TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

DIPLOMARBEIT

Prämienkalkulationsprinzipien und Orlicz-Räume

ausgeführt am Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch

Christina Stranz
Goldschlagstraße 61/21
1150 Wien

Mai, 2016

Für meinen kleinen Bruder, RIP

Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits für die Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken.

Weiters möchte ich mich bei meinen Studienkollegen für eine unvergessliche Studienzeit bedanken.

Besonders möchte ich mich bei meinem Verlobten bedanken, dass er immer für mich da ist.

Den größten Dank richte ich an meine Eltern, die mich bei all meinen Vorhaben gefördert und unterstützt haben und zur Zeit des Schreibens meiner Diplomarbeit jederzeit auf meinen Sohn aufgepasst haben, damit ich die Arbeit in Ruhe fertig stellen kann.

Ehrenerklärung

Ich erkläre ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Datum:

Unterschrift:

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt das Orlicz-Prämienkalkulationsprinzip. Da die Kalkulation von Prämien ein Teilgebiet der Risikotheorie ist, wird zuerst eine kurze Einführung in die Risikotheorie gegeben und die damit verbundenen Aufgabengebiete erläutert. Da es viele verschiedene Prämienkalkulationsprinzipien gibt, die aber unterschiedliche Gütekriterien erfüllen, werden diese Prämienkalkulationsprinzipien kurz erklärt und deren Eigenschaften betrachtet. Nach diesem Überblick folgt eine Einführung in die Theorie der Orlicz-Räume, wo die Young-Funktion und die Orlicz-Norm bzw. Luxemburg-Norm definiert werden. Mit diesen Grundlagen kann das Prämienkalkulationsprinzip basierend auf Orlicz-Normen hergeleitet werden. Zuerst wird der Fall für beschränkte Risiken betrachtet und die Eigenschaften bewiesen. Mit einem Gegenbeispiel wird klar, dass die Aussagen für unbeschränkte Risiken nicht mehr gültig sind und modifiziert werden müssen. Anhand einiger Beispiele soll das Prinzip noch verdeutlicht werden. Zum Schluss führt ein kurzer Ausblick zu weiteren Anwendungsmöglichkeiten des Orlicz-Prinzips.

Abstract

This master thesis deals with a premium calculation principle based on Orlicz norms. As premium calculation is a part of risk theory first there is given a short overview of risk theory and its applications. Afterward some different premium calculation principles are explained and their properties are investigated. The next part deals with Orlicz spaces where the Young function, Orlicz norm and Luxemburg norm are defined. Based on those Orlicz norms a new premium calculation principle is deduced. First the principle is shown for bounded risks, afterwards for unbounded risks. Some examples for illustrating this principle are presented. At the end of this thesis a short forecast with further applications is given.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Risikotheorie

Dieses Kapitel orientiert sich an *[SP], [HU], [ZG], [PF] und [SW].*

In der Schadenversicherungsmathematik werden Modelle und Methoden betrachtet, bei denen der Zeitpunkt des Eintretens eines Versicherungsfalls und die Höhe der Versicherungsleistung zufällige Faktoren sind. Somit kann während der Vertragslaufzeit auch eine zufällige Anzahl an Ereignissen eintreten, die einen oder mehrere Schäden mit sich bringen können. Da diese Modelle oft nicht einfach zu berechnen sind, werden in der Risikotheorie Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie, Stochastik, Statistik und Numerik angewandt, um die Risiken eines Versicherungsunternehmens in Form von Zufallsvariablen zu modellieren.

Definition 1.1: *Risiko* ist die Unsicherheit über die Ergebnisse wirtschaftlichen Handelns. Mathematisch gesehen ist ein Risiko eine nichtnegative Zufallsvariable X.

Beispiele für Risiken sind Sachschäden (z.B. Naturkatastrophen, Seuchen, Terroranschläge), Vermögensrisiken (z.B. Zinsänderung, Währungsrisiken), neue gesetzliche Regelungen (z.B. Besteuerung), Inflation und konjunkturelle Schwankungen.

Unter dem *versicherungstechnischen Risiko* werden folgende Risiken zusammengefasst:

- Zufallsrisiken
- Schätzrisiken, Modellrisiken (z.B. verwenden der unpassenden Schadenverteilung)
- Diagnose- oder Irrtumsrisiken
- Änderungsrisiken (z.B. Prognoserisiken)

Die Risikotheorie befasst sich allerdings nur mit dem Zufallsrisiko, d.h. mit der zufälligen Komponente des versicherungstechnischen Risikos.
Generell wird ein Portfolio sowohl von deterministischen als auch von stochastischen Faktoren beeinflusst:

- Deterministische Größen geben die Rahmenbedingungen für das Versicherungsgeschäft vor, wie z.B. die Zeitspanne t (z.B. $t = 1$ für das Geschäftsjahr) oder das Anfangskapital x.

- Stochastische Größen werden durch Zufallsvariablen modelliert. Hier sind die Schadenzeitpunkte, die Schadenhöhen, die Schadenzahl, der Gesamtschaden sowie die Risikoreserve zu erwähnen.
  Die Schadenanzahl $N(t)$, der Gesamtschaden $X(t)$ und die Risikoreserve $R(t)$ sind zufällige Funktionen des Zeitparameters t und werden mithilfe stochastischer Prozesse modelliert.

1.1 Aufgaben der Risikotheorie

Im Folgenden werden die Aufgabenbereiche der Risikotheorie erläutert. Für eine ausführliche Beschreibung sei verwiesen auf *[SP]*.

1.1.1 Modellierung der Schadenhöhe $X(t)$

Definition 1.2: Ein Risiko heißt *gutartig*, wenn die Tail-Funktion der Verteilung von X eine exponentielle Schranke besitzt:

$$1 - F_X(x) \leq ce^{-ax} \tag{1.1}$$

für $x \in \mathbb{R}^+$ und gewisse Konstanten a und $c > 0$.

Die Tail-Funktion eines „gefährlichen" Risikos geht für $x \to \infty$ somit langsamer gegen Null als e^{-ax}.

- **Verteilungen mit leichtem Tail** sind
  - Normalverteilung
  - Exponentialverteilung
  - Erlangverteilung
  - χ^2-Verteilung
  - Gammaverteilung
  - Betaverteilung
  - Waldverteilung
- Durch **Verteilungen mit schwerem Tail** werden auch Großschäden berücksichtigt:
  - Log-Normal-Verteilung
  - Weibull-Verteilung
  - Pareto-Verteilung
  - Loggamma-Verteilung

1.1.2 Modellierung der Schadenanzahl $N(t)$

Die üblichen Schadenanzahlverteilungen von N sind:

- Poisson-Verteilung, $N \sim Poi(\lambda)$ mit $\lambda > 0$
  wobei die momenterzeugende Funktion gegeben ist durch
  $$m_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$
- Binomialverteilung, $N \sim B(n,p)$ mit $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$
  wobei die momenterzeugende Funktion gegeben ist durch
  $$m_N(t) = (1-p(1-e^t))^n$$
- Negative Binomialverteilung, $N \sim NB(r,p)$ mit $r \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$
  wobei die momenterzeugende Funktion gegeben ist durch
  $$m_N(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^r$$

1.1.3 Verteilung des Gesamtschadens $S(t)$

Der Gesamtschadenprozess ist ein stochastischer Prozess:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t).$$

Man unterscheidet das individuelle vom kollektiven Modell:

Individuelles Modell

Das individuelle Modell fasst alle Einzelschäden einer Police i zu X_i zusammen.

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

wobei X_i, $i = 1, ..., n$ unabhängige Policen sind, die nicht notwendigerweise ident verteilt sein müssen.

Kollektives Modell

Beim kollektiven Modell wird ein Portfolio aus einer nicht näher spezifizierten Anzahl von Policen betrachtet, die nicht einzeln behandelt werden können. Es werden alle Schäden gleich betrachtet, egal aus welcher Police sie stammen.

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

mit unabhängigen und ident verteilten X_i und $N, X_1, X_2, ...$ unabhängig.

Typischerweise besitzt S entweder die Poisson-, die Binomial oder die negative Binomialverteilung als Schadenanzahlverteilung N. Man spricht dann auch von *zusammengesetzter/compound Poisson-, Binomial- bzw. negativer Binomialverteilung.*

Für den Erwartungswert von S gilt

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]$$

Für die Varianz von S gilt

$$\mathbb{V}[S] = \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2 = \mathbb{V}[N]\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[N]\mathbb{V}[X]$$

Für die momenterzeugende Funktion von S gilt

$$m_S(t) = m_N(\log(m_X(t)))$$

1.1.4 Prämienkalkulation

siehe Kapitel 2, 4 und 5

1.1.5 Berechnung von Rückstellungen

Ein Versicherungsunternehmen muss folgende Rückstellungen bilden:

- Spätschadenreserve zur Deckung von Schäden, deren Höhe bei Meldung des Versicherungsfalles noch nicht genau bekannt ist
- Schwankungsrückstellung zur Deckung von Risiken mit großer Variabilität
- Großschadenrückstellung zur Deckung von Risiken mit schweren Tails

1.1.6 Durchführung von risikopolitischen Maßnahmen

In dieses Aufgabenfeld fällt die Risikoteilung. Der wohl berühmteste Vertreter der Risikoteilung ist die Rückversicherung:

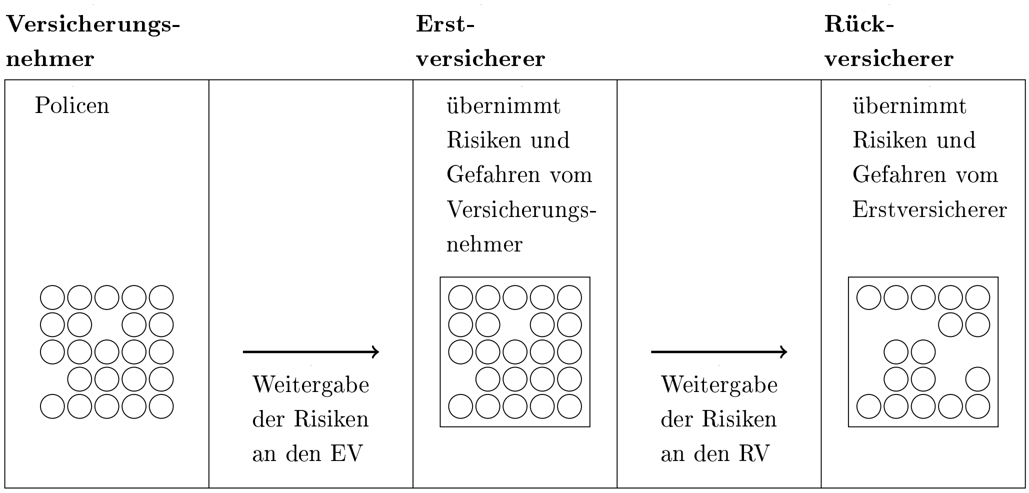

Abbildung 1.1: Rückversicherung, Quelle: [SW]

Prinzipiell unterscheidet man bei der Rückversicherung zwischen proportionaler und nicht-proportionaler Rückversicherung:

- Proportionale Rückversicherung
  - *Quotenrückversicherung*
    Der Rückversicherer ist mit einem festen Prozentsatz an allen vertraglich festgelegten Versicherungen beteiligt. Diese Quote ist maßgebend für die Verteilung der Haftung, der Prämien und der Schäden zwischen dem Erst- und Rückversicherer. Ein Nachteil der Quotenrückversicherung ist, dass sie keine homogenisierende Wirkung hat: Spitzenrisiken werden nur unzureichend erfasst, bzw. greift der Rückversicherungsschutz auch bei kleineren Risiken, bei denen er nicht unbedingt erforderlich wäre.
  - *Summenexzedenten-Rückversicherung*
    Hier ist der Rückversicherer nicht an allen Risiken beteiligt, sondern nur an den Risiken über einem gewissen Haftungsbetrag. Die Bestimmung des Haftungsbetrags ist der wichtigste Schritt, den der Erstversicherer machen muss, denn davon hängt es ab ob das Ziel, die Risiken zu nivellieren, erreicht wird. Bis zu dem Haftungsbetrag behält sich der Erstversicherer die Risiken im Selbstbehalt. Haftungsbeträge, die den Selbstbehalt überschreiten deckt der Rückversicherer - allerdings auch nur bis zu einem vertraglich festgelegten Deckungslimit. Den Betrag darüber muss entweder der Erstversicherer selbst übernehmen oder fakultativ[1] rückversichern.
- Schadenexzedenten- bzw. nichtproportionale Rückversicherung
  - *Schadenexzdentenrückversicherung (Excess of Loss, XL)*
  - *Jahresüberschadenrückversicherung (Stop Loss, SL)*

  Der Erstversicherer setzt einen Betrag (bei Stop Loss einen Prozentsatz) seiner Jahresprämie fest, bis zu dem er für die Schäden selbst aufkommt. Dieser Betrag wird Priorität genannt. Den darüber hinausgehenden Schaden übernimmt der Rückversicherer bis zur Höhe eines bei (XL) betragsmäßig, bei (SL) als Prozentsatz der Jahresprämie, festgesetzten Übernahmemaximums (= Haftstrecke bzw. Haftung des Rückversicherers). Durch Schadenexzedentenrückversicherungen kann sich der Erstversicherer gegen Kumulschäden absichern.

1.1.7 Ermittlung der Ruinwahrscheinlichkeit

Man sagt es tritt *technischer Ruin* ein, wenn die Risikoreserve $R(t)$ zum ersten Mal negativ wird. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses $\varphi(x) = \mathbb{P}[\exists t > 0 : R(t) < 0]$ wird *Ruinwahrscheinlichkeit* genannt. Die Aufgabe der Risikotheorie besteht darin diese Ruinwahrscheinlichkeit zu berechnen oder, wenn dies nicht möglich ist, eine ausreichend präzise obere Schranke für $\varphi(x)$ anzugeben.

[1] der Erstversicherer entscheidet nach eigener Wahl, welchem Rückversicherer er das Risiko anbietet und der Rückversicherer entscheidet ob und wenn ja in welcher Höhe er sich am Risiko beteiligen möchte

Kapitel 2

Prämienkalkulationsprinzipien

In diesem Kapitel werden einige Prämienkalkulationsprinzipien und deren Gütekriterien genauer betrachtet - *vgl. [DR], [ZG], [HU], [GE].*

Gegeben sei eine Menge $\mathcal{G}$ von Zufallsvariablen, welche die Risiken modellieren.
H ist eine Abbildung von $\mathcal{G}$ nach $\bar{\mathbb{R}}$, sodass gilt $X \in \mathcal{G} \rightarrow H[X] \in \bar{\mathbb{R}}$. Außerdem soll gelten, dass $H[X]$ nur von der Verteilung von X abhängt.

Interpretation: Um das Risiko X versichern zu können, verlangt die Versicherung die Prämie $H[X]$.
Wenn gilt, dass $H[X]$=$+\infty$ bedeutet es, dass das Risiko X nicht versicherbar ist (nach dem jeweiligen Prämienkalkulationsprinzip $H[X]$). Sobald $H[X] < \infty$, ist das Risiko X nach dem Prinzip H versicherbar.

2.1 Übersicht über einige Prämienprinzipien

Nun wird auf die Prämienkalkulationsprinzipien eingegangen, wobei neben den klassischen Prinzipien, wie z.B. dem Exponentialprinzip und Perzentilprinzip auch Exoten wie z.B. das Holländische Prinzip erklärt werden.

2.1.1 Nettoprämienprinzip

Das Nettoprämienprinzip hat als Prämie den Erwartungswert des Risikos:

$$H[X] = \mathbb{E}[X] \tag{2.1}$$

Das Nettoprämienprinzip liefert eine theoretische untere Schranke. In der Realität müssen Versicherungsunternehmen aber auch Rücklagen bilden und Mieten fürs Büro, Steuern usw. bezahlen.
Dieses Prinzip wird auch *Äquivalenzprinzip* genannt.

