D I P L O M A R B E I T

Konsistente Bewertung mit Hilfe von quadratischen Hedgingansätzen

Ausgeführt am Institut für

Stochastik und Wirtschaftsmathematik
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer

durch

Alexander Hellmann, BSc
Abelegasse 30/6
1160 Wien

Wien, 2. Mai 2016

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei Herrn Prof. Thorsten Rheinländer für die Möglichkeit der Durchführung dieser Diplomarbeit und seiner damit verbundenen Betreuung bedanken.

Ein ganz besonderer Dank richtet sich an meine Familie und insbesondere an meine Eltern und meine Schwester, die mich in allen Lebensbereichen unterstützten und mir dadurch die Durchführung und Absolvierung dieses Studiums ermöglichten.

Großer Dank gebührt an dieser Stelle auch meinen Freunden, Studien- und Arbeitskollegen, die mir das Leben während des Studiums erleichtert haben. Besonders an Brigitte, Jacqueline, July und Philip ein großes Dankeschön.

Im Speziellen möchte ich mich auch bei meiner Freundin Alexandra für die schöne Zeit während und neben dem Studium bedanken und dafür, dass sie mir in Zeiten der Demotivation und bei Schwierigkeiten immer zur Seite steht und mich unterstützt.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst habe, dass ich die verwendeten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe, und dass ich die Stellen der Arbeit, einschließlich Tabellen und Abbildungen, die anderen Werken oder dem Internet im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Wien, 2. Mai 2016

Zusammenfassung

Diese Arbeit gibt einen Überblick über quadratische Hedgingansätze und deren Bezug auf optimale Strategien. Hierbei werden verschiedene Risikominimierungsmethoden betrachtet und die unterschiedlichen Werkzeuge und Ergebnisse analysiert. Eine dieser Methoden ist das Mean Variance Hedging, welches als Grundlage für die marktkonsistente Bewertung dient. Diese Bewertung wird mit Hilfe des risikoneutralen Maßes durchgeführt und untersucht, wie sich die Ergebnisse im Vergleich zur Real-World Wahrscheinlichkeit ändern.

Abstract

The aim of this thesis is to give an overview of hedging approaches with a quadratic criterion and their relation to optimal strategies. Various risk-minimizing methods will be considered and the different tools and results will be analyzed. One of these methods is Mean Variance Hedging, which will serve as basis for the market consistent valuation. This evaluation is built on the risk-neutral measure and it further analyzes varying results in comparison to the real-world measure.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Durch die immer stärker werdenden regulatorischen Anforderungen hat sich die marktkonsistente Bewertung von Versicherungsverpflichtungen zu einem fundamentalen Bestandteil der Versicherungsbranche entwickelt. Regulatorische Bewertungstechniken unterscheiden grob gesprochen zwischen Verbindlichkeiten, welche in liquiden und transparenten Märkten replizierbar sind und jenen, wo dies nicht möglich ist.
Bei replizierbaren Verbindlichkeiten entspricht der Marktwert den Anfangskosten des zu replizierenden Portfolios. Bei nicht replizierbaren Verbindlichkeiten wird der Marktwert als Summe der erwarteten Barwerte der Verbindlichkeiten plus einer sogenannten Marktwert- bzw. Risikomarge angenommen. Bei der Berechnung dieser Marge muss nach Art. 77 Abs. 3 der Solvency II Rahmenrichtlinie jedoch darauf geachtet werden, dass sie jene Kapitalkosten widerspiegelt, die dem Versicherungsunternehmen anfallen um Versicherungsverpflichtungen zu übernehmen bzw. zu erfüllen. Es wurde somit eine Verbindung zwischen der Kapitalsteuerung und der Bewertung regulatorischer Zwecke hergestellt.

Aus folgenden Gründen ist es jedoch schwierig dieses regulatorische Prinzip anzuwenden:

- Die verwendete Kapitalkostenrate ist ein willkürlich, exogen festgesetzter konstanter Wert.
- Verbindlichkeiten können nicht so leicht als perfekt replizierbar bzw. komplett nicht replizierbar eingestuft werden. Normalerweise ist es der Fall, dass eine Verbindlichkeit nur zum Teil gehedgt werden kann und es ist auch nicht ganz klar, wie der regulatorische Ansatz damit umgehen soll. Es sei an dieser Stelle auf Möhr [22] verwiesen, der ein eindeutiges und konsistentes System zur Bewertung von Versicherungsverbindlichkeiten vorgeschlagen hat. Er versuchte Kapitalkostenprinzipien mit Replizierungsargumenten zusammenzuführen und erhielt dabei Solvency II Bewertungsformeln als Spezialfall.
- Da viele Versicherungsverbindlichkeiten über eine lange Laufzeit verfügen, herrscht leider Unklarheit darüber, wie eine mehrperiodische Erweiterung der Kapitalkostenbewertungsprinzipien aussehen soll.

Salzmann und Wüthrich [30] sowie Wüthrich und Merz [38] untersuchten alternative mehrperiodische Versionen der Kapitalkostenbewertung und zeigten, dass konzeptionell konsistente Ansätze rechentechnisch sehr aufwendig sind.[1]
Als Motivation dieser Arbeit dient Tsanakas, Wüthrich und Černý [37], die die marktkonsistente Bewertung von Versicherungsverindlichkeiten unter der Real-World Wahrscheinlichkeit durchgeführt haben. Unser Ziel ist nun, mittels Mean Variance Hedging diese Verbindlichkeiten unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß marktkonsistent zu bewerten. Wir werden dabei

[1] vgl. Tsanakas, Wüthrich und Černý [37]

die Entwicklung der quadratischen Hedgingansätze bis hin zum Mean Variance Hedging erläutern. Das nachfolgende Kapitel dient der Bestimmung unseres Rahmenwerkes. Es wird darin der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum mit den Komponenten definiert, welche uns durch die Arbeit begleiten werden. Kapitel 3 widmet sich dem Konzept der Risikominimerung, welches von Föllmer und Sondermann [14] eingeführt wurde. Darin werden Strategien zum Hedgen eines Contingent Claims anhand eines Risikomaßes im Bezug auf einen bedingten mittleren Fehlerquadratprozess verglichen. Schweizer [32] erweiterte diesen Ansatz und führte die Risikominimierung in lokalem Sinne ein, welche in Kapitel 4 behandelt wird. Wir werden dort sehen, dass das minimale Martingalmaß, erstmals definiert von Föllmer und Schweizer [13], eine entscheidende Rolle spielen wird. Kapitel 5 behandelt das Mean Variance Hedging, wo versucht wird, selbstfinanzierende Strategien zu finden, die das verbleibende Risiko zwischen dem Contingent Claim und dem Endwert des Portfolios beziehungsweise der Versicherung minimieren. Der letzte Abschnitt, Kapitel 6, widmet sich dann der Anwendung des theoretischen Hintergrunds, welcher in den vorangegangenen Kapiteln behandelt wurde. Es wird darin die marktkonsistente Bewertung versicherungstechnischer Verpflichtungen unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit untersucht und mit jener unter der Real-World Wahrscheinlichkeit verglichen.

Kapitel 2

Begriffsbestimmungen und Definitionen

Dieser Abschnitt dient dazu, einige wichtige Definitionen und Begriffe zu präsentieren, welche im Laufe dieser Arbeit Anwendung finden.

Um einen Finanzmarkt zu beschreiben, betrachten wir einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, einen Zeithorizont $T \in (0, \infty)$ sowie eine Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, wobei $\mathcal{F}_t$ die zum Zeitpunkt t verfügbare Information enthält. Wir nehmen an, dass diese Filtration $\mathbb{F}$ die üblichen Bedingungen der rechtsseitigen Stetigkeit,

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \quad \forall t \geq 0,$$

sowie der Vollständigkeit erfüllt. Vollständigkeit der Filtration $\mathbb{F}$ bedeutet, dass $\mathcal{F}_0$ nur $\mathbb{P}$-Nullmengen enthält. Der Aktienkurs wird durch einen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ beschrieben, dessen Pfade cadlag[1] sind. Wir nehmen $X \in \mathcal{S}^2$ als ein Semimartingal mit der Zerlegung[2]

$$X = X_0 + M + A \tag{2.1}$$

[1] d.h. seine Pfade sind rechtsstetig mit linksseitigen Grenzwerten X_{t-}

[2] vgl. Karatzas und Shreve [18]

an, wobei $M = (M_t)_{0\leq t\leq T}$ ein quadratisch integrierbares lokales Martingal mit $M_0 = 0$ und $A = (A_t)_{0\leq t\leq T}$ ein vorhersehbarer Prozess mit endlicher Variation $|A|$ und $A_0 = 0$ ist. Mit $\langle X\rangle = \langle M\rangle$ bezeichnen wir die vorhersehbare quadratische Variation, auch Spitzklammerprozess genannt, von X beziehungsweise M. Dies ist jener Prozess, der von X^2 abgezogen werden muss, damit $X^2 - \langle X\rangle$ ein Martingal ist. Die quadratische Variation von X bezeichnen wir mit $[X]$.

Bemerkung 2.1.

(i) Speziell gilt, dass

$$M \text{ ein quadratisch integrierbares Martingal unter } \mathbb{P} \text{ ist.} \tag{X1}$$

(ii) Die vorhersehbare quadratische Kovariation zweier quadratisch integrierbaren Martingale X und Y ist gegeben durch

$$\langle X, Y\rangle_t = \frac{1}{4}\left(\langle X+Y, X+Y\rangle_t - \langle X-Y, X-Y\rangle_t\right). \tag{2.2}$$

(iii) Für die quadratische Kovariation zweier Semimartingale X und Y gilt

$$[X,Y]_t = X_tY_t - X_0Y_0 + \int_0^t (X_{s-})\,\mathrm{d}Y_s - \int_0^t (Y_{s-})\,\mathrm{d}X_s. \tag{2.3}$$

(iv) Die Beziehung zwischen (ii) und (iii) lässt sich nun folgendermaßen formulieren:

Seien X und Y zwei Semimartingale, dann gilt[3]

$$[X,Y]_t = \langle X^c, Y^c\rangle_t + \sum_{0\leq s\leq t} \Delta X_s \Delta Y_s, \tag{2.4}$$

wobei X^c (Y^c) den stetigen Anteil von X (Y) und $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ ($\Delta Y_s = Y_s - Y_{s-}$) den Sprung von X (Y) zur Zeit s bezeichnet.

[3] vgl. Elliot [11]

Sei $\mathbb{P}_X$ das endliche Maß $\mathbb{P} \times \langle X \rangle$ auf $(\Omega \times [0,T], P)$, mit P als σ-Algebra vorhersehbarer Mengen, welches durch

$$\mathbb{P}_X[A] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathbb{1}_A(\omega, t) \mathrm{d}\langle X \rangle_t(\omega)\right]$$

gegeben ist. $\mathcal{L}^2(\mathbb{P}_X)$ symbolisiert die Klasse der vorhersehbaren Prozesse, welche, als P-messbare Funktionen auf $\Omega \times [0,T]$ betrachtet, bezüglich $\mathbb{P}_X$ quadratisch integrierbar sind. Zwei solche Prozesse werden als gleich angesehen, falls sie $\mathbb{P}_X$-fast sicher übereinstimmen.

Mit Hilfe der bisherigen Begriffe können wir uns nun dem Hedging widmen. Das Ziel dabei ist es, eine zulässige Strategie in Form eines dynamischen Portfolios von Bond und Aktien zu finden, um sich gegen einen Contingent Claim der Höhe H zum Endzeitpunkt T abzusichern.

Definition 2.2.[4]
Wir nennen $\varphi = (\vartheta, \eta)$ eine Strategie, falls

(i) ϑ ist ein vorhersehbarer (prävisibler) Prozess,

(ii) η ist adaptiert und

(iii) der Wertprozess $V_t = \vartheta_t X_t + \eta_t Y_t$ hat rechtsstetige Pfade und ist für $0 \leq t \leq T$ quadratisch integrierbar, das heißt $V_t \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ für $0 \leq t \leq T$.

In dieser Strategie beschreibt ϑ_t die Anzahl der zur Zeit t gehaltenen Aktien und η_t den Betrag, der zur Zeit t in den zur Diskontierung verwendeten risikolosen Bond Y investiert wird. Die Vorhersehbarkeitsbedingung (i) an ϑ bedeutet, dass wir die Anzahl der Aktien festlegen müssen, bevor die nächste infinitesimale Aktienpreisbewegung bekannt ist. In weiterer Folge setzen wir

[4] vgl. Föllmer und Sondermann [14], S. 207

den Bond $Y \equiv 1$.[5] Mathematisch gesehen ist der oben angesprochene Contingent Claim eine Zufallsvariable

$$H \in \mathcal{L}^2 (\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) . \tag{2.5}$$

Bemerkung 2.3.

Ein Contingent Claim modelliert also die Zahlung eines Finanzinstruments zur Zeit T. Das einfachste Beispiel dafür ist eine europäische Call-Option,

$$H = (X_T - K)^+ ,$$

mit fixem Strike-Preis $K \in \mathbb{R}$.

Wir werden uns in weiterer Folge auf Strategien konzentrieren, die folgende Eigenschaft erfüllen:

Definition 2.4.

Eine Strategie nennt man admissibel bzw. zulässig (in Bezug auf H), falls ihr Wertprozess den Endwert H annimmt, das heißt falls gilt:

$$V_T = H, \qquad \mathbb{P}\text{-f.s..} \tag{2.6}$$

Durch die Bedingung (i) aus Definition 2.2 kann man den kumulierten Gewinn G, den man aus der Aktienpreisbewegung bis zur Zeit t erhält, durch

$$G_t(\vartheta) = \int_0^t \vartheta_s \mathrm{d}X_s, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.7}$$

berechnen. $G(\vartheta)$ wird hier als das stochastische Integral von ϑ bezüglich X bezeichnet, kurz $G_t(\vartheta) = (\vartheta \bullet X)_t$ für alle $0 \leq t \leq T$. Die kumulierten Kosten C der Strategie bis zur Zeit t lassen sich demnach nun folgendermaßen

[5] Diese Normalisierung bedeutet, dass wir mit diskontierten Preisen arbeiten um unnötig komplizierte Notationen vermeiden. Es ändert jedoch nichts an den Resultaten.

bestimmen:

$$\begin{aligned} C_t &= V_t - G_t(\vartheta) \\ &= V_t - \int_0^t \vartheta_s \mathrm{d}X_s, \qquad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Damit dieser Ausdruck wohldefiniert und ebenfalls aus dem Raum $\mathcal{S}^2$ der Semimartingale ist, benötigen wir die Integrabilitätsbedingung

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \vartheta_s^2 \mathrm{d}\langle X\rangle_s + \left(\int_0^T |\vartheta_s| \,\mathrm{d}\,|A|_s\right)^2\right] < \infty, \tag{2.9}$$

was bedeutet, dass

$$\vartheta \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P}_X) \quad \text{und} \quad \int_0^T |\vartheta_s| \,\mathrm{d}\,|A|_s \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P}).$$

Da X im Raum $\mathcal{S}^2$ liegt, ist (2.9) äquivalent zur Integrabilitätsbedingung:

$$\mathbb{E}\left[X_0^2 + \langle X\rangle_T + |A|_T^2\right] < \infty. \tag{2.10}$$

Für eine ausführlichere Motivation sei an dieser Stelle auf Föllmer und Sondermann [14], Föllmer und Schweizer [13] sowie Harrison und Pliska [17] verwiesen.

Das Grundgerüst für unsere Strategien wurde nun festgelegt, wir lassen also nur jene Strategien zu, deren Wertprozess $(V_t)_{0\leq t\leq T}$ und Kostenprozess $(C_t)_{0\leq t\leq T}$ quadratisch integrierbar sind und rechtsstetige Pfade besitzen, sowie $V_T = H$ erfüllen.

Im Folgenden werden wir näher auf die verschiedenen Arten des oben definierten Finanzmarktes, sowie auf Eigenschaften der Strategien eingehen.

2.1 Vollständige vs. unvollständige Finanzmärkte

Wir nehmen an, dass in unserem Modell keine Arbitrage, das heißt kein risikoloser Gewinn möglich ist.

Definition 2.5.[6]

Wir nennen eine selbstfinanzierende Strategie ϑ eine Arbitragemöglichkeit, falls ihr Wertprozess V folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $V_0 = 0$,

(ii) $\mathbb{P}\left[V_T \geq 0\right] = 1$ und

(iii) $\mathbb{P}\left[V_T > 0\right] > 0$.

Durch diese No-Arbitrage Bedingung existiert nach dem Fundamental Theorem of Asset Pricing[7] ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star \approx \mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathbb{F})$, sodass

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^\star}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \in \mathcal{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right) \tag{2.11}$$

und

$$X \text{ unter } \mathbb{P}^\star \text{ ein Martingal ist.} \tag{2.12}$$

$\mathrm{d}\mathbb{P}^\star/\mathrm{d}\mathbb{P}$ nennt man die Radon-Nikodym Ableitung von $\mathbb{P}^\star$ bezüglich $\mathbb{P}$.

Definition 2.6.

Ein Contingent Claim H heißt erreichbar, falls er die Darstellung

$$H = H_0 + \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s, \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \tag{2.13}$$

[6] vgl. Bingham und Kiesel [1], S. 232

[7] vgl. Delbaen und Schachermayer [6]

besitzt, wobei H_0 konstant ist und ϑ^H die Integrabilitätsbedingung (2.9) erfüllt.

Ein Contingent Claim ist nun also erreichbar, falls er als Summe einer Konstanten und eines stochastischen Integrals bezüglich des Semimartingals X dargestellt werden kann, wobei der Integrand eine selbstfinanzierende Strategie ist, die den Wert H zum Endzeitpunkt T ohne Risiko liefert. Wir sprechen nun von einem vollständigen Markt, falls alle Contingent Claims erreichbar sind. Für den Fall eines vollständigen Marktes wurde von Harrison und Kreps [16] gezeigt, dass ein wie oben definiertes Martingalmaß eindeutig ist.

Definition 2.7.[8]
Eine Strategie $\varphi = (\vartheta, \eta)$ heißt selbstfinanzierend, wenn ihr kumulativer Kostenprozess C über die Zeit konstant ist, das heißt wenn

$$C_t = C_0, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{2.14}$$

wobei $C_0 = V_0$ jene Kosten bezeichnen, die zum Starten der Strategie erforderlich sind.

Durch (2.14) erhält man nun mit (2.8) die Darstellung

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + G_t(\vartheta) \\ &= V_0 + \int_0^t \vartheta_s \mathrm{d}X_s, \qquad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \tag{2.15}$$

womit nun die Äquivalenz zu der Zerlegung eines Contingent Claims aus (2.13) hergestellt wurde. Nach dem Zeitpunkt $t = 0$ ist diese Strategie selbsttragend, denn jede Schwankung von X kann so durch einen Wiederausgleich von ϑ und η neutralisiert werden, dass keine zusätzlichen Kosten oder Gewinne entstehen. Diese Theorie unterliegt den Erkenntnissen der Resultate

[8]vgl. Schweizer [36], S. 1 f

aus der Optionspreistheorie, welche erstmalig von Black und Scholes [2] und Merton [20] untersucht wurde.

Ökonomisch betrachtet folgt aus der Existenz von selbstfinanzierenden Strategien in vollständigen Märkten, dass diese risikolos sind. Andererseits tragen Contingent Claims in unvollständigen Märkten ein sogenanntes intrinsisches Risiko mit sich, was das Problem heikler macht. In so einem Fall ist das Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$ nicht mehr eindeutig und die Contingent Claims sind im Allgemeinen nicht mehr erreichbar. Jedes $\mathbb{P}^\star$ kann nun eine andere zulässige Strategie hervorrufen. Das Ziel ist nun unter all diesen Maßen das Optimale zu finden. Es soll dabei jenes Maß gewählt werden, welches das intrinsische Risiko minimiert.

Kapitel 3

Der Ansatz von Föllmer und Sondermann

In diesem Kapitel wird die Risikominimierung im Falle des Kostenprozesses als Martingal behandelt. Es stellt somit einen Spezialfall dar, in dem $\mathbb{P}$ bereits als Martingalmaß $\mathbb{P} = \mathbb{P}^\star$ angenommen wird und ist an die Arbeit von Föllmer und Sondermann [14] angelehnt. Sie erweiterten darin den Martingalansatz von Harrison und Kreps [16] zu nicht redundanten Contingent Claims. Durch die zugrunde liegenden Martingalannahmen hängen die erwarteten Endkosten nicht von der Wahl der Strategie ab. Wir suchen daher admissible Strategien, welche das Risiko in sequentiellem Sinne reduzieren. Es wird gezeigt, dass dieses Problem eine eindeutige Lösung besitzt, wobei das Risiko zum intrinsischen Risiko des Claims reduziert wird.

3.1 Das Konzept der im Mittel selbstfinanzierenden Strategien

Durch die Festlegung $\mathbb{P} = \mathbb{P}^\star$ vereinfacht sich die Zerlegung (2.1) lediglich zu $X = M$. X ist demnach ein quadratisch integrierbares Martingal unter $\mathbb{P}$.

Damit erhalten wir die Bedingungen[1]

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty \tag{3.1}$$

und

$$X_t = \mathbb{E}\left[X_T | \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.2}$$

Wird t festgehalten, hat der Gewinnprozess aus (2.7) Erwartungswert

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \vartheta_s \mathrm{d}X_s\right] = 0$$

und Varianz

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \vartheta_s \mathrm{d}X_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \vartheta_s^2 \mathrm{d}\langle X\rangle_s\right]. \tag{3.3}$$

Selbstfinanzierende Handelsstrategien sind die Hauptwerkzeuge in der Analyse von Optionsbepreisung in vollständigen Wertpapiermärkten.[2] Da wir hier aber unvollständige Märkte betrachten, kommen wir nun zu einem etwas breiteren Konzept von selbstfinanzierenden Strategien, welches erstmals von Föllmer und Sondermann [14] verwendet wurde.

Definition 3.1.

Eine Strategie $\varphi = (\vartheta, \eta)$ heißt im Mittel selbstfinanzierend, falls der zugehörige Kostenprozess $C = (C_t)_{0\leq t\leq T}$ ein Martingal ist, das heißt falls für $0 \leq t \leq T$ gilt:

$$\mathbb{E}\left[C_T - C_t | \mathcal{F}_t\right] = 0.$$

Bemerkung 3.2.

[1] vgl. Harrison und Kreps [16]

[2] vgl. Harrison und Kreps [16] sowie Harrison und Pliska [17]

(i) Erfüllt ein Kostenprozess die Eigenschaft aus obiger Definition, so nennt man ihn auch zeitinvariant.

(ii) Jede selbstfinanzierende Strategie ist klarerweise im Mittel selbstfinanzierend.

Wie im folgenden Lemma angegeben wird, ist der Wertprozess einer im Mittel selbstfinanzierenden Strategie wieder ein Martingal. Im Allgemeinen können wir aber nicht erwarten, dass dieses Martingal, wie in (2.15), als ein stochastisches Integral bezüglich X dargestellt werden kann.

Lemma 3.3.
Eine Strategie ist genau dann im Mittel selbstfinanzierend, wenn ihr Wertprozess ein quadratisch integrierbares Martingal ist.

Beweis
Die Eigenschaften einer Strategie aus Definition 2.2 liefern, dass der Prozess der kumulierten Gewinne,

$$\int_0^t \vartheta_s \mathrm{d}X_s, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

ein quadratisch integrierbares Martingal ist.
Geht man nun von einer im Mittel selbstfinanzierenden Strategie aus, so ist der Kostenprozess C ein Martingal. Somit folgt aus Darstellung (2.8), dass der Wertprozess V ein quadratisch integrierbares Martingal ist.
Ist andererseits V_t für $0 \leq t \leq T$ ein Martingal, so folgt ebenso aus Darstellung (2.8), dass C_t für $0 \leq t \leq T$ ein Martingal und somit die Strategie im Mittel selbstfinanzierend ist.

□

3.2 Das intrinsische Risiko von Contingent Claims

Wir betrachten einen Contingent Claim wie aus (2.5) und rufen uns noch einmal Definition 2.4 der zulässigen Strategien in Erinnerung.
Für jede zulässige Strategie $\varphi = (\vartheta, \eta)$ sind die Endkosten gegeben durch

$$C_T = H - \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s. \tag{3.4}$$

Für den Erwartungswert gilt $\mathbb{E}[C_T] = \mathbb{E}[H] =: H_0$, da $\mathbb{E}\left[\int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s\right] = 0$. Dies folgt aus der Eigenschaft, dass das stochastische Integral ein Martingal ist. Insbesondere hängt $E[C_T] = \mathbb{E}[H]$ nicht von einer bestimmten Wahl der Strategie ab, solange sie zulässig ist. Wir werden nun analysieren, welche zulässigen Strategien in einem geeigneten Sinne ein minimales Risiko haben.
In einem ersten Schritt werden alle zulässigen Strategien bestimmt, welche die Varianz

$$\mathbb{E}\left[(C_T - \mathbb{E}[H])^2\right] \tag{3.5}$$

minimieren. Der zweite Schritt besteht darin, (3.5) mit Hilfe eines sequenziellen Verfahrens zu ersetzen.
Das Schlüsselinstrument zur Bestimmung von Hedgingstrategien in der Martingaltheorie ist die Kunita-Watanabe Zerlegung[3] von H:
Angenommen $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ sei ein quadratisch integrierbares Martingal, dann kann H eindeutig in folgender Form dargestellt werden:

$$H = \mathbb{E}[H] + \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s + L_T^H, \tag{3.6}$$

[3] vgl. Karatzas und Shreve [18]

wobei $\vartheta^H \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P}_X)$ und $L^H = \left(L_t^H\right)_{0 \leq t \leq T}$ ein quadratisch integrierbares Martingal bezüglich $\mathbb{P}$, mit $L_0^H = 0$ $\mathbb{P}$-f.s., und orthogonal zu X in jenem Sinne ist, sodass $L^H \cdot X$ ein Martingal ergibt.

