



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

DIPLOMARBEIT

# Flash Crashes - Ursachen, Hintergründe und der Zusammenhang zum High Frequency Trading

Ausgeführt am Institut für

Stochastik und Wirtschaftsmathematik  
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer

durch

Jacqueline Madl, BSc  
Untere Höhenstraße 20  
7412 Wolfau

Wien, 1. Mai 2016

---

## **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst habe, dass ich die verwendeten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe, und dass ich die Stellen der Arbeit, einschließlich Tabellen und Abbildungen, die anderen Werken oder dem Internet im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Wien, 1. Mai 2016

---

Unterschrift

## Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die mich während dem Verfassen meiner Diplomarbeit unterstützt haben.

Zuallererst möchte ich mich bei meinem Betreuer, Professor Thorsten Rheinländer bedanken für die Idee zu diesem interessanten Thema und für seine laufende Unterstützung bei den unterschiedlichen Fragestellungen.

Außerdem möchte ich mich bei meinen Studienkollegen, und hierbei vor allem bei Alexandra, Brigitte, Julia, Alexander und Philip, bedanken, die mir in den letzten Jahren eine Große Stütze waren und mit denen ich trotz der stressigen Zeit immer sehr viel Spaß hatte.

Ein großer Dank gilt auch den Korrekturlesern Brigitte, Melanie und Natascha, die für die erfolgreiche Fertigstellung dieser Arbeit maßgeblich verantwortlich waren.

Ich möchte mich natürlich auch bei meinen Eltern, meiner Schwester, meinem Freund und meinen Freunden bedanken, die mich während meines Studiums immer unterstützt haben und mich immer wieder ermutigt haben.

## Zusammenfassung

Der Flash Crash vom 06. Mai 2010 war ein einschneidendes Ereignis am Wertpapiermarkt. In kürzester Zeit fielen einige der wichtigsten Indizes am Future- und Aktienmarkt, um sich nur wenige Minuten später wieder zu erholen. Durch dieses Ereignis bekam eine neue Form des Handelns große Aufmerksamkeit, das High Frequency Trading, welches ein sehr hohes Volumen am Markt einnimmt. In dieser Arbeit werden die Berichte des Flash Crash genauer analysiert. Es werden einige Grundlagen zur stochastischen Kontrolltheorie beschrieben und darauf aufbauend einige Handelsstrategien der High Frequency Trader vorgestellt und genauer betrachtet. Außerdem werden Methoden vorgestellt, um zukünftige Flash Crashes vorherzusehen. Diese werden auf Daten der Istanbul Börsen angewandt. In der numerischen Analyse sieht man, dass der Volume-Synchronized Probability of Informed Trading (VPIN) sehr von einer genauen Einteilung in Kauf- und Verkaufsvolumen abhängt und seine Aussagekraft dadurch um einiges erhöht wird. Man steht daher weiterhin vor den Problemen, wie man mit einer größeren Datenmenge umgeht, und welche Methode man zur Einteilung des Volumens verwendet. Außerdem muss der Markt und seine Teilnehmer noch genauer analysiert werden, um erkennen zu können, wer oder was für die Ungleichgewichten am Markt verantwortlich ist.

## Schlagwörter

*Flash Crash, Hochfrequenzhandel, VPIN, Mini Flash Crash, Limit Orderbuch, Stochastische Kontrolltheorie*

## **Abstract**

The Flash Crash of the 6<sup>th</sup> May 2010 was a dramatic event on the securities market. A few of the most important indices on the future and stock market dropped rapidly but recovered within minutes. After this event a new form of trading gained prominence, the high frequency trading, which is responsible for 70 percent of the trading volume on the market. This thesis gives an overview of the different reports dealing the flash crash. Afterwards fundamentals of stochastic optimal control are given and based on this, different trading strategies of high frequency traders are introduced and analyzed. Furthermore methods to predict future flash crashes are described and applied on data of the Istanbul Stock Exchange. The numerical analysis reflects how much the Volume-Synchronized Propability of Informed Trading (VPIN) depends on a clear separation of buy and sell volume and how this improves the informative value. The problem, which will remain in the future, is how to deal with such a big amount of data and which methods will be used for separating the volume. Furthermore an analysis of the whole market is necessary to identify who or what is responsible for the market imbalances.

## **Keywords**

*Flash Crash, High Frequency Trading, VPIN, Mini Flash Crash, Limit Order Book, Stochastic Optimal Control and Stopping*

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Flash Crashes</b>  | <b>2</b>  |
| 2.1      | Grundlagen . . . . .  | 2         |
| 2.1.1    | Elektronischer Handel und das Limit-Orderbuch . . . . .               | 2         |
| 2.1.2    | Algorithmic und High Frequency Trading . . . . .                      | 8         |
| 2.2      | Der Flash Crash des 06. Mai 2010 . . . . .                            | 11        |
| 2.2.1    | Der Bericht der SEC und CFTC . . . . .                                | 11        |
| <b>3</b> | <b>Handelsstrategien der High Frequency Trader</b>                    | <b>16</b> |
| 3.1      | Grundlagen der Optimierungsprobleme . . . . .                         | 16        |
| 3.1.1    | Kontrolle von Diffusionsprozessen . . . . .                           | 17        |
| 3.2      | Handelstrategien von Algorithmic und High Frequency Tradern . . . . . | 26        |
| 3.2.1    | Optimales Kaufen und Verkaufen mit Markt Orders . . . . .             | 26        |
| 3.2.2    | Optimales Verkaufen mit Limit und Markt Orders . . . . .              | 44        |
| <b>4</b> | <b>Methoden um Flash Crashes zu Erkennen</b>                          | <b>50</b> |
| 4.1      | VPIN . . . . .  | 50        |
| 4.1.1    | Der PIN (Probability of Informed Traders) . . . . .                   | 50        |
| 4.1.2    | Volume Bucketing . . . . .  | 52        |
| 4.1.3    | VPIN - Volume-Synchronized Propability of Informed Trading . . . . .  | 54        |
| 4.2      | Mini Flash Crashes . . . . .  | 55        |
| 4.2.1    | Definition von Mini Flash Crashes . . . . .                           | 56        |
| 4.3      | Analyse der ISE Daten . . . . .                                       | 57        |
| 4.3.1    | Datensatz . . . . .   | 57        |
| 4.3.2    | Mini Flash Crashes und Berechnung des VPIN . . . . .                  | 58        |
| <b>5</b> | <b>Schlussfolgerung und Ausblick</b>                                  | <b>69</b> |
|          | <b>Appendices</b>   |           |

|                                  |           |
|----------------------------------|-----------|
| <b>Anhang A Matlab Codes</b>     | <b>77</b> |
| A.1 Mini Flash Crashes . . . . . | 77        |
| A.2 VPIN . . . . .               | 79        |

# Abbildungsverzeichnis

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1  | Einreihung einer neuen Limit Order in ein Orderbuch . . . . .            | 5  |
| 4.1  | Aktienkursentwicklung mit genauerer Betrachtung des 17.06.2008 . . . . . | 60 |
| 4.2  | VPIN mit geschätzten Kauf- und Verkaufsvolumen . . . . .                 | 61 |
| 4.3  | VPIN mit genauer Aufteilung von Kauf- und Verkaufsvolumen . . . . .      | 61 |
| 4.4  | Aufteilung in Verkauf- und Kaufvolumen durch Bid- und Askpreis . . . . . | 62 |
| 4.5  | Aktienkursentwicklung mit genauerer Betrachtung des 27.06.2008 . . . . . | 64 |
| 4.6  | VPIN mit geschätzten Kauf- und Verkaufsvolumen . . . . .                 | 65 |
| 4.7  | VPIN mit genauer Aufteilung von Kauf- und Verkaufsvolumen . . . . .      | 65 |
| 4.8  | Aktienkursentwicklung mit genauerer Betrachtung des 10.06.2008 . . . . . | 66 |
| 4.9  | VPIN mit geschätzten Kauf- und Verkaufsvolumen . . . . .                 | 67 |
| 4.10 | VPIN mit genauer Aufteilung von Kauf- und Verkaufsvolumen . . . . .      | 67 |
| 5.1  | Schlagzeilen zum Thema Flash Crash . . . . .                             | 71 |

# Tabellenverzeichnis

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Beispiel eines Orderbuchs vor Orderausführung . . . . .      | 5  |
| 2.2 | Beispiel eines Orderbuchs . . . . .                          | 8  |
| 4.1 | Auszug aus den Handelsdaten vom 01.07. der Akbank . . . . .  | 58 |
| 4.2 | Auszug aus den Orderdaten vom 01.07. der Akbank . . . . .    | 58 |
| 4.3 | VPIN Werte mit dazugehöriger Uhrzeit und Marktwert . . . . . | 63 |

# Kapitel 1

## Einleitung

Durch moderne Technologien hat sich der Börsenhandel in den letzten Jahren enorm verändert. Heutzutage werden Börsengeschäfte nicht mehr in einem Raum gemacht, sondern der Großteil des Volumens wird elektronisch, mit Hilfe von Computeralgorithmen, gehandelt. Die Hochgeschwindigkeitsvariante des Handels mit Algorithmen ist der sogenannte Hochfrequenzhandel (High Frequency Trading). Nur ca. 2% der Handelsfirmen in den USA sind High Frequency Trading (HFT) Firmen, seit 2009 waren sie jedoch für ca. 70% des Volumens am Aktienmarkt und für ca. 50% am Futuremarkt verantwortlich. Durch das hohe Volumen, das diese neue Form des Handels einnimmt, stellt sich die Frage, welche Auswirkungen HFT auf den Markt hat, und ob aus dieser Form des Handels Probleme entstehen. Durch die Ereignisse des 06. Mai 2010, dem Flash Crash, wurde HFT näher betrachtet. In dieser Arbeit werden die Ereignisse dieses Tages genauer analysiert. Danach wird ein Blick auf Strategien geworfen die High Frequency Trader verwenden. Darauf folgen Methoden mit denen man Ungleichgewichte am Markt entdecken kann und die einen Flash Crash andeuten können, diese werden dann noch auf einen Datensatz der ISE angewendet und genauer betrachtet.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>vgl. CFTC/SEC [21]

# Kapitel 2

## Flash Crashes

### 2.1 Grundlagen

Um sich ein Bild vom Flash Crash machen zu können, ist es wichtig, sich mit einigen grundlegenden Fragen zu beschäftigen, und den Markt und die Marktteilnehmer zu betrachten. Einige Fragen, die man sich stellt, sind z.B.:

- An welchen Plätzen wird gehandelt und wer sind die Marktteilnehmer?
- Wie und mit welchen Methoden wird gehandelt?

#### 2.1.1 Elektronischer Handel und das Limit-Orderbuch

Anfangs wird sich mit der ersten Frage beschäftigt. Die Börse als Handelsort ist jedem ein Begriff. Einfach gesagt, beschreibt die Börse einen Ort, an dem ein Anbieter und ein Nachfrager zusammentreffen, um etwas, z.B. ein Wertpapier, zu handeln. Zu Beginn fand der Handel an einer Börse noch in einem Börsensaal statt, man bezeichnet das als Präsenzhandel. Heute wird vermehrt elektronisch gehandelt. An der größten Börse der Welt, der New York Stock Exchange, findet man ein Mischsystem aus Präsenz- und Computerbörse.<sup>1</sup>

#### Funktionsweise des Börsenhandels

Um ein Wertpapier zu kaufen, wendet man sich als Anleger an eine Großbank oder an einen Broker, und gibt diesem seine "Order", also seinen Kaufauftrag weiter. Es ist also nicht jeder berechtigt, direkt an der Börse zu handeln. Damit soll sichergestellt werden, dass die Teilnehmer an der Börse vertrauenswürdig sind. Die Börse beschäftigt auch Makler, die an der New York Stock Exchange (NYSE) auch Specialists genannt werden.

---

<sup>1</sup>vgl. Beike und Schlütz [2] S. 41-45

Ihre Aufgabe besteht darin, so viele Orders wie möglich zusammenzubringen, also zu jeder Verkaufsoffer eine Kauforder zu finden, und einen marktgerechten Preis für das Wertpapier zu ermitteln. Jeder ist dabei für ein bestimmtes Papier zuständig, wodurch auch die Bezeichnung Specialist Sinn macht. Wichtig dabei ist, dass die Makler nur für das Zusammenführen von Verkäufer und Käufer verantwortlich sind, sie sorgen aber nicht für einen Ausgleich, wenn Angebot und Nachfrage nicht übereinstimmen und sie machen sich keine Gedanken darüber, ob die ermittelten Preise Sinn ergeben. Sie nutzen einfach die Daten von außen, und die Preise werden nur durch Angebot und Nachfrage bestimmt. Diese Form des Markts wird als Order-driven bezeichnet. Das Gegenstück zu einem Order-driven Market ist der sogenannte Quote-driven Market. Hier schalten sich Market-Maker ein, dahinter stehen meist Großbanken oder Broker-Dealer, die im laufenden Tagesgeschäft immer wieder Preise an den Markt stellen, zu denen sie kaufen oder verkaufen.<sup>2</sup>

Es werden als nächstes die Teilnehmer am Markt betrachtet, die sogenannten Trader, die sich in verschiedene Gruppen unterteilen. Die "Fundamental Traders" verfolgen mittel bis langfristige Strategien, die auf einer genauen Analyse des Wertpapiers und der Firma beruhen, die hinter dem Wertpapier steckt. Weiters gibt es auch noch Noise Traders und Liquidity Traders behandelt. Noise Traders sind Händler, deren Entscheidungen nicht auf genaue Analysen basieren und eher irrational sind. Die "Liquidity Traders" sind Händler, die verkaufen weil sie das Geld für andere Investitionen benötigen. Sie werden zu den "Fundamental Traders" gezählt. Eine weitere Gruppe sind die "Informed Traders", die Informationen nutzen, welche nicht auf den ersten Blick an den Marktpreisen ersichtlich sind.<sup>3</sup>

Welche Möglichkeiten gibt es nun an der Börse zu handeln? Einerseits kann man eine sogenannte Markt Order (MO) an den Makler weitergeben, das heißt, möchte man ein Wertpapier kaufen, dann kauft der Makler es zum niedrigst angebotenen Preis. Die MO ist eine aktive Order, man signalisiert sofortigen Kaufwillen. Um sich vor einer Marktveränderung, z.B. einen rasanten Anstieg des Preises zu schützen, gibt es auch so genannte Limit Orders (LO), bei dieser Form gibt man eine Grenze an, zu der man bereit ist das Wertpapier zu kaufen oder zu verkaufen. Natürlich besteht bei einer LO die Gefahr, das Wertpapier nicht zu bekommen weil kein Marktteilnehmer bereit ist zu meinem Limit zu verkaufen oder zu kaufen. Die LO ist eine passive Order, weil es nicht zu einem sofortigen Kauf oder Verkauf kommt.<sup>4</sup>

---

<sup>2</sup>vgl. Beike und Schlütz [2] S. 41-45

<sup>3</sup>vgl. Cartea, Jaimungal und Penalva [4] S. 8-9

<sup>4</sup>vgl. Beike und Schlütz [2]

Da es heutzutage wichtig ist schnell auf Marktveränderungen reagieren zu können, beschränkt man sich nicht nur auf die klassischen MO und LO. Ein paar andere wichtige Ordertypen und Orderzusätze sind z.B.:

- **Day Orders:** Eine Day Order ist, wie der Name schon vermuten lässt, eine Order die am gleichen Tag ausgeführt werden muss. Wenn sie nicht am gleichen Tag ausgeführt werden kann, wird sie aus dem Orderbuch gelöscht.
- **Non - routable:** Es gibt einige Orderzusätze, bei denen ein Weiterleiten an andere Börsen vermieden wird z.B: "book only", "post only", "mid point peg" usw.
- **Pegged, Hide not Slide:** Diese Ordertypen bewegen sich mit dem Midprice<sup>5</sup> oder dem National Best Bid and Offer (NBBO). Der NBBO wird mehrmals am Tag bestimmt und spiegelt den besten Bid und den besten Ask Preis am Markt wieder. Der beste Bid und der beste Ask Preis muss nicht von der gleichen Börse kommen.<sup>6</sup>
- **Hidden:** Bei diesem Ordertyp wird die Menge, die man kaufen möchte, nicht veröffentlicht.
- **Iceberg:** Bei diesem Ordertyp teilt man die Ordermenge auf und gibt sie in Häppchen an den Markt weiter.
- **Immediate or Cancel:** Hat eine Order den IOC Zusatz, dann werden so viele Wertpapiere wie möglich zum besten Preis gekauft oder verkauft, die restliche Order wird danach gelöscht.
- **Fill or Kill:** Bei dieser Ausführungsbeschränkung wird die Order nur in der kompletten Höhe ausgeführt. Wenn das nicht möglich ist, wird die Order wieder gelöscht.
- **Good-Till-Time:** Es gibt einen vordefinierten Zeitpunkt, wie lange eine bestimmte Order gültig ist. Nach diesem Zeitpunkt wird die Order gelöscht.
- **Discretionary:** Die Order zeigt z.B. den Limit Order Preis an, wird aber zu einem aggressiveren Preis (hidden Preis) ausgeführt.

---

<sup>5</sup>vgl. (2.2)

<sup>6</sup>vgl. [15]

Es gibt noch viele andere Ordertypen bzw. Orderzusätze. Wichtig ist, dass man die verschiedenen Ordertypen genau kennt, denn sonst kann es beim Ausführen eines Algorithmus, der die unterschiedlichen Typen nicht berücksichtigt, zu großen Verlusten kommen.<sup>7</sup>

### Das Limit Orderbuch

Alle Orders die an den Markt gelangen, werden in einem Orderbuch zusammengeführt, wobei hier bei jeder ankommenden Order automatisch überprüft wird, ob diese mit einer anderen Order zusammengeführt werden kann. Im fortlaufenden elektronischen Handel hat jeder Einsicht in das Orderbuch.

Zur besseren Erklärung soll ein Beispiel dienen:

| Volumen | Bid   | Ask   | Volumen |
|---------|-------|-------|---------|
| 1500    | 20,30 | 20,25 | 1000    |
| 300     | 20,20 | 20,70 | 700     |
| 5000    | 20,00 | 20,75 | 3000    |
| 5000    | 20,00 | 20,75 | 3000    |

Tabelle 2.1: Beispiel eines Orderbuchs vor Orderausführung

In diesem Beispiel werden 1000 Aktien zu einem Preis von 20,25 angeboten und gleichzeitig 1500 Aktien zu einem Höchstpreis von 20,30 nachgefragt, dh. man kann eine Order über 1000 Aktien ausführen. Wichtig ist auch wie neue Orders, die an den Markt kommen, eingereiht werden. Kommt eine neue LO an den Markt, wird sie als letzte in die Schlange eingereiht.<sup>8</sup>

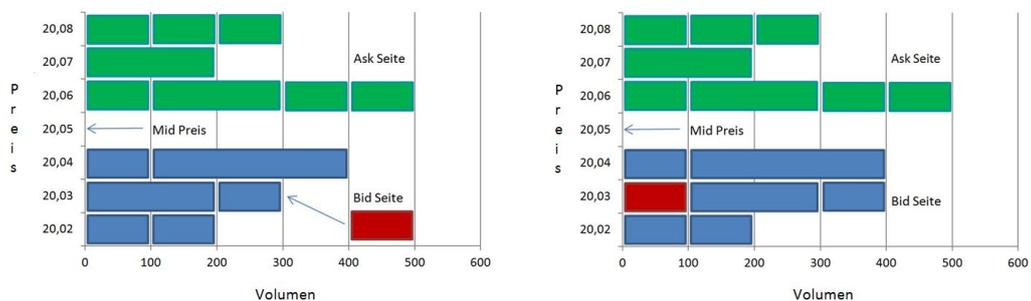


Abbildung 2.1: Einreihung einer neuen Limit Order in ein Orderbuch

<sup>7</sup>vgl. Cartea, Jaimungal und Penalva [4] S. 12-13

<sup>8</sup>vgl. Beike und Schlütz [2]

Die Grafik soll zum Verständnis dienen, die LO werden als Blöcke dargestellt. Die neue LO reiht sich als letztes, also am nächsten zur y-Achse ein. Wie sieht das Ganze bei einer neuen Market Order aus? Angenommen man befindet sich gerade auf dem Markt, dessen bester Bid Preis zurzeit auch der beste Marktpreis ist. Eine neue MO, die 250 Aktien verkaufen möchte, kommt auf den Markt. Es werden 200 Aktien zum besten Preis als Limit Orders gefunden, das heißt 200 Aktien der MO werden zum besten Bid Preis verkauft. Die restlichen 50 werden zum nächst niedrigeren Preis verkauft.

Auf dem US Markt gibt es Regeln, die sicherstellen sollen, dass die Order zum bestmöglichen Preis ausgeführt wird. Gibt es in unserem Beispiel einen anderen Handelsplatz, an der 50 Aktien auch zu diesem Preis angeboten werden, dann wird die restliche Order an eine andere Börse weitergeleitet. Erst wenn die gesamte Liquidität zu diesem Preis an allen Börsen erschöpft ist, wird die Order an unserer Börse mit einer wartenden Limitorder zusammengeführt. Es ist daher keine Seltenheit, dass eine große Marketorder in viele kleine Stücke zerteilt wird und diese Stücke an verschiedenen Börsen einen Abnehmer finden.

Das Orderbuch wird in einer festgelegten Größe, der sogenannten Tick Size, unterteilt, in der Tabelle oben ist die Tick Size 5 Cent. An anderen Märkten existieren auch andere Größen, z.B. 0,001 bis 0,05 Euro, je nachdem zu welchem Preis das Wertpapier gehandelt wird.

Im Orderbuch findet man auch den besten Bid Preis, also den besten Preis, zu dem man kaufen kann, und den besten Ask Preis, also den besten Preis, zu dem man verkaufen kann. Die Differenz zwischen den beiden Preisen ist der Quoted Spread oder einfacher Spread.

$$\text{Quoted Spread}_t = P_t^a - P_t^b \quad (2.1)$$

Wobei  $P_t^a$  der beste Ask Preis und  $P_t^b$  der beste Bid Preis ist. Stimmen Ask und Bid Preis überein, ist der Markt lahm gelegt. Dieser Zustand kommt selten vor und hält nicht lange an. Doch gerade bei sehr liquiden Wertpapiere tritt dieser Zustand immer öfter auf.

Eine weitere wichtige Größe, die man aus dem Orderbuch ablesen kann, ist der "Mid-price" oder Midpreis

$$\text{Midprice}_t = \frac{1}{2}(P_t^a + P_t^b). \quad (2.2)$$

Der Midprice ist also das arithmetische Mittel des besten Bid und Ask Preises. Er wird oft als ein Schätzwert für den "echten" Wert des Wertpapiers herangezogen.<sup>9</sup>

### Dark Pools

Alternative Handelsmöglichkeiten bieten sogenannte Dark Pools. Der einzige Unterschied von Dark Pools gegenüber den Börsen ist, dass die abgeschlossenen Trades nicht sofort veröffentlicht werden und es dadurch keinen Preisverfall gibt. Viele Großbanken haben ihre eigenen Dark Pools, z.B. Goldman Sachs, Credit Suisse.

Wie schon kurz angesprochen, hat jede Order, die an den Markt geschickt wird, Auswirkungen auf den Preis. Möchte man z.B. große Mengen einer Aktie kaufen, wird sich der Preis nach oben entwickeln, da sich Verkäufer aus dem Markt zurückziehen könnten. Wird die selbe Order an einen Dark Pool geschickt, ist die Höhe der Order nicht sichtbar und es wird einfach nach einem potentiellen Verkäufer gesucht, ohne dass die Information an den Markt gelangt. Ein weiterer Vorteil des Dark Pools ist meist der bessere Preis als an den Börsen, da normalerweise der Midpreis des Spreads genommen wird, um einen Trade abzuschließen.

Dark Pools haben nicht nur Vorteile. Die mangelnde Transparenz der Dark Pools wird auch kritisiert. Eigentlich sollen durch einen Dark Pool Informationen erst später an den Markt gelangen, um einen Preisverfall zu verhindern. Wird eine große Order in einem Dark Pool nicht vollständig ausgeführt, kann es denselben Effekt haben wie an einer normalen Börse und zwar, dass der Preis des Wertpapiers steigt. Ein weiterer wichtiger Punkt ist, dass man dem Institut hinter dem Dark Pool vertraut. Die Informationen, die in den Dark Pool gelangen, können von Eigenhändlern der Bank genutzt werden, oder auch an außenstehende z. B. High Frequency Tradern weiterverkauft werden. Diese können die Daten analysieren und sich durch ihre schnellen Systeme vor die eigene Order setzen und somit einen Gewinn erzielen.

Um die Funktionsweise des Dark Pools besser verstehen zu können, ist es wichtig, das Prinzip der Preisfindung am Markt zu verstehen. Wird ein Wertpapier an einer Börse gehandelt, gibt es vier wichtige Preispunkte: den Eröffnungspreis, den Schlusspreis, den Tages-Höchstpreis, den Tages-Niedrigpreis. Dazwischen schwankt der Preis, und es gibt den sogenannten Bid und Ask Preis. Um einen Trade abzuschließen, müssen sich Käufer und Verkäufer auf einen Preis einigen. Auf der traditionellen Börse funktioniert es, wie schon erwähnt, mit einem sogenannten Orderbuch. Dazu werden alle Kauf- und Verkaufsaufträge gesammelt und gegenübergestellt.