2.1.2 Erwartungswertprinzip

Die Prämie nach dem Erwartungswertprinzip wird wie beim Nettoprämienprinzip mittels des Erwartungswertes berechnet, enthält aber zusätzlich einen Sicherheitszuschlag:

$$H[X] = (1+\alpha)\mathbb{E}[X] \tag{2.2}$$

$$H[X] = \mathbb{E}[X] + \underbrace{\alpha\mathbb{E}[X]}_{\text{Sicherheitszuschlag}}$$

mit Parameter $\alpha \geq 0$.

Ein Vorteil des Erwartungswertprinzips ist, dass die Kenntnis von $\mathbb{E}[X]$ ausreicht, der Sicherheitszuschlag ist nur von X abhängig.
Ein Nachteil des Erwartungswertprinzips ist, dass wenn die Varianz des Risikos sehr groß ist, das Risiko nicht ausreichend berücksichtigt wird.

2.1.3 Varianzprinzip

Beim Varianzprinzip ist der Sicherheitszuschlag proportional zur Varianz des Risikos X:

$$H[X] = \mathbb{E}[X] + \underbrace{\beta\mathbb{V}[X]}_{\text{Sicherheitszuschlag}} \tag{2.3}$$

mit Parameter $\beta \geq 0$.

Das Varianzprinzip, und auch das Standardabweichungsprinzip, wird vor allem verwendet, wenn das Versicherungsunternehmen die mögliche Streuung des Risikos berücksichtigen möchte.

2.1.4 Standardabweichungsprinzip

Beim Standardabweichungsprinzip ist der Sicherheitszuschlag proportional zur Standardabweichung des Risikos X:

$$H[X] = \mathbb{E}[X] + \underbrace{\gamma\sqrt{\mathbb{V}[X]}}_{\text{Sicherheitszuschlag}} \tag{2.4}$$

mit Parameter $\gamma \geq 0$.

2.1.5 Nullnutzenprinzip

Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion mit folgenden Eigenschaften:

- u monoton wachsend: $u' > 0$
  Je größer die Geldmenge ist, desto größer ist ihr Nutzen.
- u konkav: $u'' \leq 0$
  Bei wachsendem Vermögen wird dem Zuwachs einer Geldeinheit immer weniger Nutzen zugeschrieben.

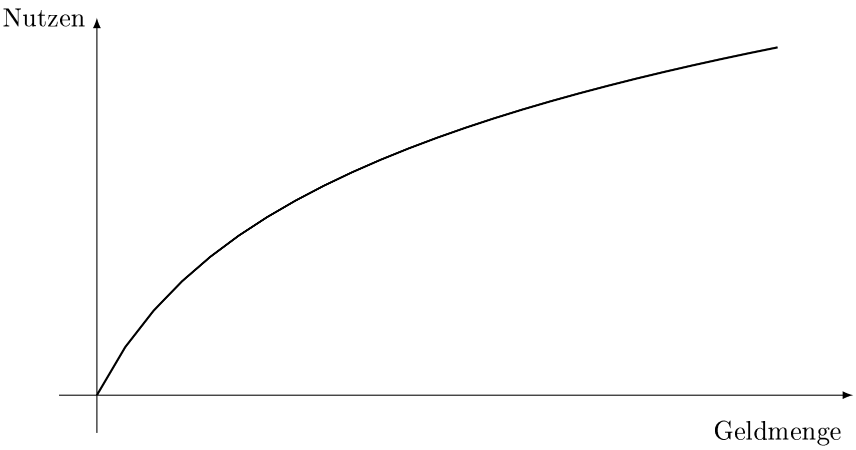

Abbildung 2.1: Nutzenfunktion

Die Prämie zur Nutzenfunktion u und Anfangskapital x ist Lösung von:

$$u(x) = \mathbb{E}[u(x + H - X)] \tag{2.5}$$

Beispiel 2.1: Die Verteilung der Schadenhöhe X sei gegeben durch

$$\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[X = 2] = \frac{1}{2}$$

Die durch

$$u(x) = \ln(x + 1) \qquad \text{für } x \geq 0$$

definierte Funktion ist eine Nutzenfunktion:

- $u'(x) > 0$

  $\ln(x+1)' = \frac{1}{x+1} > 0$ für $x \geq 0$
- $u''(x) \leq 0$

  $\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -(x+1)^{-2} = -\frac{1}{(x+1)^2} \leq 0$ für $x \geq 0$

Es gilt: Der Nutzen vor Versicherungsübernahme ist gleich dem erwarteten Nutzen nach Versicherungsübernahme, d.h.:

$$u(x) = \mathbb{E}[u(x+H-X)]$$

$$u(x) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[u(x+H-1)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[u(x+H-2)]$$

$$\ln(x+1) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}[\ln(x+H)] + \mathbb{E}[\ln(x+H-1)]\right)$$

$$2\ln(x+1) = \ln(x+H) + \ln(x+H-1)$$

$$\ln\left((x+1)^2\right) = \ln\left((x+H)\cdot(x+H-1)\right)$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2Hx + H^2 - x - H$$

$$0 = H^2 + H(2x-1) + (-3x-1)$$

$$H_{1,2} = -\frac{2x-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 + 3x + 1}$$

Für das Anfangskapital $x = 2$ bzw. $x = 6$ erhält man

$$H = \begin{cases} -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 7} = 1,5413 & \text{für } x = 2 \\ -\frac{11}{2} + \sqrt{\frac{121}{4} + 19} = 1,5178 & \text{für } x = 6 \end{cases}$$

da die Prämie positiv sein muss.

♦

2.1.6 Exponentialprinzip

Die Prämie nach dem Exponentialprinzip ergibt sich folgendermaßen:

$$H[X] = \frac{1}{\alpha}\log m_X(\alpha) \tag{2.6}$$

mit m_X...momenterzeugende Funktion, $m_X(\alpha) = \mathbb{E}[e^{\alpha X}]$.
Der Parameter α heißt Risikoaversionsparameter.

Es gilt:

- $\alpha \to 0$: risikoneutral (daraus resultiert eine kleinere Prämie)
- α wird größer: risikoaverser (daraus resultiert eine größere Prämie)

Bemerkung 2.2: Das Risiko X ist versicherbar genau dann, wenn die momenterzeugende Funktion von X bei α existiert.

Bemerkung 2.3: Die Exponentialprämie als Funktion des Risikoaversionsparameters interpoliert stetig und wachsend zwischen der Nettoprämie und der Maximalschadenprämie.

Bemerkung 2.4: Durch die Wahl der Nutzenfunktion $u(x) = \frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}$ wird das Exponentialprinzip definiert:

1 $u(0) = \mathbb{E}[u(H - X)]$

2 $0 = \mathbb{E}[\dfrac{1 - e^{-\alpha(H-X)}}{\alpha}]$

3 $0 = \dfrac{1}{\alpha}(\mathbb{E}[1] - \mathbb{E}[e^{-\alpha(H-X)}])$

4 $0 = 1 - \mathbb{E}[e^{-\alpha(H-X)}]$

5 $1 = \mathbb{E}[e^{-\alpha(H-X)}]$

6 $1 = e^{-\alpha H}\mathbb{E}[e^{\alpha X}]$

7 $e^{\alpha H} = \mathbb{E}[e^{\alpha X}]$

8 $\alpha H = \log \mathbb{E}[e^{\alpha X}]$

9 $H = \dfrac{1}{\alpha} \log \mathbb{E}[e^{\alpha X}]$

10 $H = \dfrac{1}{\alpha} \log[m_X(\alpha)]$

2.1.7 Mittelwertprinzip

Sei $v(x)$, $x \geq 0$ eine Verlustfunktion mit folgenden Eigenschaften:

- monoton wachsend: $v'(x) > 0$
- konvex: $v''(x) \geq 0$,

dann ist die Prämie die Lösung von

$$v(H[X]) = \mathbb{E}[v(X)]. \tag{2.7}$$

Wenn $v(x) = ax + b$, dann ist das Mittelwertprinzip äquivalent zum Nettoprämienprinzip.
Wenn $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$ für $\min[\alpha, \beta] > 0$, dann ist das Mittelwertprinzip äquivalent zum Exponentialprinzip.

2.1.8 Quantil- oder Perzentilprinzip

Nach dem Quantil- bzw. Perzentilprinzip gilt: H ist die kleinste Prämie, sodass die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes kleiner oder gleich ϵ ist ($0 < \epsilon \leq 1$):

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[H - X < 0] \leq \epsilon \\
&\mathbb{P}[X > H] \leq \epsilon \\
&1 - F_X(H) \leq \epsilon \\
&F_X(H) \geq 1 - \epsilon.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$H[X] = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq 1 - \epsilon\}$$

also:

$$H[X] = F_X^{\leftarrow}(1 - \epsilon) \tag{2.8}$$

Somit gilt: $H[X]$ ist das $(1 - \epsilon)$-Quantil.

2.1.9 Schweizer Prämienkalkulationsprinzip

Gegeben sei ein Parameter $c \in [0, 1]$ und eine strikt monotone (fallende oder steigende) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Die Schweizer Prämie löst:

$$\mathbb{E}[f(X - cH)] = f((1 - c)H). \tag{2.9}$$

Für $c = 0$ und wachsendes und konvexes f erhält man das Mittelwertprinzip.
Für $c = 1$ und $f(X) = u(-X)$ erhält man das Nullnutzenprinzip mit $x = 0$.

2.1.10 Holländisches Prinzip

$$H[X] = \mathbb{E}[X] + \theta\mathbb{E}[(X - \alpha\mathbb{E}[X])_+] \tag{2.10}$$

mit $\theta \in (0, 1)$ und $\alpha \geq 1$,

2.1.11 Semivarianzprinzip

$$H[X] = \mathbb{E}[X] + \delta\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])_+^2] \tag{2.11}$$

mit $\delta \geq 0$.

2.1.12 Esscher-Prinzip

Die Prämie nach dem Esscher-Prinzip wird folgendermaßen berechnet:

$$H[X] = \frac{\mathbb{E}[Xe^{\alpha X}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]} \tag{2.12}$$

für $\alpha \geq 0$.

Der Name des Prinzips kommt daher, dass $Z := \frac{Xe^{\alpha X}}{m_X(\alpha)}$ die Esscher-Transformation der Zufallsvariable X ist.

Bemerkung 2.5: Sei $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{e^{\alpha X}}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]}$, so gilt:

$$H[X] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Xe^{\alpha X}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{\alpha X}]} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X].$$

Das heißt die Esscher-Prämie ist die Nettoprämie unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$.

2.1.13 Maximalschadenprinzip

Das Maximalschadenprinzip ist praktisch zu teuer und bildet eine theoretische Obergrenze:

$$H[X] = \sup\{x : F_X(x) < 1\}. \tag{2.13}$$

Bemerkung 2.6: Das Maximalschadenprinzip kann auch geschrieben werden als[1]

$$H[X] = \text{esssup} X$$

Das Maximalschadenprinzip erhält man als *Grenze*, wenn man im Exponentialprinzip den Parameter α gegen $+\infty$ laufen lässt. Ebenso, wenn man im Perzentilprinzip den Parameter ϵ gegen 0_+ laufen lässt bzw. wenn man im Esscher-Prinzip den Parameter α gegen $+\infty$ laufen lässt.

2.1.14 Risikoadjustiertes Prinzip (proportional Hazard-Rate)

$$H[X] = \int_0^{+\infty} [\mathbb{P}[X > x]]^{1/\rho} dx = \int_0^{+\infty} [1 - F_X(x)]^{1/\rho} dx, \tag{2.14}$$

wobei der Parameter $\rho \geq 1$ als Risikoindex bezeichnet wird.

Für $\rho = 1$ ist das risikoadjustierte Prinzip äquivalent zum Nettoprämienprinzip.

[1] $\text{essup} X = \sup\{x : F_X(x) < 1\}$

2.1.15 Wang-Prämienkalkulationsprinzip

Das Wang-Prämienkalkulationsprinzip ist eine Verallgemeinerung des risikoadjustierten Prinzips:

$$H[X] = \int_0^{+\infty} g(1 - F_X(x))dx, \tag{2.15}$$

wobei $g(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ eine wachsende, konkave Funktion ist.

Für den Fall, dass g von der Form $g(x) = x^{1/\rho}$ mit $\rho \geq 1$ ist, ist das Wang-Prinzip äquivalent zum risikoadjustierten Prinzip.

2.1.16 Prinzip der absoluten Abweichung

$$H[X] = \mathbb{E}[X] + \alpha\mathbb{E}[\mid X - F_X^{\leftarrow}(1/2) \mid] \tag{2.16}$$

mit $\alpha \geq 0$.

2.2 Gütekriterien, wünschenswerte Eigenschaften

Im Folgenden werden einige Eigenschaften behandelt, die in bestimmten Situationen für die Prämienkalkulationsprinzipien wünschenswert wären:

i) **kein ungerechtfertigter Sicherheitszuschlag**
$H(a) = a$ für alle konstanten Risiken $a \in \mathbb{R}$

ii) **Proportionalität, positive Homogenität**
$H(\lambda X) = \lambda H(X)$ für $\lambda \geq 0$

iii) **Additivität**
$H(X + Y) = H(X) + H(Y)$ für unabhängige Risiken X und $Y \in \mathcal{G}$

iv) **Translationsinvarianz, Konsistenz**
$H(X + a) = H(X) + a$ für a konstant $\in \mathbb{R}$

v) **Erwartungsübersteigerung**
$H(X) \geq \mathbb{E}[X]$

vi) **Maximalschadenbegrenzung, no rip-off**
$H(X) \leq \text{esssup} X$
theoretische obere Schranke

vii) **Iterativität**
Ist X ein Risiko und Y eine weitere Zufallsvariable, dann bezeichnet die Prämie $H[X \mid Y]$ die für die bedingte Verteilung gegeben Y berechnete Prämie, die im Allgemeinen eine Zufallsvariable ist. Für die danach berechnete Prämie soll gelten:
$H[H[X \mid Y]] = H[X]$

viii) **Subadditivität**
$H(X + Y) \leq H(X) + H(Y)$ für beliebige Risiken X und $Y \in \mathcal{G}$

ix) **Konvexität**
$H(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda H(X) + (1 - \lambda)H(Y)$

x) **Monotonie bzgl. der (gewöhnlichen) stochastischen Ordnung**
$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow H(X) \leq H(Y)$ wobei gilt:
$X \leq_{st} Y :\Leftrightarrow \forall$ wachsende Funktionen g gilt:
$\mathbb{E}[g(x)] \leq \mathbb{E}[g(Y)]$ wenn der Erwartungswert existiert

xi) **Verträglichkeit bezüglich der Mischung von Risiken**
$H(X) = H(Y) \Rightarrow H(pX + (1 - p)Z) = H(pY + (1 - p)Z)$
für alle konstanten $p \in [0, 1]$

xii) **Stetigkeit** $X_n \to X \Rightarrow H(X_n) \to H(X)$
Konvergenz von Zufallsvariablen $\Rightarrow$ *Konvergenz von Zahlen*

2.2.1 Die wichtigsten Prinzipien und deren Eigenschaften

Folgend ist eine Übersicht mit den wichtigsten Prinzipien und deren Eigenschaften. Die Eigenschaften werden exemplarisch für das Mittelwertprinzip durchgerechnet.