Satz 3.4.

Eine zulässige Strategie $\varphi = (\vartheta, \eta)$ hat genau dann eine minimale Varianz

$$\mathbb{E}\left[(C_T - \mathbb{E}[H])^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(L_T^H\right)^2\right], \tag{3.7}$$

wenn $\vartheta = \vartheta^H$ ist.

Beweis

Nach (3.6) gilt für eine zulässige Strategie $\varphi = (\vartheta, \eta)$

$$\begin{aligned} C_T &= H - \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s \\ &= \mathbb{E}[H] + \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s + L_T^H - \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s \\ &= \mathbb{E}\left[H\right] + \int_0^T \left(\vartheta_s^H - \vartheta_s\right) \mathrm{d}X_s + L_T^H. \end{aligned}$$

Da L^H zu dem stochastischen Integral der rechten Seite orthogonal ist, erhält man

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(C_T - \mathbb{E}\left[H\right])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[H] + \int_0^T \left(\vartheta_s^H - \vartheta_s\right) \mathrm{d}X_s + L_T^H - \mathbb{E}[H]\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \left(\vartheta_s^H - \vartheta_s\right) \mathrm{d}X_s\right)^2\right] + 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\vartheta_s^H - \vartheta_s\right) \mathrm{d}X_s \cdot L_T^H\right]}_{=0} + \mathbb{E}\left[\left(L_T^H\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T (\vartheta_s^H - \vartheta_s) \mathrm{d}X_s\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(L_T^H\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\vartheta_s^H - \vartheta_s\right)^2 \mathrm{d}\langle X_s\rangle\right] + \mathbb{E}\left[\left(L_T^H\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

Demnach wird das Minimum $\mathbb{E}\left[\left(L_T^H\right)^2\right]$ genau dann angenommen, wenn $\vartheta^H = \vartheta$ in $\mathcal{L}^2(\mathbb{P}_X)$ ist.

$\square$

Bisher konnte keine Schlussfolgerung hinsichtlich des Prozesses $\eta = (\eta_t)_{0 \leq t \leq T}$ gezogen werden, außer dass er die Strategie zulässig machen soll. Das heißt es soll gelten:

$$\eta_T = H - \vartheta_T X_T. \tag{3.8}$$

Beispiel 3.5.

Eine naheliegende Idee ist die Verwendung einer im Mittel selbstfinanzierenden Strategie im Intervall $[0, T)$ und den Ausgleich am Ende der Zeit zu erreichen, das heißt man setzt

$$\eta_t = \mathbb{E}[H] + \int_0^t \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s - \vartheta_t^H X_t, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.9}$$

um, zusätzlich mit wenigen Umformungen

$$\begin{aligned}
C_t &= V_t - \int_0^t \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s \\
&= \vartheta_t^H X_t + \eta_t - \int_0^t \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s \\
&= \vartheta_t^H X_t + \mathbb{E}[H] + \int_0^t \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s - \vartheta_t^H X_t - \int_0^t \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
C_T &= \eta_T + \vartheta_T^H X_T - \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s \\
&\overset{(3.8)}{=} H - \vartheta_T^H X_T + \vartheta_T^H X_T - \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s \\
&\overset{(3.6)}{=} \mathbb{E}[H] + \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s + L_T^H - \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s,
\end{aligned}$$

auf den Wert für C zu kommen

$$C_t = \begin{cases} \mathbb{E}[H] & \text{falls} \quad 0 \leq t \leq T \\ \mathbb{E}[H] + L_T^H & \text{falls} \quad t = T. \end{cases} \tag{3.10}$$

Diese Strategie erfüllt die minimale Varianz in (3.7), da

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(C_T - \mathbb{E}[H])\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[H] + L_T^H - \mathbb{E}[H]\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(L_T^H\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Wir möchten nun zeigen, dass eine schärfere Formulierung des Problems aus (3.5) eine eindeutige zulässige Strategie $\varphi^\star = (\vartheta^\star, \eta^\star)$ bestimmt, welche ein minimales Risiko aufweist aber unterschiedlich zu der Strategie aus Beispiel 3.5 ist.

Betrachten wir eine beliebige Strategie $\varphi = (\vartheta, \eta)$. Kurz vor dem Zeitpunkt $t < T$ wurden die Kosten C_{t-} kumuliert. Die Strategie sagt uns, wie wir zur Zeit t und darüber hinaus fortfahren sollen. Insbesondere fixiert sie die gegenwärtigen Kosten C_t und bestimmt die verbleibenden Kosten $C_T - C_t$. Wir messen nun das verbleibende Risiko durch:

$$R_t(\varphi) = \mathbb{E}\left[(C_T(\varphi) - C_t(\varphi))^2 \middle| \mathcal{F}_t \right]. \tag{3.11}$$

In Anbetracht von (3.11) möchten wir φ mit jeder anderen Strategie $\tilde{\varphi}$ vergleichen, die mit φ zu jeder Zeit vor dem Zeitpunkt t übereinstimmt und den gleichen Endwert V_T besitzt. Dies führt uns zu folgender Definition:

Definition 3.6.[4]
Sei $\varphi = (\vartheta, \eta)$ eine beliebige Strategie und $t \in [0, T)$. Eine Strategie $\tilde{\varphi} = (\tilde{\vartheta}, \tilde{\eta})$ heißt zulässige Fortsetzung von φ zur Zeit t, falls gilt

$$\tilde{\vartheta}_s = \vartheta_s \text{ für } s \leq t,$$
$$\tilde{\eta}_s = \eta_s \text{ für } s < t$$

und

$$V_T(\tilde{\varphi}) = V_T(\varphi) \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Die Definition von Föllmer und Sondermann [14] einer zulässigen Fortsetzung von φ ist symmetrischer, denn sie legten fest, dass sowohl $\tilde{\vartheta}_s = \vartheta_s$ als auch $\tilde{\eta}_s = \eta_s$ für $s < t$ gelten soll. Im Martingalfall dieses Kapitels spielt dieser Unterschied keine Rolle, jedoch benötigt die im nächsten Kapitel folgende Verallgemeinerung zu der lokalen Risikominimierung die asymmetrische Formulierung aus Definition 3.6 (siehe Schweizer [36], S. 7 f).

[4]vgl. Schweizer [32], S. 9

Definition 3.7.

Eine Strategie φ nennt man risikominimierend, wenn φ zu jeder Zeit das Risiko minimiert, das heißt für jedes $t \in [0, T)$ gilt

$$R_t(\varphi) \leq R_t(\tilde{\varphi}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{3.12}$$

für jede zulässige Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ von φ zur Zeit t.

Bemerkung 3.8.

(i) Jede selbstfinanzierende Strategie ist klarerweise risikominimierend, da $R_t(\varphi) = 0$ gilt.

(ii) Angenommen $\varphi = (\vartheta, \eta)$ ist eine risikominimierende Strategie, die auch zulässig ist. Dann ist φ im Speziellen eine Lösung von Problem (3.5). (3.12) zur Zeit $t = 0$ besagt sogar, dass φ

$$\begin{aligned} R_0(\varphi) &= \mathbb{E}\left[(C_T(\varphi) - C_0(\varphi))^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &= \mathbb{E}\left[(C_T(\varphi) - \mathbb{E}[C_T(\varphi)])^2 \right] + (\mathbb{E}[C_T(\varphi)] - C_0(\varphi))^2 \end{aligned}$$

minimiert, denn es gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[(C_T(\varphi) - \mathbb{E}[C_T(\varphi)])^2 \right] + (\mathbb{E}[C_T(\varphi)] - C_0(\varphi))^2 \\ &= \mathbb{E}\left[C_T^2(\varphi) - 2C_T(\varphi)\mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\right] + \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\right]^2 \right] + \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\right]^2 \\ &\quad - 2 \cdot \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\right] C_0(\varphi) + C_0^2(\varphi) \\ &= \mathbb{E}\left[C_T^2(\varphi) \right] - 2 \cdot \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\right] \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\right] + \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\right]^2 + \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\right]^2 \\ &\quad - 2 \cdot \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\right] C_0(\varphi) + C_0^2(\varphi) \\ &= \mathbb{E}\left[C_T^2(\varphi) \right] - 2 \cdot \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\right] C_0(\varphi) + C_0^2(\varphi) \\ &= \mathbb{E}\left[C_T^2(\varphi) \right] - 2 \cdot \mathbb{E}\left[C_T(\varphi) C_0(\varphi)\right] + \mathbb{E}\left[C_0^2(\varphi) \right] \\ &= \mathbb{E}\left[(C_T(\varphi) - C_0(\varphi))^2 \right]. \end{aligned}$$

Und da $C_T(\varphi) - C_0(\varphi)$ unabhängig von $\mathcal{F}_0$ ist, folgt daraus, dass φ die Varianz von C_T minimiert. Das bedeutet, dass, in Übereinstimmung mit Satz 3.4, $\vartheta = \vartheta^H$ ist. Zusätzlich erhalten wir die Bedingung:

$$\begin{aligned}\eta_0 &= C_0 - \vartheta_0^H X_0 \\ &= \mathbb{E}\left[H\right] - \vartheta_0^H X_0.\end{aligned}$$

Lemma 3.9.

Eine zulässige risikominimierende Strategie ist im Mittel selbstfinanzierend.

Beweis

Wir betrachten eine beliebige Strategie $\varphi = (\vartheta, \eta)$ und einen festen Zeitpunkt $s \in [0, T]$. Definiere $\tilde{\varphi}$ als eine zulässige Fortsetzung von φ zur Zeit s, sodass für $t \geq s$ gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{\vartheta}_t &= \vartheta_t \\ \tilde{\eta}_t &= C_t(\tilde{\varphi}) + \int_0^t \vartheta_u \mathrm{d}X_u - \vartheta_t X_t\end{aligned}$$

wobei $(C_t(\tilde{\varphi}))_{0 \leq t \leq T}$ eine rechtsstetige Version des Martingals

$$C_t(\tilde{\varphi}) = \mathbb{E}\left[C_T(\varphi) \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

bezeichnet. Da $V_T(\tilde{\varphi}) = V_T(\varphi)$, gilt für die Endkosten:

$$C_T(\tilde{\varphi}) = V_T(\tilde{\varphi}) - \int_0^T \tilde{\vartheta}_u \mathrm{d}X_u = V_T(\varphi) - \int_0^T \vartheta_u \mathrm{d}X_u = C_T(\varphi).$$

Die verbleibenden Kosten von $\tilde{\varphi}$ sind gegeben durch:

$$C_T(\tilde{\varphi}) - C_s(\tilde{\varphi}) = (C_T(\varphi) - C_s(\varphi)) + (C_s(\varphi) - C_s(\tilde{\varphi})).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(C_T(\varphi)-C_s(\varphi))^2\middle|\,\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[((C_T(\tilde{\varphi})-C_s(\tilde{\varphi}))-(C_s(\varphi)-C_s(\tilde{\varphi})))^2\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(C_T(\tilde{\varphi})-C_s(\tilde{\varphi}))^2\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&\quad -2\cdot\mathbb{E}\left[(C_T(\tilde{\varphi})-C_s(\tilde{\varphi}))\,(C_s(\varphi)-C_s(\tilde{\varphi}))\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&\quad +\mathbb{E}\left[(C_s(\varphi)-C_s(\tilde{\varphi}))^2\middle|\,\mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

Da im Zeitpunkt s die entsprechenden Kosten bereits bekannt sind, erhalten wir:

$$\mathbb{E}\left[(C_s(\varphi)-C_s(\tilde{\varphi}))^2\middle|\,\mathcal{F}_s\right] = (C_S(\tilde{\varphi})-C_s(\varphi))^2\,.$$

Mit Hilfe von $C_T(\tilde{\varphi}) = C_T(\varphi)$ und $C_t(\tilde{\varphi}) = \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\middle|\,\mathcal{F}_t\right]$ folgt:

$$\begin{aligned}
&-2\cdot\mathbb{E}\left[(C_T(\tilde{\varphi})-C_s(\tilde{\varphi}))\,(C_s(\varphi)-C_s(\tilde{\varphi}))\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&\qquad = -2\cdot\mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\middle|\,\mathcal{F}_s\right]C_s(\varphi)+2\cdot\mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\middle|\,\mathcal{F}_s\right]\cdot C_s(\tilde{\varphi}) \\
&\qquad\quad +2\cdot C_s(\tilde{\varphi})C_s(\varphi)-2\cdot C_s^2(\tilde{\varphi}) \\
&\qquad = -2\cdot C_s(\tilde{\varphi})C_s(\varphi)+2\cdot C_s^2(\tilde{\varphi})+2\cdot C_s(\tilde{\varphi})C_s(\varphi)-2\cdot C_s^2(\tilde{\varphi}) \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

Als Ergebnis erhalten wir nun

$$\mathbb{E}\left[(C_T(\varphi)-C_s(\varphi))^2\middle|\,\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(C_T(\tilde{\varphi})-C_s(\tilde{\varphi}))^2\middle|\,\mathcal{F}_s\right]+(C_s(\tilde{\varphi})-C_s(\varphi))^2$$

und somit:

$$\begin{aligned}
R_s(\varphi) &= \mathbb{E}\left[(C_T(\varphi)-C_s(\varphi))^2\middle|\,\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(C_T(\tilde{\varphi})-C_s(\tilde{\varphi}))^2\middle|\,\mathcal{F}_s\right]+(C_s(\tilde{\varphi})-C_s(\varphi))^2 \\
&\geq R_s(\tilde{\varphi}).
\end{aligned}$$

Daher ist φ nur dann risikominimierend, wenn $C_s(\varphi) = C_s(\tilde{\varphi})$ $\mathbb{P}$-f.s. für jedes $s \leq T$ ist, das heißt, wenn φ im Mittel selbstfinanzierend ist.

□

Als Resultat aus Lemma (3.3) und Lemma (3.9) erhalten wir, dass der Wertprozess einer risikominimierenden Strategie ein Martingal sein muss.

Wir wollen nun aus der Zerlegung (3.6) des Claims H eine entsprechende Darstellung für $V_t(\varphi^\star) = \mathbb{E}[H|\,\mathcal{F}_t] =: V_t^\star$ finden:

$$\begin{aligned} V_t^\star &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H\right] + \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s + L_T^H \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H\right]|\,\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s \middle| \mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}\left[L_T^H\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

Setzt man $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H\right]|\,\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[H\right] =: V_0^\star$ erhält man folgende Darstellung für $V^\star$:

$$V_t^\star = V_0^\star + \int_0^t \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s + L_t^H, \tag{3.13}$$

wobei $L_t^H = \mathbb{E}\left[L_T^H\middle|\,\mathcal{F}_t\right]$ ein quadratisch integrierbares Martingal mit Erwartungswert Null und orthogonal zu X ist. $V^\star$ wird als der intrinsische Wertprozess bezeichnet.

Definition 3.10.

Wir nennen den Prozess $R^H = \left(R_t^H\right)_{0\leq t\leq T}$, definiert durch

$$R_t^H = \mathbb{E}\left[\left(L_T^H - L_t^H\right)^2\middle|\,\mathcal{F}_t\right], \tag{3.14}$$

den intrinsischen Risikoprozess des Claims H.

Der Erwartungswert $\mathbb{E}\left[R_0^H\right]$, das intrinsische Risiko des Claims, stimmt mit der minimalen Varianz aus (3.7) überein.

Aus dem intrinsischen Wertprozess (3.13) lässt sich nun einfach die für unsere

Strategie benötigte Anzahl der Aktien ermitteln:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_t^\star &= \vartheta_t^H \mathrm{d}X_t + \mathrm{d}L_t \\ \mathrm{d}\langle V^\star, X\rangle_t &= \vartheta^H \mathrm{d}\langle X, X\rangle_t + \mathrm{d}\langle L, X\rangle_t . \end{aligned}$$

Da L orthogonal zu X und somit $\mathrm{d}\langle L, X\rangle_t = 0$ ist, folgt nun für ϑ^H:

$$\begin{aligned} \vartheta^H &= \frac{\mathrm{d}\langle V^\star, X\rangle_t}{\mathrm{d}\langle X, X\rangle_t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\langle V^\star, X\rangle_t}{\mathrm{d}\langle X\rangle_t} =: \vartheta^\star \end{aligned} \tag{3.15}$$

Da $V^\star$ ein adaptierter Prozess und eindeutig durch H bestimmt ist, ist $\vartheta^\star$ eindeutig durch H bestimmt. (3.15) nennt man die Kunita-Watanabe Projektion.

Satz 3.11.
Es existiert eine eindeutige zulässige Strategie $\varphi^\star$, welche risikominimierend ist, und zwar:

$$\varphi^\star = (\vartheta^\star, V^\star - \vartheta^\star X)\,. \tag{3.16}$$

Für diese Strategie ist das restliche Risiko zu jeder Zeit $t \leq T$ gegeben durch

$$R_t(\varphi^\star) = R_t^H, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{3.17}$$

Beweis

(i) Da der Wertprozess obiger Strategie (3.16) durch das Martingal $V_t^\star = \mathbb{E}[H|\,\mathcal{F}_t]$ gegeben ist, ist $\varphi^\star$ zulässig. Demnach gilt, dass $V_T(\varphi^\star) = H$ $\mathbb{P}$-f.s. Sei φ eine beliebige zulässige Fortsetzung von $\varphi^\star$ zur Zeit t. Dann folgt für den Kostenprozess von φ auf Grund von (3.13):

$$\begin{aligned}
C_T - C_t &= V_T - \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s - V_t + \int_0^t \vartheta_s \mathrm{d}X_s \\
&= V_T - V_t - \int_t^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s \\
&= \mathbb{E}[H] + \int_0^T \vartheta_s^\star \mathrm{d}X_s + L_T^H - V_t - \int_t^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s \\
&= V_t^\star - \int_0^t \vartheta_s^\star \mathrm{d}X_s - L_t^H + \int_0^T \vartheta_s^\star \mathrm{d}X_s + L_T^H - V_t - \int_t^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s \\
&= \int_t^T \vartheta_s^\star \mathrm{d}X_s - \int_t^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s + L_T^H - L_t^H + V_t^\star - V_t \\
&= \int_t^T \left(\vartheta_s^\star - \vartheta_s\right) \mathrm{d}X_s + \left(L_T^H - L_t^H\right) + \left(V_T^\star - V_t^\star\right).
\end{aligned}$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left.(C_T - C_t)^2\right| \mathcal{F}_t\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\left.\left(\int\limits_t^T (\vartheta_s^\star - \vartheta_s)\,\mathrm{d}X_s + \left(L_T^H - L_t^H\right) + (V_t^\star - V_t)\right)^2 \right| \mathcal{F}_t\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\left.\left(\int\limits_t^T (\vartheta_s^\star - \vartheta_s)\,\mathrm{d}X_s\right)^2 \right| \mathcal{F}_t\right] \\
&\qquad + 2\cdot\mathbb{E}\left[\left.\left(\int\limits_t^T (\vartheta_s^\star - \vartheta_s)\,\mathrm{d}X_s\right)\left(L_T^H - L_t^H\right) \right| \mathcal{F}_t\right] \\
&\qquad + 2\cdot\mathbb{E}\left[\left.\left(\int\limits_t^T (\vartheta_s^\star - \vartheta_s)\,\mathrm{d}X_s\right)(V_t^\star - V_t) \right| \mathcal{F}_t\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\left.\left(L_T^H - L_t^H\right)^2 \right| \mathcal{F}_t\right] \\
&\qquad + 2\cdot\mathbb{E}\left[\left.\left(L_T^H - L_t^H\right)(V_t^\star - V_t)\right| \mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}\left[\left.(V_t^\star - V_t)^2\right| \mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}$$

Da X zu L^H orthogonal und das stochastisches Integral bezüglich X ein Martingal ist, folgt

$$\mathbb{E}\left[\left.\left(\int\limits_t^T (\vartheta_s^\star - \vartheta_s)\,\mathrm{d}X_s\right)\left(L_T^H - L_t^H\right) \right| \mathcal{F}_t\right] = 0$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left.\left(\int\limits_t^T (\vartheta_s^\star - \vartheta_s)\,\mathrm{d}X_s\right)(V_t^\star - V_t) \right| \mathcal{F}_t\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[\left.\left(\int\limits_t^T (\vartheta_s^\star - \vartheta_s)\,\mathrm{d}X_s\right) \right| \mathcal{F}_t\right](V_t^\star - V_t) \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

Auf Grund der Martingaleigenschaft von L^H gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(L_T^H - L_t^H\right)\left(V_t^\star - V_t\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[\left(L_T^H - L_t^H\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right]\left(V_t^\star - V_t\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Als Resultat erhält man nun:

$$\begin{aligned}&R_t(\varphi)\\ &\quad= \mathbb{E}\left[\left(C_T - C_t\right)^2\middle|\,\mathcal{F}_t\right]\\ &\quad= \mathbb{E}\left[\int_t^T \left(\vartheta_s^\star - \vartheta_s\right)^2 \mathrm{d}\langle X\rangle_s\middle|\,\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}\left[\left(L_T^H - L_t^H\right)^2\middle|\,\mathcal{F}_t\right] + \left(V_t^\star - V_t\right)^2\\ &\quad= \mathbb{E}\left[\int_t^T \left(\vartheta_s^\star - \vartheta_s\right)^2 \mathrm{d}\langle X\rangle_s\middle|\,\mathcal{F}_t\right] + R_t^H + \left(V_t^\star - V_t\right)^2\end{aligned}$$

und insbesondere (3.17), $R_t(\varphi^\star) = R_t^H$, womit gezeigt wurde, dass $\varphi^\star$ risikominimierend ist.

(ii) Um zu zeigen, dass diese optimale Strategie eindeutig ist, sei $\tilde{\varphi} = (\tilde{\vartheta}, \tilde{\eta})$ eine beliebige andere zulässige risikominimierende Strategie. Daraus folgt nach obiger Gleichung, dass $\tilde{\vartheta}_t = \vartheta_t^\star$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $0 \leq t \leq T$ (vgl. auch Bemerkung 3.8). Nach Lemma (3.9) ist $\tilde{\varphi}$ somit im Mittel selbstfinanzierend und ihr Wertprozess $\tilde{V}$ demnach ein Martingal. Da $\tilde{\varphi}$ zulässig ist, gilt $V_T^\star = \tilde{V}_T = H$ $\mathbb{P}$-f.s. Daraus folgt, dass $V_t^\star = \tilde{V}_t$ $\mathbb{P}$-f.s. gelten muss. Daher gilt $\eta_t^\star = \tilde{\eta}_t$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $0 \leq t \leq T$ und somit ist eine risikominimierende Strategie eindeutig durch (3.16) bestimmt.

$\square$

Die Charakterisierung für erreichbare Contingent Claims in vollständigen Märkten erhält man als Spezialfall aus obigem Satz (vgl. Harrison und Kreps [16]):

Korollar 3.12.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Die zulässige risikominimierende Strategie $\varphi^\star$ ist selbstfinanzierend.

(ii) Das intrinsische Risiko des Contingent Claims H ist null.

(iii) Der Contingent Claim ist erreichbar, das heißt

$$H = \mathbb{E}\left[L_T^H\right] + \int_0^T \vartheta_s^\star \mathrm{d}X_s, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{3.18}$$

Beweis

$\varphi^\star$ ist genau dann selbstfinanzierend, wenn das restliche Risiko zu jedem Zeitpunkt durch $R_t(\varphi^\star) = 0$ gegeben ist. Wegen (3.17) ist dies äquivalent zu $R_t^\star = 0$ für $0 \leq t \leq T$ und das bedeutet, dass das intrinsische Risiko null ist. Auf Grund der Orthogonalität ist $R_0^\star = 0$ äquivalent zu $L_t^H = 0$, für $0 \leq t \leq T$. Für die Darstellung (3.13) bedeutet das, dass sie nun äquivalent zu (3.18) ist.

□

Wie vorhin erwähnt, wurde nun gezeigt, dass eine optimale Strategie mit Hilfe der Kunita-Watanabe Zerlegung zu finden ist.

Im nächsten Abschnitt wird ein weiteres wichtiges Resultat im Bezug auf die optimale Strategie bewiesen. Führt man nämlich einen absolut stetigen Maßwechsel durch, so ändert sich die optimale Strategie $\varphi^\star$.

3.3 Der Maßwechsel

Wir werden nun beobachten, wie die risikominimierende Strategie durch einen absolut stetigen Martingalmaßwechsel beeinflusst wird. Dazu sei $\mathbb{P}^\star$ ein beliebiges Martingalmaß, welches absolut stetig bezüglich $\mathbb{P}$ ist. Demnach ist der Prozess X wieder ein quadratisch integrierbares Martingal unter $\mathbb{P}^\star$. Sei außerdem der Contingent Claim $H \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ erneut quadratisch integrierbar unter $\mathbb{P}^\star$. Dann folgt aus Darstellung (3.13) und Satz 3.11, angewandt auf $\mathbb{P}^\star$ anstatt auf $\mathbb{P}$, dass die risikominimierende Strategie unter $\mathbb{P}^\star$ durch $\varphi = (\vartheta, V - \vartheta X)$ mit

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}\left[H \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= V_0 + \int\limits_0^t \vartheta_s \mathrm{d}X_s + \tilde{L}_T^H \end{aligned} \tag{3.19}$$

gegeben ist.

