Technische Universität Wien
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Das Pascal'sche Dreieck und die Stirling-Zahlen 1. und 2.Art

Ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof.Mag.Dr.Manfred Kronfellner

durch

Najwa Ismail
Matrikelnummer: 0025289
Lastenstrasse 12/2/44
3500 Krems an der Donau

Krems an der Donau, am 22.07.2013

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Krems an der Donau, am 22.07.2013

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich überwiegend mit dem Pascal'schen Zahlendreieck und dessen verborgenen Strukturen. Es wird der Frage nachgegangen, welche verschiedenen Muster und bekannten Zahlen sich darin verstecken und auch ein Zusammenhang zur Kombinatorik geschaffen. Ziel dieser Arbeit ist es, sowohl in die Geschichte der Mathematik als auch in die Mathematik dahinter einzudringen, wobei etwaige Strukturen durch Satz, deren Interpretation und Beweis gekennzeichnet sind. Auf die maßgebenden historischen Persönlichkeiten wird zu Beginn des jeweiligen Kapitels Bezug genommen. Im Verlauf dieser Arbeit wird deutlich, dass das Pascal'sche Dreieck, welches Teil der Schulmathematik ist, viele interessante Muster verbirgt, die sich der höheren Mathematik zuordnen lassen. Außerdem wird ersichtlich, dass dessen Bezüge sich über weitere Gebiete als die abzählende Kombinatorik erstrecken. Darunter befinden sich die figurierten Zahlen, die Fibonacci-Zahlen, das Sierpinski-Dreieck, der Zusammenhang zum Binärsystem, der goldene Schnitt, die Zahl Pi und viele weitere. Aufgrund der Dreiecksstruktur der Pascal'schen Dreiecks wird im letzten Kapitel auf die Stirling-Zahlen erster und zweiter Art eingegangen, da auch diese eng mit der Fakultät und den Binomialkoeffizienten zusammenhängen und sich ebenfalls in dreieckiger Form anordnen lassen.

Abstract

This thesis is primarily about Pascal's arithmetic triangle and it's hidden structures. It deals with the question of different patterns and defined numbers hidden in it and also creates a connection to combinatorical mathematics. The aim of this work is to provide insight into the history of mathematics as well as the mathemathical subject behind it, whereas any binomial identity is characterised by a sentence, interpretation and it's proof. The main historical personage will be introduced in the beginning of the particular chapter. While reading this thesis, it can be seen, that although Pascal's triangle nowadays is part of elementary school mathematics, many interesting hidden patterns can be assigned to higher mathematics. Moreover it is apparent, that it's connections extend to more areas than the enumerative combinatorics, such as the figurate numbers, the Fibonacci numbers, the Sierpinski triangle, it's relation to the binary system, the golden section, the number pi and many more. Due to the triangular structure the last chapter discusses the Stirling numbers of the first and second kind, since these are closely related to the binomial coefficients and can also be arranged in a triangular shape.

Danksagung

Zu aller erst möchte ich mich herzlich bei meinem Betreuer **Ao.Univ.Prof. Mag.Dr.Manfred Kronfellner** bedanken, der mich seit Beginn der Arbeit jederzeit unterstützte und mir bei jeder noch so unwichtigen Frage behilflich war. Des weiteren möchte ich mich herzlich bei **Ao.Univ.Prof. Dr.phil. Günther Karigl** bedanken, der es mir in seiner Aufgabe als Dekan ermöglichte, als Studentin der Technischen Mathematik ein solches Thema zu wählen und damit auch einen Einblick in die Geschichte der Mathematik zu geben.

Der größte Dank gilt allerdings meiner Schwester, **Frau Mag.pharm. Heba Ismail**. Sie ist für mich eine Säule, ohne die ich nicht stehen könnte. Ich danke ihr für Alles, was sie mir im Laufe meines Leben gegeben hat und auch noch geben wird. Wenn ich eines weiß, dann, dass sie in allen Lebenslagen für mich da war und es vor allem auch immer sein wird. Dafür danke ich ihr!

Des Weiteren bedanke ich mich bei meinen Eltern - **Frau Widaad Ismail** und **Herr Mohinudeen Ismail** für ihre Unterstützung, sowie bei meinen Freunden und Arbeitskollegen, die mir alle stets mit Rat und Tat beiseite standen - besonders bei **Frau Manuela Murth-Menhardt** und **Herrn Ljupčo Josip Cvetkovski**.

Besonders für ihre moralische Unterstützung während diese Arbeit entstand möchte ich mich herzlich bei **Kathrin Fritz**, **Sandra Svoboda** und vor allem bei **Mag.(FH) Alice Grubich** bedanken.

Ein besonderer Dank gilt **Herrn Lukas Werner**, der in vielen Lebenslagen - insbesondere gegen Ende meines Studiums - immer an meiner Seite war. Dafür möchte ich ihm meinen Dank aussprechen.

Einen in meinem Leben besonderen Menschen möchte ich noch erwähnen, **Frau Veronika Payer-Grasl**: Mein Vorbild, meine Stütze, meine Freundin und meine "Mama". Auch ihr gebührt diese Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Für Xanuk Le Bosseur.
Mögest du in Frieden ruhen.

Kapitel 1

Grundlagen der Kombinatorik

„Unschwer wirst du sehen, dass dieser Zweig der Mathematik oft nicht weniger verzwickt als ergötzlich ist.“
(Daniel Bernoulli)[1]

Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der diskreten Mathematik.
Sie beschäftigt sich mit dem Abzählen, Anordnen und Auswählen der Elemente einer endlichen Menge. Dadurch ergeben sich verschiedene Begriffe, wie zum Beispiel

- die Permutationen (Anordnungen),
- die Kombinationen/Variationen (Auswahlen) oder
- die Partitionen (Verteilungen und Zerlegungen)

Für kombinatorische Anzahlprobleme eignet sich natürlich das Auflisten aller Elemente, die so genannte Enumeration[2]. Praktisch stößt dieses Verfahren jedoch schnell an seine Grenzen, da dies mit großem Zeitaufwand verbunden ist.

Im Verlauf dieser Arbeit möchte ich zeigen, dass das Lösen derartiger Anzahlprobleme zu speziell definierten Zahlen und Gesetzmäßigkeiten in den natürlichen Zahlen führt. Dazu zählen u.a. die Fakultät, Binomialkoeffizienten, Stirling-Zahlen erster und zweiter Art und viele weitere. [79]

[1]Schweizer Mathematiker und Physiker, 1700-1782
[2]lateinisch: enumeratio ... Aufzählung

1.1 Geschichtlicher Hintergrund

1.1.1 Die Kombinatorik vor Christi Geburt

Das früheste bekannte Auftreten der Kombinatorik lässt sich zurückführen auf 1550 vor Christus, nämlich auf „Papyrus Rhind[3]“.
Dies ist eine altägyptische, auf Papyrus verfasste Abhandlung zu verschiedensten mathematischen Themen, die heute als Algebra, Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie bekannt sind. Sie gilt als eine der wichtigsten Quellen für das Wissen über die Mathematik im Alten Ägypten.

Abbildung 1.1: „Fragment des Papyrus Rhind“ [1]

Im chinesischen Buch „I Ging[4]“, welches 1200 vor Christus entstanden ist, findet man einige kombinatorische Grundlagen. Beispielsweise werden darin die magischen Quadrate[5] erwähnt.

„I Ging“ - auch als „Buch der Wandlungen“ oder „Klassiker der Wandlungen“ bekannt - ist der älteste chinesische Text.

[3] benannt nach dem schottischen Anwalt und Antiquar Alexander Henry Rhind, der es 1858 in Luxor erwarb.
[4] auch bekannt als „I Ching“ oder „Yi Jīng“
[5] Ein magisches Quadrat ist ein in mehrere kleinere gleiche Quadrate geteiltes Quadrat, in dessen Felder die natürlichen Zahlen so eingeschrieben sind, dass alle Horizontal-, Vertikal- und Diagonalreihen die gleiche Summe ergeben.

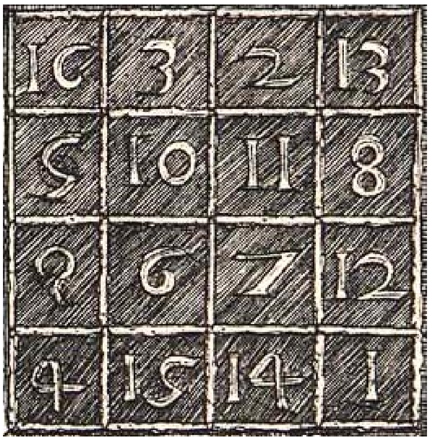

Abbildung 1.2: Eines der berühmtesten magischen Quadrate nach Albrecht Dürer - aus dem Kupferstich „Melencolia I“. [2]

Es behandelt die Bedeutung verschiedener Lebensstationen, wobei jede dieser Lebensstationen durch ein Hexagramm[6] verdeutlicht wird. Da jedes Hexagramm eine Permutation mit Wiederholung von sechs Strichen ist, wobei diese Striche entweder unterbrochen oder durchgezogen sein können, liefert die Kombinatorik die Antwort auf die Frage, wie viele solche Hexagramme es gibt, nämlich $2^6 = 64$ Hexagramme. [3]

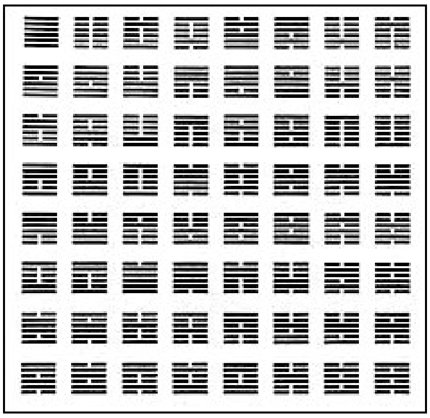

Abbildung 1.3: „Die 64 Hexagramme des Buches I Ging“ [4]

600 vor Christus behauptete der indische Chirurg Sushruta[7] in seinem Werk „Sushruta Samhita“, dass es 63 mögliche Kombinationen von sechs verschiedenen Gegenständen gibt, wenn man erst eines, dann zwei, dann drei ... dieser

[6]Als Hexagramm bezeichnet man verschiedene grafische oder schriftliche Darstellungen aus sechs ähnlichen bzw. einfachen Elementen.

[7]Sushruta lebte voraussichtlich im frühen sechsten Jahrhundert vor Christus und beschrieb unter anderem Operationen, Operationsinstrumente, Krankheiten und medizinische Pflanzen.

Gegenstände betrachtet. Er errechnete insgesamt $2^6 - 1$ Möglichkeiten dafür.

Der griechische Schriftsteller Plutarch[8] befasste sich mit einem „schwierigeren“ Problem der abzählenden Kombinatorik, welches sowohl von dem Philosophen Chrysipp[9] als auch dem Astronomen Hipparch[10] diskutiert wurde und heute bekannt ist unter dem Namen der „Schröder Zahlen[11]“. Diese Zahlen beschreiben die Anzahl der möglichen Wege in einem $n \times n$-Gitter, um von der Ecke links unten, also $(0,0)$, schrittweise nach rechts oben, (n,n), zu gelangen, wobei man die Diagonale $y = x$ nicht überschreiten darf. Daraus erhält man die „Schröder Zahlen“: 1 $(n = 0)$, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, ... [5]

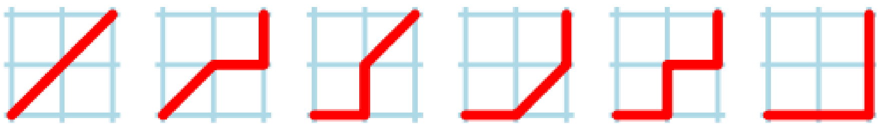

Abbildung 1.4: Die sechs möglichen Wege eines 2×2-Gitters. [6]

Plutarch schrieb auch, dass Xenokrates[12], ebenfalls ein Philosoph aus Griechenland, die Anzahl der verschiedenen möglichen Silben der griechischen Sprache entdeckte, nämlich 1.002×10^{12}.

300 vor Christus wurde in einem jinistischen[13] Text, dem „Bhagabati Sutra“, das erste Mal die kombinatorische Fragestellung erwähnt:
„Auf wie viele Arten kann man aus sechs *Dingen* ein, zwei oder drei dieser *Dinge* ziehen?“ Das „Bhagabati Sutra“ ist das erste Buch, in dem die Binomialkoeffizienten indirekt erwähnt wurden, da es sich mit verschiedenen Kombinationen beschäftigt.

[8] 45-125 nach Christus
[9] Chrysippos von Soloi, 279-206 vor Christus
[10] Hipparchos von Nicäa, 190-120 vor Christus
[11] benannt nach dem deutschen Mathematiker Ernst Schröder (1841-1902)
[12] Xenokrates von Chalkedon, 396 oder 395-314 oder 313 vor Christus
[13] Der Jainismus oder auch Jinismus bezeichnet eine in Indien beheimatete Religion.

Die nächsten Ideen über die Kombinatorik stammten 200 vor Christus von Pingala[14].
Er beschäftigte sich mit der Frage, aus wie vielen kurzen und langen Noten ein sechs-silbiger Takt bestehen kann. Diese Problemstellung schrieb er in seinem Werk „Chandasutra[15]“ nieder. In weiterer Folge berechnete er die Anzahl von Takten, die n lange Noten und k kurze Noten enthielten, welches gleichzusetzen ist mit der Berechnung der Binomialkoeffizienten. [3]

1.1.2 Die Kombinatorik nach Christi Geburt

Die magischen Quadrate blieben in China von großem Interesse. Zwischen 300 und 1300 nach Christus begann man, das ursprüngliche 3×3 Quadrat zu verallgemeinern. Zu dieser Zeit arbeitete China gemeinsam mit dem mittleren Osten an dieser Problematik.

Im frühen Mittelalter, 850 nach Christus, begann der indische Mathematiker Mahavira[16] die Ideen aus dem „Bhagabati Sutra“ zu verallgemeinern. Auch Pingalas Arbeiten wurden 1100 nach Christus erweitert. Der jinistische Schüler Acharya Hemachandra[17] befasste sich mit der Fragestellung, wie viele Takte der Länge n existieren, und zwar unter der Annahme, dass eine „lange Note“ das Doppelte einer „kurzen Note“ sei. Angenommen, es gibt $F(n)$ Möglichkeiten für einen Takt der Länge n. Endet dieser Takt mit einer kurzen Note, dann verbleibt ein Takt der Länge $n-1$, für den es $F(n-1)$ Möglichkeiten gibt. Endet er dagegen mit einer langen Note, führt dies zu $F(n-2)$ Möglichkeiten. Da ein Takt der Länge n eine beliebige Abfolge von kurzen und langen Noten ist, deren Längen sich zur Gesamtlänge n summieren, ergab dies laut Hemachandra folgende Rekursion: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$. Durch diese Rekursionsgleichung erhält man heute die uns bekannten „Fibonacci Zahlen“. [3]

[14] Pingala war ein alt-indischer Mathematiker, der unter anderem die Grundidee des Binärsystems entwickelte.
[15] auch bekannt als Chanda sutra
[16] gilt als Begründer des Jainismus/Jinismus, Bedeutung: „großer Held“
[17] 1089-1172

Der jüdische Schriftsteller Abraham ibn Ezra[18] zählte die Permutationen mit Wiederholung in der Vokalisierung[19] des Namen Gottes. Er stellte auch die Symmetrie der Binomialkoeffizienten fest, wobei der Beweis jedoch auf den jüdischen Mathematiker Gersonides[20] zurückgeht. [5]
In diese Zeit fällt auch das arithmetische Zahlendreieck, auf dessen Geschichte ich im nächsten Kapitel näher eingehen werde.

Die Thematik der Kombinatorik erreichte Europa im 13. Jahrhundert durch die beiden Mathematiker Leonardo Fibonacci[21] und Jordanus de Nemore[22]. Fibonacci's Werk „Liber Abaci" brachte viele arabische und indische Ideen, unter anderem die der Kombinatorik und der Fibonacci Zahlen, nach Europa. Jordanus war einer der Ersten, der die Binomialkoeffizienten in einem Dreieck anordnete. Kurz darauf wurde dies in vielen anderen Ländern auch gemacht, beispielsweise 1265 im mittleren Osten oder 1300 in China. [3]

Im Westen datiert man den Beginn der Kombinatorik auf das 17. Jahrhundert durch die beiden französischen Mathematiker Blaise Pascal[23] und Pierre de Fermat[24]. Sie stießen durch die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf viele klassische, kombinatorische Erfolge. Der Begriff „Kombinatorik" wurde im modernen mathematischen Sinne erstmals von dem deutschen Mathematiker und Philosophen Gottfried Wilhelm Leibniz[25] in seinem Werk „Dissertatio de Arte Combinatoria" erwähnt. Er lieferte dadurch viele Anwendungen dieser neuen Disziplin in den verschiedensten Wissenschaften. Pascal und Leibniz werden als Begründer der modernen Kombinatorik betrachtet. [7]

[18] auch bekannt unter Abraham ben Meir ibn Esra, Abraham Ben Ezra; 1092-1167
[19] bezeichnet die Veränderung der Aussprache, bei der ein Konsonant zu einem Vokal (verselbstlautet) wird, beispielsweise in vielen deutschen Mundarten (Schuld→ „Schuid").
[20] Levi ben Gershon, 1288-1344
[21] Sein eigentlicher Name war Leonardo von Pisa; Fibonacci stammt von „filius Bonacci", Sohn des Bonacci. Vermutungen führen zum Geburtsjahr um 1170, das Todesjahr wird nach 1240 angenommen.
[22] Seine Lebensdaten sind nicht überliefert, jedoch führen Annahmen auf die erste Hälfte des 13. Jahrhunderts.
[23] 1623-1662, siehe Kapitel 2
[24] 1607-1665, französischer Mathematiker und Jurist
[25] 1646-1716, deutscher Philosoph, Wissenschaftler, Mathematiker, Diplomat, Physiker, Historiker und Politiker

Der französische Mathematiker Abraham de Moivre[26] beschäftigte sich mit deren Errungenschaften und erweiterte den Binomialkoeffizient auf den Multinomialkoeffizient. Er approximierte außerdem die Binomialkoeffizienten und die Fakultät. [3]

Der in Basel geborene Mathematiker Jakob Bernoulli[27] leistete mit seinem Werk „Ars conjectandi“ (Die Kunst des Vermutens) wichtige Beiträge zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik. Es wurde im Sommer 1713, acht Jahre nach seinem Tod, von seinem Neffen Niklaus Bernoulli[28] in Basel veröffentlicht. Darin widmete Jakob Bernoulli sich unter anderem den Binomialkoeffizienten und deren Verteilung. [8]

Zu Beginn des 18. Jahrhunderts leistete Leonard Euler[29] seine Beiträge zu den verschiedensten Gebieten der Mathematik, auch zur Kombinatorik. 1736 veröffentlichte er seine Arbeit „Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis“. Da dies eine der ersten Arbeiten auf dem Gebiet der Graphentheorie[30] war, gilt Euler bis heute als Begründer der Graphentheorie. [3]

In dieser Arbeit beschäftigte er sich außerdem mit dem „Königsberger Brückenproblem“. Dies ist eine mathematische Fragestellung, die anhand von sieben Brücken der Stadt Königsberg verdeutlicht wurde.
Das Problem war Folgendes:
Man sollte herausfinden, ob es einen Weg gibt, bei dem man alle sieben Brücken über den Pregel genau einmal überquert und wieder zum Ausgangspunkt gelangt.

[26] 1667-1754
[27] 1655-1705
[28] 1695-1726, Mathematiker und Jurist aus der Familie Bernoulli
[29] 1707-1783, schweizer Mathematiker
[30] Die Graphentheorie bezeichnet ein Teilgebiet der Mathematik, das diverse Eigenschaften von Graphen und deren Beziehungen zueinander untersucht.

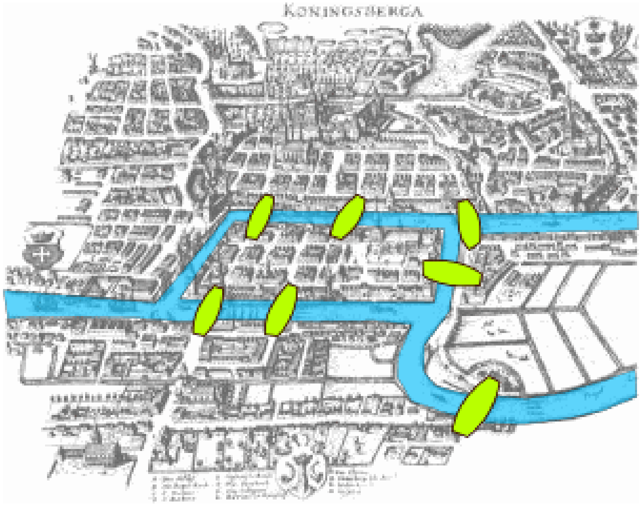

Abbildung 1.5: „Das 'Königsberger Brückenproblem" [9]

1736 bewies Euler, dass ein solcher Weg beziehungsweise „Euler'scher Weg" in Königsberg nicht möglich war, da zu allen vier Ufergebieten beziehungsweise Inseln eine ungerade Zahl von Brücken führte. Dies war kein klassisches geometrisches Problem. Es handelte sich um ein topologisches Problem, welches Euler mit verschiedenen Methoden löste, die heute der Graphentheorie zugeordnet werden. [10]

Weiters sei hier zu erwähnen, dass Euler sich intensiv mit den sogenannten „lateinischen Quadraten" befasste:

> *„Ein lateinisches Quadrat ist ein Quadrat aus $n \times n$ Feldern, wobei jedes Feld mit je einem von n verschiedenen Symbolen belegt ist, so dass jedes Symbol in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal auftritt. Die natürliche Zahl n wird Ordnung des lateinischen Quadrats genannt."*[31]

Als Symbole werden die natürlichen Zahlen, Buchstaben oder auch Farben verwendet. Euler benutzte als Symbolmenge das lateinische Alphabet, woraus sich heute der Name ableitet. Heutzutage ist dieses Phänomen als Sudoku bekannt, denn dabei handelt es sich um ein lateinisches Quadrat der Ordnung 9 mit der Zusatzbedingung, dass in den 9 vorliegenden 3×3-Teilquadraten alle Symbole jeweils nur einmal auftreten. [11]

[31] [11]

Abbildung 1.6: Lateinisches Quadrat in einem Fenster am Cambridge-College, [12]

Gegen Ende des 19.Jahrhunderts kam es in England zu großen Fortschritten auf dem Gebiet der Kombinatorik. Der englische Mathematiker Arthur Cayley[32] lieferte wichtige Beiträge zur Graphentheorie. Sein Freund James Joseph Sylvester[33], ebenfalls Mathematiker, entdeckte viele kombinatorische Ergebnisse. [7]

Heute ist die Kombinatorik ein wichtiger Teil der Mathematik, deren Anwendung sich über viele Sparten erstreckt. In der Kombinatorik selbst unterscheidet man ebenfalls viele Teildisziplinen, ich werde mich im weiteren Verlauf dieser Arbeit jedoch überwiegend mit dem Gebiet der abzählenden Kombinatorik beschäftigen.

[32] 1821-1895
[33] 1814-1897, britischer Mathematiker

1.2 Die abzählende Kombinatorik

„Auf wie viele verschiedene Arten kann man aus n Objekten eine geordnete oder ungeordnete Stichprobe auswählen?"

Mit dieser und ähnlichen Fragestellungen beschäftigt sich die abzählende Kombinatorik.
Es wird eine Grundmenge von n Objekten betrachtet. Daraus werden nun k (bzw. alle n) Objekte ausgewählt. Für die Untersuchung ist es unwesentlich, welche konkreten Objekte (Kugeln, Bücher, Zahlen, Buchstaben, ...) vorliegen. Es sollten jedoch drei Parameter berücksichtigt werden:

- Wird die Gesamtheit aller Elemente (n) oder nur eine Teilauswahl (k) betrachtet?
- Wird die Reihenfolge berücksichtigt?
- Wird ohne oder mit Zurücklegen (d.h., besteht die Möglichkeit der Wiederholung bereits einmal ausgewählter Objekte) gezogen/ausgewählt?

Je nach Parameter erhält man den Begriff der Permutation, Variation bzw. Kombination.

1.2.1 Permutationen

Permutationen[34] begegnen uns im täglichen Leben. So handelt es sich zum Beispiel in unserer Sprache (bei einem Anagramm), beim Sport (Positionswechsel), beim Mischen von Karten, beim Kinderspiel „Reise nach Jerusalem" und vielem mehr um Permutationen.

Definition: Unter einer Permutation versteht man eine Anordnung von n Elementen in einer bestimmten Reihenfolge.

Je nachdem ob ein Objekt mehrfach auftreten darf oder nicht, spricht man von einer *„Permutation mit Wiederholung"* oder einer *„Permutation ohne Wiederholung"*. [79]

[34] lateinisch: permutare ... vertauschen, tauschen

a) **Permutation ohne Wiederholung**

Beispiel: Gegeben seien die vier Buchstaben L, I, S, A.
Wie viele Anordnungsformen dieser 4 Buchstaben gibt es?

⇒ Durch die Methode der Enumeration erhält man folgende Zusammensetzungen (in lexikographischer[35] Ordnung von links nach rechts): AILS

AISL	ALIS	ALSI	
ASIL	ASLI	IALS	IASL
ILAS	ILSA	ISAL	ISLA
LAIS	LASI	LIAS	LISA
LSAI	LSIA	SAIL	SALI
SIAL	SILA	SLAI	SLIA

Wieso gibt es genau 24 Möglichkeiten?

Für den ersten Buchstaben hat man vier Möglichkeiten, für den zweiten drei, für den dritten zwei und für den letzten nur mehr eine Möglichkeit. Die Anzahl aller möglichen Anordnungen erhält man nun, indem die einzelnen Möglichkeiten miteinander multipliziert: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. [13]

Dies führt zu folgender Verallgemeinerung:

Satz 1.1:
Sei P_n die Anzahl der Permutationen von n *verschiedenen* Elementen.
Dann gilt: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k, \quad n \in \mathbb{N}$

[35] Die lexikographische Ordnung ist in der Informatik und Mathematik eine Methode, um aus einer linearen Ordnung für einfache Objekte (beispielsweise Buchstaben angeordnet nach dem Alphabet) eine lineare Ordnung für zusammengesetzte Objekte zu erhalten, z.B. Buchstabenausdrücke, deren Glieder so aufeinander folgen, wie sie als Anfänge von Wörtern in einem Lexikon folgen müssten: $a^3b, a^3bc, a^2b^2, ab^3, b^3c, \ldots$.

Beweis:

1.Art:

Es gibt n Möglichkeiten, den ersten Platz in der Anordnung zu besetzen. Also bleiben noch $(n-1)$ Elemente übrig, um den zweiten Platz zu besetzen. Für die Besetzung des dritten Platzes bleiben dann noch $(n-2)$ Möglichkeiten und so weiter. Letztendlich bleibt für die Besetzung des letztes Platzes nur noch ein Element übrig. [77] $\square$

2.Art:

Mittels vollständiger Induktion ergibt sich:

1. Für die Anfangszahl $k = 1$ ist die Aussage des Satzes wahr, denn ein einziges Element kann nur auf eine Weise angeordnet werden.
2. Annahme: Für Mengen mit n Elementen sei die Aussage des Satzes für alle $n \geq 1$ wahr. Es muss also gezeigt werden, dass die Aussage des Satzes auch für Mengen mit $(n+1)$ Elementen gilt.

Sei nun $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ eine Menge mit $(n+1)$ Elementen. Zunächst zählt man alle Anordnungen, bei denen a_{n+1} an der ersten Stelle steht. Davon gibt es genau so viele, wie es Anordnungen der Restmenge $M \setminus \{a_{n+1}\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ aus n Elementen gibt. Aus der Induktionsannahme folgt, dass dies genau $n!$ Anordnungen sind. Entsprechend gibt es jeweils $n!$ Anordnungen von M, bei denen a_{n+1} an zweiter Stelle, an dritter Stelle, ... , an $(n+1)$-ter Stelle steht. Insgesamt ergibt dies $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ Anordnungen. [65] $\square$

Trivialerweise kann man eine Permutation von n Objekten auch auffassen als eine *Bijektionen* (umkehrbar eindeutige Abbildung) einer n-elementigen Menge auf sich selbst.

Definition:

Sei M eine n-elementige Menge.

Unter einer Permutation von M versteht man eine bijektive Abbildung von M auf sich.

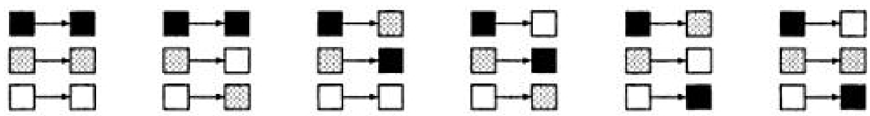

Abbildung 1.7: Permutationen einer Menge von drei Elementen als umkehrbar eindeutige Abbildungen und als Anordnungen. [65]

b) Die Fakultät: Eigenschaften und verwandte Begriffe

- **Name und Definition**

Die Fakultät, auch Faktorielle genannt, ist eine Funktion, die einer natürlichen Zahl n das Produkt aller natürlichen Zahlen kleiner und gleich dieser Zahl n zuordnet. Die Notation wurde erstmals 1808 von dem französischen Mathematiker Christian Kramp[36] benutzt. Der Ausdruck *faculté* (Fähigkeit) geht ebenfalls auf ihn zurück. [14]

Definition:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die Fakultät von n (in Zeichen: $n!$) ist definiert als:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k & \text{für } n > 0 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

Rekursive Definition:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)! & \text{für } n > 0 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

Kombinatorische Interpretation des Falles $n = 0$:
Es gibt genau eine Möglichkeit, um 0 Objekte anzuordnen, nämlich die leere Anordnung. Die Motivation hinter der Definition $0! = 1$ werde ich auf Seite 28 erläutern.

- **Wertetabelle und Approximationen**

n	0	1	2	3	4	5	10	20	50	100
$n!$	1	1	2	6	24	120	3628800	$2{,}432 \ldots \cdot 10^{18}$	$3{,}041 \ldots \cdot 10^{64}$	$9{,}332 \ldots \cdot 10^{157}$

Wie man in der obigen Tabelle sehen kann, wächst die Größe der Fakultäten sehr rasch an, daher benötigt die Berechnung großer Werte sehr viel Rechenaufwand.

[36] 1760-1826

Wenn es nicht so sehr auf den exakten Wert ankommt, bedient man sich Approximationen um eine Formel zu finden, die für große Werte leichter zu handhaben ist. Für die Fakultät gibt es davon einige, die bekannteste nennt man die „Stirling'sche Formel“, auf die ich in Kapitel 4.2 näher eingehen werde.

Eine mögliche Approximation der Fakultät ist folgende:
Zuerst berechnet man für ein natürliches $n > 2$ exakt das folgende Integral:

$$\int_2^n ln\,x\,dx = \Big[x\ \ ln\,x\Big]_2^n - \int_2^n 1\,dx = n\ \ ln\,n - 2\ \ ln\,2 - n + 2$$

$$= n\ \ ln\,n - 1 \cdot n - 2\ \ ln\,2 + 1 \cdot 2$$

Da $ln(e) = 1$ ist, kann man den letzten Term folgendermaßen vereinfachen:

$$= n\ \ ln\,n - n\ \ ln(e) - 2\ \ ln\,2 + 2\ \ ln(e)$$
$$= n(ln\,n - ln\,(e)) + 2(ln(e) - ln\,2)$$
$$= n\ \ ln\,\frac{n}{e} + 2\ \ ln\,\frac{e}{2}$$

Nähert man das Integral mittels Trapezen an, so ergibt sich mit Schrittweite 1:

$$\frac{1}{2}\,(ln\,2 + ln\,3) + \frac{1}{2}\,(ln\,3 + ln\,4) + \cdots + \frac{1}{2}\,(ln\,(n-1) + ln\,n)$$
$$= ln\,2 + ln\,3 + ln\,4 + \cdots + ln\,n - \frac{1}{2}\,ln\,2 - \frac{1}{2}\,ln\,n$$
$$= ln\,n! - \frac{1}{2}\,ln\,(2n)$$

Gleichsetzen ergibt:

$$n\,ln\,\frac{n}{e} + 2\,ln\,\frac{e}{2} \approx ln\,n! - \frac{1}{2}\,ln\,(2n)$$
$$\Longrightarrow ln\,n! \approx n\,ln\,\frac{n}{e} + 2\,ln\,\frac{e}{2} + \frac{1}{2}\,ln\,(2n) = ln\Big(\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \cdot \Big(\frac{e}{2}\Big)^2 \cdot \sqrt{2n}\Big)$$
$$\Longrightarrow n! \approx \Big(\frac{n}{e}\Big)^n \cdot \sqrt{\frac{e^4}{8}\,n} \qquad [15]$$

- **Konstanten, Funktionen, Ableitungen und die Fakultät**

  Viele mathematische Konstanten, trigonometrische und auch hyperbolische Funktionen lassen sich (mittels Taylorreihenentwicklung) durch die Fakultät schön darstellen:

  Beispiele: $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ $\cdots$ Euler'sche Zahl

  $\Longrightarrow$ Die Euler'sche Zahl ist also die Summe der Kehrwerte der Fakultäten von 0 bis ∞.

$$\frac{1}{e} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$$
$$sin\, x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$
$$cos\, x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$
$$sinh\, x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$
$$cosh\, x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

  Weiters sei zu beachten, dass die n-te Ableitung der Potenzfunktion n-ten Grades die Fakultät ergibt: $f(x) = x^n \Rightarrow f^{(n)}(x) = n!$ [15]

- **Die Fakultätsfunktion**

  Man kann zeigen, dass es eine Funktion gibt, mit der man den Begriff der Fakultät auch für positive reelle Zahlen definieren kann.

  Definition:

  Für beliebige $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ definiert man die *Gammafunktion* als:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

  Durch partielle Integration dieser Funktion erhält man:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$
$$= \underbrace{\Big[- t^{x-1} e^{-t} \Big]_0^{\infty}}_{=0} + (x-1) \int_0^{\infty} t^{x-2} e^{-t}\, dt$$
$$= (x-1) \int_0^{\infty} t^{(x-1)-1} e^{-t}\, dt$$
$$= (x-1)\Gamma(x-1) \Longrightarrow \text{Also gilt: } \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

Mit $= \Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\,dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^\infty = 1$ lässt sich mittels vollständiger Induktion zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{N}$ Folgendes gilt: $\Gamma(x+1) = x!$ Der Begriff der Fakultät lässt sich also auf positive reelle Zahlen verallgemeinern, indem man die Gammafunktion um 1 nach links verschiebt: $\Gamma(x) = (x-1)!$

$$\Longrightarrow \quad x! = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$$

Lässt man für x auch komplexe Zahlen zu, dann kann man damit sogar komplexe Fakultäten berechnen. [15]

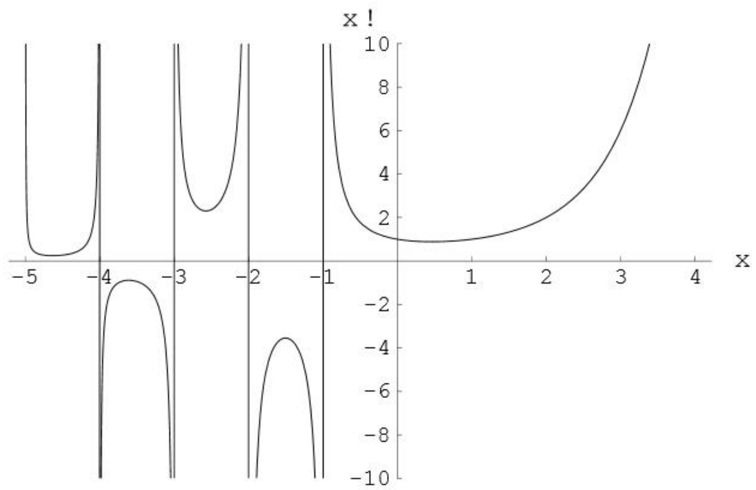

Abbildung 1.8: Die reelle Fakultätsfunktion $x! = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$ [15]

- **Anzahl der Dezimalstellen der Fakultät**

  Da die Fakultätsfunktion so schnell wächst, ist es manchmal hilfreich, die Anzahl der Dezimalstellen der Fakultät zu berechnen. Dabei ist folgende Formel für die Anzahl $d(n)$ der Dezimalstellen einer Zahl n hilfreich:
  $d(n) = [log_{10}n] + 1$, wobei der Ausdruck $[x]$[37] die x nächstkleinere ganze Zahl bezeichnet. [15]

[37]bekannt als Gaußklammer

- **Anzahl der Nullen am Ende der Dezimaldarstellung**

  Betrachtet man die Tabelle der Fakultätswerte auf Seite 13, dann fällt auf, dass die Anzahl der Nullen am Ende $A(n)$ mit der Häufigkeit des Auftretens der Zahl 5 zusammenhängt.
  Behauptung: $A(n) = \left[\frac{n}{5}\right]$

  Betrachtet man die Zahl $20! = 243290200817664\underbrace{0000}_{=4}$, dann stimmt diese Behauptung, denn $A(20) = \left[\frac{20}{5}\right] = 4$.
  Am Beispiel $30! = 26525285981219105863630848\underbrace{0000000}_{=7}$ sieht man jedoch, dass die oben behauptete Formel nicht stimmen kann, denn man erhält $A(30) = \left[\frac{30}{5}\right] = 6$

  Was wurde übersehen?
  Der Fehler liegt darin, dass das Produkt 30! den Faktor 25 enthält, der somit einen zusätzlichen Faktor 5 beiträgt. Also muss auch der Faktor 25 und seine Vielfachen miteinbezogen werden:
  $\Rightarrow A(n) = \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{25}\right] + \left[\frac{n}{125}\right] + \left[\frac{n}{625}\right] + \cdots$.