Prinzip	*(i) S.zuschlag*	*(ii) pos. Hom.*	*(iii) Additivität*	*(iv) Transl.inv.*	*(v) erw.überst.*	*(vi) no rip-off*	*(vii) Iterativität*
Nettoprämienprinzip	+	+	+	+	+	+	+
Erwartungswertprinzip	−	+	+	−	+	−	−
Varianzprinzip	+	−	+	+	+	−	−
Standardabweichungsprinzip	+	+	−	+	+	−	−
Nullnutzenprinzip	+	◇	◇	+	+	+	◇
Exponentialprinzip	+	−	+	+	+	+	+
Mittelwertprinzip	+	◇	◇	◇	+	+	+
Perzentilprinzip	+	+	−	+	−	+	−
Esscher Prinzip	+	−	+	+	+	+	−
Maximalschadenprinzip	+	+	+	+	+	+	+
Risikoadjustiertes Prinzip	+	+	−	+	+	+	−
Wang-Prinzip	+	+	−	+	+	+	−

Tabelle 2.1: Prämienkalkulationsprinzipien und deren Eigenschaften

+ ... Prinzip besitzt bestimmte Eigenschaft
− ... Prinzip besitzt bestimmte Eigenschaft nicht
◇ ... Spezialfälle

Spezialfälle

- Nullnutzenprinzip
  - Additivität: diese Eigenschaft gilt genau dann, wenn $u(x) = ax+b$ für $a > 0$ oder $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$ für $\min[\alpha, \beta] > 0$, wobei $u(\cdot)$ die Nutzenfunktion des Versicherungsunternehmens ist und x das Kapital des Unternehmens.
  - positive Homegenität: diese Eigenschaft gilt genau dann, wenn $u(x) = ax+b$ für $a > 0$
  - Iterativität: diese Eigenschaft gilt genau dann, wenn $u(x) = ax+b$ für $a > 0$ oder $u(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$ für $\min[\alpha, \beta] > 0$, *siehe Additivität*
- Mittelwertprinzip

  siehe Berechnungen auf den folgenden Seiten

Eigenschafen des Mittelwertprinzips:

i) kein ungerechtfertiger Sicherheitszuschlag

$H[X] = v^{-1}(\mathbb{E}[v(X)]) = v^{-1}(v(C)) = C$

ii) positive Homogenität

- Zuerst wird mit einem Gegenbeispiel gezeigt, dass das Mittelwertprinzip im Allgemeinen nicht positiv homogen ist:
  Sei X eine Zufallsvariable, welche die Werte 1 und 2 mit Wahrscheinlichkeit je 1/2 annimmt.
  Sei $v(x) = x^2 + 2x$ für $x \geq 0$, dann ist $v^{-1}(x) = -1 + \sqrt{1+x}$.
  Somit erhält man
  $$\mathbb{E}[v(\lambda X)] = \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 4\lambda^2 + 4\lambda}{2} = \frac{5\lambda^2 + 6\lambda}{2}$$
  und
  $$\mathbb{E}[v(X)] = \frac{1+2}{2} + \frac{4+4}{2} = \frac{11}{2}.$$
  Daraus folgt
  $$\begin{aligned} H[\lambda X] &= v^{-1}\left(\mathbb{E}[v(\lambda X)]\right) \\ &= -1 + \sqrt{1 + \frac{5\lambda^2 + 6\lambda}{2}} \\ &\neq \lambda\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{11}{2}}\right) \\ &= \lambda v^{-1}\left(\mathbb{E}[v(X)]\right) \\ &= \lambda H[X]. \end{aligned}$$
- Nun wird gezeigt, dass das Mittelwertprinzip positiv homogen ist, wenn v von der Form $v(x) = ax + b$ für $a \geq 0$ ist. In diesem Fall ist $v^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ und man erhält:
  $$\begin{aligned} H[\lambda X] = v^{-1}(\mathbb{E}[v(\lambda X)]) &= \frac{\mathbb{E}[a(\lambda X) + b] - b}{a} \\ &= \frac{a\mathbb{E}[\lambda X] + b - b}{a} \\ &= \mathbb{E}[\lambda X] \\ &= \lambda\mathbb{E}[X] \\ &= \lambda\frac{\mathbb{E}[aX + b] - b}{a} \\ &= \lambda v^{-1}(\mathbb{E}[v(X)]) = \lambda H[X]. \end{aligned}$$

Satz 2.7: Das Mittelwertprinzip ist positiv homogen genau dann, wenn $v(x) = ax + b$ für $a > 0$, d.h. wenn es mit dem Nettoprämienprinzip übereinstimmt.

iii) Additivität

- Zuerst wird mit einem Gegenbeispiel gezeigt, dass die Additivitätseigenschaft im Allgemeinen nicht gilt:
  Seien X_1 und X_2 zwei unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen so, dass sie die Werte 0 und 1 mit Wahrscheinlichkeit je 1/2 annehmen, dann nimmt die Variable $X_1 + X_2$ die Werte 0, 1, und 2 mit den Wahrscheinlichkeiten 1/4, 1/2 und 1/4 an. Sei nun $g(x) = x^2$, so ist $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$ und man erhält

$$H[X_i] = \sqrt{\frac{0^2}{2} + \frac{1^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{für } i = 1, 2.$$

  Andererseits gilt für

$$\begin{aligned} H[X_1 + X_2] &= \sqrt{\frac{0^2}{4} + \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \\ &\neq \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= H[X_1] + H[X_2]. \end{aligned}$$

- Nun wird gezeigt, dass die Additivitätseigenschaft für das Mittelwertprinzip hält, wenn v von der Form $v(x) = ax + b$ ist für $a > 0$. Für v^{-1} erhält man $v^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$.
  Es gilt somit

$$\begin{aligned} H[X_1 + X_2] &= v^{-1}(\mathbb{E}[v(X_1 + X_2)]) \\ &= \frac{\mathbb{E}[a(X_1 + X_2) + b] - b}{a} \\ &= \frac{\mathbb{E}[aX_1 + b] - b + \mathbb{E}[aX_2]}{a} \\ &= \frac{\mathbb{E}[aX_1 + b] - b}{a} + \frac{\mathbb{E}[aX_2 + b] - b}{a} \\ &= v^{-1}(\mathbb{E}[v(X_1)]) + v^{-1}(\mathbb{E}[v(X_2)]) \\ &= H[X_1] + H[X_2]. \end{aligned}$$

- Desweiteren gilt die Additivitätseigenschaft für das Mittelwertprinzip für Funktionen der Form $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$ mit $\min[\alpha, \beta] > 0$. In diesem Fall ist $v^{-1}(x) = \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
H[X_1 + X_2] &= \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{\mathbb{E}[\alpha e^{\beta(X_1+X_2)} + \gamma] - \gamma}{\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{\beta} \log(\mathbb{E}[e^{\beta(X_1+X_2)}]) \\
&= \frac{1}{\beta} \log(\mathbb{E}[e^{\beta X_1} e^{\beta X_2}]) \\
&= \frac{1}{\beta} \log(\mathbb{E}[e^{\beta X_1}]) + \frac{1}{\beta} \log(\mathbb{E}[e^{\beta X_2}]) \\
&= \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{\mathbb{E}[\alpha e^{\beta X_1} + \gamma] - \gamma}{\alpha}\right) + \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{\mathbb{E}[\alpha e^{\beta X_2} + \gamma] - \gamma}{\alpha}\right) \\
&= H[X_1] + H[X_2].
\end{aligned}$$

Satz 2.8: Das Mittelwertprinzip erfüllt die Additivitätseigenschaft genau dann, wenn $v(x) = ax + b$ für $a > 0$ oder $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$ für $\min[\alpha, \beta] > 0$. D.h. wenn es entweder mit dem Nettoprämienprinzip oder dem Exponentialprinzip übereinstimmt.

iv) Translationsinvarianz

- Auch hier gilt, dass das Mittelwertprinzip im Allgemeinen nicht translationsinvariant ist, wie man im folgenden Beispiel sehen wird:
Sei X eine Zufallsvariable, die die Werte 0 und 1 mit Wahrscheinlichkeit je 1/2 annimmt. Sei $v(x) = x^2$, somit ist $v^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
Dann gilt

$$\begin{aligned}
H[c + X] &= v^{-1}(\mathbb{E}[v(c + X)]) \\
&= \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{(1+c)^2}{2}} \\
&\neq c + \sqrt{1/2} \\
&= c + v^{-1}(\mathbb{E}[v(X)]) \\
&= c + H[X].
\end{aligned}$$

- Nun wird gezeigt, dass das Mittelwertprinzip für $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$ für $\min[\alpha, \beta] > 0$ translationsinvariant ist. Es ist $v^{-1}(x) = \frac{1}{\beta}\log\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)$ und man erhält

$$\begin{aligned}
H[c+X] &= \frac{1}{\beta}\log\left(\frac{\mathbb{E}[\alpha e^{\beta(c+X)} + \gamma] - \gamma}{\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{\beta}\log\left(\mathbb{E}[e^{\beta(c+X)}]\right) \\
&= \frac{1}{\beta}\log\left(\mathbb{E}[e^{\beta c}e^{\beta X}]\right) \\
&= \frac{1}{\beta}\log\left(e^{\beta c}\right) + \frac{1}{\beta}\log\left(\mathbb{E}\left[e^{\beta X}\right]\right) \\
&= c + \frac{1}{\beta}\log\left(\frac{\mathbb{E}[\alpha e^{\beta X} + \gamma] - \gamma}{\alpha}\right) \\
&= c + H[X].
\end{aligned}$$

- Nun wird auch noch gezeigt, dass das Mittelwertprinzip translationsinvariant ist, wenn v von der Form $v(x) = ax + b$ für $a > 0$ ist. Dann ist $v^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ und es gilt

$$\begin{aligned}
H[c+X] &= \frac{\mathbb{E}[a(c+X) + b] - b}{a} \\
&= \frac{\mathbb{E}[aX + b] + ac - b}{a} \\
&= \frac{\mathbb{E}[aX + b] - b}{a} + c \\
&= H[X] + c.
\end{aligned}$$

Satz 2.9: Das Mittelwertprinzip ist translationsinvariant genau dann, wenn $v(x) = ax + b$ für $a > 0$ oder $v(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$ für $\min[\alpha, \beta] > 0$, d.h. wenn es mit dem Nettoprämien- oder dem Exponentialprinzip übereinstimmt.

v) Erwartungsübersteigend

$$\begin{aligned}
H[X] &= v^{-1}(\mathbb{E}[v(X)]) \\
&\geq v^{-1}(v(\mathbb{E}[X])) \qquad \text{da } v'' \geq 0, \text{ mit der Jensenschen Ungleichung} \\
&= \mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

vi) No-Rip-Off

$$\begin{aligned} H[X] &= v^{-1}(\mathbb{E}[v(X)]) \\ &\leq v^{-1}(\mathbb{E}[v(\text{esssup}[X]]) \\ &= v^{-1}(v(\text{esssup}[X])) \\ &= \text{esssup}[X]. \end{aligned}$$

vii) Iterativität

Um zu zeigen, dass die Iterativität für das Mittelwertprinzip gilt, wird an zwei Dinge erinnert:

- $H[X] = v^{-1}(\mathbb{E}[v(X)])$
- $v(H[X]) = \mathbb{E}[v(X)]$

Außerdem wird folgende Gleichheit verwendet:

- $\mathbb{E}[v(X|Y)] = \mathbb{E}[v(X)|Y]$

Somit kann diese Eigenschaft gezeigt werden:

$$\begin{aligned} H[H[X|Y]] &= v^{-1}(\mathbb{E}[v(H[X|Y])]) \\ &= v^{-1}(\mathbb{E}[\mathbb{E}[v(X|Y)]]) \\ &= v^{-1}(\mathbb{E}[\mathbb{E}[v(X)|Y]]) \\ &= v^{-1}(\mathbb{E}[v(X)]) \\ &= H[X]. \end{aligned}$$

Kapitel 3

Orlicz-Räume

Im Folgenden wird die Theorie der Orlicz-Räume genauer untersucht, *vgl. [KR], [MN], [SC], [KU].*

3.1 Wiederholung

Eine $\mathbb{R}$-wertige Funktion $\Phi(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle x_1 und $x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Phi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[\Phi(x_1) + \Phi(x_2)] \tag{3.1}$$

Für eine konvexe Funktionen liegt also die Verbindungsstrecke von je zwei Funktionswerten über dem Graphen der Funktion:

$$\Phi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha\Phi(x_1) + (1-\alpha)\Phi(x_2) \qquad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{3.2}$$

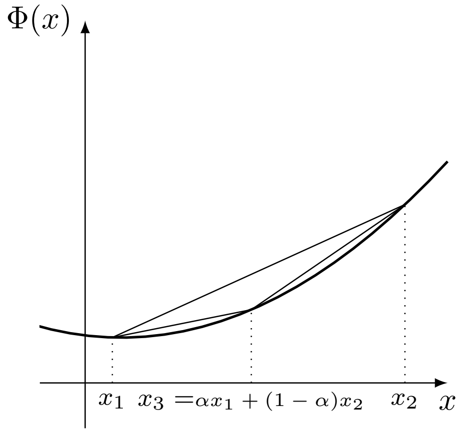

Abbildung 3.1: konvexe Funktion

Lemma 3.1: Eine stetige konvexe Funktion $\Phi(x)$ besitzt an jedem Punkt eine rechte Ableitung $g_+(x)$ und eine linke Ableitung $g_-(x)$, sodass gilt

$$g_-(x) \leq g_+(x). \tag{3.3}$$

Definition 3.2: Eine Funktion $\Phi : [x, y] \to \mathbb{R}$ heißt *absolut stetig*, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede endliche Familie von disjunkten Intervallen (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$ in $[x, y]$, gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=i}^{n} |\Phi(y_i) - \Phi(x_i)| < \epsilon. \tag{3.4}$$

Lemma 3.3: Eine konvexe Funktion $\Phi(x)$ ist absolut stetig und genügt auf jedem endlichen Intervall der Lipschitzbedingung

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq c|x - y|, \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R} \text{ und } c \text{ konstant.}$$

Satz 3.4: Jede konvexe Funktion $\Phi(x)$, für die $\Phi(a) = 0$ gilt, kann geschrieben werden als

$$\Phi(x) = \int_a^x g(t)dt, \tag{3.5}$$

wobei $g(t)$ eine nicht-fallende, linksstetige Funktion ist.

3.2 Young-Funktionen

Definition 3.5: Eine Abbildung $\Phi(x) : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ heißt *Young-Funktion*, wenn sie folgender Schreibweise genügt:

$$\Phi(x) = \int_0^x g(t)dt, \tag{3.6}$$

wobei $g(t)$

1. linksstetig für $t \geq 0$,
2. positiv für $t > 0$
3. und nicht-fallend ist.

Weiters muss sie den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g(\infty) &= \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Das heißt die Funktion soll von folgender Form sein:

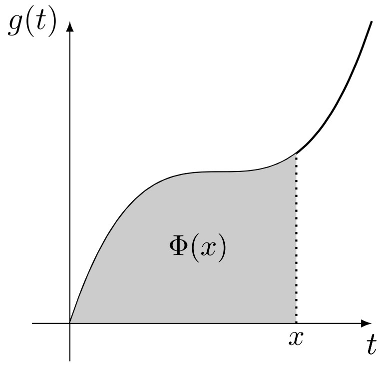

Abbildung 3.2: Young-Funktion

Bemerkung 3.6: Die *Young-Funktion* Φ hat folgende Eigenschaften:

- Φ ist stetig
- $\Phi(0) = 0$
- Φ ist monoton steigend: $\Phi(t) > \Phi(s)$ für $t > s$
- Φ ist konvex, denn:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) &= \int_0^{(x_1+x_2)/2} g(t)dt \\
&\leq \int_0^{x_1} g(t)dt + \frac{1}{2}\left[\int_{x_1}^{(x_1+x_2)/2} g(t)dt + \int_{(x_1+x_2)/2}^{x_2} g(t)dt\right] \\
&= \int_0^{x_1} g(t)dt + \frac{1}{2}\left[\int_0^{x_2} g(t)dt - \int_0^{x_1} g(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{x_1} g(t)dt + \int_0^{x_2} g(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\Phi(x_1) + \Phi(x_2)\right], \qquad \text{für } 0 \leq x_1 \leq x_2.
\end{aligned}$$

- Setzt man in (3.2) $x_2 = 0$, erhält man für $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\Phi(\alpha x_1) \leq \alpha \Phi(x_1). \tag{3.8}$$

- Aufgrund von (3.7) gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0 \tag{3.9}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty \tag{3.10}$$

da für $x > 0$ gilt:

$$\frac{\Phi(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt \geq \frac{1}{x}\int_{x/2}^x g(t)dt \geq g\left(\frac{x}{2}\right).$$

- Für $0 \leq \alpha \leq 1$ und $x \neq 0$ gilt:

$$\Phi(\alpha x) \leq \alpha \Phi(x). \tag{3.11}$$

Definition 3.7: Eine stetige und konvexe Funktion $\Phi(x)$ heißt *Young-Funktion*, wenn sie die Bedingungen (3.9) und (3.10) efüllt.