Nun wird beschrieben, in welchem Zusammenhang ϑ und $\vartheta^\star$ stehen. Um die Erläuterung nicht zu kompliziert werden zu lassen, nehmen wir an, dass

$$\vartheta^\star \in \mathcal{L}^2\left(\mathbb{P}_X^\star\right) \tag{3.20}$$

ist.

Während X wieder ein Martingal unter $\mathbb{P}^\star$ ist, kann die Martingaleigenschaft von $(L_t^H)_{0\le t\le T}$ in (3.13) verloren gehen. Im Allgemeinen haben wir die Doob-Meyer Zerlegung

$$L^H = M + A, \tag{3.21}$$

wobei $M = (M_t)_{0\le t\le T}$ ein Martingal unter $\mathbb{P}^\star$ und $A = (A_t)_{0\le t\le T}$ ein vorhersehbarer Prozess mit $A_0 = 0$ und rechtsstetigen Pfaden mit beschränkter Variation[5] ist. Wir führen nun vorhersehbare Prozesse ϑ^M und ϑ^A ein, die durch

$$\langle M, X\rangle_t = \int\limits_0^t \vartheta_s^M \mathrm{d}\langle X\rangle_s, \quad 0 \le t \le T,$$

[5] vgl. Métivier [21]

und

$$\langle M^A, X\rangle_t = \int_0^t \vartheta_s^A \mathrm{d}\langle X\rangle_s, \quad 0 \le t \le T,$$

definiert sind. M^A bezeichnet hier eine rechtsstetige Version des Martingals

$$M_t^A = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[A_T \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \le t \le T.$$

Satz 3.13.

Die risikominimierende Strategie unter $\mathbb{P}^\star$ ist gegeben durch $\varphi = (\vartheta, V - \vartheta X)$ mit

$$\vartheta = \vartheta^\star + \vartheta^M + \vartheta^A \tag{3.22}$$

und

$$V_t = V_t^\star + M_t^A - A_t, \quad 0 \le t \le T. \tag{3.23}$$

Beweis

Betrachte die Darstellung (3.6) des Contingent Claims H, das heißt

$$H = \mathbb{E}[H] + \int_0^T \vartheta_s^\star \mathrm{d}X_s + L_T^H, \tag{3.24}$$

$\mathbb{P}$-f.s., folglich auch $\mathbb{P}^\star$-f.s. Da

$$L_T^H = M_T + A_T, \quad \mathbb{P}^\star\text{-f.s.},$$

gilt, folgt mit (3.20) und (3.24) sowie den Tatsachen, dass die stochastischen Integrale bezüglich X und M Martingale sind,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}[H] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[\mathbb{E}[H] + \int_0^T \vartheta_s^\star \mathrm{d}X_s + L_T^H\right] \\
&= \mathbb{E}[H] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[\int_0^T \vartheta_s^\star \mathrm{d}X_s\right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[M_T\right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[A_T\right] \\
&= \mathbb{E}[H] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[A_T\right]
\end{aligned}$$

und daher

$$H = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}[H] + \int_0^T \vartheta_s^\star \mathrm{d}X_s + M_T + A_T - \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[A_T\right].$$

Setzt man nun

$$\hat{L}_t^H = M_t + M_t^A - \int_0^t \left(\vartheta_s^M + \vartheta_s^A\right) \mathrm{d}X_s - \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[A_t\right], \quad 0 \leq t \leq T$$

erhält man als Darstellung für den Claim H

$$H = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}[H] + \int_0^T \left(\vartheta_s^\star + \vartheta_s^M + \vartheta_s^A\right) \mathrm{d}X_s + \hat{L}_t^H, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{3.25}$$

Nach Definition von ϑ^M und ϑ^A folgt:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{L}^H, X\rangle_t &= \langle M, X\rangle_t + \langle M^A, X\rangle_t - \int_0^t \left(\vartheta_s^M + \vartheta_s^A\right) \mathrm{d}\langle X\rangle_s \\
&= \int_0^t \vartheta_s^M \mathrm{d}\langle X\rangle_s + \int_0^t \vartheta_s^A \mathrm{d}\langle X\rangle_s - \int_0^t \left(\vartheta_s^M + \vartheta_s^A\right) \mathrm{d}X_s \\
&= 0, \quad 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\hat{L}^H$ orthogonal zu X ist. Dadurch folgt die Gleichheit (3.22) aus (3.25) und $\hat{L}^H$ stimmt mit dem orthogonalen Martingal $\hat{L}$ aus (3.19) überein. Außerdem erhält man aus (3.25), dass

$$\begin{aligned}
V_t^\star + M_t^A - A_t &= \mathbb{E}\left[H \middle| \mathcal{F}_t\right] + M_t^A - A_t \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}[H] \middle| F_t\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \vartheta_s^\star \mathrm{d}X_s \middle| F_t\right] + \mathbb{E}\left[M_T \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[A_T \middle| \mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[A_T\right] \middle| \mathcal{F}_t\right] + M_t^A - A_t \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}[H] + \int_0^t \vartheta_s^\star \mathrm{d}X_s - \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[A_T\right] + M_t + M_t^A \\
&= \mathbb{E}[H] + \int_0^t \left(\vartheta_s^\star + \vartheta_S^M + \vartheta_s^A\right) \mathrm{d}X_s + \tilde{N}_t, \quad 0 \leq t \leq T,
\end{aligned}$$

eine rechtsstetige Version des Martingals

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}\left[H|\,\mathcal{F}_t\right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

ist. Dies legt $\eta = V - \vartheta X$ fest.

$\square$

Korollar 3.14.
Sind M und M^A beide orthogonal zu X, gilt $\vartheta = \vartheta^\star$.

Beweis
Auf Grund der Orthogonalität erhalten wir

$$\langle M, X\rangle = \langle M^A, X\rangle = 0.$$

Demnach ist $\vartheta^M = \vartheta^A = 0$, $\mathbb{P}^\star_X$-f.s.

$\square$

Bemerkung 3.15.

(i) Ist X ein Martingal mit stetigen Pfaden, kann $\langle M, X\rangle$ pfadweise als quadratische Variation ausgewertet werden und stimmt mit $\langle L^H, X\rangle = 0$ $\mathbb{P}$-f.s., deshalb auch $\mathbb{P}^\star$-f.s., überein. Demnach folgt $\vartheta^M = 0$, $\mathbb{P}^\star_X$-f.s. und es gilt

$$\vartheta = \vartheta^\star + \vartheta^A. \tag{3.26}$$

(ii) Ist $\mathbb{P}^\star$ ein Martingalmaß im strengeren Sinne, sodass die Martingaleigenschaft von L^H erhalten bleibt, folgt, dass $A = 0$ ist, und somit

$$\vartheta = \vartheta^\star + \vartheta^M \tag{3.27}$$

und

$$V_t = V_t^\star. \tag{3.28}$$

Hat X stetige Pfade, können wir auf Grund von Punkt (i) schlussfolgern, dass die risikominimierende Strategie erhalten bleibt.

Wie dieser Abschnitt zeigte, ändert sich die optimale Strategie sobald man ein anderes äquivalentes Martingalmaß verwendet. Das ist auch der Grund für das nächste Kapitel, wo die Situation im allgemeinen Fall heikler wird.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, jedoch nicht weiter ausgeführt, dass Schweizer [36] die von Föllmer und Sondermann [14] doch sehr strengen Annahmen an X etwas gelockert und ihren Ansatz mit Hilfe von lokalen Martingalen verallgemeinert hat.

Kapitel 4

Lokale Risikominimierung

In diesem Kapitel beziehen wir uns auf die Arbeit von Schweizer [32], der darin das Konzept der lokal risikominimierenden Strategien einführte.

Wir betrachten nun die allgemeinere Situation, wo X einem Semimartingal mit der Zerlegung (2.1) entspricht. Rufen wir uns das verbleibende Risiko aus (3.11) in Erinnerung, so kann man den darin vorkommenden Kostenprozess, in Anlehnung an (2.8), folgendermaßen darstellen:

$$C_t = V_t - \int_0^t \vartheta_s \mathrm{d}M_s - \int_0^t \vartheta_s \mathrm{d}A_s, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{4.1}$$

Das Problem ist nun aber, dass wir den Einfluss des Terms $\int \vartheta \mathrm{d}A$ im Prozess $R(\varphi)$ nicht kontrollieren können. Präziser ausgedrückt bedeutet dies, dass es keine unmittelbare Analogie zur Kunita-Watanabe Projektion gibt, welche uns erlaubte, den Claim H in ein stochastisches Integral bezüglich X und ein orthogonales Kompliment zu zerlegen.

Definition 4.1.

Wir nennen eine Strategie $\Delta = (\delta, \varepsilon)$ eine kleine Störung, falls sie folgende

Bedingungen erfüllt:

$$\delta \text{ ist beschränkt,} \tag{4.2}$$

$$\int_0^T |\delta_s| \, \mathrm{d} \, |A|_s \text{ ist beschränkt und} \tag{4.3}$$

$$\delta_T = \varepsilon_T = 0. \tag{4.4}$$

Bemerkung 4.2.

Der Prozess X aus (2.1) kann, da X_0 konstant ist, angesehen werden, als hätte er zwei wesentliche Komponenten, nämlich das unvorhersehbare Martingal M und den Drift- beziehungsweise Trendterm A. Demnach haben Bedingung (4.2) und (4.3) von Definition 4.1 zum Ziel, den durch A hervorgerufenen Ertrag zu kontrollieren. (4.4) gewährleistet zwei Folgerungen:

(i) Ist φ eine zulässige Strategie, dann gilt $V_T(\Delta) = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und demnach ist $\Delta + \varphi$ ebenso eine zulässige Strategie.

(ii) Die Einschränkung von Δ auf ein beliebiges Teilintervall von $[0, T]$ ist wieder eine kleine Störung.

Unsere Idee ist nun eine lokale Variation einer Strategie einzuführen. Zu diesem Zweck betrachten wir Partitionen $\tau = (t_i)_{0 \leq i \leq N}$ mit $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_N = T$ und definieren deren Netz durch $|\tau| := \max\limits_{1 \leq i \leq N} (t_i - t_{i-1})$. Eine Folge von Partitionen heißt steigend, falls $\tau_n \subseteq \tau_{n+1}$ für alle n gilt. Sie heißt nullkonvergent, falls $\lim\limits_{n \to \infty} |\tau_n| = 0$ erfüllt ist.

Ist Δ eine kleine Störung und $(s, t]$ ein Teilintervall von $[0, T]$, so definieren wir

$$\Delta|_{(s,t]} \coloneqq \left(\delta|_{(s,t]}, \varepsilon|_{[s,t)}\right)$$

durch

$$\delta|_{(s,t]}(\omega, u) \coloneqq \delta_u(\omega)\mathbb{1}_{(s,t]}$$
$$\varepsilon|_{[s,t)}(\omega, u) \coloneqq \varepsilon_u(\omega)\mathbb{1}_{[s,t)}.$$

Diese Asymmetrie entspricht der Tatsache, dass δ vorhersehbar und ε lediglich adaptiert ist.

Definition 4.3.

Sei φ eine Strategie, Δ eine kleine Störung und τ eine Partition von $[0, T]$. Dann nennen wir

$$r^\tau[\varphi, \Delta](\omega, t) \coloneqq \sum_{t_i \in T} \frac{R_{t_i}(\varphi + \Delta|_{(t_i, t_{i+1})}) - R_{t_i}(\varphi)}{\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]}(\omega) \cdot \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \tag{4.5}$$

den Risikoquotient.

Definition 4.4.

Die Strategie φ heißt lokal risikominimierend, falls für jede kleine Störung Δ und jede steigende nullkonvergente Folge (τ_n) von Partitionen von $[0, T]$ gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} r^{\tau_n}[\varphi, \Delta] \geq 0 \qquad \mathbb{P}_X\text{-f.ü.} \tag{4.6}$$

Bemerkung 4.5.

(i) Der stochastische Prozess aus (4.5) ist auf $\Omega \times [0, T]$ $\mathbb{P}_X$-f.ü. wohldefiniert.

(ii) Er kann als Maß für die totale Veränderung des Risikos interpretiert werden, falls φ entlang der Partition τ durch Δ lokal gestört wird. Der Nenner in (4.5) beschreibt die passende Zeitskala für diese Maße.

(iii) Definition 4.3 ist das infinitesimale Analogon zu Definition 3.7.

Wir werden nun zeigen, dass, unter Verwendung zusätzlicher Annahmen, eine lokal risikominimierende Strategie im Mittel selbstfinanzierend ist.

Lemma 4.6.
Angenommen X erfüllt (X1) und

$$\text{für } \mathbb{P}\text{-fast alle } \omega \text{ hat das durch } \langle M\rangle_\cdot(\omega) \text{ induzierte Maß } \mathbb{P}_X \text{ das gesamte Intervall } [0,T] \text{ als seinen Träger.} \tag{X2}$$

Dann ist die Strategie φ im Mittel selbstfinanzierend, falls sie lokal risikominimierend ist.

Beweis
Die Beweisführung folgt analog dem Lemma 3.9.
Wir konstruieren uns eine zulässige, im Mittel selbstfinanzierende Strategie $\hat{\varphi}$, sodass für alle $0 \leq t \leq T$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_t &= \vartheta_t \qquad \text{und} \\ \hat{\eta}_t &= \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\middle|\,\mathcal{F}_t\right] + \int\limits_0^t \vartheta_s \mathrm{d}X_s - \vartheta_t X_t. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Demnach ist $\Delta = \hat{\varphi} - \varphi$ eine kleine Störung. Sei τ_n die n-te dyadische Partition von $[0,T]$. Mit $[d,d']$ bezeichnen wir ein Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ der Partition τ_n, wobei $d' \coloneqq (d + T/2^n) \wedge T$ der Nachfolger von $d \in \tau_n$ ist.
Auf Grund von $\Delta = \hat{\varphi} - \varphi$ erhalten wir

$$\begin{aligned} V_d\left(\varphi + \Delta|_{(d,d']}\right) &= V_d\left(\hat{\varphi}\right) \qquad \text{und} \\ V_T\left(\varphi + \Delta|_{(d,d']}\right) &= V_T\left(\hat{\varphi}\right), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} C_T\left(\varphi + \Delta|_{(d,d']}\right) - C_d\left(\varphi + \Delta|_{(d,d']}\right) &= C_T\left(\hat{\varphi}\right) - C_d\left(\hat{\varphi}\right) \qquad \text{und} \\ R_d\left(\varphi + \Delta|_{(d,d']}\right) &= R_d\left(\hat{\varphi}\right). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich nun für $R_d(\hat{\varphi})$ unter der Verwendung von $\mathbb{E}\left[C_t(\varphi)\middle|\mathcal{F}_d\right] = C_d(\hat{\varphi})$:

$$\begin{aligned}
R_d(\hat{\varphi}) &= \mathbb{E}\left[\left(C_T(\hat{\varphi}) - C_d(\hat{\varphi})\right)^2 \middle| \mathcal{F}_d\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(C_T(\varphi) - C_d(\varphi) + C_d(\varphi) - C_d(\hat{\varphi})\right)^2 \middle| \mathcal{F}_d\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(C_T(\varphi) - C_d(\varphi)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_d\right] \\
&\quad + 2 \cdot \left(C_d(\varphi) - C_d(\hat{\varphi})\right)\left(\mathbb{E}\left[C_t(\varphi)\middle|\mathcal{F}_d\right] - C_d(\varphi)\right) \\
&\quad + \left(C_d(\varphi) - C_d(\hat{\varphi})\right)^2 \\
&= R_d(\varphi) - 2 \cdot \left(C_d(\varphi) - C_d(\hat{\varphi})\right)^2 + \left(C_d(\varphi) - C_d(\hat{\varphi})\right)^2 \\
&= R_d(\varphi) - \left(C_d(\varphi) - C_d(\hat{\varphi})\right)^2 .
\end{aligned}$$

Infolgedessen gilt:

$$\begin{aligned}
R_d\left(\varphi + \Delta|_{(d,d']}\right) - R_d(\varphi) &= R_d(\hat{\varphi}) - R_d(\varphi) \\
&= R_d(\varphi) - \left(C_d(\varphi) - C_d(\hat{\varphi})\right)^2 - R_d(\varphi) \\
&= -\left(C_d(\varphi) - \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\middle|\mathcal{F}_d\right]\right)^2 .
\end{aligned}$$

Somit folgt für den Risikoquotienten aus (4.5):

$$r^{\tau_n}[\varphi, \Delta] = -\sum_{d \in \tau_n} \frac{\left(C_d(\varphi) - \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\middle|\mathcal{F}_d\right]\right)^2}{\mathbb{E}\left[[M]_{d'} - \langle M\rangle_d \middle| \mathcal{F}_d\right]} \cdot \mathbb{1}_{(d,d']}. \tag{4.8}$$

Angenommen für eine dyadische rationale Zahl d_0 existiert eine Menge B mit $\mathbb{P}(B) > 0$, sodass für alle $\omega \in B$ gilt:

$$C_{d_0}(\varphi) \neq \mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\middle|\mathcal{F}_{d_0}\right]. \tag{4.9}$$

Auf Grund der Rechtsstetigkeit von $C_{\cdot}(\varphi)$ und $\mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\middle|\mathcal{F}_{\cdot}\right]$ folgt, dass für jedes $\omega \in B$ die Gleichung (4.9) für alle $d \in [d_0, d_0 + \alpha(\omega)]$, mit einer Konstanten $\alpha(\omega)$, weiterhin gilt. Aber dadurch widerspricht die Gleichung (4.8) der Definition 4.4. Demnach ist $\mathbb{P}(B) = 0$ für jede dyadische rationale

Zahl d_0, wodurch, wiederum auf Grund der Rechtsstetigkeit von $C_{\cdot}(\varphi)$ und $\mathbb{E}\left[C_T(\varphi)\middle|\mathcal{F}_{\cdot}\right]$, folgt, dass $\mathbb{P}(B) = 0$ für alle $0 \leq t \leq T$.

□

4.1 Die Optimalitätsgleichung

Die nächsten Schritte werden uns helfen, das Schlüsselergebnis dieses Kapitels zu erhalten. Es sagt uns, dass wir eine lokal risikominimierende Strategie finden können, indem wir nur die ϑ-Komponente verändern. Es wird sich zeigen, dass dies eine sehr wichtige Eigenschaft ist, da wir dadurch, wie im vorigen Kapitel, Martingaltechniken anwenden können.
Dazu sei wie bisher H ein Contingent Claim und $\varphi = (\vartheta, \eta)$ eine bezüglich H zulässige und im Mittel selbstfinanzierende Strategie. Demnach ist der Kostenprozess $C(\varphi)$ ein Martingal und hat den Endwert (3.4). φ ist somit eindeutig durch ϑ bestimmt und wir können $C(\varphi) := C(\vartheta)$ sowie $R(\varphi) := C(\vartheta)$ schreiben. Wir betrachten nun eine kleine Störung $\Delta = (\delta, \varepsilon)$ und eine Partition τ von $[0, T]$. Für $t_i \in \tau$ werden wir nun die zulässige, aber nicht notwendigerweise im Mittel selbstfinanzierende, Strategie $\varphi + \Delta|_{(t_i, t_{i+1}]}$ mit der im Mittel selbstfinanzierenden Strategie $\vartheta + \delta|_{(t_i, t_{i+1}]}$ vergleichen. Diese Strategien haben dieselbe ϑ-Komponente, können sich aber in der η-

Komponente unterscheiden. (4.4) liefert:

$$
\begin{aligned}
C_T\left(\varphi+\Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) &= V_T\left(\varphi+\Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - \int\limits_0^T \left(\vartheta_s+\delta_s|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)\mathrm{d}X_s \\
&= \left(\vartheta_T+\delta_T\right)X_T+\eta_T+\varepsilon_T - \int\limits_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}X_s \\
&= V_T - \int\limits_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}X_s \\
&= C_T\left(\varphi\right) - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}X_s \\
&= C_T\left(\vartheta\right) - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}X_s \\
&= C_T\left(\vartheta+\delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right).
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt:

$$
C_{t_i}\left(\varphi+\Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) = C_{t_i}\left(\varphi\right)+\varepsilon_{t_i}.
$$

Dies erhält man durch weitere Umformungen und auf Grund der Tatsache, dass zum Zeitpunkt t_i der Prozess $\delta|_{(t_i,t_{i+1}]} = 0$ ist:

$$
\begin{aligned}
C_{t_i}\left(\varphi+\Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) &= V_{t_i}\left(\varphi+\Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - \int\limits_0^{t_i} \left(\vartheta_s+\delta_s|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)\mathrm{d}X_s \\
&= \left(\vartheta_{t_i}+\delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)X_{t_i}+\eta_{t_i}+\varepsilon_{t_i} - \int\limits_0^{t_i} \left(\vartheta_s+\delta_s|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)\mathrm{d}X_s \\
&= \vartheta_{t_i}X_{t_i}+\eta_{t_i}+\varepsilon_{t_i} - \int\limits_0^{t_i} \vartheta_s \mathrm{d}X_s \\
&= V_{t_i}+\varepsilon_{t_i} - \int\limits_0^{t_i} \vartheta_s \mathrm{d}X_s \\
&= C_{t_i}\left(\varphi\right)+\varepsilon_{t_i}.
\end{aligned}
$$

Da φ im Mittel selbstfinanzierend und $C(\varphi)$ demnach ein Martingal ist, bekommen wir unter Zuhilfenahme von $C_T\left(\varphi + \Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) = C_T\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)$ für $C_{t_i}\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)$:

$$\begin{aligned}
C_{t_i}\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) &= \mathbb{E}\left[C_T\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)\middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[C_T\left(\varphi + \Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)\middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[C_T\left(\varphi\right) - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}X_s \middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&= C_{t_i}\left(\varphi\right) - \mathbb{E}\left[\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}X_s \middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&= C_{t_i}\left(\varphi\right) - \mathbb{E}\left[\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}\left(M + A\right)_s \middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&= C_{t_i}\left(\varphi\right) - \mathbb{E}\left[\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}M_s + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&= C_{t_i}\left(\varphi\right) - \mathbb{E}\left[\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right].
\end{aligned}$$

Führt man nun die eben durchgeführten Herleitungen zusammen, folgt

$$\begin{aligned}
&C_T\left(\varphi + \Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - C_{t_i}\left(\varphi + \Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) \\
&\quad = C_T\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - C_{t_i}\left(\varphi\right) - \varepsilon_{t_i} \\
&\quad = C_T\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - \left(C_{t_i}\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) + \mathbb{E}\left[\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right]\right) - \varepsilon_{t_i} \\
&\quad = C_T\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - C_{t_i}\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - \left(\varepsilon_{t_i} + \mathbb{E}\left[\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right]\right).
\end{aligned}$$

Als Resultat erhalten wir für den Risikoprozess $R_{t_i}\left(\varphi + \Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)$:

$$
\begin{aligned}
&R_{t_i}\left(\varphi + \Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) = \\
&= \mathbb{E}\left[\left(C_T\left(\varphi + \Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - C_{t_i}\left(\varphi + \Delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(C_T\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - C_{t_i}\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - \left(\varepsilon_{t_i} + \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\right)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(C_T\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - C_{t_i}\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&\quad - 2 \cdot \mathbb{E}\left[\left(C_T\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - C_{t_i}\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)\right)\left(\varepsilon_{t_i} + \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\right) \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&\quad + \left(\varepsilon_{t_i} + \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\right)^2 \\
&= R_{t_i}\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) + \left(\varepsilon_{t_i} + \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\right)^2,
\end{aligned}
$$

da wegen der Martingaleigenschaft von $C\left(\vartheta + \delta|_{ti_i,t_{i+1}]}\right)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(C_T\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - C_{t_i}\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)\right)\left(\varepsilon_{t_i} + \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\right) \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(C_T\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - C_{t_i}\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right)\right) \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\left(\varepsilon_{t_i} + \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Durch Aufsummieren können wir für den Risikoquotienten schlussfolgern, dass

$$\begin{aligned} r^{\tau}[\varphi, \Delta] = &\sum_{t_i \in \tau} \frac{R_{t_i}\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - R_{t_i}(\vartheta)}{\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]} \cdot \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]} \\ &+ \sum_{t_i \in \tau} \frac{\left(\varepsilon_{t_i} + \mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\right)^2}{\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]} \cdot \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]} \end{aligned} \tag{4.10}$$

gilt, wobei wir entsprechend vorheriger Notationen den ersten Term der rechten Seite aus (4.10)

$$\sum_{t_i \in \tau} \frac{R_{t_i}\left(\vartheta + \delta|_{(t_i,t_{i+1}]}\right) - R_{t_i}(\vartheta)}{\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i} \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]} \cdot \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]} =: r^{\tau}[\vartheta, \delta]$$

setzen.

Bemerkung 4.7.