  Um die Anzahl der Endnullen $A(n)$ zu bestimmen, kann man sich also folgender Formel bedienen: $A(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{5^k}\right]$ [15]

- **Die Doppelfakultät und die Multifakultät**

  Anders als bei der gewöhnlichen Fakultät wird bei der Doppelfakultät das Produkt jeder *zweiten* natürlichen Zahl bis n gebildet.

  Rekursive Definition der Doppelfakultät:

  $$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2)!! & \text{für } n \geq 2 \\ 1 & \text{für } n = 0 \text{ oder } n = 1 \end{cases}$$

  Weiters definiert man: $0!! = 1$ und $(-1)!! = 1$

  Beziehung zur Fakultät:
  $n! = n!! \cdot (n-1)!!$
  $(2n)!! = 2^n n!$
  Achtung!: $n!! \neq (n!)!$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!!$	1	1	2	3	8	15	48	105	384	945	3840

Tabelle 1.1: Die Doppelfakultäten von 0 bis 10

$\Longrightarrow$ Verallgemeinerung: Multifakultät

Rekursive Definition der Multifakultät:
Die k-te Fakultät ist definiert als:

$$n!^{(k)} = \begin{cases} n \cdot (n-k)!^{(k)} & \text{für } n \geq k \\ 1 & \text{für } 0 \leq n < k \end{cases}$$

- **Die Subfakultät**[38]

Definition:
Die Subfakultät D_n gibt die Anzahl der Permutationen an, bei denen keines der Objekte an seinem ursprünglichen Platz bleibt, also die Anzahl aller *fixpunktfreien Permutationen* von n Elementen.
Die Subfakultät wird durch die Notation $!n$ ausgedrückt.

Satz 1.2:
Für die Subfakultät gilt:
$$!n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} = n! \cdot \Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\Big), \quad n \geq 0$$

Um diesen Satz zu beweisen, benötigt man das *Prinzip der Inklusion und Exklusion.*

Dieses Prinzip gestattet, die Kardinalität einer Menge zu bestimmen, die eine (endliche) Vereinigung von beliebigen Mengen ist.

[38] wird auch oft als „Derangementzahl“ bezeichnet

Satz 1.3: Prinzip der Inklusion und Exklusion, Siebformel

Für endliche Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gilt:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} |\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j}|.$$

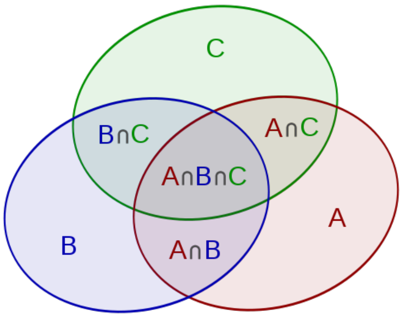

Abbildung 1.9: Prinzip der Inklusion und Exklusion am Beispiel von drei Mengen A, B, C [16]

<u>Beweis:</u>

Man betrachtet ein beliebiges Element $a \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Auf der linken Seite wird es genau einmal gezählt. Daher genügt es zu zeigen, dass dies auch auf die rechte Seite zutrifft.

Angenommen a ist in l der n Mengen $A_1, \ldots, A_n$ enthalten. Dann wird a in der Summe $\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} |\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j}|$ genau $\binom{l}{r}$ mal gezählt, denn a ist genau dann in $\bigcap_{j=1}^{r} A_{i_j}$ enthalten, wenn die Indizes $i_1, \ldots, i_r$ eine r-Teilmenge von $\{1 \leq j \leq n | a \in A_j\}$ bilden.

$\Longrightarrow$ a wird auf der rechten Seite insgesamt genau $\sum_{r=1}^{l} (-1)^{r-1} \binom{l}{r}$ mal gezählt.

Mit Hilfe der binomischen Formel folgt:

$$0 = (-1+1)^l = \sum_{r=0}^{l} \binom{l}{r} (-1)^r 1^{l-r} = 1 - \underbrace{\sum_{r=1}^{l} \binom{l}{r} (-1)^{r-1}}_{=1}.$$

Die Summe auf der rechten Seite ist also gleich 1, was zu zeigen war. [78] □

Mit Hilfe des Prinzips der Inklusion und Exklusion lässt sich nun der Satz 1.2 beweisen:

<u>Beweis:</u>
Sei ξ_n die Anzahl der Bijektionen $\pi : [n] := \{1, 2, ..., n\} \to [n]$ mit mindestens einem Fixpunkt. Da es insgesamt genau $n!$ Bijektionen von $[n]$ nach $[n]$ gibt, ergibt sich die Subfakultät daraus nach $D_n = n! - \xi_n$. Sei A_i die Menge der Bijektionen $\pi : [n] \to [n]$ mit $\pi(i) = i$, so erhält man ξ_n mit Hilfe des Prinzips der Inklusion und Exklusion:
$\xi_n = |\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i| = \sum\limits_{r=1}^{n}(-1)^{r-1} \sum\limits_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} |\bigcap\limits_{j=1}^{r} A_{i_j}|.$
Die Kardinalität der Menge $\bigcap\limits_{j=1}^{r} A_{i_j}$ kann man direkt angeben:
In der Menge sind genau diejenigen Bijektionen $\pi : [n] \to [n]$ enthalten, für die $\pi(i_j) = i_j \forall j = 1, \ldots, r$ gilt. Für die Werte $i \in [n] \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$ hat man andererseits überhaupt keine Einschränkungen. In der Menge $\bigcap\limits_{j=1}^{r} A_{i_j}$ sind daher genauso viele Permutationen enthalten, wie es Permutationen der Menge $[n] \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$ gibt, also $(n-r)!$ viele. Damit erhält man
$\xi_n = \sum\limits_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}(n-r)! = \sum\limits_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{n!}{r!}$ und für die Subfakultät
$D_n = n! - \xi_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$ [78] □

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$!n$	1	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961

Tabelle 1.2: Die Subfakultäten von 0 bis 10

Bemerkenswert ist, dass es genau eine Zahl gibt, die gleich der Summe der Subfakultäten ihrer Ziffern ist:

148349=!1+!4+!8+!3+!4+!9. [15]

- **Fakultätsprimzahlen**

<u>Definition:</u>
Eine Fakultätsprimzahl ist eine Primzahl, die um eins größer oder kleiner als eine Fakultät ist, also eine Primzahl der Form $n! \pm 1, n \in \mathbb{N}$.

$n! - 1$ ist eine Primzahl für n =3, 4, 6, 7, 12, 14, 30, 32, 33, 38, 94, 166, 324, 379, 469, 546, 974, ...

$n! + 1$ ist eine Primzahl für n =1, 2, 3, 11, 27, 37, 41, 73, 77, 116, 154, 320, 340, 399, 427, 872, 1477, ... [17]

c) **Permutation mit Wiederholung**

Betrachtet man das Beispiel auf Seite 11, kommt man zu folgender Überlegung: Was passiert, wenn nun Buchstaben doppelt vorkommen? Ich möchte dies zunächst wieder an Hand eines Beispiels zeigen:

Beispiel: Gegeben seien die vier Buchstaben S, E, P, P.
Wie viele Anordnungsformen dieser 4 Buchstaben gibt es nun?

⇒ Enumeration liefert hier:

SEPP	ESPP	PEPS	PSEP
SPEP	EPSP	PESP	PPES
SPPE	EPPS	PSPE	PPSE

Wieso gibt es in diesem Fall „nur“ 12 Möglichkeiten?

Da in diesem Fall der Buchstabe „P“ doppelt auftritt, gibt es beispielsweise für die beiden Anordnungen SEPP und SEPP nur eine Möglichkeit. (Wären die beiden „P“ unterscheidbar - zum Beispiel durch verschiedene Farben - käme man hier ebenfalls auf 24 Möglichkeiten.) Da dies alle Anordnungsmöglichkeiten betrifft, erhält man in diesem Beispiel insgesamt nur 12. [13]

Um dies zu verallgemeinern, muss die Formel der Fakultät in so einem Fall erweitert werden:

Satz 1.4:
Sei $P_n^{(k)}$ die Anzahl der Permutationen von n Elementen, darunter k gleiche und alle anderen $n-k$ Elemente seien paarweise verschieden. Dann gilt:

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}, \quad k \leq n$$

Gibt es mehrere Elemente, die öfter vorkommen, so lautet die Verallgemeinerung der Formel:

Satz 1.5: Multinomialkoeffizient
Sei $P_n^{(k_1,k_2,...,k_m)}$ die Anzahl der Permutationen von n Elementen, eingeteilt in m Gruppen mit jeweils $(k_1, k_2, ..., k_m)$ gleichen Elementen.
Dann gilt: $P_n^{(k_1,k_2,...,k_m)} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}, \quad k_1 + k_2 + ... + k_m = n$

<u>Beweis:</u>
Wenn die Elemente alle verschieden sind, gibt es $n!$ Permutationen. Die k_1 Elemente der 1.Klasse sind nun aber alle gleich; an die Stelle der $k_1!$ Permutationen dieser k_1 Elemente tritt daher eine Einzige. All die Permutationen, die aus der Vertauschung dieser k_1 Elemente untereinander ohne Änderung der Anordnung der übrigen Elemente entstehen, fallen in eine Einzige zusammen. Übrig bleiben noch $\frac{n!}{k_1!}$ Permutationen.

Genauso fallen durch die Gleichheit der k_2 Elemente der 2.Klasse die $k_1!$ Permutationen, die auf der Vertauschung der k_2 Elemente untereinander beruhen, in eine Einzige zusammen. Damit bleiben nur noch $\frac{n!}{(k_1!k_2!)}$ Permutationen übrig. So kann man dieses Verfahren weiterführen. [77] □

Einen wichtigen Spezialfall dieses Satzes bilden die ***Binomialkoeffizienten***. Sie geben die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an. (siehe Seite 27)

Bei Permutationen ging es darum, die Reihenfolgen verschiedener Objekte zu ändern, also diese Objekte verschieden anzuordnen. Variationen und Kombinationen hingegen beschäftigen sich mit der Auswahl einiger Objekte aus einer Gesamtmenge und der Anordnung dieser gewählten Objekte.

Ein typisches Beispiel für Variationen und Kombinationen sind die vor allem in der Schulmathematik gebräuchlichen Urnenmodelle. Man betrachtet also eine Urne mit einer gewissen Anzahl an Kugeln und zieht daraus eine Teilmenge an Kugeln heraus.

Wichtig ist, ob die Reihenfolge der gezogenen Kugeln *relevant* ist oder nicht. Analog zu den Permutationen wird nun ebenfalls unterschieden zwischen Variationen/Kombinationen mit und ohne Wiederholung, was dem wohlbekannten „Ziehen mit/ohne Zurücklegen“ entspricht.

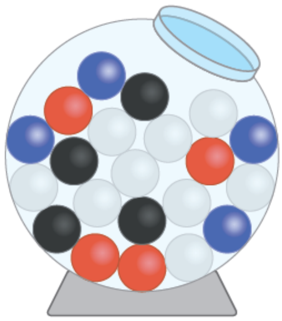

Abbildung 1.10: Urnenmodell: Ziehen mit/ohne Zurücklegen [18]

1.2.2 Variationen

Es seinen n verschiedene Objekte gegeben. Aus diesen gegebenen Objekten sollen k Objekte herausgegriffen und angeordnet werden, wobei die Reihenfolge der Ziehung hierbei eine wesentliche Rolle spielt. Eine solche Anordnung heißt „Variation[39]“.

Definition:
Unter einer Variation versteht man eine Auswahl von k Elementen aus n verschiedenen Elementen *unter Beachtung der Reihenfolge.*

Man spricht auch oft von einer „*Variation von n Elementen zur k-ten Klasse*“. In manchen Büchern wird die Variation auch oft als „*k-Permutation*“ bezeichnet.

a) **Variation ohne Wiederholung**

Bei einer Variation ohne Wiederholung darf jedes Objekt nur einmal auftreten. Zwei Variationen gelten auch dann als verschieden, wenn dieselben k Objekte herausgegriffen wurden, aber die Reihenfolge der Objekte verschieden ist.

Satz 1.6:
Sei $V_n^{(k)}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus n verschiedenen Elementen k Elemente unter Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.
Dann gilt: $V_n^{(k)} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}, \quad k \leq n$

[39]lateinisch: variatio ... Veränderung, Unterschied

Beweis:

1.Art:

Kombinatorische Überlegung: Das 1.Element kann auf n verschiedene Arten gewählt werden, das 2.Element auf $(n-1)$, das 3.Element auf $(n-2)$ und das k-te Element auf $n-(k-1) = (n-k+1)$ Arten. $\square$

2.Art:

Vollständige Induktion nach n:

1. Für die Anfangszahl $k = 1$ ist die Aussage des Satzes wahr, die Anzahl ist gleich n.

2. Annahme: $2 \leq k \leq n-1$. Man setzt voraus, dass die Anzahl einer k-elementigen Variation einer $(n-1)$-elementigen Menge gleich $\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}$ ist. Sei nun $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Dann ist die Anzahl der Variationen von k Elementen aus M, bei denen a_1 an der i-ten Stelle steht, gleich der Anzahl der Variationen von $(k-1)$ Elementen der Menge $M \setminus \{a_1\}$. Deren Anzahl ist gleich $\frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!}$.
Damit ist die Anzahl der Variationen von k Elementen von M ohne Wiederholung, bei denen a_1 vorkommt, gleich $k\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$. Die Anzahl der k-elementigen Variationen von $M \setminus \{a_1\}$ ohne Wiederholung ist nach Induktionsvoraussetzung gleich $\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}$.
Beides zusammen ergibt:

$$k\frac{(n-1)!}{(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

[73] $\square$

Spezialfall: Sei M eine n-elementige Menge, dann ist eine Permutation (ohne Wiederholung) von M gleich einer Variation ohne Wiederholung aller n Elemente von M! Außerdem können Variationen ohne Wiederholung auch aufgefasst werden als die Menge aller injektiven Abbildungen $f : A \longrightarrow B$ von einer k-elementigen Menge A in eine n-elementige Menge B mit $n \geq k$.

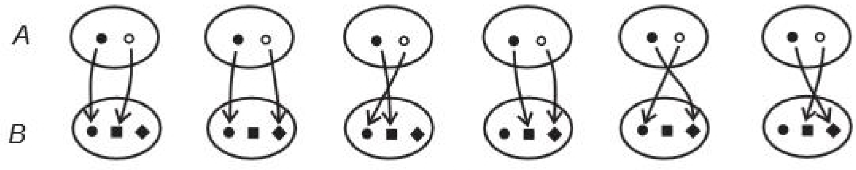

Abbildung 1.11: Skizze aller injektiven Abbildungen von A in B mit $|A| = 2, |B| = 3$ [19]

b) **Variation mit Wiederholung**

Wenn von den n verschiedenen Elementen der Grundmenge Elemente auch mehrfach auftreten dürfen, spricht man von einer Variation mit Wiederholung. Dies bedeutet also, dass ein und dasselbe Objekt in der vorliegenden Anordnung k-mal vorkommen darf. Auch hier gelten beispielsweise die Variationen 2, 1, 1, 1 und 1, 1, 1, 2 aus einer Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ als verschieden, da die Reihenfolge relevant ist!

Satz 1.7:
Sei $V_n^{(k)}$ die Anzahl aller Variationen mit Wiederholung von k Elementen aus einer n-elementigen Menge. Dann gilt: $V_n^{(k)} = n^k$

Beweis:

1.Art:

Kombinatorische Überlegung: Wenn man das 1.Element herausgreift, hat man n Wahlmöglichkeiten. Beim 2.Element hat man wieder n Wahlmöglichkeiten, da ja Wiederholungen gestattet sind. Wenn man diese Überlegung fortsetzt, so ergibt sich:
$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{k-faches\, Produkt\, aus\, n} = n^k$. □

2.Art:

Vollständige Induktion nach k:

1. Für die Anfangszahl $k = 1$ ist die Aussage des Satzes wahr, die Anzahl ist gleich n.

2. Annahme: Man setzt voraus, dass die Anzahl der Variationen mit Wiederholung von $k-1$ Elementen einer n-elementigen Menge gleich n^{k-1} ist.
Die Anzahl der Variationen mit Wiederholung von k Elementen der Menge $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, bei denen a_i an der k-ten Stelle steht, ist dann gleich der Anzahl der Variationen mit Wiederholung von $k-1$ Elementen der Menge M, also gleich n^{k-1}.
Da es n verschiedene Möglichkeiten für die Besetzung der k-ten Position gibt, ist die Anzahl der Variationen mit Wiederholung von k Elementen der Menge M gleich $n \cdot n^{k-1} = n^k$. [73] □

1.2.3 Kombinationen

Kombinationen[40] sind Variationen, bei denen die Reihenfolge jedoch *nicht* von Bedeutung ist.

Ein typisches Beispiel hierfür ist das Lotto-Spiel „6 aus 45“ (bezeichnet die Anzahl der 6-elementigen Teilmenge einer aus 45 Elementen bestehenden Menge).

Definition:
Unter einer Kombination versteht man eine Auswahl von k Elementen aus n verschiedenen Elementen *ohne* Beachtung der Reihenfolge.

In der Literatur wird auch hier oft von Kombinationen k-ter Klasse gesprochen.

a) **Kombination ohne Wiederholung**

Satz 1.8:
Sei $C_n^{(k)}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus n verschiedenen Elementen k Elemente ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen, wobei jedes der n Elemente höchstens einmal in der Kombination auftreten darf. Dann gilt:

$$C_n^{(k)} = \frac{n \cdot (n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

Beweis:

1.Art: Durch Zurückführen auf die Variation ohne Wiederholung:
Variationen und Kombinationen ohne Wiederholung unterscheiden sich nur dadurch, dass die Reihenfolge bei Variationen relevant ist und bei Kombinationen nicht.
$\Longrightarrow$ Jede Kombination entspricht genau $k!$ Variationen und somit ist die Anzahl der Kombinationen gegeben durch: $\dfrac{\frac{n}{(n-k)!}}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2.Art: Mittels vollständiger Induktion nach n erhält man:

1. Für die Anfangszahl $k = 1$ ist die Aussage des Satzes wahr.
2. Annahme: $2 \leq k \leq n-1$. Der Fall $n = 2$ ist trivial. Nun wird vorausgesetzt, dass die Behauptung des Satzes für jede Menge mit $n-1$ Elementen bereits bewiesen ist. Die Anzahl aller Kombinationen von k Elementen der Menge $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, in denen a_1 enthalten ist, ist gleich der Anzahl der Kombinationen von $k-1$ Elementen aus der Menge $M \setminus \{a_1\}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist diese Anzahl gleich $\binom{n-1}{k-1}$. Andererseits ist die Anzahl der Kombinationen von k Elementen von $M \setminus \{a_1\}$ gerade

[40] lateinisch: combinatio ... Zusammenfassung, Vereinigung

$\binom{n-1}{k}$. Beide zusammen ergeben die Anzahl aller Kombinationen von k Elementen, also $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

(Die letzte Aussage wird auf Seite 43 bewiesen!) [73] □

b) Die Binomialkoeffizienten

Definition:
Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ heißt „Binomialkoeffizient“.

Wie auf Seite 22 erwähnt, gibt der Binomialkoeffizient die Anzahl der Möglichkeiten an, k Objekte aus einer n-elementigen Menge auszuwählen, und zwar ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge. Das Symbol für den Binomialkoeffizienten ist $\binom{n}{k}$.
Dies wird als „*n über k*“, „*k aus n*“, „*n tief k*“ oder im Englischen als „*from n choose k*“[41] gesprochen. [72]

Ich möchte in diesem Kapitel nur einführend auf die Definition und Herleitung der Binomialkoeffizienten eingehen, etliche Eigenschaften, deren Beweise und weitere Aussagen werde ich genauer im nächsten Kapitel anhand des Pascal'schen Dreiecks und dessen Strukturen erläutern.

- **Name**

  Die Binomialkoeffizienten werden als solche bezeichnet, weil sie als Koeffizienten in der binomischen Reihenentwicklung (im binomischen Satz) auftreten. [77]

  $$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^{n-0} b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n\end{aligned}$$

  Im einfachsten Fall ($n = 2$) ergibt sich daraus die *binomische Formel*: $(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = a^2 + 2ab + b^2$

[41] Dementsprechend findet man auf Taschenrechnern die Beschriftung „nCk“ für den Binomialkoeffizienten.

- **Definition**

<u>Definition:</u> (vergleiche Seite 26)
Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist definiert als
$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n.$
Speziell gilt: $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$

An dieser Stelle möchte ich nun kurz die *Motivation* hinter der Definition von 0! erläutern:

Die obige Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ soll auch für $k = 0$ und $k = n$ ihren Zweck erfüllen, da man sonst im binomischen Lehrsatz $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ die Terme a^n und b^n außerhalb der Summe schreiben müsste.

Der folgende Satz liefert eine rekursive Darstellung der Binomialkoeffizienten:

Satz 1.9:
Die Binomialkoeffizienten erfüllen die Rekursionsgleichung
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad 1 \leq k \leq n.$

<u>Beweis:</u>

siehe 2.2.2.1

- **Verallgemeinerung**

Die Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten von den natürlichen auf die reellen Zahlen spielt vor allem in der Analysis eine Rolle, um diesen Ausdruck auch für nicht ganzzahlige n (hier α) berechnen zu können.

<u>Definition:</u>
Für beliebige reelle Zahlen α ($\alpha \in \mathbb{R}$) und ganzzahlige $k \geq 0$ ist der Binomialkoeffizient wie folgt definiert: $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$
mit den Werten $\binom{\alpha}{0} = 1$ für $k = 1$ und $\binom{\alpha}{-k} = 0$ für $k > 0$.

Man beachte, dass insbesondere für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k > n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots \overbrace{(n-n)}^{=0} \cdots (n-k+1)}{k!} = 0$$

c) **Kombination mit Wiederholung**

Satz 1.10:
Sei $C_n^{(k)}$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus n verschiedenen Elementen k Elemente ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen.
Dann gilt: $C_n^{(k)} = \dfrac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)\cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k} = \dbinom{n+k-1}{k}$

Beweis:
1.Art:

Vollständige Induktion nach $n + k$ liefert:

1. Für die Anfangszahl $k = 1$ ist die Aussage des Satzes wahr, die Anzahl ist gleich n.
2. Annahme: $2 \le k \le n - 1$.
Der Fall $n = k = 2$ ist trivial.
Man setzt voraus, dass die Formel für k-elementige Kombinationen einer $(n-1)$-elementigen Menge und für $(k-1)$-elementige Kombinationen einer n-elementigen Menge richtig ist. Sei $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, dann ist die Anzahl der Kombinationen von k Elementen mit Wiederholung, die a_1 enthalten, gleich der Anzahl der Kombinationen von $k-1$ Elementen aus M. Deren Anzahl ist $\binom{n+k-2}{k-1}$ nach Induktionsvoraussetzung. Die Kombinationen, die a_1 nicht enthalten, sind die Kombinationen von k Elementen mit Wiederholung der Menge $M \setminus \{a_1\}$. Davon gibt es $\binom{n-1+k-1}{k}$ nach Induktionsvoraussetzung.
Beides zusammen ergibt: $\binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k} = \binom{n+k-1}{k}$. [73] $\square$

2.Art:

Da jede Kugel mehrmals gezogen werden kann, die Reihenfolge jedoch irrelevant ist, ist nur wichtig, wie oft eine Kugel gezogen wird. Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ ein Tupel mit den entsprechenden Anzahlen, wobei a_j angibt, wie oft die Kugel j gezogen wird. Für die Anzahltupel $(a_1, \ldots, a_n)$ muss gelten:
(i) $a_j \in \{0, \ldots, k\} \forall j \in \{1, \ldots, n\}$
(ii)$a_1 + \cdots + a_n = k$
Nun wird gezählt, wie viele derartige Tupel es geben kann. Dazu verwendet man k-mal das Symbol „$*$“ und $(n-1)$-mal das Symbol „$|$“. Ein Anzahltupel $(a_1, \ldots, a_n)$ wird nun injektiv durch die Symbolfolge

$$\underbrace{**\ldots*}_{a_1}|\underbrace{**\ldots*}_{a_2}|\ldots|\underbrace{**\ldots*}_{a_n}$$

repräsentiert. Umgekehrt entspricht auch jede Symbolfolge, die k-mal das Symbol „$*$" und $(n-1)$-mal das Symbol „|" enthält, einem Anzahltupel mit den obigen Eigenschaften.
Also handelt es sich um eine Bijektion zwischen der Menge der Anzahltupel und der Menge der Symbolfolgen. Die Anzahl möglicher Symbolfolgen zu bestimmen, entspricht genau dem Ziehen von k Positionen für das Symbol „$*$" aus $n+k-1$ möglichen Positionen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge. Also gibt es insgesamt $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten. [20] $\square$

Zusätzliche Deutung:

Die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung ist gleich der Anzahl der möglichen Positionen der Trennungsstriche „|" $(= n-1)$:

$$\Rightarrow \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{n}$$

Kapitel 2

Das Pascal'sche Dreieck

2.1 Geschichte

"Das Herz hat seine Gründe, die die Vernunft nicht kennt."
(Blaise Pascal)

2.1.1 Das Leben des Blaise Pascal

Abbildung 2.1: Blaise Pascal[69]

Blaise Pascal zählt zu den bedeutendsten, aber auch zu den ungewöhnlichsten Persönlichkeiten des 17. Jahrhunderts. Sein Name taucht in vielen Bereichen auf, der Physik, Mathematik, Philosophie, Theologie und sogar in der Literatur. Ich werde später genauer darauf eingehen.

Blaise Pascal wurde am 19.Juni 1623 in Clermont-Ferrand während des Tobens des Dreißigjährigen Krieges als Sohn von Étienne[1] und Antoinette[2] Pascal geboren. Seine Vorfahren, sowohl die der Mutter, als auch die des Vaters, gehörten beide dem Beamtenadel an. Sein Vater Étienne war als Vizepräsident am „Cour des Aides“ (Obersteuergericht) in der Finanzverwaltung der Provinz tätig. Er verkehrte mit zahlreichen Persönlichkeiten aus Kultur und Wissenschaft und war auch an der Mathematik sehr interessiert.
Pascal hatte zwei Schwestern: Die drei Jahre ältere Gilberte[3] und die zwei Jahre jüngere Jacqueline[4], die beide großen Einfluss auf die Entwicklung Pascals ausübten. 1626 verloren die drei ihre Mutter, die im Alter von 30 Jahren starb, weil sie sich nie vollständig von der Geburt der kleinen Jacqueline erholte.
Schon früh machte sich der schlechte Gesundheitszustand des kleinen Blaise bemerkbar. Nach eigenen Aussagen war Pascal seit seinem 18. Lebensjahr nie ohne Schmerzen. Man vermutet, dass er viele Jahre an Tuberkulose litt, hinzu kamen starke nervliche Spannungszustände. [69]

Kurz nach dem Tod seiner Frau zog Étienne Pascal im Jahr 1630 mit seinen drei Kindern nach Paris, behielt aber sein Amt. Er begann seinen hochbegabten Sohn aufgrund dessen Krankheit selbst zu unterrichten, hielt jedoch bewusst die Mathematik von ihm fern, um den Jungen nicht zu überanstrengen. Doch dies gelang ihm nicht, denn im Alter von zwölf Jahren entdeckte Pascal eigens für sich die Grundbegriffe der Geometrie. Er malte mit Kreide diverse geometrische Figuren auf den Boden seines Zimmers und überlegte sich die entsprechenden geometrischen Sätze dazu. [75]

> *"Da aber die Sorgfalt meines Vaters, ihm alle diese Dinge zu verbergen, so groß gewesen war, dass er nicht einmal die Namen dafür wusste, war er gezwungen, eigene Namen dafür zu erfinden, und so nannte er einen Kreis „ein Rund“, eine Linie „einen Stab“ und so alles übrige. Nach diesen Namen stellte er Axiome auf und schließlich vollkommene Beweise; und da man bei diesen Dingen von einem aufs andere kommt, machte er immer weitere Fortschritte und trieb seine Untersuchungen so weit voran, dass er damit bis zum 32.Satz des ersten Buches des Euklid kam."*[5]

[1] 1588-1651
[2] gebürtig Begon, 1596-1626
[3] 1620-1687
[4] 1625-1661
[5] [75]

Nachdem Étienne die Begabung seines Sohnes entdeckte, tat er alles, um ihn auch in dieser Wissenschaft zu fördern. So wurde er bald zu einem mathematischen Wunderkind und machte erstaunliche Entdeckungen.

Im Alter von vierzehn Jahren begleitete Blaise seinen Vater regelmäßig zu den Treffen der 1635 von Pater Marin Mersenne[6] gegründeten „Freien Akadémie", der Vorgängerin der „Académie des Sciences", und lernte dort unter anderem René Descartes[7] und Giles Personne de Roberval[8] kennen. Im Alter von fünfzehn Jahren interessierte sich Pascal für Gérard Desargues[9] Werk und präsentierte der Akademie einen Artikel mit dem Titel: „Essay pour les coniques" (Abhandlung über Kegelschnitte). Der Höhepunkt dieses Werkes beschreibt den nach ihm benannten „Kegelschnittsatz":

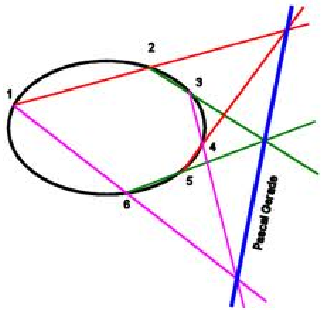

Abbildung 2.2: „Die Pascal'sche Gerade" [21]

> *„Schreibt man einem Kegelschnitt ein beliebiges Sechseck ein, so liegen die drei Schnittpunkte der jeweils gegenüberliegenden Seiten auf einer Geraden, die heute als „Pascal'sche Gerade" bezeichnet wird."*[10]

[6]französischer Theologe, Mathematiker und Musiktheoretiker, 1588-1648
[7]französischer Philosoph und Mathematiker, 1596-1650
[8]französischer Mathematiker, 1602-1675
[9]französischer Architekt und Mathematiker, der als einer der Begründer der Projektiven Geometrie gilt, 1591-1661
[10][22, S. 5]

1638 musste Étienne Paris verlassen, weil er gegen die Finanzordnung protestiert hatte. Jacqeline war es zu verdanken, dass sie aufgrund ihres Schauspieltalents bei Kardinal Richelieu[11], dem mächtigsten Mann Frankreichs, eine Begnadigung ihres Vaters erwirkte. 1639 wurde Étienne Pascal als Steuereintreiber in die Normandie, nach Rouen[12], versetzt. Mit der Absicht seinen Vater beruflich zu unterstützen und die Steuern auszurechnen, entwickelte Blaise 1642-1645 die erste Rechenmaschine, die „Pascaline", die die vier Grundrechenarten ausführen sollte und noch heute Grundlage für die Funktionsweise vieler anderer Rechenmaschinen darstellt. [69]

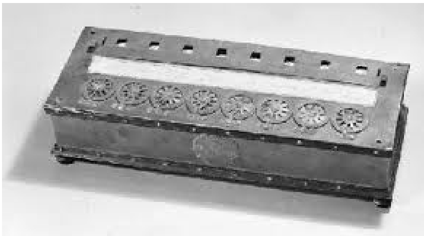

Abbildung 2.3: „Pascaline" - Rechenmaschine von Pascal [69]

Bei entsprechender Weiterentwicklung hätte Pascal einer der größten Männer der Geschichte der Mathematik werden können, doch zwei Umstände verhinderten dies: Einerseits sein schlechter Gesundheitszustand und andererseits seine religiöse Schwärmerei, von der er nach einem Unfall seines Vaters, dessen Pflege zwei Anhänger des sogenannten Jansenismus - einer damals sehr einflussreichen Reformbewegung innerhalb der katholischen Theologie - übernommen hatten, erfasst wurde:

> *„Als er noch nicht 24 Jahre alt war, sandte ihm die göttliche Vorsehung einen Anlaß, der ihn nötigte, fromme Bücher zu lesen; und Gott erleuchtete ihn durch diese heilige Lektüre dermaßen, dass er vollkommen einsah, dass die christliche Religion uns verpflichtet, nur für Gott zu leben und kein anderes Ziel zu haben als nur ihn; und diese Wahrheit erschien ihm so einleuchtend, so notwendig und so nützlich, dass sie allen seinen Forschungen ein Ende machte."*[13]

[11] 1585-1642, französischer Aristokrat, Kirchenfürst und Staatsmann
[12] Hafenstadt im Norden Frankreichs
[13] [75]

In dieselbe Zeit fielen umfangreiche Untersuchungen zum Luftdruck und zum luftleeren Raum, der bis dahin nach Aristoteles[14] unmöglich war. 1648 bewies Pascal durch ein Experiment, dass die Höhe einer Quecksilbersäule in einem Barometer vom Luftdruck abhängig ist. Diese Entdeckung bestätigte die Hypothese von Evangelista Toricelli[15] über die Wirkung des Luftdruckes auf das Gleichgewicht von Flüssigkeiten. Kurz darauf veröffentlichte Pascal seine Resultate in seinem Werk „Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs“ (Bericht vom großen Experiment über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten) und legte damit den Grundstein zur klassischen Hydrostatik. [22]

1654 begründete Pascal gemeinsam mit dem französischen Mathematiker Pierre de Fermat die mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In ihrem Briefwechsel wurde vor allem das Würfelspiel und Teilungsproblem diskutiert und erstmals Begriffe wie „Wahrscheinlichkeit, Zufall und Wert der Hoffnung (Erwartungswert)“ erwähnt. Die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung lässt sich datieren auf den 29.Juli 1654, als Pascal dem in Toulouse lebenden Fermat Folgendes schrieb:

> „ *Je vois bien que la vérité est la même á Toulouse et á Paris.*“
> (Ich stelle fest, dass in Toulouse und Paris die gleiche Wahrheit gilt.)

