



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

Diplomarbeit

Eigenschaften und Einsatzmöglichkeiten von GPS und Galileo Signal-Linearkombinationen

ausgeführt am

Departement für Geodäsie und Geoinformation, Fachgruppe: Höhere Geodäsie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Robert Weber

durch

Marcus Franz Glaner

1027081

Ibsenstraße 26

1150 Wien

Wien, im März 2017

Vorwort

In meiner Diplomarbeit wollte ich mich mit *Global Navigation Satellite Systems* auseinandersetzen, da es mich schon lange fasziniert, welche Möglichkeiten sie ihren Nutzern bieten. Wie kann es sein, dass Positionen auf der Erde zentimeter-, sogar millimetergenau bestimmt werden können, obwohl die Signale von Satelliten stammen, die zehntausende Kilometer entfernt sind, die Atmosphäre durchqueren müssen und unzähligen Fehlereinflüssen ausgesetzt sind? Zur Beseitigung vieler dieser Fehlereinflüsse bieten sich Linearkombinationen an, die schließlich zum Inhalt meiner Arbeit wurden. Insgesamt handelt es sich um ein hochinteressantes Themenfeld, in das ich mich mit Freude vertieft habe.

In naher Zukunft gibt es hoffentlich noch mehr funktionstüchtige Global Navigation Satellite Systems, die durch ein breites Spektrum an Signalfrequenzen vollkommen neues Potential für Linearkombinationen bieten.

Mein Dank gilt Prof. Weber für seine kompetente und engagierte Betreuung, den unzähligen Freunden, die mir meinen Weg durch Studium auf unterschiedliche Art und Weise erleichtert haben, sowie meiner Freundin Sabine.

Vor allem möchte ich meinen Eltern für ihre Unterstützung in allen Lebensbereichen danken.

Marcus Franz Glaner

Abstract

Global Navigation Satellite Systems (GNSS) broadcast signals on three or even more frequencies and therefore offer potential for new and powerful Signal-Linear-Combinations (LCs).

This thesis starts with an introduction to the fundamentals of GNSS positioning. Of particular interest are certain error sources which can be mitigated and detected with LCs, and the formation of the signal frequencies. To describe LCs properly their attributes and characteristics are derived in a mathematical model.

The most common LCs noted in literature are examined. It is outlined which error sources of GNSS range observations can be eliminated and detected with specific LCs.

So-called optimal LCs which are formed with three frequencies are studied in detail. For this purpose a method is presented which allows to identify it possibly to find LCs with desired characteristics and their coefficients directly. The search for optimal LCs is parametrized over the so-called Lane-Number and the ionospheric amplification factor. All resulting LCs can be characterized as functions of these two parameters.

As an amplification of noise is inevitable when forming LCs this fact is illustrated with real observation data. The noise of the original measurements and some LCs is figured out. The results are compared with the noise amplification factor. This parameter is used to describe the amplification of noise of a certain LC in this thesis.

At the end a recommendation is provided which LCs seem suitable either solving ambiguities or obtain an optimum coordinate estimate for a particular base-line-length.

Zusammenfassung

Global Navigation Satellite Systems (GNSS) senden heute Signale auf drei oder mehr Frequenzen aus. Sie eröffnen damit neues Potential für die Bildung von Signal-Linearkombinationen (LCs).

Zu Beginn dieser Arbeit wird eine Einführung in die Grundlagen der Positionierung mit GNSS gegeben. Von besonderem Interesse sind dabei gewisse Fehlereinflüsse, die mit LCs eliminiert oder detektiert werden können, und die Bildung der Signalfrequenzen. Um LCs beschreiben zu können, werden für sie verschiedene Eigenschaften in einem mathematischen Modell hergeleitet.

Die am meisten gebräuchlichen LCs werden genauer betrachtet. Es wird beschrieben, welche Fehlereinflüsse sie jeweils eliminieren und detektieren können. Ausgehend von den weitgehend bekannten LCs gebildet aus zwei Frequenzen wird auf deren Möglichkeiten zur Bildung mit drei Frequenzen eingegangen.

Sogenannte optimale LCs, gebildet aus drei Frequenzen, werden detailliert untersucht. Zu diesem Zweck wird eine Methode vorgestellt, die es ermöglicht, LCs mit gewünschten Eigenschaften direkt aufzufinden. Die Suche nach diesen optimalen LCs wird über die sogenannte Lane-Nummer und den ionosphärischen Verstärkungsfaktor parametrisiert. Alle resultierenden LCs können als Funktionen dieser beiden Parametern dargestellt werden.

Da die Verstärkung des Signal-Rauschens in Relation zur Basisbeobachtung bei der Bildung von LCs unvermeidbar ist, wird diese anhand von realen Beobachtungsdaten verdeutlicht. Das Rauschen einiger LCs wird bestimmt und jenem der originalen Beobachtungen gegenübergestellt. Die Ergebnisse werden mit dem theoretischen Rausch-Verstärkungsfaktor verglichen.

Am Ende der Arbeit wird abhängig von der Basislinienlänge eine Empfehlung für die optimal zu nutzende LC abgegeben.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
Abstract	3
Zusammenfassung	4
1. Einleitung	7
1.1. Ausgangslage und Ziel	7
1.2. Inhaltsübersicht	7
2. Grundlagen	8
2.1. Global Navigation Satellite Systems	8
2.2. GPS	8
2.3. Galileo	9
3. GNSS-Messungen	11
3.1. Grundlagen	11
3.2. Absolute Positionierung	11
3.3. Relative Positionierung	12
3.4. Code- und Phasenmessung	13
3.5. Differenzbildung	15
3.6. Ambiguity-Auflösung	16
3.7. Satellitenbahnfehler	16
3.8. Atmosphäre	17
3.8.1. Ionosphärische Verzögerung	18
3.8.2. Troposphärische Verzögerung	20
3.9. Multipath	21
3.10. Uhrfehler und relativistische Einflüsse	22
3.11. Antenna Phase Center Offset und Variation	23
3.12. Phase Wind-Up	25
3.13. Rauschen	26
3.14. Fazit	26
4. Linearkombinationen	27
4.1. Einführung	27
4.2. Mathematisches Modell	28
4.2.1. Ambiguity	30
4.2.2. Wellenlänge und Frequenz	30
4.2.3. Ionosphärischer Verstärkungsfaktor	30
4.2.4. Rausch-Verstärkungsfaktor	31
4.2.5. Lane-Nummer	32

4.2.6. Koeffizientensumme	33
4.3. Zusammenfassung	33
5. Gebräuchliche Linearkombinationen	34
5.1. Ionosphärenfreie Linearkombination	34
5.2. Geometriefreie Linearkombination	36
5.3. Wide-Lane-Linearkombination	38
5.4. Narrow-Lane-Linearkombination	39
5.5. Melbourne-Wübbena-Linearkombination	41
5.6. Multipath-LC	41
5.7. Übersicht Linearkombinationen	42
6. Optimale Linearkombinationen	43
6.1. Geometrische Betrachtung	43
6.2. Systematische Suche	45
6.2.1. Lane-Ebenen	45
6.2.2. Ionosphären-Ebenen	47
6.2.3. Schnitt Lane-Ebenen mit Ionosphären-Ebenen	49
6.2.4. Suchmethode	52
6.2.5. Erste Ergebnisse	53
6.2.6. Achsen niedrigens Rauschens	56
6.2.7. Optimale LCs für GPS	57
6.2.8. Optimale LCs für Galileo	61
6.2.9. Wahl von Linearkombinationen	66
6.3. Überblick	67
7. Rausch-Verstärkung	68
7.1. Rauschen der originalen Beobachtungen	68
7.2. Rauschen verschiedener LCs	70
7.3. Fazit	73
8. Zusammenfassung und Ausblick	75
Anhang	77
Variablenverzeichnis	79
Abkürzungsverzeichnis	81
Abbildungsverzeichnis	83
Tabellenverzeichnis	85
Literaturverzeichnis	86

1. Einleitung

1.1. Ausgangslage und Ziel

In dieser Arbeit soll vor dem Hintergrund der Modernisierung und dem Aufbau neuer Global Navigation Satellite Systems das Themenfeld Signal-Linearkombinationen (Linear Combinations = LCs) möglichst breit abgedeckt werden. In der bestehenden wissenschaftlichen Literatur dazu findet sich eine Vielzahl unterschiedlicher Linearkombinationen. Ausgehend von diesen gebräuchlichen Linearkombinationen und ihrer weitgehend bekannten Bildung aus zwei Frequenzen werden in dieser Arbeit die Möglichkeiten, die sich aufgrund von drei Signalfrequenzen eröffnen, erläutert. Ihre Einsatzmöglichkeiten werden aufgezeigt und ihre Vor- und Nachteile diskutiert. Darüber hinaus werden Eigenschaften und Parameter zur Beschreibung von LCs eingeführt. Detaillierter wird im Rahmen dieser Arbeit auf das bewährte GPS und europäische Galileo eingegangen, wobei sich die Herleitungen und Formeln nicht allein auf diese Systeme beschränken.

1.2. Inhaltsübersicht

Zu Beginn der Arbeit werden in Kapitel 2 einige wesentliche Begriffe eingeführt und Grundlagen erläutert. Auf die Bildung der Signalfrequenzen, die für die weitere Arbeit wichtig ist, wird eingegangen. In Kapitel 3 wird das grundlegende Prinzip von Global Navigation Satellite Systems erläutert, verschiedene Positionierungsarten werden beschrieben und alle relevanten Fehlereinflüsse werden betrachtet. Detaillierter wird auf jene eingegangen, die im Zusammenhang mit Linearkombinationen interessant sind. In Kapitel 4 wird der Begriff Signal-Linearkombination allgemein eingeführt und ihr Einsatz wird motiviert. Wichtige Eigenschaften und Größen, die zur Beschreibung von Linearkombinationen dienen, werden in einem mathematischen Modell hergeleitet und definiert. In Kapitel 5 werden Linearkombinationen, die sich üblicherweise in der Literatur finden, vorgestellt und ihre Einsatzmöglichkeiten und Bildungsgesetze werden erläutert. In Kapitel 6 werden sogenannte optimale Linearkombinationen definiert. Ein Verfahren wird vorgestellt, welches es ermöglicht, Linearkombinationen direkt anhand ihrer Eigenschaften aufzufinden und ihre Koeffizienten zu bestimmen. Die Ergebnisse werden untersucht und interessante optimale Linearkombinationen hervorgehoben. In Kapitel 7 wird das Rausch-Verhalten und der Rausch-Verstärkungsfaktor von Linearkombinationen anhand von realen Beobachtungsdaten untersucht. Dazu wird das theoretische Rausch-Verhalten, hergeleitet in den Vorkapiteln, mit jenem der originalen Beobachtungen verglichen. In Kapitel 8 wird neben einer kurzen Zusammenfassung und einem Ausblick eine Empfehlung zur Wahl von Linearkombinationen, abhängig von der Basislinienlänge, gegeben.

2. Grundlagen

2.1. Global Navigation Satellite Systems

Mit dem Ausdruck Global Navigation Satellite Systems (GNSS) werden Systeme von Satelliten, die die Positionierung und Navigation auf der Erde und im erdnahen Weltraum unabhängig von Uhrzeit, Ort und Wetter ermöglichen, bezeichnet. Ein GNSS benötigt zur vollständigen Funktionsfähigkeit eine gewisse Mindestanzahl an Satelliten, die die Erde umkreisen. Diese Satelliten senden Signale im Mikrowellenbereich aus, durch deren Empfang und Verarbeitung eine Positionsbestimmung möglich ist. Das bekannteste GNSS ist das US-amerikanische Global Positioning System (GPS). Weitere teilweise noch im Aufbau befindliche GNSS sind das europäische Galileo, das russische GLONASS und das chinesische BeiDou (BDS).

2.2. GPS

GPS (Global Positioning System) wird vom Department of Defense der U.S. Air Force betrieben und ist seit den 1990er-Jahren voll operabel. Momentan sind etwa 30 GPS-Satelliten im All, mindestens 24 Satelliten sind für eine vollständige Funktionsfähigkeit notwendig. Diese Satelliten umkreisen die Erde auf sechs nahezu kreisförmigen Umlaufbahnen verteilt mit einer auf die Äquatorebene bezogenen Inklination von ca. 55° , einer großen Halbachse von ungefähr 26660km und einer Umlaufzeit von ca. 11 Stunden 58 Minuten. Die GPS-Satelliten-Konstellation ist in Abbildung 1 auf der linken Seite dargestellt. Es handelt sich um eine 24/6/1-Walker-Konstellation (Satellitenanzahl / Anzahl der Bahnebenen / Phasenparameter). Alle Satelliten werden in naher Zukunft zusätzlich zu den Basis-Trägerfrequenzen L1 und L2 auch auf einer dritten Frequenz L5 senden. Die Frequenzen werden als Vielfaches der Grundfrequenz $f_0 = 10.23\text{Mhz}$ gebildet. Ein Überblick über die Frequenzen von GPS ist in Tabelle 1 zu finden. Im Rahmen dieser Arbeit werden Beobachtungen auf L1 mit dem Index $i=1$, Beobachtungen auf L2 mit dem Index $i=2$ und Beobachtungen auf L5 mit dem Index $i=3$ bezeichnet. Die Koeffizienten mit denen die Grundfrequenz f_0 multipliziert wird um die drei Signalfrequenzen zu erhalten, werden mit k_1 für die erste Frequenz, k_2 für die zweite Frequenz und k_3 für die dritte Frequenz bezeichnet.

$$f_i = k_i f_0 \quad (2.1)$$

Trägerwelle	Index	Koeffizient k_i	Frequenz [Mhz]	Wellenlänge [cm]
L1	$i=1$	$k_1 = 154$	$154 \cdot f_0 = 1575.42$	19.03
L2	$i=2$	$k_2 = 120$	$120 \cdot f_0 = 1227.60$	24.42
L5	$i=3$	$k_3 = 115$	$115 \cdot f_0 = 1176.45$	25.48

Tabelle 1: Übersicht über die Frequenzen von GPS

Jedes Signal entspricht einem den Trägerwellen aufmodulierten Code, anhand dessen die Satelliten unterschieden werden (Code Division Multiple Access – CDMA), Range-Information übermittelt wird und mit Hilfe dessen auch zur Positionierung notwendige Informationen und Korrekturparameter gesendet werden (Broadcast-Message).

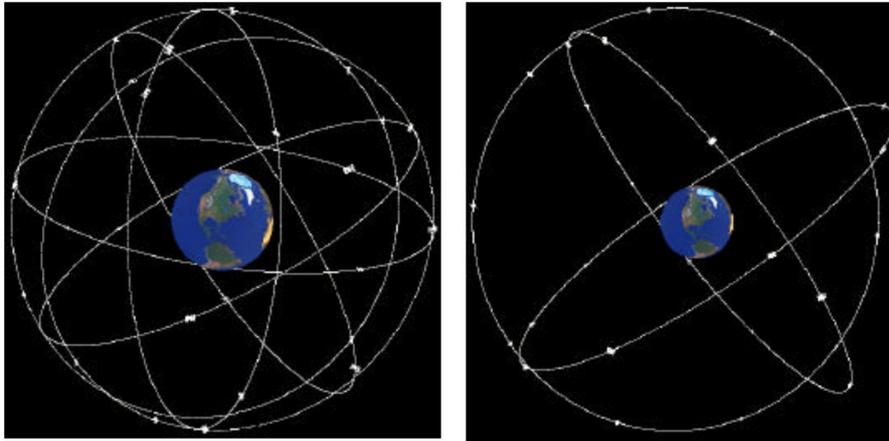


Abbildung 1: GPS-Konstellation (links) und Galileo-Konstellation (rechts) [Zhang, 2005]

2.3. Galileo

Galileo ist ein Projekt der Europäischen Union, das von der European Space Agency (ESA) realisiert wird und sich seit den 2000er-Jahren im Aufbau befindet. Die volle Funktionsfähigkeit ist noch nicht erreicht und wird momentan für 2019/2020 angekündigt¹. Im November 2016 wurden die Galileo Satelliten 15-18 in die Erdumlaufbahn gebracht².

Im Vollausbau soll das Raumsegment von Galileo aus 30 Satelliten bestehen, die die Erde auf drei nahezu kreisförmigen Bahnen verteilt mit einer großen Halbachse von ungefähr 29600km und einer Inklination von ca. 56° umkreisen. Es handelt sich dabei um eine 27/3/1-Walker-Konstellation mit drei zusätzliche Satelliten als Backup (einer pro Bahnebene). Die Galileo-Satelliten-Konstellation ist im rechten Teil der Abbildung 1 dargestellt. Die Umlaufzeit eines Satelliten beträgt etwa 14 Stunden 4.75 Minuten. Galileo verwendet zur Bildung der Signalfrequenzen dieselbe Grundfrequenz wie GPS. Von den vier Frequenzen, auf denen Galileo senden wird, sind drei Frequenzen (E1, E5a, E5b) für alle Nutzer verfügbar. Im Rahmen dieser Arbeit werden Beobachtungen auf E1 mit dem Index $i=1$, Beobachtungen auf E5a mit dem Index $i=2$ und Beobachtungen auf E5b mit dem Index $i=3$ bezeichnet. Die vierte Frequenz E6 ist derzeitiger Planungen entsprechend verschlüsselt und nicht kostenlos nutzbar. In dieser Arbeit wird deshalb nur auf die drei für alle Nutzer offenen Frequenzen eingegangen.

¹ https://www.gsc-europa.eu/helpdesk/faqs##when_operational, letzter Zugriff: 2.1.2017

² http://www.esa.int/Our_Activities/Navigation/Galileo/Launching_Galileo/Launch_of_new_Galileo_navigation_quartet, letzter Zugriff: 2.1.2017

Trägerwelle	Index	Koeffizient k_i	Frequenz [Mhz]	Wellenlänge [cm]
E1	$i=1$	$k_1 = 154$	$154 \cdot f_0 = 1575,42$	19.03
E5a	$i=2$	$k_2 = 115$	$115 \cdot f_0 = 1176,45$	25.48
E5b	$i=3$	$k_3 = 118$	$118 \cdot f_0 = 1207,14$	24.83
E6 (verschlüsselt)	$i=4$	$k_4 = 125$	$125 \cdot f_0 = 1278,75$	23.44

Tabelle 2: Übersicht über die Frequenzen von Galileo

In Tabelle 3 sind einige Eckdaten von GPS und Galileo zusammengefasst. Es ist möglich beide GNSS gleichzeitig zu einer unabhängigen Positionsbestimmung zu verwenden. Erleichtert wird dies von Betreiberseite etwa durch Signale auf denselben Frequenzen (L1 und E1, L5 und E5a) und die Aufnahme der Differenz der beiden unterschiedlichen Zeitsysteme in die Broadcast Message von Galileo. Aufgrund der unterschiedlichen zeitlichen und räumlichen Referenzrahmen können Beobachtungen von GPS und Galileo nur bedingt kombiniert werden. Welche Möglichkeiten sich durch eine gemeinsame Verwendung von GPS und Galileo eröffnen wird sich zur Gänze erst zeigen, wenn Galileo voll funktionsfähig ist und geeignete Empfänger verfügbar sind.

	GPS	Galileo
Betreiber	U.S. Air Force	European Space Agency
Nominelle Anzahl an Satelliten	24	27
Bahnebenen	6	3
Inklination	55°	56°
Große Halbachse	26 560 km	29 601 km
Umlaufdauer	11h 57.96min	14h 04.75min
Knotenabstand der Bahnebenen	60°	120°
Satellitenumläufe bis sich der Ground Track eines Satelliten wiederholt	2	17
Geodätisches Referenz-System	World Geodetic System 84 (WGS-84)	Galileo Terrestrial Reference Frame (GTRF)
Zeitsystem	GPS Time	Galileo System Time
Schaltsekunden	Nein	Nein
Signalunterscheidung	CDMA	CDMA
Anzahl an Frequenzen	3	4

Tabelle 3: Übersicht über GPS und Galileo nach [Hofmann-Wellenhof et al., 2008] und ³

³ <http://garrett.seepersad.org/blog/summary-of-gnss-paramters>, letzter Zugriff 27.4.2016

3. GNSS-Messungen

In diesem Kapitel wird auf das Prinzip und die Funktionsweise von GNSS-Messungen eingegangen. Es werden verschiedene Möglichkeiten der Positionierung und relevante Fehlerquellen erläutert. Um zu verstehen, wie sich die verschiedenen Fehlerquellen auf GNSS-Messungen auswirken, ist es erforderlich, über sie Bescheid zu wissen und sie zu verstehen. Detaillierter werden jene behandelt, die im Zusammenhang mit Linearkombinationen (Kapitel 4) interessant sind. Es wird ihre zu erwartende Größenordnung betrachtet und ein Ausblick darauf gegeben, auf welche Art und Weise Linearkombinationen nützlich sein können um einzelne Fehlerquellen auszuschalten oder zu minimieren.

3.1. Grundlagen

Die grundlegende Beobachtung bei GNSS ist die Distanz zwischen Empfänger und Satelliten. Um eine Positionierung mit GNSS durchzuführen ist ein Empfänger notwendig, der die von den Satelliten ausgesandten Signale empfängt, aus diesen die Entfernung zum jeweiligen Satelliten berechnet und dann die Koordinaten des Standpunktes berechnet.

Die Satelliten werden bei GPS und Galileo vom Empfänger anhand eines Codes unterschieden. Die vom Empfänger ermittelte Entfernung wird als Pseudorange bezeichnet, da es sich aufgrund verschiedener Fehlereinflüsse (vor allem des Empfängeruhrfehlers) nicht um die wahre geometrische Distanz handelt. Bestimmt werden kann diese Entfernung mittels Codemessung oder Phasemessung (siehe Kapitel 3.4.). Diese beiden Verfahren unterscheiden sich in der Funktionsweise und der erreichbaren Genauigkeit. Damit die Position des Empfängers berechnet werden kann, müssen neben den gemessenen Pseudoranges die Positionen der Satelliten bekannt sein. Im einfachsten Fall extrahiert der Empfänger diese Information aus der Broadcast Message, die von jedem Satelliten ausgesandt wird. Sie ist dem Satellitensignal aufmoduliert und enthält Informationen über die Satellitenbahn, die Zeitkorrektur zur GNSS-Systemzeit und Korrekturparameter. Die eigentliche Positionsbestimmung aus den Pseudoranges kann absolut oder relativ geschehen.

3.2. Absolute Positionierung

Bei der absoluten Positionierung werden die unbekannt Koordinaten des Empfängers direkt aus den Entfernungsmessungen zu Satelliten und bekannten Satellitenpositionen bestimmt. Dies ist dargestellt in Formel (3.1), wobei d_r^s der Distanz zwischen Empfänger und Satellit, c_0 der Lichtgeschwindigkeit und Δt_r dem Empfängeruhrfehler entspricht. X^s, Y^s, Z^s beschreibt die Position des Satelliten und X_r, Y_r, Z_r die Position des Empfängers.

$$d_r^s = \sqrt{(X^s - X_r)^2 + (Y^s - Y_r)^2 + (Z^s - Z_r)^2} + c_0 \Delta t_r \quad (3.1)$$

Eine konstante Entfernung, die von einem Punkt ausgeht, entspricht im dreidimensionalen Raum der Oberfläche einer Kugel. Daher ist die absolute Positionierung geometrisch als Schnitt von Kugeln zu deuten. Dies ist als zweidimensionaler Schnitt in Abbildung 2 dargestellt. Theoretisch sind drei Entfernungsmessungen ausreichend um einen eindeutigen Schnittpunkt, also eine eindeutige Position, zu erhalten (Abbildung 2 Mitte). Da bereits eine geringe Differenz zwischen Satellitenuhr und Empfängeruhr aufgrund der Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit zu einem riesigen Distanzfehler führt, wird in der Praxis die Zeit des Empfängers mit geschätzt und es sind mindestens vier Satelliten zur Positionierung notwendig. Das erklärt den letzten Term in (3.1). Da darüber hinaus verschiedene Fehlereinflüsse auf GNSS-Messungen wirken, wird die Position geschätzt (Abbildung 2 rechts). Grundsätzlich gilt, dass eine höhere Anzahl an empfangenen Satelliten und damit Entfernungsmessungen die Qualität der Positionsbestimmung verbessert.

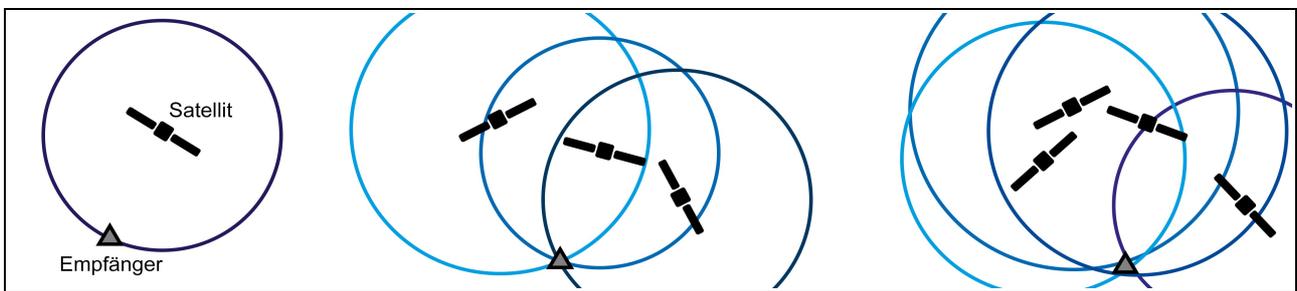


Abbildung 2: Schematische Darstellung der absoluten Positionsbestimmung mit GNSS im Zweidimensionalen - Theorie (links und Mitte) und Praxis (rechts)

3.3. Relative Positionierung

Bei der relativen Positionierung werden die Koordinaten eines unbekannten Punktes relativ in Bezug auf einen bekannten Punkt bestimmt (Abbildung 3). Die relative Positionierung zielt darauf ab den als Basislinie bezeichneten Vektor zwischen einem bekannten Referenzpunkt und dem unbekannten Punkt zu bestimmen. Bezeichnet man mit \mathbf{x}_B den Ortsvektor des unbekannten Punktes B, mit \mathbf{x}_A den Ortsvektor des bekannten Referenzpunktes A und mit \mathbf{b}_{AB} den Basislinienvektor erhält man.

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{x}_A + \mathbf{b}_{AB} \quad (3.2)$$

Der Basislinienvektor \mathbf{b}_{AB} setzt sich aus der Differenz der Koordinaten der Punkte A und B zusammen.

$$\mathbf{b}_{AB} = \begin{pmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta X_{AB} \\ \Delta Y_{AB} \\ \Delta Z_{AB} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Die Koordinaten des Referenzpunktes sind meistens präzise mit GNSS oder anderen Methoden bestimmt worden, können aber auch aus einer absoluten Positionierung mit Codemessungen stammen. Bei der relativen Positionierung werden viel höhere Genauigkeiten erreicht als bei der

absoluten Positionierung, was den Einsatz von GNSS in der Vermessungspraxis möglich macht. Der Grund dafür ist, dass nahezu alle auf GNSS-Messungen wirkende Fehlerquellen zeitlich oder örtlich höchst korreliert sind. Anders gesagt wirken auf nahegelegene Stationen zur selben Zeit nahezu dieselben Effekte in sehr ähnlicher Stärke. Mit wachsender räumlichen und zeitlicher Entfernung zwischen den Punkten A und B nimmt die Korrelation der Fehler und damit die Genauigkeit der relativen Positionierung ab.

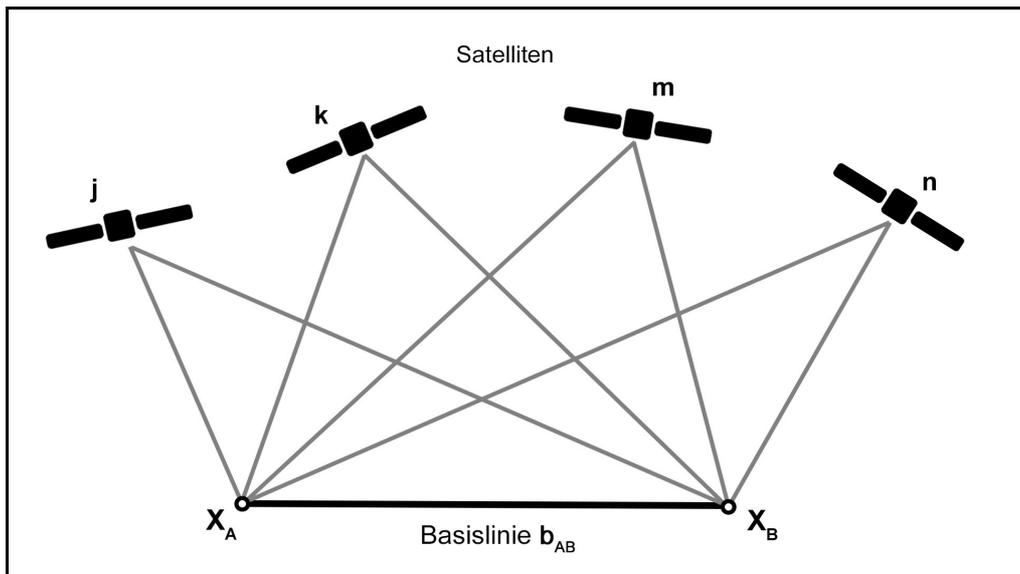


Abbildung 3: Grundlegendes Konzept der relativen Positionierung
[nach Hofmann-Wellenhof et al., 2008]

3.4. Code- und Phasenmessung

Code- und Phasenmessung unterscheiden sich in der Funktionsweise und der erreichbaren Genauigkeit. Bei der Codemessung wird die Pseudorange aus der Signallaufzeit Δt berechnet. Diese bestimmt der Empfänger mit einer Kopie des Satellitencodes und dem Verfahren der Korrelation. Die Codemessung zeichnet sich durch ihre Einfachheit aus und wird in allen simplen, kommerziell verkauften Empfängern (z.B. Navigationsgeräte) angewandt. Nachteile dieses Verfahrens sind dessen geringere Genauigkeit bedingt durch ein größeres Messrauschen und die große Anfälligkeit gegenüber Multipath (siehe Kapitel 3.9.). Die Beobachtungsgleichung der Codemessung von einem Satelliten s zu einem Empfänger r auf der Frequenz i ist in (3.4) gegeben. Die unterschiedlichen Terme sind in Tabelle 4 erklärt und auf die Fehlereinflüsse wird in den nächsten Kapiteln detaillierter eingegangen.

$$P_{r,i}^s = \rho_r^s + \Delta_{r,iono,i}^s + \Delta_{r,trop}^s + \Delta_{r,rel}^s + c_0 \Delta t_r + c_0 \Delta t^s + \varepsilon \quad (3.4)$$

Variable	Erklärung
ρ_r^s	Distanz zwischen Satellit und Empfänger
$\Delta_{r,iono,i}^s$	Ionosphärische Verzögerung
$\Delta_{r,trop}^s$	Troposphärische Verzögerung
c_0	Lichtgeschwindigkeit
$\Delta_{r,rel}^s$	Relativistische Fehlereinflüsse
Δt_r	Empfängeruhrfehler
Δt^s	Satellitenuhrfehler
N	Ambiguity (Mehrdeutigkeit)
λ_i	Wellenlänge des Signals
ε	sonstige Fehler

Tabelle 4: Beschreibung der in den Beobachtungsgleichungen (3.4) und (3.5) auftretenden Korrekturterme

Die Distanz zwischen einem Satellit und dem Empfänger ist im Allgemeinfall nicht genau ein Vielfaches der Wellenlänge des gemessenen Signals. Bei der Phasenmessung wird das Phasenreststück, das "übrig gebliebene Stück" der "letzten" Wellenlänge gemessen und zu der Anzahl an ganzen Wellenlängen N, die seit Beginn der Messung durchgelaufen sind, gezählt. Phasenbeobachtungen sind höchst genau, aber beinhalten eine Mehrdeutigkeit. Diese unbekannte Anzahl an Wellenlängen, die das Signal vom Satelliten zum Empfänger zum Zeitpunkt des Messbeginns zurückgelegt hat, kann nicht direkt gemessen werden. Sie wird als Mehrdeutigkeit oder Ambiguity bezeichnet und muss mit einem geeigneten Verfahren bestimmt werden (siehe Kapitel 3.6.). Ohne Auflösung der Ambiguities ist eine Positionierung mit Phasenmessung nicht möglich. Im Vergleich mit Codemessungen kann bei der Positionierung mit Phasenmessungen eine deutlich höhere Genauigkeit im mm-Bereich erreicht werden und die Anfälligkeit gegenüber Multipath ist deutlich geringer (siehe Kapitel 3.9.). Für geodätische Aufgabenstellungen werden hauptsächlich Phasenmessungen verwendet.

Die Beobachtungsgleichung der Phasenmessung von einem Satelliten s zu einem Empfänger r auf der Frequenz i ist in (3.5) gegeben. Die vorkommenden Variablen sind in Tabelle 4 erklärt und auf die Fehlereinflüsse wird in den nächsten Kapiteln detaillierter eingegangen.

$$\Phi_{r,i}^s = \rho_r^s - \Delta_{r,iono,i}^s + \Delta_{r,trop}^s + \Delta_{r,rel}^s + c_0 \Delta t_r + c_0 \Delta t^s + N \lambda_i + \varepsilon \quad (3.5)$$

3.5. Differenzbildung

Eine Differenzbildung ist bei Beobachtung desselben Satelliten auf den gleichen Frequenzen an zwei Orten durchführbar. Sie ist für Code- und Phasenmessungen und auf drei verschiedene Arten möglich: zwischen Empfängern, zwischen Satelliten und zwischen Zeitepochen. Üblicherweise bezeichnet eine Einzeldifferenz die Streckendifferenz zwischen zwei Empfängerpositionen zu den gleichen Satelliten, eine Doppeldifferenz (DD) die Streckendifferenz zwischen zwei Empfänger- und zwei Satellitenpositionen und eine Dreifachdifferenz die Differenz der Doppeldifferenzen zweier Zeitepochen. Differenzen werden gebildet um zeitlich oder räumlich korrelierte Fehlereinflüsse zu reduzieren oder zu eliminieren. Die Größe von Fehlereinflüssen, die durch die Differenzbildung nicht vollständig reduziert werden können, nimmt mit wachsender Basislinienlänge zu.