3.2.1 Komplementäre Young-Funktionen

Definition 3.8: Sei $g(t)$ eine Funktion welche

- positiv für $t \geq 0$,
- linksstetig für $t \geq 0$,
- und nicht-fallend ist
- und Bedingung (3.7) erfüllt.

Dann wird die Funktion $h(s)$ $(s \geq 0)$ definiert durch

$$h(s) = \sup_{g(t) \leq s} t. \tag{3.12}$$

Bemerkung 3.9: Die Funktion $h(s)$ hat folgende Eigenschaften *(vgl. Definition 3.5)*:

- $h(s)$ ist positiv für $s \geq 0$
- $h(s)$ ist linksstetig für $s \geq 0$
- $h(s)$ ist nicht-fallend
- $h(s)$ erfüllt die Bedingungen:

$$h(0) = 0, \qquad \lim_{s \to \infty} h(s) = \infty \tag{3.13}$$

Wenn $g(t)$ stetig und monoton steigend ist, dann ist $h(s)$ die gewöhnliche Inverse von $g(t)$. Umgekehrt ist $g(t)$ die Rechtsinverse von $h(s)$.

Definition 3.10: Die Funktionen

$$\Phi(x) = \int_0^x g(t)dt, \qquad \Psi(y) = \int_0^y h(s)ds$$

heißen *komplementäre Young-Funktionen.*

3.3 Youngsche Ungleichung

Es werden nun die Werte von $\Phi(x)$ und $\Psi(y)$ betrachtet:

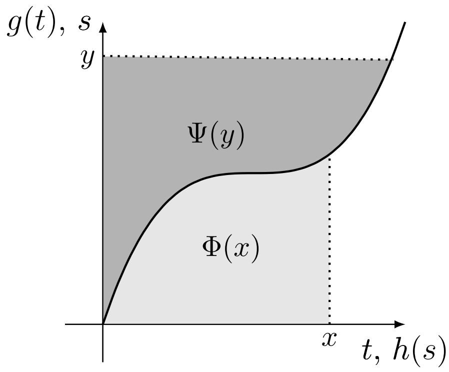

Abbildung 3.3: Young-Ungleichung

Geometrisch ist klar, dass die Ungleichung $xy \leq \Phi(x) + \Psi(y)$ gilt, denn das Rechteck xy ist immer kleiner gleich der Summe der komplementären Flächen $\Phi(x) + \Psi(y)$.

Da beide Funktionen gerade Funktionen sind, gilt diese Ungleichung für alle x und y - sie wird *Youngsche Ungleichung* genannt:

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y) \tag{3.14}$$

Aus der Ungleichung wird eine Gleichung wenn für gegebenes x gilt $y = g(x)$ bzw. wenn für gegebenes y gilt $x = h(y)$. Somit erhält man:

$$xg(x) = \Phi(x) + \Psi[g(x)] \tag{3.15}$$

und

$$yh(y) = \Phi[h(y)] + \Psi(y). \tag{3.16}$$

3.4 Die Orlicz-Klasse $\mathcal{L}_\Phi$

Sei Ω eine beschränkte, abgeschlossene Menge im endlich dimensionalen euklidischen Raum, mit dem Lebesgue-Maß versehen.

Definition 3.11: Sei $\Phi(x)$ eine Young-Funktion. Dann bezeichnet $\mathcal{L}_\Phi(\Omega)$ die Klasse der reellwertigen Funktionen, für die gilt

$$\rho_\Phi(x) = \int_\Omega \Phi[x(t)]dt < \infty. \tag{3.17}$$

Die Klassen $\mathcal{L}_\Phi(\Omega)$ werden *Orlicz-Klassen* genannt.

Bemerkung 3.12: Zur Orlicz-Klasse $\mathcal{L}_\Phi(\Omega)$ gehören alle beschränkten Funktionen, nicht aber alle integrierbaren Funktionen. Jede Funktion aus $\mathcal{L}_\Phi(\Omega)$ ist jedoch integrierbar.

Lemma 3.13: Jede Funktion $x(t)$, welche auf Ω integrierbar ist, liegt in einer Orlicz-Klasse.

Aus der Jensenschen Ungleichung folgt, dass die Orlicz-Klasse $\mathcal{L}_\Phi$ eine konvexe Menge ist, das heißt wenn $\mathcal{L}_\Phi$ zwei Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ enthält, dann enthält sie auch $x_\alpha(t) = \alpha x_1(t) + (1-\alpha)x_2(t)$ für $0 \leq \alpha \leq 1$.

Wenn also $x_1(t)$ und $x_2(t) \in \mathcal{L}_\Phi$, dann gilt

$$\begin{aligned} \rho_\Phi(x_\alpha) &= \int_\Omega \Phi[\alpha x_1(t) + (1-\alpha)x_2(t)]dt \\ &\leq \alpha\rho_\Phi(x_1) + (1-\alpha)\rho_\Phi(x_2) < \infty. \end{aligned}$$

3.5 Der Orlicz-Raum L_Φ

Seien $\Phi(x)$ und $\Psi(y)$ komplementäre Young-Funktionen. Mit $L_\Phi(\Omega)$ sei die Menge der Funktionen $x(t)$ bezeichnet, die der Bedingung

$$(x,y) = \int_\Omega x(t)y(t)dt < \infty$$

genügen für $y(t) \in \mathcal{L}_\Psi$.

Aufgrund der Youngschen Ungleichung (3.14) gilt für jedes Paar $x(t) \in \mathcal{L}_\Phi$, $y(t) \in \mathcal{L}_\Psi$:

$$(x,y) = \int_\Omega x(t)y(t)dt \leq \rho_\Phi(x) + \rho_\Psi(y). \tag{3.18}$$

Daraus folgt: $\mathcal{L}_\Phi \subset L_\Phi$

Definition 3.14: Die *Orlicz-Norm* auf L_Φ wird definiert durch

$$\|x\|_{(\Phi)} = \sup_{\rho_\Psi(y)\leq 1} |\int_\Omega x(t)y(t)dt|. \tag{3.19}$$

Die Definition der Norm (3.19) erfüllt die üblichen Norm-Eigenschaften:

- $\|x\|_{(\Phi)} = 0$ genau dann, wenn $x(t) = 0$ fast überall
- $\|\alpha x\|_{(\Phi)} = |\alpha|\|x\|_{(\Phi)}$
- $\|x_1 + x_2\|_{(\Phi)} \leq \|x_1\|_{(\Phi)} + \|x_2\|_{(\Phi)}$

Somit ist L_Φ zu einem normierten linearen Raum geworden, der *Orlicz-Raum* genannt wird.

Satz 3.15: Der Orlicz-Raum ist vollständig.

Da die Klasse $\mathcal{L}_\Phi$ im Raum L_Φ enthalten ist, gilt für jede Funktion $x(t) \in \mathcal{L}_\Phi$, dass

$$\|x\|_{(\Phi)} = \sup_{\rho_\Psi(y) \leq 1} |(x,y)| = \rho_\Phi(x) + 1 \tag{3.20}$$

Lemma 3.16: Sei $\|x\|_{(\Phi)} \leq 1$. Dann ist $x(t) \in \mathcal{L}_\Phi$ und $\rho_\Phi(x) \leq \|x\|_{(\Phi)}$.

Daraus folgt, dass

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{x(t)}{\|x\|_{(\Phi)}}\right) dt \leq 1 \tag{3.21}$$

Satz 3.17: Die Ungleichung

$$|\int_\Omega x(t)y(t)dt| \leq \|x\|_{(\Phi)}\|y\|_{(\Psi)} \tag{3.22}$$

gilt für Paare von Funktionen $x(t) \in L_\Phi$, $y(t) \in L_\Psi$ und wird *Hölder-Ungleichung* genannt.

3.5.1 Luxemburg-Norm

Für die Definition der Orlicz-Norm benötigt man immer auch die komplementäre Young-Funktion. Da diese nicht immer einfach zu ermitteln ist, wird eine neue Norm definiert, die L_Φ ebenfalls zu einem Banachraum macht, die Luxemburg-Norm:

Definition 3.18: Sei Φ eine Young-Funktion und x eine messbare Funktion, dann wird durch

$$\|x\|_\Phi = \inf\left\{a > 0 | \rho_\Phi\left(\frac{x}{a}\right) = \int_\Omega \Phi\left(\frac{x(t)}{a}\right) dt \leq 1\right\} \tag{3.23}$$

eine Norm definiert, welche *Luxemburg-Norm* genannt wird.

Mit Hilfe von (3.21) gilt für jede Funktion $x(t) \in L_\Phi$:

$$\|x\|_\Phi \leq \|x\|_{(\Phi)} \tag{3.24}$$

Kapitel 4

Orlicz-Prinzip

Im Folgenden wird ein Prämienkalkulationsprinzip betrachtet, welches auf Orlicz-Normen, genauer gesagt auf der Luxemburg-Norm, basiert.
Grundlage dieses Kapitels ist das Paper von J. Haezendonck und M. Goovaerts: „A new premium calculation principle based on Orlicz norms“, *vgl. [HG]*.

- Dieses Prinzip ist ein multiplikatives Äquivalent zum Nullnutzenprinzip.
- Wenn die Nutzenfunktion eine Young-Funktion ist, hat dieses neue Prinzip einen Zusammenhang mit Orlicz-Normen.

4.1 Einleitung

Es sei an das Mittelwertprinzip (*vgl. Kapitel 2.1.7, S. 17*) erinnert:

$$v(H[X]) = \mathbb{E}[v(X)] \tag{4.1}$$

wobei gilt, dass v eine Verlustfunktion, also $v' > 0$ (monton wachsend) und $v'' \geq 0$ (konvex) ist.

Unter der Annahme, dass ein Rückversicherer den Anteil zX des Risikos übernimmt und dass ihm auch der Anteil $zH[X]$ der Prämie übrig bleibt, erhält der Versicherer einen Anteil der Prämie von $(1-z)H[X]$. Wenn $zH[X]$ eine gute Näherung für das Risiko, welches vom Rückversicherer übernommen wird, so erhält man den Anteil des übrigen Risikos durch

$$Y = X - zH[X] \tag{4.2}$$

Mit dem Mittelwertprinzip gilt nun:

$$v((1-z)H[X]) = \mathbb{E}[v(X - zH[X])] \tag{4.3}$$

Da das Mittelwertprinzip im Allgemeinen nicht translationsinvariant ist *(vgl. S. 25f)*, wird man für die Gleichungen (4.1) und (4.3) verschiedene Lösungen erhalten. Somit wird durch (4.3) ein neues Prämienkalkulationsprinzip hervorgerufen: das Schweizer Prämienkalkulationsprinzip (*vgl. Kapitel 2.1.9, S. 18*)
Wie auf Seite 23f gezeigt, ist das Mittelwertprinzip im Allgemeinen nicht homogen,

sodass im Fall einer proportionalen Rückversicherung mit Prämie $aH[X]$ für das Risiko aX folgende Gleichung nicht erfüllt ist

$$v(aH[X]) = \mathbb{E}[v(aX)]. \tag{4.4}$$

Sei nun $a = h/H[x]$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
v\left(\frac{h}{H[X]}H[X]\right) &= \mathbb{E}\left[v\left(\frac{h}{H[X]}X\right)\right] \\
v(h) &= \mathbb{E}\left[v\left(\frac{hX}{H[X]}\right)\right] \\
v(h) &= \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{H[X]}\right)v(h)\right] \qquad \text{für } \Phi(x) = \frac{v(hx)}{v(h)},
\end{aligned}$$

also

$$1 = \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{H[X]}\right)\right]. \tag{4.5}$$

Klarerweise gilt $\Phi(1) = v(h \cdot 1)/v(h) = 1$, $\Phi'(x) > 0$ und $\Phi''(x) \geq 0$.

Im Folgenden wird das Prämienkalkulationsprinzip

$$1 = \mathbb{E}[\Phi(X/H[X])] \qquad \textit{(vgl. 4.5)}$$

für beschränkte Risiken definiert und einige Eigenschaften diskutiert. Mithilfe der Luxemburg-Norm wird gezeigt wie dieses Prinzip auf unbeschränkte Risiken ausgeweitet werden kann.

Bemerkung 4.1: Das Prämienkalkulationsprinzip (4.5) ist multiplikativ äquivalent zum Nullnutzenprinzip

$$\mathbb{E}[u(X - H[X])] = 0$$

4.2 Notation, Terminologie und vorläufige Ergebnisse

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathbb{R}$. Mit $\mathbb{P}_X$ wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X bezeichnet. Der Erwartungswert wird mit $\mathbb{E}[X]$ bezeichnet.

Sei $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen und $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup 0$.

L_1 sei der Vektorraum aller auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ integrierbaren Zufallsvariablen X, sodass $\mathbb{E}[X] < \infty$. Wenn gilt $X \in L_1$ und $\mathcal{B}$ ist eine Sub-Sigma-Algebra von $\mathcal{A}$, dann ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ die bedingte Erwartung von X gegeben der Information $\mathcal{B}$.

Sei

- $L_1^+ = \{X \in L_1 | X \geq 0 \ f.s.\}$
- $L_\infty^+ = \{X \in L_1^+ | X \leq C \ f.s. \text{ für } C \ konstant\}$

Eine Zufallsvariable $X \in L_1^+$ heißt *Risiko*. Wenn $X \in L_\infty^+$ heißt X ein *beschränktes Risiko*.

Definition 4.2: Nun wird eine *partielle Ordnung* auf L_1^+ definiert, welche auch *stop-loss-Ordnung* genannt wird:

$$X \prec Y \text{ wenn } \mathbb{E}[(X-t)\mathbb{I}_{(X\geq t)}] \leq \mathbb{E}[(Y-t)\mathbb{I}_{(Y\geq t)}] \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_0^+ \tag{4.6}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X-t)\mathbb{I}_{(X\geq t)}] &= \int_{\mathbb{R}^+} (X-t)\mathbb{I}_{(X\geq t)}\mathbb{P}_X(dx) \\
&= \int_0^\infty (X-t)\mathbb{I}_{(X\geq t)}\mathbb{P}_X(dx) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathbb{I}_{(0,X-t)}(u)du\right)\mathbb{P}_X(dx) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathbb{I}_{(0,X-t)}(u)\mathbb{P}_X(dx)\right)du \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}_X(\{x : x \in \mathbb{R}^+, x-t > u\})du \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}[X > u+t]du \\
&= \int_t^\infty \mathbb{P}[X > u]du.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Somit ist (4.6) äquivalent zu

$$\int_t^\infty \mathbb{P}[X > u]du \leq \int_t^\infty \mathbb{P}[Y > u]du \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_0^+ \tag{4.8}$$

Bemerkung 4.3: Es gilt $X \prec Y$ und $Y \prec X$ genau dann, wenn $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

4.2.1 Wiederholung Young-Funktion und Orlicz-Raum

Eine Young-Funktion Φ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, die als Integral der Form

$$\Phi(x) = \int_0^x g(t)dt \tag{4.9}$$

dargestellt werden kann, wobei $g(t)$ eine linksstetige, monoton steigende reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}_0^+$ ist mit $g(0) = 0$ und $\lim_{x \nearrow \infty} g(x) = \infty$. Die Funktion g wird Kern der Young-Funktion Φ genannt.

