congruent, da das $\triangle AB'C$ nur ein Theil des $\triangle ABC$ ist.

§. 47. IV. Congruenzsatz. Sind in zwei Dreiecken alle drei Seiten paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent. (Fig. 35.)

Fig. 35.



Voraussetzung. $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ und $BC = B'C'$.

Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das Dreieck A'B'C' so an das Dreieck ABC, daß sich die zwei größten Seiten A'B' und AB decken und daß der Punkt C' auf die entgegengesetzte Seite von AB nach C'' fällt. Dann sind nach der Voraussetzung die Dreiecke ACC'' und BCC'' gleichschenklig, also sind die Winkel an der Grundlinie gleich, $x = y$, $u = z$; folglich ist auch $x + u = y + z$, oder $ACB = AC''B = A'C'B'$.

Ist aber $ACB = A'C'B'$, so ist (nach §. 45) $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

§. 48. Da congruente Dreiecke in Größe und Gestalt übereinstimmen, so folgt, daß die Bestandstücke, aus deren Gleichheit in zwei Dreiecken man auf die Congruenz dieser letzteren schließen kann, die Größe und die Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmen. Die Bestimmungsstücke eines Dreieckes sind also:

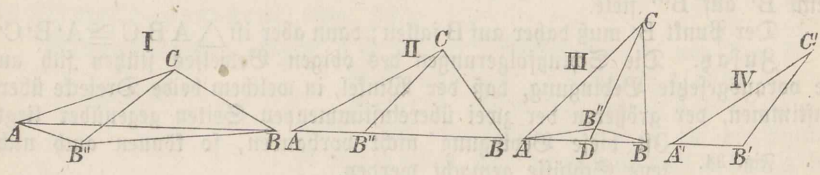
1. eine Seite mit zwei Winkeln;
2. zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel;
3. zwei Seiten mit dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel;
4. alle drei Seiten.

Unter den Bestimmungsstücken eines Dreieckes muß sich immer wenigstens eine Seite befinden.

Anwendung der Congruenzsätze.

§. 49. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so sind auch die dritten Seiten ungleich, und zwar ist diejenige die größere, welche dem größeren Winkel gegenüberliegt. (Fig. 36.)

Fig. 36.



Voraussetzung. $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und Winkel $ACB > A'C'B'$.

Behauptung. $AB > A'B'$.

Beweis. Macht man den Winkel $ACB'' = A'C'B'$ und die Strecke $CB'' = C'B'$, so ist $\triangle ACB'' \cong A'C'B'$ (§. 45), also $AB'' = A'B'$. Der Punkt B'' kann hierbei entweder außerhalb des Dreieckes ABC (wie in I), oder auf die Dreiecksseite AB (wie in II), oder innerhalb des Dreieckes ABC (wie in III) fallen.

Im ersten Falle ist, wenn man BB'' zieht, wegen $CB = CB''$ der Winkel $CB''B = CBB''$, also $CB''B > ABB''$, und um so mehr $AB''B > ABB''$; folglich ist (nach §. 40, 4) $AB > AB''$, somit auch $AB > A'B'$.

Im zweiten Falle ist AB'' ein Theil der Seite AB; also $AB > AB''$, oder $AB > A'B'$.

Im dritten Falle ist, wenn man BB'' zieht und CB'' bis D verlängert, wegen $CB = CB''$ der Winkel $CB''B = CBB''$; daher ist $CB''B < R$ (§. 36, d), folglich $DB''B > R$, und um so mehr $AB''B > R$; also ist $AB > AB''$ (§. 40, 4. b), oder $AB > A'B'$.

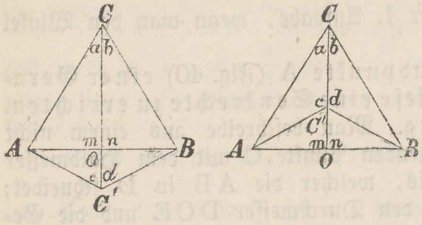
§. 50. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so sind auch die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel ungleich, und zwar ist derjenige der größere, welcher der größeren Seite gegenüberliegt.

Es sei (Fig. 36) $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und $AB > A'B'$; zu beweisen ist, daß $ACB > A'C'B'$ sein muß.

Wäre $ACB = A'C'B'$, so müßte (nach §. 45) auch $AB = A'B'$ sein; wäre $ACB < A'C'B'$, so müßte (nach §. 49) auch $AB < A'B'$ sein. Beides widerspricht der Voraussetzung; folglich muß $ACB > A'C'B'$ sein.

§. 51. Haben zwei gleichschenklige Dreiecke dieselbe Grundlinie, und verbindet man ihre Scheitel durch eine Gerade, so halbirt diese 1) die Winkel an den Scheiteln, 2) die gemeinschaftliche Grundlinie, und 3) sie steht auf der Grundlinie senkrecht. (Fig. 37.)

Fig. 37.



Voraussetzung. $AC = BC$, $AC' = BC'$.

1. Behauptung. $a = b$, $c = d$.

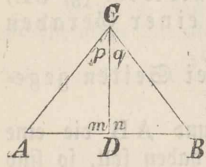
Beweis. $\triangle ACC' \cong BCC'$ (§. 47), daher $a = b$, $c = d$.

2. und 3. Behaupt. $AO = BO$, $CO \perp AB$.

Beweis. $\triangle AOC \cong BOC$ (§. 45); folglich $AO = BO$, und $m = n$ oder $CO \perp AB$.

§. **52.** 1. Verbindet man in einem gleichschenkligen Dreiecke die Mitte der Grundlinie mit dem Scheitel durch eine Gerade, so steht diese auf der Grundlinie senkrecht und halbirt den Winkel am Scheitel. (Fig. 38.)

Fig. 38.



Voraussf. $AC = BC$, $AD = BD$.

Behaupt. $CD \perp AB$ und $p = q$.

Beweis. $\triangle ACD \cong BCD$ (§. 47), daher $m = n$ oder $CD \perp AB$, und $p = q$.

2. Die Senkrechte, welche von der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes auf die Grundlinie gezogen wird, halbirt die Grundlinie und den Winkel am Scheitel. (§. 46.)

3. Wird der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes durch eine Gerade halbirt, so halbirt diese auch die Grundlinie und steht auf der Grundlinie senkrecht. (§. 45.)

4. Wenn die Senkrechte, welche von der Spitze eines Dreieckes zu der gegenüberstehenden Seite gezogen wird, diese halbirt, so ist das Dreieck gleichschenklig und der Winkel am Scheitel wird durch die Senkrechte halbirt. (§. 45.)

5. Die Senkrechte, welche man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes auf diese errichtet, geht durch den Scheitel.

Folgt aus 1., da die Verbindungslinie zwischen dem Scheitel und der Mitte der Grundlinie auf dieser senkrecht steht, durch die Mitte der Grundlinie aber auf dieselbe nur eine einzige Senkrechte gezogen werden kann.

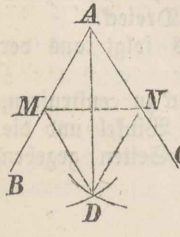
Folgesatz. Der geometrische Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleich weit abstehen, ist die in der Mitte der Verbindungslinie beider Punkte auf dieselbe errichtete Senkrechte.

III. Aufgaben.

§. **53.** Constructionsaufgaben.

1. Einen gegebenen Winkel BAC (Fig. 39) zu halbiren.

Fig. 39.



Analysis. Es sei AD die Halbirungslinie. Ist $AM = AN$, und zieht man von M und N zu einem beliebigen Punkte D der Halbirungslinie die Geraden MD und ND, so ist $\triangle AMD \cong AND$, folglich $MD = ND$.

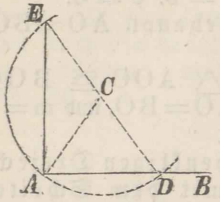
Construction. Man mache $AM = AN$, beschreibe aus M und N mit demselben Halbmesser Kreisbogen, welche sich in D schneiden, und ziehe AD.

Beweis. $\triangle AMD \cong AND$, also Winkel $MAD = NAD$.

< 2. In einem gegebenen Punkte einer Geraden auf diese eine Senkrechte zu errichten.

Die Auflösung folgt aus jener der 1. Aufgabe, wenn man den Winkel $BAC = 180^0$ annimmt.

Fig. 40.



< 3. Im Endpunkte A (Fig. 40) einer Geraden AB auf diese eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung. Man beschreibe aus einem nicht in der AB liegenden Punkte C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, welcher die AB in D schneidet; zieht man dann den Durchmesser DCE und die Gerade AE, so ist diese die gesuchte Senkrechte.

Der Beweis beruht auf §. 40, 1. d.

< 4. Eine gegebene Strecke MN (Fig. 39) zu halbiren. (§. 51.)

< 5. Von einem Punkte A (Fig. 39) außerhalb einer Geraden MN auf diese eine Senkrechte zu ziehen. (§. 51.)

6. Ein Dreieck zu construiren, wenn seine drei Seiten gegeben sind.

Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck und AB die eine Seite. Da C von A und B die Abstände AC und BC haben soll, so sind die aus A und B bezüglich mit den Halbmessern AC und BC beschriebenen Kreise geometrische Oerter für C; der Punkt C liegt also im Durchschnitte beider Kreise.

Construction und Beweis ergeben sich unmittelbar aus der Analysis.

Determination. Ist $AC + BC > AB$ und zugleich $AC - BC < AB$, so erhält man zwei Dreiecke, welche jedoch congruent sind; ist $AC + BC \leqq AB$ oder $AC - BC \geqq AB$, so gibt es kein Dreieck. (Vergleiche §. 30, Aufgabe 1.)

< 7. Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, wenn seine Seite gegeben ist.

Die Auflösung stimmt mit jener der Aufgabe 6 überein.

< 8. Ein Dreieck zu zeichnen, welches mit einem gegebenen Dreiecke congruent ist.

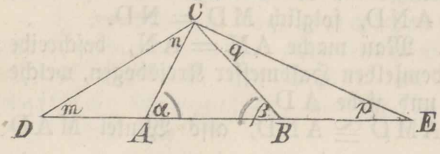
Construction mit Hilfe der drei Seiten des gegebenen Dreieckes nach Aufgabe 6.

< 9. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse und eine Kathete gegeben sind.

Analysis. Der Scheitel C (Fig. 29) des rechten Winkels liegt in der Kreislinie, welche über der Hypotenuse AC als Durchmesser beschrieben wird (§ 40, 1. e); er liegt ferner in der Kreislinie, welche aus A mit der Kathete AC als Halbmesser beschrieben wird; C ist also der Durchschnitt dieser Kreise.

Construction. Man beschreibe über der gegebenen Hypotenuse AB als Durchmesser einen Kreis, sodann aus dem Endpunkte A der Hypotenuse mit der gegebenen Kathete AC als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher jenen Kreis in C schneidet; ACB ist das verlangte rechtwinklige Dreieck.

Fig. 41.



Der Beweis folgt aus der Analysis.

< 10. Ein Dreieck zu construiren, von welchem zwei Winkel und die Summe der drei Seiten gegeben sind. (Fig. 41.)

Analysis. Es sei ABC das verlangte Dreieck, welches die gegebenen Winkel $BAC = \alpha$, $ABC = \beta$ und die gegebene Summe der drei Seiten $AB + AC + BC = s$ hat. Stellt man s dar, indem man die Seite AB nach beiden Seiten verlängert, so daß $AD = AC$ und $BE = BC$ wird, und zieht DC und EC, so läßt sich das $\triangle$ DEC construiren, da $DE = s$, $m = \frac{\alpha}{2}$ und $p = \frac{\beta}{2}$ (nach §. 40, 1. b) ist. Vom Dreieck DEC aber gelangt man durch Abschneidung der gleichschenkligen Dreiecke DCA und ECB zum Dreieck ABC.

Construction. Man mache $DE = s$, trage in D und E die Winkel $m = \frac{\alpha}{2}$ und $p = \frac{\beta}{2}$ auf, deren Schenkel sich in C schneiden; in diesem Punkte construire man wieder die Winkel $n = \frac{\alpha}{2}$ und $q = \frac{\beta}{2}$, deren Schenkel die Gerade DE in A und B durchschneiden; ABC ist dann das verlangte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist $m = n$ und $p = q$, daher sind CAD und CBE gleichschenklige Dreiecke, und somit $AC = AD$ und $BC = BE$; folglich

$$AB + AC + BC = AB + AD + BE = DE = s;$$

das Dreieck ABC hat also die gegebene Seitensumme s. Ferner ist

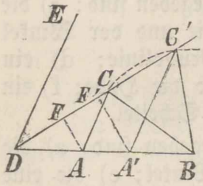
$$BAC = m + n = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha,$$

$$ABC = p + q = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta;$$

das Dreieck ABC hat also auch die beiden gegebenen Winkel α und β.

11. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, die Summe der beiden anderen Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Fig. 42.



Analysis. Es sei ABC (Fig. 42) das gesuchte Dreieck, von welchem $BC = a$, $AB + AC = s$ und W. $BAC = \alpha$ gegeben ist. Verlängert man BA so, daß $AD = AC$, also $DB = s$ wird, und zieht DC, so läßt sich das Dreieck BDC, weil darin $BD = s$, $BC = a$ und W. $BDC = \frac{\alpha}{2}$ (§. 40 1. b) bekannt ist, construiren, mithin durch Abschneidung des gleichschenkligen Dreieckes CAD auch das Dreieck ABC.

Construction. Man ziehe $BD = s$, mache den Winkel $BDE = \alpha$ und halbire denselben durch DC, beschreibe aus B mit einem Halbmesser $= a$ einen Kreisbogen, der DC in C (oder C') schneidet und ziehe BC (oder BC'); sodann errichte man auf DC (DC') im Halbirungspunkte F (F') eine Senkrechte, welche die BD in A (A') trifft. Zieht man CA (oder C'A'), so erhält man das gesuchte Dreieck ABC (oder A'BC').

Der Beweis liegt in der Analysis.

Determination. Man erhält zwei Dreiecke ABC und A'BC', die jedoch congruent sind.

12. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse und die Summe der beiden Katheten gegeben sind.

Die Auflösung dieser Aufgabe ergibt sich aus jener der 11. Aufgabe, wenn dort der Winkel $\alpha = 90^0$ gesetzt wird.

IV. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. 54. Uebungssätze.

1. Die Summe aller Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich acht Rechten.

2. Halbirt man den Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, so ist die Halbirungslinie der Grundlinie parallel.

3. Zieht man von einem Punkte im Innern eines Dreieckes Strecken zu zwei Eckpunkten desselben, so ist die Summe dieser Strecken kleiner als die Summe der sie umschließenden Dreiecksseiten.

4. Die Höhen auf die Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes sind einander gleich.

5. Sind in einem Dreiecke zwei Höhen gleich, so ist dasselbe gleichschenklig.

6. Verbindet man zwei beliebige Punkte zweier paralleler Geraden mit einander, und halbirt die Verbindungslinie, so wird jede durch den Halbirungspunkt zwischen den Parallelen gezogene Gerade in demselben halbirt.

7. Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke einer der spitzen Winkel doppelt so groß als der andere, so ist die Hypotenuse doppelt so groß als die kleinere Kathete.

Legt man an das Dreieck ein congruentes mit der größeren Kathete an, so erhält man ein gleichseitiges Dreieck.

§. 55. Constructionsaufgaben.

1. Einen Winkel a) von 90^0, b) von 45^0 zu construiren.

2. Einen Winkel a) von 60^0, b) von 30^0, c) von 15^0 zu construiren (Fig. 40).

3. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

4. Gegeben sind zwei Winkel eines Dreieckes; construire den dritten.

5. In einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, dessen Verbindungslinien mit zwei gegebenen Punkten außerhalb der Geraden mit derselben gleiche Winkel bilden.

6. Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, wenn seine Höhe gegeben ist.

7. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind: a) die Grundlinie und ein anliegender Winkel; b) die Grundlinie und der Winkel am Scheitel; c) ein Schenkel und ein Winkel an der Grundlinie; d) ein Schenkel und ein Winkel am Scheitel; e) die Grundlinie und die Höhe; f) ein Schenkel und die Höhe; g) die Höhe und der Winkel am Scheitel.

8. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind: a) die beiden Katheten; b) die Hypotenuse und ein anliegender Winkel; c) die eine Kathete und der anliegende spitze Winkel; d) eine Kathete und der gegenüberliegende Winkel; e) die Hypotenuse und die Höhe auf dieselbe; f) eine Kathete und die Höhe auf die Hypotenuse; g) die Hypotenuse und die Differenz der beiden Katheten; h) die Summe (oder Differenz) der Katheten und ein spitzer Winkel; i) die Summe (oder Differenz) der Hypotenuse und einer Kathete und die andere Kathete; k) die Summe (oder Differenz) der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel.

9. Ein Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind: a) eine Seite und die beiden anliegenden Winkel; b) eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel; c) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel; d) zwei Seiten mit dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel; e) zwei Seiten und die zu einer derselben gehörige Höhe; f) eine Seite und die zu den beiden andern Seiten gehörigen Höhen; g) eine Seite, die Differenz der beiden andern Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel.

§. 56. Rechnungsaufgaben.

1. In einem Dreiecke sind zwei Winkel:

a) $\alpha = 57^0$, $\beta = 62^0$; b) $\alpha = 46^0\,29'$, $\beta = 104^0\,41'$; c) $\alpha = 78^0\,19'\,43''$, $\beta = 60^0\,33'\,18''$;

wie groß ist der dritte Winkel γ?

2. Zwei innere Winkel eines Dreieckes sind
a) 32^0 und 70^0, b) $44^0\ 8'\ 42''$ und $119^0\ 45'\ 53''$;
wie groß ist der gegenüberliegende Außenwinkel?

3. Ein Außenwinkel m und ein innerer nicht anliegender Winkel α sind gegeben; wie groß ist der andere innere nicht anliegende Winkel β?

4. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der eine Außenwinkel an der Hypotenuse a) 93^0, b) $112^0\ 18'$, c) $137^0\ 53'\ 40''$; wie groß ist der zweite Außenwinkel an der Hypotenuse?

5. Der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist α; wie groß ist jeder Winkel an der Grundlinie?

6. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist ein Winkel an der Grundlinie β; wie groß ist der Winkel am Scheitel?

7. Wie groß ist der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks?

8. Wie groß sind die Winkel in einem gleichschenkligen Dreiecke, wenn der Winkel am Scheitel a) eben so groß, b) doppelt so groß, c) halb so groß als einer der Winkel an der Grundlinie ist?

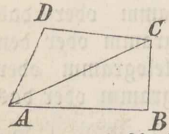
Dritter Abschnitt.

Das Viereck.

I. Erklärungen und Lehrsätze.

§. **57.** Eine von vier Geraden begrenzte ebene Figur heißt ein Viereck. Die Strecke AC (Fig. 43), welche zwei gegenüberstehende Eckpunkte des Viereckes verbindet, heißt eine Diagonale.

Fig. 43.



Ein Viereck hat vier Seiten, vier Winkel und zwei Diagonalen.

§. **58.** Die Summe aller Winkel eines Viereckes ist gleich vier Rechten.

Zerlegt man (Fig. 43) das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, so beträgt die Winkelsumme in jedem derselben zwei Rechte, also in beiden zusammen vier Rechte.

§. **59.** Mit Rücksicht auf die gegenseitige Lage der Seiten werden die Vierecke in Trapezoide, Trapeze und Parallelogramme eingetheilt.

Ein Trapezoid ist ein Viereck, in welchem keine Seite mit einer andern parallel ist; ein Trapez ist ein Viereck, in welchem nur zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind; ein Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind.

§. **60.** 1. In einem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Winkel gleich.

Je zwei an einer Seite liegende Winkel sind nach §. 26, 2 gleich zwei Rechten, daher je zwei gegenüberliegende Winkel gleich.

2. Sind in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Winkel gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm. (Umkehrung von 1.)

Der Beweis stützt sich auf §. 58 und §. 26, 1.

Folgesätze.

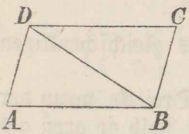
a) Ist in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter, so sind es auch die anderen.

b) Ist ein Winkel des Parallelogramms ein schiefer, so sind es auch die anderen.

Man unterscheidet daher rechtwinklige und schiefwinklige Parallelogramme.

§. **61.** In einem Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich.

Fig. 44.



Voraussetzung. Es sei ABCD (Fig. 44) ein Parallelogramm, also AB || DC, AD || BC.

Behauptung. AB = CD, AD = BC.

Beweis. Zieht man eine Diagonale BD, so ist △ ABD ≅ CDB (§. 26, 2. u. §. 44), daher AB = DC, AD = BC.

Den obigen Satz pflegt man auch so auszudrücken: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

Folgesatz. Sind zwei Gerade parallel, so sind alle Punkte der einen Geraden von der andern gleich weit entfernt.

Denn die Senkrechten, welche die Entfernungen der Punkte der einen Parallelen von der andern angeben, sind nach §. 27, a) parallel.

Die constante Entfernung eines jeden Punktes der einen zweier Parallelen von der andern heißt der Abstand der beiden Parallelen.

§. **62.** Sind in einem Parallelogramme zwei zusammentreffende Seiten gleich, so sind es auch die anderen; das Parallelogramm heißt in diesem Falle gleichseitig. Sind dagegen zwei zusammentreffende Seiten ungleich, so heißt das Parallelogramm ungleichseitig.

Mit Rücksicht auf die Größe der Winkel (§. 60) und auf die Länge der Seiten unterscheidet man vier Arten von Parallelogrammen:

1. das schiefwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rhomboid; 2. das schiefwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder den Rhombus; 3. das rechtwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rechteck; 4. das rechtwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder das Quadrat.

Nimmt man in einem Parallelogramme irgend eine Seite als Grundlinie an, so heißt die Senkrechte, welche von einem Punkte der gegenüberliegenden Seite auf diese Grundlinie gefällt wird, die Höhe des Parallelogrammes. Unter der Höhe eines Trapezes versteht man die Senkrechte, welche von einem Punkte der einen parallelen Seite auf die andere parallele Seite gezogen wird.

§. **63.** 1. Sind in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Es sei in dem Vierecke ABCD (Fig. 44) AB = CD und AD = BC. Dann ist △ ABD ≅ CDB (§. 47), also sind die Wechselwinkel ABD und BDC, ebenso ADB und CBD gleich; folglich AB || DC und AD || BC.

2. Sind in einem Vierecke zwei gegenüberstehende Seiten gleich und parallel, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

In dem Vierecke ABCD (Fig. 44) sei AB = DC und AB ∥ DC. Dann ist △ABD ≅ CDB (§. 45), also sind auch die Wechselwinkel ADB und CBD gleich, woraus AD ∥ BC folgt.

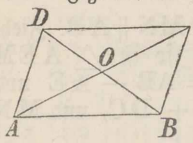
Folgesätze. a) Sind zwei Punkte einer Geraden von einer anderen Geraden auf derselben Seite gleich weit entfernt, so sind die beiden Geraden parallel.

b) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer gegebenen Geraden auf einer bestimmten Seite derselben einen gegebenen Abstand haben, ist die mit der Geraden auf derselben Seite in dem gegebenen Abstande gezogene Parallele.

§. **64.** *Lehrsätze von den Diagonalen der Parallelogramme.*

1. Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke. (Beweis in §. 61.)

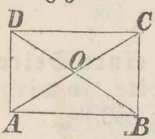
Fig. 45.



2. Die Diagonalen eines jeden Parallelogrammes halbiren einander.

Es sei ABCD (Fig. 45) ein Parallelogramm, also AB ∥ DC und AD ∥ BC. Dann ist △AOB ≅ COD (§. 44), woraus AO = CO und BO = DO folgt.

Fig. 46.

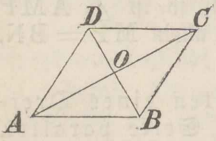


3. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und BAD (Fig. 46) sind congruent, daher AC = BD.

4. Die Diagonalen eines Rhombus stehen senkrecht auf einander. (Fig. 47.)

Fig. 47.



Denn BDA und BDC sind gleichschenklige Dreiecke und daher AC ⊥ BD (§. 51.)

5. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich und stehen senkrecht auf einander.

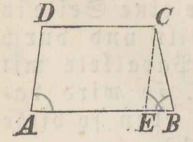
Folgt aus 3 und 4.

Zusatz. Die Sätze 2, 3, 4 und 5 gelten auch in ihren Umkehrungen.

§. **65.** *Lehrsätze von den Trapezen.*

1. Sind in einem Trapeze die Winkel an einer der beiden parallelen Seiten gleich, so sind die nicht parallelen Seiten des Trapezes einander gleich.

Fig. 48.



Es sei (Fig. 48) AB ∥ DC und A = B. Zieht man CE ∥ DA, so ist EC = AD und W. CEB = A = B, also im △BEC, EC = BC (§. 40, 3), mithin auch AD = BC.

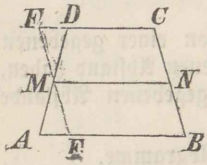
Ein Trapez, worin die nichtparallelen Seiten gleich sind, heißt ein *gleichschenkliges Trapez.*

2. Umgekehrt: In einem gleichschenkligen Trapeze sind die Winkel an jeder der parallelen Seiten einander gleich.

Es sei (Fig. 48) AB ∥ DC und AD = BC. Zieht man CE ∥ DA, so ist EC = AD = BC, also im △BEC der Winkel CEB = B, aber CEB = A; folglich auch A = B. Weil A + D = B + C = 2 R, so ist auch D = C.

3. Zieht man in einem Trapeze durch die Mitte einer der nicht parallelen Seiten eine Parallele mit den zwei Parallelseiten, so wird dadurch auch die andere der nichtparallelen Seiten halbirt.

Fig. 49.



Es sei (Fig. 49) AB || DC, ferner AM = DM und MN || AB || DC. Zieht man durch M die EF || BC und verlängert CD bis F, so ist △ AEM ≅ DFM, daher EM = FM; aber EM = BN und FM = CN, mithin auch BN = CN.

Zusatz. Dieser Satz läßt sich umkehren. Der Beweis wird indirect geführt.

Die Gerade MN heißt die Mittellinie des Trapezes.

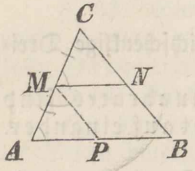
4. Die Mittellinie des Trapezes ist gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten desselben.

Es sei (Fig. 49) AB || DC, ferner AM = DM und MN || AB. Zieht man durch M die EF || BC und verlängert CD bis F, so ist △ AEM ≅ DFM, daher AE = DF. Ferner ist MN = BE = AB − AE und MN = CF = DC + DF, folglich 2MN = AB + DC, und $MN = \frac{AB + DC}{2}$.

§. **66.** Lehrsätze von den Parallelen im Dreiecke.

1. Zieht man in einem Dreiecke durch die Mitte einer Seite eine Parallele mit einer zweiten Seite, so wird dadurch die dritte Seite halbirt. (Fig. 50.)

Fig. 50.



Voraussf. AM = CM, MN || AB.

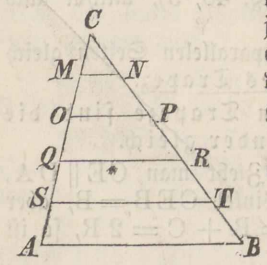
Behaupt. BN = CN.

Beweis. Zieht man MP || CB, so ist △ AMP ≅ MCN (§. 44), daher MP = CN; allein MP = BN, folglich BN = CN.

2. Zieht man durch die Mitten zweier Seiten eines Dreieckes eine Gerade, so ist diese mit der dritten Seite parallel. (Umkehrung des Satzes 1.)

Es seien M und N (Fig. 50) die Mitten der Seiten AC und BC. Schneidet die durch M mit AB parallel gezogene Gerade die Seite BC in irgend einem Punkte N', so muß (nach 1.) BN' = CN', also der Punkt N' mit N identisch, d. i. MN || AB sein.

Fig. 51.



3. Wird in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Theile getheilt und durch jeden Theilungspunkt eine Parallele mit einer zweiten Seite gezogen, so wird dadurch auch die dritte Seite in eben so viele gleiche Theile getheilt. (Fig. 51.)

Voraussf. CM = MO = OQ = QS = SA und MN || OP || QR || ST || AB.

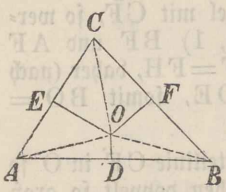
Behaupt. CN = NP = PR = RT = TB.

Beweis. CN = NP (nach 1.), und NP = PR = RT = TB (nach §. 65, 3).

§. 67. Die vier merkwürdigen Punkte des Dreieckes.

1. Die Mittellothe eines Dreieckes, d. i. die in den Mitten der Seiten errichteten Senkrechten, schneiden sich in einem Punkte, welcher von den drei Eckpunkten gleichen Abstand hat.

Fig. 52.

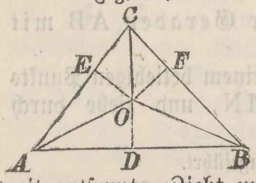


Es sei (Fig. 52) $AD = BD$, $AE = CE$ und $BF = CF$, ferner $DO \perp AB$ und $EO \perp AC$. Daß sich die Senkrechten aus D und E überhaupt in einem Punkte O schneiden, folgt aus §. 27, d. Zieht man AO, BO, CO, so ist (nach §. 52, 4) $AO = BO$ und $AO = CO$, daher auch $BO = CO$; der Punkt O ist also von den drei Ecken gleich weit entfernt. Zieht man nun im gleichschenkligen $\triangle BOC$ die Gerade OF, so ist diese (nach §. 52, 1) senkrecht auf BC. O ist mithin der gemeinschaftliche Durchschnitt der Senkrechten DO, EO und FO.

Zusatz. Der Punkt O liegt innerhalb, auf dem Umfange oder außerhalb des Dreieckes ABC, je nachdem dieses spitz-, recht- oder stumpfwinklig ist. Der obige Beweis gilt jedoch unverändert für alle drei Lagen.

2. Die drei Winkelhalbirungslinien eines Dreieckes schneiden sich in einem Punkte, welcher von den drei Seiten gleichen Abstand hat.

Fig. 53.

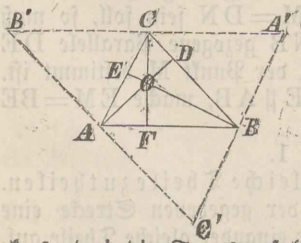


Es seien (Fig. 53) AO und BO die Halbirungslinien der Winkel A und B, und O ihr Durchschnitt (§. 26, 3). Zieht man $OD \perp AB$, $OE \perp AC$ und $OF \perp BC$, so ist $\triangle AOD \cong AOE$, folglich $OD = OE$; ferner ist $\triangle BOD \cong BOF$, folglich $OD = OF$; mithin auch $OE = OF$. Der Punkt O ist daher von den drei Seiten des Dreieckes ABC gleich weit entfernt. Zieht man CO, so ist $\triangle COE \cong COF$, folglich der Winkel $ECO = FCO$; die Gerade CO halbirt also den Winkel C, mithin ist O der gemeinschaftliche Durchschnitt der Winkelhalbirungslinien AO, BO, CO.

Zusatz. In ganz gleicher Weise wird auch bewiesen, daß sich die Halbirungslinien des einen innern Dreieckswinkels und der Nebenwinkel der beiden anderen in einem Punkte schneiden, welcher von der jenem innern Winkel gegenüberliegenden Seite und den Verlängerungen der beiden andern gleich weit entfernt ist.

3. Die drei Ecklothe (Höhen) eines Dreieckes, d. i. die von den Eckpunkten auf die Gegenseiten gezogenen Senkrechten, schneiden sich in einem Punkte.

Fig. 54.



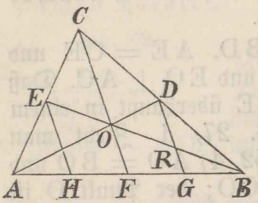
Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 54) $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$.

Zieht man durch A, B, C Parallele mit BC, AC, AB, wodurch man das Dreieck A'B'C' erhält, so erscheinen die Senkrechten AD, BE, CF als Mittellothe des Dreieckes A'B'C', und schneiden sich also nach 1. in einem Punkte O.

4. Die drei Mittellinien eines Dreieckes, d. i. die Transversalen, welche von den drei Eckpunkten zu den Mitten der Gegenseiten gezogen werden, schneiden sich in einem Punkte, wel-

cher jede Mittellinie so theilt, daß der an einer Ecke liegende Abschnitt doppelt so groß ist als der andere.

Fig. 55.



Es seien (Fig. 55) D, E und F die Mitten der Seiten BC, AC und AB; O sei der Durchschnittspunkt der Transversalen BE und CF. Zieht man die Geraden DG und EH parallel mit CF, so werden durch dieselben (nach §. 66, 1) BF und AF halbirt. Es ist demnach $BG = GF = FH$, daher (nach §. 66, 3) auch $BR = RO = OE$, somit $BO = 2OE$.

Die Mittellinie BE wird also von einer zweiten Mittellinie CF in O so getheilt, daß der an der Ecke B liegende Abschnitt derselben doppelt so groß ist als der andere. Zieht man noch die dritte Mittellinie AD, so muß auch sie die BE in dieselben zwei Abschnitte theilen, und daher durch den Punkt O gehen.

Zusatz. Der Durchschnittspunkt O der drei Mittellinien eines Dreieckes heißt der Schwerpunkt desselben.

II. Aufgaben.

§. 68. Constructionsaufgaben.

1. Durch einen Punkt M außerhalb einer Geraden AB mit dieser eine Parallele zu ziehen.

Man ziehe von M die $MN \perp AB$, errichte in einem beliebigen Punkte P der Geraden AB die $PR \perp AB$, mache $PR = MN$, und ziehe durch M und R die Gerade MR. (§. 63, Folges. a.)

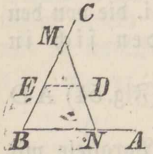
Eine andere Lösung dieser Aufgabe wurde in §. 30, 3. angeführt.

2. Ein Parallelogramm zu construiren, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Man construire (Fig. 44) den Winkel BAD, trage von A aus auf den Schenkeln die gegebenen Strecken AB und AD auf, und beschreibe aus D mit AB, aus B mit AD als Halbmesser Kreisbogen; der Durchschnitt C ist der vierte Eckpunkt des Parallelogramms.

Der Beweis folgt aus der Construction und §. 63, 1.

Fig. 56.



3. Durch einen Punkt D (Fig. 56) zwischen den Schenkeln eines Winkels ABC eine von ihnen begrenzte Strecke so zu ziehen, daß sie in jenem Punkte halbirt wird.

Analysis. Man denke sich die Aufgabe gelöst und es sei MN die verlangte Strecke. Da $DM = DN$ sein soll, so muß nach §. 66, 1 die durch D mit NB gezogene Parallele DE die BM halbiren, also $ME = BE$ sein, wodurch der Punkt M bestimmt ist.

Construction. Man ziehe durch D die $DE \parallel AB$, mache $EM = BE$ und ziehe von M die Strecke MDN.

Der Beweis folgt unmittelbar aus §. 66, 1.

4. Eine gegebene Strecke in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Man ziehe (Fig. 51) durch einen Endpunkt der gegebenen Strecke eine beliebige zweite Gerade, trage darauf so viele unter einander gleiche Theile auf, als Theile verlangt werden, verbinde den letzten Theilungspunkt mit dem

zweiten Endpunkte der gegebenen Strecke durch eine Gerade und ziehe mit dieser auch durch die übrigen Punkte Parallele, so wird dadurch die gegebene Gerade in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt (§. 66, 3).

III. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. **69.** Uebungssätze.

1. In jedem Vierecke ist die Summe der Diagonalen größer als die zweier Gegenseiten.

2. In einem gleichschenkligen Trapeze sind die Diagonalen einander gleich.

3. Jede in einem Parallelogramme durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen gezogene Strecke wird in diesem Punkte halbirt.

4. Verbindet man in einem Vierecke die Halbirungspunkte der Seiten durch Strecken, so schließen diese ein Parallelogramm ein (§. 66, 2).

5. Die Halbirungslinien der vier Winkel eines Parallelogramms (oder der Außenwinkel) schließen ein Rechteck ein.

6. Die Verbindungslinien der Mitten eines gleichschenkligen Trapezes schließen einen Rhombus ein.

§. **70.** Constructionsaufgaben.

1. Ein Quadrat zu beschreiben, wenn gegeben ist: a) die Seite; b) die Diagonale; c) die Summe (oder Differenz) der Diagonale und der Seite.

2. Ein Rechteck zu construiren, wenn gegeben sind: a) die Grundlinie und die Höhe; b) eine Seite und eine Diagonale; c) eine Seite und der ihr gegenüberliegende Winkel der beiden Diagonalen.

3. Einen Rhombus zu construiren, wenn gegeben sind: a) eine Seite und ein Winkel; b) eine Seite und eine Höhe; c) eine Seite und eine Diagonale; d) die zwei Diagonalen.

4. Ein Parallelogramm zu verzeichnen, wenn gegeben sind: a) zwei Seiten und eine Diagonale; b) eine Seite und die beiden Diagonalen; c) die Diagonalen und der von ihnen eingeschlossene Winkel; d) die Grundlinie, die zweite Seite und die Höhe.

5. In ein gegebenes Viereck ein Parallelogramm einzuschreiben, dessen Seiten die Hälfte der Diagonalen des Viereckes sind.

6. Ein Trapez zu construiren, wenn gegeben sind: a) alle vier Seiten; b) drei Seiten und die Höhe; c) die Parallelseiten und die Diagonalen.

Vierter Abschnitt.

Das Vieleck.

I. Erklärungen und Lehrsätze.

§. **71.** Jede von mehreren geraden Linien begrenzte ebene Figur heißt ein Vieleck oder Polygon.

Ein Vieleck hat so viele Seiten als Winkel, und eben so viele Eckpunkte. Die Winkel können hohl oder erhaben sein.

Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seiten unterscheidet man dreiseitige Vielecke oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke, fünfseitige oder Fünf-

ecke, ...nseitige oder n-Ecke. Hinsichtlich der Größe der Seiten und Winkel werden die Vielecke in gleichseitige und ungleichseitige, in gleichwinklige und ungleichwinklige Vielecke eingetheilt.

Ein gleichseitiges und gleichwinkliges Vieleck heißt regelmäßig, jedes andere Vieleck unregelmäßig. Unter den Dreiecken ist das gleichseitige Dreieck, unter den Vierecken das Quadrat regelmäßig.

§. 72. Eine Strecke, welche zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Eckpunkte des Vieleckes verbindet, heißt eine Diagonale.

Durch ganz einfache Schlüsse wird man auf folgende Sätze geleitet:

1. Von jedem Eckpunkte eines nseitigen Vieleckes lassen sich n—3 Diagonalen ziehen.

2. Die Anzahl aller möglichen Diagonalen eines n-Eckes ist gleich $\frac{n(n-3)}{2}$.

3. Jedes n-Eck läßt sich durch Diagonalen, welche von einem Eckpunkte aus gezogen werden, in n—2 Dreiecke zerlegen.

§. 73. Die Summe aller Winkel eines Vieleckes ist gleich sovielmal 2 Rechten, als die um 2 verminderte Zahl der Seiten anzeigt.

Zerlegt man des nseitige Vieleck ABCD... (Fig. 58) durch Diagonalen, welche von einem Eckpunkte ausgehen, in n—2 Dreiecke, so ist die Winkelsumme derselben (n—2).2R. Diese Winkelsumme ist aber zugleich die Summe aller Winkel des n-Eckes.

Der Beweis könnte auch geführt werden, indem man von einem Punkte im Innern des Vieleckes zu allen Eckpunkten Strecken zieht.

Folgesätze:

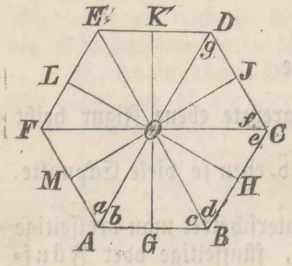
a) Die Summe der Winkel eines Dreieckes ist $2R = 180^0$,
" " " " " Viereckes " $4R = 360^0$,
" " " " " Fünfeckes " $6R = 540^0$,
" " " " " Sechseckes " $8R = 720^0$, u. s. w.

b) Jeder Winkel eines regelmäßigen Vieleckes beträgt $2R - \frac{4R}{n}$; daher

der Winkel eines regelmäßigen Dreieckes $180^0 - \frac{360^0}{3} = 60^0$,
" " " " Viereckes $180^0 - \frac{360^0}{4} = 90^0$,
" " " " Fünfeckes $180^0 - \frac{360^0}{5} = 108^0$,
" " " " Sechseckes $180^0 - \frac{360^0}{6} = 120^0$, u. s. w.

§. 74. Halbirt man in einem regelmäßigen Vielecke zwei aufeinander folgende Winkel, so ist der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien a) von allen Eckpunkten des Vieleckes, b) von allen Seiten des Vieleckes gleich weit entfernt. (Fig. 57.)

Fig. 57.



Voraussf. AB = BC = CD = DE = ...
W. A = B = C = D = ...

Halbirt man die Winkel A und B, so daß a = b, c = d wird, verbindet den Durchschnittspunkt O der Halbirungslinien (§. 26, 3) mit allen übrigen Eckpunkten und fällt aus ihm Senkrechte auf alle Vieleckseiten, so ist

Behaupt.
a) AO = BO = CO = DO = ...
b) Senkrechte OG = OH = OJ = OK = ...

Beweis. a) $\triangle AOB \cong BOC$ (§. 45), daher $AO = OC$ und $b = e$. Wegen $A = C$ und $b = \frac{A}{2}$ ist daher auch $e = \frac{C}{2} = f$, folglich $\triangle BOC \cong COD$, somit $BO = DO$ und $d = g$. Eben so kann man beweisen, daß $\triangle COD \cong DOE$, also $CO = EO$ u. s. w. ist. Da nun im $\triangle AOB$ wegen $b = c$ die Seite $BO = AO$ ist, so hat man

$$AO = BO = CO = DO = EO = \ldots$$

b) Da die Dreiecke AOB und BOC gleichschenklig sind, so ist (nach §. 52, 2) $BG = \frac{AB}{2}$ und $BH = \frac{BC}{2}$, daher $BG = BH$ und $\triangle BGO \cong BHO$ (§. 45), folglich $OG = OH$. Auf dieselbe Art kann man beweisen, daß $OH = OJ$, $OJ = OK$, ... ist.

Zusatz. Der Punkt O heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes.

Folgesatz. Verbindet man den Mittelpunkt eines regelmäßigen Vieleckes mit allen Eckpunkten durch Strecken, so werden dadurch alle Vieleckswinkel halbirt, und das regelmäßige Vieleck selbst wird in so viele congruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt, als es Seiten hat.

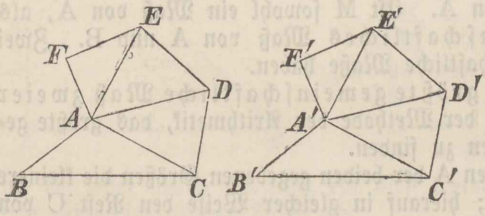
Ein solches Dreieck oder auch mehrere aneinander liegende solche Dreiecke nennt man einen Ausschnitt des regelmäßigen Vieleckes; der dazu gehörige Theil des Vieleckumfanges ist die Grundlinie des Ausschnittes.

§. **75.** Zwei Vielecke sind congruent, wenn in denselben alle Seiten und alle Winkel in derselben Ordnung paarweise gleich sind.

1. Zwei Vielecke, welche sich durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in paarweise congruente Dreiecke zerlegen lassen, sind congruent.

Es sei (Fig. 58) $\triangle ABC \cong A'B'C'$, $\triangle ACD \cong A'C'D'$, $\triangle ADE \cong A'D'E'$, $\triangle AEF \cong A'E'F'$.

Fig. 58.



Legt man das Vieleck $A'B'C'D'E'F'$ so auf das Vieleck ABCDEF, daß die congruenten Dreiecke $A'B'C'$ und ABC zusammenfallen, so werden sich auch die Dreiecke $A'C'D'$ und ACD decken, folglich auch die Dreiecke $A'D'E'$ und ADE, also auch $A'E'F'$ und AEF. Es decken sich also die beiden Vielecke.

2. Umgekehrt: Zwei congruente Vielecke werden durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in paarweise congruente Dreiecke getheilt.

Legt man zwei congruente Vielecke so auf einander, daß die gleichliegenden Eckpunkte auf einander fallen, so decken sich auch die übereinstimmend gezogenen Diagonalen, mithin auch die dadurch gebildeten Dreiecke.

II. Uebungsaufgaben.

§. **76.** Constructionsaufgaben.

1. Ein Vieleck zu construiren, das mit einem gegebenen Vielecke congruent ist.

2. Ein n-Eck zu construiren, wenn gegeben sind: a) n—2 auf einander folgende Seiten und n—1 an diesen Seiten liegende Winkel; b) n—1 auf

einander folgende Seiten und n—2 von diesen eingeschlossene Winkel; c) n Seiten und n—3 auf einander folgende Winkel; d) n Seiten und die von einem Eckpunkte ausgehenden n—3 Diagonalen.

3. Ein regelmäßiges n-Eck zu construiren, wenn eine Seite gegeben ist.

4. Den Mittelpunkt eines regelmäßigen Vieleckes zu bestimmen.

§. 77. Rechnungsaufgaben.

1. Ziehe vom Mittelpunkte eines regelmäßigen n-Eckes zu allen Eckpunkten Strecken; wie groß ist a) der Winkel am Scheitel; b) der Winkel an der Grundlinie in jedem der dadurch gebildeten gleichschenkligen Dreiecke?

2. Berechne diese Winkel insbesondere

a) für das gleichseitige Dreieck; b) für das Quadrat;
c) „ „ regelmäßige Fünfeck; d) „ „ regelmäßige Sechseck;
e) „ „ „ Zehneck; f) „ „ „ Zwölfeck.

3. In welchem regelmäßigen Vielecke ist der Winkel am Scheitel der gleichschenkligen Dreiecke, in welche es vom Mittelpunkte aus getheilt werden kann, a) eben so groß, b) doppelt so groß, c) halb so groß als jeder Winkel an der Grundlinie?

Fünfter Abschnitt.

Proportionalität der Strecken und Aehnlichkeit der ebenen Gebilde.

I. Geometrische Verhältnisse.

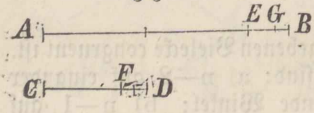
§. 78. Eine Raumgröße heißt ein Maß einer andern gleichartigen Raumgröße, wenn die zweite aus gleichen Theilen besteht, deren jeder der ersten Raumgröße gleich ist. Ist z. B. $A = aM$, wo a irgend eine ganze Zahl bedeutet, so ist M ein Maß von A. Ist M sowohl ein Maß von A, als von B, so heißt es ein gemeinschaftliches Maß von A und B. Zwei Größen können mehrere gemeinschaftliche Maße haben.

§. 79. Das Verfahren, das größte gemeinschaftliche Maß zweier Größen zu finden, ist analog der Methode der Arithmetik, das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden.

Man nehme von der größeren A der beiden gegebenen Größen die kleinere B so oft weg, als es möglich ist; hierauf in gleicher Weise den Rest C von der kleineren Größe B so oft, als es angeht; dann den neuen Rest D von dem vorigen Reste C, u. s. f. jeden neuen Rest von dem vorhergehenden. Kommt man bei diesem Verfahren einmal auf einen Rest R, welcher ein Maß des nächst vorhergehenden ist, so daß kein Rest übrig bleibt, so ist R das größte gemeinschaftliche Maß von A und B. (Der Beweis wurde in der Arithmetik §. 88, 2 geführt.)

Wir wollen dieses Verfahren an zwei Strecken AB und CD (Fig. 59) veranschaulichen.

Fig. 59.



Man trägt die kleinere Strecke CD auf die größere AB so oft auf, als es angeht, hier 2mal; den Rest EB trägt man auf die kleinere Strecke CD (2mal), den Rest FD auf den vorigen Rest EB (1mal), den neuen Rest GB

wieder auf den früheren FD, in welchem er genau 2mal enthalten sei. Man hat dann

$$FD = 2GB,$$
$$EB = FD + GB = 3GB,$$
$$CD = 2EB + FD = 8GB,$$
$$AB = 2CD + EB = 19GB.$$

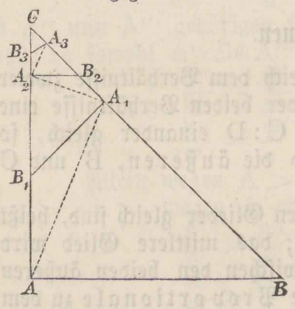
Es haben demnach AB und CD das größte gemeinschaftliche Maß GB, und zwar ist dieses in der AB 19mal, in der CD 8mal enthalten.

§. 80. Da bei dem im §. 79 angeführten Verfahren der jedesmal gebliebene Rest zwar kleiner als der vorhergehende sein muß, demselben jedoch bei Raumgrößen keine Grenze, unter die er nicht kommen könnte, vorgezeichnet ist, so ist es möglich, daß hier das wiederholte Wegnehmen der Reste ohne Ende fortgesetzt wird, ohne daß man je auf einen Rest kommt, welcher ein Maß des vorhergehenden wäre. In diesem Falle haben die beiden gegebenen Größen kein gemeinschaftliches Maß.

Zwei Größen, welche ein gemeinschaftliches Maß haben, heißen commensurabel; zwei Größen, die kein gemeinschaftliches Maß haben, incommensurabel.

Ein Beispiel zweier incommensurabler Größen bieten die Hypotenuse und die Kathete eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreieckes. Wir lassen den Beweis dafür nach van Swinden folgen.

Fig. 60.



Es sei (Fig. 60) $AB = AC$ und $AC \perp AB$. Man mache

$$BA_1 = BA \text{ und } A_1B_1 \perp BC,$$
$$B_1A_2 = B_1A_1 \text{ und } A_2B_2 \perp AC,$$
$$B_2A_3 = B_2A_2 \text{ und } A_3B_3 \perp BC, \text{ u. s. w.}$$

Dann ist

$$AB_1 = CA_1 = A_1B_1,$$
$$A_1B_2 = CA_2 = A_2B_2,$$
$$A_2B_3 = CA_3 = A_3B_3, \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt

$$CB = 1.CA + CA_1,$$
$$CA = 2.CA_1 + CA_2,$$
$$CA_1 = 3.CA_2 + CA_3, \text{ u. s. w.}$$

wo bei jeder neuen Messung ein Rest bleibt, und es also für CB und CA kein gemeinschaftliches Maß gibt.

§. 81. Die Vergleichung zweier gleichartiger Größen, um zu bestimmen, wie oft die zweite in der ersten enthalten ist, heißt ein Verhältniß. Von den beiden Größen heißt die erste das Vorderglied, die zweite das Hinterglied des Verhältnisses. Das Verhältniß der Größen A und B wird durch $A:B$ oder $\frac{A}{B}$ angezeigt. Die Zahl, welche angibt, wie oft das Hinterglied in dem Vorderglied enthalten ist, ist der Quotient des Verhältnisses. Zwei Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie denselben Quotienten haben.

Das Verhältniß zweier Raumgrößen ist gleich dem Verhältnisse ihrer Maßzahlen, d. i. der unbenannten Zahlen, durch welche die beiden Raumgrößen in Beziehung auf dasselbe Maß ausgedrückt sind.

§. 82. 1. Der Quotient eines Verhältnisses, dessen Glieder commensurabel sind, ist entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch.

2. Der Quotient eines Verhältnisses, dessen Glieder incommensurabel sind, kann a) weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl sein; er läßt sich jedoch b) durch Angabe zweier Grenzen, innerhalb deren er liegt, mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit annäherungsweise bestimmen.

Die Beweise für diese zwei Sätze wurden in der Arithmetik §. 132 angeführt.

3. Liegen zwei Größen zwischen denselben zwei Näherungswerthen, und kann der Unterschied dieser Näherungswerthe beliebig klein gemacht werden, so sind die beiden Größen gleich.

Ist $p < a < q$ und $p < b < q$, und kann der Unterschied $q - p$ kleiner gemacht werden als jede noch so kleine gegebene Größe, so ist $a = b$. Denn wären a und b ungleich und wäre d ihre Differenz, wo d eine bestimmte unveränderliche Größe bezeichnen müßte, so könnte, damit a und b stets zwischen p und q eingeschlossen bleiben, der Unterschied $q - p$ nicht kleiner werden als d, was jedoch der Voraussetzung widerspricht.

Folgesätze. a) Das Verhältniß zweier commensurabler Größen ist rational, das Verhältniß zweier incommensurabler Größen irrational.

b) Zwei irrationale Verhältnisse sind gleich, wenn sie zwischen denselben Näherungswerthen liegen und wenn diese einander beliebig genähert werden können.

II. Geometrische Proportionen.

§. 83. Ist das Verhältniß zweier Größen gleich dem Verhältnisse zweier anderer Größen, so nennt man die Gleichstellung der beiden Verhältnisse eine Proportion. Sind die Verhältnisse $A:B$ und $C:D$ einander gleich, so ist $A:B = C:D$ eine Proportion; A und D sind die äußeren, B und C die inneren Glieder der Proportion.

Eine Proportion, in welcher die beiden inneren Glieder gleich sind, heißt eine stetige Proportion; z. B. $A:B = B:C$; das mittlere Glied wird die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden äußeren Gliedern, und das vierte Glied die dritte stetige Proportionale zu dem ersten und mittleren Gliede genannt.

Ist eine Strecke AC in einem Punkte B so getheilt, daß die Proportion $AC:AB = AB:BC$ stattfindet, so heißt die Strecke im Punkte B nach stetiger Proportion, oder im mittlern und äußern Verhältnisse getheilt.

Wenn zwei Arten von Größen so von einander abhängen, daß das Verhältniß zwischen je zwei Größen der einen Art gleich ist dem Verhältnisse der beiden zugehörigen Größen der anderen Art, in derselben Ordnung genommen, so sagt man: die beiden Arten von Größen stehen in geradem Verhältnisse, oder sie sind gerade proportionirt, auch blos proportionirt. Hängen dagegen zwei Arten von Größen so von einander ab, daß das Verhältniß zwischen je zwei Größen der einen Art gleich ist dem Verhältnisse der zwei zugehörigen Größen der anderen Art, aber in umgekehrter Ordnung genommen, so sagt man: die beiden Arten von Größen stehen in verkehrtem Verhältnisse, oder sie sind verkehrt proportionirt.

Da die in der Arithmetik aufgestellten Sätze über die Proportionen unter den dort bezeichneten Einschränkungen auch für Raumgrößen Giltigkeit haben, so werden wir hier nur den folgenden wichtigen Satz nachtragen:

§. 84. Lehrsatz. Sind zwei gleichartige Größen für den Fall, daß sie commensurabel sind, zwei anderen gleichartigen Größen, welche mit den ersteren immer zugleich zu- oder abnehmen, proportionirt, so sind sie denselben auch dann proportionirt, wenn jene ersteren Größen incommensurabel sind.

Voraussf. A und A′ seien zwei Größen der einen Art, B und B′ die zugehörigen Größen einer anderen Art, welche mit jenen zugleich zu- oder abnehmen, und es sei für den Fall, daß A und A′ commensurabel sind, $A : A' = B : B'$.

Behaupt. Die Proportion $A : A' = B : B'$ muß auch stattfinden, wenn A und A′ incommensurabel sind.

Beweis. Theilt man A′ in n gleiche Theile, wo n beliebig groß angenommen werden kann, und nimmt einen solchen Theil $\frac{A'}{n}$ von A mmal, d. i. so oft weg, als es angeht, so bleibt, wenn A und A′ incommensurabel sind, von A noch ein Rest übrig, der jedoch kleiner als $\frac{A'}{n}$ ist; es ist daher $A > m.\frac{A'}{n}$, dagegen $A < (m+1).\frac{A'}{n}$, somit

$$\frac{mA'}{n} < A < \frac{(m+1)A'}{n}, \text{ oder } \frac{m}{n} < \frac{A}{A'} < \frac{m+1}{n}.$$

Setzt man nun $\frac{mA'}{n} = A''$ und $\frac{(m+1)A'}{n} = A'''$, und bezeichnet die zu A″ und A‴ gehörigen Größen der zweiten Art durch B″ und B‴, so hat man, da sowohl A″ als A‴ mit A′ commensurabel ist, nach der Voraussetzung

$$\frac{B''}{B'} = \frac{A''}{A'} \text{ und } \frac{B'''}{B'} = \frac{A'''}{A'} \text{ oder}$$
$$\frac{B''}{B'} = \frac{m}{n} \text{ und } \frac{B'''}{B'} = \frac{m+1}{n}.$$

Allein wegen $A > A''$ ist auch $B > B''$, und
wegen $A < A'''$ ist auch $B < B'''$, daher

$$\frac{B}{B'} > \frac{B''}{B'} \text{ und } \frac{B}{B'} < \frac{B'''}{B'}, \text{ oder}$$
$$\frac{B}{B'} > \frac{m}{n} \text{ und } \frac{B}{B'} < \frac{m+1}{n}.$$
$$\text{mithin } \frac{m}{n} < \frac{B}{B'} < \frac{m+1}{n}.$$

Da nun die Verhältnisse $\frac{A}{A'}$ und $\frac{B}{B'}$ zwischen denselben Näherungswerthen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, deren Unterschied $\frac{1}{n}$ durch Vergrößerung von n beliebig klein gemacht werden kann, liegen, so sind sie (nach §. 82, Folgesf. b) einander gleich; folglich findet auch für den Fall, wenn A und A′ incommensurabel sind, die Proportion $A : A' = B : B'$ statt.

III. Proportionale Theilung der Strahlen durch parallele Transversalen.

§. 85. Mehrere von einem Punkte ausgehende Strahlen bilden ein Strahlenbüschel, der gemeinschaftliche Punkt heißt der Strahlenpunkt. Liegen die Strahlen in einer Ebene, so heißt das Strahlenbüschel ein ebenes. Jedem Strahlenbüschel entspricht ein zweites, welches von den Rückwärtsver-

längerungen der gegebenen Strahlen über den Strahlenpunkt hinaus gebildet wird.

Jede gerade Linie, welche die Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels durchschneidet, heißt eine Transversale des Strahlenbüschels (§. 23).

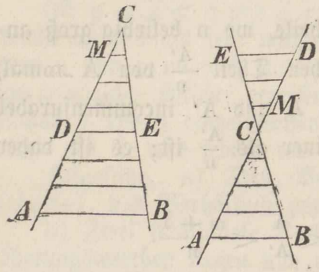
§. 86. Lehrsatz. Zwei Strahlen werden von je zwei parallelen Transversalen proportionirt geschnitten.

Voraussf. Es sei $DE \parallel AB$ (Fig. 61).

Behaupt. $CD : DA = CE : EB$.
$CA : DA = CB : EB$,
$CA : CD = CB : CE$.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, daß die Proportion $CD : DA = CE : EB$ stattfindet.

Fig. 61.



Es seien die Strecken CD und DA commensurabel, CM ein gemeinschaftliches Maß derselben, und zwar $CD = m.CM$, $DA = n.CM$, so ist $CD : DA = m : n$. Denkt man sich nun die CD in m und die DA in n gleiche Theile getheilt und durch jeden Theilungspunkt eine Parallele mit AB gezogen, so wird dadurch (§. 66, 3) auch CB in gleiche Theile getheilt, von denen m auf CE und n auf EB kommen; es ist also $CE : EB = m : n$. Aus dieser und der früheren Proportion folgt $CD : DA = CE : EB$.

Aus der Proportion $CD : DA = CE : EB$ ergibt sich auch die Richtigkeit der zweiten und dritten der oben aufgestellten Proportionen. Man hat $(CD + DA) : DA = (CE + EB) : EB$ oder $CA : DA = CB : EB$ und $(CD + DA) : CD = (CE + EB) : CE$ oder $CA : CD = CB : CE$

Sind die Strecken CD und DA incommensurabel, so folgt die Giltigkeit der für den Fall der Commensurabilität dieser Seiten bewiesenen Proportionen auch für den Fall der Incommensurabilität aus §. 84.

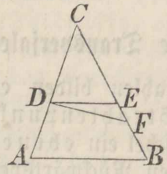
Zusatz. Nimmt man auf den Gegensatz der Richtungen Rücksicht, so ist in der Proportion $CA : CD = CB : CE$ das Verhältniß positiv, wenn die Punkte A und D auf derselben, dagegen negativ, wenn sie auf entgegengesetzten Seiten des Strahlenpunktes C liegen. Die Proportion bleibt übrigens auch im zweiten Falle richtig, weil dann auch die Punkte B und E auf entgegengesetzten Seiten von C liegen, und daher auch das Verhältniß $CB : CE$ negativ ist.

Folgesatz. Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so werden durch dieselbe die beiden anderen Seiten proportionirt geschnitten.

§. 87. Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

Werden zwei Strahlen von zwei Transversalen proportionirt geschnitten, so sind die beiden Transversalen parallel.

Fig. 62.

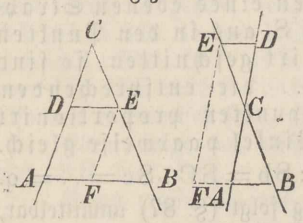


Es sei (Fig. 62) $CA : CD = CB : CE$. Würde die durch D parallel mit AB gezogene Gerade nicht durch E gehen, sondern die CB in einem anderen Punkte F schneiden, so wäre (nach §. 86) $CA : CD = CB : CF$. Dann aber muß mit Rücksicht auf die Voraussetzung $CF = CE$, d. h. der Punkt F mit E identisch sein. Folglich ist $DE \parallel AB$.

Folgesatz. Werden zwei Seiten eines Dreieckes von einer Transversale proportionirt geschnitten, so ist dieselbe mit der dritten Seite des Dreieckes parallel.

§. 88. Lehrsatz. Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten, so sind die Abschnitte der beiden Transversalen den Abschnitten eines jeden Strahls proportionirt. (Fig. 63.)

Fig. 63.



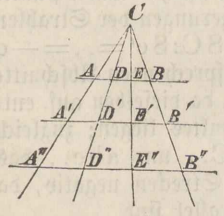
Ist DE || AB, so ist CA:CD=CB:CE (§. 86). Zieht man EF || CA, und betrachtet B als Strahlenpunkt, mithin EF und CA als Transversalen, so ist auch AB:AF = CB:CE, oder weil AF=DE ist, AB:DE=CB:CE.

Man hat daher

AB : DE = CA : CD = CB : CE.

§. 89. Lehrsatz. Wird ein Strahlenbüschel von zwei oder mehreren parallelen Transversalen geschnitten, so sind a) je zwei Abschnitte des einen Strahles den entsprechenden Abschnitten jedes andern Strahles, und b) je zwei Abschnitte einer Transversale den entsprechenden Abschnitten jeder andern Transversale proportionirt. (Fig. 64.)

Fig. 64.



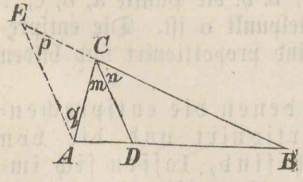
Voraus. AB || A'B' || A''B''...

Behaupt. a) CA : CA' : CA''...
= CD : CD' : CD''...
= CE : CE' : CE''...
= CB : CB' : CB''...
b) AD : A'D' : A''D''...
= DE : D'E' : D''E''...
= EB : E'B' : E''B''...

Der Beweis folgt unmittelbar aus den §§. 86 u. 88.

§. 90. Lehrsätze: 1. Halbirt man einen Winkel eines Dreieckes, so wird durch die Halbirungslinie die gegenüberstehende Seite in zwei Abschnitte getheilt, welche den ihnen anliegenden Seiten des Dreieckes proportionirt sind.

Fig. 65.



Voraus. Es sei im Dreiecke ABC (Fig. 65) der Winkel C durch die Gerade CD halbirt, so daß m = n wird.

Behaupt. AD : DB = AC : BC.

Beweis. Man verlängere BC und ziehe durch A mit DC eine Parallele, welche die Verlängerung der BC in E schneidet. Es ist nun m = q als Wechselwinkel, n = p als Gegenwinkel, und wegen m=n auch q = p, folglich EC = AC. In dem Dreiecke ABE ist CD || EA, daher findet die Proportion AD : DB = EC : BC statt, woraus, wenn AC statt EC gesetzt wird, die Proportion AD : DB = AC : BC folgt.

2. Halbirt man einen Außenwinkel eines Dreieckes, so schneidet die Halbirungslinie die verlängerte Gegenseite des Drei-

eckes in einem Punkte, dessen Abstände von den Endpunkten jener Seite den beiden anderen durch diese Punkte gehenden Dreiecksseiten proportionirt sind.

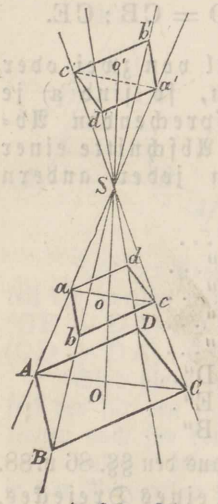
Der Beweis dieses Satzes ist jenem des vorhergehenden Lehrsatzes analog.

IV. Aehnlichkeit der ebenen Gebilde.

Allgemeiner Begriff der Aehnlichkeit.

§. 91. Lehrsätze. 1. Werden die Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels (Fig. 66) vom Strahlenpunkt S aus in den Punkten A und a, B und b, C und c,.. proportionirt geschnitten, so sind in den Gebilden ABCD.. und abcd.. die entsprechenden Strecken zwischen je zwei Durchschnittspunkten proportionirt und die von diesen Strecken gebildeten Winkel paarweise gleich.

Fig. 66.



Es sei $SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = .. = q$.

Aus dieser Voraussetzung folgt (§. 87) unmittelbar, daß $AB \parallel ab$, $AC \parallel ac$, $BC \parallel bc$,.. ist.

Somit ist (§. 88) $AB : ab = SB : Sb = q$ und $BC : bc = SB : Sb = q$, daher auch

$$AB : ab = BC : bc = q;$$ u. s. w.

Daß ferner W. $ABC = abc$, W. $BAC = bac$, W. $BCD = bcd$,.. ist, folgt aus §. 28, 1.

Dieselben Beziehungen finden auch statt, wenn die Punkte a', b', c',.. auf den Rückwärtsverlängerungen der Strahlen so liegen, daß $SA : Sa' = SB : Sb' = SC : Sc' = .. = -q$ ist. Das constante Verhältniß der entsprechenden Abschnitte eines jeden Strahles ist hier negativ, da dieselben auf entgegengesetzten Seiten des Strahlenpunktes liegen; zugleich ist aber auch in den Gebilden ABC.. und abc.. das Verhältniß je zweier entsprechender Strecken negativ, da diese im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

Zusatz. Sind A, B, C, D,.. Umfangspunkte eines Kreises, so sind auch a, b, c, d,.. Umfangspunkte eines Kreises. Denn, ist O der Mittelpunkt des durch A, B, C,.. gehenden Kreises, und o der Punkt, welcher auf dem Strahl SO dem Punkte O entspricht, so hat man $AO : ao = BO : bo = ..$; allein $AO = BO = ..$, somit auch $ao = bo = ..$, d. h. die Punkte a, b, c,.. liegen in dem Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunkt o ist. Die entsprechenden Halbmesser und Sehnen dieser Kreise sind proportionirt und bilden paarweise gleiche Winkel.

2. Umgekehrt: Zwei ebene Gebilde, in denen die entsprechenden Strecken nach der Ordnung proportionirt und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind, lassen sich immer in eine solche Lage bringen, daß von ihren Umfängen die Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels proportionirt geschnitten werden. (Fig. 66.)

Es sei $AB : ab = AC : ac = BC : bc = ..$, und

W. $ABC = abc$, $BAC = bac$, $BCD = bcd = ..$

Legt man die beiden Gebilde so gegen einander, daß zwei in einem Punkte sich schneidende Strecken des einen Gebildes den entsprechenden Strecken des

andern in demselben Sinne parallel sind, so müssen, da die Strecken nach der Ordnung proportionirt und die Winkel paarweise gleich sind, auch je zwei andere entsprechende Strecken in demselben Sinne parallel sein.

Liegen aber zwei Gebilde so gegen einander, daß je zwei entsprechende Strecken derselben parallel sind, so müssen sich die durch je zwei entsprechende Eckpunkte derselben gezogenen Geraden in einem gemeinschaftlichen Punkte schneiden, was wir indirect beweisen wollen.

Es sei S der Punkt, in welchem sich Aa und Bb schneiden. Würde Cc nicht durch S gehen, sondern die Bb in S' schneiden, so wäre (§. 88) $AB:ab=SB:Sb$ und $BC:bc=S'B:S'b$, daher wegen $AB:ab=BC:bc$ auch $SB:Sb=S'B:S'b$, woraus $(SB-Sb):(S'B-S'b)=SB:S'B$, oder $Bb:Bb=SB:S'B$, mithin $S'B=SB$ folgt. Der Punkt S' muß also mit S identisch sein, d. h. die Cc muß durch den Punkt S gehen.

Ebenso folgt, daß auch die Gerade Dd durch S gehen muß, daß somit SA, SB, SC, SD,.. die Strahlen eines Strahlenbüschels sind.

Dann ergibt sich aus §. 86

$$SA:Sa=SB:Sb=SC:Sc=\ldots$$

Der Beweis bleibt sich gleich, wenn die beiden Gebilde so gelegt werden, daß die entsprechenden Strecken im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

Zusatz. Der obige Lehrsatz gilt auch von zwei Kreisen, da bei jeder Lage derselben jedem Halbmesser des einen Kreises ein paralleler Halbmesser des andern entspricht, und die entsprechenden Halbmesser und Sehnen sowohl proportionirt sind als auch paarweise gleiche Winkel bilden.

§. **92.** Zwei ebene Gebilde, welche sich in eine solche Lage bringen lassen, daß von ihren Umfängen die Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels proportionirt geschnitten werden, heißen ähnlich. In dieser Lage sind die ähnlichen Gebilde auch ähnlich liegend.

Je zwei entsprechende Punkte, welche auf demselben Strahl liegen, heißen homologe Punkte, ebenso auch zwei Strecken (Seiten, Diagonalen, Halbmesser), welche homologe Punkte verbinden, homologe Strecken.

Der Strahlenpunkt S, in welchem sich in zwei ähnlich liegenden Gebilden die durch je zwei homologe Punkte gezogenen Geraden schneiden, heißt der Aehnlichkeitspunkt dieser Gebilde, und zwar ein äußerer oder ein innerer, je nachdem die homologen Punktpaare auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten des Strahlenpunktes liegen.

Ist das constante Verhältniß zweier homologer Abschnitte eines Strahles $q=1$, so sind die ähnlichen Gebilde zugleich congruent.

Folgesätze. a) In zwei ähnlichen Vielecken sind die homologen Seiten proportionirt und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich.

b) Je zwei Kreise sind ähnlich und in jeder Lage auch ähnlich liegend.

Zusatz. Die hier begründete Erklärung ähnlicher Gebilde enthält zugleich die genaueren Merkmale des in §. 5 aufgestellten Begriffes der Aehnlichkeit, als der Uebereinstimmung der Gestalt.

Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. **93.** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben die homologen Seiten proportionirt und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind.

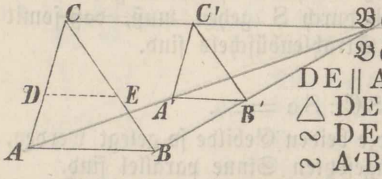
Ist (Fig. 67) $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$, und $AB:A'B'=AC:A'C'=BC:B'C'$, so ist $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Aus dieser Erklärung ergibt sich, daß zur Aehnlichkeit zweier Dreiecke sechs Bedingungen erforderlich sind: die Gleichheit dreier Paare von Winkeln, und die Gleichheit der Verhältnisse zwischen je zwei Paaren der Seiten. Da jedoch diese Bedingungen nicht unabhängig von einander sind, so kann man häufig schon aus dem Zutreffen nur zweier Bedingungen auf die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke schließen.

Folgesatz. Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so ist das gegebene Dreieck dem durch die Parallele abgeschnittenen Dreiecke ähnlich. (§. 88.)

§. **94.** I. Aehnlichkeitssatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke ähnlich. (Fig. 67.)

Fig. 67.



Voraussf. $A = A'$ und $C = C'$.

Behaupt. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Beweis. Man mache $CD = C'A'$ und ziehe $DE \parallel AB$, so ist W. $CDE = A = A'$, daher $\triangle DEC \cong A'B'C'$ (§. 44). Nun ist $\triangle ABC \sim DEC$ (§. 93, Folgesf.), mithin auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Folgesatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn alle drei Seiten paarweise parallel sind oder auf einander senkrecht stehen (§. 28).

§. **95.** II. Aehnlichkeitssatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen zweien Seiten des anderen proportionirt, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich, so sind die Dreiecke ähnlich. (Fig. 67.)

Voraussf. $AC : A'C' = BC : B'C'$, und $C = C'$.

Behaupt. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Beweis. Man mache $CD = C'A'$ und ziehe $DE \parallel AB$, so ist $AC : CD = BC : CE$, oder $AC : A'C' = BC : CE$. Allein nach der Voraussetzung ist $AC : A'C' = BC : B'C'$; folglich $CE = B'C'$ und daher $\triangle DEC \cong A'B'C'$ (§. 45); nun ist $\triangle ABC \sim DEC$, also auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

§. **96.** III. Aehnlichkeitssatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen zweien Seiten des anderen proportionirt und die den größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich, so sind die Dreiecke ähnlich. (Fig. 67.)

Der Beweis ist unter Beziehung auf §. 46 demjenigen in §. 95 analog.

§. **97.** IV. Aehnlichkeitssatz. Sind in zwei Dreiecken die drei Seiten des einen den drei Seiten des anderen proportionirt, so sind die Dreiecke ähnlich. (Fig. 67.)

Voraussf. $AC : A'C' = AB : A'B'$ und
$AC : A'C' = BC : B'C'$.

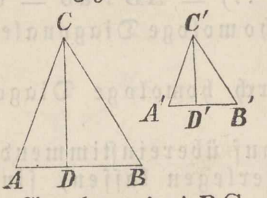
Behaupt. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Beweis. Man mache $CD = C'A'$ und ziehe $DE \parallel AB$, so ist
$AC : CD = AB : DE$ und $AC : CD = BC : CE$, oder
$AC : A'C' = AB : DE$ und $AC : A'C' = BC : CE$.

Vergleicht man diese zwei Proportionen mit den in der Voraussetzung enthaltenen, so folgt $DE = A'B'$ und $CE = B'C'$, mithin $\triangle CDE \cong A'B'C'$ (§. 47); nun ist $\triangle ABC \sim CDE$, also auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

§. **98.** In ähnlichen Dreiecken sind die Höhen den Grundlinien proportionirt, wenn man zu den letzteren zwei homologe Seiten annimmt.

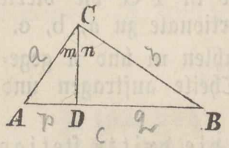
Fig. 68.



Es sei (Fig. 68) das $\triangle ABC \sim A'B'C'$, und man nehme die homologen Seiten AB und A'B' als die Grundlinien, CD und C'D' als die Höhen der beiden Dreiecke an; zu beweisen hat man, daß $CD : C'D' = AB : A'B'$ ist. — Die Dreiecke ACD und A'C'D' haben zwei Winkel wechselseitig gleich, sind daher ähnlich; mithin findet die Proportion $CD : C'D' = AC : A'C'$ statt. Weil nach der Annahme $\triangle ABC \sim A'B'C'$, so ist auch $AB : A'B' = AC : A'C'$. Aus den beiden Proportionen folgt dann $CD : C'D' = AB : A'B'$.

§. **99.** Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so ist a) jede Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem jener Kathete anliegenden Abschnitte der Hypotenuse, b) die Senkrechte ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Fig. 69.



Es sei (Fig. 69) der Winkel ACB ein rechter und $CD \perp AB$.

In den Dreiecken ABC und ACD ist der Winkel $A = A$, $ACB = ADC = R$, es ist daher auch der dritte Winkel $B = m$ und das $\triangle ABC \sim ACD$. Ebenso ist $\triangle ABC \sim BCD$; und folglich auch $\triangle ACD \sim BCD$.

a) Da $\triangle ABC \sim ACD$ ist, so folgt $AB : AC = AC : AD$; da $\triangle ABC \sim BCD$, so ist auch $AB : BC = BC : BD$.

b) Da $\triangle ACD \sim BCD$ ist, so folgt $AD : CD = CD : BD$.

§. **100.** Ist (Fig. 69) $AC = a$, $BC = b$, $AB = c$, $AD = p$, $BD = q$, wo a, b, c, p und q die Maßzahlen der bezüglichen Strecken bedeuten, so ergibt sich aus den in §. 99 unter a) aufgestellten Proportionen

$$c : a = a : p,\quad c : b = b : q,$$

daher $cp = a^2$, $\quad cq = b^2$.

Addirt man diese letzten Gleichungen, so erhält man

$$cp + cq = a^2 + b^2.$$

Allein es ist $cp + cq = c(p + q) = c \cdot c = c^2$; daher

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist also das Quadrat der Maßzahl der Hypotenuse gleich der Summe aus den Quadraten der Maßzahlen der beiden Katheten.

Aehnlichkeit der Vielecke.

§. **101.** Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn in denselben die homologen Seiten proportionirt und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind.

Aus §. 91 ergeben sich für ähnliche Vielecke folgende Sätze:

1. Zwei regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

2. In ähnlichen Vielecken verhalten sich die Umfänge wie zwei homologe Seiten.

Denn ist $AB : ab = BC : bc = CD : cd = .. = q$, so ist auch $(AB + BC + CD + ..) : (ab + bc + cd + ..) = AB : ab = q$.

3. In ähnlichen Vielecken sind je zwei homologe Diagonalen zwei homologen Seiten proportionirt.

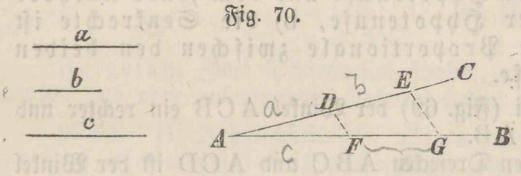
4. Zwei ähnliche Vielecke werden durch homologe Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt.

5. Umgekehrt: Zwei Vielecke, welche sich auf übereinstimmende Weise in gleich viele ähnliche Dreiecke zerlegen lassen, sind ähnlich.

V. Aufgaben.

§. 102. 1. Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu finden.

Fig. 70.

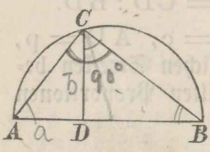


Man construire einen willkürlichen Winkel BAC (Fig. 70), mache $AD = a$, $DE = b$, $AF = c$, ziehe DF und damit parallel die EG, so ist FG die vierte Proportionale zu a, b, c.

Wären hier statt der Linien a und b ihre Maßzahlen m und n gegeben, so müßte man auf AD m, auf DE n gleiche Theile auftragen und weiter wie vorhin verfahren.

2. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die dritte stetige Proportionale zu construiren.

Fig. 71.



Auflös. 1. Nach Aufg. 1, indem man dort $c = b$ setzt.

Auflös. 2. Man ziehe (Fig. 71) $CD \perp AB$, mache $AD = a$, $CD = b$, ziehe ferner AC und senkrecht darauf CB bis zur Verlängerung der AD; dann ist $AD : CD = CD : DB$ (§. 99, b), oder $a : b = b : DB$, folglich DB die dritte stetige Proportionale zu a und b.

Auflös. 3. Ist $a > b$, so kann man folgende einfachere Construction anwenden: Man mache $AB = a$, beschreibe über AB als Durchmesser einen Halbkreis und aus A mit dem Halbmesser b einen Bogen, welcher jenen Kreis in C schneidet; zieht man dann $CD \perp AB$, so ist $AB : AC = AC : AD$ (§. 40, 1. d und §. 99, a), oder $a : b = b : AD$.

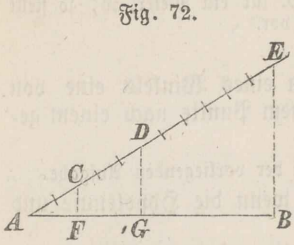
3. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die mittlere geometrische Proportionale zu construiren.

Auflös. 1. Man mache (Fig. 71) $AD = a$, $DB = b$, beschreibe über AB einen Halbkreis und errichte in D die $DC \perp AB$, so ist DC die mittlere geometrische Proportionale zwischen AD und DB (§. 40, 1. d und §. 99, b).

Auflös. 2. Man mache AB gleich der größeren Strecke a, und $AD = b$, beschreibe über AB einen Halbkreis und ziehe $DC \perp AB$; dann ist die Sehne AC die gesuchte mittlere Proportionale zu a und b (§. 40, 1. d und §. 99, a).

4. Eine gegebene Strecke in mehrere Theile zu theilen, welche in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen.

Fig. 72.



Es sei z. B. die Strecke AB (Fig. 72) in Theile zu theilen, welche sich zu einander verhalten wie m : n : p (2 : 3 : 6).

Man ziehe durch A eine willkürliche Gerade AX, trage darauf von A bis C m, von C bis D n, von D bis E p unter einander gleiche Theile auf, und ziehe EB. Zieht man nun CF ‖ DG ‖ EB, so ist AF : FG : GB = m : n : p.

5. Ein Dreieck zu construiren, welches mit dem Dreiecke ABC (Fig. 67) ähnlich ist, und dessen Seiten zu den Seiten des gegebenen Dreieckes ein bestimmtes Verhältniß m : n haben.

Man suche zu n, m, AB die vierte Proportionale A'B', und construire in den Endpunkten derselben zwei Winkel, welche den Winkeln A und B gleich sind; ihre Schenkel schneiden sich in C'; A'B'C' ist das verlangte Dreieck.

6. Ein Vieleck zu construiren, das mit einem gegebenen Vielecke ähnlich ist, und dessen Seiten zu den Seiten des gegebenen Vieleckes ein bestimmtes Verhältniß m : n haben.

Die Auflösung beruht auf der vorhergehenden Aufg. und §. 101, 4 und 5.

7. Den Aehnlichkeitspunkt zweier ähnlicher Vielecke zu bestimmen. (§. 92.)

VI. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. **103.** Lehrsätze.

1. Die drei Höhen eines Dreieckes sind den Seiten, auf denen sie senkrecht stehen, verkehrt proportionirt.

2. Werden zwei Dreiecke über derselben Grundlinie und von gleicher Höhe durch eine der Grundlinie parallele Transversale geschnitten, so sind die innerhalb der Dreiecke liegenden Abschnitte dieser Transversale einander gleich.

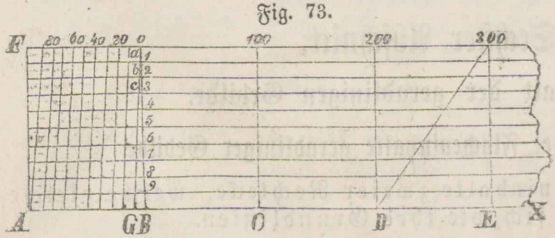
3. Die Diagonalen eines Trapezes schneiden sich gegenseitig proportionirt.

4. Jede mit den Parallelseiten eines Trapezes parallele Transversale schneidet die beiden nicht parallelen Seiten proportionirt.

§. **104.** Constructionsaufgaben.

1. Einen tausendtheiligen Maßstab zu construiren.

Fig. 73.



Man trage (Fig. 73) auf eine Gerade AX 10 gleiche Theile auf, errichte in A, B und den folgenden Theilungspunkten Senkrechte auf AX und ziehe mit AX 10 Parallele in gleichen Abständen. Nun theile man sowohl die AB als die ihr gegenüberstehende Strecke Fo in 10 gleiche Theile, zu deren leichteren Bestimmung man in irgend einer Abtheilung eine Diagonale D300 zieht. Endlich ziehe man noch Transversalen durch G und 0, so wie durch je zwei folgende Theilungspunkte

der AB und Fo. Stellen die auf AX aufgetragenen 10 Strecken dieses Transversal-Maßstabes 1000 gleiche Theile vor, so enthält AB 100, BG 10, a1 1, b2 2 u. s. w. solche Theile. Nimmt man die Länge der ganzen Strecke AX z. B. für ein Meter an, so stellt AB ein Decimeter, BG ein Centimeter, a1 ein Millimeter vor.

Der Beweis beruht auf der Aehnlichkeit der Dreiecke.

2. Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine von diesen begrenzte Gerade so zu ziehen, daß sie in jenem Punkte nach einem gegebenen Verhältnisse m : n getheilt wird.

Die in §. 68, 3 gelöste Aufgabe ist ein specieller Fall der vorliegenden Aufgabe.

3. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse und das Verhältniß der beiden Katheten gegeben ist.

4. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite und ihre Verhältnisse zu den beiden andern Seiten gegeben sind.

§. **105.** Rechnungsaufgaben.

1. Auf einem Katastralplane beträgt eine Strecke $6{\cdot}25^{dm}$; wie groß ist die natürliche Länge derselben, wenn 1^{cm} der Zeichnung zu 30^{m} angenommen wird?

2. Wie lang wird man eine Strecke, welche in der Wirklichkeit 745^{m} mißt, auf dem Papier auftragen, wenn die Längenmaße im Verhältnisse 1 : 7500 der natürlichen Größe verzeichnet werden sollen?

3. Der Schatten eines Thurmes ist 58^{m} lang, gleichzeitig ist die Schattenlänge eines 1^{m} langen senkrechten Stabes 2^{m}; wie hoch ist der Thurm?

4. Aus beiden Katheten a ($5{\cdot}342^{m}$) und b ($3{\cdot}405^{m}$) eines rechtwinkligen Dreieckes die Hypotenuse c zu finden. (§. 100.)

5. Aus der Hypotenuse c (78^{m}) und einer Kathete a (30^{m}) eines rechtwinkligen Dreieckes die zweite Kathete b zu finden.

6. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse und a) die die Summe, b) die Differenz der beiden Katheten gegeben; wie groß ist jede Kathete?

7. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist eine Kathete und a) die Summe, b) die Differenz der Hypotenuse und der andern Kathete gegeben; man suche die Hypotenuse und die zweite Kathete.

8. Wie groß ist die Höhe h eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite a ($2^{m}\ 8^{dm}$) beträgt?

9. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes ist a, der Schenkel b, die Höhe h; aus je zweien dieser Größen die dritte zu finden.

10. In einem Quadrate ist die Summe aus der Seite und der Diagonale gegeben; man suche die Seite und die Diagonale.

Sechster Abschnitt.

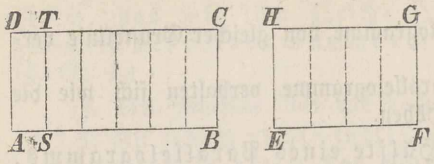
Flächeninhalt der geradlinigen Gebilde.

I. Vergleichung der Flächeninhalte geradliniger Gebilde.

§. **106.** Die Flächeninhalte zweier Rechtecke, welche gleiche Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Es seien in den Rechtecken ABCD und EFGH (Fig. 74) die Höhen AD und EH gleich und die Grundlinien AB und EF commensurabel.

Fig. 74.



Ist in diesem Falle AS ein gemeinschaftliches Maß der beiden Grundlinien, und zwar AB = m . AS und EF = n . AS, so hat man AB : EF = m : n. Theilt man die AB in m und die EF in n Theile, deren jeder gleich AS ist, und errichtet in den Theilungspunkten auf die Grundlinien Senkrechte, so wird dadurch das Rechteck ABCD in m und das Rechteck EFGH in n Rechtecke zerlegt, deren jedes mit ASTD congruent ist; es ist daher

$$ABCD = m \,.\, ASTD \text{ und } EFGH = n \,.\, ASTD,$$

somit $ABCD : EFGH = m : n$, und folglich

$$ABCD : EFGH = AB : EF.$$

Sind die Grundlinien AB und EF incommensurabel, so folgt aus §. 84, daß die letzte Proportion auch für diesen Fall Giltigkeit hat.

Folgesatz. Da man in den Rechtecken ABCD und EFGH auch AD und EH als die Grundlinien, AB und EF als die Höhen betrachten kann, so hat man ebenso den Satz:

Die Flächeninhalte zweier Rechtecke, welche gleiche Grundlinien haben, verhalten sich wie ihre Höhen.

§. **107.** Die Flächeninhalte je zweier Rechtecke verhalten sich wie die Producte der Maßzahlen ihrer Grundlinien und Höhen.

Beweis. Sind G und g die Maßzahlen der Grundlinien, H und h die Maßzahlen der Höhen zweier Rechtecke R und r, so sei R′ ein Rechteck, dessen Grundlinie g und dessen Höhe H zur Maßzahl hat. Dann ist (§. 106)

$$R : R' = G : g,$$
$$R' : r = H : h.$$

Durch Multiplication dieser Proportionen erhält man

$$R : r = G \,.\, H : g \,.\, h.$$

Den obigen Satz pflegt man gewöhnlich so auszudrücken:

Die Flächeninhalte je zweier Rechtecke verhalten sich wie die Producte ihrer Grundlinien und Höhen.

Dieser abgekürzten Ausdrucksweise werden wir uns auch in dem Folgenden bedienen. Wenn daher von Producten der Linien geredet werden wird, sind darunter immer nur die Maßzahlen derselben zu verstehen.

§. **108.** Zwei Parallelogramme, welche gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben, sind flächengleich.

Fig. 75.



Es seien (Fig. 75) ABCD und EFGH zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe. Man lege dieselben zwischen die Parallelen AF und DG, was möglich ist, weil beide die gleiche Höhe haben.

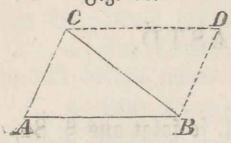
Da nach der Voraussetzung AB = EF und DC = HG ist, so ist auch AE = BF und DH = CG. Das Trapez AEHD ist daher mit BEGC congruent, weil in denselben die Seiten und Winkel paarweise gleich sind. Nimmt man von beiden das Trapez BEHC weg, so bleibt ABCD = EFGH.

Folgesätze. a) Jedes Parallelogramm ist einem Rechtecke flächengleich, welches mit demselben gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

b) Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.
c) Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.
d) Die Flächeninhalte je zweier Parallelogramme verhalten sich wie die Producte ihrer Grundlinien und Höhen.

§. **109.** Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Fig. 76.

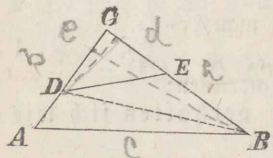


Zieht man durch die Punkte B und C (Fig. 76) des Dreieckes ABC mit den gegenüberstehenden Seiten Parallele, welche sich in D schneiden, so entsteht ein Parallelogramm ABDC, das mit dem Dreiecke ABC gleiche Grundlinie und Höhe hat und von welchem dieses Dreieck die Hälfte ist.

Folgesätze. a) Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.
b) Die Flächeninhalte zweier Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.
c) Die Flächeninhalte zweier Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.
d) Die Flächeninhalte je zweier Dreiecke verhalten sich wie die Producte ihrer Grundlinien und Höhen.

§. **110.** Die Flächeninhalte zweier Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Producte der Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen.

Fig. 77.



Es seien in den Dreiecken ABC und DEC (Fig. 77), welche den Winkel C gemeinschaftlich haben, die diesen einschließenden Seiten AC = b, BC = a, CD = e und CE = d. Zieht man BD, so ist

$\triangle ABC : DBC = AC : CD = b : e$ und
$\triangle DBC : DEC = BC : CE = a : d$,

woraus durch Multiplication

$\triangle ABC : DEC = a \cdot b : d \cdot e$ folgt.

§. **111.** Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten.

Es sei in den ähnlichen Dreiecken ABC und A'B'C' (Fig. 67) BC = a, AC = b, AB = c, B'C' = a', A'C' = b' und A'B' = c', so ist

$a : a' = b : b' = c : c'$, daher auch $a^2 : a'^2 = b^2 : b'^2 = c^2 : c'^2$,

und man darf daher nur beweisen, daß $\triangle ABC : A'B'C' = a^2 : a'^2$ ist.

Da der Winkel C = C' ist, so hat man (nach §. 110)

$\triangle ABC : A'B'C' = a \cdot b : a' \cdot b'$; nun ist

$a : a' = a : a'$, $b : b' = a : a'$ } folglich $ab : a'b' = a^2 : a'^2$, also

$\triangle ABC : A'B'C' := a^2 : a'^2$.

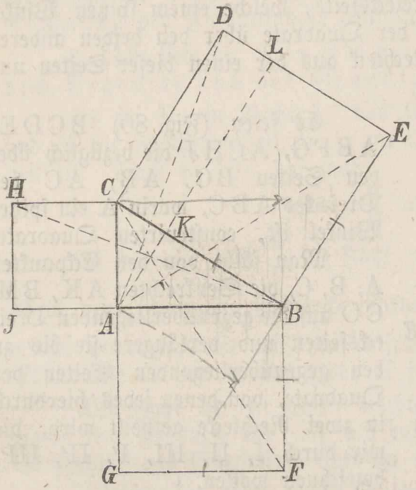
Folgesatz. Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten. (§. 101, 4.)

§. 112. Jedes Trapez ist einem Parallelogramme flächengleich, das mit ihm gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie gleich ist der halben Summe der parallelen Seiten des Trapezes. (§. 65, 4.)

§. 113. Lehrsätze über das rechtwinklige Dreieck.

1. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Fig. 78.



Es sei das $\triangle BAC$ (Fig. 78) in A rechtwinklig; zu beweisen ist, daß das über BC beschriebene Quadrat der Summe aus dem Quadrate über AB und dem Quadrate über AC gleich ist, was wir so schreiben wollen:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Beschreibe man über der Hypotenuse BC das Quadrat BCDE, und über den Katheten AB und AC die Quadrate ABFG und ACHJ, und fällt von A auf BC die Senkrechte AK, welche bis L verlängert auch auf DE senkrecht steht, so ist nur nachzuweisen, daß die Rechtecke BL und CL den Quadraten AF und AH gleich sind.

Zieht man AE und CF, so ist $\triangle ABE = \frac{BL}{2}$ und $\triangle BCF = \frac{AF}{2}$ (§. 109); nun ist $\triangle ABE \cong BCF$, also auch $BL = AF$.

Zieht man ferner AD und BH, so ist ebenso $\triangle ACD = \frac{CL}{2}$ und $\triangle BCH = \frac{AH}{2}$, und wegen $\triangle ACD \cong BCH$ auch $CL = AH$.

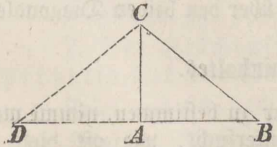
Es ist somit $BL + CL = AF + AH$, oder

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Dieser Satz heißt nach seinem Erfinder Pythagoras der Pythagoräische Lehrsatz. Seine Richtigkeit im arithmetischen Sinne ist schon im §. 100 nachgewiesen worden.

2. Ist das Quadrat über einer Seite eines Dreieckes so groß als die Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, so ist der Winkel, welcher der ersteren Seite gegenüberliegt, ein rechter. (Umkehrung des vorhergehenden Satzes.)

Fig. 79.



Ist (Fig. 79) $BC^2 = AB^2 + AC^2$, so muß der Winkel $BAC = R$ sein. — Construirt man in A den rechten Winkel CAD, macht $AD = AB$ und zieht CD, so ist in dem Dreiecke CAD

$$CD^2 = AD^2 + AC^2,$$

oder $CD^2 = AB^2 + AC^2$;

aber nach der Voraussetzung ist auch $BC^2 = AB^2 + AC^2$; es ist demnach $CD^2 = CB^2$ und somit auch $CD = CB$. Da

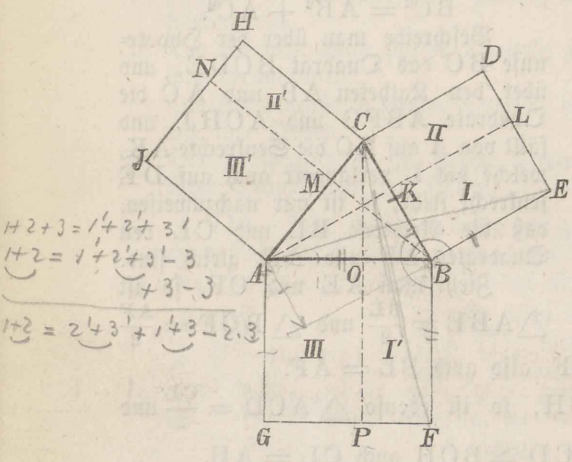
sonach $\triangle BAC \cong DAC$ ist, so müssen auch die Winkel BAC und DAC gleich sein; nun ist $DAC = R$, folglich auch $BAC = R$.

Zusatz. Fällt man von einem Punkte auf eine Gerade eine Senkrechte, so heißt der Fußpunkt der Senkrechten die (orthogonale) Projection des Punktes auf die Gerade. Unter der Projection einer Strecke auf eine Gerade versteht man die Strecke zwischen den Projectionen ihrer Endpunkte auf diese Gerade. So ist in Fig. 78 DL die Projection der Strecke AC auf die Gerade DE, in Fig. 79 AB die Projection der CB auf die DB.

§. 114. Lehrsätze über das schiefwinklige Dreieck.

1. Das Quadrat über einer Dreiecksseite, welche einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus der einen dieser Seiten und der Projection der andern auf dieselbe.

Fig. 80.



Es seien (Fig. 80) BCDE, ABFG, ACHJ die bezüglich über den Seiten BC, AB, AC des Dreieckes ABC, worin A ein spitzer Winkel ist, construirten Quadrate.

Man fälle von den Eckpunkten A, B, C, die Senkrechten AK, BM, CO auf die gegenüberliegenden Dreiecksseiten und verlängere sie bis zu den gegenüberliegenden Seiten der Quadrate, von denen jedes hierdurch in zwei Rechtecke getheilt wird, die wir durch I, II, III, I', II', III', bezeichnen wollen.

Durch ähnliche mittelst Hilfslinien geführte Beweise, wie in §. 113, 1, findet man, daß $I = I'$, $II = II'$, $III = III'$ ist, woraus sofort folgt:

$$BCDE = ABFG + ACHJ - 2AOPG.$$

2. Das Quadrat über einer Dreiecksseite, welche einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus der einen dieser Seiten und der Projection der andern auf dieselbe.

Der Beweis ist dem vorigen ähnlich.

3. In jedem Dreiecke ist die Summe der Quadrate über zwei Seiten doppelt so groß als die Summe aus dem Quadrate über der halben dritten Seite und dem Quadrate über der dieser dritten Seite zugehörigen Mittellinie.

Folgt aus 1 und 2.

Folgesatz. In jedem Parallelogramme ist die Summe der Quadrate über den vier Seiten gleich der Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen.

II. Bestimmung des Flächeninhaltes.

§. 115. Um den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen, nimmt man irgend eine bekannte Fläche als Einheit an und untersucht, wie oft diese in der gegebenen Figur enthalten ist.

Als Flächeneinheit wird die Fläche eines Quadrates angenommen, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist. Nimmt man das Meter als Längeneinheit an, so ist das Quadratmeter ($\square^m$) die Flächeneinheit. Ein Quadratmeter hat 100 Quadratdecimeter ($\square^{dm}$) à 100 Quadratcentimeter ($\square^{cm}$) à 100 Quadratmillimeter ($\square^{mm}$). $100\square^m$ als Bodenflächenmaß nennt man ein Ar, 100 Ar sind ein Hektar.

Die Ausmessung einer Fläche kann mittelst des wirklichen Auftragens der Flächeneinheiten nur in wenigen Fällen ausgeführt werden; daher werden wir hier die Sätze ableiten, nach denen man, wenn die Maßzahlen der Linien, von denen die Größe der Figur abhängt, bekannt sind, daraus durch bloße Rechnung den Flächeninhalt bestimmen kann.

§. **116.** Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Es sei R ein Rechteck, das G zur Grundlinie und H zur Höhe hat, und M die Flächeneinheit, d. i. ein Quadrat, dessen Seite m die Längeneinheit ist. Nach §. 107 hat man

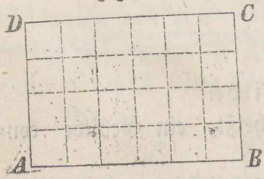
$$\frac{R}{M} = \frac{G}{m} \cdot \frac{H}{m}.$$

Es bedeutet nun $\frac{R}{M}$ die Zahl, welche angibt, wie oft die Flächeneinheit M in dem gegebenen Rechtecke enthalten ist; $\frac{G}{m}$ und $\frac{H}{m}$ aber sind die Zahlen, welche angeben, wie oft die entsprechende Längeneinheit m bezüglich in der Grundlinie G und in der Höhe H jenes Rechteckes enthalten ist.

Die Zahl der in einem Rechtecke enthaltenen Flächeneinheiten ist also gleich dem Producte der auf die entsprechende Längeneinheit sich beziehenden Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe desselben.

Dieser Satz wird kürzer in der obigen Form ausgedrückt.

Fig. 81.



Um die Richtigkeit des vorhergehenden Satzes an einem besonderen Falle anschaulich darzustellen, sei ABCD (Fig. 81) ein Rechteck, dessen Grundlinie $AB = 6^m$ und dessen Höhe $AD = 4^m$ ist. Man erhält darin 4 Streifen von Quadraten, deren jeder $6\square^m$ enthält; es sind also zusammen $6\square^m \times 4 = 24\square^m$.

Folgesatz. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz seiner Seite.

Daher kommt es, daß man auch in der Arithmetik die zweite Potenz einer Zahl das Quadrat derselben nennt.

§. **117.** Lehrsätze.

1. Der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Folgt aus §§. 108 und 116.

2. Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Folgt aus §§. 109 und 116.

Folgesatz. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus den beiden Katheten.

3. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Producte aus der halben Summe der Parallelseiten und der Höhe.

Folgt aus §. 112.

Zusatz. Mit Rücksicht auf §. 65, 4 kann dieser Satz auch so ausgedrückt werden:

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Producte aus der Mittellinie und der Höhe.

4. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem Producte aus dem Umfange desselben und dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

Es seien s, r und f bezüglich die Maßzahlen einer Seite, der vom Mittelpunkte auf einer Seite gefällten Senkrechten und des Flächeninhaltes eines regelmäßigen n-Eckes. Zieht man vom Mittelpunkte zu allen Eckpunkten gerade Linien, so wird dadurch das n-Eck (nach §. 74, Folges.) in n congruente Dreiecke zerlegt. Der Flächeninhalt eines solchen Dreieckes ist $\frac{s \cdot r}{2}$, daher

$$f = n \cdot \frac{s \cdot r}{2} = ns \cdot \frac{r}{2},$$

wo ns die Maßzahl des Umfanges des Vieleckes ist.