An der Börse gilt das sogenannte Best Bid und Offer Prinzip. Dieses Prinzip erklärt

<sup>9</sup>vgl. Cartea, Jaimungal und Penalva [4] S. 14-18

man am besten anhand eines Beispiels. Die folgende Tabelle spiegelt das aktuelle Orderbuch am Markt wieder.

| <b>Volumen</b> | <b>Bid</b> | <b>Ask</b> | <b>Volumen</b> |
|----------------|------------|------------|----------------|
| 200            | 50,09      | 50,10      | 1000           |
| 1000           | 49,95      | 50,15      | 200            |
| 7000           | 49,90      | 50,10      | 8000           |

Tabelle 2.2: Beispiel eines Orderbuchs

Man nimmt beispielsweise an, keinen Echtzeitzugriff zu haben, daher bekomme man die Informationen erst mit einer 15-minütigen Verspätung. Aus diesem Grund kennt man den aktuellen Preis nicht und man möchte nun 100 Aktien zum Preis von 50,20 kaufen. In diesem Fall würde man auf Grund des Best Bid und Offer Prinzip die Aktie um 10 Cent günstiger bekommen, obwohl man eigentlich dazu bereit wäre mehr zu bezahlen. Würde man diesen Handel in einem Dark Pool ausführen, bekäme man von diesem Vorgang gar nichts mit. Der Handel würde einfach mit dem Gegenüber abgeschlossen, der den besten Preis bietet, oder zum Midpreis.<sup>10</sup>

### 2.1.2 Algorithmic und High Frequency Trading

Als Algorithmic Trading wird der Einsatz von Computeralgorithmen bezeichnet, um Wertpapiere zu handeln. Diese Algorithmen werden verwendet, um Handelsentscheidungen zu treffen, um Orders an den Markt weiterzugeben und sie danach zu verwalten. Der Algorithmus kann dabei, je nach Automatisierungsgrad, über die verschiedensten Parameter, wie z.B. Volumen oder Preis, entscheiden. Algorithmic Trading wird in der Literatur manchmal mit dem Begriff High Frequency Trading gleichgesetzt. In dieser Arbeit wird das High Frequency Trading als ein Teil des Algorithmic Trading betrachtet. Es gibt einige Eigenschaften, die auf beide Formen zutreffen:

- Handelsentscheidungen sind vorbestimmt
- Es wird von professionellen Händlern verwendet
- Marktdaten werden in Echtzeit beobachtet
- Die Platzierung von Orders erfolgt automatisiert
- Das Ordermanagement ist automatisiert

---

<sup>10</sup>vgl. Vaananen [22]

- Es gibt kein menschliches Eingreifen
- Es erfolgt unter Verwendung von direktem Marktzugriff

Es gibt einige Eigenschaften des Algorithmic Trading, die man im Normalfall eher nicht zum High Frequency Trading zählen würde. Dies sind einige klassische Eigenschaften wie z.B.:

- Die Abwicklung eines Handels durch einen Vermittler
- Die Minimierung der Auswirkungen auf den Markt
- Das Ziel, einen gewissen Richtwert zu erreichen
- Halteperioden können Tage, Monate und Jahre sein

HFT ist eine neuere Form des Handelns, die in den letzten Jahren durch Weiterentwicklungen im Software- und Hardware Bereich immer mehr zunimmt. Typischerweise wird HFT mit den folgenden Punkten beschrieben:

- Es gibt eine hohe Anzahl an Orders
- schnelle Abwicklung von Orderstornos
- Eigenhandel
- Profit von Käufen und Verkäufen (als Mittelsmann)
- keine Signifikanten Positionen am Ende des Tages
- sehr kurze Halteperioden
- erzielt sehr niedrige Gewinnmargen pro Handel
- Der Fokus liegt auf hoch liquiden Instrumenten
- Verwendung von speziellen Ordertypen

Für das Algorithmic Trading und das High Frequency Trading gilt, dass die Punkte die Form des Handels beschreiben, jedoch muss nicht jeder dieser Punkte erfüllt werden.<sup>11</sup>

Wichtig im Zusammenhang mit dem Thema High Frequency Trading und damit auch mit dem Flash Crash ist die Wartezeit. Als Wartezeit bezeichnet man die Zeit, die eine Order braucht, um vom Händler an die Börse zu gelangen und an der Börse weiterverarbeitet zu werden. Es gibt viele Faktoren, die Einfluss auf die Wartezeit haben.

<sup>11</sup>vgl. Gomber, Arndt, Lutat und Uhle [10]

Ein paar davon sind, wie weit entfernt man sich von der Börse befindet, die Geschwindigkeit des Netzwerks und die Menge an Orders, die gerade an die Börse gelangen. Händler müssen darüber immer im Klaren sein, dass sich während dieser Verzögerung die Marktverhältnisse ändern können. Eine Möglichkeit, die häufig von High Frequency Tradern genutzt wird, ist das Serverhousing oder Colocation. Börsen vermieten dabei ihre Räumlichkeiten direkt an die Händler, diese gelangen dadurch viel schneller an die Informationen und können Trades viel schneller und effizienter abschließen als andere Händler. Da HFT viele Aktien mit einer nur sehr geringen Gewinnspanne handeln, ist für sie die Wartezeit sehr wichtig. Ändert sich der Zustand am Markt, muss vielleicht eine LO gelöscht werden, und eine MO wird an den Markt gesendet. Dabei ist es wichtig, an welche Märkte diese Order weitergeleitet wird, und wie andere Marktteilnehmer auf diese Order reagieren. Natürlich kommt es dabei auch immer auf das Wertpapier an. Bei manchen kommt es sehr oft zu Veränderungen während sich bei anderen Wertpapieren die Marktbedingungen nur sehr selten ändern.<sup>12</sup>

### Liquidität

Für die weitere Analyse des Flash Crashes ist es auch wichtig, den Begriff der Liquidität näher zu beschreiben. Im Groben bezeichnet man den Markt für ein Wertpapier als sehr liquide, wenn einem Käufer viele Verkäufer gegenüberstehen. Es gibt verschiedene Arten von Liquidität, die Markt Liquidität und die Außerbörsliche Liquidität. Markt Liquidität ist die traditionelle Art von Liquidität, die von jedem eingesehen werden kann. Man versteht darunter das Volumen an Orders, welches man im Orderbuch sieht. Je höher die Liquidität am Markt ist, desto weniger Auswirkungen hat eine neue Order auf den Preis. Um die Liquidität am Markt bestimmen zu können, betrachtet man den Spread und die Markttiefe. Je niedriger der Spread ist desto liquider ist ein Markt. Die Markttiefe ist das Volumen an Orders, welches nötig ist, damit sich der Markt bewegt, ein Markt heißt also "tief", wenn eine Order mit einem sehr hohen Volumen für eine Preisänderung nötig ist.

Die außerbörsliche Liquidität findet man vor allem in Dark Pools. Bei einer hohen außerbörslichen Liquidität wirkt sich das schlecht auf die anderen Handelsteilnehmern aus. Da viele Informationen den anderen Teilnehmern vorenthalten werden.<sup>13</sup>

<sup>12</sup>vgl. Cartea, Jaimungal und Penalva [4] S. 11-12

<sup>13</sup>vgl. Vaananen [22]

## 2.2 Der Flash Crash des 06. Mai 2010

Als Flash Crash bezeichnet man ein Ereignis am 06. Mai 2010 auf dem US Aktienmarkt. An diesem Tag fielen viele der wichtigsten Indizes am Future- und auch am Aktienmarkt, um weitere 5-6 % in nur wenigen Minuten, zusätzlich zu den 4 %, die sie gegenüber dem Vortag verloren hatten, um sich fast genauso schnell zu erholen. Es wird zuallererst auf die bisherigen Berichte der CFTC und SEC vgl. CFTC/SEC [21] zu diesem Tag eingegangen und im folgenden wird sich mit den Strategien von HFT befasst und danach werden Methoden betrachtet, die einen künftigen Flash Crash erkennen lassen.

### 2.2.1 Der Bericht der SEC und CFTC

Am 30. September, nur fünf Monate nach dem 06. Mai, wurde ein Bericht über die Ereignisse dieses Tages von der SEC und der CFTC veröffentlicht. Die CFTC, Commodity Futures Trading Commission, hat die Aufgabe, missbräuchliche Handelspraktiken und Betrug am Options- und Futuremarkt aufzudecken. Die SEC, Securities and Exchange Commission, ist die US Börsenaufsicht.

#### Was war laut diesem Bericht an diesem Tag passiert?

Durch die Nachricht der europäischen Schuldenkrise startete der 06. Mai für die Märkte turbulenter als sonst. Die Reaktion auf diese Nachricht war, dass die Prämien zur Absicherung gegen den Kreditausfall der griechischen Regierung stiegen. Um 13:00 fiel der Euro stark gegenüber dem US-Dollar und dem Yen. Diese negative Stimmung am Markt wirkte sich durch einen Anstieg der Preisvolatilität auf einige Wertpapiere aus.

Die E-Mini S&P 500 Future Verträge (kurz E-Mini) und die S&P 500 SPDR ETF (kurz SPY) sind die meist gehandelten Wertpapiere auf dem elektronischen Future- und Aktienmarkt. Beides sind Derivate, die auf dem S&P 500 Index basieren. Der S&P 500 umfasst Aktien der 500 größten börsennotierten US-amerikanischen Unternehmen. An diesem Tag sank die Liquidität der Kaufseite für den E-Mini von \$6 auf \$2.65 Milliarden und für den SPY von \$275 auf \$220 Millionen. Von diesem Rückgang der Liquidität waren auch einige individuelle Aktien betroffen.

Trotz dieser außergewöhnlich hohen Volatilität und der immer weniger werdenden Liquidität startete ein Fundamental Trader ein Verkaufsprogramm um insgesamt 75.000 E-Minis zu verkaufen, als Hedge für eine existierende Eigenkapitalposition.

Dieser Trader entschied sich, den Handel mittels einen automatisierten Algorithmus

auszuführen, der so programmiert war, den Markt so lange mit E-Mini Orders zu füttern, bis eine Ausführungsquote von 9% des Handelsvolumen der letzten Minute erreicht wurde. Dieser Algorithmus berücksichtigte weder Preis noch Zeit. Ein weiteres Problem war, dass bis zu diesem Zeitpunkt nur zwei Verkaufsprogramme von gleicher oder größerer Größe, in den zwölf Monaten vor dem 06. Mai ausgeführt wurden. Eines wurde sogar vom selben Händler ausgeführt. Doch bei der ersten Ausführung benutzte er eine Kombination aus manuellem Handel und automatisierten Algorithmen, die Preis, Zeit und Volumen berücksichtigten. Die Ausführung der ersten 75.000 Orders dauerte damals mehr als 5 Stunden. Am 06. Mai führte der Algorithmus, der nur das Handelsvolumen berücksichtigte, in nur 20 Minuten die Order aus.

Im Normalfall wird dieser hohe Verkaufsdruck durch "High Frequency Traders", "Fundamental Buyers" oder "Cross-Market Arbitrageurs" abgefangen.

- "High Frequency Traders" sind, wie am Anfang schon beschrieben, Handelsfirmen, die High-Speed-Systeme verwenden, um Marktdaten zu überwachen, und die eine große Anzahl von Orders an den Markt senden. Sie nutzen quantitative und algorithmische Methoden, um die Geschwindigkeit ihrer Handelsstrategien zu maximieren.
- "Cross-Market Arbitrageurs" haben das Ziel, temporäre Preisunterschiede zwischen zwei verwandten Produkten abzufangen, mit limitiertem oder keinem Einfluss auf folgende Preisbewegungen
- "Fundamental Trader", zu denen sowohl die "Fundamental Buyers" als auch die "Fundamental Sellers" gehören, sind Händler, deren Nettopositionen mehr als 15% des gesamten Handelsvolumens betragen. Die Nettoposition der "Fundamental Buyers" ist positiv, wobei die Nettoposition der "Fundamental Sellers" negativ ist.

Nach der Ausführung des Verkaufsalgorithmus waren die HFT's die potentiellen Käufer der ersten Menge von Orders, die der Algorithmus auf den Markt geworfen hat. Dadurch bauten diese Käufer ihre temporären Long Positions auf. Um diese zu reduzieren, verkauften die HFTs zwischen 14:41 und 14:44 aggressiv ca. 2000 E-Mini Verträge. Zu dieser Zeit wurden von den HFT's ca. 140.000 E-Mini Verträge, was über 33% des gesamten Handelsvolumen entspricht, gehandelt. Diese Vorgehensweise ist typisch für HFT's, die sehr große Mengen verkaufen bzw. kaufen, aber ihren Bestand nicht über 3000 oder 4000 Verträge anwachsen lassen.

Der Verkaufsalgorithmus reagierte auf die Steigerung des Volumens durch eine Erhöhung der Geschwindigkeit, mit dem er Orders an den Markt sendete, obwohl die Order

die zuvor geschickt wurden, noch nicht gänzlich von Fundamental Buyers und Cross-Market Arbitrageurs aufgefangen wurde.

Die weiteren Ereignisse dieses Tages lassen sich am besten im Hinblick auf die zwei Liquiditätskrisen beschreiben.

### **Die Liquiditätskrise des E-Mini**

Der Preis des E-Mini wurde in den 4 Minuten zwischen 14:41 und 14:44 um 3% nach unten gedrückt und zwar durch eine Kombination der schon schlechten Marktstimmung und dem Verkaufsdruck des Algorithmus, der HFT's und anderer Händler. Die Cross-Market Arbitrageure, die E-Minis gekauft hatten, verkauften zur selben Zeit äquivalente Mengen am Aktienmarkt, wodurch die Preise des SPY um ca. 3% gedrückt wurden.

Durch das Fehlen einer ausreichenden Nachfrage von Fundamental Buyers und den Cross-Market Arbitrageure begannen die HFT's Verträge untereinander zu verkaufen. Dieses Handeln führte zu dem sogenannten "Hot Potato"-Effekt, da dieselbe Position von einem zum anderen weiter gereicht wurde. In den 15 Sekunden von 14:45:13 bis 14:45:27 wurden von den HFTs, über 27.000 Verträge gehandelt, die für ein Handelsvolumen von ca. 49% verantwortlich waren, während effektiv nur etwa 200 neue Verträge gekauft wurden. Der Preis des E-Minis sank in dieser Zeit um weitere 1,7%, um sein Tagestief zu erreichen.

Die Preise des E-Minis fielen über 5% in der Zeit von 14:41 bis 14:45:27, die Preise des SPY fielen in dieser Zeit um über 6%. Der Verkaufsalgorithmus verkaufte zwischen 14:32 und 14:45 35.000 E-Minis im Wert von ca. \$ 1,9 Milliarden von den vorgesehenen 75.000. Zur selben Zeit verkauften alle Fundamental Seller zusammen mehr als 80.000 Verträge, wobei von den Fundamental Buyers nur ca. 50.000 Verträge gekauft wurden. Vergleicht man die Verkäufe der Fundamental Sellers an diesem Tag mit den Tagen davor, so wurden am 06. Mai 10-mal mehr Verkäufe getätigt als in den drei Tagen davor.

Der Handel der E-Minis wurde um 14:45:28 um 5 Sekunden gestoppt. Die Chicago Mercantile Exchange löste eine Stop Logic Funktionalität aus, um einen weiteren Preisverfall zu verhindern. Dadurch ging der Verkaufsdruck in dieser Zeit zurück und das Interesse der Kaufseite fing sich an zu vergrößern. Nachdem der Handel fortgeführt wurde, erholten sich die Preise des E-Mini und des SPY langsam. Der Verkaufsalgorithmus führte weiterhin Verkäufe aus bis ca. 14:51, während die Preise des E-Mini und SPY weiter stiegen.

### Die Liquiditätskrisen der einzelnen Aktien

Die zweite Liquiditätskrise begann um ca. 14:45. Viele Handelssysteme pausierten nach der ersten Liquiditätskrise, als Reaktion auf den plötzlichen Preisabfall. Diese eingebauten Pausen sind dazu da, den automatisierten Handel zu stoppen, wenn sich Preise über oder unter einem vordefinierten Wert bewegen, damit Marktteilnehmer die Möglichkeit haben, den Zustand des Marktes neu bewerten zu können.

Auch am 06. Mai musste der Marktzustand neu bewertet werden. Dabei ging aus den Berichten von Marktteilnehmern hervor, dass sie sich die folgenden Fragen stellten:

- Sind die Preisänderung die Folge von fehlerhaften Daten?
- Welche Auswirkungen haben die Bewegungen auf Risiko- und Positionsgrenzen?
- Welche Auswirkungen haben die Bewegungen auf Gewinn und Verlust im Tagesverlauf?
- Sind die Systeme fähig, mit diesem hohen Handelsvolumen umzugehen, und die hohe Anzahl von Orders zu verarbeiten?

Viele der Marktteilnehmer befürchteten, dass ein katastrophales Ereignis eintreten könnte, da die Preise vieler verschiedener Wertpapiere fielen.

Die Reaktionen der Marktteilnehmer nach ihren Analysen waren unterschiedlich. Einige erhöhten die bereitgestellte Liquidität, einige reduzierten diese und einige zogen sich vollständig vom Markt zurück.

Obwohl sich die Preise des E-Mini und des SPY nach 14:45 erholten, gab es weniger Kaufinteresse in individuelle Wertpapiere und ETFs und die Preise dieser Wertpapiere fielen weiter.

Im Zeitraum von 14:40 und 15:00 wurden ca. 2 Milliarden Aktien gehandelt, die ein Gesamtvolumen von \$56 Milliarden überstiegen. Da die Liquidität immer geringer wurde, fanden einige Marktteilnehmer, die kaufen oder verkaufen sollten, keine Gegenseite. Dadurch wurden einige Trades zu irrationalen Preisen durchgeführt, wie z.B. zu einem Penny oder \$100.000. Diese extremen Verschiebungen waren nur flüchtig. Die Marktteilnehmer hatten Zeit zu reagieren und ihre Daten und Systeme auf Vollständigkeit zu überprüfen. Dadurch wurde das Interesse der Kauf- und Verkaufsseite größer und ein geordneter Preisfindungsprozess funktionierte wieder. Um ca 15:00 hatte sich die Situation normalisiert und ein Großteil der Wertpapiere wurden zu einem Preis gehandelt, der ihrem wahren Wert entsprach.

Zwischen 14:40 und 15:00 wurden mehr als 2000 Trades von 300 verschiedenen Wertpapieren zu einem Preis abgeschlossen, der um 60% vom Preis um 14:40 abwich. Nachdem der Handel geschlossen wurde, vereinbarten die Börsen und die FINRA diese Trades abzurechnen, die unter "eindeutig fehlerhaften" Bedingungen geschlossen wurden.

### **Kritische Stimmen zum Bericht**

Dieser Bericht wurde auch sehr kritisch beäugt. Viele kritisierten, dass der Bericht nur von Sekunden und nicht von Millisekunden spricht, obwohl HFT in so einer hohen Geschwindigkeit handelten. Außerdem wurde auch der kurze Zeitraum in dem der Bericht erstellt wurde, also nur Monate später nach dem Crash kritisiert.<sup>14</sup>

Auch in der Arbeit von Menkveld und Yueshen [17] wurden die Ergebnisse, des Berichts noch einmal hinterfragt und mit geeigneten Daten analysiert. Ihre Ergebnisse brachten hervor, dass der Algorithmus des Händlers nicht direkt Schuld an dem Flash Crash war und dass er den Algorithmus auch nicht blind ausgeführt hat, wie im Bericht beschrieben. Es war viel mehr ein Zusammenspiel der unterschiedlichen Trader, die zu dem Flash Crash führten. Darum werden im Folgenden noch betrachtet wie Strategien aussehen können.

---

<sup>14</sup>vgl. Lewis [16]

## Kapitel 3

# Handelsstrategien der High Frequency Trader

Dieses Kapitel beschäftigt sich genauer mit den Handelsstrategien der High Frequency Trader. Begonnen wird mit den Grundlagen der Kontrolltheorie und darauf werden dann die Strategien der High Frequency Trader aufgebaut. Die Grundlage dieses Kapitel bildet das Buch "Algorithmic and High Frequency Trading" von Cartea, Jaimungal und Penalva [4].

### 3.1 Grundlagen der Optimierungsprobleme

Es wird mit den grundlegenden Definitionen begonnen. Im folgenden wird mit dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$  gearbeitet. Wobei

- $\Omega$  bezeichnet die Grundmenge aller Ereignisse
- $\mathcal{F}$  ist die Menge aller messbaren Ereignisse
- $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  ist die Filtration, das heißt eine aufsteigende Schar von  $\sigma$ -Algebren, wobei gilt  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T$

Weiters wird angenommen, dass die üblichen Bedingungen erfüllt sind:

- der Wahrscheinlichkeitsraum ist vollständig, das heißt  $\mathcal{F}_0$  enthält alle  $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ -Nullmengen
- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  ist rechtssteig, das heißt  $\forall t \geq 0 : \mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$

### 3.1.1 Kontrolle von Diffusionsprozessen

Man betrachtet einen Kontroll- oder Steuerungsprozess  $\mathbf{u} = (u_t)_{0 \leq t \leq T}$ ; das können z.B. die Aktien in einem Portfolio sein und einen Zustandsprozess  $\mathbf{X}^{\mathbf{u}} = (\mathbf{X}_t)_{0 \leq t \leq T}$ . Dieser beschreibt eine Ito-Diffusion und ist eine Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung:

$$d\mathbf{X}_t^{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{X}_t^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_t) dt + \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{X}_t^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_t) d\mathbf{W}_t, \quad \mathbf{X}_0^{\mathbf{u}} = \mathbf{x}.$$

Wobei  $(\mathbf{W}_t)_{0 \leq t \in [0, T]}$  ein Vektor unabhängiger Brownscher Bewegungen ist. Man betrachtet das Zielfunktional der Form:

$$H^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbb{E} \left[ G(\mathbf{X}_T^{\mathbf{u}}) + \int_0^T F(s, \mathbf{X}_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s) ds \right] \quad (3.1)$$

Die Funktion  $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n+p} \mapsto \mathbb{R}$  beschreibt die laufenden Kosten bzw. der laufenden Nutzen und die Funktion  $G : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  die Endkosten bzw. den Endnutzen. Die Wertfunktion ist definiert durch

$$H(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}_{0, T}} H^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}).$$

$\mathcal{A}$  ist die Menge der  $\mathcal{F}$ -vorhersehbaren Strategien, sodass (3.1) eine eindeutige, starke Lösung hat. Man sucht also eine optimale Strategie  $\mathbf{u}^*$ , sodass  $H(\mathbf{x}) = H^{\mathbf{u}^*}(\mathbf{x})$

### Dynamische Programmierung und HJB Gleichung für Diffusionen

Die übliche Vorgehensweise ein stochastisches Kontrollproblem zu lösen, ist es, dieses in eine größere Klasse von Problemen einzubetten. Diese sind abhängig von der Zeit und zum Zeitpunkt  $t = 0$  gleich dem ursprünglichen Problem. Man fragt sich also, welche Gleichung die optimale Lösung erfüllen muss, damit das Zielfunktional auch zu einem späteren Zeitpunkt optimal bleibt. Zuerst definiert man:

$$H(t, \mathbf{x}) := \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}_{t, T}} H^{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})$$

$$H^{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) := \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ G(\mathbf{X}_T^{\mathbf{u}}) + \int_t^T F(s, \mathbf{X}_s^{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_s) ds \right]$$

Mit der Notation  $\mathbb{E}_{t, \mathbf{x}}[\cdot]$  ist der bedingte Erwartungswert auf  $\mathbf{X}_t^{\mathbf{u}} = \mathbf{x}$  gemeint. Als nächstes betrachtet man eine beliebige Strategie  $\mathbf{u}$  und nimmt an, der Zustandsprozess bewegt sich vorwärts bis zu einer beliebigen Stoppzeit  $\tau \leq T$ . Dann gilt für das

Zielfunktional:

$$\begin{aligned}
H^u(t, \mathbf{x}) &= \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ G(\mathbf{X}_T^u) + \int_\tau^T F(s, \mathbf{X}_s^u, \mathbf{u}_s) ds + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^u, \mathbf{u}_s) ds \right] \\
&= \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ \mathbb{E}_{\tau, \mathbf{X}_\tau^u} \left[ G(\mathbf{X}_T^u) + \int_\tau^T F(s, \mathbf{X}_s^u, \mathbf{u}_s) ds \right] + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^u, \mathbf{u}_s) ds \right] \\
&= \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H^u(\tau, \mathbf{X}_\tau^u) + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^u, \mathbf{u}_s) ds \right] \\
&\leq \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H(\tau, \mathbf{X}_\tau^u) + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^u, \mathbf{u}_s) ds \right] \\
&\leq \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H(\tau, \mathbf{X}_\tau^u) + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^u, \mathbf{u}_s) ds \right]
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung folgt daraus, dass für eine beliebige zulässige Strategie  $\mathbf{u}$  und ein beliebiges  $\mathbf{x}$  gilt  $H(t, \mathbf{x}) \geq H^u(t, \mathbf{x})$ . Wenn man jetzt die Ungleichung nochmal betrachtet, sieht man, dass die optimale Kontrolle in der Wertfunktion  $H(\tau, \mathbf{X}_\tau^u)$  steckt und die beliebig Kontrolle im Intervall  $[t, \tau]$ . Nimmt man nun das Supremum über die zulässigen Strategien, reduziert sich die linke Seite auch auf die Wertfunktion und man erhält:

$$H(t, \mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H(\tau, \mathbf{X}_\tau^u) + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^u, \mathbf{u}_s) ds \right]$$

Da man aber Gleichheit haben möchten, zeigt man noch, dass diese Ungleichung auch in die andere Richtung gilt. Um das zu zeigen, nimmt man als erstes die  $\varepsilon$ -optimale Kontrolle  $\mathbf{v}^\varepsilon \in \mathcal{A}$ , für die gilt:

$$H(t, \mathbf{x}) \geq H^{\mathbf{v}^\varepsilon}(t, \mathbf{x}) \geq H(t, \mathbf{x}) - \varepsilon \tag{3.2}$$

Man betrachtet noch eine Modifikation der  $\varepsilon$ -optimalen Kontrolle näher bei der man davon ausgeht, dass die Modifikation nach der Stoppzeit  $\tau$   $\varepsilon$ -optimal ist, davor aber nicht optimal sein könnte, also:

$$\tilde{\mathbf{v}}^\varepsilon = \mathbf{u}_t \mathbb{1}_{t \leq \tau} + \mathbf{v}^\varepsilon \mathbb{1}_{t > \tau} \tag{3.3}$$

Man erhält für die Wertfunktion:

$$\begin{aligned}
 H(t, \mathbf{x}) &\geq H^{\tilde{v}^\varepsilon}(t, \mathbf{x}) \\
 &= \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H^{\tilde{v}^\varepsilon}(\tau, \mathbf{X}_\tau^{\tilde{v}^\varepsilon}) + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^{\tilde{v}^\varepsilon}, \tilde{\mathbf{v}}_s^\varepsilon) ds \right] \\
 &\stackrel{(3.3)}{=} \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H^{v^\varepsilon}(\tau, \mathbf{X}_\tau^{v^\varepsilon}) + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^u, u_s) ds \right] \\
 &\stackrel{(3.2)}{\geq} \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H(\tau, \mathbf{X}_\tau^u) + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^u, u_s) ds \right] - \varepsilon
 \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon \searrow 0$  folgt,

$$H(t, \mathbf{x}) \geq \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H(\tau, \mathbf{X}_\tau^u) + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^u, u_s) ds \right].$$

Da diese Ungleichung für jedes  $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$  gilt, gilt es natürlich auch für das Supremum, und somit hat man auch die andere Richtung gezeigt. Man erhält damit das Dynamische Programmierungsprinzip (DPP) für Diffusionen. Die Wertfunktion (3.3) erfüllt die DPP

$$H(t, \mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H(\tau, \mathbf{X}_\tau^u) + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^u, \mathbf{u}_s) ds \right] \quad (3.4)$$

für alle  $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  und für alle Stoppzeiten  $\tau \leq T$ .