Man sieht leicht, dass Φ stetig, konvex und streng steigend ist auf $(\Phi > 0)$ *(vgl. Bemerkung 3.6, S. 30)*.

Zum Beispiel ist die Young-Funktion zu $g(x) = \alpha e^{\alpha x} - \alpha$ ($\alpha > 0$) gegeben durch:

$$\Phi(x) = \int_0^x \alpha e^{\alpha y} - \alpha dy$$

$$\Phi(x) = \frac{\alpha e^{\alpha y}}{\alpha} - \alpha y \Big|_0^x$$

$$\Phi(x) = e^{\alpha x} - \alpha x - 1$$

Wenn $g(x) = \begin{cases} \alpha e^{\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ dann ist $\Phi(x) = e^{\alpha x} - 1$.

In diesem Abschnitt kann die Bedingung $g(0) = 0$ wegfallen, da sie nicht wichtig ist.

Eine Young-Funktion $\Phi(x)$ heißt *normiert*, wenn $\Phi(1) = 1$. Jede Young-Funktion mit $\Phi(1) > 0$ kann durch $\Phi(x)/\Phi(1)$ normiert werden.

Satz 4.4: Sei Φ eine Young-Funktion. Die Menge L_Φ aller Zufallsvariablen X sodass $\mathbb{E}[\Phi(|X|/a)] \leq 1$ für ein $a > 0$, ist ein Unterraum von L_1 und

$$\|X\|_\Phi = \inf\{a > 0 | \mathbb{E}[\Phi(|X|/a)] \leq 1\}$$

ist eine Norm auf L_Φ, d.h.

1. $\|X\|_\Phi \geq 0$; $\|X\|_\Phi = 0$ genau dann, wenn $X = 0$ f.s.,
2. $\|aX\|_\Phi = |a| \|X\|_\Phi$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
3. $\|X + Y\|_\Phi \leq \|X\|_\Phi + \|Y\|_\Phi$

L_Φ wird *Orlicz-Raum* genannt und $\|X\|_\Phi$ ist die Luxemburg-Norm *(vgl. Definition 3.18, S. 34)* von X zur Young-Funktion Φ.

Es folgen nun ein paar Hilfssätze, die für weitere Resultate benötigt werden:

Lemma 4.5: Wenn f eine monoton steigende Abbildung von $\mathbb{R}_0^+$ nach $\mathbb{R}_0^+$ und X, $Y \in L_1^+$ so beschaffen sind, dass $X \prec Y$, dann gilt

$$\int_0^\infty \mathbb{P}[X > t] f(t) dt \leq \int_0^\infty \mathbb{P}[Y > t] f(t) dt. \tag{4.10}$$

Beweis. Sei $\int_0^\infty \mathbb{P}[Y > t] f(t) dt < \infty$ und

$$f = \lim_{n \nearrow} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n2^n} \mathbb{I}_{(f \geq k/2^n)}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathbb{P}[Y>t]f(t)dt &= \int_0^\infty \lim_{n\nearrow} \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n2^n} \mathbb{P}[Y>t]\mathbb{I}_{(f\geq k/2^n)}(t)dt && \text{einsetzen}\\
&= \lim_{n\nearrow} \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n2^n} \int_0^\infty \mathbb{P}[Y>t]\mathbb{I}_{(f\geq k/2^n)}(t)dt && \text{mon. Konvergenz}\\
&\geq \lim_{n\nearrow} \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n2^n} \int_0^\infty \mathbb{P}[X>t]\mathbb{I}_{(f\geq k/2^n)}(t)dt && \text{vgl. (4.8)}\\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}[X>t]f(t)dt. && \text{einsetzen}
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.6: Sei Φ eine Young-Funktion. Wenn gilt, dass $X, Y \in L_1^+$ und $X \prec Y$, dann ist

$$\mathbb{E}[\Phi(X)] \leq \mathbb{E}[\Phi(Y)]. \tag{4.11}$$

Beweis. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\mathbb{E}[\Phi(X)] = \mathbb{E}\left[\int_0^X g(t)dt\right] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X>t)g(t)dt$$

und Lemma 4.5 liefert das gewünschte Ergebnis. □

Lemma 4.7: Sei Φ eine streng konvexe Young-Funktion, d.h.

$$\Phi(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda\Phi(x) + (1-\lambda)\Phi(y) \tag{4.12}$$

immer wenn $x \neq y$ und $0 < \lambda < 1$.

Wenn $X \in L_1^+$ dann gilt

$$\Phi(\mathbb{E}[X]) < \mathbb{E}[\Phi(X)] \tag{4.13}$$

außer wenn $X = constant\ f.s.$

Beweis. Die Jensensche Ungleichung liefert: $\Phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\Phi(X)]$.
Um die strenge Ungleichung zu beweisen, sei angemerkt, dass für nichtkonstante X gilt:

$$\mathbb{P}[X > \mathbb{E}[X]] > 0 \qquad \mathbb{P}[X < \mathbb{E}[X]] > 0$$

Für $B := (X < \mathbb{E}[X])$ und

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{1}{\mathbb{P}[B]}\mathbb{E}[X\cdot\mathbb{I}_B] \qquad \mathbb{E}[X|B^c] = \frac{1}{\mathbb{P}[B^c]}\mathbb{E}[X\cdot\mathbb{I}_{B^c}]$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbb{E}[X]) &= \Phi(\mathbb{P}[B]\cdot\mathbb{E}[X|B] + \mathbb{P}[B^c]\cdot\mathbb{E}[X|B^c]) && \text{lt. Definition}\\
&< \mathbb{P}[B]\Phi(\mathbb{E}[X|B]) + \mathbb{P}[B^c]\Phi(\mathbb{E}[X|B^c]) && \text{vgl. (4.12)}\\
&= \mathbb{E}[\Phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{B}])] && \text{mit } \mathcal{B} = \{\Omega,\emptyset,B,B^c\}\\
&\le \mathbb{E}[\Phi(X)] && \text{Jensensche Ungleichung}
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.8: Sei Φ eine Young-Funktion. Wenn $X \in L_1^+$ und X ist ungleich 0 f.s., dann ist

$$\Psi(x) = \mathbb{E}[\Phi(X/x)] \tag{4.14}$$

eine Abbildung von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) Ψ ist rechtsstetig für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und stetig in jedem inneren Punkt von $(\Psi < \infty)$

ii) Ψ ist monoton fallend auf $\mathbb{R}^+$ und ist (streng) fallend auf $(\Psi < \infty)$

iii) $\lim_{x\to 0}\Psi(x) = \infty$

iv) $\lim_{x\to\infty}\Psi(x) = 0$ wenn $(\Psi < \infty) \neq \emptyset$.

4.3 Das neue Prinzip für beschränkte Risiken

Satz 4.9: Sei Φ eine normierte Young-Funktion (mit Kern g).

(1) Wenn $X \in L_\infty^+$ und X ist ungleich 0 $f.s.$, dann hat die Gleichung

$$\Psi(x) = \mathbb{E}[\Phi(X/x)] = 1 \tag{4.15}$$

genau eine Lösung.

(2) Sei $H[X]$ die Lösung von (4.15) und setze $H[X] = 0$ wenn $X = 0$ $f.s.$
$H[X]$ heißt Prämie zum beschränkten Risiko X.
Das Prämienkalkulationsprinzip hat dann folgende Eigenschaften:

(P1) $H[X] = H[Y]$ wenn $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

(P2) wenn $X = K$, konstant $f.s.$, dann gilt $H[X] = K$

(P3) *erwartungsübersteigend:* $\mathbb{E}[X] \le H[X]$

(P4) *Subadditivität:* $H[X+Y] \le H[X] + H[Y]$

(P5) *positive Homogenität:* $H[aX] = aH[X]$ wenn $a \in \mathbb{R}_0^+$

(P6) *Monotonie bzgl. der stochastischen Ordnung:* $H[X] \le H[Y]$ wenn $X \prec Y$

(P7) wenn $X \le K$ (konstant) $f.s.$, dann gilt $H[X] \le K$

(P8) wenn Φ streng konvex ist, dann gilt $\mathbb{E}[X] < H[X]$ außer wenn X konstant $f.s.$ ist.

Beweis. (1) Wenn $X \in L_\infty^+ = \{X \in L_1^+ | X \leq C\ f.s.$ für C konstant$\}$ dann gilt $(\Psi < \infty) = \mathbb{R}^+$.
Nach Lemma 4.8 gilt, dass Ψ stetig und (streng) fallend auf $\mathbb{R}^+$ ist, und dass $\lim_{x\to 0} \Psi(x) = \infty$ und, dass $\lim_{x\to\infty} \Psi(x) = 0$.

(2) Zum Beweis der Eigenschaften:

ad (P1) trivial

ad (P2) Wenn $X = K$ mit $K \neq 0$, dann ist $\Psi(x) = \Phi(K/x)$ und $H[X] = K$, da die Young-Funktion Φ durch $\Phi\left(\frac{K}{K}\right) = \Phi(1) = 1$ normiert ist.

ad (P3) Hierfür benötigt man folgendes Resultat:

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathbb{E}[X]) &= \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{\mathbb{E}[X]}\right)\right] && \text{lt. Definiton v. } \Psi \\
&\geq \Phi\left(\mathbb{E}\left[\frac{X}{\mathbb{E}[X]}\right]\right) && \text{Jensensche Ungleichung} \\
&= \Phi\left(\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X]}\right) \\
&= \Phi(1). \\
&= 1 && \text{da } \Phi \text{ normiert}
\end{aligned}$$

Da $H[X]$ die eindeutige Lösung von (4.15) ist und somit gilt, dass

$$\Psi(H[X]) = \mathbb{E}[\Phi(X/H[X])] = 1 \leq \Phi(\mathbb{E}[X/\mathbb{E}[X]]) = \Psi(\mathbb{E}[X])$$

folgt dass $\mathbb{E}[X] \leq H[X]$ist.

ad (P4) Mit Hilfe der folgenden Rechnung, in der die Konvexität von Φ verwendet wird, wird die Subadditivität gezeigt:
Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X+Y}{H[X]+H[Y]}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{H[X]+H[Y]} + \frac{Y}{H[X]+H[Y]}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{H[X]}{H[X]+H[Y]}\frac{X}{H[X]} + \frac{H[Y]}{H[X]+H[Y]}\frac{Y}{H[Y]}\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\frac{H[X]}{H[X]+H[Y]}\Phi\left(\frac{X}{H[X]}\right) + \frac{H[Y]}{H[X]+H[Y]}\Phi\left(\frac{Y}{H[Y]}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{H[X]}{H[X]+H[Y]}\Phi\left(\frac{X}{H[X]}\right)\right] + \mathbb{E}\left[\frac{H[Y]}{H[X]+H[Y]}\Phi\left(\frac{Y}{H[Y]}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{H[X]}{H[X]+H[Y]} \underbrace{\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{H[X]}\right)\right]}_{=1} + \frac{H[Y]}{H[X]+H[Y]} \underbrace{\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{Y}{H[Y]}\right)\right]}_{=1} \\
&= \frac{H[X]+H[Y]}{H[X]+H[Y]} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$H[X+Y] \leq H[X] + H[Y].$$

ad (P5) Diese Eigenschaft folgt aus

$$\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{aX}{aH[X]}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{H[X]}\right)\right] = 1 \qquad \text{für } a > 0.$$

ad (P6) Es ist bekannt, dass aus $X \prec Y$ folgt

$$\frac{X}{H[X]} \prec \frac{Y}{H[X]} \qquad \text{mit } H[X] \neq 0.$$

Somit gilt nach Lemma 4.6

$$1 = \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{H[X]}\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{Y}{H[X]}\right)\right]$$

und da $\Psi(H[Y]) = \mathbb{E}[\Phi(Y/H[Y]]$ gilt, folgt

$$H(X) \leq H(Y).$$

ad (P7) Folgt aus (P2) und (P6) mit $K = Y$.

ad (P8) Wenn Φ strikt konvex ist und X nicht konstant ist *f.s.*, dann gilt nach Lemma 4.7

$$
\begin{aligned}
\Psi(\mathbb{E}[X]) &= \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{\mathbb{E}[X]}\right)\right] \\
&> \Phi\left(\mathbb{E}\left[\frac{X}{\mathbb{E}[X]}\right]\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X]}\right) \\
&= \Phi(1) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Somit gilt $\mathbb{E}[X] < H[X]$ (vgl. Beweis von (P3)).

□

Bemerkung 4.10: Wie schon zu Beginn angemerkt wurde, ist dieses neue Prinzip auf L^+_∞, den beschränkten Risiken, eine multiplikative Version des Nullnutzenprinzips. Die Rolle der Nutzenfunktion im Nullnutzenprinzip wird hier von der Young-Funktion übernommen.

4.4 Prämienkalkulationsprinzip und Orlicz-Normen

Im Folgenden wird mit einem Gegenbeispiel gezeigt, dass Teil (1) von Satz 4.9 nicht mehr stimmt, sobald X ein unbeschränktes Risiko ist.

Beispiel 4.11: Sei

$$\Phi(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{e - 1} \tag{4.16}$$

eine normierte Young-Funktion und das Risiko X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mathbb{P}_X$ gegeben. Die Dichtefunktion ist gegeben durch

$$f_X(x) = K \frac{e^{-x^2}}{1 + x^2} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x), \tag{4.17}$$

wobei

$$\frac{1}{K} = \frac{\pi}{2} \cdot e \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-y^2} dy\right). \tag{4.18}$$

Für das Risiko X erhält man

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{x}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{e^{\frac{X^2}{x^2}} - 1}{e - 1}\right] \\
&= K \int_0^\infty \frac{e^{(y/x)^2} - 1}{e - 1} \cdot \frac{e^{-y^2}}{1 + y^2} dy.
\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \infty \qquad \text{für } 0 < x < 1, \\
\Psi(x) &< \infty \qquad \text{für } x \geq 1.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von:

$$\frac{1}{K} = \frac{\pi}{2} e \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-y^2} dy\right)$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{2}{\pi} \frac{1}{e\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-y^2} dy\right)}$$

gilt für $x = 1$:

$$\begin{aligned}
\Psi(1) &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{e\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-y^2} dy\right)} \int_0^\infty \frac{e^{y^2} - 1}{e - 1} \frac{e^{-y^2}}{1 + y^2} dy \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{1}{e - 1} \frac{1}{e\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-y^2} dy\right)} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-y^2}}{1 + y^2} dy
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{e-1}\frac{1}{e\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-y^2}dy\right)}\frac{\pi}{2}(1-e\cdot erfc(1)) \qquad \text{mit } erfc(1) = 1 - erf(1)^1$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}}_{=1}\frac{1}{e-1}\frac{1}{e\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty e^{-y^2}dy\right)}\left(1-e\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-y^2}dy\right)\right)$$

$$= \frac{1}{e-1}\left(\frac{1}{e\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-y^2}dy\right)} - \underbrace{\frac{e\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-y^2}dy\right)}{e\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-y^2}dy\right)}}_{=1}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} v = \sqrt{2}y \\ dv = \sqrt{2}dy \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{e-1}\left(\frac{1}{e\left(1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{2}} e^{-v^2/2}dv\right)} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{e-1}\left(\frac{1}{e\left(1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{2}} e^{-y^2/2}dy\right)} - 1\right)$$

$$< 1.$$

Somit hat die Gleichung $\Psi(x) = 1$ keine Lösung.

♦

Aus diesem Grund muss die Definition des Prinzipes für beschränkte Risiken aus dem vorigen Abschnitt modifiziert werden:

Definition 4.12: Sei Φ eine normierte Young-Funktion und betrachtet man den positiven Kegel L_Φ^+ von L_Φ, d.h.

$$L_\Phi^+ = \{X \in L_\Phi | X \geq 0 f.s.\}.$$

Wenn $X \in L_\Phi^+$, wird $H[X]$ folgendermaßen definiert:

$$H[X] := \|X\|_\Phi.$$

$H[X]$ heißt *Prämie* zum Risiko X.