Zusatz. Der Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes wird auf eine der folgenden Arten bestimmt:

a) Man zerlege das gegebene Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke und berechne den Flächeninhalt eines jeden derselben; die Summe der Dreiecksflächen gibt den Flächeninhalt des Vieleckes.

b) Man ziehe durch zwei Eckpunkte des gegebenen Vieleckes eine Diagonale und fälle darauf von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte, wodurch das Vieleck in Dreiecke und Trapeze zerlegt wird; werden die Flächen derselben einzeln berechnet und entsprechend verbunden, so erhält man den Flächeninhalt des gegebenen Vieleckes.

Ende des I. Cursus

III. Aufgaben.

§. 118. Verwandlung geradliniger Gebilde.

Ein Gebilde in ein anderes verwandeln heißt, ein Gebilde construiren, welches mit dem gegebenen flächengleich ist.

1. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, welches mit ihm gleiche Grundlinie (folglich auch dieselbe Höhe) hat.

Der Scheitel des gleichschenkligen Dreieckes, welches mit dem gegebenen Dreiecke dieselbe Grundlinie hat, liegt (nach §. 52, 5) in der auf dieser Grundlinie in ihrer Mitte errichteten Senkrechten; der Scheitel des gleichschenkligen Dreieckes, welches mit dem gegebenen Dreiecke dieselbe Höhe hat, liegt in einer mit der Grundlinie durch den gegenüberliegenden Eckpunkt parallel gezogenen Geraden (§. 63, Folges. b); der gesuchte Scheitel ist also der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden. Daraus ergibt sich die Construction und der Beweis.

2. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel α enthält.

Zieht man durch einen Eckpunkt eine Gerade, welche mit einer Seite den Winkel α bildet, und dann mit dieser Seite durch den gegenüberliegenden Eck-

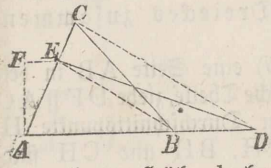
punkt eine parallele Gerade, so ist der Scheitel des verlangten Dreieckes der Durchschnitt dieser Geraden.

3. Ein schiefwinkliges Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln.

Ist, da $\alpha = 90^0$ ist, ein besonderer Fall der vorhergehenden Aufgabe.

4. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 82) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat.

Fig. 82.



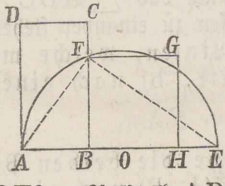
Man trage a auf AB bis D auf, ziehe CD, und damit parallel BE; verbindet man D und E durch eine Gerade, so ist ADE das verlangte Dreieck. Denn $\triangle ADE = ABC$, da beide das $\triangle ABE$ gemeinschaftlich haben und $\triangle BED = BEC$ ist.

5. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 82) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe h hat.

Man errichte $AF = h$ senkrecht auf AB, ziehe $FE \parallel AB$, $CD \parallel EB$ und verbinde E und den Durchschnittspunkt D der CD mit der Verlängerung der AB durch eine Strecke, so ist $\triangle ADE = ABC$. (Beweis wie zu 4.)

6. Ein Rechteck ABCD (Fig. 83) in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 83.

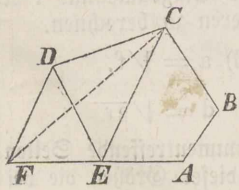


Man verlängere AB bis E, so daß BE = BC wird, beschreibe über AE einen Halbkreis, welcher die BC in F schneidet. Das über BF construirte Quadrat BFGH ist mit dem gegebenen Rechtecke flächengleich.

Denn zieht man AF und EF, so ist der W. AFE = R (§. 40, 1. d), daher AB : BF = BF : BE oder AB : BF = BF : BC, folglich Quadrat BF^2 = Rechteck AB . BC.

7. Ein Vieleck ABCDE (Fig. 84) in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

Fig. 84.



Man schneide durch eine Diagonale CE von dem gegebenen Vielecke ein Dreieck CDE ab, lege durch D mit CE eine Parallele DF, welche die verlängerte Seite AE in F schneidet, und ziehe CF, so ist das Vieleck ABCDE = Vieleck ABCF, weil beide aus gleichen Theilen bestehen.

8. Ein gegebenes Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln.

9. Ein Quadrat zu construiren, das gleich ist a) der Summe, b) der Differenz zweier gegebener Quadrate.

a) Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich sind den Seiten der beiden Quadrate; die Hypotenuse ist die Seite des verlangten Quadrates (§. 113, 1).

b) Die Auflösung beruht ebenfalls auf §. 113, 1.

10. Ein Quadrat zu construiren, welches der Summe dreier oder mehrerer Quadrate gleich ist.

Man vereinige nach der Aufgabe 9. a) zuerst zwei Quadrate mit ein ander, das gefundene mit dem dritten u. s. w.

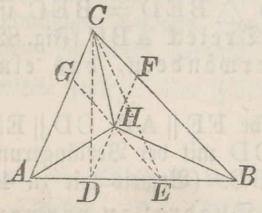
§. **119.** Theilung geradliniger Gebilde.

1. Ein gegebenes Dreieck durch gerade Linien, welche durch einen Eckpunkt gehen, a) in gleiche Theile, b) in Theile zu theilen, welche in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Die Auflösung beruht auf §. 109, Folges. a und b.

2. Ein Dreieck in drei gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien von den Eckpunkten ausgehen und in einem gemeinschaftlichen Punkte innerhalb des Dreieckes zusammen treffen.

Fig. 85.



Man theile (Fig. 85) eine Seite AB in den Punkten D und E in drei gleiche Theile, ziehe DF ∥ AC und EG ∥ BC; die vom Durchschnittspunkte H aus gezogenen Geraden AH, BH und CH sind die verlangten Theilungslinien.

Zieht man die Hilfslinien CD und CE, so ist △ ACH = ACD und △ BCH = BCE; daher muß auch △ ABH = DCE sein. Nun sind die Dreiecke ACD, DCE, BCE unter einander gleich, folglich müssen auch die Dreiecke ACH, ABH, BCH gleich sein.

Hätte man AB nicht in drei gleiche, sondern in drei durch gegebene Verhältnisse bestimmte Theile getheilt, so wäre dadurch auch das △ ABC in drei Theile getheilt worden, welche in jenen Verhältnissen zu einander stehen.

3. Ein Parallelogramm durch gerade Linien, welche mit einer Seite parallel sind, a) in gleiche Theile, b) nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Die Auflösung ergibt sich aus §. 108.

4. Ein Trapez durch gerade Linien, welche die beiden Parallelseiten durchschneiden, a) in gleiche Theile, b) nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Die Auflösung ist derjenigen der vorhergehenden Aufgabe analog.

§. **120.** Rechnungsaufgaben.

1. In einem Quadrate ist a die Seite, d die Diagonale und f der Flächeninhalt; aus einer dieser Größen die beiden anderen zu berechnen.

$$1)\ d = a\sqrt{2}, \qquad 2)\ a = \frac{d}{2}\sqrt{2}, \qquad 3)\ a = \sqrt{f},$$

$$f = a^2; \qquad f = \frac{d^2}{2}; \qquad d = \sqrt{2f}.$$

2. In einem Rechtecke sind a und b zwei zusammentreffende Seiten, d die Diagonale und f der Flächeninhalt; aus zweien dieser Größen die beiden anderen zu bestimmen.

Die beiden Fundamentalgleichungen sind:

$$1)\ d^2 = a^2 + b^2; \qquad 2)\ f = ab.$$

3. In einem gleichseitigen Dreiecke ist a die Seite, h die Höhe und f der Flächeninhalt; aus einer dieser Größen die zwei anderen zu berechnen.

$$1)\ h = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \qquad 2)\ a = \frac{2h}{3}\sqrt{3}, \qquad 3)\ a = 2\sqrt{\frac{f\sqrt{3}}{3}}$$

$$f = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}; \qquad f = \frac{h^2}{3}\sqrt{3}; \qquad h = \sqrt{f\sqrt{3}}.$$

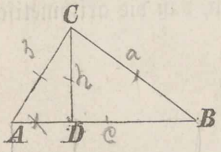
4. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist a die Grundlinie, b der Schenkel, h die Höhe und f der Flächeninhalt; aus zweien dieser Größen die beiden anderen zu berechnen.

Fundamentalgleichungen:

$$1)\ b^2 = \frac{a^2}{4} + h^2; \qquad 2)\ f = \frac{ah}{2}.$$

5. In einem Dreiecke sind die drei Seiten gegeben; man berechne die zu einer Seite gehörige Höhe und den Flächeninhalt.

Fig. 86.



Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 86) die Seite $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, die Höhe $CD = h$ und die Strecke $AD = x$. Nach §. 114, 1 und §. 116 ist dann

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx, \text{ daher } x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Nun ist $h^2 = b^2 - x^2 = (b + x)(b - x)$, oder

$$h^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b - c)^2}{2c},$$

daher $h = \frac{1}{2c}\sqrt{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}$.

Setzt man den Umfang $a + b + c = 2s$, so erhält man, wenn von dieser Gleichung folgeweise 2a, 2b, 2c subtrahirt wird,

$$b + c - a = 2(s - a),$$
$$a - b + c = 2(s - b),$$
$$a + b - c = 2(s - c);$$ folglich ist

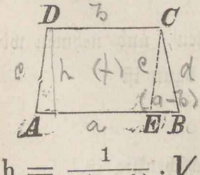
$$h = \frac{2}{c}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Drückt nun f den Flächeninhalt des Dreieckes ABC aus, so ist $f = \frac{c \cdot h}{2}$; mithin

$$f = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

6. In einem Trapeze sind die vier Seiten gegeben; man berechne die Höhe und den Flächeninhalt.

Fig. 87.



Es sei (Fig. 87) $AB = a$, $CD = b$, $AD = c$ und $BC = d$, die Höhe h und der Flächeninhalt f. Zieht man $CE \parallel DA$, so sind die Seiten des Dreieckes BEC, $BE = a - b$, $BC = d$ und $CE = c$, daher in demselben (nach Aufg. 5) die zu BE gehörige Höhe

$$h = \frac{1}{2(a - b)} \cdot \sqrt{(c + d + a - b)(c + d - a + b)(a - b + c - d)(a - b - c + d)}$$

Da nun h zugleich die Höhe des Trapezes, und der Flächeninhalt desselben $f = \frac{a + b}{2} \cdot h$ ist, so folgt

$$f = \frac{a + b}{4(a - b)} \cdot \sqrt{(b + c + d - a)(a + c + d - b)(a + d - b - c)(a + c - b - d)}.$$

IV. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. 121. Uebungssätze.

1. Zieht man durch die vier Eckpunkte eines Viereckes Parallele mit den Diagonalen, so ist das von ihnen gebildete Parallelogramm doppelt so groß als das Viereck.

2. Zieht man in einem Parallelogramme durch irgend einen Punkt einer Diagonale Parallele mit den Seiten, so sind die von der Diagonale nicht durchschnittenen Parallelogramme flächengleich. (§. 64.)

3. Beweise mit Hilfe entsprechender Constructionen, daß die arithmetischen Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

auch im geometrischen Sinne richtig sind.

4. Die vierfache Summe der Quadrate über den Mittellinien eines Dreieckes ist gleich der dreifachen Summe der Quadrate über den Seiten. (§. 114, 3.)

5. Construirt man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes als homologen Seiten ähnliche Vielecke, so ist das Vieleck über der Hypotenuse gleich der Summe der Vielecke über den Katheten. (§. 111, Folges. und §. 113, 1.)

6. Unter allen rechtwinkligen Parallelogrammen von gleichem Umfange ist das Quadrat das größtmögliche (ein Maximum).

Ist u der Umfang und sind die Seiten ungleich, so sei $\frac{u}{4} + x$ die eine, und $\frac{u}{4} - x$ die anstoßende Seite; dann ist der Flächeninhalt

$$f = \frac{u^2}{16} - x^2.$$

Je kleiner x ist, desto größer ist f, und am größten, wenn $x = o$, d. h. wenn das rechtwinklige Parallelogramm ein Quadrat wird.

7. Unter allen rechtwinkligen Parallelogrammen von gleichem Flächeninhalte ist der Umfang des Quadrates der kleinstmögliche (ein Minimum).

$$\text{Aus } f = \frac{u^2}{16} - x^2 \text{ folgt } u = 4\sqrt{f + x^2}.$$

u ist also um so kleiner, je kleiner x ist, und am kleinsten, wenn $x = o$, d. h. wenn das rechtwinklige Parallelogramm ein Quadrat ist.

8. Unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleichem Umfange hat das gleichschenklige den größten Flächeninhalt.

Ist a die Grundlinie, s die Summe der beiden anderen Seiten, und nehmen wir diese als ungleich an, so sei $\frac{s}{2} + x$ die größere, $\frac{s}{2} - x$ die kleinere; dann ist

$$f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(s + a)(s - a)(a - 2x)(a + 2x)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(s^2 - a^2)(a^2 - 4x^2)}.$$

f ist also am größten für $x = o$, d. h. wenn das Dreieck gleichschenklig ist.

9. Unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleichem Flächeninhalte hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang.

$$\text{Aus } f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(s^2 - a^2)(a^2 - 4x^2)} \text{ folgt } s = \sqrt{\frac{16f}{a^2 - 4x^2} + a^2}.$$

s und daher auch der Umfang $u = a + s$ erhält also den kleinsten Werth, wenn $x = o$ wird, d. i. für das gleichschenklige Dreieck.

10. Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange hat das gleichseitige den größten Flächeninhalt.

Hätte das Dreieck des größten Flächeninhaltes irgend zwei ungleiche Seiten, so gäbe es nach 8. über der dritten ein gleichschenkliges Dreieck von gleichem Umfange, das noch größer wäre als jenes Maximum.

11. Unter allen Dreiecken von gleichem Flächeninhalte hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Läßt sich auf gleiche Weise indirect aus dem 9. Satze folgern.

§. **122.** Constructionsaufgaben.

1. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, von welchem gegeben ist a) die Grundlinie, b) ein Schenkel.

2. Ein gegebenes Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln, von welchem gegeben ist a) eine Kathete, b) die Hypotenuse.

3. Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

4. Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches a) einen gegebenen Winkel, b) eine gegebene Seite, c) einen gegebenen Winkel und eine gegebene Seite hat.

5. Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

Ist ein besonderer Fall der Aufgabe 4, a).

6. Ein Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln.

7. Ein gegebenes Trapez zu verwandeln: a) in ein Parallelogramm von gleicher Höhe, b) in ein Dreieck von gleicher Höhe.

8. Ein gegebenes Dreieck in ein Trapez von gleicher Höhe zu verwandeln.

9. Gegeben sind zwei Dreiecke von gleicher Höhe; construire ein drittes, welches gleich ist a) ihrer Summe, b) ihrer Differenz.

10. Ein Dreieck zu construiren, welches gleich ist a) der Summe, b) der Differenz zweier gegebener Dreiecke von gleichen Grundlinien.

11. Ein Dreieck in vier congruente Dreiecke zu theilen.

12. Ein Dreieck durch Gerade, welche von einem auf einer Seite liegenden Punkte ausgehen, in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Man zerlege das Dreieck von dem gegenüberstehenden Eckpunkte aus in gleiche Theile und verfahre dann nach Aufg. 4. in §. 118.

§. **123.** Rechnungsaufgaben.

1. Von den Größen a, d, f eines Quadrates (§. 120, 1) ist gegeben:
a) $a = 1{\cdot}25^{m}$, b) $d = 4^{dm}\,7^{cm}$, c) $f = 44\square^{m}\,89\square^{dm}$;
man suche: a) d und f, b) a und f, c) a und d.

2. Von den Größen a, b, d, f eines Rechteckes (§. 120, 2) ist gegeben:
a) $a = 23^{m}$, $b = 12{\cdot}4^{m}$; b) $a = 14^{dm}$, $d = 21\frac{2}{5}^{dm}$;
c) $b = 25^{m}$, $f = 722\square^{m}$; d) $d = 1^{dm}\,8^{cm}$, $f = 1{\cdot}245\square^{dm}$;
man suche in jedem Falle die beiden anderen Größen.

3. Aus dem Umfange u und dem Flächeninhalte f eines Rechteckes dessen Seiten a und b zu berechnen.

4. Den Flächeninhalt eines Rhombus zu berechnen, wenn a) beide Diagonalen, b) die Seite und eine Diagonale gegeben sind.

5. Aus einer Seite und den beiden Diagonalen eines Rhomboids den Flächeninhalt desselben zu bestimmen.

6. Von den Größen a, h, f eines gleichseitigen Dreieckes (§. 120, 3) ist gegeben: a) $a = 2^{m}\,5^{dm}\,9^{cm}$. b) $h = 1{\cdot}35^{m}$, c) $f = 36\frac{3}{4}\square^{dm}$;
man suche: a) h und f, b) a und f, c) a und h.

7. In einem gleichschenkligen Dreiecke (§. 120, 4.) ist

a) gegeben $a = 124^{cm}$, $b = 165^{cm}$; zu suchen h und f.
b) „ $a = 3 \cdot 5^{dm}$, $h = 5 \cdot 8^{dm}$; „ „ b „ f.
c) „ $a = 2 \cdot 34^{m}$, $f = 3 \cdot 76\square^{m}$; „ „ b „ h.
d) „ $b = 57\frac{3}{4}^{cm}$, $h = 42\frac{2}{5}^{m}$; „ „ a „ f.
e) „ $b = 8 \cdot 72^{dm}$, $f = 7 \cdot 32\square^{dm}$; „ „ a „ h.
f) „ $h = 61 \cdot 2^{m}$, $f = 12\square^{m}$; „ „ a „ b.

8. Es sei in einem Dreiecke a die Grundlinie, h die Höhe und f der Flächeninhalt;

a) gegeben ist $a = 3^{m}\ 5^{dm}$, $h = 2^{m}\ 4^{dm}$; zu suchen f.
b) „ „ $a = 1 \cdot 3^{m}$, $f = 1 \cdot 885\square^{m}$; „ „ h.
c) „ „ $h = 7^{m}\ 4^{dm}$, $f = 30\square^{m}\ 96\square^{dm}$; „ „ a.

9. In einem Dreiecke (§. 120, 5.) ist $a = 35^{m}$, $b = 27^{m}$, $c = 30^{m}$; wie groß ist f?

10. In einem Dreiecke sind zwei Seiten, a, b und die zur dritten Seite gehörige Höhe h gegeben; berechne den Flächeninhalt f.

$$f = \frac{h}{2}\left(\sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}\right).$$

11. In einem Dreiecke sind zwei Seiten a, b und die Mittellinie m der dritten gegeben; berechne f.

$$f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+2m)\,(b+2m-a)\,(a+2m-b)\,(a+b-2m)}.$$

12. In einem Dreiecke sind die drei Höhen h, h′, h″ gegeben; bestimme f.

$$f = \frac{1}{\sqrt{(p+p'+p'')\,(p'+p''-p)\,(p+p''-p')\,(p+p'-p'')}},$$

wenn $\frac{1}{h} = p$, $\frac{1}{h'} = p'$, $\frac{1}{h''} = p''$ gesetzt wird.

13. Es seien in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse c und der Flächeninhalt f gegeben; suche die Katheten a und b.

14. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist f der Flächeninhalt und h die zur Hypotenuse gehörige Höhe; bestimme die drei Seiten.

15. Den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreieckes zu bestimmen, wenn gegeben sind:

a) die zur Grundlinie und zu einem Schenkel gehörigen Höhen h und h′;
b) die Grundlinie a und die einem Schenkel zugehörige Höhe h′;
c) der Umfang u und die Höhe h auf die Grundlinie.

16. In einem Trapeze sind die Parallelseiten $13 \cdot 815^{m}$ und $5 \cdot 108^{m}$, die Höhe $4 \cdot 095^{m}$; wie groß ist der Flächeninhalt?

17. In einem Trapeze (§. 120, 6.) ist $a = 39^{dm}$, $b = 27^{dm}$; $c = 42^{dm}$, $d = 22^{dm}$; berechne f.

18. In einem Vierecke beträgt eine Diagonale $2 \cdot 34^{m}$, die von den gegenüberliegenden Eckpunkten darauf gefällten Senkrechten sind $1 \cdot 25^{m}$ und $0 \cdot 48^{m}$ lang; wie groß ist die Fläche des Vierecks?

19. In einem regelmäßigen Fünfecke, dessen Seite s ist, ist der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite $= \frac{s}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$; wie groß ist der Flächeninhalt f, wenn $s = 1^{m}\ 3^{dm}\ 8^{cm}$ ist?

Siebenter Abschnitt.

Der Kreis.

I. Allgemeines über den Kreis.

§. 124. Die Größe eines Kreises hängt von der Größe seines Halbmessers ab. Läßt man den Halbmesser stetig abnehmen, so wird auch der Kreis immer kleiner, und reducirt sich zuletzt, wenn der Halbmesser Null wird, auf den Mittelpunkt. Nimmt dagegen der Halbmesser stetig zu, so vergrößert sich auch der Kreis, und nähert sich beim unendlichen Wachsen des Halbmessers einer Geraden als Grenze. Man kann in diesem Sinne einen Punkt als einen Kreis, dessen Halbmesser Null ist, und eine Gerade als einen Kreis, dessen Halbmesser unendlich groß ist, ansehen.

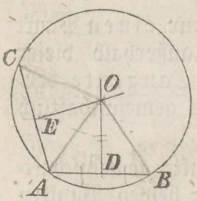
§. 125. Die Lage eines Punktes in Bezug auf einen Kreis hängt von dem Abstande des Punktes vom Mittelpunkte des Kreises ab.

Ein Punkt liegt entweder **außerhalb** eines Kreises, oder **auf der Peripherie** desselben, oder **innerhalb** des Kreises, je nachdem sein Abstand vom Mittelpunkte des Kreises größer, oder eben so groß, oder kleiner ist als der Halbmesser.

Diese Beziehungen, welche unmittelbar aus §. 20 folgen, gelten auch in ihren Umkehrungen.

§. 126. Durch drei Punkte A, B, C (Fig. 88), die nicht in einer geraden Linie liegen, ist ein Kreis vollkommen bestimmt.

Fig. 88.



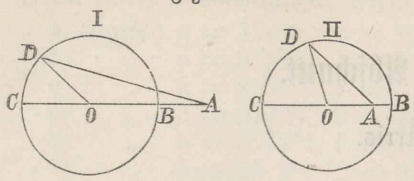
Der geometrische Ort eines Punktes, der von A und B gleich weit absteht, ist eine Senkrechte auf AB aus ihrer Mitte D (§. 52, 5, Folges.). Ebenso ist der geom. Ort eines Punktes, der von A und C gleich weit absteht, eine Senkrechte auf AC aus ihrer Mitte E. Der Punkt, der von A, B, C gleich weit absteht, d. i. der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch diese drei Punkte geht, ist also der Durchschnittspunkt O jener beiden Senkrechten.

Die Senkrechten DO und EO schneiden sich nothwendig in einem Punkte (§. 27, d), sie schneiden sich aber auch in einem einzigen Punkte (§. 2, 2); demnach gibt es nur einen Kreis, welcher durch A, B, C geht.

II. Die Geraden und Winkel am Kreise.

§. 127. Von allen Strecken, die sich von einem Punkte an die Peripherie eines Kreises ziehen lassen, ist a) diejenige die größte, in welcher der Mittelpunkt des Kreises liegt, und b) diejenige die kleinste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht.

Fig. 89.



Ist A (Fig. 89) der gegebene Punkt, und zieht man von demselben durch den Mittelpunkt O des Kreises eine Gerade, welche die Peripherie dieses Kreises in B und C schneidet, ferner eine beliebige Strecke AD an die Peripherie, so ist

a) $DO + AO > AD$, d. i. $AC > AD$;
b) $AO - DO < AD$ (in I), oder $DO - AO < AD$ (in II), d. i. $AB < AD$.

§. **128.** Die Lage einer Geraden in Bezug auf einen Kreis hängt von deren Abstande vom Mittelpunkte des Kreises ab.

Eine Gerade hat mit einem Kreise entweder a) **keinen**, oder b) **einen**, oder c) **zwei Punkte gemeinschaftlich**, je nachdem ihr Abstand vom Mittelpunkte des Kreises größer, oder eben so groß, oder kleiner ist als der Halbmesser.

a) Ist die Senkrechte vom Mittelpunkte des Kreises auf die Gerade größer als der Halbmesser, so liegt nach §. 125 schon der Fußpunkt der Senkrechten, also nach §. 42 um so mehr jeder andere Punkt der Geraden außerhalb des Kreises.

b) Ist diese Senkrechte gleich dem Halbmesser des Kreises, so liegt ihr Fußpunkt auf der Peripherie, jeder andere Punkt der Geraden aber außerhalb des Kreises.

c) Ist endlich die Senkrechte kleiner als der Halbmesser, so muß es vom Mittelpunkte aus zu der Geraden nach §. 42, Folges. zwei, aber auch nur zwei schiefe Strecken geben, welche dem Halbmesser gleich sind; die beiden Fußpunkte dieser Strecken sind der Geraden und der Kreislinie gemeinschaftlich.

Von diesen Beziehungen gelten auch die **Umkehrungen**.

§. **129.** Eine Gerade, welche mit einer krummen Linie nur **einen** Punkt gemeinschaftlich hat, so daß alle andern Punkte derselben außerhalb dieser krummen Linie liegen, heißt eine **Berührungslinie** oder **Tangente** derselben; der Punkt, den die Tangente mit der krummen Linie gemeinschaftlich hat, wird der **Berührungspunkt** genannt.

Eine Gerade, welche mit einer krummen Linie zwei Punkte gemeinschaftlich hat, heißt eine **Secante** derselben. Das zwischen diesen beiden Punkten liegende Stück der Secante ist eine **Sehne** (§. 20). Der Theil der Kreisfläche, der von einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, heißt ein **Kreisabschnitt** oder **Segment**. Der Theil der Kreisfläche, der von zwei Halbmessern und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, heißt ein **Kreisausschnitt** oder **Sector**.

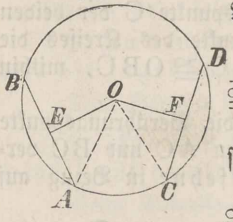
§. **130.** Lehrsätze von den **Sehnen des Kreises**.

1. Die Strecke aus dem Mittelpunkte des Kreises nach der Mitte einer Sehne steht senkrecht auf der Sehne und halbirt den zugehörigen Bogen. (§. 52, 1 und 21.)

2. Die Senkrechte aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf die Sehne halbirt diese und den zugehörigen Bogen. (§. 52, 2 und §. 21.)

< 3. Die Gerade, welche in der Mitte einer Sehne auf diese senkrecht errichtet wird, geht durch den Mittelpunkt des Kreises. (§. 52, 5.)

Fig. 90.



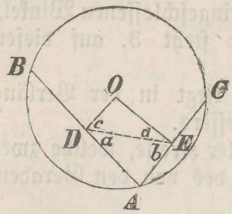
< 4. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.

Ist (Fig. 90) AB = CD und OE ⊥ AB, OF ⊥ CD, so ist, wenn man OA und OC zieht, △AEO ≅ CFO; mithin ist OE = OF.

< 5. Zwei Sehnen eines Kreises, welche gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, sind einander gleich.

Es sei (Fig. 90) OE = OF. Dann ist △AEO ≅ CFO, daher AE = CF, folglich auch AB = CD.

Fig. 91.



< 6. Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises hat die größere einen kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

Nach 4. ist es erlaubt, die Sehnen so anzunehmen, daß sie einen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Ist nun (Fig. 91) AB > AC, OD ⊥ AB und OE ⊥ AC, so ist, wenn man DE zieht, in dem Dreiecke ADE der Winkel b > a (§. 40, 2), daher d < c und folglich OD < OE.

< 7. Von zwei Sehnen eines Kreises, welche ungleiche Abstände vom Mittelpunkte haben, ist diejenige die größere, welche vom Mittelpunkte den kleineren Abstand hat.

Es sei (Fig. 91) OD < OE. Wäre AB ≦ AC, so müßte bezüglich nach 4. oder 6. OD ≧ OE sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Folgesatz. Der Durchmesser ist die größte Sehne des Kreises. Er theilt die Peripherie des Kreises in zwei gleiche Theile.

§. 131. Lehrsätze von den Tangenten des Kreises.

< 1. Die Gerade, welche im Endpunkte eines Halbmessers auf diesen senkrecht steht, ist eine Tangente des Kreises. >

Folgt unmittelbar aus §. 128, b.

< 2. Der Halbmesser eines Kreises nach dem Berührungspunkte steht senkrecht auf der Tangente.

< 3. Die Senkrechte aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf die Tangente geht durch den Berührungspunkt.

4. Die auf der Tangente eines Kreises im Berührungspunkte errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Die Beweise für die drei Umkehrungen 2., 3. und 4. werden indirect geführt.

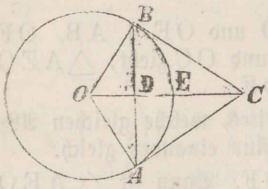
< 5. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte derselben berühren, ist die in diesem Punkte auf der Geraden errichtete Senkrechte.

6. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche r zum Halbmesser haben und eine gegebene Gerade auf einer bestimmten Seite derselben berühren, ist die mit dieser Geraden auf derselben Seite in dem Abstande r parallele Gerade. (Ein anderer Ausdruck für den geometrischen Ort in §. 63, Folges. b.)

Folgesatz. Durch einen Punkt der Kreislinie kann an dieselbe nur eine Tangente gezogen werden.

§. **132.** Die von einem Punkte außerhalb eines Kreises an diesen gezogenen Tangenten sind einander gleich.

Fig. 92.



Es sei (Fig. 92) $AC \perp OA$ und $BC \perp OB$. Zieht man vom Durchschnittspunkte C der beiden Tangenten zu dem Mittelpunkte des Kreises die Strecke CO, so ist $\triangle OAC \cong OBC$, mithin $AC = BC$.

Die Sehne AB, welche die Berührungspunkte des Kreises und der Tangenten AC und BC verbindet, heißt Berührungssehne in Bezug auf den Punkt C.

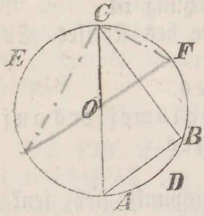
Folgesätze. a) Die Gerade vom Durchschnittspunkte zweier Tangenten eines Kreises nach dem Mittelpunkte desselben halbirt 1. den von den beiden Tangenten gebildeten und den von den beiden Halbmessern eingeschlossenen Winkel, 2. sie halbirt den Bogen und die Berührungssehne und steht 3. auf dieser Sehne senkrecht.

b) Der Durchschnittspunkt der beiden Tangenten liegt in der Verlängerung des auf die Berührungssehne senkrechten Halbmessers.

c) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei nicht parallele Gerade berühren, ist die Halbirungslinie des von den Geraden gebildeten Winkels.

§. **133.** Ein Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie des Kreises liegt, und dessen Schenkel Sehnen dieses Kreises sind, heißt ein Peripheriewinkel, z. B. ACB (Fig. 93).

Fig. 93.



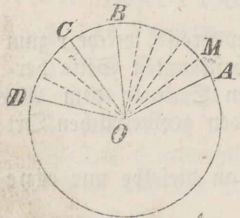
Man sagt: Der Peripheriewinkel ACB steht auf dem Bogen ADB, welcher zwischen den Endpunkten seiner Schenkel liegt; und: der Peripheriewinkel ACB liegt in dem Abschnitte AECFB, in welchem sein Scheitel und seine Schenkel liegen.

Ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, wird ein Winkel im Halbkreise genannt, wie ABC.

Ein Winkel, dessen Scheitel innerhalb eines Kreises liegt, und dessen Schenkel die Abschnitte zweier sich schneidenden Sehnen des Kreises sind, heißt ein Sehnenwinkel, z. B. AEB (Fig. 96). Die Centriwinkel (§. 20) sind ein besonderer Fall der Sehnenwinkel. Ein Winkel, dessen Scheitel außerhalb eines Kreises liegt, und dessen Schenkel Secanten des Kreises sind, heißt ein Secantenwinkel, z. B. ACB (Fig. 97).

§. **134.** 1. In demselben Kreise verhalten sich die Kreisbogen wie die zugehörigen Centriwinkel.

Fig. 94.



Es seien die Bogen AB und CD (Fig. 94) commensurabel; AM sei ihr gemeinschaftliches Maß, und zwar Bogen $AB = m.AM$, Bogen $CD = n.AM$; somit Bogen AB : Bogen CD = m : n. Denkt man sich zu jedem Theilungspunkte der beiden Kreisbogen Halbmesser gezogen, so wird dadurch der Centriwinkel AOB in m und COD in n Theile getheilt, deren jeder dem Winkel AOM gleich ist (§. 21, 2); man hat daher W. $AOB = m.AOM$, W. $COD = n.AOM$, folglich W. AOB : COD = m : n.

Aus diesen beiden Proportionen folgt

$$\text{Bog. } AB : \text{Bog. } CD = \text{W. } AOB : \text{W. } COD.$$

Daß diese Proportion auch dann stattfindet, wenn AB und CD incommensurabel sind, folgt aus §. 84.

2. In demselben Kreise verhalten sich die Kreisausschnitte wie die zugehörigen Centriwinkel.

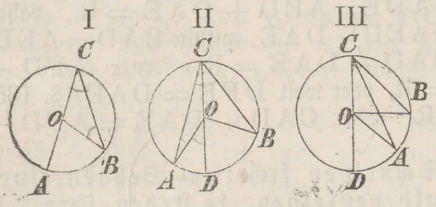
Der Beweis ist dem vorigen ähnlich.

§. **135.** Ein Peripheriewinkel ist gleich dem halben Centriwinkel auf demselben Bogen. (Fig. 95.)

Beim Beweise dieses Satzes sind drei Fälle zu unterscheiden.

I. Wenn ein Schenkel des Peripheriewinkels durch den Mittelpunkt des Kreises geht.

Fig. 95.



AOB ist ein äußerer Winkel des Dreieckes BOC, daher $AOB = OCB + OBC$; aber der Winkel $OBC = OCB$, weil das $\triangle BOC$ gleichschenklig ist, somit ist der Mittelpunktswinkel $AOB = OCB + OCB = 2ACB$; daher $ACB = \frac{AOB}{2}$.

II. Wenn die beiden Schenkel des Peripheriewinkels auf den entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes liegen.

Man ziehe den Durchmesser CD, so ist nach I. der Winkel $AOD = 2\,ACD$, und $BOD = 2\,BCD$, daher auch $AOD + BOD = 2\,(ACD + BCD)$, oder $AOB = 2\,ACB$; mithin $ACB = \frac{AOB}{2}$.

III. Wenn die beiden Schenkel des Peripheriewinkels auf derselben Seite des Mittelpunktes liegen.

Zieht man den Durchmesser CD, so ist nach I. der Winkel $BOD = 2\,BCD$, und $AOD = 2\,ACD$; somit $BOD - AOD = 2\,(BCD - ACD)$, oder $AOB = 2\,ACB$; mithin $ACB = \frac{AOB}{2}$.

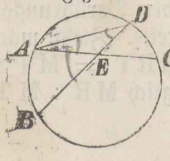
Folgesätze. a) Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen eines Kreises aufstehen, sind einander gleich. Denn sie sind sämmtlich gleich dem halben Centriwinkel auf demselben Bogen.

b) Zu gleichen Peripheriewinkeln gehören in demselben Kreise auch gleiche Bogen (Umkehrung von a).

c) Der Winkel im Halbkreise ist ein rechter. Denn der Centriwinkel auf demselben Bogen ist ein gestreckter. (Folgt auch aus §. 40, 1, e.)

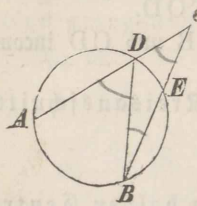
§. **136.** 1. Ein Sehnenwinkel ist gleich der Summe zweier Peripheriewinkel, welche auf den Bogen zwischen den Schenkeln des Sehnenwinkels und seines Scheitelwinkels stehen.

Fig. 96.



Zieht man AD (Fig. 96), so ist der Sehnenwinkel $AEB = ADB + CAD$ (§. 39), d. i. gleich der Summe der Peripheriewinkel ADB und CAD.

Fig. 97.

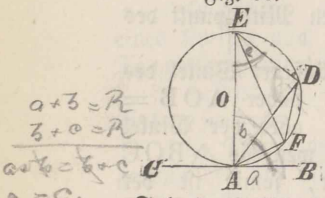


2. Ein Secantenwinkel ist gleich der Differenz zweier Peripheriewinkel, welche auf den beiden Bogen zwischen den Schenkeln des Secantenwinkels stehen.

Zieht man BD (Fig. 97), so ist ADB = ACB + DBE (§. 39), daher der Secantenwinkel ACB = ADB — DBE.

§. **137.** Der Winkel, den eine Tangente des Kreises mit einer durch den Berührungspunkt gehenden Sehne bildet, ist gleich dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte.

Fig. 98.



Voraussf. BC ⊥ AOE (Fig. 98).

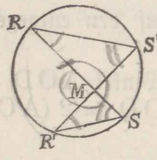
Behaupt. a) W. BAD = AED.

b) W. CAD = AFD.

Beweis. a) Es ist BAD + DAE = R, und im rechtwinkligen △ ADE, AED + DAE = R, daher BAD + DAE = AED + DAE, mithin BAD = AED.

b) Es ist CAD — DAE = R, ferner AFD — DFE = AFE = R, oder weil DFE = DAE (§. 135, Folgef. a) ist, AFD — DAE = R; daher CAD — DAE = AFD — DAE, mithin CAD = AFD.

Fig. 99.

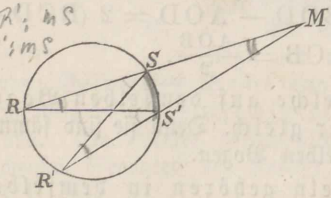


§. **138.** 1. Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises innerhalb desselben, so stehen ihre Abschnitte in verkehrtem Verhältnisse.

Schneiden sich (Fig. 99) die Sehnen RS und R'S' im Punkte M, und zieht man die Geraden RS' und R'S, so ist W. R = R' und W. S' = S (§. 135, Folgef. a), daher △ MRS' ∼ MR'S, und folglich MR : MS' = MR' : MS.

2. Gehen von einem Punkte außerhalb eines Kreises zu diesem zwei Secanten, so stehen sie mit ihren äußeren Abschnitten in verkehrtem Verhältnisse.

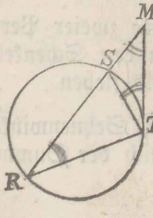
Fig. 100.



Es seien (Fig. 100) MR und MR' zwei Secanten, welche den Kreis bezüglich in den Punkten R, S und R', S' schneiden. Zieht man die Geraden RS' und R'S, so ist △ MRS' ∼ MR'S, und daher MR : MR' = MS' : MS.

3. Gehen von einem Punkte aus eine Secante und eine Tangente an einen Kreis, so ist die Tangente die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Secante und ihrem äußeren Abschnitte.

Fig. 101.

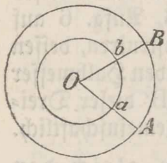


Es seien (Fig. 101) R und S die Durchschnittspunkte der Secante MR mit dem Kreise, und T der Berührungspunkt der Tangente MT mit demselben Kreise. Zieht man die Geraden RT und ST, so ist W. MRT = MTS (§. 137), daher △ MRT ∼ MTS, und folglich MR : MT = MT : MS.

III. Lage zweier Kreise gegen einander.

§. **139.** Zwei Kreise, welche denselben Mittelpunkt haben, heißen *concentrisch*, wie die Kreise in Fig. 102. Zwei concentrische Kreislinien haben keinen Punkt mit einander gemeinschaftlich.

Fig. 102.



Die Fläche, welche zwischen den Peripherien zweier concentrischer Kreise enthalten ist, wird ein *Kreisring*, und ein Theil desselben, wie aABb, ein *Ringausschnitt* genannt. Den Unterschied aA der beiden Halbmesser nennt man die *Breite* des Ringes oder des Ringausschnittes.

Zwei *Kreisbogen oder Kreisausschnitte*, welche zu gleichen Centriwinkeln gehören, heißen *homolog*; z. B. die Bogen ab und AB, oder die Kreisausschnitte aOb und AOB.

§. **140.** Zwei Kreise, welche verschiedene Mittelpunkte haben, nennt man *excentrisch*, und die Gerade, welche diese Mittelpunkte verbindet, die *Centrale* derselben. Zwei excentrische Kreislinien haben entweder keinen, oder einen oder zwei Punkte mit einander gemeinschaftlich. Drei Punkte können zwei Kreise nicht mit einander gemeinschaftlich haben, weil sie sonst nach §. 126 ganz zusammenfielen.

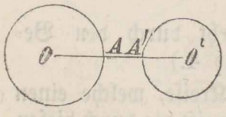
Haben zwei Kreise nur *einen* Punkt gemeinschaftlich, so sagt man: die Kreise *berühren sich*, und zwar *von außen*, wenn sie sonst außerhalb einander liegen, wie in Fig. 104; *von innen*, wenn sonst der eine Kreis innerhalb des andern liegt, wie in Fig. 106.

Haben zwei Kreise *zwei* Punkte gemeinschaftlich, so sagt man, daß sie sich in diesen Punkten *schneiden*, wie in Fig. 105.

§. **141.** *Die Lage eines Kreises in Bezug auf einen andern Kreis hängt von der Größe ihrer Centrale und ihrer Halbmesser ab.*

Lehrsätze. 1. *Ist die Centrale zweier Kreise größer als die Summe ihrer Halbmesser, so liegt jeder der beiden Kreise ganz außerhalb des andern.* (Fig. 103.)

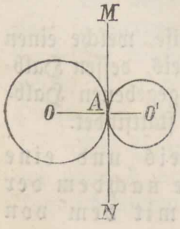
Fig. 103.



Es seien O und O′ die Mittelpunkte, r und r′ die Halbmesser zweier Kreise und $OO' > r + r'$. Schneidet der Kreis O′ die Centrale OO′ in A′, so ist $O'A' = r'$, daher $OO' > r + O'A'$, und $OO' - O'A' > r$, oder $OA' > r$; es liegt also der Punkt A′ außerhalb des Kreises O. Dann muß aber auch jeder andere Punkt der Kreislinie O′, da nach §. 127, b sein Abstand von dem Punkte O größer als OA′ ist, außerhalb des Kreises O liegen.

2. *Ist die Centrale zweier Kreise gleich der Summe ihrer Halbmesser, so berühren sich die beiden Kreise von außen.* (Fig. 104.)

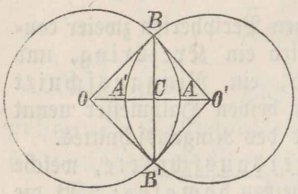
Fig. 104.



Es seien O und O′ die Mittelpunkte, r und r′ die Halbmesser zweier Kreise, und $OO' = r + r'$. Schneidet der Kreis O′ die Centrale OO′ in A, ist also $O'A = r'$, so ist $OO' = r + O'A$, also $OO' - O'A = r$, oder $OA = r$; folglich ist der Punkt A beiden Kreislinien gemeinschaftlich. Dagegen muß jeder andere Punkt der Kreislinie O′ da nach §. 127, b sein Abstand von dem Punkte O größer als OA ist, außerhalb des Kreises O liegen.

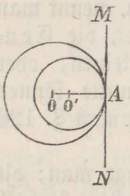
3. Ist die Centrale zweier Kreise kleiner als die Summe und größer als die Differenz ihrer Halbmesser, so schneiden sich die beiden Kreise in zwei Punkten. (Fig. 105.)

Fig. 105.



Es seien O und O' die Mittelpunkte zweier Kreise, r und r' ihre Halbmesser, und $OO' < r + r'$ und zugleich $OO' > r - r'$. Unter dieser Voraussetzung läßt sich nach §. 53, Aufg. 6 auf jeder Seite von OO' ein Dreieck construiren, dessen Seiten die Centrale OO' und die beiden Halbmesser r und r' sind; die Eckpunkte B und B' dieser Dreiecke sind dann beiden Kreislinien gemeinschaftlich.

Fig. 106.

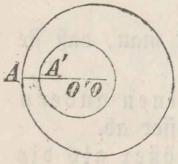


4. Ist die Centrale zweier Kreise gleich der Differenz ihrer Halbmesser, so berühren sich die beiden Kreise von innen. (Fig. 106.)

Der Beweis unter Beiziehung von §. 127, a ähnlich wie zu 2.

5. Ist die Centrale zweier Kreise kleiner als die Differenz ihrer Halbmesser, so liegt der eine der beiden Kreise ganz innerhalb des andern. (Fig. 107.)

Fig. 107.



Der Beweis unter Beiziehung von §. 127, a ähnlich wie zu 1.

Zusatz. Da in den vorhergehenden fünf Sätzen alle möglichen sich gegenseitig ausschließenden Fälle, welche bezüglich der Centrale im Vergleiche zur Summe und Differenz der Halbmesser der beiden Kreise stattfinden können, berücksichtigt sind, so läßt sich indirect leicht beweisen, daß von diesen Sätzen auch die Umkehrungen richtig sind.

§. **142.** Folgesätze.

a) Die Centrale zweier sich berührender Kreise geht durch den Berührungspunkt. (Folgt aus den Beweisen zu §. 141, 2 und 4.)

b) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte desselben berühren, ist die durch diesen Punkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises gehende Gerade.

c) Die durch den Berührungspunkt zweier Kreise an den einen gezogene Tangente ist zugleich eine Tangente des andern (Fig. 104 und 106).

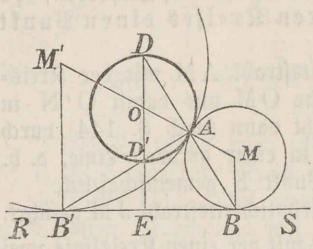
d) Die Centrale zweier sich schneidender Kreise steht auf der gemeinschaftlichen Sehne senkrecht, und halbirt diese Sehne sowie die zugehörigen Centriwinkel beider Kreise (Fig. 105).

e) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis berühren, ist ein mit diesem concentrischer Kreis, dessen Halbmesser gleich ist der Summe oder der Differenz der beiden gegebenen Halbmesser, je nachdem die Berührung von außen oder von innen stattfindet.

§. **143.** Berührt ein Kreis einen andern Kreis und eine Gerade, so liegen die beiden Berührungspunkte, je nachdem der Kreis von außen oder von innen berührt wird, mit dem von

der Geraden entfernteren oder mit dem näheren Endpunkte des auf diese Gerade senkrechten Durchmessers in einer geraden Linie.

Fig. 108.



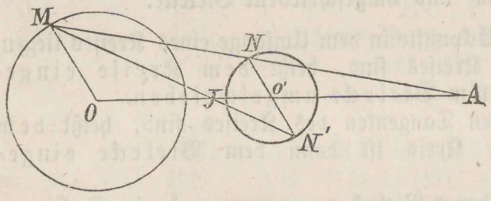
Es berühre (Fig. 108) der Kreis M den Kreis O in A, und die Gerade RS in B. Zieht man durch O auf RS die Senkrechte DD'E, ferner die Geraden MB, MA und OA, BA und DA, so müssen in den gleichschenkligen Dreiecken ABM und ADO, da MAO eine gerade Linie ist (§. 142, a), und daher W. AMB = AOD ist, auch die Winkel an den Grundlinien, also BAM und DAO gleich sein; mithin ist BAD eine gerade Linie (§. 18, 2).

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß auch für den Berührungskreis M' die Berührungspunkte A und B' mit dem andern Endpunkte D' des Durchmessers DD' in einer Geraden liegen.

§. 144. Zieht man in zwei Kreisen durch die Endpunkte je zweier Halbmesser, welche entweder in demselben oder im entgegengesetzten Sinne parallel sind, gerade Linien, so schneiden sich diese alle bezüglich in einem Punkte auf der Verlängerung der Centrale oder in einem Punkte der Centrale selbst.

Dieser Satz folgt schon aus §. 92; er soll jedoch hier noch besonders bewiesen werden.

Fig. 109.



Es sei OM (Fig. 109) mit O'N in demselben Sinne, mit O'N' im entgegengesetzten Sinne parallel, so ist, wenn man OM=r, O'N=O'N'=r' und OO'=c setzt, (nach §. 88) $\frac{OA}{O'A} = \frac{r}{r'}$ und $\frac{OJ}{JO'} = \frac{r}{r'}$, daher auch

$$\frac{OA}{OA-O'A} = \frac{r}{r-r'} \text{ und } \frac{OJ}{OJ+JO'} = \frac{r}{r+r'}, \text{ oder}$$

$$\frac{OA}{c} = \frac{r}{r-r'} \text{ und } \frac{OJ}{c} = \frac{r}{r+r'}, \text{ also}$$

$$OA = \frac{cr}{r-r'} \text{ und } OJ = \frac{cr}{r+r'},$$

somit, da $O'A = OA - c$ und $JO' = c - OJ$ ist,

$$O'A = \frac{cr'}{r-r'} \text{ und } JO' = \frac{cr'}{r+r'}.$$

Da diese Ausdrücke für alle Lagen der parallelen Halbmesser constant sind, so werden sich in A alle Geraden, welche die Endpunkte je zweier in demselben Sinne paralleler Halbmesser verbinden, und in J alle Geraden, welche durch die Endpunkte je zweier im entgegengesetzten Sinne paralleler Halbmesser gehen, durchschneiden.

Die Punkte A und J sind die Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise, und zwar A der äußere, J der innere Aehnlichkeitspunkt. Jede durch einen Aehnlichkeitspunkt gezogene Gerade heißt ein Aehnlichkeitsstrahl, und zwar

ein äußerer oder ein innerer, je nachdem sie durch den äußeren oder inneren Aehnlichkeitspunkt geht.

§. 145. Hat ein Aehnlichkeitsstrahl zweier Kreise mit der Peripherie des einen Kreises einen Punkt gemeinschaftlich, so hat er auch mit der Peripherie des anderen Kreises einen Punkt gemeinschaftlich.

Es habe (Fig. 109) der äußere Aehnlichkeitsstrahl AM mit der Kreislinie O den Punkt M gemeinschaftlich. Man ziehe OM und damit O'N in demselben Sinne parallel. Die Gerade MN geht dann (nach §. 144) durch den Punkt A; die Punkte M, N, A liegen also in einer geraden Linie, d. h. die AM hat auch mit der Kreislinie O' einen Punkt N gemeinschaftlich.

Ebenso wird der Beweis für einen inneren Aehnlichkeitsstrahl JM geführt.

Folgesätze. a) Hat ein Aehnlichkeitsstrahl mit der einen Kreislinie zwei Punkte gemeinschaftlich, so hat er auch mit der andern zwei Punkte gemeinschaftlich, d. i. er ist eine gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise.

b) Hat ein Aehnlichkeitsstrahl mit der einen Kreislinie nur einen Punkt gemeinschaftlich, so hat er auch mit der andern nur einen Punkt gemeinschaftlich, d. h. er ist eine gemeinschaftliche Tangente beider Kreise, und zwar eine äußere oder innere, je nachdem der Aehnlichkeitsstrahl ein äußerer oder innerer ist.

c) Hat ein Aehnlichkeitsstrahl mit der einen Kreislinie keinen Punkt gemeinschaftlich, so hat er auch mit der zweiten keinen Punkt gemeinschaftlich, d. h. er liegt ganz außerhalb der beiden Kreise.

IV. Dem Kreise ein- und umgeschriebene Vielecke.

§. 146. Ein Vieleck, dessen Eckpunkte in dem Umfange eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen des Kreises sind, heißt dem Kreise eingeschrieben; der Kreis ist dann dem Vielecke umgeschrieben.

Ein Vieleck, dessen Seiten Tangenten des Kreises sind, heißt dem Kreise umgeschrieben; der Kreis ist dann dem Vielecke eingeschrieben.

Ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck nennt man auch ein Sehnenvieleck, ein dem Kreise umgeschriebenes Vieleck ein Tangentenvieleck.

§. 147. Jedem Dreiecke läßt sich a) ein Kreis umschreiben, b) ein Kreis einschreiben.

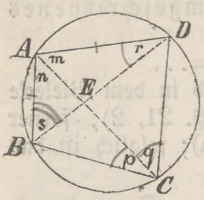
Beweis. a) Die Mittellothe eines Dreieckes (Fig. 52) schneiden sich in einem Punkte O, welcher von den drei Eckpunkten denselben Abstand OA hat (§. 67, 1). Beschreibt man daher aus O mit dem Halbmesser OA einen Kreis, so geht er durch alle Eckpunkte des Dreieckes.

b) Die Winkelhalbirungslinien eines Dreieckes (Fig. 53) schneiden sich in einem Punkte O, welcher von den drei Seiten denselben Abstand OD hat (§. 67, 2). Beschreibt man daher aus O mit dem Halbmesser OD einen Kreis, so berührt er alle drei Seiten des Dreieckes.

§. 148. 1. In jedem Sehnenvierecke sind die Summen der gegenüberliegenden Winkel einander gleich, und zwar ist jede Summe gleich zwei Rechten.

Man ziehe (Fig. 110) die Diagonalen AC und BD; dann ist der Winkel $p = r$, $q = s$ (§. 135, Folges. a). In dem Dreiecke ABD ist nun

Fig. 110.



$m + n + r + s = 2R$, daher ist auch $m + n + p + q = 2R$, oder $A + C = 2R$.

Da die Summe aller Winkel eines Viereckes gleich ist $4R$, so muß auch $B + D = 2R$, also $A + C = B + D$ sein.

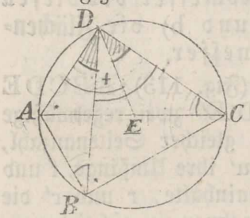
2. Umgekehrt: Sind in einem Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Winkel gleich, so ist dasselbe ein Sehnenviereck.

Der Beweis wird indirect geführt. Würde der durch drei Eckpunkte A, B, C beschriebene Kreis nicht auch durch den vierten D gehen, so müßte er die Seite CD selbst oder ihre Verlängerung in einem Punkte schneiden, durch dessen Verbindung mit A man ein Sehnenviereck erhielte. Dann aber würde sich ergeben, daß ein Außenwinkel eines Dreieckes einem inneren gegenüberliegenden gleich wäre.

Folgesatz. Jedem Vierecke, in welchem die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln gleich zwei Rechten ist, läßt sich ein Kreis umschreiben.

— §. **149**. In jedem Sehnenvierecke ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte aus je zwei gegenüberliegenden Seiten. (Ptolemäischer Lehrsatz.)

Fig. 111.



Beweis. Man mache (Fig. 111) den Winkel $CDE = ADB$. Dann ist, da auch der W. $ACD = ABD$ (§. 135, Folges. a) ist, das $\triangle ECD \sim ABD$, daher

$$EC : CD = AB : BD, \text{ und}$$
$$EC \cdot BD = AB \cdot CD.$$

Ebenso ist $\triangle AED \sim BCD$, daher

$$AE : AD = BC : BD, \text{ und}$$
$$AE \cdot BD = AD \cdot BC.$$

Mithin hat man

$$EC \cdot BD + AE \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

oder, weil $EC \cdot BD + AE \cdot BD = (EC + AE) \cdot BD = AC \cdot BD$ ist,

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

§. **150**. 1. In jedem Tangentenvierecke sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich. (Folgt aus §. 132.)

2. Umgekehrt: Sind in einem Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich, so ist dasselbe ein Tangentenviereck.

Beweis indirect. Würde der drei Seiten berührende Kreis nicht auch die vierte berühren, so könnte man von einem Endpunkte derselben eine Tangente an den Kreis ziehen, wodurch man ein Tangentenviereck erhielte. Dann aber würde sich ergeben, daß eine Seite eines Dreieckes der Differenz der beiden anderen gleich wäre.

Folgesatz. Jedem Vierecke, in welchem die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich sind, läßt sich ein Kreis einschreiben.

— §. **151**. 1. Jedem regelmäßigen Vielecke läßt sich ein Kreis um- und einschreiben.

Der Beweis ist in §. 74 enthalten.

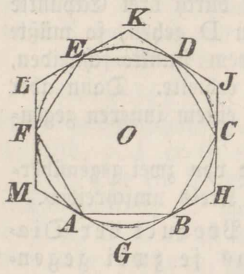
2. Ist die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile getheilt, so bilden a) die Sehnen zwischen je zwei benachbarten

Theilungspunkten ein eingeschriebenes, und b) die Tangenten durch je zwei benachbarte Theilungspunkte ein umgeschriebenes regelmäßiges n-Eck.

Es sei (Fig. 112) der Bogen $AB = BC = CD = \ldots$

a) Zieht man die Sehnen AB, BC, CD,..., so sind in dem Vielecke ABCD... die Seiten AB, BC, CD,... gleich (§. 21, 2), ferner die Winkel A, B, C, D,... gleich (§. 135, Folges. a); folglich ist das Vieleck ABCD... regelmäßig.

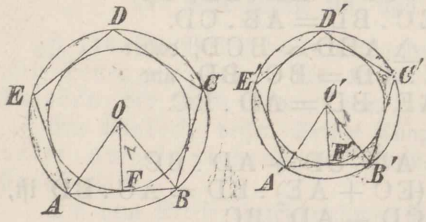
Fig. 112.



b) Zieht man durch A, B, C, D... Tangenten an den Kreis, welche sich in den Punkten G, H, I, K,... schneiden, so sind wegen der Gleichheit der Seiten AB, BC, CD,... und wegen der Gleichheit der ihnen anliegenden Winkel (§. 137) die Dreiecke AGB, BHC, CJD,... congruent und gleichschenklig; mithin sind die Summen je zweier Schenkel gleich, also $GH = HJ = JK = \ldots$ Aus der Congruenz der obigen Dreiecke folgt auch die Gleichheit der Winkel G, H, J,...; folglich ist das Vieleck GHJK... regelmäßig.

§. **152.** In regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenanzahl verhalten sich a) die **Umfänge** wie die Halbmesser der diesen Vielecken ein- oder umgeschriebenen Kreise, und b) die **Flächeninhalte** wie die zweiten Potenzen dieser Halbmesser.

Fig. 113.



Es seien (Fig. 113) ABCDE und A'B'C'D'E' zwei regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenanzahl, ferner u und u' ihre Umfänge, f und f' ihre Flächeninhalte, r und r' die Halbmesser der ihnen eingeschriebenen, R und R' die Halbmesser der ihnen umgeschriebenen Kreise. Da die beiden regelmäßigen Vielecke gleich viele Seiten haben, so sind sie ähnlich.

a) Nach §. 101, 2 und §. 98 ist

$$\frac{u}{u'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OF}{O'F'} = \frac{AO}{A'O'}, \quad \text{oder} \quad \frac{u}{u'} = \frac{r}{r'} = \frac{R}{R'}.$$

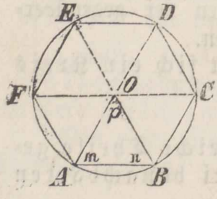
b) Nach §. 117, 4 ist

$$f = u \cdot \frac{r}{2} \quad \text{und} \quad f' = u' \cdot \frac{r'}{2}; \quad \text{daher} \quad \frac{f}{f'} = \frac{u}{u'} \cdot \frac{r}{r'} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

Aber $\frac{r}{r'} = \frac{R}{R'}$, daher $\frac{r^2}{r'^2} = \frac{R^2}{R'^2}$; mithin auch $\frac{f}{f'} = \frac{R^2}{R'^2}$.

§. **153.** Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes ist gleich dem Halbmesser des Kreises. (Fig. 114).

Fig. 114.

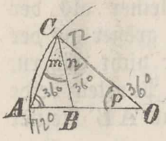


Es sei das Sechseck ABCDEF regelmäßig.

Der Winkel eines regelmäßigen Sechseckes ist gleich $\frac{720^0}{6} = 120^0$, also ist $A = B = 120^0$ und $m = n = 60^0$, daher muß auch $p = 60^0$, und daher das Dreieck ABO gleichseitig sein; folglich ist $AB = OA$.

§. **154.** Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes ist gleich dem größeren Abschnitte des nach stetiger Proportion getheilten Halbmessers.

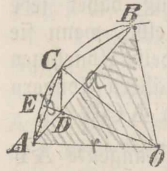
Fig. 115.



Es sei der Bogen AC (Fig. 115) der zehnte Theil der Peripherie, also die Sehne AC die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes. Zieht man AO und CO, so ist $AOC = 36^0$, und daher in dem gleichschenkligen Dreiecke ACO jeder von den beiden Winkeln ACO und CAO gleich 72^0, also ist der Winkel $ACO = 2AOC$. Halbirt man nun den Winkel ACO, so daß $m = n = p$ wird, so ist das $\triangle ACO \sim ABC$, daher $AO : AC = AC : AB$, oder weil $AC = BC = BO$ ist, auch $AO : BO = BO : AB$; folglich ist die Zehnecksseite AC gleich dem größeren Abschnitte BO des nach stetiger Proportion getheilten Halbmessers AO (§. 83).

§. **155.** Das Quadrat der Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Fünfeckes ist gleich der Summe aus dem Quadrate des Halbmessers und dem Quadrate der Seite des demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes.

Fig. 116.



Es seien (Fig. 116) $OA = r$ der Halbmesser, $AB = a$ und $AC = b$ die Seiten des eingeschriebenen regelmäßigen Fünfeckes und Zehneckes. Zieht man die OC, welche den Centriwinkel AOB des Fünfeckes halbirt, und halbirt man auch den Centriwinkel AOC des Zehneckes durch OD, deren Verlängerung OE senkrecht auf der Mitte von AC steht, so ist, wie man sich leicht überzeugt, $W. BAO = BOD = 54^0$, daher $\triangle BAO \sim BOD$; folglich $AB : BO = BO : BD$, oder wenn man die Abschnitte $AD = m$ und $BD = n$ setzt, $a : r = r : n$, und $an = r^2$.

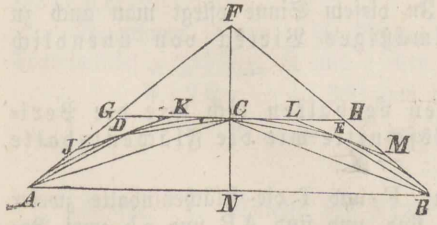
Zieht man noch CD, so ist das $\triangle ACD$ gleichschenklig (§. 52, 4), daher $W. ACD = CAD = ABC$, und $\triangle ABC \sim ACD$, folglich $AB : AC = AC : AD$, oder $a : b = b : m$, und $am = b^2$; mithin

$$an + am = r^2 + b^2, \text{ oder } a(n + m) = a^2 = r^2 + b^2.$$

V. Kreismessung.

§. **156.** Die Sehne eines Kreisbogens ist kleiner, die Summe der zwei durch seine Endpunkte bis zu ihrem Durchschnitte gezogenen Tangenten größer als der Kreisbogen.

Fig. 117.



1. Es sei C (Fig. 117) die Mitte eines Kreisbogens ACB, dessen Sehne AB ist. Zieht man AC und BC, so ist $AC + BC > AB$. Sind ferner D und E bezüglich die Mitten der Bogen ADC und BEC, und zieht man AD, CD, CE, BE, so ist $AD + CD > AC$, $CE + BE > BC$, daher die gebrochene Linie $ADCEB > AC + BC$ und um so mehr $> AB$. Fährt man auf diese Weise mit dem Halbiren der

Bogen fort und zieht immer durch je zwei auf einander folgende Punkte Sehnen, so wird die dadurch entstehende gebrochene Linie um so größer, je mehrere Punkte sie mit dem Kreisbogen gemeinschaftlich hat; in je mehreren Punkten aber beide Linien zusammenfallen, um so mehr müssen sie sich einander nähern. Hieraus folgt, daß jede solche gebrochene Linie kleiner als der Kreisbogen sein müsse, da dieselbe, wenn sie eben so groß oder größer als der Bogen wäre, bei fortwährender Zunahme sich diesem nicht nur nicht nähern, sondern von ihm um so mehr entfernen würde, in je mehreren Punkten beide Linien zusammenfallen. Es ist demnach um so mehr die Sehne AB kleiner als der Bogen ACB.

2. Es seien AF und BF die durch die Endpunkte des Bogens ACB gezogenen Tangenten. Zieht man auch durch C eine Tangente GH an den Bogen, so ist wegen $GH < GF + FH$ die gebrochene Linie $AGHB < AF + BF$. Zieht man ferner durch D und E Tangenten an den Bogen, so wird die gebrochene Linie $AJKLMB < AGHB$, und um so mehr $< AF + BF$. Wenn man auf diese Art die Halbirung der Bogen fortsetzt und durch die Halbirungspunkte Tangenten an den Bogen zieht, so wird die von diesen gebildete gebrochene Linie desto kleiner, je mehrere Punkte sie mit dem Bogen gemeinschaftlich hat, sich aber auch dem Bogen um so mehr nähern, in je mehreren Punkten beide Linien zusammenfallen. Es muß daher jede solche gebrochene Linie größer als der Kreisbogen sein, da dieselbe, wenn sie eben so groß oder kleiner als der Bogen wäre, bei fortwährendem Abnehmen durch die Vermehrung der Berührungspunkte sich diesem nicht nähern, sondern von ihm entfernen würde. Es ist somit $AF + BF >$ Bogen ACB.

Folgesätze. a) Die halbe Sehne AN ist kleiner, die Tangente AF größer als der Bogen AC.

b) Die Peripherie eines Kreises ist größer als der Umfang eines eingeschriebenen, und kleiner als der Umfang eines umgeschriebenen Vieleckes.

c) Die Kreisfläche ist größer als die Fläche eines eingeschriebenen, und kleiner als die Fläche eines umgeschriebenen Vieleckes.

Denn die Fläche des eingeschriebenen Vieleckes ist ein Theil der Kreisfläche, und diese wieder ein Theil des umgeschriebenen Vieleckes.

d) Die Umfänge der ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke können durch fortgesetzte Verdopplung ihrer Seitenzahl der Peripherie des Kreises, und eben so die Flächen der ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke der Fläche des Kreises beliebig nahe gebracht werden, so daß die Unterschiede kleiner werden, als jede noch so kleine angebbare Größe; d. h. der Kreis kann als die Grenze angesehen werden, welcher sich ein demselben ein- oder umgeschriebenes regelmäßiges Vieleck bei fortgesetzter Vermehrung seiner Seitenzahl ohne Ende nähert. In diesem Sinne pflegt man auch zu sagen: Der Kreis ist ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten.

§. 157. Homologe Kreisbogen verhalten sich wie die Peripherien, und homologe Kreisausschnitte wie die Flächeninhalte der zugehörigen ganzen Kreise.

Heißen P und p die Peripherien, F und f die Flächeninhalte zweier Kreise, deren Halbmesser OB und Ob sind, und sind AB und ab zwei Bogen, welche in diesen Kreisen zu dem Centriwinkel α gehören, so hat man

(§. 134) Bogen AB : P = m^0 : 360^0, und Bogen ab : p = m^0 : 360^0; daher Bogen AB : P = Bogen ab : p, oder

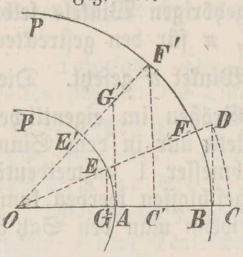
Bogen AB : Bogen ab = P : p.

Ebenso erhält man auch die Proportion:

Ausschnitt AOB : Ausschnitt aOb = F : f.

§. **158.** Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser.

Fig. 118.



Es seien (Fig. 118) P und p die Peripherien der mit den Halbmessern OA und OB beschriebenen Kreise. Wäre nun nicht p : P = OA : OB, so müßte die vierte Proportionale zu p, P und OA größer oder kleiner als OB sein.

Wäre p : P = OA : OC, wo OC > OB ist, so müßte, wenn man aus O den Bogen CD beschreibt, BD ⊥ OC errichtet, dann den Halbmesser DO, und die EG ⊥ OC zieht, (nach §. 157) Bogen AE : Bogen BF = p : P = OA : OC sein. Nun ist EG : BD = OE : OD = OA : OC; mithin wäre Bog. AE : Bog. BF = EG : BD, was nicht sein kann, da (nach §. 156 Folges. a) Bog. AE > EG, dagegen Bogen BF < BD ist.

Wäre ferner p : P = OA : OC', wo OC' < OB ist, so müßte, wenn man C'F' ⊥ OB errichtet, den Halbmesser OF', und die AG' ⊥ OB zieht, (nach §. 157) Bogen AE' : Bogen BF' = OA : OC' sein. Nun ist AG' : C'F' = OA : OC'; mithin wäre Bogen AE' : Bogen BF' = AG' : C'F', was nicht sein kann, da (nach §. 156, Folges. a) Bogen AE' < AG', dagegen Bogen BF' > C'F' ist.

Es ist daher p : P = OA : OB.

Folgesätze. a) Drückt man die zu den Peripherien p und P gehörigen Halbmesser durch r und R, die entsprechenden Durchmesser durch d und D aus, so ist p : P = r : R = d : D. Daraus erhält man p : d = P : D, d. h. das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser ist in allen Kreisen ein constantes. Die Mathematiker bezeichnen dieses constante Verhältniß durch die Zahl π, so daß $\frac{p}{d} = \frac{p}{2r} = \pi$ ist. Die Zahl π wird weiter unten (§. 168) berechnet werden.

b) Es ist demnach $p = d\pi$ oder $p = 2r\pi$, d. h. die Peripherie eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem Durchmesser und der Zahl π.

§. **159.** Zwei homologe Bogen verhalten sich so wie ihre Halbmesser.

Bezeichnen B und b die Längen zweier Kreisbogen, welche zu demselben Centriwinkel α gehören, R und r ihre Halbmesser, so hat man

B : $2R\pi$ = α : 360 und b : $2r\pi$ = α : 360; daher

$B = R \cdot \frac{\alpha\pi}{180}$ und $b = r \cdot \frac{\alpha\pi}{180}$; somit

B : b = R : r.

Zusätze. 1. Mittelst des Ausdruckes $b = r \cdot \frac{\alpha\pi}{180}$ kann man, wenn von den drei Größen b, α, r zwei gegeben sind, aus denselben die dritte finden.

2. Für $r = 1$ ist $b = \frac{\alpha\pi}{180}$. Der Ausdruck $\frac{\alpha\pi}{180}$ gibt also die Länge des Bogens von α Grad für den Halbmesser 1 an; wir wollen diesen Ausdruck kürzer durch arc α bezeichnen.

3. Aus $B = R \,.\, \text{arc}\ \alpha$ folgt: die Länge eines Kreisbogens ist gleich der Länge des homologen Bogens für den Halbmesser 1 multiplicirt mit dem Halbmesser des ersteren.

4. In der angewandten Mathematik wird das Längenmaß eines Bogens für den Halbmesser 1 häufig auch als Maß des zugehörigen Winkels selbst angenommen und hiernach 2π für den vollen Winkel, π für den gestreckten, $\frac{\pi}{2}$ für den rechten Winkel, allgemein arc α für den Winkel α gesetzt. Dies ist jedoch, da Längen und Winkel als ungleichartige Größen im eigentlichen Sinne nicht durch einander gemessen werden können, stets nur in dem Sinne zu verstehen, daß aus der Bogenlänge für den Halbmesser 1 unzweideutig auch auf die Anzahl Grade des zugehörigen Winkels geschlossen werden kann. Diese Bedeutung muß auch im Auge behalten werden, wenn man den Satz 3. kürzer in folgender Weise ausdrückt:

Ein Kreisbogen ist gleich seinem Winkel multiplicirt mit dem Halbmesser.

§. **160.** Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Producte aus der Peripherie und dem halben Halbmesser.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus §. 117, 4, sobald man den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet. Wir wollen jedoch für denselben hier einen strengen indirecten Beweis folgen lassen.

Man bezeichne durch f und p bezüglich den Flächeninhalt und die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser r ist. Wäre nun nicht $f = p \,.\, \frac{r}{2}$, so müßte $f \gtrless p \,.\, \frac{r}{2}$ sein.

Wäre $f > p \,.\, \frac{r}{2}$, und zwar $f - p \,.\, \frac{r}{2} = w$, so ließe sich (vermöge §. 156, Folges. d) dem Kreise immer ein regelmäßiges Vieleck einschreiben, dessen Flächeninhalt sich von dem Flächeninhalte des Kreises um weniger als jede noch so kleine gegebene Größe w unterscheidet. Heißt u der Umfang eines solchen Vieleckes und a der Abstand seines Mittelpunktes von der Seite, so wäre $f - u \,.\, \frac{a}{2} < w$, und demnach $f - u \,.\, \frac{a}{2} < f - p \,.\, \frac{r}{2}$, somit $u \,.\, \frac{a}{2} > p \,.\, \frac{r}{2}$, was nicht sein kann, da $u < p$ und $a < r$ ist.

Wäre ferner $f < p \,.\, \frac{r}{2}$, und zwar $p \,.\, \frac{r}{2} - f = w'$, so ließe sich dem Kreise immer ein regelmäßiges Vieleck umschreiben, dessen Flächeninhalt sich von dem Flächeninhalte des Kreises um weniger als jede noch so kleine gegebene Größe w' unterscheidet. Heißt u' der Umfang eines solchen Vieleckes, so wäre $u' \,.\, \frac{r}{2} - f < w'$ und demnach $u' \,.\, \frac{r}{2} - f < p \,.\, \frac{r}{2} - f$, daher $u' \,.\, \frac{r}{2} < p \,.\, \frac{r}{2}$, was nicht sein kann, da $u' > p$ ist.

Es ist daher $f = p \,.\, \frac{r}{2}$.

Folgesatz. Aus $f = p \cdot \frac{r}{2}$ erhält man, da $p = 2r\pi$ ist,

$$f = r^2\pi,$$

d. h. der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem Quadrate des Halbmessers und der Zahl π.

§. **161.** Die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich wie Quadrate ihrer Halbmesser.

Bezeichnen F und f die Flächeninhalte zweier Kreise, deren Halbmesser R und r sind, so hat man $F = R^2\pi$ und $f = r^2\pi$, daher

$$F : f = R^2 : r^2.$$

Folgesatz. Die Flächeninhalte zweier homologer Kreisausschnitte verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser (§. 157).

§. **162.** Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist gleich dem Producte aus dem im Längenmaße ausgedrückten Bogen und dem halben Halbmesser.

Bezeichnet f den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes, der für den Halbmesser r dem Centriwinkel α entspricht, so hat man

$f : r^2\pi = \alpha : 360$ (§. 134, 2), daher $f = \frac{r^2\alpha\pi}{360} = \frac{r\alpha\pi}{180} \cdot \frac{r}{2}$,

oder, da $\frac{r\alpha\pi}{180} = b$ die Länge des zu dem Centriwinkel α gehörigen Bogens bezeichnet (§. 159),

$$f = b \cdot \frac{r}{2}$$

Zusatz. Der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes ist, je nachdem derselbe kleiner oder größer als der Halbkreis ist, gleich der Differenz oder der Summe aus der Fläche des zugehörigen Kreisausschnittes und der Dreiecksfläche, welche von der Sehne und den beiden Halbmessern begrenzt wird.

§. **163.** 1. Der Flächeninhalt eines Kreisringes ist gleich dem Producte aus der halben Summe der beiden Kreisumfänge und der Breite des Ringes.

Bezeichnet man durch f den Flächeninhalt des Kreisringes, durch R und P den Halbmesser und die Peripherie des größeren, durch r und p den Halbmesser und die Peripherie des kleineren der zwei concentrischen Kreise, so ist

$$f = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\,\pi = (R + r)\,(R - r)\,\pi$$
$$= \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot (R - r) = \frac{P + p}{2} \cdot (R - r).$$

2. Der Flächeninhalt eines Ringausschnittes ist gleich dem Producte aus der halben Summe der beiden im Längenmaße ausgedrückten Bogen und der Breite des Ringausschnittes.

Der Beweis ist dem vorigen analog.

VI. Aufgaben.

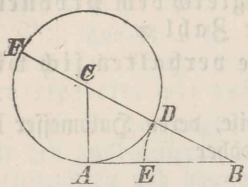
§. **164.** Constructionsaufgaben.

1. Den Mittelpunkt eines Kreises oder Kreisbogens zu finden. (Mittelst zweier nicht paralleler Sehnen nach §. 126.)

2. Eine gegebene Strecke nach stetiger Proportion (im mittleren und äußeren Verhältnisse) zu theilen.

Man ziehe (Fig. 119) $AC \perp AB$, mache $AC = \frac{1}{2} AB$, beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, und ziehe durch B und C eine Secante, welche den Kreis in zwei Punkten D und F schneidet; macht man nun $BE = BD$, so ist AB im Punkte E nach stetiger Proportion getheilt.

Fig. 119.



Denn $BF : AB = AB : BD$ (§. 138, 3), daher auch $AB : (BF - AB) = BD : (AB - BD)$.

Nun ist

$BF - AB = BF - DF = BD = BE$,

$AB - BD = AB - BE = AE$; mithin

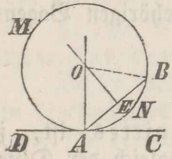
$AB : BE = BE : AE$.

3. Einen Kreisbogen zu halbiren.

Man beschreibe aus den Endpunkten mit demselben Halbmesser zwei Kreisbogen und ziehe von ihrem Durchschnittspunkte zu dem gegebenen Kreismittelpunkte eine Strecke; diese halbirt den Kreisbogen.

4. Ueber einer Strecke als Sehne einen Kreisabschnitt zu beschreiben, in welchem alle Peripheriewinkel einem gegebenen Winkel oder dessen Nebenwinkel gleich sind.

Fig. 120.



Es sei BAC (Fig. 120) der gegebene Winkel und AB die gegebene Strecke. Man errichte auf AB in der Mitte E die Senkrechte EO, ziehe auch $AO \perp AC$, und beschreibe aus dem Durchschnittspunkte O der Geraden EO und AO als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AO = OB$ einen Kreis. Dann ist (§. 137) AMBA der Kreisabschnitt, in welchem der gegebene Winkel BAC, und ANBA der Kreisabschnitt, in welchem sein Nebenwinkel BAD als Peripheriewinkel liegt.

5. Durch einen gegebenen Punkt auf der Peripherie eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen. (§. 131, 1.)

6. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Ist C (Fig. 92) der gegebene Punkt und O der Mittelpunkt des Kreises, so ziehe man CO, beschreibe über dieser Strecke als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten A und B schneidet; die Geraden CA und CB sind die gesuchten Tangenten (§. 132).

7. Den äußeren oder den inneren Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise zu finden (§. 144).

8. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Man bestimme den äußeren und den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise, ziehe aus denselben Tangenten an den einen Kreis (Aufgabe 6), so sind diese zugleich Tangenten des zweiten Kreises (§. 145, Folges. b).

§. **165.** Das Berührungsproblem des Apollonius.

Wenn einzelne Punkte, gerade Linien oder Kreise, zusammen drei Elemente, gegeben sind, einen Kreis zu construiren, welcher durch die gegebenen Punkte geht und die gegebenen Geraden oder Kreise berührt.

Dieses Problem umfaßt zehn Aufgaben; nämlich:

Einen Kreis zu construiren, welcher

1. durch drei gegebene Punkte geht;
2. durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt;
3. durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt;
4. durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Gerade berührt;
5. durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt;
6. durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kreise berührt;
7. drei gegebene Gerade berührt;
8. zwei gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt;
9. eine gegebene Gerade und zwei gegebene Kreise berührt;
10. drei gegebene Kreise berührt.

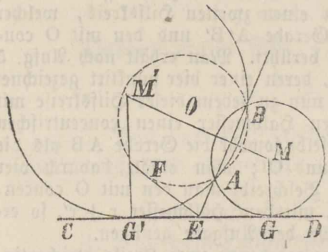
Die neuere Geometrie liefert für das Apollonische Tactionsproblem eine allgemeine Lösung, welche wir weiter unten im Anhange (§. 189) bringen werden. Hier beschränken wir uns darauf, nur für einige der obigen Aufgaben die Auflösungen anzuführen.

a) Aufg. 1: Einen Kreis zu construiren, welcher durch drei gegebene Punkte geht.

Die Lösung dieser Aufgabe ist in §. 126 enthalten. Sie führt auf einen einzigen Kreis. Liegen aber die gegebenen drei Punkte in einer Geraden, so gibt es keinen Kreis.

b) Aufg. 2: Einen Kreis zu construiren, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Fig. 121.

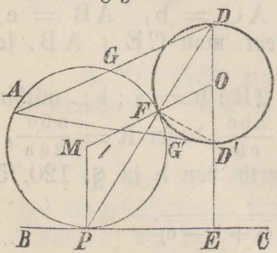


Es seien (Fig. 121) die beiden Punkte A und B und die Gerade CD gegeben; M sei der gesuchte Kreis und G dessen Berührungspunkt mit der CD. Beschreibt man durch A und B einen beliebigen Kreis O, verlängert die durch A und B gehende Gerade bis zum Durchschnitte E mit der gegebenen Geraden CD und zieht von E an den Hilfskreis O die Tangente EF, so ist für den Kreis M (nach §. 138, 3) EB:EG = EG:EA, für den Kreis O aber auch EB : EF = EF : EA, woraus EG = EF folgt. Dadurch ist EG, und folglich der Berührungspunkt G bestimmt. Durch die Punkte A, B und G kann nun der Kreis M nach Aufg. 1 beschrieben werden. — Macht man EG' = EF und beschreibt durch A, B und G' den Kreis M', so genügt auch dieser der vorgelegten Aufgabe.

c) Aufg. 4: Einen Kreis zu construiren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Gerade berührt.

Der Mittelpunkt eines Kreises, welcher zwei gegebene Gerade berührt, liegt in der Halbirungslinie des von diesen Geraden gebildeten Winkels (§. 132, Folges. c). Fällt man auf die Halbirungslinie von dem gegebenen Punkte eine Senkrechte, und verlängert dieselbe so, daß die Verlängerung der Senkrechten dieser selbst gleich ist, so ist der Endpunkt derselben ein zweiter Punkt, durch welchen der gesuchte Kreis gehen muß. Die Aufgabe ist somit auf die Aufgabe 2 zurückgeführt und gibt, wie diese, zwei Auflösungen.

Fig. 122.



d) Aufg. 5: Einen Kreis zu construiren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Es seien (Fig. 122) der Punkt A, die Gerade BC und der Kreis O gegeben. Man denke sich die Aufgabe gelöst und sei M der gesuchte Kreis, welcher die gegebene Gerade

in P und den gegebenen Kreis in F berührt. Zieht man den Durchmesser DD'E ⊥ BC, ferner die Geraden MP, OF, MF, DF und PF, so sind OFM und DFP gerade Linien (§. 142, Folges. a und §. 143). Zieht man nun D'F und AD, welche letztere den Kreis M in G schneidet, so ist △DEP ∽ DFD'; daher DE : DP = DF : DD', ferner ist DP : DA = DG : DF (§. 138, 2), mithin durch Multiplication DE : DA = DG : DD', woraus DG bestimmt werden kann. Somit ist der Punkt G gegeben und die Aufgabe reducirt sich auf die 2. Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei Punkte A und G geht und die Gerade BC berührt.

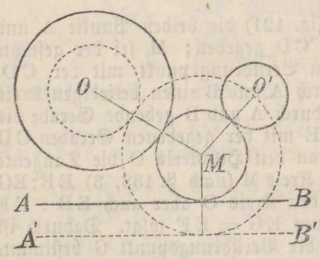
Die Auflösung gibt vier Kreise, von denen zwei den gegebenen Kreis von außen, zwei von innen berühren.

e) Aufg. 7: Einen Kreis zu construiren, welcher drei gegebene Gerade berührt.

Es seien G, G', G'' die drei gegebenen Geraden. Nach §. 132, Folges. c ist der geom. Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche die Geraden G und G' berühren, die Halbirungslinie des von G und G' gebildeten Winkels, ebenso der geom. Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche die Geraden G' und G'' berühren, die Halbirungslinie des von G und G'' gebildeten Winkels; der Durchschnittspunkt dieser beiden Linien, durch welchen auch die Halbirungslinie des von G' und G'' gebildeten Winkels gehen muß (§. 67, 2), ist daher der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. — Construirt man zu den von den drei Geraden gebildeten Winkeln die Nebenwinkel, so geben die Halbirungslinien derselben noch die Mittelpunkte von drei anderen Kreisen, welche gleichfalls alle drei Gerade berühren und die äußeren Berührungskreise heißen, während der frühere der innere Berührungskreis genannt wird.

f) Aufg. 8: Einen Kreis zu construiren, welcher eine gegebene Gerade und zwei gegebene Kreise berührt.

Fig. 123.



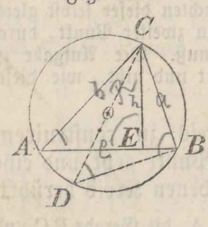
Es seien (Fig. 123) AB die gegebene Gerade, und O und O' mit den Halbmessern r und r' die gegebenen Kreise. Man ziehe parallel mit AB in dem Abstande r' die Hilfslinie A'B', beschreibe einen mit O concentrischen Hilfskreis mit dem Halbmesser r − r', und construire dann einen zweiten Hilfskreis, welcher durch O' geht, die Gerade A'B' und den mit O concentrischen Hilfskreis berührt. Man erhält nach Aufg. 5 vier solche Hilfskreise, deren einer hier punktirt gezeichnet ist. Beschreibt man nun zu jedem dieser Hilfskreise mit einem um r' kleineren Halbmesser einen concentrischen Kreis, so berührt derselbe sowohl die Gerade AB als die gegebenen Kreise O und O'; man erhält dadurch vier Berührungskreise. — Beschreibt man den mit O concentrischen Hilfskreis anstatt mit dem Halbmesser r − r', mit dem Halbmesser r + r', so erhält man auf ähnliche Weise vier weitere Kreise, welche der Aufgabe genügen.

Von den acht gefundenen Kreisen berühren vier die gegebenen zwei Kreise gleichartig, vier ungleichartig.

§. **166.** Rechnungsaufgaben über Sehnen- und Tangentenvielecke.

1. Aus den Seiten eines Dreieckes den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises zu bestimmen.

Fig. 124.



Es sei O (Fig. 124) der Mittelpunkt und CD ein Durchmesser des dem Dreiecke ABC umgeschriebenen Kreises, ferner BC = a, AC = b, AB = c, CE = h und OC = R. Zieht man CE ⊥ AB, so ist △CBD ∽ CEA, daher CD : CA = CB : CE, oder 2R : b = a : h; mithin $2R = \frac{ab}{h}$, und auch $2R = \frac{abc}{ch}$, daher $R = \frac{abc}{2ch}$, oder mit Rücksicht auf den Werth von h in §. 120, 5

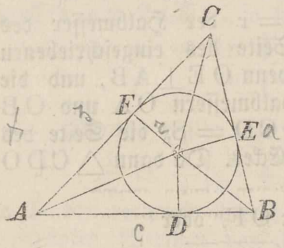
$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}}.$$

Heißt f der Flächeninhalt des Dreieckes, so hat man wegen $ch = 2f$ auch

$$R = \frac{abc}{4f}.$$

Ist das Dreieck gleichseitig, also $a = b = c$, so ist $abc = a^3$ und $f = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; also $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Fig. 125.



2. Aus den Seiten eines Dreieckes den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

Es sei O (Fig. 125) der Mittelpunkt, $OD = OF = OE = r$ der Halbmesser des dem Dreiecke ABC eingeschriebenen Kreises, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, und f der Flächeninhalt dieses Dreieckes. Man hat

$$\triangle BOC + AOC + AOB = f, \text{ oder}$$

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = f; \text{ also } r = \frac{2f}{a+b+c}, \text{ oder}$$

$$r = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}}{a+b+c}.$$

Für das gleichseitige Dreieck, dessen Seite a ist, hat man $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Zusatz. Heißen r_1, r_2, r_3 die Halbmesser der Kreise, welche je eine der Seiten a, b, c und die Verlängerungen der beiden anderen berühren, deren Mittelpunkt daher in den Halbirungslinien der Außenwinkel des Dreieckes liegen (§. 67, 2, Zusatz), so erhält man auf gleiche Weise

$$r_1 = \frac{2f}{b+c-a}, \quad r_2 = \frac{2f}{a+c-b}, \quad r_3 = \frac{2f}{a+b-c}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \text{ und } r r_1 r_2 r_3 = f^2.$$

3. Aus dem Halbmesser eines Kreises die Seite des ihm eingeschriebenen Quadrates, und umgekehrt zu berechnen.

$$\text{a) } s_4 = r\sqrt{2}; \qquad \text{b) } r = \frac{s_4\sqrt{2}}{2}.$$

4. Aus dem Halbmesser eines Kreises die Seite des ihm eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes zu berechnen.

Nach §. 154 ist $r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$, woraus $s_{10}^2 = r^2 - r s_{10}$, und wenn man zu beiden Seiten $\frac{s_{10}^2}{4}$ addirt, $s_{10}^2 + \frac{s_{10}^2}{4} = r^2 - r s_{10} + \frac{s_{10}^2}{4}$ oder $\frac{5 s_{10}^2}{4} = \left(r - \frac{s_{10}}{2}\right)^2$ folgt. Es ist daher $\frac{s_{10}}{2}\sqrt{5} = r - \frac{s_{10}}{2}$, und $\frac{s_{10}}{2}(\sqrt{5}+1) = r$, folglich $\frac{s_{10}}{2} = \frac{r}{\sqrt{5}+1} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{4}$; also

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1).$$

5. Die Seite eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Fünfeckes zu berechnen. Nach §. 155 ist $s_5^2 = s_{10}^2 + r^2$, daher

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

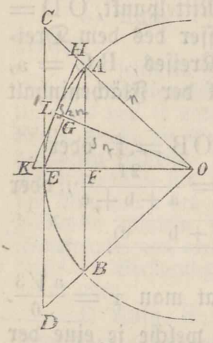
6. Aus der Seite eines regelmäßigen Fünfeckes a) den Halbmesser r des umgeschriebenen Kreises, b) den Abstand a des Mittelpunktes von einer Seite, c) die Länge d einer Diagonale zu berechnen.

a) $r = \frac{s_5}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$, b) $a = \frac{s_5}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$,

c) $d = \frac{s_5}{2}(1 + \sqrt{5})$.

7. Aus der Seite s_n eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes die Seite S_n eines demselben Kreise umgeschriebenen regelmäßigen Vieleckes von gleicher Seitenzahl zu bestimmen.

Fig. 126.



Es sei (Fig. 126) $OA = r$ der Halbmesser des Kreises und $AB = s_n$ die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen n-Eckes, so ist, wenn $OE \perp AB$, und die Tangente durch E von den Halbmessern OA und OB in C und D geschnitten wird, $CD = S_n$ die Seite des umgeschriebenen regelmäßigen n-Eckes. Da dann $\triangle CDO \sim ABO$ ist, so folgt

$$CD : AB = OE : OF, \text{ oder}$$

$$S_n : s_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}, \text{ daher}$$

$$S_n = \frac{r\,s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

8. Aus der Seite s_n eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes die Seite s_{2n} eines demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes von doppelter Seitenzahl zu berechnen.

Es sei (Fig. 126) $OA = r$ und $AB = s_n$, so ist, wenn man $OE \perp AB$ zieht, die Sehne $AE = s_{2n}$ die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen 2n-Eckes. Man hat nun $AE^2 = AF^2 + EF^2$; aber $AF^2 = \frac{s_n^2}{4}$ und

$$EF^2 = (OE - OF)^2 = \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)^2 = r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$$

$$+ r^2 - \frac{s_n^2}{4} = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} - \frac{s_n^2}{4}, \text{ daher}$$

$$AE^2 = \frac{s_n^2}{4} + 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} - \frac{s_n^2}{4}, \text{ also}$$

$$s_{2n}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}, \text{ und}$$

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

§. **167.** 1. Die Beziehungen zwischen den Umfängen der einem Kreise ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke von n und 2n Seiten abzuleiten.

Es sei (Fig. 126) $OA = r$, $AB = s_n$, $CD = S_n$, $AE = s_{2n}$ und $HK = S_{2n}$, wo dann $OK \perp AB$ ist. Setzt man $FO = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} = a$, also $s_n = 2\sqrt{r^2 - a^2}$, so erhält man für die Seiten dieser Vielecke mit Rücksicht auf die Aufgaben 7 und 8 in §. 166 folgende Ausdrücke:

$$s_n = 2\sqrt{r^2 - a^2},$$

$$S_n = \frac{r\,s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}} = \frac{2r\sqrt{r^2 - a^2}}{a},$$

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}} = \sqrt{2r(r-a)},$$

$$S_{2n} = \frac{r\sqrt{2r(r-a)}}{\sqrt{r^2 - \frac{2r(r-a)}{4}}} = 2r\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}.$$

Heißen nun u_n, U_n, u_{2n}, U_{2n} die Umfänge der ein- und umgeschriebenen n-Ecke und 2n-Ecke, so hat man

$$u_n = 2n\sqrt{r^2 - a^2}, \qquad u_{2n} = 2n\sqrt{2r(r-a)},$$

$$U_n = \frac{2nr}{a}\sqrt{r^2 - a^2}; \qquad U_{2n} = 4nr\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}$$

Daraus ergibt sich für die reciproken Werthe der Umfänge

$$\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{U_n} + \frac{1}{u_n}\right\} \ldots 1) \qquad \frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{U_{2n}} \cdot \frac{1}{u_n}} \ldots 2)$$

d. h. der reciproke Werth von U_{2n} ist das arithmetische Mittel zwischen den reciproken Werthen von U_n und u_n; und: der reciproke Werth von u_{2n} ist das geometrische Mittel zwischen den reciproken Werthen von U_{2n} und u_n.

Diese Formeln erscheinen besonders zur successiven Berechnung der Umfänge regelmäßiger Vielecke geeignet. Z. B. die Seite s_6 des eingeschriebenen Sechseckes ist gleich dem Halbmesser und ist daher mit diesem gegeben. Aus s_6 berechnet man S_6, und aus beiden u_6 und U_6; aus $\frac{1}{U_6}$ und $\frac{1}{u_6}$ erhält man nach der Formel 1) $\frac{1}{U_{12}}$, aus $\frac{1}{U_{12}}$ und $\frac{1}{u_6}$ nach der Formel 2) $\frac{1}{u_{12}}$; aus $\frac{1}{U_{12}}$ und $\frac{1}{u_{12}}$ berechnet man weiter $\frac{1}{U_{24}}$ und $\frac{1}{u_{24}}$, aus diesen $\frac{1}{U_{48}}$ und $\frac{1}{u_{48}}$, u. s. f.

2. Die Beziehungen zwischen den Flächeninhalten der einem Kreise ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke von n und 2n Seiten abzuleiten.

Behält man die in der Aufg. 1 eingeführten Bezeichnungen, nennt f_n, F_n, f_{2n}, F_{2n} die Flächeninhalte der ein- und umgeschriebenen n-Ecke und 2n-Ecke, und ist (Fig. 126) $OG \perp AE$, so erhält man mit Rücksicht auf die Resultate der Aufg. 8 in §. 166 und auf §. 117, 4,

da $OG = \sqrt{r^2 - \frac{s_{2n}^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \frac{2r(r-a)}{4}} = \frac{\sqrt{2r(r+a)}}{2}$ ist,

$$f_n = 2n\sqrt{r^2 - a^2} \cdot \frac{a}{2} = na\sqrt{r^2 - a^2},$$

$$F_n = \frac{2nr}{a}\sqrt{r^2 - a^2} \cdot \frac{r}{2} = \frac{nr^2}{a}\sqrt{r^2 - a^2},$$

$$f_{2n} = 2n\sqrt{2r(r-a)} \cdot \frac{\sqrt{2r(r+a)}}{4} = nr\sqrt{r^2 - a^2},$$

$$F_{2n} = 4nr\sqrt{\frac{r-a}{r+a}} \cdot \frac{r}{2} = 2nr^2\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}.$$

Nimmt man die reciproken Werthe der Flächeninhalte, so ergeben sich analog mit den Ausdrücken 1) und 2) in Aufg. 1 die Formeln:

$$\frac{1}{F_{2n}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{F_n} + \frac{1}{f_n}\right\} \ldots 1) \qquad \frac{1}{f_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{F_{2n}} \cdot \frac{1}{f_n}} \ldots 2).$$

§. 168. Rechnungsaufgaben über die Peripherie und den Flächeninhalt des Kreises und seiner Theile.

1. Die Zahl π, d. i. das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zu dem Durchmesser zu berechnen.

Nimmt man den Halbmesser eines Kreises $r = 1$, also den Durchmesser $d = 2$ an, so ist, wenn p die Peripherie bezeichnet, $\pi = \frac{p}{2}$. Die Größe π kann hiernach als der halbe Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$ ist, betrachtet werden.

Um daher 2π zu bestimmen, berechnet man für $r = 1$ die Umfänge u_n und U_n eines ein- und umgeschriebenen regelmäßigen n-Eckes; man erhält dadurch, da (nach §. 156, Folgesatz b) $u_n < 2\pi < U_n$ ist, für 2π zwei Näherungswerthe, welche durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl der Vielecke beliebig nahe an einander gerückt werden können, und durch welche daher π so genau als man will bestimmt werden kann.

Geht man von dem eingeschriebenen Sechsecke aus, dessen Seite $s_6 = r = 1$ ist, berechnet S_6, dann u_6 und U_6, und aus diesen Werthen entweder nach den Aufgaben 7 und 8 in §. 166, oder einfacher nach den Formeln 1) und 2) der Aufgabe 1 in §. 167 die Umfänge der eingeschriebenen und umgeschriebenen 12-, 24-, 48-, .. Ecke, so erhält man nach fortgesetzter Rechnung

$$U_{3072} = 6 \cdot 283187\ldots \text{ und } u_{3072} = 6 \cdot 283183\ldots$$

Die Umfänge des umschriebenen und eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes von 3072 Seiten unterscheiden sich demnach erst in der sechsten Decimale; da nun die Peripherie des Kreises zwischen jenen beiden Umfängen liegt, so muß der gemeinschaftliche Theil obiger Zahlen die Peripherie selbst ausdrücken, somit ist $2\pi = 6 \cdot 28318\ldots$, und daher

$$\pi = 3 \cdot 14159\ldots$$

Nach dem eben angegebenen Verfahren kann die Zahl π mit jeder beliebigen Genauigkeit entwickelt werden. Auf 20 Decimalstellen hat man

$$\pi = 3 \cdot 14159\ 26535\ 89793\ 23846.$$

Die Anzahl der Decimalen, die man für π beibehält, hängt von dem Grade der Genauigkeit ab, welche verlangt wird.

Die Zahl π ist zuerst von Archimedes bestimmt worden, welcher $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ fand. Die erste Zahl wird häufig gebraucht, wo es nicht auf große Genauigkeit ankommt; sie ist genauer als der ebenfalls oft gebrauchte Näherungswerth $3 \cdot 14$.

Adrian Metius fand $\pi = \frac{355}{113}$, eine Zahl, welche sich in der Form 11 3 | 3 55 leicht dem Gedächtnisse einprägt; sie ist zu groß, aber der Fehler ist kleiner als $\frac{3}{10^7}$.

Ludolf van Ceulen berechnete π auf 35 Decimalstellen; nach ihm wird π auch die Ludolfische Zahl genannt.

2. In einem Kreise ist r der Halbmesser, d der Durchmesser, p die Peripherie, f der Flächeninhalt; aus einer dieser Größen die anderen zu berechnen.

Fundamentalgleichungen:

$$1)\ d = 2r; \qquad 2)\ p = 2r\pi; \qquad 3)\ f = r^2\pi.$$

3. Die Länge eines Bogens von α Graden für den Halbmesser r ist a, der Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes f; aus zweien dieser Größen die beiden anderen zu berechnen.

Fundamentalgleichungen:

$$1)\ \frac{a}{2r\pi} = \frac{\alpha}{360}; \qquad 2)\ f = \frac{ar}{2}.$$

4. Die Halbmesser zweier concentrischer Kreise sind R und r, ihre Peripherien P und p, die Breite des von ihnen gebildeten Ringes c, der Flächeninhalt desselben f; aus zweien dieser Größen die übrigen zu berechnen.

Fundamentalgleichungen:

$$1)\ c = R - r; \quad 2)\ f = (R^2 - r^2)\pi; \quad 3)\ f = (P + p).\frac{c}{2}.$$

VII. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. 169. Uebungssätze.

1. Unter allen Sehnen, welche durch einen Punkt innerhalb eines Kreises gezogen werden können, ist diejenige die kleinste, welche auf dem durch diesen Punkt gezogenen Halbmesser senkrecht steht. (§. 130, 7.)

2. Kreisbogen zwischen parallelen Sehnen sind einander gleich. (Beweis aus der Gleichheit der Wechselwinkel und §. 135, Folges. b.)

3. Zieht man durch die Eckpunkte eines in einen Kreis beschriebenen Rechteckes Tangenten an denselben, so schließen diese einen Rhombus ein. (§. 132.)

4. Die Diagonalen eines Sehnenviereckes verhalten sich wie die Summen der Producte aus je zwei die Diagonale einschließenden Seiten.

Man bestimmt die Flächeninhalte der zwei Dreiecke, in welche das Viereck durch die eine Diagonale zerlegt wird, mit Rücksicht auf §. 166, 1. aus den drei Seiten und dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises, dann ebenso die Flächeninhalte der beiden Dreiecke, in welche das Viereck durch die zweite Diagonale zerlegt wird, und setzt die Summe der ersteren gleich der Summe der letzteren.

5. In jedem einem Kreise eingeschriebenen Vielecke von gerader Seitenzahl ist

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots,$$

wo α_n den nten Vieleckswinkel bezeichnet.

Man zieht zu den Eckpunkten Halbmesser und wendet §. 40, 1, Folges. a an.

6. In jedem einem Kreise umgeschriebenen Vielecke von gerader Seitenzahl ist

$$s_1 + s_3 + s_5 \ldots = s_2 + s_4 + s_6 + \ldots,$$

wo s_n die nte Vielecksseite bezeichnet. (§. 132.)

§. 170. Constructionsaufgaben.

1. Den Kreisumfang in 2, 4, 8, 16,..gleiche Theile zu theilen.

2. Den Kreisumfang in 3, 6, 12, 24,..gleiche Theile zu theilen (§. 153).

3. Den Kreisumfang in 5, 10, 20, 40,..gleiche Theile zu theilen (§. 154).

4. Die Peripherie eines Kreises in 15, 30, 60,..gleiche Theile zu theilen. $\left(\frac{p}{15} = \frac{p}{6} - \frac{p}{10}\right)$.