Der nächste interessante Schritt ist die Herleitung der Dynamischen Programmierungsgleichung (DPE) oder auch Hamilton-Jacobi-Bellmann (HJB) Gleichung genannt. Das ist die infinitesimale Version der Dynamischen Programmierung. Dazu benötigt man zuerst einige Definitionen und Ideen. Da, wie schon erwähnt, die DPE die infinitesimale Version der DPP ist, nimmt man an, die Stoppzeit  $\tau$  ist entweder die Zeit, die der Prozess  $\mathbf{X}_t^u$  braucht, um eine Schranke  $\epsilon$  zu durchschreiten, oder eines kleinen gewählten Zeitpunkts  $h$ , bedingt darauf welcher dieser Zeitpunkte als erstes Eintritt. Das ganze ist natürlich beschränkt durch  $T$ , das heißt

$$\tau = T \wedge \inf\{s > t : (s - t, |\mathbf{X}_s^u - \mathbf{x}|) \notin [0, h] \times [0, \epsilon]\}$$

Klarerweise gilt, dass es für  $h \searrow 0$  immer unwahrscheinlicher wird, dass der Prozess  $\mathbf{X}$  die Schranke  $+\epsilon, -\epsilon$  um seinen Startpunkt durchbricht.

Als nächstes verwendet man die Ito-Formel, die man folgendermaßen für eine Funktion  $f$  schreiben kann:

$$df(t, \mathbf{X}_t) = \mathcal{L}f(t, \mathbf{X}_t)dt + \mathcal{D}f(t, \mathbf{X}_t)^T \sigma(t, \mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t$$

$\mathcal{L}f$  repräsentiert den infinitesimalen Generator von  $\mathbf{X}_t$  und ist definiert für zweimal differenzierbare Funktionen als

$$\mathcal{L}_t f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[f(X_{t+h}) | X_t = x] - f(x)}{h}$$

Der Generator ist die Verallgemeinerung der Ableitung einer Funktion, damit sie auch für Stochastische Prozesse anwendbar ist. In diesem Fall sieht der infinitesimale Generator für die Ito-Formel so aus:

$$\mathcal{L}_t f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})^T \mathcal{D}f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma(t, \mathbf{x}) \mathcal{D}^2 f(\mathbf{x})),$$

wobei mit  $\mathcal{D}f(t, \mathbf{x})$  der Gradient gemeint ist und mit  $\mathcal{D}^2$  die Hesse-Matrix. Wenn man diese Ergebnisse nun auf die Funktion  $H(\tau, \mathbf{X}_\tau^u)$  anwendet, erhält man:

$$H(\tau, \mathbf{X}_\tau^u) = H(t, \mathbf{x}) + \int_t^\tau (\partial_t + \mathcal{L}_s^u) H(s, \mathbf{X}_s^u) ds + \int_t^\tau \mathcal{D}_s H(s, \mathbf{X}_s^u)^T \boldsymbol{\sigma}_s^u d\mathbf{W}_s,$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma}_t^u := \sigma(t, \mathbf{X}_t^u, \mathbf{u}_t)$  einfach eine kürzere Notation ist.

Setzt man diese Ergebnisse nun in die zweite Ungleichung von vorhin ein und betrachtet man ein über dem Intervall  $[t, \tau]$  konstantes  $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$ , dann folgt:

$$\begin{aligned} H(t, \mathbf{x}) &\geq \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H(\tau, \mathbf{X}_\tau^u) + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^u, \mathbf{u}_s) ds \right] \\ &\geq \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H(\tau, \mathbf{X}_\tau^v) + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^v, \mathbf{v}) ds \right] \\ &= \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H(t, \mathbf{x}) + \int_t^\tau (\partial_t + \mathcal{L}_s^v) H(s, \mathbf{X}_s^v) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_t^\tau \mathcal{D}_s H(s, \mathbf{X}_s^v)^T \boldsymbol{\sigma}_s^v d\mathbf{W}_s + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^v, \mathbf{v}) ds \right] \end{aligned}$$

Da  $\mathcal{D}H(s, \mathbf{X}_s^v)^T \boldsymbol{\sigma}_s^v$  beschränkt ist, ist der Erwartungswert des stochastischen Integrals gleich null. Es folgt also

$$H(t, \mathbf{x}) \geq \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} [H(t, \mathbf{x}) + \int_t^\tau (\partial_t + \mathcal{L}_s^v) H(s, \mathbf{X}_s^v) + F(s, \mathbf{X}_s^v, \mathbf{v}) ds]$$

Kürzt man nun  $H(t, \mathbf{x})$  auf beiden Seiten, dividiert durch  $h$  und lässt man  $h \searrow 0$  gehen, erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ \frac{1}{h} \int_t^\tau \{(\partial_t + \mathcal{L}_s^v) H(s, \mathbf{X}_s^v) + F(s, \mathbf{X}_s^v, \mathbf{v})\} ds \right] \\ &= (\partial_t + \mathcal{L}_t^v) H(t, \mathbf{x}) + F(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Da die Ungleichung für jedes beliebige  $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$  gilt, gilt es auch für  $\mathbf{u}$ . Interessant ist jetzt natürlich auch noch, ob die Gleichheit existiert. Dafür nimmt man ein optimales  $\mathbf{u}^*$ , und aus (3.4) folgt

$$H(t, \mathbf{x}) = \mathbb{E}_{t, \mathbf{x}} \left[ H(\tau, \mathbf{X}_\tau^{\mathbf{u}^*}) + \int_t^\tau F(s, \mathbf{X}_s^{\mathbf{u}^*}, \mathbf{u}^*) ds \right]$$

Geht man nun gleich vor wie oben, kommt man zur Hamilton Jacobi Bellman Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t H(t, \mathbf{x}) + \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}} (\mathcal{L}_t^{\mathbf{u}} H(t, \mathbf{x}) + F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) &= 0 \\ H(T, \mathbf{x}) &= G(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Die Endbedingung folgt aus der Definition der Wertfunktion, die laufenden Kosten bzw. die laufenden Erträge fallen weg und zum Zeitpunkt  $T$  ist  $G(\mathbf{X}_T^{\mathbf{u}})$  bzgl.  $\mathcal{F}_T$  messbar.

### Verifikationstheorem

Jetzt bleibt noch eine offene Frage. Wenn eine Lösung der HJB-Gleichung existiert, ist diese dann auch wirklich eine Lösung des ursprünglichen Problems. Um das zu zeigen, verwendet man das folgende Theorem.

**Theorem 3.1.** Sei  $\psi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  und erfüllt für alle  $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ ,

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(t, \mathbf{x}) + (\mathcal{L}_t^{\mathbf{u}} \psi(t, \mathbf{x}) + F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) &\leq 0, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \\ G(\mathbf{x}) - \psi(T, \mathbf{x}) &\leq 0. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\psi(t, \mathbf{x}) \geq H^{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$$

für alle Markov Kontrollen  $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ . Weiters, wenn für jedes  $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  ein messbares  $u^*(t, \mathbf{x})$  existiert, so dass

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \psi(t, \mathbf{x}) + (\mathcal{L}_t^{\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x})} \psi(t, \mathbf{x}) + F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}))) \\ &= \partial_t \psi(t, \mathbf{x}) + \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}} (\mathcal{L}_t^{\mathbf{u}} \psi(t, \mathbf{x}) + F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

und  $\psi(T, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$ , und die stochastische Differentialgleichung

$$d\mathbf{X}_s^* = \mu(t, \mathbf{X}_s^*, u^*(t, \mathbf{X}_s^*)) dt + \sigma(t, \mathbf{X}_s^*, u^*(t, \mathbf{X}_s^*)) d\mathbf{W}_s, \quad \mathbf{X}_t^* = \mathbf{x};$$

eine eindeutige Lösung hat und  $\{\mathbf{u}^*(x, \mathbf{X}_s^*)\}_{s \in [t, T]} \in \mathcal{A}$ , dann gilt

$$H(t, \mathbf{x}) = \psi(t, \mathbf{x}), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$$

und  $u^*$  ist eine optimale Markov Kontrolle

Die Aussage des Theorems ist die folgende: Kann man eine Lösung der Stochastischen Differentialgleichung finden und kann man zeigen, dass diese einmal nach  $t$  differenzierbar ist und zweimal bzgl. der Zustandsvariable, und die Kontrolle, die sich ergibt, zulässig ist, dann ist die Lösung wirklich eine Wertfunktion und die Markov Kontrolle ist optimal. Unter einer Markov Kontrolle versteht man, dass der Wert, den man zur Zeit  $t$  wählt, nur abhängig vom derzeitigen Zustand ist. Mit einem  $u$  dieser Art wird der dazugehörige Prozess  $X_t$  eine Ito-Diffusion. Unter weiteren technischen Annahmen kann man zeigen, dass die optimale Kontrolle Markov ist, auch wenn man  $u$  aus den generell  $\mathcal{F}$ -vorhersehbaren Kontrollen nimmt.<sup>1</sup>

### Kontrolle von Zählprozessen

Bisher wurden nur Diffusionsprozesse zum Modellieren der Unsicherheiten betrachtet. Gerade im HFT kann es aber auch interessant sein Sprungprozesse zu verwenden. Daher werden im folgenden ein doppelt stochastischer Poisson Prozess, oder auch Cox Prozess genannt, betrachtet. Das ist ein Sprungprozess mit stochastischer Intensität. Ein Ansatz, die Intensität stochastisch zu machen, wäre z.B. die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zur Zeit  $t$  zu berechnen, bedingt auf die Information zur Zeit  $s$ , also  $\mathbb{P}[N_t - N_s | \mathcal{F}_s]$ , wobei  $\mathcal{F}$  die natürliche Filtration generiert durch  $(N, \lambda)$  ist.

Der Cox Prozess hat die folgenden Eigenschaften:

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = n | \mathcal{F}_s \vee \sigma(\{\lambda_u\}_{u \in [s,t]})) = \exp\left\{-\int_s^t \lambda_u du\right\} \frac{(\int_s^t \lambda_u du)^n}{n!}$$

so dass

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = 0 | \mathcal{F}_s \vee \sigma(\{\lambda_u\}_{u \in [s,t]})) = \mathbb{E} \left[ \exp\left\{-\int_s^t \lambda_u du\right\} \frac{(\int_s^t \lambda_u du)^n}{n!} \middle| \mathcal{F}_s \right],$$

wobei  $\sigma(\{\lambda_u\}_{u \in [s,t]})$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra durch den Intensitätsprozess über dem Intervall  $[s, t]$  erzeugt ist. Mit  $\mathcal{F}_s \vee \sigma(\{\lambda_u\}_{u \in [s,t]})$  ist die Information von  $(N, \lambda)$  bis  $s$  gemeinsam mit der gesamten Information von  $\lambda$  bis zu  $t$  gemeint, aber ohne die Information des Prozesses  $N$  auf dem Intervall  $(s, t]$ .

Interessant ist natürlich auch, wie ein Intensitätsprozess aussehen kann. Er kann entweder ein unabhängiger Diffusionsprozess oder ein unabhängiger Sprungprozess oder eine

---

<sup>1</sup>vgl. Oksendal [19]

Kombination aus beiden sein. Beispiele dafür sind:

$$\begin{array}{ll}
 d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t) dt + \eta\sqrt{\lambda_t} dW_t, & \text{Feller Prozess} \\
 d\lambda_t = -\kappa\lambda_t dt + \gamma dJ_t & \text{Ornstein-Uhlenbeck Prozess} \\
 d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t) dt + \eta\sqrt{\lambda_t} dW_t + \gamma dJ_t & \text{Sprung-Diffusion} \\
 \lambda_t = \int_0^t g(t-s) dN_s & \text{Hawkes-Prozess}
 \end{array}$$

Eine weitere wichtige Proposition, die für den weiteren Verlauf noch wichtig ist die Folgende: Der Kompensator des doppelten stochastischen Poisson Prozesses  $\hat{N} = \{\hat{N}_t\}_{t \in [0, T]}$ , mit  $\hat{N}_t = N_t - \int_0^t \lambda_s ds$  ist ein Martingal.

**Theorem 3.2. Itô Formel für doppelt stochastische Prozesse**

Sei  $N$  ein doppelt stochastischer Prozess mit Intensität  $\lambda$  welche die folgende SDE erfüllt:

$$d\lambda_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t + \eta_{t-} d\hat{J}_t,$$

wobei  $W$  eine Brownsche-Bewegung und  $J$  einen zusammengesetzten Poisson Prozess (mit Intensität  $\lambda_J$ , unabhängig, identisch verteilte Sprünge  $\varepsilon \sim F$  und dem Zählprozess  $M$ ) alle zusammen unabhängig und unabhängig von  $N$  sind.  $\mu, \sigma$  und  $\eta$  sind adaptiert zur natürlichen Filtration, generiert durch  $N, W$  und  $J$ . Weiters sei  $Z = \{Z_t\}_{t \in [0, T]}$ , mit  $Z_t = \ell(t, N_t, \lambda_t)$  für eine Funktion  $\ell$ , einmal differenzierbar in  $t$  und zweimal in  $\lambda$

$$\begin{aligned}
 dZ_t &= (\partial_t + (\mu_t - \lambda_G \mathbb{E}[\varepsilon])\partial_\lambda + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \partial_{\lambda\lambda} - \lambda_t \partial_n) \ell(t, N_t, \lambda_t) dt \\
 &\quad + [\ell(t, N_{t-}, \lambda_{t-} + \varepsilon_{M_t}) - \ell(t, N_{t-}, \lambda_{t-})] dM_t \\
 &\quad + [\ell(t, N_{t-} + 1, \lambda_{t-}) - \ell(t, N_{t-}, \lambda_{t-})] dN_t \\
 &= \left\{ (\partial_t + \mu_t \partial_\lambda + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \partial_{\lambda\lambda}) \ell(t, N_t, \lambda_t) \right. \\
 &\quad + \lambda_G ([\ell(t, N_{t-}, \lambda_{t-} + \varepsilon_{M_t}) - \ell(t, N_{t-}, \lambda_{t-})] - \mathbb{E}[\varepsilon] \partial_\lambda \ell(t, N_{t-}, \lambda_{t-})) \\
 &\quad \left. + \lambda ([\ell(t, N_{t-} + 1, \lambda_{t-}) - \ell(t, N_{t-}, \lambda_{t-})] - \partial_n \ell(t, N_{t-}, \lambda_{t-})) \right\} dt \\
 &\quad + [\ell(t, N_{t-}, \lambda_{t-} + \varepsilon_{M_t}) - \ell(t, N_{t-}, \lambda_{t-})] d\hat{M}_t \\
 &\quad + [\ell(t, N_{t-} + 1, \lambda_{t-}) - \ell(t, N_{t-}, \lambda_{t-})] d\hat{N}_t.
 \end{aligned}$$

Daraus erkennt man, dass der Generator  $\mathcal{L}_t^{N,\lambda}$  des zusammengesetzten Prozesses  $(N, \lambda)$ , auf Funktionen folgendermaßen aussieht:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{N,\lambda} \ell(n, \lambda) &= \mu_t \partial_\lambda \ell(n, \lambda) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \partial_{\lambda\lambda} \ell(n, \lambda) \\ &\quad + \lambda_G (\mathbb{E}[\ell(n, \lambda + \varepsilon) - \ell(n, \lambda)] - \mathbb{E}[\varepsilon] \partial_\lambda \ell(n, \lambda)) \\ &\quad + \lambda (\mathbb{E}[\ell(n + 1, \lambda) - \ell(n, \lambda)] - \partial_n \ell(n, \lambda)). \end{aligned}$$

Kommt man wieder zurück zu den Kontrollprozessen und betrachtet man den Fall, in dem ein Händler die Häufigkeit der Sprünge eines Zählprozesses kontrollieren möchte, um sein Ergebnis zu maximieren. In diesem Fall sieht das Kontrollproblem folgendermaßen aus:

$$H(n) = \sup_{u \in \mathcal{A}_{0,T}} \mathbb{E} \left[ G(N_T^u) + \int_0^T F(s, N_s^u, u_s) ds \right],$$

wobei  $u = (u_t)_{t \in [0, T]}$  der Kontrollprozess ist.  $(N_t^u)_{t \in [0, T]}$  beschreibt den kontrollierten doppelt stochastischen Poisson Prozess startend bei  $N_{0-} = n$  mit Intensität  $\lambda_t^u = \lambda(t, N_{t-}^u, u_t)$  so dass  $(\hat{N}_t^u)_{t \in [0, T]}$ , definiert als  $\hat{N}_t^u = N_t - \int_0^t \lambda_s^u du$ , ein Martingal ist.  $\mathcal{A}$  ist eine Menge an  $\mathcal{F}$ -vorhersehbaren Prozessen, so dass  $\hat{N}$  ein wahres Martingal ist.  $G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  beschreibt, wie bei den Diffusionen, die Endkosten bzw. der Endnutzen,  $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  beschreibt die laufenden Kosten bzw. der laufende Nutzen. Wie vorhin sind auch hier beide Funktionen gleichmäßig beschränkt. Die Vorgehensweise, um zur DPP zu kommen, ist gleich wie bei den Diffusionen. Wir betten das ursprüngliche Problem in eine Klasse größerer Probleme ein und für Sprünge gilt

$$\begin{aligned} H(t, n) &:= \sup_{u \in \mathcal{A}_{t,T}} H^u(t, n), \quad \text{und} \\ H^u(t, n) &:= \mathbb{E}_{t,n} \left[ G(N_T^u) + \int_t^T F(s, N_s^u, u_s) ds \right] \end{aligned}$$

wobei mit der Notation  $\mathbb{E}_{t,n}[\cdot]$  der bedingte Erwartungswert auf  $N_t^- = n$  gemeint ist. Man muss noch zeigen, dass die Ungleichungen in beide Richtungen gelten, um schließlich zum Dynamischen Programmierungsprinzip für Zählprozesse zu kommen. Die Wertfunktion erfüllt also das DPP

$$H(t, n) = \sup_{u \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,n} \left[ H(\tau, N_\tau^u) + \int_t^\tau F(s, N_s^u, u_s) ds \right]$$

für alle  $(t, n) \in [0, T] \times \mathbb{Z}_+$  und alle Stoppzeiten  $\tau \leq T$ . Um zu der DPE zu kommen, geht man ebenfalls gleich vor wie bei den Diffusionsprozessen. Man verwendet den infinitesimalen Generator von  $N_t^u$ , der angewendet auf die Funktion  $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+ \mapsto \mathbb{R}$

so aussieht:

$$\mathcal{L}_t^u h(t, n) = \lambda(t, n, u) [h(t, n + 1) - h(t, n)]$$

Um zur Gleichheit zu kommen, zeigt man wieder zuerst die Abschätzung und verwendet dann die optimale Kontrolle  $u^*$  und das DPP, und man kommt wieder zur DPE oder auch Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t H(t, n) + \sup_{u \in \mathcal{A}_t} (\mathcal{L}_t^u H(t, n) + F(t, n, u)) &= 0 \\ H(T, n) &= G(n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Die optimale Kontrolle kann oft in der Feedback Kontrolle gefunden werden, in dem man die Wertfunktion als gegeben annimmt. Setzt man die Feedback Kontrolle in (3.5) ein, kommt man zu einer nicht linearen Partiellen Differentialgleichung. Im Poisson Fall hat das Supremum eine einfache Form

$$\sup_{u \in \mathcal{A}_t} (\mathcal{L}_t^u H(t, n) + F(t, n, u)) = \sup_{u \in \mathcal{A}_t} \{ \lambda(s, n, u) [H(t, n + 1) - H(t, n)] + F(t, n, u) \}$$

Betrachtet man das Ganze unter der Annahme  $F = 0$ , dann ist die optimale Kontrolle  $\lambda(s, n, u)$  so groß wie möglich zu machen, wenn  $H(t, n + 1) - H(t, n) > 0$  und so klein wie möglich zu machen, wenn  $H(t, n + 1) - H(t, n) < 0$ . Kontrollen dieser Art nennt man auch Bang Bang Kontrollen, weil die Menge, die kontrolliert wird, die Extrempunkte erreicht.

Interessanter ist natürlich der Fall, in dem  $F \neq 0$ . Noch interessanter ist es natürlich, einen zweiten stochastischen Prozess, hinter dem ein Zählprozess steht, der die Endkosten bzw. den Endnutzen und die laufenden Kosten bzw. den laufenden Nutzen beeinflusst, zu betrachten. Man hat dann einen Prozess  $(X_t^u)_{t \in [0, T]}$ , der die Stochastische Differentialgleichung

$$dX_t^u = \mu(t, X_t^u, N_t^u, u_t) dt + \sigma(t, X_{t-}^u, N_{t-}^u, u_t) dN_t^u$$

erfüllt. Dabei ist der Zählprozess  $N^u$  die Herkunft der Sprünge in  $X^u$ . Der Kontrollprozess  $u$  steuert die Höhe der Sprünge und den Drift von  $X$  zusätzlich zur Ankunftsrate der Sprünge. Das Zielfunktional und die Wertfunktion sind dann abhängig von  $N$  und  $X$

$$\begin{aligned} H(t, x, n) &:= \sup_{u \in \mathcal{A}} H^u(t, x, n) \\ H^u(t, x, n) &:= \mathbb{E}_{t, x, n} \left[ G(X_T^u, N_T^u) + \int_t^T F(s, X_s^u, N_s^u, u_s) ds \right], \end{aligned}$$

wobei mit der Notation  $\mathbb{E}_{t, x, n}[\cdot]$  der bedingte Erwartungswert auf  $N_{t-} = n$  und  $X_{t-} = x$

gemeint ist. Verwendet man wieder die selben Argumente wie oben zur Herleitung der DPP, kann man dieser hier schreiben als:

$$H(t, x, n) := \sup_{u \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x,n} \left[ H(\tau, X_\tau^u, N_\tau^u) + \int_t^\tau F(s, X_s^u, N_s^u, u_s) ds \right]$$

Die Vorgehensweise zur Herleitung der DPE ist die selbe wie in den letzten Abschnitten, und daher ergibt sich für die DPE

$$\begin{aligned} \partial_t H(t, x, n) + \sup_{u \in \mathcal{A}} (\mathcal{L}_t^u H(t, x, n) + F(t, x, n)) &= 0 \\ H(T, x, n) &= G(x, n) \end{aligned}$$

Der infinitesimale Generator ist hier definiert als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^u H(t, x, n) &= \mu(t, x, n, u) \partial_x H(t, x, n) \\ &\quad + \lambda(t, x, n, u) [H(t, x + \sigma(t, x, n, u), n + 1) - H(t, x, n)] \end{aligned}$$

Betrachtet man den infinitesimalen Generator genauer, sieht man es gibt eine partielle Ableitung nach der Zustandsvariable und die Kontrolle kommt im Intensitätsfaktor und im Differenzenoperator vor.

Nachdem jetzt die Grundlagen der Kontrolltheorie behandelt wurden, werden jetzt ein paar Modelle und dazugehörige Strategien der HFT und die Auswirkungen, die diese auf die anderen Marktteilnehmer haben betrachtet. Weiters werden auch die Ideen hinter diesen Modellen und Strategien näher analysiert.

## 3.2 Handelstrategien von Algorithmic und High Frequency Tradern

In diesem Abschnitt werden verschiedene Strategien von Händlern betrachtet. Begonnen wird mit einfachen, die nur Markt Orders verwenden, und es folgen, welche die sowohl Markt Orders als auch Limit Orders verwenden.

### 3.2.1 Optimales Kaufen und Verkaufen mit Markt Orders

Das erste Problem, das näher analysiert wird, ist der Verkauf oder Kauf einer großen Menge an Wertpapieren. Unter groß versteht man in diesem Zusammenhang, dass die Order zu groß ist, um auf einmal ausgeführt zu werden. Aufträge dieser Größe kommen meistens von Pensionskassen, Hedge Fonds oder Investmentfonds, diese geben die Order

an einen Broker weiter, der die große Order in kleinere aufteilt und die gewünschte Menge am Markt verkauft. Ein Problem einer Order dieser Größe ist, dass sie, selbst wenn sie in kleinere Häppchen aufgeteilt werden, durch das Orderbuch wandern, wenn sie gleichzeitig ausgeführt werden, und dann die Aufmerksamkeit anderer Marktteilnehmer erregen, was zu einer negativen Preisentwicklung führt. Wartet man mit dem Verkauf aber zu lange, könnte sich der Preis in eine nicht optimale Richtung entwickeln. Außerdem kann auch eine gewisse Zeit vorgegeben sein, zu der die Order ausgeführt sein muss. Der Händler steht somit zusätzlich unter einem gewissen Zeitdruck. Er benötigt also ein Modell, das ihm dabei hilft, die Zeitpunkte zu finden, an denen er optimalerweise ausübt. Man möchte dabei natürlich die Kosten des Verkaufs oder Kaufs so gering wie möglich halten und auch immer einen Blick auf das Preisrisiko haben. Die Abwicklungskosten sind die Differenz zwischen dem Vergleichspreis und dem Preis, zu dem abgewickelt wird, man möchte klarerweise positive Ausübungskosten vermeiden. Als Vergleichspreis wird üblicherweise der Midpreis, des Zeitpunkts, zu dem die Order an den Markt geschickt wird, genommen.

### Das Modell

Für das Modell definiert man sich

- $\nu = (\nu_t)_{t \in [0, T]}$  ist die Handelsrate, also die Geschwindigkeit mit der ein Händler kauft bzw. verkauft
- $Q^\nu = (Q_t^\nu)_{t \in [0, T]}$  ist der Bestand des Händlers, der natürlich von der Handelsrate abhängt,
- $S^\nu = (S_t^\nu)_{t \in [0, T]}$  ist der Midpreisprozess, der auch von der Handelsrate abhängt,
- $X^\nu = (X_t^\nu)_{t \in [0, T]}$  ist der Vermögensprozess des Händlers, der natürlich auch wieder davon abhängt wie schnell gehandelt wird.

Die Prozesse sind gegeben durch

- $dQ_t^\nu = \pm \nu_t dt, \quad Q_0^\nu = q$
- $dS_t^\nu = \pm g(\nu_t) dt + \sigma dW_t, \quad S_0^\nu = S$
- $\hat{S}_t^\nu = S_t^\nu \pm (\frac{1}{2}\Delta + f(\nu_t)), \quad \hat{S}_0 = \hat{S}$

wobei,

- $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$  eine Standard Brownsche Bewegung
- $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ , die permanente Auswirkung des Trades auf den Midpreis,

- $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ , die temporäre Auswirkung des Trades, auf den Preis, zu dem man ausüben kann,
- $\Delta \geq 0$ , der Bid-Ask Spread, der in diesem Modell als Konstante angenommen wird

In diesem Modell nimmt man an, dass der Midpreis gleich dem fundamentalen Preis des Wertpapiers ist. Der fundamentale Preis einer Aktie kommt durch die Bewertung der Firma, die hinter der Aktie steht, zustande. Neue Informationen am Markt, welche die Firma betreffen, werden teilweise durch die Inkremente der Brownschen Bewegung miteinbezogen.