Bei Einfachdifferenzen wird der Satellitenuhrfehler eliminiert. Die Empfängeruhrfehler, die atmosphärische Verzögerung und Multipath können nicht bzw. nicht vollständig eliminiert werden.

Doppeldifferenzen entstehen durch die Differenzbildung zweier Einzeldifferenzen und können - vorausgesetzt dieselben Satelliten wurden beobachtet - für jede Beobachtungsepoche gebildet werden. Sie sind schematisch in Abbildung 4 dargestellt. Umgebungseinflüsse wie zum Beispiel Multipath werden durch Doppeldifferenzen nicht eliminiert. Der Grund für die Bildung von Doppeldifferenzen ist die Elimination des Satelliten- und Empfängeruhrfehlers, was aufgrund der Verwendung gleichzeitiger Beobachtungen auf denselben Frequenzen möglich ist [Hofmann-Wellenhof et. al, 2008]. Darüber hinaus werden die sogenannten Phasenzentrumsvariationen (PCV, siehe Kapitel 3.11.), instrumentelle Fehler in der Generierung des Signals und elektronische Verzögerungen eliminiert. Durch DD werden atmosphärische Einflüsse reduziert und können für geringe Basislinienlänge vernachlässigt werden. Ein großer Vorteil, den DD mit sich bringen, ist, dass aufgrund der eliminierten Fehlereinflüsse die Ambiguitäten tatsächlich ganzzahlig gelöst werden können.

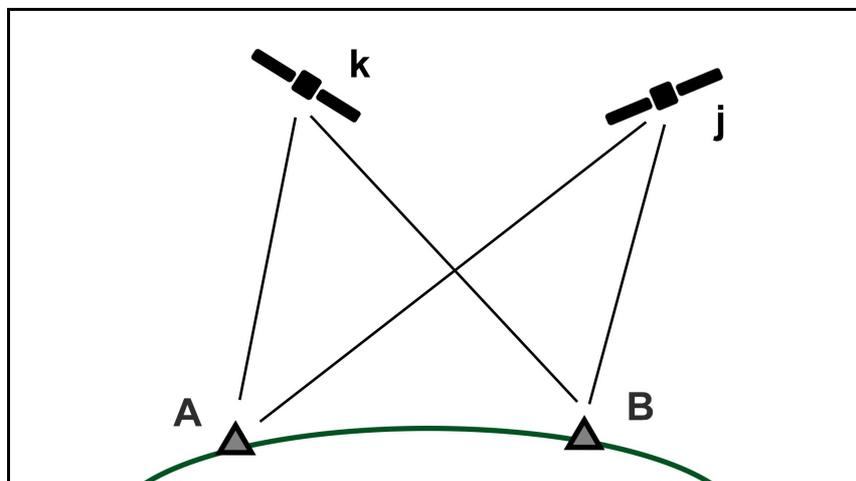


Abbildung 4: Schematische Darstellung von Doppeldifferenzen

Im Sinne der Bezeichnungen der Differenzbildung können die originalen Beobachtungen auch als undifferenzierte Beobachtungen, Zero-Difference-Beobachtungen oder Beobachtungen auf Zero-Differenzniveau bezeichnet werden.

3.6. *Ambiguity-Auflösung*

Der Vorgang der Bestimmung der unbekannt Mehrdeutigkeiten bei Phasenmessungen wird als Auflösung der Ambiguities bezeichnet. Die Ambiguity auf Zero-Differenzniveau wird demgemäß zwischen Empfänger und Satellit bestimmt. Bei der Ambiguity-Auflösung handelt sich um einen schwierigen und rechenintensiven Vorgang. Wenn die korrekte ganze Zahl für alle Ambiguities bestimmt wurde, spricht man davon, dass die Ambiguities fixiert wurden. Die Phasenlage wird vom Beginn einer GNSS-Messung laufend gemessen und Änderungen werden mitgetrackt.

Beschränkt man die Ambiguities nicht nur auf ganze Zahlen, spricht man von float Ambiguities, die einfacher zu schätzen sind. Eine Positionierung basierend auf float Ambiguities ist allerdings üblicherweise nicht so vertrauenswürdig, da unmodellerte Fehler in den float Ambiguities untergehen. Wenn ein Satellit für längere Zeit ohne Unterbrechung unter geeigneten Bedingungen beobachtet wird, konvergiert auf DD-Niveau die float Ambiguity zur korrekten ganzzahligen Ambiguity. Grundsätzlich ist es wünschenswert die Ganzzahligkeit der Ambiguities zu erhalten und sie zu lösen, da dies einen erheblichen Gewinn an Genauigkeit in einer kurzen Beobachtungsdauer mit sich bringt. Im Zusammenhang mit der Auflösung von Ambiguities sind Wide-Lane-Linear kombinationen (Kapitel 5.3) interessant.

Von einem Cycle-Slip spricht man, wenn es zu einem ganzzahligen Sprung von Wellenlängen kommt. Meistens ist der Grund dafür, dass der Empfänger das Satellitensignal aufgrund von Abschattungen oder starker Ionosphären-Tätigkeit kurzzeitig verliert (loss-of-lock). In so einem Fall kann der Empfänger die Wellenzüge nicht mehr kontinuierlich zählen und es kommt zu einem Sprung in der Phasenmessung. Cycle-Slips können mit der geometriefreien und Melbourne-Wübbena-Linear kombination (Kapitel 5.2. und 5.5.) aufgedeckt werden.

3.7. *Satellitenbahnfehler*

Der Begriff Satellitenbahnfehler bezeichnet die Differenz zwischen der verfügbaren Satellitenposition und der wahren Satellitenposition. Diese Differenz entsteht aus Schwankungen in der Satellitenbahn, die schwierig vorhersagbar und messbar sind. Sie beträgt für die Satellitenposition aus der Broadcast-Message maximal 1.5m. Um den Satellitenbahnfehler möglichst gering halten zu können Nutzer die Dienste verschiedener Anbieter für präzise Bahndaten in Echtzeit nutzen oder präzise Bahndaten im Postprocessing verwenden. Diese werden etwa vom IGS angeboten werden und haben eine Genauigkeit von einige Zentimetern⁴.

⁴ <http://www.igs.org/products>, 6.1.2017

Bei der relativen Positionierung wirkt sich der Satellitenbahnfehler minimal aus wie [Seeber, 2003, S.305] anhand einer Faustformel zeigt und er muss für übliche Basislinienlängen bis zu 100km und eine gewünschte Genauigkeit von 1cm nicht berücksichtigt werden. Der Satellitenbahnfehler kann gemeinsam mit den anderen geometrischen Fehlereinflüssen mit der geometriefreien Linearkombination (Kapitel 5.2.) eliminiert werden.

3.8. Atmosphäre

Zwischen ihrer Aussendung und dem Empfang auf der Erdoberfläche durchqueren GNSS-Signale die Erdatmosphäre. Ihre Wirkung auf GNSS-Signale sind eine Laufzeitveränderung und eine Krümmung der Signalausbreitung und es handelt sich dabei um eine bedeutende, unbedingt zu berücksichtigende Fehlerquelle. Signale von Satelliten in niedrigen Elevationen sind einem stärkeren Einfluss der Atmosphäre ausgesetzt, da ihr Weg durch die Atmosphäre geometrisch bedingt länger ist. Man erkennt dies in Abbildung 5 am Signalweg des Satelliten der sich ganz links befindet.

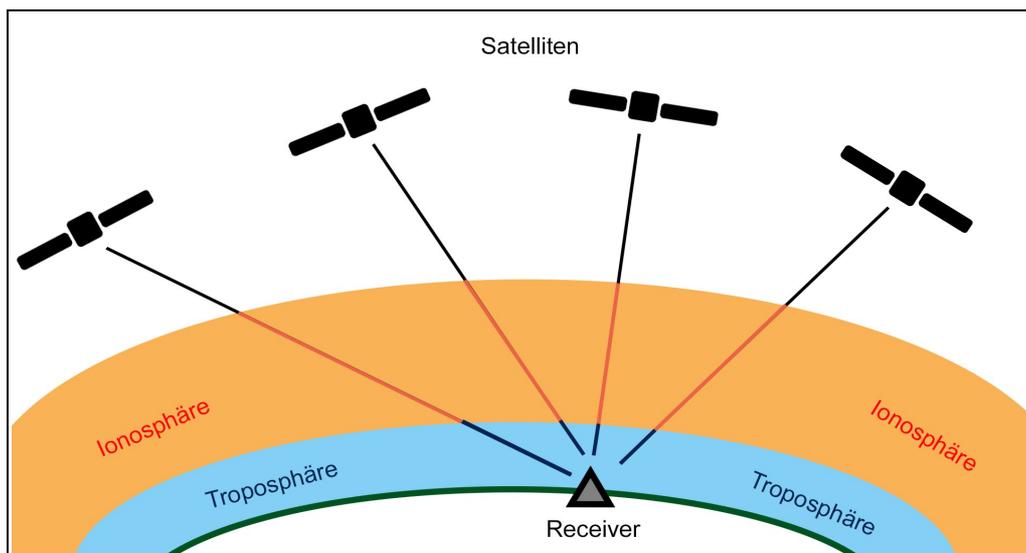


Abbildung 5: Die Wirkung der Erdatmosphäre auf GNSS-Signale

Infolge ihrer unterschiedlichen Wirkungsweise auf die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen wird die Atmosphäre im Zusammenhang mit GNSS in die neutrale Atmosphäre und die Ionosphäre eingeteilt. Der Begriff neutrale Atmosphäre umfasst eigentlich die Troposphäre, die von der Erdoberfläche bis in eine Höhe von etwa 8km am Pol und 18km am Äquator reicht, und die Stratosphäre, die sich über der Troposphäre bis in eine Höhe von etwa 50km befindet. Im Zusammenhang mit GNSS wird die neutrale Atmosphäre aber meist kurz als Troposphäre bezeichnet. Es handelt sich um den untersten Bereich der Atmosphäre in der alle Wetterphänomene und meteorologischen Vorgänge stattfinden.

3.8.1. Ionosphärische Verzögerung

Bei der Ionosphäre handelt sich um die Schicht der Atmosphäre in der genügend Ionisation stattfindet, sodass freie Elektronen die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Radiowellen beeinflussen. Sie hat eine Ausdehnung von etwa 50-2000km über der Erdoberfläche, wobei sich die Hauptkonzentration von geladenen Partikeln zwischen 300km und 400km befindet [Böhm und Schuh, 2013]. Die Ionisation und die Anzahl an freien Elektronen hängt hauptsächlich von der Sonneneinstrahlung ab. Sie ist daher zeitlich periodischen Änderungen (täglich, saisonal, Sonnenzyklus) unterworfen und hängt von der geographischen Position ab. Zusätzlich gibt es zeitlich irreguläre Änderungen und innerhalb der Ionosphäre variiert die Anzahl an freien Elektronen stark mit der Höhe. Bei der Ionosphäre handelt es sich um eine der größten Fehlerquellen auf GNSS-Messungen und sie zeichnet sich durch starke Variationen und Unregelmäßigkeiten aus. Ihre Wirkung auf eine GNSS-Messung beträgt normalerweise einige Meter bis Zehner-Meter, in Extremfällen sogar bis zu hundert Metern.

Die Ionosphäre ist ein dispersives Medium und damit hängt die Größe der ionosphärischen Verzögerung von der Frequenz des Signals ab. Zusätzlich muss bei der Ausbreitungsgeschwindigkeit zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit unterschieden werden, da sich die Wirkung der Ionosphäre auf diese durch das Vorzeichen unterscheidet und unterschiedlich groß ist. Während die Phasengeschwindigkeit für den Einfluss der Ionosphäre auf Phasenmessungen relevant ist, ist die Gruppengeschwindigkeit für Codemessungen maßgeblich.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle in einem Medium hängt vom Brechungsindex ab. Dieser kann für die Ionosphäre nach [Seeber, 2003, S.54] unter Berücksichtigung der Dispersivität und der daraus resultierenden unterschiedlichen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit und Brechungsindizes mit (3.6) und (3.7) approximiert werden. Detaillierte Ausführungen zu den folgenden Herleitungen sind in [Seeber, 2003] oder [Hofmann-Wellenhof et al., 2008] zu finden.

$$n_P = 1 + \frac{c_2}{f^2} + \frac{c_3}{f^3} + \frac{c_4}{f^4} + \dots \quad (3.6)$$

$$n_G = 1 - \frac{c_2}{f^2} - \frac{2c_3}{f^3} - \frac{3c_4}{f^4} - \dots \quad (3.7)$$

Vergleicht man (3.6) mit (3.7) wird deutlich, dass der Einfluss der Ionosphäre auf die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit betragsmäßig ähnlich groß ist, sich aber im Vorzeichen unterscheidet. Die Koeffizienten c_n hängen von der Anzahl an freien Elektronen N_e ab. Die Approximation in (3.6) und (3.7) wird üblicherweise nach dem quadratischen Term abgebrochen und für $c_2 = -40.3 N_e$ eingesetzt. Damit unterscheidet sich der Einfluss der Ionosphäre auf die Gruppen- und Phasengeschwindigkeit nur mehr durch das Vorzeichen.

$$n_P = 1 - \frac{40.3 N_e}{f^2} \quad n_G = 1 + \frac{40.3 N_e}{f^2} \quad (3.8)$$

Der Einfluss der Ionosphäre auf eine Pseudorange ist die Differenz zwischen der Integration des Brechungsindex über die gemessene Strecke und der wahren geometrischen Strecke die man erhält wenn man den Brechungsindex = 1 setzt.

$$\Delta_{iono} = s - s_0 = \int n ds - \int ds_0 \quad (3.9)$$

Unter Verwendung von (3.8) erhält man.

$$\Delta_{G,iono} = \int \left(1 + \frac{40.3 N_e}{f^2} \right) ds - \int ds_0 \quad (3.10)$$

$$\Delta_{P,iono} = \int \left(1 - \frac{40.3 N_e}{f^2} \right) ds - \int ds_0 \quad (3.11)$$

Die Anzahl an freien Elektronen wird als Total Electron Content (TEC) bezeichnet und in Total Electron Content Units (TECU) angegeben. Eine TECU entspricht 10^{16} freien Elektronen in einem Zylinder mit einem Quadratmeter Grundfläche und einer Höhe von 1m. Der TEC in Zenitrichtung wird als Vertical Total Electron Content (VTEC) und entlang des Signalweges als Slant Total Electron Content (STEC) bezeichnet. Da der Unterschied zwischen Signalweg und dem direkten Weg als gering angenommen werden kann, sind weitere Vereinfachungen möglich. Man erhält den folgenden Ausdruck für die ionosphärische Verzögerung für Phasen- und Codemessungen:

$$\Delta_{iono,P} = -\frac{40.3}{f^2} STEC \quad \Delta_{iono,G} = \frac{40.3}{f^2} STEC \quad (3.12)$$

Bei Phasenmessungen kommt es zu einem Advance, bei Codemessungen zu einem Delay des Signals.

Bei diesen Betrachtungen wurden mehrere Vereinfachungen gemacht: Terme mit einer höherer Ordnung als dem quadratischen Glied der Frequenz und die Signalbeugung wurden vernachlässigt. Weiters wurde die Elektronendichte über den Signalweg anstelle des direkten geometrischen Wegs integriert.

Die nicht berücksichtigten Terme nehmen in mittleren Breiten Werte bis zu 5cm an. Sie können bei der Verwendung von Doppeldifferenzen, also beim relativen GPS, vernachlässigt werden, wie [Odiijk, 2002, S.98] anhand der Betrachtung des Worst-Case-Szenarios, wo alle einflussnehmenden Parameter die ungünstigsten Werte annehmen, zeigt. Bis zu einer Basislinienlänge von 400km (größere Basislinienlängen wurden nicht betrachtet) ist es problemlos möglich diese Terme zu vernachlässigen. Grund dafür ist, dass die Auswirkung geringer als die Messgenauigkeit von Phasenbeobachtungen ist und damit im Messrauschen untergeht. Es ist also ausreichend die erste Ordnung zu betrachten, die invers proportional zum Quadrat der Frequenz ist.

Die ionosphärische Verzögerung kann auf drei verschiedene Arten berücksichtigt werden: Schätzung, Modellierung oder Elimination. Eine Schätzung des TECs ist mit der geometriefreien Linearkombination (siehe Kapitel 5.2.) möglich. Das IGS erstellt globale Karten, in denen die Werte des VTECs in einer gewissen räumlichen und zeitlichen Auflösung und Genauigkeit enthalten sind. Diese Global Ionosphere Maps können als a-priori-Modelle beim Postprocessing verwendet werden. Bei der Echtzeitpositionierung wird der Wert des TECs mit einem geeigneten Modell (z.B. Klobuchar-Modell bei GPS, NeQuick-Modell bei Galileo) berechnet. Der Vorteil dieser Methode ist deren Einfachheit. Die Modell-Koeffizienten werden in der Broadcast-Message gesendet und die Korrektur kann einfach berechnet werden. Der Nachteil ist ihre beschränkte Genauigkeit aufgrund der starken Schwankungen und der Unregelmäßigkeit des TECs. Diese Methode wird bei Ein-Frequenz-Messungen niedriger Genauigkeit angewandt. Bei der Elimination wird die Dispersivität der Ionosphäre ausgenutzt. Sie ist nur bei Mehrfrequenzmessungen möglich, denn aus diesen können sogenannte ionosphärenfreie Linearkombinationen (siehe Kapitel 5.1.) gebildet werden. Der Ausdruck Elimination wird verwendet, da bis auf 0.1% der komplette Fehlereinfluss ausgelöscht wird. Diese Methode ist die effizienteste Möglichkeit die ionosphärische Verzögerung zu korrigieren und der Hauptgrund warum GNSS-Satelliten Signale auf zwei oder mehr Frequenzen aussenden.

3.8.2. Troposphärische Verzögerung

Die Wirkung der neutralen Atmosphäre auf die Ausbreitung von GNSS-Signalen wird in dieser Arbeit unter dem Begriff troposphärische Verzögerung zusammengefasst. Die Bezeichnung ist so zu erklären, dass praktisch der gesamte Einfluss dieses Teils der Atmosphäre von der Troposphäre stammt. Da weiters der Brechungsindex nur knapp über eins liegt, findet hauptsächlich eine Verzögerung statt und nahezu keine Krümmung des Signalweges. Da die neutrale Atmosphäre für Mikrowellen ein nicht-dispersives Medium ist, hängt ihr Einfluss auf GNSS-Signale nicht von der Frequenz ab. Daher ist es nicht notwendig im Zusammenhang mit der troposphärischen Verzögerung zwischen Code- und Phasenbeobachtungen zu unterscheiden und es ist nicht möglich Beobachtungen auf mehreren Frequenzen zur Elimination der troposphärischen Verzögerung zu nutzen. Der Einfluss der neutralen Atmosphäre verlängert die Laufzeit zu einem Satelliten typischerweise je nach Elevation um 2.5-25m [Misra und Enge, 2011].

Die Wirkung der neutralen Atmosphäre kann in einen hydrostatischen (~90%) und einen feuchten Anteil (~10%) aufgeteilt werden. Während der hydrostatische Anteil relativ stabil und damit gut modellierbar ist, variiert der feuchte Anteil stark. Seine Modellierung ist schwierig, da er von der Verteilung des Wasserdampfes und dem lokalen Wetter abhängt. Darum wird der feuchte Anteil üblicherweise geschätzt. Die Wirkung des hydrostatischen Anteils wird üblicherweise mit einer geeigneten Funktion in Zenitrichtung modelliert und mittels einer passenden Mapping-Funktion in

Signalrichtung umgerechnet. Diese Funktionen basieren normalerweise auf meteorologischen Parametern (hauptsächlich Luftdruck, Temperatur, Feuchte), der ungefähren Position (Länge, Breite, Höhe) und der Jahreszeit. Sie liefern eine Genauigkeit von $\pm 1\%$ [Seeber, 2003]. Auf detaillierte Ausführungen wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet.

Bei der relativen Positionierung und Differenzbildung wird für nahegelegene Stationen der Fehlereinfluss der troposphärischen Verzögerung nahezu komplett eliminiert. Es ist dann nicht notwendig jede Station einzeln zu modellieren [Seeber, 2003]. Die troposphärische Verzögerung kann gemeinsam mit den anderen geometrischen Fehlereinflüssen mit der geometriefreien Linearkombination (Kapitel 5.2.) eliminiert werden.

3.9. *Multipath*

Aus der Bezeichnung Multipath kann gleichzeitig das Wesen dieses Effektes erläutert werden. Multipath (MP) bezeichnet das Phänomen, wenn das Signal eines Satelliten den Empfänger nicht nur auf dem direkten Weg sondern auf zwei oder mehr Wegen erreicht. Multipath ist gewöhnlich ein Resultat von Reflexionen des Signals in der Umgebung des Empfängers (z.B. Häuser, Boden) und kann zu Fehlern in der Positionsbestimmung führen. Aufgrund der Reflexion haben diese reflektierten Signale eine geringere Signalstärke und aufgrund des weiteren Weges eine größere Pseudorange. Multipath ist eine schwer einzuschätzende Fehlerquelle, da sie stark von der lokalen Umgebung des Empfängers abhängt. Besonders problematisch und häufig ist Multipath im urbanen Gebiet, da durch die dichte Verbauung umgebende Häuser Signale reflektieren.

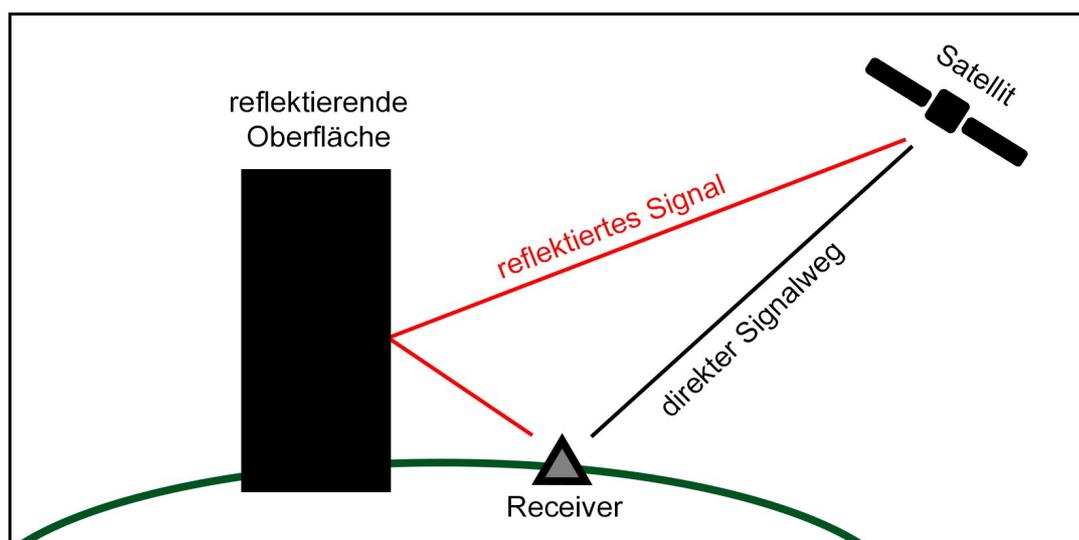


Abbildung 6: Multipath bei GNSS

Bei Phasenbeobachtungen beträgt der maximale Fehler von Multipath ein Viertel der Wellenlänge. Grund dafür ist, dass es durch die gleichzeitig geschätzten Ambiguitäten aufgefangen wird, wie sich anhand eines einfachen Modells zeigen lässt [Misra und Enge, 2011]. Da GNSS-Signale eine

Wellenlänge von 20-25cm haben, beträgt daher der maximale Fehler von Multipath bei Phasenbeobachtungen 5-6cm. Auch Codebeobachtungen haben eine Obergrenze für Multipath. Sie beträgt beim C/A-Code 500m erhöhte Weglänge und beim P-Code 50m. Diese Werte entsprechen 1.5 Chips und eine höhere Chiprate würde die Immunität gegenüber Multipath steigern [Misra und Enge, 2011]. Damit ist die maximale Auswirkung von Multipath bei Codemessungen um drei Größenordnungen größer als bei Phasenmessungen.

Multipath kann durch die Verwendung von geeigneten Antennen und durch Aufstellung an Orten, die keine reflektierenden Flächen um sich haben, vermieden werden. Zusätzlich sind angemessene Cut-Off-Winkeln nützlich, da Multipath bei Satelliten in niedrigen Elevationen aufgrund der Geometrie wahrscheinlicher ist. Diese Maßnahmen können Multipath jedoch nicht vollständig ausschließen und sind nicht immer realisierbar.

3.10. Uhrfehler und relativistische Einflüsse

GNSS-Positionierung basiert auf hochgenauer Zeitmessung und in diesem Zusammenhang sind folgende Zeitsysteme relevant: Die internationale Atomzeit (TAI – Temps Atomique International) wird aus einer Vielzahl von Atomuhren weltweit gemittelt und realisiert. Die koordinierte Weltzeit (UTC – Universal Time Coordinated) unterscheidet sich von TAI durch eine ganze Anzahl an Schaltsekunden. Sie wird durch Einfügen solcher an die Universal Time 1 (UT1) angepasst, die aus der Erdrotation abgeleitet wird und daher einen unregelmäßigen Verlauf hat.

Jedes GNSS arbeitet mit seinem eigenen Zeitsystem. Sowohl die GPS Time (GPST) wurde als auch die Galileo System Time (GST) laufen parallel zur TAI und haben zu ihr denselben Unterschied in ganzen Sekunden. In der jeweiligen Broadcast Message wird der Unterschied zur UTC mitgesandt und Galileo sendet auch den Offset zwischen GST und GPST⁵. Jede Satellitenuhr ist eine Realisierung der jeweiligen GNSS-Zeit und die Signalausendung findet anhand dieser Satellitenuhr statt. Als Satellitenuhrfehler wird die Differenz zwischen der Satellitenuhr und der GNSS-Zeit bezeichnet, die aufgrund von Frequenzfehlern entsteht. Korrekturparameter für die Satellitenuhr werden in der Broadcast Message in Form eines quadratischen Polynoms gesendet. Darüber hinaus gibt es die Möglichkeit präzise Uhrenkorrekturen (z.B. vom IGS) zu verwenden oder bei einer Ausgleichung den Satellitenuhrfehler zu schätzen.

Als Empfängeruhrfehler wird die Differenz zwischen Empfängeruhr und GNSS-Zeit bezeichnet. Da die Empfängeruhr mitgeschätzt wird, sind mindestens vier Satelliten zur Positionierung notwendig. Uhrfehler werden durch eine Doppeldifferenzbildung (siehe Kapitel 3.9.), die in den meisten geodätischen Aufgabenstellungen angewandt wird, eliminiert.

⁵ http://www.esa.int/Our_Activities/Navigation/Galileo_and_GPS_synchronise_watches_new_time_offset_helps_working_together, 22.2.2017

Satellitenuhren sind von der speziellen Relativitätstheorie (Geschwindigkeit der Satelliten) und der allgemeinen Relativitätstheorie (Differenz im Gravitationspotential der Satellitenposition zum Gravitationspotential auf der Erdoberfläche) betroffen. Diese Auswirkungen lassen sich in einen konstanten Term und in einen von der Satellitenbahn abhängigen Term fassen. Aufgrund des schwächeren Gravitationsfeldes in der Satelliten-Flughöhe (verglichen mit der Erdoberfläche) laufen Satellitenuhren schneller als auf der Erde. Durch die Satelliten-Bewegung laufen sie dagegen langsamer als eine unbewegte Uhr auf der Erde. Der resultierende konstante Uhrengang wird durch eine Frequenzverschiebung ausgeglichen. So senden etwa GPS-Satelliten, die sich mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 4km/s in einer Höhe von etwa 20.000km über dem Geoid befinden, anstelle der Grundfrequenz von 10.23 MHz auf 10.22999999543 Mhz. Da die Satellitenbahnen von GNSS nicht exakt kreisförmig sind, tritt ein zweiter von der Satellitenbahn abhängigen Term auf. Er ist eine Funktion der numerischen Exzentrizität, der großen Halbachse und der exzentrischen Anomalie der Satellitenbahn und wird vom Empfänger korrigiert. Bei einer exakt kreisförmigen Bahn ist dieser Einfluss gleich Null. In der Praxis tritt höchstens eine Exzentrizität von 0.02 auf, was 45ns oder einem Fehler in der Distanz von 14m bedingt [Leick et al., 2015, S.229]. Ein weiterer relativistischer Effekt ist eine Verzögerung des Signals auf dem Weg durch das Gravitationsfeld der Erde. Dieser Einfluss ist im mm-Bereich und muss nicht beachtet werden. Relativistische Effekte werden bei GNSS-Messungen also durch den Gang der Uhren und den Empfänger korrigiert.

3.11. Antenna Phase Center Offset and Variation

Das Phasenzentrum einer GNSS-Antenne ist der Punkt an dem ein Signal vom Empfänger empfangen wird. In einer idealen Welt ist das elektromagnetische Phasenzentrum eines Empfängers genau ein wohldefinierter Punkt auf den sich alle Messungen von GNSS-Signalen beziehen. In der Realität befindet sich das Phasenzentrum bei jeder GNSS-Antenne an einem anderen Ort. Seine Lage hängt von der Frequenz des Signals ab und variiert mit der Elevation und dem Azimut. Anders gesagt hat jeder Empfänger für jedes eingehende Signal ein eigenes Antennenphasenzentrum. Normalerweise ist dieses nicht zugänglich und nicht direkt messbar. Daher gilt es die Position des Phasenzentrums und seine Variationen zu bestimmen und zu berücksichtigen.

Der Antenna Phase Center Offset (PCO) ist ein konstanter Term und definiert die Differenz zwischen einem festgelegten mittleren Phasenzentrum und dem Antenna Reference Point (ARP). Der PCO muss aufgrund von Frequenzabhängigkeit für jede Trägerfrequenz angegeben werden. Das mittlere Phasenzentrum ist ein definierter Punkt, bei dem es sich um das über eine gewisse Elevation gemittelte Phasenzentrum handelt. Der ARP ist der geometrische Punkt an dem sich die vertikale Antennenachse mit der Unterseite der Antenne schneidet. Vergleicht man das Phasenzentrum einer einzelnen Messung mit dem mittleren Phasenzentrum wird eine Abweichung

auftreten, die als Antenna Phase Center Variation (PCV) bezeichnet wird. Die PCV bewegt sich in der Größenordnung von einigen Millimetern bis zu wenigen Zentimetern [Seeber, 2003, S.321]. Da nahezu alle derzeitigen Antennen azimuthal symmetrisch sind, reicht es die Elevations- und Frequenzabhängigkeit zu berücksichtigen [Mader, 1999].

Im rechten Teil der Abbildung 7 ist die Variation der PVC mit der Einfallsrichtung des Signals schematisch dargestellt. Im linken Teil der Abbildung 7 sind die Zusammenhänge der verschiedenen Größen dargestellt. Mittels dieser Darstellung lässt sich die anzubringende Korrektur in folgende Formel fassen.

$$\Delta_{PCO+PCV} = \Delta_{PCO} + \Delta_{PCV} = \mathbf{a} \circ \boldsymbol{\rho}_0 + \Delta_{PCV}(\alpha, z, f) \quad (3.13)$$

$\Delta_{PCO+PCV}$ entspricht darin der Summe des Antenna Phase Offset und der Antenna Phase Center Variation, Δ_{PCO} dem Antenna Phase Offset, Δ_{PCV} der Antenna Phase Center Variation, \mathbf{a} dem Vektor aus Abbildung 7, $\boldsymbol{\rho}_0$ dem Einheitsvektor der Einfallsrichtung, α dem Azimut, z der Zenitdistanz und f der Frequenz.

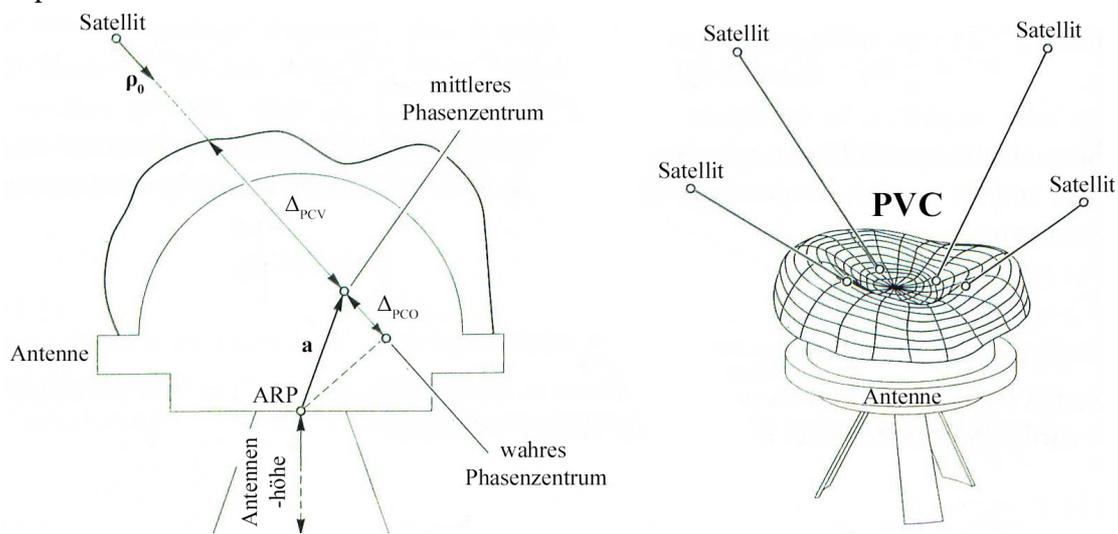


Abbildung 7: PCO und PVC [nach Hofmann-Wellenhof et al., 2008, S.148]

Nachdem eine GNSS-Messung um PCO und PCV korrigiert worden ist, bezieht diese sich auf den ARP. Dies ist vor allem für die Messung der Antennenhöhe wünschenswert, da dieser Punkt im Gegenteil zum Phasenzentrum wohldefiniert und zugänglich ist. Da PCO und PCV zusammenhängen, muss beachtet werden, dass sie konsistent sind. Die Nichtbeachtung des PCO und der PCV kann zu signifikanten Fehlern in der Lage von bis zu zehn Zentimetern führen [Mader, 1999]. Die Bestimmung dieser Korrekturparameter erfolgt mittels Kalibrierung und geht über den Inhalt dieser Arbeit hinaus. Als Einführung in dieses Thema und zur Vertiefung seien [Hofmann-Wellenhof et al., 2008, Kap. 5.5.2 und 5.5.3], [Leick et al., 2015] und [Mader, 1999] empfohlen. PCO und PCV sollten vom Empfänger-Hersteller zur Vergütung gestellt werden oder sind im Internet⁶ zu finden. Bei Verwendung von DD und gleichen gleichorientierten Antennen werden PCO und PCV eliminiert, wenn die Basislinienlänge gering ist.