5. Um ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben (§. 147, a).

6. In ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben (§. 147, b).

7. Einem gegebenen Kreise

a) ein gleichseitiges Dreieck, ein regelmäßiges Sechseck, Zwölfeck,..

b) ein Quadrat, ein regelmäßiges Achteck, Sechszehneck,..

c) ein regelmäßiges Fünfeck, Zehneck,..

d) ein regelmäßiges Fünfzehneck ein- und umzuschreiben (§. 151, 2).

8. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Peripherie der Summe oder Differenz der Peripherien zweier gegebener Kreise gleich ist.

9. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Flächeninhalt der Summe oder Differenz der Flächeninhalte zweier gegebener Kreise gleich ist.

10. Aus einem gegebenen Mittelpunkte einen Kreis zu beschreiben, welcher

a) eine gegebene Gerade berührt (§. 131, 2);

b) einen gegebenen Kreis berührt (§. 142, b).

11. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher

a) durch zwei gegebene Punkte geht (§. 20, Folges. e);

b) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt;

c) durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt;

d) zwei gegebene Gerade berührt;

e) eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt;

f) zwei gegebene Kreise berührt.

§. 171. Rechnungsaufgaben.

1. In einem Kreise ist r der Halbmesser, b eine Sehne und d ihr Abstand vom Mittelpunkte; aus zweien dieser Größen die dritte zu berechnen.

2. In einem Kreise ist (§. 168, 2)

a) gegeben $r = 5^m\ 2^{dm}\ 8^{cm}$; zu suchen p und f.
b) „ $p = 12{\cdot}56636^m$; „ „ r „ f.
c) „ $f = 349\square^{dm}$; „ „ d „ p.

3. In einem Kreise ist (§. 168, 3)

a) gegeben $\alpha = 35^0\ 40'$, $r = 256^m$; zu suchen a und f.
b) „ $\alpha = 50^0\ 8'\ 14''$, $f = 3{\cdot}567\square^{dm}$; „ „ r „ a.
c) „ $a = 0{\cdot}15708^m$, $r = 4^{dm}$; „ „ α „ f.
d) „ $a = 2{\cdot}4434^m$, $f = 2{\cdot}5762\square^m$; „ „ r „ α.

4. Wie lang ist arc 1^0, arc $1'$, arc $1''$? (§. 159.)

5. Die Länge eines Kreisbogens ist dem Durchmesser gleich; wie groß ist der zugehörige Winkel?

6. Eine Eisenbahn soll im Bogen eines Kreises vom Halbmesser $= 1000^m$ aus einer Richtung in eine andere, die mit der ersteren einen Winkel von 45^0 macht, übergeleitet werden; wie lang ist der Kreisbogen zwischen den Punkten, für welche jene Richtungen zwei Tangenten bilden?

7. Berechne die Fläche eines Kreisabschnittes, dessen Halbmesser $= r$ und dessen Sehne dem Halbmesser gleich ist.

8. Bei einem Kreisringe ist (§. 168, 4)

a) gegeben $R = 6^{dm}\ 8^{cm}$, $r = 4^{dm}\ 5^{cm}$; zu suchen P, p, c, f.
b) „ $R = 3{\cdot}12^m$, $p = 11{\cdot}56^m$; „ „ r, P, c, f.
c) „ $r = 0{\cdot}75^m$, $f = 1{\cdot}836\square^m$; „ „ R, P, p, c.
d) „ $P = 5^m\ 2^{dm}$, $c = 0{\cdot}24^m$; „ „ R, r, p, f.
e) „ $p = 7{\cdot}134^{dm}$, $f = 5{\cdot}793\square^{dm}$; „ „ R, r, P, c.
f) „ $c = 2{\cdot}37^{dm}$, $f = 8{\cdot}038\square^{dm}$; „ „ R, r, P, p.

9. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Ringausschnittes, dessen Bogen $0{\cdot}5^m$ und $0{\cdot}4^m$ zu Halbmessern haben und zu einem Centriwinkel von 48^0 gehören?

10. Das Auge eines Beobachters auf der Erdoberfläche sieht auf derselben so weit, als die Tangente angibt, welche vom Auge nach der Erde gezogen wird; wie groß ist die Gesichtsweite w, wenn h die Höhe des Auges über der Erdoberfläche und r den Halbmesser der Erde bezeichnet?

11. Die Halbmesser zweier Kreise mit der Centrale $5{\cdot}4^m$ sind $1{\cdot}2^m$ und $0{\cdot}5^m$; wie groß ist der Abstand a) des äußeren, b) des inneren Aehnlichkeitspunktes von dem Mittelpunkte m) des kleineren, n) des größeren Kreises?

12. In einen Kreis mit dem Halbmesser r ist ein Rechteck beschrieben, dessen eine Seite a ist; wie groß ist sein Flächeninhalt?

13. Der Halbmesser eines Kreises ist r; wie groß ist der Flächeninhalt des diesem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechzehneckes? $(4r^2\sqrt{2-\sqrt{2}}.)$

14. Ein Rechteck, welches die Seite des einem Kreise vom Halbmesser r eingeschriebenen gleichseitigen Dreieckes zur Grundlinie, und die Seite des demselben Kreise umgeschriebenen regelmäßigen Sechseckes zur Höhe hat, ist flächengleich mit einem zweiten Kreise; wie groß ist der Umfang dieses Kreises? $(2r\sqrt{2\pi}.)$

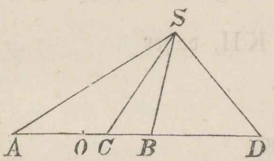
Anhang.

Einiges aus der neueren Geometrie.

I. Harmonische Theilung der Strecken.

§. 172. Liegt von zwei Punkten C und D (Fig. 127) der eine auf der Strecke AB, der andere auf deren Verlängerung, so sind die Abschnitte AC und CB, in welche die Strecke AB durch den Punkt C getheilt wird, als positiv, dagegen ist von den Abschnitten AD und DB, in welche die Strecke AB durch den Punkt D getheilt wird, der erste als positiv, der zweite als negativ zu betrachten; hiernach ist das Verhältniß $\frac{AC}{CB}$ positiv, das Verhältniß $\frac{AD}{DB}$ negativ.

Fig. 127.



Sind nun die absoluten Werthe dieser beiden Verhältnisse gleich, ist nämlich $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$, so sagt man: die Strecke AB ist durch die Punkte C und D harmonisch getheilt.

Aus $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ folgt auch $\frac{CB}{BD} = -\frac{CA}{AD}$. Ist daher die Strecke AB durch die Punkte C und D harmonisch getheilt, so ist auch die Strecke CD durch die Punkte B und A harmonisch getheilt.

Die Punkte A, C, B, D heißen vier harmonische Punkte. Die Punkte C und D nennt man in Bezug auf die Strecke AB einander conjugirt; ebenso sind B und A in Bezug auf die Strecke CD einander conjugirt.

Vier Strahlen, welche von einem Punkte S aus durch vier harmonische Punkte gehen, heißen harmonische Strahlen, und zwar nennt man je zwei Strahlen, welche durch zwei conjugirte Punkte gehen, einander conjugirt. Alle vier Strahlen zusammen bilden ein harmonisches Strahlenbüschel.

Folgesatz. Aus $AC : CB = AD : -DB$, wofür man wegen $BD = -DB$ auch $AC : CB = AD : BD$ schreiben kann, folgt, wenn O die Mitte der Strecke AB ist,

$$(AO + OC) : (OB - OC) = (AO + OD) : (OD - OB),$$

oder, da $AO = OB$ ist,

$$(OB + OC) : (OB - OC) = (OD + OB) : (OD - OB),$$

welche Proportion gleichbedeutend ist mit

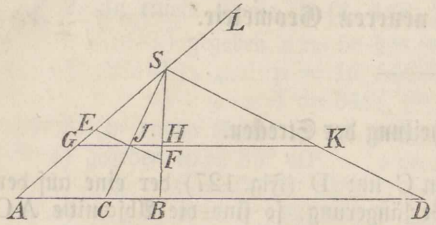
$$OB : OC = OD : OB, \text{ oder } OC : OB = OB : OD;$$

d. h. die Hälfte der harmonisch getheilten Strecke ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abständen der Theilungspunkte von der Mitte der Strecke.

§. 173. Lehrsätze. 1. Ist eine Transversale mit einem Strahl eines harmonischen Büschels parallel, so halbirt der conjugirte Strahl den Abstand zwischen den Durchschnittspunkten der beiden anderen Strahlen.

Beweis. Es seien (Fig. 128) SA, SC, SB, SD die Strahlen eines harmonischen Büschels, und EF || SD. Zieht man durch J die GK || AD, so ist △ EGJ ∼ SGK und △ FJH ∼ SKH, daher

Fig. 128.



$$\frac{JE}{KS} = \frac{GJ}{GK}, \text{ und } \frac{JF}{KS} = \frac{JH}{KH}.$$

Nun ist, da GK und AD (nach §. 89) von den vier Strahlen proportionirt geschnitten werden, und also auch G, J, H, K vier harmonische Punkte sind,

$$\frac{GJ}{JH} = -\frac{GK}{KH} \text{ oder } \frac{GJ}{GK} = -\frac{JH}{KH}; \text{ folglich ist auch}$$

$$\frac{JE}{KS} = -\frac{JF}{KS}, \text{ und somit } JE = -JF.$$

2. Ein harmonisches Strahlenbüschel wird von jeder Transversale in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Beweis. Es seien (Fig. 128) SA, SC, SB, SD die Strahlen eines harmonischen Büschels und GK eine beliebige Transversale derselben. Zieht man durch J die EF || SD, so ist

△ EGJ ∼ SGK und △ FJH ∼ SKH, daher

$$\frac{GJ}{GK} = \frac{JE}{KS} \text{ und } \frac{JH}{KH} = \frac{JF}{KS}.$$

Nun ist (nach 1.) JE = − JF, folglich auch

$$\frac{GJ}{GK} = -\frac{JH}{KH}, \text{ oder } \frac{GJ}{JH} = -\frac{GK}{KH};$$

d. h. G, J, H, K sind vier harmonische Punkte.

§. 174. Lehrsätze. 1. Halbirt man in einem Dreiecke einen inneren Winkel und den anliegenden Außenwinkel, so wird die gegenüberliegende Dreiecksseite durch die beiden Halbirungslinien harmonisch getheilt.

Es sei in dem Dreiecke ABS (Fig. 128) W. ASC = BSC und W. BSD = LSD. Man hat

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AS}{SB} \text{ (§. 90, 1) und } -\frac{AD}{DB} = \frac{AS}{SB} \text{ (§. 90, 2); folglich}$$

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

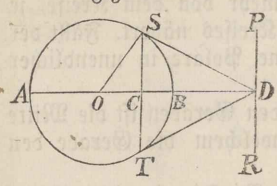
2. Stehen in einem harmonischen Strahlenbüschel zwei conjugirte Strahlen senkrecht aufeinander, so halbiren sie den Winkel der beiden anderen Strahlen und dessen Nebenwinkel.

Beweis. Es seien (Fig. 128) SA, SC, SB, SD harmonische Strahlen, und zwar SC ⊥ SD. Man ziehe EF ⊥ SC, so ist auch EF || SD, und daher wegen der Gleichheit der Seiten EJ und JF (§. 173, 1) das rechtwinklige Dreieck SJE ≅ SJF, also W. ESJ = FSJ. Daraus folgt aber, da JSK = R ist, auch W. FSK = LSK.

II. Pol und Polare.

§. 175. Ist der Durchmesser AB (Fig. 129) eines Kreises durch die Punkte C und D harmonisch getheilt, so heißen diese Punkte zwei conjugirte Pole des Kreises; der eine liegt auf dem Durchmesser selbst, der andere auf seiner Verlängerung.

Fig. 129.



Eine Gerade heißt in Beziehung auf einen gegebenen Kreis die Polare eines Punktes, und dieser Punkt der Pol der Geraden, wenn die Gerade durch den dem Punkte conjugirten Pol geht und auf der Verbindungslinie der beiden Punkte senkrecht steht. Sind ST und PR senkrecht auf CD, so ist ST die Polare des Punktes D und umgekehrt D der Pol der Geraden ST; ebenso ist PR die Polare des Punktes C und C der Pol der Geraden PR in Beziehung auf den gegebenen Kreis.

Folgesätze. a) Das Product der Abstände eines jeden Punktes und seiner Polare von dem Mittelpunkte des Kreises ist constant und gleich dem Quadrate des Halbmessers; also $OC \cdot OD = OB^2$.

Folgt aus §. 172, Folgesatz.

b) Umgekehrt: Ist für zwei Punkte C und D des Durchmessers $OC.OD = OB^2$, so geht die Polare des Punktes C durch D, und die Polare des Punktes D durch C.

Denn ginge die Polare des einen Punktes, z. B. C, nicht durch den andern Punkt D, sondern schnitte sie die AB in D', so müßte (nach a) $OC.OD' = OB^2$ sein; dann ist aber mit Rücksicht auf die Voraussetzung $OD' = OD$, d. h. der Punkt D' ist mit D identisch.

§. **176.** 1. Zieht man von einem gegebenen Punkte außerhalb eines Kreises an diesen zwei Tangenten, so ist die Berührungssehne die Polare des gegebenen Punktes.

Beweis. Zieht man von D (Fig. 129) die Tangenten DS und DT, ferner die Berührungssehne ST und den Halbmesser OS, so ist $OC : OS = OS : OD$ (§. 99, a), daher wegen $OS = OB$ auch $OC : OB = OB : OD$, also $OC \cdot OD = OB^2$; die Berührungssehne ST, die in C auf CD senkrecht steht, ist also (nach §. 175, Folges. b) die Polare des Punktes D.

Folgesätze. a) Die Polare eines außerhalb des Kreises liegenden Punktes schneidet den Kreis und entfernt sich um so mehr von dem Mittelpunkte desselben, je mehr sich der Punkt dem Kreise nähert. Liegt der Punkt in der Peripherie des Kreises, so ist die durch den Punkt selbst gehende Tangente seine Polare.

b) Der Pol jeder Sehne eines Kreises ist der Durchschnittspunkt der durch ihre Endpunkte gezogenen Tangenten.

2. Zieht man durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines Kreises eine Sehne, welche auf dem zu diesem Punkte gezogenen Durchmesser senkrecht steht, und durch die Endpunkte derselben zwei Tangenten, so ist die Gerade, welche durch den Durchschnittspunkt dieser Tangenten mit der Sehne parallel gezogen wird, die Polare des gegebenen Punktes.

Beweis. Ist C (Fig. 129) der gegebene Punkt und $ST \perp AB$, so liegt der Durchschnitt D der Tangenten SD und TD in der Verlängerung des Durchmessers AB (§. 132, Folgesatz b), dann ist (nach 1) $OC \cdot OD = OB^2$. Wird daher die Gerade PR parallel mit ST, somit senkrecht auf CD gezogen, so ist sie die Polare des Punktes C.

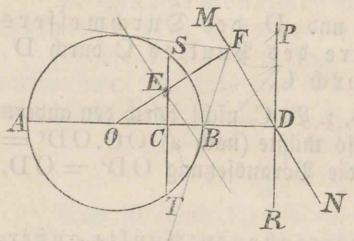
Folgesätze. a) Die Polare eines innerhalb des Kreises liegenden Punktes liegt außerhalb des Kreises und entfernt sich um so mehr von dem Kreise, je mehr sich der gegebene Punkt dem Mittelpunkte des Kreises nähert. Fällt der Punkt mit dem Mittelpunkte zusammen, so liegt seine Polare in unendlicher Entfernung vom Kreise.

b) Der Pol einer außerhalb des Kreises liegenden Geraden ist die Mitte der Berührungssehne in Bezug auf den Punkt, in welchem die Gerade den auf sie senkrechten Durchmesser schneidet.

c) Der Pol einer Geraden in Bezug auf einen Punkt, als einen Kreis mit dem Halbmesser Null (§. 124) ist dieser Punkt selbst. Der Pol einer Geraden in Bezug auf eine Gerade, als einen Kreis mit einem unendlich großen Halbmesser, liegt im Unendlichen.

§. **177.** 1. Der Pol einer durch einen gegebenen Punkt gehenden Geraden liegt in der Polare dieses Punktes.

Fig. 130.



Es sei ST (Fig. 130) die Polare des Punktes D in Bezug auf den Kreis O, und MN eine beliebige durch D gehende Gerade. Zieht man $OF \perp MN$, so ist $\triangle OCE \sim OFD$, daher $OE : OC = OD : OF$ oder $OE.OF = OC.OD$. Allein $OC.OD = OB^2$ (§. 175, Folges. a), daher auch $OE.OF = OB^2$. Der Pol der durch D gehenden Geraden MN ist demnach E und liegt in der Polare ST des Punktes D.

Ebenso wird der Beweis geführt, wenn die gegebene Gerade durch den Punkt C geht.

Folgesatz. Die Verbindungslinie der Pole zweier Geraden ist die Polare des Durchschnittspunktes dieser Geraden.

2. Umgekehrt: Die Polare eines jeden in einer gegebenen Geraden liegenden Punktes geht durch den Pol dieser Geraden.

Ist E (Fig. 130) ein Punkt der Geraden ST, deren Pol in D liegt, und $FN \perp OE$ die Polare des Punktes E, so ist sowohl $OC.OD = OB^2$, als auch $OE.OF = OB^2$, daher $OC.OD = OE.OF$. Würde nun die FN nicht durch D gehen, sondern die OD oder ihre Verlängerung in D' schneiden, so wäre das rechtwinklige Dreieck $OCE \sim OFD'$, daher müßte $OE : OC = OD' : OF$ oder $OC.OD' = OE.OF$, folglich mit Rücksicht auf die frühere Gleichung, $OC.OD' = OC.OD$ sein. Dann ist aber $OD' = OD$, d. h. der Punkt D' ist mit D identisch.

Folgesatz. Der Durchschnittspunkt der Polaren zweier Punkte einer Geraden ist der Pol dieser Geraden.

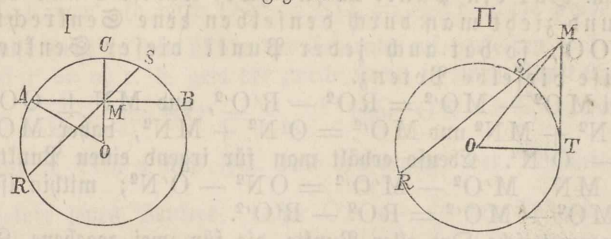
III. Potenz und Potenzlinie.

§. **178.** Zieht man durch einen Punkt beliebige Secanten an einen Kreis, so ist das Product der durch diesen Punkt und den Kreis begrenzten Abschnitte für jede Secante constant, und zwar

a) gleich dem negativen Quadrate der halben kleinsten Sehne, des gegebenen Punktes, wenn dieser innerhalb des Kreises liegt, dagegen

b) gleich dem Quadrate der Tangente des gegebenen Punktes, wenn dieser außerhalb des Kreises liegt.

Fig. 131.



Beweis. a) Es sei (Fig. 131, I) M ein Punkt innerhalb des Kreises und RS eine beliebige durch diesen Punkt gehende Secante. Zieht man durch M den Halbmesser OC und die kleinste, d. i. die auf OC senkrechte Sehne AB, so ist $MR : MA = MB : MS$ (§. 138, 1), daher $MR \cdot MS = MA \cdot MB$. Die Producte MR.MS, und MA.MB sind negativ, weil die Abschnitte MR und MS, und ebenso MA und MB von M aus nach entgegengesetzten Seiten gezählt werden. Es ist daher $MB = -MA$, und folglich $MR.MS = MA. - MA = -MA^2$.

b) Ist dagegen (Fig. 131, II) M ein Punkt außerhalb des Kreises, MSR eine beliebige Secante und MT eine Tangente des Kreises durch diesen Punkt, so ist $MR : MT = MT : MS$ (§. 138, 3), und somit $MR \cdot MS = MT^2$.

§. **179.** Das constante Product MR.MS (Fig. 131) der beiden Abschnitte, welche jede durch einen gegebenen Punkt M gezogene Secante eines Kreises zwischen jenem Punkte und ihren Durchschnittspunkten mit dem Kreise bildet, heißt die Potenz des Punktes M in Beziehung auf den gegebenen Kreis.

Liegt der Punkt M außerhalb des Kreises, so ist die Potenz positiv, liegt M innerhalb des Kreises, so ist die Potenz negativ.

Die Potenz eines Punktes für einen Kreis ist gleich dem Quadrate der Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte des Kreises vermindert um das Quadrat des Halbmessers.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke AMO in Fig. 131, I folgt

$$MA^2 = OA^2 - MO^2; \text{ daher ist}$$

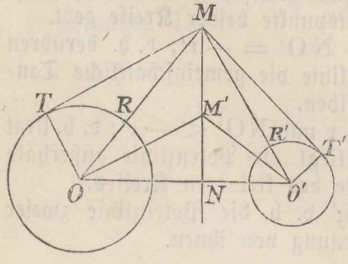
$$MR.MS = -MA^2 = MO^2 - OA^2.$$

In dem rechtwinkligen Dreiecke MTO in Fig. 131, II ist $MT^2 = MO^2 - OT^2$; folglich ist

$$MR.MS = MT^2 = MO^2 - OT^2.$$

§. **180.** Ein Punkt hat in Beziehung auf zwei Kreise dieselbe Potenz, wenn die Differenz der Quadrate seiner Entfernungen von den Mittelpunkten beider Kreise der Differenz der Quadrate der Halbmesser gleich ist.

Fig. 132.



Denn der Ausdruck für die Potenz des Punktes M (Fig. 132) in Bezug auf den Kreis O ist $MO^2 - RO^2$, der Ausdruck für die Potenz desselben Punktes in Bezug auf den Kreis O' ist $MO'^2 - R'O'^2$. Ist nun $MO^2 - MO'^2 = RO^2 - R'O'^2$, so ist auch $MO^2 - RO^2 = MO'^2 - R'O'^2$, d. h. der Punkt M hat für beide Kreise gleiche Potenzen.

Lehrsatz. Hat ein Punkt M für zwei Kreise O und O′ dieselbe Potenz, und zieht man durch denselben eine Senkrechte auf die Centrale OO′, so hat auch jeder Punkt dieser Senkrechten für beide Kreise dieselbe Potenz.

Es sei $MO^2 - MO'^2 = RO^2 - R'O'^2$, und $MN \perp OO'$. Man hat $MO^2 = ON^2 + MN^2$ und $MO'^2 = O'N^2 + MN^2$, daher $MO^2 - MO'^2 = ON^2 - O'N^2$. Ebenso erhält man für irgend einen Punkt M′ in der Senkrechten MN, $M'O^2 - M'O'^2 = ON^2 - O'N^2$; mithin ist $M'O^2 - M'O'^2 = MO^2 - MO'^2 = RO^2 - R'O'^2$.

Der geometrische Ort aller Punkte, die für zwei gegebene Kreise gleiche Potenzen haben, heißt die **Potenzlinie** der beiden Kreise. Die Gerade MN ist daher die Potenzlinie der Kreise O und O′.

Folgesätze. a) Die Potenzlinie zweier Kreise steht senkrecht auf ihrer Centrale.

b) Die aus einem außerhalb der beiden Kreise liegenden Punkte der Potenzlinie an dieselben gezogenen Tangenten sind einander gleich. — Denn $MT^2 = MO^2 - TO^2$ und $MT'^2 = MO'^2 - T'O^2$; daher $MT = MT'$.

c) Sind die von einem Punkte außerhalb zweier Kreise an diese gezogenen Tangenten gleich, so liegt der Punkt in der Potenzlinie dieser Kreise. — Ist $MT = MT'$, also $MT^2 = MT'^2$, so ist auch $MO^2 - TO^2 = MO'^2 - T'O'^2$.

§. 181. Die Lage der Potenzlinie gegen die beiden Kreise wird durch ihren Fußpunkt N (Fig. 132) in der Centrale bestimmt. Bezeichnet man die Halbmesser der Kreise O und O′ mit r und r′, und die Centrale mit c, so ist für den Punkt N

$ON^2 - NO'^2 = r^2 - r'^2$, oder $(ON + NO')(ON - NO') = r^2 - r'^2$.

Da nun $ON + NO' = c$, daher $ON - NO' = \frac{r^2 - r'^2}{c}$ ist, so hat man

$$ON = \frac{c^2 + r^2 - r'^2}{2c}, \qquad NO' = \frac{c^2 - r^2 + r'^2}{2c}.$$

Diese beiden Ausdrücke führen für die verschiedenen Lagen zweier Kreise (§. 141) und für die verschiedene Größe der Halbmesser auf folgende Sätze:

1. Ist $c > r + r'$, daher sowohl $(c - r)^2 > r'^2$ als $(c - r')^2 > r^2$, so ergibt sich $c^2 + r^2 - r'^2 > 2cr$ und auch $c^2 - r^2 + r'^2 > 2cr'$, mithin $ON > r$ und $NO' > r'$; d. h. liegen zwei Kreise ganz außerhalb einander, so liegt ihre Potenzlinie zwischen beiden Kreisen und schneidet keinen derselben.

2. Aus $c = r + r'$ ergibt sich durch eine ähnliche Rechnung wie in 1., $ON = r$ und $NO' = r'$; d. h. berühren sich zwei Kreise von außen, so ist ihre Potenzlinie die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise im Berührungspunkte derselben.

3. Ist $c < r + r'$, so erhält man durch analoge Rechnung, wie in 1., $ON < r$ und $NO' < r'$; d. h. schneiden sich zwei Kreise, so ist ihre Potenzlinie die Secante, welche durch die Durchschnittspunkte beider Kreise geht.

4. Aus $c = r - r'$ folgt $ON = r$ und $NO' = -r'$; d. h. berühren sich zwei Kreise von innen, so ist ihre Potenzlinie die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise im Berührungspunkte derselben.

5. Ist $c < r - r'$, so ergibt sich $ON > r$ und $NO' < -r'$; d. h. liegt ein Kreis ganz innerhalb eines anderen, so liegt die Potenzlinie außerhalb beider Kreise und zwar näher dem Mittelpunkte des kleineren Kreises.

6. Ist $c = 0$, so ist $ON = NO' = \infty$; d. h. die Potenzlinie zweier concentrischer Kreise liegt in unendlicher Entfernung von ihnen.

7. Ist $r = r'$, so wird $ON = NO' = \frac{c}{2}$; d. h. die Potenzlinie zweier gleicher Kreise steht in der Mitte der Centrale auf derselben senkrecht.

8. Ist $r' = o$, d. h. geht der zweite Kreis in einen Punkt über, so ergibt sich $ON = \frac{c^2 + r^2}{2c}$ und $NO' = \frac{c^2 - r^2}{2c}$, daher $ON - \frac{r^2}{c} = NO'$. Nun ist $\frac{r^2}{c}$ (wie aus §. 175, a und Fig. 129 hervorgeht) der Abstand zwischen O und der Polare jenes Punktes, daher $ON - \frac{r^2}{c}$ der Abstand der Potenzlinie von der Polare jenes Punktes. Die Potenzlinie eines Kreises und eines Punktes hat daher von diesem Punkte und dessen Polare gleichen Abstand.

9. Gehen beide Kreise in Punkte über, so wird $ON = NO' = \frac{c}{2}$; d. h. die Potenzlinie zweier Punkte steht in der Mitte der Verbindungslinie auf derselben senkrecht.

10. Ist $r' = \infty$, d. h. geht der zweite Kreis in eine Gerade über, so ist auch $c = \infty$, dann wird $NO' = r'$ und $ON = c - r'$. Als die Potenzlinie eines Kreises und einer Geraden kann demnach diese Gerade selbst angenommen werden.

11. Die Potenzlinie eines Punktes und einer Geraden ist die Gerade selbst.

12. Für zwei Gerade kann man eine derselben als Potenzlinie ansehen.

§. **182.** Drei gegebene Kreise lassen sich zu drei Kreispaaren zusammenstellen, deren jedes eine Potenzlinie hat.

Die drei Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem gemeinschaftlichen Punkte.

Denn die Potenzlinie des ersten und zweiten Kreises schneidet die Potenzlinie des ersten und dritten Kreises in einem Punkte C, welcher sowohl in Bezug auf den ersten und zweiten, als in Bezug auf den ersten und dritten Kreis, folglich auch in Bezug auf den zweiten und dritten Kreis dieselbe Potenz hat. Die Potenzlinie des zweiten und dritten Kreises muß also auch durch C gehen.

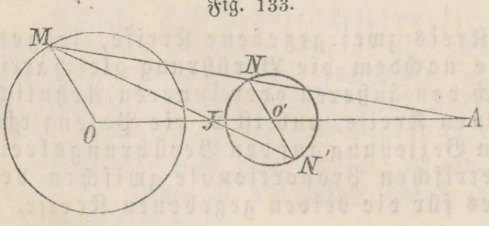
Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Potenzlinien dreier Kreise heißt das Potenzcentrum dieser Kreise.

Liegen die Mittelpunkte der drei Kreise in einer Geraden, so sind die drei Potenzlinien parallel; das Potenzcentrum liegt daher in unendlicher Entfernung von den beiden Kreisen.

IV. Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsaxen.

§. **183.** Ist (Fig. 133) A der äußere und J der innere Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise, deren Centrale $OO' = c$ und deren Halbmesser $OM = r$ und $O'N = r'$ sind, so finden, wie in §. 144 nachgewiesen wurde, folgende Beziehungen statt:

Fig. 133.



$$OA = \frac{cr}{r - r'} \text{ und}$$

$$OJ = \frac{cr}{r + r'}; \text{ ferner}$$

$$O'A = \frac{cr'}{r - r'} \text{ und}$$

$$JO' = \frac{cr'}{r + r'}.$$

Aus diesen Ausdrücken folgt $\frac{OJ}{JO'} = \frac{OA}{O'A}$, oder, da $O'A = -AO'$ ist,

$$\frac{OJ}{JO'} = -\frac{OA}{AO'},$$

d. h. die Centrale zweier Kreise wird durch den inneren und äußeren Aehnlichkeitspunkt harmonisch getheilt.

§. 184. Die Lage der Aehnlichkeitspunkte hängt von der Lage der beiden Kreise gegen einander (§. 141) und von der Größe ihrer Halbmesser ab. Aus den obigen Werthen von OA, O'A, OJ und JO' ergibt sich:

1. Liegen die Kreise ganz außerhalb einander, so liegen die Aehnlichkeitspunkte außerhalb der beiden Kreise, und zwar näher dem kleineren Kreise.

2. Für $c = r + r'$ ist $OJ = r$; d. h. berühren sich die Kreise von außen, so liegt der innere Aehnlichkeitspunkt im Berührungspunkte derselben.

3. Schneiden sich die Kreise, so liegt der innere Aehnlichkeitspunkt innerhalb, der äußere außerhalb der beiden Kreise.

4. Für $c = r - r'$ ist $OA = r$; d. h. berühren sich zwei Kreise von innen, so ist der Berührungspunkt der äußere Aehnlichkeitspunkt.

5. Liegt ein Kreis ganz innerhalb eines andern, so liegen die Aehnlichkeitspunkte innerhalb des kleineren Kreises.

6. Für $c = o$ ist $OA = o$ und $OJ = o$; d. h. sind die Kreise concentrisch, so fällt der innere und der äußere Aehnlichkeitspunkt in den Mittelpunkt.

7. Für $r = r'$ ist $OA = \infty$ und $OJ = \frac{c}{2}$; d. h. sind die Halbmesser der beiden Kreise einander gleich, so liegt der äußere Aehnlichkeitspunkt im Unendlichen, der innere in der Mitte der Centrale.

8. Ist $r' = o$, geht also der zweite Kreis in einen Punkt über, so wird $OA = OJ = c$; d. i. der äußere und der innere Aehnlichkeitspunkt eines Kreises und eines Punktes ist der Punkt selbst.

9. Der innere Aehnlichkeitspunkt zweier Punkte liegt in der Mitte ihrer Verbindungslinie, der äußere im Unendlichen.

10. Ist $r' = \infty$, geht also der zweite Kreis in eine Gerade über, so wird auch $c = \infty$, und daher $OA = -r$, $OJ = r$, d. h. der äußere und der innere Aehnlichkeitspunkt eines Kreises und einer Geraden fallen in die Endpunkte des auf die Gerade senkrechten Durchmessers.

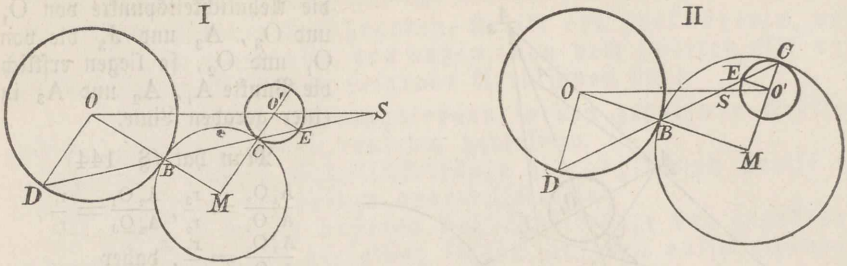
11. Für einen Punkt und eine Gerade liegen beide Aehnlichkeitspunkte in dem Punkte selbst.

12. Für zwei Gerade fallen die Aehnlichkeitspunkte ins Unendliche.

§. 185. Berührt ein Kreis zwei andere Kreise, so heißt die Berührung gleichartig, wenn er beide Kreise von außen oder beide von innen berührt, und ungleichartig, wenn er den einen Kreis von außen, den andern von innen berührt.

Lehrsatz. Berührt ein Kreis zwei gegebene Kreise, so geht 1. die Berührungssehne, je nachdem die Berührung gleichartig oder ungleichartig ist, durch den äußeren oder inneren Aehnlichkeitspunkt der zwei gegebenen Kreise, und ist 2. die Potenz dieses Aehnlichkeitspunktes in Beziehung auf den Berührungskreis gleich der mittleren geometrischen Proportionale zwischen den Potenzen desselben Punktes für die beiden gegebenen Kreise.

Fig. 134.



Beweis. a) Wenn die Berührung gleichartig ist. (Fig. 134, I.)

Der Kreis M berühre die beiden Kreise O und O′ von außen in den Punkten B und C.

1. Es treffe die Berührungssehne BC die Centrale OO′ in S, so ist S der äußere Aehnlichkeitspunkt von O und O′. — Denn zieht man OM und O′M, so gehen diese durch B und C (§. 142, a). Die Berührungssehne treffe den Kreis O noch in D, den Kreis O′ noch in E, und man ziehe OD und O′E. Da W. ODB = OBD = CBM = BCM = O′CE ist, so muß OD ∥ O′C sein; woraus (nach §. 144) folgt, daß S ein Aehnlichkeitspunkt der Kreise O und O′ ist, und zwar ein äußerer, da OD und O′C in demselben Sinne parallel sind.

2. Setzt man OD = OB = r und O′C = O′E = r′, so hat man

$$SC : SD = r' : r \text{ und } SE : SB = r' : r, \text{ daher}$$

$$SC : SD = SE : SB \text{ und } SC \cdot SB = SD \cdot SE.$$

Nun ist, wenn man die Potenz des Punktes S für den Kreis O durch p^2, und für den Kreis O′ durch p'^2 bezeichnet,

$$SB \cdot SD = p^2 \text{ und } SE \cdot SC = p'^2, \text{ daher}$$

$$SB \cdot SD \cdot SE \cdot SC = p^2 \cdot p'^2,$$

oder wegen SD . SE = SC . SB,

$$SC^2 \cdot SB^2 = p^2 \cdot p'^2, \text{ folglich } SC \cdot SB = pp'.$$

Ebenso wird die Richtigkeit des Satzes bewiesen, wenn der Kreis M die beiden Kreise O und O′ von innen berührt.

b) Wenn die Berührung ungleichartig ist. (Fig. 134, II.)

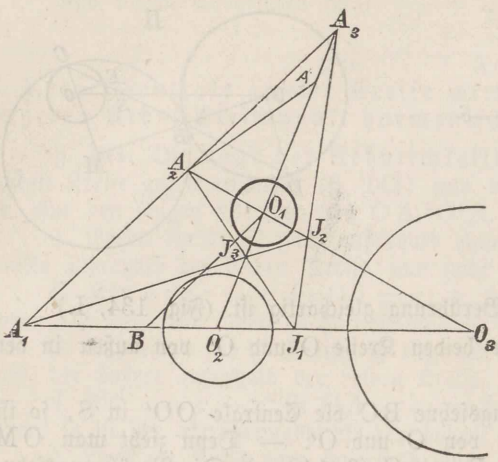
Der Beweis wird fast wörtlich, wie für den ersten Fall, geführt.

§. **186.** Zu drei Kreisen gehören drei äußere und drei innere Aehnlichkeitspunkte.

Lehrsatz. Die Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen zu je drei auf vier geraden Linien, und zwar liegen auf der einen die drei äußeren Aehnlichkeitspunkte, auf jeder der drei übrigen ein äußerer Aehnlichkeitspunkt und diejenigen zwei inneren, welche nicht zu demselben Kreispaare wie der äußere gehören.

Beweis. Sind (Fig. 135) r_1, r_2 und r_3 die Halbmesser der Kreise O_1, O_2 und O_3, ferner A_1 der äußere und J_1 der innere Aehnlichkeitspunkt der

Fig. 135.



Kreise O_2 und O_3, A_2 und J_2 die Aehnlichkeitspunkte von O_1 und O_3, A_3 und J_3 die von O_1 und O_2, so liegen erstlich die Punkte A_1, A_2 und A_3 in einer geraden Linie.

Man hat (§. 144)

$$\frac{A_1O_3}{A_1O_2} = \frac{r_3}{r_2},\ \frac{A_2O_1}{A_2O_3} = \frac{r_1}{r_3},$$
$$\frac{A_3O_2}{A_3O_1} = \frac{r_2}{r_1},\ \text{daher}$$
$$\frac{A_1O_3}{A_1O_2} \cdot \frac{A_2O_1}{A_2O_3} \cdot \frac{A_3O_2}{A_3O_1} = 1.$$

Schneidet nun die verlängerte Gerade A_1A_2 die verlängerte O_2O_1 im Punkte A so hat man, wenn man $O_1B \parallel AA_1$ zieht, die Proportionen

$$\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{A_1O_2}{A_1B},$$

$$\frac{A_1O_2}{A_1O_2} = \frac{A_1O_3}{A_1O_2},\quad \frac{A_2O_1}{A_2O_3} = \frac{A_1B}{A_1O_3},$$

folglich auch

$$\frac{A_1O_3}{A_1O_2} \cdot \frac{A_2O_1}{A_2O_3} \cdot \frac{AO_2}{AO_1} = 1.$$

Es ist daher

$$\frac{A_1O_3}{A_1O_2} \cdot \frac{A_2O_1}{A_2O_3} \cdot \frac{AO_2}{AO_1} = \frac{A_1O_3}{A_1O_2} \cdot \frac{A_2O_1}{A_2O_3} \cdot \frac{A_3O_2}{A_3O_1}$$

und somit $\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{A_3O_2}{A_3O_1}$, daher auch

$$\frac{AO_2 - AO_1}{A_3O_2 - A_3O_1} = \frac{AO_2}{A_3O_2},\ \text{oder}\ \frac{O_1O_2}{O_1O_2} = \frac{AO_2}{A_3O_2},$$

folglich $AO_2 = A_3O_2$.

Der Punkt A ist also mit A_3 identisch, somit liegen die Punkte A_1, A_2, A_3 in einer geraden Linie.

Ebenso kann man beweisen, daß die Punkte A_1, J_2, J_3, ferner A_2, J_1, J_3, endlich A_3, J_1, J_2 je drei in einer geraden Linie liegen.

Die Gerade $A_1A_2A_3$, welche die drei äußeren Aehnlichkeitspunkte enthält, nennt man die *äußere Aehnlichkeitsaxe*, die Geraden $A_1J_2J_3$, $A_2J_1J_3$ und $A_3J_1J_2$, welche je einen äußeren und zwei innere Aehnlichkeitspunkte enthalten, *innere Aehnlichkeitsaxen*.

§. 187. Berührt ein Kreis drei gegebene Kreise O_1, O_2 und O_3 so sind, in Bezug auf die Art der Berührung *acht* Fälle möglich; er kann

a) alle drei Kreise von außen, oder alle drei Kreise von innen;
b) O_1 von außen, O_2 und O_3 von innen, oder O_1 von innen, O_2 und O_3 von außen;
c) O_2 von außen, O_1 und O_3 von innen, oder O_2 von innen, O_1 und O_3 von außen;
d) O_3 von außen, O_1 und O_2 von innen, oder O_3 von innen, O_1 und O_2 von außen berühren.

Es gibt also *vier Kreispaare*, welche drei gegebene Kreise berühren, und so zusammengehören, daß der eine Berührungskreis irgend einen der gege-

benen Kreise von außen berührt, während der andere ihn von innen berührt. Zwei auf diese Weise zusammengehörige Berührungskreise heißen conjugirt.

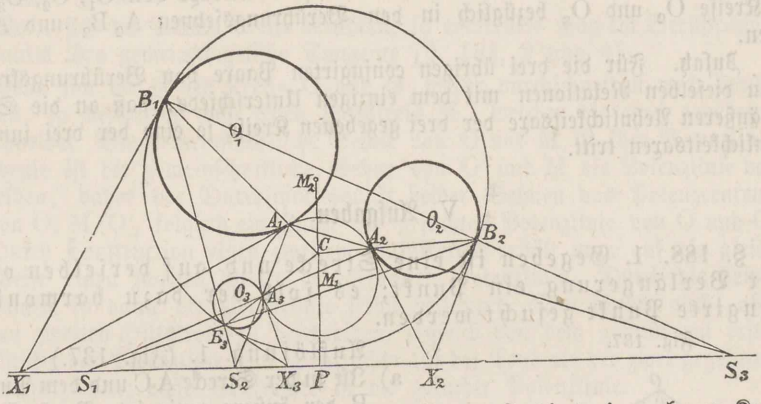
Lehrsatz. Werden drei gegebene Kreise von zwei anderen, und zwar von dem einen alle von außen, von dem zweiten alle von innen berührt, so finden folgende Relationen statt:

1. Die drei Berührungssehnen in den gegebenen Kreisen gehen durch das Potenzcentrum derselben.

2. Die äußere Aehnlichkeitsaxe der gegebenen Kreise ist die Potenzlinie der beiden anderen Kreise.

3. Die Pole der äußeren Aehnlichkeitsaxe der gegebenen Kreise in Bezug auf dieselben liegen auf den entsprechenden Berührungssehnen.

Fig. 136.



Beweis. Es seien (Fig. 136) O_1, O_2 und O_3 die drei gegebenen Kreise, welche von dem Kreise M_1 von außen und von dem Kreise M_2 von innen berührt werden.

1. Der Kreis O_1 berührt M_1 von außen und M_2 von innen, die Berührungssehne $A_1 B_1$ geht daher durch den inneren Aehnlichkeitspunkt C von M_1 und M_2 (§. 185). Ebenso folgt, daß die Berührungssehnen $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$ durch den inneren Aehnlichkeitspunkt C von M_1 und M_2 gehen. Nun ist, wenn man die Potenz des Punktes C für den Kreis M_1 durch p_1^2, für den Kreis M_2 durch p_2^2 bezeichnet, $CA_1 \cdot CB_1 = CA_2 \cdot CB_2 = CA_3 \cdot CB_3 = p_1 p_2$ (§. 185), d. h. der Punkt C hat für die Kreise O_1, O_2 und O_3 dieselbe Potenz, er ist daher das Potenzcentrum dieser drei Kreise. Die Berührungssehnen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ gehen also durch das Potenzcentrum C der drei gegebenen Kreise.

2. M_1 berührt O_1 und O_2 von außen, also muß $A_1 A_2$ durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt S_3 von O_1 und O_2 gehen (§. 185); M_2 berührt O_1 und O_2 von innen, also geht auch $B_1 B_2$ durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt S_3 von O_1 und O_2. Ebenso folgt, daß sich $A_1 A_3$ und $B_1 B_3$ im äußeren Aehnlichkeitspunkte S_2 von O_1 und O_3, $A_2 A_3$ und $B_2 B_3$ im äußeren Aehnlichkeitspunkte S_1 von O_2 und O_3 treffen. Diese drei Aehnlichkeitspunkte liegen aber auf derselben Geraden, der äußeren Aehnlichkeitsaxe von O_1, O_2, O_3 (§. 186). Nun ist, da M_1 die Kreise O_1 und O_2 von außen, M_2 dieselben Kreise von innen berührt, wenn die Potenz des Punktes S_3 für O_1 und O_2 bezüglich

durch a_1^2 und a_2^2 bezeichnet wird, $S_3A_1 \cdot S_3A_2 = S_3B_1 \cdot S_3B_2 = a_1 a_2$; d. h. der Punkt S_3 hat für die Kreise M_1 und M_2 dieselbe Potenz, er liegt also auf der Potenzlinie von M_1 und M_2. Ebenso folgt, daß die Punkte S_2 und S_1 auf der Potenzlinie von M_1 und M_2 liegen. Die äußere Aehnlichkeitsaxe der drei gegebenen Kreise ist also die Potenzlinie der beiden anderen Kreise.

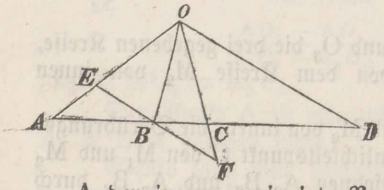
3. Die Tangenten in A_1 und B_1 an den Kreis O_1 sind zugleich Tangenten von M_1 und M_2; ihr Durchschnitt X_1 muß daher auf der Potenzlinie von M_1 und M_2 (§. 180, Folges. c), mithin nach 2. auf der äußeren Aehnlichkeitsaxe von O_1, O_2, O_3 liegen. Die Polare des Punktes X_1 für den Kreis O_1 ist die Berührungssehne A_1B_1 (§. 176, 1); daher muß umgekehrt der Pol der durch X_1 gehenden äußeren Aehnlichkeitsaxe von O_1, O_2, O_3 in Bezug auf O_1 in der Berührungssehne A_1B_1 liegen (§. 177, 1). Ebenso beweist man, daß die Pole der äußeren Aehnlichkeitsaxe von O_1, O_2, O_3 für die Kreise O_2 und O_3 bezüglich in den Berührungssehnen A_2B_2 und A_3B_3 liegen.

Zusatz. Für die drei übrigen conjugirten Paare von Berührungskreisen gelten dieselben Relationen mit dem einzigen Unterschiede, daß an die Stelle der äußeren Aehnlichkeitsaxe der drei gegebenen Kreise je eine der drei inneren Aehnlichkeitsaxen tritt.

V. Aufgaben.

§. 188. 1. Gegeben ist eine Strecke und auf derselben oder ihrer Verlängerung ein Punkt; es soll der dazu harmonisch conjugirte Punkt gesucht werden.

Fig. 137.



Auflösung. 1. (Fig. 137.)

a) Ist zu der Strecke AC und dem Punkte B der äußere conjugirte Punkt D zu suchen, so ziehe man durch B eine Gerade so, daß BE = BF wird (§. 68, 3), und durch O die OD ∥ EF; D ist dann der gesuchte Punkt.

b) Ist zu der Strecke BD und dem Punkte A der innere conjugirte Punkt C zu suchen, so ziehe man durch B die EF ∥ OD, mache BF = BE, und verbinde F und O durch eine Gerade, welche die AD in C schneidet; C ist der gesuchte Punkt.

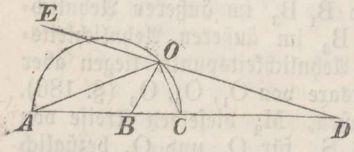
Beweis für die Richtigkeit beider Constructionen. Es ist

$$\triangle ABE \sim ADO, \text{ also } AB : AD = BE : DO,$$
$$\triangle BCF \sim DCO, \text{ also } BC : DC = BF : DO,$$

und folglich wegen $BE = -BF$ auch $AB : BC = -(AD : DC)$.

Auflösung 2. (Fig. 138.)

Fig. 138.



a) Gegeben AC und B; zu suchen D.

Man beschreibe über AC einen Halbkreis, ziehe an diesen von B eine beliebige Gerade BO, ziehe noch CO und mache den Winkel COD = COB; dann ist D der gesuchte conjugirte Punkt.

b) Gegeben AC und D; zu suchen B.

Man ziehe beliebig DO und mache den Winkel COB = COD, so ist B der gesuchte conjugirte Punkt.

Der Beweis gründet sich in beiden Fällen auf §. 40, 1. e und §. 174, 1.

2. Zu einem gegebenen Punkte die Polare zu construiren.

Nach §. 176, 1. oder 2., je nachdem der gegebene Punkt außerhalb oder innerhalb des Kreises liegt.

3. Zu einer gegebenen Geraden den Pol zu finden.

Nach §. 176, 1, Folges. b) oder nach §. 176, 2, Folges. b), je nachdem die gegebene Gerade den Kreis schneidet oder außerhalb desselben liegt.

4. Die Potenzlinie zweier Kreise zu construiren.

a) Wenn sich die beiden Kreise schneiden, so ziehe man ihre gemeinschaftliche Sehne (§. 181, 3).

b) Wenn sich die beiden Kreise berühren, so construire man im Berührungspunkte ihre gemeinschaftliche Tangente (§. 181, 2 und 4).

c) Wenn sich die beiden Kreise O und O′ weder durchschneiden noch berühren, so beschreibe man einen Hilfskreis M, welcher die zwei gegebenen schneidet. Die gemeinschaftliche Sehne von O und M ist ihre Potenzlinie, ebenso ist die gemeinschaftliche Sehne von O′ und M die Potenzlinie derselben, daher der Durchschnittspunkt beider Sehnen das Potenzcentrum von O, M, O′, folglich ein Punkt der gesuchten Potenzlinie von O und O′. Durch Construction eines zweiten Hilfskreises erhält man auf die gleiche Weise einen zweiten Punkt der gesuchten Potenzlinie. Durch die beiden Punkte ist dann die Potenzlinie selbst bestimmt. Man könnte auch, ohne den zweiten Hilfskreis zu beschreiben, sogleich von dem gefundenen ersten Punkte der Potenzlinie eine Senkrechte auf die Centrale der zwei gegebenen Kreise ziehen; diese Senkrechte ist die gesuchte Potenzlinie.

5. Das Potenzcentrum dreier Kreise zu bestimmen.

Es seien drei Kreise O, O′, O″ gegeben. Man construire (nach Aufg. 4) die Potenzlinie von O und O′, dann die Potenzlinie von O und O″; der Durchschnittspunkt beider ist das gesuchte Potenzcentrum (§. 182).

6. Zu drei Kreisen die vier Aehnlichkeitsaxen zu construiren. (§§. 144 und 186.)

§. **189.** Einen Kreis zu construiren, welcher drei gegebene Kreise berührt. (Fig. 136.)

Man bestimme 1. das Potenzcentrum C der gegebenen drei Kreise, 2. die äußere Aehnlichkeitsaxe $S_1 S_2 S_3$ derselben, 3. die Pole dieser Aehnlichkeitsaxe in Bezug auf jeden der gegebenen Kreise, und verbinde 4. jeden dieser Pole mit dem Potenzcentrum. Dadurch erhält man die Berührungspunkte A_1, A_2, A_3 für den Kreis M_1, welcher O_1, O_2, O_3 von außen, und zugleich die Berührungspunkte B_1, B_2, B_3 für einen zweiten Kreis M_2, welcher die drei gegebenen Kreise von innen berührt.

Indem man statt der äußeren Aehnlichkeitsaxe je eine der drei inneren nimmt, erhält man die drei übrigen noch möglichen Paare von Berührungskreisen.

Die Richtigkeit der Lösung ergibt sich aus §. 187.

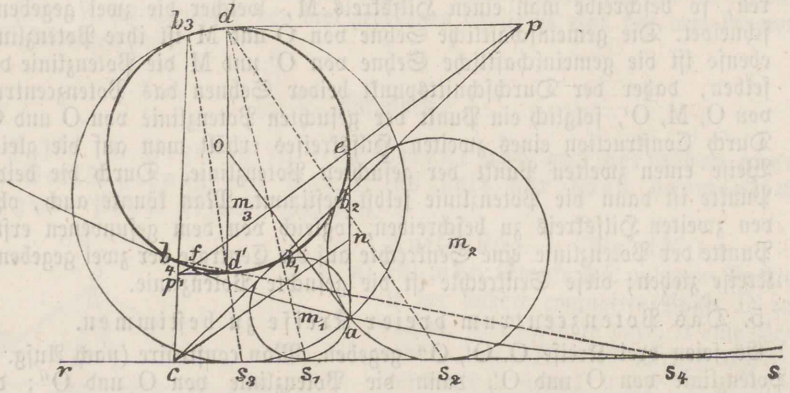
Die hier angeführte Construction enthält zunächst eine Auflösung der 10. Aufgabe des Apollonischen Problems (§. 165); sie liefert aber, da sie für jede Lage und Größe der drei Kreise giltig ist, zugleich die allgemeine

Lösung für die übrigen Aufgaben des obigen Problems, wenn man den Punkt als einen Kreis mit dem Halbmesser Null, und die Gerade als einen Kreis mit einem unendlich großen Halbmesser (§. 124) ansieht. Die Bedeutung der Potenzlinie und der Aehnlichkeitspunkte für diese besonderen Fälle ist in §. 181, 8.—12. und in §. 184, 8.—12., die Bedeutung des Poles einer Geraden in Bezug auf einen Punkt in §. 176, 2, Folgesatz c) angegeben worden. Nur für die Bestimmung der Berührungspunkte auf einer Geraden ist die obige allgemeine Construction nicht anwendbar, weil der Pol einer Geraden in Bezug auf eine Gerade im Unendlichen liegt; die Bestimmung dieser Berührungspunkte geschieht übrigens, wenn sich unter den gegebenen drei Elementen ein Kreis befindet, ganz einfach nach §. 143.

Als Beispiel der Anwendung der obigen allgemeinen Auflösung auf besondere Fälle wählen wir die 5. Aufgabe:

Einen Kreis zu construiren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Fig. 139.



Es seien (Fig. 139) der Punkt a, die Gerade rs und der Kreis o gegeben. Zieht man von a an den Kreis o die Tangente ae, so ist dadurch die Polare ef des Punktes a bestimmt.

Die Potenzlinie von o und a ist die auf ao senkrechte Gerade nc, welche vom Punkte a und seiner Polare ef gleich weit absteht; die Potenzlinie von o und rs ist rs; der Durchschnittspunkt c von nc und rs ist daher das Potenzcentrum von o, a und rs.

Von o und a ist a der innere und äußere Aehnlichkeitspunkt, ebenso von rs und a; von o und rs ist der Endpunkt d' des auf rs senkrechten Durchmessers dd' der innere, der andere Endpunkt d der äußere Aehnlichkeitspunkt. Die Geraden ad' und ad sind daher die beiden einzigen Aehnlichkeitsaxen des Systems.

Die Polare von a in Bezug auf o ist ef, die Polare von d die durch diesen Punkt gezogene Tangente dp; ihr Durchschnitt p ist daher der Pol der Aehnlichkeitsaxe ad; ebenso ist p' der Pol der anderen Aehnlichkeitsaxe ad'

Zieht man nun von c durch p und p' Gerade, so sind die Durchschnittspunkte b_1, b_2, b_3, b_4 derselben mit dem Kreise die Berührungspunkte zwischen dem gegebenen und den gesuchten Kreisen. Die Berührungspunkte s_1, s_2, s_3, s_4 dieser letzteren Kreise mit der Geraden rs erhält man nach §. 143, indem man durch die Berührungspunkte des Kreises und durch d oder d' gerade Linien zieht.

Hiernach sind für jeden der vier Berührungskreise drei Punkte gegeben, aus denen sodann die zugehörigen Mittelpunkte m_1, m_2... leicht gefunden werden können.

Zweiter Theil.

Die Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Ebenen im Raume.

§. **190.** Durch zwei Punkte kann nur eine Gerade gezogen werden (§. 2, 1). Die Lage einer Geraden im Raume ist demnach durch zwei Punkte bestimmt.

§. **191.** Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte im Raume kann nur eine Ebene gelegt werden.

Beweis. Man verbinde zwei dieser Punkte durch eine Gerade und stelle sich eine Ebene vor, welche diese Gerade in sich enthält. Geht die Ebene nicht schon durch den dritten Punkt, so läßt sie sich um jene Gerade (wie um eine feste Axe) so lange drehen, bis sie den dritten Punkt erreicht. Dann kann sie sich aber nicht weiter drehen, ohne diesen Punkt zu verlassen. Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ist also nur eine Ebene möglich.

Folgesatz. Die Lage einer Ebene im Raume ist bestimmt:

a) durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen;
b) durch eine Gerade und einen außerhalb derselben liegenden Punkt;
c) durch zwei einander schneidende gerade Linien.

§. **192.** Zwei Gerade im Raume können eine dreifache Lage gegen einander haben. Liegen sie in derselben Ebene, so sind sie (§. 25) entweder parallel, oder schneiden sich hinreichend verlängert in einem Punkte. Liegen sie nicht in derselben Ebene, so können sie weder parallel sein noch sich schneiden; die eine geht über oder neben der andern vorbei. Solche Gerade nennt man sich kreuzende oder windschiefe Gerade.

Folgesätze. a) Durch einen Punkt im Raume kann mit einer gegebenen Geraden nur eine Parallele gezogen werden (§. 25, Grundsatz).

b) Wenn mehrere parallele Gerade dieselbe Gerade schneiden, so liegen sie unter einander und mit dieser in einer Ebene.

§. **193.** 1. Eine Gerade, welche nicht in einer Ebene liegt, kann diese Ebene nur in einem Punkte treffen.

Denn träfe die Gerade die Ebene noch in einem zweiten Punkte, so müßte sie ganz in die Ebene fallen (§. 3).

Der Punkt, in welchem eine Gerade eine Ebene schneidet, heißt der Fußpunkt dieser Geraden in der Ebene.

2. Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so ist ihr Durchschnitt eine gerade Linie.

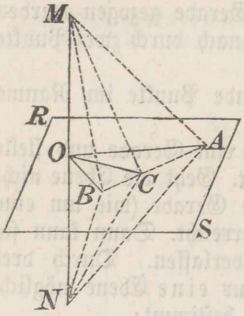
Wäre die Durchschnittslinie nicht gerade, so müßte es in derselben drei Punkte geben, die nicht in gerader Linie liegen. Dann müßten die drei Punkte in beiden Ebenen liegen, und daher diese gegen die Voraussetzung eine einzige Ebene bilden.

I. Lage der Geraden gegen eine Ebene.

§. **194.** Eine Gerade des Raumes kann gegen eine Ebene in einer dreifachen Lage gedacht werden: entweder fällt die Gerade ganz in die Ebene; oder es schneidet die hinreichend verlängerte Gerade die Ebene in einem Punkte, sie ist gegen die Ebene geneigt; oder es trifft die unbegrenzt verlängerte Gerade mit der beliebig erweiterten Ebene nie zusammen, die Gerade ist mit der Ebene parallel.

§. **195.** Steht eine Gerade auf zwei Geraden, welche durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogen werden, senkrecht, so steht sie auch auf jeder anderen durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogenen Geraden senkrecht.

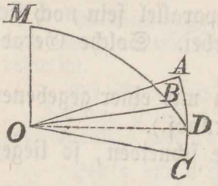
Fig. 140.



Beweis. Es seien (Fig. 140) OA und OB zwei Gerade in der Ebene RS, und MO ⊥ OA, MO ⊥ OB; ferner sei OC eine dritte in dieser Ebene durch O willkürlich gezogene Gerade. Man verlängere die Gerade MO bis N, so daß die auf der entgegengesetzten Seite der Ebene RS liegende Verlängerung ON = OM ist, und ziehe AB, welche die OC in C schneidet, ferner MA und NA; dann ist △ MOA ≅ NOA, folglich MA = NA. Zieht man MB und NB, so ist ebenso △ MOB ≅ NOB, daher MB = NB. Dann aber sind die Dreiecke MAB und NAB congruent, daher W. MAB = NAB. Zieht man endlich noch MC und NC, so ist auch △ MAC ≅ NAC, daher MC = NC. Das △ CMN ist also gleichschenklig, folglich CO ⊥ MN (§. 52, 1), oder MO ⊥ CO.

§. **196.** Steht eine Gerade auf drei anderen Geraden in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte senkrecht, so liegen diese in einer Ebene.

Fig. 141.



Beweis. Es sei (Fig. 141) OM senkrecht auf die Geraden OA, OB und OC. Man lege durch OA und OC die Ebene AOC. Würde OB nicht in dieser Ebene liegen, so müßte, wenn eine durch OM und OB gelegte Ebene die Ebene AOC in OD schneidet, der Winkel MOD = R sein (§. 195). Nach der Annahme ist aber auch MOB = R; es wäre also MOD = MOB, was ungereimt ist.

§. **197.** Steht eine Gerade auf jeder durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogenen Geraden senkrecht, so sagt man, die Gerade und die Ebene stehen auf einander senkrecht; im entgegengesetzten Falle sagt man, die Gerade und die Ebene stehen auf einander schief.

Folgesatz. Steht eine Gerade auf zwei sich schneidenden Geraden senkrecht, so steht sie auch auf der durch dieselben bestimmten Ebene senkrecht (§. 195).

§. **198.** 1. In einem Punkte einer Ebene kann auf diese nur eine Senkrechte errichtet werden.

Ließen sich zwei Senkrechte errichten, so wären, wenn man durch beide eine Ebene legt, aus demselben Punkte auf einer Geraden in einer Ebene zwei Gerade senkrecht, was nicht möglich ist (§. 38, 2).

2. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene kann auf diese nur eine Senkrechte gezogen werden.

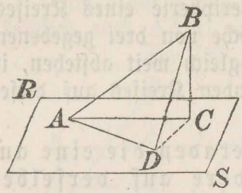
Ließen sich zwei Senkrechte ziehen, so müßten diese mit der Verbindungslinie ihrer Fußpunkte ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln bilden.

§. **199.** Zieht man von einem Punkte im Raume eine Senkrechte auf eine Ebene, so heißt der Fußpunkt dieser Senkrechten die (orthogonale) Projection des Punktes auf die Ebene, und die Ebene heißt die Projectionsebene.

Unter der Projection einer Strecke auf eine Ebene versteht man die Strecke zwischen den Projectionen der Endpunkte der Strecke auf diese Ebene.

Liegt ein Endpunkt A der Strecke AB (Fig. 142) in der Projectionsebene RS, so fällt dieser Punkt mit seiner Projection zusammen; man darf daher nur von dem andern Endpunkte B die BC senkrecht auf die Ebene RS ziehen und die Fußpunkte A und C durch die Gerade AC verbinden; diese ist dann die Projection der Strecke AB auf die Ebene RS.

Fig. 142.



Unter der Projection eines geradlinigen Gebildes auf eine Ebene versteht man das Gebilde, welches von den Projectionen der Seiten des gegebenen Gebildes begrenzt wird.

§. **200.** Der Winkel einer Geraden mit ihrer Projection auf eine Ebene ist der kleinste von allen Winkeln, welche diese Gerade mit den durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet.

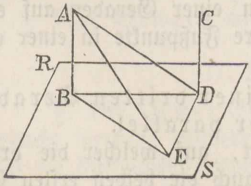
Es sei (Fig. 142) BC $\perp$ Ebene RS, also AC die Projection der Geraden AB auf die Ebene RS. Zieht man durch A in der Ebene RS irgend eine andere Gerade AD, macht AD = AC und zieht noch CD und BD, so ist BC < BD (§. 42, 1). In den Dreiecken BAC und BAD ist dann auch der Winkel BAC < BAD (§. 50).

Der Winkel, welchen eine Gerade mit ihrer Projection auf eine Ebene bildet, wird als das Maß der Neigung der Geraden gegen die Ebene angenommen und heißt der Neigungswinkel derselben.

§. **201.** Zieht man durch den Fußpunkt einer Geraden in einer Ebene auf ihre Projection eine Senkrechte, so steht diese auch auf der Geraden selbst senkrecht.

Es sei (Fig. 143) AB $\perp$ Ebene RS, daher BD die Projection der AD auf RS, ferner sei in der Ebene RS die DE $\perp$ BD. Macht man DE = AB und zieht AD, AE und BE, so ist $\triangle$ ABD $\cong$ EDB (§. 45), daher AD = EB. Dann ist auch $\triangle$ ADE $\cong$ EBA (§. 47), und somit W. ADE = EBA = R, d. i. DE $\perp$ AD.

Fig. 143.



Auf gleiche Weise kann auch die Umkehrung dieses Satzes bewiesen werden.

§. **202.** Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser eine senkrechte und mehrere schiefe Strecken, so ist

1. die Senkrechte die kürzeste unter diesen Strecken;
2. zwei Schiefe, welche gleiche Projectionen auf die Ebene haben, sind einander gleich; und

3. von zwei Schiefen, welche ungleiche Projectionen auf die Ebene haben, ist diejenige die größere, welche die größere Projection hat.

Der Beweis wird, wenn man durch die geraden Linien Ebenen legt, ähnlich wie in §. 42 geführt.

Aus den Sätzen 2. und 3. folgen indirect auch deren Umkehrungen.

Zusatz. Die Senkrechte von einem Punkte auf eine Ebene gibt die Entfernung dieses Punktes von der Ebene an.

Folgesätze. a) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von den Endpunkten einer gegebenen Strecke gleich weit entfernt sind, ist die Ebene, welche in der Mitte der Strecke auf dieselbe senkrecht steht.

b) Alle Punkte einer Ebene, welche von einem außerhalb dieser Ebene liegenden Punkte gleich weit abstehen, liegen in der Peripherie eines Kreises.

c) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von drei gegebenen, nicht in gerader Linie liegenden Punkten des Raumes gleich weit abstehen, ist die im Mittelpunkte des durch jene drei Punkte gehenden Kreises auf diesen errichtete Senkrechte.

§. **203.** 1. Steht von zwei parallelen Geraden die eine auf einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere auf derselben senkrecht.

Es sei (Fig. 143) AB ∥ CD und AB ⊥ Ebene RS, daher BD die Projection der Geraden AD auf RS; dann ist AB ⊥ BD, und da die Parallelen AB und CD in derselben Ebene liegen, auch CD ⊥ BD (§. 27, b). Errichtet man in der Ebene RS die DE ⊥ BD, so ist nach §. 201 auch DE ⊥ AD, folglich DE senkrecht auf der Ebene ADB, und daher auch auf der in dieser Ebene liegenden CD. Die CD ist somit senkrecht auf BD und DE, folglich auch auf der Ebene RS.

2. Stehen zwei Gerade auf einer Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

Wäre nicht die eine Senkrechte mit der andern parallel, so müßte sich durch ihren Fußpunkt eine andere mit der zweiten parallele Gerade ziehen lassen; diese aber wäre nach 1. auf der Ebene senkrecht, was nicht möglich ist, weil in einem Punkte auf eine Ebene nur eine Senkrechte errichtet werden kann.

Folgesätze. a) Zwei Gerade, die auf einer Ebene senkrecht stehen, liegen in einer Ebene (§. 192).

b) Alle Senkrechten von verschiedenen Punkten einer Geraden auf eine Ebene liegen in einer einzigen Ebene, daher alle ihre Fußpunkte in einer einzigen Geraden.

§. **204.** 1. Zwei Gerade, deren jede einer dritten Geraden im Raume parallel ist, sind unter einander parallel.

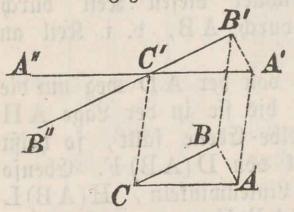
Denkt man sich nämlich eine Ebene construirt, auf welcher die dritte Gerade senkrecht steht, so müssen nach §. 203, 1 auch die beiden ersten Geraden auf dieser Ebene senkrecht stehen, folglich nach §. 203, 2 unter einander parallel sein.

2. Zwei Winkel im Raume, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind a) gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind; dagegen b) Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in dem-

selben, die beiden anderen aber im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

Beweis. a) Es sei (Fig. 144) $AC \parallel A'A''$ und $BC \parallel B'B''$. Macht man $AC = A'C'$, und $BC = B'C'$, und zieht die Geraden AA', BB', CC', AB und $A'B'$, so ist dann AA' gleich und parallel mit CC', ferner BB' gleich und parallel mit CC' (§. 63, 2), mithin auch AA' gleich und parallel mit BB' (§. 204, 1); folglich ist auch $AB = A'B'$ (§. 63, 2). Dann aber ist $\triangle ACB \cong A'C'B'$, daher Winkel $ACB = A'C'B'$.

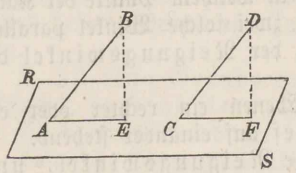
Fig. 144.



Wegen W. $A'C'B' = A''C'B''$ ist auch W. $ACB = A''C'B''$.

b) Nach a) ist $ACB = A'C'B'$, aber $A'C'B' + A''C'B' = 2R$, folglich auch $ACB + A''C'B' = 2R$.

Fig. 145.

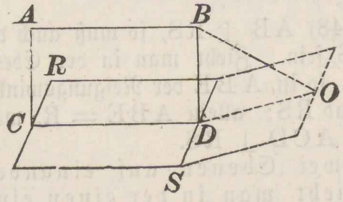


§. **205.** Zwei parallele Gerade bilden mit einer Ebene gleiche Neigungswinkel.

Beweis. Es sei $AB \parallel CD$ (Fig. 145), ferner $BE \perp$ Ebene RS und $DF \perp$ Ebene RS. In den Dreiecken ABE und CDF ist nun Winkel $E = F = R$, ferner $B = D$ (§. 204, 2), folglich auch $A = C$.

§. **206.** 1. Ist eine gerade Linie mit einer in einer Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie mit der Ebene selbst parallel.

Fig. 146.



Es sei (Fig. 146) $AB \parallel CD$. Hätte AB mit der Ebene RS einen Punkt O gemeinschaftlich, so müßte derselbe, wenn man durch AB und CD eine Ebene ABCD legt, zugleich in dieser Ebene liegen; O wäre also beiden Ebenen gemeinschaftlich, d. h. er wäre ein Punkt ihrer Durchschnittslinie CD, was der Voraussetzung widerspricht.

2. Ist eine Gerade mit einer Ebene parallel, so ist sie auch mit jeder Geraden in dieser letzteren parallel, welche mit ihr in einer Ebene liegt.

Der Beweis wird ebenfalls indirect geführt.

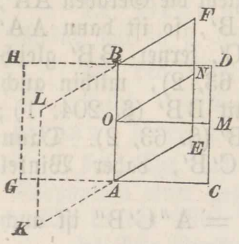
II. Lage der Ebenen gegen einander.

§. **207.** Zwei Ebenen können gegen einander in einer dreifachen Lage gedacht werden: entweder fallen die zwei Ebenen ganz zusammen, oder schneiden sich die hinreichend erweiterten Ebenen in einer geraden Linie, sie sind gegen einander geneigt; oder es treffen die beiden Ebenen, so weit man sie auch erweitern mag, nie zusammen, sie sind parallel.

§. **208.** Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so heißt die Größe der Drehung, welche die eine Ebene um die gemeinschaftliche Durchschnittslinie machen muß, um in die Lage der anderen Ebene zu gelangen, der Flächenwinkel oder Keil der beiden Ebenen; die gemeinschaftliche Durchschnittslinie

nennt man die Scheitellinie oder Kante un die beiden Ebenen selbst Schenkelflächen oder Seiten des Keiles.

Fig. 147.



In Fig. 147 sind AB die Kante, AD und AF die Seiten des von den Ebenen AD und AF gebildeten Keiles. Man bezeichnet diesen Keil durch D(AB)F oder auch blos durch AB, d. i. Keil an der Kante AB.

Wird die Ebene AF von der AD weg um die Kante AB weiter gedreht, bis sie in der Lage AH mit AD in eine und dieselbe Ebene fällt, so heißt F(AB)H der Nebenkeil von D(AB)F. Ebenso wird analog, wie bei den Linienwinkeln, H(AB)L der Scheitelkeil von D(AB)F genannt.

§. **209.** Errichtet man in irgend einem Punkte O (Fig. 147) der Kante eines Keiles in den beiden Seitenebenen Senkrechte OM und ON auf die Kante, so hat der Winkel MON dieselbe Größe, in welchem Punkte der Kante man auch die Senkrechten errichten mag, da je zwei solche Winkel parallele Schenkel haben. Dieser constante Winkel heißt der Neigungswinkel der beiden Ebenen, welche den Keil bilden.

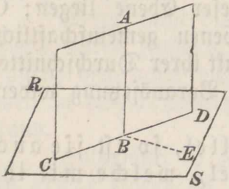
Je nachdem der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter oder ein schiefer ist, heißen dieselben senkrecht oder schief auf einander stehend.

Zu gleichen Keilen gehören gleiche Neigungswinkel, und umgekehrt. — (Beweis durch Deckung.)

Man nimmt daher die Größe des Neigungswinkels der Seiten eines Keiles als Maß für die Größe des Keiles an.

§. **210.** 1. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht auch jede durch die Gerade gelegte Ebene auf der ersteren Ebene senkrecht.

Fig. 148.



Es sei (Fig. 148) AB ⊥ RS, so muß auch die Ebene ACD ⊥ RS sein. Zieht man in der Ebene RS die BE ⊥ CD, so ist ABE der Neigungswinkel der Ebenen ACD und RS; allein ABE = R, weil AB ⊥ RS; folglich ACD ⊥ RS.

2. Stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht, und zieht man in der einen eine Senkrechte auf die Durchschnittslinie, so steht diese Senkrechte auf der zweiten Ebene senkrecht. (Fig. 148.)

Es sei ACD ⊥ RS und AB ⊥ CD. Zieht man BE ⊥ CD, so ist ABE = R, weil ACD ⊥ RS; folglich steht AB auf CD und EB, und daher auch auf der Ebene RS senkrecht.

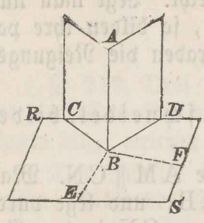
3. Stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht, und errichtet man in einem Punkte der Durchschnittslinie auf die eine Ebene eine Senkrechte, so muß diese ganz in der anderen Ebene liegen.

Denn fiele die in B (Fig. 148) auf RS errichtete Senkrechte nicht mit der in der Ebene ACD auf CD gezogenen Senkrechten BA zusammen, welche nach 2. auf RS senkrecht ist, so wären gegen §. 198, 1 aus B auf RS zwei Senkrechte möglich.

Folgesatz. Stehen von drei sich in einem Punkte schneidenden Geraden je zwei auf einander senkrecht, so stehen auch je zwei der durch sie gelegten Ebenen auf einander senkrecht. (Folgt aus 1.)

§. **211.** Stehen zwei sich schneidende Ebenen auf einer dritten senkrecht, so steht auch ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht.

Fig. 149.



Es sei (Fig. 149) AC ⊥ RS und AD ⊥ RS, so muß AB ⊥ RS sein. Zum Beweise ziehe man BE ⊥ BC und BF ⊥ BD; dann ist (§. 210, 2) BE ⊥ AC, daher auch BE ⊥ AB; ferner ist BF ⊥ AD, daher auch BF ⊥ AB; folglich AB ⊥ RS.

Folgesatz. Stehen von drei sich schneidenden Ebenen je zwei auf einander senkrecht, so stehen auch je zwei ihrer Durchschnittslinien auf einander senkrecht.

§. **212.** 1. Zwei Ebenen, auf denen dieselbe Gerade senkrecht steht, sind einander parallel.

Würden sich die beiden Ebenen schneiden, so müßten die Senkrechte und die Verbindungslinien ihrer Fußpunkte mit irgend einem Punkte des Durchschnittes beider Ebenen ein Dreieck bilden, worin zwei rechte Winkel vorkämen.

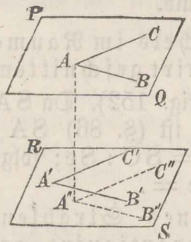
2. Ist eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der anderen Ebene senkrecht.

Wird ebenfalls indirect bewiesen.

Folgesatz. Wenn zwei Ebenen sich schneiden, so kann keine gerade Linie auf beiden senkrecht stehen.

§. **213.** Die Ebenen zweier Winkel im Raume, deren Schenkel parallel sind, sind einander parallel.

Fig. 150.



Es sei (Fig. 150) AB ∥ A′B′ und AC ∥ A′C′. Zieht man AA″ ⊥ RS, ferner A″B″ ∥ A′B′ und A″C″ ∥ A′C′, so ist AA″ senkrecht auf A″B″ und A″C″. Nun ist (§. 204, 1) A″B″ ∥ AB und A″C″ ∥ AC; folglich ist auch AA″ senkrecht auf AB und AC, mithin auch auf PQ; folglich ist PQ ∥ RS (§. 212, 1).

§. **214.** 1. Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel.

Denn errichtet man auf die dritte Ebene eine Senkrechte, so muß diese (§. 212, 2) auch auf den beiden ersteren Ebenen senkrecht stehen, folglich sind diese (§. 212, 1) einander parallel.

2. Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene kann nur eine mit dieser parallele Ebene gelegt werden.

Folgt indirect aus 1.

§. **215.** 1. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Beweis indirect.

2. Parallele Strecken zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich.

Der Beweis folgt aus §. 214 und §. 63.

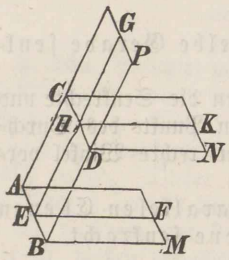
Folgesatz. Alle Senkrechten zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich. Die constante Länge einer solchen Senkrechten gibt den Abstand der beiden Ebenen an.

§. **216.** 1. Eine Gerade, welche zwei parallele Ebenen schneidet, bildet mit diesen gleiche Neigungswinkel.

Zieht man von einem Punkte der Geraden eine Senkrechte auf die eine Ebene, so steht dieselbe auch auf der andern Ebene senkrecht. Legt man nun durch die Senkrechte und die gegebene Gerade eine Ebene, so bilden ihre parallelen Durchschnitte in der Ebene mit der gegebenen Geraden die Neigungswinkel, welche als Gegenwinkel gleich sind.

2. Eine Ebene, welche zwei parallele Ebenen schneidet, bildet mit diesen gleiche Neigungswinkel.

Fig. 151.



Es sei (Fig. 151) die Ebene AM ∥ CN. Man ziehe EF ⊥ AB und EG ⊥ AB, und lege durch FEG eine Ebene, welche die Ebene CN in der Geraden HK schneidet, dann sind, weil CD ∥ AB und HK ∥ EF, FEG und KHG die Neigungswinkel der Ebene AP gegen die Ebenen AM und CN, und zwar ist FEG = KHG.

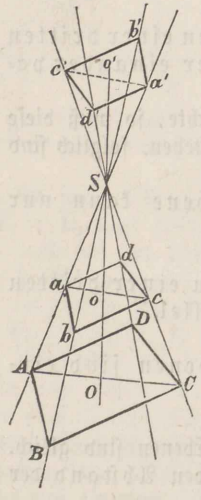
§. **217.** Zwei Keile, deren Seiten paarweise parallel sind, sind einander gleich, wenn beide Seitenpaare in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

Man verlängere eine Seite des einen Keiles, so daß sie eine Seite des anderen Keiles durchschneidet, und wende dann §. 216, 2 an.

Folgesatz. Zwei gleiche Keile lassen sich, wenn man ihre Kanten parallel stellt, immer in eine solche Lage bringen, daß beide Paare ihrer Seiten in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

§. **218.** 1. Die Strahlen eines Strahlenbüschels im Raume werden durch je zwei parallele Ebenen proportionirt geschnitten.

Fig. 152.



Es sei Ebene ABCD ∥ abcd (Fig. 152). Da SA und SB in derselben Ebene liegen, so ist (§. 86) SA : Sa = SB : Sb; ebenso ist SB : Sb = SC : Sc; folglich SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc =..

2. Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von zwei Ebenen proportionirt geschnitten, so sind die beiden Ebenen parallel.

Ist SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc =.., so sind die Winkel ABC und abc, BCA und bca,... gleich, und folglich (§. 87) AB ∥ ab, BC ∥ bc, CD ∥ cd,..; daher sind die durch diese Winkel gelegten Ebenen ABCD und abcd parallel (§. 213).

3. Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von zwei parallelen Ebenen geschnitten, so sind die entsprechenden von den Verbindungslinien der Durchschnittspunkte begrenzten Figuren ähnlich.

Ist Ebene ABCD ∥ abcd, so ist (nach 1.) SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc =...., daher (§. 87) AB ∥ ab, BC ∥ bc und CD ∥ cd.. Daraus folgt

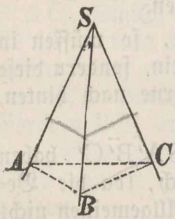
(§. 88) AB : ab = SA : Sa und BC : bc = SA : Sa, daher auch AB : ab = BC : bc. Ebenso folgt BC : bc = CD : cd, u. s. w. Ferner ist W. A = a, W. B = b, W. C = c u. s. w.; somit Figur ABCD ∾ abcd.

III. Körperliche Ecken.

§. **219.** Drei oder mehrere Ebenen, deren Durchschnittslinien durch einen und denselben Punkt gehen, schließen einen nach einer Seite hin unbegrenzten Raum ein, welcher eine körperliche Ecke, auch blos Ecke genannt wird.

Der Punkt, in welchem die Durchschnittslinien der Ebenen zusammentreffen, heißt der Scheitel oder die Spitze; die Durchschnittslinien selbst nennt man die Kanten; die Winkel je zweier auf einander folgender Kanten die Kantenwinkel oder Seiten und ihre Ebenen die Seitenflächen; endlich die Neigungswinkel je zweier benachbarter Seitenflächen die Flächenwinkel, auch blos Winkel der Ecke.

Fig. 153.



Ist (Fig. 153) S der Scheitel der Ecke und sind SA, SB, SC deren Kanten, so bezeichnet man die Ecke durch SABC; die Seiten bezeichnet man entweder, wie die ebenen Winkel, durch ASB, ASC, BSC, oder auch durch (AB), (AC), (BC).

Jede Ecke wird einerseits durch den Scheitel und die Seitenflächen begrenzt, andererseits aber ist sie völlig unbegrenzt. Eine Ecke theilt also den Raum in zwei theilbegrenzte Räume und es gehört daher zu jeder Ecke immer noch eine zweite, deren Flächenwinkel nach dem anderen theilbegrenzten Raume hin liegen. Man nennt die eine die Außenecke der andern.

Im Folgenden soll unter einer Ecke stets nur eine solche verstanden werden, deren Flächenwinkel hohl sind.

Eine Ecke hat so viele Seiten als Kanten. Nach der Anzahl derselben unterscheidet man drei-, vier-,.. nseitige Ecken, oder Dreikante, Vierkante,.. n-Kante.

Wenn man alle Kanten einer Ecke über den Scheitel hinaus verlängert, so heißt die Ecke, welche die Verlängerungen zu Kanten hat, die Scheitelecke der ersteren.

§. **220.** Zieht man von einem beliebigen Punkte in einer Ecke auf jede Seitenfläche derselben eine senkrechte Gerade, so bilden diese Senkrechten die Kanten einer neuen Ecke, welche die Polarecke der gegebenen heißt.

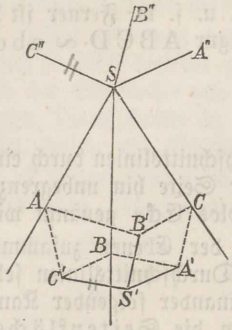
Ist (Fig. 154) S' ein Punkt im Innern der Ecke SABC, und S'A' ⊥ SBC, S'B' ⊥ SAC, S'C' ⊥ SAB, so ist S'A'B'C' die Polarecke der Ecke SABC.

Am bequemsten wird die Polarecke construirt, indem man im Scheitel der gegebenen Ecke auf deren Seitenflächen senkrechte Gerade nach den entgegengesetzten Seiten der den Seitenflächen gegenüberliegenden Kanten errichtet; wie SA"B"C".

1. Jede Ecke ist Polarecke zu ihrer Polarecke.

Da S'A' ⊥ SBC, so ist auch die Ebene S'A'CB' ⊥ SBC; da S'B' ⊥ SAC, so ist auch die Ebene S'A'CB' ⊥ SAC; somit ist auch die Durchschnittslinie SC der Ebenen SBC und SAC senkrecht auf der

Fig. 154.



Ebene S'A'CB' (§. 211). Ebenso folgt, daß die Kante SB ⊥ S'A'BC' und SA ⊥ S'B'AC' ist.

< 2. Sind zwei Ecken Polarecken zu einander, so sind die Seiten der einen Supplemente der Winkel der andern. >

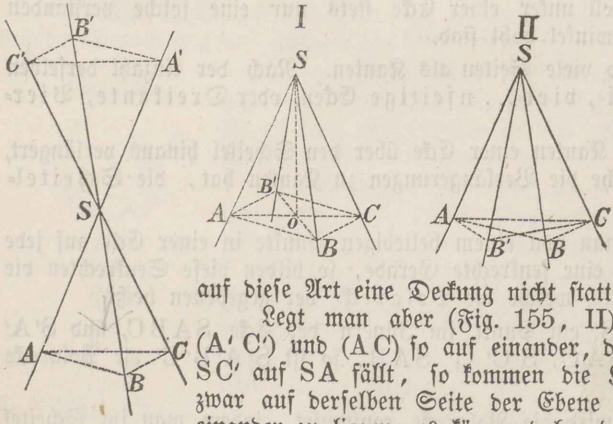
Der Seite BSC der Ecke SABC entspricht der Winkel an der Kante S'A' der Polarecke S'A'B'C'. Das Maß des Winkels ist BA'C, da S'A' senkrecht auf der Ebene SBC, daher auch senkrecht auf A'C und A'B ist. Nun sind, da SC ⊥ S'A'CB' und SB ⊥ S'A'BC' ist, in dem Vierecke SBA'C die Winkel SCA' und SBA' rechte Winkel; daher ist auch BSC + BA'C = 2R. Ebenso wird bewiesen, daß ASC + AB'C = 2R und ASB + AC'B = 2R ist.

< §. 221. Zwei Ecken heißen congruent, wenn sie sich so in einander legen lassen, daß sich alle ihre Kanten und Seitenflächen decken. >

< Sollen zwei Ecken zur Deckung gebracht werden können, so müssen in denselben nicht nur alle Seiten und Winkel paarweise gleich sein, sondern diese auch in demselben Sinne (von rechts nach links, von vorne nach hinten, von unten nach oben) auf einander folgen. >

Die Ecke SABC (Fig. 155) und ihre Scheitelecke SA'B'C' haben paarweise gleiche Seiten und gleiche Winkel; sie können jedoch, da die Bestandstücke im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen, im Allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden.

Fig. 155.



Denn legt man (Fig. 155, I) die Seite (A'C') so auf die ihr gleiche Seite (AC), daß SA' auf SA, SC' auf SC fällt, so kommen die Kanten SB' und SB auf entgegengesetzten Seiten der Ebene SAC zu liegen; es kann also auf diese Art eine Deckung nicht stattfinden.

Legt man aber (Fig. 155, II) die gleichen Seiten (A'C') und (AC) so auf einander, daß SA' auf SC und SC' auf SA fällt, so kommen die Kanten SB' und SB zwar auf derselben Seite der Ebene SAC, jedoch neben einander zu liegen; es können daher die Ecken auch in dieser Lage nicht zur Deckung gebracht werden, wenn nicht zufällig die Flächenwinkel B(AS)C und A(CS)B, folglich auch B'(A'S)C' und A'(C'S)B' einander gleich sind.

< Zwei Ecken, in denen alle Seiten und Winkel gleich sind, jedoch im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen, heißen symmetrisch-gleich. >

Folgesätze. a) Jede Ecke ist ihrer Scheitelecke symmetrisch-gleich.

b) Zwei Ecken, welche mit einer dritten symmetrisch-gleich sind, sind unter einander congruent.

c) Ist von zwei congruenten Ecken die eine mit einer dritten symmetrisch-gleich, so ist es auch die andere.

§. **222.** Legt man zwei symmetrisch-gleiche Ecken so an einander, daß sie eine Seitenfläche gemeinschaftlich haben und sie selbst auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, so liegen je zwei entsprechende Punkte der beiden Ecken in derselben auf die gemeinschaftliche Seitenfläche senkrechten Geraden und in gleichem Abstande von dieser Fläche.

Macht man (Fig. 155, I) $SB = SB'$ und zieht BA und $B'A'$ senkrecht auf die Kante SA, so ist $\triangle SAB \cong SA'B$, daher $SA = SA'$, d. i. A' ist mit A identisch; ferner ist auch $AB = AB'$. Zieht man BB', welche die gemeinschaftliche Seitenfläche SAC in O schneidet, so ist, da $SA \perp$ Ebene BAB' ist, auch $SA \perp AO$. Der Winkel BAO ist also das Maß des Flächenwinkels $B(AS)O$ und der Winkel $B'AO$ das Maß des Flächenwinkels $B'(AS)O$, somit $W. BAO = B'AO$; man hat dann $\triangle BAO \cong B'AO$, folglich $BO = B'O$, und $W. AOB = AOB'$, d. i. $BB' \perp AO$. Es ist aber in dem gleichschenkligen Dreiecke SBB', dessen Grundlinie in O halbirt wird, auch $BB' \perp SO$, somit $BB' \perp$ Ebene SAC.

Die Punkte B und B' liegen also in derselben auf SAC senkrechten Geraden BB' und haben von SAC gleichen Abstand $BO = B'O$.

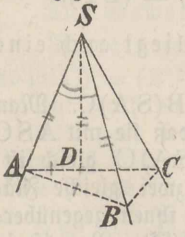
Was von den Punkten B und B' bewiesen wurde, kann auf gleiche Weise von je zwei anderen entsprechenden Punkten der beiden Ecken gezeigt werden.

Zwei symmetrisch-gleiche Ecken in der hier angegebenen Lage stehen, wenn man ihre gemeinschaftliche Seitenfläche als eine Spiegelfläche annimmt, in derselben Beziehung zu einander, wie ein Gegenstand und sein Spiegelbild.

Eigenschaften der Dreikante.

§. **223.** 1. In jedem Dreikante ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte. (Fig. 156.)

Fig. 156.



Beweis. Ist AC die größte Seite, so ziehe man in der Ebene ASC die Gerade SD so, daß $ASD = ASB$ wird, mache $SD = SB$ und lege durch B und D eine beliebige, die Kanten SA und SC in A und C schneidende Ebene. Dann ist $\triangle ASD \cong ASB$, also $AD = AB$. Da nun $BC > AC - AB$ oder $BC > AC - AD$, d. i. $BC > CD$ ist, so ist in den Dreiecken SBC und SDC Winkel $BSC > DSC$ (§. 50); mithin ist auch $ASB + BSC > ASD + DSC$, oder $ASB + BSC > ASC$, d. i. $(AB) + (BC) > (AC)$.

2. In jedem Dreikante ist die Summe aller Seiten kleiner als 4R.

Beweis. Durchschneidet man die drei Kanten durch eine beliebige Ebene in den Punkten A, B, C, so sind diese die Scheitel dreier neuer Dreikante. Bezeichnet man die Winkel des Dreieckes ABC mit A, B, C, und die übrigen Winkel der neu erhaltenen Dreikante mit A', A'', B', B'', C', C'', so ist nach 1.

$$A' + A'' + B' + B'' + C' + C'' > A + B + C,$$

oder

$$A' + A'' + B' + B'' + C' + C'' > 2R.$$

Nun ist

$$ASB + ASC + BSC + A' + A'' + B' + B'' + C' + C'' = 6R,$$

daher, wenn man von dieser Gleichung die letzte Ungleichung subtrahirt:

$$ASB + ASC + BSC < 4R,$$

oder

$$(AB) + (AC) + (BC) < 4R.$$

Zusatz. Auf gleiche Weise kann auch der folgende allgemeine Satz bewiesen werden:

In jeder Ecke ist die Summe aller Seiten kleiner als 4R.

§. **224.** In jedem Dreikante ist die Summe aller Winkel größer als 2R und kleiner als 6R.

Beweis. Sind A, B, C die Winkel eines Dreikants und a', b', c' die entsprechenden Seiten seines Polar-Dreikants, so ist nach §. 220, 2

$$A + a' = 2R$$
$$B + b' = 2R$$
$$C + c' = 2R, \text{ daher}$$

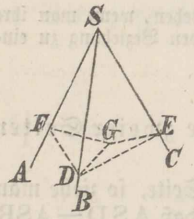
$$A + B + C + a' + b' + c' = 6R; \text{ aber nach §. 223, 2 ist}$$
$$a' + b' + c' < 4R, \text{ folglich}$$

$$A + B + C > 2R.$$

Auch folgt aus $A + B + C + a' + b' + c' = 6R$, daß $A + B + C < 6R$ sein müsse.

§. **225.** 1. Gleichen Winkeln eines Dreikants liegen gleiche Seiten gegenüber.

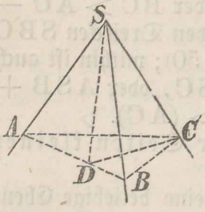
Fig. 157.



Es sei (Fig. 157) $A(SC)B = B(SA)C$. Man ziehe von einem Punkte D in der Kante SB die $DG \perp ASC$, $DE \perp SC$ und $DF \perp SA$ und ziehe ferner GE und GF; dann ist (§. 201) $GE \perp CS$ und $GF \perp SA$, also sind DEG und DFG die Winkel, welche nach der Voraussetzung gleich sind. Die rechtwinkligen Dreiecke DGE und DGF sind demnach congruent, daher $DE = DF$; somit ist auch $\triangle SED \cong SFD$, also Winkel $DSE = DSF$, d. i. $(DE) = (DF)$.

2. Dem größeren Winkel eines Dreikants liegt auch eine größere Seite gegenüber.

Fig. 158.



Es sei (Fig. 158) $A(SC)B > B(SA)C$. Man lege durch SC eine Ebene CSD so, daß sie mit ASC einen Flächenwinkel bilde, welcher $B(SA)C$ gleich ist; dann hat die dreiseitige Ecke SACD zwei gleiche Flächenwinkel, also sind nach 1. auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten (AD) und (CD) gleich. Nun ist in der dreiseitigen Ecke SBCD, $(BD) + (CD) > (BC)$; folglich ist auch $(BD) + (AD) > (BC)$, oder

$$(AB) > (BC).$$

3. Gleichen Seiten eines Dreikants liegen gleiche Winkel gegenüber.

Der Beweis indirect mit Zuziehung von 2.

4. Der größeren Seite eines Dreikants liegt auch ein größerer Winkel gegenüber.

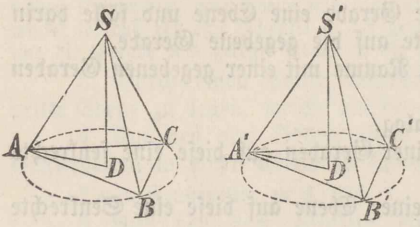
Der Beweis wird indirect mit Zuziehung von 1. und 2. geführt.

§. 226. Zwei Dreikante, in denen

1. zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel,
2. zwei Winkel und die zwischen ihnen liegende Seite,
3. alle drei Seiten,
4. alle drei Winkel

paarweise gleich sind, sind congruent oder symmetrisch-gleich, je nachdem die gleichen Bestandstücke in demselben oder im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen.

Fig. 159.



Beweis zu 1. Es sei (Fig. 159) $(AB) = (A'B')$, $(BC) = (B'C')$ und $\measuredangle (BS)C = \measuredangle (B'S')C'$. Man lege die beiden Dreikante so in einander, daß die Scheitel S' und S, die Kanten S'B' und SB, und die Seiten (A'B') und (AB) auf einander fallen: dann muß wegen der Gleichheit der Flächenwinkel auch die Seitenfläche B'S'C' auf BSC, und weil die Seiten (B'C') und (BC) gleich sind, S'C' auf SC, und endlich auch A'S'C' auf ASC fallen, da durch zwei sich schneidende Gerade nur eine Ebene möglich ist. Folglich decken sich die beiden Dreikante.

Folgen die gleichen Bestandtheile im entgegengesetzten Sinne auf einander, so ist das eine Dreikant mit dem Scheiteldreikant des andern congruent und daher (§. 221, Folges. a und c) mit dem andern selbst symmetrisch-gleich.

Beweis zu 2. Denkt man sich zu beiden Dreikanten die Polardreikante construirt, so müssen in diesen (§. 220, 2) zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel bezüglich gleich, folglich nach 1. sie selbst congruent sein. Dann sind aber in denselben alle entsprechenden Bestandtheile folgeweise gleich und es muß daher (§. 220, 2) auch in den gegebenen Dreikanten dasselbe der Fall sein; mithin sind diese nach 1. congruent.

Der Beweis für die symmetrische Gleichheit, wie bei 1.

Beweis zu 3. Es sei (Fig. 159) $(AB) = (A'B')$, $(AC) = (A'C')$ und $(BC) = (B'C')$. Macht man $SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C'$ und legt durch die Punkte A, B, C und A', B', C' die Ebenen ABC und A'B'C'; zieht ferner $SD \perp ABC$, $S'D' \perp A'B'C'$ und beschreibt um die Dreiecke ABC und A'B'C' Kreise, so fallen deren Mittelpunkte in die Fußpunkte D und D' der Senkrechten SD und S'D' (§. 202, Folges. c). Da nun $\triangle ASB \cong A'S'B'$, so ist $AB = A'B'$; eben so folgt $AC = A'C'$ und $BC = B'C'$, und somit sind die Dreiecke ABC und A'B'C' congruent; daher müssen auch die um dieselben beschriebenen Kreise gleich sein, folglich der Halbmesser $AD = A'D'$. Aus der Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke ADS und A'D'S' folgt endlich $DS = D'S'$.

Legt man nun das Dreikant S'A'B'C' so in das Dreikant SABC, daß sich die congruenten Dreiecke A'B'C' und ABC decken, so werden auch die um sie beschriebenen Kreise, folglich auch ihre Mittelpunkte D' und D auf einander fallen; da ferner in D auf ABC nur eine Senkrechte möglich ist, so fällt D'S' in die Richtung DS und wegen $D'S' = DS$ auch der Punkt S' in S; folglich fallen auch die Kanten und Seitenflächen der Dreikante auf einander.

Der Beweis für die symmetrische Gleichheit, wie bei 1.

Beweis zu 4. Mittelst der Polardreikante, wie bei 2., mit Zuziehung von 3.

IV. Aufgaben.

§. 227. Constructionsaufgaben.

1. (Forderungssatz.) Durch drei gegebene Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, eine Ebene zu legen.

2. Von einem gegebenen Punkte im Raume auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte zu fällen.

Man lege durch den Punkt und die Gerade eine Ebene und fälle darin von dem gegebenen Punkte eine Senkrechte auf die gegebene Gerade.

3. Durch einen gegebenen Punkt im Raume mit einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen.

Die Auflösung ist der früheren analog.

4. Durch einen gegebenen Punkt einer Geraden auf diese eine senkrechte Ebene zu legen (§. 197, Folgef.).

5. Von einem Punkte A außerhalb einer Ebene auf diese eine Senkrechte zu fällen (Fig. 143).

Man ziehe in der Ebene RS eine beliebige Gerade DE, fälle in der durch A und DE gelegten Ebene von A auf DE die Senkrechte AD; in D errichte man in der Ebene RS auf DE die Senkrechte DB und ziehe darauf in der durch den Winkel BAD gelegten Ebene von A aus die Senkrechte AB; so steht AB senkrecht auf der Ebene RS.

Denn DE steht nach der Construction senkrecht auf der Ebene BAD, daher ist Ebene RS $\perp$ BAD (§. 210, 1), mithin ist auch AB $\perp$ Ebene RS (§. 210, 2).

6. Auf eine Ebene RS (Fig. 143) in einem Punkte D derselben eine Senkrechte zu errichten.

Man fälle von einem beliebigen Punkte A außerhalb der Ebene RS auf diese eine Senkrechte AB, lege durch AB und D eine Ebene und ziehe in dieser durch D die DC $\parallel$ AB, so ist DC die gesuchte Senkrechte (§. 203, 1).

7. Durch eine gegebene Gerade in einer Ebene eine auf diese senkrechte Ebene zu legen (Aufg. 6 und §. 210, 1).

V. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. 228. Uebungssätze.

1. Die Projection einer schiefen Geraden auf eine Ebene ist um so kleiner, je größer ihr Neigungswinkel ist.

2. Jeder Punkt der Halbirungsebene eines Keiles steht von den Seiten desselben gleich weit ab.

3. Die drei Ebenen, welche auf den Seiten eines Dreieckes in den Halbirungspunkten derselben senkrecht stehen, schneiden sich in einer Geraden, welche auf der Ebene des Dreieckes in dem Mittelpunkte des demselben umgeschriebenen Kreises senkrecht steht.

4. Verbindet man die Durchschnittspunkte, in denen zwei parallele Ebenen von parallelen Geraden geschnitten werden, durch entsprechende Strecken, so erhält man zwei congruente Vielecke.

§. **229.** Constructionsaufgaben.

1. Von einem gegebenen Punkte einer Ebene zu dieser eine Gerade unter einem gegebenen Neigungswinkel zu ziehen.

Man errichte in einem beliebigen andern Punkte der Ebene darauf eine Senkrechte, lege durch diese und den gegebenen Punkt eine Ebene und construire in derselben an den gegebenen Punkt den gegebenen Neigungswinkel so, daß der eine Schenkel in der gegebenen Ebene liegt; der zweite Schenkel ist die verlangte schiefe Gerade.

2. Eine Ebene unter einem gegebenen Neigungswinkel gegen eine gegebene Ebene zu construiren.

Man errichte auf eine Gerade AB der Ebene in einem beliebigen Punkte C eine Senkrechte in dieser Ebene und dann eine zweite Senkrechte auf die Ebene, lege durch diese beiden Senkrechten eine Ebene und construire in derselben an C den gegebenen Neigungswinkel so, daß der eine Schenkel in die gegebene Ebene fällt; die durch den zweiten Schenkel und die Gerade AB gelegte Ebene ist die verlangte Ebene.

3. Durch einen Punkt außerhalb zweier sich schneidender Ebenen eine dritte Ebene zu legen, welche auf den beiden ersteren senkrecht steht (§. 210, 1).

4. Aus den drei Seiten eines Dreikants einen Winkel desselben durch Construction in einer Ebene zu finden.

Vergl. Construction zu §. 225, 1.

5. Aus den drei Winkeln eines Dreikants eine Seite desselben zu construiren.

Die Construction mit Hilfe des Polardreikants nach §. 225 auf die Aufg. 4 zurückzuführen.

Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern im Allgemeinen.

I. Ebenflächige Körper oder Polyeder.

§. **230.** Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein ebenflächiger Körper oder ein Polyeder. Zur Begrenzung eines Polyeders sind wenigstens vier Ebenen erforderlich. Die einzelnen Grenzebenen heißen die Flächen des Polyeders und bilden dessen Oberfläche; die Durchschnittslinien der Flächen heißen die Kanten und die an den Endpunkten der Kanten liegenden, von den zugehörigen Flächen gebildeten Ecken die Ecken des Polyeders. Ein Polyeder, welches nur hohle Flächenwinkel hat, heißt convex.

§. **231.** 1. In jedem Polyeder ist die Anzahl W aller Kantenwinkel doppelt so groß als die Anzahl K aller Kanten.

Denn jedes Polyeder hat so viele Winkel, als die Anzahl der Seiten aller Flächen beträgt; diese Anzahl ist aber doppelt so groß als die Anzahl der Kanten, da jede Kante in zwei anliegenden Flächen als Seite vorkommt; folglich

$$W = 2K.$$

Folgesatz. In jedem Polyeder ist die Anzahl der Flächen von ungerader Seitenzahl eine gerade.

2. In jedem Polyeder ist die dreifache Anzahl F der Flächen, ebenso die dreifache Anzahl E der Ecken höchstens gleich der doppelten Anzahl K der Kanten.

Denn in jeder Fläche, ebenso an jeder Ecke, kommen mindestens drei Winkel vor; somit ist 3F, und ebenso 3E entweder gleich oder kleiner als die Anzahl aller Winkel; diese beträgt aber 2K (nach 1.); folglich ist

$$3F \leqq 2K \quad \text{und} \quad 3E \leqq 2K.$$

§. **232.** In jedem convexen Polyeder ist die Summe der Anzahl F der Flächen und der Anzahl E der Ecken um 2 größer als die Anzahl K der Kanten. (Euler'scher Satz.)

Beweis. Jedes convexe Polyeder kann man sich in dreiseitige Pyramiden, die eine Ecke gemeinschaftlich haben, zerlegt und aus diesen wieder zusammengesetzt denken. In einer dreiseitigen Pyramide ist die Zahl der Flächen $F = 4$, die Zahl der Ecken $E = 4$ und die Zahl der Kanten $K = 6$, folglich $F + E = K + 2$. Wird nun an eine solche Pyramide eine zweite dreiseitige Pyramide so angelegt, daß sich zwei congruente Flächen decken, so wird an dem dadurch entstehenden Körper die Zahl der Flächen, da drei neue dazu kommen, dagegen eine der früheren als in das Innere des Körpers fallend verschwindet, um 2 größer als früher, die Zahl der Ecken wächst um 1, die Zahl der Kanten um 3; es ist also $F = 6$, $E = 5$ und $K = 9$, somit wieder $F + E = K + 2$. Ebenso wird auch bei jedem weiteren Anfügen einer neuen dreiseitigen Pyramide die Zahl der Flächen um 2, die der Ecken um 1, die der Kanten um 3 wachsen, also für jedes nach und nach entstehende Polyeder $F + E = K + 2$ bleiben.

Hier wurde vorausgesetzt, daß bei dem Zusammenlegen der Pyramiden je zwei an einander stoßende Flächen in verschiedenen Ebenen liegen. Der obige Satz bleibt aber auch dann richtig, wenn zwei Flächen in eine einzige Ebene zusammenfallen; denn in diesem Falle hat man 1 Fläche und auch 1 Kante weniger, während die Zahl der Ecken dieselbe bleibt. Es ist also auch für diesen Fall $F + E = K + 2$.

§. **233.** In jedem Polyeder ist die Summe aller Winkel an der Oberfläche gleich sovielmal 4 Rechten, als die um 2 verminderte Zahl der Ecken anzeigt.

Beweis. Ist die Zahl der Seiten der einzelnen Grenzflächen des Polyeders n_1, n_2, n_3, ..., so sind die Summen der Winkel in diesen Vielecken $(n_1 - 2) \cdot 2R$, $(n_2 - 2) \cdot 2R$, $(n_3 - 2) \cdot 2R$, .. (§. 73), daher die Summe dieser Winkel auf der ganzen Oberfläche des Polyeders $S = (n_1 + n_2 + n_3 + ..) \cdot 2R - F \cdot 4R$, wenn man, wie oben, die Zahl der Flächen des Polyeders, das E Ecken und K Kanten hat, mit F bezeichnet. Es ist aber $n_1 + n_2 + n_3 + .. = 2K$, da jede Kante zwei Seiten bildet; also $S = K \cdot 4R - F \cdot 4R = (K - F) \cdot 4R$, und somit wegen $K - F = E - 2$ (§. 232)

$$S = (E - 2) \cdot 4R.$$

1. Die Pyramide.

§. **234.** Bewegt sich eine Gerade, indem sie stets durch einen festen Punkt außerhalb der Ebene eines Vieleckes geht, längs des Umfanges dieses Vieleckes fort, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt sie ein System von Ebenen, deren Durchschnittslinien in dem gegebenen festen Punkte zusammentreffen. Der von diesen Ebenen umschlossene, nach einer Seite hin unbegrenzte Raum heißt ein pyramidaler Raum.

Wird ein pyramidaler Raum durch eine alle Kanten desselben treffende Ebene geschnitten, so heißt das dadurch abgegrenzte Polyeder eine Pyramide. Die Schnittfläche heißt die Grundfläche, die anderen Grenzflächen heißen die Seitenflächen, ihre Durchschnitte mit einander die Seitenkanten, und mit der Grundfläche die Grundkanten der Pyramide. Den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Seitenkanten nennt man den Scheitel oder die Spitze, und den Abstand der Spitze von der Grundfläche die Höhe der Pyramide.

Die Seitenflächen einer Pyramide sind Dreiecke.

Eine Ebene, welche durch zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Seitenkanten gelegt wird, heißt ein Diagonalschnitt der Pyramide.

Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seiten der Grundfläche theilt man die Pyramiden in drei-, vier- und mehrseitige ein. Das einfachste Polyeder ist die dreiseitige Pyramide; sie wird von vier Dreiecken begrenzt und heißt daher auch das Tetraeder.

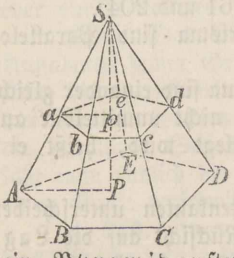
Ist die Grundfläche einer Pyramide ein regelmäßiges Vieleck und fällt der Fußpunkt der Höhe in den Mittelpunkt der Grundfläche, so heißt die Pyramide eine senkrechte. Die Seitenflächen einer senkrechten Pyramide sind gleichschenklige congruente Dreiecke. Der Abstand der Spitze von der Grundlinie eines solchen Dreieckes heißt die Seitenhöhe der senkrechten Pyramide.

§. **235.** 1. Wird eine Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist a) die Schnittfläche der Grundfläche ähnlich, und b) die Flächeninhalte beider verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Abstände von der Spitze.

Beweis. Es sei (Fig. 160) abcde || ABCDE.

a) Folgt unmittelbar aus §. 218, 3.

Fig. 160.



b) Ist SP ⊥ ABCDE, also auch Sp ⊥ abcde, und legt man durch ASP eine Ebene, welche die beiden Vielecke in den Geraden ap und AP schneidet, so ist ap || AP, daher ab : AB = Sa : SA = Sp : SP. Nun ist abcde : ABCDE = $ab^2 : AB^2$ (§. 111, Folges.), folglich auch abcde : ABCDE = $Sp^2 : SP^2$.

Wird eine Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt der zwischen den beiden parallelen Flächen liegende Theil der Pyramide ein Pyramidenstumpf, der zwischen der Schnittfläche und der Spitze liegende Theil aber die Ergänzungspyramide des Stumpfes. Der Pyramidenstumpf wird von zwei parallelen und ähnlichen Vielecken als Grundflächen und so vielen Trapezen als Seitenflächen begrenzt, als jedes der Vielecke Seiten hat; er ist, wie die Pyramide selbst, senkrecht oder schief. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Pyramidenstumpfes.

2. Werden zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe in gleichen Abständen von der Spitze durch Ebenen, welche mit den Grundflächen parallel sind, geschnitten, so sind die Schnittfiguren flächengleich.

Es seien P und P′ zwei Pyramiden über den Grundflächen g = g′ mit den Höhen h = h′, f und f′ ihre Schnittflächen in den Abständen d = d′ von der Spitze. Dann ist nach 1.

$$f : g = d^2 : h^2, \text{ und}$$
$$f' : g' = d'^2 : h'^2 = d^2 : h^2,$$
daher
$$f : g = f' : g',$$
und, da $g = g'$ ist, auch $f = f'$.

3. Jeder durch die Spitze und die Grundfläche einer Pyramide geführte ebene Schnitt ist ein Dreieck.

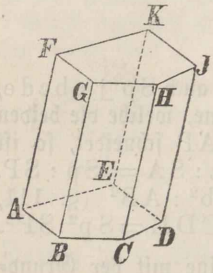
Folgesatz. Jede vielseitige Pyramide läßt sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Pyramiden von der Höhe der ganzen Pyramiden zerlegen.

2. Das Prisma und das Prismatoid.

§. **236**. Bewegt sich eine Gerade, indem sie stets einer aus der Ebene eines Vieleckes heraustretenden festen Geraden parallel bleibt, längs des Umfanges dieses Vieleckes fort, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt sie ein System von Ebenen, deren Durchschnittslinien einander parallel sind. Der von diesen Ebenen umschlossene, nach zwei Seiten hin unbegrenzte Raum heißt ein prismatischer Raum.

Wird ein prismatischer Raum durch zwei parallele, alle Kanten desselben treffende Ebenen geschnitten, so heißt das dadurch abgegrenzte Polyeder ein Prisma. Die zwei parallelen Schnittflächen nennt man die Grundflächen, die übrigen Grenzflächen die Seitenflächen, die Durchschnitte der letzteren mit einander die Seitenkanten, und die mit den Grundflächen die Grundkanten des Prisma. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prisma.

Fig. 161.



Der Körper ABCDEFGHJK (Fig. 161) ist ein Prisma, wenn die Ebene ABCDE || FGHJK, und wenn
$$AF \parallel BG \parallel CH \parallel DJ \parallel EK \text{ ist.}$$

Folgesätze. 1. Die beiden Grundflächen eines Prisma sind congruente Vielecke (§§. 215, 61 und 204).

2. Alle Seitenflächen des Prisma sind Parallelogramme.

3. Alle Seitenkanten des Prisma sind einander gleich.

Eine Ebene, welche durch zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Seitenkanten gelegt wird, heißt ein Diagonalschnitt des Prisma.

§. **237**. Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seitenkanten unterscheidet man drei-, vier- oder mehrseitige Prismen. Mit Rücksicht auf die Lage der Seitenkanten gegen die Grundflächen heißt ein Prisma senkrecht oder schief, je nachdem die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht oder schief stehen.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt Parallelepiped. Ein senkrechtes Parallelepiped, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped. Ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen alle Kanten gleich sind, wird ein Cubus oder Würfel genannt; jede Kante heißt auch eine Seite des Würfels. Jedes Parallelepiped wird von sechs Parallelogrammen, ein rechtwinkliges Parallelepiped von sechs Rechtecken, ein Würfel von sechs Quadraten begrenzt.

§. **238**. 1. Wird ein Prisma durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche mit der Grundfläche congruent.

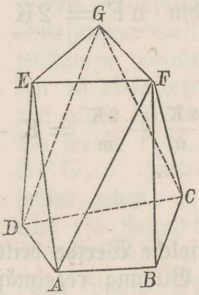
Denn die gleichliegenden Seiten der Grundfläche und des Schnittes sind als Parallele zwischen Parallelen gleich; die gleichliegenden Winkel haben parallele Schenkel, sind also auch gleich.

2. Jeder Diagonalschnitt eines vielseitigen Prisma ist ein Parallelogramm. (§. 63, 2).

Folgesatz. Jedes vielseitige Prisma läßt sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Prismen von der Höhe des ganzen Prisma zerlegen.

§. **239.** Ein Körper, welcher von zwei beliebigen parallelen Vielecken als Grundflächen, und im allgemeinen von Dreiecken, welche mit je einer Grundfläche eine Seite, und mit der anderen einen Eckpunkt gemeinschaftlich haben, als Seitenflächen begrenzt wird, heißt ein Prismatoid. (Fig. 162.)

Fig. 162.



Der Abstand der beiden parallelen Grundflächen ABCD und EFG heißt die Höhe des Prismatoids; die Durchschnitte der Seitenflächen mit einander und mit den Grundflächen heißen bezüglich die Seitenkanten oder die Grundkanten.

Sind zwei gegenüberliegende Seiten der beiden Grundflächen (wie AB und EF) parallel, so fallen zwei Seitendreiecke (ABF und AEF) in ein Trapez (ABFE), und, wenn die parallelen Seiten auch gleich sind, in ein Parallelogramm zusammen. Unter den Seitenflächen eines Prismatoids können daher auch Trapeze oder Parallelogramme vorkommen.

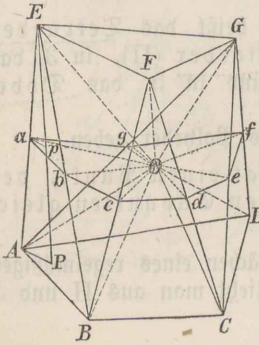
Haben die beiden Grundflächen eines Prismatoids gleich viele Seiten und sind außerdem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel, so heißt das Prismatoid insbesondere ein Obelisk, und zwar nach der Zahl der Seitenflächen ein drei-, vier- oder mehrseitiger.

Der dreiseitige Obelisk ist entweder ein dreiseitiger Pyramidenstumpf oder ein dreiseitiges Prisma.

Zusatz. Das Prismatoid faßt in der Form des Obelisken für besondere Annahmen seiner Grundflächen alle bisher betrachteten Körperformen in sich. Sind die gegenüberliegenden Seiten der Grundflächen eines Obelisken nicht nur parallel, sondern auch gleich, so wird der Obelisk zu einem Prisma; sind die parallelen Seiten proportionirt, so stellt er einen Pyramidenstumpf vor; läßt man endlich die kleinere Grundfläche immer mehr abnehmen, bis sie in einen Punkt verschwindet, so geht der Obelisk in die Pyramide über.

§. **240.** Legt man durch die Mitte a einer Seitenkante AE des Prismatoids (Fig. 163) einen mit den Grundflächen parallelen Schnitt, so halbirt derselbe a) auch alle übrigen Seitenkanten, und b) die Höhe.

Fig. 163.



Es sei Ea = Aa und abcdefg ∥ ABCD.

a) Da die Durchschnittslinien ab, bc, cd,... der Ebene abcdefg mit den Seitenflächen zu den Grundkanten AB, EF, BC,... parallel sind, so folgt aus Ea = Aa auch Eb = Bb, Fc = Bc,...

b) Wird die Höhe EP des Prismatoids von der Ebene abcdefg in p geschnitten, so ist ap ∥ AP, daher Ep : Pp = Ea : Aa; aber Ea = Aa, daher auch Ep = Pp.

Der Schnitt abcdefg heißt der Mittelschnitt des Prismatoids.

3. Regelmäßige Polyeder.

§. **241.** Ein Polyeder, dessen alle Grenzflächen congruente regelmäßige Vielecke sind und congruente Ecken bilden, heißt ein regelmäßiges Polyeder (ein platonischer Körper).

Es kann nicht mehr als fünf regelmäßige Polyeder geben.

Beweis. Es seien die Seitenflächen eines regelmäßigen Polyeders Vielecke von n Seiten, deren je m eine Ecke bilden, F sei die Anzahl dieser Seitenflächen, E die Zahl der Ecken und K die Zahl der Kanten des Polyeders. Dann ist die Gesammtzahl der Seiten aller Seitenflächen $2K$, da jede Kante als Seite zweier zusammentreffender Seitenflächen vorkommt; sie ist aber, da jede Seitenfläche n Seiten hat, auch nF, und, da in jeder Ecke m Seiten zusammentreffen, auch mE; es ist mithin $nF = 2K$ und $mE = 2K$, oder

$$F = \frac{2K}{n} \text{ und } E = \frac{2K}{m}.$$

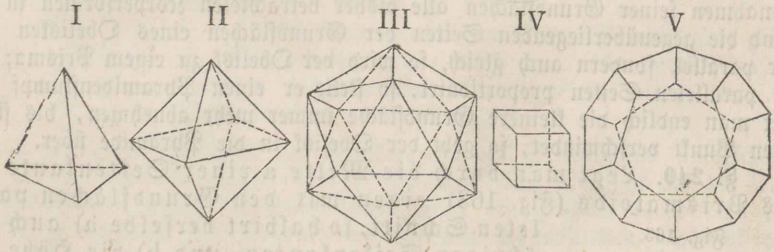
Nun ist (nach §. 232) $F + E = K + 2$, daher $\frac{2K}{n} + \frac{2K}{m} = K + 2$, und folglich

$$K = \frac{2mn}{2(m+n) - mn}.$$

Damit K positiv werde, kann man m und n nur solche Werthe beilegen, für welche $2(m + n) > mn$ wird. Hiernach ist die Bildung regelmäßiger Polyeder nur für folgende Werthe von m und n möglich:

1. $n = 3$, $m = 3$, woraus $K = 6$, $F = 4$, $E = 4$;
2. $n = 3$, $m = 4$, „ $K = 12$, $F = 8$, $E = 6$;
3. $n = 3$, $m = 5$, „ $K = 30$, $F = 20$, $E = 12$;
4. $n = 4$, $m = 3$, „ $K = 12$, $F = 6$, $E = 8$;
5. $n = 5$, $m = 3$, „ $K = 30$, $F = 12$, $E = 20$.

Fig. 164.



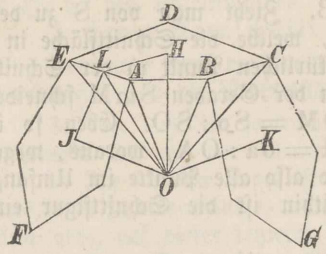
Der durch 1. bestimmte regelmäßige Körper heißt das Tetraeder (Fig. 164, I), der regelmäßige Körper in 2. das Oktaeder (II), in 3. das Ikosaeder (III), in 4. das Hexaeder (IV) und in 5. das Dodekaeder (V).

Außer diesen kann es kein anderes regelmäßiges Polyeder geben.

§. **242.** Jedes regelmäßige Polyeder hat einen Punkt, der a) von allen Seitenflächen, und b) von allen Eckpunkten gleich weit absteht.

a) Es seien (Fig. 165) ABD, AEF,... Seitenflächen eines regelmäßigen Polyeders und H, J,... ihre Mittelpunkte. Zieht man aus H und J

Fig. 165.



zu der Mitte L der Seite AE die Strecken HL und JL, so stehen diese auf AE senkrecht, daher ist HLJ der Neigungswinkel der Ebenen ABD und AEF, und es sind diese Ebenen auf der durch den Winkel HLJ gelegten Ebene senkrecht (§. 210, 1). Werden daher auf ABD und AEF in H und J Senkrechte errichtet, so müssen sie in der Ebene HLJ liegen (§. 210, 3) und verlängert sich in einem Punkte O schneiden. Zieht man nun OL, so ist $\triangle OHL \cong OJL$, daher $OH = OJ$; d. h. der Punkt O ist von den beiden Seitenflächen gleich weit entfernt. Was aber von der an ABD anstoßenden Seitenfläche AEF gilt, gilt ebenso von den übrigen Seitenflächen, welche an ABD anstoßen; eben dasselbe gilt auch wieder von den an diese letzteren anstoßenden Seitenflächen. Der Punkt O ist also von allen Seitenflächen des regelmäßigen Polyeders gleich weit entfernt.

b) Da ferner OH, OJ, OK,... auf den Seitenflächen ABD, AEF, BCG,... senkrecht sind und durch die Mittelpunkte H, J, K,... derselben gehen, so müssen (nach §. 202, 2) alle schiefen Strecken aus O nach den Eckpunkten der Seitenflächen gleich lang sein. Der Punkt O ist also auch von allen Eckpunkten gleich weit entfernt.

Der Punkt O heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Polyeders.

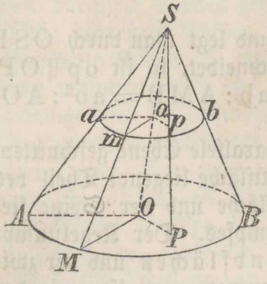
II. Krummflächige Körper.

§. **243.** Körper, welche ganz oder theilweise von gekrümmten Flächen begrenzt werden, heißen krummflächige Körper. Bei denjenigen krummflächigen Körpern, deren eine oder mehrere Grenzflächen Ebenen sind, werden diese als Grundflächen betrachtet, da man sich die Körper darüber aufgerichtet vorstellen kann; die gekrümmte Fläche heißt dann der Mantel.

1. Der Kegel.

§. **244.** Bewegt sich eine Gerade, indem sie stets durch einen festen Punkt außerhalb der Ebene einer Kreislinie geht, längs dieser Kreislinie fort, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt sie eine gekrümmte Fläche, welche von jeder durch den gegebenen festen Punkt und den Mittelpunkt der Kreislinie gelegten Ebene in einer Geraden geschnitten wird.

Fig. 166.



Diese Fläche heißt eine konische Fläche, und der von ihr umschlossene, nach einer Seite hin unbegrenzte Raum ein konischer Raum. Die gegebene Kreislinie heißt die Leitlinie, und der gegebene feste Punkt der Scheitel oder die Spitze der konischen Fläche.

Jeder mit der Ebene der Leitlinie parallel gelegte Schnitt einer konischen Fläche ist eine Kreislinie.

Es sei S (Fig. 166) die Spitze, und der Kreis AMB die Leitlinie der konischen Fläche, ferner Ebene amb || AMB. Zieht man von S zu dem Mittelpunkte O der Leitlinie die Gerade SO, welche die Schnittfläche in o schneidet, und legt durch SO und einen willkürlichen Punkt m der Schnittfigur eine Ebene, welche die konische Fläche in der Geraden SmM schneidet, so ist om || OM; daher hat man om : OM = So : SO. Eben so ist oa : OA = So : SO, und folglich om : OM = oa : OA, woraus, wegen OM = OA, auch om = oa folgt. Es sind also alle Punkte im Umfange des Schnittes von o gleich weit entfernt, mithin ist die Schnittfigur eine Kreislinie.

§. **245.** Wird eine konische Fläche durch eine mit der Ebene der Leitlinie parallele Ebene geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein Kegel. Die ebene Schnittfläche ist ein Kreis (§. 244) und heißt die Grundfläche, die sie begrenzende konische Fläche wird der Mantel des Kegels genannt. Die Strecke, welche die Spitze und den Mittelpunkt der Grundfläche verbindet, heißt die Axe, und jede Strecke, in welcher der Mantel von einer durch die Axe gelegten Ebene geschnitten wird, eine Seitenlinie oder Seite des Kegels. Den Abstand der Spitze von der Grundfläche des Kegels nennt man die Höhe desselben.

Steht die Axe auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Kegel ein senkrechter, sonst ein schiefer. Einen senkrechten Kegel kann man sich durch Drehung eines rechtwinkligen Dreieckes um eine seiner Katheten als Axe entstanden denken. Ein senkrechter Kegel, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, heißt gleichseitig.

Geht durch einen Umfangspunkt der Grundfläche eine Tangente zu dieser und eine Seitenlinie, so hat die durch beide Linien gelegte Ebene nur die Seitenlinie mit der Kegelfläche gemeinschaftlich, sie heißt eine Berührungsebene des Kegels.

Folgesätze. a) In einem senkrechten Kegel sind alle Seiten gleich, und die Axe stellt zugleich die Höhe vor.

b) In einem schiefen Kegel gibt es eine kürzeste und eine längste Seite; dieselben liegen in einer durch die Axe und ihre Projection auf die Grundfläche gehenden Ebene.

§. **246.** 1. Wird ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist a) die Schnittfläche ein Kreis, und es verhalten sich b) die Schnittfläche und die Grundfläche wie die zweiten Potenzen ihrer Abstände von der Spitze des Kegels.

Beweis. Es sei (Fig. 166) die Ebene amb || AMB.

a) Folgt aus §. 244.

b) Ist SP ⊥ AMB, also auch Sp ⊥ amb, und legt man durch OSP eine Ebene, welche die beiden Kreise in OP und op schneidet, so ist op || OP, daher ao : AO = So : SO = Sp : SP. Nun ist amb : AMB = $ao^2 : AO^2$ (§. 161), folglich auch amb : AMB = $Sp^2 : SP^2$.

Wird ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt der zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche liegende Theil des Kegels ein Kegelstumpf, der zwischen der Schnittfläche und der Spitze liegende Theil aber der Ergänzungskegel des Stumpfes. Der Kegelstumpf wird von zwei parallelen ungleichen Kreisen als Grundflächen und der zwischen ihnen enthaltenen konischen Mantelfläche begrenzt, und ist, wie der

Kegel selbst, senkrecht oder schief. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Kegelstumpfes.

2. Jeder Axenschnitt des Kegels ist ein Dreieck.

Denn jede durch die Axe gelegte Ebene schneidet die Grundfläche in einem Durchmesser und die Mantelfläche in zwei geraden Linien.

Zusätze. a) Im senkrechten Kegel sind alle Axenschnitte gleichschenklige, congruente und auf der Grundfläche senkrechte Dreiecke.

b) Im schiefen Kegel ist nur eines der Dreiecke gleichschenklig und nur eines, und zwar dasjenige, welches durch die Projection der Axe auf die Grundfläche geht, auf dieser letzteren senkrecht; diese beiden Dreiecke stehen senkrecht auf einander. Der auf der Grundfläche senkrechte Axenschnitt heißt das charakteristische Dreieck des schiefen Kegels.

c) Der Axenschnitt eines Kegelstumpfes ist ein Trapez.

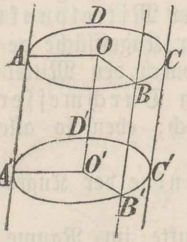
2. Der Cylinder.

§. **247.** Bewegt sich eine Gerade, indem sie stets einer festen, die Ebene einer Kreislinie im Mittelpunkte derselben treffenden Geraden parallel bleibt, längs dieser Kreislinie fort, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt sie eine gekrümmte Fläche, welche von jeder durch jene feste Gerade gelegten Ebene in einer Geraden geschnitten wird.

Diese Fläche heißt eine cylindrische Fläche, und der von ihr umschlossene, nach zwei Seiten hin unbegrenzte Raum ein cylindrischer Raum. Die gegebene Kreislinie heißt die Leitlinie, und die durch ihren Mittelpunkt gehende feste Gerade die Axe der cylindrischen Fläche.

Jeder mit der Ebene der Leitlinie parallel gelegte Schnitt einer cylindrischen Fläche ist eine Kreislinie, welche mit der Leitlinie gleichen Halbmesser hat.

Fig. 167.



Es sei der Kreis A'B'C' (Fig. 167) die Leitlinie der cylindrischen Fläche, und eine mit diesem Kreise parallele Ebene ABC schneide die Axe O'O in O. Ist B ein willkürlicher Punkt der Durchschnittsfigur, so ist $OO' \parallel BB'$ und $OB \parallel O'B'$; daher ist OO'B'B ein Parallelogramm, und folglich $OB = O'B'$. Es ist also die Entfernung eines jeden Punktes der Schnittfigur von O dem Halbmesser der Leitlinie gleich, d. h. der Schnitt ist eine mit der Leitlinie congruente Kreislinie.

§. **248.** Wird eine cylindrische Fläche durch zwei mit der Ebene der Leitlinie parallele Ebenen geschnitten, so heißt der von diesen und der cylindrischen Fläche begrenzte Körper ein Cylinder. Die zwei ebenen Schnittflächen sind congruente Kreise (§. 247) und heißen die Grundflächen; die sie begrenzende cylindrische Fläche nennt man den Mantel des Cylinders. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Kreise heißt die Axe, und jede Durchschnittslinie des Mantels mit einer durch die Axe gelegten Ebene eine Seitenlinie oder Seite des Cylinders. Der Abstand der beiden Grundflächen wird die Höhe des Cylinders genannt.

Steht die Axe auf den Grundflächen senkrecht, so heißt der Cylinder ein senkrechter, sonst ein schiefer. Einen senkrechten Cylinder kann man sich auch durch Drehung eines Rechteckes um eine Seite als Axe entstanden denken.

Ein senkrechter Cylinder, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, wird gleichseitig genannt.

Geht durch einen Umfangspunkt der Grundfläche eine Tangente zu dieser und eine Seitenlinie, so hat die durch beide Linien gelegte Ebene nur die Seitenlinie mit der Mantelfläche gemeinschaftlich; eine solche Ebene heißt eine Berührungsebene des Cylinders.

Folgesätze. a) Alle Seiten des Cylinders sind parallel und einander gleich.

b) In einem senkrechten Cylinder stellt die Axe zugleich die Höhe vor.

§. **249**. 1. Wird ein Cylinder durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche ein mit der Grundfläche congruenter Kreis. (Folgt aus §. 247.)

2. Jeder Axenschnitt eines Cylinders ist ein Parallelogramm.

Denn in dem erhaltenen Vierecke sind die Durchschnittslinien der Ebene mit der Mantelfläche als Seiten des Cylinders parallel und gleich.

Zusätze. a) Im senkrechten Cylinder sind alle Axenschnitte congruente Rechtecke und stehen auf der Grundfläche senkrecht.

b) Im schiefen Cylinder sind die Axenschnitte ungleiche Parallelogramme und steht nur einer, und zwar derjenige, welcher durch die Projection der Axe auf die Grundfläche geht, auf der Grundfläche senkrecht. Dieser auf die Grundfläche senkrechte Axenschnitt heißt das charakteristische Parallelogramm des schiefen Cylinders.

3. Die Kugel.

§. **250**. Dreht sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser so weit herum, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt derselbe eine gekrümmte Fläche, welche Kugelfläche genannt wird. Der von der Kugelfläche begrenzte Körper heißt die Kugel.

Jeder Punkt der Kugelfläche ist von dem Mittelpunkte des erzeugenden Kreises gleich weit entfernt; dieser Punkt heißt darum auch der Mittelpunkt der Kugel. Eine Strecke, welche vom Mittelpunkte bis zur Kugelfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser; eine Strecke, welche durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte der Kugeloberfläche verbindet, ein Durchmesser der Kugel. Alle Halbmesser einer Kugel sind einander gleich; eben so alle Durchmesser.

Die Endpunkte eines Durchmessers werden Gegenpunkte der Kugelfläche genannt.

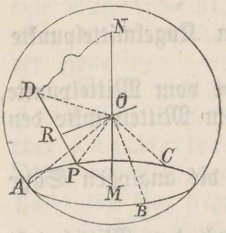
Folgesätze. a) Der geometrische Ort aller Punkte im Raume, welche von einem gegebenen Punkte den Abstand a haben, ist die aus diesem Punkte mit dem Halbmesser a beschriebene Kugelfläche.

b) Ist der Abstand eines Punktes vom Kugelmittelpunkte kleiner oder größer als der Halbmesser, so liegt der Punkt bezüglich innerhalb oder außerhalb der Kugelfläche.

§. **251**. Durch vier Punkte A, B, C und D (Fig. 168), welche nicht in einer Ebene liegen, ist eine Kugel vollkommen bestimmt.

Der geom. Ort eines Punktes, der von den Punkten A, B, C gleich weit absteht, ist die im Mittelpunkte M des durch die drei Punkte gehenden Kreises auf diesen errichtete Senkrechte MN (§. 202, Folges. c). Jeder Punkt dieser Senkrechten ist dann von allen Punkten der Peripherie jenes Kreises gleich weit entfernt. Legt man daher durch MN und den vierten

Fig. 168.



außerhalb der Kreisebene liegenden Punkt D eine Ebene, welche die Peripherie des Kreises in P schneidet, und errichtet in dieser letzteren Ebene auf die Verbindungslinie DP in ihrer Mitte R eine Senkrechte, welche die MN in O trifft, so ist O nicht nur von D und P gleich weit entfernt (§. 52, Folges.), sondern steht auch von D und den drei Punkten A, B, C, welche mit P auf demselben Kreisumfange liegen, gleich weit ab; O ist somit der Mittelpunkt, der durch A, B, C, D gehenden Kugelfläche.

Da es nur einen Punkt O gibt, welcher den obigen Bedingungen entspricht, so kann es auch nur eine einzige Kugelfläche geben, welche durch die vier Punkte A, B, C, D geht.

Die Gerade und die Kugel.

§. **252.** Je nachdem der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkte einer Kugel kleiner, eben so groß oder größer ist als deren Halbmesser, trifft die Gerade die Kugel in zwei Punkten, oder berührt sie dieselbe in einem Punkte, oder liegt sie ganz außerhalb der Kugel.

1. Jede gerade Berührungslinie einer Kugel steht senkrecht auf dem zum Berührungspunkte gezogenen Halbmesser (§. 131).

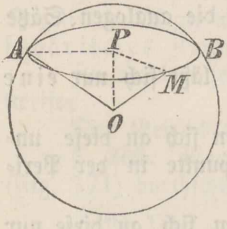
2. Alle von einem Punkte außerhalb einer Kugel an diese gezogenen geraden Berührungslinien sind einander gleich.

Die Ebene und die Kugel.

§. **253.** Der Abstand einer Ebene vom Mittelpunkte einer Kugel ist entweder kleiner, oder eben so groß oder größer als deren Halbmesser. Im ersten Falle hat die Ebene mit der Kugel mehrere Punkte gemeinschaftlich, sie schneidet die Kugel; im zweiten Falle berührt sie dieselbe in einem Punkte; im dritten liegt sie ganz außerhalb der Kugel.

Jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene ist ein Kreis.

Fig. 169.



Es sei AMB (Fig. 169) ein ebener Kugelschnitt. Fällt man vom Kugelmittelpunkte O eine Senkrechte OP auf den Schnitt, zieht von P nach dem Umfange des Schnittes die beliebigen Geraden PA und PM, ferner noch die Halbmesser OA und OM, so sind die rechtwinkligen Dreiecke OPA und OPM congruent, daher PA = PM. Daraus folgt, daß alle Umfangspunkte des Schnittes von P gleichen Abstand haben, daß also der Schnitt ein Kreis ist.

Der Kreis AMB wird ein Kugelkreis genannt.

§. **254.** Lehrsätze von den Kugelkreisen.

1. Die Gerade aus dem Mittelpunkte der Kugel nach dem Mittelpunkte eines Kugelkreises steht senkrecht auf der Ebene des letzteren.

2. Die Senkrechte aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene eines Kugelkreises geht durch den Mittelpunkt des letzteren.

3. Die Gerade, welche im Mittelpunkte eines Kugelkreises auf dessen Ebene senkrecht errichtet wird, geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

4. Gleiche Kugelkreise haben gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte.

5. Von zwei ungleichen Kugelkreisen hat der größere einen kleineren Abstand vom Kugelmittelpunkte.

6. Zwei Kugelkreise, welche gleichen Abstand vom Kugelmittelpunkte haben, sind einander gleich.

7. Von zwei Kugelkreisen, welche ungleiche Abstände vom Mittelpunkte der Kugel haben, ist derjenige der größere, welcher vom Mittelpunkte den kleineren Abstand hat.

Die Beweise dieser Sätze stimmen mit jenen für die analogen Sätze von den Sehnen des Kreises in §. 130 überein.

Folgesätze. a) Unter allen Kugelkreisen ist der durch den Mittelpunkt der Kugel gehende der größte. Er heißt darum auch geradezu der größte Kugelkreis. Der Halbmesser eines größten Kugelkreises ist dem Kugelhalbmesser gleich.

b) Zwei größte Kreise einer Kugel schneiden sich immer in einem Durchmesser derselben, und halbiren sich gegenseitig.

c) Durch je zwei Punkte der Kugelfläche, welche mit dem Kugelmittelpunkte nicht in gerader Linie liegen, ist die Lage eines größten Kugelkreises vollkommen bestimmt. Der von zwei Punkten begrenzte Bogen eines größten Kreises gibt den sphärischen Abstand dieser Punkte an.

d) Die Endpunkte des Kugeldurchmessers, welcher auf der Ebene eines größten Kugelkreises senkrecht steht, heißen die Pole desselben. Der sphärische Abstand der Pole eines größten Kugelkreises von der Peripherie desselben ist gleich dem vierten Theile dieser Peripherie, oder gleich 90^0 im Bogenmaße.

§. **255.** Lehrsätze von den Berührungsebenen der Kugel.

1. Die Ebene, welche im Endpunkte eines Kugelhalbmessers auf diesem senkrecht steht, ist eine Berührungsebene der Kugel.

2. Der Halbmesser einer Kugel nach dem Berührungspunkte steht senkrecht auf der Berührungsebene.

3. Die Senkrechte aus dem Mittelpunkte einer Kugel auf die Berührungsebene geht durch den Berührungspunkt.

4. Die auf der Berührungsebene einer Kugel im Berührungspunkte errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Die Beweise sind übereinstimmend mit jenen für die analogen Sätze von den Tangenten des Kreises in §. 131.

Folgesätze. a) Durch einen Punkt der Kugelfläche läßt sich nur eine Berührungsebene legen.

b) Durch einen Punkt außerhalb einer Kugel lassen sich an diese unzählig viele Berührungsebenen legen, deren Berührungspunkte in der Peripherie eines Kugelkreises liegen.

c) Durch eine Gerade außerhalb einer Kugel lassen sich an diese nur zwei Berührungsebenen legen.

§. **256.** Die beiden Theile, in welche die Kugel durch einen Kugelkreis getheilt wird, heißen Kugelabschnitte oder Kugelsegmente, und die dazu gehörigen Theile der Kugelflächen Kugelmützen oder Calotten. Der Kreis ist die Grundfläche der beiden Kugelsegmente und der Kugelmützen. Der von der Mütze und ihrer Grundfläche begrenzte Theil des senkrechten Durchmessers der Kugel ist die Höhe des Kugelsegments und der Kugelmütze. Für einen größten Kugelkreis sind die beiden Segmente congruent.

Der zwischen zwei parallelen Kugelkreisen liegende Theil der Kugel heißt eine Kugelschicht, und der dazu gehörige Theil der Kugelfläche eine Kugelzone. Der Abstand der beiden Kreise ist die Höhe der Kugelschicht und der Zone.

Dreht sich der Ausschnitt eines größten Kugelkreises um einen seiner Halbmesser, so heißt der dadurch beschriebene Körper ein Kugelausschnitt oder Kugelsector. Derselbe besteht aus einem Kugelsegment und einem Kegel, dessen Spitze der Kugelmittelpunkt und dessen Grundfläche die Grundfläche des Kugelsegments ist.

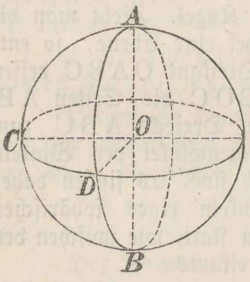
§. **257.** Eine Kugel heißt einem Polyeder eingeschrieben, wenn alle Grenzflächen desselben Berührungsebenen der Kugel sind. Eine Kugel heißt einem Polyeder umgeschrieben, wenn alle Eckpunkte desselben in der Kugelfläche liegen.

Jedem regelmäßigen Polyeder kann eine Kugel ein- und umgeschrieben werden. (Folgt aus §. 242.)

Sphärische Winkel und sphärische Vielecke.

§. **258.** Wenn sich zwei größte Kugelkreise durchschneiden, so heißt der von ihren Ebenen gebildete Neigungswinkel der sphärische Winkel der beiden Kreise. Die Schenkel eines sphärischen Winkels sind die Bogen der zwei größten Kreise, und der Scheitel ihr Durchschnittspunkt.

Fig. 170.



Das Maß eines sphärischen Winkels ist der Bogen eines größten Kugelkreises, welcher jene zwei Punkte der Schenkel verbindet, die vom Scheitel um 90^0 abstehen. Ist nämlich (Fig. 170) $AC = 90^0$ und $AD = 90^0$, so ist $CO \perp AO$ und $DO \perp AO$ und somit COD der Neigungswinkel der beiden größten Kreise ACB und ADB, oder ihr sphärischer Winkel. Legt man nun durch die beiden Punkte C und D einen größten Kreis, so ist der Bogen CD das Maß für den Winkel COD, und folglich auch für den sphärischen Winkel CA.

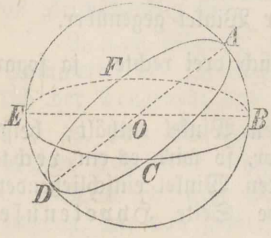
§. **259.** Ein Theil der Kugelfläche, welcher zwischen zwei halben größten Kugelkreisen liegt, wie z. B. ACBDA, heißt ein Kugelstreifen oder ein sphärisches Zweieck.

Zu gleichen sphärischen Winkeln derselben Kugel gehören gleiche Kugelstreifen.

Der Beweis ist analog mit jenem zu §. 21.

§. **260.** Wenn sich drei größte Kugelkreise ABD, ACD und BCE (Fig. 171) durchschneiden, so heißt der von drei Bogen AB, AC und BC jener größten Kreise begrenzte Theil ABC der Kugelfläche ein sphärisches Dreieck. Die Kreisbogen AB, AC und BC werden die Seiten, und die sphärischen Winkel ACB, ABC und BAC die Winkel des sphärischen Dreiecks genannt. Die Größe der Seiten wird stets im Bogenmaße angegeben. Ein sphärisches Dreieck heißt gleichseitig, gleichschenklig oder ungleichseitig, je nachdem es drei oder zwei gleiche, oder lauter verschiedene Seiten hat.

Fig. 171.

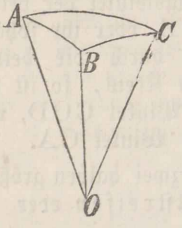


Die Seiten eines sphärischen Dreieckes bilden zugleich die Seiten eines zweiten sphärischen Dreieckes, welches den ganzen übrigen Theil der Kugelfläche einnimmt. Wenn übrigens nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, so ist immer dasjenige sphärische Dreieck zu verstehen, welches kleiner ist als die halbe Kugelfläche. Zu jedem sphärischen Dreiecke, das kleiner ist als die halbe Kugelfläche und dessen eine Seite größer ist als 180^0, gehört ein zweites, welches mit jenem die beiden anderen Seiten gemeinschaftlich hat und dessen dritte Seite die dritte Seite des ersteren zu 360^0 ergänzt, somit kleiner als 180^0 ist. Die beiden Dreiecke ergänzen sich gegenseitig zu der halben Kugelfläche; man nennt ein jedes das sphärische Nebendreieck des andern. Betrachtet man z. B. AB, BC und CDA als Seiten eines sphärischen Dreieckes, so hat sein Nebendreieck die Seiten AB, BC und AC; beide Dreiecke zusammen genommen bilden die halbe Kugelfläche. Da sich aus den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes sogleich auch die Seiten und Winkel seines Nebendreieckes bestimmen lassen, so sollen bei den folgenden Untersuchungen nur solche sphärische Dreiecke vorausgesetzt werden, in denen die Seiten einzeln kleiner als 180^0 sind.

Ein sphärisches Dreieck, dessen Ecken Gegenpunkte der Ecken eines andern Dreieckes sind, heißt das Gegendreieck des zweiten; z. B. DEF ist das Gegendreieck zu ABC.

§. **261.** Es sei ABC (Fig. 172) ein sphärisches Dreieck, dessen jede Seite kleiner ist als 2R, und O der Mittelpunkt der Kugel. Zieht man die Halbmesser AO, BO und CO, und legt durch je zwei eine Ebene, so entsteht am Mittelpunkt O das Dreikant OABC, dessen Seiten AOB, AOC und BOC die Seiten AB, AC und BC des sphärischen Dreiecks ABC zum Maße haben, und dessen Flächenwinkel den Winkeln des sphärischen Dreieckes gleich sind. Es finden daher zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes dieselben Beziehungen statt, wie zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreikants.

Fig. 172.



Mit Rücksicht auf die §§. 223, 224 und 225 gelten demnach auch für die sphärischen Dreiecke folgende Sätze:

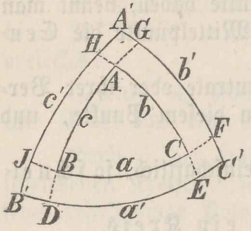
1. Die Summe zweier Seiten ist größer als die dritte Seite.
2. Die Summe aller drei Seiten ist kleiner als 360^0.
3. Die Summe aller drei Winkel ist größer als 180^0 und kleiner als 540^0.
4. Gleichen Winkeln liegen gleiche Seiten gegenüber.
5. Dem größeren Winkel liegt auch eine größere Seite gegenüber.
6. Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber.
7. Der größeren Seite liegt auch ein größerer Winkel gegenüber.

Ein sphärisches Dreieck kann also zwei oder auch drei rechte, ja sogar drei stumpfe Winkel haben.

Ein sphärisches Dreieck, welches keinen rechten Winkel enthält, heißt schiefwinklig; kommt darin ein rechter Winkel vor, so wird es ein rechtwinkliges genannt. Auch hier heißen die den rechten Winkel einschließenden Seiten Katheten und die ihm gegenüberliegende Seite Hypotenuse.

§. **262.** Wenn man aus den Eckpunkten eines sphärischen Dreieckes, als Polen, größte Kreisbogen beschreibt, so heißt das dadurch entstehende sphärische Dreieck ein **Polardreieck** des ersteren.

Fig. 173.



Ist ABC (Fig. 173) ein sphärisches Dreieck und macht man $AD = AE = BF = BG = CH = CJ = 90^0$, so ist, wenn durch die Punkte D und E, F und G, H und J die größten Kreisbogen B'C' A'C' und A'B' beschrieben werden, A'B'C' das Polardreieck des gegebenen sphärischen Dreieckes ABC, und dieses wieder, wie man leicht sieht, das Polardreieck von A'B'C'.

1. **Zwei sphärische Dreiecke, welche Polardreiecke zu einander sind, gehören zu zwei Dreikanten, welche zu einander Polarecken sind.**

Denn zieht man zu den Eckpunkten der zwei sphärischen Dreiecke Kugelhalbmesser, so sind diese die Kanten der beiden Dreikante, welche zu den zwei sphärischen Dreiecken gehören. Nun steht jeder Halbmesser des einen Dreieckes senkrecht auf zwei Halbmessern des andern, weil die Seiten des einen um 90^0 von den Eckpunkten des andern abstehen, somit steht er auch senkrecht auf der durch diese Halbmesser gelegten Ebene; es steht sonach jede Kante des einen Dreikants senkrecht auf einer Seitenfläche des andern, d. i. die beiden Dreikante sind Polarecken zu einander (§. 220).

2. **In zwei sphärischen Polardreiecken sind die Seiten des einen Supplemente der Winkel des andern.**

Heißen A, B, C die Winkel und a, b, c die gegenüberliegenden Seiten in dem sphärischen Dreiecke ABC, ferner A', B', C' die Winkel und a', b', c' die Seiten in dem Polardreiecke A'B'C', so ist

$$a + A' = 2R, \quad b + B' = 2R, \quad c + C' = 2R; \text{ und}$$
$$a' + A = 2R, \quad b' + B = 2R, \quad c' + C = 2R.$$

Der Beweis beruht auf §. 220, 2, kann aber auch unmittelbar aus der Figur 173 hergeleitet werden.

§. **263.** Zwei **sphärische Dreiecke heißen congruent**, wenn sie in allen Seiten und Winkeln nach der Ordnung übereinstimmen und wenn die gleichen Stücke in demselben Sinne auf einander folgen. Folgen aber in zwei sphärischen Dreiecken die gleichen Stücke im entgegengesetzten Sinne auf einander, so können die Dreiecke im Allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden; sie heißen dann **symmetrisch-gleich**.

Zusätze. 1. Zwei sphärische Gegendreiecke sind, so wie zwei Scheitelecken (§. 221) im Allgemeinen symmetrisch-gleich, und nur dann congruent, wenn sie gleichschenklig sind.

2. Den Sätzen, welche in §. 226 bezüglich der Congruenz und der Symmetrie der Dreikante bewiesen wurden, entsprechen analoge Sätze bezüglich der Congruenz und Symmetrie der sphärischen Dreiecke.

§. **264.** Ein Theil der Kugelfläche, welcher von mehr als drei Bogen größter Kugelkreise begrenzt wird, heißt ein **sphärisches Vieleck**.

Das sphärische Vieleck steht zu einer mehrseitigen Ecke in derselben Beziehung, wie das sphärische Dreieck zu einer dreiseitigen Ecke (§. 261).

Lage zweier Kugeln gegen einander.

§. **265**. Zwei Kugeln, welche denselben Mittelpunkt haben, heißen *concentrisch*. Zwei Kugeln, welche verschiedene Mittelpunkte haben, nennt man *excentrisch*, und die gerade Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte die *Centrale* der beiden Kugeln.

1. Haben zwei Kugelflächen einen Punkt der Centrale oder ihrer Verlängerung gemeinschaftlich, so *berühren sie sich* in diesem Punkte, und zwar bezüglich *von außen* oder *von innen*.

2. Haben zwei Kugelflächen mehrere Punkte gemeinschaftlich, so *schneiden sie sich* in diesen Punkten.

Der Durchschnitt zweier Kugelflächen ist ein Kreis.

Denn zieht man von zwei beliebigen Durchschnittspunkten der Kugelflächen auf deren Centrale Senkrechte, so fallen, wie sich leicht beweisen läßt, die Fußpunkte dieser Senkrechten in einen Punkt zusammen, und die Senkrechten selbst sind einander gleich.

Folgesätze. a) Die Centrale zweier sich berührender Kugeln geht durch den Berührungspunkt.

b) Die durch den Berührungspunkt zweier Kugeln an die eine gelegte Berührungsebene ist zugleich eine Berührungsebene der andern.

c) Die Centrale zweier sich schneidender Kugeln steht auf der Ebene des gemeinschaftlichen Durchschnittskreises im Mittelpunkte desselben senkrecht.

§. **266**. Die gegenseitige *Lage zweier Kugeln* hängt von der Größe ihrer Centrale c und ihrer Halbmesser r und r′ ab.

1. Ist $c > r + r'$, so liegt die eine Kugel ganz außerhalb der andern.
2. Ist $c = r + r'$, so berühren sich die beiden Kugeln von außen.
3. Ist $r + r' > c > r - r'$, so schneiden sich beide Kugeln.
4. Ist $c = r - r'$, so berühren sich die beiden Kugeln von innen.
5. Ist $c < r - r'$, so liegt die kleinere Kugel ganz innerhalb der größeren.
6. Ist $c = o$, so sind die beiden Kugeln concentrisch.

III. Aufgaben.

§. **267**. *Constructionsaufgaben.*

1. (*Forderungssatz.*) Aus einem gegebenen Punkte mit einem gegebenen Halbmesser eine Kugel zu beschreiben.

2. Den Mittelpunkt einer Kugel zu finden, welche durch vier gegebene (nicht in einer Ebene liegende) Punkte geht (§. 251).

3. Durch einen gegebenen Punkt a) eine Tangente, b) eine Berührungsebene an die Kugel zu legen. (§§. 252 und 255.)

4. Durch eine gegebene Gerade eine Berührungsebene an die Kugel zu legen.

§. **268**. *Rechnungsaufgaben.*

1. Es sei R der Halbmesser einer Kugel, r der Halbmesser eines Kugelkreises und d der Abstand dieses Kreises vom Kugelmittelpunkte; man bestimme jede dieser Größen, wenn die beiden andern gegeben sind.

2. Eine Kugel wird durch eine Ebene geschnitten, welche den auf dieser senkrechten Durchmesser 2R in dem Verhältnisse m : n theilt; wie groß ist der Halbmesser r der Schnittfläche?

3. Die Winkel eines sphärischen Dreieckes sind $A = 75^0\ 37'$, $B = 118^0\ 51'$, $C = 85^0\ 8'$; wie groß sind die Seiten seines Polardreieckes?

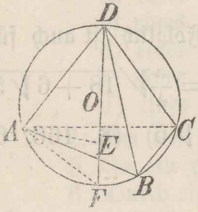
4. Die Seiten eines sphärischen Dreieckes sind $a = 105^0\ 12'\ 38''$, $b = 39^0\ 5'\ 50''$, $c = 93^0\ 44'\ 26''$; wie groß sind die Winkel seines Polardreieckes?

5. Aus der Kante a eines regelmäßigen Polyeders die Halbmesser r und R der ihm ein- und umgeschriebenen Kugel zu bestimmen.

Heißt ϱ der Halbmesser des einer Seitenfläche des Polyeders umgeschriebenen Kreises, so ist, wie man aus Fig. 165 unmittelbar ersieht, für jedes regelmäßige Polyeder $r^2 = R^2 - \varrho^2$.

a) Es sei um das Tetraeder ABCD (Fig. 174) eine Kugel beschrieben und $DE \perp ABC$, so ist E der Mittelpunkt des um ABC beschriebenen Kreises; wird DE bis F auf der Kugelfläche verlängert, so ist DF ein Kugeldurchmesser und die Mitte O der Mittelpunkt der Kugel und daher auch des Tetraeders. Im rechtwinkligen $\triangle$ DAF ist nun $DF : AD = AD : DE$ (§. 99, a), oder $2R : a = a : \sqrt{a^2 - \varrho^2}$. Aus dieser Proportion erhält man, da $\varrho^2 = \frac{a^2}{3}$ (§. 166, 1) ist, $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$.

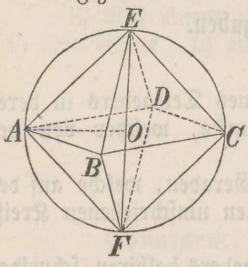
Fig. 174.



Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2$ folgt dann $r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$.

b) Zieht man beim Oktaeder (Fig. 175) die Diagonale EF, so ist diese ein Durchmesser der umgeschriebenen Kugel, sie steht senkrecht auf ABCD und der Fußpunkt O ist der Mittelpunkt sowohl der umgeschriebenen Kugel, als des um das Quadrat ABCD beschriebenen Kreises. Es ist daher (nach §. 166, 3) $AO = R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Fig. 175.



Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}$ folgt ferner $r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$.

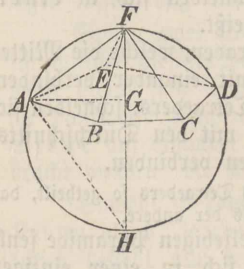
c) Zieht man in Fig. 176, wo um ein Ikosaeder eine Kugel beschrieben ist, FG senkrecht auf das regelmäßige Fünfeck ABCDE, so ist G der Mittelpunkt des um dasselbe beschriebenen Kreises und FH ein Kugeldurchmesser. Im rechtwinkligen Dreiecke FAH ist nun $FH : AF = AF : FG$ (§. 99, a) oder

$$2R : a = a : \sqrt{\left\{a^2 - \frac{a^2}{10}(5 + \sqrt{5})\right\}},$$

weil $AG = \frac{a}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$ (§. 166, 6) ist.

Daraus folgt $R = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Fig. 176.



Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2 = \frac{a^2}{16}(10 + 2\sqrt{5}) - \frac{a^3}{3}$

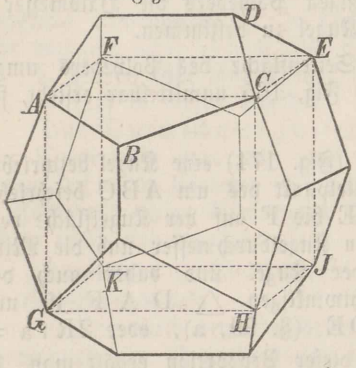
folgt dann $r = \frac{a}{12}\sqrt{42 + 18\sqrt{5}}$.

d) Für das Hexaeder oder den Würfel ist:

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ und } r = \frac{a}{2}.$$

e) Das Dodekaeder läßt sich, wie man aus Fig. 177 sieht, in einen Würfel GHJKACEF und sechs seinen Seitenflächen aufsitzende, abgestumpfte dreiseitige Prismen zerlegen, und zwar ist der Halbmesser der dem Würfel umgeschriebenen Kugel zugleich der Halbmesser der dem Dodekaeder umgeschriebenen Kugel. Der erstere Halbmesser aber ist, da die Kante des Würfels als Diagonale eines regelmäßigen Fünfeckes $= \frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$ (§. 166, 6) ist, nach d) gleich $\frac{a}{4}(1+\sqrt{5})$. $\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$. Folglich ist auch für das Dodekaeder $R = \frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$.

Fig. 177.



Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2 = \frac{a^2}{16}(18+6\sqrt{5}) - \frac{a^2}{10}(5+\sqrt{5})$ (§. 166, 6)

folgt dann $r = \frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$.

6. Die Kante eines regelmäßigen Polyeders aus dem Halbmesser a) der eingeschriebenen, b) der umgeschriebenen Kugel zu berechnen.

IV. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. 269. Uebungssätze.

1. Die sechs Ebenen, welche auf den Kanten eines Tetraeders in deren Mitten senkrecht stehen, schneiden sich in einem Punkte, welcher von den vier Eckpunkten des Tetraeders gleich weit absteht.

2. In demselben Punkte schneiden sich die vier Geraden, welche auf den Flächen des Tetraeders in den Mittelpunkten der ihnen umschriebenen Kreise senkrecht stehen.

3. Die sechs Ebenen, welche die Keile eines Tetraeders halbiren, schneiden sich in einem Punkte, welcher von den vier Flächen des Tetraeders gleich weit absteht.

4. Die sechs Ebenen, welche durch die Kanten eines Tetraeders und die Mittellinien der gegenüberliegenden Flächen gehen, schneiden sich in einem Punkte, welcher der Schwerpunkt des Tetraeders heißt.

5. In demselben Punkte schneiden sich die drei Geraden, welche die Mitten je zweier gegenüberliegender Kanten des Tetraeders mit einander verbinden.

6. In demselben Punkte, dem Schwerpunkte des Tetraeders, schneiden sich die vier Geraden, welche die Eckpunkte des Tetraeders mit den Durchschnittspunkten der Mittellinien der gegenüberliegenden Flächen verbinden.

Jede dieser Verbindungslinien wird im Schwerpunkte des Tetraeders so getheilt, daß der an der Ecke liegende Abschnitt derselben 3mal so groß ist als der andere.

7. Die Ebenen, welche durch die Kanten einer beliebigen Pyramide senkrecht auf die Grundfläche gelegt werden, schneiden sich in einer einzigen Geraden.

8. Die vier Diagonalen eines Parallelepipeds schneiden sich in einem Punkte.

9. In demselben Punkte schneiden sich die sechs Diagonalebenen eines Parallelepipeds.

10. In jedem rechtwinkligen Parallelepiped ist das Quadrat der Diagonale gleich der Summe der Quadrate der drei in einer Ecke zusammentreffenden Kanten.

§. **270.** Constructionsaufgaben.

1. Ein gleichseitiges Tetraeder zu construiren, wenn dessen Kante gegeben ist.

2. Einen Würfel zu construiren, wenn dessen Kante gegeben ist.

3. Die Darstellung aller Grenzflächen eines Körpers in einer zusammenhängenden ebenen Figur heißt das Netz des Körpers. Construire das Netz

a) eines Prisma,
b) einer Pyramide,
c) eines Pyramidenstumpfes,
d) eines Tetraeders,
e) eines Oktaeders,
f) eines Ikosaeders,
g) eines Hektaeders,
h) eines Dodekaeders,
i) eines senkrechten Cylinders,
k) eines senkrechten Kegels.
l) eines senkrechten Kegelstumpfes.

4. Um ein gleichseitiges Tetraeder eine Kugel zu beschreiben. (§. 251.)

5. In ein gleichseitiges Tetraeder eine Kugel zu beschreiben. (§. 255, 3.)

6. Durch einen gegebenen Punkt eine Berührungsebene a) an einen Kegel, b) an einen Cylinder zu legen.

7. Aus einem gegebenen Mittelpunkte eine Kugel zu beschreiben, welche a) eine Ebene, b) eine Kugel berührt.

8. Mit einem gegebenen Halbmesser eine Kugel zu beschreiben, welche a) eine Ebene, b) eine Kugel in einem gegebenen Punkte derselben berührt.

Dritter Abschnitt.

Congruenz, Symmetrie und Aehnlichkeit der Körper.

I. Congruenz und symmetrische Gleichheit der Körper.

§. **271.** Zwei Körper heißen congruent, wenn sie sich so in einander legen lassen, daß sich alle ihre Grenzflächen decken.

Sollen zwei Körper zur Deckung gebracht werden können, so müssen sämmtliche Bestandtheile (Kanten, Flächen, Keile und Ecken) in beiden paarweise gleich sein und in demselben Sinne auf einander folgen. Folgen die paarweise gleichen Bestandtheile in zwei Körpern im entgegengesetzten Sinne auf einander, so können diese im Allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden; die Körper heißen dann symmetrisch-gleich. (§. 221.)

Sowohl in congruenten als in symmetrisch-gleichen Körpern sind je zwei Kanten gleich, je zwei Flächen congruent und je zwei Keile gleich; ein Unterschied besteht nur bezüglich der Ecken, welche in congruenten Körpern congruent, in symmetrisch-gleichen dagegen symmetrisch-gleich sind.

Um zu einem gegebenen Körper einen symmetrisch-gleichen zu erhalten, darf man nur zu einer Ecke des gegebenen Körpers die Scheiteldecke bilden und von dieser ausgehend einen zweiten Körper construiren, welcher mit dem gegebenen nach der Ordnung gleiche Kanten, congruente Flächen und gleiche Keile hat. Die Ecken der beiden Körper und ebenso die Körper selbst sind dann symmetrisch-gleich.

Folgesätze. a) Zwei Körper, welche mit einem dritten symmetrisch-gleich sind, sind unter einander congruent.

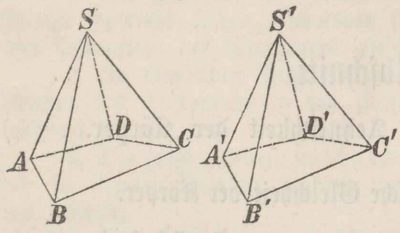
b) Ist von zwei congruenten Körpern der eine mit einem dritten symmetrisch-gleich, so ist es auch der andere.

Zusatz. Zwei ebene Figuren, welche paarweise gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, können durch entsprechende Drehung auch dann, wenn die gleichen Bestandtheile im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen, zur Deckung gebracht werden. Bei ebenen Figuren fällt also die Symmetrie mit der Congruenz zusammen.

§. **272.** Legt man zwei symmetrisch-gleiche Körper so an einander, daß sie eine gemeinschaftliche Grundfläche haben und sie selbst auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, so liegen je zwei entsprechende Punkte der beiden Körper in derselben auf die Grundfläche senkrechten Geraden und in gleichem Abstande von dieser Fläche. (Beruht auf §. 222.)

§. **273.** Zwei Pyramiden, in denen die Grundfläche und eine Seitenfläche paarweise congruent und die von ihnen gebildeten Keile gleich sind, sind congruent oder symmetrisch-gleich, je nachdem die gleichen Seiten der congruenten Vielecke in demselben oder im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen.

Fig. 178.



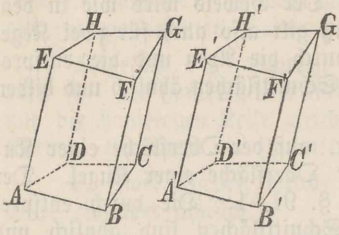
a) Es sei (Fig. 178) der Keil $S(AB)D = S'(A'B')D'$, ferner $ABCD \cong A'B'C'D'$ und $SAB \cong S'A'B'$ und zwar $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, und $SA = S'A'$.

Legt man die Pyramide $S'A'B'C'D'$ auf die Grundfläche $ABCD$ der Pyramide $SABCD$ so, daß die congruenten Grundflächen $A'B'C'D'$ und $ABCD$ einander decken und die gleichen Keile zusammenfallen, so wird auch die Seitenfläche $S'A'B'$ die Seitenfläche SAB decken und der Punkt S' in den Punkt S fallen. Dann aber müssen sich auch die Seitenflächen $S'B'C'$ und SBC, ferner $S'C'D'$ und SCD, endlich $S'A'D'$ und SAD decken; folglich sind die zwei Pyramiden congruent.

b) Folgen in den zwei Pyramiden die gleichen Seiten der congruenten Vielecke im entgegengesetzten Sinne auf einander, so lege man in die Scheitelecke von A eine Pyramide, welche mit der Pyramide $SABCD$ symmetrisch-gleich ist. Dieselbe ist dann (nach a) mit der Pyramide $S'A'B'C'D'$ congruent; folglich ist auch $S'A'B'C'D'$ mit $SABCD$ symmetrisch-gleich.

§. **274.** Zwei Prismen, in denen die Grundfläche und zwei mit ihr eine Ecke bildende Seitenflächen paarweise congruent

Fig. 179.



sind, sind congruent oder symmetrisch-gleich, je nachdem die gleichen Seiten der congruenten Flächen in demselben oder im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen.

a) Ist (Fig. 179) das Vieleck AC $\cong$ A'C', AF $\cong$ A'F', AH $\cong$ A'H', und folgen die Seiten dieser Vielecke in demselben Sinne auf einander, so ist Ecke A $\cong$ A'. Dann läßt sich die Congruenz der Prismen durch Deckung nachweisen, wie §. 273, a.

b) Der Beweis wird analog wie in §. 273, b geführt.

§. **275.** 1. Zwei Kegel oder zwei Cylinder sind congruent, wenn ihre Grundflächen und ihre Axen gleich sind und die Axen mit den Grundflächen gleiche Neigungswinkel bilden.

2. Zwei Kugeln sind congruent, wenn ihre Halbmesser gleich sind.

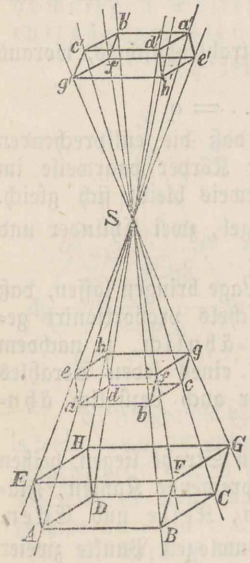
Die Beweise dieser zwei Sätze durch Deckung. Die Symmetrie fällt hier aus.

II. Aehnlichkeit und symmetrische Aehnlichkeit der Körper.

§. **276.** 1. Werden die Strahlen eines Büschels im Raume (Fig. 180) vom Strahlenpunkte S aus in den Punkten A und a, B und b, C und c,.. proportionirt geschnitten, so sind in den Körpern ABCDE.. und abcde.. die entsprechenden durch je drei Durchschnittspunkte gehenden Schnittflächen einander ähnlich und die von ihnen gebildeten Keile paarweise gleich.

Es sei SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = .. = q.

Fig. 180.



Aus dieser Voraussetzung folgt unmittelbar AB || ab, AC || ac, BC || bc.. und ABC || abc, ACD || acd.. (§. 91 und §. 218, 2). Dann ist aber auch (nach §. 218, 3) ABC $\sim$ abc, ACD $\sim$ acd, ...

Liegen vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene, so liegen auch die entsprechenden Punkte a, b, c, d in einer Ebene; denn abc || ABCD und acd || ABCD, daher müssen abc und acd in einer und derselben Ebene liegen.

Folglich ist auch ABCD $\sim$ abcd, ABFE $\sim$ abfe,..

Daß ferner die entsprechenden Keile gleich sind, ergibt sich aus §. 217.

Dieselben Beziehungen finden auch statt, wenn die Punkte a', b', c', d',.. auf den Rückwärtsverlängerungen der Strahlen so liegen, daß SA : Sa' = SB : Sb' = SC : Sc' = .. = — q ist; nur sind dann in den Körpern ABCD.. und a'b'c'd'.. die entsprechenden Strecken zwischen je zwei Durchschnittspunkten im entgegengesetzten Sinne parallel, so daß auch die entsprechenden ähnlichen Schnittflächen und die entsprechenden gleichen Keile im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen.

Zusätze. a) Sind A, B, C, D Umfangspunkte eines Kreises, so sind auch a, b, c, d Umfangspunkte eines Kreises. Der Beweis wird wie in dem Zusatze zu §. 91, 1 geführt. Der obige Lehrsatz gilt also auch für zwei Kegel oder zwei Cylinder. In denselben sind die durch die Axen und die entsprechenden Halbmesser der Grundflächen gehenden Schnittflächen ähnlich und bilden gleiche Keile.

b) Liegen die Punkte A, B, C, D, E,.. auf der Oberfläche einer Kugel, so liegen auch a, b, c, d, e,.. auf der Oberfläche einer Kugel. Der Beweis ist analog demjenigen im Zusatz zu §. 91, 1. Die durch entsprechende Halbmesser dieser Kugeln gehenden Schnittflächen sind ähnlich und bilden paarweise gleiche Keile.

2. Umgekehrt: Zwei Körper, in denen die entsprechenden Schnittflächen nach der Ordnung ähnlich und die von ihnen gebildeten Keile paarweise gleich sind, lassen sich immer in eine solche Lage bringen, daß von ihren Oberflächen die Strahlen eines Strahlenbüschels proportionirt geschnitten werden. (Fig. 180.)

Die ähnlichen Schnittflächen und die gleichen Keile folgen in beiden Körpern entweder in demselben oder im entgegengesetzten Sinne auf einander.

Stellt man im ersten Falle die zwei Körper so gegen einander, daß eine Strecke und zwei sich in ihr schneidende Schnittflächen des einen Körpers der entsprechenden Strecke und den entsprechenden zwei Schnittflächen des andern Körpers paarweise in demselben Sinne parallel sind, so müssen wegen der Aehnlichkeit der Schnittflächen und wegen der Gleichheit der von ihnen gebildeten Keile auch je zwei andere entsprechende Strecken, sowie je zwei andere entsprechende Schnittflächen paarweise in demselben Sinne parallel sein.

Haben aber zwei Körper die hier angegebene parallele Lage gegen einander, so müssen sich die durch je zwei entsprechende Punkte derselben gezogenen Geraden in einem und demselben Punkte S schneiden. Der Beweis wird ebenso wie in §. 91, 2 geführt.

SA, SB, SC,.. sind demnach Strahlen eines Strahlenbüschels, woraus (§. 218, 1) folgt:

$$SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = .. = q.$$

Im zweiten Falle werden die Körper so gelegt, daß die entsprechenden Strecken und die entsprechenden Schnittflächen beider Körper paarweise im entgegengesetzten Sinne parallel sind. Der weitere Beweis bleibt sich gleich.

Zusatz. Der obige Lehrsatz gilt auch für zwei Kegel, zwei Cylinder und zwei Kugeln.

§. 277. Zwei Körper, welche sich in eine solche Lage bringen lassen, daß von ihren Oberflächen die Strahlen eines Strahlenbüschels proportionirt geschnitten werden, heißen ähnlich oder symmetrisch-ähnlich, je nachdem das constante Verhältniß der entsprechenden Abschnitte eines jeden Strahles positiv oder negativ ist. In dieser Lage sind die Körper auch bezüglich ähnlich liegend oder symmetrisch-ähnlich liegend.

Je zwei entsprechende Punkte, welche auf demselben Strahl liegen, heißen auch hier homologe Punkte, ebenso auch zwei entsprechende Kanten, Flächen, Keile und Ecken, homologe Kanten, Flächen, Keile und Ecken.

Der Punkt S, in welchem sich die durch die homologen Punkte zweier ähnlich oder symmetrisch-ähnlich liegender Körper gezogenen Geraden schneiden,

heißt der Aehnlichkeitspunkt der beiden Körper, und zwar ein äußerer oder ein innerer, je nachdem die homologen Punktpaare auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten des Strahlenpunktes liegen.

Folgesätze. 1. Sowohl in ähnlichen als in symmetrisch-ähnlichen Körpern sind die homologen Kanten proportionirt, die homologen Flächen ähnlich und die homologen Keile gleich; die homologen Ecken dagegen sind in ähnlichen Körpern congruent, in symmetrisch-ähnlichen symmetrisch-gleich.

2. Zwei Körper, welche mit einem dritten symmetrisch-ähnlich sind, sind unter einander ähnlich.

3. Ist von zwei ähnlichen Körpern der eine mit einem dritten symmetrisch-gleich, so ist der andere mit diesem dritten symmetrisch-ähnlich.

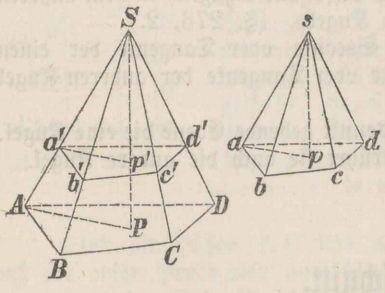
Zusatz. Ist für zwei Körper das constante Verhältniß der Abschnitte eines jeden von ihren Oberflächen geschnittenen Strahls $= +1$, so sind die ähnlichen Körper zugleich congruent; ist dieses Verhältniß $= -1$, so sind die symmetrisch-ähnlichen Körper zugleich symmetrisch-gleich. Die Congruenz und die symmetrische Gleichheit sind demnach nur ein besonderer Fall der Aehnlichkeit und der symmetrischen Aehnlichkeit.

§. 278. 1. Wird eine Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die abgeschnittene Pyramide der gegebenen ähnlich oder symmetrisch-ähnlich, je nachdem die Ebene die Kanten der Pyramide selbst oder ihre Rückwärtsverlängerungen über den Scheitel hinaus schneidet.

Folgt aus §§. 235 und 277, indem man den Scheitel der Pyramiden als Strahlenpunkt annimmt.

2. Zwei Pyramiden, in denen die Grundfläche und eine Seitenfläche paarweise ähnlich und die von ihnen gebildeten Keile gleich sind, sind ähnlich oder symmetrisch-ähnlich, je nachdem die homologen Seiten der ähnlichen Vielecke in demselben oder im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen.

Fig. 181.



a) Es sei (Fig. 181) $S(AB)D = s(ab)d$, ferner $ABCD \sim abcd$ und $SAB \sim sab$ und zwar $AB : ab = AD : ad = SA : sa$.

Schneidet man auf der Kante SA das Stück $Sa' = sa$ ab, und legt durch den Punkt a' die Ebene $a'b'c'd' \parallel ABCD$, so sind die Pyramiden SAC und $Sa'c'$ ähnlich (nach 1.). Die Pyramide $Sa'c'$ aber ist (§. 273) mit sac congruent, daher sind auch die Pyramiden SAC und sac ähnlich.

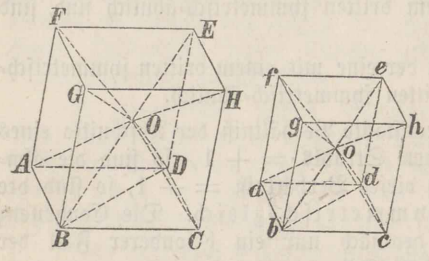
b) Folgen die homologen Seiten der ähnlichen Vielecke ABCD, SAB und abcd, sab im entgegengesetzten Sinne auf einander, so construire man in der Scheiteldecke von S eine Pyramide, welche mit SAC symmetrisch-gleich ist. Dieselbe ist dann (nach a) mit der Pyramide sac ähnlich; somit ist die Pyramide sac mit SAC symmetrisch-ähnlich.

3. Die Höhen ähnlicher oder symmetrisch-ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie ihre homologen Kanten.

Ist (Fig. 181) $SP \perp ABCD$ und $sp \perp abcd$ und zieht man die Geraden AP, ap und a'p', so ist das Dreieck $SAP \sim Sa'p'$, daher $SP : Sp' = SA : Sa'$; allein wegen $Sa' = sa$ ist $\triangle Sa'p' \cong sap$, folglich $Sp' = sp$, und somit $SP : sp = SA : sa$.

§. **279**. Je zwei ähnliche Polyeder lassen sich in eine gleiche Anzahl ähnlicher Pyramiden zerlegen.

Fig. 182.



Es seien (Fig. 182) die Polyeder ABE und abe ähnlich und zugleich auch ähnlich liegend. Denkt man sich durch ein Paar homologer Punkte die Geraden Aa und Bb, und von ihrem Durchschnittspunkte S, welcher der Aehnlichkeitspunkt der beiden Polyeder ist, zu einem Punkte O im Innern des Polyeders ABE einen Strahl SO gezogen, so ist, wenn $SO : So = SA : Sa$ ist, o der homologe Punkt im Innern des Polyeders abe.

Legt man nun durch O und o und die Kanten beider Polyeder Ebenen, so werden dadurch die Polyeder in so viele Pyramiden zerlegt, als sie Grenzflächen haben. Diese Pyramiden aber sind paarweise ähnlich, wie unmittelbar aus §. 276, 1 folgt.

Der Satz gilt auch in seiner Umkehrung.

§. **280**. 1. Zwei Kegel oder zwei Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Axen den Durchmessern ihrer Grundflächen proportionirt sind und mit den letzteren gleiche Neigungswinkel bilden.

2. Je zwei Kugeln sind ähnlich.

§. **281**. Für je zwei Kugeln gibt es einen äußeren und einen inneren Aehnlichkeitspunkt; ebenso äußere und innere Aehnlichkeitsstrahlen.

Lehrsätze. 1. Zieht man in zwei Kugeln durch die Endpunkte je zweier Halbmesser, welche entweder in demselben oder im entgegengesetzten Sinne parallel sind, gerade Linien, so schneiden sich diese alle bezüglich in dem äußeren oder inneren Aehnlichkeitspunkte der beiden Kugeln. (§. 276, 2.)

2. Ist ein Aehnlichkeitsstrahl eine Secante oder Tangente der einen Kugel, so ist er bezüglich auch eine Secante oder Tangente der anderen Kugel (§. 145.)

3. Wenn eine durch einen Aehnlichkeitspunkt gehende Ebene die eine Kugel schneidet oder berührt, so schneidet oder berührt sie auch die andere Kugel.

Vierter Abschnitt.

Größenbestimmung der Körper.

§. **282**. Bei der Ausmessung der Körper kommt die Bestimmung der Oberfläche und des Cubikinhaltes derselben in Betracht.

Die Oberfläche eines Körpers erhält man, indem man alle Grenzflächen berechnet und die erhaltenen Flächeninhalte derselben addirt.

Um den Cubikinhalt oder das Volumen eines Körpers, d. i. die Größe des von seinen Grenzflächen eingeschlossenen Raumes zu bestimmen, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Einheit an und untersucht, wie oft derselbe in dem gegebenen Körper enthalten ist. Als Einheit des Körpermaßes wird ein Cubus angenommen, dessen Kante der Längeneinheit gleich ist, und der für das Metermaß bezüglich ein Cubikmeter, ein Cubikdecimeter,.. heißt. 1 Cub.^{m} = 1000 Cub.^{dm} à 1000 Cub.^{cm} à 1000 Cub.^{mm}.

Als Hohlmaß heißt das Cubikdecimeter Liter; 100 Liter = 1 Hektoliter.

I. Das Prisma.

1. Oberfläche des Prisma.

§. 283. 1. Die Oberfläche o eines Prisma wird erhalten, wenn man die Seitenflächen als Parallelogramme bestimmt und zu der dadurch erhaltenen Seitenoberfläche s den doppelten Flächeninhalt b der Grundfläche addirt; also $o = s + 2b$.

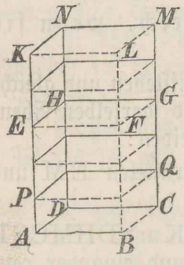
2. Die Seitenoberfläche eines senkrechten Prisma ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe.

Denn die Seitenflächen sind Rechtecke, deren gemeinschaftliche Höhe die Höhe des Prisma ist.

2. Vergleichung der Cubikinhalte der Prismen.

§. 284. Die Cubikinhalte zweier rechtwinkliger Parallelepipede über derselben Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Fig. 183.



Es seien (Fig. 183) die Höhen AE und AK der rechtwinkligen Parallelepipede AG und AM commensurabel, AP das gemeinschaftliche Maß derselben und AE = m.AP, AK = n.AP, folglich AE : AK = m : n. Theilt man AK in n gleiche Theile, von denen AE m enthält, und legt durch jeden Theilungspunkt eine mit der Grundfläche parallele Ebene, so sind alle diese Durchschnitte mit der Grundfläche congruent. Es wird also das Parallelepiped AG in m, und jenes AM in n Parallelepipede getheilt, deren jedes (§. 274) dem Parallelepipede AQ gleich ist, so daß AG = m.AQ, AM = n.AQ, und folglich AG : AM = m : n ist. Da nun auch AE : AK = m : n, so hat man

$$AG : AM = AE : AK.$$

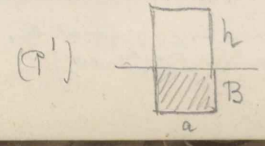
Sind die Höhen AE und AK incommensurabel, so folgt aus §. 84, daß die obige Proportion auch für diesen Fall Giltigkeit hat.

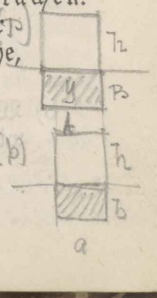
§. 285. Die Kubikinhalte zweier rechtwinkliger Parallelepipede von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Es seien P und p zwei rechtwinklige Parallelepipede, und zwar in P..A und B die Seiten der Grundfläche G, und h die Höhe,

„ p..a „ b „ „ „ „ g, „ h „ „

ferner seien in einem dritten rechtwinkligen Parallelepiped P'..a und B die Seiten der Grundfläche, und h die Höhe.





In den Parallelepipeden P und P′ kann man das Rechteck mit den Seiten B und h als die gemeinschaftliche Grundfläche betrachten; dann sind A und a ihre Höhen, und man hat nach §. 284

$$P : P' = A : a.$$

Auf gleiche Art erhält man

$$P' : p = B : b.$$

Durch Multiplication dieser Proportionen ergibt sich

$$P : p = A.B : a.b.$$

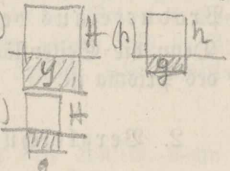
Allein $A.B : a.b = G : g$ (§. 107); daher

$$P : p = G : g.$$

§. **286.** Die Cubikinhalte je zweier rechtwinkliger Parallelepipede verhalten sich wie die Producte aus den Maßzahlen ihrer Grundflächen und Höhen.

Es seien G und g die Maßzahlen der Grundflächen, H und h die Maßzahlen der Höhen zweier rechtwinkliger Parallelepipede P und p; ferner sei P′ ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Grundfläche die Maßzahl g und dessen Höhe die Maßzahl H hat. Dann ist

$$P : P' = G : g \text{ (§. 285)},$$
$$P' : p = H : h \text{ (§. 284)};$$



daher durch Multiplication

$$P : p = G.H : g.h.$$

Dieser Satz wird gewöhnlich so ausgedrückt:

Die Cubikinhalte je zweier rechtwinkliger Parallelepipede verhalten sich wie die Producte ihrer Grundflächen und Höhen.

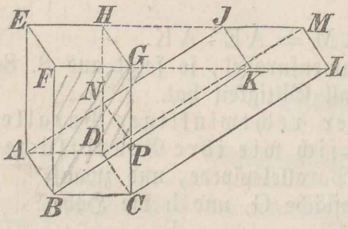
Wenn in dem Folgenden in abgekürzter Ausdrucksweise von Producten aus Flächen und Linien die Rede sein wird, so sind immer nur die Maßzahlen derselben zu verstehen.

§. **287.** Zwei Parallelepipede sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben.

Wenn zwei Parallelepipede auf derselben Grundfläche aufstehen und gleiche Höhe haben, so müssen die oberen Grundflächen in einer und derselben Ebene liegen. Im Beweise selbst sind dann zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Wenn die oberen Grundflächen zwischen denselben Parallelen EM und FL liegen (Fig. 184).

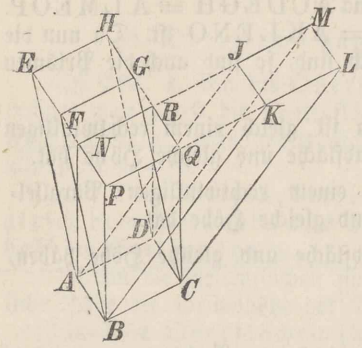
Fig. 184.



Die Körper AEJBFK und DHMCGL sind dreiseitige Prismen und einander congruent (§. 274). Nimmt man von beiden Prismen den Körper NHJPGK weg, so müssen auch die Reste, nämlich die Körper AEHNBFGP und DNJMCPKL gleich sein, und addirt man zu diesen beiden den Körper ADNBCP, so müssen auch die Summen, nämlich die Parallelepipede AG und AL, gleich sein.

b) Wenn die oberen Grundflächen nicht zwischen denselben Parallelen liegen, wie in den Parallelepipeden AG und AL (Fig. 185).

Fig. 185.

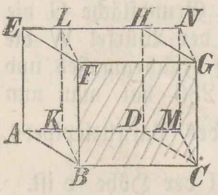


Verlängert man die Kanten EF und HG, und eben so die Kanten MJ und LK, so müssen sich dieselben, da sie in derselben Ebene liegen, in den Punkten N, P, Q, R schneiden. Die Figur NPQR ist ein Parallelogramm und mit ABCD congruent, daher das zwischen beiden liegende Prisma AQ ein Parallelepiped. Nach a) sind dann die Parallelepipede AG = AQ und AL = AQ; daher auch AG = AL.

Folgesatz. Jedes schiefe Parallelepiped ist gleich einem senkrechten, das mit ihm dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe hat.

§. **288.** Jedes senkrechte nicht rechtwinklige Parallelepiped ist gleich einem rechtwinkligen, welches mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Fig. 186.



Es sei BH (Fig. 186) ein senkrechtes Parallelepiped, dessen Grundfläche ABCD ein schiefwinkliges Parallelogramm ist. Legt man durch die Kanten BF und CG Ebenen, welche auf der Ebene ADHE senkrecht stehen, so ist BN ein rechtwinkliges Parallelepiped, welches mit dem gegebenen senkrechten Parallelepiped BH gleiche Grundfläche und dieselbe Höhe hat. Betrachtet man nun in den beiden Parallelepipeden BH und BN das Rechteck BCGF als die gemeinschaftliche Grundfläche, so erscheinen die oberen Grundflächen ADHE und KMNL zwischen denselben Parallelen AM und EN, somit sind die beiden Parallelepipede inhaltsgleich (§. 287, a).

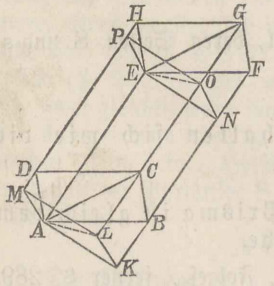
Folgesatz. Jedes Parallelepiped ist einem rechtwinkligen gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

§. **289.** Jedes Parallelepiped wird durch den Diagonalschnitt in zwei inhaltsgleiche dreiseitige Prismen getheilt.

a) Ist das Parallelepiped ein senkrechtes, so folgt die Richtigkeit des Satzes aus §. 274.

b) Es sei das Parallelepiped AG (Fig. 187) ein schiefes.

Fig. 187.



Legt man durch die Punkte A und E zwei Ebenen, welche auf den Kanten des Parallelepipedes AG senkrecht stehen, so ist der Körper AKLMENOP ein senkrechtes Parallelepiped, das (nach a) durch den Diagonalschnitt AEOL in zwei gleiche Prismen ALMEOP und AKLENO getheilt wird.

Man denke sich nun die vierseitige Pyramide EOGHP so verschoben, daß ihre Seitenfläche EOP die congruente Seitenfläche ALM der vierseitigen Pyramide ALCDM deckt; dann fallen auch die auf diesen Seitenflächen senkrechten Kanten OG und LC, PH und MD, folglich auch die übrigen Kanten zusammen. Die Pyramiden EOGHP und ALCDM sind demnach congruent, also auch

inhaltsgleich. Setzt man zu jeder derselben den Körper ACDEOP dazu, so müssen auch die Summen gleich sein, also Prisma ACDEGH = ALMEOP. Ebenso folgt, daß das Prisma ABCEFG = AKLENO ist. Da nun die Prismen ALMEOP und AKLENO gleich sind, so sind auch die Prismen ACDEGH und ABCEFG gleich.

Folgesätze. a) Jedes dreiseitige Prisma ist gleich einem rechtwinkligen Parallelepiped, welches mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

b) Jedes vielseitige Prisma ist gleich einem rechtwinkligen Parallelepiped, welches mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

c) Zwei Prismen, welche gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, sind inhaltsgleich.

3. Bestimmung des Cubikinhaltes der Prismen.

§. **290.** Der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Es sei P ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Grundfläche G die Seiten a und b hat und dessen Höhe c ist; ferner sei der Würfel W die Einheit des Körpermaßes, das Quadrat g die Einheit des Flächenmaßes und die Strecke m die Einheit des Längenmaßes. Nach §. 286 hat man nun $\frac{P}{W} = \frac{G.c}{g.m} = \frac{G}{g} \cdot \frac{c}{m}$, wo $\frac{P}{W}$ die Maßzahl für den Inhalt des Parallelepipeds, $\frac{G}{g}$ die Maßzahl der Grundfläche G, und $\frac{c}{m}$ die Maßzahl der Höhe c ist.

Da (nach §. 107) $\frac{G}{g} = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m}$ ist, so ist auch

$$\frac{P}{W} = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{c}{m};$$

d. i. der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus drei zusammentreffenden Kanten (Länge, Breite und Höhe).

§. **291.** Ein Cubus ist ein rechtwinkliges Parallelepiped von gleicher Länge, Breite und Höhe; der Cubikinhalt eines Cubus ist also gleich der dritten Potenz einer Seite.

Daher kommt es, daß man auch in der Arithmetik die dritte Potenz einer Zahl den Cubus derselben nennt.

Sind V und v die Cubikinhalte zweier Würfel, deren Seiten S und s heißen, so hat man $V = S^3$ und $v = s^3$, daher

$$V : v = S^3 : s^3;$$

d. h. die Cubikinhalte zweier Würfel verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Seiten.

§. **292.** Der Cubikinhalt eines jeden Prisma ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Folgt aus §. 290 mit Zuziehung des §. 288, Folges., ferner §. 289, Folges. a) und b).

II. Die Pyramide und das Prismatoid.

1. Oberfläche und Cubikinhalt der Pyramide.

§. 293. 1. Um die Oberfläche o einer Pyramide zu erhalten, berechnet man zuerst die Seitenflächen als Dreiecke, ihre Summe gibt die Seitenoberfläche s; dazu addirt man noch den Flächeninhalt b der Grundfläche; also $o = s + b$.

2. Die Seitenoberfläche einer senkrechten Pyramide ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der halben Seitenhöhe.

Denn die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke, deren gemeinschaftliche Höhe die Seitenhöhe der Pyramide ist.

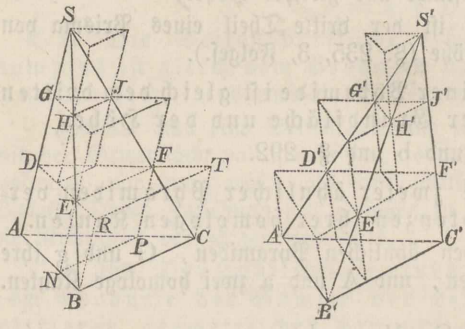
3. Die Oberflächen zweier ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Kanten.

Denn je zwei homologe Grenzflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten; dasselbe Verhältniß müssen daher auch die Summen aller Grenzflächen in beiden Pyramiden haben.

Zusatz. Die Oberflächen irgend zweier ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Kanten (§. 279).

§. 294. Zwei Pyramiden, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben, sind inhaltsgleich.

Fig. 188.



Es seien (Fig. 188) die Grundflächen ABC und A'B'C' der beiden Pyramiden SACB und S'A'C'B' gleich und in derselben Ebene, und die Scheitel S und S' in einer mit dieser parallelen Ebene gelegen. Theilt man in beiden Pyramiden die Höhen in gleich viele unter einander gleiche Theile und legt durch die Theilungspunkte mit den Grundflächen parallele Ebenen, so sind je zwei in gleicher Höhe geführte Schnittflächen gleich (§. 235, 2); also DEF = D'E'F', GHJ = G'H'J'.

Construirt man nun zu jedem zwischen zwei solchen Schnitten liegenden Stücke der Pyramiden ein äußeres und ein inneres Prisma, deren erstes die untere, deren zweites die obere Grundfläche des Pyramidenstückes zur Grundfläche hat, wie zu ABCDEF die Prismen ABCDRT und ANPDEF, so sind (§. 289, Folges. c) je zwei gleichliegende äußere Prismen, und eben so je zwei gleichliegende innere Prismen gleich. Es wird daher auch die Summe aller äußeren und eben so die Summe aller inneren Prismen in beiden Pyramiden gleich sein. Heißt nun A die erstere und J die letztere Summe, P der Inhalt der Pyramide SABC und P' der Inhalt der Pyramide S'A'B'C', so ist immer

$$A > P > J \text{ und } A > P' > J.$$

Die Differenz A — J der beiden Summen ist offenbar gleich dem untersten äußern Prisma ABCDRT, welches, da sich die Höhen in beliebig

viele gleiche Theile theilen lassen, kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine gegebene Größe.

P und P' sind also zwei Größen, welche zwischen denselben Näherungswerthen A und J, die einander beliebig genähert werden können, liegen; folglich ist P = P' (§. 82, 3).

§. **295.** Jedes dreiseitige Prisma kann in drei inhaltsgleiche Pyramiden zerlegt werden.

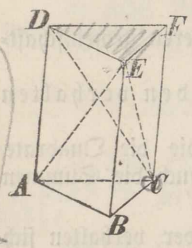


Fig. 189.

Legt man (Fig. 189) durch die Punkte A, E und C des dreiseitigen Prisma ABCDEF eine Ebene, so zerfällt dadurch das Prisma in zwei Pyramiden, eine dreiseitige EABC und eine vierseitige EACFD. Wird ferner in dieser vierseitigen Pyramide durch die Punkte C, E und D eine Ebene gelegt, so theilt sie jene Pyramide in die zwei dreiseitigen Pyramiden EACD und ECDF.

Die beiden Pyramiden EACD und ECDF sind nach §. 294 einander gleich. Betrachtet man in der Pyramide ECDF den Punkt C als Scheitel und DEF als Grundfläche, so folgt aus §. 294, daß diese Pyramide auch der Pyramide EABC gleich ist.

Die drei Pyramiden EABC, EACD und ECDF, in welche das dreiseitige Prisma ABCDEF zerlegt wird, sind also inhaltsgleich.

Folgesätze. a) Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

b) Jede vielseitige Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe (§. 235, 3, Folges.).

§. **296.** Der Cubikinhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche und der Höhe.

Folgt aus §. 295, Folges. a und b und §. 292.

§. **297.** Die Cubikinhalte zweier ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer homologen Kanten.

Es seien P und p die beiden ähnlichen Pyramiden, G und g ihre Grundflächen, H und h ihre Höhen, und A und a zwei homologe Kanten. Man hat

$$P : p = G \cdot H : g \cdot h.$$

Nun sind die Grundflächen G und g ähnlich und die Höhen H und h zwei homologen Kanten A und a proportionirt, daher

$$G : g = A^2 : a^2, \text{ und } H : h = A : a.$$

Multiplicirt man diese beiden Proportionen, so ergibt sich

$$G \cdot H : g \cdot h = A^3 : a^3, \text{ und folglich auch}$$
$$P : p = A^3 : a^3.$$

Zusatz. Die Cubikinhalte je zweier Polyeder verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer homologen Kanten (§. 279).

§. **298.** Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma ist gleich der Summe dreier Pyramiden, deren gemeinschaftliche Grundfläche die Grundfläche des Prisma ist und deren Scheitel die Eckpunkte des schiefen Durchschnittes sind.

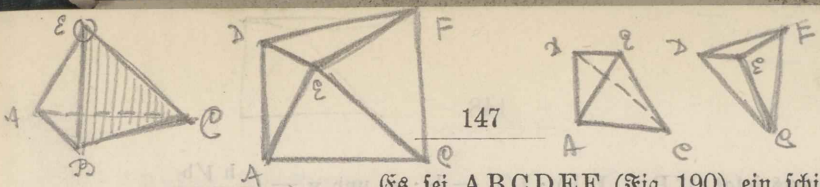
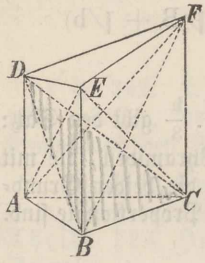


Fig. 190.



Es sei ABCDEF (Fig. 190) ein schief abgeschnittenes Prisma. Legt man durch die Punkte A, E, C eine Ebene, ferner durch C, E, D eine zweite Ebene, so zerfällt das schief abgeschnittene Prisma in drei Pyramiden EABC, EACD und ECDF; es ist also

$$ABCDEF = EABC + EACD + ECDF.$$

Die Pyramide EABC hat ABC zur Grundfläche und ihren Scheitel in E. Legt man ferner durch die Punkte B, C, D eine Ebene, so ist nach §. 294 die Pyramide EACD gleich der Pyramide BACD, in welcher man auch ABC als Grundfläche und D als Scheitel betrachten kann. Legt man endlich durch die Punkte A, B, F eine Ebene, so ist eben so die Pyramide ECDF gleich der Pyramide BACF, in welcher man ABC als Grundfläche und F als Scheitel ansehen kann.

Es ist somit

$$ABCDEF = EABC + DABC + FABC.$$

2. Oberfläche und Cubikinhalt des Pyramidenstumpfes.

§. **299**. 1. Die Oberfläche o eines Pyramidenstumpfes wird erhalten, wenn man die Summe s aller Seitenflächen, welche Trapeze sind, bestimmt und die beiden Grundflächen B und b dazu addirt; also

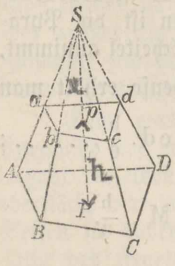
$$o = s + B + b.$$

2. Die Seitenoberfläche eines senkrechten Pyramidenstumpfes ist gleich dem Producte aus dem Umfange des mittleren Durchschnittes und der Seitenhöhe.

Halbirt man eine Seitenkante und legt durch den Halbirungspunkt eine mit der Grundfläche parallele Ebene, so halbirt dieselbe auch die übrigen Seitenkanten und man erhält als den mittleren Durchschnitt ein regelmäßiges Vieleck. Durch Zuziehung des Zusatzes zu §. 117, 3 ergibt sich dann sogleich die Richtigkeit des obigen Lehrsatzes.

§. **300**. Der Cubikinhalt eines Pyramidenstumpfes ist gleich dem Producte der Summe der beiden Grundflächen und ihrer mittleren geometrischen Proportionale mit dem dritten Theile der Höhe.

Fig. 191.



Ergänzt man den Pyramidenstumpf ABCD abcd (Fig. 191) zur ganzen Pyramide, so ist der Cubikinhalt desselben

$$V = \text{Pyr. } SABCD - \text{Pyr. } Sabcd.$$

Bezeichnen nun B und b die Grundflächen ABCD und abcd, h die Höhe pP, und x die noch unbekannte Höhe Sp, so hat man

$$\text{Pyr. } SABCD = \frac{B(h+x)}{3}, \quad \text{Pyr. } Sabcd = \frac{bx}{3};$$

daher $V = \frac{B(h+x)}{3} - \frac{bx}{3} = \frac{Bh}{3} + \frac{x}{3}(B - b)$.

Zur Bestimmung von x hat man die Proportion:

$B : b = (h + x)^2 : x^2$ (§. 235, 1) oder $\sqrt{B} : \sqrt{b} = (h + x) : x$.

Daraus folgt $(\sqrt{B}-\sqrt{b}):\sqrt{b}=h:x$, und $x=\frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$.

Durch Substitution dieses Werthes erhält man

$$V=\frac{Bh}{3}+\frac{h\sqrt{b}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{b})}(B-b)=\frac{Bh}{3}+\frac{h\sqrt{b}}{3}(\sqrt{B}+\sqrt{b})$$
$$=(B+\sqrt{Bb}+b).\frac{h}{3}.$$

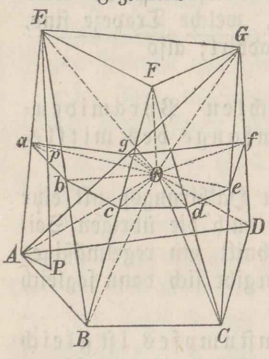
Zusatz. Der Ausdruck $V=B.\frac{h}{3}+\sqrt{Bb}.\frac{h}{3}+b.\frac{h}{3}$ gibt den Satz:

Ein Pyramidenstumpf ist gleich der Summe dreier Pyramiden, die mit dem Stumpfe gleiche Höhe haben, und deren Grundflächen die beiden Grundflächen des Pyramidenstumpfes und ihre mittlere geometrische Proportionale sind.

3. Cubikinhalt des Prismatoids.

§. **301.** Der Cubikinhalt eines Prismatoids ist gleich der Summe der Cubikinhalte dreier mit ihm gleich hoher Pyramiden, von denen die eine das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen, und jede der beiden andern den Mittelschnitt des Prismatoids zur Grundfläche hat. (Fig. 192.)

Fig. 192.



Es seien B und b die Grundflächen, h die Höhe, M der Mittelschnitt abcdefg (§. 240) und V der Cubikinhalt des Prismatoids.

Legt man durch irgend einen Punkt O des Mittelschnittes und durch die Kanten des Prismatoids Ebenen, so zerfällt dieses in Pyramiden, von denen zwei die Grundflächen des Prismatoids zu Grundflächen, und dessen halbe Höhe zur Höhe haben. Die Summe dieser zwei Pyramiden ist

$$B.\frac{h}{6}+b.\frac{h}{6}=\frac{B+b}{2}.\frac{h}{3}.$$

Die übrigen Pyramiden haben ihre Spitze in O und zu Grundflächen die Seitenflächen des Prismatoids, in denen je zwei Seitenkanten durch den Mittelschnitt halbirt werden. Von jeder dieser Pyramiden, z. B. von OABE wird durch den Mittelschnitt eine kleinere Pyramide OabE abgeschnitten, die mit ihr den Scheitel O und daher auch die Höhe gemeinschaftlich hat; ihre Cubikinhalte verhalten sich daher wie die Grundflächen ABE und abE (§. 296); wegen AE = 2aE ist ABE = 4abE (§. 111), daher auch Pyr. OABE = 4 OabE; nun ist die Pyramide OabE, wenn man Oab als Grundfläche, und E als Scheitel annimmt, gleich $Oab.\frac{h}{6}$; folglich Pyr. $OABE=4.Oab.\frac{h}{6}$. Ebenso erhält man Pyramide $OBEF=4.Obc.\frac{h}{6}$, Pyr. $OBCF=4Ocd.\frac{h}{6}$, ...; somit als die Summe aller dieser Pyramiden

$$4.(Oab+Obc+Ocd+..).\frac{h}{6}=4M.\frac{h}{6}=2M.\frac{h}{3}.$$

Mithin ist

$$V=\left(\frac{B+b}{2}+2M\right).\frac{h}{3}.$$

Zusatz. Die Anwendung dieser Formel auf das Prisma, die Pyramide und den Pyramidenstumpf führt auf die bekannten Sätze über den Inhalt dieser Körper.