[1] Errorfunction $erf(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-y^2}dy$

Satz 4.13: (1) Wenn $X \in L_\Phi^+$ und die Gleichung (4.15)

$$\Psi(x) = \mathbb{E}[\Phi(X/x)] = 1$$

eine Lösung hat, dann ist die Lösung eindeutig und gleich $H[X]$. Da $L_\infty^+ \subset L_\Phi^+$ ist das Prämienkalkulationsprinzip nach dieser Definiton eine Erweiterung des im Theorem 4.9 vorgestellten Prinzips.

(2) Die Eigenschaften (P1), (P2), (P3), (P4), (P5), (P6), (P7) und (P8) aus Satz 4.9 werden auch von diesem Prämienkalkulationsprinzip H auf L_Φ^+ erfüllt.

Beweis. (1) folgt aus Lemma 4.8

(2) Beweis der Eigenschaften:

ad (P1*) $H[X] = H[Y]$ für $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

trivial

ad (P2*) wenn $X = K$, konstant f.s , dann gilt $H[X] = K$

durch Teil (1) des Beweises und Satz 4.9

ad (P3*) *erwartungsübersteigend:* $\mathbb{E}[X] \leq H[X]$

wie in Satz 4.9 mithilfe von Lemma 4.8

ad (P4*) *Subadditivität:* $H[X+Y] \leq H[X] + H[Y]$

resultiert aus Satz 4.4 - Eigenschaften der Norm (3):
$\|X+Y\|_\Phi \leq \|X\|_\Phi + \|Y\|_\Phi$

ad (P5*) *positive Homogenität:* $H[aX] = aH[X]$ wenn $a \in \mathbb{R}_0^+$

resultieren aus Satz 4.4 - Eigenschaften der Norm (2):
$\|aX\|_\Phi = |a|\|X\|_\Phi$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

ad (P6*) *Monotonie bzgl. der stochastischen Ordnung:* $H[X] \leq H[Y]$ wenn $X \prec Y$

wie in Satz 4.9 mithilfe von Lemma 4.8

ad (P7*) wenn $X \leq K$ (konstant) f.s., dann gilt $H[X] \leq K$

wie in Satz 4.9 mithilfe von Lemma 4.8

ad (P8*) wenn Φ streng konvex ist, dann gilt $\mathbb{E}[X] < H[X]$ außer wenn X konstant f.s. ist.

wie in Satz 4.9 mithilfe von Lemma 4.8

□

Das folgende Theorem zeigt, dass dieses Prämienkalkulationsprinzip unter allgemeinen Bedingungen stabil ist.

Satz 4.14: Sei Φ eine normierte Young-Funktion. Wenn $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Risiken in L_Φ^+ ist, sodass

(1) $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ in Wahrscheinlichkeit gegen das Risiko X konvergiert.

(2) und ein $Y \in L_\Phi^+$ existiert mit

   (a) $X_n \prec Y$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   (b) $\Psi(x) = \mathbb{E}[\Phi(Y/x)] < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$

Dann ist $X \in L_\Phi^+$ und $\lim_n H[X_n] = H[X]$

Beweis. Der Beweis wird in vier Teile gegliedert:

i) Zuerst wird bewiesen, dass $X \prec Y$ und somit $X \in L_\Phi^+$.
Da die Folge von Verteilungen $\{\mathbb{P}_{X_n} : n \in \mathbb{N}\}$ schwach gegen die Verteilung $\mathbb{P}_X$ konvergiert, erhält man für jedes $t \in \mathbb{R}_0^+$ und jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int ((X-t) \wedge k) \cdot \mathbb{I}_{(X \geq t)} d\mathbb{P} &= \lim_n \int \mathbb{I}_{[t,\infty)}(x) \cdot ((x-t) \wedge k) d\mathbb{P}_{X_n}(x) \\ &\leq \limsup_n \int \mathbb{I}_{[t,\infty)}(x) \cdot (x-t) d\mathbb{P}_{X_n}(x) \\ &= \limsup_n \int (X_n - t)\mathbb{I}_{(X_n \geq t)} d\mathbb{P} \\ &\leq \int (Y-t)\mathbb{I}_{(Y \geq t)} d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Bildet man den Grenzwert über k, so erhält man

$$\mathbb{E}[(X-t)\mathbb{I}_{(X \geq t)}] \leq \mathbb{E}[(Y-t)\mathbb{I}_{(Y \geq t)}], \tag{4.19}$$

also $X \prec Y$ und somit $X \in L_\Phi^+$

ii) Als Nächstes wird gezeigt, dass $\Phi(X_n/\epsilon) \prec \Phi(Y/\epsilon)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$.
Natürlich kann angenommen werden, dass $\epsilon = 1$.
Für ein $a > 0$ existiert auch ein $b > 0$ sodass $\Phi(b) = a$. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\int_b^\infty \mathbb{P}[X_n > t] g(t) dt = \int_a^\infty \mathbb{P}[\Phi(X_n) > t] dt \tag{4.20}$$

Mithilfe von Lemma 4.5 und (4.20) schließt man

$$\int_a^\infty \mathbb{P}[\Phi(X_n) > t] dt \leq \int_a^\infty \mathbb{P}[\Phi(Y) > t] dt \qquad \text{für alle } a \geq 0 \tag{4.21}$$

Mit (4.8) gilt $\Phi(X_n) \prec \Phi(Y)$.

iii) Zuerst wird die Konvergenz von $\{H[X_n] : n \in \mathbb{N}\}$ gegen $H[X]$ für $X = 0$ $f.s$ bewiesen.

Da $H[X] = 0$ zeigt man, dass $\lim_n H[X_n] = 0$. Wenn dies nicht gelten würde, gäbe es ein $\epsilon > 0$ und eine Folge $\{n_l : l \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{N}$, sodass

$$H[X_{n_l}] > \epsilon. \tag{4.22}$$

Nun wird bewiesen, dass $\{\Phi(X_n/\epsilon) : n \in \mathbb{N}\}$ gleichmäßig integrierbar ist *(vgl. [KU], S. 225)*, d.h. für jedes $\delta > 0$ existiert ein $a \geq 0$, sodass

$$\int_{\left(\Phi\left(\frac{X_n}{\epsilon}\right)\geq a\right)} \Phi\left(\frac{X_n}{\epsilon}\right) d\mathbb{P} \leq \delta \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{4.23}$$

Aus Teil *(ii)* des Beweises ist bekannt, dass

$$\begin{aligned}\int_{\left(\Phi\left(\frac{X_n}{\epsilon}\right)\geq a\right)} \Phi\left(\frac{X_n}{\epsilon}\right) d\mathbb{P} &\leq \int_{\left(\Phi\left(\frac{Y}{\epsilon}\right)\geq a\right)} \Phi\left(\frac{Y}{\epsilon}\right) d\mathbb{P} \\ &\leq \int_{\left(\Phi\left(\frac{Y}{\epsilon}\right)\geq a\right)} \left(\Phi\left(\frac{Y}{\epsilon}\right) - a\right) d\mathbb{P} + a\mathbb{P}\left[\Phi\left(\frac{X_n}{\epsilon}\right) \geq a\right].\end{aligned} \tag{4.24}$$

Aus der Hypothese $\mathbb{E}[\Phi(Y/\epsilon)] < \infty$ folgt, dass es ein a_1 gibt, sodass

$$\int_{\left(\Phi\left(\frac{Y}{\epsilon}\right)\geq a_1\right)} \left(\Phi\left(\frac{Y}{\epsilon}\right) - a_1\right) d\mathbb{P} \leq \frac{1}{2}\delta. \tag{4.25}$$

Da Φ stetig ist findet man andererseits ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$a_1\mathbb{P}\left[\Phi\left(\frac{X_n}{\epsilon}\right) \geq a_1\right] \leq \frac{1}{2}\delta \qquad \text{für } n \geq n_0 \tag{4.26}$$

(4.24), (4.25) und (4.26) ergeben

$$\int_{\left(\Phi\left(\frac{X_n}{\epsilon}\right)\geq a_1\right)} \Phi\left(\frac{X_n}{\epsilon}\right) d\mathbb{P} \leq \delta \qquad \text{wenn } n \geq n_0 \tag{4.27}$$

Teil *(ii)* des Beweises und Lemma 4.6 liefern

$$\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X_n}{\epsilon}\right)\right] < \infty \qquad \text{für alle } n$$

Somit existiert ein a_2 mit

$$\int_{\left(\Phi\left(\frac{X_n}{\epsilon}\right)\geq a_2\right)} \Phi\left(\frac{X_n}{\epsilon}\right) d\mathbb{P} \leq \delta \qquad \text{für } n = 1, \dots n_0 - 1 \tag{4.28}$$

Wenn also $a = \sup(a_1, a_2)$ erhält man (4.23).

Aus der gleichmäßigen Integrierbarkeit der Folge $\{\Phi(X_n/\epsilon) : n \in \mathbb{N}\}$ folgt

$$\lim_n \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X_n}{\epsilon}\right)\right] = 0 \tag{4.29}$$

Aber aus (4.22) folgt

$$\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X_{n_l}}{\epsilon}\right)\right] > 1 \qquad \text{für jedes } l \in \mathbb{N} \tag{4.30}$$

Das ist ein Widerspruch zu (4.29)

iv) Für den Beweis des allgemeinen Falls verwendet man, dass

$$H[X] = H[X + X_n - X_n] \leq H[X_n + |X - X_n|] \leq H[X_n] + H[|X - X_n|]$$

und symmetrisch

$$H[X_n] \leq H[X] + H[|X - X_n|]$$

Somit gilt

$$|H[X] - H[X_n]| \leq H[|X - X_n|] \tag{4.31}$$

Desweiteren gilt

$$|X - X_n| = \sup(X, X_n) - X + X - \inf(X, X_n) \tag{4.32}$$

Das zeigt, dass

$$|H[X] - H[X_n]| \leq H[\sup(X, X_n) - X] + H[X - \inf(X, X_n)] \tag{4.33}$$

Also ist

$$\sup(X, X_n) - X \leq X_n \prec Y \qquad \text{und} \qquad X - \inf(X, X_n) \leq X \prec Y$$

Um den Beweis abzuschließen wendet man Teil *(iii)* des Beweises auf die Folgen $\{\sup(X, X_n) - X : n \in \mathbb{N}\}$ und $\{X - \inf(X, X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ an.

□

Bemerkung 4.15: Die Prämie $H[X]$ hängt vom Risiko X über dessen Verteilung $\mathbb{P}_X$ ab (vgl. Theorem 4.9, (P1)).
Bedingung (2) aus Satz 4.14 ist eine Hypothese über die Verteilung der Risiken. Somit könnte man sich fragen ob es möglich wäre in Satz 4.14 die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit der Folge von Risiken $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ gegen X durch schwache Konvergenz der Folge der Verteilungen $\{\mathbb{P}_{X_n} : n \in \mathbb{N}\}$ gegen die Verteilung $\mathbb{P}_X$ zu ersetzen.

Die Antwort ist: ja, man könnte dies machen. Es gibt den Satz von Dudley und Skorohod, der besagt, dass wenn $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}$ ist, welche schwach gegen die Wahrscheinlichkeitsverteilung Q konvergiert, dann existiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ eine Folge von Zufallsvariablen $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ und eine Zufallsvariable Z, sodass

1. $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ konvergiert gegen Z in Wahrscheinlichkeit
2. $\mathbb{P}_Z = Q$ und $\mathbb{P}_{Z_n} = Q_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 4.16: Sei Φ sei eine normierte Young Funktion. Wenn X ist ungleich 0 $f.s$, dann ist $H[X]$ die kleineste positive reelle Zahl a, sodass

$$\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right] \leq 1$$

$H[X]$ ist nicht unbedingt Lösung von (4.15). Nichtsdestotrotz, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass

$$\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{H[X]-\epsilon}\right)\right] < \infty, \tag{4.34}$$

dann ist $H[X]$ die einzige Lösung von Gleichung (4.15).

Kapitel 5

Beispiele

Um das Orlicz-Prinzip zu verdeutlichen werden nun noch ein paar Beispiele gerechnet, *vgl. [HG], [FE], [HU].*

5.1 Einführendes Beispiel

Sei $\Phi(x) = \lambda x + (1-\lambda)x^2$ und $0 \leq \lambda \leq 1$.
Dann ist $L_\Phi^+ = \{X | X \geq 0 \text{ } f.s., \text{ } \mathbb{E}[X^2] < \infty\}$
Zuerst berechnet man sich den Erwartungswert von $\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\lambda\frac{X}{a} + (1-\lambda)\frac{X^2}{a^2}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\lambda\frac{X}{a}\right] + \mathbb{E}\left[(1-\lambda)\frac{X^2}{a^2}\right] \\
&= \frac{\lambda}{a}\mathbb{E}[X] + \frac{1-\lambda}{a^2}\mathbb{E}[X^2].
\end{aligned}$$

Die Prämie $H[X]$ erhält man durch Gleichsetzen von $\Psi(a) = \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right]$ mit 1:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{a}\mathbb{E}[X] + \frac{1-\lambda}{a^2}\mathbb{E}[X^2] &= 1 \\
\frac{a\lambda\mathbb{E}[X] + (1-\lambda)\mathbb{E}[X^2]}{a^2} &= 1 \\
a\lambda\mathbb{E}[X] + (1-\lambda)\mathbb{E}[X^2] &= a^2 \\
a^2 - \lambda\mathbb{E}[X]a - (1-\lambda)\mathbb{E}[X^2] &= 0.
\end{aligned}$$

Eine kleine Nebenrechnung, in der die Lösungsformel für quadratische Gleichungen und der Steinerschen Verschiebungssatz angewendet wird, liefert:

$$
\begin{aligned}
a_{1,2} &= \frac{\lambda \mathbb{E}[X]}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 \mathbb{E}[X]^2}{4} + (1-\lambda)\mathbb{E}[X^2]} \\
&= \frac{\lambda}{2}\mathbb{E}[X] \pm \sqrt{\mathbb{E}[X]^2 \left(\frac{\lambda^2}{4} + (1-\lambda)\frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2}\right)} \\
&= \mathbb{E}[X]\left(\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (1-\lambda) + (1-\lambda)\frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2}}\right) \\
&= \mathbb{E}[X]\left(\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (1-\lambda)\frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X]^2} + (1-\lambda)\frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2}}\right) \\
&= \mathbb{E}[X]\left(\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 + (1-\lambda)\frac{\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X]^2}}\right) \\
&= \mathbb{E}[X]\left(\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 + (1-\lambda)\frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}}\right).
\end{aligned}
$$

Da die Prämie positiv sein soll, erhält man:

$$
H[X] = \mathbb{E}[X]\left(\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 + (1-\lambda)\frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}}\right). \tag{5.1}
$$

Nun betrachtet man die beiden extremen Fälle für λ:

- Für $\lambda = 1$ erhält man:

$$
H[X] = \mathbb{E}[X]\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \left(\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + 0\right)^{1/2}\right)}_{=1} = \mathbb{E}[X]. \tag{5.2}
$$

- Für $\lambda = 0$ erhält man:

$$
H[X] = \mathbb{E}[X]\left(\left(1 + \frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}\right)^{1/2}\right), \tag{5.3}
$$

was äquivalent ist zur L^2-Norm $\mathbb{E}[X^2]^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X]\left(1+\frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}\right)^{1/2} &= \mathbb{E}[X]\left(\frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X]^2}+\frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{E}[X]^2}\right)^{1/2} \\
&= \mathbb{E}[X]\left(\frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]^2}\right)^{1/2} \\
&= \mathbb{E}[X]\frac{\mathbb{E}[X^2]^{\frac{1}{2}}}{\mathbb{E}[X]} \\
&= \mathbb{E}[X^2]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Die Anwendung von Lemma 4.8 und Satz 4.9 auf diesen Fall, liefert folgende Stabilitätseigenschaft:
Sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von quadratisch integrierbaren Risiken, sodass

(1) die Folge der Verteilungsfunktionen $\{\mathbb{P}_{X_n} : n \in \mathbb{N}\}$ schwach gegen die Verteilung $\mathbb{P}_X$ des Risikos X konvergiert

(2) und ein quadratisch integrierbares Risiko Y existiert, sodass

$$X_n \prec X \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Dann ist X quadratisch integrierbar und es gilt $\lim_n H[X_n] = H[X]$.