6 National Geodetic Service, <https://www.ngs.noaa.gov/ANTCAL/>, 18.10.2016

3.12. Phase Wind-Up

Phase Wind-Up ist ein Effekt, der aufgrund von Orientierungsänderungen der Sende- und Empfangsantenne und der elektromagnetischen Natur von GNSS-Signalen auftritt. Da sich nur die Phasenlage und nicht die geometrische Distanz durch eine Verdrehung der Antenne ändert, zeigt sich dieser Effekt nur bei Phasenbeobachtungen und nicht bei Codemessungen.

Die Trägerwellen von GNSS-Signalen sind rechts polarisiert. Man kann sich die elektromagnetische Welle als rotierenden Feldvektor vorstellen der von der Satellitenantenne zur Empfängerantenne fortschreitet. Der Vektor rotiert um 360° während der Dauer einer Wellenlänge. Eine Phasenbeobachtung entspricht dem geometrischen Winkel zwischen dem Feldvektor an der empfangenden Antenne und der Referenzrichtung der Antenne. Dieser Winkel und damit die gemessene Phase ändert sich, wenn sich die Orientierung der Empfangsantenne ändert (etwa durch Verdrehung in Azimutrichtung). Derselbe Effekt tritt auf, wenn die aussendende Antenne verdreht wird und sich damit die Richtung des elektrischen Feldes beim Aussenden verändert. Als Ergebnis ändert sich die gemessene Phase an der empfangenden Antenne des GNSS-Empfängers. Bei unbewegten Antennen tritt Phase Wind-Up nur aufgrund einer Verdrehung der Satellitenantenne auf. GNSS-Satelliten drehen sich auf ihrer Bahn um ihre Solarpanels zur Sonne ausgerichtet zu halten.

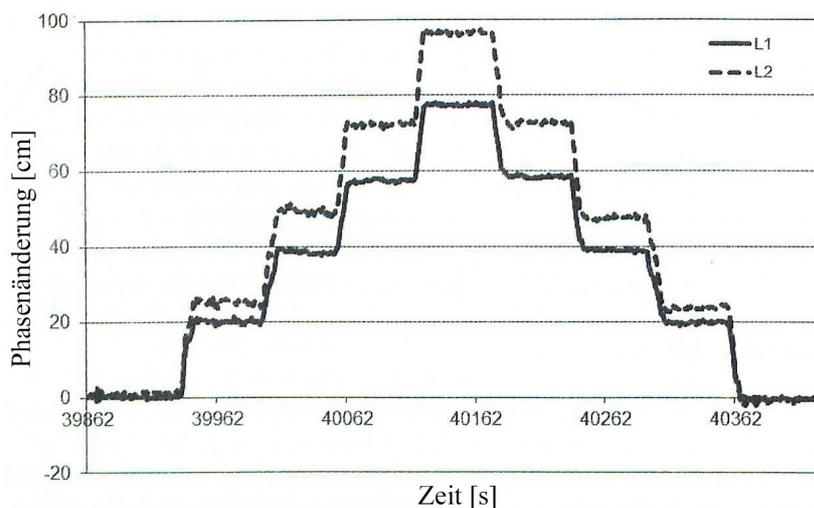


Abbildung 8: Darstellung der Auswirkung von Phase Wind-Up [nach Leick et al., 2015, S.284]

[Leick et al., 2015] veranschaulicht den Effekt von Phase Wind-Up anhand eines Beispiels. Zwei Antennen wurden 5m voneinander aufgestellt und mit demselben Empfänger verbunden. Die Aufzeichnungsrate betrug 1 Sekunde und eine der Antennen wurde vier Mal im Abstand von einer Minute um 360° im Uhrzeigersinn gedreht. Danach wurde das Prozedere gegen den Uhrzeigersinn wiederholt. Es wurde die Differenz der Beobachtungen zwischen den beiden Antennen gebildet und das Ergebnis ist in Abbildung 8 visualisiert. Die Abbildung zeigt die Änderung des Signals durch die Drehungen für L1 und L2. Jede vollständige Antennendrehung resultiert in einer Änderung von einer Wellenlänge.

Die Wind-Up Korrektur ist für kurze Basislinien vernachlässigbar [Leick et al., 2015]. Eine Vernachlässigung kann insbesondere bei langen Basislinien und im neuen Precise-Point-Positioning-Verfahren zu Problemen bei der Ambiguity-Fixierung führen.

3.13. Rauschen

So wie bei allen elektronischen Geräten wirkt auch bei GNSS-Empfängern ein Rauschen. Alle Komponenten des Empfängers, die Antenne, Signalverstärker und Kabel tragen zum Rauschen bei. Die Größe des Messrauschens hängt vom Typ und der Qualität des Empfängers ab. Mit aktuellen GNSS-Empfängern ist es in der Größenordnung von 1% der Wellenlänge des Signals oder darunter [Misra und Enge, 2015]. Das Rauschen beträgt momentan bei modernen Empfängern etwa $\pm 30\text{cm}$ bei der Codemessung und $\pm 1\text{-}2\text{mm}$ bei der Phasenmessung. Im Rahmen dieser Arbeit wird angenommen, dass das Rauschen für Code- und Phasenmessungen auf allen drei Frequenzen gleich groß ist und damit frequenzunabhängig ist.

Rauschen kann nicht modelliert werden, da es sich um einen stochastischen Fehler handelt. Bei der Bildung von Linearkombinationen (4.Kapitel) wird es verstärkt. Um dies zu beschreiben wird im Rahmen dieser Arbeit der Rausch-Verstärkungsfaktor (Kapitel 4.2.4.) eingeführt. Es stellt sich die Frage, ob es aus Sicht der Positionierungsgenauigkeit sinnvoller ist Beobachtungen auf verschiedenen Frequenzen einzeln zu verwenden oder sogenannte Narrow-Lane-Linearkombinationen (Kapitel 5.4.) zu bilden, die das Rauschen minimieren [Petovello, 2006].

3.14. Fazit

In Kapitel 3 wurden die Grundlagen von GNSS erläutert. Es wurde auf das Prinzip von GNSS-Messungen eingegangen und der Unterschied und die Eigenschaften von Code- und Phasenmessungen beschrieben. Für geodätische Aufgabenstellungen ist vor allem die relative Positionierung und die Verwendung von DD und Phasenmessungen interessant. Als geometrische, frequenzunabhängige Fehlereinflüsse kann man den Satellitenbahnfehler, die troposphärische Verzögerung, Uhrfehler (enthalten relativistische Effekte) und Rauschen zusammenfassen. Die ionosphärische Verzögerung ist ein frequenzabhängiger und wesentlicher Fehlereinfluss. Multipath hängt stark von der Umgebung des Empfängers ab und es wird im Folgenden von einer optimalen Umgebung, die kein Multipath zulässt, ausgegangen. Antenna Phase Center Offset und Variation können durch geeignete Modelle korrigiert werden oder durch DD eliminiert werden. Geht man davon aus, dass die Empfänger auf der Erde nicht verdreht oder bewegt werden, ist für den Phase Wind-Up nur die Verdrehung der Satelliten ausschlaggebend. Dieser sollte auf Zero-Differenzniveau modelliert werden. Er wird bei Einzeldifferenzen und DD weitgehend eliminiert.

4. Linearkombinationen

4.1. Einführung

Unter einer Signal-Linearkombination (LC) versteht man die Kombination von Beobachtungen auf mehreren Frequenzen desselben Empfängers. Durch die Ausstrahlung von zusätzlichen GNSS-Signalen auf drei oder mehr Frequenzen eröffnet sich neues Potential für Linearkombinationen. LCs können mit und auch zwischen Code- und Phasenbeobachtungen aus zwei oder drei Frequenzen gebildet werden. Im Zuge dieser Arbeit werden hauptsächlich LCs aus Phasenbeobachtungen betrachtet, da diese eine höhere Beobachtungsgenauigkeit aufweisen und deshalb in der Praxis bei geodätischen Aufgabenstellungen hauptsächlich zum Einsatz kommen. (4.1) enthält die allgemeine Form einer 3-Frequenz-LC aus Phasenbeobachtungen in der Einheit Meter. Division durch die Wellenlänge liefert die LC in der Einheit Zyklen (4.2). Als LC-Koeffizienten werden (α, β, γ) in der Einheit Meter bzw. (a, b, c) in der Einheit Zyklen bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen den LC-Koeffizienten (α, β, γ) und (a, b, c) ist in (4.3) gegeben.

$$\Phi_{LC} = \alpha \Phi_1 + \beta \Phi_2 + \gamma \Phi_3 \quad [\text{m}] \quad (4.1)$$

$$\Phi_{LC} = a \Phi_1 + b \Phi_2 + c \Phi_3 \quad [\text{cy}] \quad (4.2)$$

$$a = \alpha \frac{\lambda_1}{\lambda_{LC}}, \quad b = \beta \frac{\lambda_2}{\lambda_{LC}}, \quad c = \gamma \frac{\lambda_3}{\lambda_{LC}} \quad (4.3)$$

LCs werden verwendet um Fehlereinflüsse im mathematischen Modell zu verringern, zu eliminieren oder zu detektieren. Möglich ist das nur bei Fehlereinflüssen oder Fehlerquellen, die korreliert sind. Zum Beispiel kann mit der ionosphärenfreien LC der Einfluss der Ionosphäre praktisch vollständig eliminiert werden. Weitere Gründe zur Verwendung von LCs, die im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet werden, können eine Reduzierung der Datenmenge etwa für die Datenübertragung oder eine Verringerung des Rechenaufwands sein. In der unbegrenzten Zahl von LCs sind vor allem jene von Interesse, die neben der Verringerung oder Detektion von Fehlereinflüssen einige wichtige Kriterien zumindest teilweise erfüllen:

- Ganzzahlige Koeffizienten um eine ganzzahlige Ambiguity der LC sicherzustellen
- Große Wellenlänge um die Auflösung der Ambiguities zu erleichtern
- Niedrige Verstärkung des Rauschens

Neben der Verringerung oder Detektion von Fehlereinflüssen können geeignete LCs gebildet werden um die Lösung von Ambiguities zu erleichtern. Interessant ist in diesem Zusammenhang die Erzeugung von Beobachtungen mit einer anderen (meist größeren) Wellenlänge als die originalen Beobachtungen zur Vereinfachung der Auflösung der Ambiguities. Dies führt zu den sogenannten Wide-Lane-LCs, die eine größere Wellenlänge als die originalen Beobachtungen aufweisen, und

deren Verwendung den Rechenaufwand reduzieren soll. Ein Anwendungsbeispiel von LCs zur Vereinfachung der Auflösung der Ambiguities ist das Least Squares Ambiguity Decorrelation Adjustment (LAMBDA) Verfahren, das LCs aus Phasenbeobachtungen verwendet um das ursprünglich korrelierte Ambiguity-Set in ein weniger korreliertes Set von Ambiguities zu transformieren [Richert und El-Sheimy, 2006]. Dies verkleinert den Suchraum an ganzzahligen Ambiguities und beschleunigt damit den Vorgang der Auflösung der Ambiguities.

Ein Spezialfall von LCs ist die Differenzbildung, die Erzeugung von Einfach-, Doppel- und Dreifachdifferenzen, die in Kapitel 3.5. behandelt wurden. Auch hier ist das Ziel die Verringerung und Eliminierung von Fehlereinflüssen aus dem Beobachtungsmodell. Zum Beispiel werden mit der Bildung von DD der Satelliten- und Empfängeruhrfehler eliminiert. Allerdings werden bei der Differenzbildung im Unterschied zu "klassischen" LCs Beobachtungen mehr als eines Empfängers und verschiedener Zeitepochen (im Fall von Dreifachdifferenzen) miteinander kombiniert. Darüber hinaus werden nur Beobachtungen derselben Frequenz und nicht verschiedener Frequenzen kombiniert.

Die Bildung einer LC entspricht der Projektion vom zweidimensionalen (2-Frequenz-LC) bzw. dreidimensionalen (3-Frequenz-LC) Beobachtungsraum in eine Pseudo-Beobachtung [Radovanovic et al., 2001] oder anders gesagt ändert sich das Messmodell von einem Modell mit originalen Beobachtungen zu einem Modell mit kombinierten Beobachtungen [Richert und El-Sheimy, 2006]. Die Charakteristik der Beobachtung verändert sich und diese Veränderung hängt von der Wahl der Koeffizienten ab. Es wichtig zu verstehen wie sich die Verwendung von LCs auswirkt.

4.2. *Mathematisches Modell*

Die Aufstellung und Herleitung der Eigenschaften und Formeln in den folgenden Kapiteln für 3-Frequenz-LCs aus Phasenmessungen folgt [Cocard et al., 2008], [Urquhart, 2009], [Richert und El-Sheimy, 2006] und [Collins, 1999]. Sie haben für alle GNSS Gültigkeit. Obwohl nur 3-Frequenz-LCs behandelt werden, haben durch Weglassen des dritten Terms alle Formeln auch für 2-Frequenz-LCs Gültigkeit. Eine ausschließliche Behandlung von 2-Frequenz-LCs ist in [Collins, 1999] zu finden.

Der Ausgangspunkt aller folgenden Betrachtungen ist eine vereinfachte Beobachtungsgleichung für Phasenmessungen.

$$\Phi_i = d + \lambda_i N_i - I_i \quad [\text{m}] \quad (4.4)$$

Das tiefergestellte i kennzeichnet die Frequenz. Φ_i entspricht der Phasenmessung in Metern, d ist ein pseudogeometrischer Term, der alle geometrischen Terme enthält (geometrische Distanz zwischen Empfänger und Satellit, den Satelliten- und Empfängeruhrfehler, die troposphärische Verzögerung), λ_i ist die Wellenlänge, N_i die Ambiguity und I_i die ionosphärische Verzögerung.

Dividiert man (4.4) durch die Wellenlänge erhält man die vereinfachte Beobachtungsgleichung in der Einheit Zyklen.

$$\Phi_i = \frac{d}{\lambda_i} + N_i - \frac{I_i}{\lambda_i} \quad [\text{cy}] \quad (4.5)$$

Die Beziehung der ionosphärische Verzögerung I_i auf der Frequenz i zur ionosphärischen Verzögerung auf der 1.Frequenz ist in (4.6) zu finden. Darin ist q_i ein Koeffizient, der aus dem quadrierten Verhältnis der i -ten-Frequenz zur 1.Frequenz besteht und $\Delta_{ion,1}$ die ionosphärische Verzögerung auf der 1.Frequenz. Die numerischen Werte für q_i sind für GPS und Galileo in Tabelle 5 zu finden, wobei die in Kapitel 2.2. für GPS und 2.3. für Galileo erklärte Reihenfolge und Bezeichnung der Frequenzen verwendet wird. Durch diese Betrachtungsweise wird die ionosphärische Verzögerung 1.Ordnung berücksichtigt.

$$I_i = q_i \Delta_{ion,1} \quad \text{und} \quad q_i = \left(\frac{f_1}{f_i} \right)^2 = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^2 \quad (4.6)$$

$q_i(\text{GNSS, Frequenz})$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
GPS	1	1.647	1.793
Galileo	1	1.793	1.703

Tabelle 5: Faktoren für die ionosphärische Verzögerung

Bildet man mit der vereinfachten Beobachtungsgleichung für Phasenmessungen (4.4) eine 3-Frequenz-LC erhält man durch Einsetzen in (4.1) in metrischen Einheiten.

$$\Phi_{LC} = (\alpha + \beta + \gamma)d + \alpha \lambda_1 N_1 + \beta \lambda_2 N_2 + \gamma \lambda_3 N_3 - (\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3) \Delta_{ion} \quad [\text{m}] \quad (4.7)$$

Vergleicht man die einzelnen Terme der LC aus (4.7) koeffizientenweise mit der vereinfachten Beobachtungsgleichung für Phasenmessungen (4.4) erhält man drei Gleichungen, die in (4.8) angeführt sind. Diese werden im Folgenden behandelt um einige Eigenschaften von LCs herzuleiten.

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta + \gamma && \text{a)} \\ \lambda_{LC} N_{LC} &= \alpha \lambda_1 N_1 + \beta \lambda_2 N_2 + \gamma \lambda_3 N_3 && \text{(4.8 b)} \\ I_{LC} &= (\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3) \Delta_{ion} && \text{c)} \end{aligned}$$

4.2.1. Ambiguity

Dividiert man (4.8 b) durch die Wellenlänge der Linearkombination λ_{LC} erhält man:

$$N_{LC} = \alpha \frac{\lambda_1}{\lambda_{LC}} N_1 + \beta \frac{\lambda_2}{\lambda_{LC}} N_2 + \gamma \frac{\lambda_3}{\lambda_{LC}} N_3 \quad (4.9)$$

Die Ambiguities N_1 , N_2 und N_3 der Phasenbeobachtungen sind bei der Verwendung von Doppeldifferenzen ganzzahlig. Der einfachste Weg sicherzustellen, dass auch die Ambiguity der LC N_{LC} in jedem Fall ganzzahlig ist, ist es die Koeffizienten (a, b, c) einzuführen und als ganze Zahlen zu definieren. N_{LC} ist dann die Linearkombination ganzer Zahlen und damit selbst ganzzahlig.

$$a = \alpha \frac{\lambda_1}{\lambda_{LC}} \quad , \quad b = \beta \frac{\lambda_2}{\lambda_{LC}} \quad , \quad c = \gamma \frac{\lambda_3}{\lambda_{LC}} \quad (4.10)$$

Durch Umformen können (α , β , γ) abhängig von (a, b, c) dargestellt werden.

$$\alpha = a \frac{\lambda_{LC}}{\lambda_1} \quad , \quad \beta = b \frac{\lambda_{LC}}{\lambda_2} \quad , \quad \gamma = c \frac{\lambda_{LC}}{\lambda_3} \quad (4.11)$$

Durch Vergleich mit (4.1), (4.2) und (4.3) erkennt man, dass (a, b, c) die Koeffizienten der LC sind in der Einheit Zyklen sind. Die Umrechnung der LC-Koeffizienten in der Einheit Meter in die Einheit Zyklen und umgekehrt ist mit (4.10) und (4.11) leicht möglich.

4.2.2. Wellenlänge und Frequenz

(4.8 a) ist die geometrische Bedingung an LCs. Für die Wellenlänge einer LC erhält man indem man für α , β und γ aus (4.11) in (4.8 a) einsetzt und einige Umformungen vornimmt folgende Gleichung.

$$\lambda_{LC} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{a \lambda_2 \lambda_3 + b \lambda_1 \lambda_3 + c \lambda_1 \lambda_2} \quad (4.12)$$

Indem man den bekannten Zusammenhang $\lambda = c_0/f$ für jedes λ_i einsetzt erhält man die folgende Beziehung für die Wellenlänge der LC.

$$\lambda_{LC} = \frac{c_0}{a f_1 + b f_2 + c f_3} \quad (4.13)$$

Um die Frequenz der LC zu erhalten nutzt man wieder den bekannten Zusammenhang zwischen Wellenlänge, Lichtgeschwindigkeit und Frequenz und ersetzt in (4.13) λ_{LC} durch c_0/f_{LC} . Nachdem man den Kehrwert gebildet und durch c_0 dividiert hat, erhält man für die Frequenz der LC den folgenden Ausdruck.

$$f_{LC} = a f_1 + b f_2 + c f_3 \quad (4.14)$$

4.2.3. Ionosphärischer Verstärkungsfaktor

Vergleicht man die ionosphärische Verzögerung der LC (4.8c) mit jener in (4.6) ist es möglich einen ionosphärischen Verstärkungsfaktor der LC relativ zur Wirkung der Ionosphäre auf eine Beobachtung auf der 1.Frequenz (L1 bzw. E1) zu definieren.

$$q_{LC} = \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 \quad (4.15)$$

Indem man für (α, β, γ) aus (4.11) und für q_i aus (4.6) einsetzt erhält man:

$$q_{LC} = \lambda_{LC} \left(a \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2} + b \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} + c \frac{\lambda_3}{\lambda_1^2} \right) \quad (4.16)$$

Abhängig von der LC und ihrer LC-Koeffizienten nimmt der ionosphärische Verstärkungsfaktor einen Wert an, der positiv oder negativ und zu einer Verstärkung oder Verringerung des Einflusses der Ionosphäre führen kann. Multipliziert man q_{LC} mit λ_1/λ_{LC} erhält man den ionosphärischen Verstärkungsfaktor \bar{q}_{LC} in zyklischen Einheiten.

$$\bar{q}_{LC} = \frac{1}{\lambda_1} (a \lambda_1 + b \lambda_2 + c \lambda_3) \quad (4.17)$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen dem ionosphärischen Verstärkungsfaktor in Zyklen und Metern wie folgt.

$$q = \frac{\lambda_{LC}}{\lambda_1} \bar{q}_{LC} \quad (4.18)$$

Durch Verwendung des bekannten Zusammenhangs zwischen Frequenz und Wellenlänge kann man \bar{q}_{LC} ausgehend von (4.17) in Abhängigkeit der LC-Koeffizienten und Koeffizienten der Grundfrequenzen darstellen. Die numerischen Werte der in (4.20) entstehenden Brüche sind in Tabelle 6 für GPS und Galileo angeführt.

$$\bar{q}_{LC} = a \frac{k_1}{k_1} + b \frac{k_1}{k_2} + c \frac{k_1}{k_3} \quad (4.19)$$

	k_1 / k_1	k_1 / k_2	k_1 / k_3
GPS	1	1.283	1.339
Galileo	1	1.339	1.305

Tabelle 6: Faktoren der ionosphärische Verzögerung

4.2.4. Rausch-Verstärkungsfaktor

Die Herleitung des Rausch-Verstärkungsfaktors folgt [Cocard et al., 2008]. Es wird angenommen, dass das Rauschen für alle drei Basisfrequenzen gleich groß ist und die Korrelation zwischen den verschiedenen Frequenzen Null ist. Unter Berücksichtigung dieser Annahmen folgt mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für das Rauschen einer LC in zyklischen Einheiten.

$$\sigma_{LC} = \sigma_0 \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} \quad [\text{cy}] \quad (4.20)$$

Das Rauschen in Zyklen ist damit im von (a, b, c) aufgespannten Raum proportional zum Abstand der LC vom Ursprung. Man kann davon ausgehen, dass die Standardabweichung σ_0 der originalen Beobachtung typischerweise 0.1-1% der Wellenlänge beträgt. In metrischer Einheit sind für σ_0 Werte im Bereich von $\pm 1\text{mm}$ bis $\pm 2\text{mm}$ realistisch.

Wir definieren einen Rausch-Verstärkungsfaktor \bar{n} in zyklischen Einheiten in (4.21). Er gibt an in welchem Maß das Rauschen ausgehend von σ_0 durch die Bildung einer LC verstärkt wird. Der Rausch-Verstärkungsfaktor in metrischen Einheiten wird mit n bezeichnet (4.22).

$$\bar{n} = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} \quad [\text{cy}] \quad (4.21)$$

$$n = \lambda_{LC} \bar{n} \quad [\text{m}] \quad (4.22)$$

4.2.5. Lane-Nummer

Die Trägerfrequenzen von GPS und Galileo werden aus einer Grundfrequenz und der Beziehung (2.1) gebildet. Unter Verwendung dieser ist es möglich die sogenannte Lane-Nummer L zu definieren [Cocard et al., 2008].

$$f_{LC} = f_0 (a k_1 + b k_2 + c k_3) \quad (4.23)$$

$$L = a k_1 + b k_2 + c k_3 \quad (4.24)$$

Da in (4.23) sowohl a , b und c als auch k_i ganzzahlig sind, ist auch deren Linearkombination und damit die Lane-Nummer eine ganze Zahl. Jede LC, die gebildet werden kann und deren Ambiguity ganzzahlig ist, kann durch das Triplet von ganzen Zahlen (a , b , c) und die Lane-Nummer L eindeutig beschrieben werden. Mit der Lane-Nummer können die Frequenz und Wellenlänge einer LC einfach berechnet werden.

$$f_{LC} = L f_0 \quad (4.25)$$

$$\lambda_{LC} = \frac{\lambda_0}{L} \quad (4.26)$$

Bei λ_0 handelt es sich um die Wellenlänge der Grundfrequenz $f_0 = 10.23 \text{ MHz}$ ($\lambda_0 \sim 29.305 \text{ m}$). Die Lane-Nummer definiert eindeutig die Wellenlänge und Frequenz jeder LC unabhängig von anderen Eigenschaften.

In (4.26) kann die Wellenlänge einer LC als Funktion der Lane-Nummer aufgefasst werden. In Abbildung 9 ist der Graph dieser Funktion abgebildet. Die Wellenlänge nimmt mit steigender Lane-Nummer anfangs schnell ab und nähert sich asymptotisch der Wellenlänge Null an.

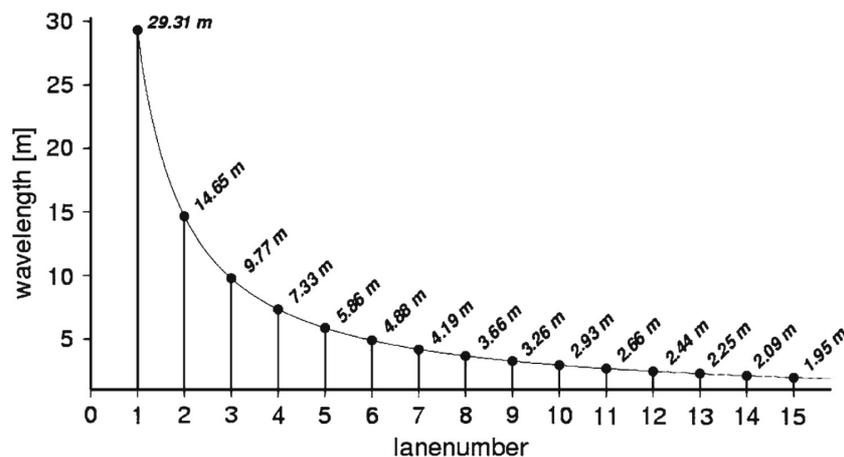


Abbildung 9: Wellenlänge als Funktion der Lane-Nummer für $1 \leq L \leq 15$ [Cocard et al., 2008]

4.2.6. Koeffizientensumme

Die Koeffizientensumme s_n ist eine weitere Eigenschaft von LCs. Sie wird aus den LC-Koeffizienten (a, b, c) gebildet und mit ihr können LCs in verschiedene Gruppen eingeteilt werden. Die einfache Art sie zu bilden lautet wie folgt:

$$a + b + c = \pm n = s_n \quad (4.27)$$

Mit s_n werden LCs bezeichnet, deren Koeffizienten bei der Summation $\pm n$ ergeben. So werden etwa alle LCs, deren Koeffizientensumme Null beträgt als s_0 -Linearkombinationen bezeichnet. Diese Einteilung bezieht sich allerdings nicht auf gemeinsame Eigenschaften im Bezug auf die Reduzierung von Fehlerquellen.

4.3. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Linearkombinationen eingeführt und ihr Einsatz motiviert. Es wurden einige wichtige Eigenschaften von LCs hergeleitet: ganzzahlige Ambiguities, Wellenlänge, Frequenz, ionosphärischer Verzögerungsfaktor, Rausch-Verstärkungsfaktor, Lane-Nummer und Koeffizientensumme.

5. Gebräuchliche Linearkombinationen

In diesem Kapitel werden unterschiedliche LCs mit wünschenswerten Eigenschaften im Bezug auf Elimination und Detektion von Fehlerquellen vorgestellt. Ausgehend von den jeweiligen weitgehend bekannten 2-Frequenz-LCs wird auch auf deren Bildung mit drei Frequenzen eingegangen.

5.1. Ionosphärenfreie Linearkombination

Die ionosphärische Verzögerung ist eine der größten Fehlerquellen bei GNSS-Messungen. Da die Ionosphäre für Mikrowellen ein dispersives Medium ist, hängt die Stärke ihres Einflusses von der Frequenz des Signals ab. Dieser Umstand kann durch den Empfang von GNSS-Signalen auf mehr als einer Frequenz ausgenutzt werden, indem sogenannte ionosphärenfreie Linearkombinationen (IF-LCs) gebildet werden, die den Einfluss der Ionosphäre 1.Ordnung eliminieren. Die IF-LC gebildet aus zwei Frequenzen n und m ($n < m$), hat die folgende Form.

$$\text{Phase [m]} \quad \phi_{IF} = \frac{f_n^2 \Phi_n - f_m^2 \Phi_m}{f_n^2 - f_m^2} \quad \text{Code [m]} \quad P_{IF} = \frac{f_m^2 P_m - f_n^2 P_n}{f_m^2 - f_n^2} \quad (5.1)$$

Das unterschiedliche Vorzeichen für Code- und Phasenmessung lässt sich durch die unterschiedliche Wirkung der Ionosphäre auf diese beiden Messgrößen erklären. Es ist möglich die Ganzzahligkeit der Mehrdeutigkeit bei der Bildung von IF-2-Frequenz-LCs zu erhalten [Odijk et al., 2002], was mit Blick auf das Bildungsgesetz (5.1) nicht selbstverständlich erscheint. Allerdings ist die Wellenlänge dieser 2-Frequenz-LCs sehr gering (im sub-cm-Bereich), was die Auflösung der Ambiguities erschwert.

Es können auch ionosphärenfreie 3-Frequenz-LCs gebildet werden. Eine LC eliminiert den Einfluss der Ionosphäre 1.Ordnung, wenn ihr ionosphärischer Verstärkungsfaktor \bar{q}_{LC} entsprechend (4.19) gleich Null ist.

$$\bar{q} = a + \frac{k_1}{k_2} b + \frac{k_1}{k_3} c = 0 \quad (5.2)$$

(5.2) beschreibt eine Ebene im von (a, b, c) aufgespannten Raum mit unendlich vielen Lösungen [Richert und El-Sheimy, 2006]. Im Fall von 2-Frequenz-LCs bildet die Menge der IF-2-Frequenz-LCs geometrisch betrachtet eine Gerade. Je näher ein Set von LC-Koeffizienten (a, b, c) an der ionosphärenfreien Ebene liegt, umso geringer ist die Wirkung der ionosphärischen Verzögerung auf die LC. Zur Bildung einer IF-3-Frequenz-LC ist es also nur notwendig ein Set an LC-Koeffizienten (a, b, c) zu wählen, das (5.2) erfüllt.

[Cocard et al., 2008] suchen nach IF-3-Frequenz-LCs für GPS, die die Ganzzahligkeit der Ambiguities erhalten, indem sie die ionosphärenfreie Ebene mit den sogenannten Lane-Ebenen, auf der sich LCs mit derselben Lane-Nummer befinden, schneiden. Diese Suche kann auch für Galileo

mit dem in Kapitel 6 entwickelten Formelapparat durchgeführt werden. Es werden im Folgenden alle optimalen Lösungen (minimales Rauschen) mit ganzzahligen Mehrdeutigkeiten für ionosphärenfreie 3-Frequenz-LCs angeführt, deren Rausch-Verstärkungsfaktor kleiner als 1000 und deren Wellenlänge größer als 3cm für GPS und größer als 1cm für Galileo ist. Die Ergebnisse für GPS stammen aus [Cocard et al., 2008]. Die resultierenden LCs sind in Tabelle 7 für GPS und in Tabelle 8 für Galileo zu finden.

L	a	b	c	λ [m]	\bar{n}	s
42	-77	540	-460	0.698	714	3
193	77	-516	437	0.152	681	-2
235	0	24	-23	0.125	33	1
277	-77	564	-483	0.106	747	4
428	77	-492	414	0.068	648	-1
512	-77	588	-506	0.057	780	5
663	77	-468	391	0.044	615	0
747	-77	612	-529	0.039	813	6
898	77	-444	368	0.033	582	1
982	-77	636	-552	0.030	846	7

Tabelle 7: IF-3-Frequenz-LCs für GPS mit einem Rausch-Verstärkungsfaktor $\bar{n} < 1000$ und $\lambda > 3\text{cm}$, erhalten als Schnitt der IF-Ebene $\bar{q}_{LC}=0$ mit Lane-Ebenen [Cocard et al., 2008]

Die in Tabelle 7 enthaltenen IF-3-Frequenz-LCs für GPS sind aufgrund ihrer riesigen Rausch-Verstärkungsfaktoren in der Praxis unbrauchbar. Bei einem Rausch-Verstärkungsfaktor von 600 und einem Rauschen von $\pm 1\text{-}2\text{mm}$ für Phasenbeobachtungen, erhält man für die LC ein Rauschen von $\pm 0.6\text{-}1.2\text{m}$.

In Tabelle 7 ist auch die ionosphärenfreie 2-Frequenz-LC (0, 24, -23) enthalten, die verglichen mit den restlichen LCs einen deutlich niedrigeren Rausch-Verstärkungsfaktor hat. Als zweite ionosphärenfreie 2-Frequenz-LC ist (-77, 60, 0) nicht in Tabelle 7 angeführt, weil sie eine Lane-Nummer von 4658 hat, was einer Wellenlänge von ungefähr 6mm entspricht. Die dritte ionosphärenfreie 2-Frequenz-LC (154, 0, 115) hat eine Lane-Nummer 10491 und damit eine noch kürzere Wellenlänge von 2.8mm. Ihre Rausch-Verstärkungsfaktoren betragen 98 und 192. Diese ganzzahligen ionosphärenfreien 2-Frequenz-LCs wurden auch schon von [Odijk et al., 2002] bestimmt.