III. Regelmäßige Polyeder.

§. **302.** 1. Die Oberfläche eines regelmäßigen Polyeders wird erhalten, indem man eine Seitenfläche als ein regelmäßiges Vieleck bestimmt und den Flächeninhalt mit der Zahl der Seitenflächen multiplicirt.

2. Der Cubikinhalt eines regelmäßigen Polyeders ist gleich dem Producte aus der Oberfläche desselben und dem dritten Theile des Halbmessers der dem Polyeder eingeschriebenen Kugel.

Der Beweis ergibt sich aus §. 242 und §. 296.

IV. Der Kegel.

1. Oberfläche und Cubikinhalt des Kegels.

§. **303.** Wird der Grundfläche eines Kegels ein regelmäßiges Vieleck ein- oder umgeschrieben, und dasselbe als Grundfläche einer Pyramide angenommen, deren Spitze zugleich die Spitze des Kegels ist, so heißt diese Pyramide dem Kegel bezüglich eingeschrieben oder umgeschrieben.

Die Seitenkanten der eingeschriebenen Pyramide sind Seiten, die Seitenflächen der umgeschriebenen Pyramide sind Berührungsebenen des Kegels.

§. **304.** 1. Die Seitenoberfläche einer dem senkrechten Kegel eingeschriebenen Pyramide ist kleiner, die Seitenoberfläche einer umgeschriebenen Pyramide größer als die Mantelfläche des Kegels.

Geht man von einer gegebenen, dem Kegel eingeschriebenen Pyramide aus und verdoppelt durch Einschreibung neuer Pyramiden die Seitenzahl derselben, so wird (§. 156) der Umfang der Grundfläche und daher (§. 293, 2) auch die Seitenoberfläche der Pyramide desto größer, in je mehreren Punkten deren Grundfläche mit der Grundfläche des Kegels zusammenfällt. Je mehrere Punkte aber die beiden Grundflächen gemeinschaftlich haben, desto mehr nähert sich auch die Seitenoberfläche der Pyramide der Mantelfläche des Kegels. Daraus folgt, daß die Seitenoberfläche jeder eingeschriebenen Pyramide kleiner ist als die Mantelfläche des Kegels; denn wäre sie eben so groß oder größer als die Mantelfläche des Kegels, so würde sie bei fortwährender Zunahme sich dieser nicht nur nicht nähern, sondern von ihr um so mehr entfernen, je größer ihre Seitenzahl ist.

Geht man dagegen von einer gegebenen, dem Kegel umgeschriebenen Pyramide aus und verdoppelt durch Umschreibung neuer Pyramiden die Seitenzahl derselben, so überzeugt man sich auf gleiche Weise, daß die Seitenoberfläche der dadurch entstandenen Pyramiden um so kleiner wird, je mehr Seiten sie haben, und daß sie sich zugleich in demselben Grade der Mantelfläche des Kegels nähern müsse; woraus dann folgt, daß die Seitenoberfläche einer solchen umgeschriebenen Pyramide größer ist als die Mantelfläche des Kegels.

2. Der Cubikinhalt einer irgend einem Kegel eingeschriebenen Pyramide ist kleiner, der Cubikinhalt der umgeschriebenen Pyramide größer als der Cubikinhalt des Kegels.

Denn die eingeschriebene Pyramide ist ein Theil des Kegels und dieser wieder ein Theil der umgeschriebenen Pyramide.

Folgesatz. Die Seitenoberflächen der einem senkrechten Kegel ein- und umgeschriebenen Pyramiden können durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl der Mantelfläche dieses Kegels und eben so die Cubikinhalte der irgend einem Kegel ein- und umgeschriebenen Pyramiden dem Cubikinhalte des Kegels beliebig nahe gebracht werden, so daß diese Unterschiede kleiner werden, als jede noch so kleine angebbare Größe. In diesem Sinne pflegt man auch zu sagen: Ein Kegel ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ist.

§. 305. Die Mantelfläche eines senkrechten Kegels ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der halben Seite.

Bezeichnen m, u und s bezüglich die Maßzahlen für die Mantelfläche, den Umfang der Grundfläche und die Seite des Cylinders, so ist

$$m = u \cdot \frac{s}{2}.$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus §. 293, 2, sobald man den Kegel als eine Pyramide betrachtet, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ist. Wir wollen jedoch für die Richtigkeit dieses Satzes hier einen strengeren Beweis folgen lassen.

Wäre $m > u \cdot \frac{s}{2}$ und zwar $m - u \cdot \frac{s}{2} = w$, so ließe sich (§. 304, Folges.) dem Kegel immer eine Pyramide einschreiben, deren Seitenoberfläche sich von der Mantelfläche des Kegels um weniger als jede noch so kleine gegebene Größe w unterscheidet. Heißt u' der Umfang der regelmäßigen Grundfläche und s' die Seitenhöhe einer solchen Pyramide, so wäre $m - u' \cdot \frac{s'}{2} < w$ und demnach $m - u' \cdot \frac{s'}{2} < m - u \cdot \frac{s}{2}$, daher $u' \cdot \frac{s'}{2} > u \cdot \frac{s}{2}$, was nicht sein kann, weil $u' < u$ und $s' < s$ ist.

Wäre ferner $m < u \cdot \frac{s}{2}$ und zwar $u \cdot \frac{s}{2} - m = w'$, so ließe sich dem Kegel immer eine Pyramide umschreiben, deren Seitenoberfläche sich von der Mantelfläche des Kegels um weniger als jede noch so kleine gegebene Größe w' unterscheidet. Heißt u'' der Umfang der regelmäßigen Grundfläche einer solchen Pyramide, so wäre, da die Seitenhöhe der Pyramide der Seite des Kegels gleich ist, $u'' \cdot \frac{s}{2} - m < w'$ und demnach $u'' \cdot \frac{s}{2} - m < u \cdot \frac{s}{2} - m$, folglich $u'' \cdot \frac{s}{2} < u \cdot \frac{s}{2}$, was nicht sein kann, weil $u'' > u$ ist.

Es ist daher $m = u \cdot \frac{s}{2}$.

Zusatz. Die Gesammtoberfläche eines senkrechten Kegels wird erhalten, indem man zu der Mantelfläche den Flächeninhalt der Grundfläche addirt.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche eines senkrechten Kegels, so ist die Mantelfläche $= 2r\pi \cdot \frac{s}{2} = rs\pi$, die Grundfläche $= r^2\pi$, daher die ganze Oberfläche

$$o = rs\pi + r^2\pi = r\pi(s + r).$$

Für den gleichseitigen Kegel hat man $s = 2r$, daher

$$o = 3r^2\pi.$$

§. **306.** Der Cubikinhalt eines Kegels ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe.

Bezeichnen v, b und h bezüglich den Cubikinhalt, die Grundfläche und die Höhe eines Kegels, so ist

$$v = b \cdot \frac{h}{3}.$$

Der strenge Beweis für diesen Satz, der unmittelbar aus §. 296 gefolgert werden kann, wird ganz in derselben Weise wie der Beweis in §. 305 geführt, nur muß man dort statt der Umfänge der Grundflächen die Flächeninhalte derselben, und statt der Seitenoberflächen die Cubikinhalte setzen.

Zusätze. 1. Ist r die Maßzahl des Halbmessers der Grundfläche, so hat man

$$v = \frac{r^2 h\pi}{3}.$$

Ist der Kegel ein senkrechter und s die Maßzahl einer Seite, so ist $h = \sqrt{s^2 - r^2}$, daher $v = \frac{r^2\pi}{3}\sqrt{s^2 - r^2}$.

Für den gleichseitigen Kegel hat man $s = 2r$, folglich $v = \frac{r^3\pi}{3}\sqrt{3}$.

2. Die Cubikinhalte ähnlicher Kegel verhalten sich wie die dritten Potenzen der Halbmesser ihrer Grundflächen.

Heißen V und v die Cubikinhalte zweier ähnlicher Kegel, R und r die Halbmesser ihrer Grundflächen, H und h ihre Höhen, so hat man

$$V : v = \frac{R^2 H\pi}{3} : \frac{r^2 h\pi}{3} = R^2H : r^2h.$$

Nun verhalten sich in ähnlichen Kegeln die Höhen wie die Axen und diese wie die Halbmesser der Grundflächen; daher ist $H : h = R : r$, und somit

$$V : v = R^3 : r^3.$$

2. Oberfläche und Cubikinhalt eines Kegelstumpfes.

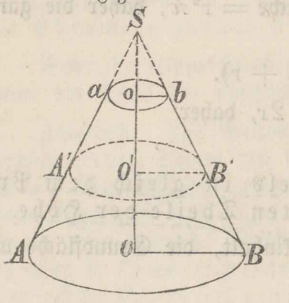
§. **307.** Die Mantelfläche eines senkrechten Kegelstumpfes ist gleich dem Producte aus dem Umfange des mittleren Durchschnittes und der Seite.

Dieser Satz folgt, wenn man die Grundflächen des Kegelstumpfes als regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten ansieht, unmittelbar aus §. 299, 2; er kann aber auch davon unabhängig bewiesen werden.

Ergänzt man den senkrechten Kegelstumpf ABab (Fig. 193) zum ganzen Kegel, so ist die Mantelfläche m des Stumpfes gleich dem Unterschiede zwischen der Mantelfläche M des ganzen Kegels SAB und der Mantelfläche M' des Ergänzungskegels Sab; also $m = M - M'$.

Bezeichnen nun R und r die Halbmesser OB und ob, s die Seite Bb, und x die noch unbekannte Seite Sb, so hat man, da $\triangle$ SOB $\sim$ Sob ist, $(s + x) : x = R : r$, daher

Fig. 193.



$$x = \frac{rs}{R - r} \text{ und } s + x = \frac{Rs}{R - r}.$$

Es ist also nach §. 305

$$M = R\pi \,.\, (s + x) = \frac{R^2\pi}{R - r} \,.\, s, \text{ und}$$

$$M' = r\pi \,.\, x = \frac{r^2\pi}{R - r} \,.\, s; \text{ mithin}$$

$$m = \frac{(R^2 - r^2)\,\pi}{R - r} \,.\, s = (R + r)\,\pi \,.\, s,$$

und, wenn R' der Halbmesser O'B' des mittleren Durchschnittes des Kegelstumpfes ist, wegen $R' = \frac{R + r}{2}$

$$m = 2R'\pi \,.\, s.$$

Zusatz. Die Gesammtoberfläche eines senkrechten Kegelstumpfes wird erhalten, wenn man zu der Mantelfläche die Flächeninhalte der beiden Grundflächen addirt; es ist also die Gesammtoberfläche

$$o = (R + r)\,s\pi + R^2\pi + r^2\pi.$$

§. **308.** Der Cubikinhalt des Kegelstumpfes ist gleich dem Producte der Summe der beiden Grundflächen und ihrer mittleren geometrischen Proportionale mit dem dritten Theile der Höhe.

Bezeichnen R und r bezüglich die Halbmesser der beiden Grundflächen und h die Höhe des Kegelstumpfes, so ist der Cubikinhalt

$$v = (R^2\pi + Rr\pi + r^2\pi) \,.\, \frac{h}{3}.$$

Dieser Satz kann schon aus §. 300 gefolgert werden. Der strenge Beweis für die Richtigkeit desselben wird mit Zuziehung des §. 306 in ähnlicher Weise wie der Beweis in §. 307 geführt.

V. Der Cylinder.

§. **309.** Werden den Grundflächen eines Cylinders zwei congruente und parallel gestellte regelmäßige Vielecke ein- oder umgeschrieben, und dieselben als Grundflächen eines Prisma angenommen, so heißt dieses Prisma dem Cylinder bezüglich eingeschrieben oder umgeschrieben.

Die Seitenkanten des eingeschriebenen Prisma sind Seiten, die Seitenflächen des umgeschriebenen Prisma sind Berührungsebenen des Cylinders.

§. **310.** 1. Die Seitenoberfläche eines dem senkrechten Cylinder eingeschriebenen Prisma ist kleiner, die Seitenoberfläche eines umgeschriebenen Prisma größer als die Mantelfläche des Cylinders.

Der Beweis dieses Satzes wird ganz auf dieselbe Weise geführt, wie für den analogen Satz beim Kegel in §. 304.

2. Der Cubikinhalt eines irgend einem Cylinder eingeschriebenen Prisma ist kleiner, der Cubikinhalt eines umgeschriebenen Prisma größer als der Cubikinhalt des Cylinders.

Denn das eingeschriebene Prisma ist ein Theil des Cylinders und dieser wieder ein Theil des umgeschriebenen Prisma.

Folgesatz. Die Seitenoberflächen der einem senkrechten Cylinder ein- und umgeschriebenen Prismen können durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl der Mantelfläche dieses Cylinders, und eben so die Cubikinhalte der irgend einem Cylinder ein- und umgeschriebenen Prismen dem Cubikinhalte des Cylinders beliebig nahe gebracht werden, so daß die Unterschiede kleiner werden, als jede noch so kleine angebbare Größe. In diesem Sinne pflegt man auch zu sagen: Ein Cylinder ist ein Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ist.

§. **311.** Die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe.

Bezeichnen m, u und h bezüglich die Maßzahlen für die Mantelfläche, den Umfang der Grundfläche und die Höhe des Cylinders, so ist

$$m = u \,.\, h.$$

Der strenge Beweis dieses Satzes, auf den man schon durch §. 283, 2 geleitet wird, ist analog dem Beweise in §. 305.

Zusatz. Die ganze Oberfläche eines senkrechten Cylinders wird erhalten, wenn man zu der Mantelfläche den doppelten Flächeninhalt der Grundfläche addirt.

Bezeichnet r den Halbmesser der Grundfläche eines senkrechten Cylinders, so ist die Mantelfläche $= 2rh\pi$, die Grundfläche $= r^2\pi$, daher die Gesammtoberfläche

$$o = 2rh\pi + 2r^2\pi = 2r\pi\,(h + r).$$

Im gleichseitigen Cylinder ist $h = 2r$, daher $o = 6r^2\pi$.

§. **312.** Der Cubikinhalt eines Cylinders ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Bezeichnen v, b und h bezüglich die Maßzahlen für den Cubikinhalt, die Grundfläche und die Höhe eines Cylinders, so ist

$$v = b \,.\, h.$$

Der Beweis dieses Satzes, welcher schon aus §. 292 gefolgert werden kann, ist ähnlich dem in §. 306.

Zusätze. 1. Ist r der Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders, so ist

$$v = r^2h\pi.$$

Für den gleichseitigen Cylinder hat man $h = 2r$, daher $v = 2r^3\pi$.

2. Die Cubikinhalte ähnlicher Cylinder verhalten sich wie die dritten Potenzen der Maßzahlen der Halbmesser ihrer Grundflächen.

Beweis wie in §. 306, Zusatz 2.

VI. Rotationsflächen und Rotationskörper.

§. **313.** Dreht sich eine gerade, gebrochene oder krumme Linie, oder eine ebene Figur um eine feste Gerade, so beschreibt während einer vollen Umdrehung jeder Punkt derselben eine Kreislinie, deren Ebene auf der festen Geraden senkrecht steht. Die feste Gerade heißt die Rotationsaxe oder blos Axe, die durch die Drehung der geraden, gebrochenen oder krummen

Linie beschriebene Fläche die Rotationsfläche dieser Linie, und der durch die Drehung der ebenen Figur erzeugte Körper der Rotationskörper dieser Figur.

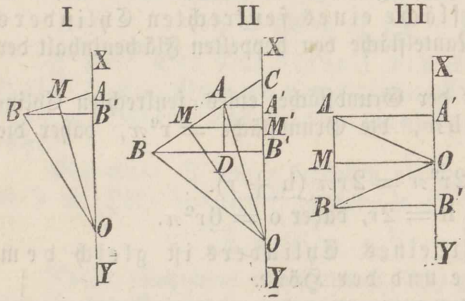
§. 314. 1. Die Rotationsfläche einer Strecke um eine außer ihr in derselben Ebene liegende Axe ist je nach der Lage dieser Strecke gegen die Axe die Mantelfläche eines senkrechten Kegels, eines senkrechten Kegelstumpfes oder eines senkrechten Cylinders, oder endlich, wenn die Strecke auf der Axe senkrecht steht, die Fläche eines Kreises oder Kreisringes.

Dreht sich eine gebrochene Linie um eine außer ihr in derselben Ebene liegende Axe, so ist ihre Rotationsfläche gleich der Summe der Rotationsflächen aller Strecken, aus denen die gebrochene Linie besteht.

In besonderen Fällen kann die Rotationsfläche einfacher bestimmt werden.

2. Die Rotationsfläche der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes um eine in seiner Ebene durch den Scheitel gehende Axe ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser die Dreieckshöhe ist, und der Projection der Grundlinie auf die Axe. (Fig. 194.)

Fig. 194.



Die durch den Scheitel O des gleichschenkligen Dreieckes gehende Axe XY kann gegen das Dreieck eine dreifache Lage haben.

I. Es falle XY mit einem Schenkel AO des Dreieckes zusammen. Man ziehe $BB' \perp XY$ und $OM \perp AB$; dann ist die Rotationsfläche der Grundlinie AB, die wir durch F(AB) bezeichnen wollen, die Mantelfläche eines senkrechten Kegels, daher $F(AB) = \pi BB'.AB$. Da aber $\triangle ABB' \sim AOM$, so ist $BB' : AB' = OM : AM$ oder $BB' : AB' = OM : \frac{AB}{2}$, woraus $BB'.AB = 2OM.AB'$ folgt; somit hat man

$$F(AB) = 2\pi OM \,.\, AB'.$$

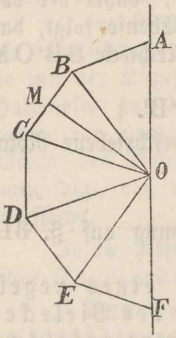
II. Es liege die Axe XY außerhalb des Dreieckes AOB, ohne jedoch der Grundlinie AB parallel zu sein; dann ist die Rotationsfläche der letzteren die Mantelfläche eines senkrechten Kegelstumpfes. Zieht man daher $OM \perp AB$, ferner AA', MM' und BB' senkrecht auf XY, so ist $F(AB) = 2\pi MM' \,.\, AB$. Zieht man noch $AD \perp BB'$, so ist $\triangle MOM' \sim ABD$, daher $MM' : OM = AD : AB$, und $MM'.AB = OM \,.\, AD = OM.A'B'$; folglich

$$F(AB) = 2\pi OM \,.\, A'B'.$$

III. Ist die Axe XY der Grundlinie AB parallel, so beschreibt diese während der Rotation die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders. Zieht man daher $OM \perp AB$, ferner AA' und BB' senkrecht auf XY, so ist

$$F(AB) = 2\pi OM \,.\, A'B'.$$

§. 315. Nimmt man in einem regelmäßigen Vielecke (Fig. 195) eine durch einen Eckpunkt und durch den Mittelpunkt gehende Gerade AF als Ro-



tationsaxe an, so sind die rotirenden Seiten Grundlinien von gleichschenkligen Dreiecken, deren gemeinschaftliche Höhe OM der Halbmesser des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises ist. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die Seitenzahl des Vieleckes eine ungerade ist; in diesem Falle steht eine rotirende halbe Seite auf der Axe senkrecht und beschreibt daher eine Kreisfläche.

Aus §. 314, 2 ergeben sich demnach folgende Sätze:

1. Die Rotationsfläche der Grundlinie eines Ausschnittes eines regelmäßigen Vieleckes (§. 74) um eine durch den Mittelpunkt des Vieleckes gehende Axe ist gleich dem Producte aus dem Umfange des eingeschriebenen Kreises und der Projection der Grundlinie auf die Axe.

2. Die Rotationsfläche des halben Umfanges eines regelmäßigen Vieleckes von gerader Seitenanzahl um eine durch einen Eckpunct und durch den Mittelpunkt gehende Axe ist gleich dem Produkte aus dem Umfange des eingeschriebenen Kreises und der Axe.

Zusatz. Hat das rotirende Vieleck eine ungerade Zahl von Seiten, so wird die krumme Rotationsfläche, wie früher in 2., bestimmt, und dazu noch die von der auf die Axe senkrechten halben Seite beschriebene Kreisfläche addirt.

§. **316.** 1. Der Rotationskörper einer geradlinigen ebenen Figur um eine außer ihr in derselben Ebene liegende Axe ist aus senkrechten Kegeln, Kugelstumpfen oder Cylindern zusammengesetzt, welche einzeln berechnet und durch die Addition, beziehungsweise Subtraction, mit einander verbunden werden.

In besonderen Fällen tritt eine einfachere Bestimmungsweise des Rotationskörpers ein.

2. Der Rotationskörper eines gleichschenkligen Dreieckes um eine in seiner Ebene durch den Scheitel gehende Axe ist gleich dem Producte aus der Rotationsfläche der Grundlinie und dem dritten Theile der Dreieckshöhe. (Fig. 194.)

Auch hier sind wieder dieselben drei Fälle wie in §. 314, 2 zu unterscheiden.

I. Fällt die Axe XY mit einer Dreiecksseite zusammen, so ist der von dem Dreiecke AOB erzeugte Rotationskörper, den wir durch K(AOB) bezeichnen wollen, die Summe zweier Kegel, daher $K(AOB) = \frac{1}{3}\pi BB'^2 . AB' + \frac{1}{3}\pi BB'^2 . B'O = \frac{1}{3}\pi BB'^2 . OA$; aber $BB' . OA = AB . OM$, weil jedes dieser Producte den doppelten Flächeninhalt des Dreieckes AOB ausdrückt; daher auch $K(AOB) = \pi BB' . AB . \frac{1}{3} OM$, oder, da $\pi BB' . AB$ die von der Grundlinie AB beschriebene Kegelfläche ist,

$$K(AOB) = F(AB) . \tfrac{1}{3} OM.$$

II. Liegt die Axe außerhalb des Dreieckes gegen AB convergirend, so verlängere man AB bis zur Begegnung mit der Axe in C; dann ist

$$\begin{aligned} K(AOB) &= K(BOC) - K(AOC) \\ &= F(BC) . \tfrac{1}{3} OM - F(AC) . \tfrac{1}{3} OM \text{ (nach I)} \\ &= F(AB) . \tfrac{1}{3} OM. \end{aligned}$$

III. Ist $XY \parallel AB$, so ist der von dem $\triangle AA'O$ beschriebene Kegel $\frac{1}{3}$ des von dem Rechtecke $AA'OM$ beschriebenen Cylinders, daher der von dem $\triangle AOM$ beschriebene Körper $\frac{2}{3}$ desselben Cylinders. Ebenso folgt, daß der von dem $\triangle BOM$ beschriebene Körper $\frac{2}{3}$ des von dem Rechtecke $BB'OM$ beschriebenen Cylinders ist. Somit hat man

$$K(AOB) = \tfrac{2}{3} K(AA'B'B) = \tfrac{2}{3} \pi OM^2 . A'B'.$$

Allein $2\pi OM . A'B'$ ist die von der Seite AB beschriebene Rotationsfläche; daher

$$K(AOB) = F(AB) . \tfrac{1}{3} OM.$$

§. **317.** Aus §. 316, 2 ergeben sich mit Beziehung auf §. 315 folgende Sätze:

1. Der Rotationskörper eines Ausschnittes eines regelmäßigen Vieleckes um eine durch den Mittelpunkt des Vieleckes gehende Axe ist gleich dem Producte aus der Rotationsfläche der Grundlinie des Ausschnittes und dem dritten Theile des Halbmessers des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises.

2. Der Rotationskörper eines regelmäßigen Vieleckes um eine durch einen Eckpunkt und durch den Mittelpunkt gehende Axe ist gleich dem Producte aus der Rotationsfläche des halben Umfanges und dem dritten Theile des Halbmessers des eingeschriebenen Kreises.

VII. Die Kugel.

§. **318.** Wird einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck ein- oder umgeschrieben, und dasselbe sammt dem Kreise um eine durch den Mittelpunkt und durch einen Eckpunkt des Vieleckes gehende Axe gedreht, so beschreibt der Kreis eine Kugel und das Vieleck einen Rotationskörper, welcher der Kugel bezüglich eingeschrieben oder umgeschrieben heißt.

Die Oberfläche eines jeden solchen Rotationskörpers hat mit der Kugelfläche mehrere Parallelkreise gemeinschaftlich; alle übrigen Punkte der Oberfläche des eingeschriebenen Rotationskörpers liegen innerhalb, alle übrigen Punkte der Oberfläche des umgeschriebenen Rotationskörpers außerhalb der Kugel.

§. **319.** 1. Die Oberfläche eines der Kugel eingeschriebenen Rotationskörpers ist kleiner, die Oberfläche eines der Kugel umgeschriebenen Rotationskörpers größer als die Kugeloberfläche.

Geht man von einem gegebenen, der Kugel eingeschriebenen Rotationskörper aus und verdoppelt durch Einschreibung neuer Körper die Seitenzahl des erzeugenden Vieleckes und dadurch die Zahl der mit der Kugel gemeinschaftlichen Parallelkreise, so wird (nach §. 315, 2) die Oberfläche des Rotationskörpers desto größer, je mehrere Parallelkreise sie mit der Kugel gemeinschaftlich hat, weil dann der Halbmesser des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises immer größer wird, die Axe aber unverändert bleibt. In je mehreren Parallelkreisen aber die Oberflächen des Rotationskörpers und der Kugel zusammenfallen, desto näher kommen sie einander. Daraus folgt, daß die Oberfläche des Rotationskörpers kleiner sein müsse als die Kugeloberfläche, weil sie, wenn sie eben so groß oder größer als diese wäre, bei fortwährender Zunahme sich der Kugelfläche nicht nur nicht nähern, sondern von ihr immer mehr entfernen würde.

Gebt man dagegen von einem gegebenen, der Kugel umgeschriebenen Rotationskörper aus und verdoppelt durch Umschreibung neuer Körper die Zahl der mit der Kugel gemeinschaftlichen Parallelkreise, so wird (nach §. 315, 2) die Oberfläche des Rotationskörpers um so kleiner, je mehrere Parallelkreise sie mit der Kugel gemeinschaftlich hat, da die Axe immer kleiner wird, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises aber ungeändert bleibt. Mit der Zunahme der gemeinschaftlichen Parallelkreise werden sich aber auch die Oberflächen des Rotationskörpers und der Kugel immer mehr nähern, woraus dann folgt, daß der umgeschriebene Rotationskörper größer ist als die Kugeloberfläche.

Zusatz. Aehnliche Schlüsse können mit Rücksicht auf §. 315, 1 auch bezüglich einer Kugelmütze und einer Kugelzone gemacht werden.

2. Der Cubikinhalt eines der Kugel eingeschriebenen Rotationskörpers ist kleiner, der Cubikinhalt des umgeschriebenen Rotationskörpers ist größer als der Cubikinhalt der Kugel.

Denn der eingeschriebene Rotationskörper ist ein Theil der Kugel und diese wieder ein Theil des umgeschriebenen Rotationskörpers.

Zusatz. Dieselbe Beziehung gilt auch zwischen einem Kugelsector und den Theilen eines eingeschriebenen und umgeschriebenen Rotationskörpers.

Folgesatz. Die Oberflächen der einer Kugel eingeschriebenen und umgeschriebenen Rotationskörper können durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl der erzeugenden Vielecke der Oberfläche der Kugel und eben so die Cubikinhalte der eingeschriebenen und umgeschriebenen Rotationskörper dem Cubikinhalte der Kugel beliebig nahe gebracht werden, so daß die Unterschiede kleiner werden als jede noch so kleine angebbare Größe. In diesem Sinne kann man auch sagen: Die Kugel ist ein Körper, welcher erzeugt wird, wenn sich ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten um eine dasselbe halbirende Diagonale herumdreht.

§. 320. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kugelkreises und dem Durchmesser.

Heißt d der Durchmesser der Kugel und p die Peripherie eines größten Kreises, so ist die Oberfläche der Kugel

$$o = p \cdot d.$$

Diesen Satz kann man schon aus §. 315, 2 mit Rücksicht auf §. 319, Folges. ableiten. Wir wollen jedoch für denselben hier einen strengen indirecten Beweis folgen lassen.

Wäre $o > p.d$, und zwar $o - p.d = w$, so ließe sich (§. 319, Folgesatz) der Kugel immer ein Rotationskörper einschreiben, dessen Oberfläche sich von der Oberfläche der Kugel um weniger als jede noch so kleine gegebene Größe w unterscheidet. Heißt für einen solchen Rotationskörper p' der Umfang des Kreises, welcher dem erzeugenden regelmäßigen Vielecke eingeschrieben ist, so wäre, weil d zugleich die Axe dieses Körpers vorstellt, (mit Rücksicht auf §. 315, 2) $o - p'.d < w$, und demnach $o - p'.d < o - p.d$, somit $p'.d > p.d$, was nicht sein kann, weil $p' < p$ ist.

Wäre ferner $o < p.d$, und zwar $p.d - o = w'$, so ließe sich der Kugel immer ein Rotationskörper umschreiben, dessen Oberfläche sich von der Oberfläche der Kugel um weniger als jede noch so kleine gegebene Größe w'

unterscheidet. Heißt d' die Axe eines solchen Rotationskörpers, so wäre p.d' — o < w', und demnach p.d' — o < p.d — o, daher p.d' < p.d, was nicht sein kann, da d' > d ist.

Es ist daher o = p.d.

Zusätze. 1. Ist r die Maßzahl des Kugelhalbmessers, so ist

$$o = 2r\pi \,.\, 2r = 4r^2\pi;$$

d. h. die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kugelkreises.

2. Heißen O und o die Oberflächen zweier Kugeln, deren Halbmesser R und r sind, so hat man $O = 4R^2\pi$ und $o = 4r^2\pi$, daher

$$O : o = R^2 : r^2;$$

d. h. die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

3. Es sei f die Oberfläche eines sphärischen Zweieckes, dessen sphärischer Winkel m^0 beträgt, so hat man $f : 4r^2\pi = m^0 : 360^0$, daher

$$f = r^2\pi \,.\, \frac{m^0}{90^0};$$

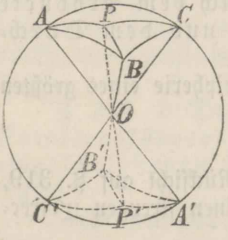
d. h. die Oberfläche eines sphärischen Zweieckes ist gleich dem Producte aus dem Flächeninhalte eines größten Kreises und der Verhältnißzahl zwischen dem sphärischen Winkel und 90^0.

4. Eine Kugelmütze ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kugelkreises und der Höhe der Mütze (§. 215, 1).

5. Eine Kugelzone (Differenz zweier Kugelmützen) ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kugelkreises und der Höhe der Zone.

§. **321**. Zwei sphärische Gegendreiecke sind flächengleich.

Fig. 196.



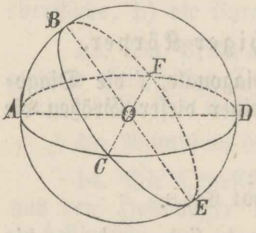
Es seien (Fig. 196) ABC und A'B'C' zwei Gegendreiecke und P der sphärische Mittelpunkt des ersteren. Verbindet man P durch Bogen größter Kreise mit A, B, C, so wird das Dreieck ABC in drei gleichschenklige Dreiecke PAB, PAC, PBC zerlegt, da P von den Punkten A, B, C dieselbe sphärische Entfernung hat.

Zieht man ferner den Durchmesser POP' und verbindet P' mit den Punkten A', B', C' durch Bogen größter Kreise, so wird auch das Dreieck A'B'C' in drei Dreiecke P'A'B', P'A'C', P'B'C' zerlegt, welche als Gegendreiecke der Dreiecke PAB, PAC, PBC bezüglich gleiche Seiten haben, somit auch gleichschenklig und daher (§. 263, Zusatz 1) folgeweise mit den letzteren Dreiecken nicht nur symmetrisch, sondern auch congruent, also flächengleich sind. Somit sind auch die Summen dieser Dreiecke d. i. die Dreiecke ABC und A'B'C' flächengleich.

Auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn der sphärische Mittelpunkt P in einer Seite des Dreiecks oder außerhalb desselben liegt.

§. **322**. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes ist gleich dem Producte aus dem Flächeninhalte eines größten Kugelkreises und der Verhältnißzahl zwischen dem Ueberschusse der drei sphärischen Winkel über 180^0 und zwischen 180^0 (Fig. 197).

Fig. 197.



Das sphärische Dreieck $DEC = ABF$ (§. 321), daher $ABC + DEC = ABC + ABF$, oder

$$ABC + DEC = \text{Zweieck } CAFBC.$$

Ferner ist

$$ABC + BCD = \text{Zweieck } ACDBA,$$
$$ABC + ACE = \text{Zweieck } BAECB.$$

Durch Addition der letzten drei Gleichungen ergibt sich

$$2ABC + (ABC + BCD + DEC + ACE) = ACDBA + BAECB + CAFBC.$$

Bezeichnet man nun den Flächeninhalt des sphärischen Dreieckes ABC durch f, die Winkel desselben durch A^0, B^0, C^0 und den Kugelhalbmesser durch r, wo dann $ABC + BCD + DEC + ACE = 2r^2\pi$ wird, so ist mit Rücksicht auf §. 320, Zusatz 3.

$$2f + 2r^2\pi = r^2\pi \cdot \frac{A^0}{90^0} + r^2\pi \cdot \frac{B^0}{90^0} + r^2\pi \cdot \frac{C^0}{90^0},$$

daher

$$f = r^2\pi \cdot \frac{A^0 + B^0 + C^0 - 180^0}{180^0}.$$

§. **323.** Der Cubikinhalt einer Kugel ist gleich dem Producte aus der Oberfläche und dem dritten Theile des Halbmessers.

Bezeichnet r den Halbmesser und o die Oberfläche der Kugel, so ist der Cubikinhalt derselben

$$v = o \cdot \frac{r}{3}.$$

Der strenge Beweis dieses Satzes, welcher unmittelbar aus §. 317, 2 mit Rücksicht auf §. 319, Folges. gefolgert werden kann, wird in ähnlicher Weise, wie der Beweis in §. 320 geführt.

Zusätze. 1. Da $o = 4r^2\pi$ ist, so folgt $v = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4}{3} r^3\pi$.

2. Heißen V und v die Inhalte zweier Kugeln, deren Halbmesser R und r sind, so hat man $V = \frac{4R^3\pi}{3}$ und $v = \frac{4r^3\pi}{3}$,

$$V : v = R^3 : r^3,$$

d. h. die Cubikinhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

3. Der Cubikinhalt eines Kugelsectors ist gleich dem Producte aus seiner Kugelmütze und dem dritten Theile des Halbmessers der Kugel (§. 317, 1).

4. Der Cubikinhalt eines Kugelsegmentes ist, je nachdem dieses kleiner oder größer als die Halbkugel ist, gleich der Differenz oder der Summe der Inhalte des entsprechenden Kugelsectors und eines Kegels, dessen Grundfläche die Grundfläche des Segmentes, und dessen Höhe der Abstand dieser Grundfläche von dem Kugelmittelpunkte ist.

5. Der Cubikinhalt einer Kugelschicht wird als die Differenz der Inhalte zweier Kugelsegmente berechnet

VIII. Uebungsaufgaben.

§. 324. Aufgaben über die Messung ebenflächiger Körper.

1. In einem Würfel ist a die Seite, d die Diagonale, f die Diagonalfläche, o die Oberfläche, v der Cubikinhalt; aus einer dieser Größen die übrigen zu berechnen.

Gegeben: 1) $a = 1^m\,3^{dm}\,3^{cm}$; 2) $d = 0{\cdot}752^m$;
3) $o = 10\square^{cm}$; 4) $v = 12{\cdot}326391$ Cub.^{m}.

2. In einem rechtwinkligen Parallelepiped sind a, b, c die Kanten, d die Diagonale, f die Diagonalfläche, o die Oberfläche, v der Cubikinhalt; aus dreien dieser Größen die übrigen zu bestimmen.

Gegeben: 1) $a = 2{\cdot}49^m$, $b = 2{\cdot}18^m$, $c = 1{\cdot}85^m$;
2) $a = 1^{dm}\,5^{cm}$, $b = 1^{dm}\,3^{cm}$, $o = 7\square^{dm}\,36\square^{cm}$;
3) $b = 3{\cdot}5^{dm}$, $c = 3{\cdot}8^{dm}$, $v = 41$ Cub.^{dm}.

3. Die Oberfläche o und den Cubikinhalt v eines rechtwinkligen Parallelepipeds aus dem Verhältniß m : n : p der ungleichen Kanten und der Diagonale einer Seitenfläche zu berechnen.

Sind x, y, z die ungleichen Kanten, und ist $x : y : z = m : n : p$ und d die Diagonale der Seitenfläche, deren Seiten y und z sind, so erhält man

$$o = \frac{2(mn + mp + np)}{n^2 + p^2} \cdot d^2 \text{ und } v = \frac{mnp}{(n^2 + p^2)\sqrt{n^2 + p^2}} \cdot d^3.$$

4. Aus dem Cubikinhalte v eines rechtwinkligen Parallelepipeds und dem Verhältnisse m : n : p der drei Kanten die Kanten zu berechnen.

5. Die Höhe eines senkrechten Prisma ist h, die Basis desselben ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seite a ist; bestimme a) die Oberfläche, b) den Cubikinhalt des Prisma.

6. In einem sechsseitigen und einem vierseitigen senkrechten Prisma mit regelmäßigen Grundflächen ist die Höhe $4 \cdot 1^{dm}$ und eine Seite der Grundfläche $2 \cdot 1^{dm}$; wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Inhalte?

7. In einer senkrechten Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, ist a eine Grundkante, b eine Seitenkante, h die Höhe, s die Seitenhöhe, o die Oberfläche, v der Cubikinhalt; aus zweien dieser Größen die übrigen zu berechnen.

8. Die Oberfläche und den Inhalt einer senkrechten Pyramide zu finden, worin die Höhe h, und die Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck mit der Seite a ist.

9. Die Grundfläche einer senkrechten Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt, wenn die Seitenkanten auf einander senkrecht stehen?

10. In einem senkrechten Pyramidenstumpf ist die Seitenkante b, die Grundflächen sind regelmäßige n-Ecke mit den Seiten a_1 und a_2; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt?

11. Eine Pyramide, deren Grundfläche b, und deren Höhe h ist, wird in dem Abstande a von der Spitze durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten; berechne die beiden Theile der Pyramide.

12. In welchem Abstande von der Spitze einer senkrechten Pyramide muß man eine mit der Grundfläche parallele Ebene legen, damit sie a) die Seitenoberfläche, b) die Pyramide selbst in dem Verhältnisse m : n theile?

13. Ein Prismatoid von der Höhe h hat zu Grundflächen zwei congruente gleichseitige Dreiecke, deren Seiten = a jedoch nicht parallel sind; wie groß ist sein Cubikinhalt?

Der Mittelschnitt ist ein regelmäßiges Sechseck.

14. Die Oberfläche und den Cubikinhalt eines regelmäßigen Polyeders aus dem Halbmesser a) der eingeschriebenen, b) der umgeschriebenen Kugel zu bestimmen.

15. Aus der Kante a eines regelmäßigen Polyeders a) die Oberfläche o, b) den Cubikinhalt v desselben zu bestimmen.

a) Der Inhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite a ist, ist $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; daher für das Tetr. $o = a^2\sqrt{3}$, Okt. $o = 2a^2\sqrt{3}$, Ikos. $o = 5a^2\sqrt{3}$.

In dem Hexaeder ist $o = 6a^2$.

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfeckes von der Seitenlänge a ist $\frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$; folglich ist für das Dodekaeder $o = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$.

b) Aus §. 302, 2 und §. 268, 5 ergibt sich für das

Tetr. $v = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$, Okt. $v = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$, Hexaed. $v = a^3$,

Ikos. $v = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5})$, Dodek. $v = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$.

§. 325. Aufgaben über die Messung krummflächiger Körper.

1. In einem senkrechten Kegel ist r der Halbmesser der Grundfläche, h die Höhe, s die Seite, m die Mantelfläche, v der Cubikinhalt; aus je zweien dieser Größen die übrigen zu bestimmen.

Gegeben: 1) $r = 3 \cdot 5^{dm}$, $h = 8 \cdot 4^{dm}$; 2) $h = 1 \cdot 23^{m}$, $m = 7 \cdot 95\square^{m}$; 3) $s = 2^{m}\,8^{dm}\,1^{cm}$, $v = 10$ Cub.^{m}.

2. Wie gestalten sich die Auflösungen in 1. für $s = 2r$, d. i. für den gleichseitigen Kegel?

3. Der Umfang der Grundfläche eines senkrechten Kegels ist p, der Axenschnitt desselben ist ein rechtwinkliges Dreieck; wie groß ist die Mantelfläche?

4. In einem senkrechten Kegel haben r, h und s die in 1. angegebene Bedeutung, r′ ist der Halbmesser eines Schnittkreises desselben, h′ die Höhe, s′ die Seite, m′ die Mantelfläche und v′ der Cubikinhalt des durch diesen entstehenden Kegelstumpfes; berechne aus je dreien dieser Größen die übrigen.

5. Wie groß ist die Höhe h eines senkrechten Kegelstumpfes mit den Halbmessern r und r′, wenn die Mantelfläche desselben der Summe der Grundflächen gleich ist?

6. In welchem Abstande von der kleineren Grundfläche eines senkrechten Kegelstumpfes muß eine mit ihr parallele Ebene geführt werden, damit a) die Schnittfläche $\frac{m}{n}$ der größeren Grundfläche sei, b) damit der Schnitt den Kegelstumpf halbire?

7. In einem senkrechten Cylinder ist r der Halbmesser der Grundfläche, h die Höhe, m die Mantelfläche, v der Cubikinhalt; berechne aus je zweien dieser Größen die beiden anderen.

Gegeben: 1) $r = 1{\cdot}064^{m}$, $h = 2{\cdot}725^{m}$; 2) $r = 6{\cdot}42^{dm}$, $m = 15{\cdot}18\square^{dm}$; 3) $m = 20\square^{dm}$, $v = 20$ Cub.^{dm}.

8. Wie gestalten sich die Auflösungen in 7. für $h = 2r$, d. i. für den gleichseitigen Cylinder?

9. In einem senkrechten Cylinder, dessen Cubikinhalt v ist, verhält sich die Höhe zu dem Durchmesser der Grundfläche wie m : n; wie groß ist die Oberfläche?

10. Den Cubikinhalt einer Cylinderröhre aus den beiden Halbmessern R und r und der Höhe h zu berechnen.

11. Aus dem Cubikinhalte v einer Cylinderröhre, der Höhe h und dem größeren Halbmesser R die Dicke d zu finden.

12. Das Ciment für 1 Liter = 1 Cub.^{dm} des Flüssigkeitsmaßes hat die Form eines Cylinders, dessen Höhe das Doppelte des Durchmessers beträgt; wie groß sind die Dimensionen dieses Cimentes in Millimeter?

13. Das Ciment für 1 Deciliter des Hohlmaßes für trockene Gegenstände hat die Form eines Kegelstumpfes, dessen oberer Durchmesser gleich ist dem Durchmesser eines inhaltsgleichen gleichseitigen Cylinders, und dessen unterer Durchmesser $^5/_4$ des oberen beträgt; welche Dimensionen ergeben sich hieraus?

14. Ein Dreieck, dessen Seiten a, b und c sind, kann um jede derselben als Axe gedreht werden; man suche die Relation zwischen den Inhalten der dadurch entstehenden Rotationskörper A, B und C. ($Aa = Bb = Cc$.)

15. Ein gleichschenkliges Trapez, dessen Höhe h und dessen Parallelseiten a und $a + m$ sind, rotirt um die Seite a als Axe; bestimme a) die Rotationsfläche, b) den Rotationskörper.

16. Ein Trapez rotirt einmal um die größere, dann um die kleinere seiner Parallelseiten; die Inhalte der dadurch erzeugten Rotationskörper verhalten sich wie m : n. Wie verhalten sich die beiden parallelen Seiten zu einander?

17. Bestimme a) die Oberfläche, b) den Cubikinhalt eines Körpers, welcher durch Rotation eines regelmäßigen Sechseckes von 8^{cm} Seitenlänge um eine dasselbe halbirende Diagonale erzeugt wird.

18. Die Seite eines regelmäßigen Fünfeckes ist a; wie groß ist a) die Rotationsfläche, b) der Rotationskörper desselben um eine durch einen Eckpunkt und durch den Mittelpunkt gehende Axe?

19. In einer Kugel ist r der Halbmesser, o die Oberfläche, v der Inhalt; suche aus jeder dieser Größen die beiden anderen.

Gegeben: 1) $r = 0{\cdot}3589^{m}$; 2) $r = 1^{m}\,2^{dm}\,5{\cdot}8^{cm}$; 3) $o = 22{\cdot}16708\square^{dm}$; 4) $v = 100$ Cub.^{dm}.

20. Den Halbmesser einer Kugel zu finden, welche mit einem gegebenen senkrechten a) Cylinder, b) Kegel, c) Kegelstumpf 1. gleiche Oberfläche, 2. gleichen Inhalt hat.

21. In einen gleichseitigen Cylinder werden eine Kugel und ein senkrechter Kegel eingeschrieben; wie verhalten sich die Cubikinhalte dieser drei Körper?

22. Um eine Kugel werden ein gleichseitiger Cylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben; wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Cubikinhalte dieser drei Körper?

23. Eine Kugel wird durch eine Ebene geschnitten, welche den darauf senkrechten Durchmesser 2R in dem Verhältnisse m : n theilt; auf der Schnittfläche stehen zwei senkrechte Kegel, deren Spitzen in der Kugeloberfläche liegen. Wie verhält sich der Cubikinhalt dieses Doppelkegels zu dem Cubikinhalte der Kugel?

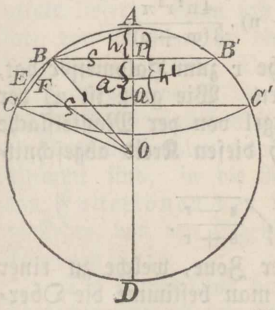
24. Um einen Würfel von der Kante a wird eine Kugel und um diese ein regelmäßiges Tetraeder beschrieben; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt des Tetraeders?

25. Aus einer metallenen Hohlkugel, deren äußerer Durchmesser 2r, und deren Wanddicke d ist, soll eine massive Kugel gegossen werden; wie groß wird der Durchmesser derselben?

26. Der größere Halbmesser einer Hohlkugel sei r und der Cubikinhalt ihrer Schale v; wie dick ist die Schale?

27. Wie groß ist die Fläche eines sphärischen Dreieckes, dessen Winkel 125^0, 87^0, 82^0 sind, wenn der Halbmesser der Kugel 1^m beträgt?

Fig. 198.



28. Setzen wir (Fig. 198) in dieser und in den folgenden Aufgaben 29—33 $AO = r$, $BP = \varrho$, $CQ = \varrho'$, $AP = h$, $AQ = h'$, $PO = d$, $QO = d'$, $PQ = a$, ferner die Sehne $AB = s$, die Sehne $BC = \sigma$.

Es sei die zu dem Bogen AB gehörige Kugelmütze M zu bestimmen, wenn gegeben sind:

1) r, h; 2) r, ϱ; 3) h, ϱ; 4) s.

Man erhält

1) $M = 2r\pi . h$; 2) $M = 2r\pi\,(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2})$;

3) $M = (h^2 + \frac{1}{4}\varrho^2)\pi$; 4) $M = s^2\pi$.

29. Die zu dem Bogen BC gehörige Kugelzone Z zu bestimmen, wenn gegeben sind: 1) r, a; 2) r, ϱ, ϱ'.

Man findet

1) $Z = 2r\pi . a$; 2) $Z = 2r\pi\,(\sqrt{r^2 - \varrho^2} - \sqrt{r^2 - \varrho'^2})$.

30. Den durch die Rotation des Kreisausschnittes BOC erzeugten Kugelsector zu bestimmen, wenn r und a gegeben sind.

Der Kugelsector ist $= 2r\pi . a . \frac{r}{3} = \frac{2}{3} a r^2 \pi$.

31. Das zu dem Bogen AB gehörige Kugelsegment S zu bestimmen, wenn gegeben sind: 1) r, h; 2) ϱ, h; 3) r, ϱ.

Man erhält

1) $S = \frac{h^2\pi}{3}(3r - h)$; 2) $S = \frac{h\pi}{2}\left(\varrho^2 + \frac{h^2}{3}\right)$;

3) $S = \frac{\pi}{3}\left\{2r^3 \mp (2r^2 + \varrho^2)\sqrt{r^2 - \varrho^2}\right\}$.

32. Die zu dem Bogen BC gehörige Kugelschicht zu bestimmen, wenn gegeben sind: 1) r, h, h'; 2) r, d', a; 3) ϱ, ϱ', a.

Man erhält für die Kugelschicht die Ausdrücke:

1) $\frac{\pi}{3}\left\{h'^2(3r - h') - h^2(3r - h)\right\}$; 2) $\frac{a\pi}{3}(3r^2 - 3d'^2 - 3ad' - a^2)$;

3) $\frac{a\pi}{2}\left(\varrho^2 + \varrho'^2 + \frac{a^2}{3}\right)$.

33. Das durch die Rotation des Kreisabschnittes BCE erzeugte ringförmige Kugelsegment R zu bestimmen, wenn σ und a gegeben sind.

$$R = \frac{a\sigma^2\pi}{6}.$$

34. Das Auge eines Beobachters auf der Erdoberfläche übersieht von derselben eine Calotte, welche begrenzt wird durch die Kreislinie, welche die Berührungspunkte der vom Auge nach der Erde gezogenen Tangenten verbindet. Wie groß ist diese Calotte, wenn h die Höhe des Auges über der Erdoberfläche und r den Halbmesser der Erde bezeichnet? $\left(f = \frac{2r^2h\pi}{r+h}\right)$.

35. Das Segment einer Kugel vom Halbmesser r hat einen doppelt so großen Cubikinhalt als eine Kugel, welche die Höhe des Segmentes zum Halbmesser hat; wie groß ist diese Höhe?

36. Eine Kugel mit dem Halbmesser r wird durch eine Ebene so geschnitten, daß sich die Kugelmützen wie m : n verhalten. Wie groß sind die Cubikinhalte der zugehörigen Kugelsegmente?

$$S_1 = (m+3n) \cdot \frac{4m^2r^3\pi}{3(m+n)^3} \text{ und } S_2 = (3m+n) \cdot \frac{4n^2r^3\pi}{3(m+n)^3}.$$

37. Einem senkrechten Kegel, dessen Grundfläche r zum Halbmesser hat, und dessen Seite s ist, wird eine Kugel eingeschrieben. Wie groß ist a) der Halbmesser ϱ des Parallelkreises, in welchem die Kugel von der Mantelfläche des Kegels berührt wird, b) der Inhalt v des durch diesen Kreis abgeschnittenen Kugelsegmentes?

$$\varrho = \frac{r(s-r)}{s} \text{ und } v = \frac{\varrho^3\pi}{3} \cdot \frac{2s+r}{s+r}\sqrt{\frac{s-r}{s+r}}.$$

38. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich einer Zone, welche zu einer Kugel vom Radius r gehört und deren Höhe a ist; man bestimme die Oberfläche und den Cubikinhalt eines Oktaeders, welchem die erstere Kugel eingeschrieben ist.

39. Ein Tetraeder ist inhaltsgleich mit einer Kugelschicht, die zu einer Kugel vom Halbmesser r gehört und deren Grundflächen von dem Kugelmittelpunkte die Abstände d und d' haben; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt einer Kugel, welche dem Tetraeder umgeschrieben ist?

Dritter Theil.

Die Trigonometrie.

---

§. **326.** Die Seiten und die Winkel eines Dreieckes stehen in einem so innigen Zusammenhange, daß man im Allgemeinen aus drei gegebenen Bestandstücken, unter denen bei ebenen Dreiecken wenigstens eine Seite sein muß, durch einfache Constructionen auch die übrigen drei Bestandstücke bestimmen kann. Die geometrische Construction hat jedoch den Uebelstand, daß sie wegen der Unvollkommenheit der dabei benöthigten Instrumente und wegen der Ungenauigkeit beim Gebrauche derselben mehr oder weniger mangelhafte Resultate liefert. Man sah sich daher veranlaßt, bei diesen Bestimmungen anstatt der Construction die Rechnung anzuwenden, welche jeden Grad von Genauigkeit zuläßt. Da sich aber zwischen den Maßzahlen der Seiten und den Zahlen, welche die Winkel in Graden ausdrücken, die Art der gegenseitigen Abhängigkeit nicht unmittelbar darstellen läßt, hat man statt der Winkel die Verhältnißzahlen gewisser Strecken, welche durch die Winkel unzweideutig bestimmt sind, in die Rechnung eingeführt. Diese Verhältnißzahlen nennt man Functionen der Winkel oder goniometrische Functionen, und die Lehre von den Eigenschaften und gegenseitigen Relationen derselben die Goniometrie.

Die Anwendung der Winkelfunctionen auf die Berechnung der Dreiecke bildet den Gegenstand der Trigonometrie, und zwar der ebenen oder sphärischen Trigonometrie, je nachdem sie sich auf die ebenen oder sphärischen Dreiecke bezieht.

Erster Abschnitt.

Die Goniometrie.

I. Erklärung und Darstellung der Winkelfunctionen.

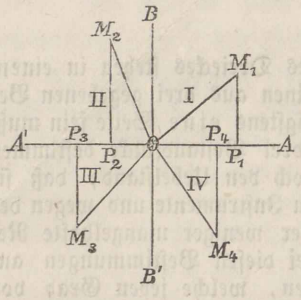
§. **327.** Wenn man in einer Ebene durch einen Punkt O (Fig. 199) zwei auf einander senkrechte Gerade AA′ und BB′ zieht, so theilen diese die unbegrenzte Ebene in vier gleiche Theile, welche Quadranten heißen. Dreht sich dann in dieser Ebene der Strahl OA um den Punkt O in einer bestimmten Richtung, hier nach links, so durchläuft er nach und nach alle Quadranten der Ebene, die nach jener Richtung der Reihe nach der erste, zweite, dritte, vierte Quadrant heißen sollen, und bildet während dieser Drehung mit seiner anfänglichen Richtung alle Winkel von 0^0 bis 360^0.

Ein Winkel AOM, dessen ein Schenkel OA ist und dessen zweiter Schenkel OM_1, OM_2, ... im ersten, zweiten, ... Quadranten liegt, wird ge-

wöhnlich in abgekürzter Ausdrucksweise ein Winkel im ersten, zweiten,... Quadranten genannt.

Zieht man in irgend einem dieser Winkel von beliebigen Punkten des einen Schenkels Senkrechte auf den andern Schenkel oder dessen Verlängerung, so sind die dadurch entstehenden rechtwinkligen Dreiecke ähnlich und es haben daher die Verhältnisse je zweier homologer Seiten in denselben gleiche Werthe. Aendert sich der Winkel, so ändern sich auch diese Verhältnisse. Für jeden Winkel gibt es also Verhältnißzahlen zwischen den Seiten eines auf die eben angegebene Art gebildeten rechtwinkligen Dreieckes, die einzig nur von der Größe des Winkels abhängen und darum Functionen dieses Winkels heißen.

Fig. 199.



Um in die nachfolgenden Erklärungen der Winkelfunctionen Kürze und Bestimmtheit zu bringen, soll für einen gegebenen Winkel die Senkrechte von einem Punkte des einen Schenkels auf den andern durchgängig als Höhe, und der Abschnitt des zweiten Schenkels zwischen dem Scheitel des Winkels und dem Fußpunkte der Senkrechten als Grundlinie des dadurch entstehenden rechtwinkligen Dreieckes angenommen werden.

§. 328. Zieht man von einem beliebigen Punkte M (Fig. 199) des einen Schenkels eines Winkels $AOM = \alpha$ auf den andern Schenkel oder dessen Verlängerung eine Senkrechte MP, so heißt in dem dadurch entstehenden rechtwinkligen Dreiecke MPO

1. das Verhältniß der Höhe zu der Hypotenuse der Sinus des Winkels α, $\frac{MP}{OM} = \sin \alpha$;

2. Das Verhältniß der Grundlinie zu der Hypotenuse der Cosinus dieses Winkels, $\frac{OP}{OM} = \cos \alpha$;

3. das Verhältniß der Höhe zu der Grundlinie die Tangente des Winkels α, $\frac{MP}{OP} = \text{tang } \alpha$;

4. das Verhältniß der Grundlinie zu der Höhe die Cotangente dieses Winkels, $\frac{OP}{MP} = \cot \alpha$;

5. das Verhältniß der Hypotenuse zu der Grundlinie die Secante des Winkel α, $\frac{OM}{OP} = \sec \alpha$;

6. das Verhältniß der Hypotenuse zu der Höhe die Cosecante dieses Winkels, $\frac{OM}{MP} = \text{cosec } \alpha$.

Die Winkelfunctionen sind sämmtlich unbenannte Zahlen.

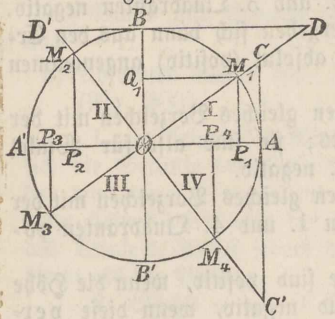
§. 329. Darstellung der Winkelfunctionen am Kreise.

Die Winkelfunctionen lassen sich durch gerade Linien am Kreise anschaulich darstellen.

Zieht man in einem Kreise (Fig. 200) zwei auf einander senkrechte Durchmesser AA' und BB', so bildet ein Halbmesser OM, welcher sich von

dem festen Halbmesser OA aus um O in der Richtung nach links durch alle vier Quadranten des Kreises dreht, nach und nach mit dem festen Halbmesser OA alle um den Punkt O möglichen Winkel.

Fig. 200.



a) Ist $AOM = \alpha$ einer dieser Winkel, und zieht man von M auf OA die Senkrechte MP, so ist nach §. 328

$$\frac{MP}{OM} = \sin\alpha \text{ und } \frac{OP}{OM} = \cos\alpha.$$

b) Errichtet man ferner in A auf OA eine Senkrechte AC, welche von der verlängerten OM in C geschnitten wird, so hat man, da $\triangle OAC \sim OPM$ ist,

$$\frac{AC}{OA} = \frac{MP}{OP} = \text{tang}\,\alpha \text{ und } \frac{OC}{OA} = \frac{OM}{OP} = \sec\alpha.$$

c) Errichtet man endlich in B auf OB eine Senkrechte BD, welche von der verlängerten OM in D geschnitten wird, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke OBD und MPO

$$\frac{BD}{OB} = \frac{OP}{MP} = \cot\alpha \text{ und } \frac{OD}{OB} = \frac{OM}{MP} = \text{cosec}\,\alpha.$$

Die Strecken MP, OP, AC, OC, BD und OD, deren Verhältnisse zu dem Halbmesser des Kreises die Winkelfunctionen bestimmen, heißen goniometrische Linien, und zwar MP die Sinuslinie, OP die Cosinuslinie, AC die Tangentenlinie, OC die Secantenlinie, BD die Cotangentenlinie und OD die Cosecantenlinie.

Da die Verhältnisse dieser Linien zu dem Halbmesser nur von der Größe des Winkels α abhängen und für jeden beliebigen Halbmesser dieselben Werthe haben, so kann man, ohne die Werthe der Winkelfunctionen zu ändern, die Längeneinheit selbst als Halbmesser des Kreises annehmen und somit $OA = OM = OB = 1$ setzen. Dann gehen die obigen Verhältnisse in die folgenden Ausdrücke über:

$MP = \sin\alpha$,	$AC = \text{tang}\,\alpha$,	$BD = \cot\alpha$,
$OP = \cos\alpha$;	$OC = \sec\alpha$;	$OD = \text{cosec}\,\alpha$;

wo jedoch unter MP, OP, AC, OC, BD und OD nicht die goniometrischen Linien, sondern ihre Maßzahlen zu verstehen sind.

Die Winkelfunctionen können daher als Maßzahlen der entsprechenden goniometrischen Linien am Kreise für den Halbmesser als Längeneinheit aufgefaßt werden.

§. **330.** Vorzeichen der Winkelfunctionen.

In den rechtwinkligen Dreiecken M_1P_1O, M_2P_2O, M_3P_3O und M_4P_4O (Fig. 199), welche Winkeln verschiedener Quadranten entsprechen, liegt die Höhe bald über, bald unter dem Schenkel OA, und die Grundlinie bald rechts, bald links von dem Scheitel O. Zur genauen Bestimmung derselben muß daher dieser Gegensatz ihrer Lage durch die Vorzeichen des Positiven und Negativen ausgedrückt werden, wodurch dann auch die Winkelfunctionen der Größe der Winkel entsprechende Vorzeichen erhalten.

Man nimmt allgemein die Höhen und Grundlinien in derjenigen Lage, welche sie für Winkel im ersten Quadranten haben, also die Höhen nach der Seite der Winkelfläche, hier über OA und die Grundlinien in der Richtung OA, hier rechts von O, als positiv an; die Höhen und Grundlinien in

der entgegengesetzten Lage, also die Höhen unter OA und die Grundlinien links von O, müssen dann als negativ angesehen werden.

Hiernach ist die Höhe für Winkel im 1. und 2. Quadranten positiv, für Winkel im 3. und 4. Quadranten negativ; die Grundlinie für Winkel im 1. und 4. Quadranten positiv, für Winkel im 2. und 3. Quadranten negativ.

Für die Vorzeichen der Winkelfunctionen ergeben sich dann aus den Erklärungen im §. 328, da die Hypotenuse immer absolut (positiv) angenommen wird, folgende Beziehungen:

1. Der Sinus und die Cosecante haben gleiches Vorzeichen mit der Höhe des entsprechenden rechtwinkligen Dreieckes; sie sind also für Winkel im 1. und 2. Quadranten positiv, im 3. und 4. negativ.

2. Der Cosinus und die Secante haben gleiches Vorzeichen mit der Grundlinie, und sind demnach für Winkel im 1. und 4. Quadranten positiv, im 2. und 3. negativ.

3. Die Tangente und die Cotangente sind positiv, wenn die Höhe und die Grundlinie gleichbezeichnet sind, und negativ, wenn diese verschiedene Vorzeichen haben, somit für Winkel im 1. und 3. Quadranten positiv, im 2. und 4. negativ.

Zu denselben Ergebnissen gelangt man auch, wenn man die Winkelfunctionen als Maßzahlen der goniometrischen Linien am Kreise (Fig. 200) auffaßt.

Die Sinus- und die Tangentenlinie über dem festen Halbmesser OA sind positiv, unter demselben negativ.

Die Cosinus- und die Cotangentenlinie rechts vom Mittelpunkte O sind positiv, links von demselben negativ.

Die Secanten- und die Cosecantenlinie sind positiv, wenn sie durch Vorwärtsverlängerung des beweglichen Halbmessers, und negativ, wenn sie durch Rückwärtsverlängerung desselben erhalten werden.

§. **331.** Zu- und Abnahme der Functionen bei dem Wachsen des Winkels.

Aendert sich der Winkel α, so ändern sich auch die zugehörigen goniometrischen Linien, daher auch ihre Maßzahlen, d. i. die Winkelfunctionen.

a) Absoluter Werth und Vorzeichen des Sinus und des Cosinus (Fig. 200).

1. Je kleiner der Winkel α, desto kleiner ist auch der Sinus, während sich der Cosinus ohne Ende der Einheit nähert; fallen beide Schenkel zusammen, so wird $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = +1$. Für sehr kleine Winkel ist der Unterschied zwischen dem Bogen und dem Sinus des Winkels um so kleiner, je mehr sich der Winkel der Null nähert, wobei jedoch (nach §. 156, Folges. a) der Sinus stets kleiner bleibt als der Bogen.

2. Wächst α von 0^0 bis 90^0, so nimmt $\sin \alpha$ zu, anfangs rascher, dann langsamer; $\cos \alpha$ dagegen nimmt ab, anfangs langsamer, dann rascher; beide sind positiv. Für $\alpha = 90^0$ fällt die Sinuslinie mit dem beweglichen Schenkel zusammen, und es ist daher $\sin 90^0 = +1$, $\cos 90^0 = 0$.

3. Wächst α von 90^0 bis 180^0, so ist der Sinus positiv und abnehmend, der Cosinus dagegen negativ und dem absoluten Werthe nach wachsend. Wird $\alpha = 180^0$, so hat man $\sin 180^0 = 0$, $\cos 180^0 = -1$.

4. Während α von 180^0 bis 270^0 zunimmt, ist $\sin \alpha$ negativ und absolut zunehmend, $\cos \alpha$ auch negativ, aber absolut abnehmend; und es wird endlich $\sin 270^0 = -1$, $\cos 270^0 = 0$.

5. Wird $\alpha > 270^0$ aber $< 360^0$, so ist der Sinus negativ und sein absoluter Werth abnehmend, der Cosinus positiv und wachsend. Für $\alpha = 360^0$ werden Sinus und Cosinus wieder so groß wie für $\alpha = 0^0$, nämlich $\sin 360^0 = 0$, $\cos 360^0 = +1$.

Sinus und Cosinus liegen demnach immer zwischen den Grenzen $+1$ und -1.

b) Absoluter Werth und Vorzeichen der Tangente und der Secante (Fig. 200).

1. Je kleiner der Winkel, desto kleiner wird auch die Tangente, während sich die Secante der Einheit nähert; fallen die beiden Schenkel zusammen, so hat man $\text{tang } 0^0 = 0$ und $\sec 0^0 = +1$. Ferner: je kleiner der Winkel, desto kleiner wird auch der Unterschied zwischen dem Bogen und der Tangente des Winkels, wobei jedoch die Tangente (nach §. 156, Folges. a) stets größer bleibt als der Bogen.

2. Wächst α von 0^0 bis 90^0, so sind $\text{tang } \alpha$ und $\sec \alpha$ positiv und zunehmend. Wird endlich $\alpha = 90^0$, so werden Tangente und Secante unendlich groß.

3. Nimmt α über 90^0 hinaus bis 180^0 zu, so werden Tangente und Secante negativ und dem absoluten Werthe nach abnehmend. Erreicht α die Größe 180^0, so wird $\text{tang } 180^0 = 0$, $\sec 180^0 = -1$.

4. Wenn α von 180^0 bis 270^0 wächst, nehmen die absoluten Werthe der Tangente und Secante zu, und zwar ist die Tangente positiv, die Secante negativ. Für $\alpha = 270^0$ sind Tangente und Secante unendlich groß.

5. Wächst α über 270^0 bis 360^0, so nehmen Tangente und Secante absolut ab, die Tangente ist negativ, die Secante positiv, und es wird endlich $\text{tang } 360^0 = 0$, $\sec 360^0 = +1$.

Die Tangente kann demnach alle möglichen reellen Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$, die Secante alle Werthe zwischen $+1$ und $+\infty$ und zwischen -1 und $-\infty$ erhalten.

c) Absoluter Werth und Vorzeichen der Cotangente und der Cosecante (Fig. 200).

1. Für sehr kleine Winkel nehmen Cotangente und Cosecante ohne Ende zu und werden beide für $\alpha = 0^0$ unendlich groß.

2. Im 1. Quadranten nehmen Cotangente und Cosecante mit dem wachsenden Winkel ab, beide sind positiv; $\cot 90^0 = 0$, $\text{cosec } 90^0 = +1$.

3. Im 2. Quadranten wachsen die absoluten Werthe der Cotangente und Cosecante mit dem wachsenden Winkel, bis sie bei 180^0 unendlich groß werden; die Cotangente ist negativ, die Cosecante positiv.

4. Im 3. Quadranten nehmen Cotangente und Cosecante mit dem wachsenden Winkel absolut ab, die Cotangente ist positiv, die Cosecante negativ; $\cot 270^0 = 0$, $\text{cosec } 270^0 = -1$.

5. Im 4. Quadranten sind Cotangente und Cosecante negativ und dem absoluten Werthe nach wachsend; für $\alpha = 360^0$ werden beide unendlich groß.

Die Cotangente liegt also zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, die Cosecante zwischen $+1$ und $+\infty$ und zwischen -1 und $-\infty$.

Zusatz. Die in §. 331 abgeleiteten Ergebnisse lassen sich auch auf Winkel ausdehnen, welche mehr als eine volle Umdrehung betragen; die allgemeine Form solcher Winkel ist $n \cdot 360^0 + \alpha$. Es ist offenbar, daß die Winkelfunctionen von $n \cdot 360^0 + \alpha$ denselben Functionen von α gleich sind.

II. Relationen zwischen den Winkelfunctionen desselben Winkels.

§. **332.** In den rechtwinkligen Dreiecken MPO, CAO, DBO (Fig. 200) ist

$$MP^2 + OP^2 = OM^2,$$
$$AC^2 + OA^2 = OC^2,$$
$$BD^2 + OB^2 = OD^2;$$

daher, wenn $OA = OB = OM = 1$ und $AOM = \alpha$ ist,

$$\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1 \ldots\ldots\ldots 1)$$
$$\text{tang}\,\alpha^2 + 1 = \sec\alpha^2 \ldots\ldots 2)$$
$$\cot\alpha^2 + 1 = \text{cosec}\,\alpha^2 \ldots 3)$$

Da ferner $\triangle CAO \sim MPO$ und $\triangle OBD \sim MPO$ ist, hat man

$CA : MP = OA : OP$ und $DB : OP = OB : MP$, oder

$\text{tang}\,\alpha : \sin\alpha = 1 : \cos\alpha$ und $\cot\alpha : \cos\alpha = 1 : \sin\alpha$, folglich

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ldots\ldots 4) \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ldots\ldots 5)$$

Endlich ergeben sich noch, da nach den Erklärungen in §. 328 die Cotangente, die Secante und die Cosecante bezüglich die reciproken Werthe der Tangente, des Cosinus und des Sinus sind, die Relationen:

$$\cot\alpha = \frac{1}{\text{tang}\,\alpha} \ldots 6) \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \ldots 7) \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \ldots 8)$$

Zusatz. Ist von einem Winkel auch nur eine trigonometrische Function bekannt, so lassen sich aus derselben mittelst der vorhergehenden Gleichungen auch die übrigen Functionen leicht bestimmen.

III. Relationen zwischen den Functionen verschiedener Winkel.

§. **333.** Complementwinkel.

Zwei Complementwinkel (§. 14) können allgemein durch α und $90^0 - \alpha$ ausgedrückt werden.

Es sei (Fig. 200) $OA = 1$, $AOM_1 = \alpha$, daher $BOM_1 = 90^0 - \alpha$. Aus der bloßen Anschauung der Figur ergeben sich folgende Relationen:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(90^0-\alpha) = \cos\alpha, & \cos(90^0-\alpha) = \sin\alpha; \\ \text{tang}\,(90^0-\alpha) = \cot\alpha, & \cot(90^0-\alpha) = \text{tang}\,\alpha; \\ \sec(90^0-\alpha) = \text{cosec}\,\alpha, & \text{cosec}\,(90^0-\alpha) = \sec\alpha. \end{array}\right\} \ldots 9)$$

Da die Secante und Cosecante in den logarithmisch-trigonometrischen Berechnungen nicht angewendet werden, so wollen wir uns in den nachfolgenden Entwicklungen auf den Sinus, Cosinus, die Tangente und Cotangente beschränken.

§. **334.** Supplementwinkel.

Zwei Supplementwinkel (§. 15) werden allgemein durch α und $180^0 - \alpha$ bezeichnet.

Es sei (Fig. 200) $OA = 1$, $AOM_1 = \alpha$, daher $A'OM_1 = 180^0 - \alpha$. Da

$$\sin(180^0-\alpha) = M_1P_1, \qquad \cos(180^0-\alpha) = -OP_1,$$
$$\sin\alpha = M_1P_1, \qquad \cos\alpha = OP_1; \text{ ferner}$$

$$\text{tang}\,(180^0-\alpha) = \frac{\sin(180^0-\alpha)}{\cos(180^0-\alpha)}, \quad \cot(180^0-\alpha) = \frac{\cos(180^0-\alpha)}{\sin(180^0-\alpha)}$$

ist, so hat man

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(180^0-\alpha) = \sin\alpha, & \cos(180^0-\alpha) = -\cos\alpha; \\ \text{tang}\,(180^0-\alpha) = -\text{tang}\,\alpha, & \cot(180^0-\alpha) = -\cot\alpha. \end{array}\right\} \ldots 10)$$

Zusatz. Kommen in einer Rechnung nur hohle Winkel in Betrachtung, so ist durch den Sinus ein Winkel nicht unzweideutig bestimmt, da zu demselben Sinus stets zwei Supplementwinkel, ein spitzer und ein stumpfer, gehören; dagegen gehört zu jeder der übrigen Functionen nur ein einziger, bestimmter Winkel, da das Vorzeichen jede Zweideutigkeit ausschließt.

§. **335.** Zwei Winkel, deren Unterschied 90^0 beträgt.

Die allgemeine Form zweier solcher Winkel ist α und $90^0 + \alpha$.

Es sei (Fig. 200) $OA = 1$, $AOM_1 = \alpha$ und $M_2M_4 \perp M_1M_3$, so ist $AOM_2 = 90^0 + \alpha$. Man hat dann, da $\triangle M_2P_2O \cong M_1P_1O$ ist,

$$\sin(90^0 + \alpha) = M_2P_2 = OP_1 = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^0 + \alpha) = -OP_2 = -M_1P_1 = -\sin\alpha.$$

Nimmt man α gleich dem stumpfen Winkel AOM_2 an, so ist $AOM_3 = 90^0 + \alpha$, und wegen $\triangle M_3P_3O \cong M_2P_2O$

$$\sin(90^0 + \alpha) = -M_3P_3 = -OP_2 = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^0 + \alpha) = -OP_3 = -M_2P_2 = -\sin\alpha.$$

Setzt man endlich $AOM_3 = \alpha$, daher $AOM_4 = 90^0 + \alpha$, so hat man, da $\triangle M_4P_4O \cong M_3P_3O$ ist,

$$\sin(90^0 + \alpha) = -M_4P_4 = -OP_3 = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^0 + \alpha) = \quad OP_4 = -M_3P_3 = -\sin\alpha.$$

Es ist daher allgemein für jeden Winkel α

$$\left.\begin{aligned}\sin(90^0 + \alpha) &= \quad \cos\alpha\\ \cos(90^0 + \alpha) &= -\sin\alpha\end{aligned}\right\} \ldots 11)$$

Daraus folgt auch

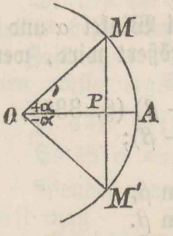
$$\operatorname{tang}(90^0 + \alpha) = -\cot\alpha \text{ und } \cot(90^0 + \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha.$$

§. **336.** Negative Winkel.

Werden die Winkel, welche entstehen, wenn sich (Fig. 201) der bewegliche Schenkel von dem unbeweglichen OA aus in der Richtung von A gegen M (nach links) dreht, als positiv betrachtet, so müssen die Winkel, welche durch die Drehung des beweglichen Schenkels nach der entgegengesetzten Richtung von A nach M′ entstehen, als negativ angesehen werden (§. 12).

Ist daher der Winkel $AOM' = AOM$ und setzt man $AOM = +\alpha$, so ist $AMO' = -\alpha$. Nimmt man $OM = OM' = 1$ an und zieht von M und M′ auf OA Senkrechte, so müssen die dadurch entstehenden Dreiecke congruent sein, und daher jene beiden Senkrechten in demselben Punkte P zusammentreffen. Da nun

Fig. 201.



$$MP = \sin\alpha,\ M'P = -\sin(-\alpha), \text{ und}$$
$$OP = \cos\alpha = \cos(-\alpha) \text{ ist, so folgt}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha\\ &\text{daher}\\ &\operatorname{tang}(-\alpha) = -\operatorname{tang}\alpha,\ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha\end{aligned}\right\} \ldots . 12)$$

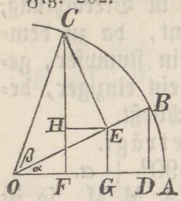
Zusatz. Die Richtigkeit dieser Gleichungen kann auf ähnliche Weise auch für jene Fälle erwiesen werden, wo der Winkel α zwischen 90^0 und 180^0, zwischen 180^0 und 270^0, oder zwischen 270^0 und 360^0 liegt.

IV. Functionen zusammengesetzter Winkel.

§. **337.** Summe zweier Winkel.

Ist (Fig. 202) W. $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, so ist $AOC = \alpha + \beta$. Nimmt man nun $OB = OC = 1$ an, und zieht $BD \perp OA$, $CE \perp OB$, $CF \perp OA$, so ist

Fig. 202.



$BD = \sin\alpha$, $CE = \sin\beta$, $CF = \sin(\alpha+\beta)$,
$OD = \cos\alpha$, $OE = \cos\beta$, $OF = \cos(\alpha+\beta)$.

Es soll nun $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ durch den Sinus und Cosinus von α und β ausgedrückt werden. Zieht man $EG \perp OA$ und $EH \perp CF$, so ist

$$\sin(\alpha+\beta) = CF = HF + CH = EG + CH.$$
$$\cos(\alpha+\beta) = OF = OG - GF = OG - EH.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EGO und BDO folgt

$EG : BD = OE : OB$, $OG : OD = OE : OB$, oder
$EG : \sin\alpha = \cos\beta : 1$, $OG : \cos\alpha = \cos\beta : 1$,
daher $EG = \sin\alpha\cos\beta$, $OG = \cos\alpha\cos\beta$.

Da der Winkel $ECH = BOD$ ist (§. 28, 2), und somit die Dreiecke EHC und BDO ähnlich sind, so hat man auch

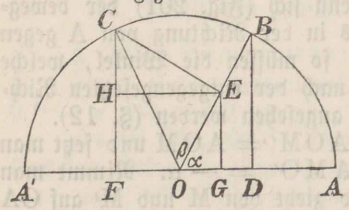
$CH : OD = CE : OB$, $EH : BD = CE : OB$, oder
$CH : \cos\alpha = \sin\beta : 1$, $EH : \sin\alpha = \sin\beta : 1$;
daher $CH = \cos\alpha\sin\beta$, $EH = \sin\alpha\sin\beta$.

Substituirt man nun die für EG, OG, CH, EH gefundenen Werthe in den obigen Ausdrücken für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$, so erhält man die Gleichungen

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ldots 13)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ldots 14)$$

Hier wurden α und β, und selbst die Summe $\alpha+\beta$ als spitze Winkel vorausgesetzt. Ist die Summe $\alpha+\beta$ der spitzen Winkel α und β größer als 90^0, wie in Fig. 203, so bleibt die Beweisführung wortgetreu dieselbe wie oben, mit alleiniger Ausnahme der Vorzeichen, in welchen während der Entwicklung eine Verschiedenheit eintritt, die sich aber in den Endresultaten wieder behebt. Die obigen Formeln gelten also für alle spitzen Winkel α und β.

Fig. 203.



Gelten nun die Formeln 13) und 14) für irgend zwei Winkel α und β, so gelten sie auch noch, wenn einer derselben um 90^0 vergrößert wird, wenn z. B. α in $\alpha' = 90^0 + \alpha$ übergeht. Denn

$\sin(\alpha'+\beta) = \sin(90^0+\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)$ (§. 335),
$\cos(\alpha'+\beta) = \cos(90^0+\alpha+\beta) = -\sin(\alpha+\beta)$;
somit
$$\sin(\alpha'+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha'+\beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$
Nun ist $\cos\alpha = \sin(90^0+\alpha)$ (§. 335) $= \sin\alpha'$,
$\sin\alpha = -\cos(90^0+\alpha) = -\cos\alpha'$; daher
$$\sin(\alpha'+\beta) = \sin\alpha'\cos\beta + \cos\alpha'\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha'+\beta) = \cos\alpha'\cos\beta - \sin\alpha'\sin\beta.$$

Hieraus folgt aber, daß die Formeln 13) und 14) allgemein giltig sind. Denn da sie für die Summe je zweier spitzer Winkel gelten, so gelten sie auch, wenn einer dieser Winkel um 90^0 wächst, also gelten sie auch für jede wiederholte Vergrößerung des einen oder des andern Winkels um 90^0; folglich sind sie allgemein für die Summe zweier beliebiger Winkel giltig.

Da $\text{tang}\,(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\tau)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ ist, so erhält man, wenn man Zähler und Nenner des letzteren Bruches durch $\cos\alpha\cos\beta$ dividirt,

$$\text{tang}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\beta}{1-\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta} \ldots\ 15)$$

Ebenso findet man

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta} \ldots\ 16)$$

338. Doppelte und halbe Winkel.

1. Setzt man in den Formeln 13) bis 16) $\beta=\alpha$, so erhält man

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \ldots\ 17) \qquad \cos 2\alpha = \cos\alpha^2-\sin\alpha^2 \ldots\ 18)$$

$$\text{tang}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1-\text{tang}\,\alpha^2} \ldots\ 19) \qquad \cot 2\alpha = \frac{\cot\alpha^2-1}{2\cot\alpha} \ldots\ 20)$$

aus welchen Gleichungen sich die Functionen des doppelten Winkels finden lassen, wenn jene des einfachen Winkels bekannt sind.

2. Setzt man in den Formeln 17) und 18) überall α statt 2α, daher $\frac{\alpha}{2}$ statt α, so verwandeln sich dieselben in folgende:

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} \ldots\ 21) \qquad \cos\alpha = \left(\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\tfrac{\alpha}{2}\right)^2 \ldots 22)$$

Da $1 = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$ nach 1), und

$\cos\alpha = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$ ist,

so findet man, wenn diese beiden Gleichungen addirt und subtrahirt werden,

$$1+\cos\alpha = 2\left(\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)^2 \ldots\ 23) \qquad 1-\cos\alpha = 2\left(\sin\tfrac{\alpha}{2}\right)^2 \ldots\ 24)$$

daher $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \ldots\ 25)$ $\qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \ldots\ 26)$

Aus diesen beiden Ausdrücken folgt ferner durch Division:

$$\text{tang}\,\tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \ldots\ 27) \qquad \cot\tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \ldots\ 28)$$

Mittelst der Formeln 25) — 28) kann man die Functionen des halben Winkels bestimmen, wenn der Cosinus des ganzen Winkels bekannt ist. Welches Zeichen die Quadratwurzel bei vorgeschriebener Größe des Winkels erhalten müsse, ergibt sich aus §. 330.

§. 339. Differenz zweier Winkel.

Es ist $\alpha = (\alpha-\beta)+\beta$.

Wendet man auf diese Summe die Gleichungen 12) und 14) an, so erhält man

$$\sin\alpha = \sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta,$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta.$$

Löst man diese zwei Gleichungen auf, indem man in denselben $\sin(\alpha-\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$ als die beiden Unbekannten betrachtet, so ergibt sich, da $\cos\beta^2+\sin\beta^2=1$ ist,

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \ldots\ 29),$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \ldots\ 30),$$

welche Formeln, so wie jene in 13) und 14), aus denen sie abgeleitet wurden, allgemein giltig sind.

Aus den Formeln 29) und 30) erhält man auf demselben Wege, welcher in §. 337 eingeschlagen wurde,

$$\text{tang}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\beta}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta} \quad \ldots\ 31)$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha\,\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} \quad \ldots\ 32)$$

§. **340.** Verwandlung von Summen und Differenzen der Winkelfunctionen in Producte und Quotienten.

Da die trigonometrischen Rechnungen sämmtlich logarithmisch durchgeführt werden, so sind in denselben die Summen und Differenzen von Functionen möglichst zu vermeiden. Es soll daher gezeigt werden, wie die Summen und Differenzen der Winkelfunctionen in Producte und Quotienten umgewandelt werden können.

Aus den Formeln 13), 14), 29) und 30) erhält man durch Addition und Subtraction

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \ldots 33)$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \ldots 34)$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta \ldots 35)$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta \ldots 36)$$

oder wenn man

$$\alpha + \beta = \varphi, \qquad \alpha - \beta = \psi,$$

daher $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$, $\beta = \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$ setzt,

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots 37)$$
$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots 38)$$
$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots 39)$$
$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \ldots 40)$$

Aus 37) und 38) folgt durch die Division

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi), \text{ oder}$$

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi-\psi)} \ldots 41)$$

V. Trigonometrische Tafeln.

§. **341.** Die bisher entwickelten Formeln können zunächst dazu verwendet werden, um die goniometrischen Functionen der verschiedenen Winkel zu berechnen. Da die Functionen aller Winkel auf jene der spitzen zurückgeführt werden können, so handelt es sich bloß um die Bestimmung der Functionen für die spitzen Winkel; ja es reicht sogar hin, wenn nur die Functionen der Winkel bis 45^0 berechnet werden, da $45^0 + \varphi$ und $45^0 - \varphi$ Complementwinkel sind, und daher

$$\sin(45^0+\varphi) = \cos(45^0-\varphi),$$
$$\cos(45^0+\varphi) = \sin(45^0-\varphi),$$
$$\text{tang}\,(45^0+\varphi) = \cot(45^0-\varphi),$$
$$\cot(45^0+\varphi) = \text{tang}\,(45^0-\varphi)$$

ist. Wir wollen nun in dem Folgenden die Rechnung andeuten, durch welche die Functionen der Winkel von 0^0 bis 45^0 gefunden werden können.

Da für jeden solchen Winkel die Länge des Bogens, der für den Halbmesser = 1 diesem Winkel entspricht, stets zwischen dem Sinus und der Tangente desselben liegen muß, so ist

$$\text{arc } \alpha < \text{tang } \alpha \qquad \text{und arc } \alpha > \sin \alpha.$$

Aus der ersten Relation folgt arc $\alpha \cos \alpha < \sin \alpha$, oder arc $\alpha \sqrt{1 - \sin \alpha^2} < \sin \alpha$, und, wenn man mit Rücksicht auf arc $\alpha > \sin \alpha$ statt $\sin \alpha^2$ die größere Zahl arc α^2 setzt, um so mehr arc $\alpha \sqrt{1 - \text{arc } \alpha^2} < \sin \alpha$.

Da ferner für $\alpha < 45^0$ der Ausdruck $1 - \text{arc } \alpha^2$ kleiner als 1 ist, so ist $1 - \text{arc } \alpha^2 < \sqrt{1 - \text{arc } \alpha^2}$; um so mehr ist also arc $\alpha (1 - \text{arc } \alpha^2) < \sin \alpha$, woraus

$$\text{arc } \alpha - \sin \alpha < \text{arc } \alpha^3$$

folgt. Die Differenz zwischen dem Bogen und dem Sinus des Winkels ist also für alle Winkel unter 45^0 kleiner als die dritte Potenz des Bogens selbst.

Für $\alpha = 1'$ ist arc $1' = 0{\cdot}000\,290\,8882$, daher

$$\text{arc } 1' - \sin 1' < 0{\cdot}000\,290\,88\,82^3;$$

aber $0{\cdot}000\,290\,8882^3 < \frac{1}{10^{10}}$, daher um so mehr arc $1' - \sin 1' < \frac{1}{10^{10}}$; also ist auf 10 Decimalen genau

$$\sin 1' = 0{\cdot}000\,290\,8882.$$

Wird daraus $\cos 1' = \sqrt{1 - (\sin 1')^2}$ bestimmt, so geben dann die Formeln 17), 18), 13) und 14) den Sinus und Cosinus für $2'$, $4'$, $8'$, ... den Sinus und Cosinus für $1' + 2' = 3'$, für $2' + 3' = 5'$, für $2' + 5' = 7'$, ... und aus diesen wieder für $6'$, $10'$, $14'$, $9'$, $15'$, $21'$, u. s. w. bis $60'$ oder 1^0. Aus $\sin 1^0$ und $\cos 1^0$ findet man auf gleiche Weise die Sinus und Cosinus aller Winkel bis 45^0.

Zur Bestimmung der Sinus und Cosinus solcher Bogen, welche bloß Secunden enthalten, kann man um so mehr für den Sinus den Bogen selbst setzen. Da arc $1'' = \frac{\text{arc } 1'}{60}$ ist, so ergibt sich

$$\sin 1'' = 0{\cdot}000\,004\,8481\ldots$$

Ferner ist

$\sin 2'' = 2 \sin 1''$, $\sin 3'' = 3 \sin 1''$, $\sin 4'' = 4 \sin 1''$ u. s. w.

Daraus lassen sich sofort auch die Cosinus für die einzelnen Secunden bestimmen.

Hat man nun die Sinus und Cosinus der Winkel von 0^0 bis 45^0 gefunden, so können daraus mittelst der Formeln 4) und 5) auch die Tangenten und Cotangenten derselben berechnet werden.

§. **342.** Indem außer

$$\sin 90^0 = \cos 0^0 = 1$$
$$\sin 30^0 = \cos 60^0 = \tfrac{1}{2} \text{ und}$$
$$\text{tang } 45^0 = \cot 45^0 = 1$$

alle übrigen Functionen irrationale Werthe haben, so werden dieselben um so genauer bestimmt sein, durch je mehrere Decimalstellen man sie ausdrückt; aber in demselben Grade wird dann auch das Multipliciren und Dividiren durch diese Functionen erschwert. Um diesem Uebelstande zu begegnen, bedient man sich in allen trigonometrischen Rechnungen der Logarithmen, zu welchem Ende die briggischen Logarithmen der Functionen für die einzelnen Winkel bestimmt und in den Logarithmentafeln gehörig zusammengestellt wurden.

Mit Hilfe solcher Tafeln findet man durch ein ganz einfaches Verfahren, welches aus den denselben vorangeschickten Einleitungen zu ersehen ist,

zu jedem Winkel den Logarithmus der zugehörigen Functionen, und umgekehrt zu dem Logarithmus einer Function den zugehörigen Winkel *).

VI. Uebungsaufgaben.

§. **343.** 1. Wenn von einem Winkel α eine der sechs Functionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ gegeben ist, durch dieselben die übrigen fünf Functionen auszudrücken (§. 332).

2. Bestimme aus Fig. 200 oder mit Hilfe von 13), 14), 29) und 30):

a) $\sin(180^0+\alpha)$, $\cos(180^0+\alpha)$; b) $\sin(270^0\pm\alpha)$, $\cos(270^0\pm\alpha)$; b) $\sin(360^0\pm\alpha)$, $\cos(360^0\pm\alpha)$.

Beweise die Richtigkeit folgender Formeln:

3. $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang} a}{1+\operatorname{tang}\alpha^2}$.

4. $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tang}\alpha^2}{1+\operatorname{tang}\alpha^2}$.

5. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$.

6. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}$.

7. $\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2}$

8. $\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)^2-1}{2}$.

9. $\operatorname{tang}\alpha\pm\operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

10. $\cot\alpha\pm\cot\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

11. $\frac{\operatorname{tang}\alpha\pm\operatorname{tang}\beta}{\cot\alpha\pm\cot\beta} = \pm\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta$.

12. $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1\pm\sin\alpha}$.

13. $\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\alpha+\gamma-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$
$=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

14. $\cos(\beta+\gamma-\alpha)+(\cos\alpha+\gamma-\beta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
$=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

15. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+..+\sin n\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

16. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+..+\cos n\alpha = \frac{\cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Die Formeln 15. und 16. ergeben sich aus den Formeln 36) und 34) in §. 340, indem man statt α und β bezüglich $(m+1)\alpha$ und $\frac{\alpha}{2}$ setzt, dann für m nach und nach 0, 1, 2,... n — 1 substituirt und die erhaltenen Gleichungen addirt.

Beweise ferner für $\alpha+\beta+\gamma=180^0$:

17. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

18. $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos\frac{\beta+\gamma}{4}$.

19. $\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta+\operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\gamma$.

20. $\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$.

Wie ergeben sich die Ausdrücke 18. und 20. aus 17. und 19. durch Substitution?

*) Eine ausführlichere Belehrung über die Einrichtung und den Gebrauch solcher Tafeln findet man in der Einleitung zu den von mir herausgegebenen fünfstelligen Logarithmentafeln zum Schulgebrauche. Wien, bei Gerold.

Suche aus den Tafeln folgende Logarithmen:

21. log sin 38° 17′	22. log sin 17° 8′ 20″
23. log sin 51° 58′ 33″	24. log sin 0° 48′ 37″
25. log tang 1° 25′ 40″	26. log tang 69° 27′ 39″
27. log tang 23° 23′ 23″	28. log tang 89° 19′ 31″
29. log cos 57° 48′	30. log cos 39° 9′ 47″
31. log cos 50° 9′ 9″	32. log cos 1° 2′ 12″
33. log cot 77° 31′	34. log cot 8° 8′ 54″
35. log cot 0° 40′ 29″	36. log cot 53° 29′ 8″

Suche zu folgenden Logarithmen die entsprechenden Winkel.

37. log sin x = 9·49654	38. log sin y = 9·79358
39. log sin z = 8·74109	40. log sin A = 9·99836
41. log tang α = 10·13264	42. log tang β = 10·64570
43. log tang γ = 8·95629	44. log tang B = 8·47380
45. log cos C = 8·49033	46. log cos x = 9·17973
47. log cos y = 9·97706	48. log cos z = 8·12544
49. log cot α = 11·44266	50. log cot β = 10·21671
51. log cot γ = 8·90828	52. log cot A = 12·44033

Zweiter Abschnitt.

Die ebene Trigonometrie.

I. Auflösung der ebenen Dreiecke.

§. **344.** Ein Dreieck auflösen heißt, aus denjenigen Bestandstücken, welche ein Dreieck vollkommen bestimmen, die übrigen durch Rechnung finden.

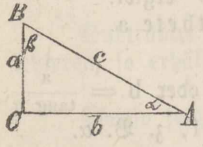
Dabei kommt es vor Allem darauf an, aus den Eigenschaften des Dreieckes Gleichungen abzuleiten, welche die Relationen zwischen den Seiten und den Functionen der Winkel enthalten; durch Auflösung dieser Gleichungen, welche sowohl die bestimmenden als die zu suchenden Bestandstücke des Dreieckes enthalten, findet man dann die gesuchten Größen.

1. Rechtwinklige Dreiecke.

Trigonometrische Lehrsätze über das rechtwinklige Dreieck.

§. **345.** Zur Auflösung eines rechtwinkligen Dreieckes müssen zwei Bestimmungsstücke gegeben sein.

Fig. 204.



Es sei das Dreieck ACB (Fig. 204) bei C rechtwinklig. Wir wollen hier und im Folgenden die Katheten BC und AC durch a und b, die ihnen gegenüberliegenden Winkel durch α und β, und die Hypotenuse AB durch c bezeichnen.

Aus den Erklärungen in §. 328 folgt unmittelbar:

1. $a = c \sin \alpha$, $b = c \sin \beta$;

d. h. jede Kathete ist gleich dem Producte aus der Hypotenuse und dem Sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels.

2. $a = c \cos \beta$, $b = c \cos \alpha$;

d. h. jede Kathete ist gleich dem Producte aus der Hypotenuse und dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden Winkels.

3. $a = b \operatorname{tang} \alpha$, $b = a \operatorname{tang} \beta$;

d. h. jede Kathete ist gleich dem Producte aus der anderen Kathete und der Tangente des der ersteren Kathete gegenüberliegenden Winkels.

4. $a = b \cot \beta$, $b = a \cot \alpha$;

d. h. jede Kathete ist gleich dem Producte aus der anderen Kathete und der Cotangente des der ersteren Kathete anliegenden Winkels.

Zu diesen trigonometrischen Lehrsätzen tritt bei der Auflösung rechtwinkliger Dreiecke noch der Pythagoräische Lehrsatz $c^2 = a^2 + b^2$, welcher den Zusammenhang zwischen allen drei Seiten ausdrückt.

Zusatz. Zur Bestimmung des Flächeninhaltes hat man

$$f = \frac{a\,b}{2} = \frac{b}{2}\sqrt{(c+b)\,(c-b)} = \frac{a^2}{2 \operatorname{tang} \alpha} = \frac{b^2}{2 \operatorname{tang} \beta}$$

$$= \frac{c^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{c^2}{4} \sin 2\alpha.$$

Auflösungsfälle.

§. 346. I. Gegeben die beiden Katheten a und b.

Aus $a = b \operatorname{tang} \alpha = b \cot \beta$ folgt

$$\operatorname{tang} \alpha = \cot \beta = \frac{a}{b},$$

woraus sich die beiden Winkel α und β berechnen lassen.

Zur Bestimmung der Hypotenuse hat man dann

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ oder } c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Es sei z. B. $a = 325$, $b = 418$.

Aus $\operatorname{tang} \alpha = \frac{a}{b}$ folgt $\log \operatorname{tang} \alpha = \log a - \log b$. Man hat also

$$\log a = 2{\cdot}51\ 188$$
$$\log b = \underline{2{\cdot}62\ 118}$$
$$\log \operatorname{tang} \alpha = 9{\cdot}89\ 070 - 10 = \log \operatorname{tang} 37^0\ 51'\ 54''$$
$$\alpha = 37^0\ 51'\ 54''$$
$$\text{daher } \beta = 52^0\ 8'\ 6''.$$

Aus $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ erhält man dann

$$\log a = 2{\cdot}51\ 188$$
$$\log \sin \alpha = \underline{9{\cdot}78\ 803 - 10}$$
$$\log c = 2{\cdot}72\ 385 = \log 529{\cdot}48$$
$$c = 529{\cdot}48,$$

welcher Werth sich auch aus der Formel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ergibt.

II. Gegeben die Hypotenuse c und eine Kathete a.

Zur Bestimmung der gesuchten Stücke hat man

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c}, \text{ und } b = \sqrt{(c+a)\,(c-a)} \text{ oder } b = \frac{a}{\operatorname{tang} \alpha}.$$

III. Gegeben eine Kathete a und ein Winkel, z. B. α.

Zur Auflösung dienen die Formeln

$$\beta = 90^0 - \alpha,\ c = \frac{a}{\sin \alpha}\ \ b = \frac{a}{\operatorname{tang} \alpha}.$$

IV. Gegeben die Hypotenuse c und ein Winkel, z. B. α.
Auflösungsgleichungen:

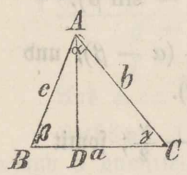
$$\beta = 90^0 - \alpha,\ a = c \sin\alpha,\ b = c \cos\alpha.$$

2. Schiefwinklige Dreiecke.

Trigonometrische Lehrsätze über das schiefwinklige Dreieck.

§. 347. In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten so zu einander, wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 205.



Zieht man AD $\perp$ BC (Fig. 205), so ist in den rechtwinkligen Dreiecken ADC und ADB

$$AD = AC \cdot \sin C \text{ und } AD = AB \sin B;$$

daher $AC \cdot \sin C = AB \cdot \sin B$,

oder, wenn man hier und in dem Folgenden $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ setzt und die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel durch α, β, γ ausdrückt,

$$b \sin\gamma = c \sin\beta, \text{ folglich}$$

$$\left.\begin{array}{l} b : c = \sin\beta : \sin\gamma. \\ \text{Ebenso erhält man} \\ a : b = \sin\alpha : \sin\beta, \\ a : c = \sin\alpha : \sin\gamma. \end{array}\right\} \ldots \text{I)}$$

Zusatz. In diesen Ausdrücken ändert sich nichts, wenn einer der Winkel z. B. β ein stumpfer ist, so daß die Senkrechte AD die Verlängerung von CB trifft; man erhält dann $b : c = \sin(180^0 - \beta) : \sin\gamma = \sin\beta : \sin\gamma$.

§. 348. In jedem Dreiecke ist das Quadrat der einen Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert um das doppelte Product aus diesen beiden Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. (Carnot'scher Lehrsatz.)

Zieht man (Fig. 205) AD $\perp$ BC, so ist

$$BD = c \cdot \cos\beta \text{ und } CD = b \cdot \cos\gamma, \text{ daher}$$
$$BD + CD = c \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\gamma, \text{ oder}$$
$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta.$$

Ebenso erhält man

$$b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha,$$
$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha.$$

Multiplicirt man die erste dieser drei Gleichungen mit a, die zweite mit b und die dritte mit c, so findet man

$$a^2 = ab \cdot \cos\gamma + ac \cdot \cos\beta,$$
$$b^2 = ab \cdot \cos\gamma + bc \cdot \cos\alpha,$$
$$c^2 = ac \cdot \cos\beta + bc \cdot \cos\alpha.$$

Subtrahirt man nun von der ersten Gleichung die Summe der beiden letzteren, so erhält man $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos\alpha$, oder

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha. \\ \text{Ebenso folgt } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma. \end{array}\right\} \ldots \text{II)}$$

Zusätze. 1. Fällt die Senkrechte AD außerhalb des Dreieckes, so ist dann entweder $a = BD - CD$, oder $a = CD - BD$. In beiden Fällen

erhält man mit Berücksichtigung der Vorzeichen des Cosinus, wie oben, $a = c \cos \beta + b \cos \gamma$. Die daraus abgeleiteten Gleichungen gelten demnach allgemein.

2. Der Pythagoräische Lehrsatz ist nur ein besonderer Fall des Carnot'schen; denn dieser gibt für $\gamma = 90^0$, also $\cos \gamma = 0$, die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$.

§. **349.** In jedem Dreiecke ist die Tangente der halben Differenz zweier Winkel gleich dem Quotienten aus der Differenz und der Summe der beiden gegenüberliegenden Seiten, multiplicirt mit der Cotangente des halben dritten Winkels.

Nach §. 347 ist $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$, daher auch

$$(a + b) : (a - b) = (\sin \alpha + \sin \beta) : (\sin \alpha - \sin \beta),$$

oder mit Rücksicht auf §. 340, Formel 41)

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta), \text{ und}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta).$$

Aber $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$, und $\frac{1}{2} (\alpha + \beta) = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$; somit

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \cdot \cot \frac{\gamma}{2} \quad \ldots . \text{ III)}$$

Auflösungsfälle.

§. **350.** I. Gegeben eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel β und γ.

Man hat erstlich $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$.

Ferner folgen aus $b : a = \sin \beta : \sin \alpha$ und $c : a = \sin \gamma : \sin \alpha$ die Gleichungen

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \text{ und } c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Es sei z. B. $a = 788$, $\beta = 55^0\ 43'\ 18''$, $\gamma = 72^0\ 12'\ 35''$.