Diese Stabilitätsbedingung gilt auch für folgende Prämienkalkulationsprinzipien:

1. Erwartungswertprinzip
   $\pi[X] = (1+\lambda)\mathbb{E}[X]$
2. Standardabweichungsprinzip
   $\pi[X] = \mathbb{E}[X] + \lambda\sqrt{\mathbb{V}[X]}$, für $\lambda > 0$
3. Varianzprinzip
   $\pi[X] = \mathbb{E}[X] + \lambda\mathbb{V}[X]$, für $\lambda > 0$
4. Semi-Varianzprinzip
   $\pi[X] = \mathbb{E}[X] + \lambda\mathbb{V}^+[X]$, für $\lambda > 0$
   mit $\mathbb{V}^+[X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2\mathbb{I}_{(X\geq\mathbb{E}[X])}]$

♦

5.2 Beispiel für Risiken welche der Gammaverteilung genügen

Sei Φ eine normierte Young-Funktion, gegeben durch

$$\Phi(x) = \frac{e^{\beta x} - 1}{e^{\beta} - 1} \qquad (\beta > 0) \tag{5.4}$$

und sei das Risiko X gammaverteilt, $X \sim Gam(\gamma, \theta)$.

Eine Zufallsvariable $X \sim Gam(\gamma, \theta)$ heißt gammaverteilt mit Parametern $\gamma > 0$ und $\theta > 0$, wenn die Dichte gegeben ist durch

$$f_X(x) = \frac{\gamma^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-\gamma x} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) \tag{5.5}$$

wobei die Gammafunktion $\Gamma(\theta)$ definiert ist als

$$\Gamma(\theta) = \int_0^\infty t^{\theta-1} e^{-t} dt \qquad \text{für } \theta \in \mathbb{C} \text{ mit positivem Realteil}$$

Für $\theta \in \mathbb{N}$ gilt: $\Gamma(\theta + 1) = \theta!$

Es gilt:

- Der Erwartungswert ist gegeben durch $\mathbb{E}[X] = \frac{\theta}{\gamma}$
- Die Varianz ist gegeben durch $\mathbb{V}[X] = \frac{\theta}{\gamma^2}$
- Die momenterzeugende Funktion ist gegeben durch

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tx}] = \left(\frac{\gamma}{\gamma - t}\right)^\theta$$

Dann ist $\Psi(a) = \mathbb{E}[\Phi(X/a)]$ gleich

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right] &= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\beta\frac{x}{a}} - 1}{e^\beta - 1} \cdot \frac{\gamma^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-\gamma x} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) dx \\
&= \frac{1}{e^\beta - 1} \int_0^\infty \left(e^{\beta\frac{x}{a}} - 1\right) \cdot \frac{\gamma^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-\gamma x} dx \\
&= \frac{1}{e^\beta - 1} \left(\underbrace{\int_0^\infty e^{\beta\frac{x}{a}} \frac{\gamma^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-\gamma x} dx}_{m_X\left(\frac{\beta}{a}\right)} - \underbrace{\int_0^\infty \frac{\gamma^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-\gamma x} dx}_{=1} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{e^\beta - 1}\left(\left(\frac{\gamma}{\gamma - \frac{\beta}{a}}\right)^\theta - 1\right)$$

$$= \frac{1}{e^\beta - 1}\left(\left(\frac{\gamma}{\frac{a\gamma-\beta}{a}}\right)^\theta - 1\right)$$

$$= \frac{1}{e^\beta - 1}\left(\left(\frac{a\gamma}{a\gamma - \beta}\right)^\theta - 1\right).$$

Um die Prämie $H[X]$ zu berechnen, setzt man nun $\Psi(a) = 1$:

1 $$1 = \frac{1}{e^\beta - 1}\left(\left(\frac{a\gamma}{a\gamma - \beta}\right)^\theta - 1\right)$$

2 $$e^\beta - 1 = \left(\frac{a\gamma}{a\gamma - \beta}\right)^\theta - 1$$

3 $$e^{\beta/\theta} = \frac{a\gamma}{a\gamma - \beta}$$

4 $$a\gamma = e^{\beta/\theta}a\gamma - \beta e^{\beta/\theta}$$

5 $$\beta e^{\beta/\theta} = a\gamma(e^{\beta/\theta} - 1)$$

6 $$a = \frac{\beta e^{\beta/\theta}}{\gamma(e^{\beta/\theta} - 1)}$$

7 $$a = \frac{\theta\beta e^{\beta/\theta}}{\theta\gamma(e^{\beta/\theta} - 1)}$$

8 $$a = \underbrace{\frac{\beta e^{\beta/\theta}}{\theta(e^{\beta/\theta} - 1)}}_{=:C_\beta}\mathbb{E}[X],$$

also:

$$H[X] = C_\beta \mathbb{E}[X]. \tag{5.6}$$

Für festes θ ist C_β steigend in β und es gilt:

$$\lim_{\beta\to 0} C_\beta = 1 \qquad\qquad \lim_{\beta\to\infty} C_\beta = \infty.$$

♦

5.3 Beispiel für Risiken welche der Wald-Verteilung genügen

Sei Φ wieder die normierte Young-Funktion (5.4), gegeben durch

$$\Phi(x) = \frac{e^{\beta x} - 1}{e^{\beta} - 1} \qquad (\beta > 0) \tag{5.7}$$

In diesem Fall besitze das Risiko X eine Wald-Verteilung.

Eine Zufallsvariable $X \sim IG(\gamma, \mu)$ genügt der Wald-Verteilung mit Parametern $\gamma > 0$ und $\mu > 0$ (auch inverse Normalverteilung bzw. inverse Gauß-Verteilung genannt), wenn die Dichte gegeben ist durch

$$f_X(x) = \left(\frac{\gamma}{2\pi x^3}\right)^{1/2} e^{\frac{-\gamma(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) \tag{5.8}$$

Es gilt:

- Der Erwartungswert ist gegeben durch $\mathbb{E}[X] = \mu$
- Die Varianz ist gegeben durch $\mathbb{V}[X] = \frac{\mu^3}{\gamma}$
- Die momenterzeugende Funktion ist gegeben durch

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tx}] = e^{\frac{\gamma}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2 t}{\gamma}}\right)}$$

Dann liefert der folgende Rechenvorgang das gesuchte $\Psi(a) = \mathbb{E}[\Phi(X/a)]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta x/a} - 1}{e^{\beta} - 1} \left(\frac{\gamma}{2\pi x^3}\right)^{1/2} e^{\frac{-\gamma(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) dx \\
&= \frac{1}{e^{\beta} - 1} \int_0^{\infty} \left(e^{\beta x/a} - 1\right) \left(\frac{\gamma}{2\pi x^3}\right)^{1/2} e^{\frac{-\gamma(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}} dx \\
&= \frac{1}{e^{\beta} - 1} \left(\underbrace{\int_0^{\infty} e^{\beta x/a} \left(\frac{\gamma}{2\pi x^3}\right)^{1/2} e^{\frac{-\gamma(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}} dx}_{m_X\left(\frac{\beta}{a}\right)} - \underbrace{\int_0^{\infty} \left(\frac{\gamma}{2\pi x^3}\right)^{1/2} e^{\frac{-\gamma(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}} dx}_{=1} \right) \\
&= \frac{1}{e^{\beta} - 1} \left(e^{\frac{\gamma}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2 \beta}{\gamma a}}\right)} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Um die Prämie $H[X]$ berechnen zu können setzt man nun $\Psi(a) = 1$:

1 $$1 = \frac{1}{e^{\beta} - 1}\left(e^{\frac{\gamma}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2\beta}{\gamma a}}\right)} - 1\right)$$

2 $$e^{\beta} - 1 = e^{\frac{\gamma}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2\beta}{\gamma a}}\right)} - 1$$

3 $$\beta \ln e = \frac{\gamma}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2\beta}{\gamma a}}\right)\ln e$$

4 $$1 - \frac{\mu\beta}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{2\mu^2\beta}{\gamma a}}$$

5 $$1 - \frac{2\mu\beta}{\gamma} + \frac{\mu^2\beta^2}{\gamma^2} = 1 - \frac{2\mu^2\beta}{\gamma}\frac{1}{a}$$

6 $$\frac{2\mu\beta\gamma - \mu^2\beta^2}{\gamma} = 2\mu^2\beta\frac{1}{a}$$

7 $$\frac{2\mu\beta\gamma - \mu^2\beta^2}{2\mu^2\beta\gamma} = \frac{1}{a}$$

8 $$\frac{2\mu^2\beta\gamma}{2\mu\beta\gamma - \mu^2\beta^2} = a.$$

Mithilfe der folgenden Umformung

$$\begin{aligned}
2\gamma\beta\mu - \beta^2\mu^2 =& \gamma^2 - \gamma^2 + 2\gamma\beta\mu - \beta^2\mu^2 \\
=& \gamma^2 - \mu^2\left(\frac{\gamma^2}{\mu^2} - \frac{2\gamma\beta}{\mu} + \beta^2\right) \\
=& \gamma^2 - \mu^2\left(\frac{\gamma}{\mu} - \beta\right)^2
\end{aligned}$$

kommt man dann auf das Ergebnis $H[X]$:

$$H[X] = \begin{cases} \frac{2\mu^2\beta\gamma}{\gamma^2 - \mu^2\left(\frac{\gamma}{\mu} - \beta\right)^2} & 0 < \beta < \frac{\gamma}{\mu} \\ \frac{2\mu^2\beta}{\gamma} & \beta \geq \frac{\gamma}{\mu}. \end{cases} \tag{5.9}$$

$H[X]$ ist steigend in β mit

$$\lim_{\beta \to 0} H[X] = \mu (= \mathbb{E}[X]) \qquad \lim_{\beta \to \infty} H[X] = \infty.$$

Für $\beta = \frac{\gamma}{\mu}$ erhält man

$$H[X] = \frac{2\mu^2\gamma\frac{\gamma}{\mu}}{\gamma^2 - \mu^2\underbrace{\left(\frac{\gamma}{\mu} - \frac{\gamma}{\mu}\right)^2}_{=0}} = \frac{2\gamma^2\frac{\mu^2}{\mu}}{\gamma^2} = 2\mu = 2\mathbb{E}[X]. \tag{5.10}$$

♦

5.4 Beispiel für Risiken welche der χ^2-Verteilung genügen

Sei gegeben die normierte Youngfunktion

$$\Phi(x) = \frac{e^{\beta x} - 1}{e^{\beta} - 1}$$

Das Risiko sei χ^2_n-verteilt, $X \sim \chi^2_n$.

Eine Zufallsvariable X genügt der χ^2_n-Verteilung mit Parameter n (Anzahl der Freiheitsgrade) , $X \sim \chi^2_n$, wenn die Dichte gegeben ist durch

$$f_X(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) \tag{5.11}$$

Es gilt:

- Der Erwartungswert ist gegeben durch $\mathbb{E}[X] = n$
- Die Varianz ist gegeben durch $\mathbb{V}[X] = 2n$
- Die momenterzeugende Funktion ist gegeben durch

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tx}] = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}}$$

Dann berechnet man sich $\Psi(a) = \mathbb{E}[\Phi(X/a)]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta\frac{x}{a}} - 1}{e^{\beta} - 1} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x) dx \\
&= \frac{1}{e^{\beta} - 1} \int_0^{\infty} \left(e^{\beta\frac{x}{a}} - 1\right) \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} dx \\
&= \frac{1}{e^{\beta} - 1} \left(\int_0^{\infty} e^{\beta\frac{x}{a}} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} dx - \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} dx\right) \\
&= \frac{1}{e^{\beta} - 1} \left(m_X\left(\frac{\beta}{a}\right) - 1\right) \\
&= \frac{1}{e^{\beta} - 1} \left(\frac{1}{\left(1 - 2\frac{\beta}{a}\right)^{\frac{n}{2}}} - 1\right).
\end{aligned}$$

Anschließend wird $\Psi(a)$ gleich 1 gesetzt und die Gleichung nach a aufgelöst:

1 $$1 = \frac{1}{e^{\beta}-1}\left(\frac{1}{\left(1-2\frac{\beta}{a}\right)^{\frac{n}{2}}}-1\right)$$

2 $$e^{\beta}-1 = \left(1-2\frac{\beta}{a}\right)^{-\frac{n}{2}}-1$$

3 $$e^{-\frac{2\beta}{n}} = 1-2\frac{\beta}{a}$$

4 $$e^{-\frac{2\beta}{n}}-1 = -2\frac{\beta}{a}$$

5 $$a = \frac{-2\beta}{e^{-\frac{2\beta}{n}}-1}$$

6 $$a = \frac{2\beta}{1-e^{-\frac{2\beta}{n}}}$$

7 $$a = \frac{2\beta e^{\frac{2\beta}{n}}}{e^{\frac{2\beta}{n}}\left(1-e^{-\frac{2\beta}{n}}\right)}$$

8 $$a = \frac{2\beta e^{\frac{2\beta}{n}}}{e^{\frac{2\beta}{n}}-1}$$

9 $$a = \underbrace{\frac{2\beta e^{\frac{2\beta}{n}}}{n\left(e^{\frac{2\beta}{n}}-1\right)}}_{=:C\beta}\mathbb{E}[X].$$

Also ist
$$H[X] = C_{\beta}\mathbb{E}[X].$$
Für festes n ist C_{β} steigend in β und es gilt:
$$\lim_{\beta\to 0} C_{\beta} = 1 \qquad \lim_{\beta\to\infty} C_{\beta} = \infty.$$

♦

5.5 Beispiel für Risiken welche durch einen Compound Poisson Prozess gegeben sind - Gammaverteilung

Im nächsten Beispiel verwendet man wieder die normierte Young-Funktion (5.4):

$$\Phi(x) = \frac{e^{\beta x} - 1}{e^{\beta} - 1} \qquad (\beta > 0)$$

Hier sei das Risiko X gegeben durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozess:

$$X = \sum_{i=0}^{N} Y_i \tag{5.12}$$

wobei

- $\{Y_i : i \in \mathbb{N}\}$ ist eine i.i.d. Folge von Zufallsvariablen
- $Y_0 = 0$
- N ist eine poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ
- N ist unabhänging von $\{Y_i : i \in \mathbb{N}\}$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right] &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{e^{\beta\frac{X}{a}} - 1}{e^{\beta} - 1}|N = j\right] \mathbb{P}[N = j] \\
&= \frac{1}{e^{\beta} - 1} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{\frac{\beta}{a}X} - 1|N = j\right] \mathbb{P}[N = j] \\
&= \frac{1}{e^{\beta} - 1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{\frac{\beta}{a}(Y_1+Y_2+\ldots+Y_j)}|N = j\right] \mathbb{P}[N = j] - \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}[N = j] \right) \\
&= \frac{1}{e^{\beta} - 1} \left(\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{\frac{\beta}{a}(Y_1+Y_2+\ldots+Y_j)}\right] \mathbb{P}[N = j]}_{m_X\left(\frac{\beta}{a}\right)} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{e^{\beta} - 1} \left(e^{\lambda\left(m_{Y_1}\left(\frac{\beta}{a}\right) - 1\right)} - 1 \right) \\
&\text{mit } m_X\left(\frac{\beta}{a}\right) = m_N\left(\log\left(m_{Y_1}\left(\frac{\beta}{a}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von $H[X]$ als Norm *(vgl. Satz 4.4)*:

$$\|X\|_{\Phi} = \inf\{a > 0 | \mathbb{E}[\Phi(|X|/a)] \leq 1\} \tag{5.13}$$

berechnet man sich nun

1 $1 \geq \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right]$

2 $1 \geq \frac{1}{e^{\beta} - 1}\left(e^{\lambda\left(m_{Y_1}\left(\frac{\beta}{a}\right)-1\right)} - 1\right)$