L	a	b	c	λ [m]	\bar{n}	s
699	0	-115	118	0.042	165	3
1401	77	575	-649	0.021	870	3
2100	77	460	-531	0.014	707	6
2799	77	345	-413	0.010	544	9

Tabelle 8: IF-3-Frequenz-LCs für Galileo mit einem Rausch-Verstärkungsfaktor $\bar{n} < 1000$ und $\lambda > 1\text{cm}$, erhalten als Schnitt der IF-Ebene $\bar{q}_{LC}=0$ mit Lane-Ebenen

Für Galileo ergeben sich deutlich weniger IF-3-Frequenz-LCs, welchen diesen Kriterien entsprechen und diese haben darüber hinaus eine kleinere Wellenlänge. Auch hier sind alle IF-3-Frequenz-LCs aufgrund ihres großen Rausch-Verstärkungsfaktors in der Praxis unbrauchbar. In Tabelle 8 ist die IF-2-Frequenz-LC enthalten, die den geringsten Rausch-Verstärkungsfaktor hat. Die beiden anderen IF-2-Frequenz-LCs (77, 0, -59) und (154, -115, 0) haben eine Lane-Nummer von 4896 und 10491, was einer Wellenlänge von etwa 6mm und 3mm entspricht. Ihre Rausch-Verstärkungsfaktoren betragen 97 und 192. Da [Odijk et al., 2002] andere Koeffizienten k_i für die Signalfrequenzen von Galileo angenommen haben (die Signalfrequenzen von Galileo waren damals noch nicht fixiert), erhalten wir hier leicht abweichende Ergebnisse.

Zusammenfassend haben alle IF-3-Frequenz-LCs, die die Ganzzahligkeit der Ambiguities erhalten, sowohl für GPS als auch für Galileo große LC-Koeffizienten. Es zeigt sich, dass es keine IF-3-Frequenz-LC gibt, welche die Ionosphäre eliminiert, eine Wide-Lane-LC ist (siehe Kapitel 5.3.) und vor allem einen akzeptablen Rausch-Verstärkungsfaktor hat [Cocard et al., 2008]. Dies wird anhand eines Beispiels im Kapitel 7 deutlich. Die Bildung von IF-3-Frequenz-LCs, welche die Ganzzahligkeit der Ambiguities erhalten, ist somit nicht sinnvoll. Drei oder mehr GNSS-Frequenzen bieten für IF-LCs hauptsächlich das Potential zur Bildung von mehreren IF-2-Frequenz-LCs. Der Einsatz von IF-LCs lohnt sich vor allem bei einer großen Basislinienlänge und einer ausreichenden Beobachtungsdauer bei der die Verwendung von float Ambiguities in Frage kommt. [Odijk et al., 2002] und [Odijk, 2003] untersuchen, welche Wahl und Kombination von IF-2-Frequenz-LCs optimale Ergebnisse liefern und welche Vorteile die ganzzahlige Auflösung der Ambiguities gegenüber float Ambiguities mit sich bringt.

5.2. Geometriefreie Linearkombination

Die geometriefreie LC (GF-LC) eliminiert alle geometrischen Teile der Beobachtung: Geometrische Distanz, Troposphäre, Satellitenbahnfehler, Satelliten- und Empfängeruhrfehler. Frequenzabhängige Effekte bleiben übrig und damit eignet sich die GF-LC um den TEC der Ionosphäre zu schätzen, Cycle-Slips zu detektieren oder Antennenverdrehungen zu bestimmen. Abbildung 10 veranschaulicht welche Fehlereinflüsse von der GF-LC eliminiert werden. (5.3) enthält das

Bildungsgesetz der GF-LC für zwei Frequenzen n und m in der Einheit Meter und (5.4) in der Einheit Zyklen. In (5.4) handelt es sich bei k_m und k_n um die Koeffizienten mit denen die Grundfrequenz multipliziert wird um die Frequenzen von Φ_n und Φ_m zu erhalten (siehe (2.1)).

$$\text{Phase: } \phi_{GF} = \phi_n - \phi_m \quad \text{Code: } P_{GF} = P_m - P_n \quad (5.3)$$

$$\phi_{GF} = k_m \phi_n - k_n \phi_m \quad (5.4)$$

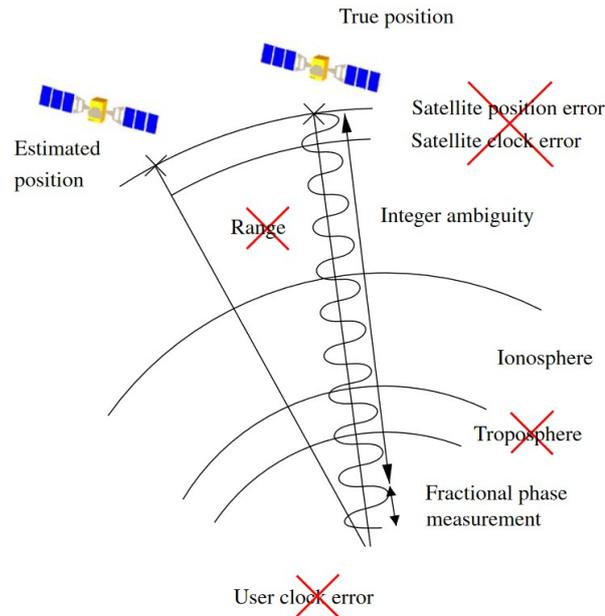


Abbildung 10: Die GF-LC eliminiert alle von der Frequenz unabhängigen Fehlereinflüsse [Henkel, 2009]

Der Einfluss geometrischer Effekte verschwindet bei unendlicher Wellenlänge. Das ist eine wichtige Eigenschaft der GF-LC ist, was gleichbedeutend damit ist, dass die Frequenz gleich Null ist. Durch Ausnützung dieser Eigenschaft können geometriefreie 3-Frequenz-LCs mit Hilfe der Gleichung (5.5) aufgefunden werden.

$$a f_1 + b f_2 + c f_3 = 0 \quad (5.5)$$

Es handelt sich um den Nenner aus der Formel (4.12). Geometrisch betrachtet bildet die Menge der GF-3-Frequenz-LCs ähnlich wie bei den IF-LCs eine Ebene [Richert und El-Sheimy, 2006] und im 2-Frequenz Fall eine Gerade. [Henkel, 2009] untersucht GF-LCs für Galileo. (5.5) kann mit der Beziehung (2.1) umgeformt werden. Vergleicht man das Ergebnis (5.6) mit (4.24) erkennt man, dass für GF-LCs gilt, dass die Lane-Nummer gleich Null sein muss. Dies entspricht einer unendlichen Wellenlänge.

$$a k_1 + b k_2 + c k_3 = L = 0 \quad (5.6)$$

5.3. Wide-Lane-Linearkombination

Als eine Wide-Lane-Linearkombination (WL-LC) bezeichnet man eine aus Phasenbeobachtungen gebildete LC, deren Wellenlänge größer ist als jene der niedrigsten Basissignalfrequenz. Da diese bei GPS und Galileo ident ist (L5 bzw. E5a), muss eine WL-LC somit die folgende Bedingung erfüllen.

$$\lambda_{LC} > 25.48 \text{ [cm]} \quad (5.7)$$

WL-LCs werden verwendet um die Auflösung von Ambiguities zu erleichtern. Bei einer größeren Wellenlänge kommt eine geringere Anzahl von ganzen Zahlen für eine Mehrdeutigkeit in Frage und der Suchraum wird auf diese Weise verkleinert. Eine große Wellenlänge ist für eine LC also wünschenswert, auch wenn keine Fehlereinflüsse durch WL-LCs verringert oder eliminiert werden.

Durch die Differenz zweier Frequenzen vergrößert sich die Wellenlänge (siehe (4.13)). Am naheliegendsten im Hinblick auf einen geringen Rausch-Verstärkungsfaktor ist eine einfache Differenz. Bei drei Trägerfrequenzen können somit drei WL-Paare gebildet werden. In Tabelle 9 sind diese für GPS und Galileo mit ihrem Bildungsgesetz in der Einheit Zyklen, ihrer Wellenlänge und Bezeichnung zusammengefasst. Die aus L1 und L2 gebildete LC war vor dem Aufbau der dritten GPS-Frequenz die einzige LC mit einer größeren Wellenlänge als die Ausgangssignale und darum wird sie als WL bezeichnet. Als Extra-Wide-Lane (EW) wird die 2-Frequenz-WL-LC mit der größten Wellenlänge bezeichnet, als Middle-Lane (ML) jene mit der kleinsten Wellenlänge. Die für GPS vergebenen Bezeichnungen können analog für die WL-LCs von Galileo verwendet werden.

λ [m]	$\phi_1 - \phi_2$	LC	$\phi_1 - \phi_3$	LC	$\phi_2 - \phi_3$	LC
GPS	0.862	WL	0.751	ML	5.861	EW
Galileo	0.751	ML	0.814	WL	9.768	EW

Tabelle 9: Die Wellenlänge der ML, WL und EW-LC für GPS und Galileo in Metern

Es existieren noch weitere nicht auf der einfachen Frequenzdifferenz basierenden WL-LCs aus zwei Frequenzen, die von geringerer Bedeutung sind und auch bei der Suche nach 3-Frequenz-WL-LCs auftreten. [Collins, 1999] hat eine systematische Suche nach allen voneinander unabhängigen WL-LCs für GPS L1 und L2-Beobachtungen durchgeführt.

WL-LCs können auch aus drei Frequenzen gebildet werden, wobei wieder gilt, dass die Wellenlänge der LC größer als die Wellenlänge von L5 bzw. E5a sein muss und somit (5.7) erfüllt ist. Für eine Suche nach 3-Frequenz-WL-LCs sei auf [Henkel und Günther, 2007] und [Urquhart, 2009] verwiesen, die eine systematische Suche nach WL-LCs für Galileo und GPS durchführen und ihre Eigenschaften bezüglich Rauschen, Ionosphäre und Wellenlänge angeben.

3-Frequenz-LCs mit einer größeren Wellenlänge als die originalen Signalfrequenzen können anhand ihrer Lane-Nummer erkannt werden [Cocard et al., 2008]. Aus (5.7) folgt das WL-Kriterium für die Lane-Nummer.

$$0 < |L_{WL}| < 115 \quad (5.8)$$

115 ist der Koeffizient mit dem aus der Grundfrequenz die Signalfrequenz L5 bzw. E5a gebildet wird (siehe Kapitel 2.2 und 2.3). Bei allen 3-Frequenz-LCs mit einer betragsmäßig kleineren Lane-Nummer als 115 handelt es sich um WL-LCs. Je kleiner die Lane-Nummer ist, desto größer ist die Wellenlänge der LC und die größtmögliche Wellenlänge für eine 3-Frequenz-LC beträgt 29.31m (was L=1 entspricht). Da jede Lane-Nummer einer Wellenlänge entspricht und es laut (5.8) nur eine begrenzte Anzahl an Lane-Nummern gibt, die WL-LCs beschreiben, gibt es eine begrenzte Anzahl an Wellenlängen für WL-LCs. Abbildung 9 auf Seite 32 verdeutlicht dies.

Eine ähnliche auf der Lane-Nummer basierende Einteilung kann auch für Narrow-Lane-LCs im nächsten Kapitel gefunden werden.

5.4. *Narrow-Lane-Linearkombination*

Als Narrow-Lane-Linearkombination (NL-LC) wird eine LC bezeichnet, deren Wellenlänge kleiner ist als jene der größten Basissignalfrequenz. Daher erfüllt bei GPS und Galileo eine NL-LC folgende Bedingung.

$$\lambda_{LC} < 19.03 \text{ [cm]} \quad (5.9)$$

NL-LCs sind aufgrund ihres geringen Rauschens interessant, das sich im Optimalfall in einer erhöhten Positionierungsgenauigkeit niederschlagen soll. Ihre geringe Wellenlänge erschwert jedoch die Auflösung der Ambiguities. Gewisse NL-LCs verringern den Einfluss der Ionosphäre. So gehören etwa fast alle IF-LCs zur Menge der NL-LCs. Andere Fehlereinflüsse werden von NL-LCs nicht verringert.

2-Frequenz-NL-LCs entstehen im Allgemeinen durch die Addition zweier Frequenzen, wie (4.13) zeigt. Durch einfache Addition entstehen die NL-LCs mit dem geringsten Rauschen. In Tabelle 10 sind diese für GPS und Galileo mit ihrem Bildungsgesetz und ihrer Wellenlänge in der Einheit Meter zusammengefasst.

λ [m]	$\phi_1 + \phi_2$	$\phi_1 + \phi_3$	$\phi_2 + \phi_3$
GPS	0.107	0.109	0.125
Galileo	0.109	0.108	0.126

Tabelle 10: Die Wellenlänge der 2-Frequenz-NL-LCs für GPS und Galileo in Metern

NL-LCs entstehen auch als Kombination von 3 Frequenzen. Wieder gilt, dass die Wellenlänge der LC kleiner als die Wellenlänge von L1 bzw. E1 sein muss und (5.9) erfüllt wird. 3-Frequenz-LCs mit einer kleineren Wellenlänge als die originalen Signalfrequenzen können wie bei WL-LCs über die Lane-Nummer gefunden werden [Cocard et al., 2008]. Aus (5.9) folgt für das NL-Kriterium für die Lane-Nummer.

$$|L_{NL}| > 154 \quad (5.10)$$

Alle 3-Frequenz-LCs mit einer betragsmäßig größeren Lane-Nummer als 154 werden als NL-LCs bezeichnet. Das ist der Koeffizient mit dem aus der Grundfrequenz die Signalfrequenz L1 bzw. E1 gebildet wird (siehe Kapitel 2.2 und 2.3). Je größer die Lane-Nummer ist, desto kleiner ist die Wellenlänge der LC. Im Unterschied zur WL-LC gibt es keine untere Schranke für die kleinstmögliche Wellenlänge, da für immer größere Lane-Nummern immer kleinere Wellenlängen entstehen.

[Petovello, 2006] untersucht, ob sich der Einsatz der in Tabelle 10 angeführten NL-LCs für Phasenbeobachtungen auf L1 und L2 lohnt. Es zeigt sich, dass verglichen mit der Verwendung der NL-LC für L1/L2 die getrennte Verwendung der L1 und L2 Phasenbeobachtungen bei gelösten Ambiguities zu leicht besseren Ergebnissen in der Positionsgenauigkeit führt. Ein praktisches Beispiel mit einer Basislinienlänge von 9.6m bestätigt dies, da bei dieser geringen Basislinienlänge nur noch stochastische Fehler einen Einfluss haben. Der einzige Vorteil der NL-LCs ist ihr geringerer Rechenaufwand. Dies fällt in Anbetracht der technischen Entwicklung nicht ins Gewicht und es gibt daher keinen Grund bei sehr kurzen Basislinien NL-LCs zu verwenden. Für Phasenbeobachtungen auf zwei Frequenzen ist der Einsatz von NL-LCs nach [Petovello, 2006] somit sinnlos. [Urquhart, 2009] untersucht den Einsatz von NL-LCs für drei Frequenzen und kommt zum Ergebnis, dass es trotz einer Verbesserung in der Positionierungsgenauigkeit effektiver ist die drei Frequenzen unabhängig zu verwenden. Sobald echte 3-Frequenz-Beobachtungen verfügbar sind, wird sich herausstellen, ob sich dies in der Praxis bestätigt und die getroffene Annahme bezüglich der Unabhängigkeit des Rauschens auf verschiedenen Frequenzen korrekt ist.

Es zeigt sich, dass mit Bildung von NL-LCs im Sinne der Rauschverminderung keine erhöhte Positionierungsgenauigkeit erreicht werden kann. Der Begriff der NL-LC ist nützlich um LCs einzuteilen und ihre Eigenschaft bezüglich der Wellenlänge zu beschreiben. Bei Vorgabe einer bekannten Mehrdeutigkeit entspricht die ionosphärenfreie LC einer NL-LC, welche mit Vorteil zur Bestimmung von Mehrdeutigkeiten auf mittleren und längeren Basislinien eingesetzt werden kann.

5.5. Melbourne-Wübbena-Linear kombination

Die Melbourne-Wübbena-Linear kombination (MW-LC) ist eine 2-Frequenz-LC und wird mit Hilfe von Code- und Phasenbeobachtungen gebildet. Sie folgt für zwei Frequenzen n und m der Gleichung (5.11), wobei $n < m$ gilt.

$$MW = \frac{f_n \phi_n - f_m \phi_m}{f_n - f_m} - \frac{f_n P_n + f_m P_m}{f_n + f_m} \quad (5.11)$$

Die Wellenlänge der MW-LC entspricht der WL-LC und sie eliminiert die ionosphärische Verzögerung 1.Ordnung, Uhrfehler und geometrische Fehlereinflüsse (Satellitenbahnfehler, Uhrfehler, troposphärische Verzögerung). Damit bleibt nur die Ambiguity übrig. Die MW-LC eignet sich bei guten P-Code-Beobachtungen zur Fixierung der Wide-Lane-Ambiguity und bei undifferenzierten Beobachtungen zur Suche nach Cycle-Slips [Dach et al., 2015].

Wenn man das Bildungsgesetz der MW-LC (5.11) mit dem der IF-LC (5.1) und der GF-LC (5.3) vergleicht, könnte man die MW-LC als geometriefreie und ionosphärenfreie LC von Code- und Phasenbeobachtungen interpretieren.

5.6. Multipath-LC

Zur Detektion von Multipath kann eine sogenannte Multipath-LC (MP-LC) gebildet werden. Sie bietet die Möglichkeit Multipath in den Beobachtungen eines einzelnen Empfängers aufzudecken. Die Bildung einer 2-Frequenz-LC zur Detektion von Multipath in Phasenmessungen ist nicht möglich. Code-Multipath kann mit der folgenden 2-Frequenz-LC für zwei Frequenzen n und m detektiert werden, wobei $n < m$ gilt und alle Größen in der Einheit Metern eingesetzt werden.

$$MP_n = P_n - \phi_n + 2 \cdot \frac{\lambda_n^2 (\phi_m - \phi_n)}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} \quad (5.12)$$

Eine Herleitung der 2-Frequenz-Code-MP-LC findet man auf der Website von Garrett Seepersad⁷, deren Ergebnis zu (5.12) führt, wenn man für α das Verhältnis der quadrierten Wellenlängen einsetzt und ein paar Umformungen vornimmt. (5.12) ist eine Differenz zwischen Code- und Phasenmessungen. Eine solche Differenz beinhaltet grundsätzlich eine Mischung aus Rauschen, Multipath und ionosphärischer Verzögerung. Der Einfluss der Ionosphäre wird jedoch durch den letzten Term auf der rechten Seite von (5.12) korrigiert. Es handelt sich um den ionosphärischen Einfluss 1.Ordnung auf die Frequenz n gebildet aus den Phasenbeobachtungen auf den Frequenzen n und m . Um diesen Wert muss zwei Mal korrigiert werden, da die Wirkung der Ionosphäre in 1.Ordnung auf Code- und Phasenmessungen unterschiedliches Vorzeichen hat. Phasen-Multipath hat aufgrund der geringen Größe (siehe Kapitel 3.9) keine Auswirkung auf die Bestimmung des Code-Multipaths mit (5.12). Da die LC jedoch neben Code-Multipath auch noch Ambiguities enthält

⁷ <http://garrett.seepersad.org/secondary/multipath-linear-combination>, 2.2.2017

sind nur Variationen von Code-Multipath bestimmbar und nicht der absolute Wert [Simsy, 2006].

GNSS mit drei oder mehr Frequenzen bieten neues Potential für MP-LCs und [Simsy, 2006] gibt die folgenden 3-Frequenz-MP-LCs für Phasen- und Codebeobachtungen an.

$$MP_{\phi} = \lambda_3^2 (\phi_1 - \phi_2) + \lambda_2^2 (\phi_3 - \phi_1) + \lambda_1^2 (\phi_2 - \phi_3) \quad (5.13)$$

$$MP_P = \lambda_3^2 (P_1 - P_2) + \lambda_2^2 (P_3 - P_1) + \lambda_1^2 (P_2 - P_3) \quad (5.14)$$

Im Unterschied zum 2-Frequenz-Fall kann eine 3-Frequenz-LC für Multipath in Phasenbeobachtungen gebildet werden. Die 3-Frequenz-MP-LCs in (5.13) und (5.14) sind eine Verallgemeinerung der GF-2-Frequenz-LC und man kann zeigen, dass sie keine ionosphärische Verzögerung enthalten [Simsy, 2006]. Es handelt sich um eine gewichtete Summe des Multipaths der drei Frequenzen und es kann nur diese Summe (nicht ihre Bestandteile) bestimmt werden. Die Größe des Multipaths der einzelnen Signale kann nicht ermittelt werden.

5.7. Übersicht Linearkombinationen

In Tabelle 11 sind die in diesem Kapitel beschriebenen LCs mit ihrer Bezeichnung und Besonderheit zusammengefasst. Bis auf die MW-LC, die aus zwei Frequenzen gebildet wird, können alle anderen LCs auch als 3-Frequenz-LC gebildet werden. Während die IF-LC und GF-LC zur Elimination von Fehlereinflüssen mit Code- und Phasenmessungen gebildet werden, werden WL-LCs und NL-LCs aufgrund der resultierenden Wellenlängen aus Phasenmessungen gebildet und die MW-LC und MP-LC werden als Mischung von Code- und Phasenmessungen zur Detektion von Fehlereinflüssen gebildet. Es handelt sich um übliche LCs, die sich durch eine bestimmte Eigenschaft auszeichnen und über deren Einsatz sich einiges in der Literatur finden lässt. Es gibt weit mehr als diese LCs, wie sich bereits im nächsten Kapitel zeigen wird, und natürlich auch andere Einsatzmöglichkeiten.

Linearkombination	Abkürzung	Besonderheit
Ionosphärenfrei	IF-LC	Eliminiert die ionosphärische Verzögerung
Geometriefrei	GF-LC	Eliminiert alle geometrischen Fehlereinflüsse
Wide-Lane	WL-LC	Wellenlänge größer als jene der ausgesendeten Signale
Narrow-Lane	NL-LC	Wellenlänge kleiner als jene der ausgesendeten Signale
Melbourne-Wübbena	MW-LC	Eliminiert alle Fehlereinflüsse bis auf die Ambiguity
Multipath	MP-LC	Zur Detektion von Multipath einsetzbar

Tabelle 11: Übersicht gebräuchliche LCs

6. Optimale Linearkombinationen

In diesem Kapitel werden optimale LCs gesucht, die im Sinne eines niedrigen Rausch-Verstärkungsfaktors, ganzzahliger Ambiguities, einer großen Wellenlänge und einem niedrigen ionosphärischen Verstärkungsfaktors optimal sind. Es wird versucht die Frage zu beantworten, ob und inwieweit es möglich ist optimale LCs zu bilden. Es werden ausschließlich 3-Frequenz-LCs aus Phasenbeobachtungen betrachtet, die die Ganzzahligkeit der Ambiguities erhalten. In Kapitel 5 wurden verschiedene Arten von LCs vorgestellt, die jeweils eine Anforderung erfüllen und bereits aus zwei Frequenzen gebildet werden können. Eine dritte Frequenz ermöglicht optimalerweise mehreren Anforderungen gerecht zu werden. Zudem werden aufgrund einer geometrischen Betrachtung Rückschlüsse auf die Kombinierbarkeit verschiedener Anforderungen an LCs gezogen. Vorweggenommen sei hier die Tatsache, dass es leider nicht möglich ist, eine LC zu bilden, die alle wünschenswerten Eigenschaften vereint. Im Rahmen dieser Arbeit werden GPS und Galileo betrachtet, für eine Untersuchung von optimalen LCs für das chinesische GNSS BeiDou sei auf [Zhang und He, 2015] verwiesen.

6.1. Geometrische Betrachtung

Jede LC kann als Punkt im (a, b, c) -Raum aufgefasst werden und wie bereits in Kapitel 5.1 erwähnt wurde, liegt die Menge aller IF-3-Frequenz-LC in einer Ebene. Dies gilt auch für GF-LCs, die aus drei Frequenzen gebildet wurden (siehe Kapitel 5.2.). Die Gleichungen dieser beiden Ebenen sind in (6.1) und (6.2) noch einmal angegeben. Darüber hinaus kann der in (6.3) dargestellte Rausch-Verstärkungsfaktor als Funktion der LC-Koeffizienten aufgefasst werden. Es handelt sich um den radialen Abstand zum Nullpunkt im von (a, b, c) aufgespannten Raum. LCs, die denselben Rausch-Verstärkungsfaktor haben, liegen damit auf einer im Ursprung gelagerten Kugel. Abbildung 11 veranschaulicht die Ebenen der ionosphärenfreien LCs, der geometriefreien LCs und den mit zunehmender Distanz vom Ursprung zunehmenden Rausch-Verstärkungsfaktor.

$$a + \frac{k_1}{k_2}b + \frac{k_1}{k_3}c = 0 \quad (6.1)$$

$$a k_1 + b k_2 + c k_3 = 0 \quad (6.2)$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \bar{n} \quad (6.3)$$

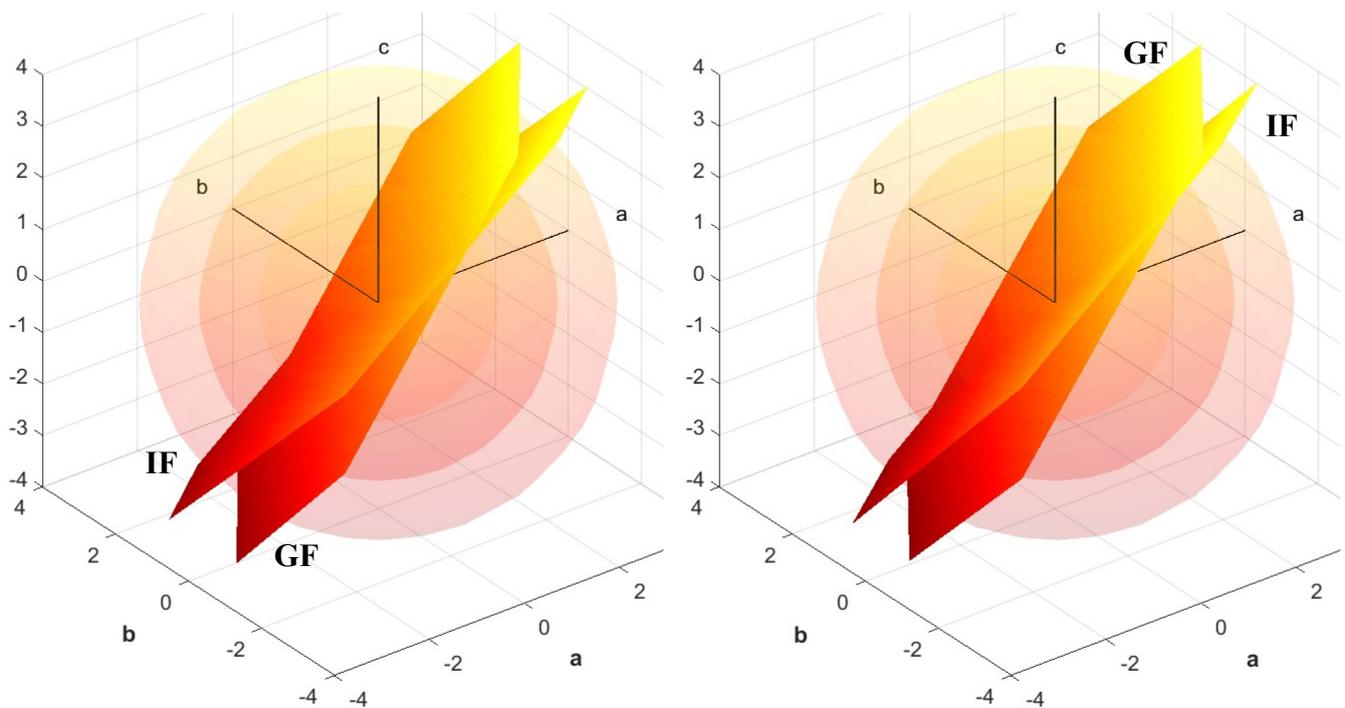


Abbildung 11: Die Ebenen der IF-LCs und GF-LCs im von (a, b, c) aufgespannten Raum und die Kugeln gleichen Rausch-Verstärkungsfaktor 1 bis 4. Links für GPS und rechts für Galileo.

Der Winkel zwischen der Ebene der GF-LCs und IF-LCs kann aus deren Normalvektoren berechnet werden. Diese Normalvektoren hängen nur von den Signalfrequenzen ab und können aus den Ebenen-Gleichungen (6.1) und (6.2) einfach abgelesen werden. Dieser Winkel beträgt 14.62° für GPS und 14.98° für Galileo. Dies erklärt den geringen Unterschied zwischen der Darstellung für GPS und für Galileo in Abbildung 11.

[Richert und El-Sheimy, 2006] machen sich auf die Suche nach optimalen LCs für eine gegebene Aufgabenstellung. Eine optimale LC wird von den Autoren so definiert, dass mit ihr die Ambiguities korrekt ganzzahlig aufgelöst werden können und eine bestmögliche Positionierungsgenauigkeit erreicht wird. Nach dieser Definition von Optimalität sind verschiedene LCs bei unterschiedlicher Basislinienlängen, unterschiedlich starker Verteilung der Fehlerquellen und unterschiedlichen Nutzer-Anforderungen optimal. [Richert und El-Sheimy, 2006] entwickeln dafür die Varianz einer LC, die einer gewichteten Summe der Varianzen der Fehlereinflüsse auf die untransformierten Signale entspricht. Die Gewichtung basiert auf den nominellen Frequenzen der Phasenbeobachtungen, die für GPS und Galileo in Tabelle 1 und 2 zu finden sind, und der Wahl der LC-Koeffizienten. Da nicht alle Signalfrequenzen von GPS und Galileo ident sind, hat dieselbe LC unterschiedliche Eigenschaften für GPS und Galileo. Basierend auf Fehlerfortpflanzung verringert oder eliminiert eine bestimmte Wahl von LC-Koeffizienten einzelne Fehlerquellen.

[Richert und El-Sheimy, 2006] untersuchen die geometrischen Beziehungen von LCs, wobei die Verminderung der troposphärischen Verzögerung und Multipath im Vordergrund stehen und erhalten ähnliche Ergebnisse, die in der Einheit Metern und Zyklen betrachtet werden. In der

Einheit Meter betrachtet bildet die Anforderung minimaler Rauscherhöhung eine Gerade. Sie ist auf die GF-Ebene orthogonal. Da die Wellenlänge von GF-LCs unendlich ist, bestätigt diese geometrische Tatsache die bekannte Meinung, dass LCs mit größerer Wellenlänge eine größere Rauschverstärkung haben. Der Winkel zwischen der Ebene der IF-LCs und der Gerade minimaler Rauscherhöhung beträgt 75.4° für GPS und 75° für Galileo. Aufgrund dieses großen Winkels sind die zwei Bedingungen gegensätzlich schwer gleichzeitig zu erfüllen. Eine IF-LC bringt ein großes Rauschen mit sich.

Zusammenfassend zeigt sich, dass es nicht möglich ist eine LC zu finden, die alle wünschenswerten Anforderungen kombiniert, und es muss ein Kompromiss gefunden werden. Es gibt keine LC, die besser als alle anderen ist. Eine optimale LC hängt von den konkreten Größen der einzelnen Fehlerquellen und damit der Aufgabenstellung ab. So ist zum Beispiel bei der Verwendung von DD und einer kurzen Basislinie wahrscheinlich das Signalrauschen die dominante Fehlerquelle.

Im Folgenden werden systematisch optimale LCs gesucht, die die Ganzzahligkeit der Ambiguities erhalten und vor dem Hintergrund eines niedrigen Rausch-Verstärkungsfaktors, einer großen Wellenlänge und einem niedrigen ionosphärischen Verstärkungsfaktors optimal sind. Ihre Eigenschaften werden berechnet und angegeben. Die Bedingung ganzzahliger Mehrdeutigkeiten erlaubt im Allgemeinen deren schnelle Fixierung.

6.2. Systematische Suche

Nach einer von [Cocard et al., 2008] für GPS vorgestellten Idee wird die Suche nach optimalen LCs nicht über die LC-Koeffizienten durchgeführt, sondern über die Lane-Nummer und den ionosphärischen Verstärkungsfaktor parametrisiert. Es wird dabei nur die ionosphärische Verzögerung 1.Ordnung berücksichtigt. Man kann diese Vorgangsweise als inversen Ansatz bezeichnen, da die LC-Koeffizienten als unbekannt angenommen und wünschenswerten Eigenschaften angepasst werden. Dies steht im Gegensatz zum direkten Ansatz, wo alle möglichen LCs aufgestellt und ihre Eigenschaften berechnet werden [Urquhart, 2009].

6.2.1. Lane-Ebenen

Es existieren unendlich viele LCs mit derselben Lane-Nummer L und damit der gleichen Wellenlänge. Die LC-Koeffizienten (a, b, c) müssen entsprechend (4.24) für ein bestimmtes L nur die folgende Gleichung erfüllen.

$$k_1 a + k_2 b + k_3 c = L \quad (6.4)$$

Für ein bestimmtes L entspricht diese Gleichung im von (a, b, c) aufgespannten Raum geometrisch einer Ebene. Diese wird als Lane-Ebene bezeichnet. Für jede Lane-Nummer gibt es im (a, b, c) -Raum eine Lane-Ebene, auf der alle LCs liegen, die diese Lane-Nummer besitzen. Die Lane-Ebenen besitzen einen von L unabhängigen Normalvektor.

$$\mathbf{n}_{lane} = [k_1 \ k_2 \ k_3]^T \quad (6.5)$$

Im Folgenden wird der Vektor der LC-Koeffizienten als \mathbf{a} bezeichnet. Er enthält die LC-Koeffizienten, also $\mathbf{a} = [a, b, c]^T$. Lösungen der Gleichung (6.4) für beliebige L haben die Form.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{lane}^0 + n\mathbf{v}_{lane} + m\mathbf{w}_{lane} \quad (6.6)$$

Wobei $\mathbf{a}_{lane}^0 = [a^0, b^0, c^0]^T$ eine Partikulärlösung ist und $\mathbf{v}_{lane} = [v_1, v_2, v_3]^T$, $\mathbf{w}_{lane} = [w_1, w_2, w_3]^T$ zwei verschiedene und linear unabhängige Basisvektoren aus der Lane-Ebene sind. n und m sind beliebige ganze Zahlen. Gleichung (6.4) entspricht einer linearen diophantischen Gleichung in drei Termen. In einer diophantischen Gleichung sind nur ganzzahlige Lösungen erlaubt. Die Lösung für (6.4) ist für GPS und Galileo in (6.7) angegeben. Die Lösung für GPS stammt aus [Cocard et al., 2008]. Die Lösung für Galileo wurde unter zu Hilfenahme eines Lösungsskriptes für diophantische Gleichungen von Arndt Brüner⁸ berechnet und der Lösungsweg ist im Anhang angeführt.

$$\begin{aligned} \text{GPS:} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -5 & 10 \\ 31 & -7 & -9 \\ -31 & 14 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ n \\ m \end{bmatrix} \\ \text{Galileo:} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 39 & 12 & -118 \\ -38 & -13 & 115 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ n \\ m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Als Partikulärlösung und mögliche Wahl für \mathbf{v}_{lane} und \mathbf{w}_{lane} erhält man.

$$\begin{aligned} \text{GPS:} \quad \mathbf{a}_{lane}^0 &= L \cdot [-1 \ 31 \ -31]^T \\ \text{Galileo:} \quad \mathbf{a}_{lane}^0 &= L \cdot [0 \ 39 \ -38]^T \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \text{GPS:} \quad \mathbf{v}_{lane} &= [-5 \ -7 \ 14]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_{lane} = [10 \ -9 \ -4]^T \\ \text{Galileo:} \quad \mathbf{v}_{lane} &= [1 \ 12 \ -13]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_{lane} = [0 \ -118 \ 115]^T \end{aligned} \quad (6.9)$$

Indem man die Partikulärlösung in (6.4) einsetzt und das Kreuzprodukt von \mathbf{v}_{lane} und \mathbf{w}_{lane} bildet kann geprüft werden, ob die Lösung korrekt bestimmt wurde. Durch Einsetzen der Partikulärlösung muss eine wahre Aussage entstehen und der entstehende Normalvektor muss dem Normalvektor aus (6.5) entsprechen. Grund dafür ist, dass es sich um dieselbe Ebene in unterschiedlichen Darstellungsformen handelt.