Wichtig ist es auch, wie sich die Handelsaktivitäten des Traders auf den Midpreis auswirken. In diesem Modell wird das durch die Funktionen  $f(\nu_t)$  und  $g(\nu_t)$  erfasst. Ein weiterer wichtiger Punkt, der schon vorher behandelt wurde, ist, dass kein Markt unendlich liquide ist, das heißt die Anzahl der Wertpapiere zum angegebenen Bid/Ask Preis  $S_t^\nu \pm \frac{1}{2}\Delta$  ist limitiert. In diesem Modell möchte man aber eine große Order an den Markt senden, das heißt man wird zu einem schlechteren Preis kaufen bzw. verkaufen, als zum derzeitigen Bid oder Ask. Das wird dadurch erfasst, dass eine Order der Größe  $\nu dt$  einen Ausübungspreis von  $S_t^\nu \pm (\frac{1}{2}\Delta + f(\nu))$  erhalten wird mit  $f(\nu) \geq 0$ . Die Order wirkt sich dabei aber nur auf den Abwicklungspreis und nicht auf den Midpreis aus.

Wie oben schon erwähnt hat die Größe  $g(\nu_t)$  Auswirkungen auf den Midpreis. Betrachtet man dazu ein Beispiel, kann man das Ganze so interpretieren: ist  $g(\nu_t) > 0$ , also handelt der Trader nach aktuellen Informationen über den Wert der Firma, werden sich auch andere Marktteilnehmer nach ihm richten und ihr Angebot am Markt daran anpassen, und ein Trade der Höhe  $\nu_t dt > 0$  wird den Midpreis erhöhen.

Ein Prozess, der bis jetzt noch nicht genauer betrachtet wurde, ist der Vermögensprozess des Händlers  $X_T^\nu$ , dieser erfüllt die SDE

$$dX_t^\nu = \hat{S}_t^\nu \nu_t dt, \quad X_0^\nu = x$$

Natürlich ist auch noch interessant, wie der zu erwartende Ertrag aussieht. Nimmt man an, der Händler muss  $Q_0 = \mathfrak{N}$  Stück Aktien im Zeitintervall  $[0, T]$  verkaufen. Man spaltet das Intervall in kleine gleichgroße Zeitintervalle auf  $0 \leq t_0 < t_1 \dots < t_N = T$ , wobei  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$  für  $n = 1, 2, \dots, N$ . Außerdem nimmt man an, dass der Händler  $Q_0 - Q_{t_1}$  Aktien zum Preis  $\hat{S}_0$  im Intervall  $[0, t_1)$  verkauft. Im Intervall  $[t_1, t_2)$  verkauft er  $Q_{t_1} - Q_{t_2}$  zum Preis  $\hat{S}_1$  usw.. Dann kommt man zum erwartenden Ertrag von

$$R_{\Delta t}^\nu = \mathbb{E}[(Q_0 - Q_{t_1})\hat{S}_0 + (Q_{t_1} - Q_{t_2})\hat{S}_{t_1} + \dots + (Q_{t_{N-1}} - Q_T)\hat{S}_{t_{N-1}}]$$

Außerdem weiß man, dass  $dQ_t^\nu = \pm \nu_t dt$  gilt, wenn man also  $\Delta_t \mapsto 0$  gehen lässt, erhält man den zu erwartenden Ertrag

$$R^\nu = \mathbb{E}[X_T^\nu] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T \hat{S}_t \nu_t dt \right]$$

Als nächstes wird eine Strategie betrachtet, bei der nur MOs verwendet werden, um eine große Menge an Aktien zu verkaufen.

### Verkauf ohne Nachteil mit temporärer Auswirkung

In diesem vereinfachten Problem nimmt man an, dass der Händler  $\mathfrak{N}$  Aktien zwischen  $t = 0$  und  $T$  verkaufen möchte und dafür nur Market Orders verwendet. Außerdem wird angenommen, dass seine Verkäufe keine Auswirkungen auf den Midpreis haben, also  $g(\nu_t) = 0$ , aber sich sehr wohl auf den Verkaufspreis auswirken. Der temporäre Einfluss bewegt sich dabei linear mit der Handelsgeschwindigkeit, also  $f(\nu_t) = u\nu_t$  mit  $u > 0$ . Eine weitere Annahme in diesem Problem ist, dass der Spread zwischen Bid und Ask gleich null ist, also  $\Delta = 0$ , und dass alle  $\mathfrak{N}$  Aktien bis zum Zeitpunkt  $T$  verkauft sein müssen. Der Händler möchte also die optimale Handelsrate bestimmen, bei der er den größtmöglichen Ertrag erzielt und trotzdem bis zum Ende alle Aktien verkauft. Sein Ziel ist es also die Strategie  $\nu$  zu finden, bei der die Ausübungskosten am kleinsten sind, oder bei der der zu erwartende Ertrag am größten ist.

Die Wertfunktion des Händlers lässt sich daher wie folgt schreiben:

$$H(t, S, q) = \sup_{\nu \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t, S, q} \left[ \int_t^T (S_u - k\nu_u) \nu_u du \right]$$

wobei mit der Notation  $\mathbb{E}_{t, S, q}[\cdot]$  der bedingte Erwartungswert auf  $S_t = s$  und  $Q_t = q$  gemeint ist. Mit  $\mathcal{A}$  wird die Menge der zulässigen Strategien bezeichnet, diese sind  $\mathcal{F}$ -vorhersehbar, nicht negativ und beschränkt, das schließt den Rückkauf aus und macht die Abwicklungsrate endlich.

Um das Kontrollproblem zu lösen verende man wieder das dynamische Programmierungsprinzip und kommen zur folgenden HJB-Gleichung:

$$\partial_t H + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_{SS} H + \sup_{\nu} \{ (S - k\nu) \nu - \nu \partial_q H \} = 0$$

Der Händler darf zum Zeitpunkt  $T$  keine Aktien mehr haben, in die Wertfunktion fließt das als "Strafe" ein, dh.:

$$H(T, S, q) \xrightarrow{t \rightarrow T} -\infty \quad \text{für } q > 0$$

und

$$H(T, S, 0) \xrightarrow{t \rightarrow T} 0$$

Wendet man die Bedingung erster Ordnung auf die Gleichung an, erhält man, dass ein Supremum erreicht wird mit der folgenden optimalen Strategie

$$\nu^* = \frac{1}{2k}(S - \partial_q H) \quad (3.6)$$

Substituiert man dieses Ergebnis in die HJB Gleichung, erhält man

$$\partial_t H + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{SS} H + \frac{1}{4k}(S - \partial_q H)^2 = 0$$

Damit ein Ansatz für die obige Gleichung gefunden werden kann, betrachtet man zuerst die Randbedingungen, um zu sehen, welche Variablen für die Wertfunktion wichtig sind. Wenn der Händler nicht alle Wertpapiere bis zum Ende verkauft, wird die Wertfunktion negativ und unendlich groß. Die Wertfunktion kann man also schreiben als den Buchwert des derzeitigen Bestands und den Überschuss, den man erhält, durch den optimalen Verkauf der verbleibenden Aktien, also

$$H(t, S, q) = qS + h(t, q) \quad (3.7)$$

Die Funktion  $h(t, q)$  muss noch berechnet werden. Dieses Problem ist so aufgesetzt, dass der beste Wert, den der Händler erreichen kann, der Midpreis ist. Daher muss  $h(t, q)$  negativ sein, und der Händler versucht natürlich diesen Korrektur so klein wie möglich zu halten. Setzt man nun diesen Ansatz in die HJB Gleichung ein, kommt man zur folgenden Gleichung für  $h(t, q)$ :

$$\partial_t h + \frac{1}{4k}(\partial_q h)^2 = 0$$

Betrachtet man nun diese partielle Differentialgleichung, erreicht man durch verwenden des Ansatzes  $h(t, q) = q^2 h_2(t)$  eine Trennung der Variablen. Wobei man mit  $h_2(t)$  den Koeffizienten der zu  $q^2$  gehört meint. Das heißt, man erhält eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\partial_t h_2 + \frac{1}{k} h_2^2 = 0.$$

Zuerst formt man die Gleichung um,

$$\begin{aligned} \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{1}{k} h_2^2 \\ \frac{dh_2}{h_2^2} &= -\frac{1}{k} dt, \end{aligned}$$

und integriert dann von  $t$  bis  $T$

$$\begin{aligned} \int_t^T \frac{dh_2(s)}{h_2^2(s)} &= - \int_t^T \frac{1}{k} ds \\ -h_2^{-1}(T) + h_2^{-1}(t) &= -\frac{1}{k}(T-t) \\ h_2(t) &= \left( \frac{1}{h_2(T)} - \frac{1}{k}(T-t) \right)^{-1} \end{aligned}$$

und erhält einen Ausdruck für  $h_2(t)$ . Es soll sichergestellt werden, dass der Händler bis zum Zeitpunkt  $T$  all seine Anteile verkauft hat und mit diesem Ausdruck wird das auch erreicht, denn für  $t \rightarrow T$  geht die Funktion gegen  $-\infty$ . Eine andere Möglichkeit, um diese Bedingung zu erreichen, ist es, den optimalen Bestandspfad zu betrachten und zu verlangen, dass dieser am Ende null ist. Dazu verwendet man den Ansatz (3.7) und den gleichen Ansatz wie vorher für die partielle Differentialgleichung und (3.6) reduziert sich auf

$$\nu_t^* = -\frac{1}{k} h_2(t) Q_t^{\nu^*}$$

Ergebnis ist wieder eine gewöhnliche Differentialgleichung, da gilt  $dQ_t^{\nu^*} = -\nu_t^* dt$ . Durch Integrieren zwischen 0 und  $t$  erhält man den Pfad des Bestands entlang der optimalen Strategie:

$$Q_t^{\nu^*} = \frac{(T-t) - \frac{k}{h_2(T)}}{T - \frac{k}{h_2(T)}} \mathfrak{N}$$

Auch hier benötigt man wieder, dass der Korrekturterm für  $t \rightarrow T$  gegen  $-\infty$  geht, das heißt  $h_2(t)$  reduziert sich folgendermaßen

$$h_2(t) = -k(T-t)^{-1}$$

und der optimale Bestand, den man halten sollte, ist

$$Q_t^{\nu^*} = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \mathfrak{N}$$

und die optimale Handelsgeschwindigkeit ist

$$\nu_t^* = \frac{\mathfrak{N}}{T}.$$

Das Resultat, dass man erhält, ist sehr einfach. Die optimale Strategie ist es, die Aktien in einer konstanten Rate zu verkaufen.

Dieser Algorithmus wird als "Time Weighted Average Price" oder kurz TWAP be-

zeichnet. Vor der Ausführung steht der Zeithorizont und die Größe der Orders fest. Möchte man in einer Stunde 6000 Aktien verkaufen, dann werden im 10-Minuten Takt 1000 Aktien an den Markt gesendet.<sup>2</sup>

### Optimaler Kauf mit temporären Auswirkungen und einem Preisnachteil am Ende

In diesem Abschnitt interessiert man sich für den Fall, in dem ein Händler  $\mathfrak{N}$  Aktien bis zum Zeitpunkt  $T$  kaufen möchte, und er am Anfang keinen Bestand hält, aber in dieser Betrachtung müssen nicht notwendigerweise alle Aktien bis zu  $T$  gekauft sein, d.h. auch  $Q_t^\nu < \mathfrak{N}$  ist möglich. Hat er zum Endzeitpunkt  $T$  noch nicht alle Aktien gekauft, muss er am Schluss noch eine MO ausführen und dafür einen Nachteil in Kauf nehmen, der durch den Parameter  $\alpha > 0$  beschrieben wird. Wie schon beim optimalen Verkauf wird auch hier wieder eine abgegebene Order durch den Markt wandern, d.h. der Ausübungspreis wird beschrieben durch  $f(\nu) = k\nu$ ,  $k > 0$ . Für eine leichtere Notation führt man den stochastischen Prozess  $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$  ein, der die noch zu kaufenden Aktien zur Zeit  $t$  kennzeichnet, also

$$Y_t^\nu = \mathfrak{N} - Q_t^\nu \quad \text{so dass} \quad dY_t^\nu = -\nu_t dt$$

und die Wertfunktion ist in diesem Problem definiert durch

$$H(t, S, y) = \inf_{\nu \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{t, S, y} \left[ \int_t^T \hat{S}_u^\nu \nu_u du + Y_T^\nu S_T + \alpha (Y_T^\nu)^2 \right]$$

Die Wertfunktion setzt sich aus drei verschiedenen Termen zusammen. Der erste ist schon bekannt und beschreibt die erwartenden Kosten vom laufenden Handel. Der zweite Term steht für die Aktien, die man am Ende zum Midpreis kauft, und der letzte Term ist der Strafterm dafür, dass nicht alle Aktien bis zum Zeitpunkt  $T$  gekauft wurden. Insgesamt möchte man das benötigte Vermögen zum Ankauf der Aktien so klein wie möglich halten. Durch Anwenden des dynamischen Programmierungsprinzips erhält man, dass die Wertfunktion die folgende HJB Gleichung erfüllt:

$$0 = \partial_t H + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_{SS} H + \inf_{\nu} \{ (S + k\nu)\nu - \nu \partial_y H \}$$

mit der Endbedingung  $H(T, S, y) = yS + \alpha y^2$ . Man erhält für die optimale Handelsgeschwindigkeit

$$\nu^* = \frac{1}{2k} (\partial_y H - S). \tag{3.8}$$

---

<sup>2</sup>vgl. Gomber, Arndt, Lutat, und Uhle [10]

Durch Einsetzen von  $\nu^*$  erhält man:

$$\partial_t H + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{SS} H - \frac{1}{4k}(\partial_y H - S)^2 = 0.$$

Für die Lösung sucht man wieder nach einem Ansatz. In diesem Fall kann die Wertfunktion dargestellt werden als Buchwert der Wertpapiere, die noch gekauft werden müssen und Ertrag den man durch den optimalen Kauf erhält. Diesen stellt man als eine quadratische Funktion von  $y$  und man erhält

$$H(t, S, y) = yS + h_0(t) + h_1(t)y + h_2(t)y^2$$

wobei die Funktionen  $h_2(t), h_1(t), h_0(t)$  deterministisch sind. Die Wertfunktion zum Endzeitpunkt lautet  $H(t, S, y) = yS + \alpha y^2$ , dann ist  $h_2(T) = \alpha, h_1(T) = h_0(T) = 0$ . Setzt man nun den Ansatz in die nichtlineare partielle Differentialgleichung ein, wird daraus

$$0 = \left\{ \partial_t h_2 - \frac{1}{k} h_2^2 \right\} y^2 + \left\{ \partial_t h_1 - \frac{1}{2k} h_2 h_1 \right\} y + \left\{ \partial_t h_0 - \frac{1}{4k} h_1^2 \right\}.$$

Diese Gleichung muss für jedes  $y$  gelten, d.h., da jeder Term in Klammern verschwinden muss, erhält man drei Gleichungen. Zuerst wird der Term  $\partial_t h_1 - \frac{1}{2k} h_2 h_1 = 0$  betrachtet. Durch die Endbedingung  $h_1(T) = 0$  erhält man, dass  $h_1(t) = 0$  ist. Geht man genauso für den dritten Term vor, wird  $h_0(t) = 0$  wieder durch die Endbedingung  $h_0(T) = 0$  erreicht. Es fehlt nur noch der erste Term. Wenn man hier, wie oben, wieder von  $t$  bis  $T$  integriert, erhält man für  $h_2(t)$ :

$$h_2(t) = \left( \frac{1}{k}(T-t) + \frac{1}{\alpha} \right)^{-1}$$

Wenn man das nun in den Ansatz für die Wertfunktion einsetzt und diesen dann in (3.8) ergibt sich

$$\nu_t^* = \left( (T-t) + \frac{k}{\alpha} \right)^{-1} Y_t^{\nu^*} \tag{3.9}$$

Für  $\alpha \rightarrow \infty$  erhält man die gleiche Strategie wie vorher und für  $\alpha \rightarrow 0$ , d.h. der Strafparameter wird null, ist es am sinnvollsten bis zum Endzeitpunkt zu warten und alle Aktien am Ende zu kaufen. Erwartet wird aber ein  $\alpha$ , das um vieles größer ist als  $k$ . Wie im vorigen Abschnitt kann das Ganze auch durch integrieren von  $dY_t^{\nu^*} = -\nu_t^*$  gelöst werden und man erhält den optimalen Bestandspfad:

$$Q_t^{\nu^*} = \frac{t}{T + \frac{k}{\alpha}} \mathfrak{N}$$

Betrachtet man dieses Ergebnis näher, erkennt man, dass es optimal ist, sich ein paar Aktien für den Endzeitpunkt aufzuheben, wenn  $k$  und  $\alpha$  endlich sind. Durch Einsetzen von  $Q_t^*$  in (3.9) erhält man die optimale Kaufgeschwindigkeit:

$$\nu_t^* = \frac{\mathfrak{N}}{T + \frac{k}{\alpha}}$$

Auch in diesem Modell handelt der Trader zu einer konstanten Rate. Die Geschwindigkeit ist gleich der vom vorigen Abschnitt, mit dem einzigen Unterschied, dass der Endzeitpunkt weiter in der Zukunft liegt, also  $T' = T + \frac{k}{\alpha}$ .

### Optimaler Verkauf mit Einfluss anderer Trader auf den Midpreis

Bis jetzt wurde sich nur mit zwei sehr grundlegenden Optimierungsproblemen auseinandergesetzt und dabei wurden die anderen Händler komplett außer Acht gelassen. Über einen längeren Zeitraum kann man argumentieren, dass sich der Auftragsfluss der anderen Händler ausgleicht. Beim HFT geht es aber um kleinere Zeithorizonte und da kann es zu Ungleichgewichten im Auftragsfluss kommen. Um den Einfluss der anderen Händler in das Modell einzubeziehen, definiert man, zu den bisherigen Zustandsvariablen und stochastischen Prozessen die Kauf- und Verkaufsraten des Auftragsflusses  $\mu_t^\pm$ , und man nimmt an, dass diese die folgende stochastische Differentialgleichung erfüllen:

$$d\mu_t^\pm = -\kappa\mu_t^\pm dt + \eta dL_t^\pm,$$

wobei  $L_t^\pm$  einen unabhängigen Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda$  beschreibt. Wenn man die Annahme genauer betrachtet, heißt es, dass Kauf- und Verkaufsauftragsfluss unabhängig mit Rate  $\lambda$  ankommen und das erzeugt einen Anstieg um  $\nu$  der Auftragsflussrate. Bisher wurde nur ein temporärer Einfluss auf den Preis betrachtet, in diesem Modell möchte man auch einen permanenten Einfluss mit einbeziehen. Die Dynamiken des Midpreises sind durch den Drift  $g(\nu_t) > 0$  gegeben. Es wird angenommen, dass diese Funktion ein negatives Vorzeichen hat, da die Verkäufe den Preis des Wertpapiers nach unten drücken. Diese Prozesse müssen jetzt noch in den des Midpreises  $S_t$  integriert werden. Dieser erfüllt dann die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dS_t^\nu = \sigma dW_t + (g(\mu_t^+) - g(\mu_t^- + \nu_t)) dt.$$

Wie in den bisherigen Strategien ist  $W_t$  eine Brownsche Bewegung und dieses mal zusätzlich unabhängig vom Poisson Prozess. Die Funktion  $g$  beschreibt den Einfluss des Auftragsflusses auf den Midpreis. Der Nettoauftragsfluss kann definiert werden als  $\mu_t = \mu_t^+ - \mu_t^-$ , wenn also die permanente Preisfunktion  $g(x) = bx$  linear ist, kann dieser

als Zustandsvariable verwendet werden, anstatt den Auftragsfluss in beide Richtungen zu betrachten. Das heißt man erhält

$$dS_t^\nu = \sigma dW_t + b(\mu_t - \nu_t) dt.$$

Außerdem führt man in diesem Modell auch eine laufende Strafe für den Bestand ein, in der Form von  $\phi \int_t^T (Q_u^\nu)^2$  mit  $\phi \geq 0$ . Dieser Parameter soll die Notwendigkeit des schnellen Verkaufens in das Modell inkludieren. Das heißt je größer  $\phi$  wird, desto schneller wird der Händler die Aktien in der optimalen Strategie verkaufen. Das Zielfunktional kann geschrieben werden als

$$H^\nu(t, x, S, \mu, q) = \mathbb{E}_{t,x,S,\mu,q} \left[ X_T^\nu + Q_t^\nu (S_T^\nu - \alpha Q_T^\nu) - \phi \int_t^T (Q_u^\nu)^2 du \right],$$

und die zugehörige Wertfunktion ist

$$H(t, x, S, \mu, q) = \sup_{\nu \in \mathcal{A}} H^\nu(t, x, S, \mu, q).$$

Es wird wieder das dynamische Programmierungsprinzip angewendet und man erhält, dass die Wertfunktion die folgende DPE erfüllt

$$0 = (\partial_t + \frac{1}{2} \partial_{SS})H + \mathcal{L}^\mu H - \phi q^2 + \sup_\nu \{ (\nu(S - k\nu) \partial_x + b(\mu - \nu) \partial_S - \nu \partial_q) H \}$$

mit der Endbedingung

$$H(T, x, S, \mu, q) = x + qS - \alpha q^2$$

Der infinitesimale Generator des Nettoauftragsfluss angewendet auf  $H$  sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\mu H(t, x, S, \mu, q) = & -\kappa \mu \partial_\mu H + \lambda [H(t, x, S, \mu + \eta, q) - H(t, x, S, \mu, q)] \\ & + \lambda [H(t, x, S, \mu - \eta, q) - H(t, x, S, \mu, q)] \end{aligned}$$

Wie auch schon bei den letzten zwei Modellen sucht man auch hier wieder einen Ansatz für  $H$ . Betrachtet man dafür wieder die Endbedingung  $x + Sq - \alpha q^2$ , dann kommt man zum folgenden Ansatz

$$H(t, x, S, q) = x + Sq + h(t, S, q).$$

Bei genauerer Betrachtung, erkennt man, dass der erste Term das angesammelte Vermögen der Strategie beschreibt, der zweite Term den Buchwert (bewertet zum Midpreis) des verbliebenen Bestand und die Funktion  $h$  beschreibt den zusätzlichen Wert, den

man noch aus dem optimalen Verkauf der verbleibenden Wertpapiere erhält, und es muss  $h(T, S, q) = -\alpha q^2$  gelten. Setzt man nun diesen Ansatz ein, erhält man, dass die Funktion  $h$  die folgende Gleichung erfüllt

$$\partial_t h + \mathcal{L}^\mu h + b\mu q - \phi q^2 + \sup_{\nu} \{-k\nu^2 - (bq + \partial_q h)\nu\} = 0.$$

mit der Endbedingung  $h(T, \mu, q) = -\alpha q^2$ . Die optimale Kontrolle in Feedback-Form ist gegeben durch

$$\nu^* = -\frac{1}{2k}(bq + \partial_q h).$$

Setzt man das optimale  $\nu^*$  wieder oben ein, erhält man die nichtlineare partielle Integro-Differentialgleichung

$$(\partial_t + \mathcal{L}^\mu)h + b\mu q - \phi q^2 + \frac{1}{4k}(bq + \partial_q h)^2 = 0. \quad (3.10)$$

Um diese zu lösen, betrachtet man die Gleichung genauer und man sieht, dass diese aus linearen und quadratischen Termen in  $q$  besteht. Sieht man sich zusätzlich noch die Endbedingung an, kommt man zum folgenden Ansatz

$$h(t, \mu, q) = h_0(t, \mu) + qh_1(t, \mu) + q^2h_2(t, \mu).$$

Einsetzen in (3.10) liefert ein gekoppeltes System von partiellen Integro-Differentialgleichungen

$$(\partial_t + \mathcal{L}^\mu)h_0 + \frac{1}{4k}h_1^2 = 0 \quad (3.11a)$$

$$(\partial_t + \mathcal{L}^\mu)h_1 + b\mu + \frac{1}{2k}h_1(b + 2h_2) = 0 \quad (3.11b)$$

$$(\partial_t + \mathcal{L}^\mu)h_2 - \phi + \frac{1}{4k}(b + 2h_2)^2 = 0 \quad (3.11c)$$

mit den Endbedingungen

$$h_0(T, \mu) = 0, \quad h_1 = (T, \mu), \quad h_2(T, \mu) = -\alpha.$$

Betrachtet man (3.11c) genauer, sieht man, dass kein Term mehr  $\mu$  enthält und auch die Endbedingung unabhängig von  $\mu$  ist, daher hängt  $h_2$  nur von der Zeit ab. Das heißt die Gleichung reduziert sich auf

$$(\partial_t h_2 - \phi + \frac{1}{4k}(b + 2h_2)^2) = 0$$

Das Ergebnis hat die Form einer Ricatti Differentialgleichung und diese kann exakt berechnet werden. Als erstes wird  $h_2(t) = -\frac{1}{2} + \chi(t)$  mit  $\chi(T) = \frac{1}{2}b - \alpha$  gesetzt und durch integrieren von  $t$  bis  $T$ , kommt man zum folgenden Ergebnis:

$$\begin{aligned} \log \frac{\sqrt{k\phi} + \chi(T)}{\sqrt{k\phi} - \chi(T)} - \log \frac{\sqrt{k\phi} + \chi(t)}{\sqrt{k\phi} - \chi(t)} &= 2\gamma(T - t) \\ \frac{\sqrt{k\phi} + \frac{1}{2}b - \alpha}{\sqrt{k\phi} - \frac{1}{2} + \alpha} \cdot \frac{\sqrt{k\phi} - \chi(t)}{\sqrt{k\phi} + \chi(t)} &= \exp(2\gamma(T - t)) \\ \chi(t) &= \sqrt{k\phi} \frac{1 + \zeta \exp(2\gamma(T - t))}{1 - \zeta \exp(2\gamma(T - t))}, \end{aligned}$$

wobei für die Variablen  $\gamma$  und  $\zeta$  gilt

$$\gamma = \sqrt{\frac{\phi}{k}}, \quad \zeta = \frac{\alpha - \frac{1}{2} + \sqrt{k\phi}}{\alpha - \frac{1}{2} - \sqrt{k\phi}}$$

Als nächstes möchte man (3.11b) nach  $h_1$  lösen und definieren dazu

$$h_1(t, \mu) = \ell_0(t) + \mu \ell_1(t)$$

mit den Endbedingungen  $\ell_0(T) = \ell_1(T) = 0$  und es gilt

$$\mathcal{L}^\mu = \kappa \mu \ell_1 + \lambda(\eta \ell_1) + \lambda(-\eta \ell_1) = -\kappa \mu \ell_1$$

Die Gleichung (3.11b) reduziert sich also auf

$$\left\{ \partial_t \ell_0 + \frac{1}{k} \chi(t) \ell_0 \right\} + \left\{ \partial_t \ell_1 + \left( \frac{1}{k} \chi(t) - \kappa \right) \ell_1 + b \right\} \mu = 0$$

Diese Gleichung muss für jedes  $\mu$  gelten. Daher muss jeder Term für sich gleich null sein, und man erhält zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für  $\ell_0$  und  $\ell_1$ . Betrachtet man zuerst die Gleichung für  $\ell_0$ , diese ist linear und die Endbedingung lautet  $\ell_0(T) = 0$ . Deshalb ist die Lösung für  $\ell_0 = 0$ . Die Gleichung für  $\ell_1$  ist nicht so einfach zu lösen, Trennung der Variablen und Variation der Konstanten ergibt

$$\ell_1(t) = b \int_t^T e^{(-\kappa(s-t))} e^{\frac{1}{k} \int_t^s \chi(u) du} ds.$$

Man löst zuerst das zweite Integral

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \frac{\chi(s)}{k} ds &= \frac{1}{k} \int_0^t \sqrt{k\phi} \frac{1 + \zeta e^{2\gamma(T-s)}}{1 - \zeta e^{2\gamma(T-s)}} ds \\
 &= \gamma \int_0^t \frac{e^{-2\gamma(T-s)}}{e^{-2\gamma(T-s)} - \zeta} ds + \gamma \int_0^t \frac{\zeta e^{2\gamma(T-s)}}{1 - \zeta e^{2\gamma(T-s)}} ds \\
 &= \log \left( e^{-\gamma(T-t)} - \zeta e^{\gamma(T-t)} \right) \\
 &= \log \frac{\zeta e^{\gamma(T-t)} - e^{-\gamma(T-t)}}{\zeta e^{\gamma T} - e^{-\gamma T}}
 \end{aligned}$$

und vereinfacht damit das Ergebnis für  $\ell_1$  und erhält somit

$$\ell_1(t) = b\bar{\ell}_1(T-t) \geq 0,$$

wobei gilt

$$\bar{\ell}_1(\tau) = \frac{1}{\zeta e^{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau}} \left\{ e^{\gamma\tau} \frac{1 - e^{-(\kappa+\gamma)\tau}}{\kappa + \gamma} - e^{-\gamma\tau} \frac{1 - e^{-(\kappa-\gamma)\tau}}{\kappa - \gamma} \right\}.$$

In diesem Ausdruck ist mit  $\tau = T-t$  die Zeit bis zum Ende des Handelns gemeint. Man könnte genauso vorgehen um auch eine Lösung für  $h_0$  zu erhalten, aber es wurde davor gezeigt, dass die optimale Handelsgeschwindigkeit nicht von  $h_0$  abhängt, das heißt mit unseren Ergebnissen erhält man insgesamt

$$\nu_t^* = -\frac{1}{k}\chi(t)Q_t^{\nu^*} - \frac{b}{2k}\bar{\ell}_1(t)\mu_t.$$

Nun wird die optimale Handelsgeschwindigkeit genauer betrachtet. Der zweite Term beschreibt den Einfluss des Auftragsflusses auf die optimale Handelsgeschwindigkeit. Wenn  $\alpha \rightarrow \infty$  geht, wird  $\chi(t) \leq 0$  und  $\bar{\ell}_1 \geq 0$ . Daraus folgt, wenn  $\mu_t > 0$ , also wenn sich der Auftragsfluss zur Kaufseite neigt, verlangsamt der Trader die Handelsgeschwindigkeit, da er vermutet zu einem späteren Zeitpunkt bessere Preise aus dem Verkauf zu erhalten. Im Gegensatz, wenn  $\mu_t < 0$  wird, deutet es darauf hin, dass die Preise immer weiter fallen, und daher ist es für den Trader besser jetzt zu verkaufen, er erhöht also die Handelsgeschwindigkeit. Außerdem gilt, dass  $\ell_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow T} 0$ , das heißt der Auftragsfluss beeinflusst den Händler immer weniger, je näher das Ende des Handelshorizonts rückt.