Man erhält $\alpha = 52^0\ 4'\ 7''$.

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \qquad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$\log a =$	$2 \cdot 89\,653$	$\log a =$	$2 \cdot 89\,653$
$\log \sin \beta =$	$9 \cdot 91\,714$	$\log \sin \gamma =$	$9 \cdot 97\,872$
	$2 \cdot 81\,367$		$2 \cdot 87\,525$
$\log \sin \alpha =$	$9 \cdot 89\,694$	$\log \sin \alpha =$	$9 \cdot 89\,694$
$\log b =$	$2 \cdot 91\,673$	$\log c =$	$2 \cdot 97\,831$
$b =$	$825 \cdot 52$	$c =$	$951 \cdot 28.$

Ist außer der Seite a ein anliegender Winkel β und der gegenüberliegende α gegeben, so berechnet man zuerst γ und verfährt dann wie vorhin.

§. **351.** II. Gegeben zwei Seiten b und c, und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

Zur Bestimmung der Winkel β und γ wendet man die aus §. 349 sich ergebende Gleichung

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma) = \frac{b - c}{b + c} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$$

an, aus welcher sich, da $\frac{\alpha}{2} = 90^0 - \frac{1}{2} (\beta + \gamma)$ bekannt ist, $\frac{1}{2} (\beta - \gamma)$ bestimmen läßt. Dann hat man

$$\tfrac{1}{2} (\beta + \gamma) + \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma) = \beta \text{ und } \tfrac{1}{2} (\beta + \gamma) - \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma) = \gamma.$$

Die dritte Seite a findet man dann aus der Gleichung

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta} \text{ oder } a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

Es sei z. B. $b = 748$, $c = 375$, $\alpha = 63^0\ 35'\ 30''$.

Man hat folgende Rechnung:

$b + c = 1123$
$b - c = 373$
$\beta + \gamma = 116^0\ 24'\ 30''$
$\alpha = 63^0\ 35'\ 30''$
$\frac{\alpha}{2} = 31^0\ 47'\ 45''$
$\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 58^0\ 12'\ 15''$
$\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 28^0\ 10'\ 52''$
$\beta = 86^0\ 23'\ 7''$
$\gamma = 30^0\ 1'\ 23''$

$\tan \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{b - c}{b + c} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$
$\log (b - c) = 2{\cdot}57\ 171$
$\log \cot \frac{\alpha}{2} = 10{\cdot}20\ 766$
$12{\cdot}77\ 937$
$\log (b + c) = 3{\cdot}05\ 039$
$\log \tan \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 9{\cdot}72\ 898$
$\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 28^0\ 10'\ 52''$

Aus $a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}$ findet man ferner $a = 671{\cdot}29$.

Zusätze. 1. Jeder der Winkel β und γ läßt sich auch einzeln durch b, c und α unmittelbar darstellen.

Aus der Gleichung $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ in §. 348 folgt

$$c - b \cos \alpha = a \cos \beta, \text{ daher}$$

$\tan \beta\ (c - b \cos \alpha) = a \sin \beta = b \sin \alpha$ (§. 347) und

$$\tan \beta = \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha},$$

welche Formel jedoch für logarithmische Berechnungen nicht brauchbar ist.

2. Die dritte Seite a kann aus b, c und α auch unabhängig von den Winkeln β und γ berechnet werden. Es ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \left(1 - 2 \sin \frac{\alpha^2}{2}\right) \text{ (§. 338, 2)}$$

$$= (b - c)^2 + 4bc \sin \frac{\alpha^2}{2} = (b - c)^2 \cdot \left[1 + \frac{4bc \sin \frac{\alpha^2}{2}}{(b - c)^2}\right].$$

Wird nun ein Hilfswinkel φ so bestimmt, daß

$$\tan \varphi = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{bc}}{b - c}$$

ist, so hat man

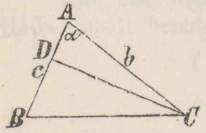
$$a^2 = (b - c)^2 (1 + \tan \varphi^2) = \frac{(b - c)^2}{\cos \varphi^2},$$

daher

$$a = \frac{b - c}{\cos \varphi}.$$

3. Aus b, c und α kann man unmittelbar auch den Flächeninhalt f des Dreieckes bestimmen. Ist nämlich $CD \perp AB$ (Fig. 206), so hat man

Fig. 206.



$$f = \frac{c \cdot CD}{2}; \text{ aber } CD = b \sin \alpha, \text{ daher}$$

$$f = \frac{bc}{2} \cdot \sin \alpha,$$

d. h. der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

§. 352. III. Gegeben zwei Seiten b und c, wo $b > c$, und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel β.

Aus $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$ erhält man

$$\sin\gamma = \frac{c \sin\beta}{b}.$$

Diese Formel gibt den Sinus von γ; Zu jedem Sinus gehören zwar zwei Winkel, ein spitzer und ein stumpfer; diese Unbestimmtheit fällt jedoch hier weg, da man weiß, daß $b > c$, also auch $\beta > \gamma$ ist, und somit γ spitz sein muß, welchen Werth auch β haben mag.

Aus β und γ erhält man dann $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$.

Die Seite a findet man aus der Gleichung

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Wenn z. B. $b = 1238$, $c = 519$, $\beta = 78^0\ 17'\ 20''$ ist, so ergibt sich durch Anwendung der obigen Formeln:

$\gamma = 24^0\ 14'\ 10''$, daher $\alpha = 77^0\ 28'\ 30''$, ferner $a = 1234{\cdot}23$.

Ist hier nebst $b = 1238$ und $c = 519$ der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel $\gamma = 24^0\ 14'\ 10''$ gegeben, so erhält man aus der Gleichung

$\sin\beta = \frac{b \sin\gamma}{c}$, da β spitz oder stumpf sein kann,

entweder $\beta = 78^0\ 17'\ 20''$ oder $\beta = 101^0\ 42'\ 40''$, folglich
$\alpha = 77^0\ 28'\ 30''$ „ $\alpha = 54^0\ 3'\ 10''$.

Aus der Gleichung $a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}$ ergibt sich dann entweder $a = 1234{\cdot}23$ oder $a = 1023{\cdot}54$. — Die Aufgabe läßt also zwei Auflösungen zu.

§. **353.** IV. Gegeben alle drei Seiten a, b und c.

Zur Bestimmung der Winkel könnte unmittelbar der Carnot'sche Lehrsatz angewendet werden; aus der Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

folgt nämlich

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

woraus sich der Winkel α finden läßt. Diese Gleichung soll jedoch auf eine andere, für die logarithmische Berechnung geeignete Form gebracht werden.

Subtrahirt und addirt man die Gleichungen

$$1 = 1,$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

so erhält man

$$1 - \cos\alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)\ (a-b+c)}{2bc},$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)\ (b+c-a)}{2bc};$$

somit, da nach §. 338, Formel 24) und 23)

$1 - \cos\alpha = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$ und $1 + \cos\alpha = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$ ist,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)\ (a-b+c)}{4bc}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)\ (b+c-a)}{4bc}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$a + b + c = 2s$, folglich
$b + c - a = 2\ (s - a)$,
$a - b + c = 2\ (s - b)$,
$a + b - c = 2\ (s - c)$,

so folgt

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

und daher

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Durch bloße Vertauschung der Buchstaben findet man ebenso

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}; \qquad \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

In Bezug auf die Bedeutung der Winkel $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ kann keine Unbestimmtheit eintreten, da sie als halbe Dreieckswinkel nothwendig spitz sein müssen. Ist der gesuchte halbe Winkel sehr nahe an 0^0, so läßt sich derselbe mittelst der Formel für den Cosinus nicht mit gehöriger Schärfe bestimmen, da sich die Cosinus nahe an 0^0 liegender Winkel nur sehr wenig ändern. Dasselbe gilt bezüglich der Formel für den Sinus, wenn der halbe Winkel sehr nahe an 90^0 liegt. Es ist daher im ersten Falle die Formel für den Sinus, im zweiten für den Cosinus des halben Winkels vorzuziehen.

Am vortheilhaftesten ist es, in allen Fällen die Formel für die Tangente anzuwenden.

Es sei z. B. $a = 330{\cdot}1$, $b = 412{\cdot}2$, $c = 371{\cdot}3$.

Wendet man die Formel für die Tangenten an, so hat man

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$a =$	$330{\cdot}1$	$\log(s-b) = 2{\cdot}16\,017$
$b =$	$412{\cdot}2$	$\log(s-c) = 2{\cdot}26\,834$
$c =$	$371{\cdot}3$	$4{\cdot}42\,851$
$a+b+c =$	$1113{\cdot}6$	$\log s = 2{\cdot}74\,570$
$s =$	$556{\cdot}8$	$\log(s-a) = 2{\cdot}35\,545$
$s-a =$	$226{\cdot}7$	$19{\cdot}32\,736-20$
$s-b =$	$144{\cdot}6$	$\log\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}66\,368-10$
$s-c =$	$185{\cdot}5$	$\frac{\alpha}{2} = 24^0\,44'\,55''$
		$\alpha = 49^0\,29'\,50''$

Aus den Formeln für $\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}$ und $\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}$ erhält man auf gleiche Weise

$$\beta = 71^0\,42'\,42'' \text{ und } \gamma = 58^0\,47'\,28''.$$

Aus den gegebenen Seiten des Dreieckes läßt sich unmittelbar auch der Flächeninhalt berechnen. Es ist

$$f = \frac{ab}{2}\,.\sin\gamma = \frac{ab}{2}\,.\,2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \text{ woraus}$$

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

folgt, welchen Ausdruck wir schon in §. 120, 5 auf einem anderen Wege abgeleitet haben.

3. Uebungsaufgaben.

§. 354. Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn (§. 345) gegeben ist:

1. $a = 88$, $b = 105$.
2. $a = 440$, $b = 279$.
3. $a = 828$, $b = 205$.
4. $a = 836$, $b = 123$.
5. $c = 457$, $a = 168$.
6. $c = 349$, $a = 180$.
7. $c = 281$, $b = 201$.
8. $c = 1109$, $b = 141$.
9. $a = 456$, $\alpha = 64^0\ 33'\ 4{\cdot}6''$.
10. $a = 272$, $\beta = 39^0\ 35'\ 52''$.
11. $a = 171$, $\beta = 50^0\ 41'\ 32{\cdot}5''$.
12. $b = 133$, $\alpha = 49^0\ 33'\ 1''$.
13. $b = 403$, $\alpha = 44^0\ 29'\ 53''$.
14. $b = 231$, $\beta = 23^0\ 57'\ 8''$.
15. $c = 949$, $\alpha = 71^0\ 30'\ 28''$.
16. $c = 641$, $\beta = 71^0\ 49'\ 10''$.

Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind:

17. der Flächeninhalt und ein spitzer Winkel;
18. die Summe aus der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel;
19. der Unterschied zwischen der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel.
20. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist g die Grundlinie, b der Schenkel, α der Winkel an der Grundlinie, β der Winkel am Scheitel, h die Höhe, f der Flächeninhalt; aus zweien dieser Größen die übrigen zu berechnen.

Fundamentalgleichungen:

$$\cos\alpha = \sin\frac{\beta}{2} = \frac{g}{2b}; \qquad f = \frac{gh}{2} = \frac{b^2 \sin\beta}{2}$$

Beweise, daß für jedes Dreieck folgende Gleichungen stattfinden:

21. $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha$ (§. 348).
22. $\sin\alpha^2 = \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$ (§. 347 und 348).
23. $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;
24. $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$.

Die letzten zwei Formeln, welche die Mollweide'schen Gleichungen heißen, werden aus §. 347, §. 340, Form. 37 und §. 338, Form. 21 abgeleitet.

Ein schiefwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn (§. 347) gegeben ist:

25. $c = 314{\cdot}7$, $\alpha = 58^0\ 12'\ 38''$, $\beta = 63^0\ 15'\ 15''$.
26. $b = 565$, $\alpha = 72^0\ 38'\ 34''$, $\gamma = 44^0\ 29'\ 53''$.
27. $a = 758{\cdot}43$, $\beta = 102^0\ 51'\ 12{\cdot}4''$, $\gamma = 27^0\ 40'\ 42''$.
28. $a = 89{\cdot}7$, $b = 104{\cdot}2$, $\gamma = 53^0\ 5'\ 56''$.
29. $a = 123{\cdot}4$, $c = 1272$, $\beta = 110^0\ 15'\ 10''$.
30. $b = 11{\cdot}3$, $c = 12$, $\alpha = 7^0\ 37'\ 41''$.
31. $a = 187{\cdot}4$, $c = 179{\cdot}8$, $\alpha = 72^0\ 17'\ 23''$,
32. $b = 509$, $c = 221$, $\beta = 84^0\ 32'\ 50{\cdot}5''$.
33. $a = 419$, $c = 328$, $\gamma = 43^0\ 51'\ 7''$.
34. $a = 2134$, $b = 3124$, $c = 1432$.
35. $a = 1487{\cdot}2$, $b = 1907{\cdot}7$, $c = 2156{\cdot}5$.
36. $a = 18{\cdot}332$, $b = 10{\cdot}774$, $c = 14{\cdot}029$.
37. In einem Dreiecke ist a eine Seite, 2s der Umfang und f der Flächeninhalt; man bestimme den der Seite a gegenüberliegenden Winkel α.

Suche $\tang\frac{\alpha}{2}$: f mit Rücksicht auf die Ausdrücke in §. 353.

38. Aus dem Umfange 2s und den Winkeln α, β, γ eines Dreieckes die Seiten zu berechnen.

Durch Anwendung des §. 347 und §. 343, 17 erhält man

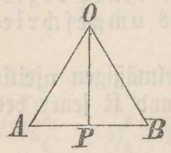
$$a = \frac{s \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}, \quad b = \frac{s \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}, \quad c = \frac{s \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

II. Anwendung der ebenen Trigonometrie.

1. Aufgaben aus der Planimetrie.

§. 355. Aus der Seite eines regelmäßigen Vieleckes den Flächeninhalt desselben, und umgekehrt aus dem Flächeninhalte die Seiten zu bestimmen.

Fig. 207.



Es sei (Fig. 207) $AB = s$ die Seite des nseitigen regelmäßigen Vieleckes, dessen Mittelpunkt O ist, und $OP \perp AB$. Offenbar ist dann der Winkel $AOB = \frac{360^0}{n}$, daher $AOP = \frac{180^0}{n}$, folglich

$$OP = AP \cdot \cot AOP = \frac{s}{2} \cot\frac{180^0}{n}, \text{ und}$$

$$\triangle ABO = AB \cdot \frac{OP}{2} = s \cdot \frac{s}{4} \cot\frac{180^0}{n} = \frac{s^2}{4} \cot\frac{180^0}{n}.$$

Heißt nun f der Flächeninhalt des nseitigen Vieleckes, so hat man

$$f = \frac{ns^2}{4} \cot\frac{180^0}{n}, \text{ und } s = \sqrt{\frac{4f}{n} \cdot \operatorname{tang}\frac{180^0}{n}}.$$

Es sei z. B. die Seite eines regelmäßigen Zehneckes 15^{cm}; wie groß ist der Flächeninhalt?

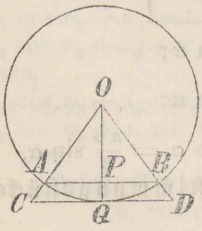
Hier ist $n = 10$, $\frac{180^0}{n} = 18^0$, $s = 15$; daher hat man

$$\begin{aligned} \log s &= 1{\cdot}17\,609 \\ \log s^2 &= 2{\cdot}35\,218 \\ \log n &= 1{\cdot}00\,000 \\ \log \cot\tfrac{180^0}{n} &= 0{\cdot}48\,822 \\ \hline & 3{\cdot}84\,040 \\ \log 4 &= 0{\cdot}60\,206 \\ \hline \log f &= 3{\cdot}23\,834 \end{aligned}$$

$$f = 1731{\cdot}2\,\square^{cm},$$

§. 356. Aus dem Halbmesser eines Kreises die Seite und den Flächeninhalt des dem Kreise ein- oder umgeschriebenen regelmäßigen Vieleckes zu bestimmen.

Fig. 208.



Es sei (Fig. 208) $AB = s$ die Seite des einem Kreise eingeschriebenen, und $CD = S$ die Seite des demselben Kreise umgeschriebenen regelmäßigen nseitigen Vieleckes.

Aus den Dreiecken APO und CQO erhält man $AP = AO \cdot \sin AOP$ und $CQ = QO \cdot \operatorname{tang} COQ$, daher

$AB = 2AO \cdot \sin AOP$ und $CD = 2QO \cdot \operatorname{tang} COQ$, oder, wenn $AO = QO = r$ gesetzt wird

$$s = 2r \sin\frac{180^0}{n} \text{ und } S = 2r \operatorname{tang}\frac{180^0}{n}.$$

Für die Umfänge u und U der beiden Vielecke hat man dann

$$u = 2nr \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ und } U = 2nr \tan \frac{180^\circ}{n}.$$

Zur Bestimmung der Flächeninhalte f und F findet man zunächst

$$\triangle AOB = AB \cdot \frac{OP}{2} \text{ und } \triangle COD = CD \cdot \frac{OQ}{2}, \text{ oder}$$

$$\triangle AOB = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{r}{2} \cos \frac{180^\circ}{n} \text{ und } \triangle COD = 2r \tan \frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{r}{2};$$

daher

$$\triangle AOB = \frac{r^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} \text{ und } \triangle COD = r^2 \tan \frac{180^\circ}{n}.$$

Daraus folgt dann

$$f = \frac{nr^2}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n} \text{ und } F = nr^2 \tan \frac{180^\circ}{n}.$$

§. **357.** Aus der Seite oder dem Flächeninhalte eines regelmäßigen Vieleckes den Halbmesser des ein- und des umgeschriebenen Kreises zu finden.

Es sei s die Seite und f der Flächeninhalt eines regelmäßigen nseitigen Vieleckes; r heiße der Halbmesser des eingeschriebenen und R jener des umgeschriebenen Kreises.

Das gegebene Vieleck ist dem eingeschriebenen Kreise umgeschrieben, daher

$$s = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}, \qquad f = nr^2 \tan \frac{180^\circ}{n}.$$

Dem umgeschriebenen Kreise dagegen erscheint das gegebene Vieleck eingeschrieben, folglich ist

$$s = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \qquad f = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergibt sich

$$r = \frac{s}{2} \cot \frac{180^\circ}{n}, \qquad r = \sqrt{\frac{f}{n} \cot \frac{180^\circ}{n}};$$

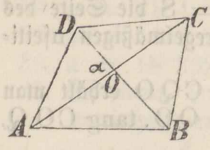
$$R = \frac{s}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \qquad R = \sqrt{\frac{2f}{n \sin \frac{360^\circ}{n}}}.$$

§. **358.** 1. Den Flächeninhalt f eines Parallelogramms zu finden, wenn zwei Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ gegeben sind.

Man erhält $f = ab \sin \gamma$.

2. Den Flächeninhalt eines Viereckes zu bestimmen, wenn dessen Diagonalen und ihr Winkel gegeben sind (Fig. 209).

Fig. 209.



$$AC = a, \; BD = b, \; AOD = \alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \triangle AOD &= \frac{AO \cdot DO}{2} \sin \alpha \\ \triangle AOB &= \frac{AO \cdot BO}{2} \sin \alpha \end{aligned}\right\} \text{addirt}$$

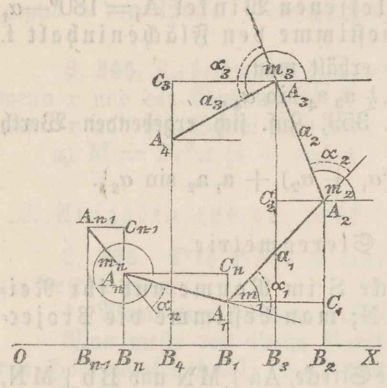
$$\triangle ABD = \frac{AO \cdot BD}{2} \cdot \sin \alpha;$$

$$\text{ebenso } \triangle BCD = \frac{CO \cdot BD}{2} \cdot \sin \alpha;$$

$$\text{daher } ABCD = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{ab}{2} \sin \alpha.$$

§. **359.** Die Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken eines Vieleckes trigonometrisch darzustellen.

Fig. 210.



Es sei in dem Vielecke $A_1 A_2 A_3 .. A_n$ (Fig. 210) die Seite $A_1 A_2 = a_1$, $A_2 A_3 = a_2$, .. $A_n A_1 = a_n$.

Man nehme eine beliebige Gerade OX an und ziehe zu derselben durch jeden Eckpunkt des Vieleckes eine Parallele und eine Senkrechte. Zählt man die Strecken an den Parallelen in der Richtung von O nach X, und die Strecken an den Senkrechten von OX nach aufwärts als positiv, in den entgegengesetzten Richtungen als negativ, und bezeichnet die Winkel, welche die Seiten a_1, a_2, a_3, .. a_n in der Richtung ihres Fortschreitens mit der positiven Richtung der zu OX Parallelen bilden, mit $m_1, m_2, m_3, .. m_n$, so hat man:

$$\begin{array}{l|l}
OB_2 - OB_1 = B_1B_2 = A_1C_1 = a_1 \cos m_1 & B_2A_2 - B_1A_1 = C_1A_2 = a_1 \sin m_1 \\
OB_3 - OB_2 = B_2B_3 = A_2C_2 = a_2 \cos m_2 & B_3A_3 - B_2A_2 = C_2A_3 = a_2 \sin m_2 \\
OB_4 - OB_3 = B_3B_4 = A_3C_3 = a_3 \cos m_3 & B_4A_4 - B_3A_3 = C_3A_4 = a_3 \sin m_3 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
OB_1 - OB_n = B_nB_1 = A_nC_n = a_n \cos m_n & B_1A_1 - B_nA_n = C_nA_1 = a_n \sin m_n
\end{array}$$

Addirt man diese Gleichungen, so ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l}
a_1 \cos m_1 + a_2 \cos m_2 + a_3 \cos m_3 + .. + a_n \cos m_n = 0 \\
a_1 \sin m_1 + a_2 \sin m_2 + a_3 \sin m_3 + .. + a_n \sin m_n = 0
\end{array}\right\} .. 1)$$

Man verlängere nun, von A_1 ausgehend, jede der Seiten $a_1, a_2, a_3, .. a_n$ in der Richtung ihres Fortschreitens und bezeichne die Winkel, welche jede Verlängerung mit der nächstfolgenden Seite bildet, und welche daher Nebenwinkel der inneren Vieleckswinkel sind, durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, .. \alpha_n$; dann ist

$$m_2 = m_1 + \alpha_2,\ m_3 = m_2 + \alpha_3, \ldots,\quad m_n = m_{n-1} + \alpha_n.$$

Wählt man die willkürliche Lage der Geraden OX so, daß sie in die Richtung der Seite $A_n A_1 = a_n$ fällt, so folgt

$$\begin{array}{l}
m_1 = \alpha_1 \\
m_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\
m_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
m_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + .. + \alpha_n = 360^0,
\end{array}$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichungen 1) setzt,

$$\left.\begin{array}{l}
a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) + .. + a_{n-1} \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_{n-1}) + a_n = 0 \\
a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) + .. + a_{n-1} \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_{n-1}) = 0
\end{array}\right\} .. 2)$$

Diese zwei Gleichungen, welche die Grundlage aller polygonometrischen Rechnungen bilden, umfassen ein ganzes System von Gleichungen. Denn läßt man die OX in die Richtung der Seite $a_1, a_2, ..$ fallen, so ergibt sich ebenso

$$\begin{array}{l}
a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos (\alpha_2 + \alpha_3) + .. + a_n \cos (\alpha_2 + \alpha_3 + .. + \alpha_n) + a_1 = 0, \\
a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin (\alpha_2 + \alpha_3) + .. + a_n \sin (\alpha_2 + \alpha_3 + .. + \alpha_n) = 0;
\end{array}$$

dann

$$\begin{array}{l}
a_3 \cos \alpha_3 + a_4 \cos (\alpha_3 + \alpha_4) + .. + a_1 \cos (\alpha_3 + \alpha_4 + .. + \alpha_1) + a_2 = 0, \\
a_2 \sin \alpha_3 + a_4 \sin (\alpha_3 + \alpha_4) + .. + a_1 \sin (\alpha_3 + \alpha_4 + .. + \alpha_1) = 0;
\end{array}$$

u. s. w.

Zusatz. Für das Viereck erhält man aus 2) wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^0$

$$\begin{array}{l}
a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \cos \alpha_4 + a_4 = 0, \\
a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) - a_3 \sin \alpha_4 = 0.
\end{array}$$

§. **360.** In einem Vierecke $A_1A_2A_3A_4$ sind drei Seiten a_4, a_1, a_2 und die von ihnen eingeschlossenen Winkel $A_1 = 180^0 - \alpha_1$ und $A_2 = 180^0 - \alpha_2$ gegeben; man bestimme den Flächeninhalt f.

Zieht man die Diagonale A_1A_3, so erhält man

$$f = \tfrac{1}{2} a_1 a_2 \sin \alpha_2 + \tfrac{1}{2} a_3 a_4 \sin \alpha_4,$$

oder, wenn man für $a_3 \sin \alpha_4$ den aus §. 359, Zus. sich ergebenden Werth substituirt,

$$f = \tfrac{1}{2} \{ a_4 a_1 \sin \alpha_1 + a_4 a_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) + a_1 a_2 \sin \alpha_2 \}.$$

2. Aufgaben aus der Stereometrie.

§. **361.** Gegeben ist eine Strecke S im Raume und ihr Neigungswinkel α gegen eine Ebene MN; man bestimme die Projection s der Strecke auf die Ebene.

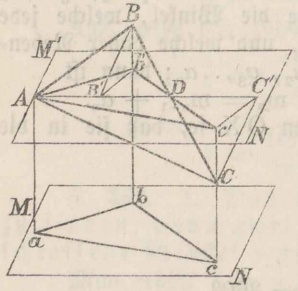
Es sei AB = S (Fig. 211) die gegebene Strecke, $Aa \perp MN$ und $Bb \perp MN$, also ab = s die Projection der Strecke auf MN. Zieht man in der Ebene ABab die $Ab' \parallel ab$, so ist $Ab' = ab$ und $BAb' = \alpha$; aber $Ab' = AB \cos \alpha$; daher

$$s = S \cos \alpha.$$

§. **362.** Gegeben ist ein Dreieck D und sein Neigungswinkel α gegen eine Ebene MN; man bestimme die Projection d des Dreieckes auf die Ebene.

$$d = D \cos \alpha.$$

Fig. 211.



Beweis. Das Dreieck D sei ABC (Fig. 211). Man kann immer durch einen Eckpunkt A desselben eine mit MN parallele Ebene M'N' legen, welche das Dreieck ABC in AD schneidet. Dann ist die Projection Ab'c' des Dreieckes ABC auf die Ebene M'N' offenbar congruent mit der Projection abc desselben auf die Ebene MN. Die AD theilt sowohl das Dreieck ABC in die Dreiecke ADB und ADC, als auch dessen Projection Ab'c' in die Dreiecke ADb' und ADc'.

Zieht man $BB' \perp AD$, und verbindet B' mit b', so ist $BB'b' = \alpha$, daher $B'b' = BB' \cos \alpha$. Nun ist $\triangle ADB = \tfrac{1}{2} AD . BB'$ und $\triangle ADb' = \tfrac{1}{2} AD . B'b' = \tfrac{1}{2} AD . BB' \cos \alpha = \triangle ADB . \cos \alpha$. Ebenso erhält man $\triangle ADc' = \triangle ADC . \cos \alpha$; somit ist $d = \triangle ADb' + \triangle ADc' = (\triangle ADB + \triangle ADC) . \cos \alpha = D \cos \alpha$.

§. **363.** Gegeben ist ein Vieleck P und sein Neigungswinkel α gegen eine Ebene MN; man bestimme die Projection p des Vieleckes auf die Ebene.

$$p = P \cos \alpha.$$

Folgt aus §. 362, wenn das Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt wird.

§. **364.** Den Inhalt v eines Parallelepipeds zu berechnen, dessen Grundfläche bestimmt ist und dessen Seitenkante c mit der Grundfläche den Neigungswinkel α bildet.

Ist die Grundfläche ein Rechteck, worin a und b die Seitenlängen vorstellen, so findet man $v = abc \sin \alpha$.

Ist dagegen die Grundfläche ein schiefes Parallelogramm, dessen Seiten a und b den Winkel γ einschließen, so hat man

$$v = abc \sin\alpha \sin\gamma.$$

§. **365.** Zu bestimmen ist a) eine Kugelmütze M (§. 325, 28 und Fig. 198), wenn r und der Centriwinkel $AOB = \alpha$ gegeben sind; b) eine Kugelzone Z, wenn r und die Winkel $AOB = \alpha$ und $AOC = \alpha'$ gegeben sind.

a) $M = 2r^2\pi\,(1 - \cos\alpha)$, b) $Z = 2r^2\pi\,(\cos\alpha - \cos\alpha')$.

3. Aufgaben aus der praktischen Geometrie und Astronomie.

§. **366.** Die Höhe h eines Gegenstandes AB (eines Thurmes) zu bestimmen.

1. Wenn man zu dem Fußpunkte A messen kann.

Man messe von einem Punkte C aus die Strecke $CA = a$, und in C den Höhenwinkel $ACB = \alpha$; dann ist $h = a \operatorname{tang}\alpha$.

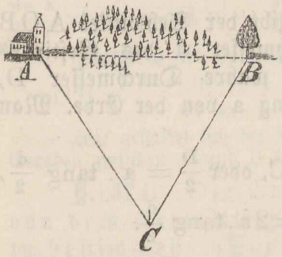
2. Wenn man nicht zu dem Fußpunkte A messen kann.

Man messe in einer durch B gehenden Verticalebene die Strecke $CD = a$ als Standlinie, und in ihren Endpunkten die Höhenwinkel $ACB = \alpha$ und $ADB = \beta$; dann ist

$$h = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

§. **367.** Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn sich dieselbe wegen eines dazwischen befindlichen Hindernisses nicht unmittelbar messen läßt.

Fig. 212.



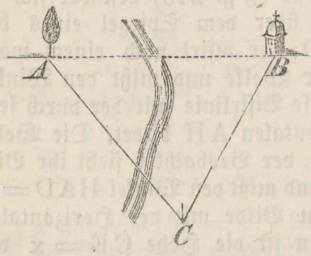
Es seien A und B (Fig. 212) die beiden Punkte, zwischen welchen keine unmittelbare Messung des Abstandes stattfinden kann. Man messe von einem dritten Punkte C aus die Strecken $CB = a$ und $CA = b$, sowie den Winkel $ACB = \gamma$. Im Dreiecke ABC ist dann

$$AB = \frac{a - b}{\cos\varphi} \text{ (§. 351, Zusatz 2),}$$

wo $\operatorname{tang}\varphi = \dfrac{2 \sin\frac{\gamma}{2} \sqrt{ab}}{a - b}$ ist.

§. **368.** Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn man nur zu einem derselben kommen kann.

Fig. 213.



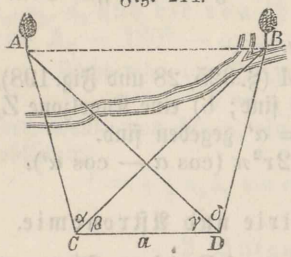
Man wähle einen dritten Standpunkt C (Fig. 213), von dem man zu einem der beiden Punkte A und B hin messen kann, und messe die Gerade $BC = a$, so wie die Winkel $B = \beta$ und $C = \gamma$. Dann ergibt sich aus dem $\triangle$ ABC nach §. 350

$$AB = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

§. **369.** Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn man zu keinem derselben kommen kann.

Es sei z. B. die Entfernung der beiden Bäume A und B (Fig. 214), welche sich jenseits eines Flusses befinden, zu bestimmen.

Fig. 214.



Man wähle zwei Standpunkte C und D, messe die Standlinie $CD = a$ und an ihren Endpunkten die Winkel $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$, $ADC = \gamma$ und $ADB = \delta$. Dann hat man

im $\triangle ACD$..$AD = \frac{a \sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} = b$ (§. 350),

„ $\triangle BCD$..$BD = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta+\gamma+\delta)} = c$ (§. 350),

„ $\triangle ABD$..$AB = \frac{b-c}{\cos \varphi}$ (§. 351, Zus. 2),

wo $\tang \varphi = \frac{2 \sin \frac{\delta}{2} \sqrt{bc}}{b-c}$ ist.

§. **370.** 1. Den Halbmesser r' eines Parallelkreises der Erde aus der geographischen Breite φ zu bestimmen, wenn der Halbmesser der als Kugel gedachten Erde r ist.

$$r' = r \cos \varphi.$$

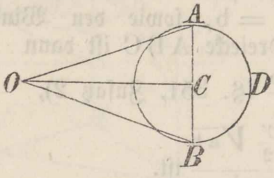
2. Die Bogenlänge b eines größten Kugelkreises der Erde, die man von einer Höhe h übersehen kann, zu bestimmen.

Für das Bogenmaß α erhält man $\cos \alpha = \frac{r}{r+h}$; aus α wird dann (nach §. 159) b bestimmt.

§. **371.** Den wahren Durchmesser D eines Himmelskörpers aus dessen scheinbarem Durchmesser d und dessen Entfernung a von der Erde zu finden.

Befindet sich das Auge in O (Fig. 215), so gibt der Sehwinkel AOB den scheinbaren Durchmesser d des Gestirnes ADB; AB ist der wahre Durchmesser D, und OC die Entfernung a von der Erde. Man hat nun

Fig. 215.

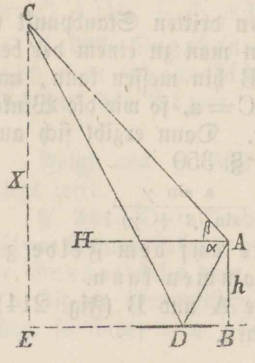


$AC = CO \cdot \tang AOC$, oder $\frac{D}{2} = a \cdot \tang \frac{d}{2}$,

daher $D = 2a \cdot \tang \frac{d}{2}$.

§. **372.** Die Höhe einer Wolke aus deren Bilde in dem Spiegel eines Teiches zu bestimmen.

Fig. 216.



Ein Beobachter A (Fig. 216) befindet sich in der Höhe $AB = h$ über dem Spiegel eines benachbarten Teiches D; er visirt nach einem markirten Punkte C einer Wolke und mißt den Winkel $CAH = \beta$, den diese Visirlinie mit der durch sein Auge gehenden Horizontalen AH bildet. Die Wolke spiegelt sich im Teiche, der Beobachter sieht ihr Bild in der Richtung AD und mißt den Winkel $HAD = \alpha$, den die Richtung zum Bilde mit der Horizontalen einschließt. Zu suchen ist die Höhe $CE = x$ der Wolke über dem Teichniveau aus h, α, β.

Aus $\triangle CED$ ist $x = CD \cdot \sin CDE$, und da nach dem Spiegelungsgesetze W. $CDE = ADB = \alpha$ ist, hat man $x = CD \cdot \sin \alpha$.

Die Länge CD ergibt sich aus dem Dreiecke CAD; es ist

$$CD : AD = \sin CAD : \sin ACD = \sin(\alpha + \beta) : \sin(\alpha - \beta);$$

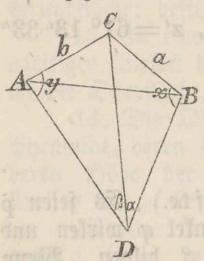
daher $CD = AD \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$.

Endlich ist aus $\triangle ADB$ die Länge $AD = \frac{h}{\sin \alpha}$. Folglich ist

$$x = h \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

§. **373.** Aus drei ihrer Lage nach auf dem Felde gegebenen Punkten A, B, C die Lage eines vierten Punktes D zu bestimmen, wenn man nur die Winkel messen kann, welche die von D an die drei Punkte gezogenen Visirlinien bilden. (Pothenot'sche Aufgabe oder Problem des Rückwärtseinschneidens beim Meßtisch.)

Fig. 217.



Es sei das Dreieck ABC (Fig. 217) gegeben, und zwar $BC = a$, $AC = b$, W. $ACB = C$. Man messe in dem der Lage nach zu bestimmenden Punkte D die Winkel $BDC = \alpha$ und $ADC = \beta$.

Setzt man $CBD = x$, $CAD = y$ und $x + y = s$, so ist in dem Vierecke ACBD

$s = x + y = 360^0 - (\alpha + \beta + C)$, somit bekannt.

Im $\triangle BCD$ ist $a : CD = \sin \alpha : \sin x$.

„ $\triangle ACD$ „ $b : CD = \sin \beta : \sin y$;

woraus $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$ folgt.

Nun ist $\sin x = \sin(s - y) = \sin s \cos y - \cos s \sin y$, daher

$\frac{\sin x}{\sin y} = \sin s \cot y - \cos s = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$, und $\cot y = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta \sin s} + \cot s$.

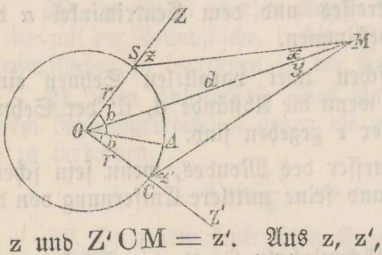
Hiedurch ist y, und somit auch $x = s - y$ bekannt. Dann hat man

$$DB = \frac{a \sin(\alpha + x)}{\sin \alpha}, \quad DA = \frac{b \sin(\beta + y)}{\sin \beta}, \quad DC = \frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta}.$$

Wie gestaltet sich die Auflösung, wenn D innerhalb des Dreieckes ABC oder in der Geraden zwischen A und B liegt?

§. **374.** Die Entfernung $OM = d$ (Fig. 218) des Mondes M von dem Erdmittelpunkte O (die geocentrische Entfernung des Mondes) zu bestimmen. (Parallaxen-Aufgabe.)

Fig. 218.



Es seien OZ und OZ' die Verticallinien zweier Beobachtungsorte S (Stockholm) und C (Cap) unter demselben Meridian; ist A ein Punkt des Aequators, so ist $AS = b$ die geographische Breite von S, ebenso $AC = b'$ jene von C. Zwei Beobachter, der eine in S, der andere in C, beobachten in demselben Augenblicke die Zenithdistanz des Mondes, d. i. die Winkel $ZSM = z$ und $Z'CM = z'$. Aus z, z', b, b' und dem Halbmesser r der Erde ist die Entfernung d zu bestimmen.

Aus dem Vierecke MSOC ist die Summe der Winkel x und y gegeben; denn

$$(x + y) + (180^0 - z) + (b + b') + (180^0 - z') = 360^0,$$

daher $x + y = (z + z') - (b + b')$ . . . 1).

Um jeden der Winkel x und y einzeln zu bestimmen, hat man

aus $\triangle$ MOS . . . $r : d = \sin x : \sin (180^0 - z)$,

aus $\triangle$ MOC . . . $r : d = \sin y : \sin (180^0 - z')$,

mithin $\sin x : \sin y = \sin z : \sin z'$, und hieraus

$(\sin x + \sin y) : (\sin x - \sin y) = (\sin z + \sin z') : (\sin z - \sin z')$,

oder mit Rücksicht auf §. 340, Form. 41,

$$\tan \frac{x+y}{2} : \tan \frac{x-y}{2} = \tan \frac{z+z'}{2} : \tan \frac{z-z'}{2} \quad \ldots 2).$$

Aus 1) und 2) erhält man $x + y$ und $x - y$, und daraus x und y.

Dann folgt aus $\triangle$ MOS oder $\triangle$ MOC

$$d = \frac{r \sin z}{\sin x}, \text{ oder } d = \frac{r \sin z'}{\sin y}.$$

Für $r = 1$, $b + b' = 93^0\ 15'\ 27''$, $z = 33^0\ 20'\ 24''$, $z' = 61^0\ 13'\ 33''$ erhält man $d = 62 \cdot 456$.

4. Uebungsaufgaben.

§. **375.** 1. (Das Parallelogramm der Kräfte.) Es seien p und q zwei Kräfte, welche auf einen Punkt unter dem Winkel φ wirken und mit der Richtung der Resultirenden r die Winkel α und β bilden. Wenn von diesen sechs Größen drei gegeben sind, und zwar:

1) p, q, φ; 3) p, r, α; 5) p, r, φ; 7) r, α, β;
2) p, q, α; 4) p, r, β; 6) p, α, β; 8) p, q, r;

in jedem Falle die drei übrigen Größen zu bestimmen.

2. Von einem Trapeze sind die größere Parallelseite a, die ihr anliegenden Winkel α und β, und die mit ihr den Winkel α einschließende Seite b gegeben; wie groß ist der Flächeninhalt des Trapezes?

3. In einem Kreise ist r der Halbmesser, α der Centriwinkel, b die Bogenlänge und s die Sehne; aus je zweien dieser Größen die beiden anderen zu berechnen.

4. Aus dem Halbmesser r eines Kreises und dem Centriwinkel α den Flächeninhalt f des Kreissegmentes zu bestimmen.

5. Den Flächeninhalt eines zwischen zwei parallelen Sehnen eines Kreises liegenden Stückes zu bestimmen, wenn die Abstände d, d' der Sehnen vom Kreismittelpunkte und der Halbmesser r gegeben sind.

6. Wie groß ist der wahre Durchmesser des Mondes, wenn sein scheinbarer mittlerer Halbmesser $15'\ 31 \cdot 69''$ und seine mittlere Entfernung von der Erde 51805 geogr. Meilen beträgt?

7. Von einem Dreiecke sind der Flächeninhalt f und die Winkel α, β, γ gegeben; wie groß ist der Halbmesser R des um das Dreieck beschriebenen Kreises?

$$R = \sqrt{\left\{\frac{f}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}\right\}}.$$

8. In einem Dreiecke sind α, β, γ die Winkel und r der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises; man berechne den Flächeninhalt f des Dreieckes.

$$f = r^2 \cot\frac{\alpha}{2} \cot\frac{\beta}{2} \cot\frac{\gamma}{2}.$$

9. Wie weit ist ein Gegenstand entfernt, der bei der Größe a unter einem Sehwinkel φ erscheint?

10. Unter welchem Winkel φ sieht ein Mann, dessen Auge $1{\cdot}6^m$ über dem Boden erhaben ist, einen Thurm von 65^m Höhe in der Entfernung von 45^m?

11. Wie weit erstreckt sich die Fernsicht eines 2^m über dem Meeresspiegel erhabenen Auges, die Erde als vollkommene Kugel vom Halbmesser $r = 858{\cdot}474$ geogr. Meilen angenommen?

12. Gegeben ist der Inhalt v einer senkrechten Pyramide mit quadratischer Grundfläche und der Neigungswinkel α der Seitenkante gegen die Grundfläche; bestimme a) die Grundfläche, b) die Seitenkante.

13. In einer senkrechten Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges nseitiges Vieleck ist, ist a die Grundkante, s die Seitenkante; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt?

14. Die Oberfläche und den Cubikinhalt einer senkrechten nseitigen Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck mit der Seite a, und deren Höhe der doppelte Halbmesser des um dieses Vieleck beschriebenen Kreises ist, zu berechnen.

15. Der Inhalt einer regelmäßig nseitigen Pyramide mit der Grundkante a ist v; wie groß ist der Neigungswinkel einer Seitenkante gegen die Grundfläche?

16. In einem senkrechten Pyramidenstumpf ist die größere Grundfläche ein regelmäßiges Achteck mit der Seite a, die Seitenhöhe h, die Projection einer Seitenkante auf die größere Grundfläche p und der zugehörige Neigungswinkel α; man berechne a) die Oberfläche, b) den Cubikinhalt des Stumpfes.

17. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt eines senkrechten Kegels, dessen Seite s mit der Grundfläche den Neigungswinkel α bildet?

18. Den Cubikinhalt eines senkrechten Kegels aus dem Halbmesser r der Grundfläche und dem Winkel α am Scheitel eines Axenschnittes zu berechnen.

19. In einem schiefen Kegel ist die Axe a gegen die Grundfläche, deren Halbmesser r ist, unter dem Winkel α geneigt; wie groß ist die Höhe, die größte und die kleinste Seite des Kegels?

20. In einem schiefen Kegel ist α der kleinste Neigungswinkel einer Seite mit der Grundfläche, h die Höhe und p die Projection der Axe auf die Grundfläche; zu berechnen ist der Cubikinhalt.

21. Den Cubikinhalt eines senkrechten Kegelstumpfes aus der Seite s, ihrem Neigungswinkel α gegen die größere Grundfläche und der Mantelfläche m zu berechnen.

$$v = \frac{\pi s}{4} \cdot \sin\alpha \cdot \left[\frac{m^2}{s^2\pi^2} + \frac{s^2}{3}\cos\alpha^2\right].$$

22. In einem senkrechten Kegelstumpf sind R und r die Halbmesser der Grundflächen und v der Cubikinhalt; wie groß ist a) der Neigungswinkel α der Seite gegen die größere Grundfläche, b) die Seite s, c) die Mantelfläche m des Stumpfes?

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{3v}{\pi(R^3 - r^3)}, \quad s = \frac{R - r}{\cos\alpha}, \quad m = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\cos\alpha}.$$

23. In einem schiefen Cylinder ist die Axe a gegen die Grundfläche, deren Halbmesser r ist, unter dem Winkel α geneigt; man berechne a) den Flächeninhalt des auf die Grundfläche senkrechten Axenschnittes, b) den Cubikinhalt des Cylinders.

24. Wie groß ist a) die Rotationsfläche, b) der Rotationskörper eines regelmäßigen Zwölfeckes mit der Seite a um eine dasselbe halbirende Diagonale als Axe?

25. Ein Dreieck, in welchem zwei Seiten a und b den Winkel γ einschließen, dreht sich um die dritte nicht gegebene Seite; wie groß ist der Cubikinhalt des Rotationskörpers?

26. Wie viel geogr. Meilen hat der Parallelkreis von Wien in der geogr. Breite von $48^0\ 12'\ 35''$? (Halbmesser der Erde = 858·474 geogr. Meilen.)

27. Bei welcher geogr. Breite beträgt ein Grad des Parallelkreises 8·623 geogr. Meilen?

28. Bestimme die Höhe a) der halben heißen Zone, b) der gemäßigten Zone, c) der kalten Zone der Erde, wenn man den Erdhalbmesser r = 858·474 g. Meilen und $\varphi = 23^0\ 28'$ als den Abstand des Polarkreises vom Pole, wie auch als den Abstand des Wendekreises vom Aequator annimmt.

29. Berechne unter den Voraussetzungen der Aufg. 28 die Fläche jeder der fünf Zonen der Erde.

30. Die Oberfläche einer Kugel ist o, eine Calotte derselben m; bestimme den Centriwinkel α des Bogens, durch dessen Umdrehung die Calotte erzeugt wird.

31. Aus dem Cubikinhalte v eines Kugelsectors und dem Winkel α des Axenschnittes den Halbmesser r der Kugel zu finden.

$$r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi \sin\frac{\alpha}{4}^2}}.$$

32. In eine Kugel, deren Cubikinhalt v ist, wird ein senkrechter Kegel beschrieben, dessen Winkel am Scheitel des Axenschnittes α ist; wie groß ist der Cubikinhalt dieses Kegels?

33. Die Axe a eines schiefen Kegels, bildet mit der Grundfläche, deren Halbmesser r ist, den Neigungswinkel α; wie groß ist der Halbmesser der um den Kegel beschriebenen Kugel?

34. Ein Kreissector, dessen Centriwinkel α und dessen Halbmesser r ist, dreht sich um den zu der Sehne seines Bogens parallelen Durchmesser; wie groß ist a) die Oberfläche o, b) der Cubikinhalt v des Rotationskörpers?

$$o = 2r^2\pi\left(2\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right), \quad v = \frac{4r^3\pi}{3}\sin\frac{\alpha}{2}^3.$$

35. Gegeben sind die Halbmesser R und r der größeren und der kleineren Grundfläche eines senkrechten Kegelstumpfes und der Neigungswinkel α der Seite mit der größeren Grundfläche des Stumpfes; bestimme die Höhe einer Kugelmütze, welche der Mantelfläche des Kegelstumpfes gleich ist und zu einer Kugel gehört, welche die Höhe des Stumpfes zum Halbmesser hat.

Dritter Abschnitt.

Die sphärische Trigonometrie.

I. Auflösung der sphärischen Dreiecke.

1. Rechtwinklige sphärische Dreiecke.

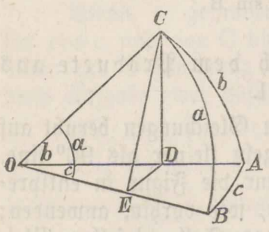
§. **376.** Ein sphärisches Dreieck kann einen, zwei oder auch drei rechte Winkel enthalten. Sind alle drei Winkel eines sphärischen Dreieckes rechte, so sind die drei Seiten Quadranten; kommen zwei rechte Winkel vor, so stehen denselben ebenfalls Quadranten gegenüber, und die dritte Seite muß eben so viele Grade enthalten, wie der dritte Winkel. Diese beiden Fälle geben also zu keiner Aufgabe Anlaß, und es brauchen hier nur solche sphärische Dreiecke betrachtet zu werden, welche bloß einen rechten Winkel enthalten.

Trigonometrische Lehrsätze über das rechtwinklige sphärische Dreieck.

§. **377.** Es sei ABC (Fig. 219) ein bei A rechtwinkliges sphärisches Dreieck und O der Mittelpunkt der zugehörigen Kugel; ferner seien b und c die beiden Katheten, B und C die ihnen gegenüberliegenden Winkel und a die Hypotenuse.

Setzt man zunächst alle drei Seiten und die Winkel B und C einzeln kleiner als 90^0 voraus, zieht $CD \perp OA$, $DE \perp OB$, und verbindet C mit E, so ist (§. 210, 2) $CD \perp$ Ebene AOB; DE ist also die Projection der CE auf AOB, und daher $\perp OB$ (§. 201); mithin ist der Winkel $CED = B$.

Fig. 219.



1. Man hat nun

$OE = OC \cdot \cos a$,

$OE = OD \cdot \cos c = OC \cdot \cos b \cos c$;

daher $OC \cdot \cos a = OC \cdot \cos b \cos c$, mithin

$$\cos a = \cos b \cos c \quad \ldots \; 1)$$

d. h. Der Cosinus der Hypotenuse ist gleich dem Producte aus den Cosinus der beiden Katheten.

2. Ferner ist

$CD = OC \cdot \sin b$,

$CD = CE \cdot \sin B = OC \cdot \sin a \sin B$;

mithin $OC \cdot \sin b = OC \cdot \sin a \sin B$, und folglich

ebenso erhält man

$$\left.\begin{aligned} \sin b &= \sin a \sin B; \\ \sin c &= \sin a \sin C, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 2)$$

d. h. Der Sinus einer Kathete ist gleich dem Producte aus dem Sinus der Hypotenuse und dem Sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels.

3. Es ist auch

$DE = CE \cdot \cos B = OC \cdot \sin a \cos B$,

$DE = OD \cdot \sin c = OC \cdot \cos b \sin c = OC \cdot \cos b \sin a \sin C$ (nach 2);

mithin $OC \cdot \sin a \cos B = OC \cdot \cos b \sin a \sin C$, folglich

$$\left.\begin{aligned} \cos B &= \cos b \sin C, \\ \text{und analog} \quad \cos C &= \cos c \sin B; \end{aligned}\right\} \ldots 3)$$

d. h. In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist der Cosinus eines schiefen Winkels gleich dem Producte aus dem Cosinus der gegenüberliegenden Seite und dem Sinus des andern schiefen Winkels.

4. Man hat ferner

$$CD = OD \cdot \operatorname{tang} b,$$
$$CD = CE \cdot \sin B = OE \cdot \operatorname{tang} a \sin B = OD \cdot \cos c \operatorname{tang} a \sin B$$
$$= OD \cdot \operatorname{tang} a \cos C \text{ (nach 3)};$$

daher $OD \cdot \operatorname{tang} b = OD \cdot \operatorname{tang} a \cos C$, oder

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} b &= \operatorname{tang} a \cos C, \\ \text{und analog} \quad \operatorname{tang} c &= \operatorname{tang} a \cos B; \end{aligned}\right\} \ldots 4)$$

d. h. Die Tangente einer Kathete ist gleich dem Producte aus der Tangente der Hypotenuse und dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden schiefen Winkels.

5. Auch ist

$$CD = OD \cdot \operatorname{tang} b,$$
$$CD = DE \cdot \operatorname{tang} B = OD \cdot \sin c \operatorname{tang} B;$$

folglich $OD \cdot \operatorname{tang} b = OD \cdot \sin c \operatorname{tang} B$, oder

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} b &= \sin c \operatorname{tang} B, \\ \text{und analog} \quad \operatorname{tang} c &= \sin b \operatorname{tang} C; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 5)$$

d. h. Die Tangente einer Kathete ist gleich dem Producte aus dem Sinus der andern Kathete und der Tangente des der ersteren Kathete gegenüberliegenden Winkels.

6. Aus 1) und 3) erhält man endlich

$$\cos a = \cos b \cos c = \frac{\cos B}{\sin C} \cdot \frac{\cos C}{\sin B}, \text{ oder}$$
$$\cos a = \cot B \cot C \ldots\ldots 6)$$

d. h. Der Cosinus der Hypotenuse ist gleich dem Producte aus den Cotangenten der beiden schiefen Winkel.

Zusätze. 1. Die Entwicklung der vorhergehenden Gleichungen beruht auf der Voraussetzung, daß a, b, c, sowie B, C einzeln kleiner als 90^0 sind. Trifft diese Voraussetzung nicht ein, so darf man nur die Figur in entsprechender Weise ändern und dann das gleiche Verfahren, wie vorhin, anwenden; man erhält mit Berücksichtigung der Vorzeichen in jedem Falle dieselben Gleichungen, wie früher. Diese haben demnach allgemeine Giltigkeit.

2. Ist in einem sphärischen Dreiecke eine Seite $= 90^0$, so ist das Polardreieck ein rechtwinkliges; folglich können auch hier die vorhergehenden Gleichungen nach gehöriger Umänderung angewendet werden.

Folgesatz. In der Gleichung $\cos B = \cos b \sin C$ (in 3) ist $\sin C$ immer positiv, daher müssen $\cos B$ und $\cos b$ stets gleiche Vorzeichen haben. Ist daher $b \gtreqless 90^0$, und folglich $\cos b \gtreqless 0$, so muß auch $\cos B \gtreqless 0$, somit $B \gtreqless 90^0$ sein. Umgekehrt: Wenn $B \gtreqless 90^0$ ist, so muß auch $b \gtreqless 90^0$ sein.

Auflösungsfälle.

§. 378. I. Gegeben die beiden Katheten b und c.

Aus den Gleichungen 1) und 5) erhält man

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b}.$$

Es sei z. B. $b = 27^0\,28'\,36''$ und $c = 51^0\,12'\,8''$. Man hat

$$\log \cos b = 9{\cdot}94\,802$$
$$\log \cos c = 9{\cdot}79\,697$$
$$\log \cos a = 9{\cdot}74\,499$$
$$a = 56^0\,13'\,40''$$

$\log \operatorname{tang} b = 9{\cdot}71\,604$	$\log \operatorname{tang} c = 10{\cdot}09\,477$
$\log \sin c = 9{\cdot}89\,174$	$\log \sin b = 9{\cdot}66\,407$
$\log \operatorname{tang} B = 9{\cdot}82\,430$	$\log \operatorname{tang} C = 10{\cdot}43\,070$
$B = 33^0\,42'\,50''$	$C = 69^0\,38'\,54''$.

II. Gegeben die Hypotenuse a und eine Kathete b.

Durch Anwendung der Formeln 1), 2) und 4) erhält man

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}.$$

Obwohl zu sin B im Allgemeinen zwei Winkel gehören, ein spitzer und ein stumpfer, so fällt doch hier jede Unbestimmtheit hinweg, da $B \leqslant 90^0$ angenommen werden muß, je nachdem $b \leqslant 90^0$ gegeben ist.

III. Gegeben eine Kathete b und ihr gegenüberliegender Winkel B.

Aus den Formeln 2), 5) und 3) erhält man

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

oder aus 1) und 4)

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}.$$

Wenn a gefunden wurde, so können daraus mittelst der Gleichungen für cos c und cos C die Werthe für c und C unzweideutig bestimmt werden; allein zur Bestimmung von a kennt man nur den Sinus von a, darum läßt diese Aufgabe zwei Lösungen zu.

IV. Gegeben eine Kathete b und ihr anliegender Winkel C.

Die Formeln 4), 5) und 3) geben

$$\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} b}{\cos C}, \quad \operatorname{tang} c = \sin b \operatorname{tang} C, \quad \cos B = \cos b \sin C.$$

V. Gegeben die Hypotenuse a und ein anliegender Winkel B.

Aus den Formeln 2), 4) und 6) folgt:

$$\sin b = \sin a \sin B, \quad \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B, \quad \cot C = \frac{\cos a}{\cot B}.$$

Hier ist b durch sin b vollkommen bestimmt, da man $b \leqslant 90^0$ annehmen muß, je nachdem $B \leqslant 90^0$ ist.

VI. Gegeben die beiden schiefen Winkel B und C.

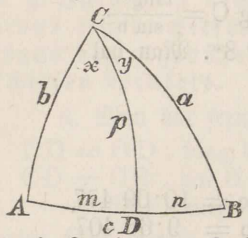
Mittelst der Relationen 6) und 3) erhält man

$$\cos a = \cot B \cot C, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

2. Schiefwinklige sphärische Dreiecke.

§. **379.** Es sei ABC (Fig. 220) ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck, a, b, c seien seine drei Seiten, A, B, C die ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 220.



Zieht man durch C einen größten Kreisbogen CD ⊥ AB, und bezeichnet die Bogen AD, BD und CD bezüglich durch m, n und p, so ist (§. 377, 2) in den rechtwinkligen Dreiecken BDC und ADC

$$\begin{aligned} &\sin p = \sin a \sin B, \text{ und} \\ &\sin p = \sin b \sin A; \text{ daher} \\ &\sin a \sin B = \sin b \sin A, \text{ oder} \\ &\sin a : \sin b = \sin A : \sin B; \end{aligned}$$

d. h. In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus zweier Seiten wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Die angeführte Proportion gibt die Auflösungsgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\sin a \sin B = \sin b \sin A. \\ \text{Analog erhält man} \quad &\sin a \sin C = \sin c \sin A, \\ &\sin b \sin C = \sin c \sin B. \end{aligned}\right\} \ldots \text{I)}$$

Zusatz. Die Gleichungen I) sind auch dann giltig, wenn der senkrecht gelegte größte Kreisbogen außerhalb des Dreieckes ABC fällt; man erhält dann nach dem obigen Vorgange sin $(180^0 - A)$, sin $(180^0 - B)$ oder sin $(180^0 - C)$, welche jedoch bezüglich mit sin A, sin B oder sin C gleich sind.

§. **380.** 1. Im rechtwinkligen Dreiecke BDC (Fig. 220) ist nach §. 377, 1

$$\begin{aligned} &\cos a = \cos p \cos n = \cos p \cos (c - m), \text{ oder} \\ &\cos a = \cos p \cos c \cos m + \cos p \sin c \sin m. \end{aligned}$$

Nun ist $\cos p \cos m = \cos b$ (§. 377, 1), und daher

$$\cos p \sin m = \frac{\cos b}{\cos m} . \sin m = \cos b \operatorname{tang} m = \cos b \operatorname{tang} b \cos A \text{ (§. 377, 4)}$$
$$= \sin b \cos A.$$

Substituirt man diese Werthe in dem Ausdrucke für cos a, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \\ \text{Analog erhält man} \quad &\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ &\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C; \end{aligned}\right\} \ldots \text{II)}$$

d. h. In jedem sphärischen Dreiecke ist der Cosinus einer Seite gleich dem Producte aus den Cosinus der beiden andern Seiten, vermehrt um das Product aus den Sinus dieser Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

2. Im rechtwinkligen Dreiecke ADC ist nach §. 377, 3

$$\begin{aligned} &\cos A = \cos p \sin x = \cos p \sin (C - y), \text{ oder} \\ &\cos A = \cos p \sin C \cos y - \cos p \cos C \sin y. \end{aligned}$$

Nun ist $\cos p \sin y = \cos B$ (§. 377, 3), und daher

$$\cos p \cos y = \frac{\cos B}{\sin y} . \cos y = \cos B \cot y = \cos B . \frac{\cos a}{\cot B} \text{ (§. 377, 6)}$$
$$= \sin B \cos a.$$

Substituirt man diese Werthe in dem Ausdrucke für cos A, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a,\\ \text{Ebenso findet man}\\ \cos B &= -\cos A\cos C + \sin A\sin C\cos b,\\ \cos C &= -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos c;\end{aligned}\right\}\ldots\text{II')}$$

d. h. In jedem sphärischen Dreiecke ist der Cosinus eines Winkels gleich dem negativen Producte aus den Cosinus der beiden andern Winkel, vermehrt um das Product aus den Sinus dieser Winkel und dem Cosinus der von ihnen eingeschlossenen Seite.

Zusatz. Die Gleichungen II) und II') sind allgemein giltig, da man dieselben Ausdrücke auch dann erhält, wenn der durch einen Scheitel des Dreieckes ABC auf die Gegenseite senkrecht gelegte Bogen außerhalb dieses Dreieckes fällt.

§. 381. Wenn man die zweite und dritte Gleichung in I) addirt und subtrahirt, so erhält man

$$(\sin a + \sin b)\sin C = (\sin A + \sin B)\sin c,$$
$$(\sin a - \sin b)\sin C = (\sin A - \sin B)\sin c;$$

oder mit Rücksicht auf die §§. 340 und 338, Form. 37), 38) und 21)

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\ldots\alpha)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\ldots\beta)$$

Addirt man ferner die ersten zwei Gleichungen in II), so folgt

$$\cos a + \cos b = (\cos a + \cos b)\cos c + (\sin b\cos A + \sin a\cos B)\sin c$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen I)

$$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = \left(\frac{\sin B\sin c}{\sin C}\cos A + \frac{\sin A\sin c}{\sin C}\cos B\right)\sin c,$$
$$= (\sin B\cos A + \sin A\cos B)\cdot\frac{\sin c^2}{\sin C},$$

daher

$$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c)\sin C = \sin(A+B)(1 - \cos c^2),$$

und mit Rücksicht auf §§. 340 und 338, Form. 39), 21) und 23)

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\left(\cos\frac{c}{2}\right)^2\ldots\gamma).$$

Subtrahirt man endlich in dem System II') die zweite Gleichung von der ersten, so ergibt sich

$$\cos A - \cos B = (\cos A - \cos B)\cos C + (\sin B\cos a - \sin A\cos b)\sin C,$$

und nach analogen Umformungen, wie bei der Ableitung von γ),

$$\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\left(\cos\frac{C}{2}\right)^2 = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\ldots\delta).$$

1. Indem man nun die Gleichungen α) und β) durch γ) dividirt, erhält man

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{tang}\frac{c}{2}\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{tang}\frac{c}{2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\text{III)}$$

d. h. In jedem sphärischen Dreiecke ist die Tangente der halben $\left(\begin{smallmatrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{smallmatrix}\right)$ zweier Seiten gleich dem Quotienten aus den $\left(\begin{smallmatrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{smallmatrix}\right)$ der halben Differenz und der halben Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel, multiplicirt mit der Tangente der halben dritten Seite.

2. Dividirt man die Gleichung δ) durch β) und α), so folgt

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{C}{2}\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{C}{2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\text{III')}$$

d. h. In jedem sphärischen Dreiecke ist die Tangente der halben $\left(\begin{smallmatrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{smallmatrix}\right)$ zweier Winkel gleich dem Quotienten aus den $\left(\begin{smallmatrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{smallmatrix}\right)$ der halben Differenz und der halben Summe der beiden gegenüberliegenden Seiten, multiplicirt mit der Cotangente des halben dritten Winkels.

Die vier Gleichungen in III) und III') sind unter dem Namen der Neper'schen Analogien bekannt.

Folgesätze. a) In der Gleichung

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{C}{2}$$

sind die beiden Factoren $\cos\frac{1}{2}(a-b)$ und $\cot\frac{C}{2}$ immer positiv; es müssen daher $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)$ und $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ stets dasselbe Vorzeichen haben.

Ist nun $a+b \leqq 180^0$, also $\cos\frac{1}{2}(a+b) \geqq 0$, so muß auch $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B) \geqq 0$, und somit $A+B \leqq 180^0$ sein. Ist ferner $a+b = 180^0$, also $\cos\frac{1}{2}(a+b) = 0$, so ist $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B) = \infty$, also $\frac{1}{2}(A+B) = 90^0$ und $A+B = 180^0$.

Ist also $a+b \gtreqless 180^0$, so ist bezüglich auch $A+B \gtreqless 180^0$.

b) Umgekehrt:

Ist $A+B \gtreqless 180^0$, so ist bezüglich auch $a+b \gtreqless 180$.

Auflösungsfälle.

§. **382.** I. Gegeben zwei Seiten a und b und der von ihnen eingeschlossene Winkel C.

Die Winkel A und B ergeben sich aus den Gleichungen des Systems III')

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{C}{2},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{C}{2}.$$

Für die Seite c erhält man aus dem Systeme II)

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C,$$

welcher Gleichung wir eine für die logarithmische Berechnung geeignete Form geben wollen. Es ist

$$\cos c = \cos a(\cos b + \sin b\operatorname{tang} a\cos C).$$

Wird nun ein Hilfswinkel w so bestimmt, daß $\operatorname{tang} w = \operatorname{tang} a\cos C$ ist, so hat man dann

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a(\cos b + \sin b\operatorname{tang} w)\\ &= \frac{\cos a}{\cos w}(\cos b\cos w + \sin b\sin w),\end{aligned}$$

oder

$$\cos c = \frac{\cos a\cos(b-w)}{\cos w}.$$

Ist z. B. $a = 97^0\ 30'\ 20''$, $b = 55^0\ 12'\ 10''$, $C = 39^0\ 58'$, so hat man

$\frac{1}{2}(a+b) = 76^0\ 21'\ 15''$, $\quad \frac{1}{2}(a-b) = 21^0\ 9'\ 5''$,

$\log\cos\frac{1}{2}(a-b) = 9{\cdot}96\ 971$ $\quad \log\sin\frac{1}{2}(a-b) = 9{\cdot}55\ 731$

$\log\cot\frac{C}{2} = 10{\cdot}43\ 933$ $\quad \log\cot\frac{C}{2} = 10{\cdot}43\ 933$

$20{\cdot}40\ 904$ $\quad 19{\cdot}99\ 664$

$\log\cos\frac{1}{2}(a+b) = 9{\cdot}37\ 276$ $\quad \log\sin\frac{1}{2}(a+b) = 9{\cdot}98\ 756$

$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B) = 11{\cdot}03\ 628$ $\quad \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B) = 10{\cdot}00\ 908$

$\frac{1}{2}(A+B) = 84^0\ 44'\ 40''$ $\quad \frac{1}{2}(A-B) = 45^0\ 35'\ 56''$

daher $A = 130^0\ 20'\ 36''$, $\quad B = 39^0\ 8'\ 44''$.

$\log\operatorname{tang} a = 10{\cdot}88\ 025$ (n) $\quad \log\cos a = 9{\cdot}11\ 602$ (n)

$\log\cos C = 9{\cdot}88\ 447$ $\quad \log\cos(b-w) = 9{\cdot}85\ 286$

$\log\operatorname{tang} w = 10{\cdot}76\ 472$ (n) $\quad 18{\cdot}96\ 888$ (n)

$w = 99^0\ 45'\ 14''$ $\quad \log\cos w = 9{\cdot}22\ 897$ (n)

$b - w = -44^0\ 33'\ 4''$ $\quad \log\cos c = 9{\cdot}73\ 991$

$c = 56^0\ 40'\ 20''$.

Das Zeichen (n) nach den Logarithmen bedeutet, daß die zugehörigen trigonometrischen Functionen negativ sind.

§. **383**. II. Gegeben zwei Winkel A und B und die von ihnen eingeschlossene Seite c.

Die Seiten a und b ergeben sich aus den Gleichungen des Systemes III)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} \cdot \operatorname{tang}\frac{c}{2},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)} \cdot \operatorname{tang}\frac{c}{2}.$$

Zur Bestimmung des Winkels C erhält man aus II')

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos c$$
$$= \cos A(-\cos B + \sin B\operatorname{tang} A\cos c).$$

Wird nun ein Hilfswinkel w so bestimmt, daß $\operatorname{tang} A\cos c = \cot w$ wird, so ist

$$\cos C = \cos A(-\cos B + \sin B\cot w),$$
$$= \frac{\cos A}{\sin w}(-\cos B\sin w + \sin B\cos w),$$

daher $$\cos C = \frac{\cos A\sin(B-w)}{\sin w}.$$

§. **384**. III. Gegeben zwei Seiten a und b und ein gegenüberliegender Winkel A.

Für den Winkel B findet man aus dem System I)

$$\sin B = \frac{\sin A\sin b}{\sin a}.$$

Hier kann B im Allgemeinen spitz oder stumpf sein und die Aufgabe läßt zwei Auflösungen zu; nur unter besonderen Voraussetzungen kann das Dreieck ein vollkommen bestimmtes sein.

Es sei erstlich $A = 90^0$. Für $a + b = 180^0$ ist auch $A + B = 180^0$, also $B = 90^0$ und das Dreieck bestimmt. Für $a + b < 180^0$ ist auch $A + B < 180^0$, daher $B < 90^0$, und das Dreieck ebenfalls bestimmt. Für $a + b > 180^0$ endlich, wo auch $A + B > 180^0$, und somit $B > 90^0$ sein muß, ist die Aufgabe gleichfalls bestimmt.

Es sei ferner $A < 90^0$. Für $a+b \gtreqless 180^0$ muß auch $A + B \gtreqless 180^0$, somit $B > 90^0$ sein, so daß die Aufgabe nur eine Auflösung zuläßt. Für $a + b < 180^0$ aber, und somit $A + B < 180^0$, kann $B \gtreqless 90^0$ sein, und das Dreieck ist unbestimmt, wenn nicht der stumpfe Winkel B so groß ist, daß $A + B \gtreqless 180^0$ wäre, was immer eintritt, wenn $b \lesseqgtr a$ ist; in diesem Falle darf B nur spitz genommen werden.

Ist endlich $A > 90^0$, so hat man für $a+b \lesseqgtr 180^0$ auch $A+B \lesseqgtr 180^0$, und somit $B < 90^0$; das Dreieck ist also bestimmt. Wenn dagegen $a + b > 180^0$ und daher auch $A + B > 180^0$ ist, so kann $B \gtreqless 90^0$ sein und das Dreieck ist unbestimmt, ausgenommen, wenn der spitze Winkel B so klein ist, daß $A + B \lesseqgtr 180^0$ wäre, was für $b \gtreqless a$ eintritt, in welchem Falle dann B nur stumpf sein kann.

Das Dreieck hat also in diesem Falle zwei Auflösungen, wenn

$A < 90^0$, $a + b < 180^0$ und $a < b$, oder
$A > 90^0$, $a + b > 180^0$ und $a > b$ ist.

Ist einmal B bestimmt, so erhält man für die Berechnung von c und C aus den Systemen III) und III') die Ausdrücke

$$\tan \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \cdot \tan \frac{1}{2}(a-b),$$

$$\cot \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} \cdot \tan \frac{1}{2}(A-B).$$

Es sei z. B. $a = 57^0\,38'$, $b = 31^0\,12'$, $A = 104^0\,25'\,30''$.

Man hat zuerst

$$\begin{aligned} \log \sin b &= 9{\cdot}71\,435 \\ \log \sin A &= 9{\cdot}98\,609 \\ \hline & 19{\cdot}70\,044 \\ \log \sin a &= 9{\cdot}92\,667 \\ \hline \log \sin B &= 9{\cdot}77\,377 \end{aligned}$$

$$B = 36^0\,26'\,23''.$$

Da hier $A > 90^0$, $a + b < 180^0$, somit auch $A + B < 180^0$ ist, so muß $B < 90^0$ sein. Ferner hat man

$$\begin{aligned} a + b &= 88^0\,50' \\ a - b &= 26^0\,26' \\ A + B &= 140^0\,51'\,53'' \\ A - B &= 67^0\,59'\,7'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin \tfrac{1}{2}(A+B) &= 9{\cdot}97\,416 \\ \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) &= 9{\cdot}37\,080 \\ \hline & 19{\cdot}34\,496 \\ \log \sin \tfrac{1}{2}(A-B) &= 9{\cdot}74\,748 \\ \hline \log \operatorname{tang} \frac{c}{2} &= 9{\cdot}59\,748 \end{aligned}$$

$$\frac{c}{2} = 21^0\,35'\,38''$$

$$c = 43^0\,11'\,16''$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(a+b) &= 44^0\,25' \\ \tfrac{1}{2}(a-b) &= 13^0\,13' \\ \tfrac{1}{2}(A+B) &= 70^0\,25'\,56{\cdot}5'' \\ \tfrac{1}{2}(A-B) &= 33^0\,59'\,33{\cdot}5'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin \tfrac{1}{2}(a+b) &= 9{\cdot}84\,502 \\ \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) &= 9{\cdot}82\,887 \\ \hline & 19{\cdot}67\,389 \\ \log \sin \tfrac{1}{2}(a-b) &= 9{\cdot}35\,914 \\ \hline \log \cot \frac{C}{2} &= 10{\cdot}31\,475 \end{aligned}$$

$$\frac{C}{2} = 25^0\,50'\,52''$$

$$C = 51^0\,41'\,44''$$

§. 385. IV. Gegeben zwei Winkel A und B und eine gegenüberliegende Seite a.

Für die Seite b gibt das System I) den Ausdruck

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}.$$

Die Werthe von c und C geben dann die Gleichungen der Systeme III) und III')

$$\text{tang}\,\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\,.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(a-b),$$

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\,.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(A-B).$$

Diese Aufgabe bietet, da b aus sin b zu bestimmen ist, nur in besonderen Fällen eine bestimmte Auflösung. Zweideutige Fälle treten, wie man sich durch ähnliche Folgerungen, wie in §. 384, überzeugen kann, ein, wenn

$a < 90^0$, $A + B < 180^0$ und $A < B$ oder
$a > 90^0$, $A + B > 180^0$ und $A > B$ ist.

§. **386.** V. Gegeben alle drei Seiten a, b und c.

Man wird sich hier der Formeln des Systems II) bedienen, welche jedoch vor ihrem Gebrauche noch eine bequemere Einrichtung erhalten müssen.

Um aus der Gleichung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

für den Winkel A eine logarithmisch brauchbare Formel abzuleiten, hat man

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \text{ daher}$$

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c},$$

oder mit Rücksicht auf §. 338, Formeln 24) und 23) und §. 340, Form. 40)

$$\left(\sin\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\,\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \sin c},$$

$$\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\,\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}.$$

Setzt man nun

$\frac{1}{2}(a+b+c) = s$, daher
$\frac{1}{2}(b+c-a) = s-a$,
$\frac{1}{2}(a-b+c) = s-b$,
$\frac{1}{2}(a+b-c) = s-c$,

so erhält man

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}.$$

Daraus folgt

$$\text{tang}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}.$$

Auf gleiche Weise findet man

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c}}, \qquad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}},$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}, \qquad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}},$$

$$\text{tang}\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)}}; \qquad \text{tang}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}.$$

In Beziehung auf die größere oder geringere Brauchbarkeit der voranstehenden Formeln für die Rechnung gilt alles das, was wir über die Anwendbarkeit der in §. 353 entwickelten Formeln bemerkt haben.

Ist z. B. $a = 50^0\,54'\,32''$, $b = 37^0\,47'\,18''$, $c = 74^0\,51'\,50''$, so hat man

$$\begin{aligned} a &= 50^0\,54'\,32'' \\ b &= 37^0\,47'\,18'' \\ c &= 74^0\,51'\,50'' \\ \hline a+b+c &= 163^0\,33'\,40'' \\ s &= 81^0\,46'\,50'' \\ s-a &= 30^0\,52'\,18'' \\ s-b &= 43^0\,59'\,32'' \\ s-c &= 6^0\,55' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\sin(s-b) &= 9{\cdot}84\,171 \\ \log\sin(s-c) &= 9{\cdot}08\,072 \\ \hline & 18{\cdot}92\,243 \\ \log\sin s &= 9{\cdot}99\,552 \\ \log\sin(s-a) &= 9{\cdot}71\,022 \\ \hline & 19{\cdot}21\,669 \\ \log\operatorname{tang}\frac{A}{2} &= 9{\cdot}60\,835 \\ \frac{A}{2} &= 22^0\,5'\,20'' \\ A &= 44^0\,10'\,40'' \end{aligned}$$

Ebenso findet man $B = 33^0\,22'\,45''$ und $C = 119^0\,55'\,6''$.

§. **387.** VI. Gegeben alle drei Winkel A, B und C.

Die gesuchten Stücke ergeben sich aus den Formeln in II'), welche aber vorerst eine für die logarithmische Berechnung geeignete Form erhalten müssen.

Um aus der Gleichung

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a$$

für a eine logarithmisch brauchbare Formel abzuleiten, hat man

$$\cos a = \frac{\cos B\cos C + \cos A}{\sin B\sin C}, \text{ daher}$$

$$1 - \cos a = \frac{\sin B\sin C - \cos B\cos C - \cos A}{\sin B\sin C},$$

$$1 + \cos a = \frac{\sin B\sin C + \cos B\cos C + \cos A}{\sin B\sin C},$$

woraus man, wenn $\frac{1}{2}(A+B+C) = S$ gesetzt wird, auf analoge Art, wie in §. 386, folgende Gleichungen erhält:

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}},$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}};$$

$$\sin\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\sin A\sin C}}, \quad \sin\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\sin A\sin B}},$$

$$\cos\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-C)}{\sin A\sin C}}, \quad \cos\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\sin B}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}}; \quad \operatorname{tang}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}}.$$

3. Uebungsaufgaben.

§. **388.** Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, worin A den rechten Winkel vorstellt, aufzulösen, wenn gegeben sind:

1. $b = 127^0\,56'\,32''$, $c = 63^0\,15'\,48''$.
2. $b = 55^0\,18'\,41''$, $c = 5^0\,42'\,30''$.
3. $a = 154^0\,8'\,15''$, $c = 82^0\,18'\,27''$.
4. $b = 52^0\,60'\,2''$, $B = 78^0\,41'\,19''$.

5. $c = 65^0\ 1'\ 30''$, $C = 76^0\ 35'\ 5''$.
6. $c = 83^0\ 12'\ 38''$, $B = 65^0\ 55'\ 55''$.
7. $a = 95^0\ 6'\ 42''$, $C = 70^0\ 40'\ 25''$.
8. $a = 94^0\ 23'\ 10''$, $B = 50^0\ 12'\ 4''$.
9. $B = 88^0\ 12'\ 9''$, $C = 58^0\ 58'\ 22''$.
10. $B = 63^0\ 15'\ 12''$, $C = 135^0\ 33'\ 39''$.

Beweise, daß für jedes sphärische Dreieck folgende Gleichungen stattfinden:

11. $\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$;
12. $\sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b$.

Aus den Systemen II) und II'), indem in der ersten Gleichung für cos b, bezüglich cos B, der Werth aus der zweiten Gleichung gesetzt wird.

13. $\cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos C \cos b$;
14. $\cot A \sin B = \cot a \sin c - \cos c \cos B$.

Aus 12. und 11., indem für sin B und sin b bezüglich die Werthe $\frac{\sin A \sin b}{\sin a}$ und $\frac{\sin a \sin B}{\sin A}$ gesetzt werden.

15. $\frac{\text{tang } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang } \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang } \frac{1}{2}(A-B)}$.

Aus den Neper'schen Gleichungen in III).

16. $\sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{c}{2}$;
17. $\cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{c}{2}$;
18. $\sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{c}{2}$;
19. $\cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{c}{2}$.

Die Gleichungen 16.—19., welche die Gauß'schen Formeln heißen, ergeben sich aus den Gleichungen für $\sin\left(\frac{a}{2} \pm \frac{b}{2}\right)$ und $\cos\left(\frac{a}{2} \pm \frac{b}{2}\right)$ in den §§. 337 und 339, indem man in denselben die in §. 387 gefundenen Werthe von $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\sin \frac{b}{2}$, $\cos \frac{b}{2}$ einsetzt.

Die Division der Gauß'schen Gleichungen führt auf die Neper'schen, die wir oben auf einem andern Wege abgeleitet haben.

Ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind:

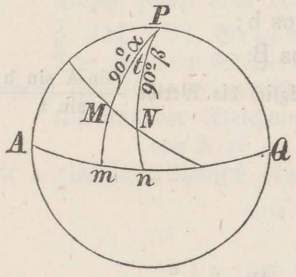
20. $a = 102^0\ 13'\ 24''$, $c = 75^0\ 51'\ 21''$, $B = 65^0\ 31'\ 54''$.
21. $b = 93^0\ 48'\ 40''$, $c = 71^0\ 43'\ 23''$, $A = 108^0\ 5'\ 28''$.
22. $A = 120^0\ 55'\ 35''$, $B = 69^0\ 25'\ 11''$, $c = 107^0\ 52'\ 24''$.
23. $B = 64^0\ 35'\ 32''$, $C = 71^0\ 17'\ 53''$, $a = 85^0\ 13'\ 58''$.
24. $a = 50^0\ 48'\ 29''$, $b = 63^0\ 15'\ 22''$, $A = 120^0\ 55'\ 35''$.
25. $b = 126^0\ 8'\ 29''$, $c = 83^0\ 33'\ 7''$, $B = 95^0\ 52'\ 41''$.
26. $A = 88^0\ 13'\ 23''$, $B = 151^0\ 11'\ 12''$, $b = 57^0\ 35'\ 35''$.
27. $A = 101^0\ 44'\ 20''$, $C = 78^0\ 43'\ 30''$, $a = 93^0\ 44'\ 45''$.
28. $a = 137^0\ 28'\ 37''$, $b = 55^0\ 57'\ 8''$, $c = 38^0\ 17'\ 35''$.
29. $a = 48^0\ 23'\ 57''$, $b = 59^0\ 27'\ 44''$, $c = 75^0\ 15'\ 42''$.
30. $A = 90^0\ 2'\ 9''$, $B = 88^0\ 58'\ 56''$, $C = 87^0\ 57'\ 56''$.
31. $A = 70^0\ 28'\ 37''$, $B = 48^0\ 17'\ 10''$, $C = 94^0\ 40'\ 27''$.

II. Anwendung der sphärischen Trigonometrie.

1. Aufgaben aus der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie.

§. **389.** Aus den geographischen Breiten zweier Orte der Erdoberfläche und deren Längenunterschiede die Entfernung derselben, d. i. die Länge des zwischen ihnen liegenden Bogens eines größten Kreises zu bestimmen. (Die Erde wird als Kugel angenommen.)

Fig. 221.



Es seien M und N (Fig. 221) die beiden Orte, so ist ihre Entfernung MN ein Bogen eines größten Kugelkreises. Es sei ferner P der Pol und AQ der Aequator; dann sind Mm und Nn die Breiten dieser Orte, und mn deren Längenunterschied = dem Winkel MPN.

Setzt man $Mm = \alpha$, $Nn = \beta$, $mn = l$, so sind in dem sphärischen Dreiecke MNP zwei Seiten $MP = 90^0 - \alpha$ und $NP = 90^0 - \beta$ sammt dem eingeschlossenen Winkel $MPN = l$ gegeben, und man hat (nach §. 382)

$$\cos MN = \frac{\sin \alpha \sin (\beta + w)}{\cos w},$$

wozu der Hilfswinkel w aus $\text{tang } w = \cot \alpha \cos l$ berechnet wird.

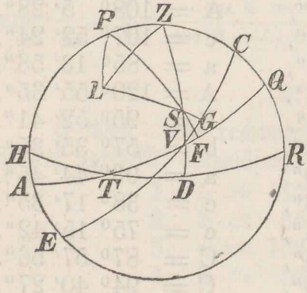
Man sucht daher zuerst w, daraus den Bogen MN, und verwandelt diesen in geographische Meilen, deren 15 auf einen Grad gehen.

§. **390.** Die geographische Breite und Länge dreier Orte der Erde nebst dem Halbmesser der letzteren ist gegeben; man suche die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt des durch jene Orte gelegten sphärischen Dreieckes.

Nach §. 389 erhält man zuerst die Seiten, nach §. 386 sodann die Winkel, und daraus nach §. 322 den Flächeninhalt des sphärischen Dreieckes.

§. **391.** Es sei S (Fig. 222) irgend ein Gestirn, Z der Pol des Horizontes HTR oder das Zenith, P der Pol des Aequators AVQ oder der nördliche Weltpol, L der Pol der Ekliptik EVC; ferner HZR der Meridian des Ortes der Erde, dessen Zenith in Z ist. Zieht man durch S und durch die Pole Z, P, L die größten Kreise ZSD, PSF, LSG, welche somit folgeweise auf HR, AQ, EC senkrecht sind, so ist

Fig. 222.



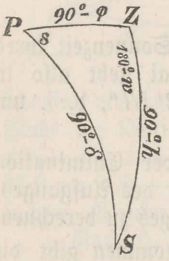
$SD = h$ die Höhe des Gestirns,
$RD = DZR = w$ das Azimuth,
$SZ = 90^0 - h = z$ die Zenithdistanz;
$SF = \delta$ die Declination,
$VF = \alpha$ die Rectascension,
$QF = QPF = s$ der Stundenwinkel,
$SP = 90^0 - \delta = p$ die Poldistanz in Bezug auf den Aequator;

$SG = \beta$ die Breite, $VG = \lambda$ die Länge,
$SL = 90^0 - \beta$ die Poldistanz des Gestirns in Beziehung auf die Ekliptik.

Ferner ist V der Frühlingsnachtgleichepunkt, $HP = \varphi$ die Polhöhe (zugleich geographische Breite) des Ortes der Erde, dessen Zenith Z ist, und der Winkel QVC oder der Bogen $LP = \varepsilon$ die Schiefe der Ekliptik.

§. **392.** 1. Die Höhe h und das Azimuth w eines Gestirns sind nebst der Polhöhe φ des Ortes gegeben; man suche den Stundenwinkel s und die Declination δ.

Fig. 223.



In dem Dreiecke ZPS (Fig. 223) sind zwei Seiten $ZS = 90^0 - h$ und $ZP = 90^0 - \varphi$ sammt dem eingeschlossenen Winkel $Z = 180^0 - w$ bekannt, und der Winkel $P = s$ nebst der Seite $PS = 90^0 - \delta$ zu suchen.

Setzt man mit Rücksicht auf §. 382

$$a = 90^0 - h,\ A = s,$$
$$b = 90^0 - \varphi,$$
$$c = 90^0 - \delta,\ C = 180^0 - w,$$

so erhält man zur Berechnung von δ die Gleichung

$$\sin \delta = \frac{\sin h \sin (\varphi - m)}{\cos m},$$

wo $\operatorname{tang} m = \cot h \cos w$ ist.

Der Stundenwinkel ergibt sich dann aus

$$\sin s = \frac{\sin w \cos h}{\cos \delta}.$$

2. Wenn die Poldistanz $90^0 - \delta = p$ eines Gestirns, dessen Zenithdistanz $90^0 - h = z$ und die Aequatorhöhe $90^0 - \varphi = \psi$ des Ortes gegeben sind, den Stundenwinkel s zu bestimmen.

Aus §. 386 ergibt sich

$$\operatorname{tang} \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(z + p - \psi) \sin \frac{1}{2}(z - p + \psi)}{\sin \frac{1}{2}(z + p + \psi) \sin \frac{1}{2}(p + \psi - z)}}.$$

§. **393.** 1. Wenn die Declination δ, der Stundenwinkel s und die Polhöhe φ bekannt sind, die Höhe h und das Azimuth w zu berechnen.

Die Auflösung ist derjenigen in §. 392, 1 ähnlich.

2. Wenn h, δ und φ gegeben sind, s zu finden.

Nach §. 386 ist

$$\operatorname{tang} \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\sin \{45^0 - \frac{1}{2}(h + \delta - \varphi)\} \sin \{45^0 - \frac{1}{2}(h + \varphi - \delta)\}}{\sin \{45^0 + \frac{1}{2}(h + \delta + \varphi)\} \sin \{45^0 - \frac{1}{2}(\delta + \varphi - h)\}}}.$$

§. **394.** Die Zeit des Auf- und Unterganges eines Gestirns zu bestimmen.

Das sphärische Dreieck ZPS (Fig. 223) gibt mit Rücksicht auf die Formeln II) in §. 380 den Ausdruck:

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s.$$

Für den Auf- und Untergang des Gestirns ist nun $h = 0$, daher

$$0 = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s,$$

woraus $\cos s = -\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi$, oder

$$\cos (180^0 - s) = \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi$$

folgt, worin s den Stundenwinkel des auf- und untergehenden Sternes oder die Zeit ausdrückt, welche zwischen der Culmination und dem Auf- oder Untergange desselben enthalten ist, und der halbe Tagbogen des Gestirns heißt.

Z. B. Wie groß ist für Wien der halbe Tagbogen der Sonne am 13. Mai, wo ihre Declination $\delta = 18^0\ 20'$ beträgt?

Für Wien ist die Polhöhe $\varphi = 48^0\ 12'\ 35''$. Man hat daher

$$\begin{aligned} \log \text{tang } \delta &= 9{\cdot}52\ 031 \\ \log \text{tang } \varphi &= 10{\cdot}04\ 876 \\ \log \cos (180^0 - s) &= 9{\cdot}56\ 907 \\ 180^0 - s &= 68^0\ 14'\ 20'' \\ \text{und } s &= 111^0\ 45'\ 40'' \end{aligned}$$

Zur Verwandlung dieses Bogens in Zeit hat man die Proportion

$$360^0 : 111^0\ 45'\ 40'' = 24 \text{ Stunden} : x \text{ Stunden},$$

woraus $x = 7^h\ 27'\ 3''$ folgt.

Für die Sonne ist s, in Zeit ausgedrückt, zugleich die Sonnenzeit ihres Unterganges und $24^h - s$ jene des Aufganges. Am 13. Mai geht also in Wien die Sonne um $7^h\ 27'\ 3''$ Abends unter und um $16^h\ 32'\ 57''$, d. i. um $4^h\ 32'\ 57''$ Morgens auf.

Für andere Gestirne muß man, wenn die Sonnenzeit der Culmination bekannt ist, von ihr s in Zeit subtrahiren, um die Sonnenzeit des Aufganges, und zu ihr s in Zeit addiren, um die Sonnenzeit des Unterganges zu berechnen.

Zusatz. Der halbe Tagbogen der Sonne doppelt genommen gibt die Tageslänge.

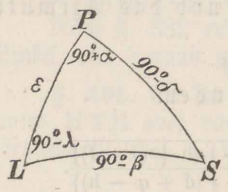
Da in den Sonnenwenden die Declination $\pm\ \delta$ der Sonne gleich der Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^0\ 28'$ ist, so wird durch

$$\cos (180^0 - s) = \pm \text{ tang } \varepsilon \text{ tang } \varphi$$

die Dauer des längsten und kürzesten Tages bestimmt.

§. **395.** *Es seien die Rectascension α und die Declination δ eines Gestirns nebst der Schiefe der Ekliptik ε gegeben; man suche die Länge λ und die Breite β.*

Fig. 224.



In dem Dreiecke LPS (Fig. 224) sind zwei Seiten $LP = \varepsilon$ (§. 391) und $PS = 90^0 - \delta$ nebst dem eingeschlossenen Winkel $P = 90^0 + \alpha$ gegeben und der Winkel $L = 90^0 - \lambda$ nebst der Seite $LS = 90^0 - \beta$ zu suchen. Aus den in §. 382 aufgestellten Auflösungsformeln folgt nun, wenn man darin $a = 90^0 - \delta$, $b = \varepsilon$, $c = 90^0 - \beta$, $A = 90^0 - \lambda$ und $C = 90^0 + \alpha$ setzt,

$$\sin \beta = \frac{\sin \delta \cos (\varepsilon + n)}{\cos n},$$

wo $\text{tang } n = \cot \delta \sin \alpha$ ist.

Zur Bestimmung von λ hat man dann

$$\cos \lambda = \frac{\cos \alpha \cos \delta}{\cos \beta}.$$

Zusatz. Ebenso geschieht auch die Auflösung der umgekehrten Aufgabe: *Die Größen α und δ zu bestimmen, wenn λ, β und ε gegeben sind.*

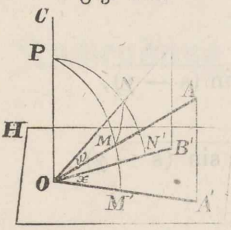
2. Aufgaben aus der Stereometrie.

§. **396.** Die §§. 377, dann 379—381 entwickelten Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes enthalten (§. 261) zugleich

auch die Relationen zwischen den Seiten (Kantenwinkeln) und den Winkeln (Flächenwinkeln) eines Dreikants.

1. Einen im Raume gemessenen Winkel auf den Horizont zu reduciren.

Fig. 225.



Es sei $AOB = w$ (Fig. 225) ein im Raume gemessener Winkel, OA' und OB' seien die Projectionen seiner Schenkel auf die Horizontalebene HR, $AOA' = \alpha$ und $BOB' = \beta$ die Neigungswinkel derselben gegen den Horizont; zu suchen ist der Winkel $A'OB' = x$, den die beiden Projectionen in der Horizontalebene bilden.

Die Ebenen der Neigungswinkel AOA' und BOB' schneiden sich erweitert in der Geraden OC, welche auf der Horizontalebene senkrecht steht (§. 211). Beschreibt man nun in dem Dreikante OABC aus O eine Kugel, deren Oberfläche die Kanten des Dreikants in den Punkten M, N und P schneidet, so erhält man das sphärische Dreieck MNP, in welchem die drei Seiten $MN = w$, $MP = 90^0 - \alpha$, $NP = 90^0 - \beta$ bekannt sind, und der Winkel P den gesuchten Winkel x darstellt.

Nach §. 386 erhält man demnach

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos s \cos(s - w)}{\cos\alpha \cos\beta}},$$

wenn $\alpha + \beta + w = 2s$ gesetzt wird.

2. Ein regelmäßiges Polyeder wird von p n seitigen Vielecken, von denen je m in einer Ecke zusammenstoßen und deren Seite a ist, eingeschlossen; man suche (§ 242 und Fig. 165)

a) den halben Neigungswinkel $JLO = \frac{N}{2}$ zweier in einer Kante zusammenstoßender Seitenflächen;
b) den Halbmesser $OJ = r$ der dem Polyeder eingeschriebenen Kugel;
c) den Halbmesser $OA = R$ der dem Polyeder umgeschriebenen Kugel;
d) die Oberfläche O; und
e) den Cubikinhalt V des Polyeders.

Aus der dreiseitigen Ecke OJLA erhält man,

wenn $\frac{180^0}{m} = \varphi$ und $\frac{180^0}{n} = \psi$ gesetzt wird,

$$\cos AOL = \frac{\cos\psi}{\sin\varphi} \text{ und } \cos JOL = \frac{\cos\varphi}{\sin\psi};$$

daher ist $$\sin\frac{N}{2} = \cos JOL = \frac{\cos\varphi}{\sin\psi},$$

$$r = \frac{a}{2}\cot\psi \operatorname{tang}\frac{N}{2}, \qquad R = \frac{a}{2}\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\frac{N}{2},$$

$$O = \frac{npa^2}{4}\cot\psi, \qquad V = \frac{npa^3}{24}\cot\psi^2 \operatorname{tang}\frac{N}{2}.$$

3. Aus den drei ungleichen Kanten a, b, c eines schiefwinkligen Parallelepipedes und den Winkeln γ, β, α, welche jene Seiten mit einander bilden, den Inhalt V des Parallelepipeds zu bestimmen.

Nimmt man a und b als zwei Grundkanten an und bezeichnet den Neigungswinkel der Seitenkante c gegen die Grundfläche durch w, so erhält man zunächst

$$V = abc \sin\gamma \sin w.$$

Denkt man sich nun zu dem Dreikante, welches die Kanten a, b, c bilden, ein sphärisches Dreieck construirt, so sind α, β, γ dessen Seiten; der Neigungswinkel w erscheint in diesem Dreiecke als der auf die Seite γ durch den gegenüberliegenden Scheitel senkrecht gelegte Bogen. Unter Berücksichtigung der §§. 379 und 383 findet man daher

$$\sin w = \sin\alpha \sin B = 2 \sin\alpha \sin\frac{B}{2} \cos\frac{B}{2}$$

$$= \frac{2}{\sin\gamma}\sqrt{\sin s \sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)},$$

wenn $\alpha + \beta + \gamma = 2s$ gesetzt wird; somit ist

$$V = 2abc\sqrt{\sin s \sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}.$$

3. Uebungsaufgaben.

§. **397**. 1. Berechne die Entfernung je zweier der folgenden Städte (§. 389)

Wien	48°	12′	35″	Breite, 34° 2′ 49″	Länge.
Prag	50°	5′	18″	„ 32° 5′ —	„
Graz	47°	4′	20″	„ 33° 6′ 26″	„
Triest	45°	38′	37″	„ 31° 26′ 12″	„
Berlin	52°	30′	16″	„ 31° 3′ 34″	„
Paris	48°	50′	13″	„ 20° — —	„
Rom	41°	53′	54″	„ 40° 9′ 30″	„
Petersburg	59°	56′	30″	„ 47° 58′ 13″	„

2. Bestimme für jede der vorgenannten Städte die Dauer des längsten und des kürzesten Tages (§. 394, Zusatz).

3. Wie hoch steht die Sonne an einem Tage, wo die Declination 12° 44′ südlich ist, um 11 Uhr Vormittags über dem Horizonte von Prag, dessen Polhöhe 50° 5′ 18″ beträgt? (§. 393, 1).

4. Bestimme den Neigungswinkel zweier Flächen eines a) Tetraeders, b) Oktaeders, c) Dodekaeders, d) Ikosaeders. (§. 396, 2).

5. Ein Axenschnitt eines Cylinders, dessen Axe a gegen die Grundfläche mit dem Radius r unter dem Winkel α geneigt ist, schneidet die Grundfläche in einer Geraden, welche mit der Projection der Axe den Winkel β bildet; wie groß ist der Flächeninhalt des Axenschnittes?

6. Aus drei in einer Ecke zusammentreffenden Kanten einer dreiseitigen Pyramide und den von ihnen gebildeten Winkeln den Cubikinhalt der Pyramide zu finden. (§. 396, 3.)

7. Den Cubikinhalt v einer dreiseitigen Pyramide aus den in einer Ecke zusammentreffenden Kanten a, b, c und den der Reihe nach an diesen liegenden Keilen A, B, C zu berechnen.

Aus dem Resultate der vorhergehenden Aufgabe 6 erhält man unter Beiziehung der Formeln in den §§. 387, 386 und 379

$$v = \frac{2abc}{3\sin A \sin B \sin C} \cdot -\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C),$$

wo $2S = A + B + C$ ist.

Vierter Theil.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Erster Abschnitt.

Algebraische Lösung geometrischer Aufgaben.

§. **398**. Drückt man gegebene Linien, indem man ihr Verhältniß zur Längeneinheit bestimmt, durch Zahlen aus, so erhält man auch für andere Raumgrößen (Linien, Flächen oder Körper), welche von jenen Linien auf eine vorgeschriebene Art abhängen, bestimmte Zahlausdrücke. Sind z. B. a und b die Maßzahlen der Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes, so ist $\sqrt{a^2 + b^2}$ der Zahlausdruck für die Hypotenuse. Umgekehrt kann ein Zahlausdruck von der Form $\sqrt{a^2 + b^2}$ wieder in seiner geometrischen Bedeutung hergestellt werden, indem man ihn als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes construirt, dessen Katheten a und b Längeneinheiten enthalten.

Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die Algebra auch auf die Lösung geometrischer Aufgaben anzuwenden, indem man die Maßzahlen der gegebenen und der gesuchten Größen nach entsprechenden geometrischen Lehrsätzen zu Gleichungen verbindet, diese auflöst und die erhaltenen algebraischen Resultate wieder auf ihre geometrische Bedeutung zurückführt.

I. Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke.

§. **399**. Einen algebraischen Ausdruck geometrisch construiren heißt, ein Raumgebilde zeichnen, dessen Maßzahl der gegebene Ausdruck darstellt.

Jeder algebraische Ausdruck, der sich durch gerade Linien und Kreise construiren läßt, kann auf eine der folgenden Grundformen zurückgeführt werden:

1. $x = a + b$. Um diesen Ausdruck zu construiren, trägt man auf einer Geraden $AB = a$ und $BC = b$ auf, wodurch die Summe $a + b$ als eine einzige Strecke AC erscheint.

2. $x = a - b$. Die Construction besteht darin, daß man auf einer Geraden von A aus in einer bestimmten Richtung $AB = a$, und dann von B aus in der entgegengesetzten Richtung $BC = b$ aufträgt; die Strecke AC stellt dann die Differenz $a - b$ dar.

Ist $b > a$, also x negativ, so erscheint AC von A aus in einer Richtung, welche der ursprünglich angenommenen entgegengesetzt ist.

3. $x = \frac{ab}{c}$. Man construirt zu den Strecken c, a, b die vierte geometrische Proportionale (§. 102, 1).

4. $x = \frac{b^2}{c}$. Hier ist x die dritte stetige Proportionale zu c und b. Die Construction erfolgt nach 3., indem man $a = b$ annimmt; man kann sich aber auch der in §. 102, Aufg. 2 unter 2. und 3. angeführten besonderen Constructionen bedienen.

5. $x = \sqrt{ab}$. Man construirt zu den Strecken a und b die mittlere geometrische Proportionale (§. 102, 3).

6. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ wird als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den gegebenen Katheten a und b construirt.

7. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist als eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, in welchem a die Hypotenuse und b die andere Kathete ist, zu construiren.

Zu diesen Grundformen gehören noch die trigonometrischen Ausdrücke:

8. $x = c \sin \alpha = c \cos \beta$, 9. $x = b \operatorname{tang} \alpha = b \cot \beta$,

10. $x = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta}$, 11. $x = \frac{a}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{a}{\cot \beta}$,

deren Construction als Katheten oder Hypotenusen von rechtwinkligen Dreiecken sich aus §. 345 ergibt.

§. **400.** Die Construction zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke läßt sich immer auf die Construction der vorhergehenden Grundformen zurückführen. Dabei ist darauf zu sehen, daß die Darstellung nicht in verschiedene Einzelconstructionen zerrissen, sondern möglichst an einer und derselben Figur als ein in einander greifendes Ganze ausgeführt werde.