Setzt man also in (6.4) für (a, b, c) die Werte der Partikulärlösung (6.8) und die Koeffizienten der Signalfrequenzen aus Tabelle 1 bzw. 2 ein, erhält man:

$$\begin{aligned} \text{GPS:} \quad L \cdot (-1 \cdot 154 + 31 \cdot 120 - 31 \cdot 115) &= L \\ \text{Galileo:} \quad L \cdot (0 \cdot 154 + 39 \cdot 115 - 38 \cdot 118) &= L \end{aligned} \quad (6.10)$$

Für das Kreuzprodukt von \mathbf{v}_{lane} und \mathbf{w}_{lane} erhält man:

$$\begin{aligned} \text{GPS:} \quad [-5 \ -7 \ 14]^T \times [10 \ -9 \ -4]^T &= [154 \ 120 \ 115]^T \\ \text{Galileo:} \quad [1 \ 12 \ -13]^T \times [0 \ -118 \ 115]^T &= [154 \ 115 \ 118]^T \end{aligned} \quad (6.11)$$

⁸ <http://www.arndt-bruener.de/mathe/scripts/diophant.htm>, 18.12.2016

Wie leicht überprüft werden kann gehen beide Proben auf und es wurde eine korrekte Lösung bestimmt.

Die Lane-Ebenen sind parallel und der Abstand zwischen zwei benachbarten Lane-Ebenen ($\Delta L=1$) kann mit (6.12) berechnet werden. Er beträgt für GPS $\sim 4.133 \cdot 10^{-3}$ und für Galileo $\sim 4.434 \cdot 10^{-3}$.

$$\delta = \|\mathbf{n}\|^{-1} \quad (6.12)$$

Die Lane-Ebenen liegen im a-b-c-Raum symmetrisch zur zentralen Lane-Ebene ($L=0$) mit der entsprechenden Lane-Nummer $\pm L$ im Abstand $\pm L\delta$. Abbildung 12 zeigt dies für GPS. Auf jeder Lane-Ebene sind ganzzahlige LC-Koeffizienten in einem regelmäßigem Raster verteilt, wobei der Abstand durch die beiden Vektoren \mathbf{v}_{lane} und \mathbf{w}_{lane} angegeben wird.

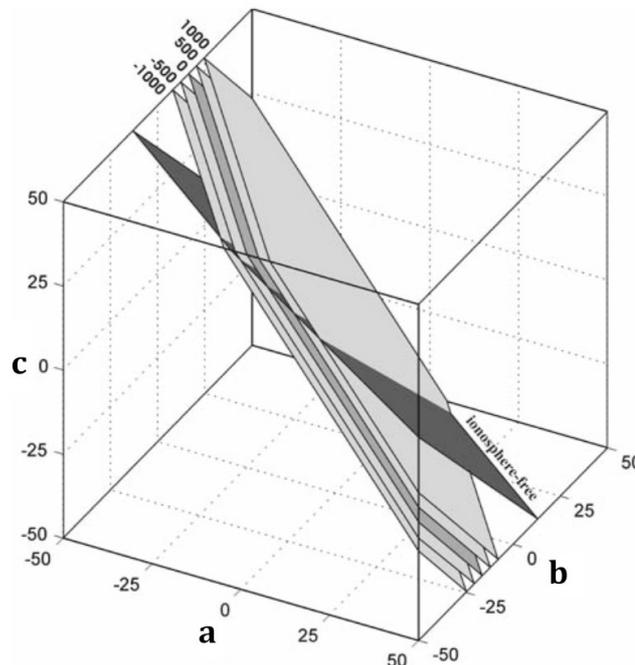


Abbildung 12: Lane-Ebenen für $L=0, \pm 500, \pm 1000$ und die IF-Ebene in einem Würfel mit Kantenlänge ± 50 für GPS [Cocard et al., 2008]

6.2.2. Ionosphären-Ebenen

Multipliziert man (4.19) mit $k_1 k_2 k_3$ erhält man die folgende Gleichung.

$$(k_2 k_3) \bar{q}_{LC} = (k_2 k_3) a + (k_1 k_3) b + (k_1 k_2) c \quad (6.13)$$

Um teilerfremde Zahlen (keine gemeinsamen Teiler) zu erhalten, dividiert man die entstehenden Koeffizienten in (6.13) im Fall von GPS durch 10 und im Fall von Galileo durch 2 und erhält die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad 1380 \bar{q}_{LC} = 1380 a + 1771 b + 1848 c \\ \text{Galileo:} & \quad 6785 \bar{q}_{LC} = 6785 a + 9086 b + 8855 c \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ähnlich zur Lane-Nummer kann für GPS und Galileo eine ganze Zahl \bar{q}_i , die Ionosphären-Zahl, eingeführt werden. Sie gibt an in welcher Weise und Stärke die LC von der Ionosphäre beeinflusst

wird.

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad \bar{q}_i = 1380 \bar{q}_{LC} \\ \text{Galileo:} & \quad \bar{q}_i = 6785 \bar{q}_{LC} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Setzt man dies in (6.14) ein erhält man die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad 1380 a + 1771 b + 1848 c = \bar{q}_i \\ \text{Galileo:} & \quad 6785 a + 9086 b + 8855 c = \bar{q}_i \end{aligned} \quad (6.16)$$

(6.16) entspricht wieder parallelen Ebenen im von (a, b, c) aufgespannten Raum, den Ionosphären-Ebenen. Der Normalvektor der Ionosphären-Ebenen ist unabhängig von \bar{q}_i und gegeben durch:

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad \mathbf{n}_{ion} = [1380 \quad 1771 \quad 1848]^T \\ \text{Galileo:} & \quad \mathbf{n}_{ion} = [6785 \quad 9086 \quad 8855]^T \end{aligned} \quad (6.17)$$

Der Abstand zwischen zwei benachbarten Ebenen lässt wieder mit (6.12) berechnen. Er beträgt für GPS $\sim 3.439 \cdot 10^{-4}$ und für Galileo $\sim 6.950 \cdot 10^{-5}$. Die zentrale Ionosphären-Ebene ist gegeben mit $\bar{q}_i = \bar{q}_{LC} = 0$. LCs, die in dieser Ebene liegen, sind frei vom Einfluss der ionosphärischen Verzögerung. Die übrigen Ionosphären-Ebenen liegen im a-b-c-Raum symmetrisch zur zentralen Ionosphären-Ebene mit ihrer entsprechenden Ionosphären-Zahl $\pm \bar{q}_i$ im Abstand $\pm \bar{q}_i \delta$. In Abbildung 12 ist neben den Lane-Ebenen die vom Einfluss der Ionosphäre unabhängige zentrale Ionosphären-Ebene für GPS dargestellt.

Die Lösungen der diophantischen Gleichung (6.16) für die Ionosphären-Ebenen haben wie bei den Lane-Ebenen wieder die folgende Form.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{ion}^0 + n \mathbf{v}_{ion} + m \mathbf{w}_{ion} \quad (6.18)$$

Dies führt für GPS und Galileo zu folgenden Lösungen, wobei die Lösung für GPS aus [Cocard et al., 2008] stammt und die Lösung für Galileo selbst berechnet wurde.

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 0 & -77 \\ -233 & 24 & 60 \\ 233 & -23 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_i \\ n \\ m \end{bmatrix} \\ \text{Galileo:} & \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 77 & 0 \\ 1 & 0 & 115 \\ -47 & -59 & -118 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_i \\ n \\ m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Man erhält für die Partikulärlösung und als mögliche Wahl für \mathbf{v}_{ion} und \mathbf{w}_{ion} :

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad \mathbf{a}_{ion}^0 = \bar{q}_i \cdot [-13 \quad -233 \quad 233]^T \\ \text{Galileo:} & \quad \mathbf{a}_{ion}^0 = \bar{q}_i \cdot [60 \quad 1 \quad -47]^T \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad \mathbf{v}_{ion} = [0 \quad 24 \quad -23]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_{ion} = [-77 \quad 60 \quad 0]^T \\ \text{Galileo:} & \quad \mathbf{v}_{ion} = [77 \quad 0 \quad -59]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_{ion} = [0 \quad 115 \quad -118]^T \end{aligned} \quad (6.21)$$

Die Lösungen können durch Einsetzen der Partikulärlösung in (6.16) und Bildung des Kreuzproduktes von \mathbf{v}_{ion} und \mathbf{w}_{ion} und Vergleich mit dem Normalvektor aus (6.17) geprüft werden.

Die Basisvektoren \mathbf{v}_{ion} und \mathbf{w}_{ion} der Ionosphären-Ebenen repräsentieren interessanterweise selbst eine IF-2-Frequenz-LC wie sich später zeigen wird und im Falle von GPS bei Vergleich mit [Odiijk et. al., 2002] zeigt.

6.2.3. Schnitt Lane-Ebenen mit Ionosphären-Ebenen

Wir betrachten jetzt den Schnitt zwischen einer beliebigen Lane-Ebene gegeben mit ihrer Lane-Nummer L und einer beliebigen Ionosphären-Ebene gegeben mit ihrer ionosphärischen Zahl \bar{q}_i . Man erhält den Schnitt der Lane-Ebenen mit den Ionosphären-Ebenen indem man die parametrisierte Form der ionosphärischen Ebenen (6.19) in die Lane-Ebenen (6.4) einsetzt. Natürlich ist auch der umgekehrte Weg möglich, also die parametrisierte Form der Lane-Ebene (6.7) in die IF-Ebene (6.16) einzusetzen, und führt zum selben Ergebnis.

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad 235n - 4658m = L + 3167\bar{q}_i \\ \text{Galileo:} & \quad 4896n - 699m = L - 3809\bar{q}_i \end{aligned} \quad (6.22)$$

Geometrisch entsprechen diese beiden Gleichungen einer Gerade, die durch den Schnitt zweier Ebenen entstanden ist. (6.22) kann für gegebene ganzzahlige Werte von L und \bar{q}_i gelöst werden. Bei Galileo muss berücksichtigt werden, dass die Koeffizienten der Terme auf der linken Seiten noch nicht teilerfremd sind und durch 3 teilbar sind. Um eine Lösung zu erhalten, muss auch die rechte Seite durch 3 teilbar sein. Diese Tatsache wird bei der Einführung der folgenden Abkürzung, die zur Lösung der Gleichung (6.22) vorgenommen wird, berücksichtigt. Sie lässt sich so deuten, dass bei Galileo nicht jeder Schnitt einer Lane-Ebene mit einer Ionosphären-Ebene im a-b-c-Raum ganzzahlige LC-Koeffizienten ergibt.

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad p = L + 3167\bar{q}_i \\ \text{Galileo:} & \quad 3p = L - 3809\bar{q}_i \end{aligned} \quad (6.23)$$

Eine explizite Lösung erhält man durch Lösung der folgenden diophantischen Gleichung.

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad 235n - 4658m = p \\ \text{Galileo:} & \quad 1632n - 233m = p \end{aligned} \quad (6.24)$$

Dies führt für GPS und Galileo zu folgenden Lösungen. Die Lösung für GPS entstammt wieder [Cocard et al., 2008] und die Lösung für Galileo wurde wieder selbst berechnet. Die gefundenenen Lösungen können durch Einsetzen in (6.24) geprüft werden.

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 555 & 4658 \\ 28 & 235 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ j \end{bmatrix} \\ \text{Galileo:} & \quad \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 233 \\ 7 & 1632 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Durch Substitution von n und m aus (6.25) in (6.19) erhält man eine explizite Lösung für die LC.

$$\begin{aligned}
\text{GPS:} \quad & \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -2156 & -18095 \\ -233 & 15000 & 125892 \\ 233 & -12765 & -107134 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_i \\ p \\ j \end{bmatrix} \\
\text{Galileo:} \quad & \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 77 & 17941 \\ 1 & 805 & 187680 \\ -47 & -885 & -206323 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_i \\ p \\ j \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Da \bar{q}_i und L als bekannt vorausgesetzt werden und p von diesen beiden Parametern abhängt ist (6.26) vom Typ (6.27) - es handelt sich um die Parameterdarstellung einer Geraden.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^0 - j \delta \mathbf{a} \tag{6.27}$$

j bezeichnet eine beliebige ganze Zahl. Die Partikulärlösung ist durch (6.28) gegeben und der Richtungsvektor der Geraden, der den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lösungen beschreibt, durch (6.29).

$$\begin{aligned}
\text{GPS:} \quad & \mathbf{a}^0 = \begin{bmatrix} -13 \bar{q}_i - 2156 p \\ -233 \bar{q}_i + 15000 p \\ 233 \bar{q}_i - 12765 p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6828065 \bar{q}_i - 2156 L \\ 47504767 \bar{q}_i + 15000 L \\ 47505233 \bar{q}_i - 12765 L \end{bmatrix} \\
\text{Galileo:} \quad & \mathbf{a}^0 = \begin{bmatrix} 60 \bar{q}_i + 77 p \\ \bar{q}_i + 805 p \\ -47 \bar{q}_i - 885 p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -293233 \bar{q}_i + 77 L \\ -3066244 \bar{q}_i + 805 L \\ 3370918 \bar{q}_i - 885 L \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}
\text{GPS:} \quad & \delta \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -18095 & 125892 & -107134 \end{bmatrix}^T \\
\text{Galileo:} \quad & \delta \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 17941 & 187680 & -206323 \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Der Abstand $\delta \mathbf{a}$ ist im a-b-c-Raum unabhängig von L und \bar{q}_i . Wie einfach nachgeprüft werden kann, kann derselbe Vektor $\delta \mathbf{a}$ direkt aus den Normalvektoren der Lane-Ebenen (6.5) und der Ionosphären-Ebenen (6.17) mit dem Kreuzprodukt berechnet werden. Geometrisch ist das einleuchtend, da der Vektor der Schnittgerade zweier Ebenen normal auf die Normalvektoren der geschnittenen Ebenen steht.

Um den Wert des Parameters j zu fixieren und eine eindeutige Lösung zu erhalten, stellen wir als zusätzliche Bedingung, dass das Rauschen möglichst gering ist. Diese Bedingung entspricht es auf der Schnittgerade im (a, b, c)-Raum jene LC zu wählen, die dem Ursprung am nächsten ist. Diese Forderung wird erfüllt indem man zuerst eine reelle Zahl j_{reell} mit (6.30) berechnet und dann durch Rundung von j_{reell} auf j die naheliegendste ganze Zahl wählt. In (6.30) wird im Zähler und Nenner das Skalarprodukt benötigt.

$$j_{\text{reell}} = \frac{\delta \mathbf{a} \circ \mathbf{a}^0}{\delta \mathbf{a} \circ \delta \mathbf{a}} \tag{6.30}$$

Für ein gegebenes Paar von L und \bar{q}_{LC} erhält man damit eine eindeutige LC mit den LC-Koeffizienten (a, b, c), die optimal im Sinne des Rauschens ist. Folgende Schritte müssen dazu durchgeführt werden:

1. Mit dem gewählten ionosphärischen Verstärkungsfaktor \bar{q}_{LC} wird mit (6.15) die Ionosphären-Zahl berechnet \bar{q}_i .
2. Die in einigen Formeln verwendete Abkürzung p erhält man mit (6.23).
3. Eine Partikulärlösung auf der Schnittgeraden von Ionosphären-Ebene mit Lane-Ebene erhält man mit (6.28).
4. Mit der soeben berechneten Partikulärlösung und dem in (6.29) explizit gegebenen Richtungsvektor der Schnittgeraden kann j_{reell} mit (6.30) berechnet werden. Durch Rundung erhält man einen ganzzahligen Wert für j .
5. Zum Abschluss erhält man die gesuchten LC-Koeffizienten durch Einsetzen der Partikulärlösung, des Richtungsvektors und des ganzzahligen Wertes von j in (6.27).

Dies soll anhand eines willkürlich gewählten Beispiels demonstriert werden. Wir suchen jene LC, die die Lane-Nummer 8 hat und den Einfluss der Ionosphäre verdoppelt. Damit ist $L=8$ und $\bar{q}_{LC}=2$. Mit (6.15) erhält man \bar{q}_i .

$$\begin{aligned} \text{GPS:} \quad \bar{q}_i &= 1380 \cdot 2 = 2760 \\ \text{Galileo:} \quad \bar{q}_i &= 6785 \cdot 2 = 13570 \end{aligned}$$

Die Abkürzung p wird in den weiteren Schritten benötigt und man erhält sie mit (6.23).

$$\begin{aligned} \text{GPS:} \quad p &= 8 + 3167 \cdot 2760 = 8740928 \\ \text{Galileo:} \quad p &= \frac{8 - 3809 \cdot 13570}{3} = -17229374 \end{aligned}$$

Eine Partikulärlösung auf der Schnittgeraden der Ionosphären-Ebene 2760 bzw. 13570 mit der Lane-Ebene 8 erhält man mit (6.28).

$$\begin{aligned} \text{GPS:} \quad \mathbf{a}^0 &= \begin{bmatrix} -13 \cdot 2760 - 2156 p \\ -233 \cdot 2760 + 15000 p \\ 233 \cdot 2760 - 12765 p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18845476648 \\ 131113276920 \\ -111577302840 \end{bmatrix} \\ \text{Galileo:} \quad \mathbf{a}^0 &= \begin{bmatrix} 60 \cdot 13570 + 77 p \\ 13570 + 805 p \\ -47 \cdot 13570 - 885 p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1325847598 \\ -13869632500 \\ 152473582000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mit der Partikulärlösung und dem Richtungsvektor der Schnittgeraden, der in (6.29) explizit angegeben ist, kann mit (6.30) j_{reell} berechnet werden.

$$\text{GPS:} \quad j_{reell} = \frac{\begin{bmatrix} -18095 \\ 125892 \\ -107134 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -18845476648 \\ 131113276920 \\ -111577302840 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -18095 \\ 125892 \\ -107134 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -18095 \\ 125892 \\ -107134 \end{bmatrix}} = 1041474.255$$

$$\text{Galileo: } j_{reell} = \frac{\begin{bmatrix} 17941 \\ 187680 \\ -206323 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -1325847598 \\ -13869632500 \\ 152473582000 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 17941 \\ 187680 \\ -206323 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 17941 \\ 187680 \\ -206323 \end{bmatrix}} = 73900.428$$

Durch Rundung erhält man einen ganzzahligen Wert für j .

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad j = 1041474 \\ \text{Galileo:} & \quad j = 73900 \end{aligned}$$

Indem man die Partikulärlösung, den Richtungsvektor und den ganzzahligen Wert für j in (6.27) einsetzt, erhält man die gesuchten LC-Koeffizienten.

$$\begin{aligned} \text{GPS:} \quad \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} -18845476648 \\ 131113276920 \\ -111577302840 \end{bmatrix} - 1041474 \cdot \begin{bmatrix} -18095 \\ 125892 \\ -107134 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4618 \\ 32112 \\ -27324 \end{bmatrix} \\ \text{Galileo:} \quad \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} -1325847598 \\ -13869632500 \\ 152473582000 \end{bmatrix} - 73900 \cdot \begin{bmatrix} 17941 \\ 187680 \\ -206323 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7698 \\ -80500 \\ 88500 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wir erhalten somit für GPS die LC (-4618, 32112, -27324) und für Galileo (-7698, -80500, 88500).

Zur Probe können wir aus den LC-Koeffizienten mit (4.24) die Lane-Nummer und mit (4.19) den ionosphärischen Verstärkungsfaktor berechnen.

$$\begin{aligned} \text{GPS:} \quad L &= -4618 \cdot 154 + 32112 \cdot 120 - 27324 \cdot 115 = 8 \\ \text{Galileo:} \quad L &= -7698 \cdot 154 - 80500 \cdot 115 + 88500 \cdot 118 = 8 \\ \text{GPS:} \quad \bar{q}_{LC} &= -4618 \cdot \frac{154}{154} + 32112 \cdot \frac{154}{120} - 27324 \cdot \frac{154}{115} = 2 \\ \text{Galileo:} \quad \bar{q}_{LC} &= -7698 \cdot \frac{154}{154} - 80500 \cdot \frac{154}{115} + 88500 \cdot \frac{154}{118} = 2 \end{aligned}$$

Es ergeben sich die am Anfang gewählten Werte für die Lane-Nummer und den ionosphärischen Verstärkungsfaktor.

6.2.4. Suchmethode

Die Suche nach optimalen LCs kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen [Cocard et al., 2008]. Naheliegender ist der direkte Ansatz bei dem man eine Dreifachschleife über die LC-Koeffizienten (a , b , c) laufen lässt. Dann können die LCs ausgewählt werden, die wünschenswerte Eigenschaften haben, denn für jede LC kann die Lane-Nummer L (4.24), der ionosphärischen Verstärkungsfaktor \bar{q}_{LC} (4.19) und der Rausch-Verstärkungsfaktor \bar{n} (4.21) berechnet werden. Das ist eine einfache Methode, die aber einen riesigen Rechenaufwand mit sich bringt, da jede LC berechnet werden muss, unabhängig davon, ob sie wünschenswerte Eigenschaften hat oder nicht. Variiert man die LC-Koeffizienten (a , b , c) zum Beispiel jeweils von -500 bis +500, erzeugt man 10^9 LCs. Um die

Menge an LCs einzuschränken, können dann Bedingungen an die Lane-Nummer, den ionosphärischen Verstärkungsfaktor und den Rausch-Verstärkungsfaktor gesetzt werden, was den Rechenaufwand aber nicht verringert.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine ausgeklügeltere Methode angewandt, die die Herleitungen der letzten Kapitel ausnutzt. Beim indirekten Ansatz werden nicht die LC-Koeffizienten variiert, sondern die Lane-Nummer und die Ionosphären-Zahl. Letztere wird so gewählt, dass der ionosphärische Verstärkungsfaktor im Betrag kleiner als 2.5 ist. Der Zusammenhang zwischen Ionosphären-Zahl und ionosphärischen Verstärkungsfaktor ist in (6.15) gegeben. Wie gezeigt wurde, ist es möglich für jedes ganzzahlige Paar von L und \bar{q}_i eine eindeutige Lösung auf der Schnittgerade der Lane-Ebene mit der Ionosphären-Ebene zu finden, die optimal im Sinne des Rauschens ist.

6.2.5. Erste Ergebnisse

Die Ergebnisse, die im Folgenden für GPS präsentiert werden, stammen aus [Cocard et al., 2008]. Sowohl für GPS als auch für Galileo werden die resultierenden LCs zur graphischen Darstellung und Diskussion der Ergebnisse in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Auf der vertikalen Achse ist die ionosphärische Verstärkung \bar{q}_{LC} aufgetragen und auf der horizontalen Achse die Lane-Nummer L . Je nachdem wo eine LC in diesem Koordinatensystem zu liegen kommt, hat sie andere Eigenschaften. Liegt sie nahe an der horizontalen Achse ist der Einfluss der Ionosphäre auf diese LC gering. Je weiter sie von dieser Achse entfernt liegt, je "höher" oder "tiefer" sie liegt, desto größer ist betragsmäßig der Einfluss der Ionosphäre auf sie. Befindet sich eine LC nahe an der vertikalen Achse hat sie eine große Wellenlänge. Je weiter sie rechts oder links von dieser Achse entfernt liegt, desto kleiner ist die Wellenlänge der LC da die Lane-Nummer betragsmäßig zunimmt. Negative Lane-Nummern werden nicht betrachtet. LCs mit negativer Lane-Nummer treten nämlich mit vertauschten Vorzeichen in den LC-Koeffizienten auch mit einer positiven Lane-Nummer auf. Daher ist es ausreichend nur den Bereich rechts vom Ursprung mit positiven L -Werten zu betrachten. Abbildung 13 veranschaulicht die Eigenschaften der \bar{q}_{LC} - L -Ebene. Die Einteilung in Wide-Lane-Region und Narrow-Lane-Region basieren auf den Definitionen von WL und NL, die in Kapitel 5.3. und 5.4. zu finden sind.

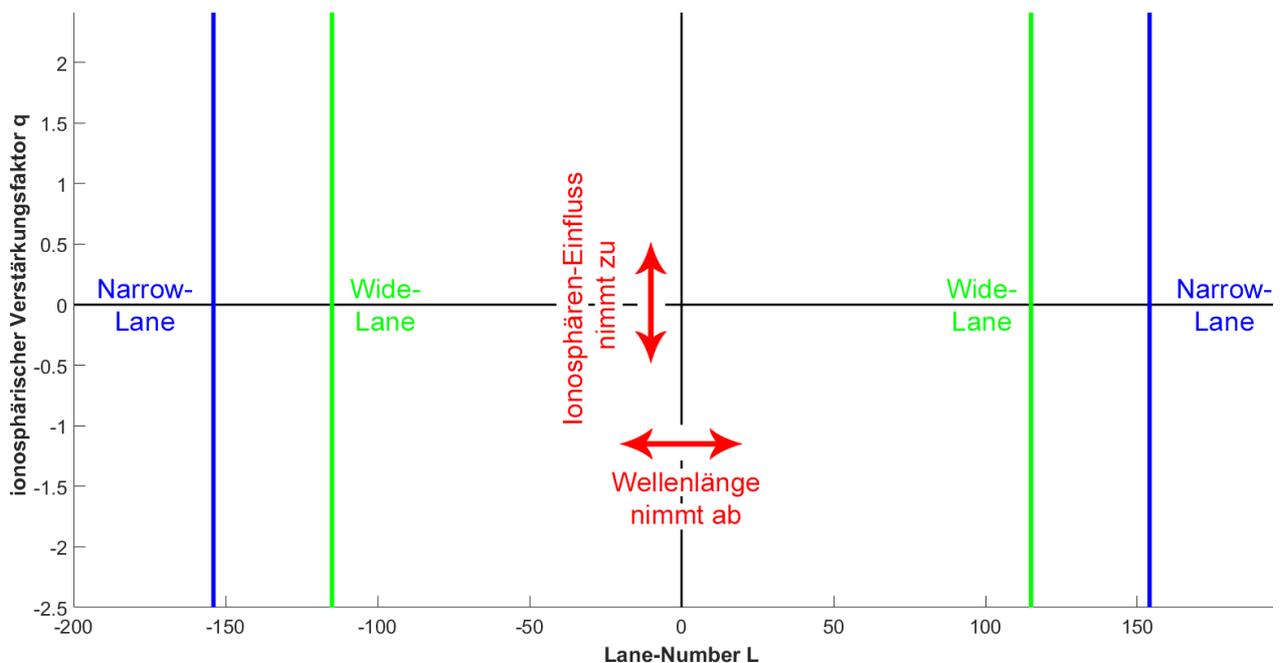


Abbildung 13: Verhältnisse in der \bar{q}_{LC} -L-Ebene

Abbildung 14 zeigt die entstehenden LCs in der \bar{q}_{LC} -L-Ebene für GPS und Abbildung 15 für Galileo. Jeder Punkt in diesen Abbildungen stellt eine LC mit ganzzahligen Koeffizienten dar. Deren Rausch-Verstärkungsfaktor ist auf verschiedene Arten visualisiert. Je größer ein Punkt ist, desto kleiner ist der Rausch-Verstärkungsfaktor der zugehörigen LC. Darüber hinaus ist in Abbildung 14 der Hintergrund umso heller je niedriger der Rausch-Verstärkungsfaktor in dieser Region ist und in Abbildung 15 ist ein Punkt in einem umso hellerem Gelb je niedriger der Rausch-Verstärkungsfaktor der zugehörigen LC ist.

LCs, die außerhalb der Abbildungen 14 und 15 liegen, sind nicht von Interesse. Aufgrund ihres Abstandes zum Ursprung der \bar{q}_{LC} -L-Ebene haben sie entweder eine geringe Wellenlänge, einen großen ionosphärischen Einfluss oder sogar beides. In Abbildung 14 sind drei Bereiche eingerahmt in denen LCs mit wünschenswerten Eigenschaften in Bezug auf Wellenlänge und ionosphärischem Einfluss auftreten. Vergrößerungen und nähere Betrachtungen dieser Bereiche sind für GPS in den Abbildungen 16, 17 und 18 im Kapitel 6.2.7. und für Galileo in den Abbildungen 20, 21 und 22 im Kapitel 6.2.8. zu finden.

LCs, bei denen der LC-Koeffizient a denselben Wert hat, liegen auf einer Gerade. In einigen der folgenden Abbildungen, etwa Abbildung 16 oder 20, sind diese veranschaulicht. Eine Gerade auf der LCs mit demselben Wert von a liegen, wird im Folgenden als LC-Linie bezeichnet. Diese LC-Linien und damit der Wert von a werden in den folgenden Kapiteln verwendet um die Menge an LCs systematisch aufzuarbeiten.

In den Abbildungen 14 und 15 erkennt man, dass sich LCs mit einem niedrigen Rausch-Verstärkungsfaktor entlang gewisser Achsen häufen. Für jede Koeffizientensumme s_n gibt es eine

solche Achse niedrigen Rauschens und diese werden im nächsten Kapitel bestimmt. Es sei auf den Unterschied zur Betrachtungsweise im (a, b, c)-Raum hingewiesen, wo das Rauschen mit dem Abstand zum Ursprung radial zunimmt.

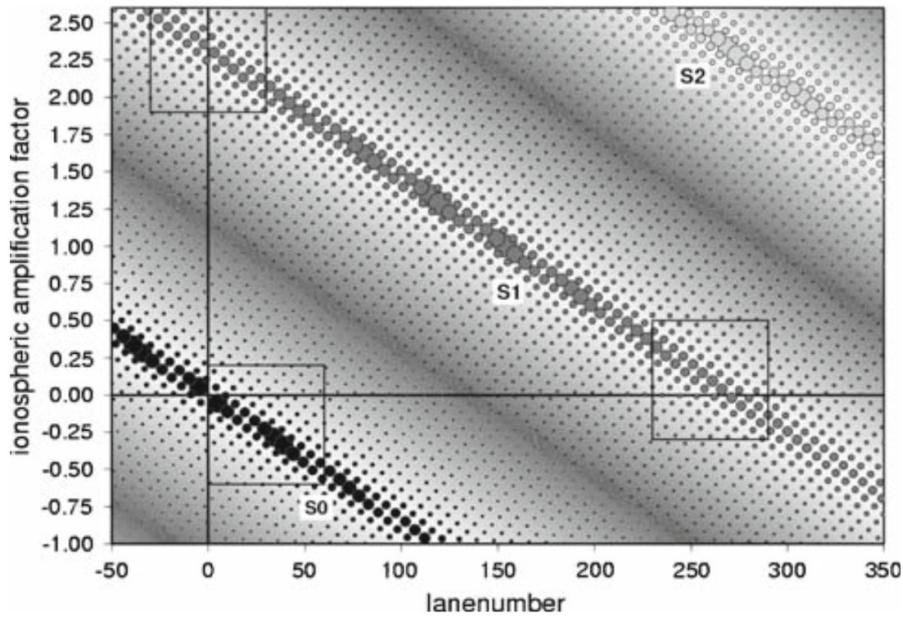


Abbildung 14: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene für GPS. Die Rechtecke zeigen die Ausschnitte der Vergrößerungen der Abbildungen 16, 17 und 18 [Cocard et al., 2008]

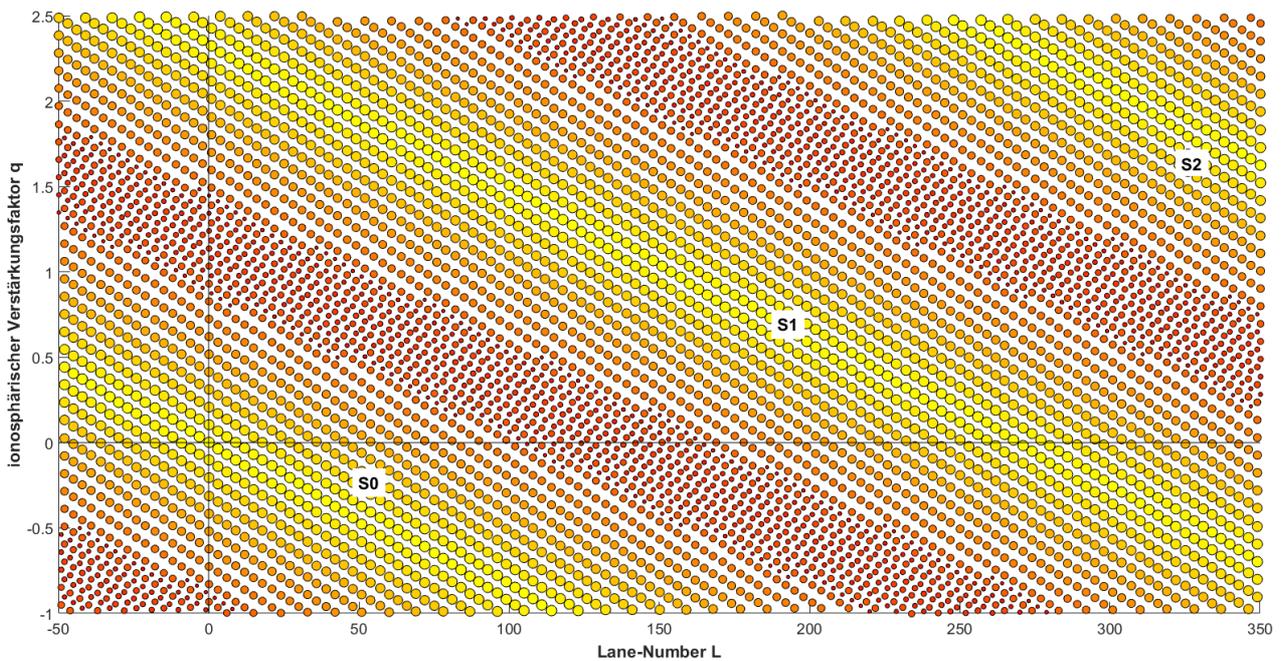


Abbildung 15: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene für Galileo. Zur Verdeutlichung sind nur LCs mit $\bar{n} < 230$ dargestellt.