Ein weiterer Punkt, der auffällt, bei genauerer Betrachtung der optimalen Handelsstrategie, ist, dass diese nicht notwendigerweise zu jedem Zeitpunkt positiv sein muss. Wenn z.B. der Fall eintritt, in dem der Auftragsfluss ausreichend positiv ist, könnte der Trader Wertpapiere kaufen und einen Gewinn durch den späteren Verkauf erzielen.

Das kommt daher, dass man in diesem Modell das Handeln nicht stoppt, wenn der Händler das Ziel  $\mathfrak{N}$  Aktien zu verkaufen erreicht hat, sondern den Auftragsfluss weiter ausnutzt. Ein Weg, um so ein Verhalten zu vermeiden, ist es, die optimale Strategie auf eine positive Handelsrate einzuschränken, also:

$$\nu^\dagger = \max \left( -\frac{1}{k} \chi(t) Q_t^{\nu^\dagger} - \frac{b}{2k} \bar{\ell}_1(t) \mu_t; 0 \right) \mathbb{1}_{\{Q_t^{\nu^\dagger} > 0\}}.$$

Das ist eine sehr simple Methode, die Strategie zu beschränken und sie besagt nichts anderes, als dass bei positiver Handelsrate und Bestand gehandelt wird und andernfalls der Handel gestoppt wird. Das ist natürlich keine optimale Strategie, um diese zu erhalten, müsste man wieder zurück zum Anfang gehen und die Beschränkung  $\nu \geq 0$  mitnehmen, aber dann würde man keine analytische Lösung erhalten.

### Optimales Verkaufen in transparenten Märkten und in Dark Pools

Wie schon erwähnt, gibt es für Händler nicht nur die Möglichkeit an einer Börse, einem transparenten Markt, zu kaufen oder verkaufen, sondern es gibt auch noch die Möglichkeit in Dark Pools zu handeln. Es wird jetzt eine Strategie betrachtet, bei der man in beiden Märkten tätig ist, und wieder  $\mathfrak{N}$  Aktien verkaufen möchten.

Der Aufbau des Modells ist für den transparenten Markt genauso wie in den vorigen Abschnitten: das Handeln hat eine temporäre Auswirkung auf den Preis, das heißt wenn er  $\nu_t dt$  handelt, erhält er  $\hat{S}_t = S_t - k\nu_t$  pro Aktie, mit  $k > 0$ . Im Unterschied zu den letzten Strategien sendet der Händler auch noch  $y_t \leq q_t$  Einheiten in den Dark Pool, wobei mit  $q_t \leq \mathfrak{N}$  die noch übrigen zu verkaufenden Wertpapiere gemeint sind. Die verkauften Aktien im Dark Pool haben keine temporäre Auswirkung auf den Preis, das heißt er erhält pro Aktie  $S_t$ , aber der Händler kann nicht davon ausgehen, dass die gesamte Menge  $y_t$  im Dark Pool ausgeführt wird. Weiters wird angenommen, dass das Ankommen einer passenden Order einem Poisson Prozess  $N_t$  mit Intensität  $\lambda$  folgt, und es sei  $\{\xi_j : 1, 2, \dots\}$  eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen passender Orders, die von den anderen Marktteilnehmern an den Dark Pool gesendet werden.

Der zusammengesetzte Poisson Prozess  $V_t = \sum_{n=1}^{N_t} \xi_n$  beschreibt das gesamte Volumen an Kauforders, die bis zum Zeitpunkt  $t$  an den Dark Pool gesendet werden. Eine Order, die an den Dark Pool kommt, kann ein höheres oder kleineres Volumen haben, als die Order des Händlers. Der Bestand des Händlers erfüllt somit die stochastische

Differentialgleichung

$$dQ_t^{\nu,y} = -\nu_t dt - \min(y_t, \xi_{1+N_{t-}}) dN_t.$$

Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass der erste Term die Aktien, die an den transparenten Markt gesendet werden, beschreibt, also die Markt Orders und der zweite die Orders, die an den Dark Pool gehen. Man nimmt an, dass der Händler an erster Stelle steht, und alle ankommenden Orders mit seiner zusammengeführt werden. Der Vermögensprozess erfüllt

$$dX_t^{\nu,y} = (S_t - k\nu_t)\nu_t dt + S_t \min(y_t, \xi_{1+N_{t-}}) dN_t$$

und das Zielfunktional ist gegeben durch

$$H^{\nu,y}(t, x, S, q) = \mathbb{E}_{t,x,S,q} \left[ X_\tau + Q_\tau^{\nu,y} (S_\tau - \alpha Q_\tau^{\nu,y}) - \phi \int_t^\tau (Q_u^{\nu,y})^2 du \right]$$

wobei mit  $\mathbb{E}_{t,x,S,q}[\cdot]$  der bedingte Erwartungswert auf  $X_{t-} = x, S_t = S, Q_{t-} = q$  und der Stoppzeit

$$\tau = T \wedge \inf\{t : Q_t = 0\},$$

also der Zeitpunkt, zu dem der Händler seinen gesamten Bestand verkauft hat, ist. Wie schon in den vorigen Abschnitten ist die Wertfunktion definiert als

$$H(t, x, S, q) = \sup_{\nu,y \in \mathcal{A}} H^{\nu,y}(t, x, S, q).$$

Die zulässigen Strategien sind die Menge der  $\mathcal{F}$ -vorhersehbare und von oben beschränkte Prozesse. Anwenden des dynamischen Programmierungsprinzips liefert die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t H + \frac{1}{2} \partial_{SS} H - \phi q^2 + \sup_{\nu} \{ (S - k\nu)\nu \partial_x H - \nu \partial_q H \} \\ + \sup_{y \leq q} \{ \lambda \mathbb{E} [ H(t, x + S \min(y, \xi), S, q - \min(y, \xi)) - H ] \} = 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

mit der Endbedingung  $H(T, x, S, q) = x + q(S - \alpha q)$ . Damit der Hintergrund dieser Gleichung besser verstanden wird, betrachtet man die einzelnen Terme genauer. Der Term  $\partial_{SS}$  steht für die Diffusion des Midpreises und der Term  $-\phi q^2$  steht für die Strafe, die der Händler erhält, wenn er einen Bestand ungleich null hält. Der erste Term des Supremums in der Gleichung repräsentiert die Optimierung im transparenten Markt und der zweite die im Dark Pool. Die Endbedingung führt wieder zu einem Ansatz für

$H$ , wobei man wieder erkennen kann, dass der Term  $x + qS$  das derzeitige Vermögen repräsentiert und den Buchwert der noch nicht verkauften Aktien. Es fehlt also nur noch der Gewinn, der durch den optimalen Verkauf der übrigen Aktien entsteht. Das heißt, der Ansatz lautet  $H(t, x, S, q) = x + qS + h(t, q)$ . Wenn man diesen Ansatz in (3.12) einsetzt, kommt man zu einer einfacheren Gleichung für  $h$ :

$$\begin{aligned} \partial_t h - \phi q^2 + \sup_{\nu} \{-k\nu^2 - \nu \partial_q h\} \\ + \lambda \sup_{y \leq q} \mathbb{E} [h(t, q - \min(y, \xi)) - h(t, q)] = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

mit der Endbedingung  $h(T, q) = -\alpha q^2$ . Dann folgt für die optimale Handelsgeschwindigkeit

$$\nu^* = \frac{1}{2k} \partial_q h$$

und damit gilt

$$\sup_{\nu} \{-k\nu^2 - \nu \partial_q h\} = \frac{1}{4k} (\partial_q h)^2$$

Damit man das optimale Volumen berechnen kann, welches an den Dark Pool gesendet werden muss, muss man sich einem numerischen Verfahren bedienen oder man braucht eine genauere Struktur von  $\xi$ , also genauere Angaben, wie die passenden Orders aussehen sollen, die an den Markt geschickt werden. Dazu nimmt man an, dass das Volumen, welches von anderen Händlern an den Markt kommt, viel größer ist, als die Menge, die der Händler verkaufen möchte, also  $\xi_i \geq \eta \quad \forall i = 1, 2, \dots$ . Der Grund für diese Annahme ist, dass wenn eine passende Order im Dark Pool ankommt, kann man sichergehen, dass die Order des Händlers vollständig ausgeführt wird. Das bedeutet, es gilt  $\min(\xi_1, y) = y$  in (3.13). Durch diese Vereinfachung kann man sich wieder um einen Ansatz von  $h$  kümmern. Man sieht ziemlich schnell, dass der Ansatz eine Funktion in  $q$  sein muss. Wenn man zusätzlich noch die Endbedingung betrachtet, und da die DPE ein  $q^2$  enthält, weiß man, dass der Ansatz für  $h(t, q)$  die folgende Form haben muss:

$$h(t, q) = h_0(t) + h_1(t)q + h_2(t)q^2$$

mit den Endbedingungen  $h_0(T) = h_1(T) = 0$  und  $h_2(T) = -\alpha$ . Aus dem zweiten Supremum in (3.12) wird

$$\begin{aligned}
 & \sup_{y \leq q} \mathbb{E} [h(t, q - \min(y, \xi)) - h(t, q)] \\
 &= \sup_{y \leq q} [h(t, q - y) - h(t, q)] \\
 &= \sup_{y \leq q} [-yh_1 + (y^2 - 2qy)h_2] \\
 &= -\frac{1}{4h_2}(h_1 - 2qh_2)^2
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das optimale Volumen, welches der Händler an den Dark Pool schicken sollte, die Feedback Form

$$y^* = q + \frac{1}{2} \frac{h_1}{h_2}$$

hat. Setzt man dieses Ergebnis wieder in (3.12) ein, erhält man wieder ein gekoppeltes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

$$\partial_t h_2 - \phi - \lambda h_2 + \frac{1}{k} h_2^2 = 0 \tag{3.14a}$$

$$\partial_t h_1 + \left(\lambda + \frac{1}{k} h_2\right) h_1 = 0 \tag{3.14b}$$

$$\partial_t h_0 + \frac{1}{k} h_1^2 - \frac{\lambda}{4} \frac{h_1^2}{h_2} = 0 \tag{3.14c}$$

Zuerst wird die Einfachste der drei Gleichung betrachtet und zwar (3.14b). Da  $h_1(T) = 0$  und da die Gleichung in  $h_1$  linear ist, folgt dass auch  $h_1(t) = 0$  sein muss. Damit folgt aus (3.14c), dass auch  $h_0(t) = 0$  ist. Übrig bleibt nur mehr die Gleichung für  $h_2(t)$ , die von Riccati Typ ist. Man sieht, dass  $\partial_t h_2$  gleich einer quadratischen Funktion in  $h_2$  ist. Es wird also nach einer Variable  $\zeta^\pm$  gesucht, damit gilt

$$\partial_t h_2 = -\frac{1}{k}(h_2 - \zeta^+)(h_2 - \zeta^-)$$

also die Lösung der quadratischen Gleichung  $\phi + \lambda p - \frac{1}{k} p^2 = 0$ .

$$\zeta^\pm = \frac{1}{2} k \lambda \pm \sqrt{\frac{1}{4} k^2 \lambda^2 + k \phi}$$

Umformen der Gleichung und integrieren von  $t$  bis  $T$  liefert

$$\int_t^T \left( \frac{1}{h_2 - \zeta^+} - \frac{1}{h_2 - \zeta^-} \right) dh_2(s) = -\frac{1}{k} \int_t^T (\zeta^+ - \zeta^-) ds$$

$$\log \left( \frac{h_2 - \zeta^-}{h_2 - \zeta^+} \right) - \log \left( \frac{\alpha + \zeta^-}{\alpha + \zeta^+} \right) = -\frac{1}{k} (\zeta^+ - \zeta^-) (T - t)$$

wobei die Endbedingung  $h_2(T) = -\alpha$  schon eingesetzt wurde. Durch Umformen auf  $h_2$  erhält man

$$h_2(t) = \frac{\zeta^- - \zeta^+ \beta e^{-\gamma(T-t)}}{1 - \beta e^{-\gamma(T-t)}},$$

wobei die Konstanten  $\beta = \frac{\alpha + \zeta^-}{\alpha + \zeta^+}$  und  $\gamma = \frac{1}{k}(\zeta^+ - \zeta^-)$  zur Vereinfachung des Ausdrucks dienen. Die optimale Handelsstrategie hat dann die Form

$$\nu_t^* = -\frac{1}{k} h_2(t) Q_t^{\nu^*, y^*} \quad \text{und} \quad y_t^* = Q_t^{\nu^*, y^*}$$

Nun möchte man noch auf den optimalen Bestand kommen durch Lösen von

$$dQ_t^{\nu^*, y^*} = -\nu_t^* dt = \frac{1}{k} h_2(t) Q_t^{\nu^*, y^*} dt$$

Man integriert dabei von 0 bis  $t$  und erhält durch Substituieren und Einsetzen von  $\gamma = \frac{1}{k}(\zeta^+ - \zeta^-)$  und  $Q_0 = \mathfrak{N}$ :

$$Q_t^{\nu^*, y^*} = e^{(\zeta^-/k)t} \left( \frac{1 - \beta e^{-\gamma(T-t)}}{1 - \beta e^{-\gamma T}} \right) \mathfrak{N}$$

Schlussendlich sieht man also, dass die optimale Menge, die an den Dark Pool geschickt werden sollte, die ist, welche noch zum Verkaufen übrig bleibt. Was aber noch interessant ist, wie viel der Händler an den transparenten Markt schicken soll, wenn er auch Zugriff zu einem Dark Pool hat. Dabei vergleicht man einfach die optimale Handelsstrategie mit der ohne Dark Pool. Die Ausführung der Orders im Dark Pool folgt einem Poisson Prozess mit Intensität  $\lambda$ , das heißt, wenn  $\lambda = 0$ , dann verhält sich die optimale Handelsstrategie gleich. Bei  $\lambda > 0$  handelt der Händler zu Beginn langsamer, wie in dem Fall ohne Dark Pool, damit er seine Vorteile nutzen kann, und beschleunigt am Ende das Handeln, damit er das anfängliche langsamer Handeln kompensieren kann. Im Fall  $\lambda \rightarrow \infty$  handelt der Trader gar nicht im transparenten Markt, da in diesem Fall garantiert ist, dass die komplette Order im Dark Pool ausgeführt wird.

### 3.2.2 Optimales Verkaufen mit Limit und Markt Orders

In den vorigen Abschnitten wurden nur Markt Orders verwendet, um Aktien zu kaufen oder verkaufen. Der Vorteil an MOs ist, dass der Händler sicher gehen kann, dass die Order ausgeführt wird, aber es kann auch passieren, dass die Order durch das Orderbuch wandert und der Händler einen schlechteren Preis für das Wertpapier erhält oder zu einem schlechteren Preis verkauft. Bei einer Limit Order kann man zu einem viel besseren Preis verkaufen oder kaufen, hat aber das Risiko, dass die Order nicht ausgeführt wird. Wir interessieren uns in diesem Abschnitt nur für den optimalen Verkauf mit Limit und Markt Orders. Der Händler gibt eine LO an den Markt zum Preis  $S_t + \delta$  weiter, also zum Midpreis plus einem Aufschlag, weil er Liquidität an den Markt bringt. Für ein großes  $\delta$  wird die Wahrscheinlichkeit immer kleiner, dass eine Order an den Markt kommt, die das Orderbuch bis zu der LO des Händlers durchwandert.

Der Händler bewertet laufend die Marktsituation und löscht LO's, die noch nicht ausgeführt wurden, und sendet wieder neue LO's an den Markt. Dafür braucht man eine gute Verbindung zur Börse, gute Hardware und Software, damit man immer die aktuelle Marktsituation im Blick hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine LO ausgeführt wird, die zu einer Tiefe  $\delta$  an den Markt gesendet wird, nennt man Ausführungswahrscheinlichkeit und man bezeichnet diese als  $P(\delta)$ . Die Ausführungswahrscheinlichkeit ändert sich fortwährend im Tagesverlauf und reagiert sehr sensibel auf den derzeitigen Zustand des Limit Orderbuchs.

$$\mathbb{P}(\text{Order mit Tiefe } \delta \text{ wird ausgeführt}) = \mathbb{P}(V > A\delta) = \exp\left\{-\frac{A}{\eta}\delta\right\}$$

#### Das Modell

Da jetzt nicht nur Markt Orders verwendet werden, sondern auch Limit Orders, muss das Modell vom vorherigen Abschnitt etwas angepasst werden. Den Händler interessiert nicht nur sein eigener Bestand sondern auch die MO's, die andere Händler an den Markt weitergeben. Dadurch sehen die Parameter in diesem Modell wie folgt aus:

- $\mathfrak{N}$  ist die Menge, die der Händler verkaufen möchte
- $T$  ist der Handelszeitpunkt
- $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$  ist der Midpreis des Wertpapiers, wobei  $S_t = S_0 + \sigma W_t$ ,  $\sigma > 0$ , und  $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$  eine Standard-Brownsche-Bewegung ist
- $\delta = (\delta_{t \in [0, T]})$  ist die Tiefe, zu der die LO an den Markt gesendet wird

- $M = (M_t)_{t \in [0, T]}$  bezeichnet den Poisson Prozess mit Intesität  $\lambda$ , der die Anzahl an MO's von anderen Händlern kennzeichnet
- $N^\delta = (N_t^\delta)_{t \in [0, T]}$  ist der Zählprozess, der die Anzahl an MO's beschreibt, die mit der LO des Händlers zusammen passen
- $P(\delta) = e^{-\kappa\delta}$  mit  $\kappa > 0$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass die LO des Händlers ausgeführt wird
- $M^a = (M_t^a)_{t \in [0, T]}$  ist der Zählprozess der MO's des Händlers
- Die Folge von Stoppzeiten, zu denen der Händler MO's an den Markt gibt, wird mit  $\tau = \tau_k : k = 1, \dots, K$  mit  $K \leq \mathfrak{N}$ , so dass  $M_t^a = \sum_{k=1}^K \mathbb{1}_{\tau_k \leq t}$
- $\xi$  ist definiert als der halbe Spread
- $X^\delta = (X_t^\delta)_{t \in [0, T]}$  ist der Vermögensprozess des Händler der die folgende Stochastische Differentialgleichung erfüllt

$$dX_t^{\tau, \delta} = (S_t + \delta_{t-}) dN_t^\delta + (S_t - \xi) dM_t^{a, \tau}$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt dabei das verdiente Vermögen, wenn eine LO ausgeführt wird. Der zweite Term beschreibt das Vermögen, welches aus den ausgeführten MO's entsteht, wobei man annimmt, dass die Größe der MO klein genug ist, um nicht durch das Limit Orderbuch zu wandern.

- $Q_t^\delta = \mathfrak{N} - N_t^\delta - M_t^a$  ist der Bestand des Händlers, der noch verkauft werden muss

In diesem Modell möchte man auch noch einen Parameter einfügen, der den Händler auch während der Handelsperiode dazu bringt, einen nicht zu großen Bestand zu halten. Diesen Beschleunigungsparameter fügt man zum Zielfunktional hinzu. Dieses hat daher die Form

$$H^{(\tau, \delta)}(t, x, S, q) = \mathbb{E}_{t, x, S, q} \left[ X_T^{\tau, \delta} + Q_T^{\tau, \delta} S_T - \ell(Q_T^{\tau, \delta}) - \phi \int_t^T (Q_u^{\tau, \delta})^2 du \right]$$

wobei, wie auch in den vorigen Abschnitten, mit  $\mathbb{E}_{t, x, S, q}$  der bedingte Erwartungswert auf  $X_{t-}^{\tau, \delta} = x$ ,  $S_{t-} = S$ ,  $Q_{t-}^{\tau, \delta} = q$  und dem Strafparameter bei Verkauf zum Endzeitpunkt  $\ell(q) = q(\xi + \alpha q)$  bezeichnet. Die Kosten, die entstehen, wenn man die Aktien erst zum Endzeitpunkt verkauft, sind definiert als  $(S_T - \xi - \alpha Q_T)$ . Der Händler durchkreuzt den Spread und seine Order wandert dann zusätzlich noch durch das Limit Orderbuch. Die Menge der zulässigen Strategien  $\mathcal{A}$  umfasst alle  $\mathcal{F}$ -Stoppzeiten und alle

$\mathcal{F}$ -vorhersehbaren, von unten beschränkten Tiefen  $\delta$ .

Die Wertfunktion ist auch in diesem Abschnitt definiert als

$$H(t, x, S, q) = \sup_{(\tau, \delta) \in \mathcal{A}} H^{(\tau, \delta)}(t, x, S, q)$$

Durch das Dynamische Programmierungsprinzip erhält man, dass die Wertfunktion die folgende Quasivariationsungleichung

$$0 = \max \left\{ \begin{aligned} &\partial_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_{SS} H - \phi q^2 \\ &+ \sup_{\delta} \lambda e^{-\kappa \delta} [H(t, x + (S + \delta), S, q - 1) - H(t, x, S, q)]; \\ &[H(t, x + (S - \xi), S, q - 1) - H(t, x, S, q)] \end{aligned} \right\}$$

mit den Rand- und Endbedingungen

$$H(t, x, S, 0) = x, \quad \text{und} \quad H(T, x, S, q) = x + qS - \ell(q).$$

Wir wollen uns die Ungleichung noch im Detail ansehen. Das Maximum beschreibt die Wahl des Händlers entweder eine LO oder MO an den Markt zu schicken. Die einzelnen Terme haben folgende Bedeutung:

- der  $\partial_{SS}$  Term beschreibt wieder die Diffusion des Midpreises
- der  $-\phi q^2$  steht auch hier für die laufende Strafe des Bestands
- das Supremum über  $\delta$  berücksichtigt die Kontrolle über die Tiefe, die der Händler hat, wenn er eine LO an den Markt schickt
- der Koeffizient  $\lambda e^{-\kappa \delta}$  beschreibt die Ankunftsrate von passenden MO's zu der LO des Händlers
- die Differenz  $[H(t, x + (S + \delta), S, q - 1) - H(t, x, S, q)]$  beschreibt die Veränderung des Vermögens des Händlers, wenn eine LO ausgeführt wird. Der Händler erhält  $S + \delta$  und sein Bestand verringert sich um eins
- gleichermaßen beschreibt die Differenz  $[H(t, x, (S - \xi), S, q - 1) - H(t, x, S, q)]$  die Änderung der Wertfunktion, wenn der Händler eine MO ausführt

Die Rand- und Endbedingungen führen uns, wie auch schon in den Abschnitten davor, wieder zum Ansatz  $H(t, x, S, q) = x + qS + h(t, q)$ , sodass sich die Quasi-Variationsungleichung

vereinfacht zu:

$$\max \left\{ \partial_t h - \phi q^2 + \sup_{\delta} \lambda e^{-\kappa \delta} [\delta + h(t, q-1) - h(t, q); \right. \\ \left. - \xi + h(t, q-1) - h(t, q)] \right\} = 0 \quad (3.15)$$

mit den Rand- und Endbedingungen

$$h(T, q) = -\ell(q), \quad q = 1, \dots, \mathfrak{N}, \\ h(t, 0) = 0$$

Die optimale Tiefe kann durch Betrachten des Supremums gefunden werden.

$$0 = \partial_{\delta} \left\{ \lambda e^{-\kappa \delta} [\delta + h(t, q-1) - h(t, q)] \right\} \\ = \lambda (-\kappa e^{-\kappa \delta} [\delta + h(t, q-1) - h(t, q)] + e^{-\kappa \delta}) \\ = \lambda e^{-\kappa \delta} (-\kappa [\delta + h(t, q-1) - h(t, q)] + 1)$$

Die optimale Strategie ist also

$$\delta^* = \frac{1}{\kappa} + [h(t, q) - h(t, q-1)]$$

Der Term  $\frac{1}{\kappa}$  ist die optimale Tiefe, zu der man die Order an den Markt geben soll, um den sofortigen Gewinn zu maximieren. Die Differenz kann als Korrektur für diese sehr statische Optimierung gesehen werden. Der optimale Zeitpunkt zum Ausführen der MO hat auch eine sehr einfache Form. Betrachtet man dazu (3.15), sieht man, dass eine MO zur Zeit  $\tau_q$  ausgeführt wird, wenn gilt

$$h(\tau_q, q-1) - h(\tau_q, q) = \xi.$$

Wenn man diese Betrachtung und die optimale Tiefe zusammenführt, erhält man eine untere Schranke für  $\delta^*$

$$\delta^* \geq \frac{1}{\kappa} - \xi$$

Da keine LO an den Markt geschickt werden soll, die unter dem Midpreis liegt, möchte man, dass gilt  $\delta^* > 0$ . Somit muss gelten  $\xi < \frac{1}{\kappa}$ .