Die angesprochene „gleiche Wahrheit“ bezog sich auf die Lösung der zwischen ihnen diskutierten Probleme. In engem Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung entstand auch eine Studie über das *arithmetische Dreieck*, auf dessen Geschichte ich im nächsten Abschnitt genauer eingehen werde. [69]

Am 24.September 1651 starb Étienne Pascal. Nach dessen Tod trat Pascals Schwester Jacqueline in das Kloster von Port-Royal ein. Blaise war anfangs dagegen, erklärte sich jedoch nach langen Streitigkeiten einverstanden. Im Herbst 1654 machte sich bei Pascals Wesen eine tiefe Melancholie bemerkbar und er wurde von einer depressiven Stimmung erfasst. Er suchte mehr denn seine Bestimmung auf dieser Welt - er verkehrte in vornehmen Kreisen, zog sich aber immer mehr daraus zurück, weil sie ihm oberflächlich erschienen. Am 23. November 1654 hatte Pascal - man munkelt nach einem Unfall mit seiner Kutsche - ein überwältigendes religiöses Erlebnis, das sein weiteres Leben bestimmen sollte. Er versuchte dies in derselben Nacht in seinem Werk

[14] 384-322 vor Christus, griechischer Philosoph
[15] 1608-1647, italienischer Physiker und Mathematiker

„Mémorial“ in stammelnden Worten zu beschreiben. Bald danach zog er sich nach Port-Royal zurück und trat in das Janseniten-Kloster ein, aber immerhin arbeitete er weiter an mathematischen und anderen wissenschaftlichen Fragestellungen.Vermutlich noch Ende 1654 enstand seine Abhandlung „Traité du Triangle arithmétique“. 1656 schrieb er die berühmten 18 „Lettres provinciales“ (Briefe aus der Provinz), in denen er die Jesuiten angriff. [**4**]

Ab 1658 schrieb Pascal, immer wieder von Krankheiten geplagt, an seinem Hauptwerk, den Pensées. Es sollte eine groß angelegte Apologie des Christentums werden. Er wollte die Falschheit der anderen Religionen darlegen und die christliche Moral: „Ein Leben in Liebe zum (christlichen) Gott und Unterwerfung unter seinen Willen.“ Daneben beschäftigte er sich auch noch mit öffentlichen Angelegenheiten - er arbeitete an einem Verkehrsunternehmen mit, das 1662 eröffnet wurde und die größten Städte Frankreichs miteinander verband.

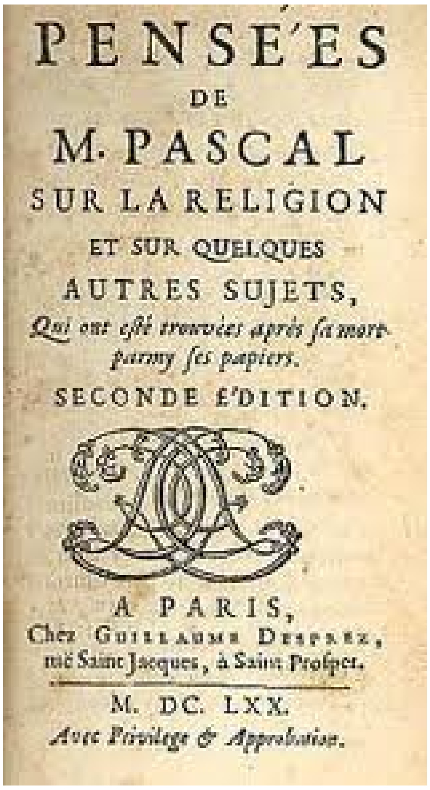

Abbildung 2.4: Erstausgabe der Pensèes - 1669 [69]

Am 19. August 1662 starb Blaise Pascal, völlig entkräftet, wahrscheinlich an Hirnhautentzündung. Er wurde nur 39 Jahre alt. Er hinterlässt Stöße von Notizen, die erst nach seinem Tod gedruckt wurden. [23]

Die Computersprache PASCAL wurde Anfang der 70er Jahre von Niklaus Wirth[16] entwickelt. Zu Ehren von Blaise und dessen Rechenmaschine taufte er sie PASCAL, welche von den modernen Programmiersprachen am wenigsten umfangreich und deswegen am leichtesten zu Erlernen ist.[24]

[16] geboren 1934, schweizer Informatiker

2.1.2 Die Geschichte des Zahlendreiecks

> *„Es gibt Gegenstände oder Begriffe in der Mathematik, die zum alltäglichen Werkzeug gehören.“*[17]

Hierzu zählt man auch das arithmetische Dreieck. Dieses war als solches schon Jahrhunderte vor Pascal bekannt, es wurde also nicht von ihm entdeckt. Daher kennt man es heute noch unter diversen anderen Namen:

In China spricht man vom Yang-Hui-Dreieck (benannt nach Yang Hui[18]),
in Italien vom Tartaglia-Dreieck (benannt nach Nicolo Tartaglia[19]),
und im Iran vom Chayym-Dreieck (benannt nach Omar Chayym[20]).

Jedoch hatte keiner von ihnen das Zahlendreieck entdeckt, sondern es wurde aus älteren arabischen oder chinesischen Quellen entnommen. Man kann also sagen, dass das Pascal'sche Dreieck über 1000 Jahre alt ist. [25]

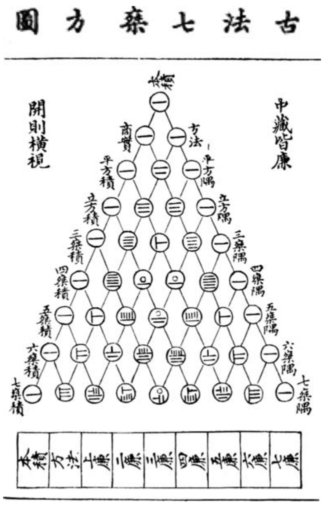

Abbildung 2.5: Das „Yang-Hui-Dreieck“ [80]

[17] [69, S. 59]
[18] 1238-1298, chinesischer Mathematiker
[19] 1499 oder 1500-1557, venezianischer Mathematiker
[20] 1048-1131, auch bekannt als Omar Chayyam bzw. Omar Khayyam, persischer Mathematiker, Astronom, Philosoph und Dichter

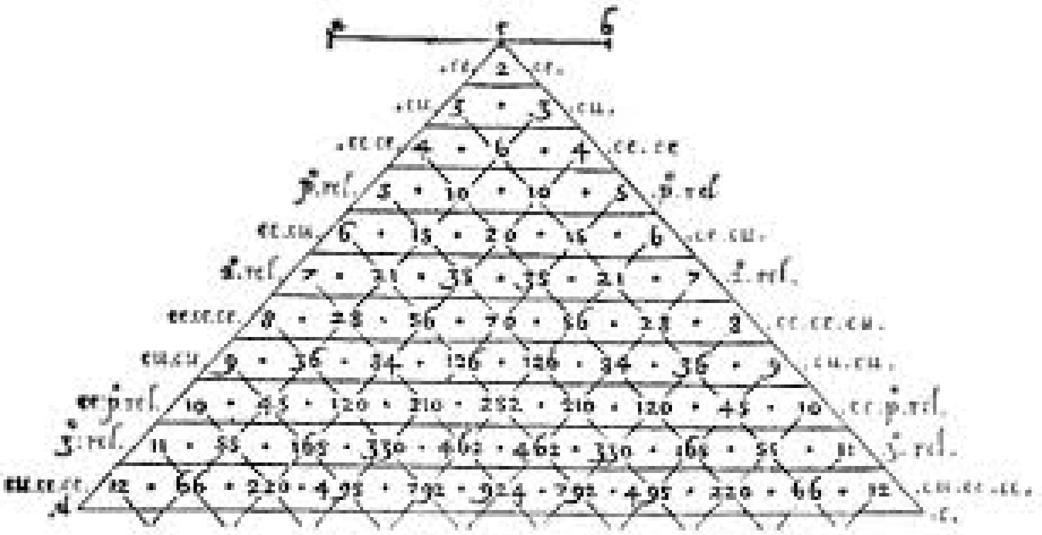

Abbildung 2.6: Das „Tartaglia-Dreieck“ [26]

Die früheste detaillierte Darstellung eines Dreiecks von Binomialkoeffizienten erschien im 10. Jahrhundert in Kommentaren zu dem indischen Buch „Chandas Shastra“(„Kunst der Prosodie[21].“) geschrieben von Pingala, worin sich auch die erste Erwähnung der Fibonacci-Zahlen unter dem Namen „maatraameru“ („Berg der Kadenz“) befindet (um 450 v. Chr. oder nach anderer Datierung um 200 v. Chr.) [68]

Während Pingalas Werk nur in Fragmenten erhalten blieb, beschäftigte sich der indische Gelehrte Halâyudha[22] um 975 mit dem Dreieck. 1068 wurden die ersten 17 Zeilen des Dreiecks vom indischen Mathematiker Bhattotpala[23] überliefert. Annähernd zur gleichen Zeit wurde das Pascal'sche Dreieck in Persien von Al-Karaji[24] und etwas später von Omar Chayym behandelt. Es waren verschiedene mathematische Sätze zum Dreieck bekannt, unter anderem der binomische Lehrsatz. Im 13. Jahrhundert präsentierte Yang Hui das arithmetische Dreieck, das mit dem Pascal'schen Dreieck identisch ist. [25]

[21] Der Begriff „Prosodie“ bezeichnet einen Teilbereich der Phonologie, die sich mit den lautlichen Strukturen von Sprachen beschäftigt, wie zum Beispiel Betonung, Rhythmus und Intonation (Sprechmelodie).

[22] Lebensdaten nicht bekannt

[23] Lebensdaten nicht bekannt

[24] 953-1029, persischer Mathematiker

Petrus Apianus[25] veröffentlichte das Dreieck 1531/32 auf dem Titelbild seines Buchs über Handelsberechnungen, dessen frühere Version von 1527 den ersten schriftlichen Nachweis des Pascal'schen Dreiecks in Europa darstellt. [69]

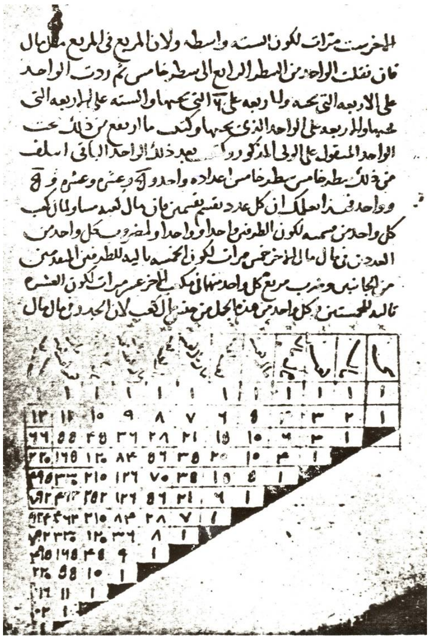

Abbildung 2.7: „Das Karaji-Dreieck“ [27]

1543 wurde die „Arithmetica integra[26]“ des deutschen Mathematikers und Theologen Michael Stifel[27] gedruckt. Darin befand sich bereits das Bildungsgesetz für das Zahlendreieck, das er zur Wurzelziehung gebrauchte. 1556 erschien es im „General trattato di numeri e misure“ bei dem italienischen Mathematiker Nicolo Tartaglia. Im 17.Jahrhundert beschäftigte sich Simon Stevin[28] mit dem arithmetischen Dreieck („L'arithmétique“, 1625), aber auch Pater Mersenne fand im Rahmen der Kombinatorik Interesse daran, unter anderem in seiner Schrift „La vérité des Sciences“, welche 1625 publiziert wurde. Pierre Hérigone[29] verwendete in seinem sechsteilgem Werk „Cursus mathematicus“ das arithmetische Dreieck für das Potenzieren eines Binoms und hatte somit nachweisbar einen direkten Einfluss auf Blaise Pascal. [69]

[25] 1495-1552, deutscher Mathematiker, Astronom, Geograph sowie Kartograph

[26] Dieses Werk stellte eine Zusammenfassung der Arithmetik und Algebra dar

[27] 1487-1567

[28] 1548-1620, flämischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur

[29] 1580-1644, französischer Mathematiker

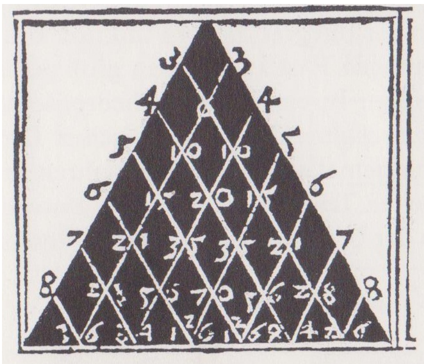

Abbildung 2.8: Das „arithmetische Dreieck" - nach Petrus Apianus (1527 gedruckt) [69]

Wie bereits erwähnt sammelte Blaise Pascal in seiner Abhandlung über das arithmetische Dreieck („Traité du Triangle arithmétique") die verschiedenen Ergebnisse bezüglich des Dreiecks und verwendete diese dazu, diverse Probleme der Wahrscheinlichkeitstheorie zu lösen. Pascal beschäftigte sich mit dem Zusammenhang zwischen den Binomialkoeffizienten und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das Dreieck wurde im 17. Jahrhundert von Pierre Raymond de Montmort[30] (1708) und Abraham de Moivre (1730) nach Blaise Pascal benannt. [28]

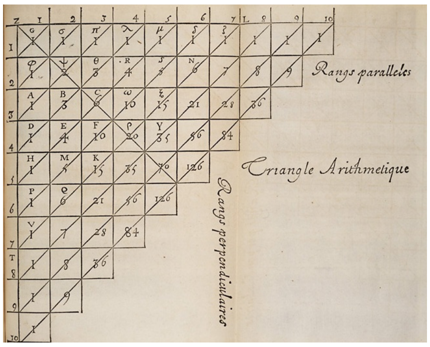

Abbildung 2.9: Das „Triangle arithmétique" von Pascal - Das Original befindet sich heute im Leibniz-Archiv in Hannover [69]

[30]1678-1719, französischer Mathematiker, bekannt als „Pionier der Wahrscheinlichkeitstheorie"

2.2 Aufbau und Strukturen des Pascal'schen Dreiecks

2.2.1 Aufbau

Das Pascal'sche Dreieck ist eine Anordnung von Zahlen in Dreiecksform, konstruiert nach einem einfachen Bildungsgesetz. In Worten ausgedrückt - wird es folgendermaßen gebildet:

> *„Man fängt mit der Eins oben an, schreibt darunter zwei Einsen, so dass die obere Eins in der Mitte darüber steht. Dann ergänzt man von Zeile zu Zeile schräg links außen und schräg rechts außen jeweils eine Eins. Dazwischen schreibt man jeweils die Summen, die aus zwei nebeneinanderliegenden Zahlen der Zeile darüber gebildet werden."*[31]

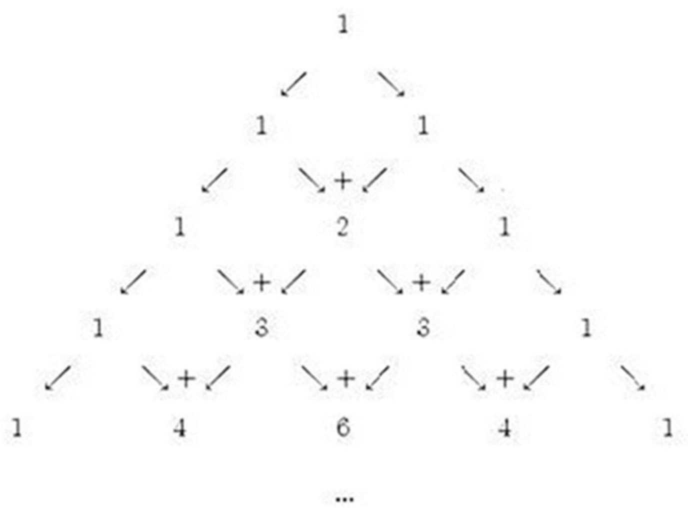

Abbildung 2.10: Bildungsgesetz des Pascal'schen Zahlendreiecks [30]

[31] [29]

2.2.2 Strukturen

Die zahlreichen Identitäten der Binomialkoeffizienten lassen sich sehr schön anhand des Pascal'schen Dreiecks erläutern. Ich werde in diesem Kapitel jeweils die Eigenschaften (hier als nummerierte Sätze um den Überblick zu bewahren) und ihre dazugehörigen Interpretationen (gegebenenfalls anhand des Dreiecks) anführen, erläutern und beweisen. Der Großteil dieses Kapitels (falls nicht explizit anders angegeben) basiert auf folgenden beiden Quellen: [67], [62]

2.2.2.1 Grundstruktur

Das auf Seite 42 beschriebene Bildungsgesetz lässt sich mit Hilfe der Binomialkoeffizienten formulieren (vergleiche Kapitel 1, Satz 1.9 auf Seite 28):

Satz 2.1: Pascal'sche Rekursionsgleichung
Es gilt für $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k \leq n$: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Interpretation:
Addiert man in der n-ten Zeile das $(k-1)$-te Element zum k-ten Element, so erhält man das k-te Element der $(n+1)$-ten Zeile, das heißt jeder Eintrag beinhaltet die Summer der darüber liegenden Diagonaleinträge.
Beweis[32]:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{k \cdot n!}{k! \cdot (n-k+1)!} + \frac{(n-k+1) \cdot n!}{k! \cdot (n-k+1)!} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k+1)!} \cdot \quad (k + (n-k+1)) \\
&= \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

□

Vereinbarung zur Schreibweise:
Für beliebiges n steht im Pascal'schen Dreieck in der n-ten Zeile an k-ter Stelle der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$, wobei n die Zeilennummer und k die Spaltennummer bezeichnet.

[32]Solche und ähnliche einfache Beweise sind in jedem Standardwerk (in machen als Übungsaufgabe) zu finden. Im Folgenden werden für solche Passagen keine Quellen angegeben.

Definition:
Das k-te Element in der n-ten Zeile im Pascal'schen Dreieck ist definiert durch:

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \text{für } n, k \in \mathbb{N}_0,\ k \leq n$$

Der Fall $k > n$ ist in diesem Zusammenhang nicht zu beachten, da im Pascal'schen Dreieck die Spaltenzahl nie größer als die Zeilenzahl ist.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&& \binom{0}{0} &&&&&&& \\
&&&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&&&& \\
&&&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&&&& \\
&&&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} &&&& \\
&&& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} &&& \\
&& \binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5} && \\
& \binom{6}{0} && \binom{6}{1} && \binom{6}{2} && \binom{6}{3} && \binom{6}{4} && \binom{6}{5} && \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} && \binom{7}{1} && \binom{7}{2} && \binom{7}{3} && \binom{7}{4} && \binom{7}{5} && \binom{7}{6} && \binom{7}{7} \\
&&&&&&& \vdots &&&&&&&
\end{array}$$

Abbildung 2.11: Darstellung des Pascal'schen Dreiecks mittels Binomialkoeffizienten [31]

Rechnet man die Koeffizienten aus, ergibt sich:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&& 1 &&&&&&& \\
&&&&&& 1 && 1 &&&&&& \\
&&&&& 1 && 2 && 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 3 && 3 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 &&& \\
&& 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 && \\
& 1 && 6 && 15 && 20 && 15 && 6 && 1 & \\
1 && 7 && 21 && 35 && 35 && 21 && 7 && 1 \\
&&&&&&& \vdots &&&&&&&
\end{array}$$

Abbildung 2.12: Das Pascal'sche Zahlendreieck [31]

Satz 2.2: Additivität
Für $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k \leq n$ gilt:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Interpretation:
Auch dieser Satz beschreibt, dass jeder Eintrag die Summe der darüber liegenden Diagonaleinträge beinhaltet.

Beweis:
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(k+1)\cdot n!}{(k+1)\cdot k!(n-k)!} + \frac{(n-k)\cdot n!}{(k+1)!(n-k)\cdot(n-k-1)!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(k+1)\cdot n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)!\cdot n!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(k+1)\cdot n! + (n-k)\cdot n!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(k+1+n-k)\cdot n!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n+1)\cdot n!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}\\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}
$$

□

Satz 2.3: Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt: (i) $\binom{n}{0} = 1$ (ii) $\binom{n}{n} = 1$

Interpretation:

Jede Zeile beginnt und endet mit einer Eins.

(Die Eins ist die einzige Zahl, die unendlich oft im Pascal'schen Dreieck vorkommt, nämlich einmal an der Spitze und dann in jeder Zeile zweimal.)

Beweis:

ad (i): $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ ad (ii): $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!1} = 1$ □

Satz 2.4: Symmetrie

Für beliebige $k, n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Interpretation:

Das Pascal'sche Dreieck ist bezüglich einer vertikalen Geraden, die durch die Spitze geht, symmetrisch. (Jede Zeile liest sich von links und rechts gleich.)

Beweis: $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$ □

2.2.2.2 Strukturen der Diagonalen

Satz 2.5: Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt: $\binom{n}{1} = n$

Interpretation:

In der zweiten Diagonale ($k = 1$) des Pascal'schen Dreiecks befinden sich die natürlichen Zahlen.

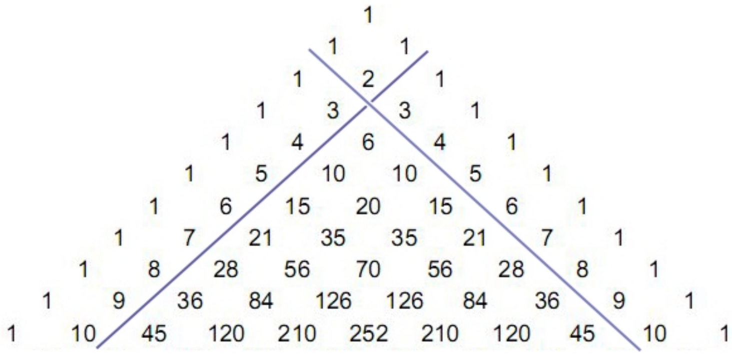

Abbildung 2.13: Die natürlichen Zahlen im Pascal'schen Dreieck

<u>Beweis:</u>
Der Beweis ist trivial, denn $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots} = n.$ $\square$

Definition:
Unter *figurierten Zahlen* versteht man positive Zahlen, die durch geometrische Figuren (Dreiecke, Quadrate, Pyramiden,...) dargestellt werden können.

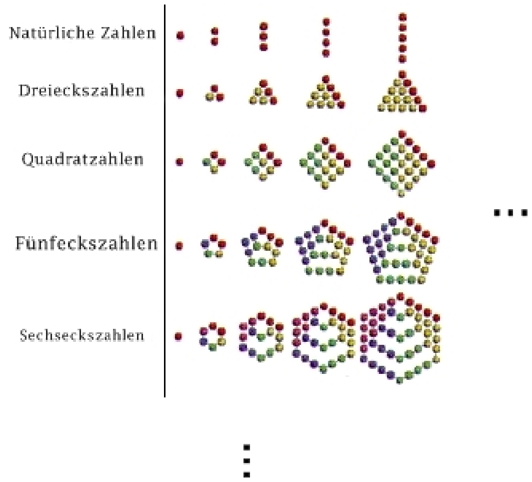

Abbildung 2.14: Graphische Darstellung der figurierten Zahlen [32]

Die Dreieckszahlen t_n ergeben sich also aus der Anzahl der „Steine/Kugeln", die man braucht, um ein Dreieck zu bilden, z.B.:

$t_1 = 1$
$t_2 = 1 + 2 = 3$
$t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
$t_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
$\vdots$

Mit der Gauß'schen Summenformel[33] lässt sich dies auch anschreiben als:

Satz 2.6:
Die n-te Dreieckszahl t_n ist für $n \geq 1$ gegeben als: $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

<u>Beweis:</u>
Mittels vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1. Für $n = 0$ stimmen die linke und die rechte Seite der Gleichung überein, denn sie ergeben beide Null.

   Für $n = 1$ stimmt die Formel ebenfalls, denn beide Seiten ergeben Eins.
2. Annahme: Die Formel sei gültig für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nun muss gezeigt werden, dass sie auch für $n \to n+1$ gilt:

   Linke Seite: $\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n}_{Induktionsannahme} + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \dfrac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$

   $$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

   Rechte Seite: $\dfrac{(n+1) \cdot (n+1+1)}{2} = \dfrac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} = \dfrac{n^2 + 3n + 2}{2}$

   Die beiden Seiten stimmen überein, was zu beweisen war. □

Satz 2.7:

Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt: $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2} = t_n$

<u>Interpretation:</u>
In der dritten Diagonale ($k = 2$) des Pascal'schen Dreiecks befinden sich die Dreieckszahlen.

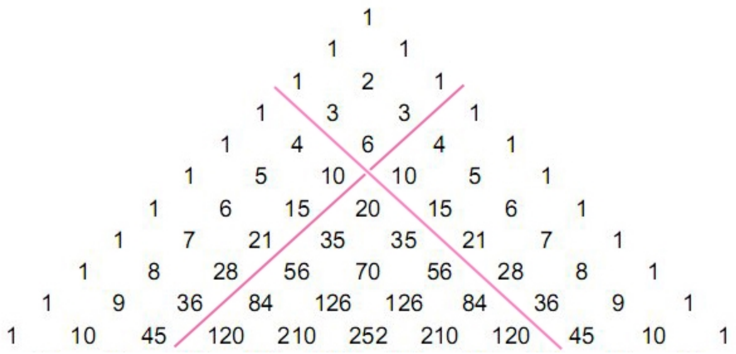

Abbildung 2.15: Die Dreieckszahlen im Pascal'schen Dreieck

<u>Beweis:</u>

[33] Die Gauß'sche Summenformel ist eine Formel für die Summe der ersten n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen: $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$.

Auch dieser Beweis ist trivial, denn laut Satz 2.6 ist die n-te Dreieckszahl t_n gegeben als:
$t_n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$ □

Satz 2.8:	Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt: $t_n^2 - t_{n-1}^2 = (t_n - t_{n-1})^3$

Interpretation:
Die „steigende" dritte Diagonale ($k = 2$) enthält ein weiteres interessantes Muster: Subtrahiert man die Quadrate zweier benachbarter Zahlen (von unten nach oben), dann erhält man die Differenz dieser beiden Zahlen hoch 3, z.B.:

$$\begin{aligned} 3^2 - 1^2 &= (3-1)^3 \\ 6^2 - 3^2 &= (6-3)^3 \\ 10^2 - 6^2 &= (10-6)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beweis:
Aus $t_n = \binom{n}{2}$ und $t_{n-1} = \binom{n-1}{2}$ ergibt sich $t_n - t_{n-1} = n - 1$ und $t_n + t_{n-1} = (n-1)^2$ und damit:
$t_n^2 - t_{n-1}^2 = (t_n + t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) = (n-1)^2(n-1) = (n-1)^3 = (t_n - t_{n-1})^3$ □

In der dritten Dimension lassen sich ähnlich wie die Dreieckszahlen die Tetraederzahlen T_n bilden, indem man die Dreieckszahlen addiert:

$$\begin{aligned} T_1 &= t_1 = 1 \\ T_2 &= t_1 + t_2 = 1 + 3 = 4 \\ T_3 &= t_1 + t_2 + t_3 = 1 + 3 + 6 = 10 \\ T_4 &= t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dies führt zu:

Satz 2.9:
Die n-te Tetraederzahl T_n ist für $n \geq 1$ gegeben als

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} t_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Beweis:
Mittels vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

1. Für $n = 1$ stimmen die linke und die rechte Seite der Gleichung überein, denn sie ergeben beide Eins.

2. Annahme: Die Formel sei gültig für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun muss gezeigt werden, dass sie auch für $n \to n+1$ gilt:

$$
\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} t_k \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} t_k}_{Ann.} + \underbrace{t_{n+1}}_{Satz\,2.7} \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \\
&= (n+1)(n+2)\left[\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}\right] \\
&= (n+1)(n+2)\left[\frac{1}{6}(n+3)\right] \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}
$$

□

Satz 2.10:

Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt: $\binom{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = T_n$

Interpretation:

In der vierten Diagonale ($k = 3$) des Pascal'schen Dreiecks befinden sich die Tetraederzahlen.

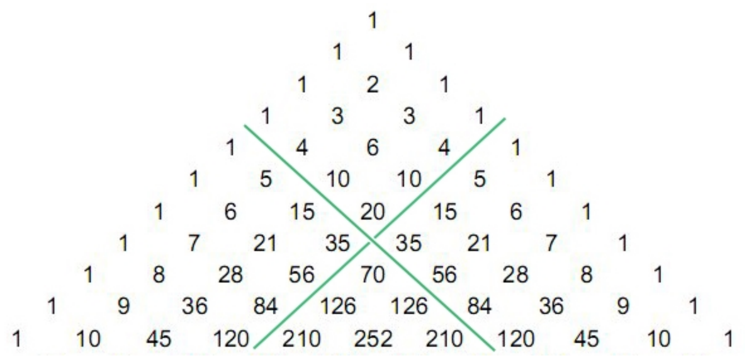

Abbildung 2.16: Die Tetraederzahlen im Pascal'schen Dreieck

Beweis:

Laut Satz 2.9 ist die n-te Tetraederzahl T_n gegeben als:

$$
T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-1)(n-2)\ldots} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{3!(n+2-3)!}
$$
$$
= \binom{n+2}{3}.
$$

□

Folgerung:

Fährt man auf diese Weise fort, ergeben sich in der i-ten Diagonale ($k = i-1$) die figurierten Zahlen der i-ten Ordnung durch:

$$
R(i,n) = \sum_{k=0}^{n} R(i-1,k) = \binom{n+i-1}{i}.
$$

Definition:
Jede Zahl $q \in \mathbb{R}$, für die es eine ganze Zahl z mit $z^2 = q$ gibt, heißt *Quadratzahl.*

Es genügt, sich im Folgenden auf die natürlichen Zahlen zu beschränken.

Satz 2.11: Die n-te Quadratzahl ($n \in \mathbb{N}$) ist gegeben als: $Q_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

Beweis:

Vollständige Induktion nach n ergibt:

1. Für $n = 1$ stimmt die Aussage, denn: $Q_1 = \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 - 1 = 1$

   Auch für $n = 2$ stimmt die Aussage, denn: $Q_2 = \sum_{k=1}^{2}(2k-1) = 1 + 3 = 4$
2. Angenommen für n sei die Aussage des Satzes gültig.

   $n \to n+1$ ergibt:

   $$Q_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}_{=n^2 \text{ lt. Ann.}} + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$\square$

Satz 2.12: Zusammenhang zwischen Dreiecks,- und Quadratzahlen
Jede Quadratzahl lässt sich als Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen darstellen: $Q_n = t_{n-1} + t_n$

In Binomialkoeffizienten ausgedrückt, kann man den obigen Satz folgendermaßen formulieren:

Satz 2.13: Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt: $\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = n^2$

Interpretation:

Die Summe zweier aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen in den zweiten Diagonalen des Pascal'schen Dreiecks ergibt stets eine Quadratzahl.

Beweis:

Der Beweis ist trivial:

$$t_{n-1} + t_n = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = \frac{2n^2}{n^2} = n^2 = Q_n \qquad \square$$

Satz 2.14: Zusammenhang zwischen Tetraeder,- und Quadratzahlen
Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt: $Q_n = T_n - T_{n-2}$

Dieser Satz ist gleichbedeutend zu:

Satz 2.15: Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt: $\binom{n+2}{3} + \binom{n}{3} = n^2$

Interpretation:
Subtrahiert man jede zweite Tetraederzahl in den dritten Diagonalen des Pascal'schen Dreiecks, so ergibt sich stets eine Quadratzahl.
Beweis:
Auch dieser Beweis ist trivial:

$$\begin{aligned} T_n - T_{n-2} &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-2)(n-2+1)(n-2+2)}{6} \\ &= \frac{(n^2+n)(n+2) - (n^2-2n)(n-1)}{6} \\ &= \frac{6n^2}{6} \\ &= n^2 = Q_n \end{aligned}$$

□

Definition: Die Fibonacci Zahlen
Die Fibonacci Zahlen F_n, $n \in \mathbb{N}_0$ sind definiert durch die Rekursionsgleichung: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ mit den Anfangswerten $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Die ersten Fibonacci-Zahlen sind also 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Satz 2.16: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{0}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

Interpretation:
Durch Einzeichnen der parallelen, schrägen Diagonalen im Pascal'schen Dreieck und Addition der Zahlen einer solchen Parallelen erhält man die Fibonacci-Zahlen:

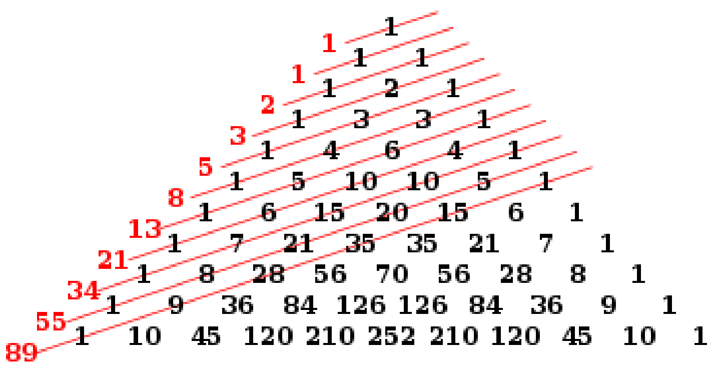

Abbildung 2.17: Die Fibonacci-Zahlen im Pascal'schen Dreieck [33]

Beweis:

Mittels vollständiger Induktion:

1. Für $n = 0$ stimmt die Aussage, denn:
$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0-k}{0} = \binom{0}{0} = 1 \Leftrightarrow F_{0+1} = F_1 = 1\checkmark$$
Auch für $n = 1$ stimmt die Aussage, denn:
$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1-k}{k} = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 = 1 \Leftrightarrow F_{1+1} = F_2 = 1\checkmark$$
2. Angenommen für $n \geq 1$ sei die Aussage des Satzes gültig für $n-1$ und n, also:
$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{0}{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k}$$
$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{0}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.$$
Es bleibt zu zeigen, dass $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} \stackrel{!}{=} F_{n+2}$ (laut Definition der Fibonacci-Zahlen):
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1-k}{k} + \binom{0}{n+1} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1-k}{k} + \binom{0}{n+1} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n-k}{k-1} + \binom{n-k}{k}\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}\right] + \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}\right] \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k}\right] + \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}\right] \\
&= F_n + F_{n+1} \\
&= F_{n+2}
\end{aligned}$$
□

2.2.2.3 Multiplikationsregeln

Satz 2.17: Absorption/Extraktion

Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq n$ gilt: $$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Interpretation:

Dieser Satz beschreibt im Pascal'schen Dreieck die Beziehung zwischen einem Element und seinem Element schräg links oben. Der Name „Absorption/Extraktion" rührt daher, dass dieser Satz oft benutzt wird, um „störende" Faktoren hinein bzw. hinaus aus den Binomialkoeffizienten zu ziehen.

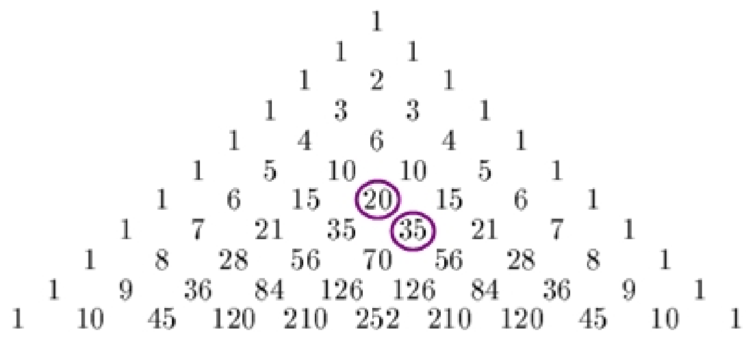

Abbildung 2.18: Beispiel: $4\binom{7}{4} = 4 \cdot 35 = 140 = 7 \cdot 20 = 7\binom{6}{3}$

Beweis:

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1)!)} \\ &= n\binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

□

Triviale Umformungen dieses Satzes ergeben die folgenden beiden Identitäten:

Satz 2.18:
Für alle $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}, k \neq 0$ gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

Satz 2.19:
Für alle $n, k \in \mathbb{N}, n, k \neq 0$ gilt: $\frac{1}{n}\binom{n}{k} = \frac{1}{k}\binom{n-1}{k-1}$

Satz 2.20:
Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq n$ gilt: $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$

Interpretation:
Dieser Satz beschreibt im Pascal'schen Dreieck die Beziehung zwischen einem Element und seinem Element schräg rechts oben.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}
$$

Abbildung 2.19: Beispiel: $(7-4)\binom{7}{4} = 3 \cdot 35 = 105 = 7 \cdot 15 = 7\binom{6}{4}$

Beweis:

$$(n-k)\binom{n}{k} \underset{\text{Satz 2.4}}{=} (n-k)\binom{n}{n-k} \underset{\text{Satz 2.17}}{=} n\binom{n-1}{n-k-1} \underset{\text{Satz 2.4}}{=} n\binom{n-1}{k} \qquad \square$$

Umformen ergibt:

Satz 2.21:
Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0, k \neq n$ gilt: $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$

Beweis:

siehe Beweis von Satz 2.20 $\square$

Satz 2.22: „Teilmenge einer Teilmenge“, Newton's Identität
Für $0 \leq k \leq m \leq n$ mit $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\displaystyle\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$

Interpretation:

Kombinatorisch kann man diesen Satz folgendermaßen interpretieren:

Fall 1: Angenommen, man wählt aus n Senatoren ein Komitee bestehend aus m Personen aus. Daraus wird die Leitung an k übertragen. Dafür gibt es $\binom{n}{m}\binom{m}{k}$ Möglichkeiten.