6.2.6. Achsen niedrigens Rauschens

In diesem Kapitel werden die Achsen niedrigen Rauschens, die sich bereits in den Abbildungen 14 und 15 erkennen haben lassen, bestimmt. Im Zuge dessen werden alle Parameter als reelle Zahlen betrachtet. Es ist möglich die LC-Koeffizienten (a, b, c) als Funktion der drei Parameter Lane-Nummer L, ionosphärischer Verstärkungsfaktor \bar{q}_{LC} und Koeffizientensumme s darzustellen. Für die folgende Schreibweise werden deren Definitionen aus (4.24), (4.19) und (4.27) verwendet.

$$\begin{bmatrix} L \\ \bar{q}_{LC} \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 1 & \frac{k_1}{k_2} & \frac{k_1}{k_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Die 3x3-Matrix in (6.31) wird im Folgenden als A und der Vektor auf der linken Seite als \mathbf{x} bezeichnet wird. Multipliziert man (6.31) mit A^{-1} von links erhält man die LC-Koeffizienten als Funktion von L, \bar{q}_{LC} , s.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 1 & \frac{k_1}{k_2} & \frac{k_1}{k_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L \\ \bar{q}_{LC} \\ s \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Ausgehend von Gleichung (4.21) kann der Rausch-Verstärkungsfaktor \bar{n} wie folgt angeschrieben werden.

$$\bar{n}^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{a} = \mathbf{x}^T A^{-T} A^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \quad (6.33)$$

Die Matrix M ist quadratisch und daher ist es möglich Eigenwerte und Eigenvektoren zu bestimmen. Führt man die Eigenwertzerlegung der Matrix M durch, kann der Rausch-Verstärkungsfaktor \bar{n} wie folgt dargestellt werden:

$$\bar{n}^2 = \sum_{i=1}^3 w_i (\mathbf{e}_i^T \mathbf{x}) \quad (6.34)$$

w_i bezeichnet die Eigenwerte und \mathbf{e}_i die zugehörigen orthogonalen Eigenvektoren. Die Werte der Eigenwerte sind für GPS und Galileo in Tabelle 12 numerisch angeführt.

	\mathbf{w}_1	\mathbf{w}_2	\mathbf{w}_3
GPS	$7.46 \cdot 10^4$	$1.95 \cdot 10^{-5}$	2.98
Galileo	$1.88 \cdot 10^5$	$1.97 \cdot 10^{-5}$	2.81

Tabelle 12: Eigenwerte der Matrix M

Da sowohl bei GPS als auch bei Galileo ein riesiger Eigenwert dominiert und damit die Summe aus (6.34) praktisch nur von w_1 abhängt, ist folgende Approximation möglich.

$$\bar{n}^2 \approx w_1 \left(\mathbf{e}_1^T \mathbf{x} \right) \quad (6.35)$$

Indem man $\mathbf{e}_1^T \mathbf{x} = 0$ setzt erhält man die Achsen, auf der der Rausch-Verstärkungsfaktor minimal ist. Das führt numerisch zu:

$$\begin{aligned} \text{GPS:} & \quad 0.0034 L + 0.3960 \bar{q}_{LC} - 0.9182 s = 0 \\ \text{Galileo:} & \quad 0.0034 L + 0.3952 \bar{q}_{LC} - 0.9186 s = 0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Aufgrund dieser numerischen Ähnlichkeit ergeben sich für GPS und Galileo praktisch dieselben Achsen niedrigen Rauschens für verschiedene Werte von s .

$$\bar{q}_{LC} \approx -0.0085 L + 2.32 s \quad (6.37)$$

LCs mit einem geringen Rausch-Verstärkungsfaktor befinden sich damit bei GPS und Galileo in denselben Gebieten. Entlang einer Achse minimalen Rauschens liegen Linearkombinationen mit derselben Koeffizientensumme, da es für jedes s eine eigene Achse minimalen Rauschens gibt, wie (6.37) deutlich macht.

6.2.7. Optimale LCs für GPS

LCs, die in der \bar{q}_{LC} -L-Ebene in der Nähe des Ursprungs liegen, sind besonders interessant. Diese Region ist in Abbildung 16 zu sehen. Grund dafür ist, dass LCs aus dieser Wide-Lane-Region einen niedrigen ionosphärischen Verstärkungsfaktor und eine niedrige Lane-Nummer besitzen, was im Sinne einer großen Wellenlänge wünschenswert ist. Die LCs dieses Bereiches gehören alle zur s_0 -Gruppe, die Summe ihrer LC-Koeffizienten beträgt also Null.

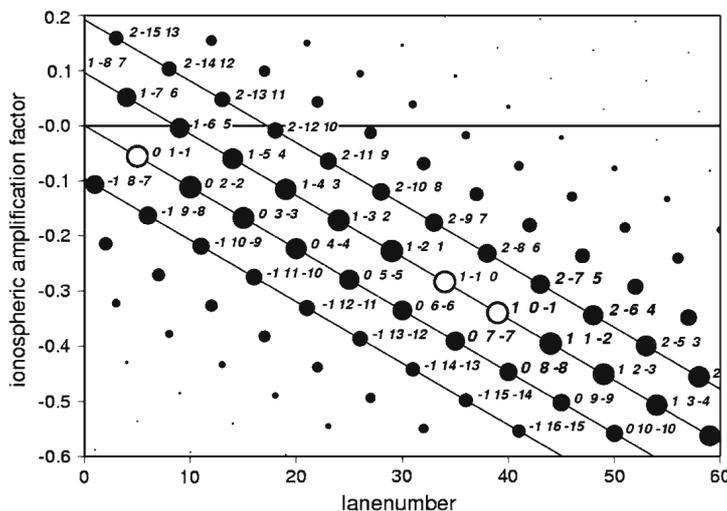


Abbildung 16: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene im Bereich um den Ursprung für GPS. Hier treten LCs mit großer Wellenlänge und niedrigem ionosphärischen Verstärkungsfaktor auf. Die 2-Frequenz-WL-LCs (0, 1, -1), (1, -1, 0) und (1, 0, -1) sind mit ungefüllten Kreisen dargestellt.

Wie bereits erwähnt wurde, werden die Werte vom LC-Koeffizienten a dazu verwendet die Ergebnisse systematisch zu durchsehen, denn LCs, die denselben Wert für a haben, liegen auf einer Gerade, die im Folgenden als LC-Linie bezeichnet wird. Für $a=0$ ist die LC (0, 1, -1) von Interesse. Es handelt sich um die EW-LC aus Kapitel 5.3. Sie weist einen geringen ionosphärischen

Verstärkungsfaktor und Rausch-Verstärkungsfaktor bei einer großen Wellenlänge auf und ist in Abbildung 16 mit einem ungefüllten Punktsymbol dargestellt. Die anderen LCs auf dieser Gerade sind Multiplikationen von ihr und weisen daher einen größeren Rausch-Verstärkungsfaktor auf.

Die nächste LC-Linie ($a=1$) enthält mehrere vielversprechende LCs. Den geringsten ionosphärischen Verstärkungsfaktor und eine große Wellenlänge hat die LC (1, -6, 5). Außerdem befinden sich auf dieser Linie die beiden anderen 2-Frequenz-Wide-Lane-LC, die ML-LC (1, 0, -1) und die WL-LC (1, -1, 0). Aufgrund ihrer Koeffizienten weisen diese einen geringen Rausch-Verstärkungsfaktor auf. Sie sind in Abbildung 16 mit einem ungefüllten Punktsymbol dargestellt. Da man sich bei den anderen LC-Linien, etwa $a=-1$ oder $a=2$, von der Achse niedrigen Rauschens für s_0 entfernt, erhöht sich der Rausch-Verstärkungsfaktor und von Interesse ist nur mehr die LC (-1, 8, -7) oder (1, -8, 7). Sie hat aufgrund ihrer Lane-Nummer $L=1$ die größtmögliche Wellenlänge von 29.31m. In Tabelle 13 sind diese LCs und ihre Eigenschaften zusammengefasst.

L	a	b	c	λ [m]	\bar{n}	\bar{q}_{LC}
1	1	-8	7	29.305	10.7	0.107
5	0	1	-1	5.861	1.4	-0.056
9	1	-6	5	3.256	7.9	-0.004
34	1	-1	0	0.862	1.4	-0.283
39	1	0	-1	0.751	1.4	-0.339

Tabelle 13: Die Eigenschaften der interessantesten LCs nahe des Ursprungs der \bar{q}_{LC} -L-Ebene für GPS nach [Cocard et al., 2008]

Alle bisher betrachteten LCs haben der s_0 -Gruppe angehört. Im Folgenden werden LCs untersucht, die der s_1 -Gruppe angehören. Zuerst werden LCs mit einem geringen Ionosphären-Verstärkungsfaktor betrachtet, dann LCs mit einer großen Wellenlänge und zuletzt LCs, die einen Kompromiss zwischen diesen beiden Fällen darstellen. Als Erstes wird die Region untersucht, wo die Achse niedrigen Rauschens für s_1 -LCs die vertikale Koordinatenachse ($\bar{q}_{LC} = 0$) schneidet. Diese Narrow-Lane-Region ist in Abbildung 17 dargestellt. LCs aus diesem Bereich haben ungefähr eine Wellenlänge von zehn bis zwölf Zentimetern. Minimiert man den ionosphärischen Verstärkungsfaktor führt das zu Narrow-Lane-LCs mit geringen Wellenlängen. Für $a=0$ findet man die IF-LC (0, 24, -23). Sie ist in Abbildung 17 eingekreist. Die LCs mit dem geringsten Rausch-Verstärkungsfaktoren befinden sich auf der LC-Linie mit $a=4$. Unter diesen LCs hat die LC (4, 0, -3) den niedrigsten ionosphärischen Verstärkungsfaktor. Tabelle 14 enthält die Eigenschaften der interessantesten LCs jeder LC-Linie aus diesem Bereich.

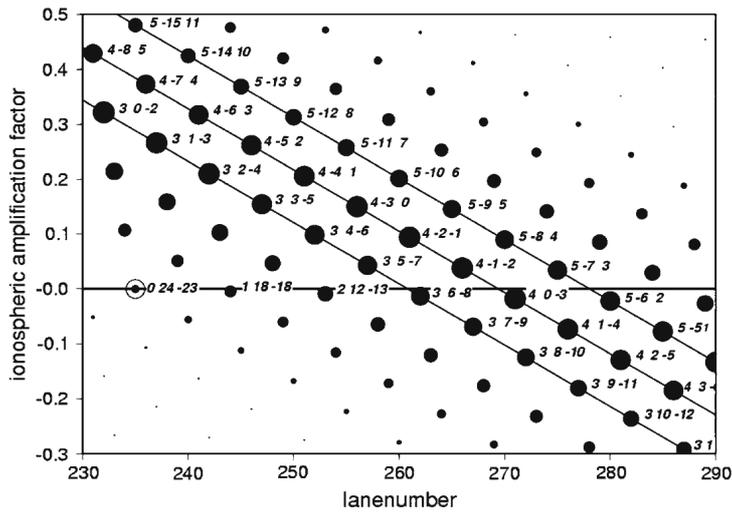


Abbildung 17: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene in der Region des Schnitts der Achse niedrigen Rauschens für s_1 -LCs und der horizontalen Koordinatenachse für GPS. Hier treten LCs mit niedrigen ionosphärischen Verstärkungsfaktor auf. Die IF-LC mit der größten Wellenlänge (0, 24, -23) ist eingekreist. [Coccard et al., 2008]

L	a	b	c	λ [m]	\bar{n}	\bar{q}_{LC}
235	0	24	-23	0.125	33.2	0
244	1	18	-18	0.120	25.5	-0.004
253	2	12	-13	0.116	17.8	-0.009
262	3	6	-8	0.112	10.4	-0.013
271	4	0	-3	0.108	5.0	-0.017
280	5	-6	2	0.105	8.1	-0.022

Tabelle 14: Die Eigenschaften der interessantesten s_1 -LCs im Bereich um den Schnitt ihrer Achse minimalen Rauschens und der ionosphärenfreien Koordinatenachse für GPS [nach Coccard et al., 2008]

Untersucht man den den Bereich indem die Achse niedrigen Rauschens für s_1 -LCs die vertikale Koordinatenachse ($L=0$) schneidet, findet man LCs mit einer großen Wellenlänge. Diese Region ist in Abbildung 18 dargestellt. In diesem Bereich ist der ionosphärische Verstärkungsfaktor ungefähr 2.3. Minimiert man die Lane-Nummer führt das zu LCs, die zwar eine große Wellenlänge haben, aber auch einen großen ionosphärischen Verstärkungsfaktor. Da wir hier den ionosphärischen Verstärkungsfaktor \bar{q}_{LC} in Zyklen betrachten, entstehen für den ionosphärischen Verstärkungsfaktor in Metern aufgrund der großen Wellenlängen in diesem Bereich und der Gleichung (4.18) zur Umrechnung des ionosphärischen Verstärkungsfaktors von Zyklen in Metern riesige Werte. Aufgrund ihrer Nähe zur Achse minimalen Rauschens von s_1 ist die LC-Linie $a=3$ am interessantesten. Von diesen LCs hat (-3, 0, 4) die größte Wellenlänge, aufgrund ihrer Lane-Nummer $L=2$. Interessant ist auch die LC (-4, 8, -3). Sie hat zwar einen fast doppelt so großen Rausch-Verstärkungsfaktor, aber aufgrund der Lane-Nummer von eins auch eine doppelt so große

Wellenlänge. Die Eigenschaften dieser beiden LCs sind in Tabelle 15 für ihre mit -1 multiplizierten "Zwillings"-LCs zu finden.

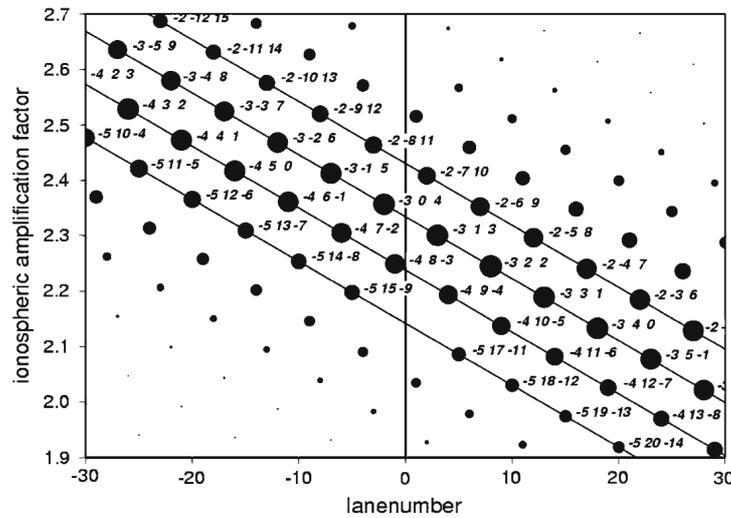


Abbildung 18: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene in der Region um den Schnitt der Achse niedrigen Rauschens für s_1 -LC und der vertikalen Koordinatenachse für GPS. Hier treten LCs mit großer Wellenlänge auf [Cocard et al., 2008]

L	a	b	c	λ [m]	\bar{n}	\bar{q}_{LC}
1	4	-8	3	29.305	9.4	-2.249
2	3	0	-4	14.653	5.0	2.357

Tabelle 15: Die Eigenschaften der interessantesten s_1 -LCs im Bereich um den Schnitt ihrer Achse minimalen Rauschens und der Wide-Lane-Koordinatenachse für GPS

Sucht man nach LCs, die nicht den Wert des ionosphärischen Verstärkungsfaktors oder die Lane-Nummer minimieren und deren Eigenschaften ein Kompromiss dieser beiden Fälle sind, kommen alle LCs der s_1 -Gruppe in Frage, die in der Nähe der Achse minimalen Rauschens liegen. Dieser Bereich ist in Abbildung 19 dargestellt. Wie man sieht gibt es eine Vielzahl an s_1 -LCs, die in diesem Bereich liegen. Je nachdem ob ein niedriger ionosphärischer Verstärkungsfaktor oder eine große Wellenlänge wichtiger ist, sind LCs aus einem anderen Bereich der Achse minimalen Rauschens interessant. Diese hat eine andere Steigung als die LC-Linien und daher kommen LCs mit einem a-Wert von -4 bis +4 in Frage. In Abbildung 19 sind diese unterschiedlichen Steigungen zu erkennen. Die Achse minimalen Rauschens ist in grün und die LC-Linie auf der a=0 ist, ist in blau dargestellt. Eine Tabelle mit den Eigenschaften dieser großen Menge an LCs ist in [Cocard et al., 2008] zu finden.

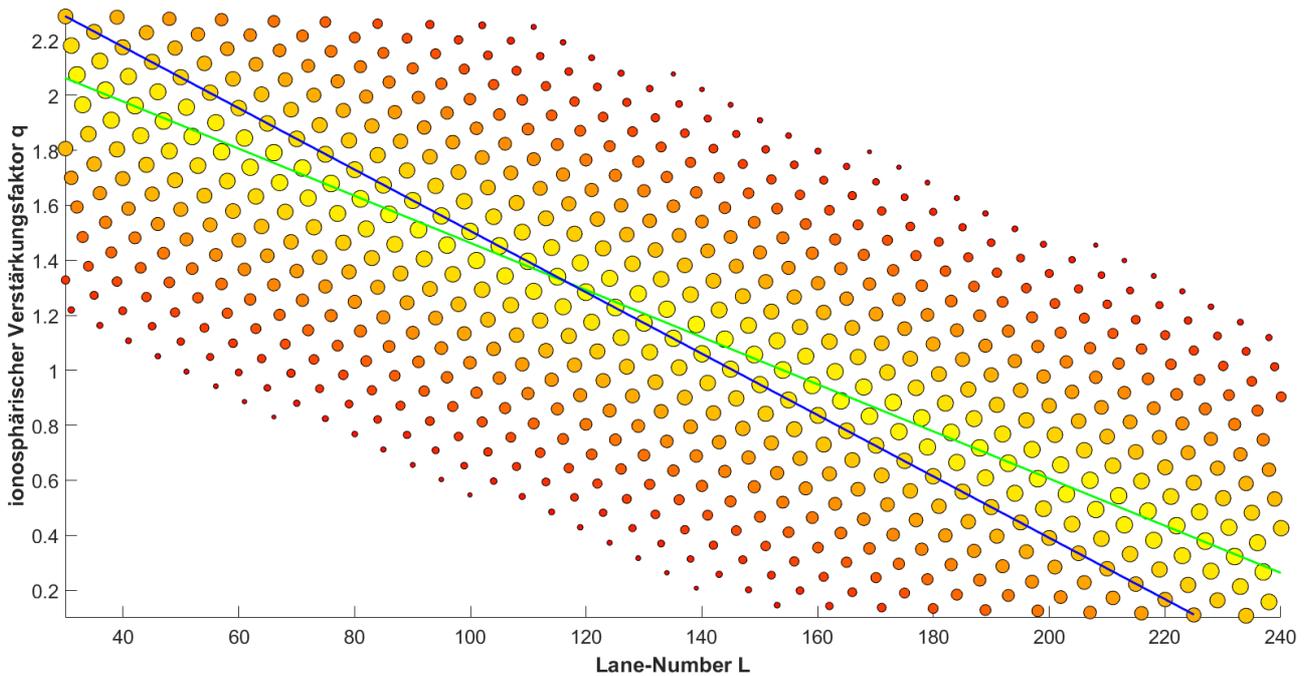


Abbildung 19: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene für Galileo. Dargestellt sind LCs der s_1 -Gruppe mit $\bar{n} < 100$, die Achse minimalen Rauschen für s_1 -LCs (grün) und die LC-Linie mit $a=0$ (blau).

6.2.8. Optimale LCs für Galileo

Die Suche nach optimalen LCs für Galileo wird auf dieselbe Weise wie bei GPS durchgeführt. LCs, die sich in der \bar{q}_{LC} -L-Ebene in der Nähe des Ursprungs befinden, zeichnen sich durch einen niedrigen ionosphärischen Verstärkungsfaktor und eine niedrige Lane-Nummer aus. Dieser Bereich ist für Galileo in Abbildung 20 zu sehen. Um das Bild zu verdeutlichen sind nur LCs mit $\bar{n} < 100$ dargestellt. Die LCs dieses Bereiches gehören alle zur s_0 -Gruppe und die Summe ihrer Koeffizienten beträgt Null.

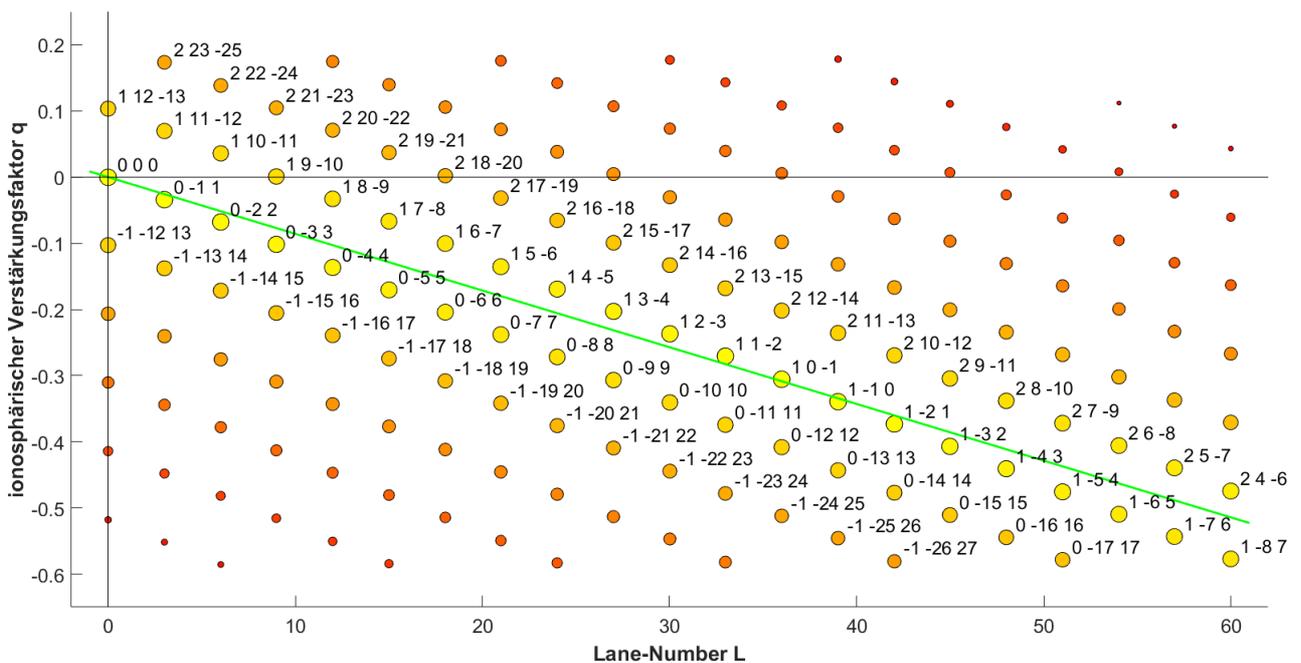


Abbildung 20: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene im Bereich nahe des Ursprungs für Galileo. Hier treten LCs mit großer Wellenlänge und niedrigem ionosphärischen Verstärkungsfaktor auf. Die Achse niedrigen Rauschens für s_0 -LCs ist in grün dargestellt. Nur LCs mit $\bar{n} < 50$ sind beschriftet.

Die Ergebnisse werden wieder systematisch nach LC-Linien und damit dem Wert von a untersucht. Für $a=0$ ist die LC (0, -1, 1) ist von Interesse. Es handelt sich um die EW-LC aus Kapitel 5.3. Da alle anderen LCs auf dieser LC-Linie Multiplikationen von ihr sind und damit einen größeren Rausch-Verstärkungsfaktor aufweisen, ist dies die vielversprechendste LC auf dieser LC-Linie.

Die nächste LC-Linie, auf der $a=1$ ist, enthält mehrere vielversprechende LCs. Den geringsten ionosphärischen Verstärkungsfaktor bei einer großen Wellenlänge hat die LC (1, 9, -10). Auf dieser Linie befinden sich auch die beiden anderen 2-Frequenz-Wide-Lane-LCs, die WL-LC (1, 0, -1) und die ML-LC (1, -1, 0). Sie weisen einen geringen Rausch-Verstärkungsfaktor auf. Da man sich bei den anderen LC-Linien, etwa $a=-1$ oder $a=2$, von der Achse niedrigen Rauschens für s_0 entfernt hat, erhöht sich der Rausch-Verstärkungsfaktor und es verbessert sich keine andere Eigenschaft. Daher kommen diese LCs nicht in Frage. In Tabelle 16 sind die diskutierten LCs und ihre Eigenschaften zusammengefasst.

L	a	b	c	λ [m]	\bar{n}	\bar{q}_{LC}
3	0	-1	1	9.768	1.4	0.034
9	1	9	-10	3.256	13.5	0.001
36	1	0	-1	0.814	1.4	-0.305
39	1	-1	0	0.751	1.4	-0.339

Tabelle 16: Eigenschaften der interessantesten Galileo-LCs nahe des Ursprungs der \bar{q}_{LC} -L-Ebene

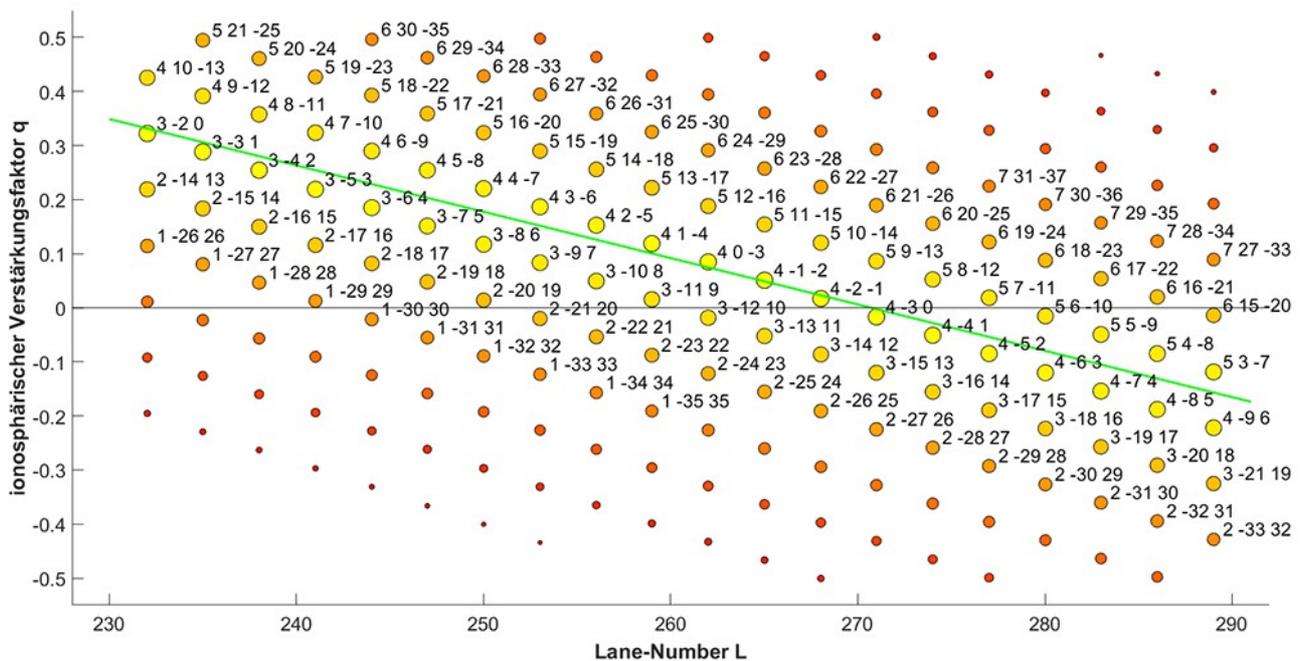


Abbildung 21: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene in der Region um den Schnitt der Achse niedrigen Rauschens für s_1 -LCs (grüne Linie) und der horizontalen Koordinatenachse für Galileo. Hier treten LCs mit geringem ionosphärischen Verstärkungsfaktor auf. Nur LCs mit $\bar{n} < 50$ sind beschriftet.

Nachdem die LCs der s_0 -Gruppe behandelt wurden, wird im Folgenden die s_1 -Gruppe untersucht. Zuerst werden LCs, die den ionosphärischen Verstärkungsfaktor minimieren, betrachtet, dann LCs, die die Lane-Nummer minimieren, und zuletzt LCs, die mit ihren Eigenschaften zwischen diesen beiden Fällen liegen.

Es wird die Region untersucht, wo die Achse niedrigen Rauschens für s_1 -LCs die horizontale Koordinatenachse ($\bar{q}_{LC} = 0$) schneidet. Diese Narrow-Lane-Region ist in Abbildung 21 dargestellt. LCs, die in diesem Bereich liegen, haben ungefähr eine Wellenlänge von zehn bis zwölf Zentimetern. Wie bei GPS führt die Minimierung des ionosphärischen Verstärkungsfaktors zu Narrow-Lane-LCs mit geringen Wellenlängen. Wie man in Abbildung 21 erkennen kann sind aufgrund der Lage der Achse minimalen Rauschens nur LCs interessant, die auf der LC-Linie $a=4$ liegen. Die besten LCs dieser LC-Linie sind (4, -2, -1) und (4, -3, 0) und ihre Eigenschaften sind sehr ähnlich. (4, -2, -1) hat etwas bessere Eigenschaften, da bei dieser LC die Lane-Nummer, der ionosphärischen Verstärkungsfaktor und der Rausch-Verstärkungsfaktor etwas geringer sind. Der ionosphärische Verstärkungsfaktor von LCs auf den benachbarten LC-Linien $a=3$ und $a=5$ ist zwar ähnlich groß, aber der Rausch-Verstärkungsfaktor ist deutlich größer. Tabelle 17 enthält die Eigenschaften der LC mit dem geringsten ionosphärischen Verstärkungsfaktoren der LC-Linien $a=3$ und $a=5$ und die beiden erwähnten LCs mit $a=4$.

L	a	b	c	λ [m]	\bar{n}	\bar{q}_{LC}
259	3	-11	9	0.113	14.5	0.015
268	4	-2	-1	0.109	4.6	0.0167
271	4	-3	0	0.108	5	-0.0174
280	5	6	-10	0.105	12.7	-0.016

Tabelle 17: Eigenschaften der interessantesten s_1 -LCs im Bereich um den Schnitt ihrer Achse minimalen Rauschens und der ionosphärenfreien Koordinatenachse für Galileo

LCs mit einer großen Wellenlänge befinden sich im Bereich des Schnitts der Achse niedrigen Rauschens für s_1 -LCs und der vertikalen Koordinatenachse ($L=0$). In dieser Region ist der ionosphärische Verstärkungsfaktor ungefähr 2.3 und dieser Bereich ist in Abbildung 22 dargestellt. Minimiert man den L-Wert führt das wie bei GPS zu LCs, die eine große Wellenlänge und gleichzeitig aber auch einen großen ionosphärischen Verstärkungsfaktor haben und es muss wieder beachtet werden, dass wir hier den ionosphärischen Verstärkungsfaktor \bar{q}_{LC} in Zyklen betrachten. Für den ionosphärischen Verstärkungsfaktor in Metern entstehen damit wegen (4.18) riesige Werte. Aufgrund ihrer Nähe zur Achse minimalen Rauschens von s_1 ist hier nur die LC-Linie $a=-3$ am interessantesten. Hier hat (-3, 3, 1) mit einer Lane-Nummer $L=1$ die größtmögliche Wellenlänge

von 29.31m. Darüber hinaus ist auch (-3, 2, 2) interessant. Diese LC hat zwar eine geringere Wellenlänge, aber auch einen niedrigeren Rausch-Verstärkungsfaktor und einen minimal niedrigeren ionosphärischen Verstärkungsfaktor. Alle anderen LCs in dieser Region haben verglichen mit diesen beiden LCs bei ähnlicher Wellenlänge und ionosphärischen Verstärkungsfaktor einen deutlich höheren Rausch-Verstärkungsfaktor.