Beispiele.

1. $x = a + b - c + d - e$.

Man hat $x = a + b + d - (c + e)$. Construirt man daher $a + b + d = m$, dann $c + e = n$, und endlich $m - n = x$, so ist die Aufgabe gelöst.

2. Man soll $x = \frac{abc}{df}$ construiren.

Es ist $x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{f}$. Man construire daher zuerst $\frac{ab}{d} = m$, und dann $\frac{mc}{f} = x$.

3. Es sei $x = \frac{ab + cd}{e}$ zu construiren.

Man construire $\frac{ab}{e} = m$, $\frac{cd}{e} = n$, und endlich $m + n = x$.

4. $x = \sqrt{2a^2}$. Man construire entweder $x = \sqrt{a^2 + a^2}$ oder $x = \sqrt{2a \cdot a}$.

5. $x = \sqrt{3a^2}$. Man construirt entweder $\sqrt{(2a)^2 - a^2}$ oder $\sqrt{3a \cdot a}$.

6. $x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$ wird unter der Form $x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ oder $x = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot a}$ construirt.

7. $x = \sqrt{\frac{a^2 b}{2}}$. Man construire zuerst $\frac{a^2}{2} = m$, und dann $\sqrt{m \cdot b} = x$.

8. $x = \sqrt{a^2 + bc}$. Man setze $bc = m^2$ und construire $\sqrt{bc} = m$, so ist dann $\sqrt{a^2 + m^2} = x$.

9. $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + e^2}$. Man setze $a^2 + b^2 = m^2$, $m^2 + e^2 = n^2$, $n^2 - c^2 = p^2$ und construire $\sqrt{a^2 + b^2} = m$, $\sqrt{m^2 + e^2} = n$, $\sqrt{n^2 - c^2} = p$, so ist dann $\sqrt{p^2 - d^2} = x$.

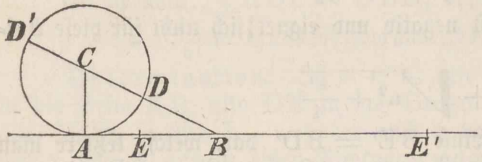
II. Algebraische Auflösung geometrischer Aufgaben.

§. **401.** Die Grundlage der algebraischen Lösung einer geometrischen Aufgabe bildet die Analysis, welche darin besteht, daß man die Bedingungen der Aufgabe nach entsprechenden geometrischen Lehrsätzen in die algebraische Zeichensprache übersetzt, d. i. durch Gleichungen ausdrückt. Diese Gleichungen werden sodann aufgelöst, worauf man wieder die geometrische Bedeutung der gefundenen algebraischen Resultate herstellt, d. i. die für die Unbekannten erhaltenen Zahlausdrücke geometrisch construirt.

Der Beweis für die Richtigkeit der Auflösung ist häufig schon in der Construction selbst enthalten; ist dieses nicht der Fall, so wird er am einfachsten dadurch geführt, daß man die Schlüsse der algebraischen Analysis in umgekehrter Folge macht. Auch die Determination lehnt sich am besten an die Discussion der gefundenen Zahlausdrücke an.

§. **402.** Aufgabe. Eine gegebene Strecke AB (Fig. 226) im mittlern und äußern Verhältnisse zu theilen.

Fig. 226.



Um diese Aufgabe algebraisch aufzulösen, müssen zuerst die Strecken durch Zahlen ausgedrückt werden. Es sei a die Maßzahl der Strecke AB, x die Maßzahl des größeren Theiles derselben, daher $a - x$ die Maßzahl des kleineren Theiles. Dann ist der Bedingung der Aufgabe gemäß

$$a : x = x : (a - x), \text{ daher}$$

$$x^2 = a^2 - ax.$$

Wird diese Gleichung aufgelöst, so erhält man

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Der erste dieser zwei Werthe $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ ist positiv und kleiner als a; er bestimmt also einen zwischen A und B liegenden Theilungspunkt E, wie ihn die Aufgabe verlangt.

Um diesen Punkt zu erhalten, darf man nur den obigen Ausdruck geometrisch construiren. $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ bedeutet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten a und $\frac{a}{2}$ sind. Errichtet man daher in A eine Senkrechte, trägt darauf $AC = \frac{a}{2}$ auf und zieht BC, so ist

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Von dieser Größe muß man, um x zu erhalten, noch $\frac{a}{2}$ subtrahiren. Beschreibt man also aus C mit dem Halbmesser $CA = \frac{a}{2}$ einen Kreis, welcher die BC in D schneidet, so ist $CD = \frac{a}{2}$, daher

$$BD = BC - CD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} - \frac{a}{2} = x.$$

Wird nun auf der Strecke AB der Theil $BE = BD$ abgeschnitten, so ist E der gesuchte Punkt.

Die algebraische Lösung dieser Aufgabe führt demnach genau auf dieselbe Construction, die wir in der Planimetrie (§. 164, 2) aus den Eigenschaften des Kreises abgeleitet haben.

Der zweite Werth $x = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}\right)$ ist negativ, und gibt daher für die vorgelegte Aufgabe keine Auflösung.

Würde man die Aufgabe so gestellt haben: Es soll in der Verlängerung der AB über B hinaus ein Punkt E' so bestimmt werden, daß BE' die mittlere Proportionale zwischen AE' und der gegebenen Strecke AB sei; so hätte man, wenn $BE' = x$, daher $AE' = a + x$ gesetzt wird, die Gleichung

$$x^2 = a\,(a + x),$$

woraus $$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$ folgt.

Der zweite dieser Werthe ist negativ und eignet sich nicht für diese Aufgabe. Der erste Werth

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

dagegen ist positiv und stellt die Linie $BE' = BD'$ dar, welche letztere man erhält, indem die in der frühern Aufgabe construirte Linie BD bis zum zweiten Durchschnitte mit dem Umfange des aus C mit dem Halbmesser $CA = \frac{a}{2}$ beschriebenen Kreises verlängert wird; denn es ist

$$BE' = BD' = CD' + BC = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

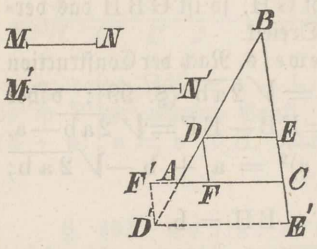
Hieraus ergibt sich, daß die beiden hier betrachteten Aufgaben durch eine und dieselbe geometrische Construction gelöst werden; daß sich ferner der Werth von x in der zweiten Aufgabe unmittelbar aus dem negativen Werthe von x in der ersten Aufgabe, für deren Lösung er nicht brauchbar war, herleiten läßt, wenn man nur das Vorzeichen ändert. Es enthält somit die algebraische Auflösung der ersten Aufgabe auch schon jene der zweiten in sich, sobald man den negativen Werth von x auf der AB von B aus in der Richtung gegen E' aufträgt, während der positive auf AB von B aus gegen E aufgetragen wird; sie liefert also alle Auflösungen der in folgender Weise allgemein gestellten Aufgabe:

Auf einer unbegrenzten Geraden, welche durch zwei gegebene Punkte A und B geht, soll ein Punkt bestimmt werden, dessen Abstand von B die mittlere Proportionale zwischen seinem Abstande von A und der gegebenen Strecke AB sei.

Aus der Durchführung dieser Aufgabe ist ersichtlich, daß die negativen Werthe dazu dienen, die Beschränkung aufzuheben, die in eine Aufgabe gelegt wurde, und dadurch diese in ihrer Allgemeinheit vollständig zu lösen.

§. **403.** Aufgabe. In einem Dreiecke ABC (Fig. 227) zu einer Seite AC eine Parallele DE zu ziehen, welche einer gegebenen Strecke MN gleich sei.

Fig. 227.



Algebraische Analysis. Setzt man $AB = a$, $AC = b$, $MN = s$, und nimmt den Abstand $AD = x$, also $DB = a - x$ an, so erhält man aus den ähnlichen Dreiecken ABC und DBE

$AB : DB = AC : DE$ oder $a : (a - x) = b : s$, folglich

$$x = \frac{a\,(b - s)}{b};$$

x ist demnach die vierte geometrische Proportionale zu b, a und b — s.

Construction. Man trage von C auf der CA die Strecke $CF = s$ auf, ziehe $FD \parallel CB$, und durch D die $DE \parallel AC$; so ist DE die verlangte Gerade.

Beweis. $\triangle ABC \sim ADF$, daher $AB : AD = AC : AF$, oder $a : AD = b : (b - s)$. Daraus folgt

$$AD = \frac{a\,(b - s)}{b} \text{ und } DB = a - \frac{a\,(b - s)}{b} = \frac{as}{b}.$$

Es ist auch $\triangle ABC \sim DBE$, daher $AB : DB = AC : DE$, oder

$$a : \frac{as}{b} = b : DE, \text{ woraus } DE = s = MN \text{ folgt.}$$

Determination. Ist $s < b$, also x positiv, so fällt der Punkt D in die Seite AB, also DE in das Dreieck selbst. Ist dagegen $s > b$, z. B. $s = M'N'$, so wird $b - s$, daher auch x negativ; man muß dann den Werth von x von A aus in einer Richtung, welche der ursprünglich angenommenen entgegengesetzt ist, also bis D' auftragen, und dann $D'E' \parallel AC$ ziehen. Damit stimmt auch die geometrische Construction des für x erhaltenen Ausdruckes überein. Wenn man nämlich von $CA = b$ die größere Gerade $CF' = M'N' = s$ subtrahirt, so wird die negative Differenz AF' nicht in die Seite CA, sondern in ihre Verlängerung fallen, und daher die durch F' mit CB parallel geführte Gerade F'D' nicht die Seite AB selbst, sondern ihre Verlängerung in D' treffen; darum wird auch die gesuchte Gerade D'E' außerhalb des Dreieckes ABC liegen.

§. **404.** Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Summen der Hypotenuse und jeder Kathete gegeben sind.

Analysis. Es sei a die Summe der Hypotenuse und der einen, b die Summe der Hypotenuse und der andern Kathete. Bezeichnet man die Katheten mit x und y, die Hypotenuse mit z, so ist $x = a - z$, $y = b - z$, daher nach dem Pythagoräischen Lehrsatze

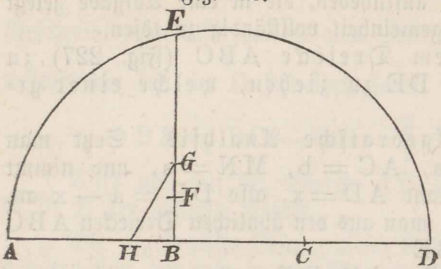
$$z^2 = (a - z)^2 + (b - z)^2,$$

woraus man

$$z = a + b - \sqrt{2ab}, \text{ daher}$$
$$x = \sqrt{2ab} - b,\ y = \sqrt{2ab} - a$$

erhält, wo $\sqrt{2ab}$ offenbar nur positiv genommen werden kann.

Fig. 228.



Construction. Man mache (Fig. 228) $AB = a$, $BC = CD = b$, beschreibe über AD einen Halbkreis, und errichte in B die $BE \perp AD$. Schneidet man dann von der EB die Strecken $EF = a$ und $EG = b$ ab, macht $BH = BF$ und zieht GH, so ist GBH das verlangte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist $EB = \sqrt{2ab}$ (§. 99); daher $BG = EB - EG = \sqrt{2ab} - b$, $BH = BF = EB - EF = \sqrt{2ab} - a$, und $GH = \sqrt{(\sqrt{2ab} - b)^2 + (\sqrt{2ab} - a)^2} = a + b - \sqrt{2ab}$; mithin

$$GH + BG = a, \qquad GH + BH = b.$$

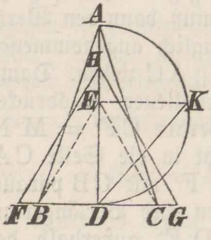
Determination. Da die Differenz der zwei Katheten kleiner sein muß, als die Hypotenuse (§. 41, 2), so ergibt sich als Bedingung für die Lösbarkeit der Aufgabe:

$$a - b < a + b - \sqrt{2ab}, \qquad \text{oder} \quad a < 2b;$$

d. h. die Aufgabe kann immer gelöst werden, wenn die eine der gegebenen Summen kleiner als das Doppelte der anderen ist.

§. **405.** Ein gleichschenkliges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Fig. 229.



Es sei ABC (Fig. 229) ein gleichschenkliges Dreieck über der Grundlinie BC; ferner sei EBC ein gleichseitiges Dreieck über der Seite BC und HFG das gesuchte gleichseitige Dreieck. Zur Bestimmung dieses Dreieckes kommt es nur darauf an, den Punkt H zu finden. Setzen wir $AD = m$, $ED = n$ und $HD = x$, so ist

$$\triangle BDE : FDH = n^2 : x^2, \text{ oder}$$
$$\triangle BDE : BDA = n^2 : x^2;$$

aber es ist auch

$$\triangle BDE : BDA = n : m,$$

daher $n^2 : x^2 = n : m$, und folglich

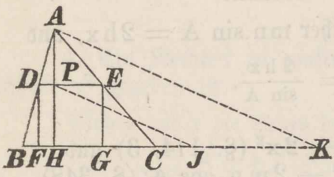
$$x = \sqrt{mn}.$$

Beschreibt man über AD einen Halbkreis und errichtet $EK \perp AD$, so ist (§. 99) $DK = \sqrt{AD \cdot DE} = \sqrt{mn} = x$. Man mache daher $HD = DK$ und ziehe $HF \parallel EB$ und $HG \parallel EC$, so ist HFG das verlangte gleichseitige Dreieck.

§. **406.** In ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 230) soll ein Quadrat eingeschrieben werden.

Man denke sich die Aufgabe gelöst, und es sei $DEGF$ das verlangte Quadrat. Ist $AH = a$ die Höhe des Dreieckes, so handelt es sich offenbar nur darum, den Punkt P zu bestimmen, durch welchen die mit BC parallele Gerade DE gezogen werden muß, damit $DE = DF$ werde. Man setze also $PH = DE = x$, daher $AP = a - x$, und die Seite $BC = b$. Da sich

Fig. 230.



in ähnlichen Dreiecken die Grundlinien wie die Höhen verhalten, so hat man $BC : DE = AH : AP$ oder $b : x = a : (a - x)$, woraus

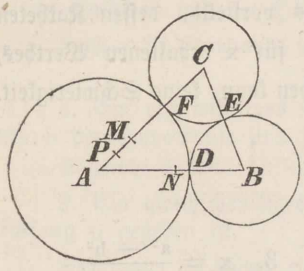
$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

folgt; x ist demnach die vierte Proportionale zu $a + b$, a und b. Um die Construction an der Figur selbst vorzunehmen, verlängere man BC über C hinaus, mache $HJ = b$, $JK = a$, daher $HK = a + b$, ziehe AK und durch den Punkt J die $JP \parallel KA$, so ist P der gesuchte Punkt; denn man hat $HK : AH = HJ : PH$, oder $(a + b) : a = b : PH$, daher,

$$PH = \frac{ab}{a + b} = x.$$

§. 407. Es sind drei Punkte der Lage nach gegeben; man beschreibe um sie als Mittelpunkte drei Kreise so, daß sich je zwei von außen berühren.

Fig. 231.



Es seien A, B, C (Fig. 231) die drei gegebenen Punkte und ihre Abstände $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Setzt man den Halbmesser des um A beschriebenen Kreises $= x$, so ist der Halbmesser des um B beschriebenen $= c - x$, und der Halbmesser des um C beschriebenen $= b - x$. Man hat also folgende Gleichung:

$$b - x = a - (c - x), \text{ daher}$$

$$x = \frac{c + b - a}{2} = \frac{c}{2} + \frac{b - a}{2}.$$

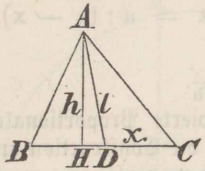
Construction. Man mache $CM = BC = a$, wodurch $AM = b - a$ wird; halbirt man sodann AB und AM in N und P und macht $ND = AP$, so ist $AD = AN + AP = \frac{c}{2} + \frac{b - a}{2} = x$. Beschreibt man nun aus A mit dem Halbmesser AD einen Kreis, welchen die AC in F schneidet, ferner aus B mit dem Halbmesser BD einen zweiten, und aus C mit dem Halbmesser CF einen dritten Kreis, so berühren diese den ersten Kreis in den Punkten D und F, einander selbst aber in dem Punkte E, da

$$BE + CE = BD + CF = c - \frac{c + b - a}{2} + b - \frac{c + b - a}{2} = a = BC \text{ ist.}$$

§. 408. In einem Dreiecke ist ein Winkel, die Mittellinie zu der gegenüberstehenden Grundlinie und die Höhe gegeben; man soll das Dreieck construiren.

Es sei A der gegebene Winkel, l die gegebene Mittellinie und h die Höhe des Dreieckes. Construirt man das rechtwinklige Dreieck AHD (Fig. 232) so, daß $AH = h$ und $AD = l$ ist, und nimmt man A als den Scheitel des gesuchten Dreieckes ABC an, so wird die Grundlinie desselben in der Verlängerung der Kathete HD liegen und man braucht zur Construction dieses Dreieckes nur den Abstand $BD = DC = x$, d. i. die halbe Grundlinie auszumitteln.

Fig. 232.



Nennt man die den Winkel A einschließenden Seiten m und n, so hat man für den Inhalt des Dreieckes die zwei gleichgeltenden Ausdrücke $\frac{mn \sin A}{2}$ und hx, daher $mn \sin A = 2hx$, und

$$mn = \frac{2hx}{\sin A}.$$

Ferner ist

$m^2 + n^2 = 2l^2 + 2x^2$ (§. 114, 3) und
$4x^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos A$ (§. 348).

Substituirt man in die letzte Gleichung die Werthe von $m^2 + n^2$ und mn aus den früheren Gleichungen, so hat man

$$x^2 = -\frac{2hx}{\tang A} + l^2,$$

daher

$$x = -\frac{h}{\tang A} \pm \sqrt{\frac{h^2}{\tang A^2} + l^2}.$$

Da $\frac{h}{\tang A}$ die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist, worin h als zweite Kathete und A als der ihr anliegende Winkel vorkommt, $\sqrt{\frac{h^2}{\tang A^2} + l^2}$ aber die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes vorstellt, dessen Katheten $\frac{h}{\tang A}$ und l sind, so hat die Construction des für x erhaltenen Werthes, worin die Wurzelgröße nur positiv genommen werden kann, keine Schwierigkeit.

III. Uebungsaufgaben.

§. **409.** Construire folgende Ausdrücke:

1. $x = \frac{am}{a+b}$.
2. $x = \frac{abc^2}{def}$.
3. $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$.
4. $x = \frac{b^2 + bc}{a}$
5. $x = \frac{a^2 b}{a^2 - c^2}$
6. $x = \frac{ab + bc}{a+b}$.
7. $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.
8. $x = \frac{a^3 - 2a^2b + 3ab^2 - c^3}{2a^2 + ab - c^2}$.
9. $x = \sqrt{ab + cd - ef}$.
10. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab}$.
11. $x = \sqrt{\frac{a^2 b + c^2 d}{f - g}}$.
12. $x = \sqrt{\left\{a^2 + \frac{b^2}{4} - a\sqrt{a^2 - b^2}\right\}}$.

§. **410.** Löse mit Hilfe der algebraischen Analysis folgende Aufgaben:

1. In einem gegebenen Dreiecke ABC zu der Seite BC eine Parallele MN so zu ziehen, daß der eine obere Abschnitt AM dem andern unteren NC gleich sei.

Setzt man $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, und den Abstand $AM = x$, so erhält man

$$x = \frac{bc}{b+c}.$$

2. Eine Strecke $AB = a$ in zwei Theile so zu theilen, daß die Differenz der Quadrate beider Theile einem gegebenen Quadrate m^2 gleich sei.

Heißt x der eine, daher $a - x$ der andere Theil, so folgt

$$x = \frac{m^2 + a^2}{2a}.$$

3. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Sind a und b die Seiten des gegebenen Rechteckes und x die Seite des gesuchten Quadrates, so ist

$$x = \sqrt{ab}.$$

4. Ein Rechteck zu construiren, wenn der Umfang u und der Flächeninhalt a^2 gegeben ist.

Sind x und y die Seiten des Rechteckes, so erhält man

$$x = \frac{u}{4} \pm \sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{u}{4} \mp \sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2}.$$

5. Ein Quadrat zu construiren, wenn die Summe s der Seite und der Diagonale gegeben ist.

Heißt x die Seite des Quadrates, so ergibt sich

$$x = -s + \sqrt{2s^2}.$$

6. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die eine Kathete a und die Summe s der Hypotenuse und der anderen Kathete gegeben ist.

Man findet $x = \frac{a^2 + s^2}{2s}$, wo x die Hypotenuse bezeichnet.

7. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe s der beiden Katheten und die Höhe h auf die Hypotenuse gegeben ist.

Heißt x die Hypotenuse, so ergibt sich die Gleichung

$$x = -h + \sqrt{s^2 + h^2}.$$

8. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Differenzen a und b der Hypotenuse und jeder Kathete gegeben sind.

Vergleiche §. 404.

9. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn der Umfang u gegeben ist.

Drückt man die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes durch x aus, so ist

$$x = u - \sqrt{\frac{u^2}{2}}.$$

10. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn dessen Flächeninhalt a^2 und ein spitzer Winkel α gegeben sind.

Bezeichnet x die dem Winkel α anliegende Kathete, so ist $\frac{2a^2}{x}$ die andere Kathete, und es ergibt sich

$$x = \sqrt{2a^2 \cot \alpha}.$$

11. In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Ist $AB = x$ die Seite des eingeschriebenen Dreieckes und $OC = r$ der sie senkrecht schneidende Halbmesser, so erhält man

$$x = \sqrt{3r^2}.$$

12. In einen gegebenen Quadranten AOB eines Kreises einen zweiten Kreis zu beschreiben, welcher die Schenkel und den Bogen des Quadranten berührt.

Der Mittelpunkt C des gesuchten Kreises wird offenbar in der Halbirungslinie des rechten Winkels O liegen. Ist r der Halbmesser des Quadranten und setzt man $OC = x$, so ist $r - x$ der Halbmesser des gesuchten Kreises, und man findet

$$x = 2r \mp \sqrt{2r^2}.$$

Zweiter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

§. 411. Die wichtigste Anwendung der Algebra auf die Geometrie bildet die analytische Geometrie. Ihr Gegenstand ist die Bestimmung der Lage der Raumgebilde mit Hilfe der Rechnung (Analysis).

In dieser Abhandlung beschränken wir uns auf die analytische Geometrie in der Ebene.

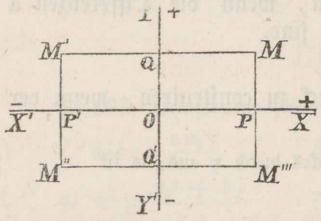
Da eine Linie in der Ebene vollkommen bestimmt ist, wenn man die Lage jedes einzelnen ihrer Punkte kennt, so handelt es sich zunächst darum, die Lage eines Punktes analytisch darzustellen.

I. Analytische Bestimmung eines Punktes in der Ebene.

1. Rechtwinklige Coordinaten.

§. 412. Um die Lage eines Punktes M (Fig. 233) in einer Ebene zu bestimmen, zieht man in derselben durch einen Punkt O zwei auf einander senkrechte Gerade XX' und YY', und fällt auf dieselben von M die Senkrechten MP und MQ. Kennt man nun die Strecken MQ = OP und MP = OQ, so sind auch die Punkte P und Q gegeben; dadurch aber ist die Lage des Punktes M bestimmt, da man nur in P eine Senkrechte auf XX' und in Q eine Senkrechte auf YY' errichten darf, um durch deren Durchschnitt den Punkt M zu erhalten.

Fig. 233.



Die Maßzahl der Strecke OP = MQ heißt die Abscisse, die Maßzahl der Strecke MP = OQ die Ordinate des Punktes M; beide zusammen heißen Coordinaten, und zwar rechtwinklige, weil sich die Geraden XX' und YY' unter einem rechten Winkel schneiden. Die Abscisse drückt man allgemein durch x, die Ordinate durch y aus; für den Punkt M ist also x = OP, y = MP. Die Gerade XX' wird die Abscissenaxe, die Gerade YY' die Ordinatenaxe, und ihr Durchschnittspunkt O der Anfangspunkt oder Ursprung der Coordinaten genannt.

§. 413. Die beiden Coordinatenaxen theilen die Ebene in vier Quadranten. Um nun anzuzeigen, in welchem Quadranten der zu bestimmende Punkt liegt, werden die Coordinaten auf den entgegengesetzten Seiten jeder Axe durch die Vorzeichen + oder − unterschieden. Man betrachtet gewöhnlich die Abscissen in der Richtung nach rechts von der Ordinatenaxe als positiv, die Abscissen in der Richtung nach links als negativ; eben so die Ordinaten in der Richtung nach oben von der Abscissenaxe als positiv, die Ordinaten in der Richtung nach unten als negativ.

Unter dieser Voraussetzung hat man, wenn OP = OP' = a und OQ = OQ' = b gesetzt wird,

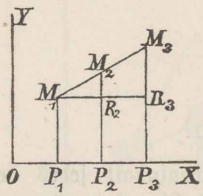
für den Punkt M ... $x = +a$, $y = +b$;
" " " M' ... $x = -a$, $y = +b$;
" " " M'' ... $x = -a$, $y = -b$;
" " " M''' ... $x = +a$, $y = -b$.

Für die Punkte, welche in der Abscissenaxe liegen, ist die Ordinate Null; für die Punkte, welche in der Ordinatenaxe liegen, ist die Abscisse Null. Für den Anfangspunkt O, welcher sowohl in der Ordinaten- als in der Abscissenaxe liegt, ist $x = 0$ und $y = 0$.

Einen Punkt M, dessen Coordinaten a und b sind, pflegt man auch kurzweg durch (a, b) zu bezeichnen.

§. 414. Aufgabe. Aus den Coordinaten zweier Punkte die Entfernung derselben bestimmen.

Fig. 234.



Bezeichnet man die Coordinaten des Punktes M_1 (Fig. 234) durch x_1, y_1, und jene des Punktes M_2 durch x_2, y_2, so ist $x_1 = OP_1$, $y_1 = M_1P_1$, $x_2 = OP_2$, $y_2 = M_2P_2$. Zieht man $M_1R_2 \parallel OX$, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $M_1R_2M_2$

$$M_1M_2^2 = M_1R_2^2 + M_2R_2^2;$$

oder, wenn der Abstand $M_1M_2 = d$ gesetzt wird,

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

und $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Z. B. Die Entfernung der beiden Punkte (2, 3) und (5, 7) ist

$$d = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Umgekehrt wird die Forderung, daß ein Punkt (x, y) von dem Punkte (a, b) die Entfernung d habe, durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = d^2.$$

§. 415. Bedingung, unter welcher drei Punkte in einer Geraden liegen.

1. Es seien (Fig. 234) die Punkte $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$ und $M_3 = (x_3, y_3)$ gegeben. Liegen diese drei Punkte in einer Geraden, so müssen, wenn $M_1R_3 \parallel OX$ ist, die Dreiecke $M_1R_2M_2$ und $M_1R_3M_3$ ähnlich sein; man hat daher

$$\frac{M_2R_2}{M_3R_3} = \frac{M_1R_2}{M_1R_3}, \text{ oder } \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1};$$

d. h. die Ordinatendifferenzen je zweier Punkte müssen den entsprechenden Abscissendifferenzen proportionirt sein.

2. Umgekehrt: Findet für drei Punkte $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$ und $M_3 = (x_3, y_3)$ die Bedingungsgleichung

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \quad \ldots\ 1)$$

statt, so müssen dieselben in einer Geraden liegen.

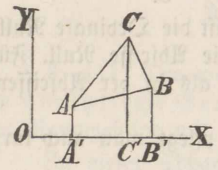
Es schneide die durch M_1 und M_2 gezogene Gerade die auf der Abscissenaxe Senkrechte, welche x_3 zur Abscisse hat, in irgend einem Punkte M, dessen Ordinate y sei, so daß M_1, M_2 und M in einer Geraden liegen; dann ist nach 1.

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \quad \ldots\ 2)$$

Aus 1) und 2) folgt aber $y = y_3$, d. h. (x_3, y) und (x_3, y_3) müssen zusammenfallen, oder M muß mit M_3 identisch sein.

§. **416.** Flächeninhalt eines Dreieckes, dessen Eckpunkte durch ihre Coordinaten gegeben sind.

Fig. 235.



Beziehen wir das Dreieck ABC (Fig. 235) auf das rechtwinklige Coordinatensystem XOY, und es seien die Coordinaten

des Eckpunktes A... x_1, y_1,
" " B... x_2, y_2,
" " C... x_3, y_3.

Heißt f der Flächeninhalt dieses Dreieckes, so hat man

$$f = AA'C'C + CC'B'B - AA'B'B.$$

Nun ist

$$AA'C'C = \frac{(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)}{2},$$

$$CC'B'B = \frac{(y_2 + y_3)(x_2 - x_3)}{2},$$

$$AA'B'B = \frac{(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)}{2};$$

und daher

$$f = \frac{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}{2}.$$

Zusätze. 1. Auf gleiche Weise kann auch der Flächeninhalt jedes beliebigen Vieleckes durch die Coordinaten seiner Eckpunkte bestimmt werden.

2. Liegen die Punkte A, B und C in einer Geraden, so ist $f = 0$, daher

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0,$$

woraus man dieselbe Bedingungsgleichung

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

erhält, die wir in §. 415 auf einem andern Wege gefunden haben.

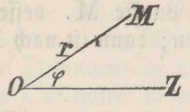
2. Schiefwinklige Coordinaten.

§. **417.** Stehen die beiden Axen XX' und YY' nicht senkrecht, sondern schief auf einander, so heißt das Coordinatensystem ein schiefwinkliges. Die schiefwinkligen Coordinaten eines Punktes M sind dann die Maßzahlen der Strecken, welche von M zu den beiden Axen mit denselben parallel gezogen werden.

3. Polar-Coordinaten.

§. **418.** Außer dem Parallel-Coordinatensysteme ist auch noch das Polar-Coordinatensystem vorzüglich im Gebrauche. Bei diesem nimmt man einen festen Punkt O (Fig. 236) an, welcher der Pol genannt wird, und von demselben aus eine feste Gerade OZ, welche die Polaraxe heißt.

Fig. 236.



Die Lage eines Punktes M ist nun vollkommen bestimmt, wenn der Abstand MO dieses Punktes vom Pole, und der Winkel MOZ, den MO mit der Polaraxe bildet, bekannt sind. Der Abstand MO heißt der Radius-vector; er wird immer im absoluten Sinne genommen und allgemein durch r bezeichnet. Der Winkel $MOZ = \varphi$ wird entweder von 0^0 bis 360^0, oder von 0^0 bis $\pm 180^0$ gezählt. Die Größen r und φ heißen die Polar-Coordinaten des Punktes M.

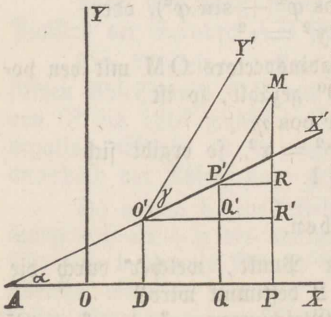
4. Transformation der Coordinaten.

§. **419.** Häufig tritt bei analytischen Untersuchungen das Bedürfniß ein, die Coordinaten eines Punktes in einem bestimmten Axensystem durch die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf ein neues Axensystem, dessen Lage gegen das frühere gegeben ist, auszudrücken. Diese Aufgabe nennt man die Transformation der Coordinaten.

Für die Zwecke dieses Buches wird die Betrachtung der nachfolgenden Transformationsfälle genügen.

Von rechtwinkligen Coordinaten zu schiefwinkligen überzugehen.

Fig. 237.



Es seien (Fig. 237) OX, OY die Axen des ursprünglichen rechtwinkligen Coordinatensystems, O' der Ursprung des neuen schiefwinkligen Systems, dessen Axen O'X', O'Y' den Winkel $X'OY' = \gamma$ bilden, und die Coordinaten eines Punktes M in Bezug auf das rechtwinklige System $OP = x$, $MP = y$, in Bezug auf das neue System $O'P' = x'$, $MP' = y'$; ferner seien $OD = m$, $O'D = n$ die Coordinaten des neuen Ursprungs O' in Bezug auf das alte System und $XAX' = \alpha$ der Winkel der neuen Abscissenaxe mit der alten. Es sollen nun die ursprünglichen Coordinaten x, y durch die neuen x', y' und durch die Größen m, n, α, γ ausgedrückt werden.

Zieht man $P'R \parallel OX$, $P'Q \parallel OY$ und $O'R' \parallel OX$, so ist

$$OP = OD + O'Q' + P'R,$$
$$MP = O'D + P'Q' + MR.$$

In den rechtwinkligen Dreiecken O'Q'P' und MRP' ist der Winkel $P'O'Q' = \alpha$ und der Winkel $MP'R = \gamma + \alpha$, daher

$$O'Q' = O'P' \cdot \cos\alpha = x' \cos\alpha,$$
$$P'Q' = O'P' \cdot \sin\alpha = x' \sin\alpha;$$
$$P'R = MP' \cdot \cos(\gamma + \alpha) = y' \cos(\gamma + \alpha),$$
$$MR = MP' \cdot \sin(\gamma + \alpha) = y' \sin(\gamma + \alpha).$$

Substituirt man diese Werthe in die obigen Ausdrücke für OP und MP, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x &= m + x' \cos\alpha + y' \cos(\gamma + \alpha), \\ y &= n + x' \sin\alpha + y' \sin(\gamma + \alpha). \end{aligned}\right\} \quad \ldots 1)$$

Hat das neue Axensystem mit dem früheren denselben Ursprung, so ist $m = n = o$. Ist die neue Abscissenaxe der früheren parallel, so setzt man $\alpha = o$.

§. **420.** Von einem rechtwinkligen Coordinatensysteme zu einem andern rechtwinkligen überzugehen.

Nimmt man in der vorhergehenden Aufgabe den Winkel $X'O'Y' = \gamma = 90^0$ an, so ergibt sich, da $\cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha$ und $\sin(90^0 + \alpha) = \cos\alpha$ ist, aus den Gleichungen 1)

$$\left.\begin{aligned} x &= m + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= n + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad \ldots 2)$$

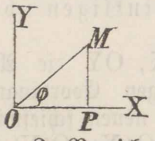
Haben beide Axensysteme denselben Ursprung, so ist $m = n = o$. Ist die neue Abscissenaxe der früheren parallel, so setzt man $\alpha = o$.

§. **421.** Rechtwinklige Coordinaten in Polar-Coordinaten zu verwandeln.

Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall, wenn der Pol O (Fig. 238) mit dem Ursprunge, und die Polaraxe OX mit der Abscissenaxe des rechtwinkligen Systems zusammenfällt.

Es seien für den Punkt M, $x = OP$, $y = MP$ die rechtwinkligen Coordinaten, ferner $r = OM$ der Radiusvector und $\varphi = MOX$ der Winkel desselben mit der Polaraxe.

Fig. 238.



Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MPO ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots 3)$$

Zusätze. 1. Aus diesen Gleichungen folgt

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2), \text{ oder}$$
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

2. Bezeichnen ξ und η die Winkel des Radiusvectors OM mit den positiven Axen der x und der y, von 0^0 bis 180^0 gezählt, so ist

$$x = r\cos\xi \text{ und } y = r\cos\eta.$$

Substituirt man diese Werthe in $x^2 + y^2 = r^2$, so ergibt sich

$$\cos\xi^2 + \cos\eta^2 = 1.$$

5. Uebungsaufgaben.

§. **422.** 1. Welche Coordinaten hat der Punkt, welcher durch die Gleichungen $3x + 3y = 5$ und $3x + 4y = 2$ bestimmt wird?

2. Welche Punkte werden durch die Gleichungen $x^2 + y^2 = 25$ $3x + 4y = 24$ bestimmt?

3. Wie groß ist die Entfernung der Punkte (7, 10) und (— 5, 5)?

4. Drücke durch eine Gleichung aus, daß der Punkt (x, y) von den Punkten (5, 4) und (3, 2) gleich weit entfernt ist.

5. Bestimme den Punkt, welcher von den Punkten (5, — 3), (6, 2) (— 1, 5) gleich weit entfernt ist, und gib diese Entfernung an.

6. Zwei Eckpunkte eines Dreieckes sind (3, 2) und (2, — 1), der dritte liegt im Ursprunge; bestimme a) die Länge jeder Seite, b) den Flächeninhalt des Dreieckes.

7. Die Eckpunkte eines Viereckes sind $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ und $D = (x_4, y_4)$; bestimme den Flächeninhalt.

II. Die gerade Linie.

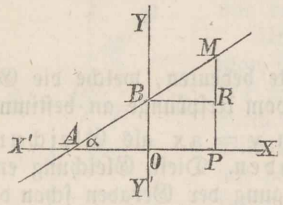
§. **423.** Kennt man das Gesetz, welchem die Lage aller Punkte einer Linie unterliegt, so ist dadurch die Linie selbst bestimmt. Da nun die Lage eines Punktes in der Ebene durch dessen Coordinaten ausgedrückt wird, so ist eine Linie als bestimmt zu betrachten, wenn die Relation zwischen den Coordinaten aller ihrer Punkte bekannt ist. Diese Relation heißt die Gleichung der Linie.

1. Analytische Darstellung einer Geraden.

§. **424.** Gleichung einer Geraden für rechtwinklige Coordinaten.

Es sei AB (Fig. 239) die gegebene Gerade, $BAX = \alpha$ ihr Winkel mit der Abscissenaxe, und $OB = b$ der Abstand ihres Durchschnittspunktes mit der Ordinatenaxe vom Coordinatenanfangspunkte.

Fig. 239.



Ist M ein beliebiger Punkt der AB und sind $x = OP$, $y = MP$ seine Coordinaten, so hat man, wenn $BR \parallel OX$ gezogen wird,

$$y = MP = MR + RP.$$

Nun ist

$MR = BR \cdot \operatorname{tang} MBR = x \operatorname{tang} \alpha$, und $RP = b$; daher

$$y = x \operatorname{tang} \alpha + b,$$

oder, wenn man $\operatorname{tang} \alpha = a$ setzt,

$$y = ax + b.$$

Diese Gleichung findet zwischen den Coordinaten x und y eines jeden Punktes der Geraden AB statt, sie ist daher die Gleichung der Geraden.

Der Winkel α, dessen goniometrische Tangente a ist, wird von der positiven Abscissenaxe OX aus im Sinne der Drehung von rechts nach links von 0^0 bis 180^0 gezählt. Ist α ein stumpfer Winkel, so ist $a = \operatorname{tang} \alpha$ negativ. Ebenso ist b negativ, wenn die Ordinatenaxe von der Geraden unterhalb der Abscissenaxe geschnitten wird.

Da a und b jede beliebige reelle Zahl bedeuten können, so ist die Gleichung $y = ax + b$ der analytische Ausdruck für alle möglichen geraden Linien. Für eine bestimmte Gerade haben auch a und b ganz bestimmte, constante Werthe, während x und y veränderlich sind, d. i. für jeden andern Punkt dieser Geraden andere Werthe annehmen. Die Größe $a = \operatorname{tang} \alpha$ heißt, da sie bloß von der Richtung der Geraden gegen die Abscissenaxe abhängt, die Richtungsconstante.

Beispiele.

1. Eine Gerade schneide von der Ordinatenaxe das Stück $b = 2$ ab, und bilde mit der Abscissenaxe einen Winkel von 45^0; dann ist ihre Gleichung

$$y = x \operatorname{tang} 45^0 + 2, \text{ oder } y = x + 2.$$

2. Wenn eine Gerade die Ordinatenaxe im Abstande -3 schneidet, und mit der Abscissenaxe den Winkel $128^0\,28'\,28''$ bildet, so ist ihre Gleichung

$$y = x \operatorname{tang} 128^0\,28'\,28'' - 3, \text{ oder } y = -1{\cdot}2583\,x - 3.$$

3. Es sei eine Gerade, welche durch den Ursprung geht und mit der Abscissenaxe den Winkel 65^0 bildet, so ist, da $b = 0$ ist, ihre Gleichung

$$y = x \cdot \operatorname{tang} 65^0 \text{ oder } y = 2{\cdot}1445\,x.$$

§. 425. Discussion der Gleichung $y = ax + b$.

1. Da die Gleichung $y = ax + b$ zwei Constanten a und b hat, die so lange unbestimmt bleiben, als nicht von einer bestimmten Geraden die Rede ist, so folgt, daß zur vollkommenen Bestimmung einer Geraden zwei Bedingungen erforderlich sind.

2. Für $x = 0$ erhält man aus der obigen Gleichung $y = b$ als die Ordinate OB (Fig. 239) des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Ordinatenaxe. Für $y = 0$ folgt aus der obigen Gleichung $x = -\frac{b}{a}$ als die Abscisse OA des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Abscissenaxe. Die Gerade schneidet also die Axen der x und der y in den Abständen $-\frac{b}{a}$ und b.

Setzt man $-\frac{b}{a} = c$, also $a = -\frac{b}{c}$, so nimmt die Gleichung $y = ax + b$ folgende Form an:

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1,$$

in welcher die Nenner von x und y die Abschnitte bedeuten, welche die Gerade auf der Abscissen- und auf der Ordinatenaxe vom Ursprunge an bestimmt.

3. Nimmt man $b = 0$ an, so erhält man $y = ax$ als Gleichung einer durch den Ursprung gehenden Geraden. Diese Gleichung enthält nur noch eine Constante, da die eine Bedingung der Geraden schon dadurch angegeben ist, daß sie durch den Ursprung geht.

4. Soll die Gerade, welche durch den Ursprung geht, und deren Gleichung $y = ax$ ist, mit der Abscissenaxe zusammenfallen, so muß man den Winkel α, und somit auch a gleich Null setzen, wodurch jene Gleichung in $y = 0$ übergeht; man erhält also $y = 0$ als Gleichung für die Abscissenaxe.

5. Soll jene Gerade mit der Ordinatenaxe zusammenfallen, so muß $\alpha = 90^0$, daher $\operatorname{tang} \alpha = a = \infty$ gesetzt werden; aus $y = ax$ ergibt sich dann $x = \frac{y}{a} = \frac{y}{\infty}$, oder $x = 0$ als Gleichung der Ordinatenaxe.

6. Soll die Gerade zu der Axe der x und zwar in dem Abstande b parallel sein, so muß man in der Gleichung $y = ax + b$ den Winkel α, also auch a gleich Null setzen, wodurch man $y = b$ als Gleichung einer zu der Abscissenaxe parallelen Geraden erhält.

7. Bringt man die Gleichung der Geraden auf die Form $x = \frac{y}{a} + c$, so folgt für $\alpha = 90^0$, da $a = \infty$ wird, $x = c$ als Gleichung einer zu der Ordinatenaxe parallelen Geraden.

§. 426. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Coordinaten der Gleichung $y = ax + b$ genügen, ist eine gerade Linie.

Beweis. Betrachtet man die Gleichung $y = ax + b$ als den Ausdruck für eine Linie, indem man x und y als die Coordinaten ihrer Punkte, a und b aber als constante Größen ansieht, so hat man für irgend drei Punkte dieser Linie, deren Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 und x_3, y_3 sind,

$$y_1 = ax_1 + b, \qquad y_2 = ax_2 + b, \qquad y_3 = ax_3 + b.$$

Subtrahirt man die erste Gleichung von jeder der letzteren, so erhält man

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \text{ und } y_3 - y_1 = a(x_3 - x_1), \text{ daher}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

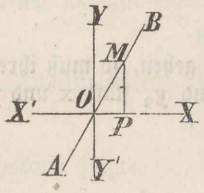
Die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) liegen demnach (§. 415, 2) in einer geraden Linie. Da dasselbe von je drei Punkten der zu $y = ax + b$ gehörigen Linie bewiesen werden kann, so folgt, daß der geometrische Ort der Gleichung $y = ax + b$ eine gerade Linie ist.

Da sich jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen $Ax + By + C = 0$ auf die Form $y = ax + b$ bringen läßt, so heißt diese die allgemeine Form der Gleichung einer Geraden.

§. 427. Construction einer Geraden, deren Gleichung gegeben ist.

1. Hat die Gleichung die Form $y = ax$, so geht die ihr entsprechende Gerade durch den Ursprung; es handelt sich nur darum, noch einen zweiten

Fig. 240.

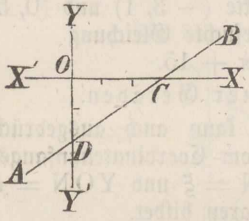


in der Geraden liegenden Punkt zu bestimmen. Man kann sich dazu den Punkt wählen, dessen Abscisse $x = 1$, und dessen Ordinate sonach $y = a$ ist.

Um z. B. die Gleichung $y = 2x$ zu construiren, hat man für $x = 1$, $y = 2$; man schneidet also (Fig. 240) $OP = 1$ ab, macht die Senkrechte $PM = 2$ und zieht durch O und M die Gerade AB; diese ist das geometrische Bild der Gleichung $y = 2x$. Will man ihren Winkel α mit der Abscissenaxe wissen, so hat man $a = \text{tang}\,\alpha = 2$, daher $\alpha = 63^0\,26'\,6''$.

2. Hat die gegebene Gleichung die Form $y = ax + b$, so ist ihr geometrischer Ort eine Gerade, welche nicht durch den Ursprung geht. Die Construction dieser Geraden geschieht am bequemsten, indem man ihre Durchschnittspunkte mit den beiden Axen bestimmt und zu diesem Ende in der Gleichung einmal $y = 0$, und dann $x = 0$ substituirt. Die Verbindungslinie dieser Durchschnittspunkte ist die verlangte Gerade.

Fig. 241.



Es sei z. B. die Gleichung $2x - 3y = 6$ zu construiren.

Für $y = 0$ ist $x = 3$,
„ $x = 0$ „ $y = -2$,

Macht man daher (Fig. 241) $OC = 3$, $OD = -2$, und zieht durch C und D die Gerade AB, so ist diese der gesuchte geometrische Ort.

§. 428. Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

Es sei der Punkt (x_1, y_1) gegeben; man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch diesen Punkt geht.

Die verlangte Gleichung wird die Form

$$y = ax + b \quad \ldots 1)$$

haben, wobei a und b der Bedingung der Aufgabe gemäß zu bestimmen sind.

Damit die Gerade durch den Punkt (x_1, y_1) gehe, müssen dessen Coordinaten x_1 und y_1 statt x und y in der Gleichung 1) substituirt dieser Genüge leisten; es muß also

$$y_1 = ax_1 + b \quad \ldots 2)$$

sein. Subtrahirt man diese Gleichung von der obigen, so ist

$$y - y_1 = a(x - x_1) \quad \ldots 3)$$

die gesuchte Gleichung einer durch den Punkt (x_1, y_1) gehenden Geraden.

Diese Gleichung enthält noch eine unbestimmte Constante a, wie es sein muß, da durch einen Punkt unzählig viele gerade Linien gezogen werden können.

§. 429. Gleichung einer Geraden, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Es seien die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gegeben; man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch diese beiden Punkte geht.

Die verlangte Gleichung wird die Form

$$y = ax + b \quad \ldots 1)$$

haben, und es kommt nur darauf an, die noch unbekannten Größen a und b den Bedingungen der Aufgabe gemäß zu bestimmen.

Damit die Gerade durch den Punkt (x_1, y_1) gehe, muß ihrer Gleichung Genüge geschehen, wenn man darin x_1 und y_1 anstatt x und y setzt, es muß demnach die Bedingungsgleichung

$$y_1 = ax_1 + b \quad \ldots \; 2)$$

erfüllt werden. Soll die Gerade durch den Punkt (x_2, y_2) gehen, so muß ihrer Gleichung auch Genüge geleistet werden, wenn man x_2 und y_2 statt x und y setzt, es muß also auch die Bedingungsgleichung

$$y_2 = ax_2 + b \quad \ldots \; 3)$$

stattfinden.

Subtrahirt man die Gleichung 2) von 1) und dann von 3), so erhält man

$$y - y_1 = a(x - x_1) \quad \ldots \; 4),$$
$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \ldots \; 5),$$

und durch Elimination von a

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \ldots \; 6)$$

als die gesuchte Gleichung einer Geraden, welche durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht.

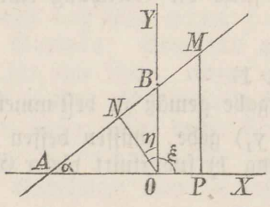
Z. B. Für eine Gerade, welche durch die Punkte $(-3, 1)$ und $(0, 5)$ geht, ist $y_2 - y_1 = 4$, $x_2 - x_1 = 3$, daher die gesuchte Gleichung

$$y - 1 = \tfrac{4}{3}(x + 3), \text{ oder } 3y = 4x + 15.$$

§. **430.** Normalform der Gleichung einer Geraden.

Die Gleichung einer Geraden AB (Fig. 242) kann auch ausgedrückt werden durch die Länge der Senkrechten $ON = d$ vom Coordinatenanfangspunkte auf die Gerade, und durch die Winkel $XON = \xi$ und $YON = \eta$, welche diese Senkrechte mit den positiven Coordinatenaxen bildet.

Fig. 242.



Die allgemeine Form der Gleichung dieser Geraden ist, wenn $BAX = \alpha$, $\operatorname{tang} \alpha = a$ und $OB = b$ gesetzt wird,

$$y = ax + b, \text{ oder}$$
$$y - ax - b = 0.$$

Werden alle Glieder dieser Gleichung mit $\cos \alpha$ multiplicirt, so hat man, da $a \cos \alpha = \operatorname{tang} \alpha \cos \alpha = \sin \alpha$ ist,

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha - b \cos \alpha = 0,$$

oder wegen $\alpha = \eta$

$$y \cos \eta - x \sin \eta - b \cos \eta = 0.$$

Nun ist $\sin \eta = -\cos \xi$ und $b \cos \eta = d$; die Gleichung der Geraden AB nimmt also folgende Form an:

$$x \cos \xi + y \cos \eta - d = 0.$$

Dieselbe Gleichung läßt sich auf analoge Weise auch für jede andere Lage der AB ableiten; nur müssen in den Fällen, wo $\cos \alpha$ und b entgegengesetzte Vorzeichen haben, die Glieder in der allgemeinen Form der Gleichung nicht mit $\cos \alpha$, sondern mit $-\cos \alpha$ multiplicirt werden.

Die Gleichung $x \cos \xi + y \cos \eta - d = 0$ heißt die Normalform der Gleichung einer geraden Linie. Sie hat drei Constanten $\cos \xi$, $\cos \eta$ und d, welche sich jedoch auf zwei reduciren, da $\cos \xi^2 + \cos \eta^2 = 1$ (§. 421, Zusatz 2), und somit durch $\cos \xi$ auch schon $\cos \eta$ bestimmt ist. Die Winkel ξ und η werden von 0^0 bis 180^0 gezählt, die Länge d wird unter allen Umständen als positiv angenommen.

Zusatz. Wie aus dem Voranstehenden hervorgeht, braucht man, um aus der allgemeinen Form der Gleichung einer Geraden ihre Normalform abzuleiten, nur alle Glieder der ersteren mit dem Factor

$$\pm \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang} \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

zu multipliciren. Es ist demnach für alle Werthe von x und y

$$x \cos \xi + y \cos \eta - d = \frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

woraus folgt:

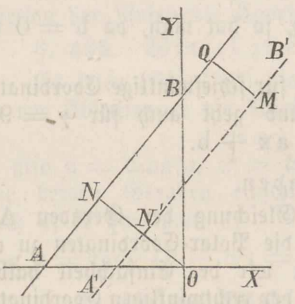
$$\cos \xi = \frac{-a}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad \cos \eta = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad d = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{1 + a^2}$ mit dem Vorzeichen von b übereinstimmend genommen werden muß.

§. 431. Entfernung eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Geraden.

1. Es sei (Fig. 243) $M = (x', y')$ der gegebene Punkt und $x \cos \xi + y \cos \eta - d = 0$ die in der Normalform gegebene Gleichung der Geraden AB.

Fig. 243.



Da $d = ON$ als positiv anzunehmen ist, so muß die Entfernung $D = MQ$ des Punktes M von der Geraden AB positiv oder negativ genommen werden, je nachdem M und der Coordinatenanfangspunkt auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der AB liegen. Nehmen wir hier den ersten Fall, also D positiv an.

Ziehen wir durch M die $A'B' \parallel AB$, so fällt die auf $A'B'$ Senkrechte ON' in die ON und bildet daher mit den Coordinatenaxen ebenfalls die Winkel ξ und η; die Gleichung der $A'B'$ ist also

$$x \cos \xi + y \cos \eta - d' = 0,$$

wenn $ON' = d'$ gesetzt wird.

Da der Punkt M (x', y') in dieser Geraden liegt, so ist

$$x' \cos \xi + y' \cos \eta - d' = 0,$$

daher

$$d' = x' \cos \xi + y' \cos \eta.$$

Nun ist $MQ = ON - ON'$, oder $D = d - d'$; folglich

$$D = d - x' \cos \xi - y' \cos \eta, \text{ oder}$$

$$D = -(x' \cos \xi + y' \cos \eta - d).$$

Da man zu demselben Resultate auch für jede andere Lage des Punktes M gelangt, so ergibt sich der Satz:

Der erste Theil der in der Normalform gegebenen Gleichung einer Geraden, negativ genommen, drückt die Entfernung des Punktes (x, y) von dieser Geraden aus.

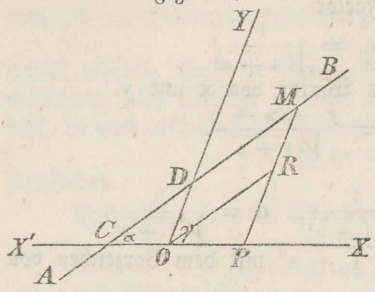
2. Ist die Gleichung der Geraden AB in der allgemeinen Form $y = ax + b$ gegeben, so hat man, da nach §. 430, Zusatz

$$x \cos \xi + y \cos \eta - d = \frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}} \text{ ist},$$

$$D = -\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

§. 432. Gleichung einer Geraden für schiefwinklige Coordinaten.

Fig. 244.



Es sei (Fig. 244) XOY ein Coordinatensystem, dessen Coordinatenwinkel γ ein schiefer ist, M ein beliebiger Punkt in der Geraden AB, welche die Abscissenaxe unter dem Winkel α, die Ordinatenaxe in D schneidet, und $OP = x$, $MP = y$. Setzt man $OD = b$ und zieht $OR \parallel AB$, so ist

$$y = MP = PR + MR = PR + b.$$

In dem $\triangle OPR$ ist nun

$$PR : OP = \sin POR : \sin PRO,$$

oder, da $POR = \alpha$ und $PRO = DOR = \gamma - \alpha$ ist,

$$PR : x = \sin\alpha : \sin(\gamma - \alpha), \text{ daher } PR = \frac{\sin\alpha}{\sin(\gamma - \alpha)} \cdot x.$$

Substituirt man diesen Werth in dem obigen Ausdrucke für y, so hat man

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\gamma - \alpha)} \cdot x + b, \text{ oder, wenn } \frac{\sin\alpha}{\sin(\gamma - \alpha)} = a' \text{ gesetzt wird,}$$

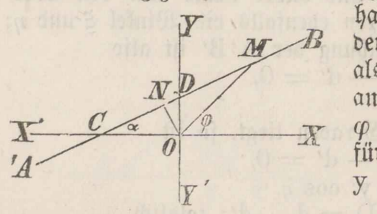
$$y = a'x + b.$$

Geht die Gerade AB durch den Ursprung, so hat man, da $b = 0$ ist, $y = a'x$.

Die Gleichung $y = a'x + b$ einer Geraden für schiefwinklige Coordinaten hat also dieselbe Form wie für rechtwinklige, und geht auch für $\gamma = 90^0$ sofort über in $y = \text{tang}\,\alpha \cdot x + b$ oder $y = ax + b$.

§. 433. Polargleichung einer Geraden.

Fig. 245.



Um die Gleichung der Geraden AB (Fig. 245) für die Polar-Coordinaten zu erhalten, nehmen wir der Einfachheit halber den Ursprung O der rechtwinkligen Coordinaten als Pol und die Abscissenaxe OX als Polaraxe an; für den Punkt M ist dann $r = OM$, $\varphi = MOX$. Die Gleichung der Geraden AB für rechtwinklige Coordinaten ist

$$y = ax + b, \text{ oder, da } a = \text{tang}\,\alpha \text{ ist,}$$

$$y\cos\alpha = x\sin\alpha + b\cos\alpha.$$

Ist nun $ON = d$ der Abstand des Poles von der Geraden AB, so hat man aus dem $\triangle DNO$, $d = b\cos\alpha$, daher

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = d.$$

Setzt man in dieser Gleichung $y = r\sin\varphi$ und $x = r\cos\varphi$ (§. 421), so erhält man

$$r\sin\varphi\cos\alpha - r\cos\varphi\sin\alpha = d,$$

woraus sich als Polargleichung der Geraden AB ergibt:

$$r = \frac{d}{\sin(\varphi - \alpha)}$$

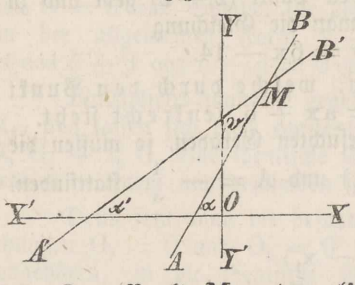
Kürzer erhält man diese Gleichung unmittelbar aus dem $\triangle MNO$; es ist

$$OM = \frac{ON}{\sin NMO}, \text{ d. i. } r = \frac{d}{\sin(\varphi - \alpha)}.$$

2. Zwei Gerade.

§. 434. Durchschnittspunkt zweier Geraden.

Fig. 246.



Es seien $y = ax + b \ldots 1)$,
$y = a'x + b' \ldots 2)$
die Gleichungen der beiden Geraden AB und A'B' (Fig. 246); man suche die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes M.

Für alle Punkte der Geraden AB ist $y = ax + b$; für alle Punkte der Geraden A'B' ist $y = a'x + b'$; für den Punkt, der in den beiden Geraden liegt, nämlich für den Durchschnittspunkt M, muß daher $y = ax + b$ und zugleich auch $y = a'x + b'$ sein. Dem Punkte M werden also jene Coordinaten x und y zukommen, durch welche beiden Gleichungen zugleich Genüge geleistet wird; diese Werthe ergeben sich aber durch Auflösung jener zwei Gleichungen; man erhält

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}, \quad y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

Aus den Gleichungen zweier Geraden kann man daher auch ohne Construction der Linien die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes finden.

§. 435. Winkel zweier Geraden.

Es seien (Fig. 246) die Gleichungen der Geraden AB und A'B', welche mit der Abscissenaxe die Winkel α und α' bilden,

$$y = ax + b \text{ und } y = a'x + b',$$

wo also $a = \text{tang } \alpha$, $a' = \text{tang } \alpha'$ ist; man soll den Winkel bestimmen, den diese beiden Geraden einschließen. Bezeichnet man diesen Winkel AMA' durch v, so hat man

$$\text{tang } v = \text{tang } (\alpha - \alpha') = \frac{\text{tang } \alpha - \text{tang } \alpha'}{1 + \text{tang } \alpha \text{ tang } \alpha'}, \text{ oder tang } v = \frac{a - a'}{1 + aa'}.$$

Z. B. Für den Winkel zweier Geraden, deren Gleichungen

$$y = 2x - 3 \text{ und } y = -3x + 2$$

sind, hat man $\text{tang } v = \frac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot -3} = -1$, daher $v = 135^0$.

§. 436. Aus der Gleichung $\text{tang } v = \frac{a - a'}{1 + aa'}$ folgt:

1. Sind die beiden Geraden AB und A'B' zu einander parallel, so ist der Winkel $v = 0$, folglich auch $\text{tang } v = 0$; daher muß $a = a'$ sein. Die Gleichung $a = a'$ drückt also die Bedingung des Parallelismus der zwei Geraden aus.

2. Sind die Geraden AB und A'B' auf einander senkrecht, so ist $v = 90^0$, folglich $\text{tang } v = \infty$; daher muß $1 + aa' = 0$, oder $a' = -\frac{1}{a}$ sein. Die Gleichung $a' = -\frac{1}{a}$ drückt somit die Bedingung des Senkrechtstehens der Geraden aus.

§. 437. Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt (x_1, y_1) geht und zu der Geraden $y = ax + b$ parallel ist.

Es sei $y = Ax + B$ die Gleichung der gesuchten Geraden. Damit die Gerade durch den Punkt (x_1, y_1) gehe, muß $y - y_1 = A(x - x_1)$ sein;

damit sie zu der Geraden $y = ax + b$ parallel sei, muß $A = a$ sein. Die verlangte Gleichung ist also

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

Z. B. Für eine Gerade, welche durch den Punkt $(2, -2)$ geht und zu der Geraden $y = 6x - 4$ parallel ist, hat man die Gleichung

$$y + 2 = 6(x - 2) \text{ oder } y = 6x - 14.$$

§. 438. Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt (x_1, y_1) geht und auf der Geraden $y = ax + b$ senkrecht steht.

Ist $y = Ax + B$ die Gleichung der gesuchten Geraden, so müssen die Bedingungsgleichungen $y - y_1 = A(x - x_1)$ und $A = -\frac{1}{a}$ stattfinden. Die gesuchte Gleichung ist somit

$$y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1).$$

Z. B. Zu einer Geraden, welche durch den Punkt (1, 2) geht und auf der Geraden $y = -\frac{x}{2} + 1$ senkrecht steht, gehört die Gleichung

$$y - 2 = 2(x - 1) \text{ oder } y = 2x.$$

§. 439. Gleichung der Halbirungslinie eines Winkels, dessen Schenkel durch ihre Gleichungen gegeben sind.

1. Es seien die in der Normalform gegebenen Gleichungen der Schenkel eines Winkels $x\cos\xi_1 + y\cos\eta_1 - d_1 = 0$ und $x\cos\xi_2 + y\cos\eta_2 - d_2 = 0$, welche Gleichungen wir der Kürze halber durch die Symbole

$$A_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 = 0$$

ausdrücken wollen.

a) Liegt der Coordinatenanfangspunkt in dem gegebenen Winkel selbst oder in seinem Scheitelwinkel, so sind die Entfernungen eines beliebigen Punktes (x, y) der Winkelhalbirungslinie von den Schenkeln (nach §. 431) im ersten Falle $-A_1$ und $-A_2$, im zweiten $+A_1$ und $+A_2$. Da nun diese Entfernungen gleich sein müssen, so ist in beiden Fällen $A_1 = A_2$, und somit

$$A_1 - A_2 = 0$$

die gesuchte Gleichung der Winkelhalbirungslinie.

b) Liegt der Coordinatenanfangspunkt in einem der Nebenwinkel des gegebenen Winkels, so haben die Abstände eines jeden Punktes (x, y) der Winkelhalbirenden von den beiden Schenkeln entgegengesetzte Vorzeichen; sie sind also entweder $-A_1$ und $+A_2$, oder $+A_1$ und $-A_2$, und man hat, da diese Entfernungen gleich sein müssen, in jedem Falle $A_1 = -A_2$; mithin ist hier

$$A_1 + A_2 = 0$$

die Gleichung der Winkelhalbirungslinie.

2. Sind die Gleichungen der Schenkel eines Winkels in der allgemeinen Form $y = a_1x + b_1$ und $y = a_2x + b_2$ gegeben, so ergibt sich aus 1. mit Rücksicht auf §. 430, Zusatz

$$\frac{y - a_1x - b_1}{\sqrt{1 + a_1^2}} - \frac{y - a_2x - b_2}{\sqrt{1 + a_2^2}} = 0$$

als Gleichung der Halbirungslinie des Winkels, in welchem der Coordinatenanfangspunkt liegt, und

$$\frac{y - a_1x - b_1}{\sqrt{1 + a_1^2}} + \frac{y - a_2x - b_2}{\sqrt{1 + a_2^2}} = 0$$

als Gleichung der Halbirungslinie seines Nebenwinkels.

§. 440. Bedingung, unter welcher sich drei Gerade in einem und demselben Punkte schneiden.

Es seien $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ die Gleichungen dreier Geraden, wo $G = 0$ das Symbol für die Gleichung einer Geraden ist, mag dieselbe in der allgemeinen Form $y - ax - b = 0$ oder in der Normalform $x \cos \xi + y \cos \eta - d = 0$ gegeben sein.

Multiplicirt man die gegebenen drei Gleichungen folgeweise mit λ_1, λ_2, λ_3, und lassen sich diese constanten Factoren so bestimmen, daß $\lambda_3 G_3 = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$ eine identische Gleichung wird, so schneiden sich die drei Geraden in einem und demselben Punkte.

Denn setzt man die besonderen Werthe für x und y, welche den Gleichungen $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ genügen und daher ihrem Durchschnittspunkte angehören, in die identische Gleichung $\lambda_3 G_3 = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$, so verschwindet der zweite Theil, also muß auch der erste Theil $\lambda_3 G_3 = 0$, und, da λ_3 eine constante Zahl ist, auch $G_3 = 0$ werden. Diese besonderen Werthe für x und y befriedigen somit alle drei gegebenen Gleichungen, d. h. die drei Geraden schneiden sich in einem gemeinschaftlichen Punkte.

Wenn also zwischen den Gleichungen von drei Geraden $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$ die identische Gleichung $\lambda_3 G_3 = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$ obwaltet, so schneiden sich die drei Geraden in einem und demselben Punkte.

In der Anwendung tritt am häufigsten die folgende, für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ sich ergebende Form der obigen identischen Gleichung auf:

$$G_3 = G_1 + G_2.$$

Sie enthält den Satz: Wenn von den Gleichungen dreier Geraden die eine gleich ist der Summe der beiden anderen, so schneiden sich die drei Geraden in einem und demselben Punkte.

§. 441. Zur Anwendung der voranstehenden Lehren sollen hier die analytischen Beweise einiger Lehrsätze vom geradlinigen Dreiecke folgen.

1. Die Halbirungslinien der drei inneren Winkel eines Dreieckes schneiden sich in einem und demselben Punkte (§. 67, 2).

Sind die Gleichungen der Seiten eines Dreieckes in der Normalform

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0,$$

so sind, wenn man den Coordinatenanfangspunkt innerhalb des Dreieckes annimmt, nach §. 439 die Gleichungen der Winkelhalbirungslinien

$$A_1 - A_2 = 0, \qquad A_1 - A_3 = 0, \qquad A_3 - A_2 = 0.$$

Da nun die erste dieser Gleichungen gleich ist der Summe der beiden anderen, so folgt nach §. 440, daß sich die drei Halbirungslinien in einem und demselben Punkte schneiden.

2. Die Halbirungslinien eines inneren Winkels und der zwei ihm nicht anliegenden Außenwinkel eines Dreieckes schneiden sich in einem und demselben Punkte.

Man erhält, wie früher, nach §. 439 als Gleichungen der drei Winkelhalbirenden

$$A_2 - A_1 = 0, \qquad A_1 + A_3 = 0, \qquad A_2 + A_3 = 0.$$

Die dritte Gleichung ist die Summe der beiden anderen; also schneiden sich die drei Winkelhalbirungslinien in demselben Punkte.

3. Die Halbirungslinien der drei Außenwinkel eines Dreieckes schneiden die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, welche in derselben Geraden liegen.

Es seien die Gleichungen der Seiten eines Dreieckes in der Normalform

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0.$$

Nimmt man den Ursprung der Coordinaten innerhalb des Dreieckes an, so sind die Gleichungen der Halbirungslinien der jenen Seiten gegenüberliegenden Außenwinkel

$$A_2 + A_3 = 0, \qquad A_1 + A_3 = 0, \qquad A_1 + A_2 = 0.$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Winkelhalbirenden $A_2 + A_3 = 0$ mit der gegenüberliegenden Seite $A_1 = 0$ müssen diese beiden Gleichungen zugleich befriedigen; sie müssen daher auch der Gleichung $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ Genüge leisten, d. h. der Durchschnittspunkt liegt in der Geraden, deren Gleichung $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ ist.

Ebenso folgt, daß auch der Durchschnittspunkt der Winkelhalbirenden $A_1 + A_3 = 0$ mit der Seite $A_2 = 0$, und der Durchschnittspunkt der Winkelhalbirenden $A_1 + A_2 = 0$ mit der Seite $A_3 = 0$ in der Geraden, deren Gleichung $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ ist, also mit dem früheren Durchschnittspunkte in derselben Geraden liegen.

4. Die Mittellinien eines Dreieckes schneiden sich in einem und demselben Punkte (§. 67, 4).

Es sei das Dreieck ABC (Fig. 247). Zur Vereinfachung der Rechnung wählen wir, da dadurch die Allgemeinheit des Resultates nicht beschränkt wird, den Eckpunkt A selbst als Coordinatenanfangspunkt und die Seite AB als Abscissenaxe. Dann haben wir zur analytischen Bestimmung der drei Eckpunkte

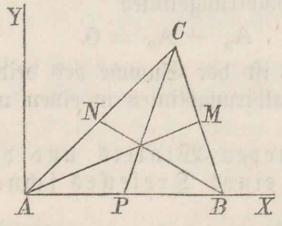
$$A = (0, 0), \qquad B = (x_2, 0), \qquad C = (x_3, y_3).$$

Sind M, N, P die Halbirungspunkte der den Eckpunkten A, B, C gegenüberliegenden Seiten des Dreieckes, so ist

$$M = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_3}{2}\right), \qquad N = \left(\frac{x_3}{2}, \frac{y_3}{2}\right), \qquad P = \left(\frac{x_2}{2}, 0\right).$$

Für die Mittellinien AM, BN, CP als die Geraden, welche durch die obigen Punktpaare gehen, erhalten wir daher nach §. 429 folgeweise die Gleichungen:

Fig. 247.



$$y = \frac{\frac{y_3}{2}}{\frac{x_2 + x_3}{2}} \cdot x,$$

$$y = \frac{\frac{y_3}{2}}{\frac{x_3}{2} - x_2}(x - x_2),$$

$$y = \frac{y_3}{x_3 - \frac{x_2}{2}}\left(x - \frac{x_2}{2}\right),$$

welche sich auch so ausdrücken lassen:

$$(x_2 + x_3)\,y - y_3 x = 0,$$
$$(x_3 - 2x_2)\,y - y_3 x + x_2 y_3 = 0,$$
$$(2x_3 - x_2)\,y - 2y_3 x + x_2 y_3 = 0.$$

Da nun die dritte Gleichung gleich ist der Summe der beiden anderen, so schneiden sich die durch diese Gleichungen dargestellten Mittellinien in einem und demselben Punkte.

3. Uebungsaufgaben.

§. **442.** 1. Construire die Gleichungen:

a) $y = 3x + 5$, b) $= -2x + 3$, c) $x + 3y = 9$.

2. Gegeben sind die Punkte

a) $(1, -1)$ und $(-2, 2)$, b) $(-\frac{1}{2}, 3)$ und $(3, 0)$;

suche die Gleichung der Geraden, welche durch diese Punkte geht.

3. Suche die Coordinaten des Durchschnittspunktes, sowie den Winkel der beiden Geraden.

a) $y = -3x + 5$ und $y = 2x - 4$;

b) $y = \frac{2x}{3} + 3$ und $4y = -2x + 3$.

4. Die Coordinaten der Eckpunkte eines Dreieckes sind $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$; suche a) die Länge, b) die Gleichung jeder Seite.

5. Die Gleichungen der Seiten eines Dreieckes sind $y = x + 3$, $y = -4x + 8$, $y = -\frac{x}{2} - 6$; wie groß ist der Flächeninhalt des Dreieckes?

6. Suche die Gleichung einer Geraden, welche

a) durch den Ursprung geht und zu der Geraden $y = ax + b$ parallel ist;
b) durch den Punkt (x_1, y_1) geht und zu der Abscissenaxe parallel ist;
c) durch den Punkt (x_1, y_1) geht und zu der Ordinatenaxe parallel ist.

7. Suche die Gleichung einer Geraden, welche

a) durch den Ursprung geht und auf der Geraden $y = ax + b$ senkrecht ist;
b) durch den Punkt (x_1, y_1) geht und auf der Abscissenaxe senkrecht ist;
c) durch den Punkt (x_1, y_1) geht und auf der Ordinatenaxe senkrecht ist.

8. Gegeben sind

a) der Punkt $(2, -1)$ und die Gerade $y = 5x + 1$;
b) „ „ $(-3, 0)$ „ „ „ $y = -3x + 4$.

Suche

α) die Gleichung der Geraden, welche durch den gegebenen Punkt geht und zu der gegebenen Geraden parallel ist;
β) die Gleichung der Geraden, welche durch den gegebenen Punkt geht und auf die gegebene Gerade senkrecht ist;
γ) die Entfernung des gegebenen Punktes von der gegebenen Geraden.

9. Die Gleichungen der Schenkel eines Winkels sind $y = 2x - 5$ und $y = -\frac{x}{2} + 2$; suche die Gleichung der Winkelhalbirenden.

10. Beweise analytisch folgende Lehrsätze:

a) Die Halbirungslinien eines Winkels und seines Nebenwinkels sind auf einander senkrecht. (§. 439, 2.)
b) Die Halbirungwinkel zweier innerer Winkel und des dritten Außenwinkels eines Dreieckes schneiden die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, welche in derselben Geraden liegen.
c) Die drei Ecklothe eines Dreieckes (§. 67, 3) schneiden sich in einem und demselben Punkte.
d) Die drei Mittellothe eines Dreieckes (§. 67, 1) schneiden sich in einem und demselben Punkte.

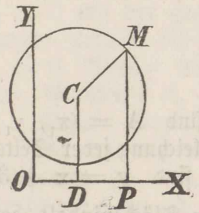
III. Die Kreislinie.

1. Analytische Darstellung der Kreislinie.

§. 443. Allgemeine Gleichung des Kreises für rechtwinklige Coordinaten.

In der Kreislinie sind alle Punkte von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt. Um die Gleichung des Kreises zu erhalten, darf man daher nur diese Haupteigenschaft desselben in die analytische Zeichensprache übertragen.

Fig. 248.



Es seien (Fig. 248) $OD = p$, $CD = q$ die Coordinaten des Mittelpunktes C in Bezug auf das rechtwinklige System XOY, M ein beliebiger Punkt der Kreislinie, seine Coordinaten $x = OP$, $y = MP$ und $CM = r$ der Halbmesser; so hat man für den Abstand des Punktes M vom Mittelpunkte C (nach §. 414) den Ausdruck $\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}$. Da nun dieser Abstand für alle Punkte der Kreislinie constant und $= r$ sein muß, so ist

$$(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2 \ldots 1)$$

die Gleichung des Kreises.

Die Gleichung 1) enthält drei constante Größen, was anzeigt, daß zur vollkommenen Bestimmung der Lage und Größe eines Kreises drei Bedingungen erforderlich sind. Man kann diese drei Constanten p, q, r beliebig ändern, so bedeutet die Gleichung immer wieder einen Kreis, wenn auch dessen Lage und Größe eine andere wird; der Charakter der krummen Linie wird durch die Aenderung der Constanten durchaus nicht geändert.

Sind z. B. $p = 1$, $q = 2$ die Coordinaten des Mittelpunktes und $r = 3$ der Halbmesser des Kreises, so ist

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = 9,$$

oder

$$x^2+y^2-2x-4y = 4$$

die Gleichung desselben.

Die Gleichung 1) kann man auch so darstellen:

$$(x-p)^2+(y-q)^2-r^2 = 0 \ldots 2)$$

Diese Form heißt die Normalform der Gleichung eines Kreises; sie wird oft der Kürze halber durch das Symbol $K = 0$ ausgedrückt.

Zusatz. Da $(x-p)^2+(y-q)^2$ das Quadrat der Entfernung des Punktes $M = (x, y)$ vom Mittelpunkte des Kreises bedeutet, so ist $(x-p)^2+(y-q)^2-r^2$, d. i. das Quadrat dieser Entfernung vermindert um das Quadrat des Halbmessers, die Potenz des Punktes M in Bezug auf den Kreis (§. 179). Man kann daher sagen:

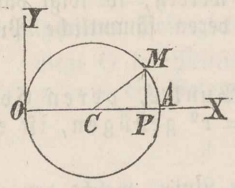
Der erste Theil K der in der Normalform $K = 0$ gegebenen Gleichung eines Kreises drückt die Potenz des Punktes (x, y) in Beziehung auf diesen Kreis aus.

§. 444. Für besondere Lagen der Coordinatenaxen nimmt die Gleichung des Kreises eine noch einfachere Gestalt an.

1. Liegt der Ursprung O (Fig. 249) in der Peripherie des Kreises, und geht die positive Abscissen-Halbaxe durch den Mittelpunkt desselben, so ist $p = r$, $q = 0$, und die Gleichung 1) geht über in

$$x^2+y^2 = 2rx \ldots 3)$$

Fig. 249.



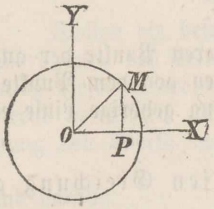
Diese Gleichung heißt die Scheitelgleichung des Kreises; sie kann aus der nebenstehenden Figur auch unmittelbar hergeleitet werden.

Aus der Gleichung 3) ergibt sich $y^2 = x(2r - x)$, also $MP^2 = OP \cdot PA$, d. h. die Senkrechte von der Peripherie eines Kreises auf den Durchmesser ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers.

2. Liegt der Ursprung O der Coordinaten (Fig. 250) im Mittelpunkte des Kreises, so ist $p = 0$, $q = 0$, und man erhält aus 1) die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 \ldots 4)$$

Fig. 250.



Diese Gleichung, welche die Mittelpunktsgleichung des Kreises heißt, ergibt sich auch für sich aus der nebenstehenden Figur.

Die Gleichungen 3) und 4) enthalten nur eine einzige Constante, was ganz natürlich ist, da von den drei im Allgemeinen nöthigen Bedingungen zwei bereits durch die Voraussetzungen, unter welchen jene Gleichungen stattfinden, ausgesprochen sind.

§. 445. Discussion der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$.

Die Gleichung einer Linie charakterisirt dieselbe dergestalt, daß man die Gleichung nur unter verschiedenen Gesichtspunkten zu betrachten und die Ergebnisse in die gewöhnliche Wortsprache zu übertragen braucht, um die Gestalt und alle anderen Eigenschaften der Linie herauszulesen, und von ihr ohne alle geometrische Hilfsmittel ein klares Bild zu erhalten. Zur räumlichen Deutung der Gleichung des Kreises wählen wir die Mittelpunktsgleichung 4) als die einfachste.

1. Aus $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ folgt, daß jedem Werthe von x, für welchen überhaupt y einen reellen Werth hat, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von y entsprechen; die Kreislinie wird also von der Abscissenaxe in zwei congruente Theile getheilt.

2. Aus $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$ folgt, daß auch zu jedem Werthe von y, für welchen überhaupt x reell ausfällt, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von x gehören; die Kreislinie erstreckt sich demnach auch zu beiden Seiten der Ordinatenaxe in zwei congruenten Aesten.

Die Kreislinie wird daher durch die beiden Coordinatenaxen in vier congruente Theile getheilt.

3. Setzt man in der Gleichung $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ die Abscisse $x = o$, so erhält man für die Durchschnittspunkte des Kreises mit der Ordinatenaxe $y = \pm r$; die Kreislinie schneidet also die Ordinatenaxe in zwei Punkten, welche von dem Ursprunge auf entgegengesetzten Seiten den Abstand a haben. Aus $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$ folgt für $y = o$ ebenso $x = \pm r$, d. h. die Kreislinie schneidet auch die Abscissenaxe in zwei Punkten, welche ebenfalls auf entgegengesetzten Seiten vom Ursprunge den Abstand a haben.

4. Für $x > r$ wird y imaginär, für $y > r$ wird x imaginär; der größte Werth, den man für x oder y setzen kann, ist also der Halbmesser r.

5. Da die beiden Coordinatenaxen als feste Verbindung beliebig um den Mittelpunkt gedreht werden können, ohne daß sich die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$

ändert, und da in jeder Lage die beiden Axen von der krummen Linie in demselben Abstande $\pm r$ vom Mittelpunkte geschnitten werden, so folgt daraus die charakteristische Eigenschaft der Kreislinie, daß deren sämmtliche Punkte vom Mittelpunkte gleich weit abstehen.

§. 446. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Coordinaten der Gleichung $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ genügen, ist eine Kreislinie.

Es sei M (Fig. 248) ein beliebiger Punkt der Linie, welche der gegebenen Gleichung angehört. Setzt man $OP = x$ und $MP = y$, und sind p und q die Coordinaten des Punktes C, so hat man (nach §. 414) $CM^2 = (x - p)^2 + (y - q)^2$, daher mit Rücksicht auf die obige Gleichung

$$CM^2 = r^2 \text{ und folglich } CM = r.$$

Da das von M Bewiesene auch von jedem anderen Punkte der angenommenen Linie gilt, so folgt, daß jeder Punkt derselben von dem Punkte C denselben Abstand r hat, daß somit die zu obiger Gleichung gehörige Linie eine Kreislinie ist.

§. 447. Construction eines Kreises, dessen Gleichung gegeben ist.

Um einen Kreis, dessen Gleichung gegeben ist, zu construiren, bringe man diese zuerst auf die Form $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, woraus sich die zur Verzeichnung erforderlichen Coordinaten des Mittelpunktes und der Halbmesser unmittelbar ergeben.

Soll z. B. der Kreis, dessen Gleichung

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$$

ist, construirt werden, so addire man zu $x^2 + 4x$ das Quadrat des halben Coefficienten von x, nämlich 4, und zu $y^2 - 6y$ das Quadrat des halben Coefficienten von y, nämlich 9; addire aber die Zahlen 4 und 9, damit die Gleichheit nicht gestört wird, auch auf der zweiten Seite dazu; man erhält

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 3 + 4 + 9,$$

oder

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16.$$

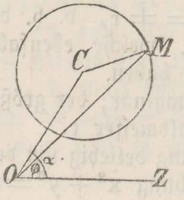
Es ist somit $p = -2$, $q = 3$, $r = \sqrt{16} = 4$.

Um nun den Kreis zu verzeichnen, suche man zuerst einen Punkt, dessen Coordinaten -2 und 3 sind, und beschreibe aus demselben als Mittelpunkt einen Kreis, dessen Halbmesser $= 4$ ist.

§. 448. Polargleichung des Kreises.

Es sei (Fig. 251) C der Mittelpunkt eines Kreises, $CM = a$ dessen Halbmesser, ferner O der Pol des Polar-Coordinatensystems, $OC = \varrho$ der Radiusvector des Mittelpunktes und $COZ = \alpha$ der Winkel, den OC mit der Polaraxe OZ bildet. Ist nun M irgend ein Punkt der Kreislinie, also $r = OM$ sein Radiusvector und $\varphi = MOZ$ der Winkel desselben mit der Polaraxe, so erhält man, wenn der Halbmesser $CM = a$ gesetzt wird, aus dem Dreiecke CMO

Fig. 251.



$$CM^2 = OM^2 + OC^2 - 2OM \cdot OC \cdot \cos COM$$

oder $a^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos(\alpha - \varphi)$, woraus

$$r = \varrho\cos(\alpha - \varphi) \pm \sqrt{a^2 - \varrho^2\sin(\alpha - \varphi)^2}$$

als allgemeine Polargleichung des Kreises folgt.

Liegt O im Mittelpunkte C des Kreises, so ist $\varrho = 0$, $\alpha = 0$, und daher $r = a$ die Polargleichung des Kreises.

2. Die Gerade und der Kreis.

§. 449. Bedingungen für den Durchschnitt und die Berührung einer geraden Linie mit dem Kreise.

Es seien die Gleichungen eines Kreises und einer Geraden bezüglich

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad y = ax + b.$$

Sollen die beiden Linien gemeinschaftliche Punkte haben, so müssen deren Coordinaten den beiden gegebenen Gleichungen Genüge leisten. Zur Bestimmung dieser Coordinaten wird man daher die beiden Gleichungen als coexistirend betrachten und auflösen. Man erhält, wenn man in der ersten Gleichung den Werth von y aus der zweiten substituirt,

$$x^2 + (ax + b)^2 = r^2,$$

und daraus

$$x = \frac{-ab}{1+a^2} \pm \sqrt{\frac{(1+a^2)\,r^2 - b^2}{(1+a^2)^2}}$$

$$= \frac{-ab}{1+a^2} \pm \sqrt{\frac{1}{1+a^2}\cdot\left(r^2 - \frac{b^2}{1+a^2}\right)},$$

oder, da $\frac{b^2}{1+a^2} = d^2$ ist (§. 430, 2), wo d den Abstand der Geraden vom Coordinatenanfangspunkte, hier vom Mittelpunkte des Kreises bedeutet,

$$x = \frac{-ab}{1+a^2} \pm \sqrt{\frac{r^2-d^2}{1+a^2}}.$$

Aus diesem Ausdrucke folgt:

1. Ist $d < r$, so hat x zwei reelle und verschiedene Werthe; man erhält also zwei Abscissen, deren zugehörige Ordinaten sich aus der Gleichung $y = ax + b$ ergeben. Die Gerade und der Kreis haben also in diesem Falle zwei gemeinschaftliche Punkte, d. h. die Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten.

2. Ist $d = r$, so ergibt sich

$$x = \frac{-ab}{1+a^2} \text{ und } y = ax + b = \frac{b}{1+a^2}.$$

Die Gerade und der Kreis haben in diesem Falle nur einen gemeinschaftlichen Punkt, d. h. die Gerade ist eine Tangente des Kreises.

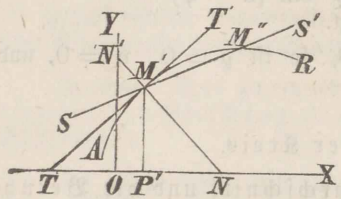
3. Ist endlich $d > r$, so sind die Werthe von x imaginär; die Gerade hat dann mit der Kreislinie keinen Punkt gemeinschaftlich.

Zu denselben Ergebnissen gelangten wir auch in §. 128.

§. 450. Allgemeiner Begriff der Tangente.

Es sei AR (Fig. 252) irgend eine krumme Linie und M′ der Punkt, in welchem sie von der Geraden TT′ berührt werden soll. Man denke sich durch diesen Berührungspunkt M′ und durch einen benachbarten Punkt M″ zuerst eine Secante SS′ gezogen und diese dann um den Punkt M′ so gedreht, daß der Punkt M″ jenem M′ immer näher rückt; dann wird sich auch die Secante SS′ der Tangente TT′ immer mehr nähern und endlich mit ihr

Fig. 252.



zusammenfallen, wenn der Punkt M'' auf den Berührungspunkt M' zu liegen kommt.

Man kann daher die Tangente einer krummen Linie als eine Secante derselben betrachten, welche durch die Drehung um den einen Durchschnittspunkt in eine solche Lage gebracht wurde, daß der zweite Durchschnittspunkt mit dem ersten zusammenfällt.

Eine im Berührungspunkte M' auf der Tangente senkrechte Gerade M'N heißt eine Normale der krummen Linie.

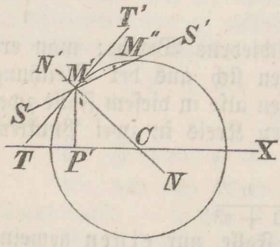
Bei der Berührung einer krummen Linie mit einer Geraden sind nachstehende vier Größen von Wichtigkeit:

1. Die Tangente M'T, d. i. die Länge der Berührungslinie vom Berührungspunkte bis zum Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe;
2. die Subtangente P'T, d. i. die Projection der Tangente auf die Abscissenaxe;
3. die Normale M'N, d. i. die Länge der Normallinie zwischen dem Berührungspunkte und der Abscissenaxe; und
4. die Subnormale P'N, d. i. die Projection der Normale auf die Abscissenaxe.

Von diesen vier Berührungsgrößen sind die Tangente und die Normale wesentlich positiv; die Subtangente und die Subnormale dagegen positiv oder negativ, je nachdem sie von der Ordinate aus nach der positiven oder negativen Abscissenrichtung liegen.

§. 451. Gleichungen der Tangente und der Normale am Kreise.

Fig. 253.



Es sei (Fig. 253) $M' = (x', y')$ der Berührungspunkt und $M'' = (x'', y'')$ ein benachbarter Punkt der Kreislinie $x^2 + y^2 = r^2$.

Für die Secante SS' welche durch die Punkte (x', y') und (x'', y'') geht, hat man die Gleichung

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \ldots 1).$$

Da (x', y') und (x'', y'') Punkte des Kreises sind, so müssen die Bedingungsgleichungen

$$x'^2 + y'^2 = r^2, \quad x''^2 + y''^2 = r^2$$

stattfinden, durch deren Subtraction sich

$$(x''^2 - x'^2) + (y''^2 - y'^2) = 0,$$

oder $$(x'' + x')(x'' - x') + (y'' + y')(y'' - y') = 0,$$

und daher $$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{x'' + x'}{y'' + y'} \ldots\ldots 2)$$

ergibt. Wird dieser Werth in 1) substituirt, so erhält man für die Gleichung der Secante SS'

$$y - y' = -\frac{x'' + x'}{y'' + y'}(x - x') \ldots. 3).$$

1. Dreht sich nun die Secante SS' um den Punkt M', bis M'' mit M' zusammenfällt, so wird sie in die Lage der Tangente TT' kommen, und man erhält für diese, wenn in 3) $x'' = x'$, $y'' = y'$ gesetzt wird, die Gleichung

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x') \ldots\ 4),$$

welche sich, da $x'^2 + y'^2 = r^2$ ist, auch so darstellen läßt:

$$xx' + yy' = r^2 \ldots\ 5).$$

Die Größe $-\frac{x'}{y'}$ in 4) ist die Richtungsconstante der Tangente.

2. Für die Normale NN', als eine durch den Punkt (x', y') gehende Gerade, hat die Gleichung die Form

$$y - y' = a'(x - x') \ldots\ 6).$$

Da die Normale auf der Tangente senkrecht steht, so muß $a' = \frac{y'}{x'}$ (§. 435) sein, und die gesuchte Gleichung der Normallinie ist

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x')$$

oder

$$y = \frac{y'}{x'}x \ldots\ 7),$$

woraus hervorgeht, daß die Normale durch den Mittelpunkt des Kreises geht.

§. 452. Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

1. Um die Subtangente P'T (Fig. 253) zu erhalten, suche man zuerst die Abscisse x des Punktes T, indem man in der Gleichung 5) der Tangente $y = o$ setzt; man erhält $x = \frac{r^2}{x'}$, daher ist

$$\text{Subtangente } P'T = x - x' = \frac{r^2 - x'^2}{x'} = \frac{y'^2}{x'}.$$

2. Zur Bestimmung der Tangente M'T hat man aus dem rechtwinkligen Dreiecke M'P'T

$$M'T^2 = M'P'^2 + P'T^2 = y'^2 + \frac{y'^4}{x'^2} = \frac{y'^2}{x'^2}(x'^2 + y'^2) = \frac{r^2 y'^2}{x'^2},$$

daher

$$\text{Tangente } M'T = \frac{ry'}{x'}.$$

3. Ferner erhält man: Subnormale $P'C = -x'$.

4. Endlich ist noch: Normale $M'C = r$.

§. 453. Von einem Punkte (m, n) außerhalb eines Kreises soll an diesen eine Tangente gezogen werden; man bestimme den Berührungspunkt (x', y').

Ist $x^2 + y^2 = r^2$ die Gleichung des gegebenen Kreises, so ist $xx' + yy' = r^2$ die Gleichung der Tangente für den Berührungspunkt (x', y'). Da (x', y') ein Punkt des gegebenen Kreises ist, so hat man

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \ldots\ 1).$$

Da ferner die Tangente durch den Punkt (m, n) gehen soll, so muß ihrer Gleichung Genüge geschehen, wenn man darin m, n statt x, y setzt; es ist daher auch

$$mx' + ny' = r^2 \ldots\ 2).$$

Aus 1) und 2) folgt nun durch Elimination

$$x' = \frac{r^2 m \pm rn\sqrt{d^2 - r^2}}{d^2}, \quad y' = \frac{r^2 n \mp rm\sqrt{d^2 - r^2}}{d^2},$$

wenn $m^2 + n^2 = d^2$ gesetzt wird, wo also d die Entfernung des Punktes (m, n) vom Kreismittelpunkte bedeutet.

Aus diesen Werthen von x' und y' ergibt sich, daß es entweder zwei verschiedene Berührungspunkte oder einen einzigen oder keinen Berührungspunkt gibt, je

nachdem $d \gtreqless r$ ist, d. i. je nachdem der Punkt (m, n) außerhalb des Kreises, auf der Peripherie, oder innerhalb des Kreises liegt.

Um in dem ersten Falle die zwei Berührungspunkte geometrisch zu construiren, subtrahire man die Gleichung 2) von 1), wodurch man

$$x'^2 + y'^2 - mx' - ny' = o, \text{ oder}$$
$$\left(x' - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(m^2 + n^2) \ldots . \; 3)$$

erhält, und suche dann die geometrischen Oerter der Gleichungen 1) und 3), indem man in denselben x', y' als veränderliche Coordinaten betrachtet.

Man erhält dadurch dieselbe Construction, wie in §. 164, 6.

3. Zwei Kreise.

§. 454. **Bedingungen für den Durchschnitt und die Berührung zweier Kreise.**

Es seien O und o die Mittelpunkte zweier Kreise, R und r ihre Halbmesser und $Oo = c$ ihre Centrale. Man kann unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung O als den Coordinatenanfangspunkt und Oo als die Abscissenaxe annehmen; dann sind die Gleichungen der beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ und } (x - c)^2 + y^2 = r^2.$$

Um die Coordinaten der den beiden Kreislinien gemeinschaftlichen Punkte zu erhalten, wird man diese beiden Gleichungen verbinden und aus denselben x und y bestimmen. Subtrahirt man zu diesem Ende die zweite Gleichung von der ersten, so erhält man

$$x^2 - (x - c)^2 = R^2 - r^2 \text{ oder } 2cx - c^2 = R^2 - r^2,$$

woraus

$$x = \frac{c^2 + R^2 - r^2}{2c}$$

folgt. Substituirt man diesen Werth in die erste Gleichung, so ergibt sich

$$y = \pm \frac{1}{2c} \sqrt{4c^2 R^2 - (c^2 + R^2 - r^2)^2},$$

oder, da

$$\begin{aligned} 4c^2 R^2 - (c^2 + R^2 - r^2)^2 &= (2cR + c^2 + R^2 - r^2)(2cR - c^2 - R^2 + r^2) \\ &= \{(c + R)^2 - r^2\} \cdot \{r^2 - (c - R)^2\} \\ &= (c + R + r)(c + R - r)(r + c - R)(r - c + R) \end{aligned}$$

ist,

$$y = \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(c + R + r)(c + R - r)(c - R + r)(R + r - c)}.$$

Hieraus folgt, daß sich für y im Allgemeinen zwei Werthe ergeben, welche, je nachdem das Product unter dem Wurzelzeichen positiv, Null, oder negativ ist, reell und verschieden, reell und gleich, oder imaginär sind, daß demnach die beiden Kreise entweder zwei Punkte, oder einen einzigen, oder keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Welcher von diesen Fällen stattfindet, hängt, da man immer $R \geq r$ annehmen kann und dann die Factoren $c + R + r$ und $c + R - r$ wesentlich positiv sind, von der Beschaffenheit der Factoren $c - R + r$ und $R + r - c$ ab.

1. Haben die Factoren $c - R + r$ und $R + r - c$ gleiche Vorzeichen, so können sie nur positiv sein, weil nicht zugleich $c < R - r$ und $c > R + r$

sein kann. In diesem Falle, wo also $R - r < c < R + r$ ist, hat y zwei reelle und entgegengesetzte Werthe; die beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten, welche gleiche aber entgegengesetzt liegende Ordinaten und dieselbe Abscisse haben.

2. Ist einer der Factoren $R + r - c$ und $c - R + r$ Null, also

entweder $c = R + r$ oder $c = R - r$,

so wird $y = 0$; die beiden Kreise haben nur einen gemeinschaftlichen Punkt, d. i. sie berühren sich, und zwar im ersten Falle von außen, im zweiten von innen.

3. Haben die Factoren $R + r - c$ und $c - R + r$ verschiedene Vorzeichen, ist also gleichzeitig

entweder $c > R + r$, folglich auch $c > R - r$,

oder $c < R - r$, folglich auch $c < R + r$,

so wird y imaginär; die zwei Kreise haben keinen Punkt mit einander gemeinschaftlich, es liegt der eine Kreis im ersten Falle ganz außerhalb, im zweiten ganz innerhalb des zweiten Kreises.

Die analytische Untersuchung führt hiernach auf die schon aus §. 141 bekannten Sätze über die Lage zweier Kreise.

§. 455. Gleichung der Potenzlinie zweier Kreise.

Es seien allgemein die Gleichungen zweier Kreise

$$(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 - r_1^2 = 0 \text{ und}$$
$$(x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 - r_2^2 = 0,$$

welche wir kürzer durch

$$K_1 = 0 \text{ und } K_2 = 0$$

ausdrücken.

Durch Subtraction dieser Gleichungen erhält man die Gleichung

$$K_1 - K_2 = 0, \text{ oder}$$
$$2x(p_2 - p_1) + 2y(q_2 - q_1) + p_1^2 + q_1^2 - r_1^2 - (p_2^2 + q_2^2 - r_2^2) = 0,$$

also die Gleichung einer geraden Linie.

Um die nähere Beschaffenheit dieser Geraden kennen zu lernen, beachte man, daß K_1 und K_2 die Potenzen des Punktes (x, y) in Beziehung auf die zwei gegebenen Kreise bedeuten (§. 443, Zusatz). Die Gleichung $K_1 - K_2 = 0$ oder $K_1 = K_2$ drückt demnach aus, daß jeder Punkt der durch sie dargestellten Geraden in Beziehung auf die beiden Kreise gleiche Potenzen hat, daß also diese Gerade die Potenzlinie (§. 180) der zwei Kreise ist. Daraus folgt:

Sind $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ die in der Normalform gegebenen Gleichungen zweier Kreise, so ist $K_1 - K_2 = 0$ die Gleichung ihrer Potenzlinie.

Ganz einfach kann man nun folgenden Satz analytisch beweisen:

Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem und demselben Punkte (§. 182).

Es seien $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ die Gleichungen dreier Kreise in ihrer Normalform; dann sind die Gleichungen der Potenzlinien von je zwei Kreisen

$$K_1 - K_2 = 0, \qquad K_1 - K_3 = 0, \qquad K_3 - K_2 = 0.$$

Da nun die erste der letzteren drei Gleichungen gleich ist der Summe der beiden anderen, so schneiden sich die durch diese Gleichungen dargestellten Geraden, d. i. die drei Potenzlinien in einem gemeinschaftlichen Punkte (§. 440).

4. Uebungsaufgaben.

§. **456.** 1. Die Gleichung eines Kreises ist

a) $36x^2 + 36y^2 + 36x + 144y + 89 = 0$,
b) $x^2 + y^2 = 6x + 8y + 24$,
c) $16x^2 + 16y^2 = 16x - 24y + 3$;

bestimme die Coordinaten des Mittelpunktes und den Halbmesser.

2. Wie viel Punkte hat die Gerade

a) $y = 6x - 12$, b) $4x + 3y = 50$, c) $4y = x + 40$

mit einem Kreise, dessen Gleichung $x^2 + y^2 = 100$ ist, gemeinschaftlich?

3. Welches ist die Länge einer vom Punkte (x', y') an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ gezogenen Tangente?

4. Die Gleichung der Polare eines gegebenen Punktes in Beziehung auf einen gegebenen Kreis zu finden (§. 176).

5. Bestimme den Pol der Geraden $3x + 4y = 7$ für den Kreis $x^2 + y^2 = 14$.

6. Bestimme das Potenzcentrum für drei gegebene Kreise.

7. Den äußeren und den inneren Aehnlichkeitspunkt für zwei gegebene Kreise analytisch zu bestimmen (§. 144).

8. Bestimme analytisch die äußeren und die inneren Aehnlichkeitspunkte für drei gegebene Kreise und beweise, daß a) die drei äußeren Aehnlichkeitspunkte, b) je zwei innere und ein äußerer Aehnlichkeitspunkt in einer Geraden liegen (§. 415).

9. Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher

a) durch drei gegebene Punkte geht;
b) durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt;
c) durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt;
d) durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kreise berührt;
e) drei gegebene Kreise berührt.

10. Die Gleichung für den geometrischen Ort der Scheitel aller Dreiecke zu finden, welche auf der Grundlinie a stehen, und in welchen die beiden anderen Seiten das Verhältniß m : n haben.

IV. Die Ellipse.

1. Analytische Darstellung der Ellipse.

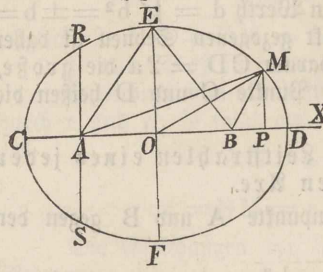
§. **457.** Die Ellipse ist eine Linie von solcher Beschaffenheit, daß die Summe der Abstände jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten constant ist.

Sind A und B (Fig. 254) die zwei gegebenen Punkte, und ist $2a$ die constante Summe der Abstände eines jeden Punktes der Ellipse von jenen zwei Punkten, so ist M ein Punkt der Ellipse, wenn $AM + BM = 2a$ ist.

Die zwei festen Punkte A und B heißen die Brennpunkte der Ellipse, die von ihnen zu irgend einem Punkte M gezogenen Strecken AM und BM die Leitstrahlen dieses Punktes.

§. **458.** Mittelpunktsgleichung der Ellipse für rechtwinklige Coordinaten.

Fig. 254.



