



D I P L O M A R B E I T

Dividendenoptimierung ohne Ruin im Cramér-Lundberg Modell

Ausgeführt am Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch
Markus Balaskovits
Matr.Nr.: 0325575
1150 Wien, Witzelsberggasse 17/3

Wien, am 27. November 2013

Danksagung

Ich möchte mich bei meinem Betreuer Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits bedanken, der mir die Möglichkeit gab diese Diplomarbeit zu verfassen und sie geduldig betreute.

Ich bedanke mich bei meinen Eltern, die mir immer eine große Unterstützung bei meinem Studium waren.

Zuletzt bedanke ich mich bei allen Freunden, Studienkollegen und Arbeitskollegen, die mir während meines Studiums helfend zu Seite gestanden haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Motivation	2
1.2	Überblick	2
2	Risikothorie	4
2.1	Individuelles Modell	4
2.2	Kollektives Modell	5
2.2.1	Modell	5
2.2.2	Die Momente von S	6
2.3	Klassischer Risikoprozess	7
2.3.1	Compound Poisson Distribution	7
2.3.2	Compound Poisson Prozess	7
2.3.3	Freie Reserve	8
3	Ruinthorie	10
3.1	Differentialgleichung für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x)$. . .	12
3.2	Abschätzen der Ruinwahrscheinlichkeit	16
3.2.1	Anpassungskoeffizient	16
3.2.2	Lundberg-Ungleichung	17
4	Optimale Dividendenstrategie	20
4.1	Dividenden im Cramér-Lundberg Modell	20
4.2	Barriere-Strategien	21
4.3	Integro-Differentialgleichung für $V(x,b)$	23
4.3.1	Allgemeine Lösung der Integro-Differential-Gleichung für $V(x,b)$	26
4.3.2	Exponentiell verteilte Schäden	27
5	Der Verlust im Zeitpunkt des Ruins	32
5.1	Integro-Differentialgleichung für $R(x,b)$	32
5.1.1	Exponentiell verteilte Schäden	35

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	1
6 Dickson-Waters Modifikation	38
6.1 Bestimmen der optimalen Barriere b°	39
6.1.1 Exponentiell verteilte Schäden	40
6.2 Vergleich der Barrieren	42
7 Kombinationen von Exp.-Verteilungen	46
7.1 Allgemeine Lösung der Integro-Differential- gleichung für $V(x,b)$	48
7.2 Allgemeine Lösung der Integro-Differential- gleichung für $R(x,b)$	49
7.3 Exponentiell verteilte Schäden	50
A Tabellen	54

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

In der klassischen Risikotheorie wird unter anderem die Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit, zur Bewertung eines Versicherungsportfolios herangezogen. Tritt kein Ruin ein, wächst der Überschuss des Versicherungsunternehmens unbeschränkt. In der Praxis ist dies jedoch weder sinnvoll, noch realistisch. Ein Versicherungsunternehmen hat die Möglichkeit einen gewissen Teil dieses Überschusses neu zu investieren um höhere Erträge zu erwirtschaften oder den Überschuss als Dividenden an ihre Aktionäre auszubezahlen. Da jedoch zu hohe Dividendenzahlungen einen früheren Ruin bedeuten könnten, muss sich ein Versicherungsunternehmen Gedanken über eine geeignete Dividenden-Strategie machen.

1.2 Überblick

Bevor man sich Gedanken machen kann, wie eine optimale Dividendenstrategie aussehen kann, benötigt man ein mathematisches Modell, welches den Überschuss eines Versicherungsunternehmens über einen längeren Zeitraum beschreibt. Die Definition dieses Modells und allgemeine Definitionen und Sätze werden im zweiten Kapitel 2 vorgestellt.

Kapitel 3 gibt eine kurze Einführung in die klassische Ruintheorie, im speziellen wird auf den klassischen Ruinprozess eingegangen, die Ruinwahrscheinlichkeit hergeleitet und gezeigt, wie man die Ruinwahrscheinlichkeit von oben beschränken kann.

Das Kapitel 4 behandelt das Problem der optimalen Dividendenstrategie, im speziellen betrachtet man Barriere-Strategien und die Bewertung des Überschussprozesses anhand der erwarteten diskontierten Dividendenzahlungen bis zum Eintritt des Ruins.

Bei der Auswahl von Barriere- Strategien tritt Ruin mit Sicherheit ein. Im Zeitpunkt des Ruins wird ein Teil des auftretenden Schadens nicht mehr durch den Überschussprozess gedeckt und das Versicherungsunternehmen kann den Verpflichtungen nicht mehr nachkommen. Um dies zu vermeiden, wird angenommen, dass Aktionäre die Verantwortung für einen möglichen Verlust tragen und damit die Zahlungsunfähigkeit des Versicherungsunternehmens abwenden. Dies führt zu einem neuen mathematischen Problem der Optimierung und wird im Kapitel 5 und 6 behandelt. Die Resultate stammen hauptsächlich aus dem Artikel "Maximizing Dividends without Bankruptcy" von Hans U.Gerber, Elias S.W.Shiu und Nathaniel Smith [6].

Im Kapitel 7 wird die Verteilung der Schäden durch eine Kombination von Exponentialverteilungen modelliert und gezeigt, dass die Resultate aus den vorherigen Kapiteln auch für diese allgemeine Annahme Gültigkeit haben.

Kapitel 2

Risikotheorie

Das Grundprinzip einer Versicherung besteht aus dem gemeinsamen Tragen von Risiken in einem Kollektiv (Pool, Portfolio) und dem Ausgleich durch günstige und ungünstige Einzelrisiken. Mathematisch gilt das Gesetz der großen Zahlen, welches besagt, dass bei steigender Anzahl von gleichartigen Ereignissen sich der tatsächliche Ausgang dem erwarteten Ausgang annähert. Zusätzlich nimmt die Streuung der Ausgänge um den Erwartungswert mit steigender Portfoliogröße nach dem Zentralen Grenzwertungssatz ab. Dieser risikomindernde Effekt wird als "Risikoausgleich im Kollektiv" bezeichnet.

Definition 2.1

- a) Eine nichtnegative Zufallsvariable R heißt Risiko.
- b) Bezeichne I eine Indexmenge, meist $I \subseteq \mathbb{N}$. Dann heißt eine Menge $\{R_i : i \in I\}$ von Risiken Portfolio.

Im folgenden Abschnitt werden zwei mögliche Zugänge dargestellt wie man eine Schadenssumme modellieren kann. Einerseits in der Betrachtung der Einzelrisiken und andererseits durch die Betrachtung der Risiken als Kollektiv abhängig von der Gesamtschadenshöhe und der Anzahl der Schäden.

2.1 Individuelles Modell

Im individuellen Modell lässt sich ein Einzelrisiko R_i als Schaden interpretieren, der durch die i -te Versicherungspolizze im betrachteten Zeitraum, z.B. ein Jahr, entstanden ist. Folglich ist bei einem Bestand von n Policen der Gesamtschaden eines Versicherungsunternehmens die Summe S der Einzelschäden R_1, \dots, R_n .

Definition 2.2 Seien R_i die Einzelschäden. So gilt für den Gesamtschaden

$$S := \sum_{i=1}^n R_i.$$

Die Einzelrisiken R_i werden dabei als unabhängig und identisch verteilt angenommen (homogenes Portfolio). Somit gilt für den Erwartungswert und die Varianz von S :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n R_i\right) = n\mathbb{E}[R_1] \\ \text{Var}[S] &= n \text{Var}[R_1]\end{aligned}$$

Von großem Interesse für ein Versicherungsunternehmen ist die Bestimmung einer geeigneten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen S sowie deren Erwartungswert und Varianz, da viele Entscheidungen darauf basieren, wie z.B. Prämienkalkulation, Rückversicherung und Rückstellungen. Ein Vorteil, der durch das Zusammenfassen von Risiken durch ein Versicherungsunternehmen entsteht, ist der Effekt des Risikoausgleichs im Kollektiv. Durch Einsetzen des Erwartungswertes und der Varianz von S in die Tschebyscheffschen Ungleichung folgt $\forall \epsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S - \mathbb{E}[S]|}{\mathbb{E}[S]} \geq \epsilon\right) = \mathbb{P}(|S - \mathbb{E}[S]| \geq \epsilon\mathbb{E}[S]) \leq \frac{\text{Var}[S]}{(\epsilon\mathbb{E}[S])^2} = \frac{\text{Var}[R_1]}{n\epsilon^2\mathbb{E}[R_1]}.$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass S vom erwarteten Gesamtschaden $\mathbb{E}S$ mehr als ϵ abweicht, wird mit wachsendem Bestand immer kleiner. Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen 0.

2.2 Kollektives Modell

2.2.1 Modell

Im kollektiven Modell steht im Gegensatz zum individuellen Modell nicht das einzelne Risiko im Vordergrund, sondern das gesamte Portfolio von Risiken wird als Produzent einer zufälligen Anzahl von Schäden einer Beobachtungsperiode betrachtet. Dabei wird die Anzahl der eingetretenen Schäden durch eine Zufallsvariable N und die Höhe der Schäden durch eine Folge positiver, unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen Y_i beschrieben. Ebenso wird angenommen, dass N und Y_i unabhängig sind.

Definition 2.3 Der Gesamtschaden S ist durch die Zufallssumme

$$S := \sum_{i=1}^N Y_i$$

gegeben, wobei $S = 0$ für $N = 0$ gesetzt wird, d.h. treten keine Schäden auf, ist trivialerweise auch der Gesamtschaden gleich Null.

Bemerkung

- i) Die Schadenszahlverteilung wird häufig mit Hilfe von Poisson-, Binomial-, Negativbinomial- oder logarithmisch verteilten Zufallsgrößen modelliert.
- ii) Zur Modellierung von Schadenshöhenverteilungen eignen sich insbesondere Exponential-, Gamma-, Log-Gamma- oder Log-Normal-verteilte Zufallsvariablen.

2.2.2 Die Momente von S

Die Momente und die Momenterzeugende Funktion (MEF) $M_S(t)$ können über die Iterativität des Erwartungswertes hergeleitet werden. Voraussetzung dafür ist, dass die Erwartungswerte von N , Y_i und auch die $MEF(S)$ existieren.

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|N]] = \mathbb{E}[N\mathbb{E}[Y]] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Y] \quad (2.1)$$

Der Erwartungswert des Gesamtschadens ist das Produkt der erwarteten Anzahl von Schäden und der erwarteten Schadenshöhe. Für die Varianz von S gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var}[S] &= \mathbb{E}[\text{Var}[S|N]] + \text{Var}[\mathbb{E}[S|N]] = \mathbb{E}[N \text{Var}[Y]] + \text{Var}[N\mathbb{E}[Y]] \\ &= \mathbb{E}[N] \text{Var}[Y] + [\mathbb{E}[Y]]^2 \text{Var}[N]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dieselbe Technik kann herangezogen werden um $M_S(t)$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathbb{E}[e^{tS}] = \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^N Y_i}\right] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{t\sum_{i=1}^N Y_i}|N]] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{t\sum_{i=1}^N Y_i}|N = k] \mathbb{P}[N = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k e^{tY_i}\right] \mathbb{P}[N = k] = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^k \mathbb{E}[e^{tY_i}] \mathbb{P}[N = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{tY}]^k \mathbb{P}[N = k] = \sum_{k=0}^{\infty} M_Y(t)^k \mathbb{P}[N = k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp(\ln(M_Y(t)^k)) \mathbb{P}[N = k] \\ &= M_N(\ln(M_Y(t))). \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.3 Klassischer Risikoprozess

2.3.1 Compound Poisson Distribution

Eine gängige Verteilung, die häufig zur Modellierung der Schadenszahl herangezogen wird, ist die Poissonverteilung. Der Grund dafür ist, dass sich viele Rechnungen explizit ausführen lassen.

Definition 2.4 Eine Zufallsvariable N auf $(\mathbb{N}_0; \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0))$ heißt poissonverteilt mit Parameter (Intensität) $\lambda > 0$, $N \sim Poi(\lambda)$, falls gilt:

$$\mathbb{P}(N = k) := \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Es gilt:

$$\mathbb{E}[N] = \lambda, \text{Var}[N] = \lambda, \quad M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Die Verteilung von S heißt dann zusammengesetzte Poisson-Verteilung bzw. Compound Poisson Distribution, $S \sim CP(\lambda; F(\cdot))$ wobei $F(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Schadenshöhen Y_i bezeichnet.

Man erhält unmittelbar aus (2.1) und (2.2)

$$\mathbb{E}[S] = \lambda \mathbb{E}[Y] \quad \text{und} \quad \text{Var}[S] = \lambda \mathbb{E}[Y]^2.$$

Ist $M_Y(t)$ die Momenterzeugende Funktion von Y , erhält man durch Einsetzen in (2.3)

$$M_S(t) = e^{\lambda(M_Y(t) - 1)}$$

2.3.2 Compound Poisson Prozess

In den vorangegangenen Abschnitten wurde der Gesamtschaden eines Portfolios in einer bestimmten Zeitperiode, z.B. einem Jahr, betrachtet. In diesem Abschnitt geht man nun über zu einem längerfristigen Horizont und betrachtet die Entwicklung des Überschusses (Gewinn) eines Versicherungsunternehmens.

In Analogie zur Berechnung des Gesamtschadens in einem festen Zeitraum, wo die Schadenszahl unter anderem durch eine poissonverteilte Zufallsvariable modelliert wurde, betrachtet man nun unter Berücksichtigung des zeitlichen Aspekts einen sogenannten Poissonprozess.

Definition 2.5 Es seien W_1, W_2, \dots unabhängige stochastische Größen, die identisch exponentialverteilt sind mit Parameter $\lambda > 0$. Definiert man

$$N(t) := \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k \leq t\}} \quad t \geq 0, \quad T_k := W_1 + \dots + W_k,$$

dann heißt $N(t)_{t \geq 0}$ (homogener) Poissonprozess mit Intensität λ .

Definition 2.6 Es sei $N(t)_{t \geq 0}$ ein Zählprozess. Dann sind äquivalent:

- a) der Prozess N ist ein Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$;
- b) der Prozess N besitzt folgende Eigenschaften:
 - i) $N(t)$ ist für jedes $t \geq 0$ poissonverteilt mit Parameter $\lambda t > 0$;
 - ii) unabhängige Zuwächse:
für alle $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ und $n \in \mathbb{N}$ sind die Zuwächse $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ unabhängig;
 - iii) stationäre Zuwächse:
für alle $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ und für alle $h \geq 0$ hängen die Verteilungen von $N(t_1 + h) - N(t_0 + h), \dots, N(t_n + h) - N(t_{n-1} + h)$ nicht von h ab.

Nun sei $N(t)_{t \geq 0}$ ein Poissonprozess mit Parameter λ , und $(Y_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F , unabhängig von $N(t)$ für alle $t \geq 0$. Definiert man

$$S_t := \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

Dann heißt der Prozess $(S_t)_{t \geq 0}$ zusammengesetzter Poissonprozess (compound poisson process) mit Charakteristik (λ, F_Y) .

2.3.3 Freie Reserve

Der Überschuss (freie Reserve) eines Versicherungsunternehmens zum Zeitpunkt $t > 0$ wird ohne Berücksichtigung von Dividendenzahlungen mit U_t bezeichnet. $U_0 = x$ sei das Startkapital, welches als nichtnegativ und bekannt vorausgesetzt wird. Da die Höhe des Überschusses in der Zukunft nicht bekannt ist, ist U_t ein stochastischer Prozess in stetiger Zeit. Wir definieren die freie Reserve eines Versicherungsunternehmens zum Zeitpunkt $t > 0$

$$U_t := x + ct - S_t, \tag{2.4}$$

wobei $c > 0$ die Prämie pro Zeiteinheit und $(S_t)_{t \geq 0}$ der aggregierte Schadensprozess ist.