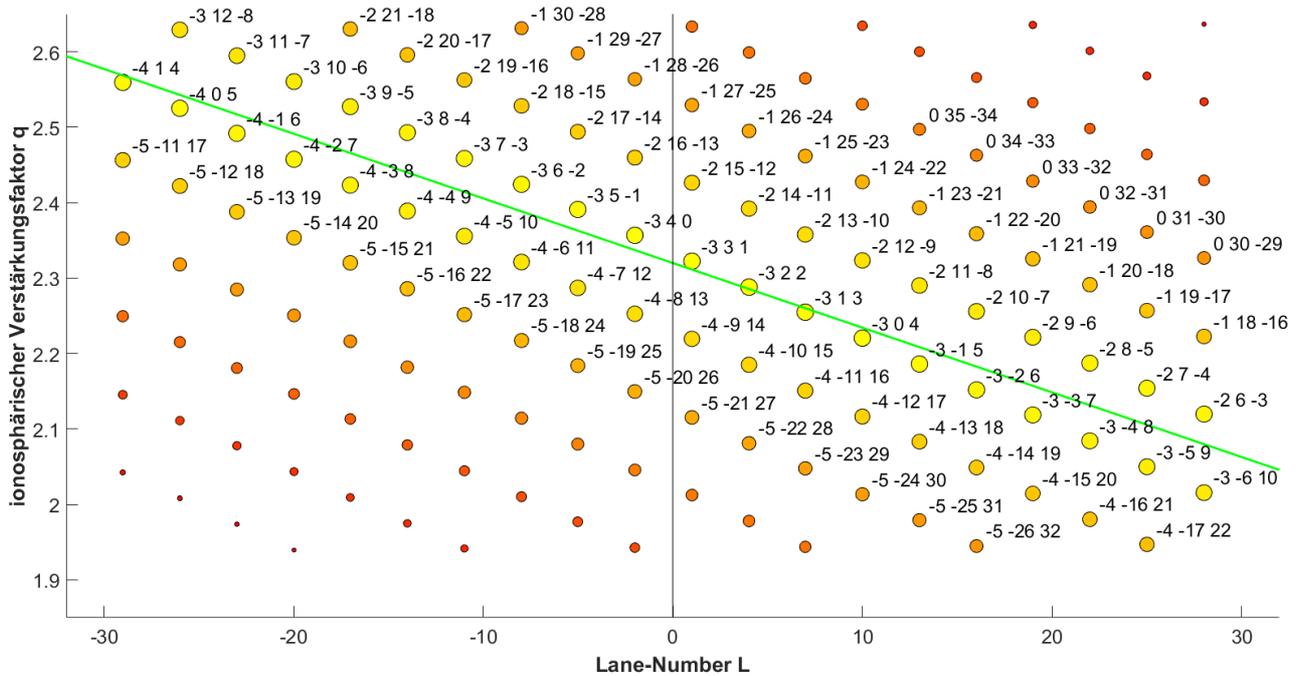


Abbildung 22: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene für Galileo in der Region um den Schnitt der Achse niedrigen Rausches für s_1 -LCs (grüne Linie) und der vertikalen Koordinatenachse. Hier treten LCs mit großer Wellenlänge auf. Nur LCs mit $\bar{n} < 50$ sind beschriftet.

L	a	b	c	λ [m]	\bar{n}	\bar{q}_{LC}
1	-3	3	1	29.305	4.4	2.323
4	-3	2	2	7.326	4.1	2.288

Tabelle 18: Die Eigenschaften der interessantesten s_1 -LCs im Bereich um den Schnitt ihrer Achse minimalen Rauschens und der Wide-Lane-Koordinatenachse für Galileo.

Sucht man nach LCs, die hauptsächlich den Wert des ionosphärischen Verstärkungsfaktors oder die Lane-Nummer minimieren und deren Eigenschaften zwischen diesen Fällen liegen, kommen alle LCs der s_1 -Gruppe in Frage, die in der Nähe der Achse minimalen Rauschens liegen. Wie bei GPS gibt es eine Vielzahl an s_1 -LCs entlang dieser Achse. Je nachdem, ob ein niedriger ionosphärischer Verstärkungsfaktor oder eine große Wellenlänge wichtiger ist, kommen LCs aus einem anderen Bereich entlang der Achse minimalen Rauschens in Frage. Da diese auch bei Galileo eine andere Steigung als die LC-Linien haben, kommen LCs mit einem a-Wert von -2 bis +3 in Frage. In Abbildung 23 ist die Achse minimalen Rauschens in grün dargestellt und die unterschiedliche

Steigung zu den LC-Linien ist zu erkennen. Die Bereiche in denen die Achse minimalen Rauschens eine LC-Linie schneidet sind mit Rechtecken markiert. Das Rechteck ganz links befindet sich um den Schnittpunkt mit $a=-2$, rechts daneben $a=-1$,... Das Rechteck ganz rechts befindet sich um den Schnittpunkt mit $a=3$. Die besten LCs aus diesen Bereichen sind in Tabelle 19 zusammengefasst, wobei von jeder LC-Linie die LC ausgewählt wurde, die am nächsten zum Schnittpunkt mit der Achse minimalen Rauschens liegt. Tabelle 19 ist nach LC-Linien geordnet und aufgrund der Tatsache, dass die LC-Linien mit aufsteigender Zahl von links nach rechts liegen, ist sie auch nach Lane-Nummer sortiert. Die angeführten LCs einer LC-Linie haben ähnliche Eigenschaften, was aufgrund ihres geringen Abstandes in der \bar{q}_{LC} -L-Ebene zueinander keine Überraschung ist. Mit fortschreitender Zeile der Tabelle 19 sinkt sowohl der ionosphärische Verstärkungsfaktor als auch die Wellenlänge da man sich vom einem (niedrige Lane-Nummer) der beiden zuvor betrachteten Gebieten dem anderen (niedriger ionosphärischer Verstärkungsfaktor) annähert.

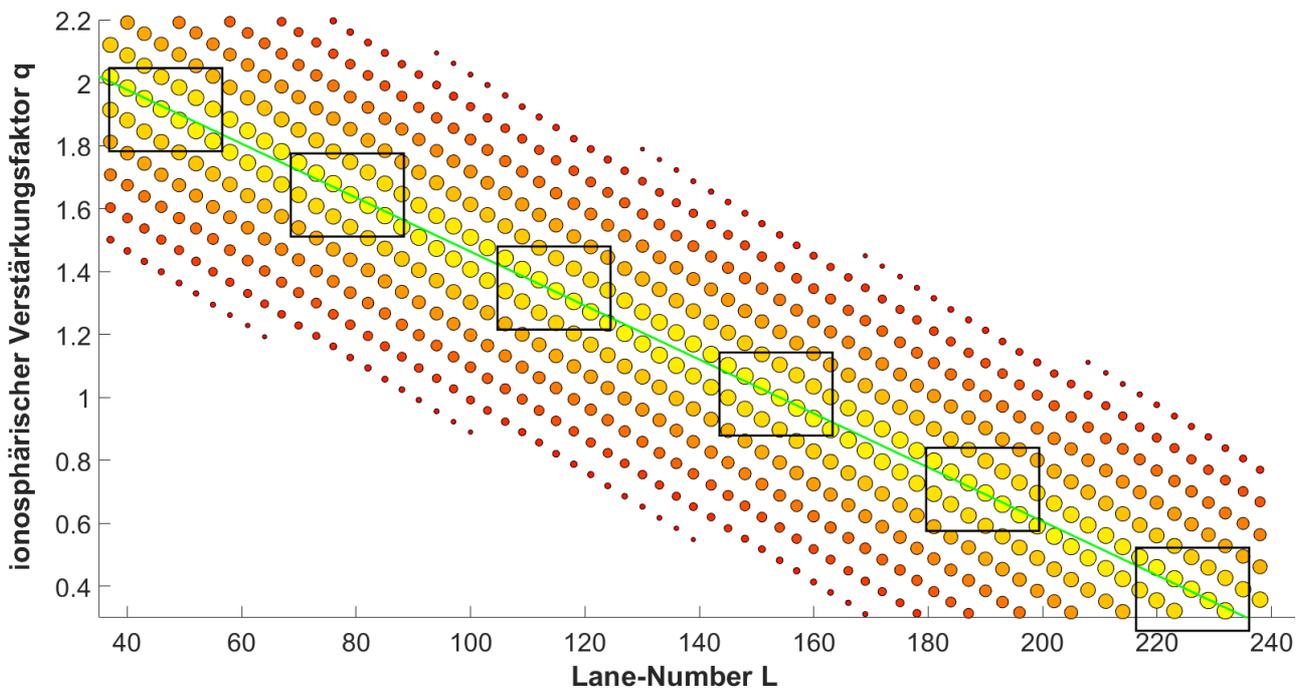


Abbildung 23: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene für Galileo. Dargestellt sind LCs der s_1 -Gruppe mit $\bar{n} < 100$ und die Achse minimalen Rauschens für s_1 -LCs (grün). Die Rechtecke zeigen Regionen an wo die Achse minimalen Rauschens die LC-Linie $a=-2$ (ganz links) bis $a=3$ (ganz rechts) schneidet. Die Eigenschaften der am Schnittpunkt nächsten LCs aus diesen Regionen sind in Tabelle 19 zusammengefasst.

L	a	b	c	λ [m]	\bar{n}	\bar{q}_{LC}
37	-2	3	0	0.792	3.6	2.017
40	-2	2	1	0.733	3	1.983
43	-2	1	2	0.682	3	1.949
46	-2	0	3	0.637	3.6	1.915
76	-1	2	0	0.386	2.2	1.678
79	-1	1	1	0.371	1.7	1.644
82	-1	0	2	0.357	2.2	1.610
112	0	2	-1	0.262	2.2	1.373
115	0	1	0	0.255	1	1.339
118	0	0	1	0.248	1	1.305
121	0	-1	2	0.242	2.2	1.271
151	1	1	-1	0.194	1.7	1.034
154	1	0	0	0.190	1	1
157	1	-1	1	1.867	1.7	0.966
187	2	1	-2	0.157	3	0.729
190	2	0	-1	0.154	2.2	0.695
190	2	-1	0	0.152	2.2	0.661
196	2	-2	1	0.150	3	0.627
223	3	1	-3	0.131	4.4	0.424
226	3	0	-2	0.130	3.6	0.390
229	3	-1	-1	0.128	3.3	0.356
232	3	-2	0	0.126	3.6	0.322

Tabelle 19: Die Eigenschaften der interessantesten s_1 -LCs entlang der Achse minimalen Rauschens

6.2.9. Wahl von Linearkombinationen

Grundsätzlich können im 3-Frequenz-Fall drei LCs gleichzeitig verwendet werden, da eine vierte LC in jedem Fall linear abhängig ist. Weiters muss beachtet werden, dass die drei gewählten LCs nicht voneinander linear abhängig sind. Darüber hinaus sollen bei der Wiederherstellung der originalen Ambiguities immer ganzzahlige Werte entstehen, was [Teunissen, 1994] erstmals im Zusammenhang mit 2-Frequenz-LCs betrachtet hat. [Cocard et al., 2008] betrachtet, welche dritte linear unabhängige LC man für GPS wählen darf, wenn man zwei LCs aus der s_0 -Gruppe wählt.

6.3. Überblick

Mit dem in dieser Arbeit benutzten inversen Ansatz ist es möglich über die zwei Parameter Lane-Nummer L und ionosphärischer Verstärkungsfaktor \bar{q}_{LC} LCs und deren LC-Koeffizienten aufzufinden. Auf diese Weise können LCs mit gewünschten Eigenschaften in Bezug auf Wellenlänge und ionosphärischer Verzögerung direkt bestimmt werden. Man erspart sich den umständlichen Weg alle möglichen LCs aufzustellen und diese dann anhand ihrer Eigenschaften auf Eignung zu prüfen (direkter Ansatz). Neben diesen beiden Parametern ist der resultierende Rausch-Verstärkungsfaktor \bar{n} ein wichtiger Parameter zur Beurteilung von 3-Frequenz-LCs.

In den letzten Kapiteln hat sich gezeigt, dass die Betrachtung von LCs in der \bar{q}_{LC} - L -Ebene anschaulich ist und es bestimmte Regionen gibt in denen LCs mit wünschenswerten Eigenschaften auftreten. GF-LCs liegen auf der vertikalen Koordinatenachse und IF-LCs auf der horizontalen Koordinatenachse. LCs mit einer großer Wellenlänge befinden sich nahe der vertikalen Achse und LCs mit einem niedrigen ionosphärischen Verstärkungsfaktor liegen nahe der horizontalen Achse. Eine Achse niedrigen Rauschens zeigt sich für jede Gruppe von LCs mit einer gewissen Koeffizientensumme und daher eignet sich diese zur Einteilung von LCs. Im Unterschied zu dieser Betrachtungsweise liegen bei Betrachtung im (a, b, c) -Raum (was dem direkten Ansatz entspricht) alle GF-LCs und alle IF-LCs in einer Ebene und auch LCs mit derselben Lane-Nummer bilden eine Ebene. Der Rausch-Verstärkungsfaktor nimmt radial vom Ursprung zu.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden nur optimale LCs mit ganzzahligen LC-Koeffizienten betrachtet, die Punkte in der \bar{q}_{LC} - L -Ebene darstellen. Zwischen diesen Punkten liegen unendlich viele weitere LC mit reellen LC-Koeffizienten deren Ambiguities jedoch dann im Allgemeinfall nicht mehr ganzzahlig sind. Ihre Eigenschaften können in der gleichen Art und Weise betrachtet werden.

7. Rausch-Verstärkung

In diesem Kapitel wird die Verstärkung des Signal-Rauschens, die mit der Bildung von LCs einhergeht, anhand von realen GPS- und Galileo-Beobachtungsdaten untersucht. Dies wird durch Bestimmung des Rauschens der originalen Beobachtungen und einiger LCs erreicht. Die Resultate werden in metrischen Einheiten betrachtet und anhand von Abbildungen verdeutlicht. Sie werden in der Folge mit theoretischen Rausch-Verstärkungsfaktor verglichen.

Die verwendeten Beobachtungsdaten für GPS stammen von der Station Aigerding der Energie AG Oberösterreich und haben ein Beobachtungsintervall von 15 Sekunden. Für Galileo wurden Beobachtungsdaten der Station Linz der Linz AG mit einem Beobachtungsintervall von 30 Sekunden verwendet. Beide Datensätze stammen vom 1. März 2017 (doy 60). Zur Bestimmung des Signal-Rauschens wird den Messwerten über die Zeitdauer von fünf Minuten jenes Polynom 4. Grades approximiert, welches sie im Sinne der kleinsten-Quadrate-Ausgleichung am besten annähert. Dieses Polynom wird von den Messwerten dann abgezogen. Da man annehmen kann, dass über diese kurze Zeitdauer systematische Fehlereinflüsse (Satellitenbewegung relativ zur Station, Atmosphäre,...) gleich stark auf die Beobachtungen wirken und ein ähnliches Verhalten zeigen, werden sie auf diese Weise eliminiert und die verbleibenden Residuen können als Signal-Rauschen interpretiert werden. Indem dieser Vorgang für aufeinanderfolgende Zeitabschnitte von fünf Minuten wiederholt wird, kann das Rauschen über einen längeren Zeitraum betrachtet und abgebildet werden.

7.1. *Rauschen der originalen Beobachtungen*

Durch Untersuchung der Beobachtungsdaten ist es möglich eine ungefähre Aussage über die Größenordnung des Signal-Rauschens für die Code- und Phasenmessung zu treffen. Der Großteil der Residuen und damit das Rauschen der Phasenmessung liegt für den betrachteten Tag betragsmäßig bei etwa 1cm. Die Abbildungen 24, 25 und 26 zeigen das Signal-Rauschen der Phasenbeobachtungen von GPS und Galileo auf verschiedenen Frequenzen für einen Zeitraum von 45 bzw. 30 Minuten. Nachdem sich die L5-Basisfrequenz noch im Aufbau befindet, wird sie noch nicht von allen Satelliten ausgesandt und daher gibt es auf dieser Frequenz weniger Beobachtungen. Dies ist der Grund warum Abbildung 25 weniger Beobachtungen beinhaltet als Abbildung 24, obwohl es sich um denselben Zeitraum handelt. Vergleicht man das Rauschen der Phasenmessung von Galileo in Abbildung 26 mit jenem von GPS in den Abbildungen 24 und 25 erkennt man, dass das Signal-Rauschen von Galileo etwas geringer ist. Dies zeigt sich auch anhand des Root-Mean-Square (RMS). Dieser wird berechnet indem man nach Abzug des Polynoms erhaltenen Residuen quadriert und aufsummiert, das Ergebnis durch die Anzahl der Residuen dividiert und daraus die Wurzel zieht. Der RMS beträgt für die GPS L1-Phasenbeobachtungen in Abbildung 24 1.3cm und

für die GPS L5-Phasenbeobachtungen in Abbildung 25 1.1cm. Der RMS der Galileo-Phasenbeobachtungen in Abbildung 26 beträgt 0.7cm. Das Rauschen der Codemessung befindet sich im dm-Bereich und liegt größtenteils unter 0.5m, wie Abbildung 27 verdeutlicht. Der RMS des abgebildeten Zeitabschnittes beträgt ungefähr 38cm. Auch bei der Galileo-Codemessung ist das Rauschen etwas geringer als bei der GPS-Codemessung. Sowohl für die Phasenmessung als auch für die Codemessung ist die Größenordnung des Rauschens im zu erwartenden Bereich und die Werte des RMS in den dargestellten Zeitabschnitten sind typisch für den gesamten Tag.

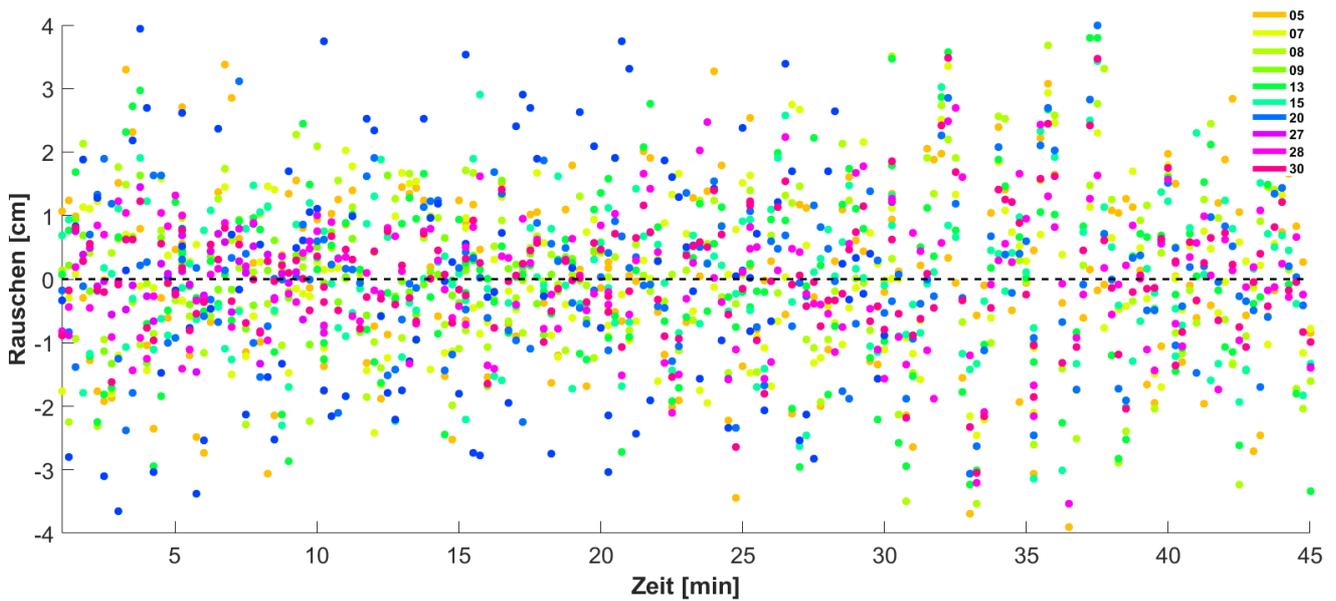


Abbildung 24: Rauschen der originalen GPS-Phasenbeobachtungen auf L1, RMS=1.3cm, Station Aigerding, Beginn des dargestellten Zeitabschnitts: 11h

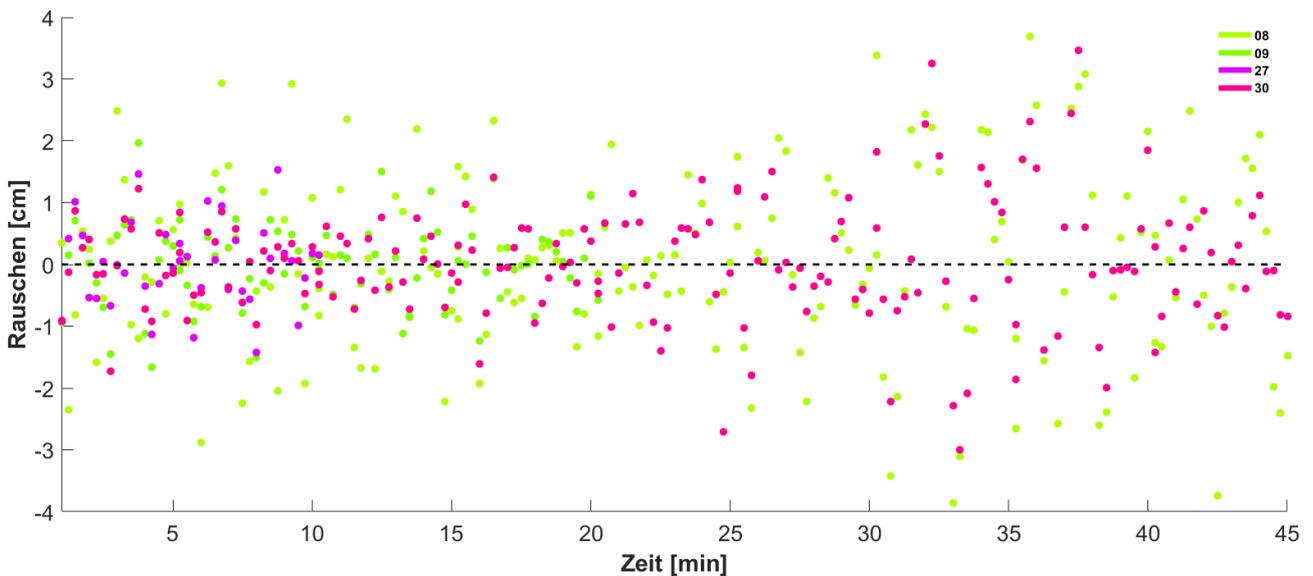


Abbildung 25: Rauschen der originalen GPS-Phasenbeobachtungen auf L5, RMS=1.1cm, Station Aigerding, Beginn des dargestellten Zeitabschnitts: 11h

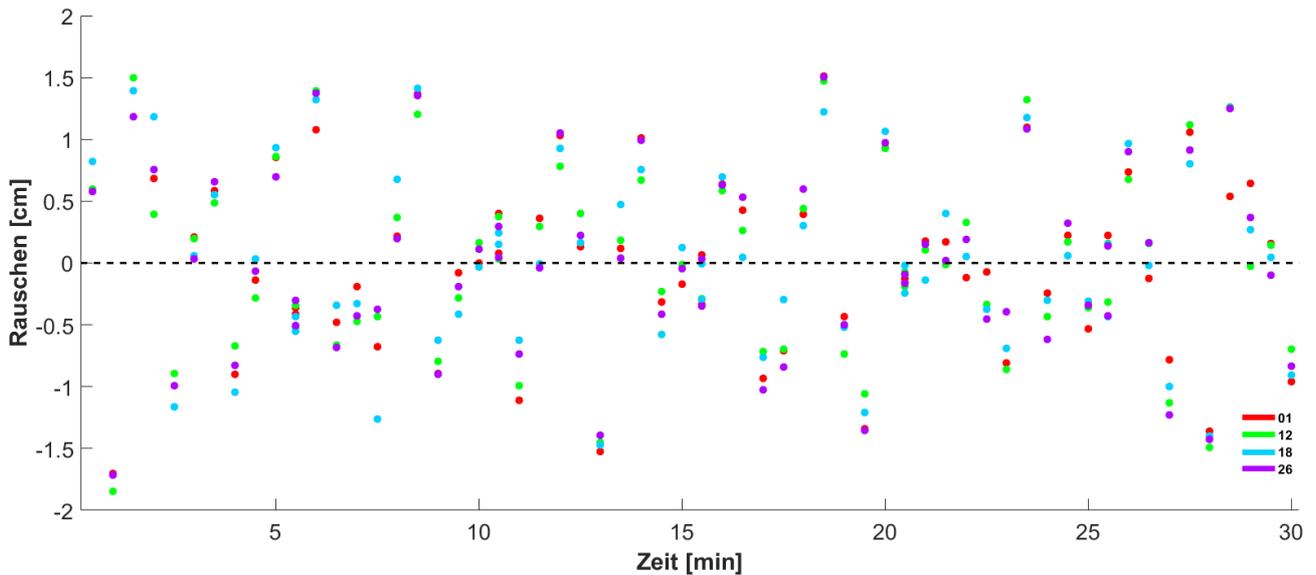


Abbildung 26: Rauschen der originalen Galileo-Phasenbeobachtungen auf E1, RMS=0.7cm, Station Linz, Beginn des dargestellten Zeitabschnitts: 19h

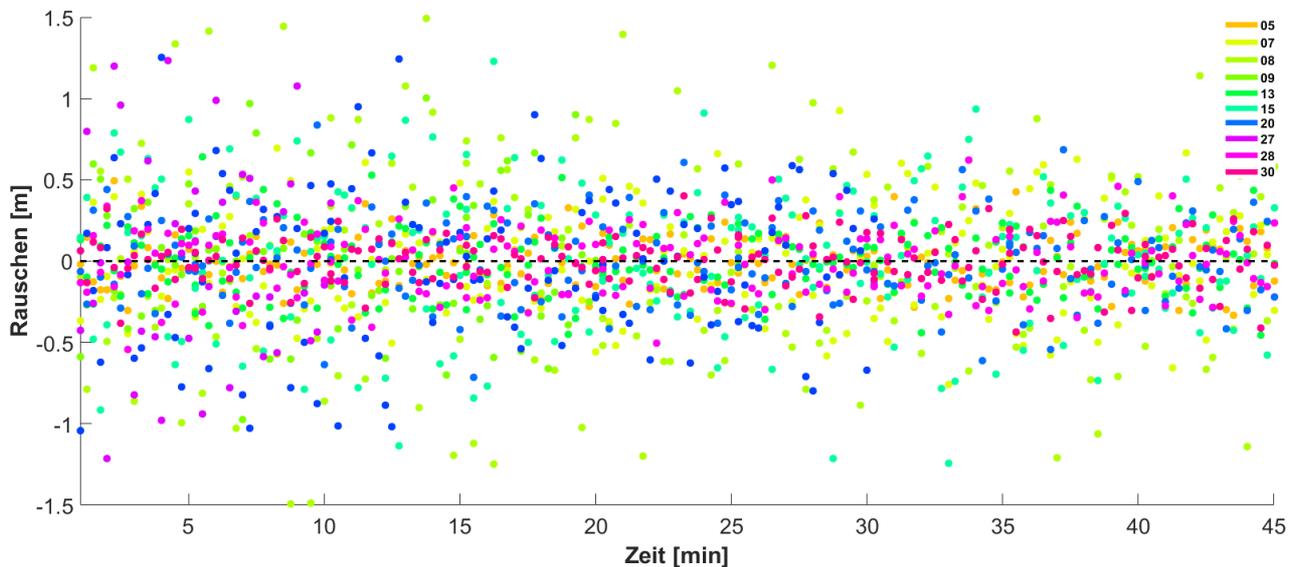


Abbildung 27: Rauschen der originalen GPS-Codebeobachtungen auf L1, RMS=38cm, Station Aigerding, Beginn des dargestellten Zeitabschnitts: 11h

7.2. Rauschen verschiedener LCs

Um den theoretischen Rausch-Verstärkungsfaktor zu verdeutlichen, wurden vier verschiedene in dieser Arbeit vorkommende LCs ausgewählt und ihr Rauschen untersucht. Da das Signal-Rauschen der originalen Beobachtungen in metrischen Einheiten betrachtet wurde, muss der Rausch-Verstärkungsfaktor in der Einheit Metern verwendet werden. Dieser hängt mit dem Rausch-Verstärkungsfaktor in der Einheit Zyklen über die Wellenlänge der LC zusammen (siehe Kapitel 4.2.4).

Bei den untersuchten LCs handelt es sich um optimale LCs nahe einer Achse niedrigen Rauschens aus den Regionen nahe des Ursprungs, nahe der vertikalen Achse ($L=0$, große Wellenlänge) und nahe der horizontalen Achse ($\bar{q}_{LC}=0$, niedriger ionosphärischer Verstärkungsfaktor) der \bar{q}_{LC} -L-Ebene. Diese Regionen der \bar{q}_{LC} -L-Ebene wurden in den Kapiteln 6.2.7 und 6.2.8 untersucht und unter anderem diese LCs bestimmt. Bei der LC (77, 575, -649) handelt es sich um eine jener IF-3-Frequenz-LCs für GPS, die in Kapitel 5.1 betrachtet wurden. Sie wurde ausgewählt um zu verdeutlichen wie groß die Rausch-Verstärkung der IF-3-Frequenz-LCs ist. Tabelle 20 fasst die Eckdaten dieser LCs zusammen. Bei \bar{n} handelt es sich um den Rausch-Verstärkungsfaktor in der Einheit Zyklen und bei n um den Rausch-Verstärkungsfaktor in der Einheit Meter. Weiters sind in der Tabelle die Wellenlänge λ , die Koeffizientensumme s , der ionosphärische Verstärkungsfaktor \bar{q}_{LC} und die Lane-Nummer L dieser LCs zusammengefasst. Tabelle 20 gibt außerdem an, aus welchen Bereichen die LCs stammen und ob sie für GPS oder Galileo gebildet werden.

LC	GNSS	λ [m]	\bar{n}	n	s	\bar{q}_{LC}	L	Herkunft
(1, -6, 5)	GPS	3.256	8	26	1	-0.004	9	Optimale LC nahe Ursprung
(-3, 2, 2)	Galileo	7.326	4	15	1	2.288	4	Optimale LC nahe $L=0$
(4, 0, -3)	GPS	0.108	5	0.5	1	-0.017	271	Optimale LC nahe $\bar{q}_{LC}=0$
(-77, 540, -460)	GPS	0.698	714	498	3	0	42	IF-3-Frequenz-LC

Tabelle 20: Eigenschaften ausgewählter LCs

Um das Rauschen der LCs zu bestimmen, wird wie zu Anfang dieses Kapitels beschrieben vorgegangen. Da, wie sich gezeigt hat, das Rauschen der originalen Phasenbeobachtungen ungefähr 1cm beträgt, sollte sich das Rauschen der jeweiligen LC ungefähr in der Größenordnung von 1cm multipliziert mit dem jeweiligen metrischen Rausch-Verstärkungsfaktor (Tabelle 20) befinden.

Demzufolge müsste sich das Rauschen der LC (1, -6, 5), deren metrischer Rausch-Verstärkungsfaktor laut Tabelle 20 grob 26 beträgt, in einem Bereich von ± 26 cm befinden. Das Rauschen dieser LC ist in Abbildung 28 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sich das Rauschen in der zu erwartenden Größenordnung befindet. Dies bestätigt auch der für den dargestellten Zeitabschnitt berechnete RMS von ungefähr 15cm.

Für die optimale Galileo-LC (-3, 2, 2), deren metrischer Rausch-Verstärkungsfaktor ungefähr 15 beträgt, sollte sich nach dieser Herleitung das Rauschen in einem Bereich von ± 15 cm befinden. Wie in Abbildung 29 zu erkennen ist, ist das Rauschen der LC geringer, was auch der Wert des RMS von knapp 4cm belegt. Dies lässt sich durch die Tatsache erklären, dass, wie sich bereits gezeigt hat, das für Galileo bestimmte Signal-Rauschen geringer ist.

In Abbildung 30 ist das Rauschen der optimalen GPS-LC (4, 0, -3) dargestellt. In der Abbildung ist zu erkennen, dass das Rauschen dieser LC im dargestellten Zeitabschnitt etwas über dem aus dem Rausch-Verstärkungsfaktor folgenden Wert von $\pm 0.5\text{cm}$ liegt. Dies bestätigt auch der RMS, der etwa 1cm beträgt.

Für die IF-3-Frequenz-LC für GPS (-77, 540, -460), deren metrischer Rausch-Verstärkungsfaktor ungefähr 500 beträgt, liegt das Rauschen wie erwartet in einem Bereich von $\pm 5\text{m}$, wie Abbildung 31 und der zugehörige RMS von knapp 3m zeigt. Dies verdeutlicht wie groß die Rausch-Verstärkung der IF-3-Frequenz-LC ist. Generell gilt, dass die Werte des RMS in den dargestellten Zeitabschnitten typisch für den gesamten Tag sind.