Halbirt man (Fig. 254) den Abstand AB der beiden Brennpunkte im Punkte O, und nimmt O als Ursprung der Coordinaten und OBX als Abscissenaxe an, so ist für irgend einen Punkt M, $x = OP$ und $y = MP$. Aus den rechtwinkligen Dreiecken APM und BPM folgt

$$AM = \sqrt{AP^2 + MP^2},$$
$$BM = \sqrt{BP^2 + MP^2}.$$

oder, wenn $OA = OB = e$ gesetzt wird,

$$AM = \sqrt{(x + e)^2 + y^2},$$
$$BM = \sqrt{(x - e)^2 + y^2},$$

Ist nun M ein Punkt der Ellipse, so muß

$$\sqrt{(x + e)^2 + y^2} + \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a$$

sein. Wird diese Gleichung rational gemacht, so erhält man

$$(a^2 - e^2)\, x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - e^2).$$

Da im Dreiecke ABM $AM + BM > AB$, also $2a > 2e$, oder $a > e$ ist, so ist auch $a^2 > e^2$, und somit die Differenz $a^2 - e^2$ positiv. Drückt man nun $a^2 - e^2$ durch die positive Größe b^2 aus, so hat man

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

als Gleichung der Ellipse. Sie läßt sich auch so darstellen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§. 459. Discussion der Gleichung $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

1. Löst man diese Gleichung nach y und dann nach x auf, so erhält man

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ und } x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

woraus hervorgeht, daß zu jedem Werthe von x, für welchen y reell ausfällt, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von y, und ebenso zu jedem Werthe von y, für welchen x reell wird, zwei solche Werthe von x gehören.

Die Ellipse wird also durch die beiden Coordinatenaxen in vier congruente Aeste getheilt. Der Punkt O heißt darum der Mittelpunkt der Ellipse.

2. Aus $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ folgt für $y = o$, $x = \pm a$; und aus $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ für $x = o$, $y = \pm b$. Die Ellipse schneidet also die Abscissenaxe in den Abständen $+a$ und $-a$, und die Ordinatenaxe in den Abständen $+b$ und $-b$ vom Anfangspunkte.

3. Der größte Werth, den x annehmen kann, ist a, und der größte Werth von y ist b; für $x > a$ wird y, für $y > b$ wird x imaginär. Zieht man daher mit der Ordinatenaxe in den Abständen $+a$ und $-a$, mit der Abscissenaxe aber in den Abständen $+b$ und $-b$ parallele Gerade, welche ein Rechteck bilden, so wird die ganze Ellipse innerhalb dieses Rechteckes enthalten sein. Daraus folgt, daß die Ellipse eine geschlossene krumme Linie ist.

4. Bezeichnet man den Abstand OM eines beliebigen Punktes M der Ellipse vom Mittelpunkte O mit d, so ist

$$d = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + x^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x^2}.$$

Für $x = \pm a$ erhält man den größten Werth $d = \sqrt{a^2} = \pm a = OD = OC$; für $x = o$ erhält man den kleinsten Werth $d = \sqrt{b^2} = \pm b = OE = OF$. Unter allen durch den Mittelpunkt gezogenen Sehnen ist daher CD die größte, EF die kleinste. Man nennt darum $CD = 2a$ die große, $EF = 2b$ die kleine Axe der Ellipse; die Punkte C und D heißen die Scheitel derselben.

Auch folgt daraus: Die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Ellipse ist gleich der großen Axe.

5. Zur Bestimmung der Lage der Brennpunkte A und B gegen den Mittelpunkt folgt aus $a^2 - e^2 = b^2$

$$OA = OB = e = \sqrt{a^2 - b^2},$$

welche Größe die lineare Excentricität der Ellipse heißt. Das Verhältniß $\frac{e}{a} = \varepsilon$ nennt man die numerische Excentricität; hiernach ist

$$e = a\varepsilon \text{ und } \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Die Relation zwischen a, b und e ergibt sich auch unmittelbar aus dem rechtwinkligen Dreiecke AOE, in welchem $AE = a$ (wegen $AE + BE = 2a$), $OE = b$ und $OA = e$ ist.

6. Je kleiner die Excentricität ist, desto weniger ist a von b unterschieden, desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreise; für $e = o$ wird $a = b$ und die Gleichung der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ geht über in die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$. Der Kreis kann demnach als eine Ellipse betrachtet werden, deren Excentricität Null ist, deren beide Axen daher gleich sind.

7. Um die durch einen Brennpunkt, z. B. A, gehende Ordinate zu bestimmen, setzt man in der Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$x = -e = -\sqrt{a^2 - b^2}$, wodurch man $y = \pm \frac{b^2}{a} = AR = AS$ erhält. Die durch einen Brennpunkt senkrecht auf die große Axe gezogene Sehne RS heißt der Parameter der Ellipse und wird durch $2p$ bezeichnet. Es ist daher der halbe Parameter $p = \frac{b^2}{a}$, woraus $a : b = b : p$ folgt, d. h. der halbe Parameter der Ellipse ist die dritte stetige Proportionale zu der halben großen und der halben kleinen Axe.

§. **460.** Der geometrische Ort aller Punkte, deren Coordinaten der Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ genügen, ist eine Ellipse.

Man mache (Fig. 254) $OC = OD = a$, $OA = OB = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ist nun M ein beliebiger Punkt der krummen Linie CEM, und $OP = x$, $MP = y$, so hat man

$$AM^2 = (\sqrt{a^2 - b^2} + x)^2 + y^2$$

$$= a^2 - b^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2} + x^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

$$= a^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{x^2}{a^2}(a^2 - b^2) = \left[a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2}\right]^2,$$

daher

$$AM = a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ebenso findet man

$$BM = a - \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2},$$

folglich ist $AM + BM = 2a$, und daher CEM eine Ellipse.

§. **461.** Bestimmung der Leitstrahlen.

Bezeichnet man die Leitstrahlen AM und BM des Punktes M (Fig. 254) durch r und r', so folgt aus §. 460

$$r = AM = a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} = a + \frac{ex}{a},$$

$$r' = BM = a - \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} = a - \frac{ex}{a}.$$

Die Gleichungen der beiden Leitstrahlen werden wir nach §. 429 bestimmen.

Für den Leitstrahl AM, welcher durch die Punkte $A = (-e, o)$ und $M = (x', y')$ geht, erhält man die Gleichung

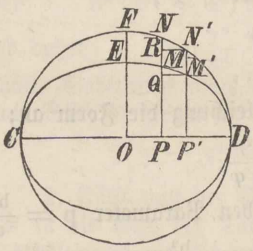
$$y = \frac{y'}{x' + e}(x + e),$$

und für den Leitstrahl BM, welcher durch die Punkte $B = (e, o)$ und $M = (x', y')$ geht,

$$y = \frac{y'}{x' - e}(x - e).$$

§. **462.** Beschreibt man über der großen Axe einer Ellipse als Durchmesser einen Kreis, so verhalten sich die derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten des Kreises und der Ellipse wie die halbe große zur halben kleinen Axe.

Fig. 255.



Setzt man (Fig. 255) $OP = x$, $MP = y$ und $NP = v$, so ist

$$v^2 = a^2 - x^2,\ y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);\ \text{daher}$$

$$\frac{v^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2},\ \text{und}\ v : y = a : b.$$

§. **463.** Der Flächeninhalt einer Ellipse ist gleich dem Producte aus den beiden Halbaxen und der Zahl π.

Sind (Fig. 255) MP und M'P' die Ordinaten der Ellipse, NP und N'P' die Ordinaten des über CD beschriebenen Kreises, welche zu den Abscissen OP und OP' gehören, und zieht man M'Q und N'R parallel mit der Axe DC, so ist $M'P'PQ : N'P'PR = M'P' : N'P' = b : a$ (§. 106, Folges.). Denkt man sich nun die Ordinaten NP und N'P' unendlich nahe an einander, so können die Dreiecke MM'Q und NN'R als unendlich klein vernachlässigt und folglich die Rechtecke M'P'PQ und N'P'PR als Elemente der Ellipse und des Kreises betrachtet werden. Stellt man sich die Ellipse und den Kreis aus lauter solchen Elementen bestehend vor, so verhält sich jedes Element der Ellipse zu dem entsprechenden Elemente des Kreises und somit auch die Summe aller Elemente der Ellipse zur Summe aller Kreiselemente, wie b : a. Letztere Summe ist die Kreisfläche, folglich $= a^2\pi$, erstere Summe die Fläche der Ellipse; heißt diese f, so hat man $f : a^2\pi = b : a$, woraus $f = ab\pi$ folgt.

§. **464.** Scheitelgleichung der Ellipse.

Nimmt man statt des Mittelpunktes O (Fig. 254) den Scheitel C als Anfangspunkt der Coordinaten an und behält die große Axe CD als Ab-

sciſſenaxe, ſo werden für dieſes neue Coordinatenſyſtem die Ordinaten dieſelben bleiben, wie früher, die neuen Abſciſſen dagegen ſämmtlich um die halbe Axe a größer werden als die früheren. Man darf demnach in der oben entwickelten Gleichung $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ blos $x - a$ ſtatt x ſetzen und y ungeändert laſſen, um die Gleichung der Ellipſe für das neue Syſtem zu erhalten. Dieſe nimmt daher folgende Geſtalt an:

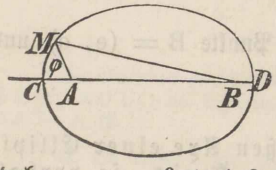
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}, \quad \text{oder } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

und wenn $\frac{b^2}{a} = p$ geſetzt wird, $y^2 = \frac{p}{a}(2ax - x^2)$, oder

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

§. 465. Polargleichung der Ellipſe.

Fig. 256.



1. Es ſei A (Fig. 256) der Pol und AC die Polaraxe; ſo iſt für den Punkt M der Radiusvector $r = AM$ und $\varphi = MAC$. Aus dem Dreiecke ABM folgt nun

$$BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2AM.AB.\cos BAM,$$

oder $$BM^2 = r^2 + 4e^2 + 4er\cos\varphi.$$

Wegen $AM + BM = 2a$ iſt auch

$$BM^2 = (2a - r)^2 = 4a^2 - 4ar + r^2,$$

daher $$r^2 + 4e^2 + 4er\cos\varphi = 4a^2 - 4ar + r^2;$$

woraus $$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos\varphi} \ldots\ 1)$$

als die Polargleichung für die Ellipſe folgt.

2. Für $\frac{e}{a} = \varepsilon$, alſo $e = a\varepsilon$, nimmt die Gleichung die Form an:

$$r = \frac{a^2 - a^2\varepsilon^2}{a + a\varepsilon\cos\varphi}, \quad \text{oder } r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Führt man in dieſer Gleichung ſtatt a den halben Parameter $p = \frac{b^2}{a}$ ein, ſo erhält man aus $a^2 - b^2 = a^2\varepsilon^2$, $a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a} = p$. Die Gleichung geht alſo in die folgende über:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \ldots\ 2).$$

3. Nimmt man (Fig. 254) den Mittelpunkt O der Ellipſe als Pol und die OX als Polaraxe an, ſo erhält man aus der Gleichung

$$b^2x + a^2y^2 = a^2b^2,$$

wenn $x = r\cos\varphi'$ und $y = r\sin\varphi'$ geſetzt wird,

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin\varphi'^2 + b^2\cos\varphi'^2} \ldots\ 3)$$

als die Polargleichung der Ellipſe.

2. Die Gerade und die Ellipſe.

§. 466. Lage einer Geraden gegen die Ellipſe.

Verbindet man die Gleichung der Ellipſe $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ mit der Gleichung einer Geraden $y = Ax + B$, ſo läßt ſich leicht beſtimmen, in wie vielen Punkten die beiden Linien zuſammentreffen. Für die gemeinſchaftlichen Punkte beider Linien ſind die Coordinaten gleich; man erhält daher

$$b^2x^2 + a^2(Ax + B)^2 = a^2b^2,$$

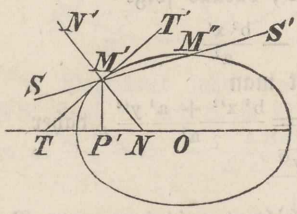
und durch Auflösung dieser Gleichung

$$x = \frac{-AB\,a^2 \pm ab\sqrt{A^2a^2 + b^2 - B^2}}{A^2a^2 + b^2}.$$

Aus diesem Ausdrucke für die Abscisse des Punktes, welcher der Ellipse und der Geraden gemeinschaftlich ist, folgt, daß die Gerade mit der Ellipse entweder zwei Punkte oder einen einzigen oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich hat, je nachdem $A^2a^2 + b^2 \gtreqless B^2$ ist.

§. 467. Gleichungen der Tangente und der Normale.

Fig. 257.



Sind x', y' und x'', y'' die Coordinaten zweier benachbarter Punkte M' und M'' (Fig. 257) einer Ellipse, deren Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist, so hat man als Gleichung der durch M' und M'' gehenden Secante SS'

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \ldots . \quad 1)$$

Für die Punkte M' und M'' der Ellipse finden nun die Gleichungen

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2,\ b^2x''^2 + a^2y''^2 = a^2b^2$$

statt, durch deren Subtraction man

$$b^2(x''^2 - x'^2) + a^2(y''^2 - y'^2) = 0,$$

oder $$b^2(x'' + x')(x'' - x') + a^2(y'' + y')(y'' - y') = 0,$$

und daher $$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')} \ldots . \quad 2)$$

erhält. Substituirt man diesen Werth in 1), so nimmt die Gleichung der Secante SS' die Form an:

$$y - y' = -\frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}(x - x') \ldots . 3).$$

1. Fällt nun der Punkt M'' mit M' zusammen, so kommt die Secante SS' in die Lage der Tangente TT'; setzt man also in 3) $x'' = x'$, $y'' = y'$, so erhält man als die gesuchte Gleichung der Tangente TT'

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x') \ldots . \quad 4),$$

worin $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$ die Richtungsconstante der Tangente ist.

Die Gleichung 4) läßt sich auch so darstellen:

$$b^2xx' + a^2yy' = a^2b^2 \ldots . \quad 5).$$

2. Für die durch den Punkt M' gezogene Normale NN', als eine auf der Tangente, zu welcher die Gleichung 4) gehört, senkrechte Gerade ergibt sich die Gleichung

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x') \ldots . \quad 6).$$

§. 468. Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

1. Setzt man in der Gleichung 5) $y = 0$, so erhält man $x = \frac{a^2}{x'}$ als die Abscisse des Punktes T; folglich ist

$$\text{Subtangente } P'T = x - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Zusatz. Dieser Ausdruck zeigt, daß die Subtangente von der kleinen Axe $2b$ unabhängig ist, daß somit alle Ellipsen, welche über derselben großen Axe

beschrieben werden, für Punkte von derselben Abscisse auch eine und dieselbe Subtangente haben. Dieselbe Subtangente muß für eine gleiche Abscisse auch ein über der großen Axe beschriebener Kreis haben, als eine Ellipse, deren beide Axen gleich sind; was auch unmittelbar aus §. 452, 1 folgt.

2. Für die Tangente M'T erhält man

$$M'T^2 = M'P'^2 + P'T^2 = y'^2 + \frac{(a^2 - x'^2)^2}{x'^2} = \frac{y'^2}{x'^2}\left(x'^2 + \frac{a^4 y'^2}{b^4}\right),$$

daher $$\text{Tangente } M'T = \frac{y'}{b^2 x'}\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}.$$

3. Sucht man aus der Gleichung 6), indem man $y = o$ setzt, die Abscisse x des Punktes N, so ergibt sich $x = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.x'$; daraus folgt

$$\text{Subnormale } P'N = x - x' = -\frac{b^2 x'}{a^2}.$$

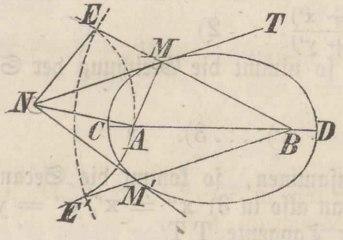
4. Zur Bestimmung der Normale M'N hat man

$$M'N^2 = M'P'^2 + P'N^2 = y'^2 + \frac{b^4 x'^2}{a^4} = \frac{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}{a^4}, \text{ daher}$$

$$\text{Normale } M'N = \frac{\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}}{a^2}.$$

§. **469.** Jede Tangente der Ellipse bildet mit den zum Berührungspunkte gezogenen Leitstrahlen gleiche Winkel.

Fig. 258.



Die Gleichung der durch $M = (x', y')$ gezogenen Tangente NM (Fig. 258) ist

$$y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} \cdot x + \frac{b^2}{y'};$$

die Gleichungen der Leitstrahlen AM und BM sind

$$y = \frac{y'}{x' + e} \cdot x + \frac{e y'}{x' + e}, \text{ und}$$

$$y = \frac{y'}{x' - e} \cdot x - \frac{e y'}{x' - e}.$$

Man erhält daher nach §. 435

$$\text{tang } AMN = \frac{\frac{y'}{x' + e} + \frac{b^2 x'}{a^2 y'}}{1 - \frac{y'}{x' + e} \cdot \frac{b^2 x'}{a^2 y'}} = \frac{b^2}{e y'},$$

und $$\text{tang } BMN = \frac{\frac{y'}{x' - e} + \frac{b^2 x'}{a^2 y'}}{1 - \frac{y'}{x' - e} \cdot \frac{b^2 x'}{a^2 y'}} = -\frac{b^2}{e y'}; \text{ daher}$$

$$\text{tang } AMN = -\text{ tang } BMN, \text{ folglich } AMN = 180^0 - BMN = BMT.$$

Dieser Satz erklärt folgende Erscheinungen, welche auf dem Reflexionsgesetze beruhen. Von einer elliptischen Spiegelfläche werden die von einem Brennpunkte auffallenden Licht-, Wärme-, oder Schallstrahlen so reflectirt, daß sie sich im anderen Brennpunkte vereinigen. Erregt man in einem elliptisch geformten Gefäße, worin sich eine Flüssigkeit befindet, in dem einen Brennpunkte eine Wellenbewegung, so treffen die reflectirten Wellen im anderen Brennpunkte zusammen.

§. **470.** Durchmesser der Ellipse.

Unter einem Durchmesser einer krummen Linie versteht man allgemein eine Linie, welche ein System paralleler Sehnen halbirt.

Es sei $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ die Gleichung einer Ellipse und $y = Ax + B$ die Gleichung der Sehne SS' (Fig. 259), welche mit der positiven Halbaxe der Abscissen den Winkel α bildet, so daß $A = \text{tang}\,\alpha$ ist. Dann sind (§. 466) die Wurzeln der Gleichung

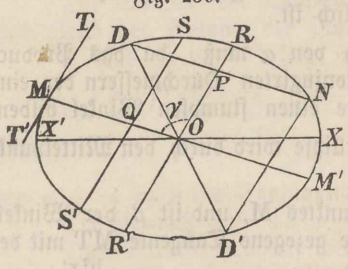
$$b^2x^2 + a^2(Ax + B)^2 = a^2b^2, \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{2ABa^2}{A^2a^2 + b^2} \cdot x + \frac{a^2(B^2 - b^2)}{A^2a^2 + b^2} = 0$$

die Abscissen x_1 und x_2 der Endpunkte S und S' der Sehne. Ihre Summe $x_1 + x_2$ ist nach einem bekannten Satze der Algebra gleich dem mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Coefficienten von x, also

$$x_1 + x_2 = -\frac{2ABa^2}{A^2a^2 + b^2}.$$

Fig. 259.



Bezeichnet man die Coordinaten des Halbirungspunktes Q der Sehne SS' durch m und n, so ist

$$m = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{ABa^2}{A^2a^2 + b^2}, \text{ und } n = Am + B = \frac{Bb^2}{A^2a^2 + b^2}; \text{ folglich}$$

$$n = -\frac{b^2}{Aa^2} \cdot m = A'm,$$

wenn $-\frac{b^2}{Aa^2} = A'$, also $AA' = -\frac{b^2}{a^2}$ gesetzt wird.

Die Relation $n = A'm$ zwischen den Coordinaten m und n ist von B unabhängig und bleibt sich gleich, so lange die Richtungsconstante A, also der Winkel α sich nicht ändert; sie gilt also auch für die Coordinaten der Halbirungspunkte aller übrigen mit SS' parallelen Sehnen, weil für diese A ungeändert bleibt. Bezeichnen daher allgemein x, y die veränderlichen Coordinaten dieser Halbirungspunkt, so ist $y = A'x$ die Gleichung der Linie, welche durch alle Halbirungspunkte geht, somit die Gleichung des Durchmessers MM', welcher das System jener parallelen Sehnen halbirt.

Die Gleichung $y = A'x$ gehört einer durch den Ursprung gehenden Geraden an; da dieselbe für jedes System paralleler Sehnen gilt, so folgt, daß alle Durchmesser einer Ellipse durch den Mittelpunkt derselben gehen. A' ist die trigonometrische Tangente des Winkels α', welchen der Durchmesser MM' mit der Abscissenaxe bildet.

§. 471. Zieht man umgekehrt zu dem Durchmesser MM' (Fig. 259), dessen Gleichung $y = A'x$ ist, parallele Sehnen, und sucht den zu diesem System zugehörigen Durchmesser RR', so erhält man, wie in §. 470 als Gleichung desselben

$$y = -\frac{b^2}{A'a^2} \cdot x = Ax,$$

woraus folgt, daß der Durchmesser des zweiten Sehnensystems mit den Sehnen des ersten Systems parallel ist.

Zwei Durchmesser einer krummen Linie, von denen jeder das mit dem anderen parallele Sehnensystem halbirt, heißen conjugirte Durchmesser, und der Winkel, den sie mit einander bilden, der Conjugationswinkel. MM' und RR' sind demnach conjugirte Durchmesser der Ellipse.

Das Product der Richtungsconstanten zweier conjugirter Durchmesser einer Ellipse ist eine constante Größe, nämlich

$$AA' = \text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,\alpha' = -\frac{b^2}{a^2} \ldots . \quad 1)$$

Für $\alpha = 0$ wird tang $\alpha' = \infty$, daher $\alpha' = 90^0$; d. h. die beiden Axen der Ellipse sind zwei conjugirte Durchmesser; sie sind die einzigen, die auf einander senkrecht stehen, da für jeden andern Werth von α bei rechtwinkliger Lage der Durchmesser tang α tang $\alpha' =$ tang α tang $(90^0 + \alpha) = -1$ werden müßte, was wegen $a > b$ nicht möglich ist.

Für jeden von 0 verschiedenen Werth von α muß, da das Product tang α tang α' negativ ist, von den beiden conjugirten Durchmessern der eine mit der Abscissenaxe einen spitzen, der andere einen stumpfen Winkel bilden.

Folgesätze. 1. Jeder Durchmesser der Ellipse wird durch den Mittelpunkt derselben halbirt.

2. Sind x', y' die Coordinaten des Punktes M, und ist β der Winkel, welchen die durch diesen Punkt an die Ellipse gezogene Tangente MT mit der Abscissenaxe bildet, so ist (nach §. 467, Gleich. 4) tang $\beta = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$. Da aber (x', y') ein Punkt des Durchmessers MM' ist, so ist

$y' = A'x' = -\frac{b^2}{A a^2} . x'$, und $\frac{x'}{y'} = -\frac{a^2}{b^2} . A = -\frac{a^2}{b^2} .$ tang α; daher

$$\text{tang } \beta = -\frac{b^2}{a^2} . -\frac{a^2}{b^2} . \text{tang } \alpha = \text{tang } \alpha, \text{ also } \beta = \alpha.$$

Daraus folgt: Zieht man durch den Endpunkt eines Durchmessers der Ellipse eine Tangente an dieselbe, so ist diese parallel mit den Sehnen, welche der Durchmesser halbirt, somit parallel mit dem conjugirten Durchmesser.

3. Wird $b = a$, geht also die Ellipse in einen Kreis über, so ist tang α tang $\alpha' = -1$, d. h. in einem Kreise stehen je zwei conjugirte Durchmesser auf einander senkrecht.

§. **472.** Heißen $2a'$ und $2b'$ die Längen zweier conjugirter Durchmesser, so ergeben sich zu ihrer Bestimmung (aus §. 465, 3) die Gleichungen

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin \alpha'^2 + b^2 \cos \alpha'^2} \ldots . \quad 2),$$

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin \alpha'^2 + b^2 \cos \alpha'^2} \ldots . \quad 3).$$

Diese beiden Ausdrücke wollen wir durch Einführung eines Hilfswinkels auf eine für die Rechnung bequemere Form bringen.

Setzen wir $a \text{ tang } \alpha = b \text{ tang } \varphi$, so muß, da tang α tang $\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$ ist, $a \text{ tang } \alpha' = -b \cot \varphi$ gesetzt werden. Aus 2) erhalten wir dann

$$a'^2 \cos \alpha^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \text{ tang } \alpha^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{b^2 \text{ tang } \varphi^2 + b^2} = a^2 \cos \varphi^2,$$

daher $a' \cos \alpha = a \cos \varphi \ldots . \quad 4)$

Auf gleiche Weise folgt $a' \sin \alpha = b \sin \varphi \ldots . \quad 5)$

Aus 3) ergibt sich ebenso

$b' \cos \alpha' = -a \sin \varphi \ldots . \quad 6)$

$b' \sin \alpha' = b \cos \varphi \ldots . \quad 7)$

Man hat daher

$$a'^2 \cos \alpha^2 + a'^2 \sin \alpha^2 = a^2 \cos \varphi^2 + b^2 \sin \varphi^2,$$

oder $a'^2 = a^2 \cos \varphi^2 + b^2 \sin \varphi^2 \ldots . 8)$

Ebenso erhält man

$b'^2 = a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2 \ldots . 9)$

§. 473. 1. Aus 8) und 9 ergibt sich unmittelbar

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

Da hiernach auch $4a'^2 + 4b'^2 = 4a^2 + 4b^2$ ist, so folgt:

Die Summe der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser ist constant und gleich der Summe der Quadrate der beiden Axen.

2. Aus 4) und 7) folgt $a'b' \cos\alpha \sin\alpha' = \quad ab \cos\varphi^2$,

„ 5) und 6) „ $a'b' \sin\alpha \cos\alpha' = -ab \sin\varphi^2$;

daher $a'b' (\cos\alpha \sin\alpha' - \sin\alpha \cos\alpha') = ab (\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2)$,

oder

$$a'b' \sin(\alpha' - \alpha) = ab,$$

wo $\alpha' - \alpha = \gamma$ der Conjugationswinkel ist.

Da hiernach auch $4a'b' \sin\gamma = 4ab$ ist, so folgt:

Das Parallelogramm, welches entsteht, wenn man durch die Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser einer Ellipse an diese Tangenten zieht, ist von constanter Größe und gleich dem Rechtecke aus den beiden Axen.

3. Bezeichnet man die Coordinaten der Punkte, in welchen die halben Durchmesser a' und b' die Ellipse treffen, durch x, y und x', y', so ist

$x = a' \cos\alpha = a \cos\varphi$, $\quad x' = -b' \cos\alpha' = a \sin\varphi$,

$y = a' \sin\alpha = b \sin\varphi$; $\quad y' = \quad b' \sin\alpha' = b \cos\varphi$;

daher $\quad xy = ab \sin\varphi \cos\varphi$; $\quad x'y' = ab \sin\varphi \cos\varphi$,

und folglich

$$xy = x'y';$$

d. h. die Rechtecke aus den Coordinaten der Endpunkte zweier conjugirter Durchmesser der Ellipse sind flächengleich.

§. 474. Gleichung der Ellipse mit Beziehung auf conjugirte Durchmesser.

Nimmt man zwei conjugirte Durchmesser $2a'$ und $2b'$, welche mit der Abscissenaxe des rechtwinkligen Systems die Winkel α und α' bilden, als neue Coordinatenaxen an, so muß man zur Transformirung der Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ nach §. 419, da $m = n = o$ und $\gamma + \alpha = \alpha'$ ist, für x und y bezüglich $x \cos\alpha + y \cos\alpha'$ und $x \sin\alpha + y \sin\alpha'$ setzen. Man erhält dadurch

$$(b^2 \cos\alpha^2 + a^2 \sin\alpha^2)\, x^2 + (b^2 \cos\alpha'^2 + a^2 \sin\alpha'^2)\, y^2 + 2 (b^2 \cos\alpha \cos\alpha' + a^2 \sin\alpha \sin\alpha') = a^2 b^2.$$

Aus $\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$ folgt aber $b^2 \cos\alpha \cos\alpha' + a^2 \sin\alpha \sin\alpha' = o$.

Die neue Gleichung nimmt daher folgende Form an:

$$\frac{a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2}{a^2 b^2} \cdot x^2 + \frac{a^2 \sin\alpha'^2 + b^2 \cos\alpha'^2}{a^2 b^2} \cdot y^2 = 1,$$

woraus sich mit Rücksicht auf die Ausdrücke 2) und 3) in §. 472

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad \text{oder} \quad b'^2 x^2 + a'^2 y^2 = a'^2 b'^2$$

als Gleichung der Ellipse für die conjugirten Durchmesser ergibt.

§. 475. Zwei Sehnen, welche von den Endpunkten eines Durchmessers einer krummen Linie zu einem Punkte derselben gezogen werden, heißen Supplementarsehnen.

Es sei DD' (Fig. 259) ein Durchmesser und N ein beliebiger Punkt der Ellipse; dann sind DN und D'N zwei Supplementarsehnen.

Heißen m und n die Coordinaten des Punktes N, x' und y' die Coor-

dinaten des Punktes D, daher $-x'$ und $-y'$ jene des Punktes D', so hat man als Gleichungen der Sehnen DN und D'N

$$y - n = \frac{n - y'}{m - x'}(x - m), \qquad \text{und} \quad y - n = \frac{n + y'}{m + x'}(x - m).$$

Sind nun β und β' die Winkel dieser Sehnen mit der positiven Abscissenaxe, so ist

$$\text{tang}\,\beta = \frac{n - y'}{m - x'}, \quad \text{tang}\,\beta' = \frac{n + y'}{m + x'}, \quad \text{daher tang}\,\beta\,\text{tang}\,\beta' = \frac{n^2 - y'^2}{m^2 - x'^2}.$$

Da aber N und D Punkte der Ellipse sind, so hat man

$$b^2 m^2 + a^2 n^2 = a^2 b^2, \qquad b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2,$$

folglich $b^2 (m^2 - x'^2) + a^2 (n^2 - y'^2) = 0$, und

$$\frac{n^2 - y'^2}{m^2 - x'^2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Somit ist

$$\text{tang}\,\beta\,\text{tang}\,\beta' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Aus der Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der Gleichung 1) in §. 471 folgt:

Zwei Durchmesser der Ellipse, welche mit zwei Supplementarsehnen parallel gezogen werden, sind einander conjugirt.

3. Uebungsaufgaben.

§. **476**. 1. Beliebig viele Punkte einer Ellipse zu bestimmen, wenn die große Axe und die Brennpunkte gegeben sind.

Man nehme in der großen Axe zwischen den Brennpunkten beliebig viele Punkte an, deren jeder die große Axe in zwei Abschnitte theilt, und beschreibe mit dem einen Abschnitte als Halbmesser aus dem einen, mit dem zweiten Abschnitte aus dem andern Brennpunkte Kreisbogen; die Durchschnittspunkte derselben sind Punkte der Ellipse.

2. Die Gleichung einer Ellipse ist $9x^2 + 16y^2 = 144$, die Gleichung einer Geraden

a) $y = 3x + 5$, b) $y = x + 5$, c) $y = 2x - 9$;

man bestimme, wie viele Punkte die Ellipse mit jeder dieser Geraden gemeinschaftlich hat. (§. 466.)

3. Eine Ellipse, deren Axen $2a$ und $2b$ sind, ist flächengleich mit der Oberfläche eines senkrechten Kegelstumpfes, dessen Grundflächen die Halbmesser a und b haben; wie groß ist die Höhe des Kegelstumpfes?

4. Zu einem Durchmesser MM' (Fig. 259) der Ellipse den conjugirten Durchmesser zu construiren.

Auflösung 1. Nach §§. 470 und 471. Man ziehe zu dem Durchmesser MM' eine parallele Sehne DN, und sodann durch die Mitte O dieses Durchmessers und die Mitte P der Sehne DN die Gerade RR'.

Auflösung 2. Nach §. 475. Man ziehe durch den Endpunkt eines beliebigen Durchmessers DD' die $DN \parallel MM'$, dann die Sehne ND', endlich durch O die $RR' \parallel ND'$.

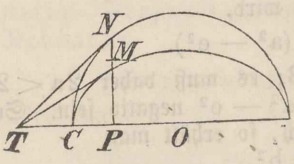
5. Die Gleichung einer Ellipse ist $x^2 + 25y^2 = 25$; man suche die Gleichung der Tangente für den Berührungspunkt $(3, -\frac{4}{5})$.

6. Durch einen Punkt M der Ellipse an diese eine Tangente zu ziehen.

Auflösung 1. Verlängert man (Fig. 258) den Leitstrahl BM über M hinaus, so darf man, um die Lage der Tangente MN zu erhalten, (nach §. 469) nur den Winkel AME

halbiren. Man macht daher ME = MA und beschreibt aus E und A mit demselben Halbmesser Kreisbogen, welche sich in N schneiden; die durch N und M gezogene Gerade NMT ist die verlangte Tangente.

Fig. 260.



Auflösung 2. Nach §. 468, 1. Zusatz, indem man (Fig. 260) über der großen Axe CD einen Kreis beschreibt, die Ordinate MP bis N verlängert, durch N eine Tangente NT an den Kreis construirt und TM zieht.

Auflösung 3. Man ziehe durch M einen Durchmesser der Ellipse, construire zu demselben den conjugirten Durchmesser, und ziehe mit diesem eine Parallele durch M (§. 471, Folges. 2).

Auflösung 4. Man ziehe MO (Fig. 259), ferner durch den Endpunkt eines beliebigen Durchmessers DD' die DN ∥ MO, dann ND', und endlich MT ∥ ND' (§. 475).

7. Aus einem Punkte N (Fig. 258) außerhalb der Ellipse an diese eine Tangente zu ziehen.

Hier kommt es mit Rücksicht auf die 1. Auflösung der Aufgabe 6 offenbar nur darauf an, einen Punkt E zu finden, der von N eben so weit absteht als der eine Brennpunkt A, und dessen Entfernung von dem andern Brennpunkte B der großen Axe gleich ist. Diesen Punkt findet man aber in dem Durchschnitte der aus N mit dem Halbmesser NA, und aus B mit dem Halbmesser CD beschriebenen Kreisbogen. Zieht man dann die Gerade EB, welche die Ellipse in M schneidet, so ist M der Berührungspunkt und NM die gesuchte Tangente.

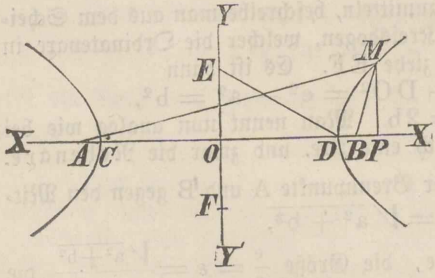
Da jene zwei Bogen auch noch einen zweiten Berührungspunkt E' geben, so wird durch die Gerade E'B noch ein zweiter Durchschnittspunkt M' bestimmt, woraus folgt, daß von dem Punkte N zwei Tangenten NM und NM' an die Ellipse gezogen werden können.

V. Die Hyperbel.

1. Analytische Darstellung der Hyperbel.

§. 477. Die Hyperbel ist eine Linie von solcher Beschaffenheit, daß die Differenz der Abstände jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten constant ist.

Fig. 261.



Sind A und B (Fig. 261) die festen Punkte, und ist 2a die constante Differenz der Abstände eines jeden Punktes der Hyperbel von jenen zwei Punkten, so ist M ein Punkt der Hyperbel, wenn AM − BM = 2a ist.

Die beiden festen Punkte A und B heißen die Brennpunkte der Hyperbel, die Strecken AM und BM die Leitstrahlen des Punktes M.

§. 478. Mittelpunktsgleichung der Hyperbel für rechtwinklige Coordinaten.

Halbirt man AB (Fig. 261) in O und nimmt diesen Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten und OBX als die Abscissenaxe an, so ist für den Punkt M, x = OP, y = MP. Damit der Punkt M in der Hyperbel liege, muß AM − BM = 2a sein.

Man hat nun, wenn $OA = OB = e$ gesetzt wird,

$$AM = \sqrt{(x+e)^2 + y^2},\ BM = \sqrt{(x-e)^2 + y^2};$$

daher muß $$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

sein, oder, wenn die Gleichung rational gemacht wird,

$$(a^2 - e^2)\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,(a^2 - e^2).$$

Im Dreiecke ABM ist $AM - BM < AB$; es muß daher $2a < 2e$, oder $a < e$, folglich auch $a^2 < e^2$, und somit $a^2 - e^2$ negativ sein. Setzt man $a^2 - e^2$ der negativen Größe $-b^2$ gleich, so erhält man

$$b^2\,x^2 - a^2\,y^2 = a^2\,b^2$$

als die gesuchte Gleichung der Hyperbel, welche sich auch so darstellen läßt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§. 479. Discussion der Gleichung $b^2\,x^2 - a^2\,y^2 = a^2\,b^2$.

1. Diese Gleichung gibt

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},\quad \text{und}\quad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}.$$

So lange $x < a$ ist, fällt y imaginär aus; für solche Abscissen gibt es also keinen Punkt der Hyperbel. Zu jeder Abscisse $x > a$ gehören zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y; ebenso erhält man für jeden Werth von y zwei gleiche und entgegengesetzte Abscissen.

Die Hyperbel erstreckt sich also zu beiden Seiten der Abscissen- und der Ordinatenaxe in vier congruenten Aesten. Der Ursprung O heißt darum der Mittelpunkt der Hyperbel.

2. Da x und y jeden noch so großen Werth annehmen können, so folgt, daß sich die Aeste der Hyperbel ins Unendliche ausdehnen.

3. Für $y = 0$ wird $x = \pm a$; die Hyperbel schneidet also die Abscissenaxe in zwei Punkten D und C, deren Abstand $2a$ beträgt. Die Gerade $CD = 2a$ heißt die erste oder Hauptaxe der Hyperbel; C und D nennt man die Scheitel derselben.

Daraus folgt: Die Differenz der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Hyperbel ist gleich der Hauptaxe.

4. Um die Bedeutung von b auszumitteln, beschreibe man aus dem Scheitel D mit OB als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Ordinatenaxe in den Punkten E und F schneidet, und ziehe EF. Es ist dann

$$EO^2 = FO^2 = DE^2 - DO^2 = e^2 - a^2 = b^2,$$

daher $EO = FO = b$, und $EF = 2b$. Man nennt nun analog wie bei der Ellipse, die Gerade $EF = 2b$ auch eine Axe, und zwar die Nebenaxe.

5. Zur Bestimmung der Lage der Brennpunkte A und B gegen den Mittelpunkt O hat man $OA = OB = e = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Die Größe e heißt die lineare, die Größe $\frac{e}{a} = \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ die numerische Excentricität.

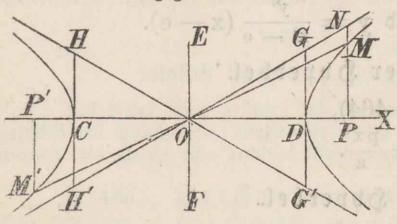
6. Auch in der Hyperbel wird die durch den Brennpunkt senkrecht auf die erste Axe gezogene Sehne der Parameter genannt und durch $2p$ bezeichnet. Da der halbe Parameter p der im Brennpunkte errichteten Ordinate gleich ist, so braucht man zur Bestimmung desselben nur in $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

$x^2 = e^2 = a^2 + b^2$ zu setzen; man erhält dadurch $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Es ist somit $p = \frac{b^2}{a}$, oder $a : b = b : p$, d. h. der halbe Parameter ist die dritte stetige Proportionale zu der halben Haupt- und der halben Nebenaxe.

7. Für $a = b$ wird die Hyperbel eine gleichseitige genannt; ihre Gleichung ist $y = \pm \sqrt{x^2 - a^2}$.

8. Verbindet man mit der Gleichung der Hyperbel die Gleichung $y = a'x$ einer durch O (Fig. 262) gezogenen Geraden M'M, so erhält man für die Durchschnittspunkte der beiden Linien:

Fig. 262.



$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - a^2 a'^2}}$, $y = \frac{\pm aa'b}{\sqrt{b^2 - a^2 a'^2}}$,

wobei das obere Zeichen dem Punkte M, das untere dem Punkte M' entspricht. Aus diesen Werthen folgt, daß ein Durchschnitt einer Geraden mit der Hyperbel nur möglich ist, wenn $b^2 > a^2 a'^2$, oder $a' < \frac{b}{a}$ ist; wird $a' > \frac{b}{a}$, so fallen die Werthe von x und y imaginär aus.

9. Besonders merkwürdig sind jene Geraden, für welche $a' = \pm \frac{b}{a}$, also $b^2 = a^2 a'^2$ ist; für diese werden die Werthe von x und y unendlich groß, was anzeigt, daß die beiden Geraden mit der Hyperbel zu beiden Seiten erst in unendlicher Entfernung, also nie zusammentreffen.

Um diese zwei Geraden zu construiren, errichte man in D auf OX eine Senkrechte, trage darauf $DG = DG' = b$ auf und ziehe die Geraden GOH' und G'OH; man hat für diese in der That

$$\text{tang } GOD = \frac{b}{a}, \text{ und tang } HOD = -\frac{b}{a}.$$

Betrachtet man nun eine dieser Geraden, z. B. GH', so ist, wenn $OP = x$, $MP = y$, $NP = y'$ gesetzt wird, $y' = \frac{b}{a}x$ und $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$; ferner, da M ein Punkt der Hyperbel ist, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; daher $y'^2 - y^2 = b^2$, oder

$$(y' + y)(y' - y) = b^2.$$

Das Product $(y' + y)(y' - y)$ ist demnach constant, woraus folgt, daß, wenn x, und somit auch y und y' wachsen, die Differenz $y' - y = MN$ abnehmen, und unendlich klein werden muß, wenn x unendlich groß wird. Die Hyperbel nähert sich daher immer mehr und mehr der Geraden GH', ohne sie je zu erreichen. Dasselbe gilt von der Geraden G'H.

Eine Gerade, welcher sich eine krumme Linie immer mehr und mehr nähert, ohne jedoch mit ihr je zusammenzutreffen, nennt man eine Asymptote der krummen Linie. Die Hyperbel hat demnach zwei Asymptoten, deren Gleichungen sind:

$$y = +\frac{b}{a} \cdot x \quad \text{und} \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x.$$

§. 480. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Coordinaten der Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ genügen, ist eine Hyperbel.

Der Beweis wird auf ähnliche Art geführt wie in §. 460.

§. 481. Bestimmung der Leitstrahlen.

Für die Leitstrahlen AM und BM des Punktes M (Fig. 261) erhält man auf analoge Weise, wie bei der Ellipse (§. 461),

$$AM = \frac{ex}{a} + a, \quad \text{und} \quad BM = \frac{ex}{a} - a;$$

und als die Gleichungen der beiden Leitstrahlen AM und BM

$$y = \frac{y'}{x' + e}(x + e), \text{ und } y = \frac{y'}{x' - e}(x - e).$$

§. 482. Scheitelgleichung der Hyperbel.

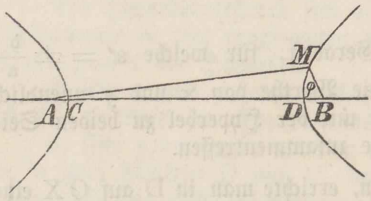
Man erhält, wie für die Ellipse (§. 464),

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}.$$

§. 483. Polargleichung der Hyperbel.

1. Ist B (Fig. 263) der Pol und BD die Polaraxe, so hat man für den Punkt M

Fig. 263.



$$r = BM, \quad \varphi = MBD.$$

Man erhält dann, wie für die Ellipse (§. 465),

$$r = \frac{e^2 - a^2}{a + e\cos\varphi} \ldots 1)$$

als die gesuchte Polargleichung.

2. Für $e = a\varepsilon$ ist

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

oder, wenn die Größe $p = \frac{b^2}{a} = a(\varepsilon^2 - 1)$ eingeführt wird,

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \ldots 2).$$

3. Nimmt man O (Fig. 261) als Pol und OX als Polaraxe an, so erhält man, wie in §. 465, 3

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos\varphi'^2 - a^2\sin\varphi'^2} \ldots 3).$$

Damit r reell sei, muß $a\sin\varphi' < b\cos\varphi'$, also $\operatorname{tang}\varphi' < \frac{b}{a}$ sein.

2. Die Gerade und die Hyperbel.

§. 484. Läßt man die Gleichung der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ mit der Gleichung einer Geraden $y = Ax + B$ coexistiren, so erhält man für den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der beiden Linien

$$x = \frac{-ABa^2 \pm ab\sqrt{B^2 - (A^2a^2 - b^2)}}{A^2a^2 - b^2}.$$

Eine Gerade hat daher mit der Hyperbel entweder zwei Punkte, oder nur einen, oder keinen Punkt gemeinschaftlich, je nachdem $B^2 \gtreqless A^2a^2 - b^2$ ist.

§. 485. Tangenten und Normalen der Hyperbel.

Die Gleichungen der Tangente und der Normale, sowie die Längen der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale lassen sich hier in analoger Weise wie bei der Ellipse (§§. 467 und 468) entwickeln; sie können aber auch aus den dort gewonnenen Resultaten sofort erhalten werden, wenn man in denselben b^2 mit $-b^2$ vertauscht.

§. 486. Die Tangente der Hyperbel bildet mit den nach dem Berührungspunkte gezogenen Leitstrahlen gleiche Winkel.

Heißen v und v' die Winkel, welche die Tangente mit den nach dem Berührungspunkte gezogenen Leitstrahlen bildet, so erhält man durch analoges Verfahren, wie bei der Ellipse (§. 469),

$$\text{tang } v = \frac{b^2}{ey'}, \text{ und } \text{tang } v' = \frac{b^2}{ey'};$$

folglich tang v = tang v', und somit auch v = v'.

Auf diesen Satz gründet sich die optische Erscheinung, daß von einem hyperbolisch geschliffenen Hohlspiegel Lichtstrahlen, die von einem Brennpunkte ausgehen, so reflectirt werden, als ob sie vom anderen Brennpunkte herkämen.

§. 487. Durchmesser der Hyperpel.

Durch analoge Schlüsse, wie bei der Ellipse (§. 470), läßt sich nachweisen, daß bei der Hyperbel für den Durchmesser eines parallelen Sehnensystems, dessen Richtungsconstante A = tang α ist, die Gleichung $y = \frac{b^2}{Aa^2} \cdot x = A'x$ besteht, wenn $\frac{b^2}{Aa^2} = A' = \text{tang } \alpha'$, also $AA' = \frac{b^2}{a^2}$ gesetzt wird.

Für den conjugirten Durchmesser ergibt sich dann ebenso die Gleichung $y = \frac{b^2}{A'a^2} \cdot x = Ax$.

Auch bei der Hyperbel ist das Product der Richtungsconstanten je zweier conjugirter Durchmesser constant, nämlich

$$AA' = \text{tang } \alpha \text{ tang } \alpha' = \frac{b^2}{a^2} \ldots 1).$$

Für $\alpha = 0$ wird $\alpha' = 90^0$; d. h. die beiden Axen der Hyperbel sind zwei conjugirte Durchmesser; sie sind die einzigen, die auf einander senkrecht stehen, da das Product tang α tang α' nie gleich −1 sein kann.

Für jeden von 0 verschiedenen Werth von α müssen, da das Product tang α tang α' positiv ist, die Winkel α und α' beide spitz oder beide stumpf sein. Da hiernach die Asymptoten der Hyperbel (§. 479, 9) nicht conjugirte Durchmesser sein können, und daher der Fall $\text{tang } \alpha = \frac{b}{a}$, $\text{tang } \alpha' = -\frac{b}{a}$ ausgeschlossen ist, so muß der absolute Werth einer dieser beiden Tangenten kleiner, der andere größer als $\frac{b}{a}$ sein, d. h. der eine Durchmesser liegt zwischen der Asymptote und der Hauptaxe, der andere zwischen der Asymptote und der Nebenaxe. Nur der erstere schneidet (nach §. 483, 3) die Hyperbel wirklich in zwei Punkten, er heißt der Hauptdurchmesser und hat eine bestimmte Länge. Der zweite, welcher der Nebendurchmesser des früheren genannt wird, schneidet die Hyperbel nicht und ist unbegrenzt.

Folgesatz. Wie bei der Ellipse (§. 471, Folges. 2) läßt sich auch hier folgern, daß die Tangente durch den Endpunkt eines Durchmessers (des Hauptdurchmessers) der Hyperbel mit dem conjugirten Durchmesser parallel ist.

§. 488. Ist der Durchmesser, dessen Richtungsconstante $A = \tang \alpha$ ist, der Hauptdurchmesser und $2a'$ seine Länge, so ergibt sich zur Bestimmung von a' aus der Gleichung in §. 483, 3

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos \alpha^2 - a^2 \sin \alpha^2} \quad \ldots \quad 2).$$

Analog wird auch für den Nebendurchmesser eine bestimmte Länge angenommen. Die in §. 483, 3 aufgestellte Gleichung liefert für diesen halben Durchmesser, da $\tang \alpha' > \frac{b}{a}$, also $a^2 \sin a'^2 > b^2 \cos \alpha'^2$ ist, einen imaginären Werth, den wir mit $b' \sqrt{-1}$ bezeichnen wollen. Die reelle Größe $2b'$ nimmt man nun als die Länge des Nebendurchmessers an, indem man auf ihn vom Mittelpunkte der Hyperbel aus nach jeder Seite die Strecke b' aufträgt. Der Werth von b' ergibt sich hiernach aus dem Ausdrucke

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin \alpha'^2 - b^2 \cos \alpha'^2} \quad \ldots \quad 3).$$

Die voranstehenden Ausdrücke 2) und 3) wollen wir auch hier durch Einführung eines Hilfswinkels auf eine bequemere Form bringen.

Wird $a \tang \alpha = b \cos \varphi$ gesetzt, so muß man, da $\tang \alpha \tang \alpha' = \frac{b^2}{a^2}$ ist, $a \tang \alpha' = \frac{b}{\cos \varphi}$ setzen. Man erhält dann aus 2) und 3) durch ähnliche Rechnungen, wie bei der Ellipse (§. 472),

$$a' \cos \alpha = \pm \frac{a}{\sin \varphi} \ldots 4), \qquad a' \sin \alpha = \pm b \cot \varphi \ldots 5),$$

$$b' \cos \alpha' = a \cot \varphi \ldots 6), \qquad b' \sin \alpha' = \frac{b}{\sin \varphi} \ldots 7);$$

wobei in den ersten zwei Gleichungen das obere oder das untere Zeichen genommen wird, je nachdem α spitz oder stumpf ist.

Hieraus folgt

$$a'^2 \cos \alpha^2 + a'^2 \sin \alpha^2 = \frac{a^2}{\sin \varphi^2} + b^2 \cot \varphi^2 = a^2 (1 + \cot \varphi^2) + b^2 \cot \varphi^2,$$

oder
$$a'^2 = a^2 + (a^2 + b^2) \cot \varphi^2 \ldots 8).$$

Ebenso ergibt sich $b'^2 = b^2 + (a^2 + b^2) \cot \varphi^2 \ldots 9)$.

§. 489. 1. Aus 8) und 9) erhält man unmittelbar

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2.$$

2. Aus 4) und 7) folgt $a'b' \cos \alpha \sin \alpha' = \pm \frac{ab}{\sin \varphi^2}$,

„ 5) und 6) „ $a'b' \sin \alpha \cos \alpha' = \pm ab \cot \varphi^2$;

daher $a'b' (\cos \alpha \sin \alpha' - \sin \alpha \cos \alpha') = \pm ab \left(\frac{1}{\sin \varphi^2} - \cot \varphi^2 \right)$

und folglich für das obere Zeichen $a'b' \sin (\alpha' - \alpha) = ab$,

„ „ untere „ $a'b' \sin (\alpha - \alpha') = ab$.

Das obere Zeichen gilt, wenn α und α' beide spitz sind, wo dann der Conjugationswinkel $\gamma = \alpha' - \alpha$ ist; das untere Zeichen gilt, wenn α und α' beide stumpf sind, wo dann $\gamma = \alpha - \alpha'$ ist. In beiden Fällen ist daher

$$a'b' \sin \gamma = ab.$$

3. Bezeichnen endlich x, y und x', y' die Coordinaten der Endpunkte der zwei conjugirten halben Durchmesser a' und b', so ergibt sich, wie bei der Ellipse (§. 473, 3), die Relation

$$xy = x'y'.$$

§. **490.** Gleichung der Hyperbel, bezogen auf conjugirte Durchmesser.

Transformirt man die Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ in analoger Weise, wie in §. 474 die Mittelpunktsgleichung der Ellipse umgeformt wurde, so erhält man als Gleichung der Hyperbel mit Beziehung auf ein System conjugirter Durchmesser

$$b'^2x^2 - a'^2y^2 = a'^2b'^2,$$

wo a', b' die in §. 488, 2) und 3) angeführte Bedeutung haben.

§. **491.** Verbindet man die Endpunkte eines Hauptdurchmessers einer Hyperbel mit einem beliebigen Punkte derselben durch Gerade, so sind die beiden Geraden zwei Supplementarsehnen. Man findet für dieselben, analog wie bei der Ellipse (§. 475), die Relation $\text{tang}\,\beta\ \text{tang}\,\beta' = \frac{b^2}{a^2}$, wenn β und β' die von den Sehnen mit der Hauptaxe gebildeten Winkel bedeuten.

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichung 1) in §. 487, daß auch in der Hyperbel zwei Durchmesser, welche zu zwei Supplementarsehnen parallel gezogen werden, einander conjugirt sind.

3. Uebungsaufgaben.

§. **492.** 1. Beliebig viele Punkte einer Hyperbel zu bestimmen, wenn die Hauptaxe und die beiden Brennpunkte gegeben sind.

Man nehme in der Verlängerung der Hauptaxe über die Brennpunkte hinaus beliebig viele Punkte an, beschreibe mit dem Abstande eines jeden von dem einen Scheitel aus dem einen Brennpunkte, und mit dem Abstande desselben Punktes von dem zweiten Scheitel aus dem andern Brennpunkte Kreisbogen, welche sich schneiden; die Durchschnittspunkte sind Punkte der Hyperbel.

2. Die Gleichung einer Hyperbel ist $9y^2 - 4x^2 = 36$; wie viele Punkte hat die Gerade

a) $y = \frac{2x}{3} + 2$, b) $y = 2x - 8$, c) $y = x - 3$

mit der Hyperbel gemeinschaftlich? (§. 484.)

3. Die Gleichung der Hyperbel für die Asymptoten als Axen abzuleiten.

Transformirt man die Mittelpunktsgleichung nach §. 419, wobei

$$\cos\alpha^2 = \cos(\gamma + \alpha)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2},\ \sin\alpha^2 = \sin(\gamma+\alpha)^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

zu setzen ist, so erhält man als Asymptotengleichung $xy = \frac{a^2+b^2}{4}$.

Für die gleichseitige Hyperbel ist $xy = \frac{a^2}{2}$.

4. Zu beweisen, daß für die auf die Asymptoten bezogenen Coordinaten x, y eines Punktes der Hyperbel $xy\sin\gamma = \frac{ab}{2}$ ist, wenn γ den Winkel zwischen den beiden Asymptoten bezeichnet.

5. Zu einem Durchmesser der Hyperbel den conjugirten Durchmesser zu finden.

Mit Rücksicht auf §. 487 oder §. 491 zu lösen.

6. Durch einen Punkt der Hyperbel an diese eine Tangente zu ziehen.

Die Auflösung ist analog den Auflösungen 1, 3 und 4 zu §. 476, Aufg. 6.

7. Von einem außerhalb der Hyperbel liegenden Punkte an dieselbe eine Tangente zu ziehen.

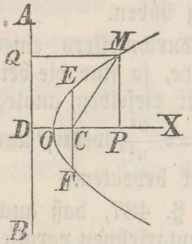
Wird analog wie Aufg. 7 in §. 476 aufgelöst.

VI. Die Parabel.

1. Analytische Darstellung der Parabel.

§. **493.** Die Parabel ist eine Linie, deren jeder Punkt von einem festen Punkte und einer festen Geraden denselben Abstand hat.

Fig. 264.



Ist C (Fig. 264) der gegebene feste Punkt und AB die feste Gerade, ferner $MQ \perp AB$, so ist M ein Punkt der Parabel, wenn $MC = MQ$ ist.

Der feste Punkt C heißt der **Brennpunkt**, die feste Gerade AB die **Leitlinie** der Parabel und CM der **Leitstrahl** des Punktes M.

§. **494.** **Scheitelgleichung der Parabel.**

Zieht man (Fig. 264) $CD \perp AB$, halbirt die CD im Punkte O und nimmt O als Ursprung der Coordinaten und OCX als die Abscissenaxe an, so ist für den Punkt M, $x = OP$, $y = MP$. Zieht man dann $MQ \perp AB$, so muß, wenn M in der Parabel liegen soll, $CM = MQ$ sein. Nun ist, wenn $CO = \frac{p}{2}$ gesetzt wird,

$$CM = \sqrt{\left(x - \tfrac{p}{2}\right)^2 + y^2},\quad MQ = DP = x + \tfrac{p}{2},\text{ daher}$$

$$\sqrt{\left(x - \tfrac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \tfrac{p}{2},\text{ woraus}$$

$$y^2 = 2px$$

als die gesuchte **Gleichung der Parabel** folgt.

§. **495.** **Discussion der Gleichung $y^2 = 2px$.**

1. Aus dieser Gleichung ergibt sich $y = \pm\sqrt{2px}$. Zu jedem positiven Werthe von x gehören zwei gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten; die Parabel dehnt sich also zu beiden Seiten der Abscissenaxe in zwei congruenten Aesten aus, und zwar ins Unendliche, da x und y jede beliebige Größe erreichen können. Die Gerade OX heißt darum die **Axe** der Parabel.

2. Für $x = 0$ wird auch $y = 0$; der Ursprung der Coordinaten ist also ein Punkt der Parabel; er heißt der **Scheitel**.

3. Für ein negatives x wird y imaginär; negativen Abscissen entsprechen daher keine Punkte der Parabel.

4. Setzt man $x = \frac{p}{2} = OC$, so wird $y = CE = CF = \pm p$; daher ist $EF = 2p$. Die Größe $2p$ stellt also die durch den Brennpunkt senkrecht auf die Axe gezogene Sehne EF vor und heißt der **Parameter** der Parabel.

5. Aus $y^2 = 2px$ folgt $2p : y = y : x$, d. h. **die Ordinate eines jeden Punktes der Parabel ist die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und der Abscisse des Punktes.**

6. Sind x' und x'' die Abscissen, y' und y'' die zugehörigen Ordinaten zweier Punkte einer Parabel, deren Parameter $2p$ ist, so hat man

$$y'^2 = 2px' \text{ und } y''^2 = 2px'',\text{ daher}$$

$$y'^2 : y''^2 = x' : x'',$$

d. h. **in der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die zugehörigen Abscissen.**

Zusatz. Läßt man in der Scheitelgleichung $y^2 = 2px \mp \frac{px^2}{a}$ einer Ellipse oder Hyperbel a ohne Ende zunehmen, während p ungeändert bleibt, was bei gehöriger Annahme von b vermöge der Gleichung $\frac{b^2}{a} = p$ immer möglich ist, so wird für $a = \infty$ der Quotient $\frac{px^2}{a} = 0$, und die Gleichung der Ellipse oder der Hyperbel verwandelt sich in jene der Parabel $y^2 = 2px$. Die Parabel kann demnach als eine Ellipse oder als eine Hyperbel angesehen werden, deren große oder erste Axe unendlich groß ist.

§. 496. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Coordinaten der Gleichung $y^2 = 2px$ genügen, ist eine Parabel.

Man mache (Fig. 264) $OC = \frac{p}{2}$. Ist nun M ein beliebiger Punkt der krummen Linie OEM und $OP = x$, $MP = y$; so ist

$$CM^2 = \left(x - \tfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - px + \tfrac{p^2}{4} + 2px = \left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2,$$

daher $$CM = x + \tfrac{p}{2}.$$

Macht man also $OD = OC$, zieht $DA \perp DX$ und $MQ \perp AD$, so ist

$$CM = x + \tfrac{p}{2} = OP + OD = DP = MQ,$$

und folglich die krumme Linie OEM eine Parabel.

§. 497. Bestimmung des Leitstrahles der Parabel.

Sind x', y' die Coordinaten des Punktes M (Fig. 264), so hat man

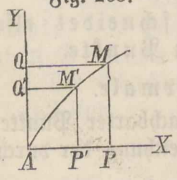
$$CM = x' + \tfrac{p}{2}.$$

Als Gleichung des Leitstrahles erhält man, da derselbe durch die Punkte $C = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ und $M = (x', y')$ geht,

$$y = \frac{y'}{x' - \frac{p}{2}}\left(x - \tfrac{p}{2}\right), \text{ oder } y = \frac{2y'}{2x' - p}\left(x - \tfrac{p}{2}\right).$$

§. 498. Der Flächeninhalt des zwischen zwei zusammengehörigen Coordinaten eingeschlossenen Parabelstückes ist gleich $\frac{2}{3}$ des Productes aus diesen Coordinaten.

Fig. 265.



Es sei AM (Fig. 265) ein parabolischer Bogen und AX die Axe der Parabel. Man ziehe $AY \perp AX$, und fälle von den Punkten M, M' auf AX die Senkrechten MP, M'P' und auf AY die Senkrechten MQ, M'Q'.

Heißen x, y die Coordinaten des Punktes M und x', y' jene des Punktes M', so ist, wenn man die Sehne MM' zieht,

$$\text{Trapez } MM'P'P = (y + y').\frac{x - x'}{2} = (y + y').\frac{y^2 - y'^2}{4p} = \frac{(y + y')^2}{2p} \cdot \frac{y - y'}{2},$$

$$\text{Trapez } MM'Q'Q = (x + x').\frac{y - y'}{2},$$

daher $$\frac{\text{Trap. } MM'P'P}{\text{Trap. } MM'Q'Q} = \frac{(y + y')^2}{2p\,(x + x')}.$$

Läßt man nun die Punkte M und M' unendlich nahe aneinander liegen, unter welcher Annahme $y + y'$ in $2y$ und $x + x'$ in $2x$ übergeht, so kann man das Trapez $MM'P'P$ als ein Element des gesuchten Parabelstückes AMP, und das Trapez $MM'Q'Q$ als ein Element der außerhalb der Parabel liegenden Fläche AMQ betrachten, und es wird

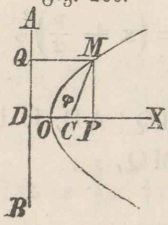
$$\frac{MM'P'P}{MM'Q'Q} = \frac{4y^2}{4px} = \frac{y^2}{px} = 2, \quad \text{also } MM'P'P = 2\,MM'Q'Q.$$

Stellt man sich nun die Flächen AMP und AMQ aus lauter solchen Elementen bestehend vor, so ist auch
$AMP = 2AMQ$; daher $3AMQ = AMP + AMQ = xy$, folglich
$AMQ = \frac{1}{3}xy$, und $AMP = \frac{2}{3}xy$.

§. **499.** Polargleichung der Parabel.

Es sei C (Fig. 266) der Pol und CD die Polaraxe, so ist für den Punkt M, $r = CM$, $\varphi = MCD$. Soll M ein Punkt der Parabel sein, so muß die Gleichung $CM = MQ$ stattfinden. Nun ist

Fig. 266.



$$CM = r,\ MQ = DP = DC + CP = p - r\cos\varphi,$$

daher $r = p - r\cos\varphi$, und somit

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}$$

die Polargleichung der Parabel.

2. Die Gerade und die Parabel.

§. **500.** Da $y^2 = 2px$ die Gleichung der Parabel, und $y = Ax + B$ die Gleichung einer Geraden ist, so erhält man für den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, welchem in beiden Linien gleiche Coordinaten zukommen,

$$y^2 = 2p \cdot \frac{y - B}{A} = \frac{2py}{A} - \frac{2Bp}{A}$$

und daraus $$y = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2ABp}}{A}.$$

Eine Gerade hat also im Allgemeinen mit der Parabel zwei Punkte, oder einen, oder keinen Punkt gemeinschaftlich, je nachdem $p \gtreqless 2AB$ ist.

Ist eine Gerade mit der Axe der Parabel $y^2 = 2px$ parallel, in welchem Falle $y = B$ ihre Gleichung ist, so erhält man für den Durchschnittspunkt

$$x = \frac{B^2}{2p},\ y = B.$$

Jede mit der Axe parallel gezogene Gerade schneidet also die Parabel in einem, aber nur in einem einzigen Punkte.

§. **501.** Gleichungen der Tangente und der Normale.

Heißen x', y' und x'', y'' die Coordinaten zweier benachbarter Punkte einer Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2px$ ist, so ist die Gleichung der durch diese Punkte gehende Secante

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \ldots . 1)$$

Da (x', y') und (x'', y'') Punkte der Parabel sind, so ist

$$y'^2 = 2px',\ y''^2 = 2px'', \text{ folglich}$$

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{2p}{y'' + y'} \ldots . 2)$$

Durch Substitution in 1) ergibt sich als Gleichung der Secante

$$y - y' = \frac{2p}{y'' + y'}(x - x') \ldots . \quad 3)$$

Läßt man nun den Punkt (x'', y'') mit (x', y') zusammenfallen, wodurch $y'' = y'$ wird, so erhält man aus 3) die Gleichung der Tangente

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x') \ldots . \quad 4),$$

oder

$$yy' = p(x + x') \ldots . \quad 5).$$

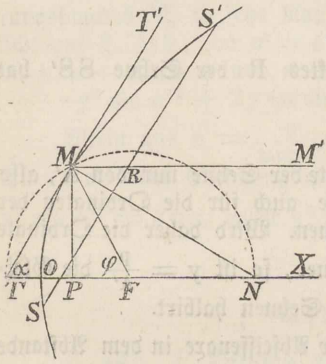
Für die zu dieser Tangente gehörige Normale folgt aus 4)

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x') \ldots . \quad 6).$$

§. **502.** Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

1. Sucht man aus 5) die Abscisse des Punktes T (Fig. 267), indem man $y = o$ setzt, so erhält man $x = -x'$; daher ist

Fig. 267.



Subtangente $PT = x - x' = -2x' \ldots . 7)$.

In der Parabel ist die Subtangente eines Punktes (dem absoluten Werthe nach) der doppelten Abscisse desselben gleich.

2. Für die Tangente MT hat man

$MT^2 = MP^2 + TP^2 = y'^2 + 4x'^2 = 2px' + 4x'^2$,

somit Tangente $MT = \sqrt{2x'(p + 2x')} \ldots 8)$.

3. Setzt man in 6) $y = o$, so erhält man für die Abscisse des Punktes N, $x = x' + p$, daher ist

Subnormale $PN = x - x' = p \ldots . 9)$.

In der Parabel ist die Subnormale constant und gleich dem halben Parameter.

4. Für die Normale MN erhält man

$MN^2 = MP^2 + PN^2 = y'^2 + p^2 = 2px' + p^2$, also

Normale $MN = \sqrt{p(p + 2x')} \ldots . 10)$.

Zusatz. Der Berührungspunkt und die Fußpunkte der Tangente und der Normale in der Axe sind von dem Brennpunkte der Parabel gleich weit entfernt.

Denn $MF = TF = NF = x' + \frac{p}{2}$.

§. **503.** Die Tangente einer Parabel bildet mit dem Leitstrahle des Berührungspunktes und mit einer zur Axe parallelen Geraden gleiche Winkel.

Die Gleichungen der Tangente und des Leitstrahles zu dem Punkte (x', y') sind

$$y = \frac{p}{y'}(x + x'), \text{ und } y = \frac{2y'}{2x' - p}\left(x - \frac{p}{2}\right);$$

man erhält daher für den von ihnen gebildeten Winkel v nach §. 435

$$\text{tang } v = \frac{p}{y'}.$$

Allein es ist auch (§, 501, 4) für den Winkel v', den die Tangente mit der Axe oder einer mit ihr parallelen Geraden bildet, $\text{tang } v' = \frac{p}{y'}$.

Folglich ist $\text{tang } v = \text{tang } v'$, und somit auch $v = v'$.

Einfacher ergibt sich dieser Satz aus §. 502, Zusatz. Da das $\triangle$ FMT (Fig. 267) gleichschenklig ist, so ist der W. $FMT = FTM$; nun ist auch W. $M'MT' = FTM$; daher $FMT = M'MT'$.

Auf diesem Satze beruht die Anwendung paraboliſcher Hohlſpiegel. Fallen nämlich Licht-, Wärme- oder Schallſtrahlen parallel mit der Axe auf den Spiegel auf, ſo vereinigen ſie ſich nach der Reflexion im Brennpunkte. Umgekehrt: Die vom Brennpunkte ausgehenden Strahlen werden von dem Spiegel parallel mit der Axe reflectirt.

§. **504.** Durchmeſſer der Parabel.

Iſt $y^2 = 2px$ die Gleichung einer Parabel, und $y = A'x + B'$ die Gleichung der Sehne SS' (Fig. 267), welche mit der Abſciſſenaxe den Winkel α' bildet, ſo ſind (§. 500) die Ordinaten y_1 und y_2 ihrer Endpunkte die Wurzeln der Gleichung

$$y^2 - \frac{2py}{A'} + \frac{2B'p}{A'} = 0,$$

daher

$$y_1 + y_2 = \frac{2p}{A'}.$$

Für die Ordinate k des Halbirungspunktes R der Sehne SS' hat man daher

$$k = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{A'}.$$

Da dieſe Gleichung die Ordinate der Mitte der Sehne nur von A', alſo von dem Winkel α' abhängig macht, ſo gilt ſie auch für die Ordinaten der Halbirungspunkte aller mit SS' parallelen Sehnen. Wird daher die Ordinate dieſer Halbirungspunkte allgemein mit y bezeichnet, ſo iſt $y = \frac{p}{A'}$ die Gleichung des Durchmeſſers MM', welcher jene Sehnen halbirt.

Die Gleichung $y = \frac{p}{A'}$ drückt eine mit der Abſciſſenaxe in dem Abſtande $\frac{p}{A'}$ parallele Gerade aus, woraus folgt, daß alle Durchmeſſer der Parabel mit der Axe parallel ſind.

Iſt n die Ordinate des Durchſchnittspunktes des Durchmeſſers mit der Parabel, ſo iſt $n = \frac{p}{A'}$, daher $A' = \text{tang}\,\alpha' = \frac{p}{n}$. Dies iſt aber (§. 501, Gleichung 4) auch die Richtungsconſtante der in jenem Punkte an die Parabel gezogenen Tangente. Daraus folgt:

Die Tangente einer Parabel iſt parallel mit den Sehnen, welche von dem durch den Berührungspunkt gezogenen Durchmeſſer halbirt werden.

Wegen dieſer Eigenſchaft nennt man in der Parabel, welche einen conjugirten Durchmeſſer im eigentlichen Sinne nicht haben kann, die Tangente ſelbſt conjugirt zu dem Durchmeſſer, welcher durch den Berührungspunkt geht.

Damit $\alpha' = 90^0$, alſo $\text{tang}\,\alpha' = A' = \infty$ werde, muß $y = o$ ſein. Unter allen Syſtemen conjugirter Durchmeſſer einer Parabel gibt es daher ein einziges rechtwinkliges, nämlich dasjenige, für welches die Axe und die Scheiteltangente die Durchmeſſer darſtellen.

§. **505.** Die Lage zweier conjugirter Durchmeſſer einer Parabel hängt von der Länge des zum Berührungspunkte M (Fig. 267) gezogenen Leitſtrahls FM ab. Dieſe Länge, die wir durch $\frac{p'}{2}$ bezeichnen wollen, läßt ſich auf zweifache Art ausdrücken.

Mit Rücksicht auf §. 502, Zusatz und 3 und 1 ist

$$\frac{p'}{2} = FM = \frac{NT}{2} = \frac{PN + PT}{2} = \frac{p + 2x}{2}, \text{ daher}$$

$$p' = p + 2x \ldots . \quad 1).$$

Aus der Polargleichung in §. 499 erhält man aber auch $\frac{p'}{2} = \frac{p}{1 + \cos \varphi'}$ oder, da in dem gleichschenkligen $\triangle$ FMT, $\varphi = 180^0 - 2\alpha'$ ist,

$$\frac{p'}{2} = \frac{p}{1 - \cos 2\alpha'} = \frac{p}{2 \sin \alpha'^2}, \text{ daher}$$

$$p' = \frac{p}{\sin \alpha'^2} \ldots . \quad 2).$$

§. **506.** Gleichung der Parabel in Beziehung auf ein System conjugirter Durchmesser.

Sind m, n die Coordinaten des neuen Ursprunges, d. i. des Berührungspunktes M, so setze man in der Scheitelgleichung $y^2 = 2px$ mit Rücksicht auf §. 419, da $\alpha = o$ und $\gamma + \alpha = \alpha'$ ist, für x und y bezüglich $m + x + y \cos \alpha'$ und $n + y \sin \alpha'$, wodurch man erhält

$$y^2 \sin \alpha'^2 + 2y (n \sin \alpha' - p \cos \alpha') + n^2 - 2mp = 2px.$$

Allein aus $n = \frac{p}{\text{tang } \alpha'}$ folgt $n \sin \alpha' = p \cos \alpha'$, ferner ist $n^2 = 2mp$; die neue Gleichung nimmt daher folgende Gestalt an:

$$y^2 \sin \alpha'^2 = 2px, \text{ daher } y^2 = \frac{2px}{\sin \alpha'^2}, \text{ oder wegen } \frac{p}{\sin \alpha'^2} = p' \text{ (§. 505).}$$

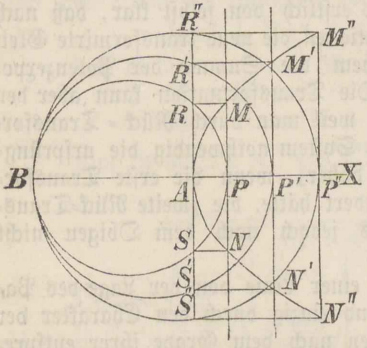
$$y^2 = 2p'x.$$

3. Uebungsaufgaben.

§. **507.** 1. Beliebig viele Punkte einer Parabel zu bestimmen, wenn der Brennpunkt und die Leitlinie gegeben sind.

Man bestimme zuerst den Scheitel und die Axe; dann nehme man in der Axe beliebig viele Punkte an, ziehe durch dieselben Senkrechte auf die Axe und beschreibe mit dem Abstande jedes Punktes von der Leitlinie als Halbmesser aus dem Brennpunkte Kreisbogen, welche die entsprechende Senkrechte schneiden, so sind die Durchschnittspunkte Punkte der Parabel.

Fig. 268.



2. Wenn der Parameter gegeben ist, beliebig viele Punkte der Parabel zu bestimmen.

Die Auflösung beruht auf §. 495, 5.

Es sei AB (Fig. 268) der Parameter, A der Scheitel und AX die Axe der Parabel. Man nehme beliebige Abscissen AP, AP', . . . an und beschreibe über BP, BP', . . . als Durchmesser Kreise, welche die in A auf AB errichtete Senkrechte in den Punkten R und S, R' und S', . . . schneiden. Zieht man nun durch diese Punkte Parallele zur Axe, so werden diese die in P, P', . . . auf die Axe errichteten Senkrechten in den Punkten M und N, M' und N', . . schneiden; diese sind dann Punkte der Parabel.

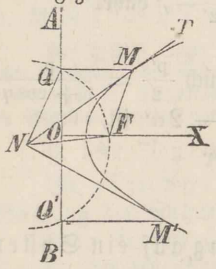
3. Die Gleichung einer Parabel ist $y^2 = 5x$; wie viele Punkte hat die Gerade

a) $6y = 18x + 5$, b) $y = 2x - 1$, c) $y = 3x + 2$

mit der Parabel gemeinschaftlich? (§. 500.)

4. Durch einen Punkt M der Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

Fig. 269.



Auflösung 1. Durch Halbirung des Winkels FMQ (Fig. 269) nach §. 503, indem man aus F und Q mit demselben Halbmesser Kreisbogen beschreibt, welche sich in N schneiden, und dann die NM zieht.

Auflösung 2. Mit Rücksicht auf §. 502, 1. Man mache (Fig. 267) OT = OP und ziehe TM.

Auflösung 3. Nach §. 502, Zusatz. Man beschreibe (Fig. 267) aus dem Brennpunkte F mit dem Leitstrahl FM als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die verlängerte Axe in T schneidet, und ziehe TM.

5. Aus einem Punkte N (Fig. 269) außerhalb der Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

Mit Beziehung auf die 1. Auflösung der Aufgabe 4 handelt es sich hier nur darum, den Punkt Q zu bestimmen, durch welchen die mit der Axe parallele Gerade QM gezogen werden muß, damit sie den Berührungspunkt M treffe. Der Punkt Q liegt nun in der Leitlinie und ist von N eben so weit entfernt, als der Punkt F; er ist daher der Durchschnitt der Leitlinie mit einem Kreise, welcher aus N mit dem Halbmesser NF beschrieben wird. Um daher von N eine Tangente an die Parabel zu ziehen, beschreibt man aus N mit dem Halbmesser NF einen Kreis, welcher die Leitlinie in Q schneidet, zieht QM || OX und sodann die Gerade NM.

Da jener Kreis die Leitlinie auch noch in einem zweiten Punkte Q' schneidet, so erhält man, wenn Q'M' || OX gezogen wird, einen zweiten Berührungspunkt M', und es ist auch NM' eine Tangente der Parabel.

6. Ein Körper, welcher die Höhe h über dem Horizonte hat, erhält durch eine Kraft eine gleichförmige Bewegung in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit c und vermöge der Schwerkraft eine verticale Bewegung mit der Beschleunigung g. a) Welche Linie durchläuft er? b) Nach welcher Zeit, und c) in welcher horizontalen Entfernung vom Ausgangspunkte langt er in der Horizontalebene an? (Der Widerstand der Luft bleibt unbeachtet.)

VII. Allgemeine Untersuchung der Linien zweiten Grades.

§. **508.** Der Grad einer Gleichung zwischen den Coordinaten für ein bestimmtes Parallelsystem wird durch die Transformation derselben für ein anderes Parallelsystem nicht geändert. Denn ist die ursprüngliche Gleichung zwischen x und y vom mten Grade, so ist erstlich von selbst klar, daß nach den in §§. 419 und 420 angegebenen Substitutionen die neue transformirte Gleichung kein Glied enthalten könne, in welchem die Summe der Potenzexponenten von x und y größer als m wäre. Die Transformation kann aber den Grad der Gleichung auch nicht erniedrigen, weil man durch Rück-Transformation der neuen Gleichung für das frühere System nothwendig die ursprüngliche Gleichung wieder erhalten muß, und daher, wenn die erste Transformation den Grad der Gleichung herabgemindert hätte, die zweite Rück-Transformation ihn wieder erhöhen müßte, was jedoch nach dem Obigen nicht möglich ist.

Da hiernach der Grad der Gleichung einer Linie von der Lage des Parallel-Coordinatensystems unabhängig ist, und einzig durch den Charakter der Linie bestimmt wird, so pflegt man die Linien nach dem Grade ihrer entsprechenden Gleichungen einzutheilen. Die gerade Linie ist eine Linie des *ersten Grades* und zwar die einzige Linie dieses Grades; der Kreis, die Ellipse, Hyperbel und Parabel gehören zu den Linien des *zweiten Grades*. Diese letzteren sollen nun hier ganz allgemein untersucht werden.

§. **509.** Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o \ldots . \quad 1)$$

zwischen den Coordinaten x, y eines Punktes der Ebene, wo A, B, C,....F reelle Coefficienten bedeuten.

Um die geometrische Bedeutung dieser Gleichung, in welcher man unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung ein rechtwinkliges Coordinatensystem voraussetzen kann, kennen zu lernen, wird man dieselbe durch Transformirung der Coordinaten auf eine einfachere Form zu bringen suchen, indem man Ursprung und Axenrichtung des neuen Systems so wählt, daß gewisse Glieder der transformirten Gleichung verschwinden.

Transformirt man zunächst die Coordinaten so, daß der Ursprung unverändert bleibt und die neue Abscissenaxe mit der früheren den Winkel α bildet, so muß man (§. 420) statt x und y bezüglich

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha \quad \text{und} \quad x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

setzen. Man erhält dadurch eine neue Gleichung

$$Mx^2 + Oxy + Ny^2 + Qx + Ry + F = o, \ldots . \quad 2)$$

worin

$$M = A \cos \alpha^2 + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin \alpha^2,$$
$$O = -2 (A - C) \sin \alpha \cos \alpha + B (\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2),$$
$$N = A \sin \alpha^2 - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos \alpha^2,$$
$$Q = D \cos \alpha + E \sin \alpha, \; R = -D \sin \alpha + E \cos \alpha$$

ist und F den früheren Werth beibehält.

Um nun aus dieser transformirten Gleichung xy wegzuschaffen, muß man dem noch unbestimmten Winkel α einen solchen Werth beilegen, daß $O = -2 (A - C) \sin \alpha \cos \alpha + B (\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2) = o$, oder was dasselbe ist, daß $-(A - C) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha = o$ werde; man muß also

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{B}{A - C} \ldots . \quad 3)$$

setzen. Da die Tangente eines Winkels jeden reellen Werth von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann, so läßt sich α immer so bestimmen, daß der Gleichung 3) Genüge geschieht. Dadurch fällt aus der Gleichung 2) das Glied Oxy weg und man erhält die einfachere Gleichung

$$Mx^2 + Ny^2 + Qx + Ry + F = o \ldots . \quad 4).$$

Zur Bestimmung von M und N ergibt sich aus den obigen Ausdrücken

$$M + N = A + C,$$
$$M - N = (A - C) \cos 2\alpha + B \sin 2\alpha.$$

Nun ist $\sin 2\alpha = \frac{\text{tang } 2\alpha}{\sqrt{1 + \text{tang } 2\alpha^2}} = \frac{B}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}}$,

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang } 2\alpha^2}} = \frac{A - C}{\sqrt{(A - C)^2 + B^2}}; \text{ daher}$$

$$M - N = \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}.$$

Daraus folgt

$$M = \frac{(A + C) \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2}, \; N = \frac{(A + C) \mp \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2} \ldots 5)$$

und

$$MN = \frac{4AC - B^2}{4} = -\frac{B^2 - 4AC}{4} \ldots . \quad 6).$$

Die weiteren Transformationen hängen von der Beschaffenheit der Coefficienten M und N, oder mit Rücksicht auf die Gleichung 6) von der Be-

schaffenheit des Ausdruckes $B^2 - 4AC$ ab. In dieser Beziehung sind drei Hauptfälle zu unterscheiden.

I. Es sei $B^2 - 4AC$ negativ.

Transformirt man die Gleichung 4), um die Glieder x und y wegzuschaffen, mit Beibehaltung der Axenrichtung für einen neuen Ursprung (m, n), indem man statt x und y die Werthe $x + m$ und $y + n$ substituirt, so ergibt sich die Gleichung

$$Mx^2 + Ny^2 + (2Mm + Q)x + (2Nn + R)y + (Mm^2 + Nn^2 + Qm + Rn + F) = o.$$

Damit die Coefficienten von x und y verschwinden, wählt man die noch unbestimmten Größen m und n so, daß

$$2Mm + Q = o \qquad \text{und} \qquad 2Nn + R = o$$

werde. Hieraus erhält man

$$m = -\frac{Q}{2M} \qquad \text{und} \qquad n = -\frac{R}{2N}.$$

und daher als transformirte Gleichung

$$Mx^2 + Ny^2 = S \ldots . \ 7),$$

wo $S = -(Mm^2 + Nn^2 + Qm + Rn + F)$ ist.

Diese Transformation ist hier immer möglich, da M und N unter der obigen Voraussetzung $B^2 - 4AC < o$ in Hinblick auf die Gleichung 6) beide von Null verschieden sein müssen.

In der Gleichung 7) kann das erste Glied M stets als positiv angenommen werden; dann muß wegen $MN = \frac{4AC - B^2}{4}$ auch N positiv sein. Es kommt noch die Beschaffenheit von S in Betrachtung.

1. Ist S positiv, so erhält man aus der Gleichung $Mx^2 + Ny^2 = S$

$$\text{für } y = o \ldots . \ x = \pm\sqrt{\frac{S}{M}}, \text{ und}$$

$$\text{für } x = o \ldots . \ y = \pm\sqrt{\frac{S}{N}}$$

Setzt man daher $\sqrt{\frac{S}{M}} = a$ und $\sqrt{\frac{S}{N}} = b$, so geht die Gleichung über in

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \ldots . \ 8),$$

welche Gleichung einer Ellipse mit den Halbaxen a und b entspricht (§. 458).

Wenn in diesem Falle $M = N$ ist, so wird auch $a = b$, und man erhält $x^2 + y^2 = a^2$, nämlich die Gleichung des Kreises. Für den Kreis muß daher nach den Gleichungen 5)

$\sqrt{(A - C)^2 + B^2} = o$, d. i. $A = C$ und $B = o$ sein.

2. Ist $S = o$, so ergibt sich $Mx^2 + Ny^2 = o$, welche Gleichung nur für $x = o$ und $y = o$ befriedigt werden kann; sie gehört also dem Anfangspunkte der neuen Coordinaten selbst an.

3. Ist S negativ, so kann der Gleichung $Mx^2 + Ny^2 = S$, deren erster Theil nur positive Glieder enthält, durch keine reellen Werthe von x und y Genüge geleistet werden; die Gleichung hat daher für ein negatives S keine geometrische Bedeutung.

Wenn also $B^2 - 4AC$ negativ ist, so entspricht die Gleichung 1) einer Ellipse, welche noch für specielle Fälle den Kreis oder einen Punkt als Varietäten darbietet.

II. Es sei $B^2 - 4AC$ positiv.

Da auch hier M und N von o verschieden sein müssen, so ist die in I. angegebene Transformation der Coordinaten ausführbar und kann daher die Gleichung 1) auch in diesem Falle auf die Form

$$Mx^2 + Ny^2 = S$$

gebracht werden. Nur haben hier, da $MN = -\frac{B^2 - 4AC}{4}$ negativ ist, M und N entgegengesetzte Vorzeichen. Nimmt man daher M als positiv an, so ist N negativ; wir setzen dafür $-N'$.

1. Ist S positiv, so folgt aus der Gleichung $Mx^2 - N'y^2 = S$

$$\text{für } y = o \ldots . \ x = \pm\sqrt{\frac{S}{M}}, \text{ und}$$

$$\text{für } x = o \ldots . \ y = \pm\sqrt{-\frac{S}{N'}}.$$

Setzt man $\sqrt{\frac{S}{M}} = a$ und $\sqrt{-\frac{S}{N'}} = b\sqrt{-1}$, so erhält man die Gleichung

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \ldots . \ 9),$$

deren geometrischer Ort eine Hyperbel mit der halben Hauptaxe a und der halben Nebenaxe b ist (§. 478).

2. Ist $S = o$, so folgt aus der Gleichung $Mx^2 - N'y^2 = o$

$$y = \pm x\sqrt{\frac{M}{N'}},$$

welche Gleichung ein System zweier im Ursprunge sich schneidender Geraden (als Varietät der Hyperbel) darstellt.

3. Ist endlich S negativ, nämlich gleich $-S'$, so ist dann

$$N'y^2 - Mx^2 = S'.$$

Die Gleichung läßt sich, indem man die Axen vertauscht, auf die erste Form zurückführen und stellt daher eine Hyperbel dar, in welcher die Abscissenaxe mit der Nebenaxe zusammenfällt.

III. Es sei $B^2 - 4AC$ gleich Null.

In diesem Falle ist vermöge der Gleichung 6) entweder $M = o$ oder $N = o$; beide Coefficienten M und N können mit Rücksicht auf §. 508 nicht zugleich Null sein. Es sei z. B. $M = o$; dann kann die in I. angegebene Transformation, weil $m = -\frac{Q}{2M}$ entweder unendlich groß wird, oder einen unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ annimmt, nicht ausgeführt werden; dagegen aber erscheint die erste transformirte Gleichung 4) unter der einfacheren Form

$$Ny^2 + Qx + Ry + F = o \ldots . \ 10).$$

Um diese Gleichung noch einfacher darzustellen, nimmt man einen neuen Ursprung (r, s) an und setzt statt x und y bezüglich $x + r$ und $y + s$, wodurch man erhält:

$$Ny^2 + Qx + (2Ns + R)\,y + (Ns^2 + Qr + Rs + F) = o.$$

Man wählt dann r und s so, daß der Coefficient von y und das von x und y freie Glied verschwinden, daß also

$$2Ns + R = o \quad \text{und} \quad Ns^2 + Qr + Rs + F = o$$

wird, was für die Werthe

$$s = -\frac{R}{2N} \quad \text{und} \quad r = \frac{R^2 - 4NF}{4NQ}$$

stattfindet. Diese Transformation kann jedoch nur dann vorgenommen werden, wenn Q nicht gleich Null ist. Wir unterscheiden daher zwei Fälle.

1. Wenn Q von Null verschieden ist. Dann läßt sich die Gleichung 10) auf die einfachere $Ny^2 + Qx = o$ transformiren, woraus

$$y^2 = Px \ldots . 11)$$

folgt, wenn $-\frac{Q}{N} = P$ gesetzt wird. Der geometrische Ort dieser Gleichung ist eine Parabel (§. 494), welche sich nach der positiven oder negativen Abscissenrichtung erstreckt, je nachdem der Parameter P positiv oder negativ ist.

2. Ist $Q = o$, so läßt sich die früher angegebene Transformation nicht anwenden; allein unter dieser Voraussetzung nimmt die Gleichung 10) die Form an:

$$Ny^2 + Ry + F = o \ldots . 12),$$

woraus $y = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4NF}}{2N}$ folgt, welche Gleichung ein System zweier mit der Abscissenaxe paralleler Geraden ausdrückt.

Zu denselben Ergebnissen gelangt man auch, wenn man $N = o$ annimmt; nur muß dann die Abscissenaxe mit der Ordinatenaxe vertauscht werden.

Aus allen diesen Untersuchungen geht hervor, daß die Gleichung 1) mit Ausnahme des zuletzt angeführten Falles, wo sie zwei parallelen Geraden angehört, durch eine zweimalige Transformation immer auf eine der beiden Gleichungen

$$Mx^2 + Ny^2 = S \quad \text{und} \quad y^2 = Px$$

gebracht werden kann, und eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel mit Einschluß ihrer Varietäten darstellt, je nachdem $B^2 - 4AC$ negativ, positiv oder gleich Null ist.

Der Charakter der dargestellten Linie hängt demnach einzig von der Beschaffenheit des Ausdruckes $B^2 - 4AC$ ab, welcher darum das charakteristische Binom der Gleichung 1) genannt wird.

§. **510.** Aufgaben.

Suche durch entsprechende Transformation der Coordinaten die geometrische Bedeutung folgender Gleichungen:

1. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 4 = o$.
2. $9x^2 + 16y^2 - 6x + 16y + 1 = o$.
3. $x^2 - y^2 - 4x - 4y - 4 = o$.
4. $8x^2 - y^2 + 48x = o$.
5. $2x^2 + 4xy - y^2 = o$.
6. $xy + x + y = 1$.
7. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 132x - 72y + 144 = o$.
8. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8x\sqrt{2} - 8y\sqrt{2} = o$.
9. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 90x + 5y + 25 = o$.
10. $3x^2 + 26xy\sqrt{3} - 23y^2 + 48x\sqrt{3} - 48y = o$.

11. Bestimme die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene Gerade berühren.

Bei der Lösung dieser und der folgenden Aufgaben 12. bis 14. betrachte man in der Gleichung der verlangten Kreise $(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2$ die Mittelpunktscoordinaten p und q als veränderlich, leite aus den Bedingungen der Aufgabe eine Gleichung zwischen p und q ab und suche die geometrische Bedeutung dieser Gleichung.

12. Bestimme die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis berühren, wenn der gegebene Punkt a) der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, b) ein anderer innerhalb des Kreises liegender Punkt ist, c) wenn er außerhalb des Kreises liegt.

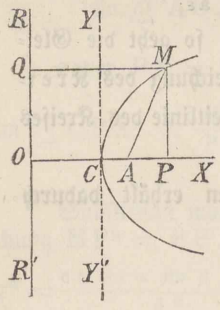
13. Bestimme die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berühren, wenn die Gerade a) durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht, b) wenn sie außerhalb des Kreises liegt.

14. Bestimme die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise gleichartig berühren, wenn a) die beiden Kreise sich schneiden, b) wenn der eine innerhalb des anderen liegt, jedoch mit ihm nicht concentrisch ist.

15. Eine Kugel wird unter dem Elevationswinkel α mit der Geschwindigkeit c abgeschossen; bestimme die Linie, welche dieselbe durchläuft, wenn die auf die Kugel wirkende Schwerkraft die Beschleunigung g hervorruft und man von dem Widerstande der Luft absieht. (Wurfhöhe, Wurfweite und Flugzeit.)

511. Den geometrischen Ort aller Punkte, deren Abstände von einem gegebenen Punkte und von einer gegebenen Geraden in einem constanten Verhältnisse c zu einander stehen, zu finden.

Fig. 270.



Man nehme (Fig. 270) die feste Gerade RR', die Leitlinie, vorläufig als Ordinatenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, dessen Abscissenaxe OX den gegebenen festen Punkt A, den Brennpunkt, in sich enthält.

Sind $OP = MQ = x$ und $MP = y$ die Coordinaten eines der verlangten Punkte M, so hat man, wenn $OA = d$ gesetzt wird,

$AM : MQ = c$, oder $AM = cx$, und auch

$$AM = \sqrt{AP^2 + MP^2} = \sqrt{(x-d)^2 + y^2};$$ daher

$$cx = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}.$$

Daraus folgt

$$(1 - c^2)\,x^2 + y^2 - 2dx + d^2 = 0 \quad \ldots \quad 1).$$

Der gesuchte geometrische Ort ist demnach eine Linie des zweiten Grades und zwar, wie schon aus §. 509 hervorgeht, eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem das charakteristische Binom $B^2 - 4AC = 4(c^2 - 1)$ negativ, positiv oder Null ist, d. i. je nachdem die Verhältnißzahl c kleiner als 1, größer als 1 oder gleich 1 ist.

Um die Bedeutung der Gleichung 1) auch unabhängig von den Untersuchungen des §. 509 nachzuweisen, wird man dieselbe zunächst auf eine einfachere Gestalt bringen, indem man den Ursprung in der Abscissenaxe um die Strecke m verschiebt, d. i. $x + m$ statt x setzt, wo m noch unbestimmt ist. Dadurch erhält man

$$(1-c^2)x^2 + y^2 + 2\{m(1-c^2) - d\}x + \{m^2(1-c^2) - 2dm + d^2\} = 0 \ldots 2).$$

Man wähle dann m so, daß $m^2(1-c^2)-2dm+d^2=0$ werde, was für $m=\frac{d}{1\mp c}$ stattfindet. Da aber der eine Werth $m=\frac{d}{1-c}$ für $c=1$ nicht brauchbar ist, so nehme man $m=\frac{d}{1+c}$ an, für welchen Werth man aus der Gleichung 2) erhält:

$$(1-c^2)x^2+y^2-2cdx=0,$$

oder wenn $cd=p$ gesetzt wird,

$$(1-c^2)x^2+y^2-2px=0 \ldots 3).$$

1. Ist $c<1$, so setze man $1-c^2=\frac{p}{a}$; dann ergibt sich aus 3)

$$y^2=2px-\frac{px^2}{a} \ldots 4),$$

d. i. die Scheitelgleichung einer Ellipse (§. 464).

Aus der obigen Substitution folgt

$$c^2=1-\frac{p}{a}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\varepsilon^2, \text{ daher } c=\varepsilon;$$

d. h. das constante Verhältniß c ist die numerische Excentricität ε selbst.

Ferner ist $d=\frac{p}{\varepsilon}=\frac{b^2}{a\varepsilon}$ und $m=\frac{d}{1+\varepsilon}$.

Die Leitlinie RR' bezieht sich auf den Brennpunkt A; in derselben Beziehung steht zu dem zweiten Brennpunkte B der Ellipse eine zweite Leitlinie SS', welche mit der ersten parallel ist und von dem zugeordneten Brennpunkte B auf der entgegengesetzten Seite denselben Abstand $d=\frac{b^2}{a\varepsilon}$ hat.

Wenn $c=0$, also $1=\frac{p}{a}$, folglich $p=a$ wird, so geht die Gleichung 4) über in $y^2=2ax-x^2$, d. i. in die Scheitelgleichung des Kreises (§. 444, 1). Für diese ist $d=\frac{p}{c}=\infty$, d. i. die Leitlinie des Kreises liegt im Unendlichen.

2. Ist $c>1$, so setze man $1-c^2=-\frac{p}{a}$; man erhält dadurch aus der Gleichung 3)

$$y^2=2px+\frac{px^2}{a} \ldots 5),$$

d. i. die Scheitelgleichung einer Hyperbel (§. 482).

Wie bei der Ellipse, ist auch hier

$$c=\varepsilon, \qquad d=\frac{b^2}{a\varepsilon}, \qquad m=\frac{d}{1+\varepsilon}.$$

Auch die Hyperbel hat zwei Brennpunkte und zwei Leitlinien.

3. Ist endlich $c=1$, so ergibt sich aus der Gleichung 3)

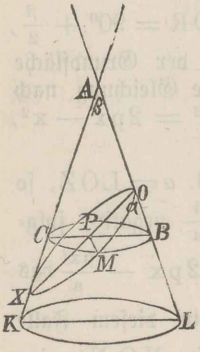
$$y^2=2px \ldots 6),$$

d. i. die Scheitelgleichung einer Parabel (§. 494).

In diesem Falle ist $m=\frac{d}{2}$, d. h. der neue Ursprung, welcher der Scheitel der Parabel ist, fällt in die Mitte des Abstandes des Brennpunktes von der Leitlinie.

§. 512. Entstehung der Linien zweiten Grades aus dem Schnitte eines Kegels durch eine Ebene.

Fig. 271.



Es sei AKLM (Fig. 271) ein senkrechter Kegel, AKL eine durch die Axe gelegte Ebene, und OMX eine zweite Ebene, welche durch den Punkt O senkrecht auf AKL gelegt wird und die Kegelfläche in der krummen Linie OMX, die Ebene AKL aber in der Geraden OX schneidet; man soll die Gleichung der Durchschnittslinie OMX entwickeln. — Legt man durch einen beliebigen Punkt M der Linie OMX die Ebene MBC parallel mit der Grundfläche des Kegels, so ist dieselbe auch senkrecht auf AKL und ihr Durchschnitt mit dem Kegel ein Kreis. Die Durchschnittslinie MP der Ebenen OMX und BMC muß daher ebenfalls auf die Ebene AKL und daher auch auf OX und BC senkrecht sein. Da BMC ein Kreis ist, so ist

$$MP^2 = BP \,.\, CP \quad (\S.\ 444,\ 1).$$

Nimmt man nun OX als die Abscissenaxe an, setzt $OP = x$, $MP = y$, ferner $AO = c$, den Winkel $BOX = \alpha$, $BAX = \beta$, so ist

$$\text{im } \triangle BPO \ldots \frac{BP}{PO} = \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\beta}{2}}, \text{ also } BP = \frac{x \sin \alpha}{\cos \frac{\beta}{2}};$$

$$\text{im } \triangle AOX \ldots \frac{OX}{AO} = \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}, \text{ also } OX = \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)},$$

$$\text{daher } PX = OX - OP = \frac{c \sin \beta - x \sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha - \beta)}; \text{ endlich}$$

$$\text{im } \triangle CPX \ldots \frac{CP}{PX} = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \frac{\beta}{2}}, \text{ also } CP = \frac{c \sin \beta - x \sin (\alpha - \beta)}{\cos \frac{\beta}{2}}.$$

Substituirt man die Werthe von MP, BP und CP in die obige Gleichung $MP^2 = BP \,.\, CP$, so erhält man

$$y^2 = \frac{c x \sin \alpha \sin \beta}{\cos \frac{\beta}{2}^2} - \frac{x^2 \sin \alpha \sin (\alpha - \beta)}{\cos \frac{\beta}{2}^2}$$

$$= 2c \sin \alpha \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} . x - c \sin \alpha \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} . \frac{2 \sin (\alpha - \beta)}{c \sin \beta} . x^2,$$

oder, wenn man $c \sin \alpha \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = p$ und $\frac{2 \sin (\alpha - \beta)}{c \sin \beta} = \frac{1}{a}$ setzt,

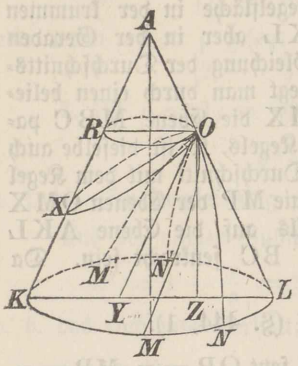
$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$$

als die Gleichung der krummen Linie OMX.

Die Bedeutung dieser Gleichung hängt offenbar von den Größen p und a, somit von c, α und β ab; c und β bestimmen die Lage und Größe der Durchschnittslinie, ihr Charakter hängt, wie wir sogleich sehen werden, bloß von dem Winkel α ab.

1. Ist $\alpha > \beta$, z. B. $\alpha = LOX$ (Fig. 272), so ist $\sin(\alpha - \beta)$, daher auch $\frac{1}{a}$ positiv, und somit, da p wesentlich positiv ist, $-\frac{px^2}{a}$ negativ; die Gleichung $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ stellt also eine Ellipse OXO vor.

Fig. 272.

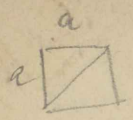


Ist in diesem Falle $\alpha = LOR = 90^0 + \frac{\beta}{2}$, d. i. der Schnitt parallel mit der Grundfläche des Kegels, so geht die obige Gleichung nach gehöriger Reduction über in $y^2 = 2px - x^2$, welche einem Kreise angehört.

2. Wenn ferner $\alpha < \beta$, z. B. $\alpha = LOZ$, so ist $\sin(\alpha - \beta)$, daher auch $\frac{1}{a}$ negativ, folglich in der Gleichung $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ das zweite Glied $-\frac{px^2}{a}$ positiv; in diesem Falle ist demnach die krumme Linie NON' eine Hyperbel.

3. Ist endlich $\alpha = \beta$, z. B. $\alpha = LOY$, so ist $\sin(\alpha - \beta) = 0$, also auch $\frac{1}{a} = 0$, und die allgemeine Gleichung verwandelt sich in $y^2 = 2px$; die Durchschnittslinie MOM' ist also eine Parabel.

Die Kegelschnittslinie ist daher eine Ellipse (Kreis), eine Hyperbel oder eine Parabel, je nachdem der Winkel α größer, kleiner oder eben so groß ist als der Winkel β.



$d^2 = a^2 + a^2$

$d^2 = 2a^2$

$a^2 = \frac{d^2}{2} =$

$a = d : \sqrt{2}$