Bemerkung

- i) Die Prämien werden kontinuierlich mit einer konstanten Prämienrate $c > 0$ eingenommen, das heißt die Prämieinnahme bis zum Zeitpunkt t ist somit ct .

- ii) Der Zeitpunkt T_i ist jener Zeitpunkt, an dem der i -te Schaden eintritt. Pro Schadenszeitpunkt wird angenommen, dass nur ein Schaden auftritt. T_1, T_2, \dots sind Zufallsvariablen wobei $T_1 < T_2 < \dots$ gilt. Mit W_i wird die Zeit zwischen dem $i - 1$ -ten und dem i -ten Schaden bezeichnet,

$$W_i = T_i - T_{i-1} \quad \text{mit} \quad W_1 = T_1.$$

- iii) Für die Modellierung des Schadensprozess wird ein Compound Poisson Prozess verwendet, das heißt S_t ist von folgender Gestalt

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

$N(t)_{t \geq 0}$ ist ein Poissonprozess mit Rate λ . N_t gibt die Anzahl der Schäden im Intervall $(0, t]$ an. Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$\mathbb{P}[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad n = 1, 2, \dots \quad \lambda > 0$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Zeit zwischen zwei Schadenszeitpunkten W_i exponentialverteilt ist mit Parameter λ .

Die Schadenshöhen werden durch eine Folge unabhängiger, positiver Zufallsvariablen $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ modelliert, die derselben Verteilung unterliegen und zusätzlich unabhängig von $(N_t)_{n > 0}$ sind. Die Verteilungsfunktion der Y_i wird mit $F(\cdot)$ bezeichnet. Ausgehend von der Definition der Y_i folgt sofort, dass $F(y) = 0$ für $y \leq 0$ gilt, d.h. wir betrachten nur positive Schäden.

Für die MEF von Y_i verwenden wir die Notation $M_Y(r) = \mathbb{E}[\exp(rY_i)]$ und für die Momente $\mu_n = \mathbb{E}[Y_i^n]$.

Folgendes Lemma ist oft sehr hilfreich bei der Berechnung der Momente einer stochastischen Größe.

Lemma 2.7 Sei Y eine stochastische Größe mit MEF $M_Y(t)$. Existiert $M_Y(t)$ in einem offenen Intervall $(-\gamma, \gamma)$, $\gamma > 0$, so ist $M_Y(t)$ in $(-\gamma, \gamma)$ unendlich oft differenzierbar mit

$$M_Y^{(k)}(0) = \mathbb{E}[Y^k] \quad k > 0. \quad (2.5)$$

Bemerkung Der Prozess (2.4) wird auch Reserveprozess, Überschussprozess oder Cramér-Lundberg Prozess genannt.

Kapitel 3

Ruintheorie

Die freie Reserve wächst linear mit Steigung c , außer zu den Zeitpunkten an denen Schäden auftreten. In den Zeitpunkten T_i verringert sich die freie Reserve um die Höhe des Schadens. So kann es auch passieren, dass die freie Reserve negativ wird.

Als Ruin bezeichnet man das Ereignis, dass der Reserveprozess zum ersten Mal negative Werte annimmt, das heißt es gilt $U_t < 0$ für ein $t > 0$.

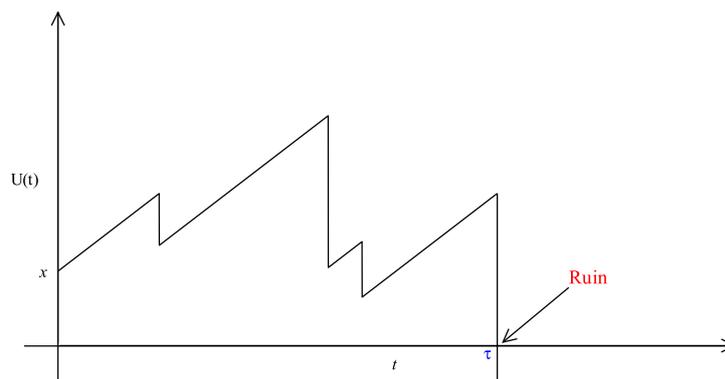


Abbildung 3.1: Reserveprozess

Bemerkung “Ruin“ ist lediglich ein technischer Ausdruck. Wird der Reserveprozess eines Versichertenbestandes negativ, so geht das Unternehmen noch lange nicht pleite.

Natürlich ist man daran interessiert, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ereignisses möglichst gering zu halten. Ein sehr häufig verwendetes Risikomaß ist die sogenannte Ruinwahrscheinlichkeit.

Definition 3.1 Sei $(U_t : t \geq 0)$ ein Risikoprozess mit Startkapital $x = U(0)$. Dann bezeichnet

- i) $\tau := \inf\{t : t \geq 0 \text{ und } U_t < 0\}$ den Ruinzeitpunkt, mit $\inf(\emptyset) = \infty$;
- ii) $\psi(x, t) := \mathbb{P}(\tau \leq t \mid U(0) = x) = \mathbb{P}[\inf_{0 < s \leq t} U_s < 0 \mid U(0) = x]$ die Ruinwahrscheinlichkeit im Zeitintervall $(0, t]$;
- iii) $\psi(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(x, t) = \mathbb{P}[\tau < \infty) = \mathbb{P}[\inf_{t > 0} U_t < 0 \mid U(0) = x]$ die totale Ruinwahrscheinlichkeit;
- iv) $\varphi(x) := 1 - \psi(x)$ die Überlebenswahrscheinlichkeit.

Offensichtlich ist $\psi(x, t)$ fallend in x und wachsend in t .

Das Ereignis „Ruin“ kann im klassischen Cramér-Lundberg Modell nur durch einen Schaden eintreten. Für eine notwendige Bedingung, sodass Ruin nicht mit Wahrscheinlichkeit 1 eintritt, ist es sinnvoll den Überschuss zu den einzelnen Schadenszeitpunkten zu betrachten.

Lemma 3.2 Im Cramér-Lundberg Modell gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit des klassischen Risikoprozesses für alle $x > 0$:

$$\psi(x) = \mathbb{P}(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n > x) \quad \text{mit} \quad Z_n := \sum_{k=1}^n (Y_k - cW_k).$$

Nach dem starkem Gesetz der großen Zahlen folgt für $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y_k - cW_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{n} - c \frac{T_n}{n} \right) = \mu - \frac{c}{\lambda}.$$

Für $c < \lambda\mu$ konvergiert Z_n P- f.s gegen ∞ und gemäß Lemma 3.2 tritt Ruin P- f.s ein.

Damit Ruin nicht mit Sicherheit eintritt, fordern wir im Folgenden, dass die Prämienrate c einen Sicherheitszuschlag $\theta \in \mathbb{R}$ der Form

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu, \quad \theta > 0 \tag{3.1}$$

enthält und damit stets

$$c > \lambda\mu \tag{3.2}$$

gilt.

Bemerkung

- i) Die Bedingung (3.1) besagt, dass für $\theta > 0$ die Prämieinnahmen die erwarteten Schäden pro Zeiteinheit übersteigen. Nach Lemma 3.2 folgt daraus, dass die Ruinwahrscheinlichkeit für $x \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert.
- ii) Die Konstante θ wird in der Literatur *relativer Sicherheitszuschlag* (safety loading) und die Bedingung (3.2) wird *Nettoprofitbedingung* (net profit condition) genannt.

3.1 Differentialgleichung für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x)$

Die Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit erfolgt durch eine Differentialgleichung, die aus folgender Überlegung entsteht.

Angenommen der erste Schaden tritt zum Zeitpunkt $T_1 > 0$ ein und die Höhe dieses Schadens Y_1 ist gleich y . Falls Ruin vor oder im $(n + 1)$ -ten Schaden eintritt, gilt entweder:

- i) Ruin tritt beim ersten Schaden ein, d.h. $y > x + ct$, oder
- ii) Ruin tritt nicht direkt nach dem ersten Schaden ein, der Überschuss nach dem ersten Schaden beträgt somit $x + ct - y$ und Ruin tritt in einem der nächsten n Schäden ein. In diesem Fall beginnt im Zeitpunkt T_1 ein neuer Cramér-Lundberg Prozess mit Startkapital $U(T_1)$.

Da das Eintreten der Schäden N_t durch einen Poisson Prozess mit Parameter λ beschrieben wird, ist die Zeit zwischen zwei Schäden exponentiell verteilt. Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{x+ct}^{\infty} dF(y) dt + \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{x+ct} \psi(x + ct - y) dF(y) dt$$

mit $\psi(z) = 1$ für $z < 0$.

Durch Substitution $s = x + ct$ gelangt man zu folgender Darstellung:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{c} \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda(\frac{s-x}{c})} \int_s^{\infty} dF(y) ds + \frac{1}{c} \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda(\frac{s-x}{c})} \int_0^s \psi(s - y) dF(y) ds \\ &= \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda x}{c}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{\lambda s}{c}} \int_s^{\infty} dF(y) ds + \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda x}{c}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{\lambda s}{c}} \int_0^s \psi(s - y) dF(y) ds \end{aligned}$$

Differenziert man den Ausdruck nach x , erhält man

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{\lambda^2}{c^2} e^{\frac{\lambda x}{c}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{\lambda s}{c}} \int_s^{\infty} dF(y) ds - \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda x}{c}} \left(e^{-\frac{\lambda x}{c}} \int_x^{\infty} dF(y) \right) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{c^2} e^{\frac{\lambda x}{c}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{\lambda s}{c}} \int_0^s \psi(s - y) dF(y) ds - \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda x}{c}} \left(e^{-\frac{\lambda x}{c}} \int_0^x \psi(x - y) dF(y) \right) \end{aligned}$$

Formt man diese Gleichung noch um, erhält man für $\psi(x)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{\lambda}{c} \left[\underbrace{\frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda x}{c}} \int_x^\infty e^{-\frac{\lambda s}{c}} \int_s^\infty dF(y) ds + \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda x}{c}} \int_x^\infty e^{-\frac{\lambda s}{c}} \int_0^s \psi(s-y) dF(y) ds}_{=\psi(x)} \right] \\ &\quad - \frac{\lambda}{c} \underbrace{\int_x^\infty dF(y)}_{=(1-F(x))} - \frac{\lambda}{c} \int_0^x \psi(x-y) dF(y) \\ \psi'(x) &= \frac{\lambda}{c} \psi(x) - \frac{\lambda}{c} (1 - F(x)) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x \psi(x-y) dF(y) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Um auf die Gleichung der Überlebenswahrscheinlichkeit $\varphi(x)$ zu gelangen, setzen wir die Beziehung $\varphi(x) = 1 - \psi(x)$ in (3.3) ein

$$\begin{aligned} -\varphi'(x) &= \frac{\lambda}{c} (1 - \varphi(x)) - \frac{\lambda}{c} (1 - F(x)) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x (1 - \varphi(x-y)) dF(y) \\ &= \frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda}{c} \varphi(x) - \frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda}{c} F(x) - \frac{\lambda}{c} \underbrace{\int_0^x dF(y)}_{=F(x)} + \frac{\lambda}{c} \int_0^x \varphi(x-y) dF(y) \end{aligned}$$

und erhalten damit

$$\varphi'(x) = \frac{\lambda}{c} \varphi(x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x \varphi(x-y) dF(y). \quad (3.4)$$

Bemerkung Gleichungen, in denen sowohl das Integral als auch das Differential einer Funktion vorkommen, werden *Integro-Differentialgleichungen* genannt.

Eine Möglichkeit die Integro-Differentialgleichung (3.3) zu vereinfachen besteht darin das Differential zu eliminieren.

Offenbar gilt

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\lambda}(\varphi(x) - \varphi(0)) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^x c\varphi'(u) \, du \stackrel{(3.4)}{=} \int_0^x \varphi(u) \, du - \int_0^x \int_0^u \varphi(u-y) \, dF(y) \, du \\
&= \int_0^x \varphi(u) \, du - \int_0^x \int_y^x \varphi(u-y) \, du \, dF(y) \\
&= \int_0^x \varphi(u) \, du - \int_0^x \int_0^{x-y} \varphi(u) \, du \, dF(y) \\
&= \int_0^x \varphi(u) \, du - \int_0^x \int_0^{x-u} dF(y) \varphi(u) \, du \\
&= \int_0^x \varphi(u)(1 - F(x-u)) \, du = \int_0^x \varphi(x-u)[1 - F(u)] \, du
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Aus der Eigenschaft des Erwartungswertes

$$\mu = \mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty y \, dF(y) = \int_0^\infty [1 - F(y)] \, dy,$$

folgt für $x \rightarrow \infty$

$$c(1 - \varphi(0)) = \lambda \int_0^\infty [1 - F(y)] \, dy = \lambda\mu \tag{3.6}$$

wobei $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$ durch $c > \lambda\mu$ gesichert ist. Daraus folgt

$$\varphi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c} \tag{3.7}$$

Setzt man wiederum $\varphi(x) = 1 - \psi(x)$ in Gleichung (3.5) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
c\psi(x) &= c\psi(0) - \lambda \int_0^x (1 - \psi(x-y))[1 - F(y)] \, dy \\
&= \lambda\mu - \lambda \left[\int_0^x [1 - F(y)] \, dy - \int_0^x \psi(x-y)[1 - F(y)] \, dy \right] \\
&= \lambda \left[\int_x^\infty [1 - F(y)] \, dy + \int_0^x \psi(x-y)[1 - F(y)] \, dy \right]
\end{aligned}$$

Im Allgemeinen lässt sich die Lösung der Gleichung (3.4) nur numerisch berechnen. Wie man zu einer expliziten Lösung kommen kann, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel Angenommen die Einzelschäden sind exponentialverteilt $Y_i \sim \text{Exp}(\beta)$, mit $\mu = \frac{1}{\beta}$ und Dichtefunktion $f(y) = \beta e^{-\beta y}$. Eingesetzt in (3.4) ergibt

$$\begin{aligned} c\varphi'(x) &= \lambda \left[\varphi(x) - \int_0^x \varphi(x-y) \beta e^{-\beta y} dy \right] = \lambda \left[\varphi(x) - \int_0^x \varphi(y) \beta e^{-\beta(x-y)} dy \right] \\ &= \lambda \left[\varphi(x) - \beta e^{-\beta x} \int_0^x \varphi(y) e^{\beta y} dy \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Durch Differenzieren kann diese Gleichung in eine reine Differentialgleichung umgewandelt werden:

$$\begin{aligned} c\varphi''(x) &= \lambda \left[\varphi'(x) + \beta^2 e^{-\beta x} \int_0^x \varphi(y) e^{\beta y} dy - \beta e^{-\beta x} \varphi(x) e^{\beta x} \right] \\ &= \lambda \varphi'(x) - \beta \lambda \underbrace{\left[\varphi(x) - \beta e^{-\beta x} \int_0^x \varphi(y) e^{\beta y} dy \right]}_{=c\varphi'(x)} \\ &= \lambda \varphi'(x) - \beta c \varphi'(x) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist durch

$$\varphi(x) = C_1 + C_2 e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})x}$$

gegeben. Für die Berechnung der Konstanten benützen wir einerseits die Annahme $c > \lambda\mu$ und andererseits die Ruinwahrscheinlichkeit für $x = 0$:

- i) Aus der Nettoprofitbedingung $c > \lambda\mu$ ($\Leftrightarrow \beta - \frac{\lambda}{c} > 0$) und $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 1$ folgt

$$1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(C_1 + C_2 e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})x} \right) = C_1,$$

$$\Rightarrow C_1 = 1.$$

- ii) Aus $\varphi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$ können wir nun C_2 bestimmen:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1 + C_2 = 1 - \frac{\lambda}{\beta c} \\ \Rightarrow C_2 &= -\frac{\lambda}{\beta c}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Überlebenswahrscheinlichkeit bei exponentiell verteilten Schäden

$$\varphi(x) = 1 - \frac{\lambda}{\beta c} e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})x}$$

bzw. für die Ruinwahrscheinlichkeit, für $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ gilt

$$\psi(x) = \frac{\lambda}{\beta c} e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})x} = \frac{1}{1 + \theta} \exp\left(-\beta \frac{\theta}{1 + \theta} x\right).$$

3.2 Abschätzen der Ruinwahrscheinlichkeit

Im Allgemeinen ist das Finden expliziter Lösungen für die Ruinwahrscheinlichkeit, wie im Beispiel zuvor, nicht möglich beziehungsweise nur mit großem Aufwand. Meist versucht man sich mit einer numerischen Näherung zu helfen, wie zum Beispiel durch das Abschätzen der Ruinwahrscheinlichkeit nach oben.