Um unser finales Ergebnis zu erhalten, benötigen wir noch zusätzliche Annahmen für das Semimartingal X:

$$A \text{ ist stetig.} \tag{X3}$$

$$\begin{aligned} &A \text{ ist absolut stetig bezüglich } [M] \text{ mit einer Dichte } \alpha, \\ &\text{die } \mathbb{E}_M\left[|\alpha| \cdot \log^+ |\alpha|\right] < \infty \text{ erfüllt.} \end{aligned} \tag{X4}$$

$$X \text{ ist stetig zur Zeit } T \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{X5}$$

Bedingung (X5) bedeutet, dass X in T keine Unstetigkeitsstelle besitzt. Wegen (X3), springt M nicht zur Zeit T sodass $[M]$ keine Masse in T hat. Annahme (X4) wurde durch Proposition 3.1 aus Schweizer [31] motiviert und findet in folgendem Lemma Anwendung.

Lemma 4.8.

Angenommen X erfüllt (X1) bis (X5). Sei H ein Contingent Claim und $\varphi =$

(ϑ, η) eine bezüglich H zulässige Strategie. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) φ ist lokal risikominimierend.

(ii) φ ist im Mittel selbstfinanzierend und

$$\liminf_{n\to\infty} r^{\tau_n}[\vartheta, \delta] \geq 0 \qquad \mathbb{P}_X\text{-f.ü.} \tag{4.11}$$

für jeden beschränkten vorhersehbaren Prozess δ, der (4.3) und (4.4) erfüllt sowie für jede steigende nullkonvergente Folge (τ_n) von Partitionen von $[0, T]$.

Beweis

Auf Grund von Lemma 4.6 können wir φ als im Mittel selbstfinanzierend annehmen. Dadurch folgt durch (4.8) (i) unmittelbar aus (ii).

Für die andere Richtung wollen wir zuerst anmerken, dass wir in (4.8) alle ε_{t_i} gleich Null wählen können. Mit Hilfe der Ungleichung von Jensen erreichen wir folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right]\right)^2 &\leq \mathbb{E}\left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s\right)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right] \\ &\leq \|\delta\|_\infty^2 \cdot \mathbb{E}\left[\left(|A|_{t_{i+1}} - |A|_{t_i}\right)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right].\end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\sum_{t_i\in\tau} \frac{\left(\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta_s \mathrm{d}A_s \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right]\right)^2}{\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right]} \cdot \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]} \\ &\leq \|\delta\|_\infty^2 \cdot \sum_{t_i\in\tau} \frac{\mathbb{E}\left[\left(|A|_{t_{i+1}} - |A|_{t_i}\right)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right]}{\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i} \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right]} \cdot \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}\end{aligned}$$

Ist $\langle M \rangle_t = t$ und A mit einer beschränkten Dichte absolut stetig bezüglich dem Lebesguemaß, dann folgt daraus, dass der letzte Ausdruck gegen Null $\mathbb{P}_X$-fast überall konvergiert. Im allgemeinen Fall zeigt sich die erforderliche Konvergenz aus (X1) - (X5) durch Proposition 3.1 aus Schweizer [31]. Daher folgt (ii) aus (i) ebenso durch den Ausdruck (4.8).

□

Wir haben nun mit den bisherigen Ergebnissen gesehen, dass der Risikoquotient $r^\tau[\varphi, \Delta]$ in zwei Terme zerlegt werden kann. Ein Term ist nur von ϑ und δ abhängig. Der andere Term ist nur vom Drift A abhängig, welcher, dank des letzten Lemmas, jedoch vernachlässigbar ist. Die lokale Risikominimierung von φ ist demnach auf jene von ϑ unter einer lokalen Störung reduziert. Dank Schweizer [31] lässt sich die lokale Risikominimierung unter solch lokalen Störungen nun in eine martingaltheoretische Formulierung überführen.

Satz 4.9.

Angenommen X erfüllt (X1) bis (X5). Sei H ein Contingent Claim und φ eine bezüglich H zulässige Strategie. Dann ist φ genau dann lokal risikominimierend, wenn φ im Mittel selbstfinanzierend und das Martingal $C(\varphi)$ unter $\mathbb{P}$ orthogonal zu M ist.

Beweis

Auf Grund von Lemma (4.8) folgt die Äquivalenz direkt aus Theorem 3.2 von Schweizer [31].

□

Durch diesen Zusammenhang erhalten wir nun folgende Definition:

Definition 4.10.[1]

Eine zulässige Strategie $\varphi = (\vartheta, \eta)$ heißt optimal, wenn ihr zugehöriger Kostenprozess C ein quadratisch integrierbares Martingal unter $\mathbb{P}$ und orthogonal zu M ist.

Wir wollen nun diese optimale Strategie auf ihre Existenz untersuchen.

Satz 4.11.[2]

Die Existenz einer optimalen Strategie $\varphi = (\vartheta, \eta)$ ist äquivalent zu der Zerlegung

$$H = H_0 + \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s + L_T^H, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}&\text{wobei } H_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}), \vartheta^H \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P}_X) \text{ und}\\ &L^H = \left(L_t^H\right)_{0 \leq t \leq T} \text{ ein quadratisch integrierbares Martingal}\\ &\text{bezüglich } \mathbb{P}, \text{ mit } L_0^H = 0\ \mathbb{P}\text{-f.s., und orthogonal zu } M \text{ ist.}\end{aligned} \tag{4.13}$$

Beweis

Ist die Zerlegung (4.12) gegeben, erhält man analog zu vorigem Kapitel die optimale Strategie $\varphi = (\vartheta, V - \vartheta X)$, wobei:

$$V_t = H_0 + \int_0^t \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s + L_t^H. \tag{4.14}$$

Für den zugehörigen Kostenprozess gilt daher:

$$C_t = H_0 + L_t^H.$$

Er erfüllt demnach das Optimalitätskriterium aus Definition 4.10.

Geht man hingegen von einer optimalen Strategie aus, bedeutet dies, dass

[1] vgl. Föllmer und Schweizer [13], S. 7

[2] vgl. Proposition 2.24 in Föllmer und Schweizer [13]

$C_t = \mathbb{E}\left[C_T \mid \mathcal{F}_t\right]$ gilt und liefert demnach folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} H &= V_T \\ &= C_T + \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s \\ &= C_0 + \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s + (C_T - C_0). \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} \vartheta^H &= \vartheta \\ L_t^H &= C_t - C_0 \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T \qquad \text{und} \\ H_0 &= C_0, \end{aligned}$$

erhält man die Zerlegung aus (4.12). Somit wurde die Behauptung gezeigt.

□

Bemerkung 4.12.

(i) Die Darstellung (4.12) nennt man die Föllmer-Schweizer Zerlegung von H.

(iI) Vergleicht man die Gleichungen (4.12) und (4.14) mit (3.6) und (3.13) aus vorigem Kapitel, kann man eine große Ähnlichkeit erkennen. Der Unterschied liegt jedoch darin, dass X hier kein Martingal mehr ist, demnach ist V auch kein Martingal. Daher können wir nun die übliche Kunita-Watanabe Projektion nicht mehr direkt anwenden um ϑ und η zu finden.

Ein möglicher Ansatz wurde von Föllmer und Schweizer [13] beschrieben. Will man die optimale Strategie finden, so läuft dies darauf hinaus, dass man die Zerlegung (4.12) für den Contingent Claim H finden muss. Dabei startet man mit einer Kunita-Watanabe Zerlegung von H bezüglich dem quadratisch integrierbaren Martingal M:

$$H = N_0^H + \int_0^T \mu_s^H \mathrm{d}M_s + (N_T^H - N_0^H), \tag{4.15}$$

wobei $N^H = (N_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ ein quadratisch integrierbares Martingal orthogonal zu M und Erwartungswert null ist. Wenden wir nun die Kunita-Watanabe Zerlegung auch auf den Term $\int \vartheta \mathrm{d}A$ an, so erhalten wir

$$\int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}A_s = N_0^\vartheta + \int_0^T \mu_s^\vartheta \mathrm{d}M_s + (N_T^\vartheta - N_0^\vartheta)$$

wobei $N^\vartheta = (N_t^\vartheta)_{0 \leq t \leq T}$ ein quadratisch integrierbares Martingal orthogonal zu M und Erwartungswert null ist. Fügt man nun die Darstellungen aus (3.6) und (4.15) zusammen, folgt:

$$\begin{aligned}
H &= H_0 + \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}X_s + L_T^H \\
&= H_0 + \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}A_s + \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}M_s + L_T^H \\
&= H_0 + N_0^\vartheta + \int_0^T \mu_s^\vartheta \mathrm{d}M_s + N_T^\vartheta - N_0^\vartheta + \int_0^T \vartheta_s^H \mathrm{d}M_s + L_T^H \\
&= (H_0 + N_0^\vartheta) + \int_0^T (\vartheta_s^H + \mu_s^\vartheta) \mathrm{d}M_s + (L_T^H + N_T^\vartheta - N_0^\vartheta).
\end{aligned}$$

Da (4.15) eindeutig ist, muss eine optimale Strategie folgende Gleichung erfüllen:

$$\vartheta^H + \mu^\vartheta = \mu^H. \tag{4.16}$$

(4.16) nennt man die Optimalitätsgleichung. Man kann nun versuchen, diese Optimalitätsgleichung zu lösen, wie es Schweizer [32] in seiner Arbeit getan hat. Ein anderer, etwas intuitiverer Ansatz wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

4.2 Das minimale Martingalmaß

In diesem Unterkapitel werden wir die Existenz und Eindeutigkeit der Zerlegung (4.15) sowie die entsprechende optimale Strategie untersuchen und beziehen uns dabei auf Föllmer und Schweizer [13]. Die zugrunde liegende Idee ist, eine Girsanov Transformation zu verwenden, um das Problem in ein Martingalmaß überzuführen, wo die optimale Strategie wie in Kapitel 3 berechnet werden kann. Dort wurde auch bereits gezeigt, dass unterschiedliche Martingalmaße zu unterschiedlichen Strategien führen. Aber es wird sich herausstellen, dass es ein minimales Martingalmaß $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$ gibt, sodass die optimale Strategie für $\mathbb{P}$ im Bezug auf $\mathbb{Q}$ berechnet werden kann.

Zu Beginn rufen wir uns noch einmal den Begriff des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^\star \approx \mathbb{P}$ in Erinnerung, der durch die Eigenschaften (2.11) und (2.12) bestimmt ist. So ein Martingalmaß ist eindeutig durch das rechtsstetige, quadratisch integrierbare $\mathbb{P}$-Martingal $Z^\star = (Z_t^\star)_{0 \leq t \leq T}$ mit

$$Z_t^\star = \mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^\star}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right], \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T,$$

definiert. Die Doob-Meyer Zerlegung von X unter $\mathbb{P}$ ist $X = X_0 + M + A$. Infolgedessen ist die Doob-Meyer Zerlegung von M unter $\mathbb{P}^\star$ gegeben durch $M = -X_0 + X + (-A)$. Die Theorie von Girsanov besagt nun, dass der vorhersehbare Prozess $-A$ mit beschränkter Variation auch bezüglich $Z^\star$

berechnet werden kann[3]:

$$-A_t = \int_0^t \frac{1}{Z^\star_{s-}} \mathrm{d}\langle M, Z^\star\rangle_s, \qquad 0 \le t \le T.$$

Da $\langle M, Z^\star\rangle \ll \langle M\rangle = \langle X\rangle$, ist A absolut stetig bezüglich der vorhersehbaren quadratischen Variation $\langle X\rangle$ von X. Dadurch kann A als

$$A_t = \int_0^t \lambda_s \mathrm{d}\langle X\rangle_s, \qquad 0 \le t \le T, \tag{4.17}$$

geschrieben werden, wobei $\lambda = (\lambda_t)_{0\le t\le T}$ einen vorhersehbaren Prozess bezeichnet.

Definition 4.13.
Ein Martingalmaß $\mathbb{Q}$ heißt minimal, falls gilt

$$\mathbb{Q} = \mathbb{P} \text{ auf } \mathcal{F}_0 \tag{4.18}$$

und falls L ein quadratisch integrierbares $\mathbb{P}$-Martingal und orthogonal zu M unter $\mathbb{P}$ ist, dann ist L ein $\mathbb{Q}$-Martingal, das heißt für

$$L \in \mathcal{M}^2 \text{ und } [L, M] = 0 \Rightarrow L \text{ ist ein Martingal unter } \mathbb{Q}. \tag{4.19}$$

Mit Hilfe der bisherigen Erkenntnisse können wir uns nun der Untersuchung von Existenz und Eindeutigkeit des minimalen Martingalmaßes widmen.

Satz 4.14.

(i) Das minimale Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist eindeutig bestimmt.

(ii) $\mathbb{Q}$ existiert genau dann wenn das strikt positive, stetige, lokale $\mathbb{P}$-Martingal

$$\hat{Z}_t = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s \mathrm{d}M_s - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s^2 \mathrm{d}\langle X\rangle_s \right), \qquad 0 \le t \le T \tag{4.20}$$

[3]vgl. Dellacherie und Meyer [9]

ein quadratisch integrierbares $\mathbb{P}$-Martingal ist. Unter dieser Bedingung ist $\mathbb{Q}$ eindeutig bestimmt durch:

$$\hat{Z}_T = \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}. \tag{4.21}$$

Beweis

(i) Angenommen, das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$ ist minimal. Sei $Z^\star = (Z_t^\star)_{0\leq t\leq T}$ ein quadratisch integrierbares $\mathbb{P}^\star$-Martingal, wobei $\mathbb{P}^\star \approx \mathbb{P}$. Durch die Kunita-Watanabe Zerlegung von $Z^\star$ erhalten wir

$$Z_t^\star = Z_0^\star + \int_0^t \beta_s \mathrm{d}M_s + L_t, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

wobei L ein quadratisch integrierbares $\mathbb{P}$-Martingal, orthogonal zu M, und $\beta = (\beta_t)_{0\leq t\leq T}$ ein vorhersehbarer Prozess mit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \beta_s^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] < \infty \tag{4.22}$$

ist.

Unter $\mathbb{P}^\star$ ist der vorhersehbare Prozess A mit beschränkter Variation aus der Doob-Meyer Zerlegung von M gegeben durch:

$$A_t = \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}^\star} \mathrm{d}\langle Z^\star, M\rangle_s = \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}^\star} \cdot \beta_s \mathrm{d}\langle X\rangle_s.$$

Da aber $X = X_0 + M + A$ als Martingal unter $\mathbb{P}^\star$ angenommen wurde, erhalten wir:

$$\lambda = -\frac{\beta}{Z_-^\star}. \tag{4.23}$$

Auf Grund der Äquivalenz von $\mathbb{P}^\star$ zu $\mathbb{P}$ ist $Z^\star > 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher, außerdem gilt $\langle M\rangle = \langle X\rangle$. Demnach folgt aus (4.22):

$$\int_0^T \lambda_s^2 \mathrm{d}\langle X\rangle_s < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{4.24}$$

Da $\mathbb{P}^\star$ als minimales Maß angenommen wurde, gilt nach (4.18), dass $Z_0^\star = \mathbb{E}[\mathrm{d}\mathbb{P}^\star/\mathrm{d}\mathbb{P}|\mathcal{F}_0] = 1$ ist. Wegen (4.19) folgt zusätzlich, dass L ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal ist. Somit gilt $\langle L, Z^\star\rangle = 0$ und wir erhalten

$$\langle L\rangle = \langle L, Z^\star\rangle = 0,$$

also $L \equiv 0$. Demnach löst $Z^\star$ die stochastische Gleichung:

$$Z_t^\star = 1 + \int_0^t Z_{s-}^\star \cdot (-\lambda_s)\mathrm{d}M_s. \tag{4.25}$$

Weil M stetig und $\langle M\rangle = \langle X\rangle$ ist, erhalten wir $Z^\star = \hat{Z}$, wonach die Eindeutigkeit gezeigt wurde.

(ii) Auf Grund von (4.24) ist $\hat{Z}$ wohldefiniert durch (4.20). Aber im Allgemeinen ist es nur ein lokales Martingal unter $\mathbb{P}$. Kommt $\hat{Z}$ einem Martingalmaß gleich, dann ist dieses lokale Martingal sogar ein quadratisch integrierbares Martingal.
Andererseits nehmen wir an, dass $\hat{Z}$ die Eigenschaft eines quadratisch integrierbaren Martingals aufweist. Wir möchten nun zeigen, dass das assoziierte Martingalmaß $\mathbb{Q}$ minimal ist. Dazu betrachten wir ein Martingal $L \in \mathcal{M}^2$ mit $\langle L, M\rangle = 0$ unter $\mathbb{P}$. Da $\hat{Z}$ die stochastische Gleichung (4.25) erfüllt, erhalten wir $\langle L, \hat{Z}\rangle = 0$ und somit ist L ein lokales Martingal unter $\mathbb{Q}$. Um zu sehen, dass L tatsächlich ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist, beachten wir, dass L und $\hat{Z}_T$ quadratisch integrierbare Martingale unter $\mathbb{P}$ sind. Daher folgt auf Grund der Unabhängigkeit von L und $\hat{Z}_T$ sowie mit Hilfe der Ungleichung von Jensen

und Doobs Maximalungleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sup_{0\le t\le T}|L_t|\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\sup_{0\le t\le T}|L_t|\cdot\hat{Z}_T\right]\\ &\le\sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\sup_{0\le t\le T}L_t^2\right]\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\hat{Z}_T^2\right]}\\ &\le\sqrt{4\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[L_t^2\right]\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\hat{Z}_T^2\right]}<\infty,\end{aligned}$$

oder anders ausgedrückt folgt

$$\sup_{0\le t\le T}|L_t|\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$$

und somit auch

$$\sup_{0\le t\le T}|L_t|\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{Q}),$$

da $\hat{Z}_T\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{Q})$. Dadurch ist das lokale Martingal L tatsächlich ein Martingal unter $\mathbb{Q}$.

$\square$

Bemerkung 4.15.

Die Exponentialfunktion aus (ii) von Satz 4.14 nennt man stochastisches, beziehungsweise Dolean(-Dade) Exponential[4]:

$$\mathcal{E}\left(-\int\lambda\mathrm{d}M\right)_t=\exp\left(-\int_0^t\lambda_s\mathrm{d}M_s-\frac{1}{2}\int_0^t\lambda_s^2\mathrm{d}\langle M\rangle_s\right). \tag{4.26}$$

Durch $\langle M\rangle=\langle X\rangle$ folgt die Darstellung (4.20).

Bemerkung 4.16.

Das Resultat aus Satz 4.14 verallgemeinert den Maßwechsel von Girsanov für eine Brownsche Bewegung mit Drift (siehe Karatzas und Shreve [18]).

[4]vgl. Bingham und Kiesel [1], S. 215

Die für uns wichtigste Charakteristik des minimalen Martingalmaßes wird in folgendem Satz dargestellt.

Satz 4.17.
Das minimale Martingalmaß bewahrt die Orthogonalität:
Jedes $L \in \mathcal{M}^2$ mit $\langle L, M\rangle = 0$ unter $\mathbb{P}$ erfüllt $\langle L, X\rangle = 0$ unter $\mathbb{Q}$, das heißt jedes zu M orthogonale, quadratisch integrierbare Martingal L unter $\mathbb{P}$, ist orthogonal zu X unter $\mathbb{Q}$.

Beweis
Um $\langle L, X\rangle$ unter $\mathbb{Q}$ zu zeigen, erinnern wir uns noch einmal an den quadratischen Kovariationsprozess für zwei Semimartingale Y und Z aus (2.3):

$$[Y, Z] =: \langle Y^c, Z^c\rangle + \sum_s \Delta Y_s \cdot \Delta Z_s.$$

Da X und A stetig sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle L, X\rangle &= \langle L^c, X\rangle + \langle L^{,} X\rangle \\
&= \langle L^c, X\rangle \\
&= [L, X] \\
&= [L, X_0 + M + A] \\
&= [L, M] + [L, A] \\
&= [L, M]
\end{aligned}$$

unter $\mathbb{Q}$. Aber da M stetig ist, folgt

$$[L, M] = \langle L^c, M\rangle = \langle L, M\rangle = 0$$

unter $\mathbb{P}$. Elliot [11] liefert uns, dass $[L, M] = 0$ unter $\mathbb{Q}$ und somit auch $\langle L, X\rangle = 0$ unter $\mathbb{Q}$ ist.

$\square$

Grob gesprochen besagt obiger Satz 4.17, dass das minimale Martingalmaß $\mathbb{Q}$ aus Definition 4.13 die Martingaleigenschaft (2.12) weitestgehend erhält. Wir haben nun alle notwendigen Werkzeuge, um unser Endresultat zu formulieren.

Satz 4.18.

Die optimale Strategie, daher auch die entsprechende Zerlegung (4.12), ist eindeutig durch das minimale Martingalmaß $\mathbb{Q}$ bestimmt. Bezeichnet $V = (V_t)_{0 \leq t \leq T}$ eine rechtsstetige Version des Martingals

$$V_t := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[H \middle| \mathcal{F}_t\right], \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{4.27}$$

so ist die optimale Strategie $\varphi = (\vartheta, \eta)$ gegeben durch (3.16) mit:

$$\vartheta^H = \frac{\mathrm{d}\langle V, X\rangle}{\mathrm{d}\langle X\rangle}. \tag{4.28}$$

Beweis

Aus (2.5) und (2.11) folgt, dass $H \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ ist. Somit ist das Martingal V in (4.27) wohldefiniert. Angenommen, wir haben eine Zerlegung (3.6) mit Eigenschaft (4.13), dann ist L^H wegen (4.19) ein Martingal unter $\mathbb{Q}$ und auf Grund von Satz 4.14 orthogonal zu X. Demnach wird (3.6) zu einer Kunita-Watanabe Zerlegung des Claims H unter dem minimalen Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Nun kann man analog zu Kapitel 3 vorgehen und die optimale Strategie über die rechtsstetige Version von V aus (4.27) mittels (4.28) bestimmen.

$\square$

Wir haben nun durch die Girsanov Transformation eine optimale Strategie gefunden, indem wir sie bezüglich eines minimalen Martingalmaßes dargestellt haben und dadurch, wie eingangs erwähnt, mit Martingaltechniken aus Kapitel 3 bestimmen konnten.

Im nächsten Kapitel werden wir eine weitere Art kennen lernen, den Claim H mit Hilfe eines quadratischen Kriteriums zu hedgen.

Kapitel 5

Mean Variance Hedging

In diesem Kapitel widmen wir uns dem Mean Variance Hedging und beziehen uns dabei auf Bingham und Kiesel [1], Pham, Rheinländer und Schweizer [27] sowie Rheinländer und Schweizer [28] und Schweizer [36].
Der Hauptunterschied zwischen der (lokalen) Risikominimierung und dem Mean Variance Hedging liegt darin, dass wir nicht länger darauf abzielen, den Claim H zum Endzeitpunkt zu replizieren, sondern stattdessen auf die Selbstfinanzierungsbedingung (2.15) zu bestehen. Wir werden versuchen, das zugrunde liegende Optimierungsproblem

$$\min_{\vartheta} \mathbb{E}\left[(H - x - G_T(\vartheta))^2\right] \tag{5.1}$$

bezüglich dem minimalen und dem varianzoptimalen Martingalmaß zu lösen. Dabei werden wir feststellen, dass unter gewissen Annahmen beide Maße übereinstimmen. x ist in (5.1) eine reelle Konstante, H ein Contingent Claim wie in (2.5) und $G(\vartheta)$ beschreibt wie in (2.7) den Gewinn, wobei diesmal von einer selbstfinanzierenden Strategie ϑ ausgegangen wird.
Bevor wir uns auf die optimale Lösung konzentrieren, werden wir unsere bisherigen Begriffsbestimmungen in lokalem Sinne neu formulieren. Wir nehmen an, dass X die Strukturbedingung (SB) erfüllt, das bedeutet X lässt sich als

Zerlegung

$$X = X_0 + M + A \tag{5.2}$$

darstellen, wobei $M \in \mathcal{M}^2_{0,loc}(\mathbb{P})$ ein lokal quadratisch integrierbares lokales Martingal mit $M_0 = 0$, und A ein vorhersehbarer Prozess mit lokal quadratisch integrierbarer Variation $|A|$ und $A_0 = 0$ ist. Demnach ist $X \in \mathcal{S}^2_{0,loc}$. Weiters bezeichnen wir mit $\langle M \rangle$ den vorhersehbaren Varianzprozess von M und nehmen an, dass A absolut stetig bezüglich $\langle M \rangle$ ($A \ll \langle M \rangle$) ist. Wir legen einen wachsenden, vorhersehbaren cadlag Prozess $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ mit $B_0 = 0$ fest, sodass

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}B_s, \qquad 0 \leq t \leq T,$$
$$A_t = \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}B_s, \qquad 0 \leq t \leq T$$

und

$$\sigma_t \lambda_t = \gamma_t \qquad \mathbb{P}\text{-f.s. für } t \in [0, T]$$

gilt, wobei $(\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$ einen vorhersehbaren reellwertigen Prozess bezeichnet. Dadurch erhalten wir für A und X die zu Kapitel 4 analogen Darstellungen

$$A_t = \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}B_s = \int_0^t \sigma_s \lambda_s \mathrm{d}B_s = \int_0^t \lambda \mathrm{d}\langle M \rangle_s, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{5.3}$$

und

$$X = X_0 + M + \int \lambda \mathrm{d}\langle M \rangle. \tag{5.4}$$

Weiters definieren wir uns durch folgenden Prozess

$$K_t := \int_0^t \lambda_s \gamma_s \mathrm{d}B_s = \int_0^t \lambda_s^2 \sigma_s \mathrm{d}B_s = \int_0^t \lambda_s^2 \mathrm{d}\langle M \rangle_s \tag{5.5}$$

den Varianzprozess des stochastischen Integrals $\int \lambda \mathrm{d}M$, welcher $\mathbb{P}$-fast sicher endlich auf $[0,T]$ ist. Wir legen nun eine cadlag Version von K fest. Diese wird als Mean Variance Tradeoff (MVT) bezeichnet. Durch die bisherigen Annahmen und Definitionen erhalten wir als das lokale Martingal $\hat{Z}$ von (4.20) aus Kapitel 4 das stochastische Exponential:

$$\begin{aligned}\hat{Z}_t &:= \mathcal{E}\left(-\int \lambda \mathrm{d}M\right)_t \\ &= \exp\left(-\int_0^t \lambda_s \mathrm{d}M_s - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \lambda_s \mathrm{d}M_s - \frac{1}{2}K_t\right).\end{aligned}$$

Für unsere weitere Analyse bezeichnen wir mit

$$\mathcal{P}^2 = \left\{\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P} \middle| \, \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^\star}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})\right\}$$

die Menge aller äquivalenten lokalen Martingalmaße mit quadratisch integrierbarer Dichte, wobei $\mathcal{P}$ die Menge aller äquivalenten lokalen Martingalmaße ist.