Fall 2: Angenommen, man überträgt aus n Senatoren die Leitung an k Senatoren. Aus den verbleibenden $n-k$ Senatoren verbleiben nun $(m-k)$ Senatoren, an die die Leitung nicht übertragen wird. Dafür gibt es $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$ Möglichkeiten.

Die beiden Fälle sind also äquivalent.

Beweis:

$$\begin{aligned}\binom{n}{m}\binom{m}{k} &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!} \\ &= \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}\end{aligned}$$

□

2.2.2.4 Summenregeln

Satz 2.23 Der Binomische Lehrsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

Interpretation:

Die Zahlen in der n-ten Zeile entsprechen stets den Koeffizienten der Binome $(a \pm b)^n$. Daher werden sie Binomialkoeffizienten genannt.

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	$1a \quad 1b$
$(a+b)^2$	$1a^2 \quad 2ab \quad 1b^2$
$(a+b)^3$	$1a^3 \quad 3a^2b \quad 3ab^2 \quad 1b^3$
$(a+b)^4$	$1a^4 \quad 4a^3b \quad 6a^2b^2 \quad 4ab^3 \quad 1b^4$
$(a+b)^5$	$1a^5 \quad 5a^4b \quad 10a^3b^2 \quad 10a^2b^3 \quad 5ab^4 \quad 1b^5$
⋮	⋮ ⋮ ⋮

Abbildung 2.20: Darstellung des Pascal'schen Dreiecks als Koeffizienten der Binome [34]

Beweis:

(mittels vollständiger Induktion)

1. Für beliebige a, b und $n = 0, 1$ stimmt die Aussage des Satzes:

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^{0-k}b^k = \binom{0}{0}a^0b^0 = (a+b)^0 = 1, \qquad \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{1-k}b^k = (a+b)^1 = (a+b)$$

2. Nun ist die Gültigkeit für $n+1$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}-1\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \qquad \square$$

Satz 2.24: Zeilensumme
Es sei $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$.
Dann gilt: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$

Interpretation:
Jede Zeilensumme ist eine Zweierpotenz mit der Zeilennummer im Exponenten.
Jede n-elementige Menge hat 2^n Teilmengen.
Beweis:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \square$$

Satz 2.25: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$

Interpretation:
Diese Gleichung besagt, dass im Pascal'schen Dreieck die Zeilensumme der n-ten Zeile das Doppelte der vorigen Zeile (Zeile $n-1$) ist. Also verdoppeln sich im Pascal'schen Dreieck die Zeilensummen von Zeile zu Zeile.
Beweis:
Direkter Beweis ohne Verwendung von Satz 2.24:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] + \binom{n}{n} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} + 1 \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
&\overset{r=k-1}{=} \underbrace{\binom{n-1}{n-1}}_{=1} + \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n-1}{r} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
&= 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \qquad \square
\end{aligned}$$

Beweis mittels Satz 2.24:
Laut Satz 2.24 gilt: n-te Zeile: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Rightarrow (n-1)$-te Zeile: $2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$ $\square$

Satz 2.26: Für $n > 0, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots = 0$

Interpretation:

Jede alternierende Zeilensumme im Pascal'schen Dreieck ergibt Null.

Beweis:

Durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes mit $a = -1, b = 1$ erhält man:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = (-1+1)^n = 0 \qquad \square$$

Satz 2.27: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

Interpretation:

Die Summe aller Einträge von Zeile 0 bis Zeile n, also $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots$, ergibt die Mersenne-Zahl [34] $2^{n+1} - 1$.

Beweis:

Mittels vollständiger Induktion über n:

1. Für $n = 0$ stimmt die Aussage, denn: $\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 \quad [= 2^{0+1} - 1]$

   Für $n = 1$ stimmt die Aussage, denn: $\sum_{k=0}^{1} 2^k = 2^1 = 2^0 + 2^1 = 3 \quad [= 2^{1+1} - 1]$

2. Angenommen, dieser Satz gilt für alle n. Zeige die Gültigkeit des Satzes für $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 2^k}_{=2^{n+1}-1} + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 \qquad \square$$

Satz 2.28: Für $n > 0, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\underbrace{\sum_{k=0}^{n}}_{k\,gerade} \binom{n}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}}_{k\,ungerade} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$

$$\iff \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$$

Interpretation:

Die Summe aller Binomialkoeffizienten ist sowohl für gerades k als auch für ungerades k gleich. Jede n-elementige Menge hat genauso viele Teilmengen gerader Ordnung wie ungerader Ordnung, nämlich 2^{n-1}.

[34] Eine Mersenne-Zahl, benannt nach dem französischen Priester Marin Mersenne (1588 bis 1648), ist eine Zahl der Form $2^n - 1$.

Beweis:

Der Beweis ergibt sich durch Addition/Subtraktion von Satz 2.24 und Satz 2.28:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots \iff \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\dots=0 \qquad \square$$

Satz 2.29: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k} = 0\binom{n}{0}+1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\dots+n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

Interpretation:

Multipliziert man die Spaltenzahl mit dem jeweiligen Binomialkoeffizienten und bildet darüber die Summe, dann ergibt sich die Zahl $n\cdot 2^{n-1}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n}{k} \qquad \text{[Anwendung von Satz 2.17]}\\ &= \sum_{k=1}^{n} n\cdot\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\\ &= n2^{n-1}\end{aligned} \qquad \square$$

Satz 2.30: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$1\binom{n}{1}+3\binom{n}{3}+5\binom{n}{5}+\dots=2\binom{n}{2}+4\binom{n}{4}+6\binom{n}{6}+\dots=n2^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{n}}_{k\,gerade} k\tbinom{n}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}}_{k\,ungerade} k\tbinom{n}{k} = n2^{n-2}$$

Interpretation:

Die steigenden Summen der geraden und der ungeraden Binomialkoeffizienten ergeben beide $n2^{n-2}$.

Beweis:

Den Beweis erhält man durch Anwendung des Binomischen Lehrsatzes:

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

Durch Ableiten beider Seiten nach x erhält man:

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

Setzt man nun $x=-1$, so ergibt sich durch Satz 2.29:

$$1\binom{n}{1}+3\binom{n}{3}+5\binom{n}{5}+\dots=2\binom{n}{2}+4\binom{n}{4}+6\binom{n}{6}+\dots=n2^{n-2} \qquad \square$$

Satz 2.31: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1}k \cdot \binom{n}{k} = 0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - ... + (-1)^{n+1}n\binom{n}{n} = 0$$

Interpretation:
Dieser Satz sagt aus, dass die steigende alternierende Summe der Binomialkoeffizienten Null ergibt.

Beweis:
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1}k \cdot \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1}k \cdot \binom{n}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1}n \cdot \binom{n-1}{k-1} \text{ [Absorption]}\\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1}\binom{n-1}{k} \text{ [da } (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}]\\ &= 0\end{aligned}$$
□

Satz 2.32:
Für $0 \leq k \leq m \leq n$ mit $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\displaystyle\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{m} = \binom{n}{k}2^{n-k}$

Interpretation:
Dieser Satz sagt aus, dass die Summe über die Newton-Identität (siehe Satz 2.22) gleich $\binom{n}{k}2^{n-k}$ ist.

Beweis:
Durch Anwendung der Newton-Identität $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ und des Satzes 2.24, dass die Zeilensumme der Binomialkoeffizienten 2^n ergibt, folgt der Beweis:
$$\begin{aligned}\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{m} &= \sum_{m=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{k}\sum_{m=k}^{n}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}\\ &= \binom{n}{k}2^{n-k}\end{aligned}$$
□

Satz 2.33: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k} = 3^n$

Interpretation:
Multipliziert man in der n-ten Zeile des Pascal'schen Dreiecks jeden Eintrag $\binom{n}{k}$ mit 2^k und summiert über diese Einträge, dann erhält man 3^n.
Beispiel (Zeile 4): $1 \cdot 2^0 + 4 \cdot 2^1 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 81 = 3^4$

Beweis:
Mit dem binomischen Lehrsatz erhält man:
$$3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}2^k = \sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}$$
□

Satz 2.34: Hockey-Schläger Regel/Spaltensumme

$$\text{Für } k, n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k < n \text{ gilt: } \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Interpretation:

Das Ergebnis jeder Diagonalsumme findet man schräg unterhalb des letzten Summanden. Summiert man also die Einträge einer Spalte k bis zum Eintrag in Zeile n, so erhält man als Ergebnis den Eintrag in der $k+1$-ten Spalte und $n+1$-ten Zeile. Der Name rührt daher, dass dieses Muster an einen Hockey-Schläger erinnert.

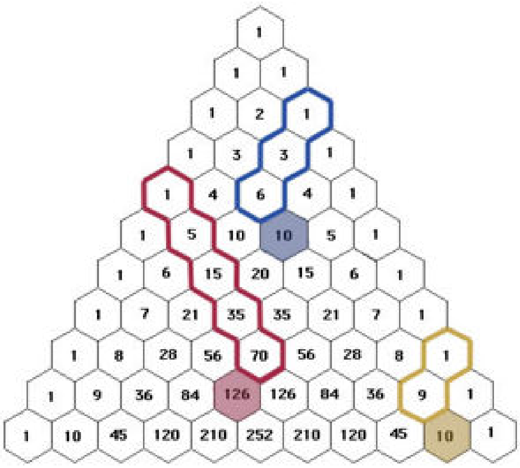

Abbildung 2.21: Die Hockey-Schläger Regel des Pascal'schen Dreiecks [35]

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} &= \binom{k}{k} + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{i}{k} \\
&= \binom{k}{k} + \sum_{i=k+1}^{n} \left[\binom{i+1}{k+1} - \binom{i}{k+1} \right] \\
&= \binom{k}{k} - \binom{k+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+1} \\
&= 1 - 1 + \binom{n+1}{k+1} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

□

Die Interpretation dieser Identität lässt sich auch anders formulieren:

Satz 2.35:

$$\text{Für } k, n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k < n \text{ gilt: } \binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}.$$

Beweis:

Den Beweis dieses Satzes erhält man durch wiederholte Anwendung der Pascal'schen Rekursion:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\ &= \qquad \cdots \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-k-1}{0} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}\end{aligned}$$ □

Die folgenden beiden Sätze beschreiben ebenfalls die Diagonalsumme:

Satz 2.36: Parallel-Summe

Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ gilt: $$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

Interpretation:

Die Summe der ersten $n+1$ Einträge in der südöstlichen Diagonale von Zeile r und Spalte 0 im Pascal'schen Dreieck ergibt den Eintrag in der Zeile $r+n+1$ und Spalte n, also genau den Eintrag schräg unter dem letzten Diagonalen Element.

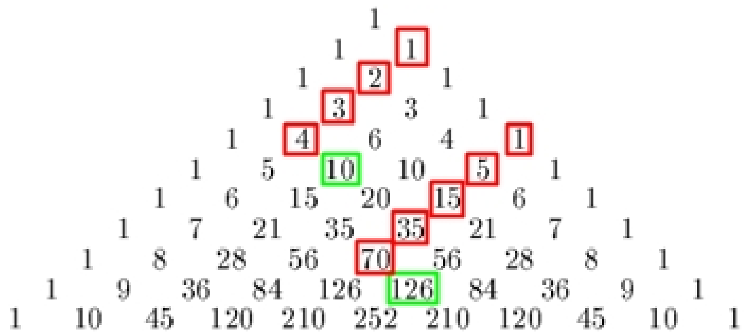

Abbildung 2.22: Graphische Darstellung der Parallel-Summe (rot = südöstlichen Diagonale)

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} \underset{\text{Symmetrie}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{r} \underset{\text{Satz 2.36}}{=} \binom{r+n+1}{r+1} \underset{\text{Symmetrie}}{=} \binom{r+n+1}{r}$$ □

Satz 2.37:

Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ gilt: $$\sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{m-k} = \binom{n+1}{m}$$

Interpretation:

Dieser Satz beschreibt ebenfalls die Diagonalsumme des Pascal'schen Dreiecks.

Beweis:

Kehrt man die Einträge der linken Seite der Gleichung, also der Diagonalsumme $\binom{n-0}{m-0} + \binom{n-1}{m-1} + \cdots + \binom{n-m}{m-m}$ um, dann ergibt dies die südöstliche Diagonalsumme $\binom{n-m}{0} + \binom{n-m+1}{1} + \cdots + \binom{n}{m}$, welche bei Zeile $n-m$ beginnt, $m+1$ Einträge abwärts enthält und in Zeile n, Spalte m endet. Laut Satz 2.36 ergibt diese Summe den Binomialkoeffizienten $\binom{n+1}{m}$. □

Satz 2.38: Vandermonde'sche Identität

$$\text{Für } k, m, n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt: } \binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

Interpretation:

Die Vandermonde'sche[35] Identität ist eine Verallgemeinerung der Pascal'schen Rekursionsgleichung (Satz 1). Anschaulich besagt sie Folgendes:

Um k Elemente aus $n+m$ Elementen auszuwählen, muss man i Elemente aus den m Elementen und $k-i$ Elemente aus den n Elementen auswählen. Nach der Produktregel gibt es dafür $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$ Möglichkeiten und nach der Summenregel muss dann noch über alle möglichen i aufsummiert werden.

Beweis:

Mittels vollständiger Induktion über n:

1. Für $n = 1$ stimmt die Aussage, denn:

$$\binom{1+m}{k} \overset{\text{Satz 2.1}}{=} \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m}{k}\underbrace{\binom{1}{0}}_{=1} + \binom{m}{k-1}\underbrace{\binom{1}{1}}_{=1} \overset{\binom{1}{j}=0\,(j>1)}{=} \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{1}{k-i}$$

2. Angenommen, dieser Satz gilt für alle n. Zeige die Gültigkeit des Satzes für $n+1$, also $\binom{n+1+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n+1}{k-i}$:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1+m}{k} &= \binom{n+m}{k} + \binom{n+m}{k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{m}{i}\binom{n}{k-1-i} \\
&= \binom{m}{k}\binom{n}{0} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{m}{i}\binom{n}{k-1-i} \\
&= \binom{m}{k}\binom{n}{0} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{m}{i}\left[\binom{n}{k-i} + \binom{n}{k-1-i}\right]
\end{aligned}$$

[35] benannt nach dem französischen Mathematiker, Musiker und Chemiker Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735-1796

$$= \binom{m}{k}\underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{m}{i}\binom{n+1}{k-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n+1}{k-i} \qquad \square$$

Einen Spezialfall der Vandermonde'schen Identität liefert folgender Satz:

Satz 2.39 Lagrange Identität Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$

Interpretation:
Durch Aufsummieren der n-ten Zeile erhält man die mittleren Binomialkoeffizienten in der Zeile $2n$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \boxed{1} & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & \boxed{2} & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & \boxed{20} & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Abbildung 2.23: Graphische Darstellung der Lagrange Identität

Beweis:
Den Beweis erhält man, indem man in der Vandermonde'schen Identität $n = m = i$ setzt und dann die Symmetrie-Eigenschaft anwendet:

$$\Leftrightarrow \binom{n+n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$
$$\Leftrightarrow \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 \qquad \square$$

Ebenfalls den mittleren Binomialkoeffizienten erhält man durch folgenden Satz:

Satz 2.40:
Der größte Binomialkoeffizient in Zeile n ist gegeben durch $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, $n \geq 0$.

Interpretation: Im Pascal'schen Dreieck haben nur die Zeilen mit geradzahligem Index einen eindeutigen mittleren Binomialkoeffizienten. Die Zeilen mit ungeradem Index haben dagegen zwei in der Mitte liegende Binomialkoeffizienten, diese beiden Einträge stimmen jedoch stets überein.

Beweis:

Dieser Beweis besteht aus zwei Teilen:

1. Man zeige, dass $\binom{n}{r-1} < \binom{n}{r} \Leftrightarrow r < \frac{n+1}{2}$. Angenommen $\binom{n}{r-1} < \binom{n}{r}$.

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} < \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
$$\frac{1}{n-r+1} < \frac{1}{r}$$
$$n-r+1 > r$$
$$r < \frac{n+1}{2}$$

Sei umgekehrt $r < \frac{n+1}{2}$. Durch die selben Schritte in umgekehrter Richtung lässt sich zeigen, das dann $\binom{n}{r-1} < \binom{n}{r}$ gilt.

Daraus folgt also, dass gilt: $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots \binom{n}{r-1} < \binom{n}{r}$ mit $r < \frac{n+1}{2}$.

Man erhält also $\binom{n}{r}$ als Maximum, wobei r die größte Zahl $\leq \frac{n+1}{2}$ ist.

2. Sei $n = 2r+1$, also n ungerade.$\Rightarrow \frac{n+1}{2} = r+1 \Leftrightarrow r = \frac{n-1}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Sei n gerade, also $n = 2r$. Dann gilt: $\frac{n+1}{2} = \frac{2r+1}{2} = r + \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{n}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

$\longrightarrow$ Also ist $\binom{n}{r}$ maximal, wenn $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ gilt. □

Folgerung:

Aus Satz 2.39 und Satz 2.40 ergibt sich:

Satz 2.41:
Für $n \in \mathbb{N}_0, n \geq 0$ gilt: $$\binom{2n}{n} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Beweis:

Der Beweis ist trivial. (Setze $n = 2n$ in die rechte Seite der Gleichung ein) □

Weitere Spezialfälle der Vandermonde'schen Identität liefern die nächsten beiden Sätze:

Satz 2.42: Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $$\binom{2n}{n+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i}\binom{n}{i+1}$$

Interpretation:

Durch diesen Satz erhält man die Einträge rechts bzw. links (siehe nächster Satz) des mittleren Binomialkoeffizienten in der Zeile $2n$. Beispielsweise erhält man für $n = 6$ den Wert $\binom{12}{7} = 792$, also die zweitgrößten Einträge in Zeile 12:

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

Beweis:

Setze $m = n$ in Satz 2.38 ein: $\binom{2n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \underbrace{\binom{n}{k-i}}_{\binom{n}{n-k+i}}$

Ersetzt man k durch $n+1$: $\Leftrightarrow \binom{2n}{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i}\binom{n}{i-1}$

Da das erste und das letzte Glied dieser Summe gleich Null sind läuft die Summe von 1 bis n. Durch Indexverschiebung erhält man die gewünschte Darstellung: $\binom{2n}{n+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1}\binom{n}{i}$ $\square$

Analog zu Satz 2.42 gilt der folgende Satz, ebenfalls ein Spezialfall der Vandermonde'schen Identität:

Satz 2.43: Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{2n}{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{n-i}\binom{n}{i-1}$

Beweis:

Setze $m = n, k = n-1$ in Satz 2.38 ein:

$$\binom{n+n}{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i}\binom{n}{n-1-i} \Leftrightarrow \binom{2n}{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i}\binom{n}{n-1-i}$$

Ersetzt man nun i durch $i-1$ und verschiebt den Index, so ergibt sich die gewünschte Identität: $\binom{2n}{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1}\binom{n}{n-1-i+1} \Leftrightarrow \binom{2n}{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{n-i}\binom{n}{i-1}$ $\square$

Es gibt viele weitere Identitäten, welche die mittleren Binomialkoeffizienten beinhalten. Die Bekanntesten werde ich in den nächsten Sätzen kurz erläutern. [66]

Satz 2.44: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n}$

Interpretation:

Dieser Satz ist nichts anderes als die Pascal'sche Identität, nämlich dass sich der mittlere Binomialkoeffizient in einer geraden Zeile durch Addition der beiden mittleren gleichen Binomialkoeffizienten in der ungeraden Zeile darüber ergibt.

Beweis:

$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n} = 2\binom{2n-1}{n}$ $\square$

Satz 2.45:	Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:	$\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$

Interpretation:

Dieser Satz ist im Wesentlichen eine Anwendung der Identität aus Satz 2.18.

Beweis:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n}{n} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} = 2\binom{2n-1}{n-1} \qquad \square$$

Satz 2.46:	Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:	$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k} 2^{n-2k}$

Interpretation:

Dieser Satz beschreibt ebenfalls den mittleren Binomialkoeffizienten. Außerdem sieht man dadurch in späterer Folge den Zusammenhang zu den Catalan-Zahlen, vergleiche Satz 2.58 auf Seite 72.

Beweis:

Man erhält den Beweis, indem man den binomischen Lehrsatz anwendet und die Koeffizienten von x^n auf beiden Seiten der Gleichung $(1+x)^{2n} = [(1+x)^2]^n = [1+x(2+x)]^n$ vergleicht:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{2n} &= [1+x(2+x)]^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (2+x)^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \Big[\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} 2^{i-k} x^k \Big] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Big[\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} 2^{i-k} x^{i+k} \Big]
\end{aligned}$$

Vergleicht man die Koeffizienten von x^n auf beiden Seiten der Gleichung, d.h. man setzt $i = n-k$, dann fällt die erste Summe weg und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{0} \binom{n}{n-k}\binom{n-k}{k} 2^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k}\binom{n-k}{k} 2^{n-2k} \qquad \square
\end{aligned}$$

2.2.2.5 Die Catalan-Zahlen im Pascal'schen Dreieck

Der Großteil dieses Unterkapitels über die Catalan-Zahlen basiert auf folgender Quelle: [66]

Die Catalan-Zahlen[36] tauchen in zahlreichen kombinatorischen Fragestellungen auf.

Definition: Die Catalan-Zahlen
Die Catalan-Zahlen C_n, $n \in \mathbb{N}$, sind definiert durch: $C_n = \frac{1}{(n+1)} \cdot \binom{2n}{n}$

Die ersten Catalan-Zahlen sind: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, ...

Interpretation der Catalan-Zahlen:
Die n-te Catalan-Zahl C_n beschreibt die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, ein konvexes[37] $(n+2)$-Eck durch sich nicht schneidende Diagonalen in n Dreiecke zu zerteilen. Man spricht von der sogenannten *Triangulation*.
[66, Seite 107 f.]

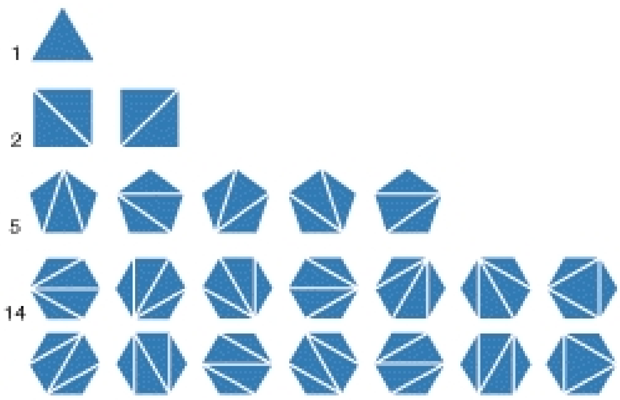

Abbildung 2.24: Darstellung der ersten vier Catalan-Zahlen [36]

[36] benannt nach dem belgischen Mathematiker Eugène Charles Catalan, 1814-1894

[37] Konvex ist eine Figur genau dann, wenn sie überall eine positive Krümmung hat, also überall nach außen gewölbt ist. Sei M eine konvexe Punktmenge. Dann bedeutet Konvexität in diesem Fall: $P, Q \in M \Leftrightarrow [P, Q] \in M$, also wenn für je zwei beliebige Punkte der Menge M auch deren Verbindungsstrecke ganz in M liegt.

Satz 2.47: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $C_n = \frac{1}{(n+1)} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)} \cdot \binom{2n}{n} &= \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\end{aligned}$$

□

Satz 2.48: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $C_n \in \mathbb{N}$

Interpretation:

Betrachtet man die mittleren Binomialkoeffizienten, also die Einträge 1, 2, 6, 20, 70, ... des Pascal'schen Dreiecks, die durch $\binom{2n}{n}$ beschrieben werden, dann haben diese die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie der Reihe nach durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... teilbar sind. Also ist der Ausdruck $C_n = \frac{1}{(n+1)} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ stets eine ganze Zahl.

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} &= \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{(n-1)!n!} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{(2n)!}{(n-1)!n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \underbrace{\binom{2n}{n}}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{\binom{2n}{n+1}}_{\in \mathbb{N}}\end{aligned}$$

□

Das Pascal'sche Dreieck verbirgt viele verschiedene Identitäten für die Catalan-Zahlen. Die wichtigsten möchte ich nun kurz anführen:

Satz 2.49: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$

Interpretation:

Die Catalan-Zahlen ergeben sich, wenn man im Pascal'schen Dreieck den Eintrag links (bzw. rechts) vom mittleren Binomialkoeffizienten in der $2n$-ten Zeile mit dem Kehrwert von n multipliziert.

Beweis:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$$

□

Satz 2.50: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

Interpretation:
Subtrahiert man im Pascal'schen Dreieck vom mittleren Binomialkoeffizienten den benachbarten Eintrag zur linken (bzw. zur rechten), erhält man ebenfalls die Catalan-Zahlen.
Beweis:
Siehe Beweis von Satz 2.48 auf Seite 68

Satz 2.51: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $C_{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2}$

Interpretation:
Im Pascal'schen Dreieck erhält man jede Catalan-Zahl, mit Ausnahme von C_0, indem man vom mittleren Binomialkoeffizienten den Eintrag $\binom{2n}{n-2}$ abzieht:

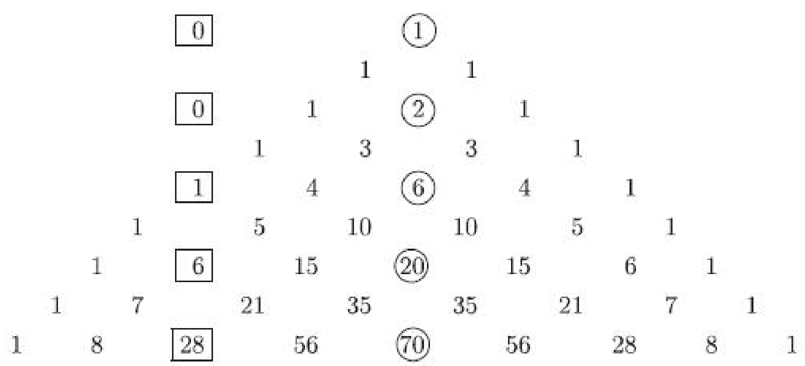

Abbildung 2.25: Graphische Darstellung von Satz 2.51

Beweis:

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-2)!(n+2)!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\left[(n+1) - \frac{n(n-1)}{n+2}\right] \\
&= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \cdot \frac{2(2n+1)}{n+2} \\
&= \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)!(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} \\
&= C_{n+1}
\end{aligned}$$

□

Satz 2.52: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $C_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$

Interpretation:
Dieser Satz ergibt eine Identität für die Catalan-Zahlen in den ungeraden Zeilen des Pascal'schen Dreiecks. Da jede ungerade Zeile eine gerade Anzahl an Einträgen besitzt, ergeben sich in diesen Zeilen zwei identische mittlere Binomialkoeffizienten. Dividiert man diese durch die entsprechende (ungerade) Zeilennummer, erhält man eine Catalan-Zahl.

Beweis:
$$\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = C_n \qquad \square$$

Satz 2.53: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $C_n = \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2}$

Interpretation:
Die Catalan-Zahlen erhält man ebenfalls, wenn man in den ungeraden Zeilen des Pascal'schen Dreiecks vom linken mittleren Binomialkoeffizient den Eintrag direkt zu seiner linken abzieht.

Beweis:
$$\begin{aligned}\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2} &= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} - \frac{(2n-1)!}{(n-2)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n-1)!}{(n+1)!n!}[n(n+1) - n(n-1)] \\ &= \frac{(2n-1)!}{(n+1)!n!} \cdot (2n) \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \\ &= C_n \qquad \square\end{aligned}$$

Analog dazu ergibt sich der nächste Satz:

Satz 2.54: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $C_n = \binom{2n+1}{n+1} - 2\binom{2n}{n+1}$

Interpretation:
Wenn man in den ungeraden Zeilen des Pascal'schen Dreiecks vom rechten mittleren Binomialkoeffizient das Doppelte des Eintrags oberhalb zu seiner rechten abzieht, ergibt sich wieder eine Catalan-Zahl.

Beweis:
$$\begin{aligned}\binom{2n+1}{n+1} - 2\binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} - 2 \cdot \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\ &= (2n+1)C_n - (2n)C_n \\ &= C_n \qquad \square\end{aligned}$$

Durch die Symmetrie der Binomialkoeffizienten kann man diesen Satz auch folgendermaßen darstellen:

Satz 2.55: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $C_n = \binom{2n+1}{n} - 2\binom{2n}{n-1}$

Beweis:

Der Beweis ist durch Anwendung der Symmetrie im obigen Beweis trivial. □

Satz 2.56: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $C_n = 2\binom{2n}{n} - \binom{2n+1}{n}$

Interpretation:

Subtrahiert man einen mittleren Binomialkoeffizienten in der ungeraden Zeile $2n+1$ vom doppelten mittleren Binomialkoeffizienten in der geraden Zeile $2n$, ergibt sich eine Catalan'sche Zahl.

Beweis:

$$\begin{aligned} 2\binom{2n}{n} - \binom{2n+1}{n} &= \frac{2(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}[2(n+1) - (2n+1)] \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \\ &= C_n \end{aligned}$$

□

Satz 2.57: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n(2n-1)C_{n-1}$

Interpretation:

Multipliziert man das Quadrat der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit k, wobei $k \geq 1$ gilt, und bildet darüber die Summe, dann erhält man einen weiteren Bezug zu den Catalan-Zahlen. Zum Beispiel gilt für $n = 6$:

$$\sum_{k=1}^{6} k\binom{6}{k}^2 = 1\binom{6}{1}^2 + 2\binom{6}{2}^2 + 3\binom{6}{3}^2 + \cdots + 6\binom{6}{6}^2 = 2772 = 6(2 \cdot 6 - 1)C_5$$

Beweis:

Den Beweis erhält man durch Anwendung des Binomischen Lehrsatzes:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Durch Ableiten beider Seiten nach x erhält man:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k$$

Ersetzt man x durch $\frac{1}{x}$, so ergibt sich:

$$\frac{n}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{x^k}\binom{n}{k}$$

$$\Leftrightarrow n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{n-k}$$

Nun multipliziert man beide Seiten mit $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$:

$$\begin{aligned}
n(1+x)^{2n-1} &= \left[\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{n-k}\right]\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right]\\
&= \left[1\binom{n}{1}x^{n-1}+2\binom{n}{2}x^{n-2}+\dots+n\binom{n}{n}x^0\right]\left[\binom{n}{0}x^0+\binom{n}{1}x^1+\dots+\binom{n}{n}x^n\right]\\
&= \binom{n}{1}\binom{n}{0}x^{n-1}+2\binom{n}{2}\binom{n}{0}x^{n-2}+\dots+1\binom{n}{1}\binom{n}{1}x^n+2\binom{n}{2}\binom{n}{1}x^{n-1}\\
&\quad+\dots+\binom{n}{1}\binom{n}{n}x^{2n-1}+2\binom{n}{2}\binom{n}{n}x^{2n-2}+\dots+n\binom{n}{n}\binom{n}{n}x^n
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich von x^n auf beiden Seiten liefert: $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2$ □

Satz 2.58: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k} = (n+1)C_n$

Interpretation:

Multipliziert man das Produkt der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$ mit 2^{n-2k} und bildet darüber die Summe, dann erhält man $(n+1)$-mal die zugehörige Catalan-Zahl. Zum Beispiel gilt für $n = 7$:

$$\sum_{k=0}^{3}\binom{7}{k}\binom{7-k}{k}2^{7-2k} = 1\cdot 1\cdot 2^7+7\cdot 6\cdot 2^5+21\cdot 10\cdot 2^3+35\cdot 4\cdot 2^1 = 8\cdot 429 = 8C_7$$

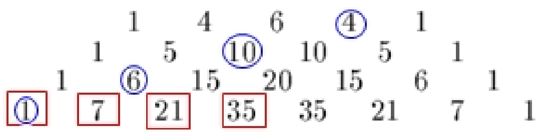

Abbildung 2.26: Graphische Darstellung von Satz 2.58

Beweis:

Der Beweis ist nach der Definition der Catalan-Zahlen und Satz 2.46 auf Seite 66 trivial.

Kapitel 3

Ein tieferer Einblick in das Pascal'sche Dreieck

Auch dieses Kapitel basiert - falls nicht explizit anders angegeben - auf der Quelle: [67].

3.1 Weitere Identitäten

Satz 3.1: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\quad 11^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 10^k$

Interpretation:
Jede Zeile des Pascal'schen Dreiecks ergibt eine Potenz von 11.
Beweis:
Der Beweis ist mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes einfach zu zeigen:
$11^n = (1+10)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 10^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 10^k$ □

Satz 3.2:
Sei $x = 1\underbrace{00\ldots00}_{m\,Nullen}1$. Dann gilt:
$x^n = \binom{n}{0} \cdot 10^{(m+1)n} + \binom{n}{1} \cdot 10^{(m+1)(n-1)} + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot 10^{(m+1)} + \binom{n}{n} \cdot 10^0$

Interpretation:
Mit dem Pascal'schen Dreieck lassen sich beliebige Potenzen der Zahlen 101, 1001, ..., bzw. allgemein $1\underbrace{00\ldots00}_{0-er}1$ berechnen.

$$
\begin{aligned}
101^0 &= 01\\
101^1 &= 1\ 01\\
101^2 &= 1\ 02\ 01\\
101^3 &= 1\ 03\ 03\ 01\\
101^4 &= 1\ 04\ 06\ 04\ 01\\
101^5 &= 1\ 05\ 10\ 10\ 05\ 01\\
101^6 &= 1\ 06\ 15\ 20\ 15\ 06\ 01\\
101^7 &= 1\ 07\ 21\ 35\ 35\ 21\ 07\ 01
\end{aligned}
$$

In der neunten Reihe des Pascal'schen Dreiecks befinden sich jedoch dreistellige Zahlen ($\binom{9}{4} = \binom{9}{5} = 126$. Um diese umzuwandeln in zweistellige Zahlen, addiert man die Eins zu der links stehenden Zahl:

Abbildung 3.1

Damit ergibt sich: 101^9=1 09 36 85 27 26 84 36 09 01

Solche Übergänge in dieser und den nächsten Zeilen lassen sich vermeiden, wenn man Potenzen von 1001, 10001, ... verwendet.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
x^n = 10^{(m+1)} + 1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 10^{(m+1)(n-k)}\\
&= \binom{n}{0} \cdot 10^{(m+1)n} + \binom{n}{1} \cdot 10^{(m+1)(n-1)} + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot 10^{(m+1)} + \binom{n}{n} \cdot 10^0 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Satz 3.3: Das magische Sechseck

Für $n \geq 2$ gilt: $\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}$

Interpretation:

Bildet man im Pascal'schen Dreieck ein Sechseck um den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ aus den benachbarten Elementen, dann gleichen sich die Produkte der drei gegenüberliegenden Eckpunkte.

Diese Identität wurde 1971 von Verner Emil Hoggatt Junior[1] und Walter Hansell[2] entdeckt, weswegen sie auch unter dem Namen „Hoggatt-Hansell Identität" bekannt ist.