3.2.1 Anpassungskoeffizient

Satz 3.3 Sei $(U_t)_{t \geq 0}$ ein klassischer Risikoprozess, $M_Y(r)$ die Momenterzeugende Funktion der Einzelschäden $Y \sim F$ und $c > \lambda\mu$ sei für $\theta > 0$ erfüllt.

Angenommen

- i) $M_Y(r)$ existiert für alle $r > 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} M_Y(r) = \infty$ oder
- ii) es gibt ein $0 < r_{max} < \infty$, sodass $M_Y(r)$ für $0 \leq r < r_{max}$ existiert und $\lim_{r \rightarrow \infty} M_Y(r) = \infty$ gilt, dann folgt:

Es existiert genau eine positive Lösung R der Gleichung

$$\lambda + cr = \lambda M_Y(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ry} dF(y). \quad (3.9)$$

Bemerkung Der Anpassungskoeffizient R ist ein Maß für das Risiko in dem Reserveprozess. Ist die Prämie c gegeben durch $c = (1 + \theta)\lambda\mu$, das heisst abhängig von der Schadensintensität, so folgt, dass R unabhängig vom Parameter λ ist. Er hängt nur von der Gesamtschadenshöhe und der Höhe der Prämien ab. Weiters wird durch die Erfüllung der Nettoprofitbedingung gesichert, dass es keine Konstante $R < 0$ gibt, die der Gleichung (3.9) genügt.

Beweis Definiere:

$$g(r) = \lambda M_Y(r) - \lambda - cr.$$

Eine Lösung ist offensichtlich $r = 0$. Um die strikt positive Lösung zu finden, bilden wir die erste und zweite Ableitung von $g(r)$

$$g'(r) = \lambda \int_0^\infty ye^{ry} dF(y) - c$$

$$g''(r) = \lambda \int_0^\infty y^2 e^{ry} dF(y).$$

Für $r = 0$ gilt

$$g'(r)|_{r=0} = \lambda\mu - c < 0$$

$$g''(r)|_{r=0} = \lambda \int_0^\infty y^2 dF(y) > 0,$$

d.h. die Funktion $g(r)$ ist strikt konvex. Nach Voraussetzung gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} M_Y(r) = \infty$ und somit muss es eine Lösung R geben, die $g(R) = 0$ erfüllt. ■

3.2.2 Lundberg-Ungleichung

Satz 3.4 Im klassischen Risikoprozess gilt, falls der Anpassungskoeffizient R existiert:

$$\psi(x) \leq e^{-Rx}. \quad (3.10)$$

Beweis (Vollständige Induktion)

Wir definieren mit $\psi_n(x)$ die Wahrscheinlichkeit des Ruins vor oder im n -ten Schaden. Da $\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x)$ gilt, genügt es zu zeigen, dass $\psi_n(x) \leq e^{-Rx}$ für $n = 1, 2, \dots$ gilt.

Induktionsanfang: $n = 1 \Rightarrow y > x + ct$

$$\psi_1(x) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{x+ct}^\infty dF(y) dt$$

Da $e^{-R(x+ct-y)} \geq 1$ für $y \geq x + ct$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
 \psi_1(x) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{x+ct}^\infty e^{-R(x+ct-y)} dF(y) dt \\
 &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(x+ct-y)} dF(y) dt \\
 &= e^{-Rx} \int_0^\infty e^{-(\lambda+cR)t} \underbrace{\lambda \int_0^\infty e^{Ry} dF(y)}_{=\lambda M_Y(R)=\lambda+cR} dt \\
 &= e^{-Rx} \underbrace{(\lambda + cR) \int_0^\infty e^{-(\lambda+cR)t} dt}_{=1} \\
 &= e^{-Rx}.
 \end{aligned}$$

Induktionsschritt: $n \Rightarrow n + 1$: Induktionsannahme $\psi_n(x) \leq e^{-Rx}$

$$\begin{aligned}
 \psi_{n+1}(x) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{x+ct}^\infty dF(y) dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{x+ct} \psi_n(x + ct - y) dF(y) dt \\
 &\stackrel{(IS)}{\leq} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{x+ct}^\infty dF(y) dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{x+ct} e^{-R(x+ct-y)} dF(y) dt \\
 &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{x+ct}^\infty e^{-R(x+ct-y)} dF(y) dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{x+ct} e^{-R(x+ct-y)} dF(y) dt \\
 &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(x+ct-y)} dF(y) dt \\
 &\stackrel{(IA)}{=} e^{-Rx} \\
 \Rightarrow \psi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) \leq e^{-Rx}
 \end{aligned}$$

■

Beispiel Die Einzelschäden sind wieder exponentialverteilt $Y_i \sim Exp(\beta)$, mit

$M_Y(r) = \frac{\beta}{\beta-r}$, $r < \beta$. Eingesetzt in Gleichung (3.9) gilt es

$$\lambda + cr = \lambda \left(\frac{\beta}{\beta - r} \right)$$

zu lösen. Durch Umformen erhält man $R = \beta - \frac{\lambda}{c}$ und damit eine obere Schranke der Ruinwahrscheinlichkeit:

$$\psi(x) \leq e^{-(\beta - \frac{\lambda}{c})x}. \quad (3.11)$$

Kapitel 4

Optimale Dividendenstrategie

Die Bewertung eines Versicherungsportfolios anhand einer optimalen Dividendenstrategie geht auf eine Arbeit von Bruno De Finetti¹ zurück, der seinen Artikel² 1957 erstmals auf dem 15. Internationalen Kongress für Aktuarien in New York präsentierte. Die Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit als Methode zur Bewertung eines Portfolios wurde von Bruno De Finetti als zu konservativ angesehen. Tritt für einen Pfad des Reserveprozesses kein Ruin ein, so wächst der Überschuss in diesem Fall unbeschränkt. Da dies nicht realistisch ist, schlug De Finetti vor, den wirtschaftlichen Erfolg eines Portfolios nicht anhand der Ruinwahrscheinlichkeit zu bewerten, sondern ein Unternehmen sollte versuchen, den Erwartungswert der diskontierten Dividenden vor dem Eintreten des möglichen Ruins zu maximieren.

4.1 Dividenden im Cramér-Lundberg Modell

Bei dieser Bewertungsmethode wird der in Kapitel 2 vorgestellte Überschussprozess (2.4) nach einer bestimmten Strategie zu gewissen Zeitpunkten verringert. Diese Reduktionen werden in Folge als Dividenden interpretiert. Bezeichne D_t die Summe aller im Intervall $(0, t)$ ausbezahlten Dividenden. Dann ist der um die Dividenden-Auszahlungen modifizierte Reserveprozess X_t gegeben durch

$$X_t = x + ct - S_t - D_t = U_t - D_t.$$

Das Versicherungsunternehmen gibt nun die Regel vor, in der die Zeitpunkte und die Höhe der Dividendenzahlungen festgelegt werden. Diese Regeln ξ

¹Bruno DE FINETTI, italienischer Statistiker, *13. Juni 1906 in Innsbruck, †20. Juli 1985 in Rom;

²siehe [5]

nennt man Dividendenstrategien. Um die verschiedenen Dividendenstrategien zu bewerten, führen wir eine Zinsintensität $\delta > 0$ ein. Die Bewertung des Reserveprozesses, unter der konkreten Dividendenstrategie ξ , erfolgt nun mit Hilfe von $V(x, \xi)$, der Summe der erwarteten abgezinste Dividenden bis zum Ruinzeitpunkt τ , mit Anfangskapital $X_0 = x$:

$$V(x, \xi) = \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau} e^{-\delta t} dD(t) \right]$$

Es wird stillschweigend angenommen, dass der obige Erwartungswert endlich ist. Das Ziel ist nun jene optimale Strategie ξ_0 zu finden, die im Erwartungswert die höchstmögliche diskontierte Summe an Dividenden ergibt:

$$V(x) = V(x, \xi_0) := \sup_{\xi} V(x, \xi)$$

Diese Strategie wird *optimale Dividenden-Strategie* genannt.

Bemerkung

- i) Diese Arbeit beschäftigt sich mit sogenannten *stationären Dividendenstrategien*. Das sind Strategien, in denen die Höhe der Dividendenzahlungen zum Zeitpunkt t nur von dem aktuellen Wert des Reserveprozesses abzüglich aller bisherigen bezahlten Dividenden abhängt, also $D_t = f(X_t)$ für $t \in \mathbb{N}_0$.
- ii) Es ist in unserem Modell nicht möglich, dass Dividenden ausbezahlt werden, die durch den Reserveprozess nicht abgedeckt werden können.

Man versucht bei der Bewertung durch Dividendenstrategien für einen gegebenen Überschussprozess die optimale Strategie zu finden und die Höhe der erwarteten diskontierten Dividenden zu ermitteln.

4.2 Barriere-Strategien

Eine Barriere-Strategie ist eine spezielle Dividendenstrategie, in der die Prämieinnahmen bei Erreichen eines gewissen Levels $b \in \mathbb{R}^+$ nicht mehr in den Reserveprozess fließen, sondern als Dividendenzahlungen an die Aktionäre ausbezahlt werden.

Definition 4.1 Sei X_t der um Dividendenzahlungen modifizierte Überschussprozess mit Anfangskapital $X_0 = x$. Dann nennt man die folgende Strategie *Barriere-Strategie* mit Barriere b :

- Wenn $X_t > b$ gilt, wird der Überschuss $X_t - b$ sofort als Dividenden ausbezahlt

- Für $X_t = b$ erfolgt eine direkte Auszahlung der vereinnahmten Prämien als Dividenden
- Wenn $X_t < b$ gilt, werden keine Dividenden ausbezahlt.

Bemerkung Nach obiger Definition überschreitet X_t niemals die Barriere b , das heißt $\forall t > 0$ gilt stets $X_t \leq b$.

Der Zusammenhang zwischen U_t und X_t ist in den folgenden Abbildungen dargestellt.

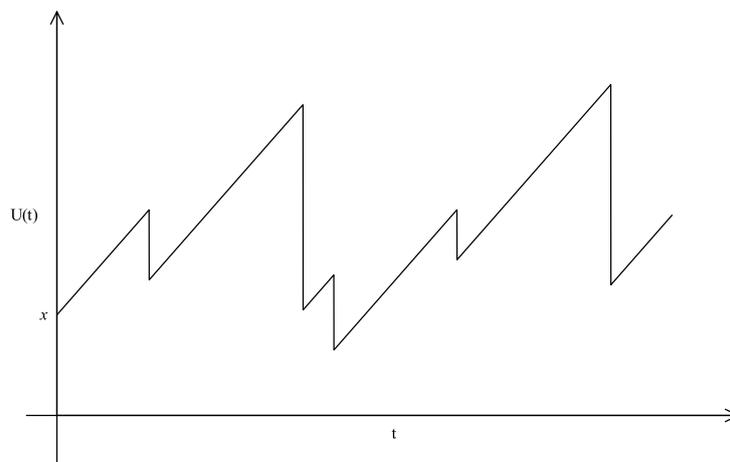


Abbildung 4.1: Mögliche Realisation des Überschussprozesses $U(t)$

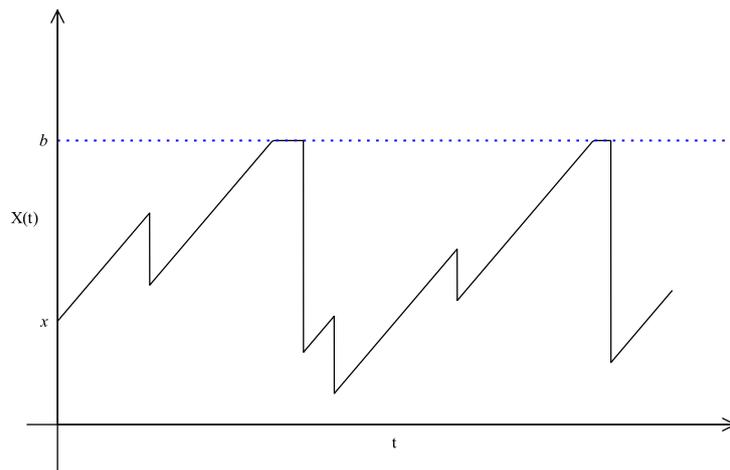


Abbildung 4.2: Realisation des Überschussprozesses Abb. (4.1) mit Dividendenauszahlungen bei Erreichen der Barriere b

Allgemein ist neben der Gestalt der optimalen Dividenden-Strategie ξ_0 auch deren Existenz von großer Bedeutung, sodass die definierende Beziehung

$$V(x) := \sup_{\xi} V(x, \xi)$$

erfüllt ist. Der Existenz-Satz wurde von Gerber³ für den stetigen Fall bewiesen. Anstelle des allgemeinen Satzes für die Existenz wird hier auf ein weiteres Resultat von Gerber Bezug genommen:

Satz 4.2 Es existiert eine reelle Zahl $b^* \geq 0$, sodass für eine gegebene Anfangsreserve x , mit $0 \leq x \leq b^*$ die folgende Dividendenstrategie optimal ist:

- Wenn $X_t = b^*$ gilt, werden die vereinnahmten Prämien sofort als Dividenden ausbezahlt.
- Wenn $X_t < b^*$ gilt, werden keine Dividenden bezahlt.

Im Folgenden nehmen wir stets an, dass $x \leq b$ gilt. $V(x, b)$ bezeichnet die Summe der erwarteten diskontierten Dividenden der Barriere-Strategie mit Barriere b . Der Satz besagt nun, dass es ein b^* gibt, sodass

$$V(x, b^*) = V(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq b^*$$

erfüllt ist. Dies zeigt die Bedeutung von b^* . Die Ermittlung der optimalen Barriere b^* und das Problem der Bestimmung der optimalen Barriere-Strategie sind identisch, da für $x \leq b^*$ die Barriere-Strategie mit Barriere b^* die optimale Strategie unter allen Dividendenstrategien und insbesondere unter den Barriere-Strategien darstellt.