Ist $\hat{Z}$ ein quadratisch integrierbares $\mathbb{P}$-Martingal, so haben wir bereits gezeigt, dass

$$\hat{Z}_T := \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$$

ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$ definiert, unter dem X ein lokales Martingal ist, das heißt $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}^2$.

Bemerkung 5.1.

(i) Für den Fall, dass X stetig und der Mean Variance Tradeoff Prozess deterministisch ist, haben Föllmer und Schweizer [13] im Theorem 3.11

gezeigt, dass das minimale Martingalmaß $\mathbb{Q}$ die relative Entropie

$$H(Q|P) = \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\log \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right] & \text{falls } Q \ll P \text{ auf } \mathcal{F}_T \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

minimiert.

(ii) Die relative Entropie kann als minimale Abweichung von $\mathbb{Q}$ in Bezug auf $\mathbb{P}$ angesehen werden. Sie ist immer nicht negativ und $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = 0$ ist äquivalent zu $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$.

5.1 Optimierung unter dem minimalen Martingalmaß

Pham, Rheinländer und Schweizer [27] haben die optimale Lösung des Optimierungsproblems bezüglich des minimalen Martingalmaßes beschrieben. Diese Arbeit dient als hauptsächliche Bezugsquelle für diesen Abschnitt.

Bevor wir das Problem (5.1) zu lösen versuchen werden, spezifizieren wir noch die zugehörigen Komponenten.

Definition 5.2.

Für $p \geq 1$

(i) bezeichnet $L^p(M)$ den Raum aller vorhersehbaren reellwertigen Prozesse ϑ, sodass:

$$\|\vartheta\|_{L^p(M)} := \left\| \sqrt{\left(\int_0^T \vartheta_s^2 \sigma_s \mathrm{d}B_s \right)} \right\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{P})} = \left\| \sqrt{\left(\int_0^T \vartheta_s^2 \mathrm{d}\langle M \rangle_s \right)} \right\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{P})} < \infty.$$

(ii) bezeichnet $L^p(A)$ den Raum aller vorhersehbaren reellwertigen Prozesse ϑ, sodass:

$$\|\vartheta\|_{L^p(A)} := \left\| \int_0^T |\vartheta_s \gamma_s| \, \mathrm{d}B_s \right\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{P})} = \left\| \int_0^T |\vartheta_s \mathrm{d}A_s| \right\|_{\mathcal{L}^p(P)} < \infty.$$

Nun definieren wir uns noch den Raum unserer betrachteten Strategien durch:

$$\Theta := L^2(M) \cap L^2(M).$$

Wie in Lemma 2 von Schweizer [33] gezeigt wurde, ist Θ der Raum aller reellwertigen, vorhersehbaren, bezüglich X-integrierbaren Prozesse ϑ, sodass das stochastische Integral $G(\vartheta) = \int \vartheta \mathrm{d}X$ im Raum $\mathcal{S}^2$ der Semimartingale ist. Ist K beschränkt, ist $\Theta = L^2(M)$ auf Grund der Ungleichung von Cauchy-Schwarz.

Da wir von selbstfinanzierenden Strategien ausgehen, und somit der Betrag x, den wir in den risikolosen Bond einzahlen gleich zu Beginn, $t = 0$, festgelegt und nicht mehr geändert wird, definiert jedes $\vartheta \in \Theta$ eine solche Strategie eindeutig. Der Wertprozess ist somit durch $x + \int \vartheta \mathrm{d}X$ und der Verlust durch $H - x - \int \vartheta \mathrm{d}X$ gegeben. Wir können nun (5.1) wie folgt neu formulieren:

Für eine feste Konstante $x \in \mathbb{R}$ und einen gegebenen Contingent Claim H, betrachten wir das Optimierungsproblem

$$\min_{\vartheta \in \Theta} \mathbb{E}\left[(H - x - G_T(\vartheta))^2\right] \tag{5.6}$$

und bezeichnen mit $\xi^{(x)}$ dessen Lösung, sofern sie existiert.

5.1.1 Die Abgeschlossenheit von $G_T(\Theta)$

Die Optimierung des Problems (5.6) wirft nun die Frage auf, ob der Raum

$$G_T(\Theta) = \left\{ \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s \,\middle|\, \vartheta \in \Theta \right\}$$

der stochastischen Integrale bezüglich X abgeschlossen in $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ ist. Pham, Rheinländer und Schweizer [27] haben dies für einen beschränkten und stetigen Mean Variance Tradeoff Prozess K gezeigt. Wir werden hier nun die

Hauptresultate präsentieren, die notwendigen Hilfssätze erwähnen und die entsprechenden Beweise referenzieren.

Proposition 5.3.

Seien $\vartheta, \psi \in \Theta$, $V_0 \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ und $L \in \mathcal{M}^2(\mathbb{P})$ orthogonal zu M. Definiere den Prozess V durch

$$V_t := V_0 + \int_0^t \vartheta_s \mathrm{d}A_s + \int_0^t \psi_s \mathrm{d}M_s + L_t, \qquad 0 \le t \le T.$$

Sei C ein beliebiger, nicht negativer, wachsender, vorhersehbarer, cadlag Prozess. Falls C beschränkt ist, gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[C_T V_T^2\right] \geq$$
$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[V_{s-}^2 \mathrm{d}C_s - \mu^2 \int_0^T V_{s-}^2 C_s \mathrm{d}K_s + \int_0^T C_s \psi_s^2 \sigma_s \mathrm{d}B_s - \frac{1}{\mu^2} \int_0^T C_s \vartheta_s^2 \sigma_s \mathrm{d}B_s\right]$$

für ein beliebiges $\mu \neq 0$.

Beweis

Siehe Pham, Rheinländer und Schweizer [27], Seite 5 und 6.

□

Lemma 5.4.

Sei F ein wachsender, vorhersehbarer, cadlag Prozess mit $F_0 = 0$ und mit durch eine Konstante b beschränkten Sprüngen. Dann ist für jedes $\beta \in (0, \frac{1}{b})$ der Prozess

$$C_t^\beta := \frac{1}{\mathcal{E}(-\beta F)_t}$$

die eindeutige, wachsende, vorhersehbare, cadlag Lösung der Gleichung:

$$C_t = 1 + \int_0^t \beta C_s \mathrm{d}F_s, \qquad 0 \le t \le T.$$

Ist F beschränkt, so ist auch C^β beschränkt.

Beweis

Siehe Pham, Rheinländer und Schweizer [27], Seite 6 und 7.

□

Mit Hilfe von Lemma 5.4 erhalten wir für einen stetigen Prozess F, dass $C^\beta = e^{\beta F}$ für ein beliebiges $\beta > 0$. Das führt uns zum nächsten Resultat.

Proposition 5.5.

Seien $\vartheta, \psi \in \Theta$, $V_0 \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ und $L \in \mathcal{M}^2(\mathbb{P})$ orthogonal zu M. Definiere den Prozess V durch

$$V_t := V_0 + \int_0^t \vartheta_s \mathrm{d}A_s + \int_0^t \psi_s \mathrm{d}M_s + L_t, \qquad 0 \le t \le T.$$

Ist der MVT Prozess K stetig und beschränkt, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[e^{(\beta K_T)} V_T^2\right] \ge \left(\beta - \mu^2\right) \cdot \mathbb{E}_\mathbb{P}&\left[\int_0^T e^{(\beta K_s)} V_{s-}^2 \mathrm{d}K_s\right] \\ &+ \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\int_0^T e^{(\beta K_s)} \psi_s^2 \sigma_s \mathrm{d}B_s\right] \\ &- \frac{1}{\mu^2} \cdot \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\int_0^T e^{(\beta K_s)} \vartheta_s^2 \sigma_s \mathrm{d}B_s\right]\end{aligned}$$

für alle $\beta > 0$ und $\mu \neq 0$.

Beweis

Um die Aussage zu erhalten wähle $C = e^{\beta K}$ in Proposition 5.3.

□

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnittes.

Satz 5.6.

Ist der MVT Prozess K stetig und beschränkt, dann ist der Raum

$$G_T(\Theta) = \left\{ \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s \,\middle|\, \vartheta \in \Theta \right\}$$

abgeschlossen in $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ und $\|\vartheta\|_{L^2(M)}$ sowie $|\vartheta|_2 := \left\| \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{P})}$ definieren äquivalente Normen auf Θ.

Beweis

Durch die Ungleichung von Cauchy-Schwarz erhalten wir sowohl $\Theta = L^2(M)$, da K beschränkt ist, als auch folgende Abschätzung:

$$|\vartheta|_2 \leq \left(1 + \|K_T\|_\infty^{\frac{1}{2}}\right) \|\vartheta\|_{L^2(M)}.$$

Andererseits liefert die Anwendung von Proposition 5.5 mit $\psi = \vartheta$, $V_0 = 0$, $L \equiv 0$ und $\beta > \mu^2 > 1$

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \|\vartheta\|_{L^2(M)}^2 &\leq \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \cdot \mathbb{E}_\mathbb{P} \left[\int_0^T e^{\beta K_s} \vartheta_s^2 \sigma_s \mathrm{d}B_s \right] \\
&\leq \mathbb{E}_\mathbb{P} \left[e^{\beta K_T} \left(\int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}X_s \right)^2 \right] \\
&\leq e^{\beta \|K_T\|_\infty} |\vartheta|_2^2,
\end{aligned}$$

womit wir die Äquivalenz der beiden Normen erhalten und demnach auch die Abgeschlossenheit von $G_T(\Theta)$.

□

Ein weiteres Resultat liefert folgendes Korollar. Es wird zeigen, dass unter bestimmten Annahmen an K der Claim H einer Föllmer-Schweizer Zerlegung folgt.

Korollar 5.7.

Ist der MVT Prozess K stetig und beschränkt, dann gilt für jeden Contingent Claim H aus (2.5), das heißt $H \in (\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, die Föllmer-Schweizer Zerlegung

$$H = H_0 + \int_0^T \xi_s^H \mathrm{d}X_s + L_T^H, \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

wobei $H_0 \in \mathbb{R}$, $\xi^H \in \Theta$ und $L^H \in \mathcal{M}^2(\mathbb{P})$ ein quadratisch integrierbares Martingal, orthogonal zu M, mit $\mathbb{E}_\mathbb{P}[L_0^H] = 0$ ist.

Beweis

Da K beschränkt ist, folgt $\Theta = L^2(M)$. Wir betrachten die Funktion $J : \Theta \to \Theta$, welche ϑ auf den Integrand ψ von M in der Kunita-Watanabe Zerlegung von

$$H - \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}A_s$$

abbildet. Diese Zerlegung sieht folgendermaßen aus:

$$H - \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}A_s = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[H - \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}A_s\right] + \int_0^T \psi_s \mathrm{d}M_s + L_T(\vartheta),$$

wobei wir

$$H_0(\vartheta) := \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[H - \int_0^T \vartheta_s \mathrm{d}A_s\right]$$

setzen und somit die Darstellung

$$H_0(\vartheta) + \int_0^T \psi_s \mathrm{d}M_s + L_T(\vartheta)$$

erhalten. Die Suche nach einer Föllmer-Schweizer Zerlegung ist also äquivalent zur Suche eines Fixpunktes von J. Setzen wir für ein beliebiges $\beta > 0$

$$\|\vartheta\|_\beta := \left\| \sqrt{\left(\int_0^T e^{\beta K_s} \vartheta_s^2 \sigma_s \mathrm{d}B_s \right)} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{P})},$$

wird dadurch eine Norm auf Θ definiert, die äquivalent zu $\|.\|_{L^2(M)}$ ist. Wenden wir nun Proposition 5.5 mit $\beta > \mu^2 > 1$, $\vartheta = \vartheta^{(1)} - \vartheta^{(2)}$, $\psi = J(\vartheta^{(1)}) - J(\vartheta^{(2)})$, $V_0 = H_0(\vartheta^{(1)}) - H_0(\vartheta^{(2)})$ an, folgt daraus $V_T = 0$ auf Grund der Eindeutigkeit der Kunita-Watanabe Zerlegung. Zusätzlich erhält man

$$\begin{aligned}
\left\| J(\vartheta^{(1)}) - J(\vartheta^{(2)}) \right\|_\beta^2 &= \|\psi\|_\beta^2 \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T e^{\beta K_s} \psi_s^2 \sigma_s \mathrm{d}B_s\right] \\
&\leq \frac{1}{\mu^2} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T e^{\beta K_s} \vartheta_s^2 \sigma_s \mathrm{d}B_s\right] \\
&= \frac{1}{\mu^2} \|\vartheta\|_\beta^2 \\
&= \frac{1}{\mu^2} \left\|\vartheta^{(1)} - \vartheta^{(2)}\right\|_\beta^2,
\end{aligned}$$

wonach J eine beschränkte Abbildung auf $(\Theta, \|.\|_\beta)$ ist.

□

Folgendes Lemma untersucht zusätzlich noch die Integrabilitätsbedingungen der verschiedenen Terme der Föllmer-Schweizer Zerlegung.

Lemma 5.8.

Sei X stetig. Ist K beschränkt, dann hat jedes $H \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ mit $p \geq 2$ eine Föllmer-Schweizer Zerlegung mit $\xi^H \in L^p(M)$ und $L^H \in \mathcal{M}^p(\mathbb{P})$.

Beweis

Siehe Pham, Rheinländer und Schweizer [27], Seite 10 und 11.

□

Wir haben in diesem Abschnitt nun zusätzlich zur Abgeschlossenheit von $G_T(\Theta)$ die Existenz einer Föllmer-Schweizer Zerlegung bewiesen, welche uns im nächsten Abschnitt von großem Nutzen sein wird.

5.1.2 Die optimale Lösung $\xi^{(x)}$

In diesem Abschnitt werden wir für ein stetiges Semimartingal X, welches die Strukturbedingung (SB) erfüllt, und einen beschränkten Mean Variance Tradeoff Prozess K die Lösung des Optimierungsproblems (5.6) bestimmen. Dazu rufen wir uns noch einmal die minimale Martingaldichte $\hat{Z} = \mathcal{E}\left(-\int \lambda \mathrm{d}M\right)$ in Erinnerung. Der Satz von Girsanov zeigt für $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\hat{Z}] = 1$, dass $\mathrm{d}\mathbb{Q}/\mathrm{d}\mathbb{P} = \hat{Z}_T$ ein äquivalentes lokales Martingalmaß $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$ für X definiert, unter dem X ein lokales Martingal ist. $\mathbb{Q}$ ist, analog zu Kapitel 4, das minimale lokale Martingalmaß für X. Da K_T beschränkt ist, gilt zusätzlich

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \in \mathcal{L}^r(\mathbb{P}) \qquad \text{für jedes } r < \infty \tag{5.7}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} \in \mathcal{L}^r(\mathbb{Q}) \qquad \text{für jedes } r < \infty. \tag{5.8}$$

Durch (5.7) und Lemma 5.8 aus Kapitel 5.1.1 erhalten wir die Föllmer-Schweizer Zerlegung

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\hat{Z}_T^2\right] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\hat{Z}_T \hat{L}_T\right] + \int_0^T \hat{\zeta}_s \mathrm{d}X_s + \hat{L}_T \tag{5.9}$$

mit $\hat{L} \in \mathcal{M}^r(\mathbb{P})$ für jedes $r < \infty$ und $\hat{\zeta} \in L^r(M)$ für jedes $r < \infty$.

Der folgende Satz liefert uns das Hauptresultat dieses Abschnittes:

Satz 5.9.

Sei X stetig und K beschränkt. Angenommen X erfüllt

$$\hat{L}_T = 0 \text{ in der Zerlegung (5.9).} \tag{5.10}$$

Für ein festes $H \in \mathcal{L}^{2+\varepsilon}(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ mit $\varepsilon > 0$ ist die Lösung $\xi^{(x)}$ von (5.6) gegeben durch

$$\xi_t^{(x)} = \xi_t^H - \frac{\hat{\zeta}_t}{\hat{Z}_t^\star}\left(\hat{V}_{t-} - x - \int\limits_0^t \xi_s^{(x)} \mathrm{d}X_s\right), \tag{5.11}$$

wobei

$$\hat{Z}_t^\star := \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\hat{Z}_T \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\hat{Z}_T^2\right] + \int\limits_0^t \hat{\zeta}_s \mathrm{d}X_s, \qquad 0 \le t \le T$$

und

$$\hat{V}_t := \mathbb{E}_\mathbb{Q}[H|\mathcal{F}_t] = H_0 + \int\limits_0^t \xi_s^H \mathrm{d}X_s + L_t^H, \qquad 0 \le t \le T. \tag{5.12}$$

Bevor wir den eigentlichen Beweis präsentieren, benötigen wir einige Vorüberlegungen.

Durch den Projektionssatz[1] ist die optimale Lösung $\xi^{(x)}$ durch folgende Eigenschaft charakterisiert:

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\left(H - x - G_T(\xi^{(x)})\right) G_T(\vartheta)\right] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{H - x - G_T(\xi^{(x)})}{\hat{Z}_T} G_T(\vartheta)\right] = 0$$

für jedes $\vartheta \in \Theta$. Da $\mathbb{Q}$ ein Martingalmaß bezüglich X ist, gilt für jedes unter $\mathbb{Q}$ zu X orthogonale $N \in \mathcal{M}^2(\mathbb{Q})$, dass $\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[N_T G_T(\vartheta)\right] = 0$ für alle beschränkten $\vartheta \in \Theta$. Dies spricht nun dafür, jenes N zu suchen, welches folgende Eigenschaft erfüllt:

$$H - x - G_T(\xi^{(x)}) = N_T \hat{Z}_T = N_T \hat{Z}_T^\star. \tag{5.13}$$

Die Anwendung der Produktregel und der Föllmer-Schweizer Zerlegungen

[1] vgl. Kapitel 3.3 in Luenberger [19]

von H und $\hat{Z}_T$ sowie die Annahme (5.10) liefern

$$H - x - G_T(\xi^{(x)}) - N_T \hat{Z}_T^\star =$$
$$H_0 - x - N_0 \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\hat{Z}_T^2\right] + \int\limits_0^T \left(\xi_s^H - \xi_s^{(x)} - N_{s-}\hat{\zeta}_s\right) \mathrm{d}X_s + L_T^H$$
$$- \int\limits_0^T \hat{Z}_s^\star \mathrm{d}N_s - \left[N, \hat{Z}^\star\right]_T^\mathbb{P}.$$

Aber auf Grund von (5.10) und der Stetigkeit von X folgt

$$\left[N, \hat{Z}^\star\right]^\mathbb{P} = \int \hat{\zeta} \mathrm{d}[N, X]^\mathbb{P} = \int \hat{\zeta} \mathrm{d}\langle N, X\rangle^\mathbb{Q} = 0,$$

da N orthogonal zu X ist unter $\mathbb{Q}$. Demnach ist (5.13) durch die Festlegungen

$$N_t := \frac{H_0 - x + L_0^H}{\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\hat{Z}_T^2\right]} + \int\limits_0^t \frac{1}{\hat{Z}_s^\star} \mathrm{d}L_s^H \tag{5.14}$$

und

$$\xi^{(x)} := \xi^H - N_- \hat{\zeta} \tag{5.15}$$

bestimmt.

Bemerkung 5.10.

Beachten wir, dass L^H unter $\mathbb{P}$ ein Martingal und orthogonal zu M ist, dann liefert die Minimalität von $\mathbb{Q}$, dass N, wie gewünscht, unter $\mathbb{Q}$ ein Martingal und orthogonal zu X ist.

Folgendes Lemma benötigen wir noch als zusätzliches Hilfsmittel für den Beweis von Satz 5.9.

Lemma 5.11.

Sei der Prozess N wie in (5.14) definiert. Dann ist

$$N \in \mathcal{M}^{2+\eta}(\mathbb{P}) \qquad \text{für jedes } \eta < \varepsilon \tag{5.16}$$

unter $\mathbb{Q}$ ein Martingal und orthogonal zu X und $N_- \hat{\zeta} \in L^2(M)$.

Beweis

Siehe Pham, Rheinländer und Schweizer [27], Seite 14.

□

Wir haben nun alle nötigen Hilfsmittel um das Hauptresultat beweisen zu können.

Beweis von Satz 5.9

Wegen Lemma 5.8 ist $L^H \in \mathcal{M}^{2+\varepsilon}(\mathbb{P})$ und unter $\mathbb{P}$ orthogonal zu M. Da $\mathbb{Q}$ das minimale Martingalmaß und X stetig ist, folgt aus Satz 4.17 von Kapitel 4, dass L^H unter $\mathbb{Q}$ ein Martingal und orthogonal zu X ist. Das rechtfertigt aber insbesondere den rechten Ausdruck von $\hat{V}$ aus (5.12). Wir erhalten auf Grund von (5.8) sogar, dass $L^H \in \mathcal{M}^{2+\eta}(\mathbb{Q})$ für jedes $\eta < \varepsilon$.
Wegen der Beschränktheit von K, ist $\Theta = L^2(M)$ und der Prozess $\xi^{(x)} = \xi^H - N_{-}\hat{\zeta}$ wegen Lemma 5.11 demnach in Θ. Deshalb bleibt zu zeigen, dass $\xi^{(x)}$ optimal ist und die Darstellung (5.11) erfüllt.
Wir werden zuerst den zweiten Punkt untersuchen. Durch Lemma 5.11 ist N ein $\mathbb{Q}$-Martingal und orthogonal zu X unter $\mathbb{Q}$. Wie in unseren Vorüberlegungen bereits festgestellt, gilt $[N, \hat{Z}^\star]^{\mathbb{P}} = 0$ und deshalb mit Hilfe der Produktregel und den Darstellungen (5.14) und (5.15) für N und $\xi^{(x)}$:

$$\begin{aligned}
N\hat{Z}^\star &= N_0 \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\hat{Z}_t^2\right] + \int N_{-}\hat{\zeta}\mathrm{d}X + \int \hat{Z}^\star \mathrm{d}N \\
&= \frac{H_0 - x + L_0^H}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\hat{Z}_T^2\right]}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\hat{Z}_T^2\right] + \int \xi^H - \xi^{(x)}\mathrm{d}X + \int \frac{1}{\hat{Z}^\star}\hat{Z}^\star \mathrm{d}L^H \\
&= H_0 - x + \int \xi^H - \xi^{(x)}\mathrm{d}X + L^H \\
&= \hat{V} - x - \int \xi^{(x)}\mathrm{d}X.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Da $\hat{Z}^\star$ stetig ist, können wir folgern, dass

$$\xi^{(x)} = \xi^H - N_- \hat{\zeta} = \xi^H - \frac{\hat{\zeta}}{\hat{Z}^\star} N_- \hat{Z}^\star_-$$

die Darstellung (5.11) erfüllt.

Nun wenden wir uns obigem ersten Punkt, der Optimalität von $\xi^{(x)}$, zu. Aus (5.17) und den Definitionen von $\hat{Z}^\star$ und $\hat{V}$ erhalten wir:

$$H - c - G_T(\xi^{(x)}) = N_T \hat{Z}^\star_T = N_T \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}.$$

Die Orthogonalität von N und X unter $\mathbb{Q}$ liefert für jedes $\vartheta \in \Theta$, dass $NG(\vartheta)$ ein lokales $\mathbb{Q}$-Martingal mit $N_0 G_0(\vartheta) = 0$. Zusätzlich gilt

$$\sup_{0 \le t \le T} |N_t G_t(\vartheta)| \in \mathcal{L}^{1+\delta}(\mathbb{P})$$

wegen (5.16) und der Hölder-Ungleichung für jedes $\delta < \varepsilon/2$. Daher folgt

$$\sup_{0 \le t \le T} |N_t G_t(\vartheta)| \in \mathcal{L}^{1}(\mathbb{Q})$$

durch (5.7). Damit ist $NG(\vartheta)$ ein echtes $\mathbb{Q}$-Martingal und

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\left(H - x - G_T(\xi^{(x)})\right) G_T(\vartheta)\right] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[N_T G_T(\vartheta)\right] = 0$$

für jedes $\vartheta \in \Theta$, wodurch nun die Optimalität von $\xi^{(x)}$ bewiesen ist.

□

Bemerkung 5.12.