Wenn man nun wieder die optimale Tiefe in (3.15) einsetzt, erhält man:

$$\max \left\{ \partial_t h - \phi q^2 + \frac{e^{-1}\lambda}{\kappa} e^{-\kappa[h(t,q)-h(t,q-1)]}, \right. \\ \left. - \xi + h(t, q - 1) - h(t, q) \right\} = 0 \quad (3.16)$$

Überlegt man nun, was passiert, wenn man den Ende des Handelshorizonts erreicht. Hat der Händler am Ende noch Aktien, so muss er eine MO ausführen und dafür  $\xi + \alpha q$  bezahlen. Kurze Zeit vor dem Ende zahlt er nur  $\xi$  pro Aktie. Klarerweise ist es dadurch nicht optimal bis zum Zeitpunkt  $T$  mit dem Verkauf der Wertpapiere zu warten. Der linke Grenzwert ist daher nicht der selbe, wie zum Zeitpunkt  $T$ , sondern

$$h(T^-, q) = -\xi + h(T^-, q - 1)$$

für jedes  $q > 0$ , so dass  $h(T^-, q) = -q\xi$ . Setzt man

$$h(t, q) = \frac{1}{\kappa} \log \omega(t, q)$$

kommt man zu einer weiteren Reduktion von (3.16)

$$\max \left\{ \partial_t \omega(t, q) - \kappa \phi q^2 \omega(t, q) + \tilde{\lambda} \omega(t, q - 1); \right. \\ \left. e^{-\kappa \xi} \omega(t, q - 1) - \omega(t, q) \right\} = 0,$$

mit den End- und Randbedingungen

$$\omega(T, q) = e^{-\kappa q(\xi + \alpha q)}, \quad \text{und} \quad \omega(t, 0) = 1$$

und  $\tilde{\lambda} = e^{-1}\lambda$ . Der Grund, warum man diese Vereinfachung macht, ist, dass die eine Gleichung dieses Systems für  $\omega(t, 1)$  durch die  $q = 0$  Bedingung gelöst werden kann. Durch die  $q = 1$  Lösung kommt man zu  $q = 2$  Lösung usw..

Es wurden nun einige grundlegende Strategien der HFT betrachtet. Zusammenfassend kann man sagen, dass sich HFT komplexer Technologie bedienen, um traditionelle Handelsstrategien umzusetzen. Das heißt, man sollte eher die Strategien beurteilen als das HFT selber. Es würde sich eher negativ auf den Markt auswirken, wenn man Strategien limitiert oder sogar verbietet, die für Liquidität am Markt schaffen. Trotzdem sollte man dafür sorgen, dass keine Strategien verwendet werden, die negative Auswirkungen auf den Markt haben. Dabei kann man nicht nur eine Gruppe von Händlern genauer

betrachten, sondern man muss die Strategien aller Marktteilnehmer betrachten.<sup>3</sup>

Im Folgenden wird daher der ganze Markt betrachtet und versucht mit unterschiedlichen Methoden Flash Crashes vorherzusagen.

---

<sup>3</sup>vgl. Gomber, Arndt, Lutat und Uhle [10]

## Kapitel 4

# Methoden um Flash Crashes zu Erkennen

Um zeitgerecht in das Marktgeschehen eingreifen zu können, sind Methoden wichtig die einen Flash Crash prognostizieren.

### 4.1 VPIN

Ein Ansatz ist der sogenannte VPIN, Volume-Synchronized Probability of Informed Trading, mit dem in einer Arbeit von David Easley, Marcos M. López de Prado, Maureen O'Hara [7] die Ereignisse des 06. Mai betrachtet werden. Diese Arbeit stützt die Liquiditätstheorie, die im Bericht der SEC für den Flash Crash verantwortlich war. Es wird gezeigt, dass während der Ausführung des Handels das Volumen hoch und die Liquidität gleichzeitig sehr niedrig war. Dadurch kam es zu großen Ungleichgewichten des Orderflusses für die Market Maker, er wurde sozusagen toxisch, was diese zum Rückzug bewog. Zuerst wird das Basis Modell, der PIN betrachtet, von dem man ein Maß zur Bemessung des Toxizitätsfluss ableitet, um dieses Modell darüber hinaus auf ein Modell für den High Frequency Markt zu erweitern.

#### 4.1.1 Der PIN (Probability of Informed Traders)

Zur Berechnung des PINs werden Handelsperioden  $i = 1, \dots, I$  betrachtet. Am Beginn einer Periode gibt es entweder gute, schlechte oder keine Nachrichten, diese Ereignisse sind unabhängig von einander und treten mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  ein. Dieses Modell unterscheidet auch informierte und uninformierte Händler. Ein informierter Händler weiß, dass bei einer guten Nachricht das Asset am Ende der Periode  $\bar{S}_i$  Wert ist. Bei einer schlechten Nachricht weiß er, dass es  $\underline{S}_i$  Wert ist. Es gilt klarerweise  $\bar{S}_i > \underline{S}_i$ . Eine

gute Nachricht hat Wahrscheinlichkeit  $1 - \delta$ , eine schlechte die Wahrscheinlichkeit  $\delta$ . Mit dem Handel für diese Perioden wird gestartet, nachdem ein Ereignis eintritt. Das Eintreffen von Händlern in einer Periode folgt einem Poisson Prozess. Wie schon beschrieben, weiß ein informierter Händler, beim Eintreten einer guten oder schlechten Nachricht, ob er das Wertpapier kaufen oder verkaufen soll. Orders von informierten Händlern treffen in einer Periode mit Nachrichten mit einer Rate  $\mu$  ein. In jeder Periode treffen mit einer Rate  $\epsilon$  auch Orders von uninformierten Händlern ein. Das Modell interpretiert die normale Höhe des Handels als uninformierten Handel und nimmt diese Daten, um den Wert von  $\epsilon$  zu bestimmen. Hingegen wird jeder abnormale Kauf oder Verkauf als informierter Handel interpretiert und dazu verwendet, um  $\mu$  zu bestimmen. Um  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmen zu können, werden Perioden herangezogen, in denen abnormales Kauf- oder Verkaufsvolumen herrscht.

Für Liquiditätsanbieter sind diese Parameter wichtig. Sie benutzen sie zur Berechnung des Bid, den Preis, zu dem sie bereit sind "long" zu gehen, und des Ask, den Preis, zu dem sie bereit sind "short" zu gehen. Diese beiden Preise unterscheiden sich von einander, da der Liquiditätsanbieter nicht weiß, ob seine Gegenseite ein informierter Händler ist oder nicht. Dieser Unterschied wird als Bid-Ask Spread bezeichnet.

Die Liquiditätsanbieter beobachten den Handel und aktualisieren ihre Annahmen über die Toxizität des Orderflusses, was in diesem Modell mit Parameterschätzungen beschrieben wird. Sei  $P(t) = (P_n(t), P_b(t), P_g(t))$  die Annahme eines Liquiditätsanbieters über die Ereignisse, dass es ( $n$ ) keine Nachrichten, ( $b$ ) schlechte Nachrichten und ( $g$ ) gute Nachrichten zur Zeit  $t$  gibt. Zum Zeitpunkt 0 ist  $P(0) = (1 - \alpha, \alpha\delta, \alpha(1 - \delta))$  Zur Berechnung der Bid oder Ask Preise, wird der erwartete Wert des Assets, bedingt auf den Handel bis zur Zeit  $t$  benötigt.

$$\mathbb{E}[S_i|t] = P_n(t)S_i^* + P_b(t)\underline{S}_i + P_g(t)\bar{S}_i$$

wobei unter  $S_i^* = \delta\underline{S}_i + (1 - \delta)\bar{S}_i$ . Der Bid Preis ist der erwartete Wert des Assets abhängig davon, ob jemand das Asset verkaufen möchte.

$$B(t) = \mathbb{E}[S_i|t] - \frac{\mu P_b(t)}{\epsilon + \mu P_b(t)}(\mathbb{E}[S_i|t] - \underline{S}_i)$$

Der Ask Preis ist der erwartete Wert des Assets, abhängig davon, wie groß die Nachfrage ist, das Asset von einem Liquiditätsanbieter zu kaufen.

$$A(t) = \mathbb{E}[S_i|t] + \frac{\mu P_g(t)}{\epsilon + \mu P_g(t)}(\bar{S}_i - \mathbb{E}[S_i|t])$$

Diese beiden Formeln bringen zum Ausdruck, in wie weit informierte und uninformierte Händler Einfluss auf den Preis haben. Gibt es z.B. nur uninformierte Händler, ist  $\mu = 0$  und der Bid bzw. Ask Preis ist gleich dem letzten erwarteten Wert des Assets. Sind umgekehrt alle Händler informiert ist  $\epsilon = 0$ , und Bid und Ask Preis jeweils der minimale und maximale Preis.

Da es im Normalfall immer informierte und uninformierte Händler geben wird, gilt  $B(t) < \mathbb{E}[S_i|t]$  und  $A(t) > \mathbb{E}[S_i(t)]$ . Der Bid-Ask Spread  $\Sigma(t)$  zur Zeit  $t$  ist die Differenz von  $A(t)$  und  $B(t)$ . Es gilt

$$\Sigma(t) = \frac{\mu P_g(t)}{\epsilon + \mu P_g(t)} (\bar{S}_i - \mathbb{E}[S_i|t]) + \frac{\mu P_b(t)}{\epsilon + \mu P_b(t)} (\mathbb{E}[S_i|t] - \underline{S}_i)$$

Zur Zeit  $t=0$  hat der Spread unter der Annahme, dass das Ereignis einer guten und schlechten Nachricht die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, eine einfache Form. Es gilt  $\delta = 1 - \delta$

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{\mu\alpha(1-\delta)}{\epsilon + \mu\alpha(1-\delta)} (\bar{S}_i - S_i) + \frac{\mu\alpha\delta}{\epsilon + \mu\alpha\delta} (S_i - \underline{S}_i) \\ &= \frac{\mu\alpha\delta}{\epsilon + \mu\alpha\delta} (\bar{S}_i - S_i) + \frac{\mu\alpha\delta}{\epsilon + \mu\alpha\delta} (S_i - \underline{S}_i) \\ &= \frac{\mu\alpha\delta}{\epsilon + \mu\alpha\delta} (\bar{S}_i - \underline{S}_i) \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Order von einem informierten Trader kommt wird als PIN bezeichnet.

$$PIN = \frac{\alpha\mu}{\alpha\mu + 2\epsilon}$$

$\alpha\mu$  ist die Rate, in der Orders von informierten Händlern ankommen,  $\alpha\mu + 2\epsilon$  ist die Ankunftsrate aller Orders.

#### 4.1.2 Volume Bucketing

Um nun zum VPIN zu kommen, betrachtet man näher, welche Rolle Informationen und Zeit auf das High Frequency Trading haben. Beim PIN Modell wird Maximum Likelihood zur Berechnung der Parameter  $\alpha, \mu, \delta, \epsilon$  verwendet. Hingegen wird beim VPIN eine direkte analytische Schätzung durchgeführt. Beim klassischen Handel geben neue Informationen, z.B. eine Prognose über die zukünftige Entwicklung des Emittenten oder der Marktentwicklung, Auskunft über die zukünftige Entwicklung eines Wertpapiers. Informierte Händler möchten diese Informationen nutzen, um einen Profit zu erzielen. Sie versuchen daher aus dem Muster des Handels immer neue Informationen über die

zukünftige Preisentwicklung des Wertpapiers abzulesen.

Beim High Frequency Trading steht man vor demselben Problemen. Auch wenn man ein Wertpapier nur wenige Minuten hält, wird man von Informationen beeinflusst, welche das Wertpapier eine ganze Periode betreffen. Diese breitere Definition zeigt, dass das Ereignis einer Information öfter an einem Tag eintreten kann, und dass die Wichtigkeit, wie viel Auswirkung die Information auf den Preis hat, variieren kann. Man kann daraus schließen, dass, je relevanter eine Information ist, desto mehr wächst das Volumen an. Deshalb arbeiten Easley und O'Hara nicht mit der Uhrzeit sondern mit der Volumenzeit. Es wird nach einer bestimmten Anzahl von gehandelten Wertpapieren, beim Erreichen eines gewissen Volumens, eine Stichprobe gezogen. Betrachtet man z.B. den E-Mini S&P 500 Future und zieht man immer, nachdem 200.000 Wertpapiere gehandelt wurden, eine Stichprobe, würde man durchschnittlich 9 Stichproben pro Tag ziehen. An sehr aktiven Tagen, wie z.B. den 06. Mai 2010, ein Vielfaches davon, wohingegen an inaktiven Tagen nur sehr wenig Information gewonnen werden kann.

Es werden aufeinanderfolgende Trades in gleich große Körben, einer vordefinierten Größe  $V$ , zusammengefasst. Diese Körbe werden als Volume Buckets bezeichnet. Ist ein Trade größer als das Volumen, um den aktuellen Korb zu füllen, wird der Trade aufgeteilt, und das überschüssige Volumen wird in den nächsten Korb gegeben. Sei  $\tau = 1, \dots, n$  der Index von gleichen Volume Buckets. Die nächste interessante Frage, die man sich stellt, ist, wie man das Volumen aufteilt. Das heißt wie viel vom gesamten Volumens aus Verkaufs- bzw. Kauforders kommt. Der erste Gedanke, der einen in den Sinn kommt ist, dass es zu jeder Kauf- auch eine Verkauforder geben muss. Wird eine Order zum Bidpreis abgeschlossen klassifiziert man eine Order als Verkaufsvolumen, umgekehrt wird eine Order zum Askpreis durchgeführt zählt man das Volumen zum Kaufvolumen. Das Gesamtvolumen alleine zeigt nur Information an, erst das Kauf- bzw. Verkaufsvolumen signalisiert in welche Richtung sich ein Preis entwickelt. Die Aufteilung in Kauf- und Verkaufsvolumen ist nicht so einfach. Ein Problem sind die unterschiedlichen Berichterstattungen, und neben dem Zuordnen der Trades, die Zuordnung der Preise zur richtigen Order.

Im Modell von "Easley, Lopez und O'Hara" werden Trades über kurze Intervalle zusammengefasst und es werden standardisierte Preisänderungen zwischen dem Anfang und Ende des Intervalls verwendet, um den Prozentsatz von Kauf- und Verkaufsvolumen zu berechnen. Das Kauf- und Verkaufsvolumen  $V_{\tau}^B$  und  $V_{\tau}^S$  wird berechnet unter der Verwendung von einminütigen Zeitabständen (in einem späteren Teil der Arbeit wird

gezeigt, dass es auch mit jedem anderen Zeitabstand funktionieren würde). Man könnte genauso gut Volumenabstände verwenden.

$$V_{\tau}^B = \sum_{i=t(\tau-1)+1}^{t(\tau)} V_i \cdot Z \left( \frac{P_i - P_{i-1}}{\sigma_{\Delta P}} \right)$$

$$V_{\tau}^S = \sum_{i=t(\tau-1)+1}^{t(\tau)} V_i \cdot \left[ 1 - Z \left( \frac{P_i - P_{i-1}}{\sigma_{\Delta P}} \right) \right] = V - V_{\tau}^B$$

Der Index  $t(\tau)$  ist der letzte Zeitabstand, der im  $\tau$ -ten Volumenkörbchen ist,  $Z$  ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und  $\sigma_{\Delta P}$  ist die Schätzung der Standardabweichung der Preisänderungen zwischen zwei Zeitabständen. Gibt es keine Preisänderung vom Anfang eines Zeitabstandes bis zum Ende, so wird das Volumen gleichmäßig zwischen Kauf und Verkauf aufgeteilt. Erhöht sich der Preis, wird das Volumen mehr als Kaufvolumen gewichtet. Die Gewichtung hängt davon ab, wie groß die Preisänderung verhältnismäßig zur Verteilung der Preisänderungen ist.

### 4.1.3 VPIN - Volume-Synchronized Propability of Informed Trading

Wie schon beschrieben, wird im Standard PIN Modell nur die Anzahl der Käufe und Verkäufe berücksichtigt, auf das Volumen wird nicht näher eingegangen. Was man im Basismodell ursprünglich herausfinden wollte, ist Information über die Handelsabsichten der informierten und uninformierten Händler. Es ist sehr schwer eine Verbindung zwischen den Handelsabsichten und den beobachteten Marktdaten zu finden, da Vorhaben in viele Trades aufgesplittet werden können und z.B. Orders von informierten Händlern in verschiedenen Formen an den Markt kommen. Um dem aus dem Weg zu gehen, betrachtet man einen Trade, als wäre er eine Ansammlung von Trades in Einheitsgröße, das heißt wenn ein Trade über 5 Verträge zum Preis  $p$  abgeschlossen wird, behandelt man diesen Abschluss als wären es 5 Trades eines Vertrages zum Preis  $p$ . Durch diese Vorgehensweise bezieht man Handelsintensität in unsere Analyse mit ein.

Für jede Periode ist das erwartete Handelsungleichgewicht  $\mathbb{E} [V_{\tau}^S - V_{\tau}^B] \approx \alpha\mu$  und die erwartete Anzahl von Trades  $\mathbb{E} [V_{\tau}^B + V_{\tau}^S] = \alpha\mu + 2\epsilon$  ist. Durch die Einteilung des Volumens in Körben kann man die Schätzungen ganz einfach machen. Wenn man sich nochmal vor Augen hält, dass man einen Handelstag in gleich große Volume Buckets aufteilt und man jeden dieser Buckets als Information einer Periode betrachtet, bedeutet das, dass  $V_{\tau}^B + V_{\tau}^S$  konstant und gleich  $V$  ist für alle  $\tau$ . Um das erwartete

Handelsungleichgewicht zu berechnen, nimmt man den Durchschnitt des Handelsungleichgewichts über  $n$  Buckets her.

Der VPIN wird wie folgt berechnet:

$$VPIN = \frac{\alpha\mu}{\alpha\mu + 2\epsilon} \approx \frac{\sum_{\tau=1}^n |V_{\tau}^S - V_{\tau}^B|}{nV}$$

Um den VPIN zu berechnen, muss man zuerst  $V$ , das Volumen, welches jeder Korb enthält, schätzen, und man braucht  $n$ , die Anzahl der Buckets. Man konzentriert sich zuerst einmal auf  $V = 51$  und berechnet den VPIN für 50 Körbe,  $n = 50$ , was an einem normalen Tag den täglichen VPIN finden lässt. Der VPIN wird nach jedem Korb aktualisiert, das heißt, wenn der 51. Korb gefüllt ist, wird der erste Korb in der Berechnung vernachlässigt. Ein Grund für die laufende Aktualisierung des VPIN ist, dass dieser die Schnelligkeit, in der Informationen auf den Markt kommen, widerspiegeln soll. Ein weiterer Grund ist, dass jede Aktualisierung auf der gleichen Menge von Informationen basieren soll. Volumen kann sehr ungleichmäßig auftreten, deswegen ist es keine gute Idee den VPIN nach der Uhrzeit zu aktualisieren. Wenn man den VPIN vom 06. Mai betrachtet, wird dies besonders klar. An diesem Tag war das Volumen sehr groß, und dadurch wurden an diesem einen Tag 137 Schätzungen des VPIN gemacht. Die Länge lag noch immer bei  $n$ , und das heißt, dass die Zeit für die Schätzung der VPIN Metrik nur wenige Stunden statt den 24 Stunden der durchschnittlichen Tagen betrug.

Darin liegt auch das Problem des VPIN, am Anfang bekommt man relativ wenig Information, aber wenn es Ungleichgewichten im Orderfluss gibt, liefert der VPIN sehr viel Information.

## 4.2 Mini Flash Crashes

Eine weitere Möglichkeit, um Unsicherheiten am Markt festzustellen, ist es Mini Flash Crashes zu betrachten und die Gründe dafür zu erkennen. Dieser Abschnitt bezieht sich auf die Arbeit von Golub, Keane und Poon [9]. Mini Flash Crashes sind, wie der Name schon vermuten lässt, einfach kleinere Version des Flash Crashes von 2010. Beispiele für Mini Flash Crashes sind der rasche Kursabfall der Goldman Sachs Aktie um \$1,89 in weniger als 400 Millisekunden und der sofortigen Erholung. Mini Flash Crashes sind keine Neuheit in der Finanzwelt, aber bisher hat man sich nicht genauer mit den Gründen für diese kleineren Crashes beschäftigt.

### 4.2.1 Definition von Mini Flash Crashes

Flash Crash bedeutet nicht notwendigerweise den Preisverfall in kurzer Zeit, sondern damit kann auch ein Preisanstieg in kürzester Zeit gemeint sein. Wir definieren also einen "Down Crash" folgendermaßen:

- Der Aktienpreis muss zumindest 10 Ticks fallen, bevor er wieder ansteigt.
- Die Preisänderungen müssen innerhalb von 1,5 Sekunden passieren.
- Die Änderungen müssen  $-0,8\%$  übersteigen.

Für den "Up Crash" gilt die Definition in die andere Richtung:

- Der Aktienpreis muss zumindest 10 Ticks steigen, bevor er wieder fällt.
- Die Preisänderungen müssen innerhalb von 1,5 Sekunden passieren.
- Die Änderungen müssen  $0,8\%$  übersteigen.

In der Arbeit von Golub, Keane und Poon [9] werden Orders aus den verschiedensten Quellen analysiert, den Consolidated Quotation System, dem Consolidated Tape System der NYSE, NYSE Amex, NYSE Arca Wertpapiere und Unlisted Trading Privilege Quote Data Feed, sowie auch Trades der Alternative Trade Facilities und dem Trade Reporting Facilities im Zeitraum von September 2008 und November 2008 und Mai 2010. Es wurden gerade diese vier Monate ausgewählt, da im Jahr 2008 der Markt durch die global Finanzkrise sehr volatil war und der Mai 2010 aufgrund des Flash Crash.

Der Markt wurde dabei auf Mini Flash Crashes untersucht, und diese wurden ihrem Ursprung nach in verschiedene Klassen unterteilt. Eine davon ist, wenn der Crash als ISO initiiert gilt, also durch eine Intermarket Sweep Order entsteht. Dieser Order Typ lässt sich ganz einfach durch ein Beispiel beschreiben. Es wird eine Limit Order an den Markt geschickt, um 100 Aktien mit einem Limit 20,50 zu kaufen. An der Börse A gibt es zum Preis von 20,40 10 Aktien. An der Börse B gibt es zum Preis von 20,60 1000 Aktien. Bei einer normalen Order würde der Händler 10 Aktien von der Börse A zum Preis von 20,40 kaufen. Für die restlichen Aktien müsste er eine neue Order an den Markt senden. Bei einer Intermarket Sweep Order kann er die ersten 10 an der Börse A kaufen und die restlichen 90 an der Börse B zu einem höheren Preis. Es wird also sichergestellt, dass die Order vollständig ausgeführt wird. Kurz hebt eine ISO die "Order Protection Rule" aus, also dass man immer zum bestmöglichen Preis kaufen

muss.<sup>1</sup>

Interessant ist das Ganze, weil in der Analyse von [9] ca. 68 % der Flash Crashes durch ISO Orders ausgelöst wurden. Gibt es also an einer Börse ohne ISO Orders und mit weniger Frequenz eine ähnliche Anzahl an Mini Flash Crashes? oder werden diese durch das Verbot, von diesen Handelspraktiken, ausgeschlossen?

Weiters werden nach [9] Mini Flash Crashes auch durch die automatische Umleitung von Orders ausgelöst. Orders werden automatisch umgeleitet, wenn die Order Protection Rule greift. Diese besagt, wenn ein Händler eine Order an die Börse A weitergibt und diese Börse das Wertpapier nicht zum NBBO anbietet, wird ein Teil der Order an eine Börse B weitergeleitet. Die Größe richtet sich danach, wie viel die Börse B zum NBBO anbietet. Das Problem an der Order Protection Rule ist, dass der Rest der Order an der Börse A ausgeführt wird, unabhängig davon, ob an einer anderen Börse noch Aktien zum besseren Preis, aber eben nicht zum NBBO, angeboten werden würde. Das resultiert teilweise in einen Mini Flash Crash. Von den beobachteten Mini Flash Crashes wurden nicht ganz 5% durch die Order Protection Rule ausgelöst.

Es ist also zu hinterfragen, ob diese Order Protection Rule wirklich zielführend ist. Derzeit gibt es am US Aktienmarkt 13 Börsen, 30 Dark Pools und über 200 Broker-Dealers. Das heißt, es ist fast unmöglich, die derzeitige Marktsituation zu überblicken und die Liquidität an den verschiedensten Börsen im Auge zu behalten. Dadurch werden Ungleichgewichte in der Liquidität vermehrt auftreten. Zwei Ansätze, um die Mini Flash Crashes zu reduzieren, wäre die Order Protection Rule zu erweitern und die Verwendung von ISOs nicht weiter zu tolerieren.