4.3 Integro-Differentialgleichung für $V(x, b)$

Wir betrachten ein infinitesimales Zeitintervall $[0, h]$ abhängig davon, ob ein Schaden im Intervall eintritt, und von der Höhe des Schadens, falls er eintritt. Für $x < b$ und den Fall, dass kein Schaden bis zum Zeitpunkt $h = \frac{b-x}{c}$ eintritt, erreicht der Reserveprozess die Barriere b zum Zeitpunkt h . Folglich erhalten wir $V(x, b)$, den Erwartungswert des gegenwärtigen Werts aller Dividenden bis Ruin unter Berücksichtigung der Barriere-Strategie mit Barriere b , als Funktion von x durch

$$V(x, b) = e^{-(\lambda+\delta)h}V(b, b) + \int_0^h \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+ct} V(x+ct-y, b) dF(y) dt, \quad 0 \leq x \leq b$$

³siehe [10]

Substituiert man $s = x + ct$

$$V(x, b) = e^{-(\lambda+\delta)\frac{(b-x)}{c}} V(b, b) + \frac{\lambda}{c} \int_x^b e^{-(\lambda+\delta)\frac{(s-x)}{c}} \int_0^s V(s-y, b) dF(y) ds$$

und differenziert die Gleichung nach x , so folgt:

$$\begin{aligned} V'(x, b) &= \frac{\lambda + \delta}{c} e^{-(\lambda+\delta)\frac{(b-x)}{c}} V(b, b) \\ &+ \frac{\lambda}{c} \left[\frac{\lambda + \delta}{c} \int_x^b e^{-(\lambda+\delta)\frac{(s-x)}{c}} \int_0^s V(s-y, b) dF(y) ds \right] \\ &- \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^x V(x-y, b) dF(y) \right] \\ &= \frac{\lambda + \delta}{c} \underbrace{\left[e^{-(\lambda+\delta)\frac{(b-x)}{c}} V(b, b) + \frac{\lambda}{c} \int_x^b e^{-(\lambda+\delta)\frac{(s-x)}{c}} \int_0^s V(s-y, b) dF(y) ds \right]}_{=V(x,b)} \\ &- \frac{\lambda}{c} \int_0^x V(x-y, b) dF(y) \\ \Rightarrow cV'(x, b) &= (\lambda + \delta)V(x, b) - \lambda \int_0^x V(x-y, b) dF(y), \quad 0 \leq x \leq b \quad (4.1) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Randbedingung für $x = b$ spalten wir das Integral der erwarteten diskontierten Dividendenzahlungen in zwei Summanden auf:

$$\begin{aligned} V(b, b) &= \underbrace{\int_0^\infty \left(\int_0^s ce^{-\delta t} dt \right) \lambda e^{-\lambda s} ds}_{(a)} \\ &+ \underbrace{\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)s} \int_0^b V(b-y, b) dF(y) ds}_{(b)} \quad (4.2) \end{aligned}$$

a) Erwartete diskontierte Dividendenzahlungen bis zum Eintritt des ers-

ten Schadens:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \left(\int_0^s c e^{-\delta t} dt \right) \lambda e^{-\lambda s} ds &= \frac{\lambda c}{\delta} \int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta s}) e^{-\lambda s} ds \\
 &= \frac{\lambda c}{\delta} \left[- \left(-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{(\lambda + \delta)} \right) \right] \\
 &= \frac{\lambda c}{\delta} \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \delta} \right)}_{= \frac{\delta}{\lambda(\lambda + \delta)}} = \frac{c}{\lambda + \delta}.
 \end{aligned}$$

b) Erwartete diskontierte Dividenden nach Eintritt des ersten Schadens:

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda + \delta)s} \int_0^b V(b - y, b) dF(y) ds = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b V(b - y, b) dF(y)$$

Zusammen erhalten wir für $x = b$:

$$V(b, b) = \frac{c}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b V(b - y, b) dF(y). \quad (4.3)$$

Eine weitere Randbedingung kann unter Verwendung der Integro-Differentialgleichung (4.1) hergeleitet werden. Setzt man $x = b$

$$\frac{c}{\lambda + \delta} V'(x, b)|_{x=b} = V(b, b) - \frac{\lambda}{c} \frac{c}{\lambda + \delta} \int_0^b V(b - y, b) dF(y) \quad (4.4)$$

und vergleicht das Resultat mit Gleichung (4.3), gilt

$$V'(x, b)|_{x=b} = 1. \quad (4.5)$$

Bemerkung Gleichung (4.1) ist von der Form

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x - y) dF(y) \quad \text{für } x \geq 0. \quad (4.6)$$

Dabei ist $z(x)$ eine bekannte, lokal beschränkte Funktion mit $z(x) = 0$ für $x \in (-\infty, 0)$ und $Z(x)$ wird gesucht. Gleichungen dieser Form werden *Erneuerungsgleichungen* genannt.

4.3.1 Allgemeine Lösung der Integro-Differential-Gleichung für $V(x, b)$

Durch Transformation in eine Erneuerungsgleichung kann gezeigt werden, dass die Integro-Differentialgleichung

$$ch'(x) = (\lambda + \delta)h(x) - \lambda \int_0^x h(x-y) dF(y), \quad 0 < x < \infty \quad (4.7)$$

genau eine Lösung bis auf eine multiplikative Konstante besitzt. Daher kann man für die Integro-Differentialgleichung (4.1) folgern, dass $V(x, b)$ von der Gestalt

$$V(x, b) = C(b)h(x)$$

sein muss. Mit Hilfe der Randbedingung (4.3) kann man zusätzlich die Konstante $C(b)$ bestimmen. Setzt man $V(b, b) = C(b)h(b)$ in (4.3) ein

$$C(b)h(b) = \frac{c}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^b C(b)h(b-y) dF(y),$$

erhält man

$$\begin{aligned} (\lambda + \delta)C(b)h(b) &= c + \lambda \int_0^b C(b)h(b-y) dF(y) \\ C(b) &= \frac{c}{(\lambda + \delta)h(b) - \lambda \int_0^b h(b-y) dF(y)} = \frac{1}{h'(b)} \end{aligned}$$

Die Lösung der Integro-Differentialgleichung (4.1) ist durch

$$V(x, b) = \frac{h(x)}{h'(b)} \quad 0 \leq x \leq b, \quad (4.8)$$

gegeben, wobei $h(x)$ die Lösung der Gleichung

$$ch'(x) = (\lambda + \delta)h(x) - \lambda \int_0^x h(x-y) dF(y), \quad 0 < x < \infty$$

ist.

Anhand der Gleichung (4.8) sieht man sofort, dass b^* jenes b ist, welches $h'(b)$ minimiert. Das heißt es gilt $h''(b^*) = 0$ und folglich auch $V''(b^*, b^*) = 0$, denn

$$V''(x, b^*)|_{x=b^*} = \frac{h''(b^*)}{h'(b^*)} = 0. \quad (4.9)$$

Bemerkung

- Die optimale Barriere b^* hängt nicht von dem Anfangskapital x ab.
- Das Problem der Bestimmung der optimalen Barriere-Strategie reduziert sich auf zwei Aufgaben:
 - a) Ermittlung einer Lösung $h(x)$ der Erneuerungsgleichung (4.7).
 - b) Lösen der Gleichung $h''(b) = 0$ um ein b^* zu erhalten, welches $h'(b)$ minimiert.

Die Integro-Differentialgleichungen (4.1) bzw. (4.7) können noch in einer anderen Form dargestellt werden. Ersetzt man in (4.1) die Prämie c durch $c = (1 + \theta)\lambda\mu$ und dividiert das Resultat durch λ , erhält man

$$(1 + \theta)\mu V'(x, b) - (1 + \alpha)V(x, b) + \int_0^x V(x - y, b) dF(y) = 0, \quad 0 \leq x \leq b \quad (4.10)$$

mit

$$\alpha = \frac{\delta}{\lambda}. \quad (4.11)$$

Man sieht, dass für eine gegebene Schadensverteilung die zwei relevanten Parameter des Optimierungsproblems α und θ sind.

4.3.2 Exponentiell verteilte Schäden

Im letzten Teil dieses Kapitels betrachten wir den Fall, in dem die Schadenshöhen durch eine Exponentialverteilung modelliert werden. Es sei $Y \sim Exp(\beta)$ mit $\beta > 0$ und Dichtefunktion

$$f(y) = \beta e^{-\beta y}, \quad y > 0$$

gegeben. Der Vorteil mit der Exponentialverteilung zu arbeiten ist, dass man für viele Resultate explizite Lösungen angeben kann.

Lemma 4.3 Aus der Eigenschaft $f'(y) = \beta f(y)$ der Exponentialfunktion gilt für $V(x, b)$ die Beziehung

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta\right) \int_0^x V(x - y, b) dF(y) = \beta V(x, b). \quad (4.12)$$

Beweis

i) Durch Substitution gilt für den Integranden:

$$\int_0^x V(x-y, b) dF(y) = \int_0^x V(y, b) f(x-y) dy$$

ii) Den Operator $(\frac{d}{dx} + \beta)$ auf das Integral angewendet, liefert

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} + \beta\right) \int_0^x V(y, b) \beta e^{-\beta(x-y)} dy &= - \int_0^x V(y, b) \beta^2 e^{-\beta(x-y)} dy \\ &+ \beta V(x, b) + \int_0^x V(y, b) \beta^2 e^{-\beta(x-y)} dy \\ &= \beta V(x, b). \end{aligned}$$

■

Man kann zeigen, dass die Integro-Differentialgleichung (4.10) in eine reine Differentialgleichung umgewandelt werden kann. Hierfür wendet man den Operator $(\frac{d}{dx} + \beta)$ auf die Gleichung (4.10) an:

$$\begin{aligned} (1 + \theta)\mu V''(x, b) - (1 + \alpha)V'(x, b) + (1 + \theta)\beta\mu V'(x, b) - (1 + \alpha)\beta V(x, b) \\ = \underbrace{\left(\frac{d}{dx} + \beta\right) \left(-\lambda \int_0^x V(x-y, b) dF(y)\right)}_{=-\beta V(x, b)} \\ (1 + \theta)\mu V''(x, b) + \underbrace{((1 + \theta)\beta\mu - 1 - \alpha)}_{=(\theta - \alpha)} V'(x, b) - \alpha\beta V(x, b) = 0 \end{aligned}$$

$$(1 + \theta)\mu V''(x, b) + (\theta - \alpha)V'(x, b) - \alpha\beta V(x, b) = 0 \quad (4.13)$$

Diese Gleichung ist eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung ist durch den exponentiellen Ansatz

$$V(x, b) = C_0 e^{rx} + C_1 e^{sx} \quad 0 \leq x \leq b, \quad r, s \in \mathbb{R} \quad (4.14)$$

gegeben, wobei

$$r, s = -\frac{\theta - \alpha}{2(1 + \theta)\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{\theta - \alpha}{2(1 + \theta)\mu}\right)^2 + \frac{\alpha\beta}{(1 + \theta)\mu}} \quad (4.15)$$

die Lösungen des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung

$$(1 + \theta)\mu\xi^2 + (\theta - \alpha)\xi - \alpha\beta = 0 \quad (4.16)$$

sind und die Koeffizienten $C_k = C_k(b) \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1$ noch bestimmt werden müssen.

Bemerkung

- i) Es gilt $\frac{\alpha\beta}{(1+\theta)\mu} = \frac{\beta\delta}{c} > 0$, für $\alpha = \frac{\delta}{\lambda}$, $\beta, \delta, c > 0$. Damit besteht für die Nullstellen der charakteristischen Gleichung der Zusammenhang $r > 0 > s$.
- ii) Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (4.16) ist gleich $-\alpha\beta$ für $\xi = 0$ bzw. β für $\xi = -\beta$. Die negative Lösung der quadratischen Gleichung muss somit zwischen $-\beta$ und 0 liegen. Es gilt somit $-\beta < s < 0$.

Aus der Bedingung $V'(b, b) = 1$ wissen wir, dass

$$V'(b, b) = C_0 r e^{rb} + C_1 s e^{sb} = 1 \quad (4.17)$$

gilt. Für die Koeffizienten C_0 und C_1 besteht der Zusammenhang:

$$\frac{C_0}{\beta + r} + \frac{C_1}{\beta + s} = 0. \quad (4.18)$$

Um diese Gleichheit zu zeigen, setzt man (4.14) in Gleichung (4.10) ein

$$(1 + \theta)\mu(C_0 r e^{rx} + C_1 s e^{sx}) - (1 + \alpha)(C_0 e^{rx} + C_1 e^{sx}) + \int_0^x (C_0 e^{r(x-y)} + C_1 e^{s(x-y)}) \beta e^{-\beta y} dy = 0$$

und eliminiert das Integral

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_0^x \left(C_0 e^{r(x-y)} + C_1 e^{s(x-y)} \right) \beta e^{-\beta y} dy \\
&= \beta \left[C_0 e^{rx} \int_0^x e^{-(r+\beta)y} dy + C_1 e^{sx} \int_0^x e^{-(s+\beta)y} dy \right] \\
&= \beta \left[-C_0 e^{rx} \left(\frac{e^{-(r+\beta)x}}{r+\beta} - \frac{1}{r+\beta} \right) - C_1 e^{sx} \left(\frac{e^{-(s+\beta)x}}{s+\beta} - \frac{1}{s+\beta} \right) \right] \\
&= \beta \left[\frac{C_0}{r+\beta} (e^{rx} - e^{-\beta x}) + \frac{C_1}{s+\beta} (e^{sx} - e^{-\beta x}) \right] \\
&= \beta \left[\frac{C_0}{r+\beta} e^{rx} + \frac{C_1}{s+\beta} e^{sx} - \left(\frac{C_0}{r+\beta} + \frac{C_1}{s+\beta} \right) e^{-\beta x} \right]
\end{aligned}$$

und erhalten somit

$$\begin{aligned}
&(1+\theta)\mu(C_0 r e^{rx} + C_1 s e^{sx}) - (1+\alpha)(C_0 e^{rx} + C_1 e^{sx}) \\
&+ \beta \left[\frac{C_0}{r+\beta} e^{rx} + \frac{C_1}{s+\beta} e^{sx} - \left(\frac{C_0}{r+\beta} + \frac{C_1}{s+\beta} \right) e^{-\beta x} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Vereinfacht man diese unter Verwendung von (4.16) erhält man:

$$\begin{aligned}
C_0 e^{rx} \underbrace{[(1+\theta)\mu r^2 + (\theta-\alpha)r - \alpha\beta]}_{=0} + C_1 e^{sx} \underbrace{[(1+\theta)\mu s^2 + (\theta-\alpha)s - \alpha\beta]}_{=0} \\
- \beta \left(\frac{C_0}{r+\beta} + \frac{C_1}{s+\beta} \right) e^{-\beta x} = 0 \\
\Rightarrow \frac{C_0}{\beta+r} + \frac{C_1}{\beta+s} = 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung Da $\beta + s > 0$ ist, müssen die Konstanten C_0 und C_1 unterschiedliche Vorzeichen haben. Damit eine positive Lösung der Erneuerungsgleichung (4.10) existiert, muss $C_0 > 0$, $C_1 < 0$ und $C_0 > -C_1$ gelten, da $r > 0 > s$ und $0 < x < \infty$ gilt.

Die Gleichungen (4.17) und (4.18) bestimmen nun explizite Lösungen der Konstanten C_0 und C_1 .