Korollar 9 von Pham, Rheinländer und Schweizer [27] liefert zusätzlich noch das minimale quadratische Risiko:

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\left(H - x - G_T(\xi^{(x)})\right)^2\right] = \frac{(H_0 - x)^2 + \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\left(L_0^H\right)^2\right]}{\mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\hat{Z}_T^2\right]} + \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\int_0^T \frac{1}{\hat{Z}^\star_s} \mathrm{d}\left[L^H\right]_s\right].$$

Die Annahme (5.10) kann auch auf eine andere Art und Weise formuliert werden, wie im nächsten Abschnitt vorgestellt wird. Die optimale Strategie wird dort nicht bezüglich dem minimalen Martingalmaß berechnet, sondern mit Hilfe des sogenannten varianzoptimalen Martingalmaßes.

5.2 Das varianzoptimale Martingalmaß

Für die Analyse des Optimierungsproblems (5.6) unter dem hier betrachteten Maß, werden wir zu Beginn noch zusätzlich zu den bisherigen Definitionen und Eigenschaften weitere nützliche Punkte festhalten. Als Grundlage dieses Abschnittes dienen Delbaen und Schachermayer [8] sowie Rheinländer und Schweizer [28].

Definition 5.13.

Für jeden cadlag Prozess Y bezeichnen wir durch $\bar{Y}_t := \sup_{0\leq s\leq t} |Y_s|$ den Supremumsprozess von Y. Der Raum $\mathcal{R}^2(\mathbb{P})$ beinhaltet dann all jene cadlag Prozesse Y, für die gilt:

$$\|Y\|_{\mathcal{R}^2(\mathbb{P})} := \left\|\bar{Y}_T\right\|_{L^2(\mathbb{P})} < \infty.$$

Durch die Definition 5.2 erhalten wir insbesondere die Darstellungen

$$\|\vartheta\|^2_{L^2(M)} = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\int_0^T \vartheta_s^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_s\right] < \infty$$

und

$$\|\vartheta\|^2_{L^2(A)} = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\left(\int_0^T |\vartheta_s \mathrm{d}A_s|\right)^2\right] < \infty.$$

Wir nehmen an, dass

$$G_T(\Theta) \text{ abgeschlossen ist in } \mathcal{L}^2(\mathbb{P}). \tag{5.18}$$

Bemerkung 5.14.

Der vorige Abschnitt lieferte für einen beschränkten und stetigen Mean Variance Tradeoff Prozess die Abgeschlossenheit von $G_T(\Theta)$. In Kapitel 4 von Delbaen, Monat, Schachermayer, Schweizer und Stricker [5] sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dargestellt unter denen $G_T(\Theta)$

in $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ abgeschlossen ist. Wir werden nun deren Ergebnisse, die wir hier benötigen, zusammenfassen.

Definition 5.15.[2]

Seit $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ ein strikt positives $\mathbb{P}$-Martingal mit $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_0] = 1$. Wir sagen Z erfüllt die inverse Hölder-Ungleichung $R_2(\mathbb{P})$ unter $\mathbb{P}$, falls eine Konstante C existiert, sodass für jedes $t \in [0,T]$ gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{Z_T}{Z_t}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right] \leq C.$$

Man sagt, dass ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star \approx \mathbb{P}$ die inverse Hölder-Ungleichung $R_2(\mathbb{P})$ erfüllt, falls dessen Dichteprozess $Z_t^{\mathbb{P}^\star} := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\middle| \mathcal{F}_t\right]$, $0 \leq t \leq T$, $R_2(\mathbb{P})$ erfüllt.

Definition 5.16.[3]

Sei Z ein adaptierter cadlag Prozess. Wir sagen Z erfüllt die Bedingung (J), falls eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass gilt:

$$\frac{1}{C}Z_- \leq Z \leq CZ_-.$$

Ziel ist es nun, jenes zu $\mathbb{P}$ äquivalente Martingalmaß aus $\mathcal{P}$ zu finden, welches die kleinste $\mathcal{L}^2$-Norm besitzt. In anderen Worten ausgedrückt, suchen wir jenes Maß $\mathbb{V} \in \mathcal{P}^2$, das

$$\left\|\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{P})} = \sqrt{1 + \mathrm{Var}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right]}$$

über alle $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}^2$ minimiert. Für die Konkretisierung des Konzepts, sind die signierten lokalen Martingalmaße geeignet, welche von Müller [23] eingeführt wurden. Dazu sei $\mathcal{U}$ der lineare Unterraum von $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, der von den einfachen stochastischen Integralen aufgespannt wird. Das heißt von jenen stochastischen Integralen, die einfache Integranden der Form $Y = H(X_{T_1} - X_{T_2})$

[2] vgl. Schweizer [36], S. 27 f

[3] vgl. Definition 2.13 in Delbaen, Monat, Schachermayer, Schweizer und Stricker [5]

besitzen, wobei $T_1 \leq T_2 \leq T$ Stoppzeiten sind, sodass der gestoppte Prozess X^{T_2} beschränkt sowie h beschränkt und eine reellwertige, $\mathcal{F}_{T_1}$-messbare Zufallsvariable ist.

Definition 5.17.

Die Menge $\mathcal{P}_s^2$ bezeichnet die konvexe Menge aller signierten Maße $\mathbb{P}^\star \ll \mathbb{P}$ mit $\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^\star}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$, $\mathbb{P}^\star[\Omega] = 1$ und

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}[Y] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^\star}{\mathrm{d}\mathbb{P}} Y\right] = 0$$

für alle $Y \in \mathcal{U}$.

$\mathcal{P}_{s,e}^2(\mathbb{P})$ ist dann der Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}_s^2(\mathbb{P})$, wobei $\mathbb{P}^\star$ äquivalent zu $\mathbb{P}$ ist.

Da $\mathcal{P}_s^2(\mathbb{P})$ eine bezüglich der $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$-Norm abgeschlossene, (nicht leere) konvexe Teilmenge von $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ ist, gibt es ein Element aus $\mathcal{P}_s^2(\mathbb{P})$, welches eine minimale Norm hat. Dies lässt uns nun das Hauptwerkzeug dieses Abschnittes definieren.

Definition 5.18.

Das varianzoptimale Martingalmaß $\mathbb{V}$ ist das eindeutige Element aus $\mathcal{P}_s^2(\mathbb{P})$, das

$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^\star}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{P})} = \sqrt{1 + \mathrm{Var}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^\star}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right]}$$

über alle $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}_s^2(\mathbb{P})$ minimiert.

Wie oben angesprochen, existiert $\mathbb{V}$ genau dann, wenn $\mathcal{P}_s^2(\mathbb{P})$ nicht leer ist. In diesem Fall definieren wir Z und $\tilde{Z}$ als cadlag Versionen von

$$Z_t := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right] = Z_t^{\mathbb{V}}, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

und

$$\tilde{Z}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{V}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right], \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Im Allgemeinen ist $\mathbb{V}$ leider ein signiertes Maß. Aber ist X ein stetiger Prozess, so verbessert sich die Situation, wie folgender Satz verdeutlicht.

Satz 5.19.
Sei X ein stetiges, reellwertiges Semimartingal und $\mathcal{P}^2_{s,e}(\mathbb{P}) \neq \emptyset$, dann ist $\mathbb{V}$ aus $\mathcal{P}^2_{s,e}(\mathbb{P})$.
In anderen Worten ist das varianzoptimale signierte Martingalmaß für X dann automatisch äquivalent zu $\mathbb{P}$ und insbesondere ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beweis
Siehe Satz 1.3 von Delbaen und Schachermayer [8].

□

Der nächste Satz liefert die Abgeschlossenheit von $G_T(\Theta)$ und eine zusätzliche nützliche Eigenschaft von $\mathbb{V}$ (siehe Theorem 2 in Rheinländer und Schweizer [28]).

Satz 5.20.
Sei X ein stetiges Semimartingal. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $G_T(\Theta)$ ist abgeschlossen in $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ und $G_T(\Theta) \cap \mathcal{L}^\infty_+(\mathbb{P}) = 0$, wobei $\mathcal{L}^\infty_+(\mathbb{P})$ den Raum aller nicht negativen beschränkten Zufallsvariablen bezeichnet.

(ii) $G_T(\Theta)$ ist abgeschlossen in $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ und $\mathcal{P}^2_s(\mathbb{P}) \neq \emptyset$.

(iii) Das varianzoptimale Martingalmaß $\mathbb{V}$ existiert und ist in $\mathcal{P}^2_{s,e}(\mathbb{P})$ und $Z = Z^{\mathbb{V}}$ erfüllt die inverse Hölder-Ungleichung $R_2(\mathbb{P})$.

Darüber hinaus liefert jede dieser Bedingungen, dass Z die Bedingung (J) und $\Theta = L^2(M)$ erfüllt.

Bevor wir mit der Berechnung der optimalen Lösung von (5.6) unter dem varianzoptimalen Martingalmaß beginnen, benötigen wir noch ein Resultat, welches uns die entsprechende Kunita-Watanabe Zerlegung liefert.

Satz 5.21.

Angenommen (5.18) sei erfüllt und $\mathcal{P}_s^2(\mathbb{P}) \neq \emptyset$. Sei $\mathbb{P}^\star$ ein äquivalentes lokales Martingalmaß für X und $\mathrm{d}\mathbb{P}^\star/\mathrm{d}\mathbb{P} \in \mathcal{P}_{s,e}^2(\mathbb{P})$, sodass der zugehörige Dichteprozess $Z^{\mathbb{P}^\star}$ Bedingung (J) und die inverse Hölder-Ungleichung $R_2(\mathbb{P})$ erfüllt. Für jedes $H \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ definieren wir das $\mathbb{P}^\star$-Martingal $V^{H,\mathbb{P}^\star}$ als eine cadlag Version von $V_t^{H,\mathbb{P}^\star} := \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}[H|\mathcal{F}_t]$. Dann existiert ein Prozess $\xi^{H,\mathbb{P}^\star} \in \Theta$ und ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal $L^{H,\mathbb{P}^\star} \in \mathcal{R}^2(\mathbb{P})$ mit $L_0^{H,\mathbb{P}^\star} = 0$ und

$$\left[L^{H,\mathbb{P}^\star}, X\right] = 0, \tag{5.19}$$

sodass $V^{H,\mathbb{P}^\star}$ eindeutig geschrieben werden kann als:

$$V_t^{H,\mathbb{P}^\star} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\star}[H] + \int_0^t \xi_s^{H,\mathbb{P}^\star} \mathrm{d}X_s + L_t^{H,\mathbb{P}^\star}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Beweis

Siehe Rheinländer und Schweizer [28], Seite 6.

□

Bemerkung 5.22.

Erfüllt das minimale Martingalmaß $\mathbb{Q}$ die Voraussetzungen von Satz 5.21, stimmt nach Schweizer [34] obige Kunita-Watanabe Zerlegung für $\mathbb{P}^\star = \mathbb{Q}$ mit der Föllmer-Schweizer Zerlegung von H überein. Im Allgemeinen erhalten wir für $\mathbb{P}^\star \neq \mathbb{Q}$ eine andere Zerlegung. Darüber hinaus kann es passieren, dass $G_T(\Theta)$ abgeschlossen ist und $\mathbb{V}$ $R_2(\mathbb{P})$ erfüllt, $\mathbb{Q}$ jedoch nicht. Daraus kann man schließen, dass die Föllmer-Schweizer Zerlegung grundsätzlich kein passendes Werkzeug zur Lösung des Optimierungsproblems (5.6) ist.

5.2.1 Die optimale Lösung $\xi^{(x)}$

Für diesen Abschnitt verweisen wir auf Kapitel 3 von Rheinländer und Schweizer [28]. Wir werden hier wie zuvor für das minimale Martingalmaß versuchen, eine optimale Lösung $\xi^{(x)}$ des Problems (5.6) unter dem varianzoptimalen Martingalmaß zu finden. Dank der Annahme (5.18) können wir $H \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ auf $G_T(\Theta)$ projizieren, sodass so eine Lösung existiert. Zusätzlich zu dieser Annahme benötigen wir noch, dass

$$\mathcal{P}^2_{s,e}(\mathbb{P}) \neq \emptyset. \tag{5.20}$$

Denn obwohl $G_T(\xi^{(x)})$ eindeutig bestimmt ist, muss $\xi^{(x)}$ selbst nicht eindeutig sein. Aber dies ist dann der Fall, sobald die Abbildung $\vartheta \to G_T(\vartheta)$ injektiv ist, was nach Lemma 3.5 von Delbaen, Monat, Schachermayer, Schweizer und Stricker [5] gilt, sobald (5.20) erfüllt ist. Zur Bestimmung von $\xi^{(x)}$ verwenden wir nun Satz 5.21 um H in drei Terme zu zerlegen und jeden einzelnen auf $G_T(\Theta)$ zu projizieren. Für eine passende Wahl von $\mathbb{P}^\star$ ist der mittlere Term schon in $G_T(\Theta)$. Der erste Term ist konstant, darum wird seine Projektion direkt auf die Dichte von $\mathbb{V}$ bezogen. Dies legt die Anwendung von Satz 5.21 mit $\mathbb{P}^\star = \mathbb{V}$ nahe.

Wir rufen uns noch einmal in Erinnerung, dass, gemäß dem Projektionssatz, $\xi^{(x)} \in \Theta$ das Problem (5.6) genau dann löst, wenn

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left(H - x - G_T(\xi^{(x)})\right) G_T(\vartheta)\right] = 0$$

für alle $\vartheta \in \Theta$.

Dank Satz 5.20 erfüllt der Dichteprozess von $\mathbb{V}$ die inverse Hölder-Ungleichung $R_2(\mathbb{P})$ und Bedingung (J). Somit können wir durch Satz 5.21 H folgendermaßen zerlegen

$$H = \mathbb{E}_{\mathbb{V}}[H] + \int_0^T \tilde{\xi}_s^H \mathrm{d}X_s + \tilde{L}_T^H, \tag{5.21}$$

wobei $\tilde{\xi}^H \in \Theta$ und $\tilde{L}^H$ ein $\mathbb{V}$-Martingal, null zur Zeit 0, $\tilde{L}^H \in \mathcal{R}^2(\mathbb{P})$ und

$$\left[\tilde{L}^H, X\right] = 0. \tag{5.22}$$

Dank Lemma 1 von Schweizer [35] erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \mathbb{E}_{\mathbb{V}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right] + \int_0^T \tilde{\zeta}_s \mathrm{d}X_s$$

für ein beliebiges $\tilde{\zeta} \in \Theta$. Somit bekommt man:

$$\tilde{Z}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{V}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{V}}\left[\tilde{Z}_T\right] + \int_0^t \tilde{\zeta}_s \mathrm{d}X_s, \qquad 0 \le t \le T. \tag{5.23}$$

Lemma 5.23.

Angenommen (5.18) sowie $\mathcal{P}^2_{s,e}(\mathbb{P}) \neq \emptyset$ seien erfüllt. Dann gilt:

(i) Für $H \equiv 1$ ist $\xi^{(x)}$ gegeben durch:

$$\xi^{(x)} = \frac{\tilde{\zeta}}{-\tilde{Z}_0}.$$

(ii) Für $H = \int_0^T \tilde{\xi}_s^H \mathrm{d}X_s$ mit $\xi^H \in \Theta$ ist $\xi^{(x)}$ gegeben durch:

$$\xi^{(x)} = \tilde{\xi}^H.$$

Beweis

Siehe Rheinländer und Schweizer [28], Seite 8.

□

Es verbleibt nur noch der Fall $H = \tilde{L}_T^H$, welcher im folgenden Satz behandelt wird.

Satz 5.24.

Angenommen (5.18) sowie $\mathcal{P}^2_{s,e}(\mathbb{P}) \neq \emptyset$ seien erfüllt. Sei $H \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ sodass das $\mathbb{V}$-Martingal $\tilde{L}$, definiert durch $\tilde{L}_t := \mathbb{E}_{\mathbb{V}}[H|\mathcal{F}_t]$ mit $\tilde{L}_0 = 0$, $[\tilde{L}, X] = 0$ erfüllt. Dann ist $\xi^{(x)}$ gegeben durch:

$$\xi_t^{(x)} = -\tilde{\zeta}_t \int_0^t \frac{1}{\tilde{Z}_{s-}} \mathrm{d}\tilde{L}_s.$$

Beweis

Siehe Rheinländer und Schweizer [28], Seite 8 und 9.

□

Wir definieren nun den Wertprozess

$$\tilde{V}_t^H := \mathbb{E}_{\mathbb{V}}\left[H|\,\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{V}}[H] + \int_0^t \tilde{\xi}^H \mathrm{d}X_s + \tilde{L}_t^H, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Fügt man alle Ergebnisse zusammen, so ergibt sich die optimale Lösung folgendermaßen:

Satz 5.25.

Angenommen (5.18) sowie $\mathcal{P}^2_{s,e}(\mathbb{P}) \neq \emptyset$ seien erfüllt. Für jedes $H \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ hat die Lösung des Optimierungsproblems (5.6) folgende Gestalt:

$$\xi_t^{(x)} = \tilde{\xi}_t^H - \tilde{\zeta}_t \left(\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{V}}[H] - x}{\tilde{Z}_0} + \int_0^t \frac{1}{\tilde{Z}_{s-}} \mathrm{d}\tilde{L}_s^H \right) \tag{5.24}$$

$$= \xi_t^H - \frac{\tilde{\zeta}_t}{\tilde{Z}_t} \left(\tilde{V}_{t-}^H - x - \int_0^t \xi^{(x)} \mathrm{d}X_s \right) \tag{5.25}$$

Beweis

Wegen der Linearität von $H \to \xi^{(x)}$ folgt (5.24) unmittelbar aus Lemma 5.23

und Satz 5.24.

Wegen (5.23) und (5.22) ergibt sich $[\tilde{L}^H, \tilde{Z}] = 0$. Nun können wir die Produktregel anwenden, dann folgt mit Hilfe von (5.23) und (5.24):

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}\left(\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{V}}[H]-x}{\tilde{Z}_0} + \int \frac{1}{\tilde{Z}_0}\mathrm{d}\tilde{L}^H\right) \\
&= \frac{\tilde{Z}_0\left(\mathbb{E}_{\mathbb{V}}[H]-x\right)}{\tilde{Z}_0} + \int \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{V}}[H]-x}{\tilde{Z}_0}\tilde{\zeta}\mathrm{d}X + \int \tilde{Z}_-\mathrm{d}\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{V}}[H]-x}{\tilde{Z}_0} \\
&\quad + \left[\tilde{Z}, \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{V}}[H]-x}{\tilde{Z}_0}\right] + \int \tilde{Z}_-\frac{1}{\tilde{Z}}\mathrm{d}\tilde{L}^H + \int\left(\frac{1}{\tilde{Z}_-}\mathrm{d}\tilde{L}^H\right)\tilde{\zeta}\mathrm{d}X + \left[\tilde{Z}, \int \frac{1}{\tilde{Z}}\mathrm{d}\tilde{L}^H\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{V}}[H] - x + \tilde{L}^H + \int\left(\tilde{\xi}^H - \xi^{(x)}\right)\mathrm{d}X \\
&= \tilde{V}^H - \int \xi^{(x)}\mathrm{d}X,
\end{aligned}$$

woraus (5.25) folgt.

□

Wir haben nun die optimale Lösung des Problems (5.6) unter dem varianzoptimalen Martingalmaß $\mathbb{V}$ gefunden. Der letzte Abschnitt lieferte die Lösung bezüglich dem minimalen Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Der große Unterschied dieser beiden Maße im Bezug auf das Mean Variance Hedging liegt nun darin, dass $\mathbb{V}$ die Eigenschaft hat, dass dessen Dichteprozess bezüglich $\mathbb{P}$ die Annahme (5.10) immer erfüllt (siehe Lemma 2.2 von Delbaen und Schachermayer [8]). Demnach ist die Bedingung (5.10) äquivalent zur Übereinstimmung der beiden Maße $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{V}$. Folgendes Lemma präzisiert diese Aussage:

Lemma 5.26.[4]

Angenommen X ist ein stetiger Prozess, sodass $\mathcal{P}^2_{s,e}(\mathbb{P}) \neq \emptyset$. Für das minimale und das varianzoptimale Martingalmaß $\mathbb{Q}$ beziehungsweise $\mathbb{V}$, definieren wir

[4] vgl. Schweizer [36], S. 32

jeweils ihre Dichteprozesse bezüglich $\mathbb{P}$ durch

$$Z_t^{\mathbb{Q}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right] \text{ und } Z_t^{\mathbb{V}} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{V}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right], \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Ist der Endwert des Mean Variance Tradeoff Prozesses K_T deterministisch, dann gilt

$$\mathbb{V} = \mathbb{Q},$$

$$Z_t^{\mathbb{V}} = Z_t^{\mathbb{Q}} = \hat{Z}_t = \mathcal{E}\left(-\int \lambda \mathrm{d}M\right)_t, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

$$\tilde{Z}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right] = e^{K_T}\mathcal{E}\left(-\int \lambda \mathrm{d}X\right)_t, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

$$\tilde{\zeta}_t = -e^{K_T}\left(-\int \lambda \mathrm{d}X\right)_t \lambda_t = -\tilde{Z}_t\lambda_t, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

und

$$\frac{Z_t^{\mathbb{V}}}{\tilde{Z}_t} = e^{-(K_T - K_t)}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Dieses Kapitel lieferte uns zwei Lösungen für das gleiche Problem (5.6), welche unter gewissen Annahmen übereinstimmen. Das Besondere dabei ist, dass diese Lösungen jeweils unter einem anderen Martingalmaß dargestellt werden.

Das nächste, und zugleich abschließende, Kapitel dieser Arbeit befasst sich mit einer praktischen Anwendung bisheriger Resultate und deren Auswirkungen auf versicherungsmathematische Modelle.

Kapitel 6

Marktkonsistente Bewertung

In diesem Abschnitt werden wir Resultate, die wir bisher erlangt haben, auf Modelle anwenden und analysieren. Als Grundlage dient hierfür die Arbeit von Tsanakas, Wüthrich und Černy [37] (in weiterer Folge nur mit [37] gekennzeichnet), die darin Bewertungsformeln für versicherungsmathematische Sachverhalte in diskreter Zeit und unter dem Real-World Wahrscheinlichkeitsmaß erarbeiten. Wir folgen in diesem Kapitel auch deren Notation. Da wir bisher in stetiger Zeit gearbeitet haben, möchten wir nun die entsprechenden Begriffe und Ausdrücke in diskreter Zeit formulieren.

Diskrete vs. stetige Zeit

Wir nehmen auch in diskreter Zeit X als ein Semimartingal mit der Zerlegung, analog zu (2.1),

$$X = X_0 + M + A \tag{6.1}$$

an, wobei M ein Martingal mit $M_0 = 0$ und A ein vorhersehbarer Prozess mit $A_0 = 0$ ist. Dadurch können wir das stetige stochastische Integral (2.7) in diskreter Zeit nun folgendermaßen darstellen:

$$\sum_{s=0}^{t} \vartheta_s \Delta X_s, \qquad \text{wobei} \qquad \Delta X_s := X_s - X_{s-1} \tag{6.2}$$

die Aktienkursänderungen zwischen den Zeitpunkten s und $s-1$ beschreibt. (6.2) liefert somit die kumulierten Gewinnen in diskreter Zeit.
Im Vergleich zu Kapitel 2 erhalten wir für zwei Semimartingale X und Y in diskreter Zeit die Kovariation

$$[X,Y]_t = \sum_{s=1}^{t} \Delta X_s \Delta Y_s. \tag{6.3}$$

und die vorhersehbare Kovariation

$$\langle X,Y\rangle_t = \sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}\left[\Delta X_s \Delta Y_s \middle| \mathcal{F}_{s-1}\right] \tag{6.4}$$

(siehe jeweils Luschgy [15], S. 17).

Bemerkung 6.1.

(i) Setzt man $X = Y$, so nennt man (6.3) die quadratische Variation und (6.4) die vorhersehbare quadratische Variation von X in diskreter Zeit. $[X]$ ist dann folgendermaßen definiert:
Für $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_n \leq t$ sei das Netz $\delta_i := |t_{i+1} - t_i|$. Dann ist $[X]_t = \lim\limits_{|\delta|\to 0} \sum\limits_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$.

(ii) $\langle X,Y\rangle$ wird auch der Spitzklammerprozess oder der Kompensator von $[X,Y]$ genannt, denn es ist jener eindeutige Prozess, den man von $[X,Y]$ abziehen muss um ein lokales Martingal zu erhalten.

Das Ziel dieses Kapitels ist die oben erwähnte Erarbeitung der Bewertungsformeln unter dem risikoneutralen Martingalmaß und weiters zu analysieren ob und wie sich diese Darstellungen bezüglich dem Real-World Wahrscheinlichkeitsmaß verändern.

Bemerkung 6.2.

Wir möchten anmerken, dass die Notation, sofern es eine Unterscheidung gibt, unter der jeweiligen Betrachtung dementsprechend gekennzeichnet ist.

Also $\mathbb{Q}$ für das risikoneutrale und $\mathbb{P}$ für das Real-World Wahrscheinlichkeitsmaß (zum Beispiel $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ im Gegensatz zu $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$).

6.1 Der single Asset Fall

In diesem Abschnitt werden wir die in [37] vorgestellten Modelle mit unserer Betrachtungsweise analysieren und versuchen die daraus resultierenden Ergebnisse mit jenen aus [37] zu vergleichen. Wir starten dabei mit einperiodischen Modellen in Kapitel 6.1.1 und erweitern diese dann zu mehrperiodischen Modellen in Kapitel 6.1.2.