[1] amerikanischer Mathematiker, 1921-1980

[2] aus Mill Valley, Kalifornien

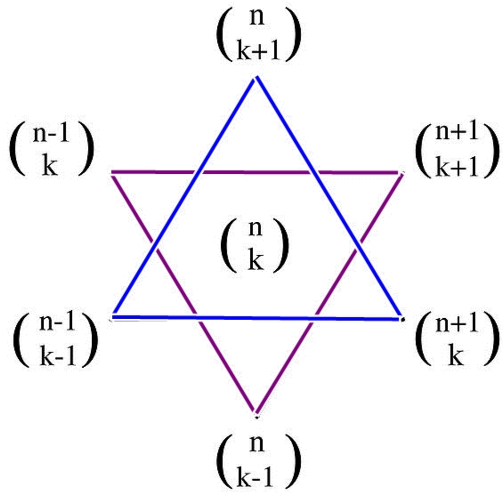

Abbildung 3.2: Das magische Sechseck [37]

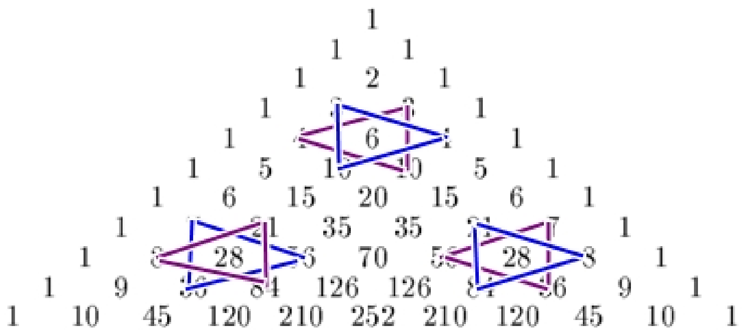

Abbildung 3.3: Darstellung am Pascal'schen Dreieck

Beweis:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\\ &= \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}\end{aligned}$$

□

Satz 3.4:
Für $a \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt: $\binom{n-a}{k-a}\binom{n}{k+a}\binom{n+a}{k} = \binom{n-a}{k}\binom{n+a}{k+a}\binom{n}{k-a}$

Interpretation:

1972 verallgemeinerte Henry W. Gould[3] die Identität von Satz 51 für beliebige, positive ganze Zahlen a und nannte sie „Star of David property" (Davidsstern-Identität).

[3]geboren 1928, Mathematikprofessor an der West Virginia Universität in Amerika

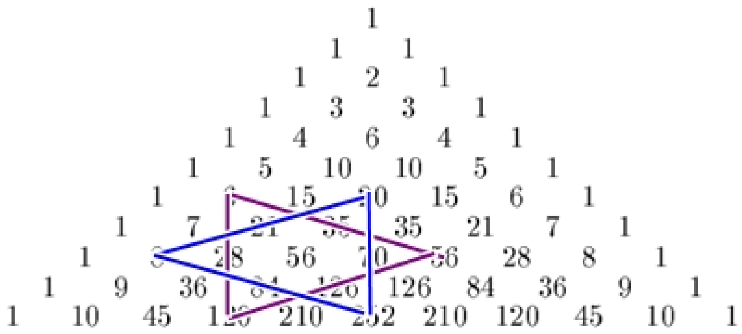

Abbildung 3.4: Beispiel: $n = 8, k = 3, a = 2$

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned}\binom{n-a}{k-a}\binom{n}{k+a}\binom{n+a}{k} &= \frac{(n-a)!}{(k-a)!(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(k+a)!(n-k-a)!}\cdot\frac{(n+a)!}{k!(n-k+a)!}\\ &= \frac{(n-a)!}{k!(n-k-a)!}\cdot\frac{(n+a)!}{(k+a)!(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(k-a)!(n-k+a)!}\\ &= \binom{n-a}{k}\binom{n+a}{k+a}\binom{n}{k-a}\end{aligned}$$

$\square$

3.2 Teilbarkeitseigenschaften

Dieses Unterkapitel beschäftigt sich mit der Kongruenz von Binomialkoeffizienten und den dadurch entstehenden Strukturen im Pascal'schen Dreieck. Zuerst nochmal die Definition der Kongruenz zur Erinnerung:
In der Zahlentheorie bezeichnet man als Kongruenz eine Beziehung zwischen drei ganzen Zahlen.
Zwei Zahlen heißen *kongruent* bezüglich der dritten Zahl, dem sogenannten Modul, wenn sie bei Division durch dieses Modul denselben Rest haben. Dies trifft genau dann zu, wenn sie sich um ein ganzzahliges Vielfaches des Moduls unterscheiden. Im umgekehrten Fall spricht man von *Inkongruenz.* [72]

<u>**Definition:**</u>
Seien $a, b, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$.
a und b heißen *kongruent modulo* m, wenn m die Differenz $a - b$ teilt:

$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow a \equiv b\,(mod\,m)\\ &\Leftrightarrow m|(a-b)\\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z} : a = km + b\end{aligned}$$

Satz 3.5: Sei $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$. Dann gilt:
Jeder Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist ungerade, genau dann, wenn n eine Mersenne-Zahl ist.

Interpretation:
Für die Definition der Mersenne-Zahlen vergleiche Kapitel 2.2.2.4 auf Seite 57. Dieser Satz sagt aus, dass jeder Eintrag in Zeile n ungerade ist, genau dann, wenn n von der Gestalt $2^k - 1$ ist. Beispielsweise ist $7 = 2^3 - 1$ eine Mersenne-Zahl, also ist jeder Binomialkoeffizient $\binom{7}{k}$ ungerade.
Beweis:
Siehe Beweis von Satz 3.17 auf Seite 84.

Satz 3.6: Sei p eine Primzahl, wobei $0 < k < p$ ist. Dann gilt:
$$\binom{p}{k} \equiv 0\,(mod\,p)$$

Interpretation:
Falls p prim ist, dann ist jeder Eintrag in der p-ten Zeile des Pascal'schen Dreiecks durch p teilbar.
Beweis:
Nach Satz 2.17 auf Seite 52 ist $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$.
Da $k < p$, ist der größte gemeinsame Teiler von $(p, k) = 1$.
Also gilt $p \Big| \binom{p}{k} \Leftrightarrow \binom{p}{k} \equiv 0\,(mod\,p)$. □

Satz 3.7: Sei p prim und a, b beliebige, positive ganze Zahlen. Dann gilt:
$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p\,(mod\,p)$$

Interpretation:
Dieser Satz gibt die Teilbarkeit in Form des Binomischen Lehrsatzes an.
Beweis:
$$\begin{aligned}(a+b)^p &= a^p + \underbrace{\sum_{r=1}^{p-1}\binom{p}{r}a^{p-k}b^k}_{=0\,(mod\,p)} + b^p \\ &\equiv a^p + 0 + b^p \\ &\equiv a^p + b^p\,(mod\,p)\end{aligned}$$
□

Satz 3.8: Ist p eine Primzahl, dann gilt: $\binom{2p}{p} \equiv 2\,(mod\,p)$

Interpretation:
Dieser Satz beschreibt die Teilbarkeit des mittleren Binomialkoeffizienten, also dass der mittlere Binomialkoeffizient in der Zeile $2p$ genau 2 Rest hat, wenn er durch p dividiert wird.
Beweis:
Aus der Lagrange-Identität (Kapitel 2.2.2.4, Satz 2.39 auf Seite 63) und Satz 3.6 folgt:

$$\begin{aligned}\binom{2p}{p} &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{r}^2 \\ &= 2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{r}^2}_{=0} \\ &\equiv 2 + 0 \,(mod\, p) \\ &\equiv 2 \,(mod\, p)\end{aligned}$$

□

Ersetzt man 2 durch eine beliebige, positive ganze Zahl m, so ergibt sich die Verallgemeinerung:

Satz 3.9: Sei m eine beliebige positive, ganze Zahl und p eine Primzahl. Dann gilt: $\binom{mp}{p} \equiv m \,(mod\, p)$

Beweis:
Für den Beweis dieses Satzes benötigt man das „Theorem von Wilson[4]". Es besagt folgendes:

„Ist p eine Primzahl, dann ist $(p-1)! \equiv -1 \,(mod\, p)$."

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\binom{mp}{p} &= \frac{(mp)!}{p!(mp-p)!} \\ &= \frac{(mp)!}{p!(p(m-1))!} \\ &= \frac{mp \prod_{x=1}^{p-1} (mp-p+x)}{p!} \\ &\equiv (p-1)!^{-1} m \prod_{x=1}^{p-1} x \,(mod\, p) \\ &\equiv (p-1)!^{-1} m (p-1)! \,(mod\, p) \\ &\equiv m \,(mod\, p)\end{aligned}$$

□

Satz 3.10: Sei p eine Primzahl und n eine beliebige positive, ganze Zahl. Dann gilt: $\binom{p^n}{k} \equiv 0 \,(mod\, p)$ mit $0 < k < p^n$

[4] 1741 - 1793, britischer Mathematiker und Jurist

Interpretation:
Ist p eine Primzahl, dann ist jeder „innere“ Eintrag, also alle Einträge ohne die Einsen am Rand, in der Zeile p^n teilbar durch p.
Betrachte dazu das Beispiel: Sei $p = 3, n = 2$. Zeile 9 des pascal'schen Dreiecks lautet: $1 \quad \underbrace{9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9}_{\text{alle teilbar durch 3}} \quad 1$

Jedes Element in dieser Zeile, bis auf die zwei Einsen, ist teilbar durch 3.
Beweis:
Nach dem binomischen Lehrsatz gilt: $(x+1)^{p^n} = x^{p^n} + \sum_{k=1}^{p^n-1} \binom{p^n}{k} x^{p^n-k} + 1$

$x^{p^n} + 1 \equiv x^{p^n} + \sum_{k=1}^{p^n-1} \binom{p^n}{k} x^{p^n-k} + 1$ [Satz 3.7, Seite 77]

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p^n-1} \binom{p^n}{k} x^{p^n-k} \equiv 0 \,(mod\, p)$ □

Satz 3.11: Eine positive ganze Zahl $n \geq 2$ ist prim genau dann, wenn $\binom{n-1}{k} \equiv (-1)^k \,(mod\, n)$, wobei $0 \leq k \leq n-1$ ist.

Interpretation:
Ist n eine Primzahl, dann ist jedes Element in der $(n-1)$-ten Zeile kongruent zu $(-1)^k \,(mod\, n)$.
Sei zum Beispiel $n = 7$. Die Einträge in der sechsten Zeile sind 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
Hier sieht man, dass $1 \equiv (-1)^0 \equiv (-1)^6 \,(mod\, 7)$, $6 \equiv (-1)^1 \equiv (-1)^5 \,(mod\, 7)$ und $15 \equiv (-1)^2 \equiv (-1)^4 \,(mod\, 7)$ ist.
Beweis:
Sei n eine Primzahl. Restklassen modulo einer Primzahl sind Körper, insbesondere bilden Restklassen ohne der Null bezüglich der Multiplikation eine Gruppe. In jeder Gruppe existiert eine multiplikative Inverse. Also hat jedes i eine multiplikative Inverse i^{-1} modulo n, wobei $1 \leq i \leq n-1$ gilt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i}{i} \\
&\equiv \prod_{i=1}^{k} (n-i)i^{-1} \,(mod\, n) \\
&\equiv \prod_{i=1}^{k} (-1) \,(mod\, n) \\
&\equiv (-1)^k \,(mod\, n)
\end{aligned}$$

Sei umgekehrt n nicht prim, also zusammengesetzt. Sei p der kleinste Primfaktor von n. Dann ist wie oben $\binom{n-1}{p-1} \equiv (-1)^{p-1}\,(mod\, n)$. Es ist aber:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p} &= \binom{n-1}{p-1}\left(\frac{n}{p}-1\right)\\ &\equiv (-1)^{p-1}\left(\frac{n}{p}-1\right)\\ &\not\equiv (-1)^{p}\,(mod\, n)\end{aligned}$$

da $\frac{n}{p} \not\equiv 0\,(mod\, n)$. Dies ist ein Widerspruch, also folgt die Richtigkeit des Satzes. □

Satz 3.12: Sei $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$. Dann gilt:
Die Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ ist eine Potenz von 2.

Interpretation:

Beispielsweise gibt es genau 8 ungerade Binomialkoeffizienten der Form $\binom{11}{k}$:

$$\binom{11}{0} = \binom{11}{11}, \binom{11}{1} = \binom{11}{10}, \binom{11}{2} = \binom{11}{9}, \binom{11}{3} = \binom{11}{8}$$

Beweis:

Der Beweis erfolgt durch einen Widerspruch:
Ist $n = 0, 1$ oder 2, dann ist die Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten trivialerweise eine Potenz von 2. Also nehmen wir jetzt an, dass sie keine Potenz von 2 ist, falls $n > 2$. Sei nun $n \geq 3$ die kleinste solche Zahl. Dann müssen zwei Fälle betrachtet werden:

Fall 1: Sei $n = 2r$, mit $r \geq 2$. Angenommen k sei ungerade. Dann ist auch $n - k$ ungerade und daher der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$ gerade. Also muss k gerade sein, damit $\binom{n}{k}$ ungerade sein kann.

Sei nun $k = 2q$. Dann gilt:
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \binom{2r}{2q}\\ &\equiv \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2r)}{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2r)][2\cdot 4\cdot 6\cdots(2r-2q)]}\,(mod\, 2)\\ &\equiv \frac{2^r r!}{(2^q q!)[2^{r-q}(r-q)!]}\,(mod\, 2)\\ &\equiv \frac{r!}{q!(r-q)!}\\ &\equiv \binom{r}{q}\,(mod\, 2)\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\binom{n}{k} = \binom{2r}{2q}$ genau dann ungerade ist, wenn $\binom{r}{q}$ ungerade ist. Also ist die Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gleich der Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten $\binom{r}{q}$ mit $r < n$. Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme für n.

Fall 2: Sei $n = 2r + 1, r \geq 1$. Wie im ersten Fall sieht man, dass k ungerade sein muss. Sei $k = 2q + 1$. Da $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und $k \not\equiv n - k\,(mod\, 2)$ gilt, folgt, dass die Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten gleich die doppelte Anzahl der

Binomialkoeffizienten mit ungeradem k ist.
Wie im ersten Fall lässt sich berechnen, dass $\binom{n}{k} = \binom{2r+1}{2q+1} \equiv \binom{r}{q}\,(mod\,2)$ ist,
also ist die Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gleich zwei mal die Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten $\binom{r}{q}$, wobei $r < n$ gilt.
Dies ist ebenfalls ein Widerspruch.

$\Rightarrow$ Also muss die Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten eine Potenz von 2 sein. $\square$

Satz 3.13: „Lucas Theorem“
Sei p eine Primzahl, $m = m_0 + m_1 p + \cdots + m_k p^k$ und $n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_k p^k$ mit $0 \leq m_i, n_i < p$. Dann gilt: $\binom{m}{n} \equiv \binom{m_0}{n_0}\binom{m_1}{n_1}\cdots\binom{m_k}{n_k}\,(mod\,p)$

Interpretation:
Dieser Satz ist benannt nach dem französischen Mathematiker François Éduard Anatole Lucas, 1842-1891.
Beispiel: Sei $m = 29, n = 16$ und $p = 3$. Dann ergibt sich:

$$\tbinom{m}{n} = \tbinom{29}{16} = 67863915 \equiv 0\,(mod\,3)$$
$$29 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 2 = [1002]_3$$
$$16 = 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = [0121]_3$$
$$\Rightarrow \tbinom{1}{0}\tbinom{0}{1}\tbinom{0}{2}\tbinom{2}{1} = 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 2 = 0 \equiv \tbinom{29}{16}\,(mod\,3)$$

Beweis:
Nach dem binomischen Lehrsatz (vgl. Seite 55) ergibt sich:
$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$$
Durch Anwendung von Satz 3.7 (Seite 77) ergibt sich:
$$\begin{aligned}(1+x)^m &\equiv (1+x)^{m_k p^k + m_{k-1}p^{k-1} + \cdots + m_1 p + m_0}\,(mod\,p)\\ &\equiv (1+x)^{p^k m_k}(1+x)^{p^{k-1}m_{k-1}}\cdots(1+x)^{pm_1}(1+x)^{m_0}\,(mod\,p)\\ &\equiv (1+x^{p^k})^{m_k}(1+x^{p^{k-1}})^{m_{k-1}}\cdots(1+x^p)^{m_1}(1+x)^{m_0}\,(mod\,p)\end{aligned}$$
Koeffizientenvergleich von x^n ergibt $\binom{m}{n} \equiv \binom{m_0}{n_0}\binom{m_1}{n_1}\cdots\binom{m_k}{n_k}\,(mod\,p)$ $\square$

Satz 3.14: Sei p eine Primzahl. Dann gilt: $\binom{n}{p} \equiv \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor\,(mod\,p)$

Interpretation:
Dieser Satz behandelt den Fall, dass der Spaltenindex im Pascal'schen Dreieck eine Primzahl ist.

Beweis:

Sei $n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_k p^k$. Da $p = 0 + 1 \cdot p + 0 \cdot p^2 + \cdots + 0 \cdot p^k$, folgt durch Satz 3.13, dass $\binom{n}{p} = \binom{n_1}{1} \equiv n_1 \,(mod\, p)$. Aber es ist $n_1 \equiv \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor (mod\, p)$, also gilt $\binom{n}{p} \equiv \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor (mod\, p)$. $\square$

Satz 3.15:
Eine positive ganze Zahl $n+1$ ist prim, genau dann, wenn $k+1 \Big| \binom{n}{k}$ für alle $0 \leq k \leq n-1$ gilt.

Interpretation:
Ist $n+1$ eine Primzahl, dann teilt $k+1$ jeden Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$. Beispielsweise sei $n = 10$, dann ist $n+1 = 11$ eine Primzahl. Die Einträge der 10-ten Zeile sind 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1. Also ist $\binom{10}{k}$ teilbar durch $k+1$ für jeden Wert von k.
Beweis:
Es ist $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$. Daraus folgt, dass $k+1 \Big| \binom{n}{k}$, falls $n+1$ eine Primzahl ist.
Sei umgekehrt angenommen, dass $n+1$ nicht prim, also zusammengesetzt ist. Sei weiters p der kleinste Primfaktor von $n+1$, sodass $p \leq \frac{n+1}{2}$. Betrachte das Produkt

$$\frac{1}{p-1}\binom{n}{p-1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+2)}{(p-1)(p-1)!}$$

Da $p|(n+1)$ und p der kleinste Primfaktor von $n+1$, ist $n+1-p$ größte Zahl $< (n+1)$, die durch p teilbar ist. Daher ist die rechte Seite der Gleichung und daher auch $\frac{1}{p-1}\binom{n}{p-1}$ keine ganze Zahl.
Oder anders formuliert: $p \nmid \binom{n}{p-1}$, d.h. $k+1 \nmid \binom{n}{k}$, falls $k = p-1$.
Daraus folgt der Beweis. $\square$

Satz 3.16:
Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\binom{n}{k} \equiv \begin{cases} 0 \,(mod\, 2) & \text{falls n gerade und k ungerade ist} \\ \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (mod\, 2) & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis:
Für den Beweis werden 4 verschiedene Fälle betrachtet:

Fall 1: „n gerade, k ungerade"

Da n gerade ist, ist die rechte Seite der Gleichung $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ gerade. Also muss die linke Seite ebenfalls gerade sein und da k ungerade ist, folgt, dass $\binom{n}{k}$ gerade ist.

Fall 2: „n gerade, k gerade"

In diesem Fall wird der Binomialkoeffizient erweitert:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}\\ &= \frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(k-1)}\cdot\frac{n(n-2)(n-4)\cdots(n-k+2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots k}\end{aligned}$$

Da der Nenner $\frac{k}{2}$ gerade Faktoren enthält, folgt

$$= \frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(k-1)}\cdot\frac{n(n-2)(n-4)\cdots(n-k+2)}{2^{\frac{k}{2}}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\frac{k}{2}}$$

und da der Zähler $\frac{k}{2}$ gerade Faktoren enthält, folgt weiters

$$\begin{aligned}&= \frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(k-1)}\cdot\frac{2^{\frac{k}{2}}\cdot\frac{n}{2}\cdot(\frac{n}{2}-1)\cdot(\frac{n}{2}-2)\cdots(\frac{n}{2}-\frac{k}{2}+1)}{2^{\frac{k}{2}}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\frac{k}{2}}\\ &= \frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(k-1)}\cdot\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1\cdot 3\cdot 5\cdots(k-1)\binom{n}{k} = (n-1)(n-3)\cdots(n-k+1)\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}$$

Für n, k gerade, folgt, dass $\binom{n}{k} \equiv \binom{\frac{n}{2}}{\frac{k}{2}} \equiv \binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor} \, (mod\, 2)$

Bei Betrachtung dieser Äquivalenz sieht man, dass der erste Teil gilt, weil jeder der Faktoren vor dem Binomialkoeffizient im Zähler und im Nenner ungerade ist und die Multiplikation einer Zahl mit einer ungeraden Zahl die Parität[5] nicht ändert. Der zweite gilt, weil $\frac{n}{2} = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ und $\frac{k}{2} = \lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ für n, k gerade.

Fall 3: „n ungerade, k ungerade"

Man beginnt bei $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
Da n, k beide ungerade sind und wie oben die Multiplikation einer Zahl mit einer ungeraden Zahl die Parität nicht ändert, folgt, dass $\binom{n}{k} \equiv \binom{n-1}{k-1} \, (mod\, 2)$.
Da $n-1$ und $k-1$ beide gerade sind, folgt aus dem zweiten Fall, dass $\binom{n-1}{k-1} \equiv \binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor} \, (mod\, 2)$ und somit $\binom{n}{k} \equiv \binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor} \, (mod\, 2)$ ist.

Fall 4: „n ungerade, k gerade"

Durch Symmetrie gilt: $(n-k)\binom{n}{k} = (n-k)\binom{n}{n-k}$ und $n\binom{n-1}{n-k-1} = n\binom{n-1}{k}$
Aus Satz 2.17 $(n-k)\binom{n}{n-k} = n\binom{n-1}{n-k-1}$ folgt, dass $(n-k)\binom{n}{n-k} = n\binom{n-1}{k}$.

[5] Parität (lateinisch: paritas ... Gleichheit, gleich stark) bezeichnet die Eigenschaft einer Zahl, gerade oder ungerade zu sein.

Da $n-k$ und n beide ungerade sind, ist $\binom{n}{k} \equiv \binom{n-1}{k}$ $(mod\, 2)$.

Durch Anwendung von Fall 2 auf der rechten Seite erhält man $\binom{n}{k} \equiv \binom{\lfloor \frac{(n-1)}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ $(mod\, 2)$.

Da n ungerade ist, ist der obige Eintrag $\lfloor \frac{(n-1)}{2} \rfloor$ gleich $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. [62] □

3.2.1 Das Pascal'sche Dreieck in Betrachtung der Binärdarstellung

Die nächsten Sätze beruhen auf der Binärdarstellung der natürlichen Zahlen. Zur Erinnerung:

Im Unterschied zur Dezimaldarstellung werden in der Binärdarstellung die Wertigkeiten der Ziffern nicht durch die entsprechende Zehnerpotenz bestimmt, sondern durch die passende Zweierpotenz. Eine Binärzahl wird nur aus den beiden Ziffern 0 und 1 dargestellt. Beispiel:

Dezimalsystem: $1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = [1101]_{10}$ (beschreibt die Zahl 1101)

Binärsystem: $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = [1101]_2 = [13]_{10}$ (beschreibt die Zahl 13)

Definition:

Eine $(n+1)$-stellige *Binärzahl* oder auch *Dualzahl* ist eine Folge von $(n+1)$ Ziffern $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, die alle entweder gleich 0 oder gleich 1 sind.
Der dezimale Wert dieser Zahl beträgt

$$\sum_{i=0}^{n} a_i 2^i = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0.$$

Die Ziffern a_i heißen „Bit[6]". [76]

Satz 3.17: Jeder Eintrag in der n-ten Zeile ist ungerade.
$\Leftrightarrow$ Die Binärdarstellung von n besteht nur aus Einsen.

Interpretation:

Zum Beispiel hat die Zahl 15 die Binärdarstellung $[1111]_2$. Die Elemente der Zeile 15 sind alle ungerade.

[6] Der Begriff Bit (binary digit) bezeichnet eine Binärziffer (üblicherweise 0 und 1).

Dieser Satz ist äquivalent zu Satz 3.5 (Seite 77), denn:
Jede Mersenne-Zahl besteht in der Binärdarstellung nur aus Einsen, d.h. für eine Mersenne-Zahl $n = 2^m - 1$ gilt, dass die Binärdarstellung von n aus m Einsen besteht, also $n = 2^m - 1 = \underbrace{11 \cdots 11}_{\text{m Einser}}$.

Beweis:

Wenn man beachtet, dass $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = \binom{0}{0} = 1$ ist, dann ist nach Satz 3.13

$$\binom{n}{k} = \binom{n_0}{k_0} \cdot \binom{n_1}{k_1} \cdots \binom{n_t}{k_t} \,(mod\, 2) \quad \text{(„Lucas Theorem“, Seite 81)}$$

der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}, k = 0, 1, \ldots, n$ genau dann ungerade, wenn die Menge der Koeffizienten $k_j, j = 0, ..., t$ mit $k_j = 1$ in der Binärdarstellung von k eine Teilmenge der Menge der Koeffizienten $n_j, j = 0, ..., t$ mit $n_j = 1$ in der Binärdarstellung von n ist.
Daher ist die Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gleich 2^m, wobei m die Anzahl der $n_j, j = 0, ..., t$ mit $n_j = 1$ bezeichnet.
Insbesondere verschwindet die Anzahl $n + 1 - 2^m$ der geraden Binomialkoeffizienten, falls $n = 2^m - 1$ gilt.

Umgekehrt folgt aus $n = 2^t - 1, t \in \mathbb{N}_0$ wegen $n = 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 1 \cdot 2^{t-1}$, dass die Anzahl der ungeraden Binomialkoeffizienten genau 2^t ist, d.h. die Anzahl der geraden Binomialkoeffizienten im Fall $n = 2^t - 1$ dann $n + 1 - 2^t = 0$ ist.
⇒ Also sind alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ genau dann ungerade, wenn n eine Mersenne-Zahl, also von der Gestalt $2^t - 1, t \in \mathbb{N}_0$ ist. [74] □

Satz 3.18:
Sei e die Anzahl der Einser in der Binärdarstellung von n.
Dann gilt: Die Anzahl der ungeraden Einträge in Zeile n ist gegeben durch 2^e.

Interpretation:
Beispielsweise hat besteht die Binärdarstellung der Zahl 13 aus 3 Einser ($[1101]_2$). Also besteht die 13-te Zeile des Pascal'schen Dreiecks aus $2^3 = 8$ ungeraden Einträgen, nämlich 1, 13, 715, 1287, 1287, 715, 13, 1.

Dieser Satz ist äquivalent zu Satz 3.12 (Seite 80)
Beweis:
Aus dem Binomischen Lehrsatz (Satz 2.23 , Seite 55) folgt für $a = 1$ und $b = x$:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Verkleinert man diese Summe um die Koeffizienten modulo 2, dann gilt laut Satz 3.7 (Seite 77) für $n \geq 0$:

$$(1 + x)^{2^n} \equiv (1 + x^{2^n}) \,(mod\, 2)$$

Somit gilt: $(1+x)^{10} = (1+x)^8(1+x)^2 \equiv (1+x^8)(1+x^2) \,(mod\, 2) \equiv (1+x^2+x^8+x^{10}) \,(mod\, 2)$

Da die Koeffizienten dieser Polynome gleich modulo 2 sind, folgt mit dem Binomischen Lehrsatz, dass $\binom{n}{k}$ ungerade ist, für $k = 0, 2, 8, 10$ und gerade ist für alle anderen k.
Ähnlich dazu ist das Produkt $(1+x)^{11} \equiv (1+x^8)(1+x^2)(1+x^1)\ (mod\, 2)$ ein Polynom mit $8 = 2^3$ Termen.
Allgemein ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ungerade für 2^e Werte von k - wobei e die Anzahl der Einser in der Binärdarstellung von n bezeichnet, falls n als Summe von e Potenzen von 2 ausgedrückt werden kann. [38]

Zusammengefasst ergibt sich:
Damit $\binom{n}{k}$ ungerade ist, muss es eine 0 in jedem Bit der Binärzahl von k geben, für welche es eine 0 im zugehörigen Bit der Binärzahl von n gibt. Gibt es eine 1 im Bit der Binärzahl von n, dann gibt es entweder eine 0 oder eine 1 im zugehörigen Bit der Binärzahl von k. Gibt es nun e 1-Bits für n, dann gibt es 2^e Werte für k, die dies erfüllen. □

Für den nächsten Satz benötigt man die folgende Überlegung:

Sei p eine Primzahl. Die Anzahl der Vielfachen von p, die kleiner als n sind, beträgt $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$. Analog gibt es $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$ Vielfache von p^2, die kleiner als n sind.
Fährt man auf diese Weise fort, dann ergibt sich die Formel von De Polignac[7]:

Formel von De Polignac:
Sei p eine Primzahl. Die höchste Potenz von p, die $n!$ teilt, ist gegeben durch:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

Korollar :
Sei h die höchste Potenz von 2, die $n!$ teilt, also

$$h = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + \cdots$$

Dann gilt: $n = h + e$.

Interpretation:
Betrachte das Beispiel $n = 7$. Die Zahl 7 hat die Binärdarstellung $[111]_2$. Also ist $e = 3$. h berechnet sich durch $\lfloor \frac{7}{2} \rfloor + \lfloor \frac{7}{4} \rfloor = 3 + 1 = 4$. Dann gilt: $n = h + e = 4 + 3 = 7$.

[7]benannt nach dem französischen Mathematiker Alphonse de Polignac, 1826-1863

3.2.2 Der Zusammenhang mit dem Sierpinski-Dreieck

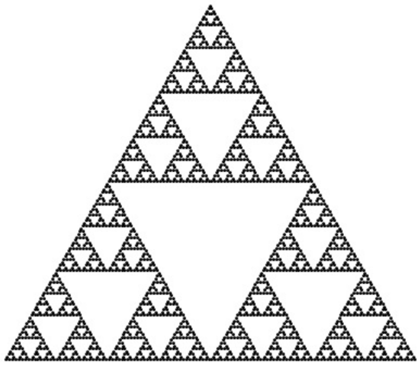

Abbildung 3.5: Das Sierpinski-Dreieck [39]

Das Sierpinski-Dreieck gehört zu den sogenannten „Fraktalen[8]".
Als Fraktal bezeichnet man ein Gebilde, das „selbstähnlich" ist.

> *„Eine Figur ist selbstähnlich, wenn sie in Teile, die Kopien der ganzen Figur sind, zerlegt werden kann. Jeder beliebige Teil enthält also eine Kopie der ganzen Figur."*[9]

Dies bedeutet, dass man auch nach unendlicher Vergrößerung und Verkleinerung des untersuchten Objekts immer wieder die ursprüngliche Struktur (ohne jemals eine elementare Feinstruktur zu erlangen) erhält.

Der Ausdruck „Fraktal", also „gebrochen", steht für drei wichtige Eigenschaften, die jedes Fraktal aufweist:

- Die erzeugten Grafiken bzw. Bilder erscheinen unregelmäßig und gebrochen.
- Der Ausdruck „gebrochen" bedeutet auch irregulär: Dies beschreibt den Unterschied zwischen der euklidischen und der fraktalen Geometrie.
- Fraktale besitzen immer eine gebrochene, also nicht-ganzzahlige Dimension. [70, Kapitel 3]

Im Allgemeinen unterscheidet man zwischen erzeugten und natürlichen Fraktalen. Erstere sind beispielsweise das Sierpinski-Dreieck, der Menger-Schwamm,

[8] Der Ausdruck „Fraktal" stammt von dem lateinischen Wort „frangere" ab, also übersetzt zerbrechen/brechen.
[9] [40]

die Koch-Kurve, die Cantor-Menge und viele weitere. Natürliche Fraktale findet man häufig in der Natur, zum Beispiel Blitzen, Küstenlinien, Wolken, Bergen, kristallinen Strukturen oder auch bei Blutgefäßen, Krebszellen, Brokkoli, Romanesco ... .

1916 stellte Waclav Sierpinski, ein bedeutender polnischer Mathematiker (1882-1969), sein Sierpinski-Dreieck vor. Er wird folgendermaßen gebildet:

Es entsteht aus einem gleichschenkligen Dreieck, aus dem das Mitteldreieck entfernt wird. Dadurch zerfällt das Dreieck in drei weitere Teildreiecke, aus denen wiederum die Mitteldreiecke entfernt werden. Dieses Verfahren kann man beliebig oft durchführen. Der Grenzwert des Verfahrens liefert das gesuchte Dreieck.