Es gilt:

$$C_0 = \frac{r + \beta}{\nu(b)}$$

$$C_1 = -\frac{s + \beta}{\nu(b)}$$

mit

$$\nu(b) = re^{rb}(r + \beta) - se^{sb}(s + \beta). \quad (4.19)$$

Setzt man die Konstanten in die Gleichung (4.14) folgt:

$$V(x, b) = \frac{r + \beta}{\nu(b)} e^{rx} - \frac{s + \beta}{\nu(b)} e^{sx}$$

$$= \frac{(r + \beta)e^{rx} - (s + \beta)e^{sx}}{\nu(b)} \quad (4.20)$$

Schlussendlich können wir die optimale Barriere b^* durch Lösen der Gleichung $h''(b) = \nu'(b) = 0$ berechnen. Das führt zu

$$b^* = \frac{1}{r - s} \ln \frac{s^2(s + \beta)}{r^2(r + \beta)}. \quad (4.21)$$

Beispiel Im Folgenden sei $c = 62.5$, $\beta = 1$, $\lambda = 50$ und $\delta = 0.1$.

Wir erhalten $V(x, b)$ durch Lösen der Gleichungen (4.16) und (4.20). Gleichung (4.16) liefert $r = 0.0077$ und $s = -0.2061$. Die Abbildung 4.3 zeigt $V(x, b)$ als Funktion in b für unterschiedliche Startwerte x . Jede dieser Funktionen erreicht ihr Maximum an der Stelle $b = b^* \approx 29.55$.

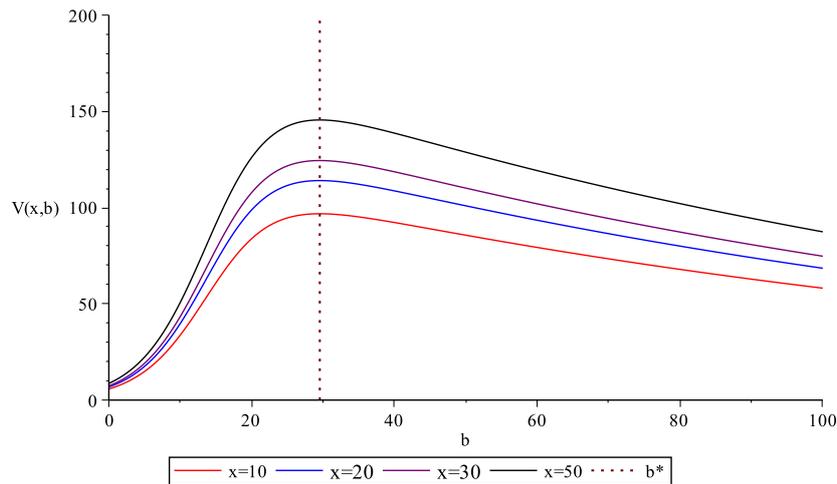


Abbildung 4.3: $V(x, b)$ als Funktion in b für unterschiedliche x

Kapitel 5

Der Verlust im Zeitpunkt des Ruins

Analog dem Kapitel 4 werden Dividenden gemäß einer Barriere-Strategie mit Barriere b ausbezahlt. Allgemein kann im klassischen Cramér-Lundberg Modell Ruin nur durch einen Schaden eintreten. Als Ruin bezeichnet man das Ereignis, in dem der Überschussprozess erstmalig negativ wird. Der Zeitpunkt, in dem Ruin eintritt, wurde mit $\tau := \inf\{t : t \geq 0 \text{ und } X_t \leq 0\}$ definiert. Die Höhe des Verlustes zum Zeitpunkt des Ruins beträgt somit $|X(\tau)|$.

5.1 Integro-Differentialgleichung für $R(x, b)$

Wir bezeichnen mit $R(x, b)$ den erwarteten, gegenwärtigen Wert des Verlusts, fällig zum Zeitpunkt des Ruins bei Auswahl einer Barriere-Strategie mit Barriere b und Anfangskapital $x \leq b$:

$$R(x, b) := \mathbb{E}[|X(\tau)|e^{-\delta\tau} | X(0) = x] \quad (5.1)$$

Lemma 5.1 Sei $R(x, b)$ wie oben definiert. Dann erfüllt $R(x, b)$ als Funktion von x die Integro-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} cR'(x, b) - (\lambda + \delta)R(x, b) + \lambda \int_0^x R(x - y, b) dF(y) \\ + \lambda \int_x^\infty [1 - F(y)] d(y) = 0, \quad 0 \leq x \leq b. \end{aligned} \quad (5.2)$$

mit der Randbedingung

$$R'(b, b) = 0. \quad (5.3)$$

Beweis

Betrachtet man ein infinitesimales Zeitintervall $[0, h]$ abhängig davon, ob ein Schaden im Intervall eintritt und die Höhe des Schadens, falls er eintritt, so erreicht der Reserveprozess die Barriere b zum Zeitpunkt h , sofern $x < b$ gilt und kein Schaden bis zum Zeitpunkt $h = \frac{b-x}{c}$ eingetreten ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
R(x, b) &= \int_0^h \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_{x+ct}^{\infty} (y - x - ct) dF(y) dt \\
&+ \int_h^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_b^{\infty} (y - b) dF(y) dt \\
&+ \int_0^h \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{x+ct} R(x + ct - y, b) dF(y) dt \\
&+ \int_h^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^b R(b - y, b) dF(y) dt
\end{aligned}$$

Substituiert man $s = x + ct$

$$\begin{aligned}
ce^{\frac{-(\lambda+\delta)x}{c}} R(x, b) &= \int_x^b \lambda e^{\frac{-(\lambda+\delta)s}{c}} \int_s^{\infty} (y - s) dF(y) ds \\
&+ \int_b^{\infty} \lambda e^{\frac{-(\lambda+\delta)s}{c}} \int_b^{\infty} (y - b) dF(y) ds \\
&+ \int_x^b \lambda e^{\frac{-(\lambda+\delta)s}{c}} \int_0^s R(s - y, b) dF(y) ds \\
&+ \int_b^{\infty} \lambda e^{\frac{-(\lambda+\delta)s}{c}} \int_0^b R(b - y, b) dF(y) ds
\end{aligned}$$

und differenziert die Gleichung nach x , gilt

$$\begin{aligned}
 -(\lambda + \delta)e^{-\frac{(\lambda+\delta)x}{c}}R(x, b) &= -ce^{-\frac{(\lambda+\delta)x}{c}}R'(x, b) - \lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)x}{c}} \int_x^\infty (y-x) dF(y) \\
 &\quad - \lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)x}{c}} \int_0^x R(x-y, b) dF(y) \\
 -(\lambda + \delta)R(x, b) + cR'(x, b) &= -\lambda \int_x^\infty (y-x) dF(y) - \lambda \int_0^x R(x-y, b) dF(y).
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für $R(x, b)$ die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 cR'(x, b) - (\lambda + \delta)R(x, b) + \lambda \underbrace{\int_x^\infty (y-x) dF(y)}_{(*)} \\
 + \lambda \int_0^x R(x-y, b) dF(y) = 0. \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Zum Abschluss lösen wir das Integral $(*)$ durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
 \int_x^\infty (y-x) dF(y) &= \int_x^\infty y dF(y) - x \int_x^\infty dF(y) = \int_x^\infty y dF(y) - x[1 - F(x)] \\
 &= \underbrace{\int_0^\infty y dF(y)} - \int_0^x y dF(y) - x[1 - F(x)] \\
 &= \int_0^\infty [1 - F(y)] dy \\
 &= \int_0^\infty [1 - F(y)] dy - \left(yF(y)|_0^x - \int_0^x F(y) dy \right) - x[1 - F(x)] \\
 &= \int_0^\infty [1 - F(y)] dy - xF(x) + \int_0^x F(y) dy - x + xF(x) \\
 &= \int_0^\infty [1 - F(y)] dy + \int_0^x F(y) dy - \int_0^x 1 dy \\
 &= \int_0^\infty [1 - F(y)] dy - \int_0^x [1 - F(y)] dy = \int_x^\infty [1 - F(y)] dy.
 \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Randbedingung $R'(b, b) = 0$, sei $x = b$ angenommen. Betrachtet man $R(b, b)$ abhängig davon, ob ein Schaden vor oder nach dem Erreichen der Barriere b eintritt, so folgt

$$\begin{aligned} R(b, b) &= \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left[\int_b^\infty (y-b) dF(y) + \int_0^b R(b-y, b) dF(y) \right] dt \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+\delta} \left[\int_b^\infty (y-b) dF(y) + \int_0^b R(b-y, b) dF(y) \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Setzt man $x = b$ in Gleichung (5.4)

$$cR'(b, b) = (\lambda + \delta)R(b, b) - \lambda \int_0^b R(b-y, b) dF(y) - \lambda \int_b^\infty (y-b) dF(y)$$

und vergleicht das Resultat mit der Gleichung (5.5) gilt

$$R'(b, b) = 0.$$

■

Bemerkung Für $c = (1 + \theta)\lambda\mu$, kann man die Integro-Differentialgleichung (5.2) noch alternativ anschreiben:

$$\begin{aligned} (1 + \theta)\mu R'(x, b) - (1 + \alpha)R(x, b) + \int_0^x R(x-y, b) dF(y) \\ + \int_x^\infty [1 - F(y)] d(y) = 0, \quad 0 \leq x \leq b \end{aligned} \quad (5.6)$$

mit $\alpha = \frac{\delta}{\lambda}$.

5.1.1 Exponentiell verteilte Schäden

In diesem Abschnitt betrachten wir exponentiell verteilte Schäden und wenden die Methoden und Resultate aus dem letzten Kapitel auf $R(x, b)$ an.

Man kann zeigen, dass sich die Integro-Differentialgleichung (5.6), analog $V(x, b)$, in eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten 2. Ordnung umwandeln lässt.

Dafür wendet man den Operator $(\frac{d}{dx} + \beta)$ auf die Integro-Differentialgleichung (5.6) an und erhält

$$\begin{aligned} & (1 + \theta)\mu R''(x, b) - (1 + \alpha)R'(x, b) + (1 + \theta)\beta\mu R'(x, b) - (1 + \alpha)\beta R(x, b) \\ & + \underbrace{\left(\frac{d}{dx} + \beta\right) \left(\lambda \int_0^x R(x-y, b) dF(y)\right)}_{=\beta R(x, b)} \\ & = \left(\frac{d}{dx} + \beta\right) \left(-\int_x^\infty [1 - F(y)] dy\right). \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass die linke Seite dieselbe Gestalt hat wie die Differentialgleichung (4.13). Für die Gleichheit muss noch gezeigt werden, dass der Ausdruck auf der rechten Seite gleich null ist. Nach Voraussetzung ist $Y \sim Exp(\beta)$ mit Verteilungsfunktion $F(y) = 1 - e^{-\beta y}$. Daraus folgt:

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta\right) \left(-\int_x^\infty e^{-\beta y} dy\right) = \left(\frac{d}{dx} + \beta\right) \left(-\frac{e^{-\beta x}}{\beta}\right) = 0.$$

Somit genügt $R(x, b)$ derselben Differentialgleichung wie $V(x, b)$:

$$(1 + \theta)\mu R''(x, b) + (\theta - \alpha)R'(x, b) - \alpha\beta R(x, b) = 0 \quad (5.7)$$

Diese Differentialgleichung löst man mit dem Ansatz

$$R(x, b) = D_0 e^{rx} + D_1 e^{sx} \quad 0 \leq x \leq b, \quad r, s, D_0, D_1 \in \mathbb{R} \quad (5.8)$$

durch die Nullstellen r und s des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung:

$$(1 + \theta)\mu\xi^2 + (\theta - \alpha)\xi - \alpha\beta = 0.$$

Für die Berechnung der Konstanten $D_k = D_k(b)$, $k = 0, 1$ verwenden wir einerseits die Randbedingung $R'(b, b) = 0$,

$$R'(b, b) = D_0 r e^{rb} + D_1 s e^{sb} = 0 \quad (5.9)$$

und setzen $R(x, b)$ aus (5.8) in die Integro-Differentialgleichung (5.6) ein. Als Resultat erhalten wir:

$$\frac{\beta}{\beta + r} D_0 + \frac{\beta}{\beta + s} D_1 = \frac{1}{\beta} \quad (5.10)$$

Durch Lösen der Gleichungen (5.9) und (5.10) können die Konstanten D_0 und D_1 bestimmt werden. Es ist

$$D_0 = -s e^{sb} \frac{(r + \beta)(s + \beta)}{\beta^2 \nu(b)}, \quad D_1 = r e^{rb} \frac{(r + \beta)(s + \beta)}{\beta^2 \nu(b)} \quad (5.11)$$

mit

$$\nu(b) := re^{rb}(r + \beta) - se^{sb}(s + \beta).$$

Aus $rs = -\frac{\beta\delta}{c}$ und $r + s = \beta + \frac{\lambda + \delta}{c}$ gilt

$$\frac{1}{\beta}(\beta + r)(\beta + s) = \frac{\lambda}{c}$$

und damit kann man die Konstanten noch vereinfachen. Es gilt

$$D_0 = -\frac{\lambda se^{sb}}{\beta c \nu(b)}, \quad D_1 = \frac{\lambda re^{rb}}{\beta c \nu(b)}. \quad (5.12)$$

Die Konstanten in Gleichung (5.8) eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} R(x, b) &= -se^{sb} \frac{(r + \beta)(s + \beta)}{\beta^2 \nu(b)} e^{rx} + re^{rb} \frac{(r + \beta)(s + \beta)}{\beta^2 \nu(b)} e^{sx} \\ &= \frac{\lambda re^{rb} e^{sx} - se^{sb} e^{rx}}{\beta c \nu(b)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Abbildung 5.1 zeigt graphisch die Entwicklung von $R(x, b)$ für verschiedene Anfangskapitalien. Für die Berechnung wurde $c = 62.5$, $\beta = 1$, $\lambda = 50$ und $\delta = 0.1$ angenommen. Je größer die Barriere b ist, desto geringer wird der erwartete diskontierte Verlust.

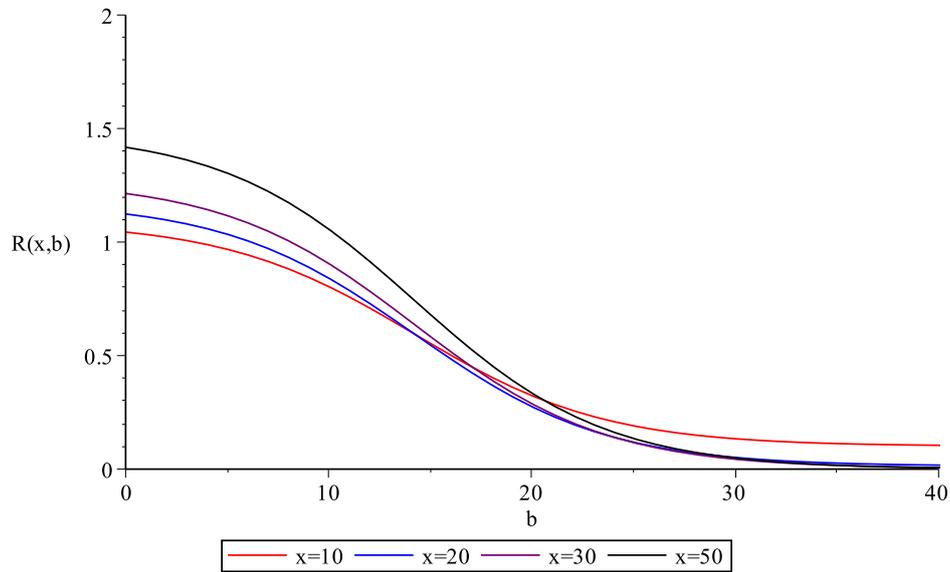


Abbildung 5.1: $R(x, b)$ als Funktion in b für unterschiedliche x

Kapitel 6

Dickson-Waters Modifikation

Die folgende Idee beruht auf einer Arbeit von David C.M.Dickson und Howard R.Waters⁴. Sie schlugen vor, dass Aktionäre, die von Dividendenzahlungen profitieren auch die Verantwortung für den Fall übernehmen sollten, dass Ruin eintritt und den Verlust, der nicht durch den Reserveprozess abgedeckt ist, tragen sollten. In diesem Fall liegt das Interesse nicht nur an der Maximierung der erwarteten Dividendenzahlungen bis zum möglichen Ruin, sondern das Ziel wird sein, den Erwartungswert der Differenz aus den diskontierten Dividenden bis Ruin und dem diskontierten Verlust, zu maximieren. Folglich gilt es die optimale Barriere b zu finden, sodass

$$W(x, b) := V(x, b) - R(x, b) \quad 0 \leq x \leq b \quad (6.1)$$

maximal wird. Wir bezeichnen das optimale b mit b° und setzen $b^\circ > 0$ voraus. Somit folgt sofort

$$\frac{\partial}{\partial b} W(x, b)|_{b=b^\circ} = 0. \quad (6.2)$$

Bemerkung b° ist unabhängig von x .