6.1.1 Der Einperiodenfall

Um die Schlüsselideen dieses Abschnittes zu illustrieren starten wir mit einem einfachen Modell.

Ein einführendes Beispiel

Es wird ein Intervall $[t_0, t_1]$ mit $t_0 = 0$ und $t_1 = 1$ angenommen. Dazu gibt es eine Versicherungsverbindlichkeit $H \geq 0$, die zur Zeit t_1 erfüllt werden muss. Zur Zeit t_0 investiert der Versicherer von H einen Gesamtbetrag von v Geldeinheiten um H so gut wie möglich zu replizieren. Alle Assets und Verbindlichkeiten sind in disktontierten Werten angenommen.
Es gibt zwei handelbare Assets:

(A1) Ein risikofreies Asset mit Preis 1 zur Zeit t_0 und Payoff 1 zur Zeit t_1.

(A2) Ein risikobehaftetes Asset mit Preis S_0 zur Zeit t_0 und Payoff S_1 zur Zeit t_1, sowie einer Rendite von $X_1 = \frac{S_1}{S_0} - 1$.

Das Kapital ϑ_1 wird in t_0 in das riskante Asset investiert, d.h. es werden $\frac{\vartheta_1}{S_0}$ Einheiten gekauft. Der Rest des Anfangskapitals, $v - \vartheta_1$, wird als Investition in das risikolose Asset getätigt. Der Zahlungsstrom über den gesamten Zeitraum sieht demnach folgendermaßen aus:

Zeitpunkt	Asset (A1)	Asset (A2)	Zahlungsstrom
t_0	$-(v-\vartheta_1)$	$-\frac{\vartheta_1}{S_0}\cdot S_0$	$-v$
t_1	$+(v-\vartheta_1)$	$+\frac{\vartheta_1}{S_0}\cdot S_1$	$v-\vartheta_1+\dfrac{\vartheta_1}{S_0}S_1$
			$=v+\vartheta_1\left(\dfrac{S_1}{S_0}-1\right)$
			$=v+\vartheta_1 X_1$

Wie man bemerkt, generiert das Portfolio zur Zeit t_1 den Wert $v+\vartheta_1 X_1$. V_0 bezeichnet nun den optimalen Startwert des Portfolios und ξ_1 das optimale Investment in das riskante Asset ($\vartheta_1 = v-\vartheta_1$ bzw. $\vartheta_1 = V_0-\vartheta_1$). Wir wollen nun jenes Paar (V_0,ξ_1) finden, welches das Problem

$$(V_0,\vartheta_1) = \arg\min_{(v,\vartheta_1)} \mathbb{E}\left[(v+\vartheta_1 X_1 - H)^2\right] \tag{6.5}$$

in Anlehnung an (5.6) minimiert. Mit Hilfe von (3.15) ist die Lösung dieses Problems gegeben durch:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}\left[H,X_1\right]}{\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}\left[X_1\right]},\\ V_0 &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H] - \frac{\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}}[H,X_1]}{\mathrm{Var}_{\mathbb{P}}[X_1]}\cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_1].\end{aligned} \tag{6.6}$$

V_0 entspricht hier jenen Startkosten, die H bezüglich der quadratischen Verlustfunktion replizieren. Das heißt, man kann V_0 als den marktkonsistenten Wert von H zur Zeit t_0 identifizieren.

Im Folgenden werden die Risikomaße Value at Risk (VaR) und Expected Shortfall (ES), auch Tail-VaR (TVaR) genannt, verwendet. Für eine Zufallsvariable X mit stetiger Verteilung und dem Sicherheitslevel $\alpha \in (0,1)$ sind beide Maße wie gewöhnlich definiert:

Definition 6.3.

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X \leq x] \geq \alpha\}$$

und

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(X) \mathrm{d}\beta = \mathbb{E}\left[X \mid X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)\right],$$

wobei man den letzten Term Tail Conditional Expectation (TCE) nennt. Die letzte Gleichheit gilt nur im Fall, wo X eine stetige Verteilungsfunktion besitzt.

Bewertungsformeln und Marktwert-Marge

Wir nehmen nun ein spezielles riskantes Asset an, welches für eine Zufallsvariable Z_1 und eine Schranke d_1 folgendermaßen definiert ist:

$$S_1 = \mathbb{1}_{D_1} \qquad \text{mit} \qquad D_1 = \{Z_1 \geq d_1\} \tag{6.7}$$

Angenommen $p_1 = \mathbb{E}_\mathbb{P}[S_1] = \mathbb{P}[D_1] \in (0,1)$ und $S_0 = q_1 \in (p_1, 1)$, dann folgt $X_1 = \frac{\mathbb{1}_{D_1}}{q_1} - 1$.

Bemerkung 6.4.
Man kann diese Zahlungsströme in Versicherungsmärkten nun auf zwei Arten betrachten:

(i) S_1 kann der Payoff eines indexgebundenen Versicherungsderivats sein (zum Beispiel ein Wetter-Derivat), wo Z_1 die Rolle des relevanten Indexes übernimmt. Das Derivat wird so betrachtet, dass Z_1 ein angemessener Proxy für H ist. Insbesondere zahlt S_1 eine hohe Rendite beim Ereignis D_1, was mit einem großen Verlust in H verbunden ist.

Die Wahrscheinlichkeit p_1 ist dann die Real-World Wahrscheinlichkeit und q_1 die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit, welche durch die Marktpreise impliziert wird.

(ii) Betrachten wir den Fall, dass der Inhaber der Verbindlichkeit H einen Katastrophen-Bond finanziert, der durch das Ereignis D_1 ausgelöst wird. Der Bond ist so aufgebaut, dass der Inhaber von H zur Zeit $t = 1$ eine Geldeinheit zahlt, sofern D_1^c eintritt, und 0 wenn D_1 eintritt. Sei $1 - q_1$ der Preis des Bonds. Dann gilt, falls der Investor $\frac{\vartheta_1}{q_1}$ Bonds ausgibt, für die Einkünfte des Handels:

$$-\frac{\vartheta_1}{q_1}\left(\mathbb{1}_{D_1^c} - (1 - q_1)\right) = \vartheta_1 X_1.$$

Mit (6.6) erhält man nun den optimalen Wert ϑ_1, der veräußert werden soll.

Wir werden nun die in [37] vorkommenden Bewertungsformeln unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit herleiten. Dazu sei gesagt, dass durch unsere Betrachtungsweise $\mathbb{P}$ mit $\mathbb{Q}$ übereinstimmt, also $p_1 = q_1$ gilt. Das oben angenommene Modell ändert sich dabei insofern, dass nun $q_1 = S_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1] \in (0, 1)$. Für das handelbare Asset (6.7) und dem optimalen Startwert V_0 aus (6.6) erhalten wir demnach

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H], \tag{6.8}$$

denn

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_1\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathbb{1}_{D_1}}{S_0} - 1\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathbb{1}_{D_1}}{q_1} - 1\right] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{D_1}\right] - q_1}{q_1} = \frac{q_1 - q_1}{q_1} = 0.$$

Bemerkung 6.5.

Wir wollen anmerken, dass hier V_0 in Anlehnung an (3.19), dem konstanten Wert der Kunita-Watanabe Zerlegung von H entspricht.

Der (6.8) entsprechende Wert V_0 aus [37] ist gegeben durch

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H] + \frac{p_1 - q_1}{q_1} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[H \middle| Z_1 \geq d_1 \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[H \right] \right), \tag{6.9}$$

wodurch man erkennt, dass unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit die Berechnung von V_0 erheblich vereinfacht wird.
Verwendet man als Auslöser Z_1 die Entschädigungszahlung $H - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H]$, kann d_1 als Schranke $d_1 = \mathrm{VaR}_{1-p_1}(H) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H]$ interpretiert werden. Somit folgt für ein H mit stetiger Verteilungsfunktion und

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[H \middle| Z_1 \geq d_1 \right] \\ &\quad = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[H \middle| Z_1 \geq \mathrm{VaR}_{1-p_1}(H) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H] \right] \\ &\quad = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[H \middle| H \geq \mathrm{VaR}_{1-p_1}(H) \right] \\ &\quad = \mathrm{TVaR}_{1-p_1}(H) \\ &\quad = \mathrm{ES}_{1-p_1}(H) \end{aligned} \tag{6.10}$$

aus (6.9)

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H] + \frac{p_1 - q_1}{q_1} \left(\mathrm{ES}_{1-p_1}(H) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[H \right] \right). \tag{6.11}$$

Bemerkung 6.6.
Unter der risikoneutralen Betrachtungsweise erhalten wir wiederum wie in (6.8):

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H]. \tag{6.12}$$

Gleichung (6.11) ist sehr ähnlich zu Solvency Bewertungsformeln. Dort wird der marktkonsistente Wert der Verbindlichkeit gleich ihrem Erwartungswert plus einem Risikozuschlag gesetzt. Schreibt der Regulator ein translationsinvariantes Risikomaß ρ vor, das heißt $\rho(H - v) = \rho(H) - v$ für alle $v \in \mathbb{R}$, so ist der marktkonsistente Wert unter der Kapitalkostenmethode gegeben durch:

$$V_0^{CoC} = \mathbb{E}[H] + \lambda\left(\rho(H) - \mathbb{E}[H]\right). \tag{6.13}$$

Diese Gleichung gilt sowohl unter der Real-World als auch der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit. λ wird die Kapitalkostenrate genannt und der Ausdruck $\lambda\left(\rho(H) - \mathbb{E}[H]\right)$ ist die sogenannte Marktwertmarge.
Bisher fokussierten wir uns auf die Herleitung von risikoneutralen Bewertungsformeln ohne die Veränderung des Portfoliorisikos zu betrachten. Diese Analyse folgt im nächsten Abschnitt.

Hedging und Kapitaleffizienz

Wie oben angesprochen werden wir in diesem Abschnitt das Portfoliorisiko berücksichtigen, welches nach einem Investment in das Derivat mit Payoff S_1 wie in (6.7) einhergehen würde. Die Berücksichtigung ist wichtig, da der Käufer eines solchen Derivats interessiert daran ist das Risiko zu minimieren um dadurch Kapital freizusetzen.
Es sei die Solvenzkapitalanforderung durch ein translationsinvariantes Risikomaß ρ bestimmt. G_1 bezeichne den Wert des optimalen Portfolios (V_0, ξ_1) aus (6.5), das heißt $G_1 = V_0 + \xi_1 X_1$. Demnach folgt, dass der Handel mit den Derivaten so lange Kapital freisetzt, solange die Kosten V_0 plus die Kapitalanforderung für den gehedgten Verlust $H - G_1$ weniger sind als der nicht gehedgte Verlust H:

$$V_0 + \rho\left(H - G_1\right) \leq \rho(H) \Longleftrightarrow \rho\left(H - (G_1 - V_0)\right) \leq \rho(H). \tag{6.14}$$

Da das Portfolio, welches G_1 generiert, V_0 als Startkapital hat, erklärt (6.14), dass eine Investition in das Portfolio die Solvenzkapitalanforderung unter ρ reduzieren kann. Es ist jedoch nicht offensichtlich, dass (6.14) im Allgemeinen erfüllt ist, da die Strategie so formuliert ist, dass sie H so gut wie möglich repliziert, aber nicht die von ρ beschriebene Kapitalanforderung minimiert. Situationen, wo (6.14) gilt, sind in folgender Proposition dargestellt:

Proposition 6.7.

Angenommen H hat eine stetige und strikt wachsende Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}_+$ und sei das Risikomaß ρ entweder VaR_α oder ES_α zum Sicherheitslevel $\alpha \in (0, 1)$.

Definiere $k = \frac{1}{1-q_1}\mathrm{ES}_{1-q_1}(H - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H])$. Wir erhalten $k > 0$ und es gilt:

Die Ungleichung (6.14) gilt genau dann, wenn

$$q_1 k \leq \rho(H) - \rho(H - \mathbb{1}_{D_1} k). \tag{6.15}$$

Insbesondere gilt:

(i) Angenommen $\mathrm{VaR}_{1-q_1}(H) - k > 0$. Ist $\alpha < 1 - q_1$ klein genug, sodass $\mathrm{VaR}_\alpha(H) \leq \mathrm{VaR}_{1-q_1}(H) - k$ ist, dann gilt:

- für $\rho \equiv \mathrm{VaR}_\alpha$ existiert kein $q_1 \in (0, 1)$ sodass (6.14) gilt und
- für $\rho \equiv \mathrm{ES}_\alpha$ gilt (6.14) für alle $q_1 \in (0, 1)$.

(ii) Ist $\alpha > 1 - q_1$ groß genug, sodass $\mathrm{VaR}_\alpha(H) - \mathrm{VaR}_{1-q_1}(H) \geq k$ ist, gilt (6.14) sowohl für $\rho \equiv \mathrm{VaR}_\alpha$, als auch $\rho \equiv \mathrm{ES}_\alpha$ für alle $q_1 \in (0, 1)$ und für das freigesetzte Kapital folgt:

$$\rho(H) - V_0 - \rho(H - G_1) = (1 - q_1)k \tag{6.16}$$

Beweis

Zu Beginn möchten wir anmerken, dass die Risikomaße VaR und ES translationsinvariant (T) sind. $k > 0$ folgt aus den Eigenschaften vom Expected Shortfall (vgl. Property 2.4.5 von Denuit, Dhaene, Goovaerts und Kaas [10]).

Wir erhalten mit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}_{\mathbb{Q}}[X_1, H] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_1 H] - \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_1]}_{=0} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{\mathbb{1}_{D_1}}{q_1} - 1\right) H\right] \\
&= \frac{1}{q_1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{D_1} H] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] \\
&= \frac{1}{q_1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H | D_1] \underbrace{\mathbb{Q}[D_1]}_{=q_1} - \mathbb{E}[H] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H | Z_1 \geq d_1] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H]
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_{\mathbb{Q}}[X_1] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_1^2\right] - \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_1]^2}_{=0} \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{\mathbb{1}_{D_1}}{q_1} - 1\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathbb{1}_{D_1}^2}{q_1^2} - 2\frac{\mathbb{1}_{D_1}}{q_1} + 1\right] \\
&= \frac{1}{q_1^2}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{D_1}] - 2\frac{q_1}{q_1} + 1 \\
&= \frac{q_1}{q_1^2} - 1 \\
&= \frac{q_1 - q_1^2}{q_1^2}
\end{aligned}$$

nun:

$$\begin{aligned}
G_1 - V_0 = \xi_1 x_1 &= \frac{\mathrm{Cov}_{\mathbb{Q}}\left[X_1, H\right]}{\mathrm{Var}_{\mathbb{Q}}\left[X_1\right]} X_1 \\
&= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[H \middle| Z_1 \geq d_1\right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H]}{\frac{q_1 - q_1^2}{q_1^2}} \left(\frac{\mathbb{1}_{D_1}}{q_1} - 1\right) \\
&\overset{(6.10)}{=} \frac{q_1^2}{q_1 - q_1^2} \left(\frac{\mathbb{1}_{D_1}}{q_1} - 1\right) \left(\mathrm{ES}_{1-q_1}(H) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H]\right) \\
&\overset{(T)}{=} \frac{q_1^2}{q_1(1 - q_1)} \left(\frac{\mathbb{1}_{D_1} - q_1}{q_1}\right) \left(\mathrm{ES}_{1-q_1}(H - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H])\right) \\
&= \frac{\mathbb{1}_{D_1} - q_1}{1 - q_1} \cdot \mathrm{ES}_{1-q_1}(H - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H]) \\
&= (\mathbb{1}_{D_1} - q_1) \cdot k.
\end{aligned}$$

Dadurch folgt, dass:

$$\rho(H - (G_1 - V_0)) = \rho(H - (\mathbb{1}_{D_1} - q_1) \cdot k) \overset{(T)}{=} \rho(H - \mathbb{1}_{D_1} k) + q_1 k.$$

Demnach gilt für das freigesetzte Kapital:

$$\rho(H) - \rho(H - (G_1 - V_0)) = \rho(H) - \rho(H - \mathbb{1}_{D_1} k) - q_1 k.$$

Und wegen der Gültigkeit von (6.15), folgt auch die Gültigkeit von (6.14).

Um die andere Seite zu zeigen, sei $d = d_1 + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H]$. Da wir $Z_1 = H - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H]$ als Entschädigungszahlung angenommen haben, liefert dies $D_1 = \{Z_1 \geq d_1\} = \{H - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] \geq d - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H]\} = \{H \geq d\}$ und $\mathrm{VaR}_{1-q_1} = d$. Setzen wir $W := H - \mathbb{1}_{D_1} k$, so erhalten wir für $w \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}\left[W \leq w\right] &= \mathbb{Q}\left[W \leq w, D_1\right] + \mathbb{Q}\left[W \leq w, D_1^c\right] \\
&= \mathbb{Q}\left[H - k \leq w, H \geq d\right] + \mathbb{Q}\left[H \leq w, H \leq d\right] \\
&= \mathbb{Q}\left[d \leq H \leq w + k\right] + \mathbb{Q}\left[H \leq \min(w, d)\right].
\end{aligned}$$

Auf Grund der Stetigkeit der Verteilungsfunktion F von H gilt für $\mathbb{Q}[W \leq w]$:

$$\mathbb{Q}\left[W \leq w\right] = \begin{cases} F(w) & \text{für } w \leq d - k \\ F(w + k) - F(d) + F(w) & \text{für } d - k < w < d \\ F(w + k) & \text{für } d \leq w. \end{cases}$$

Man sieht, dass die Verteilung von W demnach auch stetig und strikt wachsend ist. Falls außerdem $\mathrm{VaR}_\alpha(H) \leq d-k$ (Fall (I)) gilt, dann folgt $\mathrm{VaR}_\alpha(W) = \mathrm{VaR}_\alpha(H)$. Ist andererseits $\mathrm{VaR}_\alpha(H) \geq d+k$ (Fall (II)), erhalten wir

$$\mathbb{Q}\left[W \leq \mathrm{VaR}_\alpha(H) - k\right] = \mathbb{Q}\left[H \leq \mathrm{VaR}_\alpha(H)\right] = \alpha, \text{ sodass}$$
$$\mathrm{VaR}_\alpha(W) = \mathrm{VaR}_\alpha(H) - k$$

ist. Wir werden nun beide Fälle separat behandeln:

Fall (I):
Angenommen $d-k>0$ und wähle $\mathrm{VaR}_\alpha(H) \leq d-k$.

(i) Sei $\rho \equiv \mathrm{VaR}_\alpha$.
Dann ist $\mathrm{VaR}_\alpha(H - \mathbb{1}_{D_1} k) = \mathrm{VaR}_\alpha(W) = \mathrm{VaR}_\alpha(H)$, sodass für kein $q_1 > 0$, unter Beachtung von $k > 0$, Ungleichung (6.15) erfüllt ist.

(ii) Sei nun $\rho \equiv \mathrm{ES}_\alpha$
Betrachtet man die Vektoren $(H, \mathbb{1}_{\{H \geq \mathrm{VaR}_\alpha(H)\}})$ und $(H, \mathbb{1}_{\{W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\}})$, so erkennt man, dass beide zwar die gleichen Randwerte besitzen, ersterer jedoch komonotone Elemente enthält, wonach aus Proposition 6.2.6 von Denuit, Dhaene, Goovaerts und Kaas [10] die Ungleichung

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[H \cdot \mathbb{1}_{\{H \geq \mathrm{VaR}_\alpha(H)\}}\right] \geq \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[H \cdot \mathbb{1}_{\{W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\}}\right] \tag{6.17}$$

folgt.
Dadurch ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ES}_\alpha(H) - \mathrm{ES}_\alpha(W) = \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left(\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[H \cdot \mathbb{1}_{\{H \geq \mathrm{VaR}_\alpha(H)\}}\right] - \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[H \cdot \mathbb{1}_{\{W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\}}\right]\right) \\
&\overset{(6.17)}{\geq} \frac{1}{1-\alpha}\left(\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[H \cdot \mathbb{1}_{\{W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\}}\right] - \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[H \cdot \mathbb{1}_{\{W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\}}\right]\right).
\end{aligned}$$

Betrachten wir den Ausdruck in der Klammer nun etwas näher, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[H \cdot \mathbb{1}_{\{W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\}}\right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[H \cdot \mathbb{1}_{\{W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\}}\right] = \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[H \mid W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\right] \mathbb{Q}\left[W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\right] \\
&\quad - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[W \mid W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\right] \mathbb{Q}\left[W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[H \mid W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\right] \mathbb{Q}\left[W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\right] \\
&\quad - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[H - \mathbb{1}_{D_1} \cdot k \mid W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\right] \mathbb{Q}\left[W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\right] \\
&= k \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{D_1} \mid W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\right] \mathbb{Q}\left[W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\right] \\
&= k \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{D_1} \cdot \mathbb{1}_{\{W \geq \mathrm{VaR}_\alpha(W)\}}\right] \\
&= k \cdot \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{H \geq d\}} \cdot \mathbb{1}_{\{H - \mathbb{1}_{D_1} \cdot k \geq \mathrm{VaR}_\alpha(H)\}}\right],
\end{aligned}
$$

wobei letzte Gleichheit wegen $\mathrm{VaR}_\alpha(H) = \mathrm{VaR}_\alpha(W)$ gilt. Da $\mathbb{1}_{D_1}$ des zweiten Indikators schon durch $\{H \geq d\}$ erfüllt ist, können wir den gesamten Term folgendermaßen umschreiben:

$$
\begin{aligned}
k \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{H \geq d\}} \cdot \mathbb{1}_{\{H - \mathbb{1}_{D_1} \cdot k \geq \mathrm{VaR}_\alpha(H)\}}\right] \\
&= k \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{H \geq d\}} \cdot \mathbb{1}_{\{H \geq \mathrm{VaR}_\alpha(H) + k\}}\right] \\
&= k \cdot \mathbb{Q}\left[H \geq \max(d, \mathrm{VaR}_\alpha(H) + k)\right].
\end{aligned}
$$

Zusammenfassend erhalten wir somit:

$$
\mathrm{ES}_\alpha(H) - \mathrm{ES}_\alpha(W) \geq \frac{k}{1-\alpha} \cdot \mathbb{Q}\left[H \geq \max(d, \mathrm{VaR}_\alpha(H) + k)\right].
$$

Auf Grund von $d \geq \mathrm{VaR}_\alpha(H) + k$ folgt nun daraus:

$$
= \frac{k}{1-\alpha} \mathbb{Q}\left[H \geq d\right] = \frac{k}{1-\alpha} \mathbb{Q}[D_1] = \frac{q_1}{1-\alpha} \cdot k.
$$

Da der letzte Term für alle $\alpha \in (0,1)$ größer gleich $q_1 k$ ist, folgt (6.15) und demnach auch die Behauptung.

Fall (II):

Angenommen $\mathrm{VaR}_\alpha(H) \geq d+k$. Dadurch erhalten wir $\mathrm{VaR}_\alpha(W) = \mathrm{VaR}_\alpha(H) - k$.

(i) Sei $\rho \equiv \mathrm{VaR}_\alpha$.

Das freigesetzte Kapital ist demnach gegeben durch

$$\mathrm{VaR}_\alpha(H) - \mathrm{VaR}_\alpha(W) - q_1 \cdot k = k - q_1 \cdot k,$$

was das angegebene Resultat beweist.

(ii) Betrachte nun $\rho \equiv \mathrm{ES}_\alpha$.

Für $\beta \in [\alpha, 1)$ folgt aus der Monotonie des Value at Risk:

$$\mathrm{VaR}_\beta(H) \geq \mathrm{VaR}_\beta(H) \geq d + k.$$

Daher ist $\mathrm{VaR}_\beta(W) = \mathrm{VaR}_\beta(H) - k$ für alle $\beta \in [\alpha, 1)$. Durch die Integraldarstellung des Expected Shortfall aus (6.11) erhalten wir die Aussage über das freigesetzte Kapital direkt aus:

$$\mathrm{VaR}_\beta(H) - \mathrm{VaR}_\beta(W) - q_1 \cdot k = k - q_1 \cdot k.$$

□

Bemerkung 6.8.

Fall (I) bezieht sich auf jene Situation, wo α so klein ist, dass sich die vom Derivat bewirkte Risikominderung nicht im Risikomaß widerspiegelt. Grund dafür ist die Unempfindlichkeit des Value at Risk gegenüber extremen Tails in der Verteilung von H. Man erleidet dadurch mit jedem in das Derivat investierten Betrag Kosten, ohne dabei wahrnehmbar Gewinn zu machen. Wird jedoch der Expected Shortfall verwendet, werden die schweren Tails

im Risikomaß reflektiert und der Gewinn wird erkannt, solange das Derivat nicht zu teuer ist, also solange q_1 nicht so groß wird. Diese Aussage ist gleichbleibend zu jener aus [37], doch der Fall (II) unterscheidet sich ein wenig. Fall (II) bezieht sich hingegen auf jene Situation, wo das Sicherheitslevel α so groß ist, sodass unter allen durch das Risikomaß betrachteten Szenarien, das Derivat einen Payoff von einer Geldeinheit produziert. Dieser Payoff ist immer größer als der Preis q_1. Folglich ist das Sparen von Kapital immer gewährleistet. Allerdings hängt das in (6.16) freigesetzte Kapital vom Preis q_1 ab. Somit folgt für q_1 nahe bei 0, dass es keine Marktrisikoprämie für das Derivat gibt und das freigesetzte Kapital damit maximiert wird.
Ist q_1 aber nahe bei 1, betrachtet der Markt das Ereignis, wo das Derivat fast gewiss gewinnbringend ist. Dies macht es aber sehr teuer und die Investition in das Derivat setzt nur wenig Kapital frei.
Der Unterschied unserer Betrachtungsweise unter dem risikoneutralen Maß zu jener aus [37] ist nun, dass dort q_1 nur im Intervall $(p_1, \frac{p_1}{1-\alpha})$ garantiert, dass der Expected Shortfall die Ungleichung (6.14) erfüllt. Bei uns ist das für alle $q_1 \in (0, 1)$ der Fall.