## 4.3 Analyse der ISE Daten

### 4.3.1 Datensatz

Im Folgenden wird ein Datensatz der Istanbul Stock Exchange<sup>2</sup> ISE-30 für den Zeitraum von Juni bis Juli 2008 verwendet. Dieser Index entspricht fast 75 % des gesamten Handelsvolumen der ISE. Die Besonderheit dieser Daten liegt darin, dass die ISE eine Computerbörse und Order-Driven ist. Das heißt, wie am Anfang schon erwähnt, schaltet sich kein Market Maker dazwischen, somit wird in den Daten der komplette

---

<sup>1</sup>vgl. Phillips [20]

<sup>2</sup>wurde 2013 in Borsa Istanbul umbenannt

Orderfluss wiedergegeben.<sup>3</sup>

An der Borsa Istanbul gibt es die Ordertypen Fill or Kill, Daily Order und Good Till Cancel. Der Zusatz Good Till Cancel bedeutet, dass die Order so lange gültig ist, bis sie entweder vom Händler abgebrochen wird, oder die Order ausgeführt wird. Die zwei anderen Zusätze wurden schon im 2. Kapitel behandelt.<sup>4</sup>

Ein wichtiger Punkt ist, dass an der ISE keine Intermarket Sweep Orders erlaubt sind und es bis 2011 keine versteckten Orders gab. Außerdem wird der Rest von nicht ausgeführte MOs in LOs umgewandelt. Für die Analyse wurden Handelsdaten herangezogen, in der Form von:

| Datum      | Ticker | Uhrzeit  | Preis | Volumen | KäuferID | VerkäuferID |
|------------|--------|----------|-------|---------|----------|-------------|
| 01.07.2008 | AKBNK  | 09:46:44 | 4,16  | 100     | 00020507 | 00022041    |
| 01.07.2008 | AKBNK  | 09:46:49 | 4,14  | 1       | 00000423 | 00022120    |
| 01.07.2008 | AKBNK  | 09:47:16 | 4,16  | 10000   | 00022650 | 00022041    |
| 01.07.2008 | AKBNK  | 09:48:07 | 4,16  | 100     | 00023529 | 00022041    |

Tabelle 4.1: Auszug aus den Handelsdaten vom 01.07. der Akbank

Außerdem wurden auch noch die Orderdaten verwendet:

| Datum      | Ticker | Limitpreis | Uhrzeit  | Bid  | Ask  | Spread |
|------------|--------|------------|----------|------|------|--------|
| 01.07.2008 | AKBNK  | 4,16       | 09:46:44 | 4,16 | 4,18 | 0,02   |
| 01.07.2008 | AKBNK  | 4,1        | 09:46:49 | 4,14 | 4,16 | 0,02   |
| 01.07.2008 | AKBNK  | 4,16       | 09:46:54 | 4,14 | 4,16 | 0,02   |
| 01.07.2008 | AKBNK  | 4,16       | 09:48:07 | 4,14 | 4,16 | 0,02   |

Tabelle 4.2: Auszug aus den Orderdaten vom 01.07. der Akbank

### 4.3.2 Mini Flash Crashes und Berechnung des VPIN

Ein Problem am Datensatz der Istanbul Stock Exchange ist, dass die Preisveränderungen nicht in Millisekunden angegeben werden, sondern nur in Sekunden. Daher kann man die Definition, nach Easley, Lopez de Prado und O'Hara [7], von Mini Flash Crashes nicht anwenden.

Daher wurde nach kleineren Crashes gesucht, bei denen der Zeitrahmen auf 2 Sekunden

<sup>3</sup>vgl. Valenzuela, Zer, Fryzlewicz und Rheinländer [23]

<sup>4</sup>vgl. [3] und [14]

erhöht wurde. Die Vorgehensweise des Algorithmus ist die folgende: zuerst wird nach einem Zeitraum gesucht, in dem der Preis 10 mal hintereinander gefallen ist, ohne in der Zwischenzeit wieder zu steigen. Dann wird noch geprüft, ob diese Preisänderung 0,8 % übersteigt. Als letztes wird überprüft, ob diese Veränderung in dem definierten Zeitabstand stattgefunden hat.

Auch durch die Erweiterung des Zeitrahmens konnten keine Mini Flash Crashes gefunden werden, da die Preise an der ISE nicht so volatil sind und kein Preis 10 mal fällt, bevor er wieder ansteigt. Daher wurde nach ein paar Beispiele gesucht, die zwar keinem wirklichen Mini Flash Crash entsprechen, wo man aber trotzdem von einem Preisabsturz in ziemlich kurzer Zeit sprechen kann. In diesem Zeitraum wurde dann auch der VPIN berechnet, um zu erkennen, ob man damit wirklich einen plötzlichen Crash voraussehen kann.

Für die Berechnung des VPIN wurden mehrere kleinere Berechnungen durchgeführt. Zuerst wurde das durchschnittliche Handelsvolumen der Aktien berechnet. Dieses wurde dann, wie auch von Easley, Lopez de Prado und O'Hara [7] vorgeschlagen, in 50 gleich große Volume Buckets eingeteilt.

Der nächste Schritt ist die Aufteilung des Volumens auf Kauf- und Verkaufsseite. In der Arbeit von Easley, Lopez de Prado und O'Hara [7] werden dabei 1-minütige Zeitintervalle verwendet. Die ISE Daten sind pro Trade in Sekunden angegeben, das heißt, wenn ein Trade ausgeführt wird, gibt es einen Eintrag. Damit kann es auch passieren, dass eine Zeit lang kein Trade gemacht wird. Somit ist eine genaue Aufteilung in Minuten nicht möglich. Daher wurde der gesamte Vektor durchlaufen, und das Volumen in jedem Schritt auf Kauf- und Verkaufsseite aufgeteilt, einmal mit der Methode von Easley, Lopez de Prado und O'Hara und dann mit Hilfe der Daten des Limit Orderbuchs. In diesem Fall wurde der Bid- und Askpreis betrachtet. Wenn eine Order zum Bidpreis abgeschlossen wurde, wurde das Volumen zum Verkaufsvolumen gezählt und wenn zum Askpreis abgeschlossen wurde, als Kaufvolumen.

Mit diesen Ergebnissen kann der VPIN pro Tag berechnet werden. An Tagen mit einem sehr hohen Handelsvolumen, werden nicht nur, wie oben erwähnt, die 50 gleich großen Körbe erreicht, sondern eine Vielzahl davon. Dadurch können auch mehrere VPIN Werte erreicht werden.

Für die Berechnung des VPIN wird sich auf die Aktie der Akbank konzentriert. Die

durchschnittliche Anzahl gehandelter Aktien war im Juni 2008 ca. 8,5 Mio. pro Tag. Als erstes wird in der Grafik 4.1 die Kursentwicklung der Akbank Aktie in Türkischen Lira (TRY) im Juni 2008 betrachtet. Dabei wird der 17.06.2008 besonders hervorgehoben, da es zu Beginn des Tages einen kleinen Einbruch gab, und der Kurs bis zum Ende des Tages wieder anstieg, und die Berechnungen des VPIN für dieses Datum durchgeführt wurden.

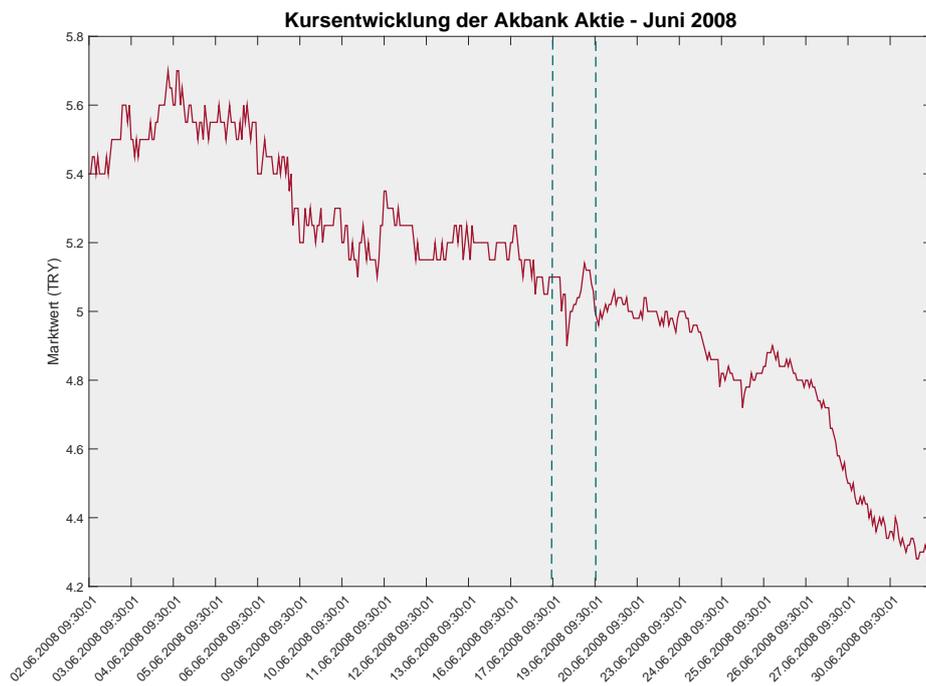


Abbildung 4.1: Aktienkursentwicklung mit genauerer Betrachtung des 17.06.2008

In den Abbildungen 4.2 und 4.3 wird der der VPIN im Vergleich zur Kursentwicklung der Aktie dargestellt. Das Handelsvolumen war an diesem Tag sehr hoch und man konnte statt der durchschnittlichen 50 Buckets 109 berechnen. In der ersten Abbildung 4.2 wurde der VPIN mit geschätzten Kauf- und Verkaufsvolumen dargestellt, während die Abbildung 4.3 den VPIN zeigt, wo das Volumen mit Hilfe des Limit Orderbuchs genau aufgeteilt wurde.

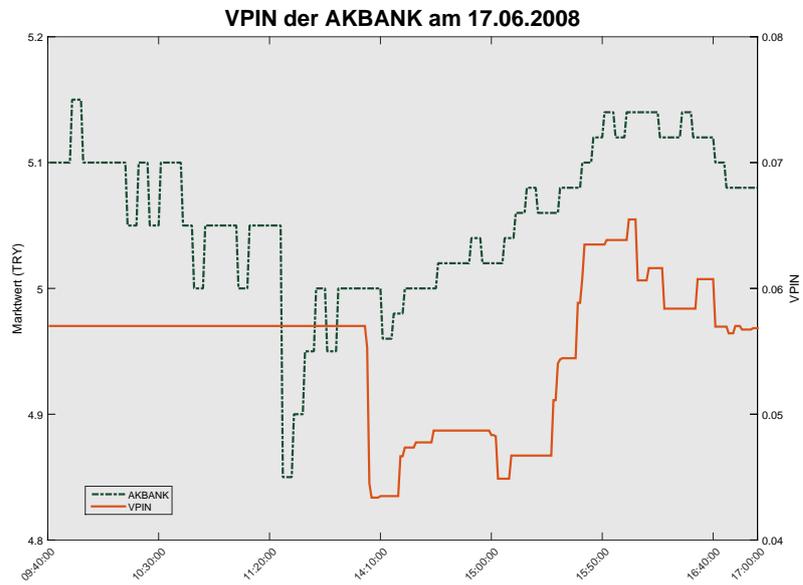


Abbildung 4.2: VPIN mit geschätzten Kauf- und Verkaufsvolumen

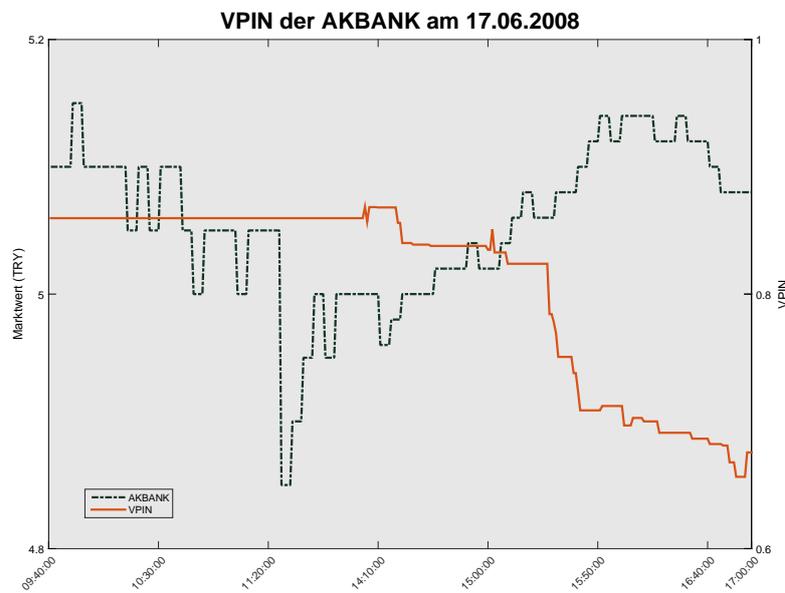


Abbildung 4.3: VPIN mit genauer Aufteilung von Kauf- und Verkaufsvolumen

Man sieht an diesem Beispiel sofort das Problem des VPIN. Da den Berechnungen das Volumen zu Grunde liegt, dauert es ziemlich lange, bis man einen Wert bekommt. In diesem Fall bis kurz nach 14:00 Uhr, bis die ersten 50 Buckets voll waren. Daher wird der erste Kursabfall am Vormittag nicht im VPIN wiedergespiegelt. Danach aktualisiert sich der VPIN ziemlich schnell. Man sieht, wie der Wert für VPIN mit geschätzten Kauf- Verkaufsvolumen (VPIN1) nach oben wandert, während der genaue VPIN schon zu Beginn einen viel höheren Wert hat, also um einiges genauer ist. Am Ende steigt der VPIN1, zur selben Zeit fällt der VPIN2, was auch eher zur Entwicklung des Wertpapiers passt. Weiters ist interessant, wie Kaufs- und Verkaufsvolumen in der Zeit eines Crashes aussehen. Dazu sieht man die Aufteilung in der Abbildung 4.4.

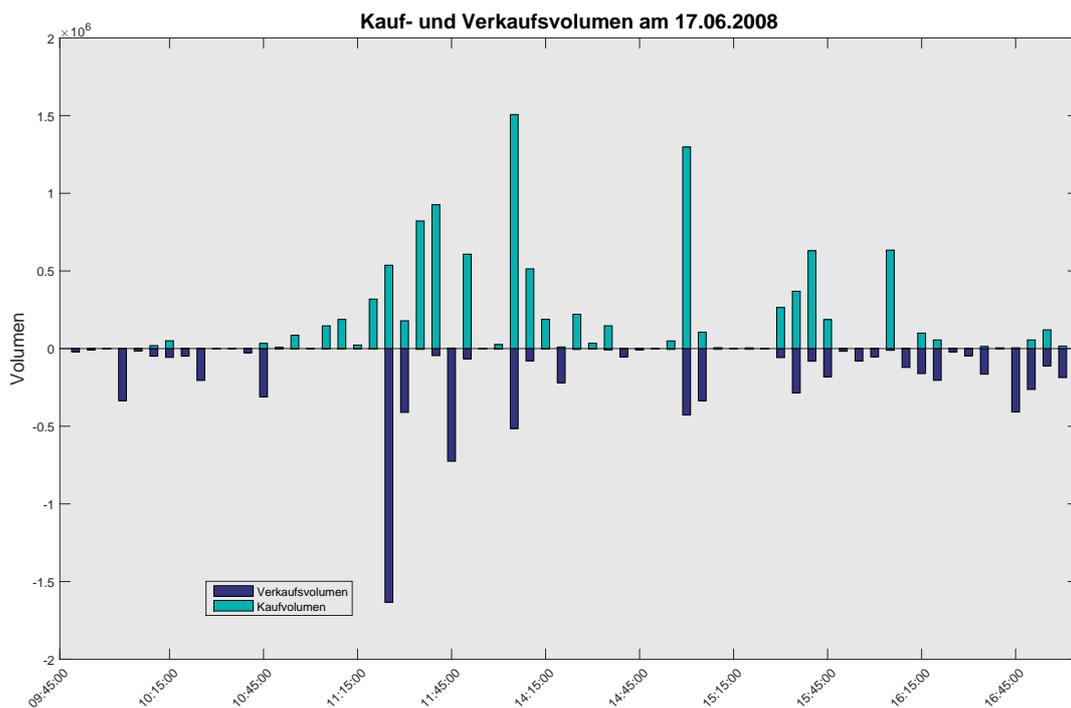


Abbildung 4.4: Aufteilung in Verkauf- und Kaufvolumen durch Bid- und Askpreis

Man sieht, dass in der Zeit des Kursabfalls das Verkaufsvolumen seinen Tageshöchstpunkt hatte, und auch das Kaufvolumen zu diesem Zeitpunkt immer weiter anstieg. Das heißt, das Volumen war in der Zeit des Kursabfalls allgemein sehr hoch, was für den

VPIN spricht, da dieser hohes Volumen zur Berechnung braucht und auch das Volumen während des Flash Crashes, im Besonderen das Verkaufsvolumen, sehr hoch war. Im Folgenden eine gekürzte Tabelle mit der Entwicklung des VPIN und der Uhrzeit.

| Datum      | Ticker | Uhrzeit  | Preis | VPIN1 | VPIN2 |
|------------|--------|----------|-------|-------|-------|
| 17.06.2008 | AKBNK  | 14:03:07 | 4,98  | 0,057 | 0,860 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 14:04:06 | 5,00  | 0,061 | 0,869 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 14:05:45 | 4,98  | 0,062 | 0,857 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 14:06:34 | 5,00  | 0,063 | 0,868 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 14:10:49 | 5,00  | 0,063 | 0,868 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 14:19:36 | 5,00  | 0,066 | 0,856 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 14:21:32 | 5,00  | 0,067 | 0,840 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 14:26:31 | 5,02  | 0,067 | 0,838 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 14:34:42 | 5,02  | 0,068 | 0,838 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:00:52 | 5,04  | 0,069 | 0,835 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:01:38 | 5,06  | 0,069 | 0,852 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:02:10 | 5,08  | 0,075 | 0,851 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:03:18 | 5,08  | 0,086 | 0,833 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:09:00 | 5,08  | 0,089 | 0,824 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:28:03 | 5,08  | 0,094 | 0,784 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:30:11 | 5,08  | 0,097 | 0,778 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:31:34 | 5,10  | 0,097 | 0,769 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:32:26 | 5,10  | 0,097 | 0,751 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:39:12 | 5,10  | 0,102 | 0,738 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:41:07 | 5,12  | 0,106 | 0,724 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:42:43 | 5,12  | 0,109 | 0,709 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 15:52:01 | 5,12  | 0,110 | 0,712 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 16:02:57 | 5,14  | 0,111 | 0,697 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 16:03:01 | 5,14  | 0,111 | 0,697 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 16:06:23 | 5,14  | 0,112 | 0,703 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 16:11:34 | 5,14  | 0,113 | 0,700 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 16:18:09 | 5,12  | 0,115 | 0,685 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 16:33:52 | 5,12  | 0,118 | 0,686 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 16:41:45 | 5,10  | 0,118 | 0,682 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 16:47:31 | 5,08  | 0,118 | 0,681 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 16:50:02 | 5,08  | 0,118 | 0,668 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 16:53:01 | 5,08  | 0,119 | 0,656 |
| 17.06.2008 | AKBNK  | 16:58:26 | 5,08  | 0,119 | 0,676 |

Tabelle 4.3: VPIN Werte mit dazugehöriger Uhrzeit und Marktwert

Als nächstes Beispiel betrachtet man den 27.06.2008. Am Tag davor gab es einen Kursabfall, wie man in der Abbildung 4.5 sieht, und auch an diesem Tag ging es turbulenter am Markt zu. Interessant ist dabei, wie sich diese Situation auf den VPIN auswirkt.

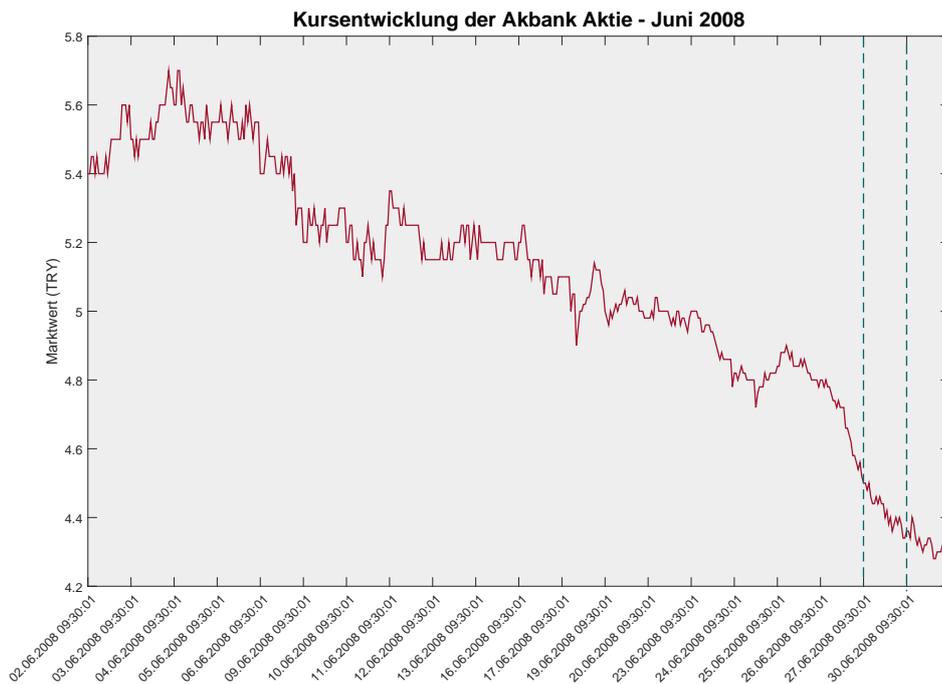


Abbildung 4.5: Aktienkursentwicklung mit genauerer Betrachtung des 27.06.2008

Auch für dieses Beispiel wird wieder die Entwicklung des VPIN im Vergleich zum Aktienpreis betrachtet, wie vorher einmal mit geschätzten Kauf- und Verkaufsvolumen, siehe dazu Abbildung 4.6, und danach noch einmal zum Vergleich, der VPIN mit einer genauen Einteilung des Volumens, siehe Abbildung 4.7. An diesem Tag war das Gesamtvolumen geringer als am 17.06., daher konnten für diesen Tag nur 6 Werte für den VPIN errechnet werden, und es dauerte noch länger, bis der erste Wert ermittelt werden konnte.

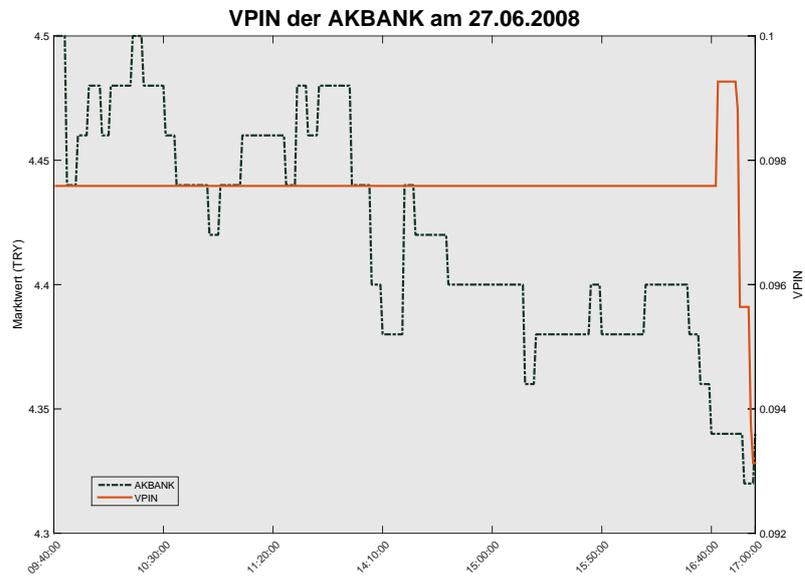


Abbildung 4.6: VPIN mit geschätzten Kauf- und Verkaufsvolumen

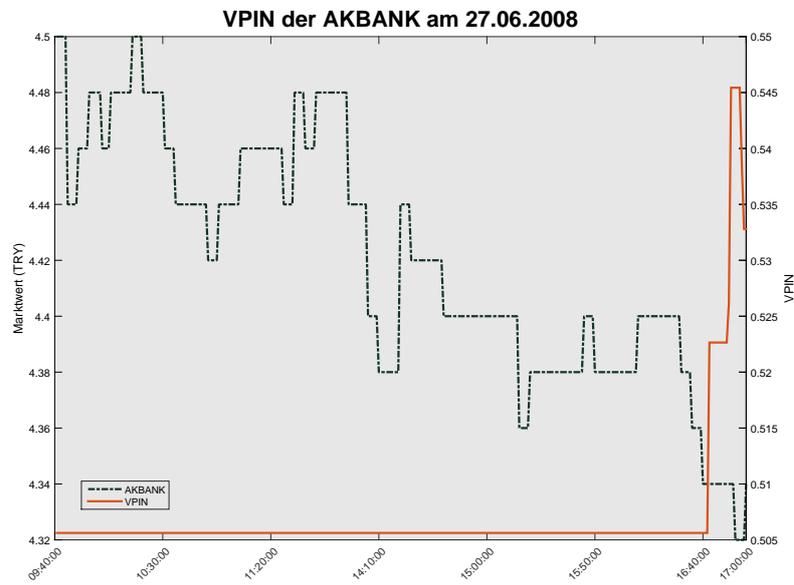


Abbildung 4.7: VPIN mit genauer Aufteilung von Kauf- und Verkaufsvolumen

An diesen beiden Abbildungen sieht man sehr genau, dass das Volumen erst am Ende des Tages zunimmt, deswegen wird ein Wert für den VPIN erst kurz vor Ende des Handelstages errechnet. Der Wert für den VPIN1 als auch für den VPIN2 steigt aber dann in kürzester Zeit rasch an, und entwickelt sich steil nach oben, während der Aktienkurs fällt. Leider kann man diese Beobachtung erst machen, wenn der Kursverfall schon eingetreten ist.

Als nächstes wird der VPIN für die Aktie der Garanti Bank berechnet, da diese Aktie das höchste Volumen aller Aktien aus dem Datensatz hat. Das durchschnittliche Tagesvolumen im Juni 2008 betrug 65 Mio. Also ein vielfaches des durchschnittlichen Tagesvolumen der Akbank. In der Abbildung 4.8 wird der Kursverlauf im Juni 2008 gezeigt und der 10. Juni dabei besonders hervorgehoben.