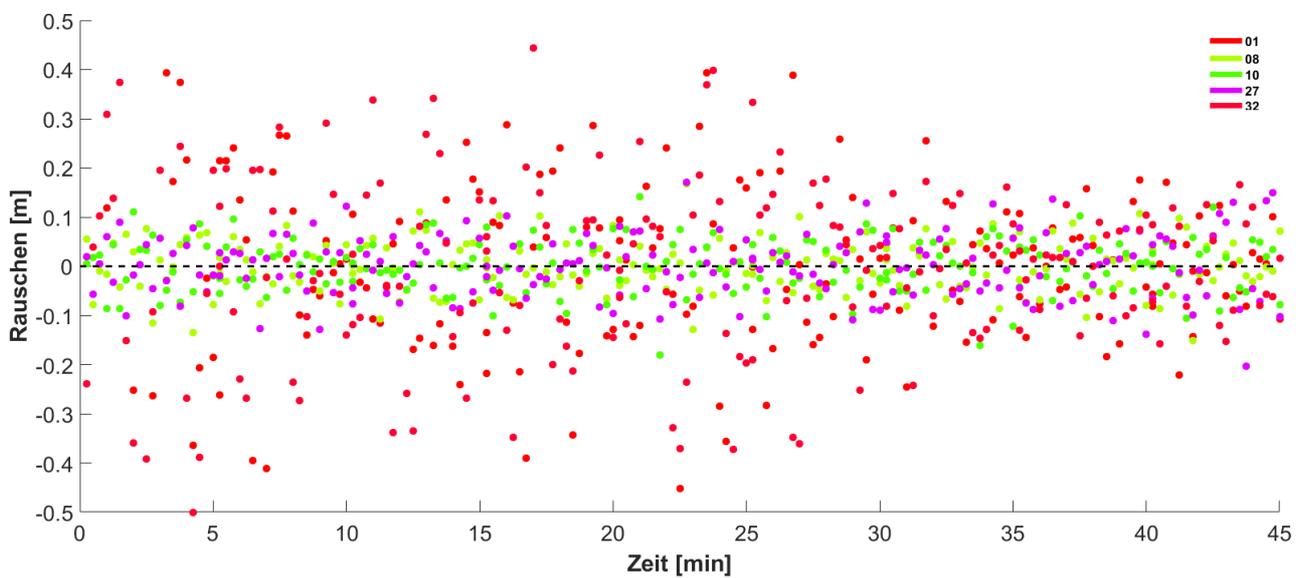


Abbildung 28: Rauschen der GPS-LC (1, -6, 5), Station Aigerding, RMS=15cm, Beginn des dargestellten Zeitabschnitts: 1h

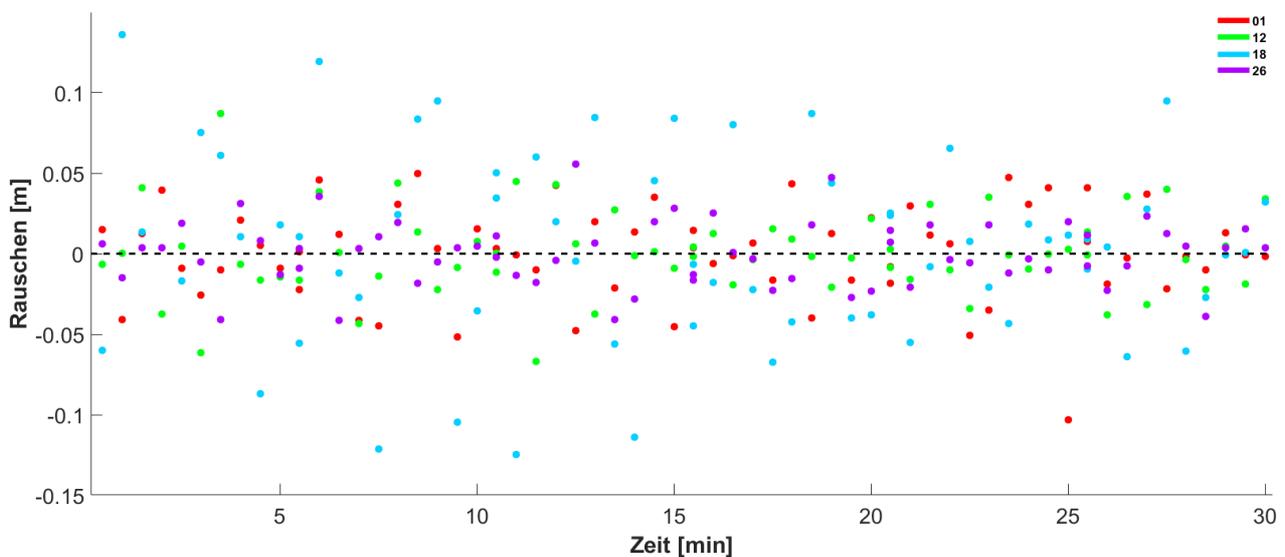


Abbildung 29: Rauschen der Galileo-LC (-3, 2, 2), Station Linz, RMS=3.7cm, Beginn des dargestellten Zeitabschnitts: 19h

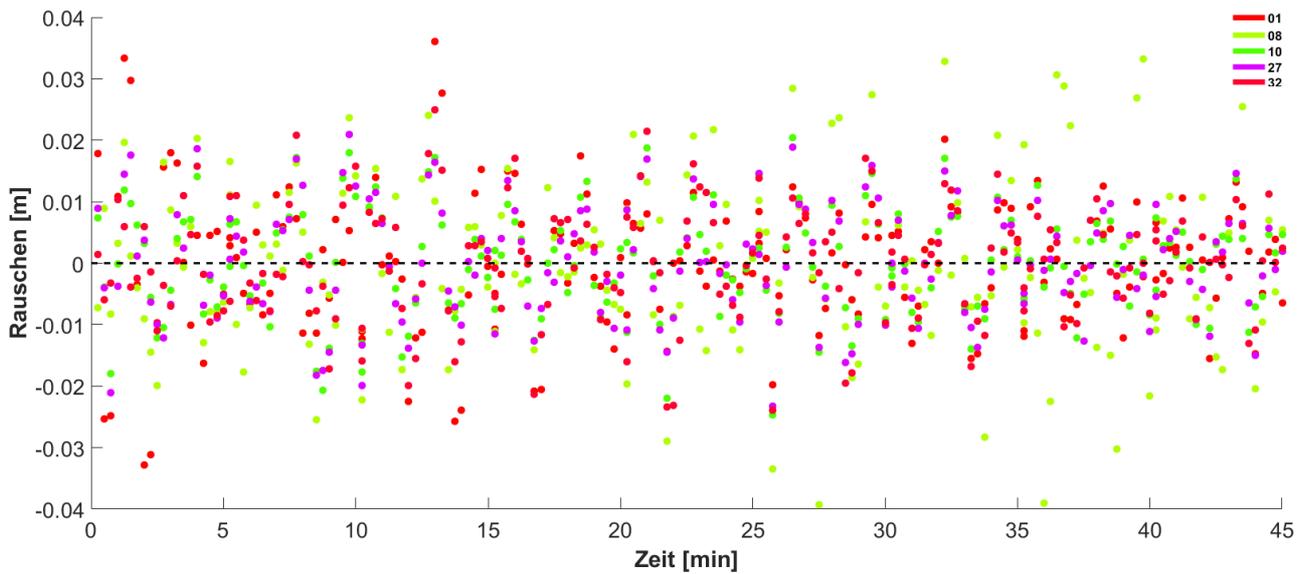


Abbildung 30: Rauschen der GPS-LC (4, 0, -3), Station Aigerding, RMS=1.0cm
 Beginn des dargestellten Zeitabschnitts: 1h

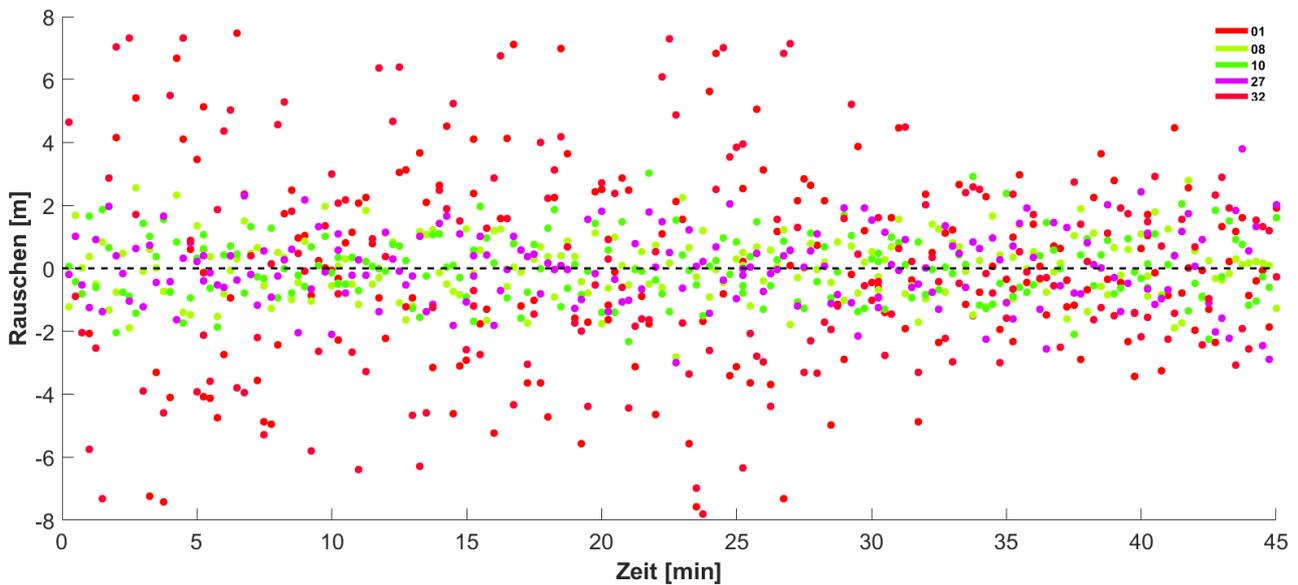


Abbildung 31: Rauschen der GPS-LC (-77, 540, -460), Station Aigerding, RMS=2.8m
 Beginn des dargestellten Zeitabschnitts: 1h

7.3. Fazit

Die in diesem Kapitel durchgeführte Untersuchung verdeutlicht in welcher Weise die Bildung von LCs das Rauschen erhöht und veranschaulicht das Maß des Rausch-Verstärkungsfaktors. Es zeigt sich, dass das Rauschen der betrachteten LCs im vom Rausch-Verstärkungsfaktor zu erwartenden Bereich liegt. Je geringer das Rauschen einer LC in einer Relation zu deren Wellenlänge ist, desto sicherer und schneller lassen sich die zugehörigen Mehrdeutigkeiten bestimmen. Die Verstärkung des Rauschens ist ein Nachteil von LCs und es wäre wünschenswert diese zu verringern. Verwendet man Beobachtungsdaten mit einem geringeren Signal-Rauschen, verringert sich zwar der absolute Wert des Rauschens von LCs, aber am Faktor der Rausch-Verstärkung ändert dies nichts. Es sollten

tiefer gehende Untersuchungen des Rausch-Verhaltens von LCs durchgeführt werden. Wäre es etwa möglich eine eventuelle Korrelation des Signal-Rauschens auf verschiedenen Frequenzen mathematisch zu beschreiben, könnte man LCs bilden, die das Rauschen verringern oder gar eliminieren. Diese müsste dann auch bei der Definition des Rausch-Verstärkungsfaktors berücksichtigt werden.

8. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das umfangreiche Themenfeld LCs möglichst breit abgedeckt. Die Eigenschaften von LCs wurden hergeleitet und gebräuchliche LCs ausgehend von ihrer bekannten Bildung mit zwei Frequenzen auch für drei Frequenzen betrachtet. Detailliert wurden optimale LCs und ihre Auffindung untersucht und die LCs dabei über die Lane-Nummer und den ionosphärischen Verstärkungsfaktor parametrisiert. Das gesamte Modell basiert auf den Koeffizienten zur Bildung der Signalfrequenzen.

Es wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht, mit welchen optimalen LCs in der Praxis die höchste Positionierungsgenauigkeit erreicht werden kann. Hier sollten zukünftigen Studien angesiedelt werden. Es soll jedoch in Tabelle 21 eine Empfehlung für optimale LCs abhängig von der Basislinienlänge gegeben werden. Die Eigenschaften der angeführten optimalen LCs sind in Kapitel 6 in mehreren Tabellen zu finden.

Basislinie	Verfahren	LC-Koeffizienten		Grund
		GPS	Galileo	
< 1km	Originale Beobachtungen	$(1, 0, 0)$ $(0, 1, 0)$ $(0, 0, 1)$		Nahezu alle Fehlereinflüsse aufgrund extrem kurzer Basislinie bereits eliminiert
1-15km	Originale Beobachtungen, Narrow-Lane	$(1, 1, 0)$ $(0, 1, 1)$ $(1, 0, 1)$		Auflösung der Mehrdeutigkeiten trotz geringer Wellenlänge möglich, geringes Signalrauschen
15-100km	Wide-Lane, Narrow-Lane (siehe oben)	$(1, -8, 7)$ $(1, -6, 5)$ $(4, -8, 3)$	$(1, 9, -10)$ $(-3, 3, 1)$ $(-3, 2, 2)$	Große Wellenlänge erleichtert Auflösung der Mehrdeutigkeiten
> 100km	IF-LCs oder nahezu IF-LCs	$(4, 0, -3)$ $(1, -6, 5)$	$(4, -2, -1)$ $(1, 9, -10)$	Eliminiert ionosphärische Verzögerung (nahezu) vollständig

Tabelle 21: Empfehlungen für LCs abhängig von der Basislinienlänge

Abhängig von der Länge der Basislinie, sind andere Fehlereinflüsse dominant. Bei sehr kurzen Basislinienlängen unter 1km sind durch die Differenzbildung praktisch alle Fehlereinflüsse bereits eliminiert. Daher sollten die originalen Beobachtungen verwendet werden, da der Einsatz von LCs nicht notwendig ist. Für kurze und etwas längere Basislinien sollten die klassischen 2-Frequenz-NL-LCs aus Kapitel 5.4 benutzt werden. In diesem Bereich stellt die Auflösung der Mehrdeutigkeiten trotz der geringen Wellenlänge kein Problem dar und daher überwiegen die Vorteile der NL-LC. Bei längeren Basislinienlängen lohnt sich der Einsatz von WL-LCs, da aufgrund der großen Wellenlänge die Auflösung der Mehrdeutigkeiten erleichtert wird. Neben den

klassischen WL-LCs, die in Kapitel 5.3 betrachtet werden und die auch bei der Suche nach optimalen LCs in Kapitel 6 auftreten, sind hier vor allem die in der Tabelle 21 angeführten optimalen LCs interessant. Sie haben neben einer großen Wellenlänge auch einen geringen ionosphärischen Verstärkungsfaktor. In einem Folgeschritt kann bei bekannten Wide-Lane-Ambiguities in eine Narrow-Lane-Lösung mit Hilfe der IF-LC eingesetzt werden. Bei sehr langen Basislinien über 100km ist die Ionosphäre der dominierende Fehlereinfluss und daher sollten die nahezu ionosphärenfreien LC, die in Tabelle 21 angeführt sind, verwendet werden. Sie sind eine Alternative zu den klassischen IF-2-Frequenz-LCs, die in Kapitel 5.1 betrachtet wurden. Für Basislinien dieser Länge sollte darüber hinaus der Einsatz von float Ambiguities überlegt werden, da sich die Auflösung der Mehrdeutigkeiten schwierig gestalten wird. Diese Empfehlung optimaler LCs für verschiedene Basislinienlängen basiert auf den Erkenntnissen dieser Arbeit. Sie sollte mit realen Beobachtungsdaten getestet werden.

Anhang

Im Folgenden wird ein Lösungsverfahren für eine lineare diophantische Gleichung mit drei Variablen und einer Konstanten erläutert. Die Beschreibung und das Verfahren ist nach dem Lösungsskript für diophantische Gleichungen von Arndt Brünner⁹.

Es wird die diophantische Gleichung $154a + 115b + 118c = L$ gelöst. In einer diophantischen Gleichung gibt es nur ganzzahlige Koeffizienten und Lösungen.

Das angewandte Verfahren wurde von Euler entwickelt und eng mit dem euklidischen Algorithmus (z.B. Ermittlung größter gemeinsamer Teiler) verwandt. Die Vorgangsweise ist wie folgt: Betrachtet werden die jeweiligen Reste bei Division durch den betragsmäßig kleinsten Koeffizienten. Man reduziert die Reste solange, bis kein ganzzahliger Rest übrig bleibt. Dann ist die Gleichung gelöst und nach den verwendeten freien Parametern parametrisiert. Es sind nicht alle diophantischen Gleichungen lösbar. In diesem Fall schlägt auch dieses Verfahren fehl.

Die Variable mit dem kleinsten Koeffizienten ist b, daher wird nach b umgeformt.

$$\begin{aligned}154b &= L - 154a - 118c \\ b &= \frac{L - 154a - 118c}{115}\end{aligned}$$

Der Bruch wird durch komponentenweise Division in ganzzahlige Koeffizienten und den Rest zerlegt.

$$b = -a - c + \frac{L - 39a - 3c}{115}$$

Da alle anderen Terme ganzzahlig sind, muß auch der übrig gebliebene Bruch ganzzahlig sein. Als ganzzahliger Parameter wird θ eingeführt und dem Bruch gleichgesetzt.

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{L - 39a - 3c}{115} \\ 115\theta &= L - 39a - 3c\end{aligned}$$

Die Variable mit dem kleinsten Koeffizienten ist c, daher wird nach c umgeformt.

$$\begin{aligned}3c &= L - 39a - 115\theta \\ c &= \frac{L - 39a - 115\theta}{3}\end{aligned}$$

Der Bruch wird durch komponentenweise Division in ganzzahlige Koeffizienten und den Rest zerlegt.

$$c = -13a - 38\theta + \frac{L - \theta}{3}$$

⁹ <http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/diophant.htm>, 18.12.2016

Die Variable a kommt nur noch im ganzzahligen Teil vor und wird daher durch den ganzzahligen Parameter n ersetzt, also $n = a$.

$$c = -13n - 38\theta - \frac{L - \theta}{3}$$

Da alle anderen Terme ganzzahlig sind, muß auch der übrig gebliebene Bruch ganzzahlig sein. Als ganzzahliger Parameter wird m eingeführt und dem Bruch gleichgesetzt.

$$m = \frac{L - \theta}{3}$$

$$3m = L - \theta$$

Der kleinste Koeffizienten steht bei θ , daher wird nach θ umgeformt.

$$\theta = L - 3m$$

Auf der rechten Seite der Gleichung ist kein Bruch und keine der Variablen mehr enthalten. Nun werden durch Einsetzen in umgekehrter Reihenfolge in allen Gleichungen, in denen eine Variable isoliert wurde, die anderen Variablen eliminiert.

Zuerst in der Gleichung für c :

$$c = \frac{L - 39a - 115\theta}{3} = \frac{L - 39n - 115 \cdot (L - 3m)}{3} = -38L - 13n + 115m$$

Dann in der Gleichung für b :

$$b = \frac{L - 154a - 118c}{115} = \frac{L - 154n - 118 \cdot (-38L - 13n + 115m)}{115} = 39L + 12n - 118m$$

Da die drei Variablen a, b, c nur noch von freien Parametern abhängen, ist die Gleichung nach n und m parametrisiert, wobei diese unabhängig voneinander die Menge der ganzen Zahlen durchlaufen können.

$$\begin{aligned} a &= n \\ b &= 39l + 12n - 118m \\ c &= -38l - 13n + 115m \end{aligned} \quad \text{Anders dargestellt: } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 39 & 12 & -118 \\ -38 & -13 & 115 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ n \\ m \end{bmatrix}$$

Aus dieser Darstellung der Lösung kann man eine Partikulärlösung (1.Spalte der Matrix) und zwei verschiedene linear unabhängige Basisvektoren (2.Spalte und 3.Spalte der Matrix) ablesen:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 39 & -38 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 1 & 12 & -13 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} 0 & -118 & 115 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Variablenverzeichnis

In der folgenden Tabelle sind alle in dieser Arbeit wiederholt auftretenden Variablen und ihre Bedeutung zusammengefasst. Fett geschriebenen Variablen bezeichnen Vektoren. Nicht angeführt sind Hilfsvariablen. Manche Variablen treten im Laufe der Arbeit mit zusätzlichen hochgestellten und tiefgestellten Zusätzen auf.

α, β, γ	LC-Koeffizienten [m]
a, b, c	LC-Koeffizienten [cy]
a	Vektor mit LC-Koeffizienten [cy]
$\mathbf{a}^0_{\text{lane}}$	Partikulärlösung Lane-Ebenen
$\mathbf{a}^0_{\text{ion}}$	Partikulärlösung Ionosphären-Ebenen
\mathbf{a}^0	Partikulärlösung Schnitt Lane-Ebenen mit Ionosphären-Ebenen
$\delta\mathbf{a}$	Richtungsvektor Schnittgerade Lane-Ebenen mit Ionosphären-Ebenen
b	Basislinienvektor
λ	Wellenlänge
λ_0	Wellenlänge der Grundfrequenz, 29.305m
δ	Abstand zweier benachbarten Ebenen
c_0	Lichtgeschwindigkeit
c_2, c_3, c_4	Koeffizienten in der Approximation für die ionosphärische Verzögerung
d	Pseudogeometrischer Term
Δ_{ion}	Ionosphärische Verzögerung
Δ_{trop}	Troposphärische Verzögerung
Δ_{rel}	Relativistische Fehlereinflüsse
Δ_{PCO}	Antenna Phase Offset
Δ_{PCV}	Antenna Phase Center Variation
$\Delta_{\text{PCO+PCV}}$	Summe Antenna Phase Offset und Antenna Phase Center Variation
Δt	Uhrfehler, Satelliten- und Empfängeruhrfehler mit Hoch-/Tiefstellung
ε	Sonstige Fehler
f	Frequenz
f_0	Grundfrequenz für GPS und Galileo, 10.23Mhz
I	Ionosphärische Verzögerung relativ zur ersten Frequenz
<i>i</i>	Frequenz-"Nummer" z.B. k_1 für GPS entspricht L1
k	Koeffizient mit dem die Signalfrequenz aus f_0 erzeugt wird, siehe (2.1)
L	Lane-Nummer

MP	Multipath
MW	Melbourne-Wübbena-Linearkombination
N	Phasenmehrdeutigkeit, Ambiguity
N_e	Anzahl freier Elektronen
n	Rausch-Verstärkungsfaktor [m]
\bar{n}	Rausch-Verstärkungsfaktor [cy]
n_p	Brechungsindex Phasengeschwindigkeit
n_G	Brechungsindex Gruppengeschwindigkeit
\mathbf{n}_{lane}	Normalvektor Lane-Ebenen
\mathbf{n}_{ion}	Normalvektor Ionosphären-Ebenen
P	Codemessung
p	Abkürzung, siehe (6.23)
ϕ	Phasenmessung
q_i	Faktoren für die ionosphärische Verzögerung
\bar{q}_{LC}	Ionosphärischer Verstärkungsfaktor [cy]
\bar{q}_i	Ganzzahlige Ionosphären-Zahl
ρ	Distanz zwischen Satellit und Empfänger
\mathbf{p}_0	Einheitsvektor Signalrichtung
r	Empfänger
s	Satellit
s_n	Koeffizientensumme
σ	Rauschen
σ_0	Rauschen für eine Beobachtung
v	Geschwindigkeit
$\mathbf{v}_{lane}, \mathbf{w}_{lane}$	Basisvektoren für Lane-Ebenen
$\mathbf{v}_{ion}, \mathbf{w}_{ion}$	Basisvektoren für Ionosphären-Ebenen
w_1, w_2, w_3	Eigenwerte
X, Y, Z	Punktkoordinaten
$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$	Koordinatendifferenz

Abkürzungsverzeichnis

Abb.	Abbildung
ARP	Antenna Reference Point
AR	Ambiguity Resolution
BRST	IGS-Station in Brest, Frankreich
CDMA	Code Division Multiple Access
cm	Centimeter
cy	Zyklen
DD	Doppeldifferenzen
doy	day of the year
E1, E5a, E5b, E6	Galileo Signale
ESA	European Space Agency
GF	Geometriefrei
GLONASS	Globalnaja nawigazionnaja sputnikowaja sistema
GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positioning System
GPST	Global Positioning System Time
GTRF	Galileo Terrestrial Reference Frame
GST	Galileo System Time
Hz	Hertz
IF	Ionosphärenfrei
IGS	International GNSS Service
km	Kilometer
L1, L2, L5	GPS Signale
LAMBDA	Least-squares Ambiguity Decorrelation Adjustment
LC	Linearkombination
m	Meter
MHz	Mega-Hertz
MEO	Medium Earth Orbit
MP	Multipath
MW	Melbourne-Wübbena
NGS	National Geodetic Service
NL	Narrow-Lane
PCO	Phase Center Offset

PCV	Phasenzentrumsvariation
RMS	Root-Mean-Square
STEC	Slant Total Electron Content
TAI	Temps Atomique International
TEC	Total Electron Content
TECU	Total Electron Content Units
U.S.	United States
UT1	Universal Time 1
UTC	Universal Time Coordinated
VTEC	Vertical Total Electron Content
WGS	World Geodetic System
WL	Wide-Lane
WROC	IGS-Station in Wroclaw, Polen

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: GPS-Konstellation und Galileo-Konstellation [Zhang, 2005].....	9
Abbildung 2: Schematische Darstellung der absoluten Positionsbestimmung mit GNSS.....	12
Abbildung 3: Grundlegendes Konzept der relativen Positionierung.....	13
Abbildung 4: Schematische Darstellung von Doppeldifferenzen.....	15
Abbildung 5: Die Wirkung der Erdatmosphäre auf GNSS-Signale.....	17
Abbildung 6: Multipath bei GNSS.....	21
Abbildung 7: PCO und PVC [nach Hofmann-Wellenhof et al., 2008].....	24
Abbildung 8: Darstellung der Auswirkung von Phase Wind-Up [nach Leick et al., 2015].....	25
Abbildung 9: Wellenlänge als Funktion der Lane-Nummer [Cocard et al., 2008].....	32
Abbildung 10: Die GF-LC eliminiert alle von der Frequenz unabhängigen Fehlereinflüsse [Henkel, 2009].....	37
Abbildung 11: Die Ebenen der IF-LCs und GF-LCs im von (a, b, c) aufgespannten Raum und die Kugeln gleichen Rausch-Verstärkungsfaktor 1 bis 4.....	44
Abbildung 12: Lane-Ebenen für $L=0, \pm 500, \pm 1000$ und die IF-Ebene [Cocard et al., 2008].....	47
Abbildung 13: Verhältnisse in der \bar{q}_{LC} -L-Ebene.....	54
Abbildung 14: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene für GPS. Die Rechtecke zeigen die Ausschnitte der Vergrößerungen der Abbildungen 16, 17 und 18 [Cocard et al., 2008].....	55
Abbildung 15: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene für Galileo.....	55
Abbildung 16: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene im Bereich um den Ursprung für GPS.....	57
Abbildung 17: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene in der Region des Schnitts der Achse niedrigen Rauschens für s_1 -LCs und der horizontalen Koordinatenachse für GPS.....	59
Abbildung 18: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene in der Region um den Schnitt der Achse niedrigen Rauschens für s_1 -LC und der vertikalen Koordinatenachse für GPS [Cocard et al., 2008].....	60
Abbildung 19: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene für Galileo. Dargestellt sind LCs der s_1 -Gruppe mit $\bar{n} < 100$, die Achse minimalen Rauschen für s_1 -LCs und die LC-Linie mit $a=0$	61
Abbildung 20: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene im Bereich nahe des Ursprungs für Galileo.....	61
Abbildung 21: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene in der Region um den Schnitt der Achse niedrigen Rauschens für s_1 -LCs und der horizontalen Koordinatenachse für Galileo.....	62
Abbildung 22: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene für Galileo in der Region um den Schnitt der Achse niedrigen Rausches für s_1 -LCs und der vertikalen Koordinatenachse.....	64
Abbildung 23: Die \bar{q}_{LC} -L-Ebene für Galileo. Dargestellt sind LCs der s_1 -Gruppe mit $\bar{n} < 100$ und die Achse minimalen Rauschen für s_1 -LCs.....	65
Abbildung 24: Rauschen der originalen GPS-Phasenbeobachtungen auf L1.....	69
Abbildung 25: Rauschen der originalen GPS-Phasenbeobachtungen auf L5.....	69
Abbildung 26: Rauschen der originalen Galileo-Phasenbeobachtungen auf E1.....	70

Abbildung 27: Rauschen der originalen GPS-Codebeobachtungen auf L1.....	70
Abbildung 28: Rauschen der GPS-LC (1, -6, 5).....	72
Abbildung 29: Rauschen der Galileo-LC (-3, 2, 2).....	72
Abbildung 30: Rauschen der GPS-LC (4, 0, -3).....	73
Abbildung 31: Rauschen der GPS-LC (-77, 540, -460).....	73

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Übersicht über die Frequenzen von GPS.....	8
Tabelle 2: Übersicht über die Frequenzen von Galileo.....	10
Tabelle 3: Übersicht über GPS und Galileo.....	10
Tabelle 4: Beschreibung der in den Beobachtungsgleichungen (3.4) und (3.5) auftretenden Korrekturterme.....	14
Tabelle 5: Faktoren für die ionosphärische Verzögerung.....	29
Tabelle 6: Faktoren der ionosphärische Verzögerung.....	31
Tabelle 7: IF-3-Frequenz-LCs für GPS [Cocard et al., 2008].....	35
Tabelle 8: IF-3-Frequenz-LCs für Galileo.....	36
Tabelle 9: Die Wellenlänge der ML, WL und EW-LC für GPS und Galileo in Metern.....	38
Tabelle 10: Die Wellenlänge der 2-Frequenz-NL-LCs für GPS und Galileo in Metern.....	39
Tabelle 11: Übersicht gebräuchliche LCs.....	42
Tabelle 12: Eigenwerte der Matrix M.....	56
Tabelle 13: Eigenschaften der interessantesten LCs nahe des Ursprungs der \bar{q}_{LC} -L-Ebene für GPS nach [Cocard et al., 2008].....	58
Tabelle 14: Eigenschaften der interessantesten s_1 -LCs im Bereich um den Schnitt ihrer Achse minimalen Rauschens und der ionosphärenfreien Koordinatenachse für GPS [nach Cocard et al., 2008].....	59
Tabelle 15: Eigenschaften der interessantesten s_1 -LCs im Bereich um den Schnitt ihrer Achse minimalen Rauschens und der Wide-Lane-Koordinatenachse für GPS.....	60
Tabelle 16: Eigenschaften der interessantesten Galileo-LCs nahe des Ursprungs der \bar{q}_{LC} -L-Ebene.....	62
Tabelle 17: Eigenschaften der interessantesten s_1 -LCs im Bereich um den Schnitt ihrer Achse minimalen Rauschens und der ionosphärenfreien Koordinatenachse für Galileo.....	63
Tabelle 18: Eigenschaften der interessantesten s_1 -LCs im Bereich um den Schnitt ihrer Achse minimalen Rauschens und der Wide-Lane-Koordinatenachse für Galileo.....	64
Tabelle 19: Eigenschaften der interessantesten s_1 -LCs.....	66
Tabelle 20: Eigenschaften ausgewählter LCs.....	71
Tabelle 21: Empfehlungen für LCs abhängig von der Basislinienlänge.....	75

Literaturverzeichnis

- Böhm, Johannes/ Schuh, Harald. 2013. *Atmospheric Effects in Space Geodesy*. Springer Berlin Heidelberg
- Cocard, Marc / Bourgon, Stéphanie / Kamali, Omid / Collins, Paul. 2008. „A Systematic Investigation of Optimal Carrier-Phase Combinations for Modernized Triple-Frequency GPS“. *Journal of Geodesy* 82 (9): 555–64. doi:10.1007/s00190-007-0201-x.
- Collins, J. Paul. 1999. „An overview of GPS inter-frequency carrier phase combinations“. Unpublished paper, retrieved May 25: 2007.
- Dach, Rolf / Lutz, Simon / Walser, Peter / Fridez, Pierre. 2015. *"Bernese GNSS Software 5.2"*. AIUB, University of Bern, doi:10.7892/boris.72297. <http://www.bernese.unibe.ch>
- Henkel, Patrick. 2009. „Geometry-Free Linear Combinations for Galileo“. *Acta Astronautica* 65 (9–10): 1487–99. doi:10.1016/j.actaastro.2009.03.076.
- Henkel, Patrick / Günther, Christoph. 2007. „Three frequency linear combinations for Galileo“. In *Positioning, Navigation and Communication, 2007. WPNC'07. 4th Workshop on*, 239–245. IEEE. http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=4167846.
- Hofmann-Wellenhof, Bernhard / Lichtenegger, Herbert / Wasle, Elmar. 2008. *GNSS – Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo & more*. SpringerWienNewYork, Wien (Österreich)
- Leick, Alfred / Rapoport, Lev / Tatarnikov, Dmitry. 2015. *GPS Satellite Surveying – Fourth Edition*. Wiley, Hoboken (New Jersey, USA)
- Mader, Gerald L. 1999. „GPS antenna calibration at the National Geodetic Survey“. *GPS solutions* 3 (1): 50–58.
- Odijk, Dennis. 2002. *Fast Precise GPS Positioning in the Presence of Ionospheric Delays*. Publications on Geodesy 52. Delft: NCG, Nederlandse Commissie voor Geodesie.
- Odijk, D. / Teunissen, P. J. G. / Tiberius, CCJM. 2002. „Triple-frequency ionosphere-free phase combinations for ambiguity resolution“. In *Proc. of the ENC-GNSS 2002 proceedings; The European Navigation Conference, Copenhagen, Denmark, 27–30*. <http://saegnss1.curtin.edu.au/Publications/2002/Odi02a.pdf>.
- Odijk, Dennis. 2003. „Ionosphere-free phase combinations for modernized GPS“. *Journal of surveying engineering* 129 (4): 165–173.
- Petovello, M. G. 2006. „Narrowlane: Is It Worth It?“ *GPS Solutions* 10 (3): 187–95. doi:10.1007/s10291-006-0020-1.

- Misra, Pratap / Enge, Per. 2011. *Global Positioning System: Signals, Measurements, and Performance*. Ganga-Jamuna Press, Lincoln (Massachusetts, USA)
- Radovanovic, R. / Fotopoulos, G. / El-Sheimy, N. 2001. „*On optimizing GNSS multi-frequency carrier phase combinations for precise positioning*“. International association of Geodesy. <http://pointgeomatics.ca/Papers/01IAGlincomb.pdf>.
- Richert, Todd / El-Sheimy, Naser. 2006. „*Optimal Linear Combinations of Triple Frequency Carrier Phase Data from Future Global Navigation Satellite Systems*“. *GPS Solutions* 11 (1): 11–19. doi:10.1007/s10291-006-0024-x.
- Seeber, Günter. 2003. *Satellite Geodesy. 2nd completely rev. and extended ed.* Berlin ; New York: Walter de Gruyter.
- Simsky, Andrew. "Three's the charm: Triple-frequency combinations in future GNSS". Inside GNSS, Gibbons Media Res. LLC, Eugene, OR, USA, pp. 40-43, Jul./Aug. 2006. [online]. Available: www.insidegnss.com
- Teunissen, P.J.G. 1995. *The invertible GPS ambiguity transformations*. *Manuscripta Geodaetica*, 6, 489-497.
- Urquhart, L. 2009. *An Analysis of Multi-Frequency Carrier Phase Linear Combinations for GNSS*. Senior technical Report No. 263, University of New Brunswick, Fredericton, New Brunswick, Canada, 71 pp.
- Zhang, Wentao. 2005. „*Triple Frequency Cascading Ambiguity Resolution for Modernized GPS and GALILEO*“. UCGE Reports No. 20228, University of Calgary
- Zhang, XiaoHong / He, XiYang. 2015. „*BDS Triple-Frequency Carrier-Phase Linear Combination Models and Their Characteristics*“. *Science China Earth Sciences* 58 (6): 896–905. doi:10.1007/s11430-014-5027-9.