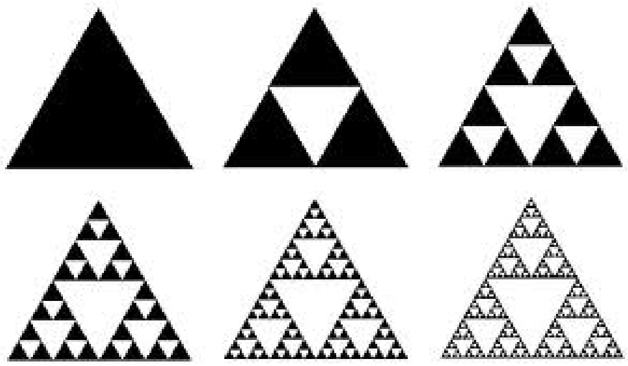

Abbildung 3.6: Die Erzeugung des Sierpinski-Dreiecks [41]

Das Sierpinski-Dreieck hat eine Verbindung zum Pascal-Dreieck:
Färbt man die geraden und ungeraden Zahlen des Pascal-Dreiecks unterschiedlich an, ist das Muster selbstähnlich und weist die Struktur des Sierpinski-Dreiecks auf. [61]

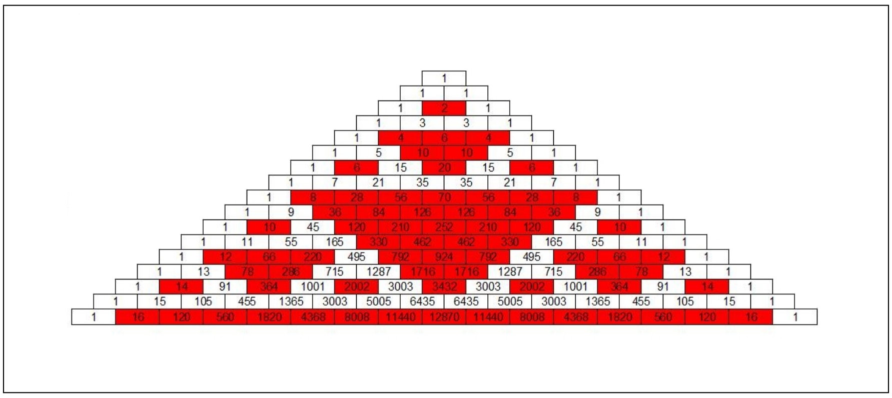

Abbildung 3.7: Markiert sind alle Einträge $\binom{n}{k} \equiv 0\,(mod\,2)$ [25]

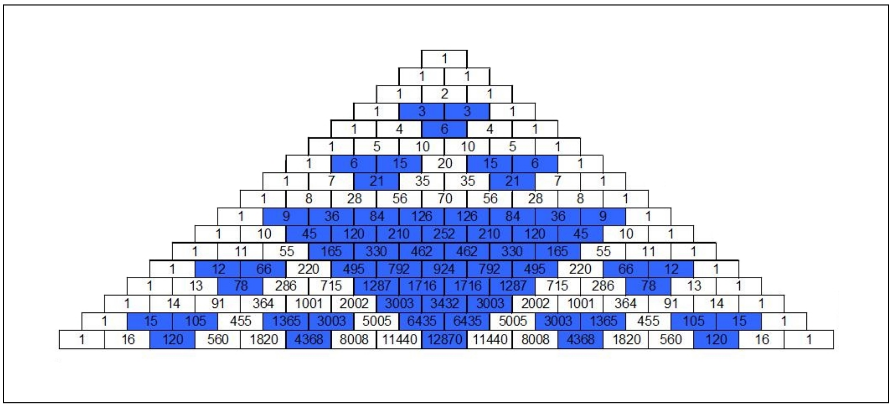

Abbildung 3.8: Markiert sind alle Einträge $\binom{n}{k} \equiv 0\,(mod\,3)$ [25]

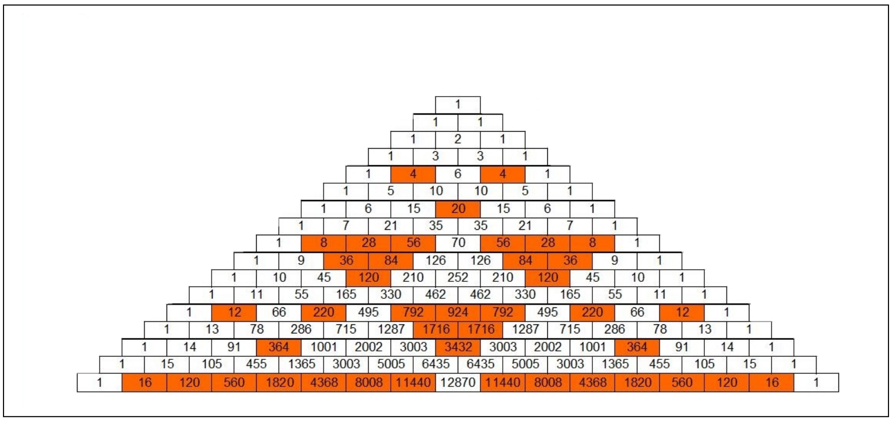

Abbildung 3.9: Markiert sind alle Einträge $\binom{n}{k} \equiv 0\,(mod\,4)$ [25]

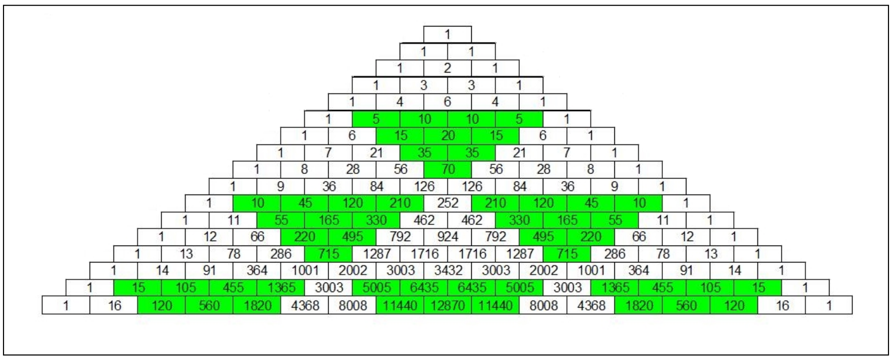

Abbildung 3.10: Markiert sind alle Einträge $\binom{n}{k} \equiv 0 \,(mod\, 5)$ [25]

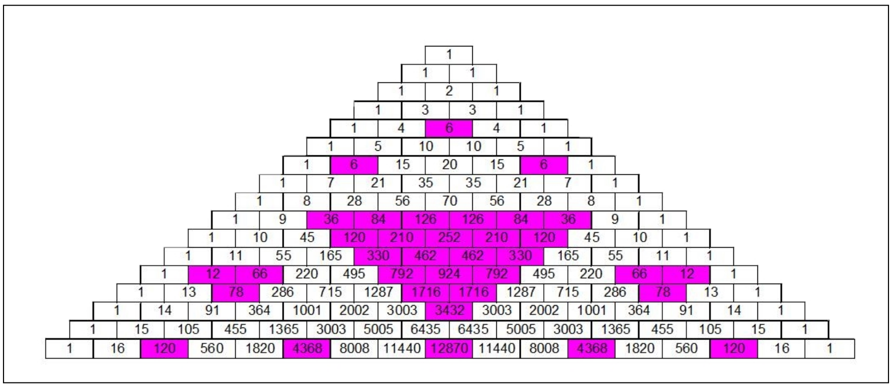

Abbildung 3.11: Markiert sind alle Einträge $\binom{n}{k} \equiv 0 \,(mod\, 6)$ [25]

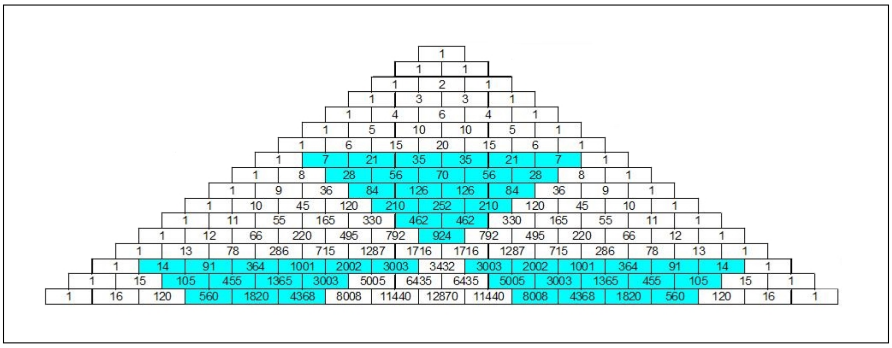

Abbildung 3.12: Markiert sind alle Einträge $\binom{n}{k} \equiv 0 \,(mod\, 7)$ [25]

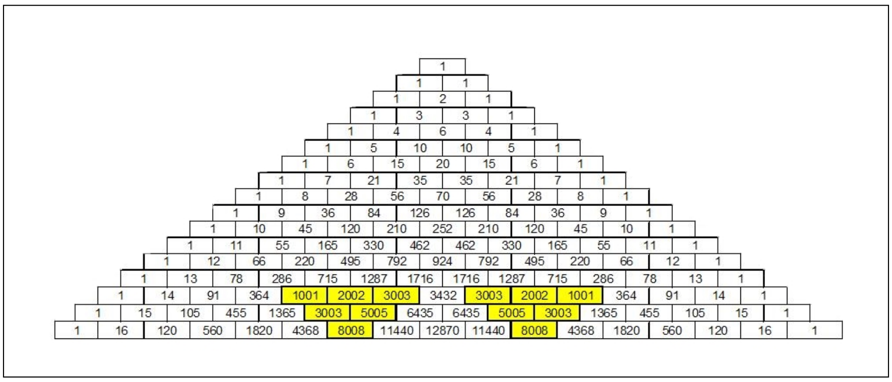

Abbildung 3.13: Markiert sind alle Einträge $\binom{n}{k} \equiv 0 \,(mod\, 1001)$ [25]

Oft wird hier auch von „Binärdreiecken“ gesprochen, da nur zwei Zahlen betrachtet werden: gerade und ungerade Zahlen. In den Grafiken ist ersichtlich, dass die nicht markierten Zahlen also alle Mersenne-Zahlen sind, da sie alle ungerade sind. (siehe Satz 3.5, Seite 77). Werden nun die mittig liegenden Dreiecke ∇_n, welche mit der Spitze nach unten zeigen und ihre Basis in der Zeile $2^n, n \geq 1$ haben, betrachtet, dann lässt sich die Anzahl der geraden Zahlen in diesen Dreiecken wie folgt berechnen:

Da die Basis von ∇_n genau $2^n - 1$ gerade Zahlen enthält, ergibt sich für die Anzahl G der geraden Zahlen in ∇_n:

$$G = \frac{(2^n - 1)(2^n - 1 + 1)}{2} = 2^n(2^n - 1)$$

Eine solche Zahl ist eine *vollkommene*[10] Zahl, falls n und $2^n - 1$ Primzahlen sind. (Beweis siehe [71, S.272 ff])

[10] Eine natürliche Zahl n wird vollkommene oder auch perfekte Zahl genannt, wenn sie gleich der Summe aller ihrer (positiven) Teiler außer sich selbst ist, d.h. eine vollkommene Zahl n ist eine Zahl, die halb so groß ist wie die Summe aller ihrer positiven Teiler (sie selbst eingeschlossen).

3.3 Negative Binomialkoeffizienten

Bisher wurden die Binomialkoeffizienten und das Pascal'sche Dreieck nur für positive Werte für n und k erläutert. Was passiert aber nun, wenn diese Werte negativ sind?

Durch Einsetzten von $n < 0$ in die Definition der Binomialkoeffizienten (Kapitel 1, Seite 28) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}\\ &= (-1)^k \cdot \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}\\ &= (-1)^k\binom{n+k-1}{k} \qquad \text{(oft unter „upper negation“ bekannt)}\end{aligned}$$

Beispiele: $\binom{-7}{3} = (-1)^3\binom{9}{3} = 84$, $\binom{-3}{7} = (-1)^7\binom{9}{7} = -36$, $\binom{-1}{2} = (-1)^2\binom{2}{2} = 1$

Der Binomialkoeffizient $\binom{n+k-1}{k}$ ist der Koeffizient von x^n in der Entwicklung der Maclaurin'schen[11] Reihe für $(1-x)^{-n}$:

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n} &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-x)^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k\\ &= 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \binom{n+2}{3}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Dadurch wird das Pascal'sche Dreieck bis ins Unendliche in die entgegengesetzte Richtung erweitert.
Diese Erweiterung nennt man die Pascal'sche Windmühle.
(siehe Abbildung 3.14, Seite 93)

Die neu gebildeten Dreiecke ergeben die sogenannten „Flügel“ der Windmühle und zwischen ihnen liegen die Nullfelder.

[11]Die Maclaurin'sche Reihe, benannt nach dem schottischen Mathematiker Colin Maclaurin (1698-1746), ist eine Bezeichnung für einen Spezialfall einer Taylor-Reihe mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

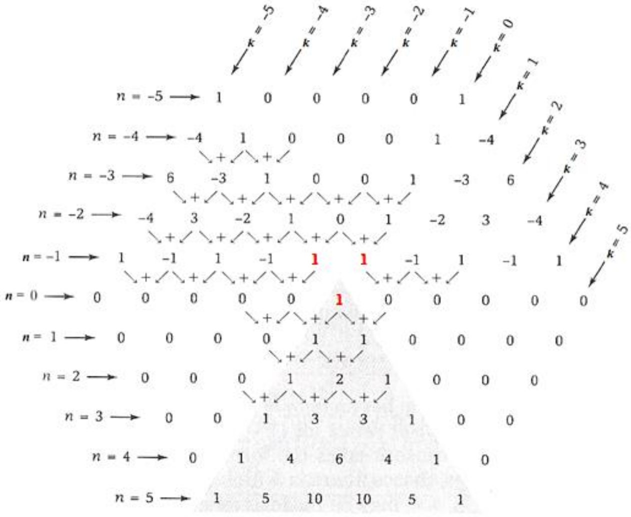

Abbildung 3.14: Die Pascal'sche Windmühle [30]

In Binomialkoeffizienten ausgedrückt sieht die Pascal'sche Windmühle so aus:

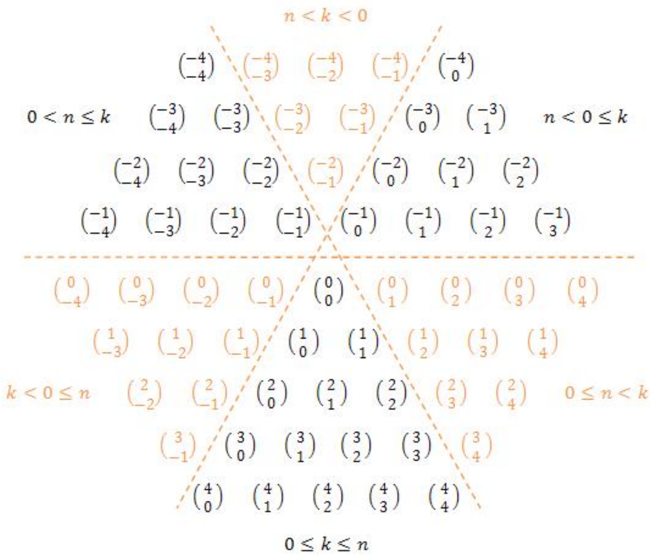

Abbildung 3.15: Die Binomialkoeffizienten der Pascal'schen Windmühle [30]

In Abbildung 3.15 sieht man, dass der Binomialkoeffizient gleich Null ist, falls gilt:

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{für} \begin{cases} 0 \leq n < k \\ k < 0 \leq n \\ n < k < 0 \end{cases}$$

Das Bildungsgesetz, die Addition und die Symmetrie gelten auch für die Pascal'sche Windmühle.

Vorsicht sei geboten für die Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, denn diese gilt nur für das herkömmliche Pascal'sche Dreieck, da die Fakultät für negative Werte nicht definiert ist.

3.4 Gebrochene Binomialkoeffizienten

In Kapitel 1 auf Seite 28 wurde gezeigt, dass sich die Definition der Binomialkoeffizienten auch für reelle Zahlen erweitern lässt. Damit gilt:

Sei $n = \frac{p}{q}$. Dann gilt:
$$\begin{aligned}\binom{\frac{p}{q}}{k} &= \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\cdots\left(\frac{p}{q}-k+1\right) \\ &= \frac{p(p-q)(p-2q)\cdots[p-(k-1)q]}{q^k k!}\end{aligned}$$

Beispiel: $$\binom{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3(3-1\cdot 4)(3-2\cdot 4)(3-3\cdot 4)}{4^5 5!} = -\frac{117}{8192}$$

Insbesondere ergibt sich für $p = 1, q = 2$ und $k = n$:

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1\Big)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}1\cdot(2\cdot 1-1)(2\cdot 2-1)\cdot[2(n-1)-1]}{2^n n!} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^n n![2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)]} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^n n! 2^{n-1}(n-1)!} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}}C_{n-1}, \text{ wobei } C_n \text{ die } n\text{-te Catalan Zahl bezeichnet.}\end{aligned}$$

Ersetzt man p durch $-p$ in der obigen Formel, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{p}{q}}{k} &= \frac{-p(-p-q)(-p-2q)\cdots[-p-(k-1)q]}{q^k k!} \\ &= (-1)^k\frac{p(p+q)(p+2q)\cdots[p+(k-1)q]}{q^k k!}\end{aligned}$$

Beispiel: $$\binom{-\frac{2}{3}}{5} = (-1)^5\frac{2(2+1\cdot 3)(2+2\cdot 3)(2+3\cdot 3)(2+4\cdot 3)}{3^5 5!} = -\frac{308}{729}$$

Insbesondere ergibt sich hier für $p = -1, q = 2$ und $k = n$ die Darstellung:

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n \frac{1 \cdot (1+2\cdot 1)(1+2\cdot 2)(1+2\cdot 3)\cdots[1+2(n-1)]}{2^n n!} \\
&= (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2^n n!} \\
&= (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^n n![2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)]} \\
&= (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \\
&= \Big(-\frac{1}{4}\Big)^n \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

3.5 Abschätzungen für die Binomialkoeffizienten

In diesem Unterkapitel möchte ich einen kurzen Einblick in die oberen und unteren Schranken für die Binomialkoeffizienten geben.

Zu aller erst gilt folgende offensichtliche Abschätzung für die Fakultät $n!$:

Satz 3.19:	Es gilt: $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$

Beweis:
Einerseits ist $1 \cdot 2^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} i = n!$ und andererseits kann man jeden der Faktoren nach oben gegen n abschätzen. □

Diese Abschätzung ist recht grob und wirft die Frage auf, ob die Fakultät näher bei der unteren oder oberen Schranke liegt. Die nächste, bessere Abschätzung geht zurück auf Carl-Friedrich Gauß[12]:

Satz 3.20:	Für alle $n \geq 1$ gilt: $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

[12] 1777-1855, deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker

Der Beweis dieses Satzes beruht auf folgendem Lemma:

Lemma: Ungleichung arithmetisches-geometrisches Mittel
Seien $a, b > 0$ zwei reelle Zahlen. Dann gilt: $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$

Beweis des Lemmas:

Die Aussage folgt sofort aus $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$. □

Beweis von Satz 3.20:

Betrachte $(n!)^2 = \Big(\prod_{i=1}^{n} i\Big)$ und $\Big(\prod_{i=1}^{n}(n+1-i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} i(n+1-i)$

Also gilt mit dem obigen Lemma:
$$\begin{aligned} n! &= \prod_{i=1}^{n} \sqrt{i(n+1-i)} \\ &\leq \prod_{i=1}^{n} \frac{i + (n+1-i)}{2} \\ &= \Big(\frac{n+1}{2}\Big)^n, \text{ womit die obere Schranke bewiesen ist.} \end{aligned}$$

Für den Beweis der unteren Schranke genügt es zu beobachten, dass für $i = 1, \cdots, n$ stets $i(n+1-i) \geq n$ ist:
Dies ist für $i = 1$ und $i = n$ trivial.
Ansonsten ergibt sich das Produkt zweier Zahlen, bei dem die kleinere Zahl mindestens 2 und die größere Zahl mindestens $\frac{n}{2}$ ist:
$$\begin{aligned} & n \geq i \qquad | \cdot (i-1) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & n(i-1) \geq i(i-1) \\ \Leftrightarrow\ & ni - n \geq i^2 - i \\ \Leftrightarrow\ & \underbrace{ni + i - i^2}_{=i(n+1-i)} \geq n \end{aligned}$$

Da die Wurzelfunktion streng monoton wachsend ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned} n! &= \Big(\prod_{i=1}^{n} i \prod_{j=1}^{n}(n+1-j)\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big(\prod_{i=1}^{n} i(n+1-i)\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \Big(\prod_{i=1}^{n} n\Big)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$ □

Die wichtigsten Abschätzungen für die Fakultät ergeben sich mit der Eulerschen Zahl $e = 2,718\ldots$, der Basis des natürlichen Logarithmus:

Satz 3.21: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $e\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n \leq n! \leq en\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n$

Beweis:

Mittels vollständiger Induktion ergibt sich:

1. Für $n = 1$ gilt: $e\left(\frac{1}{e}\right)^1 \leq 1! \leq e \cdot 1\left(\frac{1}{e}\right)^1 \Leftrightarrow 1 \leq 1! \leq 1$
2. Sei also $n \geq 2$. Es gilt

für die untere Schranke: $e\left(\frac{n}{e}\right)^n = e\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}\left(\frac{n}{e}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$

$$\leq (n-1)!\left(\frac{n}{e}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$= n!\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\frac{1}{e}$$

und analog für die obere Schranke: $en\left(\frac{n}{e}\right)^n = e(n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}\left(\frac{n}{e}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$

$$\geq (n-1)!\left(\frac{n}{e}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

$$= n!\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\frac{1}{e}$$

Durch kürzen von $n!$ bleibt für die Gültigkeit des Satzes also noch zu zeigen, dass gilt:

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\frac{1}{e} \leq 1 \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\frac{1}{e} \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq e \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$$

Da $1 + x \leq e^x$ ist (da die Funktion linksgekrümmt bzw. konvex ist), folgt, dass einerseits $\frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} \leq e^{\frac{1}{n-1}}$ und andererseits $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \leq e^{-\frac{1}{n}}$ gilt.
Aus der ersten Ungleichung erhält man durch Exponentation auf Grund der Monotonie der Exponentialfunktion sofort die linke Ungleichung und aus der zweiten Ungleichung zunächst $\frac{n}{n-1} \geq e^{\frac{1}{n}}$ und dann die rechte Seite. □

Satz 3.22: Sei $1 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$

Beweis:

Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$

Für $0 < x \leq 1$ gilt dann: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^k \leq (1+x)^n$

und somit auch $\frac{1}{x^k}\binom{n}{0} + \frac{1}{x^{k-1}}\binom{n}{1} + \frac{1}{x^{k-2}}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}$

Da $0 < x \leq 1$, lassen sich die Brüche nach unten gegen 1 abschätzen.
Sei x nun fix gewählt mit $0 < x = \frac{k}{n} \leq 1$. Dann ergibt sich

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n\left(\frac{n}{k}\right)^k$$

Mit $1 + x \leq e^x$ erhält man: $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \leq (e^{\frac{k}{n}})^n = e^k$

Also folgt insgesamt: $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$ □

3.5.1 Schranken für die mittleren Binomialkoeffizienten

Die Quellen dieses Unterkapitels sind: [64], [66]

Satz 3.23: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt: $2^n < \binom{2n}{n} < 2^{2n}$

Beweis:

Mittels vollständiger Induktion ergibt sich:

1. Für $n = 2$ stimmt die Behauptung, denn $4 < \binom{4}{2} < 16$.

2. Angenommen, sie stimmt auch für jede beliebige, ganze Zahl $k \geq 2$: $2^k < \binom{2k}{k} < 2^{2k}$

Dann folgt: $$\binom{2k+2}{k+1} = \binom{2k}{k}\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+1)} = 2\binom{2k}{k}\frac{2k+1}{k+1}$$

Da $1 < \frac{2k+1}{k+1} < 2$ gilt, falls $k \geq 2$, ergibt sich: $2\binom{2k}{k} < \binom{2k+2}{k+1} < 2 \cdot 2\binom{2k}{k}$

Laut Induktionsannahme folgt, dass gilt: $2 \cdot 2^k < \binom{2k+2}{k+1} < 2^2 \cdot 2^{2k}$

Also gilt: $2^{k+1} < \binom{2k+2}{k+1} < 2^{2k+2}$

Also folgt mittels Induktion, dass der Satz für alle $n \geq 2$ gilt. □

Satz 3.24: Für alle $n \geq 1$ gilt: $\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} < \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$

Beweis:

Betrachte die Zahl $Q = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$. Dann gilt:

$$Q = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n}{(2(1) \cdot 2(2) \cdot 2(3) \cdot \ldots \cdot 2(n))^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!}$$
$$= \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

Also ist die Behauptung des Satzes äquivalent zu: $\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq Q < \frac{1}{\sqrt{2n}}$

Für die obere Schranke dieser Ungleichung betrachtet man nun das Produkt
$$\left(\frac{1 \cdot 3}{2^2}\right)\left(\frac{3 \cdot 5}{4^2}\right) \cdots \left(\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\right) = (2n+1)Q^2$$

Jeder der Ausdrücke in den Klammern ist aber von der Form $\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = 1 - \frac{1}{k^2}$. Somit ist das Produkt kleiner als 1. $\Rightarrow Q < \sqrt{\frac{1}{2n+1}} < \sqrt{\frac{1}{2n}}$

Die untere Schranke benutzt man analog, dass mit $n \geq 2$ gilt:

$$1 > \left(\frac{2 \cdot 4}{3^2}\right)\left(\frac{4 \cdot 6}{5^2}\right) \cdots \left(\frac{(2n-2)2n}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1}{2(2n)Q^2}$$

Für $n = 1$ (und nur dann) ist die untere Schranke scharf. $\square$

Satz 3.25: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\dfrac{2^{2n}}{2n+1} < \dbinom{2n}{n} < 2^{2n}$

Beweis:
Sei $M = \dbinom{2n}{n}$. Da M der größte Binomialkoeffizient in $(1+x)^{2n}$ ist, d.h. in der Zeile $2n$ des Pascal'schen Dreiecks und da die Summe der Binomialkoeffizienten in dieser Zeile gleich 2^{2n} ist, folgt, dass $M < 2^{2n}$ ist. In Zeile $2n$ gibt es aber $2n+1$ Binomialkoeffizienten, also gilt:

$$(2n+1)M > 2^{2n} \Leftrightarrow \frac{2^{2n}}{2n+1} < M$$

Daraus folgt schon die gewünschte Behauptung: $\dfrac{2^{2n}}{2n+1} < \dbinom{2n}{n} < 2^{2n}$ $\square$

Bemerkung:
Der nächste Satz ist eine Verallgemeinerung von Satz 3.24 auf Seite 98. Da aber der Beweis anders ist, möchte ich ihn dennoch gesondert anführen:

Satz 3.26: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt: $\dfrac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} < \dbinom{2n}{n} < \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$

Beweis:
Wie im obigen Beweis gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \\ &< \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

Also ist $a_n^2 < \dfrac{1}{2n+1} \Leftrightarrow a_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, also $\dbinom{2n}{n} < \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$

Gemeinsam mit Satz 3.24 ergibt sich dann: $\dfrac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} < \dbinom{2n}{n} < \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$ $\square$

3.6 Bezüge des Pascal'schen Dreiecks

Dieses Unterkapitel beruht zusätzlich auf der Quelle: [42]

3.6.1 Das Pascal'sche Dreieck und das Galton-Brett

Das Galton-Brett ist ein Zufallsexperiment von Sir Francis Galton[13],einem britischen Naturforscher und Schriftsteller.

Es besteht aus einer regelmäßigen Anordnung von Hindernissen, an denen eine Kugel, die von oben eingeworfen wird, jeweils nach links oder rechts abgelenkt werden kann. Nach dem Passieren der Hindernisse werden die Kugeln in verschiedenen Fächern aufgefangen und gezählt.

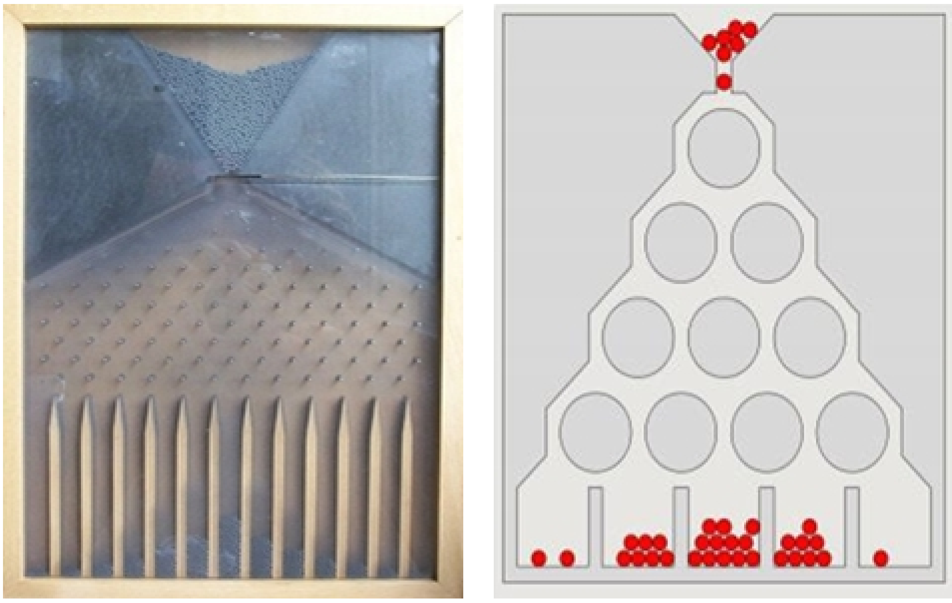

Abbildung 3.16: Das Galton-Brett: Spiel [43] und Modell [44]

Es lässt sich natürlich relativ einfach berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Kugel in eines der Fächer fällt. Bei nur einem Hindernis, also ganz oben, beträgt die Wahrscheinlichkeit für „links“ und für „rechts“ jeweils $\frac{1}{2}$. Also fällt jeweils die eine Hälfte der Kugeln nach links und die andere Hälfte nach rechts.
Danach wird die halbierte Menge der Kugeln wieder halbiert, womit sich die Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{4}$ für links und rechts ergeben. Triviale Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt, dass die Kugel mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$

[13]1822-1911

genau in der Mitte der beiden Hindernisse hindurch fällt. Sämtliche folgenden Reihen werden analog berechnet. Damit ergibt sich:

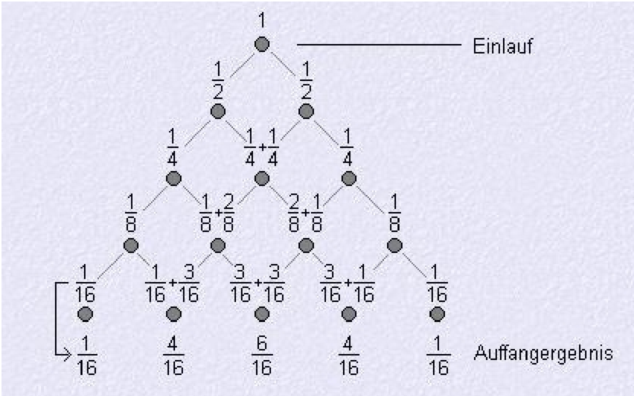

Abbildung 3.17: Der Zusammenhang zum Pascal'schen Dreieck [45]

Es fällt sofort ins Auge, dass die Zähler dieser Brüche mit den Zeilen des Pascal'schen Dreiecks übereinstimmen. (Die Nenner werden durch Addition der Zähler in den jeweiligen Reihen ermittelt.) Mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks können also die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Ereignisse des Galton-Bretts direkt abgelesen werden.

3.6.2 Das Pascal'sche Dreieck und die Türme von Hanoi

Der Legende nach stapelte Gott zu Beginn der Schöpfung 64 vergoldete Scheiben verschiedener Größe auf einer von drei Diamantpflöcken auf ein Podest aus Messing im Tempel von Brahma[14] in Benares[15], dem Mittelpunkt der Welt. Die Mönche hatten die Aufgabe, diese Scheiben vom ersten zum dritten Pflock umzulegen, wobei sie den zweiten Pflock als Hilfsmittel benutzen durften und zwar gemäß folgenden zwei Bedingungen:

- Es darf jeweils nur eine Scheibe bewegt werden.
- Es darf sich nie eine kleine Scheibe auf einer Größeren befinden.

Den Mönchen wurde gesagt, dass wenn ihnen dies gelungen sei, würden der Turm samt dem Tempel und allen Brahmanen zu Staub zerfallen, und die Welt würde mit einem Donnerschlag untergehen.

[14]Bezeichnung eines hinduistischen Tempels
[15]auch als Varanasi bekannt, eine am Ganges gelegene Stadt in Indien

Heute ist diese Geschichte als ein Geduldsspiel unter dem Namen „Die Türme von Hanoi[16]“ bekannt:

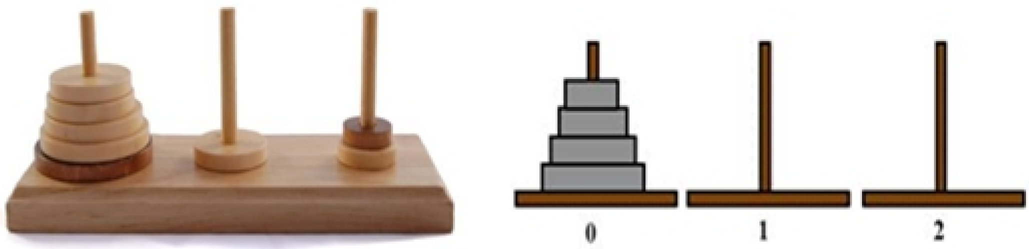

Abbildung 3.18: Die Türme von Hanoi: Spiel [46] und Modell [47]

Sei nun n die Anzahl der Scheiben, mit denen gespielt wird. Die Angaben P_1, P_2, P_3 und S_1, S_2, S_3 bezeichnen die jeweiligen Pflöcke und Scheiben. Die Angabe $S_1|P_1 \longmapsto P_3$ bedeutet beispielsweise, dass die Scheibe S_1 vom Pflock P_1 auf den Pflock P_3 verschoben wird. Wie viele Spielzüge benötigt man mindestens, um dieses Rätsel zu lösen?

Fall $n = 1$: Dieser triviale Fall ist in einem Zug lösbar: $S_1|P_1 \longmapsto P_3$

Fall $n = 2$: Die Aufgabe wird durch die drei Züge gelöst:

$$\begin{aligned} &S_1|P_1 \longmapsto P_2 \\ &S_2|P_1 \longmapsto P_3 \\ &S_1|P_2 \longmapsto P_3 \end{aligned}$$

Fall $n = 3$: Hier werden insgesamt sieben Spielzüge benötigt:

$$\begin{aligned} &S_1|P_1 \longmapsto P_3 \\ &S_2|P_1 \longmapsto P_2 \\ &S_1|P_3 \longmapsto P_2 \\ &S_3|P_1 \longmapsto P_3 \\ &S_1|P_2 \longmapsto P_1 \\ &S_2|P_2 \longmapsto P_3 \\ &S_1|P_1 \longmapsto P_3 \end{aligned}$$

Fall $n = 4$: Dieser Turm besteht aus vier Scheiben oder anders betrachtet: ein Turm mit drei Scheiben mit einer vierten Scheibe darunter. Man braucht daher sieben Züge, um wie im obigen Fall den

[16]weitere Namen sind: „Der Turm von Brahma“, „Die Türme von Benares“ oder auch „Die Lucas-Türme“, da dieses Spiel 1883 von dem französischen Mathematiker François Éduard Anatole Lucas erfunden wurde.

3-er Turm umzusetzen, einen, um die vierte Scheibe zu versetzen und wieder sieben um den 3-er Turm wieder oben drauf zu setzen. Also ergeben sich insgesamt insgesamt 15 Spielzüge.

Man sieht, dass sich immer eine ungerade Anzahl an Spielzügen ergibt, genauer gesagt:

Satz 3.27:
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass die Anzahl der mindestens benötigten Spielzüge gleich der Mersenne Zahl $2^n - 1$ entspricht.

Beweis:

Induktiv lässt sich dies leicht zeigen. Sei n wieder die Anzahl der Scheiben.
Für eine einzelne Scheibe ist dies sicher richtig, denn sie muss nur von P_1 nach P_3 verschoben werden, also ergibt sich, wie behauptet, $2^1 - 1 = 1$ Zug.
Für eine größere Scheibenanzahl errechnet sich die Anzahl der Züge durch Addition der Züge der „Teilaufgaben", also entspricht die Anzahl der mindestens benötigten Züge dem Doppelten der minimalen Zuganzahl für den um eine Scheibe kleineren Turm. (Dieser muss ja zweimal bewegt werden, zusätzlich zu dem Zug, die größte Scheibe zu bewegen.)
Daraus folgt: $\left(2^{n-1} - 1\right) + 1 + \left(2^{n-1} - 1\right) = 2^n - 1$ □

Stellt man nun alle erlaubten Spielzüge graphisch dar, dann erhält man die sogenannten „Hanoi-Graphen", durch die man sehr schön den Zusammenhang zum Sierpinski-Dreieck und damit auch zum Pascal'schen Dreieck sieht.
Stellt man die Gesamtheit aller möglichen Positionen geeignet dar, dann ergibt sich:

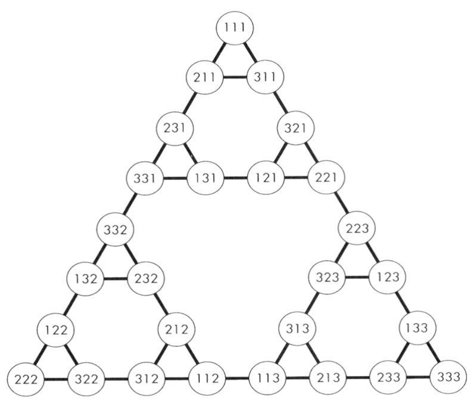

Abbildung 3.19: Jede mögliche Position wird als eine Kombination von drei Zahlen dargestellt. [42]

Schmunzeln lässt sich über folgende Feststellung:

Die indischen Mönche bräuchten für 64 Scheiben daher 18 446 744 073 709 551 615 Spielzüge. Nimmt man an, die Mönche versetzen ununterbrochen, Tag und Nacht, eine Scheibe in jeder Sekunde, bräuchten sie selbst dann etwa 584 942 417 400 $\sim$ 585 Milliarden Jahre, um ihre Aufgabe zu vollenden.

3.6.3 Das Pascal'sche Dreieck und der goldene Schnitt

Der Goldene Schnitt beschreibt das Verhältnis zweier Strecken:

Zwei Strecken, wobei die längere a und die kürzere b genannt wird, stehen im Verhältnis des Goldenen Schnittes, wenn sich a zu b verhält wie $a + b$ zu a. Dieses Verhältnis wird oftmals mit dem griechischen Buchstaben Φ bezeichnet:

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \overset{\text{triviale Umformungen}}{\Longleftrightarrow} \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\ldots$$

Um den Zusammenhang zum Pascal'schen Dreieck zu verdeutlichen, muss zuerst eine Rekursion für den mittleren Binomialkoeffizienten hergeleitet werden:

Sei $a_n = \binom{2n}{n}$. Dann gilt: $a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1}$

$$= \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$= \frac{(4n+2)}{(n+1)} a_n$$

Somit erfüllt a_n die Rekursion $(n+1)a_{n+1} = (4n+2)a_n$ mit $a_0 = 1$.

Um eine Erzeugendenfunktion für den mittleren Binomialkoeffizienten herzuleiten, sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Mit der obigen Rekursion folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = 4\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Das heißt: $f'(x) = 4x\, f'(x) + 2\, f(x)$, wobei $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ nach x bezeichnet $\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{2}{1-4x}$

Integrieren nach x ergibt: $ln\, f(x) = -\frac{1}{2}\, ln\,(1-4x) + C$ ($C \ldots$ Konstante)

Da $f(0) = a_0 = 1$, folgt dass $C = 0$ ist.

Also gilt: $ln\, f(x) = -\frac{1}{2}\, ln\,(1-4x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

Demnach ist $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$ die gewünschte Erzeugendenfunktion.