In den vorherigen Kapiteln konnten wir zeigen, dass $V'(b, b) = 1$ und $R'(b, b) = 0$ gilt. Somit erhalten für $W(x, b)$ die Bedingung

$$W'(b, b) = 1. \quad (6.3)$$

Differenziert man diese Gleichung nach b

$$W''(b, b) + \frac{\partial}{\partial b} W'(x, b)|_{x=b} = 0.$$

⁴Siehe [7]

und setzt $b = b^\circ$, folgt mit Hilfe von (6.2), dass

$$W''(b^\circ, b^\circ) = 0 \quad (6.4)$$

ist.

Bemerkung In der Finanzliteratur werden die beiden Optimalitätsbedingungen (4.9) und (6.4) auch "*high contract conditions*" genannt.

6.1 Bestimmen der optimalen Barriere b°

Betrachtet man die Dickson-Waters Modifikation, so gilt es folgende Funktion zu maximieren:

$$\begin{aligned} W(x, b) &= V(x, b) - R(x, b) \\ &= (C_0(b) - D_0(b))e^{rx} + (C_1(b) - D_1(b))e^{sx} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Das optimale Funktional b° ist die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial b} W(x, b) = (C'_0(b) - D'_0(b))e^{rx} + (C'_1(b) - D'_1(b))e^{sx} = 0. \quad (6.6)$$

Somit muss b° die Bedingungen

$$C'_0(b) - D'_0(b) = 0, \quad (6.7)$$

$$C'_1(b) - D'_1(b) = 0 \quad (6.8)$$

erfüllen. Die Äquivalenz der beiden Bedingungen zeigt die folgende Rechnung. Aus den Gleichungen (4.18) und (5.10) folgt durch Umformung

$$\frac{\beta^2}{\beta + r}(C_0 - D_0) + \frac{\beta^2}{\beta + s}(C_1 - D_1) = -1$$

und durch die Ableitung

$$\frac{1}{\beta + r}(C'_0 - D'_0) + \frac{1}{\beta + s}(C'_1 - D'_1) = 0,$$

sieht man, dass die beiden Bedingungen (6.7) und (6.8) tatsächlich äquivalent sind.

Eine weitere Möglichkeit b° zu bestimmen, ist durch die Bedingung $W''(b^\circ, b^\circ) = 0$ gegeben. b° erfüllt die Gleichung

$$W''(b^\circ, b^\circ) = r^2(C_0(b^\circ) - D_0(b^\circ))e^{rb^\circ} + s^2(C_1(b^\circ) - D_1(b^\circ))e^{sb^\circ} = 0. \quad (6.9)$$

Die drei Gleichungen (6.7), (6.8) und (6.9) sind implizite Gleichungen für b° und müssen numerisch gelöst werden.

Bemerkung Setzt man $x = b^*$ in der Differentialgleichung (4.13), so gilt unter der Verwendung von $V'(b^*, b^*) = 1$ und $V''(b^*, b^*) = 0$:

$$(1 + \theta)\mu \underbrace{V''(b^*, b^*)}_{=0} = (\theta - \alpha) \underbrace{V'(b^*, b^*)}_{=1} - \alpha\beta V(b^*, b^*) = 0$$

$$\Rightarrow V(b^*, b^*) = \frac{\theta}{\alpha\beta} - \frac{1}{\beta}. \quad (6.10)$$

Nun erfüllt $W(x, b)$ dieselbe Differentialgleichung wie $V(x, b)$. Das bedeutet für $x = b^\circ$ und unter Berücksichtigung der Gleichungen (6.3) und (6.4) gilt ebenfalls

$$W(b^\circ, b^\circ) = \frac{\theta}{\alpha\beta} - \frac{1}{\beta}. \quad (6.11)$$

6.1.1 Exponentiell verteilte Schäden

Für $W(x, b)$, den Erwartungswert der Differenz aus den diskontierten Dividenden und dem diskontierten Verlust bis Ruin, gilt:

$$W(x, b) = V(x, b) - R(x, b)$$

$$= \frac{(r + \beta)e^{rx} - (s + \beta)e^{sx}}{\nu(b)} - \frac{\lambda r e^{rb} e^{sx} - s e^{sb} e^{rx}}{\beta c \nu(b)}. \quad (6.12)$$

Die Gleichungen (6.7) und (6.8) liefern notwendige Bedingungen zur Bestimmung der optimalen Barriere b° . Die Konstanten C_0, C_1, D_0, D_1 wurden unter der Annahme exponentiell verteilter Schäden in den letzten Kapiteln berechnet. Der Ausdruck $C'_0(b) - D'_0(b) = 0$ bestimmt folgende Bedingung, sodass $\frac{\partial}{\partial b} W(x, b) = 0$ gilt:

$$(\beta + r)r^2 e^{rb} - (\beta + s)s^2 e^{sb} = \frac{\lambda}{\beta c} r s (s - r) e^{(r+s)b} \quad (6.13)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist die optimale Barriere b° , die $W(x, b)$ maximiert.

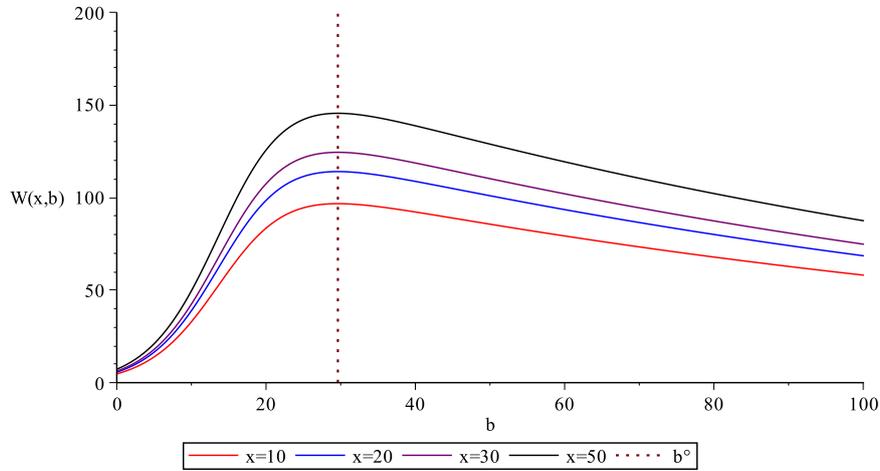


Abbildung 6.1: $W(x, b)$ als Funktion in b für unterschiedliche x

Abbildung 6.1 veranschaulicht $W(x, b)$ als Funktion von b für $c = 62.5$, $\beta = 1$, $\lambda = 50$ und $\delta = 0.1$. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind $r = 0.0077$ und $s = -0.2061$. Die Gleichung (6.13) zeigt, dass die optimale Barriere b° nicht von dem Anfangskapital x abhängt. In diesem konkreten Beispiel ist die optimale Barriere $b^\circ = 29.59$. Abbildung 6.2 zeigt $W(x, b)$ als Funktion des Anfangskapitals x für unterschiedliche Barrieren b . Man kann erkennen, dass $W(x, b^\circ) > W(x, b)$ für $b \neq b^\circ$ gilt.

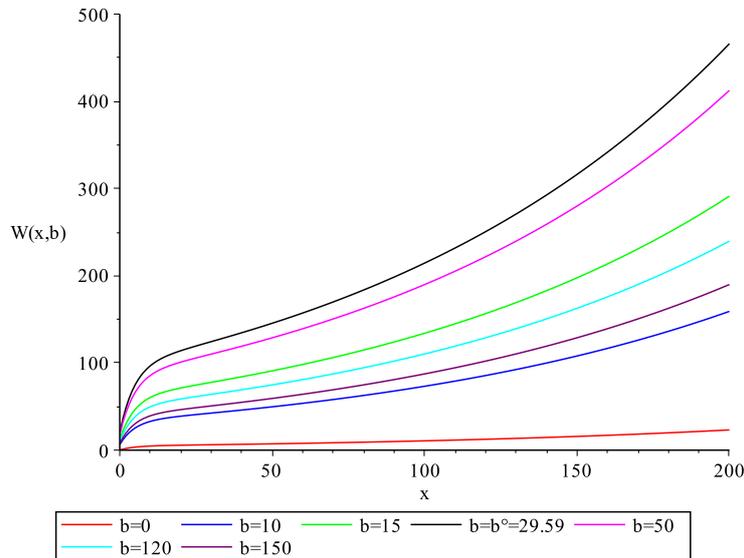


Abbildung 6.2: $W(x, b)$ als Funktion in x für unterschiedliche Barrieren b

6.2 Vergleich der Barrieren

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Auswirkung der Dickson-Waters Modifikation auf die optimale Barriere b^* . Für den Vergleich der Barrieren b^* und b° nehmen wir an, dass die Schäden durch eine Exponentialverteilung modelliert werden und normieren die Höhe der Schäden mit $\beta = 1$. Somit vereinfacht sich (4.16)

$$(1 + \theta)\xi^2 + (\theta - \alpha)\xi - \alpha = 0. \quad (6.14)$$

Die verbleibenden Parameter in diesem Modell sind θ und α . Die restlichen Variablen $r, s, C_0, C_1, D_0, D_1, b^*$ und b° hängen nur von den beiden Parametern ab.

Im Kapitel 4.3.2 konnte man unter der Annahme exponentiell verteilter Schäden eine explizite Lösungsformel für b^* hergeleitet. Das ist jedoch für b° im Allgemeinen nicht möglich. Wir stellen nun einen Algorithmus vor um b° numerisch zu berechnen. Aus der Gleichung

$$W''(b^\circ, b^\circ) = r^2(C_0(b^\circ) - D_0(b^\circ))e^{rb^\circ} + s^2(C_1(b^\circ) - D_1(b^\circ))e^{sb^\circ} = 0$$

folgt, dass b° die Lösung von

$$b = \frac{1}{r-s} \ln \frac{s^2(D_1(b) - C_1(b))}{r^2(C_0(b) - D_0(b))} \quad (6.15)$$

ist. Wir bezeichnen den Ausdruck auf der rechten Seite mit $g(b)$. Weiters berechnet man b_1, b_2, b_3, \dots rekursiv mit der Formel

$$b_{k+1} = g(b_k). \quad (6.16)$$

Wir können beobachten, dass die b_k sehr schnell gegen b° konvergieren. Eine genaue Aussage über die Konvergenz liefert der folgende Satz.

Satz 6.1 Sei p eine Lösung von $x = g(x)$ und $M \in \mathbb{R}$. Angenommen es sei $g'(p) = 0$ und g'' ist stetig mit $|g''(x)| < M$ auf einem offenen Intervall I mit $p \in I$.

Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass für $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ die Folge $p_n = g(p_{n-1})$, $n \geq 1$ zumindest quadratisch gegen p konvergiert.

Beweis Siehe Burden [8] Theorem 2.9 auf Seite 81.

Mit der Lösung b° sind die notwendigen Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt. Somit konvergieren die b_k zumindest quadratisch gegen b° .

Als nächstes widmen wir uns der Fragestellung, inwiefern die Dickson-Waters-Modifikation die optimale Barriere b^* beeinflusst. Betrachtet man b^* und

die zugehörigen Werte b° für verschiedene Parameter α und θ so sieht man, dass die Differenz der beiden meist sehr klein ist und b° stets größer als b^* gilt⁵. Abbildung 6.3 zeigt graphisch die Ergebnisse der folgende Tabelle für $\alpha = 0.01$ und unterschiedliche Sicherheitszuschläge θ .

θ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
b^*	6,99	11,89	13,82	14,47	14,60	14,53	14,39	14,22
b°	7,69	12,24	14,01	14,58	14,67	14,58	14,43	14,25

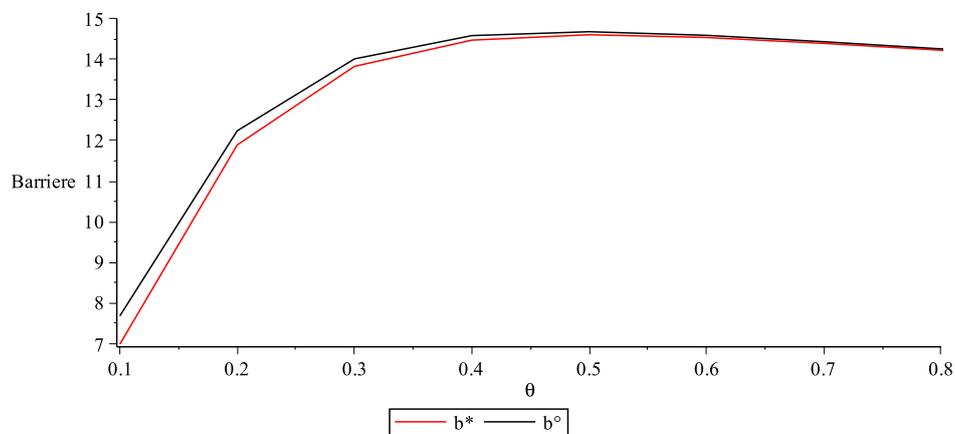


Abbildung 6.3: Vergleich der optimalen Barrieren für $f(y) = e^{-y}, y > 0$

Lemma 6.2 b° ist strikt größer als b^*

Beweis Wir betrachten

$$L(x, b) = \mathbb{E}[e^{-\delta\tau} | X(0) = x],$$

den erwarteten gegenwärtigen Wert von eins fällig zur Ruinzeit.

Bemerkung Als Funktion von δ ist diese Funktion die Laplace Transformierte⁶ der Verteilung der Ruinzeit.

⁵Die entsprechenden Tabellen findet man im Anhang A.

⁶Die **Laplace-Transformation** ist eine Integraltransformation, die eine gegebene Funktion f vom reellen Zeitbereich in eine Funktion F im Spektralbereich überführt. Definition und umfangreiche Darstellung der Theorie findet man in Büchern der Analysis.