3 $e^{\beta} - 1 \geq e^{\lambda\left(m_{Y_1}\left(\frac{\beta}{a}\right)-1\right)} - 1$

4 $\beta \ln e \geq \left(\lambda\left(m_{Y_1}\left(\frac{\beta}{a}\right) - 1\right)\right)\ln e$

5 $\frac{\beta}{\lambda} \geq m_{Y_1}\left(\frac{\beta}{a}\right) - 1$

6 $\frac{\beta}{\lambda} + 1 \geq m_{Y_1}\left(\frac{\beta}{a}\right)$

7 $\frac{\beta + \lambda}{\lambda} \geq m_{Y_1}\left(\frac{\beta}{a}\right).$

Somit erhält man:

$$H[X] = \inf\left\{a > 0 | \mathbb{E}\left[e^{\beta\frac{Y_1}{a}}\right] \leq \frac{\beta + \lambda}{\lambda}\right\}. \tag{5.14}$$

Wenn nun $Y_i \sim Gam\,(\gamma, \theta)$ mit der Gammaverteilung versehen ist, d.h. die Momenterzeugendefunktion von der Form

$$m_{Y_1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \left(\frac{\gamma}{\gamma - \frac{\beta}{\alpha}}\right)^{\theta} \tag{5.15}$$

ist, erhält man die Prämie (5.6) durch Lösen der folgenden Gleichung

1 $\frac{\beta + \lambda}{\lambda} = \left(\frac{\gamma}{\gamma - \frac{\beta}{a}}\right)^{\theta}$

2 $\frac{(\beta + \lambda)^{1/\theta}}{\lambda^{1/\theta}} = \frac{\gamma a}{\gamma a - \beta}$

3 $(\beta + \lambda)^{1/\theta}(\gamma a - \beta) = \gamma a \lambda^{1/\theta}$

4 $\gamma a \left((\beta + \lambda)^{1/\theta} - \lambda^{1/\theta}\right) = \beta(\beta + \lambda)^{1/\theta}$

5 $a = \frac{\beta(\beta + \lambda)^{1/\theta}}{\gamma\left((\beta + \lambda)^{1/\theta} - \lambda^{1/\theta}\right)}$

6 $a = \frac{\theta\beta(\beta + \lambda)^{1/\theta}}{\theta\gamma\lambda^{1/\theta}\left(\frac{(\beta+\lambda)^{1/\theta}}{\lambda^{1/\theta}} - 1\right)}$

7 $a = \frac{\beta\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)^{1/\theta}}{\theta\left(\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)^{1/\theta} - 1\right)}\mathbb{E}[Y_1]$

8 $a = \frac{\beta\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)^{1/\theta}}{\theta\left(\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)^{1/\theta} - 1\right)}\mathbb{E}[Y_1]\frac{\mathbb{E}[N]}{\mathbb{E}[N]}$

9 $a = \frac{\beta\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)^{1/\theta}}{\theta\lambda\left(\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)^{1/\theta} - 1\right)}\mathbb{E}[X].$

Somit ist $H[X]$ gegeben durch:

$$H[X] = \underbrace{\frac{\beta\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)^{1/\theta}}{\theta\lambda\left(\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)^{1/\theta}-1\right)}}_{=:C_\beta}\mathbb{E}[X], \tag{5.16}$$

also

$$H[X] = C_\beta \mathbb{E}[X]. \tag{5.17}$$

Auch hier ist C_β eine steigende Funktion in $\beta > 0$ und es gilt:

$$\lim_{\beta\to 0} C_\beta = 1 \qquad\qquad \lim_{\beta\to\infty} C_\beta = \infty.$$

♦

5.6 Beispiel für Risiken welche durch einen Compound Poisson Prozess gegeben sind - Wald-Verteilung

In diesem Beispiel sei wieder die gleiche Young-Funktion und das gleiche Risiko X wie in Beispiel 5.5 gegeben. Nun sind hier die Y_i aber normal-invers verteilt (Dichte: siehe (5.8)). Somit erhält man

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{\beta\frac{Y_1}{a}}\right] &= m_{Y_1}\left(\frac{\beta}{a}\right) \\ &= e^{\frac{\gamma}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2\beta}{\gamma a}}\right)}.\end{aligned}$$

Anschließend berechnet man die Prämie durch Lösen der folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned} e^{\frac{\gamma}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2\beta}{\gamma a}}\right)} &= \frac{\beta+\lambda}{\lambda} \\ \frac{\gamma}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2\beta}{\gamma a}}\right)\ln e &= \ln\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right) \\ \sqrt{1-\frac{2\mu^2\beta}{\gamma a}} &= 1-\frac{\ln\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\mu}{\gamma} \\ 1-\frac{2\mu^2\beta}{\gamma a} &= \left(1-\frac{\ln\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\mu}{\gamma}\right)^2 \\ 1-\frac{2\mu^2\beta}{\gamma a} &= 1-\frac{2\ln\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\mu}{\gamma}+\frac{\ln^2\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\mu^2}{\gamma^2}\end{aligned}$$

$$\frac{2\mu^2\beta}{a} = \frac{2\ln\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\mu\gamma}{\gamma} - \frac{\ln^2\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\mu^2\gamma}{\gamma^2}$$

$$a = \frac{2\mu^2\beta\gamma}{2\ln\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\mu\gamma - \ln^2\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\mu^2}$$

$$a = \frac{2\mu^2\beta\gamma}{2\ln\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\mu\gamma - \ln^2\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\mu^2 + \gamma^2 - \gamma^2}$$

$$a = \frac{2\mu^2\beta\gamma}{\gamma^2 - \mu^2\left(\frac{\gamma^2}{\mu^2} - \frac{2\ln\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\gamma}{\mu} + \ln^2\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\right)}$$

$$a = \frac{2\mu^2\beta\gamma}{\gamma^2 - \mu^2\left(\frac{\gamma}{\mu} - \ln\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\right)^2}.$$

Somit ist $H[X]$ gegeben durch:

$$H[X] = \begin{cases} \frac{2\mu^2\beta\gamma}{\gamma^2-\mu^2\left(\frac{\gamma}{\mu}-\ln\left(\frac{\beta+\lambda}{\lambda}\right)\right)^2} & 0 < \beta < \lambda\left(e^{\gamma/\mu} - 1\right) \\ \frac{2\beta\mu^2}{\gamma} & \beta \geq \lambda\left(e^{\gamma/\mu} - 1\right), \end{cases} \tag{5.18}$$

und es gilt

$$\lim_{\beta\to 0} H[X] = \lambda\mu \qquad \lim_{\beta\to\infty} H[X] = \infty. \tag{5.19}$$

♦

Es hat sich gezeigt, dass die Wahl der Young Funktion (5.4) in jenen Fällen sinnvoll ist, in denen die momenterzeugende Funktion des Risikos X existiert und berechnet werden kann.

Eine weitere Young-Funktion wird im nächsten Beispiel behandelt:

5.7 Allgemeines Beispiel

Sei $\Phi(x)$ eine normierte Young-Funktion, gegeben durch

$$\Phi(x) = xe^{\beta(x^2-1)} \tag{5.20}$$

Das Risiko X hat folgende Dichte:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) \qquad \text{mit } (\sigma > 0) \tag{5.21}$$

Zuerst berechnet man wieder $\Psi(a)$, also $\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{a}e^{\beta\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2-1\right)}\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a\sigma}\int_0^{\infty} xe^{-x^2\left(\frac{1}{2\sigma^2}-\frac{\beta}{a^2}\right)-\beta}dx \\
&\qquad \text{sei } \left(\frac{1}{2\sigma^2}-\frac{\beta}{a^2}\right) =: \gamma \text{ und } \left|\begin{matrix} x^2\gamma - \beta = z \\ 2x\gamma dx = dz \end{matrix}\right| \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a\sigma}\int_{-\beta}^{\infty} xe^{-z}\frac{dz}{2x\gamma} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2a\sigma}\frac{1}{\gamma}e^{-\beta} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2a\sigma}\frac{1}{\left(\frac{1}{2\sigma^2}-\frac{\beta}{a^2}\right)}e^{-\beta}.
\end{aligned}$$

Nun setzt man $\Psi(a) = \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{X}{a}\right)\right]$ gleich 1 und löst nach a auf:

1 $$1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2a\sigma}\frac{1}{\left(\frac{1}{2\sigma^2}-\frac{\beta}{a^2}\right)}e^{-\beta}$$

2 $$1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\frac{1}{\left(\frac{2a}{2\sigma^2}-\frac{2a\beta}{a^2}\right)}e^{-\beta}$$

3 $$1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\frac{1}{\left(\frac{a}{\sigma^2}-\frac{2\beta}{a}\right)}e^{-\beta}$$

4 $$1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\frac{1}{\left(\frac{a^2-2\beta\sigma^2}{a\sigma^2}\right)}e^{-\beta}$$

5 $$1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a\sigma}{a^2-2\beta\sigma^2}e^{-\beta}$$

6 $$a^2 - 2\beta\sigma^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}a\sigma e^{-\beta}$$

7 $$a^2 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma e^{-\beta}a - 2\beta\sigma^2 = 0.$$

Um a zu berechnen wendet man nun die Lösungsformel für quadratische Gleichungen an:

$$
\begin{aligned}
a_{1,2} &= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma e^{-\beta}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma e^{-\beta}}{2}\right)^2 + 2\beta\sigma^2} \\
&= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}e^{-\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{2}{\pi}e^{-2\beta}\sigma^2 + 2\beta\sigma^2} \\
&= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}e^{-\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\frac{2}{\pi}e^{-2\beta}\sigma^2 + \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}2\beta\sigma^2} \\
&= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}e^{-\beta} \pm \sqrt{\sigma^2\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{4}e^{-2\beta} + \pi\beta\right)} \\
&= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}e^{-\beta} \pm \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{1}{4}e^{-2\beta} + \pi\beta} \\
&= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{2}e^{-\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{4}e^{-2\beta} + \pi\beta}\right).
\end{aligned}
$$

Da die Prämie $H[X]$ positiv sein muss erhält man als Ergebnis

$$
H[X] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{2}e^{-\beta} + \left(\frac{1}{4}e^{-2\beta} + \pi\beta\right)^{1/2}\right)\sigma.
$$

Auch hier ist $H[X]$ steigend in β mit

$$
\lim_{\beta\to 0} H[X] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = \mathbb{E}[X] \qquad \lim_{\beta\to\infty} H[X] = \infty.
$$

♦

Bemerkung 5.1: In den Beispielen 5.2 - 5.7 entspricht der Parameter β dem Gewicht, welches man großen Risiken geben möchten.
Für kleine Risiken ist β nicht so wichtig, da hier die Prämie nahe dem Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ liegt.
Da große Risiken immer wichtiger werden, muss man einen höheren Wert für β einsetzen, was wiederum bedeutet, dass die Prämie steigt.

Kapitel 6

Ausblick

In „Some new classes of consisten risk measures“ *[GO]* wird das Haezendonck Risikomaß als minimales Orlicz Risikomaß definiert. Als Voraussetzung dient, dass subadditive Risikomaße für komonotone Risiken konsistent sind mit dieser Eigenschaft des Prämienprinzips

$$H[X] \leq H[\alpha X] + H[(1-\alpha)X]$$

In „On Haezendonck risk measures“ *[BE]* wird gezeigt, dass die Subadditivität sogar für beliebige Paare von Risiken, und nicht nur für komonotone Risiken, gilt.

[BE] zeigt, dass das beste Beispiel für die Konstruktion des Haezendonck Risikomaßes der Conditional Value at Risk, *vgl. [RC], [RO]*, ist. Die Klasse von Haezendonck Risikomaßen kann sogar als Verallgemeinerung des Conditional Value at Risk gesehen werden.

Mit der Neudefinition des Haezendonck Risikomaßes als Infimum einer passenden Transformation der Orlicz-Prämie

$$\hat{\pi}_\alpha(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{H_\alpha((X-x)^+) + x\} \qquad \text{für alle } X \in L_\infty \tag{6.1}$$

wird untersucht ob das Infimum immer angenommen wird oder nicht, da der Conditional Value at Risk so ein Infimum erreichen kann. Es zeigt sich, dass es für $\alpha = 0$ erreicht werden kann oder auch nicht, während es für $\alpha \in (0,1)$ immer erreicht wird.
In weiterer Folge wird untersucht wie das Risikomaß (6.1) so ausgebaut werden kann, dass es die Anforderungen an ein kohärentes Risikomaß erfüllt.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

[BE] Bellini, Fabio/ Gianin, Emanuela Rosazza: *On Haezendonck risk measures*, Journal of Banking & Finance 32, 2008.

[DR] Drozdenko, Myroslav/ Drozdenko, Vitaliy: *Premium Calculation Principles and their properties, Mathematics of Insurance*, VDM Verlag Dr. Müller, Saarbrücken, 2009.

[FE] Felsenstein, Klaus: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Skriptum zur gleichnamigen Vorlesung an der TU-Wien, 2009.

[GE] Gerber, Hans U.: *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Library of Congress, 1979.

[GO] Goovaerts, Marc J./ Kaas, Rob/ Dhaene, Jan/ Tang Qihe: *Some new classes of consistent risk measures*, Insurance: Mathematics and Economics 34, 2004.

[HG] Haezendonck, Jean/ Goovaerts, Mark: *A new premium calculation principle based on Orlicz norms*, Insurance: Mathematics and Economics 1, North-Holland Publishing Company, 1982.

[HU] Hubalek, Friedrich: *Risiko- und Ruintheorie*, Vorlesungsmitschrift, TU Wien, Wintersemester 2012/13.

[KR] Krasnoselskii, Mark Alexandrovich/ Rutickii Ya. B.: *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Nordhoff, Groningen , 1961.

[KU] Kusolitsch, Norbert: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*, Skriptum, TU Wien, 13. Jänner 2010.

[MN] Müller, Nora: *Orlicz Räume, Ausarbeitung im Rahmen des Seminars: Evolutionsgleichungen, Prof. Dr. Etienne Emmrich*, `https://www.math.uni-bielefeld.de/~emmrich/studenten/nora.pdf` Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, 2011.

[PF] Pfeiffer, Christoph: *Einführung in die Rückversicherung: das Standardwerk für Therorie und Praxis*, 5. Auflage bearbeitet von Jan von der Thüsen, Gabler Verlag, Wiesbaden, 1999.

[RC] Rockafellar, R.T./ Uryasev, S: *Conditional value-at-risk for general loss distributions*, Journal of Banking and Finance 26, 2002.

[RO] Rockafellar, R.T./ Uryasev, S: *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk 2, 2000.

[SC] Scharle, Toni: *Orlicz Räume*, `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~diening/ws13/huette/vortraege/scharle.pdf` Vortrag - LMU München, 2013.

[SP] Spodarev, Evgeny: *Stochastische Risikotheorie*, Vorlesungsskript, Universität Ulm, 2009.

[SW] Schweizerische Rückversicherungs-Gesellschaft, Technical Training, Chief Underwriting Office: *Einführung in die Rückversicherung*, Swiss Re, Zürich, 2002.

[ZG] Zwirchmayr, Alexander/ Grandits, Peter: *Sachversicherungsmathematik*, Skriptum zur Vorlesung, TU Wien, 2008.