Diese Potenzreihe konvergiert für $|4x| < 1$, also im Fall $|x| < \frac{1}{4}$.
Setzt man jetzt $x = \frac{y-1}{4y}$, $y > 0$, dann ergibt sich:

$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4(y-1)}{4y}}} = \sqrt{y}$, also gilt: $\sqrt{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$

Sei nun $y = 5$, also $x = \frac{1}{5}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{5} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n \\
\Leftrightarrow \sqrt{5} - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n \\
\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n
\end{aligned}$$

Da $\frac{1}{2}\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$ ist, folgt:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-1}{n-1} \left(\frac{1}{5}\right)^n \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\Phi} &= 1 + 3\left(\frac{1}{5}\right) + 10\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 35\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots
\end{aligned}$$

Der Binomialkoeffizient $\binom{2n-1}{n-1}$ bezeichnet jene Binomialkoeffizienten im Pascal'schen Dreieck, die links neben den mittleren Binomialkoeffizienten liegen:

$$\begin{array}{c}
1 \\
\boxed{1} \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad \boxed{3} \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad \boxed{10} \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad \boxed{35} \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Abbildung 3.20: Graphische Darstellung der Binomialkoeffizienten $\binom{2n-1}{n-1}$

3.6.4 Das Pascal'sche Dreieck und die Zahl π

Die mittleren Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ ergeben einen interessanten Zusammenhang zur Kreiszahl $\pi = 3.14159265359\ldots$.

- Man betrachte die unendliche Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$:

  Mit $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ kann man diese Reihe darstellen als: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

  Wiederholte Anwendung partieller Integration führt zu:

$$\int_0^1 x^n (1-x)^n \, dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

  Also gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n (1-x)^n \, dx \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x)^n \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-x(1-x)} \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}
\end{aligned}$$

  Durch Substitution von $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\theta$ ergibt sich weiters:

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

- Ein weiterer Zusammenhang zur Zahl π ergibt sich durch:

  Ausgangspunkt ist die auf Seite 105 beschriebene Erzeugendenfunktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n:$$

  Ersetzt man x durch x^2, folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{2n}, \; (|x| < \tfrac{1}{2})$$

Integration führt zu:
$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \int_0^{\frac{1}{4}} x^{2n}\, dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\, arcsin\, 2x \Big]_{x=0}^{x=\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2n+1} x^{2n+1} \Big]_{x=0}^{x=\frac{1}{4}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2n+1} \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}}_{=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{16^n}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)} 16^{-n} = \frac{\pi}{3}$$

- Die Berechnung der Summe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ führt ebenfalls auf einen Wert, in dem die Zahl π eine Rolle spielt:

  Da $\frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, gilt: $\quad \frac{1}{\binom{2n}{n}} = (2n+1) \int_0^1 x^n(1-x)^n\, dx$

  Somit folgt:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^1 x^n(1-x)^n\, dx$$
$$= 2\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n (1-x)^n\, dx + \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)^n\, dx$$
$$= 2\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n (1-x)^n\, dx + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

  Nun betrachtet man den ersten Summanden:
$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n(1-x)^n\, dx = \int_0^1 x(1-x)\Big[\sum_{n=0}^{\infty} n(x-x^2)^{n-1}\Big]\, dx$$
$$= \int_0^1 (x-x^2) \frac{dx}{(1-x+x^2)^2}$$
$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{x\, dx}{(x^2-x+1)^2}}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{(x^2-x+1)^2}}_{I_2}$$

  Nun werden die beiden Integrale einzeln berechnet, indem man durch $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, tan\, \theta$ substituiert:

$$I_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, tan\,\theta)\frac{\sqrt{3}}{2}\, sec^2\,\theta\, d\theta}{\frac{9}{16}\, sec^4\,\theta}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{16}{9} \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \sqrt{3}\, tan\,\theta)\, cos^2\,\theta\, d\theta$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{9} \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \Big[\frac{1+\cos\,2\theta}{2} + \sqrt{3}\,\frac{sin\,2\theta}{2}\Big]\, d\theta$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\Big[\theta + \frac{1}{2}\, sin\,2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\, cos\,2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\Big[\Big(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) - \Big(-\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big]$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}\Big(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$
$$= \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{4} \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + 2\sqrt{3}\, tan\,\theta + 3\, tan^2\,\theta)\, cos^2\,\theta\, d\theta$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{9} \int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \Big[\frac{1 + cos\,2\theta}{2} + \sqrt{3}\, sin\,2\theta + 3\Big(\frac{1 - cos\,2\theta}{2}\Big)\Big]\, d\theta$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{18}\Big[\theta + \frac{sin\,2\theta}{2} - \sqrt{3}\, cos\,2\theta + 3\theta - \frac{3}{2}\sin\,2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{9}\Big[4\theta - \sqrt{3}\, cos\,2\theta - \, sin\,2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{9}[(4\theta - \sqrt{3}\, cos\,2\theta - \, sin\,2\theta) - (-4\theta - \sqrt{3}\, cos\,2\theta + \, sin\,2\theta)]_{\theta=\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{9}[8\theta - 2\, sin\,2\theta]_{\theta=\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{9}\Big(8\cdot\frac{\pi}{6} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{9}\Big(4\cdot\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\Big)$$
$$= \frac{4\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{1}{3}$$

Damit folgt insgesamt: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = 2I_1 - 2I_2 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

$$= \frac{4\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{2}{3} - \frac{8\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{2}{3} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{3} - \frac{4\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \\
&= \frac{4}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}
\end{aligned}
$$

Kapitel 4

Die Stirling-Zahlen

“Nihil certi habemus in nostra scientia nisi mathematicam."
(In der Wissenschaft ist nichts zuverlässig, wenn es nicht mathematisch formuliert ist.)
(Nicolaus Cusanus[1])

4.1 Das Leben des James Stirling

James Stirling’s biographischer Hintergrund lässt sich zurückführen auf ein altes, schottisches Adelsgeschlecht. Sein Großvater war Sir Archibald Stirling von Keir, auch bekannt unter „Lord of Garden“. Sein Vater war Archibald Stirling, seine Mutter war dessen zweite Frau, Anna Hamilton, älteste Tochter von Sir Alexander Hamilton von Haggs und dessen Gemahlin Mary Murray.

James wurde am 22.April des Jahres 1692 als dritter Sohn auf dem Familienlandsitz Garden bei Stirling[2] geboren. Seine Familie waren Anhänger der Jakobiten[3], der Partei von König Jacob Stuart, weswegen James’ Vater des Öfteren wegen Verrats unter Anklage stand. [48]

Über James’ Kindheit und frühe Ausbildung ist nichts bekannt. Die ersten bekannten Angaben über ihn datieren aus dem Jahr 1710. Im Herbst dieses Jahres reiste er nach Oxford, um sich dort an der Universität zu immatrikulieren. Tatsächlich schrieb er sich am 18.Jänner 1711 am „Balliol College Oxford“

[1] 1401-1464, katholischer Theologe und Philosoph
[2] Stirling ist eine nordwestlich von Edinburgh gelegene Stadt in Schottland.
[3] abgeleitet aus dem Englischen von „Jacobites“; So nannte man 1688-1766 die englischen, schottischen und irischen Anhänger der im Exil lebenden Thronanwärter aus dem Hause Stuart.

als „Snell Stipendiat[4]" ein. Trotzdem steht nicht fest, ob Stirling wirklich hier studierte, denn sein Name erscheint nirgends in der Liste der eingeschriebenen Studenten - wobei hier nicht alle Namen aufscheinen müssen. Zahlreiche andere Quellen behaupten, dass James Stirling, wie auch schon sein Vater, an der Universität von Edinburgh studiert hat. Tatsächlich hat sich ein Student namens James Stirling, dessen Unterschrift sehr der des Mathematikers ähnelte, am 24.März 1710 an der Universität von Edinburgh eingeschrieben, sein Studium dort jedoch nicht beendet. Es bleibt ein Rätsel, welche dieser Theorien wirklich stimmt.

Im Oktober 1711 wurde Stirling ein zweites Stipendium gewährt, das „Bishop Warner"-Stipendium. Er verlor dieses Stipendium jedoch bald, da er sich aufgrund seiner Überzeugungen gegenüber den Jakobiten strikt weigerte, den dazu nötigen „Eid der Treuepflicht" zu schwören. Er wurde beschuldigt, mit den Jakobiten zu korrespondieren und damit Teil deren Rebellion (Jakobitenaufstand) aus dem Jahre 1715 zu sein. James wurde jedoch freigesprochen und verließ Oxford. [49]

Seine Zeit in Oxford war dennoch von Bedeutung, da er dort die Bekanntschaft mit dem schottischen Arzt und Mathematiker John Arbuthnot[5] machte, der ihm 1717 half, sein erstes Werk *„Lineae Tertii Ordinis Neutonianae"* zu publizieren. Darin präzisierte er die im Jahre 1676 von Isaac Newton[6] in zwei Koordinatenachsen gezeichneten 72 Kurven 3.Grades um vier weitere Kurven.

Er löste auch ein Kurvenproblem von Gottfried Wilhelm Leibniz. Newton selbst erhielt eine Kopie dieses Werkes. Stirling widmete es dem venezianischen Botschafter Nicholas Tron, den er ebenfalls während seiner Zeit in Oxford kennenlernte. 1718 verließ Tron nach Ablauf seiner Amtsdauer die Stadt London, um nach Venedig zurückzukehren und es wird angenommen, dass James Stirling ihn begleitete, da er dort einen Lehrstuhl für Mathematik bekommen sollte. Es ist nicht bekannt, wie lang er sich dort aufhielt. Am 18.Juni 1719 wurde eine von ihm eingereichte Abhandlung mit dem Titel *„Methodus Differentialis Newtoniana Illustrata"* in der Königlichen Gesellschaft von London,

[4]Das Snell Stipendium, benannt nach Sir John Snell, bezeichnete ein jährliches Stipendium, das an Studenten der Universität von Glasgow zur postgraduellen Ausbildung am Balliol College in Oxford vergeben wurde.

[5]1667-1735, gilt unter anderem auch als Vorreiter statistischer Tests

[6]1643-1727

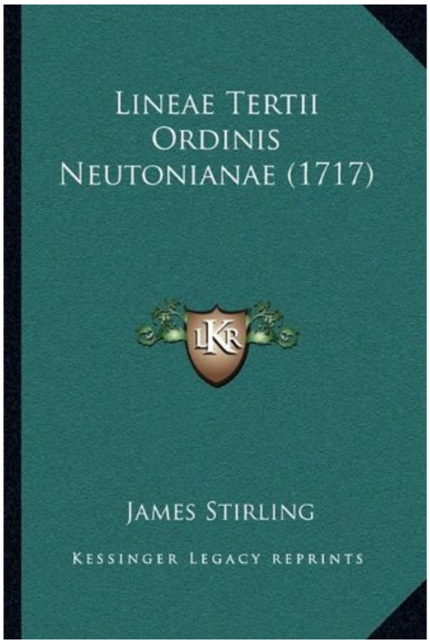

Abbildung 4.1: Stirling nennt (wie Newton) auch die Abszissenachse selbst „Abscissa“ und die Ordinatenachse, sofern er eine solche benützt, „Ordinata (prima, principalis)“. Der Koordinatenursprung heißt „Principium Abscissae“. [50]

der sogenannten „Royal Society of London[7]“, präsentiert. Während seiner Zeit in Venedig traf er unter anderem mit dem schweizer Mathematiker Nikolaus Bernoulli[8] zusammen, der von 1716 bis 1722 den Mathematiklehrstuhl an der Universität von Padua[9] innehatte und sie lernten sich in dieser Zeit sehr gut kennen. [48]

1722 kehrte er nach Glasgow zurück. Man munkelt, dass er von einem Handelsgeheimnis der Glasmacher in Venedig erfahren hatte, in „Gefahr“ war und deswegen von dort fliehen musste. Mit Hilfe von Newton und ihrem gemeinsamen Freund Colin Maclaurin[10] kehrte er nach London zurück, wo er die nächsten zehn Jahre verweilte.

Ab dem Jahre 1724 war Stirling zehn Jahre als Mathematiklehrer an der „William Watt’s Akademie“ in Covent Garden tätig. Dies war eine der erfolgreichsten Schulen in London. Obwohl er sich anfangs Geld borgen musste, um sich die dafür nötigen mathematischen Mittel zu besorgen, verbesserte sich in die-

[7]Die „Royal Society of London“, gegründet 1660, war eine königliche Gesellschaft, die ihre Forschung fast ausschließlich der Mathematik und den Naturwissenschaften widmete.
[8]1687-1759
[9]Padua (italienisch Padova) ist eine der ältesten Universitätsstädte
[10]schottischer Mathematiker, 1698-1746

ser Zeit nach und nach seine finanzielle Lage sehr. Er half eine Vorlesung über Mechanik, Hyperstatik, Optik und Astronomie vorzubereiten. Newton schlug Stirling die Mitgliedschaft in der Königlichen Gesellschaft vor, und auf sein Bemühen hin wurde Stirling am 3.November 1726 aufgenommen.

Diese Zeit war mathematisch sehr prägend für James Stirling. Er forschte und verkehrte mit vielen Mathematikern, unter anderem mit Abraham de Moivre und Leonard Euler. 1730 enstand seine wichtigste Arbeit mit dem Titel *„Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum“*. Darin verfasste er bedeutende Beiträge zu vielen Gebieten. Er ging von der Theorie der Kubiken über zu Differentialgleichungen, insbesondere zu Reihenentwicklungen und zur Konvergenzbeschleunigung. Außerdem leitet er eine Reihenentwicklung für $log(n!)$ ab. Daraus folgt die asymptotische Formel für die Fakultät $n!$ für große n, die schon de Moivre angegeben hatte. Heute ist diese gewöhnlich aber mit Stirling's Namen verbunden, man spricht von der „Stirling'schen Approximation“, worauf ich in Kapitel 4.2 genauer eingehen werde.

Methodus Differentialis:
SIVE
TRACTATUS
DE
SUMMATIONE
ET
INTERPOLATIONE
SERIERUM INFINITARUM.

AUCTORE *JACOBO STIRLING*, R. S. S.

LONDINI:
Typis GUL. BOWYER.
Impensis G. STRAHAN ad Insigne Globi aurati e regione *Excambii Regalis.* MDCCXXX.

Abbildung 4.2: Stirling's bekanntestes Werk [51]

Dieses Werk war eine Art Erweiterung seiner Abhandlung aus dem Jahre 1719 und von solcher Wichtigkeit, dass noch zu Lebzeiten Stirling's zwei weitere Neuauflagen erschienen, 1753 und 1764; 1749 wurde es von Francis Holliday in die englische Sprache übersetzt. [52]

Ab dem Beginn des Jahres 1730 wechselten Stirling's Interessen von der Mathematik zu Studien über die Erde und deren Gravitationskraft, die 1735 in seiner Abhandlung „On the Figure of the Earth, and on the Variation of the Force of Gravity at its Surface" ihren Höhepunkt erreichten. Von 1734 bis 1736 arbeitete er im Sommer für einen schottischen Minenbetrieb in Leadhills[11] in Lanarkshire[12] in Schottland. Anfang Mai des Jahres 1737 erhielt er dort eine dauerhafte Anstellung als Hauptvertreter, eine Position, die er bis zu seinem Tod behielt. Gerüchten zufolge beruhte sein Gehalt auf 210 Pfund pro Jahr. Obwohl er hauptsächlich für die Verwaltung zuständig war und seine Tätigkeiten dort sehr erfolgreich waren, entwickelte er ein Belüftungssystem für den Betrieb, welches er 1745 in einer Abhandlung mit dem Titel „Decription of a Machine to Blow Fire by the Fall of Water" veröffentlichte.

Nach 1745 - es ist nicht bekannt wann genau - heiratete James Barbara Watson, die aus einem Dorf in der Nähe von Stirling stammte. Sie bekamen eine Tochter, welche in späteren Jahren ihren Cousin Archibald Stirling, den nachfolgenden Vertreter in Leadhills, heiratete. Stirling blieb zwar in Kontakt mit seinen mathematischen Kollegen, doch seine jakobitischen Überzeugungen hielten ihn davon ab, den 1746 - durch den Tod seines Freundes Colin Maclaurin[13] - frei gewordenen Lehrstuhl in Edinburgh zu übernehmen und sich somit wieder gänzlich der Mathematik zu widmen. Im selben Jahr, am 30.Juni,wurde er zum Mitglied der Königlich-Preußischen Akademie der Wissenschaften[14] gewählt.

Seine letzte wissenschaftliche Arbeit datiert zurück auf das Jahr 1752, als er für ein Unternehmen in Glasgow[15] eine Studie über den River Clyde[16] durchführte.

[11] Leadhills (englisch: „Bleihügel") bezeichnet einen Ort im Südwesten Schottlands
[12] Lanarkshire ist eine der traditionellen Grafschaften von Schottland
[13] Maclaurin war 1745 aktiv an der Verteidigung von Edinburgh gegen die Jakobiten beteiligt.
[14] wurde am 11. Juli 1700 in Berlin durch den Kurfürsten Friedrich III. gegründet. Zu ihrem ersten Präsidenten wurde Gottfried Wilhelm Leibniz ernannt, der die Akademie gemeinsam mit Kollegen plante und entwickelte.
[15] Glasgow ist einer der größten Städte Schottlands
[16] Der Clyde, auch River Clyde genannt, ist mit 176 km einer der größten Flüsse in Schottland.

Dies war er Beginn einer Reihe von Studien mit der Absicht, die Befahrbarkeit des Flusses zu verbessern. Das Unternehmen ehrte ihn für seine Leistungen. Im folgenden Jahr verstarb Stirling's Frau. 1754 trat er aus finanziellen Gründen aus der Royal Society aus, da er mit seinen jährlichen Beiträgen längere Zeit über im Rückstand war.

1770 lies er sich in Edinburgh aus gesundheitlichen Gründen ärztlich behandeln, wo er am 5.Dezember des selben Jahres verstarb. [53]

Abbildung 4.3: Die Vorderansicht des Grabes von James Stirling am Friedhof „Greyfriars Kirkyard" in Edinburgh [54]

Sein Grabstein trägt folgende Inschrift:

> *„An diesem Platz liegt James Stirling, genannt der Venezianer, begraben, der berühmte Mathematiker, der im Jahre 1692 des Herrn als vierter Sohn des Archibald Stirling von Garden („Lord") geboren wurde und im Jahre 1770 starb."*[17]

Abbildung 4.4: James Stirling's Grabstein [54]

[17]übersetzt von Univ.-Doz. Mag. Dr. Fritz Lošek

4.2 Die Stirling'sche Formel

In Kapitel 1, Seite 14 wurde eine Abschätzung für die Fakultät hergeleitet. Die wohl bekannteste Abschätzung für die Fakultät $n!$, die sogenannte *„Stirling'sche Formel“*, welche ebenfalls auf James Stirling aus dem Jahr 1730 zurückgeht, möchte ich nun herleiten.

Um die Stirling'sche Formel zu beweisen, benötigt man die sogenannte „Wallis-Formel“, oft auch „Wallis'sche Produktformel[18]“ genannt. Diese Formel behandelt eine Produktdarstellung von unendlich vielen Faktoren, deren Grenzwert π ist:

Es wird das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, x\, dx$ für $n \geq 2$ betrachtet:

Durch partielle Integration und Anwendung des trigonometrischen Satzes von Pythagoras ($sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-1}x\ sin\, x\, dx &= \Big[sin^{n-1}x\,(-cos\, x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)sin^{n-2}x\, cos\, x(-cos\, x)\, dx \\ &= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)sin^{n-2}x\, cos^2 x\, dx \\ &= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}x\, dx - (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, x\, dx\end{aligned}$$

Umformen ergibt die Rekursionsformel: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, x\, dx = \frac{n-1}{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}\, x\, dx$

Aus $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^0\, x\, dx = \frac{\pi}{2}$ und $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^1\, x\, dx = \Big[-cos\, x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ erhält man

für $n = 2k$: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2k}\, x\, dx = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\prod\limits_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}$

und für $n = 2k+1$: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2k+1}\, x\, dx = \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \prod\limits_{j=1}^{k}\frac{2j}{2j+1}$

[18]benannt nach dem englischen Mathematiker John Wallis, 1616-1703

Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ gilt $0 \leq sinx \leq 1$ und damit folgt durch Ableitung:

$$sin^{2k+1}x \leq sin^{2k}x \leq sin^{2k-1}x \text{ und } \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2k+1}\,x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2k}\,x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2k-1}\,x\,dx$$

Setzt man dies in die abgeleitete Produktformel ein, ergibt sich:

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \leq \prod_{j=1}^{k-1} \frac{2j}{2j+1}$$

Durch Division durch das rechte Produkt folgt:

$$\frac{2k}{2k+1} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \frac{4j^2-1}{4j^2} \leq 1$$

Betrachtung der Grenzwerte $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{2k}{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2k-1}{2k} = 1$ ergibt die Wallis'sche Produktformel [55]:

Satz 4.1: Wallis'sche Produktformel

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{4j^2}{4j^2-1} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{4j^2}{4j^2-1}$$

Weiters wird für den Beweis der Stirling'schen Formel folgende Definition benötigt:

<u>Definition:</u>

Zwei Folgen (a_n) und (b_n) heißen *asymptotisch gleich*, in Zeichen $a_n \sim b_n$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$ ist, d.h. der relative Fehler geht gegen 0.

Anders ausgedrückt bedeutet asymptotische Gleichheit, dass mit wachsendem n immer mehr Dezimalstellen der entsprechenden Glieder der beiden Folgen übereinstimmen.

Die Stirling'sche Formel erlaubt es, damit Näherungswerte für große Fakultäten zu berechnen, um sich den Rechenaufwand zu ersparen:

Satz 4.2: Stirling'sche Formel

Für alle $n \to \infty$ gilt: $\quad n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$

Beweis:
Ich werde zeigen, dass $\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} e^{\frac{1}{12n}}$ gilt, also zusätzlich Fehlerschranken angeben:

Umformen der Wallis'schen Produktformel ergibt:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{4j^2}{4j^2-1} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(2j)^2}{(2j-1)(2j+1)} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(2j)^4}{(2j-1)(2j)(2j)(2j+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)}$$

Wurzelziehen führt zu:

Folgerung:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{((2n)!)\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$$

Nun wird die durch $x_n := \dfrac{n!e^n}{\sqrt{n}n^n}$ definierte Folge betrachtet:
Diese Folge ist durch 0 nach unten beschränkt, also folgt ihre Konvergenz dadurch, dass gezeigt wird, dass sie monoton fällt:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n!e^n}{\sqrt{n}n^n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}} = \frac{1}{e} \cdot \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{n+\frac{1}{2}}$$

Logarithmieren ergibt:

$$ln\,\frac{x_n}{x_{n+1}} = -1 + \Big(n+\frac{1}{2}\Big) \cdot ln\,\frac{n+1}{n}$$

Durch Reihenentwicklung mit $z < 1$ erhält man:

$$ln\,\frac{1+z}{1-z} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} = 2z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2}{5}z^5 + \cdots$$

Damit folgt für positives z:

$$\begin{aligned} 2z \leq ln\,\frac{1+z}{1-z} &\leq 2\Big(z + \frac{z^3}{3}(1+z^2+z^4+\cdots)\Big) \\ &= 2\Big(z + \frac{z^3}{3}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}\Big)\Big) \\ &= 2\Big(z + \frac{z^3}{3}\frac{1}{1-z^2}\Big) \end{aligned}$$

$$= 2z + \frac{2}{3} \cdot \frac{z^3}{1-z^2}$$

Setzt man nun $z := (2n+1)^{-1}$, dann folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+\frac{1}{2}} \leq ln\,\frac{n+1}{n} &\leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)((2n+1)^2-1)} \\
\Leftrightarrow 1 \leq \Big(n+\frac{1}{2}\Big) ln\,\frac{n+1}{n} &\leq 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2-1} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4n^2+4n} \\
\Leftrightarrow 0 \leq ln\,\frac{x_n}{x_{n+1}} &\leq \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Die linke Ungleichung liefert die gewünschte Monotonie.
Aus der rechten erhält man durch $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ die Abschätzung:

$$ln\,x_n - \frac{1}{12n} \leq ln\,x_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}$$

Betrachtet man nun nicht nur das nächste Folgenglied, sondern verallgemeinert dies, folgt:

$$\begin{aligned}
ln\,x_n - \frac{1}{12n} &\leq ln\,x_{n+m} - \frac{1}{12(n+m)} \\
\Leftrightarrow ln\,\frac{x_n}{x_{n+m}} &\leq \frac{1}{12} \cdot \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\Big)
\end{aligned}$$

Für $m \to \infty$ erhält man somit:

$$\begin{aligned}
0 \leq ln\,\frac{x_n}{x} &\leq \frac{1}{12n} \\
\Leftrightarrow 1 \leq \frac{x_n}{x} &\leq e^{\frac{1}{12n}}
\end{aligned}$$

Insgesamt wurde bis jetzt gezeigt, dass gilt: $x \leq \dfrac{n!e^n}{\sqrt{n}n^n} \leq x\,e^{\frac{1}{12n}}$

Nun muss noch x berechnet werden, wofür ich auf die Folgerung auf Seite 118 zurückgreife:

Mit $n! = \dfrac{x_n n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$ erhält man:
$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{((2n)!)\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} x_n^2 n^{2n+1} e^{2n}}{e^{2n} x_{2n} (2n)^{2n+\frac{1}{2}} \sqrt{n+\frac{1}{2}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_{2n}} \cdot \sqrt{\frac{n}{2n+1}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Also ist $x = \sqrt{2\pi}$. Insgesamt folgt also durch Einsetzten in die oberste Zeile:

$$\sqrt{2\pi} \leq \frac{n!e^n}{\sqrt{n}n^n} \leq \sqrt{2\pi}\, exp\left(\frac{1}{12n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} exp\left(\frac{1}{12n}\right) \qquad [15] \; \square$$

4.3 Partitionen

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wurde der Begriff *„Partition*[19]*"* erwähnt. Nun möchte ich darauf zurückkommen und diesen Ausdruck näher erläutern:

Definition:
Unter einer *Partition* versteht man die Zerlegung einer Menge M in nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen (Blöcke, Klassen), deren Vereinigung wieder M ergibt. Bezeichnet k die Anzahl dieser Blöcke, so spricht man von einer k-Partition.

Beispiel: Die möglichen Partitionen der Menge $\{a, b, c\}$ sind:

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$
$$\{\{a, b\}, \{c\}\}; \{\{a\}, \{b, c\}\}; \{\{a, c\}, \{b\}\};$$
$$\{\{a, b, c\}\}$$

Satz 4.3:
Jede Äquivalenzrelation auf einer Menge erzeugt eine Partition. Umgekehrt bestimmt jede Partition eine Äquivalenzrelation.

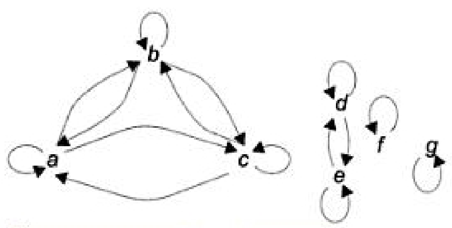

Abbildung 4.5: Eine Äquivalenzrelation und Partition auf der Menge $\{a, b, c, d, e, f\}$.
Die in dieser Abbildung definierte Partition ist gegeben durch: $\{a, b, c\}, \{d, e\}, \{f\}$ und $\{g\}$. [60]

Beweis:

Äquivalenzklassen sind disjunkte Teilmengen von M $(R[x] \cap R[y] = \emptyset \, \forall x \in M_i, y \in M_i)$. Durch das Vorliegen einer Äquivalenzrelation ist damit auch eine Klasseneinteilung gegeben. Angenommen, es gäbe ein $x \in M$, welches nicht in der Vereinigung aller Äquivalenzklassen liegt. Da dieses x sicher in der Äquivalenzklasse $R[x]$ liegt, entsteht sofort ein Widerspruch. Also erzeugt jede Äquivalenzrelation eine Partition der Menge, auf der sie definiert ist.
Seien nun umgekehrt die Teilmengen M_i eine Partition der Menge M, dann kann damit die folgende Relation definiert werden:

[19] Aus dem Lateinischen: partitio, f .... Teilung, Einteilung

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists! M_i \text{ mit } x \in M_i, y \in M_i$$

Nun müssen noch die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation bewiesen werden:

Sie ist reflexiv, da es genau ein i mit $x \in M_i$ gibt.

Die Symmetrie folgt aus der Definition der Äquivalenzrelation.

Transitivität erhält man, da es für $x \sim y$ und $y \sim z$ genau ein i gibt mit $x \in M_i$ und $y \in M_i$ und da $y \sim z$ folgt auch $z \in M_i$. [60] $\square$

Wie ich es zu Beginn dieser Arbeit bereits erwähnt habe, stößt man durch das Lösen von Anzahlproblemen auf speziell definierte Zahlen. In den vorigen Kapiteln wurden die Fakultät und die Binomialkoeffizienten genau behandelt. Im Fall der Partitionen erhält man an dieser Stelle schon die sogenannten „Bell'schen[20] Zahlen“, die ich kurz anführen möchte:

<u>Definition:</u>
Die Anzahl der möglichen Partitionen einer n-elementigen Menge wird *Bell'sche Zahl* B_n genannt.

Wie aber genau sehen die Bell'schen Zahlen nun aus?

$n = 0$, $M = \{\emptyset\}$: Hier gibt es nur die triviale Zerlegung in 0 nichtleere Klassen.
$\Rightarrow B_0 = 1$

$n = 1$, $M = \{1\}$: Auch hier gibt es nur die triviale Zerlegung $\{\{1\}\}$, bestehend aus einer einzigen Klasse. $\Rightarrow B_1 = 1$

$n = 2$, $M = \{1, 2\}$: Es ergeben sich die folgenden beiden Zerlegungen:
$\{\{1, 2\}\}$, $\{\{1\}\{2\}\}$. $\Rightarrow B_2 = 2$

$n = 3$, $M = \{1, 2, 3\}$: Nun gibt es schon 5 Zerlegungen: $\{\{1, 2, 3\}\}$,$\{\{1, 2\}, \{3\}\}$,$\{\{2, 3\}, \{1\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ und $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. $\Rightarrow B_3 = 5$

<u>Wie lässt sich nun eine allgemeine Formel für die B_n herleiten?</u>

Sei B_n die Anzahl der Zerlegungen der Menge $[n] := \{1, 2, ..., n\}$ in disjunkte nichtleere Teilmengen. Um eine Rekursionsformel für die B_n zu erhalten, kommt man auf folgende Überlegung:
Jede Partition der $(n+1)$-elementigen Menge $[n+1]$ ergibt sich folgendermaßen:
Man wählt eine $(n-k)$-elementige Teilmenge von $[n]$, die gemeinsam mit dem Element $n+1$ einen Block der Partition bildet. Hierfür gibt es $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

[20]benannt nach dem schottisch-amerikanischen Mathematiker Eric Temple Bell, 1883-1960

Möglichkeiten. Die restlichen k Elemente kann man beliebig partitionieren, wofür es B_k Möglichkeiten gibt.
Damit ergibt sich:

Satz 4.4 Rekursionsformel für die Bell'schen Zahlen

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \text{ mit } B_0 = 1$$

Durch Berechnung sieht man, dass die Bell'schen Zahlen rasant wachsen, denn $B_4 = 15$, $B_5 = 52$, $B_6 = 203$, $B_7 = 877$ .... [63]

Analog zu Permutationen, Kombinationen und Variationen unterscheidet man auch bei Partitionen zwischen geordneten und ungeordneten Partitionen, je nachdem, ob die Reihenfolge relevant ist oder nicht.

Betrachtet man eine Partition als Menge von k Blöcken, dann spielt die Reihenfolge dieser Blöcke keine Rolle und man spricht einfach von einer k-Partition bzw. von einer „ungeordneten k-Partition". Ist dagegen auch die Reihenfolge des Auftreten der Blöcke relevant, so spricht man von „geordneten k-Partitionen. Um diese zur unterscheiden, werde ich in weiterer Folge die Blöcke einer ungeordneten Partition mit Mengenklammern umfassen und die Blöcke einer geordneten Partitionen als Tupel, also in runde Klammern schreiben. Für die in folgenden Seiten betrachteten Stirling Zahlen erster und zweiter Art halte ich mich mit der Notation an [67].

Um diese Zahlen kompakter darstellen zu können, möchte ich noch zwei bisher nicht erwähnte Definitionen einführen, nämlich die fallende und steigende Fakultät:

- **Die fallende Fakultät**

<u>Definition:</u>
Die *fallende Fakultät* $[x]_n$ ist $\forall x \in \mathbb{R}$ definiert als:

$$[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)]$$

Laut Kapitel 1, Satz 1.6 auf Seite 23 ist die fallende Fakultät nichts anderes als eine Variation ohne Wiederholung, also gilt:

$$\begin{aligned}[x]_n &= x(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)] \\ &= x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)\end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(x-i)$$
$$= \binom{x}{n} n!$$
$$= \frac{x!}{(x-n)!}$$
$$= V_x^{(n)}$$

Beispiele: $n = 0 : [x]_0 = 1$
$n = 1 : [x]_1 = x$
$n = 2 : [x]_2 = x(x-1) = x^2 - x$
$n = 3 : [x]_3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$
$n = 4 : [x]_4 = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$
$\vdots$

Daraus ergibt sich die rekursive Definition der fallenden Fakultät:

Definition:
Für alle $n \geq 1$ gilt: $[x]_n = (x - n + 1)[x]_{n-1}$ mit dem Startwert $[x]_0 = 1$.

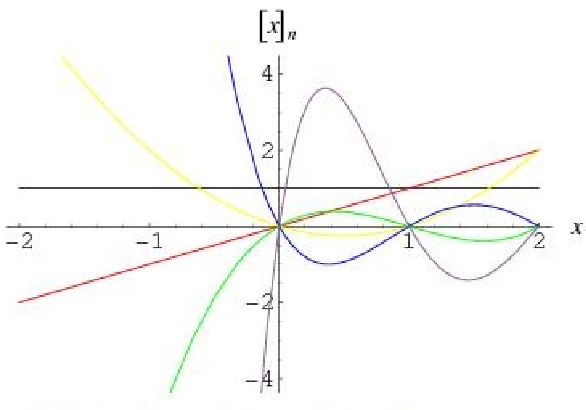

Abbildung 4.6: Die verschiedenen Graphen der fallenden Fakultätsfunktion [56]

- **Die steigende Fakultät**

Definition:
Die *steigende Fakultät* $\langle x \rangle_n$ ist $\forall x \in \mathbb{R}$ definiert als:
$$\langle x \rangle_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

Laut Kapitel 1, Satz 1.10 auf Seite 29 ist die steigende Fakultät nichts anderes als eine Kombination mit Wiederholung, also gilt:

$$\begin{aligned}\langle x\rangle_n &= x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)\\ &= \prod_{i=1}^{n-1}(x+i)\\ &= n!\binom{x+n-1}{n}\\ &= \frac{(x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)\cdot x}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\\ &= C_x^{(n)}\end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}n=0 &: \langle x\rangle_0 = 1\\ n=1 &: \langle x\rangle_1 = x\\ n=2 &: \langle x\rangle_2 = x(x+1) = x^2+x\\ n=3 &: \langle x\rangle_3 = x(x+1)(x+2) = x^3+3x^2+2x\\ n=4 &: \langle x\rangle_4 = x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4+6x^3+11x^2+6x\\ &\vdots\end{aligned}$$

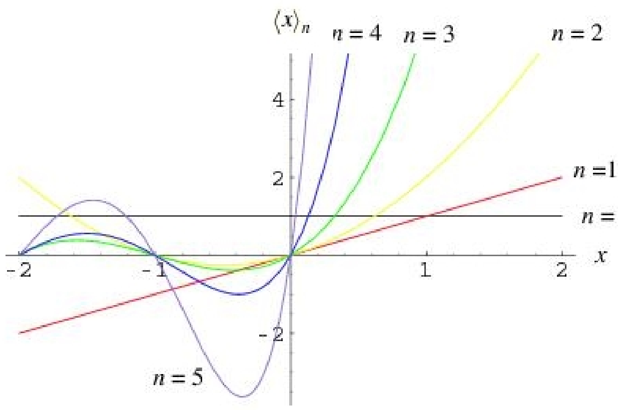

Abbildung 4.7: Die verschiedenen Graphen der steigenden Fakultätsfunktion [57]

In den Beispielen sieht man sehr gut, dass die steigende und die fallende Fakultät sich nur um ein Vorzeichen unterscheiden, demnach ergibt sich zwischen dieses beiden Zahlen der folgende Zusammenhang:

$$[x]_n = (-1)^n\langle -x\rangle_n \qquad [56],[57]$$

Die Stirling-Zahlen zweiter Art treten in der Kombinatorik häufiger auf als die erster Art, also werde ich mich zuerst diesen widmen.