Als Funktion von x erfüllt $L(x, b)$ ⁷:

$$cL'(x, b) - (\lambda + \delta)L(x, b) + \lambda \int_0^x L(x - y, b) dF(y) \\ + \lambda[1 - F(x)] = 0 \quad 0 \leq x \leq b. \quad (6.17)$$

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial b} L(x, b) < 0 \quad (6.18)$$

und im Fall exponentiell verteilter Schäden mit Schadenshöhe $\beta = 1$ ist aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Exponentialfunktion

$$R(x, b) = L(x, b).$$

Daraus kann man folgern, dass

$$\frac{\partial}{\partial b} W(x, b) = \frac{\partial}{\partial b} V(x, b) - \frac{\partial}{\partial b} L(x, b) > \frac{\partial}{\partial b} V(x, b)$$

und für $b = b^\circ$

$$0 = \frac{\partial}{\partial b} W(x, b)|_{b=b^\circ} > \frac{\partial}{\partial b} V(x, b)|_{b=b^\circ}, \quad (6.19)$$

gilt, wodurch $b^* < b^\circ$ gelten muss. ■

Der folgende Satz stammt aus dem Buch Gerber [3] Kapitel 10 Formel (1.16). Er liefert eine hinreichende Bedingung dafür, dass b^* positiv ist.

Satz 6.3 b^* ist genau dann positiv, wenn

$$\alpha > \sqrt{1 + \theta} - 1 \quad (6.20)$$

gilt.

Beweis Wir benützen die Eigenschaft, dass r und s Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$(1 + \theta)\xi^2 + (\theta - \alpha)\xi - \alpha = 0. \quad (6.21)$$

⁷Siehe [4]

sind, und formen die Gleichung

$$b^* = \frac{1}{r-s} \ln \frac{s^2(s+\beta)}{r^2(r+\beta)} \quad (6.22)$$

um. s^2 und r^2 in (6.22) eingesetzt, liefert

$$b^* = \frac{1}{r-s} \ln \left(\frac{A-Bs}{A-Br} \right) \quad (6.23)$$

mit

$$A = \alpha(\alpha + 1)$$

und

$$B = \theta + 1 - (\alpha + 1)^2.$$

Aus (6.23) folgt, dass b^* genau dann positiv ist, wenn $B > 0$ gilt und das ist äquivalent zu der Behauptung (6.20). ■

Bemerkung Angenommen b^* und b° sind beide positiv. Dann folgt aus (6.10) und (6.11) die Gleichheit von

$$V(b^*, b^*) = W(b^\circ, b^\circ),$$

wodurch ebenfalls $b^* < b^\circ$ gelten muss.

Kapitel 7

Kombinationen von Exponentialverteilungen

Eine mögliche Erweiterung des Modells ergibt sich dadurch, dass man Verteilungen, meist gleichen Typs, miteinander mischt. Dadurch kann man beispielsweise zugrundeliegende Schadensdaten genauer modellieren oder Extremwerte⁸ einer Stichprobe besser in den Griff bekommen.

Definition 7.1 Angenommen, es gibt n Verteilungen mit den Dichten f_1, \dots, f_n , mit den Mittelwerten μ_1, \dots, μ_n und den Varianzen $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$. Dann ist die Dichte einer Mischung der Verteilungen gegeben durch:

$$f(y) = \sum_{i=1}^n A_i f_i(y), \quad y > 0 \quad (7.1)$$

Dabei sind $A_1, A_2 \dots A_n$ diskrete Mischungswahrscheinlichkeiten mit $\sum_{i=1}^n A_i = 1$. Der Mittelwert der so definierten stochastischen Größe ist das gewichtete Mittel der Mittelwerte μ_i :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^n A_i \mu_i = \bar{\mu}$$

und für die Varianz gilt

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n A_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n A_i (\mu_i - \bar{\mu})^2.$$

In dieser Arbeit betrachten wir Kombinationen von Exponentialverteilungen, die zur Modellierung der Schäden herangezogen werden. Somit hat die

⁸Bezeichnet minimale und maximale Werte einer Stichprobe, die von der "Standardverteilung" stark abweichen.

Kombination von n Exponentialverteilungen die Dichte

$$f(y) = \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i y}, \quad y > 0, \quad (7.2)$$

mit $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$ und $A_1 + A_2 + \dots + A_n = 1$. Die Laplace-Transformierte der Funktion $f(y)$ ist

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_i}{\beta_i + \xi}. \quad (7.3)$$

Wendet man den Operator

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{d}{dx} + \beta_i \right) \quad (7.4)$$

unter Berücksichtigung von

$$\left(\frac{d}{dx} + \beta_i \right) \int_0^x V(x-y, b) dF(y) = \beta_i V(x, b), \quad i = 1, \dots, n \quad (7.5)$$

auf die Gleichung

$$cV'(x, b) - (\lambda + \delta)V(x, b) + \lambda \int_0^x V(x-y, b) dF(y) = 0, \quad 0 \leq x \leq b \quad (7.6)$$

an, sieht man, dass die Funktion $V(x, b)$ einer homogenen linearen Differentialgleichung $n+1$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten genügt. Für $R(x, b)$ gehen wir analog vor und wenden den Operator (7.4) auf die Gleichung (5.2) an. Die Lösungen können über den exponentiellen Ansatz

$$V(x, b) = \sum_{k=0}^n C_k e^{\rho_k x}, \quad 0 \leq x \leq b, \quad (7.7)$$

$$R(x, b) = \sum_{k=0}^n D_k e^{\rho_k x}, \quad 0 \leq x \leq b \quad (7.8)$$

bestimmt werden, mit $C_k, D_k, \rho_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

7.1 Allgemeine Lösung der Integro-Differentialgleichung für $V(x, b)$

Betrachtet man (7.6) und setzt die Gleichungen (7.2) und (7.7) ein, gilt:

$$(1 + \theta)\mu \sum_{k=0}^n C_k \rho_k e^{\rho_k x} - (1 + \alpha) \sum_{k=0}^n C_k e^{\rho_k x} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^n A_i C_k \frac{\beta_i}{\beta_i + \rho_k} (e^{\rho_k x} - e^{-\beta_i x}) = 0. \quad (7.9)$$

Setzt man die Koeffizienten von $e^{\rho_k x}$ gleich null, erhält man

$$(1 + \theta)\mu \rho_k - (1 + \alpha) + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_i}{\beta_i + \rho_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (7.10)$$

Folglich sind $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n$ die Lösungen der Gleichung

$$(1 + \theta)\mu \xi - (1 + \alpha) + \hat{f}(\xi) = 0. \quad (7.11)$$

Der Zusammenhang der Parameter β_i und den Lösungen ρ_k wird im folgenden Beispiel illustriert.

Beispiel Für $n = 2$ sind die drei Lösungen der Gleichung

$$A_1 \frac{\beta_1}{\beta_1 + \xi} + A_2 \frac{\beta_2}{\beta_2 + \xi} = 1 + \alpha - (1 + \theta)\mu \xi \quad (7.12)$$

immer eindeutig. Es gilt

$$\rho_0 > 0 > \rho_1 > -\beta_1 > \rho_2 > -\beta_2$$

für $A_1 > 0, A_2 > 0$ und

$$\rho_0 > 0 > \rho_1 > -\beta_1 > -\beta_2 > \rho_2$$

für den Fall, dass $A_1 > 0$ und $A_2 < 0$ ist. Diese Ungleichungen werden in den folgenden Abbildungen dargestellt.

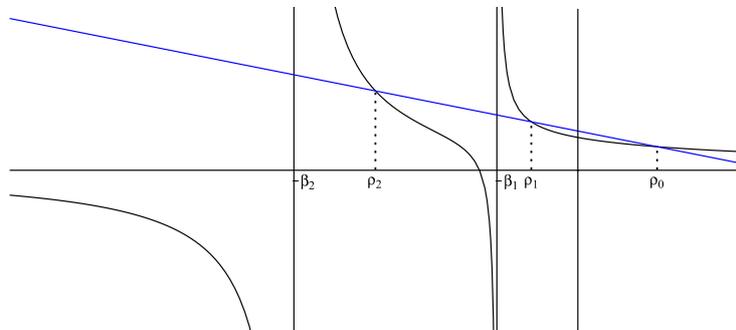
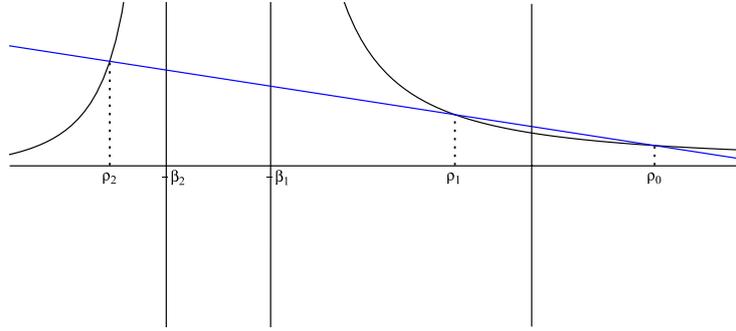


Abbildung 7.1: Die Lösungen von (7.12), für $A_1 > 0, A_2 > 0$


 Abbildung 7.2: Die Lösungen von (7.12), für $A_1 > 0, A_2 < 0$

Zum Abschluss betrachten wir Gleichung (7.9) und setzen die Koeffizienten von $e^{-\beta_i x}$ gleich 0. Somit erhalten wir durch

$$\sum_{k=0}^n C_k \frac{1}{\beta_i + \rho_k} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.13)$$

und der Randbedingung

$$V'(b, b) = \sum_{k=0}^n C_k \rho_k e^{\rho_k b} = 1 \quad (7.14)$$

ein $n + 1$ dimensionales, lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten C_0, C_1, \dots, C_n .

7.2 Allgemeine Lösung der Integro-Differentialgleichung für $R(x, b)$

Für die Bestimmung der Koeffizienten D_0, D_1, \dots, D_n der Gleichung (7.8) geht man analog dem vorigen Abschnitt vor. Wir substituieren (7.2) und (7.8) in (5.6) und erhalten dadurch

$$\begin{aligned} & (1 + \theta)\mu \sum_{k=0}^n D_k \rho_k e^{\rho_k x} - (1 + \alpha) \sum_{k=0}^n D_k e^{\rho_k x} \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^n A_i D_k \frac{\beta_i}{\beta_i + \rho_k} (e^{\rho_k x} - e^{-\beta_i x}) + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\beta_i} e^{-\beta_i x} = 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Der Koeffizientenvergleich von $e^{\rho_k x}$ liefert

$$(1 + \theta)\mu \rho_k - (1 + \alpha) + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\beta_i}{\beta_i + \rho_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (7.16)$$

Das heißt, die Berechnung von $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n$ erfolgt analog $V(x, b)$ durch die Gleichung (7.11). Für die Berechnung der Konstanten setzen wir die Koeffizienten von $e^{-\beta_i x}$ gleich null und erhalten

$$\sum_{k=0}^n D_k \frac{1}{\beta_i + \rho_k} = \frac{1}{\beta_i}. \tag{7.17}$$

Aus der Beziehung $R'(b, b) = 0$ folgt,

$$R'(b, b) = \sum_{k=0}^n D_k \rho_k e^{\rho_k b} = 0 \tag{7.18}$$

und damit erhalten wir durch (7.17) und (7.18) ein $n+1$ dimensionales, lineares Gleichungssystem zu der Bestimmung der Konstanten D_0, D_1, \dots, D_n .

7.3 Exponentiell verteilte Schäden

Für die beispielhafte Berechnung von $V(x, b)$ und $W(x, b)$ in den vorherigen Kapiteln wurde für die Schadenshöhe stets $p(y) = e^{-y}, y > 0$ angenommen. Diese Verteilung hat Varianz 1 und eine Schiefe ⁹ von 2. Zum Vergleich betrachten wir noch zwei weitere Verteilungen, jeweils eine Kombination von zwei Exponentialverteilungen mit Erwartungswert 1.

Beispiel 1

$$f(y) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \right) + \frac{2}{3} (2e^{-2y}), y > 0 \tag{7.19}$$

Beispiel 2

$$f(y) = 2 \left(\frac{3}{2} e^{-\frac{3y}{2}} \right) - (3e^{-3y}), y > 0. \tag{7.20}$$

Die erste Verteilung ist eine Mischung von zwei Exponentialverteilungen, mit Varianz gleich 2 und einer Schiefe von 3.36. Die zweite Kombination stellt die Summe der Exponentialverteilungen mit Parameter $\lambda = \frac{3}{2}$ und $\lambda = 3$ dar. Die Varianz dieser Funktion ist 0,56 und die Schiefe beträgt 1.61.

⁹Die Schiefe einer Zufallsvariablen ist das zentrale Moment 3.Ordnung, normiert auf die Standardabweichung. Sie beschreibt die Neigung einer statistischen Verteilung und zeigt an, wie stark die Verteilung nach rechts (positive Schiefe) oder nach links (negative Schiefe) geneigt ist. Eine symmetrische Verteilung besitzt eine Schiefe von 0.

Basierend auf den Daten der Varianz und der Schiefe zeigt Abbildung 7.3 die Wahrscheinlichkeitsverteilung der drei Funktionen in absteigender Reihenfolge.

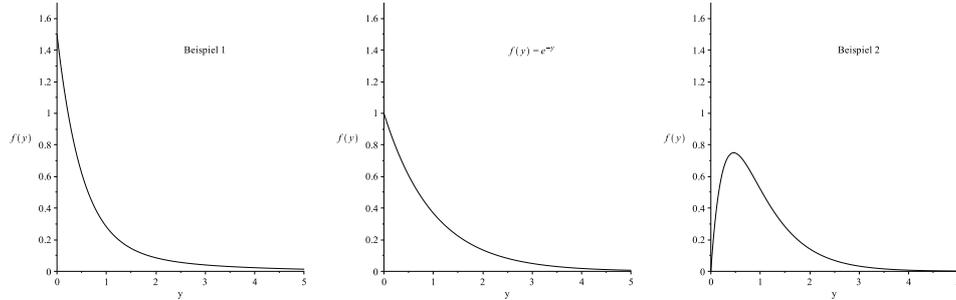


Abbildung 7.3: Dichte der Exponentialverteilungen $f(y)$

Mit den vorgestellten Methoden aus dem Kapitel 7 wurden die optimalen Barrieren b^* und b° für die beiden Kombinationen ermittelt und in den folgenden Tabellen gegenüber gestellt.