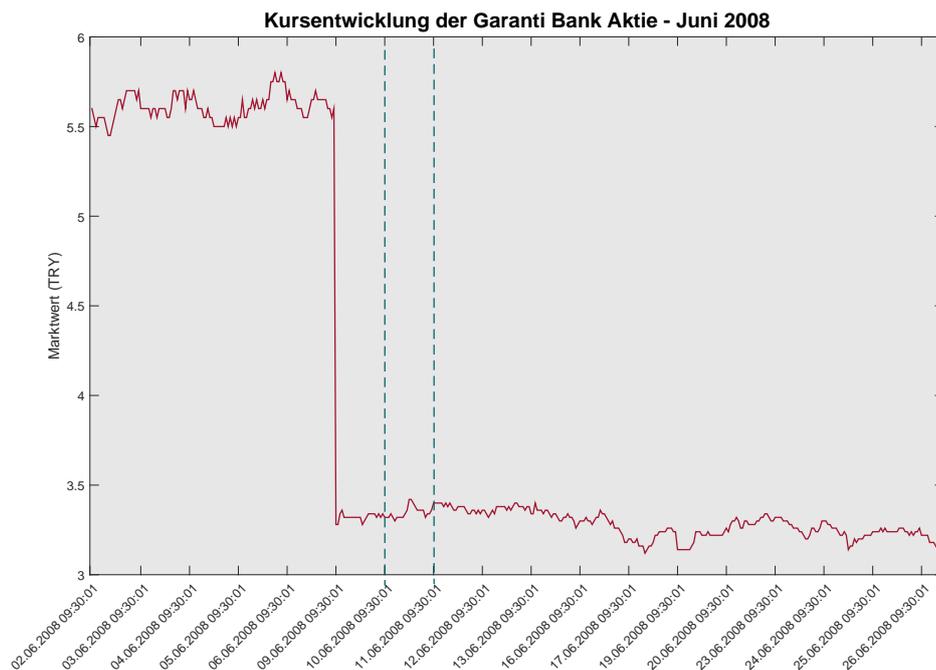


Abbildung 4.8: Aktienkursentwicklung mit genauerer Betrachtung des 10.06.2008

In der handelsfreien Zeit vom 06.06. auf den 09.06. gab es einen ziemlich großen Einbruch des Kurses. Der 10.06. wurde betrachtet, um zu sehen, wie sich dieser Einbruch auf die Tage danach auswirkt, und ob sich die Folgen im VPIN widerspiegeln.

Die folgende zwei Abbildungen 4.9 und 4.10 zeigen die Entwicklung des VPIN im Vergleich zum Marktwert der Aktie, einmal mit Schätzung des Kauf- und Verkaufsvolumens und einmal mit der genauen Aufteilung.

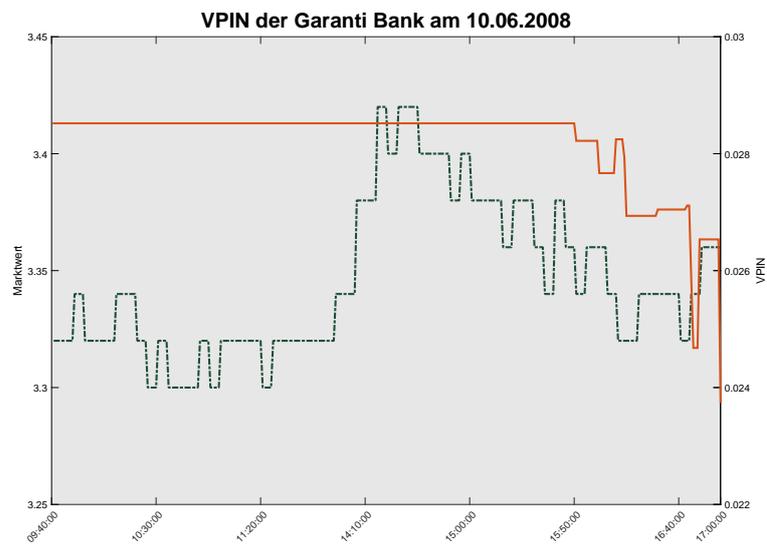


Abbildung 4.9: VPIN mit geschätzten Kauf- und Verkaufsvolumen

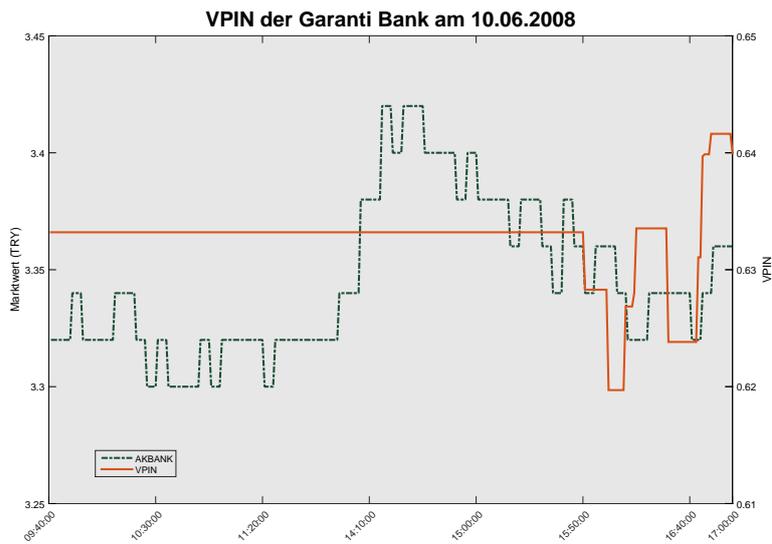


Abbildung 4.10: VPIN mit genauer Aufteilung von Kauf- und Verkaufsvolumen

Dieses Mal entwickeln sich der VPIN1 und der VPIN2 deutlich auseinander und man kann aus beiden Werten nicht erkennen, ob ein Crash bevorsteht.

Aus den betrachteten Beispielen kann man erkennen, dass der VPIN nur für Tage mit sehr hohen Volumen geeignet ist und eher nicht, um kleinere Crashes zu erkennen. Beim Flash Crash war das Volumen sehr hoch, daher hätte man mit dem VPIN die Ungleichgewichten am Markt erkennen können. Dagegen spricht die Arbeit von Andersen und Bondarenko [1]. Darin wurde der VPIN nochmal mit den Daten von 2010 untersucht und herausgefunden, dass der VPIN vor dem Flash Crash zwar sehr hoch, aber nicht außergewöhnlich hoch, war. Das heißt, wie auch in den Beispielen festgestellt wurde, dass der VPIN ein Indiz für Turbulenzen am Markt sein kann, aber es fraglich ist, ob man rechtzeitig darauf eingreifen kann. Eine Möglichkeit um genauere Informationen aus dem VPIN zu bekommen, ist es, wie man auch an den Beispielen sieht, das Volumen sehr genau in Kauf- und Verkaufsvolumen zu unterteilen. Damit bekommt man viel genauere und auch höhere Werte für den VPIN. Leider ist dies nur dann möglich, wenn man, wie in diesem Fall, die gesamten Orderbuchdaten zur Verfügung hat.

Trotzdem gibt es viele Punkte, die für den VPIN sprechen. Er wird schon seit Jahren in großen Investmentfirmen eingesetzt, die auch die Ergebnisse von Easley, Lopez de Prado und O'Hara stützen. Der VPIN hat sich also zu einer gängigen Methode zum Messen von toxischem Orderfluss entwickelt. Natürlich muss es immer Weiterentwicklungen geben, um bessere Methoden für das Einteilen in Kauf- und Verkaufsvolumen zu finden, aber daran wird laut Easley, Lopez de Prado und O'Hara laufend gearbeitet.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>vgl. Easley, Lopez de Prado und O'Hara [6]

## Kapitel 5

# Schlussfolgerung und Ausblick

Das Thema Flash Crashes und High Frequency Trading wurde in den letzten Kapiteln intensiv behandelt. Zu Beginn wurden grundlegende Definitionen erläutert, um den Markt besser verstehen und die Teilnehmer am Markt einordnen zu können. Außerdem wurden auch das Handeln in einem Dark Pool und deren Funktionsweise behandelt. Der Begriff High Frequency Trading wurde genauer definiert und einige wichtige Begriffe im Zusammenhang mit High Frequency Trading, wie Wartezeit und Serverhousing näher beschrieben. Es folgte eine genauere Betrachtung der Geschehnisse des 06. Mai und die Ursachen für den Crash, die SEC und CTFC Monate darauf in ihrem Bericht veröffentlicht haben.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der stochastischen Kontrolltheorie und darauf aufbauend wurden einige einfache Strategien der High Frequency Trader erläutert, wobei auch die verschiedenen Umstände am Markt miteinbezogen wurden z.B. das Handeln in einem Dark Pool oder das Handeln mit Limit Orders. Eine essentielle Folgerung, die man daraus schließen kann, ist, dass viele der Strategien, welche im High Frequency Trading verwendet werden, Strategien sind, die schon länger bekannt sind. Was aber erst durch die Modernisierung der Systeme eine schlagende Rolle spielt, ist die Geschwindigkeit, die dahinter steckt. Trader können nur sehr schwer nach dem Ausführen eines Algorithmus auf diesen eingreifen. Außerdem spielt das Zusammenspiel der verschiedenen Strategien eine große Rolle.

Man muss sich immer die Frage stellen, welche Reaktionen der Markt zeigt, wenn eine bestimmter Algorithmus ausgeführt wird. Wie reagieren andere Algorithmen und Marktteilnehmer darauf und wie kann man diese Verbessern bzw. welche Beschränkungen kann man am Markt einführen, um Manipulationen zu verhindern.

Im vierten Kapitel wurden noch Methoden vorgestellt, um Flash Crashes zu erkennen, wie z.B. der VPIN. Dieser wurde dann auch auf die Daten der ISE angewandt und mit den Ergebnissen aus den bisherigen Arbeiten verglichen. Es wurden die Vor- und Nachteile dieser Methodik diskutiert und verschiedenste Sichtweisen betrachtet. Die Ergebnisse, die mit den ISE-Daten berechnet wurden, wurden analysiert und mit den Ergebnissen aus anderen Arbeiten verglichen. Da der verwendete Datensatz nur eine sehr kleine Börse widerspiegelt, müsste man die Vorgehensweise der genauen Einteilung auch an größeren Börsen wiederholen und die Ergebnisse betrachten. Dabei steht man aber vor dem Problem nicht ausreichend Information über das Orderbuch zur Verfügung zu haben, bzw. fehlt es an einer Methode die vorhandenen Daten, welche am Markt zur Verfügung stehen, entsprechend zu verarbeiten.

Es wurden also verschiedenste Themen im Zusammenhang mit dem Flash Crash beleuchtet und unterschiedliche Theorien über die Ursache des Crashes betrachtet. Die Frage, ob nun das High Frequency Trading alleine am Flash Crash "Schuld" war, kann nicht eindeutig beantwortet werden. Es bedarf noch einer weiteren und genaueren Analyse des Marktes, vor allem des Zusammenspiels der einzelnen Teilnehmer. Man steht dabei vor einer riesigen Datenmenge, die man bewältigen muss, um daraus die relevanten Informationen zu filtern. Außerdem fehlen weitere Methoden, um vor allem Mini Flash Crashes zu erkennen, da auch diese einen erheblichen Einfluss auf das tägliche Handeln haben und immer wieder auftreten. Mit der Analyse kleinerer Crashes könnte man auch auf die größeren schließen bzw. bei deren Anzeichen einen Handelsstopp einbauen, die auch jetzt schon verwendet werden und dadurch einen großen Crash, wie der vom 06. Mai, verhindern.

Erst vor kurzem gab es wieder aktuelle Meldungen zum Thema Flash Crash. In der Abbildung 5.1 sieht man einige Schlagzeilen dazu.



Abbildung 5.1: Schlagzeilen zum Thema Flash Crash<sup>1</sup>

Eine der letzten Meldungen war die über einen größeren Flash Crash am 24.08.2016. Dabei fiel der SPY in wenigen Minuten nach der Öffnung um 5% und erholte sich im Laufe des Tages. Dieser Crash traf vor allem kleinere Investoren, da der Kauf von ETFs vorher in den Medien stark beworben wurde.<sup>2</sup>

Eine weiteres wichtiges Thema in den Medien war der Fall Navinder Singh Sarao. Er wurde beschuldigt, den Flash Crash am 06. Mai ausgelöst zu haben und zwar, indem er Verkauforders an den Markt sendete und diese sofort wieder zurücknahm, um dadurch den Preis nach unten zu treiben. Er wurde des Betrugs, genauer des sogenannten "Spoofing" beschuldigt und ihm wurde ein großer Einfluss auf die Ereignisse des 06. Mai gegeben. Unter "Spoofing" versteht man eine spezielle Strategie, bei dem ein Händler eine große Order abgibt, diese täuscht anderen Händlern einen Preisanstieg vor. Die Order wird schnell zurückgezogen und die Wertpapiere werden zu einem leicht höheren Preis verkauft. Jahrelang soll S. schon mit einem Algorithmus gearbeitet haben, der die Preise mit großen Verkauforders gedrückt haben soll. Verkaufen wollte er nicht, fast 99 % der Orders wurden wieder gelöscht. Durch dieses Verfahren hatte S. ein leichtes

<sup>1</sup>Bild vgl. Hougan [13]

<sup>2</sup>vgl. Mitchell [18] und Frankel [8]

Spiel auf den Märkten. War der Algorithmus eingeschaltet, gingen die Preise nach unten, schaltete er ihn aus, erholten sich die Preise wieder. Wie weit er wirklich für den Flash Crash verantwortlich war, und ob man einer Person so einen großen Einfluss auf die Krise geben kann, ist noch zu klären.<sup>3</sup>

Diese zwei Meldungen zeigen uns, dass der Flash Crash kein einmaliges Ereignis war bzw. dass bis jetzt noch an den Aufklärungen und Analysen dieses einen Flash Crashes gearbeitet wird. Obwohl gleich danach ein Bericht der SEC und CTFC veröffentlicht wurde.

Das heißt, wer oder was genau für die Ungleichgewichten am Markt Schuld ist, kann noch immer nicht genau geklärt werden. Es ist wahrscheinlich eine Kombination der veränderten Marktsituation und dem immer schneller werdenden Handel und der Reaktion der unterschiedlichen Marktteilnehmer, die es vor allem für kleinere Händler immer schwerer macht am Finanzmarkt zu bestehen, da sich diese nicht in der selben Geschwindigkeit zurückziehen können bzw. nicht rechtzeitig an die richtigen Informationen kommen. Aufsichtsbehörden stehen daher vor neuen Herausforderungen den Markt zu regulieren und gewisse Handelspraktiken auszugrenzen, die es möglich machen den Markt auszutricksen. Durch die hohe Geschwindigkeit, die am Markt herrscht, sollten diese auch ständig erneuert werden, denn wie man gesehen hat, führen auch einige der bisherigen Regulierungen zu kleineren Crashes. Daher kann man nicht alleine das High Frequency Trading für den Flash Crash verantwortlich machen. Natürlich haben diese durch die Geschwindigkeit, mit der sie reagieren können, einen gewissen Vorteil und können schneller ins Marktgeschehen eingreifen. Sie haben auch eher, als kleinere Anleger, die Möglichkeit den gerade richtigen Preis eines Wertpapiers zu sehen. Trotzdem muss man den ganzen Markt betrachten, vor allem auch die Dark Pools und auch andere Händlern, wie z.B. Navinder S. und das Thema Spoofing (Marktmanipulation). Vor allem sollte auch die Interaktion dieser ganzen Strategien genauer betrachtet werden. Es ist interessant, wie manche Algorithmen auf gewisse Marktsituationen reagieren und wie zu dieser Zeit die Reaktion der anderen Handelsteilnehmer auf diese ist.

Das Thema bleibt weiter spannend und wird uns, da immer wieder kleinere Crashes auftreten werden, weiter begleiten, um weiterhin nach einer Ursache zu suchen bzw. und nach noch effektiveren Methode Flash Crashes im Vorhinein zu erkennen oder diese zu verhindern.

---

<sup>3</sup>vgl. Hellier [11] und Dörner [5]

# Literaturverzeichnis

- [1] ANDERSEN, T. UND BONDARENKO, O. VPIN and the Flash Crash. *Journal of Financial Markets*, 17:1–46, (2014).
- [2] BEIKE, R. UND SCHLÜTZ, J. *Finanznachrichten lesen - verstehen - nutzen*. Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart, (2015). 6. Auflage.
- [3] BORSA ISTANBUL. Website. Online erhältlich unter <http://www.borsaistanbul.com/en/products-and-markets/markets/equity-market/order-types>.
- [4] CARTEA, A., JAIMUNGAL, S. UND PENALVA, J. *Algorithmic and High-Frequency Trading*. Cambridge University Press, (2015). 1. Auflage.
- [5] DÖRNER, ASTRID. Der Mann, der den Dow Jones ins Wanken brachte. Website, (2015). Online erhältlich unter <http://www.handelsblatt.com/finanzen/anlagestrategie/fonds-etf/flash-crash-und-hochfrequenzhandel-der-mann-der-den-dow-jones-ins-wanken-brachte/11670564.html>; abgerufen am 7. Juni 2015.
- [6] EASLEY, D., LOPEZ DE PRADO, M. UND O'HARA, M. *VPIN and the Flash Crash: A Comment*.
- [7] EASLEY, D., LOPEZ DE PRADO, M. UND O'HARA, M. Flow Toxicity and Liquidity in a High Frequency World. *Review of Financial Studies*, 25:1457–1493, (2012).
- [8] FRANKEL, C. Mini flash crash? Trading anomalies on manic Monday hit small investors. Website, August 2015. Online erhältlich unter [https://www.washingtonpost.com/business/economy/mini-flash-crash-trading-anomalies-on-manic-monday-hit-small-investors/2015/08/26/6bdc57b0-4c22-11e5-bfb9-9736d04fc8e4\\_story.html/](https://www.washingtonpost.com/business/economy/mini-flash-crash-trading-anomalies-on-manic-monday-hit-small-investors/2015/08/26/6bdc57b0-4c22-11e5-bfb9-9736d04fc8e4_story.html/), abgerufen am 14. März 2016.

- 
- [9] GOLUB, A., KEANE, J. UND POON, S. *High Frequency Trading und Mini Flash Crashes*. (2000).
- [10] GOMBER, P., ARNDT, B., LUTAT, M. UND UHLE, T. High-frequency trading. (2011).
- [11] HELLIER, D. Trader made nearly 900.000 dollar profit from "flash crash", court hears. Website, Februar 2016. Online erhältlich unter <http://www.theguardian.com/business/2016/feb/04/flash-crash-trader-navinder-singh-sarao-extradition-hearing-begins/>, abgerufen am 08. April 2016.
- [12] HENDERSHOTT, T. UND RIORDAN, R. Algorithmic Trading and Information. Working Papers 09-08, NET Institute, (2009).
- [13] HOUGAN, M. The One Thing That Will Hurt Your ETF in a Mini-Flash Crash. Website, September 2015. Online erhältlich unter <http://blogs.wsj.com/experts/2015/09/11/the-one-thing-that-will-hurt-your-etf-in-a-mini-flash-crash/>, abgerufen am 08. April 2016.
- [14] INVESTOPEDIA. Good 'Til Canceled - GTC'. Website. Online erhältlich unter <http://www.investopedia.com/terms/g/gtc.asp>.
- [15] INVESTOPEDIA. National Best Bid and Offer - NBBO. Website. Online erhältlich unter <http://www.investopedia.com/terms/n/nbbo.asp>, abgerufen am 14. März 2016.
- [16] LEWIS, M. *Flash Boys*. Campus Verlag, (2015).
- [17] MENKVELD, A. UND YUESHEN, B. Anatomy of the Flash Crash. (2013).
- [18] MITCHELL, C. The Two Biggest Flash Crashes of 2015. Website, 2016. Online erhältlich unter <http://www.investopedia.com/articles/investing/011116/two-biggest-flash-crashes-2015.asp/>; abgerufen am 08. April 2016.
- [19] OKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag, (2000). 5. Auflage.
- [20] PHILLIPS, M. Accenture's Flash Crash: What's an "Intermarket Sweep Order". Website, Mai 2010. Online erhältlich unter <http://blogs.wsj.com/marketbeat/2010/05/07/accentures-flash-crash-whats-an-intermarket-sweep-order/>; abgerufen am 23. März 2016.

- [21] U.S. COMMODITY FUTURES TRADING COMMISSION AND U.S. SECURITIES AND EXCHANGE COMMISSION. *Findings Regarding the Market Events of May 6, 2010*. (2010).
- [22] VAANANEN, J. *Dark Pools and High Frequency Trading for Dummies*. John Wiley and Sons, (2015). 1. Auflage.
- [23] VALENZUELA, M., ZER, I., FRYZLEWICZ, P. UND RHEINLÄNDER, T. Relative Liquidity and Future Volatility. *Journal of Financial Markets*, (2015).

# Anhang A

## Matlab Codes

### A.1 Mini Flash Crashes

Listing A.1: Downcrash

```
1 m=1;
2 minicrash=0;
3 k=0;
4 l=0;
5 s=0;
6 crash = 0;
7 time = 0;
8 pricechange = 0;
9 for i=1:10
10     order=stock08061(i).order;
11 n=length(order)-1;
12 for j=m:n
13     a=order(j,25); %Anfangspreis
14     time=order(j,10); %Zeit zu Beginn
15     for l=1:n-j
16         if order(l+j,25) < order(l+j-1,25)
17             k = k+1;
18             if k >= 3 && order(l+j,25) < order(l+j+1,25)
19                 if order(l+j,10) - time < 300000
20                     s=a-order(l+j,25);
21                     pricechange=a*0.008;
22                     if pricechange < s
23                         crash = crash + 1;
24                         k=0;
25                         m=j+1;
26                     end;
27                 end;
```

```

28         end;
29         elseif order(l+j-1,1) ~= order(j,1) ||
30             order(l+j,10)-time >= 300000 || order(l+j,25) > order(l+j+1,25)
31             k=0;
32         break;
33         end;
34     end;
35 end;
36 minicrash = minicrash + crash;
37 end;

```

Listing A.2: Upcrash

```

1  m=1;
2  minicrash=0;
3  k=0;
4  l=0;
5  s=0;
6  crash = 0;
7  time = 0;
8  pricechange = 0;
9  for i=1:10
10 order=stock08061(i).order;
11 n=length(order)-1;
12 for j=m:n
13     a=order(j,25); %Anfangspreis
14     time=order(j,10); %Zeit zu Beginn
15     for l=1:n-j
16         if order(l+j,25) > order(l+j-1,25)
17             k = k+1;
18             if k >= 10 && order(l+j,25) > order(l+j+1,25)
19                 if order(l+j,10)-time < 20
20                     s=a-order(l+j,25);
21                     pricechange=a*0.008;
22                     if pricechange > s
23                         crash = crash + 1;
24                         k=0;
25                         m=j+1;
26                     end;
27                 end;
28             end;
29         elseif order(l+j-1,1) ~= order(j,1) ||
30             order(l+j,10)-time >= 300000 || order(l+j,25) < order(l+j+1,25)
31             k=0;
32         break;
33     end;

```

```

34     end;
35 end;
36 minicrash = minicrash + crash;
37 end;

```

## A.2 VPIN

Listing A.3: Berechnung der Buckets

```

1  %Berechnung des durchschnittlichen Volumen pro Tag
2  trade=stock08061(8).trade;
3  n=length(trade)-1;
4  m=length(trade);
5  count=1;
6  V=0;
7  Bucket=0;
8  %Berechnung der Handelstage
9  for i=1:n
10     if trade(i,1)<trade(i+1,1)
11         count=count+1;
12     end;
13 end;
14 %Berechnung des Gesamtvolumens
15 for j=1:m
16     V=V+trade(j,10);
17 end;
18 Bucket= V/(count*50);

```

Listing A.4: Berechnung der Preisabweichung zur Berechnung des geschätzten VPIN

```

1  %Berechnung von Delta_P_i
2  %Speichert die Ergebnisse in einen Vektor
3  trade=stock08061(8).trade;
4  n=length(trade)-1;
5  index=0;
6  Delta_P=zeros(n,1);
7  new=0;
8  for i = 1:n
9     if trade(i+1,1)==10
10        Delta_P(i)= trade(i+1,9)-trade(i,9);
11        P=trade(i+1,9)-trade(i,9);
12        V=P*ones(trade(i+1,10),1);
13        new=[new,V'];
14    end;
15 end;

```

Listing A.5: Aufteilen in Kauf- und Verkaufsvolumen zur Berechnung des geschätzten VPIN

```
1 %Berechnung des durchschnittlichen Volumen pro Tag
2 trade=stock08061(8).trade;
3 n=length(trade)-1;
4 m=length(trade);
5 count=1;
6 V=0;
7 Bucket=0;
8 %Berechnung der Handelstage
9 for i=1:n
10     if trade(i,1)<trade(i+1,1)
11         count=count+1;
12     end;
13 end;
14 %Berechnung des Gesamtvolumens
15 for j=1:m
16     V=V+trade(j,10);
17 end;
18 Bucket= V/(count*50);
```

Listing A.6: Aufteilen in Kauf- und Verkaufsvolumen zur Berechnung des genauen VPIN

```
1 %Berechnung des durchschnittlichen Volumen pro Tag
2 trade=stock08061(8).trade;
3 n=length(trade)-1;
4 m=length(trade);
5 count=1;
6 V=0;
7 Bucket=0;
8 %Berechnung der Handelstage
9 for i=1:n
10     if trade(i,1)<trade(i+1,1)
11         count=count+1;
12     end;
13 end;
14 %Berechnung des Gesamtvolumens
15 for j=1:m
16     V=V+trade(j,10);
17 end;
18 Bucket= V/(count*50);
```

Listing A.7: Berechnung der  $V_\tau$  geschätzt

```

1  %Berechnung der V_tau
2  A=new ' ;
3  n=length(A);
4  V=1300000;
5  tau=0;
6  sigma=std(A(1:n,1));
7  sum=0;
8  V_tau_B=0;
9  V_tau_S=0;
10 for i=1:n
11     tau=tau+1;
12     sum=0;
13     if n<tau*V
14         break;
15     elseif n>=tau*V
16         for j=(tau-1)*V+1:tau*V
17             sum = sum + normcdf(A(j,1)/sigma);
18         end;
19     end;
20     V_tau_B(i)=sum;
21     V_tau_S(i)= V-sum;
22 end;

```

Listing A.8: Berechnung der  $V_\tau$  genau

```

1  A=new ' ;
2  n=length(A);
3  V=1300000;
4  tau=0;
5  sum=0;
6  V_tau_B=0;
7  V_tau_S=0;
8  for i=1:n
9     tau=tau+1;
10    sum=0;
11    if n<tau*V
12        break;
13    elseif n>=tau*V
14        for j=(tau-1)*V+1:tau*V
15            sum = sum + A(j,1);
16        end;
17    end;
18    V_tau_B(i)=sum;
19    V_tau_S(i)= V-sum;
20 end;

```

Listing A.9: Berechnung des VPIN genau und geschätzt

```
1 %Berechnung des VPIN
2 V=1300000;
3 L=length(V_tau_B);
4 t=0;
5 sum=0;
6 tau=0;
7 VPIN=0;
8 for j=1:100
9     sum=0;
10    for i=1+tau:50+tau
11        sum=sum+abs(V_tau_S(1,i)-V_tau_B(1,i));
12    end;
13    VPIN(j)=sum/(50*V);
14    tau = tau+1;
15    if 50+tau > L
16        break;
17    end;
18 end;
```