4.4 Die Stirling-Zahlen zweiter Art

4.4.1 Definition

Definition:
Die Stirling-Zahl zweiter Art $S(n,k)$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, eine n-elementige Menge in k nichtleere, disjunkte Teilmengen aufzuteilen.
$\Leftrightarrow$ $S(n,k)$ ist die Anzahl der k-Partitionen einer n-elementigen Menge.

Weitere gängige Bezeichnungen für die Stirling-Zahlen zweiter Art $S(n,k)$ sind unter anderem: $S_2(n,k)$ und $\left\{ {n \atop k} \right\}$ [67]

4.4.2 Kombinatorische Bedeutung

Beispiel: Sei $M = \{1,2,3,4\}$. Die Partitionen von [4] mit genau 2 Klassen sind:
$\{\{12\}\{34\}\}$ $\{\{13\}\{24\}\}$ $\{\{14\}\{23\}\}$ $\{\{123\}\{4\}\}$ $\{\{124\}\{3\}\}$
$\{\{134\}\{2\}\}$ $\{\{1\}\{234\}\}$
$\Rightarrow S(4,2) = 7$, denn es gibt genau 7 Partitionen von [4] mit 2 Klassen.

In Kapitel 1, Seite 24 wurde gezeigt, dass die Anzahl injektiver Abbildungen zwischen zwei endlichen Mengen für $n < k$ gleich $\frac{k!}{(k-n)!}$ ist.
Seien nun N und K endliche Mengen. Wie viele verschiedene surjektive Abbildungen von N nach K gibt es?

Sei $n := |N|, k := |K|$.

- Für $n < k$ gibt es keine surjektive Abbildung $f : N \longrightarrow K$. Die Anzahl beträgt also 0.
- Sei nun $n \geq k$. N wird in Klassen eingeteilt. Die gemeinsame Eigenschaft von diesen Klassenelementen ist, dass sie auf das gleiche Element in K abbilden. Diese Einteilung entspricht wegen der Forderung nach Surjektivität eben genau einer Partitionierung von N in genau k Klassen. Demnach gibt es $S(n,k)$ mögliche Partitionierungen hierfür.

  Angenommen eine davon sei beliebig, aber fest gewählt.
  Jede dieser k Klassen wird auf je eines dieser k Elemente aus der Menge K abgebildet. Da man hierbei unterscheiden muss, welche Klasse auf welches Element abbildet, weil es für verschiedene Abbildungen steht, müssen alle möglichen $k!$ Kombinationen als verschiedene Abbildungen

gezählt werden. Somit ergibt sich, dass es genau $k! \cdot S(n,k)$ surjektive Abbildungen von N nach K gibt. [58]

Folglich lassen sich die Stirling-Zahlen zweiter Art auch wie folgt interpretieren: $S(n,k)$ gib die Anzahl der Möglichkeiten an, n verschiedene Bälle auf k nicht unterscheidbare Fächer aufzuteilen, und zwar so, dass mindestens ein Ball in jedem dieser Fächer liegt.
Sind diese Fächer allerdings unterscheidbar, so gibt es nach der oben gezeigten Anzahl surjektiver Abbildungen genau $k! \cdot S(n,k)$ Möglichkeiten.

4.4.3 Rekursionsformel

Satz 4.5: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$$

Beweis:

Sei $|A| = n$ und $a \in A$ fest.

1.Fall: Die Restmenge $A \setminus \{a\}$ besteht aus $(k-1)$-Partitionen. Durch Hinzunahme der Menge $\{a\}$ kann daraus eine k-Partition gemacht werden. Die Anzahl beträgt $S(n-1,k-1)$.

2.Fall: Aus jeder der k-Partitionen von $A \setminus \{a\}$ kann man durch Hinzufügen von a in einer der Teilmengen eine k-Partition von A erzeugen. Da sich a in jede von den k Teilmengen einfügen lässt, ergeben sich in diesem Fall $k \cdot S(n-1,k)$ Partitionen.

Die Gesamtanzahl erhält man aus der Summe der beiden Fälle. [67] □

4.4.4 Eigenschaften

Satz 4.6: Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Dann gilt: $S(n,0) = 0$

Beweis:

Sei $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

Der Satz ist trivial, da es nicht möglich ist, eine n-elementige Menge in leere Teilmengen aufzuteilen. $\Rightarrow S(n,0) = 0$ [67] □

Satz 4.7: Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Dann gilt: $S(n,1) = 1$

<u>Beweis:</u>

Sei $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

Es gibt nur eine Möglichkeit alle n Elemente in genau eine Teilmenge aufzuteilen, nämlich die Menge selbst. $\Rightarrow S(n,1) = n$ [67] $\square$

Satz 4.8: Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Dann gilt: $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$

<u>Beweis:</u>

Sei $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

1.Fall: Angenommen, a_n selbst sei Teil einer Partition: $\{\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}\{a_n\}\}$.
Die Menge $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$ besteht aus 2^{n-1} Teilmengen, wovon eine die leere Menge ist. Daher hat sie $2^{n-1} - 1$ nichtleere Teilmengen. Die Partition von S erhält man, indem man eine 2-Partition jeder Teilmenge A mit der Differenz $S - A$ bildet.

2.Fall: Angenommen, a_n sei in einer Teilmenge mit mindestens einem anderem Element enthalten. Dann entstehen keine neuen Partitionen von S.

Daraus folgt, dass die Anzahl der 2-Partitionen der Menge S gleich $2^{n-1} - 1$ ist, also $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$ [67] $\square$

Satz 4.9: Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Dann gilt: $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$

<u>Beweis:</u>

Sei $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

Um eine $(n-1)$-Partition von S zu erlangen, müssen eine Teilmenge bestehend aus zwei Elementen und $(n-2)$ Teilmengen bestehend aus jeweils einem Element gebildet werden: $\{\{a_1\}, \{a_2\}, \cdots, \{a_i a_j\}, \cdots, \{a_n\}\}$. Jede 2-elementige Teilmenge von S bestimmt eine solche Partition und umgekehrt. Also stimmt die Anzahl solcher Partitionen mit der Anzahl der 2-elementigen Teilmengen von S überein, nämlich $\binom{n}{2} \Rightarrow S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ [67] $\square$

Satz 4.10: Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Dann gilt: $S(n,n) = 1$

<u>Beweis:</u>

Sei $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

Es gibt nur eine Möglichkeit eine n-elementige Menge in genau n Teilmengen aufzuteilen, also folgt: $\Rightarrow S(n,1) = n$ [67] $\square$

4.4.5 Polynom-Identität

Satz 4.11: Sei $n \geq 0$. Dann gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k \Leftrightarrow x^n = \sum_{k=0}^{n} k!\, S(n,k)\binom{x}{k}$$

Beweis:

Für den Beweis die Gültigkeit der Pascal'schen Identität für beliebige reelle Zahlen.
Es muss also zuerst gezeigt werden, dass $\binom{x}{k-1} + \binom{x}{k} = \binom{x+1}{k}$ für alle $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$:

Durch Anwendung der Absorptionsregel (Satz 2.17 auf Seite 52) ergibt sich:

$$(x+1)\binom{x}{k-1} + (x+1)\binom{x}{k} = k\binom{x+1}{k} + (x+1-k)\binom{x+1}{k} = (x+1)\binom{x+1}{k}$$

Division durch $(x+1)$ liefert das gewünschte Resultat.

Nun kann der Satz mittels vollständiger Induktion bewiesen werden:

1. Da $S(0,0) = 1$ gilt: $[x]_0 = 1 = 1 \cdot 1 = x^0$

   Für $n = 1$ folgt: $\sum_{k=0}^{1} S(1,k)[x]_k = S(1,0)[x]_0 + S(1,1)[x]_1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x = x = x^1$

2. Induktionsannahme: Der Satz gilt für alle Exponenten $\leq n$, d.h.

   $x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k = \sum_{k=0}^{n} k!\, S(n,k)\binom{x}{k} \geq 0.$

   Dann bleibt zu zeigen, dass gilt: $x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k!\, S(n+1,k)\binom{x}{k}$:

   Durch die Pascal'sche Identität $\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}$ (Kapitel 2, Seite 43) folgt:

   $x\binom{x}{k} = (k+1)\binom{x}{k+1} + k\binom{x}{k}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= x \cdot x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} x\, k!\, S(n,k)\binom{x}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)\binom{x}{k+1} + k\binom{x}{k}\right] k!\, S(n,k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)!\binom{x}{k+1} S(n,k) + \sum_{k=0}^{n} k \cdot k!\, \binom{x}{k} S(n,k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k!\, \binom{x}{k} S(n,k-1) + \sum_{k=0}^{n+1} k \cdot k!\, \binom{x}{k} S(n,k) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k!\, \binom{x}{k} [S(n,k-1) + k\, S(n,k)] \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{x}{k} k!\, S(n+1,k)
\end{aligned}$$

[67] □

4.4.6 Explizite Formel

Satz 4.12:
Für $n > 0$ und $k \geq 0$ ist eine explizite Formel für die Stirling Zahlen zweiter Art gegeben durch: $\qquad S(n,k) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!}$

<u>Beweis:</u>
Sei $B_k(x) = \sum_{n \geq 0} S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)}$, $k \geq 0$ eine Erzeugendenfunktion der Stirling Zahlen zweiter Art. (Beweis siehe [58, Seite 12 ff])

Zuerst betrachtet man die Partialbruchzerlegung der Form:

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{(1-jx)}$$

Um die α's zu berechnen, sei r beliebig, aber fest und $1 \leq r \leq k$. Multiplikation beider Seiten mit $(1-rx)$ und ersetzten von $x = \frac{1}{r}$ liefert für $1 \leq r \leq k$:

$$\alpha_r = \frac{1}{(1-\frac{1}{r})(1-\frac{2}{r})\cdots(1-\frac{(r-1)}{r})(1-\frac{(r+1)}{r})\cdots(1-\frac{k}{r})} = (-1)^{k-r}\frac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}$$

Damit folgt aus der obigen Erzeugendenfunktion für $n \geq k$:

$$\begin{aligned}
S(n,k) &= [x^n]\left\{\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)}\right\} && \text{[Erzeugendenfunktion]}\\
&= [x^{n-k}]\left\{\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-kx)}\right\}\\
&= [x^{n-k}]\sum_{r=1}^{k}\frac{\alpha_r}{(1-rx)} \qquad (k \geq 1) && \text{[Partialbruchzerlegung]}\\
&= \sum_{r=1}^{k}\alpha_r[x^{n-k}]\frac{1}{1-rx}\\
&= \sum_{r=1}^{k}\alpha_r r^{n-k}\\
&= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\frac{r^{k-1}}{(r-1)!(k-r)!}r^{n-k}\\
&= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\frac{r^n}{r!(k-r)!} && \text{[58]} \ \square
\end{aligned}$$

4.4.7 Beziehung zwischen den Bell'schen Zahlen und den Stirling'schen Zahlen

Da die auf Seite 123 beschriebenen Bell'schen Zahlen B_n die Anzahl der möglichen Partitionen einer n-elementigen Menge beschreiben, gilt folgender Zusammenhang zu den Stirling-Zahlen zweiter Art:

Satz 4.13: Sei $S(n,k)$ die Stirling Zahl zweiter Art und B_n die Bell'sche Zahl, dann gilt:
$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

Beweis:

Der Beweis ist anhand kombinatorischer Überlegungen trivial.

4.4.8 Das Stirling-Dreieck zweiter Art

Anhand der Rekursionsformel auf Seite 127 lassen sich - ähnlich wie die Binomialkoeffizienten - die Stirling-Zahlen zweiter Art in Form eines Dreiecks anordnen (wobei der Spalten,- und Zeilenindex bei 1 beginnt!):

```
                  1
                1   1
              1   3   1
            1   7   6   1
          1  15  25  10   1
        1  31  90  65  15   1
      1  63  301  350  140  21   1
    1  127  966  1701  1050  266  28   1
  1  255  3025  7770  6951  2646  462  36   1
1  ...  ...  ...  ...  ...  ...  ...  ...  1
```

Abbildung 4.8: Das Stirling-Dreieck der zweiten Art [59]

Durch Betrachtung der Abbildung fällt auf:

Satz 4.14: Jede Zeile beginnt und endet mit einer Eins.

Satz 4.15:
Jeder Eintrag $S(n,k)$ wird erhalten, indem man das Element links darüber $S(n-1,k)$ mit der Spaltenzahl k multipliziert und dann den Eintrag zur rechten $S(n-1,k-1)$ addiert.

Beispielsweise ist $90 = 15 + 3 \cdot 25$.

Satz 4.16:
Da $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$ ist (Satz 4.8 auf Seite 128), besteht die zweite Spalte aus Mersenne-Zahlen.

Satz 4.17:
Da $S(n,n-1) = \binom{n}{2}$ ist (Satz 4.9 auf Seite 128), befinden sich in der zweiten süd-östlichen Diagonale die Dreieckszahlen 1,3,6,10,15,21,28,... .

4.5 Die Stirling-Zahlen erster Art

4.5.1 Definition

Definition:
Ein *Zyklus* von n geordneten Elementen ist eine Familie der n (aus den insgesamt $n!$ möglichen) Permutationen, die entstehen, wenn das erste Element entfernt und hinten angefügt wird. Hierbei ist die Reihenfolge der Elemente zu beachten.

Beispiel: Es gibt genau 2 Möglichkeiten, 3 Elemente in einen Zyklus einzuteilen, nämlich: Zyklus 1: (123)=(231)=(312)
Zyklus 2: (132)=(321)=(213)
Damit sind die zwei möglichen Zyklen mit je 3 Elementen, also der *Länge* 3, aus der Menge [3] beschrieben. [58]

Definition:
Die Stirling-Zahl erster Art $s(n,k)$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, n Elemente in genau k Zyklen einzuteilen. $\Leftrightarrow$ $s(n,k)$ bezeichnet die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge, die genau k Zyklen besitzen.

Weitere gängige Bezeichnungen für die Stirling-Zahlen erster Art $s(n,k)$ sind unter anderem: $S_1(n,k)$ und $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ [67]

4.5.2 Kombinatorische Bedeutung

Beispiel: Sei $M = \{1,2,3,4\}$. Um diese 4 Elemente in genau 1 Zyklus einzuteilen, gibt es 6 Möglichkeiten. Dabei ist die Reihenfolge, in der die Zyklen genannt werden, nicht relevant: (1234)=(2341)=(3412)=(4123)
(1243)=(2431)=(4312)=(3124)
(1324)=(3241)=(2413)=(4132)
(1342)=(3421)=(4213)=(2134)
(1423)=(4231)=(2314)=(3142)
(1432)=(4321)=(3214)=(2143)

$\Rightarrow s(4,1) = 6$

Dagegen ist $s(4,2) = 11$, denn für 2 Zyklen dieser 4 Elemente gibt es 11 Möglichkeiten: (1)(234)=(1)(342)=(1)(423)
(1)(243)=(1)(432)=(1)(324)
(2)(134)=(2)(341)=(2)(413)

$$\begin{aligned}&(2)(143)=(2)(431)=(2)(314)\\&(3)(124)=(3)(241)=(3)(412)\\&(3)(142)=(3)(421)=(3)(214)\\&(4)(123)=(4)(231)=(4)(312)\\&(4)(132)=(4)(321)=(4)(213)\\&(12)(34)=(12)(43)=(21)(43)=(21)(34)\\&(13)(24)=(13)(42)=(31)(42)=(31)(24)\\&(14)(23)=(14)(32)=(41)(32)=(41)(23)\end{aligned}$$ [58]

Anhand der Stirling-Zahlen erster Art lässt sich die fallende Fakultät wie folgt darstellen:

Definition:
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Stirling-Zahlen erster Art die Koeffizienten $s(n,k)$ in der Darstellung: $[x]_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k$

Setzt man $x = n$, so ergibt sich: $[x]_n = [n]_n = n!$.
Daher kann die Fakultät $n!$ auch anhand der Stirling-Zahlen erster Art dargestellt werden: $n! = s(n,n)n^n - s(n,1)n^{n-1} + \cdots + (-1)^n s(n,0) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)$
Da $[x]_n = (-1)^n \langle -x \rangle_n$ (siehe Seite 125), lässt sich diese Definition auch im Sinne der steigenden Fakultät formulieren:

Definition:
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Stirling-Zahlen erster Art die Koeffizienten $s(n,k)$ in der Darstellung: $\langle x \rangle_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k$

$\Rightarrow$ Die Stirling-Zahlen $s(n,k)$ sind der Absolutbetrag der Koeffizienten von x^k in der Polynomdarstellung! [67]

4.5.3 Rekursionsformel

Satz 4.18: Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ und $1 < k < n$ gilt:
$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k)$$

Beweis:
Zuerst sei bemerkt, dass $[x]_n = [x-(n-1)][x]_{n-1}$ ist (siehe Seite 124).
Aus $[x]_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k$ folgt, dass gilt:

$$[x]_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} s(n-1,k) x^k$$

Nun werden beide Seiten mit $(x-n+1)$ multipliziert:

$$\begin{aligned}
[x]_{n-1}(x-n+1) &= (x-n+1)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} s(n-1,k) x^k \\
\Leftrightarrow [x]_n &= [x-(n-1)]\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} s(n-1,k) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} s(n-1,k) x^{k+1} - (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} s(n-1,k) x^k
\end{aligned}$$

Das heißt, es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} s(n-1,k) x^{k+1} - (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} s(n-1,k) x^k$$

Koeffizientenvergleich der x^k auf beiden Seiten der Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}
(-1)^{n-k} s(n,k) &= (-1)^{n-k-2} s(n-1,k-1) - (n-1)(-1)^{n-k-1} s(n-1,k) \\
\Leftrightarrow s(n,k) &= s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k)
\end{aligned}$$

[67] □

4.5.4 Eigenschaften

Satz 4.19: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: $s(n,0) = 0$

Beweis:

Da das Absolutglied im Produkt $[x]_n$ gleich null ist, folgt dass $s(n,0) = 0$ ist. [67] □

Satz 4.20: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: $s(n,n) = 1$

Beweis:

Der Koeffizient von x^n im Produkt $[x]_n$ ist $1 \Rightarrow s(n,n) = 1$ [67] □

Satz 4.21: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: $s(n,1) = (n-1)!$

Beweis:

Der Koeffizient von x im Produkt $[x]_n$ ist das Absolutglied im Produkt $(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)]$, nämlich $(-1)(-2)\cdots[-(n-1)] = (-1)^{n-1}(n-1)!$.
Daher ist $s(n,1) = |(-1)^{n-1}(n-1)!| = (n-1)!$ [67] □

Satz 4.22: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: $s(n,n-1) = \binom{n}{2}$

Beweis:

Der Koeffizient von x^{n-1} im Produkt $[x]_n$ gleicht dem Koeffizienten von x^{n-2} in $(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)]$. Man erhält ihn, indem man das Absolutglied in den Faktoren $(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)]$ auswählt und gleichsetzt:

$(-1)+(-2)+\cdots+[-(n-1)] = -\dfrac{n(n-1)}{2} = -\dbinom{n}{2} \Rightarrow s(n,n-1) = \dbinom{n}{2}$ [67] □

4.5.5 Beziehung zwischen den Stirling'schen Zahlen und den Harmonischen Zahlen

Definition:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ nennt man H_n eine *Harmonische Zahl*: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Rekursive Definition: $H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$, wobei $H_0 = 0$ und $n \geq 1$

Satz 4.23: Sei $n \geq 2$. Dann gilt: $s(n,2) = (n-1)!H_{n-1}$

Beweis:

Aus der Rekursionsformel folgt: $s(n,2) = s(n-1,1) + (n-1)s(n-1,2)$

$$= (n-2)! + (n-1)s(n-1,2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{s(n,2)}{(n-1)!} = \frac{s(n-1,2)}{(n-2)!} + \frac{1}{n-1}$$

Da $s(2,2) = 1$ ist, folgt dass $\frac{s(n,2)}{(n-1)!}$ und H_{n-1} die selbe Rekursion erfüllen.

$\Rightarrow s(n,2) = (n-1)!H_{n-1}$ [67] □

4.5.6 Das Stirling-Dreieck erster Art

Auch die Stirling-Zahlen erster Art lassen sich durch rekursive Berechnung in Dreiecksform anordnen, wobei in der folgenden Abbildung die Absolutbeträge der $s(n, k)$ dargestellt sind:

```
                                1
                            1       1
                        2       3       1
                    6      11       6       1
               24      50      35      10       1
           120     274     225      85      15       1
       720    1764    1624     735     175      21       1
  5040   13068   13132   6769    1960     322      28       1
40320  109584  118124  67284  22449   4536     546      36       1
...    ...     ...     ...     ...     ...     ...     ...     ...     1
```

Abbildung 4.9: Das Stirling-Dreieck der ersten Art [59]

Durch Betrachtung der Abbildung fällt auf:

Satz 4.24: Jede Zeile beginnt und endet mit einer Eins.

Satz 4.25: Die Zeile n beginnt mit dem Eintrag $(n-1)!$.

Satz 4.26:
Jedes Element $s(n, k)$ erhält man, indem der Eintrag rechts darüber mit $(n-1)$ multipliziert wird und zum Element links darüber addiert wird.

Beispiel: $225 = 5 \cdot 35 + 50$

Satz 4.27:
Aus $s(n, n-1) = \binom{n}{2}$ (siehe Seite 135) folgt, dass auch hier in der zweiten süd-östlichen Diagonale die Dreieckszahlen stehen.

4.6 Der Zusammenhang der Stirling-Zahlen

Um den Zusammenhang der Stirling-Zahlen erster und zweiter Art zu verdeutlichen, werden zwei $n \times n$-Matrizen konstruiert:

Die Matrix A enthält als Einträge die Stirling Zahlen-zweiter Art $S(i,j)$, die Matrix B die Stirling-Zahlen erster Art $s(i,j)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Auf den ersten Blick sieht man sofort, dass beide Matrizen untere Dreiecksmatrizen sind, denn im Fall $i < j$ gilt $S(i,j) = s(i,j) = 0$.

Die Polynome über $\mathbb{C}$ vom Grad $\leq n$ bilden einen Vektorraum $\mathbb{C}_n[x]$.
Die Potenzen $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ und die fallenden Fakultät $\{1, x, [x]_2, \ldots, [x]_n\}$ bilden jeweils eine Basis dieser Vektorräume. Der Zusammenhang zu den Stirling-Zahlen ergibt sich dadurch, dass sie jeweils die Einträge der Basiswechselmatrizen bilden (bis auf die Vorzeichen), da gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k \quad \text{und} \quad [x]_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k$$

Korollar:
Für die Stirling Matrizen A und B gilt: $A = B^{-1}$

Da die beiden Matrizen jeweils den umgekehrten Basiswechsel beschreiben, sind also A und B zueinander invers, d.h. das Produkt dieser beiden Matrizen ergibt die Identitätsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -6 & 11 & -6 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = id$$

Daher gilt der folgende Zusammenhang [58]:

Satz 4.28: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt:

$$\sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} S(n,k) s(k,i) = \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} s(n,k) S(k,i) = \delta_{n,k}$$

wobei $\delta_{n,k}$ das Kronecker-Symbol bezeichnet:

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus den Eigenschaften beider Zahlen ergeben sich weitere Zusammenhänge zwischen ihnen:

- Betrachtet man die Rekursionsformeln (Satz 4.5 und Satz 4.18) der beiden Stirling-Zahlen, dann sieht man, dass sie sich nur um den Faktor k bzw. $(n-1)$ unterscheiden. Da $n > k$ ist, gilt: $S(n,k) \leq s(n,k)$

  Kombinatorisch ist dies leicht zu begründen, denn die Anzahl der Zyklen muss mindestens so groß sein wie die Anzahl der Teilmengen einer Menge, da jede Partition in nichtleere Teilmengen zu mindestens einem Zyklus führt.

- $S(n,n) = s(n,n) = 1$
- $S(n,n-1) = s(n,n-1) = \binom{n}{2}$ [72]

- Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen den Stirling-Zahlen und den Fibonacci-Zahlen:

Satz 4.29: „Stirling trifft auf Fibonacci"

$$\text{Es gilt: } F_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} S(n,k) s(k,j) F_j$$

Dabei bezeichnet F_n die n-te Fibonacci-Zahl, die explizit gegeben ist durch $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, wobei $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ist.

<u>Beweis:</u>

Aus $x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k$ und $[x]_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k$ folgt:

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} s(k,j) x^j \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} S(n,k) s(k,j) x^j \end{aligned}$$

Ersetzten von x^n ergibt: $\alpha^n - \beta^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} S(n,k) s(k,j) (\alpha^j - \beta^j)$

Daraus folgt wie gewünscht: $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} S(n,k) s(k,j) F_j$

[67] □

Webverzeichnis

[1] zuletzt abgerufen am 02.02.2013. URL: http://www.archaeowiki.org/Image:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg.

[2] zuletzt abgerufen am 04.02.2013. URL: http://www.albrecht-duerer-apokalypse.de/albrecht-duerer-melencolia-1.php.

[3] zuletzt abgerufen am 16.02.2013. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_combinatorics.

[4] zuletzt abgerufen am 02.02.2013. URL: http://www.ichingoracle.com/de/institute.php.

[5] zuletzt abgerufen am 03.02.2013. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorics.

[6] zuletzt abgerufen am 03.02.2013. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Schr%C3%B6der_number.

[7] zuletzt abgerufen am 02.02.2013. URL: http://www.britannica.com/EBchecked/topic/127341/combinatorics.

[8] zuletzt abgerufen am 14.05.2013. URL: http://archive.org/details/wahrscheinlichke03bernuoft.

[9] zuletzt abgerufen am 16.02.2013. URL: http://www.preussen-chronik.de/bild_jsp/key=bild_kathe2.html.

[10] zuletzt abgerufen am 12.03.2013. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/K%C3%B6nigsberger_Br%C3%BCckenproblem.

[11] zuletzt abgerufen am 12.03.2013. URL: http://www.library.ethz.ch/exhibit/mathematik/lat_quadrate.html.

[12] zuletzt abgerufen am 20.03.2013. URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fisher-stainedglass-gonville-caius.jpg.

[13] zuletzt abgerufen am 14.04.2013. URL: www.eduhi.at/dl/Permutation_und_Kombination.ppt.

[14] zuletzt abgerufen am 24.04.2013. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Fakult%C3%A4t_%28Mathematik%29.

[15] zuletzt abgerufen am 05.04.2013. URL: http://www.mathe-seiten.de/fakultaet.pdf.

[16] zuletzt abgerufen am 04.05.2013. URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Inclusion-exclusion.svg.

[17] zuletzt abgerufen am 14.04.2013. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Fakult%C3%A4tsprimzahl.

[18] zuletzt abgerufen am 18.04.2013. URL: http://pstricks.blogspot.co.at/2012/03/deux-modeles-durne-avec-pstricks-par.html.

[19] zuletzt abgerufen am 19.04.2013. URL: http://www3.math.tu-berlin.de/HM/WT_Lehrer/Skripte/skript.pdf.

[20] zuletzt abgerufen am 18.05.2013. URL: http://www.inf.uni-konstanz.de/algo/lehre/ss09/mg/mg.pdf.

[21] zuletzt abgerufen am 25.01.2012. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Pascal.

[22] zuletzt abgerufen am 07.01.2012. URL: http://www.math.uni-hamburg.de/spag/ign/exk/pdf/pascal.pdf.

[23] zuletzt abgerufen am 27.12.2011. URL: http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/pascal.htm.

[24] zuletzt abgerufen am 06.01.2012. URL: http://www.joerg-rudolf.lehrer.belwue.de/kurse/gkmathe_00/pascal.htm.

[25] zuletzt abgerufen am 20.01.2012. URL: www.mathematik.uni-kassel.de/~specovi/.../1001-Koinzidenz.doc.

[26] zuletzt abgerufen am 20.02.2013. URL: http://mangkatnekat.wordpress.com/2010/07/14/puisi-tartaglia.

[27] zuletzt abgerufen am 22.02.2013. URL: http://www.math.ens.fr/culturemath/video/html/Djebbar/icono.htm.

[28] zuletzt abgerufen am 23.01.2012. URL: http://www.math.uni-bielefeld.de/~ringel/lectures/eleganz/weiteres.htm.

[29] zuletzt abgerufen am 23.02.2013. URL: http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/schuelerzirkel/material-lehrer/Pascalsches-Dreieck.pdf.

[30] zuletzt abgerufen am 08.01.2012. URL: http://dokumente-online.com/das-pascalsche-zahlendreieck.html.

[31] zuletzt abgerufen am 03.03.2013. URL: http://www.mathematik.de/ger/fragenantworten/erstehilfe/binomischeformeln/binomialformel.html.

[32] zuletzt besucht am 28.06.2013. URL: http://www.phzh.ch/lehre/christian.rohrbach/vollk_zahlen/dreieckzahlen.html.

[33] zuletzt abgerufen am 02.05.2013. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number.

[34] zuletzt besucht am 14.03.2013. URL: http://mars.wiwi.hu-berlin.de/mediawiki/mmstat_de/index.php/Kombinatorik_-_STAT-Eigenschaften_des_Eulerschen_Symbols.

[35] zuletzt abgerufen am 07.05.2013. URL: http://mathforum.org/mathimages/index.php/Pascal%27s_Triangle2.

[36] zuletzt abgerufen am 31.05.2013. URL: http://oldweb.cecm.sfu.ca/news/clippings/96_01_0a/fig1.html.

[37] zuletzt abgerufen am 16.05.2013; eigens Ã¼berarbeitet. URL: http://mathworld.wolfram.com/StarofDavidTheorem.html.

[38] zuletzt besucht am 14.07.2013. URL: http://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CDgQFjAA&url=http%3A%2F%2Fdiendantoanhoc.net%2Fforum%2Findex.php%3Fapp%3Dcore%26module%3Dattach%26section%3Dattach%26attach_id%3D15176&ei=T0jsUbn2DYna4QTTl4HgAw&usg=AFQjCNEQSNtj3YKvLhMjLHm1eM56kOQcvA&sig2=ftPfcjDjV37kBNQVnkGvGg&bvm=bv.49478099,d.bGE.

[39] zuletzt abgerufen am 04.06.2013. URL: http://www.zeuscat.com/andrew/chaos/sierpinski.html.

[40] zuletzt abgerufen am 05.06.2013. URL: www.fraktalwelt.de/extra/dfw.pdf.

[41] zuletzt abgerufen am 04.06.2013. URL: http://homepages-fb.thm.de/boergens/marken/briefmarke_04_01.htm.

[42] zuletzt abgerufen am 05.04.2013. URL: http://steinbart-gymnasium.de/archiv/page44/page92/page92.html.

[43] zuletzt abgerufen am 08.06.2013. URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galton_box_1.jpg.

[44] zuletzt abgerufen am 08.06.2013. URL: http://www.ruhrbarone.de/die-multiplikation-die-gaussche-summenfaktor-regel-und-das-restrisiko/.

[45] zuletzt abgerufen am 08.06.2013. URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galton_box_2.jpg.

[46] zuletzt abgerufen am 09.06.2013. URL: http://www.yatego.com/q,der,turm,von,hanoi.

[47] zuletzt abgerufen am 09.06.2013. URL: http://www.rene-grothmann.de/java/kurs/Unterprogramme.html.

[48] zuletzt abgerufen am 09.04.2013. URL: http://132.187.98.10:8080/encyclopedia/de/stirlingJames.pdf.

[49] zuletzt abgerufen am 11.03.2013. URL: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stirling.html.

[50] zuletzt abgerufen am 15.03.2013. URL: http://www.amazon.com/Lineae-Tertii-Ordinis-Neutonianae-Edition/dp/1166079023.

[51] zuletzt abgerufen am 16.04.2013. URL: http://books.google.at/books/about/Methodus_differentialis.html?id=71ZHAAAAYAAJ&redir_esc=y.

[52] zuletzt abgerufen am 14.03.2013. URL: http://www.encyclopedia.com/topic/James_Stirling.aspx.

[53] zuletzt abgerufen am 09.03.2013. URL: http://www.bookrags.com/biography/james-stirling-wom/.

[54] zuletzt abgerufen am 09.03.2013. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/James_Stirling_%28mathematician%29.

[55] zuletzt abgerufen am 03.05.2013. URL: www.mathe-seiten.de/kugel.pdf.

[56] zuletzt besucht am 22.06.2013. URL: http://mathworld.wolfram.com/FallingFactorial.html.

[57] zuletzt besucht am 22.06.2013. URL: http://mathworld.wolfram.com/RisingFactorial.html.

[58] zuletzt abgerufen am 14.04.2013. URL: http://www2.math.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathematik/AG-Hilgert/files/Winter_2004_2005/Kurras.pdf.

[59] zuletzt besucht am 23.06.2013. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Stirling-Zahl#Stirling-Zahlen_zweiter_Art.

Literaturverzeichnis

[60] Manfred Brill. *Mathematik für Informatiker: Einführung an praktischen Beispielen aus der Welt der Computer*. Zweite Auflage. ISBN: 3-446-22802-0. Carl Hanser Verlag München/Wien, 2005.

[61] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Zweite Auflage. ISBN: 0-470-84861-8. West Sussex PO19 8SQ, England: John Wiley Sons Ltd, The Atrium, 2003.

[62] Jonathan L. Gross. *Combinatorial Methods With Computer Applications*. ISBN: 978-1-58488-743-0. 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300: Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 2008.

[63] John H. Conway; Richard K. Guy. *The book of numbers*. ISBN: 0-387-97993-X. 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010: Springer-Verlag New York, Inc., 1996.

[64] Winfried Hochstättler. *Algorithmische Mathematik*. ISBN: 978-3-642-05421-1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[65] Gert Kneis. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. Zweite Auflage. ISBN 3-486-57665-8. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2005.

[66] Thomas Koshy. *Catalan Numbers with Applications*. ISBN: 978-0-19-533454-8. 198 Madison Avenue, New York, NY 10016: Oxford University Press, Inc., 2009.

[67] Thomas Koshy. *Triangular Arrays with Applications*. ISBN: 978-0-19-974294-3. 198 Madison Avenue, New York, NY 10016: Oxford University Press, Inc., 2011.

[68] Apl. Prof. Dr. Huberta Lausch. *Fibonacci und die Folge(n)*. ISBN: 978-3-486-58910-8. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2009.

[69] Hans Loeffel. *Blaise Pascal*. ISBN: 3-7643-1840-6. Basel ; Boston ; Stuttgart : Birkhäuser, 1987.

[70] Benoit B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. ISBN: 978-0-7167-1186-5. H. B. Fenn und Company Ltd., 1977.

[71] Hans Kaiser; Wilfried Nöbauer. *Geschichte der Mathematik*. Zweite Auflage. ISBN: 3-209-02212-7. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1998.

[72] Ronald L. Graham; Donald E. Knuth; Oren Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Sience*. ISBN: 0-201-14236-8. Addison-Wesley Publishing Company, Mai 1989.

[73] Bernd Kreussler; Gerhard Pfister. *Mathematik f*$\tilde{A}\frac{1}{4}$*r Informatiker: Algebra, Analysis, diskrete Strukturen*. ISBN: 978-3-540-89106-2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

[74] Detlef Plachky. *Mathematische Grundbegriffe und Grundsätze der Stochastik*. ISBN: 3-540-42029-0. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2001.

[75] Walter Popp. *Wege des exakten Denkens*. ISBN: 3-431-02416-5. München: Franz Ehrenwirth Verlag GmbH & Co. KG, 1981.

[76] Thomas Rießinger. *Informatik für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Eine anschauliche Einführung in das Programmieren mit C und Java*. ISBN: 3-540-26243-1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[77] Jürgen Senger. *Induktive Statistik: Wahrscheinlichkeitstheorie, Schätz- und Testverfahren*. ISBN 978-3-486-58559-9. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2008.

[78] Angelika Steger. *Diskrete Strukturen, Band 1: Kombinatorik - Graphentheorie - Alegbra*. Erste Auflage. ISBN: 978-3-540-46660-4. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

[79] Peter Tittmann. *Einführung in die Kombinatorik*. Erste Auflage. Heidlberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 2000.

[80] Pascal's Arithmetical Triangle. *Pascal's Arithmetical Triangle*. Auflage: illustrated edition. ISBN: 0852642830. Hodder Arnold, Jan. 1987.