Durch die bisher unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit hergeleiteten Ergebnisse, wie (6.8) oder (6.12), konnte man einige Zusammenhänge aus den vorigen Kapiteln wiedererkennen und man könnte meinen, dass unsere Betrachtung die Berechnung der Lösung des Problems (6.5) erheblich vereinfacht. Zusätzlich erhält man durch Satz 6.7, dass die Modelle kapitaleffizienter sind als jene unter der Real-World Wahrscheinlichkeit. Jedoch darf man nicht außer Acht lassen, dass uns der Bezug zu den regulatorischen Ansätzen verloren geht, da deren vorgeschriebene Risikomaße zur Bewertung des Risikos komplett abhanden kommen.

Ob dies nur ein Vorkommnis im einperiodischen Modell ist, wird uns der nächste Abschnitt liefern, wo wir mehrperiodische Modelle marktkonsistent bewerten werden.

6.1.2 Der Mehrperiodenfall

Wir werden in diesem Abschnitt den Aufbau aus vorigem Kapitel 6.1.1 zu mehrperiodischen Modellen erweitern. Demnach ergibt sich für den optimalen Wert G_t des Portfolios mit Startwert v und Strategie ϑ:

$$G_t^{v,\vartheta} = v + \sum_{k=1}^{t} \vartheta_k X_k, \tag{6.18}$$

wobei $t \in \mathcal{T} \coloneqq \{0, \dots, T\}$ ist. Wir nehmen an, dass die in X vorkommenden Stock Returns S unabhängig und identisch verteilt (*iid*) sind.
Auf Grund der Konstruktion ist das Portfolio aus (6.18) selbstfinanzierend.
Wie durch die letzten Kapitel motiviert, lassen wir nur Strategien zu, die $G_T^{v,\vartheta} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{Q})$ sind.
Da wir den vorigen Abschnitt direkt erweitern wollen, suchen wir hier auch jenes Paar (V_0, ξ_1), die das Optimierungsproblem

$$\arg\min_{(v,\vartheta)} \mathbb{E}\left[\left(G_T^{v,\vartheta} - H\right)^2 \middle| \mathcal{F}_0\right] \tag{6.19}$$

löst. Zur Bestimmung des Paares (V_0, ξ_1) verweisen wir hier auf das Theorem 8.7 aus Černý und Kallsen [4], welches in allgemeiner Form die Lösung des Problems (6.19) liefert:

Satz 6.9.

Der Prozess L, der durch die Rekursion $L_T = 1$ und für $0 \leq t \leq T$

$$L_{t-1} = \mathbb{E}\left[L_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] - \frac{\mathbb{E}\left[L_t X_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]^2}{\mathbb{E}\left[L_t X_t^2 \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]}$$

gegeben ist, ist $(0,1]$-wertig und das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star$, definiert durch

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^\star}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \prod_{t=1}^{T} \frac{L_t}{\mathbb{E}\left[L_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]}$$

ist wohldefiniert.

Die folgenden Prozesse sind ebenso wohldefiniert:

$$\begin{aligned}
a_t^\star &= \frac{\mathbb{E}^\star\left[X_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbb{E}^\star\left[X_t^2 \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]}, \\
b_t^\star &= a_t^\star \cdot \mathbb{E}^\star\left[X_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = \frac{\mathbb{E}^\star\left[X_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]^2}{\mathbb{E}^\star\left[X_t^2 \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]}, \\
V_{t-1}^\star &= \mathbb{E}^\star\left[\frac{1-a_t^\star X_t}{1-b_t^\star} V_t^\star \middle| F_{t-1}\right], \quad V_T^\star = H, \\
\xi_t^\star &= \frac{\mathbb{E}^\star\left[\left(V_t^\star - V_{t-1}^\star\right) X_t \middle| F_{t-1}\right]}{\mathbb{E}^\star\left[X_t^2 \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]}.
\end{aligned}$$

Für das Anfangskapital v definieren wir die Strategie $\varphi(v) = (\varphi_t(v))_{t\in(0,T]}$ iterativ durch:

$$\varphi_t(v) = \xi_t^\star + a_t^\star \left(V_{t-1}^\star - G_{t-1}^{v,\varphi(v)}\right). \tag{6.20}$$

Dann erfüllt das Paar $(V_0^\star, \varphi(V_0^\star))$ das Optimierungsproblem (6.19).

Das im Satz vorkommende $\mathbb{P}^\star$ nennt man das opportunitätsneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß. Es ist kein Martingalmaß. Da wir jedoch die Asset Returns als (*iid*) angenommen haben, folgt nach [37] Seite 11 und 12, sowie Proposition 3.28 von Černý und Kallsen [3], dass $\mathbb{P}^\star$ mit $\mathbb{P}$ übereinstimmt, was für unsere weitere Analyse für $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ wichtig ist. Diese Unabhängigkeit ist eine hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung für a_t und b_t um $\mathcal{F}_0$-messbar zu sein. Wir können in diesem Fall die „$\star$" aus Satz (6.9) weglassen, um die optimale Lösung unter $\mathbb{P}$ zu erhalten.

Bemerkung 6.10.

Da $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] \leq 0$ und somit $a_t \leq 0$ ist, möchten wir auf die große Ähnlichkeit von (6.20) zu (5.11) und (5.25) hinweisen, die jeweils unter anderen Voraussetzungen auch optimale Lösungen des Mean Variance Hedging Problems lieferten.

Bewertung von Versicherungsverbindlichkeiten

Dieser Abschnitt dient dazu, mehrperiodische Bewertungsformeln zu finden, welche jene aus 6.1.1 verallgemeinern sollen. Dazu zerlegen wir zuerst die Zufallsvariable H, wie in (2.5) definiert, als

$$H = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H|F_0] + Y_1 + \ldots + Y_T \quad \text{mit} \quad Y_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H|\mathcal{F}_{t-1}] \tag{6.21}$$

fest, wobei Y_t als das Claims Development Result bezeichnet wird. Die Bezeichnung des Claims Development Result basiert auf dem Bilanzabschluss eines Versicherungsunternehmens nach jeder Periode. Zur Zeit t bilanzieren sie die sogenannte Best Estimate Verbindlichkeit $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H|\mathcal{F}_t]$, um die vorhergehende Vorhersage $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H|\mathcal{F}_{t-1}]$ zu aktualisieren. Die daraus resultierendne Anpassungen der Best Estimates generieren das Claims Development Result Y_t in der Periode t, welches entweder ein Verlust oder Gewinn ist. Betrachten wir obige Zerlegung unter $\mathbb{Q}$, so sind die bedingten Erwartungen $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H|\mathcal{F}_0]$ keine Best Estimates mehr.
Für eine Zerlegung 6.21 liefert die direkte Anwendung von Satz 6.9 eine allgemeine Bewertungsformel.

Proposition 6.11.
Für ein H wie in (6.21) ist das optimale Startvermögen aus Satz 6.9 gegeben durch:

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H|F_0] + \sum_{t=1}^{T} \left(\prod_{i=1}^{t} \frac{1 - a_i X_i}{1 - b_i} Y_t \right). \tag{6.22}$$

Beweis
Unter Beachtung, dass $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1-a_t X_t}{1-b_t}\middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1$ und $V_T = H$ ist, erhalten wir

aus Satz 6.9:

$$\begin{aligned}
V_{T-1} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1-a_T X_T}{1-b_T}\cdot H\middle|\,\mathcal{F}_{T-1}\right] = \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1-a_T X_T}{1-b_T}\cdot\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H|\mathcal{F}_0]+\sum_{t=1}^{T}Y_t\right)\middle|\,\mathcal{F}_{T-1}\right]\\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H|\mathcal{F}_0]+\sum_{t=1}^{T-1}Y_t+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1-a_T X_T}{1-b_T}\cdot Y_T\middle|\,\mathcal{F}_{T-1}\right]
\end{aligned}$$

sowie:

$$\begin{aligned}
V_{T-2} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1-a_{T-1}X_{T-1}}{1-b_{T-1}}\cdot V_{T-1}\middle|\,\mathcal{F}_{T-2}\right]\\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Bigg[\frac{1-a_{T-1}X_{T-1}}{1-b_{T-1}}\cdot\\
&\qquad\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H|\mathcal{F}_0]+\sum_{t=1}^{T-1}Y_t+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1-a_T X_T}{1-b_T}\cdot Y_T\middle|\,\mathcal{F}_{T-1}\right]\right)\Bigg|\,\mathcal{F}_{T-2}\Bigg]\\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H|\mathcal{F}_0]+\sum_{t=1}^{T-2}Y_t+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1-a_{T-1}X_{T-1}}{1-b_{T-1}}Y_{T-1}\middle|\,\mathcal{F}_{T-2}\right]\\
&\quad+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1-a_{T-1}X_{T-1}}{1-b_{T-1}}\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1-a_T X_T}{1-b_T}\middle|\,\mathcal{F}_{T-1}\right]\middle|\,\mathcal{F}_{T-2}\right].
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Turmeigenschaft folgt für den letzten Term:

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1-a_{T-1}X_{T-1}}{1-b_{T-1}}\cdot\frac{1-a_T X_T}{1-b_T}Y_T\middle|\,\mathcal{F}_{T-2}\right].$$

Durch Weiterführung obiger Schritte erhalten wir schlussendlich das erforderliche Resultat für V_0.

□

Wir nehmen nun ein Modell an, welches keine handelbaren Assets hat, außer die Derivate auf Y_t. Das heißt wir können X in Analogie zu (6.7) darstellen als

$$X_t = \mathbb{1}_{D_1} - q_1, \tag{6.23}$$

wobei $D_t = \{Y_t \geq d_t\}$ das Ereignis, wo das Claims Development Result Y_t eine gegebene Schranke d_t übersteigt, $p_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{D_1}|\mathcal{F}_{t-1}]$ und q_t der $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare Preis mit $q_1 \in (p_1, 1)$ ist. Für a_t und b_t aus Satz 6.9 erhalten wir dadurch:

$$\begin{aligned}a_t &= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X_t|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X_t^2|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{D_t} - q_t|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(\mathbb{1}_{D_t} - q_t)^2\big|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{D_t} - q_t|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(\mathbb{1}_{D_t})^2 - 2\mathbb{1}_{D_t}q_t + q_t^2\big|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]}\\ &= \frac{p_t - q_t}{p_t - 2p_tq_t + q_t^2}\end{aligned}$$

und

$$b_t = a_t \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X_t|\,\mathcal{F}_{t-1}\right] = \frac{p_t - q_t}{p_t - 2p_tq_t + q_t^2} \cdot \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{D_t} - q_t|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]}_{=p_t - q_t} = \frac{(p_t - q_t)^2}{p_t - 2p_tq_t + q_t^2}.$$

Dadurch, dass a_t und b_t für unsere Zwecke $\mathcal{F}_0$-messbar sind, gilt dies auch für p_t und q_t. Wir erhalten nun durch Proposition 4 von [37] für unser Modell den optimalen Startwert V_0 durch:

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[H|F_0] + \sum_{t=1}^{T} \frac{q_t - p_t}{1 - p_t} \cdot \mathrm{ES}_{1-p_t}(Y_t).$$

Betrachten wir den Sachverhalt nun wiederum unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit, also $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$, beziehungsweise $p_t = q_t$, so ergibt sich für V_0:

$$V_0 = \mathbb{E}[H|F_0]. \tag{6.24}$$

Man erkennt auch hier den Zusammenhang zu den Ergebnissen aus den vorigen Kapiteln, denn (6.24) ist sehr ähnlich zu (4.27), wo die optimale Strategie unter dem minimalen Martingalmaß berechnet wurde.
So wie im einperiodischen Fall vereinfacht sich auch hier die Berechnung des optimalen Startkapitals. Leider geht uns aber erneut, durch den Verlust des Risikomaßes, der Bezug zu den regulatorischen Anforderungen verloren.

Hedging und Kapitaleffizienz

Der letzte Abschnitt dieser Arbeit untersucht die Kapitaleffizienz der Hedgingstrategien unter $\mathbb{Q}$ und vergleicht sie wiederum mit jener unter $\mathbb{P}$.
Wir betrachten den Fall, wo $Y_1, \ldots, Y_T$ unabhängig und a_t, b_t $\mathcal{F}_0$-messbar sind sowie das einzige gehandelte Asset, jenes auf das Derivat Y_t ist. X ist demnach wie in (6.23) gegeben. Dadurch folgt nach Satz (6.9) unter Beachtung, dass $a_t = 0$ für $p_t = q_t$, folgende optimale Strategie für das Anfangskapital V_0:

$$\varphi_t(V_0) = \xi_t, \qquad \text{wobei} \qquad \xi_t = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(V_t - V_{t-1})\, x_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_t^2 \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]}. \tag{6.25}$$

Man erhält durch direkte Berechnung in weiterer Folge $\xi_t = \frac{\mathrm{Cov}_{\mathbb{Q}}[X_t, Y_t|\mathcal{F}_0]}{\mathrm{Var}_{\mathbb{Q}}\left[X_t^2\middle|\mathcal{F}_0\right]}$.
Vergleicht man (6.25) mit der entsprechenden Darstellung unter der Real-World Wahrscheinlichkeit in [37], so erkennt man, dass bei uns der Term $a_t\left(V_{t-1} - G_{t-1}^{V_0,\varphi(V_0)}\right)$ fehlt, welcher den Wert des Investmentportfolios zur Zeit t widerspiegelt. Unsere Strategie ist demnach nur von Werten abhängig, die zum Zeitpunkt 0 bekannt sind. Das ist aus Sicht eines Hedgers optimal, da wir uns schon im Vorhinein richtig absichern können, jedoch gehen aus Sicht eines Investors dadurch eventuell entstandene Gewinne verloren. Es erübrigt sich deshalb leider auch die Frage, welche der beiden Sichtweisen kapitaleffizienter ist, da $a_t\left(V_{t-1} - G_{t-1}^{V_0,\varphi(V_0)}\right)$ nur größer als 0 sein muss, um die Real-World Wahrscheinlichkeit als „Sieger“ hervortreten zu lassen.
Der Vollständigkeit halber wollen wir die entsprechenden Effizienzbedingungen unter $\mathbb{P}$ nun anführen.
Dazu sei $\delta_t = V_t - G_{t-1}^{V_0,\varphi(V_0)}$ die Differenz des Wertes der Verbindlichkeit und des Wertes des Investmentportfolios zur Zeit $t-1$. Da aus $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}] \leq 0$ $a_t \leq 0$ folgt, passen wir die Strategie so an, dass falls der Shortfall $\delta_t > 0$ ist, weniger in das riskante Asset investiert wird sowie umgekehrt. Analog zu

Kapitel 6.1.1 ergibt eine Neuformulierung von (6.14) zur Zeit $t-1$:

$$\rho_{t-1}\left(Y_t - \left(G_t^{V_0,\varphi(V_0)} - G_{t-1}^{V_0,\varphi(V_0)}\right)\right) \leq \rho_{t-1}(Y_t), \tag{6.26}$$

wobei ρ_{t-1} das regulatorisch vorgeschriebene Risikomaß ist, welches mit der Information von $\mathcal{F}_{t-1}$ zur Zeit $t-1$ ausgewertet wird. Das Prinzip dahinter ist, dass die Verbindlichkeit im Bezug auf die Kapitalanforderung während $(t-1, t]$ das entsprechende Claims Development Result Y_t ist. (6.26) stellt die Bedingung dar, dass die Kapitalanforderung an Y_t minus dem Nettogewinn des Handels über den selben Zeitraum, kleiner ist als die Kapitalanforderung an Y_t unter der Annahme, dass alle Geldanlagen in das risikolose Asset investiert wurden. Die linke Seite von (6.26) kann als

$$\rho_{t-1}\left(Y_t - \varphi_t(V_0)X_t\right) = \rho_{t-1}(Y_t - \xi_t X_t - a_t\delta_t X_t)$$

geschrieben werden. Mit $\tilde{k}_t = a_t\delta_t + \frac{1}{1-p_t}\mathrm{ES}_{t-1,1-p_t}(Y_t)$ und Rückverfolgung der ersten Schritte des Beweises von Proposition 6.7 folgt als Bedingung, dass (6.26), analog zu (6.14), gilt:

$$q_t\tilde{k}_t \leq \rho_{t-1}(Y_t) - \rho_{t-1}(Y_t - \tilde{k}_t \mathbb{1}_{D_t}).$$

Kapitel 7

Zusammenfassung und Schlussfolgerung

Diese Arbeit diente dazu, die wichtigsten Resultate und Erkenntnisse der Hedgingthematik unter einem quadratischen Kriterium zu erläutern und darzustellen, sowie unter zu Hilfenahme dieser Ergebnisse Versicherungsverpflichtungen marktkonsistent zu bewerten.

Der erste Teil war sozusagen der „Entwicklung“ des Hedgings gewidmet, wo wir den Begriff der Risikominimierung einer im Mittel selbstfinanzierenden Strategie analysierten, die von Föllmer und Sondermann [14] eingeführt wurde. Wir konnten dort beobachten, dass die Suche nach solch einer optimalen Strategie über die sogenannte Kunita-Watanabe Zerlegung führt. Anschließend befassten wir uns mit der durch Schweizer [32] ins Leben gerufenen lokalen Risikominimierung. Dieser Zugang lieferte uns eine Optimalitätsgleichung, welche wir mit Hilfe der Theorie von Girsanov in ein Problem überführten, das wir mit der Anwendung von Martingaltechniken lösen konnten. Als wichtigstes Hilfsmittel stellte sich dabei das minimale Martingalmaß heraus, welches uns auch im darauffolgenden Abschnitt von großem Nutzen war. Dort untersuchten wir das Mean Variance Hedging einerseits unter eben diesem Maß, und andererseits unter dem varianzoptimalen Wahrscheinlichkeitsmaß. Wir zeigten, unter welchen Bedingungen und Annahmen beide Maße übereinstimmen. Das Mean Variance Hedging diente als Grundlage für das letzte Kapitel dieser Arbeit, wo wir mit dessen Hilfe Versicherungsverpflichtungen marktkonsistent bewerteten. Wir untersuchten dabei diese Bewertung unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit und stellten die Ergebnisse der Real-World Wahrscheinlichkeit gegenüber. Es stellte sich heraus, dass in den betrachteten einperiodischen und Single Asset Fall Modellen die risikoneutrale Sichtweise kapitaleffizientere Ergebnisse lieferte, sie jedoch regulatorische Anforderungen in Form von Risikomaßen nicht berücksichtigte. Die Analyse der betrachteten mehrperiodischen Modelle unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit ergab leider, dass sie nicht kapitaleffizienter sind. Allerdings ist sie aus der Sicht eines Hedgers ausgezeichnet, da sie eine Strategie liefert, die nur von Werten abhängt, welche zu Beginn schon bekannt sind.

Dies lässt uns mit gemischten Gefühlen an die Schlussfolgerung herangehen. Denn wer möchte sich nicht perfekt gegen eine Versicherungsverbindlichkeit absichern? Die Kehrseite dieser Medaille ist jedoch, dass dadurch kein Gewinn generiert werden kann.
Zusätzlich müssen diese alternativen Bewertungstechniken regulatorischen Anforderungen gerecht werden. Da diese in den letzten Jahren aber stark zugenommen haben, wird dies ein schweres Unterfangen.
Es wird sich zeigen, ob in Zukunft ein optimales Wahrscheinlichkeitsmaß zur marktkonsistenten Bewertung gefunden werden kann.

Literaturverzeichnis

[1] BINGHAM, N. H. UND KIESEL, R. *Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives.* Springer Science & Business Media, 2013.

[2] BLACK, F. UND SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy, Vol. 81, S. 637-654*, 1973.

[3] ČERNÝ, A. UND KALLSEN, J. On the structure of general mean-variance hedging strategies. *Annals of Probability, Vol. 35(4), S. 1479-1531*, 2007.

[4] ČERNÝ, A. UND KALLSEN, J. Hedging by sequential regressions revisited. *Mathematical Finance, Vol. 19(4), S. 591-617*, 2009.

[5] DELBAEN, F., MONAT, P., SCHACHERMAYER, W., SCHWEIZER, M. UND STRICKER, C. Weighted norm inequalities and hedging in incomplete markets. *Finance and Stochastics, Vol. 1(3), S. 181-227*, 1997.

[6] DELBAEN, F. UND SCHACHERMAYER, W. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen, Vol. 300, S.463-520*, 1994.

[7] Delbaen, F. und Schachermayer, W. The existence of absolutely continuous local martingale measures. *Ann. Appl. Probab., Vol. 5(4), S. 926-945*, 1995.

[8] Delbaen, F. und Schachermayer, W. The variance-optimal martingale measure for continuous processes. *Bernoulli, Vol. 2(1), S. 81-105*, 1996.

[9] Dellacherie, C. und Meyer, P.-A. *Probabilities and Potential.* Hermann, 1978.

[10] Denuit, J., Dhaene, M., Goovaerts, M. J. und Kaas, R. *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models.* John Wiley & Sons, Ltd, 2005.

[11] Elliot, R. J. *Stochastic Calculus and its Applications.* Springer, 1982.

[12] Föllmer, H. und Schweizer, M. Hedging by sequential regression: an introduction to the mathematics of option trading. *ASTIN Bulletin, Vol. 18(2), S. 147-160*, 1988.

[13] Föllmer, H. und Schweizer, M. Hedging of contingent claims under incomplete information. Discussion paper serie b, University of Bonn, Germany, 1991.

[14] Föllmer, H. und Sondermann, D. Hedging of non-redundant contingent claims. *Contributions to Mathematical Economics, S. 205-223*, 1985.

[15] Harald Luschgy. *Martingale in diskreter Zeit: Theorie und Anwendungen.* Springer Spektrum, 2012.

[16] Harrison, J. M. und Kreps, D. M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory, Vol.20(3), S. 381-408*, 1979.

[17] Harrison, J. M. und Pliska, S. R. A stochastic calculus model of continuous trading: Complete markets. *Stochastic Processes and their Applications, Vol.15(3), S. 313-316*, 1983.

[18] Karatzas, I. und Shreve, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd Edition.* Springer, 1991.

[19] Luenberger, D. G. *Optimization by Vector Space Methods.* John Wiley & Sons, Inc., 1969.

[20] Merton, R. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, S. 205-223*, 1986.

[21] Métivier, M. *Semimartingales: A Course on Stochastic Processes.* Berlin, New York: De Gruyter. 1982.

[22] Möhr, C. Market-consistent valuation of insurance liabilities by cost of capital. *ASTIN Bulletin, Vol. 41(2), S 315-341*, 2011.

[23] Müller, S. *Arbitrage Pricing of Contingent Claims.* Springer-Verlag, 1985.

[24] Musiela, M. und Rutkowski, M. *Martingale Methods in Financial Modelling.* Springer, 2004.

[25] Nguyen, X. Hedging of contingent claims in incomplete markets. Stat250 project report, University of Berkeley, USA, 2002.

[26] Papachristou, D. Statistical analysis of the spreads of catastrophe bonds at time of issue. *ASTIN Bulletin, Vol. 41(1), S. 251-277*, 2011.

[27] Pham, H., Rheinländer, T. und Schweizer, M. Mean-variance hedging for continuous processes - new proofs and examples. 1997.

[28] Rheinländer, T. und Schweizer, M. On l^2-projections on a space of stochastic integrals. Technical report, 1997.

[29] Rheinländer, T. und Sexton, J. *Hedging Derivatives.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011.

[30] Salzmann, R. und Wüthrich, M. V. Cost-of-capital margin for a general insurance liability runoff. *ASTIN Bulletin, Vol. 40(2), S. 415–451*, 2010.

[31] Schweizer, M. Risk-minimality and orthogonality of martingales. *Stochastic and Stochastic Reports, Vol. 30, S. 123-131*, 1990.

[32] Schweizer, M. Option hedging for semimartingales. *Stochastic Processes and their Applications, Vol. 37, S. 339-363*, 1993.

[33] Schweizer, M. Approximating Random Variables by Stochastic Integrals. *Annals of Probability, Vol. 22, S. 573-599*, 1994.

[34] Schweizer, M. On the minimal martingale measure and the foellmer-schweizer decomposition. *Stochastic Analysis and its Applications, Vol. 13, S. 573-599*, 1994.

[35] Schweizer, M. Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure. *Annals of Probability, Vol. 24, S. 206-236*, 1996.

[36] Schweizer, M. A guided tour through quadratic hedging approaches. *Option Pricing, Interest Rates and Risk Management, Cambridge University Press, S. 538-574*, 1999.

[37] Tsanakas, A., Wüthrich, M. V. und Černý, A. Market value margin via mean-variance hedging. *ASTIN Bulletin, Vol. 43(3), S. 301-322*, 2013.

[38] Wüthrich, M. V. und Merz, M. *Financial Modeling, Actuarial Valuation and Solvency in Insurance.* Springer, 2013.