θ	α									
	0.0001	0.001	0.002	0.003	0.005	0.01	0.1	0.2	0.5	1
0.10	132.40	51.39	31.79	22.64	13.71	5.71	0.77	0.24	0.00	0.00
0.20	97.62	52.14	38.40	30.75	21.92	12.10	1.02	0.41	0.00	0.00
0.30	81.02	48.16	37.95	32.00	24.67	15.57	1.28	0.57	0.00	0.00
0.40	71.42	44.78	36.49	31.59	25.43	17.36	1.55	0.71	0.00	0.00
0.50	65.19	42.20	35.08	30.85	25.49	18.29	1.83	0.86	0.00	0.00
0.60	60.82	40.24	33.88	30.11	25.31	18.78	2.13	1.00	0.08	0.00
0.70	57.59	38.71	32.90	29.45	25.06	19.04	2.46	1.13	0.15	0.00
0.80	55.11	37.50	32.09	28.89	24.80	19.19	2.80	1.26	0.22	0.00
0.90	53.16	36.52	31.42	28.40	24.56	19.26	3.15	1.39	0.29	0.00
1.00	51.58	35.71	30.86	27.99	24.33	19.30	3.51	1.52	0.36	0.00
1.50	46.78	33.21	29.08	26.65	23.56	19.30	5.05	2.13	0.65	0.00
2.00	44.41	31.96	28.17	25.96	23.15	19.28	6.08	2.74	0.89	0.11

Tabelle 1: b^* für $f(y) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}) + \frac{2}{3}(2e^{-2y}), y > 0$

θ	α									
	0.0001	0.001	0.002	0.003	0.005	0.01	0.1	0.2	0.5	1
0.10	132.42	51.60	32.16	23.13	14.35	6.50	1.02	0.57	0.08	0.00
0.20	97.62	52.20	38.52	30.93	22.21	12.58	1.29	0.72	0.15	0.00
0.30	81.02	48.18	38.00	32.08	24.82	15.86	1.56	0.86	0.22	0.00
0.40	71.43	44.79	36.52	31.64	25.52	17.54	1.84	1.00	0.29	0.00
0.50	65.19	42.21	35.10	30.89	25.55	18.41	2.14	1.14	0.36	0.00
0.60	60.82	40.25	33.90	30.14	25.36	18.87	2.46	1.27	0.42	0.00
0.70	57.59	38.72	32.91	29.47	25.10	19.12	2.81	1.40	0.48	0.01
0.80	55.12	37.50	32.10	28.90	24.83	19.24	3.17	1.52	0.54	0.05
0.90	53.16	36.52	31.43	28.41	24.58	19.31	3.52	1.65	0.59	0.08
1.00	51.58	35.71	30.87	28.00	24.35	19.34	3.87	1.77	0.65	0.11
1.50	46.78	33.21	29.08	26.65	23.56	19.32	5.30	2.38	0.89	0.26
2.00	44.41	31.96	28.17	25.97	23.15	19.29	6.26	2.98	1.10	0.39

Tabelle 2: b° für $f(y) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}) + \frac{2}{3}(2e^{-2y}), y > 0$

Man kann erkennen, dass stets $b^* < b^\circ$ gilt, wobei der Unterschied meist nur sehr gering ist. Die optimalen Barrieren b^* und b° als Funktion von α und θ sind fallend in α , aber nicht monoton in θ .

θ	α									
	0.0001	0.001	0.002	0.003	0.005	0.01	0.1	0.2	0.5	1
0.10	79.20	37.69	26.04	20.02	13.61	7.24	0.00	0.00	0.00	0.00
0.20	54.91	32.88	26.04	22.06	17.20	11.21	0.00	0.00	0.00	0.00
0.30	44.10	28.52	23.68	20.82	17.20	12.40	0.00	0.00	0.00	0.00
0.40	37.95	25.54	21.70	19.42	16.53	12.59	0.00	0.00	0.00	0.00
0.50	33.96	23.42	20.18	18.26	15.81	12.45	2.58	0.00	0.00	0.00
0.60	31.15	21.85	19.00	17.32	15.17	12.21	3.03	0.00	0.00	0.00
0.70	29.07	20.65	18.08	16.56	14.63	11.96	3.39	0.00	0.00	0.00
0.80	27.45	19.70	17.33	15.94	14.16	11.72	3.67	0.00	0.00	0.00
0.90	26.17	18.92	16.72	15.42	13.77	11.50	3.90	1.96	0.00	0.00
1.00	25.12	18.28	16.21	14.98	13.43	11.29	4.08	2.17	0.00	0.00
1.50	21.86	16.25	14.56	13.56	12.30	10.57	4.63	2.88	0.00	0.00
2.00	20.16	15.17	13.67	12.78	11.66	10.14	4.89	3.29	0.00	0.00

Tabelle 3: b^* für $f(y) = 2(\frac{3}{2}e^{-\frac{3y}{2}}) - 1(3e^{-3y})$, $y > 0$

θ	α									
	0.0001	0.001	0.002	0.003	0.005	0.01	0.1	0.2	0.5	1
0.10	79.21	37.69	26.25	20.32	14.04	7.86	0.00	0.00	0.00	0.00
0.20	54.91	32.91	26.10	22.15	17.34	11.48	0.00	0.00	0.00	0.00
0.30	44.10	28.53	23.71	20.85	17.26	12.54	0.00	0.00	0.00	0.00
0.40	37.95	25.54	21.71	19.45	16.57	12.67	2.59	0.00	0.00	0.00
0.50	33.96	23.42	20.19	18.27	15.84	12.50	3.05	0.00	0.00	0.00
0.60	31.16	21.86	19.01	17.33	15.19	12.25	3.41	0.00	0.00	0.00
0.70	29.07	20.65	18.08	16.57	14.64	11.99	3.70	1.97	0.00	0.00
0.80	27.45	19.70	17.34	15.94	14.17	11.74	3.93	2.18	0.00	0.00
0.90	26.17	18.93	16.72	15.43	13.78	11.51	4.12	2.36	0.00	0.00
1.00	25.12	18.29	16.21	14.99	13.44	11.31	4.27	2.52	0.00	0.00
1.50	21.86	16.25	14.56	13.56	12.30	10.58	4.73	3.09	0.00	0.00
2.00	20.16	15.17	13.67	12.78	11.67	10.14	4.96	3.43	1.62	0.00

Tabelle 4: b° für $f(y) = 2(\frac{3}{2}e^{-\frac{3y}{2}}) - 1(3e^{-3y})$, $y > 0$

Abschließend vergleicht Abbildung 7.4 $W(x, b)$ anhand der beiden gewählten Kombinationen von Exponentialverteilungen. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung (7.11) für $\alpha = 0.025$ und $\theta = 0.6$ betragen $\rho_0 = 0.038$, $\rho_1 = -0.248$ und $\rho_2 = -1.65$ für das Beispiel 1 und $\rho_0 = 0.040$, $\rho_1 = -0.525$ und $\rho_2 = -3.37$ für das Beispiel 2. Die optimale Barrieren wurden anhand der Gleichungen (7.13), (7.14) sowie (7.17) und (7.18) berechnet. In dem Beispiel 1 ist die optimale Barriere $b^\circ = 10.78$, im zweiten gilt $b^\circ = 8.40$.

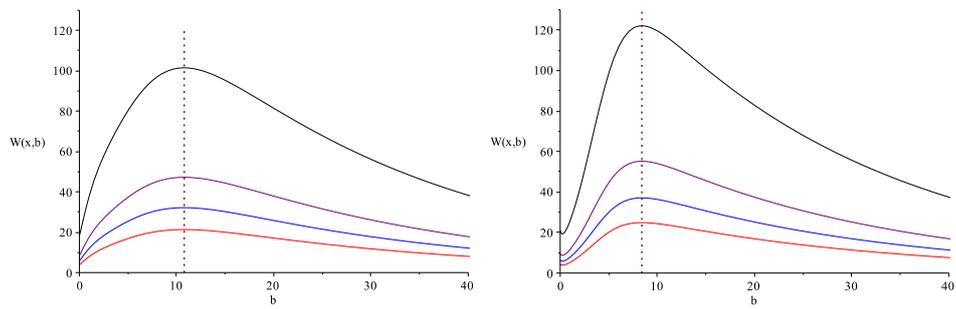


Abbildung 7.4: $W(x, b)$ als Funktion in b

Anhang A

Tabellen

θ	α									
	0.0001	0.001	0.002	0.003	0.005	0.01	0.1	0.2	0.5	1
0.10	96.57	42.91	28.55	21.39	14.02	6.99	0.00	0.00	0.00	0.00
0.20	68.29	39.39	30.47	25.35	19.20	11.89	0.00	0.00	0.00	0.00
0.30	55.42	34.87	28.47	24.70	19.97	13.82	0.78	0.00	0.00	0.00
0.40	48.05	31.59	26.49	23.47	19.63	14.47	1.55	0.00	0.00	0.00
0.50	43.26	29.22	24.90	22.33	19.06	14.60	2.21	0.24	0.00	0.00
0.60	39.89	27.46	23.64	21.38	18.49	14.53	2.77	0.63	0.00	0.00
0.70	37.39	26.09	22.63	20.59	17.98	14.39	3.23	0.98	0.00	0.00
0.80	35.46	25.01	21.82	19.93	17.53	14.22	3.62	1.29	0.00	0.00
0.90	33.92	24.13	21.15	19.38	17.14	14.05	3.94	1.58	0.00	0.00
1.00	32.67	23.41	20.58	18.92	16.80	13.89	4.21	1.83	0.00	0.00
1.10	31.64	22.80	20.11	18.53	16.51	13.74	4.45	2.06	0.00	0.00
1.20	30.77	22.28	19.70	18.19	16.26	13.61	4.65	2.27	0.00	0.00
1.30	30.02	21.84	19.35	17.89	16.04	13.48	4.82	2.46	0.07	0.00
1.40	29.38	21.45	19.05	17.63	15.84	13.37	4.97	2.63	0.19	0.00
1.50	28.82	21.12	18.78	17.41	15.66	13.27	5.10	2.79	0.31	0.00
1.60	28.33	20.82	18.54	17.21	15.51	13.18	5.22	2.93	0.43	0.00
1.70	27.89	20.55	18.33	17.03	15.37	13.10	5.32	3.06	0.54	0.00
1.80	27.50	20.32	18.14	16.87	15.25	13.03	5.42	3.18	0.65	0.00
1.90	27.16	20.11	17.98	16.72	15.14	12.96	5.50	3.29	0.75	0.00
2.00	26.84	19.92	17.82	16.59	15.04	12.90	5.58	3.39	0.84	0.00
2.10	26.56	19.75	17.69	16.48	14.94	12.85	5.65	3.48	0.93	0.00
2.20	26.30	19.59	17.56	16.37	14.86	12.80	5.71	3.57	1.02	0.00
2.30	26.07	19.45	17.45	16.27	14.78	12.75	5.77	3.65	1.10	0.00
2.40	25.85	19.32	17.34	16.18	14.71	12.71	5.83	3.73	1.18	0.00
2.50	25.66	19.20	17.25	16.10	14.65	12.67	5.88	3.80	1.26	0.00
2.60	25.48	19.09	17.16	16.02	14.59	12.64	5.93	3.87	1.33	0.00
2.70	25.31	18.99	17.08	15.96	14.54	12.60	5.97	3.93	1.40	0.00
2.80	25.15	18.89	17.00	15.89	14.49	12.57	6.01	3.99	1.47	0.00
2.90	25.01	18.80	16.93	15.83	14.44	12.55	6.05	4.05	1.53	0.00
3.00	24.87	18.72	16.87	15.78	14.40	12.52	6.09	4.10	1.60	0.00

Tabelle 5: b^* für $f(y) = e^{-y}$, $y > 0$

θ	α									
	0.0001	0.001	0.002	0.003	0.005	0.01	0.1	0.2	0.5	1
0.10	96.58	43.05	28.82	21.76	14.53	7.68	0.00	0.00	0.00	0.00
0.20	68.30	39.43	30.55	25.46	19.39	12.24	0.78	0.00	0.00	0.00
0.30	55.42	34.88	28.51	24.75	20.06	14.01	1.55	0.24	0.00	0.00
0.40	48.05	31.60	26.51	23.50	19.69	14.58	2.22	0.63	0.00	0.00
0.50	43.26	29.23	24.91	22.35	19.10	14.67	2.77	0.98	0.00	0.00
0.60	39.89	27.46	23.65	21.39	18.52	14.58	3.24	1.29	0.00	0.00
0.70	37.39	26.09	22.64	20.60	18.00	14.43	3.63	1.58	0.00	0.00
0.80	35.46	25.01	21.82	19.94	17.54	14.25	3.96	1.84	0.07	0.00
0.90	33.92	24.13	21.15	19.39	17.15	14.08	4.24	2.07	0.19	0.00
1.00	32.67	23.41	20.59	18.93	16.81	13.91	4.47	2.28	0.31	0.00
1.10	31.64	22.80	20.11	18.53	16.52	13.76	4.67	2.47	0.43	0.00
1.20	30.77	22.28	19.71	18.19	16.27	13.62	4.85	2.64	0.54	0.00
1.30	30.02	21.84	19.36	17.90	16.04	13.50	5.00	2.80	0.65	0.00
1.40	29.38	21.45	19.05	17.64	15.85	13.39	5.13	2.94	0.75	0.00
1.50	28.82	21.12	18.78	17.41	15.67	13.29	5.25	3.07	0.84	0.00
1.60	28.33	20.82	18.55	17.21	15.52	13.20	5.35	3.19	0.93	0.00
1.70	27.89	20.56	18.33	17.03	15.38	13.11	5.45	3.30	1.02	0.00
1.80	27.50	20.32	18.15	16.87	15.25	13.04	5.53	3.40	1.11	0.00
1.90	27.16	20.11	17.98	16.73	15.14	12.97	5.61	3.50	1.19	0.00
2.00	26.84	19.92	17.82	16.60	15.04	12.91	5.67	3.59	1.26	0.00
2.10	26.56	19.75	17.69	16.48	14.95	12.85	5.74	3.67	1.33	0.05
2.20	26.30	19.59	17.56	16.37	14.86	12.80	5.80	3.75	1.40	0.10
2.30	26.07	19.45	17.45	16.27	14.79	12.76	5.85	3.82	1.47	0.14
2.40	25.85	19.32	17.34	16.18	14.72	12.72	5.90	3.88	1.54	0.19
2.50	25.66	19.20	17.25	16.10	14.65	12.68	5.95	3.95	1.60	0.24
2.60	25.48	19.09	17.16	16.03	14.60	12.64	5.99	4.01	1.66	0.28
2.70	25.31	18.99	17.08	15.96	14.54	12.61	6.03	4.06	1.71	0.32
2.80	25.15	18.89	17.00	15.89	14.49	12.58	6.07	4.12	1.77	0.36
2.90	25.01	18.81	16.93	15.83	14.45	12.55	6.11	4.17	1.82	0.40
3.00	24.87	18.72	16.87	15.78	14.40	12.53	6.15	4.22	1.87	0.44

Tabelle 6: b° für $f(y) = e^{-y}$, $y > 0$

Literaturverzeichnis

- [1] **David C.M. DICKSON:**
Insurance Risk and Ruin
Cambridge University Press, 2005
- [2] **Hans BÜHLMANN:**
Mathematical Methods in Risk Theory
Springer-Verlag, Berlin 1970
- [3] **Hans U. GERBER:**
An Introduction to Mathematical Risk Theory
S.S.Huebner Foundation, Philadelphia 1979
- [4] **Hans U. GERBER/ Elias S.W. SHIU:**
On optimal dividend strategy in the compound poisson model
North American Actuarial Journal. 10(2), 2006: 76-93.
- [5] **Bruno DE FINETTI:**
Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio.
Transactions of the XVth International Congress of Actuaries 2, 1957:
433-443.
- [6] **Hans U. GERBER/ Elias S.W. SHIU/ Nathaniel SMITH:**
Maximizing Dividends without Bankruptcy
ASTIN Bulletin 36(1), 2006: 5-23.
- [7] **David C.M. DICKSON/ Howard R. WATERS:**
Some optimal dividends problems
ASTIN Bulletin 34, 2004: 49-74
- [8] **Richard L. BURDEN/ J. Douglas FAIRES/ Albert C. REYNOLDS:**
Numerical Analysis, Second Edition
Prindle, Weber and Schmidt, Boston, MA. 1981
- [9] **Friedrich HUBALEK:**
Risiko und Ruintheorie
Lecture Notes, TU Wien, 2012

- [10] **Hans U. GERBER**
Entscheidungskriterien für den zusammengesetzten Poisson-Prozess
MSV 69, 1969: 185-228